Matemática Discreta: Aula 2

Permutações

Na aula 1, vimos o problema da contagem de todas as possibilidades para os últimos quatro dígitos de um número telefônico sem repetições (Exemplo 3). Neste problema, o número 1259 não é o mesmo que o número 2951, pois a ordem dos dígitos é importante. Um arranjo ordenado de objetos é chamado de **permutação**. A determinação da quantidade de números de quatro dígitos sem dígitos repetidos pode ser considerada a contagem do número de permutações ou arranjos: são 4 objetos distintos escolhidos de um conjunto de 10 objetos distintos (os dígitos). A resposta encontrada pelo Princípio da Multiplicação foi 10.9.8.7. Em geral, o número de permutações de r objetos distintos escolhidos de n objetos distintos é denotada por $P(n, r)$. Portanto, a solução do problema dos quatro dígitos sem repetição pode ser expressada como $P(10, 4)$.

Uma fórmula para $P(n, r)$ pode ser escrita usando a função fatorial. Para um inteiro positivo n, fatorial de n é definido como $n(n-1).(n-2).\dots.1$ e denotado por $n!$; além disso, $0!$ é definido como tendo valor 1.
Em geral, $P(n, r)$ é dado pela fórmula

$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!} \text{ para } 0 \leq r \leq n$$

Usando a função fatorial,

$$P(10,4) = \frac{10!}{(10-4)!} = \frac{10.9.8.7.\cancel{6!}}{\cancel{6!}} = 5.040$$

Exemplo 1: O valor de $P(7,3)$ é

$$\frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7.6.5.\cancel{4!}}{\cancel{4!}} = 7.6.5 = 210$$

Exemplo 2: Três casos particulares podem ocorrer ao computarmos $P(n, r)$, que são as duas "condições de fronteira" $P(n, 0)$ e $P(n, n)$ e também $P(n, 1)$. De acordo com a fórmula

$$P(n,0) = \frac{n!}{(n-0)!} = \frac{n!}{n!} = 1$$

Isto pode ser interpretado como dizer que existe um único arranjo ordenado de zero objeto - o conjunto vazio.

$$P(n,1) = \frac{n!}{(n-1)!} = \frac{n.\cancel{(n-1)!}}{\cancel{(n-1)!}} = n$$

Esta fórmula reflete o fato de que existem n arranjos ordenados de um objeto. (Como cada arranjo consiste em apenas um objeto, basta contar quantas formas existem de se escolher um objeto.)

$$P(n,n) = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n!$$

Esta fórmula mostra que existem $n!$ arranjos ordenados de n objetos distintos. (O que apenas reflete o Princípio da Multiplicação - n escolhas para o primeiro objeto, $n-1$ para o segundo, e assim por diante, com uma única escolha para o n-ésimo objeto.)
Na fórmula de $P(n,r)$, à medida que r cresce, $n-r$, e, portanto, $(n-r)!$, diminui; logo $P(n,r)$ cresce. Desta forma, os valores de $P(n,r)$ cresceram de n a $n!$ para $1 \leq r \leq n$.

Exemplo 3: O número de permutações de três objetos, digamos a, b e c, é dado por $P(3,3) = \frac{3!}{(3-3)!} = \frac{3!}{0!} = 3! = 3.2.1 = 6$. São elas

$$abc, acb, bac, bca, cab, cba$$

Exemplo 4: Quantas palavras de três letras (não necessariamente com sentido) podem ser formadas com as letras da palavra "compilar", se não pudermos repetir letras? Neste caso, desejamos saber o número de permutações de três objetos distintos tomados dentre oito objetos. A resposta é $P(8,3) = \frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8.7.6.\cancel{5}!}{\cancel{5}!} = 8.7.6 = 336$.

Perceba que poderíamos ter resolvido o Exemplo 4, usando apenas o Princípio da Multiplicação - existem oito possibilidades para a primeira letra, sete para a segunda e seis para a terceira, de forma que a resposta é $8.7.6 = 336$. $P(n,r)$ simplesmente nos fornece uma nova maneira de pensar no problema, bem como uma notação mais compacta.

Exercícios:

2.1 De quantas maneiras podem ser escolhidos um presidente e um vice-presidente dentre um grupo de 20 pessoas?

2.2 De quantos modos seis pessoas podem sentar-se em uma sala com seis cadeiras?

Exemplo 5: Uma biblioteca tem quatro livros sobre sistemas operacionais, sete sobre programação e três sobre estrutura de dados. Vamos ver de quantas maneiras esses livros podem ser arrumados em uma prateleira, considerando que todos os livros de cada assunto precisam estar juntos. Podemos pensar neste problema como uma sequência de subtarefas. Primeiro consideremos a subtarefa de arrumar os três assuntos. Existem 3! maneiras de fazer isto, isto é, 3! maneiras de ordenar os assuntos dos livros na prateleira. As etapas seguintes são arranjar os livros sobre sistemas operacionais (4! maneiras), arrumar os livros sobre programação (7! maneiras) e, então, arrumar os livros sobre estrutura de dados (3! maneiras). Portanto, pelo Princípio da Multiplicação, o número final de arranjos possíveis de todos os livros é $(3!)(4!)(7!)(3!) = 4.354.560$.

Combinações

Às vezes, desejamos selecionar r objetos de um conjunto de n objetos, mas não desejamos relevar a ordem na qual eles são arranjados. Neste caso, estamos contando o número de combinações de r objetos distintos escolhidos dentre n objetos distintos, denotadas por $C(n, r)$. Para cada combinação dessas, existem $r!$ maneiras de permutar seus r objetos. Pelo Princípio da Multiplicação, o número de objetos escolhidos dentre n objetos é o produto do número de maneiras de selecionar esses objetos, $C(n, r)$ multiplicado pelo número de maneiras de arranjar esses objetos escolhidos, $r!$ Portanto,

$$C(n, r).r! = P(n, r)$$

ou

$$C(n, r) = \frac{P(n, r)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \text{ para } 0 \leq r \leq n$$

Exemplo 6: O valor de $C(7,3)$ é
$$\frac{7!}{3!(7-3)!} = \frac{7!}{3!4!} = \frac{7.6.5.\cancel{4!}}{3!\cancel{4!}} = \frac{7.\cancel{6}.5}{\cancel{3.2}.1} = 7.5 = 35$$
Do Exemplo 1, o valor de $P(7,3)$ é 210 e
$C(7,3).(3!) = 35.6 = 210 = P(7,3)$.
Exemplo 7: Os casos especiais para $C(n,r)$ são $C(n,0)$, $C(n,1)$ e $C(n,n)$. A fórmula para $C(n,0)$,
$$C(n,0) = \frac{n!}{0!(n-0)!} = 1$$
reflete o fato de que existe apenas uma maneira de escolher zero objeto dentre n - o conjunto vazio.
$$C(n,1) = \frac{n!}{1!(n-1)!} = n$$
Aqui a fórmula mostra que existem n maneiras de escolher 1 dentre n objetos.
$$C(n,n) = \frac{n!}{n!(n-n)!} = 1$$
Aqui vemos que existe uma maneira de se escolher n dentre n objetos e que esta escolha é composta por todos os objetos.

Na fórmula de $C(n, r)$, à medida que r aumenta, $r!$ também aumenta, o que tende a fazer $C(n, r)$ menor, mas $(n - r)!$ diminui, o que tende a tornar $C(n, r)$ maior. Para pequenos valores de r, o aumento de $r!$ não é tão marcante quanto a diminuição de $(n - r)!$ e, desta forma, $C(n, r)$ aumenta de 1 para n e para valores maiores. Em algum ponto, no entanto, o acréscimo de $r!$ supera o decréscimo de $(n - r)!$ e os valores de $C(n, r)$ diminuem até voltar a 1 quando $r = n$.

Exemplo 8: Quantas mãos de pôquer com cinco cartas podem ser sorteadas de um baralho de 52 cartas?

Neste caso a ordem não interessa; $C(52, 5) = \dfrac{52!}{5!47!} = 2.598.960$.

Ao contrário dos problemas anteriores, a resposta ao Exemplo 8 não pode ser facilmente obtida pela aplicação do Princípio da Multiplicação. Portanto, $C(n, r)$ nos fornece um modo de resolver novos problemas.

Exercício:

2.3 De quantas maneiras podemos escolher um comitê de três pessoas dentre um grupo de 12?

Lembre-se de que a diferença entre permutações e combinações reside no fato de que os objetos são apenas selecionados ou selecionados e ordenados. Se a ordem for relevante, o problema envolve permutações; se a ordem não importar, o problema envolve combinações. Por exemplo, o Exercício 2.1 é um problema de permutação - duas pessoas serão selecionadas e ordenadas - a primeira será o presidente e a segunda o vice-presidente -, enquanto que o Exercício 2.3 é um problema de combinação - três pessoas serão escolhidas, mas não serão ordenadas. Um bom ponto de partida para os problemas de contagem, então, é determinar se a ordem é importante ou não.
Na solução de problemas de contagem, $C(n, r)$ pode ser usada juntamente com o Princípio da Multiplicação ou o Princípio da Adição.

Exemplo 9: Um comitê de oito estudantes deve ser selecionado de uma turma de 19 calouros e 34 veteranos.
a. De quantas maneiras podem ser selecionados três calouros e cinco veteranos?
b. De quantas maneiras podem ser selecionados comitês com exatamente um calouro?
c. De quantas maneiras podem ser selecionados comitês com no máximo um calouro?
d. De quantas maneiras podem ser selecionados comitês com pelo menos um calouro?
Como a ordenação das escolhas individuais não é imporante, este problema envolve combinações.
Para o item **a.**, temos uma sequência de duas etapas, selecionar calouros e selecionar veteranos. O Princípio da Multiplicação pode ser usado. (Pensar em uma sequência de subtarefas pode parecer implicar ordenação, mas isto apenas define os níveis da árvore de decisão, a base para o Princípio da Multiplicação. Na verdade, não há ordenação para os estudantes.)

Como existem $C(19,3)$ maneiras de escolher calouros e $C(34,5)$ formas de escolher veteranos, a resposta é

$$C(19,3).C(34,5) = \frac{19!}{3!16!}.\frac{34!}{5!29!} = (969).(278.256)$$

Para o item **b.**, temos novamente uma sequência de subtarefas: selecionar um único calouro e então selecionar o resto do comitê dentre os veteranos. Existem $C(19,1)$ maneiras de selecionar o único calouro e $C(34,7)$ modos de selecionar os sete outros membros dentre os veteranos. Pelo Princípio da Multiplicação, a resposta é

$$C(19,1).C(34,7) = \frac{19!}{1!(19-1)!}.\frac{34!}{7!(34-7)!} = 19(5.379.616)$$

Para o item **c.**, obtemos no máximo um calouro escolhendo exatamente um calouro ou escolhendo 0 calouro. Como esses eventos são disjuntos, usaremos o Princípio da Adição. O número de maneiras de escolher exatamente um calouro é a resposta do item **b.**. O número de escolher 0 calouro é o mesmo do número de maneiras de selecionar todos os oito membros do comitê dentre os 34 veteranos, $C(34,8)$. Portanto,a resposta é

$$C(19,1).C(34,7) + C(34,8) = \text{algum número grande}$$

Podemos abordar o item **d.** de diversas formas. Uma forma é usar o Princípio da Adição para as seguintes possibilidades disjuntas: exatamente um calouro, exatamente dois calouros, e assim por diante até oito calouros. Podemos computar cada um desses números, e então somá-los. No entanto é mais simples ver de quantas maneiras o comitê pode ser selecionado de um total de 53 pessoas, e então eliminar (subtrair) o número de comitês com 0 calouro (apenas veteranos). Desta forma, a resposta é

$$C(53, 8) - C(34, 8)$$

Bibliografia

[1] GERSTING, J. L. *Fundamentos Matemáticos para a Ciência da Computação*, LTC, 5a. ed., Rio de Janeiro, 2004.
[2] SCHEINERMAN, E. R. *Matemática discreta. Uma introdução*, Thomson Pioneira, São Paulo, 2003.

Araraquara, 12 de agosto de 2021.