1. Introdução à Pesquisa Operacional

Origem e definição de pesquisa operacional
Objetivos do ensino de Pesquisa Operacional
Construção de modelos matemáticos

**Prof. Dr. João Carlos Lopes Fernandes**

E-mail: joao.fernandes1@docente.unip.br

# Origem e definição de pesquisa operacional

- A Pesquisa Operacional é uma ciência aplicada voltada para a resolução de problemas reais. Tendo como foco a tomada de decisões, aplica conceitos e métodos de outras áreas científicas para concepção, planejamento ou operação de sistemas para atingir seus objetivos.
- Através de desenvolvimentos de base quantitativa, a Pesquisa Operacional visa também introduzir elementos de objetividade e racionalidade nos processos de tomada de decisão, sem descuidar no entanto dos elementos subjetivos e de enquadramento organizacional que caracterizam os problemas.

# Como surgiu a pesquisa operacional

- A Pesquisa Operacional surgiu durante a Segunda Guerra Mundial, quando os Aliados se viram confrontados com problemas (de natureza logística, tática e de estratégia militar) de grande dimensão e complexidade. Para apoiar os comandos operacionais na resolução desses problemas, foram então criados grupos multidisciplinares de matemáticos, físicos e engenheiros e cientistas sociais. Eles não fizeram mais do que aplicar o método científico, que tão bem conheciam, aos problemas que lhes foram sendo colocados.

# O resultado

- Desenvolveram então a idéia de criar modelos matemáticos, apoiados em dados e fatos, que lhes permitissem perceber os problemas em estudo e simular e avaliar o resultado hipotético de estratégias ou decisões alternativas.
- O sucesso e credibilidade ganhos durante a guerra foram tão grandes que, terminado o conflito, esses grupos de cientistas e a sua nova metodologia de abordagem dos problemas se transferiram para as empresas que, com o "boom" econômico que se seguiu, se viram também confrontadas com problemas de decisão de grande complexidade.

# Objetivos do ensino de Pesquisa Operacional

- A Pesquisa Operacional conhecida simplesmente por “PO” é uma importante ferramenta de tomada de decisão devido a sua forma racional e eficiente de proceder. Sua utilização substitui as decisões que geralmente se dá de forma empírica, intuitiva, baseada apenas na experiência.
- Ele permite solucionar problemas reais, tomar decisões embasadas em fatos, dados e correlações quantitativas, conceber, planejar, analisar, implementar, operar e controlar sistemas por meio da tecnologia bem como de métodos de outras áreas do conhecimento, minimizar custos e maximizar o lucro e encontrar a melhor solução para um problema.

# Construção de modelos matemáticos

- Um modelo é uma representação de um sistema real, que pode já existir ou ser um projeto aguardando execução. No primeiro caso, o modelo pretende reproduzir o funcionamento do sistema, de modo a aumentar sua produtividade. No segundo caso, o modelo é utilizado para definir a estrutura ideal do sistema

# Três conjuntos

- Em um modelo matemático, são incluídos três conjuntos principais de elementos: (1) variáveis de decisão e parâmetros: que são as incógnitas a serem determinadas pela solução do modelo e os valores fixos no problema, respectivamente; (2) restrições: que levam em conta as limitações físicas do sistema e limitam as variáveis de decisão a seus valores possíveis (ou viáveis); (3) função objetivo: que é a função matemática que define a qualidade da solução em função das variáveis de decisão

# A complexidade

- O tipo e a complexidade do modelo matemático de PO são os responsáveis por determinar o método de solução. Uma das técnicas adotadas é a programação linear, cujas funções objetivo e restrições são lineares. Outras técnicas são: programação inteira, programação dinâmica, otimização em redes, programação não linear, programação multiobjetivo, teoria de jogos, entre outras
- Uma peculiaridade das técnicas de PO é que a maioria delas obtêm soluções através de algoritmos, em alguns casos há, inclusive, a necessidade de adotar heurísticas a fim de obter soluções em tempo viável

Prof. Dr. João Carlos Lopes Fernandes
E-mail: joao.fernandes1@docente.unip.br

# Otimização

- Os modelos de PO são elaborados para "otimizar" um critério objetivo específico sujeito a um conjunto de restrições.
- A qualidade da solução resultante depende de quanto o modelo representa o sistema real.
- Uma solução é viável se satisfazer todas as restrições do modelo.
- Uma solução é ótima se, além de ser viável, resultar no melhor valor (máximo ou mínimo) para o modelo especificado.

**Prof. Dr. João Carlos Lopes Fernandes**

E-mail: joao.fernandes1@docente.unip.br

# Fases para implementação da PO: Definição do Problema

- Define o escopo do problema sob investigação. A meta é identificar três elementos primordiais: descrição das alternativas de decisão, determinação do objetivo do estudo e especificação das limitações do sistema

**Prof. Dr. João Carlos Lopes Fernandes**
E-mail: joao.fernandes1@docente.unip.br

# Fases para implementação da PO: Construção do Modelo

- A construção de um modelo começa pela adoção de uma notação apropriada para as principais quantidades presentes na definição do problema. É comum denotar por x1, x2, ... , xn as (por hipótese) n quantidades manipuladas do problema. Dá-se o nome de variáveis de decisão a estas quantidades
- O passo seguinte é redefinir matematicamente o problema por meio de fórmulas, relações matemáticas ou proposições. Uma fórmula denominada de função objetivo e utilizada para descrever como o objetivo do problema e influenciado pelos valores das variáveis de decisão.

# Modelos Matemáticos

- Relações matemáticas envolvendo os símbolos "=", “<", “>" e proposições gerais são empregadas para descrever eventuais restrições para a escolha de valores para as variáveis de decisão. Os modelos matemáticos normalmente adotados para problemas de planejamento são prescritivos.
- A prescrição quase sempre é otimizar a função objetivo sujeito as restrições, sendo que otimizar pode significar minimizar ou maximizar, isto é, determinar os valores das variáveis de decisão que conduzem ao menor ou maior valor para a função-objetivo

# Modelo Sintético

- Um modelo sintético, prescritivo, para o problema de decisão seria:

otimizar (função-objetivo)

sujeito a (restrições)

**Prof. Dr. João Carlos Lopes Fernandes**
E-mail: joao.fernandes1@docente.unip.br

# Variáveis de decisão

- Representando as variáveis de decisão por meio do vetor n-dimensional x=(x1, x2, ..., xn), é possível expressar tanto a função-objetivo como as restrições em termos de x. Sejam f : Rn → R e gi : Rn → R, i = 1, 2,..., p, funções de n variáveis, a primeira associada à função-objetivo e as p seguintes às restrições do modelo. Denotando por “~" qualquer das relações "=", “<", “>", obtém-se o modelo prescritivo na forma simbólica.

**Prof. Dr. João Carlos Lopes Fernandes**
E-mail: joao.fernandes1@docente.unip.br

# Modelo prescritivo na forma simbólica.

− otimizar f(x)
− sujeito a: g1(x)~1 b1;
g2(x)~2 b2; (1.1)
...
gp(x)~p bp;

no qual bi, i = 1, 2, ..., p são valores constantes. É comum referir-se a (1.1) como modelo ou problema de otimização associado ao problema de decisão.

# Vetores

- Vetores x = (x1, x2,..., xn) de variáveis de decisão representam possíveis soluções para o problema de otimização (1.1)
- Uma solução é viável se satisfaz todas as restrições do problema. Uma solução é ótima se produz o menor (maior) valor para a função-objetivo.
- Um método é exato quando é capaz de gerar uma solução ótima x* = (x*1, x*2,..., x*n) para o problema (1.1)

# Modelo Matemático

- Este etapa do processo envolve verificar se o modelo adotado e a solução obtida por meio dele são compatíveis com a realidade do problema. Se todas as características relevantes do problema tiverem sido levadas em conta na modelagem, a solução obtida será implementável. Caso contrário, um novo ciclo de modelagem e obtenção de solução terá de ser desenvolvido. Um método comum para verificar a validade de um modelo é comparar seus resultados com dados históricos Pode-se também usar a simulação como ferramenta independente para verificar os resultados do modelo matemático

# Exemplo 1:

- Qual deveria ser a largura e altura de um retângulo de área máxima construído com um fio de comprimento L?

Expressando algebricamente essas restrições temos que:

$$2(w+h)=L$$

$$w>=0 \text{ e } h>=0$$

Considerando agora a função objetivo, observamos que nosso objetivo é maximizar a área (z) do retângulo

# Solução Matemática

- Então, nosso modelo pode ser definido como:

Maximizar z=wh

Sujeito a

2(w+h)=L

w,h>=0

# Exemplo 2

- Uma agroindústria, deve produzir um tipo de ração para determinado animal.
- A ração é produzida pela mistura de farinhas de três ingredientes básicos: osso, soja e resto de peixe
- Cada ingrediente possui diferentes quantidades de dois nutrientes: proteína e cálcio
- O nutricionista especifica as necessidades mínimas desses nutrientes em 1kg de ração: 30% de proteína e 50% de cálcio (pelo menos)

# Objetivo

- O objetivo é determinar em que quantidades os ingredientes devem ser misturados de modo a produzir uma ração que satisfaça às restrições nutricionais com o mínimo custo.

**Prof. Dr. João Carlos Lopes Fernandes**
E-mail: joao.fernandes1@docente.unip.br

| Nutrientes | Ingredientes | | | |
|---|---|---|---|---|
| | Osso | Soja | Peixe | Ração |
| Proteína | 0,2 | 0,5 | 0,4 | 0,3 |
| Cálcio | 0,6 | 0,4 | 0,4 | 0,5 |
| Custos (R$/kg) | 0,56 | 0,81 | 0,46 | |

# Resolução

- Defina a variável de decisão xj como a quantidade (em kg) do ingrediente j que deve ser usada em uma unidade (1kg) de ração, j=1 (osso), 2 (soja), 3 (peixe). Assim, o custo da mistura será dado por:

$$f(x1, x2, x3)=0{,}56x1+0{,}81x2+0{,}46x3$$

e as restrição são dadas por:

$$0{,}2x1+0{,}5x2+0{,}4x3>=0{,}3$$

$$0{,}6x1+0{,}4x2+0{,}4x3>=0{,}5$$

$$x1+x2+x3=1$$

$$x1>=0,\ x2>=0,\ x3>=0$$

**Prof. Dr. João Carlos Lopes Fernandes**
E-mail: joao.fernandes1@docente.unip.br

# Modelo matemático resultante

- O modelo matemático resultante é, então, definido como:

Minimizar $f(x1, x2, x3)=0,56x1+0,81x2+0,46x3$

Sujeito a

$0,2x1+0,5x2+0,4x3>=0,3$

$0,6x1+0,4x2+0,4x3>=0,5$

$x1+x2+x3=1$

$x1>=0, x2>=0, x3>=0$