

Lista 3 - Matemática Discreta

Salvador

9 de setembro de 2021

Permutações e Combinações com Repetições

Exercício 1. Quantas permutações distintas da palavra ERRO existem? (Lembre-se que os Rs não podem ser distinguidos um do outro.)

Os Exercícios 2 a 5 referem-se à seguinte situação: do pessoal de uma companhia, sete trabalham no projeto, 14 na produção, quatro nos testes, cinco em vendas, dois na contabilidade e três em *marketing*. Um comitê de seis pessoas deve ser formado para uma reunião com o supervisor.

Exercício 2. De quantas maneiras podemos formar este comitê, se tiver que haver um membro de cada departamento?

Exercício 3. De quantas maneiras podemos formar o comitê, se tiver que haver exatamente dois membros do departamento de produção?

Exercício 4. De quantas maneiras o comitê pode ser formado, se o departamento de contabilidade não for representado e o de *marketing* tiver exatamente um representante?

Exercício 5. De quantas maneiras o comitê pode ser formado se a produção tiver que ter pelo menos dois representantes?

Nos Exercícios 6 a 9, um conjunto de quatro fichas é escolhido de uma caixa contendo cinco fichas vermelhas e sete fichas pretas.

Exercício 6. Encontre o número de conjuntos de quatro fichas.

Exercício 7. Encontre o número de conjuntos nos quais duas fichas são vermelhas e duas são pretas.

Exercício 8. Encontre o número de conjuntos compostos por todas as fichas vermelhas ou todas as fichas pretas.

Exercício 9. Encontre o número de conjuntos com três ou quatro fichas pretas.

Nos Exercícios 10 a 13, um comitê do congresso com três integrantes precisa ser selecionado dentre cinco democratas, três republicanos e quatro independentes.

Exercício 10. De quantas maneiras o comitê pode ser escolhido?

Exercício 11. De quantas maneiras o comitê pode ser escolhido, se precisar incluir pelo menos um independente?

Exercício 12. De quantas maneiras podem ser escolhidos comitês que não incluam democratas e republicanos simultaneamente?

Exercício 13. De quantas maneiras o comitê pode ser escolhido, se precisar ter pelo menos um democrata e um republicano?

Exercício 14. a. Quantas permutações distintas existem com as letras da palavra HAWAIIAN?
b. Quantas dessas começam por H?

Princípio da Inclusão e Exclusão

Exercício 1. Em um grupo de 42 turistas, todos falam inglês ou francês; existem 35 pessoas que falam inglês e 18 pessoas que falam francês. Quantas falam inglês e francês?

Exercício 2. Todos os convidados de uma festa bebem café ou chá; 13 convidados bebem café, 10 bebem chá e 4 bebem café e chá. Quantas pessoas têm neste grupo?

Exercício 3. O controle de qualidade em uma fábrica introduziu 42 peças com defeito de pintura, na embalagem ou na parte eletrônica na linha de montagem. Dessas peças, 28 tinham defeito de pintura, 17 tinham defeito na embalagem, 11 na parte eletrônica, 7 tinham defeito na embalagem e na parte eletrônica e 3 tinham defeitos na pintura e na parte eletrônica e 6 com defeito na pintura e na embalagem. Alguma peça tinha os três tipos de defeito?

Exercício 4. Em um grupo de 24 pessoas que gostam de rock, country e música clássica, 14 gostam de rock, 12 gostam de música clássica, 11 gostam de rock e country, 9 gostam de rock e música clássica, 13 gostam de country e música clássica e 8 gostam de rock, country e música clássica. Quantos gostam de country?

Exercício 5. Onze produtos diferentes para higiene bucal têm as seguintes estratégias: 10 veiculam que oferecem um hálito puro, oito garantem que protegem a gengiva, sete anunciam que reduzem a placa bacteriana, seis prometem um hálito puro e a redução da placa, cinco dizem prevenir a gengiva e oferecer um hálito puro e cinco dizem prevenir a gengiva e reduzir a placa.

(a) Quantos produtos veiculam todas as três vantagens?

(b) Quantos produtos veiculam um hálito puro, mas não veiculam prevenir a formação da placa bacteriana?

Exercício 6. Dentre 214 clientes de um banco com contas-correntes, caderneta de poupança ou aplicações financeiras, 189 têm contas-correntes, 73 têm cadernetas de poupanças regulares, 114 têm aplicações no mercado financeiro e 69 têm contas-correntes e cadernetas de poupança. Não é possível ter caderneta de poupança e investir no mercado financeiro.

- (a) Quantos clientes têm, ao mesmo tempo, conta-corrente e aplicações no mercado financeiro?
 (b) Quantos clientes têm apenas conta-corrente?

Exercício 7. Uma pesquisa dentre 150 estudantes revelou que 83 são proprietários de carros, 97 possuem bicicletas, 28 têm motocicletas, 53 são donos de carros e bicicletas, 14 têm carros e motocicletas, sete possuem bicicletas e motocicletas, e dois têm todos os três.

- (a) Quantos estudantes possuem apenas bicicletas?
 (b) Quantos estudantes não têm qualquer dos três?

Princípio da casa dos pombos

Exercício 1. Quantas pessoas precisam estar em um grupo para se garantir que duas pessoas tenham o mesmo aniversário (não se esqueça de ignorar o ano)?

Exercício 2. Em um grupo de 25 pessoas, podemos afirmar que existem pelo menos três que nasceram no mesmo mês?

Exercício 3. Prove que se quatro números são escolhidos do conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, pelo menos um par precisa somar 7. (*Dica:* Encontre todos os pares de números do conjunto que somem 7.)

Exercício 4. Quantos números precisam ser escolhidos do conjunto $\{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$ a fim de se garantir que pelo menos um par soma 22? (Veja a dica para o Exercício 3.)

Gabarito:

Permutações e Combinações com Repetições

1. $\frac{4!}{2!} = 12$
2. $C(7, 1).C(14, 1).C(4, 1).C(5, 1).C(2, 1).C(3, 1) = 11.760$
3. $C(14, 2).C(21, 4) = 544.635$
4. $C(3, 1).C(30, 5) = 427.518$
5. $\underbrace{C(35, 6)}_{\text{todos os comitês}} - \underbrace{(C(21, 6))}_{\text{nenhum da produção}} + \underbrace{C(14, 1).C(21, 5)}_{\text{um da produção}}$
6. $C(12, 4)$
7. $C(5, 2).C(7, 2) = 420$
8. $C(5, 4) + C(7, 4) = 40$
9. $C(7, 3).C(5, 1) + C(7, 4) = 210$
10. $C(12, 3) = 220$
11. $C(12, 3) - C(8, 3) = 164$
12. $\underbrace{C(7, 3)}_{\text{nenhum democrata}} + \underbrace{C(9, 3)}_{\text{nenhum republicano}} - \underbrace{C(4, 3)}_{\text{todos os independentes, a fim de não contar duas vezes}} = 115$

outra forma:

$$C(5, 1).C(3, 1).C(4, 1) + C(5, 2).C(3, 1) + C(5, 1)C(3, 2)$$

$$13. C(12, 3) - \underbrace{C(7, 3)}_{\text{nenhum democrata}} - \underbrace{C(9, 3)}_{\text{nenhum republicano}} - \underbrace{C(4, 3)}_{\text{somente independentes}} = 97$$

$$14. \text{ a. } \frac{8!}{3!2!} = 3.360 \quad \text{ b. } \frac{7!}{3!2!} = 420$$

Princípio da Inclusão e Exclusão

1. 11
2. 19
3. 2
4. 23
5. (a) 2 (b) 4
6. (a) 93 (b) 27
7. (a) 39 (b) 14

Princípio da casa dos pombos

1. 366
2. Sim.
3. Existem três pares - 1 e 6, 2 e 5, 3 e 4 - que somam 7. Cada elemento no conjunto pertence a um desses pares. Aplique o Princípio da Casa do Pombo, onde os pares são as casas, e os números são os pombos.
4. 6