

# PESQUISA OPERACIONAL

## MODELOS DE PROGRAMAÇÃO LINEAR

# O PROCESSO DA PESQUISA OPERACIONAL

# Processo em 5 Etapas

## 1. Definição do Problema

- O que se deseja atingir? Quais são as restrições?

## 2. Formulação do Modelo Quantitativo

- Definir equações e inequações

## 3. Resolução do Modelo

- Valores relevantes: **variáveis de decisão**

## 4. Validação e Consideração do Imponderável

- Deve ser aplicável à realidade

## 5. Implementação da Solução

- Transição suave

# O QUE É E PARA QUE SERVER UM MODELO?

# Tipos de Problema

- Estratégicos
  - Devo construir uma nova fábrica?
  - Devo construir um novo centro de distribuição?
- Táticos
  - Devo modificar minha frota?
  - Deve mudar a alocação da produção?
- Operacionais
  - Qual o mix de produtos com as máquinas atuais?
  - Como ordenar melhor minha linha de produção?



# Definição do Problema

- Exemplo: problema de operação
  - Maximizar ou Minimizar
  - Recursos finitos / limitados
  - Múltiplas maneiras de executar/organizar



**Qual o  
Melhor?**

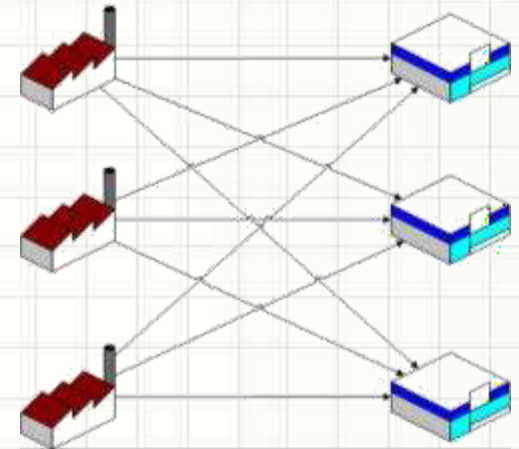
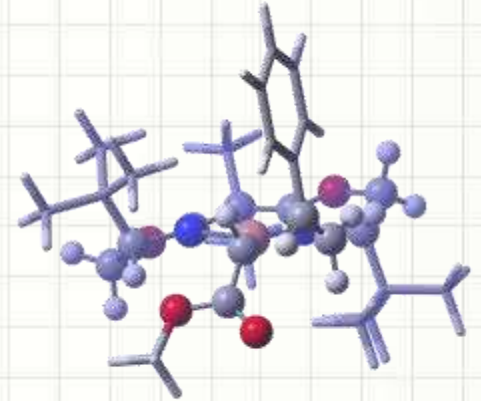
# Para Quê um Modelo?

- Problema na forma “real”: muito complexo
  - Informações desnecessárias/pouco relevantes
  - Multiplicidade de alternativas de solução
  - Difícil tratar de maneira sistemática
    - Caso a caso
- Como resolver isso?
  - Criando um modelo...
- Modelo
  - Simplificação da realidade
  - Mantendo aspectos relevantes



# Conceito de Modelo

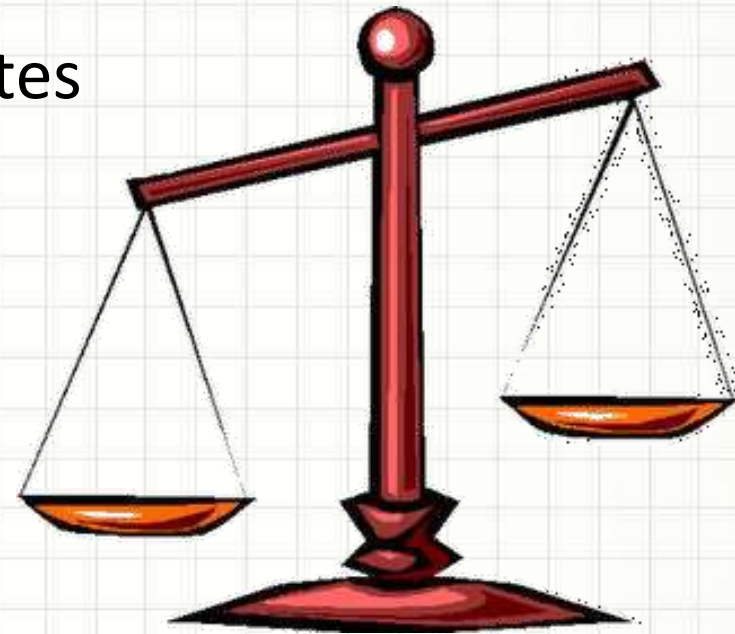
- Modelo: abstração da realidade
  - Conceitual, físico ou matemático
  - Reproduzir para análise
- Importância
  - Complexidade do problema
  - Dimensão do problema
  - Multiplicidade de interações





# Conceito de Modelo

- Modelo deve ser realista
  - Adequado à aplicação
    - Fundamento Teórico → causa e efeito (estado da arte)
    - Variáveis explicativas relevantes
    - Nível de detalhe
  - Produz resultados consistentes
    - Disponibilidade de dados
    - Calibrar
    - Validar



# **TIPOS DE MODELAGEM PARA SOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO**

# Tipos de Modelagem

- Modelos de Programação Linear (LP)  $3.n \leq 60$ 
  - F.O. e restrições são LINEARES
    - Todas as variáveis grau igual a 1
- Modelos de Programação Linear Inteira
  - Como os Modelos LP, mas todas as variáveis devem possuir valor inteiro
- Modelos de Programação Linear Inteira Mista
  - Como os Modelos LP, mas algumas variáveis devem possuir valor inteiro
- Modelos de Programação Não Linear  $3.n^2 \leq 60$ 
  - Há nas expressões variável de grau diferente de 1

# **CRIANDO UM MODELO MATEMÁTICO DE PROGRAMAÇÃO LINEAR**

# Definição do Problema

- Antes de criar qualquer modelo matemático
  - Precisamos compreender o problema
    - O que pretendemos atingir
    - E quais são os recursos para isso



# Definição do Problema - Exemplo

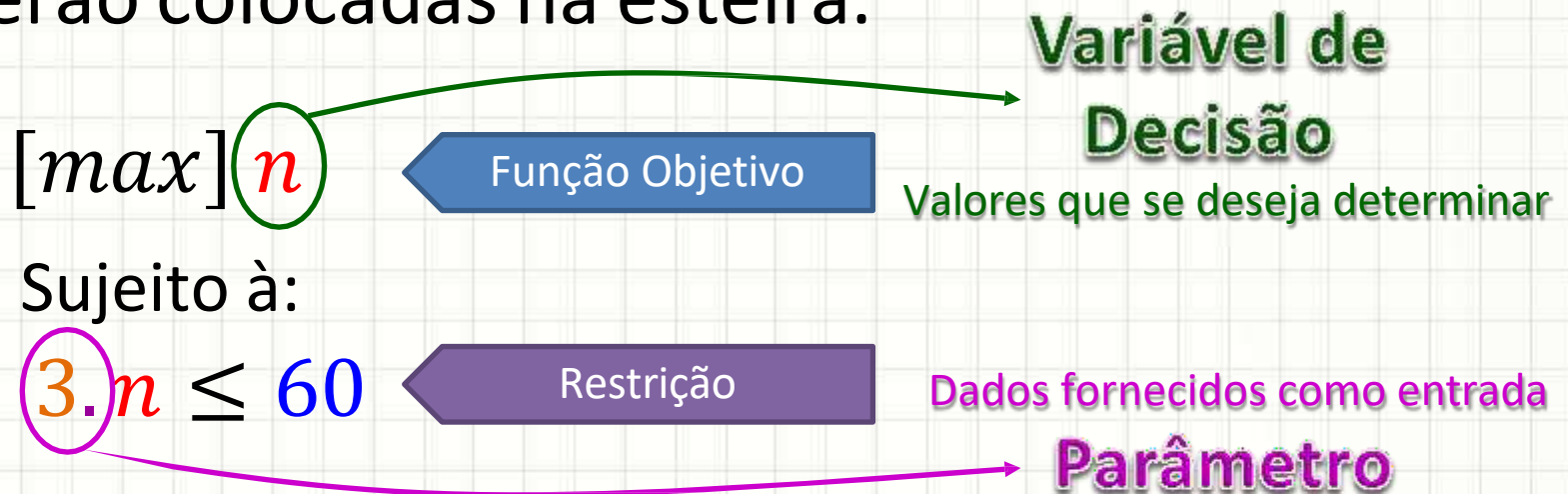
- A esteira de uma seção de uma fábrica possui 60 metros. Sabendo que cada peça ocupa 3 metros, maximize o número de peças que serão colocadas na esteira.
- O que queremos?
  - Maximizar o **número de peças**.
  - Vamos chamar isso de **n**
- Há alguma limitação?
  - Sim, o tamanho da esteira: **60m**
- Quanto ocupa cada peça?
  - Cada peça ocupa **3m**

# Criação do Modelo Matemático

- Maximizar o número de peças, **n**.  $[max] \text{ } n$
- Esteira limitada em **60m**.  $CTP \leq 60$
- **CTP** = comprimento total das peças  $3.n \leq 60$ 
  - Quanto vale?
- Cada peça ocupa **3m**
  - Quanto ocupa **1** peça?  $3.1 = 3$
  - Quanto ocupa **2** peças?  $3.2 = 6$
  - Quanto ocupa **3** peças?  $3.3 = 9$
  - Quanto ocupa **n** peças?  $3.n$
- **CTP** =  $3.n$

# Criação do Modelo Matemático

- A esteira de uma seção de uma fábrica possui 60 metros. Sabendo que cada peça ocupa 3 metros, maximize o número de peças que serão colocadas na esteira.



- Onde  $n$  é o número de peças na esteira

**Nosso primeiro modelo matemático!**

# Criação do Modelo Matemático

- A esteira de uma seção de uma fábrica possui 60 metros. Sabendo que cada peça ocupa 3 metros, maximize o número de peças que serão colocadas na esteira.



- Onde  $n$  é o número de peças na esteira

**Nosso primeiro modelo matemático!**

# SOLUÇÕES VIÁVEIS E INVIÁVEIS



# Solução Viável x Inviável

- Uma solução viável é aquela cujos valores das variáveis de decisão são possíveis na prática
  - Não violam nenhuma restrição

F.O.:  $[max] \textcolor{red}{n}$

S.A.:  $\textcolor{brown}{3} \cdot \textcolor{red}{n} \leq \textcolor{blue}{60}$

- Onde  $n$  é o número de peças

Valor de $n$	É viável?
0	Sim!
15	Sim!
25	Não!
-10	Sim!

Sério?

# Solução Viável x Inviável

- Nova versão do modelo

F.O.:  $[max] \textcolor{red}{n}$

S.A.:  $\textcolor{brown}{3}.\textcolor{red}{n} \leq \textcolor{blue}{60}$

$\textcolor{red}{n} \geq 0$

Condição de não-negatividade

- Onde  $n$  é o número de peças
- Resolveu?

Valor de $n$	É viável?
20	Sim!
25	Não!
-10	Não!
10,5	Sim!

Sério?

# Solução Viável x Inviável

- Novíssima versão do modelo

F.O.:  $[max] \textcolor{red}{n}$

S.A.:  $\textcolor{brown}{3}.\textcolor{red}{n} \leq \textcolor{blue}{60}$

$\textcolor{red}{n} \geq 0$ , com  $\textcolor{red}{n}$  inteiro

- Onde  $n$  é o número de peças
- Resolveu?

Valor de $n$	É viável?
20	Sim!
25	Não!
-10	Não!
10,5	Não!



# EXEMPLO

# Mix de Transporte

- Um navio da classe Panamax tem as seguintes limitações de carga: 70.000 m<sup>3</sup> e 60.000 toneladas. Considerando há dois tipos de produtos a transportar, A e B, defina quanto deve ser transportado de cada um para maximizar a receita total.

Carga	Receita (R\$/tonelada)	Fator Estiva (m <sup>3</sup> /tonelada)	Disponibilidade (toneladas)
A	40	3	30.000
B	30	4	-



# Mix de Transporte

- Um navio da classe Panamax tem as seguintes limitações de carga: 70.000 m<sup>3</sup> e 60.000 toneladas. Considerando há dois tipos de produtos a transportar, A e B, defina quanto deve ser transportado de cada um para maximizar a receita total.

Carga	Receita (R\$/tonelada)	Fator Estiva (m <sup>3</sup> /tonelada)	Disponibilidade (toneladas)
A	40	3	30.000
B	30	4	-

- Qual o objetivo?
  - Maximizar receita
- Quais as variáveis?
  - Quantidade de A –  $x_A$  – e quantidade de B –  $x_B$
- Qual a função objetivo?
$$[max] 40 \cdot x_A + 30 \cdot x_B$$
- Há restrições?
  - Peso (60.000t), volume (70.000m<sup>3</sup>) e disponibilidade

# Mix de Transporte

Carga	Receita (R\$/t)	Estiva (m³/t)	Dispon. (t)
A	40	3	30.000
B	30	4	-

Peso (60.000t), volume (70.000m³)

F.O.:  $[max] 40.x_A + 30.x_B$

Onde:  $x_A$  – quantidade de toneladas a transportar de A

$x_B$  – quantidade de toneladas a transportar de B

- Restrição de Peso (em função de  $x_A$  e  $x_B$ )

- Peso total  $\leq 60000$ ... Peso total?

- Peso total =  $x_A + x_B$

$$1.x_A + 1.x_B \leq 60.000$$

# Mix de Transporte

Carga	Receita (R\$/t)	Estiva (m³/t)	Dispon. (t)
A	40	3	30.000
B	30	4	-

Peso (60.000t), volume (70.000m³)

$$\text{F.O.: } [max] 40.x_A + 30.x_B$$

$$\text{S.A.: } 1.x_A + 1.x_B \leq 60.000$$

Onde:  $x_A$  – quantidade de toneladas a transportar de A

$x_B$  – quantidade de toneladas a transportar de B

- Restrição de Volume (em função de  $x_A$  e  $x_B$ )

- Volume total  $\leq 70000$ ... Volume total?

- Volume total =  $3.x_A + 4.x_B$

$$3.x_A + 4.x_B \leq 70.000$$

# Mix de Transporte

Carga	Receita (R\$/t)	Estiva (m³/t)	Dispon. (t)
A	40	3	30.000
B	30	4	-

Peso (60.000t), volume (70.000m³)

$$\text{F.O.: } [max] 40.x_A + 30.x_B$$

$$\text{S.A.: } 1.x_A + 1.x_B \leq 60.000$$

$$3.x_A + 4.x_B \leq 70.000$$

Onde:  $x_A$  – quantidade de toneladas a transportar de A

$x_B$  – quantidade de toneladas a transportar de B

- Restrição de Disponibilidade (em função de  $x_A$  e  $x_B$ )

– Peso total de A  $\leq 30000$ ...?

$$1.x_A \leq 30.000$$

# Mix de Transporte

Carga	Receita (R\$/t)	Estiva (m³/t)	Dispon. (t)
A	40	3	30.000
B	30	4	-

Peso (60.000t), volume (70.000m³)

$$\text{F.O.: } [max] 40.x_A + 30.x_B$$

$$\text{S.A.: } 1.x_A + 1.x_B \leq 60.000$$

$$3.x_A + 4.x_B \leq 70.000$$

$$1.x_A \leq 30.000$$

Onde:  $x_A$  – quantidade de toneladas a transportar de A

$x_B$  – quantidade de toneladas a transportar de B

- Restrições de não negatividade

$$x_A \geq 0$$

$$x_B \geq 0$$



# Mix de Transporte

- Um navio da classe Panamax tem as seguintes limitações de carga: 70.000 m<sup>3</sup> e 60.000 toneladas. Considerando há dois tipos de produtos a transportar, A e B, defina quanto deve ser transportado de cada um para maximizar a receita total.

Carga	Receita (R\$/tonelada)	Fator Estiva (m <sup>3</sup> /tonelada)	Disponibilidade (toneladas)
A	40	3	30.000
B	30	4	-

- Modelo Final

$$\text{F.O.: } [max] 40.x_A + 30.x_B$$

$$\text{S.A.: } 1.x_A + 1.x_B \leq 60.000$$

$$3.x_A + 4.x_B \leq 70.000$$

$$1.x_A \leq 30.000$$

$$1.x_A \geq 0$$

$$1.x_B \geq 0$$

Receita

Peso

Volume

Disponibilidade

Não Negatividade

# EXERCÍCIOS

# Mix de Produção

- Uma fábrica produz os produtos A e B. Cada um deve ser processado por duas máquinas, M1 e M2. Devido à programação de outros produtos, que também usam estas máquinas, estão disponíveis para os produtos A e B apenas 24 horas da máquina M1 e 16 horas da máquina M2.
- Para produzir uma unidade do produto A, são necessárias 4 horas em cada uma das máquinas e para produzir uma unidade do produto B, são necessárias 6 horas em M1 e 2 horas em M2. Cada unidade de A vendida gera um lucro de R\$ 80,00 e cada unidade de B vendida gera um lucro de R\$ 60,00.
- Existe uma previsão de demanda máxima de 3 unidades para B, mas nenhuma restrição de demanda para A. Deseja-se saber: quanto produzir de cada produto para maximizar o lucro?

# Mix de Produção

- Estão disponíveis 24h de M1 e 16h de M2.
- A: 4h de M1 e 4h de M2 por unidade
- B: 6h de M1 e 2h de M2 por unidade
- Lucro: A - R\$ 80,00/unid e B - R\$ 60,00/unid
- Demanda máxima: B - 3 unidades
- Qto produzir para maximizar o lucro?

F.O.:  $[max] 80.x_A + 60.x_B$

S.A.:  $4.x_A + 6.x_B \leq 24$

$$4.x_A + 2.x_B \leq 16$$

$$1.x_B \leq 3$$

$$1.x_A \geq 0$$

$$1.x_B \geq 0$$

Lucro

Horas de M1

Horas de M2

Demanda por B

Não Negatividade

# Seleção de Tarefas

- Um computador (1) tem um limite de 4TB (1TB = 1000GB) de memória e seu usuário pode executar até 72 horas de processamento por semana. Todos os dados a serem processados nessas 72 horas devem ser carregados ao mesmo tempo. Isso significa que tudo tem que caber nos 4TB de memória. Um cliente lhe passou muitos pacotes de dados, de quatro tipos diferentes:
  - a) 10 pacotes que exigem 150 GB, 1 hora de processamento cada um, pagando R\$ 100,00 por unidade processada.
  - b) 25 pacotes que exigem 100 GB, 7 horas de processamento cada um, pagando R\$ 500,00 por unidade processada.
  - c) 3 pacotes que exigem 500 GB, 4 horas de processamento cada um, pagando R\$ 350,00 por unidade processada.
  - d) 7 pacotes que exigem 350 GB, 10 horas de processamento cada um, pagando R\$ 650,00 por unidade processada.
- Deseja-se o modelo de programação linear para definir quais pacotes serão processados para que o maior lucro seja obtido.



# Seleção de Tarefas

- Limite de memória e tempo: 4000GB, 72h
- Pacotes A: 10 de 150GB, 1h, R\$ 100,00
- Pacotes B: 25 de 100GB, 7h, R\$ 500,00
- Pacotes C: 3 de 500GB, 4h, R\$ 350,00
- Pacotes D: 7 de 350GB, 10h, R\$ 650,00
- Quantos de cada pacote para máximo lucro

F.O.:  $[max] 100.x_A + 500.x_B + 350.x_C + 650.x_D$

S.A.:  $150.x_A + 100.x_B + 500.x_C + 350.x_D \leq 4000$

**Espaço**

$1.x_A + 7.x_B + 4.x_C + 10.x_D \leq 72$

**Tempo**

$1.x_A \leq 10$

$1.x_B \leq 25$

$1.x_C \leq 3$

$1.x_D \leq 7$

**Demanda**

$x_A \geq 0; x_B \geq 0; x_C \geq 0; x_D \geq 0$

# ENCONTRANDO A SOLUÇÃO ÓTIMA

# Objetivo da Programação Linear

- Encontrar uma **solução ótima**
- O que é uma solução?
  - Conjunto de valores para as variáveis de decisão
- O que é solução ótima?
  - A que atende à especificação da função objetivo
  - Toda solução ótima deve ser viável
- O que é solução viável?
  - Aquela que é aplicável na prática
  - Aquela que respeita todas as restrições

# Técnicas de Solução

- Cada tipo de problema tem suas técnicas
- Programação Linear
  - Método gráfico (para poucas variáveis!)
  - Método Simplex
  - Métodos específicos
- Programação Inteira
- Programação Não Linear
- Programação Estocástica
- Programação Dinâmica

# Resumo

- Tipos diferentes de problemas
  - Definição do problema
  - Formulação de modelo matemático
    - Função objetivo x Restrições
    - Solução ótima, solução viável
  - Breve introdução às técnicas de solução
- 
- Solução Gráfica do Problema de L.P.
    - Significado físico das restrições e F.O.



**PERGUNTAS?**

# EXERCÍCIO PARA FIXAÇÃO

# Dimensionamento de Frota

- Uma companhia de aluguel de caminhões possuía-os de dois tipos: o tipo A com 2 metros cúbicos de espaço refrigerado e 4 metros cúbicos de espaço não refrigerado e o tipo B com 3 metros cúbicos refrigerados e 3 não refrigerados.
- Uma fábrica precisou transportar 90 metros cúbicos de produto refrigerado e 120 metros cúbicos de produto não refrigerado. Quantos caminhões de cada tipo ela deve alugar, de modo a minimizar o custo, se o aluguel do caminhão A é R\$ 3.000,00 e o do B é R\$ 4.000,00.
- Determine a solução ótima do modelo... **[min] !**