Matemática Discreta: Aula 5

Recursão

Recursão é o processo pelo qual passa certo procedimento quando um dos passos do procedimento em questão envolve a repetição do passo anterior. Um procedimento que se utiliza da recursão é dito recursivo.

Funções recursivas

São funções que utilizam processos recursivos.
Exemplo 1: Seja $f(x)$ a função definida para qualquer número natural da seguinte forma:

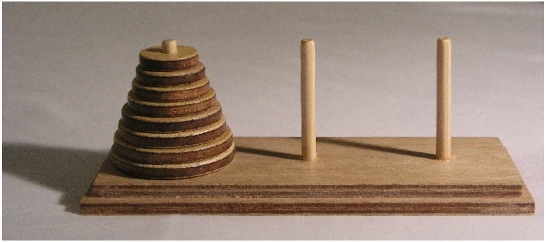
$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ se } x & = 0 \\ x.f(x-1), \text{ se } x & > 0 \end{cases}$$

Determine para esta função a imagem de $f(x)$ para os seguintes valores: $x = 1$; $x = 2$; $x = 3$; $x = 4$ e $x = 5$.
Qual operação matemática esta função representa?
Vamos calcular as imagens da função utilizando sua definição:
• $f(0) = 1$, neste caso foi aplicada a 1ª condição $f(x) = 1$ se $x = 0$.
• $f(1) = 1.f(1-1) = 1.f(0) = 1.1 = 1$, neste caso foi aplicada a 2ª condição $f(x) = x.f(x-1)$ se $x > 0$.

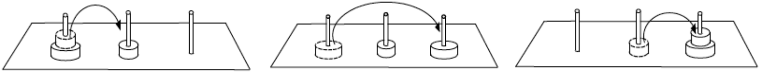
• $f(2) = 2.f(2-1) = 2.f(1) = 2.1 = 2$, neste caso foi aplicada a 2ª condição $f(x) = x.f(x-1)$ se $x > 0$.
• $f(3) = 3.f(3-1) = 3.f(2) = 3.2 = 6$, neste caso foi aplicada a 2ª condição $f(x) = x.f(x-1)$ se $x > 0$.
• $f(4) = 4.f(4-1) = 4.f(3) = 4.6 = 24$, neste caso foi aplicada a 2ª condição $f(x) = x.f(x-1)$ se $x > 0$.
• $f(5) = 5.f(5-1) = 5.f(4) = 5.24 = 120$, neste caso foi aplicada a 2ª condição $f(x) = x.f(x-1)$ se $x > 0$.
Observado a sequência dos valores obtidos chega-se a conclusão que esta função fornece o fatorial do número natural x. Então $f(x) = n!$. Se utilizar esta função $f(x)$ para um algoritmo que determine o fatorial de um número teremos um algoritmo recursivo.

Exemplo 2: A Torre de Hanói é um “quebra-cabeça” que consiste em uma base contendo três pinos, em um dos quais são dispostos alguns discos uns sobre os outros, em ordem crescente de diâmetro, de cima para baixo.

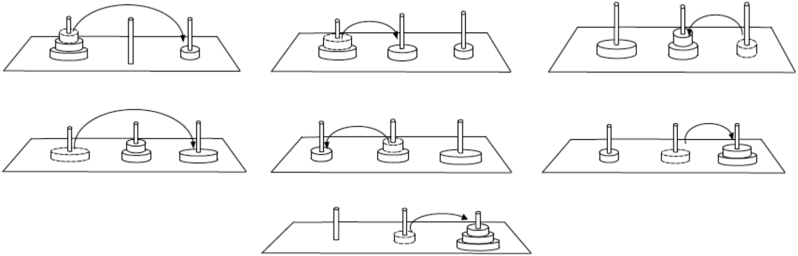
O problema consiste em passar todos os discos de um pino para outro qualquer, usando um dos pinos como auxiliar, de maneira que um disco maior nunca fique em cima de outro menor em nenhuma situação. O número de discos pode variar sendo que o mais simples contém apenas três. Escreva uma função recursiva para determinar o menor número de movimentos para resolver o “quebra-cabeça” da Torre de Hanói.



Se por acaso a torre tivesse apenas 1 disco, apenas um movimento seria suficiente então temos $f(1) = 1$ movimento.
Com 2 discos teremos que fazer 3 movimentos como mostrado na figura.



Então $f(2) = 3$ movimentos.
Com 3 discos teremos que fazer 7 movimentos como mostrado na figura.



Então $f(3) = 7$ movimentos.

Observe que nos 3 primeiros e nos últimos movimentos (para 3 discos) repetimos os movimentos feitos para 2 discos portanto $f(3) = 2.f(2) + 1 = 2.3 + 1 = 7$. com $f(2)$ o mesmo acontece pois $f(2) = 2.f(1) + 1 = 2.1 + 1 = 3$. Se continuarmos com este raciocínio teremos:

$f(4) = 2.f(3) + 1 = 2.7 + 1 = 15$ movimentos.

$f(5) = 2.f(4) + 1 = 2.15 + 1 = 31$ movimentos.

$f(6) = 2.f(5) + 1 = 2.31 + 1 = 63$ movimentos.

E assim por diante. Então podemos escrever a função recursiva para n discos:

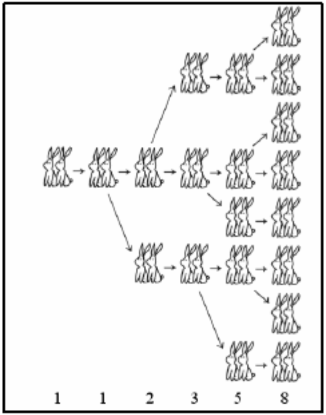
$$f(n) = \begin{cases} 1, \text{ se } n & = 1 \\ 2.f(n-1) + 1, \text{ se } n & > 1 \end{cases}$$

Observação: os resultados da menor quantidade de movimento para resolver a torre de Hanói resulta na seguinte sequência: 1, 3, 7, 15, 31, 63, ...

Observamos que estes valores coincidem com $(2^n - 1)$ movimentos. Então a quantidade de movimentos mínimos para n discos também pode ser representada pela função: $f(n) = 2^n - 1$, mas esta função não é recursiva, dizemos que ela é a forma fechada da função.

Sequências recursivas

São sequências em que a lei de formação de seus termos tem um definição recursiva.
Uma sequência clássica recursiva é a sequência de Fibonacci.
Exemplo 3: A seguência de Fibonacci tem origem nos seguinte problema:
Num pátio fechado coloca-se um casal de coelhos. Supondo que em cada mês, a partir do segundo mês de vida, cada casal dá origem a um novo casal de coelhos, e que os coelhos não morrem ao fim de 6 meses, quantos casais de coelhos estão no pátio?
Escreva o termo geral da sequência de Fibonacci na forma recursiva.



Chamando os termos da sequência de $a_1, a_2, a_3, \ldots$, temos:

$a_1 = 1$

$a_2 = 1$

$a_3 = 2$; o casal inicial deu origem ao novo casal

$a_4 = 3$; o casal inicial deu origem a 1 novo casal

$a_5 = 5$; o casal nascido em a_3 começa a reproduzir

$a_6 = 8$; os casais nascidos em a_4 começam a reproduzir

No fim de 6 meses teremos 8 casais.

Para escrever o termos geral da sequência observamos que cada termo a partir do 2º é a soma de dois anteriores:

$a_3 = a_1 + a_2$

$a_4 = a_2 + a_3$

$a_5 = a_3 + a_4$

$a_6 = a_4 + a_5$, então o termo geral da sequência é dado por:

$$a_n = \begin{cases} 1, \text{ se } n & = 1 \\ 1, \text{ se } n & = 2 \\ a_{n-2} + a_{n-1}, \text{ se } n & > 2 \end{cases}$$

Exemplo 4: Definimos recursivamente a seguinte função $f(1) = 1$ e $f(n) = f(n-1) + n^2$, se n é maior ou igual a 2. Calcule o valor de $f(4)$.
Pela definição de $f(n)$, temos:
$f(1) = 1$
$f(2) = f(2-1) + 2^2 = f(1) + 4 = 1 + 4 = 5$
$f(3) = f(3-1) + 3^2 = f(2) + 9 = 5 + 9 = 14$
$f(4) = f(4-1) + 4^2 = f(3) + 16 = 14 + 16 = 30$
Portanto $f(4) = 30$.

Bibliografia

[1] GERSTING, J. L. *Fundamentos Matemáticos para a Ciência da Computação*, LTC, 5a. ed., Rio de Janeiro, 2004.
[2] SCHEINERMAN, E. R. *Matemática discreta. Uma introdução*, Thomson Pioneira, São Paulo, 2003.

Araraquara, 14 de outubro de 2021.