Matemática Discreta: Aula 4

O Método

O método da Indução é uma técnica de demonstração que se aplica a determinadas situações. Para ilustrar o uso desta técnica, imagine que você está subindo em uma escada sem fim. Como você pode saber se será capaz de alcançar um degrau arbitrariamente alto? Suponha que você faça as seguintes afirmações sobre as suas habilidades de subir escadas:

1. Você pode alcançar o primeiro degrau.

2. Se você alcançar um degrau, você pode sempre passar ao degrau seguinte. (Note que esta asserção é uma implicação.)

Tanto a sentença 1 como a implicação na sentença 2 são verdadeiras; então, pela sentença 1 você pode chegar ao primeiro degrau e pela sentença 2 você pode chegar ao segundo; novamente pela sentença 2 você pode chegar ao terceiro; pela sentença 2 novamente você pode chegar ao quarto degrau, e assim sucessivamente. Você pode, então, subir tão alto quanto você queira. Neste caso, ambas as asserções são necessárias. Se apenas a sentença 1 é verdadeira, você não tem garantias de que poderá ir além do primeiro degrau, e se apenas a segunda sentença é verdadeira, você poderá não chegar ao primeiro degrau a fim de iniciar o processo de subida da escada. Vamos assumir que os degraus da escada são numerados com os números inteiros positivos - $1, 2, 3$, e assim por diante. Agora vamos considerar uma propriedade específica que um número pode ter. Ao invés de "alcançarmos um degrau arbitrário" podemos mencionar que um inteiro positivo arbitrário tem essa propriedade. Usaremos a notação simplificada $P(n)$ para denotar que o inteiro positivo n tem a propriedade P. Como podemos usar a técnica de subir escadas para provar que para todos inteiros positivos n nós temos $P(n)$? As duas afirmações de que precisamos para a demonstração são:

1. $P(1)$ (1 tem a propriedade P)

2. Para qualquer inteiro positivo k, $P(k) \longrightarrow P(k+1)$ (Se algum número tem a propriedade P, então o número seguinte também a tem.)

Se pudermos demonstrar as sentenças 1 e 2, então $P(n)$ vale para qualquer inteiro positivo n, da mesma maneira que nós podemos subir até um degrau arbitrário na escada.
O fundamento deste tipo de argumentação é chamado **princípio de indução matemática**, que pode ser enunciado como

$$\left.\begin{array}{l}\textbf{1. } P(1) \text{ verdadeira} \\ \textbf{2. } (\forall\, k)\,[P(k) \text{ verdadeira } \longrightarrow P(k+1) \text{ verdadeira}]\end{array}\right\} \longrightarrow$$

$P(n)$ verdadeira para todos os n inteiros positivos

O princípio da indução matemática é uma implicação. A tese desta implicação é uma sentença da forma "$P(n)$ é verdadeira para todos os n inteiros positivos". Portanto, sempre que desejamos demonstrar que alguma propriedade é válida para todo inteiro positivo n, uma tentativa é o uso da indução matemática como técnica de demonstração.

Para averiguarmos que a tese desta implicação é verdadeira, mostramos que as duas hipóteses, ou seja, as afirmações 1 e 2 são verdadeiras. Para demonstrar a afirmação 1, precisamos apenas mostrar que a propriedade P vale para o número 1, o que é normalmente uma tarefa trivial. Para demonstrar a afirmação 2, uma implicação que deve valer para todo k, assumimos que $P(k)$ é verdadeira para um inteiro arbitrário k, e baseados nesta hipótese mostramos que $P(k+1)$ é verdadeira. Você deve convencer a si próprio que assumir a propriedade P como válida para o número k não é a mesma coisa que assumir o que desejamos demonstrar (uma frequente fonte de confusão, quando nos deparamos pela primeira vez com este tipo de demonstração).

Assumi-la como verdadeira é simplesmente o caminho para elaborar a prova de que a implicação $P(k) \longrightarrow P(k+1)$ é verdadeira.

Ao desenvolver uma demonstração por indução, estabelecemos inicialmente a veracidade da sentença 1, $P(1)$, que é chamada de **base da indução** ou **passo básico**, para a demonstração indutiva.

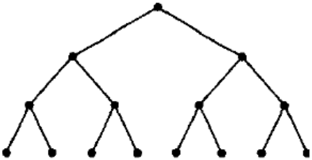
Estabelecer que a sentença $P(k) \longrightarrow P(k+1)$ é verdadeira constitui o **passo indutivo**. Quando assumimos que $P(k)$ é verdadeira com o intuito de demonstrar o passo indutivo, $P(k)$ é chamado de **suposição indutiva**, ou **hipótese indutiva**.

Os métodos de demonstração, em geral, utilizam técnicas de raciocínio dedutivo - formas de demonstrar uma conjectura que foi formulada por um raciocínio indutivo. A indução matemática também é uma técnica *dedutiva*, e não um método para o raciocínio indutivo (procure não ficar confuso com a terminologia utilizada aqui). Para outras técnicas de demonstração, podemos começar com as hipóteses, e encadear fatos até que mais ou menos tropecemos em uma solução. De fato, mesmo que nossa conjectura seja ligeiramente incorreta, provavelmente acabamos por verificar a tese correta no decorrer do processo de demonstração.

Na indução matemática, entretanto, devemos saber no princípio a forma exata da propriedade $P(n)$ que estamos tentando estabelecer. A indução matemática, portanto, não é uma técnica de demonstração exploratória - ela pode apenas confirmar uma conjectura correta.

Demonstrações Indutivas

Suponha que o Sr. Silva casou-se e teve dois filhos. Vamos chamar estes dois filhos de geração 1. Agora suponha que cada um desses dois filhos teve dois filhos; então na geração 2 temos quatro descendentes. Este processo continua de geração em geração. A árvore genealógica da família Silva é semelhante à Figura abaixo.



Geração	Descendentes
1	$2 = 2^1$
2	$4 = 2^2$
3	$8 = 2^1$

Aparentemente a geração n tem 2^n descendentes. De maneira mais formal, se fizermos $P(n)$ denotar o número de descendentes na geração n, então nossa suposição será

$$P(n) = 2^n$$

Podemos usar a indução para *demonstrar* que nosso palpite para $P(n)$ está correto.
A base da indução é estabelecer $P(1)$, que resulta a equação

$$P(1) = 2^1 = 2$$

Que é verdadeira, posto que foi informado que o Sr. Silva tinha dois filhos. Agora vamos supor que nossa premissa é verdadeira para uma geração arbitrária k, ou seja, assumimos que

$$P(k) = 2^k$$

e tentaremos mostrar que

$$P(k+1) = 2^{k+1}$$

Nesta família, cada descendente tem dois filhos; então o número de descendentes na geração $k+1$ será o dobro do da geração índice k, ou seja, $P(k+1) = 2P(k)$.

Pela hipótese de indução, $P(k) = 2^k$, logo

$$P(k+1) = 2P(k) = 2(2^k) = 2^{k+1}$$

então, de fato,

$$P(k+1) = 2^{k+1}$$

Isto completa a nossa demonstração por indução. Agora que sabemos como resolver o problema simples do clã dos Silva, podemos aplicar a técnica de demonstração por indução em problemas menos óbvios.

Exemplo 1: Prove que a equação

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2 \; \textbf{(1)}$$

é verdadeira para qualquer inteiro positivo n. Neste caso, a propriedade $P(n)$ é que a equação **(1)** acima é verdadeira. O lado esquerdo desta equação é a soma de todos os inteiros ímpares de 1 até $2n-1$. Ainda que possamos verificar que a equação é verdadeira para um particular valor de n pela substituição deste valor na equação, nós não podemos substituir todos os possíveis valores inteiros positivos. Por isso, uma demonstração por exemplos não funciona. É mais apropriada uma demonstração por indução matemática.

O passo básico é estabelecer $P(1)$, que é o valor da equação **(1)** quando n assume o valor 1, ou seja

$$1 = 1^2$$

Isto certamente é verdadeiro. Para a hipótese de indução, vamos assumir $P(k)$ como verdadeira para um inteiro positivo arbitrário k, que é o valor da equação **(1)** quando n vale k, ou seja

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) = k^2 \textbf{ (2)}$$

(Note que $P(k)$ não é a equação $(2k - 1) = k^2$ que só é verdadeira quando $k = 1$.) Usando a hipótese de indução, queremos mostrar $P(k + 1)$ que é o valor da equação **(1)** quando n assume o valor $k + 1$, ou seja:

$$1 + 3 + 5 + \ldots + [2(k + 1) - 1] \stackrel{?}{=} (k + 1)^2 \textbf{ (3)}$$

(O pequeno ponto de interrogação sobre o sinal de igualdade serve para nos lembrar que é este fato que desejamos provar, a partir de um outro fato já conhecido.)

A chave para uma demonstração por indução é encontrar uma forma de relacionar o que se deseja mostrar - $P(k + 1)$, equação **(3)** - com o que assumimos como verdadeiro - $P(k)$, equação **(2)**. O lado esquerdo de $P(k + 1)$ pode ser reescrito a fim de destacar o penúltimo termo:

$$1+3+5+\ldots+(2k-1)+[2(k+1)-1]$$

Esta expressão contém do lado esquerdo a equação **(2)** como subexpressão. Como assumimos que $P(k)$ é verdadeira, podemos substituir esta expressão pelo lado direito da equação **(2)**. Senão vejamos:

$$\begin{aligned}
&1+3+5+\ldots+[2(k+1)-1]\\
&=1+3+5+\ldots+(2k-1)+[2(k+1)-1]\\
&=k^2+[2(k+1)-1]\\
&=k^2+[2k+2-1]\\
&=k^2+2k+1\\
&=(k+1)^2
\end{aligned}$$

Portanto

$$1+3+5+\ldots+[2(k+1)-1]=(k+1)^2$$

o que verifica $P(k+1)$ e prova que a equação **(1)** é verdadeira para qualquer inteiro positivo n.

Exemplo 2: Prove que

$$1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1, \text{ para qualquer } n > 1.$$

Aqui, novamente, a indução é a técnica mais apropriada. $P(1)$ é a equação

$$1 + 2 = 2^{1+1} - 1 \text{ ou } 3 = 2^2 - 1$$

que é verdadeira. Consideremos agora $P(k)$

$$1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^k = 2^{k+1} - 1$$

como a hipótese de indução, e busquemos obter $P(k+1)$:

$$1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{k+1} \stackrel{?}{=} 2^{(k+1)+1} - 1$$

Agora, se reescrevemos a soma do lado esquerdo de $P(k+1)$, obtemos uma forma de usar a hipótese de indução:

$$\begin{aligned}
&1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{k+1} \\
&= 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^k + 2^{k+1} \\
&= 2^{k+1} - 1 + 2^{k+1} \text{ (da hipótese de indução } P(k)) \\
&= 2(2^{k+1}) - 1 \\
&= 2^{(k+1)+1} - 1
\end{aligned}$$

Portanto

$$1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{k+1} = 2^{(k+1)+1} - 1, \text{ que verifica } P(k+1).$$

Exercícios:

4.1 Prove que para qualquer inteiro positivo n,

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Nem todas as demonstrações por indução envolvem fórmulas com somas. Outras identidades algébricas sobre inteiros positivos podem ser demonstradas por indução, bem como suposições não-algébricas, como o número de descendentes na geração n da família Silva.

Exemplo 3: Demonstre que, para qualquer inteiro positivo n, $2^n > n$. $P(1)$ é a sentença $2^1 > 1$ que é, sem dúvida, verdadeira. Suponhamos agora $P(k)$, $2^k > k$, como verdadeira, e procuremos concluir a partir daí $P(k+1)$, $2^{k+1} > k+1$. Começando pelo lado esquerdo de $P(k+1)$, temos que $2^{k+1} = 2^k.2$. Usando a hipótese de indução $2^k > k$ e multiplicando ambos os lados dessa desigualdade por 2, temos $2^k.2 > k.2$. Podemos escrever então que:

$$2^{k+1} = 2^k.2 > k.2 = k + k \geq k + 1$$

o que resulta em

$$2^{k+1} > k + 1$$

Exemplo 4: Prove que, para qualquer inteiro positivo n, o número $2^{2n} - 1$ é divisível por 3.
A base da indução é mostrar $P(1)$, ou seja, mostrar que $2^{2(1)} - 1 = 4 - 1 = 3$ é divisível por 3, o que obviamente é verdadeiro.
Assumimos que $2^{2k} - 1$ é divisível por 3, o que equivale a escrever $2^{2k} - 1 = 3m$ para algum inteiro m, ou $2^{2k} = 3m + 1$. Desejamos mostrar que $2^{2(k+1)} - 1$ é divisível por 3.

$$2^{2(k+1)} - 1 = 2^{2k+2} - 1$$
$$= 2^2.2^{2k} - 1$$
$$= 2^2.(3m + 1) - 1 \text{ (pela hipótese de indução)}$$
$$= 12m + 4 - 1$$
$$= 12m + 3$$
$$= 3.(4m + 1) \text{ onde } 4m + 1 \text{ é um inteiro.}$$

Em alguns casos, pode ser que, para o primeiro passo do processo de indução, seja mais apropriado começar com valores 0, 2, ou 3, ao invés de 1. O mesmo princípio se aplica, qualquer que seja o degrau da escada que você alcance no primeiro passo.

Exemplo 5: Prove que $n^2 > 3n$ para $n \geq 4$.
Neste exemplo devemos aplicar a indução e começar com um passo inicial $P(4)$. (Se testarmos para valores de $n = 1, 2$ e 3, verificaremos que a desigualdade não se verifica.) $P(4)$ é então a desigualdade $4^2 > 3(4)$, ou $16 > 12$, que é verdadeira. A hipótese de indução é $k^2 > 3k$, para $k > 4$, e queremos mostrar que $(k+1)^2 > 3(k+1)$.

$(k+1)^2 = k^2 + 2k + 1$
$> 3k + 2k + 1$ (pela hipótese de indução)
$\geq 3k + 8 + 1$ (já que $k \geq 4$)
$> 3k + 3$
$= 3(k+1)$

Exercícios:

4.2 Prove que $2^{n+1} < 3^n$ para todo $n > 1$.

Bibliografia

[1] GERSTING, J. L. *Fundamentos Matemáticos para a Ciência da Computação*, LTC, 5a. ed., Rio de Janeiro, 2004.
[2] SCHEINERMAN, E. R. *Matemática discreta. Uma introdução*, Thomson Pioneira, São Paulo, 2003.

Araraquara, 30 de setembro de 2021.