Matemática Discreta: Aula 1

Matemática *contínua* versus matemática *discreta*

O mundo da matemática pode ser dividido em aproximadamente dois domínios: o *contínuo* e o *discreto*. A diferença é perfeitamente ilustrada pelos relógios de pulso. A matemática contínua corresponde aos relógios analógicos - o tipo que separa os ponteiros das horas, minutos e segundos. Os ponteiros se movem suavemente ao longo do tempo. Do ponto de vista de um relógio analógico, entre 12:02 pm e 12:03 pm há um número infinito de diferentes tempos possíveis, na medida em que o ponteiro dos segundos percorre o mostrador. A matemática contínua estuda conceitos infinitos em seu objetivo, em que um objeto pode combinar-se suavemente com o próximo. O sistema dos números reais está no cerne da matemática contínua e - tal como o relógio -, entre dois números reais quaisquer, há uma infinidade de números reais.

A matemática contínua oferece excelentes modelos e instrumentos para analisar fenômenos do mundo real que se modificam suavemente ao longo do tempo, inclusive o movimento dos planetas em torno do sol ou o fluxo do sangue através do corpo.
No entanto, a matemática discreta é comparável a um relógio digital, em que há apenas um número finito possível de tempos diferentes entre 12:02 pm e 12:03 pm. Um relógio digital não reconhece frações de segundos. Não há tempo algum entre 12:02:03 e 12:02:04. O relógio salta de um instante para o próximo. Um relógio digital só pode mostrar um número finito de tempos diferentes, e a transição de um tempo para o próximo é bem definida e sem ambiguidade. Assim como o sistema de números reais desempenha papel central na contínua, os inteiros são o instrumento principal da matemática discreta. A matemática discreta oferece excelentes modelos e ferramentas para analisar fenômenos do mundo real que podem modificar-se abruptamente e que estão definidamente em um estado ou em outro. A matemática discreta é o instrumento de escolha em uma diversidade de aplicações, dos computadores ao planejamento de chamadas telefônicas.

Exercícios

1.1 Em um relógio digital, há apenas um número finito de horas que podem ser apresentados. Quantas horas diferentes podem ser exibidas em um relógio digital que mostra horas, minutos e segundos e que faça distinção entre a.m. e p.m.?

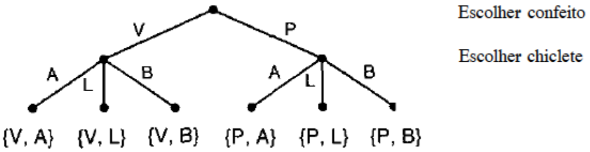
1.2 Uma sorveteria vende sorvetes de dez sabores diferentes. De quantas maneiras podemos escolher os sabores de um “duas bolas”, se em cada sorvete as duas bolas devem ter sabores diferentes?

Análise Combinatória

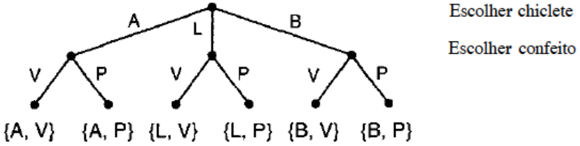
O Princípio da Multiplicação

A árvore de possibilidades sugere um princípio mais geral que pode ser usado para resolver diversos problemas de contagem. Antes de enunciarmos o princípio geral, vamos analisar o seguinte exemplo:

Exemplo 1: A uma criança é permitido escolher um dentre dois confeitos, um vermelho e outro preto, e um entre três chicletes, amarelo, lilás e branco. Quantos conjuntos diferentes de doces a criança pode ter? Podemos resolver este problema, quebrando a tarefa da escolha dos doces em duas etapas sequenciais: a escolha do confeito e a escolha do chiclete. A árvore da figura abaixo mostra que existe $2.3 = 6$ escolhas possíveis. São elas: $\{V, A\}$, $\{V, L\}$, $\{V, B\}$, $\{P, A\}$, $\{P, L\}$ e $\{P, B\}$.



Neste problema, a sequência de eventos pode ser invertida; a criança pode escolher o chiclete antes de escolher o confeito, resultando na árvore da figura abaixo, mas o número de escolhas possíveis permanece o mesmo ($2.3 = 6$). Pensar como uma sequência de eventos sucessivos nos ajuda a resolver o problema, mas o sequenciamento não é uma parte do problema, pois o conjunto $\{V, A\}$ é o mesmo que o $\{A, V\}$.



O exemplo acima mostra que o número de possibilidades para eventos sequenciados pode ser obtido por meio da multiplicação dos números de possibilidades do primeiro evento pelo número de possibilidades do segundo. Esta ideia é sintetizada no *Princípio da Multiplicação*.

Definição (Princípio da Multiplicação)

Se existem n_1 possibilidades para um primeiro evento e n_2 possibilidades para um segundo evento, então existem $n_1.n_2$ possibilidades para a sequência dos dois eventos.

O Princípio da Multiplicação é útil, quando desejamos contar o número de possibilidades totais de uma tarefa que pode ser quebrada em uma sequência de etapas sucessivas.

Exemplo 2: A última parte do número de seu telefone contém quatro dígitos. Quantos números de quatro dígitos existem?

Podemos imaginar um número de quatro dígitos como o total de possibilidades de uma sequência de etapas de escolha do primeiro dígito, depois do segundo, depois do terceiro e, finalmente, do quarto dígito. O primeiro dígito pode ser qualquer dos 10 dígitos entre 0 e 9, portanto há 10 possibilidades para a primeira etapa. Da mesma forma, há 10 possibilidades para as etapas de escolha dos segundo, terceiro e quarto dígitos. Usando o Princípio da Multiplicação, multiplicamos o número de possibilidades de cada etapa da sequência. Portanto, há $10.10.10.10 = 10000$ números diferentes.

O número de resultados possíveis para eventos sucessivos após o primeiro evento é afetado se o mesmo elemento não puder ser usado novamente, isto é, se não forem permitidas repetições.

Exemplo 3: Com relação ao Exemplo 2, quantos números de quatro dígitos sem repetições de dígitos existem?

Novamente, temos a sequência de etapas de seleção dos quatro dígitos, mas não são permitidas repetições. Existem 10 possibilidades para a escolha do primeiro dígito, mas apenas nove para a escolha do segundo, pois não podemos usar o que já foi usado para o primeiro dígito, e assim por diante. Existem, portanto, $10.9.8.7 = 5040$ números diferentes sem repetições de dígitos.

Exemplo 4: a. De quantas maneiras podemos escolher três funcionários de um grupo de 25 pessoas?

b. De quantas maneiras podemos escolher três funcionários de um grupo de 25 pessoas, se uma pessoa puder acumular mais de um cargo?

Em **(a)** existem três etapas sucessivas sem repetições. A primeira etapa, escolher o primeiro funcionário, tem 25 resultados possíveis. A segunda etapa tem 24 possibilidades, e a terceira 23. O número total de resultados possíveis é $25.24.23 = 13800$.

Em **(b)**, as mesmas três etapas são realizadas em sequência, mas são permitidas repetições. O número total de repetições é $25.25.25 = 15.625$.

Exercício 1.3 Se um homem tem quatro ternos, oito camisas e cinco gravatas, quantas combinações ele pode compor?

Observação: Para qualquer conjunto finito S, seja $|S|$ o número de elementos em S. Se A e B são conjuntos finitos, então

$$|A \times B| = |A|.|B|$$

$|A \times B|$ consiste em todos os pares ordenados com a primeira componente em A e a segunda componente em B. A escolha desses pares ordenados é equivalente a escolher, em sequência, a primeira componente dentre as $|A|$ possibilidades, e então escolher a segunda, para a qual existem $|B|$ possibilidades. O resultado segue, então, o Princípio da Multiplicação.

O Princípio da Adição

Suponha que desejamos escolher uma sobremesa dentre três tortas e quatro bolos. De quantas formas isto pode ser feito? Existem dois eventos, um com três resultados possíveis (escolher uma torta) e outro com quatro resultados possíveis (escolher um bolo). No entanto, não estamos compondo uma sequência de dois eventos, uma vez que desejamos apenas uma sobremesa, que precisa ser escolhida dentre as possibilidades de dois conjuntos disjuntos. O número de possibilidades é o número total de opções que temos, $3 + 4 = 7$. Isto ilustra o *Princípio da Adição*.

Definição (Princípio da Adição)

*Se A e B são eventos disjuntos com n_1 e n_2 possibilidades, respectivamente, então o número total de possibilidades para o evento A **ou** B é $n_1 + n_2$.*

Exemplo 5: Um comprador deseja um veículo de uma concessionária. A concessionária tem 23 carros e 14 caminhões em estoque. Quantas possíveis escolhas o comprador pode ter?
O comprador deseja escolher um carro ou caminhão. São eventos disjuntos; escolher um carro tem 23 possibilidades e escolher um caminhão tem 14. Pelo Princípio da Adição, a escolha de um veículo tem $23 + 14 = 37$ possibilidades. Perceba que os requisitos para os eventos A e B são conjuntos disjuntos. Portanto, se um comprador desejar comprar um veículo de uma concessionária que tenha 23 carros, 14 caminhões e 17 veículos vermelhos, não podemos dizer que o comprador tem $23 + 14 + 17$ possibilidades de escolha.
Observação 2: Sejam A e B conjuntos finitos disjuntos. Então $|A \cup B| = |A| + |B|$.
A união $|A \cup B|$ pode ser encontrada, no caso de conjuntos disjuntos, pela contagem do número de elementos em A, $|A|$, e o do número de elementos em B, $|B|$. Pelo Princípio da Adição, somamos esses dois números.
Também temos: Se A e B são conjuntos finitos, então

$$|A - B| = |A| - |A \cap B| \text{ e } |A - B| = |A| - |B| \text{ se } B \subseteq A$$

Exemplo 6: Com referência ao Exemplo 1, suponha que desejamos achar quantas formas diferentes existem para uma criança escolher um doce, ao contrário do número de conjuntos de doces que uma criança pode ter. Desta forma, escolher um confeito vermelho, seguido de um chiclete amarelo é diferente de escolher um chiclete amarelo e um confeito vermelho. Podemos considerar dois casos disjuntos - escolher confeitos antes de escolher chicletes ou escolher chicletes antes de escolher confeitos.
Cada um desses casos (pelo Princípio da Multiplicação) tem seis possibilidades, portanto (pelo Princípio da Adição) existem $6 + 6 = 12$ formas possíveis de escolher o doce.

Exemplo 7: Quantos números de quatro dígitos começam com 4 ou 5? Podemos considerar dois casos disjuntos - números que começam por 4 e números que começam por 5. Para a contagem dos números que começam por 4, existe uma forma de escolher o primeiro dígito, e 10 possibilidades para as etapas de escolha de cada um dos outros dígitos. Portanto, pelo Princípio da Multiplicação, existem $1.10.10.10 = 1000$ formas de escolher um número de quatro dígitos começando com 4. O mesmo raciocínio mostra que exitem 1000 formas de escolher um número de quatro dígitos começando por 5. Pelo Princípio da Adição, existem $1000 + 1000 = 2000$ resultados possíveis ao todo.

Normalmente, problemas de contagem podem ser resolvidos de mais de uma forma. Apesar da possibilidade de uma segunda solução poder parecer confusa, ela fornece um modo de verificar nosso resultado - se duas abordagens diferentes do mesmo problema produzem o mesmo resultado, isto aumenta a credibilidade de que analisamos o problema corretamente.

Exemplo 8: Considere o problema do Exemplo 7 novamente. Podemos evitar usar o Princípio da Adição, pensando sobre o problema em etapas sucessivas, onde a primeira etapa será escolher o primeiro dígito, que tem duas possibilidades de escolha - escolher 4 ou 5. Desta forma, existem $2.10.10.10 = 2000$ possibilidades de escolha.

Exemplo 9: Quantos inteiros de três dígitos (números entre 100 e 999) são pares?

Uma solução faz uso do fato de que números inteiros pares terminam em $0, 2, 4, 6$ ou 8. Considerando esses casos separadamente, o número de inteiros de três dígitos terminando em 0 pode ser encontrado escolhendo seus dígitos em etapas. Existem nove possibilidades, de 1 a 9, para o primeiro dígito; 10 possibilidades, 0 a 9, para o segundo dígito; e uma possibilidade para o terceiro dígito, 0. Pelo Princípio da Multiplicação, existem 90 números de três dígitos terminando em 0.

Analogamente, existem 90 números terminando por $2, 4, 6$ e 8. Portanto, pelo Princípio da Adição, existem $90 + 90 + 90 + 90 + 90 = 450$ números pares de três dígitos.
Outra solução tira vantagem do fato de que existem apenas cinco escolhas para o terceiro dígito. Pelo Princípio da Multiplicação, existem $9.10.5 = 450$ números.
Para este problema, existe ainda uma terceira solução. Existem 900 inteiros de três dígitos. Metade dos quais é ímpar, portanto 450 devem ser pares.
Exemplo 10: Suponha que os quatro últimos dígitos de um número de telefone precisam incluir, pelo menos, um dígito repetido. Quantos números deste tipo existem?
Apesar de ser possível resolver este problema com um uso direto do Princípio da Adição, isto é difícil, porque existem diversos casos disjuntos a considerar. Por exemplo, se os primeiros dois dígitos forem iguais, mas os terceiro e quarto forem diferentes, existem 10.1.9.8 maneiras de escolher o número. Se o primeiro e terceiro dígitos forem iguais, existem 10.9.1.8 maneiras de escolher o número. Se os dois primeiros forem iguais e os dois últimos também forem iguais, mas diferentes dos dois primeiros, existirão 10.1.9.1 números.

Obviamente, existem diversas outras possibilidades.
Ao contrário da abordagem acima, resolveremos este problema usando o fato de que números com repetições e números sem repetição são conjuntos disjuntos cuja união é o conjunto de todos os números de quatro dígitos. Podemos achar quantos números com repetições existem através da subtração da quantidade de números sem repetições (5040, segundo o Exemplo 3) do total de números de quatro dígitos (10.000, de acordo com o Exemplo 2). Portanto, existem 4960 números com repetições.

Bibliografia

[1] GERSTING, J. L. *Fundamentos Matemáticos para a Ciência da Computação*, LTC, 5a. ed., Rio de Janeiro, 2004.
[2] SCHEINERMAN, E. R. *Matemática discreta. Uma introdução*, Thomson Pioneira, São Paulo, 2003.

Araraquara, 12 de agosto de 2021.