Matemática Discreta: Aula 3

Eliminando Duplicidades

Problemas de contagem podem, ser resolvidos amiúde de diferentes maneiras. Infelizmente, também é fácil encontrar assim-chamadas soluções que parecem razoáveis, mas são, na verdade, incorretas. Em geral, são erradas porque contam algum(ns) elemento(s) mais de uma vez (ou às vezes por esquecer de contar algo).

Exemplo 1: Considere novamente o item **d.** do Exemplo 9 da aula 2. Uma solução inválida para este problema é a seguinte: Imagine uma sequência de duas subtarefas, escolhendo um calouro e então escolhendo o resto do comitê. Existem $C(19, 1)$ maneiras de escolher um calouro. Uma vez que um calouro já tenha sido escolhido, o que garante que pelo menos um calouro compõe o comitê, estamos livres para escolher os demais sete membros do comitê dentre as 52 pessoas que sobraram, sem quaisquer restrições, o que nos dá $C(52, 7)$ possibilidades. Pelo Princípio da Multiplicação, temos $C(19, 1).C(52, 7)$. No entanto, este é um número maior do que o obtido na resposta correta.

O problema é o seguinte: suponha que Daniel e Felícia são calouros. Em uma das possibilidades, foi contado o caso no qual Daniel é o calouro escolhido em primeiro lugar, e o resto do comitê foi selecionado de forma que Felícia foi escolhida junto com outros seis membros. Mas também contamos o caso no qual Felícia foi escolhida em primeiro lugar, e Daniel foi selecionado junto com os mesmos seis outros membros do comitê. Este comitê é o mesmo que o anterior, e foi contado duas vezes.

Exemplo 2: Um comitê de duas pessoas precisa ser escolhido dentre quatro matemáticos e três físicos, e precisa incluir pelo menos um matemático. Compute os dois valores a seguir

a. $C(7,2) - C(3,2)$ (a solução correta - todos os comitês menos os sem matemáticos)

b. $C(4,1).C(6,1)$ (a solução errada - escolhe um matemático e depois seleciona o outro integrante do comitê)

Perceba que $C(4,1).C(6,1) - C(4,2)$ nos dá a resposta correta, porque $C(4,2)$ é o número de comitês com dois matemáticos, e esses comitês foram contados duas vezes em $C(4,1).C(6,1)$.

Exemplo 3: a. Quantas permutações distintas podem ser formadas com as letras da palavra FLORIDA?
b. Quantas permutações distintas podem ser formadas com as letras da palavra MISSISSIPPI?
O item **a.** é um simples problema de encontrar o número de arranjos ordenados de sete objetos distintos, que é 7! No entanto, a resposta para o item **b.** não é 11! porque as 11 letras de MISSISSIPPI não são todas distintas. Isto significa que 11! conta alguns dos mesmos arranjos mais de uma vez (o mesmo arranjo significa que não podemos ver a diferença entre $MIS_1S_2ISSIPPI$ e $MIS_2S_1ISSIPPI$.)
Considere qualquer arranjo das letras. Os quatro Ss ocupam certas posições no arranjo. Rearrumar esses Ss resultaria em não alterar o resultado final, de forma que um mesmo arranjo tem 4! possibilidades de ser escrito. A fim de evitar contar esse arranjo mais de uma vez, devemos dividir 11! por 4!, que são as formas de trocar os Ss de posição. Analogamente, precisamos dividir por 4! a fim de evitar a contagem repetida por parte dos Is e por 2! para tratar os dois Ps. O número de permutações distintas é, portanto

$$\frac{11!}{4!4!2!}$$

Em geral, suponha que existam n objetos dos quais um conjunto de n_1 é igual entre si, outro conjunto de n_2 é também igual entre si, e assim por diante até n_k objetos que são iguais entre si. O número de permutações distintas desses n objetos é

$$\frac{n!}{(n_1!)(n_2!)\dots(n_k!)}$$

Exercício:

3.1 Quantas permutações distintas são possíveis com as letras da palavra MONOFÁSICOS?

Permutações e Combinações com Repetições

Nossas fórmulas para $P(n, r)$ e $C(n, r)$ assumem que arranjamos ou escolhemos r objetos dentre n objetos disponíveis usando cada objeto apenas uma vez. Portanto, $r \leq n$. Suponha, no entanto, que podemos reutilizar os n objetos tantas vezes quantas desejarmos. Por exemplo, construímos palavras usando as 26 letras do alfabeto; as palavras podem ser tão grandes quanto quisermos, e as letras podem ser repetidas.

Ou desejamos sortear cartas de um baralho, repondo-as após cada sorteio; poderemos sortear quantas cartas desejarmos com cartas sendo sorteadas repetidamente. Podemos continuar falando de permutações e combinações de r objetos n a n, mas com a possibilidade de repetições, r pode ser maior que n.
Contar o número de permutação de r objetos n a n objetos distintos com repetições (ou reposição) segue da seguinte maneira: temos n opções para a escolha do primeiro objeto e, uma vez que podemos repetir esse objeto, n opções para a escolha do segundo objeto, n opções para o terceiro e assim por diante. Portanto, o número de permutações de r objetos n a n com a possibilidade de repetições é n^r.
Para determinar o número de combinações de r objetos n a n com a possibilidade de repetições, usamos uma ideia um pouco mais elaborada.

Exemplo 4: Um joalheiro, ao projetar um broche, decidiu usar cinco pedras escolhidas entre diamantes, rubis e esmeraldas. De quantas maneiras as pedras podem ser escolhidas?
Como não estamos interessados na ordem em que as pedras serão arranjadas, este é um problema de combinação, e não um problema de permutação. Desejamos obter o número de combinações de cinco objetos três a três, permitindo repetições. O broche pode ser formado de um diamante, três rubis e uma esmeralda, por exemplo, ou cinco diamantes. Podemos representar essas possibilidades representando as pedras escolhidas com asteriscos e a inclusão de separadores entre elas a fim de representar a distribuição entre os três tipos de pedras. Por exemplo, podemos representar a escolha de um diamante, três rubis e uma esmeralda por

$$*|***|*$$

enquanto que a escolha de cinco diamantes, nenhum rubi e nenhuma esmeralda pode ser representada por

$$*****||$$

Estamos, portanto, trabalhando com sete posições (para as cinco pedras e os dois separadores), e as diferentes escolhas são determinadas por quais posições são ocupadas por asteriscos. Estamos contando, portanto, o número de maneiras de escolher cinco itens dentre sete, que é $C(7, 5)$ ou

$$\frac{7!}{5!2!}$$

Em geral, se usarmos o mesmo esquema para representarmos uma combinação de r objetos dentre n objetos distintos com a possibilidade de repetições, existirão $n - 1$ separadores para indicar o número de cópias de cada um dos n objetos. Isto nos dá $r + (n - 1)$ posições a ser preenchidas, e desejamos obter o número de maneiras de selecionar r dessas posições. Portanto, o valor que desejamos é

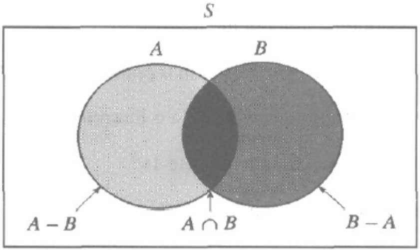
$$C(r + n - 1, r) = \frac{(r + n - 1)!}{r!(r + n - 1 - r)!} = \frac{(r + n - 1)!}{r!(n - 1)!}$$

Exercícios:

3.2 Seis crianças escolhem um pirulito cada, dentre pirulitos vermelhos, amarelos e verdes. De quantas maneiras essa escolha pode ser feita?

Princípio da Inclusão e Exclusão

A fim de desenvolvermos o Princípio da Inclusão e Exclusão, precisamos antes perceber que se A e B são quaisquer conjuntos de um conjunto universo S, então $A - B$, $B - A$ e $A \cap B$ são conjuntos mutuamente disjuntos (veja a Figura abaixo). Por exemplo, se $x \in A - B$, então $x \notin B$, pontanto $x \notin A \cap B$ e além disso, também podemos dizer algo a respeito da união de tais conjuntos.



Exemplo 5: Qual o outro nome do conjunto $(A - B) \cup (B - A) \cup (A \cap B)$?
Pela Observação 2 da Aula 1 (estendida a três conjuntos finitos disjuntos)

$$|(A - B) \cup (B - A) \cup (A \cap B)| = |A - B| + |B - A| + |A \cap B| \ \textbf{(1)}$$

E também valem as igualdades:
$|A - B| = |A| - |A \cap B|$ e $|B - A| = |B| - |A \cap B|$
Usando essas expressões na equação **(1)**, obtemos

$$|A \cup B| = |A| - |A \cap B| + |B| - |A \cap B| + |A \cap B|$$

ou

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| \ \textbf{(2)}$$

A equação **(2)** é a versão para dois conjuntos do Princípio da Inclusão e Exclusão. Este nome decorre do fato de que, quando contamos o número de elementos na união de A e B, precisamos "incluir" (contar) o número de elementos em A e o número de elementos em B, mas devemos "excluir" (subtrair) os elementos que pertencem a $A \cap B$ para evitar contá-los duas vezes.

Exemplo 6: Um entrevistador de opinião pública entrevista 35 pessoas que optam pelo referendum 1, referendum 2 ou por ambos, e conclui que 14 entrevistados escolheram o referendum 1 e 26 o referendum 2. Quantos entrevistados escolheram ambos?
Seja A o conjunto dos entrevistados que escolheram o referendum 1, e B o conjunto dos entrevistados que escolheram o referendum 2; assim, sabemos que

$$|A \cup B| = 35 \; |A| = 14 \; |B| = 26$$

Da equação **(2)**,

$$|A \cap B| = |A| + |B| - |A \cup B| = 14 + 26 - 35 = 5$$

portanto, cinco entrevistados escolheram ambos.
A Equação **(2)** pode ser facilmente estendida para o caso de três conjuntos, como mostrado a seguir:

$$\begin{aligned} |A \cup B \cup C| &= |A \cup (B \cup C)| = |A| + |B \cup C| - |A \cap (B \cup C)| \\ &= |A| + |B| + |C| - |B \cap C| - |(A \cap B) \cup (A \cap C)| \\ &= |A| + |B| + |C| - |B \cap C| - \\ &(|(A \cap B)| + |(A \cap C)| - |A \cap B \cap C|) \\ &= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| \end{aligned}$$

Portanto, a versão do Princípio da Inclusão e Exclusão para três conjuntos é
$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$ **(3)**
Exemplo 7: Uma quitanda vende apenas brócolis, cenoura e quiabo. Em determinado dia, a quitanda atendeu 208 pessoas. Se 114 pessoas compram apenas brócolis, 152 compraram cenouras, 17 compraram quiabos, 64 compraram brócolis e cenouras, 12 compraram cenouras e quiabos e 9 compraram todo os três, quantas pessoas compraram brócolis e quiabos?
Sejam

$$\begin{aligned} A &= \{\text{pessoas que compraram brócolis}\} \\ B &= \{\text{pessoas que compraram cenouras}\} \\ C &= \{\text{pessoas que compraram quiabos}\} \end{aligned}$$

Então $|A \cup B \cup C| = 208$, $|A| = 114$, $|B| = 152$, $|C| = 17$, $|A \cap B| = 64$, $|B \cap C| = 12$ e $|A \cap B \cap C| = 9$.
Da equação **(3)**,

$$|A \cap C| = 114 + 152 + 17 - 64 - 12 + 9 - 208 = 8$$

Na equação **(2)**, somamos o número de elementos nos conjuntos simples, e subtraímos o número de elementos da interseção de ambos os conjuntos. Na equação **(3)**, somamos o número de elementos do conjunto simples, subtraímos o número de elementos das interseções dos conjuntos dois a dois e somamos, novamente, o número de elementos da interseção dos três conjuntos. Isto parece sugerir um padrão: Se tivermos n conjuntos, devemos somar o número de elementos dos conjuntos simples subtrair o número de elementos das interseções dos conjuntos dois a dois, somar o número de elementos das interseções dos conjuntos três a três, subtrair o número de elementos das interseções dos conjuntos quatro a quatro, e assim por diante. Isto nos leva à forma geral do Princípio da Inclusão e Exclusão:

Definição (Princípio da Inclusão e Exclusão)

Dados dos conjuntos finitos $A_1, \ldots, A_n$, $n \geq 2$, então,

$$|A_1 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{1 \leq i \leq n} |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \ldots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap \ldots \cap A_n|$$

(4)

Na equação **(4)**, a notação

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j|$$

por exemplo, indica a soma dos números de elementos de todas as interseções da forma $A_i \cap A_j$, onde i e j podem conter quaisquer valores entre 1 e n, desde que $i < j$. Para $n = 3$, temos $|A_1 \cap A_2|(i = 1, j = 2)$, $|A_1 \cap A_3|(i = 1, j = 3)$ e $|A_2 \cap A_3|(i = 2, j = 3)$. Isto está de acordo com a equação **(3)**, onde $A_1 = A$, $A_2 = B$ e $A_3 = C$.

O Princípio da Casa do Pombo

O Princípio da Casa do Pombo recebe este nome estranho devido à seguinte ideia: Se mais do que k pombos pousarem em k casas de pombos, então pelo menos uma casa de pombo ficará com mais de um pombo. Apesar de isto parecer imediatamente óbvio, podemos construir uma prova por contradição. Suponha que mais do que k pombos pousaram em k casas de pombos. Se cada casa contiver no máximo um pombo, teríamos, ao todo, no máximo k pombos, uma contradição. Enunciaremos, agora, o Princípio da Casa do Pombo de uma forma menos pitoresca.

Definição (Princípio da Casa do Pombo)

Se mais do que k itens são distribuídos entre k caixas, então pelo menos uma caixa conterá mais de um item.

Escolhendo-se apropriadamente os itens e as caixas, podemos resolver uma grande gama de problemas de contagem.

Exemplo 8: Quantas pessoas precisam estar no mesmo quarto para se garantir que pelo menos duas pessoas têm o sobrenome iniciado pela mesma letra?

Existem 26 letras no alfabeto (caixas). Se tiverem 27 pessoas, então haverá 27 letras iniciais (itens) que devem ser distribuídas entre as 26 caixas; por isso, pelo menos uma caixa conterá mais de um item.

Exercício:

3.3 Quantas vezes um único dado precisa ser lançado para termos certeza de que obtivemos algum valor duas vezes?

Bibliografia

[1] GERSTING, J. L. *Fundamentos Matemáticos para a Ciência da Computação*, LTC, 5a. ed., Rio de Janeiro, 2004.
[2] SCHEINERMAN, E. R. *Matemática discreta. Uma introdução*, Thomson Pioneira, São Paulo, 2003.

Araraquara, 9 de setembro de 2021.