

Б. ГЕЛБАУМ, ДЖ. ОЛМСТЕД

# КОНТРПРИМЕРЫ В АНАЛИЗЕ

*Перевод с английского*

Б. И. ГОЛУБОВА

*Под редакцией*

П. Л. УЛЬЯНОВА

ИЗДАТЕЛЬСТВО • МИР • МОСКВА 1967



BERNARD R. GELBAUM

*University of California, Irvine*

JOHN M. H. OLMSTED

*Southern Illinois University*

## COUNTEREXAMPLES IN ANALYSIS

**HOLDEN-DAY, SAN FRANCISCO, LONDON, AMSTERDAM, 1964**

В книге рассматриваются многочисленные примеры из математического анализа и теории функций действительного переменного, цель которых — обратить внимание на ряд „опасных“ вопросов, на которые неопытный читатель может дать неправильные ответы. Такие контрпримеры систематически подобраны авторами, и поэтому книга может служить очень хорошим дополнением к обычным учебным курсам. Часто авторы не дают подробных доказательств, ограничиваясь лишь основными идеями построения соответствующих примеров. Это позволит читателю активно включиться в изучение материала.

Книга будет полезна студентам университетов, пединститутов и вузов, изучающим математический анализ и теорию функций.

*Редакция литературы по математическим наукам*

## ОТ РЕДАКТОРА

Предлагаемая вниманию читателя книга „Контрпримеры в анализе“ написана американскими математиками Б. Р. Гелбаумом и Дж. М. Олмстедом. В ней приведены многочисленные примеры из математического анализа и теории функций действительного переменного, а также — в небольшом количестве — примеры из топологии и функционального анализа. Многие из них хорошо известны и могут быть найдены в тех или иных источниках. Однако главным достоинством книги является именно то, что в ней собрано вместе большое количество полезных и интересных примеров.

Авторы называют примеры, помещенные в книге, контрпримерами, поясняя в предисловии различие между этими понятиями. Однако эти пояснения довольно неопределены, и если их придерживаться, то многие результаты по желанию можно отнести как к примерам, так и к контрпримерам. По нашему мнению, основная цель большинства разбираемых примеров (по терминологии авторов — контрпримеров) состоит в том, чтобы обратить внимание студентов (и вообще читателей), изучающих математический анализ и теорию функций, на ряд „опасных“ вопросов и моментов, при встрече с которыми, не имея достаточного опыта, легко можно дать неправильные ответы или же неправильно представлять себе истинную суть дела. Этим, в частности, объясняется и заглавие книги — „Контрпримеры в анализе“.

В книге наряду с совсем простыми примерами имеется довольно много и сложных. Изложение зачастую ведется так, что подробных доказательств авторы не дают, а указывают лишь основные моменты в построении соответствующих примеров, оставляя читателю подробные выкладки и доказательства. Следует также сказать, что авторы весьма часто используют те или иные определения без напоминания и ука-

зания их даже в том случае, когда они приведены в книге, но совсем в другой главе и значительно раньше. Поэтому от читателя книги требуется определенное знакомство с основами математического анализа и теории функций. Для понимания многих разделов книги достаточно знания втузовского курса математики, но некоторые другие разделы требуют математической подготовки в объеме первых трех курсов математических факультетов университетов. В силу сказанного предлагаемая книга не является учебником, по которому следует начинать изучение анализа.

Заметим еще, что в книге не всегда отмечаются авторы примеров, и это частично оправдывается тем, что иногда их вообще трудно установить. Тем не менее нам представляется, что авторов некоторых широко известных примеров следовало бы указать (например, называть именами их авторов функции Дирихле и Римана, о которых часто говорится в книге). В связи с этим в некоторых местах мы сделали соответствующие примечания. Кроме того, часть наших примечаний относится также к замеченным неточностям, если их исправление не было внесено нами в текст. О содержании книги можно судить по оглавлению, в которое вынесены полные формулировки приводимых примеров.

Мы думаем, что предлагаемая книга будет полезна широкому кругу лиц, изучающих математический анализ и теорию функций, особенно студентам-математикам университетов и педагогических вузов. Она будет, вероятно, небезынтересна и специалистам-математикам, в той или иной степени интересующимся анализом.

*П. Л. Ульянов*

## ПРЕДИСЛОВИЕ

„Истинно ли утверждение  $S$ ?“ — это, пожалуй, наиболее типичный для математики вопрос, когда утверждение имеет вид: „Каждый элемент класса  $A$  принадлежит также классу  $B$ :  $A \subset B$ “. Доказать, что подобное утверждение *истинно*, — значит доказать включение  $A \subset B$ . Доказать, что оно *ложно*, — значит найти элемент класса  $A$ , *не* принадлежащий классу  $B$ , иными словами, привести *контрпример*. Например, если утверждение  $S$  таково: „Каждая непрерывная функция дифференцируема в некоторой точке“, то множества  $A$  и  $B$  состоят соответственно из всех непрерывных функций и всех функций, дифференцируемых в некоторых точках. Известный же пример Вейерштрасса непрерывной, но нигде не дифференцируемой функции  $f$  (см. пример 8 гл. 3) является контрпримером для включения  $A \subset B$ , поскольку  $f$  является элементом  $A$ , *не* принадлежащим  $B$ . Рискуя впасть в чрезмерное упрощение, можно сказать, что математика (за исключением определений, утверждений и выкладок) состоит из двух частей — доказательств и контрпримеров, а математические открытия состоят в нахождении доказательств и построении контрпримеров. Большая часть математических книг посвящена доказательству верных утверждений. В настоящей книге мы обращаемся к контрпримерам для ложных утверждений.

Вообще говоря, примеры в математике бывают двух типов — иллюстративные примеры и контрпримеры. Первые показывают, почему то или иное утверждение имеет смысл, а вторые — почему то или иное утверждение лишено смысла. Можно утверждать, что *любой* пример является в то же время контрпримером для *некоторого* утверждения, а именно для утверждения, что такой пример невозможен. Мы не желаем придавать термину *контрпример* столь универсальный

смысл, но допускаем, что его значение достаточно широко, чтобы включить в себя все примеры, роль которых не ограничивается иллюстрацией верных теорем. Так, например, полином как пример непрерывной функции *не* есть контрпример, но полином как пример неограниченной или непериодической функции *является* контрпримером. Подобным же образом класс всех монотонных функций на ограниченном замкнутом интервале как класс интегрируемых функций *не* есть контрпример, однако этот же самый класс как пример функционального, но не векторного пространства *является* контрпримером.

Круг лиц, для которых предназначается эта книга, довольно широк и разнообразен. Большая часть материала доступна студентам, которые еще не закончили изучение начального курса анализа, а также может быть полезной преподавателям для иллюстрации ошибок, возможных при изучении анализа. Студенты старших курсов найдут в ней тонкости, которые обычно не рассматриваются в учебниках. Студенты-дипломники, готовящиеся к выпускным экзаменам, могут пополнить свой запас важных примеров, ограничивающих область справедливости изученных ранее теорем. Мы надеемся, что и специалисты-математики найдут некоторые места книги достойными внимания.

Собранные в этой книге контрпримеры почти целиком ограничиваются областью анализа, известной под названием теории функций действительного переменного. Однако среди них есть несколько примеров из области метрических и топологических пространств. В некоторых примерах используются также комплексные числа. Мы отнюдь не претендуем на полноту. Несомненно, многие читатели не встретят своих любимых примеров в этой книге, которая, нужно признаться, составлена по *нашему* собственному вкусу. Некоторые пропуски сделаны нами умышленно и объясняются либо недостатком места, либо *нашими* вкусами, другие вызывают и у нас искренние сожаления.

Эту книгу нельзя считать учебником, хотя она может служить полезным дополнением к некоторым учебным курсам. Если какое-либо место книги покажется читателю слишком трудным, мы советуем пропустить его и поискать что-либо более интересное дальше. Нами была предпринята попытка расположить материал по степени трудности при помощи

расположения глав, выделения подборок внутри глав и порядка примеров. Предполагается, что читатель знаком с затронутыми в книге вопросами, ввиду чего материал излагается с минимумом пояснений. Каждая глава начинается с введения, где приводятся обозначения, терминология и определения, а также даются формулировки важнейших теорем. В конце книги помещена обширная библиография, на которую делаются частые ссылки в тексте. Эти ссылки предназначаются как для того, чтобы помочь читателю в отыскании дальнейшей информации, так и для того, чтобы воздать дань уважения авторам упомянутых сочинений. Если указания на авторство того или иного контрпримера отсутствуют, мы искренне сожалеем об этом. Все эти пропуски носят непреднамеренный характер.

В заключение мы выражаем надежду, что читатели этой книги получат столько же удовольствия и пользы, как и ее авторы. Наш собственный опыт дает нам основание утверждать, что математическая задача, решенная при помощи контрпримера, столь же увлекательна, как острая захватывающая пьеса. По нашему мнению, многие из самых глубоких и изящных математических открытий относятся к этому жанру.

Эрвин, Калифорния  
Карбондейл, Иллинойс

*Б. Р. Г.  
Дж. М. Х. О.*



## ГЛАВА 1

# СИСТЕМА ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

### Введение

Мы начинаем с введения некоторых основных определений и обозначений анализа, которые являются существенными для данной главы. Эти определения и обозначения даются в сокращенной форме с минимумом пояснений. Для более подробного ознакомления с ними следует обратиться к книгам [16], [17], [19] и [31] (см. библиографию).

Если  $A$  — произвольное множество элементов, то утверждение „*элемент  $a$  принадлежит множеству  $A$* “ символически записывается так:  $a \in A$ . Запись  $a \notin A$  означает, что элемент  $a$  не принадлежит множеству  $A$ . Если  $A$  и  $B$  — множества, то утверждение „ *$A$  является подмножеством множества  $B$* “ (символически  $A \subset B$ ) означает, что каждый элемент  $x$  множества  $A$  принадлежит и множеству  $B$ ; последнее равносильно импликации  $x \in A \Rightarrow x \in B$ <sup>1)</sup>. Выражение *тогда и только тогда* мы часто будем заменять символом  $\Leftrightarrow$ . Для удобства элементы множеств часто будут называться *точками*. Запись  $\{a, b, c, \dots\}$  обозначает множество, состоящее из элементов  $a, b, c, \dots$ . Символ  $\{\dots | \dots\}$  используется для обозначения множества, общий элемент которого записывается между первой фигурной скобкой и вертикальной чертой, а определяющие это множество свойства записываются между вертикальной чертой и второй фигурной скобкой. Объединение и пересечение двух множеств  $A$  и  $B$  определяются следующим образом:

$$A \cup B \equiv \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\},$$

$$A \cap B \equiv \{x \mid x \in A, x \in B\},$$

---

<sup>1)</sup> Знак  $\Rightarrow$  следует понимать как „влечет“. — Прим. перев.

при этом запятая в последней формуле заменяет союз „и“. Разностью множеств  $A$  и  $B$  называется множество

$$A \setminus B \equiv \{x \mid x \in A, x \notin B\}.$$

Если рассматриваются множества, которые все являются подмножествами некоторого основного, универсального множества  $S$ , то разность  $S \setminus A$  называется дополнением множества  $A$  и обозначается символом  $A'$ . Вообще же разность  $A \setminus B$  называется дополнением множества  $B$  относительно  $A$ .

Для обозначения пустого множества, т. е. множества, не содержащего ни одного элемента, используется символ  $\emptyset$ . Если  $A$  и  $B$  — два непустых множества, то их декартовым произведением  $A \times B$  называется множество всех упорядоченных пар  $(a, b)$ , где  $a \in A$ , а  $b \in B$ , так что

$$A \times B \equiv \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

Если  $(a, b) \in A \times B$ , то  $a$  называется первой координатой элемента  $(a, b)$ , а  $b$  — его второй координатой; первая и вторая координаты также называются проекциями. Любое подмножество  $\rho$  произведения  $A \times B$  называется отношением из  $A$  в  $B$ . Такое отношение  $f$  называется функцией из  $A$  в  $B$ , если никакие два различных элемента из  $f$  не имеют одинаковых первых координат. Условимся обозначать выражения „существует“ или „существуют“ квантором существования  $\exists$ , а слова „такие, что“ — символом  $\exists$ . Тогда область (или множество) определения  $D = D_f$  и область (или множество) значений  $R = R_f$  функции  $f$  определяются так:

$$D = D_f \equiv \{x \mid \exists y \exists (x, y) \in f\},$$

$$R = R_f \equiv \{y \mid \exists x \exists (x, y) \in f\}.$$

Будем говорить, что функция  $f$  (или отображение) определена на  $A$ , если ее множество определения совпадает с  $A$ ; в общем же случае будем говорить, что  $f$  определена в  $A$ . Будем называть  $f$  функцией со значениями на  $B$ , если ее множество значений совпадает с  $B$ ; в общем же случае будем говорить о функции  $f$  со значениями в  $B$ .

Говорят, что функция  $f$  из  $A$  в  $B$  осуществляет взаимно однозначное соответствие между  $A$  и  $B$ , если она

является функцией, определенной на  $A$  со значениями на  $B$  и притом такой, что никакие два различных элемента из  $f$  не имеют одинаковых вторых координат. Значениями функции  $f$  называются элементы множества  $R_f$ . Если функция  $f$  осуществляет взаимно однозначное отображение множества  $A$  на множество  $B$ , то функция

$$f^{-1} = \{(x, y) | (y, x) \in f\},$$

которая получается, если поменять местами область определения и область значений функции  $f$ , называется обратной к  $f$ .

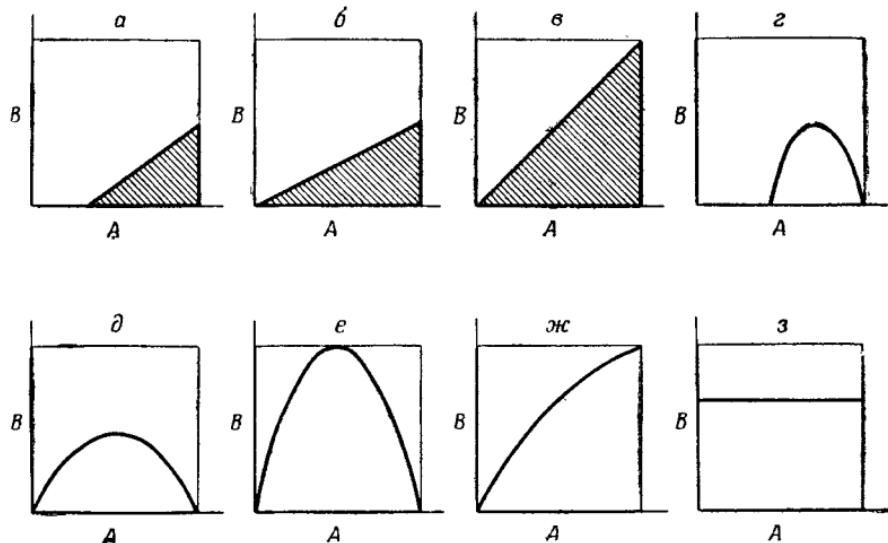


Рис. 1.

**а** — отношение из  $A$  со значениями в  $B$ ; **б** — отношение на  $A$  со значениями в  $B$ ; **в** — отношение на  $A$  со значениями на  $B$ ; **г** — функция из  $A$  со значениями в  $B$ ; **д** — функция из  $A$  со значениями в  $B$ ; **е** — функция на  $A$  со значениями на  $B$ ; **ж** — взаимно однозначное соответствие; **з** — постоянная функция.

Постоянной функцией называется функция, множество значений которой состоит из одной точки.

Различные типы отношений и функций указаны на рис. 1. Во всех случаях в качестве множеств  $A$  и  $B$  взят замкнутый единичный интервал  $[0, 1]$ , состоящий из всех действительных чисел  $x$ , таких, что  $0 \leq x \leq 1$ .

Пусть  $f$  — функция, определенная на  $A$  и принимающая значения в  $B$ . Мы будем записывать ее двумя следующими

способами:

$$f: A \rightarrow B,$$

$$A \xrightarrow{f} B.$$

Если  $x$  — произвольный элемент множества  $A$ , то существует в точности один элемент  $y$  множества  $B$ , такой, что  $(x, y) \in f$ . Этот элемент  $y$  множества  $B$  мы будем обозначать символом  $f(x)$  и записывать

$$y = f(x).$$

Другие способы обозначения функции:

$$f: y = f(x), \quad x \in A, \quad y \in B$$

$$f: x \in A, \quad f(x) \in B;$$

$$y = f(x); \quad x \in A, \quad y \in B.$$

Если же из контекста ясно, что обозначение  $f(x)$  представляет *функцию*, а не просто одно из ее значений, то мы будем пользоваться такой записью:

$$f(x): x \in A.$$

Если  $f$  — функция с областью определения  $D$ , а  $S$  является подмножеством  $D$ , то сужением функции  $f$  на  $S$  называется функция  $g$ , область определения которой есть  $S$  и такая, что

$$x \in S \Rightarrow g(x) = f(x).$$

Множество значений сужения  $f$  на  $S$  мы будем обозначать символом  $f(S)$ . Таким образом,

$$f(S) = \{y \mid \exists x \in S \exists f(x) = y\}.$$

Если  $g$  является сужением  $f$ , то  $f$  мы будем называть *протожением*  $g$ .

Пусть  $f$  и  $g$  — такие функции, что множество значений  $g$  является подмножеством области определения  $f$ . Тогда композицией  $f \circ g$  функций  $f$  и  $g$  называется функция, значение которой во всякой точке  $x$  области определения функции  $g$  есть  $f(g(x))$ ; короче, композицией функции  $f(u)$  и функции  $u = g(x)$  называется функция  $y = f(g(x))$ <sup>1)</sup>. (Следует

<sup>1)</sup> В советской математической литературе вместо термина „композиция“ часто используется термин „суперпозиция“. — Прим. ред.

заметить, что композиция  $f$  и  $g$ , вообще говоря, не совпадает с композицией  $g$  и  $f$ ; контрпример:  $(x+1)^2 \neq x^2 + 1$ .)

Если  $A$  — непустое множество, то всякая функция, определенная в (на)  $A \times A$  со значениями в  $A$ , называется бинарной операцией в (на)  $A$ . В классической арифметике существуют две основные бинарные операции: сложение и умножение. Многими свойствами этих арифметических операций обладают и операции в более абстрактных множествах, поэтому последние сохраняют те же названия. Если бинарная операция называется сложением и если  $z = F((x, y))$ , то используется и обычная запись  $z = x + y$ . Если бинарная операция  $G$  называется умножением и если  $z = G((x, y))$ , то  $z$ , как обычно, записывают в виде  $z = xy$  или  $z = x \cdot y$ .

**Определение I.** Непустое множество  $F$  называется полем, если на  $F$  определены две бинарные операции, называемые сложением и умножением, причем

А. для сложения:

(i) справедлив закон ассоциативности

$$x, y, z \in F \Rightarrow x + (y + z) = (x + y) + z,$$

(ii)  $\exists$  элемент 0 множества  $F$ , такой, что

$$x \in F \Rightarrow x + 0 = x,$$

(iii)  $x \in F \Rightarrow \exists (-x) \in F \exists x + (-x) = 0$ ,

(iv) справедлив закон коммутативности

$$x, y \in F \Rightarrow x + y = y + x;$$

Б. для умножения:

(i) справедлив закон ассоциативности

$$x, y, z \in F \Rightarrow x(yz) = (xy)z,$$

(ii)  $\exists$  элемент 1 множества  $F$ , такой, что  $1 \neq 0$  и

$$x \in F \Rightarrow x \cdot 1 = x,$$

(iii)  $x \in F, x \neq 0 \Rightarrow \exists x^{-1} \in F \exists x \cdot x^{-1} = 1$ ,

(iv) справедлив закон коммутативности

$$x, y \in F \Rightarrow xy = yx;$$

С. для сложения и умножения:

справедлив закон дистрибутивности (точнее умножение дистрибутивно относительно сложения)

$$x, y, z \in F \Rightarrow x(y+z) = xy + xz.$$

Элемент 0 поля  $F$  из п. А(ii) называется нулем (или аддитивной единицей) поля  $F$ . Элемент  $(-x)$  поля  $F$  из п. А(iii) называется противоположным (или аддитивным обратным) для  $x$ . Бинарная операция  $x - y$ , определенная формулой  $x - y \equiv x + (-y)$ , называется вычитанием. Элемент 1 из п. В(ii) называется единицей (или мультипликативной единицей) поля  $F$ . Элемент  $x^{-1}$  поля  $F$  из п. В(iii) называется обратным (или мультипликативным обратным) для  $x$ . Бинарная операция  $x/y$ , определенная формулой  $x/y \equiv xy^{-1}$ , где  $y \neq 0$ , называется делением. Деление является бинарной операцией в  $F$  и не является бинарной операцией на  $F$ , так как „деление на нуль“ исключается.

Непустое множество  $G$  называется группой, если на  $G$  определена бинарная операция, которую мы обозначим знаком  $+$  и назовем сложением, причем эта операция обладает свойствами А(i), (ii) и (iii) (в этом случае группа называется *аддитивной*). Если же, кроме того, справедлив закон коммутативности А(iv), то  $G$  называется абелевой или коммутативной группой. Таким образом, всякое поле относительно сложения образует абелеву аддитивную группу. А множество ненулевых элементов поля образует абелеву *мультипликативную* группу относительно умножения.

*Определение II. Упорядоченным полем называется поле  $F$ , содержащее подмножество  $P$ , такое, что*

(i)  $P$  замкнуто относительно сложения, т. е.

$$x \in P, \quad y \in P \Rightarrow x + y \in P;$$

(ii)  $P$  замкнуто относительно умножения, т. е.

$$x \in P, \quad y \in P \Rightarrow xy \in P;$$

(iii)  $x \in F \Rightarrow$  справедливость и притом только одного из следующих трех утверждений:

$$x \in P; \quad x = 0; \quad -x \in P.$$

Элемент  $x$  поля  $F$  называется положительным, если  $x \in P$ , и отрицательным, если  $-x \in P$ .

Неравенства в упорядоченном поле определяются в терминах принадлежности к  $P$ . Например,

$$x < y \Leftrightarrow y - x \in P;$$

$$x \geq y \Leftrightarrow x - y \in P \quad \text{или} \quad x = y.$$

Если  $F$  — упорядоченное поле, то функция  $f$ , определенная в  $F$  и принимающая значения в  $F$ , называется **возрастающей** (или **неубывающей**) на некотором подмножестве  $A$  своей области определения, если

$$x, y \in A, \quad x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y).$$

Функция  $f$  называется **строго возрастающей** на  $A$ , если

$$x, y \in A, \quad x < y \Rightarrow f(x) < f(y).$$

Термины **убывающая** (или **невозрастающая**) и **строго убывающая** функция определяются аналогично. Функция называется **монотонной** на некотором множестве, если она является возрастающей или убывающей на этом множестве. Нетрудно дать и определение **строго монотонной** функции.

Если  $F$  — упорядоченное поле, то **абсолютная величина**  $|x|$  элемента  $x \in F$  полагается равной  $x$  в случае  $x \geq 0$  и  $-x$  в случае  $x < 0$ .

Ниже приводится несколько стандартных свойств абсолютной величины (где  $x, y, \varepsilon$  — элементы упорядоченного поля  $F$ ):

- (i)  $|x| \geq 0; |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0;$
- (ii)  $|xy| = |x| \cdot |y|;$
- (iii) если  $\varepsilon > 0$ , то  $|x| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < x < \varepsilon$ ;
- (iv) неравенство треугольника:

$$|x+y| \leq |x| + |y|;$$

(v)  $|x| = \sqrt{x^2}$ , т. е.  $|x|$  есть единственный элемент множества  $P \cup \{0\}$ , квадрат которого равен  $x^2$ ;

- (vi)  $||x| - |y|| \leq |x-y|$ .

Если  $F$  — упорядоченное поле и  $a, b \in F$ ,  $a < b$ , то следующие множества называются **кoneчными** или **ограниченными** интервалами:

**открытый:**  $(a, b) \equiv \{x \mid x \in F, a < x < b\}$ ,

**замкнутый:**  $[a, b] \equiv \{x \mid x \in F, a \leq x \leq b\}$ ,

**полуоткрытый**  
(или полузамкнутый):  $[a, b) \equiv \{x \mid x \in F, a \leq x < b\}$ ,

**полузамкнутый**  
(или полуоткрытый):  $(a, b] \equiv \{x \mid x \in F, a < x \leq b\}$ .

Бесконечные или неограниченные интервалы определяются подобным же образом:

открытый:	$(a, +\infty) \equiv \{x   x > a\},$
открытый:	$(-\infty, a) \equiv \{x   x < a\},$
замкнутый:	$[a, +\infty) \equiv \{x   x \geq a\},$
замкнутый:	$(-\infty, a] \equiv \{x   x \leq a\},$
открытый и замкнутый:	$(-\infty, +\infty) \equiv F.$

Окрестностью точки  $a$  упорядоченного поля  $F$  называется открытый интервал вида  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ , где  $\varepsilon$  — положительный элемент поля  $F$ . Этую окрестность можно записать также в терминах абсолютных величин:

$$N(a, \varepsilon) \equiv (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \equiv \{x | |x - a| < \varepsilon\}.$$

Проколотой окрестностью точки  $a$  называется окрестность точки  $a$ , из которой исключена сама точка  $a$ . Таким образом, проколотая окрестность  $D(a, \varepsilon)$  точки  $a$  для некоторого  $\varepsilon > 0$  определяется так:

$$D(a, \varepsilon) \equiv \{x | 0 < |x - a| < \varepsilon\}.$$

Бинарные операции  $\max$  и  $\min$  на  $F$  определяются следующим образом:

$$\begin{aligned}\max(x, y) &\equiv \begin{cases} x, & \text{если } x \geq y, \\ y, & \text{если } x < y; \end{cases} \\ \min(x, y) &\equiv \begin{cases} y, & \text{если } x \geq y, \\ x, & \text{если } x < y. \end{cases}\end{aligned}$$

Если  $F$  — упорядоченное поле,  $a \in F$  и  $x \leq a$  для всякого элемента  $x$  непустого множества  $A$  точек поля  $F$ , то  $a$  называется верхней гранью  $A$ . Непустое множество в  $F$  называется ограниченным сверху в  $F$ , если в  $F$  существует элемент, который является верхней гранью этого множества. Если  $s$  является верхней гранью  $A$  и если  $s$  меньше всякой другой верхней грани  $A$ , то  $s$  называется точной верхней гранью  $A$  и обозначается так:  $s = \sup(A) = \sup A$ . Аналогично определяются нижняя грань, ограниченность снизу и точная нижняя грань, обозначаемая через  $t = \inf(A) = \inf A$ , непустого множества  $A$ .

**Определение III.** Полным упорядоченным полем называется упорядоченное поле  $F$ , в котором для каждого непустого подмножества, ограниченного сверху в  $F$ , существует точная верхняя грань.

Любые два полных упорядоченных поля  $F$  и  $F'$  изоморфны в том смысле, что существует взаимно однозначное соответствие  $x \leftrightarrow x'$ , где  $x \in F$  и  $x' \in F'$ , сохраняющее бинарные операции и порядок, т. е.

$$(x+y)' = x' + y', \quad (xy)' = x'y', \quad x < y \Leftrightarrow x' < y'.$$

(Доказательство см. в [37], стр. 128—131.) С точки зрения структуры система действительных чисел однозначно описывается следующим определением:

**Определение IV.** Системой действительных чисел  $R$  называется полное упорядоченное поле.

Функция, отображающая множество  $A$  на  $B$ , называется действительнозначной, если  $B \subset R$ ; если же  $A \subset R$ , то эта функция называется функцией действительного переменного.

Функция  $\operatorname{sgn} x$  является действительнозначной функцией действительного переменного и определяется следующим образом:  $\operatorname{sgn} x \equiv 1$ , если  $x > 0$ ;  $\operatorname{sgn} x \equiv -1$ , если  $x < 0$ ;  $\operatorname{sgn} 0 \equiv 0$ .

Если  $S$  — произвольное непустое множество, а  $A$  — любое его подмножество, то характеристическая функция  $\chi_A$  множества  $A$  является действительнозначной функцией и определяется следующим образом:  $\chi_A(x) \equiv 1$ , если  $x \in A$ , и  $\chi_A(x) \equiv 0$ , если  $x \in A' = S \setminus A$ .

**Определение V.** Индуктивным множеством в упорядоченном поле  $F$  называется множество  $A$ , обладающее следующими двумя свойствами:

- (i)  $1 \in A$ ;
- (ii)  $x \in A \Rightarrow x+1 \in A$ .

**Определение VI.** Элемент  $p$  упорядоченного поля  $F$  называется натуральным числом, если  $p$  является элементом каждого индуктивного множества поля  $F$ . Множество всех натуральных чисел поля  $F$  обозначается символом  $N$ .

Из этого определения вытекают известные свойства натуральных чисел (см. [37], стр. 17—18), в том числе

**Основная теорема индукции.** Если  $S$  является индуктивным множеством, состоящим из натуральных чисел, то  $S = N$ .

Если  $N$  и  $N^*$  — множества всех натуральных чисел двух упорядоченных полей  $F$  и  $F^*$  соответственно, то  $N$  и  $N^*$  изоморфны (см. [37], стр. 34—35).

**Определение VII.** Элемент  $x$  упорядоченного поля  $F$  называется целым числом, если  $x \in N$ ,  $x = 0$  или  $-x \in N$ . Элемент  $x$  упорядоченного поля называется рациональным числом, если существуют целые числа  $m$  и  $n$ ,  $n \neq 0$ , такие, что  $x = m/n$ .

Множество всех рациональных чисел упорядоченного поля  $F$  вместе с операциями сложения и умножения и порядком поля  $F$  также является упорядоченным полем. Оно обозначается символом  $Q$ . (Любые два упорядоченных поля рациональных чисел изоморфны; см. [37], стр. 67.)

**Определение VIII.** Кольцом называется непустое множество  $B$  вместе с двумя бинарными операциями на  $B$ , называемыми сложением и умножением, такими, что выполнены требования пунктов A(i), (ii), (iii), (iv), B(ii), С из определения I, а также второй закон дистрибутивности

$$C'. \quad x, y, z \in B \Rightarrow (x + y)z = xz + yz.$$

**Определение IX.** Областью целостности называется кольцо  $D$ , в котором выполнены требования B(ii) и (iv) из определения I, а также требование

$$D. \quad x \in D, y \in D, x \neq 0, y \neq 0 \Rightarrow xy \neq 0.$$

Иными словами, выполнены все аксиомы определения I, за исключением B(iii), которая заменена ослабленным требованием D.

Тот факт, что требование D является ослабленной формой (т. е. следствием) требования B(iii), можно доказать следующим образом. Предположим, что существуют  $x \neq 0$  и  $y \neq 0$ , такие, что  $xy = 0$ . Тогда  $x^{-1}(xy) = (x^{-1}x)y = 1y = y \neq 0$ , в то время как  $x^{-1}0 = 0$ . (Противоречие.)

В любом кольце требование  $D$  равносильно следующему утверждению:

$D'$ . Закон сокращения.  $xy = xz, x \neq 0 \Rightarrow y = z.$

(В самом деле,  $D \Rightarrow D'$ , так как  $xy = xz \Leftrightarrow x(y - z) = 0$ ; обратно,  $D' \Rightarrow D$ , ибо равенство  $xy = 0$  можно записать в виде  $xy = x0$ .)

Множество всех целых чисел упорядоченного поля  $F$  вместе с операциями сложения и умножения этого поля является областью целостности и обозначается символом  $I$ . Всякие две области целостности, состоящие из целых чисел, изоморфны (см. [37], стр. 64).

Пусть  $f$  — функция, определенная в упорядоченном поле  $F$  и принимающая значения в нем же, и пусть  $a \in F$ . Тогда  $f$  называется непрерывной в точке  $a$ , если  $a$  принадлежит области определения  $D$  функции  $f$  и для всякого положительного элемента  $\varepsilon$  поля  $F$   $\exists$  положительный элемент  $\delta$  этого поля, такой, что неравенство  $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$  справедливо для каждого  $x$  из области  $D$ , удовлетворяющего неравенству  $|x - a| < \delta$ . С помощью символа  $\forall$ , называемого квантором общности и заменяющего слова „для всех, для произвольного, для любого или для каждого“, определение непрерывности функции  $f$  в точке  $a$  области  $D$  в терминах окрестностей можно записать следующим образом:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \exists f(D \cap N(a, \delta)) \subset N(f(a), \varepsilon).$$

Точка  $p$  упорядоченного поля  $F$  называется предельной точкой его непустого подмножества  $A$ , если всякая проколотая окрестность точки  $p$  содержит по крайней мере одну точку множества  $A$ , т. е.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists a \in D(p, \varepsilon) \cap A.$$

Пусть  $f$  — функция, области определения и значений которой содержатся в  $F$ ,  $a$  — предельная точка ее области определения  $D$  и  $b \in F$ . Тогда говорят, что предел  $f(x)$ , когда  $x$  стремится к  $a$ , существует и равен  $b$  и пишут

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b,$$

если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \exists f(D \cap D(a, \delta)) \subset N(b, \varepsilon).$$

Односторонние пределы определяются подобным же образом и обозначаются соответственно  $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$  и  $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$ .

Функция  $f$  с областью определения и областью значений, содержащимися в упорядоченном поле  $F$ , называется равномерно непрерывной на некотором подмножестве  $A$  ее области определения  $D$ , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \exists$$

$$x_1, x_2 \in A, |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

Если  $f$  — функция с областью определения и областью значений в упорядоченном поле  $F$ ,  $a$  — точка области определения  $D$  функции  $f$ , то символ  $f'(a)$  обозначает элемент поля  $F$ , определяемый равенством

$$f'(a) \equiv \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

при условии, что последний предел существует. Функция  $f'(x)$ , если она имеет смысл для всех  $x$  из области определения  $D$ , называется производной функции  $f$ .

Говорят, что функция  $f$  из упорядоченного поля  $F$  в  $F$  обладает свойством Коши на некотором интервале  $I$ , содержащемся в ее области определения, если

$$\forall a, b \in I, d \in F \exists a < b$$

и либо  $f(a) < d < f(b)$ , либо  $f(a) > d > f(b)$ , то

$$\exists c \exists a < c < b, f(c) = d.$$

Последовательностью называется функция, определенная на множестве натуральных чисел  $N$ . Ее значение, или член последовательности для данного натурального  $n$ , обычно обозначается через  $a_n$ , а сама последовательность — символом  $\{a_n\}$ . Последовательность  $\{a_n\}$ , члены которой принадлежат некоторому упорядоченному полю  $F$ , называется сходящейся к элементу  $b$  поля  $F$ , если

$$\forall \varepsilon \in P \exists N \in N \exists n > N \Rightarrow |a_n - b| < \varepsilon,$$

где  $P$  — множество всех положительных элементов поля  $F$ . В этом случае говорят также, что последовательность  $\{a_n\}$  имеет предел  $b$ . Последовательность называется расходящейся, если она не является сходящейся, т. е. если у нее

нет предела. Последовательность  $\{a_n\}$ , члены которой являются элементами некоторого упорядоченного поля  $F$ , называется фундаментальной или последовательностью Коши, если

$$\forall \epsilon \in P \exists N \in N \exists m, n > N \Rightarrow |a_m - a_n| < \epsilon.$$

Каждая сходящаяся последовательность является фундаментальной, а если  $F = R$ , то всякая фундаментальная последовательность сходится (см. [36], стр. 57, а также [52]\*, т. 1, стр. 84) <sup>1)</sup>.

Комплексным числом называется упорядоченная пара  $(x, y)$  действительных чисел  $x$  и  $y$ . Сложение и умножение комплексных чисел определяются следующим образом:

$$(x, y) + (u, v) \equiv (x + u, y + v),$$

$$(x, y)(u, v) \equiv (xu - yv, xv + yu).$$

Комплексные числа образуют поле  $C$  (см. [36], стр. 497) с нулем  $(0, 0)$  и единицей  $(1, 0)$ . В дальнейшем для записи комплексного числа  $(x, y)$  будет употребляться обычное обозначение  $x + iy$ .

## 1. Бесконечное поле, которое нельзя упорядочить

Если поле  $F$  не содержит подмножества  $P$ , обладающего тремя свойствами определения II, данного во введении, то говорят, что поле  $F$  нельзя упорядочить. Предварительно отметим, что, поскольку всякое упорядоченное поле бесконечно, никакое конечное поле не может быть упорядочено ([37], стр. 38).

Примером бесконечного поля, которое нельзя упорядочить, является поле  $C$  комплексных чисел. В самом деле, предположим, что существует подмножество  $P$  поля  $C$ , удовлетворяющее определению II. Рассмотрим число  $i \equiv (0, 1)$ . Так как  $i \neq (0, 0)$ , то существуют две взаимно исключающие друг друга возможности. Первая из них состоит в том, что  $i \in P$ . В этом случае  $i^2 = (-1, 0) \in P$  и, следовательно,  $i^4 = (1, 0) \in P$ . Но элементы  $i^2$  и  $i^4$  являются противоположными и, поскольку такие элементы не могут одновременно

<sup>1)</sup> Звездочкой отмечены работы, включенные в библиографию переводчиком. — Прим. перев.

принадлежать  $\mathbf{P}$  (см. определение II, (iii)), то мы получаем противоречие, что и требовалось. Вторая возможность состоит в том, что  $-i = (0, -1) \in \mathbf{P}$ . В этом случае  $(-i)^2 = (-1, 0) \in \mathbf{P}$  и, следовательно,  $(-i)^4 = (1, 0) \in \mathbf{P}$ , и мы получаем такое же противоречие, как и выше.

## 2. Поле, которое можно упорядочить двумя различными способами

Рассмотрим множество  $\mathbf{F}$  всех чисел вида  $r + s\sqrt{2}$ , где  $r$  и  $s$  — рациональные числа, и пусть операции сложения и умножения в  $\mathbf{F}$  те же, что и в системе действительных чисел  $\mathbf{R}$ , для которой  $\mathbf{F}$  является подмножеством. Тогда  $\mathbf{F}$  будет упорядоченным полем, если в качестве подмножества  $\mathbf{P}$  определения II взять множество всех элементов из  $\mathbf{F}$ , которые являются положительными элементами в  $\mathbf{R}$ , т. е. положительными действительными числами. Рассмотрим теперь другой способ упорядочения поля  $\mathbf{F}$ . Для этого определим множество  $\mathbf{B}$  следующим образом:

$$r + s\sqrt{2} \in \mathbf{B} \Leftrightarrow r - s\sqrt{2} \in \mathbf{P}.$$

Легко проверить, что множество  $\mathbf{B}$  удовлетворяет всем требованиям определения II.

Поле  $\mathbf{Q}$  рациональных чисел и поле  $\mathbf{R}$  действительных чисел являются упорядоченными полями, причем ни одно из них нельзя упорядочить двумя различными способами ([37], стр. 146).

## 3. Неполное упорядоченное поле

Упорядоченное поле  $\mathbf{Q}$  рациональных чисел не является полным. В этом можно убедиться следующим образом: множество  $A$  всех положительных рациональных чисел, квадраты которых меньше 2,

$$A \equiv \{r \mid r \in \mathbf{Q}, r > 0, r^2 < 2\},$$

не пусто ( $1 \in A$ ) и ограничено сверху рациональным числом 2. Предположим, что  $\mathbf{Q}$  полно. Тогда должно существовать положительное рациональное число  $c$ , которое должно быть точной верхней гранью множества  $A$ . Но так как не существует рационального числа, квадрат которого равен 2 (см.

[37], стр. 126, а также [52]\*, т. I, стр. 18), то либо  $c^2 < 2$ , либо  $c^2 > 2$ . Предположим сначала, что  $c^2 < 2$  и определим положительное число  $d$  следующим образом<sup>1)</sup>:

$$d = \frac{1}{2} \min \left( \frac{2 - c^2}{(c + 1)^2}, 1 \right).$$

Тогда  $c + d$  будет положительным рациональным числом, которое больше  $c$  и квадрат которого меньше 2:

$$(c + d)^2 < c^2 + d(c + 1)^2 < 2.$$

Но это означает, что  $c + d \in A$ , в то время как  $c$  является верхней гранью множества  $A$ . (Противоречие.) Теперь предположим, что  $c^2 > 2$  и определим положительное число  $d$  следующей формулой:

$$d = \frac{c^2 - 2}{2(c + 1)^2}.$$

Тогда  $c - d$  будет положительным рациональным числом, которое меньше  $c$  и квадрат которого больше 2:

$$(c - d)^2 > c^2 - d(c + 1)^2 > 2.$$

Следовательно,  $c - d$  будет верхней гранью множества  $A$ , которая меньше точной верхней грани  $c$ , и мы снова получили противоречие.

#### 4. Упорядоченное неархimedово поле

Упорядоченное поле  $F$  называется архimedовым, если множество  $N$  натуральных чисел поля  $F$  не ограничено сверху в  $F$  (т. е. если  $a, b \in F$ ,  $a > 0$ ,  $b > 0$ , то существует натуральное число  $n$ , такое, что  $na > b$ ). Пусть  $f$  — полином, отображающий  $R$  в  $R$ :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k, \quad a_k \in R, \quad k = 0, 1, \dots, n,$$

и пусть  $g$  — ненулевой полином (это значит, что  $g(x)$  не равняется тождественно нулю). Далее, пусть  $f/g$  — рацио-

---

<sup>1)</sup> Так как  $1 \in A$ , то  $c \geq 1$  и потому  $d = \frac{1}{2} \frac{2 - c^2}{(c + 1)^2}$ . — Прим. ред.

нальная функция  $h$ , определенная формулой  $h(x) = f(x)/g(x)$ ; ее область определения состоит из всех действительных чисел  $x$ , для которых  $g(x) \neq 0$ . Пусть  $\mathbf{H}$  — множество, состоящее из всех несократимых рациональных функций ( $f$  и  $g$  могут иметь в качестве общих множителей лишь константы). Сложение и умножение в  $\mathbf{H}$  определяются равенствами

$$\frac{f}{g} + \frac{r}{s} = \frac{fs + gr}{gs}, \quad \frac{f}{g} \cdot \frac{r}{s} = \frac{fr}{gs},$$

правые части которых приводятся к несократимым рациональным функциям. Тогда множество  $\mathbf{H}$  будет полем ([37], стр. 104). Если определить подмножество  $\mathbf{P}$  поля  $\mathbf{H}$  как множество, состоящее из всех ненулевых функций  $f/g$ , таких, что старшие коэффициенты (т. е. коэффициенты при членах наивысшей степени) полиномов  $f$  и  $g$  имеют одинаковый знак, то  $\mathbf{P}$  будет удовлетворять всем требованиям определения  $\mathbf{P}$  и  $\mathbf{H}$  превратится в упорядоченное поле. Но любая рациональная функция  $f/1$ , где  $f$  — полином с положительным старшим коэффициентом, является верхней гранью множества  $\mathbf{N}$  натуральных чисел поля  $\mathbf{H}$  (натуральными числами поля  $\mathbf{H}$  являются постоянные рациональные функции вида  $n/1$ , где  $n$  — полином, тождественно равный натуральному числу  $n$ ). Более детальное изложение читатель сможет найти в [37] (см. стр. 99—108)..

## 5. Упорядоченное поле, которое нельзя пополнить

Говорят, что упорядоченное поле  $\mathbf{F}$  нельзя пополнить, если не существует полного упорядоченного поля  $\mathbf{R}$ , содержащего  $\mathbf{F}$  и такого, что операции сложения и умножения и отношение порядка поля  $\mathbf{F}$  совпадают с соответствующими операциями и отношением порядка поля  $\mathbf{R}$ . Поле  $\mathbf{H}$  рациональных функций предыдущего примера нельзя пополнить в этом смысле, другими словами, его нельзя *вложить* в систему действительных чисел (см. определение IV). Причина, вкратце, состоит в том, что если бы  $\mathbf{H}$  можно было вложить в  $\mathbf{R}$ , то натуральные числа поля  $\mathbf{H}$  должны были бы, очевидно, совпадать с натуральными числами поля  $\mathbf{R}$ . А так как  $\mathbf{N}$  ограничено сверху в  $\mathbf{H}$  и не ограничено в  $\mathbf{R}$  ([37], стр. 122), то мы получили бы противоречие.

## 6. Упорядоченное поле, в котором множество рациональных чисел не плотно

Множество „рациональных чисел“ упорядоченного поля **H** примера 4 не плотно в **H**. Это означает, что существуют два различных элемента поля **H**, между которыми нет ни одного рационального числа. В самом деле, всякое упорядоченное поле **F**, в котором множество рациональных чисел плотно, является архimedовым. Чтобы убедиться в этом, предположим, что  $a$ —произвольный положительный элемент поля **F**, а  $m/n$ —рациональное число, расположенное между 0 и  $1/a$ . Мы можем предположить, не теряя общности, что  $m$  и  $n$  оба положительны. Тогда

$$0 < \frac{1}{n} \leqslant \frac{m}{n} < \frac{1}{a},$$

откуда  $n > a$ . Следовательно,  $a$  не является верхней гранью **N**, и так как  $a$  произвольно, то **N** не ограничено сверху. Но в поле **H** аксиома Архимеда не выполнена, поэтому множество рациональных чисел поля **H** не может быть плотным в **H**. Примером двух различных элементов поля **H**, между которыми нет ни одного рационального числа, могут служить любые два (различных) полинома, не являющиеся тождественно постоянными, с положительными старшими коэффициентами.

## 7. Неполное упорядоченное поле, полное в смысле Коши

Если упорядоченное поле **H** рациональных функций (пример 4) расширить при помощи классов эквивалентности фундаментальных последовательностей, то в результате получится упорядоченное поле, в котором каждая фундаментальная последовательность сходится. Однако, согласно примеру 5, это пополнение в смысле Коши не может быть полным в смысле определения в терминах точных верхних граней, которое было дано во введении. (О пополнении в смысле Коши см. [54], стр. 152, и [16].)

## 8. Область целостности, допускающая различные факторизации

Единицей области целостности **D** называется такой ее элемент  $u$ , для которого в **D** существует обратный элемент  $v$ , т. е.  $uv = 1$ . (Единицами области целостности **I** целых чисел

являются 1 и —1.) Каждый элемент из  $D$ , являющийся произведением двух ненулевых элементов из  $D$ , ни один из которых не совпадает с единицей, называется составным. Ненулевой элемент из  $D$ , не являющийся ни единицей, ни составным числом, называется простым. Будем говорить, что область целостности  $D$  допускает единственную факторизацию, если каждый элемент из  $D$ , не совпадающий с нулем или единицей, можно представить как произведение конечного числа простых элементов из  $D$ , причем такое представление единствено с точностью до порядка сомножителей и умножения их на единицы.

В системе действительных чисел  $\mathbb{R}$  определим множество  $\Phi$  всех чисел вида  $a + b\sqrt{5}$ , где  $a, b \in \mathbb{I}$ . Тогда  $\Phi$  будет областью целостности. Далее нетрудно доказать следующие два факта (см. [37], стр. 144):

- (i) Единицами  $\Phi$  являются все числа вида  $a + b\sqrt{5}$ , такие, что  $|a^2 - 5b^2| = 1$ .
- (ii) Если  $a + b\sqrt{5}$  не совпадает ни с нулем, ни с единицей, то  $|a^2 - 5b^2| \geq 4$ . Следовательно, если  $1 < |a^2 - 5b^2| < 16$ , то число  $a + b\sqrt{5}$  является простым. В частности,  $2, 1 + \sqrt{5}, -1 + \sqrt{5}$  являются простыми числами в  $\Phi$ , так как для каждого из них  $|a^2 - 5b^2| = 4$ . Более того, следующие два разложения числа 4 на множители

$$2 \cdot 2 = (1 + \sqrt{5})(-1 + \sqrt{5})$$

являются различными в указанном выше смысле: ни один из сомножителей левой части не совпадает (с точностью до умножения на единицу) ни с каким сомножителем правой части. (См. также [37], стр. 145.)

## 9. Два числа без наибольшего общего делителя

Элемент  $m$  называется делителем элемента  $n$  в области целостности  $D$  (символически  $m | n$ ), если существует элемент  $p$  из  $D$ , такой, что  $mp = n$ . Элемент  $d$  из  $D$  называется наибольшим общим делителем двух элементов  $a$  и  $b$  из  $D$ , если

- (i)  $d | a$  и  $d | b$ ;
- (ii)  $c | a, c | b \Rightarrow c | d$ .

В области целостности  $\Phi$  предыдущего примера числа  $4$  и  $2(1 + \sqrt{5})$  не имеют наибольшего общего делителя. (Подробное изложение см. в [37], стр. 145—146.)

### 10. Дробь, не допускающая единственного представления в виде несократимой дроби

Рассмотрим дроби, состоящие из пар элементов области целостности  $\Phi$  примера 8. Тогда дробь  $2(1 + \sqrt{5})/4$  можно представить в виде несократимой дроби двумя следующими способами:

$$\frac{2(1 + \sqrt{5})}{4} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \frac{2}{-1 + \sqrt{5}}.$$

Эти представления различны в указанном выше смысле.

### 11. Функции, непрерывные на замкнутом интервале и не обладающие известными свойствами, если система чисел не полна

Мы закончим эту главу примерами функций, определенных на замкнутом интервале  $[a, b] \subset \mathbf{Q}$  и принимающих значения, принадлежащие множеству  $\mathbf{Q}$ . Эти примеры станут невозможными, если неполную систему рациональных чисел  $\mathbf{Q}$  (см. пример 3) заменить полной системой действительных чисел  $\mathbf{R}$ . Упорядоченное поле  $\mathbf{Q}$  мы будем считать вложенным в  $\mathbf{R}$ , чтобы иметь возможность пользоваться такими символами, как  $\sqrt{2}$ . Буквой  $x$  мы будем обозначать рациональные числа.

(а) *Функция, непрерывная на замкнутом интервале и не ограниченная на нем (поскольку интервал ограничен, эта функция не является на нем равномерно непрерывной):*

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 2}, \quad 0 \leq x \leq 2.$$

(б) *Функция, непрерывная и ограниченная на замкнутом интервале, но не являющаяся равномерно непрерывной на нем:*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < \sqrt{2}, \\ 1, & \sqrt{2} < x \leq 2. \end{cases}$$

(с) Функция, равномерно непрерывная (и, следовательно, ограниченная) на замкнутом интервале, но не имеющая на нем максимума:

$$f(x) = x - x^3, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

(д) Функция, непрерывная на замкнутом интервале, но не обладающая свойством Коши.

Пример б или  $f(x) = x^2$  на  $[1, 2]$ . Последняя функция не принимает значения 2, которое расположено между 1 и 4.

(е) Дифференцируемая функция, не являющаяся постоянной, производная которой обращается в нуль всюду на замкнутом интервале.

Пример б.

(ф) Дифференцируемая функция, для которой не справедлива теорема Ролля (и, следовательно, теорема о среднем).

Пример с.

(г) Монотонная равномерно непрерывная функция, которая не является постоянной и обладает свойством Коши, а ее производная обращается в нуль всюду на интервале.

Этот пример более трудный, чем предыдущие. Его можно построить с помощью канторова множества, определенного в гл. 8. Подробности см. в примере 15 гл. 8.

## ГЛАВА 2

### ФУНКЦИИ И ПРЕДЕЛЫ

#### Введение

В этой главе необходимо расширить некоторые определения гл. 1 и ввести новые. Если не оговорено противное, то все рассматриваемые множества будут являться подмножествами системы действительных чисел  $\mathbb{R}$ , а все функции будут предполагаться действительнозначными функциями действительного переменного.

Сначала распространим понятия объединения и пересечения на бесконечные совокупности множеств  $A_1, A_2, \dots$ :

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n = A_1 \cup A_2 \cup \dots \equiv \{x \mid x \in A_n \text{ по крайней мере для одного } n = 1, 2, \dots\},$$

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n = A_1 \cap A_2 \cap \dots \equiv \{x \mid x \in A_n \text{ для каждого } n = 1, 2, \dots\}.$$

Множество  $A$  называется замкнутым, если оно содержит все свои предельные точки; другими словами, ни одна точка множества  $A'$  не является предельной точкой множества  $A$ . Множество  $A$  называется открытым, если всякая точка этого множества имеет окрестность, целиком содержащуюся в множестве  $A$ . Точка  $p$  называется граничной точкой множества  $A$ , если каждая окрестность точки  $p$  содержит по крайней мере одну точку множества  $A$  и по крайней мере одну точку множества  $A'$ . Множество всех граничных точек множества  $A$  называется границей  $A$  и обозначается символом  $F(A)$ . Точка  $p$  называется внутренней точкой множества  $A$ , если существует окрестность точки  $p$ , целиком лежащая в  $A$ . Множество всех внутренних точек множества  $A$  называется ядром  $A$  и обозначается через  $I(A)$ . Любое замкнутое множество  $A$  является объединением своего ядра и границы:

$A = I(A) \cup F(A)$ . Замыканием  $\bar{A}$  множества  $A$  называется объединение множества  $A$  и множества всех предельных точек  $A$ . Открытым покрытием множества  $A$  называется любое семейство  $\{U_\alpha\}$  открытых множеств  $U_\alpha$ , объединение которых содержит  $A$ ; в этом случае говорят, что семейство  $\{U_\alpha\}$  покрывает  $A$ . Множество  $A$  называется компактным, если каждое его открытое покрытие содержит конечное подсемейство, которое покрывает  $A^1$ ). В пространстве  $\mathbf{R}$  множество компактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено. (Первая часть этого утверждения есть теорема Гейне — Бореля; см. [36], стр. 202, а также [33]\*, стр. 43.)

Множество  $A$  называется счетным, если оно либо конечно, либо существует взаимно однозначное соответствие между множеством всех натуральных чисел  $\mathbf{N}$  и множеством  $A$ .

Важное свойство системы действительных чисел состоит в том, что для любого действительного числа  $x$  существует единственное целое число  $n$ , такое, что

$$n \leq x < n + 1 \quad \text{или} \quad x - 1 < n \leq x.$$

Поскольку  $n$  определяется однозначно как наибольшее целое число, не превосходящее  $x$ , мы получаем тем самым функцию, которая обозначается символом  $[x]^2$ . Функция  $f(x) = [x]$  определяется, таким образом, одним из неравенств

$$[x] \leq x < [x] + 1 \quad \text{или} \quad x - 1 < [x] \leq x,$$

где  $[x]$  — целое число. В дальнейшем квадратные скобки будут обозначать целую часть числа лишь в том случае, если будет сделано соответствующее пояснение.

Функция  $f$ , являющаяся отображением множества  $\mathbf{R}$  в  $\mathbf{R}$ , называется периодической с периодом  $p$ , если  $f(x + p) = f(x)$  для всех  $x \in \mathbf{R}$ . Функцию называют периодической, если она является периодической с некоторым отличным от нуля периодом  $p$ .

Пусть  $a$  является предельной точкой области определения  $D$  некоторой функции  $f$ , и пусть  $f(x)$  ограничена в некоторой окрестности точки  $a$  для  $x \in D$ . Верхний пре-

<sup>1)</sup> Такие множества часто называют компактами. — Прим. ред.

<sup>2)</sup>  $[x]$  называется целой частью числа  $x$ . — Прим. перев.

дел и нижний предел функции  $f$  в точке  $a$ , которые обозначаются соответственно  $\overline{\lim}_{x \rightarrow a} f(x)$  и  $\underline{\lim}_{x \rightarrow a} f(x)$ , определяются следующим образом. Для  $\delta > 0$  положим

$$\varphi(\delta) \equiv \sup \{f(x) \mid x \in D \cap D(a, \delta)\},$$

$$\psi(\delta) \equiv \inf \{f(x) \mid x \in D \cap D(a, \delta)\}.$$

Тогда

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow a} f(x) \equiv \lim_{\delta \rightarrow +0} \varphi(\delta) = \inf \{\varphi(\delta) \mid \delta > 0\},$$

$$\underline{\lim}_{x \rightarrow a} f(x) \equiv \lim_{\delta \rightarrow +0} \psi(\delta) = \sup \{\psi(\delta) \mid \delta > 0\}.$$

Функция  $f$  называется полунепрерывной сверху в точке  $a \in D$ , если  $\overline{\lim}_{x \rightarrow a} f(x) \leq f(a)$ ; если же  $\underline{\lim}_{x \rightarrow a} f(x) \geq f(a)$ , то  $f$  называется полунепрерывной снизу в точке  $a$ ; наконец,  $f$  называется полунепрерывной в точке  $a$ , если она либо полунепрерывна сверху, либо полунепрерывна снизу в точке  $a$ .

Функцию  $f$  назовем локально ограниченной в точке  $a$  (которая либо принадлежит, либо является предельной точкой области определения функции  $f$ ), если существует окрестность точки  $a$ , в которой  $f$  ограничена. Функция  $f$  называется локально ограниченной на некотором подмножестве  $A$  ее области определения, если  $f$  локально ограничена в каждой точке множества  $A$ .

Бесконечные пределы  $\pm \infty$  и пределы  $f(x)$  при  $x \rightarrow \pm \infty$  определяются, как и в случае  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ , только в качестве окрестностей бесконечности используются

$$D(+\infty, N) \equiv (N, +\infty),$$

$$D(-\infty, N) \equiv (-\infty, N).$$

Например,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty, \text{ если } \forall K \exists \delta > 0 \exists f(D \cap D(a, \delta)) \subset D(+\infty, K),$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b, \text{ если } \forall \varepsilon > 0 \exists N \exists f(D \cap D(-\infty, N)) \subset N(b, \varepsilon).$$

Основные определения сходимости и равномерной сходимости, а также признак Вейерштрасса для равномерной сходимости бесконечных рядов предполагаются известными (см. [36], стр. 381, 444, 445, а также [52]\*, т. II, стр. 423—425 и 430).

**1. Всюду разрывная функция, абсолютное значение которой есть всюду непрерывная функция**

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ рационально,} \\ -1, & \text{если } x \text{ иррационально.} \end{cases}$$

**2. Функция, непрерывная лишь в одной точке** (см. пример 22)

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x \text{ рационально,} \\ -x, & \text{если } x \text{ иррационально.} \end{cases}$$

Единственной точкой непрерывности этой функции является 0.

**3. Непрерывная и неограниченная функция, определенная на произвольном некомпактном множестве**

(a) Если  $A$  — неограниченное множество действительных чисел, то положим

$$f(x) = x, \quad x \in A.$$

(b) Если  $A$  — ограниченное, но не замкнутое множество действительных чисел, то положим

$$f(x) = \frac{1}{x-c}, \quad x \in A,$$

где  $c$  — предельная точка множества  $A$ , не принадлежащая  $A$ .

Если же  $f$  непрерывна на компактном множестве  $A$ , то  $f$  ограничена на нем (см. [38], стр. 80).

**4. Неограниченная функция, определенная на произвольном некомпактном множестве и локально ограниченная на нем**

Пример 3.

Если же  $f$  локально ограничена на компактном множестве  $A$ , то она ограничена на нем.

## 5. Функция, всюду конечная и всюду локально неограниченная

Пусть  $x$  — рациональное число, равное  $m/n$ , где  $m$  и  $n$  — целые числа, такие, что дробь  $m/n$  несократима и  $n > 0$ . Тогда  $m$  и  $n$  определяются однозначно (см. [37], стр. 53), и потому следующая функция определена корректно:

$$f(x) = \begin{cases} n, & \text{если } x \text{ рационально, } x = m/n \text{ — несократимая} \\ & \quad \text{дробь, } n > 0, \\ 0, & \text{если } x \text{ иррационально.} \end{cases}$$

Если бы  $f$  была ограничена в  $N(a, \varepsilon)$ , то для всех дробей  $m/n$  в  $N(a, \varepsilon)$  знаменатели  $n$  были бы ограничены, а, следовательно, были бы ограничены и числители  $m$ . Но отсюда следовало бы, что в интервале  $N(a, \varepsilon)$  существует лишь конечное число рациональных чисел. (Противоречие.) (См. пример 27 гл. 8, где определена функция, обладающая еще более сильными патологическими свойствами. См. также пример 29 гл. 8.)

## 6. Непрерывная ограниченная функция, определенная на произвольном некомпактном множестве и не имеющая экстремальных значений

(а) Если  $A$  — неограниченное множество действительных чисел, то положим

$$f(x) \equiv \frac{x^2}{x^2 + 1}, \quad x \in A.$$

Функция  $f(x)$  не имеет наибольшего значения на множестве  $A$ . Если же  $f(x)$  определить формулой

$$f(x) \equiv (-1)^{\lfloor |x| \rfloor} \frac{x^2}{x^2 + 1}, \quad x \in A,$$

где  $\lfloor |x| \rfloor$  — целая часть числа  $|x|$ , то  $f(x)$  не будет иметь ни наибольшего, ни наименьшего значения на множестве  $A$ <sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Пример, приведенный в пункте 6 (а), не корректен. Именно, если  $A = \{2n\}$ , где  $n = 1, 2, \dots$ , то функция  $f(x)$  имеет наименьшее значение при  $x = 2$ . Если же взять  $A = (-\infty, +\infty)$ , то функция  $f(x)$  будет разрывной, например, в точке  $x = 1$ . — *Прим. ред.*

(b) Если  $A$  — ограниченное, но не замкнутое множество действительных чисел, то положим

$$f(x) = -|x - c|, \quad x \in A,$$

где  $c$  — предельная точка множества  $A$ , не принадлежащая этому множеству. Функция  $f(x)$  не имеет наибольшего значения на  $A$ . Если же  $f(x)$  определить формулой

$$f(x) = (-1)^{1/(|x-c|)} \{L - |x - c|\},$$

где  $L$  — длина некоторого интервала, содержащего множество  $A$ , а квадратные скобки обозначают целую часть заключенного между ними числа, то  $f(x)$  не будет иметь ни наибольшего, ни наименьшего значения на  $A$ <sup>1)</sup>.

## 7. Ограниченнaя функция, не имеющая относительных экстремумов на компактном множестве

Возьмем в качестве компактного множества замкнутый интервал  $[0, 1]$  и для  $x \in [0, 1]$  положим

$$f(x) = \begin{cases} \frac{(-1)^n n}{n+1}, & \text{если } x \text{ рационально, } x = m/n, \text{ где } m/n \text{ —} \\ & \text{несократимая дробь и } n > 0, \\ 0, & \text{если } x \text{ иррационально.} \end{cases}$$

Тогда в каждой окрестности любой точки из  $[0, 1]$  найдутся значения функции  $f$ , как угодно близкие к числам 1 и  $-1$ , однако все значения функции  $f$  лежат строго между этими числами (см. [22], стр. 127).

<sup>1)</sup> Пример, приведенный в пункте 6(b), не корректен даже для множества  $A = (0, 1)$ , так как в этом случае можно взять  $L = 1$ ,  $c = 0$ , для которых функция  $f(x)$  разрывна в точке  $x = \frac{1}{2}$ .

Если же  $A = \left\{ \frac{1}{2n} \right\}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), то при  $L = 1$ ,  $c = 0$  функция  $f(x)$  достигает своего наименьшего значения при  $x = \frac{1}{2}$ . — Прим. ред.

## 8. Ограниченнaя функция, не являющаяся полунепрерывной ни в одной точке

Функция примера 7 не является полунепрерывной сверху ни в одной точке отрезка  $[0, 1]$ , так как  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  всюду равен 1, и, следовательно, ни в одной точке  $a$  не может быть выполнено неравенство  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq f(a)$ . Подобным же образом устанавливается, что эта функция не является полунепрерывной снизу ни в одной точке. (Заметим, что функция примера 1 полунепрерывна сверху в каждой рациональной точке и полунепрерывна снизу в каждой иррациональной точке.)

## 9. Периодическая функция, отличная от постоянной и не имеющая наименьшего периода

Периодами функции примера 1 являются все рациональные числа.

Периоды любой действительнозначной функции с областью определения  $\mathbf{R}$  образуют аддитивную группу (т. е. множество периодов замкнуто относительно вычитания). Эта группа или плотна (как в настоящем примере), или дискретна, и тогда она состоит из всех целых кратных наименьшего положительного элемента. Последний случай имеет место для всякой периодической функции с областью определения  $\mathbf{R}$ , если она отлична от постоянной и имеет по крайней мере одну точку непрерывности. (См. [38], стр. 549.)

## 10. Иррациональные функции

Функция  $\sqrt{x}$  не является рациональной (см. пример 4 гл. 1), так как она не определена для  $x < 0$ .

Функция  $[x]$  также не является рациональной, поскольку она имеет разрывы в некоторых точках ее области определения.

Функция  $|x|$  является иррациональной по той причине, что она не имеет производной в некоторой точке ее области определения.

Функция  $\sqrt{x^2 + 1}$  также иррациональна. В этом можно убедиться следующим образом. Если  $\sqrt{x^2 + 1} = f(x)/g(x)$

для всех  $x$ , то  $\sqrt{x^2 + 1}/x = f(x)/xg(x)$  для  $x \neq 0$  и, следовательно,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)/xg(x) = 1$ . Отсюда вытекает, что  $f(x)$  и  $xg(x)$  являются полиномами одинаковой степени и потому  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)/xg(x) = 1$ , в то время как  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 1}/x = -1$ . (Противоречие.)

## 11. Трансцендентные функции

Функция  $f$  называется алгебраической, если  $\exists$  полином  $p(u) = \sum_{k=0}^n a_k(x) u^k$ , коэффициентами которого служат действительные полиномы  $a_0(x), a_1(x), \dots, a_n(x)$  (т. е. все их коэффициенты действительны), одновременно не обращающиеся тождественно в нуль, такой, что композиция  $p(f(x))$  обращается тождественно в нуль в области определения функции  $f$ . Функция называется трансцендентной, если она не является алгебраической.

Примером трансцендентной функции может служить функция  $e^x$ , ибо если предположить, что

$$a_0(x) + a_1(x)e^x + \dots + a_n(x)e^{nx} \equiv 0,$$

где  $a_0(x) \neq 0$ , то, переходя к пределу в обеих частях этого тождества при  $x \rightarrow -\infty$  и пользуясь правилом Лопитала, мы получим равенство

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a_0(x) = 0,$$

которое невозможно в силу предположения  $a_0(x) \neq 0$ .

Другим примером может служить функция  $\sin x$ , ибо если

$$b_0(x) + b_1(x)\sin x + \dots + b_n(x)\sin^n x \equiv 0,$$

где полином  $b_0(x) \neq 0$ , то  $b_0(k\pi) = 0$  для всех целых  $k$ . (Противоречие.)

Дальнейшими примерами трансцендентных функций (по тем же причинам) являются  $\ln x$  (функция, обратная к  $e^x$ ) и остальные тригонометрические функции.

Примерами алгебраических функций могут служить следующие иррациональные функции примера 10:  $\sqrt{x}$ ,  $|x|$  ( $|x| = \sqrt{x^2}$ ) и  $\sqrt{x^2 + 1}$ .

12. Функции  $y=f(u)$ ,  $u \in \mathbb{R}$ , и  $u=g(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , композиция которых  $y=f(g(x))$  всюду непрерывна и такова, что  $\lim_{u \rightarrow b} f(u)=c$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} g(x)=b$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) \neq c$

Если

$$f(u) = \begin{cases} 0 & \text{при } u \neq 0, \\ 1 & \text{при } u = 0, \end{cases} \quad u \in \mathbb{R},$$

то  $\lim_{u \rightarrow 0} f(u)=0$ . Если же  $g(x) \equiv 0$  для всех  $x \in \mathbb{R}$ , то  $f(g(x))=1$  для всех  $x$  и, следовательно,  $\lim_{x \rightarrow 0} f(g(x))=1$ .

Этот контрпример будет невозможным, если добавить следующее условие:  $x \neq a \Rightarrow g(x) \neq b$ .

13. Две равномерно непрерывные функции, произведение которых не является равномерно непрерывной функцией

Функции  $x$  и  $\sin x$  равномерно непрерывны на  $\mathbb{R}$ , так как их производные ограничены, но их произведение  $x \sin x$  не является равномерно непрерывной функцией на  $\mathbb{R}$ .

Если же обе функции  $f$  и  $g$  ограничены на общей области определения  $D$  и равномерно непрерывны на ней, то их произведение  $fg$  также равномерно непрерывно на  $D$ . Так как функция, равномерно непрерывная на ограниченном множестве, ограничена на нем, то пример, подобный настоящему, возможен лишь в том случае, если общая область определения не ограничена и по крайней мере одна из функций не ограничена.

14. Непрерывное на некотором интервале, взаимно однозначное отображение, обратное к которому разрывно

Для этого примера необходимо, чтобы интервал *не* был замкнутым и ограниченным (см. [36], стр. 192) и чтобы функция принимала *не* только действительные значения (см. [36], стр. 50 и 52, упр. 25). В качестве примера мы используем комплекснозначную функцию  $z=f(x)$  действительного переменного  $x$ . При этом непрерывность определяется точно так же, как и в случае действительной функции действитель-

ного переменного, только под абсолютной величиной комплексного числа  $z = (a, b)$  следует понимать его модуль

$$|z| = |(a, b)| = (a^2 + b^2)^{1/2}.$$

Определим функцию  $z = f(x)$  следующим образом:

$$z = f(x) \equiv (\cos x, \sin x), \quad 0 \leq x < 2\pi.$$

Тогда  $f$  отобразит полуоткрытый интервал  $[0, 2\pi]$  непрерывно и взаимно однозначно на единичную окружность  $|z| = 1$ . Но так как единичная окружность является компактом, то обратное отображение не может быть непрерывным (см. [36], стр. 192), а именно оно разрывно в точке  $(1, 0)$ .

### 15. Функция, непрерывная в иррациональных и разрывная в рациональных точках

Если  $x$  — рациональное число вида  $m/n$ , где  $m$  и  $n$  — целые числа, дробь  $m/n$  несократима и  $n > 0$ , то положим  $f(x) = 1/n$ . Если же  $x$  иррационально, положим  $f(x) \equiv 0$ . (См. [36], стр. 124.)<sup>1)</sup>

В примере 10 гл. 8 будет показано, что не существует функции, непрерывной во всех рациональных точках и разрывной во всех иррациональных точках.

### 16. Полунепрерывная функция с плотным множеством точек разрыва

Функция примера 15 полунепрерывна сверху в каждой точке  $a$ , поскольку

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \leq f(a).$$

### 17. Функция с плотным множеством точек разрыва, каждая из которых устранима

Пусть  $a$  — рациональное число. Переопределим функцию примера 15, положив  $f(a) = 0$ . Тогда

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 = f(a),$$

т. е. функция  $f$  становится непрерывной в точке  $a$ .

<sup>1)</sup> Построенная функция  $f(x)$  известна под названием функции Римана. — Прим. ред.

**18. Монотонная функция, точки разрыва которой образуют произвольное счетное (возможно, плотное) множество**

Пусть  $A$  — произвольное непустое счетное множество действительных чисел  $a_1, a_2, a_3, \dots$ , и пусть  $\sum p_n$  — конечный или сходящийся бесконечный ряд положительных чисел с суммой  $p$  (ряд конечен тогда и только тогда, когда конечно множество  $A$ , и имеет столько же членов, сколько элементов в множестве  $A$ ). Если  $A$  ограничено снизу и  $x$  меньше любого элемента множества  $A$ , положим  $f(x) \equiv 0$ . В противном случае положим  $f(x) \equiv \sum_{a_n < x} p_n$ , т. е.  $f(x)$  равна сумме всех членов  $p_m$  ряда  $\sum p_n$ , таких, что  $a_m < x$ . Тогда  $f$  возрастает на  $\mathbb{R}$ , непрерывна в каждой точке, не принадлежащей  $A$ , и разрывна со скачком, равным  $p_n$ , во всякой точке  $a_n$  (т. е.  $\lim_{x \rightarrow a_n+0} f(x) - \lim_{x \rightarrow a_n-0} f(x) = p_n$ ).

Следует отметить, что для монотонных функций этот пример не допускает дальнейших усилений, ибо для всякой монотонной функции множество точек разрыва счетно (см. [38], стр. 59, упр. 29, а также [33]\*, стр. 223). Пример 1 показывает, что если не требовать монотонности, то множество точек разрыва может совпадать с  $\mathbb{R}$ .

**19. Функция с плотным множеством точек непрерывности и плотным множеством точек разрыва, ни одна из которых не является устранимой**

Для этого достаточно в примере 18 в качестве множества  $A$  взять множество  $\mathbb{Q}$  всех рациональных чисел.

**20. Нигде не монотонное взаимно однозначное соответствие между двумя интервалами**

Определим  $f(x)$  для  $0 < x < 1$  следующим образом:

$$f(x) \equiv \begin{cases} x, & \text{если } x \text{ рационально,} \\ 1-x, & \text{если } x \text{ иррационально.} \end{cases}$$

Тогда на  $[0, 1]$  не существует подинтервала, на котором  $f$  монотонна. Множество значений  $f$  есть снова интервал  $[0, 1]$ , причем отображение  $f$  взаимно однозначно.

Следующая функция обладает тем же свойством и отображает интервал  $[a, b]$  на интервал  $[c, d]$ :

$$g(x) \equiv \begin{cases} c + (d - c) \frac{x - a}{b - a}, & \text{если } \frac{x - a}{b - a} \text{ рационально,} \\ d + (c - d) \frac{x - a}{b - a}, & \text{если } \frac{x - a}{b - a} \text{ иррационально.} \end{cases}$$

## 21. Непрерывная нигде не монотонная функция

Положим  $f_1(x) \equiv |x|$  для  $|x| \leq 1/2$  и продолжим эту функцию периодически с периодом 1, т. е. положим  $f_1(x+n) = f_1(x)$  для всякого действительного числа  $x$  и всякого целого  $n$ . Далее для  $n > 1$  положим  $f_n(x) \equiv 4^{-n+1}f_1(4^{n-1}x)$ . Таким образом, для всякого натурального  $n$  функция  $f_n$  — периодическая с периодом  $4^{-n+1}$  и максимальным значением  $\frac{1}{2} \cdot 4^{-n+1}$ . Наконец, определим на  $\mathbf{R}$  функцию  $f$  так<sup>1)</sup>:

$$f(x) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f_1(4^{n-1}x)}{4^{n-1}}.$$

Так как  $|f_n(x)| \leq \frac{1}{2} \cdot 4^{-n+1}$ , то по признаку Вейерштрасса этот ряд равномерно сходится на  $\mathbf{R}$  и функция  $f$  всюду непрерывна. Если точка  $a$  имеет вид  $a = k \cdot 4^{-m}$ , где  $k$  — целое, а  $m$  — натуральное, то  $f_n(a) = 0$  для  $n > m$ . Следовательно,  $f(a) = f_1(a) + \dots + f_m(a)$ . Пусть  $h_m = 4^{-2m-1}$ , где  $m$  — произвольное натуральное число. Тогда  $f_n(a + h_m) = 0$  при  $n > 2m + 1$  и, следовательно,

$$\begin{aligned} f(a + h_m) - f(a) &= [f_1(a + h_m) - f_1(a)] + \dots \\ &\quad + [f_m(a + h_m) - f_m(a)] + \\ &\quad + f_{m+1}(a + h_m) + \dots + f_{2m+1}(a + h_m) \geqslant \\ &\geqslant -mh_m + (m+1)h_m = h_m > 0. \end{aligned}$$

Аналогично

$$f(a - h_m) - f(a) \geq -mh_m + (m+1)h_m = h_m > 0.$$

<sup>1)</sup> Пример функции  $f(x)$  был фактически рассмотрен Ван дер Варденом в связи с другим вопросом (см. гл. III, пример 8). — *Прим. ред.*

Но так как точки вида  $a = k \cdot 4^{-m}$  всюду плотны в  $\mathbb{R}$ , то отсюда следует, что не существует открытого интервала, на котором  $f$  монотонна.

Конструкции, подобные описанной выше, приводят к сгущению особенностей.

## 22. Функция, точки разрыва которой образуют произвольно заданное замкнутое множество

Пусть  $A$  — замкнутое множество. Определим множество  $B$  следующим образом:

$$x \in B, \text{ если } x \in F(A) \text{ или } x \in I(A) \cap \mathbb{Q}.$$

Далее положим

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in B, \\ 0, & \text{если } x \notin B. \end{cases}$$

Если  $c \in A$ , то  $f$  разрывна в этой точке. В самом деле, если  $c \in F(A)$ , то  $f(c) = 1$ , в то время как  $c$  является предельной точкой множества  $\mathbb{R} \setminus A$ , на котором  $f$  тождественно равна 0; если же  $c \in I(A) \cap \mathbb{Q}$ , то  $f(c) = 1$ , причем  $c$  является предельной точкой множества  $I(A) \setminus \mathbb{Q}$ , на котором  $f$  равна 0; наконец, если  $c \in I(A) \setminus \mathbb{Q}$ , то  $f(c) = 0$ , в то время как  $c$  является предельной точкой множества  $I(A) \cap \mathbb{Q}$ , на котором  $f$  тождественно равна 1. Отметим, что на множестве  $\mathbb{R} \setminus A$  функция  $f$  непрерывна, поскольку это множество открыто и функция  $f$  постоянна на нем.

## 23. Функция, точки разрыва которой образуют произвольно заданное множество типа $F_\sigma$ . (См. пример 8 гл. 4 и примеры 8, 10 и 22 гл. 8.)

Множество  $A$  называется *множеством типа  $F_\sigma$* , если оно является объединением счетного множества замкнутых множеств (см. пример 8 гл. 8). Пусть  $A = A_1 \cup A_2 \cup \dots$  есть заданное множество типа  $F_\sigma$ , причем  $A_1, A_2, \dots$  замкнуты и  $A_n \subset A_{n+1}$  для  $n = 1, 2, \dots$ . Обозначив через  $A_0$  пустое множество  $\emptyset$ , определим последовательность непересекающихся множеств  $B_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) следующим образом:

$$x \in B_n, \text{ если } \begin{cases} x \in (A_n \setminus A_{n-1}) \setminus I(A_n \setminus A_{n-1}) \\ \text{или } x \in I(A_n \setminus A_{n-1}) \cap \mathbb{Q}. \end{cases}$$

И наконец, определим исковую функцию  $f$ , положив

$$f(x) = \begin{cases} 2^{-n}, & \text{если } x \in B_n, \\ 0, & \text{если } x \notin B_1 \cup B_2 \cup \dots \end{cases}$$

Покажем, что если  $c \in A$ , то  $f$  разрывна в точке  $c$ . В самом деле, если  $c \in (A_n \setminus A_{n-1}) \setminus I(A_n \setminus A_{n-1})$ , то  $f(c) = 2^{-n}$ , причем  $c$  является предельной точкой некоторого множества, на котором  $f$  принимает значения, отличающиеся от  $2^{-n}$  по крайней мере на  $2^{-n-1}$ ; если же  $c \in I(A_n \setminus A_{n-1}) \setminus Q$ , то  $f(c) = 2^{-n}$ , причем  $c$  является предельной точкой множества  $I(A_n \setminus A_{n-1}) \setminus Q$ , на котором  $f$  тождественно равна 0; наконец, если  $c \in I(A_n \setminus A_{n-1}) \cap Q$ , то  $f(c) = 0$ , в то время как  $c$  является предельной точкой множества  $I(A_n \setminus A_{n-1}) \cap Q$ , на котором  $f$  тождественно равна  $2^{-n}$ . Остается показать, что если  $c \notin A$ , то  $f$  непрерывна в  $c$ . Пусть задано  $\varepsilon > 0$ . Возьмем  $N$ , такое, что  $2^{-N} < \varepsilon$ , а затем выберем окрестность точки  $c$ , не имеющую общих точек с множествами  $A_1, A_2, \dots, A_N$ . Тогда в этой окрестности  $f(x) < 2^{-N} < \varepsilon$ , и непрерывность функции  $f$  в точке  $c$  доказана.

Следует отметить, что для любой функции  $f$ , отображающей  $R$  в  $R$ , множество точек разрыва является множеством типа  $F_\sigma$  (см. [38], стр. 84, упр. 30—33; стр. 332, упр. 41, а также [1]\*, стр. 152).

## 24. Функция, не являющаяся пределом последовательности непрерывных функций. (См. пример 10 гл. 4.)

Функция  $f$  примера 1 обладает тем свойством, что не существует последовательности  $\{f_n\}$  непрерывных функций, такой, что  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x)$  для всех действительных  $x$ .

Однако доказательство этого факта не является элементарным, подробности и дальнейшие ссылки см. в [9], стр. 99—103. Идея доказательства состоит в том, что  $f$  всюду разрывна, в то время как функция, являющаяся пределом последовательности непрерывных функций, должна иметь плотное множество точек непрерывности.

Покажем, однако, что характеристическая функция множества  $\mathbf{Q}$  всех рациональных чисел является пределом последовательности  $\{g_n\}$  функций, каждая из которых есть предел последовательности  $\{h_n\}$  непрерывных функций. Действительно, пусть  $\{r_n\}$  — последовательность всех рациональных чисел. Положим

$$g_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x = r_1, r_2, \dots, \text{или } r_n, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Всякая функция  $g_n$  является пределом последовательности непрерывных функций, каждую из которых можно выбрать в виде ломаной. Эти ломаные строятся следующим образом. Каждая из них равна 1 в тех точках, где  $g_n(x) = 1$ , равна 0 на замкнутых подинтервалах, являющихся внутренними для интервалов, образованных двумя соседними точками, в которых  $g_n(x) = 1$ , и линейна на оставшихся интервалах. Построение ведется таким образом, чтобы основания пиков стягивались к точкам, в которых  $g_n(x) = 1$ .

Заметим, что для каждого  $x$  последовательность  $\{g_n(x)\}$  возрастает, в то время как последовательность, которая сходится к  $g_n(x)$ , может быть выбрана убывающей.

## 25. Функция, определенная на $[0, 1]$ , множество значений которой на каждом невырожденном подинтервале совпадает с $[0, 1]$ . (См. пример 27 гл. 8.)

Функция, обладающая этим свойством, впервые была построена А. Лебегом (см. [28], стр. 85). Описание этого построения можно найти в [9] (см. стр. 71, а также [22], стр. 228).

Пусть  $x$  — произвольное число из  $[0, 1]$ , и пусть

$$x = 0.a_1a_2a_3\dots$$

— его десятичное разложение. В случае, если  $x$  допускает два различных разложения, одно из которых является конечной десятичной дробью, другое же имеет цифру 9 в периоде, то можно взять любое из этих разложений. Для определенности условимся брать лишь конечные разложения. Значения функции  $f(x)$  будут зависеть от того, является ли дробь  $0.a_1a_2a_3\dots$  периодической или нет, т. е. является ли число

$0.a_1a_3a_5\dots$  рациональным или нет (см. [37], стр. 178):

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0.a_1a_3a_5\dots \text{ иррационально,} \\ 0.a_{2n}a_{2n+2}a_{2n+4}\dots, & \text{если } 0.a_1a_3a_5\dots \text{ рационально} \\ & \text{и периодическое повторение совокупности цифр} \\ & \text{начинается с } a_{2n-1}. \end{cases}$$

Пусть  $I$  — произвольный подинтервал из  $[0, 1]$ . Выберем цифры  $a_1, a_2, \dots, a_{2n-2}$  так, чтобы числа  $0.a_1a_2\dots a_{2n-2}0$  и  $0.a_1a_2\dots a_{2n-1}1$  принадлежали  $I$ , а цифра  $a_{2n-3}$  была отлична от 0 и 1. Далее положим  $a_{2n-1}=a_{2n+1}=\dots=\dots=a_{4n-5}=0$ , а  $a_{4n-3}=1$ . Затем эти  $n$  цифр будем периодически повторять, располагая их на местах с нечетными индексами. Таким образом, мы определим все  $a_{2k-1}$ . Если теперь  $y=0.b_1b_2b_3\dots$  — произвольная точка из  $[0, 1]$ , то положим

$$x = 0.a_1a_3a_5\dots a_{2n-1}b_1a_{2n+1}b_2a_{2n+3}\dots.$$

Число  $x$  принадлежит интервалу  $I$  и таково, что разложение

$$0.a_1a_3a_5\dots a_{2n-3}a_{2n-1}a_{2n+1}\dots$$

является периодической десятичной дробью, первый период которой начинается с  $a_{2n-1}$ . Следовательно,

$$f(x) = 0.b_1b_2b_3\dots.$$

Точки графика функции  $f$  расположены всюду плотно в единичном квадрате  $[0, 1] \times [0, 1]$ , хотя каждый вертикальный отрезок  $\{x\} \times [0, 1]$  пересекает график лишь в одной точке.

В примере 27 гл. 8 определяется функция, множество значений которой на каждом непустом открытом интервале совпадает с  $\mathbb{R}$  и которая равна нулю почти всюду (а следовательно, измерима). (См. также следующий пример 26.)

Так как единичный интервал  $[0, 1]$  содержит бесконечное множество непересекающихся открытых интервалов (например  $(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n})$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ), то функция  $f$  настоящего примера принимает каждое свое значение бесконечное множество раз. Еще одна функция, которая каждое свое значение принимает бесконечное множество раз, определена в примере 9 гл. 10.

## 26. Разрывная линейная функция

Функция  $f$ , отображающая  $\mathbf{R}$  в  $\mathbf{R}$ , называется линейной, если  $f(x+y) = f(x) + f(y)$  для всех  $x, y \in \mathbf{R}$ . Линейная функция, которая не является непрерывной, должна быть "очень сильно" разрывной. В самом деле, ее график должен быть всюду плотным на плоскости  $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ . Эти вопросы рассматриваются в [9] (стр. 108—113), где приведены дальнейшие ссылки. В случае же, если  $f$  непрерывна и линейна, она должна иметь вид  $f(x) = cx$ . В этом можно убедиться, рассматривая последовательно классы чисел  $\mathbf{N}, \mathbf{I}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}$ .

Построение разрывной линейной функции можно осуществить, используя базис Хамеля в линейном пространстве  $\mathbf{R}$  вещественных чисел над полем  $\mathbf{Q}$  рациональных чисел (см. ссылки [29], [30] и [32] из [9]). Идея состоит в том, что этот процесс приводит к множеству  $S = \{r_a\}$  действительных чисел  $r_a$ , таких, что всякое действительное число  $x$  является единственной линейной комбинацией конечного числа элементов из  $S$  с рациональными коэффициентами  $p_a : x = p_{a_1}r_{a_1} + \dots + p_{a_k}r_{a_k}$ . Функцию  $f$  можно определить так:

$$f(x) = p_{a_1} + \dots + p_{a_k},$$

поскольку представление числа  $x$  в виде линейной комбинации единственно. Линейность функции  $f$  следует непосредственно из ее определения, а тот факт, что  $f$  не является непрерывной, вытекает из того, что все ее значения рациональны, но не все одинаковы ( $f$  не обладает свойством Коши, т. е. не принимает некоторые промежуточные значения).

**27. Теорема Колмогорова:** для каждого  $n \in \mathbf{N}$  существуют  $n(2n+1)$  функций  $\Phi_{ij}(x_j)$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ,  $i = 1, 2, \dots, 2n+1$ ), таких, что

- (a) все функции  $\Phi_{ij}(x_j)$  непрерывны на  $[0, 1]$ ;
- (b) для любой функции  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , непрерывной на  $0 \leq x_1, x_2, \dots, x_n \leq 1$ , существуют  $2n+1$  функций  $\psi_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, 2n+1$ , каждая из которых непрерывна на  $\mathbf{R}$ , причем

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{2n+1} \psi_i \left( \sum_{j=1}^n \Phi_{ij}(x_j) \right).$$

Эта теорема принадлежит А. Н. Колмогорову [25]. Она разрешает знаменитую седьмую<sup>1)</sup> проблему Д. Гильберта и формулируется в этом случае следующим образом: *каждую непрерывную функцию  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$   $n$  действительных переменных,  $0 \leq x_1, x_2, \dots, x_n \leq 1$ , можно представить в виде суммы (внешняя сумма приведенной выше формулы)  $2n+1$  суперпозиций непрерывных функций одного переменного и суммы (внутренняя сумма указанной формулы)  $n$  непрерывных функций одного переменного.*

Доказательство этой теоремы в высшей степени остроумно, но доступно каждому читателю, который готов терпеливо проследить за довольно длинной цепью индуктивных рассуждений.

Отметим лишь, что функции  $\varphi_{ij}$  являются универсальными, т. е. они не зависят от  $f$ . Функции  $\Psi_i$ , напротив, однозначно определяются функцией  $f$ . Подробное доказательство можно найти в цитированной работе.

---

<sup>1)</sup> Здесь речь должна идти, вероятно, о тринадцатой проблеме Гильберта, а не о седьмой. — Прим. ред.

## ГЛАВА 3

### ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

#### Введение

В некоторых примерах этой главы термин *производная* будет применяться и к бесконечным пределам

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = +\infty, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = -\infty.$$

Однако термин *дифференцируемая функция* используется лишь в том случае, если функция имеет конечную производную в каждой точке своей области определения. Функция называется бесконечно дифференцируемой, если она имеет (конечную) производную любого порядка в каждой точке области определения.

Показательная функция с основанием  $e$  будет обозначаться символом  $e^x$  или  $\exp(x)$ .

Как и в предыдущей главе, предполагается, что все множества, включая области определения и множества значений функций, являются подмножествами  $\mathbb{R}$ . В противном случае будет сделано соответствующее уточнение. Это предположение будет оставаться в силе вплоть до гл. 8.

#### 1. Функция, не являющаяся производной

Функция  $\operatorname{sgn} x$  (см. введение, гл. 1) и вообще всякая функция с разрывом в виде скачка не имеет примитивной, т. е. не является производной никакой функции, поскольку она не обладает свойством Коши принимать все промежуточные значения, а это свойство присуще не только непрерывным функциям, но и производным (см. [36], стр. 84, упр. 40, а также [52]\*, т. I, стр. 224). Ниже приводится пример разрывной производной.

## 2. Дифференцируемая функция с разрывной производной

Рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

Ее производная

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \end{cases}$$

разрывна в точке  $x = 0$ .

## 3. Разрывная функция, всюду имеющая производную (не обязательно конечную)

Для того чтобы такой пример стал возможен, надо расширить определение производной так, чтобы оно включало значения  $\pm\infty$ . Тогда разрывная функция  $\operatorname{sgn} x$  (пример 1) имеет производную

$$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \neq 0, \\ +\infty, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

## 4. Дифференцируемая функция, производная которой не сохраняет знака ни в какой односторонней окрестности экстремальной точки

Функция

$$f(x) = \begin{cases} x^4 \left(2 + \sin \frac{1}{x}\right), & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \end{cases}$$

имеет абсолютный минимум в точке  $x = 0$ . А ее производная

$$f'(x) = \begin{cases} x^2 \left[4x \left(2 + \sin \frac{1}{x}\right) - \cos \frac{1}{x}\right], & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \end{cases}$$

в любой односторонней окрестности нуля принимает как положительные, так и отрицательные значения. Функция  $f$  не является монотонной ни в какой односторонней окрестности точки  $x = 0$ .

**5. Дифференцируемая функция, производная которой положительна в некоторой точке, но сама функция не монотонна ни в какой окрестности этой точки**

Функция

$$f(x) = \begin{cases} x + 2x^2 \sin \frac{1}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \end{cases}$$

имеет производную, равную

$$f'(x) = \begin{cases} 1 + 4x \sin \frac{1}{x} - 2 \cos \frac{1}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ 1, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

В любой окрестности нуля производная  $f'(x)$  имеет как положительные, так и отрицательные значения.

**6. Функция, производная которой конечна, но не ограничена на замкнутом интервале**

Рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x^2}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

Ее производная

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \end{cases}$$

не ограничена на  $[-1, 1]$ .

**7. Функция, производная которой существует и ограничена, но не имеет (абсолютного) экстремума на замкнутом интервале**

Функция

$$f(x) = \begin{cases} x^4 e^{-\frac{1}{4}x^2} \sin \frac{8}{x^3}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \end{cases}$$

имеет производную

$$f'(x) = \begin{cases} e^{-x^2/4} \left[ \left(4x^3 - \frac{x^5}{2}\right) \sin \frac{8}{x^3} - 24 \cos \frac{8}{x^3} \right], & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

В любой окрестности нуля эта производная имеет значения, как угодно близкие к 24 и  $-24$ . С другой стороны, для  $0 < h \equiv |x| \leq 1$  (см. [36], стр. 83, упр. 29) имеем

$$0 < e^{-x^2/4} < 1 - \frac{1}{4} h^2 e^{-h^2/4} < 1 - \frac{3}{16} h^2,$$

и

$$\left| \left(4x^3 - \frac{x^5}{2}\right) \sin \frac{8}{x^3} - 24 \cos \frac{8}{x^3} \right| \leqslant 24 + \frac{9}{2} h^3.$$

Поэтому из неравенства  $0 < h \leq 1$  следует, что

$$|f'(x)| < \left(1 - \frac{3}{16} h^2\right) \left(24 + \frac{9}{2} h^3\right) < 24 - \frac{9}{2} h^2 (1 - h) \leq 24.$$

Следовательно, множество значений функции  $f'$  на  $[-1, 1]$  имеет точную верхнюю грань, равную 24, и точную нижнюю грань, равную  $-24$ , и ни одна из этих граней не достигается.

## 8. Всюду непрерывная, но нигде не дифференцируемая функция

Функция  $|x|$  всюду непрерывна, но не дифференцируема в точке  $x = 0$ . С помощью сдвига этой функции можно определить всюду непрерывную функцию, которая не дифференцируема в каждой точке произвольно заданного конечного множества. В этом параграфе мы приведем пример, использующий бесконечное множество сдвигов функции  $|x|$ .

Покажем, что функция примера 21 гл. 2 нигде не дифференцируема. Пусть  $a$  — произвольное действительное число, и пусть для всякого натурального  $n$  число  $h_n$ , равное  $4^{-n}$  или  $-4^{-n}$ , выбрано так, что  $|f_n(a + h_n) - f_n(a)| = |h_n|$ . Тогда величина  $|f_m(a + h_n) - f_m(a)|$  имеет одинаковое значение  $|h_n|$  для всех  $m \leq n$  и равна нулю для  $m > n$ . Тогда разностное отношение  $(f(a + h_n) - f(a))/h_n$  является целым числом, которое четно при четном  $n$  и нечетно при нечет-

ном  $n$ . Отсюда следует, что предел

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(a + h_n) - f(a)}{h_n}$$

не существует, а поэтому не существует и  $f'(a)$ .

Приведенный пример<sup>1)</sup> является модификацией примера, построенного Б. Л. Ван дер Варденом в 1930 г. (см. [51], стр. 394). Первый же пример непрерывной нигде не дифференцируемой функции был построен К. В. Т. Вейерштрасом (немецкий математик, 1815—1897 г.):

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b^n \cos(a^n \pi x),$$

где  $a$  — целое нечетное число, а число  $b$  таково, что  $0 < b < 1$  и  $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi^2$ ). В настоящее время известны примеры непрерывных функций, которые ни в одной точке не имеют даже односторонней конечной или бесконечной производной. Эти примеры и дальнейшие ссылки можно найти в [51] (стр. 392—394), [19] (стр. 61—62, 115, 126), а также в [16] (т. II, стр. 401—412).

Как было показано ранее (см. пример 21 гл. 2), функция настоящего примера не является монотонной ни на каком интервале. Более того, существует пример функции всюду дифференцируемой и нигде не монотонной (см. [16], т. II, стр. 412—421). Конструкция этого примера очень сложна и приводит к функции, которая всюду дифференцируема и имеет плотное множество относительных максимумов и плотное множество относительных минимумов.

## 9. Дифференцируемая функция, для которой теорема о среднем не имеет места

В этом примере мы снова вынуждены обратиться к комплекснозначной функции. Функция

$$f(x) \equiv \cos x + i \sin x$$

<sup>1)</sup> Точно в таком же виде пример функции  $f(x)$  изложен в книге П. С. Александрова „Введение в общую теорию множеств и функций”, 1948, стр. 223—225. — Прим. ред.

<sup>2)</sup> На самом деле, как показал Г. Харди (Hardy G. H., Weierstrass's nondifferentiable function, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 17 (1916), 301—325), эта функция нигде не дифференцируема лишь в предположении, что  $0 < b < 1$  и  $ab \geqslant 1$ . — Прим. перев.

действительного переменного  $x$  всюду непрерывна и дифференцируема (см. [36], стр. 509—513). Однако не существует такого интервала  $[a, b]$ ,  $a < b$ , для которого при некотором  $\xi \in (a, b)$  справедливо равенство

$$(\cos b + i \sin b) - (\cos a + i \sin a) = (-\sin \xi + i \cos \xi)(b - a).$$

Если предположить, что это равенство возможно, то, приравнивая квадраты модулей (абсолютных значений) обеих его частей, мы получим равенство

$$(\cos b - \cos a)^2 + (\sin b - \sin a)^2 = (b - a)^2,$$

которое после элементарных преобразований примет вид

$$\sin^2 \frac{b-a}{2} = \left( \frac{b-a}{2} \right)^2.$$

Но так как не существует положительного числа  $h$ , такого, что  $\sin h = h$  (см. [36], стр. 78), то мы получили противоречие.

### 10. Бесконечно дифференцируемая функция $f(x)$ , положительная при положительных $x$ и равная нулю при отрицательных $x$

Функция

$$f(x) \equiv \begin{cases} e^{-1/x^2}, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x \leq 0, \end{cases}$$

бесконечно дифференцируема, а все ее производные в точке  $x = 0$  равны 0 (см. [36], стр. 108, упр. 52).

### 11. Бесконечно дифференцируемая функция, положительная в единичном интервале и равная нулю вне его

$$f(x) \equiv \begin{cases} e^{-1/x^2(1-x)^2}, & \text{если } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

### 12. Бесконечно дифференцируемая функция, равная 1 на $[1, +\infty)$ , равная 0 на $(-\infty, 0]$ и строго монотонная на $[0, 1]$

$$f(x) \equiv \begin{cases} \exp \left[ -\frac{1}{x^2} \exp \left( -\frac{1}{(1-x)^2} \right) \right], & \text{если } 0 < x < 1, \\ 0, & \text{если } x \leq 0, \\ 1, & \text{если } x \geq 1. \end{cases}$$

**13. Бесконечно дифференцируемая монотонная функция  $f$ , такая, что<sup>1)</sup>  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) \neq 0$**

Если не требовать монотонности, то тривиальным примером такой функции будет, например,  $(\sin x^2)/x$ . Построим пример монотонной функции, обладающей указанным свойством. Положим  $f(x)$  равной 1 для  $x \leq 1$  и равной  $1/n$  на замкнутых интервалах  $[2n - 1, 2n]$  для  $n = 1, 2, \dots$ . На оставшихся промежуточных интервалах вида  $(2n, 2n+1)$  определим  $f(x)$  с помощью функции примера 12, применяя горизонтальные и вертикальные сдвиги и умножение на соответствующие отрицательные множители<sup>2)</sup>.

<sup>1)</sup> В примерах такого типа предел  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$  не существует (ни конечный, ни бесконечный), так как если бы он существовал, то из равенства  $f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t) dt$  вытекало бы, что  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$ . — Прим. перев.

<sup>2)</sup> Приведенные рассуждения не убедительны. В самом деле, если через  $f_1(x)$  обозначим функцию из примера 12, то  $f(x) = -\frac{1}{n(n+1)} f_1(x-2n) + \frac{1}{n}$  при  $x \in (2n, 2n+1)$  и потому  $\sup_{2n < x < 2n+1} |f'(x)| = \frac{1}{n(n+1)} \sup_{0 \leq t \leq 1} |f'_1(t)|$ , что влечет  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$ . Для построения корректного примера достаточно положить  $f(x) = 1$  при  $x \leq 2$ ,  $f(x) = \frac{1}{n}$  при  $x \in \left[n + \frac{1}{n^3}, n+1\right] = [a_n, b_n]$  ( $n \geq 2$ ) и  $f(x) = -\frac{1}{n(n-1)} f_1(n^3(x-b_{n-1})) + \frac{1}{n-1}$  при  $x \in (b_{n-1}, a_n)$  с  $n \geq 2$ . — Прим. ред.

## ГЛАВА 4

### ИНТЕГРАЛ РИМАНА

#### Введение

Определение интеграла Римана функции  $f$ , заданной на замкнутом интервале  $[a, b]$ , а также элементарные свойства этого интеграла предполагаются известными. То же самое предполагается относительно основных несобственных интегралов, а в примере 14 — относительно интеграла Римана — Стильтьеса.

В некоторых примерах настоящей главы важное значение имеет понятие множества меры нуль. Множество  $A \subset \mathbf{R}$  называется множеством меры нуль, если для всякого  $\varepsilon > 0$  существует открытое покрытие множества  $A$  счетной совокупностью открытых интервалов, длины которых образуют бесконечный сходящийся ряд с суммой, меньшей  $\varepsilon$ . Ядро всякого множества меры нуль пусто. Говорят, что некоторое утверждение справедливо для почти всех точек или почти всюду, если множество всех точек, для которых это утверждение не имеет места, является множеством меры нуль. Для того чтобы функция  $f$ , заданная на замкнутом конечном интервале  $[a, b]$ , была интегрируема по Риману на этом интервале, необходимо и достаточно, чтобы она была ограничена и почти всюду непрерывна (см. [38], стр. 153, упр. 54, а также [33]\*, стр. 145).

#### 1. Ограниченнaя функция, не интегрируемая по Риману на конечном замкнутом интервале

Характеристическая функция множества  $Q$  всех рациональных чисел, рассматриваемая на замкнутом интервале  $[0, 1]$ , не интегрируема по Риману на нем (см. [36], стр. 112)<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Эта функция известна под названием „функции Дирихле“. —  
Прим. ред.

## 2. Функция, интегрируемая по Риману и не имеющая примитивной

Функция  $\operatorname{sgn} x$  (пример 1 гл. 3), рассматриваемая на интервале  $[-1, 1]$ , интегрируема на нем, но не имеет примитивной.

## 3. Функция, интегрируемая по Риману и не имеющая примитивной ни на каком интервале

Если в примере 18 гл. 2 положить  $A = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ , то функция  $f$  будет интегрируема на  $[0, 1]$ , так как она монотонна на этом интервале. Однако эта функция не имеет примитивной ни на каком подинтервале из  $[0, 1]$ , поскольку множество точек ее скачков всюду плотно в интервале  $[0, 1]$ <sup>1)</sup>.

## 4. Функция, имеющая примитивную на замкнутом интервале, но не интегрируемая на нем по Риману. (См. пример 35 гл. 8.)

Функция  $f$  примера 6 гл. 3 имеет (конечную) производную  $g(x)$  в каждой точке  $x$  некоторого замкнутого интервала  $I$ . Следовательно, функция  $g$  имеет примитивную. Однако функция  $g$  не ограничена, а поэтому не интегрируема по Риману.

Два предыдущих примера (примеры 3 и 4) представляют особый интерес в связи с основной теоремой интегрального исчисления. Первый вариант этой теоремы таков: если функция  $f(x)$  (i) интегрируема на интервале  $[a, b]$  и (ii) имеет примитивную  $F(x)$  на этом интервале ( $F'(x) = f(x)$  для  $a \leq x \leq b$ ), то интеграл Римана функции  $f(x)$  можно вычислить по формуле  $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$ . Второй вариант гласит: если функция  $f(x)$  непрерывна на интервале  $[a, b]$ , то справедливы утверждения (i) и (ii) с  $G(x) \equiv \int_a^x f(t) dt$  в качестве некоторой примитивной, причем для

<sup>1)</sup> Если  $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) - \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) \neq 0$ , то  $a$  называется точкой скачка функции  $f(x)$ . — Прим. перев.

всякой примитивной  $F(x)$  имеет место формула  $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$ . Наконец, третий вариант этой теоремы можно сформулировать так: если  $f(x)$  интегрируема на  $[a, b]$ , а функция  $F(x)$  непрерывна на  $[a, b]$  и имеет производную  $F'(x)$ , равную  $f(x)$  во всех точках интервала  $[a, b]$ , за исключением, быть может, конечного числа точек, то интеграл Римана функции  $f(x)$  можно вычислить по формуле  $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$ <sup>1)</sup>.

## 5. Интегрируемая по Риману функция со всюду плотным множеством точек разрыва

Этим свойством обладает функция примера 3, которая к тому же является монотонной.

Функция примера 15 гл. 2 также обладает этим свойством, однако она нигде не монотонна. Для этой функции  $\int_a^b f(x) dx = 0$  при всех  $a$  и  $b$ .

## 6. Функция $f$ , для которой $g(x) \equiv \int_0^x f(t) dt$ всюду дифференцируема, однако $g'(x) \neq f(x)$ на всюду плотном множестве

Если  $f$  — функция примера 15 гл. 2 (см. также предыдущий пример), то  $g(x) \equiv \int_0^x f(t) dt$  является тождественным нулем и, следовательно,  $g'(x) = 0$  для всех  $x$ . Поэтому равенство  $g'(x) = f(x)$  справедливо лишь для иррациональных  $x$ .

---

<sup>1)</sup> Нетрудно видеть, что эти три варианта основной теоремы интегрального исчисления не эквивалентны. — *Прим. перев.*

## 7. Две различные полунепрерывные функции, „расстояние“ между которыми равно нулю

В этом случае расстояние  $d$  между двумя функциями  $f$  и  $g$ , интегрируемыми на  $[a, b]$ , определяется как интеграл от абсолютной величины их разности:

$$d \equiv \int_a^b |f(x) - g(x)| dx.$$

Если  $f$  — полунепрерывная функция предыдущего примера (см. пример 16 гл. 2), а функция  $g$  — тождественный нуль, то  $f(x)$  и  $g(x)$  не равны во всех рациональных точках  $x$  (и, следовательно,  $f$  и  $g$ , несомненно, являются различными функциями), в то время как определенное выше расстояние  $d$  между этими функциями равно нулю.

## 8. Интегрируемая по Риману функция, множество точек разрыва которой совпадает с произвольно заданным множеством типа $F_\sigma$ и меры нуль. (См. пример 22 гл. 8.)

Этот пример несколько напоминает пример 23 гл. 2. Пусть  $A$  — заданное множество типа  $F_\sigma$  и меры нуль:  $A = A_1 \cup A_2 \cup \dots$ , где  $A_1, A_2, \dots$  — замкнутые подмножества некоторого интервала  $[a, b]$ , причем  $A_n \subset A_{n+1}$  для  $n = 1, 2, \dots$ . Далее, пусть  $A_0$  обозначает пустое множество  $\emptyset$ . Определим функцию  $f$  следующим образом:

$$f(x) \equiv \begin{cases} 2^{-n}, & \text{если } x \in A_n \setminus A_{n-1}, \\ 0, & \text{если } x \notin A. \end{cases}$$

Если  $c \in A$ , то  $f$  разрывна в этой точке. Действительно, пусть  $c \in A_n \setminus A_{n-1}$ . Поскольку  $A_n \setminus A_{n-1}$  является множеством меры нуль, то у него нет внутренних точек, и, следовательно,  $c$  является предельной точкой множества, на котором  $f$  принимает значения, отличающиеся от  $2^{-n}$  по крайней мере на  $2^{-n-1}$ . Если же  $c \notin A$ , то  $f$  непрерывна в этой точке. В самом деле, пусть задано  $\varepsilon > 0$ . Выберем такое  $N$ , что  $2^{-N} < \varepsilon$ . После этого возьмем такую окрестность точки  $c$ , которая не содержит ни одной точки множеств  $A_1, A_2, \dots, A_N$ . Тогда в этой окрестности  $|f(x) - f(c)| < 2^{-N} < \varepsilon$ .

**9. Две функции, интегрируемые по Риману, композиция которых не интегрируема по Риману.** (См. пример 34 гл. 8.)

Пусть  $f(x) \equiv 1$  для  $0 < x \leq 1$  и  $f(0) \equiv 0$ . Далее, пусть  $g$  — сужение функции  $f$  примера 15 гл. 2 на замкнутый интервал  $[0, 1]$ . Тогда  $f(g(x))$  является сужением на  $[0, 1]$  характеристической функции множества  $\mathbf{Q}$  всех рациональных чисел. Эта функция равна 1, если  $x$  рационально, и равна 0, если  $x$  иррационально. (См. пример 1 этой главы.)

**10. Не интегрируемая по Риману ограниченная функция, являющаяся пределом возрастающей последовательности интегрируемых по Риману функций.** (См. пример 33 гл. 8.)

Рассмотрим последовательность  $\{g_n\}$  функций, определенных в примере 24 гл. 2. Если ограничиться замкнутым интервалом  $[0, 1]$ , то эта последовательность является возрастающей последовательностью интегрируемых по Риману функций, т. е. для каждого  $x \in [0, 1]$ ,  $g_n(x) \leq g_{n+1}(x)$  при  $n = 1, 2, \dots$ . Положим  $g(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} g_n(x)$  для  $x \in [0, 1]$ .

Тогда  $g$  является сужением на замкнутый интервал  $[0, 1]$  характеристической функции множества  $\mathbf{Q}$  всех рациональных чисел, и, следовательно, (см. пример 1)  $g$  не интегрируема по Риману на  $[0, 1]$ .

**11. Расходящийся несобственный интеграл, имеющий конечное главное значение в смысле Коши**

Несобственный интеграл  $\int_{-\infty}^{+\infty} x dx$  расходится, но его

главное значение в смысле Коши равно нулю:

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_{-a}^a x dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} 0 = 0.$$

(См. [36], стр. 145, упр. 30.)

- 12. Сходящийся несобственный интеграл  $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ , подинтегральная функция которого положительна, непрерывна и не стремится к нулю при  $x \rightarrow +\infty$**

Положим  $g(n) \equiv 1$  для всякого целого  $n > 1$ , а на замкнутых интервалах  $[n - n^{-2}, n]$  и  $[n, n + n^{-2}]$  функцию  $g$  определим как линейную и равную нулю в концевых нецелых точках. Наконец, в тех точках  $x \geq 1$ , где  $g(x)$  еще не определена, положим  $g(x) \equiv 0$ . Тогда функция

$$f(x) \equiv g(x) + \frac{1}{x^2}$$

положительна и непрерывна для  $x \geq 1$ , равенство  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$  не имеет места, а несобственный интеграл

$$\int_1^{+\infty} f(x) dx$$

сходится.

Если опустить требование положительности функции, то простым примером, который удовлетворяет оставшимся требованиям (см. [36], стр. 146, упр. 43), является интеграл

$$\int_1^{+\infty} \cos x^2 dx.$$

- 13. Сходящийся на интервале  $[0, +\infty)$  несобственный интеграл, подинтегральная функция которого не ограничена на любом интервале вида  $[a, +\infty)$ , где  $a > 0$**

Этим условиям удовлетворяет несобственный интеграл  $\int_0^{+\infty} x \cos x^4 dx$ . (См. [36], стр. 146, упр. 43.)

Можно построить такой же пример с положительной и всюду непрерывной подинтегральной функцией. При этом можно воспользоваться методом, подобным тому, который был применен в предыдущем примере, полагая  $g(n) \equiv n$  и рассматривая замкнутые интервалы  $[n - n^{-3}, n]$  и  $[n, n + n^{-3}]$ .

14. Функции  $f$  и  $g$ , такие, что интеграл Римана — Стильтьеса от  $f$  относительно  $g$  существует на  $[a, b]$  и  $[b, c]$ , но не существует на  $[a, c]$

Положим

$$f(x) \equiv \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leqslant x < 1, \\ 1, & \text{если } 1 \leqslant x \leqslant 2, \end{cases}$$

$$g(x) \equiv \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 1, & \text{если } 1 < x \leqslant 2, \end{cases}$$

и пусть  $a = 0$ ,  $b = 1$  и  $c = 2$ . Тогда

$$\int_0^1 f(x) dg(x) = 0, \quad \int_1^2 f(x) dg(x) = 1.$$

Но поскольку  $f$  и  $g$  имеют общую точку разрыва  $x = 1$ , то интеграл

$$\int_0^2 f(x) dg(x)$$

не существует (см. [36], стр. 151, упр. 10, а также [33]\*, стр. 249).

## ГЛАВА 5

### ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

#### Введение

Понятия *последовательности*, *последовательности Коши*, *сходимости* и *расходимости* были определены во введении к гл. 1, а понятия верхнего и нижнего предела в (кoneчной) точке для функций даны во введении к гл. 2. Соответствующие определения для последовательностей действительных чисел предполагаются известными. Первые шесть примеров настоящей главы касаются только последовательностей действительных чисел. Следует подчеркнуть, что для этих последовательностей термин *предел* иногда употребляется и для обозначения бесконечных пределов. Однако под *сходящейся* последовательностью всегда понимается последовательность, имеющая *конечный* предел. В примере 7 предполагается, что читатель знаком с определением и элементарными свойствами *равномерной сходимости* последовательностей функций. В примере 8 сформулированы определения сходимости и расходимости *последовательностей множеств*, которые затем используются в примерах 8 и 9. Всюду в этой книге под словом *последовательность* понимается *бесконечная последовательность*, если не оговорено противное.

#### 1. Ограниченнные расходящиеся последовательности

Простейшим примером ограниченной расходящейся последовательности, по-видимому, является последовательность

$$0, 1, 0, 1, \dots,$$

которую можно записать в виде  $\{a_n\}$ , где  $a_n = 0$ , если  $n$  нечетно, и  $a_n = 1$ , если  $n$  четно, т. е.  $a_n = \frac{1}{2}[1 + (-1)^n]$ .

Более сложным примером является последовательность  $\{r_n\}$  всех рациональных чисел интервала  $[0, 1]$ , т. е.  $\{r_n\}$  есть взаимно однозначное соответствие между множеством  $\mathbb{N}$  и  $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ .

## 2. Последовательность с произвольно заданным замкнутым множеством предельных точек

Всякая точка, которая является пределом некоторой подпоследовательности последовательности  $\{a_n\}$ , называется предельной точкой или частичным пределом последовательности  $\{a_n\}$ . Всякая предельная точка множества значений последовательности есть предельная точка самой последовательности, однако обратное утверждение, вообще говоря, неверно. Контрпример: последовательность  $0, 1, 0, 1, \dots$  имеет две предельные точки  $0$  и  $1$ , однако ее множество значений не имеет ни одной предельной точки.

Множество всех предельных точек любой последовательности  $\{a_n\}$  всегда замкнуто, ибо оно является замыканием множества значений последовательности  $\{a_n\}$ <sup>1)</sup>. Нижеследующий пример показывает, что таким путем можно получить любое замкнутое множество  $A$ , т. е. в действительности  $A$  является множеством предельных точек некоторой последовательности  $\{a_n\}$ , состоящей из различных точек. Отсюда будет следовать, что  $A$  является не только множеством предельных точек последовательности  $\{a_n\}$ , но и множеством предельных точек ее множества значений.

Если  $A$  — пустое множество, то положим  $a_n \equiv n$  для  $n = 1, 2, \dots$ . Пусть теперь  $A$  — произвольное непустое замкнутое множество (действительных чисел), и пусть  $\{r_n\}$  — последовательность всех рациональных чисел, среди членов которой нет равных ( $\{r_n\}$  — взаимно однозначное отображение множества  $\mathbb{N}$  на  $\mathbb{Q}$ ). Последовательность  $\{a_n\}$ , для которой  $A$  будет множеством предельных точек, мы определим рекуррентным способом. Сначала разобьем множество  $R$  на четыре

<sup>1)</sup> Это утверждение не точно. Множество предельных точек любой последовательности  $\{a_n\}$  замкнуто, но оно не обязано совпадать с замыканием множества значений последовательности  $\{a_n\}$ .

Так будет, например, если  $a_n = \frac{1}{n}$  ( $n \geq 1$ ). — Прим. ред.

непересекающихся интервала:  $(-\infty, -1)$ ,  $[-1, 0)$ ,  $[0, 1)$  и  $[1, +\infty)$ . Если  $A \cap (-\infty, -1) \neq \emptyset$ , то в качестве  $a_1$  возьмем первый член последовательности  $\{r_n\}$  (т. е. член с наименьшим номером  $n$ ), принадлежащий интервалу  $(-\infty, -1)$ ; если  $A \cap (-\infty, -1) = \emptyset$ , а  $A \cap [-1, 0) \neq \emptyset$ , то в качестве  $a_1$  возьмем первый член последовательности, принадлежащий интервалу  $[-1, 0)$ ; если же  $A \cap (-\infty, 0) = \emptyset$ , но  $A \cap [0, 1) \neq \emptyset$ , то в качестве  $a_1$  возьмем первый член последовательности, принадлежащий  $[0, 1)$ ; наконец, если  $A \cap (-\infty, 1) = \emptyset$ , то в качестве  $a_1$  возьмем первый член последовательности, принадлежащий  $[1, +\infty)$ . Пусть элемент  $a_1$  выбран. В случае если  $A \cap [-1, +\infty) \neq \emptyset$ , подобным же образом выбираем  $a_2 \neq a_1$ , рассматривая последовательно интервалы  $[-1, 0)$ ,  $[0, 1)$  и  $[1, +\infty)$ . Если же  $A \cap [-1, +\infty) = \emptyset$ , то на этой стадии другие члены не выбираются. Таким образом, на первой стадии определяется по крайней мере один член  $a_1$ , но не более четырех членов  $a_1, a_2, a_3, a_4$  последовательности  $\{a_n\}$ . На второй стадии  $\mathbf{R}$  разбивается на  $2 \cdot 2^2 + 2 = 10$  интервалов  $(-\infty, -2)$ ,  $[-2, -3/2)$ , ...,  $[3/2, 2)$ ,  $[2, +\infty)$ . На каждом шаге, после того как  $a_1, a_2, \dots, a_n$  выбраны, элемент  $a_{n+1}$  выбирается из некоторого интервала  $I$ , а именно если  $A \cap I \neq \emptyset$ , то  $a_{n+1}$  есть первый член  $\{r_n\}$ , отличный от уже выбранных и принадлежащий  $I$ . На  $k$ -й стадии  $\mathbf{R}$  разбивается на  $k \cdot 2^k + 2$  интервалов:  $(-\infty, -k)$ ,  $[-k, -k + 2^{-k+1})$ , ..., ...,  $[k - 2^{-k+1}, k)$ ,  $[k, +\infty)$ . Нетрудно показать, что последовательность  $\{a_n\}$ , определенная таким образом, рекуррентно, обладает требуемыми свойствами. Заметим, что если  $A = \mathbf{R}$ , то  $\{a_n\}$  является взаимно однозначным соответствием между  $\mathbf{N}$  и  $\mathbf{Q}$ , которое, возможно, отлично от  $\{r_n\}$ <sup>1)</sup>.

1) Построение последовательности  $\{a_n\}$  можно осуществить проще. Именно, так как множества  $I(A)$  и  $B = (-\infty, \infty) - A$  открыты, то они суть суммы не более чем счетного числа непересекающихся интервалов:  $I(A) = \bigcup_k (b_k, c_k)$ ,  $B = \bigcup_m (d_m, e_m)$ . Пусть  $\{r'_n(k)\} = (b_k, c_k) \cap \mathbf{Q}$ , а  $\{r''_n(m)\} \subset (d_m, e_m) \cap \mathbf{Q}$  — такая последовательность различных точек, предельными точками которой являются лишь  $d_m$  и  $e_m$ . Занумеровав в одну последовательность множества последовательностей  $\{r'_n(k)\}$  и  $\{r''_n(m)\}$  ( $k = 1, 2, \dots; m = 1, 2, \dots$ ), мы и получим искомую последовательность  $\{a_n\}$ . — Прим. ред.

**3. Расходящаяся последовательность  $\{a_n\}$ , для которой**  
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_{n+p} - a_n) = 0$  **при любом натуральном  $p$**

Пусть  $a_n$  обозначает  $n$ -ю частичную сумму гармонического ряда

$$a_n \equiv 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}.$$

Тогда последовательность  $\{a_n\}$  расходится, однако для  $p > 0$  имеем

$$a_{n+p} - a_n = \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{n+p} \leq \frac{p}{n+1} \rightarrow 0.$$

Заметим, что предельное соотношение  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_{n+p} - a_n) = 0$  выполняется неравномерно относительно  $p$ . В самом деле, утверждение, что это предельное соотношение выполняется равномерно относительно  $p$ , эквивалентно критерию Коши для сходимости последовательности ([36], стр. 447, упр. 43).

Основную идею предыдущего абзаца можно высказать и в следующей форме: если  $\{a_n\}$  расходится, то существует строго возрастающая последовательность  $\{p_n\}$  натуральных чисел, таких, что  $a_{n+p_n} - a_n \not\rightarrow 0$ . Для последовательности частичных сумм гармонического ряда в качестве  $\{p_n\}$  можно взять последовательность  $\{n\}$ , поскольку в этом случае

$$a_{n+p_n} - a_n = \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{n+n} \geq \frac{n}{n+n} = \frac{1}{2}.$$

Следующий пример связан с другим аспектом этого вопроса (при  $\varphi(n) \equiv n + p_n$ ).

**4. Расходящаяся последовательность  $\{a_n\}$ , такая, что для заданной строго возрастающей последовательности  $\{\varphi_n\} = \{\varphi(n)\}$  натуральных чисел  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_{\varphi(n)} - a_n) = 0$ .**

Пользуясь индукцией, легко установить, что  $\varphi(n) \geq n$  для всех  $n = 1, 2, \dots$ ; более того,  $\varphi(n+k) \geq n + \varphi(k)$  для всех  $n$  и  $k = 1, 2, \dots$  Следовательно,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(n) = +\infty$ .

Рассмотрим два случая.

Если последовательность  $\varphi(n) - n$  ограничена, например  $\varphi(n) - n \leq K$  для всех  $n = 1, 2, \dots$ , то в качестве после-

довательности  $\{a_n\}$  можно взять последовательность частичных сумм гармонического ряда, так как

$$a_{\varphi(n)} - a_n = \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{\varphi(n)} \leq \frac{K}{n+1} \rightarrow 0.$$

Если же последовательность  $\varphi(n) - n$  не ограничена, то поступим следующим образом. Пусть  $k$  — наименьшее натуральное число, такое, что  $\varphi(k) > k$ . Положим  $a_n = 1$ , если  $n = k, \varphi(k), \varphi(\varphi(k)), \dots$ , и  $a_n = 0$  в противном случае. Поскольку  $\{\varphi(n)\}$  строго возрастает, то существует подпоследовательность последовательности  $\{a_n\}$ , состоящая из единиц, а поскольку  $\varphi(n) - n$  не ограничена, то существует подпоследовательность последовательности  $\{a_n\}$ , состоящая из нулей. Следовательно,  $\{a_n\}$  расходится. С другой стороны,  $a_{\varphi(n)} = a_n$  для каждого  $n = 1, 2, \dots$ , и потому  $a_{\varphi(n)} - a_n \rightarrow 0$ .

Этот пример можно обобщить в различных направлениях. Например, достаточно лишь предположить, что  $\varphi(n) \rightarrow +\infty$  при  $n \rightarrow +\infty$ , при этом можно потребовать, чтобы последовательность  $\{a_n\}$  была неограниченной. Однако мы не будем вдаваться в подробности.

**5. Последовательности  $\{a_n\}$  и  $\{b_n\}$ , такие, что  $\underline{\lim} a_n + \underline{\lim} b_n < \underline{\lim}(a_n + b_n) < \overline{\lim} a_n + \overline{\lim} b_n < \overline{\lim}(a_n + b_n) < \overline{\lim} a_n + \overline{\lim} b_n$**

Пусть  $\{a_n\}$  и  $\{b_n\}$  — последовательности с периодами, состоящими из четырех цифр:

$$\{a_n\} : 0, 1, 2, 1, 0, 1, 2, 1, 0, 1, 2, 1, 0, 1, 2, 1, \dots$$

$$\{b_n\} : 2, 1, 1, 0, 2, 1, 1, 0, 2, 1, 1, 0, 2, 1, 1, 0, \dots$$

Тогда требуемые неравенства примут следующий вид:

$$0 < 1 < 2 < 3 < 4.$$

**6. Последовательности  $\{a_{1n}\}, \{a_{2n}\}, \dots$ , такие, что  $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} (a_{1n} + a_{2n} + \dots) > \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_{1n} + \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_{2n} + \dots$**

Положим  $a_{mn} = 1$ , если  $m = n$ , и  $a_{mn} = 0$ , если  $m \neq n$ ,  $m, n = 1, 2, \dots$ . При этом оба ряда, входящие в формулировку утверждения, сходятся, и требуемое неравенство принимает следующий вид:  $1 > 0$ .

Следует отметить, что неравенство, установленное в этом примере, невозможно в случае, если имеется лишь конечное число последовательностей. Например, всегда справедливо неравенство

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n + b_n) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n + \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n.$$

(См. [36], стр. 59, упр. 19.)

### 7. Две равномерно сходящиеся последовательности функций, последовательность произведений которых не сходится равномерно

Пусть функция  $f$  определена и не ограничена на множестве  $D^1)$ , которое мы примем за область определения всех функций настоящего примера. Определим последовательности  $\{f_n\}$  и  $\{g_n\}$  следующим образом:

$$f_n(x) \equiv f(x), \quad g_n(x) \equiv \frac{1}{n}.$$

Тогда  $f_n \rightarrow f$  и  $g_n \rightarrow 0$  равномерно на  $D$ , однако  $f_n g_n \rightarrow 0$  неравномерно на  $D$ . В частности, в этом примере можно положить  $D = \mathbf{R}$ ,  $f(x) = x$ .

Следует заметить, что если обе последовательности ограничены и равномерно сходятся на  $D$ , то их произведение также равномерно сходится на  $D$ .

### 8. Расходящаяся последовательность множеств

Верхний предел  $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} A_n$  и нижний предел  $\underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} A_n$  последовательности множеств  $\{A_n\}$  определяются следующими формулами:

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} A_n \equiv \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left[ \bigcup_{m=n}^{+\infty} A_m \right], \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} A_n \equiv \bigcup_{n=1}^{+\infty} \left[ \bigcap_{m=n}^{+\infty} A_m \right].$$

Последовательность  $\{A_n\}$  называется сходящейся, если  $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} A_n = \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} A_n$ . В таком случае говорят, что она сходится.

<sup>1)</sup> Отсюда следует, что множество  $D$  бесконечно. — Прим. перев.

дится к этому общему значению верхнего и нижнего пределов. Если же последовательность множеств не сходится, то она называется расходящейся. Поскольку  $\overline{\lim} A_n = \{x | x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\}$  и бесконечно многим  $A_n$ , а  $\underline{\lim} A_n = \{x | x \in \text{всем } A_n\}$ , за исключением, быть может, конечного их числа}, то верхний предел осциллирующей последовательности  $A, B, A, B, A, B, \dots$  равен объединению  $A \cup B$ , а ее нижний предел равен пересечению  $A \cap B$ . Следовательно, последовательность такого типа сходится тогда и только тогда, когда  $A = B$ .

Следует обратить внимание на тесную аналогию между этим примером и примером последовательности чисел  $\{a, b, a, b, \dots\}$  (см. пример 1).

### 9. Последовательность $\{A_n\}$ множеств, которая сходится к пустому множеству, но кардинальные числа этих множеств $\rightarrow +\infty$

Пусть  $A_n$  — множество  $n$  натуральных чисел, каждое из которых больше или равно  $n$ , но меньше  $2n$ :

$$A_n = \{m | m \in \mathbb{N}, n \leq m < 2n\}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Тогда, поскольку никакое натуральное число не принадлежит бесконечному множеству членов последовательности  $\{A_n\}$ , то ее верхний и нижний пределы пусты.

Предыдущий пример можно наглядно пояснить следующим образом. Пусть у нас имеются биллиардные шары, которые занумерованы числами 0, 1, 2, .... Будем помещать в ящик по два шара и одновременно вынимать из него один. Например, за минуту до полудня поместим в ящик шары с номерами 0 и 1 и удалим из него шар с номером 0. За  $1/2$  минуты до полудня поместим в ящик шары с номерами 2 и 3, а шар с номером 1 удалим. За  $1/3$  минуты до полудня добавим шары с номерами 4 и 5 и вытащим шар с номером 2. Продолжая этот процесс, естественно задать вопрос: „Сколько шаров будет в ящике в полдень?“ Ответ: „Ни одного“.

Поскольку натуральные числа можно привести во взаимно однозначное соответствие с обратными им, а все конечные множества, как подмножества  $\mathbb{R}$ , компактны (замкнуты и ограничены), то все множества  $A_n$  этого примера компактны

и даже можно предположить, что они *равномерно* ограничены (все они заключены в одном ограниченном интервале). Если предположить, что последовательность  $\{A_n\}$  является убывающей ( $A_{n+1} \subset A_n$  для  $n = 1, 2, \dots$ ), то предел  $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n$  будет

равен пересечению  $\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n$  и может быть пустым множеством,

в то время как кардинальное число каждого множества  $A_n$  бесконечно. В то же время каждое множество  $A_n$  может быть ограничено (пример:  $\{1/n, 1/(n+1), \dots\}$ ) или замкнуто (пример:  $\{n, n+1, \dots\}$ ). Однако оба эти условия (ограниченность и замкнутость) не могут быть выполнены одновременно (см. [36], стр. 201).

## ГЛАВА 6

### БЕСКОНЕЧНЫЕ РЯДЫ

#### Введение

Если не оговорено противное, то все рассматриваемые в настоящей главе ряды предполагаются действительными, т. е. их члены являются действительными числами. Пусть  $\{s_n\}$  — последовательность частичных сумм бесконечного ряда  $\sum a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ , т. е.  $s_n = a_1 + \dots + a_n$  для  $n = 1, 2, \dots$ . Если  $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n$  существует и конечен, то говорят, что ряд  $\sum a_n$  сходится. Этот предел  $s$  называют суммой ряда  $\sum a_n$  и пишут

$$\sum a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = s.$$

Если же ряд  $\sum a_n$  не сходится, т. е. предел  $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n$  бесконечен или не существует, то говорят, что ряд расходится. Утверждение  $\sum a_n = +\infty$  означает, что  $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = +\infty$ .

Ряд  $\sum a_n$  называется неотрицательным (соответственно положительным), если  $a_n \geqslant 0$  (соответственно  $a_n > 0$ ) для всякого  $n$ . Аналогичные определения даются для последовательности  $\{a_n\}$ . Для неотрицательного ряда  $\sum a_n$  утверждение  $\sum a_n < +\infty$  означает, что ряд сходится, а утверждение  $\sum a_n = +\infty$  означает, что этот ряд расходится.

Иногда удобно, чтобы ряд начинался с члена  $a_0$ . В этом случае запись  $\sum a_n$  обозначает ряд  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$  или сумму этого ряда. Для степенного ряда  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  член  $a_0 x^0$  считается равным  $a_0$ , даже если  $x = 0$ , т. е. мы здесь полагаем  $0^0 \equiv 1$ .

Для ряда Маклорена

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

член, соответствующий  $n = 0$ , считается равным  $f(0)$ ; другими словами,  $f^{(0)}(x) \equiv f(x)$ .

- 1. Расходящийся ряд, общий член которого стремится к нулю**

Гармонический ряд  $\sum 1/n$ .

- 2. Сходящийся ряд  $\sum a_n$  и расходящийся ряд  $\sum b_n$ , такие, что  $a_n \geq b_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$**

Положим  $a_n \equiv 0$  и  $b_n \equiv -1/n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ .

- 3. Сходящийся ряд  $\sum a_n$  и расходящийся ряд  $\sum b_n$ , такие, что  $|a_n| > |b_n|$ ,  $n = 1, 2, \dots$**

В качестве  $\sum a_n$  можно взять условно сходящийся знакочередующийся гармонический ряд  $\sum (-1)^{n+1}/n$ , а в качестве  $\sum b_n$  — расходящийся гармонический ряд  $\sum 1/n$ .

- 4. Для произвольно заданного положительного ряда существует либо мажорируемый им расходящийся, либо мажорирующий его сходящийся ряд**

Говорят, что неотрицательный ряд  $\sum a_n$  мажорирует ряд  $\sum b_n$ , если  $a_n \geq |b_n|$  для  $n = 1, 2, \dots$ . Пусть задан положительный ряд  $\sum b_n$ . Положим  $a_n \equiv b_n$  для  $n = 1, 2, \dots$ . Тогда, если ряд  $\sum b_n$  расходится, то он мажорирует расходящийся ряд  $\sum a_n$ ; если же ряд  $\sum b_n$  сходится, то он мажорируется сходящимся рядом  $\sum a_n$ . При этом с помощью множителей  $1/2$  и  $2$  можно добиться, чтобы все неравенства в определении мажорирующего ряда стали строгими.

Этот простой результат можно высказать в следующей форме: *не существует положительного ряда, который одновременно мог бы служить для установления сходимости и расходимости рядов при помощи сравнения их с данным рядом.* (См. ниже пример 19.)

## 5. Об условно сходящихся рядах

У всякого условно сходящегося ряда  $\sum a_n$ , например у знакочередующегося гармонического ряда  $\sum (-1)^{n+1}/n$ , члены можно переставить таким образом, чтобы новый ряд сходился к любой наперед заданной сумме или стал расходящимся. Среди расходящихся рядов, полученных этим способом, существуют такие, что последовательность  $\{s_n\}$  их частичных сумм имеет предел  $+\infty$ ,  $-\infty$  или вообще не имеет предела. Более того, последовательность  $\{s_n\}$  можно определить таким образом, что множество ее предельных точек будет совпадать с произвольно заданным замкнутым интервалом, ограниченным или нет (см. пример 2 гл. 5). Это объясняется тем, что ряд из положительных и ряд из отрицательных членов ряда  $\sum a_n$  расходятся.

В качестве примера укажем перестановку ряда  $\sum (-1)^{n+1}/n$ , такую, что последовательность  $\{s_n\}$  частичных сумм имеет своим множеством предельных точек замкнутый интервал  $[a, b]$ . Начнем с первого члена 1 и будем добавлять к нему отрицательные члены

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} - \dots - \frac{1}{2j}$$

до тех пор, пока не получим первую сумму  $< a$ . Затем будем добавлять к этой сумме неиспользованные положительные члены до тех пор, пока не получим первую сумму

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \dots - \frac{1}{2j} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2k+1},$$

которая превосходит  $b$ . Продолжая этот процесс, мы будем добавлять к полученной сумме неиспользованные отрицательные члены до тех пор, пока не получим первую сумму

$< a$ , а затем будем добавлять к ней неиспользованные положительные члены до тех пор, пока не получим первую сумму  $> b$ . Продолжая этот процесс неограниченно, мы получим некоторый ряд с частичными суммами  $s_n$ . Поскольку абсолютная величина  $1/n$  общего члена  $(-1)^{n+1}/n$  стремится к нулю, то каждое число замкнутого интервала  $[a, b]$  при некоторых достаточно больших  $n$  приближается частичными суммами  $s_n$  с как угодно большой точностью. Более того, этим свойством не обладает никакое число вне интервала  $[a, b]$ .

Если изменить только что описанное построение так, чтобы суммы сначала стали больше 1, затем меньше — 2, на следующем шаге стали больше 3, а затем меньше — 4 и т. д., то последовательность частичных сумм так полученного ряда будет иметь своим множеством предельных точек всю систему действительных чисел.

В. Серпинский (см. [46]) показал, что если  $\sum a_n$  — условно сходящийся ряд с суммой  $s$  и  $s' < s$ , то при помощи некоторой перестановки, использующей лишь положительные члены (отрицательные члены остаются на их первоначальных местах), можно получить ряд, сходящийся к сумме  $s'$ . Такое же замечание справедливо для чисел  $s'' > s$  и перестановок, использующих только отрицательные члены. Ясно, что это есть обобщение замечательной „теоремы Римана о перестановках“ (см. [38], стр. 232, теорема III), все существенные детали которой иллюстрируются построением, описанным в настоящем примере.

Существует обобщение этой теоремы и в другом направлении. Пусть  $\sum a_n$  — условно сходящийся ряд комплексных чисел. Тогда множество сумм всех сходящихся (или расходящихся к  $\infty$ ) рядов, полученных из ряда  $\sum a_n$  с помощью всевозможных перестановок его членов, является либо прямой на комплексной плоскости (включающей бесконечно удаленную точку), либо всей комплексной плоскостью (также включающей бесконечно удаленную точку). Более того, если  $\sum v_n$  — условно сходящийся ряд векторов в конечномерном пространстве, то суммы, которые можно получить всевозможными перестановками, составляют множество, являющееся линейным многообразием в этом пространстве (см. [57]).

6. Для произвольного условно сходящегося ряда  $\sum a_n$  и произвольного действительного числа  $x$  существует последовательность  $\{\varepsilon_n\}$ , где  $|\varepsilon_n|=1$  ( $n=1, 2, \dots$ ), такая, что  $\sum \varepsilon_n a_n = x$ <sup>1)</sup>

Используемое здесь построение аналогично тому, которое применялось в примере 5. Поскольку  $\sum |a_n| = +\infty$ , множители  $\varepsilon_n$ , по абсолютной величине равные 1, можно выбрать таким образом, чтобы  $\varepsilon_1 a_1 + \dots + \varepsilon_n a_n = |a_1| + \dots + |a_n| > x$ . Пусть  $n_1$  — наименьший из номеров  $n$ , для которых выполняется это неравенство. Затем мы выбираем множители  $\varepsilon_n$ , по абсолютной величине равные 1, так, чтобы выполнялось условие

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 a_1 + \dots + \varepsilon_{n_2} a_{n_2} &= |a_1| + \dots + |a_{n_1}| - \\ &\quad - |a_{n_1+1}| - \dots - |a_{n_2}| < x \end{aligned}$$

(где  $n_2$  — наименьшее из возможных  $n$ ). Продолжая этот процесс неограниченно, мы получим ряд  $\sum \varepsilon_n a_n$ , частичные суммы которого попеременно то больше, то меньше  $x$ . Поскольку  $a_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow +\infty$ , то этот ряд сходится к  $x$ .

## 7. Об условиях теоремы Лейбница для знакочередующихся рядов

Теорема Лейбница о знакочередующихся рядах утверждает, что ряд  $\sum \varepsilon_n c_n$ , где  $|\varepsilon_n|=1$  и  $c_n > 0$ ,  $n=1, 2, \dots$ , сходится, если

- (i)  $\varepsilon_n = (-1)^{n+1}$ ,  $n=1, 2, \dots$ ,
- (ii)  $c_{n+1} \leq c_n$ ,  $n=1, 2, \dots$ ,
- (iii)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = 0$ .

Некакие два из этих трех условий сами по себе не обеспечивают сходимости, т. е. ни одно из этих трех условий нельзя опустить. Этот факт подтверждается следующими тремя примерами.

<sup>1)</sup> В этом примере члены ряда можно считать комплексными числами. Разумеется, множители  $\varepsilon_n$  тогда также должны быть комплексными. — Прим. перев.

(i) Положим  $\varepsilon_n \equiv 1$ ,  $c_n \equiv 1/n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . С другой стороны, существенно именно чередование знаков у членов ряда. В этом можно убедиться на том же примере, если в качестве  $\{\varepsilon_n\}$  взять следующую последовательность из троек чисел: 1, 1, —1, 1, 1, —1, 1, 1, —1,  $\dots$

(ii) Положим  $c_n \equiv 1/n$ , если  $n$  нечетно, и  $c_n \equiv 1/n^2$ , если  $n$  четно.

(iii) Положим  $c_n \equiv (n+1)/n$  (или, что еще проще,  $c_n \equiv 1$ ),  $n = 1, 2, \dots$ .

### 8. Расходящийся ряд с общим членом, стремящимся к нулю, который при подходящей расстановке скобок становится сходящимся к наперед заданной сумме

Расставить скобки у бесконечного ряда — это значит сгруппировать его последовательные члены в конечные группы (каждая такая конечная группа состоит по крайней мере из одного члена) и получить новый ряд, последовательность частичных сумм которого будет, таким образом, подпоследовательностью частичных сумм исходного ряда. Например, у знакочередующегося гармонического ряда можно расставить скобки следующим образом:

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots \\ \dots + \frac{1}{(2n-1)2n} + \dots$$

Любой ряд, полученный из сходящегося ряда расстановкой скобок, сходится и имеет сумму, равную сумме исходного ряда.

Требуемым свойством обладает последний из рядов, которые описаны в примере 5, поскольку подходящая расстановка скобок в нем дает ряд, сходящийся к наперед заданному действительному числу.

### 9. Для произвольно заданной положительной последовательности $\{b_n\}$ с нижним пределом, равным нулю, существует расходящийся ряд $\sum a_n$ , общий член которого стремится к нулю, причем $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n/b_n = 0$

Возьмем подпоследовательность  $\{b_{n_k}\}$ , такую, что  $\lim_{k \rightarrow +\infty} b_{n_k} = 0$ , причем  $b_{n_1}, b_{n_2}, \dots, b_{n_k}, \dots$  не являются последовательными членами последовательности  $\{b_n\}$ , и положим

$a_{n_k} \equiv b_{n_k}^2$  для  $k = 1, 2, \dots$ . Для остальных значений  $n$ :  $n = m_1, m_2, m_3, \dots, m_j, \dots$ , положим  $a_{m_j} \equiv 1/j$ . Тогда  $a_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow +\infty$ , ряд  $\sum a_n$  расходится и  $a_{n_k}/b_{n_k} = b_{n_k} \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow +\infty$ .

Этот пример показывает, в частности, что как бы быстро ни стремилась к нулю положительная последовательность  $\{b_n\}$ , всегда существует положительная последовательность  $\{a_n\}$ , которая стремится к нулю столь медленно, что ряд  $\sum a_n$  расходится, и все же последовательность  $\{a_n\}$  имеет подпоследовательность, стремящуюся к нулю быстрее, чем соответствующая подпоследовательность последовательности  $\{b_n\}$ .

10. Для всякой положительной последовательности  $\{b_n\}$  с нижним пределом, равным нулю, существует положительный сходящийся ряд  $\sum a_n$ , такой, что

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n/b_n = +\infty$$

Выберем из последовательности  $\{b_n\}$  подпоследовательность  $b_{n_1}, b_{n_2}, \dots, b_{n_k}, \dots$ , такую, что  $b_{n_k} < k^{-3}$  для всякого натурального  $k$ , и положим  $a_{n_k} \equiv k^{-2}$  для  $k = 1, 2, \dots$ . Для остальных значений  $n$  положим  $a_n \equiv n^{-2}$ . Тогда  $\sum a_n < +\infty$ , в то время как  $a_{n_k}/b_{n_k} = k \rightarrow +\infty$ .

Этот пример показывает, в частности, что как бы медленно ни стремилась к нулю положительная последовательность  $\{b_n\}$ , всегда существует положительная последовательность  $\{a_n\}$ , которая стремится к нулю столь быстро, что ряд  $\sum a_n$  сходится, и все же последовательность  $\{a_n\}$  имеет подпоследовательность, стремящуюся к нулю медленнее, чем соответствующая подпоследовательность последовательности  $\{b_n\}$ .

11. Для всякой положительной последовательности  $\{c_n\}$  с нижним пределом, равным нулю, существуют положительный сходящийся ряд  $\sum a_n$  и положительный расходящийся ряд  $\sum b_n$ , такие, что  $a_n/b_n = c_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$

Выберем из последовательности  $\{c_n\}$  подпоследовательность  $c_{n_1}, c_{n_2}, \dots, c_{n_k}, \dots$ , такую, что  $c_{n_k} < k^{-2}$  для всякого

натурального  $k$  и положим  $a_{n_k} \equiv c_{n_k}$ ,  $b_{n_k} \equiv 1$  для  $k = 1, 2, \dots$ .

Для остальных значений  $n$  положим  $a_n \equiv n^{-2}$ ,  $b_n \equiv (n^2 c_n)^{-1}$ . Тогда ряд  $\sum a_n$  сходится, ряд  $\sum b_n$  расходится, поскольку  $b_n \not\rightarrow 0$  при  $n \rightarrow +\infty$ , и  $a_n/b_n = c_n$  для  $n = 1, 2, \dots$

Этот пример показывает, в частности, что как бы медленно ни стремилась к нулю положительная последовательность  $\{c_n\}$ , всегда существуют два положительных ряда, один из которых сходящийся, а другой расходящийся, такие, что отношение их  $n$ -х членов равно  $c_n$ .

**12. Положительная непрерывная при  $x \geq 1$  функция,**

такая, что интеграл  $\int_1^{+\infty} f(x) dx$  сходится, а ряд  $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$  расходится

См. пример 12 гл. 4.

**13. Положительная непрерывная при  $x \geq 1$  функция,**

такая, что интеграл  $\int_1^{+\infty} f(x) dx$  расходится, а ряд

$\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$  сходится

Для каждого  $n > 1$  положим  $g(n) \equiv 0$ , а на замкнутых интервалах  $[n - n^{-1}, n]$  и  $[n, n + n^{-1}]$  определим функцию  $g$  как линейную и равную единице в нецелых концевых точках. Наконец, в тех точках  $x \geq 1$ , в которых функция  $g(x)$  еще не определена, положим ее равной 1. Тогда функция

$$f(x) \equiv g(x) + \frac{1}{x^2}$$

положительна и непрерывна при  $x \geq 1$ ,  $\int_1^{+\infty} f(x) dx = +\infty$ ,

$$\text{а } \sum_{n=1}^{+\infty} f(n) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-2} < +\infty.$$

## 14. Ряды, к которым не применим признак Даламбера

Если существует конечный или бесконечный предел

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho,$$

то положительный ряд  $\sum a_n$ , согласно признаку Даламбера (см. [36], стр. 390, а также [52]\*, т. II, стр. 273),

(i) сходится, если  $0 \leq \rho < 1$ ,

и

(ii) расходится, если  $1 < \rho \leq +\infty$ .

При  $\rho = 1$  этот признак не решает вопроса о сходимости или расходимости ряда. Точнее, существуют как сходящиеся, так и расходящиеся положительные ряды, для каждого из которых  $\rho = 1$ . Соответствующими примерами являются

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \text{ и } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}.$$

Признак Даламбера не решает вопроса о сходимости и в том случае, когда предел  $\rho$  не существует. В этом случае положительный ряд также может быть как сходящимся, так и расходящимся. Например, ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 2^{(-1)^n - n} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^5} + \dots$$

где

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 2, \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{8},$$

сходится, а ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 2^{n-(-1)^n} = 2^2 + 2^1 + 2^4 + 2^3 + 2^6 + 2^5 + \dots$$

где

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 8, \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2},$$

расходится.

Признак Даламбера можно усилить следующим образом:

(iii) если  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ , то ряд  $\sum a_n$  сходится;

(iv) если  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ , то ряд  $\sum a_n$  расходится<sup>1)</sup>.

Признак Даламбера в такой форме не решает вопроса о сходимости, если выполнены неравенства

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1 \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Соответствующие примеры, когда оба эти неравенства выполнены и даже в строгой форме, были приведены выше.

## 15. Ряды, к которым не применим признак Коши

Если существует конечный или бесконечный предел

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = \sigma \quad (0 \leq \sigma \leq +\infty),$$

то неотрицательный ряд  $\sum a_n$ , согласно простейшей форме признака Коши (см. [36], стр. 392, а также [52]\*, т. II, стр. 272),

(i) сходится при  $0 \leq \sigma < 1$

и

(ii) расходится при  $1 < \sigma \leq +\infty$ .

Признак Даламбера и признак Коши связаны между собой: если существует конечный или бесконечный предел

$\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_{n+1}/a_n)$ , то существует и равен ему предел  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n}$  (см. [36], стр. 394, упр. 31, а также [52]\*, т. II, стр. 274). Следовательно, если можно применить признак Даламбера в форме (i) или (ii) (пример 14), то можно воспользоваться и признаком Коши. Более того, первые два примера, для которых не применим признак Даламбера (пример 14), могут служить примерами, к которым по той же причине не приме-

<sup>1)</sup> Предполагается, что члены ряда либо все положительны, либо все отрицательны. — Прим. перев.

ним и признак Коши. Напротив, последние два примера показывают, что иногда можно применить признак Коши (см. пример 16) и в том случае, когда признак Даламбера не применим.

Признак Коши в сформулированной выше форме не применим к сходящемуся ряду

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{5+(-1)^n}{2} \right)^{-n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{3^6} + \dots,$$

так как  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1/2$ , а  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1/3$ . Его также нельзя применять и к расходящемуся ряду

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{5+(-1)^n}{2} \right)^n.$$

ибо  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = 3$ , а  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = 2$ .

Признак Коши может быть усилен следующим образом:

(iii) если  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$ , то ряд  $\sum a_n$  сходится,

(iv) если же  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$ , то ряд  $\sum a_n$  расходится.

В этой форме признак Коши не слабее (на самом же деле он сильнее: см. пример 16), чем признак Даламбера в его усиленной форме (пример 14), поскольку (см. [36], стр. 394, упр. 31)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Признак Коши в усиленной форме позволяет установить сходимость и соответственно расходимость двух предыдущих рядов, поскольку для первого из этих рядов верхний предел

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n}$  равен  $1/2$ , а для второго он равен  $3$ .

Признак Коши в усиленной форме не решает вопроса о сходимости или расходимости лишь в том случае, если  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$ . Примеры такого типа уже отмечались ранее.

### 16. Ряды, для которых эффективен признак Коши, но не эффективен признак Даламбера

Для сходящегося ряда  $\sum_{n=1}^{+\infty} 2^{(-1)^n - n}$  признак Даламбера не эффективен (пример 14), однако для него эффективен признак Коши. В самом деле,

$$\sqrt[n]{a_n} = 2^{\frac{(-1)^n - n}{n}} \rightarrow 2^{-1} = \frac{1}{2} < 1.$$

Подобным же образом для расходящегося ряда  $\sum_{n=1}^{+\infty} 2^{n - (-1)^n}$  примера 14 имеем

$$\sqrt[n]{a_n} = 2^{\frac{n - (-1)^n}{n}} \rightarrow 2^1 = 2 > 1.$$

### 17. Два сходящихся ряда, произведение которых расходится

Произведением (по Коши) двух рядов  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$  и  $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$  называется ряд  $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n$ , где

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0.$$

Согласно теореме Мертенса (см. [38], стр. 239, упр. 20), если ряд  $\sum a_n$  сходится к  $A$ , а ряд  $\sum b_n$  сходится к  $B$ , причем по крайней мере один из этих рядов сходится *абсолютно*, то их произведение  $\sum c_n$  сходится к  $AB$ .

Пусть ряды  $\sum a_n$  и  $\sum b_n$  совпадают, причем

$$a_n = b_n = (-1)^n (n+1)^{-1/2}, \quad n = 0, 1, \dots$$

Тогда, согласно признаку Лейбница, ряды  $\sum a_n$  и  $\sum b_n$  сходятся (пример 7), однако ряд  $\sum c_n$  расходится. Действительно, пользуясь тем, что функция  $\sqrt{(1+x)(n+1-x)}$  на замкнутом интервале  $[0, n]$  достигает максимума при  $x = n/2$ , имеем

$$\begin{aligned} |c_n| &= \frac{1}{\sqrt{1}\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{n-1}} + \dots \\ &+ \frac{1}{\sqrt{n+1}\sqrt{1}} \geq \frac{2}{n+2} + \frac{2}{n+2} + \frac{2}{n+2} + \dots + \frac{2}{n+2} = \\ &= \frac{2(n+1)}{n+2} \geq 1, \quad n = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

### 18. Два расходящихся ряда, произведение которых сходится абсолютно

Произведением (по Коши) следующих двух рядов:

$$\begin{aligned} 2 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n + \dots, \quad n = 1, 2, \dots, \\ -1 + 1 + 1 + 1 + \dots + 1^n + \dots, \quad n = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

является ряд

$$-2 + 0 + 0 + 0 + \dots + 0^n + \dots, \quad n = 1, 2, \dots.$$

В более общей форме, если  $a_n = a^n$  и  $b_n = b^n$  для  $n \geq 1$ , причем  $a \neq b$ , то член  $c_n$  ряда, являющегося произведением рядов  $\sum a_n$  и  $\sum b_n$ , равен (при  $n \geq 1$ )

$$\begin{aligned} c_n &= a_0 b^n + b_0 a^n + a^{n-1} b + a^{n-2} b^2 + a^{n-3} b^3 + \dots + a b^{n-1} = \\ &= a_0 b^n + b_0 a^n - a^n - b^n + (a^{n+1} - b^{n+1})/(a - b) = \\ &= \{a^n [a + (b_0 - 1)(a - b)] - b^n [b + (1 - a_0)(a - b)]\}/(a - b). \end{aligned}$$

Следовательно,  $c_n = 0$ , если  $a = (1 - b_0)(a - b)$  и  $b = (a_0 - 1)(a - b)$ . Если при этом  $a$  и  $b$  связаны равенством  $a - b = 1$ , то  $a_0$  и  $b_0$  вычисляются по формулам  $a_0 = b + 1 = a$ ,  $b_0 = 1 - a = -b$ .

19. Для произвольной последовательности  $\left\{ \sum_{m=1}^{+\infty} a_{mn} \right\}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , положительных сходящихся рядов существует положительный сходящийся ряд  $\sum_{m=1}^{+\infty} a_m$ , не сравнимый ни с одним из рядов  $\left\{ \sum_{m=1}^{+\infty} a_{mn} \right\}$

Утверждение, что ряд  $\sum_{m=1}^{+\infty} a_m$  можно сравнить с рядом  $\sum_{m=1}^{+\infty} a_{mn}$  при некотором фиксированном натуральном  $n$ , означает, что

$$\exists M \in \mathbb{N} \exists m > M \Rightarrow a_m \leq a_{mn},$$

и потому утверждение, что такое сравнение *невозможно*, записывается следующим образом:

$$\forall M \in \mathbb{N} \exists m > M \exists a_m > a_{mn}.$$

Для всевозможных натуральных  $M$  и  $n$  положим

$$S_n \equiv \sum_{m=1}^{+\infty} a_{mn}, \quad S_{Mn} \equiv \sum_{m=1}^M a_{mn}, \quad R_{Mn} \equiv \sum_{m=M+1}^{+\infty} a_{mn}.$$

Тогда числа  $S_n$ ,  $S_{Mn}$  и  $R_{Mn}$  положительны. Далее для каждого  $n \in \mathbb{N}$  выберем  $M(n)$  так, чтобы  $1 \leq M(1) < M(2) < \dots$  и

$$\begin{aligned} R_{M(1), 1} &< 2^{-1}, \\ \max(R_{M(2), 1}, R_{M(2), 2}) &< 2^{-2}, \\ &\dots \\ \max(R_{M(n), 1}, \dots, R_{M(n), n}) &< 2^{-n}. \end{aligned}$$

Теперь для всякого натурального  $m$  положим

$$a_m = \begin{cases} 2a_{m1}, & \text{если } 1 \leq m \leq M(2), \\ (k+1) \max(a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mk}), & \text{если } M(k) < m \leq M(k+1) \text{ для } k > 1. \end{cases}$$

Чтобы доказать сходимость ряда  $\sum a_m$ , установим сначала следующее неравенство для (конечных) сумм членов этого ряда при  $M(k) < m \leq M(k+1)$ , где  $k > 1$ :

$$\begin{aligned} \sum_{m=M(k)+1}^{M(k+1)} a_m &\leq \sum_{m=M(k)+1}^{M(k+1)} [(k+1) \sum_{n=1}^k a_{mn}] = \\ &= (k+1) \sum_{n=1}^k \left[ \sum_{m=M(k)+1}^{M(k+1)} a_{mn} \right] \leq (k+1) \sum_{n=1}^k R_{M(k), n} \leq \\ &\leq (k+1) \sum_{n=1}^k 2^{-k} < (k+1)^2 2^{-k}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{+\infty} a_m &= \sum_{m=1}^{M(2)} a_m + \sum_{m=M(2)+1}^{M(3)} a_m + \dots \leq \\ &\leq 2 \sum_{m=1}^{M(2)} a_{m1} + \sum_{k=2}^{+\infty} \sum_{m=M(k)+1}^{M(k+1)} a_m < \\ &< 2S_{M(2), 1} + \sum_{k=2}^{+\infty} (k+1)^2 2^{-k} < +\infty. \end{aligned}$$

С другой стороны, для всякого фиксированного  $n$  при  $k \geq n$  и  $m > M(k)$  имеем  $a_m/a_{mn} \geq k+1$ , откуда  $\lim_{m \rightarrow +\infty} a_m/a_{mn} = +\infty$ . Таким образом, ряд  $\sum_{m=1}^{+\infty} a_m$  нельзя сравнить с рядом  $\sum_{m=1}^{+\infty} a_{mn}$ . На самом же деле ряд  $\sum_{m=1}^{+\infty} a_m$  нельзя сравнить с рядом  $\sum_{m=1}^{+\infty} a_{mn}$  даже в том случае, если сравнение определить следующим образом:

$$\exists M \text{ и } K \in \mathbb{N} \exists m > M \Rightarrow a_m \leq K a_{mn}.$$

В этом случае отрицание возможности сравнения выглядит так:

$$\forall M \text{ и } K \in \mathbb{N} \exists m > M \exists a_m > K a_{mn}.$$

Последовательность положительных сходящихся рядов назовем универсальной последовательностью сравнения, если произвольный положительный ряд сходится тогда и только тогда, когда его можно сравнить по крайней мере с одним из рядов этой последовательности.

Другими словами, последовательность положительных сходящихся рядов является универсальной последовательностью сравнения тогда и только тогда, когда сходимость или расходимость любого положительного ряда можно установить сравнением его с каким-либо рядом этой последовательности. Пример 19 показывает, что таких *универсальных последовательностей сравнения не существует*.

## 20. Матрица Тэплица $T$ и расходящаяся последовательность, преобразуемая матрицей $T$ в сходящуюся последовательность

Бесконечной матрицей называется функция, принимающая действительные или комплексные значения с областью определения  $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ , обозначаемая через  $T = (t_{ij})$ , где  $i$  и  $j \in \mathbf{N}$ . Если бесконечный ряд  $\sum_{j=1}^{+\infty} t_{ij} a_j$ , где  $\{a_j\}$  — заданная последовательность чисел, сходится для каждого  $i \in \mathbf{N}$ , то последовательность  $\{b_i\}$ , определяемая равенствами

$$b_i \equiv \sum_{j=1}^{+\infty} t_{ij} a_j,$$

называется преобразованием последовательности  $\{a_j\}$  посредством матрицы  $T$ . Бесконечная матрица  $T = (t_{ij})$  называется матрицей Тэплица<sup>1)</sup>, если для всякой сходящейся последовательности  $\{a_j\}$  последовательность  $\{b_i\}$  имеет смысл, причем предел  $\lim_{i \rightarrow +\infty} b_i$  существует и равен пределу  $\lim_{j \rightarrow +\infty} a_j$ .

Важнейшая теорема теории матриц Тэплица состоит в следующем: для того чтобы бесконечная матрица  $T = (t_{ij})$  была матрицей Тэплица, необходимо и достаточно, чтобы были выполнены следующие три условия (доказательство см. в [50] или в [26]\*, стр. 79):

- (1)  $\exists M \in \mathbf{R} \exists \forall i \in \mathbf{N}, \sum_{j=1}^{+\infty} |t_{ij}| \leq M,$
- (2)  $\lim_{i \rightarrow +\infty} \sum_{j=1}^{+\infty} t_{ij} = 1,$
- (3)  $\forall j \in \mathbf{N}, \lim_{i \rightarrow +\infty} t_{ij} = 0.$

<sup>1)</sup> В честь немецкого математика Отто Тэплица (1881—1940 г.).

Пусть  $T$  — матрица Теплица  $(t_{ij})$ , где  $t_{ij} \equiv 1/i$ , если  $1 \leq j \leq i$ , и  $t_{ij} \equiv 0$ , если  $i < j$ ,

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \dots \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \dots \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Последовательность  $\{a_j\} = 1, -1, 1, -1, \dots, (-1)^{n+1}, \dots$  не сходится, но ее преобразование посредством матрицы  $T$  дает последовательность

$$\{b_i\} = 1, 0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{5}, 0, \dots, \frac{1 + (-1)^{i+1}}{2i}, \dots,$$

которая сходится к нулю.

Вообще, если  $\{a_n\}$  — произвольная расходящаяся последовательность, каждый член которой есть либо 1, либо  $-1$ , то существует матрица Теплица  $T$ , которая преобразует  $\{a_n\}$  в сходящуюся последовательность<sup>1)</sup>. В самом деле, матрицу  $T$  в этом случае можно определить так, что  $\{a_n\}$  преобразуется в последовательность, состоящую лишь из нулей. Такую матрицу  $T = (t_{ij})$  можно построить следующим образом: пусть  $\{n_i\}$  — строго возрастающая последовательность целых положительных чисел, такая, что  $a_{n_i}$  и  $a_{n_i+1}$  имеют противоположные знаки для  $i = 1, 2, \dots$ . Положим

$$t_{ij} \equiv \begin{cases} 1/2, & \text{если } j = n_i \text{ или } j = n_i + 1, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда  $T$  будет матрицей Теплица, преобразующей последовательность  $\{a_n\}$  в последовательность  $0, 0, \dots$ .

<sup>1)</sup> Этот результат справедлив и в том случае, если  $\{a_n\}$  — произвольная расходящаяся ограниченная последовательность. — Прим. перев.

21. Для всякой матрицы Теплица  $T = (t_{ij})$  существует последовательность  $\{a_j\}$ , каждый член которой есть либо 1, либо  $-1$ , такая, что преобразование  $\{b_i\}$  последовательности  $\{a_j\}$  посредством матрицы  $T$  расходится<sup>1)</sup>

Используя условия (1) — (3) примера 20, выберем две последовательности  $i_1 < i_2 < i_3 < \dots$ ,  $j_1 < j_2 < j_3 < \dots$  следующим образом. Пусть номер  $i_1$  таков, что при  $i \geq i_1$  имеем

$$\sum_{j=1}^{+\infty} t_{ij} = 1 + e_{1i}, \quad |e_{1i}| < 0,05.$$

Это возможно в силу условия (2). Затем, на основе условий (1) и (2), выберем номер  $j_1$  так, чтобы

$$\sum_{j=1}^{j_1} t_{i_1 j} = 1 + d_1 \quad \text{и} \quad \sum_{j=j_1+1}^{+\infty} |t_{i_1 j}| < 0,05,$$

причем  $|d_1| < 0,1$ .

После этого, используя условия (2) и (3), выберем  $i_2 > i_1$  так, чтобы для  $i \geq i_2$

$$\sum_{j=1}^{j_1} |t_{ij}| < 0,05 \quad \text{и} \quad \sum_{j=1}^{+\infty} t_{ij} = 1 + e_{2i}, \quad |e_{2i}| < (0,05)^2.$$

Затем снова воспользуемся условиями (1) и (2) и выберем  $j_2 > j_1$  так, чтобы

$$\sum_{j=1}^{j_2} t_{i_2 j} = 1 + d_2 \quad \text{и} \quad \sum_{j=j_2+1}^{+\infty} |t_{i_2 j}| < (0,05)^2,$$

где  $|d_2| < 2 \cdot (0,05)^2$ .

Если  $i_1 < i_2 < \dots < i_k$  и  $j_1 < j_2 < \dots < j_k$  уже выбраны, то, опираясь на условия (2) и (3), выберем  $i_{k+1} > i_k$  так, чтобы для  $i \geq i_{k+1}$

$$\sum_{j=1}^{j_k} |t_{ij}| < (0,05)^k$$

<sup>1)</sup> Это утверждение и следующий ниже метод его доказательства фактически принадлежат Штейнгаузу (см. [26]\*, стр. 93). — Прим. ред.

и

$$\sum_{j=1}^{+\infty} t_{l_j} = 1 + e_{k+1, l}, \quad |e_{k+1, l}| < (0,05)^{k+1}.$$

Затем, используя (1) и (2), выберем  $j_{k+1} > j_k$  так, чтобы

$$\sum_{j=1}^{j_{k+1}} t_{l_{k+1} j} = 1 + d_{k+1} \quad \text{и} \quad \sum_{j=j_{k+1}+1}^{+\infty} |t_{l_{k+1} j}| < (0,05)^{k+1},$$

где  $|d_{k+1}| < 2(0,05)^{k+1}$ .

Теперь определим последовательность  $\{a_j\}$ :

$$a_j = \begin{cases} 1 & \text{для } 1 \leq j \leq j_1, \quad j_2 < j \leq j_3, \dots, \\ -1 & \text{для } j_1 < j \leq j_2, \quad j_3 < j \leq j_4, \dots \end{cases}$$

Если  $k$  нечетно и  $k > 1$ , то

$$\begin{aligned} b_{l_k} &= \sum_{j=1}^{j_1} t_{l_k j} - \sum_{j=j_1+1}^{j_2} t_{l_k j} + \sum_{j=j_2+1}^{j_3} t_{l_k j} - \dots \\ &\quad \dots + \sum_{j=j_{k-1}+1}^{j_k} t_{l_k j} + \sum_{j=j_k+1}^{+\infty} t_{l_k j} a_j = \\ &= \sum_{j=1}^{j_1} t_{l_k j} - \left( \sum_{j=1}^{j_2} t_{l_k j} - \sum_{j=1}^{j_1} t_{l_k j} \right) + \left( \sum_{j=1}^{j_3} t_{l_k j} - \sum_{j=1}^{j_2} t_{l_k j} \right) - \dots \\ &\quad \dots + \left( \sum_{j=1}^{j_k} t_{l_k j} - \sum_{j=1}^{j_{k-1}} t_{l_k j} \right) + \sum_{j=j_k+1}^{+\infty} t_{l_k j} a_j. \end{aligned}$$

Все суммы  $\sum_{j=1}^{j_r} t_{l_k j}$ , за исключением  $\sum_{j=1}^{j_k} t_{l_k j} = 1 + d_k$ , по абсолютной величине меньше, чем  $(0,05)^{k-1}$ . Таким образом, учитывая, что

$$\left| \sum_{j=j_k+1}^{+\infty} t_{l_k j} a_j \right| \leq \sum_{j=j_k+1}^{+\infty} |t_{l_k j}| < (0,05)^k,$$

получаем

$$\begin{aligned} b_{l_k} &> 1 - 2(0,05)^{k-1} - 2(k-1)(0,05)^{k-1} - (0,05)^k = \\ &= 1 - [2(k-1) + 2,05](0,05)^{k-1}. \end{aligned}$$

Из последнего неравенства вытекает, что  $\overline{\lim}_{i \rightarrow \infty} b_i \geq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} b_{i_k} \geq 1$ . Рассматривая четные значения  $k$ , мы получим, что  $\lim_{i \rightarrow \infty} b_i \leq \leq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} b_{i_k} \leq -1$  и потому последовательность  $\{b_i\}$  расходится.

Примеры 20 и 21 показывают, что, хотя *некоторые* матрицы Тэплица преобразуют *некоторые* последовательности, члены которых равны  $\pm 1$ , в сходящиеся последовательности, однако *не* существует матрицы Тэплица, которая преобразует *все* такие последовательности в сходящиеся последовательности.

Усложненная технику, которой мы пользовались выше, можно прийти к следующему заключению: *если*  $\{T_m\}$  — последовательность матриц Тэплица, *то существует такая* последовательность  $\{a_n\}$ , *что*  $|a_n| = 1$  *при*  $n = 1, 2, \dots$ , *причем для каждого*  $m$  *преобразование последовательности*  $\{a_n\}$  *посредством матрицы*  $T_m$  *расходится*. В самом деле, при выборе строго возрастающих последовательностей натуральных чисел  $\{i_k\}$  и  $\{j_k\}$  будем в отличие от вышеизложенного поступать следующим образом. Выберем сначала  $i_1$  и  $j_1$  так, чтобы выполнялись соответствующие условия для матрицы  $T_1$ ; затем выберем  $i_2$  и  $j_2$  так, чтобы соответствующие условия выполнялись как для матрицы  $T_1$ , так и для матрицы  $T_2$  и т. д. Последовательность  $\{a_n\}$  определим так же, как это сделано выше. Для всякого фиксированного  $m$  последовательность  $\{a_n\}$  преобразуется в некоторую подпоследовательность  $\{b_{m_n}\}$ . Но поскольку числа  $i_k$  и  $j_k$  при  $k > m$  образуют последовательность, для которой справедливы все условия предыдущего контрпримера в применении к матрице  $T_m$ , то отсюда следует, что предел  $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_{m_n}$  не существует ни при каком  $m$ .

## 22. Степенной ряд, сходящийся лишь в одной точке. (См. пример 24.)

Ряд  $\sum_{n=0}^{+\infty} n! x^n$  сходится при  $x = 0$  и расходится при  $x \neq 0$ .

**23. Функция, ряд Маклорена которой сходится всюду, однако представляет функцию лишь в одной точке**

Функция

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \end{cases}$$

бесконечно дифференцируема, а все ее производные при  $x = 0$  равны 0 (см. пример 10 гл. 3). Следовательно, ее ряд Маклорена

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} 0$$

сходится при всех  $x$  к функции, тождественно равной нулю, а потому он представляет данную функцию  $f$  (т. е. сходится к ней) лишь в одной точке  $x = 0$ .

**24. Функция, ряд Маклорена которой сходится лишь в одной точке**

Функция с таким свойством описана в [9] (стр. 153).  
Функция

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n} \cos n^2 x$$

всюду бесконечно дифференцируема, поскольку множители  $e^{-n}$ , которые присутствуют во всех рядах, получаемых последовательным почленным дифференцированием исходного ряда, обеспечивают равномерную сходимость всех этих рядов. Ряд Маклорена этой функции содержит лишь члены четной степени. Для абсолютной величины члена порядка  $2k$  этого ряда справедливо неравенство

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2k} e^{-n} n^{4k}}{(2k)!} > \left(\frac{n^2 x}{2k}\right)^{2k} e^{-n} \quad (x \neq 0)$$

при любом  $n = 0, 1, 2, \dots$  и, в частности, при  $n = 2k$ . Для этого значения  $n$  и любого  $x \neq 0$  имеем

$$\left(\frac{n^2 x}{2k}\right)^{2k} e^{-n} = \left(\frac{2kx}{e}\right)^{2k} > 1,$$

если только  $k > |e/2x|$ . Отсюда следует, что ряд Маклорена функции  $f$  расходится при всяком  $x \neq 0$ .

Как было указано в примере 22, ряд  $\sum_{n=0}^{+\infty} n! x^n$  сходится лишь в точке  $x = 0$ . Естественно задать вопрос, является ли этот ряд рядом Маклорена какой-либо функции  $f(x)$ . Утвердительный ответ на этот вопрос привел бы к другому примеру функции такого же типа, как и функция, уже рассмотренная в настоящем примере. Мы покажем, что, действительно, можно построить бесконечно дифференцируемую функцию  $f(x)$ , для которой данный ряд будет рядом Маклорена. Для этой цели определим функцию  $\varphi_{n0}(x)$  следующим образом. Для  $n = 1, 2, \dots$  положим

$$\varphi_{n0}(x) \equiv \begin{cases} ((n-1)!)^2, & \text{если } 0 \leq |x| \leq 2^{-n}/(n!)^2, \\ 0, & \text{если } |x| \geq 2^{-n+1}/(n!)^2. \end{cases}$$

Затем функцию  $\varphi_{n0}(x)$  доопределим на оставшихся интервалах так, чтобы она стала бесконечно дифференцируемой всюду. Это можно сделать при помощи функции из примера 12 гл. 3. Далее пусть  $f_1(x) \equiv \varphi_{10}(x)$ ; положим для  $n = 2, 3, \dots$

$$\varphi_{n1}(x) \equiv \int_0^x \varphi_{n0}(t) dt,$$

$$\varphi_{n2}(x) \equiv \int_0^x \varphi_{n1}(t) dt,$$

⋮

$$f_n(x) \equiv \varphi_{n, n-1}(x) \equiv \int_0^x \varphi_{n, n-2}(t) dt.$$

Таким образом,  $f'_n(x) = \varphi_{n, n-2}(x)$ ,  $f''_n(x) = \varphi_{n, n-3}(x)$ , ...,  $f_n^{(n-1)}(x) = \varphi_{n0}(x)$ ,  $f_n^{(n)}(x) = \varphi'_{n0}(x)$ . Принимая во внимание неравенства

$$|\varphi_{n1}(x)| \leq 2^{-n+1}/n^2,$$

$$|\varphi_{n2}(x)| \leq [2^{-n+1}/n^2] \cdot |x|,$$

⋮

$$|\varphi_{n, n-1}(x)| \leq (2^{-n+1}/n^2) \cdot |x|^{n-2}/(n-2)!,$$

получаем оценку

$$|f_n^{(k)}(x)| \leq (2^{-n+1}/n^2) |x|^{n-k-2} / (n-k-2)!,$$

справедливую для любого  $x$  при  $0 \leq k \leq n-2$ . Ряд  $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n^{(k)}(x)$  сходится равномерно на любом замкнутом конечном интервале при  $k = 0, 1, 2, \dots$ . В самом деле, если  $|x| \leq K$ , то

$$|f_n^{(k)}(x)| \leq \frac{K^{n-k-2}}{n^2 2^{n-1} (n-k-2)!} \text{ при } n = k+2, k+3, \dots$$

и равномерная сходимость вытекает из признака Вейерштрасса (см. [36], стр. 445, а также [52]\*, т. II, стр. 430). Следовательно, функция

$$f(x) \equiv \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$$

бесконечно дифференцируема, и для  $k = 0, 1, 2, \dots$  справедливы равенства

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n^{(k)}(x).$$

Но для  $k \geq n \geq 1$  имеют место равенства  $f_n^{(k)}(0) = \varphi_{n0}^{(k-n+1)}(0) = 0$ , а для  $n \geq 1$  и  $k = n-1$  справедливы равенства  $f_n^{(k)}(0) = \varphi_{n0}(0) = ((n-1)!)^2$ . Наконец, для  $0 \leq k < n-1$  имеем  $f_n^{(k)}(0) = 0$ . Таким образом, ряд Маклорена функции  $f(x)$  совпадает с рядом  $\sum_{n=0}^{+\infty} n! x^n$ .

## 25. Сходящийся тригонометрический ряд, не являющийся рядом Фурье

Мы приведем два примера, в первом из которых интегрирование производится по Риману, во втором — по Лебегу.

Ряд  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n^a}$ , где  $0 < a \leq 1/2$  сходится при любом действительном  $x$ . В этом можно убедиться (см. [36], стр. 533,

а также [52]\*, т. II, стр. 432), применяя признак сходимости, принадлежащий Н. Х. Абелю (норвежский математик, 1802—1829 г.). Однако этот ряд не может быть рядом Фурье никакой интегрируемой по Риману функции  $f(x)$ . В самом деле, если бы это было не так, то, согласно неравенству Бесселя (см. [36], стр. 532, а также [52]\*, т. III, стр. 586), мы бы имели

$$\frac{1}{1^{2\alpha}} + \frac{1}{2^{2\alpha}} + \dots + \frac{1}{n^{2\alpha}} \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x)]^2 dx,$$

где  $n = 1, 2, \dots$ . Но так как  $f(x)$  интегрируема по Риману, то  $[f(x)]^2$  также интегрируема по Риману. Отсюда следует, что правая часть предыдущего неравенства конечна, в то время как при  $\alpha < 1/2$  левая часть этого неравенства не ограничена при  $n \rightarrow +\infty$ . (Противоречие.)

Ряд<sup>1)</sup>  $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\sin nx}{\ln n}$  также сходится при любом действительном  $x$ . Положим

$$f(x) \equiv \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\sin nx}{\ln n}.$$

Если предположить, что этот ряд является рядом Фурье — Лебега функции  $f(x)$ , то функция

$$F(x) \equiv \int_0^x f(t) dt$$

должна быть периодической и абсолютно непрерывной. Но так как  $f(x)$  — нечетная функция ( $f(x) = -f(-x)$ ), то функция  $F(x)$  является четной ( $F(x) = F(-x)$ ). Поэтому ряд Фурье функции  $F(x)$  имеет вид

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos nx,$$

<sup>1)</sup> В связи с исследуемым вопросом этот ряд впервые был рассмотрен Фату. — Прим. ред.

где  $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi F(x) dx$ , а для  $n \geq 2$  коэффициенты

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi F(x) \cos nx dx = \\ &= \frac{2}{\pi} F(x) \frac{\sin nx}{n} \Big|_0^\pi - \frac{2}{\pi} \int_0^\pi F'(x) \frac{\sin nx}{n} dx = \\ &= -\frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \frac{\sin nx}{n} dx = -\frac{1}{n \ln n}. \end{aligned}$$

(Производная  $F'(x)$  почти всюду существует и почти всюду равна  $f(x)$ .) Поскольку функция  $F(x)$  имеет ограниченную вариацию, ее ряд Фурье сходится в каждой точке, в частности в точке  $x = 0$ . Отсюда следует, что ряд  $\sum_{n=2}^{+\infty} a_n$  сходится. А так как  $a_n = -1/n \ln n$  и ряд  $\sum_{n=2}^{+\infty} (-1/n \ln n)$  расходится, то мы приходим к противоречию с предположением, что  $f(x)$  интегрируема по Лебегу.

Наконец, нам остается показать, что тригонометрический ряд  $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\sin nx}{\ln n}$  не является рядом Фурье некоторой функции  $g$ , интегрируемой по Лебегу, и если он сходится почти всюду к некоторой функции  $f$ , то  $f(x) = g(x)$  почти всюду, и, следовательно, функция  $f$  интегрируема по Лебегу, а данный тригонометрический ряд является ее рядом Фурье.

26. Бесконечно дифференцируемая функция  $f(x)$ , не являющаяся преобразованием Фурье никакой функции, интегрируемой по Лебегу, и такая, что

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

Пусть  $\{c_n\}$ ,  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , есть последовательность, бесконечная в обе стороны и такая, что ряд

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$$

сходится для всех  $x$ , но не является рядом Фурье никакой функции, интегрируемой по Лебегу на  $[-\pi, \pi]$  (см. пример 25). Мы покажем, что если  $h(x)$  — произвольная бесконечно дифференцируемая функция, обращающаяся в нуль вне интервала  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$  и такая, что  $h(0) = 2\pi$ , то в качестве искомой функции можно взять функцию

$$f(x) \equiv \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n h(x - n).$$

Так как функция  $h(x)$  обращается в нуль вне интервала  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ , то ряд, представляющий функцию  $f(x)$ , при любом фиксированном  $x$  имеет лишь конечное число отличных от нуля членов. Следовательно, этот ряд сходится при всех  $x$  и представляет некоторую функцию  $f(x)$ . По той же причине на любом конечном интервале этот ряд и все ряды, которые получаются из него почлененным дифференцированием конечное число раз, сходятся равномерно. Более того,

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n h^{(k)}(x - n), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Пусть функция  $F(t)$  интегрируема по Лебегу и удовлетворяет условию

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(t) e^{-itx} dt = f(x).$$

Положим

$$g(t) \equiv \sum_{m=-\infty}^{+\infty} F(t + 2\pi m).$$

Так как  $F(t)$  интегрируема по Лебегу, то  $g(t)$  определена для почти всех  $t$  и для этих значений  $t$  справедливо равенство  $g(t+2\pi)=g(t)$ , причем

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} |g(t)| dt &\leq \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} |F(t+2\pi m)| dt = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} |F(t)| dt < +\infty. \end{aligned}$$

(Обоснование этих фактов, а также равенства, которое используется ниже, см. в [29], стр. 179 и 192—193.) Далее имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) e^{-int} dt &= \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} F(t+2\pi m) e^{-int} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} F(t+2\pi m) e^{-in(t+2\pi m)} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(t) e^{-int} dt = \frac{1}{2\pi} f(n) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k h(n-k) = \frac{c_n}{2\pi} h(0) = c_n. \end{aligned}$$

Таким образом,  $c_n$  являются коэффициентами Фурье интегрируемой по Лебегу функции  $g(t)$ . Это противоречие и доказывает тот факт, что  $f(x)$  не является преобразованием Фурье никакой функции, интегрируемой по Лебегу.

**27. Для произвольного счетного множества  $E \subset [-\pi, \pi]$  существует непрерывная функция, ряд Фурье которой расходится в каждой точке  $x \in E$  и сходится в каждой точке  $x \in [-\pi, \pi] \setminus E$**

Идея этого примера принадлежит Фейеру и Лебегу. Подробности можно найти в книге [20], т. I, стр. 474, где даются также ссылки на первоначальные работы.

**28. Функция, интегрируемая (по Лебегу) на  $[-\pi, \pi]$ , ряд Фурье которой расходится всюду**

Этот пример принадлежит А. Н. Колмогорову. Подробности и нужные ссылки см. в [20], т. I, стр. 488—494.

**29. Последовательность  $\{a_n\}$  рациональных чисел, обладающая тем свойством, что для всякой функции  $f$ , непрерывной на  $[0, 1]$  и равной 0 при  $x=0$  ( $f(0)=0$ ), существует строго возрастающая последовательность натуральных чисел  $\{n_v\}$  ( $n_0=0$ ), такая, что**

$$f(x) = \sum_{v=0}^{+\infty} \left( \sum_{n=n_v+1}^{n_{v+1}} a_n x^n \right),$$

причем сходимость является равномерной на  $[0, 1]$

Предварительно сделаем следующее замечание:

Для всякого натурального  $m$  множество всех полиномов с рациональными коэффициентами, которые содержат лишь степени  $x^n$  с  $n \geq m$ , плотно в пространстве  $C_0([0, 1])$  всех функций, непрерывных на  $[0, 1]$  и обращающихся в нуль в точке  $x=0$ . При этом плотность понимается в смысле „равномерной топологии“, которая задается формулой

$$\rho(f, g) = \|f - g\| \equiv \max \{ |f(x) - g(x)|, \quad 0 \leq x \leq 1 \}.$$

Это следует из теоремы Стоуна — Вейерштрасса (см. [44], стр. 182, и [29], стр. 19).

Пусть теперь  $\{f_n\}$  — счетное множество функций, всюду плотное в  $C_0([0, 1])$ . Например, в качестве  $\{f_n\}$  можно взять последовательность, состоящую из всех полиномов с рациональными коэффициентами, которые обращаются в нуль при  $x=0$ . Пусть  $P_1$  — один из таких полиномов, и пусть для него  $\rho(f_1, P_1) = \|f_1 - P_1\| < 1$ . Далее, пусть  $P_2$  — полином такого же типа, у которого все его члены с ненулевыми коэффициентами имеют степень, превышающую порядок полинома  $P_1$ , и для которого, кроме того, выполнено неравенство  $\rho(f_2 - P_1, P_2) = \|f_2 - (P_1 + P_2)\| < 1/2$ . Пусть полиномы  $P_1, P_2, \dots, P_n$ , принадлежащие  $C_0([0, 1])$

и имеющие рациональные коэффициенты, определены так, что

(а) степень любого ненулевого члена полинома  $P_{k+1}$  больше порядка полинома  $P_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n - 1$ ,

$$(b) \left\| f_k - \sum_{i=1}^k P_i \right\| < \frac{1}{k}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Тогда в качестве  $P_{n+1}$  в  $C_0([0, 1])$  возьмем полином с рациональными коэффициентами, такой, что

(а') степень любого ненулевого члена полинома  $P_{n+1}$  больше порядка полинома  $P_n$ ,

$$(b') \left\| f_{n+1} - \sum_{i=1}^{n+1} P_i \right\| < \frac{1}{n+1}.$$

Пусть  $m_j$  — наименьшая из степеней ненулевых членов полинома  $P_j$ , а  $M_j$  — порядок полинома  $P_j$ . Тогда  $m_j \leq M_j < m_{j+1}$  для всякого  $j \in \mathbb{N}$ . Определим теперь последовательность  $\{a_n\}$  следующим образом:  $a_1 = a_2 = \dots = a_{m_1-1} \equiv 0$ ,  $a_{m_1}$  равен коэффициенту при  $x^{m_1}$  в полиноме  $P_1$ ,  $a_{m_1+1}$  равен коэффициенту при  $x^{m_1+1}$  в  $P_1$ , ...,  $a_{M_1}$  равен коэффициенту при  $x^{M_1}$  в  $P_1$ . Вообще, если  $M_j < n < m_{j+1}$ , то полагаем  $a_n \equiv 0$ ; если же  $m_{j+1} \leq n \leq M_{j+1}$ , то  $a_n$  равен коэффициенту при  $x^n$  в полиноме  $P_{j+1}$ . Пусть  $f \in C_0([0, 1])$ , а последовательность  $0 < k_1 < k_2 < \dots$  такова, что  $\|f - f_{k_\mu}\| < 1/\mu$  для каждого  $\mu \in \mathbb{N}$ . Тогда

$$\left\| f - \sum_{i=1}^{k_\mu} P_i \right\| \leq \|f - f_{k_\mu}\| + \left\| f_{k_\mu} - \sum_{i=1}^{k_\mu} P_i \right\| < \frac{1}{\mu} + \frac{1}{k_\mu} \leq \frac{2}{\mu}.$$

Следовательно, если положить  $n_0 \equiv 0$  и  $n_v \equiv M_{k_v}$  для  $v \in \mathbb{N}$ , то

$$f(x) = \sum_{v=0}^{+\infty} \left( \sum_{n=n_v+1}^{n_{v+1}} a_n x^n \right),$$

причем ряд в правой части сходится равномерно (членами ряда считаются суммы, заключенные в скобки).

Этот поразительный результат принадлежит В. Серпинскому. Следует отметить его большое сходство с примером 5 настоящей главы. В последнем случае в результате некоторой перестановки был получен ряд, обладающий тем свойством, что для произвольно заданного действительного числа  $x$  существует подпоследовательность частичных сумм (т. е. способ расстановки скобок у этого ряда), которая сходится к  $x$ . В настоящем же случае мы имеем степенной ряд, обладающий тем свойством, что для произвольной функции  $f$  из пространства  $C_0([0, 1])$  существует подпоследовательность частичных сумм (т. е. способ расстановки скобок у этого ряда), равномерно сходящаяся к  $f$ .

## ГЛАВА 7

### РАВНОМЕРНАЯ СХОДИМОСТЬ

#### Введение

В примерах настоящей главы рассматривается равномерная и неравномерная сходимость последовательностей функций, заданных на некоторых множествах. Предполагается, что читатель знаком с основными определениями и теоремами (см. [36], стр. 441—462; [38], стр. 270—292, а также [52]\*, т. II, стр. 422—453).

#### 1. Последовательность всюду разрывных функций, сходящаяся равномерно к всюду непрерывной функции

$$f_n(x) \equiv \begin{cases} 1/n, & \text{если } x \text{ рационально,} \\ 0, & \text{если } x \text{ иррационально.} \end{cases}$$

Ясно, что  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$  при  $-\infty < x < +\infty$ , причем сходимость является равномерной.

Этот простой пример может служить иллюстрацией следующего общего принципа: *равномерная сходимость сохраняет „хорошие“ свойства и не сохраняет „плохие“*. Этот принцип будет неоднократно подтвержден последующими примерами.

#### 2. Последовательность бесконечно дифференцируемых функций, которая равномерно сходится к нулю, а последовательность производных этих функций всюду расходится

Положим  $f_n(x) \equiv (\sin nx)/\sqrt{n}$ . Поскольку  $|f_n(x)| \leqslant 1/\sqrt{n}$ , то эта последовательность равномерно сходится к нулю. Чтобы убедиться в том, что последовательность  $\{f'_n(x)\}$  расходится всюду, рассмотрим последовательность

$$b_n = f'_n(x) = \sqrt{n} \cos nx,$$

где  $x$  фиксировано. Если  $x = 0$ , то  $b_n = \sqrt{n} \rightarrow \infty$  при  $n \rightarrow +\infty$ . Докажём теперь, что для всякого  $x \neq 0$  последовательность  $\{b_n\}$  не ограничена и, следовательно, расходится. Для этого покажем, что существуют как угодно большие значения  $n$ , такие, что  $|\cos nx| \geq 1/2$ . В самом деле, для всякого натурального  $m$ , такого, что  $|\cos mx| < 1/2$ , имеем

$$|\cos 2mx| = |2 \cos^2 mx - 1| = 1 - 2 \cos^2 mx > \frac{1}{2}.$$

Таким образом, существует номер  $n > m$ , для которого  $|\cos nx| > 1/2$ .

### 3. Неограниченная функция, являющаяся пределом неравномерно сходящейся последовательности ограниченных функций

Положим

$$f_n(x) \equiv \begin{cases} \min\left(n, \frac{1}{x}\right), & \text{если } 0 < x \leq 1, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

Тогда каждая функция  $f_n(x)$  ограничена на замкнутом интервале  $[0, 1]$ , однако предельная функция  $f(x)$ , равная  $1/x$ , если  $0 < x \leq 1$ , и равная 0, если  $x = 0$ , не ограничена на этом интервале.

Следует отметить, что в подобном примере сходимость не может быть равномерной.

### 4. Разрывная функция, являющаяся пределом последовательности непрерывных функций

Тривиальный пример такого типа доставляет последовательность,

$$f_n(x) \equiv \begin{cases} \min(1, nx), & \text{если } x \geq 0, \\ \max(-1, nx), & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Ее пределом является функция  $\operatorname{sgn} x$  (см. гл. 3, пример 3), которая разрывна в точке  $x = 0$ .

Можно построить более интересный пример такого рода, рассматривая функцию  $f$  (гл. 2, пример 15), которая определяется следующим образом:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}, & \text{если } x = \frac{p}{q}, \text{ где } p \text{ и } q \text{ взаимно просты и } q > 0, \\ 0, & \text{если } x \text{ иррационально.} \end{cases}$$

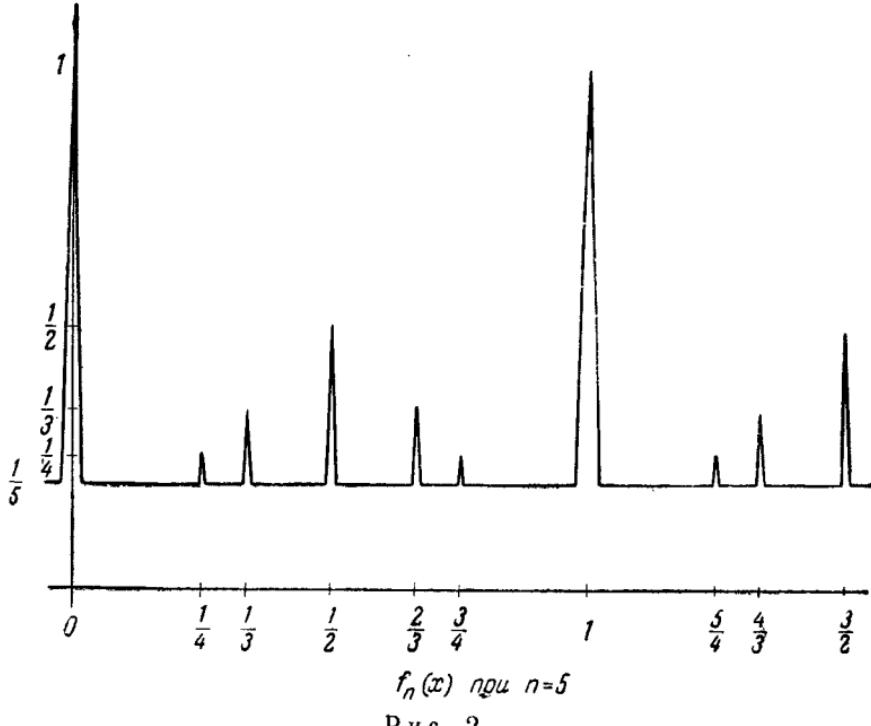


Рис. 2.

Определим теперь последовательность  $f_n(x)$ . Зафиксируем номер  $n \geq 2$ . На каждом интервале вида  $\left(\frac{p}{q} - \frac{1}{2n^2}, \frac{p}{q}\right)$ , где  $1 \leq q < n$ ,  $0 \leq p \leq q$ , положим

$$f_n(x) = \max\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{q} + 2n^2\left(x - \frac{p}{q}\right)\right),$$

а на интервале вида  $\left(\frac{p}{q}, \frac{p}{q} + \frac{1}{2n^2}\right)$ , где  $p$  и  $q$  находятся в тех же пределах, положим

$$f_n(x) = \max\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{q} - 2n^2\left(x - \frac{p}{q}\right)\right).$$

В тех точках интервала  $[0, 1]$ , в которых  $f_n(x)$  еще не определена, положим  $f_n(x) \equiv 1/n$ . Наконец, продолжим функцию  $f_n(x)$  за пределы отрезка  $[0, 1]$  периодически с периодом, равным единице. График функции  $f_n(x)$  представляет собой бесконечную ломаную линию, звенья которой либо расположены на горизонтали  $y = 1/n$ , либо поднимаются к изолированным точкам графика функции  $f$ , причем угловой коэффициент наклона равен  $\pm 2n^2$  (см. рис. 2). При возрастании  $n$  пики становятся все более узкими и крутыми, а горизонтальные звенья ломаной приближаются к оси  $x$ . Легко видеть, что для всякого  $x \in \mathbb{R}$  и  $n = 1, 2, \dots$

$$f_n(x) \geq f_{n+1}(x)$$

и

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x).$$

При этом каждая функция  $f_n$  всюду непрерывна, а предельная функция  $f$  разрывна на всюду плотном множестве  $\mathbb{Q}$  рациональных чисел (см. пример 24 гл. 2).

## 5. Не интегрируемая по Риману функция, являющаяся пределом последовательности функций, интегрируемых по Риману. (См. пример 33 гл. 8.)

Каждая из функций  $g_n$ , определенных в примере 24 гл. 2, интегрируема по Риману на замкнутом интервале  $[0, 1]$ , поскольку каждая из этих функций ограничена на этом интервале и имеет конечное число точек разрыва. Последовательность  $\{g_n\}$  является возрастающей последовательностью ( $g_n(x) \leq g_{n+1}(x)$  для каждого  $x$  и  $n = 1, 2, \dots$ ), сходящейся к функции  $f$  примера 1 гл. 4, которая равна 1 на множестве  $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$  и равна 0 на множестве  $[0, 1] \setminus \mathbb{Q}$ .

## 6. Последовательность функций, для которой предел интегралов не равен интегралу от предельной функции

Положим

$$f_n(x) \equiv \begin{cases} 2n^2x, & \text{если } 0 \leq x \leq \frac{1}{2n}, \\ n - 2n^2\left(x - \frac{1}{2n}\right), & \text{если } \frac{1}{2n} \leq x \leq \frac{1}{n}, \\ 0, & \text{если } \frac{1}{n} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Тогда

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

однако

$$\int_0^1 \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) dx = \int_0^1 0 dx = 0.$$

Другим примером подобного типа является последовательность  $\{f_n(x)\}$ , где  $f_n(x) = n^2 xe^{-nx}$  при  $0 \leq x \leq 1$ .

Еще более замечательным свойством обладает последовательность функций

$$f_n(x) = \begin{cases} 2n^3 x, & \text{если } 0 \leq x \leq \frac{1}{2n}, \\ n^2 - 2n^3 \left(x - \frac{1}{2n}\right), & \text{если } \frac{1}{2n} \leq x \leq \frac{1}{n}, \\ 0, & \text{если } \frac{1}{n} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

В этом случае

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^b f_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{2} = +\infty$$

для всякого  $b \in (0, 1]$ , в то время как

$$\int_0^b \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) dx = \int_0^b 0 dx = 0.$$

**7. Последовательность функций, для которой предел производных не равен производной от предельной функции**

Положим  $f_n(x) = x/(1 + n^2 x^2)$  для  $-1 \leq x \leq 1$  и  $n = 1, 2, \dots$ . Тогда предельная функция  $f(x) \equiv \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$  существует и равна 0 для всех  $x \in [-1, 1]$  (при этом сходимость является равномерной, поскольку наибольшее и наименьшее значения функции  $f_n(x)$  на интервале  $[-1, 1]$  равны

соответственно  $1/2n$  и  $-1/2n$ ). Производная предельной функции тождественно равна 0. Однако предел последовательности производных

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f'_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - n^2 x^2}{(1 + n^2 x^2)^2} = \begin{cases} 1, & \text{если } x = 0, \\ 0, & \text{если } 0 < |x| \leq 1. \end{cases}$$

**8. Последовательность функций, равномерно сходящаяся на каждом замкнутом подинтервале, но не сходящаяся равномерно на всем интервале**

Положим  $f_n(x) \equiv x^n$  на открытом интервале  $(0, 1)$ .

**9. Последовательность  $\{f_n\}$ , равномерно сходящаяся к нулю на интервале  $[0, +\infty)$  и такая, что**

$$\int_0^{+\infty} f_n(x) dx \not\rightarrow 0$$

Положим

$$f_n(x) \equiv \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{если } 0 \leq x \leq n, \\ 0, & \text{если } x > n. \end{cases}$$

Тогда  $f_n$  равномерно сходится к нулю на  $[0, +\infty)$ , однако

$$\int_0^{+\infty} f_n(x) dx = 1 \rightarrow 1.$$

Еще более замечательный пример доставляет последовательность функций

$$f_n(x) \equiv \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{если } 0 \leq x \leq n^2, \\ 0, & \text{если } x > n^2. \end{cases}$$

В этом случае  $\int_0^{+\infty} f_n(x) dx = n \rightarrow +\infty$ .

**10. Неравномерно сходящийся ряд, общий член которого стремится к нулю равномерно**

Этим свойством на полуинтервале  $[0, 1)$  обладает ряд  $\sum_{n=1}^{+\infty} x^n/n$ . Так как общий член этого ряда мажорируется на  $[0, 1)$  числом  $1/n$ , он стремится к нулю равномерно на  $[0, 1)$ .

Сходимость ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} x^n/n$  вытекает из того, что он мажорируется рядом  $\sum x^n$ , сходящимся на  $[0, 1)$ . Однако исходный ряд сходится неравномерно. Это следует из того факта, что его частичные суммы не являются равномерно ограниченными (гармонический ряд расходится; см. [36], стр. 447, упр. 31, 32).

**11. Неравномерно сходящаяся последовательность, обладающая равномерно сходящейся подпоследовательностью**

Положим

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{x}{n}, & \text{если } n \text{ нечетно,} \\ \frac{1}{n}, & \text{если } n \text{ четно,} \end{cases}$$

причем все функции определены на множестве действительных чисел  $\mathbf{R}$ . Эта последовательность сходится к нулю неравномерно, но подпоследовательность  $\{f_{2n}(x)\} = \left\{ \frac{1}{2n} \right\}$  сходится равномерно.

**12. Неравномерно сходящиеся последовательности, удовлетворяющие любым трем из четырех условий теоремы Дини**

Теорема Дини утверждает, что если  $\{f_n\}$  — последовательность определенных на множестве  $A$  функций, сходящаяся на  $A$  к функции  $f$ , и если

- (i)  $f_n$  непрерывна на  $A$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ,
- (ii)  $f$  непрерывна на  $A$ ,
- (iii) последовательность  $\{f_n(x)\}$  монотонна,
- (iv)  $A$  компактно,

то данная последовательность сходится к функции  $f$  равномерно.

Никакие три из этих условий не обеспечивают равномерной сходимости. Другими словами, ни одно из этих четырех условий не может быть опущено. Этот факт подтверждается следующими четырьмя примерами:

$$(i) f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = 0 \text{ или } \frac{1}{n} \leq x \leq 1, \\ 1, & \text{если } 0 < x < \frac{1}{n}. \end{cases}$$

Тогда  $\{f_n(x)\}$  — убывающая при каждом фиксированном  $x$  последовательность, которая на компактном множестве  $[0, 1]$  неравномерно сходится к непрерывной функции  $f(x) \equiv 0$ .

(ii) Убывающая последовательность  $\{x^n\}$  на компактном множестве  $[0, 1]$  неравномерно сходится к разрывной функции

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leq x < 1, \\ 1, & \text{если } x = 1. \end{cases}$$

(iii) См. пример 6.

(iv) Последовательность  $\{x^n\}$  на  $[0, 1)$ .

## ГЛАВА 8

### МНОЖЕСТВА И МЕРА НА ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ ОСИ

#### Введение

Если не оговорено противное, то все рассматриваемые в настоящей главе множества предполагаются подмножествами системы действительных чисел  $\mathbb{R}$ . Непустой класс  $\mathfrak{A}$  множеств называется  $\sigma$ -кольцом, или сигма-кольцом, если он замкнут относительно операции объединения, примененной счетное множество раз, и относительно операции разности множеств ( $A_1, A_2, \dots, \in \mathfrak{A} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \in \mathfrak{A}$  и  $A_1 \setminus A_2 \in \mathfrak{A}$ ).

Если  $\mathfrak{A}$  — какой-либо непустой класс множеств, то  $\sigma$ -кольцом, порожденным классом  $\mathfrak{A}$ , называется пересечение всех  $\sigma$ -колец, содержащих  $\mathfrak{A}$  ( $\sigma$ -кольцо, порожденное классом  $\mathfrak{A}$ , всегда существует, так как всегда существует по крайней мере одно  $\sigma$ -кольцо, содержащее  $\mathfrak{A}$ , а именно класс *всех* подмножеств  $\mathbb{R}$ ). Естественно представлять себе  $\sigma$ -кольцо, порожденное классом  $\mathfrak{A}$ , как *наименьшее*  $\sigma$ -кольцо, содержащее  $\mathfrak{A}$ . Сигма-кольцо, порожденное классом  $\mathfrak{B}$  всех компактных подмножеств  $\mathbb{R}$ , называется классом  $\mathfrak{B}$  борелевских множеств (таким образом, множество является борелевским, если оно есть элемент  $\sigma$ -кольца, порожденного классом  $\mathfrak{B}$ ).

Если  $A$  — произвольное подмножество  $\mathbb{R}$ , а  $x$  — какое-либо действительное число, то сдвигом множества  $A$  на число  $x$  называется множество, обозначаемое символом  $x + A$ , которое определяется следующим образом:

$$x + A \equiv \{y \mid y = x + a, a \in A\} = \{x + a \mid a \in A\}.$$

Класс  $\mathfrak{A}$  множеств называется замкнутым относительно сдвигов, если

$$A \in \mathfrak{A}, x \in \mathbb{R} \Rightarrow x + A \in \mathfrak{A}.$$

Если  $\mathfrak{S}$  есть  $\sigma$ -кольцо подмножеств пространства  $X$ , то функция множества  $\rho$  с областью определения  $\mathfrak{S}$  называется

неотрицательной функцией в широком смысле, если ее значения для множеств  $S \in \mathfrak{S}$  удовлетворяют неравенству  $0 \leq \rho(S) \leq +\infty$ . Неотрицательная функция в широком смысле, заданная на  $\sigma$ -кольце  $\mathfrak{S}$ , называется мерой на  $\mathfrak{S}$ , если  $\rho(\emptyset) = 0$  и  $\rho$  счетно аддитивна на  $\mathfrak{S}$ :

$$S_1, S_2, \dots \in \mathfrak{S}, S_m \cap S_n = \emptyset \text{ для } m \neq n \Rightarrow$$

$$\rho\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} S_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \rho(S_n).$$

Если  $\rho$  есть мера на  $\sigma$ -кольце  $\mathfrak{S}$  подмножеств пространства  $X$  и если  $X \in \mathfrak{S}$ , то упорядоченная пара  $(X, \mathfrak{S})$  называется пространством с мерой, а  $\rho$  — мерой на пространстве с мерой  $(X, \mathfrak{S})$ . Если из контекста ясно, о каком классе множеств  $\mathfrak{S}$  идет речь, то пространство с мерой будет обозначаться одной буквой  $X$ . Пусть  $\rho$  и  $\sigma$  — две меры на одном и том же пространстве с мерой  $(X, \mathfrak{S})$ . Мера  $\rho$  называется абсолютно непрерывной относительно  $\sigma$  (это обозначается так:  $\rho \ll \sigma$ ), если

$$A \in \mathfrak{S}, \sigma(A) = 0 \Rightarrow \rho(A) = 0.$$

Если  $\rho$  — какая-либо мера на пространстве с мерой  $(X, \mathfrak{S})$ , то нуль-множеством для  $\rho$  называется любое подмножество элемента  $A$  из  $\mathfrak{S}$ , имеющего нулевую меру, т. е.  $\rho(A) = 0$ . Мера  $\rho$  на  $(X, \mathfrak{S})$  называется полной, если всякое нуль-множество для  $\rho$  является элементом класса  $\mathfrak{S}$ .

Мерой Бореля называется мера  $\mu$  на пространстве с мерой  $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ , которая каждому ограниченному замкнутому интервалу сопоставляет его длину:

$$\mu([a, b]) = b - a, \text{ если } a \leq b.$$

Этим условием мера Бореля определяется вполне однозначно. Классом  $\tilde{\mathfrak{B}}$  измеримых по Лебегу множеств называется  $\sigma$ -кольцо, порожденное объединением класса  $\mathfrak{B}$  и класса всех нуль-множеств для меры Бореля на  $\mathfrak{B}$ . Мера Лебега есть полная мера на  $\tilde{\mathfrak{B}}$ , которая однозначно определяется тем, что ее сужение на  $\mathfrak{B}$  является мерой Бореля; другими словами, мера Лебега является *пополнением* или *полным продолжением* на  $\tilde{\mathfrak{B}}$  меры Бореля, заданной на  $\mathfrak{B}$ .

Так как длина компактного интервала  $[a, b]$  инвариантна относительно сдвигов, то  $\sigma$ -кольца  $\mathfrak{B}$  и  $\tilde{\mathfrak{B}}$  замкнуты отно-

сительно сдвигов, а меры Бореля и Лебега инвариантны относительно сдвигов:

$$\begin{aligned} A \in \mathfrak{B}, \quad x \in \mathbb{R} &\Rightarrow x + A \in \mathfrak{B}, \quad \mu(x + A) = \mu(A), \\ A \in \tilde{\mathfrak{B}}, \quad x \in \mathbb{R} &\Rightarrow x + A \in \tilde{\mathfrak{B}}, \quad \mu(x + A) = \mu(A). \end{aligned}$$

Для всякого множества  $E \subset \mathbb{R}$  определим внутреннюю меру Лебега  $\mu_*(E)$  и внешнюю меру Лебега  $\mu^*(E)$  следующим образом:

$$\begin{aligned} \mu_*(E) &\equiv \sup \{ \mu(A) \mid A \subset E, \quad A \in \mathfrak{B} \}, \\ \mu^*(E) &\equiv \inf \{ \mu(A) \mid A \supset E, \quad A \in \tilde{\mathfrak{B}} \}. \end{aligned}$$

Эти определения эквивалентны следующим:

$$\begin{aligned} \mu_*(E) &= \sup \{ \mu(A) \mid A \subset E, \quad A \in \mathfrak{B} \} = \\ &= \sup \{ \mu(A) \mid A \subset E, \quad A \text{ компактно} \}, \\ \mu^*(E) &= \inf \{ \mu(A) \mid A \supset E, \quad A \in \tilde{\mathfrak{B}} \} = \\ &= \inf \{ \mu(A) \mid A \supset E, \quad A \text{ открыто} \}. \end{aligned}$$

Доказательства этих фактов и дальнейшие подробности можно найти в [17], [31], [32] и [53].

Иногда мы будем ссылаться на аксиому выбора или на такие ее варианты, как теорема о полном упорядочении или лемма Цорна. Их иногда объединяют под общим названием *принципа максимального элемента*. По поводу этого круга вопросов отсылаем читателя к [17], [31] и [49].

Мы предполагаем также, что читатель знаком с понятиями *отношения эквивалентности* и *класса эквивалентности*. Эти понятия и связанные с ними вопросы рассматриваются в [17] и [19].

## 1. Совершенное нигде не плотное множество

Совершенным множеством называется замкнутое множество, каждая точка которого является предельной точкой этого множества. Фундаментальный результат, относящийся к совершенным множествам, состоит в том, что всякое непустое совершенное множество  $A$  действительных чисел (или, более общо, всякое непустое совершенное множество в полном сепарабельном метрическом пространстве) несчетно; на самом же деле мощность множества  $A$  равна  $\mathfrak{c}$  — мощности

множества  $R$ , т. е. между  $R$  и  $A$  существует взаимно однозначное соответствие. (Доказательство и подробности см. в [54], стр. 153—162.)

Нигде не плотным множеством называется множество  $A$ , замыкание которого  $\bar{A}$  не имеет внутренних точек, т. е.  $I(\bar{A}) = \emptyset$ . Ясно, что множество нигде не плотно тогда и только тогда, когда его замыкание нигде не плотно, и что любое подмножество нигде не плотного множества нигде не плотно. Менее очевидным является тот факт, что объединение любой конечной совокупности нигде не плотных множеств нигде не плотно. Доказательство этого факта можно провести по индукции, рассмотрев сначала следующий частный случай: если  $A$  и  $B$  замкнуты и нигде не плотны, то  $A \cup B$  нигде не плотно. (Если  $U$  — непустое открытое подмножество множества  $A \cup B$ , то  $U \setminus B$  — непустое открытое подмножество множества  $A$ .)

Знаменитый пример совершенного нигде не плотного множества был построен Г. Кантором (немецкий математик, 1845—1918 г.) и известен под названием канторова множества. Это множество  $C$  получается из замкнутого единичного интервала  $[0, 1]$  последовательным удалением открытых интервалов, называемых „средними третями“, следующим образом. Сначала удалим все точки  $x$ , лежащие между  $1/3$  и  $2/3$ . Затем удалим средние трети  $(1/9, 2/9)$  и  $(7/9, 8/9)$  (двух оставшихся замкнутых интервалов  $[0, 1/3]$  и  $[2/3, 1]$  соответственно). После этого удалим средние части  $(1/27, 2/27)$ ,  $(7/27, 8/27)$ ,  $(19/27, 20/27)$  и  $(25/27, 26/27)$  четырех оставшихся замкнутых интервалов  $[0, 1/9]$ ,  $[2/9, 1/3]$ ,  $[2/3, 7/9]$  и  $[8/9, 1]$  соответственно. Продолжая этот процесс до бесконечности, мы удалим в результате из интервала  $[0, 1]$  множество, являющееся объединением последовательности открытых интервалов, т. е. открытое множество. Оставшееся замкнутое множество и есть множество  $C$ . Поскольку каждую точку множества  $C$  можно сколь угодно точно приблизить концевыми точками удаленных интервалов (все эти концевые точки принадлежат  $C$ ), то множество  $C$  совершенно. А так как внутри  $[0, 1]$  не существует открытого интервала, который не имел бы общих точек по крайней мере с одним из интервалов, точки которого были удалены на некоторой стадии, то (замкнутое) множество  $C$  нигде не плотно.

Канторово множество  $C$  можно определить при помощи троичной (с основанием 3) системы счисления. Точка  $x \in C$  тогда и только тогда, когда  $x$  можно представить троичной дробью, используя лишь цифры 0 и 2. Например, 0,022222... и 0,200000... являются концевыми точками первого удаленного интервала, т. е. соответственно точками  $1/3$  и  $2/3$  в десятичной системе. По поводу этого описания множества  $C$  см. [32], [53] и [33]\*, стр. 57, а также следующий пример 2.

## 2. Несчетное множество меры нуль

Канторово множество  $C$  примера 1 несчетно, ибо оно является непустым совершенным множеством, а его мера равна нулю, поскольку множество точек, удаленных из замкнутого интервала  $[0, 1]$ , имеет меру

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} + \dots = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{2}{3}} = 1.$$

Можно воспользоваться троичными разложениями для точек канторова множества и показать, что мощность множества  $C$  равна  $\mathfrak{c}$ , т. е. мощности множества  $\mathbb{R}$  всех действительных чисел. (Этот метод доказательства не зависит от указанного выше метода, основанного на свойствах совершенных множеств.) С одной стороны, точки множества  $C$  находятся во взаимно однозначном соответствии с троичными разложениями, использующими лишь цифры 0 и 2, и, следовательно, с *двоичными* разложениями, использующими цифры 0 и 1. С другой стороны, *бесконечные* двоичные разложения находятся во взаимно однозначном соответствии с точками полуоткрытого интервала  $(0, 1]$  и, следовательно, с множеством всех действительных чисел. Это показывает, что множество *всех* двоичных разложений (а потому и множество  $C$ ) несчетно и его мощность *не меньше*  $\mathfrak{c}$ . Чтобы доказать, что эта мощность в точности *равна*  $\mathfrak{c}$ , нам остается лишь заметить, что множество *конечных* двоичных разложений счетно (или еще проще, что  $C \subset \mathbb{R}$ ). Дальнейшие приложения только что описанного отображения можно найти в примере 14 этой главы.

### 3. Множество меры нуль, разностное множество которого содержит некоторую окрестность нуля

Если  $A$  — произвольное непустое множество, то его разностным множеством  $D(A)$  называется множество всех разностей между его элементами:

$$D(A) \equiv \{x - y \mid x \in A, y \in A\}.$$

Важным фактом в теории меры является то, что если  $A$  — измеримое множество положительной меры, то точка  $x = 0$  является внутренней для разностного множества  $D(A)$  (см. [53], стр. 72). Канторово множество  $C$  примера 1 является множеством *нулевой* меры, которое обладает таким же свойством. В самом деле, его разностное множество  $D(C)$  есть замкнутый интервал  $[-1, 1]$ . Простейший способ убедиться в этом состоит в следующем. Рассмотрим множество  $C \times C$  и покажем, что для всякого числа  $\alpha$ , такого, что  $-1 \leq \alpha \leq 1$ , прямая  $y = x + \alpha$  пересекает множество  $C \times C$  по крайней мере в одной точке (см. [9], стр. 110; там же указаны дальнейшие ссылки). Так как множество  $C$  получено последовательным удалением „средних третей“, то множество  $C \times C$  можно представить в виде пересечения счетного семейства замкнутых множеств  $C_1, C_2, \dots$ , где каждое из множеств  $C_n$  есть объединение „угловых квадратов“ (см. рис. 3). Множество  $C_1$  состоит из четырех замкнутых квадратов со сторонами, равными  $1/3$ , расположенных по углам полного квадрата  $[0, 1] \times [0, 1]$ :  $[0, 1/3] \times [0, 1/3]$ ,  $[0, 1/3] \times [2/3, 1]$ ,  $[2/3, 1] \times [0, 1/3]$  и  $[2/3, 1] \times [2/3, 1]$ ; множество  $C_2$  состоит из шестнадцати замкнутых квадратов со сторонами, равными  $1/9$ , расположенных по углам четырех квадратов множества  $C_1$  (по четыре в каждом квадрате); множество  $C_3$  состоит из шестидесяти четырех замкнутых квадратов со сторонами, равными  $1/27$ , расположенных по углам шестнадцати квадратов множества  $C_2$  (по четыре в каждом квадрате) и т. д. Для всякого данного  $\alpha \in [-1, 1]$  прямая  $y = x + \alpha$  пересекает по крайней мере один из четырех квадратов множества  $C_1$ . Выберем один такой квадрат и обозначим его через  $S_1$ . Эта прямая должна пересечь по крайней мере один из четырех квадратов множества  $C_2$ , лежащих внутри  $S_1$ . Выберем один такой квадрат и обозначим его через  $S_2$ . Продолжая этот процесс, мы

получим последовательность замкнутых квадратов  $\{S_n\}$ , такую, что  $S_{n+1} \subset S_n$  для  $n = 1, 2, \dots$ . Так как длина стороны квадрата  $S_n$  равна  $3^{-n}$ , то существует в точности одна точка

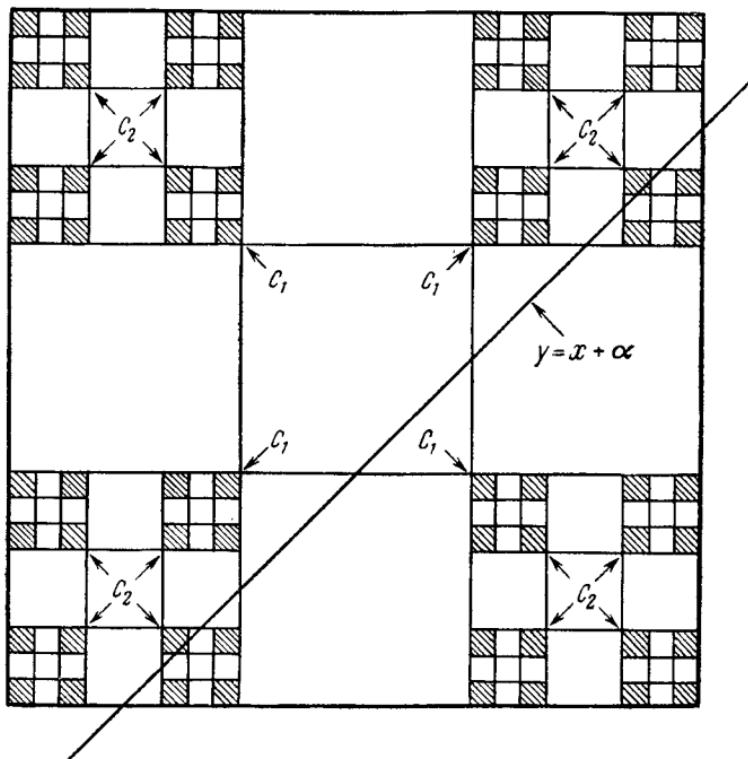


Рис. 3.

$(x, y)$ , которая принадлежит *каждому* квадрату последовательности  $\{S_n\}$  (см. [36], стр. 201, упр. 30). Следовательно, точка  $(x, y)$  должна принадлежать множеству  $C \times C$ , а так как эта точка должна принадлежать и прямой  $y = x + a$ , то мы получили элементы  $x$  и  $y$  множества  $C$ , разность между которыми равна данному числу  $a$ .

#### 4. Совершенное нигде не плотное множество положительной меры

Метод, использованный в примере 1 для построения канторова множества  $C$ , можно в измененном виде применить

для построения полезного семейства совершенных нигде не плотных множеств. Каждое из этих множеств, которые мы также назовем канторовыми, есть множество точек, остающихся на интервале  $[0, 1]$  после удаления из него последовательности интервалов следующим образом. Пусть  $\alpha$  — произвольное положительное число  $< 1$ . Сначала удалим из  $[0, 1]$  все точки открытого интервала  $(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\alpha, \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\alpha)$  длины  $\frac{1}{2}\alpha$  с центром в точке  $\frac{1}{2}$ . Из двух оставшихся замкнутых интервалов  $[0, \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\alpha]$  и  $[\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\alpha, 1]$ , каждый из которых имеет длину  $\frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2}\alpha)$ , удалим средние открытые интервалы, длина каждого из которых равна  $\frac{1}{8}\alpha$ . Затем из оставшихся четырех замкнутых интервалов, длина каждого из которых равна  $\frac{1}{4}(1 - \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{4}\alpha)$ , удалим средние открытые интервалы, каждый из которых имеет длину  $\frac{1}{32}\alpha$ . Из восьми оставшихся замкнутых интервалов, длина каждого из которых равна  $\frac{1}{8}(1 - \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{4}\alpha - \frac{1}{8}\alpha)$ , удалим средние открытые интервалы, каждый из которых имеет длину  $\frac{1}{128}\alpha$ . После  $n$  шагов мера удаленных открытых интервалов будет равна  $\alpha(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + 2^{-n})$ , и, следовательно, мера совокупности удаленных открытых интервалов после бесконечной последовательности удалений будет равна  $\alpha$ . Мера оставшегося канторова множества будет равна  $1 - \alpha$ . По этой причине построенные таким способом канторовы множества часто называют канторовыми множествами положительной меры. Все они являются совершенными нигде не плотными множествами. Ниже, в примере 23, будет показано, что все канторовы множества положительной или нулевой меры гомеоморфны (см. введение к гл. 12). Тогда из второй части примера 2 будет следовать, что любое канторово множество имеет мощность  $c$ , равную мощности множества  $\mathbb{R}$ .

Третий способ построения канторовых множеств таков: пусть  $0 < \beta < 1$ , и пусть  $\{\beta_n\}$  — последовательность полу-

жительных чисел, такая, что  $\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n \beta_n = \beta$ . Удалим из  $[0, 1]$  открытый интервал  $I_0$  длины  $\beta_0$  с центром в точке  $1/2$ . Затем из  $[0, 1] \setminus I_0$  удалим два открытых интервала  $I_1^1, I_1^2$ , каждый из которых имеет длину  $\beta_1$  и расположен в центре одного из двух непересекающихся замкнутых интервалов, объединение которых совпадает с множеством  $[0, 1] \setminus I_0$ . Продолжим этот процесс, как и в предыдущих построениях: на  $n$ -м шаге будут удалены  $2^n$  открытых интервалов  $I_n^1, I_n^2, \dots, I_n^{2^n}$ , каждый из которых имеет длину  $\beta_n$  и расположен должным образом на замкнутых интервалах, составляющих остаточное множество после  $(n - 1)$ -го шага,  $n = 1, 2, \dots$ .

## 5. Совершенное нигде не плотное множество иррациональных чисел

Можно построить пример совершенного нигде не плотного множества, используя последовательность  $\{r_n\}$ , члены которой составляют множество всех рациональных чисел интервала  $(0, 1)$ . Поступим как и при построении канторова множества  $C$ , однако расширим открытый интервал так, чтобы его центр находился в точке  $1/2$ , концы были иррациональными и чтобы он содержал точку  $r_1$ . На следующем шаге удалим из каждого из двух оставшихся замкнутых интервалов открытый интервал таким образом, чтобы его центр находился в центре соответствующего замкнутого интервала, концевые точки были иррациональными и чтобы было удалено второе рациональное число  $r_2$ <sup>1</sup>). Продолжая этот процесс неограниченно, мы получим в результате совершенное нигде не плотное множество  $D$ . А так как все рациональные числа, заключенные между 0 и 1, были удалены, то это „канторово“ множество  $D$  содержит, за исключением двух точек 0 и 1, только иррациональные числа. Если концевые точки первоначального интервала выбрать иррациональными, то подобным же образом можно построить совершенное нигде не плотное множество, состоящее только из иррациональных чисел.

<sup>1</sup>) Если оно не было удалено на предыдущем шаге. — *Прим. перев.*

## 6. Всюду плотное открытое множество, дополнение которого имеет положительную меру

Пусть  $A$  — канторово множество положительной меры на  $[0, 1]$ . Положим  $B = A' = \mathbb{R} \setminus A$ . Тогда  $B$  будет всюду плотным открытым множеством, а его дополнение  $A$  имеет положительную меру.

## 7. Множество второй категории

Говорят, что множество  $A$  есть множество первой категории, если оно является объединением счетного числа нигде не плотных множеств. Любое подмножество множества первой категории есть множество первой категории, и всякое объединение счетного множества множеств первой категории является снова множеством первой категории. Например, множество  $\mathbf{Q}$  рациональных чисел является множеством первой категории. Если множество не является множеством первой категории, то говорят, что это множество второй категории. Примером множества второй категории является множество  $\mathbf{R}$  всех действительных чисел. Более общо, любое полное метрическое пространство есть множество второй категории (см. [38], стр. 338, упр. 33 и [45]\*, стр. 87). Этот общий результат принадлежит Р. Бэрю (см. [2], стр. 108; [54], стр. 162 — 165 и [27], стр. 425). Из него следует, что множество  $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$  иррациональных чисел является множеством второй категории. Сейчас независимо от только что упомянутой общей теоремы мы приведем краткое доказательство того факта, что любое множество  $A$  действительных чисел с непустым ядром  $I(A)$  есть множество второй категории. Предположим противное. Тогда найдется непустой замкнутый интервал  $C = [a, b]$ , содержащийся в ядре  $A$ , который можно представить в виде  $C = F_1 \cup F_2 \cup \dots$ , где множества  $F_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) замкнуты и нигде не плотны. Пусть  $C_1$  — замкнутый интервал  $[a_1, b_1] \subset (a, b) \setminus F_1$ ; далее пусть  $C_2$  — замкнутый интервал  $[a_2, b_2] \subset (a_1, b_1) \setminus F_2$ ; вообще для  $n > 1$  пусть  $C_n = [a_n, b_n] \subset (a_{n-1}, b_{n-1}) \setminus F_n$ . Тогда существует точка  $p$ , принадлежащая *каждому*  $C_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  (см. [36], стр. 201, упр. 30 и [33]\*, стр. 44 — 45), и, следовательно,  $p \in C$ . Но это невозможно, так как  $p$  не принадлежит ни одному множеству  $F_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  (Противоречие.)

## 8. Множество, не являющееся множеством типа $F_\sigma$

Напомним (гл. 2, пример 23), что множеством типа  $F_\sigma$  называется множество, являющееся объединением счетного множества замкнутых множеств. Можно привести много примеров множеств типа  $F_\sigma$ : конечные множества, замкнутые интервалы, открытые интервалы (например, интервал  $(0, 1)$ ) является объединением множеств  $[1/n, (n - 1)/n]$ , полуоткрытые интервалы, множество всех рациональных чисел (если рациональные числа расположить в последовательность  $r_1, r_2, \dots$ , то  $\mathbf{Q}$  есть объединение одноточечных замкнутых множеств  $\{r_1\}, \{r_2\}, \dots, \{r_n\}, \dots$ ). Примером множества, которое не является множеством типа  $F_\sigma$ , может служить множество  $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$  всех иррациональных чисел. Чтобы доказать это, предположим противное. Тогда  $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} = C_1 \cup C_2 \cup \dots$ , где каждое  $C_n$  замкнуто ( $n = 1, 2, \dots$ ). Но так как никакое подмножество множества  $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$  всех иррациональных чисел не имеет внутренних точек, то каждое замкнутое подмножество этого множества нигде не плотно. Отсюда следует, что множество  $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$  первой категории. (Противоречие; см. пример 7.)

## 9. Множество, не являющееся множеством типа $G_\delta$

Множество  $A$  называется множеством типа  $G_\delta$ , если оно является пересечением счетного множества открытых множеств. Для дополнений множеств справедлив закон двойственности (закон де Моргана):

$$\left( \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \right)' = \bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n', \quad \left( \bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n \right)' = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n'.$$

Из этого закона следует, что множество  $A$  является множеством типа  $G_\delta$  тогда и только тогда, когда его дополнение  $A' = \mathbf{R} \setminus A$  является множеством типа  $F_\sigma$ . Поэтому, учитывая, что множество  $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$  всех иррациональных чисел не является множеством типа  $F_\sigma$ , заключаем, что множество  $\mathbf{Q}$  всех рациональных чисел не является множеством типа  $G_\delta$ .

Если рассмотреть объединение счетного множества множеств типа  $G_\delta$  и пересечение счетного множества множеств

типа  $F_\sigma$ , то мы получим два новых класса множеств, называемых множествами типа  $G_{\delta\sigma}$  и  $F_{\delta\delta}$  соответственно. Подобным же образом можно составить две бесконечные последовательности классов множеств, которые обозначают соответственно через  $F_\sigma, F_{\delta\sigma}, F_{\delta\delta\sigma}, \dots$  и  $G_\delta, G_{\delta\sigma}, G_{\delta\delta\sigma}, \dots$ . Дальнейшие подробности об этих множествах см. в [54].

### 10. Множество $A$ , не являющееся множеством точек разрыва никакой функции

Пусть  $A$  — множество  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  всех иррациональных чисел. Так как  $A$  не является множеством типа  $F_\sigma$ , то не существует действительнозначной функции действительного переменного, множество точек разрыва которой совпадает с  $A$  (см. последнее замечание к примеру 23 гл. 2). Другими словами, не существует функции, отображающей  $\mathbb{R}$  в  $\mathbb{R}$ , которая непрерывна в каждой рациональной точке и разрывна в каждой иррациональной точке. (См. пример 15 гл. 2.)

### 11. Неизмеримое множество

Используя аксиому выбора, можно построить множество, не измеримое по Лебегу. В действительности же множество, построенное этим способом, не может быть измеримым относительно любой нетривиальной счетно аддитивной меры, которая инвариантна относительно сдвигов. Точнее, если  $\mu$  — мера, определенная для всех множеств  $A$  действительных чисел, принимающая конечные значения на ограниченных множествах и такая, что

$$\mu(x + A) = \mu(A)$$

для каждого  $x \in \mathbb{R}$  и  $A \subset \mathbb{R}$ , то  $\mu(A) = 0$  для всякого  $A \subset \mathbb{R}$ . Сейчас мы докажем этот результат.

Определим на  $(0, 1] \times (0, 1]$  отношение эквивалентности  $\sim$  следующим образом:  $x \sim y$ , если  $x - y \in \mathbb{Q}$ . Этим отношением эквивалентности полуоткрытый интервал  $(0, 1]$  разбивается на непересекающиеся классы эквивалентности  $C$ . Если применить аксиому выбора к этому семейству классов эквивалентности, то мы получим множество  $A$ , обладающее следующими двумя свойствами: (1) никакие две различные точки из  $A$  не принадлежат одному и тому же классу

эквивалентности  $C$ ; (2) каждый класс эквивалентности  $C$  содержит некоторую точку  $A$ . В терминах отношения эквивалентности эти два свойства принимают такую форму: (1) никакие два различных элемента из  $A$  не эквивалентны друг другу; (2) каждая точка  $x$  интервала  $(0, 1]$  эквивалентна некоторому элементу множества  $A$ . Далее для всякого  $r \in (0, 1]$  определим на множестве  $A$  операцию, называемую сдвигом по модулю 1:

$$(r + A)(\text{mod } 1) = [(r + A) \cup ((r - 1) + A)] \cap (0, 1] = \\ = [(r + A) \cap (0, 1)] \cup \{((r - 1) + A) \cap (0, 1)\}.$$

Для сдвига по модулю 1 из установленных выше свойств множества  $A$  следует, что (1) любые два множества  $(r + A)(\text{mod } 1)$  и  $(s + A)(\text{mod } 1)$  при различных рациональных числах  $r$  и  $s$  из  $(0, 1]$  не пересекаются; (2) каждое действительное число  $x$  интервала  $(0, 1]$  является элементом некоторого множества  $(r + A)(\text{mod } 1)$  для некоторого рационального числа  $r$  из  $(0, 1]$ . Другими словами, полуоткрытый интервал  $(0, 1]$  является объединением счетной совокупности попарно непересекающихся множеств  $\{(r + A)(\text{mod } 1)\}$ , где  $r \in \mathbb{Q} \cap (0, 1]$ . Важное свойство множеств, полученных из  $A$  сдвигами по модулю 1, состоит в том, что (на основании предположений, сделанных относительно  $\mu$ ) все они имеют ту же меру, что и  $A$ :

$$\mu((r + A)(\text{mod } 1)) = \\ = \mu((r + A) \cap (0, 1]) + \mu(((r - 1) + A) \cap (0, 1]) = \\ = \mu((r + A) \cap (0, 1]) + \mu((r + A) \cap (1, 2]) = \\ = \mu((r + A) \cap (0, 2]) = \mu(r + A) = \mu(A).$$

Если предположить, что  $A$  имеет положительную меру, то из счетной аддитивности  $\mu$  мы получим, что

$$\mu((0, 1]) = \sum_{r \in \mathbb{Q} \cap (0, 1]} \mu((r + A)(\text{mod } 1)) = \\ = \sum_{r \in \mathbb{Q} \cap (0, 1]} \mu(A) = +\infty,$$

но это невозможно, так как множество  $(0, 1]$  ограничено. Следовательно,  $\mu(A) = 0$  и

$$\mu((0, 1]) = \sum_{r \in \mathbb{Q} \cap (0, 1]} \mu((r + A) \pmod{1}) = \sum_{r \in \mathbb{Q} \cap (0, 1]} \mu(A) = 0,$$

и потому

$$\mu(\mathbb{R}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mu((n, n+1]) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mu((0, 1]) = 0.$$

Отсюда вытекает, что  $\mu$  — тривиальная мера, для которой любое множество имеет меру нуль.

Наконец, если принять во внимание, что мера Лебега — нетривиальная инвариантная относительно сдвигов мера, для которой ограниченные интервалы имеют положительную конечную меру, то предыдущие рассуждения показывают, что *множество  $A$  не измеримо по Лебегу*.

Так как все множества типа  $F_\sigma$  и все множества типа  $G_\delta$  являются борелевскими множествами и потому измеримы, то построенное неизмеримое множество дает пример множества, которое не является ни множеством типа  $F_\sigma$ , ни множеством типа  $G_\delta$ .

Описанную выше конструкцию можно применить и к множествам на окружности. Рассмотрим единичную окружность  $I \equiv \{z \mid z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$  на комплексной плоскости  $\mathbb{C}$  как группу относительно умножения. Для каждого  $z \in I$  существует единственное  $\theta$ ,  $0 \leq \theta < 1$ , такое, что  $z = e^{2\pi i \theta}$ . Положим  $I_0 \equiv \{z \mid z = e^{2\pi i \theta}, \theta \in \mathbb{Q}, 0 \leq \theta < 1\}$ . Тогда  $I_0$  будет нормальной подгруппой, и существует факторгруппа  $S = I/I_0$ . Пусть  $\tilde{S}$  — полное множество представителей всех классов смежности группы  $S$  в  $I$  (при этом из каждого класса смежности в  $I$  входит лишь один элемент), полученное применением аксиомы выбора, и пусть мера Лебега  $\mu$  на  $[0, 1)$  преобразуется в меру  $\tilde{\mu}$  на  $I$  по следующему правилу:

$E \subset I$  измеримо тогда и только тогда,

когда  $F \equiv \{\theta \mid e^{2\pi i \theta} \in E, 0 \leq \theta < 1\}$

измеримо по Лебегу и  $\tilde{\mu}(E) \equiv 2\pi\mu(F)$ .

Тогда  $\tilde{S}$  не измеримо. В самом деле,  $\bigcup_{\theta \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]} e^{2\pi i \theta} \tilde{S}$  есть объединение счетного множества непересекающихся множеств, каждое из которых измеримо и имеет ту же меру, что и  $\tilde{S}$ . Более того, это объединение совпадает с  $I$ , так как  $\tilde{S}$  — полное множество представителей, откуда следует, что если  $\tilde{S}$  измеримо, то  $I$  является объединением счетного множества непересекающихся измеримых множеств одинаковой меры. Так как  $\tilde{\mu}(I) = 2\pi$ , то мера  $\tilde{\mu}(\tilde{S})$  не может быть положительной. Но если  $\tilde{\mu}(\tilde{S}) = 0$ , то  $\tilde{\mu}(I) = 0$ .

Описанный выше процесс можно распространить на более общие топологические группы, например на компактные группы, имеющие счетное множество нормальных подгрупп. (Определения и подробности относительно групп, нормальных подгрупп и т. д. см. в [19], относительно топологических групп см. [29].)

### 12. Множество $D$ , такое, что для всякого измеримого множества $A$ справедливы равенства $\mu_*(D \cap A) = 0$ , $\mu^*(D \cap A) = \mu(A)$

Множество  $D$ , обладающее такими свойствами, является, так сказать, крайне неизмеримым — оно настолько неизмеримо, насколько может быть неизмеримо множество вообще! Множество  $D$ , как и неизмеримое множество  $A$  примера 11, строится при помощи аксиомы выбора, однако в этом случае построение несколько сложнее. Его можно найти в книге [53], стр. 74. Этот пример показывает, что всякое измеримое множество  $A$  содержит подмножество, внутренняя мера которого равна нулю, а внешняя мера равна мере  $A$ . Он также показывает, что *всякое множество положительной меры содержит неизмеримое подмножество*.

Ф. Гельвин построил семейство  $\{E_t\}$ ,  $0 < t < 1$ , попарно непересекающихся подмножеств интервала  $[0, 1]$ , каждое из которых имеет внешнюю меру, равную 1.

### 13. Множество $A$ меры нуль, для которого любое действительное число является его точкой конденсации

Точка  $p$  называется точкой конденсации множества  $A$ , если всякая окрестность  $p$  содержит несчетное множество точек из  $A$ . Пусть  $C$  — канторово множество при-

мера 1. Для любого замкнутого интервала  $[a, \beta]$ , где  $a < \beta$ , определим множество  $C(a, \beta)$  следующим образом:

$$C(a, \beta) \equiv \{a + (\beta - a)x \mid x \in C\}.$$

Тогда  $C(a, \beta)$  — совершенное нигде не плотное множество меры нуль. Далее, пусть множество  $B$  является объединением всех множеств  $C(a, \beta)$  для всех рациональных  $a$  и  $\beta$ , таких, что  $a < \beta$ . Так как  $B$  есть объединение счетного семейства множеств меры нуль, то оно также является множеством меры нуль. С другой стороны, так как *всякий* открытый интервал  $I$  содержит некоторое множество  $C(a, \beta)$  и так как *каждое* множество  $C(a, \beta)$  несчетно, то любое действительное число должно быть точкой конденсации множества  $B$ . (См. [22], стр. 287.)

#### 14. Нигде не плотное множество $A$ действительных чисел и его непрерывное отображение на замкнутый единичный интервал $[0, 1]$

В качестве множества  $A$  можно взять *любое* канторово множество (примеры 1 и 4), поскольку все канторовы множества гомеоморфны (пример 23). Мы опишем специальное отображение  $\varphi$ , используя в качестве  $A$  канторово множество примера 1. Рассмотрим отображение, описанное во второй части примера 2. Пусть  $0, c_1c_2c_3 \dots$  — троичное разложение произвольного числа  $x \in C$ , где  $c_n = 0$  или  $2$  ( $n = 1, 2, \dots$ ). Положим

$$\varphi(x) \equiv 0, \frac{c_1}{2} \frac{c_2}{2} \frac{c_3}{2} \dots$$

и будем рассматривать правую часть как *двоичное* разложение некоторого числа, использующее лишь цифры 0 и 1. Очевидно, что образом  $C$  при отображении  $\varphi$  является некоторое подмножество интервала  $[0, 1]$ . Покажем теперь, что  $[0, 1] \subset \varphi(C)$ . Для этого возьмем произвольное  $y \in [0, 1]$  и рассмотрим его двоичное разложение

$$y = 0, b_1b_2b_3 \dots ^1).$$

Положим

$$x \equiv 0, (2b_1)(2b_2)(2b_3) \dots,$$

<sup>1)</sup> Если число  $y$  допускает два разложения в двоичную дробь, то можно рассматривать оба разложения. — Прим. перев.

где правая часть рассматривается как разложение числа  $x$  в троичную дробь. Тогда  $x \in C$ , причем  $\varphi(x) = y$ . Следовательно,  $[0, 1] \subset \varphi(C)$ . Таким образом,  $\varphi(C) = [0, 1]$ . Нетрудно доказать и непрерывность отображения  $\varphi$ . Однако это удобнее установить из геометрических соображений так, как это сделано в следующем примере, где рассматривается непрерывное продолжение отображения  $\varphi$  на весь единичный интервал  $[0, 1]$ .

Следует заметить, что отображение  $\varphi$  не является взаимно однозначным. В самом деле, в этом случае взаимно однозначное непрерывное отображение вообще невозможно, ибо  $C$  и  $[0, 1]$  не гомеоморфны, а любое взаимно однозначное непрерывное отображение одного компактного множества на другое есть гомеоморфизм. (См. [36], стр. 192.) (Множество  $C$  вполне несвязно, так как связными являются лишь его одноточечные подмножества, в то время как его полный образ  $[0, 1]$  есть связное множество.) Примером двух точек множества  $C$ , имеющих один и тот же образ, могут служить точки  $0,022000000\dots$  и  $0,020222222\dots$ , ибо их образами являются соответственно  $0,011000000\dots$  и  $0,010111111 = 0,011000000\dots$  Вообще две точки  $x_1$  и  $x_2$  множества  $C$  имеют один и тот же образ при отображении  $\varphi$  тогда и только тогда, когда они имеют вид

$$x_1 = 0, c_1 c_2 \dots c_n 2000 \dots, \quad \text{а} \quad x_2 = 0, c_1 c_2 \dots c_n 0222 \dots$$

Другими словами,  $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$  тогда и только тогда, когда  $x_1$  и  $x_2$  являются концевыми точками одного из интервалов, которые были удалены при построении множества  $C$ . Таким образом,  $\varphi$  — возрастающая функция на  $C$  и притом строго возрастающая, если исключить указанные пары концевых точек. (Ср. пример 30.)

Усилиением предыдущей „теоремы существования“ является следующая общая теорема, указывающая на возможные в метрических пространствах непрерывные и гомеоморфные (топологические) образы канторова множества (а на самом деле любого канторова множества, см. пр. 23) и его подмножеств (определение см. во введении к гл. 12): *каждое сепарабельное метрическое пространство есть непрерывный образ некоторого подмножества канторова множества. Каждое компактное метрическое пространство есть непрерывный образ канторова множества. Каждое ком-*

*пактное вполне несвязное метрическое пространство есть гомеоморфный образ некоторого замкнутого подмножества канторова множества. Каждое компактное вполне несвязное совершенное метрическое пространство есть гомеоморфный образ канторова множества.* (См. [2], стр. 119—122.)

### 15. Непрерывная монотонная функция, производная которой равна нулю почти всюду

Продолжим функцию предыдущего примера на весь единичный интервал  $[0, 1]$  следующим образом. Если  $x \in [0, 1] \setminus C$ , то  $x$  принадлежит одному из открытых интервалов  $(a, b)$ , удаленных из  $[0, 1]$  при построении множества  $C$ , и потому  $\varphi(a) = \varphi(b)$ ; положим  $\varphi(x) \equiv \varphi(a) = \varphi(b)$ . Другими словами,  $\varphi$  постоянна на замыкании каждого интервала, удаленного при построении множества  $C$ . Точнее  $\varphi(x) = 1/2$  на интервале  $[1/3, 2/3]$ . На интервалах  $[1/9, 2/9]$  и  $[7/9, 8/9]$  значения  $\varphi$  равны соответственно  $1/4$  и  $3/4$ . На интервалах  $[1/27, 2/27]$ ,  $[7/27, 8/27]$ ,  $[19/27, 20/27]$  и  $[25/27, 26/27]$  значения  $\varphi$  равны соответственно  $1/8$ ,  $3/8$ ,  $5/8$  и  $7/8$ . Продолжая этот процесс до бесконечности, мы получим возрастающую функцию, определенную на  $[0, 1]$  и (локально) постоянную в некоторой окрестности каждой точки множества  $[0, 1] \setminus C$  (см. рис. 4). Поскольку  $\varphi$  возрастает на  $[0, 1]$  и множество ее значений составляет полный интервал  $[0, 1]$ , то  $\varphi$  не имеет скачков. А так как монотонная функция не может иметь других разрывов, кроме скачков (см. [36], стр. 52, упр. 24, а также [33], стр. 238), то  $\varphi$  непрерывна. Наконец, поскольку  $\varphi$  локально постоянна на открытом множестве  $[0, 1] \setminus C$ , мера которого равна 1, заключаем, что  $\varphi'(x) = 0$  почти всюду на  $[0, 1]$ . Определенная выше функция называется канторовой функцией.

Аналогично тому как канторова функция была определена с помощью канторова множества, можно определить подобные „канторовы функции“, исходя из других канторовых множеств (положительной меры). Вероятно, простейший способ определения канторовой функции  $g$ , соответствующей заданному на  $[0, 1]$  канторову множеству  $A$ , состоит в том, что сначала  $g$  определяют на замыканиях последовательно удаляемых интервалов: на центральном интервале  $g(x) \equiv 1/2$ ;

на следующих двух интервалах значения  $g$  полагаются соответственно равными  $1/4$  и  $3/4$ ; на следующих четырех интервалах значения  $g$  полагаются равными соответственно  $1/8$ ,  $3/8$ ,  $5/8$ ,  $7/8$  и т. д. Тогда на плотном подмножестве  $[0, 1] \setminus A$  интервала  $[0, 1]$  функция  $g$  является возрастающей, а ее множество значений (на этом подмножестве) плотно

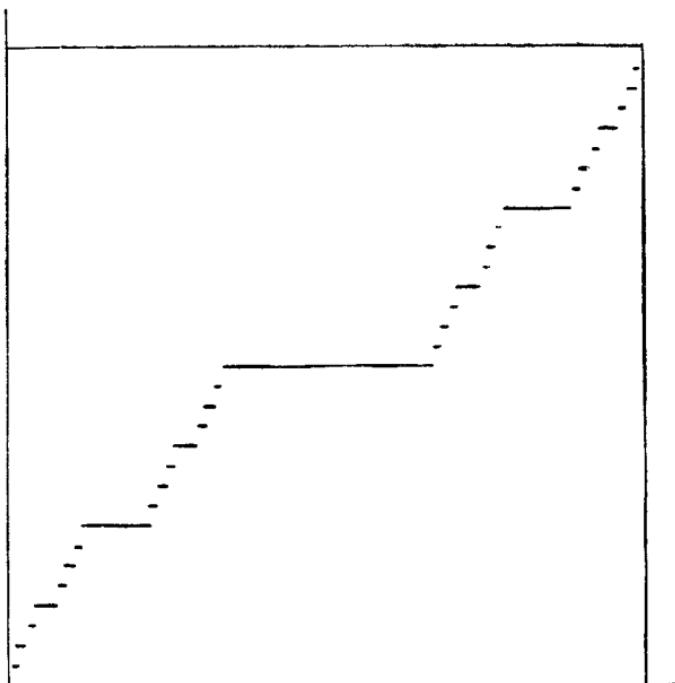


Рис. 4.

в  $[0, 1]$ . Следовательно, функцию  $g$  можно продолжить, определив ее на всем интервале  $[0, 1]$  так, что она станет возрастающей и непрерывной на  $[0, 1]$ , а ее множество значений совпадет с  $[0, 1]$ .

Используя пример 5 „канторова множества“ из иррациональных чисел, можно построить функцию  $h$ , возрастающую и непрерывную на  $[0, 1]$ , множество значений которой совпадает с  $[0, 1]$ , при этом  $h'(x) = 0$  для каждого рационального числа  $x \in [0, 1]$ . На самом деле, множество значений  $h(x)$  для рациональных  $x \in [0, 1]$  можно сделать равным множеству  $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$  всех рациональных точек интервала  $[0, 1]$ .

вместо множества точек вида  $m/2^n$ , как в предыдущих случаях. Таким образом, мы получим функцию, удовлетворяющую требованиям примера 11(g) гл. 1.

Непрерывная *строго* монотонная функция с производной, равной нулю почти всюду, рассматривается в примере 30.

## 16. Топологическое отображение замкнутого интервала, не сохраняющее измеримость и нулевую меру

Пусть  $\varphi$  — канторова функция примера 15. Определим на  $[0, 1]$  функцию  $\psi$  следующим образом:

$$\psi(x) = x + \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Множество значений этой функции есть интервал  $[0, 2]$ . Так как  $\varphi$  возрастает и непрерывна на  $[0, 1]$ , то отображение  $\psi$  *строго* возрастает и является топологическим на  $[0, 1]$  (т. е. непрерывно, взаимно однозначно и имеет непрерывное обратное отображение, определенное на множестве значений  $\psi$ ). Далее, поскольку всякий открытый интервал, удаленный из  $[0, 1]$  при построении канторова множества  $C$ , отображается функцией  $\psi$  на некоторый интервал такой же длины из  $[0, 2]$ , то  $\mu(\psi(I \setminus C)) = \mu(I \setminus C) = 1^1$ , откуда  $\mu(\psi(C)) = 1$ . Но мера множества  $C$  равна нулю, и мы получили, таким образом, пример топологического отображения  $\psi$ , которое отображает множество меры нуль на некоторое множество положительной меры. Пусть теперь  $D$  — неизмеримое подмножество множества  $\psi(C)$  (см. пример 12). Тогда  $\psi^{-1}(D)$  — подмножество множества  $C$  меры нуль, и потому оно также имеет меру нуль. Следовательно,  $\psi$  является примером топологического отображения, которое отображает измеримое множество на неизмеримое.

Ниже будет рассмотрен еще один подобный пример (см. пример 23).

## 17. Измеримое неборелевское множество

Множество  $\psi^{-1}(D)$  примера 16 измеримо, но поскольку оно является образом неборелевского множества  $D$  при топологическом отображении, то  $\psi^{-1}(D)$  не является борелевским множеством (см. [54]).

---

<sup>1)</sup> Здесь  $I = [0, 1]$ . — Прим. перев.

### 18. Две непрерывные функции, разность которых не является постоянной, но их производные (конечные или бесконечные) совпадают всюду

Этот пример построил Рей Пастор [40] (см. также [9], стр. 133). Пусть  $\varphi$  — канторова функция примера 15. На единичном интервале  $[0, 1]$  определим функцию  $h(x)$  следующим образом. На канторовом множестве  $C$  положим ее равной нулю, а на каждом открытом интервале  $(a, b)$ , удаленном при построении множества  $C$ , определим  $h(x)$  так, чтобы ее график состоял из двух конгруэнтных полуокружностей с диаметром на оси  $x$ , причем одна полуокружность расположена над осью  $x$  на левой половине  $(a, b)$ , а другая — под осью  $x$  на правой половине  $(a, b)$ :

$$h(x) = \begin{cases} \left[ \left( \frac{b-a}{4} \right)^2 - \left( x - \frac{3a+b}{4} \right)^2 \right]^{1/2}, & \text{если } a < x \leq \frac{a+b}{2}, \\ - \left[ \left( \frac{b-a}{4} \right)^2 - \left( x - \frac{a+3b}{4} \right)^2 \right]^{1/2}, & \text{если } \frac{a+b}{2} \leq x < b. \end{cases}$$

Функция  $h$  непрерывна всюду на интервале  $[0, 1]$ . Далее положим  $f(x) = 2\varphi(x) + h(x)$  и  $g(x) = \varphi(x) + h(x)$ . Тогда  $f'(x) = g'(x)$  для  $0 \leq x \leq 1$ . В самом деле, если  $x$  принадлежит канторову множеству  $C$ , то  $f'(x) = g'(x) = +\infty$ . Если же  $x$  — средняя точка некоторого интервала, удаленного при построении множества  $C$ , то  $f'(x) = g'(x) = -\infty$ . Наконец, для остальных точек  $x \in [0, 1] \setminus C$  имеем  $f'(x) = g'(x) = h'(x)$ . С другой стороны,  $f(x) - g(x) = \varphi(x)$ , а функция  $\varphi(x)$  не является постоянной.

### 19. Множество полной меры<sup>1)</sup> и первой категории на $[0, 1]$

*Первый пример:* пусть  $A_n$  — канторовы множества на  $[0, 1]$  меры  $(n-1)/n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , и пусть  $A = A_1 \cup A_2 \cup \dots$ . Так как множества  $A_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) нигде не плотны, то множество  $A$  первой категории. С другой стороны, поскольку

$$\mu(A_n) = \frac{n-1}{n} \leq \mu(A) \leq 1$$

для  $n = 1, 2, \dots$ , то  $\mu(A) = 1$ .

<sup>1)</sup> Если мера множества  $E \subset [a, b]$  равна  $b - a$ , то говорят, что это множество *полной меры* на  $[a, b]$ . — Прим. перев.

*Второй пример:* множеством такого же типа является дополнение до единичного интервала множества из второго примера п. 20.

## 20. Множество меры нуль и второй категории на $[0, 1]$

*Первый пример:* пусть  $A$  — множество первого примера из п. 19. Тогда его дополнение  $A' = [0, 1] \setminus A$  есть множество второй категории (если бы оно было множеством первой категории, то интервал  $[0, 1]$  являлся бы объединением двух множеств первой категории и потому также был бы множеством первой категории) и меры нуль ( $\mu([0, 1] \setminus A) + \mu(A) = 1$ ).

*Второй пример:* пусть  $Q \cap [0, 1]$  есть множество значений последовательности  $\{r_n\}$ , и пусть через  $I_{kn}$ , где  $k$  и  $n$  — произвольная пара натуральных чисел, обозначен открытый интервал длины  $< 2^{-k-n}$ , содержащий точку  $r_n$ . Положим

$A_k \equiv \bigcup_{n=1}^{+\infty} I_{kn}$  и  $B_k \equiv [0, 1] \setminus A_k$ . Тогда  $A_k$  — открытое множество, содержащее  $Q \cap [0, 1]$  и имеющее меру  $\mu(A_k) < 2^{-k}$ , и потому  $B_k$  — компактное нигде не плотное множество меры  $\mu(B_k) > 1 - 2^{-k}$ . (Мера  $A_k$  не превосходит суммы длин интервалов  $I_{kn}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , а  $B_k$  не имеет внутренних точек, ибо оно состоит лишь из иррациональных точек.) Следовательно, множество  $B \equiv \bigcup_{k=1}^{+\infty} B_k$  есть подмножество  $[0, 1]$  полной меры и первой категории, и потому множество  $A \equiv \bigcap_{k=1}^{+\infty} A_k = [0, 1] \setminus B$  есть подмножество  $[0, 1]$  меры нуль и второй категории.

## 21. Множество меры нуль, не являющееся множеством типа $F_\sigma$

*Первый пример:* рассмотрим множество первого примера из п. 20. Оно не может быть объединением счетного множества замкнутых множеств  $F_1, F_2, \dots$ . В самом деле, в противном случае каждое множество  $F_n$  было бы замкнутым множеством меры нуль и, следовательно, нигде не плотным.

Но это означало бы, что рассматриваемое множество было бы множеством первой категории. (Противоречие.)

*Второй пример:* множество второго примера из п. 20 (по тем же причинам) также обладает требуемыми свойствами.

*Третий пример:* неборелевское множество примера 17 имеет меру нуль, однако оно не может быть множеством типа  $F_\sigma$ , ибо всякое множество типа  $F_\sigma$  является борелевским.

**22. Множество меры нуль, такое, что не существует функции (интегрируемой по Риману или нет), для которой это множество является множеством точек разрыва**

Любое множество примера 21 обладает требуемым свойством, поскольку для всякой функции, отображающей  $\mathbb{R}$  в  $\mathbb{R}$ , множество точек разрыва является множеством типа  $F_\sigma$  (см. гл. 2, пример 23, а также гл. 4, пример 8).

Настоящий пример представляет особый интерес в связи со следующей теоремой: *действительная функция, определенная и ограниченная на компактном интервале, интегрируема на нем по Риману тогда и только тогда, когда множество ее точек разрыва имеет меру нуль* (см. [38], стр. 153, а также [33]\*, стр. 145). Невнимательное чтение этой теоремы может привести к неправильному представлению, будто *каждое* множество меры нуль может быть множеством точек разрыва некоторой интегрируемой по Риману функции, поскольку это условие и необходимо, и достаточно.

**23. Два совершенных нигде не плотных гомеоморфных множества на  $[0, 1]$ , лишь одно из которых имеет меру нуль**

Мы докажем несколько больше, а именно если  $C$  — канторово множество меры нуль на  $[0, 1]$  и  $A$  — любое канторово множество положительной меры на  $[0, 1]$ , то существует гомеоморфизм  $f$  интервала  $[0, 1]$  на  $[0, 1]$ , такой, что  $f(C) = A$ . Непосредственным следствием этого результата является утверждение, что *все канторовы множества гомеоморфны*.

Идея, лежащая в основе построения этого отображения, подобна той, которая использовалась при построении канто-

ровой функции (пример 15). Расположим „в одинаковом порядке“ интервалы  $I_1, I_2, \dots$  и интервалы  $J_1, J_2, \dots$ , удаленные из  $[0, 1]$  при построении множеств  $C$  и  $A$  соответственно. Это означает, что  $I_1$  и  $J_1$  являются средними интервалами, удаленными на первом шаге,  $I_2$  и  $J_2$  — „левыми средними“,

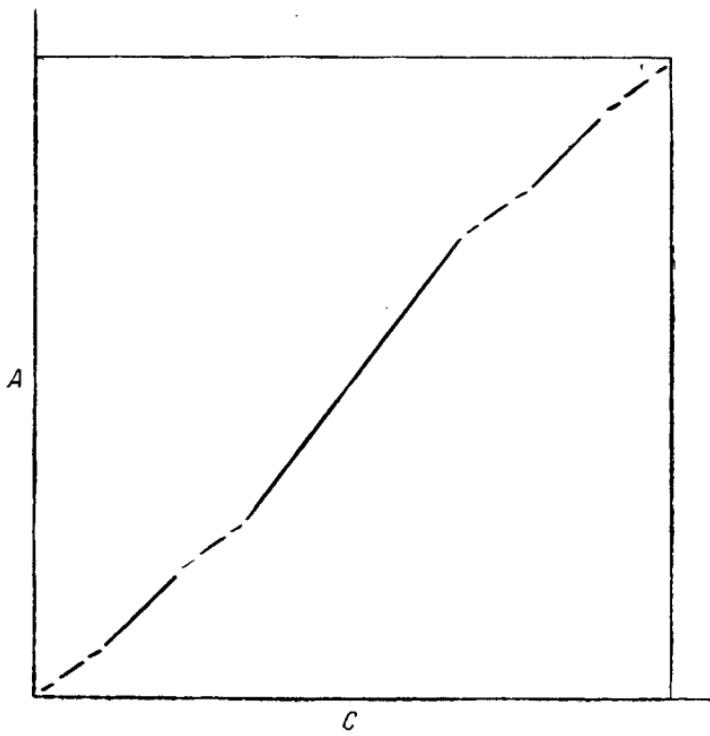


Рис. 5.

а  $I_3$  и  $J_3$  — „правыми средними“ интервалами, удаленными на втором шаге, и т. д. Затем с помощью возрастающей линейной функции отобразим замыкание  $I_n$  на замыкание  $J_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ). Тогда  $f$  определена и строго возрастает на всюду плотном подмножестве интервала  $[0, 1]$ , и так как при этом множество ее значений также всюду плотно на  $[0, 1]$ , то  $f$  можно непрерывно продолжить на  $[0, 1]$ , как это описано во второй части примера 15 (см. рис. 5). Построенная таким образом функция  $f$  является функцией такого же типа, как и функция примера 16.

**24. Два непересекающихся непустых нигде не плотных множества действительных чисел, таких, что каждая точка любого из них является предельной точкой другого**

Пусть  $A$  — произвольное канторово множество на  $[0, 1]$ , а  $B$  — подмножество  $A$ , состоящее из всех концевых точек открытых интервалов, которые были удалены из  $[0, 1]$  при построении  $A$ . Тогда множества  $B$  и  $E \equiv A \setminus B$  удовлетворяют требуемым условиям.

Если рассматривать не только подмножества системы  $\mathbb{R}$ , то подобные примеры строятся очень просто. Например, требуемым условиям удовлетворяют следующие два множества на евклидовой плоскости: множество на оси  $x$  с рациональными первыми координатами и множество на оси  $x$  с иррациональными первыми координатами.

**25. Два гомеоморфных множества действительных чисел, являющихся множествами разных категорий**

Определим на  $[0, 1]$  возрастающую непрерывную функцию, подобную канторовой функции, построенной во второй части примера 15. Пусть  $\{J_n\}$  — описанная в примере 23 последовательность открытых интервалов, удаленных из  $[0, 1]$  при построении канторова множества  $A$ , а  $\{s_n\}$  — взаимно однозначное отображение  $\mathbb{N}$  на  $\mathbb{Q} \cap (0, 1)$ . Определим последовательность  $\{r_n\}$  следующим образом: положим  $r_1 \equiv s_1$ ,  $r_2 \equiv s_n$ , где  $n$  — наименьшее натуральное число, такое, что  $s_n < r_1$ ;  $r_3 \equiv s_n$ , где  $n$  — наименьшее натуральное число, такое, что  $s_n > r_1$ . Далее положим  $r_4 \equiv s_n$ , где наименьшее натуральное число, такое, что  $s_n < r_2$ ;  $r_5 \equiv s_n$ , где  $n$  — наименьшее натуральное число, такое, что  $r_2 < s_n < r_1$ ;  $r_6 \equiv s_n$ , где  $n$  — наименьшее натуральное число, такое, что  $r_1 < s_n < r_3$ ;  $r_7 \equiv s_n$ , где  $n$  — наименьшее натуральное число, такое, что  $s_n > r_3$ . Если продолжить этот процесс, то рациональные числа, заключенные между 0 и 1, будут занумерованы в последовательность  $\{r_n\}$  таким образом, что их отношение порядка будет соответствовать отношению порядка последовательности интервалов  $J_n$ , как это указано на рис. 6. Другими словами,  $r_m < r_n$  тогда и только тогда, когда  $J_m$  лежит левее  $J_n$ . Определим теперь функцию  $f$ , положив  $f(x) \equiv r_n$ , если  $x$  принадлежит замыканию  $\bar{J}_n$  интервала  $J_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Тогда, как и в примере 15, функция  $f$  определена и возрастает на плотном

подмножестве интервала  $[0, 1]$ , а множество ее значений плотно в  $[0, 1]$ . Следовательно, ее можно продолжить до непрерывной возрастающей функции, отображающей  $[0, 1]$  на  $[0, 1]$ . Если теперь определить множества  $B$  и  $E$  так, как в примере 24, то функция  $f$  отобразит  $B$  на множество  $\mathbf{Q} \cap (0, 1)$ , а  $E$  — на множество  $(0, 1) \setminus \mathbf{Q}$  всех иррациональных чисел, заключенных между 0 и 1. Отображение  $E$  на  $(0, 1) \setminus \mathbf{Q}$  является строго возрастающим и **бипрерывным**. (Непрерывность обратного отображения следует из того, что при отображении  $E$  на  $(0, 1) \setminus \mathbf{Q}$  сохраняется отношение

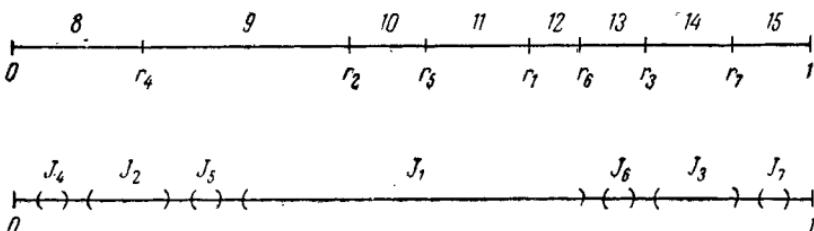


Рис. 6.

порядка.) Следовательно,  $E$  и  $(0, 1) \setminus \mathbf{Q}$  гомеоморфны. Таким образом, всякое канторово множество с удаленными „концевыми точками“ гомеоморфно множеству иррациональных чисел интервала  $(0, 1)$ . Но  $E$  нигде не плотно и потому является множеством первой категории, в то время как  $(0, 1) \setminus \mathbf{Q}$  — множество второй категории (см. пример 7).

Следует заметить, что в отличие от примера 23 гомеоморфизм, описанный в настоящем примере, не порождается гомеоморфизмом интервалов, содержащих эти множества. Если два пространства гомеоморфны и если два множества соответствуют друг другу при этом гомеоморфизме, то можно утверждать следующее: если одно из множеств нигде не плотно, то нигде не плотно и другое; если одно из множеств является множеством первой категории, то и другое также является множеством первой категории.

## 26. Два гомеоморфных множества действительных чисел, таких, что одно из них всюду плотно, а другое нигде не плотно

Если в примере 25 под последовательностью  $\{r_n\}$  понимать не последовательность рациональных чисел интервала  $(0, 1)$ ,

а последовательность, исчерпывающую все множество  $\mathbf{Q}$ , то мы получим гомеоморфизм между  $E$  и множеством  $\mathbf{Q}' = \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$  всех иррациональных чисел. Множество  $E$  нигде не плотно, а множество  $\mathbf{Q}'$  всюду плотно. (См. последний абзац примера 25.)

**27. Функция, определенная на  $\mathbf{R}$ , равная нулю почти всюду и такая, что множество ее значений на каждом непустом открытом интервале совпадает с  $\mathbf{R}$**

Построение функции  $f$ , обладающей указанными свойствами, мы разобьем на несколько этапов. Сначала построим на открытом интервале  $(0, 1)$  функцию  $g$ , отображающую множество  $C \cap (0, 1)$  на  $\mathbf{R}$ , где  $C$  — канторово множество меры нуль. Если  $\varphi$  — канторова функция (пример 15), то функцию  $g$  можно определить так:

$$g(x) \equiv \operatorname{tg} \left[ \pi \left( \varphi(x) - \frac{1}{2} \right) \right], \quad 0 < x < 1.$$

Второй шаг состоит в том, чтобы для произвольно заданного открытого интервала  $I = (a, b)$  определить подмножество  $Z_I$  меры нуль и функцию  $g_I$  с областью определения  $Z_I$  и областью значений  $\mathbf{R}$ . Это можно сделать следующим образом:

$$\begin{aligned} Z_I &\equiv \{a + (b - a)x \mid x \in C \cap (0, 1)\}, \\ g_I(x) &\equiv g\left(\frac{x - a}{b - a}\right), \quad x \in Z_I. \end{aligned}$$

Приступая к построению искомой функции  $f$ , положим ее равной нулю на множестве  $\mathbf{I}$  всех целых чисел. Далее определим последовательность  $\{U_n\}$  открытых множеств следующим образом:  $U_1 \equiv \mathbf{R} \setminus \mathbf{I}$ , т. е.  $U_1$  есть объединение всех открытых интервалов вида  $(n, n+1)$ , где  $n$  — целое число. Внутри каждого из этих интервалов  $I$  определим множество  $Z_I$  меры нуль и на нем функцию  $g_I$  так, как это сделано выше. На множестве  $Z_I$  функцию  $f$  полагаем равной  $g_I$ . Пусть  $U_2$  — подмножество  $U_1$ , на котором  $f$  еще не определена. Тогда  $U_2$  — открытое множество, и потому оно является объединением непересекающихся открытых интервалов. Внутри каждого из этих интервалов  $I$  определим множество  $Z_I$  меры нуль и на нем функцию  $g_I$  так, как это

сделано выше. На множестве  $Z_I$  функцию  $f$  полагаем равной  $g_I$ . Пусть  $U_3$  — подмножество  $U_2$ , на котором  $f$  еще не определена. Тогда  $U_3$  также является открытым множеством и потому является объединением непересекающихся открытых интервалов. Если снова определить множества  $Z_I$  так, как это сделано выше, то функцию  $f$  можно продолжить и на эти множества меры нуль. Продолжая этот процесс, получаем последовательность  $\{U_n\}$  открытых множеств, дополнение каждого из которых имеет меру нуль. Таким образом, функция  $f$  будет определена на некотором множестве меры нуль, а именно на дополнении пересечения множеств  $U_1, U_2, \dots$ , или, что то же самое, на объединении их дополнений  $U'_1, U'_2, \dots$ . При этом *каждый* непустой открытый интервал содержит по крайней мере один из открытых интервалов  $I$ , составляющих открытые множества  $U_n$ , и потому некоторое множество  $Z_I$ , на котором множество значений  $f$  совпадает с  $\mathbf{R}$ . Наконец, положим функцию  $f$  равной нулю в тех точках, в которых она еще не определена.

## 28. Функция, определенная на $\mathbf{R}$ , график которой всюду плотен на плоскости

Этим свойством обладает функция примера 27.

## 29. Неотрицательная всюду конечная функция $f$ , такая, что $\int_a^b f(x) dx = +\infty$ для любого непустого открытого интервала $(a, b)$

Функцию, обладающую этими свойствами, можно построить, используя метод примера 27. Однако в этот метод нужно внести следующие изменения: (i) множество  $C$  следует заменить канторовым множеством меры  $1/2$  на  $[0, 1]$  и (ii) функцию  $g_I$  положить равной

$$g_I(x) = \frac{1}{|I|^2} \chi(Z_I),$$

где  $|I|$  обозначает длину интервала  $I$ , а  $\chi(A)$  — характеристическую функцию множества  $A$  (см. введение к гл. 1).

Каждое множество  $Z_I$  имеет меру  $\frac{1}{2}|I|$ , и поэтому интеграл

от  $g_I$  по  $I$  равен  $1/(2|I|)$ . Так как каждый непустой интервал  $(c, d)$  содержит подинтервалы  $I$  произвольно малой длины, то интеграл  $\int_c^d f(x) dx$  равен  $+\infty$ .

### 30. Непрерывная строго монотонная функция с производной, равной нулю почти всюду

Функцию  $f$ , обладающую этими свойствами, впервые построили А. К. Цаанен и В. А. Дж. Люксембург [59]. Пусть  $\varphi$  — канторова функция примера 15. Положим  $\psi(x) \equiv \varphi(x)$ , если  $x \in [0, 1]$ , и  $\psi(x) \equiv 0$ , если  $x \notin \mathbb{R} \setminus [0, 1]$ . Далее, пусть  $\{[a_n, b_n]\}$  — последовательность замкнутых интервалов  $[0, 1]$ ,  $\left[0, \frac{1}{2}\right], \left[\frac{1}{2}, 1\right], \left[0, \frac{1}{4}\right], \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right], \dots, \left[0, \frac{1}{8}\right], \dots$ . Исследовать функцией будет<sup>1)</sup>

$$f(x) \equiv \sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-n} \psi\left(\frac{x-a_n}{b_n-a_n}\right) \text{ для } 0 < x < 1.$$

### 31. Ограниченнная полуунпрерывная функция, не интегрируемая по Риману и не эквивалентная никакой функции, интегрируемой по Риману

Характеристическая функция  $f$  любого канторова множества  $A$  положительной меры на  $[0, 1]$  ограничена и всюду полуунпрерывна сверху. Но так как множество ее точек разрыва есть  $A$  и мера множества  $A$  положительна, то  $f$

<sup>1)</sup> Приведенный пример функции  $f(x)$  некорректен, так как  $f(x)$  разрывна и не монотонна. Это вытекает из того, что указанный ряд сходится равномерно и потому

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow \frac{1}{2}+0} f(x) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\lim}_{x \rightarrow \frac{1}{2}+0} 2^{-n} \psi\left(\frac{x-a_n}{b_n-a_n}\right) = \frac{1}{2} \psi\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4},$$

тогда как

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow \frac{1}{2}-0} f(x) \geq \frac{1}{2} \psi\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4} \psi(1) = \frac{1}{2}, \quad f(0) = 0, \quad f(1) \geq \frac{1}{2}.$$

Корректный пример см. в [45]\*, стр. 155. — Прим. ред.

не интегрируема по Риману на  $[0, 1]$ <sup>1)</sup>. Две функции называются эквивалентными, если их значения совпадают почти всюду. Если значения функции  $f$  изменить на некотором множестве меры нуль, то множество точек разрыва вновь полученной функции также будет иметь положительную меру.

### 32. Ограниченнaя измеримaя функциa, не эквивалентная никакой функциi, интегрируемой по Риману

Этим свойством обладает функция примера 31.

### 33. Ограниченнaя функциa, являющаяся пределом монотонной последовательности непрерывных функций, не интегрируемая по Риману и не эквивалентная никакой функциi, интегрируемой по Риману. (См. пример 10 гл. 4.)

Представим функцию  $f$  примера 31 как предел убывающей последовательности  $\{f_n\}$  непрерывных функций следующим образом. Для любого открытого интервала  $I = (a, b)$ , где  $0 \leq a < b \leq 1$ , и для любого натурального  $n$  определим функцию

$$g_{n, I}(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \leq x \leq a, \\ 1, & \text{если } b \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{если } a + \frac{b-a}{2^n} \leq x \leq b - \frac{b-a}{2^n}, \\ \text{линейна,} & \text{если } a \leq x \leq a + \frac{b-a}{2^n}, \\ \text{линейна,} & \text{если } b - \frac{b-a}{2^n} \leq x \leq b. \end{cases}$$

Если теперь  $\{J_n\}$  — последовательность открытых интервалов, удаленных из  $[0, 1]$  при построении канторова множества  $A$  положительной меры (см. пример 23), то искомая последовательность  $\{f_n\}$  определяется так:

$$f_1 \equiv g_{1, J_1},$$

$$f_2 \equiv g_{2, J_1} \cdot g_{2, J_2},$$

...

$$f_n \equiv g_{n, J_1} \cdot g_{n, J_2} \cdots g_{n, J_n}.$$

---

<sup>1)</sup> См. введение к гл. 4. — Прим. перев.

**34. Интегрируемая по Риману функция  $f$  и непрерывная функция  $g$ , определенные на  $[0, 1]$  и такие, что их композиция  $f(g(x))$  не интегрируема по Риману на  $[0, 1]$  и не эквивалентна никакой функции, интегрируемой по Риману на этом замкнутом интервале.** (См. пример 9 гл. 4.)

Представим функцию примера 31 в виде  $f(g(x))$ . Для этого положим  $f(x) = 0$  для  $0 \leq x < 1$  и  $f(x) = 1$  для  $x = 1$ . Далее положим  $g(x) = 1$ , если  $x \in A$ , и  $g(x) = 1 - \frac{1}{2}(b-a) + \left| x - \frac{1}{2}(a+b) \right|$ , если  $x$  принадлежит какому-либо интервалу  $I = (a, b)$ , удаленному из  $[0, 1]$  при построении  $A$ . Функция  $g(x)$  непрерывна, ибо для любых  $x_1$  и  $x_2$  из  $[0, 1]$  имеет место неравенство  $|g(x_1) - g(x_2)| \leq |x_1 - x_2|$ .

Заметим, что функции  $f_n$  примера 33 и функцию  $g$  примера 34 можно заменить бесконечно дифференцируемыми функциями. Этого можно добиться, если функции  $g_{n,1}$  примера 33 и функции, составляющие функцию  $g$  примера 34, заменить бесконечно дифференцируемыми. Для этой цели можно использовать функции такого же типа, как и в примере 12 гл. 3.

Наконец, следует отметить, что функции  $f$  и  $g$  в настоящем примере нельзя поменять местами. Другими словами, всякая непрерывная функция (заданная на компактном интервале) от функции, интегрируемой по Риману, также интегрируема по Риману. (См. [38], стр. 153, упр. 55.)

**35. Ограниченная функция, имеющая примитивную на замкнутом интервале, но не интегрируемая на нем по Риману**

Определим функцию  $g$  для положительных  $x$  формулой  $g(x) = x^2 \sin(1/x)$ . (См. пример 2 гл. 3.) Далее для всякого положительного числа  $c$  обозначим через  $x_c$  наибольшее положительное число  $x$ , не превосходящее  $c$  и такое, что  $g'(x) = 0$ . Наконец, для  $0 < x \leq c$  определим функцию

$$g_c(x) = \begin{cases} g(x), & \text{если } 0 < x \leq x_c, \\ g(x_c), & \text{если } x_c \leq x \leq c. \end{cases}$$

Пусть  $A$  — какое-либо канторово множество положительной меры на  $[0, 1]$ . Определим функцию  $f$  следующим образом: если  $x \in A$ , то положим  $f(x) = 0$ ; если же  $x$  принадлежит какому-либо интервалу  $I = (a, b)$ , удаленному из  $[0, 1]$  при построении  $A$ , то положим

$$f(x) = \begin{cases} g_c(x - a), & \text{если } a < x \leq \frac{1}{2}(a + b), \\ g_c(-x + b), & \text{если } \frac{1}{2}(a + b) \leq x < b, \end{cases}$$

где  $c = \frac{1}{2}(b - a)$ .

Если  $x$  — какая-либо точка множества  $A$ , а  $y$  — какая-либо другая точка из  $[0, 1]$ , то либо  $f(y) = 0$ , либо  $y$  принадлежит некоторому удаленному интервалу  $I = (a, b)$ . В первом случае  $|f(y) - f(x)|/(y - x) = 0 < |y - x|$ . Во втором же случае, обозначив через  $d$  тот конец интервала  $(a, b)$ , который ближе к  $y$ , имеем при  $c = \frac{1}{2}(b - a)$ :

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \right| &= \left| \frac{f(y)}{y - x} \right| \leq \left| \frac{f(y)}{y - d} \right| = \left| \frac{g_c(|y - d|)}{y - d} \right| \leq \\ &\leq \left| \frac{|y - d|^2}{y - d} \right| = |y - d| \leq |y - x|. \end{aligned}$$

Следовательно, в обоих случаях  $|f(y) - f(x)|/(y - x) \leq |y - x|$ , и потому  $f'(x) = 0$  для каждого  $x \in A$ .

С другой стороны, если  $x$  принадлежит какому-либо удаленному интервалу  $(a, b)$ , то

$$|f'(x)| \leq \left| 2z \sin\left(\frac{1}{z}\right) - \cos\left(\frac{1}{z}\right) \right| \leq 3,$$

где  $z$  — некоторое число между 0 и 1. Таким образом,  $f$  дифференцируема всюду на  $[a, b]$  и ее производная  $f'$  ограничена на этом интервале.

Наконец, учитывая, что  $\overline{\lim_{y \rightarrow +0}} g'(y) = 1$  (см. введение к гл. 2), заключаем, что для всякой точки  $x$  множества  $A$  справедливо равенство  $\overline{\lim_{y \rightarrow x}} f'(y) = 1$ . Следовательно, функ-

ция  $f'$  разрывна в каждой точке множества  $A$ , т. е. на множестве положительной меры. Таким образом, функция  $f'$  удовлетворяет всем требуемым условиям.

Построение, подобное описанному выше, было (по-видимому, впервые) проведено итальянским математиком В. Вольтерра (1860—1940 г.); см. *Giorn. di Battaglini*, **19** (1881), 353—372.

### 36. Функция, для которой существует несобственный интеграл Римана и не существует интеграл Лебега

Положим  $f(x) \equiv \sin x/x$ , если  $x \neq 0$  и  $f(0) \equiv 1$ . Тогда несобственный интеграл  $\int_0^{+\infty} f(x) dx$  сходится (см. [36], стр. 465, а также [52]\*, т. II, стр. 569), однако  $\int_0^{+\infty} |f(x)| dx = +\infty$ . Это означает, что функция  $|f(x)|$  не интегрируема по Лебегу на  $[0, +\infty)$ , а поэтому не интегрируема и функция  $f(x)$ .

### 37. Функция, измеримая по Лебегу и не измеримая по Борелю

Этим условиям удовлетворяет характеристическая функция измеримого по Лебегу неборелевского множества. (См. пример 17.)

### 38. Измеримая функция $f(x)$ и непрерывная функция $g(x)$ , такие, что композиция $f(g(x))$ неизмерима

Применяя обозначения примера 16, положим  $E \equiv \psi^{-1}(D)$ . Тогда характеристическая функция  $f \equiv \chi_E$  множества  $E$  измерима, а функция  $g \equiv \psi^{-1}$  непрерывна. Однако композиция этих функций  $f(g(x))$  неизмерима, поскольку она является характеристической функцией неизмеримого множества  $D$ .

Следует заметить, что в этом примере функции  $f$  и  $g$  нельзя поменять местами. Другими словами, любая непрерывная функция от измеримой функции измерима.

**39. Непрерывная монотонная функция  $g(x)$  и непрерывная функция  $f(x)$ , такие, что**

$$\int_0^1 f(x) dg(x) \neq \int_0^1 f(x) g'(x) dx$$

Пусть  $f(x) \equiv 1$  на  $[0, 1]$ , и пусть  $g$  — канторова функция примера 15. Тогда интеграл Римана — Стильтьеса (см. [38], стр. 179, а также [33]\*, стр. 249) или интеграл Лебега — Стильтьеса (см. [30], [31] и [53]), стоящий в левой части, равен  $\varphi(1) - \varphi(0) = 1$ , в то время как интеграл Лебега, стоящий в правой части, равен 0, ибо подинтегральная функция почти всюду равна 0.

#### **40. Различные виды сходимости функциональных последовательностей**

Пусть функции  $f_1, f_2, f_3, \dots$  заданы и интегрируемы по Лебегу либо на единичном интервале  $[0, 1]$ , либо на множестве всех действительных чисел  $\mathbf{R}$  (в более общем случае эти функции могут быть заданы и интегрируемы по Лебегу на измеримом множестве конечной или бесконечной меры). Тогда существует много способов интерпретации равенства

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n = f.$$

Мы рассмотрим здесь четыре специальных вида сходимости и укажем включения, которыми они связаны. В тех случаях, когда включения отсутствуют, мы приведем соответствующие контрпримеры.

Пусть одна и та же буква  $S$  обозначает либо  $[0, 1]$ , либо  $\mathbf{R}$  в зависимости от того, где заданы рассматриваемые функции. Мы рассмотрим четыре интерпретации упомянутого выше предельного равенства.

(i) Сходимость почти всюду<sup>1)</sup>:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x) \text{ для почти всех } x \in S.$$

<sup>1)</sup> С этим видом сходимости тесно связана *сходимость всюду*, которая является частным случаем сходимости типа (i).

(ii) Сходимость по мере:

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu \{x \mid |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\} = 0.$$

(iii) Сходимость в среднем<sup>1)</sup>:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_S |f_n(x) - f(x)| dx = 0.$$

(iv) Сходимость с интегрируемой мажорантой<sup>2)</sup>:

Последовательность  $\{f_n(x)\}$  сходится почти всюду и существует интегрируемая по Лебегу функция  $g$ , такая, что  $|f_n(x)| \leq |g(x)|$  для  $n = 1, 2, \dots$  и почти всех  $x \in S$ .

Сформулируем сначала два утверждения относительно включений, связывающих сходимости видов (i) — (iv). Если мера  $S$  конечна, то

$$(iv) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (i) \\ (iii) \end{array} \right\} \Rightarrow (ii).$$

Если же мера  $S$  бесконечна, то

$$(iv) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (i) \\ (iii) \Rightarrow (ii). \end{array} \right.$$

(См. [30], [32] и [53].)

Приведем теперь примеры, которые показывают, что других включений, кроме указанных выше, не существует. Все эти примеры, кроме последнего, будут справедливы как для случая конечной, так и для случая бесконечной меры, поскольку все участвующие в них функции равны нулю для  $x \in \mathbb{R} \setminus [0, 1]$ .

<sup>1)</sup> Это есть сходимость в банаховом пространстве  $L^1$  всех интегрируемых функций, среди которых отождествлены те, которые совпадают почти всюду. Этот вид сходимости можно обобщить, рассмотрев сходимость в банаховом пространстве  $L^p$  измеримых функций, которые интегрируемы вместе с  $p$ -степенью их модуля. (В этом случае также отождествляются функции, совпадающие почти всюду.) Дальнейшие подробности см. в [17], [29], [32] и [53].

<sup>2)</sup> Можно определить еще один вид сходимости, а именно сходимость с интегрируемой мажорантой в  $L^p$ ; для этого (iii) заменяется сходимостью в  $L^p$  и требуется выполнение неравенства  $|f_n(x)| \leq |g(x)|$ , где  $g \in L^p$ .

(i)  $\not\Rightarrow$  (iii). Достаточно положить  $f(x) \equiv 0$  для всех  $x \in \mathbb{R}$ , а

$$f_n(x) = \begin{cases} n, & \text{если } 0 < x < 1/n, \\ 0, & \text{если } x \in \mathbb{R} \setminus (0, 1/n), \end{cases}$$

для  $n = 1, 2, \dots$ .

(i)  $\not\Rightarrow$  (iv). В самом деле, так как (iv)  $\Rightarrow$  (iii), то требуемое утверждение вытекает из предыдущего.

(iii)  $\not\Rightarrow$  (i). Пусть  $f(x) \equiv 0$  для всех  $x \in \mathbb{R}$ . Представим каждое  $n \in \mathbb{N}$  в виде  $n = 2^k + m$ , где  $0 \leq m < 2^k$ ,  $k = 0, 1, \dots$ . Тогда  $k$  и  $m$  однозначно определяются числом  $n$ . Положим

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } \frac{m}{2^k} \leq x \leq \frac{m+1}{2^k}, \\ 0 & \text{для остальных } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Тогда  $\int_S |f_n(x) - f(x)| dx = 2^{-k} \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow +\infty$ , однако

$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$  не существует ни для какого  $x \in [0, 1]$ .

(iii)  $\not\Rightarrow$  (iv). Так как (iv)  $\Rightarrow$  (i), то требуемое утверждение вытекает из предыдущего.

(ii)  $\not\Rightarrow$  (i). Воспользуемся примером, опровергающим включение (iii)  $\Rightarrow$  (i). Для функций  $f_n$  этого примера и для любого положительного  $\varepsilon$  имеем

$$\mu \{x \mid |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\} \leq 2^{-k} \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow +\infty.$$

(ii)  $\not\Rightarrow$  (iii). Пусть  $f(x) \equiv 0$  для всех  $x \in \mathbb{R}$ , и пусть для всякого  $n \in \mathbb{N}$  числа  $k$  и  $m$  определены так, как в примере для утверждения (iii)  $\not\Rightarrow$  (i). Положим

$$f_n(x) = \begin{cases} 2^k, & \text{если } \frac{m}{2^k} \leq x \leq \frac{m+1}{2^k}, \\ 0 & \text{для остальных } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Тогда для любого положительного  $\varepsilon$

$$\mu \{x \mid |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\} \leq 2^{-k} \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow +\infty,$$

однако

$$\int_S |f_n(x) - f(x)| dx = 1 \not\rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow +\infty.$$

(ii)  $\not\Rightarrow$  (iv). Так как (iv)  $\Rightarrow$  (i) и (iv)  $\Rightarrow$  (iii), то требуемое утверждение вытекает из доказанных ранее, а именно из того, что (ii)  $\not\Rightarrow$  (i), или того, что (ii)  $\not\Rightarrow$  (iii).

Наконец, приведем пример, в котором множество  $S \equiv \mathbb{R}$  имеет бесконечную меру.

(i)  $\not\Rightarrow$  (ii). Положим  $f(x) \equiv 0$  для всех  $x \in \mathbb{R}$  и

$$f_n(x) \equiv \begin{cases} 1, & \text{если } n \leq x \leq n+1, \\ 0 & \text{для остальных } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

41. Две меры  $\mu$  и  $v$  на пространстве с мерой  $(X, \mathcal{S})$ , такие, что  $\mu$  абсолютно непрерывна относительно  $v$ , однако не существует функции  $f$ , удовлетворяющей равенству  $\mu(E) = \int_E f(x) dv(x)$  для всех  $E \in \mathcal{S}$

Пусть  $X \equiv \mathbb{R}$ , а  $\mathcal{S}$  — класс всех подмножеств пространства  $X$ . Для всякого множества  $E \in \mathcal{S}$  положим

$$\mu(E) \equiv \begin{cases} 0, & \text{если } E \text{ счетно,} \\ +\infty, & \text{если } E \text{ несчетно,} \end{cases}$$

$$v(E) \equiv \begin{cases} n, & \text{если } E \text{ состоит из } n \text{ точек, } n \geq 0, \\ +\infty, & \text{если } E \text{ бесконечно.} \end{cases}$$

Тогда  $v(E) = 0 \Rightarrow E = \emptyset$  и, следовательно,  $\mu(E) = 0$ . Таким образом,  $\mu$  абсолютно непрерывна относительно  $v$ . С другой стороны, если  $f$  такова, что

$$\mu(E) = \int_E f(x) dv(x)$$

для всех множеств  $E$ , то это равенство справедливо, в частности, когда  $E = \{y\}$  — произвольное одноточечное множество. В этом случае

$$\mu(E) = 0 = \int_E f(x) dv(x) = f(y).$$

Но это означает, что функция  $f$  тождественно равна нулю и, следовательно,  $\mu(E) = 0$  для любого  $E \in \mathcal{S}$ . (Противоречие.)

Если принять, что  $\pm \infty \cdot 0$  равно 0, то справедливо следующее утверждение: *если  $f$  — неотрицательная действительнозначная функция в широком смысле, измеримая относительно меры  $v$  на пространстве с мерой  $(X, \mathfrak{S})$ , и если*

$$\mu(E) = \int_E f(x) d\nu(x)$$

*для всех измеримых множеств  $E$ , то  $\mu$  является мерой на  $(X, \mathfrak{S})$ , абсолютно непрерывной относительно  $v$ .* Предыдущий контрпример показывает, что без ограничений обратная теорема не верна. Теорема Радона — Никодима (см. [53]) указывает ограничения, при которых обратная теорема имеет место.

## ГЛАВА 9

### ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

#### Введение

В этой главе предполагаются известными понятия непрерывности и дифференцируемости функций двух переменных, а в двух последних примерах, кроме того, предполагается, что читатель знаком с криволинейными интегралами, односвязностью областей и векторным анализом. Если  $f(x, y)$  — дифференцируемая функция двух переменных  $x$  и  $y$ , то ее частные производные мы будем обозначать следующими символами:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x(x, y) = f_1(x, y), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = f_y(x, y) = f_2(x, y),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}(x, y) = f_{11}(x, y), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{xy}(x, y) = f_{12}(x, y), \dots$$

Областью называется любое непустое открытое множество  $R$ , любые две точки которого можно соединить ломаной линией, целиком лежащей в  $R$ .

#### 1. Разрывная функция двух переменных, непрерывная по каждой переменной в отдельности

Пусть функция  $f(x, y)$  с областью определения  $R \times R$  определена следующим образом:

$$f(x, y) \equiv \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & \text{если } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = y = 0. \end{cases}$$

Тогда  $f$  разрывна в начале координат, поскольку в произвольно малой окрестности точки  $(0, 0)$  существуют точки вида  $(a, a)$ , в которых значение функции равно  $1/2$ . С другой стороны, для всякого фиксированного значения  $y$  (равного нулю или отличного от нуля) функция  $g(x) \equiv f(x, y)$

является всюду непрерывной функцией переменной  $x$ . По той же причине  $f(x, y)$  является непрерывной функцией от  $y$  для всякого фиксированного значения  $x$ .

## 2. Функция двух переменных, не имеющая предела в начале координат, но имеющая равный нулю предел приближении к началу координат по любой прямой

Пусть функция  $f(x, y)$  с областью определения  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  определена следующим образом:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}, & \text{если } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = y = 0, \end{cases}$$

и пусть  $L$  — произвольная прямая, проходящая через начало координат. Если  $L$  — какая-либо координатная ось, то функция  $f(x, y)$  на  $L$  тождественно равна нулю и, следовательно, имеет предел, равный 0, когда  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$  вдоль  $L$ . Если же  $L$  — прямая вида  $y = mx$ , то на  $L$  при  $x \neq 0$  имеем

$$f(x, mx) = \frac{mx^3}{x^4 + m^2x^2} = \frac{mx}{x^2 + m^2}.$$

Следовательно,  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, mx) = 0$ . Однако, несмотря на это, функция  $f(x, y)$  разрывна в точке  $(0, 0)$ , ибо в произвольно малой окрестности точки  $(0, 0)$  существуют точки вида  $(a, a^2)$ , в которых функция  $f$  принимает значение, равное  $1/2$ .

## 3. Обобщение предыдущего примера

Пусть функция  $f(x, y)$  с областью определения  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  задана формулой

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{e^{-1/x^2} y}{e^{-2/x^2} + y^2}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

Далее пусть  $C$  — проходящая через начало координат кривая вида  $x^m = (y/c)^n$ , т. е.  $y = cx^{m/n}$ , где  $m$  и  $n$  — взаимно простые натуральные числа, а  $c$  — постоянная, отличная от нуля (в случае четного  $n$  предполагается, что  $x \geq 0$ ).

Тогда, если точка  $(x, y)$  приближается к началу координат вдоль  $C$ , то

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, cx^{m/n}) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ce^{-1/x^2} x^{-m/n}}{e^{-2/x^2} x^{-2m/n} + c^2} = 0.$$

(См. пример 10 гл. 3.) Но несмотря на то что предел функции  $f(x, y)$ , когда точка  $(x, y)$  стремится к началу координат вдоль любой алгебраической кривой вида  $y = cx^{m/n}$ , равен нулю, функция  $f(x, y)$  разрывна в начале координат. В самом деле, в произвольно малой окрестности начала координат существуют точки вида  $(a, e^{-1/a^2})$ , в которых функция  $f$  принимает значение, равное  $1/2$ .

#### 4. Разрывная (и, следовательно, недифференцируемая) функция двух переменных, имеющая всюду частные производные первого порядка

Этим свойством обладает каждая из функций, рассмотренных в трех предыдущих примерах.

#### 5. Функции $f$ , для которых существуют и равны лишь два из следующих пределов:

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} f(x, y), \quad \lim_{x \rightarrow a} \lim_{y \rightarrow b} f(x, y), \quad \lim_{y \rightarrow b} \lim_{x \rightarrow a} f(x, y)$$

Обозначим вышеуказанные пределы через (i), (ii) и (iii) соответственно. Каждая из следующих ниже функций такова, что для нее указанный предел не существует, но два других предела существуют и равны между собой.

(i) Пример 1, где  $(a, b) = (0, 0)$ .

$$(ii) f(x, y) \equiv \begin{cases} y + x \sin(1/y), & \text{если } y \neq 0, \\ 0, & \text{если } y = 0, \end{cases}$$

при этом  $(a, b) = (0, 0)$ .

$$(iii) f(x, y) \equiv \begin{cases} x + y \sin(1/x), & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \end{cases}$$

при этом  $(a, b) = (0, 0)$ .

В примерах (ii) и (iii) имеем

$$|f(x, y)| \leq |x| + |y| \leq 2(x^2 + y^2)^{1/2}$$

и, следовательно,  $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = 0$ . Тот из повторных пределов, который существует в примерах (ii) или (iii), равен 0.

Следует заметить, что если оба предела (i) и (ii) существуют, то они должны быть равны. То же самое справедливо и для пределов (i) и (iii). (См. [36], стр. 184, а также [52]\*, т. I, стр. 361.)

## 6. Функции $f$ , для которых существует лишь один из следующих пределов:

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} f(x, y), \lim_{x \rightarrow a} \lim_{y \rightarrow b} f(x, y), \lim_{y \rightarrow b} \lim_{x \rightarrow a} f(x, y)$$

Как и в примере 5, обозначим три вышеуказанных предела через (i), (ii) и (iii) соответственно. Каждая из следующих ниже функций такова, что указанный предел существует, а два других нет:

$$(i) \quad f(x, y) \equiv \begin{cases} x \sin(1/y) + y \sin(1/x), & \text{если } xy \neq 0, \\ 0, & \text{если } xy = 0, \end{cases}$$

при этом  $(a, b) = (0, 0)$ .

$$(ii) \quad f(x, y) \equiv \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} + y \sin(1/x), & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \end{cases}$$

при этом  $(a, b) = (0, 0)$ .

$$(iii) \quad f(x, y) \equiv \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} + x \sin(1/y), & \text{если } y \neq 0, \\ 0, & \text{если } y = 0, \end{cases}$$

при этом  $(a, b) = (0, 0)$ .

7. Функция  $f$ , для которой пределы  $\lim_{x \rightarrow a} \lim_{y \rightarrow b} f(x, y)$  и  $\lim_{y \rightarrow b} \lim_{x \rightarrow a} f(x, y)$  существуют, но не равны между собой

Положим

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & \text{если } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = y = 0. \end{cases}$$

Тогда

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x^2}{x^2} \right) = 1,$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \left( -\frac{y^2}{y^2} \right) = -1.$$

8. Функция  $f(x, y)$ , для которой предел  $\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = g(x)$  существует равномерно относительно  $x$ , предел  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = h(y)$  существует равномерно относительно  $y$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{y \rightarrow 0} h(y)$ , однако предел  $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$  не существует

Положим

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } xy \neq 0, \\ 0, & \text{если } xy = 0. \end{cases}$$

Тогда

$$g(x) = \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \end{cases}$$

$$h(y) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } y \neq 0, \\ 0, & \text{если } y = 0, \end{cases}$$

причем оба предельных соотношения выполняются равномерно относительно всей системы действительных чисел. Но так как в произвольно малой окрестности начала координат существуют точки, в которых  $f$  равна 0, и точки, в которых  $f$  равна 1, то функция  $f(x, y)$  не имеет предела при  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ .

Следует заметить, что, согласно теореме Мура — Остуда (см. [38], стр. 313), контрпример указанного вида невозможен, если из области определения функции  $f$  исключить точки вида  $(0, y)$  и точки вида  $(x, 0)$ .

### 9. Дифференцируемая, но не непрерывно дифференцируемая функция двух переменных

Положим

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x) + y^2 \sin(1/y), & \text{если } xy \neq 0, \\ x^2 \sin(1/x), & \text{если } x \neq 0, \text{ а } y = 0, \\ y^2 \sin(1/y), & \text{если } x = 0, \text{ а } y \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = y = 0. \end{cases}$$

Тогда обе частные производные

$$f_x(x, y) = \begin{cases} 2x \sin(1/x) - \cos(1/x), & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \end{cases}$$

$$f_y(x, y) = \begin{cases} 2y \sin(1/y) - \cos(1/y), & \text{если } y \neq 0, \\ 0, & \text{если } y = 0, \end{cases}$$

разрывны в начале координат, и, следовательно, функция  $f$  не является непрерывно дифференцируемой в этой точке. Однако  $f$  дифференцируема всюду. Например,  $f$  дифференцируема в точке  $(0, 0)$ , поскольку при  $h^2 + k^2 \neq 0$  приращение  $f(h, k) - f(0, 0)$  можно представить в виде

$$f_x(0, 0)h + f_y(0, 0)k + \varepsilon_1(h, k)h + \varepsilon_2(h, k)k,$$

где

$$\lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \varepsilon_1(h, k) = \lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \varepsilon_2(h, k) = 0.$$

В самом деле, это представление имеет такой вид:

$$f(h, k) - f(0, 0) = \begin{cases} \left(h \sin \frac{1}{h}\right)h + \left(k \sin \frac{1}{k}\right)k, & \text{если } hk \neq 0, \\ \left(h \sin \frac{1}{h}\right)h + 0 \cdot k, & \text{если } h \neq 0, \text{ а } k = 0, \\ 0 \cdot h + \left(k \sin \frac{1}{k}\right)k, & \text{если } h = 0, \text{ а } k \neq 0, \end{cases}$$

## 10. Дифференцируемая функция, имеющая неравные смешанные частные производные второго порядка

Положим

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & \text{если } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = y = 0. \end{cases}$$

Тогда

$$f_y(x, 0) = \begin{cases} x, & \text{если } x \neq 0, \\ \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(0, k)}{k} = 0, & \text{если } x = 0, \end{cases}$$

$$f_x(0, y) = \begin{cases} -y, & \text{если } y \neq 0, \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0)}{h} = 0, & \text{если } y = 0. \end{cases}$$

Следовательно, в начале координат имеем

$$f_{xy}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_y(h, 0) - f_y(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = 1,$$

$$f_{yx}(0, 0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f_x(0, k) - f_x(0, 0)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{-k}{k} = -1.$$

Функция  $f$  непрерывно дифференцируема, так как обе частные производные  $\partial f / \partial x$  и  $\partial f / \partial y$  непрерывны всюду. В частности,  $\partial f / \partial x$  непрерывна в начале координат, поскольку для  $x^2 + y^2 \neq 0$  имеем

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| = \frac{|x^4y + 4x^2y^3 - y^5|}{(x^2 + y^2)^2} \leq \frac{6(x^2 + y^2)^{5/2}}{(x^2 + y^2)^2} = 6(x^2 + y^2)^{1/2}.$$

Настоящий пример станет невозможным, если предположить непрерывность смешанных частных производных  $f_{xy}$  и  $f_{yx}$  в некоторой окрестности начала координат. В самом деле, имеет место теорема (см. [36], стр. 263, а также [52]\*, т. I, стр. 405): если функция  $f$  имеет частные производные  $f_x$  и  $f_y$  в некоторой области  $R$  и если смешанная производная  $f_{xy}$  (соответственно  $f_{yx}$ ) существует и непрерывна в некоторой точке  $(a, b)$  области  $R$ , то смешанная производная  $f_{yx}$  (соответственно  $f_{xy}$ ) также существует в точке  $(a, b)$ , причем в этой точке  $f_{xy} = f_{yx}$ .

**11. Непрерывно дифференцируемая функция  $f$  двух переменных  $x$  и  $y$  и область  $R$  на плоскости, такие, что  $df/dy = 0$  в области  $R$ , но функция  $f$  зависит от  $y$  в этой области**

Пусть  $L$  — луч (т. е. замкнутая полупрямая) в плоскости  $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ , т. е.

$$L = \{(x, y) | x \geq 0, y = 0\},$$

а  $R$  — область  $(\mathbf{R} \times \mathbf{R}) \setminus L$ . Тогда функция

$$f(x, y) = \begin{cases} x^3, & \text{если } x > 0 \text{ и } y > 0, \\ 0 & \text{в остальных точках } (x, y) \in R \end{cases}$$

непрерывно дифференцируема в области  $R$ ; более того, она имеет непрерывные частные производные второго порядка. (Если же  $x^3$  заменить на  $e^{-1/x^2}$ , то  $f$  будет иметь непрерывные частные производные всех порядков.) И хотя частная производная первого порядка  $f_2(x, y)$  функции  $f$  тождественно равна нулю в области  $R$ , функция  $f$  зависит от  $y$ ; например,  $f(1, 1) = 1$ , а  $f(1, -1) = 0$ . Можно показать, что функция, имеющая частные производные первого порядка, которые тождественно равны нулю в некоторой области  $R$ , постоянна в этой области. (См. [36], стр. 280, а также [52]\*, т. III, стр. 50—55.) Настоящий пример показывает, что следующее рассуждение при доказательстве этого факта было бы ошибочным: „так как  $df/dx = 0$ , то  $f$  не зависит от  $x$ ; так как  $df/dy = 0$ , то  $f$  не зависит от  $y$ ; следовательно,  $f$  не зависит ни от  $x$ , ни от  $y$  и поэтому должна быть постоянной“. Отметим, что в случае когда каждая прямая, параллельная оси  $y$ , образует в пересечении с областью  $R$  интервал, утверждение настоящего контрпримера становится невозможным. (См. [36], стр. 228, упр. 32.)

**12. Локально однородная непрерывно дифференцируемая функция двух переменных, не являющаяся однородной**

Функция  $f(x, y)$  называется *однородной степени  $n$*  в области  $R$ , если для всех  $x, y$  и положительных  $\lambda$ , таких, что точки  $(x, y)$  и  $(\lambda x, \lambda y)$  принадлежат  $R$ , имеет место равенство  $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y)$ . Функция  $f(x, y)$  называется

локально однородной степени  $n$  в области  $R$ , если она является однородной степени  $n$  в некоторой окрестности каждой точки области  $R$ .

Пусть  $L$  — луч (т. е. замкнутая полупрямая) в плоскости  $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ :

$$L = \{(x, y) \mid x = 2, y \geq 0\},$$

а  $R$  — область  $(\mathbf{R} \times \mathbf{R}) \setminus L$ . Функция

$$f(x, y) = \begin{cases} y^4/x, & \text{если } x > 2 \text{ и } y > 0, \\ y^3 & \text{в остальных точках } (x, y) \in R \end{cases}$$

непрерывно дифференцируема в  $R$  (на самом деле  $f$  имеет непрерывные частные производные второго порядка). Так как для всякой точки  $(x, y) \in R$  при  $\lambda$ , достаточно близких к 1, справедливо равенство  $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^3 f(x, y)$ , то  $f$  локально однородна степени 3 в области  $R$ . Однако  $f$  не является однородной степени 3 в области  $R$ , поскольку для точки  $(x, y) = (1, 2)$  и  $\lambda = 4$  имеем  $f(x, y) = 8$ , а  $f(4x, 4y) = f(4, 8) = 1024 \neq 4^3 \cdot 8$ . Вместе с тем функция  $f$  не является однородной степени  $n$  ни при каком  $n \neq 3$ , так как в противном случае она была бы локально однородной степени  $n$ , что, очевидно, невозможно.

**13. Дифференцируемая функция двух переменных, не имеющая экстремума в начале координат и такая, что ее сужение на любую прямую, проходящую через начало координат, имеет строгий локальный минимум в этой точке**

Функция

$$f(x, y) = (y - x^2)(y - 3x^2)$$

не имеет локального экстремума в начале координат, так как в произвольно малой окрестности начала координат существуют точки вида  $(0, b)$ , в которых  $f$  положительна, и точки вида  $(a, 2a^2)$ , в которых  $f$  отрицательна. Рассмотрим сужение функции  $f$  на ось  $x$ . Мы получим функцию  $3x^4$ , которая имеет строгий абсолютный минимум в точке  $x = 0$ . Рассмотрим, далее, сужение  $f$  на ось  $y$ . Получим функцию  $y^2$ , которая имеет строгий абсолютный минимум в точке  $y = 0$ .

Наконец, рассмотрим сужение  $f$  на прямую  $y = mx$ , проходящую через начало координат, где  $0 < |m| < +\infty$ . Получим следующую функцию параметра  $x$ :

$$\begin{aligned} g(x) \equiv f(x, mx) &= (mx - x^2)(mx - 3x^2) = \\ &= m^2x^2 - 4mx^3 + 3x^4. \end{aligned}$$

Эта функция имеет строгий локальный минимум в точке  $x = 0$ , так как  $g'(0) = 0$ , а  $g''(0) = 2m^2 > 0$ .

#### 14. Обобщение предыдущего примера

Функция

$$f(x, y) \equiv \begin{cases} (y - e^{-1/x^2})(y - 3e^{-1/x^2}), & \text{если } x \neq 0, \\ y^2, & \text{если } x = 0, \end{cases}$$

не имеет локального экстремума в начале координат. (См. пример 13.) Рассмотрим сужение  $f$  на алгебраическую кривую  $y = cx^{m/n}$ , где  $m$  и  $n$  — взаимно простые натуральные числа, а  $c$  — постоянная, отличная от нуля (в случае четного  $n$  предполагается, что  $x \geq 0$ ). Мы получим следующую функцию параметра  $x$ :

$$\begin{aligned} g(x) = f(x, cx^{m/n}) &= (cx^{m/n} - e^{-1/x^2})(cx^{m/n} - 3e^{-1/x^2}) = \\ &= x^{2m/n}[c^2 - 4ce^{-1/x^2}x^{-m/n} + 3e^{-2/x^2}x^{-2m/n}]. \end{aligned}$$

Эта функция имеет строгий локальный минимум в точке  $x = 0$ , поскольку множитель  $x^{2m/n}$  положителен при  $x \neq 0$ , а функция, заключенная в квадратные скобки, имеет положительный предел  $c^2$  при  $x \rightarrow 0$ .

**15. Функция  $f$ , для которой  $\frac{d}{dx} \int\limits_a^b f(x, y) dy \neq \int\limits_a^b \left[ \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) \right] dy$ ,**

хотя оба интеграла существуют в смысле Римана

Функция

$$f(x, y) \equiv \begin{cases} \frac{x^3}{y^2} e^{-x^2/y}, & \text{если } y > 0, \\ 0, & \text{если } y = 0, \end{cases}$$

определенна в замкнутой верхней полуплоскости  $y \geq 0$ . Для любого фиксированного значения  $y$  эта функция является непрерывной функцией переменного  $x$ , а для любого фиксиру-

ванного значения  $x$  — непрерывной функцией переменного  $y$ . Однако как функция двух переменных она разрывна в точке  $(0, 0)$  (в этом можно убедиться, полагая  $y = x^2$ ). Интегрируя, получаем

$$g(x) \equiv \int_0^1 f(x, y) dy = xe^{-x^2}$$

для всякого действительного  $x$  (включая  $x = 0$ ), и, следовательно,  $g'(x) = e^{-x^2}(1 - 2x^2)$  для всякого действительного  $x$  (включая  $x = 0$ ). Если  $x \neq 0$ , то

$$\int_0^1 f_1(x, y) dy = \int_0^1 e^{-x^2/y} \left( \frac{3x^2}{y^2} - \frac{2x^4}{y^3} \right) dy = e^{-x^2}(1 - 2x^2).$$

Если же  $x = 0$ , то, принимая во внимание, что  $f_1(0, y) = 0$  для всех  $y$  (включая  $y = 0$ ), имеем

$$\int_0^1 f_1(0, y) dy = \int_0^1 0 dy = 0.$$

Следовательно,

$$g'(0) = 1 \neq \int_0^1 f_1(0, y) dy = 0.$$

Отметим, что все интегралы, которые встречались в данном примере, — собственные, так как подинтегральные функции являются непрерывными функциями переменной интегрирования.

- 16.** Функция  $f$ , для которой  $\int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dy dx \neq \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dx dy$ , хотя оба интеграла существуют в смысле Римана

Положим

$$f(x, y) = \begin{cases} y^{-2}, & \text{если } 0 < x < y < 1, \\ -x^{-2}, & \text{если } 0 < y < x < 1, \\ 0 & \text{в остальных точках} \\ & \text{квадрата } 0 \leqslant x \leqslant 1, \quad 0 \leqslant y \leqslant 1. \end{cases}$$

Для  $0 < y < 1$  имеем

$$\int_0^1 f(x, y) dx = \int_0^y \frac{dx}{y^2} - \int_y^1 \frac{dx}{x^2} = 1$$

и, следовательно,

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dx dy = \int_0^1 1 dy = 1.$$

Аналогично для  $0 < x < 1$  имеем

$$\int_0^1 f(x, y) dy = - \int_0^x \frac{dy}{x^2} + \int_x^1 \frac{dy}{y^2} = -1$$

и, следовательно,

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dy dx = \int_0^1 (-1) dx = -1.$$

**17.** Двойной ряд  $\sum_{m, n} a_{mn}$ , для которого  $\sum_m \sum_n a_{mn} \neq \sum_n \sum_m a_{mn}$

Пусть  $(a_{mn})$ , где  $m$  обозначает номер строки, а  $n$  — номер столбца, — следующая бесконечная матрица (см. пример 20 гл. 6):

$$\left[ \begin{array}{cccccc} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} & \frac{1}{32} \dots \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} \dots \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \dots \\ -\frac{1}{8} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \dots \end{array} \right]$$

Тогда

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_{mn} = 2^{-m} + 2^{-m-1} + \dots = 2^{-m+1}, \quad m = 1, 2, \dots,$$

и, следовательно,

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} a_{mn} = 1 + 2^{-1} + 2^{-2} + \dots = 2.$$

Аналогично

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=1}^{+\infty} a_{mn} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-2^{-n+1}) = -2.$$

(См. [22], стр. 109.)

- 18. Дифференциал  $P dx + Q dy$  и плоская область  $R$ , в которой  $P dx + Q dy$  является локально полным, но не полным дифференциалом**

Выражение

$$P dx + Q dy,$$

где  $P$  и  $Q$  — функции, непрерывные в некоторой области  $R$  плоскости  $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ , называется полным дифференциалом в  $R$ , если существует дифференцируемая функция  $\varphi$ , определенная в  $R$  и такая, что

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = Q$$

всюду в области  $R$ . Выражение  $P dx + Q dy$  называется локально полным дифференциалом в области  $R$ , если оно является полным дифференциалом в некоторой окрестности каждой точки области  $R$ . Выражение  $P dx + Q dy$  является полным дифференциалом в некоторой области  $R$  тогда и только тогда, когда для всякой кусочно гладкой замкнутой кривой  $C$ , лежащей в этой области, справедливо равенство

$$\int_C P dx + Q dy = 0.$$

(См. [36], стр. 587, а также [52]\*, т. III, стр. 50.) Выражение  $P dx + Q dy$ , где  $P$  и  $Q$  — непрерывно дифференцируемые функции, является локально полным дифференциалом

в некоторой области  $R$  в том и только в том случае, если в каждой точке области  $R$  справедливо равенство

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Выражение

$$P dx + Q dy = -\frac{y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$$

является локально полным дифференциалом всюду в „проколотой плоскости“

$$R \equiv \{(x, y) | x^2 + y^2 > 0\},$$

так как

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2},$$

если  $x^2 + y^2 > 0$ . С другой стороны,  $P dx + Q dy$  не является полным дифференциалом в  $R$ . В самом деле, если  $C$  — единичная окружность  $x = \cos \theta$ ,  $y = \sin \theta$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ , то

$$\int_C P dx + Q dy = \int_0^{2\pi} [(-\sin \theta)(-\sin \theta) + \cos^2 \theta] d\theta = 2\pi \neq 0.$$

Следует заметить, что если область  $R$  односвязная (см. [36], стр. 598), то  $P dx + Q dy$  будет полным дифференциалом в  $R$  тогда и только тогда, когда оно будет локально полным дифференциалом в  $R$ . (См. [36], стр. 601.)

## 19. Соленоидальное векторное поле, заданное в односвязной области и не имеющее векторного потенциала

Пусть  $P$ ,  $Q$  и  $R$  — непрерывно дифференцируемые функции в некоторой области  $W$  трехмерного евклидова пространства. Векторное поле (см. [36], стр. 568, а также [52] \*, т. III, стр. 367)  $\vec{Pi} + \vec{Qj} + \vec{Rk}$  называется соленоидальным в области  $W$ , если его дивергенция тождественно равна нулю в этой области:

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0.$$

Если векторное поле  $\vec{F}$  является ротором (см. [36], стр. 572) некоторого векторного поля  $\vec{G}$  в области  $W$ , то векторное поле  $\vec{G}$  называется векторным потенциалом для  $\vec{F}$ . Так как дивергенция ротора тождественно равна нулю (см. [36], стр. 572, а также [52] \*, т. III, стр. 375), то любое векторное поле, имеющее векторный потенциал, является соленоидальным. Однако обратное утверждение, как показывает следующий пример, неверно. Положим

$$\vec{F} \equiv (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} (\vec{x}i + \vec{y}j + \vec{z}k)$$

в области

$$W \equiv \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 > 0\}.$$

Тот факт, что  $\vec{F}$  является соленоидальным полем, проверяется непосредственным дифференцированием:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \{(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} x\} + \frac{\partial}{\partial y} \{(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} y\} + \dots = \\ = (x^2 + y^2 + z^2)^{-5/2} [(-2x^2 + y^2 + z^2) + \\ + (x^2 - 2y^2 + z^2) + \dots] = 0. \end{aligned}$$

Наконец, чтобы показать, что поле  $\vec{F}$  не имеет никакого векторного потенциала  $\vec{G}$ , рассмотрим сферу  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ . Если  $\vec{n}$  обозначает единичный вектор внешней нормали к этой сфере  $S$ , то поверхностный интеграл  $\int_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS$

равен

$$\begin{aligned} \int_S \{(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} (\vec{x}i + \vec{y}j + \vec{z}k) \times \\ \times (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} (\vec{x}i + \vec{y}j + \vec{z}k)\} dS = \int_S 1 dS = 4\pi. \end{aligned}$$

Но, если бы поле  $\vec{F}$  было ротором некоторого векторного потенциала, то по теореме Стокса (см. [36], стр. 636, 637, а также [52] \*, т. III, стр. 298) поверхностный интеграл

$\int \int_S \vec{F} n dS$  по замкнутой поверхности  $S$  должен был бы обратиться в нуль. Отметим, что область  $W$  односвязна. (См. [36], стр. 639, 640.)

Односвязность области можно понимать следующим образом: всякую простую замкнутую кривую, лежащую в этой области, можно стянуть в точку, не выходя при этом за пределы области. В случае „проколотой пространственной области“  $W$  данного примера всякую простую замкнутую кривую, не проходящую через начало координат, можно стянуть в точку в этой области. Для области  $W$  причина того патологического свойства, которое наблюдается в настоящем контрпримере, состоит в том, что не все сферические поверхности — поверхности „типа сферы“ — можно стянуть в точку, не выходя за пределы области  $W$ .

## ГЛАВА 10

### МНОЖЕСТВА НА ПЛОСКОСТИ

#### Введение

В этой главе предполагается, что читатель знаком с элементами топологии евклидовой плоскости, включая понятия ограниченных, открытых, замкнутых, компактных, всюду плотных и нигде не плотных множеств. Некоторые другие понятия определяются ниже. Во всех случаях в качестве пространства рассматривается евклидова плоскость  $E_2$ .

Расстояние  $d(A, B)$  между двумя непустыми множествами  $A$  и  $B$  определяется формулой

$$d(A, B) \equiv \inf \{d(p, q) | p \in A, q \in B\},$$

где  $d(p, q) = [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2]^{1/2}$  — расстояние между точками  $p = (x_1, y_1)$  и  $q = (x_2, y_2)$ . Таким образом, расстояние между двумя множествами всегда неотрицательно. Если множества имеют общую точку, то оно равно нулю. Однако расстояние между непересекающимися множествами также может быть равно нулю. Если же множества не пересекаются и компактны, то расстояние между ними положительно. (См. [36], стр. 200, упр. 17.) Диаметр  $\delta(A)$  непустого множества  $A$  определяется формулой

$$\delta(A) \equiv \sup \{d(p, q) | p \in A, q \in A\}.$$

Диаметр множества всегда неотрицателен и является конечным тогда и только тогда, когда  $A$  ограничено. Если  $A$  компактно, то существуют две точки множества  $A$ , расстояние между которыми равно диаметру  $A$ . (См. [36], стр. 200, упр. 18.)

Замкнутым кругом называется множество вида

$$\{(x, y) | (x - h)^2 + (y - k)^2 \leq r^2\},$$

где  $(h, k)$  — некоторая точка, а  $r$  — положительное число. Если в этом определении неравенство  $\leq$  заменить строгим

неравенством  $<$ , то мы получим определение открытого к уга.

Два непустых множества  $A$  и  $B$  отделены, если они не пересекаются и ни одно из них не содержит предельных точек другого:  $A \cap \bar{B} = \bar{A} \cap B = \emptyset$ . Непустое множество  $E$  называется связным, если его нельзя представить в виде объединения двух непустых отделенных множеств  $A$  и  $B$ . Говорят, что множество, содержащее более одной точки, вполне несвязно, если у него нет других связных подмножеств, кроме одноточечных множеств. Множество  $A$  называется локально связным, если для любой точки  $p \in A$  и любой окрестности  $N$  этой точки существует такая окрестность  $M$  точки  $p$ , что всякая пара точек  $M$  принадлежит некоторому связному подмножеству из  $N^1)$ .

Любое непрерывное отображение замкнутого интервала в  $E_2$  или множество значений этого отображения называется дугой (в качестве интервала можно взять единичный интервал  $[0, 1]$ ). В последнем случае, когда дуга рассматривается как точечное множество, соответствующее отображение называется параметризацией дуги. Если отображение имеет вид  $f(t) = (x(t), y(t))$ , то функции  $x(t)$  и  $y(t)$  называют параметризующими функциями отображения. Пусть  $f(t)$ ,  $a \leq t \leq b$ , — некоторая дуга и  $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$ ; тогда ломаная, составленная из отрезков  $f(a_0)f(a_1)$ ,  $f(a_1)f(a_2)$ ,  $\dots$ ,  $f(a_{n-1})f(a_n)$ , называется ломаной, вписанной в данную дугу, а точная верхняя грань длин

$$d(f(a_0), f(a_1)) + d(f(a_1), f(a_2)) + \dots + d(f(a_{n-1}), f(a_n))$$

по всем вписанным ломаным называется длиной данной дуги. Дуга называется спрямляемой, если ее длина конечна. Для того чтобы дуга была спрямляемой, необходимо и достаточно, чтобы обе ее параметризующие функции были функциями ограниченной вариации. (См. [38], стр. 353, упр. 27.) Дуга  $f(t)$ ,  $a \leq t \leq b$ , называется замкнутой кривой, если  $f(a) = f(b)$ .

Простая дуга  $f(t)$  определяется взаимно однозначным отображением. В этом случае обратное отображение также непрерывно, а исходное отображение есть гомеоморфизм.

<sup>1)</sup> Здесь должна идти речь об окрестностях и связности на множестве  $A$  (см. [54], стр. 171). — Прим. ред.

(См. [36], стр. 240.) Если функция  $y = g(x)$  непрерывна на  $[a, b]$ , то ее график является простой дугой (с параметризацией  $x = t$ ,  $y = g(t)$ ,  $t \in [a, b]$ ). Простой замкнутой кривой называется дуга  $f(t)$ , такая, что если область определения  $f$  есть замкнутый интервал  $[a, b]$ , то  $f(t_1) = f(t_2)$  лишь в том случае, когда  $t_1 = t_2$  или  $\{t_1, t_2\} = \{a, b\}$ . Иными словами, простой замкнутой кривой называется всякий гомеоморфный образ окружности.

Областью называется связное открытое множество. Согласно теореме Жордана, дополнение всякой простой замкнутой кривой  $C$  состоит из двух непересекающихся областей, для каждой из которых  $C$  служит границей (см. [34]). Жордановой областью называется всякая область, границей которой служит некоторая простая замкнутая кривая  $C$ . В противном случае говорят, что область является неожордановой.

Если  $\{C_n\}$  — убывающая последовательность непустых компактных множеств ( $C_n \supset C_{n+1}$  для  $n = 1, 2, \dots$ ), то существует по крайней мере одна точка, принадлежащая каждому  $C_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ; иными словами, пересечение множеств  $C_n$  непусто, т. е.  $\bigcap_{n=1}^{+\infty} C_n = \emptyset$ . (См. [38], стр. 201, упр. 30.)

Множество  $A$  называется выпуклым, если отрезок, соединяющий любые две точки  $A$ , целиком лежит в  $A$ . (Одноточечные множества следует рассматривать как частный случай отрезка.) Так как всякое пересечение выпуклых множеств выпукло и так как вся плоскость также является выпуклым множеством, то всякое выпуклое множество на плоскости содержится в некотором „наименьшем выпуклом множестве“, а именно в пересечении *всех* выпуклых множеств, содержащих данное множество. Это наименьшее выпуклое множество называют выпуклой оболочкой данного множества. Замыкание выпуклой оболочки множества является наименьшим замкнутым выпуклым множеством, содержащим данное множество. (См. [38], стр. 332, упр. 39.)

Говорят, что отображение открыто, если образ всякого открытого множества из его области определения является открытым множеством. Отображение называется замкнутым, если образ всякого замкнутого множества из его области определения является замкнутым множеством.

В некоторых примерах данной главы предполагается, что читатель знаком с мерой и интегралом Лебега на плоскости. По теории интеграла Лебега в библиографии указана литература, которую мы цитировали в гл. 8.

**1. Два непересекающихся замкнутых множества, расстояние между которыми равно нулю**

Положим  $F_1 \equiv \{(x, y) | xy = 1\}$ ,  $F_2 \equiv \{(x, y) | y = 0\}$  (т. е.  $F_2$  есть ось  $x$ ). Тогда  $F_1$  и  $F_2$  замкнуты и не пересекаются. Однако для любого  $\varepsilon > 0$  существуют две точки  $(2/\varepsilon, \varepsilon/2)$  и  $(2/\varepsilon, 0)$ , принадлежащие  $F_1$  и  $F_2$  соответственно, расстояние между которыми  $\frac{1}{2}\varepsilon < \varepsilon$ .

**2. Ограниченнное множество на плоскости, для которого не существует минимального замкнутого круга, содержащего это множество**

Минимальным замкнутым кругом, содержащим данное ограниченное плоское множество  $A$ , называется замкнутый круг, содержащий  $A$  и содержащийся в любом замкнутом круге, который содержит  $A$ . Любое двухточечное множество не имеет минимального круга. Однако в противоположность этому всякое непустое ограниченное плоское множество содержится в некотором замкнутом круге *минимального радиуса*. Кроме того, любое непустое множество  $A$  на плоскости содержится в некотором минимальном замкнутом выпуклом множестве, а именно в замыкании своей выпуклой оболочки, которая содержится во всяком выпуклом замкнутом множестве, содержащем  $A$ . В одномерном пространстве  $\mathbf{R}$  каждое непустое ограниченное множество содержится в некотором минимальном замкнутом интервале.

**3. „Тонкие“ связные множества, не являющиеся простыми дугами**

В данном случае слово „тонкие“ означает „нигде не плотные на плоскости“.

*Первый пример.* Множество

$$S_1 \equiv \{(x, y) | y = \sin(1/x), 0 < x \leq 1\} \cup \{(0, 0)\}$$

не является простой дугой, потому что оно не компактно ( $\{0\} \times [-1, 1] \subset \bar{S}_1$ ).

*Второй пример.* Пусть  $S_1$  — множество из первого примера. Положим

$$S_2 \equiv \bar{S}_1 = \{(x, y) | y = \sin(1/x), 0 < x \leq 1\} \cup (\{0\} \times [-1, 1]).$$

Тогда, хотя  $S_2$  и компактно, но удаление произвольного множества точек из отрезка  $\{0\} \times [-1, 1]$  не нарушает связности  $S_2$ . В примере 11 будет показано, что множество  $S_2$  настоящего примера не является дугой. Далее, в примере 24, мы рассмотрим связное множество на плоскости, которое становится *вполне несвязным* при удалении из него всего лишь одной точки.

#### 4. Два непересекающихся плоских контура, содержащихся в квадрате и соединяющих его противоположные вершины

В этом примере под „контуром“ понимается нигде не плотное связное множество. В качестве квадрата возьмем  $[-1, 1] \times [-1, 1]$ , а исковые „контуры“ определим следующим образом (см. рис. 7):

$$\begin{aligned} C_1 \equiv & \left\{ (x, y) | y = \frac{7}{8}x - \frac{1}{8}, -1 \leq x \leq 0 \right\} \cup \\ & \cup \left\{ (x, y) | y = \frac{1}{2} \sin(\pi/2x) + \frac{1}{4}, 0 < x < 1 \right\} \cup \\ & \cup \left\{ (x, y) | x = 1, \frac{3}{4} \leq y \leq 1 \right\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_2 \equiv & \left\{ (x, y) | y = -\frac{7}{8}x + \frac{1}{8}, -1 \leq x \leq 0 \right\} \cup \\ & \cup \left\{ (x, y) | y = \frac{1}{2} \sin(\pi/2x) - \frac{1}{4}, 0 < x < 1 \right\} \cup \\ & \cup \left\{ (x, y) | x = 1, -1 \leq y \leq \frac{1}{4} \right\}. \end{aligned}$$

Тогда  $C_1$  соединяет точки  $(-1, -1)$  и  $(1, 1)$ , а  $C_2$  — точки  $(-1, 1)$  и  $(1, -1)$ , причем  $C_1 \cap C_2 = \emptyset$ .

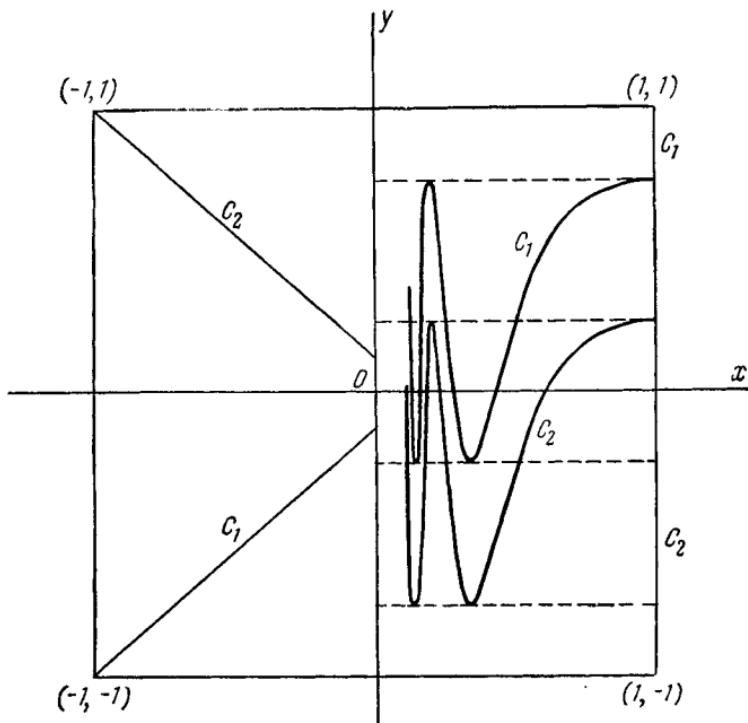


Рис. 7.

### 5. Отображение интервала $[0, 1]$ на квадрат $[0, 1] \times [0, 1]$

Пусть  $t \in [0, 1]$ , и пусть  $0, t_1t_2t_3 \dots$  — двоичное разложение  $t$ . Для того чтобы разложение было однозначным, мы будем рассматривать лишь разложения, содержащие бесконечное множество нулей. Отображение  $f$  определим так: если  $t \in [0, 1]$ , то ее образом является точка  $(x, y)$  единичного квадрата  $S \equiv [0, 1] \times [0, 1]$ , где

$$x \equiv 0, t_1t_3t_5 \dots, \quad y \equiv 0, t_2t_4t_6 \dots$$

Если же  $t = 1$ , положим  $f(t) \equiv (1, 1)$ . Нетрудно видеть, что  $f$  отображает  $[0, 1]$  на  $S$  однозначно, но не взаимно однозначно. Например, точка  $(0, 1; 0, 1)$  является образом трех

различных точек: 0,11, 0,100101010101... и 0,011010101... (и только этих точек).

Отображение  $f$  не является непрерывным. Например, если  $\{t_n\}$  — последовательность точек

$$0,00111, \quad 0,001111, \quad 0,00111111, \quad 0,001111111, \dots$$

и если  $(x_n, y_n) \equiv f(t_n)$ , то последовательности  $\{x_n\}$  и  $\{y_n\}$  совпадут с последовательностью

$$0,01, \quad 0,011, \quad 0,0111, \quad 0,01111, \dots$$

Тогда  $t_n \rightarrow 0,01$ ,  $(x_n, y_n) \rightarrow (0,1; 0,1)$ , в то время как  $f(0,01) = (0,0; 0,1) \neq (0,1; 0,1)$ . Таким образом,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(t_n) \neq f\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n\right).$$

В качестве упражнения читателю предлагается доказать, что отображение  $f$  не является ни открытым (образ открытого интервала  $(0,101; 0,111)$  содержит точку  $(0,1; 0,1)$ , которая, однако, не будет внутренней точкой образа), ни замкнутым (точка  $(0,1; 0,1)$  не принадлежит образу замкнутого интервала  $[0,001; 0,01]$ , но будет предельной для этого образа).

## 6. Кривая Пеано на плоскости

Кривой Пеано мы называем дугу, лежащую в евклидовом пространстве, размерность которого больше единицы, и имеющую непустое ядро в этом пространстве (эта кривая *не* является нигде не плотной). В 1890 г. итальянский математик Дж. Пеано (1858—1932 г.) поразил математический мир первым примером подобной кривой. Ниже мы приводим описание (данное в 1891 г. немецким математиком Д. Гильбертом (1862—1943 г.)) кривой, которая заполняет единичный квадрат  $S \equiv [0, 1] \times [0, 1]$ . Подобным же образом можно описать и многомерный аналог этого примера.

Как видно из рис. 8, идея построения состоит в том, чтобы разбить  $S$  и единичный интервал  $I = [0, 1]$  на  $4^n$  равных замкнутых квадратов и подинтервалов соответственно и установить соответствие между этими квадратами и подинтервалами так, чтобы сохранялось отношение включения (т. е. на каждой стадии разбиения, если некоторый квадрат

соответствует некоторому интервалу, то его подквадраты соответствуют подинтервалам указанного интервала).

Определим теперь непрерывное отображение  $f$  интервала  $I$  на  $S$ : если  $x \in I$ , то на каждой стадии разбиения  $x$  принадлежит *по крайней мере* одному замкнутому подинтервалу. Если этих подинтервалов два, то выберем один из них. Ему соответствует некоторый квадрат. Таким образом, мы получим убывающую последовательность замкнутых квадратов, соответствующих некоторой убывающей последовательности

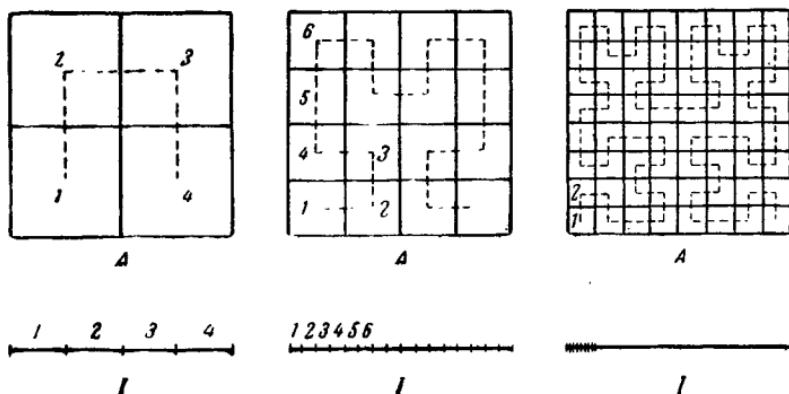


Рис. 8.

замкнутых интервалов. Эта последовательность замкнутых квадратов обладает тем свойством, что существует и притом только одна<sup>1)</sup> точка, принадлежащая всем этим квадратам. Эту точку мы и возьмем в качестве  $f(x)$ . Остается показать, что (i) точка  $f(x)$  определена корректно, т. е. она не зависит от выбора интервалов, содержащих  $x$ ; (ii) множество значений  $f$  есть  $S$  и (iii)  $f$  непрерывно. Доказательство мы предоставляем читателю.

Следует заметить, что отображение  $f$ , определенное выше, не является взаимно однозначным (например, каждая из трех точек  $1/6$ ,  $1/2$  и  $5/6$  отображается в точку  $(1/2, 1/2)$ ). Это не случайно, так как если бы отображение  $f$  было взаимно однозначным, то оно было бы гомеоморфизмом, в то время

<sup>1)</sup> Следует принять во внимание, что длины сторон квадратов стремятся к нулю. — Прим. перев.

как  $I$  и  $S$  не гомеоморфны (удаление любых трех точек нарушает связность  $I$ , но не нарушает связности  $S$ ). Тот факт, что отображение  $f$  однозначно, но не взаимно однозначно, в какой-то мере парадоксален, поскольку кажется, что будто бы в  $I$  больше точек, чем в  $S$ !

## 7. Кривая Пеано, стационарная почти всюду

Пусть  $\phi$  — канторова функция примера 15 гл. 8, а  $f$  — отображение, определенное в предыдущем примере. Тогда  $g(x) \equiv f(\phi(x))$  отображает канторово множество  $C$  на единичный квадрат  $[0, 1] \times [0, 1]$ . При этом дополнительное множество  $[0, 1] \setminus C$  отображается на образ при отображении  $f$  множества точек вида  $m \cdot 2^{-n}$ , где  $m$  и  $n$  — натуральные числа, связанные неравенством  $m < 2^n$ .

Таким образом, полученная кривая Пеано является стационарной почти всюду.

## 8. Кривая Пеано, дифференцируемая почти всюду

Термин „почти всюду дифференцируемая“ означает, что кривая определяется параметризующими функциями, которые дифференцируемы почти всюду. Требуемым свойством обладает отображение, определенное в примере 7.

## 9. Непрерывное отображение интервала $[0, 1]$ на себя, принимающее каждое значение несчетное множество раз

Этим свойством обладает каждая из параметризующих функций кривых Пеано примеров 6 и 7 и вообще каждая параметризующая функция любого непрерывного отображения интервала  $[0, 1]$  на  $[0, 1] \times [0, 1]$ . Кроме того, каждая из параметризующих функций отображения примера 7 обладает дополнительным свойством: она дифференцируема почти всюду, причем производная почти всюду равна нулю (см. [58]).

## 10. Простая дуга, расположенная в единичном квадрате и имеющая плоскую меру, сколь угодно близкую к единице

Как было показано в примере 6, никакая простая дуга не может заполнить весь единичный квадрат  $S \equiv [0, 1] \times [0, 1]$ .

По тем же причинам *всякая простая дуга на плоскости нигде не плотна*. Из этого следует, что простая дуга не может заполнить „слишком большую“ часть  $S$ . В частности, она не может заполнить почти весь квадрат  $S$ , так как если бы простая дуга  $A$ , расположенная в  $S$ , имела меру, равную 1, то она была бы плотна в  $S$ , а так как она замкнута, то она совпадала бы с  $S$ . Однако простая дуга  $A$  может иметь положительную плоскую меру. Более того, если

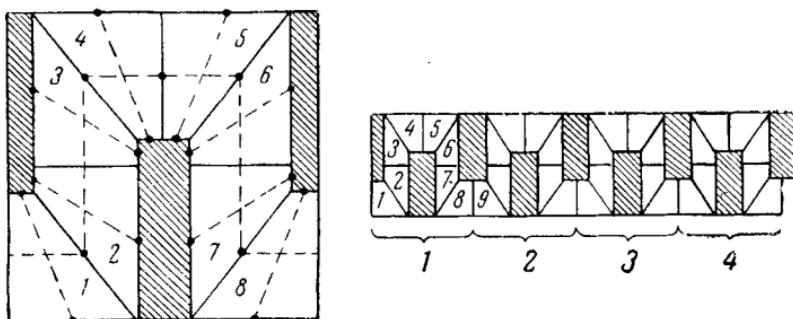


Рис. 9.

$\varepsilon$  — произвольное число, заключенное между 0 и 1, то существует простая дуга  $A$ , плоская мера которой больше, чем  $1 - \varepsilon$ . Сейчас мы наметим схему доказательства этого замечательного факта.

Модифицируем построение, которое проведено в примере 6, вырезая открытые „каналы“ между смежными подквадратами из  $S$ , которые *не* соответствуют смежным подинтервалам из  $I$ . После первого шага вместо подквадратов получаем четырехугольники, которые в свою очередь разделены прямыми, проходящими через середины противоположных сторон. Затем вырезаются открытые каналы, и каждый замкнутый четырехугольник заменяется последовательностью из *восьми* меньших четырехугольников. Первое подразделение и общая схема, в которой для простоты вместо четырехугольников используются квадраты, показаны на рис. 9. Второй шаг отражен на рис. 10. В обоих случаях удаленные каналы выделены штрихами. После  $n$  шагов получим  $8^n$  замкнутых четырехугольников, которые нумеруются следующим образом: если четырехугольник после  $n - 1$  шагов имел номер  $k$  ( $k = 1, 2, \dots, 8^{n-1}$ ), то четырехугольники,

получившиеся из него после  $n$ -го шага, получают номера от  $8k - 7$  до  $8k$ . Кроме того, нумерация такова, что на каждом шаге два четырехугольника являются смежными тогда и только тогда, когда они имеют последовательные номера

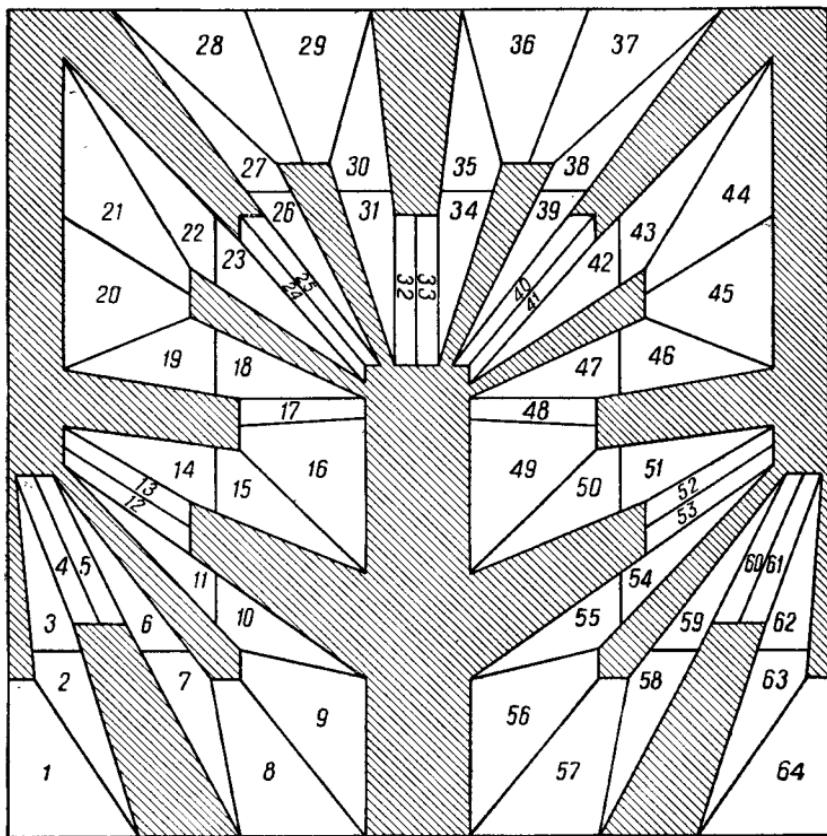


Рис. 10.

и, следовательно, соответствуют смежным подинтервалам из  $I = [0, 1]$ . Нетрудно показать, что диаметр каждого четырехугольника составляет не более  $3/4$  от диаметра содержащего его четырехугольника, который был построен на предыдущем шаге. Следовательно, любая убывающая бесконечная последовательность вложенных четырехугольников определяет единственную точку, а именно точку их пересечения.

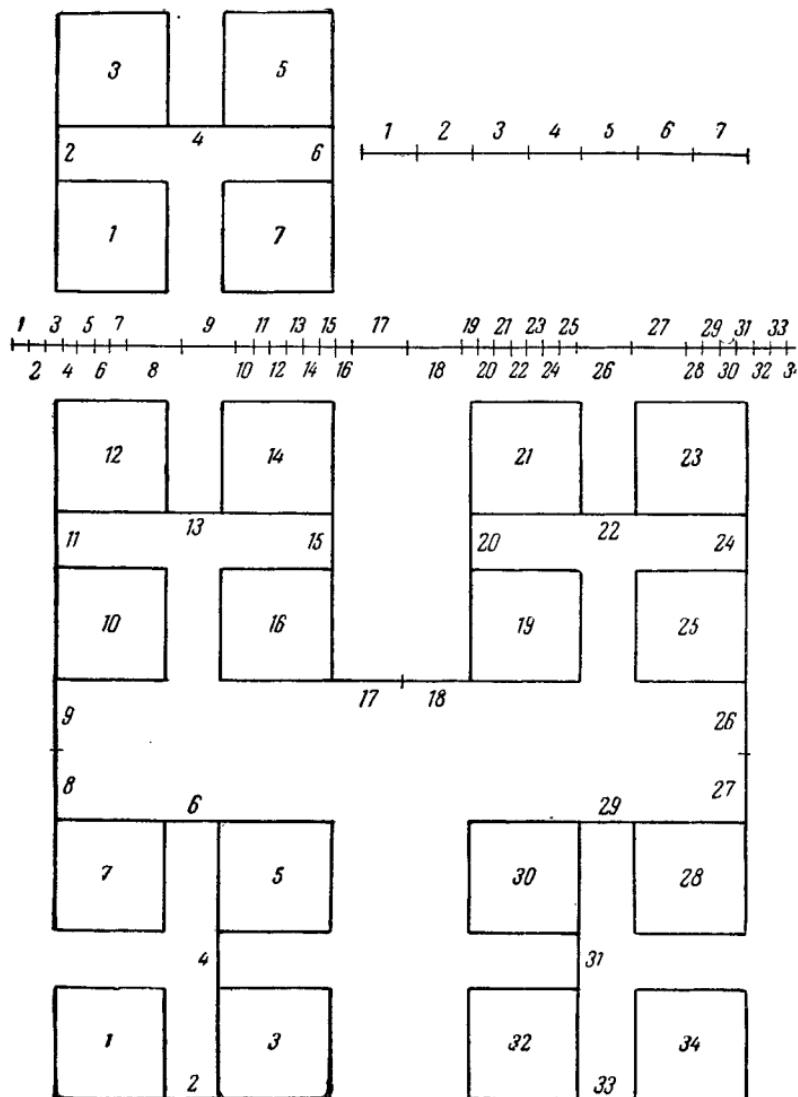


Рис. 11.

Поэтому отображение можно определить точно так же, как и в примере 6. Это отображение непрерывно по тем же причинам, что и в примере 6. Более того, оно является взаимно однозначным, так как мы удалили соответствующие каналы. Наконец, поскольку можно удалять каналы сколь угодно малой площади, то их общая плоская мера также может быть сделана сколь угодно малой, а поэтому остающаяся после их удаления простая дуга имеет плоскую меру, сколь угодно близкую к 1.

Другой метод построения простой дуги с положительной плоской мерой указан на рис. 11. Этот метод несколько проще по замыслу, чем описанное выше построение, но имеет тот недостаток, что некоторые подинтервалы из  $[0, 1]$  отображаются на множества нулевой плоской меры. Построение, указанное на рисунке 11, приводит к простой дуге, содержащей множество  $A \times A$ , где  $A$  — канторово множество. Так как для  $0 < \varepsilon \leq 1$  мы можем выбрать  $A$  с (линейной) мерой, не меньшей чем  $\sqrt{1 - \varepsilon}$ , то дуга, о которой идет речь, будет иметь плоскую меру, не меньшую чем  $1 - \varepsilon$ .

Американский математик У. Ф. Осгуд (1864 — 1943 г.) в 1903 г. построил (см. [39]) простую дугу с плоской мерой, превосходящей  $1 - \varepsilon$ , используя канторово множество  $A$  линейной меры, большей, чем  $\sqrt{1 - \varepsilon}$ . При этом простая дуга была построена таким образом, что она содержала множество  $A \times A$ .

## 11. Связное компактное множество, не являющееся дугой

Пусть  $S_2$  — второе множество примера 3. Это множество не является дугой, ибо оно локально несвязно: если  $N = \{(x, y) | (x, y) \in S_2, x^2 + y^2 < 1/2\}$ , то не существует окрестности начала координат, которая принадлежит  $N$  и любые две точки которой можно соединить связным множеством, лежащим в  $N$ . (См. [56], стр. 204.)

## 12. Плоская область, не совпадающая с ядром своего замыкания

Пусть  $S = \{(x, y) | x^2 + y^2 < 1\} \setminus ([0, 1] \times \{0\})$ , т. е.  $S$  — открытый круг с радиальным разрезом. Тогда

$$\bar{S} = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\},$$

а ядром  $\bar{S}$  является  $I(\bar{S}) = \{(x, y) | x^2 + y^2 < 1\}$ .

Так как каждая жорданова область совпадает с ядром своего замыкания (см. [38], стр. 477), то мы тем самым получили простой пример области, не являющейся жордановой. Однако пример 14 показывает, что не *каждая* область, совпадающая с ядром своего замыкания, является жордановой областью.

### 13. Три непересекающиеся плоские области с общей границей

Этот пример проще всего описать в форме рассказа. Представим себе, что на острове в океане живет человек. На острове имеются два водоема с пресной водой, причем в одном из них вода холодная, а в другом — теплая. Человек хочет, чтобы все три источника воды находились на подходящем расстоянии от любой точки острова. Для этого он начинает рыть каналы, но таким образом, что остров все время остается гомеоморфным своей первоначальной форме. Сначала он проводит канал от океана в глубь острова так, чтобы его воды находились от любой точки суши на расстоянии не более одного фута и чтобы канал не входил в соприкосновение с источниками пресной воды. Затем он подобным же образом проводит канал от источника холодной пресной воды и канал от источника теплой пресной воды, чтобы в результате каждая точка оставшейся суши находилась от этих трех каналов не далее одного фута. Неудовлетворенный этим результатом обитатель острова повторяет описанный тройной процесс так, чтобы каждая точка оставшейся суши отстояла от каждого канала не далее чем на полфута. Но и это не удовлетворяет его, и он доводит приближение к каждой точке суши до одной четверти фута. Так он продолжает этот процесс до бесконечности, всякий раз уменьшая вдвое критическое расстояние и время, затрачиваемое на каждый шаг, стремясь закончить работу в конечный отрезок времени. Предположим теперь, что „остров“ — это компактный круг, из внутренности которого удалены два непересекающихся открытых круга, а „оcean“ — его открытое плоское дополнение, лежащее вне этого круга. Предположим далее, что расширения каждой из трех первоначальных областей остаются на каждом шаге гомеоморфными их первоначальной форме. Тогда в результате мы получим три

взаимно непересекающиеся области  $R_1$ ,  $R_2$  и  $R_3$ , каждая из которых является объединением бесконечной последовательности областей, а часть суши  $F$ , которая останется от острова, будет общей границей областей  $R_1$ ,  $R_2$  и  $R_3$ . Так как дополнение  $F$  состоит из трех непересекающихся областей вместо двух, то ни одна из областей  $R_1$ ,  $R_2$  и  $R_3$  не является жордановой. (Подробности и доказательство теоремы Жордана см. в [34].) С другой стороны, как мы увидим в примере 14, каждая из этих трех областей совпадает с ядром своего замыкания.

Предыдущее построение можно провести с любым конечным (на самом деле со счетным) множеством непересекающихся областей. Если взять более четырех областей, то мы сможем построить таким путем „карту“, на которой все „страны“ имеют общую границу. Это показывает, что знаменитая проблема четырех красок требует точной формулировки, в противном случае она имеет тривиальное отрицательное решение (см. [10]).

#### **14. Нежорданова область, совпадающая с ядром своего замыкания**

Пусть  $R$  — любая из областей  $R_1$ ,  $R_2$  и  $R_3$ , определенных в примере 13. Как было отмечено,  $R$  не является жордановой областью. С другой стороны, как мы покажем сейчас,  $R$  совпадает с ядром своего замыкания. В самом деле, так как  $R \subset \bar{R}$  и  $R$  открыто, то  $R = I(R) \subset I(\bar{R})$ . Теперь нам остается доказать обратное включение  $I(\bar{R}) = I(R \cup F) \subset R$ . Но если бы это включение не имело места, то нашлась бы точка  $p \in F$ , которая была бы внутренней для множества  $R \cup F$ . А это означало бы, что существует окрестность  $N$  точки  $p$ , которая лежит в  $R \cup F$  и, следовательно, не содержит ни одной точки из двух оставшихся областей. Тем самым мы получили бы противоречие с тем фактом, что каждая точка  $F$  является предельной для любой из трех областей  $R_1$ ,  $R_2$  и  $R_3$ .

#### **15. Ограниченнная плоская область, граница которой имеет положительную меру**

Пусть  $A$  — канторово множество положительной меры на  $[0, 1]$ , и пусть

$$R \equiv ((0, 1) \times (-1, 1)) \setminus (A \times [0, 1]).$$

Множество  $R$  есть область с границей

$$F(R) = (\{0\} \times [-1, 1]) \cup (\{1\} \times [-1, 1]) \cup \\ \cup (A \times [0, 1]) \cup ((0, 1) \times \{1\}) \cup ((0, 1) \times \{-1\}).$$

Следовательно,  $\mu(F(R)) = \mu(A) > 0$ . Ясно, что  $R$  не является жордановой областью ( $I(\bar{R}) \neq R$ ). (См. [22], стр. 292. Относительно жордановой области, имеющей границу положительной плоской меры, см. пример 4 гл. 11.)

## 16. Простая дуга бесконечной длины

*Первый пример.* Положим

$$f(x) \equiv \begin{cases} 0, & \text{если } x = 1/n, n \in \mathbb{N}, n \text{ нечетно,} \\ 1/n, & \text{если } x = 1/n, n \in \mathbb{N}, n \text{ четно.} \end{cases}$$

Далее положим  $f(0) = 0$ , и пусть  $f(x)$  линейна на каждом интервале  $[1/(n+1), 1/n]$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Тогда вследствие расходящности гармонического ряда график  $f(x)$  для  $x \in [0, 1]$  будет простой дугой бесконечной длины.

*Второй пример.* Положим  $f(x) = x \sin(1/x)$  для  $x \in (0, 1]$  и  $f(0) = 0$ . Тогда график  $f(x)$  для  $x \in [0, 1]$  снова будет простой дугой бесконечной длины по той же причине, что и в первом примере. Длины вписанных ломаных превосходят сумму высот отдельных волн графика  $f(x)$ , а эта сумма имеет вид  $\sum 2/(2n - 1)\pi$ .

В противоположность двум предыдущим примерам график функции  $f(x) = x^2 \sin(1/x)$  для  $x \in (0, 1]$  и  $f(0) = 0$  имеет конечную длину, так как эта функция дифференцируема и ее производная ограничена на  $[0, 1]$ . (См. [38], стр. 353 (упр. 24 и 27), стр. 176 (теорема II).)

## 17. Простая дуга бесконечной длины, имеющая касательную в каждой точке

Если  $f(x) = x^2 \sin(1/x^2)$  для  $x \in (0, 1]$  и  $f(0) = 0$ , то график  $f(x)$  для  $x \in [0, 1]$  будет простой дугой бесконечной длины по тем же причинам, что и во втором примере предыдущего пункта. Однако график  $f(x)$  имеет касательную в каждой точке, поскольку  $f(x)$  всюду дифференцируема.

**18. Простая дуга, такая, что ее длина между любой парой точек бесконечна**

*Первый пример.* Пусть  $f(t) = (x(t), y(t))$  — любая кривая Пеано, отображающая  $[0, 1]$  на  $[0, 1] \times [0, 1]$  и обладающая следующим дополнительным свойством:  $f$  отображает всякий невырождающийся в точку интервал из  $[0, 1]$  на множество, имеющее непустое (двумерное) ядро. (Этим свойством обладает, например, отображение примера 6.) Тогда график каждой из функций  $x(t)$  и  $y(t)$  для  $t \in [0, 1]$  обладает требуемыми свойствами. Например, чтобы установить, что график  $x(t)$  для  $a \leq t \leq b$  имеет бесконечную длину, мы можем воспользоваться тем фактом (см. пример 9), что существуют по крайней мере два значения, каждое из которых принимается функцией  $x(t)$  несчетное множество раз.

*Второй пример.* Пусть  $f$  — отображение такого же типа, как и в примере 10, и пусть, кроме того, оно отображает всякий невырождающийся в точку подинтервал из  $[0, 1]$  на множество положительной плоской меры. Тогда  $f$  обладает требуемыми свойствами, так как всякая спрямляемая простая дуга имеет плоскую меру, равную нулю. (См. [38], стр. 436.)

*Третий пример.* График любой функции, которая всюду непрерывна, но нигде не дифференцируема на замкнутом интервале (см. пример 8 гл. 3), также обладает нужными свойствами. В самом деле, если бы этот график был спрямляемым, то функция имела бы ограниченную вариацию, а любая функция ограниченной вариации дифференцируема почти всюду. (См. [17], а также [33]\*, стр. 238.)

*Четвертый пример.* См. [22], стр. 190.

**19. Гладкая кривая  $C$ , содержащая точку  $P$ , которая не является ближайшей точкой этой кривой ни для какой точки выпуклой области, ограниченной этой кривой**

Пусть кривая  $C$  есть график функции  $y^3 = x^4$ . Эта кривая всюду вогнута вверх. Положим  $P = (0, 0)$ . Если  $(a, b)$  — точка, лежащая выше  $C$ , и  $a \neq 0$ , то ясно, что точка  $(a, a^{4/3})$  ближе к  $(a, b)$ , чем  $(0, 0)$ . Если же  $b$  — произвольное число, не меньшее единицы, то точка  $(1/8, 1/16)$  ближе к  $(0, b)$ , чем  $(0, 0)$ . Наконец, если  $b$  — произвольное положительное

жительное число, меньшее единицы, то точка  $(b^3, b^4)$  ближе к  $(0, b)$ , чем  $(0, 0)$ . Идея этого примера заключается в том, что начало координат является точкой бесконечной кривизны (нулевого радиуса кривизны) кривой  $C$ . (См. [36], стр. 258, а также [52]\*, т. I, стр. 568.)

**20. Подмножество  $A$  единичного квадрата  $S = [0, 1] \times [0, 1]$ , плотное в  $S$  и такое, что всякая вертикальная или горизонтальная прямая, пересекающая  $S$ , имеет с  $A$  лишь одну общую точку**

Очевидно, достаточно построить взаимно однозначное отображение  $f$  интервала  $[0, 1]$  на себя с графиком, всюду плотным в  $S$ . Начнем с последовательного определения  $f(x)$  для  $x \in (0, 1] \cap \mathbb{Q}$ . Пусть точки множества  $B = ((0, 1] \cap \mathbb{Q}) \times ((0, 1] \cap \mathbb{Q})$  расположены в виде последовательности  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots$ . На нулевом шаге положим  $f(x_1) = y_1$ . На первом шаге мы разделим  $B$  на четыре непересекающиеся части вертикальными и горизонтальными прямыми:

$$\begin{aligned} &((0, 1/2] \cap \mathbb{Q}) \times ((0, 1/2] \cap \mathbb{Q}), \\ &((0, 1/2] \cap \mathbb{Q}) \times ((1/2, 1] \cap \mathbb{Q}), \dots \end{aligned}$$

и занумеруем эти множества в каком-либо порядке:  $B_{11}, B_{12}, B_{13}, B_{14}$ . Пусть  $(x_{11}, y_{11})$  — первая из точек последовательности  $\{(x_n, y_n)\}$ , принадлежащая  $B_{11}$  и такая, что  $x_{11} \neq x_1$  и  $y_{11} \neq y_1$ . Положим  $f(x_{11}) = y_{11}$ . Далее пусть  $(x_{12}, y_{12})$  — первая из точек последовательности  $\{(x_n, y_n)\}$ , принадлежащая  $B_{12}$  и такая, что  $x_{12} \neq x_1, x_{12} \neq x_{11}$  и  $y_{12} \neq y_1, y_{12} \neq y_{11}$ . Положим  $f(x_{12}) = y_{12}$ . Затем, аналогичным образом определив  $f(x_{13}) = y_{13}$ , обозначим через  $(x_{14}, y_{14})$  первую точку последовательности  $\{(x_n, y_n)\}$ , принадлежащую  $B_{14}$  и такую, что  $x_{14}$  отлично от  $x_1, x_{11}, x_{12}$  и  $x_{13}$ , а  $y_{14}$  отлично от  $y_1, y_{11}, y_{12}$  и  $y_{13}$ , и положим  $f(x_{14}) = y_{14}$ . На этом заканчивается первый шаг построения. На втором шаге подобным же образом множество  $B$  разбивается на 16 частей  $B_{21}, B_{22}, \dots, B_{2, 16}$  вертикальными и горизонтальными прямыми. Затем снова, как и выше, расширяется область определения и множество значений функции  $f$ . Продолжая этот процесс до бесконечности и деля множество  $B$  на  $n$ -м шаге на  $4^n$  конгруэнтных

частей, мы получим функцию  $f$ , обладающую требуемым свойством относительно множества  $(0, 1] \cap \mathbb{Q}$ . Наконец, чтобы получить искомую функцию, достаточно продолжить функцию  $f$  на  $[0, 1]$  следующим образом:  $f(x) = x$  для  $x \in [0, 1] \setminus ((0, 1] \cap \mathbb{Q})$ .

## 21. Неизмеримое плоское множество, имеющее с каждой прямой не более двух общих точек

Этот пример принадлежит В. Серпинскому [47]. Его построение опирается на принцип максимального элемента в форме теоремы о полном упорядочении, а также в форме леммы Цорна. (См. [17], [31] и [49].) Сначала мы приведем четыре утверждения относительно кардинальных и порядковых чисел.

(i) Если  $\alpha$  — бесконечное кардинальное число, то  $\alpha^2 = \alpha$ . (См. [17] и [49].)

(ii) Мощность  $f$  множества всех замкнутых множеств положительной плоской меры равна мощности с множества  $\mathbb{R}$ . (В самом деле, поскольку замкнутые множества и их дополнения находятся во взаимно однозначном соответствии, то  $f$  не превосходит мощности множества всех открытых множеств. А так как каждое открытое множество является объединением счетного множества открытых кругов с рациональными радиусами, центры которых имеют рациональные координаты, то  $f \leq c$ . С другой стороны, так как замкнутые круги с центрами в начале координат образуют множество мощности  $c$ , то  $f \geq c$ .)

(iii) Пусть  $\Psi$  обозначает первое порядковое число, соответствующее мощности  $c$ . (См. пример 10 гл. 12.) Тогда множество  $\{\alpha \mid \alpha < \Psi\}$  имеет мощность  $c$ .

(iv) Если  $E$  — линейное множество положительной линейной меры, то мощность  $E$  равна  $c$ . ( $E$  содержит некоторое замкнутое линейное множество  $F$  положительной линейной меры, а  $F$  является объединением некоторого счетного множества (быть может, пустого) и некоторого (обязательно непустого) совершенного множества. См. [33]\*, [48] и [54].)

Пусть  $\alpha \rightarrow F_\alpha$  есть взаимно однозначное отображение множества  $\{\alpha \mid \alpha < \Psi\}$  на множество всех замкнутых множеств положительной плоской меры. Далее, пусть  $F$  — сово-

купность всех функций  $p(a)$ , таких, что их области определения имеют вид  $[1, \beta]$  для некоторого  $\beta \leqslant \Psi$ , их множества значений являются подмножествами плоскости и, кроме того,

- (a)  $p(a) \in F_a$  для каждого  $a$  из области определения  $p(a)$ .
- (b) никакие три точки из множества значений  $p(a)$  не коллинеарны<sup>1)</sup>.

Пусть  $G$  — множество всех множеств значений функций из  $F$ , и пусть  $G$  частично упорядочено по отношению включения. Тогда по лемме Цорна (см. [17], [31] и [49]) существует максимальное множество  $E \in G$ , которое является множеством значений некоторой функции  $q(a)$  из  $F$ . Пусть область определения  $q$  есть  $[1, \beta]$ . Покажем, что  $\beta = \Psi$ . Предположим противное, т. е. пусть  $\beta < \Psi$ . Тогда, если обозначить через  $b$  кардинальное число, соответствующее порядковому числу  $\beta$ , то  $b \leqslant b^2 < c$  (строгое неравенство  $b < b^2$  имеет место, если  $1 < b$  и  $b$  конечно). Это означает, что мощность множества всех направлений, определяемых парами точек, принадлежащих множеству значений  $E$  функции  $q(a)$ , меньше  $c$  и, следовательно, существует направление  $\theta$ , отличное от всех направлений, определяемых парами точек из  $E$ . Но тогда некоторая прямая  $L$ , имеющая направление  $\theta$ , должна пересекаться с множеством  $F_\beta$  по множеству положительной линейной меры (согласно теореме Фубини). А так как это последнее множество имеет мощность  $c$ , то существует точка  $p_\beta \in F_\beta$ , такая, что  $p_\beta$  не коллинеарна никакой паре точек из области значений  $q(a)$ . Продолжим теперь функцию  $q(a)$  так, чтобы она была задана на  $[1, \beta] = [1, \beta + 1]$  и чтобы  $q(\beta) = p_\beta$ . Но тогда эта продолженная функция  $q(a)$  будет обладать свойствами (а) и (б) и ее множество значений будет больше максимального члена  $E$  из  $G$ . Мы получили противоречие. Следовательно,  $\beta = \Psi$ , т. е. область определения функции  $q(a)$  состоит из *всех*  $a$ , меньших  $\Psi$ , а множество значений  $E$  функции  $q(a)$  содержит некоторую точку  $p_a$  из *каждого* замкнутого плоского множества  $F_a$  положительной плоской меры.

Покажем теперь, что множество  $E$  неизмеримо. В самом деле, если бы  $E$  было измеримо, то было бы измеримо и его дополнение  $E'$ . А так как  $E'$  не содержит ни одного

---

<sup>1)</sup> То есть не лежат на одной прямой. — Прим. перев.

замкнутого плоского множества положительной плоской меры, то оно должно иметь меру нуль. Но с другой стороны, так как каждая прямая на плоскости пересекает  $E$  не более чем в двух точках, то (согласно теореме Фубини)  $E$  также должно иметь меру нуль. Следовательно, вся плоскость, являясь объединением двух множеств  $E$  и  $E'$  меры нуль, должна иметь меру нуль. Таким образом, мы получили противоречие, и неизмеримость множества  $E$  доказана.

Отметим также, что если  $S$  — произвольное множество положительной плоской меры, то пересечение  $S \cap E$  неизмеримо. Если предположить противное, то, применяя теорему Фубини, получим, что  $\mu(S \cap E) = 0$ , в то время как  $\mu(S \setminus E) > 0$ . Таким образом,  $S \setminus E$  содержит некоторое замкнутое множество  $F$  положительной плоской меры. Но так как  $F \cap E = \emptyset$ , то мы получаем противоречие с основным свойством множества  $E$ : пересечение множества  $E$  с каждым замкнутым множеством положительной плоской меры непусто.

С. Мазуркевич [30] построил плоское множество  $E$ , пересекающееся с каждой прямой на плоскости в точности в двух точках. Однако такое множество  $E$  может быть измеримым и в этом случае оно обязано иметь меру нуль. Это объясняется тем, что этот метод построения зависит лишь от существования на плоскости множества  $E_1$ , пересекающегося с каждой прямой по множеству мощности  $c$ . Само же множество  $E$  строится затем как подмножество  $E_1$ .

Однако множества, обладающие тем же свойством, что и  $E_1$ , могут иметь нулевую плоскую меру. Например, пусть  $C$  — канторово множество на  $[0, 1]$ . Положим

$$E_1 \equiv (\mathbb{R} \times C) \cup (C \times \mathbb{R}).$$

Тогда ясно, что каждая прямая пересекает  $E_1$  по множеству мощности  $c$ , однако  $E_1$  является (замкнутым) множеством нулевой плоской меры.

В статье [59] приведено построение „множества Мазуркевича“ как ответ на одну проблему, поставленную в этом журнале.

Ф. Гельвир доказал следующее: если  $1 \leq n \leq \aleph_0$ , где  $\aleph_0$  — мощность множества  $\mathbb{N}$ , то существует неизмеримое множество  $S$  на плоскости, такое, что пересечение  $S$  с каждой прямой состоит в точности из  $n$  точек.

**22. Неотрицательная функция  $f(x, y)$ , такая, что**

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dx dy = \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dy dx = 0,$$

**а интеграл  $\iint_S f(x, y) dx dy$ , где  $S = [0, 1] \times [0, 1]$  не существует**

Мы приведем два примера. В первом из них интеграл понимается в смысле Римана, во втором — в смысле Лебега.

*Первый пример.* Пусть  $f$  — характеристическая функция множества из примера 20. Тогда  $\int_0^1 f(x, y) dx = 0$  для каждого  $y \in [0, 1]$  и  $\int_0^1 f(x, y) dy = 0$  для каждого  $x \in [0, 1]$ , причем оба интеграла являются интегралами Римана. Однако двойной интеграл Римана по  $S$  не существует, так как для функции  $f$  верхний и нижний интегралы Римана равны 1 и 0 соответственно.

*Второй пример.* Пусть  $f$  — характеристическая функция множества из примера 21. Тогда оба повторных интеграла снова равны нулю, причем их можно рассматривать как в смысле Римана, так и в смысле Лебега. Однако функция  $f$  неизмерима на  $S$ , и поэтому двойной интеграл Лебега не существует.

**23. Действительнозначная функция одного действительного переменного, график которой является неизмеримым плоским множеством**

Определим функцию  $f(x)$  для  $x \in \mathbb{R}$  следующим образом:

$$f(x) \equiv \begin{cases} \max \{y | (x, y) \in E\}, & \text{если } \{y | (x, y) \in E\} \neq \emptyset, \\ 0, & \text{если } \{y | (x, y) \in E\} = \emptyset, \end{cases}$$

где  $E$  — множество из примера 21. Положим

$$E_1 \equiv \{(x, f(x)) | x \in \mathbb{R}\} \cap E, \quad E_2 \equiv E \setminus E_1.$$

Тогда либо  $E_1$ , либо  $E_2$  (либо оба эти множества) должно быть неизмеримым, так как их объединение есть  $E$ . Если неизмеримо  $E_1$ , то множество

$$F = \{(x, f(x)) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

— график функции  $f$  — является объединением  $E_1$  и некоторого подмножества оси  $x$ . Но так как последнее имеет нулевую плоскую меру, то  $F$  неизмеримо. Если же неизмеримо  $E_2$ , то определим функцию  $g(x)$  для  $x \in \mathbb{R}$  следующим образом:

$$g(x) = \begin{cases} \min\{y \mid (x, y) \in E\}, & \text{если } \{y \mid (x, y) \in E\} \text{ состоит из} \\ & \quad \text{двух различных точек,} \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда множество  $G = \{(x, g(x)) \mid x \in \mathbb{R}\}$  — график функции  $g$  — является объединением  $E_2$  и некоторого подмножества оси  $x$  и потому неизмеримо. Итак, в любом случае существует функция, график которой есть неизмеримое плоское множество.

#### 24. Связное множество, которое становится вполне несвязным при удалении одной точки

Пусть  $C$  — канторово множество примера 1 гл. 8, и пусть  $B$  — подмножество  $C$ , состоящее из всех концевых точек открытых интервалов, удаленных из  $[0, 1]$  при построении  $C$ . Положим  $E = C \setminus B$  (см. пример 24 гл. 8). Далее для каждого  $x \in C$  через  $L(x)$  обозначим замкнутый отрезок, соединяющий две точки  $(x, 0)$  и  $(1, 1)$  на плоскости. Наконец, для  $x \in B$  через  $S(x)$  обозначим множество всех тех точек из  $L(x)$ , ординаты которых иррациональны, а для  $x \in E$  тем же символом  $S(x)$  обозначим множество всех тех точек из  $L(x)$ , ординаты которых рациональны. Тогда множество  $S = \bigcup_{x \in C} S(x)$  обладает требуемыми свойствами.

Мы приведем доказательство лишь в общих чертах: подробности можно найти в [24].

Связность множества  $S$  доказывается с привлечением понятий множеств первой и второй категорий, и мы его опускаем.

Покажем лишь, что множество  $S_0 = S \setminus \{(1, 1)\}$  вполне несвязно. В самом деле, если  $E \subset S_0$  содержит более одной точки и является подмножеством какого-либо множества  $S(x)$ ,  $x \in C$ , то  $E$ , очевидно, несвязно. С другой стороны, если  $p$  и  $q$  — две точки множества  $S_0$ , расположенные на двух *различных* интервалах  $L(x)$  и  $L(y)$ , где  $x$  и  $y$  при-  
надлежат  $C$  и  $x < y$ , то в дополнении множества  $S_0$  суще-  
ствует прямая линия, проходящая через точку  $(1, 1)$  и такая,  
что точки  $p$  и  $q$  лежат по разные стороны от нее. Такой  
прямой является всякая прямая, проходящая через точку  $(1, 1)$   
и любую точку вида  $(a, 0)$ , где  $x < a < y$  и  $a \notin C$ .

## ГЛАВА 11

### ПЛОЩАДЬ

#### Введение

В основе понятия площади лежит понятие двойного интеграла Римана. Говорят, что ограниченное плоское множество  $S$  имеет площадь, если его характеристическая функция  $\chi_S$  интегрируема (по Риману) на замкнутом прямоугольнике  $R$ , который содержит  $S$  и стороны которого параллельны координатным осям. В этом случае площадь  $A(S)$  множества  $S$  по определению полагается равной двойному интегралу от  $\chi_S$  по  $R$ :

$$A(S) \equiv \int_R \int \chi_S dA.$$

Эти определения, очевидно, корректны, поскольку понятия „имеет площадь“ и „площадь“ не зависят от прямоугольника  $R$ , содержащего множество  $S$ .

Пусть прямоугольник  $R$  разделен на меньшие прямоугольники при помощи сетки  $\mathcal{N}$  прямых, параллельных его сторонам. Тогда некоторые из этих прямоугольников могут быть подмножествами  $S$ , а некоторые из них могут быть подмножествами дополнения  $S'$  множества  $S$ . Для каждой такой сетки  $\mathcal{N}$  через  $a(\mathcal{N})$  обозначим сумму площадей всех прямоугольников, являющихся подмножествами  $S$  (если таких прямоугольников нет, то положим  $a(\mathcal{N})=0$ ), а через  $\bar{A}(\mathcal{N})$  — сумму площадей всех прямоугольников, не являющихся подмножествами  $S'$  (т. е. таких прямоугольников, пересечение которых с множеством  $S$  непусто). Внутренняя площадь  $\underline{A}(S)$  и внешняя площадь  $\bar{A}(S)$  множества  $S$  определяются соответственно как  $\sup a(\mathcal{N})$  и  $\inf \bar{A}(\mathcal{N})$  для всех сеток прямых, параллельных сторонам прямоугольника  $R$ , т. е.

$$A(S) = \sup a(\mathcal{N}), \quad \bar{A}(S) = \inf \bar{A}(\mathcal{N}).$$

Очевидно, эти определения не зависят от  $R$ . Ограниченнное множество  $S$  имеет площадь тогда и только тогда, когда  $A(S) = \bar{A}(S)$ . В этом случае  $\underline{A}(S) = \bar{A}(S)$ .

Для того чтобы ограниченное множество  $S$  имело площадь, необходимо и достаточно, чтобы его граница  $F(S)$  имела площадь, равную нулю, или, что эквивалентно, чтобы  $F(S)$  имела внешнюю площадь, равную нулю. Но так как для всякого ограниченного множества  $S$  его граница  $F(S)$  является компактным множеством (и, следовательно, она измерима как плоское множество) и так как для компактных множеств внешняя площадь и внешняя плоская мера (Лебега) совпадают, то ограниченное множество имеет площадь тогда и только тогда, когда его граница имеет нулевую плоскую меру.

Все предыдущие утверждения относительно площади можно распространить подобным образом и на *объемы* множеств, расположенных в трехмерном евклидовом пространстве. Существует обобщение понятия площади и объема, так называемая мера Жордана, которое применимо к евклидовым пространствам любого числа измерений и даже к более общим пространствам. (См. [38], стр. 431.) Мера Лебега является обобщением меры Жордана в том смысле, что любое множество, имеющее меру Жордана, измеримо по Лебегу и его мера Жордана совпадает с мерой Лебега. Принципиальным преимуществом меры Лебега над мерой Жордана объясняется широкое применение меры Лебега к предельным процессам. Элементарные сведения о площади и объеме, а также доказательства многих сформулированных выше утверждений можно найти в [38], стр. 431—465.

В примерах 7 и 8 настоящей главы речь идет о *площади поверхности*; определение этого понятия см. в литературе, указанной там же.

## **1. Ограниченнное плоское множество, не имеющее площади**

Рассмотрим множество  $S = (\mathbf{Q} \cap [0, 1]) \times (\mathbf{Q} \cap [0, 1])$  всех точек единичного квадрата, обе координаты которых рациональны. Это множество не имеет площади, так как его граница  $F(S)$  не имеет нулевой площади. (Множество  $F(S)$

совпадает с самим единичным квадратом и, следовательно, имеет площадь, равную 1.) Внешняя площадь множества  $S$  равна единице, а внутренняя — нулю.

## 2. Компактие плоское множество, не имеющее площади

Пусть  $A$  — канторово множество положительной меры  $\varepsilon$  (см. пример 4 гл. 8). Положим  $S = A \times [0, 1]$ . Тогда  $F(S) = S$  и плоская мера множества  $F(S)$  равна линейной мере  $\varepsilon$  множества  $A$ . Но так как множество  $F(S) = S$  компактно, то его внешняя площадь равна его мере и потому положительна. Следовательно,  $S$  не имеет площади. Внешняя площадь  $S$  равна  $\varepsilon$ , а внутренняя — нулю.

## 3. Ограниченная плоская область, не имеющая площади

Этим свойством обладает область  $R$  примера 15 гл. 10.

## 4. Ограниченная плоская жорданова область, не имеющая площади

Пусть  $\varepsilon$  — положительное число, меньшее единицы, и пусть  $A$  — простая дуга с параметризующей функцией  $f(t)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , лежащая в единичном квадрате  $[0, 1] \times [0, 1]$  и имеющая плоскую меру, большую чем  $1 - \varepsilon/2$ . (См. пример 10 гл. 10.) Далее, пусть  $C$  — замкнутая простая кривая, образованная объединением множества  $A$  и трех сегментов  $\{0\} \times [-\varepsilon/2, 0]$ ,  $\{1\} \times [-\varepsilon/2, 0]$  и  $[0, 1] \times \{-\varepsilon/2\}$ . Наконец, пусть  $R$  — ограниченная область, границей которой служит  $C$ . Тогда  $R$  будет жордановой областью, а внешняя площадь ее границы больше  $1 - \varepsilon/2 > 1 - \varepsilon > 0$ .

## 5. Простая замкнутая кривая, плоская мера которой больше плоской меры области, ограниченной этой кривой

Пусть  $C$  — кривая, а  $R$  — область, определенные в примере 4. Тогда если  $\mu$  — плоская мера Лебега, то

$$\mu(R \cup C) = \mu(R) + \mu(C) \leq 1 + \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Но так как  $\mu(C) > 1 - \frac{1}{2}\varepsilon$ , то отсюда следует, что

$$\mu(R) < \varepsilon.$$

Поэтому если  $\varepsilon < 2/3$ , то мера  $R$  меньше меры  $C$ . Заметим, что при этом мера  $R$  может быть сделана сколь угодно близкой к нулю, а мера  $C$  — сколь угодно близкой к единице.

## 6. Две функции $\varphi$ и $\psi$ , заданные на $[0, 1]$ и такие, что

(a)  $\varphi(x) < \psi(x)$  для  $x \in [0, 1]$ ,

(b)  $\int_0^1 [\psi(x) - \varphi(x)] dx$  существует и равен 1,

(c)  $S \equiv \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, \varphi(x) < y < \psi(x)\}$  не имеет площади

Пусть  $\varphi(x)$  — характеристическая функция множества  $Q \cap [0, 1]$ , и пусть  $\psi(x) = \varphi(x) + 1$ . Тогда условия (a) и (b), очевидно, выполнены. В то же время граница  $F(S)$  есть замкнутый прямоугольник  $[0, 1] \times [0, 2]$  положительной площади, и потому  $S$  не имеет площади. При этом внешняя площадь  $S$  равна 2, а внутренняя — нулю.

Этот пример представляет интерес в связи с принципом Кавальери, который состоит в следующем: если каждая плоскость  $\Pi$ , параллельная заданной плоскости  $\Pi_0$ , пересекает два трехмерных множества  $W_1$  и  $W_2$  так, что площади сечений равны, то  $W_1$  и  $W_2$  имеют равные объемы (см. [53]). Двумерный аналог этого принципа формулируется так: если всякая прямая  $L$ , параллельная заданной прямой  $L_0$ , пересекает два плоских множества  $S_1$  и  $S_2$  по отрезкам равной длины, то  $S_1$  и  $S_2$  имеют одинаковые площади. Приведенный выше пример показывает, что если не предполагать, что  $S_1$  и  $S_2$  имеют площадь, то это утверждение теряет силу. (В качестве множеств  $S_1$  и  $S_2$  можно взять соответственно множество  $S$  пункта (c) и замкнутый квадрат  $[0, 1] \times [3, 4]$ , а в качестве семейства параллельных прямых — семейство всех вертикалей.) В качестве упражнения читателю предлагается построить аналогичный контрпример в трехмерном пространстве.

**7. Пример Шварца, в котором боковой поверхности прямого кругового цилиндра сопоставляется сколь угодно большая конечная или даже бесконечная площадь**

Пусть  $S$  — прямой круговой цилиндр

$$S = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq 1\}$$

с радиусом основания 1 и с высотой 1. Для каждого натурального  $m$  определим  $2m+1$  окружностей  $C_{km}$  следующим образом:

$$C_{km} = S \cap \left\{ (x, y, z) | z = \frac{k}{2m} \right\}, \quad k = 0, 1, \dots, 2m.$$

На каждой из этих  $2m+1$  окружностей возьмем  $n$  равномерно распределенных точек  $P_{kmj}$  ( $j = 0, 1, \dots, n-1$ ):

$$P_{kmj} = \begin{cases} \left( \cos \frac{2j\pi}{n}, \sin \frac{2j\pi}{n}, \frac{k}{2m} \right), & \text{если } k \text{ четно,} \\ \left( \cos \frac{(2j+1)\pi}{n}, \sin \frac{(2j+1)\pi}{n}, \frac{k}{2m} \right), & \text{если } k \text{ нечетно.} \end{cases}$$

На каждой окружности  $C_{km}$  точки  $P_{kmj}$ ,  $j = 0, 1, \dots, n$ , являются вершинами правильного многоугольника, имеющего  $n$  сторон. Если  $0 < k \leq 2m$ , то каждая сторона многоугольника с вершинами на окружности  $C_{km}$  расположена над некоторой вершиной многоугольника, вписанного в  $C_{k-1,m}$ , и образует с этой вершиной некоторый (плоский) треугольник в пространстве. Аналогично, если  $0 \leq k < 2m$ , то каждая сторона многоугольника с вершинами на  $C_{km}$  расположена под некоторой вершиной многоугольника, вписанного в  $C_{k+1,m}$ , и образует с этой вершиной треугольник. Нетрудно видеть, что существуют всего  $4mn$  конгруэнтных треугольников, построенных таким способом и расположенных в пространстве так, что их вершины лежат на данном цилиндре. Площадь каждого из этих треугольников равна

$$\sin \frac{\pi}{n} \left[ \left( \frac{1}{4m^2} + \left( 1 - \cos \frac{\pi}{n} \right)^2 \right)^{1/2} \right].$$

Эти треугольники образуют многогранник  $\Pi_{mn}$ , вписанный в  $S$ . Площадь  $A(\Pi_{mn})$  его боковой поверхности равна

$$A(\Pi_{mn}) = 2\pi \frac{\sin(\pi/n)}{(\pi/n)} \sqrt{1 + 4m^2 \left( 1 - \cos \frac{\pi}{n} \right)^2}.$$

Если  $m$  и  $n \rightarrow +\infty$ , то длины сторон упомянутых треугольников стремятся к нулю и поэтому естественно было бы ожидать, что площади боковых поверхностей вписанных многоугольников стремятся к некоторому пределу, а именно к площади боковой поверхности цилиндра, равной  $(2\pi \cdot 1) \cdot 1 = 2\pi$  (площадь боковой поверхности прямого кругового цилиндра вычисляется по известной формуле  $2\pi r h$ , где  $r$  — радиус основания, а  $h$  — высота цилиндра). Однако мы увидим, что результат зависит от *относительных скоростей* возрастания  $m$  и  $n$ .

Заметим сначала, что при  $n \rightarrow +\infty$  предел множителя, стоящего перед радикалом в формуле для  $A(\Pi_{mn})$ , равен  $2\pi$ , а подкоренное выражение не меньше 1. Поэтому, если  $A(\Pi_{mn})$  имеет предел, то он должен быть *не меньше*  $2\pi$ . Теперь обратим внимание на выражение под радикалом, точнее на функцию

$$f(m, n) = 2m \left(1 - \cos \frac{\pi}{n}\right) = \frac{\pi^2 m}{n^2} - \frac{2\pi^4 m}{4! n^4} + \frac{2\pi^6 m}{6! n^6} - \dots$$

Рассмотрим три случая:

(i) Если  $m = n$ , то

$$f(n, n) = 2n \left(1 - \cos \frac{\pi}{n}\right) = \frac{\pi^2}{n} - \frac{2\pi^4}{4! n^3} + \dots$$

Следовательно,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n, n) = 0$ , а  $\lim_{n \rightarrow +\infty} A(\Pi_{nn}) = 2\pi$ .

(ii) Если же  $m = [an^2]$ , где квадратные скобки обозначают целую часть числа (функция  $[x]$  определена во второй главе) и если  $0 < a < +\infty$ , то

$$f([an^2], n) = 2[an^2] \left(1 - \cos \frac{\pi}{n}\right) = \frac{\pi^2 [an^2]}{n^2} - \frac{2\pi^4 [an^2]}{4! n^4} + \dots$$

Таким образом,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f([an^2], n) = a\pi^2$ , а  $\lim_{n \rightarrow +\infty} A(\Pi_{[an^2], n}) = 2\pi \sqrt{1 + a^2\pi^4}$ .

(iii) Наконец, если  $m = n^3$ , то

$$f(n^3, n) = 2n^3 \left(1 - \cos \frac{\pi}{n}\right) = \pi^2 n - \frac{2\pi^4}{4! n} + \dots,$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n^3, n) = +\infty \quad \text{и} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} A(\Pi_{n^3, n}) = +\infty.$$

В заключение отметим, что в зависимости от способа стремления  $m$  и  $n$  к бесконечности в качестве предела  $A(\Pi_{mn})$  может получиться любое конечное или бесконечное число, не меньшее  $2\pi$ . Хотя предел  $\lim_{m, n \rightarrow +\infty} A(\Pi_{mn})$  не существует, но можно утверждать, что

$$\lim_{m, n \rightarrow +\infty} A(\Pi_{mn}) = 2\pi.$$

Приведенный выше пример принадлежит Г. А. Шварцу (*Gesammelte Mathematische Abhandlungen*, vol. 2, p. 309, Berlin, Julius Springer, 1890). Он показывает, что понятие *площади поверхности* гораздо сложнее понятия *длины дуги*. Подробное рассмотрение этих понятий и дальнейшие ссылки можно найти в [42]. Элементарные сведения о площади поверхности см. в [36], стр. 610—635 (а также [52]\*, т. III, стр. 248—257).

- 8.** Для любых двух положительных чисел  $\varepsilon$  и  $M$  в трехмерном пространстве существует поверхность  $S$ , такая, что
- (a)  $S$  гомеоморфна поверхности сферы;
  - (b) площадь поверхности  $S$  существует и меньше  $\varepsilon$ ;
  - (c) мера Лебега в трехмерном пространстве поверхности  $S$  существует и больше  $M$

Этот пример принадлежит А. С. Безиковичу (см. [6]). При его построении используются идеи, подобные тем, на которые опиралось построение простой дуги положительной плоской меры (пример 10 гл. 10), однако само построение в данном случае гораздо сложнее. Для его полного описания потребовалось бы ввести определение площади поверхности, и потому мы не будем вдаваться в подробности.

Обсудим некоторые интересные аспекты примера 8.

a. Существует некоторая аналогия между примером 8 и примером 5. В обоих случаях граница тел „массивнее“ их внутренности. Однако линейная мера (длина) кривой в примере 5 бесконечна, в то время как плоская мера (площадь) поверхности в примере 8 конечна и мала.

b. Вспомним известные соотношения между объемом куба и его боковой поверхностью, а также между объемом шара

и его боковой поверхностью. Объем куба =  $\frac{1}{6} \times$  длина ребра  $\times$  площадь поверхности, а объем шара =  $\frac{1}{3} \times$  длина радиуса  $\times$  площадь поверхности. Эти соотношения могут навести на мысль, что если мала площадь замкнутой поверхности одновременно с объемом трехмерной области, которую она ограничивает, то должна быть мала и мера этой поверхности, рассматриваемая в трехмерном пространстве. Пример 8 показывает, что это не так.

с. Можно построить прямую цилиндрическую „банку“ конечной высоты, в основании которой лежит неспрямляемая жорданова кривая, имеющую конечный объем (меру в трехмерном пространстве), но бесконечную площадь поверхности. (Таким образом, эту „банку“ можно наполнить краской, но всю ее поверхность закрасить не удастся!) Этот пример в некотором смысле двойствен примеру 8.

**9. Плоское множество сколь угодно малой плоской меры, внутри которого направление отрезка единичной длины можно поменять на обратное непрерывным движением**

Этот пример был построен в 1928 г. А. С. Безиковичем как решение проблемы, поставленной в 1917 г. С. Какея. (См. [4], [5] и [21], а также [7], где приводятся наиболее полные сведения.)

## ГЛАВА 12

### МЕТРИЧЕСКИЕ И ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

#### Введение

Метрическим пространством называется упорядоченная пара  $(X, d)$ , где  $X$  — непустое множество; а  $d$  — действительнозначная функция, определенная на  $X \times X$ , причем

(i)  $d$  строго положительна:

$$x \in X \Rightarrow d(x, x) = 0,$$

$$x \text{ и } y \in X, x \neq y \Rightarrow d(x, y) > 0;$$

(ii) справедливо неравенство треугольника:

$$x, y \text{ и } z \in X \Rightarrow d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z).$$

Из (i) и (ii) сразу следует, что

(iii)  $d$  симметрична:

$$x \text{ и } y \in X \Rightarrow d(x, y) = d(y, x).$$

Функция  $d$  называется метрикой метрического пространства  $(X, d)$ , а число  $d(x, y)$  — расстоянием между точками  $x$  и  $y$ . Когда из контекста ясно, о какой метрике идет речь, можно использовать одну букву  $X$  для обозначения как метрического пространства, так и множества его точек.

Топологическим пространством называется упорядоченная пара  $(X, \mathcal{O})$ , где  $X$  — непустое множество, а  $\mathcal{O}$  — семейство подмножеств из  $X$ , такое, что

(i)  $\emptyset \in \mathcal{O}$  и  $X \in \mathcal{O}$ ,

(ii)  $\mathcal{O}$  замкнуто относительно операции пересечения конечного числа подмножеств:

$$O_1, \dots, O_n \in \mathcal{O} \Rightarrow O_1 \cap \dots \cap O_n \in \mathcal{O},$$

где  $n$  — произвольное натуральное число;

(iii)  $\mathcal{O}$  замкнуто относительно операции объединения:

$$(\lambda \in \Lambda \Rightarrow O_\lambda \in \mathcal{O}) \Rightarrow \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \in \mathcal{O},$$

где  $\Lambda$  — произвольное непустое множество индексов.

Семейство  $\mathcal{O}$  называется топологией топологического пространства  $(X, \mathcal{O})$ , а элементы этого семейства — открытыми множествами. Семейство  $\mathcal{O}$  называют также топологией множества  $X$ . Если же из контекста ясно, какое семейство открытых множеств имеется в виду, то одна и та же буква может быть использована как для обозначения топологического пространства, так и множества его точек. Очевидно, условие (ii) эквивалентно такому же условию при  $n = 2$ . Топологическое пространство  $(Y, \mathcal{J})$  называется подпространством топологического пространства  $(X, \mathcal{O})$ , если  $Y \subset X$  и  $\mathcal{J} = \{Y \cap O | O \in \mathcal{O}\}$ ; в этом случае говорят, что топология  $\mathcal{J}$  индуцируется топологией  $\mathcal{O}$ .

Множество называется замкнутым, если его дополнение открыто. Открытым покрытием множества  $A$  называется класс открытых множеств, объединение которых содержит  $A$ . Множество  $C$  называется компактным, если каждое открытое покрытие  $C$  содержит конечное подпокрытие. Топологическое пространство называется хаусдорфовым, если для любых двух его различных точек  $x$  и  $y$  существуют два непересекающихся открытых множества, одно из которых содержит  $x$ , а другое —  $y$ . В любом хаусдорфовом пространстве каждое компактное множество замкнуто. Говорят, что точка  $p$  является предельной точкой множества  $A$ , если каждое открытое множество, содержащее  $p$ , содержит по крайней мере одну точку из  $A \setminus \{p\}$ . Замыканием  $\bar{A}$  множества  $A$  называется пересечение всех замкнутых множеств, содержащих  $A$ . Оно состоит из всех точек, которые являются либо элементами  $A$ , либо предельными точками  $A$ . Замыкание любого множества  $A$  замкнуто. Множество  $A$  замкнуто тогда и только тогда, когда оно совпадает со своим замыканием, т. е.  $A = \bar{A}$ . Локально компактным пространством называется топологическое пространство, каждая точка которого содержится в некотором открытом множестве, замыкание которого компактно.

Базисом топологии топологического пространства  $(X, \mathcal{O})$  называется подсемейство  $\mathcal{J}$  семейства  $\mathcal{O}$ , обладающее тем

свойством, что всякий непустой элемент из  $\mathcal{O}$  является объединением некоторой совокупности элементов из  $\mathcal{G}$ . Системой окрестностей топологического пространства  $(X, \mathcal{O})$  называется совокупность  $\mathcal{M}$  упорядоченных пар  $(x, N)$ , такая, что  $x \in N$  для всякой пары  $(x, N) \in \mathcal{M}$ , причем совокупность всех  $N$ , таких, что  $(x, N) \in \mathcal{M}$  является базисом топологии  $\mathcal{O}$ . Примером системы окрестностей является множество всех пар  $(x, A)$ , таких, что  $x \in A$  и  $A \in \mathcal{G}$ , где  $\mathcal{G}$  — некоторый базис топологии пространства  $(X, \mathcal{O})$ . Если  $\mathcal{G}$  — произвольное непустое семейство подмножеств множества  $X$ , то  $\mathcal{G}$  будет базисом некоторой топологии  $\mathcal{O}$  в  $X$ , если выполнены два следующих условия: (i)  $X$  является объединением элементов из  $\mathcal{G}$ , и (ii) если  $G_1$  и  $G_2$  — элементы семейства  $\mathcal{G}$ , пересечение которых не пусто, и  $x \in G_1 \cap G_2$ , то существует элемент  $G \in \mathcal{G}$ , такой, что  $x \in G \subset G_1 \cap G_2$ . Если выполнены условия (i) и (ii), то топология  $\mathcal{O}$ , порожденная семейством  $\mathcal{G}$ , определяется множествами, которые являются объединениями элементов семейства  $\mathcal{G}$ . Последовательность  $\{x_n\}$  точек топологического пространства называется сходящейся к точке  $x$ , а  $x$  называется пределом последовательности  $\{x_n\}$ , если

$\forall$  открытого множества  $O$ , содержащего  $x$ ,

$$\exists m \in \mathbb{N} \exists n \in \mathbb{N}, n > m \Rightarrow x_n \in O.$$

Во всяком хаусдорфовом пространстве сходящаяся последовательность имеет единственный предел.

Если  $\mathcal{O}_1$  и  $\mathcal{O}_2$  — две топологии в одном и том же множестве  $X$  и если  $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2$ , то говорят, что  $\mathcal{O}_1$  слабее  $\mathcal{O}_2$ , а  $\mathcal{O}_2$  сильнее  $\mathcal{O}_1$ . Самой слабой из всех топологий в  $X$  является *тривиальная* топология  $\mathcal{O} \equiv \{\emptyset, X\}$ , а самой сильной — *дискретная* топология  $\mathcal{O} \equiv 2^X$ , состоящая из *всех* подмножеств множества  $X$ .

Если  $(X, d)$  — метрическое пространство и  $x \in X$ , то окрестностью (или сферической окрестностью) точки  $x$  называется множество вида

$$\{y | y \in X, d(x, y) < \varepsilon\},$$

где  $\varepsilon > 0$  ( $x$  называется *центром*, а  $\varepsilon$  — *радиусом* этой сферической окрестности). Сферическую окрестность иногда называют *открытым шаром*. Множество всех сферических окрестностей любого метрического пространства удовлетворяет

двум упомянутым выше условиям и порождает топологию метрического пространства. Множество всех упорядоченных пар  $(x, N)$ , где  $N$  — сферическая окрестность точки  $x$ , является системой окрестностей этой топологии. Топологическое пространство  $(X, \mathcal{O})$  называется метризуемым, если в  $X$  существует такая метрика  $d$ , что  $\mathcal{O}$  является топологией метрического пространства  $(X, d)$ . *Замкнутым шаром* метрического пространства  $(X, d)$  называют множество вида

$$\{y | y \in X, d(x, y) \leq \varepsilon\},$$

где  $x \in X$ , а  $\varepsilon > 0$  ( $x$  называется *центром*, а  $\varepsilon$  — *радиусом шара*). Всякий замкнутый шар есть замкнутое множество. Часто вместо „замкнутый шар“ говорят просто „шар“. Множество в метрическом пространстве называется ограниченным, если оно является подмножеством некоторого шара. Если пространство  $(X, d)$  ограничено, то  $d$  называется ограниченной метрикой. Если метрические пространства  $(X, d)$  и  $(X, d^*)$  имеют одну и ту же топологию, то говорят, что метрики  $d$  и  $d^*$  эквивалентны. Пусть  $(X, d)$  — произвольное метрическое пространство. Метрика  $d^*$ , определенная формулой

$$d^*(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)},$$

является ограниченной метрикой, эквивалентной  $d$ . Таким образом, всякое метризуемое пространство можно метризовать с помощью ограниченной метрики. В любом конечномерном евклидовом пространстве с обычной евклидовой метрикой множество является компактным тогда и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено. Последовательность  $\{x_n\}$  точек в метрическом пространстве  $(X, d)$  называется фундаментальной последовательностью (или последовательностью Коши), если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists K \in \mathbb{N} \exists m, n \in \mathbb{N} \left. \begin{array}{l} m \text{ и } n \in \mathbb{N} \\ m > K \text{ и } n > K \end{array} \right\} \Rightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon.$$

Метрическое пространство называется полным, если каждая фундаментальная последовательность точек этого пространства сходится (к некоторой точке пространства). В противном случае пространство называется неполным. Такие понятия, как

*связное множество, вполне несвязное множество и совершенное множество*, определяются точно так же, как и в евклидовых пространствах (см. введение к гл. 10).

Говорят, что топологическое пространство удовлетворяет второй аксиоме счетности, если существует счетный базис его топологии. Множество в топологическом пространстве называется *всюду плотным*, если его замыкание совпадает со всем пространством. Топологическое пространство называется *сепарабельным*, если оно содержит счетное всюду плотное множество. Метризуемое пространство удовлетворяет второй аксиоме счетности тогда и только тогда, когда оно сепарабельно.

Если  $(X, \mathcal{O})$  и  $(Y, \mathcal{J})$  — топологические пространства, а  $f$  — отображение  $X$  в  $Y$ , то  $f$  называется *непрерывным*, если  $B \in \mathcal{J} \Rightarrow f^{-1}(B) \in \mathcal{O}$ ; — *открытым*, если  $A \in \mathcal{O} \Rightarrow f(A) \in \mathcal{J}$ ; — *замкнутым*, если  $A' \in \mathcal{O} \Rightarrow (f(A))' \in \mathcal{J}$ . Если  $f$  — отображение топологического пространства  $X$  на топологическое пространство  $Y$ , то  $f$  называется *гомеоморфизмом* (или топологическим отображением), если  $f$  взаимно однозначно, а  $f$  и  $f^{-1}$  непрерывны.

Пусть  $V$  — аддитивная группа с элементами  $x, y, z, \dots$ , а  $F$  — поле с элементами  $\lambda, \mu, \nu, \dots$ . Тогда  $V$  называется *векторным пространством* (или *линейным пространством*) над полем  $F$ , если существует функция  $(\lambda, x) \rightarrow \lambda x$ , отображающая  $F \times V$  в  $V$  и такая, что для всех  $\lambda$  и  $\mu$  из  $F$  и  $x$  и  $y$  из  $V$  выполнены следующие условия:

- (i)  $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$ ,
- (ii)  $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$ ,
- (iii)  $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$ ,
- (iv)  $1 \cdot x = x$ .

Точки векторного пространства называют также *векторами*. Пусть  $F$  обозначает либо поле  $\mathbf{R}$  действительных чисел, либо поле  $\mathbf{C}$  комплексных чисел. Векторное пространство  $V$  над полем  $F$  называется *нормированным*, если существует действительнозначная норма  $\| \cdot \|$ , удовлетворяющая для всех  $x$  и  $y$  из  $V$  и  $\lambda$  из  $F$  следующим условиям:

- (v)  $\|x\| \geqslant 0$ ;  $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ,
- (vi)  $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ ,
- (vii)  $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ .

Каждое нормированное векторное пространство является метрическим пространством с метрикой  $d(x, y) = \|x - y\|$ . Банаховым пространством называется полное нормированное векторное пространство.

Дальнейшие сведения о топологических пространствах и отображениях см. в [11], [12], [13], [14], [23], [27], [48], [54] и [56], о векторных пространствах — в [19], о банаховых пространствах — в [3] и [29].

## 1. Убывающая последовательность непустых замкнутых ограниченных множеств с пустым пересечением

Введем в пространстве  $\mathbf{R}$  ограниченную метрику  $d(x, y) \equiv \frac{|x - y|}{1 + |x - y|}$  и положим  $F_n \equiv [n, +\infty)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ .

Тогда каждое множество  $F_n$  замкнуто и ограничено,

$$\text{а } \bigcap_{n=1}^{+\infty} F_n = \emptyset.$$

Настоящий пример невозможен в конечномерном евклидовом пространстве с обычной евклидовой метрикой, поскольку всякая убывающая последовательность непустых компактных множеств имеет непустое пересечение.

## 2. Неполное метрическое пространство с дискретной топологией

Пространство  $(\mathbf{N}, d)$  натуральных чисел с метрикой  $d(m, n) = |m - n|/mn$  имеет дискретную топологию, поскольку в нем всякое одноточечное множество открыто. Однако оно неполно, так как расходящаяся последовательность  $\{n\}$  фундаментальна.

Этот пример показывает, что *полнота не является топологическим свойством*, поскольку пространство  $\mathbf{N}$  с обычной метрикой и полно, и дискретно. Иными словами, два метрических пространства могут быть гомеоморфными даже в том случае, если одно из них полно, а другое нет. Другим примером таких пространств являются два гомеоморфных интервала  $(-\infty, +\infty)$  и  $(0, 1)$ , из которых полным в обычной метрике  $\mathbf{R}$  является лишь первый.

### 3. Убывающая последовательность непустых замкнутых шаров с пустым пересечением в полном метрическом пространстве

Рассмотрим пространство  $(\mathbb{N}, d)$  натуральных чисел с метрикой

$$d(m, n) = \begin{cases} 1 + \frac{1}{m+n}, & \text{если } m \neq n, \\ 0, & \text{если } m = n, \end{cases}$$

и положим

$$B_n = \{m \mid d(m, n) \leq 1 + 1/2n\} = \{n, n+1, \dots\}$$

для  $n = 1, 2, \dots$ . Тогда  $\{B_n\}$  удовлетворяет требуемым условиям, а пространство полно, поскольку каждая фундаментальная последовательность является „почти постоянной“.

Если не требовать полноты пространства, то можно привести совсем тривиальные примеры — например, последовательность  $\{y\mid 1/n - y \leq 1/n\}$  в пространстве  $\mathbf{P}$  положительных чисел с обычной метрикой пространства  $\mathbf{R}$ . С другой стороны, такой пример становится невозможным, если полное пространство является банаховым (см. [18]).

Настоящий пример (см. [48]) представляет интерес в связи с теоремой Бэра (см. пример 7 гл. 8, а также [2], [3], [27] и [54]), утверждающей, что *каждое полное метрическое пространство является множеством второй категории* или эквивалентно, что пересечение счетного множества открытых всюду плотных множеств в полном метрическом пространстве всюду плотно. При доказательстве этой теоремы строится убывающая последовательность замкнутых шаров, радиусы которых стремятся к нулю, а потому она имеет непустое пересечение. Таким образом, мы видим, что если шары уменьшаются, они должны иметь общую точку, в противном же случае такая точка может и не существовать.

### 4. Открытый шар $O$ и замкнутый шар $B$ с общим центром и равными радиусами, такие, что $B \neq \bar{O}$

Пусть  $X$  — произвольное множество, содержащее более одной точки, и пусть  $(X, d)$  — метрическое пространство с метрикой

$$d(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \neq y, \\ 0, & \text{если } x = y. \end{cases}$$

Далее пусть  $x$  — произвольная точка множества  $X$ , а  $O$  и  $B$  — соответственно открытый и замкнутый шары с центром в точке  $x$  и радиусом 1. Тогда

$$O = \{x\}, \quad B = X,$$

и так как топология дискретна, то  $\bar{O} = O \neq B$ .

Подобный пример невозможен в любом нормированном векторном пространстве. (Доказательство этого факта предоставляется читателю в качестве упражнения.)

### **5. Замкнутые шары $B_1$ и $B_2$ с радиусами $r_1$ и $r_2$ соответственно, такие, что $B_1 \subset B_2$ , а $r_1 > r_2$**

Пусть  $(X, d)$  — метрическое пространство, состоящее из всех точек  $(x, y)$  замкнутого круга в евклидовой плоскости

$$X \equiv \{(x, y) | x^2 + y^2 \leqslant 9\}$$

с обычной евклидовой метрикой. Положим  $B_2 \equiv X$ , а

$$B_1 \equiv B_2 \cap \{(x, y) | (x - 2)^2 + y^2 \leqslant 16\}.$$

Тогда  $B_1 \subset B_2$ , а  $r_1 = 4 > r_2 = 3$ .

Подобный пример нельзя построить ни в каком нормированном векторном пространстве, поскольку в этом пространстве радиус любого шара равен половине его диаметра. (Доказательство предоставляется читателю в качестве упражнения.)

### **6. Топологическое пространство $X$ и его подмножество $Y$ , такие, что множество предельных точек $Y$ не замкнуто**

Пусть  $X$  — произвольное множество, содержащее более одной точки. Наделим его тривиальной топологией  $\mathcal{O} = \{\emptyset, X\}$ . Если  $y$  — произвольный элемент из  $X$ , то положим  $Y = \{y\}$ . Тогда предельными точками множества  $Y$  будут все точки  $X$ , за исключением самой точки  $y$ . Таким образом, множество предельных точек совпадает с  $X \setminus Y$ , а так как  $Y$  не является открытым, то  $X \setminus Y$  не замкнуто.

### **7. Топологическое пространство, в котором предел последовательности не единствен**

*Первый пример.* Этим свойством обладает всякое пространство, наделенное тривиальной топологией, если оно содержит более одной точки. В самом деле, в этом пространстве каждая последовательность сходится к любой его точке.

*Второй пример.* Пусть  $X$  — бесконечное множество. Наделим его топологией  $\mathcal{O}$ , состоящей из  $\emptyset$  и всех дополнений конечных подмножеств из  $X$ . Тогда каждая последовательность различных точек  $X$  сходится к любому элементу  $X$ .

## 8. Сепарабельное пространство, обладающее несепарабельным подпространством

*Первый пример.* Пусть  $(\mathbf{R}, \mathcal{O})$  — пространство действительных чисел с топологией  $\mathcal{O}$ , порожденной базисом, состоящим из множеств вида

$$\{x\} \cup (\mathbf{Q} \cap (x - \varepsilon, x + \varepsilon)), \quad \varepsilon \in \mathbf{R}, \quad \varepsilon > 0,$$

и пусть  $(Y, \mathcal{J})$  — его подпространство иррациональных чисел с дискретной топологией (оно действительно является подпространством, ибо всякое одноточечное множество в  $Y$  является пересечением  $Y$  и некоторого элемента из  $\mathcal{O}$ ). Тогда  $\mathbf{Q}$  будет счетным всюду плотным подмножеством  $(\mathbf{R}, \mathcal{O})$ , однако в  $(Y, \mathcal{J})$  не существует счетного всюду плотного подмножества.

*Второй пример.* Пусть  $(X, \mathcal{O})$  — пространство всех точек  $(x, y)$  евклидовой плоскости, таких, что  $y \geq 0$ , и пусть  $\mathcal{O}$  — топология, порожденная базисом, состоящим из множеств следующих двух типов:

$$\{(x, y) \mid [(x - a)^2 + (y - b)^2]^{1/2} < \min(b, \varepsilon)\},$$

$$a \in \mathbf{R}, \quad b > 0, \quad \varepsilon > 0,$$

$$\{(a, 0) \mid (x - a)^2 + (y - b)^2 < \varepsilon^2\}, \quad a \in \mathbf{R}, \quad \varepsilon > 0.$$

Тогда множество  $\{(x, y) \mid x \in \mathbf{Q}, y \in \mathbf{Q} \cap \mathbf{P}\}$  есть счетное всюду плотное подмножество в  $(X, \mathcal{O})$ , однако пространство  $\{(x, y) \mid x \in \mathbf{R}, y = 0\}$ , наделенное дискретной топологией, является подпространством пространства  $(X, \mathcal{O})$ , не имеющим счетного всюду плотного подмножества. (См. [2], стр. 29, 5°.)

## 9. Сепарабельное пространство, не удовлетворяющее второй аксиоме счетности

Любой из двух примеров предыдущего пункта удовлетворяет требуемым условиям, поскольку (1) каждое пространство, удовлетворяющее второй аксиоме счетности, сепарабельно и (2) любое его подпространство также удовлетворяет

второй аксиоме счетности. Если бы какое-либо из пространств предыдущего пункта удовлетворяло второй аксиоме счетности, то рассматриваемые подпространства были бы сепаральными.

### 10. Множество с различными топологиями, имеющими одни и те же сходящиеся последовательности

*Первый пример.* Пусть  $(X, \mathcal{O})$  — произвольное несчетное пространство, топология  $\mathcal{O}$  которого определяется пустым множеством  $\emptyset$  и дополнениями всех счетных (возможно, пустых или конечных) множеств. Тогда последовательность  $\{x_n\}$  сходится к  $x$  тогда и только тогда, когда  $x_n = x$  для  $n$ , превосходящего некоторое  $m \in \mathbb{N}$ . Иными словами, сходящимися последовательностями являются те и только те последовательности, которые сходятся в пространстве  $(X, \mathcal{J})$ , где  $\mathcal{J}$  — дискретная топология; при этом очевидно, что  $\mathcal{O} \neq \mathcal{J}$ .

*Второй пример.* Пусть  $X$  — множество всех порядковых чисел, не превосходящих  $\Omega$ , где  $\Omega$  — первое порядковое число, соответствующее несчетному множеству. (См. [49] и [54].) Далее пусть  $\mathcal{O}$  — топология, порожденная интервалами

$$[1, \beta), \quad (a, \beta) \quad (a, \Omega],$$

где  $a$  и  $\beta \in X$ . Так как каждое счетное множество из  $X \setminus \{\Omega\}$  имеет верхнюю грань, принадлежащую  $X \setminus \{\Omega\}$ , то никакая последовательность точек из  $X \setminus \{\Omega\}$  не может сходиться к  $\Omega$ . Следовательно, последовательность точек в  $X$  сходится к  $\Omega$  тогда и только тогда, когда все ее члены, за исключением конечного числа, равны  $\Omega$ . Другими словами, сходящиеся в  $X$  последовательности совпадают с теми, которые сходятся в топологии, полученной присоединением к *подпространству*  $X \setminus \{\Omega\}$  пространства  $X$  точки  $\Omega$  как *изолированной* точки (это означает, что  $\{\Omega\}$  есть одноточечное открытое множество нового пространства  $X$ ).

*Третий пример.* (Определения и дальнейшие подробности см. в [3] и [29].) Пусть  $X$  — банахово пространство  $l_1$  действительных (или комплексных) последовательностей  $x = \{x_n\}$ , таких, что  $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < +\infty$  с нормой  $\|x\| \equiv \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|$ . Сильной топологией пространства  $X$  назы-

вается топология метрического пространства  $(X, d)$  с метрикой  $d(x, y) \equiv \|x - y\|$ .

Определим теперь в  $X$  другую топологию, называемую слабой, при помощи следующей системы окрестностей:

$$N_x \equiv \left\{ y = \{y_n\} \mid \left| \sum_{n=1}^{+\infty} a_{mn} (y_n - x_n) \right| < \varepsilon, m = 1, 2, \dots, p \right\},$$

где  $x \in X$ ,  $\varepsilon > 0$ , а  $(a_{mn})$  — ограниченная матрица с  $p$  строками и бесконечным числом столбцов. Можно показать, что  $\{N_x\}$  удовлетворяет сформулированным введении условиям и порождает топологическое пространство  $(X, \mathcal{G})$ .

Чтобы доказать, что сильная топология  $X$  действительно сильнее слабой топологии, мы покажем, что любая окрестность произвольной точки  $x$  в слабой топологии содержит некоторую сферическую окрестность этой точки. Это сразу же следует из неравенства треугольника для действительных рядов:

$$\left| \sum_{n=1}^{+\infty} a_{mn} (y_n - x_n) \right| \leq K \sum_{n=1}^{+\infty} |y_n - x_n| = K \|y - x\|,$$

где  $K$  — верхняя грань множества абсолютных значений элементов матрицы  $(a_{mn})$ . Чтобы доказать, что сильная топология строго сильнее слабой, покажем, что *каждая окрестность в слабой топологии не ограничена в метрике сильной топологии* (и, следовательно, никакая окрестность в слабой топологии не может быть подмножеством какой-либо окрестности в сильной топологии). Пусть  $(a_{mn})$  — матрица с  $p$  строками и бесконечным числом столбцов для некоторой окрестности  $N_x$  в слабой топологии,  $(z_1, z_2, \dots, z_{p+1})$  — нетривиальный  $(p+1)$ -мерный вектор, такой, что

$$\sum_{n=1}^{p+1} a_{mn} z_n = 0 \quad \text{для } m = 1, 2, \dots, p.$$

Далее положим  $z_{p+2} = z_{p+3} = \dots = 0$ . Тогда вектор  $y(a) \equiv x + az = \{y_n(a)\} = \{x_n + az_n\}$  принадлежит  $N_x$  для любого действительного  $a$ :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_{mn} (y_n(a) - x_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{mn} az_n = a \sum_{n=1}^{p+1} a_{mn} z_n = 0,$$

$$m = 1, 2, \dots, p.$$

С другой стороны,  $\|y(a) - x\| = \|az\| = |a| \cdot \|z\|$ , а  $\|z\| \neq 0$ .

Теперь обратимся к последовательностям точек в  $X$ . Мы уже знаем, что всякая последовательность точек в  $X$ , которая сходится к  $x$  в сильной топологии, должна сходиться к  $x$  и в слабой топологии. Докажем обратное: если  $\lim_{m \rightarrow +\infty} x^{(m)} = x$  в слабой топологии, то  $\lim_{m \rightarrow +\infty} x^{(m)} = x$  в сильной топологии. Отсюда будет следовать, что слабая и сильная топологии в  $X$  определяют одни и те же сходящиеся последовательности.

Предположим, что существует последовательность, сходящаяся к  $x$  в слабой топологии, но не сходящаяся к  $x$  в сильной топологии. В силу линейного характера операции предельного перехода мы можем предположить, не теряя в общности, что  $x$  есть нулевой вектор. Более того, если рассматриваемая последовательность не сходится к нулю в сильной топологии, то из нее можно выделить подпоследовательность, нормы элементов которой отделены от 0. Если обозначить эту подпоследовательность через  $\{x^{(m)}\}$ , то найдется положительное число  $\varepsilon$ , такое, что

$$\|x^{(m)}\| \geqslant 5\varepsilon$$

для  $m = 1, 2, \dots$ . Так как  $\{x^{(m)}\}$  — подпоследовательность некоторой последовательности, сходящейся к 0 в слабой топологии, то  $\{x^{(m)}\}$  также должна сходиться к 0 в слабой топологии. Если мы запишем  $x^{(m)}$  в виде

$$x^{(m)} = (x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \dots, x_n^{(m)}, \dots),$$

то последовательность  $\{x^{(m)}\}$  может быть представлена бесконечной матрицей  $M$ , каждая строка которой соответствует одному из векторов последовательности  $\{x^{(m)}\}$ . Следующий шаг состоит в том, чтобы показать, опираясь на сходимость  $\{x^{(m)}\}$  к нулю в слабой топологии, что каждый столбец матрицы  $M$  есть действительная последовательность, сходящаяся к 0, т. е. что при  $m \rightarrow +\infty$  предел  $n$ -й координаты  $x^{(m)}$  для всякого фиксированного  $n = 1, 2, \dots$  равен 0, т. е.

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} x_n^{(m)} = 0.$$

Но это непосредственно следует из рассмотрения окрестности нуля, задаваемой матрицей  $(a_{mn})$ , состоящей из одной строки, на  $n$ -м месте которой стоит 1, а на остальных 0.

Теперь мы можем по индукции построить две строго возрастающие последовательности натуральных чисел  $m_1 < m_2 < \dots$  и  $n_1 < n_2 < \dots$ , такие, что для  $j \in \mathbb{N}$

$$(a) \quad \sum_{n=1}^{n_j} |x_n^{(m_j)}| < \varepsilon, \quad \sum_{n=n_{j+1}+1}^{+\infty} |x_n^{(m_j)}| < \varepsilon,$$

и, следовательно,

$$(b) \quad \sum_{n=n_j+1}^{n_{j+1}} |x_n^{(m_j)}| > 3\varepsilon.$$

Наконец, определим последовательность  $\{a_n\}$  следующим образом:

$$a_n = \begin{cases} 1, & \text{если } 1 \leq n < n_1, \\ \operatorname{sgn} x_n^{(m_j)}, & \text{если } n_j + 1 \leq n \leq n_{j+1} \end{cases}$$

для  $j = 1, 2, \dots$ . Если  $N_0$  — окрестность нулевого вектора, определяемая числом  $\varepsilon$  и матрицей  $(a_{mn})$ , состоящей из одной строки, составленной из членов  $\{a_n\}$ ,

$$N_0 = \left\{ y = \{y_n\} \mid \left| \sum_{n=1}^{+\infty} a_n y_n \right| < \varepsilon \right\},$$

то никакая точка  $x^{(m_j)}$  подпоследовательности  $\{x^{(m_j)}\}$  последовательности  $\{x^{(m)}\}$  не является элементом  $N_0$ :

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x_n^{(m_j)} \right| &\geq \sum_{n=n_j+1}^{n_{j+1}} |x_n^{(m_j)}| - \left| \sum_{n=1}^{n_j} a_n x_n^{(m_j)} \right| - \\ &\quad - \left| \sum_{n=n_{j+1}+1}^{+\infty} a_n x_n^{(m_j)} \right| > 3\varepsilon - \varepsilon - \varepsilon = \varepsilon. \end{aligned}$$

Но это означает, что  $\{x^{(m)}\}$  не может сходиться к 0. (Противоречие.)

**11. Пример топологического пространства  $X$ , множества  $A \subset X$  и предельной точки этого множества, не являющейся пределом никакой последовательности точек из  $A$**

*Первый пример.* Пусть  $X$  — пространство из первого примера п. 10, и пусть  $A$  — какое-либо несчетное правильное (или собственное) подмножество из  $X$ . Тогда любая точка

множества  $X \setminus A$  будет предельной точкой  $A$ , но поскольку  $x$  не может быть пределом последовательности точек из  $A$  в дискретной топологии, то это же справедливо и для топологии, описанной в этом примере.

*Второй пример.* Пусть  $X$  — пространство из второго примера п. 10 с топологией, которая была введена в начале примера. Положим  $A = X \setminus \{\Omega\}$ . Тогда  $\Omega$  будет предельной точкой  $A$ , но никакая последовательность из  $A$  не может сходиться к  $\Omega$ .

*Третий пример.* (См. [35], где построен аналогичный пример, а также [3], [18], [29] и [31], где даны определения и излагаются дальнейшие сведения.) Пусть  $X$  — гильбертово пространство  $l_2$  всех действительных (или комплексных) последовательностей чисел  $x = \{x_n\}$ , таких, что  $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n^2 < +\infty$  (или  $\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^2 < +\infty$  в комплексном случае). В этом пространстве для любых двух точек  $x = \{x_n\}$  и  $y = \{y_n\}$  определено скалярное произведение (или внутреннее произведение)  $(x, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n y_n$  (или  $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n \bar{y}_n$  в комплексном случае).

Это скалярное произведение обладает следующими свойствами для любых  $x, y, z \in l_2$  и  $\lambda \in \mathbb{R}$  (с этого момента в настоящем примере рассматривается лишь пространство действительных последовательностей):

- (i)  $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$ ,
- (ii)  $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$ ,
- (iii)  $(y, x) = (x, y)$ ,
- (iv)  $(x, x) \geq 0$ ,

(v) если  $\|x\| = (x, x)^{1/2}$ , то  $\|\cdot\|$  является нормой, относительно которой  $l_2$  является банаховым пространством.

Превратим теперь пространство  $X = l_2$  в топологическое пространство  $(X, \mathcal{O})$ , введя в нем систему окрестностей, определенную аналогично тому, как это сделано в третьем примере п. 10:

$$N_x \equiv \{y \mid b \in B \Rightarrow |(y - x, b)| < \varepsilon\},$$

где  $x \in X$ ,  $\varepsilon > 0$ , а  $B$  — любое непустое конечное множество точек из  $X$ .

Пусть  $A$  — множество точек  $\{x^{(m)}\}$ , где  $x^{(m)}$  — точка,  $m$ -я координата которой равна  $\sqrt{m}$ , а все остальные координаты равны нулю, т. е.

$$x^{(m)} = (0, 0, \dots, 0, \sqrt{m}, 0, \dots).$$

Покажем сначала, что нулевой вектор будет предельной точкой  $A$ . Предположим, что окрестность нуля

$$N_0 \equiv \{y \mid b \in B \Rightarrow |(y, b)| < \varepsilon\}$$

(где  $\varepsilon > 0$ , а  $B$  состоит из точек  $b^{(1)} = \{b_n^{(1)}\}, \dots, b^{(p)} = \{b_n^{(p)}\}$ ) не содержит ни одной точки  $x^{(m)}$ . Это означает, что

$$\forall m \in \mathbb{N} \exists k \in \{1, 2, \dots, p\} \exists |V_m b_m^{(k)}| \geq \varepsilon$$

и, следовательно,

$$\sum_{k=1}^p \sum_{m=1}^{+\infty} (b_m^{(k)})^2 = \sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^p (b_m^{(k)})^2 \geq \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon^2}{m} = +\infty,$$

что противоречит предположению о сходимости ряда  $\sum_{m=1}^{+\infty} (b_m^{(k)})^2$  для  $k = 1, 2, \dots, p$ .

Наконец, покажем, что никакая последовательность точек из  $A$  не может сходиться к нулевому вектору. Легко показать, что если

$$x^{(m_1)}, x^{(m_2)}, \dots, x^{(m_j)}, \dots \rightarrow 0,$$

то последовательность  $m_1, m_2, \dots$  не ограничена. Следовательно, не ограничивая общности, можно предположить, что  $m_1 < m_2 < \dots$  и

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{m_j} < +\infty.$$

Чтобы закончить доказательство, определим окрестность  $N_0$  точки 0 при помощи  $\varepsilon \equiv 1$  и множества  $B$ , состоящего из единственного вектора  $b$ ,  $m_j$ -я координата которого равна  $1/\sqrt{m_j}$  для  $j = 1, 2, \dots$ , а все остальные координаты равны нулю. Тогда никакая точка последовательности  $\{x^{(m_j)}\}$  не может принадлежать  $N_0$ , ибо  $(x^{(m_j)}, b) = 1$  для  $j = 1, 2, \dots$

*Четвертый пример.* См. пример 12 этой главы.

Отметим, что явление, описанное в настоящих примерах, не может иметь места в метрическом пространстве и, следовательно, ни одно из описанных выше пространств не является метрическим и даже не метризуемо.

## 12. Неметризуемое топологическое пространство $X$ с функциями в качестве точек и топологией, соответствующей поточечной сходимости

Пусть  $(X, \mathcal{O})$  — пространство всех действительнозначных непрерывных функций, заданных на  $[0,1]$ , и пусть топология  $\mathcal{O}$  порождается системой окрестностей

$$N_f = \{g \mid x \in F \Rightarrow |g(x) - f(x)| < \varepsilon\},$$

где  $f \in X$ ,  $\varepsilon > 0$ , а  $F$  — конечное непустое подмножество замкнутого интервала  $[0,1]$ . Ясно, что если в этой топологии  $g_n \rightarrow g$  при  $n \rightarrow +\infty$ , то  $g_n(x) \rightarrow g(x)$  при  $n \rightarrow +\infty$  для каждого  $x \in [0,1]$ , поскольку в качестве  $F$  можно брать одноточечные множества  $\{x\}$ . С другой стороны, если  $g_n(x) \rightarrow g(x)$  при  $n \rightarrow +\infty$  для каждого  $x \in [0,1]$ , то  $g_n \rightarrow g$  при  $n \rightarrow +\infty$ . В самом деле, для каждого  $\varepsilon > 0$  и конечного подмножества  $F$  интервала  $[0,1]$  можно выбрать  $n$  настолько большим, чтобы выполнялось неравенство  $|g_n(x) - g(x)| < \varepsilon$  для каждого  $x \in F$ .

Пусть  $A$  — множество всех функций  $f$  из  $X$ , таких, что

$$(a) x \in [0,1] \Rightarrow 0 \leq f(x) \leq 1,$$

$$(b) \mu(\{x \mid f(x) = 1\}) \geq 1/2.$$

Тогда 0 является предельной точкой  $A$ . Однако если некоторая последовательность  $\{f_n\}$  элементов из  $A$  сходится к 0 в топологии  $\mathcal{O}$ , то  $\{f_n(x)\}$  сходится к 0 в каждой точке  $x \in [0,1]$ . Следовательно, по теореме Лебега о возможности предельного перехода под знаком интеграла в случае равномерно ограниченной последовательности функций получим

$\int_0^1 f_n(x) dx \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow +\infty$ . Но это противоречит неравенству

$\int_0^1 f_n(x) dx \geq 1/2$ . Наконец, принимая во внимание последнее замечание к примеру 11, заключаем, что  $X$  не метризуемо.

**13. Непрерывное отображение одного топологического пространства на другое, не являющееся ни открытым, ни замкнутым**

*Первый пример.* Пусть функция  $f(x) = e^x \cos x$  задана на  $\mathbb{R}$ , где определена обычная топология. Легко видеть, что  $f$  отображает  $\mathbb{R}$  на  $\mathbb{R}$  непрерывно, однако множество  $f((-\infty, 0))$  не является открытым, а множество  $f(\{-n\pi | n \in \mathbb{N}\})$  не является замкнутым.

*Второй пример.* Возьмем в качестве  $X$  пространство  $\mathbb{R}$  с дискретной топологией, в качестве  $Y$  — пространство  $\mathbb{R}$  с обычной топологией и рассмотрим тождественное отображение первого пространства на второе.

**14. Отображение одного топологического пространства на другое, являющееся одновременно открытым и замкнутым, но не являющееся непрерывным**

*Первый пример.* Пусть  $X$  — единичная окружность  $\{(x, y) | x^2 + y^2 = 1\}$  с топологией, индуцированной обычной топологией на плоскости. Далее, пусть  $Y$  — полуоткрытый интервал  $[0, 2\pi)$  с топологией, индуцированной обычной топологией в  $\mathbb{R}$ . Наконец, пусть  $f$  — отображение  $(x, y) \rightarrow \theta$ , где  $x = \cos \theta$ ,  $y = \sin \theta$  и  $0 \leq \theta < 2\pi$ . Тогда  $f$  одновременно и открыто, и замкнуто, поскольку обратное отображение непрерывно. Однако  $f$  разрывно в точке  $(1, 0)$ .

*Второй пример.* Отображение, обратное к отображению из второго примера п. 13.

**15. Замкнутое отображение одного топологического пространства на другое, не являющееся ни непрерывным, ни открытым**

Пусть  $X$  — единичная окружность  $\{(x, y) | x^2 + y^2 = 1\}$  с топологией, индуцированной обычной топологией на плоскости. Далее, пусть  $Y$  — полуоткрытый интервал  $[0, \pi)$  с топологией, индуцированной обычной топологией в  $\mathbb{R}$ . Наконец, пусть  $f$  — отображение

$$(\cos \theta, \sin \theta) \rightarrow \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leq \theta \leq \pi, \\ \theta - \pi, & \text{если } \pi < \theta < 2\pi. \end{cases}$$

Тогда  $f$  не является открытым, так как открытая верхняя полуокружность из  $X$  отображается в точку. Кроме того,  $f$  не является непрерывным в точке  $(1, 0)$  (см. первый пример п. 14). Однако, как мы сейчас убедимся,  $f$  замкнуто. Предположим противное, т. е. что  $f$  не замкнуто. Тогда в  $X$  существует замкнутое множество  $A$ , такое, что  $B \equiv f(A)$  не замкнуто в  $Y$ . Следовательно, существует последовательность  $\{b_n\}$  точек из  $B$ , такая, что  $b_n \rightarrow b$ , а  $b \notin B$ . Пусть  $f(p_n) = b_n$ , где  $p_n \in A$  для  $n = 1, 2, \dots$ . Поскольку  $A$  компактно, то без ограничения общности можно предположить, что  $\{p_n\}$  сходится,  $p_n \rightarrow p \in A$ . Но так как  $f(p_n) \rightarrow b \neq f(p)$ , то  $f$  разрывно в точке  $p$  и, следовательно,  $p = (1, 0)$ . Это означает, что существует подпоследовательность последовательности  $\{p_n\}$ , стремящаяся к точке  $(1, 0)$  либо по верхней, либо по нижней полуокружности. В первом случае  $b_n \rightarrow 0 \in B$ , а во втором случае  $\{b_n\}$  не может сходиться в  $Y$ . Итак, в обоих случаях получено противоречие; следовательно,  $f$  замкнуто.

#### **16. Отображение одного топологического пространства на другое, являющееся непрерывным и открытым, но не являющееся замкнутым**

Пусть  $(X, \mathcal{O})$ —евклидова плоскость с обычной топологией,  $(Y, \mathcal{J})$ —пространство  $\mathbf{R}$  с обычной топологией, и, наконец, пусть отображение  $f$  есть проектирование  $P: (x, y) \rightarrow x$ . Тогда  $P$ , очевидно, непрерывно и открыто, однако  $P(\{(x, y) | y = 1/x > 0\})$  не замкнуто в  $(Y, \mathcal{J})$ .

#### **17. Открытое отображение одного топологического пространства на другое, не являющееся ни непрерывным, ни замкнутым**

*Первый пример.* Пусть  $X = Y = \mathbf{R}$  с обычной топологией, и пусть  $f$ —функция, определенная в примере 27 гл. 8, множество значений которой на всяком непустом открытом интервале совпадает с  $\mathbf{R}$ . Эта функция, очевидно, является открытым отображением, поскольку образ всякого непустого открытого множества есть  $\mathbf{R}$ . Кроме того,  $f$  всюду разрывана. Покажем, что отображение  $f$  не замкнуто. Пусть точка

$x_n \in (n, n+1)$  такова, что  $\frac{1}{n+1} < f(x_n) < \frac{1}{n}$  для  $n=1, 2, \dots$ .

Тогда  $\{x_n\}$  замкнуто, а  $\{f(x_n)\}$  — нет.

*Второй пример.* Пусть  $(X, \mathcal{O})$  — плоскость с топологией  $\mathcal{O}$ , состоящей из пустого множества  $\emptyset$  и дополнений счетных множеств, а  $(Y, \mathcal{J})$  — пространство  $\mathbf{R}$  с топологией  $\mathcal{J}$ , состоящей из пустого множества  $\emptyset$  и дополнений конечных множеств. Наконец, в качестве отображения рассмотрим проектирование  $P: (x, y) \rightarrow x$ . Тогда  $P$  открыто, поскольку любое непустое открытое множество в  $(X, \mathcal{O})$  должно содержать некоторую горизонтальную прямую, образ которой есть  $\mathbf{R}$ . С другой стороны,  $P$  не замкнуто, так как множество точек  $(n, 0)$ , где  $n \in \mathbf{N}$ , замкнуто в  $(X, \mathcal{O})$ , а его образ не замкнут в  $(Y, \mathcal{J})$ . Наконец,  $P$  не является непрерывным, так как прообраз любого открытого в  $(Y, \mathcal{J})$  множества, которое является правильным подмножеством в  $Y$ , не может быть открытым в  $(X, \mathcal{O})$ .

### 18. Непрерывное замкнутое отображение одного топологического пространства на другое, не являющееся открытым

В качестве пространств  $X$  и  $Y$  возьмем замкнутый интервал  $[0, 2]$  с обычной топологией. Положим

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leq x \leq 1, \\ x - 1, & \text{если } 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

Тогда отображение  $f$ , очевидно, непрерывно и, следовательно, замкнуто, так как  $X$  и  $Y$  — компактные метрические пространства. С другой стороны, множество  $f((0, 1))$  не является открытым в  $Y$ .

### 19. Топологическое пространство $X$ и его подпространство $Y$ , содержащее два непересекающихся открытых множества, которые не являются пересечением подпространства $Y$ с непересекающимися открытыми множествами пространства $X$

Пусть  $X \equiv \mathbf{N}$ , а открытыми множествами являются  $\emptyset$  и дополнения конечных множеств. Пусть далее  $Y \equiv \{1, 2\}$ . Тогда  $\{1\} = Y \cap (X \setminus \{2\})$  и  $\{2\} = Y \cap (X \setminus \{1\})$ , так что топология подпространства  $Y$  дискретна. Однако непересекающиеся открытые множества  $\{1\}$  и  $\{2\}$  подпространства  $Y$

не являются пересечениями подпространства  $Y$  с непересекающимися открытыми множествами пространства  $X$ , поскольку любые два непустых открытых множества пространства  $X$  пересекаются.

**20. Два негомеоморфных топологических пространства, каждое из которых является непрерывным взаимно однозначным образом другого**

*Первый пример.* Пусть  $X$  и  $Y$  — следующие подпространства пространства  $\mathbf{R}$ , наделенного обычной топологией:

$$X = \bigcup_{n=0}^{+\infty} ((3n, 3n+1) \cup \{3n+2\}),$$

$$Y = (X \setminus \{2\}) \cup \{1\}.$$

Определим отображение  $S$  пространства  $X$  на  $Y$  и отображение  $T$  пространства  $Y$  на  $X$  формулами:

$$S(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x \neq 2, \\ 1, & \text{если } x = 2, \end{cases} \quad T(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}y, & \text{если } y \leq 1, \\ \frac{1}{2}y - 1, & \text{если } 3 < y < 4, \\ y - 3, & \text{если } y \geq 5. \end{cases}$$

Тогда  $S$  и  $T$  непрерывны, взаимно однозначны и являются отображениями *на*. Однако  $X$  и  $Y$  не гомеоморфны, так как при любом гомеоморфизме  $Y$  на  $X$  точка 1 пространства  $Y$  не может иметь образа.

*Второй пример.* Пусть  $X$  и  $Y$  — множества на плоскости с обычной топологией, указанные на рис. 12. Вертикальные отрезки имеют длины, равные 2, и являются открытыми на верхних концах, а окружности имеют единичные радиусы. Отображение  $S$  пространства  $X$  на  $Y$  определяется следующим образом: верхняя часть рис. 12 при помощи параллельного переноса накладывается на нижнюю так, что горизонтальная прямая множества  $X$  отображается на горизонтальную прямую множества  $Y$ , окружности  $D_n$  — на  $C_{n+1}$ , отрезок  $A_1$  — на  $C_1$ , отрезки  $A_{n+2}$  — на  $B_{n+1}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Отображение же отрезка  $A_2$  на окружность  $B_1$  определяется отдельно формулами  $x = \sin \pi t$ ,  $y = 1 - \cos \pi t$ , где  $0 \leq t < 2$ . Отображение  $T$  множества  $Y$  на  $X$  определим так: нижнюю часть рис. 12 сместим влево и наложим ее на верхнюю так, чтобы окруж-

ность  $B_1$  совпала с  $D_1$ , горизонтальная прямая множества  $Y$  — с горизонтальной прямой множества  $X$ , окружности  $C_{n+1}$  — с  $D_{n+2}$ , отрезки  $B_{n+1}$  — с  $A_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Наконец, сегмент  $C_1$  отобразим на окружность  $D_2$  при помощи формул такого же типа, как и выше. Отображения  $S$  и  $T$  обладают нужными свойствами. Предлагаем читателю в качестве упражнения доказать, что пространства  $X$  и  $Y$  не гомеоморфны.

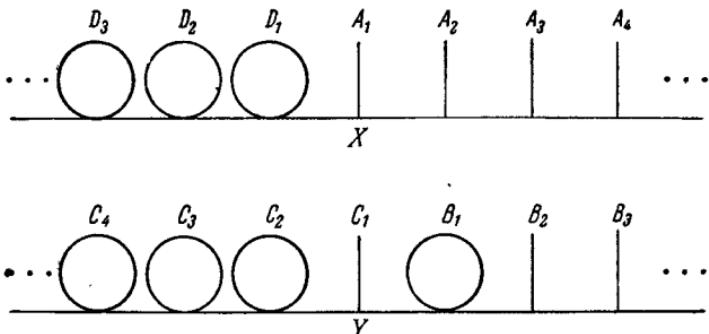


Рис. 12.

21. Разбиение трехмерного евклидова шара  $B$  на пять непересекающихся подмножеств  $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5$  (при этом  $S_5$  состоит из единственной точки), таких, что при жестких движениях  $R_1, R_2, R_3, R_4, R_5$  справедливы следующие соотношения:

$$B \cong R_1(S_1) \cup R_2(S_2) \cong R_3(S_3) \cup R_4(S_4) \cup R_5(S_5)$$

(Здесь символ  $\cong$  означает „конгруэнтен“. См. ссылку, которая следует ниже.)

22. Для любых двух евклидовых шаров  $B_\epsilon$  и  $B_M$ , радиусы которых суть произвольно заданные числа  $\epsilon > 0$  и  $M > 0$ , всегда существует разбиение шара  $B_\epsilon$  на конечное число непересекающихся подмножеств  $S_1, S_2, \dots, S_n$ , таких, что при жестких движениях  $R_1, R_2, \dots, R_n$  справедливо, равенство

$$B_M = R_1(S_1) \cup R_2(S_2) \cup \dots \cup R_n(S_n)$$

Два последних примера впервые были построены в работах Хаусдорфа, Банаха, Тарского, фон Неймана и Робинсона. Однако мы ограничимся лишь одной ссылкой, где они излагаются наиболее подробно (см. [43]).

## ГЛАВА 13

### ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

#### Введение

Функциональным пространством, или пространством функций, называется совокупность функций, имеющих общую область определения  $D$ . Обычно предполагается, что функциональное пространство обладает какой-либо алгебраической или топологической структурой. В настоящей главе мы сосредоточим внимание на *алгебраических* структурах некоторых пространств действительнозначных функций действительного переменного, общая область определения которых есть некоторый фиксированный интервал  $I$ .

Функциональное пространство  $S$  действительнозначных функций, заданных на интервале  $I$ , называется векторным пространством (или линейным пространством) над  $\mathbf{R}$  (системой действительных чисел), если  $S$  замкнуто относительно линейных комбинаций с действительными коэффициентами, т. е. если

$$f, g \in S, \lambda, \mu \in \mathbf{R} \Rightarrow \lambda f + \mu g \in S,$$

где функция  $\lambda f$  определяется следующим образом:

$$(\lambda f)(x) \equiv \lambda(f(x)).$$

Легко показать, что пространство действительнозначных функций, заданных на некотором интервале, является векторным пространством тогда и только тогда, когда оно замкнуто относительно двух операций, а именно относительно *сложения*  $f + g$  и *умножения на скаляр*  $\lambda f$ . Абстрактное понятие *векторного пространства* определено аксиоматически в введении к гл. 12. (Дальнейшие сведения см. в [19] и [15]\*.) Многие наиболее важные классы функций, встречающиеся в анализе, являются линейными пространствами над  $\mathbf{R}$  (или над полем комплексных чисел  $\mathbf{C}$ ; в этом случае коэффициенты  $\lambda$  и  $\mu$  — произвольные комплексные числа). Примерами пространств действительнозначных функций, которые являются линейными пространствами над  $\mathbf{R}$ , могут служить:

1. Совокупность *всех* (действительнозначных) функций на интервале  $I$ .
2. Совокупность всех *ограниченных* функций на интервале  $I$ .
3. Совокупность всех функций, *интегрируемых по Риману* на замкнутом интервале  $[a, b]$ .
4. Совокупность всех функций, *измеримых по Лебегу* на интервале  $I$ .
5. Совокупность всех функций, *интегрируемых по Лебегу* на интервале  $I$ .
6. Совокупность всех функций, измеримых на интервале  $I$ ,  $p$ -я степень абсолютных значений которых интегрируема по Лебегу на  $I$  ( $p \geq 1$ ).
7. Совокупность всех функций, *непрерывных* на интервале  $I$ .
8. Совокупность всех функций, *кусочно непрерывных* на замкнутом интервале  $[a, b]$ . (См. [36], стр. 131.)
9. Совокупность всех функций, *кусочно гладких* на замкнутом интервале  $[a, b]$ . (См. [36], стр. 131.)
10. Совокупность всех функций, имеющих производные  $n$ -го порядка на интервале  $I$ , где  $n$  — некоторое фиксированное натуральное число.
11. Совокупность всех функций, имеющих *непрерывные* производные  $n$ -го порядка на интервале  $I$ , где  $n$  — некоторое фиксированное натуральное число.
12. Совокупность всех *бесконечно дифференцируемых* функций на интервале  $I$ .
13. Совокупность всех (*алгебраических*) *полиномов* на интервале  $I$ .
14. Совокупность всех (*алгебраических*) полиномов на интервале  $I$ , степень которых не превосходит некоторого натурального  $n$ .
15. Совокупность всех *тригонометрических полиномов* на интервале  $I$ , имеющих вид

$$\sum_{i=0}^n a_i \cos ix + \beta_i \sin ix, \quad (1)$$

- где  $n$  — любое неотрицательное целое число.
16. Совокупность всех тригонометрических полиномов вида (1), где  $n$  фиксировано.
  17. Совокупность всех *ступенчатых* функций на замкнутом интервале  $[a, b]$ .
  18. Совокупность всех *постоянных функций* на интервале  $I$ .
  19. Совокупность всех функций, удовлетворяющих данному линейному однородному дифференциальному уравнению на интервале  $I$ , например уравнению

$$\frac{d^3y}{dx^3} + \sin x \frac{d^2y}{dx^2} + e^x \frac{dy}{dx} - xy = 0,$$

на интервале  $I$ . Если в предыдущих примерах рассматривать комплекснозначные функции, то получим еще девятнадцать примеров линейных пространств над  $\mathbb{R}$ .

Линейные пространства играют существенную роль в анализе. Однако существует несколько важных классов действительнозначных функций, которые не являются линейными пространствами. Некоторые из них указаны в следующих пяти примерах: (i) класс всех монотонных функций на интервале  $[a, b]$ , (ii) класс всех периодических функций на  $(-\infty, +\infty)$ , (iii) класс всех полунепрерывных функций на интервале  $[a, b]$ , (iv) класс всех функций, квадраты которых интегрируемы по Риману на  $[a, b]$ , (v) класс всех функций, квадраты которых интегрируемы по Лебегу на  $[a, b]$ . Можно сказать, что эти пространства являются нелинейными на интервале  $[a, b]$ .

Пространство  $S$  действительных функций, заданных на интервале  $I$ , называется алгеброй над  $\mathbb{R}$ , если оно замкнуто относительно линейных комбинаций с действительными коэффициентами и относительно операции произведения функций, т. е. если  $S$  есть линейное пространство над  $\mathbb{R}$  и

$$f \in S, g \in S \Rightarrow fg \in S.$$

(Точно так же, как и понятие линейного пространства, абстрактное понятие алгебры определяется аксиоматически. См. [19], т. II, стр. 36, 225.) Из тождества

$$fg = \frac{1}{4}(f+g)^2 - \frac{1}{4}(f-g)^2 \quad (2)$$

следует, что линейное функциональное пространство является алгеброй тогда и только тогда, когда оно замкнуто относительно операции возвведения в квадрат.

Пространство  $S$  действительнозначных функций, заданных на интервале  $I$ , называется структурой, если оно замкнуто относительно двух бинарных операций  $\vee$  и  $\wedge$ , которые определяются следующим образом:

$$(f \vee g)(x) \equiv \max(f(x), g(x)),$$

$$(f \wedge g)(x) \equiv \min(f(x), g(x)).$$

(Абстрактное понятие структуры определяется аксиоматически. См. [8].) Вместе с данной действительнозначной функцией  $f$  часто рассматриваются неотрицательные функции  $f^+$  и  $f^-$ , определяемые следующими равенствами:

$$f^+ \equiv f \vee 0, f^- \equiv (-f) \vee 0. \quad (3)$$

Эти функции связаны такими соотношениями:

$$f = f^+ - f^-, \quad |f| = f^+ + f^-, \quad (4)$$

$$f^+ = \frac{1}{2}|f| + \frac{1}{2}f, \quad f^- = \frac{1}{2}|f| - \frac{1}{2}f. \quad (5)$$

Отметим также, что для операций максимума и минимума справедливы следующие равенства:

$$f \vee g = -[(-f) \wedge (-g)], \quad (6)$$

$$f \wedge g = -[(-f) \vee (-g)], \quad (7)$$

$$f \vee g = \frac{1}{2}(f + g) + \frac{1}{2}|f - g|, \quad (8)$$

$$f \wedge g = \frac{1}{2}(f + g) - \frac{1}{2}|f - g|. \quad (9)$$

Из равенств (3) — (9) следует, что линейное функциональное пространство является структурой тогда и только тогда, когда оно замкнуто относительно какой-нибудь *одной* из следующих операций:

$$f \vee g, \quad f \wedge g, \quad (10)$$

$$f^+, \quad f^-, \quad |f|. \quad (11)$$

Среди приведенных выше примеров линейных пространств как алгебрами, так и структурами являются пространства примеров 1—4, 7, 8, 17 и 18. Ни алгебры, ни структуры не образуют пространства примеров 14 (см. ниже пример 6), 16 и 19. Пространства примеров 9, 10, 11 (см. ниже пример 7), 12, 13 и 15 являются алгебрами, но не являются структурами. Пространства примеров 5 (см. ниже пример 8) и 6 являются структурами, но не являются алгебрами.

**1. Две монотонные функции, сумма которых не монотонна**

$$\sin x + 2x \text{ и } \sin x - 2x \text{ на } [-\pi, \pi].$$

**2. Две периодические функции, сумма которых не имеет периода**

$$\sin x \text{ и } \sin ax \text{ (а иррационально) на } (-\infty, +\infty).$$

Если бы функция  $\sin x + \sin ax$  имела отличный от нуля период  $p$ , то для любого действительного  $x$  были бы

справедливы следующие тождества:

$$\sin(x + p) + \sin(ax + ap) = \sin x + \sin ax,$$

$$\sin(x + p) - \sin x = -[\sin(ax + ap) - \sin ax],$$

$$\cos\left(x + \frac{1}{2}p\right)\sin\left(\frac{1}{2}p\right) = -\cos\left(ax + \frac{1}{2}ap\right)\sin\left(\frac{1}{2}ap\right),$$

$$\cos x \sin\left(\frac{1}{2}p\right) = -\cos(ax) \sin\left(\frac{1}{2}ap\right).$$

Если положить  $x = \frac{1}{2}\pi$ , то левая часть последнего тождества обратится в нуль. Следовательно,  $\sin\frac{1}{2}ap = 0$ , а поэтому  $ap$  кратно  $2\pi$ . Если же положить  $ax = \frac{1}{2}\pi$ , то обратится в нуль правая часть этого тождества. Следовательно,  $\sin\frac{1}{2}p = 0$ , а поэтому  $p$  кратно  $2\pi$ . Но это противоречит предыдущему, так как  $a$  иррационально. (См. [38], стр. 550, замечание.)

### 3. Две полуунпрерывные функции, сумма которых не является полуунпрерывной

Положим

$$f(x) \equiv \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0, \\ 2, & \text{если } x = 0, \\ -1, & \text{если } x < 0, \end{cases} \quad g(x) \equiv \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0, \\ -2, & \text{если } x = 0, \\ -1, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Тогда  $f(x)$  всюду полуунпрерывна сверху,  $g(x)$  всюду полуунпрерывна снизу, однако  $f(x) + g(x)$  не является полуунпрерывной в точке  $x = 0$ .

Возможны и более интересные примеры, когда каждая из функций  $f$  и  $g$  полуунпрерывна всюду, однако в одних точках эти функции полуунпрерывны *сверху*, а в других — *снизу*. Для построения таких примеров условимся, что обозначение  $p/q$ , где  $p$  и  $q$  — целые числа, представляет собой

несократимую дробь, причем  $q > 0$ . Число нуль будем представлять в виде отношения  $0/1$ . Положим

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x = p/q, q \text{ нечетно,} \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} -1, & \text{если } x = p/q, q \text{ четно,} \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда

$$f(x) + g(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x = p/q, q \text{ нечетно,} \\ -1, & \text{если } x = p/q, q \text{ четно,} \\ 0, & \text{если } x \text{ иррационально.} \end{cases}$$

Следовательно,  $f(x) + g(x)$  полунепрерывна тогда и только тогда, когда  $x$  рационально, т. е.  $f + g$  почти всюду не является полунепрерывной.

Теперь рассмотрим следующие три функции:

$$F(x) = \begin{cases} 4/q, & \text{если } x = p/q, q \text{ нечетно,} \\ -2 - 4/q, & \text{если } x = p/q, q \text{ четно,} \\ -2, & \text{если } x \text{ иррационально,} \end{cases}$$

$$G(x) = \begin{cases} -1 - 1/q, & \text{если } x = p/q, q \text{ нечетно,} \\ 1 + 1/q, & \text{если } x = p/q, q \text{ четно,} \\ -1, & \text{если } x \text{ иррационально,} \end{cases}$$

$$H(x) = \begin{cases} -1 - 1/q, & \text{если } x = p/q, q \text{ нечетно,} \\ 3 + 1/q, & \text{если } x = p/q, q \text{ четно,} \\ 3, & \text{если } x \text{ иррационально.} \end{cases}$$

Каждая из функций  $F$ ,  $G$  и  $H$  полунепрерывна всюду, однако их сумма

$$F(x) + G(x) + H(x) = \begin{cases} -2 + 2/q, & \text{если } x = p/q, q \text{ нечетно,} \\ 2 - 2/q, & \text{если } x = p/q, q \text{ четно,} \\ 0, & \text{если } x \text{ иррационально,} \end{cases}$$

не является полунепрерывной *ни в одной* точке.

**4. Две функции, квадраты которых интегрируемы по Риману, но квадрат их суммы не интегрируем по Риману**

Положим

$$f(x) \equiv \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ иррационально,} \\ -1, & \text{если } x \text{ рационально,} \end{cases}$$

и

$$g(x) \equiv \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ — алгебраическое число,} \\ -1, & \text{если } x \text{ — трансцендентное число.} \end{cases}$$

Тогда

$$f(x) + g(x) = \begin{cases} 2, & \text{если } x \text{ — алгебраическое иррациональное число,} \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Очевидно, функции  $f^2$  и  $g^2$  являются постоянными, и, следовательно, они интегрируемы на любом замкнутом интервале, в частности на  $[0,1]$ . В то же время функция  $(f+g)^2$  разрывна всюду и поэтому не интегрируема по Риману *ни на каком* интервале, в частности она не интегрируема на  $[0,1]$ .

**5. Две функции, квадраты которых интегрируемы по Лебегу, но квадрат их суммы не интегрируем по Лебегу**

Пусть  $E_1$  — неизмеримое подмножество интервала  $[0,1]$ , а  $E_2$  — неизмеримое подмножество интервала  $[2,3]$ . (См. пример 11 гл. 8.) Положим

$$f(x) \equiv \begin{cases} 1, & \text{если } x \in [0,1] \cup E_2, \\ -1, & \text{если } x \in [2,3] \setminus E_2, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

$$g(x) \equiv \begin{cases} 1, & \text{если } x \in [2,3] \cup E_1, \\ -1, & \text{если } x \in [0,1] \setminus E_1, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Следовательно,

$$f(x) + g(x) = \begin{cases} 2, & \text{если } x \in E_1 \cup E_2, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Но так как

$$f^2(x) = g^2(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in [0,1] \cup [2,3], \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

а

$$(f(x) + g(x))^2 = \begin{cases} 4, & \text{если } x \in E_1 \cup E_2, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

то отсюда следует требуемый результат, поскольку множество  $E_1 \cup E_2$  неизмеримо.

## 6. Линейное функциональное пространство, не являющееся ни алгеброй, ни структурой

Совокупность полиномов  $cx + d$  степени не выше 1 на замкнутом интервале  $[0,1]$  образует линейное пространство. Это пространство не является алгеброй, поскольку ему не принадлежит квадрат элемента  $x$ . Это пространство не образует и структуры, так как элемент  $2x - 1$  принадлежит пространству, а элемент  $|2x - 1|$  ему не принадлежит.

## 7. Линейное функциональное пространство, являющееся алгеброй, но не являющееся структурой

Рассмотрим пространство всех функций, непрерывно дифференцируемых на  $[0,1]$ . Как следует из формулы  $(fg)' = fg' + f'g$ , оно образует алгебру. Однако оно не является структурой. В самом деле, функция

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = 0, \\ x^3 \sin 1/x, & \text{если } 0 < x \leq 1, \end{cases}$$

непрерывно дифференцируема на  $[0,1]$ , но ее абсолютное значение уже не будет дифференцируемо на бесконечном множестве точек, где  $f'(x) = 0$ . В действительности же функция  $|f(x)|$  даже не является кусочно гладкой.

## 8. Линейное функциональное пространство, являющееся структурой, но не являющееся алгеброй

Множество всех функций, интегрируемых по Лебегу на  $[0,1]$ , является линейным пространством и структурой.

Однако это пространство не образует алгебры, поскольку функция

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = 0, \\ x^{-1/2}, & \text{если } 0 < x \leq 1, \end{cases}$$

принадлежит пространству, а ее квадрат ему не принадлежит.

- 9. Две метрики в пространстве  $C([0,1])$  функций, непрерывных на  $[0,1]$ , такие, что дополнения единичного шара в одной из метрик всюду плотно в единичном шаре другой метрики**

Метрики  $\rho$  и  $\sigma$  определим следующим образом: для  $f, g \in C([0,1])$  положим

$$\rho(f, g) = \sqrt{\int_0^1 |f(x) - g(x)|^2 dx} \equiv \|f - g\|_2,$$

$$\sigma(f, g) = \sup_{0 \leq x \leq 1} |f(x) - g(x)| \equiv \|f - g\|_\infty.$$

Пусть  $P \equiv \{ f \mid \rho(f, 0) \leq 1 \}$ ,  $\Sigma \equiv \{ f \mid \sigma(f, 0) \leq 1 \}$  — единичные шары в этих метриках. Очевидно,  $\Sigma \subset P$ . Покажем, что дополнение  $\Sigma$  всюду плотно в  $P$ . В самом деле, пусть  $f \in P$  и  $0 < \varepsilon < 1$ . Если  $\|f\|_\infty > 1$ , то  $f \notin \Sigma$  и  $f$  принадлежит любому шару в метрике  $\rho$  с центром в точке  $f$ . Если же  $\|f\|_\infty \leq 1$ , то положим

$$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} - \frac{\varepsilon^2}{9} \text{ или } \frac{1}{2} + \frac{\varepsilon^2}{9} \leq x \leq 1, \\ 3, & \text{если } x = \frac{1}{2}, \\ \text{линейна на оставшихся интервалах.} & \end{cases}$$

Тогда  $f(x) + g(x) \notin \Sigma$  и

$$\|f - (f + g)\|_2 = \|g\|_2 < \sqrt{9 \cdot (\varepsilon^2/9)} = \varepsilon.$$

Этот последний пример выявляет существенное различие между конечномерными и бесконечномерными нормированными

линейными пространствами. В обоих случаях замкнутый единичный шар обладает тем свойством, что всякая прямая, проходящая через его центр (т. е. совокупность элементов, которые получаются умножением фиксированного ненулевого элемента на всевозможные скаляры), пересекает шар по замкнутому отрезку, средняя точка которого совпадает с центром шара. Тем самым в конечномерном пространстве топология определяется единственным образом. Настоящий пример показывает, что в бесконечномерном пространстве этот факт не имеет места.

## БИБЛИОГРАФИЯ

Александров П. С., Колмогоров А. Н.

- [1]\*<sup>1</sup>) Введение в теорию функций действительного переменного  
М.—Л., 1938.

Александров, Хопф (Alexandrov P., Hopf H.)

- [2] Topologie, Springer, Berlin, 1935.

Банах (Banach S.)

- [3] Théorie des opérations linéaires, Warsaw, 1932. (На украинском языке: Курс функціонального аналізу, Київ, 1948.)

Безикович (Besicovitch A. S.)

- [4] Sur deux questions de l'intégrabilité, *Journ. Soc. Math. et Phys. à l'Univ. à Perm*, 2 (1920).  
[5] On Kakeya's problem and a similar one, *Math. Z.*, 27 (1928), 312—320.  
[6] On the definition and value of the area of a surface, *Quart. J. Math.*, 16 (1945), 86—102.  
[7] The Kakeya problem, Math. Association of America Film, Modern Learning Aids, New York; *Amer. Math. Monthly*, 70, № 7 (1963), 697—706.

Биркгоф Г.

- [8] Теория структур, М., ИЛ, 1952.

Боас (Boas R. P.)

- [9] A primer of real functions, Carus Math. Monographs, № 13, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1960.

Брауэр (Brouwer L. E. J.)

- [10] Zur Analysis Situs, *Math. Ann.*, 68 (1909), 422—434.

Бурбаки Н.

- [11] Теория множеств, М., изд-во «Мир», 1965.  
[12] Общая топология. Основные структуры, М., Физматгиз, 1958.  
[13] Общая топология. Числа и связанные с ними группы и пространства, М., Физматгиз, 1959.

Вайдьянатхасвами (Vaidyanathaswamy R.)

- [14] Treatise on set topology, Part 1, Indian Math. Soc., Madras, 1947.

<sup>1)</sup> Звездочкой отмечены работы, добавленные при переводе.

Гельфанд И. М.

[15]\* Лекции по линейной алгебре, М., изд-во «Наука», 1966.

Гобсон (Hobson E. W.)

[16] The theory of functions, Harren Press, Washington, 1950.

Грейвз (Graves L. M.)

[17] Theory of functions of real variables, 2d ed., McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1956.

Данфорд Н., Шварц Дж. Т.

[18] Линейные операторы, Общая теория, М., ИЛ, 1962.

Джекобсон (Jacobson N.)

[19] Lectures in abstract algebra, vols. 1 and 2, D. Van Nostrand Company, Inc., New York, 1951.

Зигмунд А.

[20] Тригонометрические ряды, т. I и II, М., изд-во «Мир», 1965.

Какея (Kakeya S.)

[21] Some problems on maximum and minimum regarding ovals, *Tôhoku Sci. Reports*, 6 (1917), 71—88.

Каратедори (Carathéodory C.)

[22] Vorlesungen über reelle Funktionen, 2d ed., G. B. Teubner, Leipzig, 1927.

Келли (Kelley J. L.)

[23] General topology, D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, New York, 1955.

Кнастер, Куратовский (Knaster B., Kuratowski C.)

[24] Sur les ensembles convexes, *Fund. Math.*, 2 (1921), 201—255.

Колмогоров А. Н.

[25] О представлении непрерывных функций нескольких переменных суперпозицией непрерывных функций меньшего числа переменных, *ДАН СССР*, 108 (1956), 179—182.

Кук Р.

[26]\* Бесконечные матрицы и пространства последовательностей, М., Физматгиз, 1960.

Куратовский К.

[27] Топология, т. I, М., изд-во «Мир», 1966.

Лебег А.

[28] Интегрирование и отыскание примитивных функций, М.—Л., 1934.

Люмис Л.

[29] Введение в абстрактный гармонический анализ, М., ИЛ, 1956.

**Мазуркевич (Mazurkiewicz S.)**

- [30] *Compt. Rend. Soc. Sci. et Lettres de Varsovie*, 7 (1914), 322—383, especially 382—383.

**Мак-Шейн, Боттс (McShane E. J., Botts T. A.)**

- [31] *Real analysis*, D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, N. Y., 1959.

**Манро (Monge M. E.)**

- [32] *Introduction to measure and integration*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, Mass., 1953.

**Натансон И. П.**

- [33]\* Теория функций вещественной переменной, М., Физматгиз, 1957.

**фон Нейман Дж (von Neumann J.)**

- [34] *Zur Algebra der Funktionaloperationen und Theorie der normalen Operatoren*, *Math. Ann.*, 102 (1930), 370—427.

**Ньюмен (Newman M. H. A.)**

- [35] *Elements of the topology of plane sets of points*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1939.

**Олмстед (Olmsted J. M. H.)**

- [36] *Advanced calculus*, Appleton-Century-Crofts, Inc., New York, 1961.

- [37] *The real number system*, Appleton-Century-Crofts, Inc., New York, 1962.

- [38] *Real variables*, Appleton-Century-Crofts, Inc., New York, 1956.

**Оsgood (Osgood W. F.)**

- [39] *A Jordan curve of positive area*, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 4 (1903), 107—112.

**Пастор (Pastor J. R.)**

- [40] *Elementos de la teoria de functiones*, 3d ed., Ibero-Americana, Madrid — Buenos Aires, 1953.

**Поллард (Pollard H.)**

- [41] *The theory of algebraic numbers*, Carus Math. Monographs, № 9, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1950.

**Радо (Rado T.)**

- [42] *Length and area*, Amer. Math. Soc. Colloquium Publications, 30, New York, 1958.

**Робинсон (Robinson R. M.)**

- [43] *On the decomposition of spheres*, *Fund. Math.*, 34 (1947), 246—266.

**Рудин У.**

- [44] Основы математического анализа, М., изд-во «Мир», 1966.

**Сакс С.**

- [45]\* Теория интеграла, М., ИЛ, 1949.

## Серпинский (Sierpinski W.)

- [46] *Bull. Intern. Ac. Sciences Cracovie* (1911), 149.
- [47] Sur un problème concernant les ensembles mesurables superficiellement, *Fund. Math.*, 1 (1920), 112—115.
- [48] General topology, University of Toronto Press, Toronto, 1952.
- [49] Cardinal and ordinal numbers, Warsaw, 1958.

## Теплиц (Toeplitz O.)

- [50] Über allgemeine lineare Mittelbildungen, *Prace Matematyczne-Fizyczne*, 22 (1911), 113—119.

## Титчмарш Е.

- [51] Теория функций, М., Гостехиздат, 1951.

## Фихтенгольц Г. М.

- [52]\* Курс дифференциального и интегрального исчисления, тт. I—III, М., 1960.

## Халмощ П.

- [53] Теория меры, М., ИЛ, 1953.

## Хаусдорф Ф.

- [54] Теория множеств, М., Гостехиздат, 1937.

## Хенкок (Hancock H.)

- [55] Foundations of the theory of algebraic numbers, Macmillan, New York, 1931.

## Холл, Спенсер (Hall D., Spencer G.)

- [56] Elementary topology, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1955.

## Штейнниц (Steinitz E.)

- [57] Bedingte konvergente Reihen und konvexe Systeme, *Journ. für Math.*, 143 (1913), 128—175.

- [58] *Amer. Math. Monthly*, 68, № 1 (1961), 28, Problem 3.

- [59] *Amer. Math. Monthly*, 70, № 6 (1963), 674.

## Указатель обозначений

$\in (\notin)$	принадлежит (не принадлежит)	11
$\subseteq$	является подмножеством	11
$\Rightarrow$	влечет	11
$\Leftrightarrow$	тогда и только тогда	11
$\{a, b, c, \dots\}$	множество, состоящее из элементов $a, b, c, \dots$	11
$\{\dots   \dots\}$	множество всех ... таких, что	11
$\equiv$	равно по определению	11
$A \cup B$	объединение множеств $A$ и $B$	11
$A \cap B$	пересечение множеств $A$ и $B$	11
$A \setminus B$	разность множеств $A$ и $B$	12
$A'$	дополнение $A$	12
$\emptyset$	пустое множество	12
$(a, b)$	упорядоченная пара	12
$A \times B$	декартово произведение	12
$\exists$	существует (существуют)	12
$\exists$	такой, что	12
$D_f$	область определения $f$	12
$R_f$	множество значений $f$	12
$f^{-1}$	функция, обратная к $f$	13
$f: A \rightarrow B, A \xrightarrow{f} B$	функция $f \ni D_f = A, R_f \subset B$	14
$f \circ g$	композиция (суперпозиция) $f$ и $g$ $((f \circ g)(x) = f(g(x)))$	14
$F$	поле	15
$G$	группа	16
$P$	множество положительных элементов поля	16
$<, \leqslant, >, \geqslant$	символы упорядочения	17
$ x $	абсолютное значение $x$	17

$(a, b)$ , $[a, b]$	интервалы упорядоченной системы	17
$(a, b]$ , $[a, b]$		18
$(a, +\infty)$ , $(-\infty, a)$		18
$[a, +\infty)$ , $(-\infty, a]$		18
$(-\infty, +\infty)$		18
$N(a, \varepsilon)$	окрестность	18
$D(a, \varepsilon)$	проколотая окрестность	18
$\max(x, y)$	наибольший из элементов $x$ и $y$	18
$\min(x, y)$	наименьший из элементов $x$ и $y$	18
$\inf(A), \inf A$	точная нижняя грань $A$	18
$\sup(A), \sup A$	точная верхняя грань $A$	18
$x \leftrightarrow x'$	взаимно однозначное соответствие (отображение)	19
$\mathbb{R}$	система действительных чисел	19
$\operatorname{sgn} x$	специальная функция	19
$\chi_A$	характеристическая функция множества $A$	19
$\mathbb{N}$	множество натуральных чисел	19
$\mathbb{Q}$	поле рациональных чисел	20
$\mathbb{B}$	кольцо	20
$\mathbb{D}$	область целостности	20
$\mathbb{I}$	кольцо целых чисел	21
$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	предел функции в точке	21
$\forall$	для всех, для произвольного, для каждого	21
$f'(a)$	производная функции $f(x)$ в точке $x = a$	22
$\{a_n\}$	последовательность	22
$(x, y)$	комплексное число	23
$\mathbb{C}$	поле комплексных чисел	23
$x + iy$	комплексное число	23
$\mathbb{H}$	поле рациональных функций	26
$\Phi$	$\{a + b\sqrt{5} \mid a, b \in \mathbb{I}\}$	28
$m \mid n$	$m$ делит $n$	28
$\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$ , $\left( \bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n \right)$	объединение (пересечение) счетного множества множеств $A_1, A_2, \dots$	31
$F(A), I(A), \bar{A}$	граница, ядро, замыкание множества $A$	31
$\{U_\alpha\}$	открытое покрытие	32
$[x]$	$\sup \{n \mid n \in \mathbb{N}, n \leq x\}$	32

$\overline{\lim}_{x \rightarrow a} f(x)$	верхний (нижний) предел функции $f(x)$ в точке $x = a$	33
$D(\pm\infty, N)$	проколотая окрестность $\pm\infty$	33
$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$	предел функции $f(x)$ при $x \rightarrow +\infty$	33
$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$	бесконечные пределы	33
$F_\sigma$	множество типа $F_\sigma$	43
$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} A_n$	верхний (нижний) предел последовательности множеств $A_1, A_2, \dots$	68
$\sum a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$	бесконечный ряд	71
$(t_{ij})$	матрица	86
$f^{(n)}(x)$	$n$ -я производная функции $f(x)$	91
$\sigma$ -кольцо	кольцо	109
$\mathfrak{A}$	класс множеств	109
$\mathfrak{C}$	класс компактных множеств	109
$x + A$	сдвиг множества $A$ на число $x$	109
$\mathfrak{B}$	класс борелевских множеств	109
$\mathfrak{S}$	$\sigma$ -кольцо	109
$\rho \lll \sigma$	мера $\rho$ абсолютно непрерывна относительно $\sigma$	110
$X, (X, \mathfrak{S})$	пространство с мерой	110
$\widetilde{\mathfrak{B}}$	класс функций, измеримых по Лебегу	110
$\mu$	мера	110
$\mu_*(\mu^*)$	внутренняя (внешняя) мера	111
$C$	канторово множество	112
$c$	мощность множества	111
$D(A)$	разностное множество (множества $A$ )	114
$G_\delta, F_{\sigma\delta}, \dots$	множества типа $G_\delta, F_{\sigma\delta}, \dots$	120
$(r + A) \pmod 1$	сдвиг (множества $A$ на число $r$ ) по модулю 1	121
$I$	$\{z \mid z \in \mathbb{C},  z  = 1\}$	122
$I_0$	$\{z \mid z = e^{2\pi i\theta}, \theta \in \mathbb{Q}, 0 \leq \theta < 1\}$	122
$\widetilde{S}$	факторгруппа $I/I_0$	122
$\widetilde{\mu}$	мера на $I$	122
$\varphi$	канторова функция	126
$ I $	длина интервала $I$	136
$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, f_x, f_{xy},$		
$f_1, f_{21}, \dots$	частные производные функции	147

$P dx + Q dy$	дифференциал	159
$\vec{F}$	векторное поле	161
$E_2$	евклидова плоскость	163
$d(A, B)$	расстояние между множествами $A$ и $B$	163
$d(p, q)$	расстояние между точками $p$ и $q$	163
$\delta(A)$	диаметр множества $A$	163
$\aleph$	бесконечное кардинальное число	181
$\mathfrak{f}$	мощность множества всех замкнутых множеств на плоскости	181
$\Psi$	первое порядковое число мощности с	181
$A(S), \underline{A}(S), \bar{A}(S)$	площадь, внутренняя площадь, внешняя площадь плоского множества $S$	187
$\mathcal{N}$	сетка прямых	187
$(X, d)$	метрическое пространство	195
$d$	метрика	195
$d(x, y)$	расстояние между точками $x$ и $y$	195
$(X, \mathcal{G})$	топологическое пространство	195
$\mathcal{G}$	совокупность открытых множеств, топология	196
$\mathcal{T}$	индуцированная топология	196
$\mathcal{B}$	базис топологии	196
$\mathcal{M}$	система окрестностей	197
$(\emptyset, X), 2^X$	тривиальная, дискретная топология	197
$d^*(x, y)$	эквивалентная ограниченная метрика	198
$\ \cdot\ $	норма	199
$\Omega$	первое порядковое число, соответствующее несчетному множеству	204
$(x, y)$	скалярное произведение элементов $x$ и $y$	208
$(f \vee g)(x)$	$\max(f(x), g(x))$	218
$(f \wedge g)(x)$	$\min(f(x), g(x))$	218
$f^+, f^-$	$f \vee 0, (\neg f) \wedge 0$	218

## УКАЗАТЕЛЬ

- Абель Н. Х. 94  
Абсолютное значение 17  
Аксиома выбора 120  
— счетности вторая 199  
Алгебра 218  
Александров П. С. 53  
Архимеда аксиома 25, 27
- Базис Гамеля 47  
— топологии 196  
Банах С. 215  
Безикович А. С. 193, 194  
Бесселя неравенство 94  
Борелевское множество 109  
Бореля мера 110  
Бэр Р. 118  
Бэра теорема о категориях 118
- Ван дер Варден Б. Л. 42, 53  
Вейерштрасс К. В. Т. 53  
Векторный потенциал 161  
Вольтерра В. 141  
Вычитание 16
- Гельвин Ф. 123, 183  
Гильберт Д. 48, 169  
Главное значение в смысле Коши 60  
Граница множества 31  
Грань верхняя 18  
— нижняя 18  
— точная верхняя 18  
— — нижняя 18  
Группа абелева 16  
— коммутативная 16  
— мультиликативная 16  
— топологическая 123
- Движение жесткое 215  
Двоичная дробь 124
- Декартово произведение 12  
Деление 16  
Делитель 28  
— наибольший общий 28  
Диаметр множества 163  
Дивергенция векторного поля 161  
Дифференциал 159  
— локально полный 159  
— полный 159  
Дополнение множества 12
- Евклидова плоскость 163  
Единица 27
- Закон ассоциативности 15  
— двойственности де Моргана 119  
— дистрибутивности 15  
— коммутативности 15  
— сокращения 21  
Замыкание 32  
Значение функции 13
- Изоморфизм 19  
Интеграл Лебега 96  
— Лебега — Стильвеса 142  
— Римана 56  
Интервал бесконечный 18  
— замкнутый 17  
— конечный 17  
— открытый 17  
— — и замкнутый 18  
— полузамкнутый 17  
— полуоткрытый 17
- Какея С. 194  
Кантор Г. 112  
Квантор общности 21  
— существования 12

- Класс, замкнутый относительно**  
   сдвигов 109  
   — эквивалентности 111  
**Колмогоров А. Н.** 48, 98  
**Кольцо** 20  
**Композиция функций** 14  
**Контур плоский** 167  
**Координата пары** вторая 12  
   — — первая 12  
**Кривая замкнутая** 164  
   — Пеано 169  
   — спрямляемая 164  
**Круг замкнутый** 163  
   — минимальный 166  
   — открытый 164
- Лебег А.** 45, 97  
**Ломаная, вписанная в дугу** 164  
**Люксембург В. А. Дж.** 137
- Мазуркевич С.** 183  
**Матрица бесконечная** 86  
   — Теплица 86  
**Мера** 110  
   — абсолютно непрерывная 110  
   — Бореля 110  
   — внешняя 111  
   — внутренняя 111  
   — Лебега 110  
   — полная 110  
**Метрика** 195  
   — ограниченная 198  
**Множество борелевское** 109  
   — вполне несвязное 164  
   — всюду плотное 27  
   — второй категории 118  
   — выпуклое 165  
   — замкнутое 31  
   — значений функции 12  
   — измеримое по Лебегу 110  
   — индуктивное 19  
   — канторово 112  
   — — положительной меры 116  
   — компактное 32  
   — локально связное 164  
   — меры нуль 56  
   — неизмеримое 120  
   — непустое 12  
   — нигде не плотное 112  
   — открытое 31  
   — первой категории 118
- Множество плоское** 163  
   — полной меры 129  
   — положительной меры 115  
   — пустое 12  
   — связное 164  
   — совершенное 111  
   — счетное 32  
   — типа  $F_\sigma$  43  
   — типа  $G_\delta$  119
- Неравенство Бесселя** 94  
   — треугольника 195  
**Норма** 199  
**Нуль** 16  
**Нуль-множество** 110
- Область** 147  
   — жорданова 165  
   — значений функции 12  
   — нежорданова 165  
   — односвязная 162  
   — определения функции 12  
   — целостности поля 20  
**Оболочка выпуклая** 165  
**Объединение множеств** 11  
**Окрестность точки** 18  
   — — проколотая 18  
   — — сферическая 197  
**Операция бинарная** 15  
**Осгуд У. Ф.** 175  
**Основная теорема индукции** 20  
   — — интегрального исчисления 57  
**Отображение** 12  
   — взаимно однозначное 12  
   — замкнутое 165, 199  
   — непрерывное 16, 199  
   — открытое 165, 199  
   — топологическое 128, 199
- Параметризация** 164  
**Параметризующие функции** 164  
**Пастор Р.** 129  
**Пеано Дж.** 169  
**Пересечение множеств** 11  
**Площадь** 187  
   — внешняя 187  
   — внутренняя 187  
   — поверхности 193  
**Покрытие открытое** 32

- Поле архimedово 25  
 — векторное 160  
 — — соленоидальное 160  
 — полное 16  
 — — в смысле Коши 27  
 — — упорядоченное 19  
 Полином 25  
 Полное продолжение меры Бореля 110  
 Последовательность Коши 23, 198  
 — расходящаяся 22  
 — сходящаяся 22  
 — фундаментальная 23  
 Предел бесконечный 33  
 — верхний 33  
 — нижний 33  
 — функции 21  
 — множеств 68  
 — последовательности 22  
 — — частичный 64  
 Преобразование Фурье 96  
 Признак Даламбера 79  
 — Вейерштрасса 34, 93  
 — Коши 80  
 Примитивная 57  
 Принцип Кавальери 190  
 — максимального элемента 111  
 Продолжение функций 14  
 Проекция пары 12  
 — вторая 12  
 — первая 12  
 Произведение декартово 12  
 — рядов по Коши 82  
 — скалярное 208  
 Производная 22  
 Пространство банахово 200  
 — гильбертово 208  
 — линейное 199  
 — локально компактное 196  
 — метризуемое 198  
 — метрическое 195  
 — неполное 198  
 — нормированное векторное 199  
 — полное 198  
 — сепарабельное 199  
 — с мерой 110  
 — топологическое 195  
 — функциональное 215  
 — хаусдорфово 196
- Радиус 197  
 Разностное множество 114  
 Разность множеств 12  
 Расстояние между двумя множествами 163  
 — — функциями 59  
 Робинсон Р. 215  
 Ротор векторного поля 161  
 Ряд гармонический 72  
 — мажорирующий 72  
 — Маклорена 72  
 — неотрицательный 71  
 — положительный 71  
 — расходящийся 71  
 — степенной 71  
 — сходящийся 71  
 — тригонометрический 93  
 — условно сходящийся 73
- Свойство Коши 22  
 Сдвиг множества 109  
 — — по модулю 1, 121  
 Серпинский В. 74, 100, 181  
 Сигма-кольцо 109  
 Система действительных чисел 19  
 — окрестностей 197  
 Сложение 15  
 Соответствие взаимно однозначное 12  
 Структура 218  
 Сужение функции 14  
 Сумма ряда 71  
 Сходимость в среднем 143  
 — по мере 143  
 — почти всюду 142  
 — с интегрируемой мажорантой 143  
 Сходящаяся последовательность 22  
 — — множеств 68  
 — — функций 101
- Тарский А. 215  
 Теорема Гейне — Бореля 32  
 — Дини 107  
 — Жордана 165  
 — Колмогорова 47  
 — Лейбница 75  
 — Мертенса 82  
 — Мура — Осгуда 152

- Теорема о полном упорядочении 111  
 — о среднем значении 53  
 — Радона — Никодима 146  
 — Римана 74  
 — Ролля 30  
 — Стокса 161  
 — Стоуна — Вейерштрасса 98  
 Теплиц О. 86  
 Топология дискретная 197  
 — индуцированная 196  
 — порожденная 197  
 — сильная 204  
 — слабая 205  
 — тривиальная 197  
 Точка внутренняя 31  
 — граничная 31  
 — конденсации 123  
 — предельная 21  
 Троичная дробь 113  
 Фату 94  
 Фейер 97  
 Фон Нейман Дж. 215  
 Функция алгебраическая 38  
 — бесконечно дифференцируемая 49  
 — возрастающая 17  
 — действительного переменного 19  
 — действительнозначная 19  
 — дифференцируемая 49  
 — измеримая 141  
 — интегрируемая по Лебегу 96  
 — — по Риману 56  
 — канторова 126  
 — линейная 47  
 — локально ограниченная 33  
 — — однородная 155  
 — множества счетно аддитивная 110  
 — монотонная 17  
 — неизмеримая 141  
 — неотрицательная 110  
 — непрерывная 21  
 — ограниченная 33  
 — однородная 154  
 Функция периодическая 32  
 — — с периодом  $p$  32  
 — — полунепрерывная в точке 33  
 — — сверху 33  
 — — снизу 33  
 — постоянная 13  
 — равномерно непрерывная 22  
 — рациональная 26  
 — строго возрастающая 17  
 — — монотонная 17  
 — трансцендентная 38  
 — убывающая 17  
 — характеристическая 19  
 Харди Г. Х. 53  
 Хаусдорф Ф. 215  
 Цаанен А. К. 137  
 Центр сферической окрестности 197  
 Цорна лемма 111  
 Частные производные 147  
 Число действительное 19  
 — кардинальное 181  
 — комплексное 23  
 — натуральное 19  
 — порядковое 181  
 — простое 28  
 — рациональное 20  
 — целое 20  
 Член последовательности 22  
 Шар замкнутый 198  
 — открытый 197  
 Шварц Г. А. 191, 193  
 Штейнгауз 88  
 Эквивалентные метрики 198  
 — функции 31  
 Элемент множества 11  
 — отрицательный 16  
 — положительный 16  
 — противоположный 16  
 — составной 28  
 Ядро множества 31

## О ГЛАВЛЕНИЕ

От редактора . . . . .	5
Предисловие . . . . .	7
<b>Глава 1. Система действительных чисел . . . . .</b>	<b>11</b>
Введение . . . . .	11
1. Бесконечное поле, которое нельзя упорядочить . . . . .	23
2. Поле, которое можно упорядочить двумя различными способами . . . . .	24
3. Неполное упорядоченное поле . . . . .	24
4. Упорядоченное неархимедово поле . . . . .	25
5. Упорядоченное поле, которое нельзя пополнить . . . . .	26
6. Упорядоченное поле, в котором множество рациональных чисел не плотно . . . . .	27
7. Неполное упорядоченное поле, полное в смысле Коши . . . . .	27
8. Область целостности, допускающая различные факторизации . . . . .	27
9. Два числа без наибольшего общего делителя . . . . .	28
10. Дробь, не допускающая единственного представления в виде несократимой дроби . . . . .	29
11. Функции, непрерывные на замкнутом интервале и не обладающие известными свойствами, если система чисел не полна . . . . .	29
<b>Глава 2. Функции и пределы . . . . .</b>	<b>31</b>
Введение . . . . .	31
1. Всюду разрывная функция, абсолютное значение которой есть всюду непрерывная функция . . . . .	34
2. Функция, непрерывная лишь в одной точке (см. пример 22) . . . . .	34
3. Непрерывная и неограниченная функция, определенная на произвольном некомпактном множестве . . . . .	34
4. Неограниченная функция, определенная на произвольном некомпактном множестве и локально ограниченная на нем . . . . .	34
5. Функция, всюду конечная и всюду локально неограниченная . . . . .	35
6. Непрерывная ограниченная функция, определенная на произвольном некомпактном множестве и не имеющая экстремальных значений . . . . .	35
7. Ограниченная функция, не имеющая относительных экстремумов на компактном множестве . . . . .	36

8. Ограниченная функция, не являющаяся полуунпрерывной ни в одной точке . . . . .	37
9. Периодическая функция, отличная от постоянной и не имеющая наименьшего периода . . . . .	37
10. Иррациональные функции . . . . .	37
11. Трансцендентные функции . . . . .	38
12. Функции $y=f(u)$ , $u \in \mathbb{R}$ , и $u=g(x)$ , $x \in \mathbb{R}$ , композиция которых $y=f(g(x))$ всюду непрерывна и такова, что	
$\lim_{u \rightarrow b} f(u) = c, \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = b, \quad \lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) \neq c.$	39
13. Две равномерно непрерывные функции, произведение которых не является равномерно непрерывной функцией . . . . .	39
14. Непрерывное на некотором интервале взаимно однозначное отображение, обратное к которому разрывно . . . . .	39
15. Функция, непрерывная в иррациональных и разрывная в рациональных точках . . . . .	40
16. Полунепрерывная функция с плотным множеством точек разрыва . . . . .	40
17. Функция с плотным множеством точек разрыва, каждая из которых устранима . . . . .	40
18. Монотонная функция, точки разрыва которой образуют произвольное счетное (возможно, плотное) множество . . . . .	41
19. Функция с плотным множеством точек непрерывности и плотным множеством точек разрыва, ни одна из которых не является устранимой . . . . .	41
20. Нигде не монотонное взаимно однозначное соответствие между двумя интервалами . . . . .	41
21. Непрерывная нигде не монотонная функция . . . . .	42
22. Функция, точки разрыва которой образуют произвольно заданное замкнутое множество . . . . .	43
23. Функция, точки разрыва которой образуют произвольно заданное множество типа $F_\sigma$ (см. пример 8 гл. 4 и примеры 8, 10 и 22 гл. 8) . . . . .	43
24. Функция, не являющаяся пределом последовательности непрерывных функций (см. пример 10 гл. 4) . . . . .	44
25. Функция, определенная на $[0,1]$ , множество значений которой на каждом невырожденном подинтервале совпадает с $[0,1]$ (см. пример 27 гл. 8) . . . . .	45
26. Разрывная линейная функция . . . . .	47
27. Теорема Колмогорова: для каждого $n \in \mathbb{N}$ существуют $n(2n+1)$ функций $\varphi_{ij}(x_j)$ ( $j=1, 2, \dots, n, i=1, 2, \dots, 2n+1$ ), таких, что (a) все функции $\varphi_{ij}(x_j)$ непрерывны на $[0,1]$ ; (b) для любой функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , непрерывной на $0 \leq x_1, x_2, \dots, x_n \leq 1$ , существуют $2n+1$ функций $\Psi_i$ , $i=1, 2, \dots, 2n+1$ , каждая из которых непрерывна на $\mathbb{R}$ , причем	

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{2n+1} \Psi_i \left( \sum_{j=1}^n \varphi_{ij}(x_j) \right). \quad \dots \quad 47$$

<b>Глава 3. Дифференцирование . . . . .</b>	<b>49</b>
<b>Введение . . . . .</b>	<b>49</b>
1. Функция, не являющаяся производной . . . . .	49
2. Дифференцируемая функция с разрывной производной . . . . .	50
3. Разрывная функция, имеющая всюду производную (не обязательно конечную) . . . . .	50
4. Дифференцируемая функция, производная которой не сохраняет знака ни в какой односторонней окрестности экстремальной точки . . . . .	50
5. Дифференцируемая функция, производная которой положительна в некоторой точке, но сама функция не монотонна ни в какой окрестности этой точки . . . . .	51
6. Функция, производная которой конечна, но не ограничена на замкнутом интервале . . . . .	51
7. Функция, производная которой существует и ограничена, но не имеет (абсолютного) экстремума на замкнутом интервале . . . . .	51
8. Всюду непрерывная, но нигде не дифференцируемая функция . . . . .	52
9. Дифференцируемая функция, для которой теорема о среднем не имеет места . . . . .	53
10. Бесконечно дифференцируемая функция $f(x)$ , положительная при положительных $x$ и равная нулю при отрицательных $x$ . . . . .	54
11. Бесконечно дифференцируемая функция, положительная в единичном интервале и равная нулю вне его . . . . .	54
12. Бесконечно дифференцируемая функция, равная 1 на $[1, +\infty)$ , равная 0 на $(-\infty, 0]$ и строго монотонная на $[0, 1]$ . . . . .	54
13. Бесконечно дифференцируемая монотонная функция $f$ , такая, что $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ , $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) \neq 0$ . . . . .	55
<b>Глава 4. Интеграл Римана . . . . .</b>	<b>56</b>
<b>Введение . . . . .</b>	<b>56</b>
1. Ограниченная функция, не интегрируемая по Риману на конечном замкнутом интервале . . . . .	56
2. Функция, интегрируемая по Риману и не имеющая primitive . . . . .	57
3. Функция, интегрируемая по Риману и не имеющая primitive ни на каком интервале . . . . .	57
4. Функция, имеющая primitive на замкнутом интервале, но не интегрируемая на нем по Риману (см. пример 35 гл. 8) . . . . .	57
5. Интегрируемая по Риману функция со всюду плотным множеством точек разрыва . . . . .	58
6. Функция $f$ , для которой $g(x) \equiv \int_0^x f(t) dt$ всюду дифференцируема, однако $g'(x) \neq f(x)$ на всюду плотном множестве . . . . .	58

7. Две различные полуунпрерывные функции, „расстояние” между которыми равно нулю . . . . .	59
8. Интегрируемая по Риману функция, множество точек разрыва которой совпадает с произвольно заданным множеством типа $F_\sigma$ и меры нуль (см. пример 22 гл. 8) . . . . .	59
9. Две функции, интегрируемые по Риману, композиция которых не интегрируема по Риману (см. пример 34 гл. 8) . . . . .	60
10. Не интегрируемая по Риману ограниченная функция, являющаяся пределом возрастающей последовательности интегрируемых по Риману функций (см. пример 33 гл. 8) . . . . .	60
11. Расходящийся несобственный интеграл, имеющий конечное главное значение в смысле Коши . . . . . +∞	60
12. Сходящийся несобственный интеграл $\int\limits_1^{+\infty} f(x) dx$ , подинтегральная функция которого положительна, непрерывна и не стремится к нулю при $x \rightarrow +\infty$ . . . . .	61
13. Сходящийся на интервале $[0, +\infty)$ несобственный интеграл, подинтегральная функция которого не ограничена на любом интервале вида $[a, +\infty)$ , где $a > 0$ . . . . .	61
14. Функции $f$ и $g$ , такие, что интеграл Римана—Стильтьеса от $f$ относительно $g$ существует на $[a, b]$ и $[b, c]$ , но не существует на $[a, c]$ . . . . .	62
<b>Глава 5. Последовательности</b> . . . . .	63
<b>Введение</b> . . . . .	63
1. Ограниченные расходящиеся последовательности . . . . .	63
2. Последовательность с произвольно заданным замкнутым множеством предельных точек . . . . .	64
3. Расходящаяся последовательность $\{a_n\}$ , для которой $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_{n+p} - a_n) = 0$ при любом натуральном $p$ . . . . .	66
4. Расходящаяся последовательность $\{a_n\}$ , такая, что для заданной строго возрастающей последовательности $\{\varphi_n\} = \{\varphi(n)\}$ натуральных чисел $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_{\varphi(n)} - a_n) = 0$ . . . . .	66
5. Последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ , такие, что $\underline{\lim} a_n + \overline{\lim} b_n < \underline{\lim} (a_n + b_n) < \underline{\lim} a_n + \overline{\lim} b_n < \overline{\lim} (a_n + b_n) < \overline{\lim} a_n + \overline{\lim} b_n$ . . . . .	67
6. Последовательности $\{a_{1n}\}, \{a_{2n}\}, \dots$ , такие, что $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} (a_{1n} + a_{2n} + \dots) < \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_{1n} + \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_{2n} + \dots$	67
7. Две равномерно сходящиеся последовательности функций, последовательность произведений которых не сходится равномерно . . . . .	68

8. Расходящаяся последовательность множеств . . . . .	68
9. Последовательность $\{A_n\}$ множеств, которая сходится к пустому множеству, но кардинальные числа этих множеств $\rightarrow +\infty$ . . . . .	69
<b>Глава 6. Бесконечные ряды . . . . .</b>	<b>71</b>
<b>Введение</b>	<b>71</b>
1. Расходящийся ряд, общий член которого стремится к нулю . . . . .	72
2. Сходящийся ряд $\sum a_n$ и расходящийся ряд $\sum b_n$ , такие, что $a_n \geq b_n$ , $n=1, 2, \dots$ . . . . .	72
3. Сходящийся ряд $\sum a_n$ и расходящийся ряд $\sum b_n$ , такие, что $ a_n  \geq  b_n $ , $n=1, 2, \dots$ . . . . .	72
4. Для произвольно заданного положительного ряда существует либо мажорируемый им расходящийся, либо мажорирующий его сходящийся ряд . . . . .	72
5. Об условно сходящихся рядах . . . . .	73
6. Для произвольного условно сходящегося ряда $\sum a_n$ и произвольного действительного числа $x$ существует последовательность $\{\epsilon_n\}$ , где $ \epsilon_n =1$ ( $n=1, 2, \dots$ ), такая, что	
$\sum_{n=1}^{+\infty} \epsilon_n a_n = x$ . . . . .	75
7. Об условиях теоремы Лейбница для знакочередующихся рядов . . . . .	75
8. Расходящийся ряд с общим членом, стремящимся к нулю, который при подходящей расстановке скобок становится сходящимся к наперед заданной сумме . . . . .	76
9. Для произвольно заданной положительной последовательности $\{b_n\}$ с нижним пределом, равным нулю, существует расходящийся ряд $\sum a_n$ , общий член которого стремится к нулю, причем $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n/b_n = 0$ . . . . .	76
10. Для всякой положительной последовательности $\{b_n\}$ с нижним пределом, равным нулю, существует положительный сходящийся ряд $\sum a_n$ , такой, что $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n/b_n = +\infty$ . . . . .	77
11. Для всякой положительной последовательности $\{c_n\}$ с нижним пределом, равным нулю, существуют положительный сходящийся ряд $\sum a_n$ и положительный расходящийся ряд $\sum b_n$ , такие, что $a_n/b_n = c_n$ , $n=1, 2, \dots$ . . . . .	77
12. Положительная непрерывная при $x \geq 1$ функция, такая, что интеграл $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ сходится, а ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$ расходится . . . . .	78

13. Положительная непрерывная при $x \geq 1$ функция, такая, что интеграл $\int\limits_1^{+\infty} f(x) dx$ расходится, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f(n)$ сходится	78
14. Ряды, к которым не применим признак Даламбера . . . . .	79
15. Ряды, к которым не применим признак Коши . . . . .	80
16. Ряды, для которых эффективен признак Коши и не эффективен признак Даламбера . . . . .	82
17. Два сходящихся ряда, произведение которых расходится . . . . .	82
18. Два расходящихся ряда, произведение которых сходится абсолютно . . . . .	83
19. Для произвольной последовательности $\left\{ \sum\limits_{m=1}^{+\infty} a_{mn} \right\}$ , $n = 1, 2, \dots$ , положительных сходящихся рядов существует положительный сходящийся ряд $\sum\limits_{m=1}^{\infty} a_m$ , не сравнимый ни с одним из рядов $\left\{ \sum\limits_{m=1}^{+\infty} a_{mn} \right\}$ . . . . .	84
20. Матрица Тэплица $T$ и расходящаяся последовательность, преобразуемая матрицей $T$ в сходящуюся последовательность . . . . .	86
21. Для всякой матрицы Тэплица $T = (t_{ij})$ существует последовательность $\{a_j\}$ , каждый член которой есть либо 1, либо -1, такая, что преобразование $\{b_i\}$ последовательности $\{a_j\}$ посредством матрицы $T$ расходится . . . . .	88
22. Степенной ряд, сходящийся лишь в одной точке (см. пример 24) . . . . .	90
23. Функция, ряд Маклорена которой сходится всюду, однако представляет функцию лишь в одной точке . . . . .	91
24. Функция, ряд Маклорена которой сходится лишь в одной точке . . . . .	91
25. Сходящийся тригонометрический ряд, не являющийся рядом Фурье . . . . .	93
26. Бесконечно дифференцируемая функция $f(x)$ , не являющаяся преобразованием Фурье никакой функции, интегрируемой по Лебегу, и такая, что $\lim_{ x  \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ . . . . .	96
27. Для произвольного счетного множества $E \subset [-\pi, \pi]$ существует непрерывная функция, ряд Фурье которой расходится в каждой точке $x \in E$ и сходится в каждой точке $x \in [-\pi, \pi] \setminus E$ . . . . .	97
28. Функция, интегрируемая (по Лебегу) на $[-\pi, \pi]$ , ряд Фурье которой расходится всюду . . . . .	98
29. Последовательность $\{a_n\}$ рациональных чисел, обладающая тем свойством, что для всякой функции $f$ , непрерывной на $[0,1]$ и равной 0 при $x=0$ ( $f(0)=0$ ), существует строго возрастающая последовательность натуральных чисел $\{n_v\}$	

$(n_0 \equiv 0)$ , такая, что

$$f(x) = \sum_{v=0}^{+\infty} \left( \sum_{n=n_v+1}^{n_{v+1}} a_n x^n \right),$$

причем сходимость является равномерной на  $[0,1]$  . . . . . 98

<b>Глава 7. Равномерная сходимость</b>	101
<b>Введение</b>	101
1. Последовательность всюду разрывных функций, сходящаяся равномерно к всюду непрерывной функции	101
2. Последовательность бесконечно дифференцируемых функций, которая равномерно сходится к нулю, а последовательность производных этих функций всюду расходится	101
3. Неограниченная функция, являющаяся пределом неравномерно сходящейся последовательности ограниченных функций	102
4. Разрывная функция, являющаяся пределом последовательности непрерывных функций	102
5. Не интегрируемая по Риману функция, являющаяся пределом последовательности функций, интегрируемых по Риману (см. пример 33 гл. 8)	104
6. Последовательность функций, для которой предел интегралов не равен интегралу от предельной функции	104
7. Последовательность функций, для которой предел производных не равен производной от предельной функции	105
8. Последовательность функций, равномерно сходящаяся на каждом замкнутом подинтервале, но не сходящаяся равномерно на всем интервале	106
9. Последовательность $\{f_n\}$ , равномерно сходящаяся к нулю $\underset{+\infty}{\text{на интервале}} [0, +\infty)$ и такая, что $\int_0^{+\infty} f_n(x) dx \neq 0$	106
10. Неравномерно сходящийся ряд, общий член которого стремится к нулю равномерно	107
11. Неравномерно сходящаяся последовательность, обладающая равномерно сходящейся подпоследовательностью	107
12. Неравномерно сходящиеся последовательности, удовлетворяющие любым трем из четырех условий теоремы Дини	107
<b>Глава 8. Множества и мера на действительной оси</b>	109
<b>Введение</b>	109
1. Совершенное нигде не плотное множество	111
2. Несчетное множество меры нуль	113
3. Множество меры нуль, разностное множество которого содержит некоторую окрестность нуля	114
4. Совершенное нигде не плотное множество положительной меры	115
5. Совершенное нигде не плотное множество иррациональных чисел	117

6. Всюду плотное открытое множество, дополнение которого имеет положительную меру . . . . .	118
7. Множество второй категории . . . . .	118
8. Множество, не являющееся множеством типа $F_\sigma$ . . . . .	119
9. Множество, не являющееся множеством типа $G_\delta$ . . . . .	119
10. Множество $A$ , не являющееся множеством точек разрыва никакой функции . . . . .	120
11. Неизмеримое множество . . . . .	120
12. Множество $D$ , такое, что для всякого измеримого множества $A$ справедливы равенства $\mu_*(D \cap A) = 0$ , $\mu^*(D \cap A) = \mu(A)$ . . . . .	123
13. Множество $A$ меры нуль, для которого любое действительное число является его точкой конденсации . . . . .	123
14. Нигде не плотное множество $A$ действительных чисел и его непрерывное отображение на замкнутый единичный интервал $[0, 1]$ . . . . .	124
15. Непрерывная монотонная функция, производная которой равна нулю почти всюду . . . . .	126
16. Топологическое отображение замкнутого интервала, не сохраняющее измеримость и нулевую меру . . . . .	128
17. Измеримое неборелевское множество . . . . .	128
18. Две непрерывные функции, разность которых не является постоянной, но их производные (конечные или бесконечные) совпадают всюду . . . . .	129
19. Множество полной меры и первой категории на $[0, 1]$ . . . . .	129
20. Множество меры нуль и второй категории на $[0, 1]$ . . . . .	130
21. Множество меры нуль, не являющееся множеством типа $F_\sigma$ . . . . .	130
22. Множество меры нуль, такое, что не существует функции (интегрируемой по Риману или нет), для которой это множество является множеством точек разрыва . . . . .	131
23. Два совершенных нигде не плотных гомеоморфных множества на $[0, 1]$ , лишь одно из которых имеет меру нуль . . . . .	131
24. Два непересекающихся непустых нигде не плотных множества действительных чисел, таких, что каждая точка любого из них является предельной точкой другого . . . . .	133
25. Два гомеоморфных множества действительных чисел, являющихся множествами разных категорий . . . . .	133
26. Два гомеоморфных множества действительных чисел, таких, что одно из них всюду плотно, а другое нигде не плотно . . . . .	134
27. Функция, определенная на $\mathbb{R}$ , равная нулю почти всюду и такая, что множество ее значений на каждом непустом открытом интервале совпадает с $\mathbb{R}$ . . . . .	135
28. Функция, определенная на $\mathbb{R}$ , график которой всюду плотен на плоскости . . . . .	136
29. Неотрицательная всюду конечная функция $f$ , такая, что	
$\int_a^b f(x) dx = +\infty$ для любого непустого открытоого интер-	
вала $(a, b)$ . . . . .	136
30. Непрерывная строго монотонная функция с производной, равной нулю почти всюду . . . . .	137

31. Ограниченная полунепрерывная функция, не интегрируемая по Риману и не эквивалентная никакой функции, интегрируемой по Риману . . . . .	137
32. Ограниченнная измеримая функция, не эквивалентная никакой функции, интегрируемой по Риману . . . . .	138
33. Ограниченнная функция, являющаяся пределом монотонной последовательности непрерывных функций, не интегрируемая по Риману и не эквивалентна никакой функции, интегрируемой по Риману (см. пример 10 гл. 4) . . . . .	138
34. Интегрируемая по Риману функция $f$ и непрерывная функция $g$ , определенные на $[0, 1]$ и такие, что их композиция $f(g(x))$ не интегрируема по Риману на $[0, 1]$ и не эквивалентна никакой функции, интегрируемой по Риману на этом замкнутом интервале (см. пример 9 гл. 4) . . . . .	139
35. Ограниченнная функция, имеющая примитивную на замкнутом интервале, но не интегрируемая на нем по Риману . . . . .	139
36. Функция, для которой существует несобственный интеграл Римана и не существует интеграла Лебега . . . . .	141
37. Функция, измеримая по Лебегу и не измеримая по Борелю . . . . .	141
38. Измеримая функция $f(x)$ и непрерывная функция $g(x)$ , такие, что их композиция $f(g(x))$ неизмерима . . . . .	141
39. Непрерывная монотонная функция $g(x)$ и непрерывная функция $f(x)$ , такие, что	
$\int_0^1 f(x) dg(x) \neq \int_0^1 f(x) g'(x) dx . . . . .$	142
40. Различные виды сходимости функциональных последовательностей . . . . .	142
41. Две меры $\mu$ и $v$ на пространстве с мерой $(X, \mathfrak{S})$ , такие, что $\mu$ абсолютно непрерывна относительно $v$ , однако не существует функции $f$ , удовлетворяющей равенству $\mu(E) = \int_E f(x) dv(x)$ для всех $E \in \mathfrak{S}$ . . . . .	145
<b>Глава 9. Функции двух переменных . . . . .</b>	147
<b>Введение</b>	147
1. Разрывная функция двух переменных, непрерывная по каждой переменной в отдельности . . . . .	147
2. Функция двух переменных, не имеющая предела в начале координат, но имеющая равный нулю предел приближении к началу координат по любой прямой . . . . .	148
3. Обобщение предыдущего примера . . . . .	148
4. Разрывная (и, следовательно, недифференцируемая) функция двух переменных, имеющая всюду частные производные первого порядка . . . . .	149

5. Функции  $f$ , для которых существуют и равны лишь два из следующих пределов:  $\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} f(x, y)$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} \lim_{y \rightarrow b} f(x, y)$ ,  $\lim_{y \rightarrow b} \lim_{x \rightarrow a} f(x, y)$ . . . 149
6. Функции  $f$ , для которых существует лишь один из следующих пределов:  $\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} f(x, y)$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} \lim_{y \rightarrow b} f(x, y)$ ,  $\lim_{y \rightarrow b} \lim_{x \rightarrow a} f(x, y)$  . . . 150
7. Функция  $f$ , для которой пределы  $\lim_{x \rightarrow a} \lim_{y \rightarrow b} f(x, y)$  и  $\lim_{y \rightarrow b} \lim_{x \rightarrow a} f(x, y)$  существуют, но не равны между собой . . . . . 151
8. Функция  $f(x, y)$ , для которой предел  $\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = g(x)$  существует равномерно относительно  $x$ , предел  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = h(y)$  существует равномерно относительно  $y$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{y \rightarrow 0} h(y)$ , однако предел  $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$  не существует . . . . . 151
9. Дифференцируемая, но не непрерывно дифференцируемая функция двух переменных . . . . . 152
10. Дифференцируемая функция, имеющая неравные смешанные частные производные второго порядка . . . . . 153
11. Непрерывно дифференцируемая функция  $f$  двух переменных  $x$  и  $y$  и область  $R$  на плоскости, такие, что  $\partial f / \partial y = 0$  в области  $R$ , но функция  $f$  зависит от  $y$  в этой области . . . . . 154
12. Локально однородная непрерывно дифференцируемая функция двух переменных, не являющаяся однородной . . . . . 154
13. Дифференцируемая функция двух переменных, не имеющая экстремума в начале координат и такая, что ее сужение на любую прямую, проходящую через начало координат, имеет строгий локальный минимум в этой точке . . . . . 155
14. Обобщение предыдущего примера . . . . . 156
15. Функция  $f$ , для которой  $\frac{d}{dx} \int\limits_a^b f(x, y) dy \neq \int\limits_a^b \left[ \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) \right] dy$ , хотя оба интеграла существуют в смысле Римана . . . . . 156
16. Функция  $f$ , для которой  $\int\limits_0^1 \int\limits_0^1 f(x, y) dy dx \neq \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 f(x, y) dx dy$ , хотя оба интеграла существуют в смысле Римана . . . . . 157
17. Двойной ряд  $\sum_{m, n} a_{mn}$ , для которого  $\sum_m \sum_n a_{mn} \neq \sum_n \sum_m a_{mn}$  . . . . . 158
18. Дифференциал  $Pdx + Qdy$  и плоская область  $R$ , в которой  $Pdx + Qdy$  является локально полным, но не полным дифференциалом . . . . . 159
19. Соленоидальное векторное поле, заданное в односвязной области и не имеющее векторного потенциала . . . . . 160

<b>Глава 10. Множества на плоскости . . . . .</b>	163
<b>Введение . . . . .</b>	163
1. Два непересекающихся замкнутых множества, расстояние между которыми равно нулю . . . . .	166
2. Ограничное множество на плоскости, для которого не существует минимального замкнутого круга, содержащего это множество . . . . .	166
3. „Тонкие” связные множества, не являющиеся простыми дугами . . . . .	166
4. Два непересекающихся плоских контура, содержащихся в квадрате и соединяющих его противоположные вершины . . . . .	167
5. Отображение интервала $[0, 1]$ на квадрат $[0, 1] \times [0, 1]$ . . . . .	168
6. Кривая Пеано на плоскости . . . . .	169
7. Кривая Пеано, стационарная почти всюду . . . . .	171
8. Кривая Пеано, дифференцируемая почти всюду . . . . .	171
9. Непрерывное отображение интервала $[0, 1]$ на себя, принимающее каждое значение несчетное множество раз . . . . .	171
10. Простая дуга, расположенная в единичном квадрате и имеющая плоскую меру, сколь угодно близкую к единице . . . . .	171
11. Связное компактное множество, не являющееся дугой . . . . .	175
12. Плоская область, не совпадающая с ядром своего замыкания . . . . .	175
13. Три непересекающиеся плоские области с общей границей . . . . .	176
14. Нежорданова область, совпадающая с ядром своего замыкания . . . . .	177
15. Ограниченнная плоская область, граница которой имеет положительную меру . . . . .	177
16. Простая дуга бесконечной длины . . . . .	178
17. Простая дуга бесконечной длины, имеющая касательную в каждой точке . . . . .	178
18. Простая дуга, такая, что ее длина между любой парой точек бесконечна . . . . .	179
19. Гладкая кривая $C$ , содержащая точку $P$ , которая не является ближайшей точкой этой кривой ни для какой точки выпуклой области, ограниченной этой кривой . . . . .	179
20. Подмножество $A$ единичного квадрата $S=[0, 1] \times [0, 1]$ , плотное в $S$ и такое, что всякая вертикальная или горизонтальная прямая, пересекающая $S$ , имеет с $A$ лишь одну общую точку . . . . .	180
21. Неизмеримое плоское множество, имеющее с каждой прямой не более двух общих точек . . . . .	181
22. Неотрицательная функция $f(x, y)$ , такая, что	

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dx dy = \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dy dx = 0,$$

а интеграл  $\int_S \int f(x, y) dx dy$ , где  $S=[0, 1] \times [0, 1]$ , не существует 184

23. Действительнозначная функция одного действительного переменного, график которой является неизмеримым плоским множеством . . . . .	184
24. Связное множество, которое становится вполне несвязным при удалении одной точки . . . . .	185
<b>Глава 11. Площадь . . . . .</b>	<b>187</b>
Введение . . . . .	187
1. Ограниченое плоское множество, не имеющее площади . . . . .	188
2. Компактное плоское множество, не имеющее площади . . . . .	189
3. Ограниченнная плоская область, не имеющая площади . . . . .	189
4. Ограниченнная плоская жорданова область, не имеющая пло-	189
щади . . . . .	
5. Простая замкнутая кривая, плоская мера которой больше	
плоской меры области, ограниченной этой кривой . . . . .	189
6. Две функции $\varphi$ и $\psi$ , заданные на $[0, 1]$ и такие, что	
(a) $\varphi(x) < \psi(x)$ для $x \in [0, 1]$ , . . . . .	
(b) $\int_0^1 [\psi(x) - \varphi(x)]dx$ существует и равен 1, . . . . .	
(c) $S \equiv \{(x, y)   0 \leq x \leq 1, \varphi(x) < y < \psi(x)\}$ не имеет пло-	190
щади . . . . .	
7. Пример Шварца, в котором боковой поверхности прямого	
кругового цилиндра сопоставляется сколь угодно большая	
конечная или даже бесконечная площадь . . . . .	191
8. Для любых двух положительных чисел $\varepsilon$ и $M$ в трехмерном	
пространстве существует поверхность $S$ , такая, что	
(a) $S$ гомеоморфна поверхности сферы;	
(b) площадь поверхности $S$ существует и меньше $\varepsilon$ ;	
(c) мера Лебега в трехмерном пространстве поверхности $S$	
существует и больше $M$ . . . . .	193
9. Плоское множество сколь угодно малой плоской меры, внутри	
которого направление отрезка единичной длины можно	
поменять на обратное непрерывным движением . . . . .	194
<b>Глава 12. Метрические и топологические пространства . . . . .</b>	<b>195</b>
Введение . . . . .	195
1. Убывающая последовательность непустых замкнутых ограниченнных множеств с пустым пересечением . . . . .	200
2. Неполное метрическое пространство с дискретной топологией . . . . .	200
3. Убывающая последовательность непустых замкнутых шаров с пустым пересечением в полном метрическом пространстве . . . . .	201
4. Открытый шар $O$ и замкнутый шар $B$ с общим центром	
и равными радиусами, такие, что $B \neq O$ . . . . .	201
5. Замкнутые шары $B_1$ и $B_2$ с радиусами $r_1$ и $r_2$ соответственно,	
такие, что $B_1 \subset B_2$ , а $r_1 > r_2$ . . . . .	202
6. Топологическое пространство $X$ и его подмножество $Y$ , такие,	
что множество предельных точек $Y$ не замкнуто . . . . .	202

7. Топологическое пространство, в котором предел последовательности не единственен . . . . .	202
8. Сепарабельное пространство, обладающее несепарабельным подпространством . . . . .	203
9. Сепарабельное пространство, не удовлетворяющее второй аксиоме счетности . . . . .	203
10. Множество с различными топологиями, имеющими одни и те же сходящиеся последовательности . . . . .	204
11. Пример топологического пространства $X$ , множества $A \subset X$ и предельной точки этого множества, не являющейся пределом никакой последовательности точек из $A$ . . . . .	207
12. Неметризуемое топологическое пространство $X$ с функциями в качестве точек и топологией, соответствующей поточечной сходимости . . . . .	210
13. Непрерывное отображение одного топологического пространства на другое, не являющееся ни открытым, ни замкнутым . . . . .	211
14. Отображение одного топологического пространства на другое, являющееся одновременно открытым и замкнутым, но не являющееся непрерывным . . . . .	211
15. Замкнутое отображение одного топологического пространства на другое, не являющееся ни непрерывным, ни открытым . . . . .	211
16. Отображение одного топологического пространства на другое, являющееся непрерывным и открытым, но не являющееся замкнутым . . . . .	212
17. Открытое отображение одного топологического пространства на другое, не являющееся ни непрерывным, ни замкнутым . . . . .	212
18. Непрерывное замкнутое отображение одного топологического пространства на другое, не являющееся открытым . . . . .	213
19. Топологическое пространство $X$ и его подпространство $Y$ , содержащее два непересекающихся открытых множества, которые не являются пересечением подпространства $Y$ с непересекающимися открытыми множествами пространства $X$ . . . . .	213
20. Два негомеоморфных топологических пространства, каждое из которых является непрерывным взаимно однозначным образом другого . . . . .	214
21. Разбиение трехмерного евклидова шара $B$ на пять непересекающихся подмножеств $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5$ (при этом $S_5$ состоит из единственной точки), таких, что при жестких движениях $R_1, R_2, R_3, R_4, R_5$ справедливы следующие соотношения:	
$B \cong R_1(S_1) \cup R_2(S_2) \cong R_3(S_3) \cup R_4(S_4) \cup R_5(S_5)$ . . . . .	215
22. Для любых двух евклидовых шаров $B_\varepsilon$ и $B_M$ , радиусы которых суть произвольно заданные числа $\varepsilon > 0$ и $M > 0$ , всегда существует разбиение шара $B_\varepsilon$ на конечное число непересекающихся подмножеств $S_1, S_2, \dots, S_n$ , таких, что при жестких движениях $R_1, R_2, \dots, R_n$ справедливо равенство	
$B_M = R_1(S_1) \cup R_2(S_2) \cup \dots \cup R_n(S_n)$ . . . . .	215

<b>Глава 13. Функциональные пространства . . . . .</b>	<b>216</b>
<b>Введение . . . . .</b>	<b>216</b>
1. Две монотонные функции, сумма которых не монотонна . . . . .	219
2. Две периодические функции, сумма которых не имеет периода . . . . .	219
3. Две полунепрерывные функции, сумма которых не является полунепрерывной . . . . .	220
4. Две функции, квадраты которых интегрируемы по Риману, но квадрат их суммы не интегрируем по Риману . . . . .	222
5. Две функции, квадраты которых интегрируемы по Лебегу, но квадрат их суммы не интегрируем по Лебегу . . . . .	222
6. Линейное функциональное пространство, не являющееся ни алгеброй, ни структурой . . . . .	223
7. Линейное функциональное пространство, являющееся алгеброй, но не являющееся структурой . . . . .	223
8. Линейное функциональное пространство, являющееся структурой, но не являющееся алгеброй . . . . .	223
9. Две метрики в пространстве $C([0, 1])$ функций, непрерывных на $[0, 1]$ , такие, что дополнение единичного шара в одной из метрик всюду плотно в единичном шаре другой метрики . . . . .	224
<b>Библиография . . . . .</b>	<b>226</b>
<b>Указатель обозначений . . . . .</b>	<b>230</b>
<b>Указатель . . . . .</b>	<b>234</b>