July 4, 2014

**Abstract**

Trying to find 2 Hadamard matrices of order 12 whose product is also Hadamard.

# 1 Method to construct $H_{12}$

Let $A, B, C, D$ be the following matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ - & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & - \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ - & 0 & 0 & 0 \\ 0 & - & 0 & 0 \end{pmatrix} D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & - & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ - & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

These matrices have been obtained from the coeffecients of the similarly named matrices in the Williamson construction for Hadamard matrices.
Williamson's method :
If $A, B, C, D$ are symmetric matrices of order n such that,
$AA^t + BB^t + CC^t + DD^t = 4nI_n$ , then,

$$W = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ -B & A & -D & C \\ -C & D & A & -B \\ -D & -C & B & A \end{pmatrix}$$, is a Hadamard matrix of order $4n$.

Using 2 circulant matrices of order 3,

$$C1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & - \\ - & 1 & 1 \\ 1 & 1 & - \end{pmatrix},$$

$$C2 = \begin{pmatrix} - & 1 & - \\ - & - & 1 \\ 1 & - & - \end{pmatrix},$$

we used the following method:
$H_1 = (J \otimes A) + (C1 \otimes B) + (C1 \otimes C) + (C1 \otimes D)$
$H_2 = (J \otimes A) + (C2 \otimes B) + (C2 \otimes C) + (C2 \otimes D)$

$H_1$ and $H_2$ are always Hadamard matrices, because of the structure of $A, B, C, D$ and the construction above.
We check if the Hadamard product of $H_1$ and $H_2$ is also Hadamard, if it is, we can try and make a Generalized Hadamard matrix from $H_1$ and $H_2$. Otherwise, we apply row and column permutations on $H_1$ and $H_2$ to see if their Hadamard product is Hadamard.

$$H_1 = \begin{pmatrix} (A+B+C+D) & (A+B+C+D) & (A-B-C-D) \\ (A-B-C-D) & (A+B+C+D) & (A+B+C+D) \\ (A+B+C+D) & (A-B-C-D) & (A+B+C+D) \end{pmatrix},$$

$$H_2 = \begin{pmatrix} (A-B-C-D) & (A+B+C+D) & (A-B-C-D) \\ (A-B-C-D) & (A-B-C-D) & (A+B+C+D) \\ (A+B+C+D) & (A-B-C-D) & (A-B-C-D) \end{pmatrix}$$

Each of $(A-B-C-D)$ and $(A+B+C+D)$ is a Hadamard matrix, so permuting rows or columns inside col/row blocks should still yield a Hadamard matrix. We will be using permutations of this type only.Thus the Hadamard matrix on permutation would look like this:
(where $\alpha, \beta, \gamma$ represent a permutation matrix of order $4x4$)

$$H_1' = \begin{pmatrix} \alpha A' & \alpha B' & \alpha C' \\ \beta C' & \beta A' & \beta B' \\ \alpha B' & \alpha C' & \alpha A' \end{pmatrix}$$

Similarly for column permutations.
The row(column) permutations can be represented by a block diagonal matrix of the following type.

$$P = \begin{pmatrix} \alpha & & 0 \\ & \beta & \\ 0 & & \gamma \end{pmatrix}$$

In this case, we have assumed only four permutations of order $4X4$ obtained from the Kronecker product of $I$ and $R$, i.e
$\alpha, \beta \in \{I \otimes I,\ I \otimes R, R \otimes I, R \otimes R\}$
We can assume without loss of generality that any permutation of the rows and columns of $H_1$ and $H_2$ can be split as only row permutations on $H_1$, and only column permutations on $H_2$. By this we mean that instead of performing both row and column permutations on both of the matrices, it is possible to split the permutations as row permutations and column permutations seperately,with the row permutations(say) performed on $H_1$ and column permutations on $H_2$. This is done keeping in mind that the Hadamard product of the two matrices does not change if the permutations are split this way.

Thus, two permutation matrices are obtained, a row permutation(say) for $H_1$ called $P_1$ and column permutations(say) for $H_2$ called $P_2$.
We take the following Hadamard product and check if the resulting matrix is Hadamard or not.
$H = (P_1 \times H_1) \odot (H_2 \times P_2)$
It turns out that for none of the permutations of the above type, the matrix is Hadamard.

## 2 Some observations

It might be useful to see the type of matrix $H$ obtained in the end, even though it is not Hadamard. So, $HH^t$ was computed for each $H$, and here are a few examples:

Matrix 0

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0 \end{pmatrix} P_2 = \begin{pmatrix} 0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1 \end{pmatrix}$$

$$HH^t = \begin{pmatrix} 12&0&8&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&12&0&8&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 8&0&12&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&8&0&12&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&12&-8&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&-8&12&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&12&-8&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&-8&12&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&12&0&0&-8\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&12&-8&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&-8&12&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&-8&0&0&12 \end{pmatrix}$$

Matrix 1

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0 \end{pmatrix} P_2 = \begin{pmatrix} 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0 \end{pmatrix}$$

$$HH^t = \begin{pmatrix} 12&0&0&8&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&12&8&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&8&12&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 8&0&0&12&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&12&0&-8&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&12&0&-8&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&-8&0&12&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&-8&0&12&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&12&8&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&8&12&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&12&8\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&8&12 \end{pmatrix}$$

Matrix 2

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0 \end{pmatrix} P_2 = \begin{pmatrix} 0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0 \end{pmatrix}$$

$$HH^t = \begin{pmatrix} 12&0&8&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&12&0&8&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 8&0&12&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&8&0&12&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&12&-8&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&-8&12&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&12&-8&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&-8&12&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&12&0&0&8\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&12&8&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&8&12&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&8&0&0&12 \end{pmatrix}$$

Matrix 3

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0 \end{pmatrix} P_2 = \begin{pmatrix} 0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1 \end{pmatrix}$$

$$HH^t = \begin{pmatrix} 12&8&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 8&12&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&12&8&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&8&12&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&12&0&0&-8&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&12&-8&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&-8&12&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&-8&0&0&12&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&12&0&-8&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&12&0&-8\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&-8&0&12&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&-8&0&12 \end{pmatrix}$$

Matrix 4

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0 \end{pmatrix} P_2 = \begin{pmatrix} 0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0 \end{pmatrix}$$

$$HH^t = \begin{pmatrix} 12&8&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 8&12&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&12&8&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&8&12&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&12&0&0&-8&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&12&-8&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&-8&12&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&-8&0&0&12&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&12&0&8&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&12&0&8\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&8&0&12&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&8&0&12 \end{pmatrix}$$

Matrix 5

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0 \end{pmatrix} P_2 = \begin{pmatrix} 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1 \end{pmatrix}$$

$$HH^t = \begin{pmatrix} 12&0&0&8&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&12&8&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&8&12&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 8&0&0&12&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&12&0&-8&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&12&0&-8&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&-8&0&12&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&-8&0&12&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&12&-8&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&-8&12&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&12&-8\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-8&12 \end{pmatrix}$$

Matrix 6

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0 \end{pmatrix} P_2 = \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0 \end{pmatrix}$$

$$HH^t = \begin{pmatrix} 12&0&-8&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&12&0&-8&0&0&0&0&0&0&0&0\\ -8&0&12&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&-8&0&12&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&12&8&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&8&12&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&12&8&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&8&12&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&12&0&0&-8\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&12&-8&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&-8&12&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&-8&0&0&12 \end{pmatrix}$$

Matrix 7

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0 \end{pmatrix} P_2 = \begin{pmatrix} 0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1 \end{pmatrix}$$

$$HH^t = \begin{pmatrix} 12&0&0&8&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&12&8&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&8&12&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 8&0&0&12&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&12&0&8&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&12&0&8&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&8&0&12&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&8&0&12&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&12&-8&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&-8&12&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&12&-8\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-8&12 \end{pmatrix}$$

Matrix 8

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0 \end{pmatrix} P_2 = \begin{pmatrix} 0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0 \end{pmatrix}$$

$$HH^t = \begin{pmatrix} 12&0&0&8&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&12&8&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&8&12&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 8&0&0&12&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&12&0&8&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&12&0&8&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&8&0&12&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&8&0&12&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&12&8&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&8&12&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&12&8\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&8&12 \end{pmatrix}$$

Matrix 9

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0 \end{pmatrix} P_2 = \begin{pmatrix} 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0 \end{pmatrix}$$

$$HH^t = \begin{pmatrix} 12&-8&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ -8&12&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&12&-8&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&-8&12&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&12&0&0&-8&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&12&-8&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&-8&12&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&-8&0&0&12&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&12&0&-8&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&12&0&-8\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&-8&0&12&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&-8&0&12 \end{pmatrix}$$

Matrix 10

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1 \end{pmatrix} P_2 = \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0 \end{pmatrix}$$

$$HH^t = \begin{pmatrix} 12&0&-8&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&12&0&-8&0&0&0&0&0&0&0&0\\ -8&0&12&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&-8&0&12&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&12&8&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&8&12&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&12&8&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&8&12&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&12&0&0&8\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&12&8&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&8&12&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&8&0&0&12 \end{pmatrix}$$

Matrix 11

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1 \end{pmatrix} P_2 = \begin{pmatrix} 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0 \end{pmatrix}$$

$$HH^t = \begin{pmatrix} 12&-8&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ -8&12&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&12&-8&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&-8&12&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&12&0&0&-8&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&12&-8&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&-8&12&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&-8&0&0&12&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&12&0&8&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&12&0&8\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&8&0&12&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&8&0&12 \end{pmatrix}$$

Matrix 12

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$HH^t = \begin{pmatrix} 12 & -8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & -8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -8 & 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -8 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

Matrix 13

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$HH^t = \begin{pmatrix} 12 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -8 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -8 & 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

Matrix 14

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$HH^t = \begin{pmatrix} 12 & -8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & -8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

Matrix 15

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$HH^t = \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 & -8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & -8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & 0 & 0 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 0 & -8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 0 & -8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -8 & 0 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -8 & 0 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 12 \end{pmatrix}$$

Matrix 16

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0 \end{pmatrix} P_2 = \begin{pmatrix} 0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0 \end{pmatrix}$$

$$HH^t = \begin{pmatrix} 12&0&0&-8&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&12&-8&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&-8&12&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ -8&0&0&12&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&12&0&-8&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&12&0&-8&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&-8&0&12&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&-8&0&12&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&12&-8&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&-8&12&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&12&-8\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-8&12 \end{pmatrix}$$

Matrix 17

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0 \end{pmatrix} P_2 = \begin{pmatrix} 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0 \end{pmatrix}$$

$$HH^t = \begin{pmatrix} 12&0&8&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&12&0&8&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 8&0&12&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&8&0&12&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&12&8&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&8&12&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&12&8&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&8&12&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&12&0&0&8\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&12&8&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&8&12&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&8&0&0&12 \end{pmatrix}$$

Matrix 18

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0 \end{pmatrix} P_2 = \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0 \end{pmatrix}$$

$$HH^t = \begin{pmatrix} 12&0&0&-8&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&12&-8&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&-8&12&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ -8&0&0&12&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&12&0&8&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&12&0&8&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&8&0&12&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&8&0&12&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&12&-8&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&-8&12&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&12&-8\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-8&12 \end{pmatrix}$$

Matrix 19

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0 \end{pmatrix} P_2 = \begin{pmatrix} 0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1 \end{pmatrix}$$

$$HH^t = \begin{pmatrix} 12&8&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 8&12&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&12&8&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&8&12&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&12&0&0&8&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&12&8&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&8&12&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&8&0&0&12&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&12&0&-8&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&12&0&-8\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&-8&0&12&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&-8&0&12 \end{pmatrix}$$

Matrix 20

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0 \end{pmatrix} P_2 = \begin{pmatrix} 0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0 \end{pmatrix}$$

$$HH^t = \begin{pmatrix} 12&8&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 8&12&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&12&8&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&8&12&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&12&0&0&8&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&12&8&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&8&12&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&8&0&0&12&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&12&0&8&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&12&0&8\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&8&0&12&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&8&0&12 \end{pmatrix}$$

Matrix 21

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0 \end{pmatrix} P_2 = \begin{pmatrix} 0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0 \end{pmatrix}$$

$$HH^t = \begin{pmatrix} 12&0&-8&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&12&0&-8&0&0&0&0&0&0&0&0\\ -8&0&12&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&-8&0&12&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&12&-8&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&-8&12&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&12&-8&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&-8&12&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&12&0&0&-8\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&12&-8&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&-8&12&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&-8&0&0&12 \end{pmatrix}$$

Matrix 22

$$P_1 = \left(\begin{array}{cccccccccccc}
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right)
P_2 = \left(\begin{array}{cccccccccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{array}\right)$$

$$HH^t = \left(\begin{array}{cccccccccccc}
12 & 0 & 0 & -8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 12 & -8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -8 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-8 & 0 & 0 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 8 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 12 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 8 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 12
\end{array}\right)$$

Matrix 23

$$P_1 = \left(\begin{array}{cccccccccccc}
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right)
P_2 = \left(\begin{array}{cccccccccccc}
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)$$

$$HH^t = \left(\begin{array}{cccccccccccc}
12 & 0 & -8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 12 & 0 & -8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-8 & 0 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -8 & 0 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 12 & -8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -8 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & -8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -8 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 0 & 0 & 8 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 8 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 12 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 12
\end{array}\right)$$

There are a total of 24 matrices. You can see that the 8's are distributed around the main diagonal in a way that is similar to the matrix product of $P_1$ and $P_2$.

# 3 Suggestions?