



תאריך הבחינה: 08.07.2016

שם המרצה: ד"ר ס. גבריאליאן,

ד"ר א. לרמן

שם הקורס: חדו"א 2 להנדסת תעשייה וניהול

מספר הקורס: 201.1.9621

שנה: תשע"ו סמסטר: אביב מועד: א'

משך הבחינה: 3 שעות

חומר עזר: דף נוסחאות אחד בגודל A4

(2 עמודים), מחשבון פשוט

הוראות לנבחן:

- כתוב באופן ברור, התחל כל שאלה בעמוד חדש, הדגש את מספר השאלה.
- נמק את שלבי החישוב.
- ענה על 4 השאלות.

בהצלחה!

שאלה 1.

- א) (15 נק') נתונה הפונקציה $f(x, y) = x^4 - x^2 + 2xy + y^2$.
 (1) (7 נק') מצאו את כל הנקודות מקסימום ומינימום מקומיים של הפונקציה.
 (2) (8 נק') מצאו את הערך הגדול ביותר והקטן ביותר של הפונקציה בתחום:
 $D = \{(x, y) : x + y \leq 2, x \geq 0, y \geq 0\}$

- ב) (10 נק') חשבו את אורך הקשת המוגדרת על ידי $\{x(t) = 3e^t, y(t) = 4e^{1.5t}\}$
 כאשר $\ln 2 \leq t \leq \ln 20$.

שאלה 2.

- א) (15 נק') לאמת את משפט גרין לאינטגרל $\oint_L (2xy - x^2) dx + (x + y^2) dy$

כאשר L - מסלול סגור הנוצר על ידי העקומות $y = x^2$ ו- $x = y^2$ בכיוון נגד כיוון השעון.

- ב) (10 נק') מצה משוואת המישור העובר דרך הישר $l : \begin{cases} 3x - 2y + z - 3 = 0 \\ x - 2z = 0 \end{cases}$

(הישר כולו מונח במישור המבוקש) במאונך למישור $x - 2y + z + 5 = 0$.

שאלה 3.

(א) (17 נק') חשבו את מסת הגוף החסום על ידי המשטחים:

$$\rho(x, y, z) = |z| \quad \text{כאשר הצפיפות} \quad x^2 + y^2 + z^2 \leq 2z, \quad x^2 + y^2 \leq z^2,$$

(ב) (8 נק') תהיינה $f(t)$ ו- $g(t)$ גזירות פעמיים ותהי $u(x, y) = f\left(\frac{y}{x}\right) + g(xy)$

$$\text{הוכיחו כי} \quad x^2 u''_{xx} - y^2 u''_{yy} + x u'_x - y u'_y = 0$$

שאלה 4.

(א) (16 נק') חשבו $\iint_G xy^2 dydz + yx^2 dx dz + 3z dx dy$ כאשר G הצד החיצוני של חלק

$$\text{הגליל} \quad x^2 + y^2 = R^2 \quad \text{שבין המישורים} \quad z=0, z=H \quad \text{ו-} \quad y \geq 0.$$

$$(ב) (9 נק') \quad \text{נתונה המשוואה} \quad \frac{z \tan x}{1 + \ln(y+z)} = z - y$$

(1) (3 נק') בדקו אם המשוואה מגדירה פונקציה סתומה $z = f(x, y)$ בסביבת

$$\text{הנקודה} \quad M_0 \left(\frac{\pi}{4}, 0, 1 \right)$$

(2) (3 נק') מצאו את משוואת המישור המשיק למשטח הפונקציה $z = f(x, y)$

$$\text{בנקודה} \quad M_0.$$

(3) (3 נק') מצאו את הצגתו הפרמטרית של הישר הנורמל למשטח הפונקציה

$$z = f(x, y) \quad \text{בנקודה} \quad M_0.$$

שאלה 2.

א) לאמת את משפט גרין לאינטגרל $\oint_L (2xy - x^2) dx + (x + y^2) dy$

כאשר L - מסלול סגור הנוצר על ידי העקומות $y = x^2$ ו- $x = y^2$ בכיוון נגד

כיוון השעון.

פתרון.

אנו צריכים לוודא שהאינטגרל הנתון נותן אותה תוצאה לפי שימוש בנוסחת גרין (1)

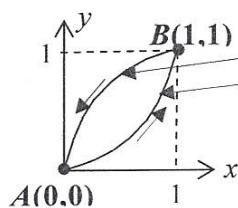
ולפי אינטגרציה בשיטת פרמטריזציה (2).

(דרך אחרת: לנסח את משפט גרין ולבדוק שמתקיימים כל התנאים שלו)

נקודות חיתוך של העקומות: $A(0,0)$ ו- $B(1,1)$ (ומסלול סגור L לפי תנאי שהוא נתון בכיוון

נגד כיוון השעון): כולל

עקומות $(B \leftarrow A) y = x^2$ ו- $(A \leftarrow B) x = y^2$



(1) נוסחת גרין:

$$I = \oint_L P dx + Q dy = \iint_{S_L} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \Rightarrow \oint_L (2xy - x^2) dx + (x + y^2) dy = \iint_{S_L} (1 - 2x)$$

$$\text{תחום האינטגרציה } S_L: \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ x^2 \leq y \leq \sqrt{x} \end{cases}$$

$$I = \iint_{S_L} (1 - 2x) = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} (1 - 2x) dy = \int_0^1 (1 - 2x)(\sqrt{x} - x^2) dx = \underline{1/30} \Leftarrow$$

$$I = I_1 + I_2. \quad I_1 = \int_{y=x^2 (B \leftarrow A)} (2xy - x^2) dx + (x + y^2) dy, \quad I_2 = \int_{x=y^2 (A \leftarrow B)} (2xy - x^2) dx + (x + y^2) dy \quad (2)$$

I_1 : פרמטריזציה של מסלול $(B \leftarrow A) y = x^2$

$$x = t, \quad y = t^2, \quad dx = dt, \quad dy = 2t dt, \quad 0 \leq t \leq 1$$

טל. 08-6461761 פקס. 08-6472908

תד. 653 באר-שבע 84105 miriwiz@bgu.ac.il

$$I_1 = \int_0^1 (2t^3 + t^2 + 2t^5) dt = 7/6.$$

$$I_2: \text{פרמטריזציה של מסלול } x = y^2 \text{ : } (A \leftarrow B)$$

$$y = t, \quad x = t^2, \quad dy = dt, \quad dx = 2t dt, \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$I_2 = \int_0^1 (4t^4 - 2t^5 + 2y^2) dt = -17/15.$$

$$I = I_1 + I_2 = 1/30. \text{ ובכן הראנו שמשפט גרין לאינטגרל הנתון הוא נכון.}$$

שאלה 4.

(ב)

פתרון: $1 - 0 = 1$ $\frac{1 \cdot \tan \frac{\pi}{4}}{1 + \ln(0+1)} = 1 - 0 = 1$ לכן הנקודה $(\frac{\pi}{4}, 0, 1)$ חלה במשטח הפונקציה

$$\frac{z \tan x}{1 + \ln(y+z)} = z - y \Rightarrow F = z \tan x - (z - y)(1 + \ln(y+z)) = 0$$

$$F'_x = \frac{z}{\cos^2 x}, \quad F'_x\left(\frac{\pi}{4}, 0, 1\right) = 2,$$

$$F'_y = (1 + \ln(y+z)) - \frac{z-y}{y+z}, \quad F'_y\left(\frac{\pi}{4}, 0, 1\right) = 0,$$

$$F'_z = \tan x - (1 + \ln(y+z)) - \frac{z-y}{y+z}, \quad F'_z\left(\frac{\pi}{4}, 0, 1\right) = -1,$$

משוואת המישור המשיק

$$2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 0(y - 0) - (z - 1) = 0 \Rightarrow 2x - z = -1 + \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + 2t \\ y = 0 \\ z = 1 - t \end{cases} \quad \text{הצגתו הפרמטרית של הישר הנורמל}$$

טל. 08-6461761 פקס. 08-6472908

ת.ד. 653 באר-שבוע 84105 miriwiz@bgu.ac.il