פתרון מרצה

פתרון מועד ב' בסטטיסטיקה לכלכלנים א' - 2015

שאלה 1 (20 נקודות)

בקונדיטוריה מסויימת אופים עוגות גבינה שמשקלן מתפלג נורמאלית עם תוחלת של 500 גרם.

ידוע כי בדיוק 20.045% מהעוגות שוקלות פחות מ- 466.4 גרם.

א. (4 נקודות) מהי סטיית התקן של ההתפלגות?

ב. (6 נקודות) בוחרים 8 עוגות באופן מקרי ובלתי-תלוי זו בזו. מהי ההסתברות שבדיוק 3 מהן תשקולנה פחות מ- 460 או יותר מ-540?

ג. (5 נקודות) נניח לקוח שמחליט שהוא קונה עוגה אחת ביום עד שמגלה לראשונה עוגה ששוקלת יותר מ-540 גרם. מה ההסתברות שאותו צרכן יקנה 5 עוגות בדיוק עד שתימצא העוגה הראשונה ששוקלת יותר מ-540 גרם? מהי התוחלת של מספר העוגות שהוא ירכוש?

ד. (5 נקודות) מחיר עוגה שמשקלה גבוה מ-460 הוא 75, ומחיר עוגה שמשקלה נמוך מ-460 הוא 50. מהי תוחלת התשלום של הלקוח מסעיף ג' לעיל עבור העוגות שהוא רכש?

שאלה 2 (20 נקודות)

בבוחן פתע בסטטיסטיקה מוקצות סך הכל 20 דקות עד להגשת הבוחן. הזמן ממועד תחילת הבוחן ועד ההגשה, X, הינו בעל פונקציית הצפיפות $f(x)$, כאשר a קבוע:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{20} & ,\ 10\le x\le 15\\ ax-0.55 & ,\ 15<x\le 20\\ 0 & ,\text{אחרת}\end{cases}$$

א. (6 נקודות) מצא את a.

ב. (10 נקודות) מצא את פונקציית ההפלגות המצטברת של X ואת התוחלת.

ג. (4 נקודות) בבוחן בחדו"א הזמן עד להגשה מתפלג אחיד בין הסטודנטים מ-10 ועד 20 דקות. הזמן בבוחן בסטטיסטיקה ובחדו"א הינם בלתי-תלויים זה בזה. נתבונן בתלמיד אקראי – מהי ההסתברות שאותו תלמיד הגיש גם את הבוחן בסטטיסטיקה וגם את הבוחן בחדו"א בפחות מ-12 דקות?

שאלה 3 (26 נקודות)

במפלגת "ישראל שולטת" מתנהלים פריימריז וניתן לשחד את סופרי הקולות בכל קלפי על-מנת לקבל מיקום נמוך יותר ברשימה (מיקום נמוך יותר הוא **יותר טוב** שכן רק ממיקום כלשהו **ומטה** נכנסים לכנסת). חברת הכנסת א' יודעת את ההסתברויות הבאות מבחינת מיקומה ברשימה בכל קלפי (שימו לב: מדובר בהסתברויות לתוצאות של קלפי בודדת):

ללא שוחד היא תקבל מיקום בין 11 ל-13 (כולל) ברשימה, כל אחד מהם בהסתברות שווה;

עם שוחד של 5000 ₪ לקלפי, חברת הכנסת א' תקבל מיקום בין 10 ל-12 (כולל) ברשימה, כל אחד מהם בהסתברות שווה;

עם שוחד של 10,000 ₪ לקלפי תקבל חברת הכנסת א' מיקום 10 או 11 ברשימה, כל אחד מהם בהסתברות שווה.

חברת הכנסת א' מחליטה שהיא תעבור בין כל הקלפיות ותגריל שוחד של 0 בהסתברות p, שוחד של 5,000 ₪ בהסתברות q, ושוחד של 10,000 ₪ בהסתברות r. נסמן ב-X את המיקום של חברת הכנסת א' ברשימה (הערכים האפשריים של X הם 10, 11, 12, ו-13). נסמן ב-Y את השוחד לקלפי שישולם באלפי שקלים ($P(Y=0)=p \;\; P(Y=5)=q \;\; P(Y=10)=r$).

א. (12 נקודות) מצאו את p,q,r בהינתן ש:

התוחלת של השוחד שישולם לכל הקלפיות הוא 5,000 ₪ - כלומר, $E(Y)=5$.

ההסתברות הלא מותנית שחברת הכנסת א' תהיה במקום ה-13 ברשימה היא 1/12.

רמז: מומלץ תחילה לבנות טבלת הסתברות משותפת למשתנים X ו-Y כפונקציה של p, q ו-r.
שימו לב: p, q ו-r מסתכמים ל-1.

ב. (5 נקודות) חשבו את השונות המשותפת בין X ל-Y. האם השונות המשותפת בעלת ערך חיובי או שלילי? הסבר.

ג. (5 נקודות) ישנן 50 קלפיות. השוחד בכל קלפי בלתי-תלוי בשוחד בקלפיות אחרות. מהי תוחלת סך השוחד שישולם? מהי השונות של סך השוחד שישולם?

ד. (4 נקודות) סך ההטבה הכספית מלהיות חברת כנסת מוערכת ב-1.5 מיליון ₪. הניחו כי ההסתברות להיכנס לכנסת היא 1 עבור המקומות הריאליים (11 ומטה) ו-0 אחרת (מיקום 12 ומעלה). חשבו את תוחלת כלל הרווחים של חברת הכנסת א' מיישום שיטת השוחד שלה – כלומר, התוחלת של ההכנסה מלהיות חברת כנסת פחות העלות הכוללת של השוחד.

<u>שאלה 4 (18 נקודות)</u>

בקניון קטן שש חנויות צמודות הממוספרות מ-1 עד 6. בשש חנויות אלו אמורות לקום: 2 חנויות הלבשה (אחת לגברים ואחת לנשים), חנות נעליים, בית מרקחת, חנות ספרים וחנות טבע. בעל הקניון החליט להגריל את מיקום החנויות.

א. (5 נקודות) מהי ההסתברות שחנות מספר 1 תהיה בית המרקחת?

ב. (5 נקודות) מהי ההסתברות שבין שתי חנויות ההלבשה תהיה רק חנות הנעליים?

ג. בהסתברות 0.6 יוצב דוכן תכשיטים ברחבת הקניון. ההסתברות שיוצב דוכן תכשיטים ברחבת הקניון וגם בית המרקחת תהיה החנות במיקום מספר 1 היא 0.3.

(3 נקודות) האם המאורעות שיוצב דוכן תכשיטים ברחבת הקניון ובית המרקחת תהיה החנות מספר 1 תלויים או בלתי תלויים? הסבר.

(5 נקודות) מהי ההסתברות שגם לא תוצב חנות תכשיטים ברחבת הקניון וגם בית המרקחת לא יהיה במיקום מספר 1?

<u>שאלות נכון/לא נכון (16 נקודות)</u>

על כל סעיף רשום נכון/לא נכון והסבר במקסימום שלושה משפטים. נכון פירושו נכון בהכרח תמיד.

א. נתון כי $X\sim B(2,1/5)$. כמו כן, X מורכב משני משתני ברנולי X_1 ו-X_2- כלומר $X= X_1+ X_2$.
מסקנה: השונות המשותפת של X_1 ו- X_2 היא אפס.

ב. במרחב הסתברות סימטרי $P(A)=P(B)$ לכל שני מאורעות A ו-B.

ג. אם $P(A|B)=P(B|A)$ אז בהכרח $P(A)=P(B)$ (A ו-B הם מאורעות בעלי הסתברות חיובית).

ד. X הוא משתנה מקרי אחיד **בדיד** המתפלג בין 0 ל-2. Y הוא משתנה מקרי אחיד **רציף** המתפלג בין 0 ל-2. $P(X=1)=P(Y=1)$.

<u>פתרון שאלה 1</u>

א. אם בדיוק 20.045% מהעוגות שוקלות פחות מ-466.4 גרם, אז: $\Phi\left(\frac{466.4-500}{\sigma}\right) = 0.2045$.
מכאן ש: $\frac{-33.6}{\sigma} = -0.84$ ולכן $\sigma = 40$.

ב. לכל עוגה, ההסתברות שהיא תשקול יותר מ-540 היא ההסתברות שהיא לפחות סטיית תקן אחת מעל הממוצע – כלומר $1-\Phi(1) = 1-0.84 = 0.16$. באותו האופן, ההסתברות שעוגה כלשהי תשקול פחות מ-460 גרם היא $\Phi(-1) = 0.16$. לכן, ההסתברות שעוגה כלשהי תשקול או יותר מ-540 או פחות מ-460 היא $0.16+0.16 = 0.32$. שולפים שמונה עוגות ולכן מספר העוגות שישקלו או יותר מ-540 או פחות מ-460 מתפלג בינומית $B(8,0.32)$.
כך, ההסתברות שבדיוק שלוש מתוך העוגות יקיימו את התנאי לעיל היא:
$\binom{8}{3}0.32^3 * 0.68^5 \approx 0.267$

ג. הפעם מדובר בהתפלגות גיאומטרית עבור מספר העוגות שהצרכן קונה עם פרמטר $p = 0.16$.
ההסתברות שבדיוק חמש עוגות ייקנו עד לעוגה הראשונה עם משקל שגבוה מ-540 גרם היא:
$0.84^4 * 0.16^1 \cong 0.08$. התוחלת של מספר העוגות שהוא ירכוש היא $\frac{1}{0.16} = 6.25$

ד. תוחלת מחיר עוגה בודדת הוא: $0.16*50+0.84*75 = 8+63 = 71$. לכן, אם הלקוח מסעיף ג' לעיל רוכש בממוצע 6.25 עוגות, אז תוחלת התשלום עבור העוגות שהוא רכש תהיה:
6.25*71=443.75

<u>פתרון שאלה 2</u>

א. נמצא את a כך שהשטח מתחת לפונקציית הצפיפות שווה ל-1.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{10}^{20} f(x)dx = \int_{10}^{15}\frac{1}{20}dx + \int_{15}^{20}(ax-0.55)dx$$
$$= \frac{x}{20}\Big|_{10}^{15} + \left(\frac{ax^2}{2} - 0.55x\right)\Big|_{15}^{20}$$
$$= \frac{15-10}{20} + \frac{a(400-225)}{2} - 11 + 8.25$$
$$= 0.25 + \frac{175}{2}a - 2.75 = 87.5a - 2.5 = 1$$

לכן, מתקבל: $a = 0.04$

ב. פונקציית ההתפלגות המצטברת:

כאשר $10 \le t \le 15$:

$$F(t) = \int_{10}^{t} \frac{1}{20} dx = \frac{t-10}{20}$$

כאשר $15 < t \le 20$:

$$\begin{aligned} F(t) = \int_{10}^{t} f(x)dx \\ &= \int_{10}^{15} f(x)dx \\ &+ \int_{15}^{t} f(x)dx = \frac{1}{4} + \int_{15}^{t} \left(\frac{1}{25}x - \frac{11}{20}\right) dx = \frac{1}{4} + \left(\frac{x^2}{50} - \frac{11}{20}x\right)\Bigg|_{15}^{t} \\ &= \frac{1}{4} + \frac{t^2 - 225}{50} - \frac{11}{20}t + \frac{165}{20} = \frac{t^2}{50} - \frac{11t}{20} - \frac{9}{2} + \frac{170}{20} \\ &= \frac{t^2}{50} - \frac{11t}{20} + 4 \end{aligned}$$

לכן מתקבל:

$$F(x) = \begin{cases} 0 \ , \ x < 10 \\ \frac{x-10}{20} \ , \ 10 \le x \le 15 \\ \frac{x^2}{50} - \frac{11x}{20} + 4 \ , \ 15 < x \le 20 \\ 1 \ , \ x > 20 \end{cases}$$

התוחלת של X:

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{10}^{15} \frac{x}{20} dx + \int_{15}^{20} \left(\frac{x^2}{25} - \frac{11x}{20}\right) dx = \frac{x^2}{40}\Bigg|_{10}^{15} + \left(\frac{x^3}{75} - \frac{11x^2}{40}\right)\Bigg|_{15}^{20} \\ &= \frac{225-100}{40} + \frac{8000-3375}{75} - \frac{4400-2475}{40} \\ &= \frac{125-1925}{40} + \frac{4625}{75} = -40 + \frac{185}{3} = \frac{50}{3} \end{aligned}$$

ג. ההסתברות שהבוחן בחדו"א יימשך 12 דקות או פחות היא 2/10. ההסתברות שהבוחן בסטטיסטיקה יימשך 12 דקות או פחות היא $\frac{1}{10} = \frac{2}{20} = \frac{2}{5} * \frac{1}{4}$. מכיוון שמשך המבחן לכל מבחן הוא בלתי תלוי זה בזה, אז ההסתברות ששני המאורעות ייקרו יחיד הינו מכפלת ההסתברויות.

לכן, ההסתברות היא $\frac{2}{100} = \frac{2}{10} * \frac{1}{10}$

<u>פתרון שאלה 3</u>

א. שימו לב שאם התוחלת שתשלום לכל קלפי היא 5000 ₪, אז ההתפלגות של השוחד היא סימטרית, ולכן צריך שיתקיים $p=r$.

מבניית הטבלה לכל קלפי, נקבל:

	13	12	11	10	
p	$\frac{1}{3}p$	$\frac{1}{3}p$	$\frac{1}{3}p$	0	0
q	0	$\frac{1}{3}q$	$\frac{1}{3}q$	$\frac{1}{3}q$	5
r	0	0	$\frac{1}{2}r$	$\frac{1}{2}r$	10
	$\frac{1}{3}p$	$\frac{1}{3}p+\frac{1}{3}q$	$\frac{1}{3}p+\frac{1}{3}q+\frac{1}{2}r$	$\frac{1}{3}q+\frac{1}{2}r$	

מכיוון שנתון שההסתברות הלא מותנית שחברת הכנסת תהיה במקום ה-13 ברשימה היא $\frac{1}{12}$, אז ניתן לראות כי $p=\frac{1}{4}$ ולכן $r=\frac{1}{4}$ ו-$q=\frac{1}{2}$

לכן, טבלת ההסתברות המשותפת היא:

	13	12	11	10	
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	0	0
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	5
$\frac{1}{4}$	0	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	10
1	$\frac{2}{24}$	$\frac{6}{24}$	$\frac{9}{24}$	$\frac{7}{24}$	

ב. $E(XY)=\frac{1}{6}*5*10+\frac{1}{6}*5*11+\frac{1}{6}*5*12+\frac{1}{8}*10*10+\frac{1}{8}*10*11=$
$\frac{5}{6}*33+\frac{5}{4}*21=\frac{165}{6}+\frac{105}{4}=\frac{330+315}{12}=53.75$

$$E(X)*E(Y)=\frac{70+99+72+26}{24}*\frac{5+5}{2}=\frac{89}{8}*5=\frac{445}{8}=55.625$$

לכן: $Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)*E(Y)=53.75-55.625=-1.875<0$

ישנו מתאם שלילי – ככל שהשוחד גבוה יותר, תהיה נטייה למקום יותר נמוך ברשימה.

ג. ישנן 50 קלפיות – כלומר סך השוחד הוא $\sum_{i=1}^{50} Y_i$ כאשר כל Y_i מתפלג כפי ש-Y מתפלג מעלה. אנחנו כבר יודעים (נתון) ש-$E(Y)=5$ – כלומר, התוחלת של השוחד ששולם היא 5000 ₪.

$$E(Y^2)=25*\frac{1}{2}+100*\frac{1}{4}=\frac{25+50}{2}=\frac{75}{2}$$

לכן: $Var(Y)=\frac{75}{2}-\frac{50}{2}=\frac{25}{2}$

אבל שימו לב שאנחנו מעוניינים בשונות של התשלום ששולם בשוחד שזה Y*1000.

לכן: $Var(1000Y)=1000^2*Var(Y)=1000^2*\frac{25}{2}$

והתוחלת של סך השוחד ששולם יהיה: $50*5000$

והשונות של סך השוחד ששולם יהיה: $50*1000^2*\frac{25}{2}$

ד. תוחלת כלל הרווחים תהיה:

$$\big(P(X=10)+P(X=11)\big)*1{,}500{,}000-50*5000=\frac{16}{24}*1{,}500{,}000-250{,}000$$
$$=1{,}250{,}000$$

פתרון שאלה 4

א. סך התוצאות האפשריות של ההגרלה על מיקום החנויות הוא: $6!=720$

מספר התוצאות האפשריות כאשר חנות מספר 1 היא בית המרקחת: $5!=120$

לכן, ההסתברות שחנות מספר 1 תהיה בית המרקחת היא $\frac{1}{6}$.

ב. ישנן 8 (2*4) קומבינציות שונות לחנויות ההלבשה כך שרק חנות הנעליים ביניהם: 1 ו-3, 2 ו-4, 3 ו-5, ו-4 ו-6. לכל קומבינציה כזו יש *3!=6* סידורים אפשריים לשאר החנויות במיקומים שנותרו. לכן, סך האפשרויות לסידור חנויות ההלבשה כך שרק חנות הנעליים תהיה ביניהן הוא *6*8=48*. לכן, ההסתברות שבין שתי חנויות ההלבשה תהיה רק חנות הנעליים היא: $\frac{48}{720}=\frac{1}{15}$

ג. נגדיר *A*=בית המרקחת תהיה במיקום מספר 1; *B*=יוצב דוכן תכשיטים ברחבת הקניון.

$$P(A)=\frac{1}{6}\quad P(B)=\frac{3}{5}\quad P(A\cap B)=\frac{3}{10}$$

מדובר במאורעות תלויים: $P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{3/_{10}}{3/_{5}}=\frac{1}{2}\neq P(A)$

$$P(\overline{A\cap B}) = 1 - P(A\cap B) = \frac{7}{10}$$

מחוק דה-מורגן: $P(\overline{A\cap B}) = P(\bar{A}\cup\bar{B}) = 0.7$

לכן: $\mathrm{P}(\bar{A}\cup\bar{B}) = 0.7 = P(\bar{A}) + P(\bar{B}) - P(\bar{A}\cap\bar{B}) = \frac{5}{6}+\frac{2}{5} - P(\bar{A}\cap\bar{B})$

כלומר: $P(\bar{A}\cap\bar{B}) = \frac{5}{6}+\frac{2}{5}-\frac{7}{10} = \frac{16}{30} = \frac{8}{15}$

<u>פתרון לשאלות נכון/לא נכון</u>

א. נכון – משנתה בינומי מורכב משני ניסויי ברנולי שבלתי-תלויים זה בזה ולכן השונות המשותפת ביניהם שווה לאפס.

ב. לא נכון – במרחב הסתברות סימטרי יש את אותה ההסתברות לכל תוצאה אפשרית, אבל לא לכל מאורע – מאורעות יכולים להכיל מספר תוצאות.

ג. לא נכון - $P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = P(B|A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)}$. בכדי שיתקיים השוויון $\frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$ צריך להתקיים *P(A)=P(B)*, אלא אם כן *A* ו-*B* הם זרים ואז $P(A\cap B) = 0$ ולא חייב להתקיים *P(A)=P(B)*.

ד. לא נכון – במקרה של המשתנה המקרי הרציף *P(Y=1)=0* ואילו במקרה של המשתנה המקרי האחיד $P(X=1) = \frac{1}{3}$