ציון: 97

אוניברסיטת בן גוריון בנגב
מדור בחינות

תאריך הבחינה: **14.07.2015**
שם המרצה: **פרופ' ל. פריגוזין**
שם הקורס: **חדו"א 2 לביוטכנולוגיה**
מספר הקורס: **201.1.9571**
שנה: **2015** **סמסטר ב' מועד א'**
משך הבחינה: **3 שעות**
חומר עזר: **2 דפי נוסחאות (4 עמודים), מחשבון פשוט**

יש לפתור 5 מתוך 6 השאלות הבאות
בדפים <u>המיועדים לכך בלבד</u>
לטיוטה השתמשו בדפי טיוטה (מיועדים לגריסה)
לכל השאלות משכל שווה (20 נקודות)
נבדקות כל 6 השאלות. מתחשבים ב-5 התשובות הטובות ביותר.

בהצלחה!

שאלה מס' 1.

1א) (10 נק') פונקציה $f(x,y,z,w)=\left(\frac{x}{y}\right)^{z/w}$ מוגדרת בתחום $0\le x,y,z,w$.

הוכיחו כי $x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}+w\frac{\partial f}{\partial w}$ שווה לקבוע (ומצאו את הקבוע הזה).

$$f(x,y,z,\omega)=\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{z}{\omega}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{z}{\omega}\cdot\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{z}{\omega}-1}\cdot\frac{1}{y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{z}{\omega}\cdot\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{z}{\omega}-1}\cdot\frac{x}{y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}=\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{z}{\omega}}\cdot\ln\left(\frac{x}{y}\right)\cdot\frac{1}{\omega}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \omega}=-\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{z}{\omega}}\cdot\ln\left(\frac{x}{y}\right)\cdot\frac{z}{\omega^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}\cdot x+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot y+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot z+\frac{\partial f}{\partial \omega}\cdot\omega=$$

$$=\frac{z}{\omega}\cdot\frac{x}{y}\cdot\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{z}{\omega}-1}-\frac{z}{\omega}\cdot\frac{x}{y}\cdot\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{z}{\omega}-1}+\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{z}{\omega}}\cdot\ln\left(\frac{x}{y}\right)\cdot\frac{z}{\omega}-\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{z}{\omega}}\cdot\ln\left(\frac{x}{y}\right)\cdot\frac{z}{\omega}=0$$

10/10

1ב) (10 נק') הסבירו מדוע בסביבת $x=1$ קיימת פונקציה $y(x)$ המקיימת משוואה

$$\ln\sqrt{x^2+y^2} = \arctan\frac{y}{x}$$

ותנאי $y(1)=0$. מצאו $y''(1), y'(1)$.

צריך להראות שבסביבה של $x=1$ קיימת פונקציה סתומה $y(x)$ המקיימת

$\ln\sqrt{x^2+y^2} = \arctan\frac{y}{x}$ ו- $y(1)=0$

נגדיר: $F: \ln\sqrt{x^2+y^2} - \arctan\frac{y}{x} = 0$

הפונקציה רציפה בסביבות הנקודה $x=1$.

נבדוק קיום נגזרות חלקיות רציפות:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{1}{\left(\frac{y}{x}\right)^2+1}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right) =$$

$$= \frac{x}{x^2+y^2} + \frac{x^2}{x^2+y^2}\cdot\frac{y}{x^2} = \frac{x+y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{1}{\left(\frac{y}{x}\right)^2+1}\cdot\frac{1}{x} = \frac{y}{x^2+y^2} - \frac{x^2}{x^2+y^2}\cdot\frac{1}{x} = \frac{y-x}{x^2+y^2}$$

שתי הנגזרות החלקיות מוגדרות בנקודה $M_0(1,0)$ רציפות.

נוכיח שהפונקציה מקיימת את התנאי $y(1)=0$ $\leftarrow$

$\ln\sqrt{1^2+0^2} = \arctan\frac{0}{1} \Rightarrow 0=0$ לכן הפונק' מקיימת את התנאי.

כדי שהפונקציה תהיה סתומה צריך שיתקיים $\frac{\partial f}{\partial y}(M_0)\neq 0$ $\leftarrow$ וכן:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(M_0) = \frac{0-1}{0^2+1^2} = -1 \neq 0$$

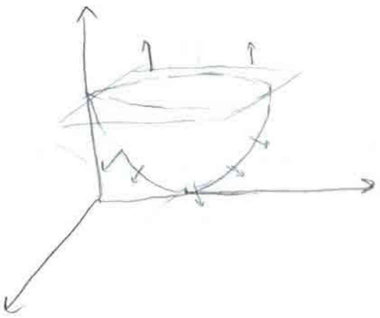
לכן קיימת פונקציה סתומה $y(x)$ המקיימת את התנאים הדרושים.

$\leftarrow$ המשך מאחור

שאלה מס' 2.

2א) (10 נק') מצאו נפח של הגוף הבא: $D=\{\ (x,y,z) \mid \ \ x^2+y^2 \le z \le x+y\ \}$

$V = \iiint dxdydz$



(עבור לקורדינטות פולריות ונמצא את הגבולות:

$x = r\cos\varphi$

$y = r\sin\varphi$

$r^2 \le z \le r\cos\varphi + r\sin\varphi$

ההזזה המתאימה:

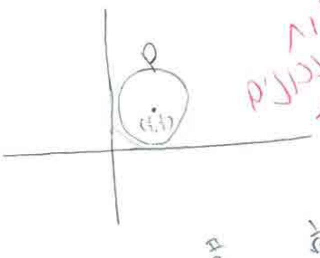
$x = \frac{1}{2} + r\cos\varphi$

$y = \frac{1}{2} + r\sin\varphi$

(נמצא את המעגל המקסימלי: ברדיוס p

$x^2+y^2 = x+y$

$(x-\frac{1}{2})^2 + (y-\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{2}$



ולכן האינטגרל שנקבל:

גבולות לא נכונים

$V = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\sqrt{\frac{1}{2}}} r\,dr \int_{r^2}^{r\cos\varphi + r\sin\varphi} dz =$

5/10

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} r\,(r\cos\varphi + r\sin\varphi - r^2)\,dr = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} r^2\cos\varphi + r^2\sin\varphi - r^3 \quad dr =$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \left[\frac{r^3}{3}\cos\varphi + \frac{r^3}{3}\sin\varphi - \frac{r^4}{4} \right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \left[\frac{1}{(\sqrt{2})^3 \cdot 3}\cos\varphi + \frac{1}{(\sqrt{2})^3 \cdot 3}\sin\varphi - \frac{1}{16} \right] =$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{6\sqrt{2}}\cos\varphi + \frac{1}{6\sqrt{2}}\sin\varphi - \frac{1}{16} \right) d\varphi = \frac{1}{6\sqrt{2}}\sin\varphi - \frac{1}{6\sqrt{2}}\cos\varphi - \frac{1}{16}\varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} =$

$= \frac{1}{6\sqrt{2}} - \frac{\pi}{32} - \left(-\frac{1}{6\sqrt{2}}\right) = \frac{2}{6\sqrt{2}} - \frac{\pi}{32} = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{32}$

2ב) (10 נק') נתון שדה ווקטורי

$$\vec{F} = (3x + e^{yz})\vec{i} + (-3y + e^{xz})\vec{j} + (2z + e^{xy})\vec{k}$$

מצאו שתף הסדה, $\Phi = \oiint_S \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS$, דרך ספה S של תחום D מסעיף 2א ($\vec{n}$ נורמל חיצוני).

נמצא זאת שטף השדה באמצעות משפט גאוס

$$\iint \bar{F}\, \bar{n}\, ds = \iiint \operatorname{div} \bar{F}\, dxdydz$$

כיוון שמדובר במשטח סגור, ניתן להשתמש במשפט כפי שהוא

$$\operatorname{div} \bar{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 3 - 3 + 2 = 2$$

$$\iint_S \bar{F} \cdot \bar{n}\, ds = \iiint_D \operatorname{div} \bar{F}\, dxdydz = 2 \underbrace{\iiint dx\, dy\, dz}_{\text{חישבנו בסעיף הקודם}}$$

$$\iint_S \bar{F} \cdot \bar{n}\, ds = 2\left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{32}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{16}$$

10/10

פתרון נכון אך נפל מסעיף א' כי לא נכון

שאלה מס' 3. נתונים שני ישרים:

$$\bar{l}_1\ \begin{cases} x-2y+z+9=0 \\ 2x+y-z-10=0 \end{cases} \qquad \bar{l}_2\ \begin{cases} x+3y+2z+5=0 \\ 3x+4y+2z+1=0 \end{cases}$$

מה מצב הדדי של הישרים (מצטלבים, נחתכים או מקבילים)?
אם הישרים נחתכים מצאו את הנקודת החיתוך, ואם לא חשבו את המרחק בין הישרים.

נמצא את המשוואה של כל אחד מהישרים.

כיוון שהישרים מוגדרים כחיתוך בין שני מישורים, וקטור הכיוון של כל אחד מהם מתקבל כתוצאה ממכפלה וקטורית בין הנורמלים של המישורים.

מכאן:

$$\bar{l}_1 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \bar{i}(2-1) - \bar{j}(-1-2) + \bar{k}(1+4) = \bar{i} + 3\bar{j} + 5\bar{k} \qquad \bar{l}_1 = (1,3,5)$$

$$\bar{l}_2 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = \bar{i}(6-8) - \bar{j}(2-6) + \bar{k}(4-9) = -2\bar{i} + 4\bar{j} - 5\bar{k} \qquad \bar{l}_2 = (-2,4,-5)$$

אם הישרים מקבילים, אז: $\bar{l}_1 \times \bar{l}_2 = 0$ נבדוק:

$$\bar{l}_1 \times \bar{l}_2 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 3 & 5 \\ -2 & 4 & -5 \end{vmatrix} = \bar{i}(-15-20) - \bar{j}(-5+10) + \bar{k}(4+6) \neq (0,0,0)$$

לכן ישרים לא מקבילים.

נמצא משוואות קנוניות של הישרים. נקודה M_1 הנמצאת על הישר $\bar{l}_1$:

$$x=0 \rightarrow \begin{cases} -2y+z=-9 \\ y-z=10 \end{cases} \Rightarrow -y=1 \rightarrow y=-1 \rightarrow -1-z=10 \rightarrow z=-11 \qquad M_1(0,-1,-11)$$

נק' M_2 הנמצאת על הישר $\bar{l}_2$:

$$x=0 \rightarrow \begin{cases} 3y+2z=-5 \\ 4y+2z=-1 \end{cases} \Rightarrow y=4 \rightarrow 12+2z=-5 \rightarrow z=-8.5 \qquad M_2(0,4,-8.5)$$

$$\bar{l}_1: \quad \frac{x}{1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+11}{5} \Rightarrow \begin{cases} x=t \\ y=3t-1 \\ z=5t-11 \end{cases}$$

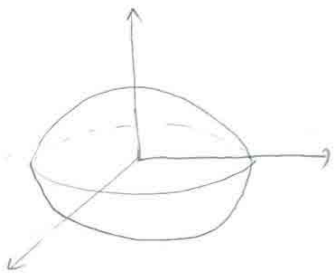
$$\bar{l}_2: \quad \frac{x}{-2} = \frac{y-4}{4} = \frac{z+8.5}{-5} \Rightarrow \begin{cases} x=-2s \\ y=4s+4 \\ z=-5s-8.5 \end{cases}$$

שאלה מס' 4.

4א) (10 נק') נתון אליפסואיד

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2=1$$

בין כל התיבות $\left\{|x|\le k_x,|y|\le k_y,|z|\le k_z\right\}$ החסומות באליפסואיד זה מצאו את התיבה בעלת נפח מקסימאלי.



$x = ar\cos\varphi$

$y = br\sin\varphi$

$J = abc\,r$

4ב) (10 נק') מצאו כל נקודות קיצון מקומי של פונקציה
$$f = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2 .$$

$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 2x - 2y$ $\qquad \frac{\partial f}{\partial x} = 0$

$\frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 - 2x - 2y$ $\qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 0$

$4x^3 = 4y^3$

$x = y \rightarrow$

$4x^3 - 2x - 2x = 0$

$4x^3 - 4x = 0$

$4x(x^2 - 1) = 0$

$x = 0 \quad x = 1 \quad x = -1$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$

$y = 0 \quad y = 1 \quad y = -1$

$M_1(0,0) \quad M_2(1,1) \quad M_3(-1,-1)$

8|10

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2 - 2$ $\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12y^2 - 2$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -2$ $\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -2$

$\Delta = \begin{vmatrix} 12x^2 - 2 & -2 \\ -2 & 12y^2 - 2 \end{vmatrix} = (12x^2 - 2)(12y^2 - 2) - 4 :$

$M_1(0,0): \Delta = 0$, צריך לחקור בנפרד

$M_2(1,1)$ $\Delta > 0$, $f''_{xx} > 0$ $(1,1)$ min

$M_3(-1,-1)$, $\Delta > 0$, $f''_{xx} > 0$ $(-1,-1)$ min

כיוון שקיבלנו שני נק' מינימום סימטריים והפונקציה סימטרית, אין בהכרח שנק' (0,0) היא נקודת מקסימום.

יש לה קיצון מקומי

$(0,0)$ max ?

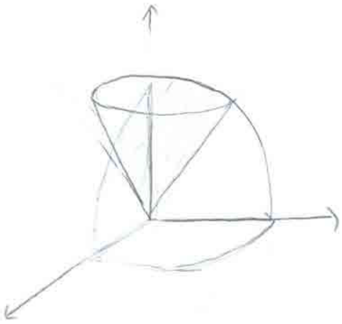
$(-1,-1)$ min $\quad (1,1)$ min

לא נכון

שאלה מס' 5. חשבו מסה של גוף

$$D=\left\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\le 4,\quad x^2+y^2\le 9z^2,\quad x\ge 0,\quad y\ge 0,\quad z\ge 0\right\}$$

בעל צפיפות $d=10z$.



רק נקודה אחת עם רדיוס מקסימלי 2 (ולכן).

$$\frac{x^2+y^2}{9}=z^2\le 4-x^2-y^2$$

$$\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{3}\le z\le\sqrt{4-x^2-y^2}$$

$$m=\iiint d\cdot dxdydz$$

(עבור קורדינטות גליליות:

$x=r\cos\varphi$ $\quad 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$

$y=r\sin\varphi$ $\quad 0\le r\le 2$ ✗

$z=z$ $\quad \frac{r}{3}\le z\le\sqrt{4-r^2}$

$J=r$

בקואורדינטות גליליות

$0\le r\le\sqrt{\frac{18}{5}}$

רדיוס הכי גדול של היטל על xy

$$m=10\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\cancel{2}} r\,dr\int_{\frac{r}{3}}^{\sqrt{4-r^2}} z\,dz=5\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^2 r\,dr\left[z^2\right]_{\frac{r}{3}}^{\sqrt{4-r^2}}=$$

$$=5\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^2 r(4-r^2)-\frac{r^2}{3}\,dr=5\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\left[2r^2-\frac{r^4}{4}-\frac{r^3}{9}\right]_0^2=$$

$$=\frac{5\cdot 28}{9}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi=\frac{70}{9}\pi$$

פתרון שני?!

איך לבחור?

(נמצא את החיתוך בין הגופים

$$\frac{x^2+y^2}{9}=4-x^2-y^2$$

$$x^2+y^2=36-9x^2-9y^2$$

$$10x^2+10y^2=36$$

$$x^2+y^2=3.6$$

רק עם רדיוס $\sqrt{3.6}$

המשך מאחור.

שאלה מס' 6.

6א) (10 נק') מצאו קטע התכנסות של טור חזקות

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2n^2-n}}(x-1)^n$$

וחקרו התכנסות הטור בקצוות הקטע.

$a_n=\frac{1}{\sqrt{2n^2-n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ נסמן - $x-1=t$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2n^2-n}}\cdot t^n$$

נמצא את תחום ההתכנסות של הפונקציה בעזרת מבחן קושי:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{(2n^2-n)^{\frac{1}{2}}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[2n]{2n^2-n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[2n]{n}\,\sqrt[2n]{2n-1}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\underbrace{(\sqrt[n]{n})^{\frac{1}{2}}}_{\downarrow 1}\cdot\underbrace{\sqrt[2n]{2n-1}}_{\downarrow 1}}=1$$

לכן הטור מתכנס בהחלט בקטע $|t|<1$

כלומר $-1<t<1$

נבדוק בקצוות התחום:

$$t=1\to\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2n^2-n}}\cdot 1^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2n^2-n}}$$

נבחן בעזרת מבחן השוואה - $b_n=\frac{1}{n}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{1}{\sqrt{2n^2-n}}\cdot\frac{n}{1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n\sqrt{2-\underbrace{\frac{1}{n}}_{\downarrow 0}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

לכן שני הטורים מתבדרים יחד עבור $t=1$

$t=-1\to$ וקטן טור מתאפס ונכון לפי לייבניץ : $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2n^2-n}}\cdot(-1)^n$

6ב) (10 נק') האם שדה $\vec{F}=\left(y-\frac{y}{x^2+y^2}\right)\vec{i}+\left(x+\frac{x}{x^2+y^2}\right)\vec{j}$ הוא שדה משמר בכל תחום $D\subset R^2$? הסבירו וחשבו עבודה של שדה $\vec{F}$ לאורך מסלול סגור $x^2+y^2=R^2$ נגד כיוון השעון.

ע״מ ששדה יהיה משמר צריך להתקיים את תנאי אוילר: $\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial M}{\partial y}$

$$\frac{\partial N}{\partial x}=\left(x+\frac{x}{x^2+y^2}\right)'_x=1+\frac{(x^2+y^2)-2x\cdot x}{(x^2+y^2)^2}=1+\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\left(y-\frac{y}{x^2+y^2}\right)'_y=1-\frac{x^2+y^2-2y\cdot y}{(x^2+y^2)^2}=1-\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}=1+\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)}$$

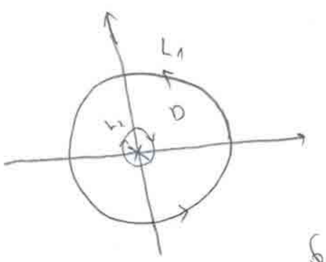
מכיון $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$. אם כך השדה אינו מוגדר בראשית

השדה הזה הוא אינו משמר בכל תחום $D\subset R^2$.

השדה משמר בכל תחום פשוט קשר שלא כולל (0,0).

נחשב עבודה של השדה לאורך מסלול סגור $x^2+y^2=R^2$ נגד כיוון השעון.

תנאי אוילר מתקיים פרט לראשית הצירים.



$$\oint_L \bar{F}\,dl=\iint_D\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)dxdy=0$$

נבחר שפה קטן סביב ראשית הצירים שזה שונה לחלק

$$\oint_L \bar{F}dl=\oint_{L_1}+\oint_{L_2}=0 \Rightarrow \oint_{L_1}-\oint_{L_1^*}=0$$

$$\oint \bar{F}dl=\oint_{L_1^*}F\,dl$$

נחשב: $x=r\cos t$, $dx=-r\sin t$; $y=r\sin t$, $dy=r\cos t$

$$\int_0^{2\pi}\Big(r\sin t-\frac{r\sin t}{\underbrace{r^2\cos^2t+r^2\sin^2t}_{r^2}}\Big)(-r\sin t)+\Big(r\cos t+\frac{r\cos t}{\underbrace{r^2\cos^2t+r^2\sin^2t}_{r^2}}\Big)\cdot r\cos t\,dt=$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(r\sin t-\frac{\sin t}{r}\right)\cdot(-r\sin t)+\left(r\cos t+\frac{\cos t}{r}\right)\cdot r\cos t\,dt=$$

$$\int_0^{2\pi}\left(-r^2\sin^2t+\sin^2t+r^2\cos^2t+\cos^2t\right)dt=\int_0^{2\pi}-\frac{r^2}{2}(1+\cos 2t)+\frac{r^2}{2}(1+\cos 2t)+1\,dt=$$

$$\int_0^{2\pi}dt=2\pi.$$

-10

