



אוניברסיטת בן גוריון בנגב
מדור בחינות

תאריך המבחן 10.07.2016
מרצה: פרופ' ל. פריגזון
מבחן ב: הדו"א 2 לביוטכנולוגיה
מספר הקורס: 201.1.9571
מועד א'
משך המבחן- 3 שעות
חומר עזר: 2 דפי נוסחאות A4 (משני צדדים),
מחשבין.

יש לענות על 5 מתוך 6 השאלות הבאות ולפזר את השאלות בדףים המריעדים לך בלבד. לשימושו השתמשו בדף שיווקה (מיועדים לගייסה).
כל שאלה שווה ל- 20 נקודות.
הצווין יושב על סמן 5 השאלות הטובות ביותר ואין צורך לציין איך שאלות לבדוק.

כל התשובות תჩזינה מנגמינות היבש.

בהצלחה !

שאלה מס' 1

נק' (10) (81) נחונה פונקציה . $w(x, y) = \ln \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$ חשבו . $F = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$

$$w_x = w_{xx} = \frac{\frac{1}{2}(+r)^{-\frac{1}{2}} \cdot 1}{\sqrt{+r}} \cdot (2x-2a)$$

$$= \frac{\frac{1}{2}(2x-2a)}{\sqrt{+r} \cdot \sqrt{+r}} = \frac{x-a}{+r}$$

$$w_{xx}'' = \left(\frac{x-a}{+r} \right)_x = \frac{1 \cdot (+r) - (x-a) \cdot (+'_x)}{(+r)^2} = \frac{+r - (x-a) \cdot (2x-2a)}{(+r)^2} = \frac{+r - 2(x-a)^2}{(+r)^2}$$

$$w_y = w_r \cdot r_y = \frac{\frac{1}{2}(+r)^{-\frac{1}{2}} \cdot 1}{\sqrt{+r}} \cdot (2y-2b) = \frac{\frac{1}{2} \cdot 2(y-b)}{\sqrt{+r} \cdot \sqrt{+r}} = \frac{y-b}{+r}$$

$$w_{yy}'' = \left(\frac{y-b}{+r} \right)_y = \frac{1 \cdot (+r) - (y-b) \cdot +'_y}{(+r)^2} = \frac{+r - (y-b) \cdot (2y-2b)}{(+r)^2} = \frac{+r - 2(y-b)^2}{(+r)^2}$$

$$F = w_{xx}'' + w_{yy}'' = \frac{+r - 2(x-a)^2}{(+r)^2} + \frac{+r - 2(y-b)^2}{(+r)^2} = \frac{(x-a)^2 + (y-b)^2 - 2(x-a)^2 - 2(y-b)^2}{((x-a) + (y-b))^2}$$

$$= \frac{2(x-a)^2 - 2(x-a)^2 + 2(y-b)^2 - 2(y-b)^2}{((x-a) + (y-b))^2} = 0$$

10/10

-3-

10 נק' (ב) מצאו נקודות קיצון של פונקציה $f(x,y) = x^3 + y^3 + 3x^2 - 3y^2 - 8$

$$f'_x = 3x^2 + 6x = 0$$

$$f'_y = 3y^2 - 6y = 0$$

$$3x^2 + 6x = 0$$

$$3x^2 = 0$$

$$3x = 0$$

$$\frac{3x = 0}{x = -2, 0}$$



$$(-2,0) \rightarrow \Delta = -36 \cdot (-2) - 36 = 72 - 36 = 36 > 0$$

$$f''_{xx} = 6(-2)^2 + 6 = -12 + 6 = -6 < 0 \quad \text{max}$$



$$3y^2 - 6y = 0$$

$$3y^2 = 0$$

$$3y = 0$$

$$\frac{3y = 0}{y = 2, 0}$$

$$(-2,2) \rightarrow \Delta = 36 \cdot (-2) \cdot 2 - 36 \cdot (-2)^2 + 36 \cdot 2 - 36 = -36 < 0$$

Polk

$$(0,2) \rightarrow \Delta = 36 \cdot 2 - 36 = 36 > 0$$

$$f''_{xx} = 0 \rightarrow \begin{array}{l} \text{נקודות} \\ \text{הו נקודות} \end{array} \geq 0 \quad \text{min}$$

$$f''_{xx} = 6x + 6$$



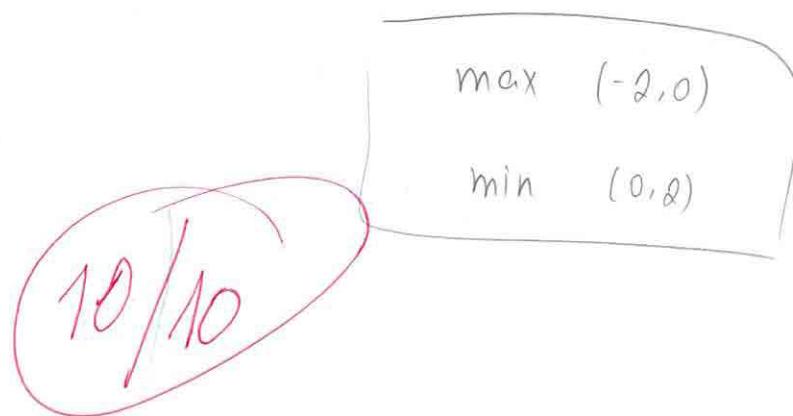
$$(0,0) \rightarrow \Delta = -36 < 0$$

Polk

$$f''_{yy} = 6y - 6$$

$$f''_{xy} = 0$$

$$\begin{aligned} \Delta &= (6x+6) \cdot (6y-6) - 0^2 \\ &= 36xy - 36x^2 - 36y^2 - 36 \end{aligned}$$



שאלה מס' 2

(א) (10 נק') מצאו משוואת המישור העובר דרך הימשר
הוינר כולם מונח במישור המבוקש) ומאונך למישור 0 = x - 2y + z + 5.

נקה כין אילן
כין נועם גוטמן
אנדריאן וולף

$$\begin{vmatrix} 1 & j & k \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = i(4-0) - j(-6-1) + k(0+2) \\ = (4, 7, 2)$$

הוכחה גלאג האנלוג מעלה גוף
הוכחה הוכחה (אילן גוטמן וולף)

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 7 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = i(2+4) - j(4-2) + k(-8-7) \\ = (11, -2, -15) = \vec{n}$$

נקה כין אילן
כין נועם גוטמן
אנדריאן וולף

$$\left\{ \begin{array}{l} y=0 \\ 3x-2y+z-3=0 \\ x-2z=0 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} 3x+z-3=0 \\ x-2z=0 \end{array} \right. \rightarrow x=2z$$

$$\begin{array}{l} 3 \cdot 2z + z = 3 \\ 7z = 3 \\ z = \frac{3}{7} \\ x = \frac{6}{7} \end{array}$$

$$(6/7, 0, 3/7)$$

$$11(x - \frac{6}{7}) - 2(y - 0) - 15(z - \frac{3}{7}) = 0$$

$$11x - \frac{6 \cdot 11}{7} - 2y + 0 - 16z + 3 \cdot \frac{15}{7} = 0$$

$$11x - 2y - 16z - 3 = 0$$

15

10 / 10

(בב 10 נק') האם פונקציה

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^4} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

רציפה בנקודה ? $(0, 0)$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$$

$$\text{沿直線 } y = \sqrt{kx}$$

$$(0, 0) \in \text{האוסף}$$

לטול כ'יה רג'ה צ'ה ו'ה
 $(0, 0)$ כ'יה רג'ה צ'ה
 $\lim_{x \rightarrow 0}$ הטענה כ'יה רג'ה צ'ה

$$\lim_{\substack{y=kx \\ x \rightarrow 0}} \frac{x \cdot \sqrt{kx}^2}{x^2 + \sqrt{kx}^4} = \lim_{\substack{y=kx \\ x \rightarrow 0}} \frac{x \cdot kx}{x^2 + k^2 x^2} = \lim_{\substack{y=kx \\ x \rightarrow 0}} \frac{x^2 k}{x^2 (1+k^2)} = \frac{k}{1+k^2}$$

 ~~$x \rightarrow 0+$~~

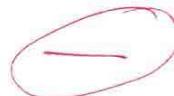
$$(0, 0) \in \text{האוסף}$$

כל $k \in \mathbb{R}$

10/10

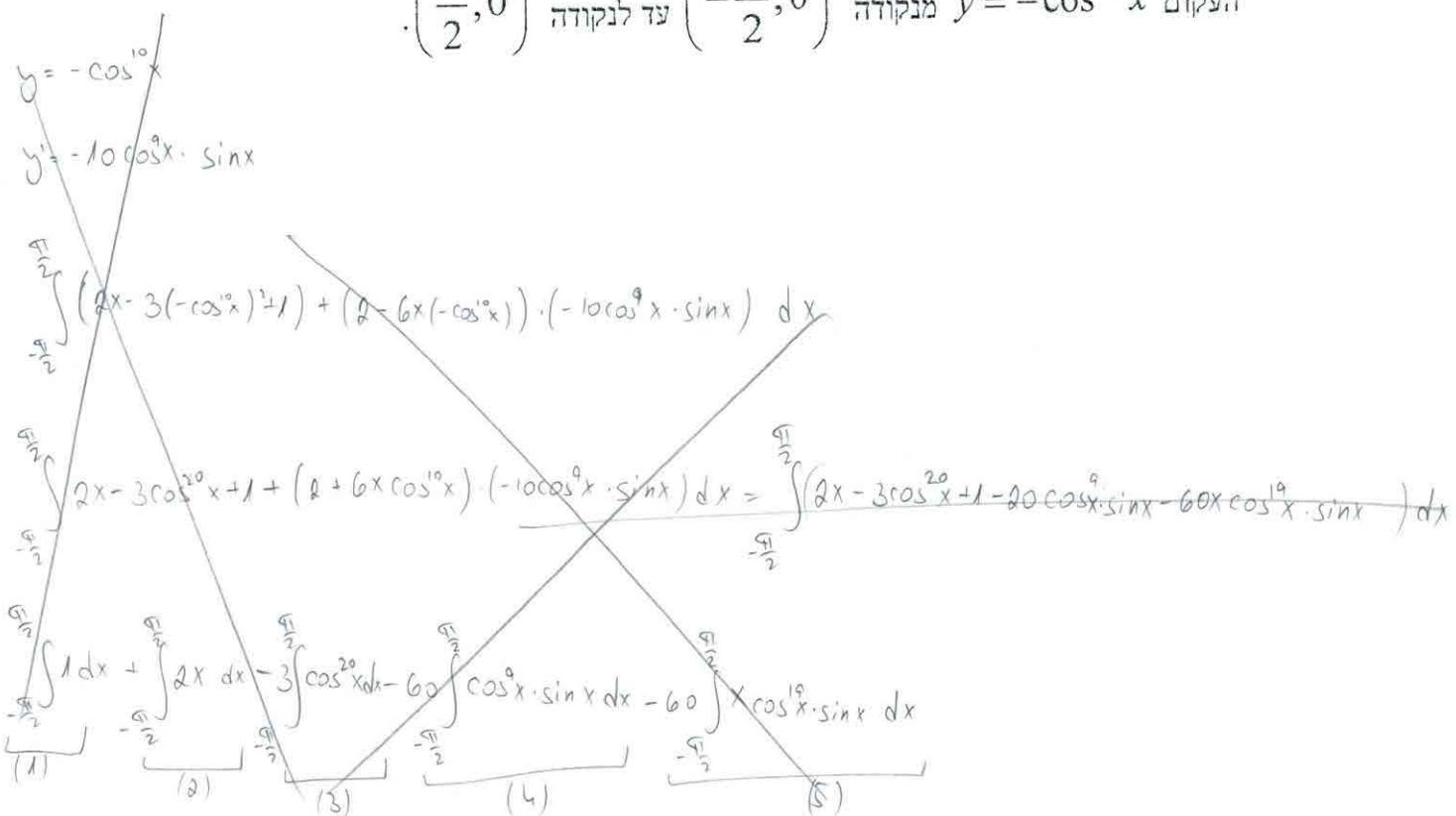
שאלה מס' 3.

(א) 6 נק' (ב) 3 נק' תהי $f(x, y, z)$ פונקציה דיפרנציאבילית בנקודה (x_0, y_0, z_0) .
 הסבירו מדוע בנקודה זו מוגן למשטח רמה $f(x, y, z) = f(x_0, y_0, z_0)$ $\text{grad } f$



בנ' (14) חשבו $\int_L (2x - 3y^2 + 1)dx + (2 - 6xy)dy$ כאשר מסלול L הוא חלק

העקום $y = -\cos^{10} x$ מנוקודה עד לנוקודה $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$



כדי גוזר את הנגיסות נזכיר כי $x=0$ הוא מינימום של $y = -\cos^{10} x$ בקטע $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -6y$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -6y \rightarrow \iiint \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \iiint 0 dx dy = 0$$

6/14

$$\text{סיגונט נתקני גענין רצקה} \quad \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (2x+1) dx = \pi$$

$$(10) \text{ סיגונט אגדת הסטודנטים, בן אוריון} \quad \pi - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} y dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x dx = 0$$

שאלה מס' 4. השתמשו בשיטת כופלי לגרנו כדי למצוא את הנקודה (או נקודות) מהמשתנה $z = 0$ ביחס למשתנה x ו- y במשתנת הערך $2x^2 + 3y^2 + 2z^2 + 2xz = 6$.

(0,0,1) nClNn (n>1), z=0 nClNn 7nm

$$d = \frac{|0 \cdot x + 0 \cdot y + 1 \cdot z|}{\sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2}} = |z|$$

$$\nabla f \parallel \lambda \nabla g$$

$$\begin{aligned}f'_x &= 0 \\f'_y &= 0 \\f'_z &= 1\end{aligned}$$

$$3x = 4x + 22$$

פָּרָמִירְדֵּן

$$2x^2 + 3y^2 + 2z^2 + 2yz = 6 \quad (1)$$

$$g = 2x^2 - 3y^2 + 2z^2 - 2xz - 6$$

$$\begin{aligned} x: & \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 = \lambda(4x+2z) \\ 0 = \lambda(6y) \end{array} \right. \quad \text{I} \\ y: & \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 = \lambda(4z-2x) \\ 2x^2 + 3y^2 + 2z^2 + 2xz = 6 \end{array} \right. \quad \text{II} \\ z: & \quad \left\{ \begin{array}{l} 1 = \lambda(4z-2x) \\ 2x^2 + 3y^2 + 2z^2 + 2xz = 6 \end{array} \right. \quad \text{III} \end{aligned}$$

III $\lambda \neq 0$

$$\text{II} \quad \frac{O}{\lambda} = 6y$$

$$y = 0$$

$$I \quad 4x - 22 = 0$$

$$2x^2 - 7 = 0$$

$$2 = 2x$$

$$III \quad 2x^2 + 3 \cdot 0^2 + 2(-2x)^2 + 2x(-2x) = 6$$

$$2x^2 + 2.4x^2 - 4x^2 = 6$$

$$-2x^2 + 8x^2 = 6$$

$$6x^2 = 6$$

$$X^2 = 1$$

$$x = \pm 1$$

$$Z = -2 \cdot 1 = -2$$

$$z = -2 \cdot (-1) = 2$$

(0, 1, -2)

$$(0, -1, 2)$$

טביה נינה ורינה מילאן ורינה נינה טביה

$$(0, 1, -2)$$

$$(0, -1, 2)$$

19

שאלה מס' 5. מצאו שטף השדה $\bar{F}(x, y, z) = z\bar{i} + y\bar{j} + z^2\bar{k}$ דרך שפה של תחום

$$D: \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq z \leq 2 - \sqrt{x^2 + y^2}\}$$

בכיוון נורמל החיצוני.

השאלה מבקשת למצוא שטף השדה \bar{F} על תחום D .

$$\text{השאלה}: \iiint_D \operatorname{div} F \, dx dy dz$$

$$\operatorname{div} F = 0 + 1 + 2z$$

$$\iiint_D (1+2z) \, dx dy dz$$

נמצא גבולות סילוק

$$x = r \cos \varphi$$

$$y = r \sin \varphi$$

$$z = z$$

$$J = r$$

$$0 \leq r \leq 1$$

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

$$r^2 \leq z \leq 2 - r$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{r^2}^{2-r} (1+2z) \cdot r \, dz \, dr = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{r^2}^{2-r} (z + \frac{2z^2}{2}) \cdot r \Big|_{r^2}^{2-r} \, dr \, dz \, d\varphi$$

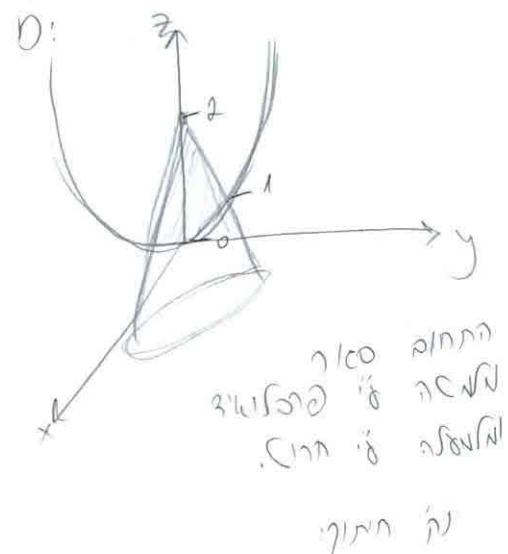
$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{r^2}^{2-r} (2 - r + (2-r)^2 - r^2 - r^4) \cdot r \, dr \, dz \, d\varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{r^2}^{2-r} (2 - r + 4 - 4r + r^2 - r^2 - r^4) \, dr \, dz \, d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{r^2}^{2-r} r(6 - 5r - r^4) \, dr \, dz \, d\varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{r^2}^{2-r} (6r - 5r^2 - r^5) \, dr \, dz \, d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\frac{6r^2}{2} - \frac{5r^3}{3} - \frac{r^6}{6} \right] \Big|_{r^2}^{2-r} \, dz \, d\varphi = \int_0^{2\pi} \left(\frac{6}{2} - \frac{5}{3} - \frac{1}{6} \right) \, dz \, d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{13}{6} - \frac{10}{6} - \frac{1}{6} \right) \, dz \, d\varphi = \frac{7}{6} \int_0^{2\pi} \, dz \, d\varphi = \frac{7}{6} \cdot 2\pi = \frac{7\pi}{3}$$

9



$$x^2 + y^2 = z$$

$$z = 2 - \sqrt{z}$$

$$2 - z = \sqrt{z}$$

$$z^2 - 4z + 4 = z$$

$$z^2 - 5z + 4 = 0$$

$$(z-4)(z-1) = 0$$

$$z = 4, 1$$

העומק כל מה זה ומי

$$x^2 + y^2 = 1$$

20/20

שאלה מס' 6.

(8) (10 נק') האם הטור הבא מתכנס? הסבירו.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n^2+3n+2)e^n}{2^n+3^n}$$

$$a_n = \frac{(n^2+3n+2)e^n}{2^n+3^n} = \frac{(n^2+3n+2) \cdot (\frac{e}{3})^n}{(\frac{2}{3})^n + 1} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n^2+3n+2)e^n}{3^n+3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n^2+3n+2)e^n}{2 \cdot 3^n} \xrightarrow{\text{לכט}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n^2+3n+2} \cdot e}{\sqrt[n]{2} \cdot 3} = \frac{e}{3} < 1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n^2+3n+2)e^n}{2 \cdot 2^n} \xrightarrow{\text{לכט}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n^2+3n+2} \cdot e}{(\sqrt[n]{2}) \cdot 2} = \frac{e}{2} > 1$$

$$\frac{(n^2+3n+2)e^n}{2^n+3^n} \cdot \frac{2 \cdot 3^n}{(n^2+3n+2)e^n} = \frac{2 \cdot 3^n}{2^n+3^n} = \frac{2 \cdot 3^n}{(\frac{2}{3})^n + 1} \xrightarrow{\substack{n \rightarrow \infty \\ \downarrow 0}} \frac{2}{\frac{1}{3}} \neq 0 \neq \infty$$

10-/10

(ב) (ב' בק') מצאו תחום ההתקנסות של טור

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{1/3}}{3^n(n+1000)}(x-2)^n$$

האם בקצוות התחום הטור מתכנס בהחלט, מתכנס בתנאי או מתברר?

$$x-2 = +$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{1/3}}{3^n(n+1000)} \cdot +^n$$

$$R = \lim \sqrt[n]{\frac{n^{1/3}}{3^n(n+1000)}} = \lim \frac{n^{1/3}}{3(n+1000)^{1/n}} = \frac{1}{3} \rightarrow R = 3$$

אנו מודים

$$-3 < x-2 < 3$$

$$-1 < x < 5$$

$$x = 5$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{1/3}}{3^n(n+1000)} \cdot (5-2)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{1/3} \cdot 3^n}{3^n(n+1000)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{1/3}}{n+1000} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1000}$$

נמצא סדרה נסכמת $\rho = 1$

$$x = -1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{1/3}}{3^n(n+1000)} \cdot (-3)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 3^n \cdot n^{1/3}}{3^n(n+1000)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n^{1/3}}{n+1000}$$

נמצא סדרה נסכמת $\rho = 1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{1/3}}{n+1000} = \frac{\frac{n^{1/3}}{n}}{\frac{n+1000}{n}} = \frac{n^{-\frac{2}{3}}}{1 + \frac{1000}{n}} = \frac{1}{n^{\frac{2}{3}}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1000}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^{1/3}}{x+1000} \right)' = \frac{\frac{1}{3} \cdot x^{-\frac{2}{3}}(x+1000) - x^{1/3} \cdot 1}{(x+1000)^2} = \frac{\frac{1}{3} x^{1/3} + \frac{1000}{3} x^{-\frac{2}{3}} - x^{1/3}}{(x+1000)^2} = \frac{-\frac{2}{3} x^{1/3} + \frac{1000}{3} x^{-\frac{2}{3}}}{(x+1000)^2}$$

נמצא סדרה נסכמת:

$$-1 < x < 5$$

$x = -1$ נסכמת

11

נמצא סדרה נסכמת $\frac{2}{3} x^{1/3} > \frac{100}{3} x^{-\frac{2}{3}}$

נמצא סדרה נסכמת $\frac{3}{2} x^{-\frac{2}{3}} > 100$

10/10