אוניברסיטת בן-גוריון בנגב
Ben-Gurion University of the Negev

תאריך הבחינה: _...

שם המרצה: ד"ר ס. גבריאליאן , ד"ר א.לרמן

שם הקורס: חדו"א 2 להנדסת תעשיה וניהול

מספר הקורס: _201.1.9621_

שנה: תשע"ו סמסטר: אביב , מועד ב

משך הבחינה: _3 שעות__

חומר עזר: דף נוסחאות אחד בגודל A4 (2 עמודים), מחשבון פשוט

פתרון מרצה

הוראות לנבחן:

- כתוב באופן ברור, התחל כל שאלה בעמוד חדש, הדגש את מספר השאלה.
- נמק את שלבי החישוב.
- ענה על 4 השאלות.

בהצלחה!

שאלה 1.

א) א) (13 נק') מצאו את הנקודות על האליפסה $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ שקרובות ביותר ורחוקות ביותר מהישר $3x+y-9=0$.

פתרון:

ב) (12 נק') נתון שדה וקטורי $\vec{F}=\left(e^x\cdot\sin y, e^x\cdot\cos y+2yz, y^2\right)$.

ב1) (2 נק') הוכיחו כי $\vec{F}$ הוא שדה משמר.

ב2) (6 נק') מצאו את הפוטנציאל $u(x,y,z)$ של השדה.

ב3) (2 נק') מצאו את העבודה של השדה $\overrightarrow{F}$ מנקודה $A(1,0,1)$ עד לנקודה $B(-1,\pi,2)$.

פתרון:

א.
$$f(x,y)=d^2=\frac{(3x+y-9)^2}{10}$$

$$F(x,y,\lambda)=\frac{(3x+y-9)^2}{10}+\lambda\left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-1\right)$$

$$F'_x(x,y,\lambda)=\frac{6\cdot(3x+y-9)}{10}+\frac{2x\lambda}{4}=\frac{3}{5}(3x+y-9)+\frac{x\lambda}{2}$$

$$F'_y(x,y,\lambda)=\frac{2\cdot(3x+y-9)}{10}+\frac{2y\lambda}{9}=\frac{1}{5}(3x+y-9)+\frac{2y\lambda}{9}$$

$$F'_\lambda(x,y,\lambda)=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-1$$

מערכת האילוצים :
$$\begin{cases}\frac{3}{5}(3x+y-9)+\frac{x\lambda}{2}=0\\ \frac{1}{5}(3x+y-9)+\frac{2y\lambda}{9}=0\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-1=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\left(\frac{9}{5}+\frac{\lambda}{2}\right)x+\frac{3}{5}y=\frac{27}{5}\\ \frac{3}{5}x+\left(\frac{1}{5}+\frac{2\lambda}{9}\right)y=\frac{9}{5}\end{cases}$$ ⇐ **כאשר** $\lambda=0$: $\frac{9}{5}x+\frac{3}{5}y=\frac{27}{5}$

⇐ $3x+y=9$. **נציב במשוואת האליפסה:**

$\frac{x^2}{4}+\frac{(9-3x)^2}{9}-1=0$ ⇐ $5x^2-24x+32=0$ **(למשוואה לא קיים פתרון).**

עבור $\lambda=-4.5$ **למערכת לא קיים פתרון.**

עבור $\lambda\neq 0,\neq -4.5$ **נקבל :** $\begin{cases}x=\frac{108}{45+10\lambda}\\ y=\frac{81}{45+10\lambda}\end{cases}$.

נציב במשוואה (3) : $\frac{108^2}{4\cdot(45+10\lambda)^2}+\frac{81^2}{9\cdot(45+10\lambda)^2}=1$

טל. 08-6461761 פקס. 08-6472908
ת.ד. 653 באר-שבע 84105 miriwiz@bgu.ac.il

$$\Leftarrow \quad 45+10\lambda = \pm 27\sqrt{5} \quad \Leftarrow \quad \lambda_{1,2} = \frac{\pm 27\sqrt{5}-45}{10}.$$

$$x_1 = \frac{4}{\sqrt{5}} \;,\; y_1 = \frac{3}{\sqrt{5}} \text{ ו- } x_2 = -\frac{4}{\sqrt{5}}, y_1 = -\frac{3}{\sqrt{5}}.$$

הנקודה הקרובה ביותר : $\left(\frac{4}{\sqrt{5}};\frac{3}{\sqrt{5}}\right)$ **והרחוקה ביותר** $\left(-\frac{4}{\sqrt{5}};-\frac{3}{\sqrt{5}}\right)$.

ב. נתון שדה וקטורי $\vec{F} = \left(e^x \cdot \sin y, e^x \cdot \cos y + 2yz, y^2\right)$.

$$rot\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ e^x \sin y & e^x \sin y + 2yz & y^2 \end{vmatrix} = 0\cdot\vec{i} + 0\cdot\vec{j} + 0\cdot\vec{k}$$

$$u'_x(x,y,z) = e^x \sin y$$

$$u(x,y,z) = e^x \sin y + C(y,z)$$

$$u'_y(x,y,z) = e^x \cos y + C'_y(y,z) = e^x \cos y + 2yz$$

$$C'_y(y,z) = 2yz \quad \Rightarrow \quad C(y,z) = y^2 z + c_1(z)$$

$$u(x,y,z) = e^x \sin y + y^2 z + c_1(z)$$

$$u'_z(x,y,z) = y^2 + c_1{}'(z) = y^2$$

$$c_1{}'(z) = 0 \quad \Rightarrow \quad c_1(z) = const$$

$$u(x,y,z) = e^x \sin y + y^2 z + c$$

העבודה של השדה $\vec{F}$ **מנקודה** $A(1,0,1)$ **עד לנקודה** $B(-1,\pi,2)$ **שווה :**

$$u(B) - u(A) = \left(e^{-1}\sin\pi + 2\pi^2\right) - 0 = 2\pi^2$$

שאלה 2.

א) (15 נק') חשבו את האינטגרל $\oint_L (5y+x)dx+(z+3x)dy+(4y-z)dz$

כאשר L **הוא קו החיתוך של הפרבולויד** $z=4-x^2-y^2$ **עם המישורים** XY, XZ, YZ

$(x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0)$ **בכיוון המוסכם עם הצד החיצוני של הפרבולויד.**

ב) (10 נק') נתונים הישרים $\begin{cases} x+y+z=2 \\ 3x+4y+z=7 \end{cases}$ **ו-** $\frac{x}{9}=\frac{y}{-6}=\frac{z}{-3}$

ב1) (2 נק') הוכיחו כי הישרים מקבילים.

ב2) (5 נק') מצאו את המרחק בין הישרים.

ב3) (3 נק') מצאו משוואת המישור שעובר דרך הישרים.

פתרון:

א) $\oint_L (5y+x)dx+(z+3x)dy+(4y-z)dz=\iint_S rot\vec{F}\cdot\vec{n}_0 ds$

$$rot\vec{F}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 5y+x & z+3x & 4y-z \end{vmatrix}=3\vec{i}+0\cdot\vec{j}-2\vec{k}$$

$$\vec{N}=(-z'_x,-z'_y,1)$$

$$.\ \vec{N}=(2x,2y,1)\ \Leftarrow\ z'_y=-2y\ ,\ z'_x=-2x$$

$$\iint_S rot\vec{F}\cdot\vec{n}_0 ds=\iint_{D_{XY}}(3,0,-2)\cdot(2x,2y,1)dxdy=\iint_{D_{XY}}(6x-2)dxdy=$$

$$D_{XY}:\begin{Bmatrix} 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2} \\ 0\le\rho\le 2 \end{Bmatrix}$$

טל. 08-6461761 פקס. 08-6472908
ת.ד. 653 באר-שבע 84105 miriwiz@bgu.ac.il

$$= 2\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^2 (3\rho\cos\varphi - 1)\rho d\rho = 2\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\left(\rho^3\cos\varphi - \frac{\rho^2}{2}\right)\Bigg|_0^2 =$$

$$= 2\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} (8\cos\varphi - 2)d\varphi = 4\cdot(4\sin\varphi - \varphi)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = 16 - 2\pi$$

ב.

ב1) נבנה הצגה פרמטרית של הישר $l_1:\begin{cases} x+y+z=2 \\ 3x+4y+z=7 \end{cases}$.

הישר עובר דרך הנקודה $(1,1,0)$ **בכיוון**

$$\overrightarrow{p_1} = \vec{N}_1\times\vec{N}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -3\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$$

משוואה פרמטרית של הישר l_1 : $\frac{x-1}{-3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1}$.

וקטור כיוון של הישר l_2 : $\frac{x}{9} = \frac{y}{-6} = \frac{z}{-3}$ **הינו** $\vec{p}_2 = (9,-6,-3)$.

$\vec{p}_2 = -3\vec{p}_1$ **ולכן הישרים מקבילים. (הם לא מתלכדים כי הנקודה** $M_1(1,1,0)$ **לא שייכת לישר** l_2 **).**

ב2) מרחק בין הישרים שווה למרחק בין נקודה $M_1(1,1,0)$ **לישר** l_2.

לפי הנוסחה : $d = \frac{|M_2M_1\times\vec{p}_2|}{|\vec{p}_2|}$

$$M_2M_1\times\vec{p}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 9 & -6 & -3 \end{vmatrix} = -3\vec{i} + 3\vec{j} - 15\vec{k}$$

$$\left| M_2M_1 \times \vec{p}_2 \right| = \sqrt{(-3)^2 + 3^2 + (-15)^2} = \sqrt{243}$$

$$\left| \vec{p}_2 \right| = \sqrt{9^2 + (-6)^2 + (-3)^2} = \sqrt{126}$$

$$d = \sqrt{\frac{243}{126}} = 3\sqrt{\frac{3}{14}}$$

ב3) משוואת המישור העובר דרך הישרים :

נורמל המישור : $\vec{N} = M_2M_1 \times \vec{p}_2 = -3\vec{i} + 3\vec{j} - 15\vec{k}$

נקודה דרכה עובר המישור : $(0,0,0)$.

משוואת המישור: $-3x + 3y - 15z = 0 \quad \Leftarrow \quad x - y + 5z = 0$.

<u>שאלה 3.</u>

א) (15 נק') מצאו את מסת הגוף המוגבל על ידי $x^2 + y^2 + z^2 \le z$ **כאשר הצפיפות היא** $\rho(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

פתרון:

$$x = r\cos\varphi\sin\theta,\quad y = r\sin\varphi\sin\theta,\quad z = r\cos\theta$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = z\,,\ r^2 = r\cos\theta \quad \Rightarrow \quad r = \cos\theta$$

$$\iiint_T \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,dx\,dy\,dz = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\cos\theta} rr^2 \sin\theta dr =$$

$$\frac{1}{4}\int_0^{\pi/2} \cos^4\theta \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{1}{20}\int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\pi}{10}$$

ב) (10 נק') נתונה הפונקציה $u = \sqrt[5]{z + \ln(x-y)}$

והישר $L: \begin{cases} x + 2y + 3z = 17 \\ 4x + 5y + 6z = -113 \end{cases}$.

ב1) (5 נק') מצאו את $\left|\frac{\partial u}{\partial \vec{a}}\right|$ בנקודה $M(1,0,1)$ בכיוון המקביל לישר.

ב2) (5 נק') מצאו את הגודל המקסימלי של הנגזרת הכיוונית של u בנקודה M ואת הכיוון בו הוא מתקבל.

פתרון.

$$L:\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = (-3,6-3)/-3 \Rightarrow (1,-2,1)$$

$$f'_x = \frac{1}{5\cdot(x-y)\cdot\sqrt[5]{(z+\ln(x-y))^4}},\ f'_x(1,0,1) = \frac{1}{5},$$

$$f'_y = \frac{1}{-5\cdot(x-y)\cdot\sqrt[5]{(z+\ln(x-y))^4}},\ f'_x(1,0,1) = -\frac{1}{5}$$

$$f'_z = \frac{1}{5\cdot\sqrt[5]{(z+\ln(x-y))^4}},\ f'_z(1,0,1) = \frac{1}{5}$$

$\nabla u(1,0,1) = \left(\frac{1}{5},-\frac{1}{5},\frac{1}{5}\right)$ וזה הכיוון בו מתקבל הגודל המרבי של הנגזרת הכיוונית

$$,\left|\nabla u(1,0,1)\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{5}\right)^2+\left(-\frac{1}{5}\right)^2+\left(\frac{1}{5}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{5}$$

$$.\frac{\partial u}{\partial L}\bigg|_{(1,0,1)} = \left(\frac{1}{5},-\frac{1}{5},\frac{1}{5}\right)\cdot\frac{(1,-2,1)}{\sqrt{1^2+(-2)^2+1^2}} = \frac{4}{5\sqrt{6}}$$

אוניברסיטת בן-גוריון בנגב
Ben-Gurion University of the Negev

שאלה 4.

א) (15 נק') חשב את השטף של $rot\vec{F}$**, כאשר**

$$\vec{F}(x,y,z)=\left(x^2+3y+y^2\right)\cdot\vec{i}+2xy\cdot\vec{j}+\left(5z+x^3e^{-xyz}\right)\cdot\vec{k}$$

דרך המשטח S **שהוא החצי התחתון של הספירה עם מרכז בראשית הצירים ורדיוס** 1 **ונורמל** $\vec{n}$ **לכיוון מרכז הכדור.**

פתרון:

משפט סטוקס : $\iint\limits_S(\mathrm{rot}\vec{F}\cdot\vec{n})ds=\oint\limits_G\vec{F}\cdot d\vec{r}$

$$G: x^2+y^2=1, z=0, \vec{r}=\{x=\cos t, y=\sin t, z=0\}$$

$$\iint\limits_S(\mathrm{rot}\vec{F}\cdot\vec{n})ds=\oint\limits_G\vec{F}\cdot d\vec{r}=\oint\limits_G(x^2+3y+y^2,2xy,5z+x^3e^{-xyz})\cdot(dx,dy,dz)=$$

$$\oint\limits_G(\cos^2 t+3\sin t+\sin^2 t,2\cos t\cdot\sin t,\cos^3 t)\cdot(-\sin t,\cos t,0)dt=$$

$$\int\limits_0^{2\pi}\left((-1-3\sin t)\sin t+2\cos^2 t\cdot\sin t\right)dt=$$

$$\int\limits_0^{2\pi}\left(-\sin t-3\sin^2 t+2\cos^2 t\cdot\sin t\right)dt=\int\limits_0^{2\pi}\left(-3\sin^2 t\right)dt=$$

$$-3\int\limits_0^{2\pi}\frac{1-\cos 2t}{2}dt=-3\pi$$

ב) (10 נק') חשבו $\int_L xyz\,dl$ **כאשר** $L: x=3\cos t, y=3\sin t, z=4t, t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

פתרון:

$$x'_t=-3\sin t\ ,\ y'_t=3\cos t\ ,\ z'_t=4\ .\ \sqrt{9\sin^2 t+9\cos^2 t+16}=5$$

$$\int\limits_L x\,y\,z\,dl=5\cdot\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}36t\sin t\cos t\,dt=5\cdot18\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}t\sin 2t\,dt$$

טל. 08-6461761 פקס. 08-6472908
ת.ד. 653 באר-שבע 84105 miriwiz@bgu.ac.il