

תאריך הבחינה: 26.06.2018
 שם המרצה: פיודור פקוביץ
 שם הקורס: חדו"א 2 להנדסת תעשייה וניהול
 מס' הקורס: 201.1.9621
 שנה: 2018, סמסטר: ב, מועד א
 משך הבחינה: 3 שעות

אוניברסיטת בן גוריון בנגב



מדור בחינות

יש לענות על כל 6 שאלות הבאות ללא בחירה בדפים המיועדים לכך בלבד. לטיוטה להשתמש רק במחברת המצורפת לשאלון הזה. מחברת טיוטה עוברת לגריסה. על תשובותיכם להיות ברורות ומנומקות היטב. יש להסביר את מהלך הפתרון ולציין את המשפטים והטענות עליהם אתם מסתמכים.

בהצלחה!

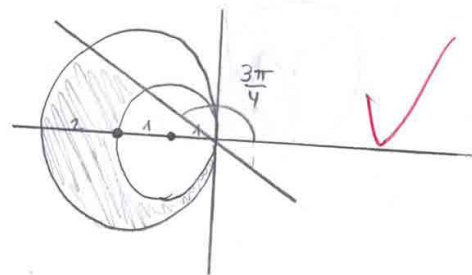
שאלה 1
א) (10 נק') מצא שטח של התחום המוגדר על ידי תנאים
 $x^2 + 2x + y^2 \geq 0$, $x^2 + 4x + y^2 \leq 0$, $y \leq -x$

ב) (6 נק') החלף סדר אינטגרציה באינטגרל

$$\int_0^1 \int_{-2\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} f(x, y) dy dx$$

$$\begin{cases} x^2 + 2x + y^2 \geq 0 \\ x^2 + 4x + y^2 \leq 0 \\ y \leq -x \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x+1)^2 + y^2 \geq 1 \\ (x+2)^2 + y^2 \leq 4 \\ y \leq -x \end{cases}$$

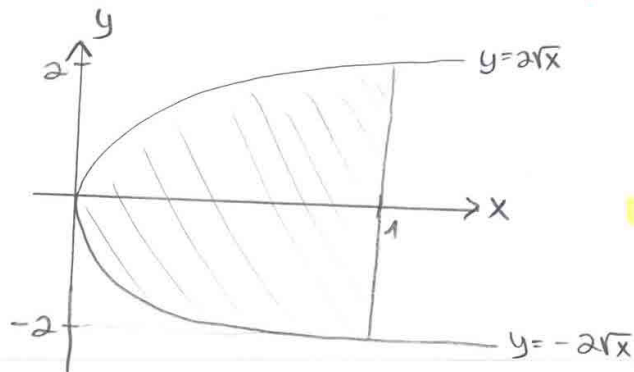


1. k

$$\begin{aligned} S &= \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{2}} \int_1^2 r dr = \left(\frac{3\pi}{2} - \frac{3\pi}{4} \right) \cdot \left. \frac{r^2}{2} \right|_1^2 = \frac{3\pi}{4} - \left(2 - \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{3\pi}{4} - \frac{3}{2} = \underline{\underline{0.66}} \end{aligned}$$

5/10

$$\int_0^1 \int_{-2\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} f(x, y) dy dx$$



2. n

$$\begin{aligned} y &= 2\sqrt{x} \\ y &= -2\sqrt{x} \end{aligned} \quad (y^2 = 4x)$$

$$= \int_{-2}^2 \int_{\frac{y^2}{4}}^1 f(x, y) dx dy$$

6

שאלה 3
(א) (9 נק') מצא מינימומים ומקסימומים מקומיים של הפונקציה
 $2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2$

(ב) (9 נק') מצא את הערך המקסימלי והערך המינימלי של הפונקציה
 $2x^3 + 4x^2 + y^2 - 2xy$ בתחום החסום ע"י עקומות $y = x^2$ ו- $y = 4$

3.כ.

$$f = 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2$$

$$\begin{cases} f'_x = 8x^3 - 2x = 0 \\ f'_y = 4y^3 - 4y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 4x^3 - x = 0 \\ y^3 - y = 0 \end{cases}$$

קריאות:

$$(0, 1) \quad (0, -1) \quad (0, 0)$$

$$\left(\frac{1}{2}, 1\right) \quad \left(\frac{1}{2}, -1\right) \quad \left(\frac{1}{2}, 0\right)$$

$$\left(-\frac{1}{2}, 1\right) \quad \left(-\frac{1}{2}, -1\right) \quad \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$$

$$f''_{xx} = 24x^2 - 2$$

$$f''_{yy} = 12y^2 - 4$$

$$f''_{xy} = 0$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 24x^2 - 2 & 0 \\ 0 & 12y^2 - 4 \end{vmatrix}$$

בספק:

$$\Delta(0, 1) = -2(12-4) < 0 \quad \Delta(0, -1) = -2(12-4) < 0 \quad \Delta(0, 0) = (-2)(-4) = 8 > 0$$

$$\Delta\left(\frac{1}{2}, 1\right) = \left(\frac{24}{4} - 2\right)(12-4) > 0 \quad \Delta\left(\frac{1}{2}, -1\right) = \left(\frac{24}{4} - 2\right)(12-4) > 0$$

$$\Delta\left(-\frac{1}{2}, 1\right) = \left(\frac{24}{4} - 2\right)(12-4) > 0 \quad \Delta\left(-\frac{1}{2}, -1\right) = \left(\frac{24}{4} - 2\right)(12-4) > 0$$

$$\Delta\left(-\frac{1}{2}, 1\right) = \left(\frac{24}{4} - 2\right)(12-4) > 0 \quad \Delta\left(-\frac{1}{2}, -1\right) = \left(\frac{24}{4} - 2\right)(12-4) > 0$$

$$f''_{xx}\left(\frac{1}{2}, 1\right) = 4 > 0 \quad \left(\frac{1}{2}, 1\right) \text{ min}$$

$$f''_{xx}\left(\frac{1}{2}, -1\right) = 4 > 0 \quad \left(\frac{1}{2}, -1\right) \text{ min}$$

$$f''_{xx}\left(-\frac{1}{2}, 1\right) = 4 > 0 \quad \left(-\frac{1}{2}, 1\right) \text{ min}$$

$$f''_{xx}\left(-\frac{1}{2}, -1\right) = 4 > 0 \quad \left(-\frac{1}{2}, -1\right) \text{ min}$$

$$f''_{xx}(0, 0) = -2 < 0 \quad (0, 0) \text{ max}$$

שאלה 4
(א) (9 נק') חשב את המרחק מנקודה $M=(0,0,1)$ לישר

$$l = \begin{cases} x+y-z=1 \\ x+2z=0 \end{cases}$$

(ב) (9 נק') מצא היטל של הנקודה M על ישר l

$$M(0,0,1) \quad l = \begin{cases} x+y-z=1 \\ x+2z=0 \end{cases}$$

4.4

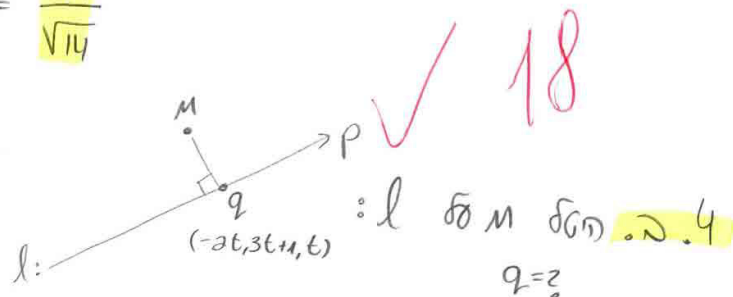
$$\vec{p} = (1,1,-1) \times (1,0,2) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \vec{i} \cdot 2 - \vec{j} \cdot (2+1) + \vec{k} \cdot (-1) = (2, -3, -1)$$

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ x+2z=0 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{נקודות על } l \\ \text{נקודות על } l \end{matrix} \quad \begin{matrix} -y+3z=-1 \\ y=3z+1 \\ x=-2z \end{matrix} \quad (-2t, 3t+1, t)$$

$$M_0(0,1,0) \quad \text{נקודת } l$$

$$\vec{M_0M} = (0, -1, 1) \quad M_0M \times p = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i}(1+3) - \vec{j}(-2) + \vec{k}(2) = (4, 2, 2)$$

$$d = \frac{|(4, 2, 2)|}{|(2, -3, -1)|} = \frac{\sqrt{4^2+2^2+2^2}}{\sqrt{2^2+3^2+1^2}} = \frac{\sqrt{24}}{\sqrt{14}}$$



$$\vec{qM} \cdot \vec{p} = 0 \quad \text{נאנליים}$$

$$(2t, -3t-1, 1-t) \cdot (2, -3, -1) = 4t + 9t + 3 - 1 + t = 0$$

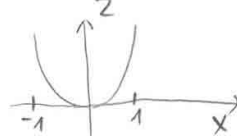
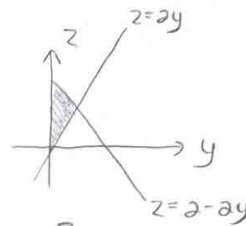
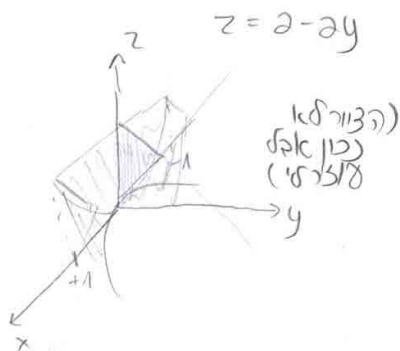
$$14t = -2 \quad t = -\frac{1}{7} \quad \left(\frac{2}{7}, \frac{4}{7}, -\frac{1}{7}\right) = q = \text{הטל}$$

שאלה 5
 (א) (10 נק') חשב נפח של הגוף החסום ע"י משטחים
 $z+2y=2$, $z=2y$, $y=\frac{x^2}{2}$

(ב) (6 נק') הוכח שהשדה $\vec{F}=(2xye^{x^2y}, x^2e^{x^2y}+\cos(z)y, \cos(z)y)$

הוא שדה משמר ומצא את פוטנציאל שלו

$y \geq 0 \rightarrow z \geq 0$
 $y = \frac{x^2}{2}$ $z = 2y$ $z + 2y = 2$



$z = x^2$ $\cdot 1/5$

$2y + 2y = 2$

$4y = 2$

$\frac{4x^2}{2} = 2 \Rightarrow 2x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm 1$

$2y + 2y = 2$

$4y = 2 \Rightarrow y = \frac{1}{2}$

$$V = \int_{-1}^1 \int_0^{1/2} \int_{2y}^{2-2y} 1 \, dx \, dy \, dz = \int_{-1}^1 \int_0^{1/2} (2-2y-2y) \, dy \, dx = \int_{-1}^1 \int_0^{1/2} (2-4y) \, dy \, dx = 2 \int_{-1}^1 (y - y^2) \, dx = 2 \int_{-1}^1 \frac{1}{4} \, dx = \frac{1}{2} \cdot x \Big|_{-1}^1 = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$$

08

שאלה 6

(א) (8 נק') עבור אילו ערכים של c קיים גבול

$$\lim_{x \rightarrow 0, y \rightarrow 0} \frac{x^2 + cy^2}{x^2 - cy^2}$$

(ב) (8 נק') המשוואה $x^y = y^x$ מגדירה פונקציה סתומה $y = y(x)$ מצא $y'(1)$

נתי קיים גבול

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + cy^2}{x^2 - cy^2}$$

6.א.

הגבול לא תלוי ב- k עבור

$c=0$ במקרה. וא"ו גבול.
אחרת תלוי ב- k שונה (קראו ערך גבול אחר...)
(כי עבור k שונה)

$$\{y=kx\} \quad (\text{בחר מסלול})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + ck^2x^2}{x^2 - ck^2x^2} = \frac{x^2(ck^2+1)}{x^2(1-ck^2)} = \frac{1+ck^2}{1-ck^2}$$

הגבול קיים עבור

 $c=0$ במקרה.

$$c=0 \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{x^2} = 1 \quad \text{עבור } c=0$$

6.ב.

$$x^y = y^x \quad y=y(x) \quad f(x,y) = x^y - y^x = 0 \Rightarrow f = e^{y \ln x} - e^{x \ln y}$$

$$y'_x = -\frac{F'_x}{F'_y} = \frac{y^x \ln y - x^y \cdot \frac{y}{x}}{x^y \ln x - y^x \cdot \frac{x}{y}} \quad y'(1) = \frac{1 \cdot \ln 1 - 1 \cdot 1}{1 \cdot \ln 1 - 1 \cdot 1} = \frac{-1}{-1} = 1$$

$$F'_x = x^y \cdot (y \ln x)' - y^x \cdot (x \ln y)' = x^y \cdot \frac{y}{x} - y^x \cdot \ln y$$

$$F'_y = x^y \cdot (y \ln x)'_y - y^x \cdot (x \ln y)'_y = x^y \cdot \ln x - y^x \cdot \frac{x}{y}$$

נבדק $x=1$ במשוואה כדי שזוהי את ה- y הנחשבת:

$$1^y = y^1 \Rightarrow y=1 \quad (1,1) \quad \checkmark$$