פתרון
מרצה

בחדו"א 2 למדמ"ח והנדסת תוכנה 201.1.2371
סמסטר ב' תשע"ח מבחן מועד א' 25.06.18

המרצים : ד"ר דניס גולקו, ד"ר אבי גורן, פרופ' מיכאל לוין, ד"ר דבורה פרץ.
משך הבחינה : 3 שעות
חומר עזר : דף נוסחאות בגודל A4 דו-צדדי (מודפס או בכתב יד). אין להשתמש במחשבון.

יש לענות על כל השאלות.

בחלק השאלות האמריקאיות יש רק לסמן את התשובות הנכונות (לכל שאלה יש רק תשובה נכונה אחת).

בחלק השאלות הפתוחות עליכם לענות בפירוט על השאלות במקום המוקצה לתשובה. עליכם לנמק היטב ולפרט את כל שלבי הפתרון. יינתן ניקוד חלקי במקרים מתאימים.

אין לכתוב בעט אדום.

שימו לב: דפי הטיוטא ישלחו למגרסה.

בהצלחה!

חלק השאלות האמריקאיות (4 שאלות)

1. (5 נקודות) נתון שתחום התכנסותו של טור החזקות $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ הוא $[-1,1)$. אז:

(א) הטור לא מתכנס במידה שווה ב $[-1,1)$. ✓

(ב) הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n x^n}{n}$ לא בהכרח מתכנס ב $x=-1$.

(ג) הטור $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ בהכרח טור ליבניץ.

(ד) אף תשובה איננה נכונה.

2. (5 נקודות) לכל פונקציה $f(x,y)$ בעלת נגזרות חלקיות רציפות מסדר 2 בסביבת הנקודה $(0,0)$ כך ש $(0,0)$ נקודה קריטית של f מתקיים ש:

(א) אם $f_{xx}(0,0) > 0$ אז ל f אין מקסימום מקומי ב $(0,0)$. ✓

(ב) אם $f_{xx}(0,0) \geq 0$ ו $f_{yy}(0,0) \leq 0$ אז ל f אין קיצון מקומי ב $(0,0)$

(ג) אם ל $g(x,y) = f(x^2, y^3)$ יש קיצון מקומי ב $(0,0)$ אז גם ל f יש קיצון מקומי ב $(0,0)$.

(ד) אף תשובה איננה נכונה.

3. (5 נקודות) תהי $f(x,y)$ פונקציה בעלת נגזרות חלקיות רציפות מסדר 2 בסביבת הנקודה (x_0,y_0). אז:

(א) f דיפרנציאבילית ב (x_0,y_0). ✓

(ב) הנגזרות החלקיות של f מסדר 1 לא בהכרח רציפות בסביבת (x_0,y_0).

(ג) לא בהכרח כל הנגזרות הכיווניות של f קיימות ב (x_0,y_0).

(ד) אף תשובה איננה נכונה.

4. (5 נקודות) תהי $f(x)$ פונקציה רציפה בקרן $[1,\infty)$. איזה מן התנאים הבאים בהכרח גורר את התכנסות האינטגרל $\int_1^{\infty} f(x)dx$:

(א) התכנסות האינטגרל $\int_1^{\infty} f(x^2)dx$.

(ב) התכנסות האינטגרל $\int_1^{\infty} (f(x))^2 dx$.

(ג) התכנסות האינטגרל $\int_1^{\infty} \frac{f(x)\sin x}{x} dx$.

(ד) אף תשובה איננה נכונה. ✓

חלק השאלות הפתוחות (4 שאלות)

1. (20 נקודות) מצאו את תחום ההתכנסות של הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\left(x+\frac{1}{n}\right)^n$ וקבעו האם הטור מתכנס לפונקציה רציפה בתחום התכנסותו.

פתרון: נסמן: $a_n(x)=\left(x+\frac{1}{n}\right)^n$. נעשה מבחן קושי של התכנסות טורים חיובים עבור $|a_n(x)|$:

$\sqrt[n]{|a_n(x)|}=\left|x+\frac{1}{n}\right|\xrightarrow[n\to\infty]{}|x|$. אזי הטור מתכנס (בהחלט) כאשר $|x|<1$ ומתבדר כאשר $|x|>1$.

נבדוק בקצוות: $|a_n(1)|=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\xrightarrow[n\to\infty]{}e$; $|a_n(-1)|=\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\xrightarrow[n\to\infty]{}e^{-1}$.

בשני המקרים תנאי ההכרחי של התכנסות לא מתקיים; אז תחום ההתכנסות הסופי $(-1,1)$.

לכל $x\in(-1,1)$ קיים מספר $0<c<1$ כך ש-$x\in[-c,c]$, למשל $c=\frac{|x|+1}{2}$.

נוכיח כי בקטע $[-c,c]$ הטור מתכנס במידה שווה: עבור כל $x\in[-c,c]$ נכון ש-$|a_n(x)|\le a_n(c)$ וטור מספרי $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(c)$ מתכנס. אז לפי מבחן ויירשטרס הטור $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)$ מתכנס במידה שווה. מפני שכל הפונקציות $a_n(x)$ רציפות בכל תחום ההתכנסות אז גם סכום הטור הוא פונקציה רציפה בקטע $[-c,c]$ ובפרט גם בנקודה x. מפני שהנקודה x נבחרת שרירותית בתוך תחום ההתכנסות $(-1,1)$ אז סכום הטור הוא פונקציה רציפה ב-$(-1,1)$.

2. (20 נקודות) תהי $f(x,y)$ בעלת נגזרות חלקיות רציפות מסדר 1 בתחום $x>0, y>0$ כך ש $y\dfrac{\partial f}{\partial x}+x\dfrac{\partial f}{\partial y}=0$ לכל $x>0, y>0$. הוכיחו או הפריכו את הטענה: $f(x,y)=f(\sqrt{x^2+t},\sqrt{y^2+t})$ לכל $x>0, y>0, t\geq 0$.

רמז: בדקו האם $\phi(t)=f(\sqrt{x^2+t},\sqrt{y^2+t})$ פונקציה קבועה.

נסמן $x(t)=\sqrt{x^2+t}\ ,\ y(t)=\sqrt{y^2+t}$

$$\frac{d\varphi}{dt}=\frac{d}{dt}f(x(t),y(t))=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}=$$

$$=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{1}{2\sqrt{x^2+t}}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{1}{2\sqrt{y^2+t}}=$$

$$=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{1}{2x(t)}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{1}{2y(t)}=$$

$$=\frac{1}{2x(t)y(t)}\underbrace{\left[y(t)\frac{\partial f}{\partial x}(x(t),y(t))+x(t)\frac{\partial f}{\partial y}(x(t),y(t))\right]}_{=0}=0$$

לפי מה שנתון בשאלה

לכן $\varphi(t)$ פונקציה קבועה עבור $t\geq 0$.
אז לכל x,y ו $t\geq 0$ מקבלים:

$$f(\sqrt{x^2+t},\sqrt{y^2+t})=\varphi(t)=\varphi(0)=f(\sqrt{x^2+0},\sqrt{y^2+0})=$$
$$=f(|x|,|y|)=f(x,y)$$

<u>הטענה נכונה</u>

3. (20 נקודות) מצאו את הערך הגדול ביותר והקטן ביותר של $f(x,y,z)=xyz$ בתחום $x^2+4y^2+z^2\le 1$.

$$f(x,y,z)=xyz$$

(I) נק חשודות פנימיות

$$\left.\begin{array}{l} f_x'=yz=0 \\ f_y'=xz=0 \\ f_z'=xy=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} y=0 \text{ או } z=0 \\ xz=0 \\ xy=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=0 \end{cases} \text{ או } \begin{cases} z=0 \\ x=0 \end{cases} \text{ או } \begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases}$$

נק חשודות פנימיות:

$$\begin{cases} (x,0,0) \\ \forall x \mid |x|<1 \end{cases} \quad \begin{cases} (0,y,0) \\ \forall y \mid |y|<\frac{1}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} (0,0,z) \\ \forall z \mid |z|<1 \end{cases}$$

$$\boxed{f(x,0,0)=0} \quad \boxed{f(0,y,0)=0} \quad \boxed{f(0,0,z)=0}$$

(II) בדיקת שפה:

נגדיר פונקציה:

$$F(x,y,z,\lambda)=xyz+\lambda(x^2+4y^2+z^2-1)$$

$$\left.\begin{array}{l} F_x'=yz+2\lambda x=0 \\ F_y'=xz+8\lambda y=0 \\ F_z'=xy+2\lambda z=0 \\ F_\lambda'=0 \Rightarrow x^2+4y^2+z^2=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \lambda=-\frac{yz}{2x} \\ \lambda=-\frac{xz}{8y} \\ \lambda=-\frac{xy}{2z} \end{cases}$$

$$(x\neq 0, y\neq 0, z\neq 0)$$

$$\begin{cases} -\frac{y\cancel{z}}{2x}=\frac{-x\cancel{z}}{8y} \\ -\frac{\cancel{y}z}{\cancel{2}x}=-\frac{x\cancel{y}}{\cancel{2}z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y=\pm x \\ z=\pm x \end{cases}$$

נסמן:

$$g(x,y,z)=x^2+4y^2+z^2-1$$

$$\overrightarrow{\text{grad}\, g(x,y,z)}=(2x,8y,2z)$$

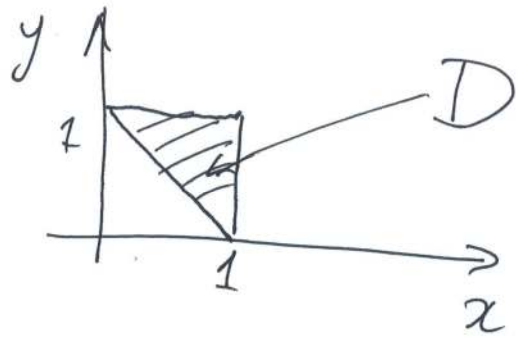
$$\overrightarrow{\text{grad}\, g(x,y,z)}=\underline{0}$$

בנק $(0,0,0)$ (לא על אליפסואיד)

$\Downarrow$

אין חשודות לקיצון נוספות

4. חשבו את האינטגרל $\iint\limits_D (e^{x^2} + \sin(y^2))dxdy$ כאשר $D = \{x \le 1, y \le 1, x + y \ge 1\}$.



$$\iint\limits_D \left(e^{x^2} + \sin(y^2)\right) dxdy = \iint\limits_D e^{x^2} dxdy + \iint\limits_D \sin(y^2) dxdy$$

$$\iint\limits_D e^{x^2} dxdy = \int_0^1 dx \int_{1-x}^1 e^{x^2} dy = \int_0^1 x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} e^{x^2}\Big|_0^1 = \frac{e-1}{2}$$

$$\iint\limits_D \sin(y^2) dxdy = \int_0^1 dy \int_{1-y}^1 \sin(y^2) dx = \int_0^1 y \sin(y^2) dy = -\frac{1}{2}\cos(y^2)\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{1 - \cos 1}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$\iint\limits_D \left(e^{x^2} + \sin(y^2)\right) dxdy = \frac{e - \cos 1}{2}$$