

פתרון מועד ב' בסטיסטיקה לכלכלנים א' - 2015שאלה 1 (20 נקודות)

בקונדיטוריה מסוימת אופים עוגות גבינה שמשקלן מתפלג נורמאלית עם תוחלת של 500 גרם.

ידוע כי בדיוק 20.045% מהעוגות שוקלות פחות מ- 466.4 גרם.

- א. (4 נקודות) מהי סטיית התקן של ההתפלגות?
- ב. (6 נקודות) בוחרים 8 עוגות באופן מקרי ובלתי-תלוי זו בזו. מהי ההסתברות שבדיוק 3 מהן תשקולנה פחות מ- 460 אף יותר מ-540?
- ג. (5 נקודות) נניח לקוח שמחליט שהוא קונה עוגה אחת ביום עד שמגלה לראשונה עוגה ששוקלת יותר מ-540 גרם. מה ההסתברות שאותו צרכן יקנה 5 עוגות בדיוק עד שתימצא העוגה הראשונה ששוקלת יותר מ-540 גרם? מהי התוחלת של מספר העוגות שהוא ירכוש?
- ד. (5 נקודות) מחיר עוגה שמשקלה גבוה מ-460 הוא 75, ומחיר עוגה שמשקלה נמוך מ-460 הוא 50. מהי תוחלת התשלום של הלקוח מסעיף ג' לעיל עבור העוגות שהוא רכש?

שאלה 2 (20 נקודות)

בבוחר פתע בסטיסטיקה מוקצות סך הכל 20 דקות עד להגשת הבוחן. הזמן ממועד תחילת הבוחן ועד ההגשה, X , הינו בעל פונקציית הצפיפות $f(x)$, כאשר a קבוע:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{20}, & 10 \leq x \leq 15 \\ ax - 0.55, & 15 < x \leq 20 \\ 0, & \text{אחרת,} \end{cases}$$

- א. (6 נקודות) מצא את a .
- ב. (10 נקודות) מצא את פונקציית ההפלגות המצטברת של X ואת התוחלת.
- ג. (4 נקודות) בבוחן בחדו"א הזמן עד להגשה מתפלג אחיד בין הסטודנטים מ-10 ועד 20 דקות. הזמן בבוחן בסטיסטיקה ובחדו"א הינם בלתי-תלויים זה בזה. נתבונן בתלמיד אקראי – מהי ההסתברות שאותו תלמיד הגיש גם את הבוחן בסטיסטיקה וגם את הבוחן בחדו"א בפחות מ-12 דקות?

שאלה 3 (26 נקודות)

במפלגת "ישראל שולטת" מתנהלים פריימריז וניתן לשחד את סופרי הקולות בכל קלפי על-מנת לקבל מיקום נמוך יותר ברשימה (מיקום נמוך יותר הוא יותר טוב שכן רק ממיקום כלשהו ומטה נכנסים לכנסת). חברת הכנסת א' יודעת את ההסתברויות הבאות מבחינת מיקומה ברשימה בכל קלפי (שימו לב: מדובר בהסתברויות לתוצאות של קלפי בודדת):

ללא שוחד היא תקבל מיקום בין 11 ל-13 (כולל) ברשימה, כל אחד מהם בהסתברות שווה;

עם שוחד של 5000 ₪ לקלפי, חברת הכנסת א' תקבל מיקום בין 10 ל-12 (כולל) ברשימה, כל אחד מהם בהסתברות שווה;

עם שוחד של 10,000 ₪ לקלפי תקבל חברת הכנסת א' מיקום 10 או 11 ברשימה, כל אחד מהם בהסתברות שווה.

חברת הכנסת א' מחליטה שהיא תעבור בין כל הקלפיות ותגריל שוחד של 0 בהסתברות p , שוחד של 5,000 ₪ בהסתברות q , ושוחד של 10,000 ₪ בהסתברות r . נסמן ב- X את המיקום של חברת הכנסת א' ברשימה (הערכים האפשריים של X הם 10, 11, 12, ו-13). נסמן ב- Y את השוחד לקלפי שישולם באלפי שקלים ($P(Y=10)=r$ $P(Y=5)=q$ $P(Y=0)=p$).

א. (12 נקודות) מצאו את p, q, r בהינתן ש:

התוחלת של השוחד שישולם לכל הקלפיות הוא 5,000 ₪ - כלומר, $E(Y)=5$.

ההסתברות הלא מותנית שחברת הכנסת א' תהיה במקום ה-13 ברשימה היא $1/12$.

רמז: מומלץ תחילה לבנות טבלת הסתברות משותפת למשתנים X ו- Y כפונקציה של q, p ו- r . שימו לב: p, q, r מסתכמים ל-1.

ב. (5 נקודות) חשבו את השונות המשותפת בין X ל- Y . האם השונות המשותפת בעלת ערך חיובי או שלילי? הסבר.

ג. (5 נקודות) ישנן 50 קלפיות. השוחד בכל קלפי בלתי-תלוי בשוחד בקלפיות אחרות. מהי תוחלת סך השוחד שישולם? מהי השונות של סך השוחד שישולם?

ד. (4 נקודות) סך ההטבה הכספית מלהיות חברת כנסת מוערכת ב-1.5 מיליון ₪. הניחו כי ההסתברות להיכנס לכנסת היא 1 עבור המקומות הריאליים (11 ומטה) ו-0 אחרת (מיקום 12 ומעלה). חשבו את תוחלת כלל הרווחים של חברת הכנסת א' מיישום שיטת השוחד שלה – כלומר, התוחלת של ההכנסה מלהיות חברת כנסת פחות העלות הכוללת של השוחד.

שאלה 4 (18 נקודות)

בקניון קטן שש חנויות צמודות הממוספרות מ-1 עד 6. בשש חנויות אלו אמורות לקום: 2 חנויות הלבשה (אחת לגברים ואחת לנשים), חנות נעליים, בית מרקחת, חנות ספרים וחנות טבע. בעל הקניון החליט להגריל את מיקום החנויות.

א. (5 נקודות) מהי ההסתברות שחנות מספר 1 תהיה בית המרקחת?

ב. (5 נקודות) מהי ההסתברות שבין שתי חנויות הלבשה תהיה רק חנות הנעליים?

ג. בהסתברות 0.6 יוצב דוכן תכשיטים ברחבת הקניון. ההסתברות שיוצב דוכן תכשיטים ברחבת הקניון וגם בית המרקחת תהיה החנות במיקום מספר 1 היא 0.3.

(3 נקודות) האם המאורעות שיוצב דוכן תכשיטים ברחבת הקניון ובית המרקחת תהיה החנות מספר 1 תלויים או בלתי תלויים? הסבר.

(5 נקודות) מהי ההסתברות שגם לא תוצב חנות תכשיטים ברחבת הקניון וגם בית המרקחת לא יהיה במיקום מספר 1?

שאלות נכון/לא נכון (16 נקודות)

על כל סעיף רשום נכון/לא נכון והסבר במקסימום שלושה משפטים. נכון פירושו נכון בהכרח תמיד.

- א. נתון כי $X \sim B(2, 1/5)$. כמו כן, X מורכב משני משתני ברנולי X_1 ו- X_2 כלומר $X = X_1 + X_2$. מסקנה: השונות המשותפת של X_1 ו- X_2 היא אפס.
- ב. במרחב הסתברות סימטרי $P(A) = P(B)$ לכל שני מאורעות A ו- B .
- ג. אם $P(A/B) = P(B/A)$ אז בהכרח $P(A) = P(B)$ ו- A ו- B הם מאורעות בעלי הסתברות חיובית).
- ד. X הוא משתנה מקרי אחיד בדיד המתפלג בין 0 ל-2. Y הוא משתנה מקרי אחיד רציף המתפלג בין 0 ל-2. $P(X=1) = P(Y=1)$.