פתרון מרצה

אוניברסיטת בן־גוריון בנגב - המחלקה למתמטיקה - סמסטר ב' תשע"ה

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 2 לתלמידי הנדסת תעשייה וניהול (201-1-9621) - מבחן מסכם, מועד א

המרצים: פרופ' מיכאל לוין, ד"ר תם מאירוביץ

תאריך: 5 ביולי 2015

משך הבחינה: 3 שעות

חומר עזר: אסור שימוש בחומר עזר כלשהו. אין להשתמש במחשבון.

מספר הנקודות הכולל במבחן הוא 75.

עליכם לענות בפירוט על השאלות במקום המוקצה לתשובה. יש להסביר בעברית בצורה תמציתית וברורה מה אתם עושים ומדוע. יינתן ניקוד חלקי במקרים מתאימים.

שימו לב: דפי הטיוטא ישלחו למגרסה.

בהצלחה!

1. יהיו $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ וקטורים במרחב המקיימים

$$(\vec{u}\times\vec{w})\cdot(\vec{v}\times\vec{w})=0,\ \ \|\vec{u}\times\vec{w}\|=3,\ \ \|\vec{v}\times\vec{w}\|=4,$$

חשבו את

$$\|\vec{w}\times(\vec{v}+\vec{u})\|.$$

נמקו את תשובתכם.

פתרון:

$$\vec{w}\times(\vec{v}+\vec{u})=\vec{w}\times\vec{v}+\vec{w}\times\vec{u}$$

מהנתון ש־

$$(\vec{u}\times\vec{w})\cdot(\vec{v}\times\vec{w})=0$$

נובע שהוקטורים $(\vec{u}\times\vec{w})$ ו־ $(\vec{v}\times\vec{w})$ מאונכים ולכן על פי משפט פיתגורס:

$$\|\vec{w}\times(\vec{v}+\vec{u})\|^2=\|\vec{w}\times\vec{v}\|^2+\|\vec{w}\times\vec{v}\|^2$$

כלומר

$$\|\vec{w}\times(\vec{v}+\vec{u})\|^2=3^2+4^2=5^2$$

ולכן

$$\|\vec{w}\times(\vec{v}+\vec{u})\|=5$$

2. יהי $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ שדה וקטורי הנתון על ידי

$$f(x,y)=\left(\begin{array}{c}\alpha x^a y^b\\ x^2 y\end{array}\right)$$

כאשר a,b הם מספרים טבעיים ו־ α מספר ממשי.

(א) (10 נק') חשבו את האינטגרל המסילתי (מהסוג השני) של f לאורך העקום $x^2-y^3=0$ מהנקודה $(0,0)$ עד לנקודה $(1,1)$.
פתרון: המסילה ניתנת לפרמטריציה על ידי $\gamma:[0,1]\to\mathbb{R}^2$

$$\gamma(t)=\left(\begin{array}{c}t^3\\ t^2\end{array}\right)$$

$$\int_\gamma \alpha x^a y^b dx + x^2 y dy =$$

$$\int_0^1 (\alpha t^{3a} y^{2b} 3t^2 + t^6 t^2 2t)dt =$$

$$= \int_0^1 3\alpha t^{3a+2b+2} + 2t^9 dt =$$

$$= \frac{3\alpha}{3a+2b+3}+\frac{1}{5}.$$

(ב) עבור אילו ערכים של הפרמטרים a,b,α השדה הוקטורי f הוא שדה משמר ב־ $\mathbb{R}^2$? נמקו את תשובתכם.
פתרון:
ראינו בכיתה שעבור A דמויית כוכב תנאי הכרחי ומספיק עבור f חלקה להיות שדה משמר הוא $\frac{\partial f_1}{\partial y}=\frac{\partial f_2}{\partial x}$. במקרה שלנו:

$$\alpha b x^a y^{b-1}=2xy,$$

כלומר $a=1$, $b=2$, $\alpha=1$.

3. נתונה הפונקציה

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

חשבו את $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ ו־ $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ בנקודה $(0,0)$.

פתרון: נחשב תחילה את הנגזרות מסדר ראשון. בסביבת נקודה שאינה בראשית הפונקציה אלמנטרית ולכן אפשר לגזור לפי כללי המכפלה והמנה. מכאן שעבור $(x,y)\neq(0,0)$ מתקיים:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=x\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+xy\frac{2y(x^2+y^2)-2y}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=y\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+xy\frac{2y(x^2+y^2)+2x}{(x^2+y^2)^2}$$

בפרט עבור $x\neq 0$ מתקיים $\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)=x$, ועבור $y\neq 0$ מתקיים $\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)=-y$.

בנקודה $(0,0)$ נגזור לפי הגדרה:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h}=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h}=0$$

עכשיו נחשב את הנגזרות המעורבות מסדר שני לפי הגדרה:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(h,0)-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right)=$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(h-0)=1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,h)-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right)=$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(-h-0)=-1$$

4. (א) חשבו את האינטגרל

$$\int_0^1 \int_{2y}^2 4\cos(x^2)dxdy$$

פתרון:

מדובר באינטגרל כפול של הפונקציה $f(x,y) = 4\cos(x^2)$ בתחום

$$A = \{0 \le y \le 1 \ , \ 2y \le x \le 2\} = \{0 \le x \le 2 \ , \ 0 \le y \le \frac{x}{2}\}.$$

לכן על פי משפט פוביני

$$\int_0^1 \int_{2y}^2 4\cos(x^2)dxdy =$$

$$\int_0^2 \int_0^{\frac{x}{2}} 4\cos(x^2)dydx =$$

$$= \int_0^2 \cos(x^2)2xdx =$$

נבצע הצבה $t = x^2$:

$$\int_0^4 \cos(t)dt = \sin(t) \mid_0^4 = \sin(4).$$

(ב) (10 נק')

קבעו אילו מהתחומים הבאים הם דמויי כוכב (הוכיחו את קביעתכם):

i.

$$\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) \ : \ -1 \le x\}$$

דמוי כוכב. למשל, הקטע המקשר בין $(-2,0)$ לכל נקודה אחרת בקבוצה נמצא בקבוצה.

ii.

$$\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) \ : \ -1 \le x \le 1\}$$

לא דמוי כוכב. לכל נקודה (x,y) בקבוצה הקטע המחבר לנקודה $(-x,-y)$ עובר דרך הראשית ־ שאינו נקודה בקבוצה.

כזכור, כפי שהוגדר בשיעור $A \subset \mathbb{R}^2$ נקרא דמויי כוכב אם קיימת נקודה $\vec{v} \in A$ כך שלכל $\vec{w} \in A$ הקטע הישר המחבר את $\vec{v}$ ו־ $\vec{w}$ נמצא כולו ב־ A.