“중등부 2번. 회의 장소” 문제 풀이

작성자: 박선재

부분문제 1

각 질의마다 방문한 가능한 순서를 모두 시도해 볼 수 있다. 가능한 순서들에 대해 회의 세트의 피로도를 전부 계산하고, 그중 최솟값을 출력하면 된다.

부분문제 2

각 질의마다 동적 계획법을 사용해 정답을 구할 수 있다. 다음과 같이 `best`라는 배열을 정의한다.

`best`$[S][i]$: 부분집합 S에 해당하는 집들만을 방문하고, 그 중 i번째 집을 마지막으로 방문하는 모든 방법 가운데, 그때까지의 피로도 중 최솟값

구현 시에는 S를 집합으로 표현하기보다는, 비트 표현 등을 사용할 수 있을 것이다.

위와 같은 정의는 동적 계획법으로 외판원 문제(traveling salesman problem)를 해결할 때의 정의와 유사하며, $best$ 배열을 $O(N^2 2^N)$의 복잡도로 계산할 수 있다. 각 질의에 대해 `best` 배열을 독립적으로 계산하여 문제를 해결할 수 있으므로, 전체 시간복잡도는 $O(QN^2 2^N)$이다.

부분문제 3

한 가지 관찰이 필요하다. 각 질의에 대해서, 주어진 순서에 대한 회의 세트의 피로도는 수직선에서 각 회의 비용에 대응되는 모든 점을 한 번씩 방문할 때 필요한 이동 거리와 같다. 따라서, 이때의 최소 이동 거리가 최소 피로도이므로, 최대 회의 비용과 최소 회의 비용의 차가 최소 피로도가 된다. 각 질의에 대해 $O(N^2)$의 복잡도로 최대 회의 비용과 최소 회의 비용을 구할 수 있다. 따라서 전체 시간복잡도 $O(N^2 Q)$에 문제를 해결할 수 있다.

부분문제 4

회의 세트에 참가하는 집들의 좌표를 작은 것부터 순서대로 $a_1, a_2, \ldots, a_k$라고 했을 때, a_i에서 모일 때 회의 비용을 b_i라고 하자. 이때, $1 \le i < k$에 대해 $b_{i+1} - b_i$를 생각하면, $(2i - k) \cdot (a_{i+1} - a_i)$이다. 따라서, $2i < k$이면 $b_{i+1} - b_i < 0$이고, $2i > k$이면 $b_{i+1} - b_i > 0$이다. 그러므로, a_1 또는 a_k에서 모일 때 회의 비용이 최대가 되고, $a_{\lfloor (k+1)/2 \rfloor}$에서 모일 때 회의 비용이 최소가 된다. 따라서, $O(N)$의 복잡도로 각 회의 세트의 최소 피로도를 계산할 수 있고, 전체 시간복잡도 $O(QN)$에 문제를 해결할 수 있다.

부분문제 5

앞선 부분문제들의 관찰에서, a_1에 있는 집에서 모일 경우 회의 비용을 계산하면, $(a_1 + a_2 + \cdots + a_k) - k \cdot a_1$이다. 비슷하게, a_k에 있는 집에서 모일 경우 회의 비용은 $k \cdot a_k - (a_1 + a_2 + \cdots + a_k)$이다. 마지막으로, $a_{\lfloor (k+1)/2 \rfloor}$에 있는 집에 모일 경우, 회의 비용은 $(\lfloor (k+1)/2 \rfloor \cdot a_{\lfloor (k+1)/2 \rfloor}) - (a_1 + a_2 + \cdots + a_{\lfloor (k+1)/2 \rfloor}) + (a_{\lfloor (k+1)/2 \rfloor + 1} + a_{\lfloor (k+1)/2 \rfloor + 2} + \cdots + a_k) - \lfloor k/2 \rfloor \cdot a_{\lfloor (k+1)/2 \rfloor}$이다.

따라서, 회의 세트에 참여하는 집들에 대해, 좌표의 최솟값, 좌표의 최댓값, 좌표의 중간값, 좌표의 합을 계산할 수 있으면 문제를 해결할 수 있다.

집들의 좌표가 오름차순으로 정렬되어 있기 때문에, 이진 탐색을 통해 집의 좌표가 l 이상 r 이하인 집의 번호의 범위 (i 이상 j 이하)를 구할 수 있다. 좌표의 최솟값은 X_i, 최댓값은 X_j, 중간값은 $X_{\lfloor (i+j)/2 \rfloor}$이다.

범위 내의 좌표 합은 좌표의 합의 누적합 배열 $S_i = X_1 + X_2 + \cdots + X_i = S_{i-1} + X_i$를 사전에 계산해 놓으면, $S_j - S_{i-1}$로 상수 시간에 계산할 수 있다. 질의마다 (i, j) 범위를 계산하는 데에 $O(\log N)$의 시간이 필요하다.

위와 같은 방식으로, 전체 시간복잡도 $O(N + Q \log N)$에 문제를 해결할 수 있다.