"고등부 4번. 점수 경주" 문제 풀이

작성자: 이종영

부분문제 1

어떤 정점 v를 지나가는 모든 참가자들은 v까지 같은 전략을 취함을 이용하자. 최적 전략을 DFS로 구현하면서 현재 S와 C를 관리하면 $O(N^2)$에 문제를 해결할 수 있다.

부분문제 5

각 정점 u에 대해, $v \le u$인 v들을 처리하자. $v > u$인 v들은 뒤집은 후 같은 방법으로 처리할 수 있다.

1번 정점에서 u까지의 거리를 D_u라고 하자. $D_u - D_v < 0$인 마지막 v에 대해, v를 지나는 참가자들은 v에서 점수를 0으로 만든다. 또한 v를 지나기 전에는 점수를 0으로 만들지 않는다. 이를 이용하면 v의 답에서 u의 답을 얻을 수 있으며, 동적 프로그래밍을 통해 답을 구할 수 있다. v를 구하는 것은 1차 대회 "오름차순" 문제와 유사하게 monotone stack을 관리하면 된다.

부분문제 6

센트로이드 분할을 이용해 문제를 해결한다. 센트로이드 c에 대해, c를 지나는 모든 경로들을 처리한 후, c를 제거하고 나뉜 각각의 트리에서 다시 문제를 해결하는 분할 정복 방식을 사용한다.

c를 기준으로 $x_1, \cdots, x_k$의 서브트리로 나뉜다고 하자. x_1의 서브트리의 속하는 u에 대한 답을 구해보자. 각 v에 대해 $u \to c$ 경로와, $c \to v$ 경로로 분해해서 생각하자.

$u \to c$ 경로에서 c에 도달했을 때의 점수 및 점수를 0으로 바꾼 횟수는 항상 일정하다. 이는 부분문제 5와 유사하게 동적 프로그래밍을 통해 구할 수 있는데, 이 서브태스크의 경우 트리의 높이가 낮으므로 점수가 0 미만이 되는 최초 지점을 부모를 타고 올라가면서 구해주면 충분하다. 이제 결과 C값은 모든 v에 대해 더해지므로, 트리의 크기 M, 서브트리의 크기 sz에 대해 $M - sz_{x_1}$만큼 곱해서 답에 더해준다.

$c \to v$의 상의 정점 w에 대해, w에서 점수가 0 미만이 되는 경우를 생각해보자. c에서 점수가 0인 경우를 기준으로, 점수가 0 이상인 정점들은 c에서의 점수가 더 높아도 점수가 0 미만이 되지 않는다. 즉, c에서 점수가 0인 경우 점수가 0 미만이 되는 정점들이 w의 후보가 된다. 그리고 어떤 v에 대한 답은 마지막 w부터의 거리이다. 이러한 w들은 c에서의 점수가 높아질수록 c에서 가까운 부분부터 점점 점수가 0 이상이 되게 된다. 구체적으로, c와 거리 D에 대해 c에서의 점수가 $-D$ 이상인 경우 점수가 0 이상이 된다.

두 경우를 종합하면 각 u에 대해 c에서의 점수를 구한 후, 해당 점수에 대한 S값과 C값을 스위핑을 통해 구할 수 있음을 알 수 있다. 시간복잡도는 $O(N \log^2 N)$이다.

부분문제 8

$u \to c$ 경로의 값을 빠르게 구해야 한다. 세그먼트 트리에서의 이분 탐색, 스파스 테이블, 스택을 관리하되 pop할 정점들을 이분탐색으로 구하고 복원 연산을 구현하는 방법 등으로 $O(\log N)$에 구할 수 있다. 정해는 마지막 방법을 이용하여 구현되었다. 시간복잡도는 $O(N \log^2 N)$이다.