"고등부 2번. ABBC" 문제 풀이

작성자: 김준겸

부분문제 1

C가 존재하지 않으므로, 앞쪽에 있는 A부터 차례대로 그 A보다 뒤에 있는 B 중 가장 앞에 있는 것을 골라 짝지어주면 된다. 각 B에 대해 짝지을 수 있는 A의 후보는 항상 뒤로 갈수록 많아지므로 이 전략은 최적이다.

부분문제 2

$\texttt{D}[i][a][b]$를 1번부터 i번까지의 문자들에 대해 A를 a개, B를 b개만 남기고 모두 지울 수 있는 시행 횟수의 최댓값이라고 하자.

만약 $\texttt{S}[i]$가 A라면, 마지막 A는 뒤에 문자가 존재하지 않아 시행을 할 수 없으므로 $\texttt{D}[i][a][b] = \texttt{D}[i-1][a-1][b]$이다. 만약 $\texttt{S}[i]$가 B라면, 이 B를 앞쪽의 A와 짝맞추어 지울지 뒤쪽의 C와 짝맞추기 위해 남길지의 두 선택지가 있다. 따라서 $\texttt{D}[i][a][b] = \max \texttt{D}[i-1][a-1][b]+1, \texttt{D}[i-1][a][b+1]$이 된다. 만약 $\texttt{S}[i]$가 C라면, 앞쪽에 B가 남아있는 경우에만 지울 수 있고 지울 수 있다면 반드시 지우는 것이 최적임이 자명하다. 따라서 $b>0$이면 $\texttt{D}[i][a][b] = \texttt{D}[i-1][a][b-1]+1$이고 아니라면 $\texttt{D}[i][a][b] = \texttt{D}[i-1][a][b]$이 된다.

따라서 상태가 $O(N^3)$개이고 각 상태 전이가 $O(1)$에 해결되므로 전체 시간복잡도 $O(N^3)$에 해결할 수 있다.

부분문제 3

S에 나타나는 B의 개수를 b라 하자. $b = p + q$일 때 A가 p개 이하로, C가 q개 이하로 B와 짝지어지는 경우를 생각해 보자. A는 뒤에 있는 B와 짝지어져야 하고, C는 앞에 있는 B와 짝지어져야 하므로 존재하는 B 중 앞쪽 q개를 C와, 뒤쪽 p개를 A와 짝짓는 것이 최적이라고 가정해볼 수 있다. 만약 그렇지 않은 경우가 있어 A와 짝지어지는 B가 C와 짝지어지는 B보다 앞에 있는 경우를 생각해 보자. 그러면 짝지어지는 B를 서로 교체했을 때 반드시 시행이 가능하므로, 이러한 경우를 존재하지 않게 하면서 시행의 수를 같게 할 수 있다. 결과적으로 가정은 참이다.

따라서 모든 p와, p에 대해 자동으로 결정되는 q에 대해 문제를 부분문제 1과 같이 탐욕적으로 해결할 수 있다. p를 고르는 경우의 수가 $O(N)$이고 각 문제를 해결하는 데 $O(N)$ 시간이 걸리므로 전체 시간복잡도는 $O(N^2)$이다.

부분문제 4

부분문제 3의 풀이를 최적화할 수 있다. 몇 개의 예시를 살펴보면 p에 대한 최대 시행 횟수가 볼록하다는 것을 알 수 있다. 따라서 이를 가정할 때 효율적인 풀이를 생각해볼 수 있다.

볼록성을 가지는 함수에 대해서는 삼분 탐색이나 기울기에 대한 이분 탐색을 수행해서 최댓값을 빠르게 찾을 수 있다. 따라서 $O(\log N)$개의 후보에 대해서만 문제를 해결하려고 시도할 수 있다. 위 가정은 실제로 참이므로, 이렇게 부분문제 4를 해결할 수 있다. 이때 전체 시간복잡도는 $O(N \log N)$이다.

여러 경우에 대한 복잡한 고려를 통해 볼록성을 직접적으로 증명할 수 있다. 그러나 부분문제 4를 증명하는 과정에서 반드시 부분문제 5의 핵심 관찰을 사용하기 때문에, 부분문제 4에 대한 증명을 완성하여 문제를 해결할 수 있으면 자연스럽게 전체 문제를 곧바로 해결할 수 있다. 간접적인 증명은 다음과 같다.

부분문제 5에서 관찰한 바에 따르면, 최대 시행 횟수일 때 A와 C 양쪽 중 한 쪽이라도 짝지을 수 있는 B는 반드시 시행에 사용된다는 것을 알 수 있다. 따라서 p가 변화해 최적에서 멀어지면 어차피 양쪽에서 모두 짝지을 수 있는 B라 최대 시행 횟수가 유지되거나, 또는 시행에 사용되던 B를 더 이상 시행에 사용할 수 없게 되므로 최대 시행 횟수가 감소한다.

부분문제 5

C를 무시하고, A에 대해서 부분문제 1과 같이 탐욕적으로 시행해 보자. 이렇게 시행했을 때 지워지지 않고 남아있는 B가 x개라고 하자. 그러면 부분문제 3의 관찰에 의하여 적어도 왼쪽에서부터 x개만큼의 B는 A와 절대로 짝지어지지 않음을 알 수 있다.

이제 왼쪽에서부터 x개를 제외하고 남은 B를 모두 A와 짝지을 수 있다. 남은 B는 모두 뒤쪽에 연속하여 있으므로, 부분문제 1을 수행했을 때의 해에서 각 A와 짝지어지는 B를 오른쪽으로 이동시킬 수 있기 때문이다.

남은 x개만큼의 B는 A와 절대로 짝지어질 수 없으므로 C와 짝짓는 것이 최선이다. 따라서 남은 문자열에 대해 부분문제 1의 풀이를 다시 수행할 수 있다.

따라서 왼쪽에서부터 부분문제 1과 같이 A와 B를 짝지어 지우고 난 뒤, 오른쪽에서부터 마찬가지로 B와 C를 짝지어 지우면 반드시 가장 많은 B를 지울 수 있다. 각 과정은 시간복잡도 $O(N)$에 수행할 수 있다.

참고로 위 관찰을 조합하면 어떤 경우에도 A 또는 C와 짝지어질 수 없는 B를 제외한 B는 반드시 시행한 뒤에 지워진다는 것을 알 수 있다. 따라서 B와 C를 짝짓는 것을 A와 B를 짝짓지 않은 문자열에서 그대로 수행하여 더 간단하게 구현할 수 있다. 이렇게 해결할 때의 최종 답은 A와 B를 짝지었을 때의 최대 횟수와 B와 C를 짝지었을 때의 최대 횟수를 더한 뒤, S에 존재하는 B의 개수와 비교하여 더 작은 것이 된다.