초등부 3, 중등부 2. 등산 마니아

풀이 작성자: 구재현

부분문제 1 (그래프가 직선)

두 정수 i, j 를 골랐을 경우 $(i < j)$ 다양성이 $j - 1$ 이다. j 를 고정할 경우, 가능한 i 의 개수는 $j - 1$ 이다. 고로 모든 $1 \le j \le N$ 에 대해 $(j - 1)^2$ 의 합을 계산하고 출력하면 된다.

부분문제 2 (그래프가 성게)

두 정수 i, j 를 골랐을 경우 $(i < j)$ 다양성은 $i = 1$ 일 때 1, 아니면 2이다. $i = 1$ 인 쌍은 $N - 1$ 개 있고, 그렇지 않은 쌍은 $\frac{(N-1)(N-2)}{2}$ 개 있다. 고로 답은 $(N - 1)^2$ 이다.

부분문제 3 (그래프가 완전 이진 트리)

문제의 조건이 복잡하지만, 결국 $N = 2^{d+1} - 1$ 인 깊이 d의 완전 이진 트리가 주어진다는 뜻이다. i 의 깊이, j의 깊이, 그리고 1번 정점에서 처음으로 이 두 정점이 갈라지는 위치 k 의 깊이, 이 세 가지를 고정하자. (k를 보통 i, j의 *Lowest Common Ancestor (LCA))* 라고 부른다). i 의 깊이와 j 의 깊이 모두가 k 의 깊이보다 큰 경우, 둘 중 하나만 k 의 깊이보다 큰 경우로 케이스를 나눠서, 가능한 i, j, k 의 경우의 수를 2의 지수승 꼴의 수로 계산할 수 있다. $d = O(\log N)$ 이니 $O(d^3) = O(\log^3 N)$ 시간에 문제가 해결된다.

부분문제 4 ($N \le 100$)

모든 가능한 $i < j$를 순회하자. `LCA(i, j)` 를 두 정점 i, j 의 Lowest Common Ancestor라고 하고, `depth[i]` 를 i 번 정점과 1번 정점의 거리라고 하면, 답은 `depth[i] + depth[j] - depth[LCA(i, j)]` 가 된다. 두 정점의 LCA는 $O(N)$ 시간에 계산할 수 있다. 전체 문제가 $O(N^3)$ 시간에 해결된다.

부분문제 5 ($N \le 5000$)

$dist(i, j)$ 를 두 정점 i, j 의 거리라고 정의하면, 고정된 쌍 $i < j$ 에 대해서 다양성은 $\frac{dist(1,i)+dist(i,j)+dist(j,1)}{2}$ 이다. 모든 두 정점 간의 거리를 $O(N)$ 번의 깊이 우선 탐색으로 계산해 둘 수 있다. 전체 문제가 $O(N^2)$ 시간에 해결된다.

부분문제 6

각 쌍에 대해서 다양성의 합을 센다는 것은, 각 쌍에 대해서 조건을 만족하는 어떤 간선의 수를 센다는 것이다. 반대로, 모든 간선에 대해서, 이 간선이 특정 쌍의 다양성에 기여하는 조건을 파악하고, 이 간선이 다양성에 기여하는 쌍의 개수를 세어주자.

트리의 루트를 1번 정점으로 두자. v 와 v 의 부모를 잇는 간선에 대해서, v 의 서브트리에 i 혹은 j 정점이 있다면, 이 간선은 1번 정점과 두 정점 중 하나를 잇는 경로 상에 있으니 다양성에 기여한다. 둘 다 없다면, 이 간선이 없다 하더라도 $1, i, j$ 번 정점 사이를 오가는 데는 문제가 없고, 다양성에 기여하지 않는다.

고로, v 와 v 의 부모를 잇는 간선에 대해서 문제의 정답은, 전체 트리에서 두 개의 정점을 고르면서 v 의 서브트리에서 최소 하나의 정점을 뽑는 경우의 수와 동일하다. v 의 서브트리에 속하는 정점의 개수를 $O(N)$ 에 전처리 한다면 이 경우의 수는 간단한 수식으로 셀 수 있다. 전체 문제가 $O(N)$ 에 해결된다.