

“그래프 균형 맞추기” 문제 풀이

작성자: 김준원

부분문제 1

아주 간단한 형태의 그래프이므로 직접 예제 그림을 그려 생각할 수 있다. 간선의 가중치 조건이 입력으로 주어졌을 때, 정점의 가중치로 가능한 수는 유일하게 정해진다. 일반적으로

- 1번 정점과 2번 정점을 잇는 간선의 가중치가 c_{1-2}
- 2번 정점과 3번 정점을 잇는 간선의 가중치가 c_{2-3}
- 3번 정점과 1번 정점을 잇는 간선의 가중치가 c_{3-1}

로 주어지면, 정점에 부여할 가중치는 1번 정점에 $(c_{1-2} + c_{3-1} - c_{2-3})/2$, 2번 정점에 $(c_{2-3} + c_{1-2} - c_{3-1})/2$, 3번 정점에 $(c_{3-1} + c_{2-3} - c_{1-2})/2$ 으로 유일하게 정해진다. 이 값들을 직접 계산해서 출력하면 된다. 가중치는 정수여야만 하므로, 이 값들이 정수가 아니라면, No를 출력해야 함에 주의하라.

부분문제 2, 3, 4

부분문제 2, 3에서 입력 그래프는 직선이다. 여기서 i 번 정점과 $i+1$ 번 정점을 잇고 있는 간선의 가중치를 c_i 라고 하자.

- 만약 1번 정점에 가중치 x 를 부여했다면,
- 2번 정점에 가중치 $c_1 - x$ 를 부여해야 하고,
- 3번 정점에 가중치 $c_2 - c_1 + x$ 를 부여해야 하고,
- 4번 정점에 가중치 $c_3 - c_2 + c_1 - x$ 를 부여해야 하고,
- ...

와 같이, 한 정점에 부여할 가중치가 정해지면, 다른 각 정점에 부여할 가중치가 정해진다. 이 성질은 부분문제 4의 제약 조건을 만족하는 그래프(이런 그래프를 ‘트리’라고 부른다)에서도 마찬가지라서, 1번 정점의 가중치가 x 라고 할 때, 다른 각 정점 i 의 가중치는 $x + k_i$ 또는 $-(x + k_i)$ (k_i 는 상수)의 꼴로 정해진다. 이를 k_i 들은 부분문제 2, 3에서는 반복문을, 부분문제 4에서는 깊이 우선 탐색(DFS)을 이용해 구할 수 있다.

부분문제 1에서는 정점의 가중치가 유일하게 정해졌지만, 부분문제 2, 3, 4에서는 정점의 가중치를 부여하는 방법이 유일하지 않다. 1번 정점의 가중치 x 를 바꾸면, 다른 모든 정점의 가중치를 바꿀 수 있다. 반대로, 문제의 조건을 만족하도록 정점에 가중치를 부여하면, 이 가중치들은 모두 x 에 대한 식으로 쓸 수 있다.

이제 우리는 부분문제 2, 3, 4에서 정점에 가중치를 부여하는 방법은 무조건 존재한다(계다가, 무한정 많이 존재한다)는 사실을 안다. 이를 가중치를 모두 x 에 대한 식으로 쓸 수 있으므로, 가중치를 부여하는 비용 또한 아래와 같이 x 에 대한 식 $f(x)$ 로 쓸 수 있다.

$$f(x) = |x + k_1| + |x + k_2| + \cdots + |x + k_N|$$

함수 $f(x)$ 는 아래로 불록한 꺾은선 모양으로 나타남을 관찰할 수 있다. 이 사실에서 x 가 N 개의 수 $-k_1, -k_2, \dots, -k_N$ 중 하나일 때 최솟값을 가진다는 사실을 알 수 있다. 이를 후보들을 모두 직접 시험해서 가장 작은 비용을 출력하면 $O(N^2)$ 에 부분문제 2를 풀 수 있다.

그리고 추가적인 관찰을 통해 x 가 N 개의 수 $-k_1, -k_2, \dots, -k_N$ 의 중간값일 때에 최솟값을 가진다는 사실을 알 수 있다. 이를 이용해 최적의 x 를 바로 알 수 있고, $O(N \log N)$ 에 부분문제 3, 4를 풀 수 있다.

부분문제 5

부분문제 5에서 입력 그래프는 목걸이 모양이다(즉, 하나의 ‘사이클’로 이루어져 있다). 즉 그래프는, 아래 그래프에서 정점과 간선의 순서를 임의로 섞은 꼴이다.

- i ($1 \leq i \leq N-1$)번째 간선은 i 번 정점과 $i+1$ 번 정점을 잇고 있으며, 가중치는 c_i 이다.
- N 번째 간선은 N 번 정점과 1번 정점을 잇고 있으며, 가중치는 c_N 이다.

정점의 순서를 섞어도 본질은 변하지 않기 때문에, 위와 같은 그래프가 입력으로 주어졌다고 하자.

부분문제 2, 3, 4의 아이디어와 같이 1번 정점에 x 의 가중치를 부여하고 나머지 정점에 부여할 가중치를 x 에 대한 식으로 나타낸다. 마지막 N 번째 간선을 무시하면 부분문제 2, 3에서 등장했던 직선형 그래프가 된다. 따라서 각 정점의 가중치를 x 에 대한 식으로 나타낼 수 있다. 하지만 N 번째 간선의 존재 때문에 확인할 게 하나 더 생긴다. 그래프의 크기(사이클의 크기)의 홀짝성에 따라 두 가지 경우로 나눌 수 있다.

사이클의 크기가 짝수일 때, N 번 정점은 $-(x + k_N)$ 꼴의 가중치를 가지게 된다. N 번째 간선에 의해 $x + -(x + k_N) = c_N$ 이라는 조건이 추가된다.

- 만약 $k_N \neq c_N$ 이라면 그래프의 균형이 맞도록 가중치를 부여할 수 있는 방법이 없고,
- 그렇지 않다면 N 번째 간선은 무시할 수 있다.

사이클의 크기가 홀수일 때, N 번 정점은 $x + k_N$ 꼴의 가중치를 가지게 된다. N 번째 간선에 의해 $x + (x + k_N) = c_N$ 이라는 조건이 추가된다. 이 조건에 의해 $x = (c_N - k_N)/2$ 가 되어야만 한다.

- 만약 x 가 정수가 아니라면, 그래프의 균형이 맞도록 정수 가중치를 부여할 수 있는 방법이 없고,
- x 가 정수라면, $x = (c_N - k_N)/2$ 를 각 식에 대입했을 때의 가중치가 유일한 답이 된다.

부분문제 6, 7

부분문제 2, 3, 4와 부분문제 5를 풀었다면, 전체 문제를 푼 것이나 다름없다. 풀이의 줄거리는 다음과 같다.

1번 정점에 가중치 x 를 부여했을 때, 다른 모든 정점 i 에 부여할 가중치가 간선을 따라 $x + k_i$ 또는 $-(x + k_i)$ 의 꼴로 정해진다. 하지만 그래프에 사이클이 있다면, 입력 조건들 사이 ‘충돌’이 발생할 수 있다. 충돌은 부분문제 5와 같이 경우를 나누어 해결해줄 수 있다. 충돌을 처리한 결과, i) 불가능함이 증명되거나, ii) x 의 값이 유일하게 정해지거나, iii) x 의 값이 정해지지 않을 수 있다. i), ii)의 경우에는 해당하는 답을 바로 출력할 수 있고, iii)의 경우에는 부분문제 2, 3, 4의 풀이와 같이 x 를 $-k_1, \dots, -k_N$ 의 중간값으로 두어 비용을 최소화할 수 있다.