

고등부 4. 경계 로봇

풀이 작성자: 윤교준

하나의 센서는 $2r$ 의 구간을 감시할 수 있으므로, $2rN < L$ 라면, 답은 -1 이다. 또한, $2rN \geq L$ 라면, 항상 완벽한 경계가 가능하다. 이제, $2rN \geq L$ 가 성립한다고 가정하자.

부분문제 1 ($N \leq 10, L \leq 100, r \leq 10$)

다음 네 가지 관찰이 요구된다:

관찰 1-1 로봇이 내려놓은 센서는 다시 집어 옮기지 않아도 충분하다.

관찰 1-2 로봇이 아직 집지 않은 센서 위를 지나간다면, 그 센서를 무조건 가져가는 최적해가 존재한다.

관찰 1-3 센서의 위치는 정수만 고려해도 충분하다.

관찰 2-1 로봇이 K 개의 센서를 옮겼다면, $r, 3r, 5r, \dots, (2K-3)r, x$ 에 배치하는 것이 최적이다. 여기서, $(2K-3)r \leq x \leq (2K-1)r$ 이다.

모든 K 에 대하여, 가능한 모든 센서 배치를 생각하자. 관찰 2-1에 의하여, 이러한 배치는 $O(rN)$ 이다. (엄밀하게는, $O(L)$ 이다.)

센서 배치가 주어졌을 때, 로봇이 움직여야 하는 거리는 BFS를 통하여 계산할 수 있다. ‘현재 로봇의 위치’, ‘로봇이 집은 센서의 총 개수’, ‘배치가 완료된 센서의 집합’, 총 세 개의 정보로 현재 상태를 완벽하게 표현할 수 있다. 상태의 수가 총 $O(N2^N L)$ 이므로, $O(L \times N2^N L) = O(N2^N L^2)$ 의 시간복잡도로 부분문제를 해결할 수 있다.

부분문제 2 ($N \leq 30, L \leq 2000, r \leq 30$)

다음의 추가적인 관찰이 요구된다:

관찰 3 잉여의 센서를 가지고 있는 로봇은 무조건 전진하는 최적해가 존재한다.

센서의 최종 배치를 Y_1, Y_2, \dots, Y_K 라 하자. 로봇의 최적 전략은 다음 DP를 이용하여 계산할 수 있다:

$DP[n] :=$ 현재, 로봇이 Y_n 에 위치하고, 어떠한 센서도 가지고 있지 않으며, 옮긴 n 개의 센서는 각각 Y_1, Y_2, \dots, Y_n 에 위치시켰을 때, 이를 위하여 로봇이 움직여야 하는 최소 거리.

$DP[1], \dots, DP[K]$ 의 값을 모두 알고 있다면, 배치 Y_i 를 달성하기 위하여 필요한 최소 이동 거리는 $O(K^2)$ 혹은 $O(K)$ 에 계산할 수 있다.

DP 배열 또한 $O(K^3)$ 에 모든 값을 계산할 수 있다.

따라서, $O(LN^3)$ 의 시간 복잡도로 본 부분문제를 해결할 수 있다.

부분문제 3 ($N \leq 500$)

다음 관찰이 요구된다:

관찰 4-1 센서 배치 Y_i 가 주어졌을 때, 로봇이 x_l 에서 왼쪽으로 방향을 바꾸었다면, $X_i \leq x_l$ 를 만족하는 i 의 개수와 $Y_j \leq x_l$ 를 만족하는 j 의 개수가 같다.

관찰 4-2 센서 배치 Y_i 가 주어졌을 때, 로봇이 x_r 에서 오른쪽으로 방향을 바꾸었다면,

- $X_i < x_r$ 을 만족하는 i 의 개수와 $Y_j < x_r$ 을 만족하는 j 의 개수가 같으며,
- $X_i \leq x_r$ 을 만족하는 i 의 개수가 $Y_j \leq x_r$ 을 만족하는 j 의 개수보다 작다.

$Y_K = (2K - 1)r$ 을 만족하는 모든 배치 Y_i 에 대하여, 관찰 4에 의하여 로봇이 지그재그로 움직이는 과정을, 부분문제 2와 유사한 DP로 표현할 수 있다.

이 DP 배열은 $O(K^2)$ 에 계산할 수 있다. 답을 계산하는 과정은, 로봇이 마지막 센서를 처리하기 위하여 움직여야 하는 경로를 예외적으로 계산해준다면, $O(K)$ 혹은 $O(K^2)$ 에 할 수 있다.

따라서, $O(N \times N^2) = O(N^3)$ 의 시간 복잡도로 본 부분문제를 해결할 수 있다.

부분문제 4 ($N \leq 2500$)

부분문제 3의 DP를 구현하였다면, 누적 합 아이디어를 이용하여, DP 계산을 $O(K)$ 에 할 수 있다. 이 경우, 시간 복잡도는 $O(N^2)$ 이다.

부분문제 5

다음 관찰이 요구된다:

관찰 2-2 관찰 2-1에서 유의미한 x 의 값은 오직 두 개이다.

관찰 2-3 관찰 2-1에서 유의미한 K 는 오직 하나다.

따라서, 전체 시간 복잡도는 $O(N)$, 공간 복잡도는 $O(N)$ 혹은 $O(1)$ 이다.
