"스케이트 연습" 문제 풀이

작성자: 오주원

서술의 편의를 위해 시작 지점, 도착 지점 대신 0번 지점, $N+1$번 지점이라고 하고, $V_0 = V_{N+1} = 0$이라고 하자. 또한, 각 부분문제에서의 V의 상한을 K라고 하자.

부분문제 1

1만큼만 낮추는 경우를 고려하지 않고 N개의 지점에서 가질 수 있는 속력은 $O(K^N)$가지가 있을 수 있다. 찾은 $O(K^N)$가지 방법을 $O(N)$으로 가능한지 판별해주고, 가능한 방법 중 속력의 합이 최대인 경우를 출력한다. 따라서, 전체 문제를 $O(K^N \times N)$에 해결할 수 있다.

부분문제 2

다음과 같이 DP $D[i][j]$ $(0 \le i \le N+1, 0 \le j \le K)$를 정의하자.

- $D[i][j] :=$ i번 지점에서 j의 속력을 가졌을 때 가능한 1번 지점부터 i번 지점까지의 최대 속력 합

i번째 지점에서 j의 속력을 만들기 위해선 이전 지점에서 0 이상 $V_i + 1$ 이하의 속력을 가지고 있어야 하므로 다음과 같이 점화식을 세울 수 있다.

- $D[0][0] = 0$
- $D[i][j] = \max\limits_{0 \le k \le j+1} \{D[i-1][k] + j\}$ $(1 \le i \le N+1, 0 \le j \le V_i)$

$N+1$번째 지점에서 0의 속력으로 끝나야 하므로 답은 $D[N+1][0]$에 들어 있다. 중간 지점에서 속력이 0이 되는 것보다 1이 되는 것이 항상 이득이므로 0이 되는 경우는 따로 처리해주지 않아도 된다. 따라서, 문제를 $O(NK^2)$에 해결할 수 있다.

부분문제 3

부분문제 2의 풀이를 가져오자. 여기에 추가로 DP $P[i][j]$ $(0 \le i \le N+1, 0 \le j \le K+1)$를 정의하자.

- $P[i][j] :=$ i번째 지점에서 0이상 j이하의 속력을 가졌을 때 가능한 1번 지점부터 i번 지점까지의 최대 속력 합

부분문제 2에서 $D[i][*]$의 값을 구한 후, $D[i+1][*]$의 값을 구하기 전에 다음과 같이 $P[i][*]$를 구한다.

- $P[i][0] = D[i][0]$
- $P[i][j] = \max(P[i][j-1], D[i][j])$ $(1 \le j \le V_{i+1} + 1)$

$P[i-1][*]$을 구했다면, 다음과 같이 $D[i][*]$의 점화식을 세울 수 있다.

- $D[i][j] = P[i-1][j+1] + j$ $(1 \le j \le V_i)$

부분문제 2와 D의 정의는 바뀌지 않았으므로 $D[N+1][0]$에 문제의 답이 들어있다. $D[*][*]$와 $P[*][*]$의 모든 값은 각각 $O(NK)$에 구할 수 있으므로, 문제를 $O(NK)$에 해결할 수 있다.

부분문제 4

i번째 지점에서 $N-i+1$ 이상으로 속력을 가진다면 도착 지점에서 0의 속력을 가질 수 없다. 그러므로 각 부분문제 3 풀이의 V_i를 사용하는 부분에 $\min(V_i, N-i+1)$을 대신 사용해주면 문제를 해결할 수 있다. V의 상한이 $K=10^9$가 아닌 N이 되므로 시간복잡도는 $O(N^2)$이다.

부분문제 5

i번째 지점에서 가질 수 있는 최대 속력을 M_i라고 하자. 이 값은 $M_{i+1}+1$과 V_i중 더 작은 값이다. 도착 지점을 속력 제한이 0인 $N+1$번째 지점이라고 생각하고 M_{N+1}을 0으로 둔 뒤, N부터 1까지 차례대로 M_i을 채워주면, 모든 중간 지점에서의 최대 속력이 구해지므로 M에 들어있는 값들의 합이 문제의 정답이 된다. 시간복잡도는 $O(N)$이다.