“헬기 착륙장” 문제 풀이

부분문제 1, 2

크기가 정확히 k인 헬기 착륙장의 개수는 2^k이다. 각각의 동심원마다 어떤 색을 칠할 지 결정하는 방법이 두 가지이고, 그 선택이 서로 독립적이기 때문이다.

또한, 크기가 정확히 k인 헬기 착륙장을 색칠하기 위해서는 총 $1 + 2 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}$통의 페인트가 필요하다.

현재 $a + b$통의 페인트를 가지고 있으므로, $\frac{k(k+1)}{2} \leq a + b$이어야 한다. 이 부분문제에서는 $a + b \leq 100 + 100 = 200$이므로, $k \leq 19$임을 알 수 있다.

따라서 모든 크기가 19 이하인 헬기 착륙장들 (총 $2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{19}$개)을 순회하면서, 사용하는 빨강 페인트가 a통 이하이고 파랑 페인트가 b통 이하인 것의 개수를 세면 된다.

부분문제 3

앞선 부분문제에서 한 관찰에 의해, 헬기 착륙장의 크기 k는 대략 $\sqrt{2(a+b)}$ 이하여야 함을 알 수 있다.

$\texttt{ways}[k][i][j]$를 크기가 정확히 k인 헬기 착륙장 중 빨강 페인트를 정확히 i통 사용하고, 파랑 페인트를 정확히 j통 사용하는 헬기 착륙장의 수라고 정의하자.

기저사례는 $\texttt{ways}[1][1][0] = \texttt{ways}[1][0][1] = 1$, 그 외의 $\texttt{ways}[1][i][j] = 0$이다.

$k \geq 2$인 경우, 크기가 정확히 k인 헬기 착륙장 중 빨강 페인트를 정확히 i통 사용하고, 파랑 페인트를 정확히 j통 사용하는 방법은, 반지름이 k인 동심원이 무슨 색인지에 따라 두 가지 경우로 나눌 수 있다.

- 빨강색인 경우: 크기가 $k-1$이고 빨강 페인트를 $i-k$통, 파랑 페인트를 j통 사용한 헬기 착륙장에, 반지름이 k인 빨강색 원을 추가한 것이다. 경우의 수는 $\texttt{ways}[k-1][i-k][j]$이다.
- 파랑색인 경우: 크기가 $k-1$이고 빨강 페인트를 i통, 파랑 페인트를 $j-k$통 사용한 헬기 착륙장에, 반지름이 k인 파랑색 원을 추가한 것이다. 경우의 수는 $\texttt{ways}[k-1][i][j-k]$이다.

따라서 $\texttt{ways}[k][i][j] = \texttt{ways}[k-1][i-k][j] + \texttt{ways}[k-1][i][j-k]$의 점화식이 성립한다.

원하는 것은 빨강 페인트를 a통 이하, 파랑 페인트를 b통 이하로 사용하는 모든 헬기 착륙장의 개수를 세는 것이므로, 정답은 $\sum_{k=1}^{90} \sum_{i=0}^{a} \sum_{j=0}^{b} \texttt{ways}[k][i][j]$이다.

모든 $k \leq \sqrt{2(a+b)} \approx 63$, $0 \leq i \leq a$, $0 \leq j \leq b$에 대해 $\texttt{ways}$ 배열을 k, i, j 순서대로 계산할 수 있다. $k \cdot a \cdot b \leq 63 \cdot 1\,000 \cdot 1\,000 = 0.63 \times 10^8$이므로 제한 시간 내에 모두 계산 가능하며, 제한 메모리 안에 모든 값을 저장할 수 있다.

구현 시 아래 사항들을 주의해야 한다. 이후 부분문제들의 풀이는 아래 두 가지 주의사항을 염두에 두고 있다는 가정 하에 진행한다.

- i 또는 j가 k 미만인 경우, 음수 인덱스를 참조하지 않도록 구현해야 한다.
- 헬기 착륙장의 수가 64비트 정수형의 범위를 넘을 수 있기 때문에, **덧셈을 할 때마다** $10^9 + 7$로 나눈 나머지를 취해야 한다.

부분문제 4

크기가 정확히 k인 헬기 착륙장 중 빨강 페인트를 정확히 i통 사용하고, 파랑 페인트를 정확히 j통 사용하는 헬기 착륙장이 존재하려면, $i + j = \frac{k(k+1)}{2}$이어야 한다. 즉, i와 j가 결정되면 조건을 만족하는 k의 값이 없거나, 유일하게 결정된다는 것을 알 수 있다.

이 점에서 착안해, $\texttt{ways}[i][j]$를 빨강 페인트를 정확히 i통 사용하고, 파랑 페인트를 정확히 j통 사용하는 헬기 착륙장의 수라고 정의하자. 앞선 부분문제와는 달리 k가 상태 정의에서 제거되었다.

$i + j = \frac{k(k+1)}{2}$인 k가 존재하지 않는다면, $\texttt{ways}[i][j] = 0$이다.

$i + j = \frac{k(k+1)}{2}$인 k가 존재한다면, $\texttt{ways}[i][j] = \texttt{ways}[i][j-k] + \texttt{ways}[i-k][j]$이다.

원하는 것은 빨강 페인트를 a통 이하, 파랑 페인트를 b통 이하로 사용하는 모든 헬기 착륙장의 개수를 세는 것이므로, 정답은 $\sum_{i=0}^{a} \sum_{j=0}^{b} \texttt{ways}[i][j]$이다.

부분문제 5

크기가 정확히 k인 헬기 착륙장 중 빨강 페인트를 정확히 i통 사용하고, 파랑 페인트를 정확히 j통 사용하는 헬기 착륙장이 존재하려면, $i + j = \frac{k(k+1)}{2}$이어야 한다. 즉 k와 i가 결정되면 $j = \frac{k(k+1)}{2} - i$이어야 한다.

$\texttt{ways}[k][i]$를 크기가 정확히 k인 헬기 착륙장 중 빨강 페인트를 정확히 i통 사용하고, 파랑 페인트를 정확히 $\frac{k(k+1)}{2} - i$통 사용하는 헬기 착륙장의 수라고 정의하자.

반지름이 k인 동심원이 무슨 색인지에 따라 두 가지 경우로 나눌 수 있다.

- 빨강색인 경우: 크기가 $k-1$이고 빨강 페인트를 $i-k$통 사용한 헬기 착륙장에, 반지름이 k인 빨강색 원을 추가한 것이다. 경우의 수는 $\texttt{ways}[k-1][i-k]$이다.
- 파랑색인 경우: 크기가 $k-1$이고 빨강 페인트를 i통 사용한 헬기 착륙장에, 반지름이 k인 파랑색 원을 추가한 것이다. 경우의 수는 $\texttt{ways}[k-1][i]$이다.

따라서 $\texttt{ways}[k][i] = \texttt{ways}[k-1][i-k] + \texttt{ways}[k-1][i]$의 점화식이 성립한다.

원하는 것은 빨강 페인트를 a통 이하, 파랑 페인트를 b통 이하로 사용하는 모든 헬기 착륙장의 개수를 세는 것이다. $\texttt{ways}[k][i]$가 정답에 포함되려면, $i \le a$과 $\frac{k(k+1)}{2} - i \le b$가 동시에 성립하면 되므로, 이러한 (k, i) 쌍들을 모두 순회하면서 그 합을 구하면 된다.

$k \le \sqrt{2(a+b)}$이므로, 총 시간복잡도는 $O(a\sqrt{a+b})$이다.

부분문제 6

부분문제 5에서와 같이 $\texttt{ways}[k][i]$ 배열을 모두 구해 놓았다고 가정한다. 여기까지 총 $O(MAXA\sqrt{MAXA + MAXB})$ 시간이 필요하다.

$\texttt{ways}[k][i]$가 정답에 포함되려면, $i \le a$이고 $\frac{k(k+1)}{2} - i \le b$가 성립해야 한다. 두 부등식을 i에 대해서 정리하면 $\max\left(0, \frac{k(k+1)}{2} - b\right) \le i \le a$와 같이 표현된다.

즉, 헬기 착륙장의 크기를 k로 고정하면, 이 중 정답에 포함되는 경우의 수는 $\sum_{i=\max\left(0, \frac{k(k+1)}{2} - b\right)}^{a} \texttt{ways}[k][i]$와 같이 $\texttt{ways}[k]$ 배열의 구간 합으로 표현할 수 있음을 알 수 있다.

$\texttt{ways}[k]$ 배열의 부분합 배열 $\texttt{pref}[k][i] = \sum_{z=0}^{i} \texttt{ways}[k][z]$를 구해 두면, 위의 값을 $\texttt{pref}[k][a] - \texttt{pref}[k]\left[\max\left(0, \frac{k(k+1)}{2} - b\right) - 1\right]$로 나타낼 수 있으므로, 상수 시간에 구할 수 있다.

각각의 k에 대해 상수 시간에 경우의 수를 구할 수 있으므로, 테스트 케이스 하나당 $O(\sqrt{a+b})$ 시간에 모든 경우의 수를 구할 수 있다.