고등부 2. 순서 섞기

풀이 작성자: 윤교준

배열 A가 이미 비내림차순으로 정렬되어 있다면, 답은 0이다. 이제, A가 비내림차순이 아니라고 가정한다.

부분문제 1 ($N \le 8$)

길이 N의 배열 A에서 한 번의 순서 섞기 연산을 수행할 때, 나올 수 있는 결과의 종류의 수는 $O(2^N)$이다. 왜냐하면, 배열 A의 좌측 혹은 우측 끝을 고르는 작업을 총 N번 시행하기 때문이다.
'순서 섞기' 연산은 배열의 값의 순서만을 바꿀 뿐, 값을 바꾸지는 않는다. 고로, 배열 A는 여러 번의 순서 섞기 연산을 통해, $O(N!)$ 종류의 값을 가질 수 있다.
따라서, BFS를 이용하여, 배열 A가 정렬되기 위하여 필요한 연산의 최소 횟수를 $O(N! \times 2^N)$ 혹은 $O(N! \times N \times 2^N)$에 구할 수 있다.

부분문제 2 (답은 2 이하)

답이 0인 경우는, 배열 A가 비내림차순인 경우이다. 이제, 답이 1인 경우의 필요충분조건을 알아보자.

답이 1이기 위한 필요조건

순서 섞기 연산을 f라고 표현하자. 이제, 순서 섞기 연산의 역연산, 즉 f^{-1}를 생각하자.
만일, A에 f를 취하여 B를 얻었다고 하자. 이때, 배열 A에서 '좌측의 수'로 선택된 수를 차례대로 배열 A_L에 저장하고, A에서 '우측의 수'로 선택된 수를 차례대로 배열 A_R에 저장하자. A에서, '좌측의 수'는 왼쪽부터 연속하게 붙어있고, '우측의 수'는 오른쪽부터 붙어있는 형태이다. 따라서, $A = A_L + A_R$임을 알 수 있다. 또한, 배열 B는 두 배열 A_L, $\widetilde{A_R}$을 "원소의 상대적인 순서를 유지하며" 합친 것과 같다. 여기서, 임의의 배열 T에 대하여, $\widetilde{T}$는 T의 원소를 역순으로 배치한 배열을 의미한다.
따라서, 배열 B에 대한 역연산 f^{-1}는 다음과 같이 서술할 수 있다:

1. B를 원소의 상대적인 순서를 유지하며, 두 개의 배열 B_L, B_R로 나눈다.
2. $A = B_L + \widetilde{B_R}$

이제, 배열 A가 단 한 번의 f 연산으로 정렬 가능하다고 가정하자. 이는, A를 정렬한 배열 S에 대하여, S에 f^{-1} 연산을 취하여 A를 얻을 수 있음을 의미한다. S를 나눈 두 배열 S_L, S_R은 모두 정렬되어 있다. $A = S_L + \widetilde{S_R}$이므로, A는 증가하다가 감소하는 형태를 가져야 한다.
따라서, 답이 1이기 위한 필요조건은 "배열 A가 증가하다가 감소하는 형태를 가지는 것"이다.

답이 1이기 위한 충분조건

이제, 배열 A가 증가하다가 감소하는 형태를 가진다고 가정하자. 우리는 A를 단 한 번의 순서 섞기 연산을 이용하여 정렬할 수 있음을 보일 것이다.
A의 최댓값을 기준으로, (자신 포함) 왼쪽의 수를 모아둔 배열을 A_L, 오른쪽의 수를 모아둔 배열을 A_R라고 하자. 가정에 의하여, A_L과 $\widetilde{A_R}$은 정렬된 상태이다.
A에 연산 f를 취한 결과 배열 B는, A_L과 $\widetilde{A_R}$을 순서를 유지하며 합친 형태이다. 여기서, 합병 정렬 알고리즘의 아이디어를 이용하면, 정렬된 상태의 B를 얻도록, 두 배열을 합치는 방법이 항상 존재함을 알 수 있다.
따라서, "증가하다가 감소하는 형태"를 가지는 배열은 항상 한 번의 연산으로 정렬할 수 있다.

위의 두 논의를 통하여, 답이 1인 경우의 필요충분조건은 “배열의 원소가 증가하다가 감소하는 형태를 가진다” 임을 알 수 있다. 배열 A가 이 조건을 만족하는지는 $O(N)$에 쉽게 확인할 수 있다.
답이 2인지는, 이 부분문제에 한하여, “답이 0과 1이 아니다”라는 조건으로 확인할 수 있다.

부분문제 3 ($1 \le A_i \le 2$)

배열 A에서 연속한 1들과 연속한 2들을 각각 하나의 1과 2로 합쳐도 무방하다.
배열 A에 K개의 2가 존재한다고 하자. 배열 A에서 $\left\lfloor \frac{K}{2} \right\rfloor$번째 2를 기준으로, 이 수까지를 A_L, 이 수의 오른쪽을 A_R로 나누자. 두 배열 A_L, $\widetilde{A_R}$를 합치는 적당한 방법이 존재하여, 배열 B에 $\left\lceil \frac{K}{2} \right\rceil$개의 연속한 2가 존재하도록 할 수 있다.
즉, K개의 ‘연속한 2’를, 한 번의 연산을 통해 $\lceil \frac{K}{2} \rceil$개의 ‘연속한 2’가 존재하도록 만들 수 있고, 이것이 최적의 전략이다.
따라서, 답은 $\lceil \log_2 K \rceil + 1$이다. 이에 대한 엄밀한 증명은 생략한다.

부분문제 4 (모든 A_i가 서로 다르다)

부분문제 3의 풀이의 아이디어를 확장할 수 있다. 배열 A가 총 K번 ‘증가하다가 감소하는 형태’를 가진다면, 비슷한 논리로, 한 번의 연산을 이용하여, $\left\lceil \frac{K}{2} \right\rceil$번 ‘증가하다가 감소하는 형태’를 가지는 결과 배열을 얻을 수 있다.
이 전략 또한 최적이며, 답은 $\lceil \log_2 K \rceil + 1$이다.

부분문제 5

배열 A에서 인접한 수가 서로 같다면, 이 두 수를 하나로 합쳐주어도 답이 변하지 않음을 알 수 있다. 이러한 성질을 이용하면, 부분문제 5 또한 부분문제 4와 동일한 풀이로 해결할 수 있다.
전체 시간 복잡도는 $O(N)$, 공간 복잡도는 $O(N)$ 혹은 $O(1)$에 해결할 수 있다.