"중등부 2번. 커다란 도시" 문제 풀이

작성자: 김준겸

부분문제 1

가로로 뻗은 도로가 하나이므로, 모든 경찰은 다른 경찰의 위치로 이동할 때 이 도로를 지나게 된다. 이 도로의 y좌표를 y'이라고 하자.

한 경찰이 다른 경찰이 있는 위치로 이동하려면 세로 도로를 지나 가로 도로까지 이동한 다음, 가로 도로를 지나 이동하고, 다시 세로 도로를 타고 이동해야 한다. 이를 수식으로 표현하면 (x_1, y_1)에 있던 경찰과 (x_2, y_2)에 있던 경찰이 만나는 이동 거리는 $|x_1 - x_2| + |y_1 - y'| + |y_2 - y'|$가 된다. 뒤의 두 항은 각 경찰에 대해 독립적이므로 따로 계산해 더해줄 수 있다.

앞쪽 x좌표의 차는 다음과 같이 계산할 수 있다. 모든 경찰의 x좌표를 오름차순으로 정렬한 것을 $x_1, x_2, \cdots, x_M$이라고 하자. 우리는 $i < j$에 대한 x_i과 x_j의 차를 계산할 때 x_j에서 x_i를 뺄 것이다. 그러면 $x_j - x_i \geq 0$이므로 절대값을 무시할 수 있다.

우리가 계산하고자 하는 값은 모든 $i < j$인 i, j 쌍에 대하여 $x_j - x_i$의 합을 구하는 것이다. 이 합에서 x_k는 좌변에서 총 $k - 1$번 더해지고, 우변에서 $M - k$번 빼지므로 식을 각 x_k에 대해 간단하게 정리할 수 있다. 그대로 계산하면 이 과정에서 시간복잡도는 $O(N)$이다.

전체 시간복잡도는 정렬이 지배하므로 $O(N \log N)$이다.

부분문제 2

모든 경찰이 도로의 교차점에만 배치되어 있으므로, 두 경찰이 만나기 위한 최소 이동 거리는 맨해튼 거리(택시 거리)이다. (x_1, y_1)과 (x_2, y_2)에 대한 택시 거리는 $|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$이다.

x와 y가 독립적이므로 따로 계산한 다음 더해줄 수 있다. 각 방향에 대한 답은 부분문제 1에서 x좌표 차의 합을 계산한 것과 동일하게 해결할 수 있다. 전체 시간복잡도는 역시 $O(N \log N)$이다.

부분문제 3

도로와 경찰의 수가 매우 작다. 따라서 많은 방법으로 문제를 해결할 수 있다.

한 가지 방법은 교차점의 수가 작다는 점을 이용하여 그래프를 구성한 뒤 플로이드 알고리즘을 통해 최단 경로를 계산해 해결하는 것이다. 이 경우 교차점의 개수가 $O(N^2)$개이므로 시간복잡도는 $O(N^6)$이다.

부분문제 4의 풀이를 비효율적으로 구현하여 $O(N^3)$으로 풀이했을 경우에도 부분문제 3을 해결할 수 있다.

부분문제 4

각 경찰 쌍의 이동 거리를 직접 구한 뒤 더할 수 있다.

두 경찰의 이동 거리는 다음과 같이 구한다. 만약 두 경찰 중 하나는 가로 도로에 있고 하나는 세로 도로에 있다면, 거리는 자명히 맨해튼 거리가 된다. 그렇지 않다면, 두 경찰이 서 있는 도로의 방향은 같다.

일반성을 잃지 않고 둘 모두가 가로 도로에 있다고 가정하자. 만약 두 경찰이 서 있는 위치 사이에 세로 도로가 있다면, 그 도로를 이용하여 지나가면 되므로 맨해튼 거리가 된다. 사이에 도로가 없다면, 왼쪽이나 오른쪽으로 이동해 세로 도로를 이용해야 한다. 왼쪽 세로 도로를 이용하는 경우와 오른쪽 세로 도로를 이용하는 경우 총 두 경우를 따져 더 빠른 쪽을 택하면 된다. 이 경우 시간복잡도는 $O(N^2)$이다.

부분문제 5

부분문제 4에서 경찰이 서 있는 도로의 방향이 다르거나 사이에 도로가 있다면 맨해튼 거리로 계산할 수 있음을 알았다. 따라서 부분문제 2의 풀이로 모든 경찰 쌍에 대한 맨해튼 거리를 계산하고, 사이에 도로가 없는 경우에 이동하는 거리만큼을 보정해줄 수 있다.

일반성을 잃지 않고 경찰들이 가로 도로 위에 서 있는 경우를 생각하자. 사이에 세로 도로가 있다면 보정이 필요 없으므로, 모든 경찰을 세로 도로로 분리되는 집합 중 하나에 배정하면 각 집합을 독립적으로 계산할 수 있다.

한 집합 내에서 각 경찰 쌍은 반드시 둘 모두 왼쪽으로 이동하거나, 둘 모두 오른쪽으로 이동해 세로 도로를 이용해야 한다. 따라서 맨해튼 거리에 세로 도로를 이용하기 위한 이동 거리가 추가로 더해져야 한다. 이 때 추가로 더해지는 양은 두 경찰 중 세로 도로에 더 가까운 경찰과 세로 도로의 거리의 두 배이다.

x좌표의 오름차순으로 경찰을 정렬해 두면 각 경찰에 대해 자신보다 x좌표가 작은 경찰에 대한 거리를 계산해 더할 수 있다. 만약 두 경찰의 x좌표 평균이 두 세로 도로 x좌표의 평균보다 작다면 두 경찰을 왼쪽으로 이동시키는 것이 이득이다. 아니라면, 두 경찰을 오른쪽으로 이동시키는 것이 이득이다.

j번째 경찰에 대해 왼쪽에 있는 각 i번째 경찰과의 거리 합을 계산한다고 하자(단, $i < j$). 그렇다면 어떤 k번째 경찰까지는 왼쪽으로 이동하는 것이 이득일 것이고, 그 다음 경찰부터는 오른쪽으로 이동하는 것이 이득일 것이다. 이 경계는 이분 탐색을 통해 찾을 수 있다. 경계를 찾고 나서는 수식을 정리하면 누적 합을 이용해 쉽게 합을 계산할 수 있다. 총 시간복잡도는 $O(N \log N)$이다.