"고등부 3번. 블록 쌓기" 문제 풀이

작성자: 이종영

부분문제 1

$A_1 + \cdots + A_N < LN$이거나 $A_1 + \cdots + A_N > RN$인 경우 목표를 달성할 수 없다. 그렇지 않은 경우 항상 목표를 달성할 수 있다.

$L = R$인 경우 자명히 가능한 최종 상태의 수가 하나이다. $L + 1 = R$인 경우, $L + 1$의 개수에 따라 합이 달라지므로 이번에도 가능한 최종 상태는 하나이다. 이 경우의 최소 비용은 블록들의 순서를 유지하는 그리디 알고리즘으로 구할 수 있다. 첫 칸부터 순서대로 해당 칸에 원하는 만큼 블록을 쌓을 때까지 아직 최종 위치가 결정되지 않은 가장 왼쪽의 블록을 해당 칸까지 옮기면 된다. 이 때, 한 번에 가능한 최댓값만큼 블록을 동시에 옮겨 주면 $O(N)$에 비용을 구할 수 있다.

부분문제 2

$O((R-L)^N)$가지의 가능한 최종 상태들을 고려한다. 각 상태에 대해서는 부분문제 1과 동일하게 최소 비용을 계산하자. 이 중 최솟값이 답이 된다.

부분문제 3

가능한 상태들의 수가 적다. $N = 10, A_1 + \cdots A_N = 10$인 경우의 수는 총 92378개가 존재한다. 이는 중복조합 등을 이용해 수학적으로 증명하거나, 백트래킹 등 프로그래밍을 이용해서도 확인할 수 있다.

가능한 상태들의 수가 많지 않으므로, 한 상태에서 블록을 옮기는 연산을 통해 다른 상태로 이동하는 것을 BFS로 구현해주면 된다.

부분문제 4

최종 배열을 B라고 하자. B_i가 단조증가한다는 점에서 B는 $A_1 + \cdots A_N$의 분할에 대응한다고 생각할 수 있다. 50의 분할 수는 204226으로, 결국 가능한 최종 상태의 수가 적음을 알 수 있다.

모든 가능한 B 배열을 순회하는 것은 백트래킹을 이용해 구현할 수 있다. 각 최종 상태에 대한 비용은 부분문제 1과 동일하게 계산할 수 있다.

부분문제 5

$D_{i,v,s}$를 B의 첫 i개 값을 결정한 상태에서, $B_i \le v$이며 $B_1 + \cdots + B_i = s$일 때, 최소 비용으로 정의하자.

$D_{i,v,s}$는 $B_i = v$인 경우 $D_{i-1,v,s-v}$에서, $B_i < v$인 경우 $D_{i-1,v-1,s}$에서 전이가 가능하다. 그리디 알고리즘에서 첫 칸부터 순서대로 채워나가는 과정을 DP 전이 과정에서 전이 비용의 계산에 사용할 수 있다.

총 상태의 수가 $O(N^2R^2)$개이며, 각 전이 비용의 계산에 $O(N)$의 시간이 필요하므로 $O(N^3R^2)$에 문제를 해결할 수 있다.

부분문제 6

$L \le v \le R, iL \le s \le iR$를 만족하므로, 가능한 (i, v, s)의 개수는 $O(N^2(R-L)^2)$개이다. 해당 상태들만 고려하도록 부분문제 5의 풀이를 개선하면 $O(N^3(R-L)^2)$에 문제를 해결할 수 있다.

부분문제 7

A의 부분합 배열을 S, B의 부분합 배열을 T라고 하자. 각 i에 대해 i와 $i+1$번 칸 사이의 이동의 횟수를 생각하자. 첫 상태에서는 i번 칸까지 S_i개의 블록이 있는 반면, 최종 상태에서는 T_i개의 블록이 있다. 따라서 $S_i < T_i$라면 i번째 칸으로 $T_i - S_i$개의 블록이 이동했어야 하며, $S_i > T_i$라면 $i+1$번째 칸으로 $S_i - T_i$개의 블록이 이동했어야 한다. 반면, 양 방향의 이동이 모두 있었다면, 두 이동을 하나씩 실행하지 않아도 결과가 같다. 따라서 i와 $i+1$번 칸 사이의 이동의 최솟값은 $|S_i - T_i|$이며, 최적해에서는 실제로 해당 수 만큼의 이동이 이루어진다. 따라서 최소 비용은 $\sum_{i=1}^{N-1} |S_i - T_i|$ 이다. $S_N = T_N$이므로 $\sum_{i=1}^{N} |S_i - T_i|$으로도 생각할 수 있다.

이 사실을 이용하면 부분문제 6과 같은 DP 정의에서, 전이 비용의 계산을 $O(1)$에 할 수 있다. 따라서 문제를 $O(N^2(R-L)^2)$에 해결할 수 있다.