

“초등부 2번. 조약돌” 문제 풀이

작성자: 윤교준

부분문제 1

손으로 경우의 수를 분석하여 최적의 전략을 하드코딩한다.

부분문제 2

작업 1을 어떤 장소에 대하여 언제 수행할 지 등을 완전 탐색하여 최적의 전략을 알아낸다.

부분문제 3

i 번째 장소에 놓인 조약돌의 개수를 $A[i]$ 라고 하자. ($1 \leq i \leq N$)

다음과 같이 DP $P[i][j]$ ($1 \leq i < j \leq N$)를 정의하자.

i 번째 장소부터 j 번째 장소까지 오직 작업 1만 수행하여 조약돌을 모두 가져갈 수 있다면 $P[i][j] = 1$,
아니면 $P[i][j] = 0$.

즉, 다음을 차례대로 수행했을 때, $A[i], \dots, A[j]$ 가 모두 0이 되면 $P[i][j] = 1$, 아니면 $P[i][j] = 0$.

- i 번째 장소와 $(i+1)$ 번째 장소에서 각각 $\min\{A[i], A[i+1]\}$ 개의 조약돌을 가져간다.
- $(i+1)$ 번째 장소와 $(i+2)$ 번째 장소에서 각각 $\min\{A[i+1], A[i+2]\}$ 개의 조약돌을 가져간다.
- ...
- $(j-1)$ 번째 장소와 j 번째 장소에서 각각 $\min\{A[j-1], A[j]\}$ 개의 조약돌을 가져간다.

$P[i][j]$ 는 $\mathcal{O}(j-i+1)$ 에 계산할 수 있다. 고로, $P[*][*]$ 의 모든 값은 $\mathcal{O}(N^3)$ 에 구할 수 있다.

이제, DP $D[i]$ ($0 \leq i \leq N$)를 정의하자.

$D[i] :=$ 첫 번째 장소부터 i 번째 장소까지 모든 조약돌을 가져가기 위해 필요한 최소 작업 횟수

다음을 증명할 수 있다.

$$D[0] = 0$$

$$D[1] = 1$$

$$D[i] = \min \left\{ D[i-1] + 1, \min_{1 \leq j < i, P[j][i]=1} (D[j-1] + i - j) \right\} \quad (2 \leq i \leq N)$$

마지막 식에서 $(D[i-1] + 1)$ 항은 i 번째 장소에 놓인 조약돌을 작업 2로 가져가는 것을, $(D[j-1] + i - j)$ 항은 j 번째부터 i 번째 장소까지 모든 조약돌을 $(i-j)$ 번의 작업 1로 가져가는 것을 나타낸다.

$D[i]$ 는 $\mathcal{O}(i)$ 에 계산할 수 있다. 고로, $D[*]$ 의 모든 값은 $\mathcal{O}(N^2)$ 에 구할 수 있다. 답은 $D[N]$ 이다.

따라서, 문제를 $\mathcal{O}(N^3)$ 에 해결할 수 있다.

부분문제 4

$X := \max_{1 \leq i \leq N} A[i]$ 라고 하자.

편의상 $A[0] = 0$ 라고 하자. 다음과 같이 DP $G[i][j], G'[i][j]$ ($0 \leq i \leq N, 0 \leq j \leq A[i]$)를 정의하자.

$Goal[i][j] :=$ 첫 번째부터 $(i-1)$ 번째 장소까지 조약돌이 모두 없고, i 번째 장소에 정확히 j 개의 조약돌이 있는 상황

$G'[i][j] := j$ 번째 장소에 작업 2를 수행하지 않고, $Goal[i][j]$ 을 만들기 위하여 필요한 최소 작업 횟수

$G[i][j] := Goal[i][j]$ 을 만들기 위하여 필요한 최소 작업 횟수

다음을 증명할 수 있다.

$$G[0][0] = 0$$

$$G'[i][A[i]] = G[i-1][0] \quad (1 \leq i \leq N)$$

$$G'[i][A[i]-x] = G[i-1][x] + 1 \quad (1 \leq i \leq N, 1 \leq x \leq \min\{A[i-1], A[i]\})$$

$$G[i][j] = \min \left\{ G'[i][j], 1 + \min_{j < x \leq A[i]} G'[i][x] \right\} \quad (1 \leq i \leq N, 0 \leq j \leq A[i])$$

마지막 식에서 $\left(\min_{j < x \leq A[i]} G'[i][x] \right)$ 항은 배열 $G'[i]$ 의 최솟값 부분 배열 (Prefix minimum array)을 통해 상수 시간에 알아낼 수 있다.

DP의 각 값을 $\mathcal{O}(1)$ 에 알아낼 수 있으므로, 전체 배열을 $\mathcal{O}(NX)$ 에 계산할 수 있다.

문제의 답은 $G[N][0]$ 이다. 시간 복잡도는 $\mathcal{O}(NX)$.

부분문제 5

부분문제 3의 풀이를 개선하자.

배열 $P[j][*]$ 의 모든 값을 $\mathcal{O}(N)$ 에 계산할 수 있다. 이는 $P[*][*]$ 정의에 서술한 ‘조약돌 가져가기’ 과정을 직접 차례대로 실행해봄으로써 쉽게 할 수 있다.

따라서, 전체 문제를 $\mathcal{O}(N^2)$ 에 해결할 수 있다.