

Лабораторная работа 4

Характеристики низкочастотных цифровых фильтров во временной и частотной областях

Цель работы - ознакомление со свойствами низкочастотных цифровых фильтров, методами их расчета в среде MATLAB .

Общие сведения.

Цифровые фильтры (ЦФ) - устройства для обработки дискретных сигналов, позволяющие отделить полезные детерминированные сигналы от детерминированных или случайных шумов. Цифровой фильтр представляет собой ЛПП-систему N-го порядка и может быть описан

а) во временной области:

- разностным уравнением N-го порядка, определяющим алгоритм формирования выходной последовательности $y(n)$ из входной $x(n)$:

$$y(n) = \sum b_i x(n-i+1) - \sum a_j y(n-j+1), \quad i=1..N+1, \quad j=2..N+1;$$

- соотношением свертки: $y(n) = \sum h(l) * x(n-l+1), l=1..n$,

где $h(n)$ - импульсная характеристика

б) в Z-области:

- передаточной функцией

$$H(z) = (\sum b_i z^{n-i+1}) / (z^n + \sum a_j z^{n-j+1}) = B(z) / A(z);$$

в) в частотной области:

- частотной характеристикой

$$H(f_k) = H(z = \exp(j * 2 * \pi * f_k / f_s)); \quad f_k = k * df, \quad k=0, 1, 2, \dots$$

где $f_s = 1/dt$ - частота выборки, dt - интервал дискретизации.

Можно определять независимую переменную частотной характеристики в относительных единицах $W = f / (f_s / 2)$, причем $0 < W < 1$.

$H(W)$ представляет собой комплексную переменную, поэтому рассматривают амплитудно-частотную характеристику (АЧХ) и фазовую характеристику (ФЧХ).

При синтезе низкочастотного ЦФ задают параметры идеальной амплитудно-частотной характеристики $H_{id}(F)$:

$$F = [0 \quad W_n \quad W_n \quad 1]; \quad H_{id} = [1 \quad 1 \quad 0 \quad 0]; \quad W_n - \text{частота среза.}$$

Расчет вектора коэффициентов числителя b и знаменателя a передаточной функции ЦФ выполняется различными методами. При этом решается задача аппроксимации $H_{id}(W)$.

Реальные ЦФ имеют АЧХ, отличную от идеальной.

В диапазоне изменения аргумента W выделяют области:

$[0 \quad W_p]$ - полоса пропускания, в пределах которой $\text{abs}(H(W))$ близко к 1;

$[W_s \quad 1]$ - полоса заграждения, в пределах которой $\text{abs}(H(W))$ близко к 0;

$[W_p \quad W_s]$ - переходная полоса, в пределах которой значения $\text{abs}(H(W))$ изменяются от 1 до 0;

Частота среза W_n определяется соотношением $\text{abs}(H(W_n)) = 0.707$; при этом $0 < W_p < W_n < W_s < 1$.

Степень отклонения $\text{abs}(H(W))$ от H_{id} в полосе пропускания принято характеризовать величиной $R_p \leq 0.5 \text{ dB}$, причем $R_p = 20 \lg(\text{abs}(H(W))^2)$

Степень отклонения $\text{abs}(H(W))$ от $H_{id}(W)$ в полосе заграждения принято характеризовать величиной R_s ; $R_s \geq 20 \text{ dB}$; причем $R_s = 20 \lg[1 / (\text{abs}(H(W))^2)]$. Погрешность аппроксимации $H_{id}(W)$ можно оценить по среднему абсолютному отклонению:

$$EPS = \sum (\text{abs}(\text{abs}(H(W)) - H_{id}(W))) / K, \quad \text{где } K - \text{число отсчетов } H(W).$$

Различают два типа фильтров. Если выходные отсчеты ЦФ определяются только входными отсчетами ($a_j = 0$; $j = 2..N+1$), импульсная характеристика ЦФ имеет конечное число отсчетов $m = N+1$, т.е. $h(n > m) = 0$. Такие фильтры называют нерекурсивными (НРЦФ) или фильтрами с конечной импульсной характеристикой (КИХ-фильтрами). Для них справедливо:

$$y(n) = \sum b_i x(n-i+1);$$

$$H(z) = \sum b_i z^{n-i+1}, \quad i=1..N+1;$$

Если выходные отсчеты ЦФ определяются и входными и выходными отсчетами, импульсная характеристика имеет бесконечное число отсчетов. Такие фильтры называют рекурсивными (РЦФ) или фильтрами с бесконечной импульсной характеристикой (БИХ-фильтрами).

Для расчета БИХ-фильтров можно использовать хорошо разработанные методы проектирования аналоговых фильтров (Баттерворта, Чебышева, эллиптических), а далее провести их дискретизацию на основе известных методов отображения S-плоскости в Z-плоскость. Такие методы расчета БИХ-фильтров наиболее распространены.

Фильтры Баттерворта нижних частот характеризуются тем, что имеют максимально гладкую амплитудную характеристику в начале координат в S-плоскости. Это означает, что все существующие производные от амплитудной характеристики в начале координат равны нулю. Фильтры Баттерворта имеют только полюсы. Порядок фильтра N полностью определяет весь фильтр.

Оператор $[b,a]=\text{butter}(N,W_n)$ рассчитывает низкочастотный цифровой фильтр Баттерворта и возвращает коэффициенты фильтра в векторах b и a длиной $N+1$.

Фильтры Чебышева обеспечивают в заданной полосе частот наименьшую величину максимальной ошибки аппроксимации, которая представляется равновеликими пульсациями. В зависимости от того, где минимизируется ошибка аппроксимации – в полосе пропускания или в полосе заграждения – различают фильтры Чебышева типа 1 и 2.

Фильтры Чебышева типа 1 имеют только полюсы и обеспечивают равновеликие пульсации амплитудной характеристики в полосе пропускания и монотонное изменение ослабления в полосе заграждения. Свойство оптимальности фильтров Чебышева типа 1 порядка N заключается в том, что не существует какого-либо другого фильтра N-го порядка, содержащего только полюсы, который имел бы такие же или лучшие характеристики для всего диапазона частот.

Оператор $[b,a]=\text{cheby1}(N,R_p,W_n)$ рассчитывает низкочастотный цифровой фильтр Чебышева N-го порядка с R_p децибелами всплеска в основной полосе, возвращает коэффициенты фильтра в векторах b и a длиной $N+1$.

Фильтры Чебышева типа 2 (иногда их называют также обратными фильтрами) обеспечивают монотонное изменение ослабления в полосе пропускания (максимально гладкое при $W=0$) и равновеликие пульсации в полосе заграждения. Оператор $[b,a]=\text{cheby2}(N,R_s,W_n)$ рассчитывает низкочастотный цифровой фильтр Чебышева N-го порядка с R_s децибелами всплеска в полосе заграждения, возвращает коэффициенты фильтра в векторах b и a длиной $N+1$.

Эллиптические фильтры характеризуются тем, что их амплитудные характеристики имеют равновеликие пульсации и в полосе пропускания, и в полосе заграждения. Эллиптические фильтры обеспечивают минимальную ширину переходной полосы, т.е. для заданного порядка фильтра и уровня пульсаций не существует других фильтров с более быстрым переходом от полосы пропускания к полосе заграждения. Оператор $[b,a]=\text{ellip}(N,R_p,R_s,W_n)$ рассчитывает эллиптический низкочастотный цифровой фильтр с R_p децибелами в основной полосе и R_s децибелами в полосе заграждения, возвращает коэффициенты фильтра в векторах b и a длиной $N+1$.

Возможен синтез БИХ-фильтра по заданной $H_{id}(W)$ путем минимизации ошибки аппроксимации $H_{id}(W)$ методом наименьших квадратов. Оператор $[b,a]=\text{yulewalk}(N,F,H)$ рассчитывает коэффициенты b и a рекурсивного фильтра N-го порядка; в векторах $F=[0 \ W_n \ W_n \ 1]$ и $H=[1 \ 1 \ 0 \ 0]$ задается идеальная АЧХ фильтра.

При синтезе КИХ-фильтров используются два метода расчета параметров. В первом случае вводят ограничения на импульсную характеристику фильтра из условия линейности фазовой частотной характеристики. Для низкочастотных ЦФ это свойство обеспечивается симметричной импульсной характеристикой $h(n)$:

$$h(n)=h(N-n); \quad n=0,1,2,\dots,N.$$

Для расчета коэффициентов b КИХ-фильтров обычно используют методы взвешивания импульсной характеристики, соответствующей $H_{id}(W)$, с помощью различных окон. Для этого применяют оператор $b=\text{firl}(N,W_n,\text{Wind})$, который возвращает коэффициенты фильтра в векторе b длиной $N+1$. По умолчанию этот оператор использует окно Хэмминга и имеет вид: $b=\text{firl}(N,W_n)$.

Все другие окна, включая Boxcar, Hanning, Bartlett, Blackman, Kaiser, Chebwin могут задаваться последним аргументом. Например: `b=fir1(N,Wn,bartlett(N+1))` использует окно Бартлетта.

Во втором случае используют метод наименьших квадратов. Оператор `b=fir2(N,F,H,Wind)` рассчитывает цифровой FIR-фильтр N-го порядка с частотной характеристикой, определяемой векторами F и H, и возвращает коэффициенты фильтра в векторе b длиной N+1. По умолчанию `fir2` использует окно Хэмминга.

Порядок выполнения работы.

1. По демонстрационной программе ознакомиться с основными свойствами низкочастотных цифровых фильтров как рекурсивных, так и нерекурсивных и методами их расчета в среде MATLAB.

2. Разработать программу, обеспечивающую расчет параметров рекурсивных фильтров 3-го порядка (`butter`; `yulewalk`) и нерекурсивных фильтров 11-го порядка (`fir1`, `fir2`) для заданных значений W_n , формирование импульсных и амплитудно-частотных характеристик фильтров, формирование входного и выходных сигналов и их спектров. В качестве модели входного сигнала принять рассмотренную в работе 1 последовательность.

3. Выполнить расчет и исследование свойств ЦФ путем сравнения графиков сигналов и спектров для фильтров указанных четырех типов.

4. Сформировать файлы данных для АЧХ каждого из фильтров и оценить отличия от идеальной АЧХ.

Отчет по работе должен содержать программы и результаты расчета параметров ЦФ, сравнительную оценку АЧХ фильтров.

Контрольные вопросы :

1. Чем различаются характеристики рекурсивных и нерекурсивных ЦФ во временной и частотной областях?

2. Как формулируется техническое задание на расчет низкочастотного цифрового фильтра?

3. Какими параметрами оценивают отличия АЧХ реальных ЦФ от идеальной характеристики?

4. Какими методами рассчитывают параметры рекурсивных ЦФ, в чем отличия в этих методах?

5. Какими методами рассчитывают параметры нерекурсивных ЦФ, в чем отличия в этих методах?