Лабораторная работа 2.

Характеристики линейных систем во временной и частотной областях.

Цель работы - исследование характеристик линейных систем во временной и частотной областях путем моделирования в среде пакета MATLAB.

Общие сведения.

Линейная система с постоянными параметрами (ЛПП-система) преобразует входную последовательность *x(n)* в выходную *y(n).* Алгоритм преобразования во временной области может быть описан с помощью разностного уравнения *N*-го порядка с постоянными коэффициентами для $n \geq 0$:

$$y(n) = \sum_{i=0}^{N-1} b_i \cdot x(n-i) - \sum_{i=1}^{N-1} a_i \cdot y(n-i)$$

Связь между отсчетами входной и выходной последовательности ЛПП-системы можно представить в виде соотношения свертки:

$$y(n) = \sum_{i=0}^{N-1} h(i) \cdot x(n-i) = \sum_{i=0}^{N-1} h(n-i) \cdot x(i)$$

где *h(n)* - импульсная характеристика системы, представляющая собой реакцию ЛПП-системы на единичный импульс $u_0(n)$, $\{u_0(0)=1,\ u_0(i)=0$ при $i \neq 0\}$. Для физически реализуемых систем всегда $h(n)=0$ при $n<0$; для устойчивых систем, кроме того, всегда ограничена сумма вида $\sum |h(n)|$ или при увеличении *n* уменьшается $|h(n)|$.

Импульсная характеристика ЛПП-системы является одной из основных характеристик, описывающих ее поведение во временной области. Она может быть получена путем решения разностного уравнения при нулевых начальных условиях или путем моделирования.

Частотная характеристика ЛПП-системы представляет собой дискретное преобразование Фурье (ДПФ) от импульсной характеристики *h(n),* имеющей в общем случае бесконечное число отсчетов $-\infty < n < \infty$. Если ограничить размер импульсной характеристики *N* отсчетами, то выражение для частотной характеристики примет вид:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) e^{-j\omega n}$$

Частотная характеристика ЛПП-системы представляет собой периодическую комплексную функцию безразмерной частоты ω с периодом 2π. Для привязки частотной характеристики к реальным частотам необходимо учитывать частоту дискретизации импульсной характеристики f_s или интервал дискретизации Δt. При этом $f_s = 1/\Delta t$. Безразмерная частота $\omega = 2\pi f / f_s$ или с учетом дискретности частоты $\omega_k = 2\pi f_k / f_s$ Период частотной характеристики будет $2\pi f_s$. Отсчеты частотной характеристики следуют с интервалом по частоте $\Delta f = f_s / N$, частота *k*-того отсчета $f_k = k\Delta f = k f_s / N$, $k=0..N-1$. С учетом всего этого флрмула для частотной характеристики примет вид:

$$H_k = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) e^{-j2\pi nk/N}$$

Периодичность частотной характеристики позволяет ограничиться рассмотрением ее в пределах одного периода изменения независимой переменной *f* от 0 до f_s.

Свойства симметрии частотной характеристики, как ДПФ от действительной последовательности: для $k=0..N/2-1$,:

$abs(H_k)=abs(H_{N-k})$;

$real(H_k)=real(H_{N-k})$;

$imag(H_k)=-imag(H_{N-k})$..

позволяют ограничиться рассмотрением H_k в пределах $k=0..N/2-1$ или f от 0 до $f_s/2$.

Спектр выходной последовательности ЛПП-системы Y_k=ДПФ$[y(n)]$ связан со спектром входной последовательности X_k=ДПФ$[x(n)]$ отображением свертки в частотной области: $Y_k=H_k \cdot X_k$.

Выходная последовательность $y(n)$ во временной области может быть получена из ее спектра $y(n)$=ОДПФ(Y_k)=ОДПФ$(H_k \cdot X_k)$, т.е. свертке последовательностей $h(n)$, $x(n)$ во временной области соответствует произведение спектров H_k, X_k в частотной области. Отметим, что в приведенных соотношениях все последовательности имеют одинаковую длину N.

ЛПП-системы в Z-области описывают передаточной функцией $H(z)=Y(z)/X(z)$:

$$H(z)=\frac{\sum_{i=0}^{N-1} b_i \cdot Z^{n-i}}{\sum_{i=1}^{N-1} a_i \cdot Z^{n-i})}$$

которая представляет собой Z-преобразование от импульсной характеристики $h(n)$:

$$H(z)=\sum_{n=0}^{N-1} h(n)\cdot Z^{-n}$$

Очевидна связь между передаточной функцией $H(z)$ и частотной характеристикой $H(f)$:

$$H(f)=H[z=exp(j2\pi f/f_s)].$$

Основные задачи исследования.

В работе предлагается исследовать характеристики линейных систем первого и второго порядков, заданных массивами коэффициентов числителя и знаменателя передаточной функции $H(z)$:

1) для системы первого порядка: $B1=[b\ 0]$; $A1=[1\ a]$;

2) для системы второго порядка: $B2=[b\ 0\ 0]$; $A2=[1\ a_2\ a_3]$;

Для каждой из исследуемых систем необходимо получить :

- импульсную характеристику $h(n)$;
- реакцию на единичный скачок $st(n)$;
- реакцию на заданный сигнал $x(n)$;

- частотную характеристику $H(k)$=ДПФ$(h(n))$;
- спектр входного сигнала $X(k)$=ДПФ$(x(n))$;
- спектр выходного сигнала $Y(k)$=ДПФ$(y(n))$.

Независимую переменную частотной характеристики $f=k \cdot df$ можно измерять в относительных величинах $F=f/fs$ для любых dt. По результатам исследований необходимо сопоставить характеристики систем для временной и частотной областей.

Рекомендации по составлению программы моделирования.

Для решения линейных разностных уравнений с постоянными коэффициентами в среде пакета MATLAB предусмотрена функция *filter,* обеспечивающая воспроизведение выходной последовательности $y(n)$ по известной входной последовательности $x(n)$ и векторам коэффициентов *B,A : y=filter(B,A,x).*

Результаты представить в виде графиков:

- во временной области:

```
clg;
subplot(221), plot(x,'g'), title('входной сигнал');
subplot(222), plot(h,'g'), title('импульсная характеристика');
subplot(223), plot(y,'g'), title('выходной сигнал');pause;
```

- в частотной области:

```
subplot(221), plot(abs(X),'g'), title('спектр входного сигнала');
subplot(222), plot(abs(H),'g'), title('частотная характеристика');
subplot(223), plot(abs(Y),'g'), title('спектр  выходного сигнала');
```

Порядок выполнения работы.

1. Разработать программу, позволяющую формировать характеристики систем во временной и частотной области.
   - получить выходной сигнал с использованием разностного уравнения,
   - получить выходной сигнал с использованием импульсной характеристики,
   - получить выходной сигнал с использованием частотной характеристики.

   При этом исходными данными служат: коэффициенты передаточной функции систем первого и второго порядков *(b, a, a2, a3)*; число отсчетов *N*.
   Входной сигнал формируется по данным лабораторной работы 1.

2. Исследовать системы первого и второго порядка с заданными параметрами при различной длине реализации *N=(50..200)*.

Отчет по работе должен содержать программу исследований, графики, выводы по результатами исследований.

Вариант	b	a	a1	a2
1	1.5	-0.8	-1.1	0.6
2	2.5	-0.6	-0.6	0.4
3	4.0	-0.8	-0.8	0.6
4	2.0	-0.6	-0.4	0.4
5	5.0	-0.8	-0.7	0.6

Контрольные вопросы:

1. Что такое импульсная и частотная характеристики ЛПП-системы, как они связаны между собой ?
2. От чего зависит период изменения независимой переменной в частотной характеристике, как можно увеличить разрешающую способность по частоте для частотной характеристики?
3. На что влияет изменение длины последовательности *N*?
4. Как можно оценить реальную длину импульсной и частотной характеристик по результатами исследований?