$$\Leftrightarrow \frac{(x-y)^2(xy-4xz-4yz)}{(x^2+yz)(y^2+zx)(x+y+2z)^2} \ge 0 \Leftrightarrow xy-4xz-4yz \ge 0 \quad (4)$$

Từ đó, ta thấy nếu $z \le \frac{y}{8}$, ta có đánh giá: $4z \le \frac{y}{2} \le \frac{xy}{(x+y)}$, suy ra $xy-4yz-4zx \ge 0$. Vậy (4) đúng suy ra (3) đúng. Trong trường hợp này ta chứng minh theo kiểu "dồn biến" thông thường: từ (3) suy ra ta cần chứng minh: $f\left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}, z\right) > 2\sqrt{2}$ (5)

Đặt $t = \frac{x+y}{2}$. Ta có: (5) $\Leftrightarrow f(t,t,z) > 2\sqrt{2} \quad \Leftrightarrow 2\sqrt{\frac{t(2t+z)}{t^2+zt}} + \sqrt{\frac{z(2t+z)}{z^2+t^2}} > 2\sqrt{2}$ (6)

Chuẩn hóa cho $t = 1$, khi đó (6) $\Leftrightarrow g(z) = 2\sqrt{\frac{2+z}{1+z}} + \sqrt{\frac{z(2+z)}{z^2+1}} > 2\sqrt{2}$

Vì $g'(z) = \frac{(1+z)^{\frac{5}{2}} - (1+z)}{(1+z)^{\frac{7}{2}}} + \frac{1+z-z^2}{\sqrt{z(2+z)(z^2+1)^3}} > 0$ (do $z \le \frac{y}{8} \le \frac{x+y}{16} = \frac{t}{8} = \frac{1}{8}$)

suy ra $f(z) > f(0) > 2\sqrt{2}$ (đpcm).

Vậy khi $z \le \frac{y}{8}$ thì bài toán đã được chứng minh, và ta chỉ phải xét trường hợp còn lại (mà khi đó bất đẳng thức không còn "chặt chẽ" nữa).

• ***Bước 2a:*** (chuẩn bị)

Xét khi $z > \frac{y}{8}$. Chuẩn hóa cho $y = 1$ suy ra $1 \ge z \ge \frac{1}{8}$, $x \ge 1$ và

(2) $\Leftrightarrow \sqrt{\frac{x(x+1+z)}{x^2+z}} + \sqrt{\frac{x+1+z}{1+zx}} + \sqrt{\frac{z(x+1+z)}{z^2+x}} > 2\sqrt{2}$ (7)

• ***Bước 2b:*** (chia để trị)

Chia để trị theo biến z để quy về bài toán một biến x nhờ dãy $\frac{1}{8}, \frac{1}{7}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1$

(Chú ý: Bước này đã được trình bày trong ví dụ 2 của **3.**)

Bài toán đến đây được giải quyết trọn vẹn!

• ***Ghi chú.*** Bài toán đẹp đẽ này được Phạm Kim Hùng giới thiệu trên *Diễn đàn Toán học* dưới dạng một vấn đề mở và không có lời giải trong một thời gian dài. Lời giải ở trên của chúng tôi là lời giải đầu tiên cho nó. Tuy nhiên, sau đó Nguyễn Thành Nhân đã cho biết một lời giải khác rất ngắn gọn.

Cách 2. Ta giả sử $c = \max\{a, b, c\}$. Đặt $c = k^2(a+b)$ với $k > 0$.

Nếu $k \le 1$ thì $c^2 + ab \le ab + bc + ca$. Kết hợp với $b^2 + ac \le ab + bc + ca$,

$a^2 + bc \le ab + bc + ca$ suy ra $f(a, b, c) \ge 3$.

Xét khi $k > 1$. Ta có: $c^2 + ab \le k^2(a+b)c + k^2ab \le k^2(ab+bc+ca)$ (1)

$a^2+bc+b^2+ca \le (a+b)^2 + a(b+c) \le (a+b)^2(1+k^2) = \frac{k^2+1}{k^2}c(a+b) < \frac{k^2+1}{k^2}(ab+bc+ca)$ (2)

Từ (1) và (2) ta có: $f(a,b,c)\ge \frac{1}{k}+\frac{2\sqrt{2}\sqrt{ab+bc+ca}}{\sqrt{a^2+bc+b^2+ca}}>\frac{1}{k}+\frac{2\sqrt{2}k}{k^2+1}=f(k)$

Ta chứng minh $f(k)>2\sqrt{2}$ với mọi $k>0$ (không cần $k>1$). Điều này có được đơn giản bằng biến đổi tương đương:

$$f(k)>2\sqrt{2}\Leftrightarrow \frac{1}{k}>\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{k^2+1}\left(\sqrt{k^2+1}+k\right)}\Leftrightarrow k^2+1+k\sqrt{k^2+1}>2\sqrt{2}k$$

Bất đẳng thức cuối đúng do $k^2+1+k\sqrt{k^2+1}>2k^2+1>2\sqrt{2}k\Rightarrow$ (đpcm)

• **Nhận xét:** Đây là một lời giải độc đáo nhưng không phải dễ dàng nghĩ ra. Do đó, cũng dễ hiểu khi lời giải bằng chia để trị là lời giải đầu tiên, vì tư tưởng trong phương pháp chia để trị rất đơn giản và dễ thực hiện.

Chúng ta tiếp tục với một trường hợp mà đẳng thức xảy ra ở hai chỗ.

Bài toán 2. Cho a, b, c là các số thực không âm.

Chứng minh rằng: $\frac{a^4}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^4}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^4}{c^2+ca+a^2}\ge\frac{a^3+b^3+c^3}{a+b+c}$

Chứng minh

Không mất tổng quát giả sử $a=\max\{a,b,c\}$. Chú ý dấu bằng xảy ra tại hai chỗ là $a=b=c$ và $b=c=0$, a tùy ý. Ta sẽ "khoanh vùng" từng chỗ rồi mới chia để trị.

Bước 1a: Đánh giá: VT $=\frac{a^6}{a^4+a^3b+a^2b^2}+\frac{b^6}{b^4+b^3c+b^2c^2}+\frac{c^6}{c^4+c^3a+c^2a^2}$

$$\ge\frac{\left(a^3+b^3+c^3\right)^2}{a^4+b^4+c^4+a^3b+b^3c+c^3a+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}$$

Do đó, bài toán sẽ được chứng minh nếu có:

$$ab^3+bc^3+ca^3\ge a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\Leftrightarrow\sum_3\left(ab^3+ba^3-2a^2b^2\right)+\sum_3\left(ab^3-ba^3\right)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow ab(a-b)^2+bc(b-c)^2+ca(c-a)^2+(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)\ge 0\ (1)$$

Nếu $a\ge c\ge b$ ta có ngay (đpcm).

Nếu $a\ge b\ge c$ khi đó để có (1) ta cần chứng minh

$ab(a-b)^2+ca(c-a)^2\ge(a-b)(b-c)(a-c)(a+b+c)\ge 0$ (2)

Theo bất đẳng thức ***AM – GM*** thì $ab(a-b)^2+ca(c-a)^2\ge 2a(a-b)(a-c)\sqrt{bc}$

và chú ý $a+b+c\le 3a$, nên để chứng minh (2) ta cần có $\frac{4}{9}bc\ge(b-c)^2$.

Dễ thấy điều này đúng khi $b\le 1.92c$.

Bước 1b: Xét $b\ge 1.92c$. Khi đó điểm nhạy cảm thứ nhất $a=b=c$ không còn nữa, trong bước này ta sẽ giải quyết nốt điểm nhạy cảm thứ 2.

Nếu $b = 0$ thì đơn giản, nếu không có thể chuẩn hóa cho $b = 1$ khi đó bất đẳng thức ở đề bài trở thành $\frac{a^4}{a^2+a+1}+\frac{1}{1+c+c^2}+\frac{c^4}{c^2+ca+a^2}-\frac{a^3+1+c^3}{a+1+c}\geq 0$ (3)

Chú ý rằng khi chuẩn hoá như vậy điểm nhạy cảm thứ 2 suy biến thành:

$c = 0$, $b = 1$, $a = +\infty$. Xét khi $\frac{1}{6}\geq c\geq 0$, ta chia thành hai trường hợp:

+ Nếu $a \leq 4$ thì bất đẳng thức là thực sự và ta chỉ cần đánh giá đơn giản để thấy bất đẳng thức (3) là đúng.

+ Nếu $a > 4$, khi đó bất đẳng thức có ***điểm nhạy cảm*** là $c = 0$, $b = 1$, $a = +\infty$ nên không thể dùng "chia để trị". Tuy nhiên trường hợp này ta có thể chứng minh bằng đạo hàm

Đặt $f(c)=\frac{a^4}{a^2+a+1}+\frac{1}{1+c+c^2}+\frac{c^4}{c^2+ca+a^2}-\frac{a^3+1+c^3}{a+1+c}$, $\forall c\in\left[0;\frac{1}{6}\right]$, $\forall a>4$.

Ta có: $f'(c)\geq 0\ \forall c\in\left[0;\frac{1}{6}\right]\Rightarrow f(c)\geq f(0)=\frac{a^4}{a^2+a+1}+1-\frac{a^3+1}{a+1}\geq 0\Rightarrow$ (đpcm)

Bước 2: Xét khi $c\geq\frac{1}{6}$ và $1\geq 1.92c$, tức là $0.53\geq c\geq\frac{1}{6}$. Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức (3) (hai điểm nhạy cảm đã được tách li nên "chia để trị" chắc chắn sẽ phát huy tác dụng) bằng chia để trị theo biến c để quy bất đẳng thức (3) về bài toán một biến theo a nhờ dãy sau: 0.53; 0.45; $\frac{1}{3};\frac{1}{4};\frac{1}{6}$.

Tổng hợp các bước đã xét ở trên ta có bài toán được chứng minh xong.

• **Nhận xét:** Khi đặt ra bài toán này, chúng tôi đã dùng chia để trị để kiểm tra tính đúng đắn của bất đẳng thức như lời giải trên. Sau đó nó được đưa lên trên Mathlinks.ro và ở đó chúng tôi đã nhận được một lời giải khác rất độc đáo của một bạn người Hàn Quốc như sau:

Biến đổi tương đương bất đẳng thức cần chứng minh:

$$\frac{a^4}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^4}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^4}{c^2+ca+a^2}\geq\frac{3abc}{a+b+c}+\sum_{cyc}\left(a^2-ab\right)$$

$\Leftrightarrow\sum_{cyc}\left(\frac{a^4}{a^2+ab+b^2}-a^2+ab\right)\geq\frac{3abc}{a+b+c}$. Kết quả bài toán có được nhờ đánh giá:

$$\sum_{cyc}\left(\frac{a^4}{a^2+ab+b^2}-a^2+ab\right)=\sum_{cyc}\frac{ab^3}{a^2+ab+b^2}=\sum_{cyc}\frac{b^2}{1+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}}\geq\frac{(a+b+c)^2}{3+\sum_{3}\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)}=\frac{(a+b+c)abc}{ab+bc+ca}\geq\frac{3abc}{a+b+c}$$

• ***Bình luận:*** Lời giải đẹp một cách bất ngờ. Qua hai ví dụ trên, chúng ta thấy rằng cách giải bằng chia để trị không hẳn là duy nhất. Tuy nhiên, đối với các bài toán thực sự khó mà muốn có một lời giải ngắn gọn và đẹp đẽ thì không hề đơn giản (như chúng ta thấy, những "lời giải thứ hai" mà chúng tôi giới thiệu đều rất độc đáo). Đó cũng là lý do chúng tôi nhấn mạnh đến tính tự nhiên và đơn giản của phương pháp chia để trị. Chúng ta kết thúc mục này bằng một bài toán khó, mà chúng tôi rất mong sẽ có một lời giải đơn giản cho nó từ các bạn.

Bài toán 3. Cho $x, y, z \ge 0$ và $x + y + z = 3$.

Chứng minh rằng: $\sqrt{\dfrac{x}{1+y+yz}}+\sqrt{\dfrac{y}{1+z+zx}}+\sqrt{\dfrac{z}{1+x+xy}} \ge \sqrt{3}$ (1)

Giải

Không mất tổng quát có thể giả sử $x = \max(x, y, z)$. Chú ý rằng có hai trường hợp xảy ra dấu đẳng thức là $x = y = z = 1$ và $x = 3$, $y = z = 0$.

Bước 1: (khoanh vùng điểm nhạy cảm)

Ta biến đổi vế trái bất đẳng thức cần chứng minh:

$$\frac{x^2}{\sqrt{x^3}\sqrt{1+y+yz}}+\frac{y^2}{\sqrt{y^3}\sqrt{1+z+zx}}+\frac{z^2}{\sqrt{z^3}\sqrt{1+x+xy}}$$

$$\ge \frac{(x+y+z)^2}{\sqrt{x}\sqrt{x^2+x^2y+x^2yz}+\sqrt{y}\sqrt{y^2+y^2z+y^2zx}+\sqrt{z}\sqrt{z^2+z^2x+z^2xy}}$$

$$\ge \frac{(x+y+z)^2}{\sqrt{(x+y+z)(x^2+x^2y+x^2yz+y^2+y^2z+y^2zx+z^2+z^2x+z^2xy)}}$$

$$= \frac{(x+y+z)^{3/2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2+x^2y+y^2z+z^2x+xyz(x+y+z)}}$$

Do vậy để có điều phải chứng minh ta chỉ cần chứng minh:

$$(x+y+z)^3 \ge 3\left[x^2+y^2+z^2+x^2y+y^2z+z^2x+xyz(x+y+z)\right]$$

$$\Leftrightarrow (x+y+z)^3 \ge (x+y+z)(x^2+y^2+z^2)+3(x^2y+y^2z+z^2x)+9xyz$$

$$\Leftrightarrow 2(xy^2+yz^2+zx^2) \ge x^2y+y^2z+z^2x+3xyz$$

$$\Leftrightarrow (xy^2+yz^2+zx^2+x^2y+y^2z+z^2x)-6xyz \ge 3(x^2y+y^2z+z^2x-xy^2-yz^2-zx^2)$$

$$\Leftrightarrow x(y-z)^2+y(z-x)^2+z(x-y)^2 \ge 3(x-y)(y-z)(x-z) \quad (2)$$

Từ đó, ta thấy nếu $x \ge z \ge y$ thì (2) đúng. Do đó, ta chỉ việc xét khi $x \ge y \ge z$

Nếu $2z \ge y$, ta có: $(x-z)^2 \ge (x-z)(x-y); (x-z)^2+(x-y)^2 \ge 2(x-z)(x-y)$

$$\Rightarrow \frac{y}{y-z}(x-z)^2+\frac{z}{y-z}(x-y)^2 \ge 2(x-z)^2+(x-y)^2 \ge 3(x-z)(x-y)$$

$\Rightarrow$ (2) đúng và ta có (đpcm). Vậy ta chỉ còn phải xét khi $y \ge 2z$.

***Chú ý:** Sau bước này hai biến y và z đã được tách lì ra xa và cả hai chỗ "nhạy cảm" nên vấn đề còn lại chỉ là "chia để trị"! Tuy nhiên do (2) còn có thể khai thác thêm nên nhân tiện ta giải quyết một vùng nữa cho gọn gàng trước khi dứt điểm.*

Nếu $2y \ge x$, đặt $a = x - z$, $b = y - z$ suy ra $2b \ge a \ge 0$. Ta quy (2) về chứng minh

$$(a+z)b^2+(b+z)a^2+z(a-b)^2 \ge (a-b)ab$$

Để có điều này ta chỉ cần chứng minh $ab^2+ba^2 \ge 3(a-b)ab \Leftrightarrow 2b \ge a$ (đúng)

Vậy bây giờ ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức ban đầu khi $x \ge 2y$ và $y \ge 2z$.

Bước 2a: (chuẩn bị) Xét khi $x \geq 2y$ và $y \geq 2z$. Biến đổi bất đẳng thức (1) $\Leftrightarrow$

$$\sqrt{\frac{x\cdot\frac{x+y+z}{3}}{(x+y+z)^2+y\cdot\frac{x+y+z}{3}+yz}}+\sqrt{\frac{y\cdot\frac{x+y+z}{3}}{(x+y+z)^2+z\cdot\frac{x+y+z}{3}+zx}}+\sqrt{\frac{z\cdot\frac{x+y+z}{3}}{(x+y+z)^2+x\cdot\frac{x+y+z}{3}+xy}}\geq\sqrt{3}\ (3)$$

Chuẩn hóa cho $y=1$ ta có: $(3)\Leftrightarrow\sqrt{\frac{x(x+1+z)}{x^2+5x+2xz+4+14z+z^2}}+$

$$+\sqrt{\frac{x+1+z}{1+5z+2x+4z^2+14xz+x^2}}+\sqrt{\frac{z(x+1+z)}{z^2+5xz+2z+4x^2+14x+1}}\geq 1\ (4)$$

Nếu $x\geq 7$ thì do $0\leq z\leq\frac{1}{2}$ nên cứ chỗ nào z đồng biến thì thay $z=0$, chỗ nào z nghịch biến thì thay $z=\frac{1}{2}$, khi đó ta có đánh giá các bất đẳng thức sau:

$$\sqrt{\frac{x(x+1+z)}{x^2+5x+2xz+4+14z+z^2}}+\sqrt{\frac{x+1+z}{1+5z+2x+4z^2+14xz+x^2}}\geq$$

$\sqrt{\frac{x(x+1)}{x^2+6x+\frac{45}{4}}}+\sqrt{\frac{x+1}{x^2+9x+\frac{9}{2}}}\geq 1$, $\forall x\geq 7$. Do đó, ta chỉ cần xét khi $x\leq 7$.

Bước 2b: (Chia để trị) Ta chứng minh (4) bằng cách chia theo z để đưa về một biến theo x nhờ dãy sau: $0,\frac{1}{10},\frac{1}{8},\frac{1}{6},\frac{1}{4},\frac{1}{3},\frac{2}{5},\frac{1}{2}$. Bài toán được giải quyết trọn vẹn.

V. QUAN HỆ GIỮA PHƯƠNG PHÁP CHIA ĐỂ TRỊ VÀ PHƯƠNG PHÁP S.O.S

Các bạn thân mến, trong mục trước chúng tôi đã trình bày cách áp dụng trực tiếp chia để trị cho các bài toán. Mặc dù tư tưởng đơn giản nhưng một nhược điểm là lời giải khá dài, mà nguyên nhân chính là do những đánh giá của chúng ta quá đơn giản (nhất là trong Bước 1 – "khoanh vùng điểm nhạy cảm"). Tuy nhiên, chia để trị có tư tưởng chính rất đơn giản và linh hoạt nên có thể kết hợp với các phương pháp khác một cách vô cùng uyển chuyển để đạt mục tiêu: giải quyết bài toán. Nếu các bạn thành thạo một phương pháp khác thì các bạn có thể kết hợp chia để trị với phương pháp đó và sức mạnh của các phương pháp sẽ tăng lên đáng kể. Đây mới chính là đặc tính thú vị nhất của chia để trị.

Để minh họa, chúng tôi sẽ giới thiệu với các bạn một số ý tưởng kết hợp chia để trị với phương pháp phân tích bình phương S.O.S. Đây là một phương pháp mạnh đã được dùng từ lâu nhưng mới được hệ thống hóa và phổ biến rộng rãi gần đây. Tư tưởng chính là quy một bất đẳng thức thuần nhất ba biến a, b, c về dạng

$$S_1(b-c)^2+S_2(c-a)^2+S_3(a-b)^2\geq 0$$

Trước khi bắt đầu, chúng tôi xin giới thiệu với các bạn một cách phân tích khác. Đối với các bất đẳng thức ba biến đối xứng thì việc quy về dạng S.O.S như trên là đơn giản, tuy nhiên đối với các bất đẳng thức hoán vị vòng quanh thì cách quy trên đôi khi không thích hợp và tạo ra các hệ số S_1, S_2, S_3 rất cồng kềnh và khó xử lý. Trong trường hợp đó, có một cách khác là quy về dạng sau đây:

$$S_1(b-c)^2+S_2(c-a)^2+S_3(a-b)^2 \ge S(a-b)(b-c)(a-c)$$

Cách quy này có 3 cái lợi. Thứ nhất, đối với các dạng hoán vị vòng quanh thì nó tự nhiên và đơn giản hơn cách đưa về S.O.S chính thống. Thứ hai, nếu vế trái và S không âm thì ta chỉ phải xét trường hợp $a \ge b \ge c$ mà bỏ qua trường hợp $a \ge c \ge b$ (lưu ý là trong bất đẳng thức hoán vị vòng quanh thì ta chỉ có thể giả sử $a=\max\{a,b,c\}$ và nói chung phải xét 2 trường hợp $a \ge b \ge c$ và $a \ge c \ge b$). Thứ ba, và quan trọng nhất, là trong dạng trên, khi a, b, c xấp xỉ bằng nhau thì vế trái xấp xỉ 0 với lũy thừa 2, trong khi vế phải xấp xỉ 0 với lũy thừa 3. Điều này đặc biệt thích hợp với phương pháp chia để trị, vì khi đó việc tách ly trường hợp $a=b=c$ là rất đơn giản.

Chúng ta hãy xem một ví dụ để thấy được lợi ích của cách biến đổi này.

Bài toán 1. Chứng minh rằng với a, b, $c>0$ thì:

$$\frac{a^3}{2a^2+b^2}+\frac{b^3}{2b^2+c^2}+\frac{c^3}{2c^2+a^2} \ge \frac{a+b+c}{3} \quad (1)$$

Chứng minh

Sau đây là lời giải của Phan Thành Nam được đăng trên *Diễn đàn Toán học*.

Bằng cách biến đổi tương đương, ta có:

$$(1) \Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{a^3-ab^2}{2a^2+b^2} \ge 0 \Leftrightarrow \sum_{cyc}(a^3-ab^2)(2b^2+c^2)(2c^2+a^2) \ge 0$$

$$\Leftrightarrow 3\sum_{cyc}a^3b^2c^2+2\sum_{cyc}a^3c^4+2\sum_{cyc}a^5b^2+\sum_{cyc}a^5c^2 \ge 4\sum_{cyc}ab^4c^2+2\sum_{cyc}ab^2c^4+2\sum_{cyc}a^3b^4$$

$$\Leftrightarrow 2\sum_{cyc}\left(a^5b^2+a^3b^2c^2-2a^4b^2c\right)+\sum_{cyc}\left(a^5c^2+a^3b^2c^2-2a^4bc^2\right) \ge 2\sum_{cyc}\left(a^3b^4-a^3c^4\right)$$

$$\Leftrightarrow 2\sum_{cyc}a^3b^2(a-c)^2+\sum_{cyc}a^3c^2(a-b)^2 \ge 2(a-b)(a-c)(c-b)\left(\sum_{cyc}a^2b^2+\sum_{cyc}a^2bc\right)$$

Bây giờ giả sử $a=\max\{a,b,c\}$. Nếu $c \le b$ thì bất đẳng thức đúng nên ta chỉ phải xét khi $a \ge c \ge b$. Ta sẽ chứng minh

$$2a^3b^2(a-c)^2+2a^2c^3(c-b)^2+a^3c^2(a-b)^2 \ge 2(a-c)(c-b)\left(a^3c^2+a^3cb+a^3b^2\right)$$

Xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Xét khi $c-b \le a-c$, ta có

$$2a^3b^2(a-c)^2+a^3c^2(a-b)^2 \ge 2a^3b^2(a-c)(c-b)+4a^3c^2(a-c)(c-b)$$

Vì $a^3b^2+2a^3c^2 \ge a^3\left(c^2+bc+b^2\right)$ nên suy ra (đpcm).

Trường hợp 2. Xét khi $c-b \ge a-c$, tương tự như trên ta có:

$$2a^2c^3(c-b)^2+a^3c^2(a-b)^2 \ge 2a^2c^3(a-c)(c-b)+4a^3c^2(a-c)(c-b)$$

Vì: $a^2c^3+2a^3c^2-a^3\left(c^2+bc+b^2\right) \ge a^2c^2b+a^3cb-a^3\left(bc+b^2\right)$

$= a^3b(c-b) + a^2bc(c-a) \geq 0$ nên ta cũng có (đpcm).

Vì bài toán trên khá đơn giản nên vai trò của chia để trị là không thực sự rõ nét. Tuy nhiên, trong các ví dụ sau ta sẽ thấy tư tưởng chia để trị nổi rõ trong cách chia trường hợp, khi mà mỗi tiêu chuẩn đơn lẻ của S.O.S không đủ để giải quyết.

Bài toán 2. Chứng minh rằng với $a, b, c > 0$ thì:

$$2(x^5+y^5+z^5)+9(x^3y^2+y^3z^2+z^3x^2) \geq 11(x^2y^3+y^2z^3+z^2x^3) \quad (1)$$

Giải

Bước 1. Biến đổi bất đẳng thức (1) tương đương với bất đẳng thức sau:

$$2(x^5+y^5+z^5-x^2y^3-y^2z^3-z^2x^3)+9(x^3y^2+y^3z^2+z^3x^2-x^2y^3-y^2z^3-z^2x^3) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{5}\left[S_1(y-z)^2+S_2(z-x)^2+S_3(x-y)^2\right]+9(x-y)(y-z)(x-z)(xy+yz+zx) \geq 0 \quad (2)$$

$$S_1 = 2y^3+4y^2z+6yz^2+3z^3;\ S_2 = 2z^3+4z^2x+6zx^2+3x^3;\ S_3 = 2x^3+4x^2y+6xy^2+3y^3$$

Từ đó, nếu $x \geq y \geq z$ thì ta có ngay (đpcm), do đó chỉ cần phải xét khi $x \geq z \geq y$.

Ta có: $2(x-y)^2S_3 = 2\left[(x-z)+(z-y)\right]^2S_3 \geq 8(x-z)(z-y)S_3$

$$2(z-x)^2S_2+2(y-z)^2S_1 \geq 4(x-z)(z-y)\sqrt{S_1S_2}$$

Do đó, (2) đúng nếu ta chứng minh được $8S_3+4\sqrt{S_1S_2} \geq 45(xy+yz+zx)(x-y)$ (3)

Ta có: $8S_3-45(x-y)(xy+yz+zx) > 16x^6-13yx^2+93y^2x-45zx^2 > 15x^3-45zx^2$

Do đó nếu $x \geq 3z$ thì ta có ngay (đpcm). Bây giờ xét khi $x \leq 3z$. Nếu $2y \geq z$ thì

$$S_1S_2 > \left[(2y)^2z+3(2y)z^2+3z^3\right]S_2 > 7z^3S_2 = 7z^3(2z^2+4z^2x+6zx^2+3x^3)$$

Do đó, ta cần chứng minh: $15x^3-45zx^2+4\sqrt{7z^3(2z^3+4z^2x+6zx^2+3x^3)} \geq 0$ (4)

Chuyển vế rồi bình phương lên thì (4) tương đương:

$112z^3(2z^3+4z^2x+6zx^2+3x^3) \geq (45zx^2-15x^3)^2$ (5). Khai triển ra và

đặt $t = \frac{x}{z}$ thì (5) $\Leftrightarrow 244+488t+732t^2+366t^3-(2025t^4-1350t^5+225t^6) \geq 0$ (6)

Dễ thấy (6) đúng $\forall t \in [1, 3]$ nên (1) đúng.

Bước 2. Nhiệm vụ còn lại của chúng ta là xét trường hợp $3z \geq x \geq z \geq 2y$.

Chuẩn hóa cho $z = 1$ thì điều kiện viết lại là $3 \geq x \geq 1$ và $\frac{1}{2} \geq y$. Biến đổi

$$(1) \Leftrightarrow 2x^5+2y^5+2+9x^3y^2+9y^3+9x^2-11x^2y^3-11y^2-11x^3 \ \forall x \in [1;3],\ y \in \left[0;\frac{1}{2}\right]$$

Đặt $f(x,a,b) = 2x^5+2a^5+2+9x^3a^2+9a^3+9x^2-11x^2b^3-11b^2-11x^3$ thì bất đẳng thức cần chứng minh là $f(x, y, y) > 0$. Lưu ý là f tăng theo a và giảm theo b.

Chia để trị theo y bằng dãy sau: 0; 0.1; 0.15; 0.2; 0.25; 0.3; 0.35; 0.4; 0.45; 0.5

ta có (đpcm). Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z$.

Trong bài toán trên, S.O.S đã giúp chúng ta giải quyết nhanh chóng điểm "nhạy cảm". Nhưng sau khi đạt được mục đích này, chúng ta đã linh hoạt trở lại bất đẳng thức ban đầu và dứt điểm bằng chia để trị. Trong trường hợp này thì chia để trị là tư tưởng chính còn S.O.S là kĩ thuật. Tuy nhiên, chúng ta cũng có thể dùng S.O.S làm đường lối chính và dùng chia để trị làm kĩ thuật.

Bài toán 3. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng

$$23(a+b+c)+13\left(\frac{a^3}{b^2}+\frac{b^3}{c^2}+\frac{c^3}{a^2}\right)\geq 36\left(\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\right) \quad (1)$$

Chứng minh

$$(1) \Leftrightarrow 13\sum_{cyc}\left(\frac{a^3}{b^2}+a-2\frac{a^2}{b}\right)\geq 10\sum_{cyc}\left(\frac{a^2}{b}+b-2a\right)\Leftrightarrow \frac{13}{10}\sum_{cyc}\frac{a(a-b)^2}{b^2}\geq\sum_{cyc}\frac{(a-b)^2}{b}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{10}\sum_{cyc}\frac{a(a-b)^2}{b^2}+\sum_{cyc}\left[\frac{a(a-b)^2}{b^2}-\frac{(a-b)^2}{b}\right]\geq 0\Leftrightarrow \frac{3}{10}\sum_{cyc}\frac{a(a-b)^2}{b^2}+\sum_{cyc}\frac{(a-b)^3}{b^2}\geq 0$$

Không mất tính tổng quát giả sử $a = \max\{a, b, c\}$. Nếu $a \geq c \geq b$ thì:

$$\frac{(a-b)^3}{b^2}=\frac{(a-c+c-b)^3}{b^2}\geq\frac{(a-c)^3+(c-b)^3}{b^2}\geq\frac{(a-c)^3}{a^2}+\frac{(c-b)^3}{c^2}\Rightarrow\sum_{cyc}\frac{(a-b)^3}{b^2}\geq 0$$

Nên ta chỉ cần xét khi $a \geq b \geq c$. Khi đó:

$$\sum_{cyc}\frac{(a-b)^3}{b^2}\geq\frac{(a-b)^3}{a^2}+\frac{(b-c)^3}{a^2}-\frac{(a-b+b-c)^3}{a^2}=\frac{-3(a-b)(b-c)(a-c)}{a^2}$$

Do đó, ta chỉ cần chứng minh: $\displaystyle\frac{3}{10}\sum_{cyc}\frac{a(a-b)^2}{b^2}\geq\frac{3(a-b)(b-c)(a-c)}{a^2}$

$$\Leftrightarrow a^2\left[\frac{a(a-b)^2}{b^2}+\frac{b(b-c)^2}{c^2}+\frac{c(c-a)^2}{a^2}\right]\geq 10(a-b)(b-c)(a-c)$$

Ta đánh giá đơn giản bằng bất đẳng thức ***AM – GM***:

$$\frac{a(a-b)^2}{b^2}+\frac{b(b-c)^2}{c^2}\geq 2\frac{1}{c}(a-b)(b-c);\ \frac{c(c-a)^2}{a^2}\geq\frac{4c(a-b)(b-c)}{a^2}$$

nên chỉ cần chứng minh: $2\dfrac{a^2}{c}+4c\geq 10(a-c)\Leftrightarrow a^2+7c^2\geq 5ac$ (đúng) $\Rightarrow$ (đpcm)

Chúng ta kết thúc mục này bằng một bài toán của Phạm Kim Hùng. Bài toán này đã được giới thiệu trên *Diễn đàn Toán học* với tên gọi là "Thách Thức 2", và có thể xem như một trong những ví dụ khó nhất đối với phương pháp S.O.S. Sau đây, chúng ta sẽ xem tư tưởng chia để trị hoạt động thế nào khi kết hợp với cách biểu diễn S.O.S chính thống. Lời giải sau đây cũng của Phan Thành Nam, và là lời giải đầu tiên cho bài toán này trên *Diễn đàn Toán học*.

Bài toán 4. Chứng minh rằng với $a, b, c > 0$ thì:

$$\left(\frac{a^2}{b}+c\right)^2+\left(\frac{b^2}{c}+a\right)^2+\left(\frac{c^2}{a}+b\right)^2 \geq 12\frac{a^3+b^3+c^3}{a+b+c} \quad (1)$$

Chứng minh

(1) $\Leftrightarrow \sum_{cyc}\left(\frac{a^2+2ab+2bc}{b^2}-4\cdot\frac{a+b}{a+b+c}\right)(a-b)^2 \geq 0$ (2). Chuẩn hóa: Cho $a+b+c=1$ thì

(2) $\Leftrightarrow \sum_{cyc}\left(\frac{a^2-b^2+2b}{b^2}-5+4c\right)(a-b)^2 \geq 0$ hay $\sum_{cyc} C(a-b)^2 \geq 0$

Không mất tổng quát, ta giả sử $a = \max\{a, b, c\}$. Nếu $c > b$ thì ta có ngay (đpcm) vì $\sum_{cyc}\frac{a^2b}{c}-\sum_{cyc}\frac{a^2c}{b}=\frac{(ab+bc+ca)(a-b)(b-c)(c-a)}{abc}$ nên dưới đây ta chỉ cần xét khi $a \geq b \geq c$. Trong phần còn lại, ta sẽ chia thành các trường hợp để xét.

Trường hợp 1. Xét $b \geq \frac{1}{3}$ (hay $b-c \geq a-b$). Ta xét 2 trường hợp con sau đây:

1.1. Xét $b \geq \frac{1}{3}, c \geq \frac{1}{4}$. Ta có: $C \geq \frac{2}{b}+4c-5 \geq 0$ và $A \geq 0$. Chú ý $a \leq \frac{1}{2}$ nên ta có:

$$\frac{1}{4}A+B \geq \frac{1}{2c}+\left(a+\frac{1}{a}\right)+4b+\frac{c}{a^2}-5-\frac{5}{4} \geq \frac{3}{2}+\left(2+\frac{1}{2}\right)+\frac{4}{3}+\frac{1/4}{(1/2)^2}-5-\frac{5}{4}>0$$

$$\Rightarrow C(a-b)^2+A(b-c)^2+B(c-a)^2 \geq \frac{A}{4}(a-c)^2+B(a-c)^2 \geq 0$$

1.2. Xét $b \geq \frac{1}{3}, c \leq \frac{1}{4}$. Ta có:

$$C(a-b)^2+A(b-c)^2+B(a-c)^2 \geq (C+1-4c)(a-c)^2+(A-1+4C)(b-c)^2+B(a-c)^2$$

Tương tự như trên: $C+1-4c \geq 0$, $A-1+4C \geq 0$. Chú ý $a \leq \frac{2}{3}$ nên ta có:

$$\frac{1}{4}(A-1+4c)+B \geq \left(a+\frac{1}{a}\right)+\left(\frac{1}{3c}+\frac{13}{4}c\right)+4b+\frac{1}{4c}-5-\frac{3}{2} \geq \left(\frac{2}{3}+\frac{3}{2}\right)+2+\frac{4}{3}+1-5-\frac{3}{2}=0$$

Trường hợp 2. Xét $b \leq \frac{1}{3}$. Ta luôn có: $C \geq \frac{2}{b}-5 \geq 1, A \geq \frac{2}{c}-5 \geq 1$.

Do đó ta chỉ cần quan tâm khi $B < 0$. Xét 2 trường hợp con sau đây:

2.1. Xét $b \leq \frac{1}{3}, c \geq \frac{1}{6}$ (khi đó $a \leq \frac{2}{3}$). Ta có:

$$\frac{1}{2}A+B \geq \left(5c+\frac{1}{c}\right)+\left(2a+\frac{1}{a}\right)-7.5 \geq \left(\frac{5}{3}+3\right)+\left(2\cdot\frac{2}{3}+\frac{3}{2}\right)-7.5=0$$

$$\frac{1}{2}C+B \geq \left(\frac{9}{2}a+\frac{1}{a}\right)+\left(\frac{1}{2b}+4b\right)+3c-7.5 \geq 3\sqrt{2}+2\sqrt{2}+\frac{3}{6}-7.5>0$$

$$\Rightarrow C(a-b)^2+A(b-c)^2+B(a-c)^2 \geq (-B)\left[2(a-b)^2+2(b-c)^2-(a-c)^2\right] \geq 0$$

2.2. Xét khi $b\le\frac{1}{3}, c\le\frac{1}{6}$ (khi đó $a\ge\frac{1}{2}$). Ta lại chia thành 2 trường hợp con:

2.2.1. Xét khi $b\le 0.3$ và $c\le\frac{1}{6}$. Tương tự trường hợp 2.1, ta có:

$$\frac{1}{2}A+B\ge\frac{1}{c}+\left(2a+\frac{1}{a}\right)-7.5\ge 6+2\sqrt{2}-7.5>0$$

$$\frac{1}{2}C+B\ge\left(\frac{50}{9}a+\frac{1}{a}\right)+\left(\frac{1}{2b}+4b\right)-7.5\ge 2\sqrt{\frac{50}{9}}+2\sqrt{2}-7.5>0$$ và suy ra (đpcm).

2.2.2. Xét khi $b\ge 0.3$ và $c\le\frac{1}{6}$. Do $b\le\frac{1}{3}$ nên $2(a-b)\ge(a-c)$

Do $3.75b\ge 1+0.75c$ nên $2.75(b-c)\ge(a-c)$. Từ đó suy ra:

$$C=\frac{a}{b^2}+\frac{1}{b}+4c-5\ge 9a+\frac{1}{b}-5\ge\frac{9}{2}+3-5=2.5$$

$$A=\frac{b}{c^2}+\frac{1}{c}+4a-5\ge 36b+\frac{1}{b}+4a-5\ge 36\times 0.3+6+\frac{4}{2}-5\ge 13.8$$

$$\Rightarrow C(a-b)^2+A(b-c)^2\ge\frac{2.5}{2^2}(a-c)^2+\frac{13.8}{2.75^2}(a-c)^2\ge 2.4(a-c)^2$$

và $B+2.4\ge\frac{1}{a}+4b-5+2.4\ge\frac{1}{0.7}+4\times 0.3-5+2.4>0$

nên: $C(a-b)^2+A(b-c)^2+B(a-c)^2\ge 0$. Vậy bài toán chứng minh xong.

VI. PHẢI CHĂNG LÀ LỜI GIẢI DUY NHẤT?

Các bạn thân mến, có lẽ mỗi chúng ta đều mong muốn mỗi bài toán hay đều có một lời giải đẹp tương xứng. Trong các mục trước, chúng ta đã thấy mặc dù giải quyết các bài toán rất khó bằng một đường lối đơn giản nhưng giải bằng chia để trị không hẳn là lời giải duy nhất. Trong mục này, chúng tôi dẫn ra đây bốn ví dụ minh họa đầy đủ sức mạnh và tính nghệ thuật của của phương pháp chia để trị, đồng thời chuyển tới các bạn câu hỏi rằng, liệu đây có phải là lời giải duy nhất?

Bài toán 1. Chứng minh rằng: $\frac{a^7}{a^6+b^6}+\frac{b^7}{b^6+c^6}+\frac{c^7}{c^6+a^6}\ge\frac{a+b+c}{2}, \forall a,b,c>0$

Trước khi nêu lời giải, chúng tôi xin giới thiệu sơ lược về bài toán thú vị này. Tác giả bài toán, Phạm Kim Hùng, đã giới thiệu bài toán mở sau đây trên *Diễn đàn Toán học* trong chủ đề có tên là "Very difficult inequality"

Bài toán mở: Với các hằng số $k>1$ nào thì bất đẳng thức sau đúng với mọi $a, b, c>0$:

$$\frac{a^k}{a^{k-1}+b^{k-1}}+\frac{b^k}{b^{k-1}+c^{k-1}}+\frac{c^k}{c^{k-1}+a^{k-1}}\ge\frac{a+b+c}{2}$$

Bình luận: Bằng biến đổi đơn giản, ta thấy rằng nếu bất đẳng thức đúng với k thì nó cũng đúng với $k'<k$, do đó hằng số lớn nhất cũng có nghĩa là tốt nhất. Bài toán 1 khẳng định bài toán đúng với $k=7$, hơn nữa trong trường hợp $k=8$ thì có phản ví dụ

(xem Nhận xét ở phần sau). Mặc dù vẫn chưa giải quyết được bài toán mở nhưng có thể khẳng định đây là một trong những bất đẳng thức mạnh và khó nhất hiện nay. Lời giải dưới đây dựa trên lời giải của Phan Thành Nam đã đăng trên *Diễn đàn Toán học*, một lời giải đầy tính nghệ thuật và lãng mạn.

Lời giải bài toán 1. Ta viết lại bất đẳng thức cần chứng minh:

$$a\cdot\frac{a^6-b^6}{a^6+b^6}+b\cdot\frac{b^6-c^6}{b^6+c^6}+c\cdot\frac{c^6-a^6}{c^6+a^6}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow (a-c)\frac{a^6-b^6}{a^6+b^6}+(b-c)\frac{b^6-c^6}{b^6+c^6}+c\left(\frac{a^6-b^6}{a^6+b^6}+\frac{b^6-c^6}{b^6+c^6}+\frac{c^6-a^6}{c^6+a^6}\right)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow (a-c)\frac{a^6-b^6}{a^6+b^6}+(b-c)\frac{b^6-c^6}{b^6+c^6}-c\left(\frac{a^6-b^6}{a^6+b^6}\cdot\frac{b^6-c^6}{b^6+c^6}\cdot\frac{c^6-a^6}{c^6+a^6}\right)\ge 0$$

Tất nhiên, ta có thể giả sử $a = \max\{a, b, c\}$. Từ bất đẳng thức cuối, ta thấy nếu $b\ge c$ thì bất đẳng thức hiển nhiên đúng. Do đó ta chỉ cần xét khi $a \ge c \ge b$. Để đơn giản, ta chuẩn hóa: Cho $c = 1$, và tất nhiên chỉ cần xét khi $a > 1 > b$. Ta tiếp tục biến đổi:

$$(a-1)\frac{1+b^6}{1-b^6}+(1-b)\frac{a^6+b^6}{a^6-b^6}\ge\frac{a^6-1}{a^6+1}\ \Leftrightarrow (a-1)\frac{1+b^6}{1-b^6}+(1-b)\left(1+\frac{2b^6}{a^6-b^6}\right)\ge 1-\frac{2}{a^6+1}$$

$\Leftrightarrow (a-1)\dfrac{1+b^6}{1-b^6}+\dfrac{2}{a^6+1}+\dfrac{2(1-b)b^6}{a^6-b^6}-b\ge 0$ (1). Ta sẽ chứng minh $f(a, b, b) > 0$

với $f(a,x,y)=(a-1)\dfrac{1+x^6}{1-x^6}+\dfrac{2}{a^6+1}+\dfrac{2(1-y)x^6}{a^6-x^6}-y\ge 0$

Chú ý rằng đây là bất đẳng thức thực sự. Để chứng minh, ta chỉ cần chia theo b để đưa về các bất đẳng thức 1 biến theo a, bằng dãy sau đây:

0, 0.6, 0.67, 0.7, 0.73, 0.75, 0.77, 0.8, 0.85, 0.9, 1.

Bài toán được giải quyết trọn vẹn.

• **Nhận xét:**

a) Trong biến đổi trên ta đã sử dụng hằng đẳng thức: $u+v+w+uvw=0$ với: $u=\dfrac{x-y}{x+y}, v=\dfrac{y-z}{y+z}, w=\dfrac{z-x}{z+x}$ (vì $(1 + u)(1 + v)(1 + w) = (1 - u)(1 - v)(1 - w)$)

Bằng cách này, ta đã làm xuất hiện các đại lượng "xấp xỉ 0" là $a - b$, $b - c$, $c - a$ mà ta đã đề cập ở mục trước.

b) Các bạn có thể thấy là trong lời giải trên không có bước "khoanh vùng điểm nhạy cảm". Vì sao vậy? Thực ra, khi thực hiện việc việc chia 2 vế cho $\dfrac{1-b^6}{1+b^6}\cdot\dfrac{a^6-b^6}{a^6+b^6}$ tức là ta đã chia các đại lượng "xấp xỉ" 0 cho nhau. Chính vì vậy, điểm nhạy cảm khi các biến bằng nhau đã được giải quyết. Đây chính là "chìa khóa" của lời giải này. Kỹ thuật này cũng có thể dùng rất thích hợp với dạng S.O.S có thêm đại lượng $(a - b)(b- c)(c - a)$ mà ta đã đề cập ở mục trước.

c) Trong bài toán mở đã giới thiệu, khi $k = 8$ thì ta quy bài toán về chứng minh bất đẳng thức sau với mọi $a > 1 > b$: $(a-1)\frac{1+b^7}{1-b^7}+\frac{2}{a^7+1}+\frac{2(1-b)b^7}{a^7-b^7}>b$

Thực hiện việc chia để trị theo b ta thu được dãy: $0; 0.55; 0.57; 0.58; 0.585$

Ta thấy dãy dần tiến về 0.6 nên thử cho $b = 0.6$ vào rồi chia để trị theo a thì thấy a tiến về 1.3. Điều đó dẫn đến dự đoán là bất đẳng thức sai, và quả thật thay $a = 1.3$, $b = 0.6$, $c = 1$ vào thì ta nhận được câu trả lời phủ định! Cũng bằng cách đó, thậm chí ta có thể tìm được phản ví dụ cho $k = 7.5$. Điều này chứng tỏ bài toán với trường hợp $k = 7$ là rất mạnh.

Bài toán 2. Cho $a, b, c > 0$ và $a+b+c=3$.

Chứng minh rằng: $\sqrt{\frac{a^3}{a^2+3b^2}}+\sqrt{\frac{b^3}{b^2+3c^2}}+\sqrt{\frac{c^3}{c^2+3a^2}}\ge\frac{3}{2}$

Chứng minh

Ta có: $\sqrt{\frac{a^3}{a^2+3b^2}}=\frac{a^2}{\sqrt{a^3+3ab^2}}\ge\frac{a^2}{\sqrt{a^3+2a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{3}{2}}+b^3}}=\frac{a^2}{a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}}$

Từ đó, thay (a,b,c) bởi (a^2, b^2, c^2), ta sẽ chứng minh bất đẳng thức mạnh hơn sau đây (với mọi $a, b, c > 0$): $\frac{a^4}{a^3+b^3}+\frac{b^4}{b^3+c^3}+\frac{c^4}{c^3+a^3}\ge\frac{\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}}{2}$ (1)

Ta chứng minh (1) bằng chia để trị từ đơn giản đến phức tạp.

• Ta có thể giả sử $a \ge b, c$. Nếu $b \ge c$ thì:

$$\frac{a^4}{a^3+b^3}+\frac{b^4}{b^3+c^3}+\frac{c^4}{c^3+a^3}-\frac{b^4}{a^3+b^3}-\frac{c^4}{b^3+c^3}-\frac{a^4}{c^3+a^3}$$

$$=\frac{(a^2-b^2)(a^2-c^2)(b^2-c^2)(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)}{(a^3+b^3)(b^3+c^3)(c^3+a^3)}\ge 0$$

nên dưới đây ta chỉ cần chứng minh cho trường hợp $a \ge c \ge b$.

• Trường hợp $a \le 2b$ (và $a \ge c \ge b$). Ta có: $\frac{2a^4}{a^3+b^3}-a-\frac{3}{2}(a-b)=\frac{3b^2+ab-a^2}{2(a^3+b^3)}(a-b)^2$

$$\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}-(a+b+c)=\frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}+a+b+c}\le\frac{3(a-c)^2+3(c-b)^2}{2(a+b+c)}$$

Do đó, ta chỉ cần chứng minh: $S_1(b-c)^2+S_2(c-a)^2+S_3(a-b)^2\ge 0$ với:

$$S_1=\frac{3c^2+bc-b^2}{b^3+c^3}-\frac{3}{a+b+c}>\frac{3c^2}{b^3+c^3}-\frac{3}{b+c}>0$$

$$S_2=\frac{3a^2+ca-c^2}{c^3+a^3}-\frac{3}{a+b+c}>\frac{3a^2}{c^3+a^3}-\frac{3}{a+c}>0; S_3=\frac{3b^2+ab-a^2}{a^3+b^3}\ge\frac{4b^2-a^2}{a^3+b^3}\ge 0$$

và điều này hiển nhiên đúng.

• Trường hợp $a \ge 3c \ge 3b$. Ta có:

$$\frac{a^4}{a^3+b^3} = \frac{a}{1+\left(\frac{b}{a}\right)^3} \ge \frac{a}{1+\left(\frac{1}{3}\right)^3} = \frac{27}{28}a > \frac{\sqrt{\frac{11}{3}}}{2}a = \frac{\sqrt{3\left(a^2+\frac{a^2}{9}+\frac{a^2}{9}\right)}}{2} \ge \frac{\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}}{2}$$

• Cuối cùng, ta xét trường hợp $a \ge 2b$, $a \le 3c$ (và $a \ge c \ge b$). Khi đó, bất đẳng thức là thực sự. Chuẩn hóa cho $a = 1$, và đưa về bất đẳng thức:

$$\frac{1}{1+b^3} + \frac{b^4}{b^3+c^3} + \frac{c^4}{c^3+1} > \frac{\sqrt{3(1+b^2+c^2)}}{2} \quad (2) \text{ với } b \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \text{ và } c \in \left[\frac{1}{3}, 1\right]$$

Thực hiện chia để trị theo b để quy về bài toán một biến theo c nhờ dãy

$0, 0.3, 0.4, 0.45, 0.5$. Bài toán đến đây được giải quyết trọn vẹn.

• **Nhận xét:** Tất nhiên sau khi giải quyết điểm "nhạy cảm", ta có thể trở về chứng minh trực tiếp bất đẳng thức ở đề bài. Tuy nhiên ở đây chúng ta cố gắng chứng minh (1) vì nó là 1 bất đẳng thức đẹp và ý nghĩa. Một hệ quả của bất đẳng thức (1) là $\frac{a^4}{a^3+b^3} + \frac{b^4}{b^3+c^3} + \frac{c^4}{c^3+a^3} \ge \frac{a+b+c}{2}$

Đây là một trường hợp riêng của bài toán mở đã giới thiệu ở bài toán 1, và cũng là một hệ quả trực tiếp của bài toán 1. Bản thân bài toán hệ quả này đã là khá mạnh và là một ví dụ ấn tượng cho phương pháp S.O.S, tuy nhiên phương pháp này đã bộc lộ giới hạn khi đối mặt với các bất đẳng thức mạnh hơn. Bạn đọc có thể xem lời giải bài toán 2 bằng cách sử dụng bất đẳng thức ***Holder*** đã được trình bày ở §3, nhưng với bất đẳng thức mạnh hơn (1), rất khó để có sự lựa chọn khác.

Chúng ta tiếp tục với một bài toán rất nổi tiếng sau đây

Bài toán 3. Cho $x, y, z > 0$ thoả $xyz = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{x}{y^4+2} + \frac{y}{z^4+2} + \frac{z}{x^4+2} \ge 1$$

Bài toán này được giới thiệu trên diễn đàn Mathfriend.net với nickname tác giả là "**Cậu bé quàng khăn đỏ**". Đằng sau hình thức tuyệt đẹp là một bất đẳng thức rất khó, và mặc dù nhận được rất nhiều sự quan tâm nhưng cho đến bây giờ ở đó vẫn chưa có lời giải. Chú ý rằng nếu thay mũ 4 bởi mũ 5 thì bài toán không còn đúng.

Chứng minh

Do $xyz = 1$ nên ta có thể thay (x, y, z) bởi $\left(\frac{a}{c}, \frac{b}{a}, \frac{c}{b}\right)$ với $a, b, c > 0$ và viết lại bất đẳng thức cần chứng minh: $\frac{a^5}{(2a^4+b^4)c} + \frac{b^5}{(2b^4+c^4)a} + \frac{c^5}{(2c^4+a^4)b} \ge 1$

(Chú ý: các bạn thử suy nghĩ tại sao thay bộ (x, y, z) bởi bộ $\left(\frac{a}{c}, \frac{b}{a}, \frac{c}{b}\right)$ mà không phải là bộ $\left(\frac{a}{b}, \frac{b}{c}, \frac{c}{a}\right)$? Cách thay thứ 2 có gì bất lợi so với cách thứ nhất?)

Áp dụng bất đẳng thức ***CBS***, ta có:

$$VT = \frac{a^6}{(2a^4+b^4)ca} + \frac{b^6}{(2b^4+c^4)ab} + \frac{c^6}{(2c^4+a^4)bc} \geq \frac{(a^3+b^3+c^3)^2}{(2a^4+b^4)ca+(2b^4+c^4)ab+(2c^4+a^4)bc}$$

Do đó, để có điều phải chứng minh ta chỉ cần chứng minh:

$$(a^3+b^3+c^3)^2 \geq 2(ab^5+bc^5+ca^5)+abc(a^3+b^3+c^3) \ (1)$$

Nhìn bề ngoài thì có vẻ như đây chỉ là một bất đẳng thức đơn giản, và dấu bằng cũng chỉ xảy ra tại một chỗ duy nhất là $a = b = c$. Tuy nhiên bất đẳng thức (1) lại là một bất đẳng thức mạnh và khó đến kì dị. Đây thực sự là một điều đáng ngạc nhiên. Sau đây, chúng tôi xin đề xuất một cách tấn công:

Không mất tính tổng quát giả sử $a = \max\{a, b, c\}$. Nếu $a \geq b \geq c$ thì:

$$(a^5c+b^5a+c^5b)-(a^5b+b^5c+c^5a) = (a-b)(b-c)(c-a)\left[(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)+abc\right] \leq 0$$

nên thay (a, b, c) bởi (a, c, b) thì vế trái bất đẳng thức không đổi trong khi vế phải bất đẳng thức tăng lên. Do đó, ta chỉ cần xét trường hợp $a \geq c \geq b$ (như đã nói, đây là một kĩ thuật rất thường dùng để giải quyết bớt một trường hợp khi gặp bài toán hoán vị vòng quanh).

Bây giờ ta thử dùng phương pháp phân tích bình phương S.O.S. Viết lại:

$$(a^3+b^3+c^3)(a^3+b^3+c^3-3abc) \geq 2abc\left[\frac{a^4}{b}+\frac{b^4}{c}+\frac{c^4}{a}-(a^3+b^3+c^3)\right]$$

và sử dụng các phân tích: $a^3+b^3+c^3-3abc = \frac{a+b+c}{2}\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]$

$\frac{3a^4}{b}+b^3-4a^3 = \frac{(3a^2+2ab+b^2)}{b}(a-b)^2$ ta viết lại bất đẳng thức trên về dạng:

$S_1(b-c)^2+S_2(c-a)^2+S_3(a-b)^2 \geq 0$ (2)

với $S_1 = S-4ab(3b^2+2bc+c^2); S_2 = S-4bc(3c^2+2ca+a^2)$

$S_3 = S-4ca(3a^2+2ab+b^2)$; trong đó $S = 3(a+b+c)(a^3+b^3+c^3)$

Nếu $a = c$ hoặc $b = c$ thì bài toán đơn giản. Ngược lại, ta thực hiện biến đổi:

$(2) \Leftrightarrow (S_1+S_3)(c-b)^2+(S_2+S_3)(c-a)^2+2S_3(a-c)(c-b) \geq 0$

$\Leftrightarrow \frac{S_1+S_3}{2}\cdot\frac{c-b}{a-c}+\frac{S_2+S_3}{2}\cdot\frac{a-c}{c-b}+S_3 \geq 0$ (3)

Khi chia xuống như vậy thì điểm nhạy cảm đã được tách li, nên bất đẳng thức (3) là một bất đẳng thức thực sự. Do đó "chia để trị" chắc chắn phát huy tác dụng:

Chuẩn hóa cho $c = 1$ khi đó $a > 1$ và $b < 1$, lúc này: VT(3) = $f(a, b, b)$ =

$$=\frac{(1-b)\left[3(a+b+1)(a^3+b^3+1)-2ba(3b^2+2b+1)-2a(3a^2+2ab+b^2)\right]}{a-1}$$

$$+\frac{(a-1)\left[3(a+b+1)(a^3+b^3+1)-2b(3+2a+a^2)-2a(3a^2+2ab+b^2)\right]}{1-b}$$

$$+3(a+b+1)(a^3+b^3+1)-4a(3a^2+2ab+b^2)$$

Đặt $u(a)=3(a+b+1)(a^3+b^3+1)-2b(3+2a+a^2)-2a(3a^2+2ab+b^2)$

$v(a)=3(a+b+1)(a^3+b^3+1)-2ba(3b^2+2b+1)-2a(3a^2+2ab+b^2)$

Ta sẽ chứng minh $u(a)>0, v(a)>0$ bằng 2 phương pháp khác nhau.

Ta có: $u'(a)=12a^3+3b^3+3+9a^2b-9a^2-4b-12ab-2b^2>0\quad \forall a>1, b<1$

nên $u(a)>u(1)=6+6b^3-10b+3b^4-2b^2>0$

Ta không thể dùng đạo hàm để chứng minh $v(a)>0$. Hãy lưu ý đây là những bất đẳng thức thực sự nên chia để trị chắc chắn phải đi đến kết quả. Sử dụng chia để trị theo b để quy về bài toán một biến theo a nhờ dãy: 0; 0.5; 0.75; 0.9; 1 ta sẽ chứng minh được $v(a)>0$. Bây giờ trở lại bài toán.

Đặt $f(a,b_1,b_2)=\dfrac{(1-b_2)\left[3(a+b_1+1)(a^3+b_1^3+1)-2b_2a(3b_2^2+2b_2+1)-2a(3a^2+2ab_2+b_2^2)\right]}{a-1}$

$$+\frac{(a-1)\left[3(a+b_1+1)(a^3+b_1^3+1)-2b_2(3+2a+a^2)-2a(3a^2+2ab_2+b_2^2)\right]}{1-b_1}$$

$+3(a+b_1+1)(a^3+b_1^3+1)-4a(3a^2+2ab_2+b_2^2)$ với $0\le b_1<b_2\le 1$.

Không khó khăn ta có thể chứng minh được: $f(a,b,b)>f(a,b_1,b_2)\quad \forall b\in[b_1,b_2]$

Hàm $f(a,b_1,b_2)$ không hẳn đã đồng biến theo b_1 và nghịch biến theo b_2, tuy nhiên $f(a,b,b)>f(a,b_1,b_2)$ đúng $\forall b\in[b_1,b_2]$ được suy ra từ các đánh giá sau:

$3(a+b+1)(a^3+b^3+1)-2ba(3b^2+2b+1)-2a(3a^2+2ab+b^2)$

$>3(a+b_1+1)(a^3+b_1^3+1)-2b_2a(3b_2^2+2b_2+1)-2a(3a^2+2ab_2+b_2^2), \forall b\in[b_1,b_2]$

và $3(a+b+1)(a^3+b^3+1)-2b(3+2a+a^2)-2a(3a^2+2ab+b^2)$

$>3(a+b_1+1)(a^3+b_1^3+1)-2b_2(3+2a+a^2)-2a(3a^2+2ab_2+b_2^2), \forall b\in[b_1,b_2]$

Cuối cùng, ta thực hiện phép chia để trị theo biến b để quy về bất đẳng thức 1 biến theo a nhờ dãy:

0; 0.29; 0.42; 0.51; 0.56; 0.6; 0.63; 0.65; 0.67; 0.685; 0.714; 0.726; 0.736; 0.746; 0.756; 0.765; 0.774; 0.783; 0.792; 0.801; 0.81; 0.821; 0.833; 0.847; 0.863; 0.883; 0.91; 0.95; 1

Bài toán được giải quyết trọn vẹn!

• **Nhận xét:** Ở đây một lần nữa kỹ thuật chia các đại lượng xấp xỉ 0 mà ta đã dùng trong bài toán 1 lại phát huy tác dụng. Tuy nhiên, vì nó quá đơn giản nên việc chia để trị phải thực hiện khá dài dòng. Nhưng cách làm này không phải là duy nhất, và chúng tôi hi vọng bạn đọc sẽ có cách giải khác ngắn gọn hơn.

Chúng ta kết thúc mục này với một bài toán đã giới thiệu ở đầu chuyên đề.

Bài toán 4. Cho $x, y, z \in [-1, 1]$ và $x + y + z = 0$.

Chứng minh rằng: $\sqrt{1+x+\frac{7}{9}y^2}+\sqrt{1+y+\frac{7}{9}z^2}+\sqrt{1+z+\frac{7}{9}x^2} \geq 3$

Trước khi giải bài này, xin nói đôi lời về xuất xứ của nó. Bài toán này đã được đưa lên *Diễn đàn Toán học* và Mathnfriend.net nhưng vẫn không nhận được lời giải. Nó được làm mạnh từ bài toán dưới đây của Phan Thành Nam.

Bài toán ban đầu. Cho $x, y, z \in [-1, 1]$ và $x + y + z = 0$. Chứng minh rằng:

$$T = \sqrt{1+x+y^2}+\sqrt{1+y+z^2}+\sqrt{1+z+x^2} \geq 3$$

Sau đây là lời giải đầu tiên của tác giả bài toán, một lời giải hay về mặt ý tưởng.

Bổ đề 1: Cho các số thực a, b, u, v sao cho các căn thức dưới đây có nghĩa. Khi đó 2 điều sau là tương đương:

(i) $\sqrt{a+u^2}+\sqrt{b+v^2} \geq \sqrt{2(a+b)+(u+v)^2}$

(ii) $4(u-v)(bu-av) \geq (a-b)^2$

Trở lại bài toán. Ta xét thử khi nào thì có bất đẳng thức dưới dạng sau:

$\sqrt{1+x+\frac{y^2}{4}}+\sqrt{1+y+\frac{z^2}{4}} \geq \sqrt{2(2+x+y)+\frac{(y+z)^2}{4}}$ (1). Theo bổ đề 1 thì (1) đúng khi $(y-z)\left[y(1+y)-z(1+x)\right] \geq (x-y)^2$ hay $(y-z)^2+\left(y^3-z^3\right) \geq (x-y)^2$

Xét 3 bất đẳng thức sau: $(y-z)^2+\left(y^3-z^3\right) \geq (x-y)^2$ (2)

$(z-x)^2+\left(z^3-x^3\right) \geq (y-z)^2$; $(x-y)^2+\left(x^3-y^3\right) \geq (z-x)^2$

Do khi cộng 3 bất đẳng thức trên ta có bất đẳng thức đúng nên phải có ít nhất một trong 3 bất đẳng thức đúng. Không giảm tổng quát, giả sử (2) đúng $\Rightarrow$ (1) đúng.

Đặt $a=\sqrt{1+x+\frac{y^2}{4}}, b=\sqrt{1+y+\frac{z^2}{4}}$ thì (1) $\Leftrightarrow (a+b)^2 \geq 4-2z+\frac{x^2}{4}$ (3)

Từ đó ta có: $\sqrt{1+x+y^2}+\sqrt{1+y+z^2}=\sqrt{a^2+\frac{3}{4}y^2}+\sqrt{b^2+\frac{3}{4}z^2}$

$$\geq \sqrt{(a+b)^2+\frac{3}{4}\left(|y|+|z|\right)^2} \geq \sqrt{4-2z+\frac{3}{4}\left(|y|+|z|\right)^2}$$

Sử dụng bất đẳng thức ở trên ta tiếp tục thực hiện việc "dồn căn":

$$T \geq \sqrt{4-2z+\frac{3}{4}\left(|y|+|z|\right)^2}+\sqrt{1+z+\frac{3}{4}x^2} \geq \sqrt{\left(\sqrt{4-2z}+\sqrt{1+z}\right)^2+\frac{3}{4}\left(|x|+|y|+|z|\right)^2}$$

$\geq\sqrt{\left(\sqrt{4-2z}+\sqrt{1+z}\right)^2+3z^2}$ (do $|x|+|y|+|z|\geq|x+y|+|z|=2|z|$)

Cuối cùng, ta có: $\sqrt{\left(\sqrt{4-2z}+\sqrt{1+z}\right)^2+3z^2}\geq 3\Leftrightarrow\left(\sqrt{4-2z}+\sqrt{1+z}\right)^2+3z^2\geq 9$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{(4-2z)(1+z)}\geq 4+z-3z^2\Leftrightarrow 4(4-2z)(1+z)\geq\left(4+z-3z^2\right)^2$

$\Leftrightarrow 15z^2+6z^3-9z^4\geq 0\Leftrightarrow 3z^2(1+z)(5-3z)\geq 0$ (đúng $\forall z\in[-1;1]$)

Vậy bài toán chứng minh xong! Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=0$.

Bài toán này đã được đưa lên *Diễn đàn Toán học*, và ở đó đã nhận được lời giải rất đơn giản sau đây của thầy Trần Nam Dũng.

Bổ đề 2: Cho các số thực a, b sao cho các căn thức dưới đây có nghĩa.

Khi đó: $\sqrt{1+a}+\sqrt{1+b}\geq 1+\sqrt{1+a+b}\Leftrightarrow ab\geq 0$

Trở lại bài toán: Trong 3 số $x+y^2, y+z^2, z+x^2$ phải có 2 số cùng dấu (tức là tích của chúng ≥ 0), ta có thể giả sử là $x+y^2$ và $y+z^2$. Khi đó, áp dụng bổ đề:

$$\sqrt{1+x+y^2}+\sqrt{1+y+z^2}+\sqrt{1+z+x^2}\geq 1+\sqrt{\left(1+x+y+z^2\right)+y^2}+\sqrt{(1+z)+x^2}\geq$$

$$\geq 1+\sqrt{\left(\sqrt{1+x+y+z^2}+\sqrt{1+z}\right)^2+(y+x)^2}\geq 1+\sqrt{\left(\sqrt{1-z+z^2}+\sqrt{1+z}\right)^2+z^2}$$

Cuối cùng, ta chứng minh: $\left(\sqrt{1-z+z^2}+\sqrt{1+z}\right)^2+z^2\geq 4$

$\Leftrightarrow 2+2z^2+2\sqrt{\left(1-z+z^2\right)(1+z)}\geq 4\Leftrightarrow z^2+\sqrt{1+z^3}\geq 1.$

Nếu $z\geq 0$ thì $\sqrt{1+z^3}\geq 1$; nếu $z<0$ thì $z^2+\sqrt{1+z^3}\geq z^2+1+z^3=1+z^2(1+z)\geq 1.$

Bài toán chứng minh xong!

Như vậy Bài toán 4 là kết quả làm mạnh của chúng tôi cho bài toán ban đầu, ở đây đẳng thức xảy ra tại hai chỗ là $x=y=z=0$ và $x=0,\ y=1,\ z=-1$. Việc xuất hiện hai điểm "nhạy cảm" như trên khiến các đánh giá ở trên lập tức gặp trở ngại. Tuy nhiên bằng "chia để trị" ta dễ dàng khắc phục.

Lời giải bài toán 4.

Bước 1a: (khoanh vùng điểm nhạy cảm thứ nhất)

Trước hết chúng ta cứ việc lặp lại con đường cũ của thầy Trần Nam Dũng:

Trong ba số $x+\frac{7}{9}y^2, y+\frac{7}{9}z^2, z+\frac{7}{9}x^2$ phải có ít nhất 1 cặp cùng dấu mà ta có thể giả sử là $\left(x+\frac{7}{9}y^2\right)\left(y+\frac{7}{9}z^2\right)\geq 0$. Khi đó ta có đánh giá:

$$\sqrt{1+x+\frac{7}{9}y^2}+\sqrt{1+y+\frac{7}{9}z^2}+\sqrt{1+z+\frac{7}{9}x^2}\geq 1+\sqrt{1+x+\frac{7}{9}y^2+y+\frac{7}{9}z^2}+\sqrt{1+z+\frac{7}{9}x^2}$$

$$=1+\sqrt{\left(1-z+\frac{7}{9}z^2\right)+\frac{7}{9}y^2}+\sqrt{(1+z)+\frac{7}{9}x^2}\geq 1+\sqrt{\left(\sqrt{1-z+\frac{7}{9}z^2}+\sqrt{1+z}\right)^2+\frac{7}{9}z^2}$$

***Nhận xét:** bước đánh giá ở chỗ này chỉ đảm bảo dấu bằng ở vị trí thứ nhất xảy ra, còn khi $x\approx 0,\ y=1,\ z=-1$ thì biểu thức bên phải đã nhỏ hơn 3 nên việc chứng minh trực tiếp là không tưởng. Chính vì vậy mục tiêu của bước này chỉ là tách li ba biến x, y, z ra khỏi vùng nhạy cảm thứ nhất.*

Xét $\left(\sqrt{1-z+\frac{7}{9}z^2}+\sqrt{1+z}\right)^2+\frac{7}{9}z^2\geq 4\Leftrightarrow\sqrt{1-\frac{2}{9}z^2+\frac{7}{9}z^3}\geq 1-\frac{7}{9}z^2$

$\Leftrightarrow\frac{4z^2}{3}+\frac{7z^3}{9}-\frac{49z^4}{81}\geq 0\Leftrightarrow\frac{49}{81}z^2-\frac{7}{9}z-\frac{4}{3}\leq 0\Leftrightarrow\frac{9-3\sqrt{57}}{14}\leq z\leq\frac{9+3\sqrt{57}}{14}$

Như vậy $z\geq -0.95$ thì bài toán được giải quyết. Do vậy ở bước tiếp theo ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức ban đầu đúng $\forall z\in[-1,-0.95]$ nữa là xong.

Bước 1b: (khoanh vùng điểm nhạy cảm thứ 2)

Xét $y\in[0.7,\ 1]$, $x\in[0.95-y,\ 1-y]$ và $z\in[-1,-0.95]$. Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức ban đầu đúng. Thật vậy, biến đổi tương đương:

$$\sqrt{1+x+\frac{7}{9}y^2}+\sqrt{1+y+\frac{7}{9}(x+y)^2}+\sqrt{1-x-y+\frac{7}{9}x^2}\geq 3$$

Ta xem y là một hằng số bất kì thuộc $[0.7,\ 1]$. Đặt

$$f(x)=\sqrt{1+x+\frac{7}{9}y^2}+\sqrt{1+y+\frac{7}{9}(x+y)^2}+\sqrt{1-x-y+\frac{7}{9}x^2}-3,\ \forall x\in[0.95-y,1-y]$$

Nhiệm vụ của ta là chứng minh $f(x)\geq 0,\forall x\in[0.95-y,1-y]$. Ta có:

$$f'(x)=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{9+9x+7y^2}}+\frac{1}{3}\cdot\frac{7x+7y}{\sqrt{9+9y+7(x+y)^2}}+\frac{1}{6}\cdot\frac{-9+14x}{\sqrt{9-9x-9y+7x^2}}$$

Đặt $g(a,b,y)=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{9+9b+7y^2}}+\frac{1}{3}\cdot\frac{7a+7y}{\sqrt{9+9y+7(b+y)^2}}+\frac{1}{6}\cdot\frac{-9+14a}{\sqrt{9-9a-9y+7b^2}}$

Hàm $g(a,b,y)$ tăng theo a và giảm theo b nên $f'(x)=g(x,x,y)\leq g(1-y,0.95-y,y)$

Dễ dàng kiểm tra $g(1-y,0.95-y,y)<0,\forall y\in[0.7,1]$ (đây là bất đẳng thức thực sự 1 biến số). Vậy $f'(x)<0\quad\forall x\in[0.95-y,1-y]$, suy ra $f(x)$ giảm trên $[0.95-y,1-y]$.

Do đó $f(x)\geq f(1-y)=\sqrt{2-y+\frac{7}{9}y^2}+\sqrt{\frac{16}{9}+y+\sqrt{\frac{7}{9}(1-y)^2}}-3$

Đặt $h(y)=f(1-y),\ y\in[0.7,1]$. Ta dễ dàng kiểm tra $h'(y)<0\ \forall y\in[0.7,1]$ (đây là bất đẳng thức thực sự một biến số) nên $h(y)\geq h(1)=0$.

• ***Bước 2a:*** (chuẩn bị)

Xét các trường hợp còn lại là $z\in[-1;-095]$, $y\in[-0.05;0.7]$. Hai điểm nhạy cảm đã được tách li và bất đẳng thức của ta lúc này là một bất đẳng thức thực sự. Thay $x=-z-y$ vào bất đẳng thức ban đầu, ta có bất đẳng thức tương đương:

$$\sqrt{1-z-y+\frac{7}{9}y^2}+\sqrt{1+y+\frac{7}{9}z^2}+\sqrt{1+z+\frac{7}{9}(y+z)^2}\geq 3$$

Đặt $a=-z$ thì $a\in[0.95;1]$ và bất đẳng thức trên được viết lại:

$$\sqrt{1+a-y+\frac{7}{9}y^2}+\sqrt{1+y+\frac{7}{9}a^2}+\sqrt{1-a+\frac{7}{9}\left(y^2+2ya+a^2\right)}\geq 3$$

• ***Bước 2b:*** (chia để trị)

Ta cần chứng minh bất đẳng thức cuối khi $y\in[-0.05;0.7]$ và $a\in[095;1]$.

Sử dụng phương pháp chia để trị theo biến y để quy về bài toán một biến theo a nhờ dãy sau: –0.05; 0.35; 0.48; 0.57; 0.62; 0.65; 0.68; 0.7

Bài toán được giải quyết trọn vẹn!

VII. KIỂM TRA BẤT ĐẲNG THỨC THỰC SỰ MỘT BIẾN SỐ BẰNG PHƯƠNG PHÁP LẶP

Đối với bất đẳng thức thực sự một biến số, ta cũng có thể kiểm tra bằng phương pháp lặp nhờ kết quả sau đây.

1. Định lý. Cho $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ một hàm tăng và liên tục, $[a, b]$ là 1 khoảng đóng trên $\mathbb{R}$. Khi đó hai mệnh đề sau đây là tương đương:

(i) $f(x)>x$, $\forall x\in[a,b]$

(ii) Dãy $x_0=a, x_n=f(x_{n-1})$ thỏa mãn: $x_n>b$ với n đủ lớn.

Chứng minh

(i) suy ra *(ii)*:

Từ *(i)* nói riêng ta có $f(a)>a$. Điều này cũng có nghĩa là $x_1>x_0$, mà f tăng nên suy ra dãy $\{x_n\}$ là dãy tăng. Giả sử $x_n\leq b, \forall n$ thì dãy $\{x_n\}$ tăng và bị chặn trên (bởi b) nên hội tụ về một giới hạn $c\in[a,b]$. Từ định nghĩa $x_n=f(x_{n-1})$ và f liên tục, cho $n\to+\infty$ để chuyển qua giới hạn ta được $c=f(c)$. Điều này mâu thuẫn với *(i)*.

(ii) suy ra *(i)*: Giả sử tồn tại $c\in[a,b]$ sao cho $f(c)\leq c$. Vì $x_0=a\leq c$ nên bằng quy nạp, ta có: $x_n=f(x_{n-1})\leq f(c)\leq c$. Điều này mâu thuẫn với *(i)*.

Lưu ý rằng, cũng như ở **2.**, ở đây chúng ta chỉ cần hiểu ý nghĩa định lý để áp dụng, còn trong trình bày thì chỉ dùng những sự kiện hiển nhiên. Hơn nữa, chiều ta sẽ sử dụng chỉ là "*(ii) suy ra (i)*" và khi đó chỉ cần f đồng biến là đủ.

2. Ví dụ 1. Chứng minh rằng với $x\in[0, 1]$ thì: $\sqrt{x+1}+x^7+\frac{1}{10}(x+1)^4>x+1$

Chứng minh

$\sqrt{x+1}+x^7+\frac{1}{10}(x+1)^4>x+1 \Leftrightarrow f(x)=\sqrt{x+1}+x^7+\frac{1}{10}(x+1)^4-1>x$, $\forall x\in[0,1]$

Dễ thấy f đồng biến trên $[0, 1]$. Giả sử tồn tại $z\in[0, 1]$ sao cho $z\geq f(z)$.

Ta có: $z\geq 0\Rightarrow z\geq f(z)\geq f(0)=0.1\Rightarrow z\geq f(z)\geq f(0.1)>0.19$

$\Rightarrow z\geq f(z)\geq f(0.19)>0.29\Rightarrow z\geq f(z)\geq f(0.29)>0.4\Rightarrow z\geq f(z)\geq f(0.4)>0.56$

$\Rightarrow z\geq f(z)\geq f(0.56)>0.85 \Rightarrow z\geq f(z)\geq f(0.85)>1.85>1$.

Do $z>1$ mâu thuẫn với giả sử $z\in[0, 1]$ nên suy ra $f(x)>x$, $\forall x\in[0, 1]$ (đpcm)

• **Nhận xét 1:** Định lý trên cho ta một cách chia để trị "tối ưu" cho các bất đẳng thức thực sự một biến số có dạng $f(x)-x>0$ với f là hàm tăng và liên tục. Một câu hỏi tự nhiên là khi nào một bất đẳng thức có thể quy về dạng trên. Thực tế chỉ ra rằng hầu hết các bất đẳng thức một biến số đều có thể biến đổi được về dạng trên và có nhiều cách làm như vậy. Nhưng ở đây chúng tôi giới thiệu một cách dùng được cho nhiều trường hợp với việc sử dụng mệnh đề sau:

• **Mệnh đề:** giả sử g khả vi liên tục trên $\mathbb{R}$ (hàm g có đạo hàm và đạo hàm liên tục) và $g'(x)\leq -M, \forall x\in\mathbb{R}$. Khi đó bất đẳng thức $g(x)>0$, $\forall x\in[a, b]$ tương đương với bất đẳng thức $f(x)>x$, $\forall x\in[a, b]$, trong đó $f(x)=x+\frac{g(x)}{M}, \forall x\in[a,b]$ là hàm tăng và liên tục trên $\mathbb{R}$. (Chú ý rằng miền xác định $\mathbb{R}$ có thể thay bằng các miền khác thích hợp mà không ảnh hưởng gì).

3. Ví dụ 2. Chứng minh rằng với mọi $x>1$ thì: $2x^4-2x^3-2x^2-x+3.5>0$ (1)

Chứng minh

Đặt $g(x)=2x^4-2x^3-2x^2-x+3.5$ thì $g'(x)=8x^3-6x^2-4x-1$ chưa chắc dương.

Tuy nhiên: $g'(x)+3=(8x^3-8x^2)+(2x^2-4x+2)\geq 0$. Do đó, ta thay (1) bởi bất đẳng thức tương đương là $f(x)>x$ với $f(x)=\frac{2x^4-2x^3-2x^2+2x+3.5}{3}$

Ta thấy f đồng biến trên miền $x>1$. Giả sử tồn tại $z>1$ sao cho $z\geq f(z)$.

Thì ta có: $z>1\Rightarrow z\geq f(z)\geq f(1)=1.16 \Rightarrow z\geq f(z)\geq f(1.16)=1.2$

$\Rightarrow z\geq f(z)\geq f(1.2)=1.23\Rightarrow z\geq f(z)\geq f(1.23)=1.26 \Rightarrow z\geq f(z)\geq f(1.26)=1.29$

$\Rightarrow z\geq f(z)\geq f(1.29)=1.33\Rightarrow z\geq f(z)\geq f(1.33)=1.39 \Rightarrow z\geq f(z)\geq f(1.39)=1.51$

$\Rightarrow z\geq f(z)\geq f(1.51)=1.79 \Rightarrow z\geq f(z)\geq f(1.79)=3.24 \Rightarrow z\geq f(z)\geq f(3.24)=47$

Nhưng rõ ràng khi $z>47$ thì $f(z)>z$ nên ta có (đpcm).

• **Nhận xét 2:** Đối với bài toán 1 biến số thì phương pháp lặp là rất tiện dụng và đặc biệt thích hợp khi dùng máy tính bỏ túi để kiểm tra bất đẳng thức. Tuy nhiên, nó không thể mở rộng cho bài toán 2 biến (hay nói chính xác hơn là chúng tôi chưa mở rộng được nó cho bài toán hai biến). Do đó để các bạn dễ theo dõi, ở **II.** chúng tôi chỉ giới thiệu một cách làm mà có thể nối kết với trường hợp 2 biến.

VIII. NHÌN LẠI PHƯƠNG PHÁP DAC VÀ NHỮNG BÀI TOÁN THÁCH THỨC

1. Nhìn lại phương pháp DAC

Các bạn thân mến, phương pháp chia để trị ra đời để giải quyết những bài toán khó mà chúng tôi đã thực sự gặp trở ngại khi áp dụng các phương pháp khác. Do đó, chúng tôi mong bạn đọc cũng sẽ sử dụng nó với mục đích này, vì thực tế chúng tôi vẫn thích một lời giải khác, nếu có, hơn là một lời giải bằng chia để trị. Tuy nhiên, điều đó không làm giảm ý nghĩa của phương pháp, bởi như các nhà toán học vẫn thường nói: "Trước khi tìm một lời giải đẹp, hãy tìm một lời giải đã!"

Theo đánh giá của chúng tôi thì bước khó nhất trong phương pháp này chính là "bước 1". Đây là bước đòi hỏi chúng ta phải giải được bài toán trong một trường hợp "nhỏ", nhưng "quan trọng". Như chúng ta thấy trong các ví dụ, bước này thường chứa nhiều biến hóa và nói chung là không đơn giản. Tuy nhiên, khó khăn này nằm ở bản chất bài toán, vì các bạn hãy tưởng tượng, nếu chúng ta không thể giải quyết bài toán trong một trường hợp nhỏ thì làm gì có hi vọng giải nó trong trường hợp tổng quát. Nói như vậy nghĩa là chia để trị không thể giúp chúng ta né tránh khó khăn, mà chỉ giúp chúng ta nhận thấy khó khăn thực sự ở đâu và cho phép chúng ta đối mặt trực tiếp với chúng (chúng ta chỉ phải giải quyết bài toán trong từng trường hợp nhỏ và không phải bận tâm đến các tình huống khác). Chính sự tập trung này sẽ cho chúng ta cơ hội nhiều hơn để giải quyết vấn đề. Như vậy, chia để trị không chỉ là vấn đề kĩ thuật mà còn liên quan đến khía cạnh tư duy. Đây là một điều rất quan trọng.

Các bạn thân mến, phương pháp chia để trị được hoàn thiện từ những ý tưởng ban đầu của Phan Thành Nam với nhiều lời giải đã đăng trên Diễn đàn Toán học. Trước đây, vì một số lý do, có nhiều bạn không hiểu được tư tưởng này và cho là lời giải quá quá phức tạp, hoặc nhầm lẫn với phương pháp phân tích bình phương S.O.S. Tuy nhiên, chúng tôi hi vọng bây giờ các bạn đã hoàn toàn thông suốt tư tưởng này. Cuối cùng, chúng tôi lưu ý rằng sức mạnh của phương pháp chia để trị nằm ở sự linh hoạt của nó, mặc dù sơ đồ chứng minh đã đầy đủ, nhưng đối với mỗi bài toán riêng ta cần có cách đánh giá và ước lượng riêng tương ứng.

2. Những bài toán thách thức

Như chúng tôi đã nói, phương pháp chia để trị ra đời với mục đích giải quyết các bất đẳng thức khó, thậm chí rất khó, mà chủ yếu là các bài toán chưa có lời giải. Do đó, phần bài tập cũng khá đặc biệt một chút. Chúng tôi dẫn ra đây 10 bài toán mà mỗi bài đều chưa có lời giải hoàn chỉnh được công bố. Theo đánh giá của chúng tôi thì đây là các bất đẳng thức đẹp và khó. Hi vọng các bạn sẽ thu được nhiều điều thú vị khi tìm cách giải chúng

Bài 1. Chứng minh rằng với $a, b, c > 0$ thì:

$$3\sqrt{3}\left(\frac{a^3}{2a^2+b^2}+\frac{b^3}{2b^2+c^2}+\frac{c^3}{2c^2+a^2}\right)\ge\sqrt{a^2+ab+b^2}+\sqrt{b^2+bc+c^2}+\sqrt{c^2+ca+a^2}$$

Bài 2: Cho $x, y, z \in (-1; 1)$ và $x + y + z = 0$.

Chứng minh rằng: $$\frac{1}{\sqrt{1+x+\frac{1}{3}y^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+y+\frac{1}{3}z^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+z+\frac{1}{3}x^2}}\ge 3$$

Bài 3: Cho $x, y, z > 0$ thoả mãn $x + y + z = 3$.

Chứng minh rằng: $$\frac{x^3-y^3}{x^3+y^2+z}+\frac{y^3-z^3}{y^3+z^2+x}+\frac{z^3-x^3}{z^3+x^2+y}\le 0$$

Bài 4. Chứng minh rằng với $a, b, c > 0$ thỏa $abc = 1$ thì:

$$\sqrt{\frac{a}{2+b^2}}+\sqrt{\frac{b}{2+c^2}}+\sqrt{\frac{c}{2+a^2}}\ge\sqrt{3}$$

Bài 5: Cho $x, y, z \ge 0$ và $xy + yz + zx = 3$.

Chứng minh rằng: $$\frac{x}{\sqrt{\frac{5}{4}x+y}}+\frac{y}{\sqrt{\frac{5}{4}y+z}}+\frac{z}{\sqrt{\frac{5}{4}z+x}}\ge 2$$

Bài 6: Cho $x, y, z > 0$, $x + y + z = 3$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{2x+y^2+z^3}+\sqrt{2y+z^2+x^3}+\sqrt{2z+x^2+y^3}\ge 6$$

Bài 7: Cho $x, y, z > 0$, $xyz = 1$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2}+\sqrt{1+z^2}\le\sqrt{x+y^2}+\sqrt{y+z^2}+\sqrt{z+x^2}$$

Bài 8: Cho $a, b, c > 0$, chứng minh rằng:

$$\frac{a^4}{3a^3+2b^3}+\frac{b^4}{3b^3+2c^3}+\frac{c^4}{3c^3+2a^3}\ge\frac{a+b+c}{5}$$

Bài 9: Cho $x, y, z > 0$, $xyz = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{x}{\sqrt{x+y^2}}+\frac{y}{\sqrt{y+z^2}}+\frac{z}{\sqrt{z+x^2}}\ge\frac{3}{\sqrt{2}}$$

Bài 10: Cho $x, y, z > 0$, $xyz = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{x+y^2}{y+z^k}+\frac{y+z^2}{z+x^k}+\frac{z+x^2}{x+y^k}\ge 3$$

với $k = 1, 2, 3, 4$. Tìm phản ví dụ với $k = 5$.

Nhìn lại chương IV

Sáu cuộc hành trình đầy khó khăn nhưng cũng đầy hứng thú đã kết thúc, bây giờ là lúc để chúng ta dừng chân và nhớ lại tất cả những gì vừa trải qua. Cũng là lúc để chúng ta một lần nữa được chiêm ngưỡng vẻ đẹp của những viên kim cương hiện đại, lần này những viên kim cương đẹp đẽ ấy đã được đặt cùng nhau trong một bức tranh gần như là hoàn mỹ, bao quát cả thế giới bất đẳng thức. Bắt đầu với với phương pháp tổng bình phương **SOS**, tiếp đến là phương pháp dồn biến **MV**, các phương pháp đánh giá tích **ABC**, hình học hóa đại số **GLA** và định lý biến số bằng nhau **EV**, cuối cùng là phương pháp chia để trị **DAC**.

Phương pháp phân tích tổng bình phương, như tên gọi của nó, lấy ý tưởng từ định lý $x^2 \ge 0$ với mọi x thực và có cơ sở chặt chẽ là các định lý **Hilbert** nói rằng mọi đa thức thuần nhất và không âm có thể biểu diễn dưới dạng tổng bình phương của các hàm hữu tỷ thực. Tuy nhiên việc biểu diễn các đa thức thuần nhất thành tổng các bình phương của các hàm hữu tỷ thực theo định lý **Hilbert** chỉ mang tính lý thuyết mà không có tính thực hành. Phương pháp phân tích tổng bình phương đã chỉ ra một cách khắc phục điều đó. Cụ thể, đối với bất đẳng thức ba biến đối xứng (hoán vị) ta có thể đưa được nó về dạng đơn giản $S_1(b-c)^2 + S_2(c-a)^2 + S_3(a-b)^2 \ge 0$. Từ biểu diễn đó ta tiến hành tìm hiểu mối quan hệ giữa các hệ số S_1, S_2, S_3. Nếu các hệ số đó có mối quan hệ đủ tốt, chẳng hạn như những điều kiện trong 5 mệnh đề mục II §17 thì ta có thể có ngay kết quả mong đợi. Ngoài ra đối với các bài toán hoán vị ta có thể tìm cách đưa bất đẳng thức về dạng $S_1(b-c)^2 + S_2(c-a)^2 + S_3(a-b)^2 \ge S(a-b)(b-c)(a-c)$. Sau đó mới tiến hành đánh giá các hệ số S_1, S_2, S_3, S. Cách làm này có nhiều lợi thế đặc biệt đối với các bài toán hoán vị (có thể xem lại các ghi chú trong mục V §22, phương pháp chia để trị).

Không giống như phương pháp phân tích tổng bình phương **SOS**, phương pháp dồn biến tìm cách thu hẹp bài toán $F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \ge 0$ trên tập D về tập Λ nhỏ hơn. Tập D là tập con của $\mathbb{R}^n$ trong khi đó Λ là tập con gồm các phần tử của D, thỏa mãn thêm tính chất nào đó, ví dụ mỗi phần tử của Λ thường có nhiều thành phần bằng nhau (dồn các biến $x_1, x_2, \ldots, x_n$ về các giá trị trung bình) hoặc có nhiều thành phần nằm trên biên (dồn biến về biên). Để tiến hành điều đó, với mỗi phần tử x bất kỳ trong D ta sẽ tìm một dãy các phần tử khác $x', x'', \ldots$ sao cho $F(x) \ge F(x') \ge F(x'') \ge \ldots$ Trong đó giới hạn của dãy này là một phần tử của Λ và như vậy chỉ còn cần chứng minh $F(x) \ge 0$ với mọi x thuộc Λ. Dãy $x, x', x'', \ldots$ được xác định bởi một toán tử T nào đó, sao cho $x' = T(x), x'' = T(x'), \ldots$ Đối với định lý dồn biến mạnh **SMV** (dồn biến về tâm) là T_1 được định nghĩa trong định lý 1 mục V §18, và đối với định lý dồn biến không xác định **UMV** (dồn biến ra biên) là phép toán T = min{T_1,T_2} trong đó T_1 là phép toán được định nghĩa trong **SMV** và T_2 được định nghĩa trong mục VII §18. Cuối cùng, định lý **GMV** ở mục XII đã tổng quát triệt để hai định lý **SMV** và **UMV** bằng cách đã chỉ ra một dãy

$T_1, T_2, \ldots, T_n$ có tính chất đủ tốt để toán tử T định nghĩa bởi $T = \min\{T_1, T_2, \ldots, T_n\}$ giúp cho sơ đồ chứng minh ở trên được vận hành như mong đợi. Cũng nên lưu ý rằng nếu như **SMV** chỉ thực sự hiệu quả với các bài toán bốn biến nhưng sẽ gặp khó khăn với các bài toán nhiều biến thì **UMV** và **GMV** nhờ các toán tử T xác định thoải mái hơn đã khắc phục được yếu điểm đó để trở thành công cụ rất hiệu quả đối với các bài toán nhiều biến.

Hai phương pháp **ABC, GLA** đi theo một hướng khác. Cụ thể, như đã biết bất đẳng thức một biến được coi là đã được giải quyết trọn vẹn nhờ các công cụ hàm số hoặc định lý **Fermat**. Một sự kiện hợp lý là bất đẳng thức càng ít biến thì càng dễ tấn công. Theo đó khi có bất đẳng thức $F(a,b,c) \geq 0$ với ràng buộc $\Phi(a,b,c)$ ta có thể cố định 2 biến a, b và coi F là hàm một biến G theo c để khảo sát. Tuy nhiên tùy theo ràng buộc Φ, dạng của G và miền xác định phức tạp của c theo a và b khiến cho cách giải quyết này không hiệu quả. Để khắc phục điều đó phương pháp ABC thực hiện một phép đổi biến với $A = a+b+c; B = ab+bc+ca; C = abc$, bất đẳng thức ban đầu trở thành $H(A,B,C) \geq 0$. Đến đây ta cố định A, B và coi H là hàm một biến K theo C, ta có thể khảo sát K và đưa ra kết luận bài toán. Miền xác định của C lúc này sẽ là tập con nào đó của các khoảng được cho cụ thể trong các mệnh đề 1 và 2 mục I §19.

Cũng tương tự như vậy phương pháp **GLA** tiến hành đổi biến a, b, c thành p, R, r trong đó p, R, r lần lượt là nửa chu vi, bán kính đường tròn ngoại tiếp và bán kính đường trọn nội tiếp tam giác XYZ có độ dài ba cạnh lần lượt là $x = b+c, y = c+a, z = a+b$. Bất đẳng thức mới lúc này sẽ là $H(p,R,r) \geq 0$. Ta cố định R, r và coi H là hàm một biến K theo p, ta có thể khảo sát K và đưa ra kết luận bài toán. Chú ý là miền xác định của p lúc này sẽ là tập con của khoảng được cho cụ thể trong định lý III.3 §20.

Một câu hỏi tự nhiên được đặt ra: "đâu là sự khác biệt chủ yếu giữa **ABC** và **GLA**". Thực ra có thể thấy ngay rằng hai phương pháp này chỉ hiệu quả khi các hàm một biến theo C và p đủ tốt (đơn điệu). Độ tốt của các hàm này lại phụ thuộc vào dạng của bất đẳng thức ban đầu. Kinh nghiệm cho thấy đổi biến theo **ABC** tuy đơn giản nhưng lại chỉ hiệu quả đối với các dạng đa thức, hoặc phân thức ít chứa căn, còn khi gặp các biểu thức nhiều tầng căn thì đánh giá hàm một biến theo C là rất khó khăn. Ngược lại, mặc dù đổi biến theo **GLA** hơi phức tạp, nhưng đối với các dạng chứa nhiều căn thức thì việc khảo sát hàm một biến theo p lại là khá thuận tiện. Như vậy sự khác biệt giữa **ABC** và **GLA** chủ yếu nằm ở phạm vi ứng dụng.

Một điểm đáng chú ý khác là với Φ đủ tốt, chẳng hạn trong trường hợp $\Phi = \{a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0\}$ thì với mọi A, B cố định luôn tồn tại a, b, c sao cho trong ba số này có một số bằng 0 hoặc hai số bằng nhau để C đạt các giá trị biên, cũng như vậy, với mọi R, r cố định luôn tồn bộ ba số thực không âm a', b', c' mà trong ba số đó có 2 số bằng nhau hoặc 1 số bằng 0, sao cho tam giác X'Y'Z' với độ dài 3 cạnh là $b'+c', c'+a', a'+b'$ cũng có R = R' và r = r', khi đó p' cũng đạt các giá trị biên. Đó lần lượt là nội dung của các mệnh đề 3 và 4 mục I §19 và các ghi chú trong mục VII §20. Từ các mệnh đề đặc biệt này dẫn tới kết quả là nếu hàm K(C) và K(p) đủ tốt (đơn điệu) thì ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức ban đầu trong trường hợp trong ba biến a, b, c có một biến bằng 0 hoặc 2 biến bằng nhau. Hai kết quả khá tương đồng này giữa

ABC và **GLA** cho thấy rằng quá trình giảm biến sau khi đổi biến đã dẫn tới một hiện tượng thú vị: thực chất ta đã gián tiếp thực hiện một phép "dồn biến".

Mặt khác, nhận xét rằng trong **GLA** thực chất của việc cố định R, r là cố định $ab + bc + ca$ và $\frac{a+b+c}{abc}$, còn việc khảo sát p đồng nghĩa với khảo sát $a + b + c$. Định lý **ABC** mở rộng cho phép chọn tùy ý 2 trong 3 biến $a + b + c$, $ab + bc + ca$, abc để cố định và khảo sát theo biến còn lại. Về phía mình định lý biến số bằng nhau **EV** mục I,§21 trong trường hợp riêng n = 3 và p = 0 nghiệm lại một phần của định lý **ABC** mở rộng, ở đó ta cố định $a + b + c$ và abc để khảo sát theo $ab + bc + ca$. Trong trường hợp n = 3 và p = 2 ta cũng thu được một phần định lý **ABC** mở rộng, ở đó ta cố định $a + b + c$ và $ab + bc + ca$ để khảo sát theo abc. Trong trường hợp tổng quát định lý biến số bằng nhau là một mở rộng thực sự triệt để khi cố định $a + b + c$ và $a^n + b^n + c^n; (n = 3)$ và khảo sát được một lớp hàm F xác định bởi một số điều kiện khá chặt chẽ, một là hàm F phải có tính chất phân ly biến: $F(a,b,c) = f(a) + f(b) + f(c)$, hai là dáng điệu của F phải đủ tốt ($f(u)$ là hàm khả vi trên $(0,+\infty)$ thỏa mãn $g(x) = f'\left(x^{\frac{1}{n-1}}\right)$ là lồi nghiêm ngặt trên $(0,+\infty)$), ngoài ra còn một số điều kiện bổ sung. Chính điều đó cũng khiến tầm ứng dụng của **EV** không thực sự rộng, đặc biệt đối với các bất đẳng thức hoán vị thì định lý **EV** gần như trở nên vô hiệu

Câu hỏi đặt ra là với các bài toán hoán vị liệu có thể có những cách đổi biến khác tiện ích hơn không, và nếu phải chọn biến cố định trước khi khảo sát hàm số theo các biến còn lại thì chọn như thế nào là tối ưu. Vấn đề này đã từng được đề cập một chút trong mục VI §19, tuy nhiên cách giải quyết khi đó là dùng một phép đối xứng hóa, và như thế vẫn có rất nhiều yếu điểm. Định lý 1 và định lý 2 mục IX §20 là một hướng đi mới. Chú ý rằng một khó khăn trong các bài toán bất đẳng thức là việc có các số mũ, chính các số mũ khiến cho các phương pháp gặp rất nhiều khó khăn. Định lý 2 đã giúp ta xử lý vấn đề này. Cụ thể đối với các bất đẳng thức $F(a,b,c) \geq 0$ ta tìm cách đưa về dạng $A^t + B^t + C^t$, sau đó dựa vào định lý 2 và định lý 1, công việc còn lại là chứng minh các hệ kiểu (*) (ví dụ 1 và ví dụ 2 mục IX §20) có nghiệm. Đây là một sự mở rộng thực sự của cả **ABC** và **GLA**. Và về thực chất, chúng ta đang phát triển tiếp hiện tượng "dồn biến gián tiếp" như đã đề cập ở trên.

Phép dồn biến gián tiếp này đặc biệt có lợi đối với các bất đẳng thức hoán vị, vì đối với các bất đẳng thức đó thì khó khăn chính nằm ở việc dấu đẳng thức xảy ra khi các biến a, b, c rất lệch nhau. Nhưng với phép đặt thích hợp, tất cả các trường hợp đó đều sẽ nằm trong một điều kiện duy nhất, chẳng hạn A = B. Chú ý rằng khó khăn chính nằm ở việc chọn phép đổi biến thích hợp để ta vừa đưa được bất đẳng thức về dạng mong muốn, vừa đảm bảo hệ (*) nói trên có nghiệm.

Đây sẽ là một vấn đề mở thực sự khó, thách thức các bạn đọc ham mê sáng tạo bất đẳng thức.

Điều cuối cùng chúng tôi muốn nói đến là phương pháp chia để trị (**DAC**). Mặc dù phương pháp này được xếp cùng một mục nhưng tinh thần của nó lại hoàn toàn khác với các các phương pháp **SOS, MV, ABC, GLA, EV**. Cụ thể đối với bất đẳng thức F(x) ≥ 0 trên miền D, phương pháp chia để trị tìm cách chia nhỏ miền D thành các miền D_1, D_2, ... sao cho trên mỗi miền đó ta có thể có những đánh giá đơn giản, sau đó dựa vào kết quả các định lý nối dài ta đi tới điều cần chứng minh. Đây là một tư tưởng rất phổ biến không chỉ trong lĩnh vực bất đẳng thức, mà còn rất hiệu quả trong nhiều lĩnh vực Toán học và đặc biệt là trong Tin học.

CHƯƠNG V. MỘT SỐ SÁNG TẠO VỀ BẤT ĐẲNG THỨC

§ 23. NHỮNG BÀI VIẾT CHỌN LỌC VỀ BẤT ĐẲNG THỨC

§ 23.1. VỀ MỘT DÃY BẤT ĐẲNG THỨC BẬC BA VÀ ỨNG DỤNG

I. DÃY BẤT ĐẲNG THỨC ĐỒNG BẬC BẬC 3

Mệnh đề: Với hai số thực dương x, y ta chứng minh được

$$\frac{xy(x+y)}{2} \le \left(\frac{x+y}{2}\right)^3 \le \frac{(x+y)(x^2+xy+y^2)}{6} \le \frac{x^3+y^3}{2} \le \frac{(x^2+y^2)^3}{(x+y)^3} \quad (1)$$

Đây là một bất đẳng thức rất đơn giản dành cho học sinh THCS. Tuy nhiên chúng ta sẽ thấy nó có nhiều ứng dụng giá trị trong chứng minh bất đẳng thức. Trước hết ta sẽ chứng minh dãy các bất đẳng thức này.

- $\left(\frac{x+y}{2}\right)^3 \ge \frac{xy(x+y)}{2} \Leftrightarrow (x+y)^3 \ge 4xy(x+y) \Leftrightarrow x^3+y^3 \ge xy(x+y) \Leftrightarrow (x+y)(x-y)^2 \ge 0.$

- $\frac{x^3+y^3}{2} = \frac{(x+y)(3x^2-3xy+3y^2)}{6} = \frac{(x+y)\left[2(x-y)^2+(x^2+xy)+y^2\right]}{6} \ge \frac{(x+y)(x^2+xy+y^2)}{6}$

- $\frac{(x+y)(x^2+xy+y^2)}{6} = \frac{(x+y)(4x^2+4xy+4y^2)}{24} = \frac{(x+y)\left[3(x+y)^2+(x-y)^2\right]}{24} \ge \left(\frac{x+y}{2}\right)^3$

Sử dụng bất đẳng thức $AM-GM$ ta có

$$(x^3+y^3) = \frac{(x+y)^2(4x^2-4xy+4y^2)}{4(x+y)^3} \le \frac{\left[(x+y)^2+(x+y)^2+(4x^2-4xy+4y^2)\right]^3}{27.4(x+y)^3} = \frac{2(x^2+y^2)^3}{(x+y)^3}$$

Dễ dàng thấy rằng (1) trở thành đẳng thức khi và chỉ khi $x = y$.

II. MỘT SỐ ỨNG DỤNG

Sau đây ta sẽ nêu một số ví dụ minh họa việc ứng dụng dãy bất đẳng thức (1)

Bài 1. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{3} \ge \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 \quad (2)$$

Chứng minh

Sử dụng bất đẳng thức (1), với mọi số thực dương d, ta có

$$\frac{a^3+b^3}{2} \ge \left(\frac{a+b}{2}\right)^3, \frac{c^3+d^3}{2} \ge \left(\frac{c+d}{2}\right)^3$$

Cộng hai bất đẳng thức trên, và tiếp tục áp dụng bất đẳng thức (1) ta nhận được

$$\frac{a^3+b^3+c^3+d^3}{2} \ge \left(\frac{a+b}{2}\right)^3 + \left(\frac{c+d}{2}\right)^3 \ge 2\left[\left(\frac{a+b}{2}+\frac{c+d}{2}\right)\right]^3 = \frac{1}{32}(a+b+c+d)^3$$

Với $d = \dfrac{a+b+c}{3}$, từ bất đẳng thức trên, ta nhận được

$$\frac{a^3+b^3+c^3+\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3}{2} \ge \frac{1}{32}\left(a+b+c+\frac{a+b+c}{3}\right)^3 = 2\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 \text{ hay}$$

$$a^3+b^3+c^3+\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 \ge 4\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 \text{ hay } \frac{a^3+b^3+c^3}{3} \ge \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Bài 2. [Crux] Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh:

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{3abc} + \frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \ge 2$$

Chứng minh

Sử dụng bất đẳng thức ***AM – GM***, từ (2) ta có

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{3} \ge \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 = \left[\frac{(a+b)+(b+c)+(c+a)}{6}\right]^3 \ge$$

$$\frac{1}{6^3}\cdot\left(3\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}\right)^3 = \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{8}$$

Do đó, kết hợp việc sử dụng bất đẳng thức $\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} \ge 2$, với mọi $x, y > 0$, ta được

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{abc} + \frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \ge \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{8abc} + \frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \ge 2$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Bài 3. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{b+c}{a+\sqrt[3]{4(b^3+c^3)}} + \frac{c+a}{b+\sqrt[3]{4(c^3+a^3)}} + \frac{a+b}{c+\sqrt[3]{4(a^3+b^3)}} \le 2$$

Chứng minh

Sử dụng bất đẳng thức (1), ta có $\sqrt[3]{4(b^3+c^3)} \ge b+c$

Do đó $a+\sqrt[3]{4(b^3+c^3)} \ge a+b+c$. Suy ra $\dfrac{b+c}{a+\sqrt[3]{4(b^3+c^3)}} \le \dfrac{b+c}{a+b+c}$

Chứng minh tương tự, ta cũng có $\dfrac{c+a}{b+\sqrt[3]{4(c^3+a^3)}} \le \dfrac{c+a}{a+b+c}$, $\dfrac{a+b}{c+\sqrt[3]{4(a^3+b^3)}} \le \dfrac{a+b}{a+b+c}$

Cộng các bất đẳng thức trên, ta thu được

$$\frac{b+c}{a+\sqrt[3]{4(b^3+c^3)}} + \frac{c+a}{b+\sqrt[3]{4(c^3+a^3)}} + \frac{a+b}{c+\sqrt[3]{4(a^3+b^3)}} \le \frac{2(a+b+c)}{a+b+c} = 2$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Bài 4. [USA 1997] Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc}+\frac{1}{b^3+c^3+abc}+\frac{1}{c^3+a^3+abc}\le\frac{1}{abc}$$

Chứng minh

Sử dụng bất đẳng thức (1), ta có $a^3+b^3\ge ab(a+b)$

Do đó $a^3+b^3+abc\ge ab(a+b+c)$. Suy ra $\frac{1}{a^3+b^3+abc}\le\frac{1}{ab(a+b+c)}$

Tương tự ta có $\frac{1}{b^3+c^3+abc}\le\frac{1}{bc(a+b+c)}, \frac{1}{c^3+a^3+abc}\le\frac{1}{ca(a+b+c)}$

Cộng các bất đẳng thức trên, ta được

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc}+\frac{1}{b^3+c^3+abc}+\frac{1}{c^3+a^3+abc}\le\frac{1}{a+b+c}\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)=\frac{1}{abc}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Bài 5. [Romania 1997] Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $xyz=1$.

Chứng minh rằng: $\frac{x^9+y^9}{x^6+x^3y^3+y^6}+\frac{y^9+z^9}{y^6+y^3z^3+z^6}+\frac{z^9+x^9}{z^6+z^3x^3+x^6}\ge 2$

Chứng minh

Bằng cách đặt $a=x^3, b=y^3, c=z^3$ thì $abc=1$. Bất đẳng thức trên trở thành

$$\frac{a^3+b^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3+c^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3+a^3}{c^2+ca+a^2}\ge 2$$

Sử dụng bất đẳng thức (1), ta có $\frac{x^3+y^3}{x^2+xy+y^2}\ge\frac{x+y}{3}$, suy ra

$$\frac{a^3+b^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3+c^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3+a^3}{c^2+ca+a^2}\ge$$

$$\ge\frac{a+b}{3}+\frac{b+c}{3}+\frac{c+a}{3}=\frac{2}{3}(a+b+c)\ge\frac{2}{3}\cdot 3\sqrt[3]{abc}=2$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$ hay $x=y=z=1$.

Bài 6. [Poland 2007] Cho a, b, c, d là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=4$

Chứng minh rằng: $\sqrt[3]{\frac{a^3+b^3}{2}}+\sqrt[3]{\frac{b^3+c^3}{2}}+\sqrt[3]{\frac{c^3+d^3}{2}}+\sqrt[3]{\frac{d^3+a^3}{2}}\le 2(a+b+c+d)-4$ (3)

Chứng minh

Sử dụng bất đẳng thức (1), ta có $\sqrt[3]{\frac{x^3+y^3}{2}}\le\frac{x^2+y^2}{x+y}$. Do đó

$$\sqrt[3]{\frac{a^3+b^3}{2}}+\sqrt[3]{\frac{b^3+c^3}{2}}+\sqrt[3]{\frac{c^3+d^3}{2}}+\sqrt[3]{\frac{d^3+a^3}{2}}\le\frac{a^2+b^2}{a+b}+\frac{b^2+c^2}{b+c}+\frac{c^2+d^2}{c+d}+\frac{d^2+a^2}{d+a}$$

Vì vậy, để chứng minh (3), ta cần chứng minh

$$\frac{a^2+b^2}{a+b}+\frac{b^2+c^2}{b+c}+\frac{c^2+d^2}{c+d}+\frac{d^2+a^2}{d+a}\le 2(a+b+c+d)-4$$

Ta lưu ý rằng $a+b-\frac{a^2+b^2}{a+b}=\frac{2ab}{a+b}=\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$. Do đó, nếu đặt $x=\frac{1}{a}, y=\frac{1}{b}, z=\frac{1}{c}, t=\frac{1}{d}$ thì ta

có được $x+y+z+t=4$ và khi đó, (4) được viết dưới dạng $\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+t}+\frac{1}{t+x}\ge 2$

Sử dụng bất đẳng thức $(a_1+a_2+...+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}\right)\ge n^2, a_i>0, i=1,2,...,n$, ta được

$$\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+t}+\frac{1}{t+x}\ge\frac{4}{(x+y)+(y+z)+(z+t)+(t+x)}=2$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=t=1$ hay $a=b=c=d=1$

Bài 7. Cho $a,b,c>0$ và $k\ge\frac{2}{3}$. Chứng minh rằng: $\left(\frac{a}{b+c}\right)^k+\left(\frac{b}{c+a}\right)^k+\left(\frac{c}{a+b}\right)^k\ge\frac{3}{2^k}$

Chứng minh

Áp dụng bất đẳng thức ***AM – GM***, ta có

$$\frac{2}{3}(a+b+c)=\frac{2a+(b+c)+(b+c)}{3}\ge\sqrt[3]{2a.(b+c)^2}\text{ hay }\left(\frac{a}{b+c}\right)^{\frac{2}{3}}\ge\frac{3}{\sqrt[3]{4}}.\frac{a}{a+b+c}$$

Do đó với $k=\frac{2}{3}$ thì $\left(\frac{a}{b+c}\right)^k+\left(\frac{b}{c+a}\right)^k+\left(\frac{c}{a+b}\right)^k\ge\frac{3}{2^k}$

Nếu $k>\frac{2}{3}$, ta đặt $m=\frac{3}{2}k$ thì $m>1$. Sử dụng $\frac{x^m+y^m+z^m}{3}\ge\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^m, \forall x,y,z>0$

Đặt $x=\left(\frac{a}{b+c}\right)^{\frac{2}{3}}, y=\left(\frac{b}{c+a}\right)^{\frac{2}{3}}, z=\left(\frac{c}{a+b}\right)^{\frac{2}{3}}$ thì $\left(\frac{a}{b+c}\right)^k+\left(\frac{b}{c+a}\right)^k+\left(\frac{c}{a+b}\right)^k\ge\frac{3}{2^k}$

Bài 8. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $xyz=1$.

Chứng minh rằng $\frac{x^2}{x+y+y^3z}+\frac{y^2}{y+z+z^3x}+\frac{z^2}{z+x+x^3y}\ge 1$

Bài 9. Cho a, b, c là các số thực dương.

Chứng minh rằng $(a^3+b^3+c^3)\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}\right)\ge\frac{3}{2}\left(\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}\right)$

Bài 10. [JBMO 2002, Shortlist] Cho a, b, c là các số thực dương.

Chứng minh rằng $\frac{a^3}{b^2}+\frac{b^3}{c^2}+\frac{c^3}{a^2}\ge\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}$

Bài 11. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\sqrt[3]{4a^3+4b^3}+\sqrt[3]{4b^3+4c^3}+\sqrt[3]{4c^3+4a^3}\le\frac{4a^2}{a+b}+\frac{4b^2}{b+c}+\frac{4c^2}{c+a}$$

§ 23. 2. ĐỔI BIẾN SỐ ĐỂ SÁNG TẠO VÀ CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

Phép đổi biến số ứng dụng trong chứng minh bất đẳng thức đã được đề cập khá nhiều trong cả cuốn sách. Thậm chí trong chương IV khi phân tích về hai phương pháp ABC và GLA chúng tôi đã chỉ ra cho các bạn thấy rằng phép đổi biến không chỉ giúp chúng ta có nhiều thuận lợi hơn trong việc chứng minh trực tiếp bất đẳng thức mà cũng rất có ích trong cả việc giảm biến hoặc thực hiện các phép "dồn biến gián tiếp". Do những ý nghĩa đó, bài viết này sẽ tập trung tìm hiểu kỹ hơn về các nguyên tắc cơ bản của phép đổi biến.

I. ĐỔI BIẾN ĐỂ SÁNG TẠO BẤT ĐẲNG THỨC

Nếu bạn đọc theo dõi cuốn sách từ đầu cho đến trang này thì bạn đã trải qua rất nhiều phương pháp (các viên kim cương) để giải các bất đẳng thức khó và rất khó. Tuy nhiên, dù bạn có giải được một bài toán khó thì không có nghĩa là bạn đã chinh phục được nó 100% mà theo chúng tôi bạn chỉ chinh phục được 49%. Giá trị 51% còn lại sẽ thuộc về người sáng tác ra đề toán. Như vậy, người sáng tác ra đề toán được đánh giá cao hơn người giải bài toán bởi vì các bài toán đều không phải là "từ trên trời rơi xuống", mà thường được bắt nguồn từ một vài ý tưởng nào đó. Vậy làm thế nào có thể sáng tạo ra một đề toán nói chung và một bất đẳng thức thú vị nói riêng? Câu trả lời luôn nằm trong tầm tay của các bạn vì có rất nhiều con đường để khám phá và sáng tạo ra các bài toán. Trong phần mở đầu của bài viết này chúng tôi sẽ tạo cảm xúc sáng tạo cho bạn từ những vấn đề đơn giản nhất trong bất đẳng thức.

Bài toán 1. Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng: $(a+b)(b+c)(c+a)\ge 8abc$ (1)

Bất đẳng thức $\Leftrightarrow 1\ge 8\dfrac{a}{b+c}\cdot\dfrac{b}{c+a}\cdot\dfrac{c}{a+b}$. Đặt $x=\dfrac{a}{b+c}$, $y=\dfrac{b}{c+a}$, $z=\dfrac{c}{a+b}$, thì bất đẳng thức trở thành: $1\ge 8xyz$. Vì bất đẳng thức này chứa các biến mới x,y,z nên ta cần phải thiết lập mối quan hệ giữa x,y,z. Để ý rằng: $1+x=\dfrac{a+b+c}{b+c}$, hay $\dfrac{1}{1+x}=\dfrac{b+c}{a+b+c}$. Từ đó suy ra:

$$\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y}+\frac{1}{1+z}=\frac{b+c}{a+b+c}+\frac{c+a}{a+b+c}+\frac{a+b}{a+b+c}=\frac{2(a+b+c)}{a+b+c}=2.$$

Như vậy chúng ta tạo ra bài toán mới sau đây (ký hiệu ST được hiểu là sáng tạo):

ST 1. Cho $x,y,z>0$ thỏa mãn điều kiện $\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{1}{1+y}+\dfrac{1}{1+z}=2$ (2).

Chứng minh rằng: $8xyz\le 1$

Không mấy khó khăn, ta có thể phát biểu bài toán tổng quát:

ST 2. Cho $x_1, x_2, ..., x_n > 0$: $\frac{1}{1+x_1}+...+\frac{1}{1+x_n}=n-1$. Chứng minh $x_1...x_n \le \frac{1}{(n-1)^n}$ (3)

Đây là một bài toán khó. Tuy nhiên nếu biết "nguồn gốc" của nó thì việc tìm ra lời giải sẽ đơn giản. Từ bài toán này chúng ta có thể đặc biệt hóa để tạo ra bài toán sau đây:

ST 3. Cho $x, y, z > 0$ thỏa mãn $\frac{x}{1+x}+\frac{2y}{1+y}+\frac{3z}{1+z}=1$. Chứng minh $xy^2z^3 \le \frac{1}{5^6}$

Bây giờ xét $x, y, z > 0$. Áp dụng bài toán 1 với $a = y+z, b = z+c, c = x+y$, ta có:

$(S+x)(S+y)(S+z) \ge 8(S-x)(S-y)(S-z)$ ở đây $S = x+y+z$. Mặt khác, theo bài toán 1 thì: $(S-x)(S-y)(S-z) \ge 8xyz$, nên: $(S+x)(S+y)(S+z) \ge 8^2xyz$. Kết hợp lại ta nhận được: $(S^2-x^2)(S^2-y^2)(S^2-z^2) \ge 8^3x^2y^2z^2$. Từ đó ta có bài toán 4

ST 4. Cho $x, y, z > 0$. Đặt $S = x+y+z$. Chứng minh $\left(\frac{S^2}{x^2}-1\right)\left(\frac{S^2}{y^2}-1\right)\left(\frac{S^2}{z^2}-1\right) \ge 8^3$ (4)

Để "che dấu" bớt S, ta cho $S \le 1$ và nhận được bài toán mới:

ST 5. Cho $\begin{cases} x, y, z > 0 \\ x+y+z \le 1 \end{cases}$. Chứng minh rằng: $\left(\frac{1}{x^2}-1\right)\left(\frac{1}{y^2}-1\right)\left(\frac{1}{z^2}-1\right) > 8^3$ (5)

Đây là một bài toán khá hay. Nhưng ta sẽ thấy nó hay hơn qua mối quan hệ với bài toán dưới đây:

ST 6. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng: $\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \ge 1$ (6)

(IMO2001)

Đặt $x = \frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}; y = \frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}; z = \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}$, bất đẳng thức cần trở thành:

$x+y+z \ge 1$. Bây giờ ta sẽ tìm mối liên hệ giữa x, y, z. Từ đẳng thức $\frac{bc}{a^2}.\frac{ca}{b^2}.\frac{ab}{c^2}=1$ ta thiết lập được mối quan hệ giữa x, y, z:

$$x^2 = \frac{a^2}{a^2+8bc} \Rightarrow \frac{1}{x^2} = 1+\frac{8bc}{a^2} \Rightarrow \left(\frac{1}{x^2}-1\right)\left(\frac{1}{y^2}-1\right)\left(\frac{1}{z^2}-1\right)=8^3$$

Như vậy ta cần chứng minh bài toán sau:

ST 7. Cho $x, y, z > 0, \left(\frac{1}{x^2}-1\right)\left(\frac{1}{y^2}-1\right)\left(\frac{1}{z^2}-1\right)=8^3$. Chứng minh rằng: $x+y+z \ge 1$ (7)

Rõ ràng đây là một phát biểu theo dạng "ngược" của bài toán 5. Và đây cũng là một lời giải cho bài 6:

Bây giờ chúng ta tiếp cận bài toán 1 với a, b, c là độ dài 3 cạnh một tam giác. Sử dụng định lý hàm số sin trong tam giác ta có $a = 2R\sin A; b = 2R\sin B; c = 2R\sin C$ khi đó bất đẳng thức (1) trở thành

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc \Leftrightarrow (\sin A + \sin B)(\sin B + \sin C)(\sin C + \sin A) \geq 8\sin A\sin B\sin C$$

$$\Leftrightarrow \left(2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}\right)\left(2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}\right)\left(2\sin\frac{C+A}{2}\cos\frac{C-A}{2}\right) \geq 8 sinA\sin B\sin C$$

Biến đổi và rút gọn tiếp theo ta nhận được một bất đẳng thức khá hay trong tam giác.

ST 8. Chứng minh: $8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \leq \cos\frac{A-B}{2}\cos\frac{B-C}{2}\cos\frac{C-A}{2}$ với mọi tam giác ABC

Như vậy từ một bài toán (1) rất đơn giản chúng ta có thể đổi biến để sáng tạo ra 8 bài toán mới. Chúng ta sẽ thực hiện tiếp ý tưởng này với một bài toán sau đây.

Bài toán 2. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc} + \frac{1}{b^3+c^3+abc} + \frac{1}{c^3+a^3+abc} \leq \frac{1}{abc}\ \forall a, b, c \geq 0.$$

Đây cũng là một bài toán quen thuộc với nhiều bạn. Cách chứng minh ngắn nhất là đánh giá: $a^3 + b^3 \geq ab(a+b)$ suy ra

$$\sum_{cyc}\frac{1}{a^3+b^3+abc} \leq \sum_{cyc}\frac{1}{ab(a+b+c)} = \sum_{cyc}\frac{c}{a+b+c} = \frac{a+b+c}{a+b+c} = 1$$

Bây giờ đặt $x = \frac{abc}{b^3+c^3+abc}; y = \frac{abc}{c^3+a^3+abc}; z = \frac{abc}{a^3+b^3+abc}$, thì bất đẳng thức đã cho trở thành $x + y + z \leq 1$. Từ đẳng thức $\frac{bc}{a^2}\cdot\frac{ca}{b^2}\cdot\frac{ab}{c^2} = 1$ suy ra mối quan hệ giữa x, y, z như sau:

$$\frac{1}{x} = \frac{b^2}{ca} + \frac{c^2}{ab} + 1 \Rightarrow \frac{2a^2}{bc} = \frac{1}{y} + \frac{1}{z} - \frac{1}{x} - 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}-\frac{1}{x}-1\right)\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{x}-\frac{1}{y}-1\right)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{z}-1\right) = 8$$

Để cho gọn, ta thay đổi hình thức, thế x, y, z bởi các ký hiệu nghịch đảo $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}$ và đi đến:

ST 1. Cho $x, y, z > 1$ thỏa mãn điều kiện: $(y+z-x-1)(z+x-y-1)(x+y-z-1) = 8$

Chứng minh rằng: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq 1$.

Để ý rằng nếu $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$ thì $x, y, z > 1$, ta sẽ phát biểu lại bài toán dưới dạng "ngược":

ST 2. Cho $x, y, z > 0$ thỏa mãn điều kiện: $xy + yz + zx = xyz$

Chứng minh rằng: $(y+z-x-1)(z+x-y-1)(x+y-z-1) \leq 8$

Qua 2 ví dụ nhỏ trên, có lẽ các bạn cũng đã hình dung ra một cách "sáng tạo bài toán mới" không tầm thường từ những bài toán rất đơn giản. Để rèn luyện tư duy sáng tạo bạn cần phải xây dựng thói quen lật đi lật lại vấn đề, suy nghĩ mở rộng, phân biệt giữa hình thức và bản chất.

Chính việc khai thác bài toán dưới các góc độ khác nhau sẽ giúp bạn thu được rất nhiều kiến thức quan trọng hơn rất nhiều so với việc đọc lời giải của nó mang lại, và cao hơn nữa nó sẽ giúp bạn sáng tạo ra các bài toán mới. Bây giờ các bạn hãy rèn luyện việc sáng tạo theo ý tưởng đổi biến của 2 ví dụ trên qua các bài toán sau:

Bài 3. Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^5+b^5+ab}+\frac{1}{b^5+c^5+bc}+\frac{1}{c^5+a^5+ca}\le 1$$

Bài 4. Chứng minh rằng : $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}\ge\dfrac{3}{2}\quad\forall a,b,c>0$

Bài 5. Chứng minh rằng: $\dfrac{a^2}{b+c}+\dfrac{b^2}{c+a}+\dfrac{c^2}{a+b}\ge\dfrac{a+b+c}{2}\quad\forall a,b,c>0$

Bài 6. Chứng minh rằng: $\dfrac{a^2}{b+c}+\dfrac{b^2}{c+a}+\dfrac{c^2}{a+b}\ge\dfrac{\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}}{2}\quad\forall a,b,c>0$

Bài 7. Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn $a+b+c=abc$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\ge 2\left(\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2}+\frac{1}{1+c^2}\right)$$

Bài 8. a. Chứng minh rằng: $(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)\le abc\quad\forall a,b,c>0$

b. Chứng minh rằng: $\left(a-1+\dfrac{1}{b}\right)\left(b-1+\dfrac{1}{c}\right)\left(c-1+\dfrac{1}{a}\right)\le 1$ với $\begin{cases}a,b,c>0\\ abc=1\end{cases}$

Bài 9. Cho a,b,c là ba số thực phân biệt.

Chứng minh rằng: $\left(\dfrac{a}{b-c}\right)^2+\left(\dfrac{b}{c-a}\right)^2+\left(\dfrac{c}{a-b}\right)^2\ge 2$

Bài 10. Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{(b+c)^2}+\frac{b}{(c+a)^2}+\frac{c}{(a+b)^2}\ge\frac{3}{4}$$

Bài 11. Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\ge\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+\frac{3}{2}$$

Bài 12. Cho $a,b,c\in\mathbb{R}$. Chứng minh rằng:

$$a(b+c)^3+b(c+a)^3+c(a+b)^3\ge 0$$

Bài 13. Cho $a,b,c\in[1,2]$. Chứng minh rằng:

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\ge 6\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)$$

Bài 14. Cho $a,b,c\ge 0$. Chứng minh rằng:

$$(ab+bc+ca)\left(\frac{1}{(a+b)^2}+\frac{1}{(b+c)^2}+\frac{1}{(c+a)^2}\right)\ge\frac{9}{4}$$

II. PHÉP ĐỔI BIẾN NGHỊCH ĐẢO TRONG CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

Khi giải toán, mục đích chung của phép đổi biến số là nhằm chuyển tình thế từ bài toán khó biến đổi sang trạng thái dễ biến đổi hoặc đưa về các dạng toán gần gũi hơn. Chúng ta có thể gặp kỹ thuật đổi biến số không chỉ ở trong chứng minh bất đẳng thức mà còn ở trong các dạng toán giải phương trình, giới hạn, tích phân ... Trong các chương trước chúng ta cũng bắt gặp rất nhiều lần các bất đẳng thức giải bằng phương pháp đổi biến số, bây giờ chúng tôi xin giới thiệu một kỹ thuật đổi biến có thể đặt tên là: "Phép đổi biến nghịch đảo".

Bài 1. Cho $a,b,c,d>0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{abc}{ab+bc+ca}+\frac{bcd}{bc+cd+da}+\frac{cda}{cd+da+ab}+\frac{dab}{da+ab+bc}\le\frac{a+b+c+d}{3} \quad (1)$$

Phân tích và tìm tòi lời giải

Bước 1: Đánh giá độ chặt của bất đẳng thức (1)

Một hướng tư duy đơn giản là sử dụng $AM-GM$ để có đánh giá đại diện:

$\frac{abc}{ab+bc+ca}\le\frac{(a+b+c)^3}{27(ab+bc+ca)}$, tương tự cho 3 biểu thức còn lại ta được, khi đó ta có:

$$VT(1)\le\frac{(a+b+c)^3}{27(ab+bc+ca)}+\frac{(b+c+d)^3}{27(bc+cd+da)}+\frac{(c+d+a)^3}{27(cd+da+ab)}+\frac{(d+a+b)^3}{27(da+ab+bc)}$$

Từ đó cần chứng minh:

$$\frac{(a+b+c)^3}{9(ab+bc+ca)}+\frac{(b+c+d)^3}{9(bc+cd+da)}+\frac{(c+d+a)^3}{9(cd+da+ab)}+\frac{(d+a+b)^3}{9(da+ab+bc)}\le a+b+c+d \quad (1')$$

Tuy nhiên do $(a+b+c)^2\ge3(ab+bc+ca)$ nên ta có đánh giá:

$$\frac{(a+b+c)^3}{9(ab+bc+ca)}\ge\frac{3(a+b+c)(ab+bc+ca)}{9(ab+bc+ca)}=\frac{a+b+c}{3}$$

Tương tự suy ra $VT(1')\ge\frac{a+b+c}{3}+\frac{b+c+d}{3}+\frac{c+d+a}{3}+\frac{d+a+b}{3}=a+b+c+d$.

Như vậy cách đánh giá này không thành công và bài toán của chúng ta là có ý nghĩa.

Bước 2: Bây giờ ta sẽ bình tĩnh để tìm lời giải bài toán theo một lối tư duy khác sâu sắc hơn. Để ý là: $\frac{abc}{ab+bc+ca}=\frac{1}{\frac{ab+bc+ca}{abc}}=\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}$, do đó để giúp bài toán trở nên "gọn gàng" với một hình thức dễ chịu hơn, ta đổi biến bằng cách đặt $x=\frac{1}{a},y=\frac{1}{b},z=\frac{1}{c},t=\frac{1}{d}$.

Khi đó (1) $\Leftrightarrow\frac{1}{x+y+z}+\frac{1}{y+z+t}+\frac{1}{z+t+x}+\frac{1}{t+x+y}\le\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}\right)$ (2)

Theo $AM-GM$ ta có: $VP(2)=\frac{1}{9}\sum_{cyc}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\ge\frac{1}{9}\sum_{cyc}\frac{3}{\sqrt[3]{xyz}}\ge\frac{1}{3}\sum_{cyc}\frac{1}{x+y+z}=VT(2)$

Nhận xét: Việc đổi biến bằng cách lấy nghịch đảo $x=\frac{1}{a},y=\frac{1}{b},z=\frac{1}{c},t=\frac{1}{d}$ là khá tự nhiên, và đây cũng chính là một kĩ thuật mà chúng tôi muốn giới thiệu đến các bạn trong bài viết này. Thực ra bằng một kĩ thuật đánh giá khác khó nhìn hơn một chút, cũng cho ta kết quả:

$(x+y+z)(xy+yz+zx)\ge 27xyz\Rightarrow\frac{xyz}{xy+yz+zx}\le\frac{x+y+z}{27}$. Như vậy đổi biến trong bài này chưa hẳn là con đường duy nhất, tuy nhiên ở ví dụ sau các bạn sẽ nhận thấy rằng cách đổi biến như trên phải là con đường tất yếu:

Bài 2. Cho $a,b,c,d>0$ thỏa mãn: $\frac{1}{2+a^2}+\frac{1}{2+b^2}+\frac{1}{2+c^2}+\frac{1}{2+d^2}=\frac{1}{2}$.

Chứng minh rằng: $abcd\ge ab+ac+ad+bc+cd+db$

Phân tích và tìm tòi lời giải

Ta có: $abcd\ge ab+ac+ad+bc+bd+cd\Leftrightarrow 1\ge\frac{1}{ab}+\frac{1}{ad}+\frac{1}{ad}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{bd}+\frac{1}{cd}$

Để bài toán đơn giản hơn ta đặt $a=\frac{1}{x},b=\frac{1}{y},c=\frac{1}{z},d=\frac{1}{t}$ và quy về bài toán sau:

Cho $x,y,z,t>0$ *thỏa mãn:* $\frac{x^2}{2x^2+1}+\frac{y^2}{2y^2+1}+\frac{z^2}{2z^2+1}+\frac{t^2}{2t^2+1}=\frac{1}{2}$.

Chứng minh rằng: $1\ge xy+xz+xt+yz+yt+zt$

Ta có: $\frac{1}{2}=\frac{x^2}{2x^2+1}+\frac{y^2}{2y^2+1}+\frac{z^2}{2z^2+1}+\frac{t^2}{2t^2+1}\ge\frac{(x+y+z+t)^2}{2(x^2+y^2+z^2+t^2+2)}$

Suy ra $x^2+y^2+z^2+t^2+2\ge(x+y+z+t)^2\Leftrightarrow 1\ge xy+xz+xt+yz+yt+zt$ (đpcm)

Qua hai ví dụ đơn giản có lẽ các bạn đã phần nào thấy được vẻ đẹp của phương pháp đổi biến. Tuy nhiên để cảm nhận rõ hơn sức mạnh của phương pháp này, chúng ta hãy tiếp tục sử dụng dõi phép đổi biến để giải quyết ví dụ rất đặc sắc sau đây:

Bài 3. Cho $a,b,c,d>0$ thỏa mãn $\sqrt[3]{5}\min(a,b,c)>\max(a,b,c)$.

Chứng minh rằng: $\frac{1}{5a^3-bcd}+\frac{1}{5b^3-cda}+\frac{1}{5c^3-abc}+\frac{1}{5d^3-abc}\ge\frac{64}{(a+b+c+d)^3}$ (1)

Phân tích và tìm tòi lời giải

Bước 1: ***Tìm hiểu bài toán:***

Điều kiện $\sqrt[3]{5}\min(a,b,c)>\max(a,b,c)$ là cần thiết vì giả sử bỏ điều kiện này đi thì bài toán không còn đúng nữa, chẳng hạn cho $a=10$ và $b=c=d=1$. Điều kiện này có ý nghĩa là để xác lập các bất đẳng thức đúng $5a^3-bcd>0,5b^3-cda>0,5c^3-dab>0,5d^3-abc>0$.

Bước 2: Trở lại vấn đề, phân tích bài toán, rõ ràng khi nhìn vào bất đẳng thức (1) chúng ta có cảm giác là dường như bất đẳng thức này khá chặt và quả thật cũng rất khó tìm được một cách đánh giá khả thi để công phá bài toán (các bạn có thể thử bằng các đánh giá quen thuộc mà các bạn đã biết để cảm nhận rõ hơn điều này). Tuy nhiên hãy thử một phép đổi biến nho nhỏ:

Đặt $x=\frac{1}{a}, y=\frac{1}{b}, z=\frac{1}{c}, t=\frac{1}{d}$. Khi đó bất đẳng thức (1) trở thành:

$$\frac{x^2}{5yzt-x^3}+\frac{y^2}{5ztx-y^3}+\frac{z^2}{5txy-z^3}+\frac{t^2}{5xyz-t^3}\ge\frac{64x^2y^2z^2t^2}{(xyz+yzt+ztx+txy)^3} \quad (2)$$

Do $\frac{x^2}{5yzt-x^3},\frac{y^2}{5ztx-y^3},\frac{z^2}{5txy-z^3},\frac{t^2}{5xyz-t^3}>0$ nên theo bất đẳng thức ***CBS*** ta có:

$$VT(2)\ge\frac{(x+y+z+t)^2}{5(xyz+yzt+ztx+txy)-(x^3+y^3+z^3+t^3)}\ge\frac{(x+y+z+t)^2}{4(xyz+yzt+ztx+txy)}$$

Vậy ta cần chứng minh $\frac{(x+y+z+t)^2}{4(xyz+yzt+ztx+txy)}\ge\frac{64x^2y^2z^2t^2}{(xyz+yzt+ztx+txy)^3}$

Hay $(x+y+z+t)^2(xyz+yzt+ztx+txy)^2\ge 256x^2y^2z^2t^2$.

Bất đẳng thức cuối đúng theo ***AM – GM***. Vậy ta có điều phải chứng minh!

Nhận xét: Ở bất đẳng thức (1) ta nhận thấy $5a^3$ là "đại lượng mạnh" trong khi bcd là "đại lượng yếu", từ đó ta thấy nếu $5a^3-bcd$ càng lớn thì $\frac{1}{5a^3-bcd}$ càng nhỏ, đây chính là nguyên nhân gây cho ta cảm giác rằng bất đẳng thức (1) khá chặt, và cũng gây khó dễ trong các phép đánh giá. Tuy nhiên bằng cách đổi biến nghịch đảo $x=\frac{1}{a}, y=\frac{1}{b}, z=\frac{1}{c}, t=\frac{1}{d}$ ta nhận được bất đẳng thức (2) với một tình trạng khác hẳn: trong bất đẳng thức này $5yzt$ là đại lượng yếu còn x^3 là đại lượng mạnh, nên $5yzt-x^3$ càng nhỏ, đồng nghĩa với $\frac{1}{5yzt-x^3}$ càng lớn. Do đó bất đẳng thức (1) đã trở thành bất đẳng thức (2) khá lỏng. Để các bạn hiểu thêm về hiệu quả của phép đổi biến này chúng ta xét thêm một bài toán khó sau đây:

Bài 4. Cho $a,b,c,d>0$. Tìm hằng số $k>-1$ bé nhất sao cho bất đẳng thức sau luôn đúng:

$$\sum_{cyc}\sqrt[3]{\frac{bcd}{(ka+\sqrt{bc})(ka+\sqrt{cd})(ka+\sqrt{db})}}\ge\frac{4}{k+1} \quad (1)$$

Phân tích và tìm tòi lời giải

Bước 1: Phân tích bài toán, rõ ràng đẳng thức xảy ra tại vị trí thứ nhất mà ai cũng dễ dàng nhận ra đó là $a=b=c=d$. Tuy nhiên để tìm được k tốt nhất thì ta cần phải xác định thêm một vị trí khác nữa mà đẳng thức có thể xảy ra. Tất nhiên trong những trường hợp như thế này thì vị trí dấu bằng ở biên là nơi ta thường hay hướng đến:

Thử cho a tiến tới 0 và b,c,d là hằng số khi đó VT(1) tiến tới 1, nên để bất đẳng thức (1) luôn đúng thì phải có $1 \ge \frac{4}{1+k}$ hay $k \ge 3$. Nhiều khả năng $k = 3$ là giá trị nhỏ nhất để bất đẳng thức (1) đúng và ta sẽ chứng minh điều này.

Bước 2: Chứng minh cho trường hợp $k = 3$. Lúc này bất đẳng thức xảy ra tại hai chỗ đó là $a = b = c = d$ hoặc $a \to 0$ (b, c, d là các hằng số bất kì). Do đó trong các đánh giá ta cần phải đặc biệt chú ý sao cho dấu bằng phải đảm bảo xảy ra tại hai vị trí nói trên. Khi $k = 3$, (1) trở thành: $\sum_{cyc} \sqrt[3]{\frac{bcd}{(3a+\sqrt{bc})(3a+\sqrt{cd})(3a+\sqrt{db})}} \ge 1$ (2). Theo bất đẳng thức ***Minkowski*** ta có:

$$3a + \sqrt{bc} = \sqrt{(3a)(3a)} + \sqrt{bc} \le \sqrt{(3a+b)(3a+c)}$$

$$3a + \sqrt{cd} = \sqrt{(3a)(3a)} + \sqrt{cd} \le \sqrt{(3a+c)(3a+d)}$$

$$3a + \sqrt{db} = \sqrt{(3a)(3a)} + \sqrt{db} \le \sqrt{(3a+d)(3a+b)}$$

Nhân vế theo vế suy ra $(3a+\sqrt{bc})(3a+\sqrt{cd})(3a+\sqrt{db}) \le (3a+b)(3a+c)(3a+d)$

Do đó để chứng minh (2) ta cần chứng minh: $\sum_{cyc} \sqrt[3]{\frac{bcd}{(3a+b)(3a+c)(3a+d)}} \ge 1$ (3)

Bất đẳng thức dưới mẫu có dạng $(a+3b)(a+3c)(a+3d)$. Sử dụng bất đẳng thức ***AM – GM***:

$$(a+3b)(a+3c)(a+3d) \le \left(\frac{a+3b+a+3c+a+3d}{3}\right)^3 = (a+b+c+d)^3$$

Đặt $x = \frac{1}{a}, y = \frac{1}{b}, z = \frac{1}{c}, t = \frac{1}{d}$ khi đó:

$$VT(3) = \sum_{cyc} \sqrt[3]{\frac{x^3}{(3y+x)(3z+x)(3t+x)}} \ge \sum_{cyc} \sqrt[3]{\frac{x^3}{\left(\frac{3y+x+3z+x+3t+x}{3}\right)^3}} = \sum_{cyc} \frac{x}{x+y+z+t} = 1$$

Cuối cùng các bạn đọc hãy tự giải các bài tập sau để rèn luyện thêm về kỹ thuật đổi biến này

Bài 5. Cho $a, b, c > 0$ và $2\min(a,b,c) > \max(a,b,c)$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{4a^2 - bc} + \frac{1}{4b^2 - ca} + \frac{1}{4c^2 - ab} \ge \frac{3}{ab+bc+ca}$$

Bài 6. Cho $a_1, a_2, ..., a_n > 0$ Chứng minh rằng:

$$\sum_{cyc} \sqrt[n-1]{\frac{a_2 a_3 ... a_n}{((n-1)a_1 + a_2)((n-1)a_1 + a_3)...((n-1)a_1 + a_n)}} \ge 1$$

Bài 7. Cho $a, b, c, d > 0$ và $a + b + c + d = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{abc}{1+2d} + \frac{bcd}{1+2a} + \frac{cda}{1+2b} + \frac{dab}{1+2c} \le ab + ac + ad + bc + bd + cd$$

§ 23.3. PHƯƠNG PHÁP ĐÁNH GIÁ HÀM SỐ TẠI BIÊN

Phương pháp này lần đầu tiên được thể hiện ở bài toán 1 dưới đây trong cuốn sách của tác giả ***Phương pháp mới giải đề thi tuyển sinh đại học môn Toán*** do Nhà xuất bản Giáo dục xuất ban năm **1995**, sau này được trích dẫn trong phần ***"Những lời giải ấn tượng"*** của cuốn sách ***Ba thập kỷ đề thi đại học môn Toán*** do Nhà xuất bản Đại học Quốc gia TP.HCM xuất bản năm **2000**. Bài viết này được hoàn thiện trên cơ sở tham khảo một số ví dụ minh họa của bài viết đăng trong tạp chí ***Mathematical Refletions 4/2006*** và các tài liệu trên Internet.

I. CƠ SỞ LÝ THUYẾT VÀ CÁC ĐỊNH DẠNG HÌNH HỌC CƠ BẢN

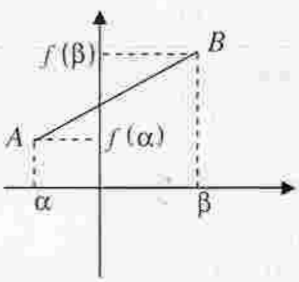
1. Nguyên lý chung

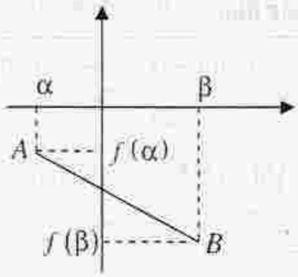
1.1. Bất phương trình (bất đẳng thức) $f(x)\ge m$ đúng $\forall x\in D \Leftrightarrow \underset{x\in D}{\text{Min}}\, f(x)\ge m$

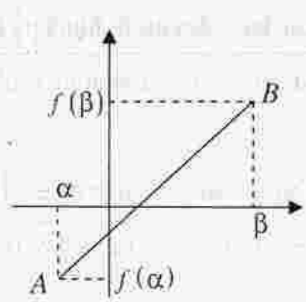
1.2. Bất phương trình (bất đẳng thức) $f(x)\le m$ đúng $\forall x\in D \Leftrightarrow \underset{x\in D}{\text{Max}}\, f(x)\le m$

1.3. Nếu $f(x)$ liên tục trên D và $\underset{x\in D}{\text{Min}}\, f(x)=m$; $\underset{x\in D}{\text{Max}}\, f(x)=M$ thì tập giá trị của $f(x)$ là $[m;M]$ hay $m\le f(x)\le M$ với mọi $x\in D$

2. Hàm bậc nhất







Hàm số $f(x)=ax+b, \forall x\in[\alpha,\beta]$ có đồ thị là một đoạn thẳng nên có các tính chất sau

2.1. $f(x)=ax+b\ge 0, \forall x\in[\alpha,\beta] \Leftrightarrow \begin{cases} f(a)\ge 0 \\ f(b)\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow Min\{f(\alpha), f(\beta)\}\ge 0$

2.2. $f(x)=ax+b\le 0, \forall x\in[\alpha,\beta] \Leftrightarrow \begin{cases} f(a)\le 0 \\ f(b)\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow Max\{f(\alpha), f(\beta)\}\le 0$

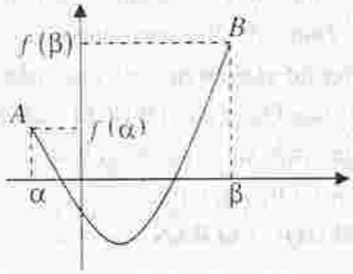
2.3. $f(x)=ax+b\ge m, \forall x\in[\alpha,\beta] \Leftrightarrow \begin{cases} f(a)\ge m \\ f(b)\ge m \end{cases} \Leftrightarrow Min\{f(\alpha), f(\beta)\}\ge m$

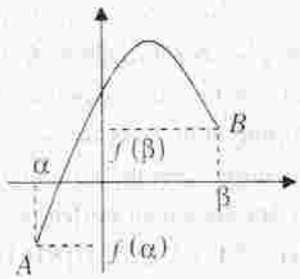
2.4. $f(x)=ax+b\le m, \forall x\in[\alpha,\beta] \Leftrightarrow \begin{cases} f(a)\le m \\ f(b)\le m \end{cases} \Leftrightarrow Max\{f(\alpha), f(\beta)\}\le m$

2.5. Nếu $f(x)=ax+b, \forall x\in[\alpha,\beta]$ thì $Min\{f(\alpha), f(\beta)\}\le f(x)\le Max\{f(\alpha), f(\beta)\}$

2.6. Nếu hàm $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ với $x_1, x_2, ..., x_n\in[\alpha,\beta]$ là hàm bậc nhất theo từng biến số $x_k\in[\alpha,\beta]$ thì $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ đạt giá trị lớn nhất hoặc nhỏ nhất $\Leftrightarrow x_1, x_2, ..., x_n\in\{\alpha,\beta\}$

3. Hàm bậc hai và hàm lồi, hàm lõm





3.1. Nếu $f(x)=ax^2+bx+c,(a>0)$ với $x\in[\alpha,\beta]$ thì $f(x)\le Max\{f(\alpha),f(\beta)\},\forall x\in[\alpha,\beta]$

3.2. Nếu $f(x)$ là hàm lồi trên $[\alpha,\beta]$ thì $f(x)\le Max\{f(\alpha),f(\beta)\},\forall x\in[\alpha,\beta]$

3.3. Nếu $f(x)=ax^2+bx+c,(a<0)$ với $x\in[\alpha,\beta]$ thì $f(x)\ge Min\{f(\alpha),f(\beta)\},\forall x\in[\alpha,\beta]$

3.4. Nếu $f(x)$ là hàm lõm trên $[\alpha,\beta]$ thì $f(x)\ge Min\{f(\alpha),f(\beta)\},\forall x\in[\alpha,\beta]$

II. CÁC BÀI TẬP MẪU MINH HỌA

1. Các bài toán minh họa cho hàm bậc nhất

Bài 1. Tìm x để bất phương trình $x^2+2x(\sin y+\cos y)+1\ge 0$ đúng với $\forall y\in\mathbb{R}$.

Giải

Đặt $u=\sin y+\cos y\in\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]$, khi đó biến đổi bất phương trình về dạng sau:

$$g(u)=(2x)u+\left(x^2+1\right)\ge 0,\forall u\in\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]\Leftrightarrow \underset{u\in\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]}{\text{Min}}g(u)\ge 0$$

Do đồ thị $y=g(u)$ là một đoạn thẳng với $u\in\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]$ nên

$$\underset{u\in\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]}{\text{Min}}g(u)\ge 0\Leftrightarrow\begin{cases}g\left(-\sqrt{2}\right)\ge 0\\ g\left(\sqrt{2}\right)\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-2\sqrt{2}x+1\ge 0\\ x^2+2\sqrt{2}x+1\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}|x|\ge\sqrt{2}+1\\ |x|\le\sqrt{2}-1\end{array}\right.$$

Bài 2. [Mathematical Refletions 4/2006]

Cho $a,b,c\ge 0$ thỏa mãn $a+b+c=3$ Chứng minh rằng: $a^2+b^2+c^2+abc\ge 4$ (1)

Chứng minh

$$(1)\Leftrightarrow a^2+(b+c)^2-2bc+abc\ge 4\Leftrightarrow a^2+(3-a)^2+(a-2)bc\ge 4$$

$$\Leftrightarrow f(u)=(a-2)u+2a^2-6a+5\ge 0 \text{ trong đó } 0\le u=bc\le\left(\frac{b+c}{2}\right)^2=\frac{1}{4}(3-a)^2.$$

Đồ thị $y=f(u)$ là một đoạn thẳng với $u\in\left[0;\frac{1}{4}(3-a)^2\right]$. Nhìn vào hai đầu mút ta có:

$$f(0)=2a^2-6a+5=2\left(a-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{5}\ge 0;\ f\left(\frac{1}{4}(3-a)^2\right)=\frac{1}{4}(a-1)^2(a+2)\ge 0$$

nên $f(u)\ge 0;\ u\in\left[0;\frac{1}{4}(3-a)^2\right]$ hay $a^2+b^2+c^2+abc\ge 4$

Bài 3. Chứng minh rằng: $2(a+b+c)-(ab+bc+ca)\le 4, \forall\ a,b,c\in[0,2]$.

Chứng minh

Biến đổi bất đẳng thức về dạng sau $f(a)=(2-b-c)a+2(b+c)-bc\le 4, \forall a,b,c\in[0,2]$

Đồ thị $y=f(a)$ là một đoạn thẳng với $a\in[0,2]$ nên $f(a)\le Max\{f(0);f(2)\}$

Ta có $f(0)=4-(2-b)(2-c)\le 4; f(2)=4-bc\le 4 \Rightarrow f(a)\le 4, \forall a,b,c\in[0,2]$

Bài 4. [IMO 25 – Tiệp Khắc 1984]

Cho $a,b,c\ge 0$ thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng: $ab+bc+ca-2abc\le\frac{7}{27}$ (1)

Chứng minh

Biến đổi bất đẳng thức $(1)\Leftrightarrow a(b+c)+(1-2a)bc\le\frac{7}{27}\Leftrightarrow a(1-a)+(1-2a)bc\le\frac{7}{27}$

$\Leftrightarrow f(u)=a(1-a)+(1-2a)u\le\frac{7}{27}$ với $0\le u=bc\le\left(\frac{b+c}{2}\right)^2=\frac{(1-a)^2}{4}$

Đồ thị $y=f(u)$ là một đoạn thẳng với $u\in\left[0;\frac{1}{4}(1-a)^2\right]$. Nhìn vào 2 đầu mút ta có

$f(0)=a(1-a)\le\left[\frac{a+(1-a)}{2}\right]^2=\frac{1}{4}<\frac{7}{27}$

$f\left(\frac{1}{4}(1-a)^2\right)=\frac{1}{4}(-2a^3+a^2+1)=\frac{1}{4}\left[\frac{28}{27}-2\left(a-\frac{1}{3}\right)^2\left(a+\frac{1}{6}\right)\right]\le\frac{7}{27}$.

Vậy $f(u)\le\frac{7}{27}, \forall u\in\left[0;\frac{1}{4}(1-a)^2\right]$ hay $ab+bc+ca-2abc\le\frac{7}{27}$

Bài 5. Cho $a,b,c\ge 0$ thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh: $a^3+b^3+c^3+6abc\ge\frac{1}{4}$ (1)

Chứng minh

Biến đổi bất đẳng thức $(1)\Leftrightarrow(a+b)^3-3ab(a+b)+c^3+6abc\ge\frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow(1-c)^3-3ab(1-c)+c^3+6abc\ge\frac{1}{4}\Leftrightarrow ab(9c-3)+3c^2-3c+\frac{3}{4}\ge 0$

$\Leftrightarrow f(u)=(9c-3)u+3c^2-3c+\frac{3}{4}\ge 0$ với $0\le u=ab\le\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{(1-c)^2}{4}$

Đồ thị $y=f(u)$ là một đoạn thẳng với $u\in\left[0;\frac{1}{4}(1-c)^2\right]$.

Nhìn vào 2 đầu mút ta có $f(0)=3\left(c-\frac{1}{2}\right)^2\ge 0; f\left(\frac{1}{4}(1-c)^2\right)>0$

Vậy $f(u)\ge 0, \forall u\in\left[0;\frac{1}{4}(1-c)^2\right]$ hay $a^3+b^3+c^3+6abc\ge\frac{1}{4}$

Bài 6. Cho $a,b,c\ge 0$ thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh: $4\left(a^3+b^3+c^3\right)+15abc\ge 1$ (1)

Chứng minh

Biến đổi bất đẳng thức $(1)\Leftrightarrow 4\left[(a+b)^3-3ab(a+b)\right]+4c^3+15abc\ge 1$

$\Leftrightarrow 4\left[(1-c)^3-3ab(1-c)\right]+c^3+15abc\ge 1\Leftrightarrow 4(1-c)^3+12ab(c-1)+4c^3+15abc\ge 1$

$\Leftrightarrow f(u)=(27c-12)u+4c^3+4(1-c)^3\ge 1$ với $0\le u=ab\le\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{(1-c)^2}{4}$

Đồ thị $y=f(u)$ là một đoạn thẳng với $u\in\left[0;\frac{1}{4}(1-c)^2\right]$. Nhìn vào 2 đầu mút ta có

$f(0)=3(2c-1)^2+1\ge 1;\ f\left(\frac{1}{4}(1-c)^2\right)=1+(1-c)^2\left(\frac{19}{4}-c\right)\ge 1$

Vậy $f(u)\ge 1,\forall u\in\left[0;\frac{1}{4}(1-c)^2\right]$ hay $4\left(a^3+b^3+c^3\right)+15abc\ge 1$.

Bài 7. Chứng minh rằng: $(1-a)(1-b)(1-c)(1-d)+a+b+c+d\ge 1,\forall a,b,c,d\in[0,1]$

Chứng minh

Biểu diễn bất đẳng thức dưới dạng hàm bậc nhất biến số a, tham số b, c, d, ta có:

$f(a)=[1-(1-b)(1-c)(1-d)]a+(1-b)(1-c)(1-d)+b+c+d\ge 1,\forall a,b,c,d\in[0,1]$

Đồ thị $y=f(a),\forall a\in[0,1]$ là một đoạn thẳng nên $\underset{a\in[0,1]}{\mathrm{Min}}\,f(a)=Min\{f(0),f(1)\}$

Ta có $f(1)=b+c+d+1\ge 1,\forall b,c,d\in[0,1]$

$f(0)=(1-b)(1-c)(1-d)+b+c+d\Leftrightarrow g(b)=[1-(1-c)(1-d)]b+(1-c)(1-d)+c+d$

Đồ thị $y=g(b),\forall b\in[0,1]$ là một đoạn thẳng nên $\underset{b\in[0,1]}{\mathrm{Min}}\,g(b)=Min\{g(0),g(1)\}$

Ta có $g(1)=c+d+1\ge 1;g(0)=(1-c)(1-d)+c+d=1+cd\ge 1\Rightarrow f(0)=g(b)\ge 1,\forall b\in[0,1]$

Vậy $f(a)\ge 1$ hay $(1-a)(1-b)(1-c)(1-d)+a+b+c+d\ge 1,\forall a,b,c,d\in[0,1]$

Bài 8. Chứng minh: $S=\frac{a}{b+c+1}+\frac{b}{c+a+1}+\frac{c}{a+b+1}+(1-a)(1-b)(1-c)\le 1,\forall a,b,c\in[0,1]$

Chứng minh

Không mất tính tổng quát, giả sử $a=Max\{a,b,c\}$, khi đó

$S\le\frac{a+b+c}{b+c+1}+(1-a)(1-b)(1-c)\le 1\Leftrightarrow f(a)=\frac{a+b+c}{b+c+1}+(1-a)(1-b)(1-c)-1\le 0,\forall a,b,c\in[0,1]$

Đồ thị $y=f(a),\forall a\in[0,1]$ là một đoạn thẳng nên $\underset{a\in[0,1]}{Max}\,f(a)=Max\{f(0),f(1)\}$. Ta có

$$f(0)=\frac{b+c}{b+c+1}+bc-(b+c)=\frac{bc(b+c)-\left(b^2+c^2\right)-bc}{b+c+1}\le\frac{\left(b^2+c^2\right)\left(\frac{b+c}{2}-1\right)-bc}{b+c+1}\le 0$$

$f(1)=\frac{1+b+c}{b+c+1}-1=0$. Từ đó suy ra $f(a)\le 0,\forall a,b,c\in[0,1]\Rightarrow S\le 1,\forall a,b,c\in[0,1]$

Bài 9. Cho $x_1, x_2, ..., x_{2n+1} \in [-1,1]$ với $1 \le n \in N$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$S = x_1x_2 + x_2x_3 + ... + x_{2n}x_{2n+1} + x_{2n+1}x_1$$

Giải

Nếu coi x_1 là biến số và cố định các biến số $x_2, x_3, ..., x_n$ thì S là hàm bậc nhất với x_1 nên $\underset{x_1\in[-1,1]}{Min} S(x_1) = Min\{S(-1), S(1)\}$. Làm tương tự với các biến số x_k suy ra MinS đạt tại các giá trị $x_k \in \{-1;1\}, \forall k = \overline{1,2n+1}$. Do có $2n+1$ số hạng $x_1, x_2, ..., x_{2n+1}$ nên trong tập hợp $\{x_1x_2; x_2x_3; ...; x_{2n}x_{2n+1}; x_{2n+1}x_1\}$ tồn tại ít nhất 1 phần tử nhận giá trị dương. Không mất tính tổng quát, giả sử $x_1x_2 = 1$. Khi đó $S = 1 + x_2x_3 + ... + x_{2n}x_{2n+1} + x_{2n+1}x_1 \ge 1 - 1 - 1 - ... - 1 = 1 - 2n$.

Với $x_1 = x_2 = 1; x_3 = x_5 = ... = x_{2n+1} = -1; x_4 = x_6 = ... = x_{2n} = 1$ thì MinS $= 1 - 2n$

2. Các bài toán minh họa cho tam thức bậc hai hoặc hàm lồi

Bài 1. Cho $a, b, c, d \in [0,1]$, chứng minh rằng:

$$a^2b + b^2c + c^2d + d^2a - (ab^2 + bc^2 + cd^2 + da^2) \le \frac{8}{27}$$

Chứng minh

Không mất tính tổng quát, ta chỉ cần xét trường hợp đại diện $b \ge d$. Đặt vế trái là hàm số

$f(a,b,c,d) = a^2b + b^2c + c^2d + d^2a - (ab^2 + bc^2 + cd^2 + da^2)$ hay biến đổi dưới dạng

$f(a,b,c,d) = (b-d)a^2 + (d^2 - b^2)a + b^2c + c^2d - bc^2 - cd^2$

Với $b \ge d$ thì $f(a,b,c,d)$ là một tam thức bậc hai biến a, với hệ số bậc hai $b - d \ge 0$ (hàm lồi) nên ta có $f(a,b,c,d) \le Max\{f(0,b,c,d), f(1,b,c,d)\}$ với mọi $a \in [0,1]$

Ta sẽ chứng minh $f(0,b,c,d) \le \frac{8}{27}$ và $f(1,b,c,d) \le \frac{8}{27}$.

• Chứng minh $f(0,b,c,d) \le \frac{8}{27}$

Thật vậy, ta xét $f(0,b,c,d) = c(b-d)(b+d-c)$ với hai khả năng sau:

+ Nếu $b + d - c < 0$ thì $f(0,b,c,d) = c(b-d)(b+d-c) \le 0 < \frac{8}{27}$.

+ Nếu $b + d - c > 0$ thì theo bất đẳng thức ***AM – GM***, ta có:

$$f(0,b,c,d) \le \left(\frac{c + b - d + b + d - c}{3}\right)^3 = \left(\frac{2b}{3}\right)^3 \le \frac{8}{27}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} a = 0, b = 1 \\ c = b - d = b + d - c \end{cases} \Leftrightarrow (a,b,c,d) = \left(0, 1, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$

• Chứng minh $f(1,b,c,d)\le\frac{8}{27}$

Thật vậy biểu diễn $f(1,b,c,d)=(1-c)d^2+(c^2-1)d+b+b^2c-b^2-bc^2$

là một tam thức bậc hai nên ta có $f(1,b,c,d)\le Max\{f(1,b,c,1),f(1,b,c,0)\}$

+ $f(1,b,c,1)=(1-b)c^2+(b^2-1)c+b-b^2\le Max\{f(1,b,1,1);f(1,b,0,1)\}$

$f(1,b,1,1)=0;f(1,b,0,1)=b-b^2=b(1-b)\le\left(\frac{b+1-b}{2}\right)^2=\frac{1}{4}<\frac{8}{27}$

+ $f(1,b,c,0)=b+b^2c-b^2-bc^2=b(1-c)(1+c-b)\le\left[\frac{b+(1-c)+1+c-b}{3}\right]^3=\frac{8}{27}$

Kết luận: Tổng hợp các khả năng đã xét ta có

$f(a,b,c,d)=(b-d)a^2+(d^2-b^2)a+b^2c+c^2d-bc^2-cd^2\le\frac{8}{27},\forall a,b,c,d\in[0,1]$

$a^2b+b^2c+c^2d+d^2a-(ab^2+bc^2+cd^2+da^2)\le\frac{8}{27},\forall a,b,c,d\in[0,1]$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi (a,b,c,d) là một hoán vị $\left(0,\frac{1}{3},\frac{2}{3},1\right)$

Bài 2. Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a+b+c}{3}-\sqrt[3]{abc}\le Max\left\{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2,\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)^2,\left(\sqrt{c}-\sqrt{a}\right)^2\right\}\ (1)$$

Chứng minh

Giả sử $a\le b\le c$. Khi đó $Max\left\{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2,\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)^2,\left(\sqrt{c}-\sqrt{a}\right)^2\right\}=\left(\sqrt{c}-\sqrt{a}\right)^2$ và ta có

$(1)\Leftrightarrow\frac{a+b+c}{3}-\sqrt[3]{abc}\le\left(\sqrt{a}-\sqrt{c}\right)^2\Leftrightarrow f(x)=\frac{1}{3}(x+a+c)-\sqrt[3]{xac}\le\left(\sqrt{a}-\sqrt{c}\right)^2,a\le x=b\le c.$

Ta có $f'(x)=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}x^{-2/3}\sqrt[3]{ac}$, $f''(x)=\frac{2}{9}x^{-5/3}\sqrt[3]{ac}\ge0,\forall x\ge0$. Suy ra $f(x)$ lồi trên $[0,+\infty)$

và do đó $f(x)=Max(f(a),f(c))$. Không mất tính tổng quát, giả sử $f(a)\ge f(c)$. Bài toán chuyển thành việc chứng minh $f(a)=\frac{1}{3}(2a+c)-\sqrt[3]{a^2c}\le\left(\sqrt{a}-\sqrt{c}\right)^2=a+c-2\sqrt{ac}$.

$\Leftrightarrow2\sqrt{ac}\le\frac{1}{3}a+\frac{2}{3}c+\sqrt[3]{a^2c}\Leftrightarrow6\sqrt{ac}\le a+2c+3\sqrt[3]{a^2c}$. Theo bất đẳng thức $\boldsymbol{AM-GM}$ ta có

$a+2c+3\sqrt[3]{a^2c}=a+c+c+\sqrt[3]{a^2c}+\sqrt[3]{a^2c}+\sqrt[3]{a^2c}\ge6\sqrt[6]{a.c.c.a^2.c}=6\sqrt{ac}$ (đpcm)

Bài 3. Cho $a_1,a_2,...,a_n$ là các số thực không âm, chứng minh rằng:

$$\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}-\sqrt[n]{a_1a_2...a_n}\le\underset{1\le i<j\le n}{Max}\left\{\left(\sqrt{a_i}-\sqrt{a_j}\right)^2\right\}$$

Chứng minh

Bổ đề: Nếu $f(x)=x-nq\sqrt[n]{x}+p$ với $x\in[a,b]$ với $q\ge 0$ thì $f(x)\le Max\{f(a),f(b)\}$.

Áp dụng : Giả sử $a_1\ge a_2\ge ...\ge a_n$, khi đó $\underset{1\le i<j\le n}{Max}\left\{\left(\sqrt{a_i}-\sqrt{a_j}\right)^2\right\}=\left(\sqrt{a_1}-\sqrt{a_n}\right)^2$.

và ta cần chứng minh $a_1+a_2+...+a_n-n\sqrt[n]{a_1a_2...a_n}-n(a_1+a_n)+2n\sqrt{a_1a_n}\le 0$.

Đặt $F(a_1,a_2,...,a_n)=a_1+a_2+...+a_n-n\sqrt[n]{a_1a_2...a_n}-n(a_1+a_n)+2n\sqrt{a_1a_n}$

Với cách coi $a_k\in[a_n,a_1]:k=\overline{1,n}$ làm biến số và cố định các biến còn lại thì để ý rằng với $a_1\ge a_2\ge ...\ge a_n\ge 0$ nên $\sqrt[n]{\prod_{i\ne k}a_i}\in[a_n,a_1],\forall k=\overline{2,n-1}$ và hàm $F(a_1,a_2,...,a_n)$ có dạng hàm $f(x)$. Áp dụng bổ đề bằng cách thay a_k bởi a_1,a_n vào vế phải dưới đây ta có

$$F(a_1,a_2,...,a_n)\le Max\{F(a_1,a_2,...a_{k-1},a_1,a_{k+1},...,a_n),F(a_1,a_2,...a_{k-1},a_n,a_{k+1},...,a_n)\}$$

Áp dụng lần lượt cho $k=2,3,...,n-1$ ta có $F(a_1,a_2,...,a_n)\le\underset{t_i\in\{a_1,a_n\}}{Max}F(t_1,t_2,...,t_n)$

Giả sử có m số $t_i\,(1\le i\le n)$ bằng a_1;$(n-m)$ số $t_i\,(1\le i\le n)$ bằng a_n. Khi đó,

$$\begin{aligned}F(t_1,t_2,...,t_n)&=ma_1+(n-m)a_n-n\sqrt[n]{a_1^m a_n^{n-m}}-n(a_1+a_n)+2n\sqrt{a_1a_n}\\&=(m-n)a_1-ma_n-n\sqrt[n]{a_1^m a_n^{n-m}}+2n\sqrt{a_1a_n}\end{aligned}$$

Nếu $m\le\frac{n}{2}$, ta đặt $P(a_n)=(m-n)a_1-ma_n-n\sqrt[n]{a_1^m a_n^{n-m}}+2n\sqrt{a_1a_n}$

Tính đạo hàm. $P'(a_n)=-m-(n-m)\sqrt[n]{\frac{a_1^m}{a_n^m}}+n\sqrt{\frac{a_1}{a_n}}=m\left(\sqrt[n]{\frac{a_1^m}{a_n^m}}-1\right)+n\left(\sqrt{\frac{a_1}{a_n}}-\sqrt[n]{\frac{a_1^m}{a_n^m}}\right)$

Vì $a_n\le a_1$ nên $\frac{a_1}{a_n}\ge 1$, suy ra $\sqrt[n]{\frac{a_1^m}{a_n^m}}\ge 1$ và $\left(\frac{a_1}{a_n}\right)^{1/2}\ge\left(\frac{a_1}{a_n}\right)^{m/n}$.

Từ đó suy ra $P'(a_n)\ge 0$, dẫn đến hàm $P(a_n)$ đồng biến, do đó $P(a_n)\le P(a_1)=0$

Nếu $m>\frac{n}{2}$, ta đặt $Q(a_1)=(m-n)a_1-ma_n-n\sqrt[n]{a_1^m a_n^{n-m}}+2n\sqrt{a_1a_n}$.

Tính đạo hàm $Q'(a_1)=m\left(\sqrt{\frac{a_n}{a_1}}-\sqrt[n]{\frac{a_n^{n-m}}{a_1^{n-m}}}\right)+(n-m)\left(\sqrt[n]{\frac{a_n}{a_1}}-1\right)$

Vì $0\le a_n\le a_1$ nên $\left(\frac{a_n}{a_1}\right)^{1/n}\le 1$, và $\left(\frac{a_n}{a_1}\right)^{1/2}\le\left(\frac{a_n}{a_1}\right)^{(n-m)/n}$.

Từ đó suy ra $Q'(a_1)\le 0$ dẫn đến hàm $Q(a_1)$ nghịch biến, do đó $Q(a_1)\le Q(a_n)=0$.

Vậy $F(a_1,a_2,...,a_n)=a_1+a_2+...+a_n-n\sqrt[n]{a_1a_2...a_n}-n(a_1+a_n)+2n\sqrt{a_1a_n}\le 0$

3. Giá trị nhỏ nhất trong tập hợp các giá trị lớn nhất

Dạng toán này sử dụng mệnh đề quan trọng sau đây:

> ***Mệnh đề.*** Cho $x, a, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ với $\alpha < \beta$ khi đó ta có $\underset{a}{\text{Min}}\left\{\underset{\alpha\le x\le\beta}{\text{Max}}|x-a|\right\} = \dfrac{\beta-\alpha}{2}$

Chứng minh

Nhận xét: $\forall a, b \in \mathbb{R}$ thì $\text{Max}(a, b) \ge a$ và $\text{Max}(a, b) \ge b \Rightarrow \text{Max}(a, b) \ge \dfrac{a+b}{2}$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b$. Áp dụng nhận xét này ta có

$$\underset{\alpha\le x\le\beta}{\text{Max}}|x-a| = \text{Max}\{|\alpha-a|, |\beta-a|\} \ge \frac{|\alpha-a|+|\beta-a|}{2} \ge \frac{|(a-\alpha)+(\beta-\alpha)|}{2} = \frac{\beta-\alpha}{2}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases}|\alpha-a| = |\beta-a| \\ (a-\alpha)(\beta-a) \ge 0\end{cases} \Leftrightarrow a = \dfrac{\alpha+\beta}{2}$

> **Bài 1.** Tìm $S = \underset{a}{\text{Min}}\left\{\underset{-2\le x\le 3}{\text{Max}}|3x^2-6x+2a-1|\right\}$

Giải

Đặt $t = 3x^2 - 6x - 1$. Sử dụng tam thức bậc hai hoặc lập BBT ta có $-2 \le x \le 3 \Leftrightarrow -4 \le t \le 23$

Bài toán trở thành: Tìm $\text{Min}\left\{\underset{-4\le t\le 23}{\text{Max}}|t+2a|\right\}$. Áp dụng mệnh đề ta có

$$\underset{-4\le t\le 23}{\text{Max}}|t+2a| = \text{Max}\{|-4+2a|, |23+2a|\} \ge \frac{|-4+2a|+|23+2a|}{2} = \frac{|4-2a|+|23+2a|}{2} \ge \frac{27}{2}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow 4 - 2a = 23 + 2a \Leftrightarrow a = \dfrac{-19}{4}$

> **Bài 2.** Tìm $S = \underset{a}{\text{Min}}\left\{\underset{-1\le x\le 2}{\text{Max}}|x^3-3x+4a+1|\right\}$

Giải

Đặt $t = x^3 - 3x + 1$

$t' = 3(x^2-1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = -1, y_1 = 3 \\ x_2 = 1, y_2 = -1\end{array}\right.$

x	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
t'		$+$	0	$-$	0		$+$		
t	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

Nhìn BBT suy ra $-1 \le t \le 3 \quad \forall x \in [-1, 2]$

Bài toán trở thành: Tìm $\text{Min}\left\{\underset{-1\le t\le 3}{\text{Max}}|t+4a|\right\}$

$$\underset{-1\le t\le 3}{\text{Max}}|t+4a| = \text{Max}\{|-1+4a|, |3+4a|\} \ge \frac{|-1+4a|+|3+4a|}{2} = \frac{|1-4a|+|3+4a|}{2} \ge \frac{4}{2} = 2$$

Vậy $\underset{a}{\text{Min}}\left\{\underset{-1\le x\le 2}{\text{Max}}|x^3-3x+4a+1|\right\} = 2 \Leftrightarrow 1 - 4a = 3 + 4a \Leftrightarrow a = \dfrac{-1}{4}$

Bài 3. Tìm $S = \underset{a}{\text{Min}}\left\{\underset{-1\le x\le 2}{\text{Max}}\left|\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 2a + \frac{5}{3}\right|\right\}$

Giải

Đặt $t = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2 + \frac{5}{3}$ với $x \in [-1, 2]$

Ta có $t' = x(x+1)(x-2)$

$$t' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -1; x_2 = 0; x_3 = 2 \\ y_1 = \frac{5}{4}; y_2 = \frac{5}{3}; y_3 = -1 \end{cases}$$

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
t'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
t	$+\infty$	$\searrow$	$5/4$	$\nearrow$	$5/3$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra $-1 \le t \le \frac{5}{3}$ $\forall x \in [-1, 2]$

Bài toán trở thành: Tìm $\text{Min}\left\{\underset{-1\le t\le 5/3}{\text{Max}}|t - 2a|\right\}$

$$\underset{-1\le t\le 5/3}{\text{Max}}|t-2a| = \text{Max}\left\{|-1-2a|, \left|\frac{5}{3}-2a\right|\right\} \ge \frac{|-1-2a| + \left|\frac{5}{3}-2a\right|}{2} = \frac{|1+2a| + \left|\frac{5}{3}-2a\right|}{2} \ge \frac{4}{3}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow 1 + 2a = \frac{5}{3} - 2a \Leftrightarrow a = \frac{1}{6}$

Vậy với $a = \frac{1}{6}$ thì $\underset{a}{\text{Min}}\left\{\underset{-1\le x\le 2}{\text{Max}}\left|\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 2a + \frac{5}{3}\right|\right\} = \frac{4}{3}$

Bài 4. Tìm $S = \underset{a}{\text{Min}}\left\{\underset{-1\le x\le 2}{\text{Max}}\left|\frac{-1}{6}x^6 + x^5 - x^4 - 3a + 1\right|\right\}$

Giải

Đặt $t = -\frac{1}{6}x^6 + x^5 - x^4 - 3a + 1$ với $x \in [-1, 2]$

Ta có $t' = -x^5 + 5x^4 - 4x^3 = -x^3(x-1)(x-4)$

$$t' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0; x_2 = 1; x_3 = 4 \\ y_1 = 1; y_2 = \frac{5}{6}; y_3 = \frac{259}{3} \end{cases} \Rightarrow -\frac{7}{6} \le t \le \frac{19}{3} \quad \forall x \in [-1, 2]$$

x	$-\infty$		-1		0		1		2		4		$+\infty$
t'			$+$		0	$-$	0		$+$		0	$-$	
t	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{-7}{6}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\frac{5}{6}$	$\nearrow$	$\frac{19}{3}$	$\nearrow$	M	$\searrow$	$-\infty$

Bài toán trở thành: Tìm $\text{Min}\left\{\underset{-7/6\le t\le 19/3}{\text{Max}}|t-3a|\right\}$

Ta có $\underset{-7/6\le t\le 19/3}{\text{Max}}|t-3a| = \text{Max}\left\{\left|\frac{-7}{6}-3a\right|,\left|\frac{19}{3}-3a\right|\right\}$

$$\ge \frac{\left|\frac{-7}{6}-3a\right|+\left|\frac{19}{3}-3a\right|}{2} = \frac{\left|\frac{7}{6}+3a\right|+\left|\frac{19}{3}-3a\right|}{2} \ge \frac{15}{4}$$

Đăng thức xảy ra $\Leftrightarrow \frac{7}{6}+3a=\frac{19}{3}-3a \Leftrightarrow a=\frac{31}{36}$

Vậy với $a=\frac{31}{36}$ thì $\underset{a}{\text{Min}}\left\{\underset{-1\le x\le 2}{\text{Max}}\left|\frac{-1}{6}x^6+x^5-x^3-3a+1\right|\right\}=\frac{15}{4}$

Bài 5. Cho $f(x) = f(x) = x+\sqrt{1-x^2}-a$. Tìm $\text{Min}\left\{\underset{-1\le x\le 1}{\text{Max}}|f(x)|\right\}$

Giải

Đặt $x=\cos\alpha$ với $\alpha\in[0,\pi]$ suy ra $t=x+\sqrt{1-x^2}=\cos\alpha+\sin\alpha\in\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]$

Bài toán trở thành: Tìm $\text{Min}\left\{\underset{-\sqrt{2}\le t\le\sqrt{2}}{\text{Max}}|t-a|\right\}$. Ta có

$$\underset{-\sqrt{2}\le t\le\sqrt{2}}{\text{Max}}|t-a| = \text{Max}\left\{\left|-\sqrt{2}-a\right|,\left|\sqrt{2}-a\right|\right\} \ge \frac{\left|-\sqrt{2}-a\right|+\left|\sqrt{2}-a\right|}{2}$$

$$=\frac{\left|\sqrt{2}+a\right|+\left|\sqrt{2}-a\right|}{2} \ge \frac{\left|\sqrt{2}+a+\sqrt{2}-a\right|}{2}=\sqrt{2}.$$ Với $a=0$ thì $\text{Min}\left\{\underset{-1\le x\le 1}{\text{Max}}|f(x)|\right\}=\sqrt{2}$

Bài 6. Cho $f(x)=\frac{x+\sqrt{x-1}}{x-\sqrt{x-1}}+a$. Tìm $\text{Min}\left\{\underset{1\le x\le 5}{\text{Max}}|f(x)|\right\}$

Giải

Đặt $t=\sqrt{x-1}\in[0,2]$ và $u=\frac{x+\sqrt{x-1}}{x-\sqrt{x-1}} \Leftrightarrow u=g(t)=\frac{t^2+t+1}{t^2-t+1}$

$\Rightarrow g'(t)=\frac{-2t^2+2}{(t^2-t+1)^2}=0 \Leftrightarrow t=1\in[0,2]$. Lập bảng biến thiên suy ra

$1\le g(t)\le 3 \Leftrightarrow 1\le u\le 3\;\;\forall t\in[0,2]$. Áp dụng bổ đề ta có

$\underset{1\le u\le 3}{\text{Max}}|u+a| = \text{Max}\{|1+a|,|3+a|\} \ge \frac{|-1-a|+|3+a|}{2} \ge \frac{|-1-a+3+a|}{2}=1$

Với $a=-2$ thì $\text{Min}\left\{\underset{1\le x\le 5}{\text{Max}}|f(x)|\right\}=1$

III. BÀI TẬP DÀNH CHO BẠN ĐỌC TỰ GIẢI

Bài 1. Chứng minh rằng $a^3+b^3+c^3 \le 5abc, \forall a,b,c \in [1,2]$

Bài 2. Cho $a,b,c \ge 0$ thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng:

$$7(ab+bc+ca) \le 2+9abc$$

Bài 3. Chứng minh rằng $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \le 10, \forall a,b,c \in [1,2]$

Bài 4. Cho $a,b,c \ge 0$ thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng:

$$1+9abc \ge 4(ab+bc+ca)$$

Bài 5. Cho $a,b,c \ge 0$ thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng:

$$1+6(a^3+b^3+c^3) \ge 5(a^2+b^2+c^2)$$

Bài 6. Cho $a,b,c \ge 0$ thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{1-ab}+\frac{1}{1-bc}+\frac{1}{1-ca} \le \frac{27}{8}$$

Bài 7. Cho $a,b,c,d,e \in [p,q]: 0<p<q$. Chứng minh rằng:

$$(a+b+c+d+e)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}\right) \le 25+6\left(\sqrt{\frac{p}{q}}-\sqrt{\frac{q}{p}}\right)^2$$

Bài 8. Cho $a_1,a_2,\ldots,a_n \in [p,q]\,(p,q \ge 0)$. Chứng minh rằng

$$(a_1+a_2+\ldots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right) \le n^2+C(n)\frac{(p-q)^2}{4pq}$$

Trong đó $C(n)=n^2$ nếu n chẵn và $C(n)=n^2-1$ nếu n lẻ.

Bài 9. Chứng minh rằng $\left|\frac{a}{b-c}\right|+\left|\frac{b}{c-a}\right|+\left|\frac{c}{a-b}\right| \ge 2, \forall a,b,c>0$

Bài 10. Chứng minh: $a_1 + a_2 + \ldots + a_n - a_1a_2 - a_2a_3 - \ldots - a_na_1 \le \left[\frac{n}{2}\right], \forall a_1, a_2, \ldots, a_n \in [0.1]$

Bài 11. Cho $a_1, a_2, \ldots, a_n \in [\alpha.\beta]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$S = (a_1 - a_2)^2 + (a_1 - a_3)^2 + \ldots + (a_1 - a_n)^2 + (a_2 - a_3)^2 + \ldots + (a_{n-1} - a_n)^2$$

Bài 12. Cho $f(x) = 3x^2 - 4x + 1 - 2a$. Tìm $\text{Min}\left\{\underset{-1\le x\le 2}{\text{Max}} |f(x)|\right\}$

Bài 13. Cho $f(x) = \dfrac{-1}{3}x^3 - x^2 + 3x - 4 + 5a$. Tìm $\text{Min}\left\{\underset{-4\le x\le 2}{\text{Max}} |f(x)|\right\}$

Bài 14. Cho $f(x) = 3x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 1 - 3a$. Tìm $\text{Min}\left\{\underset{-1\le x\le 1}{\text{Max}} |f(x)|\right\}$

Bài 15. Cho $f(x) = x^5 - 5x^3 + 10x + 2a$. Tìm $\text{Min}\left\{\underset{-2\le x\le \frac{3}{2}}{\text{Max}} |f(x)|\right\}$

Bài 16. Cho $f(x) = \dfrac{(4a-2)x - 12a + 5}{x - 3}$. Tìm $\text{Min}\left\{\underset{-1\le x\le 2}{\text{Max}} |f(x)|\right\}$

Bài 17. Cho $f(x) = \dfrac{x^2 + (a+3)x + (2a+3)}{x + 2}$. Tìm $\text{Min}\left\{\underset{-4\le x\le -\frac{5}{2}}{\text{Max}} |f(x)|\right\}$

Bài 18. Cho $f(x) = \dfrac{(a+2)x^2 + 4x + (a+5)}{x^2 + 1}$. Tìm $\text{Min}\left\{\underset{-1\le x\le 2}{\text{Max}} |f(x)|\right\}$

Bài 19. Cho $f(x) = \dfrac{x^3 + (a+3)x^2 + (3-a)x + (a+1)}{x^2 - x + 1}$. Tìm $\text{Min}\left\{\underset{-1\le x\le 1}{\text{Max}} |f(x)|\right\}$

Bài 20. Cho $f(x) = x + \sqrt{4x^2 + 2x + 1} + 3a$. Tìm $\text{Min}\left\{\underset{-1\le x\le 0}{\text{Max}} |f(x)|\right\}$

Bài 21. Cho $f(x) = e^{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}} + 2a$. Tìm $\text{Min}\left\{\underset{1\le x\le \sqrt{2}}{\text{Max}} |f(x)|\right\}$

Bài 22. Cho $f(x) = x - 4a + \ln(x^2 - 3)$. Tìm $\text{Min}\left\{\underset{2\le x\le 2\sqrt{3}}{\text{Max}} |f(x)|\right\}$

Bài 23. $f(x) = \dfrac{3(a\sin^4 x + \cos^4 x) + 2(a\cos^2 x + 2\sin^2 x)}{3\sin^4 x + 2\cos^2 x}$. Tìm $\text{Min}\left\{\underset{x\in R}{\text{Max}} |f(x)|\right\}$

Bài 24. Tìm $\underset{a,b,c}{\text{Min}}\left\{\underset{-1\le x\le 1}{\text{Max}} |x^3 + ax^2 + bx + c|\right\}$

§ 23.4. PHƯƠNG PHÁP TIẾP TUYẾN CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

Trong phần hàm lồi bất đẳng thức Jensen, hàm nửa lồi, nửa lõm với các định lý RCF, LCF, LCRCF chúng ta thường gặp các bất đẳng thức có dạng phát biểu sau đây:

Mệnh đề: Cho $a_1, a_2, ..., a_n \in D$, $n \in \mathbb{N}$ thỏa mãn $a_1 + a_2 + ... + a_n = nu$, với $u \in D$.

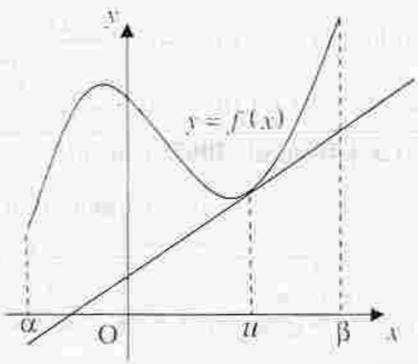
Khi đó ta có: $f(a_1) + f(a_2) + ... + f(a_n) \geq nf(u)$ hoặc $f(a_1) + f(a_2) + ... + f(a_n) \leq nf(u)$.

Đẳng thức xảy ra khi $a_1 = a_2 = ... = a_n = u$.

Tuy nhiên với một số dạng hàm số $y = f(x)$ không lồi (không lõm) trên miền $D = [\alpha, \beta]$ nhưng vẫn có đồ thị nằm trên tiếp tuyến $y = Ax + B$ tại điểm $x = u \in [\alpha, \beta]$ có phương trình là $y = f'(u)(x-u) + f(u)$ hay viết gọn dưới dạng $y = Ax + B$ thì ta có thể nghĩ đến chuyện đánh giá $f(x) \geq Ax + B, \forall x \in [\alpha, \beta]$. Từ đó suy ra

$$+\begin{cases} f(a_1) \geq A.a_1 + B \\ f(a_2) \geq A.a_2 + B \\ ... \\ f(a_n) \geq A.a_n + B \end{cases}$$

$$\overline{f(a_1) + ... + f(a_n) \geq n(Au + B) = nf(u)}$$



Sau đây chúng ta xét các bài toán tiêu biểu.

Bài 1. [Hồng Kông, 2005] Cho $a, b, c, d > 0$ thỏa mãn $a + b + c + d = 1$.

Chứng minh rằng: $6(a^3 + b^3 + c^3 + d^3) \geq a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + \frac{1}{8}$ (1)

Chứng minh

(1) $\Leftrightarrow f(a) + f(b) + f(c) + f(d) \geq \frac{1}{8}; \forall a, b, c, d \in (0,1)$ trong đó $f(x) = 6x^3 - x^2, x \in (0,1)$

Do hai vế là biểu thức đối xứng với a, b, c, d nên dễ thấy đẳng thức xảy ra tại điểm rơi $a = b = c = d$ kết hợp với $a + b + c + d = 1$ suy ra điểm rơi là $a = b = c = d = \frac{1}{4}$.

Từ đó xét tiếp tuyến của $y = f(x)$ tại $x = \frac{1}{4}$ có phương trình: $y = \frac{5}{8}x - \frac{1}{8}$.

Mặt khác $f(x) - \left(\frac{5}{8}x - \frac{1}{8}\right) = \frac{1}{8}(4x-1)^2(3x+1) \geq 0, \forall x \in (0,1) \Rightarrow f(x) \geq \frac{5}{8}x - \frac{1}{8}, \forall x \in (0,1)$

Suy ra $f(a) + f(b) + f(c) + f(d) \geq \frac{5}{8}(a + b + c + d) - \frac{4}{8} = \frac{1}{8}; \forall a, b, c, d \in (0,1)$

Bài 2. [USA, 2003] Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{(2b+c+a)^2}{2b^2+(c+a)^2}+\frac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2}\le 8$$

Chứng minh

Chuẩn hóa $a+b+c=3$ thì bất đẳng thức

$$\Leftrightarrow \frac{(a+3)^2}{2a^2+(3-a)^2}+\frac{(b+3)^2}{2b^2+(3-b)^2}+\frac{(c+3)^2}{2c^2+(3-c)^2}\le 8$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2+6a+9}{a^2-2a+3}+\frac{b^2+6b+9}{b^2-2b+3}+\frac{c^2+6c+9}{c^2-2c+3}\le 24 \Leftrightarrow f(a)+f(b)+f(c)\le 24$$

trong đó hàm số đặc trưng là $f(x)=\frac{x^2+6x+9}{x^2-2x+3}; x\in(0,3)$.

Phương trình tiếp tuyến của $y=f(x)$ tại $x=1$ là $y=4x+4$.

Xét hiệu $f(x)-(4x+4)=\frac{(x-1)^2(4x+3)}{x^2-2x+3}\le 0$ hay $f(x)\le 4x+4, \forall x\in(0,3)$

Suy ra $f(a)+f(b)+f(c)\le 4(a+b+c)+12=24$

Bài 3. [Rumani, 2005] Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn $a+b+c=3$.

Chứng minh rằng: $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\ge a^2+b^2+c^2$ (1)

Chứng minh

Do $a,b,c>0$ nên $a^2+b^2+c^2<(a+b+c)^2=9$. Từ đó nếu có một trong ba số a,b,c nhỏ hơn $\frac{1}{3}$ chẳng hạn $a<\frac{1}{3}$ thì $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}>9>a^2+b^2+c^2$ nên (1) được chứng minh.

Xét $a,b,c\ge\frac{1}{3}$, kết hợp với $a+b+c=3$ suy ra $a,b,c\in\left[\frac{1}{3},\frac{7}{3}\right]$. Biến đổi bất đẳng thức

$$(1)\Leftrightarrow \frac{1}{a^2}-a^2+\frac{1}{b^2}-b^2+\frac{1}{c^2}-c^2\ge 0\Leftrightarrow f(a)+f(b)+f(c)\ge 0, \forall a,b,c\in\left[\frac{1}{3},\frac{7}{3}\right]$$

Xét hàm số $f(x)=\frac{1}{x^2}-x^2$ trên $\left[\frac{1}{3},\frac{7}{3}\right]$. Tiếp tuyến của đồ thị $y=f(x)$ tại $x=1$ là $y=-4x+4$. Ta có $f(x)-(-4x+4)=\frac{(x-1)^2\left[2-(x-1)^2\right]}{x^2}\ge 0, \forall x\in\left[\frac{1}{3},\frac{7}{3}\right]$, suy ra

$$f(x)\ge -4x+4, \forall x\in\left[\frac{1}{3},\frac{7}{3}\right]\Rightarrow f(a)+f(b)+f(c)\ge -4(a+b+c)+12=0$$

Bài 4. [Trung Quốc, 2005] Cho $a,b,c\ge 0$ thỏa mãn $a+b+c=1$.

Chứng minh rằng: $10(a^3+b^3+c^3)-9(a^5+b^5+c^5)\ge 1$

Chứng minh

Đặt $f(x)=10x^3-9x^5$. Khi đó bất đẳng thức $\Leftrightarrow f(a)+f(b)+f(c)\ge 1$.

Trường hợp 1. Trong ba số a,b,c có một số, giả sử $a\ge\frac{9}{10}$. Khi đó ta có $a\in\left[\frac{9}{10},1\right]$ và $b,c\in\left[0,\frac{1}{10}\right]$. Xét hàm số $f(x)$ trên $\left[\frac{9}{10},1\right]$ có $f'(x)=15x^2(2-3x^2)\le 0,\forall x\in\left[\frac{9}{10},1\right]$.

Suy ra $f(x)$ nghịch biến trên $\left[\frac{9}{10},1\right]$ nên $f(a)\ge f(1)=1,\ \forall a\in\left[\frac{9}{10},1\right]$. Mặt khác với $b,c\in\left[0,\frac{1}{10}\right]$ thì $f(b)=10b^3-9b^5\ge 0; f(c)=10c^3-9c^5\ge 0$ nên $f(a)+f(b)+f(c)\ge 1$

Trường hợp 2. Các số $a,b,c\in\left[0,\frac{9}{10}\right]$, khi đó tiếp tuyến của $y=f(x)$ tại $x=\frac{1}{3}$ có phương trình $y=\frac{25}{9}x-\frac{16}{27}$. Ta có

$$f(x)-\left(\frac{25}{9}x-\frac{16}{27}\right)=10x^3-9x^5-\left(\frac{25}{9}x-\frac{16}{27}\right)=-\frac{1}{27}(3x-1)^2(27x^3+18x^2-21x-16).$$

Đặt $g(x)=27x^3+18x^2-21x-16$. Xét hàm số $g(x)$ trên $\left[0,\frac{9}{10}\right]$.

Ta có $g'(x)=81x^2+36x-21$, $g'(x)=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{3}$ hoặc $x=-\frac{7}{9}$

Bảng biến thiên của $g(x)$ trên $\left[0,\frac{9}{10}\right]$:

x	0		$\frac{1}{3}$		$\frac{9}{10}$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	-16	$\searrow$		$\nearrow$	$-\frac{637}{1000}$

Từ BBT và $g(0)=-16, g\left(\frac{9}{10}\right)=-\frac{637}{1000}$

$\Rightarrow g(x)<0,\forall x\in\left[0,\frac{9}{10}\right]$

$\Rightarrow f(x)-\left(\frac{25}{9}x-\frac{16}{27}\right)\ge 0,\forall x\in\left[0,\frac{9}{10}\right]$

$\Rightarrow\ f(a)+f(b)+f(c)\ge\frac{25}{9}.(a+b+c)-3.\frac{16}{27}=1$

Kết luận: Bất đẳng thức được chứng minh trong cả hai trường hợp. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{3}$ hoặc (a,b,c) là một hoán vị bất kỳ của bộ số $(1,0,0)$.

> **Bài 5. [Moldova, 2005]** Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn $a^4+b^4+c^4=3$.
>
> Chứng minh rằng: $\frac{1}{4-ab}+\frac{1}{4-bc}+\frac{1}{4-ca}\le 1$

Chứng minh

Vì $2ab\le a^2+b^2$ nên $0<8-(a^2+b^2)\le 2(4-ab)\Rightarrow\frac{1}{4-ab}\le\frac{2}{8-(a^2+b^2)}$ do đó

$$\frac{1}{4-ab}+\frac{1}{4-bc}+\frac{1}{4-ca}\le\frac{2}{8-(a^2+b^2)}+\frac{2}{8-(b^2+c^2)}+\frac{2}{8-(c^2+a^2)}$$

Để vận dụng giả thiết $a^4+b^4+c^4=3$ ta đặt $x=(b^2+c^2)^2, y=(c^2+a^2)^2, z=(a^2+b^2)^2$

thì $x,y,z>0$ và $x+y+z=(b^2+c^2)^2+(c^2+a^2)^2+(a^2+b^2)^2\le 4(a^4+b^4+c^4)=12$.

Từ đó $0 < x, y, z < 12$. Ta sẽ chứng minh $\frac{1}{8-\sqrt{x}} + \frac{1}{8-\sqrt{y}} + \frac{1}{8-\sqrt{z}} \le \frac{1}{2}$

Xét hàm số $f(t) = \frac{1}{8-\sqrt{t}}$ trên $(0,12)$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị $y = f(t)$ tại $t = 4$ có phương trình $y = \frac{1}{144}t + \frac{5}{36}$. Mặt khác xét biến đổi:

$\frac{1}{8-\sqrt{t}} - \left(\frac{1}{144}t + \frac{5}{36}\right) = -\frac{1}{144}\left(\sqrt{t}-2\right)^2\left(4-\sqrt{t}\right) \le 0$ hay $f(t) \le \frac{1}{144}t + \frac{5}{36}, \forall t \in (0,12)$

Từ đó $f(x) + f(y) + f(z) \le \frac{1}{144}(x+y+z) + 3\frac{5}{36} \le \frac{1}{144}.12 + \frac{15}{36} = \frac{1}{2}$.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = 4 \Leftrightarrow a = b = c = 1$

Bài 6. [Ba Lan, 1996] Cho $\begin{cases} a, b, c \in \mathbb{R} \\ a+b+c=1 \end{cases}$. Chứng minh: $\frac{a}{1+a^2} + \frac{b}{1+b^2} + \frac{c}{1+c^2} \le \frac{9}{10}$

Chứng minh

Đặt $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$. Khi đó bất đẳng thức $\Leftrightarrow f(a) + f(b) + f(c) \le \frac{9}{10}$

Ta có $f'(x) = \frac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2}$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=1 \end{array}\right.$ Suy ra bảng biến thiên của $f(x)$

x	$-\infty$	-3	-1	$-1/3$	1	2	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$-3/10$	$-1/2$	$-3/10$	$1/2$	$2/5$	0

Trường hợp 1: Tồn tại một số chẳng hạn $a \in (-\infty, -3] \Rightarrow b + c \ge 4$ nên trong hai số b, c tồn tại ít nhất một số, chẳng hạn $b \ge 2$. Khi đó ta có $f(a) + f(b) + f(c) < 0 + \frac{2}{5} + \frac{1}{2} = \frac{9}{10}$

Trường hợp 2: Tồn tại một số, chẳng hạn $a \in \left(-3, -\frac{1}{3}\right]$. Khi đó

$f(a) + f(b) + f(c) \le -\frac{3}{10} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{7}{10} < \frac{9}{10}$

Trường hợp 3: Cả ba số $a, b, c \in \left(-\frac{1}{3}, +\infty\right)$. Khi đó tiếp tuyến của $y = f(x)$ tại $x = \frac{1}{3}$ có phương trình là: $y = f'(x)\left(x - \frac{1}{3}\right) + f\left(\frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow y = \frac{18}{25}x + \frac{3}{50}$.

Ta có $f(x) - \left(\frac{18}{25}x + \frac{3}{50}\right) = -\frac{(3x-1)^2(4x+3)}{50\left(1+x^2\right)} \le 0$ hay $f(x) \le \frac{18}{25}x + \frac{3}{50}, \forall x > -\frac{1}{3}$

Từ đó suy ra $f(a) + f(b) + f(c) \le \frac{18}{25}(a+b+c) + 3\cdot\frac{3}{50} = \frac{9}{10}$

Kết luận: Vậy bài toán được chứng minh, đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = \frac{1}{3}$.

§ 23. 5. PHƯƠNG PHÁP HỆ SỐ BẤT ĐỊNH

Chúng ta sẽ tiếp tục các ý tưởng cân bằng hệ số ở chương I và chương III cũng như mở rộng việc xấp xỉ một hàm số với tiếp tuyến được nêu trong **§23.4**. *Chú ý rằng nếu như các ý tưởng cân bằng hệ số trong chương I thuần túy mang màu sắc đại số thì trong chương III phương pháp nhân tử Lagrange lại chỉ thuần túy mang màu sắc giải tích và ít có khả năng thực hành. Trong bài viết này chúng tôi tìm cách kết hợp thật linh hoạt hai phương pháp đó để đi đến những lời giải thật trọn vẹn và sáng sủa cho một lớp rất rộng các bất đẳng thức ít hay nhiều biến, đối xứng hay hoán vị...*

Tóm tắt nội dung

I. MỞ ĐẦU

Trong một số dạng toán bất đẳng thức nhiều biến đối xứng, chúng ta có thể tách một bất đẳng thức ban đầu thành các bất đẳng thức bộ phận cùng có chung một qui luật nào đó và đưa bài toán về việc chứng minh đại diện cho một bất đẳng thức bộ phận. Như vậy mấu chốt của phương pháp này chính là việc phát hiện ra các bất đẳng thức bộ phận mà ta có thể gọi là bất đẳng thức cơ sở. Tuy nhiên hầu hết các lời giải mà chúng ta gặp trên các tài liệu đều không chỉ dẫn việc xây dựng bất đẳng thức cơ sở dẫn đến sự thắc mắc của bạn đọc trong việc trình bày lời giải một cách không tự nhiên. Phải chăng bất đẳng thức cơ sở được tạo ra một cách mò mẫm thử nghiệm rất nhiều lần hay việc xây dựng các bất đẳng thức nhiều biến được tạo ra từ chính việc lấy trước bất đẳng thức cơ sở. Câu trả lời là hoàn toàn không phải như vậy. Bên ngoài vẻ đẹp của các dạng bất đẳng thức này đều chứa đựng một nội dung có tính chất qui luật. Chúng ta sẽ cùng nhau làm quen với phương pháp nhằm phát hiện ra các bất đẳng thức cơ sở với các dạng bất đẳng thức nhiều biến đối xứng. Phương pháp này có tên gọi là ***"Phương pháp hệ số bất định"***, tên tiếng Anh là ***Undefined Coefficient Technique (U.C.T.)***

Bài 1. Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{2\left(a^2+b^2+c^2\right)}{3}\ge 5\ (1)$$

Chứng minh

Ta sẽ chứng minh $\frac{1}{a^2}+\frac{2a^2}{3}\ge\frac{7}{3}-\frac{2a}{3}$, (2a)

$\frac{1}{b^2}+\frac{2b^2}{3}\ge\frac{7}{3}-\frac{2b}{3}$ (2b); $\frac{1}{c^2}+\frac{2c^2}{3}\ge\frac{7}{3}-\frac{2c}{3}$ (2c)

Thật vậy xét chứng minh đại diện (2a) $\Leftrightarrow\frac{(a-1)^2(2a^2+6a+3)}{3a^2}\ge 0$ đúng $\forall a>0$

Cộng (2a), (2b), (2c) với chú ý $a+b+c=3$ suy ra (đpcm). Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ $a=b=c=1$.

Nhận xét: Lời giải trên sẽ tự nhiên nếu chúng ta giải thích được cách phát hiện bất đẳng thức cơ sở cho việc chứng minh (1). Để ý rằng các biến số trong điều kiện và trong cả hai biểu thức của bất đẳng thức (1) quan hệ với nhau theo liên kết cộng nên ta có thể tách theo từng biến để chứng minh bất đẳng thức cơ sở làm đại diện. Suy nghĩ tự nhiên nhất của chúng ta là chứng minh bất đẳng thức sau:

$$\frac{1}{a^2}+\frac{2a^2}{3}\ge\frac{5}{3}\Leftrightarrow\frac{(a-1)(a+1)(2a^2-3)}{3a^2}\ge 0$$

Rõ ràng bất đẳng thức này không hoàn toàn đúng $\forall a>0$.

Về mặt logic thì việc xây dựng bất đẳng thức trên có vẻ không ổn vì chúng ta sẽ không sử dụng đến điều kiện $a+b+c=3$. Do đó chúng ta sẽ xây dựng một bất đẳng thức dạng giả định mà vế phải có thể sử dụng điều kiện $a+b+c=3$, tức là chúng ta xét các bất đẳng thức viết dưới dạng giả định sau đây:

$\frac{1}{a^2}+\frac{2a^2}{3}\ge\frac{5}{3}+ma+n$ (3a) ; $\frac{1}{b^2}+\frac{2b^2}{3}\ge\frac{5}{3}+mb+n$ (3b); $\frac{1}{c^2}+\frac{2c^2}{3}\ge\frac{5}{3}+mc+n$ (3c)

Trong đó m và n là các hệ số chưa xác định. Cộng (3a), (3b), (3c) ta có:

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{2a^2+2b^2+2c^2}{3}\ge 5+m(a+b+c)+3n=5+3(m+n)$$

Như vậy ở đây 2 hệ số m và n phải thỏa mãn điều kiện $m+n=0\Leftrightarrow n=-m$.

Thế $n=-m$ vào (3a) dẫn đến $\frac{1}{a^2}+\frac{2a^2}{3}\ge\frac{5}{3}+m(a-1)$ (3)

Đến đây ta chỉ cần xác định hệ số duy nhất là m để bất đẳng thức (2) là đúng.

Để ý rằng với $a=b=c=1$ thì bất đẳng thức (1) xảy ra dấu bằng nên việc biến đổi bất đẳng thức (3) cần làm xuất hiện nhân tử $(a-1)$. Thật vậy ta có:

$$\frac{1}{a^2}+\frac{2a^2}{3}\ge\frac{5}{3}+m(a-1)\Leftrightarrow(a-1)\left(\frac{(a+1)(2a^2-3)}{3a^2}-m\right)\ge0\quad(4)$$

Khi cho $a=1$ thì ta có $\frac{(a+1)(2a^2-3)}{3a^2}=-\frac{2}{3}$ từ đó ta dự đoán rằng với $m=-\frac{2}{3}$ thì biến đổi (4) sẽ xuất hiện biểu thức $(a-1)^2$.

Với $m=-\frac{2}{3}$ thì bất đẳng thức cơ sở là: $\frac{1}{a^2}+\frac{2a^2}{3}\ge\frac{7}{3}-\frac{2a}{3}$

Bài 2. Cho $a,b,c,d>0$ thỏa mãn $a+b+c+d=4$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1}+\frac{1}{c^2+1}+\frac{1}{d^2+1}\ge2$$

Chứng minh

Ta sẽ xác định hệ số m để bất đẳng thức sau là đúng: $\frac{2}{a^2+1}\ge1+m(a-1)$

$\Leftrightarrow-\frac{(a-1)(a+1)}{a^2+1}\ge m(a-1)\Leftrightarrow(a-1)\left(-\frac{a+1}{a^2+1}-m\right)\ge0$.

Với $a=1$ thì $-\frac{a+1}{a^2+1}=-1$ nên chọn $m=-1$. Khi đó: $\frac{2}{a^2+1}\ge2-a\Leftrightarrow\frac{a(a-1)^2}{a^2+1}\ge0$ (đúng)

Tương tự suy ra: $\sum_{cyc}\frac{1}{a^2+1}\ge\sum_{cyc}\frac{2-a}{2}=4-\frac{1}{2}\sum_{cyc}a=2\Rightarrow$ (đpcm)

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=d=1$.

Nhận xét: Dùng ***AM – GM*** cũng chứng minh được: $\frac{1}{a^2+1}=1-\frac{a^2}{a^2+1}\ge1-\frac{a^2}{2a}=1-\frac{a}{2}$

Bài 3. [Algebraic Inequalities Old and New Method]

Cho $\begin{cases}a,b,c>0\\a+b+c=3\end{cases}$. Chứng minh rằng $\frac{1}{a^2+b+c}+\frac{1}{b^2+c+a}+\frac{1}{c^2+a+b}\le1$

Chứng minh

Ta cần tìm m sao cho $\frac{1}{a^2+b+c}=\frac{1}{a^2-a+3}\le\frac{1}{3}+m(a-1)\Leftrightarrow-\frac{a(a-1)}{3(a^2-a+3)}\le m(a-1)$ đúng

Tương tự như trên ta tìm dự đoán rằng với $m=-\frac{1}{9}$ thì bất đẳng thức cơ sở đúng.

Thật vậy ta có $\frac{1}{a^2-a+3}\le\frac{4}{9}-\frac{a}{9}\Leftrightarrow 0\le\frac{(a-1)^2(3-a)}{3(a^2-a+3)}\Leftrightarrow 0\le\frac{(a-1)^2(b+c)}{3(a^2-a+3)}$

Nhận xét. Bài toán tổng quát đã được giải quyết bằng định lí ***LCF*** trong "Algebraic Inequalities – Old and New method" của tác giả Vasile Cirtoaje.

Cho $a_1,a_2,...a_n$ là các số thực không âm thỏa mãn $a_1+a_2+...+a_n=n$.

Chứng minh rằng $\frac{1}{a_1^2-a_1+n}+\frac{1}{a_2^2-a_2+n}+...\frac{1}{a_n^2-a_n+n}\le 1$

Bài 4. Cho a,b,c,d là các số thực không âm thỏa mãn $a^2+b^2+c^2+d^2=4$.

Chứng minh: $2(a^3+b^3+c^3+d^3)\ge 2+\frac{3}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2+ab+ac+ad+bc+bd+dc}$

Chứng minh

Ta có: $a^2+b^2+c^2+d^2=4\Leftrightarrow(a+b+c+d)^2=2(2+ab+ac+ad+bc+bd+cd)$

$$\Leftrightarrow(a+b+c+d)=\sqrt{2(2+ab+ac+ad+bc+bd+cd)}$$

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$2(a^3+b^3+c^3+d^3)\ge 2+\frac{3}{2}(a+b+c+d)$

Ta cần tìm m sao cho $2a^3\ge\frac{3a+1}{2}+m(a^2-1)\Leftrightarrow(a^2-1)\left[\frac{(2a+1)^2}{2(a+1)}-m\right]\ge 0$ (*) đúng

Cho $a=1$, dự đoán $m=\frac{9}{4}$. Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức (*) đúng với $m=\frac{9}{4}$.

Thật vậy $2a^3\ge\frac{3a+1}{2}+\frac{9}{4}(a^2-1)\Leftrightarrow(a-1)(8a^2-a-7)\ge 0\Leftrightarrow(8a+7)(a-1)^2\ge 0$

Điều này hiển nhiên đúng. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=d=1$.

Bài 5. Cho $\begin{cases}a,b,c>0\\ a^3+b^3+c^3=3\end{cases}$. Chứng minh rằng: $4\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+5(a^2+b^2+c^2)\ge 27$

Chứng minh

Ta tìm m sao cho $\frac{4}{a}+5a^2\ge 9+m(a^3-1)\Leftrightarrow\frac{(a-1)(5a^2+5a-4)}{a}\ge m(a-1)(a^2+a+1)$

Cho $a=1$ ta có thể dự đoán rằng $m=2$. Ta sẽ chứng minh: $\frac{4}{a}+5a^2\ge 7+2a^3$ (1)

$\Leftrightarrow \dfrac{(a-1)^2(-2a^2+a+4)}{a} \geq 0$. Do $a \leq \sqrt{3} \Rightarrow -2a^2+a+4 \geq 0 \Rightarrow (1)$ đúng.

Từ đó: $\sum_{cyc}\left(\dfrac{4}{a}+5a^2\right) \geq 21+2\sum_{cyc} a^2 = 27$ (đpcm).

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài 6. Cho $\begin{cases} a,b,c>0 \\ a^2+b^2+c^2=3 \end{cases}$. Chứng minh rằng $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}+\dfrac{4}{3}(a+b+c) \geq 7$

Chứng minh

Nhận xét với $a=b=c=1$ thì đẳng thức xảy ra. Ta có $a^2+b^2+c^2=3 \Rightarrow a,b,c \in (0,\sqrt{3})$

Ta sẽ tìm số thực m sao cho bất đẳng thức sau đúng với mọi $a \in (0,\sqrt{3})$

$$\frac{1}{a}+\frac{4}{3}a \geq m(a^2-1)+\frac{7}{3} \Leftrightarrow f(a)=3ma^3-4a^2+(7-3m)a-3 \leq 0$$

Ta cần tìm m sao cho $f(a) \leq 0\ \ \forall a \in (0,\sqrt{3})$ và $f(a)=0 \Leftrightarrow a=1$.

Dự đoán $a=1$ là điểm cực đại của $f(a)$, khi đó: $f'(1)=0 \Leftrightarrow 9m-8+7-3m=0 \Leftrightarrow m=\dfrac{1}{6}$.

Do đó ta sẽ chứng minh bất đẳng thức cơ sở: $\dfrac{1}{a}+\dfrac{4}{3}a \geq \dfrac{1}{6}(a^2-1)+\dfrac{7}{3}$

Thật vậy, bất đẳng thức tương đương: $(a-1)^2(6-a) \geq 0$ đúng do $a \in (0,\sqrt{3})$.

Tương tự và suy ra $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}+\dfrac{4}{3}(a+b+c) \geq \dfrac{1}{6}(a^2+b^2+c^2-3)+7=7$ (đpcm)

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài 7. Cho $\begin{cases} a_1,a_2,\ldots,a_n \geq 0 \\ a_1+a_2+\ldots+a_n=n \end{cases}$. Chứng minh rằng: $\sum_{i=1}^{n}\dfrac{a_i}{3a_i^2+5} \leq \dfrac{n}{8}$

Chứng minh

Ta sẽ tìm hệ số m sao cho $\dfrac{a_i}{3a_i^2+5} \leq \dfrac{1}{8}+m(a_i-1) \Leftrightarrow \dfrac{(5-3a_i)(a_i-1)}{8(3a_i^2+5)} \leq m(a_i-1)$

Với $a_i=1$ thì $\dfrac{5-3a_i}{8(3a_i^2+5)}=\dfrac{1}{32}$ nên ta dự đoán $m=\dfrac{1}{32}$ thì bất đẳng thức cơ sở trên là

đúng. Thật vậy: $\dfrac{a_i}{3a_i^2+5} \leq \dfrac{1}{8}+\dfrac{(a_i-1)}{32} \Leftrightarrow 0 \leq \dfrac{(5+a_i)(a_i-1)^2}{32(3a_i^2+5)}$ (đúng).

Dấu bằng $\Leftrightarrow a_1 = a_2 = ... = a_n = 1$

Bình luận: Qua các bài toán mở đầu ta có thể thấy rằng các dạng bất đẳng thức trên không hề quan tâm đến số biến. Ta hoàn toàn có thể tổng quát với n biến mà không làm ảnh hưởng đến cách giải. Xét mô hình tổng quát sau đây:

Bài toán tổng quát: Cho các số thực không âm $a_1, a_2, ..., a_n$ thỏa mãn điều kiện: $h(a_1) + h(a_2) + ... + h(a_n) = 0$ (*). Chứng minh rằng $f(a_1) + f(a_2) + ... + f(a_n) \geq 0$

Lớp các bài toán này thường có điều kiện (*) là $\sum_{i=1}^{n} a_i^k = n$ và có thể được giải quyết bằng cách xây dựng bất đẳng thức cơ sở có chung qui luật cho các biến.

Vì các biểu thức mang tính đối xứng nên đẳng thức thường đạt tại các điểm cực trị là các biến số bằng nhau. Khi đó ta phải xác định hệ số m sao cho bất đẳng thức $f(a_i) \geq m \cdot h(a_i)$ hay $\left[g(a_i)\right]^{2k} p(a_i) \geq 0$ đúng $\forall a_1, a_2, ..., a_n \geq 0$ thỏa mãn (*)

Trong đó $g(a_i) = (a_i - x_k)$ với x_k là điểm cực trị của bất đẳng thức.

Bài toán sẽ được giải quyết nếu $p(a_i) \geq 0$. Trong trường hợp $p(a_i) \geq 0$ chỉ đúng trong một miền nghiệm nào đó thì ta sẽ tiến hành chia trường hợp để giải quyết bài toán. Tuy nhiên trong phần 1 này ta sẽ không đề cập những bài toán như vậy mà sẽ đề cập ở phần sau.

Sau khi đã tìm ra bất đẳng thức cơ sở thì việc chứng minh nó không quá khó khăn có thể dựa trên phương pháp phân tích nhân tử hoặc sử dụng đạo hàm.

Qua một vài ví dụ mở đầu bạn đọc có thể hiểu được mục đích của **U.C.T**. Ở các phần tiếp theo việc xác định hệ số sẽ được trình bày một cách sơ lược bởi vì những bài toán đó mang tính phức tạp nhiều hơn mà **U.C.T** chỉ đơn thuần là bước đệm để đi đến lời giải chứ không thể đưa ta cách chứng minh trực tiếp.

II. KĨ THUẬT CHUẨN HÓA VÀ U.C.T

Bây giờ chúng ta sẽ bước sang một khoảng không gian mới với lớp bất đẳng thức thuần nhất đối xứng ba biến và kĩ thuật chuẩn hóa kết hợp với **U.C.T**. Trước hết ta sẽ nhắc lại định nghĩa

- Đa thức $f(a, b, c)$ đối xứng $\Leftrightarrow f(a,b,c) = f(b,c,a) = f(c,a,b)$
- Đa thức $f(a, b, c)$ thuần nhất trên miền D $\Leftrightarrow f(ka,kb,kc) = k^n f(a,b,c)$ $\forall k,a,b,c \in D, k \neq 0, n = const$

Hiểu một cách đơn giản đa thức thuần nhất nếu nó là tổng của các đơn thức đồng bậc. Do một số tính chất của hàm thuần nhất ta có thể chuẩn hóa điều kiện của biến số để đơn giản hóa việc chứng minh. Ta có thể chuẩn hóa một đa thức thuần nhất đối xứng ba biến bằng cách đặt $a^n + b^n + c^n = k, abc = p$, $ab + bc + ca = r, ...$ Đây là kỹ thuật rất quan trọng giúp ta đơn giản hóa và qui bất đẳng thức về chứng minh theo từng biến. Hãy cùng đến với một số bất đẳng thức thuần nhất đối xứng ba biến để thấy công dụng của **U.C.T**

Bài 1. [Nesbitt] Chứng minh rằng $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}$, $\forall a,b,c>0$ (1)

Chứng minh

Không mất tính tổng quát chuẩn hóa $a+b+c=3$.

Khi đó (1) $\Leftrightarrow \frac{a}{3-a}+\frac{b}{3-b}+\frac{c}{3-c}\geq\frac{3}{2}$ (2)

Ta cần chứng minh bất đẳng thức: $\frac{a}{3-a}\geq\frac{1}{2}+m(a-1)\Leftrightarrow\frac{3(a-1)}{2(3-a)}\geq m(a-1)$

Dễ dàng dự đoán $m=\frac{3}{4}$. Ta có: $\frac{a}{3-a}\geq\frac{3a-1}{4}\Leftrightarrow\frac{3(a-1)^2}{4(3-a)}\geq 0$ luôn đúng.

Vậy $\frac{a}{3-a}\geq\frac{3a-1}{4}$. Tương tự ta có: $\frac{b}{3-b}\geq\frac{3b-1}{4}$; $\frac{c}{3-c}\geq\frac{3c-1}{4}$

Cộng vế theo vế ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$.

Bài 2. Cho a,b,c là các số thực không âm. Chứng minh rằng:

$$\frac{(b+c-a)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{(a+c-b)^2}{2b^2+(a+c)^2}+\frac{(a+b-c)^2}{2c^2+(b+a)^2}\geq\frac{3(a^2+b^2+c^2)}{(a+b+c)^2}\quad(1)$$

Chứng minh

Chuẩn hóa $a+b+c=3$. Khi đó bất đẳng thức (1) tương đương với

$$\frac{2(3-2a)^2}{a^2-2a+3}+\frac{2(3-2b)^2}{b^2-2b+3}+\frac{2(3-2c)^2}{c^2-2c+3}\geq a^2+b^2+c^2\quad(2)$$

Ta cần xác định m để bất đẳng thức cơ sở sau là đúng: $\frac{2(3-2a)^2}{a^2-2a+3}\geq a^2+m(a-1)$

hay $\left[\frac{(a+3)(a^2-4a+6)}{a^2-2a+3}+m\right](a-1)\leq 0$. Với $a=1$ thì $\frac{(a+3)(a^2-4a+6)}{a^2-2a+3}=6$

khi đó chọn $m=-6$, ta sẽ chứng minh: $\frac{2(3-2a)^2}{a^2-2a+3}\geq a^2-6(a-1)$ (2a)

Thật vậy ta có: $\frac{2(3-2a)^2}{a^2-2a+3}\geq a^2-6(a-1)\Leftrightarrow\frac{a(6-a)(a-1)^2}{a^2-2a+3}\geq 0$ đúng $\forall a\in(0,3)$.

Tương tự ta có: $\frac{2(3-2b)^2}{b^2-2b+3}\geq b^2-6(b-1)$ (2b); $\frac{2(3-2c)^2}{c^2-2c+3}\geq c^2-6(c-1)$ (2c)

Từ (2a), (2b), (2c) suy ra (2) đúng $\Rightarrow$ (đpcm). Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

Bài 3. [Đề thi Olympic 30 – 4, khối 11, lần XII – 2006]

Chứng minh rằng $\dfrac{a(b+c)}{(b+c)^2+a^2}+\dfrac{b(c+a)}{(c+a)^2+b^2}+\dfrac{c(a+b)}{(a+b)^2+c^2}\le\dfrac{6}{5}$, $\forall a,b,c>0$

Chứng minh

Không mất tính tổng quát chuẩn hóa $a+b+c=3$. Ta có bất đẳng thức (1) tương đương với $\dfrac{a(3-a)}{9-6a+2a^2}+\dfrac{b(3-b)}{9-6b+2b^2}+\dfrac{c(3-c)}{9-6c+2c^2}\le\dfrac{6}{5}$

Tương tự như trên ta dễ dàng tìm ra bất đẳng thức cơ sở sau:

$\dfrac{a(3-a)}{9-6a+2a^2}\le\dfrac{21+9a}{25}\Leftrightarrow 0\le\dfrac{(a-1)^2(18a+9)}{25(9-6a+2a^2)}$. Điều này hiển nhiên đúng.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Bài 4. Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng: $\dfrac{a}{(b+c)^2}+\dfrac{b}{(c+a)^2}+\dfrac{c}{(a+b)^2}\ge\dfrac{9}{4(a+b+c)}$ (1)

Chứng minh

Chuẩn hóa $a+b+c=3$. Khi đó (1) $\Leftrightarrow\dfrac{a}{(3-a)^2}+\dfrac{b}{(3-b)^2}+\dfrac{c}{(3-c)^2}\ge\dfrac{3}{4}$ (2)

Dự đoán bất đẳng thức cơ sở là $\dfrac{a}{(3-a)^2}\ge\dfrac{2a-1}{4}$ (2a) $\Leftrightarrow\dfrac{(a-1)^2(9-2a)}{4(3-a)^2}\ge 0$ luôn đúng $\forall a\in(0,3)$. Tương tự ta có: $\dfrac{b}{(3-b)^2}\ge\dfrac{2b-1}{4}$ (2b); $\dfrac{c}{(3-c)^2}\ge\dfrac{2c-1}{4}$ (2c).

Từ (2a), (2b), (2c) suy ra (2) đúng $\Rightarrow$ (đpcm). Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ $a=b=c$.

Bài 5. Cho $a,b,c>0$. Chứng minh: $\dfrac{(b+c-3a)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\dfrac{(a+c-3b)^2}{2b^2+(a+c)^2}+\dfrac{(a+b-3c)^2}{2c^2+(b+a)^2}\ge\dfrac{1}{2}$ (1)

Chứng minh

Không mất tính tổng quát, chuẩn hóa $a+b+c=3$.

Khi đó (1) $\Leftrightarrow\dfrac{(3-4a)^2}{2a^2+(3-a)^2}+\dfrac{(3-4b)^2}{2b^2+(3-b)^2}+\dfrac{(3-4c)^2}{2c^2+(3-c)^2}\ge\dfrac{1}{2}$

Sử dụng bất đẳng thức cơ sở sau $\dfrac{(3-4a)^2}{2a^2+(3-a)^2}\ge\dfrac{8a-7}{6}\Leftrightarrow\dfrac{(a-1)^2(39-8a)}{6(a^2-2a+3)}\ge 0$

Điều này hiển nhiên đúng vì $0\le a\le 3\Rightarrow 39-8a\ge 39-24=15>0$.

Tương tự với các biến còn lại ta có điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Bài 6. [USAMO 2003]

Cho $a,b,c>0$. Chứng minh: $\dfrac{(b+c+2a)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\dfrac{(a+c+2b)^2}{2b^2+(a+c)^2}+\dfrac{(a+b+2c)^2}{2c^2+(b+a)^2}\le 8$ (1)

Chứng minh

Không mất tính tổng quát chuẩn hóa $a+b+c=1$. Khi đó bất đẳng thức (1) tương đương với

$$\frac{(a+1)^2}{2a^2+(1-a)^2}+\frac{(b+1)^2}{2b^2+(1-b)^2}+\frac{(c+1)^2}{2c^2+(1-c)^2}\le 8$$

Sử dụng bất đẳng thức cơ sở sau $\dfrac{(a+1)^2}{2a^2+(1-a)^2}\le\dfrac{12a+4}{3}\Leftrightarrow 0\le\dfrac{(3a-1)^2(4a+1)}{2a^2+(1-a)^2}$

Điều này hiển nhiên đúng. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Bài 7. Cho $a,b,c>0$. Chứng minh:

$$\frac{(2a+b+c)^2}{4a^3+(b+c)^3}+\frac{(2b+c+a)^2}{4b^3+(c+a)^3}+\frac{(2c+a+b)^2}{4c^3+(a+b)^3}\le\frac{12}{a+b+c}\quad(1)$$

Chứng minh

Không mất tính tổng quát, giả sử $a+b+c=3$, bất đẳng thức (1) trở thành

$\dfrac{(a+3)^2}{4a^3+(3-a)^3}+\dfrac{(b+3)^2}{4b^3+(3-b)^3}+\dfrac{(c+3)^2}{4c^3+(3-c)^3}\le 4$, (2).

Xét đại diện $\dfrac{(a+3)^2}{4a^3+(3-a)^3}\le\dfrac{2(a+1)}{3}$, (2a)

Thật vậy, ta có $\dfrac{2(a+1)}{3}-\dfrac{(a+3)^2}{4a^3+(3-a)^3}=\dfrac{(2a^2+12a+9)(a-1)^2}{3(a^3+3a^2-9a+9)}\ge 0$

Tương tự ta có: $\dfrac{(b+3)^2}{4b^3+(3-b)^3}\le\dfrac{2(b+1)}{3}$ (2b); $\dfrac{(c+3)^2}{4c^3+(3-c)^3}\le\dfrac{2(c+1)}{3}$ (2c)

Từ (2a), (2b), (2c) suy ra (2) đúng $\Rightarrow$ (đpcm). Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

Bài 8. Cho các số không âm a,b,c,d. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b^2+c^2+d^2}+\frac{b}{c^2+d^2+a^2}+\frac{c}{d^2+a^2+b^2}+\frac{d}{a^2+b^2+c^2}\ge\frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}}\quad(1)$$

Chứng minh

Giả sử $a^2+b^2+c^2+d^2=1$, khi đó (1) $\Leftrightarrow\dfrac{a}{1-a^2}+\dfrac{b}{1-b^2}+\dfrac{c}{1-c^2}+\dfrac{d}{1-d^2}\ge\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ (2)

Ta sẽ chứng minh: $\dfrac{a}{1-a^2} \ge \dfrac{3\sqrt{3}}{2}a^2 \Leftrightarrow a(1-a^2) \le \dfrac{2}{3\sqrt{3}}$.

Sử dụng bất đẳng thức ***AM – GM***, ta có

$$a^2(1-a^2)^2 = \frac{1}{2}\times 2a^2\times(1-a^2)\times(1-a^2) \le \frac{1}{2}\left(\frac{2a^2+2(1-a^2)}{3}\right)^3 = \frac{4}{27} \Rightarrow a(1-a^2) \le \frac{2}{3\sqrt{3}}.$$

Tương tự, ta có $\dfrac{b}{1-b^2} \ge \dfrac{3\sqrt{3}}{2}b^2, \dfrac{c}{1-c^2} \ge \dfrac{3\sqrt{3}}{2}c^2, \dfrac{d}{1-d^2} \ge \dfrac{3\sqrt{3}}{2}d^2$

Cộng lần lượt các bất đẳng thức trên, ta có đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi 3 trong 4 số a,b,c,d bằng nhau, số còn lại bằng 0

Bài 9. [Crux mathematicorum]

Chứng minh rằng: $\dfrac{a}{\sqrt[3]{a+b}} + \dfrac{b}{\sqrt[3]{b+c}} + \dfrac{c}{\sqrt[3]{c+a}} \ge \dfrac{a^{2/3}+b^{2/3}+c^{2/3}}{\sqrt[3]{2}} \quad \forall a,b,c>0 \quad (1)$

Chứng minh

Ta sẽ chứng minh $\dfrac{4\sqrt[3]{2}\,x^3}{\sqrt[3]{x^3+1}} \ge 5x^2-1,\ \forall x>0 \quad (2)$

Thật vậy, nếu $x \le \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ thì bất đẳng thức là hiển nhiên.

Nếu $x \ge \dfrac{1}{\sqrt{5}}$: Xét $f(x) = \dfrac{128x^9}{(x^3+1)(5x^2-1)^3} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{384x^8(1-x)(2x^2-3x-3)}{(x^3+1)^2(5x^2-1)^4}$.

Ta có: $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=1, x=\dfrac{3+\sqrt{33}}{4}$. Ta dễ dàng kiểm tra được rằng $f'(x)>0$ với mọi $x \in \left(1, \dfrac{3+\sqrt{33}}{4}\right)$ và $f'(x)<0$ với mọi $x \in \left[\dfrac{1}{\sqrt{5}}, 1\right) \cup \left(\dfrac{3+\sqrt{33}}{4}, +\infty\right)$.

Do đó $f(x) \ge \min\left\{f(1), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right\} = 1\ \forall x \ge \dfrac{1}{\sqrt{5}}$. Vậy bất đẳng thức (2) đúng.

Sử dụng bất đẳng thức này với x lần lượt thay bởi $\sqrt[3]{\dfrac{a}{b}}, \sqrt[3]{\dfrac{b}{c}}, \sqrt[3]{\dfrac{c}{a}}$, ta có

$$\frac{\sqrt[3]{2}\,a}{\sqrt[3]{a+b}} \ge \frac{5}{4}a^{2/3} - \frac{1}{4}b^{2/3} \quad ; \quad \frac{\sqrt[3]{2}\,b}{\sqrt[3]{b+c}} \ge \frac{5}{4}b^{2/3} - \frac{1}{4}c^{2/3} \quad ; \quad \frac{\sqrt[3]{2}\,c}{\sqrt[3]{c+a}} \ge \frac{5}{4}c^{2/3} - \frac{1}{4}a^{2/3}$$

Cộng 3 bất đẳng thức trên ta có (đpcm).Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c>0$.

Bài 10. Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{\sqrt{4a^2+ab+4b^2}}+\frac{b^2}{\sqrt{4b^2+bc+4c^2}}+\frac{c^2}{\sqrt{4c^2+ca+4a^2}}\ge\frac{a+b+c}{3}\quad(1)$$

Chứng minh

Ta chứng minh $\dfrac{6x^2}{\sqrt{4x^2+x+4}}\ge 3x-1,\ \forall x\ge 0$.

Ta có $\dfrac{36x^4}{4x^2+x+4}-(3x-1)^2=\dfrac{(x-1)^2(15x-4)}{4x^2+x+4}\ge 0$ đúng,

suy ra $\dfrac{6x^2}{\sqrt{4x^2+x+4}}\ge|3x-1|\ge 3x-1$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=1$.

Sử dụng bất đẳng thức trên với phép thế lần lượt thay x bởi $\dfrac{a}{b},\dfrac{b}{c},\dfrac{c}{a}$, ta có:

$$\frac{6a^2}{\sqrt{4a^2+ab+4b^2}}\ge 3a-b\ ;\ \frac{6b^2}{\sqrt{4b^2+bc+4c^2}}\ge 3b-c\ ;\ \frac{6c^2}{\sqrt{4c^2+ca+4a^2}}\ge 3c-a$$

Cộng 3 bất đẳng thức trên, ta có (đpcm). Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Bài 11. Cho $\begin{cases}a,b,c>0\\ a+b+c=3\end{cases}$. Chứng minh rằng $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a^7+7}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{b^7+7}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{c^7+7}}\le\dfrac{3}{2}$

Chứng minh

Ta sẽ chứng minh $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^7+7}}\le\dfrac{31-7x}{48}\quad\forall x\in(0,3)\quad(2)$. Xét $f(x)=(31-7x)^3(x^7+7)$

Ta có: $f'(x)=7(31-7x)^2(x-1)\left(21+21x+21x^2+21x^3+21x^4+21x^5-10x^6\right)$

Rõ ràng $f'(x)=0$ chỉ có 2 nghiệm dương phân biệt là 1 và $x_0\in(1,3)$.

Khi x đi qua 1 theo chiều tăng thì $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương, qua x_0 thì $f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm nên ta có $f(x)\ge\min\{f(1),f(3)\}=48^3$, $\forall x\in(0,3)$. Suy ra (2) đúng. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=1$. Sử dụng bất đẳng thức (2) ta được:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{a^7+7}}\le\frac{31-7a}{48},\quad \frac{1}{\sqrt[3]{b^7+7}}\le\frac{31-7b}{48},\quad \frac{1}{\sqrt[3]{c^7+7}}\le\frac{31-7c}{48}$$

Do đó $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a^7+7}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{b^7+7}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{c^7+7}}\le\dfrac{1}{48}\left[93-7(a+b+c)\right]=\dfrac{3}{2}$ (đpcm)

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$.

III. U.C.T VÀ KĨ THUẬT PHÂN TÁCH CÁC TRƯỜNG HỢP

Ở các phần trên ta đã làm quen với một số bài toán khi đưa về dạng

$$f(a_i)\ge m\cdot h(a_i)\Leftrightarrow g(a_i)^{2k}\,p(a_i)\ge 0$$

Nếu $p(a_i)\ge 0$ thì có ngay điều phải chứng minh. Tuy nhiên không phải bao giờ nó cũng xuất hiện $p(a_i)\ge 0$. Trong trường hợp $p(a_i)\ge 0$ chỉ đúng với một miền nghiệm nào đó thì việc chứng minh sẽ phải đi qua một chiều hướng khác, đó là xét thêm trường hợp biến a_i ngoài miền xác định để $p(a_i)\ge 0$. Thường thì bước này phức tạp và đòi hỏi người làm phải có những đánh giá mang sự tinh tế nhiều hơn. Chúng ta sẽ đến với một số bài toán tiêu biểu cho kỹ thuật này.

Bài 1. Cho $a,b,c,d\ge 0$ thỏa mãn $a+b+c+d=4$. Chứng minh rằng

$$(1+a^4)(1+b^4)(1+c^4)(1+d^4)\ge(1+a^3)(1+b^3)(1+c^3)(1+d^3)\ (1)$$

Chứng minh

Không mất tính tổng quát, giả sử $a\ge b\ge c\ge d\ge 0$. Xét 2 trường hợp:

+ Trường hợp 1. Nếu $a\ge 3\Rightarrow b+c+d\le 1\Rightarrow 0\le b\le 1, 0\le c\le\frac{1}{2}, 0\le d\le\frac{1}{3}$.

$$\Rightarrow(1+a^4)(1+b^4)(1+c^4)(1+d^4)-(1+a^3)(1+b^3)(1+c^3)(1+d^3)$$

$$\ge(1+a^4)-(1+a^3)(1+1^3)\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^3\right]\left[1+\left(\frac{1}{3}\right)^3\right]=a^4-\frac{7}{3}a^3-\frac{4}{3}\ge 3a^3-\frac{7}{3}a^3-\frac{4}{3}=\frac{2}{3}(a^3-2)>0$$

$$\Rightarrow(1+a^4)(1+b^4)(1+c^4)(1+d^4)\ge(1+a^3)(1+b^3)(1+c^3)(1+d^3)$$

+ Trường hợp 2: Nếu $3\ge a\ge b\ge c\ge d\ge 0$, thì (1) $\Leftrightarrow\sum_{cyc}\left[2\ln(1+a^4)-2\ln(1+a^3)\right]\ge 0$

Xét hàm số $f(x)=2\ln(1+x^4)-2\ln(1+x^3)-x+1$ với $0\le x\le 3$.

Ta có: $f'(x)=\frac{8x^3}{x^4+1}-\frac{6x^2}{x^3+1}-1=\frac{(x-1)(-x^6+x^5+x^4+7x^2+x+1)}{(x^4+1)(x^3+1)}$

Dễ thấy $f'(x)=0$ chỉ có 2 nghiệm dương phân biệt là 1 và $x_0\in(2,3)$. Khi x đi qua 1 theo chiều tăng dần thì $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương, khi x đi qua x_0 thì $f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm nên ta

có $f(x)\ge\min\{f(1),f(3)\}=\min\{0,2(\ln 41-\ln 14-1)\}=0$, $\forall x\in[0,3]$

Suy ra $2\ln(1+x^4)-2\ln(1+x^3)\ge x-1\ \ \forall x\in[0,3]\Rightarrow\sum_{cyc}\left[2\ln(1+a^4)-2\ln(1+a^3)\right]\ge\sum_{cyc}(a-1)=0$

Vậy ta có (đpcm). Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=d=1$.

Bài 2. Chứng minh $\dfrac{a^2}{a^2+(b+c)^2}+\dfrac{b^2}{b^2+(a+c)^2}+\dfrac{c^2}{c^2+(b+a)^2}\ge\dfrac{3}{5}$, $\forall a,b,c>0$ (1)

Chứng minh

Không mất tính tổng quát chuẩn hóa $a+b+c=3$. Khi đó bất đẳng thức (1) tương đương với

$$\frac{a^2}{a^2+(3-a)^2}+\frac{b^2}{b^2+(3-b)^2}+\frac{c^2}{c^2+(3-c)^2}\ge\frac{3}{5}\Leftrightarrow\sum_{cyc}\frac{a^2}{2a^2-6a+9}\ge\frac{3}{5}\quad(2)$$

Ta sử dụng bất đẳng thức cơ sở sau $\dfrac{a^2}{2a^2-6a+9}\ge\dfrac{12a-7}{25}\Leftrightarrow(8a-21)(a-1)^2\ge0$

Không mất tính tổng quát giả sử $a\ge b\ge c\Rightarrow a\ge1\ge c$. Xét hai trường hợp sau

+ Trường hợp 1: $c\ge\dfrac{21}{8}\Rightarrow 8a-21\ge8b-21\ge8c-21\ge0$.

+ Trường hợp 2: $\text{Max}\{a,b,c\}\le\dfrac{21}{8}$

Khi đó ta có: $f(a)=\dfrac{a^2}{2a^2-6a+9}=\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{3}{a}-1\right)^2}\ge\dfrac{49}{50}>\dfrac{1}{5}$

Do $f(a)$ đồng biến trên $(0,3]$ nên điều này hiển nhiên đúng.

Vậy bài toán được chứng minh. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

Bài 3. [Algebraic Inequalities – Old and New Method]

Cho $\begin{cases}a,b,c,d>0\\a+b+c+d=2\end{cases}$. Chứng minh $\dfrac{1}{3a^2+1}+\dfrac{1}{3b^2+1}+\dfrac{1}{3c^2+1}+\dfrac{1}{3d^2+1}\ge\dfrac{16}{7}$ (1)

Chứng minh

Ta cần xác định hệ số để bất đẳng thức sau là đúng $\dfrac{1}{3a^2+1}\ge\dfrac{4}{7}+m(2a-1)$

Dễ dàng tìm ra bất đẳng thức cơ sở sau $\dfrac{1}{3a^2+1}\ge\dfrac{52-48a}{49}\Leftrightarrow\dfrac{3(2a-1)^2(12a-1)}{49(3a^2+1)}\ge0$

Tương tự với các biến còn lại. Xét hai trường hợp sau đây

+ Trường hợp 1: $\min\{a,b,c,d\}\ge\dfrac{1}{12}\Rightarrow12a-1\ge12b-1\ge12c-1\ge12d-1\ge0$

+ Trường hợp 2: $d<\dfrac{1}{12}\Rightarrow1+3d^2<\dfrac{49}{48}\Rightarrow\dfrac{1}{1+3d^2}>\dfrac{48}{49}$

Xét tương tự với các biến còn lại ta tìm ra điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=d=\dfrac{1}{2}$.

Bài 4. [Algebraic Inequalities – Old and New Method]

Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $a^2+b^2+c^2\geq 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^5-a^2}{a^5+b^2+c^2}+\frac{b^5-b^2}{b^5+a^2+c^2}+\frac{c^5-c^2}{c^5+b^2+a^2}\geq 0 \quad (1)$$

Chứng minh

Bất đẳng thức (1) $\Leftrightarrow \dfrac{1}{a^5+b^2+c^2}+\dfrac{1}{b^5+a^2+c^2}+\dfrac{1}{c^5+b^2+a^2}\leq\dfrac{3}{a^2+b^2+c^2}$

Từ đây suy ra ta chỉ cần chứng minh trường hợp $a^2+b^2+c^2=3$ là đủ.

Áp dụng bất đẳng thức ***AM – GM***, ta có $\dfrac{2a^6}{a^2+1}\leq\dfrac{2a^6}{2\sqrt{a^2}}=a^5$

Đặt $a^2=x,b^2=y,c^2=z$ lúc đó ta có $x+y+z=3$ và do đó ta phải chứng minh

$$1\geq\sum_{cyc}\frac{1}{\dfrac{2x^3}{x+1}-x+3}\Leftrightarrow\sum_{cyc}\left(\frac{3-x}{6}-\frac{x+1}{2x^3-x^2+2x+3}\right)\geq 0\Leftrightarrow\sum_{cyc}\left(\frac{(x-1)^2(-2x^2+3x+3)}{6(2x^3-x^2+2x+3)}\right)\geq 0 \quad (2)$$

Không mất tính tổng quát giả sử $x\geq y\geq z\Rightarrow x\geq 1\geq z$. Xét hai trường hợp

+ Trường hợp 1: $y+z\geq 1\Rightarrow x\leq 2$

Khi đó ta có: $-2x^2+3x+3>0,-2y^2+3y+3>0,-2z^2+3z+3>0\ \Rightarrow$ (2) đúng.

+ Trường hợp 2: $y+z\leq 1\Rightarrow x\geq 2$

Khi đó ta có: $(2x^3-x^2+2x+3)-5(x+1)=2x^3-x^2-3x-2$

$$=x^3\left(2-\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}-\frac{2}{x^3}\right)\geq x^3\left(2-\frac{1}{2}-\frac{3}{2^2}-\frac{2}{2^3}\right)=\frac{x^3}{2}>0\Rightarrow\frac{x+1}{2x^3-x^2+2x+3}\leq\frac{1}{5}$$

Như vậy ta cần chứng minh: $\dfrac{z+1}{2z^3-z^2+2z+3}+\dfrac{y+1}{2y^3-y^2+2y+3}\leq\dfrac{4}{5}$

Ta sẽ chứng minh $\dfrac{k+1}{2k^3-k^2+2k+3}\leq\dfrac{2}{5}\ \forall k\in[0,1]\ \Leftrightarrow 4k^3\geq(k+1)(2k-1)\ \forall k\in[0,1]$

Nếu $k\leq\dfrac{1}{2}$ thì hiển nhiên bất đẳng thức đúng nên (2) đúng suy ra (đpcm).

Nếu $k\geq\dfrac{1}{2}$ thì

$$4k^3-(k+1)(2k-1)\geq 4k^3-2(2k-1)=2(2k^3-2k+1)\geq 2(k^2-2k+1)=2(k-1)^2\geq 0$$

Từ $y+z\le 1\Rightarrow y,z\in[0,1]\Rightarrow \frac{z+1}{2z^3-z^2+2z+3}\le\frac{2}{5};\frac{y+1}{2y^3-y^2+2y+3}\le\frac{2}{5}\Rightarrow$ (2) đúng.

Vậy bài toán được giải quyết hoàn toàn. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$.

Nhận xét. Đây là một kết quả mạnh hơn cho bài toán 3 trong kì thi IMO 2005 của tác giả ***Vasile Cirtoaje***. Bài toán gốc ban đầu là với điều kiện $abc\ge 1$. Điều kiện của bài toán trên chặt hơn vì theo bất đẳng thức ***AM – GM*** ta có

$$a^2+b^2+c^2\ge 3\Rightarrow 3\cdot\sqrt[3]{(abc)^2}\ge 3\Rightarrow abc\ge 1$$

Chúng ta hãy đến với lời giải của chính tác giả bài toán trên, được trích từ quyển *Algebraic Inequalities, Old and New Method*. Ta qui về việc chứng minh bài toán sau:

Bài 5. Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=3$. Chứng minh

$$\frac{1}{a^5+3-a^2}+\frac{1}{b^5+3-b^2}+\frac{1}{c^5+3-c^2}\le 1$$

Chứng minh

Không mất tính tổng quát, ta giả sử $a\ge b\ge c\ge 0$. Xét hai trường hợp sau

+ Trường hợp 1: $a\le\sqrt{2}\Rightarrow a,b\le\sqrt{2}$. Ta sử dụng các bất đẳng thức cơ sở sau

$$\frac{1}{a^5+3-a^2}\le\frac{3-a^2}{6},\frac{1}{b^5+3-b^2}\le\frac{3-b^2}{6},\frac{1}{c^5+3-c^2}\le\frac{3-c^2}{6}$$

Thật vậy xét biến đổi $\frac{1}{a^5+3-a^2}-\frac{3-a^2}{6}=\frac{(a-1)^2(a^5+2a^4-3a^2-6a-3)}{6(a^5+3-a^2)}$,

và đánh giá $a^5+2a^4-3a^2-6a-3=a^2\left(a^3+2a^2-3-\frac{6}{a}-\frac{3}{a^2}\right)$

$\le a^2\left(2\sqrt{2}+4-3-3\sqrt{2}-\frac{3}{2}\right)=-a^2\left(\frac{1}{2}+\sqrt{2}\right)<0$

+ Trường hợp 2: $a>\sqrt{2},a^2+b^2+c^2=3\Rightarrow b^2+c^2<1$

Khi đó ta có: $\frac{1}{a^5+3-a^2}+\frac{1}{b^5+3-b^2}+\frac{1}{c^5+3-c^2}<\frac{1}{a^5+3-a^2}+\frac{1}{3-b^2}+\frac{1}{3-c^2}$

Mặt khác $\frac{1}{a^5+3-a^2}<\frac{1}{2\sqrt{2}a^2+3-a^2}=\frac{1}{\left(2\sqrt{2}-1\right)a^2+3}<\frac{1}{\left(2\sqrt{2}-1\right)2+3}<\frac{1}{6}$

Như vậy bài toán sẽ được giải quyết nếu ta chứng minh được $\frac{1}{3-b^2}+\frac{1}{3-c^2}\le\frac{5}{6}$

Thật vậy ta có $\frac{1}{3-b^2}+\frac{1}{3-c^2}-\frac{5}{6}=\frac{9(b^2+c^2-1)-5b^2c^2}{6(3-b^2)(3-c^2)}\le 0$

Như vậy bài toán được giải quyết. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$.

Nhận xét. Lời giải của tác giả Vasile Cirtoaje ngay từ đầu cũng đã sử dụng **U.C.T** nhưng nó lại đưa ta đến cách xét trường hợp khá lẻ vì phải so sánh biến với $\sqrt{2}$. Đây là một bài toán đẹp với nhiều mở rộng thú vị.

Bài 6. Tìm hằng số k tốt nhất để bất đẳng thức đúng với mọi $a,b,c\ge 0$

$$\sqrt{\frac{a^3}{ka^2+(b+c)^2}}+\sqrt{\frac{b^3}{kb^2+(c+a)^2}}+\sqrt{\frac{c^3}{kc^2+(a+b)^2}}\le\sqrt{\frac{3(a+b+c)}{k+4}}$$

Giải

Cho $a=b=1, c=0$ ta được $k\ge 5$. Ta sẽ chứng minh 5 chính là giá trị cần tìm,

tức là chứng minh: $\sqrt{\frac{a^3}{5a^2+(b+c)^2}}+\sqrt{\frac{b^3}{5b^2+(c+a)^2}}+\sqrt{\frac{c^3}{5c^2+(a+b)^2}}\le\sqrt{\frac{(a+b+c)}{3}}$ (1)

Sử dụng bất đẳng thức ***CBS***, ta có:

$$\left(\sum_{cyc}\sqrt{\frac{a^3}{5a^2+(b+c)^2}}\right)^2\le(a+b+c)\sum_{cyc}\frac{a^2}{5a^2+(b+c)^2},$$

ta chứng minh: $\sum_{cyc}\frac{a^2}{5a^2+(b+c)^2}\le\frac{1}{3}$ (2)

Không mất tính tổng quát chuẩn hóa $a+b+c=1$ và $a\ge b\ge c\ge 0$ suy ra $a\ge\frac{1}{3}\ge c\ge 0$.

Bất đẳng thức (2) $\Leftrightarrow \frac{a^2}{6a^2-2a+1}+\frac{b^2}{6b^2-2b+1}+\frac{c^2}{6c^2-2c+1}\le\frac{1}{3}$.

Ta phải xét hai trường hợp:

+ TH1: $c\ge\frac{1}{8}$ ta có $9-\sum_{cyc}\frac{27a^2}{6a^2-2a+1}=\sum_{cyc}\left(12a-1-\frac{27a^2}{6a^2-2a+1}\right)=\sum_{cyc}\frac{(3a-1)^2(8a-1)}{6a^2-2a+1}\ge 0$

+ TH 2: $c\le\frac{1}{8}$ ta có: $\frac{6a^2}{6a^2-2a+1}+\frac{6b^2}{6b^2-2b+1}+\frac{6c^2}{6c^2-2c+1}-2$

$$=\frac{2a-1}{6a^2-2a+1}+\frac{2b-1}{6b^2-2b+1}+\frac{6c^2}{6c^2-2c+1}=\frac{a-b-c}{6a^2-2a+1}+\frac{b-c-a}{6b^2-2b+1}+\frac{6c^2}{6c^2-2c+1}$$

$$=\frac{2(a-b)^2(3c-2)}{(6a^2-2a+1)(6b^2-2b+1)}+c\left(\frac{6c}{6c^2-2c+1}-\frac{1}{6a^2-2a+1}-\frac{1}{6b^2-2b+1}\right)$$

Ta cần chứng minh: $\dfrac{6c}{6c^2-2c+1} \le \dfrac{1}{6a^2-2a+1} + \dfrac{1}{6b^2-2b+1}$

Vì $c \le \dfrac{1}{8}$ nên $\dfrac{6c}{6c^2-2c+1} \le 1$ vậy ta sẽ chứng minh $1 \le \dfrac{1}{6a^2-2a+1} + \dfrac{1}{6b^2-2b+1}$

Nếu $b \le \dfrac{1}{3}$ thì $1 \le \dfrac{1}{6b^2-2b+1}$ nên bất đẳng thức được chứng minh

Nếu $b \ge \dfrac{1}{3}$ thì áp dụng bất đẳng thức ***CBS***, ta chỉ cần chứng minh

$$4 \ge 6(a^2+b^2) - 2(a+b) + 2 \Leftrightarrow \left[2(a+b)+c\right](a+b+c) \ge 3\left(a^2+b^2\right)$$

Từ giả thiết $b \ge \dfrac{1}{3} \Rightarrow 3b \ge a$, do đó: $\left[2(a+b)+c\right](a+b+c) \ge 2(a+b)^2$

$$= 3(a^2+b^2) + 4ab - a^2 + b^2 \ge 3(a^2+b^2) + a(3b-a) \ge 3(a^2+b^2) \Rightarrow \text{(đpcm)}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$ hoặc $a=b, c=0$ và các hoán vị.

Vậy hằng số k tốt nhất là 5.

Bài 7. Cho $\begin{cases} a,b,c>0 \\ a+b+c=3 \end{cases}$. Chứng minh $\dfrac{1}{\sqrt{a^2-3a+3}} + \dfrac{1}{\sqrt{b^2-3b+3}} + \dfrac{1}{\sqrt{c^2-3c+3}} \le 3 \quad (1)$

Chứng minh

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \ge b \ge c > 0$.

Để ý rằng $\dfrac{2}{\sqrt{x^2-3x+3}} \le x+1 \ \ \forall x \ge \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ (2)

Thật vậy, $(2) \Leftrightarrow (x+1)\sqrt{x^2-3x+3} \ge 2 \Leftrightarrow (x-1)^2(x^2+x-1) \ge 0$ (đúng)

Suy ra: Nếu $a \ge b \ge c \ge \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ thì sử dụng bất đẳng thức (2) ta có (1) được chứng minh.

Xét $0 < c \le \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$. Khi đó, có hai khả năng sau xảy ra:

+ Nếu $b \le 1$, ta có: $a^2-3a+3 = \left(a-\dfrac{3}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4} \ge \dfrac{3}{4}$; $b^2-3b+3 = (b-1)^2 - b + 2 \ge 1$

$$c^2-3c+3 = (1-c)^2 - c + 2 \ge \left(1-\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 - \frac{\sqrt{5}-1}{2} + 2 = \frac{16}{\left(\sqrt{5}+1\right)^2}$$

Do đó: $VT(1) \le \dfrac{2}{\sqrt{3}} + \dfrac{\sqrt{5}+1}{4} + 1 < 3$

+ Nếu $b \geq 1$, suy ra $2 \geq a \geq b \geq 1$. Xét hàm số $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 3x + 3}}$ với $1 \leq x \leq 2$

Ta có: $f''(x) = \dfrac{8x^2 - 24x + 15}{4(x^2 - 3x + 3)^{5/2}} < 0 \Rightarrow f(x)$ là hàm lõm.

Do đó theo bất đẳng thức ***Jensen*** ta có: $f(a) + f(b) \leq 2f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) = 2f(t) = \dfrac{2}{\sqrt{t^2 - 3t + 3}}$

Ta phải chứng minh: $\dfrac{2}{\sqrt{t^2 - 3t + 3}} + \dfrac{1}{\sqrt{(3-2t)^2 - 3(3-2t) + 3}} \leq 3 \Leftrightarrow \dfrac{2}{\sqrt{t^2 - 3t + 3}} + \dfrac{1}{\sqrt{4t^2 - 6t + 3}} \leq 3$

$$\Leftrightarrow \frac{36(t-1)^2(36t^6 - 252t^5 + 749t^4 - 1202t^3 + 1099t^2 - 546t + 117)}{(t^2 - 3t + 3)^2(4t^2 - 6t + 3)^2} \geq 0 \quad (3)$$

Có thể kiểm tra (3) đúng nên (1) đúng.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Bài 8. [Mở rộng từ Poland 1996]

Cho $a, b, c \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng $\dfrac{a}{a^2+1} + \dfrac{b}{b^2+1} + \dfrac{c}{c^2+1} \leq \dfrac{9}{10}$

Chứng minh

Không mất tính tổng quát giả sử $a \geq b \geq c \Rightarrow a \geq \dfrac{1}{3} \geq c$. Xét hai trường hợp sau:

+ Trường hợp 1: $c \geq -\dfrac{3}{4}$ ta có

$$\frac{9}{10} - \left(\frac{a}{a^2+1} + \frac{b}{b^2+1} + \frac{c}{c^2+1}\right) = \sum_{cyc}\left(\frac{18a}{25} + \frac{5}{30} - \frac{a}{a^2+1}\right) = \sum_{cyc}\frac{(3a-1)^2(4a+3)}{50(a^2+1)} \geq 0$$

+ Trường hợp 2: $c \leq -\dfrac{3}{4}$. Áp dụng bất đẳng thức ***AM – GM***, ta có $\dfrac{a}{a^2+1} + \dfrac{b}{b^2+1} \leq 1$

Khi đó nếu $\dfrac{c}{c^2+1} \leq -\dfrac{9}{10} \Leftrightarrow -5 - 2\sqrt{6} \leq c \leq -\dfrac{3}{4}$ ta có ngay điều phải chứng minh.

Xét trường hợp: $-5 - 2\sqrt{6} \geq c$ khi đó ta có $3 + \sqrt{6} \leq a \Rightarrow \dfrac{a}{a^2+1} \leq \dfrac{1}{5}$. Từ đây suy ra:

$$\frac{a}{a^2+1} + \frac{b}{b^2+1} + \frac{c}{c^2+1} \leq \frac{a}{a^2+1} + \frac{b}{b^2+1} \leq \frac{1}{5} + \frac{1}{2} = \frac{7}{10} < \frac{9}{10}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = \dfrac{1}{3}$.

IV. KẾT HỢP BẤT ĐẲNG THỨC VORNICU SCHUR VỚI U.C.T

Trong chương II chúng tôi đã giới thiệu bất đẳng thức Schur mở rộng và các ứng dụng. Bây giờ chúng ta sẽ thấy sự kết hợp giữa **Vornicu Schur** với **U.C.T** sẽ tạo ra những lời giải khá ấn tượng và đẹp mắt. Trước hết chúng ta hãy nhắc lại bất đẳng thức **Vornicu Schur**.

1. Bất đẳng thức Vornicu Schur: Cho $a \ge b \ge c$ và $A, B, C \ge 0$ khi đó bất đẳng thức

$A(a-b)(a-c)+B(b-c)(b-a)+C(c-a)(c-b) \ge 0$ là đúng khi và chỉ khi

i. $A \ge B$ hoặc $C \ge B$

ii. $A \times a \ge B \times b$

iii. $B \times c \ge C \times b$ (Nếu a, b, c là ba cạnh của một tam giác)

iv. $\sqrt{A}+\sqrt{C} \ge \sqrt{B}$

2. Hai dạng biến đổi chính tắc và các ứng dụng của dạng 2

Dạng 1. $A(a-b)^2+B(b-c)^2+C(c-a)^2 \ge 0$

$$A(a-b)^2+B(b-c)^2+C(c-a)^2 = A(a-b)(a-c+c-b)+B(b-c)(b-a+a-c)+C(c-a)(c-b+b-a)$$
$$=\sum_{cyc} A(a-b)(a-c)+\sum_{cyc} A(b-c)(b-a)=\sum_{cyc}(A+B)(b-c)(b-a)$$

Dạng 2. $A(2a-b-c)^2+B(2b-c-a)^2+C(2c-a-b)^2 \ge 0$

$$A(2a-b-c)^2+B(2b-c-a)^2+C(2c-a-b)^2 =$$

$$=2\sum_{cyc} A(a-b)(a-c)+\sum_{cyc} A(a-b)^2+\sum_{cyc} A(c-a)^2=2\sum_{cyc} A(a-b)(a-c)+\sum_{cyc}(A+B)(a-b)^2$$

$$=2\sum_{cyc} A(a-b)(a-c)+\sum_{cyc}(2A+B+C)(a-b)(a-c)=\sum_{cyc}(4A+B+C)(a-b)(a-c)$$

Dạng 1 là dạng phân tích chính tắc của phương pháp S.O.S một phương pháp đã lấy làm quen thuộc với nhiều người. Từ phép phân tích trên ta có thể thấy rằng mối liên hệ giữa phương pháp S.O.S và bất đẳng thức Vornicu Schur là rất mật thiết. Tuy nhiên trong bài viết này chúng ta sẽ không đề cập vấn đề này mà chúng ta sẽ chỉ xem xét dạng 2 ở trên. Vì tính ứng dụng của nó trong **U.C.T** là nhiều hơn và nó cũng là một sự kết hợp mang nhiều ý nghĩa.

Bây giờ hãy mở đầu bằng một bài toán trông có vẻ đơn giản nhưng cũng không quá dễ để tìm ra lời giải nếu không chọn đúng đường đi.

Bài 1. Cho $\begin{cases} a,b,c \ge 0 \\ a+b+c=3 \end{cases}$. Chứng minh $3(a^4+b^4+c^4)+a^2+b^2+c^2+6 \ge 6(a^3+b^3+c^3)$

Chứng minh

Theo **U.C.T** dễ dàng tìm ra bất đẳng thức cơ sở sau

$$3a^4+a^2+2 \ge 6a^3-4a+4 \Leftrightarrow (a-1)^2(3a^2-2) \ge 0$$

Ta qui bài toán về chứng minh $\sum_{cyc}(a-1)^2(3a^2-2) \ge 0$

Thật vậy $\sum_{cyc}(a-1)^2(3a^2-2) \ge 0 \Leftrightarrow \sum_{cyc}(3a-3)^2(3a^2-2) \ge 0$

$\Leftrightarrow \sum_{cyc}(3a-a-b-c)^2(3a^2-2) \ge 0 \Leftrightarrow \sum_{cyc}(2a-b-c)^2(3a^2-2) \ge 0$

$\Leftrightarrow \sum_{cyc}(4a^2+b^2+c^2-4)(a-b)(a-c) \ge 0$

Không mất tính tổng quát giả sử $a \ge b \ge c$ khi đó ta có

$$4a^2+b^2+c^2-4 \ge 4b^2+a^2+c^2-4 \ge 4c^2+b^2+a^2-4$$

Lại có $4c^2+a^2+b^2-4 \ge 4c^2+\dfrac{(a+b)^2}{2}-4 = 4c^2+\dfrac{(3-c)^2}{2}-4 = \dfrac{(3c-1)^2}{2} \ge 0$

Theo định lí 1 ta có (đpcm).

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ $a=b=c=1$ hoặc $(a,b,c)=\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3},\frac{1}{3}\right)$.

Nhận xét: Bài toán sẽ được giải quyết trong trường hợp $3a^2-2 \ge 0 \Leftrightarrow a \ge \sqrt{\frac{2}{3}}$. Trường hợp còn lại $a \le \sqrt{\frac{2}{3}}$ rõ ràng sẽ khó giải quyết vì vế phải của điều kiện trong trường hợp 2 khá lẻ, nhiều khả năng sẽ dẫn đến những tính toán phức tạp không cần thiết. Tuy nhiên cần chú ý một điều là đẳng thức của bài toán này xảy ra tại hai điểm cực trị vì vậy không thể áp dụng mỗi **U.C.T** vì dạng phát biểu của kỹ thuật này sẽ cho ta duy nhất một điểm cực trị cần tìm. Như vậy việc kết hợp giữa **U.C.T** và bất đẳng thức Vornicu Schur không đơn thuần là giải quyết bài toán một cách đẹp mắt mà còn hướng ta đến việc giải quyết trường hợp đẳng thức xảy ra khi có hai biến bằng nhau và khác biến còn lại.

Bài 2. Cho $\begin{cases} a,b,c > 0 \\ a+b+c=3 \end{cases}$. Chứng minh rằng $2(a^3+b^3+c^3)+9 \ge 5(a^2+b^2+c^2)$ (1)

Chứng minh

Ta cần xác định hệ số m cho bất đẳng thức cơ sở sau: $2a^3+3\ge 5a^2+m(a-1)$

$\Leftrightarrow (a-1)(2a^2-3a-3)\ge m(a-1)$. Với $a=1$ thì $2a^2-3a-3=-4$ nên chọn $m=-4$.

Bất đẳng thức $2a^3+3\ge 5a^2-4a+4 \Leftrightarrow (a-1)^2(2a-1)\ge 0$

Tương tự với các biến b, c ta suy ra:

Bất đẳng thức $(1)\Leftrightarrow (a-1)^2(2a-1)+(b-1)^2(2b-1)+(c-1)^2(2c-1)\ge 0$

$\Leftrightarrow (2a-b-c)^2(2a-1)+(2b-c-a)^2(2b-1)+(2c-a-b)^2(2c-1)\ge 0$

$\Leftrightarrow 6a(a-b)(a-c)+6b(b-c)(b-a)+6c(c-a)(c-b)\ge 0$

Không mất tính tổng quát giả sử $a\ge b\ge c$.

Khi đó theo bất đẳng thức ***Vornicu Schur*** ta có điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$ hoặc $a=0, b=c=\frac{3}{2}$ cùng các hoán vị.

Nhận xét. Lại một bài toán đơn giản nhưng điều thú vị ở bài toán này là đẳng thức đạt được tại 2 điểm. Nếu như giải một cách thông thường bằng **U.C.T** thì không thể giải quyết bài toán một cách triệt để và một lần nữa bất đẳng thức Vornicu Schur lại phát huy tác dụng của nó.

Bài 3. [Romania TST 2006]

Cho $\begin{cases} a,b,c>0 \\ a+b+c=3 \end{cases}$. Chứng minh rằng $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\ge a^2+b^2+c^2$ (1)

Chứng minh

Theo **U.C.T** dễ dàng tìm ra bất đẳng thức cơ sở sau $\frac{1}{a^2}+4a\ge a^2+4$. Khi đó

$$(1)\Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{(a-1)^2(1+2a-a^2)}{a^2}\ge 0\Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{(2a-b-c)^2(1+2a-a^2)}{a^2}\ge 0\Leftrightarrow \sum_{cyc}(4A+B+C)(a-b)(a-c)\ge 0$$

Trong đó $A=\frac{1+2a-a^2}{a^2}, B=\frac{1+2b-b^2}{b^2}, C=\frac{1+2c-c^2}{c^2}$. Không mất tính tổng quát giả sử $a\ge b\ge c$ khi đó ta có $A-B=\frac{1+2b-b^2}{b^2}-\frac{1+2a-a^2}{a^2}=\frac{(a-b)(2ab+a+b)}{a^2b^2}\ge 0$

Từ đó suy ra $4C+A+B\ge 4B+A+C\ge 4A+B+C$

Áp dụng bất đẳng thức ***AM – GM*** ta có: $3=a+b+c\ge 3\cdot\sqrt[3]{abc}\Leftrightarrow 1\ge\sqrt[3]{abc}$

$\Rightarrow \frac{3}{\sqrt[3]{abc}} \ge 3$. Do đó $4A+B+C=\frac{4}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{8}{a}+\frac{2}{b}+\frac{2}{c}-6=$

$$=\left(\frac{4}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{6}{a}\right)+2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-3\right)\ge 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-3\right)\ge 2\left(\frac{3}{\sqrt[3]{abc}}-3\right)\ge 2(3-3)=0$$

Theo định lí 1 ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$

Bài 4. Cho $\begin{cases} a,b,c>0 \\ a+b+c=3 \end{cases}$. Chứng minh rằng $\frac{a^5+b^5+c^5-3}{a^3+b^3+c^3-3} \ge \frac{5(5\sqrt{3}-7)}{\sqrt{3}+1}$ (1)

Chứng minh

$$(1) \Leftrightarrow \sum_{cyc}\left(a^5-\frac{5(5\sqrt{3}-7)}{\sqrt{3}+1}a^3+\frac{24\sqrt{3}-36}{\sqrt{3}+1}\right)\ge 0 \Leftrightarrow \sum_{cyc}(a-1)^2\left(a^3+2a^2+\frac{38-22\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}a+\frac{2(37-23\sqrt{3})}{\sqrt{3}+1}\right)\ge 0$$

$\Leftrightarrow \sum_{cyc}(4M_a+M_b+M_c)(a-b)(a-c)\ge 0$, trong đó

$$M_a=a^3+2a^2+\frac{38-22\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}a+\frac{2(37-23\sqrt{3})}{\sqrt{3}+1}$$

$$M_b=b^3+2b^2+\frac{38-22\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}b+\frac{2(37-23\sqrt{3})}{\sqrt{3}+1};\ M_c=c^3+2c^2+\frac{38-22\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}c+\frac{2(37-23\sqrt{3})}{\sqrt{3}+1}$$

Ta có $4M_a+M_b+M_c=4a^3+b^3+c^3+2(4a^2+b^2+c^2)+\frac{3(38-22\sqrt{3})}{\sqrt{3}+1}a+\frac{9(62-38\sqrt{3})}{\sqrt{3}+1}\ge$

$$\ge 4a^3+\frac{(b+c)^3}{3}+8a^2+(b+c)^2+\frac{3(38-22\sqrt{3})}{\sqrt{3}+1}a+\frac{9(62-38\sqrt{3})}{\sqrt{3}+1}\ge$$

$$4a^3+\frac{(3-a)^3}{3}+8a^2+(3-a)^2+\frac{3(38-22\sqrt{3})}{\sqrt{3}+1}a+\frac{9(62-38\sqrt{3})}{\sqrt{3}+1}=\frac{15(a+3-2\sqrt{3})^2(a+4\sqrt{3}-3)}{4}\ge 0.$$

Tương tự, ta có: $4M_b+M_c+M_a\ge 0$, $4M_c+M_a+M_b\ge 0$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a\ge b\ge c\ge 0 \Rightarrow a+b\ge 2$.

Ta có: $(4M_a+M_b+M_c)-(4M_b+M_c+M_a)=3(M_a-M_b)$

$$=3(a^3-b^3)+6(a-b)\left(a+b+\frac{19-11\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}\right)\ge 3(a^3-b^3)+6(a-b)\left(2+\frac{19-11\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}\right)\ge 0$$

Do đó: $\sum_{cyc}(4M_a+M_b+M_c)(a-b)(a-c)$

$$=(a-b)\left[(a-c)(4M_a+M_b+M_c)-(b-c)(4M_b+M_c+M_a)\right]+(4M_c+M_a+M_b)(a-c)(b-c)\ge 0$$

V. MỘT DẠNG BIỂU DIỄN THÚ VỊ

Chúng ta sẽ bắt đầu từ một đẳng thức và sẽ thấy sự phát triển thú vị từ nó

$$1=\frac{a^k+b^k+c^k}{a^k+b^k+c^k}=\frac{a^k}{a^k+b^k+c^k}+\frac{b^k}{a^k+b^k+c^k}+\frac{c^k}{a^k+b^k+c^k}$$

Đẳng thức này trông đơn giản nhưng lại đóng vai trò quan trọng trong việc chứng minh một lớp bất đẳng thức mà không thể sử dụng được kỹ thuật xác định hệ số khi xuất hiện lũy thừa bậc p. Nếu chỉ sử dụng những biến đổi thông thường thì sẽ phức tạp, vì vậy chúng ta sẽ sử dụng đạo hàm với hai định lý cơ bản sau đây:

1. Định lí Fermat.

Giả sử hàm số $f(x)$ xác định trên $[a,b]$ và có cực trị địa phương tại $x_0\in[a,b]$. Khi đó nếu f có đạo hàm tại x_0 thì $f'(x_0)=0$

2. Định lí Roll. Giả sử $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ liên tục và khả vi trong khoảng (a,b). Khi đó nếu tồn tại $x_1,x_2\in(a,b)$ sao cho $f(x_1)=f(x_2)$ thì tồn tại $x_0\in(x_1,x_2)$ sao cho $f'(x_0)=0$

Bài 1. Tìm hằng số $k>0$ tốt nhất để bất đẳng thức sau đúng với mọi $a,b,c>0$:

$$\frac{a}{\sqrt{ka^2+(b+c)^2}}+\frac{b}{\sqrt{kb^2+(c+a)^2}}+\frac{c}{\sqrt{kc^2+(a+b)^2}}\ge\frac{3}{\sqrt{k+4}}$$

Giải

Cho $a=1,b=c=0$ ta có $k\le\frac{1}{2}$. Ta sẽ chứng minh $k=\frac{1}{2}$ là giá trị tốt nhất để bất đẳng thức là đúng. Thật vậy khi $k=\frac{1}{2}$ thì bất đẳng thức trở thành

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+2(b+c)^2}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+2(c+a)^2}}+\frac{c}{\sqrt{kc^2+(a+b)^2}}\ge1$$

Ta sẽ phải xác định hệ số k sao cho $\frac{a}{\sqrt{a^2+2(b+c)^2}}\ge\frac{a^k}{a^k+b^k+c^k}$

Ở đây ta chuẩn hóa $b=c=1$ để việc việc xác định hệ số được đơn giản hơn.

Khi đó ta cần xác định hệ số k sao cho $\frac{a}{\sqrt{a^2+8}}\ge\frac{a^k}{a^k+2}\Leftrightarrow a^{k+2}-2a^{2k}+a^2\ge0$

Đặt $f(a)=a^{k+2}-2a^{2k}+a^2$. Ta có $f(a)\ge0, f(1)=0$ nên theo định lí Fermat ta có $f'(1)=0$. Do $f'(a)=(k+2)a^{k+1}-4ka^{2k-1}+2a$ nên $f'(1)=(k+2)-4k+2=0\Leftrightarrow k=\frac{4}{3}$.

Như vậy ta sẽ dự đoán bất đẳng thức sau là đúng $\frac{a}{\sqrt{a^2+2(b+c)^2}}\ge\frac{\sqrt[3]{a^4}}{\sqrt[3]{a^4}+\sqrt[3]{b^4}+\sqrt[3]{c^4}}$

Sau khi đã hoàn thành xong bước dự đoán chúng ta có nhiều con đường để lựa chọn. Thông thường thì phép biến đổi tương đương luôn mang lại hiệu quả nếu bất đẳng thức cơ sở là đúng. Tuy nhiên bất đẳng thức cơ sở trên chỉ là phỏng đoán logic, nên có thể nó sẽ không đúng. Ngoài ra, một số bài toán khi biến đổi tương đương gặp khó khăn thì nên "tùy cơ ứng biến" cho các tình huống cụ thể. Chúng ta tiếp tục quay lại bài toán trên với phép chứng minh cho bất đẳng thức cơ sở.

Theo bất đẳng thức ***Holder*** ta có

$$(1+1)^{\frac{1}{4}}\left(b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{3}{4}} \ge b+c \Leftrightarrow 2^{\frac{1}{4}}\left(\sqrt[3]{b^4}+\sqrt[3]{c^4}\right)^{\frac{3}{4}} \ge b+c \Leftrightarrow \sqrt[3]{b^4}+\sqrt[3]{c^4} \ge 2\sqrt[3]{\left(\frac{b+c}{2}\right)^4}.$$

Đặt $t=\frac{b+c}{2}$ thì ta phải chứng minh

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8t^2}} \ge \frac{\sqrt[3]{a^4}}{\sqrt[3]{a^4}+2\sqrt[3]{t^4}} \Leftrightarrow \sqrt[3]{a^4}+2\sqrt[3]{t^4} \ge \sqrt[3]{a}\sqrt{a^2+8t^2} \Leftrightarrow 4\sqrt[3]{t^4}(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{t^2})^2 \ge 0, \text{ đúng}$$

(đpcm). Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ $a=b=c$ hoặc $a=t>0, b=c=0$ và các hoán vị.

Nhận xét: Có thể tìm hệ số k bằng cách sử dụng bất đẳng thức ***AM – GM*** như sau

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8}} \ge \frac{a^k}{a^k+2} \Leftrightarrow a^{k+2}-2a^{2k}+a^2 \ge 0 \Leftrightarrow a^{k+2}+a^2 \ge 2a^{2k}$$

Mặt khác theo bất đẳng thức ***AM – GM*** thì $a^{k+2}+a^2 \ge 2\sqrt{a^{k+4}}$.

Như vậy ta có cần xác định k sao cho $2\sqrt{a^{k+4}}=2a^{2k} \Leftrightarrow a^{k+4}=a^{4k} \Leftrightarrow k+4=4k \Leftrightarrow k=\frac{4}{3}$

Bài 2. [IMO 2001] Chứng minh $\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \ge 1, \forall a,b,c>0$ (1)

Chứng minh

Tương tự như trên ta xây dựng được bất đẳng thức cơ sở:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} \ge \frac{a^{4/3}}{a^{4/3}+b^{4/3}+c^{4/3}} \quad (2)$$

Thật vậy (2) $\Leftrightarrow a^{4/3}+b^{4/3}+c^{4/3} \ge a^{1/3}\sqrt{a^2+8bc}$.

Sử dụng bất đẳng thức ***AM – GM***, ta có: $b^{4/3}+c^{4/3} \ge 2b^{2/3}c^{2/3}=2t^{4/3}$, trong đó $t=\sqrt{bc}$

Ta cần chứng minh: $a^{4/3}+2t^{4/3} \ge a^{1/3}\sqrt{a^2+8t^2} \Leftrightarrow 4t^{4/3}\left(a^{2/3}-t^{2/3}\right)^2 \ge 0$ (đúng)

Như vậy bất đẳng thức (2) được chứng minh. Sử dụng tương tự cho b, c rồi cộng lại

ta có $\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{a^2+8ab}} \ge \frac{a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}}=1$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$ hoặc $b\to 0, c\to 0$.

Bài 3. Cho a,b,c là các số thực không âm. Chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{a^3}{a^3+(b+c)^3}}+\sqrt{\frac{b^3}{b^3+(c+a)^3}}+\sqrt{\frac{c^3}{c^3+(a+b)^3}}\geq 1$$

Chứng minh

Xây dựng được bất đẳng thức cơ sở: $\sqrt{\frac{a^3}{a^3+(b+c)^3}}\geq\frac{a^2}{a^2+b^2+c^2}$ (*)

Có thể chứng minh bất đẳng thức cơ sở này trên theo nhiều cách:

Cách 1: Ta có: (*) $\Leftrightarrow 2a^2\left(b^2+c^2\right)+\left(b^2+c^2\right)^2\geq a(b+c)^3$. Thật vậy ta có

$$2a^2\left(b^2+c^2\right)+\left(b^2+c^2\right)^2\geq a^2(b+c)^2+\frac{(b+c)^4}{4}\geq 2\sqrt{\frac{a^2(b+c)^6}{4}}=a(b+c)^3$$

Cách 2: Theo bất đẳng thức $AM-GM$ ta có:

$$\sqrt{1+k^3}=\sqrt{(1+k)(1-k+k^2)}\leq\frac{(1+k)+(1-k+k^2)}{2}=1+\frac{k^2}{2}$$

Áp dụng bất đẳng thức cơ sở trên ta có:

$$\sqrt{\frac{a^3}{a^3+(b+c)^3}}=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{b+c}{a}\right)^3}}\geq\frac{1}{1+\frac{1}{2}\left(\frac{b+c}{a}\right)^2}\geq\frac{1}{1+\frac{b^2+c^2}{a^2}}=\frac{a^2}{a^2+b^2+c^2}$$

Áp dụng tương tự với các biến còn lại. Cộng vế theo vế ta có có điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi ba biến bằng nhau hoặc có hai biến dần về 0.

Bài 4. Chứng minh $\frac{a^3}{a^3+(b+c)^3}+\frac{b^3}{b^3+(c+a)^3}+\frac{c^3}{c^3+(a+b)^3}\geq\frac{1}{3}$, $\forall a,b,c>0$

Chứng minh

Sử dụng bất đẳng thức ***CBS***, ta có:

$$\frac{a^3}{a^3+(b+c)^3}+\frac{b^3}{b^3+(c+a)^3}+\frac{c^3}{c^3+(a+b)^3}\geq\frac{1}{3}\left(\sqrt{\frac{a^3}{a^3+(b+c)^3}}+\sqrt{\frac{b^3}{b^3+(c+a)^3}}+\sqrt{\frac{c^3}{c^3+(a+b)^3}}\right)^2$$

Theo bài 3 ta có $\sqrt{\frac{a^3}{a^3+(b+c)^3}}+\sqrt{\frac{b^3}{b^3+(c+a)^3}}+\sqrt{\frac{c^3}{c^3+(a+b)^3}}\geq 1$.

Từ đó suy ra bất đẳng thức được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

VI. CÁC BÀI TOÁN VỚI ĐIỀU KIỆN CHỨA CẤU TRÚC NHÂN

Ở trên ta đã xét kĩ thuật **U.C.T.** với điều kiện cho trước $a_1^k + a_2^k + ... + a_{n-1}^k + a_n^k = n$. Bây giờ chúng ta sẽ xét kĩ thuật **U.C.T.** với dạng điều kiện $\prod_{i=1}^{n} a_i^k = C$. Khi đó việc tìm ra bất đẳng thức cơ sở khá khó khăn vì ta không thể đánh giá theo từng biến được nữa. Lúc này muốn áp dụng **U.C.T** chúng ta phải dùng đến một số tính chất của hàm số.

Bài 1. Cho $\begin{cases} a,b,c>0 \\ abc=1 \end{cases}$. Chứng minh rằng $\dfrac{a\sqrt{b+c}}{b+c+1} + \dfrac{b\sqrt{c+a}}{c+a+1} + \dfrac{c\sqrt{a+b}}{a+b+1} \ge \sqrt{2}$

Chứng minh

Áp dụng bất đẳng thức ***Holder*** ta có:

$$\left(\frac{a\sqrt{b+c}}{b+c+1} + \frac{b\sqrt{c+a}}{c+a+1} + \frac{c\sqrt{a+b}}{a+b+1}\right)^2 \left(\sum_{cyc} \frac{a(b+c+1)^2}{b+c}\right) \ge (a+b+c)^3$$

Do đó ta cần phải chứng minh: $(a+b+c)^3 \ge 2\sum_{cyc} \dfrac{a(b+c+1)^2}{b+c}$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} a^3 + 3\sum_{cyc}\frac{a}{b} + 3\sum_{cyc}\frac{b}{a} + 6 \ge 4\sum_{cyc} ab + 4\sum_{cyc} a + 2\sum_{cyc}\frac{a}{b+c}$$

Áp dụng bất đẳng thức ***AM – GM*** ta có:

$$\sum_{cyc}\frac{a}{b} \ge \sum_{cyc} ab \ ; \ \sum_{cyc}\frac{b}{a} \ge \sum_{cyc} ab \ ; \ 2\sum_{cyc}\frac{a}{b+c} \le \frac{1}{2}\sum_{cyc}\frac{a}{b} + \frac{1}{2}\sum_{cyc}\frac{b}{a}$$

Từ đó ta có: $VT - VP \ge \sum_{cyc} a^3 + \dfrac{5}{2}\sum_{cyc}\dfrac{a}{b} + \dfrac{5}{2}\sum_{cyc}\dfrac{b}{a} - 4\sum_{cyc} ab - 4\sum_{cyc} a + 6$

$$\ge \sum_{cyc} a^3 + \sum_{cyc} ab - 4\sum_{cyc} a + 6 = \sum_{cyc}\left(a^3 - 4a + \frac{1}{a} + 2\right)$$

Xét $f(x) = x^3 - 4x + \dfrac{1}{x} + 2 + 2\ln x$ với $x > 0$ ta có: $f'(x) = (x-1)\left(3x + 3 + \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x}\right)$

Nếu $x < 1$ thì $\dfrac{1}{x^2} \ge \dfrac{1}{x}$, nếu $x \ge 1 \Rightarrow 1 > \dfrac{1}{x}$ do đó $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Dễ dàng kiểm tra rằng $f(x) \ge f(1) = 0, \forall x > 0$ hay $x^3 - 4x + \dfrac{1}{x} + 2 \ge -2\ln x, \forall x > 0$.

Như vậy ta có: $\sum_{cyc}\left(a^3 - 4a + \dfrac{1}{a} + 2\right) \ge -2\sum_{cyc} \ln a = 0$. Bài toán được giải quyết.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = 1$.

Bài 2. Cho $\begin{cases} a,b,c>0 \\ abc=1 \end{cases}$. Chứng minh $\dfrac{1}{3a^2 + (a-1)^2} + \dfrac{1}{3b^2 + (b-1)^2} + \dfrac{1}{3c^2 + (c-1)^2} \ge 1$ (1)

Chứng minh

Xét hai trường hợp sau

+ TH1: $\text{Min}\{a,b,c\}\le\frac{1}{2}$, giả sử là $a\le\frac{1}{2}\Rightarrow 3a^2+(a-1)^2\le 1\Rightarrow(1)$ đúng

+ TH 2: $\text{Min}\{a,b,c\}>\frac{1}{2}$, khi đó ta xét đánh giá $\frac{1}{3x^2+(x-1)^2}\ge\frac{1}{3}+k\ln x$

Ở đây ta qui về hàm số Lôgarit với chú ý $\ln a+\ln b+\ln c=0$.

Tiếp tục quan sát thấy đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Từ đó ta có phải xác định k sao cho $f'(1)=0$: $f(x)=\frac{1}{3x^2+(x-1)^2}+\frac{2}{3}\ln x-\frac{1}{3}$

Ta có: $f'(x)=\frac{2(16x^4-16x^3-x+1)}{3x(4x^2-2x+1)^2}=\frac{2(x-1)(16x^3-1)}{3x(4x^2-2x+1)^2}=0\Leftrightarrow x=1$ (do $x>\frac{1}{2}$).

Dễ dàng kiểm tra được $f(x)\ge f(1)=0$, $\forall x>\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{1}{3x^2+(x-1)^2}\ge\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\ln x$ $\forall x>\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow\frac{1}{3a^2+(a-1)^2}+\frac{1}{3b^2+(b-1)^2}+\frac{1}{3c^2+(c-1)^2}\ge\sum_{cyc}\left(\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\ln x\right)=1-\frac{2}{3}\ln(abc)=1$$

Bất đẳng thức được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$ hoặc $a\to\infty,b\to\infty,c\to0^+$ và các hoán vị.

Nhận xét: Sau đây là lời giải tóm tắt nhưng rất ấn tượng của Vasile Cirtoaje.

Sử dụng bất đẳng thức cơ sở: $\frac{1}{3a^2+(a-1)^2}\ge\frac{1}{2a^3+1}\Leftrightarrow\frac{2a(a-1)^2}{(4a^2-2a+1)(2a^3+1)}\ge0$

Điều này hiển nhiên đúng với mọi số thực không âm. Từ đó ta có (đpcm)

Bài 3. Cho $\begin{cases}a,b,c>0\\abc=1\end{cases}$. Chứng minh rằng $\frac{1}{a^2-a+1}+\frac{1}{b^2-b+1}+\frac{1}{c^2-c+1}\le3$ (1)

Chứng minh

Trước hết, ta sẽ chứng minh $f(x)=\frac{1}{x^2-x+1}+\ln x-1\le0$ $\forall x\in(0,1.8]$

Thật vậy, ta có: $f'(x)=\frac{1-2x}{(x^2-x+1)^2}+\frac{1}{x}=\frac{(x-1)(x^3-x^2-1)}{x(x^2-x+1)^2}$

Rõ ràng phương trình $x^3-x^2-1=0$ chỉ có duy nhất 1 nghiệm $x\in(0,2]$.

do đó ta dễ dàng kiểm tra được $f(x)\le\min\{f(1),f(1.8)\}=0$

Như thế, nếu cả 3 số a,b,c đều không lớn hơn 1.8 thì ta có (đpcm), vì khi đó

$$\frac{1}{a^2-a+1}+\frac{1}{b^2-b+1}+\frac{1}{c^2-c+1}=f(a)+f(b)+f(c)\le 3-\ln a-\ln b-\ln c=3$$

Ngược lại, nếu tồn tại a sao cho $a\ge 1.8$. Nếu $a\ge 2$, ta có

$$VT(1)=\frac{1}{a^2-a+1}+\frac{1}{\left(b-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}+\frac{1}{\left(c-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\le\frac{1}{2^2-2+1}+\frac{1}{\frac{3}{4}}+\frac{1}{\frac{3}{4}}=3$$

Như thế, ta chỉ cần xét $a\le 2$, tức là $2\ge a\ge 1.8$.

Giả sử $b\ge c$, khi đó do $a\le 2$ nên $b\ge\frac{1}{\sqrt{2}}$. Nếu $a\ge 1.9$, ta có

$$VT(1)=\frac{1}{a^2-a+1}+\frac{1}{b^2-b+1}+\frac{1}{\left(c-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\le\frac{1}{1.9^2-1.9+1}+\frac{1}{\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}+1}+\frac{1}{\frac{3}{4}}<3$$

Nếu $a\le 1.9$, suy ra $b\ge\frac{1}{\sqrt{1.9}}$ khi đó ta có:

$$VT(1)=\frac{1}{a^2-a+1}+\frac{1}{b^2-b+1}+\frac{1}{\left(c-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\le\frac{1}{1.8^2-1.8+1}+\frac{1}{\frac{1}{1.9}-\frac{1}{\sqrt{1.9}}+1}+\frac{1}{\frac{3}{4}}<3$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$.

Nhận xét: Ta cũng có thể chứng minh bất đẳng thức trên bằng cách khác như sau

Ta sẽ chứng minh $\frac{1}{x^2+x+1}+\frac{1}{y^2+y+1}+\frac{1}{z^2+z+1}\ge 1\ \forall x,y,z>0, xyz=1$ (1)

Thật vậy, tồn tại $m,n,p>0$ sao cho $x=\frac{np}{m^2},\ y=\frac{pm}{n^2},z=\frac{mn}{p^2}$ khi đó

$$(1)\Leftrightarrow\frac{m^4}{m^4+m^2np+n^2p^2}+\frac{n^4}{n^4+n^2pm+p^2m^2}+\frac{p^4}{p^4+p^2mn+m^2n^2}\ge 1\quad(2)$$

Sử dụng bất đẳng thức ***CBS*** ta có

$$VT(2)\ge\frac{(m^2+n^2+p^2)^2}{m^4+n^4+p^4+m^2n^2+n^2p^2+p^2m^2+mnp(m+n+p)}$$

$$\ge\frac{(m^2+n^2+p^2)^2}{m^4+n^4+p^4+2(m^2n^2+n^2p^2+p^2m^2)}=1$$

Bây giờ, sử dụng bất đẳng thức trên khi thay x,y,z bởi $\frac{1}{a^2},\frac{1}{b^2},\frac{1}{c^2}$, ta có

$$\frac{a^4}{a^4+a^2+1}+\frac{b^4}{b^4+b^2+1}+\frac{c^4}{c^4+c^2+1}\ge 1 \Leftrightarrow \frac{2(a^2+1)}{a^4+a^2+1}+\frac{2(b^2+1)}{b^4+b^2+1}+\frac{2(c^2+1)}{c^4+c^2+1}\le 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{(a^2+a+1)+(a^2-a+1)}{(a^2+a+1)(a^2-a+1)}+\frac{(b^2+b+1)+(b^2-b+1)}{(b^2+b+1)(b^2-b+1)}+\frac{(c^2+c+1)+(c^2-c+1)}{(c^2+c+1)(c^2-c+1)}\le 4$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{a^2+a+1}+\frac{1}{b^2+b+1}+\frac{1}{c^2+c+1}\right)+\left(\frac{1}{a^2-a+1}+\frac{1}{b^2-b+1}+\frac{1}{c^2-c+1}\right)\le 4$$

Lại sử dụng bất đẳng thức trên, ta có $\frac{1}{a^2+a+1}+\frac{1}{b^2+b+1}+\frac{1}{c^2+c+1}\ge 1$

Suy ra $\frac{1}{a^2-a+1}+\frac{1}{b^2-b+1}+\frac{1}{c^2-c+1}\le 3$. Vậy ta có đpcm.

Bài 4. Cho $\begin{cases} a,b,c,d>0 \\ abcd=1 \end{cases}$. Chứng minh rằng: $\frac{1+a}{1+a^2}+\frac{1+b}{1+b^2}+\frac{1+c}{1+c^2}+\frac{1+d}{1+d^2}\le 4$ (1)

Chứng minh

Xét hàm số $f(x)=\frac{x+1}{x^2+1}+\frac{\ln x}{2}-1$ với $x>0$, ta có $f'(x)=\frac{(x-1)(x^3-x^2-3x-1)}{2x(x^2+1)^2}$

Dễ thấy phương trình $x^3-x^2-3x-1=0$ chỉ có duy nhất một nghiệm $x_0\in(1,4]$,

do đó ta có: $f(x)\le \max\{f(1),f(4)\}=0 \quad \forall x\in(0,4]$

Và như thế, ta đi đến nếu cả 4 số a,b,c,d đều không lớn hơn 4 thì ta có đpcm vì

$$VT(1)=f(a)+f(b)+f(c)+f(d)\le 4-\frac{1}{2}(\ln a+\ln b+\ln c+\ln d)=4$$

Nếu tồn tại 1 số, chẳng hạn là $a\ge 4$. Khi đó, chú ý rằng với mọi $x>0$, ta có

$$\frac{x+1}{x^2+1}=\frac{21}{17}-\frac{21x^2-17x+4}{17(x^2+1)}\le\frac{21}{17}\Rightarrow\frac{x+1}{x^2+1}\le\frac{21}{17}$$

Từ đây, ta được $VT(1)\le\frac{1+a}{1+a^2}+\frac{3\times 21}{17}\le\frac{1+4}{1+4^2}+\frac{3\times 21}{17}=4$.

Vậy (1) được chứng minh. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=d=1$.

Bài 5. Cho $a_1,a_2,...a_n>0$ thỏa mãn $a_1a_2...a_n=1$.

Chứng minh rằng $\sqrt{a_1^2+1}+\sqrt{a_2^2+1}+...+\sqrt{a_n^2+1}\le\sqrt{2}(a_1+a_2+...+a_n)$ (1)

Chứng minh

Xét hàm số $f(x)=\sqrt{x^2+1}-2\sqrt{x}+\left(\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\ln x$ với $x>0$

Khi đó ta có: $f'(x)=\dfrac{(x-1)\left[-2x^2+x-1-2x^2\sqrt{2(x^2+1)}\right]}{x\sqrt{2(x^2+1)}\left(\sqrt{2}x^2+\sqrt{x^2+1}\right)} \Rightarrow f'(x)=0 \Leftrightarrow x=1$

Qua 1 thì $f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm nên $f'(x)\le f(1)=0, \forall x>0$

Điều đó có nghĩa là $\sqrt{x^2+1}\le 2\sqrt{x}-\left(\sqrt{2}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\ln x,\ \forall x>0$

Sử dụng bất đẳng thức cơ sở này cho n biến và cộng vế theo vế ta có

$$VT(1)\le\sqrt{2}(a_1+a_2+...+a_n)-\left(\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)(\ln a_1+\ln a_2+...+\ln a_n)$$

$$=\sqrt{2}(a_1+a_2+...+a_n)-\left(\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\ln\prod_{i=1}^{n}a_i=\sqrt{2}(a_1+a_2+...+a_n)$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a_1=a_2=...=a_n=1$.

Nhận xét: Bài toán trên còn có thể giải quyết bằng một bất đẳng thức cơ sở quen thuộc: $\sqrt{x^2+1}\le\sqrt{2}\left(x-\sqrt{x}+1\right)\Leftrightarrow 0\le\left(\sqrt{x}-1\right)^4, \forall x>0$

Sử dụng bất đẳng thức trên lần lượt cho n biến cộng lại ta có:

$$VT(1)\le\sqrt{2}(a_1+a_2+...+a_n)+\sqrt{2}\left(n-\sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_i}\right)\le\sqrt{2}(a_1+a_2+...+a_n)$$

Bài 6. [Algebraic Inequalities – Old and New Method]

Cho $\begin{cases}a,b,c>0\\abc=1\end{cases}$. Chứng minh rằng: $a^2+b^2+c^2+9(ab+bc+ca)\ge 10(a+b+c)$

Chứng minh

Ta cần xác định hệ số k sao cho: $a^2+9bc=a^2+\dfrac{9}{a}\ge 10a+k\ln a$. Tương tự các phần trước ta tìm được $k=-17$. Ta sẽ chứng minh: $f(a)=a^2+\dfrac{9}{a}-10a+17\ln a\ge 0$

Thật vậy: $f'(a)=2a-\dfrac{9}{a^2}-10+\dfrac{17}{a}=\dfrac{2a^3-10a^2+17a-9}{a^2}=\dfrac{(a-1)(2a^2-8a+9)}{a^2}$

Ta có $f'(a)=0\Leftrightarrow a=1$. Từ đây, ta dễ dàng thấy được $f(a)\ge f(1)=0, \forall a>0$

hay $a^2+\dfrac{9}{a}-10a\ge -17\ln a$. Sử dụng tương tự với b,c rồi cộng lại vế theo vế, ta có đpcm.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$.

Bài 7. Cho các số dương a,b,c,d,e,f thỏa mãn $abcdef=1$, chứng minh rằng:

$$\frac{2a+1}{a^2+a+1}+\frac{2b+1}{b^2+b+1}+\frac{2c+1}{c^2+c+1}+\frac{2d+1}{d^2+d+1}+\frac{2e+1}{e^2+e+1}+\frac{2f+1}{f^2+f+1}\le 6 \quad (1)$$

Chứng minh

Xét hàm số $F(x)=\frac{2x+1}{x^2+x+1}+\frac{\ln x}{3}-1$ với $x>0$, ta có

$$F'(x)=\frac{-2x^2-2x+1}{(x^2+x+1)^2}+\frac{1}{3x}=\frac{(x-1)(x^3-3x^2-6x-1)}{3x(x^2+x+1)^2}$$

Chú ý rằng phương trình $x^3-3x^2-6x-1=0$ chỉ có duy nhất 1 nghiệm $x_0\in[4,12]$, từ đây ta dễ dàng suy ra được $F(x)\le\max\{f(1),f(12)\}=0\ \ \forall x\in(0,12]$

Do đó, nếu $\text{Max}\{a,b,c,d,e,f\}\le 12$, ta có:

$$\text{VT}(1)==F(a)+F(b)+F(c)+F(d)+F(e)+F(f)\le 6-\frac{1}{3}(\ln a+\ln b+\ln c+\ln d+\ln e+\ln f)=6$$

Nếu $\text{Max}\{a,b,c,d,e,f\}\ge 12$, giả sử $a=\text{Max}\{a,b,c,d,e,f\}\ge 12$, khi đó với chú ý rằng với mọi $x>0$ thì $\frac{2x+1}{x^2+x+1}=\frac{7}{6}-\frac{7x^2-5x+1}{6(x^2+x+1)}\le\frac{7}{6}\Rightarrow\frac{2x+1}{x^2+x+1}\le\frac{7}{6}$

Do đó $VT(1)\le\frac{2a+1}{a^2+a+1}+\frac{5\times 7}{6}\le\frac{2\times 12+1}{12^2+12+1}+\frac{5\times 7}{6}<6$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=d=e=f=1$.

Bài 8. Cho các số dương a,b,c,d,e,f thỏa mãn $abcdef=1$, chứng minh rằng:

$$\frac{a-1}{a^2+a+1}+\frac{b-1}{b^2+b+1}+\frac{c-1}{c^2+c+1}+\frac{d-1}{d^2+d+1}+\frac{e-1}{e^2+e+1}+\frac{f-1}{f^2+f+1}\le 0$$

Chứng minh

Xét hàm số $F(x)=\frac{x-1}{x^2+x+1}-\frac{\ln x}{3}$ với $x>0$, ta có $F'(x)=\frac{(x-1)(-x^3-6x^2-3x+1)}{3x(x^2+x+1)^2}$

Chú ý rằng phương trình $-x^3-6x^2-3x+1=0$ chỉ có duy nhất 1 nghiệm $x_0>\frac{1}{5}$.

từ đây ta dễ dàng suy ra được $F(x) \le \max\left\{f(1), f\left(\frac{1}{11}\right)\right\} = 0$, $\forall x \ge \frac{1}{11}$

Do đó, nếu $\min\{a,b,c,d,e,f\} \ge \frac{1}{11}$ ta có:

$VT(1) = F(a)+F(b)+F(c)+F(d)+F(e)+F(f) \le \frac{1}{3}(\ln a+\ln b+\ln c+\ln d+\ln e+\ln f) = 0$

Nếu $\min\{a,b,c,d,e,f\} \le \frac{1}{11}$ và giả sử $a = \min\{a,b,c,d,e,f\}$ thì $a \le \frac{1}{11}$

Để ý rằng với mọi $x > 0$ thì $\frac{x-1}{x^2+x+1} \le \frac{(\sqrt{3}+1)-1}{(\sqrt{3}+1)^2+(\sqrt{3}+1)+1} = \frac{2}{\sqrt{3}} - 1$

Do đó $VT(1) \le \frac{a-1}{a^2+a+1} + 5\left(\frac{2}{\sqrt{3}}-1\right) \le \frac{\frac{1}{11}-1}{\frac{1}{11^2}+\frac{1}{11}+1} + 5\left(\frac{2}{\sqrt{3}}-1\right) < 0$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=d=e=f=1$

Bài 9. Cho các số dương a,b,c,d,e,f,g có tích bằng 1, chứng minh rằng:

$$(a^2-a+1)(b^2-b+1)(c^2-c+1)(d^2-d+1)(e^2-e+1)(f^2-f+1)(g^2-g+1) \ge 1 \quad (1)$$

Chứng minh

Bất đẳng thức (1) tương đương với $\sum_{cyc} \ln(a^2-a+1) \ge 0$

Xét hàm số $F(x) = \ln(x^2-x+1) - x + 1$. Ta có $F'(x) = \frac{(x-1)(2-x)}{x^2-x+1}$

Từ đây, ta có $F(x) \ge \min\{f(1), f(2.75)\} = 0$, $\forall x \in (0, 2.75]$

Do đó nếu các số a,b,c,d,e,f,g không vượt quá 2.75 ta có ngay đpcm vì

$$\sum_{cyc} \ln(a^2-a+1) = \sum_{cyc} F(a) \ge \sum_{cyc} (1-a) = 0$$

Ngược lại, giả sử tồn tại $a \ge 2.75$. Khi đó, chú ý rằng $x^2-x+1 \ge \frac{3}{4}$ $\forall x \in \mathbb{R}$ nên

$$\sum_{cyc} \ln(a^2-a+1) \ge \ln(a^2-a+1) + 6\ln\frac{3}{4} \ge \ln(2.75^2-2.75+1) + 6\ln\frac{3}{4} > 0$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=d=e=f=g=1$.

VII. U.C.T MỞ RỘNG

Ngay từ phần mở đầu chúng ta đã đặt vấn đề xác định hệ số m theo bất đẳng thức $h(a_i) \ge f(a_i) + ma^k + n$ với điều kiện của bài toán là $a_1^k + a_2^k + ... + a_n^k = n$. Tuy nhiên cách xác định đó đối với một số bài toán lại không hiệu quả. Điều đó cũng không phải hoàn toàn là không tốt. Vì nó sẽ thôi thúc chúng ta tìm ra các dạng xác định hệ số khác. Một cách trực quan chúng ta sẽ phân tích một bài toán cụ thể để thấy được những gì đã được nêu ra ở trên.

Bài 1. [Tạp chí Crux, Canada] Cho $\begin{cases} a,b,c > 0 \\ a+b+c=3 \end{cases}$.

Chứng minh: $\dfrac{1}{9-ab} + \dfrac{1}{9-bc} + \dfrac{1}{9-ac} \le \dfrac{3}{8}$

Chứng minh

Điều đầu tiên là chúng ta nghĩ đến việc thiết lập một bất đẳng thức cơ sở dạng

$\dfrac{8}{9-x} \le 1 + mx + n \Rightarrow \dfrac{8}{9-x} \le 1 + m(x-1)$, từ đó dự đoán $m = \dfrac{1}{8}$.

Nhưng rất tiếc với $m = \dfrac{1}{8}$ thì bất đẳng thức trên hoàn toàn không đúng kể cả tư tưởng chia trường hợp như ở phần 3 cũng không thể áp dụng được. Thật vậy với $m = \dfrac{1}{8}$ ta có

$\dfrac{8}{9-x} \le \dfrac{7+x}{8} \Leftrightarrow 0 \le -\dfrac{(x-1)^2}{8(9-x)}$, bất đẳng thức này không luôn đúng.

Tuy nhiên ta có thể sử dụng **U.C.T** với một ý tưởng mới mẻ hơn bằng cách thiết lập bất đẳng thức cơ sở sau: $\dfrac{8}{9-x} \le 1 + m(x^2-1) + n(x-1)$ (*)

Việc xác định hệ số trong bất đẳng thức trên đòi hỏi sự chặt chẽ trong lập luận vì đôi khi nới lỏng miền nghiệm của biến sẽ khiến cho bài toán không đúng. Có nhiều hệ số thỏa mãn để tạo thành đại lượng bình phương $(x-1)^2$ nhưng ta phải xác định sao cho dấu của bất đẳng thức (*) là đúng. Ta có: (*) $\Leftrightarrow 0 \le (x-1)\left[m(x+1) + n - \dfrac{1}{9-x}\right]$ (**)

Từ phân tích trên rõ ràng ta phải xác định n theo m sao cho xuất hiện nghiệm $x=1$ để hình thành đại lượng $(x-1)^2$, tức là $m(x+1) + n - \dfrac{1}{9-x} = 0 \Leftrightarrow n = \dfrac{1}{9-x} - m(x+1) \Rightarrow n = \dfrac{1}{8} - 2m$

Thế vào (**) ta có (**) $\Leftrightarrow 0 \le (x-1)\left[m(x+1) - 2m + \dfrac{1}{8} - \dfrac{1}{9-x}\right] \Leftrightarrow 0 \le (x-1)^2(72m - 8mx - 1)$

Dễ thấy rằng việc xác định hệ số ở đây không còn đơn giản như trước. Nó đòi hỏi ta phải tìm ra những ước lượng chặt chẽ để bất đẳng thức không đổi chiều. Sử dụng điều kiện $\begin{cases} a,b,c > 0 \\ a+b+c=3 \end{cases}$ ta có đánh giá $3 > \max\{ab, bc, ca\} \ge 0$ và còn có thể làm chặt hơn nữa: $\dfrac{9}{4} \ge \max\{ab, bc, ca\} \ge 0$. Tuy nhiên đối với bài toán này thì chỉ cần sử dụng điều kiện yếu là $3 > \max\{ab, bc, ca\} \ge 0$. Bây giờ ta cần xác định hệ số m để bất đẳng thức trên đúng $\forall x \in [0;3)$.

Nếu $m < 0$ thì với $x = 0$ ta nhận được một bất đẳng thức ngược chiều. Vậy có thể dự đoán $m \geq 0$, khi đó $72m - 1 - 8mx \geq 72m - 1 - 24 = 48m - 1$

Ta cần có $48m \geq 1 \Leftrightarrow m \geq \frac{1}{48}$. Vậy nên ta sẽ dự đoán $m = \frac{1}{48} \Rightarrow n = \frac{1}{12}$.

Bây giờ ta sẽ thử chứng minh bất đẳng thức cơ sở đúng với $m = \frac{1}{48}; n = \frac{1}{12}$.

Thật vậy ta có: $\frac{8}{9-x} \leq \frac{x^2 + 4x + 43}{48} \Leftrightarrow 0 \leq \frac{(x-1)^2(3-x)}{48(9-x)}$ (luôn đúng)

Áp dụng bất đẳng thức cơ sở trên với các biến ab, bc, ca ta có:

$$\frac{1}{9-ab} + \frac{1}{9-bc} + \frac{1}{9-ac} \leq \frac{1}{48}\left(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 4ab + 4bc + 4ca\right) + \frac{43}{16}$$

Ta cần chứng minh: $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 4ab + 4bc + 4ca \leq 15$ (2)

Đặt $k = ab + bc + ca$, áp dụng bất đẳng thức ***AM – GM*** và bất đẳng thức ***Schur*** ta có: $k \leq 3, abc \geq \max\left\{0, \frac{4k-9}{3}\right\}$. Ta xét hai trường hợp sau

+ Trường hợp 1. Nếu $4k \leq 9$ thì

$$\text{VT}(2) = (ab + bc + ca)^2 + 4(ab + bc + ca) - 6abc = k^2 + 4k - 6abc \leq \frac{81}{16} + 9 = \frac{225}{16} < 15$$

+ Trường hợp 2. Nếu $4k \geq 9$ thì: $\text{VT}(2) = (ab + bc + ca)^2 + 4(ab + bc + ca) - 6abc$

$$= k^2 + 4k - 6abc \leq k^2 + 4k - 2(4k - 9) = (k-1)(k-3) + 15 \leq 15$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Tiếp theo chúng tôi sẽ không đi vào chi tiết mà chỉ đưa ra cách thiết lập bất đẳng thức cơ sở một cách khái quát. Chúng ta hãy đến với bài toán sau

Bài 2. [Moldova TST 2005]

Cho $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ a^4 + b^4 + c^4 = 3 \end{cases}$. Chứng minh rằng: $\frac{1}{4-ab} + \frac{1}{4-bc} + \frac{1}{4-ca} \leq 1$

Chứng minh

Với $0 \leq x \leq \frac{3}{2}$ ta luôn có $\frac{3}{4-x} \leq \frac{2x^2 + x + 12}{15} \Leftrightarrow 0 \leq \frac{(x-1)^2(3-2x)}{15(4-x)}$

Lại có $\max\{ab, bc, ca\} \leq \sqrt{\frac{3}{2}} < \frac{3}{2}$ nên ta có

$$\frac{3}{4-ab} + \frac{3}{4-bc} + \frac{3}{4-ca} \leq \frac{2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + ab + bc + ca + 36}{15}$$

Áp dụng bất đẳng thức **AM – GM** và **CSB** ta có

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\le a^4+b^4+c^4=3\ ;\ ab+bc+ca\le\sqrt{3(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)}\le 3$$

Cộng các các bất đẳng thức cơ sở trên vế theo vế ta có điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$.

Nhận xét: Đây là một bài toán không khó và có nhiều cách tiếp cận khác nhau.

Áp dụng bất đẳng thức quen thuộc sau $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\ge\frac{4}{x+y}$ và bất đẳng thức **AM – GM**.

Ta có: $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4-a^2}+\frac{1}{4-b^2}\right)\ge\frac{1}{2}\left(\frac{4}{8-a^2-b^2}\right)\ge\frac{2}{8-2ab}=\frac{1}{4-ab},\ \forall a,b\in[0;2]$.

Qui bài toán về chứng minh $\frac{1}{4-a^2}+\frac{1}{4-b^2}+\frac{1}{4-c^2}\le 1$.

Sử dụng bất đẳng thức cơ sở sau $\frac{1}{4-a^2}\le\frac{a^4+15}{18}$.

Bài 3. Cho $\begin{cases}a,b,c,d>0\\ a^2+b^2+c^2+d^2=4\end{cases}$. Chứng minh: $\frac{1}{3-abc}+\frac{1}{3-bcd}+\frac{1}{3-cda}+\frac{1}{3-dab}\le 2\quad(1)$

Chứng minh

Đây là một bài toán khó vì vậy việc thiết lập hệ số phải cần những đánh giá chặt chẽ và suy luận hợp lí. Chúng ta hãy cùng phân tích con đường đi đến lời giải của bài toán này

Ta sẽ xác định hệ số m,n sao cho $\frac{2}{3-x}\le 1+m(x^2-1)+n(x-1),\ \forall x\in\left[0;\frac{8}{3\sqrt{3}}\right]$

Như đã phân tích ở trên ta tìm ra $n=\frac{1}{2}-2m$, khi đó (1) $\Leftrightarrow (x-1)^2(6m-1-2mx)\ge 0$

Dễ thấy $m\ge 0\Rightarrow 6m-1-2mx\ge 6m-1-\frac{16}{3\sqrt{3}}m$. Ta cần có $6m-1-\frac{16}{3\sqrt{3}}m\ge 0\Leftrightarrow m\ge\frac{1}{6-\frac{16}{3\sqrt{3}}}$

Do $\frac{1}{6-\frac{16}{3\sqrt{3}}}<\frac{1}{6-\frac{16}{5}}=\frac{5}{14}$ nên ta chỉ cần có $m\ge\frac{5}{14}$. Vậy chọn $m=\frac{5}{14}\Rightarrow n=-\frac{3}{14}$

$\Rightarrow$ Bất đẳng thức cơ sở: $\frac{2}{3-x}\le\frac{5x^2-3x+12}{14}\Leftrightarrow 0\le\frac{(x-1)^2(8-5x)}{14(3-x)}$ đúng $\forall x\in\left[0;\frac{8}{3\sqrt{3}}\right]$

Sử dụng bất đẳng thức cơ sở với chú ý $\max\{abc,bcd,cda,dab\}\le\frac{8}{3\sqrt{3}}$ suy ra ta cần

chứng minh: $5\left(a^2b^2c^2+b^2c^2d^2+c^2d^2a^2+d^2a^2b^2\right)-3(abc+bcd+cda+dab)\le 8\quad(2)$

Có thể chứng minh bất đẳng thức trên bằng nhiều cách. Sau đây xin trình bày một cách dựa vào kỹ thuật hàm lồi.

Đặt $t^2=\frac{a^2+b^2}{2}, k^2=\frac{c^2+d^2}{2}, x=ab, y=cd$ khi đó, ta có $t^2\ge x, k^2\ge y$.

Bất đẳng thức (2) $\Leftrightarrow$ $f(x)=10x^2k^2+10y^2t^2-3x\sqrt{2y+2k^2}-3y\sqrt{2x+2t^2}-8$

Ta có $f''(x)=20k^2+\frac{3y}{\sqrt{(2x+2t^2)^3}}\ge 0 \Rightarrow f(x)$ là hàm lồi $\Rightarrow f(x)\le\max\left\{f(t^2), f(0)\right\}$

Ta có $f(0)=\left(yt\sqrt{2}+1\right)\left(5yt\sqrt{2}-8\right)\le 0$ do $yt\sqrt{2}\le\frac{8}{3\sqrt{3}}<\frac{8}{5}$

$$f(t^2)=10y^2t^2-6yt+10k^2t^2-3t\sqrt{2y+2k^2}-8=g(y)$$

Tương tự như trên ta cũng có $g(y)$ là hàm lồi nên $g(y)\le\max\left\{g(k^2), g(0)\right\}$

Ta cũng có $g(0)=\left(kt\sqrt{2}+1\right)\left(5kt\sqrt{2}-8\right)\le 0$ do $kt\sqrt{2}\le\frac{8}{3\sqrt{3}}<\frac{8}{5}$

$$g(t^2)=4(kt-1)(5kt+1)\le 0 \text{ do } kt\sqrt{2}\le\frac{k^2+t^2}{2}=1$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh xong.

Nhận xét: Trong lời giải này, chúng ta thấy những đánh giá tinh tế của **U.C.T** đóng vai trò là một bàn đạp quan trọng để đi đến lời giải. Tiếp theo chúng ta sẽ thấy được sức mạnh của **U.C.T.** qua 2 lời giải đối lập nhau đối với 2 bài toán cũng đối lập nhau về mức độ mạnh, yếu của đánh giá bất đẳng thức.

Bài 4. Cho $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ thỏa mãn $a^2+b^2+c^2+d^2=1$.

Chứng minh $\frac{1}{1-ab}+\frac{1}{1-bc}+\frac{1}{1-cd}+\frac{1}{1-da}+\frac{1}{1-ac}+\frac{1}{1-bd}\le 8$ (1)

Chứng minh

Bổ đề. Nếu $x,y,z\ge 0$ và $2x^2+y^2+z^2\le\frac{4}{3}$ thì $\frac{1}{1-xy}+\frac{1}{1-xz}\le\frac{2}{1-xu}$ với $u=\sqrt{\frac{y^2+z^2}{2}}$

Chứng minh: Thật vậy, bất đẳng thức $\Leftrightarrow\left(1-x\cdot\frac{y+z}{2}\right)\left(1-x\sqrt{\frac{y^2+z^2}{2}}\right)\le(1-xy)(1-xz)\Leftrightarrow$

$$\frac{y+z}{2}\sqrt{\frac{y^2+z^2}{2}}x^2-yzx^2\le x\left(\sqrt{\frac{y^2+z^2}{2}}-\frac{y+z}{2}\right)\Leftrightarrow\frac{y+z}{2}\sqrt{\frac{y^2+z^2}{2}}x-yzx\le x\left(\sqrt{\frac{y^2+z^2}{2}}-\frac{y+z}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow x\left[\left(\frac{y+z}{2}\right)^2 - yz\right] + x\left(\frac{y+z}{2}\right)\left(\sqrt{\frac{y^2+z^2}{2}} - \frac{y+z}{2}\right) \le \sqrt{\frac{y^2+z^2}{2}} - \frac{y+z}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x(y-z)^2}{4} \le \frac{1}{4}\left[1 - \frac{x(y+z)}{2}\right]\frac{(y-z)^2}{\sqrt{\frac{y^2+z^2}{2}} + \frac{y+z}{2}} \Leftrightarrow \frac{(y-z)^2}{4}\cdot\frac{x\sqrt{\frac{y^2+z^2}{2}} + x(y+z) - 1}{\sqrt{\frac{y^2+z^2}{2}} + \frac{y+z}{2}} \le 0 \quad (2)$$

(2) đúng vì $u \ge \frac{y+z}{2}$ và do đó $3x\sqrt{\frac{y^2+z^2}{2}} \le 1 \Leftrightarrow x^2(y^2+z^2) \le \frac{2}{9}$

Nhưng bất đẳng thức này đúng vì $2x^2 + y^2 + z^2 \le \frac{4}{3}$. Bổ đề được chứng minh.

Áp dụng: Giả sử $|a^2 - b^2| \le \frac{1}{3}$, đặt $a^2 + b^2 = 2x^2$ và $c^2 + d^2 = 2y^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$

Sử dụng bổ đề trên, ta có $\frac{1}{1-ac} + \frac{1}{1-ad} \le \frac{2}{1-ay}$ và $\frac{1}{1-bc} + \frac{1}{1-bd} \le \frac{2}{1-by}$

Vì $2y^2 + a^2 + b^2 = 1 < \frac{4}{3}$ nên theo bổ đề trên, ta cũng có $2\left(\frac{1}{1-ay} + \frac{1}{1-by}\right) \le \frac{4}{1-xy}$

Ta sử dụng các bất đẳng thức quen thuộc $\frac{1}{1-ab} \le \frac{1}{1-x^2}$ và $\frac{1}{1-cd} \le \frac{1}{1-y^2}$

$\Rightarrow f(a,b,c,d) \le \frac{4}{1-xy} + \frac{1}{1-x^2} + \frac{1}{1-y^2}$. Ta sẽ chứng minh $\frac{4}{1-xy} + \frac{1}{1-x^2} + \frac{1}{1-y^2} \le 8$

Đặt $t = xy$, $t \le \frac{1}{4}$, khi đó bất đẳng thức $\Leftrightarrow (4t-1)(4t^2 - t + 1) \le 0$ (luôn đúng)

Bài 5. Cho $\begin{cases} a,b,c,d \in \mathbb{R} \\ a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1 \end{cases}$. Chứng minh: $\frac{1}{1-ab} + \frac{1}{1-bc} + \frac{1}{1-cd} + \frac{1}{1-da} \le \frac{16}{3}$ (1)

Chứng minh

Tương tự các bài trước, ta thiết lập được bất đẳng thức $\frac{9}{1-x} \le 32x^2 + 10$, $\forall x \le \frac{1}{2}$

Từ đây, ta suy ra được $VT(1) \le \frac{32}{9}(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2d^2 + d^2a^2) + \frac{40}{9}$

$= \frac{32}{9}(a^2+c^2)(b^2+d^2) + \frac{40}{9} \le \frac{8}{9}(a^2+b^2+c^2+d^2)^2 + \frac{40}{9} = \frac{16}{3} \Rightarrow$ (đpcm)

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = d = \pm\frac{1}{2}$.

Nhận xét: Rõ ràng bài toán 5 mạnh hơn hẳn bài toán 4 vì sử dụng 5 ta có ngay kết quả của 4. Ngoài ra, ta còn có một cách "làm mạnh" khác cho bài toán trên.

Bài 6. Cho $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ thoa mãn $a^2+b^2+c^2+d^2=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{1-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2}+\frac{1}{1-\left(\frac{b+c}{2}\right)^2}+\frac{1}{1-\left(\frac{c+d}{2}\right)^2}+\frac{1}{1-\left(\frac{d+a}{2}\right)^2}+\frac{1}{1-\left(\frac{a+c}{2}\right)^2}+\frac{1}{1-\left(\frac{b+d}{2}\right)^2}\le 8$$

Chứng minh

Bài toán này đã được bạn ZhaoBin đưa ra một lời giải rất đẹp bằng cách sử dụng bất đẳng thức ***CBS***, ở đây, chúng tôi xin được giới thiệu một lời giải khác theo tư tưởng **U.C.T**. Sử dụng bất đẳng thức trong bài, ta chỉ cần chứng minh

$$(a+b)^4+(a+c)^4+(a+d)^4+(b+c)^4+(b+d)^4+(c+d)^4\le 6$$

Thật vậy, ta có $(a+b)^4=2(a^4+b^4+6a^2b^2)-(a-b)^4\le 2(a^4+b^4+6a^2b^2)$

Tương tự với các số hạng còn lại, ta suy ra được $LHS\le 6(a^2+b^2+c^2+d^2)^2=6$

Bất đẳng thức được chứng minh xong.

Thật tự nhiên, câu hỏi sau được đặt ra, liệu bất đẳng thức sau có đúng?

Bài 7. Cho $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $a^2+b^2+c^2+d^2=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{1-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2}+\frac{1}{1-\left(\frac{b+c}{2}\right)^2}+\frac{1}{1-\left(\frac{c+d}{2}\right)^2}+\frac{1}{1-\left(\frac{d+a}{2}\right)^2}\le \frac{16}{3}$$

Thật tiếc là bất đẳng thức này không đúng! Với ví dụ $a=b=0.4$ và $c=d=\sqrt{0.84}$.

Bài 8. Cho $\begin{cases}a,b,c,d\ge 0\\ a+b+c+d=4\end{cases}$. Chứng minh rằng $\frac{1}{5-abc}+\frac{1}{5-bcd}+\frac{1}{5-cda}+\frac{1}{5-dab}\le 1$

Chứng minh

Ta có thể thiết lập được bất đẳng thức sau $\frac{48}{5-x}\le x^2+x+10$, $\forall 2\ge x>0$. Do đó:

+, Nếu $\max\{abc,bcd,cda,dab\}\le 2$ thì sử dụng bất đẳng thức trên, ta cần chứng minh $a^2b^2c^2+b^2c^2d^2+c^2d^2a^2+d^2a^2b^2+abc+bcd+cda+dab\le 8$

Bất đẳng thức này có thể dễ dàng chứng minh bằng dồn biến, ***EV*** hoặc hàm lồi.

Thật vậy, không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử rằng $a\ge b\ge c\ge d$. Đặt $f(a,b,c,d)$ là vế trái của bất đẳng thức cần chứng minh. Trước hết, ta sẽ chứng minh rằng $f(a,b,c,d)$ đạt giá trị lớn nhất nếu và chỉ nếu $a=b=c$.

Nếu $a>c$, ta xét hiệu $h=f(t,b,t,d)-f(a,b,c,d)$, trong đó $t=\frac{a+c}{2}$. Ta có:

$$h=\frac{1}{2}(a-c)^2(b+d)-\frac{1}{2}(a-c)^2b^2d^2+(b^2+d^2)\left(\frac{1}{16}(a+c)^4-a^2c^2\right)$$

$$\geq\frac{1}{2}(a-c)^2(b+d)-\frac{1}{2}(a-c)^2b^2d^2=\frac{1}{2}(a-c)^2(b+d-b^2d^2)$$

$$\geq\frac{1}{2}(a-c)^2(b+d-bd)\geq\frac{1}{2}(a-c)^2(b-bd)\geq 0$$

Điều này có nghĩa là nếu $a>c$ thì ta có thể thay a,c bởi $\frac{a+c}{2},\frac{a+c}{2}$ để có giá trị lớn hơn của $f(a,b,c,d)$. Mặt khác, giá trị lớn nhất chắc chắn tồn tại, và từ đó, ta suy ra giá trị lớn nhất đạt được nếu và chỉ nếu $a=b=c$.

Tiếp theo, ta sẽ chứng minh $f(t,t,t,d)\leq 8$ với điều kiện $3t+d=4, 1\leq t\leq\frac{4}{3}$

Hay là $t^3+3(4-3t)t^2+t^6+3(4-3t)^2t^4\leq 8\Leftrightarrow 4(2+4t+3t^2+4t^3-7t^4)(t-1)^2\geq 0$. Ta có $2+4t+3t^2+4t^3-7t^4=t^4\left(\frac{2}{t^4}+\frac{4}{t^3}+\frac{3}{t^2}+\frac{4}{t}-7\right)\geq t^4\left(\frac{2}{(4/3)^4}+\frac{4}{(4/3)^3}+\frac{3}{(4/3)^2}+\frac{4}{(4/3)}-7\right)=\frac{t^4}{128}\geq 0+$. Nếu $\max\{abc,bcd,cda,dab\}\geq 2$ và giả sử $abc\geq 2$, khi đó, chú ý rằng với mọi $x,y\geq 0, x+y\leq 5$, ta có $\frac{1}{5}+\frac{1}{5-x-y}-\frac{1}{5-x}-\frac{1}{5-y}=\frac{xy(10-x-y)}{5(5-x)(5-y)(5-x-y)}\geq 0$

Suy ra $\frac{1}{5-x}+\frac{1}{5-y}\leq\frac{1}{5-x-y}+\frac{1}{5}\Rightarrow\frac{1}{5-x}+\frac{1}{5-y}+\frac{1}{5-z}\leq\frac{1}{5-x-y-z}+\frac{2}{5},\forall\begin{cases}x,y,z\geq 0\\x+y+z\leq 5\end{cases}$

Chú ý rằng $\sum_{cyc}(a^2b^2c^2+abc)\leq 8$ và $abc\geq 2$ nên $bcd+cda+dab<5$, do đó

$$\frac{1}{5-bcd}+\frac{1}{5-cda}+\frac{1}{5-dab}\leq\frac{1}{5-d(ab+bc+ca)}+\frac{2}{5}$$

Ta cần chứng minh: $\frac{1}{5-abc}+\frac{1}{5-d(ab+bc+ca)}\leq\frac{3}{5}$

Đặt $x=4-d$ do $abc\geq 2$ nên $4\geq x=a+b+c\geq 3\cdot\sqrt[3]{abc}\geq 3\cdot\sqrt[3]{2}$

Theo bất đẳng thức ***AM – GM*** thì $abc\leq\frac{1}{27}x^3, ab+bc+ca\leq\frac{1}{3}x^2$

Do đó, ta chỉ cần chứng minh $\frac{1}{5-\frac{1}{27}x^3}+\frac{1}{5-\frac{1}{3}x^2(4-x)}\leq\frac{3}{5}$

Hay $f(x)=x^6-4x^5-80x^3+360x^2-675\leq 0$

Ta có $f'(x)=6x^4(x-4)+4x^3(x-12)+48x(15-4x)<0$

Suy ra $f(x)$ là hàm nghịch biến, do đó $f(x)\leq f(3\sqrt[3]{2})=27(48\sqrt[3]{4}-77)<0$

Từ đây, ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=d=1$.

Bài 9. Cho $a,b,c\in\mathbb{R}$ thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{3+a^2-2bc}+\frac{1}{3+b^2-2ca}+\frac{1}{3+c^2-2ab}\le\frac{9}{8}$$

Chứng minh

Ta sẽ chứng minh rằng với mọi $x\in[-1,1]$ thì $\frac{8}{3+x}\le\frac{9x^2-12x+43}{16}$

Thật vậy, ta có $\frac{9x^2-12x+43}{16}-\frac{8}{3+x}=\frac{(x+1)(3x+1)^2}{16(3+x)}\ge 0$

Sử dụng bất đẳng thức này, với chú ý rằng $\{a^2-2bc,b^2-2ca,c^2-2ab\}\in[-1,1]$, ta suy ra được

$$\sum_{cyc}\frac{8}{3+a^2-2bc}\le\frac{1}{16}\sum_{cyc}(9(a^2-2bc)^2-12(a^2-2bc)+43)$$

Như vậy, ta chỉ cần chứng minh $\frac{1}{16}\sum_{cyc}(9(a^2-2bc)^2-12(a^2-2bc)+43)\le 9$

$$\Leftrightarrow 3\sum_{cyc}a^4+3\sum_{cyc}a^2b^2+2\sum_{cyc}a^2bc-4\sum_{cyc}ab(a^2+b^2)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{6}\sum_{cyc}(a-b)^2(3a+3b-4c)^2+\frac{1}{3}\sum_{cyc}c^2(a-b)^2\ge 0$$

Bất đẳng thức này hiển nhiên đúng. Vậy ta có đpcm.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow (a,b,c)=\left(\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3}\right)$ hoặc $(a,b,c)=\left(-\frac{1}{\sqrt3},-\frac{1}{\sqrt3},-\frac{1}{\sqrt3}\right)$.

VIII. KỸ THUẬT U.C.T. TRONG BẤT ĐẲNG THỨC LƯỢNG GIÁC

Trong các phần trước chúng ta đã thấy được vai trò của **U.C.T.** trong các bất đẳng thức đại số. Thế nhưng đối với các bài toán lượng giác thì sao? Chúng ta sẽ tìm được ngay lời giải đáp về sức mạnh của **U.C.T.** trong phần này. Trước hết chúng ta quan tâm đến mệnh đề quan trọng sau đây:

Mệnh đề:

Nếu $f(x)$ là hàm khả vi bậc 2 và lồi trên khoảng (a,b) thì $f(x)\ge f(y)+f'(y)(x-y),\forall x,y\in(a,b)$

Nếu $f(x)$ là hàm khả vi bậc 2 và lõm trên khoảng (a,b) thì $f(x)\le f(y)+f'(y)(x-y),\forall x,y\in(a,b)$

Chứng minh

Nhận xét: Mệnh đề trên là một hệ quả trực tiếp của định lý ***Lagrange***:

Nếu $x=y$ thì bất đẳng thức trở thành đẳng thức.

Nếu $x \neq y$ thì theo định lý ***Lagrange***, tồn tại 1 số thực $c \in (x, y)$ (hoặc $c \in (y, x)$) sao cho $\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = f'(c)$

+, Nếu $x > y$, lúc này $c \in (x, y)$, do $f(x)$ là hàm lồi nên $f'(x)$ đồng biến, do đó $f'(c) \geq f'(y)$, suy ra $\frac{f(x)-f(y)}{x-y} \geq f'(y) \Leftrightarrow f(x) \geq f(y) + f'(y)(x-y)$ (do $x > y$)

+, Nếu $y > x$ lúc này $c \in (y, x)$, do $f(x)$ là hàm lồi nên $f'(x)$ đồng biến, do đó $f'(c) \leq f'(y)$, suy ra $\frac{f(x)-f(y)}{x-y} \leq f'(y) \Leftrightarrow f(x) \geq f(y) + f'(y)(x-y)$ (do $x < y$)

Tương tự ta có kết quả khi f là hàm lõm và mệnh đề được chứng minh.

Hệ quả: Với kỹ thuật **U.C.T**, ta cần tìm số thực k sao cho bất đẳng thức $f(x) \geq k(x-\alpha) + m$ có nghiệm bội $x = \alpha$ thì hiển nhiên theo mệnh đề trên, ta suy ra được $k = f'(\alpha)$. Đây là một kết quả khá thú vị và có nhiều ứng dụng.

Chúng ta hãy xét một số ví dụ để làm rõ điều này.

Bài 1. Cho tam giác ABC, chứng minh rằng: $\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}$

Chứng minh

Nhận xét rằng đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $A = B = C = \frac{\pi}{3}$

Ta cần thiết lập bất đẳng thức $\cos x \leq k\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{2}$; $\forall x \in (0, \pi)$

Xét hàm số $f(x) = \cos x$ với $x \in (0, \pi)$, ta có $f'(x) = -\sin x \Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$,

do đó ta được $k = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Ta cần chứng minh $\cos x \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{2}$, $\forall x \in (0, \pi)$

Đây là một bất đẳng thức vừa liên quan đến các "đại lượng" lượng giác vừa liên quan đến biến thực nên ta không thể sử dụng biến đổi tương đương như các bài toán trước mà phải sử dụng đạo hàm.

Xét $g(x) = \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{2}$. Ta có: $g'(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \sin x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} \vee x = \frac{2\pi}{3}$

Từ đây, bằng cách lập bảng biến thiên, ta dễ dàng suy ra được

$$g(x) \leq \max\left\{g\left(\frac{\pi}{3}\right), g(\pi)\right\} = 0, \forall x \in (0, \pi)$$

Sử dụng bất đẳng thức này lần lượt với A, B, C rồi cộng lại, ta có

$$\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}(A + B + C - \pi) = \frac{3}{2}$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi ΔABC đều.

Bài 2. Cho tam giác ABC, chứng minh rằng: $\sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$

Chứng minh

Tương tự như trên, ta thiết lập được bất đẳng thức $\sin x \le \frac{3}{2}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\forall x \in (0,\pi)$

Thật vậy, xét hàm số $f(x)=\sin x$, ta có $f''(x)=-\sin x<0$ $\forall x\in(0,\pi)$, suy ra

$$f(x)\le f'(x)\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3}{2}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2},\ \forall x\in(0,\pi)$$

Từ đây, sử dụng lần lượt với A,B,C rồi cộng lại, ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều.

Bài 3. Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng:

$$\frac{\left(1-\sin\frac{A}{2}\right)\left(1+\cos\frac{A}{2}\right)}{\sin\frac{A}{2}\left(1+\sin\frac{A}{2}\right)}+\frac{\left(1-\sin\frac{B}{2}\right)\left(1+\cos\frac{B}{2}\right)}{\sin\frac{B}{2}\left(1+\sin\frac{B}{2}\right)}+\frac{\left(1-\sin\frac{C}{2}\right)\left(1+\cos\frac{C}{2}\right)}{\sin\frac{C}{2}\left(1+\sin\frac{C}{2}\right)}\ge 2+\sqrt{3}\quad(1)$$

Chứng minh

Áp dụng bất đẳng thức ***CBS***, ta có

$$\sum_{cyc}\frac{\left(1-\sin\frac{A}{2}\right)\left(1+\cos\frac{A}{2}\right)}{\sin\frac{A}{2}\left(1+\sin\frac{A}{2}\right)}\ge\frac{\left[\sum_{cyc}\left(1-\sin\frac{A}{2}\right)\left(1+\cos\frac{A}{2}\right)\right]^2}{\sum_{cyc}\sin\frac{A}{2}\left(1-\sin\frac{A}{2}\right)\left(1+\cos\frac{A}{2}\right)\left(1+\sin\frac{A}{2}\right)}\quad(2)$$

Sử dụng bất đẳng thức ***AM-GM*** ta có: $\sin\frac{A}{2}\left(1-\sin\frac{A}{2}\right)\le\left(\frac{\sin\frac{A}{2}+1-\sin\frac{A}{2}}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$

Tương tự, ta có $\sin\frac{B}{2}\left(1-\sin\frac{B}{2}\right)\le\frac{1}{4}$; $\sin\frac{C}{2}\left(1-\sin\frac{C}{2}\right)\le\frac{1}{4}$

$$\Rightarrow\sum_{cyc}\sin\frac{A}{2}\left(1-\sin\frac{A}{2}\right)\left(1+\cos\frac{A}{2}\right)\left(1+\sin\frac{A}{2}\right)\le\frac{1}{4}\sum_{cyc}\left(1+\cos\frac{A}{2}\right)\left(1+\sin\frac{A}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(3+\sum_{cyc}\sin\frac{A}{2}+\sum_{cyc}\cos\frac{A}{2}+\frac{1}{2}\sum_{cyc}\sin A\right)$$

Chú ý rằng: $\sum_{cyc}\sin\frac{A}{2}\le\frac{3}{2}$, $\sum_{cyc}\cos\frac{A}{2}\le\frac{3\sqrt{3}}{2}$, $\sum_{cyc}\sin A\le\frac{3\sqrt{3}}{2}$

$$\Rightarrow\sum_{cyc}\sin\frac{A}{2}\left(1-\sin\frac{A}{2}\right)\left(1+\cos\frac{A}{2}\right)\left(1+\sin\frac{A}{2}\right)\le\frac{1}{4}\left(3+\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)=\frac{9\left(2+\sqrt{3}\right)}{16}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{\sum_{cyc}\sin\frac{A}{2}\left(1-\sin\frac{A}{2}\right)\left(1+\cos\frac{A}{2}\right)\left(1+\sin\frac{A}{2}\right)}\ge\frac{16}{9\left(2+\sqrt{3}\right)}$$

Thay vào (2) suy ra $\sum_{cyc}\dfrac{\left(1-\sin\frac{A}{2}\right)\left(1+\cos\frac{A}{2}\right)}{\sin\frac{A}{2}\left(1+\sin\frac{A}{2}\right)}\ge\dfrac{16}{9\left(2+\sqrt{3}\right)}\left[\sum_{cyc}\left(1-\sin\frac{A}{2}\right)\left(1+\cos\frac{A}{2}\right)\right]^2$

Do đó, để chứng minh (1) ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{16}{9\left(2+\sqrt{3}\right)}\left[\sum_{cyc}\left(1-\sin\frac{A}{2}\right)\left(1+\cos\frac{A}{2}\right)\right]^2\ge 2+\sqrt{3}\Leftrightarrow\sum_{cyc}\left(1-\sin\frac{A}{2}\right)\left(1+\cos\frac{A}{2}\right)\ge\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{4}$$

$$\Leftrightarrow-\sum_{cyc}\sin\frac{A}{2}+\sum_{cyc}\left(\cos\frac{A}{2}-\frac{1}{2}\sin A\right)\ge-\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{4}$$

Do $\sum_{cyc}\sin\frac{A}{2}\le\frac{3}{2}$ nên ta chỉ cần chứng minh $\sum_{cyc}\left(\cos\frac{A}{2}-\frac{1}{2}\sin A\right)\ge\frac{3\sqrt{3}}{4}$ (3)

Xét hàm số $f(x)=\cos x-\frac{1}{2}\sin 2x+x-\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}$ với $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

Ta có: $f'(x)=-\sin x+1-\cos 2x=\sin x(2\sin x-1)=0\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}$

Qua $\frac{\pi}{6}$ thì $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương nên $f(x)\ge f\left(\frac{\pi}{6}\right)=0\ \forall x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$

Do $\frac{A}{2},\frac{B}{2},\frac{C}{2}\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ nên $f\left(\frac{A}{2}\right)\ge 0\Rightarrow\cos\frac{A}{2}-\frac{1}{2}\sin A+\frac{A}{2}-\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}\ge 0$

$$\Rightarrow\cos\frac{A}{2}-\frac{1}{2}\sin A\ge\left(\frac{\pi}{6}-\frac{A}{2}\right)+\frac{\sqrt{3}}{4}$$

Tương tự, ta có $\cos\frac{B}{2}-\frac{1}{2}\sin B\ge\left(\frac{\pi}{6}-\frac{B}{2}\right)+\frac{\sqrt{3}}{4}$; $\cos\frac{C}{2}-\frac{1}{2}\sin C\ge\left(\frac{\pi}{6}-\frac{C}{2}\right)+\frac{\sqrt{3}}{4}$

Do đó $\sum_{cyc}\left(\cos\frac{A}{2}-\frac{1}{2}\sin A\right)\ge\sum_{cyc}\left(\frac{\pi}{6}-\frac{A}{2}\right)+\frac{3\sqrt{3}}{4}=\frac{3\sqrt{3}}{4}\Rightarrow$ (3) đúng $\Rightarrow$ (đpcm)

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow A=B=C=\frac{\pi}{3}$.

Với các bài toán đối xứng như thế, các bạn có thể dễ dàng thiết lập được bất đẳng thức cơ sở nhưng còn các bài toán bất đối xứng thì sao? Liệu có thể thiết lập được dễ dàng như trên? Cái khó ở đây, chính là biết được đẳng thức xảy ra khi nào? Từ đó, ta mới có thể dễ dàng tìm được lời giải cho bài toán! Sau đây là một ví dụ:

Bài 4. [VNTST 2001] Cho $\begin{cases}a,b,c>0\\21ab+2bc+8ca\le 12\end{cases}$ Tìm giá trị nhỏ nhất của $P=\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}$.

Giải

Mới nhìn, bài toán này chẳng có vẻ gì là 1 bài toán lượng giác cả, nhưng các bạn yên tâm "kỹ pháp" lượng giác vẫn có thể áp dụng được cho bài này!

Đặt $x=\frac{1}{a};y=\frac{2}{b};z=\frac{3}{c}$ thì ta có $x,y,z>0$, $2x+4y+7z\le 2xyz$

Ta cần tìm giá trị nhỏ nhất của $P = x + y + z$

Nếu $2x + 4y + 7z < 2xyz$, đặt $x = kx', y = ky', z = kz'$ sao cho $2x' + 4y' + 7z' = 2x'y'z'$

suy ra $k > 1$ và do đó $P = x + y + z = k(x' + y' + z') > x' + y' + z'$

Như thế, để tìm giá trị nhỏ nhất của P, ta chỉ cần xét $2x + 4y + 7z = 2xyz$.

Một điều đáng chú ý là với đẳng thức $2x + 4y + 7z = 2xyz$ ta không thể đưa về lượng giác ngay được vì chẳng có 1 đẳng thức nào như thế cả, nhưng nó lại gợi nhớ cho ta đến đẳng thức:

Nếu A, B, C là 3 góc của một tam giác thì $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$

Từ đây ta nảy ra ý tưởng tìm cách chuyển về đẳng thức trên và ta có:

Đặt $x = \sqrt{7}m, y = \dfrac{\sqrt{7}}{2}n, z = \dfrac{2\sqrt{7}}{7}p$ thì ta có $m, n, p > 0, m + n + p = mnp$

từ đó tồn tại các góc nhọn A, B, C sao cho $m = \tan A, n = \tan B, p = \tan C$

khi đó từ $m + n + p = mnp$ ta suy ra A, B, C là 3 góc nhọn của 1 tam giác

Biểu thức P được viết lại như sau: $P = \dfrac{\sqrt{7}}{14}(14\tan A + 7\tan B + 4\tan C)$

Xét hàm số $f(x) = \tan x$ với $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, ta có $f''(x) = \dfrac{2\sin x}{\cos^3 x} > 0$

Suy ra $f(x)$ là một hàm lồi, và do đó theo bổ đề trên, ta có:

$$f(A) \ge f\left(\arctan\frac{3\sqrt{7}}{7}\right) + f'\left(\arctan\frac{3\sqrt{7}}{7}\right)\left(A - \arctan\frac{3\sqrt{7}}{7}\right) = \frac{3\sqrt{7}}{7} + \frac{16}{7}\left(A - \arctan\frac{3\sqrt{7}}{7}\right)$$

$$f(B) \ge f\left(\arctan\frac{5\sqrt{7}}{7}\right) + f'\left(\arctan\frac{5\sqrt{7}}{7}\right)\left(B - \arctan\frac{5\sqrt{7}}{7}\right) = \frac{5\sqrt{7}}{7} + \frac{32}{7}\left(B - \arctan\frac{5\sqrt{7}}{7}\right)$$

$$f(C) \ge f\left(\arctan\sqrt{7}\right) + f'\left(\arctan\sqrt{7}\right)\left(C - \arctan\sqrt{7}\right) = \sqrt{7} + 8\left(C - \arctan\sqrt{7}\right)$$

Mặt khác: $\arctan\dfrac{3\sqrt{7}}{7} + \arctan\dfrac{5\sqrt{7}}{7} + \arctan\sqrt{7} = \pi \Rightarrow P = \dfrac{\sqrt{7}}{14}\left[14f(A) + 7f(B) + 4f(C)\right]$

$$\ge \frac{\sqrt{7}}{14}\left[15\sqrt{7} + 32(A + B + C) - 32\left(\arctan\frac{3\sqrt{7}}{7} + \arctan\frac{5\sqrt{7}}{7} + \arctan\sqrt{7}\right)\right] = \frac{15}{2}$$

Với $A = \arctan\dfrac{3\sqrt{7}}{7}; B = \arctan\dfrac{5\sqrt{7}}{7}; C = \arctan\sqrt{7}$ thì $\text{Min } P = \dfrac{15}{2}$

Đọc lời giải trên, các bạn ắt hẳn sẽ đặt câu hỏi làm sao ta có thể chọn được các số $\arctan\dfrac{3\sqrt{7}}{7}; \arctan\dfrac{5\sqrt{7}}{7}; \arctan\sqrt{7}$ một cách hợp lí để có thể sử dụng bổ đề trên dựa theo tư tưởng **U.C.T**? Tất nhiên đó không phải là điều ngẫu nhiên, thực ra ta đã làm như sau

Sử dụng bổ đề trên, ta có

$f(A) \ge f(M) + f'(M)(A-M)$; $f(B) \ge f(N) + f'(N)(B-N)$; $f(C) \ge f(P) + f'(P)(C-P)$

$\Rightarrow 14\tan A + 7\tan B + 4\tan C$

$\ge 14\tan M + 7\tan N + 4\tan P + 14f'(M)(A-M) + 7f'(N)(B-N) + 4f'(P)(C-P)$

Do A, B, C là 3 góc của một tam giác nhọn nên ta cũng phải chọn M, N, P sao cho chúng cũng là 3 góc cũng là một tam giác nhọn. Hơn nữa, để tận dụng được giả thiết này, ta cần chọn M, N, P sao cho $14f'(M) = 7f'(N) = 4f'(P)$

Vậy ta có hệ $\begin{cases} \frac{\pi}{2} > M, N, P > 0 \\ M + N + P = \pi \\ 14f'(M) = 7f'(N) = 4f'(P) \end{cases}$

Giải hệ này, ta được kết quả như trên!

IX. BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1. [Diễn đàn Toán học] Cho $a,b,c,d,e \ge 0 : a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + e^3 = 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $\frac{a^2}{1-a^3} + \frac{b^2}{1-b^3} + \frac{c^2}{1-c^3} + \frac{d^2}{1-d^3} + \frac{e^2}{1-e^3}$.

Bài 2. [Crux Mathematicorum, Problem 3032]

Cho $\begin{cases} a,b,c \ge 0 \\ a^2+b^2+c^2 = 1 \end{cases}$. Chứng minh rằng: $\frac{1}{1-ab} + \frac{1}{1-bc} + \frac{1}{1-ca} \le \frac{9}{2}$

Bài 3. [Mathematical Excalibur, Vol 9, Num 1, 8/2004]

Cho $\begin{cases} a,b,c,d > 0 \\ a+b+c+d = 4 \end{cases}$. Chứng minh rằng: $6(a^3+b^3+c^3+d^3) \ge (a^2+b^2+c^2+d^2) + \frac{1}{8}$

Bài 4. [Old and New Inequalities]

Cho $\begin{cases} a,b,c > 0 \\ a+b+c = 1 \end{cases}$. Chứng minh rằng: $6(a^3+b^3+c^3) + 1 \ge 5(a^2+b^2+c^2)$

Bài 5. [Old and New Inequalities]

Cho $\begin{cases} a,b,c > 0 \\ a+b+c = 1 \end{cases}$. Chứng minh rằng: $\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} + \frac{1}{1+c^2} \le \frac{27}{10}$

Bài 6. [Old and New Inequalities] Cho $a,b,c \in (1,2)$.

Chứng minh rằng: $\frac{b\sqrt{a}}{4b\sqrt{c} - c\sqrt{a}} + \frac{c\sqrt{b}}{4c\sqrt{a} - a\sqrt{b}} + \frac{a\sqrt{c}}{4a\sqrt{b} - b\sqrt{c}} \ge 1$

Bài 7. Cho a,b,c,d là các số thực dương thỏa mãn $abcd=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{1+a+a^2+a^3}+\frac{1}{1+b+b^2+b^3}+\frac{1}{1+c+c^2+c^3}+\frac{1}{1+d+d^2+d^3}\geq 1$$

Bài 8. [China TST 2004] Cho $\begin{cases} a,b,c,d>0 \\ abcd=1 \end{cases}$

Chứng minh rằng: $\dfrac{1}{(1+a)^2}+\dfrac{1}{(1+b)^2}+\dfrac{1}{(1+c)^2}+\dfrac{1}{(1+d)^2}\geq 1$

Bài 9. Cho $a,b,c,d>0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{\sqrt[3]{a^3+63bcd}}+\frac{b}{\sqrt[3]{b^3+63cda}}+\frac{c}{\sqrt[3]{c^3+63dab}}+\frac{c}{\sqrt[3]{c^3+63abc}}\geq 1$$

Bài 10. Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{(3a+b+c)^3}{(b+c)^3+3a^3}+\frac{(3b+c+a)^3}{(c+a)^3+3b^3}+\frac{(3c+a+b)^3}{(a+b)^3+3c^3}\leq\frac{375}{11}$$

Bài 11. Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{(a+b-c)^2}{7(a+b)^2+17c^2}+\frac{(b+c-a)^2}{7(b+c)^2+17a^2}+\frac{(c+a-b)^2}{7(c+a)^2+17b^2}\geq\frac{a^2+b^2+c^2}{5(a+b+c)^2}$$

Bài 12. Cho tam giác ABC nhọn, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\tan A+2\tan B+5\tan C$$

Bài 13. Cho các số dương ABC, tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\sin^m A\sin^n B\sin^p C$$

trong đó m,n,p là các số dương cho trước.

Bài 14. [VMEO 2005] Cho trước các số dương a,b,c và x,y,z là các số dương thỏa mãn $ax+by+cz=xyz$, tìm giá trị nhỏ nhất của $P=x+y+z$

....

§ 23.6. CÁC PHÉP ĐỔI BIẾN THUẬN NGHỊCH THEO CÁC ĐỘ DÀI TRONG TAM GIÁC

Một bất đẳng thức có thể phát biểu dưới nhiều dạng khác nhau. Trong mục này nhờ các phép đổi biến thuận nghịch theo các độ dài trong tam giác, chúng ta có thể biến các bất đẳng thức đại số thành bất đẳng thức lượng giác trong tam giác, và ngược lại, biến các bất đẳng thức lượng giác trong tam giác thành các bất đẳng thức đại số. Tùy trường hợp cụ thể ta sẽ chứng minh bất đẳng thức ở dạng đơn giản nhất có thể.

I. ĐỊNH NGHĨA

1. Phép đổi biến thuận

Cho $x, y, z > 0$, phép đổi biến $a = \frac{y+z}{2}$; $b = \frac{z+x}{2}$; $c = \frac{x+y}{2}$ được gọi là phép đổi biến thuận với ba biến x, y, z

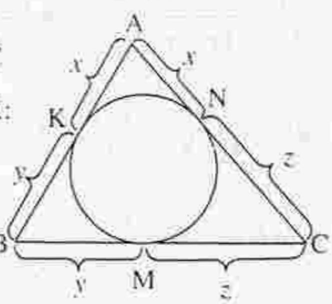
• ***Tính chất:***

$$\begin{cases} a + b = z + \frac{x+y}{2} = z + c > c \\ b + c = x + \frac{y+z}{2} = x + a > a \\ c + a = y + \frac{z+x}{2} = y + b > b \end{cases}$$

• ***Ý nghĩa:*** Với các bất đẳng thức đại số ba biến $x, y, z > 0$, phép đổi biến nêu trên cho phép ta chuyển các bất đẳng thức đại số thành các bất đẳng thức trong tam giác với độ dài ba cạnh a, b, c. Sử dụng các hàm lượng giác trong tam giác, chúng ta có thể thu được lời giải cho bài toán một cách đơn giản hơn.

2. Phép đổi biến nghịch

Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác ABC. Do tam giác ABC luôn có đường tròn nội tiếp nên luôn tồn tại $x, y, z > 0$ sao cho $a = y + z; b = z + x; c = x + y$.



Thật vậy, giả sử đường tròn nội tiếp của tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại M, N, K:

$$\begin{cases} x = AN = AK = p - a > 0 \\ y = BK = BM = p - b > 0 \\ z = CM = CN = p - c > 0 \end{cases}$$

• ***Ý nghĩa:*** nếu một bất đẳng thức giữa độ dài các cạnh của một tam giác không thể quy về các hàm lượng giác thì chúng vẫn có thể quy về bất đẳng thức đại số với các biến $x, y, z > 0$ và thuận tiện hơn trong việc tìm lời giải.

II. BIỂU DIỄN CÁC ĐẠI LƯỢNG TRONG TAM GIÁC THEO CÁC BIẾN x, y, z > 0

Cho $x, y, z > 0$. Đặt $a = \frac{y+z}{2}; b = \frac{z+x}{2}; c = \frac{x+y}{2}$, suy ra a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác ABC, ta sẽ biểu diễn các đại lượng của tam giác ABC:

$$x = 2(p-a)\ ;\ y = 2(p-b)\ ;\ z = 2(p-c)\ ;\ p = \frac{x+y+z}{2}$$

$$S = \frac{\sqrt{(x+y+z)xyz}}{4}\ ;\ R = \frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{8\sqrt{(x+y+z)xyz}}\ ;\ r = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{xyz}{x+y+z}}$$

$$\sin A = \frac{2\sqrt{xyz(x+y+z)}}{(x+y)(x+z)}\ ;\ \sin B = \frac{2\sqrt{xyz(x+y+z)}}{(y+z)(y+x)}\ ;\ \sin C = \frac{2\sqrt{xyz(x+y+z)}}{(z+x)(z+y)}$$

$$\sin A + \sin B + \sin C = \frac{4(x+y+z)\sqrt{xyz(x+y+z)}}{(x+y)(y+z)(z+x)}$$

$$\cos A = \frac{x(x+y+z)-yz}{(x+y)(x+z)}\ ;\ \cos B = \frac{y(x+y+z)-zx}{(y+z)(y+x)}\ ;\ \cos C = \frac{z(x+y+z)-xy}{(z+x)(z+y)}$$

$$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + \frac{4xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)}$$

$$\tan A = \frac{2\sqrt{xyz(x+y+z)}}{x(x+y+z)-yz}\ ;\ \tan B = \frac{2\sqrt{xyz(x+y+z)}}{y(x+y+z)-zx}\ ;\ \tan C = \frac{2\sqrt{xyz(x+y+z)}}{z(x+y+z)-xy}$$

$$\tan B\tan C = \frac{4(x+y+z)}{2x+y+z}\ ;\ \tan C\tan A = \frac{4(x+y+z)}{2y+z+x}\ ;\ \tan A\tan B = \frac{4(x+y+z)}{2z+x+y}$$

$$\tan A + \tan B + \tan C = \frac{8xyz(x+y+z)\sqrt{xyz(x+y+z)}}{\left[x(x+y+z)-yz\right]\left[y(x+y+z)-zx\right]\left[z(x+y+z)-xy\right]}$$

$$\cot A = \frac{x(x+y+z)-yz}{2\sqrt{xyz(x+y+z)}}\ ;\ \cot B = \frac{y(x+y+z)-zx}{2\sqrt{xyz(x+y+z)}}\ ;\ \cot C = \frac{z(x+y+z)-xy}{2\sqrt{xyz(x+y+z)}}$$

$$\cot B\cot C = \frac{2x+y+z}{4(x+y+z)};\ \cot C\cot A = \frac{2y+z+x}{4(x+y+z)};\ \cot A\cot B = \frac{2z+x+y}{4(x+y+z)}$$

$$\cot A + \cot B + \cot C = \frac{x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx}{2\sqrt{xyz(x+y+z)}}$$

$$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{yz}{(x+y)(x+z)}}\ ;\ \sin\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{zx}{(y+z)(y+x)}}\ ;\ \sin\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{xy}{(z+x)(z+y)}}$$

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\frac{xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)}$$

$$\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}=\frac{\sqrt{yz(y+z)}+\sqrt{zx(z+x)}+\sqrt{xy(x+y)}}{\sqrt{(x+y)(y+z)(z+x)}}$$

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{x(x+y+z)}{(x+y)(x+z)}}\ ;\ \cos\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{y(x+y+z)}{(y+z)(y+x)}}\ ;\ \cos\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{z(x+y+z)}{(z+x)(z+y)}}$$

$$\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}=\frac{(x+y+z)\sqrt{xyz(x+y+z)}}{(x+y)(y+z)(z+x)}$$

$$\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}=\frac{\sqrt{x+y+z}\left[\sqrt{x(y+z)}+\sqrt{y(z+x)}+\sqrt{z(x+y)}\right]}{\sqrt{(x+y)(y+z)(z+x)}}$$

$$\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{yz}{x(x+y+z)}}\ ;\ \tan\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{zx}{y(x+y+z)}}\ ;\ \tan\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{xy}{z(x+y+z)}}$$

$$\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}=\frac{x}{x+y+z}\ ;\ \tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}=\frac{y}{x+y+z}\ ;\ \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}=\frac{z}{x+y+z}$$

$$\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{xyz}{x+y+z}}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$$

$$\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{xyz}{(x+y+z)^3}}=\frac{1}{x+y+z}\sqrt{\frac{xyz}{x+y+z}}$$

$$\cot\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{x(x+y+z)}{yz}}\ ;\ \cot\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{y(x+y+z)}{zx}}\ ;\ \cot\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{z(x+y+z)}{xy}}$$

$$\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(x+y+z)^3}{xyz}}=\sqrt{\frac{x+y+z}{xyz}}(x+y+z)$$

$$\sin 2A=\frac{4\sqrt{xyz(x+y+z)}\left[x(x+y+z)-yz\right]}{\left[(x+y)(x+z)\right]^2};\ \cos 2A=\frac{\left[x(x+y+z)-yz\right]^2-4xyz(x+y+z)}{\left[(x+y)(x+z)\right]^2}$$

$$\cos 2(B-C)=\frac{y^2z^2(x+y+z)^4-2xyz(3y^2+3z^2-8yz)(x+y+z)^3+x^2\left(x^4+y^4-16yz(y+z)+36y^2z^2\right)}{(y+z)^4(x+y)^2(x+z)^2}+$$

$$+\frac{x^2\left(x^4+y^4-16yz(y+z)+36y^2z^2\right)(x+y+z)^2-2x^3yz(3y^2+3z^2-8yz)(x+y+z)+x^4y^2z^2}{(y+z)^4(x+y)^2(x+z)^2}$$

$$\cos(B-C)=\frac{xyz(6x+5y+5z)}{(x+y)(x+z)(y+z)^2}=\frac{xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)}\cdot\left(\frac{6x}{y+z}+5\right)$$

$$\cos(B-C)+\cos(C-A)+\cos(A-B)=\frac{xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)}\left[6\left(\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}\right)+15\right]$$

$$\sin(B-C)=\frac{2\sqrt{xyz(x+y+z)}\,(z^2-y^2)}{(x+y)(x+z)(y+z)^2}=\frac{2\sqrt{xyz(x+y+z)}\,(z-y)}{(x+y)(y+z)(z+x)}$$

$$\cos\frac{B-C}{2}=\frac{2x+y+z}{y+z}\sqrt{\frac{yz}{(x+y)(x+z)}}=\sqrt{\frac{xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)}}\cdot\frac{2x+y+z}{\sqrt{x(y+z)}}$$

$$\cos\frac{B-C}{2}+\cos\frac{C-A}{2}+\cos\frac{A-B}{2}=$$

$$=\sqrt{\frac{xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)}}\left[2\left(\sqrt{\frac{x}{y+z}}+\sqrt{\frac{y}{z+x}}+\sqrt{\frac{z}{x+y}}\right)+\sqrt{\frac{y+z}{x}}+\sqrt{\frac{z+x}{y}}+\sqrt{\frac{x+y}{z}}\right]$$

$$\sin\frac{B-C}{2}=\frac{y-z}{y+z}\sqrt{\frac{x(x+y+z)}{(x+y)(x+z)}}\ ;\ \sin^2\frac{B-C}{2}=\frac{x(x+y+z)(y-z)^2}{(x+y)(x+z)(y+z)^2}$$

$$\sin^2\frac{B-C}{4}=\frac{x(x+y+z)(y-z)^2}{2(y+z)\sqrt{(x+y)(x+z)}\left[(y+z)\sqrt{(x+y)(x+z)}+(2x+y+z)\sqrt{yz}\right]}$$

$$h_a=\frac{\sqrt{xyz(x+y+z)}}{y+z}\ ;\ h_b=\frac{\sqrt{xyz(x+y+z)}}{z+x}\ ;\ h_c=\frac{\sqrt{xyz(x+y+z)}}{x+y}$$

$$h_a^2=\frac{xyz(x+y+z)}{(y+z)^2};\quad h_b^2=\frac{xyz(x+y+z)}{(z+x)^2};\quad h_c^2=\frac{xyz(x+y+z)}{(x+y)^2}$$

$$m_a^2=\frac{4x^2+y^2+z^2+4x(y+z)-2yz}{16}=\frac{x(x+y+z)}{4}+\frac{(y-z)^2}{16}=\frac{(2x+y+z)^2}{16}-\frac{yz}{4}$$

$$l_a^2=\frac{x(x+y)(x+z)(x+y+z)}{(2x+y+z)^2};l_b^2=\frac{y(y+z)(y+x)(x+y+z)}{(2y+z+x)^2};l_c^2=\frac{z(z+x)(z+y)(x+y+z)}{(2z+x+y)^2}$$

$$r_a^2=\frac{yz(x+y+z)}{4x};r_b^2=\frac{zx(x+y+z)}{4y};r_c^2=\frac{xy(x+y+z)}{4z};\ r_br_c=\frac{x(x+y+z)}{4}$$

III. ÁP DỤNG PHÉP ĐỔI BIẾN THUẬN

Bài 1. Chứng minh rằng: $64xyz(x+y+z)^3 \le 27(x+y)^2(y+z)^2(z+x)^2,\ \forall x,y,z>0$

Chứng minh

• ***Bổ đề:*** $T = \sin A + \sin B + \sin C \le \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

• ***Chứng minh:*** $T = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\left(\sin A\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \sin B\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) + \sqrt{3}\left(\dfrac{\sin A}{\sqrt{3}}\cdot\cos B + \dfrac{\sin B}{\sqrt{3}}\cdot\cos A\right)$

$$\le \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\left(\sin^2 A + \frac{3}{4}\right) + \left(\sin^2 B + \frac{3}{4}\right)\right] + \frac{\sqrt{3}}{2}\left[\left(\frac{\sin^2 A}{3} + \cos^2 B\right) + \left(\frac{\sin^2 B}{3} + \cos^2 A\right)\right] = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

• ***Áp dụng:*** Bất đẳng thức đã cho tương đương $\dfrac{4(x+y+z)\sqrt{xyz(x+y+z)}}{(x+y)(y+z)(z+x)} \le \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

$$\Leftrightarrow \frac{2\sqrt{xyz(x+y+z)}}{(x+y)(x+z)} + \frac{2\sqrt{xyz(x+y+z)}}{(y+z)(y+x)} + \frac{2\sqrt{xyz(x+y+z)}}{(z+x)(z+y)} \le \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Sử dụng phép đổi biến thuận với ba biến x, y, z ta đưa về bất đẳng thức trong tam giác sau:

$\sin A + \sin B + \sin C \le \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ (đpcm). Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow$ ΔABC đều $\Leftrightarrow x = y = z$.

Bài 2: Chứng minh: $8\sqrt{xyz}\left[\sqrt{x(x+y)(x+z)} + \sqrt{y(y+z)(y+x)} + \sqrt{z(z+x)(z+y)}\right]$

$$\le 18xyz + 5\left[xy(x+y) + yz(y+z) + zx(z+x)\right],\ \forall x,y,z>0$$

Chứng minh

• ***Bổ đề:*** $T = \sin\dfrac{A}{2} + \sin\dfrac{B}{2} + \sin\dfrac{C}{2} \le \dfrac{3}{2}\quad \forall$ΔABC

• ***Chứng minh:*** $T = \sin\dfrac{A}{2} + \sin\dfrac{B}{2} + \sin\dfrac{C}{2} = \left(\sin\dfrac{A}{2} + \sin\dfrac{B}{2}\right).1 + \cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2} - \sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}$

$$\le \frac{1}{2}\left[\left(\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2}\right)^2 + 1^2\right] + \frac{1}{2}\left(\cos^2\frac{A}{2} + \cos^2\frac{B}{2}\right) - \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} = \frac{3}{2}$$

• ***Áp dụng:*** Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$\left[\sqrt{xy(x+y)} + \sqrt{yz(y+z)} + \sqrt{zx(z+x)}\right]^2 \le \frac{9}{4}(x+y)(y+z)(z+x)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{yz(y+z)} + \sqrt{zx(z+x)} + \sqrt{xy(x+y)} \le \frac{3}{2}\sqrt{(x+y)(y+z)(z+x)}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{yz}{(x+y)(x+z)}}+\sqrt{\frac{zx}{(y+z)(y+x)}}+\sqrt{\frac{xy}{(z+x)(z+y)}}\le\frac{3}{2}\quad(1)$$

Sử dụng phép đổi biến thuận với ba biến x, y, z ta đưa về bất đẳng thức trong tam giác sau

$\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\le\frac{3}{2}$ $\Rightarrow$ (đpcm). Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow$ ΔABC đều $\Leftrightarrow x=y=z$.

Bài 3. Cho $x, y, z>0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{\sqrt{x+y+z}\left(\sqrt{x(y+z)}+\sqrt{y(z+x)}+\sqrt{z(x+y)}\right)}{\sqrt{(x+y)(y+z)(z+x)}}\le\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Chứng minh

• ***Bổ đề:*** $T=\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}\le\frac{3\sqrt{3}}{2}$, $\forall\Delta ABC$

• ***Chứng minh:*** $T=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\cos\frac{A}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\cos\frac{B}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\sqrt{3}\left(\frac{\cos\frac{A}{2}}{\sqrt{3}}\cdot\sin\frac{B}{2}+\frac{\cos\frac{B}{2}}{\sqrt{3}}\cdot\sin\frac{A}{2}\right)$

$$\le\frac{1}{\sqrt{3}}\left[\left(\cos^2\frac{A}{2}+\frac{3}{4}\right)+\left(\cos^2\frac{B}{2}+\frac{3}{4}\right)\right]+\frac{\sqrt{3}}{2}\left[\left(\frac{\cos^2\frac{A}{2}}{3}+\sin^2\frac{B}{2}\right)+\left(\frac{\cos^2\frac{B}{2}}{3}+\sin^2\frac{A}{2}\right)\right]=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

• ***Áp dụng:*** Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$\sqrt{\frac{x(x+y+z)}{(x+y)(x+z)}}+\sqrt{\frac{y(x+y+z)}{(y+z)(y+x)}}+\sqrt{\frac{z(x+y+z)}{(z+x)(z+y)}}\le\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Sử dụng phép đổi biến thuận với ba biến x, y, z ta đưa về bất đẳng thức trong tam giác sau

$\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}\le\frac{3\sqrt{3}}{2}$ $\Rightarrow$ (đpcm). Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow$ ΔABC đều $\Leftrightarrow x=y=z$.

Bài 4. Cho $x, y, z>0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{x}{(x+y)(x+z)}+\frac{y}{(y+z)(y+x)}+\frac{z}{(z+x)(z+y)}\le\frac{9}{4(x+y+z)}\quad(*)$$

Chứng minh

• ***Bổ đề:*** $T=\cos A+\cos B+\cos C\le\frac{3}{2}$

• ***Chứng minh:*** $T=\cos A+\cos B+\cos C=(\cos A+\cos B).1+\sin A\sin B-\cos A\cos B$

$$\le\frac{1}{2}\left[(\cos A+\cos B)^2+1^2\right]+\frac{1}{2}\left(\sin^2 A+\sin^2 B\right)-\cos A\cos B\le\frac{3}{2}$$

• ***Áp dụng:*** Sử dụng phép đổi biến thuận với ba biến x, y, z ta có:

$$(*) \Leftrightarrow \frac{2(p-a)}{4bc}+\frac{2(p-b)}{4ca}+\frac{2(p-c)}{4ab}\le\frac{9}{4(a+b+c)}$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c)\left(\frac{b+c-a}{bc}+\frac{c+a-b}{ca}+\frac{a+b-c}{ab}\right)\le 9$$

$$\Leftrightarrow \frac{(a+b+c)(b+c-a)}{bc}+\frac{(a+b+c)(c+a-b)}{ca}+\frac{(a+b+c)(a+b-c)}{ab}\le 9$$

$$\Leftrightarrow \frac{(b+c)^2-a^2}{bc}+\frac{(c+a)^2-b^2}{ca}+\frac{(a+b)^2-c^2}{ab}\le 9$$

$$\Leftrightarrow 2(\cos A+\cos B+\cos C)\le 3 \;\Leftrightarrow\; \cos A+\cos B+\cos C\le\frac{3}{2} \;\Rightarrow \text{(dpcm)}$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \Delta$ABC đều $\Leftrightarrow x=y=z$.

Bài 2. Cho $x, y, z>0$ và $x+y+z>\text{Max}\left\{\frac{yz}{x};\frac{zx}{y};\frac{xy}{z}\right\}$. Chứng minh rằng:

$$64x^3y^3z^3(x+y+z)^3\ge 27\left\{\left[x(x+y+z)-yz\right]\left[y(x+y+z)-zx\right]\left[z(x+y+z)-xy\right]\right\}^2 \quad (*)$$

Chứng minh

• ***Bổ đề:*** $\tan A+\tan B+\tan C\ge 3\sqrt{3}\quad \forall\Delta$ABC nhọn

• ***Áp dụng:*** $(*) \Leftrightarrow \dfrac{8xyz(x+y+z)\sqrt{xyz(x+y+z)}}{\left[x(x+y+z)-yz\right]\left[y(x+y+z)-zx\right]\left[z(x+y+z)-xy\right]}\ge 3\sqrt{3}$

$$\Leftrightarrow \frac{2\sqrt{xyz(x+y+z)}}{x(x+y+z)-yz}\cdot\frac{2\sqrt{xyz(x+y+z)}}{y(x+y+z)-zx}\cdot\frac{2\sqrt{xyz(x+y+z)}}{z(x+y+z)-xy}\ge 3\sqrt{3}\quad (1)$$

Sử dụng phép đổi biến thuận với ba biến x, y, z ta có:

$x+y+z>\text{Max}\left\{\frac{yz}{x};\frac{zx}{y};\frac{xy}{z}\right\} \Leftrightarrow \cos A>0;\ \cos B>0;\ \cos C>0 \Leftrightarrow \Delta$ABC nhọn

Mặt khác (1) $\Leftrightarrow \tan A+\tan B+\tan C\ge 3\sqrt{3} \Rightarrow$ (dpcm)

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \Delta$ABC đều $\Leftrightarrow x=y=z$.

Bài 3. Cho $x, y, z>0$. Chứng minh rằng:

$$\left(x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx\right)^2\ge 12xyz(x+y+z)\quad (*)$$

Chứng minh

• ***Bổ đề:*** $\cot A + \cot B + \cot C \ge \sqrt{3}$ $\forall\Delta ABC$

• ***Áp dụng:*** $(*) \Leftrightarrow \dfrac{x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx}{2\sqrt{xyz(x+y+z)}} \ge \sqrt{3}$

$$\Leftrightarrow \frac{x(x+y+z)-yz}{2\sqrt{xyz(x+y+z)}} + \frac{y(x+y+z)-zx}{2\sqrt{xyz(x+y+z)}} + \frac{z(x+y+z)-xy}{2\sqrt{xyz(x+y+z)}} \ge \sqrt{3} \quad (1)$$

Sử dụng phép đổi biến thuận với ba biến x, y, z ta có:

$(1) \Leftrightarrow \cot A + \cot B + \cot C \ge \sqrt{3} \Rightarrow$ (đpcm)

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \Delta ABC$ đều $\Leftrightarrow x = y = z$.

Bài 6. Cho $x, y, z > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{4(x+y+z)\sqrt{xyz}}{\sqrt{(x+y)(y+z)(z+x)}} \le \sqrt{x(y+z)} + \sqrt{y(z+x)} + \sqrt{z(x+y)} \quad (*)$$

Chứng minh

• ***Bổ đề:*** $\sin A + \sin B + \sin C \le \cos\dfrac{A}{2} + \cos\dfrac{B}{2} + \cos\dfrac{C}{2}$ $\forall\Delta ABC$ nhọn

• ***Áp dụng:***

$$(*) \Leftrightarrow \frac{4(x+y+z)\sqrt{xyz(x+y+z)}}{(x+y)(y+z)(z+x)} \le \frac{\sqrt{x+y+z}\left[\sqrt{x(y+z)} + \sqrt{y(z+x)} + \sqrt{z(x+y)}\right]}{\sqrt{(x+y)(y+z)(z+x)}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\sqrt{xyz(x+y+z)}}{(x+y)(x+z)} + \frac{2\sqrt{xyz(x+y+z)}}{(y+z)(y+x)} + \frac{2\sqrt{xyz(x+y+z)}}{(z+x)(z+y)} \le$$

$$\le \sqrt{\frac{x(x+y+z)}{(x+y)(x+z)}} + \sqrt{\frac{y(x+y+z)}{(y+z)(y+x)}} + \sqrt{\frac{z(x+y+z)}{(z+x)(z+y)}} \quad (1)$$

Sử dụng phép đổi biến thuận với ba biến x, y, z ta có:

$(1) \Leftrightarrow \sin A + \sin B + \sin C \le \cos\dfrac{A}{2} + \cos\dfrac{B}{2} + \cos\dfrac{C}{2} \Rightarrow$ (đpcm)

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \Delta ABC$ đều $\Leftrightarrow x = y = z$

Bài 7. Cho $x, y, z > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{x(y+z)^2 + x(y+z)^2 + x(y+z)^2}{\sqrt{(x+y)(y+z)(z+x)}} \le \sqrt{yz(y+z)} + \sqrt{zx(z+x)} + \sqrt{xy(x+y)} \quad (*)$$

Chứng minh

• ***Bổ đề:*** $\cos A + \cos B + \cos C \le \sin\dfrac{A}{2} + \sin\dfrac{B}{2} + \sin\dfrac{C}{2}$, $\forall\Delta ABC$

• ***Áp dụng:***

$$(*) \Leftrightarrow \frac{x\left(y^2+z^2\right)+y\left(z^2+x^2\right)+z\left(x^2+y^2\right)+6xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)} \le \frac{\sqrt{yz(y+z)}+\sqrt{zx(z+x)}+\sqrt{xy(x+y)}}{\sqrt{(x+y)(y+z)(z+x)}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)}+1 \le \frac{\sqrt{yz(y+z)}+\sqrt{zx(z+x)}+\sqrt{xy(x+y)}}{\sqrt{(x+y)(y+z)(z+x)}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x(x+y+z)-yz}{(x+y)(x+z)}+\frac{y(x+y+z)-zx}{(y+z)(y+x)}+\frac{z(x+y+z)-xy}{(z+x)(z+y)} \le$$

$$\le \sqrt{\frac{yz}{(x+y)(x+z)}}+\sqrt{\frac{zx}{(y+z)(y+x)}}+\sqrt{\frac{xy}{(z+x)(z+y)}} \quad (1)$$

Sử dụng phép đổi biến thuận với ba biến x, y, z ta có:

$(1) \Leftrightarrow \cos A+\cos B+\cos C \le \sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2} \Rightarrow$ (đpcm)

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow$ ΔABC đều $\Leftrightarrow x=y=z$.

Bài 8. Cho $x, y, z>0$. Chứng minh rằng:

$$8x^2y^2z^2 \ge \left[x(x+y+z)-yz\right]\left[y(x+y+z)-zx\right]\left[z(x+y+z)-xy\right] \quad (*)$$

Chứng minh

• ***Bổ đề:*** $\tan A+\tan B+\tan C \ge \cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}$, $\forall$ΔABC nhọn

• ***Áp dụng:***

Nếu $\left[x(x+y+z)-yz\right]\left[y(x+y+z)-zx\right]\left[z(x+y+z)-xy\right] \le 0$ thì (*) đúng.

Xét $\left[x(x+y+z)-yz\right]\left[y(x+y+z)-zx\right]\left[z(x+y+z)-xy\right]>0$

Ta có:
$$\begin{cases}\left[y(x+y+z)-zx\right]+\left[z(x+y+z)-xy\right]=(y+z)^2>0\\ \left[z(x+y+z)-xy\right]+\left[x(x+y+z)-yz\right]=(z+x)^2>0\\ \left[x(x+y+z)-yz\right]+\left[y(x+y+z)-zx\right]=(x+y)^2>0\end{cases}$$

$\Rightarrow x(x+y+z)-yz>0;\ y(x+y+z)-zx>0;\ z(x+y+z)-xy>0$. Khi đó

$$(*) \Leftrightarrow \frac{8xyz(x+y+z)\sqrt{xyz(x+y+z)}}{\left[x(x+y+z)-yz\right]\left[y(x+y+z)-zx\right]\left[z(x+y+z)-xy\right]} \ge (x+y+z)\sqrt{\frac{x+y+z}{xyz}} \quad (1)$$

Sử dụng phép đổi biến thuận với ba biến x, y, z ta có:

$x(x+y+z)-yz>0;\ y(x+y+z)-zx>0;\ z(x+y+z)-xy>0 \Leftrightarrow$ ΔABC nhọn

$(1) \Leftrightarrow \tan A + \tan B + \tan C \geq \cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2} \Rightarrow$ (đpcm)

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \Delta ABC$ đều $\Leftrightarrow x = y = z$.

Bài 9. Cho $x, y, z > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{\left[x(x+y+z)-yz\right]\left[y(x+y+z)-zx\right]\left[z(x+y+z)-xy\right]}{(x+y)(y+z)(z+x)} \leq xyz \quad (*)$$

Chứng minh

• ***Bổ đề:*** $\cos A\cos B\cos C \leq \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$, $\forall \Delta ABC$

• ***Áp dụng:***

$$(*) \Leftrightarrow \frac{\left[x(x+y+z)-yz\right]\left[y(x+y+z)-zx\right]\left[z(x+y+z)-xy\right]}{(x+y)^2(y+z)^2(z+x)^2} \leq \frac{xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)} \quad (1)$$

Sử dụng phép đổi biến thuận với ba biến x, y, z ta có:

$(1) \Leftrightarrow \cos A\cos B\cos C \leq \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \Rightarrow$ (đpcm)

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \Delta ABC$ đều $\Leftrightarrow x = y = z$

Bài 10. Cho $x, y, z > 0$. Chứng minh rằng:

$$2(x+y+z)(xy+yz+zx) \geq \left[\sqrt{yz(y+z)} + \sqrt{zx(z+x)} + \sqrt{xy(x+y)}\right]^2 \quad (*)$$

Chứng minh

• ***Bổ đề:*** $\cos^2\frac{A}{2} + \cos^2\frac{B}{2} + \cos^2\frac{C}{2} \geq \left(\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2}\right)^2$

• ***Áp dụng:*** $(*) \Leftrightarrow \frac{x(x+y+z)}{(x+y)(x+z)} + \frac{y(x+y+z)}{(y+z)(y+x)} + \frac{z(x+y+z)}{(z+x)(z+y)} \geq$

$$\geq \left[\frac{\sqrt{yz(y+z)} + \sqrt{zx(z+x)} + \sqrt{xy(x+y)}}{\sqrt{(x+y)(y+z)(z+x)}}\right]^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{x(x+y+z)}{(x+y)(x+z)} + \frac{y(x+y+z)}{(y+z)(y+x)} + \frac{z(x+y+z)}{(z+x)(z+y)} \geq$$

$$\geq \left[\sqrt{\frac{yz}{(x+y)(x+z)}} + \sqrt{\frac{zx}{(y+z)(y+x)}} + \sqrt{\frac{xy}{(z+x)(z+y)}}\right]^2 \quad (1)$$

Sử dụng phép đổi biến thuận với ba biến x, y, z ta có:

$(1) \Leftrightarrow \cos^2\frac{A}{2} + \cos^2\frac{B}{2} + \cos^2\frac{C}{2} \geq \left(\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2}\right)^2 \Rightarrow$ (đpcm)

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \Delta ABC$ đều $\Leftrightarrow x = y = z$.

Bài 11. Cho $x, y, z > 0$ and $x + y + z > \text{Max}\left\{\frac{yz}{x}; \frac{zx}{y}; \frac{xy}{z}\right\}$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{x+y+z} \geq \frac{10\sqrt{3}}{3}\sqrt{\frac{x+y+z}{xyz}} \quad (*)$$

Chứng minh

• ***Bổ đề:*** $\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} \geq \frac{10\sqrt{3}}{3}$, $\forall\Delta ABC$ nhọn

• ***Áp dụng:*** $(*) \Leftrightarrow \sqrt{\frac{xyz}{x+y+z}}\left[\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)+\frac{1}{x+y+z}\right] \geq \frac{10\sqrt{3}}{3}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{xyz}{x+y+z}}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)+\sqrt{\frac{xyz}{x+y+z}}\cdot\frac{1}{x+y+z} \geq \frac{10\sqrt{3}}{3} \quad (1)$$

Sử dụng phép đổi biến thuận với ba biến x, y, z ta có:

$x+y+z > \text{Max}\left\{\frac{yz}{x}; \frac{zx}{y}; \frac{xy}{z}\right\} \Leftrightarrow \Delta ABC$ nhọn

$(1) \Leftrightarrow \tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} \geq \frac{10\sqrt{3}}{3} \Rightarrow$ (đpcm)

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \Delta ABC$ đều $\Leftrightarrow x = y = z$.

Bình luận: Nhờ phương pháp đổi biến này và các công thức chuyển đổi giữa các đại lượng trong tam giác ABC và các biến x, y, z trình bày trong mục II, chúng ta có thể khẳng định rằng: *"Có bao nhiêu bất đẳng thức tam giác lượng thì sẽ có bấy nhiêu bất đẳng thức đại số tương đương".*

IV. ÁP DỤNG PHÉP ĐỔI BIẾN NGHỊCH

Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác. Sử dụng phương pháp đổi biến nghịch $a = y + z$; $b = z + x$; $c = x + y$, chứng minh các bất đẳng thức sau:

Bài 1. Chứng minh rằng: $a(b^2 + c^2) + b(c^2 + a^2) + c(a^2 + b^2) > a^3 + b^3 + c^3 + 2abc$ (*)

Chứng minh

$$(*) \Leftrightarrow \sum(y+z)\left[(z+x)^2+(x+y)^2\right] > \sum(y+z)^3+2(x+y)(y+z)(z+x)$$

$$\Leftrightarrow \sum(y+z)\left[2x^2+y^2+z^2+2x(y+z)\right] > \sum\left[y^3+3yz(y+z)+z^3\right]+4xyz+2\sum yz(y+z)$$

$$\Leftrightarrow 2\sum x^2(y+z)+\sum(y+z)(y^2+z^2)+2\sum x(y+z)^2 >$$

$$> 2\sum x^3+3\sum yz(y+z)+4xyz+2\sum yz(y+z)$$

$$\Leftrightarrow 2\sum yz(y+z)+\sum(y^3+z^3)+\sum yz(y+z)+2\sum yz(y+z)+12xyz>$$

$$>2\sum x^3+5\sum yz(y+z)+4xyz \Leftrightarrow 8xyz>0$$

Bài 2. Chứng minh rằng: $a^3(p-a)+b^3(p-b)+c^3(p-c)\le pabc$ (*)

Chứng minh

$$(*) \Leftrightarrow x(y+z)^3+y(z+x)^3+z(x+y)^3\le(x+y+z)(y+z)(z+x)(x+y)$$

$$\Leftrightarrow \sum x\left[y^3+z^3+3yz(y+z)\right]\le(x+y+z)\left[2xyz+\sum yz(y+z)\right]$$

$$\Leftrightarrow \sum yz(y^2+z^2)+3xyz\sum(y+z)\le 2xyz(x+y+z)+xyz\sum(y+z)+\sum yz(y^2+z^2)+2\sum y^2z^2$$

$$\Leftrightarrow 2xyz(x+y+z)\le 2(x^3+y^3+z^3) \Leftrightarrow \sum(x+y)(x-y)^2\ge 0 \text{ (đpcm)}$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z \Leftrightarrow a=b=c \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều

Bài 3. Chứng minh rằng: $a^2(a-b)+b^2(b-c)+c^2(c-a)\ge 0$ (*)

Chứng minh

$$(*) \Leftrightarrow (y+z)^2(y-x)+(z+x)^2(z-y)+(x+y)^2(x-z)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \sum y(y+z)^2-\sum x(y+z)^2\ge 0 \Leftrightarrow \sum x^3+\sum yz^2+2\sum y^2z-\left[\sum yz(y+z)+6xyz\right]\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \sum x^3+\sum y^2z-6xyz\ge 0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{yz}+\frac{y^2}{zx}+\frac{z^2}{xy}+\frac{x}{z}+\frac{y}{x}+\frac{z}{y}\ge 6 \quad (1)$$

Sử dụng bất đẳng thức ***AM – GM***, ta có:

$$\frac{x^2}{yz}+\frac{y^2}{zx}+\frac{z^2}{xy}+\frac{x}{z}+\frac{y}{x}+\frac{z}{y}\ge 6\cdot\sqrt[6]{\frac{x^2}{yz}\cdot\frac{y^2}{zx}\cdot\frac{z^2}{xy}\cdot\frac{x}{z}\cdot\frac{y}{x}\cdot\frac{z}{y}}=6 \text{ (đpcm)}$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z \Leftrightarrow a=b=c \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều

Bài 4. [IMO 1983] Chứng minh rằng: $a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)\ge 0$ (*)

Chứng minh

$$(*) \Leftrightarrow xy^3+yz^3+zx^3-xyz(x+y+z)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow xy^3+yz^3+zx^3\ge xyz(x+y+z) \Leftrightarrow \frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x}+\frac{x^2}{y}\ge x+y+z$$

Ta có: $(z+x+y)\left(\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x}+\frac{x^2}{y}\right)\ge(x+y+z)^2 \Rightarrow \frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x}+\frac{x^2}{y}\ge x+y+z$ (đpcm)

§ 23.7. PHƯƠNG PHÁP ĐÁNH GIÁ CÁC HỆ SỐ CỦA ĐA THỨC BẰNG ĐỊNH LÝ VIÈTE

Trong nhiều trường hợp, ta sẽ gặp rất nhiều khó khăn nếu như cố gắng tìm cách chứng minh trực tiếp các bất đẳng thức với các biến ban đầu. Tuy nhiên nếu tinh tảo hơn một chút, chỉ bằng một (hoặc một vài) phép đổi biến đơn giản nào đó chúng ta sẽ quy được bất đẳng thức cần chứng minh về dạng quen thuộc và đơn giản hơn rất nhiều. Trong mục này chúng ta hãy cùng sử dụng định lý Viète để thực hiện các phép đổi biến như vậy. Ngoài ra chúng ta cũng sẽ nhận được nhiều tính chất rất đẹp giữa chính các hệ số đa thức nhờ những thông tin về số nghiệm của đa thức đó.

Phương pháp: Để chứng minh các bất đẳng thức ở dạng này ta thực hiện theo hai bước:

Bước 1: Sử dụng định lý Viète chuyển các bất đẳng thức giữa các hệ số của đa thức thành bất đẳng thức giữa các nghiệm của đa thức.

Bước 2: Sử dụng bất đẳng thức đại số để chứng minh bất đẳng thức giữa các nghiệm và từ đó suy ra bất đẳng thức giữa các hệ số của đa thức.

A. CÁC BÀI TẬP MẪU MINH HỌA

Bài 1. Xét tập hợp I gồm các tam thức bậc hai

$f(x)=ax^2+bx+c \quad (a\neq 0)$ sao cho $f(x)=0$ có 2 nghiệm $x_1, x_2\in[0,1]$.

Tìm $\underset{f(x)\in I}{\text{Max}}\ \dfrac{(a-b)(2a-b)}{a(a-b+c)}$

Chứng minh

Sử dụng định lý ***Viète*** ta có $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$ và $x_1x_2=\dfrac{c}{a}$, khi đó

$$A=\frac{(a-b)(2a-b)}{a(a-b+c)}=\frac{\left(1-\frac{b}{a}\right)\left(2-\frac{b}{a}\right)}{1-\frac{b}{a}+\frac{c}{a}}=\frac{(1+x_1+x_2)(2+x_1+x_2)}{1+x_1+x_2+x_1x_2}$$

$$=2+\frac{x_1^2+x_2^2+x_1+x_2}{1+x_1+x_2+x_1x_2}\le 2+\frac{x_1+x_2+x_1+x_2}{1+x_1+x_2+x_1x_2}\le 2+\frac{1+x_1x_2+x_1+x_2}{1+x_1+x_2+x_1x_2}=3$$

Với $2a=2c=-b\neq 0$ hay $f(x)=a(x-1)^2,\ a\neq 0$ thì $\underset{f(x)\in I}{\text{Max}}\ \dfrac{(a-b)(2a-b)}{a(a-b+c)}=3$

Bài 2. Giả sử phương trình $f(x)=ax^2+bx+c=0\ (a>0)$ có hai nghiệm

$x_1, x_2\in[2,+\infty)$. Chứng minh: $(4a-b)\left(2+\sqrt{\dfrac{c}{a}}\right)\ge 2(4a-2b+c)$ (I)

Chứng minh

Sử dụng định lý Viète ta có $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$ và $x_1x_2=\dfrac{c}{a}$, do đó

$$(4a-b)\left(2+\sqrt{\frac{c}{a}}\right)\ge 2(4a-2b+c)\Leftrightarrow\left(4-\frac{b}{a}\right)\left(2+\sqrt{\frac{c}{a}}\right)\ge 2\left(4-2\cdot\frac{b}{a}+\frac{c}{a}\right)$$

$$\Leftrightarrow (4+x_1+x_2)\left(2+\sqrt{x_1x_2}\right)\ge 2(4+2x_1+2x_2+x_1x_2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{4+x_1+x_2}{4+2x_1+2x_2+x_1x_2} \ge \frac{2}{2+\sqrt{x_1x_2}} \Leftrightarrow \frac{(2+x_1)+(2+x_2)}{(2+x_1)(2+x_2)} \ge \frac{2}{2+\sqrt{x_1x_2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2+x_1}+\frac{1}{2+x_2} \ge \frac{2}{2+\sqrt{x_1x_2}} \Leftrightarrow \frac{1}{1+\frac{x_1}{2}}+\frac{1}{1+\frac{x_2}{2}} \ge \frac{2}{1+\sqrt{\frac{x_1}{2}\cdot\frac{x_2}{2}}} \quad (2)$$

Đặt $u^2=\frac{x_1}{2}$, $v^2=\frac{x_2}{2}$ thì (1) $\Leftrightarrow$ (2) $\Leftrightarrow \frac{1}{1+u^2}+\frac{1}{1+v^2} \ge \frac{2}{1+uv}$ $\forall u,v \ge 1$

Ta có $\frac{1}{1+u^2}+\frac{1}{1+v^2}-\frac{2}{1+uv}=\left(\frac{1}{1+u^2}-\frac{1}{1+uv}\right)+\left(\frac{1}{1+v^2}-\frac{1}{1+uv}\right)=$

$$\frac{v-u}{1+uv}\left(\frac{u}{1+u^2}-\frac{v}{1+v^2}\right)=\frac{v-u}{1+uv}\cdot\frac{u(1+v^2)-v(1+u^2)}{(1+u^2)(1+v^2)}=\frac{(v-u)^2(uv-1)}{(1+uv)(1+u^2)(1+v^2)} \ge 0$$

Vì vậy (2) được chứng minh do đó bất đẳng thức (1) được chứng minh.

Bài 3. Giả sử $ax^3+(b-a)x^2+(c-b)x-c=0$ (1) $(a \ne 0)$ có ba nghiệm là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng: $\frac{2a-b}{a+c-b}+\frac{a}{b}>0$ (2)

Chứng minh

Ta có (1) $\Leftrightarrow (x-1)(ax^2+bx+c)=0 \Leftrightarrow x=1$; $x=x_1$; $x=x_2$

$$(2) \Leftrightarrow \frac{2-\frac{b}{a}}{1+\frac{c}{a}-\frac{b}{a}}+\frac{1}{\frac{b}{a}}>0 \Leftrightarrow \frac{2+x_1+x_2}{1+x_1x_2+x_1+x_2}-\frac{1}{x_1+x_2}>0$$

$$\Leftrightarrow (2+x_1+x_2)(x_1+x_2)-(1+x_1x_2+x_1+x_2)>0 \Leftrightarrow x_1+x_2-1+x_1^2+x_2^2+x_1x_2>0 \quad (3)$$

Do 1, x_1, x_2 là độ dài ba cạnh của một tam giác nên (3) đúng $\Rightarrow$ (2) đúng.

Bài 4. Giả sử phương trình $x^3-x^2+ax+b=0$ có ba nghiệm dương (có thể bằng nhau).

Chứng minh rằng: $\frac{2a-3b+1}{a-b+2} \le \frac{3}{4}$ (2)

Chứng minh

Giả sử phương trình có ba nghiệm $x_1, x_2, x_3>0$. Sử dụng định lý ***Viète*** ta có:

$$x_1+x_2+x_2=1\ ;\ x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=a\ ;\ x_1x_2x_3=-b$$

$$(2) \Leftrightarrow \frac{2(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)+3x_1x_2x_3+(x_1+x_2+x_3)}{(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)+x_1x_2x_3+(x_1+x_2+x_3)+1} \le \frac{3(x_1+x_2+x_3)}{3+(x_1+x_2+x_3)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_1}{1+x_1}+\frac{x_2}{1+x_2}+\frac{x_3}{1+x_3} \le \frac{3(x_1+x_2+x_3)}{3+(x_1+x_2+x_3)}$$

$$\Leftrightarrow \left(1-\frac{1}{1+x_1}\right)+\left(1-\frac{1}{1+x_2}\right)+\left(1-\frac{1}{1+x_3}\right) \le 3-\frac{9}{3+(x_1+x_2+x_3)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1+x_1}+\frac{1}{1+x_2}+\frac{1}{1+x_3} \ge \frac{9}{3+(x_1+x_2+x_3)}$$

Sử dụng bất đẳng thức $AM - GM$ ta có

$$\frac{1}{1+x_1}+\frac{1}{1+x_2}+\frac{1}{1+x_3}\geq\frac{3}{\sqrt[3]{(1+x_1)(1+x_2)(1+x_3)}}\geq\frac{9}{3+(x_1+x_2+x_3)}$$

Bài 5. Giả sử $ax^3+bx^2+cx-d=0$ $(a\neq 0)$ có nghiệm dương.

Chứng minh rằng: $\sqrt[3]{1+\dfrac{c+d-b}{a}}-\sqrt[3]{\dfrac{d}{a}}\geq 1$

Chứng minh

• ***Bổ đề:*** $(1+x_1)(1+x_2)(1+x_3)\geq\left(1+\sqrt[3]{x_1x_2x_3}\right)^3$ $\forall x_1,x_2,x_3>0$

• ***Áp dụng:*** $\sqrt[3]{1+\dfrac{c+d-b}{a}}-\sqrt[3]{\dfrac{d}{a}}\geq 1\Leftrightarrow 1-\dfrac{b}{a}+\dfrac{c}{a}+\dfrac{d}{a}\geq\left(1+\sqrt[3]{\dfrac{d}{a}}\right)^3$

$\Leftrightarrow 1+(x_1+x_2+x_3)+(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)+x_1x_2x_3\geq\geq\left(1+\sqrt[3]{x_1x_2x_3}\right)^3$

$\Leftrightarrow (1+x_1)(1+x_2)(1+x_3)\geq\left(1+\sqrt[3]{x_1x_2x_3}\right)^3\Rightarrow$ (đpcm)

Bài 6. Giả sử $ax^3+bx^2+cx+d=0$ $(a\neq 0)$ có nghiệm dương.

Chứng minh rằng: $\dfrac{3abc+8b^3-3da^2}{a^3}\geq 0$

Chứng minh

• ***Bổ đề:*** $\dfrac{x_1^3+x_2^3+x_3^3}{3}\geq\left(\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3}\right)^3$ $\forall x_1,x_2,x_3>0$

• ***Áp dụng:*** $\dfrac{3abc+8b^3-3da^2}{a^3}\geq 0\Leftrightarrow 3\cdot\dfrac{b}{a}\cdot\dfrac{c}{a}+8\left(\dfrac{b}{a}\right)^3-3\cdot\dfrac{d}{a}\geq 0$

$\Leftrightarrow -3(x_1+x_2+x_3)(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)-8(x_1+x_2+x_3)^3-3x_1x_2x_3\geq 0$

$\Leftrightarrow x_1^3+x_2^3+x_3^3-(x_1+x_2+x_3)^3+3x_1x_2x_3-8(x_1+x_2+x_3)^3-3x_1x_2x_3\geq 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{x_1^3+x_2^3+x_3^3}{3}\geq\left(\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3}\right)^3$ là đúng $\Rightarrow$ (đpcm)

Bài 7. Giả sử phương trình $\text{ax}^3-\text{x}^2+\text{bx}-c=0$ có nghiệm dương

Chứng minh rằng: $2+b\geq 63c$

Chứng minh

• ***Bổ đề:*** $\left(1+\dfrac{1}{x_1}\right)\left(1+\dfrac{1}{x_2}\right)\left(1+\dfrac{1}{x_3}\right)\geq 64$ với $\begin{cases}x_1,x_2,x_3>0\\x_1+x_2+x_3=1\end{cases}$

• ***Áp dụng:*** $ax^3-x^2+bx-c=0$ (1) $\Leftrightarrow c\left(\dfrac{1}{x}\right)^3-b\left(\dfrac{1}{x}\right)^2+\dfrac{1}{x}-a=0$ (2)

Nếu x_1, x_2, x_3 là các nghiệm của (1) thì $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \frac{1}{x_3}$ là các nghiệm của (2)

Ta có $2 + b \ge 63c \Leftrightarrow 1 + \frac{b}{c} + \frac{1}{c} + \frac{1}{c} \ge 64$

$$\Leftrightarrow 1 + \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}\right) + \left(\frac{1}{x_1x_2} + \frac{1}{x_2x_3} + \frac{1}{x_3x_1}\right) + \frac{1}{x_1x_2x_3} \ge 64$$

$$\Leftrightarrow \left(1 + \frac{1}{x_1}\right)\left(1 + \frac{1}{x_2}\right)\left(1 + \frac{1}{x_3}\right) \ge 64 \Rightarrow \text{(đpcm)}$$

Bài 8. Giả sử phương trình $ax^3 - x^2 + bx - c = 0$ có nghiệm dương.

Chứng minh rằng: $\frac{a^2 - 4a^2b + 2b^2 + 4ac}{ab - c} \ge \frac{a}{2}$

Chứng minh

• ***Bổ đề:*** $\frac{x_1^2}{x_2 + x_3} + \frac{x_2^2}{x_3 + x_1} + \frac{x_3^2}{x_1 + x_2} \ge \frac{x_1 + x_2 + x_3}{2} \quad \forall x_1, x_2, x_3 > 0$

• ***Áp dụng:*** $\frac{a^2 - 4a^2b + 2b^2 + 4ac}{ab - c} \ge \frac{a}{2} \Leftrightarrow \frac{(a^2 - 2b)^2 - 2(b^2 - 2ac)}{4ab - c} \ge \frac{a}{2}$

$$\Leftrightarrow A = \frac{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^2 - 2\left[(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)^2 - 2x_1x_2x_3(x_1 + x_2 + x_3)\right]}{ab - c} \ge 0$$

$$\Leftrightarrow A = \frac{x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + b(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)}{(x_1 + x_2 + x_3)(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) - x_1x_2x_3} \ge 0$$

Ta có $x_1^2(x_1 + x_3)(x_1 + x_2) = x_1^2\left[x_1^2 + x_1(x_2 + x_3) + x_2x_3\right] = x_1^2(x_1^2 + b)$

$$A = \frac{x_1^2(x_3 + x_1)(x_1 + x_2) + x_2^2(x_1 + x_2)(x_2 + x_3) + x_3^2(x_2 + x_3)(x_3 + x_1)}{(x_2 + x_3)(x_3 + x_1)(x_1 + x_2)} \ge \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_1^2}{x_2 + x_3} + \frac{x_2^2}{x_3 + x_1} + \frac{x_3^2}{x_1 + x_2} \ge \frac{x_1 + x_2 + x_3}{2} \Rightarrow \text{(đpcm)}$$

Bài 9. Giả sử phương trình $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$ có ba nghiệm dương

Chứng minh rằng: $\frac{c}{\sqrt{b^2 - 2ac}} \le \frac{1}{3}\sqrt{b^2 - 2b}$

Chứng minh

Giả sử phương trình có ba nghiệm là $x_1, x_2, x_3 > 0$ khi đó ta có bất đẳng thức

$$\sqrt{\frac{3}{\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \frac{1}{x_3^2}}} \le \frac{3}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}} \le \sqrt[3]{x_1x_2x_3} \le \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \le \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{3}}$$

Sử dụng định lý Viète ta có $\sqrt{\dfrac{3}{\dfrac{b^2}{c^2}-\dfrac{2a}{c}}} \le \dfrac{3c}{b} \le \sqrt[3]{c} \le \dfrac{a}{3} \le \sqrt{\dfrac{a^2-2b}{3}}$

Suy ra $\sqrt{\dfrac{3c^2}{b^2-2ac}} \le \sqrt{\dfrac{a^2-2b}{3}} \Leftrightarrow \dfrac{c}{\sqrt{b^2-2ac}} \le \dfrac{\sqrt{a^2-2b}}{3}$ (đpcm)

Bài 10. Cho các số thực $a, b, c, d > 0$. Chứng minh rằng:

$$9(a+b+c+d)(abc+abd+acd+bcd) \le 4(ab+ac+ad+bc+bd+cd)^2$$

Chứng minh

• ***Bổ đề:*** $(u+v+w)^2 \ge 3(uv+vw+wu) \quad \forall u, v, w \in \mathbb{R}$

• ***Áp dụng:*** Xét đa thức $P(x) = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$.

Sử dụng định lý ***Rolle*** suy ra $P'(x)$ có ba nghiệm m, n, p.

Ta có

$$P'(x) = 4x^3 - 3(a+b+c+d)x^2 + 2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)x - (abc+abd+acd+bcd)$$

Sử dụng định lý Viète ta có: $mn+np+pm = \dfrac{1}{2}(ab+ac+ad+bc+bd+cd)$;

$$m+n+p = \frac{3}{4}(a+b+c+d)\ ;\quad mnp = \frac{1}{4}(abc+abd+acd+bcd)$$

Ta có $(mn+np+pm)^2 \ge 3(mn.np+mp.pn+pm.mn) = 3mnp(m+n+p)$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}(ab+ac+ad+bc+bd+cd)^2 \ge \frac{9}{16}(a+b+c+d)(abc+abd+acd+bcd)$$

$$\Rightarrow 9(a+b+c+d)(abc+abd+acd+bcd) \le 4(ab+ac+ad+bc+bd+cd)^2$$

Bài 11. Giả sử $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 > 0$. Chứng minh $3\left(\sum a_i\right)\left(\sum a_i a_j a_k\right) \le \left(\sum a_i a_j\right)^2$

Chứng minh

Xét $P(x) = (x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)(x-a_5)$.

Sử dụng định lý ***Rolle*** suy ra $P'(x)$ có bốn nghiệm thực dương m, n, p, q.

Ta có $P'(x) = 5x^4 - 4\left(\sum a_i\right)x^3 + 3\left(\sum a_i a_j\right)x^2 - 2\left(\sum a_i a_j a_k\right)x + \sum a_i a_j a_k a_m$

Sử dụng định lý Viète ta có

$$m+n+p+q = \frac{4}{5}(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5)$$

$$mn+np+pq+mp+mq+nq = \frac{3}{5}\sum a_i a_j$$

$$mnp+npq+pqm+qmn = \frac{2}{5}\left(\sum a_i a_j a_k\right)$$

Áp dụng bài tập trước ta có:

$$9(m+n+p+q)(mnp+mnq+mpq+npq) \le 4(mn+mp+mq+np+nq+pq)^2$$

$\Rightarrow \quad 3\left(\sum a_i\right)\left(\sum a_i a_j a_k\right) \le \left(\sum a_i a_j\right)^2$

Bài 12. Cho các số thực $a, b, c, d > 0$. Chứng minh rằng:

$$3(a+b+c+d)(ab+ac+ad+bc+bd+cd) \le$$
$$\le (a+b+c+d)^3 + 2(abc+abd+acd+bcd)$$

Chứng minh

Đặt $P(x) = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$.

Sử dụng định lý ***Rolle*** suy ra $P'(x)$ có ba nghiệm m, n, p. Ta có

$P'(x) = 4x^3 - 3(a+b+c+d)x^2 + 2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)x - (abc+abd+acd+bcd)$

Sử dụng đẳng thức ***Cauchy*** và bất đẳng thức ***AM-GM*** ta có

$(m+n+p)(mn+np+pm) - mnp = (m+n)(n+p)(p+m)$

$$(m+n)(n+p)(p+m) \le \left[\frac{(m+n)+(n+p)+(p+m)}{3}\right]^3 = \frac{8}{27}(m+n+p)^3$$

$$\Rightarrow (m+n+p)(mn+np+pm) \le \frac{8}{27}(m+n+p)^3 + mnp \quad (1)$$

Sử dụng định lý Viète ta có $mn+np+pm = \frac{1}{2}(ab+bc+ca+cd+da+bd)$

$$m+n+p = \frac{3}{4}(a+b+c+d)\ ;\ mnp = \frac{1}{4}(acb+bcd+cda+dab)$$

Thay ba đẳng thức này vào (1) ta nhận được chứng minh.

Bài 13. Cho các số thực $a, b, c, d > 0$. Chứng minh rằng:

$$\left[\frac{9}{16}\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)+\frac{5}{8}(ab+ac+ad+bc+bd+cd)\right]^2 \ge$$
$$\ge \frac{1}{4}(ab+ac+ad+bc+bd+cd)^2 + \frac{27}{16}(a+b+c+d)(abc+abd+acd+bcd)$$

Chứng minh

Xét đa thức: $P(x) = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$.

Sử dụng định lý ***Rolle*** suy ra $P'(x)$ có ba nghiệm m, n, p. Ta có

$P'(x) = 4x^3 - 3(a+b+c+d)x^2 + 2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)x - (abc+abd+acd+bcd)$

Sử dụng bất đẳng thức: $(m+n+p)(m^2+n^2+p^2) \ge 9mnp$. Suy ra

$(m^2+n^2+p^2+mn+np+pm)^2 \ge (mn+np+pm)^2 + 9(m+n+p)mnp$

Bài 14. Cho các số thực $a, b, c, d > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{9(a+b+c+d)^2}{16} + \frac{4(ab+ac+ad+bc+bd+cd)}{abc+abd+acd+bcd} \ge ab+ac+ad+bc+bd+cd+9$$

Chứng minh

Xét đa thức: $P(x) = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$.

Sử dụng định lý ***Rolle*** suy ra $P'(x)$ có ba nghiệm m, n, p. Ta có

$P'(x)=4x^3-3(a+b+c+d)x^2+2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)x-(abc+abd+acd+bcd)$

Sử dụng bất đẳng thức: $m^2+\frac{2}{m}=m^2+\frac{1}{m}+\frac{1}{m}\ge 3$

$$\Rightarrow m^2+n^2+p^2+2\frac{mn+np+pm}{mnp}=m^2+\frac{2}{m}+n^2+\frac{2}{n}+p^2+\frac{2}{p}\ge 9$$

Thế a, b, c, d theo $m, n, p \Rightarrow$ (đpcm)

Bài 15. Chứng minh rằng:

$$\sqrt[3]{\frac{abc+abd+acd+bcd}{4}}\ge\sqrt{\frac{ab+ac+ad+bc+bd+cd}{6}}\quad \forall a,b,c,d>0$$

Chứng minh

Xét đa thức $P(x)=(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$.

Sử dụng định lý ***Rolle*** suy ra $P'(x)$ có ba nghiệm m, n, p. Ta có

$P'(x)=4x^3-3(a+b+c+d)x^2+2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)x-(abc+abd+acd+bcd)$

Sử dụng bất đẳng thức ***AM – GM*** và định lý ***Viète*** ta có

$$mn+np+pm\ge 3\sqrt[3]{(mnp)^2}\Leftrightarrow\sqrt[3]{\frac{abc+abd+acd+bcd}{4}}\ge\sqrt{\frac{ab+ac+ad+bc+bd+cd}{6}}$$

Bài 16. [Việt Nam MO 2002] Cho đa thức $P(x)=x^3+ax^2+bx+c=0$ có ba nghiệm thực. Chứng minh rằng: $12ab+27c\le 6a^3+10\sqrt{(a^2-2b)^3}$ (1)

Chứng minh

Gọi x_1, x_2, x_3 là ba nghiệm của $P(x)$. Sử dụng định lý Viète ta có

$x_1+x_2+x_3=-a\,;x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=b\,;x_1x_2x_3=-c\Rightarrow a^2-2b=x_1^2+x_2^2+x_3^2$

Ta có: (1) $\Leftrightarrow 6(x_1+x_2+x_3)(x_1^2+x_2^2+x_3^2)\le 27x_1x_2x_3+10\sqrt{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^3}$ (2)

• Nếu $x_1^2+x_2^2+x_3^2=0\Leftrightarrow x_1=x_2=x_3=0$ thì (2) là đúng $\Rightarrow$ (1) là đúng

• Xét $x_1^2+x_2^2+x_3^2>0$. Không mất tính tổng quát giả sử $x_1^2\le x_2^2\le x_3^2$. Chú ý rằng hai vế của (2) đều là các biểu thức đối xứng bậc 3, do đó ta có thể chuẩn hóa $x_1^2+x_2^2+x_3^2=9$. Từ đây suy ra: $x_3^2\ge 3$ và $2x_1x_2\le 6$. Do đó: (2) $\Leftrightarrow 2(x_1+x_2+x_3)-x_1x_2x_3\le 10$

Sử dụng bất đẳng thức ***CBS*** ta có

$$\left[2(x_1+x_2+x_3)-x_1x_2x_3\right]^2=\left[2(x_1+x_2)+(2-x_1x_2)x_3\right]^2$$

$$\le\left[2^2+(2-x_1x_2)^2\right]\left[(x_1+x_2)^2+x_3^2\right]=\left[8-4x_1x_2+(x_1x_2)^2\right][9+2x_1x_2]$$

$$=2(x_1x_2)^3+(x_1x_2)^2-20x_1x_2+72=(x_1x_2+2)^2(2x_1x_2-7)+100\le 100$$

$\Rightarrow 2(x_1+x_2+x_3)-x_1x_2x_3\le 10\Rightarrow$ (2) là đúng $\Rightarrow$ (1) là đúng

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x_1=-1$, $x_2=x_3=2\Leftrightarrow a=-3$, $b=0$, $c=4$.

Bài 17. Giả sử phương trình $ax^4 - ax^3 + bx^2 - cx + d = 0$ với $a, b, c, d > 0$ có bốn nghiệm thực thuộc khoảng $\left(0, \frac{1}{2}\right)$. Chứng minh rằng: $21a + 164c \geq 80b + 320d$

Chứng minh

Gọi bốn nghiệm của phương trình là $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$

Sử dụng định lý ***Viète*** ta có các hệ thức:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = b/a \\ x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = c/a \\ x_1x_2x_3x_4 = d/a \end{cases}$$

Do $a > 0$ nên $21a + 164c \geq 80b + 320d \Leftrightarrow 21 + 164\frac{c}{a} \geq 80\frac{b}{a} + 320\frac{d}{a}$

$$\Leftrightarrow 21 + 164(x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4) \geq$$

$$\geq 80(x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4) + 320x_1x_2x_3x_4$$

Sử dụng bất đẳng thức ***AM-GM***, ta có

$(1-2x_1)(1-2x_2)(1-2x_3) \leq \left(\frac{1-2x_1+1-2x_2+1-2x_3}{3}\right)^3 = \left(\frac{1+2x_4}{3}\right)^3$. Suy ra

$$\times\begin{cases} 27(1-2x_1)(1-2x_2)(1-2x_3) \leq (1+2x_4)^3 \\ 27(1-2x_1)(1-2x_2)(1-2x_4) \leq (1+2x_3)^3 \\ 27(1-2x_1)(1-2x_3)(1-2x_4) \leq (1+2x_2)^3 \\ 27(1-2x_2)(1-2x_3)(1-2x_4) \leq (1+2x_1)^3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 81(1-2x_1)(1-2x_2)(1-2x_3)(1-2x_4) \leq (1+2x_1)(1+2x_2)(1+2x_3)(1+2x_4)$$

$$\Leftrightarrow 80(x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4) + 320x_1x_2x_3x_4 \leq$$

$$\leq 21 + 164(x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4)$$

Bài 18. [Hongkong MO 1997] Cho $f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ là đa thức bậc $n \geq 2$ với các nghiệm thực $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Chứng minh rằng: .

$$f(x+1)\left(\frac{1}{x-b_1} + \frac{1}{x-b_2} + \ldots + \frac{1}{x-b_n}\right) \geq 2n^2 \quad \forall x > b_1, b_2, \ldots, b_n$$

Chứng minh

Ta có $f(x) = (x-b_1)(x-b_2)\ldots(x-b_n) \Rightarrow f(x+1) = (1+x-b_1)(1+x-b_2)\ldots(1+x-b_n)$

Sử dụng bất đẳng thức ***AM-GM***, ta có

$$f(x+1)\left(\frac{1}{x-b_1}+\frac{1}{x-b_2}+...+\frac{1}{x-b_n}\right)\geq f(x+1)\cdot n\cdot\sqrt[n]{\frac{1}{(x-b_1)(x-b_2)...(x-b_n)}}$$

$$=(1+x-b_1)...(1+x-b_n)n\cdot\sqrt[n]{\frac{1}{(x-b_1)...(x-b_n)}}=n\cdot\sqrt[n]{\frac{(1+x-b_1)^n}{x-b_1}\cdots\frac{(1+x-b_n)^n}{x-b_n}}$$

Đặt $t=x-b_i>0\quad\forall x>b_i$. Khi $n\geq 2$ ta có

$$(1+t)^n\geq 1+nt+\frac{n(n-1)}{2}t^2=\frac{1}{2}\left[n(n-1)t^2-2nt+2\right]+2nt$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(\sqrt{n(n-1)}\,t-\frac{n}{\sqrt{n(n-1)}}\right)^2+\frac{n(n-2)}{n(n-1)}\right]+2nt\geq 2nt.$$ Suy ra

$$f(x+1)\left(\frac{1}{x-b_1}+\frac{1}{x-b_2}+...+\frac{1}{x-b_n}\right)\geq n\cdot\sqrt[n]{\frac{(1+x-b_1)^n}{x-b_1}...\frac{(1+x-b_n)^n}{x-b_n}}\geq n\cdot\sqrt[n]{(2n)^n}=2n^2$$

Bài 19. Cho đa thức $P(x)=x^n+a_1x^{n-1}+...+a_{n-1}x+1$ với $a_1,a_2,...,a_{n-1}\geq 0$ có n nghiệm thực $x_1,x_2,....,x_n$. Chứng minh rằng: $P(x)\geq(x+1)^n\quad\forall x\geq 0$

Chứng minh

Bổ đề: (bất đẳng thức ***Minkowski 2***)

$$\sqrt[n]{b_1b_2...b_n}+\sqrt[n]{c_1c_2...c_n}\leq\sqrt[n]{(b_1+c_1)(b_2+c_2)...(b_n+c_n)}\quad\forall b_i,c_i\geq 0$$

Áp dụng: Do $a_1,a_2,....,a_{n-1}\geq 0$ nên các nghiệm của $P(x)$ là $x_1,x_2,....,x_n<0$

Sử dụng định lý Viète ta có $(-1)^n x_1x_2....x_n=1$. Sử dụng bổ đề ta có

$$\sqrt[n]{P(x)}=\sqrt[n]{(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n)}=\sqrt[n]{(x+|x_1|)(x+|x_2|)...(x+|x_n|)}\geq$$

$$\geq\sqrt[n]{\underbrace{x.x...x}_{n}}+\sqrt[n]{|x_1x_2...x_n|}=x+1\Rightarrow P(x)\geq(x+1)^n$$

Bài 20. Giả sử đa thức bậc n $P_n(x)=x^n+a_1x^{n-1}+...+a_{n-1}x+a_n$ có n nghiệm thực.

Chứng minh rằng: $\quad a_1^2\geq\frac{2n}{n-1}a_2$

Chứng minh

$$0\leq(x_1-x_2)^2+(x_1-x_3)^2+...+(x_1-x_n)^2+(x_2-x_3)^2+...+(x_2-x_n)^2+$$
$$+(x_3-x_4)^2+...+(x_3-x_n)^2+(x_4-x_5)^2+...+(x_{n-1}-x_n)^2$$

$$\Leftrightarrow 0\leq(n-1)\sum_{i=1}^{n}x_i^2-2\sum_{1\leq i\neq j\leq n}x_ix_j=(n-1)\left[\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2-2\sum_{1\leq i\neq j\leq n}x_ix_j\right]-2\sum_{1\leq i\neq j\leq n}x_ix_j$$

$$\Leftrightarrow 0\leq(n-1)\left(a_1^2-2a_2\right)-2a_2=(n-1)a_1^2-2na_2\Leftrightarrow a_1^2\geq\frac{2n}{n-1}a_2\quad\text{(đpcm)}$$

Bài 21. Giả sử $P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_{n-1}x+a_n=0\ (a_0\neq 0)$

có n nghiệm thực dương. Chứng minh rằng: $\left(\dfrac{a_{n-1}}{na_0}\right)^n\geq\left(\dfrac{a_n}{a_0}\right)^{n-1}$

Chứng minh

Ta có $\dfrac{a_{n-1}}{a_0}=x_1.x_2....x_n\left(\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+...+\dfrac{1}{x_n}\right)$. Sử dụng ***bất đẳng thức AM – GM***

$$\Rightarrow\frac{a_{n-1}}{a_0}\geq n\,x_1.x_2....x_n\cdot\frac{1}{\sqrt[n]{x_1.x_2....x_n}}\Leftrightarrow\left(\frac{a_{n-1}}{na_0}\right)^n\geq\left(x_1.x_2....x_n\right)^{n-1}=\left(\frac{a_n}{a_0}\right)^{n-1}$$

Bài 22. Giả sử $P_n(x)=x^n-a_1x^{n-1}+...+(-1)^{n-1}a_{n-1}x+(-1)^na_n=0$

có n nghiệm thực dương. Chứng minh rằng: $\sqrt[n]{1+\sum\limits_{i=1}^{n}a_i}\geq 1+\sqrt[n]{a_n}$

Chứng minh

• ***Bổ đề:*** $(1+x_1)(1+x_2)....(1+x_n)\geq\left(1+\sqrt[n]{x_1.....x_n}\right)^n\quad\forall x_1,x_2,....,x_n>0$

• ***Áp dụng:*** Giả sử phương trình có n nghiệm là $x_1,x_2,....,x_n>0$

Ta có $(1+x_1)(1+x_2)....(1+x_n)=1+a_1+a_2+...+a_n$

Trong đó $a_k=\sum\limits_{1\leq i_1<i_2<...<i_k\leq n}x_{i_1}x_{i_2}.....x_{i_k}$ Suy ra $\sqrt[n]{1+\sum\limits_{i=1}^{n}a_i}\geq 1+\sqrt[n]{a_n}$ (đpcm).

Bài 23. Cho đa thức $P_n(x)=x^n+a_1x^{n-1}+...+a_{n-1}x+a_n$ có n nghiệm thực

Chứng minh rằng: $|a_ka_{n-k}|\geq\binom{n}{k}^2|a_n|$

Chứng minh

Ta có $S_1=\sum\limits_{k=1}^{n}x_k=-a_1$; $S_k=\sum\limits_{1\leq i_1<i_2<...<i_k\leq n}x_{i_1}x_{i_2}.....x_{i_k}=(-1)^ka_k$

Sử dụng bất đẳng thức ***AM – GM***. Ta có

$$\sum_{1\leq i_1<i_2<...<i_k\leq n}x_{i_1}.x_{i_2}.....x_{i_k}\geq\binom{n}{k}\left[\left(x_1...x_n\right)^{\binom{n-1}{k-1}}\right]^{\frac{1}{\binom{n}{k}}}\Rightarrow|a_k|\geq\binom{n}{k}|a_n|^{\frac{\binom{n-1}{k-1}}{\binom{n}{k}}}\quad\forall k=\overline{1,n}$$

và $|a_{n-k}|\geq\binom{n}{n-k}|a_n|^{\frac{\binom{n-1}{n-k-1}}{\binom{n}{n-k}}}$. Do $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$, $\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{n-k-1}=\binom{n-1}{n-k}+\binom{n-1}{n-k-1}=\binom{n}{n-k}$

$$\Rightarrow|a_ka_{n-k}|\geq\binom{n}{k}^2|a_n|^{\frac{\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{n-k-1}}{\binom{n}{n-k}}}\Leftrightarrow|a_ka_{n-k}|\geq\binom{n}{k}^2|a_n|\quad\text{(đpcm)}$$

Bài 24. Giả sử đa thức $P_n(x)=x^n+a_1x^{n-1}+...+a_{n-1}x+a_n$ có n nghiệm thực dương.

Chứng minh rằng: $\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{a_k a_{n-k}}{a_n}\right|\geq\binom{2n}{n}-1$

Chứng minh

Sử dụng **bài 23** ta có $\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{a_k a_{n-k}}{a_n}\right|\geq\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}^2=\binom{n}{1}^2+\binom{n}{2}^2+...+\binom{n}{n}^2$

$$=\binom{n}{1}\binom{n}{n-1}+\binom{n}{2}\binom{n}{n-2}+....+\binom{n}{n}\binom{n}{0}=\binom{2n}{n}-1$$

Bài 25. Giả sử $P_n(x)=x^n+a_1x^{n-1}+...+a_n=0$ có n nghiệm thực dương.

Chứng minh rằng: $\left|\frac{\binom{n-i}{k-i}}{\binom{n}{k}}a_i\right|\geq\binom{k}{i}\left|\frac{a_k}{C_n^k}\right|^{\frac{\binom{k-1}{i-1}}{\binom{k}{i}}}\quad\forall i\leq k\leq n$

Chứng minh

Xét đa thức: $P_n(x)=x^n+a_1x^{n-1}+...+a_{n-1}x+a_n$. Đạo hàm $(n-k)$ lần ta có

$P_n^{(n-k)}(x)=n(n-1)...(k+1)x^k+(n-1)(n-2)...k.a_1.x^{k-1}+....+$

$+(n-k+1)(n-k).....2a_{k-1}.x+(n-k)....2\times1\ a_k$

hay $P_n^{(n-k)}(x)=\frac{n!}{k!}x^k+\frac{(n-1)!}{(k-1)!}a_1x^{k-1}+\frac{(n-2)!}{(k-2)!}a_2x^{k-2}+....+\frac{(n-k)!}{1!}a_k$

$$\Rightarrow R_k(x)=\frac{k!}{n!}P_n^{(n-k)}(x)=x^k+\frac{\binom{n-1}{k-1}}{\binom{n}{k}}a_1x^{k-1}+\frac{\binom{n-2}{k-2}}{\binom{n}{k}}a_2x^{k-2}+....+\frac{\binom{n-k-1}{1}}{\binom{n}{k}}a_{k-1}x+\frac{a_k}{\binom{n}{k}}$$

Sử dụng hệ quả định lý ***Rolle*** "giữa hai nghiệm của đạo hàm cấp m luôn tồn tại một nghiệm của đạo hàm cấp $(m+1)$" suy ra tính chất sau:

Nếu $P_n(x)$ có các nghiệm đều dương thì $P_n^{(n-k)}(x)$ cũng có các nghiệm đều dương, tức là $R_k(x)$ có các nghiệm đều dương. Theo **bài 23** đối với đa thức

$P_n(x)=x^n+a_1x^{n-1}+...+a_{n-1}x+a_n$ ta có $|a_k|\geq\binom{n}{k}|a_n|^{\frac{\binom{n-1}{k-1}}{\binom{n}{k}}}\quad\forall k=\overline{1,n}$ nên áp dụng kết quả này cho đa thức

$$R_k(x)=\frac{k!}{n!}P_n^{(n-k)}(x)=x^k+\frac{\binom{n-1}{k-1}}{\binom{n}{k}}a_1x^{k-1}+\frac{\binom{n-2}{k-2}}{\binom{n}{k}}a_2x^{k-2}+....+\frac{\binom{n-k+1}{1}}{\binom{n}{k}}a_{k-1}x+\frac{a_k}{\binom{n}{k}}$$

$$\Rightarrow\left|\frac{\binom{n-i}{k-i}}{\binom{n}{k}}a_i\right|\geq\binom{k}{i}\left|\frac{a_k}{C_n^k}\right|^{\frac{\binom{k-1}{i-1}}{\binom{k}{i}}}$$

Bài 26. Giả sử $P_n(x) = x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n = 0$ có n nghiệm thực dương

Chứng minh rằng: $\left|\frac{a_i}{\binom{n}{i}}\right|^k \geq \left|\frac{a_k}{\binom{n}{k}}\right|^i \quad \forall i \leq k \leq n$

Chứng minh

Theo **bài 25**: $\left|\frac{\binom{n-i}{k-i}}{\binom{n}{k}}a_i\right| \geq \binom{k}{i}\left|\frac{a_k}{\binom{n}{k}}\right|^{\frac{\binom{k-1}{i-1}}{\binom{k}{i}C_k^i}}$ suy ra $\left|\frac{\binom{n-i}{k-i}}{\binom{n}{k}\binom{k}{i}}a_i\right|^{\binom{k}{i}} \geq \left|\frac{a_k}{\binom{n}{k}}\right|^{\binom{k-1}{i-1}}$

Ta có $\frac{\binom{n-i}{k-i}}{\binom{n}{k}\binom{k}{i}} = \frac{\frac{(n-i)!}{(k-i)!(n-k)!}}{\frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{k!}{i!(k-i)!}} = \frac{(n-i)!i!}{n!} = \frac{1}{\binom{n}{i}}$ do đó

$$\left|\frac{a_i}{\binom{n}{i}}\right|^{\binom{k}{i}} \geq \left|\frac{a_k}{\binom{n}{k}}\right|^{\binom{k-1}{i-1}} \; \forall i \leq k \;\Leftrightarrow\; \left|\frac{a_i}{\binom{n}{i}}\right|^{\frac{k!}{i!(n-k)!}} \geq \left|\frac{a_k}{\binom{n}{k}}\right|^{\frac{(k-1)!}{(i-1)!(n-k)!}}$$

Lũy thừa bậc $\frac{(n-k)!(i-1)!}{(k-1)!}$ cả hai vế ta có $\left|\frac{a_i}{\binom{n}{i}}\right|^{\frac{k}{i}} \geq \left|\frac{a_k}{\binom{n}{k}}\right| \Rightarrow$ (đpcm)

Bài 27. Giả sử $P_n(x) = x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n = 0$ có n nghiệm thực dương.

Chứng minh rằng: $\left|\frac{a_i}{\binom{n}{i}}\right|\left|\frac{a_{k-i}}{\binom{n}{k-i}}\right| \geq \left|\frac{a_k}{\binom{n}{k}}\right| \quad \forall 1 \leq i \leq k \leq n$

Chứng minh

Sử dụng kết quả của **bài 23** đối với đa thức $R_k(x)$ ta nhận được

$$\left|\frac{\frac{\binom{n-i}{k-i}}{\binom{n}{k}}a_i\cdot\frac{\binom{n-k+i}{i}}{\binom{n}{k}}a_{k-i}}{\frac{a_k}{\binom{n}{k}}}\right| \geq \binom{k}{i}^2 \Rightarrow \left|\frac{a_ia_{k-i}}{a_k}\right| \geq \frac{\binom{n}{k}\binom{k}{i}^2}{\binom{n-i}{k-i}\binom{n-k+i}{i}} = \frac{k!(n-k)!n!}{(n-i)!(n-k+i)!i!(k-i)!}$$

$$\Rightarrow \left|\frac{a_ia_{k-i}}{a_k}\right| \geq \frac{n!}{i!(n-i)!}\cdot\frac{\frac{n!}{(k-i)!(n-k+i)!}}{\frac{n!}{k!(n-k)!}} = \frac{\binom{n}{i}\binom{n}{k-i}}{\binom{n}{k}} \Leftrightarrow \left|\frac{a_i}{\binom{n}{i}}\cdot\frac{a_{k-i}}{\binom{n}{k-i}}\right| \geq \left|\frac{a_k}{\binom{n}{k}}\right|$$

Hệ quả: Cho $k = n$ ta có $\left|\frac{a_ia_{n-i}}{a_n}\right| \geq \binom{n}{i}^2$

B. BÀI TẬP TỰ GIẢI

Bài 1. Chứng minh rằng: $ab+bc+cd+da+\frac{3}{2}\cdot\frac{a+b+c+d}{abc+abd+bcd+cda}\le$

$$\le 3(abc+abd+bcd+cda)^2+\frac{1}{4}\left(\frac{a+b+c+d}{abc+abd+bcd+cda}\right)^2 \quad \forall a,b,c,d>0$$

Bài 2. Cho các số thực $a, b, c, d > 0$. Chứng minh rằng:

$$10-3(abc+acd+abd+bcd)\le\frac{3(a+b+c+d)+2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)}{4(abc+acd+abd+bcd)}+$$

$$+\frac{36(abc+acd+abd+bcd)}{3(a+b+c+d)+2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)+12(abc+acd+abd+bcd)^2}$$

Bài 3. Cho các số thực $a, b, c, d > 0$. Chứng minh rằng:

$$(ab+ac+ad+bc+bd+cd)^2+9(a+b+c+d)^2\ge$$

$$\ge 6(abc+abd+acd+bcd)(a+b+c+d)+(ab+ac+ad+bc+bd+cd)+6(abc+abd+acd+bcd)$$

Bài 4. Cho các số thực $a, b, c, d, p > 0$. Chứng minh rằng:

$$2(a+b+c+d+p)(abc+abd+abp+acd+acp+adp+bcd+bcp+bdp+cdp)\le$$

$$\le 9(ab+ac+ad+ap+bc+bd+bp+cd+cp+dp)^2$$

Bài 5. Cho các số thực $a, b, c, d, p > 0$. Chứng minh rằng:

$$3(a+b+c+d+p)(ab+ac+ad+ap+bc+bd+bp+cd+cp+dp)$$

$$\le 8(a+b+c+d+p)^3+10(abc+abd+abp+acd+acp+adp+bcd+bcp+bdp+cdp)$$

Bài 6. Cho các số thực $a, b, c, d, p > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{(a+b+c+d+p)^2}{25}+\frac{2}{3}\cdot\frac{(ab+ac+ad+ap+bc+bd+dp+cd+cp+dp)}{(abc+abd+abp+acd+acp+adp+bcd+bcp+bdp+cdp)}\ge 1$$

Bài 7. Cho các số thực $a, b, c, d, p > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{3}{5}(ab+ac+ad+ap+bc+bd+bp+cd+cp+dp)+$$

$$+\frac{3(a+b+c+d+p)}{abc+abd+abp+acd+acp+adp+bcd+bcp+bdp+cdp}\le$$

$$\le\frac{12}{25}(abc+abd+abp+acd+acp+adp+bcd+bcp+bdp+cdp)^2+$$

$$+\left(\frac{a+b+c+d+p}{abc+abd+abp+acd+acp+adp+bcd+bcp+bdp+cdp}\right)^2$$

Bài 8. Giả sử phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ có hai nghiệm x_1, $x_2 \in [0, +\infty)$.

Chứng minh rằng: $\dfrac{2a-b}{a-b+c} \geq \dfrac{a(6a+b+8c)}{(a+c)(3a-b+c)}$

Bài 9. Giả sử $|a(b-c)| > |b^2 - ac| + |c^2 - ab|$. Chứng minh: nếu phương trình

$ax^2 + bx + c = 0$ có nghiệm thực thì tồn tại ít nhất 1 nghiệm $x_0 \in \left(0, \sqrt{3}-1\right)$

Bài 10. Giả sử phương trình $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ $(a \neq 0)$ có ba nghiệm thực dương (có thể bằng nhau). Chứng minh rằng: $\dfrac{4abc - b^3 - 3a^2d}{da^3 - abc} \geq \dfrac{3}{2}$

Bài 11. Giả sử phương trình $x^3 - px^2 + qx - p = 0$ với $p, q > 0$ có ba nghiệm thực

$x_1, x_2, x_3 \geq 1$. Chứng minh rằng: $p \geq \left(\dfrac{1}{4} + \dfrac{\sqrt{2}}{8}\right)(q+3)$

Bài 12. Giả sử phương trình $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ $(a \neq 0)$ có ba nghiệm $x_1, x_2, x_3 > 0$.

Chứng minh rằng: $x_1^7 + x_2^7 + x_3^7 \geq \dfrac{-b^3c^2}{81a^5}$

Bài 13. Giả sử phương trình $x^4 + ax^3 + 2x^2 + bx + 1 = 0$ có bốn nghiệm thực x_1, x_2, x_3, x_4.

Chứng minh rằng: $a^2 + b^2 \geq 8$

Bài 14. Giả sử $P(x) = x^{2006} + a_1x^{2005} + \ldots + a_{2005}x + a_{2006}$ có 2006 nghiệm thực phân biệt và $a_{2001} = 2001$; $a_{2003} = 2003$. Chứng minh $|a_{2002}| > 2002$

Bài 15. Cho đa thức $P_n(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ với các hệ số $a_1, a_2, \ldots, a_n \geq 0$ thỏa mãn $a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} \geq 7$. Chứng minh rằng: nếu $P(x)$ có n nghiệm thực thì $a_1 \geq 2$.

Bài 16. Cho $P_n(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$ và $Q(x) = x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m$

Giả sử $P(x) \vdots Q(x)$ và tồn tại b_k sao cho $|b_k| > \binom{m}{k}2006^k$

Chứng minh rằng tồn tại a_j thỏa mãn $|a_j| > 2005$.

Bài 17. Giả sử $x_i > 0$ $\left(i = \overline{1,n}\right)$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt[p]{\frac{\sum\limits_{1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < n} x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_i}}{\binom{n}{i}}} \geq \sqrt[n]{\frac{\sum\limits_{1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k < n} x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_k}}{\binom{n}{k}}} \quad \forall 1 \leq p \leq k \leq n$$

Bài 18. Giả sử $x_i > 0$ $\left(i = \overline{1,n}\right)$. Chứng minh rằng:

$$\frac{\sum\limits_{1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_i \leq n} x_{i_1}.x_{i_2}.\ldots.x_{i_i} \sum\limits_{1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_{k-i} \leq n} x_{i_1}.x_{i_2}.\ldots.x_{i_{k-i}}}{\sum\limits_{1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n} x_{i_1}.x_{i_2}.\ldots.x_{i_k}} \geq \frac{\binom{n}{i}\binom{n}{k-i}}{\binom{n}{k}}$$

§ 23.8. BẤT ĐẲNG THỨC KHÔNG THUẦN NHẤT

Trong chương I mục bất đẳng thức ***AM – GM*** *chúng ta đã làm quen với các bất đẳng thức có sự pha trộn giữa các tổng đối xứng không đồng bậc. Đó chính là những ví dụ đầu tiên về các bất đẳng thức không thuần nhất. Có thể nhận thấy rằng bất đẳng thức không thuần nhất thường rất khó. Đối với các bất đẳng thức loại này phương pháp giải tích cung cấp cho ta rất nhiều công cụ tốt. Tuy nhiên, dưới đây chúng tôi sẽ chỉ sử dụng phương pháp đại số để tấn công thế giới đầy mới mẻ này.*

Bài 1. Cho a,b,c,d là những số thực. Chứng minh rằng:
$$(13a^2+5)(13b^2+5)(13c^2+5)(13d^2+5)\ge 324\left[abcd+4(abc+bcd+cda+dab)+1\right]^2$$

Chứng minh

Xét 4 số sau a^2-1,b^2-1,c^2-1,d^2-1. Hiển nhiên trong 4 số này sẽ có 2 số cùng dấu giả sử a^2-1,b^2-1. Khi đó: $(13a^2+5)(13b^2+5)=$

$$=7(a^2-1)(b^2-1)+18(9a^2b^2+4a^2+4b^2+1)\ge 18(9a^2b^2+4a^2+4b^2+1)$$

Tiếp tục xét 3 số: $(c^2-1),(d^2-1),(27a^2b^2-20(a^2+b^2)+13)$

Không mất tính tổng quát, ta có thể xét 2 trường hợp sau:

Trường hợp 1: $(c^2-1),(d^2-1)$ cùng dấu. Khi đó: $(13c^2+5)(13d^2+5)=$

$$=7(c^2-1)(d^2-1)+18(9c^2d^2+4c^2+4d^2+1)\ge 18(9c^2d^2+4c^2+4d^2+1)$$

Áp dụng bất đẳng thức ***CBS***, ta được:

$$(13a^2+5)(13b^2+5)(13c^2+5)(13d^2+5)\ge 18^2(9a^2b^2+4a^2+4b^2+1)(9c^2d^2+4c^2+4d^2+1)$$

$$=324(a^2b^2+4a^2b^2+4a^2b^2+4a^2+4b^2+1)(c^2d^2+4c^2+4d^2+4c^2d^2+4c^2d^2+1)$$

$$\ge 324\left[abcd+4(abc+bcd+cda+dab)+1\right]^2 \text{ (đpcm)}$$

Trường hợp 2: $(c^2-1),(27a^2b^2-20(a^2+b^2)+13)$ cùng dấu. Khi đó:

$$(9a^2b^2+4a^2+4b^2+1)(13c^2+5)=(c^2-1)(27a^2b^2-20(a^2+b^2)+13)+$$

$$+18\left[5a^2b^2c^2+4(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+1\right]\ge 18\left[5a^2b^2c^2+4(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+1\right]$$

Áp dụng bất đẳng thức ***CBS***, ta được: $(13a^2+5)(13b^2+5)(13c^2+5)(13d^2+5)\ge$

$$\ge 18^2\left[5a^2b^2c^2+4(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+1\right](13d^2+5)$$

$$=324\left[a^2b^2c^2+4a^2b^2c^2+4b^2c^2+4c^2a^2+4a^2b^2+1\right](d^2+4+4d^2+4d^2+4d^2+1)$$

$$\ge 324\left[abcd+4(abc+bcd+cda+dab)+1\right]^2 \text{ (đpcm)}$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=d=1$.

Bài 2. Cho a,b,c,d là những số thực. Chứng minh rằng:

$$(5a^2+7)(5b^2+7)(5c^2+7)(5d^2+7)\ge$$

$$\ge 9\left[abcd+2(abc+bcd+cda+dab)+3(ab+ac+ad+bc+bd+cd)+4(a+b+c+d)+5\right]^2$$

Chứng minh

Xét 4 số sau a^2-1,b^2-1,c^2-1,d^2-1. Hiển nhiên trong 4 số này sẽ có 2 số cùng dấu giả sử a^2-1,b^2-1. Khi đó: $(5a^2+7)(5b^2+7)=$

$$=(a^2-1)(b^2-1)+12(2a^2b^2+3a^2+3b^2+4)\ge 12(2a^2b^2+3a^2+3b^2+4)$$

Tiếp tục xét 3 số: $(c^2-1),(d^2-1),(a^2b^2-1)$

Không mất tính tổng quát, ta có thể xét 2 trường hợp sau:

Trường hợp 1: $(c^2-1),(d^2-1)$ cùng dấu. Khi đó: $(5c^2+7)(5d^2+7)=$

$$=(c^2-1)(d^2-1)+12(2c^2d^2+3c^2+3d^2+4)\ge 12(2c^2d^2+3c^2+3d^2+4)$$

Áp dụng bất đẳng thức ***CBS***, ta được:

$$(5a^2+7)(5b^2+7)(5c^2+7)(5d^2+7)\ge 12^2(2a^2b^2+3a^2+3b^2+4)(2c^2d^2+3c^2+3d^2+4)$$

$$=9(a^2b^2+2a^2b^2+2b^2+2a^2+2a^2b^2+3a^2b^2+3a^2+3a^2+3b^2+3b^2+3+4a^2+4b^2+4+4+5)$$

$$(c^2d^2+2c^2+2c^2d^2+2c^2d^2+2d^2+3+3c^2+3d^2+3c^2+3d^2+3c^2d^2+4+4+4c^2+4d^2+5)$$

$$\ge 9\left[abcd+2(abc+bcd+cda+dab)+3(ab+ac+ad+bc+bd+cd)+4(a+b+c+d)+5\right]^2$$

Trường hợp 2: $(c^2-1),(a^2b^2-1)$ cùng dấu. Khi đó: $(2a^2b^2+3a^2+3b^2+4)(5c^2+7)$

$$=(a^2b^2-1)(c^2-1)+3\left[3a^2b^2c^2+5(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+7(a^2+b^2+c^2)+9\right]$$

$$\ge 3\left[3a^2b^2c^2+5(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+7(a^2+b^2+c^2)+9\right]$$

Áp dụng bất đẳng thức ***CBS***, ta được: $(5a^2+7)(5b^2+7)(5c^2+7)(5d^2+7)\ge$

$$\ge 36\left[3a^2b^2c^2+5(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+7(a^2+b^2+c^2)+9\right](5d^2+7)$$

$$\ge 9\left[a^2b^2c^2+4a^2b^2c^2+4b^2c^2+4c^2a^2+4a^2b^2+1\right](d^2+4+4d^2+4d^2+4d^2+1)$$

$$\ge 9\left[a^2b^2c^2+2a^2b^2c^2+2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2+3a^2b^2+3a^2c^2+3a^2+3b^2c^2+3b^2+3c^2+4a^2+\right.$$

$$\left.+4b^2+4c^2+4+9\right](d^2+2+2d^2+2d^2+2d^2+3+3+3d^3+3+3d^2+3d^2+4+4+4+4d^2+9)$$

$\geq 9\left[abcd + 2(abc + bcd + cda + dab) + 3(ab + ac + ad + bc + bd + cd) + 4(a + b + c + d) + 5\right]^2$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = d = 1$.

Bài 3. Cho a, b, c, d, e là những số thực. Chứng minh rằng:

$$(5a^2 + 7)(5b^2 + 7)(5c^2 + 7)(5d^2 + 7) \geq$$

$$\geq 9\left[abcd + 2(abc + bcd + cda + dab) + 3(ab + ac + ad + bc + bd + cd) + 4(a + b + c + d) + 5\right]^2$$

Chứng minh

Xét 4 số $a^2 - 1, b^2 - 1, c^2 - 1, d^2 - 1$. Hiển nhiên trong 4 số sẽ có 2 số cùng dấu giả sử $a^2 - 1, b^2 - 1$. Khi đó: $(5a^2 + 7)(5b^2 + 7)$

$= (a^2 - 1)(b^2 - 1) + 12(2a^2b^2 + 3a^2 + 3b^2 + 4) \geq 12(2a^2b^2 + 3a^2 + 3b^2 + 4)$

Tiếp tục xét 3 số: $(c^2 - 1), (d^2 - 1), (a^2b^2 - 1)$

Không mất tính tổng quát, ta có thể xét 2 trường hợp sau:

Trường hợp 1: $(c^2 - 1), (d^2 - 1)$ cùng dấu. Khi đó: $(5c^2 + 7)(5d^2 + 7) =$

$= (c^2 - 1)(d^2 - 1) + 12(2c^2d^2 + 3c^2 + 3d^2 + 4) \geq 12(2c^2d^2 + 3c^2 + 3d^2 + 4)$

Áp dụng bất đẳng thức ***CBS***, ta được:

$(5a^2 + 7)(5b^2 + 7)(5c^2 + 7)(5d^2 + 7) \geq 12^2(2a^2b^2 + 3a^2 + 3b^2 + 4)(2c^2d^2 + 3c^2 + 3d^2 + 4)$

$= 9(a^2b^2 + 2a^2b^2 + 2b^2 + 2a^2 + 2a^2b^2 + 3a^2b^2 + 3a^2 + 3a^2 + 3b^2 + 3b^2 + 3 + 4a^2 + 4b^2 + 4 + 4 + 5)$

$(c^2d^2 + 2c^2 + 2c^2d^2 + 2c^2d^2 + 2d^2 + 3 + 3c^2 + 3d^2 + 3c^2 + 3d^2 + 3c^2d^2 + 4 + 4 + 4c^2 + 4d^2 + 5)$

$\geq 9\left[abcd + 2(abc + bcd + cda + dab) + 3(ab + ac + ad + bc + bd + cd) + 4(a + b + c + d) + 5\right]^2$

Trường hợp 2: $(c^2 - 1), (a^2b^2 - 1)$ cùng dấu. Khi đó: $(2a^2b^2 + 3a^2 + 3b^2 + 4)(5c^2 + 7)$

$= (a^2b^2 - 1)(c^2 - 1) + 3\left[3a^2b^2c^2 + 5(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + 7(a^2 + b^2 + c^2) + 9\right]$

$\geq 3\left[3a^2b^2c^2 + 5(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + 7(a^2 + b^2 + c^2) + 9\right]$

Áp dụng bất đẳng thức ***CBS***, ta được: $(5a^2 + 7)(5b^2 + 7)(5c^2 + 7)(5d^2 + 7) \geq$

$\geq 36\left[3a^2b^2c^2 + 5(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + 7(a^2 + b^2 + c^2) + 9\right](5d^2 + 7)$

$\geq 9\left[a^2b^2c^2 + 4a^2b^2c^2 + 4b^2c^2 + 4c^2a^2 + 4a^2b^2 + 1\right](d^2 + 4 + 4d^2 + 4d^2 + 4d^2 + 1)$

$$\geq 9\left[a^2b^2c^2 + 2a^2b^2c^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 + 2a^2b^2 + 3a^2b^2 + 3a^2c^2 + 3a^2 + 3b^2c^2 + 3b^2 + 3c^2 + 4a^2 + \right.$$

$$\left. + 4b^2 + 4c^2 + 4 + 9\right](d^2 + 2 + 2d^2 + 2d^2 + 2d^2 + 3 + 3 + 3d^3 + 3 + 3d^2 + 3d^2 + 4 + 4 + 4 + 4d^2 + 9)$$

$$\geq 9\left[abcd + 2(abc + bcd + cda + dab) + 3(ab + ac + ad + bc + bd + cd) + 4(a + b + c + d) + 5\right]^2$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = d = 1$.

Bài 4. Cho số thực $\alpha \geq 2$, $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$ ($2 \leq n \in \mathbb{N}$). Tìm tất cả các số k sao cho tồn tại hằng số $C_k > 0$ thỏa mãn: $\left(x_1^\alpha + 1\right)\ldots\left(x_n^\alpha + 1\right) \geq C_k\left(x_1 + \ldots + x_n\right)^k$ (*).

Khi đó, tìm số C_k tốt nhất.

Chứng minh

Chứng minh gồm 2 bước:

Bước 1: Tìm giá trị k và dự đoán số tốt C_k

Cho $x_1 = \ldots = x_{n-1} = 0$ thì (*) trở thành: $x_n^\alpha + 1 \geq C_k . x_n^k$ (**) với $C_k > 0$

Nếu $k < 0$ thì (**) không đúng vì ta cho $x_n \to +0$, khi đó $VT(**) \to 1$ còn $VP(**) \to +\infty$.

Còn nếu $k \geq \alpha$ thì (**) cũng không đúng vì ta cho $x_n \to +0$, khi đó $VT(**) < VP(**)$ còn $VP(**) \to +\infty$. Do đó, ta sẽ chứng minh với $k \in [0, \alpha]$ thì sẽ tồn tại hằng số $C_k > 0$ thỏa mãn (*). Thật vậy: $\left(x_1^\alpha + 1\right)\ldots\left(x_n^\alpha + 1\right) \geq \sum_{i=1}^{n} x_i^\alpha + 1$

$$\geq n\left(\frac{1}{n}\sum x_i\right)^\alpha + 1 = \frac{\left(\sum x_i\right)^\alpha}{n^{\alpha-1}} + \frac{\alpha-k}{k} \cdot \frac{k}{\alpha-k} \geq \frac{\alpha}{k} \cdot \frac{1}{n^{\frac{(\alpha-1)k}{\alpha}}}\left(\frac{k}{\alpha-k}\right)^{\frac{\alpha-k}{\alpha}}\left(x_1 + x_2 + \ldots + x_n\right)^k$$

Điều đó chứng tỏ $\exists C_k > 0$ thỏa mãn bất đẳng thức (*).

Dự đoán C_k: Cho $x_i = \left(\frac{k}{\alpha n - k}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$, $i = \overline{1, n} \Rightarrow C_k \leq \left(\frac{\alpha n}{\alpha n - k}\right)^\alpha \left(n^{-k}\right)\left(\frac{\alpha n - k}{k}\right)^{\frac{k}{\alpha}}$

Ta sẽ chứng minh $C_k = \left(\frac{\alpha n}{\alpha n - k}\right)^n \left(n^{-k}\right)\left(\frac{\alpha n - k}{k}\right)^{\frac{k}{\alpha}}$ là hằng số tốt nhất cần tìm.

Bước 2: Chứng minh . Trước hết ta cần chỉ ra:

Với $k \geq 0$ ta luôn có: $x^\alpha + 1 \geq \frac{\alpha n}{\alpha n - k}\left(\frac{\alpha n - k}{k}\right)^{\frac{k}{\alpha}} n^{\frac{-k}{2}}\left[x^2 + (n-1)\left(\frac{k}{\alpha n - k}\right)^{\frac{2}{\alpha}}\right]^{\frac{\alpha}{2}}$

Thật vậy, theo bất đẳng thức ***AM – GM***:

$$x^{\alpha}+1=(x^2)^{\frac{\alpha}{2}}+\frac{\alpha n-k}{k}\left[\left(\frac{k}{\alpha n-k}\right)^{\frac{2}{\alpha}}\right]^{\frac{\alpha}{2}}\ge\frac{\alpha n}{k}\left[\frac{x^2+\frac{\alpha n-k}{k}\left(\frac{k}{\alpha n-k}\right)^{\frac{2}{\alpha}}}{\frac{\alpha n}{k}}\right]^{\frac{\alpha}{2}}$$

$$=\frac{\alpha n}{k}\left[\frac{x^2+(n-1)\left(\frac{k}{\alpha n-k}\right)^{\frac{2}{\alpha}}+\frac{\alpha-k}{k}\cdot n\left(\frac{k}{\alpha n-k}\right)^{\frac{2}{\alpha}}}{\frac{\alpha n}{k}}\right]^{\frac{\alpha}{2}}$$

$$\ge\frac{\alpha n}{k}\left[\frac{\alpha}{k}\cdot\frac{\left[x^2+(n-1)\left(\frac{k}{\alpha n-k}\right)^{\frac{2}{\alpha}}\right]^{\frac{1}{\alpha}}\cdot\left[n\left(\frac{k}{\alpha n-k}\right)^{\frac{2}{\alpha}}\right]^{\frac{\alpha-k}{\alpha}}}{\frac{\alpha n}{k}}\right]^{\frac{\alpha}{2}}=\frac{\alpha n}{\alpha n-k}\left(\frac{\alpha n-k}{k}\right)^{\frac{k}{\alpha}}n^{\frac{-k}{2}}\left[x^2+(n-1)\left(\frac{k}{\alpha n-k}\right)^{\frac{2}{\alpha}}\right]^{\frac{k}{2}}$$

Do đó $VT(*)\ge\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{\alpha n}{\alpha n-k}\left(\frac{\alpha n-k}{k}\right)^{\frac{k}{\alpha}}n^{\frac{-k}{2}}\left[x_i^2+(n-1)\left(\frac{k}{\alpha n-k}\right)^{\frac{2}{\alpha}}\right]^{\frac{k}{2}}\right)$

$$=\left(\frac{\alpha n}{\alpha n-k}\right)^{n}\left(\frac{\alpha n-k}{k}\right)^{\frac{kn}{\alpha}}n^{\frac{-kn}{2}}\left[\prod_{i=1}^{n}\left(x_i^2+(n-1)\left(\frac{k}{\alpha n-k}\right)^{\frac{2}{\alpha}}\right)\right]^{\frac{k}{2}}$$

Chú ý dấu "=" xảy ra khi $x=\left(\frac{k}{\alpha n-k}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$. Cuối cùng ta chỉ cần chỉ ra:

$$\prod_{i=1}^{n}\left(x_i^2+(n-1)\left(\frac{k}{\alpha n-k}\right)^{\frac{2}{\alpha}}\right)\ge n^{n-2}\left(\frac{k}{\alpha n-k}\right)^{\frac{2(n-1)}{\alpha}}(x_1+...+x_n)^2\quad(**)$$

Thật vậy, xét n số $x_i^2-\left(\frac{k}{\alpha n-k}\right)^{\frac{2}{\alpha}}, i=\overline{1,n}$. Trong n số này sẽ có 2 số cùng dấu. Giả sử $x_i^2-\left(\frac{k}{\alpha n-k}\right)^{\frac{2}{\alpha}}, x_j^2-\left(\frac{k}{\alpha n-k}\right)^{\frac{2}{\alpha}}$ cùng dấu với $i\ne j$. Khi đó:

$$\left(x_i^2+(n-1)\left(\frac{k}{\alpha n-k}\right)^{\frac{2}{\alpha}}\right)\left(x_j^2+(n-1)\left(\frac{k}{\alpha n-k}\right)^{\frac{2}{\alpha}}\right)$$

$$=\left(x_i^2-\left(\frac{k}{\alpha n-k}\right)^{\frac{2}{\alpha}}\right)\left(x_j^2-\left(\frac{k}{\alpha n-k}\right)^{\frac{2}{\alpha}}\right)+n\left(\frac{k}{\alpha n-k}\right)^{\frac{2}{\alpha}}\left[x_i^2+x_j^2+(n-2)\left(\frac{k}{\alpha n-k}\right)^{\frac{2}{\alpha}}\right]$$

$$\ge n\left(\frac{k}{\alpha n-k}\right)^{\frac{2}{\alpha}}\left[x_i^2+x_j^2+(n-2)\left(\frac{k}{\alpha n-k}\right)^{\frac{2}{\alpha}}\right]$$

Do đó $VT(**)\ge n\left(\frac{k}{\alpha n-k}\right)^{\frac{2}{\alpha}}\left[x_1^2+(n-1)\left(\frac{k}{\alpha n-k}\right)^{\frac{2}{\alpha}}\right]...$

$$.\left[x_i^2+x_j^2+(n-2)\left(\frac{k}{\alpha n-k}\right)^{\frac{2}{\alpha}}\right]...\left[x_n^2+(n-1)\left(\frac{k}{\alpha n-k}\right)^{\frac{2}{\alpha}}\right].$$

Chú ý rằng nếu $\left(\sum_{i=1}^{\beta} a_i^2 - \beta\left(\frac{k}{\alpha n-k}\right)^{\frac{2}{\alpha}}\right),\left(\sum_{i=1}^{\gamma} b_i^2 - \gamma\left(\frac{k}{\alpha n-k}\right)^{\frac{2}{\alpha}}\right)$ cùng dấu thì

$$\left(\sum_{i=1}^{\beta} a_i^2 + (n-\beta)\left(\frac{k}{\alpha n-k}\right)^{\frac{2}{\alpha}}\right)\left(\sum_{i=1}^{\gamma} b_i^2 + (n-\gamma)\left(\frac{k}{\alpha n-k}\right)^{\frac{2}{\alpha}}\right) = \left(\sum_{i=1}^{\beta} a_i^2 - \beta\left(\frac{k}{\alpha n-k}\right)^{\frac{2}{\alpha}}\right)\left(\sum_{i=1}^{\gamma} b_i^2 - \gamma\left(\frac{k}{\alpha n-k}\right)^{\frac{2}{\alpha}}\right) +$$

$$+ n\left(\frac{k}{\alpha n-k}\right)^{\frac{2}{\alpha}}\left[\sum_{i=1}^{\beta} a_i^2 + \sum_{i=1}^{\gamma} b_i^2 + (n-\beta-\gamma)\left(\frac{k}{\alpha n-k}\right)^{\frac{2}{\alpha}}\right] \ge n\left(\frac{k}{\alpha n-k}\right)^{\frac{2}{\alpha}}\left[\sum_{i=1}^{\beta} a_i^2 + \sum_{i=1}^{\gamma} b_i^2 + (n-\beta-\gamma)\left(\frac{k}{\alpha n-k}\right)^{\frac{2}{\alpha}}\right]$$

với β, γ nguyên dương thỏa mãn $n > \beta + \gamma$.

Dựa vào chú ý trên ta có thể chứng minh được bằng $(n-3)$.

Xét $(n-1-k)$ (tiếp theo) $k = \overline{0, n-4}$

$$VT(***) \ge n^{n-2}\left(\frac{k}{\alpha n-k}\right)^{\frac{2(n-2)}{\alpha}}\left(\sum_{i=1}^{m} a_i^2 + (n-m)\left(\frac{k}{\alpha n-k}\right)^{\frac{2}{\alpha}}\right)\left(\sum_{i=1}^{n-m} b_i^2 + m\left(\frac{k}{\alpha n-k}\right)^{\frac{2}{\alpha}}\right)$$

Với m nguyên bé hơn n và $a_i^2 \ne b_j^2, \{a_i^2, b_j^2\} \subset \{x_1^2, x_2^2, ... x_n^2\}$ với $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1, n-m}$

Cuối cùng, áp dụng bất đẳng thức ***CBS*** ta được:

$$\left(\sum_{i=1}^{m} a_i^2 + (n-m)\left(\frac{k}{\alpha n-k}\right)^{\frac{2}{\alpha}}\right)\left(m\left(\frac{k}{\alpha n-k}\right)^{\frac{2}{\alpha}} + \sum_{i=1}^{n-m} b_i^2\right) \ge \left(\frac{k}{\alpha n-k}\right)^{\frac{2}{\alpha}}\left(\sum_{i=1}^{m} a_i + \sum_{i=1}^{n-m} b_i\right)^2$$

$= \left(\frac{k}{\alpha n-k}\right)^{\frac{2}{\alpha}}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2$. Suy ra $VT(***) \ge n^{n-2}\left(\frac{k}{\alpha n-k}\right)^{\frac{2(n-1)}{\alpha}}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \Leftrightarrow$ (đpcm)

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow x_i = \left(\frac{k}{\alpha n-k}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$.

Kết luận: Tất cả các giá trị k cần tìm là $k \in [0, \alpha]$. Hằng số tốt

$$C_k = \left(\frac{\alpha n}{\alpha n-k}\right)^n (n^{-k})\left(\frac{\alpha n-k}{k}\right)^{\frac{k}{\alpha}}$$

Nhận xét:

1. Với trường hợp $\alpha = 2, n = 3$ có lời giải bằng kỹ thuật 2. rất đẹp như sau:

Đặt $x_1 = \operatorname{tg} a, x_2 = \operatorname{tg} b, x_3 = \operatorname{tg} c$, $a, b, c \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

Bất đẳng thức cần chứng minh $\Leftrightarrow$

$$\frac{1}{C_k} \ge (\cos a \cos b \cos c)^{2-k}(\cos a \cos b \sin c + \cos a \sin b \cos c + \sin a \cos b \cos c)^k \quad (1)$$

Ta có: $\cos a\cos b\sin c+\cos a\sin b\cos c+\sin a\cos b\cos c=\sin a\sin b\sin c+\sin(a+b+c)$

và $\sin a\sin b\sin c\le\sin^3\left(\frac{a+b+c}{3}\right)=n^3$; $\sin(a+b+c)=3n-4n^3$;

$\cos a\cos b\cos c\le\cos^3\left(\frac{a+b+c}{3}\right)=(1-n^2)^{\frac{3}{2}}$. Do đó, để chứng minh (1) ta cần chỉ ra:

$\frac{1}{C_k}\ge(1-n^2)^{\frac{3}{2}(2-k)}(n^3+3n-4n^3)^k\Leftrightarrow\frac{1}{C_k}\ge(1-n^2)^{\frac{6-k}{2}}(3n)^k$.

Theo bất đẳng thức ***AM – GM***, ta có:

$$(1-n^2)^{\frac{6-k}{2}}(3n)^k=\left(\frac{2}{6-k}\cdot3(1-n^2)\right)^{\frac{6-k}{2}}\cdot\left(\frac{2}{k}\cdot3n^2\right)^{\frac{k}{2}}\cdot3^k\cdot\left(\frac{6-k}{6}\right)^{\frac{6-k}{2}}\cdot\left(\frac{k}{6}\right)^{\frac{k}{2}}$$

$$\le3^k\cdot\left(\frac{6-k}{6}\right)^{\frac{6-k}{2}}\left(\frac{k}{6}\right)^{\frac{k}{2}}\left(\frac{3(1-n^2)+3n^2}{\frac{6-k}{2}+\frac{k}{2}}\right)^{\frac{6-k}{2}+\frac{k}{2}}=3^k\cdot\left(\frac{6-k}{6}\right)^{\frac{6-k}{2}}\left(\frac{k}{6}\right)^{\frac{k}{2}}=\frac{1}{C_k}$$

Suy ra $C_k=3^{-k}\cdot\left(\frac{6-k}{6}\right)^{\frac{k-3}{2}}\left(\frac{k}{6}\right)^{-\frac{k}{2}}=3^{-k}\left(\frac{6}{6-k}\right)^3\left(\frac{6-k}{k}\right)^{\frac{k}{2}}$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow n=\sqrt{\frac{k}{6}}$ hay $x_1=x_2=x_3=\left(\frac{k}{6-k}\right)^{\frac{1}{2}}$

2. Với $\alpha=2, n=3, k=2$ thì: $(x_1^2+1)(x_2^2+1)(x_3^2+1)\ge\frac{3}{4}(x_1+x_2+x_3)^2$

Đặt $a=\sqrt{2}\,x_1, b=\sqrt{2}\,x_2, c=\sqrt{2}\,x_3$ ta được:

$(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2)\ge3(a+b+c)^2\ge9(ab+bc+ca)$

Đây là bài Asian Pacific Mathematica Olympiad 2004.

3. Ta có thể tổng quát hóa để thu được bài toán:

Cho trước số thực $\alpha\ge2$, $2\le n\in\mathbb{N}$, $n\ge m\in\mathbb{N}$ *và* $x_1,x_2,...x_n\ge0$. *Tìm tất cả các số k sao cho tồn tại hằng số* $C_k>0$ *thỏa mãn:* $\prod_{i=1}^{n}(x_i^2+1)\ge C_k\left(\sum_{0<i_1<...<i_m\le n}x_{i_1}...x_{i_m}\right)^k$

Khi đó tìm số tốt C_k

Kết quả: $k\in[0,\alpha]$ và $C_k=\left(\frac{\alpha n}{\alpha n-mk}\right)^n(C_n^m)^{-k}\left(\frac{mk}{\alpha n-mk}\right)^{-\frac{mk}{\alpha}}$ là giá trị tốt nhất.

Lời giải chi tiết hoàn toàn tương tự như trên (bạn đọc tự hoàn thành).

Chú ý. Khi $\alpha=2, n=3, m=2$ thì ta nhận được bài toán VMEO 3 sau:

Tìm tất cả các số thực k sao cho tồn tại hằng số $C_k>0$ *sao cho bất đẳng thức sau đúng với các số thực a,b,c tùy ý.* $(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)\ge C_k|ab+bc+ca|^k$

Bài 5. Cho $a, b, c\ge0$. Chứng minh rằng: $a^2+b^2+c^2+2abc+3\ge(1+a)(1+b)(1+c)$

Chứng minh

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$a^2+b^2+c^2+abc+2\ge ab+bc+ca+a+b+c$

Xét 3 số $(a-1),(b-1),(c-1)$, trong 3 số này sẽ có 2 số cùng dấu, ta có thể giả sử là $(a-1),(b-1)$, suy ra $ab\ge a+b-1$. Khi đó:

$a^2+b^2+c^2+abc+2\ge a^2+b^2+c^2+c(a+b-1)+2$

$=\frac{1}{2}(a-b)^2+(c-1)^2+\frac{1}{2}(b-1)^2+\frac{1}{2}(a-1)^2+ab+bc+ca+a+b+c\ge ab+bc+ca+a+b+c$

Nhận xét: Ngoài cách giải như trên ta còn các cách giải sau đây:

• ***Cách 2:***

Ta có bất đẳng thức Tukervici: $a^2+b^2+c^2+1+2\sqrt{abc}\ge ab+bc+ca+a+b+c$

Mà $2\sqrt{abc}\le abc+1$ nên suy ra đpcm

• ***Cách 3:*** Đặt $f(a,b,c)=a^2+b^2+c^2+abc+2-a-b-c-ab-bc-ca$

Nếu $a,b,c>3$ thì $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}<1$ hay $abc>ab+bc+ca$, do đó

$f(a,b,c)>a^2+b^2+c^2+2-a-b-c>0\Rightarrow$ (đpcm)

Nếu có 1 số bé hơn hoặc bằng 3, giả sử là $a\le 3$.

Khi đó: $f(a,b,c)-f\left(a,\frac{b+c}{2},\frac{b+c}{2}\right)=\frac{(3-a)(b-c)^2}{4}\ge 0$

Ta cần chứng minh: $f\left(a,\frac{b+c}{2},\frac{b+c}{2}\right)\ge 0$. Ta có:

$f(a,x,x)=a^2+x^2+ax^2+2-a-2x-2ax=(a+1)(x-1)^2+(a-1)^2\ge 0\quad \forall x$

Bài 6. Cho $a,b,c,d\ge 0$. Chứng minh rằng:

$$3(a^2+b^2+c^2+d^2)+2abcd+2\ge(a+b+c+d)^2\quad (*)$$

Chứng minh

Xét 4 số $(a-1),(b-1),(c-1),(d-1)$. Trong 4 số này sẽ có 2 số cùng dấu, ta có thể giả sử là $(a-1),(b-1)$, suy ra $abcd\ge cda+bcd-cd$.

• Nếu $(c-1),(d-1)$ cùng dấu thì $cd\ge c+d-1$, suy ra:

$abcd\ge cda+bcd-cd\ge(c+d-1)(a+b)-cd=(a+b)(c+d)-a-b-cd$

Do đó: $VT(*)\ge 3(a^2+b^2+c^2+d^2)+2(a+b)(c+d)-2a-2b-2cd+2$

$=(a+b+c+d)^2+(a-b)^2+2(c-d)^2+(a-1)^2+(b-1)^2\ge(a+b+c+d)^2$ (đpcm)

• Nếu $(a-1),(b-1),(c-1)$ cùng dấu thì $ac>c+a-1, bc\ge b+c-1$

$\Rightarrow abcd\ge cda+bcd-cd\ge d(c+a-1)+d(b+c-1)-cd=d(a+b+c)-2d$

Suy ra: $VT(*) \geq 3(a^2+b^2+c^2+d^2)+2d(a+b+c)-4d+2$

$=(a+b+c+d)^2+(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2+2(d-1)^2 \geq (a+b+c+d)^2$

Nhận xét: Bất đẳng thức trên yếu hơn bất đẳng thức Tukervici là:

$a^2+b^2+c^2+d^2+2\sqrt{abcd} \geq ab+ac+ad+bc+bd+cd$

Bài 7. Cho $a,b,c \geq 0$, $a^2+b^2+c^2>0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{2a+1}+\frac{1}{2b+1}+\frac{1}{2c+1}+\frac{2}{a+b+c}+\frac{1}{3} \geq 2\left(\frac{1}{a+b+1}+\frac{1}{b+c+1}+\frac{1}{c+a+1}\right) \ (*)$$

Chứng minh

Xét 3 số $(a-1),(b-1),(c-1)$. Trong 3 số này sẽ có 2 số cùng dấu, ta có thể giả sử là $(a-1),(b-1)$, suy ra

$ab+1 \geq a+b \Leftrightarrow (a+c+1)(b+c+1) \geq (c+2)(a+b+c)$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{(c+2)(a+b+c)} \geq \dfrac{1}{(a+c+1)(b+c+1)} \Leftrightarrow \dfrac{1}{c+2}+\dfrac{1}{a+b+c} \geq \dfrac{1}{a+c+1}+\dfrac{1}{b+c+1}$

Do đó: $VT(*) \geq \dfrac{2}{a+b+1}+\dfrac{2}{c+2}+\dfrac{2}{a+b+c} \geq 2\left(\dfrac{1}{a+b+1}+\dfrac{1}{b+c+1}+\dfrac{1}{c+a+1}\right)$ (đpcm)

Bài 8. Cho $a, b, c>0$ thỏa mãn $abc+ab+bc+ca \leq 4$ hoặc $(a-1)(b-1)(c-1) \leq 0$.
Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{3}{a+b+1}+\frac{3}{b+c+1}+\frac{3}{c+a+1}+1 \geq \frac{6}{2a+1}+\frac{6}{2b+1}+\frac{6}{2c+1}+\frac{3}{a+b+c} \ (*)$$

Chứng minh

• Nếu $(a-1)(b-1)(c-1) \leq 0$. Dễ dàng ta có được:

$\dfrac{1}{a+b+c} \leq \dfrac{1}{a+b+1}+\dfrac{1}{b+c+1}+\dfrac{1}{c+a+1}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{a+2}-\dfrac{1}{b+2}-\dfrac{1}{c+2}$. Do đó ta chỉ cần chứng minh: $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}+\dfrac{3}{a+2}+\dfrac{3}{b+2}+\dfrac{3}{c+2} \geq \dfrac{6}{2a+1}+\dfrac{6}{2b+1}+\dfrac{6}{2c+1}$ (1)

Ta có: $\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{x+2}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{\frac{x+2}{3}} \geq \dfrac{4}{x+\frac{x+2}{3}}=\dfrac{6}{2x+1} \Rightarrow$ (1) đúng $\Rightarrow$ (đpcm)

• Nếu $abc+ab+bc+ca \leq 4$

Bước 1. Chứng minh bất đẳng thức sau (dành cho bạn đọc):

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{9}{a+b+c} \geq 9\left(\frac{1}{a+2}+\frac{1}{b+2}+\frac{1}{c+2}\right)\left(\frac{1}{2a+1}+\frac{1}{2b+1}+\frac{1}{2c+1}-\frac{1}{a+b+c}-\frac{1}{b+c+1}-\frac{1}{c+a+1}\right)$$

Bước 2. Ta có: $4 \geq abc+ab+bc+ca \Leftrightarrow \dfrac{1}{a+2}+\dfrac{1}{b+2}+\dfrac{1}{c+2} \geq 1$. Suy ra:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq 9\left(\frac{1}{a+b+c}+\frac{1}{2a+1}+\frac{1}{2b+1}+\frac{1}{2c+1}-\frac{1}{a+b+c}-\frac{1}{b+c+1}-\frac{1}{c+a+1}\right)$$

Kết hợp với bài 7 suy ra: $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}+\dfrac{3}{a+b+1}+\dfrac{3}{b+c+1}+\dfrac{3}{c+a+1}+1$

$$\geq \frac{9}{a+b+c} - 6\left(\frac{1}{a+b+1} + \frac{1}{b+c+1} + \frac{1}{c+a+1}\right) + 9\left(\frac{1}{2a+1} + \frac{1}{2b+1} + \frac{1}{2c+1}\right) + 1$$

$$= \frac{6}{2a+1} + \frac{6}{2b+1} + \frac{6}{2c+1} + \frac{3}{a+b+c} - 3\left(\frac{2}{a+b+1} + \frac{2}{b+c+1} + \frac{2}{c+a+1}\right) +$$

$$+3\left(\frac{1}{2a+1} + \frac{1}{2b+1} + \frac{1}{2c+1} + \frac{2}{a+b+c} + \frac{1}{3}\right) \geq \frac{6}{2a+1} + \frac{6}{2b+1} + \frac{6}{2c+1} + \frac{3}{a+b+c}$$

Sau đây là một số bài tập luyện tập dành cho bạn đọc.

Bài 9. Cho $x, y, z \geq 0$. Chứng minh: $xyz(x+2)(y+2)(z+2) \leq \left[1 + \frac{2}{3}(xy + yz + zx)\right]^3$

Bài 10. Cho $\begin{cases} x, y, z \in [-1;1] \\ x + y + z = 0 \end{cases}$. Chứng minh: $\sqrt{1 + x + \frac{y^2}{6}} + \sqrt{1 + y + \frac{z^2}{6}} + \sqrt{1 + z + \frac{x^2}{6}} \leq 3$

Bài 11. Cho $\begin{cases} x, y, z, t \in \mathbb{R} \\ \text{Max}\{xy, yz, zt, tx\} \leq 1 \end{cases}$. Chứng minh :

$$\sqrt{1 - xy + y^2} + \sqrt{1 - yz + z^2} + \sqrt{1 - zt + t^2} + \sqrt{1 - tx + x^2} \geq 4$$

Bài 12. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng: $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c}\right) \geq \frac{9}{1+abc}$

Bài 13. Cho $x_1, x_2, ..., x_n \geq 0$. Chứng minh rằng:

$$(n-1)\left(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2\right) + 2x_1x_2...x_n + n - 2 \geq \left(x_1 + x_2 + ... + x_n\right)^2$$

Bài 14. Chứng minh rằng: $(3a^2 + 2)(3b^2 + 2)(3c^2 + 2) \geq 5[abc - 2(ab + bc + ca)]^2$

Bài 15. Chứng minh rằng: $(13a^2 + 5)(13b^2 + 5)(13c^2 + 5)(13d^2 + 5) \geq$

$$\geq 36[12(abc + bcd + cda + dab) + ab + bc + ca + ad + bd + cd]^2$$

Đặt $S_{k,n} = \sum\limits_{i_1 < ... < i_k \subset \{1,2,...,n\}} x_{i_1}....x_{i_k}$ $(k < n)$ và $x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R}$

Bài 16. Chứng minh các bất đẳng thức sau:

$$\left(S_{4,4} - S_{2,4} + 1\right)^2 + \left(S_{3,4} - S_{1,4}\right)^2 \geq \frac{125}{216}\left(\sqrt{2}S_{3,4} + \sqrt{3}S_{2,4}\right)^2$$

$$\left(49S_{4,4} - 371S_{2,4} + 2809\right)^2 + 371\left(7S_{3,4} - 53S_{1,4}\right)^2 \geq 360^3\left(S_{4,4} + S_{2,4} + 3S_{1,4} + 1\right)^2$$

$$\left(9S_{4,4} - 21S_{2,4} + 49\right)^2 + 21\left(3S_{3,4} - 7S_{1,4}\right)^2 \geq \frac{2000}{7}\left(S_{4,4} + 2S_{2,4} + 5S_{1,4} + 2\right)^2$$

$$\left(S_{5,5} - 2S_{3,5} + 4S_{1,5}\right)^2 + 2\left(S_{4,5} - 2S_{2,5} + 4\right)^2 \geq \left(S_{3,5} - S_{4,5} + 1\right)^2$$

$$\left(S_{6,6} - S_{4,6} + S_{2,6} - 1\right)^2 + \left(S_{5,6} - S_{3,6} + S_{1,6}\right)^2 \geq \frac{16}{121}\left(6S_{6,6} - S_{4,6} + 5S_{1,6} + 1\right)^2$$

$$\left(8S_{6,6} - 20S_{4,6} + 50S_{2,6} - 125\right)^2 + 10\left(4S_{5,6} - 10S_{3,6} + 25S_{1,6}\right)^2 \geq 96,04\left(S_{4,6} + S_{3,6}\right)^2$$

§ 23.9. PHƯƠNG PHÁP SS (SCHUR - SOS)

I. PHƯƠNG PHÁP SS VỚI BẤT ĐẲNG THỨC CÓ ĐẲNG THỨC TẠI TÂM

1. Đặt vấn đề

Khi đứng trước một bài bất đẳng thức đối xứng hoặc hoán vị với ba biến số chẳng hạn là $A(a,b,c)\ge B(a,b,c)$ thì phương pháp hay được sử dụng nhất là phương pháp SOS (xem Chương IV. §17) với phép biến đổi có cấu trúc đối xứng theo định dạng sau đây:

$$S=A-B=S_a(b-c)^2+S_b(c-a)^2+S_c(a-b)^2\ge 0$$

Để có một cách nhìn phong phú hơn về các dạng bài bất đẳng thức đối xứng hoặc hoán vị với ba biến số, chúng tôi xin giới thiệu ***Phương pháp SS (Schur - SOS)***. Đặc điểm của phương pháp này là chúng ta sẽ chọn phần tử lớn nhất hoặc nhỏ nhất trong ba biến số và biến đổi để nhận được biểu thức không đối xứng với phần tử này nhưng lại đối xứng với hai biến số còn lại. Tên gọi ***SS (Schur - SOS)*** được hình thành là do ta xuất hiện các biểu thức $(a-b)^2;(a-c)(b-c)$ để đưa về định dạng chứng minh:

$f(a,b,c)=M(a-b)^2+N(a-c)(b-c)\ge 0$ trong đó $c=\max(a,b,c)$ hoặc $c=\min(a,b,c)$

Khi đó bất đẳng thức đã cho được chứng minh nếu ta chứng minh được $M,N\ge 0$.

Trước hết chúng ta cùng làm quen với một số khai triển thường được sử dụng trong phân tích của phương pháp ***SS***:

1. $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=(a-b)^2+(a-c)(b-c)$

2. $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a-b)^2+(a+b+c)(a-c)(b-c)$

3. $ab(a+b)+bc(b+c)=ca(c+a)-6abc=2c(a-b)^2+(a+b)(a-c)(b-c)$

4. $ab^2+bc^2+ca^2-3abc=c(a-b)^2+b(a-c)(b-c)$

5. $a^4+b^4+c^4-abc(a+b+c)=\left[(a+b)^2+c^2\right](a-b)^2+\left[ab+(a+c)(b+c)\right](a-c)(b-c)$

6. $a^3(b+c)+b^3(c+a)+c^3(a+b)-2abc(a+b+c)=$

$=(a+c)(b+c)(a-b)^2+(2ab+ac+bc)(a-c)(b-c)$

7. $a^3b+b^3c+c^3a-abc(a+b+c)=(ca+cb)(a-b)^2+(a^2+ac)(a-c)(b-c)$

8. $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{a}-3=\dfrac{1}{ab}(a-b)^2+\dfrac{1}{ac}(a-c)(b-c)$

9. $\dfrac{b+c}{a}+\dfrac{c+a}{b}+\dfrac{a+b}{c}-6=\dfrac{2}{ab}(a-b)^2+\dfrac{a+b}{abc}(a-c)(b-c)$

10. $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}-\dfrac{3}{2}=\dfrac{1}{(a+c)(b+c)}(a-b)^2+\dfrac{a+b+2c}{2(a+b)(b+c)(c+a)}(a-c)(b-c)$

11. $\dfrac{a+kb}{a+kc}+\dfrac{b+kc}{b+ka}+\dfrac{c+ka}{c+kb}-3=\dfrac{k^2(a-b)^2}{(c+ka)(c+kb)}+\dfrac{k(a-c)(b-c)\left[(k^2-k+1)a+(k-1)b+kc\right]}{(a+kb)(b+ka)(c+kb)}$

12. $\dfrac{a^2}{b+c}+\dfrac{b^2}{c+a}+\dfrac{c^2}{a+b}-\dfrac{a+b+c}{2}=\dfrac{a+b+c}{(a+c)(b+c)}(a-b)^2+\dfrac{(a+b+c)(a+b+2c)}{2(a+b)(b+c)(c+a)}(a-c)(b-c)$

Bây giờ chúng ta sẽ cùng làm quen ví dụ mở đầu với bất đẳng thức Schur quen thuộc.

2. Các bài tập mẫu minh họa

Bài 1. Với các số thực a,b,c không âm bất kỳ ta luôn có:
$$a^3+b^3+c^3+3abc\ge ab(a+b)+bc(b+c)+ac(a+c)$$

Chứng minh

Không mất tính tổng quát giả sử $c=\min(a,b,c)$. Sử dụng khai triển:

$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)\left[(a-b)^2+(a-c)(b-c)\right]$ (1)

$ab(a+b)+bc(b+c)+ac(a+c)-6abc=2c(a-b)^2+(a+b)(a-c)(b-c)$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra bất đẳng thức đã cho có thể viết lại dưới dạng:

$(a+b-c)(a-b)^2+c(a-c)(b-c)\ge 0$ (luôn đúng do $c=\min(a,b,c)$)

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$ hoặc $a=b,c=0$ và các hoán vị.

Bài 2. Chứng minh rằng: $\dfrac{a+b}{a+c}+\dfrac{a+c}{b+c}+\dfrac{b+c}{b+a}\le\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{a}\ \ \forall a,b,c>0$

Chứng minh

Không mất tính tổng quát giả sử $c=\min(a,b,c)$. Sử dụng khai triển:

$\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{z}+\dfrac{z}{x}-3=\dfrac{(x-y)^2}{xy}+\dfrac{(x-z)(y-z)}{xz}$ thì bất đẳng thức đã cho có thể viết dưới dạng:

$$\left[\frac{1}{ab}-\frac{1}{(a+c)(b+c)}\right](a-b)^2+\left[\frac{1}{ac}-\frac{1}{(a+c)(a+b)}\right](a-c)(b-c)\ge 0$$

Bất đẳng thức trên hiển nhiên đúng. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

Bài 3. Chứng minh: $\dfrac{(a+b)^2}{(b+c)^2}+\dfrac{(b+c)^2}{(c+a)^2}+\dfrac{(c+a)^2}{(a+b)^2}+\dfrac{2abc}{a^3+b^3+c^3}\ge\dfrac{11}{3}\ \ \forall a,b,c\ge 0$

Chứng minh

Giả sử $c=\max(a,b,c)$. Với x,y,z bất kỳ ta có khai triển sau:

$$\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{z^2}+\frac{z^2}{x^2}-3=\frac{(x+y)(x-y)^2}{x^2y^2}+\frac{(x+y)(y+z)(x-z)(y-z)}{x^2z^2}$$

Ta đưa bất đẳng thức trên về dạng:

$$\left[\frac{(a+b+2c)^2}{(a+b)^2(b+c)^2}-\frac{2(a+b+c)}{3(a^3+b^3+c^3)}\right](a-b)^2$$
$$+\left[\frac{(a+2b+c)(2a+b+c)}{(a+b)^2(a+c)^2}-\frac{2(a+b+c)}{3(a^3+b^3+c^3)}\right](a-c)(b-c)\ge 0$$

Theo ***Chebyshev*** ta có: $3(a^3+b^3+c^3)\ge(a^2+b^2+c^2)(a+b+c)$. Do $c=\max(a,b,c)$ nên

$$\frac{(a+2b+c)(b+2a+c)}{(a+b)^2(a+c)^2}\ge\frac{4(a+b)^2}{(a+b)^2(a+c)^2}\ge\frac{2}{a^2+c^2}\ge\frac{2}{a^2+b^2+c^2}\ge\frac{2(a+b+c)}{3(a^3+b^3+c^3)}\ (1)$$

và $\dfrac{(a+b+2c)^2}{(a+c)^2(b+c)^2}\ge\dfrac{4}{(a+c)(b+c)}$ (2). Ta sẽ chứng minh $\dfrac{2}{(a+c)(b+c)}\ge\dfrac{1}{a^2+b^2+c^2}$ (3)

Thật vậy: $(3)\Leftrightarrow 2(a^2+b^2+c^2)\ge ab+bc+ac+c^2$

$\Leftrightarrow (a^2+b^2+c^2)+a^2+b^2 \geq (ab+bc+ca)$ (hiển nhiên đúng)

Từ (2) và (3) suy ra $\dfrac{(a+b+2c)^2}{(a+c)^2(b+c)^2} \geq \dfrac{2}{a^2+b^2+c^2} \geq \dfrac{2(a+b+c)}{3(a^3+b^3+c^3)}$ (4)

Từ (1) và (4) ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$

Bài 4. Chứng minh rằng: $\dfrac{a^2}{b^2}+\dfrac{b^2}{c^2}+\dfrac{c^2}{a^2}+8\dfrac{(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2} \geq 11 \quad \forall a,b,c>0$

Chứng minh

Giả sử $c=\min(a,b,c)$. Ta đưa bất đẳng thức trên về dạng:

$$\left[\frac{(a+b)^2}{a^2b^2}-\frac{8}{a^2+b^2+c^2}\right](a-b)^2+\left[\frac{(a+c)(b+c)}{a^2c^2}-\frac{8}{a^2+b^2+c^2}\right](a-c)(b-c)\geq 0$$

Ta có $\dfrac{(a+b)^2}{a^2b^2}=\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)^2 \geq \dfrac{16}{(b+c)^2} \geq \dfrac{8}{a^2+b^2} \geq 8a^2+b^2+c^2$. Do $c=\min(a,b,c)$ nên

$$(a+c)(b+c)(a^2+b^2+c^2)\geq 2\sqrt{ac}.(c+c)(a^2+c^2+c^2)=4c\sqrt{ac}(a^2+2c^2)$$

$$=4c\sqrt{ac}\left(\frac{a^2}{3}+\frac{a^2}{3}+\frac{a^2}{3}+2c^2\right)\geq 4c\sqrt{ac}.4\sqrt[4]{\frac{2a^6c^2}{27}}>8a^2c^2 \Rightarrow \frac{(a+c)(b+c)}{a^2c^2}>\frac{8}{a^2+b^2+c^2}$$

Do đó ta có điều cần chứng minh. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

Bình luận: Chúng ta có thể thấy vẻ đẹp của **phương pháp SS** qua các ví dụ trên, đặc biệt là Bài 3 và Bài 4. Nếu các bạn chứng minh hai ví dụ này bằng phương pháp ***SOS*** cơ bản đã được đề cập thì sẽ phải xét tới hai trường hợp $a\geq b\geq c$ và $a\leq b\leq c$.

Ngoài ra chúng ta cũng có thể chứng minh Bài 3 và Bài 4 bằng phương pháp SOS ngắn gọn hơn nhưng không được tự nhiên với sự trợ giúp của một bổ đề sau đây :

Bổ đề: Cho $\begin{cases} x,y,z>0 \\ xyz=1 \end{cases}$ khi đó ta có: $x^2+y^2+z^2 \geq \dfrac{3}{2}\left(x+y+z+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)-6$.

Trong VD3 đặt $x=\dfrac{a+b}{b+c};\ y=\dfrac{b+c}{c+a};\ z=\dfrac{c+a}{a+b}$. VD 4 đặt $x=\dfrac{a}{b};y=\dfrac{b}{c};z=\dfrac{c}{a}$ thì $xyz=1$.

Chúng ta sẽ tiếp tục làm quen với phương pháp SS qua các ví dụ sau đây:

Bài 5. Chứng minh rằng: $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}+\dfrac{abc}{2(a^3+b^3+c^3)} \geq \dfrac{5}{3} \quad \forall a,b,c>0$

Giải

Giả sử $c=\max(a,b,c)$. Ta có khai triển sau:

$$\sum_{cyc}\frac{a}{b+c}-\frac{3}{2}=\frac{(a-b)^2}{(a+c)(b+c)}+(a-c)(b-c)\frac{a+b+2c}{2(a+b)(b+c)(c+a)}\geq 0$$

Do đó bất đẳng thức trên có thể viết dưới dạng:

$$\left[\frac{1}{(c+a)(c+b)}-\frac{a+b+c}{6(a^3+b^3+c^3)}\right](a-b)^2+$$

$$+\left[\frac{a+b+2c}{2(a+b)(b+c)(c+a)}-\frac{a+b+c}{6(a^3+b^3+c^3)}\right](a-c)(b-c)\geq 0$$

Theo bất đẳng thức Chebyshev ta có $3\left(a^3+b^3+c^3\right)\ge\left(a^2+b^2+c^2\right)(a+b+c)$.

Ta sẽ chứng minh:

$$\frac{1}{(c+a)(c+b)}\ge\frac{1}{2\left(a^2+b^2+c^2\right)} \text{ hay } 2\left(a^2+b^2+c^2\right)\ge\left(ab+bc+ac+c^2\right)$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{(a+a)(c+b)}\ge\frac{1}{2\left(a^2+b^2+c^2\right)}\ge\frac{a+b+c}{6\left(a^3+b^3+c^3\right)}$$

Do $c=\max(a,b,c)$ nên $\dfrac{a+b+2c}{2(a+b)(b+c)(c+a)}\ge\dfrac{1}{(a+c)(b+c)}\ge\dfrac{a+b+c}{6\left(a^3+b^3+c^3\right)}$

Từ đó ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$

Bài 6. Cho a,b,c là độ dài 3 cạnh tam giác. Chứng minh rằng:

$$2a^2(b+c)+2b^2(c+a)+2c^2(a+b)\ge a^3+b^3+c^3+9abc$$

Chứng minh

Không mất tính tổng quát, giả sử $c=\max\{a,b,c\}$. Xét các biến đổi sau:

$$2\sum_{cyc}a^2(b+c)-12abc=2\sum_{cyc}bc(b+c)-12abc=4c(a-b)^2+(2a+2b)(a-c)(b-c)\ge0$$

$$3abc-a^3-b^3-c^3=-(a+b+c)(a-b)^2-(a+b+c)(a-c)(b-c)$$

Do đó $VT-VP=(3c-a-b)(a-b)^2+(a+b-c)(a-c)(b-c)\ge0$

Bài 7. Chứng minh rằng: $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}+\dfrac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}\ge2\ \forall a,b,c\ge0$

Chứng minh

Không mất tính tổng quát, giả sử $c=\max\{a,b,c\}$. Xét các biến đổi sau:

Ta có: $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}-1=\dfrac{1}{ab+bc+ca}(a-b)^2+\dfrac{1}{ab+bc+ca}(a-c)(b-c)\ge0$

$$\frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}-1=\frac{-2c}{(a+b)(b+c)(c+a)}(a-b)^2-\frac{1}{(a+b)(b+c)}(a-c)(b-c)\ge0$$

$$VT-VP=\left(\frac{1}{ab+bc+ca}-\frac{2c}{(a+b)(b+c)(c+a)}\right)(a-b)^2+$$

$$+\left(\frac{1}{ab+bc+ca}-\frac{1}{(b+c)(c+a)}\right)(a-c)(b-c)\ge0$$

Bài 8. Chứng minh rằng: $\left(\dfrac{a}{c}+\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{a}\right)^2\ge(a+b+c)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)\ \forall a,b,c\ge0$

Chứng minh

Ta có: $VT-9=\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{a}\right)^2-9=\dfrac{(a-b)^2}{ab}\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{a}+3\right)+\dfrac{(a-b)(a-c)}{ac}\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{a}+3\right)$

$$VT-9=\frac{2(a-b)^2}{ab}+\frac{(a-b)(a-c)(a+b)}{abc}$$

$$VT-VP=(a-b)^2\left(\frac{1}{ab}\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+3\right)-\frac{2}{ab}\right)+(c-a)(c-b)\left(\frac{1}{ac}\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+3\right)-\frac{a+b}{abc}\right)$$

Giả sử $c=\min\{a,b,c\}$, ta có: $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+3\geq 3\Rightarrow \frac{1}{ab}\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+3\right)\geq \frac{3}{ab}$

Ta sẽ chứng minh: $\frac{1}{ac}\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+3\right)\geq \frac{a+b}{abc}\Leftrightarrow \frac{ab^2+bc^2+ca^2+3abc}{ac.abc}\geq \frac{a+b}{abc}$

$\Leftrightarrow ab^2+bc^2+ca^2+3abc\geq ac(a+b)$

$\Leftrightarrow ab^2+bc^2+ca^2+3abc\geq ca^2+abc\Leftrightarrow ab^2+bc^2+2abc\geq 0$

Bài 9. Chứng minh rằng: $\frac{a+b}{b+c}+\frac{b+c}{c+a}+\frac{c+a}{a+b}\leq \frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca}\quad \forall a,b,c>0$

Chứng minh

Giả sử $c=\min\{a,b,c\}$. Ta có:

$$VT-3=\frac{(a-b)^2}{ab+bc+ca}+\frac{(a-c)(b-c)}{ab+bc+ca}=\frac{(a-b)^2}{(a+c)(b+c)}+\frac{(a-c)(b-c)}{(a+b)(b+c)}$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2\left(\frac{1}{ab+bc+ca}-\frac{1}{(a+c)(b+c)}\right)+(a-c)(b-c)\left(\frac{1}{ab+bc+ca}-\frac{1}{(a+b)(b+c)}\right)\geq 0$$

Ta có ngay $ab+bc+ca\leq (a+c)(b+c)$ và $ab+bc+ca\leq (a+b)(b+c)\Rightarrow$ đpcm.

Bài 10. Chứng minh rằng: $\sum_{cyc}\frac{a+kc}{a+kb}\leq \frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca}\quad \forall k\leq 1$

Chứng minh

Không mất tính tổng quát, giả sử $c=\min\{a,b,c\}$

$$VT-3=(a-b)^2\left(\frac{k^2}{(ka+c)(kb+c)}\right)+(a-c)(b-c)\left(\frac{k^2a-ka+k^2c+k^3b+kb-k^2b}{(a+kb)(b+kc)(c+kb)}\right)$$

$$VT-3=(a-b)^2\left(\frac{1}{ab+bc+ca}\right)+(a-c)(b-c)\left(\frac{1}{ab+bc+ca}\right)$$

Vậy $BDT\Leftrightarrow (a-b)^2\left(\frac{1}{ab+bc+ca}-\frac{k^2}{(ka+c)(kb+c)}\right)+$

$$+(a-c)(b-c)\left(\frac{1}{ab+bc+ca}-\frac{k^2a-ka+k^2c+k^3b+kb-k^2b}{(a+kb)(b+kc)(c+kb)}\right)\geq 0$$

Cuối cùng chỉ cần chứng minh $(ka+c)(kb+c)\geq k^2(ab+bc+ca)$

Và $(a+kb)(b+kc)(c+kb)\geq (k^2a-ka+k^2c+k^3b+kb-k^2b)(ab+bc+ca)$

Khai triển và sử dụng $k\leq 1;\ a\geq c;b\geq c$ ta nhận được đpcm.

Bài 11. Chứng minh rằng: $\frac{a+b}{b+c}+\frac{b+c}{c+a}+\frac{c+a}{a+b}+\frac{3(ab+bc+ca)}{(a+b+c)^2}\geq 4\quad \forall a,b,c>0$.

Chứng minh

Không mất tính tổng quát, giả sử $c=\min\{a,b,c\}$

Xét $\frac{a+b}{b+c}+\frac{b+c}{c+a}+\frac{c+a}{a+b}-3=\frac{(a-b)^2}{(a+c)(b+c)}+\frac{(a-c)(b-c)}{(a+b)(b+c)}$

$\frac{3(ab+bc+ca)}{(a+b+c)^2-1}=-\frac{(a-b)^2}{(a+b+c)^2}-\frac{(a-c)(b-c)}{(a+b+c)^2}$. Khi đó bất đẳng thức trở thành

$$(a-b)^2\left(\frac{1}{(a+c)(b+c)}-\frac{1}{(a+b+c)^2}\right)+(a-c)(b-c)\left(\frac{1}{(a+b)(b+c)}-\frac{1}{(a+b+c)^2}\right)\ge 0$$

Ta có $(a+c)(b+c)\le(a+b+c)^2$ và $(a+b)(b+c)\le(a+b+c)^2\Rightarrow$ đpcm

Các bài tập dưới đây chủ yếu được dựa trên các đẳng thức trong hai dạng sau đây:

Dạng 1: $f(a,b,c)=\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}-a-b-c=\frac{a^2-b^2}{b}+\frac{b^2-c^2}{c}+\frac{c^2-a^2}{a}$

$$=\frac{a^2-b^2}{b}+\frac{b^2-c^2}{c}-\frac{a^2-b^2}{a}+\frac{b^2-c^2}{a}=\frac{a+b}{ab}(a-b)^2+\frac{b+c}{ac}(a-c)(b-c)$$

Dạng 2: $f(a,b,c)=\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}-a^2-b^2-c^2=\frac{a^3-b^3}{b}+\frac{b^3-c^3}{c}+\frac{c^3-a^3}{a}$

$$=\frac{a^3-b^3}{b}+\frac{b^3-c^3}{c}-\frac{a^3-b^3}{a}-\frac{b^3-c^3}{a}=\frac{a^2+b^2+ab}{ab}(a-b)^2+\frac{b^2+c^2+bc}{ac}(b-c)^2$$

Bài 12. Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng: $\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\ge\frac{3(a^3+b^3+c^3)}{a^2+b^2+c^2}$

Chứng minh

Không mất tính tổng quát, giả sử $c=\min\{a,b,c\}$

Ta có: $\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}-a-b-c=\frac{a^2-b^2}{b}+\frac{b^2-c^2}{c}+\frac{c^2-a^2}{a}$

$$=\frac{a^2-b^2}{b}+\frac{b^2-c^2}{c}-\frac{a^2-b^2}{a}-\frac{b^2-c^2}{a}=\frac{a+b}{ab}(a-b)^2+\frac{b+c}{ac}(a-c)(b-c)$$

$$\frac{3(a^3+b^3+c^3)}{a^2+b^2+c^2}-(a+b+c)=\frac{2a+2b}{a^2+b^2+c^2}(a-b)^2+\frac{a+b+2c}{a^2+b^2+c^2}(a-c)(b-c)$$

Vậy: $M=\frac{a+b}{ab}-\frac{2(a+b)}{a^2+b^2+c^2}$; $N=\frac{b+c}{ac}-\frac{a+b+2c}{a^2+b^2+c^2}$

Dễ thấy $M\ge 0$. Ta sẽ chứng minh $N\ge 0$. Thật vậy biến đổi bất đẳng thức :

$N\ge 0\Leftrightarrow(a^2+b^2+c^2)(b+c)\ge ac(a+b+2c)$. Sử dụng ***AM – GM,*** ta có:

$$(a^2+b^2+c^2)(b+c)\ge 2c(a^2+b^2+c^2)=c\left[a^2+\left(\frac{1}{8}a^2+2b^2\right)+\left(\frac{1}{2}a^2+2c^2\right)+\frac{3}{8}a^2\right]>$$

$>c(a^2+ab+2ac)=ac(a+b+2c)$. Vậy $N\ge 0\Rightarrow$ đpcm.

Bài 13. Chứng minh rằng: $\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\ge\sqrt{3(a^4+b^4+c^4)}$

Chứng minh

Không mất tính tổng quát, giả sử $c=\min\{a,b,c\}$

$$\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}-a^2-b^2-c^2=\frac{a^3-b^3}{b}+\frac{b^3-c^3}{c}+\frac{c^3-a^3}{a}$$

$$=\frac{a^3-b^3}{b}+\frac{b^3-c^3}{c}-\frac{a^3-b^3}{a}+\frac{b^3-c^3}{a}=\frac{a^2+b^2+ab}{ab}(a-b)^2+\frac{b^2+c^2+bc}{ac}(b-c)^2$$

Biến đổi biểu thức sau đây dưới dạng

$$\sqrt{3(a^4+b^4+c^4)}-(a^2+b^2+c^2)=$$

$$=\frac{2(a+b)^2}{\sqrt{3(a^4+b^4+c^4)}+a^2+b^2+c^2}(a-b)^2+\frac{2(a+c)(b+c)}{\sqrt{3(a^4+b^4+c^4)}+a^2+b^2+c^2}(a-c)(b-c)$$

Vậy $M=\dfrac{a^2+b^2+ab}{ab}-\dfrac{2(a+b)^2}{\sqrt{3(a^4+b^4+c^4)}+a^2+b^2+c^2}$;

$$N=\frac{b^2+c^2+bc}{ac}-\frac{2(a+c)(b+c)}{\sqrt{3(a^4+b^4+c^4)}+a^2+b^2+c^2}$$

Ta có: $\left(\sqrt{3(a^4+b^4+c^4)}+a^2+b^2+c^2\right)(a^2+b^2+ab)\geq 2(a^2+b^2+c^2)3ab$

$\geq 2ab\left(2(a^2+b^2)\right)\geq 2ab(a+b)^2\Rightarrow M\geq 0$

$\left(\sqrt{3(a^4+b^4+c^4)}+a^2+b^2+c^2\right)(a^2+b^2+bc)\geq \frac{3}{2}c(b+c)\left(2(a^2+b^2+c^2)\right)$

$\geq 2c(a^2b+abc+a^2c+ac^2)=2ac(a+c)(b+c)\Rightarrow N\geq 0$

Bài 14. Chứng minh rằng: $(a^3b^2+b^3c^2+c^3a^2)^2\geq 3abc(a^4b^3+b^4c^3+c^4a^3)$

Chứng minh

$f(a,b,c)=(a^3b^2+b^3c^2+c^3a^2)^2-3abc(a^4b^3+b^4c^3+c^4a^3)$. Đặt kí hiệu các biểu thức

$P=a^6b^4+b^6c^4+c^6a^4-a^5b^4c-b^5c^4a-c^5a^4b=a^5b^4(a-c)+b^5c^4(b-a)+c^5a^4(c-b)$

$Q=a^5b^2c^3+b^5c^2a^3+c^5a^2b^3-a^5b^4c-b^5c^4a-c^5a^4b$

$=ab^5c^2(a^2-c^2)+bc^5a^2(b^2-a^2)+ca^5b^2(c^2-b^2)$.

Suy ra $f(a,b,c)=P+2Q$. Biến đổi các biểu thức P, Q ta có

$P=a^5b^4(a-c)-c^5a^4(b-c)+b^5c^4(b-a)-a^5c^4(b-a)-a^5c^4(a-c)+a^5c^4(b-c)$

$=c^4(a^5-b^5)(a-b)+a^5(a-c)(b^4-c^4)+a^4c^4(a-c)(b-c)$

$=a^4(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)(a-b)^2+\left[a^5(b^3+b^2c+bc^2+c^3)+a^4c^4\right](a-c)(b-c)$

$Q=ab^5c^2(a^2-c^2)+bc^5a^2(b^2-a^2)+ca^5b^2(c^2-b^2)=ab^5c^2(a^2-c^2)-a^5b^2c(b^2-c^2)+$

$+a^2bc^5(b^2-a^2)-ab^2c^5(b^2-a^2)-ab^2c^5(a^2-c^2)+ab^2c^5(b^2-c^2)$

$=-abc^5(a^2-b^2)(a-b)+ab^2c^2(a^2-c^2)(b^3-c^3)-ab^2c(b^2-c^2)(a^4-c^4)=-abc^5(a+b)(a-b)^2+$

$+\left[ab^2c^2(a+c)(b^2+bc+c^2)-ab^2c(b+c)(a^3+a^2c+ac^2+c^3)\right](a-c)(b-c)$

$=-abc^5(a+b)(a-b)^2+ab^2c(ab^2c+b^2c^2-a^3b-a^3c-ab^2c-a^2c^2)(a-c)(b-c)$

Từ đó suy ra $f(a,b,c)=P+2Q\geq 0$

3. Các bài tập áp dụng dành cho bạn đọc tự giải

Bài 1. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{b^2+c^2}+\frac{b^2}{c^2+a^2}+\frac{c^2}{a^2+b^2}\ge\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b},\ \forall a,b,c\ge 0$$

Bài 2. Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng $\frac{abc}{a^3+b^3+c^3}+\frac{2}{3}\ge\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}$

Bài 3. Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng: $\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}\ge\frac{4(a^2+b^2+c^2)}{ab+bc+ac}+2$

Bài 4. Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng $\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}+\frac{4(a^2+b^2+c^2)}{ab+bc+ca}\ge 12$

Bài 5. Cho $a,b,c\ge 0$. Chứng minh rằng: $\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}+\frac{54abc}{(a+b+c)^3}\ge 5$

Bài 6. Cho $a,b,c\ge 0$. Chứng minh rằng: $\frac{a^2+bc}{(b+c)^2}+\frac{b^2+ca}{(c+a)^2}+\frac{c^2+ab}{(a+b)^2}\ge\frac{3}{2}$

Bài 7. Chứng minh rằng: $\frac{a^2+bc}{b+c}+\frac{b^2+ca}{c+a}+\frac{c^2+ab}{a+b}\ge a+b+c\ \forall a,b,c>0$

Bài 8. Chứng minh rằng: $\frac{a^3+b^3+c^3}{2abc}+\frac{81abc}{(a+b+c)^3}\ge\frac{9}{2}\ \forall a,b,c>0$

Bài 9. Chứng minh rằng : $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge\frac{b+c}{a^2+bc}+\frac{c+a}{b^2+ca}+\frac{a+b}{c^2+ab}\ \forall a,b,c>0$

Bài 10. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2+bc}{(b+c)^2}+\frac{b^2+ca}{(c+a)^2}+\frac{c^2+ab}{(a+b)^2}\ge\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\ \forall a,b,c>0$$

Bài 11. Chứng minh rằng: $\frac{a+2b}{c+2b}+\frac{b+2c}{a+2c}+\frac{c+2a}{b+2a}\ge 3\ \forall a,b,c>0$

Bài 12. Chứng minh: $\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}+\frac{4\sqrt{2}(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2}\ge 8+4\sqrt{2}\ \forall a,b,c>0$

Bài 13. Chứng minh rằng: $\frac{a^2+bc}{a^2(b+c)}+\frac{b^2+ca}{b^2(c+a)}+\frac{c^2+ab}{c^2(a+b)}\ge\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ \forall a,b,c>0$

Bài 14. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge(a+b+c)\left(\frac{1}{2a^2+bc}+\frac{1}{2b^2+ca}+\frac{1}{2c^2+ab}\right)\forall a,b,c>0$$

Bài 15. Chứng minh rằng: $\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}+\frac{9(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2}\ge 12\ \forall a,b,c>0$

Bài 16. Cho $\begin{cases}a,b,c\ge 0\\ a+b+c=1\end{cases}$. Chứng minh rằng: $\frac{a^2+5b}{b+c}+\frac{b^2+5c}{c+a}+\frac{c^2+5a}{a+b}\ge 8$

Bài 17. Chứng minh rằng: $(ab+bc+ca)\left(\frac{1}{(a+b)^2}+\frac{1}{(b+c)^2}+\frac{1}{(c+a)^2}\right)\ge\frac{9}{4}\ \forall a,b,c\ge 0$

II. PHƯƠNG PHÁP SS VÀ BẤT ĐẲNG THỨC KHÔNG CÓ ĐẲNG THỨC TẠI TÂM

1. Đặt vấn đề

Như chúng ta đã biết SOS và SS là hai phương pháp khá hiệu quả với các bất đẳng thức 3 biến không chứa căn, nhưng một yếu tố tiên quyết để đưa về dạng chuẩn của phương pháp là bất đẳng thức phải có dấu bằng đạt tại tâm. Vậy với những bài toán không có đẳng thức tại tâm thì sao? Trong mục này chúng tôi đưa ra một số ví dụ quy từ bất đẳng thức tại biên về chứng minh bất đẳng thức tại tâm, công việc tưởng chừng khó khăn hơn này lại giúp ta xác định được một đường lối quen thuộc và rõ ràng hơn để chứng minh. Các bài toán sau đây có thể giúp các bạn nhìn nhận rõ hơn về kỹ thuật này.

2. Các bài tập mẫu minh họa

Bài 1. Cho $\begin{cases} a,b,c \ge 0 \\ a+b+c=3 \end{cases}$. Chứng minh: $a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b) \le \dfrac{27}{4}$ (1)

Chứng minh

$$(1) \Leftrightarrow a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b) \le \frac{1}{4}(a+b+c)^3$$

$$\Leftrightarrow 4\left(a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)\right) \le (a+b+c)^3 \quad (2)$$

Để ý rằng đẳng thức xảy ra khi $a=b=\dfrac{3}{2}; c=0$ và các hoán vị nên nếu ta giữ nguyên bất đẳng thức như trên thì khó có thể biến đổi về dạng chuẩn của phương pháp SOS và SS. Chúng ta sẽ xuất hiện ý tưởng là cộng thêm một biểu thức không âm vào vế trái của bất đẳng thức (2) để có thêm điều kiện đẳng thức xảy ra tại tâm $a=b=c=1$ nhưng vẫn phải bảo toàn điều kiện đẳng thức vẫn xảy ra tại $a=b=\dfrac{3}{2}; c=0$. Trong bài toán này chúng ta cộng thêm biểu thức không âm là $kabc$. Để xác định k ta cho $a=b=c=1$ ta được $k=3$, từ đó ta giả sử $c=\min(a,b,c)$ và chứng minh bất đẳng thức mạnh hơn sau đây:

$$(a+b+c)^3 \ge 4\left[a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)\right]+3abc \quad (3)$$

$$\Leftrightarrow (a+b-c)(a-b)^2+c(a-c)(b-c) \ge 0 \text{ đúng (đpcm)}$$

Bình luận: Bước tinh tế nhất trong lời giải trên chính là ý tưởng chuyển từ bất đẳng thức (2) về bất đẳng thức (3). Công việc tưởng chừng làm cho bất đẳng thức chặt hơn này lại giúp tạo nên một đẳng thức nữa cho bất đẳng thức ban đầu, đẳng thức tại tâm. Chính điều này đã giúp ta có những cách đánh giá quen thuộc thông qua hai phương pháp SOS và SS. Từ đó việc tìm ra lời giải cũng tự nhiên và dễ dàng hơn. Chú ý rằng để lượng cộng thêm vào thường có dạng $k.abc.f(a,b,c)$ để đảm bảo cho đẳng thức ban đầu của đề bài vẫn xảy ra (đẳng thức tại biên), trong đó $f(a,b,c)$ được lựa chọn tùy vào bài toán, thường là để tiện cho việc biến đổi, ta đến với các bài toán tiếp theo.

Bài 2. Cho $\begin{cases} a,b,c\geq 0 \\ ab+bc+ca=1 \end{cases}$. Chứng minh: $\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\geq \frac{5}{2}$ (1)

Chứng minh

Ta có (1) $\Leftrightarrow (ab+bc+ca)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)^2\geq \frac{25}{4}$

Đẳng thức của ví dụ 2 xảy ra khi $a=b=1,c=0$ và các hoán vị. Tương tự ví dụ 1 ta cộng thêm vào vế phải một lượng $\frac{4abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}$. Ta chứng minh bất đẳng thức chặt hơn:

$$(ab+bc+ca)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)^2\geq \frac{25}{4}+\frac{4abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow (ab+bc+ca)\left(\frac{1}{(a+b)^2}+\frac{1}{(b+c)^2}+\frac{1}{(c+a)^2}\right)+$$

$$+\frac{4(a+b+c)(ab+bc+ca)}{(a+b)(b+c)(c+a)}\geq \frac{25}{4}+\frac{4abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

Chú ý rằng: $\frac{(a+b+c)(ab+bc+ca)}{(a+b)(b+c)(c+a)}=1+\frac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}$

Do đó ta chỉ cần chứng minh: $(ab+bc+ca)\left(\frac{1}{(a+b)^2}+\frac{1}{(b+c)^2}+\frac{1}{(c+a)^2}\right)\geq \frac{9}{4}$

Đây là bất đẳng thức Iran 96 quen thuộc.

Ta sẽ chứng minh lại bằng phương pháp *SS*

Đặt $x=a+b;\ y=b+c;\ z=c+a$. Giả sử $z=\max\{x,y,z\}$, ta có $x+y\geq z$

Bất đẳng thức trên $\Leftrightarrow (2xy+2yz+2zx-x^2-y^2-z^2)\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}\right)\geq 9$

$$\Leftrightarrow 2(xy+yz+zx-x^2-y^2-z^2)\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}\right)+\left[(x^2+y^2+z^2)\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}\right)-9\right]\geq 0$$

Ta có: $2(xy+yz+zx-x^2-y^2-z^2)\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}\right)=$

$$-2\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}\right)(x-y)^2-2\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}\right)(x-z)(y-z)$$

$$(x^2+y^2+z^2)\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}\right)-9=\frac{2(x+y)^2}{x^2y^2}(x-y)^2+\frac{(x^2+y^2)(x+z)(y+z)}{x^2y^2z^2}(x-z)(y-z)$$

Đặt: $M=\dfrac{2(x+y)^2}{x^2y^2}-\dfrac{2(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)}{x^2y^2z^2}$;

$$N=\frac{(x^2+y^2)(x+z)(y+z)}{x^2y^2z^2}-\frac{2(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)}{x^2y^2z^2}$$

Ta sẽ chứng minh $M\ge 0, N\ge 0$. Thật vậy ta có:

$$M\ge 0\Leftrightarrow (x+y)^2z^2\ge (x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)\Leftrightarrow xyz^2+xy(z^2-xy)\ge 0$$

$$N\ge 0\Leftrightarrow (x^2+y^2)(x+z)(y+z)-2(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow xy(x-y)^2+z(x^2+y^2)(x+y-z)\ge 0$$

Các bất đẳng thức trên đều đúng vì $z=\max\{x,y,z\}$ và $x+y\ge z$.

Bình luận: Bản chất thực sự của bài toán trên chính là bất đẳng thức Iran 96 quen thuộc, tuy nhiên điều này đã được ẩn đi qua việc khuyết mất đại lượng $\dfrac{4abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}$ trong bất đẳng thức (2). Câu hỏi đặt ra là việc tìm ra $k=4$ và $f(a,b,c)=\dfrac{1}{(a+b)(b+c)(c+a)}$ trong bài toán này liệu có phải là một điều may mắn, hay là một sự trùng hợp ngẫu nhiên. Câu trả lời là không, ta xét phép biến đổi sau:

$$\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\ge\frac{5}{2}\Leftrightarrow (ab+bc+ca)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)^2\ge\frac{25}{4}$$

$$\Leftrightarrow (ab+bc+ca)\left(\frac{1}{(a+b)^2}+\frac{1}{(b+c)^2}+\frac{1}{(c+a)^2}+\frac{2}{(a+b)(b+c)}+\frac{2}{(b+c)(c+a)}+\frac{2}{(c+a)(a+b)}\right)\ge\frac{25}{4}$$

$$\Leftrightarrow (ab+bc+ca)\left(\frac{1}{(a+b)^2}+\frac{1}{(b+c)^2}+\frac{1}{(c+a)^2}\right)+\frac{4(a+b+c)(ab+bc+ca)}{(a+b)(b+c)(c+a)}\ge\frac{25}{4}$$

$$\Leftrightarrow\left[(ab+bc+ca)\left(\frac{1}{(a+b)^2}+\frac{1}{(b+c)^2}+\frac{1}{(c+a)^2}\right)-\frac{9}{4}\right]+4\left[\frac{(a+b+c)(ab+bc+ca)}{(a+b)(b+c)(c+a)}-1\right]\ge 0$$

$$\Leftrightarrow\left[(ab+bc+ca)\left(\frac{1}{(a+b)^2}+\frac{1}{(b+c)^2}+\frac{1}{(c+a)^2}\right)-\frac{9}{4}\right]+\frac{4abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}\ge 0$$

Biến đổi đến đây lượng $\dfrac{4abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}$ đã hiện ra. Tuy nhiên không phải bài toán nào cũng có thể dễ dàng tìm ra $f(a,b,c)$. Nhiều bài toán yêu cầu chúng ta phải dự đoán và dự đoán không phải bao giờ cũng chính xác. Để làm rõ điều đó, ta xét tiếp ví dụ sau:

Bài 3. Chứng minh: $\dfrac{a(b+c)}{b^2+c^2}+\dfrac{b(c+a)}{c^2+a^2}+\dfrac{c(a+b)}{a^2+b^2}\geq 2\ \forall\geq 0$

Chứng minh

Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức mạnh hơn vẫn đúng:

$$\frac{a(b+c)}{b^2+b^2}+\frac{b(c+a)}{c^2+a^2}+\frac{c(a+b)}{a^2+b^2}\geq 2+\frac{8a^2b^2c^2}{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}\ (1)$$

Lời giải 1:

$$(1)\Leftrightarrow\sum_{sym}\left[a(b+c)(a^2+b^2)(a^2+c^2)\right]\geq 2(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)+8a^2b^2c^2$$

$$\Leftrightarrow\sum_{sym}a^5(b+c)+2\sum_{sym}b^2c^2+abc\sum_{sym}a^2(b+c)\geq 2\sum_{sym}a^4(b^2+c^2)+12a^2b^2c^2$$

Giả sử $c=\min(a,b,c)$. Ta có: $VT-VP=M(a-b)^2+N(a-c)(b-c)$

Trong đó: $M=2(a^2+b^2+c^2)(a+b-c)c\geq 0$

$$N=(a^2+b^2+c^2)(a-b)^2+(a^3+b^3)c+(a+b)c^3+2c(a^2b+b^2c-a^2c-b^2c)\geq 0$$

Lời giải 2: Đưa bất đẳng thức cần chứng minh về dạng:

$S_a(b-c)^2+S_b(c-a)^2+S_c(a-b)^2\geq 0$. Với:

$$S_a=\frac{bc-a^2}{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}+\frac{a^2(b+c)^2}{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}=\frac{bc(2a^2+b^2+c^2)}{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}\geq 0$$

Tương tự ta có $S_b,S_c\geq 0$, bất đẳng thức được chứng minh

Bình luận: Sự lựa chọn $f(a,b,c)=\dfrac{abc}{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}$ với chú ý dễ dàng hơn cho việc biến đổi đã vô tình làm bất đẳng thức đúng. Tuy nhiên ta tự hỏi nếu thay $f(a,b,c)$ bởi một lượng khác thì bất đẳng thức sau khi dự đoán liệu có còn chính xác.

Ta hãy thử với $f(a,b,c)=\dfrac{1}{(a+b)(b+c)(c+a)}$, ta cần chứng minh:

$$\frac{a(b+c)}{b^2+c^2}+\frac{b(c+a)}{c^2+a^2}+\frac{c(a+b)}{a^2+b^2}\geq 2+\frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

Đáng tiếc là bất đẳng thức trên không đúng. Phản ví dụ cho bất đẳng thức trên là $a=b=1, c=\dfrac{6}{5}$. Từ đây bạn có thể thấy rằng không phải sự lựa chọn nào cũng mang lại hiệu quả mong muốn. Sự lựa chọn đôi khi đòi hỏi một chút may mắn, một chút tinh tế và cả một chút nhạy cảm của người làm bất đẳng thức.

Bài 4. Cho $a,b,c\geq 0$. Chứng minh rằng: $(a+b+c)\left(\frac{a}{b^2+c^2}+\frac{b}{c^2+a^2}+\frac{c^2}{a^2+b^2}\right)\geq 4$

Chứng minh

Bất đẳng thức hiển nhiên đúng nếu ta chứng minh được:

$$(a+b+c)\left(\frac{a}{b^2+c^2}+\frac{b}{c^2+a^2}+\frac{c^2}{a^2+b^2}\right)\geq 4+\frac{4a^2b^2c^2}{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}\ (1)$$

Lời giải 1:

$$(1)\Leftrightarrow\sum_{sym}\frac{a^2}{b^2+c^2}+\sum_{sym}\frac{a(b+c)}{b^2+c^2}\geq 4+\frac{4a^2b^2c^2}{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}$$

Trong bài toán 3 ta đã chứng minh được bất đẳng thức:

$$\frac{a(b+c)}{b^2+c^2}+\frac{b(c+a)}{c^2+a^2}+\frac{c(a+b)}{a^2+b^2}\geq 2+\frac{8a^2b^2c^2}{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}$$

Công việc còn lại là chứng minh:

$$\frac{a^2}{b^2+c^2}+\frac{b^2}{c^2+a^2}+\frac{c^2}{a^2+b^2}+\frac{4a^2b^2c^2}{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}\geq 2$$

$$\Leftrightarrow(a^2+b^2-c^2)(a^2-b^2)^2+c^2(a^2-c^2)(b^2-c^2)\geq 0$$

Giả sử $c=\min(a,b,c)$ bất đẳng thức cuối hiển nhiên đúng.

Lời giải 2: Bất đẳng thức có thể viết lại dưới dạng

$S_a(b-c)^2+S_b(c-a)^2+S_c(a-b)^2\geq 0$, trong đó

$$S_a=\frac{(b+c)^2}{2(a^2+b^2)(a^2+c^2)}+\frac{bc-a^2}{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}+\frac{a^2(b+c)^2}{2(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}$$

$$S_b=\frac{(c+a)^2}{2(b^2+c^2)(b^2+a^2)}+\frac{ca-b^2}{(b^2+c^2)(b^2+a^2)}+\frac{b^2(c+a)^2}{2(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}$$

$$S_c=\frac{(a+b)^2}{2(c^2+a^2)(c^2+b^2)}+\frac{ab-c^2}{(c^2+a^2)(c^2+b^2)}+\frac{c^2(a+b)^2}{2(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}$$

Giả sử $a\geq b\geq c$, ta chứng minh được $S_b, S_b+S_a, S_b+S_c\geq 0$, áp dụng tiêu chuẩn 2 của phương pháp SOS ta có điều phải chứng minh.

Bài 5. Chứng minh rằng: $\frac{a^2+bc}{b^2+c^2}+\frac{b^2+ca}{c^2+a^2}+\frac{c^2+ab}{a^2+b^2}\geq\frac{5}{2},\ \forall a,b,c\geq 0$

Chứng minh

Ta chứng minh bất đẳng thức mạnh hơn

$$\frac{a^2+bc}{b^2+c^2}+\frac{b^2+ca}{c^2+a^2}+\frac{c^2+ab}{a^2+b^2}\geq\frac{5}{2}+\frac{4a^2b^2c^2}{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}$$

Lời giải 1: Bất đẳng thức tương đương với:

$$2\sum_{sym}\left[(a^2+bc)(a^2+b^2)(a^2+c^2)\right]\geq(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)+8a^2b^2c^2$$

$$\Leftrightarrow 2\sum_{sym}a^6+2\sum_{sym}b^3c^3+2abc\sum_{sym}a^3+2abc\sum_{sym}a^2(b+c)\geq 3\sum_{sym}a^4(b^2+c^2)+12a^2b^2c^2$$

Giả sử $c=\min(a,b,c)$, ta có: $VT-VP=M(a-b)^2+N(a-c)(b-c)$, trong đó

$$M=2(a^4+b^4)+4ab(a^2+b^2)+a^2b^2+abc^2+(a+b)c^3+(2a^2b^2-a^2c^2-b^2c^2)$$
$$+2c(a^2b+ab^2-a^2c-b^2c)\geq 0$$

$N=c\left[(3ab+2c^2)(a+b)+4abc+2c^3+(a^2b+ab^2-a^2c-b^2c)\right]\geq 0$. Suy ra đpcm

Lời giải 2: Đưa bất đẳng thức về dạng SOS:

$S_a(b-c)^2+S_b(c-a)^2+S_c(a-b)^2\geq 0$, trong đó:

$$S_a=\frac{(b+c)^2}{2(a^2+b^2)(a^2+c^2)}-\frac{1}{2(b^2+c^2)}+\frac{a^2(b+c)^2}{2(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}$$

$$S_b=\frac{(c+a)^2}{2(b^2+c^2)(b^2+a^2)}-\frac{1}{2(c^2+a^2)}+\frac{b^2(c+a)^2}{2(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}$$

$$S_c=\frac{(a+b)^2}{2(c^2+a^2)(c^2+b^2)}-\frac{1}{2(a^2+b^2)}+\frac{c^2(a+b)^2}{2(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}$$

Giả sử $a\geq b\geq c$ ta chứng minh được $S_b.S_b+S_a.S_b+S_c\geq 0$, áp dụng tiêu chuẩn 2 trong phương pháp SOS ta có điều phải chứng minh.

Bài 6. Cho $\begin{cases}a,b,c\geq 0\\ a+b+c=1\end{cases}$. Chứng minh: $(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)\leq\frac{1}{32}$

Chứng minh

Bất đẳng thức tương đương với: $(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)\leq\frac{1}{32}(a+b+c)^6$

Ta chứng minh bất đẳng thức chặt hơn sau:

$$(a+b+c)^6\geq 32(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)+473a^2b^2c^2$$
$$\Leftrightarrow (a+b+c)^6\geq 32\left[a^4(b^2+c^2)+b^4(c^2+a^2)+c^4(a^2+b^2)\right]+537a^2b^2c^2$$

Giả sử $c=\min(a,b,c)$. Bất đẳng thức có thể viết lại dưới dạng:

$M=(a-b)^2+N(a-c)(b-c)\geq 0$. Trong đó:

$$M=(a+b)^2+10(a^3+b^3)c+17(a+b)abc+3(a+b)c^3+147abc^2+17c^4+$$
$$21c(a^2b+ab^2-a^2c-b^2c)\geq 0$$

$N=4(a-b)^4+c\left[(a+b)(79ab+7c^2)+57abc+c^3+17(a^2b+ab^2-a^2c-b^2c)\right]\geq 0$ (đpcm).

Bài 7. Chứng minh: $(a+b)(b+c)(c+a)\geq 2\sqrt{(a^2+bc)(b^2+ca)(c^2+ab)}$, $\forall a,b,c\geq 0$

Chứng minh

Bất đẳng thức hiển nhiên đúng nếu ta chứng minh được:

$(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2\geq 4(a^2+bc)(b^2+ca)(c^2+ab)+32a^2b^2c^2$

Giả sử $c=\min(a,b,c)$, ta có

$VT-VP=(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2+8ab^2c(a-b)^2+4abc(a+b)(a-c)(b-c)\geq 0$ (đpcm)

Bài 8. Chứng minh rằng: $\dfrac{a(b+c)}{a^2+bc}+\dfrac{b(c+a)}{b^2+ca}+\dfrac{c(a+b)}{c^2+ab}\geq 2$ $\forall a,b,c\geq 0$

Chứng minh

Ta sẽ chứng minh: $\dfrac{a(b+c)}{a^2+bc}+\dfrac{b(c+a)}{b^2+ca}+\dfrac{c(a+b)}{c^2+ab}\geq 2+\dfrac{8a^2b^2c^2}{(a^2+bc)(b^2+ca)(c^2+ab)}$

$$\Leftrightarrow \sum_{sym}\left[a(b+c)(b^2+ca)(c^2+ab)\right]\geq 2(a^2+bc)(b^2+ca)(c^2+ab)+8a^2b^2c^2$$

$$\Leftrightarrow \sum_{sym}a^4(b^2+c^2)+3abc\sum_{sym}a^2(b+c)\geq \sum_{sym}b^3c^3+2abc\sum_{sym}a^3+12a^2b^2c^2$$

$$\Leftrightarrow \left[(ac+bc-ab)^2+c^2(4ab+c^2-2ac-2bc)\right](a-b)^2+abc(a+b)(a-c)(b-c)\geq 0$$

Giả sử $c=\min(a,b,c)$ bất đẳng thức cuối hiển nhiên đúng, ta có điều cần chứng minh.

Bài 9. Chứng minh: $\dfrac{a}{b^2+c^2}+\dfrac{b}{c^2+a^2}+\dfrac{c}{a^2+b^2}\geq \dfrac{4}{5}\left(\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{c+a}+\dfrac{1}{a+b}\right)$ $\forall a,b,c\geq 0$

Chứng minh

Ta chứng minh bất đẳng thức mạnh hơn:

$$\frac{a}{b^2+c^2}+\frac{b}{c^2+a^2}+\frac{c}{a^2+b^2}\geq \frac{4}{5}\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)+\frac{36a^2b^2c^2}{5(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)(a+b+c)}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{sym}\frac{a(b+c)}{b^2+c^2}+\sum_{sym}\frac{a^2}{b^2+c^2}\ge\frac{12}{5}+\sum_{sym}\frac{a}{b+c}+\frac{36a^2b^2c^2}{5(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}\ (*)$$

Ta có thể chứng minh được các bất đẳng thức sau:

$$\frac{4}{5}\left(\frac{a^2}{b^2+c^2}+\frac{b^2}{c^2+a^2}+\frac{c^2}{a^2+b^2}\right)\ge\frac{4}{5}\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)\ (1)$$

$$\frac{1}{5}\left(\frac{a^2}{b^2+c^2}+\frac{b^2}{c^2+a^2}+\frac{c^2}{a^2+b^2}+\frac{4a^2b^2c^2}{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}\right)\ge\frac{1}{5}\cdot 2\ (2)$$

$$\frac{a(b+c)}{b^2+c^2}+\frac{b(c+a)}{c^2+a^2}+\frac{c(a+b)}{a^2+b^2}\ge 2+\frac{8a^2b^2c^2}{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}\ (3)$$

Cộng vế (1), (2) và (3) suy ra (*) đúng và bất đẳng thức được chứng minh.

Bài 10. Cho $\begin{cases}a,b,c\ge 0\\ a+b+c=3\end{cases}$. Chứng minh rằng: $a^2b+b^2c+c^2a\le 4$

Chứng minh

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với $a^2b+b^2c+c^2a\le\frac{4}{27}(a+b+c)^3$

Giả sử $c=\min(a,b,c)$, ta chứng minh bất đẳng thức mạnh hơn:

$4(a+b+c)^3\ge 27(a^2b+b^2c+c^2a)+27abc$

$\Leftrightarrow (4a+4b+c)(a-b)^2+(16b+4c-11a)(a-c)(b-c)\ge 0$

Chú ý rằng ta có đẳng thức sau với mọi số thực a,b,c:

$P(a-c)(b-c)(a-b)^2-P(a-b)^2(a-c)(b-c)=0$. Cho $P=-\frac{4(a+b)}{ab}$ ta nhận được:

$$-\frac{4(a+b)(a-c)(b-c)}{ab}(a-b)^2+\frac{4(a+b)(a-b)^2}{ab}(a-c)(b-c)=0$$

Do đó bất đẳng thức có thể viết lại : $M=(a-b)^2+N(a-c)(b-c)\ge 0$, trong đó:

$$M=4a+4b+c-\frac{4(a+b)(a-c)(b-c)}{ab}=\frac{c(4a^2+4b^2+9ab-4ac-4bc)}{ab}\ge 0$$

$$N=16b+4c-11a+\frac{4(a+b)(a-b)^2}{ab}=\frac{(4a+b)(a-2b)^2+4abc}{ab}\ge 0$$

Bài 11. Cho $\begin{cases}a,b,c\ge 0\\ a+b+c=3\end{cases}$. Chứng minh: $(a^2b+b^2c+c^2a)+2(ab^2+bc^2+ca^2)\le 6\sqrt{3}$ (1)

Chứng minh

$$(1) \Leftrightarrow \left(a^2b+b^2c+c^2a\right)+2\left(ab^2+bc^2+ca^2\right)\le 2\sqrt{3}\frac{(a+b+c)^3}{9}$$

Ta chứng minh bất đẳng thức mạnh hơn:

$$9\left(a^2b+b^2c+c^2a\right)+18\left(ab^2+bc^2+ca^2\right)+\left(54\sqrt{3}-81\right)abc\le 2\sqrt{3}(a+b+c)^3$$

Giả sử $c=\min(a,b,c)$ ta có: $VP-VT=M(a-b)^2+N(a-c)(b-c)$. Với:

$$M=2\sqrt{3}(a+b)+\left(14\sqrt{3}-27\right)c-\frac{2\sqrt{3}(a+b)(a-c)(b-c)}{ab}$$
$$=\frac{\sqrt{3}c\left(2a^2+2b^2-2ac-2bc+\left(18-9\sqrt{3}\right)ab\right)}{ab}\ge 0$$

$$N=\left(8\sqrt{3}-9\right)a+\left(8\sqrt{3}-19\right)b+2\sqrt{3}c+\frac{2\sqrt{3}(a+b)(a-b)^2}{ab}$$
$$=\frac{\sqrt{3}\left(2a+\left(2+\sqrt{3}\right)b\right)\left(a+\left(1-\sqrt{3}\right)b\right)^2+2\sqrt{3}abc}{ab}\ge 0$$

Bài 12. Tìm hằng số k tốt nhất sao cho bất đẳng thức sau đúng với mọi số thực không âm a,b,c: $k(a+b+c)^4\ge\left(a^3b+b^3c+c^3a\right)+abc(a+b+c)$

Chứng minh

Cho $a=3,b=1,c=0$ suy ra $k\ge\frac{27}{256}$. Ta chứng minh đây chính là giá trị cần tìm, nghĩa là:

$$\frac{27}{256}(a+b+c)^4\ge\left(a^3b+b^3c+c^3a\right)+abc(a+b+c)$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $c=\min(a,b,c)$. Ta chứng minh bất đẳng thức mạnh hơn:

$$27(a+b+c)^4\ge 256\left(a^3b+b^3c+c^3a\right)+473abc(a+b+c)\Leftrightarrow M(a-b)^2+N(a-c)(b-c)\ge 0$$

Với: $M=27(a+b)^2-40ac-40bc+180c^2-\frac{\left[27(a+b)^2+68(a+b)c\right](a-c)(b-c)}{ab}$

$$N=216ab-148a^2+108b^2-121ac+135bc+27c^2+\frac{\left[27(a+b)^2+68(a+b)c\right](a-b)^2}{ab}$$

Ta có: $M.ab=c\left[27(a+b)(a-b)^2+189abc+41c(a+b)^2-68c^2(a+b)\right]\ge 0$

$$N.ab=\left(27a^2+14ab+3b^2\right)(a-3b)^2+c\left(68a^3+68b^3-189a^2b+67ab^2\right)+27abc^2$$

Nếu $68a^2+68b^2-189a^2b+67ab^2\ge 0$ bất đẳng thức hiển nhiên đúng

Nếu $68a^3+68b^3-189a^2b+67ab^2\le 0$

$$N.ab\ge\left(27a^2+14ab+3b^2\right)(a-3b)^2+b\left(68a^3+68b3-189a^2b+67ab^2\right)$$

Dùng đạo hàm kiểm tra được

$$\left(27a^2+14ab+3b^2\right)(a-3b)^2+b\left(68a^3+68b3-189a^2b+67ab^2\right)\geq 0$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Vậy ta có $K_{\min}=\dfrac{27}{256}$.

Bài 13. Tìm hằng số k tốt nhất sao cho bất đẳng thức sau đúng với mọi số thực không âm a,b,c: $k(a+b+c)^4\geq\left(a^3b+b^3c+c^3a\right)+\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)+abc(a+b+c)$

Giải

Cho $a=2,b=1,c=0$ suy ra $k\geq\dfrac{4}{27}$. Ta sẽ chứng minh đây chính là giá trị cần tìm, nghĩa là:

$$\frac{4}{27}(a+b+c)^4\geq\left(a^3b+b^3c+c^3a\right)+\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)+abc(a+b+c)$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $c=\min(a,b,c)$. Ta chứng minh bất đẳng thức chặt hơn sau: $4(a+b+c)^4\geq 27\left(a^3b+b^3c+c^3a\right)+27\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)+54abc(a+b+c)$

$\Leftrightarrow M(a-b)^2+N(a-c)(b-c)\geq 0$. Trong đó:

$$M=4\left(a^2+b^2\right)+13c^2+20ab-7c(a+b)-\frac{\left(4a^2+4b^2+20ab+7ac\right)(a-c)(b-c)}{ab}$$

$$=\frac{c\left[(a+b)\left(4a^2+4b^2+13ab+7ac\right)-7a^2b-c\left(4a^2+4b^2+7ab+7ac\right)\right]}{ab}\geq 0$$

$$N=4b^2+4c^2-23a^2-7ac+29ab+20bc+\frac{\left(4a^2+4b^2+20ab+7ac\right)(a-b)^2}{ab}$$

$$=\frac{(a+b)(4a+b)(a-2b)^2+ac\left[4bc+a^2+3b^2+3ab+6(a-2b)^2\right]}{ab}\geq 0$$

Bất đẳng thức được chứng minh, ta có $k_{\min}=\dfrac{4}{27}$

3. Các bài tập dành cho bạn đọc tự giải

Bài 1. Cho $\begin{cases}a,b,c\geq 0\\a+b+c=2\end{cases}$. Chứng minh rằng: $\left(a^2+bc\right)\left(b^2+ca\right)\left(c^2+ab\right)\leq 1$

Bài 2. Chứng minh rằng: $\dfrac{ab+ac+4bc}{b^2+c^2}+\dfrac{bc+ba+4ca}{c^2+a^2}+\dfrac{ca+cb+4ab}{a^2+b^2}\geq 4\ \forall a,b,c$

Bài 3. Cho $\begin{cases}a,b,c\geq 0\\a+b+c=2\end{cases}$. Chứng minh rằng : $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+abc\leq 1$

Bài 4. Tìm giá trị nhỏ nhất của $F=\dfrac{a+kb}{c+kb}+\dfrac{b+kc}{a+kc}+\dfrac{c+ka}{b+ka}$ với $a,b,c\geq 0,(k\geq 0)$

§ 23.10. CÁC TỔNG ĐỐI XỨNG VÀ BẤT ĐẲNG THỨC HOÁN VỊ

Trong chương II §7 khi tìm hiểu bất đẳng thức Schur chúng ta đã làm quen với việc sử dụng các phép biến đổi dựa trên các đa thức đối xứng Viete để chứng minh các bất đẳng thức đối xứng ba biến. Trong chương IV, §18, phép dồn biến EMV và trong §22 phương pháp chia để trị DAC, phần phối hợp với phương pháp SOS, chúng ta đã nhận thấy một phép biến đổi rất có hiệu lực khi chứng minh các bất đẳng thức ba biến hoán vị, cụ thể đó là việc tách ra các đại lượng có dạng $(a-b)(b-c)(a-c)$. *Trong bài viết này chúng kết hợp sức mạnh của hai phương pháp để tấn công triệt để các bất đẳng thức hoán vị.*

I. ĐỊNH LÝ

Với mọi bộ ba số thực a,b,c ta ký hiệu $p=a+b+c; q=ab+bc+ca; r=abc$.

Khi đó có các đẳng thức sau:

$$a^2+b^2+c^2=p^2-2q$$
$$a^3+b^3+c^3=p^3-3pq+3r$$
$$a^4+b^4+c^4=p^4+2q^2+4pr-4p^2q$$
$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=q^2 2pr;$$

$$a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)=pq-3r$$
$$a^3(b+c)+b^3(c+a)+c^3(a+b)=p^2q-2q\ -pr$$

$$(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2=p^2q^2+18pqr-27r^2-4q^3-4p^3r$$

Biểu thức $f(X)=AX^2+BX+C:\begin{cases}A\ge 0\\ X_{\min}=\dfrac{-B}{2A}\end{cases}$

(+) $f(X)\ge 0\ \forall X \Leftrightarrow \Delta=B^2-4AC\le 0$

(+) $f(X)\ge 0\ \forall X\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}X_{\min}\le 0\\ f(0)\ge 0\end{cases}\\ \begin{cases}X_{\min}\ge 0\\ f(X_{\min})\ge 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}B\ge 0\\ C\le 0\end{cases}\\ \begin{cases}B\le 0\\ \Delta=B^2-4AC\ge 0\end{cases}\end{array}\right.$

II. ÁP DỤNG

Chúng ta đã biết phương pháp sử dụng các đại lượng p,q,r trong việc chứng minh các bất đẳng thức đối xứng, còn ở đây là những ứng dụng cho bất đẳng thức hoán vị vòng quanh, chú ý rằng có nhiều bài toán được dẫn ra là rất khó.

> ***Ví dụ 1.*** Cho a,b,c là các số thực không âm thỏa mãn $a+b+c=3$.
>
> Chứng minh $a^2b+b^2c+c^2a\le 4$ (*)

Chứng minh

Ta có : $(*)\Leftrightarrow 2\sum_{cyc}a^2b\le 8\Leftrightarrow \sum_{cyc}a^2b-\sum_{cyc}ab^2\le 8-\sum_{cyc}a^2b-\sum_{cyc}ab^2$

$$\Leftrightarrow (a-b)(b-c)(a-c)\le 8-\sum_{sym}a^2(b+c)$$

Do đó chỉ cần chứng minh khi $(a-b)(b-c)(a-c)\ge 0$, bất đẳng thức tương đương với:

$$\sqrt{(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2}\le 8-\sum_{sym}a^2(b+c)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\left(p^2q^2+18pqr-27r^2-4q^3-4q^3r\right)}\le 8-(pq-3r)$$

$$\Leftrightarrow \left(p^2q^2+18pqr-27r^2-4q^3-4q^3r\right)\le (8-pq+3r)^2$$

$$\Leftrightarrow 36r^2+\left(4p^3-24pq+48\right)r+4q^3-16pq+64\ge 0$$

$$\Leftrightarrow f(r)=9r^2+\left(p^3-6pq+12\right)r+q^3-4pq+16\ge 0$$

Với $p=3$: $f(r)=9r^2+(39-18q)r+q^3-12q+16\ge 0$

Nhận thấy $r_{\min}=\dfrac{-39+18q}{18}$. Xét hai trường hợp

Nếu $0\le q\le \dfrac{39}{18}\Rightarrow r_{ct}\le 0$ thì: $f(0)=q^3-12q+16=(q+4)(q-2)^2\ge 0$

Nếu $\dfrac{39}{18}\le q\le 3\Rightarrow r_{\min}\ge 0$, ta có $f(r_{\min})=24q^3-216q^2+648q-630\ge 0\forall q\in\left[\dfrac{39}{18};3\right]$

Suy ra $f(r)\ge 0\forall r\ge 0$ (đpcm).

> ***Ví dụ 2.*** Cho a,b,c là các số thực không âm có tổng bằng 3. Chứng minh rằng:
>
> $$a^2b+b^2c+c^2a+2\left(ab^2+bc^2+ca^2\right)\le 6\sqrt{3}$$

Chứng minh

Bất đẳng thức tương đương với

$$2\sum_{cyc} a^2b + 4\sum_{cyc} ab^2 \le 12\sqrt{3} \Leftrightarrow 3\sum_{sym} a^2(b+c) + \sum_{cyc} ab^2 - \sum_{cyc} a^2b \le 12\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow 3\sum_{cyc} a^2(b+c) + (a-b)(b-c)(c-a) \le 12\sqrt{3}$$

Ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức khi $(a-b)(b-c)(c-a) \ge 0$, nghĩa là

$$3\sum_{sym} a^2(b+c) + \sqrt{(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2} \le 12\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow 3(pq-3r) + \sqrt{p^2q^2 + 18pqr - 27r^2 - 4q^3 - 4p^3r} \le 12\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow p^2q^2 + 18pqr - 27r^2 - 4q^3 - 4p^3r \le \left(12\sqrt{3} = 3pq + 9r\right)^2$$

$$\Leftrightarrow f(r) = 108r^2 + \left(4p^3 - 72pq + 216\sqrt{3}\right)r + 4q^3 + 8p^2q^2 - 72\sqrt{3}pq + 432 \ge 0$$

Tìm được $r_{min} = \dfrac{216q - 108 - 216\sqrt{3}}{108}$, xét hai trường hợp:

Nếu $0 \le q \le \dfrac{216\sqrt{3}+108}{216} \Rightarrow r_{min} \le 0$ thì $f(0) = 4\left(q+12+6\sqrt{3}\right)\left(q+3-\sqrt{3}\right)^2 \ge 0$

Nếu $\dfrac{216\sqrt{3}+108}{216} \le q \le 3 \Rightarrow r_{ct} \ge 0$, ta có

$$f(r_{ct}) = 4q^3 - 36q^2 + 108q + 81 - 108\sqrt{3} \ge 0 \forall q \in \left[\sqrt{3+\frac{1}{2}};3\right]$$

Vì vậy $f(r)$ không âm với mọi $r \ge 0$ (đpcm).

> ***Ví dụ 3.*** Tìm hằng số k lớn nhất sao cho bất đẳng thức sau đúng với mọi số thực không âm a,b,c:
>
> $$k(a+b+c)^4 \ge \left(a^3b+b^3c+c^3a\right) + \left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right) + abc(a+b+c)$$

Chứng minh

Với $a=2, b=1, c=0$ ta suy ra $k \ge \dfrac{4}{27}$. Ta sẽ chứng minh rằng đây là giá trị cần tìm, nghĩa là bất đẳng thức đã cho đúng với $k = \dfrac{4}{27}$. Không mất tính tổng quát giả sử $p=3$, ta có

$$\frac{4}{27}(a+b+c)^4 \ge \sum_{cyc} a^3b + \sum_{sym} b^2c^2 + abc\sum_{sym} a$$

$$\Leftrightarrow \frac{8}{27}(a+b+c)^4 \ge \left(\sum_{cyc} a^3b + \sum_{cyc} ab^3\right) + 2\sum_{sym} b^2c^2 + \left(\sum_{cyc} a^3b - \sum_{cyc} ab^3\right) + 2abc(a+b+c)$$

$$\Leftrightarrow \frac{8}{27}(a+b+c)^4 \ge \sum_{cyc} a^3(b+c) + 2\sum_{sym} b^2c^2 + (a+b+c)(a-b)(b-c)(a-c) + 2abc(a+b+c)$$

Ta chỉ cần xét một trường hợp, bất đẳng thức tương đương với:

$$\frac{8}{27}(a+b+c)^4 \ge p^2q-2q^2-pr+2q^2-4pr+2pr+$$
$$+p\sqrt{p^2q^2+18pqr-27r^2-4q^3-4p^3r}$$
$$\Leftrightarrow p^2\left(p^2q^2+18pqr-27r^2-4q^3-4p^3r\right)\le\left(\frac{8}{27}p^4-p^2q+3pr\right)^2$$
$$\Leftrightarrow f(r)=36p^2r^2+\left(\frac{52}{9}p^5-24p^3q\right)r+\frac{64}{729}p^8+4p^2q^3-\frac{16}{27}p^6q\ge 0$$
$$\Leftrightarrow p^2\left(p^2q^2+18pqr-27r^2-4q^3-4p^3r\right)\le\left(\frac{8}{27}p^4-p^2q+3pr\right)^2$$
$$\Leftrightarrow f(r)=36p^2r^2+\left(\frac{52}{9}p^5-24p^3q\right)r+\frac{64}{729}p^8+4p^2q^3-\frac{16}{27}p^6q\ge 0$$

Với $p=3$: $f(r)=324r^2+(1404-648)r+36q^3-432q+576\ge 0$

Xét hai trường hợp

Nếu $0\le q\le\frac{13}{6}\Rightarrow 39-18q\ge 0$, thì $f(0)=36(q+4)(q-2)^2\ge 0$

Nếu $\frac{13}{6}\le q\le 3$ suy ra

$$\Delta=(39-18q)^2-4.9.\left(q^3-12q+16\right)=-36q^3+324q^2-972q+945\le 0\ \forall\ q\in\left[\frac{13}{6};3\right]$$

Do đó $f(r)\ge 0\forall r\ge 0$ (đpcm).

Ví dụ 4. Chứng minh bất đẳng thức sau với các số thực a,b,c:

$$\left(x^2+y^2+z^2\right)^2\ge 3\left(x^3y+y^3z+z^3x\right)\quad (*)$$

Chứng minh

Nếu $p=0$ bất đẳng thức có thể viết lại là $7\left(y^2+z^2+yz\right)^2\ge 0$, hiển nhiên đúng.

Xét trường hợp $p\ne 0$, không mất tính tổng quát, giả sử $p=3$, ta có:

$$(*)\Leftrightarrow 2\left(a^2+b^2+c^2\right)^2\ge 3\left(\sum_{cyc}a^3b+\sum_{cyc}ab^3\right)+3\left(\sum_{cyc}a^3b-\sum_{cyc}ab^3\right)$$
$$\Leftrightarrow 2\left(a^2+b^2+c^2\right)^2\ge 3\sum_{cyc}a^3(b+c)+3(a+b+c)(a-b)(b-c)(a-c)$$

Chỉ cần xét trường hợp $(a-b)(b-c)(a-c)\ge 0$, bất đẳng thức tương đương với:

$$\Leftrightarrow 2\left(a^2+b^2+c^2\right)^2\ge 3\sum_{sym}a^3(b+c)+3(a+b+c)\sqrt{(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2}$$
$$\Leftrightarrow 2\left(p^2-2q\right)^2\ge 3\left(p^2q-2q^2-pr\right)+3p\sqrt{p^2q^2+18pqr-27r^2-4q^3-4p^3r}$$

$$\Leftrightarrow 9p^2\left(p^2q^2+18pqr-27r^2-4q^3-4p^3r\right)\le\left[2\left(p^2-2q\right)^2-3\left(p^2q-2q^2-pr\right)\right]^2$$

$$\Leftrightarrow f(r)252p^2r^2+\left(84pq^2-228p^3q+48p^5\right)r+4p^8-44p^6q+168p^4q^2-272p^2q^3+196q^4\ge 0$$

Với $p=3$: $f(r)=4\left(567r^2+\left(63q^2-1539q+2916\right)r+49q^4-612q^3+3402q^2-8019q+6561\right)\ge 0$

Ta có:

$$\Delta'=\left(63q^2-1539q+2916\right)^2-2268\left(49q^4-612q^3+3402q^2-8019q+6561\right)=-2187(7q-18)^2(q-3)^2\le 0$$

Vì vậy $f(r)\ge 0$ với mọi số thực r (đpcm)

> ***Ví dụ 5.*** Xác định hằng số thực lớn nhất k sao cho bất đẳng thức sau đây đúng với mọi $a,b,c>0$:
> $$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+k\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}\ge 3+k$$

Giải

Bất đẳng thức đã cho tương đương với:

$$\left(\sum_{cyc}\frac{a}{b}+\sum_{cyc}\frac{b}{a}\right)+2k\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}\ge 6+2k-\left(\sum_{cyc}\frac{b}{a}+\sum_{cyc}\frac{a}{b}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sum_{sym}a^2(b+c)}{abc}+2k\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}\ge 6+2k+\frac{(a-b)(b-c)(a-c)}{abc}$$

Chỉ cần xét trường hợp $(a-b)(b-c)(a-c)\ge 0$

$$\Leftrightarrow \frac{pq-3r}{r}+\frac{2kq}{p^2-2q}\ge 6+2k+\frac{\sqrt{p^2q^2+18pqr-27r^2-4q^3-4p^3r}}{r}$$

$$\left(p^2q^2+18pqr-27r^2-4q^3-4p^3q\right)\left(p^2-2q\right)^2$$

$$\le\left[\left(pq-3r\right)\left(p^2-2q\right)+2kqr-(6+2k)r\left(p^2-2q\right)\right]^2$$

Không mất tính tổng quát giả sử rằng $p=3$. Sau khi khai triển, viết lại bất đẳng thức dưới dạng

$f(r)=4\left(Ar^2+Br+C\right)\ge 0$. Trong đó

$$A=81k^2+9k^2q^2+54kq^2+729k-972q+108q^2+2187-54k^2q-405kq$$

$$B=2187-108q^3+1080q^2-3159q-18kq^3-243kq+135kq^2$$

$$C=4q^5-36q^4+81q^3$$

Dễ dàng chứng minh rằng A và C không âm. Xét hai trường hợp:

Nếu $0 \le q \le \dfrac{3\left(k+11-\sqrt{k^2+10k+49}\right)}{2(k+6)} \Rightarrow B \ge 0 \Rightarrow f(r) \ge 0$

Nếu $\dfrac{3\left(k+11-\sqrt{k^2+10k+49}\right)}{2(k+6)} \le q \le 3$ thì $\Delta = B^2 - 4AC = -9(q-3)^2(2q-9)^2$

$\left(48q^3+24kq^3+4k^2q^3-144kq^2-468q^2-9k^2q^2+162kq+1296q-719\right)$

Tìm được $k_{\max} = 3\sqrt[3]{4}-2$, đây là giá trị cần tìm..

Ví dụ 6. Tìm hằng số k lớn nhất sao cho bất đẳng thức sau đúng với mọi số thực dương a,b,c:

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}+k(a+b+c) \ge 3(k+1)\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c} \qquad (*)$$

Chứng minh

Ta có

$$2\sum_{cyc}\frac{a^2}{b} = \left(\sum_{cyc}\frac{a^2}{b}+\sum_{cyc}\frac{b^2}{a}\right)+\left(\sum_{cyc}\frac{a^2}{b}-\sum_{cyc}\frac{b^2}{a}\right) = \frac{\sum_{cyc}a^3(b+c)}{abc}+\frac{(a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a)}{abc}$$

Do đó $(*) \Leftrightarrow 2\sum_{cyc}\dfrac{a^2}{b}+2k(a+b+c) \ge 6(k+1)\dfrac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}$

$$\Leftrightarrow \frac{\sum_{cyc}a^3(b+c)}{abc}+2k(a+b+c)-6(k+1)\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c} \ge \frac{(a+b+c)(a-b)(b-c)(a-c)}{abc}$$

Xét trường hợp $(a-b)(b-c)(a-c) \ge 0$, viết lại bất đẳng thức dưới dạng:

$$\frac{p^2q-2q^2-pr}{r}+2kp-6(k+1)\frac{p^2-2q}{p} \ge \frac{p\sqrt{p^2q^2+18pqr-27r^2-4q^3-4p^3r}}{r}$$

$$\Leftrightarrow f(r) = \left[\left(p^2q-2q^2-pr\right)p+2kp^2r-6(k+1)r\left(p^2-2q\right)\right]^2$$
$$-p^4\left(p^2q^2+18pqr-27r^2-4q^3-4p^3r\right) \ge 0$$

Tương tự, giả sử $p=3$, sau khi khai triển ta có $f(r) = 4\left(Ar^2+Br+C\right) \ge 0$. Trong đó

$A = 72kq^2+36k^2q^2+324k^2-378q+1134k-594kq-216k^2q+36q^2+1539$

$B = 2187-486kq+270kq^2-36kq^3-1944q+351q^2-36q^3$

$C = 9q^4$

Nghiệm q_o của phương trình $B=0$ thỏa mãn $q_o \in [0,3]$ là

$$q_o = \frac{1}{4(1+k)}\left(\sqrt[3]{M}+\frac{28k^2-100k-119}{\sqrt[3]{M}}+10k+13\right)$$

Với $\begin{cases} M = -1475 - 2382k - 960k^2 - 80k^3 + 36\sqrt{N} + 36k\sqrt{N} \\ N = -12k^4 + 324k63 - 63k^2 + 2742k + 2979 \end{cases}$

Xét hai trường hợp:

Nếu $0 \le q \le q_o$ thì $B \ge 0$, ta có thể chứng minh rằng A và C không âm, vì vậy $f(f) \ge 0$

Nếu $q_o \le q \le 3$ thì

$$\Delta = B^2 - 4AC = -729(q-3)^2\left(16q^3 + 16k^2q^3 + 32kq^3 - 252kq^2 - 189q^2 - 36k^2q^2 + 324kq + 810q - 729\right)$$

Tìm được $k_{max} \approx 1,5855400068$, đây là giá trị cần tìm.

> ***Ví dụ 7.*** Xác định hằng số thực lớn nhất k sao cho bất đẳng thức sau đúng với mọi $a,b,c > 0$:
>
> $$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + k \ge \frac{(9+3k)(a^2+b^2+c^2)}{(a+b+c)^2}$$

Giải

Bất đẳng thức tương đương với:

$$\left(\sum_{cyc}\frac{a}{b} + \sum_{cyc}\frac{b}{a}\right) + 2k \ge \frac{6(3+k)(a^2+b^2+c^2)}{(a+b+c)^2} + \left(\sum_{cyc}\frac{b}{a} - \sum_{cyc}\frac{a}{b}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sum_{sym} a^2(b+c)}{abc} + 2k - \frac{6(3+k)(a^2+b^2+c^2)}{(a+b+c)^2} \ge \frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{abc}$$

Ta chỉ cần xét trường hợp $(a-b)(b-c)(c-a) \ge 0$, viết lại bất đẳng thức trên ở dạng

$$\frac{pq-3r}{r} + 2k - \frac{6(3+k)(p^2-2q)}{p^2} \ge \frac{\sqrt{p^2q^2 + 18pqr - 27r^2 - 4p^3 - 4p^3r}}{r}$$

$$\Leftrightarrow f(r) = \left[(pq-3r)p^2 + 2kp^2r - 6(3+k)(p^2-2q)r\right]^2 - \left(p^2q^2 + 18pqr - 27r^2 - 4p^3 - 4p^3r\right)p^4 \ge 0$$

Giả sử rằng $p = 3$, sau khi khai triển ta có $f(r) = 4\left(Ar^2 + Br + C\right) \ge 0$. Trong đó

$$A = 144k^2q^2 + 864kq^2 + 1296k^2013608q + 13608k + 1296q^2 - 864k^2q - 7128kq + 37098$$

$$B = 162kq^2 - 486kq - 3645q + 486q^2 + 2187$$

$$C = 81q^3$$

Xét hai trường hợp:

Nếu $0 \le q \le \dfrac{3\left(15 + 2k - \sqrt{153 + 36k + 4k^2}\right)}{4(3+k)}$ thì B không âm, tương tự ví dụ trước ta có thể chứng minh rằng $A \ge 0, C \ge 0$, nhận được $f(r) \ge 0$

Nếu $\dfrac{3\left(15+2k-\sqrt{153+36k+4k^2}\right)}{4(3+k)} \le q \le 3$ ta có $\Delta = B^2 - 4AC = -729(q-3)^2$

$\left(16k^2q^3+96kq^3+144q^3-36k^2q^2-972q^2-432kq^2+324kq+1944q-729\right)$

Vì vậy tìm được $k_{\max} = 3\sqrt[3]{2}-3$, đây là giá trị cần tìm.

Ví dụ 8. Tìm giá trị lớn nhất của hằng số k sao cho bất đẳng thức sau đúng với mọi $a,b,c>0$:

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \ge \frac{k\left(a^2+b^2+c^2\right)}{ab+bc+ca}-k+3$$

Giải

Nhân cả hai vế bất đẳng thức với 2 ta có:

$$\left(\sum_{cyc}\frac{a}{b}+\sum_{cyc}\frac{b}{a}\right) \ge \frac{2k\left(a^2+b^2+c^2\right)}{(a+b+c)^2}-2k+6+\left(\sum_{cyc}\frac{b}{a}-\sum_{cyc}\frac{a}{b}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sum_{sym}a^2(b+c)}{abc}-\frac{2\left(a^2+b^2+c^2\right)}{(a+b+c)^2}+2k-6 \ge \frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{abc}$$

Chỉ cần xét trường hợp $(a-b)(b-c)(c-a) \ge 0$, viết lại bất đẳng thức ở dạng:

$$\frac{pq-3r}{r}-\frac{2k\left(p^2-2q\right)}{q}+2k-6=\frac{\sqrt{p^2q^2+18pqr-27r^2-4p^3-4p^3r}}{r}$$

$$\Leftrightarrow f(r)=\left[(pq-3r)q-2kr\left(p^2-2q\right)+(2k-6)rq\right]^2$$

$$-q^2\left(p^2q^2+18pqr-27r^2-4p^3-4p^3r\right) \ge 0$$

Giả sử $p=3$, khai triển ta thu được $f(r)=4\left(Ar^2+Br+C\right) \ge 0$. Trong đó

$$A=9k^2q^2-54k^2q+81k^2-27kq^2+81kq+27q^2$$

$$B=kq^3-27q^3+27q^2-27kq^2$$

$$C=q^5$$

Vì vậy tìm được $k_{\max}=1$, đây là giá trị cần tìm.

Ví dụ 9. Tìm tất cả các số thực k sao cho bất đẳng thức sau đúng với mọi số thực a,b,c:

$$a(a+kb)^3+b(b+kc)^3+c(c+ka)^3 \ge \frac{(k+1)^3}{27}(a+b+c)^4 \quad (*)$$

Giải

Nếu $p=0$ thì $(*) \Leftrightarrow -(b^2+bc+c^2)^2(k-2)k^2-k+1\ge 0$.

Vì vậy điều kiện cần là $k\le 2$

Xét trường hợp $p\ne 0$, không mất tính tổng quát, giả sử $p=3$. Nhận thấy

$$6k\sum_{cyc}a^3b+2k^3\sum_{cyc}ab^3=3k\left(\sum_{cyc}a^3b+\sum_{cyc}ab^3\right)+k^3\left(\sum_{cyc}ab^3+\sum_{cyc}a^3b\right)+$$
$$+3k\left(\sum_{cyc}a^3b-\sum_{cyc}ab^3\right)+k^3\left(\sum_{cyc}ab^3-\sum_{cyc}a^3b\right)$$
$$=(k^3+3k)\sum_{sym}a^3(b+c)+k(k^2-3)(a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a)$$

Vì vậy ta có $(*)\Leftrightarrow 2\sum_{sym}a^4+6k\sum_{cyc}a^3b+2k^3\sum_{cyc}ab^3+6k^2\sum_{sym}b^2c^2\ge\dfrac{2(k+1)^3}{27}(a+b+c)^4$

$$\Leftrightarrow 2\sum_{sym}a^4+(k^3+3k)\sum_{sym}a^3(b+c)+6k^2\sum_{sym}b^2c^2-\frac{2(k+1)^3}{27}(a+b+c)^4\ge$$
$$\ge k(k^2-3)(a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a)$$

Chỉ cần xét trường hợp $VP\ge 0$, viết lại bất đẳng thức:

$$2(p^4+2q^2+4pr-4p^2q)+3k(p^2q-2q^2-pr)+k^3(p^2q-2q^2-pr)+6k^2(q^2-2pr)-\frac{2(k+1)^3p^4}{27}$$
$$\ge k(k^2-3)p\sqrt{p^2q^2+18pqr-27r^2-4p^3-4p^3r}$$

Bình phương hai vế, thay p bởi 3, sau khi khai triển ta có $f(r)=4(Ar^2+Br+C)\ge 0$. Trong đó:

$$A=63k^6+54k^5-27k^4+126k^3+135k^2-108k+144$$
$$B=1872-918k+99k^3-756k^2+27k^5q^2+48q^2-$$
$$-864q-90kq^2+51k^3q^2+27k^2q^2-1080k^4+252k^6$$
$$+135k^5+648kq-270k^3q+81qk^2-90k^4q^2+648k^4q+3k^6q^2-135k^6q-162k^5q$$
$$C=6084-1476kq^2-492k^3q^2+486k^2q^2+2754kq+675k^3q+$$
$$+405qk^2+225k^4q^2-162k^4q+6k^6q^2$$
$$-27k^6q-81k^5q-1404k-306k^3-1323k^2+135k^4+9k^6+54k^5-5616q+1608q^2+27k^5q^3$$
$$-12q^4k-22q^4k^3+21q^4k^2+15k^4q^4+k^6q^4-6k^5q^4-216k^2q^3-108k^4q^3+270q^3k+171q^3k^3-144q^3+4q^4$$

Dễ dàng chứng minh rằng A dương. Ta có:

$$\Delta = B^2 - 4AC = -81k^2(q-3)^2(k^2-3)^2\Big[\left(3k^6 - 18k^5 + 45k^4 - 66k^3 + 63k^3 + 63k^2 - 36k + 12\right)q^2 +$$

$$\left(28k^6 + 78k^5 - 17k^4 + 326k^3 - 372k^2 + 276k - 152\right)q$$

$$-84k^6 - 72k^5 + 274k^4 - 168k^3 + 792k^2 + 144k + 780\Big]$$

suy ra điều kiện đủ của k là

$$\left(16k^4 - 5k^3 + 30k^2 - 14k - 56\right) \le 0 \Leftrightarrow -0.9377079399 \le k \le 1.233289162$$

Ví dụ 10. Xác định hằng số lớn nhất k sao cho bất đẳng thức sau đúng với mọi $a, b, c \ge 0$:

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca} + k\frac{3abc}{ab^2+bc^2+ca^2} \ge 1+k$$

Giải

Bất đẳng thức tương đương với: $3kabc + \left(\dfrac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca} - 1 - k\right)\left(ab^2+bc^2+ca^2\right) \ge 0$

$$\Leftrightarrow 6kabc + \left(\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca} - 1 - k\right)\left(\sum_{cyc} ab^2 + \sum_{cyc} a^2b\right) \ge \left(\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca} - 1 - k\right)\left(\sum_{cyc} a^2b - \sum_{cyc} ab^2\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca} - 1 - k\right)\sum_{sym} a^2(b+c) \ge \left(\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca} - 1 - k\right)(a-b)(b-c)(c-a)$$

Xét trường hợp $VP \ge 0$, viết lại bất đẳng thức ở dạng:

$$6kr + \left(\frac{p^2-2q}{q} - 1 - k\right)(pq-3r) \ge \left|\left(\frac{p^2-2q}{q} - 1 - k\right)\sqrt{p^2q^2 + 18pqr - 27r^2 - 4q^3 - 4p^3r}\right|$$

$$\Leftrightarrow f(r) = \left[6kqr + \left(p^2-(k+3)q\right)(pq-3r)\right]^2 -$$

$$\left(p^2-(k+3)q\right)^2\left(p^2q^2 + 18pqr - 27r^2 - 4q^3 - 4p^3r\right) \ge 0$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $p = 1$. Sau khi khai triển ta có $f(x) = Ar^2 + Br + C$. Trong đó

$A = 108q^2k^2 + 324q^2k + 324q^2 - 108qk - 216q + 36$

$B = -36k^2q^3 - 180q^3k - 216q^3 + 4q^2k^2 + 84q^2k + 180q^2 - 8qk - 48q + 4$

$C = 4q^3(qk+3q-1)^2$

$\Delta = 16(3q-1)^2(qk+3q-1)^2\left(12k^2q^3 + 36q^3k + 36q^3 - q^2k^2 - 24q^2k - 36q^2 + 2qk + 12q - 1\right)$

Tìm được $k_{\max} = k_0 \approx 0.8493557485$, đây là giá trị cần tìm.

+) Tương tự với bất đẳng thức: $\dfrac{3\left(a^2+b^2+c^2\right)}{(a+b+c)^2} + k\dfrac{3abc}{ab^2+bc^2+ca^2} \ge 1+k$

Ví dụ 11. Cho các số thực dương a,b,c. Tìm hằng số k lớn nhất sao cho bất đẳng thức sau đúng

$$\frac{3\left(a^2+b^2+c^2\right)}{(a+b+c)^2}+k\frac{a^3b+b^3c+c^3a}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}\geq 1+k$$

Giải

Không mất tính tổng quát, giả sử $p=1$. Tương tự với ví dụ trước, sau khi biến đổi ta chỉ cần chứng minh rằng:

$$2\frac{3\left(p^2-2q\right)}{p^2}+\frac{k\left(p^2q-2q^2-pr\right)}{q^2-2pr}-2-2k\geq\frac{kp\sqrt{p^2q^2+18pqr-27r^2-4q^3-4p^3r}}{q^2-2pr}$$

$$\Leftrightarrow 2(3-6q)+\frac{k\left(q-2q^2-r\right)}{q^2-2pr}-2-2k\geq\frac{k\sqrt{q^2+18qr-27r^2-4q^3-4r}}{q^2-2r}$$

$$\Leftrightarrow\left[2(3-6q)\left(q^2-2r\right)+k\left(q-2q^2-r\right)-2(k+1)\left(q^2-2r\right)\right]^2\geq\geq k^2\left(q^2+18qr-27r^2-4q^3-4r\right)$$

$$\Leftrightarrow f(r)=4\left(Ar^2+Br+C\right)\geq 0$$

Trong đó:

$A=144q^2+36qk-96q+9k^2-12k+16$

$B=-144q^4-66q^3k+96q^3-6q^2k^2+34q^2k-16q^2-3qk^2-4qk+k^2$

$C=q^3\left(36q^3+24q^2k-24q^2+4qk^2+2k-14qk+4q-k^2\right)$

Ta có: $\Delta=-k^2(3q-1)^2\left(108q^4+72q^3k-80q^3+16q^2-44q^2k+12q^2k^2+8qk-k^2\right)$

Tìm được $k_{max}=k_0\approx 1.424183337$

+) Tương tự với bất đẳng thức: $\dfrac{3\left(a^2+b^2+c^2\right)}{(a+b+c)^2}+k\dfrac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{a^3b+b^3c+c^3a}\geq 1+k$

Ví dụ 12. Tìm hằng số k lớn nhất sao cho bất đẳng thức sau đúng với mọi số thực không âm a,b,c:

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}+k\frac{a^2b+b^2c+c^2a}{ab^2+bc^2+ca^2}\geq 1+k$$

Giải

Giả sử $p=1$. Sau khi biến đổi, ta chỉ cần chứng minh rằng:

$$(1-3q)^2(q-3r)^2\geq\left[1-(2k+3)q\right]^2\left(q^2+8qr-27r^2-4q^3-3p^3r\right)$$

$\Leftrightarrow f(r)=4\left(Ar^2+Br+C\right)\geq 0$. Trong đó:

$A=27q^2k^2+81q^2k+81q^2-27qk-54q+9$

$B = -18q^3k^2 - 54q^3k - 54q^3 + 4q^2k^2 + 30q^2k + 45q^2 - 4qk - 12q + 1$

$C = q^3\left(4q^2k^2 + 12q^2k + 9q^2 - qk^2 - 7qk - 6q + k + 1\right)$

Nhận thấy::

$\Delta = -(3q-1)^2(3q-1+2qk)^2\left(12q^3k^2 + 36q^3k + 36q^3 - 4q^2k^2 - 24q^2k - 36q^2 + 4qk + 12q - 1\right)$

Tìm được $k_{\max} = k_0 = \dfrac{9\sqrt[3]{3}}{8} + \dfrac{3\sqrt[3]{9}}{8} + \dfrac{3}{8} \approx 2.777562200$

+) Dưới đây là một số bất đẳng thức tương tự:

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca} + k\frac{a^3b+b^3c+c^3a}{ab^3+bc^3+ca^3} \ge 1+k$$

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca} + k\frac{a^4b+b^4c+c^4a}{ab^4+bc^4+ca^4} \ge 1+k$$

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca} + k\frac{a^3b^2+b^3c^2+c^3a^2}{a^2b^3+b^2c^3+c^2a^3} \ge 1+k$$

Ví dụ 13. Cho các số thực không âm a,b,c. Tìm hằng số k lớn nhất sao cho bất đẳng thức sau đây đúng: $\dfrac{3\left(a^2+b^2+c^2\right)}{(a+b+c)^2} + k\dfrac{a^4b+b^4c+c^4a}{a^3b^2+b^3c^2+c^3a^2} \ge 1+k$.

Giải

Bất đẳng thức tương đương với:

$$k\sum_{sym} a^4(b+c) + \left[\frac{3\sum\limits_{sym} a^2}{\left(\sum\limits_{sym}\right)^2} - 1 - k\right]\sum_{sym} a^3\left(b^2+c^2\right) \ge$$

$$\ge \left[\left(\frac{3\sum\limits_{sym} a^2}{\left(\sum\limits_{sym}\right)^2} - 1 - k\right)\sum_{sym} bc - k\left(\sum_{sym} a^2 + \sum_{sym} bc\right)\right]\prod_{cyc}(a-b)$$

Chỉ cần xét trường hợp $VP \ge 0$. Không mất tính tổng quát, giả sử $p=1$, viết lại bất đẳng thức:

$$\left[k\left(q - 3q^3 + 5qr - r\right) + (2 - 6q - k)\left(q^2 - qr - 2r\right)\right]^2 \ge$$
$$\ge \left(2 - 6q^2 - k\right)^2\left(q^2 + 18qr - 27r^2 - 4q^3 - 4r\right)$$
$$\Leftrightarrow f(r) = 4\left(Ar^2 + Br + C\right) \ge 0$$

Trong đó:

$A = 252q^4 + 18kq^4 - 132q^3 + 9k^2q^2 + 114q^2k + 40q^2 + 3qk^2 - 34qk - 20q + 7k^2 - 2k + 4$

$B = -180q^5 - 30kq^4 + 120q^4 - 12k^2q^3 - 68kq^3 - 20q^3 + k^2q^2 + 44q^2k - 4qk^2 - 6qk + k^2$

$C = q^3\left(36q^4 - 24q^3 + 24q^2k + 4q^2 + 4qk^2 - 14qk - k^2 + 2k\right)$

Ta có:

$\Delta = -(3q-1)^2\left(k-2q+6q^2\right)^2\left(112q^5 + 8kq^4 - 84q^4 + 4k^2q^3 + 60kq^3 + 16q^3 + 3k^2q^2 - 44q^2k + 2qk^2 + 8qk - k^2\right)$

Tìm được $k_{\max} = k_0 \approx 0.89985123$

+) Sau đây là một số bất đẳng thức cùng dạng:

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca} + k\,\frac{a^4b+b^4c+c^4a}{a^2b^3+b^2c^3+c^2a^3} \ge 1+k$$

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca} + k\,\frac{a^2b^3+b^2c^3+c^2a^3}{a^4b+b^4c+c^4a} \ge 1+k$$

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca} + k\,\frac{a^3b^2+b^3c^2+c^3a^2}{a^4b+b^4c+c^4a} \ge 1+k$$

Chú ý. Trong bốn ví dụ trước có thể thay $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}$ bởi $\dfrac{3\left(a^2+b^2+c^2\right)}{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}$ hoặc dạng như vậy để thu được những bất đẳng thức mới tương tự.

Ví dụ 14. Cho $a,b,c \ge 0$, tìm hằng số k lớn nhất sao cho bất đẳng thức sau đây đúng

$$\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} + k\left(ab+bc+ca\right) \ge k\left(k+1\right)\left(a^2+b^2+c^2\right)$$

Giải

Giả sử $p = 1$, tương tự với ví dụ trước ta có $f\left(r\right) = 4\left(Ar^2 + Br + C\right) \ge 0$. Trong đó

$A = 9q^2k^2 + 27q^2k + 27q^2 - 6qk^2 - 27q - 18qk + k^2 + 3k + 9$

$B = -9q^3k - 18q^3 + 6q^2k + 19q^2 - qk - 8q + 1$; $C = q^5$

Nhận thấy $\Delta = -3\left(3q-1\right)^2\left(q-1\right)^2\left(4q^3k^2 + 12q^3k + 12q^3 - q^2k^2 - 12q^2k - 16q^2 + 2qk + 8q - 1\right)$

Tìm được $k_{\max} = k_0 = \dfrac{\sqrt[3]{1828+372\sqrt{93}}}{6} - \dfrac{106}{3\sqrt[3]{1828+372\sqrt{93}}} + \dfrac{5}{3} \approx 2.581412182$

Ví dụ 15. Tìm hằng số k lớn nhất sao cho bất đẳng thức sau đúng với mọi số thực không âm a,b,c:

$$3k\,\frac{a^4b+b^4c+c^4a}{ab+bc+ca} + a^2 + b^2 + c^2 \ge \left(k+1\right)\left(ab+bc+ca\right)$$

Giải

Giả sử $p=1$, tương tự ví dụ trước ta có $f(r)=4\left(Ar^2+Br+C\right)$ trong đó

$A=108k^2q^2+81q^2-108k^2q+108kq-54q+63k^2-36k+9$

$B=-108k^2q^3-18kq^3-54q^3+100k^2q^2-69kq^2+45q^2-57k^2q-43kq+112q+9k^2-6k$

$C=q^2\left(4k^2q^3-12kq^3+9q^3+12k^2q^2+40kq^2-6q^2-3k^2q-21kq+q+3k\right)$

Ta có $\Delta=-(3q-1)^2(-3q+1+2kq-3k)^2\ x$

$$x\left(48k^2q^3+36q^3-52k^2q^2+48kq^2-36q^2+48k^2q-28kq+12q-9k^2+6k-1\right)$$

Vì vậy $k_{max}=k_0\approx 7.698078389$

+) Bất đẳng thức tương tự $3k\dfrac{a^4b+b^4c+c^4a}{a^2b+b^2c+c^2a}+a^2+b^2+c^2\geq(k+1)(ab+bc+ca)$

> ***Ví dụ 16.*** Tìm giá trị lớn nhất của hằng số k sao cho bất đẳng thức sau đúng với mọi $a,b,c\geq 0$
>
> $$3k\frac{a^3b+b^3c+c^3a}{ab+bc+ca}+a^2+b^2+c^2\geq(k+1)(ab+bc+ca)$$

Giải

Giả sử $p=1$, tương tự ví dụ trên ta có $f(r)=4\left(Ar^2+Br+C\right)$. Trong đó

$A=63k^2$

$B=12k^2q^2+9kq^2-45qk^2-3kq+9k^2$

$C=q^2\left(16k^2q^2+24kq^2+9q^2-3qk^2-17kq-6q+3k+1\right)$

Nhận thấy: $\Delta=-27k^2(3q-1)^2\left(16k^2q^2+24kq^2+9q^2+12qk^2+2kq-3k^2\right)$

Vì vậy $k_{min}=k_0\approx -0.3079785278$

+) Bất đẳng thức tương tự: $3k\dfrac{a^2b+b^2c+c^2a}{a+b+c}+a^2+b^2+c^2\geq(k+1)(ab+bc+ca)$

> ***Ví dụ 17.*** Chứng minh bất đẳng thức sau với $a,b,c\geq 0$
>
> $$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+k\geq(3+k)\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}\right)^{\frac{2}{3}}$$

Giải

Giả sử $q=1$, đặt $t=\sqrt[3]{p^2-2}$, tương tự ví dụ trước, viết lại bất đẳng thức ở dạng:

$f(r)=4\left(Ar^2+Br+C\right)\geq 0$. Trong đó

$A=(k+3)^2t^4-\left(2k^2+3k-9\right)t^2+\left(k^2-3k+9\right)$

$B=\sqrt{t^3+2}\left[t^3-(k+3)t^2+k-4\right]$

$C=1$

Ta có: $\Delta = (t-1)^2 (t^7 - 2t^6k - 4t^6 + t^5k^2 + 2t^5k + 2t^4k^2 + 8t^4k - 2t^4 + t^3k^2 + 12t^3k$

$+8t^3 - 2t^2k^2 + 4t^2k - 4tk^2 - 8tk - 8t - 2k^2 - 4k - 4)$

Vì vậy $k_{\max} = k_0 \approx 0.3820494092$. Bài toán được giải quyết xong

Mở rộng 1: Cho $a,b,c > 0$, xác định hằng số k lớn nhất sao cho bất đẳng thức sau đúng $$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \ge 3\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}\right)^k.$$

Giải

Tương tự như trên, giả sử $q = 1$, đặt $t = p^2 - 2$, ta có: $f(r) = 4(Ar^2 + Br + C)$. Trong đó

$A = 9(t^{2k} + t^k + 1)$

$B = \sqrt{t+2}(t - 3t^k - 4)$

$C = 1$

Mở rộng 2: Cho a,b,c là các số thực dương, tìm điều kiện cần và đủ của k và t sao cho bất đẳng thức sau đúng: $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+k \ge (3+k)\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}\right)^t$

Ví dụ 18. Xác định hằng số k lớn nhất sao cho bất đẳng thức sau đúng với mọi số thực dương a,b,c: $$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}+k(a+b+c) \ge (3+3k)\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}$$

Giải

Tương tự các ví dụ trước, giả sử $p = 1$, đặt $t = \sqrt{3-6q}$, viết lại bất đẳng thức

$f(r) = Ar^2 + Br + C \ge 0$. Trong đó

$A = 1296(t^2k^2 + 2t^2k + t^2 - 2k^2t - tk + t + k^2 - k + 7)$

$B = 4(18t^5k + 18t^5 - 18t^4k + 9t^4 - 54t^3k - 54t^3 + 54t^2k + 216t^2 - 405)$

$C = t^8 - 12t^6 + 54t^4 - 108t^2 + 81$

Nhận thấy

$\Delta' = 972(t-1)^2 (8t^6l^2 + 16t^6k - t^6 + 60t^5k + 42t^5 - 60t^4k^2 - 60t^4k + 153t^4 - 288t^3k$

$+36t^3 + 144t^2k^2 - 279t^2 + 324tk - 270t - 108k^2 + 108k - 81)$

Vì vậy ta tìm được $k_{\max} = k_0 \approx 4.356328100$

+) Bất đẳng thức tổng quát: $\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}+k(a+b+c) \ge (3+3k)\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{3}\right)^t$.

III. BÀI TẬP DÀNH CHO BẠN ĐỌC TỰ GIẢI

Bài 1. Tìm hằng số k lớn nhất sao cho bất đẳng thức sau đúng với mọi $a,b,c \ge 0$

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+k\frac{3abc}{a^3+b^3+c^3}\ge 3+k$$

Bài 2. Tìm hằng số k lớn nhất sao cho bất đẳng thức sau đúng với mọi $a,b,c \ge 0$

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+k\frac{a^2b+b^2c+c^2a}{ab^2+bc^2+ca^2}\ge \frac{3}{2}+k$$

Bài 3. Tìm hằng số k lớn nhất sao cho bất đẳng thức sau đúng với mọi $a,b,c \ge 0$

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}-3\ge k\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}-\frac{3}{2}\right)$$

Bài 4. Tìm hằng số k lớn nhất sao cho bất đẳng thức sau đúng với mọi $a,b,c \ge 0$

$$\frac{(k+1)^3}{8}\left(a^2+b^2+c^2\right)^2 \ge a(a+kb)^3+b(b+kc)^3+c(c+ka)^3$$

Bài 5. Cho các số thực dương a,b,c. Chứng minh rằng:

$$\frac{8}{3}\left(a^2+b^2+c^2\right)^2-\frac{1}{3}\left(a^4+b^4+c^4-abc(a+b+c)\right)\ge a\left(a+b^3+b(b+c)^3+c(c+a)^3\right)$$
$$\ge \frac{8}{27}(a+b+c)^4+\frac{1}{125}\left(a^4+b^4+c^4-abc(a+b+c)\right)$$

Bài 6. Tìm hằng số k lớn nhất sao cho bất đẳng thức sau đúng với mọi số thực không âm a,b,c:

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}}+k\frac{3abc}{ab^2+bc^2+ca^2}\ge 1+k$$

+) Chú ý rằng bài toán này khác với ví dụ 10, có thể nhận ra trong các ví dụ 10, 11, 12, 13 khi thay $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}$ bởi $\left(\dfrac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}\right)^t$ hoặc $\dfrac{3\left(a^2+b^2+c^2\right)}{(a+b+c)^2}$ ta thu được các bất đẳng thức mới, trong đó có những bất đẳng thức rất khó

Bài 7: Cho các số thực dương a,b,c, xác định điều kiện cần và đủ của k và t sao cho bất đẳng thức sau đúng $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{a}+k\ge(3+k)\left(\dfrac{3\left(a^2+b^2+c^2\right)}{(a+b+c)^2}\right)^t$

§ 24. NHỮNG BẤT ĐẲNG THỨC CHỌN LỌC

§ 24.1. CÁC BÀI TOÁN CÓ NHIỀU LỜI GIẢI

Trong mục này chúng tôi giới thiệu với các bạn một số bất đẳng thức đẹp và có nhiều lời giải. Với lưu ý việc khai thác, mở rộng, tìm tòi một bài toán từ nhiều góc độ khác nhau là thói quen rất nên được thường xuyên rèn luyện.

Bài 1. Cho $\begin{cases} a > c > 0 \\ b > c > 0 \end{cases}$. Chứng minh rằng: $\sqrt{c(a-c)} + \sqrt{c(b-c)} \le \sqrt{ab}$ (1)

Chứng minh

• ***Cách 1:*** Bình phương hai vế ta có (1) $\Leftrightarrow \left[\sqrt{c(a-c)} + \sqrt{c(b-c)}\right]^2 \le \left(\sqrt{ab}\right)^2$

$\Leftrightarrow c(a-c) + c(b-c) + 2\sqrt{c(a-c)}.\sqrt{c(b-c)} \le ab \Leftrightarrow ab + 2c^2 - c(a+b) - 2c\sqrt{(a-c)(b-c)} \ge 0$

$\Leftrightarrow c^2 + (a-c)(b-c) - 2c\sqrt{(a-c)(b-c)} \ge 0 \Leftrightarrow \left[c - \sqrt{(a-c)(b-c)}\right]^2 \ge 0$ (2)

Do (2) đúng nên (1) đúng. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow c = \sqrt{(a-c)(b-c)} \Leftrightarrow c = \dfrac{ab}{a+b}$

• ***Cách 2:*** Đặt $a = c(x+1)$; $b = c(y+1)$ $(x, y > 0)$, ta có

$(1) \Leftrightarrow \sqrt{c^2x} + \sqrt{c^2y} \le c\sqrt{(x+1)(y+1)} \Leftrightarrow \sqrt{x} + \sqrt{y} \le \sqrt{(x+1)(y+1)}$

$\Leftrightarrow x + y + 2\sqrt{xy} \le xy + x + y + 1 \Leftrightarrow 2\sqrt{xy} \le xy + 1 \Leftrightarrow 0 \le \left(\sqrt{xy} - 1\right)^2$ đúng

• ***Cách 3:*** (1) $\Leftrightarrow \sqrt{\dfrac{c(a-c)}{ab}} + \sqrt{\dfrac{c(b-c)}{ab}} \le 1$. Sử dụng ***AM − GM*** ta có

$$\sqrt{\frac{c(a-c)}{ab}} + \sqrt{\frac{c(b-c)}{ab}} \le \frac{1}{2}\left(\frac{c}{b} + \frac{a-c}{a}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{c}{a} + \frac{b-c}{b}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{a} + \frac{b}{b}\right) = 1$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{c}{b} = \dfrac{a-c}{a} = 1 - \dfrac{c}{a} \\ \dfrac{c}{a} = \dfrac{b-c}{b} = 1 - \dfrac{c}{b} \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{c}{b} + \dfrac{c}{a} = 1 \Leftrightarrow c = \dfrac{ab}{a+b}$

• ***Cách 4:*** Sử dụng bất đẳng thức ***CBS*** ta có

$$\sqrt{c(a-c)} + \sqrt{c(b-c)} = \sqrt{a-c}\,\sqrt{c} + \sqrt{c}\,\sqrt{b-c} \le$$

$$\le \sqrt{\left[\left(\sqrt{a-c}\right)^2 + \left(\sqrt{c}\right)^2\right]\left[\left(\sqrt{c}\right)^2 + \left(\sqrt{b-c}\right)^2\right]} = \sqrt{ab}$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{a-c}}{\sqrt{c}} = \dfrac{\sqrt{c}}{\sqrt{b-c}} \Leftrightarrow c = \sqrt{(a-c)(b-c)} \Leftrightarrow c = \dfrac{ab}{a+b}$

• ***Cách 5:*** Đặt $\begin{cases} \overrightarrow{u} = \left(\sqrt{a-c}, \sqrt{c}\right) \\ \overrightarrow{v} = \left(\sqrt{c}, \sqrt{b-c}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left|\overrightarrow{u}\right| = \sqrt{a-c+c} = \sqrt{a} \\ \left|\overrightarrow{v}\right| = \sqrt{c+b-c} = \sqrt{b} \end{cases}$

$$\Rightarrow \sqrt{c(a-c)} + \sqrt{c(b-c)} = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} \leq \left|\overrightarrow{u}\right|\left|\overrightarrow{v}\right| = \sqrt{ab}$$

• ***Cách 6:*** Đặt $y = \sqrt{c(a-c)} + \sqrt{c(b-c)} \Rightarrow \left(y - \sqrt{c(a-c)}\right)^2 = c(b-c)$

$\Leftrightarrow \left[y^2 + c(a-b)\right]^2 = \left(2y\sqrt{c(a-c)}\right)^2 \Leftrightarrow y^4 + 2y^2c(a-b) + c^2(a-b)^2 = 4y^2ac - 4y^2c^2$

$\Leftrightarrow f(c) = \left[(a-b)^2 + 4y^2\right]c^2 - 2y^2(a+b)c + y^4 = 0$

Ta có y thuộc tập giá trị của hàm số $\Leftrightarrow f(c) = 0$ có nghiệm c

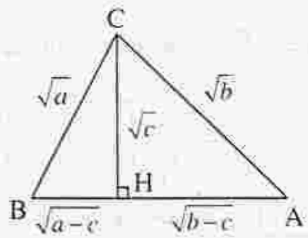
$\Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow 4y^4\left(ab - y^2\right) \geq 0 \Leftrightarrow y^2 \leq ab \Leftrightarrow y \leq \sqrt{ab} \Rightarrow$ (đpcm)

• ***Cách 7:*** Phương pháp lượng giác

(1) $\Leftrightarrow T = \sqrt{\dfrac{c}{b}\left(1 - \dfrac{c}{a}\right)} + \sqrt{\dfrac{c}{a}\left(1 - \dfrac{c}{b}\right)} \leq 1$. Đặt $\begin{cases} c/a = \sin^2 x \ ; 0 < x < \pi/2 \\ c/b = \sin^2 y \ ; 0 < y < \pi/2 \end{cases}$

Khi đó: $T = \sqrt{\sin^2 x.\cos^2 y} + \sqrt{\sin^2 y.\cos^2 x} = \sin x \cos y + \sin y \cos x = \sin(x+y) \leq 1$

• ***Cách 8:*** Phương pháp hình học



Xét tam giác ABC với độ dài các cạnh là

$CB = \sqrt{a}$, $CA = \sqrt{b}$ và đường cao $CH = \sqrt{c}$

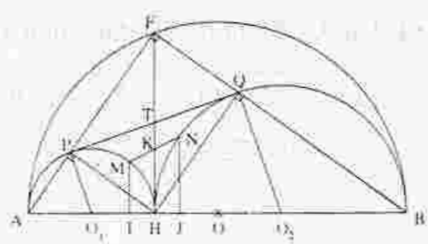
$\Rightarrow BH = \sqrt{a-c}\,; AH = \sqrt{b-c}$

$\sqrt{c(a-c)} + \sqrt{c(b-c)} = 2S_{CBH} + 2S_{CAH} = 2S_{CAB}$

$= \sqrt{a}\sqrt{b}\sin C \leq \sqrt{ab} \Rightarrow \sqrt{c(a-c)} + \sqrt{c(b-c)} \leq \sqrt{ab}$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \angle BCA = 90° \Leftrightarrow \dfrac{1}{c} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} \Leftrightarrow c = \dfrac{ab}{a+b}$

• ***Cách 9:*** Trên đoạn thẳng AB có độ dài $a + b$ lấy điểm H sao cho HA = a, HB = b. Trên các đoạn thẳng HA, HB, lấy các điểm I, J sao cho HI = HJ = c. Dựng các nửa đường tròn đường kính AB, HA, HB với các tâm là O, O_1, O_2.



Dựng HF ⊥ AB; IM ⊥ HA; JN ⊥ HB. Khi đó dễ dàng ta có

$IM = \sqrt{IA.IH} = \sqrt{c(a-c)}$; $JN = \sqrt{JH.JB} = \sqrt{c(b-c)}$; $HF = \sqrt{HA.HB} = \sqrt{ab}$

Nối MN cắt HF tại K. Nối FA, FB cắt các nửa đường tròn đường kính HA, HB lần lượt tại P, Q. Ta có ∠ AFH = ∠ AFB = ∠ HQB = 90°. Từ đó suy ra FPHQ là hình chữ nhật. Khi đó PQ và HF cắt nhau tại T là trung điểm của mỗi đường. Mặt khác, ta có ∠FPQ = ∠FHQ = ∠FBH = ∠BQO$_2$, ∠FPQ = ∠PQH

⇒ ∠ PQH = ∠ BQO$_2$ ⇒ ∠ PQO$_2$ = 90° ⇒ O$_2$Q ⊥ PQ. Tương tự, O$_1$P ⊥ PQ, suy ra PQ là tiếp tuyến chung ngoài của hai nửa đường tròn đường kính HA, HB.

Từ đó suy ra trong hình thang MIJN với đường trung bình HK, ta có

$\sqrt{c(a-c)} + \sqrt{c(b-c)} = IM + JN = 2HK \le 2HT = HF = \sqrt{ab}$

Bài 2. Cho $\begin{cases} a,b,c > 0 \\ a+b+c \le \dfrac{3}{2} \end{cases}$. Tìm giá trị nhỏ nhất $S = \sqrt{a^2 + \dfrac{1}{b^2}} + \sqrt{b^2 + \dfrac{1}{c^2}} + \sqrt{c^2 + \dfrac{1}{a^2}}$

Chứng minh

• ***Cách 1:*** Biến đổi và sử dụng bất đẳng thức ***AM – GMm***, ta có:

$$S = \sqrt{a^2 + \underbrace{\frac{1}{16b^2} + \ldots + \frac{1}{16b^2}}_{16}} + \sqrt{b^2 + \underbrace{\frac{1}{16c^2} + \ldots + \frac{1}{16c^2}}_{16}} + \sqrt{c^2 + \underbrace{\frac{1}{16a^2} + \ldots + \frac{1}{16a^2}}_{16}}$$

$$\ge \sqrt{17 \cdot \sqrt[17]{\frac{a^2}{16^{16}b^{32}}}} + \sqrt{17 \cdot \sqrt[17]{\frac{b^2}{16^{16}c^{32}}}} + \sqrt{17 \cdot \sqrt[17]{\frac{c^2}{16^{16}a^{32}}}} = \sqrt{17}\left[\sqrt[17]{\frac{a}{16^8 b^{16}}} + \sqrt[17]{\frac{b}{16^8 c^{16}}} + \sqrt[17]{\frac{c}{16^8 a^{16}}}\right]$$

$$\ge \sqrt{17}\left[3 \cdot \sqrt[3]{\sqrt[17]{\frac{a}{16^8 b^{16}}} \cdot \sqrt[17]{\frac{b}{16^8 c^{16}}} \cdot \sqrt[17]{\frac{c}{16^8 a^{16}}}}\right] = 3\sqrt{17}\sqrt[17]{\frac{1}{16^8 a^5 b^5 c^5}}$$

$$= \frac{3\sqrt{17}}{2 \cdot \sqrt[17]{(2a\,2b\,2c)^5}} \ge \frac{3\sqrt{17}}{2 \cdot \sqrt[17]{\left(\dfrac{2a+2b+2c}{3}\right)^{15}}} \ge \frac{3\sqrt{17}}{2}$$. Với $a=b=c=\dfrac{1}{2}$ thì $\text{Min}\, S = \dfrac{3\sqrt{17}}{2}$

• ***Cách 2:*** Biến đổi và sử dụng bất đẳng thức ***Cauchy – Schwarz:***

$$+\begin{cases} \sqrt{a^2 + \dfrac{1}{b^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{17}} \cdot \sqrt{\left(a^2 + \dfrac{1}{b^2}\right)(1^2 + 4^2)} \ge \dfrac{1}{\sqrt{17}} \cdot \left(a + \dfrac{4}{b}\right) \\ \sqrt{b^2 + \dfrac{1}{c^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{17}} \cdot \sqrt{\left(b^2 + \dfrac{1}{c^2}\right)(1^2 + 4^2)} \ge \dfrac{1}{\sqrt{17}} \cdot \left(b + \dfrac{4}{c}\right) \\ \sqrt{c^2 + \dfrac{1}{a^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{17}} \cdot \sqrt{\left(c^2 + \dfrac{1}{a^2}\right)(1^2 + 4^2)} \ge \dfrac{1}{\sqrt{17}} \cdot \left(c + \dfrac{4}{a}\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow S \ge \frac{1}{\sqrt{17}}\cdot\left(a+b+c+\frac{4}{a}+\frac{4}{b}+\frac{4}{c}\right)=\frac{1}{\sqrt{17}}\cdot\left[a+b+c+\frac{1}{4a}+\frac{1}{4b}+\frac{1}{4c}+\frac{15}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\right]$$

$$\ge\frac{1}{\sqrt{17}}\left[6\cdot\sqrt[6]{abc\cdot\frac{1}{4a}\cdot\frac{1}{4b}\cdot\frac{1}{4c}}+\frac{15}{4}\left(3\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{c}}\right)\right]=\frac{1}{\sqrt{17}}\left(3+\frac{45}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{abc}}\right)$$

$$\ge\frac{1}{\sqrt{17}}\left(3+\frac{45}{4}\cdot\frac{1}{\frac{a+b+c}{3}}\right)\ge\frac{1}{\sqrt{17}}\left(3+\frac{45}{4}\cdot 2\right)=\frac{3\sqrt{17}}{2}$$. Với $a=b=c=\frac{1}{2}$ thì $\text{Min}S=\frac{3\sqrt{17}}{2}$

• ***Cách 3: Bổ đề: (Bất đẳng thức Minkowski)***

$$\sqrt{a_1^2+b_1^2}+\sqrt{a_2^2+b_2^2}+\sqrt{a_3^2+b_3^2}\ge\sqrt{(a_1+a_2+a_3)^2+(b_1+b_2+b_3)^2}\quad(1)$$

Áp dụng:

$$S=\sqrt{a^2+\frac{1}{b^2}}+\sqrt{b^2+\frac{1}{c^2}}+\sqrt{c^2+\frac{1}{a^2}}\ge\sqrt{(a+b+c)^2+\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2}$$

$$=\sqrt{(a+b+c)^2+\frac{1}{16}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2+\frac{15}{16}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2}$$

$$\ge\sqrt{2(a+b+c)\cdot\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+\frac{15}{16}\left(3\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{c}}\right)^2}$$

$$\ge\sqrt{\frac{1}{2}\cdot 3\cdot\sqrt[3]{abc}\cdot 3\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{c}}+\frac{135}{16}\cdot\frac{1}{(\sqrt[3]{abc})^2}}\ge\sqrt{\frac{9}{2}+\frac{135}{16}\cdot\frac{1}{\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2}}$$

$$\ge\sqrt{\frac{9}{2}+\frac{135}{16}\cdot 4}=\sqrt{\frac{18}{4}+\frac{135}{4}}=\sqrt{\frac{153}{4}}=\frac{3\sqrt{17}}{2}$$. Với $a=b=c=\frac{1}{2}$ thì $\text{Min}\,S=\frac{3\sqrt{17}}{2}$

• ***Cách 4:*** Đặt $\overrightarrow{u}=\left(a,\frac{1}{b}\right);\ \overrightarrow{v}=\left(b,\frac{1}{c}\right);\ \overrightarrow{w}=\left(c,\frac{1}{a}\right)$

Từ $|\overrightarrow{u}|+|\overrightarrow{v}|+|\overrightarrow{w}|\ge|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}|$ dẫn tới:

$$S=\sqrt{a^2+\frac{1}{b^2}}+\sqrt{b^2+\frac{1}{c^2}}+\sqrt{c^2+\frac{1}{a^2}}\ge\sqrt{(a+b+c)^2+\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2}$$

$$\ge\sqrt{(3\cdot\sqrt[3]{abc})^2+\left(3\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{c}}\right)^2}=3\cdot\sqrt{\sqrt[3]{(abc)^2}+\frac{1}{\sqrt[3]{(abc)^2}}}$$

$$= 3\cdot\sqrt{\sqrt[3]{(abc)^2}+\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{(abc)^2}}+\frac{15}{16}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{(abc)^2}}}$$

$$\geq 3\cdot\sqrt{2\sqrt{\sqrt[3]{(abc)^2}\cdot\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{(abc)^2}}}+\frac{15}{16}\cdot\frac{1}{\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2}}=3\cdot\sqrt{\frac{2}{4}+\frac{15}{16}\cdot 4}=\frac{3\sqrt{17}}{2}$$

Với $a=b=c=\frac{1}{2}$ thì $\text{Min } S=\frac{3\sqrt{17}}{2}$

• ***Cách 5:*** $S^2=\left(\sqrt{a^2+\frac{1}{b^2}}+\sqrt{b^2+\frac{1}{c^2}}+\sqrt{c^2+\frac{1}{a^2}}\right)^2=a^2+\frac{1}{b^2}+b^2+\frac{1}{c^2}+c^2+\frac{1}{a^2}$

$$+2\sqrt{\left(a^2+\frac{1}{b^2}\right)\left(b^2+\frac{1}{c^2}\right)}+2\sqrt{\left(b^2+\frac{1}{c^2}\right)\left(c^2+\frac{1}{a^2}\right)}+2\sqrt{\left(c^2+\frac{1}{a^2}\right)\left(a^2+\frac{1}{b^2}\right)}$$

$$\geq a^2+b^2+c^2+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}+2\left[\left(ab+\frac{1}{bc}\right)+\left(bc+\frac{1}{ca}\right)+\left(ca+\frac{1}{ab}\right)\right]$$

$$=a^2+b^2+c^2+\frac{1}{16}\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}\right)+\frac{15}{16}\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}\right)+$$

$$+2\left[(ab+bc+ca)+\frac{1}{16}\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)+\frac{15}{16}\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)\right]$$

$$\geq 6\cdot\sqrt[6]{a^2b^2c^2\cdot\frac{1}{16a^2}\cdot\frac{1}{16b^2}\cdot\frac{1}{16c^2}}+\frac{15}{16}\cdot 3\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{b^2}\cdot\frac{1}{c^2}}+$$

$$+2\left[6\cdot\sqrt[6]{ab\cdot bc\cdot ca\cdot\frac{1}{16ab}\cdot\frac{1}{16bc}\cdot\frac{1}{16ca}}+\frac{15}{16}\cdot 3\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{ab}\cdot\frac{1}{bc}\cdot\frac{1}{ca}}\right]$$

$$=6\cdot\frac{1}{4}+\frac{45}{16}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{(abc)^2}}+2\left[6\cdot\frac{1}{4}+\frac{45}{16}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{(abc)^2}}\right]=3\left(\frac{3}{2}+\frac{45}{16}\cdot\frac{1}{\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2}\right)$$

$$\geq 3\left(\frac{3}{2}+\frac{45}{16}\cdot 4\right)=\frac{63}{4}\Rightarrow S=\sqrt{a^2+\frac{1}{b^2}}+\sqrt{b^2+\frac{1}{c^2}}+\sqrt{c^2+\frac{1}{a^2}}\geq\sqrt{\frac{63}{4}}=\frac{3\sqrt{17}}{2}$$

Với $a=b=c=\frac{1}{2}$ thì $\text{Min } S=\frac{3\sqrt{17}}{2}$

• ***Cách 6:*** Sử dụng bất đẳng thức ***AM – GM***, ta có

$$S=\sqrt{a^2+\frac{1}{b^2}}+\sqrt{b^2+\frac{1}{c^2}}+\sqrt{c^2+\frac{1}{a^2}}\geq 3\cdot\sqrt[6]{\left(a^2+\frac{1}{b^2}\right)\left(b^2+\frac{1}{c^2}\right)\left(c^2+\frac{1}{a^2}\right)}$$

$$=3\cdot\sqrt[6]{\left[\left(a^{\frac{2}{3}}\right)^3+\left(b^{-\frac{2}{3}}\right)^3\right]\left[\left(b^{\frac{2}{3}}\right)^3+\left(c^{-\frac{2}{3}}\right)^3\right]\left[\left(c^{\frac{2}{3}}\right)^3+\left(a^{-\frac{2}{3}}\right)^3\right]}$$

Sử dụng bất đẳng thức ***Cauchy – Schwarz*** mở rộng ta có:

$S \geq 3 \cdot \sqrt[6]{\left[\left(a^{\frac{2}{3}}\right)^3 + \left(b^{-\frac{2}{3}}\right)^3\right]\left[\left(b^{\frac{2}{3}}\right)^3 + \left(c^{-\frac{2}{3}}\right)^3\right]\left[\left(c^{\frac{2}{3}}\right)^3 + \left(a^{-\frac{2}{3}}\right)^3\right]} \geq 3 \cdot \sqrt{(abc)^{\frac{2}{3}} + (abc)^{-\frac{2}{3}}}$

Đặt $t = (abc)^{\frac{2}{3}} \Rightarrow 0 \leq t \leq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2 = \frac{1}{4}$. Xét $f(t) = t + \frac{1}{t}$ với $t \in \left[0, \frac{1}{4}\right]$

Ta có: $f'(t) = \frac{t^2 - 1}{t^2} < 0 \ \forall t \in \left[0, \frac{1}{4}\right] \Rightarrow f(t)$ giảm trên $\left[0, \frac{1}{4}\right]$

$\Rightarrow f(t) \geq f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{17}{4} \Rightarrow S \geq 3 \cdot \sqrt{\frac{17}{4}} = \frac{3\sqrt{17}}{2}$. Với $a = b = c = \frac{1}{2}$ thì $\text{Min}\, S = \frac{3\sqrt{17}}{2}$

Bài 3. Cho $\begin{cases} x, y, z \in [0, 1] \\ x + y + z = \frac{3}{2} \end{cases}$ Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $\cos(x^2 + y^2 + z^2)$

Chứng minh

• ***Cách 1:*** Phương pháp hình học

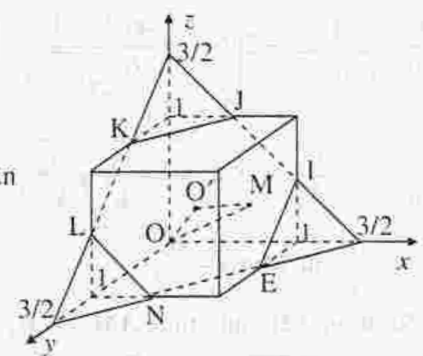
Do $x, y, z \in [0, 1]$ suy ra $0 < x^2 + y^2 + z^2 < x + y + z = \frac{3}{2} < \frac{\pi}{2}$ và hàm số $y = \cos\alpha$ giảm trên $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ nên thay vì tìm $\text{Min}\cos\left(x^2 + y^2 + z^2\right)$ ta sẽ tìm $\text{Max}\left(x^2 + y^2 + z^2\right)$. Xác định hệ trục tọa độ Oxyz.

Tập hợp các điểm M(x, y, z) thỏa mãn điều kiện x, y, $z \in [0, 1]$ chạy trên hình hộp cạnh 1 với các đỉnh: A(0, 1, 1); B(1, 1, 1); C(1, 0, 1); D(0, 0, 1); A′(0, 1, 0); B′(1, 1, 0); C′(1, 0, 0); O(0, 0, 0). Tập hợp các điểm

M(x, y, z) thỏa mãn $x + y + z = \frac{3}{2}$

chạy trên mặt phẳng (P): $x + y + z = \frac{3}{2}$

Vì vậy tập hợp các điểm M(x, y, z) thỏa mãn hai điều kiện đề bài là đa giác EIJKLN trong đó các điểm E, I, J, K, L, N là trung điểm các cạnh hình lập phương.



Gọi O′ là hình chiếu của O trên EIJKLN. Ta có O′ là vừa là tâm của hình lập phương vừa là tâm của lục giác đều EIJKLN.

Mặt khác $OM^2 = x^2 + y^2 + z^2$ vì vậy OM là cực đại khi và chỉ khi O′M là cực đại, hay khi và chỉ khi M trùng với 1 trong sáu đỉnh E, I, J, K, L, N.

Dẫn tới $x^2+y^2+z^2 \le OK^2 = 1+\frac{1}{4}=\frac{5}{4} \Rightarrow \cos\left(x^2+y^2+z^2\right) \ge \cos\frac{5}{4}$

$\Rightarrow \text{Min}\cos\left(x^2+y^2+z^2\right)=\cos\frac{5}{4}$, đạt được khi (x, y, z) là hoán vị của $\left(1, 0, \frac{1}{2}\right)$.

• ***Cách 2:*** Phương pháp tam thức bậc hai

Do $x, y, z \in [0, 1]$ suy ra $0 < x^2+y^2+z^2 < x+y+z=\frac{3}{2}<\frac{\pi}{2}$ và hàm số $y = \cos\alpha$ giảm trên $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ nên thay vì tìm $\text{Min}\cos\left(x^2+y^2+z^2\right)$ ta sẽ tìm $\text{Max}\left(x^2+y^2+z^2\right)$. Không mất tính tổng quát giả sử $z = \text{Max}\{x, y, z\} \Rightarrow z \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Khi đó $x+y=\frac{3}{2}-z$ và suy ra $S = x^2 + y^2 + z^2 \le (x+y)^2 + z^2 = \left(\frac{3}{2}-z\right)^2 + z^2 = \frac{9}{4} - 3z + 2z^2 = f(z)$

Đồ thị $y = f(z)$ là parabol với hệ số tam thức $a = 2 > 0$

Vì vậy $\underset{z\in\left[\frac{1}{2},1\right]}{\text{Max}} f(z) = \text{Max}\left\{f\left(\frac{1}{2}\right), f(1)\right\} = f\left(\frac{1}{2}\right) = f(1) = \frac{5}{4}$. Dẫn tới $\text{Max}\, S = \frac{5}{4}$

Với (x, y, z) là hoán vị của $\left(1, 0, \frac{1}{2}\right)$ thì $\text{Min}\cos\left(x^2+y^2+z^2\right)=\cos\frac{5}{4}$.

Bài 4. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác.

Chứng minh rằng: $T = a^2b(a-b) + b^2c(b-c) + c^2a(c-a) \ge 0$ (1)

(IMO24 – France 1983)

Chứng minh

• ***Cách 1:*** Cách giải đặc biệt biệt ngắn gọn

Không mất tính tổng quát, giả sử $a = \text{Max}(a, b, c)$ thì

$$a^2b(a-b) + b^2c(b-c) + c^2a(c-a) = a(b+c-a)(b-c)^2 + b(a-b)(a-c)(a+b-c) \ge 0$$

• ***Cách 2:*** Cách giải của tác giả bài toán

$$T=\frac{1}{2}\left[(a-b)^2(b+c-a)(b-c+a)+(b-c)^2(c+a-b)(c-a+b)+(c-a)^2(a+b-c)(a-b+c)\right]\ge 0$$

• ***Cách 3:*** Sử dụng bất đẳng thức hoán vị

Bất đẳng thức (1) $\Leftrightarrow a^3b + b^3c + c^3a \ge a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$

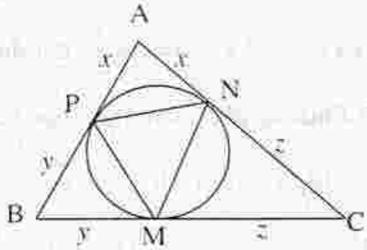
Giả sử $a \ge b \ge c$, dễ dàng chứng minh $\begin{cases} bc \le ac \le ab \\ a^2+bc \ge b^2+ac \ge c^2+ab \end{cases}$

Sử dụng bất đẳng thức hoán vị với hai dãy trên ta có

$$bc(a^2+bc) + ac(b^2+ac) + ab(c^2+ab) \le bc(b^2+ac) + ac(c^2+ab) + ab(a^2+bc)$$

$\Leftrightarrow\ a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \le a^3b + b^3c + c^3a$

• ***Cách 4:*** (Cách của đội US)



Giả sử tâm đường tròn nội tiếp tam giác Δ ABC tiếp xúc với BC, CA, AB at M, N, P.

Đặt $AN = AP = x > 0$, $BP = BM = y > 0$.

$CM = CN = z > 0$, thì

$a = y + z$, $b = z + x$, $c = x + y$ và

bất đẳng thức trở thành $xy^3 + yz^3 + zx^3 - xyz(x + y + z) \ge 0$

$\Leftrightarrow\ xy^3 + yz^3 + zx^3 \ge xyz(x + y + z) \Leftrightarrow \dfrac{y^2}{z} + \dfrac{z^2}{x} + \dfrac{x^2}{y} \ge x + y + z$

Ta có: $(z + x + y)\left(\dfrac{y^2}{z} + \dfrac{z^2}{x} + \dfrac{x^2}{y}\right) \ge (x + y + z)^2 \Rightarrow \dfrac{y^2}{z} + \dfrac{z^2}{x} + \dfrac{x^2}{y} \ge x + y + z$

• ***Cách 5:*** Không mất tính tổng quát, giả sử $a \ge b \ge c$. Ta có bất đẳng thức

$a^2b(a-b) + a^2c(b-c) + c^2a(c-a) \ge 0 \Leftrightarrow \left(\dfrac{a}{c}\right)^2\left(\dfrac{b}{c}\right)\left(\dfrac{a}{c}-\dfrac{b}{c}\right)+\left(\dfrac{a}{c}\right)^2\left(\dfrac{b}{c}-1\right)+\left(\dfrac{a}{c}\right)\left(1-\dfrac{a}{c}\right)\ge 0$

Đặt $x = \dfrac{a}{c}; y = \dfrac{b}{c} \Rightarrow x \ge y \ge 1$. Khi đó bất đẳng thức trở thành

$x^3y - x^2y^2 + y^3 - y^2 + x - x^2 \ge 0$

$\Leftrightarrow\ f(x) = yx^3 - (y^2+1)x^2 + x + y^3 - y^2 \ge 0$. Ta có $f'(x) = 3yx^2 - 2(y^2 + 1)x + 1$

$\Rightarrow f''(x) = 2[3yx - (y^2 + 1)] \ge 2[3y^2 - (y^2 + 1)] = 2(y^2 - 1) \ge 0\ \forall y \ge 1$

$\Rightarrow f'(x)$ giảm trên $[y, +\infty) \Rightarrow f'(x) \ge f'(y) = y^3 - 2y + 1 = (y-1)(y^2 + y + 1) \ge 0$

Dẫn tới $f(x)$ giảm trên $[y, +\infty) \Rightarrow f(x) \ge f(y) = y(y-1)^2 \ge 0 \Rightarrow$ (q.e.d.)

• ***Mở rộng 1:*** Cho tam giác ΔABC với độ dài ba cạnh là a, b, c và $2 \le n \in \mathbb{N}$.

Khi đó: $a^nb(a-b) + b^nc(b-c) + c^na(c-a) \ge 0$

Chứng minh

Sử dụng quy nạp: với $n = 2$ ta có: $a^2b(a-b) + b^2c(b-c) + c^2a(c-a) \ge 0$

Giả sử bất đẳng thức đúng tới n. Không mất tính tổng quát, giả sử $a \ge b \ge c$.

Theo giả thiết quy nạp: $a^nb(a-b) + b^nc(b-c) + c^na(c-a) \ge 0$

$\Rightarrow b^nc(b-c) \ge -a^nb(a-b) - c^na(c-a) \Rightarrow b^{n+1}c(b-c) \ge -a^nb^2(a-b) - c^nab(c-a)$

$\Rightarrow a^{n+1}b(a-b) + b^{n+1}c(b-c) + c^{n+1}a(c-a) \ge a^{n+1}b(a-b) - a^nb^2(a-b) - c^nab(c-a) + c^{n+1}a(c-a)$

$= a^nb(a-b)^2 + c^na(c-a)(c-b) \ge 0$

Áp dụng nguyên lý quy nạp suy ra điều phải chứng minh.

• ***Mở rộng 2:*** Cho $a, b, c > 0$ và $\text{Min}(a,b,c) \geq \frac{1}{4}\text{Max}(a,b,c)$. Chứng minh rằng:

$T = a^2b(a-b) + b^2c(b-c) + c^2a(c-a) \geq 0$

Chứng minh

$T = (a-b)^2(ab+bc-ca)+(b-c)^2(bc+ca-ab)+(c-a)^2(ca+ab-bc)$

Trường hợp 1: Nếu $a \geq b \geq c$ thì ta có:

$T = (a-b)^2(ab+bc-ca)+ca\left[(b-c)^2+(c-a)^2\right]+b(a-c)\left[(a-c)^2-(b-c)^2\right] \geq 0$

Trường hợp 2: Nếu $a \geq c \geq b$ thì ta có $b = \text{Min}(a,b,c) \geq \frac{1}{4}a \Rightarrow \sqrt{\frac{b}{a}}+\sqrt{\frac{b}{c}} \geq 2\sqrt{\frac{b}{a}} \geq 1 \Rightarrow$

$\sqrt{bc}+\sqrt{ab} \geq \sqrt{ac} \Rightarrow \sqrt{ab}, \sqrt{bc}, \sqrt{ca}$ là độ dài ba cạnh của một tam giác. Đặt

$\sqrt{ab} = x+y; \sqrt{bc} = y+z; \sqrt{ca} = z+x \ (x, y, z > 0)$. Ta có:

$T = (a-b)^2(ab+bc-ca)+(b-c)^2(bc+ca-ab)+(c-a)^2(ca+ab-bc)$

$= (a-b)^2\left(y^2+yx+yz-xz\right)+(b-c)^2\left(z^2+zx+zy-xy\right)+(c-a)^2\left(x^2+xy+xz-yz\right)$

Do $a \geq c \geq b \Rightarrow x \geq z \geq y$. Sử dụng bất đẳng thức ***Cauchy*** ta có:

$(a-c)^2x^2+(b-c)^2z^2 \geq 2|(a-c)(b-c)|xz = 2(a-c)(c-b)xz$ (1)

$\left[(a-c)^2+(b-c)^2-(a-b)^2\right]xz = -2(a-c)(c-b)xz$ (2)

$(a-b)^2\left(y^2+yx+yz\right)+(b-c)^2(zy-xy)+(c-a)^2(xy-yz)$

$= y(a-b)\left[(2x+y)(a-c)+(2z+y)(c-b)\right] \geq 0$ (3)

Cộng theo vế (1), (2) và (3) ta được: $T \geq 0$ (đpcm.)

• ***Mở rộng 3:*** Cho $a, b, c > 0$ và $\sqrt{ab}, \sqrt{bc}, \sqrt{ca}$ là độ dài ba cạnh của một tam giác.

Chứng minh rằng: $a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a) \geq 0$ (1)

Chứng minh

Bổ đề: Cho các số thực $a_1, a_2, a_3, A_1, A_2, A_3$ thỏa mãn điều kiện:

1. $A_1 + A_2 > 0 \vee A_2 + A_3 > 0 \vee A_3 + A_1 > 0$

2. $A_1A_2 + A_2A_3 + A_3A_1 \geq 0$

Ta có bất đẳng thức $A_1(a_2-a_3)^2 + A_2(a_3-a_1)^2 + A_3(a_1-a_2)^2 \geq 0$

Áp dụng:

$T = a^2b(a-b) + b^2c(b-c) + c^2a(c-a) = a^3b + b^3c + c^3a - ab^3 - bc^3 - ca^3$

$$T = abc\left[\left(\frac{a^2}{c}+\frac{b^2}{a}+\frac{c^2}{b}\right)-\left(\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}\right)\right]$$

Sử dụng công thức $\frac{x^2}{y}=\frac{x^2-(x-y)^2}{y}+\frac{(x-y)^2}{y}=2x-y+\frac{(x-y)^2}{y}$, ta có:

$$\frac{a^2}{c}+\frac{b^2}{a}+\frac{c^2}{b}=a+b+c+\frac{(a-b)^2}{a}+\frac{(b-c)^2}{b}+\frac{(c-a)^2}{c}$$

$$\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}=\frac{a^2(b^2+c^2)+b^2(c^2+a^2)+c^2(a^2+b^2)}{2abc}$$

$$=a+b+c+\frac{1}{2}\left[\frac{c(a-b)^2}{ab}+\frac{b(c-a)^2}{ca}+\frac{a(b-c)^2}{bc}\right]$$

$$T = abc\left[\frac{(a-b)^2}{a}+\frac{(b-c)^2}{b}+\frac{(c-a)^2}{c}-\frac{1}{2}\left(\frac{c(a-b)^2}{ab}+\frac{a(b-c)^2}{bc}+\frac{b(c-a)^2}{ca}\right)\right]$$

$$T=(a-b)^2\left(bc-\frac{c^2}{2}\right)+(b-c)^2\left(ca-\frac{a^2}{2}\right)+(c-a)^2\left(ab-\frac{b^2}{2}\right)$$

$$2T=(a-b)^2(2bc-c^2)+(b-c)^2(2ca-a^2)+(c-a)^2(2ab-b^2)$$

$$2T=(a-b)^2(ab+bc-ca)+(b-c)^2(bc+ca-ab)+(c-a)^2(ca+ab-bc)$$

Đặt $A_1=bc+ac-ab$; $A_2=ac+ab-bc$; $A_3=ab+bc-ca$

$\Rightarrow A_1+A_2=2ac>0$; $A_2+A_3=2ab>0$; $A_3+A_1=2bc>0$. Mặt khác, đặt $u=bc$; $v=ca$; $w=ab\Rightarrow \sqrt{u}=\sqrt{bc}$; $\sqrt{v}=\sqrt{ca}$; $\sqrt{w}=\sqrt{ab}$, khi đó

$$A_1A_2+A_2A_3+A_3A_1=(u+v-w)(v+w-u)+(v+w-u)(w+u-v)+(w+u-v)(u+v-w)$$

$$=u^2-(v-w)^2+v^2-(w-u)^2+w^2-(u-v)^2=2(uv+vw+wu)-(u^2+v^2+w^2)$$

$$=4uv-(u+v-w)^2=\left(2\sqrt{uv}+u+v-w\right)\left(2\sqrt{uv}-u-v+w\right)$$

$$=\left(\sqrt{u}+\sqrt{v}+\sqrt{w}\right)\left(\sqrt{u}+\sqrt{v}-\sqrt{w}\right)\left(\sqrt{v}+\sqrt{w}-\sqrt{u}\right)\left(\sqrt{w}+\sqrt{u}-\sqrt{v}\right)>0 \quad (3)$$

Vì $\sqrt{u},\sqrt{v},\sqrt{w}$ là độ dài ba cạnh của một tam giác, (3) đúng.

Sử dụng ***Bổ đề*** ta có (2) đúng $\Rightarrow$ (1) đúng. (đpcm)

Bài toán 5. Cho $a, b, c>0$ thỏa mãn $abc=1$

Chứng minh rằng: $T=\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right)\le 1$

(IMO41 – Korea 2000)

Chứng minh

• ***Chứng minh 1:*** Bổ đề: $(y+z-x)(z+x-y)(x+y-z) \le xyz \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}$

Áp dụng: $\left(a+1-\frac{1}{b}\right)\left(a+\frac{1}{b}-1\right)\left(\frac{1}{b}+1-a\right) \le a \cdot 1 \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$

$\Leftrightarrow \left(a-1+\frac{1}{b}\right) b\left(a+1-\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{b}+1-a\right)\frac{1}{a} \le 1 \Leftrightarrow \left(a-1+\frac{1}{b}\right)(ab+b-1)\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{a}-1\right) \le 1$

$\Leftrightarrow T = \left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right) \le 1$

• ***Chứng minh 2:*** Giả sử giữa ba biểu thức $\left(a-1+\frac{1}{b}\right); \left(b-1+\frac{1}{c}\right); \left(c-1+\frac{1}{a}\right)$ có một biểu thức không âm, chẳng hạn: $a-1+\frac{1}{b} < 0 \Rightarrow a-1 < 0\ ;\ \frac{1}{b} < 1$

$\Rightarrow a < 1$ và $b > 1 \Rightarrow b-1+\frac{1}{c} > 0$ và $c-1+\frac{1}{a} = c + \frac{1-a}{a} > 0 \Rightarrow \mathrm{T} < 0 < 1 \Rightarrow$ (đpcm)

Giả sử $\left(a-1+\frac{1}{b}\right) \ge 0; \left(b-1+\frac{1}{c}\right) \ge 0; \left(c-1+\frac{1}{a}\right) \ge 0$. Thì,

$$\times\begin{cases} \left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right) = b\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{b}+a\right) = b\left[a^2-\left(1-\frac{1}{b}\right)^2\right] \le ba^2 \\ \left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right) = c\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(1-\frac{1}{c}+b\right) = c\left[b^2-\left(1-\frac{1}{c}\right)^2\right] \le cb^2 \\ \left(c-1+\frac{1}{a}\right)\left(a-1+\frac{1}{b}\right) = a\left(c-1+\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{a}+c\right) = a\left[c^2-\left(1-\frac{1}{a}\right)^2\right] \le ac^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left(a-1+\frac{1}{b}\right)^2\left(b-1+\frac{1}{c}\right)^2\left(c-1+\frac{1}{a}\right)^2 \le a^3b^3c^3 \Leftrightarrow T = \left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right) \le 1$$

• ***Chứng minh 4:*** Vì $abc = 1$ nên trong ba số a, b, c phải có một số không lớn hơn 1 và một số không bé hơn 1. Không mất tính tổng quát, giả sử $a \ge 1 \ge b$. Ta có

$$1-\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right) = \left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(c+\frac{1}{c}-2\right) + \frac{(a-1)(1-b)}{a} \ge 0 \Rightarrow \text{(đpcm)}$$

• ***Chứng minh 5:*** Viết lại bất đẳng thức dưới dạng đồng bậc

$$\left(a-\sqrt[3]{abc}+\frac{\sqrt[3]{a^2b^2c^2}}{b}\right)\left(b-\sqrt[3]{abc}+\frac{\sqrt[3]{a^2b^2c^2}}{c}\right)\left(c-\sqrt[3]{abc}+\frac{\sqrt[3]{a^2b^2c^2}}{a}\right) \le abc$$

Đặt $a = x^3; b = y^3; c = z^3$, bất đẳng thức trở thành

$$\left(x^3-xyz+\frac{(xyz)^2}{y^3}\right)\left(y^3-xyz+\frac{(xyz)^2}{z^3}\right)\left(z^3-xyz+\frac{(xyz)^2}{x^3}\right) \le (xyz)^3$$

$$\Leftrightarrow (x^2y-y^2z+z^2x)(y^2z-z^2x+x^2y)(z^2x-x^2y+y^2z) \le (xyz)^3$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}(x^2y)^3 + 3(x^2y)(y^2z)(z^2x) \geq \sum_{cyc}(x^2y)(y^2z)(x^2y + y^2z) \quad (1)$$

Lại đặt $m = x^2y$; $n = y^2z$; $p = z^2x$ thì bất đẳng thức (1) có dạng

$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a)$, đúng theo bất đẳng thức ***Schur*** (đpcm)

• ***Chứng minh 6:*** Sử dụng giả thiết $abc = 1$ ta có các đẳng thức

$$\frac{1}{a}\left(a-1+\frac{1}{b}\right)+c\left(b-1+\frac{1}{c}\right)=2 \quad ;\frac{1}{b}\left(b-1+\frac{1}{c}\right)+a\left(c-1+\frac{1}{a}\right)=2$$

$$;\frac{1}{c}\left(c-1+\frac{1}{a}\right)+b\left(a-1+\frac{1}{b}\right)=2$$

Đặt $x=\left(a-1+\frac{1}{b}\right); y=\left(b-1+\frac{1}{c}\right); z=\left(c-1+\frac{1}{a}\right)$, ta chỉ cần xét $x, y, z \geq 0$. Theo ***AM – GM*** ta có $2=\frac{1}{a}x+cy \geq 2\sqrt{\frac{c}{a}xy} \Rightarrow xy \leq \frac{a}{c}$. Chứng minh tương tự $yz \leq \frac{b}{a}$ và $zx \leq \frac{c}{b}$.

Vậy $(xyz)^2 \leq \frac{a}{c}.\frac{b}{a}.\frac{c}{b}=1 \Rightarrow xyz \leq 1$ (đpcm)

• ***Chứng minh 7:*** Đặt $a=\frac{x}{y}, b=\frac{y}{z}, c=\frac{z}{x}$ với $x, y, z > 0$. Bất đẳng thức trở thành

$$\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}-1\right)\left(\frac{y}{z}+\frac{x}{z}-1\right)\left(\frac{z}{x}+\frac{y}{x}-1\right) \leq 1 \Leftrightarrow (y+z-x)(z+x-y)(x+y-z) \leq xyz$$

Vậy ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức sau với trường hợp không tầm thường a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác:

$$(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c) \leq abc \quad (1)$$

• ***Chứng minh 7a:*** Ba nhân tử ở vế trái của (1) đều lớn hơn hay bằng 0.

sử dụng ***AM – GM,*** ta có:

$$\times\begin{cases}\sqrt{(a+c-b)(b+a-c)} \leq \dfrac{(a+c-b)+(b+a-c)}{2}=a\\ \sqrt{(b+a-c)(c+b-a)} \leq \dfrac{(b+a-c)+(c+b-a)}{2}=b\\ \sqrt{(a+c-b)(c+b-a)} \leq \dfrac{(a+c-b)+(c+b-a)}{2}=c\end{cases}$$

$\Rightarrow (b+c-a)(c+a-b)(a+b-c) \leq abc \Rightarrow$ (đpcm)

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$.

• ***Chứng minh 7b:*** Do a,b,c là độ dài ba cạnh của một tam giác nên tồn tại các số $m,n,p>0$ thỏa mãn $a=m+n$, $b=n+p$, $c=p+m$. Khi đó bất đẳng thức trở thành $(m+n)(n+p)(p+m)\ge 8mnp$. Ta có

$$(m+n)(n+p)(p+m)-8mnp=m(n-p)^2+n(p-m)^2+p(m-n)^2\ge 0 \text{ (đpcm)}$$

• ***Chứng minh 7c:*** Không mất tính tổng quát giả sử $a\ge b\ge c$, khi đó viết bất đẳng thức (1) dưới dạng sau $a(a-b)(a-c)+b(b-c)(b-a)+c(c-a)(c-b)\ge 0$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2(a+b-c)+c(c-a)(c-b)\ge 0 \qquad (2)$$

Do bất đẳng thức (2) đúng nên bất đẳng thức (1) được chứng minh.

• ***Chứng minh 7d:*** Không mất tính tổng quát giả sử $a\ge b\ge c$. Nếu hai trog ba số a,b,c bằng nhau thì bất đẳng thức (2) hiển nhiên đúng. Xét trường hợp $a>b>c$, khi đó bất đẳng thức (2) tương đương với $\dfrac{a}{b-c}-\dfrac{b}{a-c}+\dfrac{c}{a-b}\ge 0$

Bất đẳng thức này luôn đúng vì $\dfrac{c}{a-b}>0$ và $\begin{cases}a>b>0\\ a-c>b-c>0\end{cases}\Rightarrow \dfrac{a}{b-c}>\dfrac{b}{a-c}$.

• ***Chứng minh 7e:*** Không mất tính tổng quát, giả sử $a\le b\le c$. Đặt $b=a+x; c=a+y$ thì $x;y\ge 0$. Bất đẳng thức (2) trở thành $(x^2-xy+y^2)a+(x-y)^2(x+y)\ge 0$ luôn đúng (đpcm).

• ***Chứng minh 7f:*** Không mất tính tổng quát giả sử $a\ge b\ge c$ và đặt

$$f(a,b,c)=a(a-b)(a-c)+b(b-c)(b-a)+c(c-a)(c-b)$$

Ta có $f(a,b,c)-f\left(\dfrac{a+b}{2},\dfrac{a+b}{2},c\right)=(a-b)^2\left(a+b-\dfrac{5c}{4}\right)\ge 0$

Mà $f\left(\dfrac{a+b}{2},\dfrac{a+b}{2},c\right)=c\left(c-\dfrac{a+b}{2}\right)^2\ge 0$.

Suy ra $f(a,b,c)\ge f\left(\dfrac{a+b}{2},\dfrac{a+b}{2},c\right)\ge 0$ (đpcm)

• ***Chứng minh 7g:*** Biến đổi bất đẳng thức (1) về dạng

$3abc\ge a(b^2+c^2-a^2)+b(c^2+a^2-b^2)+c(a^2+b^2-c^2)$

$\Leftrightarrow \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}+\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\le\dfrac{3}{2}$. Giả sử $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$ thì bất đẳng thức này trở thành $\cos A+\cos B+\cos C\le\dfrac{3}{2}$, luôn đúng với mọi tam giác ABC.

• ***Mở rộng 1:*** Cho a, b, c, $t>0$ thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng:

$$T=\left(a-t+\frac{1}{b}\right)\left(b-t+\frac{1}{c}\right)\left(c-t+\frac{1}{a}\right)\le(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)(1-t^2)+4-3t.$$

• *Mở rộng 2:* Cho a,b,c là các số dương có tích bằng 1. Chứng minh rằng

$$\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)+\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right)+\left(c-1+\frac{1}{a}\right)\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\geq 3$$

Bài toán 6. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a(1+b)}+\frac{1}{b(1+c)}+\frac{1}{c(1+a)}\geq\frac{3}{1+abc}\quad(1)$$

(Hungarian Mathematical Olympiad 2003)

Chứng minh

• ***Chứng minh 1:*** $(1)\Leftrightarrow\frac{1}{a(1+b)}-\frac{1}{1+abc}+\frac{1}{b(1+c)}-\frac{1}{1+abc}+\frac{1}{c(1+a)}-\frac{1}{1+abc}\geq 0$

$$\Leftrightarrow\frac{a(bc-1)-(ab-1)}{a(b+1)(abc+1)}+\frac{b(ca-1)-(bc-1)}{b(c+1)(abc+1)}+\frac{c(ab-1)-(ca-1)}{c(a+1)(abc+1)}\geq 0$$

$$\Leftrightarrow\frac{(ab-1)}{abc+1}\left(\frac{1}{a+1}-\frac{1}{a(b+1)}\right)+\frac{(bc-1)}{abc+1}\left(\frac{1}{b+1}-\frac{1}{b(c+1)}\right)+\frac{(ca-1)}{abc+1}\left(\frac{1}{c+1}-\frac{1}{c(a+1)}\right)\geq 0$$

$$\Leftrightarrow\frac{(ab-1)^2}{a(a+1)(b+1)(abc+1)}+\frac{(bc-1)^2}{b(b+1)(c+1)(abc+1)}+\frac{(ca-1)^2}{c(c+1)(a+1)(abc+1)}\geq 0$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c>0$.

• ***Chứng minh 2:*** Ta có:

$$\frac{1}{a(1+b)}+\frac{1}{1+abc}=\frac{1}{1+abc}\cdot\frac{(1+abc)+a(1+b)}{a(1+b)}=\frac{1}{1+abc}\cdot\frac{ab(1+c)+(1+a)}{a(1+b)}$$

$$\Leftrightarrow+\begin{cases}\frac{1}{a(1+b)}+\frac{1}{1+abc}=\frac{1}{1+abc}\left[\frac{b(1+c)}{1+b}+\frac{1+a}{a(1+b)}\right]\\ \frac{1}{b(1+c)}+\frac{1}{1+abc}=\frac{1}{1+abc}\left[\frac{c(1+a)}{1+c}+\frac{1+b}{b(1+c)}\right]\\ \frac{1}{c(1+a)}+\frac{1}{1+abc}=\frac{1}{1+abc}\left[\frac{a(1+b)}{1+a}+\frac{1+c}{c(1+a)}\right]\end{cases}$$

$$\Rightarrow\left[\frac{1}{a(1+b)}+\frac{1}{b(1+c)}+\frac{1}{c(1+a)}\right]+\frac{3}{1+abc}=$$

$$=\frac{1}{1+abc}\left[\frac{b(1+c)}{1+b}+\frac{1+a}{a(1+b)}+\frac{c(1+a)}{1+c}+\frac{1+b}{b(1+c)}+\frac{a(1+b)}{1+a}+\frac{1+c}{c(1+a)}\right]$$

$$\geq\frac{1}{1+abc}\left[6\cdot\sqrt[6]{\frac{b(1+c)}{1+b}\cdot\frac{1+a}{a(1+b)}\cdot\frac{c(1+a)}{1+c}\cdot\frac{1+b}{b(1+c)}\cdot\frac{a(1+b)}{1+a}\cdot\frac{1+c}{c(1+a)}}\right]=\frac{6}{1+abc}$$

Dẫn tới (1) đúng. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c>0$.

• ***Chứng minh 3:***

Bổ đề: Nếu $\begin{cases}a_1\geq b_1\\ a_2\leq b_2\end{cases}\vee\begin{cases}a_1\leq b_1\\ a_2\geq b_2\end{cases}$ thì $a_1b_2+b_1a_2\geq a_1a_2+b_1b_2$

Chứng minh: $0\leq(a_1-b_1)(b_2-a_2)=(a_1b_2+b_1a_2)-(a_1a_2+b_1b_2)\Rightarrow a_1b_2+b_1a_2\geq a_1a_2+b_1b_2$

Áp dụng: $(1) \Leftrightarrow \frac{1}{a(1+b)}+\frac{abc}{a(1+b)}+\frac{1}{b(1+c)}+\frac{abc}{b(1+c)}+\frac{1}{c(1+a)}+\frac{abc}{c(1+a)}\geq 3$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a(1+b)}+\frac{ab}{1+a}+\frac{1}{b(1+c)}+\frac{bc}{1+b}+\frac{1}{c(1+a)}+\frac{ca}{1+c}\geq 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{1+b}+b\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{a}}+\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{1+c}+c\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{b}}+\frac{1}{c}\cdot\frac{1}{1+a}+a\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{c}}\geq 6$$

Sử dụng bổ đề ta có:

$$+\begin{cases}\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{1+b}+b\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{a}}\geq\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{a}}+b\cdot\frac{1}{1+b}=\frac{1}{1+a}+\frac{b}{1+b}\\ \frac{1}{b}\cdot\frac{1}{1+c}+c\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{b}}\geq\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{b}}+c\cdot\frac{1}{1+c}=\frac{1}{1+b}+\frac{c}{1+c}\\ \frac{1}{c}\cdot\frac{1}{1+a}+a\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{c}}\geq\frac{1}{c}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{c}}+a\cdot\frac{1}{1+a}=\frac{1}{1+c}+\frac{a}{1+a}\end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{1+b}+b\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{a}}+\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{1+c}+c\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{b}}+\frac{1}{c}\cdot\frac{1}{1+a}+a\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{c}}\geq 6 \Rightarrow \text{(đpcm.)}$$

• ***Chứng minh 4:***

• ***Mở rộng :*** *Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{a(1+b)}+\frac{1}{b(1+c)}+\frac{1}{c(1+a)}\geq\frac{3}{\sqrt[3]{abc}(1+\sqrt[3]{abc})}$$

Bài toán 7. Cho $\begin{cases}a,b,c\geq 0\\ a+b+c=1\end{cases}$ Chứng minh rằng: $0\leq ab+bc+ca-2abc\leq\frac{7}{27}$

(IMO25 – Czech 1984)

Chứng minh

• ***Chứng minh 1:*** Giả thiết dẫn tới $a, b, c \in [0,1] \Rightarrow abc \in [0,1]$, suy ra

$ab+bc+ca-2abc\geq 3.\sqrt[3]{ab.bc.ca}-2abc=3(abc)^{\frac{2}{3}}-2abc \geq 3abc - 2abc = abc \geq 0.$
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi (a, b, c) là hoán vị của $(0, 0, 1)$.

Bổ đề: $(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)\leq abc \quad \forall\, a, b, c\geq 0$

Áp dụng: Bất đẳng thức $\Leftrightarrow (1-2a)(1-2b)(1-2c)\leq abc$

$$\Leftrightarrow 1-2(a+b+c)+4(ab+bc+ca)-8abc\leq abc$$

$$\Leftrightarrow ab+bc+ca-2abc\leq\frac{1}{4}(1+abc)\leq\frac{1}{4}\left[1+\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3\right]=\frac{7}{27}$$

• ***Chứng minh 2:*** Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức $ab+bc+ca-2abc\leq\frac{7}{27}$

Không mất tính tổng quát giả sử $a \geq b \geq c \Rightarrow 0 < c \leq \frac{1}{3}$

Biến đổi và thế: $S = ab(1-2c) + c(a+b) = ab(1-2c) + c(1-c)$

$$\leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2(1-2c) + c(1-c) = \left(\frac{1-c}{2}\right)^2(1-2c) + c(1-c) = \frac{-1}{2}c^3 + \frac{1}{4}c^2 + \frac{1}{4} = f(c)$$

Ta có: $f'(c) = -\frac{c}{2}(3c-1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c=0 \\ c=\frac{1}{3} \end{array}\right.$

c	0	$1/3$
$f'(c)$	$+$	
$f(c)$	$1 \nearrow$	$\frac{7}{27}$

Bảng biến thiên chỉ ra $S \leq \text{Max } f(c) = \frac{7}{27}$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = \frac{1}{3}$

• ***Chứng minh 3:*** $a(b+c) + (1-2a)bc = a(1-a) + (1-2a)bc = a(1-a) + (1-2a)u = f(u)$

với $0 \leq u = bc \leq \left(\frac{b+c}{2}\right)^2 = \frac{(1-a)^2}{4}$. Để ý rằng, đồ thị hàm số $y = f(u)$ là một đoạn thẳng

với $u \in \left[0; \frac{1}{4}(1-a)^2\right]$. Ta có $f(0) = a(1-a) \leq \left[\frac{a+(1-a)}{2}\right]^2 = \frac{1}{4} < \frac{7}{27}$

$$f\left(\frac{1}{4}(1-a)^2\right) = \frac{1}{4}(-2a^3 + a^2 + 1) = \frac{7}{27} - \frac{1}{4}\left(2a + \frac{1}{3}\right)\left(a - \frac{1}{3}\right)^2 \leq \frac{7}{27}.$$

Vậy $f(u) \leq \frac{7}{27}$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = \frac{1}{3}$.

Bài toán 8. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{(b+c-a)^2}{(b+c)^2+a^2} + \frac{(c+a-b)^2}{(c+a)^2+b^2} + \frac{(a+b-c)^2}{(a+b)^2+c^2} \geq \frac{3}{5} \qquad (1)$$

(The Japanese's proposal – PSFJIMO38 – Argentina 1997)

Chứng minh

• ***Chứng minh 1:*** Đặt $m = a+b+c$; $a_1 = \frac{a}{m}; b_1 = \frac{b}{m}; c_1 = \frac{c}{m} \Rightarrow a_1 + b_1 + c_1 = 1$

$$(1) \Leftrightarrow \frac{(b_1+c_1-a_1)^2}{(b_1+c_1)^2+a_1^2} + \frac{(c_1+a_1-b_1)^2}{(c_1+a_1)^2+b_1^2} + \frac{(a_1+b_1-c_1)^2}{(a_1+b_1)^2+c_1^2} \geq \frac{3}{5}$$

$$\Leftrightarrow T = \frac{(1-2a_1)^2}{(1-a_1)^2+a_1^2} + \frac{(1-2b_1)^2}{(1-b_1)^2+b_1^2} + \frac{(1-2c_1)^2}{(1-c_1)^2+c_1^2} \geq \frac{3}{5}$$

Ta sẽ chứng minh: $f(x) = \frac{(1-2x)^2}{(1-x)^2+x^2} \geq \frac{23-54x}{25}$, $\forall x \in (0, 1)$

$$\Leftrightarrow 25(1-2x)^2 \geq (23-54x)\left[x^2+(1-x)^2\right] \Leftrightarrow 2(3x-1)^2(6x+1) \geq 0$$

$$\Rightarrow T = f(a_1) + f(b_1) + f(c_1) \geq \frac{23\times 3 - 54(a_1 + b_1 + c_1)}{25} = \frac{3}{5}$$

• ***Chứng minh 2:*** (1) $\Leftrightarrow \sum_{sym} \frac{(b+c-a)^2}{(b+c)^2 + a^2} \geq \frac{3}{5} \Leftrightarrow \sum_{sym} \frac{2ab + 2ac}{a^2 + b^2 + c^2 + 2bc} \leq \frac{12}{5}$

Ký hiệu $s = a^2 + b^2 + c^2$, và biến đổi:

$$5s^2 \sum_{sym} ab + 10s \sum_{sym} a^2bc + 20 \sum_{sym} a^3b^2c \leq 6s^3 + 6s^2 \sum_{sym} ab + 12s \sum_{sym} a^2bc + 48a^2b^2c^2$$

$$\Leftrightarrow 6s^3 + s^2 \sum_{sym} ab + 2s \sum_{sym} a^2bc + 8 \sum_{sym} a^2b^2c^2 \geq 10s \sum_{sym} a^2bc + 20 \sum_{sym} a^3b^2c$$

$$\Leftrightarrow \sum_{sym} (3a^6 + 2a^5b - 2a^4b^2 + 3a^4bc + 2a^3b^3 - 12a^3b^2c + 4a^2b^2c^2) \geq 0 \quad (3)$$

Sử dụng bất đẳng thức ***Shur,*** nhân cả hai vế với $4abc$

$$\Rightarrow \sum_{sym} (4a^4bc - 8a^3b^2c + 4a^2b^2c^2) \geq 0$$

Suy ra (3) $\Leftrightarrow \sum_{sym} (3a^6 + 2a^5b - 2a^4b^2 - a^4bc + 2a^3b^3 - 4a^3b^2c) \geq 0$

Sử dụng bất đẳng thức ***AM – GM,*** ta có bất đẳng thức sau và (3) được chứng minh xong.

$$2\sum_{sym} \left[\frac{2a^6 + b^6}{3} - a^4b^2 \right] \geq 0 \; ; \; \sum_{sym} \left[\frac{4a^6 + b^6 + c^6}{6} - a^4bc \right] \geq 0$$

$$2\sum_{sym} \left[\frac{2a^3b^3 + c^3a^3}{3} - a^3b^2c \right] \geq 0 \; ; \; 2\sum_{sym} \left[\frac{2a^5b + a^5c + ab^5 + ac^5}{6} - a^3b^2c \right] \geq 0$$

• ***Chứng minh 3:***

Giả sử $a \geq b \geq c$, đặt $f(a,b,c) = \frac{(b+c-a)^2}{(b+c)^2 + a^2} + \frac{(c+a-b)^2}{(c+a)^2 + b^2} + \frac{(a+b-c)^2}{(a+b)^2 + c^2}$

Bước 1: Ta sẽ chứng minh $f(a,b,c) \geq f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, c\right)$

$$T_1 = \frac{(b+c-a)^2}{(b+c)^2 + a^2} + \frac{(c+a-b)^2}{(c+a)^2 + b^2} \geq \frac{2c^2}{\left(c + \frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2} = T_2$$

Đặt A = $b + c - a$; B = $c + a - b$; $x = (b+c)^2 + a^2$; $y = (c+a)^2 + b^2$

$$x + y = (b+c)^2 + a^2 + (c+a)^2 + b^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2 + ca + cb)$$

$$Ay - Bx = (b+c-a)\left[(c+a)^2 + b^2\right] - (c+a-b)\left[(b+c)^2 + a^2\right]$$

$= [(a+b+c)-2a][a^2+b^2+c^2+2ac] - [(a+b+c)-2b][a^2+b^2+c^2+2bc]$

$= 2(b-a)(a^2+b^2+c^2) + 4c(b^2-a^2) = 2(b-a)(a^2+b^2+c^2+4ca+4cb)$

$= 2(b-a)[(a^2+b^2+c^2+ca+cb)+3ca+3cb] = (b-a)(x+y+6ca+6cb)$

$$\Rightarrow T_1 - \frac{(A+B)^2}{x+y} = \frac{A^2}{x} + \frac{B^2}{y} - \frac{(A+B)^2}{x+y} = \frac{(Ay-Bx)^2}{xy(x+y)} = \frac{(b-a)^2[x+y+6c(a+b)]^2}{xy(x+y)}$$

Đặt $z = \dfrac{a+b}{2} \Rightarrow x+y-2\left[(c+z)^2+z^2\right] = 2(a^2+b^2+c^2+ac+bc) - 2(c^2+2z^2+2cz)$

$= 2(a^2+b^2+ac+bc) - (a+b)^2 - 2c(a+b) = a^2+b^2-2ab = (a-b)^2$

$$\Rightarrow T_2 - \frac{(A+B)^2}{x+y} = \frac{2c^2}{(c+z)^2+z^2} - \frac{4c^2}{x+y} = \frac{2c^2\left[(x+y)-2(c+z)^2-2z^2\right]}{\left[(c+z)^2+z^2\right](x+y)} = \frac{2c^2(a-b)^2}{\left[(c+z)^2+z^2\right](x+y)}$$

$$T_1 \ge T_2 \Leftrightarrow \frac{(b-a)^2[x+y+6c(a+b)]^2}{xy(x+y)} \ge \frac{2c^2(a-b)^2}{\left[(c+z)^2+z^2\right](x+y)} \qquad (2)$$

Nếu $a=b$ thì (2) đúng. Nếu $a \ne b$ thì (2) $\Leftrightarrow \dfrac{[x+y+6c(a+b)]^2}{xy} \ge \dfrac{2c^2}{(c+z)^2+z^2}$

Ta có $\dfrac{[x+y+6c(a+b)]^2}{xy} > \dfrac{(x+y)^2}{xy} \ge \dfrac{\left(2\sqrt{xy}\right)^2}{xy} = 4 > 2 = \dfrac{2c^2}{c^2} > \dfrac{2c^2}{(c+z)^2+z^2}$

Bước 2: Ta sẽ chứng minh $f(a,a,c) \ge \dfrac{3}{5}$. Đặt $u = \dfrac{a}{c} \ge 1$, thì

$$f(a,a,c) \ge \frac{3}{5} \Leftrightarrow f(u,u,1) \ge \frac{3}{5} \quad \forall u \ge 1 \Leftrightarrow \frac{(2u-1)^2}{4u^2+1} + \frac{2}{(u+1)^2+u^2} \ge \frac{3}{5}.$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{2u^2+2u+1} - \frac{4u}{4u^2+1} \ge \frac{-2}{5} \Leftrightarrow \frac{2u}{4u^2+1} - \frac{1}{2u^2+2u+1} \le \frac{1}{5}$$

$$\Leftrightarrow 5(4u^3+4u^2+2u-4u^2-1) \le 8u^4+8u^3+6u^2+2u+1 \Leftrightarrow (u-1)^2\left[2(u+1)^2+2u^2+1\right] \ge 0$$

• ***Chứng minh 4:***

Bổ đề: Cho các số thực $a_1, a_2, a_3, A_1, A_2, A_3$ thỏa mãn điều kiện:

1. $A_1 + A_2 \ge 0$; $A_2 + A_3 \ge 0$; $A_3 + A_1 \ge 0$.

2. Nếu $a_{i_1} \le a_{i_2} \le a_{i_3}$ *hay* $a_{i_1} \ge a_{i_2} \ge a_{i_3}$ thì $A_{i_2} \ge 0$ với $(i_1, i_2, i_3) = (1, 2, 3)$

Ta có bất đẳng thức $A_1(a_2-a_3)^2 + A_2(a_3-a_1)^2 + A_3(a_1-a_2)^2 \ge 0$

Áp dụng: (1) $\Leftrightarrow \dfrac{2a(b+c)}{(b+c)^2+a^2}+\dfrac{2b(c+a)}{(c+a)^2+b^2}+\dfrac{2c(a+b)}{(a+b)^2+c^2}\le\dfrac{12}{5}$

$$\Leftrightarrow \frac{(a+b+c)^2}{(b+c)^2+a^2}+\frac{(a+b+c)^2}{(c+a)^2+b^2}+\frac{(a+b+c)^2}{(a+b)^2+c^2}\le\frac{27}{5}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(b+c)^2+a^2}+\frac{1}{(c+a)^2+b^2}+\frac{1}{(a+b)^2+c^2}\le\frac{27}{5}\cdot\frac{1}{(a+b+c)^2}\quad(2)$$

Đặt $x=(b+c)^2+a^2$, $y=(c+a)^2+b^2$, $z=(a+b)^2+c^2$ và $s=a+b+c$

Thì (2) $\Leftrightarrow \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\le\dfrac{27}{5}\cdot\dfrac{1}{s^2}$

Chú ý rằng: $x+y+z=a^2+b^2+c^2+(b+c)^2+(c+a)^2+(a+b)^2$

$$=\frac{5}{3}(a+b+c)^2+\frac{2}{3}\left[(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2\right]=\frac{5}{3}s^2+\frac{2}{3}\left[(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2\right]\ge\frac{5}{3}s^2\quad(3)$$

Dẫn tới $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\ge\dfrac{9}{x+y+z}$; $\dfrac{27}{5}\cdot\dfrac{1}{s^2}\ge\dfrac{9}{x+y+z}$

Vì vậy, (2) $\Leftrightarrow \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}-\dfrac{9}{x+y+z}\le 9\left(\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{1}{s^2}-\dfrac{1}{x+y+z}\right)$

$$\Leftrightarrow (x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)-9\le 9\left(\frac{3}{5}\cdot\frac{x+y+z}{s^2}-1\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-2\right)+\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}-2\right)+\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{z}-2\right)\le\frac{18}{5}\cdot\frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{s^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-y)^2}{xy}+\frac{(y-z)^2}{yz}+\frac{(z-x)^2}{zx}\le\frac{18}{5}\cdot\frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{s^2}\quad(4)$$

Ta có: $x-y=(b+c)^2+a^2-(c+a)^2-b^2=2c(b-a)$ và

$xy=\left[(b+c)^2+a^2\right]\left[(c+a)^2+b^2\right]\ge$

$\ge c^2\left(c^2+2a^2+2b^2+2ca+2cb+4ab\right)=c^2\left[(a+b+c)^2+(a+b)^2\right]$

Do đó, $\dfrac{(x-y)^2}{xy}\le\dfrac{4c^2(a-b)^2}{c^2\left[(a+b+c)^2+(a+b)^2\right]}=\dfrac{4(a-b)^2}{(a+b+c)^2+(a+b)^2}$

Tương tự, ta có thể chứng minh:

$$\frac{(y-z)^2}{yz}\le\frac{4(b-c)^2}{(a+b+c)^2+(b+c)^2}\ \text{ và }\ \frac{(z-x)^2}{zx}\le\frac{4(c-a)^2}{(a+b+c)^2+(c+a)^2}$$

Cộng ba bất đẳng thức tương tự ta có:

$$\frac{(x-y)^2}{xy}+\frac{(y-z)^2}{yz}+\frac{(z-x)^2}{zx}\le 4\left[\frac{(a-b)^2}{(a+b+c)^2+(a+b)^2}+\frac{(b-c)^2}{(a+b+c)^2+(b+c)^2}+\frac{(c-a)^2}{(a+b+c)^2+(c+a)^2}\right]$$

Vì vậy (4) đúng nếu ta chứng minh được

$$(a-b)^2\left[\frac{9}{10}-\frac{(a+b+c)^2}{(a+b+c)^2+(a+b)^2}\right]+(b-c)^2\left[\frac{9}{10}-\frac{(a+b+c)^2}{(a+b+c)^2+(b+c)^2}\right]+$$

$$+(c-a)^2\left[\frac{9}{10}-\frac{(a+b+c)^2}{(a+b+c)^2+(c+a)^2}\right]\ge 0 \qquad (5)$$

Đặt $X=\dfrac{b+c}{a+b+c}$; $Y=\dfrac{c+a}{a+b+c}$; $Z=\dfrac{a+b}{a+b+c}$ thì

$$(5)\Leftrightarrow (a-b)^2\left[\frac{9}{10}-\frac{1}{1+Z^2}\right]+(b-c)^2\left[\frac{9}{10}-\frac{1}{1+X^2}\right]+(c-a)^2\left[\frac{9}{10}-\frac{1}{1+Y^2}\right]\ge 0$$

Ký hiệu $a_1=a,\ a_2=b,\ a_3=c$ và

$$A_1=\frac{9}{10}-\frac{1}{1+X^2};\ A_2=\frac{9}{10}-\frac{1}{1+Y^2};\ A_3=\frac{9}{10}-\frac{1}{1+Z^2}$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a\ge b\ge c$. Thì ta có $a_1\ge a_2\ge a_3$ and $X\le Y\le Z$. Vì vậy $A_1\le A_2\le A_3$. Cần chứng minh $A_1+A_2\ge 0$, $\dfrac{1}{1+X^2}+\dfrac{1}{1+Y^2}\le\dfrac{9}{5}$ (6)

Thật vậy, từ $Y=\dfrac{c+a}{a+b+c}\ge\dfrac{c+a}{2a+c}\ge\dfrac{1}{2}$ thì $\dfrac{1}{1+Y^2}\le\dfrac{4}{5}$

Mặt khác, $\dfrac{1}{1+X^2}\le 1$ đúng, bởi vậy (6) đúng. Dẫn tới $A_1+A_2\ge 0$; $A_2+A_3\ge 0$;

$A_3+A_1\ge 0$, cùng với $A_2>0$, áp dụng bổ đề, (1) đúng.

Ghi chú: (1) $\Leftrightarrow \dfrac{1}{(b+c)^2+a^2}+\dfrac{1}{(c+a)^2+b^2}+\dfrac{1}{(a+b)^2+c^2}\le\dfrac{27}{5}\cdot\dfrac{1}{(a+b+c)^2}$

Từ đánh giá tốt hơn $\dfrac{1}{1+X^2}+\dfrac{1}{1+Y^2}\le\dfrac{8}{5}$, ta cũng có một bất đẳng thức chặt hơn

• ***Chứng minh 5:***

Bổ đề: $(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)\le abc$

Áp dụng: Đặt $x=\dfrac{b+c}{a};y=\dfrac{c+a}{b};z=\dfrac{a+b}{c}\Rightarrow x+y+z\ge 6\sqrt[6]{\dfrac{b}{a}\cdot\dfrac{c}{a}\cdot\dfrac{c}{b}\cdot\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{a}{c}\cdot\dfrac{b}{c}}=6;$

Ta sẽ chứng minh: $xy+yz+zx\ge 2(x+y+z)\Leftrightarrow \sum_{cyc}\dfrac{(b+c)(c+a)}{ab}\ge 2\sum_{cyc}\dfrac{b+c}{a}$

$$\Leftrightarrow \frac{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)+3abc}{abc} \geq 2\frac{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)-(a^3+b^3+c^3)}{abc}$$

$$\Leftrightarrow a^3+b^3+c^3+3abc \geq a^2b+b^2c+c^2a+a^2c+b^2a+c^2b$$

$\Leftrightarrow (b+c-a)(c+a-b)(a+b-c) \leq abc$ (đúng theo bổ đề)

Biến đổi và sử dụng bất đẳng thức ***Cauchy – Schwarz*** ta có:

$$\frac{(b+c-a)^2}{(b+c)^2+a^2}+\frac{(c+a-b)^2}{(c+a)^2+b^2}+\frac{(a+b-c)^2}{(a+b)^2+c^2}=\frac{(x-1)^2}{x^2+1}+\frac{(y-1)^2}{y^2+1}+\frac{(z-1)^2}{z^2+1}$$

$$\geq \frac{\left[(x-1)+(y-1)+(z-1)\right]^2}{(x^2+1)+(y^2+1)+(z^2+1)}=\frac{(x+y+z-3)^2}{(x^2+y^2+z^2)+3}$$

Ta chứng minh: $\dfrac{(x+y+z-3)^2}{(x^2+y^2+z^2)+3} \geq \dfrac{3}{5} \Leftrightarrow 5(x+y+z-3)^2 \geq 3(x^2+y^2+z^2)+9$

$$\Leftrightarrow 5(x+y+z)^2-30(x+y+z)+45 \geq 3(x^2+y^2+z^2)+9$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{T}=(x+y+z)^2-15(x+y+z)+3(xy+yz+zx)+18 \geq 0$$

Ta có: $\mathrm{T} \geq (x+y+z)^2-15(x+y+z)+6(x+y+z)+18$

$= (x+y+z)^2-9(x+y+z)+18=[(x+y+z)-3][(x+y+z)-6] \geq 0$ (đpcm)

• ***Chứng minh 6:***

$$(1) \Leftrightarrow \frac{(b+c)a}{(b+c)^2+a^2}+\frac{(c+a)b}{(c+a)^2+b^2}+\frac{(a+b)c}{(a+b)^2+c^2} \leq \frac{6}{5}$$

Chuẩn hóa $a+b+c=1$, khi đó bất đẳng thức trở thành

$$\frac{(1-a)a}{2a^2-2a+1}+\frac{(1-b)b}{2b^2-2b+1}+\frac{(1-c)c}{2c^2-2c+1} \leq \frac{6}{5}$$

Sử dụng bất đẳng thức **AM – GM** ta có:

$$2a(1-a) \leq \frac{(1+a)^2}{4} \Leftrightarrow 2a^2-2a+1 \geq 1-\frac{(1+a)^2}{4}=\frac{(1-a)(a+3)}{4}$$

Suy ra: $\dfrac{(1-a)a}{2a^2-2a+1} \leq \dfrac{4(1-a)a}{(1-a)(a+3)}=\dfrac{4a}{a+3}$

Tương tự : $\dfrac{(1-b)b}{2b^2-2b+1} \leq \dfrac{4b}{b+3}$; $\dfrac{(1-c)c}{2c^2-2c+1} \leq \dfrac{4c}{c+3}$

Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên suy ra ta chỉ cần chứng minh:

$$\frac{4a}{a+3}+\frac{4b}{b+3}+\frac{4c}{c+3} \leq \frac{6}{5} \Leftrightarrow \frac{1}{a+3}+\frac{1}{b+3}+\frac{1}{c+3} \geq \frac{9}{10}$$

Theo $AM-GM$ $\frac{1}{a+3}+\frac{1}{b+3}+\frac{1}{c+3}\ge\frac{9}{(a+b+c)+9}=\frac{9}{10}$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c>0$.

• ***Chứng minh 7:*** Chuẩn hóa $a+b+c=3$. Bất đẳng thức trở thành

$$\frac{(3-2a)^2}{(3-a)^2+a^2}+\frac{(3-2b)^2}{(3-b)^2+b^2}+\frac{(3-2c)^2}{(3-c)^2+c^2}\ge\frac{3}{5}$$

$$\Leftrightarrow\sum_{cyc}\frac{4a^2-12a+9}{2a^2-6a+9}\ge\frac{3}{5}\Leftrightarrow\sum_{cyc}\frac{1}{2a^2-6a+9}\le\frac{3}{5}$$

Nhận xét rằng $\frac{1}{2x^2-6x+9}\le\frac{1}{5}-\frac{2}{25}(x-1)\Leftrightarrow(2x+1)(x-1)^2\ge0$, luôn đúng $\forall x\ge0$.

Suy ra $\frac{1}{2a^2-6a+9}+\frac{1}{2b^2-6b+9}+\frac{1}{2c^2-6c+9}\le\frac{3}{5}-\frac{2}{25}(a+b+c-3)=\frac{3}{5}$. (đpcm)

Mở rộng: Cho $a, b, c>0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{[\alpha(b+c)-a]^2}{\alpha(b+c)^2+a^2}+\frac{[\alpha(c+a)-b]^2}{\alpha(c+a)^2+b^2}+\frac{[\alpha(a+b)-c]^2}{\alpha(a+b)^2+c^2}\ge\frac{3(2\alpha-1)^2}{4\alpha+1}\Leftrightarrow\alpha\in\left[\frac{3\sqrt{37}-23}{28};\frac{3\sqrt{37}+23}{28}\right]$$

Bài toán 9. Chứng minh: $(xy+yz+zx)\left[\frac{1}{(x+y)^2}+\frac{1}{(y+z)^2}+\frac{1}{(z+x)^2}\right]\ge\frac{9}{4}, \forall x,y,z\ge0$ (1)

(Iranian Mathematical Olympiad 1996)

Chứng minh

• ***Chứng minh 1: Bổ đề:*** Cho các số thực $a_1, a_2, a_3, A_1, A_2, A_3$ thỏa mãn điều kiện:

1. $A_1+A_2\ge0$; $A_2+A_3\ge0$; $A_3+A_1\ge0$.

2. Nếu $a_{i_1}\le a_{i_2}\le a_{i_3}$ hay $a_{i_1}\ge a_{i_2}\ge a_{i_3}$ thì $A_{i_2}\ge0$ với $(i_1, i_2, i_3)=(1,2,3)$

Ta có bất đẳng thức $A_1(a_2-a_3)^2+A_2(a_3-a_1)^2+A_3(a_1-a_2)^2\ge0$

Áp dụng: $(1)\Leftrightarrow\left(\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}\right)+\left[\frac{xy}{(x+y)^2}+\frac{yz}{(y+z)^2}+\frac{zx}{(z+x)^2}\right]\ge\frac{9}{4}$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}-\frac{3}{2}\right)\ge\left[\frac{1}{4}-\frac{xy}{(x+y)^2}\right]+\left[\frac{1}{4}-\frac{yz}{(y+z)^2}\right]+\left[\frac{1}{4}-\frac{zx}{(z+x)^2}\right]$$

Ta có: $\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}-\frac{3}{2}=\frac{(y-z)^2}{2(x+y)(x+z)}+\frac{(z-x)^2}{2(y+z)(y+x)}+\frac{(x-y)^2}{2(z+x)(z+y)}$

và $\left[\frac{1}{4}-\frac{xy}{(x+y)^2}\right]+\left[\frac{1}{4}-\frac{yz}{(y+z)^2}\right]+\left[\frac{1}{4}-\frac{zx}{(z+x)^2}\right]=\frac{1}{4}\left[\frac{(x-y)^2}{(x+y)^2}+\frac{(y-z)^2}{(y+z)^2}+\frac{(z-x)^2}{(z+x)^2}\right]$

Vì vậy, (1) sẽ đúng nếu ta chứng minh được:

$$2\left[\frac{(y-z)^2}{(x+y)(x+z)}+\frac{(z-x)^2}{(y+z)(y+x)}+\frac{(x-y)^2}{(z+x)(z+y)}\right]\le\frac{(x-y)^2}{(x+y)^2}+\frac{(y-z)^2}{(y+z)^2}+\frac{(z-x)^2}{(z+x)^2}$$

hay $(y-z)^2\left[\frac{2}{(x+y)(x+z)}-\frac{1}{(y+z)^2}\right]+(z-x)^2\left[\frac{2}{(y+z)(y+x)}-\frac{1}{(z+x)^2}\right]+$

$$+(x-y)^2\left[\frac{2}{(z+x)(z+y)}-\frac{1}{(x+y)^2}\right]\ge 0 \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow (xy-xz)^2\left[\frac{2}{x^2(x+y)(x+z)}-\frac{1}{(xy+xz)^2}\right]+(yz-yx)^2\left[\frac{2}{y^2(y+z)(y+x)}-\frac{1}{(yz+yx)^2}\right]$$

$$+(zx-zy)^2\left[\frac{2}{z^2(z+x)(z+y)}-\frac{1}{(zx+zy)^2}\right]\ge 0$$

Đặt $a_1=yz,\ a_2=zx,\ a_3=xy$ và $A_1=\frac{2}{x^2(x+y)(x+z)}-\frac{1}{(xy+xz)^2}$;

$A_2=\frac{2}{y^2(y+z)(y+x)}-\frac{1}{(yz+yx)^2}$; $A_3=\frac{2}{z^2(z+x)(z+y)}-\frac{1}{(zx+zy)^2}$

Xác định $A_1+A_2=\frac{2}{x+y}\left[\frac{1}{x^2(x+z)}+\frac{1}{y^2(y+z)}\right]-\left[\frac{1}{(xy+xz)^2}+\frac{1}{(yz+yx)^2}\right]$ (3)

Với $\frac{2}{x^2(x+z)}+\frac{2}{y^2(y+z)}=\frac{2x^2(x+z)+2y^2(y+z)}{x^2y^2(x+z)(y+z)}=\frac{2(x^3+y^3)+2(x^2+y^2)z}{x^2y^2(x+z)(y+z)}$

Sử dụng bất đẳng thức $x^3+y^3\ge xy(x+y)$ và $2(x^2+y^2)\ge(x+y)^2$ ta có:

$$\frac{2}{x^2(x+z)}+\frac{2}{y^2(y+z)}\ge\frac{2xy(x+y)+(x+y)^2z}{x^2y^2(x+z)(y+z)}=\frac{(x+y)\left[2xy+(x+y)z\right]}{x^2y^2(x+z)(y+z)}$$

Kết hợp với (3) dẫn tới $A_1+A_2\ge\frac{2xy+(x+y)z}{x^2y^2(x+z)(y+z)}-\left[\frac{1}{(xy+xz)^2}+\frac{1}{(yz+yx)^2}\right]$

$$=\frac{(xy+xz)+(xy+yz)}{x^2y^2(x+z)(y+z)}-\left[\frac{1}{(xy+xz)^2}+\frac{1}{(yz+yx)^2}\right]$$

$$=\left[\frac{1}{xy^2(x+z)}+\frac{1}{yx^2(y+z)}\right]-\left[\frac{1}{x^2(y+z)^2}+\frac{1}{y^2(z+x)^2}\right]$$

$$=\left[\frac{1}{xy^2(x+z)}-\frac{1}{y^2(z+x)^2}\right]+\left[\frac{1}{yx^2(y+z)}-\frac{1}{x^2(y+z)^2}\right]=\frac{z}{xy^2(x+z)^2}+\frac{z}{yx^2(y+z)^2}>0$$

Tương tự ta có thể chứng minh $A_2+A_3>0$ và $A_3+A_1>0$.

Bây giờ giả sử $x\ge y\ge z\ge 0$ thì $a_1\le a_2\le a_3$.

Đặt $A_2=\dfrac{1}{y^2}\left[\dfrac{2}{(y+z)(y+x)}-\dfrac{1}{(z+x)^2}\right]=\dfrac{2(z+x)^2-(y+z)(y+x)}{y^2(y+z)(y+x)(z+x)^2}$

Từ $x\ge y\ge 0$ suy ra $2(z+x)^2-(y+z)(y+x)\ge 2(z+x)^2-(x+z)(x+x)=2(x+z)z>0$

Dẫn tới $A_2>0$. Sử dụng ***Bổ đề*** ta có đpcm.

• ***Chứng minh 2:***

Bổ đề: Cho các số thực $a_1, a_2, a_3, A_1, A_2, A_3$ thỏa mãn điều kiện:

Nếu $a_1\le a_2\le a_3$ thì $A_1\ge 0, A_2\ge 0$ và $a_2^2A_3+a_3^2A_2\ge 0$. Khi đó ta có bất đẳng thức

$$A_1(a_2-a_3)^2+A_2(a_3-a_1)^2+A_3(a_1-a_2)^2\ge 0$$

Áp dụng: Không mất tính tổng quát, giả sử $x\ge y\ge z>0$.

Đặt $\begin{cases} y+z=2a\\ z+x=2b\\ x+y=2c\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=-a+b+c\\ y=a-b+c\\ z=a+b-c\end{cases}\Rightarrow a,b,c$ là độ dài ba cạnh của một tam giác.

Do $z\ge y\ge x>0$ nên $a\ge b\ge c>0$. Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\left(2ab+2bc+2ca-a^2-b^2-c^2\right)\left(\frac{1}{4a^2}+\frac{1}{4b^2}+\frac{1}{4c^2}\right)\ge\frac{9}{4}$$

$$\Leftrightarrow\left(2ab+2bc+2ca-a^2-b^2-c^2\right)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\ge 9\Leftrightarrow\sum_{cyc}(a-b)^2\left(\frac{2}{ab}-\frac{1}{c^2}\right)\ge 0$$

Đặt $A_1=\dfrac{2}{bc}-\dfrac{1}{a^2}, A_2=\dfrac{2}{ca}-\dfrac{1}{b^2}, A_3=\dfrac{2}{ab}-\dfrac{1}{c^2}$

Bất đẳng thức cần chứng minh $\Leftrightarrow A_1(b-c)^2+A_2(c-a)^2+A_3(a-b)^2\ge 0$

Do $a\ge b\ge c>0$ và $b+c>a$ nên $A_1\ge 0$ và $A_2\ge 0$

Ta chứng minh $b^2A_3+c^2A_2\ge 0\Leftrightarrow b^3+c^3\ge abc$.

Mà $b+c>a$ nên ta chỉ cần chứng minh $b^3+c^3\ge(b+c)bc\Leftrightarrow(b-c)^2(b+c)\ge 0$ (đúng)

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z$ hoặc $x=y, z=0$ hoặc các hoán vị tương ứng.

• ***Chứng minh 3:*** ***Bổ đề*** (bất đẳng thức ***Schur***)

$x^r(x-y)(x-z)+y^r(y-z)(y-x)+z^r(z-x)(z-y)\geq 0$, $\forall x,y,z,r>0$

Áp dụng: Biến đổi bất đẳng thức thành:

$$\sum_{sym}\left(4x^5y-x^4y^2-3x^3y^3+x^4yz-2x^3y^2z+x^2y^2z^2\right)\geq 0$$

Sử dụng bất đẳng thức ***Schur*** với $r=1$ ta có:

$$x(x-y)(x-z)+y(y-z)(y-x)+z(z-x)(z-y)\geq 0$$

Nhân hai vế của bất đẳng thức với $2xyz$ và khai triển chúng theo các tổng đối xứng ta có: $\sum_{sym}\left(x^4yz-2x^3y^2z+x^2y^2z^2\right)\geq 0$ (2)

Mặt khác, sử dụng bất đẳng thức $AM-GM$ dẫn tới:

$$\begin{cases}x^5y+y^5z+z^5x\geq x^4y^2+y^4z^2+z^4x^2\\x^5y+y^5z+z^5x\geq x^3y^3+y^3z^3+z^3x^3\end{cases}\Rightarrow\sum_{sym}\left[\left(x^5y-x^4y^2\right)+3\left(x^5y-x^3y^3\right)\right]\geq 0\quad(3)$$

Cộng (2) với (3) dẫn tới: $\sum_{sym}\left(4x^5y-x^4y^2-3x^3y^3+x^4yz-2x^3y^2z+x^2y^2z^2\right)\geq 0$

Chú ý: đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi hoặc $x=y=z>0$ hoặc $x=y>0$, $z=0$.

hoặc $y=z>0$, $x=0$; hoặc $z=x>0$, $y=0$

• ***Chứng minh 4:*** (Chứng minh của **Marcin E. Kuczma, Warszawa, Poland**)

Không mất tính tổng quát, giả sử $x\geq y\geq z>0$.

Đặt $S=(xy+yz+zx)\left[\dfrac{1}{(x+y)^2}+\dfrac{1}{(y+z)^2}+\dfrac{1}{(z+x)^2}\right]$

$A=(2x+2y-z)(x-z)(y-z)+z(x+y)^2$

$B=\frac{1}{4}\cdot z(x+y-2z)(11x+11y+2z)$

$C=(x+y)(x+z)(y+z)$

$D=(x+y+z)(x+y-2z)+x(y-z)+y(x-z)+(x-y)^2$

$E=\frac{1}{4}\cdot z(x+y)(x+y+2z)^2(x+y-2z)^2$

Ta có: $C^2(4S-9)=(x-y)^2\left[(x+y)(A+B+C)+\frac{1}{2}(x+z)(y+z)D\right]+E$

$\Rightarrow C^2(4S-9)\geq 0 \;\Rightarrow S\geq\dfrac{9}{4}$

• ***Chứng minh 5:*** **(Vedula N.Murty, Andhra University, Visakhapatnam, India)**

Đặt $a=\dfrac{y+z}{2};b=\dfrac{z+x}{2};c=\dfrac{x+y}{2}\Rightarrow a,b,c$ là độ dài ba cạnh của một tam giác.

Không mất tính tổng quát giả sử $0<a\leq b\leq c$; với điều kiện $a+b>c$ suy ra:

$2a^2-bc<0<2b^2-ca\leq 2c^2-ab$. Biến đổi bất đẳng thức

$(1)\Leftrightarrow bc(b-c)^2(2a^2-bc)+ca(c-a)^2(2b^2-ca)\geq 0$ (2)

+ Nếu $b=c$ thì $(1)\Leftrightarrow ca(c-a)^2(2b^2-ca)\geq 0$ luôn đúng

+ Nếu $b<c$ thì $c-b>0$. Ta có: $2(a^2+b^2)\geq(a+b)^2>c(a+b)$

$\Rightarrow 2b^2-ca>bc-2a^2>0\Rightarrow\dfrac{bc-2a^2}{2b^2-ca}<1\Rightarrow\dfrac{bc}{ac}\cdot\dfrac{bc-2a^2}{2b^2-ca}<\dfrac{bc}{ac}$

Vì $\dfrac{c-a}{c-b}\geq 1$ suy ra $\dfrac{(c-a)^2}{(c-b)^2}\geq\dfrac{c-a}{c-b}\geq\dfrac{b}{a}\Rightarrow\dfrac{(c-a)^2}{(c-b)^2}\geq\dfrac{bc}{ac}>\dfrac{bc}{ac}\left(\dfrac{bc-2a^2}{2b^2-ca}\right)$

$\Rightarrow bc(b-c)^2(2a^2-bc)+ca(c-a)^2(2b^2-ca)>0$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z$ hoặc $x=y,z=0$ hoặc các hoán vị.

• ***Chứng minh 6: Bước 1:*** Chứng minh các công thức:

1. $(p-a)(p-b)+(p-a)(p-b)+(p-a)(p-b)=4Rr+r^2;\; p^2=\sum bc-4Rr-r^2$

2. $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}=\dfrac{\left(\sum bc\right)^2-16Rr\,p^2}{16p^2R^2r^2}$

Thật vậy: Sử dụng định lý ***Viète*** cho phương trình:

1. $p-a,p-b,p-c$ là ba nghiệm của: $x^3-px^2+(4R+r)r\,x-pr^2=0$

$\Rightarrow(p-a)(p-b)+(p-a)(p-b)+(p-a)(p-b)=4Rr+r^2\Rightarrow p^2=\sum bc-4Rr-r^2$

2. $\dfrac{1}{a},\dfrac{1}{b},\dfrac{1}{c}$ là ba nghiệm của: $4pRrx^3-(p^2+r^2+4Rr)x^2+2px-1=0$

$$\Rightarrow\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2-2\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)=$$

$$=\left(\frac{p^2+r^2+4Rr}{4pRr}\right)^2-2\cdot\frac{2p}{4pRr}=\frac{\left(\sum bc\right)^2-16Rr\,p^2}{16p^2R^2r^2}$$

Bước 2: Chứng minh: $p^2 \geq 16Rr - 5r^2$ (*)

• ***Bổ đề:*** $x^r(x-y)(x-z)+y^r(y-z)(y-x)+z^r(z-x)(z-y)\geq 0\ \forall x,y,z>0\ r>0$

Chứng minh (*): Đặt $a = y + z$; $b = z + x$; $c = x + y$

$$(*)\Leftrightarrow\left(\frac{x+y+z}{2}\right)^2\geq 16\cdot\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{8\sqrt{xyz(x+y+z)}}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{xyz}{x+y+z}}-5\cdot\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{xyz}{x+y+z}}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow\frac{(x+y+z)^2}{4}\geq\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{x+y+z}-\frac{5xyz}{4(x+y+z)}$$

$$\Leftrightarrow(x+y+z)^3+5xyz\geq 4(x+y)(y+z)(z+x)$$

$$\Leftrightarrow x^3+y^3+z^3+3xyz\geq yz(y+z)+zx(z+x)+xy(x+y)$$

$$\Leftrightarrow x(x-y)(x-z)+y(y-z)(y-x)+z(z-x)(z-y)\geq 0\quad\text{(đpcm)}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z \Leftrightarrow a = b = c \Leftrightarrow \Delta$ABC đều.

• ***Áp dụng:*** Đặt $a=\frac{y+z}{2};b=\frac{z+x}{2};c=\frac{x+y}{2}\Rightarrow a,b,c$ là độ dài ba cạnh tam giác.

$$(1)\Leftrightarrow\left[(p-a)(p-b)+(p-a)(p-b)+(p-a)(p-b)\right]\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\geq\frac{9}{4}$$

$$\Leftrightarrow(4Rr+r^2)\frac{\left(\sum bc\right)^2-16Rrp^2}{16p^2R^2r^2}\geq\frac{9}{4}\Leftrightarrow(4Rr+r^2)\cdot\left[\left(\sum bc\right)^2-16Rrp^2\right]\geq 36p^2R^2r^2$$

$$\Leftrightarrow(4Rr+r^2)\cdot\left[\left(\sum bc\right)^2-16Rr\left(\sum bc-4Rr-r^2\right)\right]\geq 36\left(\sum bc-4Rr-r^2\right)R^2r^2$$

$$\Leftrightarrow(4R+r)\cdot\left[\left(\frac{\sum bc}{r}\right)^2-4R(25R+r)\frac{\sum bc}{r}+4R(4R+r)(25R+4r)\right]\geq 0\quad(2)$$

Đặt $t=\frac{ab+bc+ca}{r}=\frac{\sum bc}{r}$. Từ Bổ đề 1, 2 dẫn tới: $t\geq 20R-4r$. Ta có::

$$(2)\Leftrightarrow f(t)=(4R+r)t^2-4R(25R+r)t+4R(4R+r)(25R+44r)\geq 0$$

$$f'(t)=2(4R+r)t-4R(25R+r)>0\quad\forall t\geq 20R-4r$$

$\Rightarrow$ hàm $f(x)$ giảm trên $[20R-4r,+\infty)$

$\Rightarrow f(t)\geq f(20R-4r)=4r(R-2r)^2\geq 0$ (đpcm)

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi ΔABC đều $\Leftrightarrow x = y = z$.

• ***Mở rộng 1:*** Cho $x, y, z > 0$ thỏa mãn $\text{Min}(x,y,z) \ge \frac{1}{4}\text{Max}(a,b,c)$. Chứng minh:

$$(xy+yz+zx)\left[\frac{1}{(x+y)^2}+\frac{1}{(y+z)^2}+\frac{1}{(z+x)^2}\right] \ge \frac{9}{4}+\frac{1}{16}\sum_{cyc}\frac{(x-y)^2}{(x+y)^2} \quad (1)$$

Chứng minh

$$(1) \Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{x}{y+z}+\sum_{cyc}\left[\frac{xy}{(x+y)^2}-\frac{1}{4}\right]-\frac{3}{2} \ge \frac{1}{16}\sum_{cyc}\frac{(x-y)^2}{(x+y)^2} \Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{x}{y+z}-\frac{3}{2} \ge \frac{5}{16}\sum_{cyc}\frac{(x-y)^2}{(x+y)^2}$$

$$\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}-\frac{3}{2}=\frac{(x+y)(x-y)^2+(y+z)(y-z)^2+(z+x)(z-x)^2}{2(y+z)(z+x)(x+y)} \ge 0$$

$$(1) \Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{(x-y)^2}{2(y+z)(z+x)} \ge \frac{5}{16}\sum_{cyc}\frac{(x-y)^2}{(x+y)^2} \Leftrightarrow \sum_{cyc}\left[(x-y)^2\left(\frac{8}{(y+z)(z+x)}-\frac{5}{(x+y)^2}\right)\right] \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\left[(x-y)^2\left(8(x+y)-10z-\frac{5(z-y)(z-x)}{x+y}\right)\right] \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\left[(x-y)^2(8x+8y-10z)\right]-\sum_{cyc}\left[(x-y)^2\frac{5(z-y)(z-x)}{x+y}\right] \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \text{T} = \sum_{cyc}\left[(x-y)^2(8x+8y-10z)\right]-\frac{5(x-y)^2(y-z)^2(z-x)^2}{(x+y)(y+z)(z+x)} \ge 0$$

Không mất tính tổng quát giả sử $x \ge y \ge z \Rightarrow z \ge \frac{1}{4}x$.

Đặt $\frac{T}{2}=(3z+4u+8v)u^2+(3z-5u-v)v^2+(3z+4u-v)(u+v)^2-\frac{5u^2v^2(u+v)^2}{2(2z+u+2v)(2z+v)(2z+u+v)}$

Từ $x=z+u+v \le 4z \Rightarrow u+v \le 3z$. Dẫn tới:

$$\frac{T}{2} \ge (5u+9v)u^2+(-4u)v^2+5u(u+v)^2-\frac{5u^2v^2(u+v)^2}{(0+u+2v)(0+v)(0+u+v)}$$

$$=10u^3+19u^2v+uv^2-\frac{5u^2v(u+v)}{u+2v}=\frac{10u^4+34u^3v+34u^2v^2+2uv^3}{u+2v} \ge 0 \Rightarrow \text{(đpcm)}.$$

• ***Mở rộng 2:*** Cho $x, y, z > 0$ thỏa mãn $\text{Min}(x,y,z) \ge \alpha\,\text{Max}(a,b,c)$; $\alpha \in [0,1]$.

Chứng minh: $(xy+yz+zx)\left[\frac{1}{(x+y)^2}+\frac{1}{(y+z)^2}+\frac{1}{(z+x)^2}\right] \ge \frac{9}{4}+\frac{\alpha}{4}\sum_{cyc}\frac{(x-y)^2}{(x+y)^2}$

• ***Mở rộng 3:*** Cho $x, y, z > 0$ và $xy+yz+zx \ge \text{Max}\{x^2, y^2, z^2\}$. Chứng minh:

$$(xy+yz+zx)\left[\frac{1}{(x+y)(y+z)}+\frac{1}{(y+z)(z+x)}+\frac{1}{(z+x)(x+y)}\right] \le \frac{5}{4}+\frac{2}{3}\sum_{cyc}\frac{x}{\sqrt{(x+y)(x+z)}}$$

§24.2. VỀ MỘT BẤT ĐẲNG THỨC THI TOÁN QUỐC TẾ

Chúng ta tiếp tục phân tích một bài toán thi Olympic có nhiều cách giải, đây là một bài toán rất đặc biệt, nó có thể phát biểu theo cả hai cách hình học và đại số. Hơn nữa chính nhờ những cách phát biểu khác nhau đó mà nó có những mở rộng và lời giải hết sức đẹp đẽ.

Bài toán. Cho tam giác ABC với độ dài ba cạnh là a, b, c và có diện tích là S.

Chứng minh rằng: $a^2+b^2+c^2 \ge 4\sqrt{3}S$ (1)

(IMO 3 – Hungary 1961, Weitzenbock's inequality)

Chứng minh

• ***Lời giải 1:*** $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\frac{1}{2}\sqrt{(b+c+a)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}$

$$\Rightarrow 16S^2 = 2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-(a^4+b^4+c^4)$$

$(1) \Leftrightarrow (a^2+b^2+c^2)^2 \ge 3\times 16S^2 = 3\left[2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-(a^4+b^4+c^4)\right]$

$\Leftrightarrow 4\left[(a^4+b^4+c^4)-(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)\right]=2\left[(a^2-b^2)^2+(b^2-c^2)^2+(c^2-a^2)^2\right]\ge 0$

• ***Lời giải 2:*** $\begin{cases} \sin C = \dfrac{2S}{ab} \\ \cos C = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{4S^2}{a^2b^2}+\dfrac{a^4+b^4+c^4+2a^2b^2-2a^2c^2-2b^2c^2}{4a^2b^2}=1$

$$\Rightarrow 16S^2 = 2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-(a^4+b^4+c^4)$$

Từ $a^4+b^4+c^4 \ge a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$ suy ra $16S^2 \le a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 \le a^4+b^4+c^4$

$\Rightarrow (a^2+b^2+c^2)^2 = a^4+b^4+c^4+2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2) \ge 48S^2 \Rightarrow a^2+b^2+c^2 \ge 4\sqrt{3}S$

• ***Lời giải 3:*** $\sqrt{3}\sin C+\cos C = 2\sin(C+30°) \le 2$

$$\Rightarrow \sqrt{3}\left(\frac{2S}{ab}\right)+\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} \le 2 \Rightarrow c^2-a^2-b^2+4ab \ge 4\sqrt{3}S$$

Tương tự ta có: $b^2-c^2-a^2+4ca \ge 4\sqrt{3}S$; $a^2-b^2-c^2+4bc \ge 4\sqrt{3}S$

$$\Rightarrow 4(ab+bc+ca)-(a^2+b^2+c^2) \ge 12\sqrt{3}S$$

Mặt khác $ab+bc+ca \le a^2+b^2+c^2 \Rightarrow 12\sqrt{3}S \le 3(a^2+b^2+c^2)$

• ***Lời giải 4:*** (1) tương đương với $a^2+b^2+(a^2+b^2-2ab\cos C) \ge 2\sqrt{3}\,ab\sin C$

$\Leftrightarrow a^2-ab(\cos C+\sqrt{3}\sin C)+b^2 \ge 0 \Leftrightarrow f\left(\frac{a}{b}\right)=\left(\frac{a}{b}\right)^2-(\cos C+\sqrt{3}\sin C)\left(\frac{a}{b}\right)+1 \ge 0$

Ta có $\Delta = \left(\cos C + \sqrt{3}\sin C\right)^2 - 4 \le (1+3)(\cos^2 C + \sin^2 C) - 4 = 0 \Rightarrow f\left(\frac{a}{b}\right) \ge 0$

• ***Lời giải 5:*** $a^2+b^2+c^2-4\sqrt{3}S = a^2+b^2+(a^2+b^2-2ab\cos C) - 2\sqrt{3}ab\sin C$

$$= 2(a-b)^2 + 4ab\left[1-\cos\left(C+\frac{\pi}{3}\right)\right] \ge 0 \Rightarrow a^2+b^2+c^2 \ge 4\sqrt{3}S$$

• ***Lời giải 6:*** $S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c) = p\sqrt{(p-a)(p-b)}\sqrt{(p-b)(p-c)}\sqrt{(p-c)(p-a)}$

$$\le p\,\frac{(p-a)+(p-b)}{2}\cdot\frac{(p-b)+(p-c)}{2}\cdot\frac{(p-c)+(p-a)}{2} = \frac{p}{8}abc \le \frac{p}{8}\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3$$

$$= \frac{(a+b+c)^4}{16\times 27} \le \frac{\left[(1^2+1^2+1^2)(a^2+b^2+c^2)\right]^2}{16\times 27} = \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{16\times 3} \Rightarrow \text{(đpcm)}$$

• ***Lời giải 7:*** $4\sqrt{3}S = 4\sqrt{3}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \le 4\sqrt{3p}\sqrt{\left[\frac{(p-a)+(p-b)+(p-c)}{3}\right]^3}$

$$= \frac{4p^2}{3} = \frac{(a+b+c)^2}{3} \le \frac{(1^2+1^2+1^2)(a^2+b^2+c^2)}{3} = a^2+b^2+c^2$$

• ***Lời giải 8:*** Đặt $a = y+z; b = z+x; c = x+y$ với $x, y, z > 0$ khi đó

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)^2 = \left[(y+z)^2+(z+x)^2+(x+y)^2\right]^2 \ge 16(yz+zx+xy)^2 \ge$$

$$16.3(xy.yz + yz.zx + xy.yz) = 48xyz(x+y+z) = 48S^2 \Rightarrow \text{(đpcm)}.$$

• ***Lời giải 9: Bổ đề:*** $mn + np + pm \ge \sqrt{3mnp(m+n+p)}$ $\quad \forall m, n, p > 0$

Áp dụng: đặt $p-a = x; p-b = y, p-c = z \Rightarrow p = x+y+z$

$a^2+b^2+c^2 \ge ab+bc+ca = (y+z)(z+x) + (z+x)(x+y) + (x+y)(y+z) \ge$

$\sqrt{3(x+y)(y+z)(z+x)\left[(x+y)+(y+z)+(z+x)\right]} \ge$

$\sqrt{3\times 2\sqrt{xy}\times 2\sqrt{yz}\times 2\sqrt{zx}\times 2(x+y+z)} = 4\sqrt{3xyz(x+y+z)} = 4\sqrt{3}S$

• ***Lời giải 10: Bổ đề:*** $8(p-a)(p-b)(p-c) \le abc$. *Thật vậy:*

$8(p-a)(p-b)(p-c) = 2\sqrt{(p-a)(p-b)}\times 2\sqrt{(p-b)(p-c)}\times 2\sqrt{(p-c)(p-a)}$

$$\le [(p-a)+(p-b)]\times[(p-b)+(p-c)]\times[(p-c)+(p-a)] = abc$$

Áp dụng: $\times\begin{cases} 3(a^2+b^2+c^2) = (1^2+1^2+1^2)(a^2+b^2+c^2) \le (a+b+c)^2 \\ (a^2+b^2+c^2)^3 \ge \left(3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}\right)^3 = 27a^2b^2c^2 \end{cases}$

$$\Rightarrow (a^2+b^2+c^2)^2 \ge 3abc(a+b+c) \ge 48p(p-a)(p-b)(p-c) = 48S^2$$

• ***Lời giải 11:*** ***Bổ đề:*** $\sin A+\sin B+\sin C\le\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

Áp dụng: $\dfrac{1}{\sin A}+\dfrac{1}{\sin B}+\dfrac{1}{\sin C}\ge\dfrac{9}{\sin A+\sin B+\sin C}\ge 2\sqrt{3}$

$$a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca=2S\left(\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin C}\right)\ge\frac{2S\times 9}{\sin A+\sin B+\sin C}\ge 4\sqrt{3}S$$

• ***Lời giải 12:*** ***Bổ đề:*** $\sin A+\sin B+\sin C\le\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

Áp dụng: $a+b+c=2R(\sin A+\sin B+\sin C)\le 3\sqrt{3}R$

$$(a^2+b^2+c^2)(a+b+c)\ge 9abc\Rightarrow a^2+b^2+c^2\ge\frac{9abc}{a+b+c}\ge\frac{9abc}{3\sqrt{3}R}=4\sqrt{3}S$$

• ***Lời giải 13:*** Không mất tính tổng quát, giả sử $a\ge b\ge c\Rightarrow ab\ge ac\ge bc$

$$\Leftrightarrow\frac{2S}{\sin C}\ge\frac{2S}{\sin B}\ge\frac{2S}{\sin A}\Leftrightarrow\sin A\ge\sin B\ge\sin C$$

Sử dụng bất đẳng thức hoán vị cho hai dãy đơn điệu $\begin{cases}ab\ge ac\ge bc\\ \sin A\ge\sin B\ge\sin C\end{cases}$ ta có

$ab\sin A+ac\sin C+bc\sin B\ge ab\sin C+ac\sin B+bc\sin A$

$ab\sin B+ac\sin A+bc\sin C\ge ab\sin C+ac\sin B+bc\sin A$

$\Rightarrow(ab+ac+bc)(\sin A+\sin B+\sin C)\ge 3(ab\sin C+ac\sin B+bc\sin A)=18S$

$\Rightarrow(a^2+b^2+c^2)\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\ge 18S\Rightarrow a^2+b^2+c^2\ge 4\sqrt{3}S$

• ***Lời giải 14:*** ***Bổ đề:*** $\cot A+\cot B+\cot C\ge\sqrt{3}$

Áp dụng: theo định lý ***Cosine*** trong tam giác ta có

$$+\begin{cases}a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=b^2+c^2-4S\cot A\\ b^2=c^2+a^2-2ca\cos B=c^2+a^2-4S\cot B\\ c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=a^2+b^2-4S\cot C\end{cases}$$

$\Rightarrow a^2+b^2+c^2=4S(\cot A+\cot B+\cot C)\ge 4\sqrt{3}S$

• ***Lời giải 15:*** $r=(p-a)\tan\dfrac{A}{2}=(p-b)\tan\dfrac{B}{2}=(p-c)\tan\dfrac{C}{2}$

$$\Rightarrow r^3=(p-a)(p-b)(p-c)\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow\frac{rS^2}{p^2}=\frac{S^2}{p}\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}\Leftrightarrow r=p\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}$$

Ta có $1=\sum\tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{B}{2}\ge 3\sqrt[3]{\tan^2\dfrac{A}{2}\tan^2\dfrac{B}{2}\tan^2\dfrac{C}{2}}\Rightarrow\tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{B}{2}\tan\dfrac{C}{2}\le\dfrac{1}{3\sqrt{3}}$

$$\Rightarrow a^2+b^2+c^2 \geq \frac{1}{3}(a+b+c)^2 = \frac{4}{3}p^2 = 4\sqrt{3}p^2 \times \frac{1}{3\sqrt{3}} \geq$$

$$\geq 4\sqrt{3}p^2 \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} = 4\sqrt{3}pr = 4\sqrt{3}S$$

• ***Lời giải 16:*** Đặt $x=\dfrac{b+c-a}{2};\ y=\dfrac{c+a-b}{2};\ z=\dfrac{a+b-c}{2} \Rightarrow S=\sqrt{xyz(x+y+z)}$

$$a^2+b^2+c^2=(x+y)^2+(y+z)^2+(z+x)^2 \geq 4(xy+yz+zx) \quad (2)$$

Ta có: $4(xy+yz+zx) \geq 4\sqrt{3}S \Leftrightarrow xy+yz+zx \geq \sqrt{3xyz(x+y+z)}$

$$\Leftrightarrow (xy+yz+zx)^2-3xyz(x+y+z) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left[(xy-yz)^2+(yz-zx)^2+(zx-xy)^2\right] \geq 0 \quad (3)$$

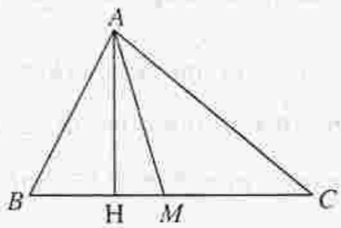
Do (3) đúng nên (2) cũng đúng. Vì vậy $a^2+b^2+c^2 \geq 4\sqrt{3}S$

• ***Lời giải 17:*** Xét tam giác ABC. Gọi M là trung điểm BC.

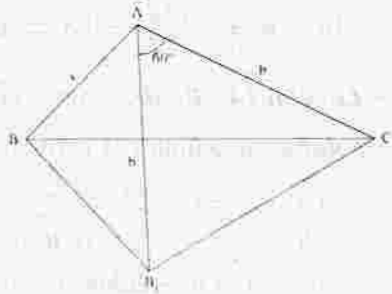
Kẻ đường cao AH ⊥ BC. Ta có: $a^2+b^2+c^2=BC^2+AB^2+AC^2$

$$=BC^2+2AM^2+\frac{BC^2}{2} \geq \frac{3BC^2}{2}+2AH^2$$

$$\geq 2\sqrt{\frac{3BC^2}{2}\cdot 2AH^2} = 2\sqrt{3}BC.AH = 4\sqrt{3}\,S$$



• ***Lời giải 18:*** Dựng tam giác đều AB_1C sao cho B, B_1 ở cùng một phía đối với AC. Sử dụng định lý ***Cosine*** cho tam giác AB_1C ta có



$BB_1^2 = BA^2 + B_1A^2 - 2BA.B_1A\cos\angle BAB_1$

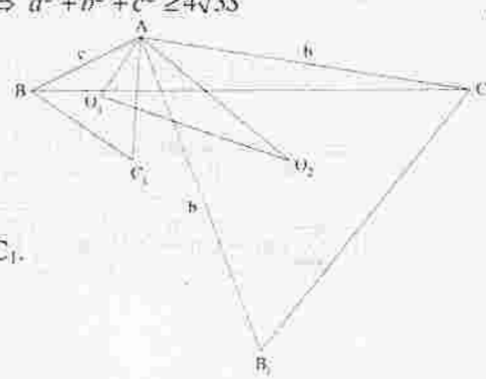
$= b^2+c^2-2bc\cos|A-60^\circ|$

$= b^2+c^2-2bc(\cos A\cos 60^\circ+\sin A\sin 60^\circ)$

$= b^2+c^2-\frac{1}{2}(b^2+c^2-a^2)-\sqrt{3}\,bc\sin A = \frac{1}{4}\left[(a^2+b^2+c^2)-4\sqrt{3}S\right]$

Do $BB_1^2 \geq 0$ suy ra $\frac{1}{4}\left[(a^2+b^2+c^2)-4\sqrt{3}S\right] \geq 0 \Rightarrow a^2+b^2+c^2 \geq 4\sqrt{3}S$

• ***Lời giải 19:*** Dựng các tam giác đều ACB_1, ABC_1 sao cho B, B_1 ở cùng một phía đối với AC và C, C_1 ở cùng một bờ đối với AB.



Gọi O_1, O_2 là tâm của các tam giác đều ACB_1 và BC_1.

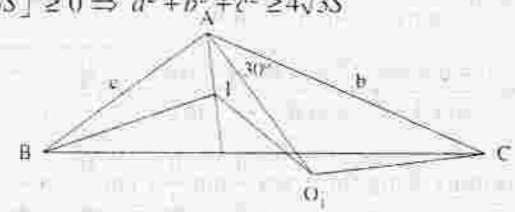
Xét tam giác O_2AO_1 ta có

$$O_1A=\frac{AC}{2\sin 60^\circ}=\frac{b}{\sqrt{3}};\ \ O_2A=\frac{AB}{2\sin 60^\circ}=\frac{c}{\sqrt{3}}\ \text{ và }\ \angle O_1AO_2=|A-60^\circ|$$

$$O_1O_2^{\,2}=\frac{1}{3}(b^2+c^2)-2O_1A.O_2A.\cos|A-60^\circ|=\frac{1}{3}(b^2+c^2)-\frac{2bc}{3}(\cos A\cos 60^\circ+\sin A\sin 60^\circ)$$

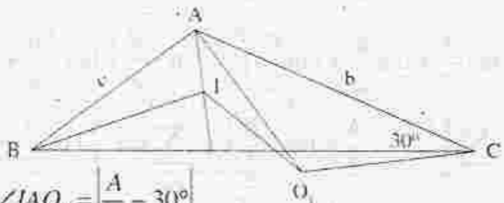
$$O_1O_2^{\,2}=\frac{1}{3}(b^2+c^2)-\frac{2bc}{3}\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\times\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin A\right)=\frac{1}{6}\left(a^2+b^2+c^2-4\sqrt{3}S\right)$$

Do $O_1O_2^{\,2}\ge 0$ suy ra $\frac{1}{6}\left[\left(a^2+b^2+c^2\right)-4\sqrt{3}S\right]\ge 0\Rightarrow a^2+b^2+c^2\ge 4\sqrt{3}S$



• *Lời giải 20:*

Dựng tam giác cân O_1AC sao cho B, O_1 ở cùng một phía đối với AC và $\angle O_1AC=\angle O_1CA=30^\circ$. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác ABC.



Xét tam giác IAO_1: $IA=\dfrac{p-a}{\cos\frac{A}{2}}$; $O_1A=\dfrac{b}{\sqrt{3}}$; $\angle IAO_1=\left|\dfrac{A}{2}-30^\circ\right|$

$$IO_1^{\,2}=IA^2+O_1A^2-2IA.O_1A.\cos\angle IAO_1=\frac{(p-a)^2}{\cos^2\frac{A}{2}}+\frac{b^2}{3}-\frac{2(p-a)b}{\sqrt{3}\cos\frac{A}{2}}\cos\left|\frac{A}{2}-30^\circ\right|$$

$$=\frac{(p-a)^2}{\frac{p(p-a)}{bc}}+\frac{b^2}{3}-\frac{2(p-a)b}{\sqrt{3}\cos\frac{A}{2}}\left(\cos\frac{A}{2}\cos 30^\circ+\sin\frac{A}{2}\sin 30^\circ\right)$$

$$=\frac{(p-a)bc}{p}+\frac{b^2}{3}-(p-a)b-\frac{(p-a)b}{\sqrt{3}}\times\tan\frac{A}{2}$$

$$=\frac{b}{3p}\left[3c(p-a)+pb-3p(p-a)-\sqrt{3}p(p-a)\tan\frac{A}{2}\right]$$

$$=\frac{b}{12p}\left[6c(b+c-a)+2b(a+b+c)-3(b+c+a)(b+c-a)-4\sqrt{3}pr\right]$$

$$=\frac{b}{12p}\left[3a^2+3c^2-b^2+2ab+2bc-6ac-4\sqrt{3}S\right]\ge 0.$$ Suy ra:

$$+\begin{cases}3a^2+3c^2-b^2+2ab+2bc-6ac\ge 4\sqrt{3}S\\ 3a^2+3b^2-c^2+2ac+2bc-6ab\ge 4\sqrt{3}S\\ 3b^2+3c^2-a^2+2ab+2ac-6bc\ge 4\sqrt{3}S\end{cases}$$

$$\Rightarrow 5\left(a^2+b^2+c^2\right)-2\left(ab+bc+ca\right)\ge 12\sqrt{3}S$$

Mặt khác $2\left(a^2+b^2+c^2\right)=\left(a^2+b^2\right)+\left(b^2+c^2\right)+\left(c^2+a^2\right)\ge 2(ab+bc+ca)$

$\Rightarrow 5(a^2+b^2+c^2)-2(a^2+b^2+c^2)=3(a^2+b^2+c^2)\geq 12\sqrt{3}S \Rightarrow a^2+b^2+c^2\geq 4\sqrt{3}S$

Sau đây là một số mở rộng của bài toán thú vị này

• ***Mở rộng 1:*** $a^2+b^2+c^2\geq 4\sqrt{3}S+(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$ (2)

(*Bất đẳng thức* **Hadwinger – Finsler**)

Lời giải 1: (2) $\Leftrightarrow 2(ab+bc+ca)-(a^2+b^2+c^2)\geq 4\sqrt{3}S$

$$\Leftrightarrow 4S\left(\frac{1}{\sin C}+\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}\right)-4S(\cot A+\cot B+\cot C)\geq 4\sqrt{3}S$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-\cos A}{\sin A}+\frac{1-\cos B}{\sin B}+\frac{1-\cos C}{\sin C}\geq\sqrt{3} \Leftrightarrow \tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\geq\sqrt{3}$$

Sử dụng đẳng thức $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}=1$ ta có:

$$\left(\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\right)^2=\tan^2\frac{A}{2}+\tan^2\frac{B}{2}+\tan^2\frac{C}{2}+2\sum\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}$$

$$=\sum\frac{1}{2}\left(\tan^2\frac{A}{2}+\tan^2\frac{B}{2}\right)+2\sum\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\geq\sum\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+2\sum\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}=3$$

Do $\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}>0\Rightarrow\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\geq\sqrt{3}\Rightarrow$ (đpcm)

Lời giải 2: (2) $\Leftrightarrow\left[a^2-(b-c)^2\right]+\left[b^2-(c-a)^2\right]+\left[c^2-(a-b)^2\right]\geq 4\sqrt{3}S$

$\Leftrightarrow (p-b)(p-c)+(p-c)(p-a)+(p-a)(p-b)\geq\sqrt{3p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (3)

Let $x=p-a$, $y=p-b$, $z=p-c$, suy ra (3) $\Leftrightarrow xy+yz+zx\geq\sqrt{3xyz(x+y+z)}$

$\Leftrightarrow (xy+yz+zx)^2\geq 3xyz(x+y+z)\Leftrightarrow(xy-yz)^2+(yz-zx)^2+(zx-xy)^2\geq 0$

Lời giải 3: Áp dụng bài toán gốc cho tam giác MNP, trong đó M, N, P lần lượt là tâm đường tròn bàng tiếp các góc A, B, C của tam giác ban đầu.

• ***Mở rộng 2:*** $ab+bc+ca\geq 4\sqrt{3}S$

• ***Mở rộng 3:*** $ab+bc+ca\geq 4\sqrt{3}S+\frac{1}{2}\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]$

• ***Mở rộng 4:*** $a^{2n}+b^{2n}+c^{2n}\geq 3\left(\frac{4S}{\sqrt{3}}\right)^n+\left[(a-b)^{2n}+(b-c)^{2n}+(c-a)^{2n}\right]$ $\forall n\in\mathbb{N}$

• ***Mở rộng 5:*** $a^2+b^2+c^2-2(ab+bc+ca)+\frac{18abc}{a+b+c}\geq 4\sqrt{3}S$

• ***Mở rộng 6:*** $a^\alpha b^\alpha+b^\alpha c^\alpha+c^\alpha a^\alpha\geq 4^\alpha\sqrt{3^{2-\alpha}}\,S^\alpha$, $\forall\alpha\geq 1;\ \alpha\in\mathbb{R}$ (4)

Lời giải: (4) $\Leftrightarrow \left(\dfrac{2S}{\sin C}\right)^{\alpha}+\left(\dfrac{2S}{\sin A}\right)^{\alpha}+\left(\dfrac{2S}{\sin B}\right)^{\alpha}\ge 4^{\alpha}\sqrt{3^{2-\alpha}}\,S^{\alpha}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{\sin^{\alpha}A}+\dfrac{1}{\sin^{\alpha}B}+\dfrac{1}{\sin^{\alpha}C}\ge\sqrt{3^{2-\alpha}}$. Sử dụng bất đẳng thức ***Cauchy*** ta có:

$$\frac{1}{\sin^{\alpha}A}+\frac{1}{\sin^{\alpha}B}+\frac{1}{\sin^{\alpha}C}\ge 3\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{\sin^{\alpha}A}\cdot\frac{1}{\sin^{\alpha}B}\cdot\frac{1}{\sin^{\alpha}C}}=\frac{3}{\sqrt[3]{(\sin A\sin B\sin C)^{\alpha}}}$$

$$\ge\frac{3}{\sqrt[3]{\left(\dfrac{\sin A+\sin B+\sin C}{3}\right)^{3\alpha}}}\ge\frac{3}{\sqrt{3^{\alpha}}}=\sqrt{3^{2-\alpha}}$$

• ***Mở rộng 7:*** Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác với diện tích S. Giả sử x, y, z là các số thực thỏa mãn $x+y>0$, $y+z>0$, $z+x>0$ và $xy+yz+zx>0$. Chứng minh rằng: $xa^2+yb^2+zc^2\ge 4.\sqrt{xy+yz+zx}\,.S$ (5)

Lời giải: (5) $\Leftrightarrow xa^2+yb^2+z(a^2+b^2-2ab\cos C)\ge 2\sqrt{xy+yz+zx}\,(ab\sin C)$

$$\Leftrightarrow (x+z)\frac{a}{b}+(y+z)\frac{b}{a}\ge 2\left(z\cos C+\sqrt{xy+yz+zx}\sin C\right)\quad(6)$$

Ta có $(x+z)\dfrac{a}{b}+(y+z)\dfrac{b}{a}\ge 2\cdot\sqrt{(x+z)\dfrac{a}{b}(y+z)\dfrac{b}{a}}=2\cdot\sqrt{(x+z)(y+z)}$

Sử dụng bất đẳng thức ***Cauchy − Schwarz*** ta có

$z\cos C+\sqrt{xy+yz+zx}\sin C\le\sqrt{(z^2+xy+yz+zx)(\cos^2C+\sin^2C)}=\sqrt{(x+z)(y+z)}$

$\Rightarrow 2\left(z\cos C+\sqrt{xy+yz+zx}\sin C\right)\le(x+z)\dfrac{a}{b}+(y+z)\dfrac{b}{a}\Rightarrow$ (6) đúng

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}(x+y)\dfrac{a}{b}=(y+z)\dfrac{b}{a}\\ \dfrac{\cos C}{z}=\dfrac{\sin C}{\sqrt{xy+yz+zx}}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{a}{\sqrt{y+z}}=\dfrac{b}{\sqrt{x+z}}\Rightarrow b^2=\dfrac{a^2(x+z)}{y+z}\\ \dfrac{\cos^2C}{z^2}=\dfrac{\sin^2C}{xy+yz+zx}=\dfrac{1}{(x+z)(y+z)}\end{cases}$

Thế $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$ vào ta có

$$c^2=a^2+a^2\cdot\frac{x+z}{y+z}-2a^2\cdot\frac{\sqrt{x+z}}{\sqrt{y+z}}\cdot\frac{z}{\sqrt{(x+z)(y+z)}}$$

$\Leftrightarrow\left(\dfrac{c}{a}\right)^2=1+\dfrac{x+z}{y+z}-\dfrac{2z}{y+z}=\dfrac{x+y}{y+z}\Leftrightarrow\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{x+y}}{\sqrt{y+z}}\Rightarrow\dfrac{a}{\sqrt{y+z}}=\dfrac{c}{\sqrt{x+y}}$

Vì vậy đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow\dfrac{a}{\sqrt{y+z}}=\dfrac{b}{\sqrt{z+x}}=\dfrac{c}{\sqrt{x+y}}$

Ứng dụng của mở rộng 7 trong tam giác với độ dài 3 cạnh là a, b, c

7.1. $a^2+b^2+c^2 \geq 4\sqrt{3}S + (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$ (1)

Chứng minh. Bất đẳng thức $\Leftrightarrow a^2\dfrac{b+c-a}{a}+b^2\dfrac{c+a-b}{b}+c^2\dfrac{a+b-c}{c}\geq 4\sqrt{3}S$

Sử dụng ***mở rộng 7*** suy ra chỉ cần chứng minh

$$\sum_{cyc}\frac{(b+c-a)(c+a-b)}{ab}\geq 3 \Leftrightarrow a(a-b)(a-c)+b(b-c)(b-a)+c(c-a)(c-b)\geq 0$$

Đây chính là bất đẳng thức ***Schur*** bậc 3.

7.2. $a^2b+b^2c+c^2a\geq 8.\sqrt[4]{27}.S\sqrt{S}$

Chứng minh. Từ bất đẳng thức Hadwiger – Finsler suy ra $ab+bc+ca\geq 4\sqrt{3}S$

Sử dụng ***mở rộng 7*** ta có: $a^2b+b^2c+c^2a\geq 4\sqrt{ab+bc+ca}.S\geq 8.\sqrt[4]{27}.S\sqrt{S}$

7.3. $3abc\geq 4\sqrt{a^2+b^2+c^2}.S$

Chứng minh. Sử dụng ***mở rộng 7*** ta có

$$a^2\frac{bc}{a}+b^2\frac{ca}{b}+c^2\frac{ab}{c}\geq 4\sqrt{a^2+b^2+c^2}.S \Leftrightarrow 3abc\geq 4\sqrt{a^2+b^2+c^2}.S$$

7.4. $(b+c-a)a^2+(c+a-b)b^2+(a+b-c)c^2\geq 8\sqrt[4]{3}.S\sqrt{S}$

Chứng minh. Sử dụng ***mở rộng 7*** ta có

$$(b+c-a)a^2+(c+a-b)b^2+(a+b-c)c^2\geq 4\sqrt{2ab+2bc+2ca-a^2-b^2-c^2}.S$$

Từ bất đẳng thức Hadwiger – Finsler ta có

$$4\sqrt{2ab+2bc+2ca-a^2-b^2-c^2}.S\geq 4\sqrt{4\sqrt{3}S}.S=8\sqrt[4]{3}.S\sqrt{S}$$

• ***Mở rộng 8:*** Giả sử a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác với diện tích S.

Chứng minh rằng: $\dfrac{x}{y+z}\cdot a^2+\dfrac{y}{z+x}\cdot b^2+\dfrac{z}{x+y}\cdot c^2\geq 2\sqrt{3}.S$ (7) $\forall x, y, z>0$

Lời giải: Sử dụng kết quả của ***mở rộng 7*** ta có

$$\frac{x}{y+z}\cdot a^2+\frac{y}{z+x}\cdot b^2+\frac{z}{x+y}\cdot c^2\geq 4\times\sqrt{\frac{x}{y+z}\cdot\frac{y}{z+x}+\frac{y}{z+x}\cdot\frac{z}{x+y}+\frac{z}{x+y}\cdot\frac{x}{y+z}}.S$$

Ta sẽ chứng minh $4\times\sqrt{\dfrac{x}{y+z}\cdot\dfrac{y}{z+x}+\dfrac{y}{z+x}\cdot\dfrac{z}{x+y}+\dfrac{z}{x+y}\cdot\dfrac{x}{y+z}}.S\geq 2\sqrt{3}S$

$$\Leftrightarrow \frac{xy}{(y+z)(z+x)}+\frac{yz}{(z+x)(x+y)}+\frac{zx}{(x+y)(y+z)}\geq\frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow 4[xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x)] \geq 3(x+y)(y+z)(z+x)$$

$$\Leftrightarrow x^2y+xy^2+y^2z+yz^2+z^2x+zx^2 \geq 6xyz$$

Sử dụng bất đẳng thức ***Cauchy*** ta có

$$x^2y + xy^2 + y^2z + yz^2 + xz^2 + x^2z \ge 6.\sqrt[6]{x^2y.xy^2.y^2z.yz^2.z^2x.zx^2} = 6xyz$$

Bất đẳng thức cuối cùng đúng kéo theo bất đẳng thức (7) cũng đúng.

• ***Mở rộng 9:*** Giả sử a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác với diện tích S.

Chứng minh rằng: $4\sqrt{3}S + 3.\sum(a-b)^2 \ge a^2 + b^2 + c^2$ (8)

Lời giải: Đặt $a = y + z;\ b = z + x;\ c = x + y$.

Bất đẳng thức (8) $\Leftrightarrow 4\sqrt{3}S \ge 6(ab + bc + ca) - 5(a^2 + b^2 + c^2)$

$\Leftrightarrow 4\sqrt{3xyz(x+y+z)} \ge 6\left[(y+z)(z+x) + (z+x)(x+y) + (x+y)(y+z)\right] - 5\sum(y+z)^2$

$\Leftrightarrow \sqrt{3xyz(x+y+z)} \ge 2(xy + yz + zx) - (x^2 + y^2 + z^2)$ (9). Đặt $x = p^2;\ y = q^2;\ z = r^2$.

Do đó (9) $\Leftrightarrow$

$\sqrt{3p^2q^2r^2(p^2+q^2+r^2)} \ge (p+q+r)(p+q-r)(r+p-q)(q+r-p)$

$\Leftrightarrow pqr\sqrt{3(p^2+q^2+r^2)} \ge (p+q+r)(p+q-r)(r+p-q)(q+r-p)$

Dễ dàng có $\begin{cases} \sqrt{3(p^2+q^2+r^2)} \ge p+q+r \\ pqr \ge (p+q-r)(r+p-q)(q+r-p) \end{cases} \Rightarrow$ (điều phải chứng minh)

Chú ý: Từ các bất đẳng thức (2) và (8) ta thu được bất đẳng thức

$$\boxed{4\sqrt{3}S + 3.\sum(a-b)^2 \ge a^2 + b^2 + c^2 \ge 1.\sum(a-b)^2 + 4\sqrt{3}S} \quad (10)$$

Ta sẽ chứng minh trong kết quả (10) thì các hệ số 3 và 1 của $\sum(a-b)^2$ là các giá trị tốt nhất, hay là ta chứng minh mở rộng sau:

• ***Mở rộng 10:*** Giả sử a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác với diện tích S.

Nếu ta có $4\sqrt{3}S + \alpha\sum(a-b)^2 \ge a^2 + b^2 + c^2 \ge \beta\sum(a-b)^2 + 4\sqrt{3}S$ thì $\alpha \ge 3$ và $\beta \le 1$.

Lời giải: Đặt

$$\begin{cases} x = p - a > 0 \\ y = p - b > 0 \\ z = p - c > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = y + z \\ b = z + x \\ c = x + y \end{cases} \Rightarrow S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{xyz(x+y+z)}$$

Xét hiệu $T_\alpha = 4\sqrt{3}S + \alpha.\sum(a-b)^2 - (a^2 + b^2 + c^2)$

$T_\alpha = 4\sqrt{3}S + (2\alpha - 1)(a^2 + b^2 + c^2) - 2\alpha(ab + bc + ca)$

$T_\alpha = 4\sqrt{3}S + (2\alpha-1)\left[(y+z)^2 + (z+x)^2 + (x+y)^2\right] - 2\alpha\left[(y+z)(z+x) + (z+x)(x+y) + (x+y)(y+z)\right]$

$T_\alpha = 4\sqrt{3}S + 2(\alpha-1)(x^2+y^2+z^2) - 2(\alpha+1)(xy+yz+zx)$. Let $a' = yz;\ b' = zx;\ c' = xy$

$$\frac{1}{2}T_\alpha = 2\sqrt{3xyz(x+y+z)} + (\alpha-1)(x^2+y^2+z^2) - (\alpha+1)(xy+yz+zx)$$

$$\frac{1}{2}T_\alpha = 2\sqrt{3(a'b'+b'c'+c'a')} + (\alpha-1)\left(\frac{b'c'}{a'}+\frac{c'a'}{b'}+\frac{a'b'}{c'}\right) - (\alpha+1)(a'+b'+c')$$

Đặt $\overline{a} = b'+c';\overline{b} = c'+a';\overline{c} = a'+b' \Rightarrow \overline{a}.\overline{b}.\overline{c}$ là độ dài ba cạnh của một tam giác

$$T'_\alpha = \frac{1}{2}T_\alpha = 2\sqrt{3\sum(\overline{p}-\overline{a})(\overline{p}-\overline{b})} + (\alpha-1)(\overline{p}-\overline{a})(\overline{p}-\overline{b})(\overline{p}-\overline{c})\sum\frac{1}{(\overline{p}-\overline{a})^2} - (\alpha+1)\overline{p}$$

$$= 2\sqrt{3(\overline{a}\overline{b}+\overline{b}.\overline{c}+\overline{c}.\overline{a}-\overline{p}^2)} + (\alpha-1)\frac{\overline{r}_a^2+\overline{r}_b^2+\overline{r}_c^2}{\overline{p}} - (\alpha+1)\overline{p}$$

$$= \sqrt{3\left[2(\overline{a}\overline{b}+\overline{b}.\overline{c}+\overline{c}.\overline{a})-(\overline{a}^2+\overline{b}^2+\overline{c}^2)\right]} + (\alpha-1)\overline{p}\left(\tan^2\frac{\overline{A}}{2}+\tan^2\frac{\overline{B}}{2}+\tan^2\frac{\overline{C}}{2}\right) - (\alpha+1)\overline{p}$$

$$= \sqrt{12\overline{S}\left(\tan\frac{\overline{A}}{2}+\tan\frac{\overline{B}}{2}+\tan\frac{\overline{C}}{2}\right)} + (\alpha-1)\overline{p}\left(\tan^2\frac{\overline{A}}{2}+\tan^2\frac{\overline{B}}{2}+\tan^2\frac{\overline{C}}{2}\right) - (\alpha+1)\overline{p}$$

$$= 2\sqrt{3\overline{p}.\overline{r}\left(\tan\frac{\overline{A}}{2}+\tan\frac{\overline{B}}{2}+\tan\frac{\overline{C}}{2}\right)} + (\alpha-1)\overline{p}\left(\tan^2\frac{\overline{A}}{2}+\tan^2\frac{\overline{B}}{2}+\tan^2\frac{\overline{C}}{2}\right) - (\alpha+1)\overline{p}$$

$$\frac{\overline{T}'_\alpha}{\overline{p}} = 2\sqrt{3\tan\frac{\overline{A}}{2}\tan\frac{\overline{B}}{2}\tan\frac{\overline{C}}{2}\left(\tan\frac{\overline{A}}{2}+\tan\frac{\overline{B}}{2}+\tan\frac{\overline{C}}{2}\right)}$$

$$+(\alpha-1)\left(\tan^2\frac{\overline{A}}{2}+\tan^2\frac{\overline{B}}{2}+\tan^2\frac{\overline{C}}{2}\right) - (\alpha+1)$$

Đặt $u = \tan\frac{\overline{A}}{2}; v = \tan\frac{\overline{B}}{2}; w = \tan\frac{\overline{C}}{2} \Rightarrow uv+vw+wu = 1$

Ta có: $T_\alpha \ge 0 \Rightarrow \frac{\overline{T}'_\alpha}{\overline{p}} = 2\sqrt{3uvw(u+v+w)} + (\alpha-1)(u^2+v^2+w^2) - (\alpha+1) \ge 0$ (*)

Cho $\begin{cases} u \to 0 \\ v, w \to 1 \end{cases}$ thì $\frac{\overline{T}'_\alpha}{\overline{p}} \to 2(\alpha-1)-(\alpha+1) = \alpha-3$. Nếu $\alpha < 3$ thì $\exists\ u_0, v_0, w_0$ thỏa mãn

$u_0v_0 + v_0w_0 + w_0u_0 = 1$, tuy nhiên, $\frac{\overline{T}'_{\alpha 0}}{\overline{p}_0} < 0$ mâu thuẫn với (*) $\Rightarrow \text{Min}\alpha = 3$

Tương tự, $\frac{\overline{T}'_\beta}{\overline{p}} = 2\sqrt{3uvw(u+v+w)} + (\beta-1)(u^2+v^2+w^2) - (\beta+1) \le 0$ (**)

Nếu $\beta > 1$ thì cho $\begin{cases} u \to +\infty \\ v, w \to 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{\overline{T}'_\beta}{\overline{p}} \to +\infty \Rightarrow \exists\ u_1, v_1, w_1$ thỏa mãn

$u_1v_1 + v_1w_1 + w_1u_1 = 1$, tuy nhiên, $\frac{\overline{T}'_{\beta 1}}{\overline{p}_1} > 0$ mâu thuẫn với (**) $\Rightarrow \text{Max}\beta = 1$.

Vì vậy bất đẳng thức $4\sqrt{3}S + 3.\sum(a-b)^2 \ge a^2+b^2+c^2 \ge 1.\sum(a-b)^2 + 4\sqrt{3}S$ là tốt nhất.

§ 24.3. CÂU CHUYỆN VỀ BẤT ĐẲNG THỨC NESBITT–SHAPIRO

I. 45 CÁCH CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC NESBITT

Trong kho tàng các bất đẳng thức nổi tiếng, có một bất đẳng thức đã thu hút được sự chú ý của rất nhiều nhà toán học lừng danh trên thế giới trong suốt thế kỷ XX. Đó chính là bất đẳng thức ***Nesbitt – Shapiro***. ***Năm 1903***, nhà Toán học Anh ***Nesbitt*** đã đưa ra bất đẳng thức:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\ge\frac{3}{2}\quad\forall a,b,c>0\quad(1)$$

Chứng minh kết quả này không khó, sau đây là ***45 cách*** chứng minh khác nhau trong đó có nhiều cách do bạn **Dương Đức Lâm** sáng tác và sưu tầm. Các bạn đọc ham thích tìm tòi cũng có thể tự mình tìm thêm một số cách chứng minh khác nữa.

1. Nhóm 1: Sử dụng định nghĩa, biến đổi tương đương, đánh giá đại diện

• ***Cách 1:*** $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}-\frac{3}{2}=\left(\frac{a}{b+c}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{b}{c+a}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{c}{a+b}-\frac{1}{2}\right)$

$$=\frac{a-b+a-c}{2(b+c)}+\frac{b-c+b-a}{2(c+a)}+\frac{c-a+c-b}{2(a+b)}=\frac{1}{2}\sum_{cyc}(a-b)\left(\frac{1}{c+b}-\frac{1}{c+a}\right)$$

$$=\frac{(a-b)^2}{2(b+c)(c+a)}+\frac{(b-c)^2}{2(c+a)(a+b)}+\frac{(c-a)^2}{2(a+b)(b+c)}\ge0\Rightarrow\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\ge\frac{3}{2}$$

• ***Cách 2:*** Không mất tính tổng quát, giả sử $c=\min\{a,b,c\}$, gọi vế trái bất đẳng thức là S ta có

$$S-\frac{3}{2}=\frac{(a-b)^2}{(a+c)(b+c)}+\frac{a+b-2c}{2(a+b)(b+c)(c+a)}(a-c)(b-c)\ge0\text{, suy ra } S\ge\frac{3}{2}.$$

• ***Cách 3:*** Ta sẽ chứng minh đại diện bất đẳng thức

$$\frac{a}{b+c}\ge\frac{1}{4}\cdot\frac{8a-b-c}{a+b+c}\Leftrightarrow4a(a+b+c)\ge(8a-b-c)(b+c)\Leftrightarrow(2a-b-c)^2\ge0$$

Khi đó $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\ge\frac{1}{4}\cdot\frac{(8a-b-c)+(8b-c-a)+(8c-a-b)}{a+b+c}=\frac{3}{2}$

• ***Cách 4:*** Chuẩn hóa $a+b+c=3$. Ta sẽ chứng minh đại diện bất đẳng thức

$$\frac{a}{b+c}=\frac{a}{3-a}\ge\frac{1}{2}+\frac{3}{2}(a-1)\Leftrightarrow2a\ge3-a+3(3-a)(a-1)\Leftrightarrow3(a-1)^2\ge0$$

Khi đó $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=\frac{a}{3-a}+\frac{b}{3-b}+\frac{c}{3-c}\ge\frac{3}{2}+\frac{3}{2}(a+b+c-3)=\frac{3}{2}$

• ***Cách 5:*** Chuẩn hóa $a+b+c=3$. Ta sẽ chứng minh đại diện bất đẳng thức

$$\frac{a}{3-a}\ge\frac{3a-1}{4}\Leftrightarrow4a\ge(3-a)(3a-1)\Leftrightarrow2(a-1)^2\ge0$$

$$\Rightarrow VT(1)=\frac{a}{3-a}+\frac{b}{3-b}+\frac{c}{3-c}\ge\frac{3(a+b+c)-3}{4}=\frac{3}{2}$$

• ***Cách 6:*** $(1) \Leftrightarrow S = \frac{(a-b)+(a-c)}{b+c} + \frac{(b-c)+(b-a)}{c+a} + \frac{(c-a)+(c-b)}{a+b} \geq 0$

Giả sử $a \geq b \geq c$ thì $S \geq \frac{a-b+a-c}{c+a} + \frac{b-c+b-a}{c+a} + \frac{c-a+c-b}{c+a} = 0 \Rightarrow$ đpcm

2. Nhóm 2: Sử dụng bất đẳng thức AM – GM

• ***Cách 7:*** $(1) \Leftrightarrow \left(1+\frac{a}{b+c}\right)+\left(1+\frac{b}{c+a}\right)+\left(1+\frac{c}{a+b}\right) \geq \frac{9}{2}$

$$\Leftrightarrow \frac{a+b+c}{a+b} + \frac{a+b+c}{a+b} + \frac{a+b+c}{a+b} \geq \frac{9}{2} \Leftrightarrow 2(a+b+c)\left[\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right] \geq 9$$

$$\Leftrightarrow T = \left[(b+c)+(c+a)+(a+b)\right]\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right) \geq 9$$

Sử dụng bất đẳng thức *AM – GM*, ta có

$$T \geq 3.\sqrt[3]{(b+c)(c+a)(a+b)}.3.\sqrt[3]{\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}} = 9 \Rightarrow \text{(đpcm)}$$

• ***Cách 8:*** Sử dụng bất đẳng thức ***AM – GM***, ta có

$$+\begin{cases} \frac{a^2}{b+c} + \frac{b+c}{4} = \frac{a}{2}\left(\frac{2a}{b+c}+\frac{b+c}{2a}\right) \geq \frac{a}{2}\cdot 2\sqrt{\frac{2a}{b+c}\cdot\frac{b+c}{2a}} = a \\ \frac{b^2}{c+a} + \frac{c+a}{4} = \frac{b}{2}\left(\frac{2b}{c+a}+\frac{c+a}{2b}\right) \geq \frac{b}{2}\cdot 2\sqrt{\frac{2b}{c+a}\cdot\frac{c+a}{2b}} = b \\ \frac{c^2}{a+b} + \frac{a+b}{4} = \frac{c}{2}\left(\frac{2c}{a+b}+\frac{a+b}{2c}\right) \geq \frac{c}{2}\cdot 2\sqrt{\frac{2c}{a+b}\cdot\frac{a+b}{2c}} = c \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} + \frac{a+b+c}{2} \geq a+b+c$$

$$\Rightarrow \left(\frac{a^2}{b+c}+a\right)+\left(\frac{b^2}{c+a}+b\right)+\left(\frac{c^2}{a+b}+c\right) \geq \frac{3}{2}(a+b+c)$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c)\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right) \geq \frac{3}{2}(a+b+c) \Rightarrow \frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

• ***Cách 9:*** Đặt $\begin{cases} b+c = x > 0 \\ c+a = y > 0 \\ a+b = z > 0 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{y+z-x}{2}$; $b = \frac{z+x-y}{2}$; $c = \frac{x+y-z}{2}$

Khi đó bất đẳng thức trở thành $\frac{y+z-x}{2x} + \frac{z+x-y}{2y} + \frac{x+y-z}{2z} \geq \frac{3}{2}$

$$\Leftrightarrow T = \frac{y}{x}+\frac{z}{x}+\frac{z}{y}+\frac{x}{y}+\frac{x}{z}+\frac{y}{z} \geq 3+3=6. \text{ Ta có: } T \geq 6.\sqrt[6]{\frac{y}{x}\cdot\frac{z}{x}\cdot\frac{z}{y}\cdot\frac{x}{y}\cdot\frac{x}{z}\cdot\frac{y}{z}} = 6$$

• ***Cách 10:*** Gọi vế trái bất đẳng thức cần chứng minh là *T*.

Đặt $P = \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} + \frac{a}{a+b}$; $Q = \frac{c}{b+c} + \frac{a}{c+a} + \frac{b}{a+b} \Rightarrow P + Q = 3$ và

$$\begin{cases} T + P = \frac{a+b}{b+c} + \frac{b+c}{c+a} + \frac{c+a}{a+b} \geq 3\cdot\sqrt[3]{\frac{a+b}{b+c}\cdot\frac{b+c}{c+a}\cdot\frac{c+a}{a+b}} = 3 \\ T + Q = \frac{a+c}{b+c} + \frac{b+a}{c+a} + \frac{c+b}{a+b} \geq 3\cdot\sqrt[3]{\frac{a+c}{b+c}\cdot\frac{b+a}{c+a}\cdot\frac{c+b}{a+b}} = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2T + (P+Q) = 2T + 3 \geq 3 + 3 \Rightarrow T \geq \frac{3}{2}$$

• ***Cách 11:*** $(1) \Leftrightarrow S = \left(\frac{a}{b+c} + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{b}{c+a} + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{c}{a+b} + \frac{1}{2}\right) \geq 3$

Theo bất đẳng thức ***AM – GM***, ta có: $S \geq 3\sqrt[3]{\left(\frac{a}{b+c} + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{b}{c+a} + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{c}{a+b} + \frac{1}{2}\right)}$

Ta chỉ cần chứng minh: $\left(\frac{a}{b+c} + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{b}{c+a} + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{c}{a+b} + \frac{1}{2}\right) \geq 1$

$\Leftrightarrow (2a+b+c)(2b+c+a)(2c+a+b) \geq 8(a+b)(b+c)(c+a)$

Theo ***AM – GM***: $2a+b+c = (a+b)+(a+c) \geq 2\sqrt{(a+b)(a+c)}$

Làm tương tự với 2 bất đẳng thức còn lại rồi nhân theo vế ta có đpcm.

• ***Cách 12:*** $(1) \Leftrightarrow S = \left(\frac{a}{b+c} + 1\right) + \left(\frac{b}{c+a} + 1\right) + \left(\frac{c}{a+b} + 1\right) \geq \frac{9}{2}$

Sử dụng bất đẳng thức ***AM – GM*** ta có $S \geq 3\sqrt[3]{\left(\frac{a}{b+c} + 1\right)\left(\frac{b}{c+a} + 1\right)\left(\frac{c}{a+b} + 1\right)}$

Ta chỉ cần chứng minh

$\left(\frac{a}{b+c} + 1\right)\left(\frac{b}{c+a} + 1\right)\left(\frac{c}{a+b} + 1\right) \geq \left(\frac{3}{2}\right)^3 \Leftrightarrow 8(a+b+c)^3 \geq 27(a+b)(b+c)(c+a)$

Theo ***AM – GM*** : $8(a+b+c)^3 = [(a+b)+(b+c)+(c+a)]^3 \geq 27(a+b)(b+c)(c+a)$.

• ***Cách 13:*** Đặt $x = \frac{a}{b+c}, y = \frac{b}{c+a}, z = \frac{c}{a+b}$ và $S = \frac{x+y+z}{3}$

Ta có $\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} + \frac{1}{1+z} = 2$ hay $xy + yz + zx + 2xyz = 1$. Ta cần chứng minh $S \geq \frac{1}{2}$.

Theo ***AM – GM***, ta có: $1 = xy + yz + zx + 2xyz \leq 3S^2 + 2S^3 \Leftrightarrow (2S-1)(S+1)^2 \geq 0 \Rightarrow S \geq \frac{1}{2}$

• ***Cách 14:*** Đặt $x = \frac{a}{b+c}, y = \frac{b}{c+a}, z = \frac{c}{a+b}$ ta có $\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} + \frac{1}{1+z} = 2$ (*)

Ta cần chứng minh $x + y + z \geq \frac{3}{2}$. Thật vậy, giả sử $x + y + z < \frac{3}{2}$, khi đó theo bất đẳng thức ***AM – GM*** thì $\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} + \frac{1}{1+z} \geq \frac{3}{\sqrt[3]{(1+x)(1+y)(1+z)}} \geq \frac{9}{3+x+y+z} > \frac{9}{3+\frac{3}{2}} = 2$.

Bất đẳng thức này mâu thuẫn với (*) nên điều giả sử $x+y+z<\frac{3}{2}$ là sai.

Vậy $x+y+z\geq\frac{3}{2}\Leftrightarrow\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}$.

• *Cách 15:* Đặt $x=\frac{b}{c}$; $y=\frac{c}{a}$; $z=\frac{a}{b}\Rightarrow xyz=1$. Khi đó

$$(1)\Leftrightarrow\frac{x}{1+zx}+\frac{y}{1+xy}+\frac{z}{1+yz}\geq\frac{3}{2}\Leftrightarrow 2\left(x^2y+y^2z+z^2x\right)\geq x+y+z+xy+yz+zx.$$

Theo bất đẳng thức $AM-GM$ ta có

$$x^2y+y^2z+z^2x=\frac{x^2y+x^2y+z^2x}{3}+\frac{y^2z+y^2z+x^2y}{3}+\frac{z^2x+z^2x+y^2z}{3}$$

$$\geq\sqrt[3]{x^5y^2z^2}+\sqrt[3]{x^2y^5z^2}+\sqrt[3]{x^2y^2z^5}=x+y+z.$$

Tương tự ta có: $x^2y+y^2z+z^2x\geq xy+yz+zx$. Cộng hai bất đẳng thức trên ta được đpcm.

• *Cách 16:* $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}\Leftrightarrow 2\sum_{cyc}a(a+b)(a+c)\geq 3(a+b)(b+c)(c+a)$

$\Leftrightarrow 2\left(a^3+b^3+c^3\right)\geq ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)$. Sử dụng $AM-GM$ ta có:

$$\sum_{cyc}\left(a^3+b^3\right)=\sum_{cyc}(a+b)\left(a^2+b^2-ab\right)\geq\sum_{cyc}(a+b)(2ab-ab)=\sum_{cyc}ab(a+b)\Rightarrow\text{(đpcm)}$$

• *Cách 17:* Ta sẽ chứng minh đại diện

$\frac{a}{b+c}\geq\frac{3}{2}\frac{\sqrt{a^3}}{\sqrt{a^3}+\sqrt{b^3}+\sqrt{c^3}}\Leftrightarrow 2\left(\sqrt{a^3}+\sqrt{b^3}+\sqrt{c^3}\right)\geq 3\sqrt{a}(b+c)$. Theo $AM-GM$ ta có

$$2\left(\sqrt{a^3}+\sqrt{b^3}+\sqrt{c^3}\right)=\left(\sqrt{a^3}+\sqrt{b^3}+\sqrt{b^3}\right)+\left(\sqrt{a^3}+\sqrt{c^3}+\sqrt{c^3}\right)\geq 3b\sqrt{a}+3c\sqrt{a}$$

Vậy $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}\cdot\frac{\sqrt{a^3}+\sqrt{b^3}+\sqrt{c^3}}{\sqrt{a^3}+\sqrt{b^3}+\sqrt{c^3}}=\frac{3}{2}$ (đpcm).

• *Cách 18:* Đặt $x=\frac{a}{c},y=\frac{b}{c}$. Không mất tính tổng quát giả sử $a\geq b\geq c\Rightarrow x\geq y\geq 1$

$(1)\Leftrightarrow\frac{x}{y+1}+\frac{y}{x+1}+\frac{1}{x+y}\geq\frac{3}{2}$. Theo $AM-GM$ ta có

$$\frac{x+1}{y+1}+\frac{y+1}{x+1}\geq 2\Rightarrow\frac{x}{y+1}+\frac{y}{x+1}\geq 2-\frac{1}{x+1}-\frac{1}{y+1}$$

Ta chỉ cần chứng minh: $2-\frac{1}{x+1}-\frac{1}{y+1}+\frac{1}{x+y}\geq\frac{3}{2}$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{2}-\frac{1}{y+1}\geq\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+y}\Leftrightarrow\frac{y-1}{2(y+1)}\geq\frac{y-1}{(x+1)(x+y)}$$

Bất đẳng thức này luôn đúng vì $x\geq y\geq 1\Rightarrow y-1\geq 0$ và $2(y+1)\leq(x+1)(x+y)$.

• ***Cách 19:*** Làm như *cách 18*, ta cần chứng minh $\dfrac{x}{y+1}+\dfrac{y}{x+1}+\dfrac{1}{x+y}\geq\dfrac{3}{2}$ với $x\geq y\geq 1$.

Đặt $A=x+y$ và $B=xy$, bất đẳng thức tương đương với $\dfrac{x^2+y^2+x+y}{(x+1)(y+1)}+\dfrac{1}{x+y}\geq\dfrac{3}{2}$

hay $\dfrac{A^2-2B+A}{A+B+1}+\dfrac{1}{A}\geq\dfrac{3}{2}\Leftrightarrow 2A^3-A^2-A+2\geq B(7A-2)$

Để ý rằng $7A-2>0$ và $A^2\geq 4B$, suy ra ta chỉ cần chứng minh

$4(2A^3-A^2-A+2)\geq A^2(7A-2)\Leftrightarrow (A-2)^2(A+2)\geq 0$ luôn đúng $\Rightarrow$(đpcm)

• ***Cách 20:*** Sử dụng bất đẳng thức ***AM – GM*** $a+\dfrac{b+c}{2}+\dfrac{b+c}{2}\geq 3\sqrt[3]{a.\dfrac{(b+c)^2}{4}}$

$$\Rightarrow (a+b+c)^3\geq\frac{27}{4}a(b+c)^2\Rightarrow\sqrt{(a+b+c)^3}\geq\frac{3\sqrt{3}}{2}a\sqrt{a}.\frac{b+c}{a}\Leftrightarrow\frac{a}{b+c}\geq\frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{(a+b+c)^3}}$$

Vậy $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}\geq\dfrac{3\sqrt{3}}{2}.\dfrac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}+c\sqrt{c}}{\sqrt{(a+b+c)^3}}$.

Chuẩn hóa $a+b+c=3$. Ta cần chứng minh $a\sqrt{a}+b\sqrt{b}+c\sqrt{c}\geq 3$

Theo ***AM – GM***, ta có: $\begin{cases}a\sqrt{a}+a\sqrt{a}+1\geq 3a\\ b\sqrt{b}+b\sqrt{b}+1\geq 3b\\ c\sqrt{c}+c\sqrt{c}+1\geq 3c\end{cases}\Rightarrow a\sqrt{a}+b\sqrt{b}+c\sqrt{c}\geq 3$ (đpcm)

• ***Cách 21:*** Sử dụng bất đẳng thức ***AM – GM***, ta có

$$2a+(b+c)\geq 2\sqrt{2a(b+c)}\Leftrightarrow (2a+b+c)^2\geq 8a^2.\frac{b+c}{a}\Leftrightarrow\frac{a}{b+c}\geq\frac{8a^2}{(2a+b+c)^2}$$

Từ đó ta chứng minh được $VT(1)\geq\dfrac{8a^2}{(2a+b+c)^2}+\dfrac{8b^2}{(2b+c+a)^2}+\dfrac{8c^2}{(2c+a+b)^2}$

Không mất tính tổng quát giả sử $a+b+c=3$, khi đó ta chỉ cần chứng minh

$\dfrac{a^2}{(a+3)^2}+\dfrac{b^2}{(b+3)^2}+\dfrac{c^2}{(c+3)^2}\geq\dfrac{3}{16}$. Để ý rằng $\dfrac{a^2}{(a+3)^2}\geq\dfrac{1}{16}+\dfrac{3}{32}(a-1)$ (*)

Thật vậy, (*) $\Leftrightarrow\dfrac{3}{2}(a-1)^2(a-3)\leq 0$ luôn đúng vì $0<a<3$.

Trong (*) thay a lần lượt bởi b,c rồi cộng theo vế các bất đẳng thức ta được

$$\frac{a^2}{(a+3)^2}+\frac{b^2}{(b+3)^2}+\frac{c^2}{(c+3)^2}\geq\frac{3}{16}+\frac{3}{32}(a+b+c-3)=\frac{3}{16}.\text{ (đpcm)}$$

• ***Cách 22:*** Không mất tính tổng quát, giả sử $a\geq b\geq c$. Ta sẽ chứng minh

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}+\frac{a}{a+b}\quad (*)$$

Thật vậy $(*) \Leftrightarrow \frac{a-b}{b+c}+\frac{b-c}{c+a}+\frac{c-a}{a+b}\ge 0$

Vì $a\ge b\ge c$ nên $\frac{a-b}{b+c}\ge\frac{a-b}{a+c}$ và $\frac{c-a}{a+b}\ge\frac{c-a}{a+c}$ suy ra

$\frac{a-b}{b+c}+\frac{b-c}{c+a}+\frac{c-a}{a+b}\ge\frac{a-b}{a+c}+\frac{b-c}{c+a}+\frac{c-a}{a+c}=\frac{a-b+b-c+c-a}{a+c}=0$, tức là (*) đúng.

Từ đó $\frac{2a}{b+c}+\frac{2b}{c+a}+\frac{2c}{a+b}\ge\frac{a+b}{b+c}+\frac{b+c}{c+a}+\frac{c+a}{a+b}\ge 3\sqrt[3]{\frac{a+b}{b+c}\times\frac{b+c}{c+a}\times\frac{c+a}{a+b}}=3$ (đpcm)

• ***Cách 23: Bổ đề :*** $\frac{a^n+b^n+c^n}{3}\ge\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^n$, $\forall a,b,c>0; n\in\mathbb{N}$

Chứng minh: Sử dụng bất đẳng thức ***AM – GM,*** ta có:

$$+\begin{cases} a^n+(n-1)\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^n\ge n\cdot\sqrt[n]{a^n\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{n(n-1)}}=n\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{n-1}a \\ b^n+(n-1)\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^n\ge n\cdot\sqrt[n]{b^n\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{n(n-1)}}=n\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{n-1}b \\ c^n+(n-1)\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^n\ge n\cdot\sqrt[n]{c^n\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{n(n-1)}}=n\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{n-1}c \end{cases}$$

$$\Rightarrow\left(a^n+b^n+c^n\right)\ge n\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{n-1}(a+b+c)-3(n-1)\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^n=3\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^n$$

Áp dụng: Không mất tính tổng quát giả sử $a+b+c=1$. Sử dụng ***AM – GM,*** ta có

$$(2-2a)(1+a)(1+a)\le\left[\frac{(2-2a)+(1+a)(1+a)}{3}\right]^3=\frac{64}{27}$$

Do đó $\frac{a}{1-a}\ge\frac{27}{32}a(1+a)^2$. Tương tự $\frac{b}{1-b}\ge\frac{27}{32}b(1+b)^2, \frac{c}{1-c}\ge\frac{27}{32}c(1+c)^2$. Từ đó

$VT(1)=\frac{a}{1-a}+\frac{b}{1-b}+\frac{c}{1-c}\ge\frac{27}{32}\left[(a^3+b^3+c^3)+2(a^2+b^2+c^2)+(a+b+c)\right]\ge\frac{3}{2}$.

• ***Cách 24:*** Không mất tính tổng quát giả sử $a+b+c=1$. Khi đó $0<a,b,c<1$. Theo công thức cấp số nhân lùi vô hạn ta có

$$VT(1)=\frac{a}{1-a}+\frac{b}{1-b}+\frac{c}{1-c}=\sum_{n=1}^{+\infty}a^n+\sum_{n=1}^{+\infty}b^n+\sum_{n=1}^{+\infty}c^n=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a^n+b^n+c^n\right)$$

Sử dụng bổ đề ở ***cách 23*** ta được

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a^n+b^n+c^n\right)\ge 3\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^n=3\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n=3.\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}.\Rightarrow\text{(đpcm)}$$

• ***Cách 25:*** Không mất tính tổng quát, giả sử $a+b+c=1$. Trước hết ta sẽ chứng minh $T=\frac{a+bc}{b+c}+\frac{b+ca}{c+a}+\frac{c+ab}{a+b}\ge 2$. Sử dụng kỹ thuật đồng bậc trong ***AM – GM,*** ta có

$$T=\frac{(a+b)(a+c)}{b+c}+\frac{(b+c)(b+a)}{c+a}+\frac{(c+a)(c+b)}{a+b}\geq(a+b)+(b+c)+(c+a)=2$$

Từ đó, kết hợp với bất đẳng thức quen biết $\frac{xy}{x+y}\leq\frac{x+y}{4}$ với mọi $x,y\geq 0$, ta có

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq 2-\frac{bc}{b+c}-\frac{ca}{c+a}-\frac{ab}{a+b}\geq 2-\frac{1}{4}\left[(b+c)+(c+a)+(a+b)\right]=\frac{3}{2}$$

• ***Cách 26:*** Sử dụng bất đẳng thức quen biết $(x+y+z)^2\geq 3(xy+yz+zx)$ ta có

$$\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)^2\geq 3\left[\frac{ab}{(b+c)(c+a)}+\frac{bc}{(c+a)(a+b)}+\frac{ca}{(a+b)(b+c)}\right]$$

Suy ra bất đẳng thức đã cho là đúng nếu ta chứng minh được bất đẳng thức mạnh hơn là

$$\frac{ab}{(b+c)(c+a)}+\frac{bc}{(c+a)(a+b)}+\frac{ca}{(a+b)(b+c)}\geq\frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow 4[ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)]\geq 3(a+b)(b+c)(c+a)$$

Không mất tính tổng quát giả sử $a+b+c=1$, bất đẳng thức trở thành

$$4[ab(1-c)+bc(1-a)+ca(1-b)]\geq 3(1-a)(1-b)(1-c)$$

$$\Leftrightarrow ab+bc+ca\geq 9abc\Leftrightarrow\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq\frac{9}{a+b+c}$$

Bất đẳng thức cuối luôn đúng theo ***AM – GM*** và ta có điều phải chứng minh.

• ***Cách 27:*** Sử dụng bất đẳng thức ***AM – GM,*** ta có

$$\frac{a}{b+c}+\frac{a}{b+c}+\frac{1}{2}\geq 3\sqrt[3]{\frac{a^2}{2(b+c)^2}}=\frac{9a}{3\sqrt[3]{2a(b+c)(b+c)}}\geq\frac{9a}{2(a+b+c)}$$

Tương tự ta chứng minh được

$$\frac{b}{c+a}+\frac{b}{c+a}+\frac{1}{2}\geq\frac{9b}{2(a+b+c)}\quad\text{và}\quad\frac{c}{a+b}+\frac{c}{a+b}+\frac{1}{2}\geq\frac{9c}{2(a+b+c)}$$

Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên cho ta $2VT(1)+\frac{3}{2}\geq\frac{9}{2}\Leftrightarrow VT(1)\geq\frac{3}{2}$.

• ***Cách 28:*** Không mất tính tổng quát, giả sử $a+b+c=3$.

Sử dụng bất đẳng thức ***AM – GM,*** ta có

$$\frac{a^2}{(3-a)^2}=\frac{2a^3}{2a(3-a)(3-a)}\geq\frac{2a^3}{\left[\frac{2a+(3-a)+(3-a)}{3}\right]^3}=\frac{a^3}{4}\Rightarrow\frac{a}{3-a}\geq\frac{a\sqrt{a}}{2}$$

Tương tự và suy ra $VT(1)=\frac{a}{3-a}+\frac{b}{3-b}+\frac{c}{3-c}\geq\frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}+c\sqrt{c}}{2}\geq\frac{3}{2}$.

• ***Cách 29:*** Bất đẳng thức đã cho tương đương với $\sum_{cyc}\left(\frac{a}{b+c}\right)^2+\sum_{cyc}\frac{2bc}{(a+b)(a+c)}\geq\frac{9}{4}$.

Sử dụng bất đẳng thức ***AM – GM,*** ta có

$$\left(\frac{a}{b+c}\right)^2+\frac{1}{4}\geq\frac{a}{b+c};\left(\frac{b}{c+a}\right)^2+\frac{1}{4}\geq\frac{b}{c+a};\left(\frac{c}{a+b}\right)^2+\frac{1}{4}\geq\frac{c}{a+b}$$

Ta chỉ cần chứng minh $\sum_{cyc}\frac{a}{b+c}+\sum_{cyc}\frac{2bc}{(a+b)(a+c)}\ge 3$

$\Leftrightarrow \sum_{cyc}a(a+b)(a+c)+\sum_{cyc}2bc(b+c)\ge 3(a+b)(b+c)(c+a)\Leftrightarrow a^3+b^3+c^3\ge 3abc$

Bất đẳng thức cuối luôn đúng theo ***AM – GM*** và ta có đpcm.

3. Nhóm 3: Sử dụng các bất đẳng thức cổ điển khác

• ***Cách 30:*** Sử dụng bất đẳng thức ***CBS*** ta có

$$[a(b+c)+b(c+a)+c(a+b)]\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)\ge(a+b+c)^2$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\ge\frac{(a+b+c)^2}{a(b+c)+b(c+a)+c(a+b)}\ge\frac{3(ab+bc+ca)}{2(ab+bc+ca)}=\frac{3}{2}$$

• ***Cách 31:*** Không mất tính tổng quát, giả sử $a,b,c\in(0,3)$ và $a+b+c=3$.

Khi đó ta có $(a-1)^2\ge 0\Leftrightarrow a+1\ge a(3-a)\Leftrightarrow \frac{a}{3-a}\ge\frac{a^2}{a+1}$

Tương tự $\frac{b}{3-b}\ge\frac{b^2}{b+1}$; $\frac{c}{3-c}\ge\frac{c^2}{c+1}$

Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên và sử dụng bất đẳng thức ***CBS*** ta được

$$VT(1)=\frac{a}{3-a}+\frac{b}{3-b}+\frac{c}{3-c}\ge\frac{a^2}{a+1}+\frac{b^2}{b+1}+\frac{c^2}{c+1}\ge\frac{(a+b+c)^2}{a+b+c+3}=\frac{3}{2}.$$

• ***Cách 32:*** Không mất tính tổng quát giả sử $a\le b\le c\Rightarrow a+b\le a+c\le b+c$

$$\Rightarrow\begin{cases}a\le b\le c\\ \frac{1}{b+c}\le\frac{1}{c+a}\le\frac{1}{a+b}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b+c\ge c+a\ge a+b\\ \frac{a}{b+c}\le\frac{b}{c+a}\le\frac{c}{a+b}\end{cases}$$

Sử dụng bất đẳng thức ***Chebyshev*** ta có

$$\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)[(b+c)+(c+a)+(a+b)]\ge 3\left[\frac{a}{b+c}(b+c)+\frac{b}{c+a}(c+a)+\frac{c}{a+b}(a+b)\right]$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)[2(a+b+c)]\ge 3(a+b+c)\Leftrightarrow$$

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\ge\frac{3(a+b+c)}{2(a+b+c)}=\frac{3}{2}$$

• ***Cách 33:*** $(1)\Leftrightarrow\sum_{cyc}\left(\frac{a}{b+c}-\frac{1}{2}\right)\ge 0\Leftrightarrow\sum_{cyc}\frac{2a-b-c}{b+c}\ge 0$

Giả sử $a\ge b\ge c$ thì $\begin{cases}2a-b-c\ge 2b-c-a\ge 2c-a-b\\ \frac{1}{b+c}\ge\frac{1}{c+a}\ge\frac{1}{a+b}\end{cases}$.

Theo bất đẳng thức ***Chebysev*** : $\sum_{cyc}\frac{2a-b-c}{b+c}\ge\frac{1}{3}\left[\sum_{cyc}(2a-b-c)\right]\left[\sum_{cyc}\frac{1}{b+c}\right]=0\Rightarrow$ (đpcm)

4. Nhóm 4: Sử dụng bất đẳng thức cận đại

• ***Cách 34 :*** Không mất tính tổng quát giả sử $a \le b \le c \Rightarrow a+b \le a+c \le b+c$

$$\Rightarrow \begin{cases} a \le b \le c \\ \dfrac{1}{b+c} \le \dfrac{1}{c+a} \le \dfrac{1}{a+b} \end{cases}$$. Theo bất đẳng thức ***hoán vị*** ta có

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \ge \frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}+\frac{a}{a+b} \text{ và } \frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \ge \frac{c}{b+c}+\frac{a}{c+a}+\frac{b}{a+b}$$

Cộng theo vế hai bất đẳng thức này ta nhận được đpcm.

• ***Cách 35:*** $(1) \Leftrightarrow \sum_{cyc} \dfrac{a(a+b+c)}{b+c} \ge \dfrac{3(a+b+c)}{2} \Leftrightarrow \sum_{cyc} \dfrac{a^2}{b+c} \ge \dfrac{a+b+c}{2}$

Giả sử $a \ge b \ge c$, theo bất đẳng thức ***hoán vị*** thì

$$\sum_{cyc} \frac{a^2}{b+c} \ge \sum_{cyc} \frac{a^2}{a+b} \text{ và } \sum_{cyc} \frac{a^2}{b+c} \ge \sum_{cyc} \frac{a^2}{a+c}$$

Suy ra $\sum_{cyc} \dfrac{a^2}{b+c} \ge \dfrac{1}{2}\left[\sum_{cyc} \dfrac{a^2}{a+b}+\sum_{cyc} \dfrac{a^2}{a+c}\right] = \dfrac{1}{2}\sum_{cyc} \dfrac{a^2+b^2}{a+b} \ge \dfrac{1}{4}\sum_{cyc} \dfrac{(a+b)^2}{a+b} = \dfrac{a+b+c}{2}$

• ***Cách 36:*** Trước hết ta sẽ chứng minh bất đẳng thức sau với mọi $a,b,c \ge 0$:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \ge \frac{2ab}{(c+a)(c+b)}+\frac{2bc}{(a+b)(a+c)}+\frac{2ca}{(b+c)(b+a)} \quad (1)$$

Thật vậy $(1) \Leftrightarrow a^3+b^3+c^3+3abc \ge 2ab(a+b)+2bc(b+c)+2ca(c+a)$, đúng theo ***Schur***.

Cuối cùng ta chỉ cần chứng minh

$\sum_{cyc} \dfrac{2ab}{(c+a)(c+b)} \ge \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a) \ge 6abc$, đúng theo ***AM – GM***.

• ***Cách 37:*** Gọi vế trái của (1) là P, ta có

$$P-\frac{3}{2}=\frac{2\left[a(a-b)(a-c)+b(b-a)(b-c)+c(c-a)(c-b)\right]+(a+b+c)\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]}{4(a+b)(b+c)(c+a)}$$

Theo bất đẳng thức ***Schur*** thì $a(a-b)(a-c)+b(b-a)(b-c)+c(c-a)(c-b) \ge 0$

kết hợp với $(a+b+c)\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right] \ge 0$ suy ra điều phải chứng minh.

• ***Cách 38:*** Gọi vế trái của (1) là P, ta có

$$P-\frac{3}{2}=\frac{(2a+b+c)(a-b)(a-c)+(2b+c+a)(b-a)(b-c)+(2c+a+b)(c-a)(c-b)}{2(a+b)(b+c)(c+a)}$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \ge b \ge c$, suy ra $2a+b+c \ge 2b+c+a \ge 2c+a+b$

Sử dụng bất đẳng thức ***Vornicu – Schur*** (hay bất đẳng thức ***Schur*** suy rộng) ta có

$(2a+b+c)(a-b)(a-c)+(2b+c+a)(b-a)(b-c)+(2c+a+b)(c-a)(c-b) \ge 0$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

5. Nhóm 5: Phương pháp giải tích

• ***Cách 39:*** Không mất tính tổng quát giả sử $a \ge b \ge c$. Đặt $x = a \ge b \ge c$.

Ta có (1) $\Leftrightarrow f(x) = \dfrac{x}{b+c} + \dfrac{b}{c+x} + \dfrac{c}{x+b}$ với $x \ge b \ge c > 0$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{b+c} - \frac{b}{(x+c)^2} - \frac{c}{(x+b)^2} > \frac{1}{b+c} - \frac{b}{(b+c)^2} - \frac{c}{(b+c)^2} = 0$$

$\Rightarrow f(x)$ tăng $[b, +\infty) \Rightarrow f(x) \ge f(b) = \dfrac{2b+c}{b+c}$ (2)

Đặt $x = b \Rightarrow x \ge c > 0$, xét hàm số $g(x) = \dfrac{2x+c}{x+c}$ với $x \ge c > 0$

$\Rightarrow g'(x) = \dfrac{c}{(x+c)^2} > 0\ \forall c > 0 \Rightarrow g(x)$ tăng trên $[c, +\infty) \Rightarrow g(x) \ge g(c) = \dfrac{3}{2}$ (3)

Từ (2) và (3) suy ra $\dfrac{a}{b+c} + \dfrac{b}{c+a} + \dfrac{c}{a+b} \ge \dfrac{3}{2}$ $\forall a, b, c > 0$

• ***Cách 40:*** Đặt $x = \dfrac{a}{b+c}, y = \dfrac{b}{c+a}, z = \dfrac{c}{a+b}$

Xét hàm $f(t) = \dfrac{t}{t+1} (t > 0)$ ta có $f'(t) = \dfrac{1}{(t+1)^2} > 0$ suy ra f tăng trên $(0; +\infty)$

Mặt khác $f''(t) = -\dfrac{2}{(t+1)^3} < 0$ $\forall t \in (0; +\infty)$ nên $f(t)$ lõm trên khoảng $(0; +\infty)$

Khi đó áp dụng bất đẳng thức ***Jensen*** ta có

$$f\left(\frac{x+y+z}{3}\right) \ge \frac{f(x)+f(y)+f(z)}{3} = \frac{1}{3}\left(\frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{a+b+c} + \frac{c}{a+b+c}\right) = \frac{1}{3} = f\left(\frac{1}{2}\right)$$

suy ra $\dfrac{x+y+z}{3} \ge \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x + y + z = \dfrac{a}{b+c} + \dfrac{b}{c+a} + \dfrac{c}{a+b} \ge \dfrac{3}{2}$ (đpcm)

• ***Cách 41:*** Đặt $S = a + b + c$ ta có: (1) $\Leftrightarrow \dfrac{a}{S-a} + \dfrac{b}{S-b} + \dfrac{c}{S-c} \ge \dfrac{3}{2}$

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{x}{S-x}$ với $x \in (0, S)$

Ta có $f'(x) = \dfrac{S}{(S-x)^2} \Rightarrow f''(x) = \dfrac{2S}{(S-x)^3} > 0$ với mọi $x \in (0, S)$

$\Rightarrow f(x)$ là hàm lồi trên $(0, S)$. Sử dụng bất đẳng thức ***Jensen*** ta có

$$\frac{a}{S-a} + \frac{b}{S-b} + \frac{c}{S-c} = f(a) + f(b) + f(c) \ge 3f\left(\frac{a+b+c}{3}\right) = 3f\left(\frac{S}{3}\right) = 3 \cdot \frac{\frac{S}{3}}{\frac{2S}{3}} = \frac{3}{2}$$

• ***Cách 42:*** Không mất tính tổng quát giả sử $a \ge b \ge c$ và $a + b + c = 1$.

Khi đó $a \ge \dfrac{1}{3}$, $c \le \dfrac{1}{3}$ suy ra $a + b = 1 - c \ge \dfrac{2}{3}$, nên $(a, b, c) \succ \left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$.

Áp dụng bất đẳng thức ***Karamata*** cho hàm $y = f(x) = \dfrac{x}{1-x}$, lồi trên $(0,1)$, đối với bộ trội $(a,b,c) \succ \left(\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3}\right)$, ta có $VT(1) = f(a) + f(b) + f(c) = f\left(\dfrac{1}{3}\right) + f\left(\dfrac{1}{3}\right) + f\left(\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{3}{2}$

Bất đẳng thức được chứng minh.

6. Nhóm 6: Phương pháp hiện đại

• ***Cách 43:*** Đặt $f(a,b,c) = \dfrac{a}{b+c} + \dfrac{b}{c+a} + \dfrac{c}{a+b}$ và $t = \dfrac{a+b}{2}$ ta có

$$f(a,b,c) - f(t,t,c) = \frac{(a-b)^2(a+b+c)}{(a+c)(b+c)(a+b+2c)} \ge 0$$

Mặt khác ta lại có $f(t,t,c) - \dfrac{3}{2} = \dfrac{2t}{c+t} + \dfrac{c}{2t} - \dfrac{3}{2} = \dfrac{(c-t)^2}{2t(c+t)} \ge 0$.

Từ hai bất đẳng thức trên suy ra $f(a,b,c) \ge f(t,t,c) \ge \dfrac{3}{2}$.

• ***Cách 44:*** Đặt $f(a,b,c) = \dfrac{a}{b+c} + \dfrac{b}{c+a} + \dfrac{c}{a+b}$ và $t = \sqrt{ab}$.

Không mất tính tổng quát, giả sử $c = \min\{a,b,c\}$, ta có $t \ge c$ và

$$f(a,b,c) - f(a,b,t) = \frac{a(t-c)}{(b+c)(b+t)} + \frac{b(t-c)}{(c+a)(t+a)} + \frac{c-t}{a+b}$$

$$\ge \frac{t-c}{a+b}\left(\frac{a}{b+t} + \frac{b}{t+a} - 1\right) = \frac{t-c}{a+b}\cdot\frac{(a-b)^2}{(b+t)(t+a)} \ge 0$$

Mặt khác ta lại có $f(a,b,t) - \dfrac{3}{2} = \dfrac{(a-b)^2}{2(b+t)(t+a)} + \dfrac{(a-t)^2}{2(b+t)(a+b)} + \dfrac{(t-b)^2}{2(a+b)(t+a)} \ge 0$

Suy ra $f(a,b,c) \ge f(a,b,t) \ge \dfrac{3}{2}$.

• ***Cách 45:*** Nhận xét rằng vế trái của bất đẳng thức là một hàm đối xứng đối với ba biến a,b,c, nếu viết nó dưới dạng đa thức thì được một đa thức có bậc không quá 3. Theo định lí ***ABC*** ta chỉ cần xét bất đẳng thức trong hai trường hợp:

– *Trường hợp 1:* Một trong ba biến a,b,c bằng 0, giả sử $c = 0$. Bất đẳng thức trở thành

$\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} \ge \dfrac{3}{2}$ luôn đúng theo bất đẳng thức ***AM – GM***.

– *Trường hợp 2:* Hai trong ba biến a,b,c bằng nhau, giả sử $b = c$. Bất đẳng thức trở thành

$\dfrac{a}{2b} + \dfrac{2b}{a+b} \ge \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow \dfrac{(a-b)^2}{2b(a+b)} \ge 0$, luôn đúng.

Bất đẳng thức được chứng minh xong.

II. MỞ RỘNG BẤT ĐẲNG THỨC NESBIT

Chúng ta vừa được làm quen với 45 cách chứng minh bất đẳng thức ***Nesbit***. Điều này nói lên đây thực sự là một bất đẳng thức không khó để chứng minh. Tuy nhiên việc mở rộng bất đẳng thức ***Nesbitt*** cho n số thực dương $(n \geq 4)$ lại không đơn giản chút nào. Suốt ***53 năm*** nhiều nhà toán học đã tìm cách mở rộng và chứng minh bất đẳng thức trên cho các trường hợp đặc biệt và tổng quát nhưng mãi đến ***năm 1958*** một học trò của ***Nesbitt*** là ***Mordell*** mới tìm ra được cách chứng minh cho ***n = 4, 5, 6*** chấm dứt một thời gian dài bài toán chưa có lời giải. ***Năm 1954***, nhà Toán học Mỹ ***Shapiro*** đã đưa ra mệnh đề tổng quát và nó được gắn với tên gọi ***bất đẳng thức Shapiro***

Mệnh đề 1: Giả sử $a_1, a_2, \ldots a_n > 0$. Xét tính đúng sai của bất đẳng thức sau:

$$f_n(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \frac{a_1}{a_2 + a_3} + \frac{a_2}{a_3 + a_4} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{a_n + a_1} + \frac{a_n}{a_1 + a_2} \geq \frac{n}{2} \quad (2)$$

Ngay từ khi ra đời, bất đẳng thức (2) đã cuốn hút được sự chú ý của rất nhiều người đam mê toán học. Thậm chí nó nổi tiếng đến mức mà ***năm 1990***, tại hội nghị toán học Oberwolfach về các bất đẳng thức, các nhà toán học đã phải nhắc lại toàn bộ lịch sử chứng minh lâu dài của nó mà đôi khi được xem là vô vọng. Bất đẳng thức Shapiro tuy với vẻ bề ngoài cực kì đơn giản nhưng để chứng minh nó là điều vô cùng khó, do chúng ta phải xét một số lượng rất lớn các trường hợp riêng biệt. Điều này không làm cho chúng ta ngạc nhiên, bởi vì *bất đẳng thức Shapiro không đúng với mọi số tự nhiên n*. Trong phần tiếp theo của chuyên đề này, chúng tôi chỉ cố gắng trình bày tóm tắt lại các kết quả quan trọng của các nhà toán học liên quan đến bất đẳng thức (1) mà không đề cập chi tiết đến các chứng minh bởi vì trong một số trường hợp việc chứng minh đòi hỏi phải sử dụng đến các kiến thức của toán cao cấp vượt ra ngoài chương trình toán phổ thông. Trước hết xét trường hợp đơn giản nhất khi n = 4.

2. Với $n = 4$, bất đẳng thức (2) trở thành: $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+a} + \frac{d}{a+b} \geq 2 \quad \forall a, b, c, d > 0$. (3)

Chứng minh: Ta có $\left[a(b+c) + b(c+d) + c(d+a) + d(a+b)\right]\left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+a} + \frac{d}{a+b}\right) \geq$

$$\left(\sqrt{a(b+c)}.\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{b(c+d)}.\sqrt{\frac{b}{c+d}} + \sqrt{c(d+a)}.\sqrt{\frac{c}{d+a}} + \sqrt{d(a+b)}.\sqrt{\frac{d}{a+b}}\right)^2 = (a+b+c+d)^2$$

Suy ra: $$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+a} + \frac{d}{a+b} \geq \frac{(a+b+c+d)^2}{a(b+c) + b(c+d) + c(d+a) + d(a+b)}$$

Ta có: $$+\begin{cases} (a+b+c+d)^2 = \left[(a+d) + (b+c)\right]^2 \geq 4(a+d)(b+c) \\ (a+b+c+d)^2 = \left[(a+b) + (c+d)\right]^2 \geq 4(a+b)(c+d) \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2(a+b+c+d)^2 \geq 4\left[(a(b+c)+b(c+d)+c(d+a)+d(a+b))\right]$$

$$\Rightarrow \frac{(a+b+c+d)^2}{a(b+c)+b(c+d)+c(d+a)+d(a+b)} \geq \frac{4}{2} = 2.$$ Suy ra (đpcm)

3. Với $n=5$ thì (2) trở thành: $\frac{a_1}{a_2+a_3}+\frac{a_2}{a_3+a_4}+\frac{a_3}{a_4+a_5}+\frac{a_4}{a_5+a_1}+\frac{a_5}{a_1+a_2} \geq \frac{5}{2}\ \forall a_i > 0.$ (4)

Chứng minh: Đặt $a_1 = a_6;\ a_2 = a_7$. Sử dụng bất đẳng thức ***CBS*** ta có:

$$\sum_{k=1}^{5} a_k(a_{k+1}+a_{k+2}).\sum_{k=1}^{5}\frac{a_k}{a_{k+1}+a_{k+2}} \geq (a_1+a_2+a_3+a_4+a_5)^2$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{5}\frac{a_k}{a_{k+1}+a_{k+2}} \geq \frac{(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5)}{a_1(a_2+a_3)+a_2(a_3+a_4)+a_3(a_4+a_5)+a_4(a_5+a_1)+a_5(a_1+a_2)} \quad (*)$$

Ta sẽ chứng minh: $\frac{(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5)}{a_1(a_2+a_3)+a_2(a_3+a_4)+a_3(a_4+a_5)+a_4(a_5+a_1)+a_5(a_1+a_2)} \geq \frac{5}{2}$ (**)

$$\Leftrightarrow (a_1+a_2+a_3+a_4+a_5)^2 \geq \frac{5}{2}\left[a_1(a_2+a_3)+a_2(a_3+a_4)+a_3(a_4+a_5)+a_4(a_5+a_1)+a_5(a_1+a_2)\right]$$

$$\Leftrightarrow (a_1+a_2+a_3+a_4+a_5)^2 \geq \frac{5}{4}\left[(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5)^2-(a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2+a_5^2)\right]$$

$$\Leftrightarrow 5(a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2+a_5^2) \geq (a_1+a_2+a_3+a_4+a_5)^2$$

$$\Leftrightarrow (1^2+1^2+1^2+1^2+1^2)(a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2+a_5^2) \geq (a_1+a_2+a_3+a_4+a_5)^2$$

Bất đẳng thức cuối đúng theo ***CBS***. Từ đó suy ra (đpcm)

4. Với $n=6$ thì (2) trở thành:

$$\frac{a_1}{a_2+a_3}+\frac{a_2}{a_3+a_4}+\frac{a_3}{a_4+a_5}+\frac{a_4}{a_5+a_6}+\frac{a_5}{a_6+a_1}+\frac{a_6}{a_1+a_2} \geq 3,\ \forall a_i > 0 \quad (5)$$

Chứng minh: Đặt $a_7 = a_1; a_8 = a_2$. Sử dụng bất đẳng thức ***CBS***, ta có

$$\sum_{k=1}^{6} a_k(a_{k+1}+a_{k+2}).\sum_{k=1}^{6}\frac{a_k}{a_{k+1}+a_{k+2}} \geq (a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6)^2$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{6}\frac{a_k}{a_{k+1}+a_{k+2}} \geq \frac{(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6)^2}{a_1(a_2+a_3)+a_2(a_3+a_4)+a_3(a_4+a_5)+a_4(a_5+a_6)+a_5(a_6+a_1)+a_6(a_1+a_2)}$$

Ta sẽ chứng minh

$$\frac{(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6)^2}{a_1(a_2+a_3)+a_2(a_3+a_4)+a_3(a_4+a_5)+a_4(a_5+a_6)+a_5(a_6+a_1)+a_6(a_1+a_2)}\geq 3$$

$$\Leftrightarrow (a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6)^2\geq 3\sum_{k=1}^{6}a_k(a_{k+1}+a_{k+2})$$

$$\Leftrightarrow a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2+a_5^2+a_6^2\geq a_1(a_2+a_3)+a_2(a_3+a_4)+a_3(a_4+a_5)+$$

$$+a_4(a_5+a_6)+a_5(a_6+a_1)+a_6(a_1+a_2)-2a_1a_4-2a_2a_5-2a_3a_6$$

$$\Leftrightarrow \left[a_1+a_4-\frac{1}{2}(a_2+a_3+a_5+a_6)\right]^2+\frac{3}{4}(a_2-a_3+a_5-a_6)^2\geq 0$$, đúng suy ra (đpcm)

Phương pháp chứng minh (2) bằng bất đẳng thức ***CBS*** cho $n=3,4,5,6$ là một chứng minh rất đẹp. Cách chứng minh này dựa trên một bất đẳng thức gián tiếp là bất đẳng thức:

$$\frac{(a_1+a_2+...+a_n)^2}{a_1(a_2+a_3)+a_2(a_3+a_4)+...+a_n(a_1+a_2)}\geq\frac{n}{2}\quad (*)\ \forall a_1,a_2,...,a_n>0$$

Tuy nhiên không thể dùng phương pháp trên nhằm tạo ra (*) để chứng minh (2) đúng với $n\geq 7$, vì khi đó bất đẳng thức (*) sẽ không còn đúng nữa. Thật vậy, ta sẽ chứng minh (*) không đúng $\forall\ n\geq 7$ bằng phản ví dụ sau đây

• ***Phản ví dụ:***

Lấy $a_1=a_2=a_3=1$ và $a_4=a_5=a_6=...=a_{n-1}=a_n=\varepsilon$ thì

$$(*)\Leftrightarrow\frac{\left[3+(n-3)\varepsilon\right]^2}{3+6\varepsilon+(2n-9)\varepsilon^2}\geq\frac{n}{2}\quad (**)$$

Với $n\geq 7$, ta chọn $\varepsilon=\frac{1}{10n}$ và thế vào biểu thức vế trái của (**) ta có

$$\frac{\left[3+(n-3)\frac{1}{10n}\right]^2}{3+6\frac{1}{10n}+(2n-9)\frac{1}{100n^2}}<\frac{\left(3+\frac{1}{10}\right)^2}{3}=\frac{9,61}{3}<\frac{7}{2}\leq\frac{n}{2}$$

• ***Kết luận:*** Với $n\geq 7$ thì bất đẳng thức (**) không đúng suy ra (*) không đúng

Sau khi chứng minh thành công (2) đúng với $n=3,4,5,6$, *Mordell đã giả định rằng bất đẳng thức Shapio sẽ không đúng với mọi* $n\geq 7$. ***Năm 1956, Lighthill*** lần đầu tiên đã tìm ra một phản ví dụ cho bất đẳng thức này với $n=20$. Hai năm sau, ngoài ***Mordell, Zulauf*** và ***Rankine*** cũng tìm ra một phản ví dụ cho $n=14$. ***Zulauf*** cũng đã có một nhận xét tinh tế là đẳng thức:

$$S_{n+2}(a_1,...,a_n,a_{n-1},a_n)=S_n(a_1,...,a_n)+1\quad (6)$$

Từ đây ông nhận xét rằng nếu tìm được một phản ví dụ cho (1) với n nào đó thì cũng sẽ có các phản ví dụ cho $n+2, n+4, ...$

Năm 1959. Zulauf lại cho thêm một phản ví dụ khác với $n=53$.

Năm 1963. Diananda đã thiết lập được một đẳng thức khác rất ấn tượng, đó chính là:

$$S_{n+2}(a_1,...,a_{n-1},a_n)=S_n(a_1,...,a_n)+\frac{1}{2}-\frac{(a_n-a_{n+1})(a_n-a_1)}{2x_n(a_n+a_1)}$$

Từ đây suy ra, nếu với một bộ giá trị $(a_1,...,a_n)$ nào đó ta có $S_n(a_1,...,a_n)\le\frac{n}{2}$ và có một giá trị r nào đó, $1\le r\le n$, để mà a_{r-1},a_r,a_{r+1} (chỉ số tuần hoàn) đơn điệu (chúng ta có thể giả sử rằng $r=n$), thì sẽ dẫn đến sự đúng đắn của bất đẳng thức $S_{n+1}(a_1,...,a_{n-1},a_n)\le\frac{n+1}{2}$.

Với n lẻ thì rõ ràng rằng luôn luôn có một giá trị r như thế do chuỗi tuần hoàn có độ dài lẻ không thể chuyển giữa sự tăng và sự giảm ở mọi vị trí. ***Diananda*** rút ra được định lí sau

Định lí Diananda. Nếu (2) sai với $n=n_0$ lẻ nào đó thì nó sẽ sai với mọi $n\ge n_0$. Nếu (2) đúng cho $n=n_0$ chẵn nào đó thì nó cũng sẽ đúng với mọi $n\le n_0$.

Cùng với định lí này ông đã đưa ra một phản ví dụ cho (1) với $n=27$. Điều này có nghĩa là (2) sai với mọi n lẻ ≥ 27. Cùng một lập luận như đã được sử dụng trong định lí ***Diananda*** cũng cho thấy với n chẵn, dấu bằng của (2) xảy ra ở mọi điểm $a^\alpha=\frac{1}{2}(1+\alpha,1-\alpha,...,1+\alpha,1-\alpha)$, $(0\le\alpha\le1)$ trong khi với n lẻ nó chỉ xảy ra với $a^0=(1,...,1)$.

Cùng lúc này ***Djokovic*** đã chứng minh rằng (2) đúng cho $n=8$ và ***Bajsanski*** chứng minh (2) cũng đúng cho $n=7$. ***Năm 1968. Nowosad*** đã chứng minh (2) đúng cho $n=10$ và vì vậy theo lí thuyết trên bất đẳng thức ***Shapiro*** cũng đúng cho $n=9$. Do đó cho đến lúc này, chỉ còn lại có 10 trường hợp chưa được xác định là khi $n=12$ đối với n chẵn và $n=9,11,...,25$ khi n lẻ. ***Năm 1971. Daykin*** và ***Malcoln*** đã chứng minh (2) sai với $n=25$ và ***Kristinasen*** cũng đã chứng minh (2) đúng cho $n=12$, và vì vậy đúng cho $n=11$. Vào năm này ***Drinfeljd*** đã đưa ra một chứng minh rất ngắn gọn, sơ cấp mà lại sáng tạo. Đồng thời ông đã đánh giá xấp xỉ một bất đẳng thức gần với ***Shapiro*** đúng với mọi n: $\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{a_{i+1}+a_{i+2}}\ge\frac{n}{2}\cdot 0,989133...$ Việc chứng minh bất đẳng thức trên dựa theo một định lí nổi tiếng và một bất đẳng thức hoán vị sau đây.

Định lí Drinfeljd. Nếu đặt $g(x)$ là một bao lồi dưới của hai hàm lồi giảm $f(x)=2\left(e^x+e^{\frac{x}{2}}\right)^{-1}$ và $h(x)=e^{-x}$ thì $Inf\frac{2}{n}S_n(x_1,...,x_n)\ge g(0)$ đúng với mọi n.

Giá trị thực của $g(0)$ rất gần với 1: $g(0)=0,989133...$ và nó không phải là một số đại số.

Bất đẳng thức hoán vị. Nếu $a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n$ và $b_1 \ge b_2 \ge \ldots \ge b_n$ thì đối với bất kỳ hoán vị $(k_1,\ldots,k_n)$ nào của các chỉ số $(1,2,\ldots,n)$, ta có bất đẳng thức: $\sum_{i=1}^{n} a_i b_{k_i} \ge \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$.

Việc tìm miền đúng của (2) đã kéo dài gần 20 năm sau đó. Bắt đầu vào ***năm 1976***, ***Godunova*** và ***Leni*** đã chứng minh (2) đúng cho $n=12$. Cùng lúc này ***Bushell*** cũng đã đưa ra một phản ví dụ khác cho $n=25$ và ông cũng đưa ra một chứng minh sơ cấp mới với $n=7$. ***Bushell*** cùng với ***Craven*** đã chứng minh rằng (2) đúng với mọi n lẻ ≤ 23. ***Năm 1979***, ***Troesch*** và ***Searcy*** đã xét bài toán đại số các giá trị riêng tương ứng và chứng minh một kết quả ấn tượng: *Bất đẳng thức (2) không đúng với mọi $n \ge 14$. Bằng cách dùng máy tính số, ông đã chỉ ra rằng (2) đúng với mọi n chẵn ≥ 12 và n lẻ ≤ 23.* ***Năm 1985***, trong tạp chí ***Math Computing***, ***Troesch*** đã thành công trong việc đưa ra một chứng minh (2) đúng cho $n=13$ và đến ***năm 1989*** ông mới chứng minh được $n=23$. Như vậy (2) đã được chứng minh cho tất cả các giá trị n còn lại là 15, 17, 19 và 21.

Gần 40 năm sau khi ***Shapiro*** đề xuất bài toán, ***Troesch*** đã là người kết thúc một giai đoạn lịch sử kéo dài cho việc chứng minh bất đẳng thức rất nổi tiếng này khi mà ông thông qua việc giải bài toán với $n=23$ và đã hoàn thành việc chứng minh (2) với kết quả ấn tượng như sau:

Bất đẳng thức **(2) đúng** với mọi ***n* chẵn** ≤ 12 và **n lẻ** ≤ 23 ,mọi giá trị còn lại của n thì **(2) sai.**

Sau ông một số nhà toán khác như ***Diananda***, ***Mordell*** và ***Daykin*** cũng đã đề xuất một số bài toán mở rộng. ***Năm 1992***, ***Achim Clausing*** đã đề nghị bài toán sau:

Mệnh đề 2: Chứng minh: $\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{a_{i+2}+a_{i+3}} \ge \left[\frac{n}{3}\right]$, $\forall a_i > 0$, ở đây $[x]$ là phần nguyên của x. (7)

Có lẽ đây lại là một thách thức lớn nữa cho các nhà toán học trẻ trong thế kỉ XXI này.

Bây giờ chúng ta quay trở lại vấn đề là tìm $f(n)=\inf_{a_i>0} f_n(a_1,a_2,\ldots,a_n)$, tức là tìm cận dưới của bất đẳng thức ***Shapiro***. ***Năm 1958***, ***Ranikin*** đã chứng minh $\lambda = \lim_{n\to+\infty}\frac{f(n)}{n} = \inf_{n\ge1}\frac{f(n)}{n} < \frac{1}{2}.7.10^{-8}$

Năm 1971, ***Drinfeljd*** đã chứng minh $\lambda = \frac{1}{2}\varphi(0) = 0.4945668\ldots$ tức là chứng minh được:

Mệnh đề 3: $\frac{a_1}{a_2+a_3}+\frac{a_2}{a_3+a_4}+\ldots+\frac{a_{n-1}}{a_n+a_1}+\frac{a_n}{a_1+a_2} > 0.989133\times\frac{n}{2}$, $\forall a_1,a_2,\ldots a_n > 0$ (8)

Tạp chí ***Kvant*** của Nga ***số 4 năm 1991*** đã chứng minh bằng toán sơ cấp 2 kết quả sau đây:

Mệnh đề 4: $\frac{a_1}{a_2+a_3}+\frac{a_2}{a_3+a_4}+\ldots+\frac{a_{n-1}}{a_n+a_1}+\frac{a_n}{a_1+a_2} > (\sqrt{2}-1)n = 0.41421356n, \forall a_i > 0$ (9)

Mệnh đề 5: $\frac{a_1}{a_2+a_3}+\frac{a_2}{a_3+a_4}+\ldots+\frac{a_{n-1}}{a_n+a_1}+\frac{a_n}{a_1+a_2} > \frac{5}{12}n = 0.41666666n, \forall a_i > 0$ (10)

Bây giờ tôi xin giới thiệu một cách đánh giá tốt nhất bằng toán sơ cấp về bất đẳng thức này:

Mệnh đề 6: $S = \dfrac{a_1}{a_2+a_3} + \dfrac{a_2}{a_3+a_4} + \ldots + \dfrac{a_{n-1}}{a_n+a_1} + \dfrac{a_n}{a_1+a_2} > 0.4577996n$, $\forall a_i > 0$ (11)

Chứng minh

Xét $0 < \alpha < 1$; $k \in \mathbb{N}^*$. Đặt $a_{n+1} = a_1; a_{n+2} = a_2$; $\beta = \dfrac{\alpha^k}{k(1-\alpha)}$. Ta có:

$$S = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{a_{i+1}+a_{i+2}} = \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{a_i+\alpha^k a_{i+1}}{a_{i+1}+a_{i+2}} + k\cdot\frac{\beta(\alpha a_{i+1}+a_{i+2})}{a_{i+1}+a_{i+2}} - k\beta\right] =$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{a_i+\alpha^k a_{i+1}}{a_{i+1}+a_{i+2}} + k\cdot\frac{\beta(\alpha a_i+a_{i+1})}{a_i+a_{i+1}}\right] - k\beta n \ge \sum_{i=1}^{n}\left[(k+1)\cdot\sqrt[k+1]{\frac{a_i+\alpha^k a_{i+1}}{a_{i+1}+a_{i+2}}\cdot\frac{\beta^k(\alpha a_i+a_{i+1})^k}{(a_i+a_{i+1})^k}}\right] - k\beta n \quad (12)$$

Ta sẽ chứng minh: $(a_i+\alpha^k a_{i+1})(\alpha a_i + a_{i+1})^k \ge \alpha^k (a_i + a_{i+1})^{k+1}$ (13)

$$\Leftrightarrow (1+\alpha^k t_i)(\alpha + t_i)^k \ge \alpha^k (1+t_i)^{k+1} \text{ với } t_i = \frac{a_i+1}{a_i} \ge 0$$

Xét hàm số $f(t) = (1+\alpha^k t)(\alpha+t)^k - \alpha^k(1+t)^{k+1}$ với $t \ge 0$.

Ta có: $f^{(m)}(t) = (1+\alpha^k t)(\alpha+t)^{k-m} k(k-1)\ldots[k-(m-1)] +$

$+m\cdot\alpha^k(\alpha+t)^{k-(m-1)} k(k-1)\ldots[k-(m-2)] - \alpha^k(1+t)^{k+1-m}(k+1)k\ldots[k-(m-2)]$

$\Rightarrow f^{(m)}(0) = k(k-1)\ldots[k-(m-2)]\left[(k-m+1)\alpha^{k-m} + m\alpha^{2k-m+1} - (k+1)\alpha^k\right]$

$\ge k(k-1)\ldots(k-m+2)\left[(k+1)\sqrt[k+1]{\alpha^{(k-m)(k-m+1)+m(2k-m+1)}} - (k+1)\alpha^k\right] = 0$

Do $f(t)$ là một đa thức bậc k nên $f^{(k)}(t) = const = f^{(k)}(0) \ge 0$

$\Rightarrow f^{(k-1)}(t) \ge f^{(k-1)}(0) \ge 0 \Rightarrow f^{(k-2)}(t) \ge f^{(k-2)}(0) \ge 0, \ldots, f(t) \ge f(0) = 0$

Ta có: $f(t) \ge 0$ $\forall t \ge 0$ $\Rightarrow f(t_i) \ge 0$ $\forall t_i \ge 0$ $\Rightarrow$ (13) đúng

Từ (12) và (13) suy ra:

$$S \ge \sum_{i=1}^{n}\left[(k+1)\cdot\sqrt[k+1]{\beta^k\alpha^k\cdot\frac{a_i+a_{i+1}}{a_{i+1}+a_{i+2}}}\right] - k\beta n = (k+1)(\alpha\beta)^{\frac{k}{k+1}}\cdot\sum_{i=1}^{n}\sqrt[k+1]{\frac{a_i+a_{i+1}}{a_{i+1}+a_{i+2}}} - k\beta n$$

$$\ge \left[(k+1)(\alpha\beta)^{\frac{k}{k+1}} - k\beta\right]n = \left[(k+1)\frac{\alpha^k}{[k(1-\alpha)]^{\frac{k}{k+1}}} - \frac{\alpha^k}{1-\alpha}\right]n$$

Đặt $x = \sqrt[k+1]{\dfrac{1}{1-\alpha}} > 1 \Rightarrow \alpha = 1 - \dfrac{1}{x^{k+1}}$, khi đó: $g(x) = (k+1)\cdot\dfrac{\alpha^k}{[k(1-\alpha)]^{\frac{k}{k+1}}} - \dfrac{\alpha^k}{1-\alpha}$

$$=\left(1-\frac{1}{x^{k+1}}\right)^k x^k\left[\frac{k+1}{k^{\frac{k}{k+1}}}-x\right]=\frac{\left(x^{k+1}-1\right)^k}{x^{k^2}}\left[(k+1)k^{\frac{-k}{k+1}}-x\right]$$

$$\Rightarrow\ g'(x)=\frac{k\left(x^{k+1}-1\right)^{k-1}(k+1)x^k.x^{k^2}-k^2x^{k^2-1}\left(x^{k+1}-1\right)^k}{x^{2k^2}}\left[(k+1)k^{\frac{-k}{k+1}}-x\right]-\frac{\left(x^{k+1}-1\right)^k}{x^{k^2}}$$

Ta có: $g'(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{(k+1)\mathrm{k}\,x^{k+1}-k^2\left(x^{k+1}-1\right)}{x^{k^2+1}}\left[(k+1)k^{\frac{-k}{k+1}}-x\right]-\dfrac{x^{k+1}-1}{x^{k^2}}=0$

$$\Leftrightarrow\left[(k+1)\mathrm{k}\,x^{k+1}-k^2x^{k+1}+k^2\right]\left[(k+1)k^{\frac{-k}{k+1}}-x\right]-x\left(x^{k+1}-1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow k\left(x^{k+1}+k\right)\left[(k+1)k^{\frac{-k}{k+1}}-x\right]-x^{k+2}+x=0\ \Leftrightarrow\left(x^{k+1}+k\right)\left[(k+1)k^{\frac{1}{k+1}}-kx\right]=x^{k+2}-x$$

$$\Leftrightarrow(k+1)k^{\frac{1}{k+1}}x^{k+1}+(k+1)k^{\frac{k+2}{k+1}}-kx^{k+2}-k^2x=x^{k+2}-x$$

$$\Leftrightarrow(k+1)x^{k+2}-(k+1)k^{\frac{1}{k+1}}x^{k+1}+\left(k^2-1\right)x-(k+1)k^{\frac{k+2}{k+1}}=0$$

$$\Leftrightarrow h(x)=x^{k+2}-k^{\frac{1}{k+1}}x^{k+1}+(k-1)x-k^{\frac{k+2}{k+1}}=0$$

Ta có: $h'(x)=(k+2)x^{k+1}-(k+1)k^{\frac{1}{k+1}}x^k+(k-1)$

$$\geq(k+1)\cdot\sqrt[k+1]{\left(\frac{k+2}{k}\cdot x^{k+1}\right)^k(k-1)}-(k+1)k^{\frac{1}{k+1}}x^k=(k+1)\left[\left(\frac{k+2}{k}\right)^{\frac{k}{k+1}}(k-1)^{\frac{1}{k+1}}-k^{\frac{1}{k+1}}\right]x^k$$

Ta sẽ chứng minh: $\left(\dfrac{k+2}{k}\right)^{\frac{k}{k+1}}(k-1)^{\frac{1}{k+1}}-k^{\frac{1}{k+1}}\geq 0\ \Leftrightarrow\ (k+2)^{\frac{k}{k+1}}(k-1)^{\frac{1}{k+1}}\geq k$

$$\Leftrightarrow\ (k+2)^k(k-1)\geq k^{k+1}\ \Leftrightarrow\left(\frac{k+2}{k}\right)^k\geq\frac{k}{k-1}\ \Leftrightarrow\left(1+\frac{2}{k}\right)^k\geq 1+\frac{1}{k-1}$$

Ta có: $\left(1+\dfrac{2}{k}\right)^k>1+\dfrac{2}{k}\cdot k=3>1+\dfrac{1}{k-1},\ \forall k\geq 2\Rightarrow h'(x)>0\Rightarrow h(x)$ tăng trên $(1;+\infty)$.

Mặt khác, $h(x)$ là hàm liên tục và $\lim\limits_{n\to+\infty}h(x)=+\infty$; $h(1)=k-k^{\frac{1}{k+1}}-k^{\frac{k+2}{k+1}}<-k^{\frac{1}{k+1}}<0$

nên phương trình $h(x)=0$ có nghiệm duy nhất $x_0>1$

$\Rightarrow g'(x)=0$ có nghiệm duy nhất $x_0>1$.

$\Rightarrow$ Bảng biến thiên của hàm $g(x)$. Từ đó suy ra

x	1		x_0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$		$\nearrow$	Max	$\searrow$	

Max $g(x)=g(x_0)$ với x_0 là nghiệm của phương trình

$$h(x)=x^{k+2}-k^{\frac{1}{k+1}}x^{k+1}+(k-1)x-k^{\frac{k+2}{k+1}}=0\ \text{ và }\ g(x)=\frac{\left(x^{k+1}-1\right)^k}{x^{k^2}}\left[(k+1)k^{\frac{-k}{k+1}}-x\right].$$

Sử dụng Maple ta tính được các giá trị $g(x_0)$ tương ứng với cách chọn các giá trị của k, ví dụ $k=500$ thì $x_0=1.013294063$ và $g(x_0)=0.4577996$.

III. MỘT SỐ DẠNG PHÁT TRIỂN CỦA BẤT ĐẲNG THỨC SHAPIRO

Bất đẳng thức Shapiro không đúng với mọi bộ số thực $a_1, a_2, ... a_n > 0$. Tuy nhiên ta có thể chứng minh bất đẳng thức Shapiro đúng với bộ số thực $a_1, a_2, ... a_n > 0$ đơn điệu

Mệnh đề 7. Cho bộ dãy số đơn điệu bất kỳ $a_1, a_2, ..., a_n > 0$ tức là:

$\left[\begin{array}{l} 0 < a_1 \le a_2 \le ... \le a_{n-1} \le a_n \\ a_1 \ge a_2 \ge ... \ge a_{n-1} \ge a_n > 0 \end{array}\right.$. Khi đó ta có $\dfrac{a_1}{a_2+a_3} + ... + \dfrac{a_{n-1}}{a_n+a_1} + \dfrac{a_n}{a_1+a_2} \ge \dfrac{n}{2}$

Chứng minh

Đặt $S = \dfrac{a_1}{a_2+a_3} + ... + \dfrac{a_{n-1}}{a_n+a_1} + \dfrac{a_n}{a_1+a_2}$; $T = \dfrac{a_2}{a_2+a_3} + ... + \dfrac{a_n}{a_n+a_1} + \dfrac{a_1}{a_1+a_2}$

Sử dụng bất đẳng thức $AM-GM$ ta có:

$$S+T = \frac{a_1+a_2}{a_2+a_3} + ... + \frac{a_{n-1}+a_n}{a_n+a_1} + \frac{a_n+a_1}{a_1+a_2} \ge n\sqrt[n]{\frac{a_1+a_2}{a_2+a_3} ... \frac{a_{n-1}+a_n}{a_n+a_1} \cdot \frac{a_n+a_1}{a_1+a_2}} = n$$

Mặt khác, xét hiệu:

$$S-T = \frac{a_1-a_2}{a_2+a_3} + \frac{a_2-a_3}{a_3+a_4} + ... + \frac{a_{n-1}-a_n}{a_n+a_1} + \frac{a_n-a_1}{a_1+a_2}$$

Biến đổi biểu thức: $a_n - a_1 = (a_n - a_{n-1}) + ... + (a_3 - a_2) + (a_2 - a_1)$.

Từ đó suy ra:

$$S-T = (a_1-a_2)\left(\frac{1}{a_2+a_3} - \frac{1}{a_1+a_2}\right) + (a_2-a_3)\left(\frac{1}{a_3+a_4} - \frac{1}{a_1+a_2}\right) + ... + (a_{n-1}-a_n)\left(\frac{1}{a_n+a_1} - \frac{1}{a_1+a_2}\right)$$

• Nếu $0 < a_1 \le a_2 \le ... \le a_{n-1} \le a_n$ thì $a_1 - a_2 \le 0; a_2 - a_3 \le 0, ..., a_{n-1} - a_n \le 0$

Do $a_1 + a_2$ là tổng nhỏ nhất trong các tổng $a_i + a_j$ nên $\dfrac{1}{a_1+a_2}$ là số lớn nhất trong các số

$\dfrac{1}{a_i+a_j} \Rightarrow \dfrac{1}{a_2+a_3} - \dfrac{1}{a_1+a_2} \le 0, \dfrac{1}{a_3+a_4} - \dfrac{1}{a_1+a_2} \le 0, ..., \dfrac{1}{a_n+a_1} - \dfrac{1}{a_1+a_2} \le 0$. Suy ra $S - T \ge 0$.

• Nếu $a_1 \ge a_2 \ge ... \ge a_{n-1} \ge a_n \ge 0$ thì $a_1 - a_2 \ge 0; a_2 - a_3 \ge 0, ..., a_{n-1} - a_n \ge 0$

Do $a_1 + a_2$ là tổng lớn nhất trong các tổng $a_i + a_j$ nên $\dfrac{1}{a_1+a_2}$ là số nhỏ nhất trong các số

$\dfrac{1}{a_i+a_j} \Rightarrow \dfrac{1}{a_2+a_3} - \dfrac{1}{a_1+a_2} \ge 0, \dfrac{1}{a_3+a_4} - \dfrac{1}{a_1+a_2} \ge 0, ..., \dfrac{1}{a_n+a_1} - \dfrac{1}{a_1+a_2} \ge 0$. Suy ra $S - T \ge 0$.

Như vậy trong cả hai trường hợp, ta đều có $S - T \ge 0$ hay $S \ge T$, suy ra

$$2S \ge S + T \ge n \Rightarrow S \ge \frac{n}{2}$$

Chú ý: Ta cũng có thể chứng minh mệnh đề bằng phương pháp quy nạp

Bây giờ chúng ta sẽ xét một hoán vị khác của $a_1, a_2, ..., a_n$ để dẫn đến mệnh đề sau

Mệnh đề 8: Giả sử $a_1, a_2, ..., a_n > 0$. Xét bất đẳng thức sau:

$$\varphi_n(a_1, a_2, ..., a_n) = \frac{a_2}{a_1 + a_3} + \frac{a_3}{a_2 + a_4} + ... + \frac{a_n}{a_{n-1} + a_1} + \frac{a_1}{a_n + a_2} \geq \frac{cn}{2} \quad (12)$$

a. Khi $c = 1$ thì bất đẳng thức có đúng với mọi dãy $a_1, a_2, ..., a_n > 0$ hay không? Nếu không thì có tồn tại những giá trị xác định của n để nó đúng hay không?

b. Tồn tại hay không một hằng số $c > 0$ để bất đẳng thức đúng với mọi dãy $a_1, a_2, ... a_n > 0$

c. Tìm một cận dưới thích hợp cho hàm số $\varphi_n(a_1, a_2, ..., a_n)$.

Xét bất đẳng thức với $n = 3$ ta có: $\varphi_n = \dfrac{a_1}{a_2 + a_3} + \dfrac{a_2}{a_3 + a_1} + \dfrac{a_3}{a_1 + a_2} \geq \dfrac{3}{2}$

Xét bất đẳng thức với $n = 4$ ta có: $\varphi_n = \dfrac{a_1 + a_3}{a_2 + a_4} + \dfrac{a_2 + a_4}{a_1 + a_3} \geq 2\sqrt{\dfrac{a_1 + a_3}{a_2 + a_4} \cdot \dfrac{a_2 + a_4}{a_1 + a_3}} = 2$

Ta sẽ chứng minh ba câu **a.** (bất đẳng thức không đúng khi $n \geq 5$), **b.** và **c.** với kết quả : cận dưới đúng của hàm số $\varphi_n(a_1, a_2, ..., a_n)$ là $\lambda = 2$.

Thật vậy chọn $a_1 = a_2 = 1; a_k = a^k, \forall k \geq 3$ thì $\lim\limits_{a \to 0} \dfrac{a_k}{a_{k-1} + a_{k+1}} = \lim\limits_{a \to 0} \dfrac{a^k}{a^{k-1} + a^{k+1}} = 0$, $\forall k \geq 4$

Với $k \leq 3$: $\lim\limits_{a \to 0} \dfrac{a_2}{a_1 + a_3} = \lim\limits_{a \to 0} \dfrac{1}{1 + a^3} = 1$, $\lim\limits_{a \to 0} \dfrac{a_3}{a_2 + a_4} = \lim\limits_{a \to 0} \dfrac{a^3}{1 + a^4} = 0$; $\lim\limits_{a \to 0} \dfrac{a_1}{a_n + a_2} = \lim\limits_{a \to 0} \dfrac{1}{1 + a^n} = 1$.

Khi đó $\lim\limits_{a \to 0} \varphi_n(1, 1, a^3, ..., a^n) = \lim\limits_{a \to 0} \left(\dfrac{1}{1 + a^3} + \dfrac{a^3}{1 + a^4} + ... + \dfrac{a^n}{a^{n-1} + 1} + \dfrac{1}{a^n + 1} \right) = 2$

Giả sử tồn tại $c > 0$ sao cho $\varphi_n \geq \dfrac{cn}{2}$ thì $2 \geq \dfrac{cn}{2}$, $\forall n \geq 4$, nhưng điều này vô lí.

Bây giờ ta sẽ chứng minh với mọi $n \geq 4$ thì $\varphi_n(a_1, a_2, ..., a_n) \geq 2$.

Thật vậy, sử dụng ***CBS*** ta có $\varphi_n(a_1, a_2, ..., a_n) \geq \dfrac{(a_1 + a_2 + ... + a_n)^2}{2(a_1a_2 + a_2a_3 + ... + a_na_1)}$.

Ta sẽ chứng minh $(a_1 + a_2 + ... + a_n)^2 \geq 4(a_1a_2 + a_2a_3 + ... + a_na_1)$

Nếu n chẵn thì $(a_1 + a_2 + ... + a_n)^2 = \left[(a_1 + a_3 + ... + a_{n-1}) + (a_2 + a_4 + ... + a_n)\right]^2 \geq$

$$\geq 4(a_1 + a_3 + ... + a_{n-1})(a_2 + a_4 + ... + a_n) \geq 4(a_1a_2 + a_2a_3 + ... + a_na_1)$$

Nếu n lẻ thì giả sử $a_n = Min\{a_1, a_2, ..., a_n\}$, khi đó ta có

$$(a_1 + a_2 + ... + a_n)^2 \geq 4(a_1 + a_3 + a_5 + ... + a_n)(a_2 + a_4 + ... + a_{n-1}) \geq 4(a_1a_2 + a_2a_3 + ... + a_na_1)$$

Năm 1973, nhà Toán học ***Elbert*** đã nghiên cứu bất đẳng thức trong mệnh đề sau đây:

> ***Mệnh đề 9:*** Giả sử $a_1, a_2, ... a_n > 0$. Xét hằng số c tốt nhất của bất đẳng thức sau:
>
> $$g_n(a_1, a_2, ..., a_n) = \frac{a_1 + a_3}{a_1 + a_2} + \frac{a_2 + a_4}{a_2 + a_3} + ... + \frac{a_{n-1} + a_1}{a_{n-1} + a_n} + \frac{a_n + a_2}{a_n + a_1} \geq cn$$

Nếu đặt $\psi(x)$ là một bao lồi dưới của hai hàm lồi $f(x) = \frac{1}{2}(1 + e^x); h(x) = \frac{1 + e^x}{1 + e^{x/2}}$

Đặt $c = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{g(n)}{n}$ với $g(n) = \inf\limits_{a_i > 0} g_n(a_1, a_2, ..., a_n)$ thì $c = \psi(0) = 0.978012...$

Một hướng tiếp cận khác là so sánh các biểu thức hoán vị dạng ***Shapiro*** chúng ta xét mệnh đề:

> ***Mệnh đề 10:*** Giả sử $a_1, a_2, ... a_n > 0$. Xét các biểu thức hoán vị sau:
>
> $$E_n = \frac{a_1}{a_2 + a_3} + \frac{a_2}{a_3 + a_4} + ... + \frac{a_n}{a_1 + a_2}; \quad F_n = \frac{a_1}{a_1 + a_2} + \frac{a_2}{a_2 + a_3} + ... + \frac{a_n}{a_n + a_1}$$
>
> Chứng minh hoặc bác bỏ bất đẳng thức $E_n \geq F_n$.

Với $n = 3$ thì có thể viết $E_3 = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}; F_3 = \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a}$

Trong trường hợp này ta có bất đẳng thức đúng $E_3 \geq F_3$. Thật vậy, xét biểu thức

$G = \frac{b}{a+b} + \frac{c}{b+c} + \frac{a}{c+a}$, theo ***AM − GM*** ta có $E_3 + G \geq 3 = F_3 + G \Rightarrow E_3 \geq F_3$

Bây giờ chúng ta sẽ xét trường hợp tổng quát với lời giải của nhà toán học Mỹ

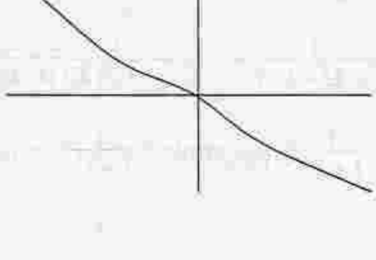
Hillel Gauchman, Eastern Illinois University, Charleston, Illinois.

Sử dụng phương pháp bao lồi được phát triển bởi ***Drinfeld*** ta sẽ bác bỏ bất đẳng thức ở trong ***Mệnh đề 10***. Trước khi làm điều này ta cần một kết quả mở đầu sau đây

Gọi $f(x)$ là hàm được xác định như sau

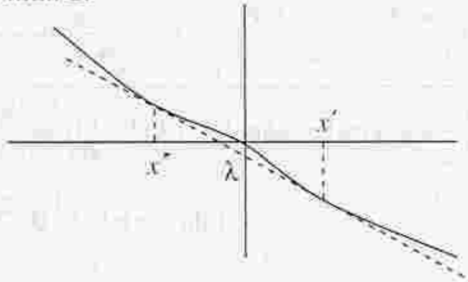
$$f(x) = \begin{cases} \left(1 - e^{\frac{x}{2}}\right)\left(e^{\frac{x}{2}} + e^x\right)^{-1} & , x < 0 \\ \frac{1}{2}(e^{-x} - 1) & , x \geq 0 \end{cases}$$

Dễ dàng kiểm tra được rằng $f(x)$ là hàm lồi trên $(-\infty, 0)$ và $(0, +\infty)$. Từ $f'(0^-) = -\frac{1}{4}$ và $f'(0^+) = -\frac{1}{2}$ ta suy ra đồ thị của $f(x)$ có dạng như hình 1:



Hình 1

Gọi $g(x)$ là một bao lồi của $f(x)$ và luôn bé hơn hoặc bằng $f(x)$. Đồ thị của $g(x)$ gồm ba phần như trên hình 2:



Hình 2

(C_1) $y=\left(1-e^{\frac{x}{2}}\right)\left(e^{\frac{x}{2}}+e^{x}\right)^{-1}$ khi $x<x''$; (C_2) $y=\frac{1}{2}\left(e^{-x}-1\right)$ khi $x>x'$ và (C_3) là đường tiếp tuyến chung của (C_1) và (C_2) khi $x''\le x\le x'$.

Kí hiệu λ là tung độ giao điểm của (C_3) với trục tung. Sử dụng Maple, các bạn đồng nghiệp, ***Peter Andrews*** và ***William Slough***, đã chỉ ra rằng

$$\lambda=-0.0219875218...$$

Định lí 1. Với mọi số nguyên dương n và mọi số thực dương $a_1,a_2,...a_n$ ta có

$$E_n-F_n\ge\lambda n$$

Định lí 2. Trong định lí 1, λ là hằng số tốt nhất. Hay nói cách khác, với mọi $\varepsilon>0$ tồn tại ít nhất một số nguyên dương n và các số thực dương $a_1,a_2,...a_n$ thỏa mãn

$$E_n-F_n<(\lambda+\varepsilon)n$$

Nhận xét. Chọn $\varepsilon=\frac{|\lambda|}{2}$. Khi đó sử dụng định lí 2, tồn tại một số nguyên dương n và các số thực dương $a_1,a_2,...a_n$ thỏa mãn $E_n-F_n<(\lambda+\varepsilon)n=\frac{\lambda}{2}n<0$. Đây chính là nhận xét bác bỏ bất đẳng thức nêu ra trong Mệnh đề 10.

Chứng minh định lí 1. Trong chứng minh dưới đây chúng ta sử dụng một bất đẳng thức quen biết đó là Bất đẳng thức ***hoán vị***: Nếu $x_1\le x_2\le...\le x_n$ và $y_1\ge y_2\ge...\ge y_n$ thì $\sum_{i=1}^{n}x_{k_i}y_{k_i}\ge\sum_{i=1}^{n}x_iy_i$, trong đó $(k_1,...,k_n)$ là một hoán vị của bộ chỉ số $(1,2,...,n)$.

Đặt $k_1=\frac{a_2}{a_1};k_2=\frac{a_3}{a_2};...;k_n=\frac{a_1}{a_n}$, khi đó $k_1k_2...k_n=1$.

$$E_n=\frac{1}{k_1(1+k_2)}+...+\frac{1}{k_{n-1}(1+k_n)}+\frac{1}{k_n(1+k_1)}$$

$$F_n=\frac{1}{1+k_1}+\frac{1}{1+k_2}+...+\frac{1}{1+k_n}$$

Vậy

$$E_n - F_n = \frac{1}{k_1(1+k_2)} - \frac{1}{1+k_2} + ... + \frac{1}{k_n(1+k_1)} - \frac{1}{1+k_1} = \left(\frac{1}{k_1}-1\right)\frac{1}{1+k_2} + ... + \left(\frac{1}{k_n}-1\right)\frac{1}{1+k_1}$$

Gọi $(m_1, m_2, ..., m_n)$ là một hoán vị của $(k_1, ..., k_n)$ sao cho $m_1 \le m_2 \le ... \le m_n$. Khi đó dãy $\frac{1}{m_1}-1; \frac{1}{m_2}-1; ...; \frac{1}{m_n}-1$ là dãy giảm và dãy $\frac{1}{1+m_n}; \frac{1}{1+m_{n-1}}; ...; \frac{1}{1+m_1}$ là dãy tăng.

Sử dụng bất đẳng thức ***Hoán vị*** ta có

$$E_n - F_n \ge \left(\frac{1}{m_1}-1\right)\frac{1}{1+m_n} + ... + \left(\frac{1}{m_n}-1\right)\frac{1}{1+m_1}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1-m_i}{m_i(1+m_{n+1-i})} + \frac{1+m_{n+1-i}}{m_{n+1-i}(1+m_i)}\right] = \sum_{i=1}^{n}\frac{(m_i+m_{n+1-i})(1-m_i m_{n+1-i})}{2m_i m_{n+1-i}(1+m_i)(1+m_{n+1-i})}$$

Đặt $c_i = m_i m_{n+1-i}$ ta nhận được $E_n - F_n = \sum_{i=1}^{n}\tau_i$, trong đó $\tau_i = \frac{1-c_i}{2c_i}.\frac{m_i+m_{n+1-i}}{(1+m_i)(1+m_{n+1-i})}$

Chú ý rằng $c_1c_2...c_n = (m_1m_2...m_n)^2 = (k_1k_2...k_n)^2 = 1$.

Nếu $c_i \ge 1$ thì $\tau_i = \frac{1-c_i}{2c_i}.\frac{m_i+m_{n+1-i}}{m_i+m_{n+1-i}+1+m_i m_{n+1-i}} \ge \frac{1-c_i}{2c_i}$.

Nếu $c_i < 1$ thì $\tau_i = \frac{1-c_i}{2c_i}.\left(1-\frac{1+m_i m_{n+1-i}}{(1+m_i)(1+m_{n+1-i})}\right) \ge \frac{1-c_i}{2c_i}\left(1-\frac{1+m_i m_{n+1-i}}{\left(1+2\sqrt{m_i m_{n+1-i}}\right)^2}\right)$

$$= \frac{1-c_i}{2c_i}.\left(1-\frac{1+c_i}{\left(1+\sqrt{c_i}\right)^2}\right) = \frac{1-\sqrt{c_i}}{\sqrt{c_i}+c_i}$$

ở đây chúng ta sử dụng bất đẳng thức quen biết $(1+x)(1+y) \ge \left(1+\sqrt{xy}\right)^2, \forall x, y \ge 0$.

Vậy ta được: $E_n - F_n \ge \sum_{c_i<1}\frac{1-\sqrt{c_i}}{\sqrt{c_i}+c_i} + \sum_{c_i\ge 1}\frac{1-c_i}{2c_i}$

Đặt $c_i = e^{x_i}$, thì: $E_n - F_n \ge \sum_{x_i<0}\left(1-e^{\frac{x_i}{2}}\right)\left(e^{\frac{x_i}{2}}+e^{x_i}\right) + \sum_{x_i\ge 0}\frac{1}{2}\left(e^{-x_i}-1\right)$

Chú ý rằng từ $c_1c_2...c_n = 1$ ta có $x_1 + x_2 + ... + x_n = 0$, bất đẳng thức trở thành

$$E_n - F_n \ge \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \ge \sum_{i=1}^{n} g(x_i)$$

Do $f(x)$ là hàm lồi nên $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(x_i) \ge g\left(\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}\right) = g(0) = \lambda$.

Tóm lại ta có $E_n - F_n \ge \lambda n$. Định lí 1 được chứng minh.

Chứng minh định lí 2. Với $\varepsilon > 0$, gọi x' và x'' như ở hình 2.

Đặt $u_0 = e^{x'}$, $v_0 = e^{x''}$, $\alpha_0 = \dfrac{x''}{x''-x'}$, dễ dàng kiểm tra $\lambda = \alpha_0 \dfrac{1-u_0}{2u_0} + (1-\alpha_0)\dfrac{1-\sqrt{v_0}}{\sqrt{v_0}+v_0}$

Chú ý rằng $u_0^{\alpha_0} v_0^{1-\alpha_0} = 1$ và $0 < \alpha_0 < 1$. Với n đủ lớn có thể tìm được α_1 và u_1 sao cho α_1 là một phân số với mẫu số là n và tử số là số chẵn, $u_1^{\alpha_1} v_0^{1-\alpha_1} = 1$.

$$\left(\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+\sqrt{v_0}}\right) < \frac{\varepsilon}{3} \text{ và } \alpha_1 \frac{1-u_1}{2u_1} + (1-\alpha_1)\frac{1-\sqrt{v_0}}{\sqrt{v_0}+v_0} - \lambda < \frac{\varepsilon}{3} \quad (*)$$

Do $\alpha_1 n$ là chẵn nên ta có thể đặt

$$k_1 = \delta,\ k_2 = \frac{u_1}{\delta}, k_3 = \delta, k_4 = \frac{u_1}{\delta}, \dots, k_{\alpha_1 n-1} = \delta, k_{\alpha_1 n} = \frac{u_1}{\delta};\ k_{\alpha_1 n+1} = \dots = k_n = \sqrt{v_0}.$$

Chú ý rằng $k_1 k_2 \dots k_n = u_1^{\frac{1}{2}\alpha_1 n} . v_0^{\frac{1}{2}(1-\alpha_1)n} = 1$. Từ đó ta được

$$\frac{1-k_1}{k_2(1+k_2)} + \dots + \frac{1-k_n}{k_n(1+k_1)} = \frac{1-\delta}{\delta\left(1+\frac{u_1}{\delta}\right)}\cdot\frac{\alpha_1 n}{2} + \frac{1-\frac{u_1}{\delta}}{\frac{u_1}{\delta}(1+\delta)}\left(\frac{\alpha_1 n}{2} - 1\right)$$

$$+ \frac{1-\frac{u_1}{\delta}}{\frac{u_1}{\delta}\left(1+\sqrt{v_0}\right)} + \frac{1-\sqrt{v_0}}{\sqrt{v_0}\left(1+\sqrt{v_0}\right)}(n-\alpha_1 n - 1) + \frac{1-\sqrt{v_0}}{\sqrt{v_0}\,(1+\delta)}$$

$$= n\left[\frac{\alpha_1}{2}\left(\frac{1-\delta}{\delta+u_1} + \frac{\delta-u_1}{u_1(1+\delta)} - \frac{1}{u_1} + 1\right) + \alpha_1\frac{1-u_1}{2u_1} + (1-\alpha_1)\frac{1-\sqrt{v_0}}{\sqrt{v_0}+v_0} + \frac{1}{n}\cdot\frac{\left(u_1 - \delta\sqrt{v_0}\right)}{u_1\sqrt{v_0}\,(1+\delta)\left(1+\sqrt{v_0}\right)}\right]$$

$$\le n\left[\frac{\alpha_1}{2}\left(\frac{1-\delta}{\delta+u_1} + \frac{\delta-u_1}{u_1(1+\delta)} - \frac{1}{u_1} + 1\right) + \alpha_1\frac{1-u_1}{2u_1} + (1-\alpha_1)\frac{1-\sqrt{v_0}}{\sqrt{v_0}+v_0} + \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+\sqrt{v_0}}\right]$$

Nếu δ đủ nhỏ, $\dfrac{\alpha_1}{2}\left(\dfrac{1-\delta}{\delta+u_1} + \dfrac{\delta-u_1}{u_1(1+\delta)} - \dfrac{1}{u_1} + 1\right) < \dfrac{\varepsilon}{3}$

Sử dụng (*), ta suy ra

$$\frac{1-k_1}{k_2(1+k_2)} + \dots + \frac{1-k_n}{k_n(1+k_1)} = n\left(\frac{\varepsilon}{3} + \lambda + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3}\right) = n(\lambda+\varepsilon)$$

Cuối cùng, ta chọn $a_1 = 1, \dfrac{a_{i+1}}{a_i} = k_i$, $1 \le i \le n-1$, $\dfrac{a_1}{a_n} = k_n$. Điều đó là có thể vì $k_1 k_2 \dots k_n = 1$.

Vậy ta có $E_n - F_n < (\lambda+\varepsilon)n$. Định lí 2 được chứng minh xong.

IV. MỘT SỐ DẠNG PHÁT TRIỂN CỦA BẤT ĐẲNG THỨC NESBIT

Bài 1. Cho $a, b, c, d, p, q > 0$ và $1 \le k \in \mathbb{N}$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^k}{pb+qc}+\frac{b^k}{pc+qa}+\frac{c^k}{pa+qb} \ge \frac{a^{k-1}+b^{k-1}+c^{k-1}}{p+q}$$

Bài 2. Cho $\begin{cases} n \in N^* \\ a,b,c>0 \end{cases}$. Chứng minh rằng: $\dfrac{a^n}{b+c}+\dfrac{b^n}{c+a}+\dfrac{c^n}{a+b} \ge \dfrac{a^{n-1}+b^{n-1}+c^{n-1}}{2}$

Bài 3. Cho $\begin{cases} n \in N^* \\ a,b,c>0 \end{cases}$. Chứng minh rằng: $\dfrac{a^n}{b+c}+\dfrac{b^n}{c+a}+\dfrac{c^n}{a+b} \ge \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{a^n+b^n+c^n}{a+b+c}\right)$

Bài 4. Cho $c, b, c, p > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \ge \frac{1}{2}\left[\frac{a(b^p+c^p)}{b^{p+1}+c^{p+1}}+\frac{b(c^p+a^p)}{c^{p+1}+a^{p+1}}+\frac{c(a^p+b^p)}{a^{p+1}+b^{p+1}}\right]$$

Bài 5. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \ge \frac{3}{2}+\frac{1}{3}\left[\frac{(a-b)^2}{(a+c)(b+c)}+\frac{(b-c)^2}{(b+a)(c+a)}+\frac{(c-a)^2}{(c+b)(a+b)}\right]$$

Bài 6. Chứng minh: $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b} \ge \dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{4}\left[\dfrac{(a-b)^2}{(a+b)^2}+\dfrac{(b-c)^2}{(b+c)^2}+\dfrac{(c-a)^2}{(c+a)^2}\right], \forall a,b,c>0$

Bài 7. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \ge \frac{3}{2}+\frac{1}{5}\cdot\frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{ab+bc+ca}$$

Bài 8. Cho $a \ge b \ge c > 0$. Chứng minh rằng: $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b} \ge \dfrac{3}{2}+\dfrac{(a-c)^2}{ab+bc+ca}$

Bài 9. Cho r, s là các số thực dương, $r < s$ và $a,b,c \in (r,s)$.

Chứng minh rằng: $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b} \le \dfrac{3}{2}+\dfrac{(r-s)^2}{2r(r+s)}$

Bài 10. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{2}+\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca} \ge \frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \ge 2-\frac{1}{2}\cdot\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}$$

Bài 11. *a)* Cho $a, b, c > 0$ và số thực k thỏa mãn $0 \le k \le \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$

Chứng minh rằng: $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}+k\dfrac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2} \ge k+\dfrac{3}{2}$

b) Tìm số thực k lớn nhất sao cho bất đẳng thức đúng với mọi $a, b,c > 0$

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+k\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2} \ge k+\frac{3}{2}$$

Bài 12. Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng: $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+\frac{2}{3}\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}\ge\frac{13}{6}$

Bài 13. Cho $a,b,c\ge 0$. Chứng minh rằng: $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+\frac{3\sqrt[3]{abc}}{2(a+b+c)}\ge 2$

Bài 14. Cho $a,b,c\ge 0$. Chứng minh rằng: $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+\frac{abc}{2\left(a^3+b^3+c^3\right)}\ge\frac{5}{3}$

Bài 15. Cho $a,b,c\ge 0$. Chứng minh rằng: $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+\frac{2abc}{3\left(a^3+b^3+c^3\right)}\ge\frac{31}{18}$

Bài 16. Cho $a,b,c\ge 0$. Chứng minh rằng: $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+\frac{27abc}{2(a+b+c)^3}\ge 2$

Bài 17. Cho $a,b,c\ge 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+4\frac{(a+b+c)(ab+bc+ca)}{a^3+b^3+c^3}\ge 5$$

Bài 18. Cho $a,b,c\ge 0$. Chứng minh rằng:0 $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+9\frac{(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2}\ge 6$

Bài 19. Cho $a,b,c\ge 0$. Chứng minh rằng: $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+16\frac{(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2}\ge 8$

Bài 20. Cho $a,b,c\ge 0$. Chứng minh rằng: $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+4\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{a^3+b^3+c^3}\ge 5$

Bài 21. Cho $a,b,c\ge 0$. Chứng minh: $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+2\left[\frac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}\right]^{\frac{2}{3}}\ge 2$

Bài 22. Cho $a,b,c\ge 0$. Chứng minh rằng:

$$(a+b+c)\left(\sum_{cyc}\frac{a}{(b+c)^2}\right)\ge\frac{3}{2}\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)\ge(ab+bc+ca)\left(\sum_{cyc}\frac{1}{(b+c)^2}\right)$$

Bài 23. Cho $a,b,c\ge 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\ge\frac{2ab}{(c+a)(c+b)}+\frac{2bc}{(a+b)(a+c)}+\frac{2ca}{(b+c)(b+a)}$$

Bài 24. Cho $a,b,c\ge 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\ge\frac{a^2+bc}{(a+b)(a+c)}+\frac{b^2+ca}{(b+c)(b+a)}+\frac{c^2+ab}{(c+a)(c+b)}$$

Bài 25. Cho $a,b,c>0$. Chứng minh: $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\ge\frac{bc}{a^2+bc}+\frac{ca}{b^2+ca}+\frac{ab}{c^2+ab}$

Bài 26. Cho $a,b,c\ge 0$. Chứng minh: $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\ge\frac{a^2}{a^2+bc}+\frac{b^2}{b^2+ca}+\frac{c^2}{c^2+ab}$

Bài 27. Cho $a,b,c\ge 0$. Chứng minh rằng: $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\ge\frac{7\left(a^3+b^3+c^3\right)}{4\left(a^3+b^3+c^3\right)+2abc}$

Bài 28. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\le\frac{2(a^3+b^3+c^3)}{a^3+b^3+c^3+abc}$$

Bài 29. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\le\frac{1}{6}(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

Bài 30. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\le\frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)$$

Bài 31. Cho $a, b, c\ge 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\le\frac{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)}{ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)}$$

Bài 32. Cho $a, b, c\ge 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\ge\frac{27(a+b)(b+c)(c+a)}{16(a+b+c)(ab+bc+ca)}$$

Bài 33. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh: $\dfrac{a^2}{b^2+c^2}+\dfrac{b^2}{c^2+a^2}+\dfrac{c^2}{a^2+b^2}\ge\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}$

Bài 34. Cho $a, b, c > 0$ và r, s là các số thực dương sao cho $r\ge s$.

Chứng minh: $\dfrac{a^r}{b^r+c^r}+\dfrac{b^r}{c^r+a^r}+\dfrac{c^r}{a^r+b^r}\ge\dfrac{a^s}{b^s+c^s}+\dfrac{b^s}{c^s+a^s}+\dfrac{c^s}{a^s+b^s}$

Bài 35. Cho $a, b, c\ge 0$. Chứng minh rằng:

$$\left(\frac{a}{b+c}\right)^2+\left(\frac{a}{b+c}\right)^2+\left(\frac{a}{b+c}\right)^2+\frac{10abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}\ge 2$$

Bài 36. Cho $a, b, c\ge 0$. Chứng minh rằng:

$$\left(\frac{a}{b+c}\right)^3+\left(\frac{a}{b+c}\right)^3+\left(\frac{a}{b+c}\right)^3+\frac{13abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}\ge 2$$

Bài 37. Cho $a, b, c\ge 0$ và $n\ge\log_2 3-1$. Chứng minh rằng:

$$\left(\frac{a}{b+c}\right)^n+\left(\frac{b}{c+a}\right)^n+\left(\frac{c}{a+b}\right)^n+\frac{(2^{n+1}-3)abc}{2^{n-3}(a+b)(b+c)(c+a)}\ge 2$$

Bài 38. Cho $a, b, c\ge 0$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}}+2(\sqrt{8}-3)\sqrt{\frac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}}\ge 2$$

Bài 39. Cho $a, b, c\ge 0$ và $2\le n\in\mathbb{N}$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt[n]{\frac{2a}{b+c}}+\sqrt[n]{\frac{2a}{b+c}}+\sqrt[n]{\frac{2a}{b+c}}+(2\sqrt[n]{2}-3)\sqrt[n]{\frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}}\ge 2\sqrt[n]{2}$$

Bài 40. Cho $a,b,c\ge 0$ và $k\ge \log_2 3-1$. Chứng minh rằng:

$$\left(\frac{a}{b+c}\right)^k+\left(\frac{b}{c+a}\right)^k+\left(\frac{c}{a+b}\right)^k+\frac{3\left(2^{k-1}-3\right)}{2^k}\frac{\sqrt[3]{abc}}{a+b+c}\ge 2$$

Bài 41. Cho $a,b,c\ge 0$ và $n\ge 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{(b+c)^n}+\frac{b}{(c+a)^n}+\frac{c}{(a+b)^n}\ge\left(\frac{3}{2}\right)^n.\frac{1}{(a+b+c)^{n-1}}$$

Bài 42. Cho $\begin{cases}a,b,c>0\\ abc=1\end{cases}$ và số thực $\alpha\ge 1$. Chứng minh rằng: $\dfrac{a^\alpha}{b+c}+\dfrac{b^\alpha}{c+a}+\dfrac{c^\alpha}{a+b}\ge\dfrac{3}{2}$

Bài 43. Cho $a,\ b,\ c>0$ và số thực k thỏa mãn $k\ge\dfrac{2}{3}$.

Chứng minh rằng: $\left(\dfrac{a}{b+c}\right)^k+\left(\dfrac{b}{c+a}\right)^k+\left(\dfrac{c}{a+b}\right)^k\ge\dfrac{3}{2^k}$

Bài 44. Cho $a,\ b,\ c>0$ và số thực r thỏa mãn $r\ge\dfrac{\ln 3}{\ln 2}-1$

Chứng minh rằng: $\left(\dfrac{a}{b+c}\right)^r+\left(\dfrac{b}{c+a}\right)^r+\left(\dfrac{c}{a+b}\right)^r\ge\dfrac{3}{2^r}$

Bài 45. Cho $a_1,a_2,...,a_n>0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a_1}{a_2+a_3}+\frac{a_2}{a_3+a_4}+...+\frac{a_n}{a_1+a_2}\ge\frac{3n}{4}-\frac{1}{4}\left(\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+...+\frac{a_n}{a_1}\right)$$

Bài 46. Cho $a_1,a_2,...,a_n$ là dãy số thực dương đơn điệu tăng tức là

$\left[\begin{array}{l}0<a_1\le a_2\le...\le a_{n-1}\le a_n\\ a_1\ge a_2\ge...\ge a_{n-1}\ge a_n>0\end{array}\right.$. Chứng minh: $\dfrac{a_1}{a_2+a_3}+...+\dfrac{a_{n-1}}{a_n+a_1}+\dfrac{a_n}{a_1+a_2}\ge\dfrac{n}{2}$.

Bài 47. Cho $a,b,c\ge 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\ge\frac{3}{4}\left(\frac{a(b+c)}{b^2+bc+c^2}+\frac{b(c+a)}{c^2+ca+a^2}+\frac{c(a+b)}{a^2+ab+b^2}\right)$$

Bài 48. Cho $a,\ b,\ c>0$. Tìm số thực k lớn nhất sao cho bất đẳng thức sau luôn đúng

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\ge\frac{3}{2}+\frac{k.\mathrm{Max}\left\{(a-b)^2;(b-c)^2;(c-a)^2\right\}}{ab+bc+ca}$$

Bài 49. Cho $a,b,c\ge 0$. Chứng minh: $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}\ge 1+\dfrac{3\left(a^3+b^3+c^3\right)}{2(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2\right)}$

Bài 50. Tìm hằng số tốt nhất của k để bất đẳng thức sau đúng với mọi $a,b,c\ge 0$

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\ge\frac{3}{2}+k\left(\frac{3\left(a^3+b^3+c^3\right)}{(a+b+c)(ab+bc+ca)}-1\right)$$

§ 24.4. BẤT ĐẲNG THỨC JACK GARFUNKEL VÀ MỘT SỐ MỞ RỘNG

Một trong các dạng rất khó của bất đẳng thức là bài toán tìm hằng số tốt nhất trong đánh giá. Nói chung với dạng toán này của bất đẳng thức nhiều biến số chỉ có thể tìm được lời giải nếu ta quy được từ bất đẳng thức nhiều biến số về một biến số. Khi đó dấu đẳng thức không nhất thiết đạt tại tâm mà có thể xảy ra tại các điểm lệch nhau. Hằng số tốt nhất trong đánh giá thường là giá trị nhỏ nhất hoặc lớn nhất của một hàm số nào đó. Chúng ta cùng làm quen về dạng toán này qua bất đẳng thức nổi tiếng của nhà toán học Mỹ ***Jack Garfunkel*** đưa ra năm 1989.

Bài toán. [Bài 1490* tạp chí CRUX] Tìm hằng số k nhỏ nhất sao cho bất đẳng thức

$\dfrac{a}{\sqrt{a+b}}+\dfrac{b}{\sqrt{b+c}}+\dfrac{c}{\sqrt{c+a}}\le k\sqrt{a+b+c}$ đúng với mọi a,b,c là các số thực dương.

Đây là bất đẳng thức khó và đã không có lời giải hoàn chỉnh nào được đưa ra trong một thời gian dài. Khó khăn đầu tiên là ở việc dự đoán giá trị nhỏ nhất của k, hay nói khác đi là xác định được trường hợp đẳng thức xảy ra. Rất khó đoán trước, là đẳng thức xảy ra không phải trong trường hợp $a=b=c$ như vẫn thường gặp. Vậy làm thế nào để tìm được giá trị đó. Những tìm tòi sâu sắc về bất đẳng thức trong những năm gần đây cho chúng ta một số kinh nghiệm để giải quyết vấn đề này. Đó là đối với các bất đẳng thức đối xứng hoặc hoán vị ba biến thì đẳng thức thường xảy ra khi có hai biến bằng nhau hoặc biến còn lại đạt giá trị biên.

Sử dụng nhận xét này ta xét $b=c$, khi đó bất đẳng thức trở thành: $\sqrt{a+b}+\sqrt{\dfrac{b}{2}}\le k\sqrt{a+2b}$.

Sử dụng bất đẳng thức ***Cauchy – Schwarz***: $\sqrt{a+b}+\sqrt{\dfrac{b}{2}}\le\sqrt{\left(1+\dfrac{1}{2}\right)(a+b+b)}=\sqrt{\dfrac{3}{2}}\sqrt{a+2b}$

với đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b$. Từ 2 đánh giá trên suy ra $k\ge\sqrt{\dfrac{3}{2}}$. Xét các giá trị tại biên:

Nếu $c=0$, bất đẳng thức trở thành $\dfrac{a}{\sqrt{a+b}}+\sqrt{b}\le k\sqrt{a+b}$ hay là $\sqrt{b(a+b)}\le(k-1)(a+b)+b$.

Cho $b=0$ ta thu được $k\ge1$, do đó $k-1\ge0$. Áp dụng bất đẳng thức ***AM – GM*** ta có $(k-1)(a+b)+b\ge2\sqrt{k-1}\sqrt{b(a+b)}$, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $(k-1)a=(2-k)b$, điều này chỉ có thể nếu $1\le k\le2$. Từ đây thu được $2\sqrt{k-1}\ge1$ hay là $k\ge\dfrac{5}{4}$.

Do $\dfrac{5}{4}>\sqrt{\dfrac{3}{2}}$ nên $\dfrac{5}{4}$ có khả năng là giá trị cần tìm. Ta sẽ đi chứng minh điều đó.

Bất đẳng thức Jack Garfunkel. Với các số thực không âm a, b, c ta có bất đẳng thức:

$$\frac{a}{\sqrt{a+b}}+\frac{b}{\sqrt{b+c}}+\frac{c}{\sqrt{c+a}}\le\frac{5}{4}\sqrt{a+b+c}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi (a,b,c) là các hoán vị của $(3,1,0)$.

Đây là một bất đẳng thức đại số rất nổi tiếng: đẹp, khó và đầy thách thức. Những lời giải của nó đồng thời cũng cho ta những phương pháp mới để chứng minh một số lớp bất đẳng thức khác. Sau đây là một số lời giải chúng tôi tập hợp được từ năm 2003.

***Lời giải 1.* [2003, Gabriel Dospinescu]**

Đặt $x=\sqrt{\dfrac{a+b}{2}}, y=\sqrt{\dfrac{a+c}{2}}, z=\sqrt{\dfrac{b+c}{2}} \Rightarrow a=x^2+y^2-z^2, b=x^2+z^2-y^2, c=y^2+z^2-x^2$

Bất đẳng thức trở thành $\dfrac{x^2+y^2-z^2}{x}+\dfrac{y^2+z^2-x^2}{y}+\dfrac{z^2+x^2-y^2}{z}\le\dfrac{5\sqrt{2}}{4}\sqrt{x^2+y^2+z^2}$,

hay $x+y+z+\dfrac{(x-y)(y-z)(x-z)(x+y+z)}{xyz}\le\dfrac{5\sqrt{2}}{4}\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Rõ ràng chỉ cần chứng minh bất đẳng thức trong trường hợp $\sqrt{y^2+z^2}\ge x\ge y\ge z\ge 0$.

Do $\dfrac{5\sqrt{2}}{4}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\ge\dfrac{5}{4}\left(x+\sqrt{y^2-z^2}\right)$ nên ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức

$$x+y+z+\frac{(x-y)(y-z)(x-z)(x+y+z)}{xyz}\le\frac{5}{4}\left(x+\sqrt{y^2-z^2}\right)$$

Điều này tương đương với $f(x)\le 0$ với mọi $\sqrt{y^2+z^2}\ge x\ge y$ trong đó:

$$f(x)=4(y-z)x^3-yzx^2+\left(4z^3-4y^3+4y^2z+4yz^2-5yz\sqrt{y^2+z^2}\right)x+4yz\left(y^2-z^2\right)$$

Nếu y = z thì $f(x)=-xy^2(x-y)-xy^3\left(5\sqrt{2}-7\right)\le 0$. Giả sử y > z ta có

$$f(0)=4yz\left(y^2-z^2\ge 0\right);\quad f(y)=y^2z\left(3y+4z-5\sqrt{y^2+z^2}\right)\le 0$$

$$f\left(\sqrt{y^2+z^2}\right)=2yz\left(4z\sqrt{y^2+z^2}-y^2-5z^2\right)=-2yz\left(\sqrt{y^2+z^2}-2z\right)^2\le 0$$

Mặt khác $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

Vì vậy *f(x)* có 1 nghiệm $x_1\le 0$, 1 nghiệm $x_2\in(0,y]$ và 1 nghiệm $x_3\ge\sqrt{y^2+z^2}$, tức là *f(x)* không có nghiệm nằm giữa y và $\sqrt{y^2+z^2}$, nghĩa là *f(x)* không đổi dấu trên $\left[y,\sqrt{y^2+z^2}\right]$, nhưng $f(y)\le 0$ và $f\left(\sqrt{y^2+z^2}\right)\le 0$, vì thế $f(x)\le 0$ với mọi $\sqrt{y^2+z^2}\ge x\ge y$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}x=\sqrt{y^2+z^2}\\ 2y=\sqrt{y^2+z^2}\end{cases}\Leftrightarrow x:y:z=\left(2:1:\sqrt{3}\right)\Leftrightarrow a:b:c=0:3:1$.

Bình luận. Ý tưởng đổi biến *(a,b,c)* thành *(x,y,z)* là rất tự nhiên. Bước quan trọng nhất trong chứng minh là sử dụng bất đẳng thức $\dfrac{5\sqrt{2}}{4}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\ge\dfrac{5}{4}\left(x+\sqrt{y^2+z^2}\right)$. Đây là một suy nghĩ mạo hiểm, bởi vì nó phá vỡ tính chất hoán vị của bất đẳng thức ban đầu. Từ đánh giá này chúng ta nhận được các biểu thức *f(y)* và $f\left(\sqrt{y^2+z^2}\right)$ đơn giản đến không ngờ. Đây quả thực là một lời giải rất đẹp và can đảm.

***Lời giải 2.* [2006, Phạm Kim Hùng]** Theo ý tưởng đổi biến trong lời giải 1 ta sẽ chứng minh $x+y+z+\dfrac{(x-y)(y-z)(x-z)(x+y+z)}{xyz}\le\dfrac{5\sqrt{2}}{4}\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ hay

$$\frac{(x-y)(y-z)(x-z)(x+y+z)^2}{xyz}\le\frac{5\sqrt{2}}{4}(x+y+z)\sqrt{x^2+y^2+z^2}-(x+y+z)^2$$

với mọi $\sqrt{y^2+z^2}\ge x\ge y\ge z\ge 0$. Bây giờ ta sẽ chứng minh nhận xét sau:

Nhận xét. Nếu ta giảm x, y, z đi cùng một đại lượng $t(0\le t\le z)$ thì vế trái tăng trong khi vế phải giảm. Thật vậy, ta sẽ chứng minh $f(t)=\dfrac{(x+y+z-3t)^2}{(x-t)(y-t)(z-t)}$ là hàm tăng trên $[0,z]$ và

$g(t)=\dfrac{5\sqrt{2}}{4}(x+y+z-3t)\sqrt{(x-t)^2+(y-t)^2+(z-t)^2}-(x+y+z-3t)^2$ giảm trên $[0,z]$

Thật vậy, đặt $m=x-t, n=y-t, p=z-t$ và $A=\sqrt{m^2+n^2+p^2}, B=m+n+p$, khi đó ta có $m^2n^2p^2f'(t)=(m+n+p)\big((m+n+p)(mn+np+pm)-6mnp\big)\ge 0$ và theo ***AM – GM*** thì

$g'(t)=-\left(\dfrac{15\sqrt{2}}{4}A+\dfrac{5\sqrt{2}}{4}\dfrac{B^2}{A}-6B\right)\le 0$, tức là $g(t)$ giảm trên $[0,z]$. Nhận xét được chứng minh.

Bây giờ ta sẽ chứng minh bất đẳng thức sau khi đã cùng giảm x, y, z đi một lượng t nằm giữa 0 và z. Ta chọn t sao cho $(x-t)^2=(y-t)^2+(z-t)^2$ (dễ thấy tồn tại t như vậy), vì thế ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức trong trường hợp $x^2=y^2+z^2$, nghĩa là $c=0$.

Khi $c=0$ bất đẳng thức trở thành $\dfrac{a}{\sqrt{a+b}}+\sqrt{b}\le\dfrac{5}{4}\sqrt{a+b}\Leftrightarrow\dfrac{\left(\sqrt{a+b}-2\sqrt{b}\right)^2}{\sqrt{a+b}}\ge 0$, đúng (đpcm)

Bình luận. Lời giải trên đã sử dụng phương pháp dồn biến toàn miền. Đây là một phương pháp rất mạnh để giải các bất đẳng thức ba biến đối xứng hay hoán vị mà đẳng thức xảy ra khi ba biến bằng nhau hoặc một biến đạt giá trị biên.

Một điểm thú vị nữa trong lời giải trên là việc nhân hai vế của bất đẳng thức với $(x+y+z)$ trước khi sử dụng nhận xét. Tại sao phải làm việc này? Hãy xét bất đẳng thức:

$$\frac{(x-y)(y-z)(x-z)(x+y+z)}{xyz}\le\frac{5\sqrt{2}}{4}\sqrt{x^2+y^2+z^2}-(x+y+z)$$

Nếu ta cùng giảm x, y, z đi một đại lượng $t(0\le t\le z)$ thì vế trái tăng. Xét vế phải:

$$f(t)=\frac{5\sqrt{2}}{4}\sqrt{(x-t)^2+(y-t)^2+(z-t)^2}-(x+y+z-3t)$$

Dễ dàng chứng minh hàm số này không tăng cũng không giảm. Vì thế ta không thu được kết luận gì.

Lời giải 3.* [2007, Võ Quốc Bá Cẩn]** Sử dụng bất đẳng thức ***Cauchy - Schwarz ta có:

$$VT^2\le\sum_{cyc}a(5a+b+9c).\sum_{cyc}\frac{a}{(a+b)(5a+b+9c)}=5(a+b+c)^2.\sum_{cyc}\frac{a}{(a+b)(5a+b+9c)}$$

Ta cần chứng minh $(a+b+c).\sum_{cyc}\dfrac{a}{(a+b)(5a+b+9c)}\le\dfrac{5}{16}$. Bất đẳng thức này đúng bởi vì:

$$16(VP-VT)(a+b)(b+c)(c+a)(5a+b+9c)(5b+c+9a)(5c+a+9b)=$$

$$\sum_{cyc}ab(a+b)(a+9b)(a-3b)^2+243\sum_{cyc}a^3b^2c+835\sum_{cyc}a^3bc^2+232\sum_{cyc}a^4bc+1230a^2b^2c^2\ge 0$$

Bình luận. Bước sử dụng bất đẳng thức ***Cauchy – Schwarz*** rất thú vị. Ta có thể giải thích các hệ số 5, 1, 9 được tìm ra như thế nào. Áp dụng bất đẳng thức ***Cauchy – Schwarz*** ta có

$$\left(\sum_{cyc}\frac{a}{\sqrt{a+b}}\right)^2 \le (ax+by+cz)\left(\frac{a}{x(a+b)}+\frac{b}{y(b+c)}+\frac{c}{z(c+a)}\right) \text{ với } x,y,z>0$$

Một cách tự nhiên ta có thể chọn $x=a+mb+nc,\ y=b+mc+na,\ z=c+ma+nb$ với $m,n\ge 0$

Khi đó ta có $\left(\sum_{cyc}\frac{a}{\sqrt{a+b}}\right)^2 \le \left(\sum_{cyc}\frac{a}{(a+b)(a+mb+nc)}\right)\left(\sum_{cyc}a(a+mb+nc)\right)$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \frac{a(a+b)(a+mb+nc)^2}{a}=\frac{b(b+c)(b+mc+na)^2}{b}=\frac{c(c+a)(c+ma+nb)^2}{c}$

Ta đã biết bất đẳng thức ban đầu đẳng thức xảy ra khi $a=3,\ b=1,\ c=0$ (và các hoán vị), thay các giá trị đó vào điều kiện trên ta nhận được $4(3+m)^2=(1+3n)^2$ hay $2m-3n=-5$. Ngoài ra, để đơn giản, ta sẽ chọn m, n thỏa mãn $\sum_{cyc}a(a+mb+nc)=(a+b+c)^2$, nghĩa là $m+n=2$.

Vì vậy $m=\frac{9}{5},n=\frac{1}{5}$. Cuối cùng ta cần chứng minh bất đẳng thức hoán vị với bậc 6.

Lời giải tiếp theo thuần túy sử dụng bất đẳng thức ***AM – GM***, phần bình luận dành cho bạn đọc.

***Lời giải 4.* [2008, Lê Hữu Điền Khuê]**

Giả sử $a+b+c=1$ và đặt $A=(a+b)(b+c)(c+a),\ B=\sum_{cyc}a^2(b+c)(c+a)$.

Khi đó: $\frac{a}{\sqrt{a+b}}+\frac{b}{\sqrt{b+c}}+\frac{c}{\sqrt{c+a}}\le\frac{5}{4}\sqrt{a+b+c}\Leftrightarrow\left(\sum_{cyc}a\sqrt{(b+c)(c+a)}\right)^2\le\frac{25}{16}A$

$$\Leftrightarrow B+2\sum_{cyc}ab(a+c)\sqrt{(a+b)(b+c)}\le\frac{25}{16}A\Leftrightarrow 32\sum_{cyc}ab(a+c)\sqrt{(a+b)(b+c)}\le 25A-16B$$

Sử dụng bất đẳng thức ***AM – GM*** cho hai số ta có

$$VT^2=2^{10}A\left(\sum_{cyc}ab\sqrt{a+c}\right)^2=2^{10}A\left(\sum_{cyc}a^2b^2(c+a)+2\sum_{cyc}ab^2c\sqrt{(a+c)(a+b)}\right)$$

$$\le 2^{10}A\left(\sum_{cyc}a^2b^2(c+a)+2\sum_{cyc}ab^2c(2a+b+c)\right)=2^{10}A(ab+bc+ca)(a^2b+b^2c+c^2a+3abc)$$

$$=4\left[32A\sum_{cyc}bc\right](8a^2b+8b^2c+8c^2a+24abc)\le\left[32A\sum_{cyc}bc+(8a^2b+8b^2c+8c^2a+24abc)\right]^2$$

Vì thế, chỉ cần chứng minh $32A(ab+bc+ca)+8a^2b+8b^2c+8c^2a+24abc\le 25A-16B$

$$\Leftrightarrow 32A(ab+bc+ca)+8(a^2b+b^2c+c^2a+3abc)(a+b+c)^2\le 25A(a+b+c)^2-16B(a+b+c)$$

$\Leftrightarrow\sum_{cyc}ab(a+b)(a-3b+2c)^2+2abc\left(3\sum_{cyc}a^2+\sum_{cyc}ab\right)\ge 0$, đúng (đpcm).

Nhận xét. Bước đầu tiên sử dụng ***AM – GM*** có thể thay thế bởi sử dụng ***Cauchy – Schwarz***

$$VT^2=2^{10}A\left(\sum_{cyc}ab\sqrt{a+c}\right)^2\le 2^{10}A\left(\sum_{cyc}ab\right)\left(\sum_{cyc}ab(a+c)\right)=2^{10}A(ab+bc+ca)(a^2b+b^2c+c^2a+3abc)$$

Bây giờ chúng tôi chuyển sang một số dạng tổng quát của bất đẳng thức này.

Cách tổng quát đơn giản nhất là tăng số biến. Ta có bài toán như sau:

Bài toán 1. Tìm hằng số k nhỏ nhất sao cho với các số thực không âm a, b, c, d ta có

$$\frac{a}{\sqrt{a+b+c}}+\frac{b}{\sqrt{b+c+d}}+\frac{c}{\sqrt{c+d+a}}+\frac{d}{\sqrt{d+a+b}}\le k\sqrt{a+b+c+d}$$

Lời giải sau đây được phát triển dựa trên bất đẳng thức ***Jack Garfunkel***.

Lời giải. Cho $(a,b,c,d)=(3,1,0,0)$ ta nhận được $k\ge\frac{5}{4}$. Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức đối với $k=\frac{5}{4}$ và do đó $\frac{5}{4}$ là giá trị cần tìm. Không mất tính tổng quát, giả sử $c=\min(a,b,c,d)$.

Theo bất đẳng thức ***Jack Garfunkel*** ta có: $\frac{a}{\sqrt{a+b}}+\frac{b}{\sqrt{b+c+d}}+\frac{c+d}{\sqrt{c+d+a}}\le\frac{5}{4}\sqrt{a+b+c+d}$

Vì vậy $$\sum_{a,b,c,d}\frac{a}{\sqrt{a+b+c}}\le\frac{a}{\sqrt{a+b}}+\frac{b}{\sqrt{b+c+d}}+\frac{c+d}{\sqrt{c+d+a}}-\frac{d}{\sqrt{c+d+a}}+\frac{d}{\sqrt{b+d+a}}$$

$$\le\frac{5}{4}\sqrt{a+b+c+d}-\frac{d}{\sqrt{c+d+a}}+\frac{d}{\sqrt{b+d+a}}\le\frac{5}{4}\sqrt{a+b+c+d}$$

Do $d+a+b\ge c+d+a$ nên ta có điều phải chứng minh.

Nhận xét. Cũng theo ý tưởng này các bạn có thể giải bài toán sau đây:

Bài toán 2. Chứng minh với mọi số thực không âm a, b, c, k thỏa mãn $k\le Max\{a,b,c\}$ ta có

$$\frac{a}{\sqrt{a+b+k}}+\frac{b}{\sqrt{b+c+k}}+\frac{c}{\sqrt{c+a+k}}+\frac{k}{\sqrt{a+b+c}}\le\frac{5}{4}\sqrt{a+b+c+k}$$

Với $k=0$ ta có bất đẳng thức ***Jack Garfunkel***.

Lời giải của bài toán 1 còn giúp chúng ta giải được bài toán tổng quát hơn sau đây:

Bài toán 3. Cho n là số tự nhiên lớn hơn 2 và các số thực không âm $a_1,a_2,....,a_n\ge0$. Tìm hằng số thực k nhỏ nhất sao cho bất đẳng thức sau đây đúng

$$\frac{a_1}{\sqrt{a_1+a_2+....+a_{n-1}}}+\frac{a_2}{\sqrt{a_2+a_3+....+a_n}}+...+\frac{a_n}{\sqrt{a_n+a_1+....+a_{n-2}}}\le k\sqrt{a_1+a_2+...+a_n}$$

Lời giải. Cho $(a_1,a_2,....a_n)=(3,1,0,....,0)$ ta nhận được $k\ge\frac{5}{4}$. Nếu ta có thể chứng minh bất đẳng thức với $k=\frac{5}{4}$ thì $\frac{5}{4}$ sẽ là giá trị cần tìm. Ta chứng minh điều này bằng quy nạp.

Với n = 3 ta có bất đẳng thức ***Jack Garfunkel***.

Giả sử bất đẳng thức đúng tới n, ta chứng minh nó cũng đúng với n + 1.

Đặt $VT=f(a_1,a_2,....,a_n)=A_n$, thì $A_n\le\frac{5}{4}\sqrt{a_1+a_2+...+a_n}$ với mọi $a_1,a_2,....,a_n\ge0$

Ta sẽ chứng minh $A_{n+1}\le\frac{5}{4}\sqrt{a_1+a_2+...+a_{n+1}}$. Giả sử $a_{n-1}=\max(a_1,a_2,....a_{n+1})$.

Đặt $b_1 = a_1, b_2 = a_2, ..., b_{n-1} = a_{n-1}, b_n = a_n + a_{n+1}$ và $B_n = f(b_1, b_2, ..., b_n)$.

Thế thì $A_{n+1} = \frac{b_1}{\sqrt{b_1 + b_2 + ... + b_{n-1} + a_n}} + \frac{b_2}{\sqrt{b_2 + b_3 + ... + b_n}} + ... +$

$$\frac{b_{n-1}}{\sqrt{b_{n-1} + b_n + b_1 + ... + b_{n-3}}} + \frac{a_n}{\sqrt{b_n + b_1 + b_2 + ... + b_{n-2}}} + \frac{a_{n+1}}{\sqrt{a_{n+1} + b_1 + b_2 + ... + b_{n-1}}}$$

$$= B_n + \frac{b_1}{\sqrt{b_1 + b_2 + ... + b_{n-1} + a_n}} - \frac{b_1}{\sqrt{b_1 + b_2 + ... + b_{n-1}}} - \frac{a_n}{\sqrt{b_n + b_1 + b_2 + ... + b_{n-2}}} + \frac{a_{n+1}}{\sqrt{a_{n+1} + b_1 + b_2 + ... + b_{n-1}}}$$

$$= B_n + \left(\frac{b_1}{\sqrt{b_1 + b_2 + ... + b_{n-1} + a_n}} - \frac{b_1}{\sqrt{b_1 + b_2 + ... + b_{n-1}}} \right) + \left(+ \frac{a_{n+1}}{\sqrt{a_{n+1} + b_1 + b_2 + ... + b_{n-1}}} - \frac{a_{n+1}}{\sqrt{b_n + b_1 + b_2 + ... + b_{n-2}}} \right)$$

Do đó, từ $b_1 + b_2 + ... + b_{n-1} + a_n \geq b_1 + b_2 + ... + b_{n-1}$ và

$a_{n+1} + b_1 + b_2 + ... + b_{n-1} \geq b_n + b_1 + b_2 + ... + b_{n-2}$ suy ra $A_{n+1} \leq B_n$.

Mặt khác, theo giả thiết quy nạp $B_n \leq \frac{5}{4}\sqrt{b_1 + b_2 + ... + b_n} = \frac{5}{4}\sqrt{a_1 + a_2 + ... + a_n + a_{n+1}}$.

Vì vậy $A_{n+1} \leq B_n \leq \frac{5}{4}\sqrt{a_1 + a_2 + ... + a_n + a_{n+1}}$. (đpcm)

Bình luận: Có thể thấy mở rộng bài toán theo cách này, các kết quả đạt được là khá trọn vẹn. Một câu hỏi khác là tìm hằng số k nhỏ nhất sao cho bất đẳng thức sau đúng với mọi $a, b, c, d \geq 0$:

$$\frac{a}{\sqrt{a+b}} + \frac{b}{\sqrt{b+c}} + \frac{c}{\sqrt{c+d}} + \frac{d}{\sqrt{d+a}} \leq k\sqrt{a+b+c+d}$$

Đây là một bài toán rất khó và vẫn chưa có lời giải hoàn chỉnh

Tuy nhiên, sử dụng máy tính, ***Ji Chen*** đã tìm ra kết quả xấp xỉ như sau:

Giá trị cần tìm k = 1,4352668092582209310763 … là nghiệm của đa thức

$$16k^{16} + 215k^{14} - 6520k^{12} - 119315k^{10} + 2624314k^{8}$$
$$-13071319k^{6} + 4783212k^{4} - 63453437k^{2} + 2805634$$

Đẳng thức đạt được khi d = 0 và a, b, c lần lượt là nghiệm của các đa thức bất khả quy sau đây

$$3016x^8 - 30106x^7 + 130587x^6 - 320588x^5$$
$$+285356x^4 - 461664x^3 + 267664x^2 - 85824x + 11584$$

$$1508y^8 + 14679y^7 + 58928y^6 + 124964y^5 + 147560y^4 + 90672y^3 + 19264y^2 - 4752y - 1600$$
$$754z^8 - 5845z^7 + 19716z^6 - 37935z^5 + 45610z^4 - 35003z^3 + 16560z^2 - 4241z + 400$$

Rõ ràng đây không phải một kết quả đẹp. Vì thế vẫn có thể coi đây là một bài toán mở.

Có một kết quả khá đẹp cùng dạng, mặc dù yếu hơn.

Bài toán 4. Với các số thực không âm a, b, c, d chứng minh rằng

$$\frac{a}{\sqrt{a+b}}+\frac{b}{\sqrt{b+c}}+\frac{c}{\sqrt{c+d}}+\frac{d}{\sqrt{d+a}}<\frac{3}{2}\sqrt{a+b+c+d}$$

Lời giải. **[Võ Quốc Bá Cẩn]**

Không mất tính tổng quát giả sử $a+b+c+d=1$ và $a=c\geq b+d$. Đặt $x=a+c$ thì $x\geq\frac{1}{2}$.

Sử dụng bất đẳng thức ***Jack Garfunkel*** ta có

$$\frac{a}{\sqrt{a+b}}+\frac{b}{\sqrt{b+c}}+\frac{c}{\sqrt{c+a}}\leq\frac{5}{4}\sqrt{a+b+c}=\frac{5}{4}\sqrt{1-d} \text{ và}$$

$$\frac{c}{\sqrt{c+d}}+\frac{d}{\sqrt{d+a}}+\frac{a}{\sqrt{a+c}}\leq\frac{5}{4}\sqrt{c+d+a}=\frac{5}{4}\sqrt{1-b}. \text{ Vì vậy}$$

$$\sum_{a,b,c,d}\frac{a}{\sqrt{a+b}}\leq\frac{5}{4}\sqrt{1-d}-\frac{c}{\sqrt{c+a}}+\frac{5}{4}\sqrt{1-b}-\frac{a}{\sqrt{a+c}}$$

$$=\frac{5}{4}\left(\sqrt{1-b}+\sqrt{1-d}\right)-\sqrt{c+a}\leq\frac{5}{4}\sqrt{2(2-b-d)}-\sqrt{c+a}=\frac{5}{4}\sqrt{2(1+x)}-\sqrt{x}$$

Dễ dàng kiểm tra $\frac{5}{4}\sqrt{2(1+x)}-\sqrt{x}\leq\frac{3}{2}$ với mọi $1\geq x\geq\frac{1}{2}$. Bất đẳng thức được chứng minh.

Chú ý rằng đẳng thức không xảy ra.

Chúng ta có thể thay đổi hệ số của các biến để nhận được các bất đẳng thức thú vị sau đây:

Bài toán 5. Chứng minh rằng với các số thực âm a, b, c ta có bất đẳng thức:

$$\frac{a}{\sqrt{a+2b}}+\frac{b}{\sqrt{b+2c}}+\frac{c}{\sqrt{c+2a}}\leq\sqrt{\frac{3}{2}(a+b+c)}$$

Đối với bất đẳng thức này không có dấu đẳng thức, và $\sqrt{\frac{3}{2}}$ không phải là hằng số tốt nhất.

Một kết quả mạnh hơn phát biểu trong bài toán dưới đây:

Bài toán 6. Chứng minh rằng với các số thực âm a, b, c ta có bất đẳng thức:

$$\frac{a}{\sqrt{a+2b}}+\frac{b}{\sqrt{b+2c}}+\frac{c}{\sqrt{c+2a}}\leq k\sqrt{a+b+c}$$

Trong đó $k=\frac{2\sqrt{3}-2}{\sqrt{2\sqrt{3}}}+\sqrt{-1+\frac{2}{\sqrt{3}}}\approx 1.17995968$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=2+2\sqrt{3}, b=1, c=0$ và các hoán vị.

Lời giải. Đặt $x=\sqrt{a+2b}, y=\sqrt{c+2a}, z=\sqrt{b+2c}$ thì

$$a=\frac{x^2+4y^2-2z^2}{9}, b=\frac{z^2+4x^2-2y^2}{9}, c=\frac{y^2+4z^2-2x^2}{9}$$

Và bất đẳng thức trở thành $\sum_{cyc}\frac{x^2+4y^2-2z^2}{9x}\leq k\sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}}$ hay là

$2\sum_{cyc}\frac{y^2-z^2}{x}+2\sum_{cyc}\frac{y^2}{x}-2(x+y+z)\le 3k\sqrt{3(x^2+y^2+z^2)}-3(x+y+z)$ hoặc một cách khác

$$2(x-y)(y-z)(x-z)\left(\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}\right)\le 3k\sqrt{3(x^2+y^2+z^2)}-3(x+y+z)-2\sum_{cyc}\frac{(x-y)^2}{x}$$

Rõ ràng chỉ cần chứng minh bất đẳng thức trong trường hợp $\sqrt{\frac{y^2+4z^2}{2}}\ge x\ge y\ge z\ge 0$.

Từ điều kiện $2x^2\le y^2+4z^2$, dễ dàng kiểm tra phương trình $2(x-t)^2=(y-t)^2+4(z-t)^2$ có hai nghiệm $0\le t_1\le \min(t_2,z)$ và với mọi $0\le t\le t_1$ ta có $2(x-t)^2\le (y-t)^2+4(z-t)^2$.

Ta có thể giảm x, y, z đi một đại lượng t nằm trong $[0,t_1]$, khi đó vế trái tăng.

Ta có thể chứng minh vế phải giảm, có nghĩa là hàm số

$f(t)=3k\sqrt{3\left((x-t)^2+(y-t)^2+(z+t)^2\right)}-3(x+y+z-3t)-2\sum_{cyc}\frac{(x-y)^2}{x-t}$ giảm trên $[0,t_1]$.

Thật vậy, đặt $m=x-t, n=y-t, p=z-t$ thì $f'(t)=-9k\frac{m+n+p}{\sqrt{3(m^2+n^2+p^2)}}+9-2\sum_{m,n,p}\frac{(m-n)^2}{m^2}$

Ta sẽ chứng minh $2\sum_{m,n,p}\frac{(m-n)^2}{m^2}\ge 9-9k\frac{m+n+p}{\sqrt{3(m^2+n^2+p^2)}}$

Do $k>1$ ta chỉ cần chứng minh $2\sum_{m,n,p}\frac{(m-n)^2}{m^2}\ge 9-9\frac{m+n+p}{\sqrt{3(m^2+n^2+p^2)}}$. Ta có

$$VP=9\left(1-\frac{m+n+p}{\sqrt{3(m^2+n^2+p^2)}}\right)=\frac{27(m^2+n^2+p^2)-9(m+n+p)^2}{\sqrt{3(m^2+n^2+p^2)}\left(\sqrt{3(m^2+n^2+p^2)}+m+n+p\right)}\ge\frac{9}{2}\frac{\sum_{cyc}(m-n)^2}{(m+n+p)^2}$$

Vì vậy chỉ cần chứng minh $2\sum_{cyc}\frac{(m-n)^2}{m^2}\ge\frac{9}{2}\frac{\sum_{cyc}(m-n)^2}{(m+n+p)^2}$ hay $\sum_{cyc}(m-n)^2\left(\frac{4}{m^2}-\frac{9}{(m+n+p)^2}\right)\ge 0$

Bất đẳng thức cuối cùng đúng vì

$2(m+n+p)\ge 2m+\sqrt{4n^2+4p^2}\ge 2m+\sqrt{n^2+4p^2}\ge 3m\ge 3n\ge 3p$.

Bây giờ ta cần chứng minh bất đẳng thức sau khi đã giảm các biến đi một đại lượng $t\in[0,t_1]$.

Nếu chọn $t=t_1$ ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức trong trường hợp $2x^2=y^2+4z^2$,

nghĩa là $c=0$. Bất đẳng thức ban đầu trở thành $\frac{a}{\sqrt{a+2b}}+\sqrt{b}\le k\sqrt{a+b}$.

Giả sử $a+b=1$ ta phải chứng minh $g(b)=\frac{1-b}{\sqrt{1+b}}+\sqrt{b}\le k$ với mọi $b\in[0,1]$.

Ta có $g'(b) = -\dfrac{(b+3)}{2(1+b)\sqrt{1+b}} + \dfrac{1}{2\sqrt{b}}$. Do đó $g'(b)$ cùng dấu với $\sqrt{(1+b)^3} - (b+3)\sqrt{b}$,

nghĩa là cùng dấu với $(1+b)^3 - (b+3)^2 b = -3b^2 - 6b + 1$.

Dễ dàng chứng minh rằng $\max\limits_{[0;1]} g(b) = g\left(-1+\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right) = \dfrac{2\sqrt{3}-2}{\sqrt{2\sqrt{3}}} + \sqrt{-1+\dfrac{2}{\sqrt{3}}} = k$.

Bất đẳng thức được chứng minh. Tổng quát hơn ta có

Bài toán 7. Cho q là số thực thỏa mãn $0 \le q \le \dfrac{1}{2}$ hoặc $q \ge \dfrac{13+5\sqrt{13}}{26} \approx 1,193375245$. Tìm hằng số thực k nhỏ nhất sao cho bất đẳng thức sau đúng với mọi số thực a, b, c:

$$\frac{a}{\sqrt{a+qb}} + \frac{b}{\sqrt{b+qc}} + \frac{c}{\sqrt{c+qc}} \le k\sqrt{a+b+c}$$

Lời giải.

Trường hợp 1. Xét $0 \le q \le \dfrac{1}{2}$, cho $a=b=c=1$ ta nhận được $k \ge \sqrt{\dfrac{3}{q+1}}$.

Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức: $\dfrac{a}{\sqrt{a+qb}} + \dfrac{b}{\sqrt{b+qc}} + \dfrac{c}{\sqrt{c+qa}} \le \sqrt{\dfrac{3}{q+1}}\sqrt{a+b+c}$

Sử dụng bất đẳng thức ***Cauchy – Schwarz*** ta có

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a+qb}} + \frac{b}{\sqrt{b+qc}} + \frac{c}{\sqrt{c+qa}}\right)^2 \le (a+b+c)\left(\frac{a}{a+qb} + \frac{b}{b+qc} + \frac{c}{c+qa}\right).$$

Ta chỉ cần chứng minh $\dfrac{a}{a+qb} + \dfrac{b}{b+qc} + \dfrac{c}{c+qa} \le \dfrac{3}{1+q}$

$$\Leftrightarrow \left(1-\frac{a}{a+qb}\right) + \left(1-\frac{b}{b+qc}\right) + \left(1-\frac{c}{c+qa}\right) \ge 3 - \frac{3}{1+q} \Leftrightarrow \frac{b}{a+qb} + \frac{c}{b+qc} + \frac{a}{c+qa} \ge \frac{3}{1+q}$$

Lại áp dụng bất đẳng thức ***Cauchy – Schwarz*** ta có

$$\frac{b}{a+qb} + \frac{c}{b+qc} + \frac{a}{c+qa} \ge \frac{(a+b+c)^2}{a(c+qa)+b(a+qb)+c(b+qc)}.$$

Ta chỉ cần chứng minh $(1+q)(a+b+c)^2 \ge 3\big(a(c+qa)+b(a+qb)+c(b+qc)\big)$

$\Leftrightarrow (1-2q)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) \ge 0 \Leftrightarrow (1-2q)\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right] \ge 0$.

Bất đẳng thức cuối cùng hiển nhiên đúng. Vậy giá trị cần tìm là $\sqrt{\dfrac{3}{q+1}}$.

Trường hợp 2. $q \ge \dfrac{13+5\sqrt{13}}{26}$. Cho $x = \sqrt{a+qb}, y = \sqrt{c+qa}, z = \sqrt{b+qc}$ thì

$$a = \frac{x^2+q^2y^2-qz^2}{9}, b = \frac{z^2+q^2x^2-qy^2}{9}, c = \frac{y^2+q^2z^2-qx^2}{9}.$$

Bất đẳng thức trở thành

$$\sum_{cyc}\frac{x^2+q^2y^2-qz^2}{(q^3+1)x}\le k\sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{q+1}}$$

$$\Leftrightarrow q\sum_{cyc}\frac{y^2-z^2}{x}+(q^2-q)\sum_{cyc}\frac{q^2}{x}-(q^2-q)(x+y+z)\le$$

$$\le\frac{k(q^3+1)}{\sqrt{q+1}}\sqrt{x^2+y^2+z^2}-(q^2-q+1)(x+y+z)$$

$$\Leftrightarrow q(x-y)(y-z)(z-x)\left(\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}\right)\le$$

$$\le\frac{k(q^3+1)}{\sqrt{q-1}}\sqrt{x^2+y^2+z^2}-(q^2-q+1)(x+y+z)-(q^2-q)\sum_{cyc}\frac{(x-y)^2}{x}$$

Ta chỉ cần chứng minh trong trường hợp $\sqrt{\dfrac{y^2+qz^2}{q}}\ge x\ge y\ge z\ge 0$.

Từ điều kiện $qx^2\le y^2+q^2z^2$, suy ra tồn tại $0\le t_1\le z, q(x-t_1)^2=(y-t_1)^2+q^2(z-t_1)^2$ và với mọi $0\le t\le t_1$ ta có $q(x-t)^2\le(y-t)^2+q^2(z-t)^2$.

Nếu ta giảm x, y, z đi một lượng $t\in[0,t_1]$ thì vế trái tăng, ta chứng minh vế phải giảm, và như thế chỉ cần chứng minh bất đẳng thức ban đầu trong trường hợp c = 0. Xét hàm số

$$f(t)=\frac{k(q^3+1)}{\sqrt{q+1}}\sqrt{(x+t)^2+(y-t)^2+(z-t)^2}-(q^2-q)\sum_{cyc}\frac{(x-y)^2}{x-t}-(q^2-q+1)(x+y+z-3t)$$

Đặt $m=x-t, n=y-t, p=z-t$ ta có

$$f'(t)=-\frac{k(q^3+1)}{\sqrt{q+1}}\frac{m+n+p}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}+3(q^2-q+1)-(q^2-q)\sum_{m,n,p}\frac{(m-n)^2}{m^2}$$

Ta phải chứng minh $3(q^2-q+1)\left(1-\dfrac{k\sqrt{q+1}}{3}\dfrac{m+n+p}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}\right)\le(q^2-q)\displaystyle\sum_{m,n,p}\frac{(m-n)^2}{m^2}$

Từ bất đẳng thức ban đầu, cho $a=b=c=1$ thì ta nhận được $k\ge\sqrt{\dfrac{3}{1+q}}\Leftrightarrow\dfrac{k\sqrt{q+1}}{3}\ge\dfrac{1}{\sqrt3}$ vì thế

$$3(q^2-q+1)\left(1-\frac{k\sqrt{q+1}}{3}\frac{m+n+p}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}\right)\le3(q^2-q+1)\left(1-\frac{m+n+p}{\sqrt{3(m^2+n^2+p^2)}}\right)$$

Do đó cần chứng minh

$$3(q^2-q+1)\frac{3(m^2+n^2+p^2)-(m+n+p)^2}{\sqrt{3(m^2+n^2+p^2)}\left(\sqrt{3(m^2+n^2+p^2)}+m+n+p\right)}\le(q^2-q)\sum_{cyc}\frac{(m-n)^2}{m^2}$$

hay có thể viết lại là $S_p(m-n)^2+S_m(n-p)^2+S_n(m-p)^2\ge0$ trong đó

$S_p = n^2p^2\left[2(q^2-q)(m+n+p)^2-3(q^2-q+1)m^2\right].$

$S_m = p^2m^2\left[2(q^2-q)(m+n+p)^2-3(q^2-q+1)n^2\right].$

$S_n = m^2n^2\left[2(q^2-q)(m+n+p)^2-3(q^2-q+1)p^2\right]$.

Vì $m\ge n\ge p\ge 0$, ta có $2(q^2-q)(m+n+p)^3\ge 18(q^2-q)p^2\ge 3(q^2-q+1)p^2$, do đó $S_n\ge 0$

Vì vậy từ $S_n(m-p)^2\ge S_n(m-n)^2+S_n(n-p)^2$ ta phải chứng minh

$$S_m+S_n\ge 0 \text{ và } S_n+S_p\ge 0$$

Điều này đúng bởi vì $\frac{1}{2m^2}(S_m+S_n)=(q^2-q)(m+n+p)^2(p^2+n^2)-3(q^2-q+1)n^2p^2$

$\ge(q^2-q)\frac{9}{4}(n+p)^2(p^2+n^2)-3(q^2-q+1)n^2p^2\ge 18(q^2-q)n^2p^2-3(q^2-q+1)n^2p^2\ge 0$ và

$\frac{1}{2n^2}(S_p+S_n)=(q^2-q)(m+n+p)^2(m^2+p^2)-3(q^2-q+1)m^2p^2$

$\ge(q^2-q)(m+2p)^2(m^2+p^2)-3(q^2-q+1)m^2p^2$

$\ge(q^2-q).8mp.2mp-3(q^2-q+1)m^2p^2\ge 0$

Như vậy ta đã chứng minh *f(t)* nghịch biến. Theo lập luận ở trên, ta chỉ cần xét bất đẳng thức ban đầu trong trường hợp *c = 0*, nghĩa là $\frac{a}{\sqrt{a+qb}}+\sqrt{b}\le k\sqrt{a+b}$.

Không mất tính tổng quát, giả sử *a + b = 1*, khi đó giá trị nhỏ nhất của *k* chính là giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=\frac{1-x}{\sqrt{1+(q-1)x}}+\sqrt{x}$ trên [0,1]

Ta có $f'(x)=-\frac{(q-1)x+q+1}{2\sqrt{(1+(q-1)x)^3}}+\frac{1}{2\sqrt{x}}$ cùng dấu với $(1+(q-1)x)^3-x((q-1)x+q+1)^2$ hay

cùng dấu với $P(x)=(q-1)^2(q-2)x^3+(q-1)(q-5)x^2-(q^2-q+4)x+1$

Các bạn có thể tự chứng minh kết quả sau:

Nếu $\frac{13+5\sqrt{13}}{26}\le q<2$ thì P(x) có hai nghiệm âm và một nghiệm trong (0,1).

Nếu $q>2$ thì $P(x)$ có một nghiệm âm và hai nghiệm dương $x_1\le\min(1,x_2)$ và $f(x_1)>f(1)$.

Nếu $q=2$ thì $P(x)$ chỉ có đúng hai nghiệm phân biệt, 1 nghiệm âm và 1 nghiệm dương $\in[0,1]$.

Trong cả ba trường hợp, ta có kết luận chung:

Giá trị nhỏ nhất của *k* là $\frac{1-x_0}{\sqrt{1+(q-1)x_0}}+\sqrt{x_0}$ trong đó x_0 là nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình $(q-1)^2(q-2)x^3+(q-1)(q-5)x^2-(q^2-q+4)x+1=0$

Nhận xét. Ta còn có hai trường hợp riêng đặt biệt của bài toán này, đó là:

1. $\dfrac{a}{\sqrt{a+4b}}+\dfrac{b}{\sqrt{b+4c}}+\dfrac{c}{\sqrt{c+4a}}\le\left(\dfrac{17-\sqrt{33}}{6\sqrt{-1+\sqrt{33}}}+\sqrt{\dfrac{-5+\sqrt{33}}{12}}\right)\sqrt{a+b+c}$

2. $\dfrac{a}{\sqrt{2a+3b}}+\dfrac{b}{\sqrt{2b+3c}}+\dfrac{c}{\sqrt{2c+3a}}\le\left(\dfrac{2\sqrt{3}-3}{\sqrt{-1+\sqrt{3}}}+\sqrt{\dfrac{-5+3\sqrt{3}}{2}}\right)\sqrt{a+b+c}$

Trường hợp cuối cùng vẫn là hai bài toán mở sau đây:

Bài toán 8. Giả sử $\frac{1}{2}<q<\frac{13+5\sqrt{13}}{26}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của k sao cho bất đẳng thức

$$\frac{a}{\sqrt{a+qb}}+\frac{b}{\sqrt{b+qc}}+\frac{c}{\sqrt{c+qa}}\le k\sqrt{a+b+c}$$

Đúng với mọi số thực không âm a, b, c.

Bình luận: Bất đẳng thức ***Jack Garfunkel*** là trường hợp đặc biệt của bài toán ứng với $q=1$. Do đó bài toán 8 mới thực sự là bài toán tổng quát của của bất đẳng thức ***Jack Garfunkel*** chứ không phải là bài toán 7. Đối với bài toán này chúng ta không thể (hoặc rất khó để có thể) dự đoán được trường hợp cụ thể xảy ra đẳng thức khi q nhận một giá trị bất kì trong khoảng $\frac{1}{2}<q<\frac{13+5\sqrt{13}}{26}$, do đó tác giả nghĩ rằng, trong bốn cách chứng minh bất đẳng thức ***Jack Garfunkel*** ở trên, nếu có một cách có thể giải được bài toán 8 thì đó phải là cách thứ 2 (do các cách còn lại đều dựa trên sự biết trước dấu đẳng thức cụ thể). Nếu không, chúng ta phải tìm ra một hướng giải quyết khác cho bất đẳng thức ***Jack Garfunkel***. Rõ ràng bất đẳng thức vẫn còn nhiều điều thú vị đang chờ các bạn đọc khám phá!

Bài toán 9. Cho k là số thực dương nhỏ hơn 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của M sao cho bất đẳng thức $\dfrac{a}{(a+b)^k}+\dfrac{b}{(b+c)^k}+\dfrac{c}{(c+a)^k}\le M\,(a+b+c)^{1-k}$ đúng với mọi số thực không âm a, b, c.

Bình luận: Chú ý rằng nếu k > 1 thì không tồn tại giá trị của M. Thật vậy, cho c = 0 bất đẳng thức trở thành $\dfrac{a}{(a+b)^k}+b^{1-k}\le M\,(a+b)^{1-k}$. Cố định a và cho $b\to 0$, khi đó $VT\to+\infty$ trong khi $VP\to Ma^{1-k}$, mâu thuẫn.

Theo dự đoán của chúng tôi, $M=\max\left(\dfrac{3^k}{2^k},1+k(1-k)^{\frac{1-k}{k}}\right)$.

Bài viết tạm dừng ở đây, hi vọng được trao đổi với các bạn về bài toán này trong một dịp khác.

§ 24.5. CÁC BẤT ĐẲNG THỨC CÓ LỜI GIẢI HAY

Trong mục này chúng tôi giới thiệu với các bạn một số bất đẳng thức cùng những chứng minh rất đẹp. Có một số bài toán dưới đây đã được đề cập tới ở các chương trước, trong các chương đó, chúng đã được giải với những phương pháp khá chuẩn tắc. Ngược lại, đa số các chứng minh dưới đây rất linh hoạt và không cứng nhắc tuân theo các nguyên tắctrước nữa.

Bài 1. Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}=\frac{3}{2}$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a+b+c}{2}+2\left(\frac{ab}{a+b}+\frac{bc}{b+c}+\frac{ca}{c+a}\right)\ge\frac{9}{2}\qquad(1)$$

Chứng minh

Đặt $S = a + b + c$; $T = ab + bc + ca$; $P = abc$. Thì $\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}=\frac{3}{2}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2[(1 + b)(1 + c) + (1 + c)(1 + a) + (1 + a)(1 + b)] = 3(1 + a)(1 + b)(1 + c)$

$\Leftrightarrow 3P + T = S + 3$. Sử dụng bất đẳng thức ***AM – GM***, ta có:

$$\frac{3}{2}=\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}\ge\frac{3}{\sqrt[3]{(1+a)(1+b)(1+c)}}\ge\frac{9}{(1+a)+(1+b)+(1+c)}=\frac{9}{S+3}$$

$\Rightarrow 3(S + 3) \ge 18 \Leftrightarrow 3S \ge 9 \Leftrightarrow S \ge 3 \Rightarrow S + 3 \ge 6$. Ta sẽ chứng minh $T \ge 3$. Nếu $T < 3$ thì $3 > T = ab + bc + ca \ge 3\sqrt[3]{ab.bc.ca}=3\sqrt[3]{P^2}\Rightarrow P<1\Rightarrow 3P+T<6\Rightarrow$ mâu thuẫn $\Rightarrow T\ge 3$.

Ta có: $\frac{a+b+c}{2}+2\left(\frac{ab}{a+b}+\frac{bc}{b+c}+\frac{ca}{c+a}\right)\ge\frac{9}{2}\Leftrightarrow\frac{S}{2}+2\left(\frac{SP+T^2}{ST-P}\right)\ge\frac{9}{2}$

$\Leftrightarrow S(ST-P)+4(SP+T^2)\ge 9(ST-P)\Leftrightarrow S^2T+S(S+3-T)+4T^2\ge 9ST-3(S+3-T)$

$\Leftrightarrow S^2T+S^2+6S+9+4T^2\ge 10ST+3T\Leftrightarrow (T-3)(S-3)(S+1)+4(S-T)^2\ge 0\quad(2)$

Do $S \ge 3$ và $T \ge 3$, nên (2) đúng $\Rightarrow$ (1) đúng.

Bài 2. Cho $a, b, c, d > 0$ thỏa mãn $abc + bcd + cda + dab = a + b + c + d$.

Chứng minh rằng: $\sqrt{\frac{1+a^2}{2}}+\sqrt{\frac{1+b^2}{2}}+\sqrt{\frac{1+c^2}{2}}+\sqrt{\frac{1+d^2}{2}}\le a+b+c+d$ (1)

Chứng minh

• ***Bổ đề:*** $\frac{1+a^2}{a+b}+\frac{1+b^2}{b+c}+\frac{1+c^2}{c+d}+\frac{1+d^2}{d+a}=a+b+c+d$

• ***Chứng minh:*** $\text{VT}-\text{VP}=\frac{1+a^2}{a+b}-a+\frac{1+b^2}{b+c}-b+\frac{1+c^2}{c+d}-c+\frac{1+d^2}{d+a}-d$

$$=\frac{1-ab}{a+b}+\frac{1-bc}{b+c}+\frac{1-cd}{c+d}+\frac{1-da}{d+a}=\left(\frac{1-ab}{a+b}+\frac{1-cd}{c+d}\right)+\left(\frac{1-bc}{b+c}+\frac{1-da}{d+a}\right)$$

$$=(a+b+c+d-abc-bcd-cda-dab)\left[\frac{1}{(a+b)(c+d)}+\frac{1}{(b+c)(d+a)}\right]=0$$

• ***Áp dụng:*** sử dụng bất đẳng thức ***Cauchy – Schwarz*** ta có:

$$2(a+b+c+d)^2=2(a+b+c+d)\left(\frac{1+a^2}{a+b}+\frac{1+b^2}{b+c}+\frac{1+c^2}{c+d}+\frac{1+d^2}{d+a}\right)$$

$$=\left[(a+b)+(b+c)+(c+d)+(d+a)\right]\left(\frac{1+a^2}{a+b}+\frac{1+b^2}{b+c}+\frac{1+c^2}{c+d}+\frac{1+d^2}{d+a}\right)$$

$$\geq\left(\sqrt{a+b}\sqrt{\frac{1+a^2}{a+b}}+\sqrt{b+c}\sqrt{\frac{1+b^2}{b+c}}+\sqrt{c+d}\sqrt{\frac{1+c^2}{c+d}}+\sqrt{d+a}\sqrt{\frac{1+d^2}{d+a}}\right)^2=\left(\sum_{cyc}\sqrt{1+a^2}\right)^2$$

$$\Rightarrow\sqrt{\frac{1+a^2}{2}}+\sqrt{\frac{1+b^2}{2}}+\sqrt{\frac{1+c^2}{2}}+\sqrt{\frac{1+d^2}{2}}\leq a+b+c+d$$

Bài 3. Cho x, y, z là các số thực. Chứng minh rằng:

$$2\left(x^2+y^2+z^2\right)^3\geq\left[(x+y+z)\left(x^2+y^2+z^2\right)-2xyz\right]^2 \qquad (1)$$

Chứng minh

$$\text{VT}(1)=2\left(x^2+y^2+z^2\right)^3=2\left(x^6+y^6+z^6\right)+6\left(x^2+y^2\right)\left(y^2+z^2\right)\left(z^2+x^2\right)$$

$$\text{VP}(1)=(x+y+z)^2\left(x^2+y^2+z^2\right)^2-4xyz(x+y+z)\left(x^2+y^2+z^2\right)$$

$$\Rightarrow \text{VT}(1)-\text{VP}(1)=x^4(y+z-x)^2+y^4(z+x-y)^2+z^4(x+y-z)^2+$$
$$+\ 2x^2y^2(x-y)^2+\ 2y^2z^2(y-z)^2+2z^2x^2(z-x)^2+2x^2y^2z^2\geq 0$$

$$\Rightarrow \text{VT}(1)\geq\text{VP}(1)\Leftrightarrow 2\left(x^2+y^2+z^2\right)^3\geq\left[(x+y+z)\left(x^2+y^2+z^2\right)-2xyz\right]^2$$

Bài 4. Cho $x, y, z>0$ và $xyz=x+y+z+2$. Chứng minh rằng:

1. $xy+yz+zx\geq 2(x+y+z)$ (1) **2.** $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\leq\frac{3}{2}\sqrt{xyz}$ (2)

Chứng minh

Đặt $a=\frac{1}{x+1};b=\frac{1}{y+1};c=\frac{1}{z+1}\Rightarrow xyz=x+y+z+2\Leftrightarrow a+b+c=1$

Ta có: $x=\frac{1-a}{a}=\frac{b+c}{a};y=\frac{1-b}{b}=\frac{c+a}{b};z=\frac{1-c}{c}=\frac{a+b}{c}$

1. $xy+yz+zx\geq 2(x+y+z)\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{(b+c)(c+a)}{ab}+\frac{(c+a)(a+b)}{bc}+\frac{(a+b)(b+c)}{ca}\ge 2\left(\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}\right)$$

$$\Leftrightarrow a(a+b)(a+c)+b(b+c)(b+a)+c(c+a)(c+b)\ge 2\sum_{cyc} ab(a+b)$$

$$\Leftrightarrow a(a-b)(a-c)+b(b-c)(b-a)+c(c-a)(c-b)\ge 0$$

Bất đẳng thức cuối cùng đúng theo Schur. Vì vậy, $xy+yz+zx\ge 2(x+y+z)$

2. $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\le\frac{3}{2}\sqrt{xyz} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{yz}}+\frac{1}{\sqrt{zx}}+\frac{1}{\sqrt{xy}}\le\frac{3}{2}\Leftrightarrow\sum_{cyc}\sqrt{\frac{bc}{(a+b)(a+c)}}\le\frac{3}{2}$

Sử dụng bất đẳng thức ***AM – GM*** ta có:

$$\sum_{cyc}\sqrt{\frac{bc}{(a+b)(a+c)}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{b}{a+b}+\frac{c}{a+c}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{c}{b+c}+\frac{a}{b+a}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{a}{c+a}+\frac{b}{c+b}\right)=\frac{3}{2}$$

Bài 5. Cho $a, b, c>0$. Chứng minh rằng:

$$2(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\ge 9+\left(4-\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}\right)^2 \quad (1)$$

Chứng minh

$$(1)\Leftrightarrow \frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+\frac{4(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2}\ge 10$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}-6\ge 4-\frac{4(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2}$$

Ta có: $+\begin{cases}\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-2=\frac{(a-b)^2}{ab}=\frac{2(a-b)^2}{2ab}\ge\frac{2(a-b)^2}{a^2+b^2}\ge\frac{2(a-b)^2}{a^2+b^2+c^2}\\ \frac{b}{c}+\frac{c}{b}-2=\frac{(b-c)^2}{bc}=\frac{2(b-c)^2}{2bc}\ge\frac{2(b-c)^2}{b^2+c^2}\ge\frac{2(b-c)^2}{a^2+b^2+c^2}\\ \frac{c}{a}+\frac{a}{c}-2=\frac{(c-a)^2}{ca}=\frac{2(c-a)^2}{2ca}\ge\frac{2(c-a)^2}{c^2+a^2}\ge\frac{2(c-a)^2}{a^2+b^2+c^2}\end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}-6\ge\frac{2\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]}{a^2+b^2+c^2}=4-\frac{4(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2}$$

Bài 6. Cho $x, y, z>0$ thỏa mãn $x+y+z=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{xy}{1-x^2y^2}+\frac{yz}{1-y^2z^2}+\frac{zx}{1-z^2x^2}<\frac{7}{20} \quad (1)$$

Chứng minh

• ***Bổ đề:*** Cho $a, b, c\ge 0$ và $a+b+c=1$, thì $(ab)^n+(bc)^n+(ca)^n\le\frac{1}{4^n}$, $\forall 2\le n\in\mathbb{N}$

• ***Chứng minh:*** Không mất tính tổng quát, giả sử $a \ge b \ge c$.

Sử dụng bất đẳng thức ***AM – GM*** ta có:

$$\frac{1}{4^n} = \left[\left(\frac{a+(b+c)}{2}\right)^2\right]^n \ge \left[a(b+c)\right]^n \ge a^n b^n + a^n c^n + a^n b^{n-1} c \ge a^n b^n + b^n c^n + c^n a^n$$

• ***Áp dụng:*** Sử dụng công thức tổng cấp số nhân vô hạn ta có:

$$+\begin{cases} \dfrac{xy}{1-x^2y^2} = \dfrac{xy}{1-(xy)^2} = xy\left[1+(xy)^2+(xy)^4+\ldots\right] \\ \dfrac{yz}{1-y^2z^2} = \dfrac{yz}{1-(yz)^2} = yz\left[1+(yz)^2+(yz)^4+\ldots\right] \\ \dfrac{zx}{1-z^2x^2} = \dfrac{zx}{1-(zx)^2} = zx\left[1+(zx)^2+(zx)^4+\ldots\right] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{xy}{1-x^2y^2} + \frac{yz}{1-y^2z^2} + \frac{zx}{1-z^2x^2} \le (xy+yz+zx) + \sum_{k=1}^{\infty}\left[(xy)^{2k+1} + (yz)^{2k+1} + (zx)^{2k+1}\right]$$

$$< \frac{1}{3}(x+y+z)^2 + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{4^5} + \ldots = \frac{1}{3} + \frac{1}{4^3}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{16}} = \frac{1}{3} + \frac{1}{60} = \frac{7}{20}$$

Bài 7. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a(2a+3b+3c)}{4a^2+3(b+c)^2} + \frac{b(2b+3c+3a)}{4b^2+3(c+a)^2} + \frac{c(2c+3a+3b)}{4c^2+3(a+b)^2} \le \frac{3}{2} \qquad (1)$$

Chứng minh

$$(1) \Leftrightarrow \frac{1}{2} - \frac{a(2a+3b+3c)}{4a^2+3(b+c)^2} + \frac{1}{2} - \frac{b(2b+3c+3a)}{4b^2+3(c+a)^2} + \frac{1}{2} - \frac{c(2c+3a+3b)}{4c^2+3(a+b)^2} \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(b+c)^2 - 2a(b+c)}{4a^2+3(b+c)^2} + \frac{(c+a)^2 - 2b(c+a)}{4b^2+3(c+a)^2} + \frac{(a+b)^2 - 2c(a+b)}{4c^2+3(a+b)^2} \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{6(b+c)^2 - 12a(b+c)}{4a^2+3(b+c)^2} + \frac{6(c+a)^2 - 12b(c+a)}{4b^2+3(c+a)^2} + \frac{6(a+b)^2 - 12c(a+b)}{4c^2+3(a+b)^2} \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{6(b+c)^2 - 12a(b+c)}{4a^2+3(b+c)^2} + 1 + \frac{6(c+a)^2 - 12b(c+a)}{4b^2+3(c+a)^2} + 1 + \frac{6(a+b)^2 - 12c(a+b)}{4c^2+3(a+b)^2} + 1 \ge 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{(3b+3c-2a)^2}{4a^2+3(b+c)^2} + \frac{(3c+3a-2b)^2}{4b^2+3(c+a)^2} + \frac{(3a+3b-2c)^2}{4c^2+3(a+b)^2} \ge 3$$

$$\Leftrightarrow T=\frac{\left[3\left(\frac{b+c}{a}\right)-2\right]^2}{3\left(\frac{b+c}{a}\right)^2+4}+\frac{\left[3\left(\frac{c+a}{b}\right)-2\right]^2}{3\left(\frac{c+a}{b}\right)^2+4}+\frac{\left[3\left(\frac{a+b}{c}\right)-2\right]^2}{3\left(\frac{a+b}{c}\right)^2+4}\ge 3$$

Sử dụng bất đẳng thức ***Cauchy – Schwarz*** ta có:

$$T\ge\frac{\left[3\left(\frac{b+c}{a}\right)-2+3\left(\frac{c+a}{b}\right)-2+3\left(\frac{a+b}{c}\right)-2\right]^2}{3\left(\frac{b+c}{a}\right)^2+4+3\left(\frac{c+a}{b}\right)^2+4+3\left(\frac{a+b}{c}\right)^2+4}=\frac{\left[3\sum\limits_{cyc}\left(\frac{b+c}{a}\right)-6\right]^2}{3\sum\limits_{cyc}\left(\frac{b+c}{a}\right)^2+12}=S$$

Ta sẽ chứng minh rằng $S\ge 3\Leftrightarrow\left[3\sum\limits_{cyc}\left(\frac{b+c}{a}\right)-6\right]^2\ge 9\sum\limits_{cyc}\left(\frac{b+c}{a}\right)^2+36$

$$\Leftrightarrow 9\left[\sum_{cyc}\left(\frac{b+c}{a}\right)\right]^2-36\sum_{cyc}\left(\frac{b+c}{a}\right)\ge 9\sum_{cyc}\left(\frac{b+c}{a}\right)^2\Leftrightarrow\sum_{cyc}\left(\frac{b+c}{a}\right)\left(\frac{c+a}{b}\right)\ge 2\sum_{cyc}\left(\frac{b+c}{a}\right)$$

$$\Leftrightarrow a(a+b)(a+c)+b(b+c)(b+a)+c(c+a)(c+b)\ge 2[ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)]$$

$$\Leftrightarrow a^3+b^3+c^3+3abc\ge ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)$$

$$\Leftrightarrow a(a-b)(a-c)+b(b-c)(b-a)+c(c-a)(c-b)\ge 0$$

Bất đẳng thức cuối cùng đúng vì nó là trường hợp đặc biệt của bất đẳng thức ***Schur***.

Vì vậy $T\ge S\ge 3\Rightarrow\frac{a(2a+3b+3c)}{4a^2+3(b+c)^2}+\frac{b(2b+3c+3a)}{4b^2+3(c+a)^2}+\frac{c(2c+3a+3b)}{4c^2+3(a+b)^2}\le\frac{3}{2}$

Bài 8. Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng: $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\le\frac{3}{2}\cdot\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}$ (1)

Chứng minh

$$(ab+bc+ca)\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)=abc\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)+a^2+b^2+c^2\quad(2)$$

Nhưng $abc\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)\le abc\left[\frac{1}{4}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\right]$

$$=\frac{abc}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\quad(3)$$

Từ (2) và (3) $\Rightarrow$ (1) đúng, nghĩa là $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\le\frac{3}{2}\cdot\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}$

Bài 9. Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng:

$$\left(\frac{a}{b+c}\right)^2+\left(\frac{b}{c+a}\right)^2+\left(\frac{c}{a+b}\right)^2\ge\frac{3}{4}\cdot\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}\quad(1)$$

Chứng minh

Chứng minh 1: • ***Bổ đề:*** $(ab+bc+ca)\left[\frac{1}{(a+b)^2}+\frac{1}{(b+c)^2}+\frac{1}{(c+a)^2}\right]\geq\frac{9}{4}$

• ***Áp dụng:*** Không mất tính tổng quát, giả sử $a\geq b\geq c\Rightarrow\frac{1}{b+c}\geq\frac{1}{c+a}\geq\frac{1}{a+b}$

Sử dụng bất đẳng thức ***Chebyshev*** ta có:

$$\left(\frac{a}{b+c}\right)^2+\left(\frac{b}{c+a}\right)^2+\left(\frac{c}{a+b}\right)^2\geq\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)\left[\frac{1}{(b+c)^2}+\frac{1}{(c+a)^2}+\frac{1}{(a+b)^2}\right]$$

$$\geq\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)\frac{9}{4(ab+bc+ca)}=\frac{3}{4}\cdot\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}$$

Chứng minh 2: Sử dụng bất đẳng thức ***Cauchy – Schwarz*** ta có:

$$\left(\frac{a}{b+c}\right)^2+\left(\frac{b}{c+a}\right)^2+\left(\frac{c}{a+b}\right)^2=\frac{a^4}{a^2(b+c)^2}+\frac{b^4}{b^2(c+a)^2}+\frac{c^4}{c^2(a+b)^2}$$

$$\geq\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{a^2(b+c)^2+b^2(c+a)^2+c^2(a+b)^2}=\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+2abc(a+b+c)}$$

Ta sẽ chứng minh $\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+2abc(a+b+c)}\geq\frac{3}{4}\cdot\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}$

$\Leftrightarrow 2(a^2+b^2+c^2)(ab+bc+ca)\geq3(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+3abc(a+b+c)$

$\Leftrightarrow 2\left[ab(a^2+b^2)+bc(b^2+c^2)+ca(c^2+a^2)\right]\geq3(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+abc(a+b+c)$ (2)

Ta có: $2\left[ab(a^2+b^2)+bc(b^2+c^2)+ca(c^2+a^2)\right]\geq4(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$ (3)

Nhưng $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2-abc(a+b+c)=\frac{1}{2}\left[(ab-bc)^2+(bc-ca)^2+(ca-ab)^2\right]\geq0$

$\Rightarrow a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\geq abc(a+b+c)$ (4)

Từ (3), (4) $\Rightarrow$ (2) đúng. Vì vậy $\left(\frac{a}{b+c}\right)^2+\left(\frac{b}{c+a}\right)^2+\left(\frac{c}{a+b}\right)^2\geq\frac{3}{4}\cdot\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}$

Bài 10. Cho $a, b, c>0$ thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{3}<(ab+bc+ca)\left(\frac{1+a^2}{a+b}+\frac{1+b^2}{b+c}+\frac{1+c^2}{c+a}\right)\leq\frac{5}{3}\qquad(1)$$

Chứng minh

Đặt $T=ab+bc+ca$; $P=abc$. Ta có:

$$\frac{1+a^2}{a+b}+\frac{1+b^2}{b+c}+\frac{1+c^2}{c+a}=2+\frac{1+a^2}{a+b}-(a+c)+\frac{1+b^2}{b+c}-(b+a)+\frac{1+c^2}{c+a}-(c+b)$$

$$= 2 + \frac{1-ab-bc-ca}{a+b} + \frac{1-ab-bc-ca}{b+c} + \frac{1-ab-bc-ca}{c+a}$$

$$= 2 + (1-T)\left(\frac{1}{1-a} + \frac{1}{1-b} + \frac{1}{1-c}\right) = 2 + \frac{(1-T)(1+T)}{(1-a)(1-b)(1-c)} = 2 + \frac{1-T^2}{T-abc}$$

Ta sẽ chứng minh: $1 \le 2T + \frac{T(1-T^2)}{T-abc}$ (2) and $2T + \frac{T(1-T^2)}{T-abc} \le \frac{5}{3}$ (3)

Ta có: $0 < T = ab + bc + ca \le \frac{1}{3}(a+b+c)^2 = \frac{1}{3}$

(2) $\Leftrightarrow T^2(2-T) + abc(1-2T) \ge 0$ đúng bởi vì $0 < T \le \frac{1}{3}$

(3) $\Leftrightarrow abc(5-6T) \le T(2-6T+3T^2)$. Sử dụng bất đẳng thức ***AM – GM*** ta có:

$T = ab + bc + ca \ge 3\sqrt[3]{ab.bc.ca} = \frac{3abc}{\sqrt[3]{abc}} \ge \frac{9abc}{a+b+c} = 9abc$

$\Rightarrow T(2-6T+3T^2) \ge 9abc(2-6T+3T^2)$. Ta sẽ chứng minh $9abc(2-6T+3T^2) \ge abc(5-6T)$

$\Leftrightarrow 9(2-6T+3T^2) \ge 5-6T \Leftrightarrow (1-3T)(13-9T) \ge 0$ đúng bởi vì $0 < T \le \frac{1}{3}$

Vì vậy (2) và (3) được chứng minh. Kéo theo (1) đúng.

Bài 11. Cho $x, y, z > 0$ thỏa mãn $xy + yz + zx + xyz = 4$.

Chứng minh rằng: $3\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{z}}\right)^2 \ge (x+2)(y+2)(z+2)$ (1)

Chứng minh

Đặt $\sqrt{yz} = 2\cos A; \sqrt{zx} = 2\cos B; \sqrt{xy} = 2\cos C$ trong đó A, B, C là các góc nhọn. Ta có: $xy + yz + zx + xyz = 4 \Rightarrow \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2\cos A\cos B\cos C = 1$. Suy ra A, B, C là ba góc của một tam giác, nghĩa là $A + B + C = \pi$. Vì thế

- $3\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{z}}\right)^2 = 3\left(\frac{\sqrt{yz} + \sqrt{zx} + \sqrt{xy}}{\sqrt{xyz}}\right)^2 = \frac{3(\cos A + \cos B + \cos C)^2}{2\cos A\cos B\cos C}$

- $(x+2)(y+2)(z+2) = \left(\frac{\sqrt{xy}\sqrt{xz}}{\sqrt{yz}} + 2\right)\left(\frac{\sqrt{yz}\sqrt{yx}}{\sqrt{zx}} + 2\right)\left(\frac{\sqrt{zx}\sqrt{zy}}{\sqrt{xy}} + 2\right)$

$$= \left(\frac{2\cos B\cos C}{\cos A} + 2\right)\left(\frac{2\cos C\cos A}{\cos B} + 2\right)\left(\frac{2\cos A\cos B}{\cos C} + 2\right)$$

$$= \left[\frac{\cos(B-C) + \cos(B+C)}{\cos A} + 2\right]\left[\frac{\cos(C-A) + \cos(C+A)}{\cos B} + 2\right]\left[\frac{\cos(A-B) + \cos(A+B)}{\cos C} + 2\right]$$

$$= \left[\frac{\cos(B-C) - \cos(B+C)}{\cos A}\right]\left[\frac{\cos(C-A) - \cos(C+A)}{\cos B}\right]\left[\frac{\cos(A-B) - \cos(A+B)}{\cos C}\right]$$

$$=\frac{2\sin B\sin C}{\cos A}\cdot\frac{2\sin C\sin A}{\cos B}\cdot\frac{2\sin A\sin B}{\cos C}=\frac{8\sin^2 A\sin^2 B\sin^2 C}{\cos A\cos B\cos C}$$

$$(1)\Leftrightarrow\frac{3(\cos A+\cos B+\cos C)^2}{2\cos A\cos B\cos C}\ge\frac{8\sin^2 A\sin^2 B\sin^2 C}{\cos A\cos B\cos C}$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{3}(\cos A+\cos B+\cos C)\ge 4\sin A\sin B\sin C$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{3}\left(1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right)\ge 4\sin A\sin B\sin C$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{\sin A\sin B\sin C}+\frac{1}{2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}\ge\frac{4}{\sqrt{3}}$$

Sử dụng bất đẳng thức ***AM – GM*** ta có: $\frac{1}{\sin A\sin B\sin C}+\frac{1}{2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}$

$$\ge\frac{1}{\left(\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{3}\right)^3}+\frac{1}{2\left(\frac{\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}}{3}\right)^3}\ge\frac{8}{3\sqrt{3}}+\frac{4}{3\sqrt{3}}=\frac{4}{\sqrt{3}}$$

Bài 12. Cho $0\le a_1\le a_2\le\ldots\le a_n$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}\le\frac{1}{a_1a_n}\left[n(a_1+a_n)-(a_1+a_2+\ldots+a_n)\right]\quad(1)$$

Chứng minh

• ***Bổ đề:*** $\frac{xz}{y}+y\le x+z$ với $0<x\le y\le z$ (2)

• ***Chứng minh:*** $\frac{xz}{y}+y\le x+z\Leftrightarrow\frac{x}{y}\cdot\frac{z}{y}+1\le\frac{x}{y}+\frac{z}{y}$. Đặt $a=\frac{x}{y};b=\frac{z}{y}\Rightarrow 0<a\le 1\le b$.

Ta có: (2) $\Leftrightarrow ab+1\le a+b\Leftrightarrow 0\le(a-1)(1-b)$ (đúng)

• ***Áp dụng:*** với $n=3$:

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}\le\frac{1}{a_1a_3}\left[3(a_1+a_3)-(a_1+a_2+a_3)\right]\Leftrightarrow\frac{a_1a_3}{a_2}+a_2\le a_1+a_3$$

Giả sử bất đẳng thức đúng với $n=m-1\ge 3$, ta sẽ chứng minh rằng bất đẳng thức cũng đúng với $n=m$. Sử dụng bất đẳng thức với $m-1$ số $0<a_1\le a_3\le a_4\le\ldots\le a_m$,
ta có:

$$\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_2}\le\frac{1}{a_1a_m}\left[(m-1)(a_1+a_m)-\left(\sum_{k=1}^{m}a_k-a_2\right)\right].$$

$$\Rightarrow\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{a_k}\le\frac{1}{a_1a_m}\left[(m-1)(a_1+a_m)-\sum_{k=1}^{m}a_k+\frac{a_1a_m}{a_2}+a_2\right]\le\frac{1}{a_1a_m}\left[m(a_1+a_m)-\sum_{k=1}^{m}a_k\right]$$

Bài 13. Cho $x, y, z > 0$ thỏa mãn $xy + yz + zx = \sqrt{xyz}$. Chứng minh rằng:

$$x + y + z + \left(\text{Max}\{x, y, z\} - \text{Min}\{x, y, z\}\right)^2 \le \frac{1}{3} \quad (1)$$

Chứng minh

• ***Chứng minh 1:*** Giả sử $x \ge y \ge z > 0$. Đặt $a = \sqrt{\frac{yz}{x}}; b = \sqrt{\frac{zx}{y}}; c = \sqrt{\frac{xy}{z}} \Rightarrow a + b + c = 1$

$(1) \Leftrightarrow ab + bc + ca + (bc - ab)^2 \le \frac{1}{3}$ (2). Đặt $p = a + c \le 1$; $q = ac \Rightarrow 0 < q \le \frac{1}{4}p^2$.

Thì (2) $\Leftrightarrow 3p(1-p) + 3q + 3(1-p)^2(p^2 - 4q) - 1 \le 0$, $\forall p \in [0, 1]$, $\forall q \in \left[0, \frac{1}{4}p^2\right] \Leftrightarrow$

$3p^4 - 6p^3 + 3p - 12p^2q + 24pq - 9q - 1 \le 0$, $\forall p \in [0, 1]$, $\forall q \in \left[0, \frac{1}{4}p^2\right]$

$\Leftrightarrow f(q) = q(-12p^2 + 24p - 9) + 3p^4 - 6p^3 + 3p - 1 \le 0$, $\forall q \in \left[0, \frac{1}{4}p^2\right]$

Từ việc $f(q)$ là hàm tuyến tính, suy ra $\underset{0 \le q \le \frac{1}{4}p^2}{\text{Max}} f(q) \le \text{Max}\left\{f(0); f\left(\frac{1}{4}p^2\right)\right\}$

$f(0) = 3p^4 - 6p^3 + 3p - 1 = g(p) \Rightarrow g'(p) = 3(2p - 1)(2p^2 - 2p - 1)$, $\forall p \in [0, 1]$

Dẫn tới $g'(p) = 0$ tại $p = \frac{1}{2} \in (0, 1)$. Lập bảng biến thiên $\Rightarrow g(p) \le g\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{16}$

$f\left(\frac{1}{4}p^2\right) = -\frac{9}{4}p^2 + 3p - 1 = -\left(\frac{3}{2}p - 1\right)^2 \le 0$. Thật vậy, $f(q) \le 0$ $\forall q \in \left[0, \frac{1}{4}p^2\right] \Rightarrow$ (đpcm)

• ***Chứng minh 2:*** Đặt $a = \sqrt{\frac{yz}{x}}; b = \sqrt{\frac{zx}{y}}; c = \sqrt{\frac{xy}{z}} \Rightarrow a + b + c = 1$

$$\frac{1}{3} - ab - bc - ca = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) = \frac{1}{3}(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc)$$

$$= \frac{1}{3}(a^3 + b^3 + c^3 + 3abc - 6abc) \ge \frac{1}{3}\left[a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(a-b)^2\right] \text{ (Schur)}$$

Mặt khác, sử dụng bất đẳng thức ***Cauchy – Schwarz*** ta có:

$$a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(a-b)^2 = (a+b+c)\sum_{cyc} a(b-c)^2 \ge (|ab-bc| + |bc-ca| + |ca-ab|)^2$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $ab \ge bc \ge ca$. Thì, dễ dàng có đẳng thức:

$$|ab - bc| + |bc - ca| + |ca - ab| = 2\left(\text{Max}\{ab, bc, ca\} - \text{Min}\{ab, bc, ca\}\right)$$

$$\Rightarrow a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(a-b)^2 \ge 4\left(\text{Max}\{ab, bc, ca\} - \text{Min}\{ab, bc, ca\}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} - ab - bc - ca \ge \frac{4}{3}\left(\text{Max}\{ab, bc, ca\} - \text{Min}\{ab, bc, ca\}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} \ge x + y + z + \frac{4}{3}\left(\text{Max}\{x, y, z\} - \text{Min}\{x, y, z\}\right)^2$$

Bài 14. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$m_am_b + m_bm_c + m_cm_a - l_al_b - l_bl_c - l_cl_a \ge \frac{1}{4}\left(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca\right)$$

Chứng minh

Gọi S là diện tích của tam giác có độ dài ba cạnh là a, b, c. Dễ dàng chứng minh rằng m_a, m_b, m_c là độ dài ba cạnh của một tam giác với diện tích $S' = \frac{3}{4}S$. Sử dụng bất đẳng thức ***Finsler – Khadivinger*** ta có:

$$m_am_b + m_bm_c + m_cm_a \ge \frac{1}{2}\left(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2\right) + 2\sqrt{3}S' = \frac{3}{8}\left(a^2 + b^2 + c^2\right) + \frac{3\sqrt{3}}{2}S$$

Ta sẽ chứng minh: $\frac{1}{2}p^2 + \frac{3\sqrt{3}}{2}S \ge l_al_b + l_bl_c + l_cl_a$. Ta có: $l_a = \frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}$

$\Rightarrow l_al_b = \frac{4abc^2}{(a+c)(b+c)}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}$. Hơn nữa, luôn tồn tại tam giác XYZ thỏa mãn

$$\sin X = \sqrt{\frac{a(a+b+c)}{(a+b)(a+c)}};\sin Y = \sqrt{\frac{b(a+b+c)}{(b+c)(b+a)}};\sin Z = \sqrt{\frac{c(a+b+c)}{(c+a)(c+b)}}$$

Sử dụng bất đẳng thức $4\left(xy\sin^2 Z + yz\sin^2 X + zx\sin^2 Y\right) \le (x+y+z)^2$, ta có:

$$l_al_b + l_bl_c + l_cl_a \le \frac{abc}{a+b+c}\left(\cos^2\frac{A}{2} + \cos^2\frac{B}{2} + \cos^2\frac{C}{2}\right) \text{ khi } x = \cos\frac{A}{2}; y = \cos\frac{B}{2}; z = \cos\frac{C}{2}$$

$$\Rightarrow 1 + 3\sqrt{3}\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} \ge \left(\frac{1}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}} + \frac{1}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}} + \frac{1}{\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}}\right)^2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

Từ $S = p^2\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} \Rightarrow abc = 4SR = \dfrac{p^3\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}$

Đặt $A' = \frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}; B' = \frac{\pi}{2} - \frac{B}{2}; C' = \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2} \Rightarrow A'B'C'$ là tam giác nhọn..Ta có thể chứng minh

$$3\sqrt{3} + \tan A' + \tan B' + \tan C' \ge 2\left(\cot\frac{A'}{2} + \cot\frac{B'}{2} + \cot\frac{C'}{2}\right).$$

Sử dụng bất đẳng thức ***Tiberiu Popoviciu***: Nếu f là hàm lồi trên (a, b), nghĩa là

$\frac{1}{2}\left[f(x) + f(y)\right] \ge f\left(\frac{x+y}{2}\right)$, $\forall x, y \in (a, b)$, thì,

$$f(x) + f(y) + f(z) + 3f\left(\frac{x+y+z}{3}\right) \ge 2\left[f\left(\frac{x+y}{2}\right) + f\left(\frac{y+z}{2}\right) + f\left(\frac{z+x}{2}\right)\right], \forall x, y, z \in (a, b)$$

Bài 15. Cho $a, b, c, d > 0$ và $abcd = 1$. Chứng minh rằng:

$$(a+b+c+d)\left(a^3 + b^3 + c^3 + d^3\right) + 20 \ge (ab + bc + cd + da + ac + bd)^2 \quad (1)$$

Chứng minh

• ***Bổ đề:*** $a^4+b^4+c^4+d^4+2abcd \ge a^2b^2+b^2c^2+c^2d^2+d^2a^2+a^2c^2+b^2d^2$ (2)

• ***Chứng minh:*** Không mất tính tổng quát, giả sử $a \ge b \ge c \ge d$, thì

$(2) \Leftrightarrow a^4+b^4+c^4+d^4 \ge (a^2+b^2)(c^2+d^2)+(ab-cd)^2$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(a^2+b^2)^2+\frac{1}{2}(a^2-b^2)^2+\frac{1}{2}(c^2+d^2)^2+\frac{1}{2}(c^2-d^2)^2 \ge (a^2+b^2)(c^2+d^2)+(ab-cd)^2$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(a^2-b^2)^2+\frac{1}{2}(c^2-d^2)^2+\frac{1}{2}\left[(a^2+b^2)-(c^2+d^2)\right]^2 \ge (ab-cd)^2$ (3)

Từ $a \ge b \ge c \ge d$ thì $a^2+b^2-c^2-d^2 \ge 2ab-c^2-d^2 \ge 0$. Kéo theo

$\text{VT}(3) \ge \frac{1}{2}(c^2-d^2)^2+\frac{1}{2}(a^2+b^2-c^2-d^2)^2 \ge \frac{1}{2}(c^2-d^2)^2+\frac{1}{2}(2ab-c^2-d^2)^2$

$\ge \frac{1}{2}(c-d)^4+\frac{1}{2}(2ab-c^2-d^2)^2=\frac{1}{4}(1+1)\left[(c-d)^4+(2ab-c^2-d^2)^2\right]$

$\ge \frac{1}{4}\left[(c-d)^2+(2ab-c^2-d^2)\right]^2=\frac{1}{4}(2ab-2cd)^2=(ab-cd)^2=\text{VP}(3)$

• ***Áp dụng:*** sử dụng bất đẳng thức ***Schur*** ta có:

$$a(a-b)(a-c)+b(b-c)(b-a)+c(c-a)(c-b) \ge 0$$

$\Leftrightarrow T(a,b,c)=a^3+b^3+c^3+3abc-ab(a+b)-bc(b+c)-ca(c+a) \ge 0$

$VT(1)-VP(1)=aT(b,c,d)+a^4+b^4+c^4+d^4+2abcd-a^2b^2-b^2c^2-c^2d^2-d^2a^2-a^2c^2-b^2d^2 \ge 0$

Bài 16. Cho $x \ge y \ge z > 0$ và $y^2 \ge xz$. Chứng minh rằng:

$$\frac{y^2z}{x}+\frac{z^2x}{y}+\frac{x^2y}{z} \ge 2(x^2+y^2+z^2)-(xy+yz+zx) \quad (1)$$

Chứng minh

$(1) \Leftrightarrow \frac{(z-x)(y-x)^2}{x}+\frac{(x-y)(y-z)^2}{y}+\frac{(y-z)(x-z)^2}{z} \ge 0$ (2)

Đặt $A=\frac{(y-z)(x-z)}{z}-\frac{(x-y)^2}{x}$; $B=\frac{(y-z)^2}{y}-\frac{(x-y)(x-z)}{x}$, thì

$xzA+xyB=x(y-z)(x-z)-z(x-y)^2+x(y-z)^2-y(x-y)(x-z)=2(x-z)(y^2-xz) \ge 0$

$\Rightarrow A \ge 0$ hoặc $B \ge 0$, nếu $A \ge 0$ thì $(2) \Leftrightarrow (x-z)A+\frac{(x-y)(y-z)^2}{y} \ge 0 \Rightarrow$ (đpcm). Nếu

$B \ge 0$ thì $(2) \Leftrightarrow (x-y)B+\frac{(y-z)(x-z)^2}{z} \ge 0 \Rightarrow$ (đpcm)

Bài 17. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$\left|\frac{a^2-b^2}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^2-c^2}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^2-a^2}{c^2+ca+a^2}\right|<\frac{1}{3} \quad (1)$$

Chứng minh

$(1) \Leftrightarrow 3|(a+b+c)(ab+bc+ca)(a-b)(b-c)(c-a)|<(a^2+ab+b^2)(b^2+bc+c^2)(c^2+ca+a^2)$

Bất đẳng thức trên có thể chứng minh bằng cách chứng minh lần lượt các bất đẳng thức dưới đây:

- $|(a+b+c)(ab+bc+ca)|\le\frac{9}{8}(a+b)(b+c)(c+a)$
- $8|(a-b)(b-c)(c-a)|<8abc\le(a+b)(b+c)(c+a)$
- $\frac{27}{64}(a+b)(b+c)(c+a)\le(a^2+ab+b^2)(b^2+bc+c^2)(c^2+ca+a^2)$

Bài 18. Cho $a, b, c>0$ và $a+b+c=6$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{1+a}+\sqrt{1+b}+\sqrt{1+c}\ge\sqrt{15+ab+bc+ca} \quad (1)$$

Chứng minh

- ***Bổ đề:*** $(uv+vw+wu)\left[\frac{1}{(u+v)^2}+\frac{1}{(v+w)^2}+\frac{1}{(w+u)^2}\right]\ge\frac{9}{4}, \forall u, v, w>0$

- ***Áp dụng:*** Đặt $1+a=9x$; $1+b=9y$; $1+c=9z$; $x, y, z>\frac{1}{9}$ và $x+y+z=1$

$(1)\Leftrightarrow 3\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)\ge9\sqrt{xy+yz+zx}\Leftrightarrow\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\ge3\sqrt{xy+yz+zx} \quad (2)$

Đặt $x=\frac{1}{m^2}$; $y=\frac{1}{n^2}$; $z=\frac{1}{p^2}$, trong đó $m, n, p>0\Rightarrow\frac{1}{m^2}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{p^2}=1$.

Thì ta có $m=\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{3}{\sqrt{1+a}}$; $n=\frac{1}{\sqrt{y}}=\frac{3}{\sqrt{1+b}}$; $p=\frac{1}{\sqrt{z}}=\frac{3}{\sqrt{1+c}}$.

Do a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác, m, n, p cũng là độ dài ba cạnh của một tam giác. Sử dụng bất đẳng thức ***Cauchy − Schwarz*** ta có:

$$\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{y}}\ge\frac{4}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\ge\frac{4}{\sqrt{(1+1)(x+y)}}=\frac{4}{\sqrt{2(1-z)}}\ge\frac{1}{\sqrt{z}}, \forall z>\frac{1}{9}$$

Sử dụng bổ đề ta có: $(uv+vw+wu)\left[\frac{1}{(u+v)^2}+\frac{1}{(v+w)^2}+\frac{1}{(w+u)^2}\right]\ge\frac{9}{4} \quad (*)$

Đặt $m=u+v$; $n=v+w$; $p=w+u\Rightarrow u=\frac{p+m-n}{2}$; $v=\frac{m+n-p}{2}$; $w=\frac{n+p-m}{2}$

Thì $(*) \Leftrightarrow \left(2mn+2np+2pm-m^2-n^2-p^2\right)\left(\frac{1}{m^2}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{p^2}\right)\geq 9$

Từ $\frac{1}{m^2}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{p^2}=1 \Rightarrow 2mn+2np+2pm\geq 9+m^2+n^2+p^2\geq 6\sqrt{m^2+n^2+p^2}$ (3)

Thay $m=\frac{1}{\sqrt{x}};n=\frac{1}{\sqrt{y}};p=\frac{1}{\sqrt{z}}$ vào (3), ta có $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\geq 3\sqrt{xy+yz+zx}$

Vì vậy (2) đúng, suy ra $\sqrt{1+a}+\sqrt{1+b}+\sqrt{1+c}\geq\sqrt{15+ab+bc+ca}$

Bài 19. [Polish MO – 1992] Cho các số thực a, b, c. Chứng minh rằng:

$$(b+c-a)^2(c+a-b)^2(a+b-c)^2\geq\left(b^2+c^2-a^2\right)\left(c^2+a^2-b^2\right)\left(a^2+b^2-c^2\right) \quad (1)$$

Chứng minh

• Nếu $\left(b^2+c^2-a^2\right)\left(c^2+a^2-b^2\right)\left(a^2+b^2-c^2\right)\leq 0$ thì (1) là đúng.

• Chứng minh $\left(b^2+c^2-a^2\right)\left(c^2+a^2-b^2\right)\left(a^2+b^2-c^2\right)>0$

Nếu có hai nhân tử âm, ví dụ $\left(b^2+c^2-a^2\right)<0;\left(c^2+a^2-b^2\right)<0$ thì

$2c^2=\left(b^2+c^2-a^2\right)+\left(c^2+a^2-b^2\right)<0 \Rightarrow$ mâu thuẫn $\Rightarrow$

$\left(b^2+c^2-a^2\right)>0;\left(c^2+a^2-b^2\right)>0;\left(a^2+b^2-c^2\right)>0$ thì

$$\begin{cases}(b+c-a)^2(c+a-b)^2-\left(b^2+c^2-a^2\right)\left(c^2+a^2-b^2\right)=2(a-b)^2\left(a^2+b^2-c^2\right)\geq 0\\(c+a-b)^2(a+b-c)^2-\left(c^2+a^2-b^2\right)\left(a^2+b^2-c^2\right)=2(b-c)^2\left(b^2+c^2-a^2\right)\geq 0\\(a+b-c)^2(b+c-a)^2-\left(a^2+b^2-c^2\right)\left(b^2+c^2-a^2\right)=2(c-a)^2\left(c^2+a^2-b^2\right)\geq 0\end{cases}$$

$$\Rightarrow (b+c-a)^4(c+a-b)^4(a+b-c)^4\geq\left(b^2+c^2-a^2\right)^2\left(c^2+a^2-b^2\right)^2\left(a^2+b^2-c^2\right)^2$$

$$\Rightarrow (b+c-a)^2(c+a-b)^2(a+b-c)^2\geq\left(b^2+c^2-a^2\right)\left(c^2+a^2-b^2\right)\left(a^2+b^2-c^2\right)$$

Bài 20. [CRUX 854] Cho $x, y, z>0$. Đặt $A=\frac{yz}{(y+z)^2}+\frac{zx}{(z+x)^2}+\frac{xy}{(x+y)^2}$

$B=\frac{yz}{(y+x)(z+x)}+\frac{zx}{(z+y)(x+y)}+\frac{xy}{(x+z)(y+z)}$.

Chứng minh rằng: **1.** $4A+8B\leq 9$ **2.** $A+3B\geq 3$

Chứng minh

1. • ***Bổ đề:*** $\frac{x-y}{x+y}+\frac{y-z}{y+z}+\frac{z-x}{z+x}=\frac{-(x-y)(y-z)(z-x)}{(x+y)(y+z)(z+x)}$

• ***Chứng minh:*** $\frac{x-y}{x+y}+\frac{y-z}{y+z}+\frac{z-x}{z+x}=\left(\frac{x-y}{x+y}-\frac{x-y}{z+x}\right)+\left(\frac{y-z}{y+z}-\frac{y-z}{z+x}\right)$

$$=\frac{(x-y)(z-y)}{(x+y)(z+x)}+\frac{(y-z)(x-y)}{(y+z)(z+x)}=\frac{-(x-y)(y-z)(z-x)}{(x+y)(y+z)(z+x)}$$

• ***Áp dụng:*** . (1) $\Leftrightarrow 8\left(B-\frac{3}{4}\right)\le 4\left(\frac{3}{4}-A\right)\Leftrightarrow 2\left(B-\frac{3}{4}\right)\le\frac{3}{4}-A$. Ta có:

$$\frac{3}{4}-A=\left[\frac{1}{4}-\frac{yz}{(y+z)^2}\right]+\left[\frac{1}{4}-\frac{zx}{(z+x)^2}\right]+\left[\frac{1}{4}-\frac{xy}{(x+y)^2}\right]=\frac{(y-z)^2}{4(y+z)^2}+\frac{(z-x)^2}{4(z+x)^2}+\frac{(x-y)^2}{4(x+y)^2}$$

$$B-\frac{3}{4}=\frac{yz}{(y+x)(z+x)}+\frac{zx}{(z+y)(x+y)}+\frac{xy}{(x+z)(y+z)}-\frac{3}{4}$$

$$=\frac{yz(y+z)+zx(z+x)+xy(x+y)}{(x+y)(y+z)(z+x)}-\frac{3}{4}$$

$$=\frac{4\left[yz(y+z)+zx(z+x)+xy(x+y)\right]-3(x+y)(y+x)(z+x)}{4(x+y)(y+z)(z+x)}$$

$$=\frac{4\left[yz(y+z)+zx(z+x)+xy(x+y)-6xyz\right]-3\left[(x+y)(y+x)(z+x)-8xyz\right]}{4(x+y)(y+z)(z+x)}$$

$$=\frac{x(y-z)^2+y(z-x)^2+z(x-y)^2}{4(x+y)(y+x)(z+x)}$$

Nên (1) $\Leftrightarrow\ \dfrac{2\left[x(y-z)^2+y(z-x)^2+z(x-y)^2\right]}{(x+y)(y+x)(z+x)}\le\dfrac{(y-z)^2}{(y+z)^2}+\dfrac{(z-x)^2}{(z+x)^2}+\dfrac{(x-y)^2}{(x+y)^2}$

$$\Leftrightarrow\sum_{cyc}(y-z)^2\left[\frac{(x+y)(z+x)}{y+z}-2x\right]\ge 0\Leftrightarrow\sum_{cyc}(y-z)^2\frac{(x-y)(x-z)}{y+z}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow -(x-y)(y-z)(z-x)\left(\frac{x-y}{x+y}+\frac{y-z}{y+z}+\frac{z-x}{z+x}\right)=\frac{\left[(x-y)(y-z)(z-x)\right]^2}{(x+y)(y+z)(z+x)}\ge 0$$

2. (2) $\Leftrightarrow 3\left(B-\frac{3}{4}\right)\ge\frac{3}{4}-A\Leftrightarrow\dfrac{\sum 3x(y-z)^2}{(x+y)(y+z)(z+x)}\ge\sum\dfrac{(y-z)^2}{(y+z)^2}$

$$\Leftrightarrow\sum(y-z)^2\left[3x-\frac{(x+y)(z+x)}{y+z}\right]\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \sum x(y-z)^2 \ge \sum (y-z)^2\left[\frac{(x+y)(z+x)}{y+z}-2x\right] \quad (3)$$

Sử dụng $\sum (y-z)^2\left[\frac{(x+y)(z+x)}{y+z}-2x\right]=\frac{(x-y)^2(y-z)^2(z-x)^2}{(x+y)(y+z)(z+x)}$, thì

$$(3) \Leftrightarrow \sum x(y-z)^2 \ge \frac{(x-y)^2(y-z)^2(z-x)^2}{(x+y)(y+z)(z+x)} \quad (4)$$

Không mất tính tổng quát giả sử $x\ge y\ge z>0$. Từ $(y-z)^2\le y^2\le (y+z)y$ và

$0\le (x-y)(x-z)\le (x+y)(x+z)$, (4) đúng nếu ta có thể chứng minh

$y(x-z)^2\ge (x-y)(x-z)y \Leftrightarrow y(x-z)(y-z)\ge 0$ đúng $\Rightarrow$ (đpcm)

Ghi chú: (1) và (2) có thể viết lại thành $0\le 2\left(B-\frac{3}{4}\right)\le \frac{3}{4}-A\le 3\left(B-\frac{3}{4}\right)$ (5)

Dễ thấy 2 là hệ số tốt nhất của bất đẳng thức trên. Bây giờ ta sẽ chứng minh rằng 3 là hệ số tốt nhất của bất đẳng thức vừa nêu.

Thật vậy, giả sử tồn tại $\alpha<1$ thỏa mãn $\frac{3}{4}-A\le (2+\alpha)\left(B-\frac{3}{4}\right)$ đúng $\forall x,y,z>0$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{3}{4}-A\right)-2\left(B-\frac{3}{4}\right)\le \alpha\left(B-\frac{3}{4}\right) \Leftrightarrow \alpha\sum x(y-z)^2 \ge \frac{(x-y)^2(y-z)^2(z-x)^2}{(x+y)(y+z)(z+x)} \quad (6)$$

Cho $z\to 0^+$ trong (6) ta có: $\alpha xy(x+y)\ge \frac{(x-y)^2x^2y^2}{(x+y)xy}=\frac{(x-y)^2xy}{x+y}$

$\Leftrightarrow \alpha(x+y)^2\ge (x-y)^2$ (7) $\forall x,y>0$.

Cho $x=1$ và $y\to 0^+$ trong (7) ta có $\alpha\ge 1$, điều này mâu thuẫn với giả sử $\alpha<1$. Vì vậy 3 là hệ số tốt nhất của bất đẳng thức $\frac{3}{4}-A\le 3\left(B-\frac{3}{4}\right)$.

Bài 21. Cho các số thực x, y thỏa mãn $xy>0$.

Chứng minh rằng: $\frac{2xy}{x+y}+\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}\ge \sqrt{xy}+\frac{x+y}{2}$ (1)

Chứng minh

Ta có: (1) $\Leftrightarrow \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{2}}-\sqrt{xy}\ge\dfrac{x+y}{2}-\dfrac{2xy}{x+y}\Leftrightarrow\dfrac{\dfrac{x^2+y^2}{2}-xy}{\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{2}}+\sqrt{xy}}\ge\dfrac{(x+y)^2-4xy}{2(x+y)}$

$$\Leftrightarrow\frac{(x-y)^2}{\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{2}}+\sqrt{xy}}\ge\frac{(x-y)^2}{x+y}\quad(2)$$

Nếu $x+y<0$ thì bất đẳng thức hiển nhiên. Bây giờ ta xét trường hợp $x+y>0$.

Do đó (2) $\Leftrightarrow x+y\ge\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{2}}+\sqrt{xy}\Leftrightarrow(x+y)^2\ge\left(\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{2}}+\sqrt{xy}\right)^2$

Sử dụng bất đẳng thức ***Cauchy – Schwarz*** ta có:

$$\left(\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}+\sqrt{xy}\right)^2\le(1^2+1^2)\left(\frac{x^2+y^2}{2}+xy\right)=x^2+y^2+2xy=(x+y)^2$$

Bài 22. Cho $a_1, a_2, \ldots, a_{11}\in\mathbb{R}$ thỏa mãn $1\le a_1<a_2<\ldots<a_{11}\le1000$. Chứng minh rằng tồn tại $i\in\{1,2,3,\ldots,10\}$ thỏa mãn $a_{i+1}-a_i<1+3\sqrt[3]{a_ia_{i+1}}$

Chứng minh

Sử dụng đẳng thức: $a^3+b^3+c^3-3abc=\dfrac{1}{2}(a+b+c)\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]$

Ta có: $a^3+b^3+c^3<3abc\Leftrightarrow a, b, c$ là ba số đôi một phân biệt và $a+b+c<0$

Suy ra $a_{i+1}-a_i-1<3\sqrt[3]{a_ia_{i+1}}\Leftrightarrow\sqrt[3]{a_{i+1}}-\sqrt[3]{a_i}-\sqrt[3]{1}<0\Leftrightarrow\sqrt[3]{a_{i+1}}-\sqrt[3]{a_i}<1$

Từ $1\le a_1<a_2<a_3<\ldots<a_{11}\le1000\Rightarrow1\le\sqrt[3]{a_1}<\sqrt[3]{a_2}<\sqrt[3]{a_3}<\ldots<\sqrt[3]{a_{11}}\le10$

$\Rightarrow\left(\sqrt[3]{a_2}-\sqrt[3]{a_1}\right)+\left(\sqrt[3]{a_3}-\sqrt[3]{a_2}\right)+\ldots+\left(\sqrt[3]{a_{11}}-\sqrt[3]{a_{10}}\right)=\sqrt[3]{a_{11}}-\sqrt[3]{a_1}\le10-1=9$

$\Rightarrow\text{Min}\left\{\left(\sqrt[3]{a_2}-\sqrt[3]{a_1}\right),\left(\sqrt[3]{a_3}-\sqrt[3]{a_2}\right),\ldots,\left(\sqrt[3]{a_{11}}-\sqrt[3]{a_{10}}\right)\right\}\le\dfrac{9}{10}<1\Rightarrow$ (đpcm).

Bài 23. Cho $a, b, c, d\in\mathbb{R}$; $abcd\ne0$ thỏa mãn $a+b+c+d=0$.

Đặt $S_1=ab+bc+cd$; $S_2=ac+ad+bd$.

Tìm điều kiện để cặp số thực dương (α,β) thỏa mãn $S=\alpha S_1+\beta S_2\le0$.

Chứng minh

Đặt $\begin{cases}a+d=A\\b+c=B\end{cases}\Rightarrow A+B=0\Rightarrow B=-A$; $\begin{cases}d=A-a\\c=B-b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}d=A-a\\c=-A-b\end{cases}$

$S=\alpha S_1+\beta S_2=\alpha(ab+bc+cd)+\beta(ac+ad+bd)$

$S=\alpha\left[ab+b(-A-b)+(-A-b)(A-a)\right]+\beta\left[a(-A-b)+a(A-a)+b(A-a)\right]$

$S=\alpha\left(ab-bA-b^2-A^2-bA+aA+ab\right)+\beta\left(-aA-ab+aA-a^2+bA-ab\right)$

$S=2\alpha ab-2\alpha bA-\alpha b^2-\alpha A^2+\alpha aA+-2\beta ab-\beta a^2+\beta bA$

$S=f(A)=-\alpha A^2+(\alpha a+\beta b-2\alpha b)A+2\alpha ab-\alpha b^2-2\beta ab-\beta a^2$

Do $(-\alpha)<0$ suy ra $S=f(A)\le 0\Leftrightarrow \Delta_A\le 0$

$\Leftrightarrow (\alpha a+\beta b-2\alpha b)^2+4\alpha\left(2\alpha ab-\alpha b^2-2\beta ab-\beta a^2\right)\le 0$

$\Leftrightarrow \left(\alpha^2-4\alpha\beta\right)a^2+\left(4\alpha^2-6\alpha\beta\right)ab+\left(\beta^2-4\alpha\beta\right)b^2\le 0$

$\Leftrightarrow \alpha(\alpha-4\beta)a^2+2\alpha(2\alpha-3\beta)ab+\beta(\beta-4\alpha)b^2\le 0$ (1). Xét hai trường hợp:

• ***Trường hợp 1:*** $0<\alpha\le\beta$, chia hai vế của (1) cho $b^2\ne 0$ và đặt $t=\frac{a}{b}$, ta có:

$$g(t)=\alpha(\alpha-4\beta)t^2+2\alpha(2\alpha-3\beta)t+\beta(\beta-4\alpha)\le 0\ \ \forall t$$

Từ $\alpha(\alpha-4\beta)<0$ suy ra $g(t)\le 0\ \forall t\Leftrightarrow \Delta'_t\le 0\Leftrightarrow \alpha^2(2\alpha-3\beta)^2-\alpha\beta(\alpha-4\beta)(\beta-4\alpha)\le 0$

$\Leftrightarrow \alpha^3-2\alpha^2\beta-2\alpha\beta^2+\beta^3\le 0\Leftrightarrow\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^3-2\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2-2\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)+1\le 0$. Let $x=\frac{\alpha}{\beta}\in(0,1]$

$\Leftrightarrow x^3-2x^2-2x+1\le 0\ \forall x\in(0,1]\Leftrightarrow (x+1)\left(x^2-3x+1\right)\le 0\ \ \forall x\in(0,1]$

$\Leftrightarrow x^2-3x+1\le 0\ \forall x\in(0,1]\Leftrightarrow\frac{3-\sqrt5}{2}\le x\le 1$

Vì vậy, với $0<\alpha\le\beta$ thì $S=\alpha S_1+\beta S_2\le 0\Leftrightarrow \frac{3-\sqrt5}{2}\le\frac{\alpha}{\beta}\le 1$ (2)

• ***Trường hợp 2:*** $0<\beta\le\alpha$, chia hai vế của (1) cho $a^2\ne 0$ và đặt $u=\frac{a}{b}$, ta có:

$$h(u)=\beta(\beta-4\alpha)u^2+2\alpha(2\alpha-3\beta)u+\alpha(\alpha-4\beta)\le 0\ \forall u$$

Do $\beta(\beta-4\alpha)<0$ suy ra $h(u)\le 0\ \forall u\Leftrightarrow\Delta'_u\le 0\Leftrightarrow \alpha^2(2\alpha-3\beta)^2-\alpha\beta(\alpha-4\beta)(\beta-4\alpha)\le 0$

$\Leftrightarrow \alpha^3-2\alpha^2\beta-2\alpha\beta^2+\beta^3\le 0\Leftrightarrow\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^3-2\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2-2\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)+1\le 0$. Đặt $y=\frac{\beta}{\alpha}\in(0,1]$

$\Leftrightarrow y^3-2y^2-2y+1\le 0\ \ \forall y\in(0,1]\ \ \Leftrightarrow\ \ (y+1)\left(y^2-3y+1\right)\le 0\ \ \forall y\in(0,1]$

$\Leftrightarrow y^2-3y+1\le 0\ \forall y\in(0,1]\Leftrightarrow\frac{3-\sqrt5}{2}\le y\le 1$

Vì vậy, với $0<\beta\le\alpha$ thì $S=\alpha S_1+\beta S_2\le 0\Leftrightarrow\frac{3-\sqrt5}{2}\le\frac{\beta}{\alpha}\le 1$ (3)

• ***Kết luận:*** từ (2) và (3) kéo theo: $\frac{3-\sqrt5}{2}\le\frac{\alpha}{\beta}\le 1\vee\frac{3-\sqrt5}{2}\le\frac{\beta}{\alpha}\le 1$

Bài 24. Chứng minh: $a^2+b^2+c^2+abc+4\ge 2(ab+bc+ca),\ \forall a,\ b,\ c>0$ (1)

Chứng minh

$(1) \Leftrightarrow T = (a-2)^2 + (b-2)^2 + (c-2)^2 + (a-2)(b-2)(c-2) \geq 0$

Trong ba biểu thức $(a-2)$; $(b-2)$; $(c-2)$, luôn tồn tại hai biểu thức cùng dấu, chẳng hạn $(a-2)(b-2) \geq 0$.

Ta có: $T \geq 2(a-2)(b-2) + (a-2)(b-2)(c-2) + (c-2)^2 = (a-2)(b-2)c + (c-2)^2 \geq 0$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = 2$.

Bài 25. Cho $f(a, b, c)$ là hàm số liên tục và đối xứng với a, b, c dương.

Chứng minh: Nếu $f(a,b,c) \geq f\left(\sqrt{ab}, \sqrt{ab}, c\right)$ thì $f(a,b,c) \geq f\left(\sqrt[3]{abc}, \sqrt[3]{abc}, \sqrt[3]{abc}\right)$

Chứng minh

Định nghĩa các dãy số $\{u_n\}, \{v_n\}, \{w_n\}$ như sau: $u_1 = \sqrt{ab}; v_1 = \sqrt{ab}; w_1 = c$;

$u_{n+1} = v_{n+1} = \sqrt{v_n w_n}$; $w_{n+1} = u_n$. Thì $f(a,b,c) \geq f(u_n, v_n, w_n) \geq f(u_{n+1}, v_{n+1}, w_{n+1})$ và $u_n v_n w_n$ $= abc$. Đặt $x_0 = \ln c; x_1 = \dfrac{\ln a + \ln b}{2}; x_{n+1} = \dfrac{x_n + x_{n-1}}{2}$. Thì $u_n = v_n = e^{x_n}; w_n = e^{x_{n-1}}$. Do $(x_{n+1} - x_n) = -\dfrac{1}{2}(x_n - x_{n-1})$, $\{x_n\}$ hội tụ..

Hơn nữa $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} v_n = \lim\limits_{n\to\infty} w_n = \sqrt[3]{abc}$. Vì vậy $f(a,b,c) \geq f\left(\sqrt[3]{abc}, \sqrt[3]{abc}, \sqrt[3]{abc}\right)$

Bài 26. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{(a^2b + b^2c + c^2a)(ab^2 + bc^2 + ca^2)} \geq abc + \sqrt[3]{(a^3 + abc)(b^3 + abc)(c^3 + abc)}$$

Chứng minh

Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$\sqrt{\left(\frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b}\right)\left(\frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{a}{b}\right)} \geq 1 + \sqrt[3]{\left(1 + \frac{a^2}{bc}\right)\left(1 + \frac{b^2}{ca}\right)\left(1 + \frac{c^2}{ab}\right)}$$

Đặt $x = \dfrac{a}{c}$, $y = \dfrac{b}{a}$; $z = \dfrac{c}{b}$ thì $x, y, z > 0$ và $xyz = 1$, ta có bất đẳng thức $\Leftrightarrow$

$$\sqrt{(x + y + z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)} \geq 1 + \sqrt[3]{\left(1 + \frac{x}{y}\right)\left(1 + \frac{y}{z}\right)\left(1 + \frac{z}{x}\right)} \quad (*)$$

Đặt $t = \sqrt[3]{\left(1 + \dfrac{x}{y}\right)\left(1 + \dfrac{y}{z}\right)\left(1 + \dfrac{z}{x}\right)} \Rightarrow (x + y + z)\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z}\right) = t^3 + 1$

Sử dụng bất đẳng thức ***Cauchy*** ta có: $t = \sqrt[3]{\left(1 + \dfrac{x}{y}\right)\left(1 + \dfrac{y}{z}\right)\left(1 + \dfrac{z}{x}\right)} \geq \sqrt[3]{2\sqrt{\dfrac{x}{y}} \cdot 2\sqrt{\dfrac{y}{z}} \cdot 2\sqrt{\dfrac{z}{x}}} = 2$

$(*) \Leftrightarrow \sqrt{t^3 + 1} \geq 1 + t \Leftrightarrow t^3 + 1 \geq (1 + t)^2 \Leftrightarrow t(t+1)(t-2) \geq 0$ đúng $\Rightarrow$ (đpcm)

Bài 27. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b^2 + c^2} + \frac{b}{c^2 + a^2} + \frac{c}{a^2 + b^2} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 3\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}\right)$$

Chứng minh

$$\text{VT} = (a^2+b^2+c^2)\left[\frac{1}{a(b^2+c^2)}+\frac{1}{b(c^2+a^2)}+\frac{1}{c(a^2+b^2)}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[(b^2+c^2)+(c^2+a^2)+(a^2+b^2)\right]\left[\frac{1}{a(b^2+c^2)}+\frac{1}{b(c^2+a^2)}+\frac{1}{c(a^2+b^2)}\right]$$

$$\geq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{c}}\right)^2=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+\frac{1}{\sqrt{ab}}+\frac{1}{\sqrt{bc}}+\frac{1}{\sqrt{ca}}$$

$$\geq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+\frac{2}{a+b}+\frac{2}{b+c}+\frac{2}{c+a}$$

$$\geq \frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{2}{a+b}+\frac{2}{b+c}+\frac{2}{c+a}=3\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)$$

Bài 28. Cho x, y, z thỏa mãn $0 < x < y \leq 1;\ 0 < x < z \leq 1;\ 3x + 2y + z \leq 4$.

Tìm giá trị lớn nhất của $T = 3x^2 + 2y^2 + z^2$

Chứng minh 1

Do $3x + 2y + z \leq 4 \Rightarrow 3x \leq 4 - 2y - z \Rightarrow 3x^2 \leq x(4 - 2y - z) = 4x - 2xy - zx$

$\Rightarrow T = 3x^2 + 2y^2 + z^2 \leq 4x - 2xy - zx + 2y^2 + z^2 = 4x + 2y(y - x) + z(z - x)$

$\leq 4x + 2(y - x) + (z - x) = x + 2y + z \leq \sqrt{\left(\frac{1}{3}+2+1\right)\left(3x^2+2y^2+z^2\right)} = \sqrt{\frac{10}{3}\cdot T}$

$\Rightarrow \sqrt{T} \leq \sqrt{\frac{10}{3}} \Rightarrow T \leq \frac{10}{3}$. Với $x=\frac{1}{3};\ y=z=1$ thì $\text{Max}\,T=\frac{10}{3}$

Chứng minh 2

Trường hợp 1.

Nếu $x<\frac{1}{3}$ thì $T=3x^2+2y^2+z^2<3\left(\frac{1}{3}\right)^2+2\cdot 1^2+1^2=\frac{10}{3} \Rightarrow \text{Max}\,T<\frac{10}{3}$.

Trường hợp 2. Xác định $x \geq \frac{1}{3}$ thì từ các điều kiện $0 < x < y \leq 1;\ 0 < x < z \leq 1$,

dẫn tới: $\begin{cases}(y-x)(1-y)\geq 0\\(z-x)(1-z)\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}xy+y-x-y^2\geq 0\\xz+z-x-z^2\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y^2\leq xy+y-x\\z^2\leq xz+z-x\end{cases}$

$\Rightarrow T = 3x^2 + 2y^2 + z^2 \leq 3x^2 + 2(xy + y - x) + xz + z - x = x(3x + 2y + z) + 2y + z - 3x$

$\leq 4x + (2y + z - 3x) = (3x + 2y + z) - 2x \leq 4 - 2x \leq 4-\frac{2}{3}=\frac{10}{3}$

Kết luận: với $x=\frac{1}{3}$, $y = z = 1$ thì $\text{Max}\ T = \frac{10}{3}$

Bài 29. Cho $a, b, c, x, y, z > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{ax}{y+z}+\frac{by}{z+x}+\frac{cz}{x+y}+\frac{1}{2}(a+b+c)\geq\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}$$

Chứng minh

$$\frac{ax}{y+z}+\frac{by}{z+x}+\frac{cz}{x+y}+(a+b+c)-\frac{1}{2}(a+b+c)$$

$$=\left(\frac{ax}{y+z}+a\right)+\left(\frac{by}{z+x}+b\right)+\left(\frac{cz}{x+y}+c\right)-\frac{1}{2}(a+b+c)$$

$$=a\cdot\frac{x+y+z}{y+z}+b\cdot\frac{x+y+z}{z+x}+c\cdot\frac{x+y+z}{x+y}-\frac{1}{2}(a+b+c)$$

$$=\frac{1}{2}\left[(y+z)+(z+x)+(x+y)\right]\left(\frac{a}{y+z}+\frac{b}{z+x}+\frac{c}{x+y}\right)-\frac{1}{2}(a+b+c)$$

$$\geq\frac{1}{2}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2-\frac{1}{2}(a+b+c)=\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}$$

Bài 30. Cho $a, b, c, x, y, z\in\mathbb{R}$: $a+b+c=2$; $ab+bc+ca\leq abc+1$. Chứng minh rằng:
$(\mathrm{ax}+\mathrm{by}+\mathrm{cz})^2\geq 4\left[(1-\mathrm{a})\mathrm{yz}+(1-\mathrm{b})\mathrm{zx}+(1-\mathrm{c})\mathrm{xy}\right]$

Chứng minh

Từ $a+b+c=2$ và $ab+bc+ca\leq abc+1$, suy ra $(a-1)(b-1)(c-1)\geq 0$.

Không mất tính tổng quát giả sử $a=\mathrm{Max}\{a,b,c\}$. Do đó $a\geq 1$; $b<1$; $c<1$; $b+c\leq 1$.

Đặt $u=\dfrac{ac+2b-2}{a}$; $v=\dfrac{ab+2c-2}{a}$. Ta sẽ chứng minh $b^2-u^2=c^2-v^2$

$$b^2-u^2=(b+u)(b-u)=\left(b+\frac{ac+2b-2}{a}\right)\left(b-\frac{ac+2b-2}{a}\right)$$

$$b^2-u^2=\frac{ab+ac+2b-a-b-c}{a}\cdot\frac{ab-ac-2b+a+b+c}{a}=\frac{4(a-1)(b-1)(c-1)}{a^2}\geq 0$$

$$c^2-v^2=(c+v)(c-v)=\left(c+\frac{ab+2c-2}{a}\right)\left(c-\frac{ab+2c-2}{a}\right)$$

$$c^2-v^2=\frac{ca+ab+2c-a-b-c}{a}\cdot\frac{ca-ab-2c+a+b+c}{a}=\frac{4(a-1)(b-1)(c-1)}{a^2}\geq 0$$

$$bc+2a-2-uv=bc+2a-2-\frac{(ac+2b-2)(ab+2c-2)}{a^2}$$

$$=\frac{a^2bc+2a^3-2a^2-a^2bc-2ab^2+2ab-2ac^2-4bc+4c+2ac+4b-4}{a^2}$$

$$=\frac{2\left(a^3-a^2-ab^2+ab-ac^2-2bc+2c+ac+2b-2\right)}{a^2}=\frac{4(a-1)(b-1)(c-1)}{a^2}$$

Suy ra $b^2-u^2=c^2-v^2=bc+2a-2-uv\geq 0$. Mặt khác ta có:

$$0\leq(ax+uy+vz)^2+\left(b^2-u^2\right)y^2+\left(c^2-v^2\right)z^2+2\left(b^2-u^2\right)yz$$

$$=a^2x^2+u^2y^2+v^2z^2+2(ac+2b-2)xy+2(ab+2c-2)xz+2uvyz+\left(b^2-u^2\right)y^2+$$

$$+\left(c^2-v^2\right)z^2+2(bc+2a-2-uv)yz$$

$= a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 + 2(ac + 2b - 2)xy + 2(ab + 2c - 2)xz + 2(bc + 2a - 2)yz$

Vậy $(ax + by + cz)^2 \ge 4\left[(1-a)yz + (1-b)zx + (1-c)xy\right]$

Bài 31. Cho $x, y, z > 0$. Chứng minh rằng:

$$x^2 + y^2 + z^2 + \sqrt{3xyz(x+y+z)} \ge 2(xy + yz + zx)$$

Chứng minh

Sử dụng bất đẳng thức ***Cauchy – Schwarz*** ta có

$$\sqrt{3xyz(x+y+z)} = \sqrt{(xyz + xyz + xyz)(x+y+z)} \ge x\sqrt{yz} + y\sqrt{zx} + z\sqrt{xy}$$

Sử dụng bất đẳng thức ***Schur*** ta có

$$x\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}-\sqrt{z}\right) + y\left(\sqrt{y}-\sqrt{z}\right)\left(\sqrt{y}-\sqrt{x}\right) + z\left(\sqrt{z}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{z}-\sqrt{y}\right) \ge 0$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 + x\sqrt{yz} + y\sqrt{zx} + z\sqrt{xy} \ge \sqrt{xy}(x+y) + \sqrt{yz}(y+z) + \sqrt{zx}(z+x)$$

$$\ge \sqrt{xy}\left(2\sqrt{xy}\right) + \sqrt{yz}\left(2\sqrt{yz}\right) + \sqrt{zx}\left(2\sqrt{zx}\right) = 2(xy + yz + zx)$$

Bài 32. Cho $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n > 0$.

Chứng minh rằng: $$\frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i + b_i}} \ge \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}} + \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{b_i}} \quad (1)$$

Chứng minh

Đặt $A_i = \frac{1}{a_i}; B_i = \frac{1}{b_i} \Rightarrow \frac{1}{\frac{1}{A_i} + \frac{1}{B_i}} = \frac{1}{\frac{A_i + B_i}{A_iB_i}} = \frac{A_iB_i}{A_i + B_i}$

Ta có (1) $\Leftrightarrow \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{\frac{1}{A_i} + \frac{1}{B_i}}} \ge \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n}A_i} + \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n}B_i} \Leftrightarrow \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{A_iB_i}{A_i + B_i}} \ge \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n}A_i} + \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n}B_i}$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n}A_i \cdot \sum_{i=1}^{n}B_i \ge \sum_{i=1}^{n}\frac{A_iB_i}{A_i + B_i}\left(\sum_{i=1}^{n}A_i + \sum_{i=1}^{n}B_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\frac{A_iB_i}{A_i + B_i}\cdot\sum_{i=1}^{n}(A_i + B_i) \quad (2)$$

$$\text{VT}(2) = \sum_{i=1}^{n}A_i \cdot \sum_{i=1}^{n}B_i = \sum_{1\le i,j\le n}(A_iB_j) = \sum_{i=1}^{n}(A_iB_i) + \sum_{1\le i<j\le n}(A_iB_j + A_jB_i)$$

$$\text{VP}(2) = \sum_{i=1}^{n}\frac{A_iB_i}{A_i + B_i}\cdot\sum_{i=1}^{n}(A_i + B_i) = \sum_{1\le i,j\le n}\left(\frac{A_iB_i}{A_i + B_i}(A_j + B_j)\right) = \sum_{1\le i,j\le n}\left(A_iB_i\frac{A_j + B_j}{A_i + B_i}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(A_iB_i\frac{A_i + B_i}{A_i + B_i}\right) + \sum_{1\le i<j\le n}\left(A_iB_i\frac{A_j + B_j}{A_i + B_i} + A_jB_j\frac{A_i + B_i}{A_j + B_j}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(A_iB_i) + \sum_{1\le i<j\le n}\left(A_iB_i\frac{A_j+B_j}{A_i+B_i} + A_jB_j\frac{A_i+B_i}{A_j+B_j}\right)$$

$$(2) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n}(A_iB_i) + \sum_{1\le i<j\le n}(A_iB_j + A_jB_i) \ge \sum_{i=1}^{n}(A_iB_i) + \sum_{1\le i<j\le n}\left(A_iB_i\frac{A_j+B_j}{A_i+B_i} + A_jB_j\frac{A_i+B_i}{A_j+B_j}\right)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{1\le i<j\le n}(A_iB_j + A_jB_i) \ge \sum_{1\le i<j\le n}\left(A_iB_i\frac{A_j+B_j}{A_i+B_i} + A_jB_j\frac{A_i+B_i}{A_j+B_j}\right)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{1\le i<j\le n}(A_iB_j + A_jB_i) - \sum_{1\le i<j\le n}\left(A_iB_i\frac{A_j+B_j}{A_i+B_i} + A_jB_j\frac{A_i+B_i}{A_j+B_j}\right) \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{1\le i<j\le n}\left[(A_iB_j + A_jB_i) - \left(A_iB_i\frac{A_j+B_j}{A_i+B_i} + A_jB_j\frac{A_i+B_i}{A_j+B_j}\right)\right] = \sum_{1\le i<j\le n}\frac{(A_iB_j - A_jB_i)^2}{(A_i+B_i)(A_j+B_j)} \ge 0$$

Bài 33. Cho $a, b, c > 0$ và $x, y, z \ge 0$. Chứng minh rằng:

$$(y+z)\frac{yc+zb}{a} + (z+x)\frac{za+xc}{b} + (x+y)\frac{xb+ya}{c} \ge$$

$$\ge (x+y)(x+z) + (y+z)(y+x) + (z+x)(z+y) \quad (1)$$

Chứng minh

Sử dụng bất đẳng thức ***AM – GM*** ta có:

$$VT(1) = \sum_{cyc}\left[\frac{b}{a}z(z+y) + \frac{a}{b}z(z+x)\right] \ge \sum_{cyc}2\sqrt{\left[\frac{b}{a}z(z+y)\right]\left[\frac{a}{b}z(z+x)\right]} = \sum_{cyc}2z\sqrt{(z+y)(z+x)}$$

Ta sẽ chứng minh $2\sum_{cyc}x\sqrt{(x+y)(x+z)} \ge \sum_{cyc}(x+y)(x+z)$ (2)

Đặt $u^2 = y+z$, $v^2 = x+z$, $w^2 = x+y$, thì (2)

$$\Leftrightarrow \sum_{sym}(v^2+w^2-u^2)vw \ge \sum_{sym}v^2w^2 \Leftrightarrow 2\sum_{sym}u^3v \ge \sum_{sym}(u^2v^2+u^2vw) = 2\sum_{cyc}(u^2v^2+u^2vw)$$

đúng theo bất đẳng thức ***Muirhead***. Vì vậy (2) đúng $\Rightarrow$ (1) đúng.

Bài 34. Cho a, b, c là ba số thực phân biệt. Chứng minh bất đẳng thức

$$\left|\frac{a}{b-c}\right| + \left|\frac{b}{c-a}\right| + \left|\frac{c}{a-b}\right| \ge 2 \quad (1)$$

Chứng minh

Đầu tiên chú ý rằng: $A = \frac{a}{b-c}\cdot\frac{b}{c-a} + \frac{b}{c-a}\cdot\frac{c}{a-b} + \frac{c}{a-b}\cdot\frac{a}{b-c} = -1$

Do đó: $\left(\frac{a}{b-c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c-a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a-b}\right)^2 \ge -2A = 2$ (2)

và $\left|\frac{a}{b-c}\cdot\frac{b}{c-a}\right|+\left|\frac{b}{c-a}\cdot\frac{c}{a-b}\right|+\left|\frac{c}{a-b}\cdot\frac{a}{b-c}\right|\geq|A|=1$ (3)

Từ (2) và (3) $\Rightarrow\left(\left|\frac{a}{b-c}\right|+\left|\frac{b}{c-a}\right|+\left|\frac{c}{a-b}\right|\right)^2\geq 4\Rightarrow\left|\frac{a}{b-c}\right|+\left|\frac{b}{c-a}\right|+\left|\frac{c}{a-b}\right|\geq 2$

Bài 35. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$\left|\frac{a}{a-b}+\frac{b}{b-c}+\frac{c}{c-a}\right|>\sqrt{6}-1 \qquad (1)$$

Chứng minh

Đầu tiên đặt $A=\frac{a}{a-b}+\frac{b}{b-c}+\frac{c}{c-a}$; $B=\frac{b}{b-a}+\frac{c}{c-b}+\frac{a}{a-c}$

Ta có $A + B = 3$. Giả sử $A \geq 0$.

$$(A-B)^2=(2B-3)^2=\left(\frac{a+b}{a-b}+\frac{b+c}{b-c}+\frac{c+a}{c-a}\right)^2=\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2+\left(\frac{b+c}{b-c}\right)^2+\left(\frac{c+a}{c-a}\right)^2-2=C-2$$

Từ $(a-b)^2 \leq c^2$, suy ra $C \geq 12$, nên $A\geq\frac{3+\sqrt{C-2}}{2}\geq\sqrt{6}-1$

Xét trường hợp $A \leq 0$. Ta có $B \geq 0$, nên $B=\frac{3+\sqrt{C-2}}{2}$, bởi vậy để chứng minh $A\leq 1-\sqrt{6}$, ta phải chứng tỏ rằng $C>27+4\sqrt{6}$

Đặt $a = y + z$; $b = z + x$; $c = x + y$ và giả sử rằng $x \geq y \geq z$ thì:

$$C(x,y,z)=\left(\frac{x+y+2z}{x-y}\right)^2+\left(\frac{2x+y+z}{y-z}\right)^2+\left(\frac{x+2y+z}{z-x}\right)^2$$

$$\geq C(x,y,0)=\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2+\left(\frac{2x+y}{y}\right)^2+\left(\frac{x+2y}{x}\right)^2$$

Giải hệ $\begin{cases}\dfrac{\partial C(x,y,0)}{\partial x}=0\\ \dfrac{\partial C(x,y,0)}{\partial y}=0\end{cases}$, ta thu được $\operatorname{Min}C(x,y,0)>27+4\sqrt{6}$

Bài 36. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của 1 tam giác. $x, y, z \geq 0$, $xy + yz + zx = 1$.

Chứng minh rằng: $ax+by+cz\geq\sqrt{2(ab+bc+ca)-(a^2+b^2+c^2)}$ (1)

Chứng minh

Đặt $T = ax + by + cz$ và $S = (ax + by + cz)^2$. Thì $S = T^2$ và $S=\frac{(ax+by+cz)^2}{xy+yz+zx}$.

Với $z = 0$ ta có $xy = 1$, suy ra $S = (ax + by)^2 \geq 4ab$. Ta sẽ tìm MinS < $4ab$.

Với $z \neq 0$, đặt $\frac{x}{z}=u$ và $\frac{y}{z}=v$. Thì $S=\frac{(au+bv+c)^2}{u+v+uv}$, $u, v > 0$

$$\Leftrightarrow S=\frac{a^2u^2+b^2v^2+c^2+2abuv+2acu+2bcv}{u+v+uv}$$

$$\Leftrightarrow S(u+v+uv)=a^2u^2+b^2v^2+c^2+2abuv+2acu+2bcv$$

$$\Leftrightarrow F(u)=a^2u^2+\left[(2ab-S)v+2ac-S\right]u+b^2v^2+(2bc-S)v+c^2=0$$

Ta có: $F(u)=0$ có ít nhất một nghiệm

$$\Leftrightarrow \Delta=\left[(2ab-S)v+2ac-S\right]^2-4a^2\left[b^2v^2+2(bc-S)v+c^2\right]\ge 0$$

$$\Leftrightarrow G(v)=S(S-4ab)v^2+2\left[(2ab-S)(2ac-S)-2a^2(2bc-S)\right]v+(2ac-S)^2-4a^2c^2\ge 0$$

Từ $0<S<4ab$ suy ra $G(v)\ge 0$ có ít nhất một nghiệm

$$\Leftrightarrow \Delta'=\left[(2ab-S)(2ac-S)-2a^2(2bc-S)\right]^2-S(S-4ab)\left[(2ac-S)^2-4a^2c^2\right]\ge 0$$

$$\Leftrightarrow S^2\left[S+2a(a-b-c)\right]^2-S^2(S-4ab)(S-4ac)\ge 0\Leftrightarrow S\ge 2(ab+bc+ca)-\left(a^2+b^2+c^2\right)$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ $v=\dfrac{a-b+c}{a+b-c}$; $u=-\dfrac{(2ab-S_0)v+2ac-S_0}{2a^2}$

Đặt $x=uz$, $y=vz$ vào đẳng thức $xy+yz+zx=1$, ta có:

$$(uv+v+u)z^2=1\Leftrightarrow z=\frac{1}{\sqrt{uv+u+v}},\ v=\frac{a-b+c}{a+b-c};\ u=-\frac{(2ab-S_0)v+2ac-S_0}{2a^2}$$

Vì vậy $\mathrm{Min}\,T=Min(ax+by+cz)=\sqrt{2(ab+bc+ca)-\left(a^2+b^2+c^2\right)}$

Bài 37. Cho n, k là các số nguyên với $n\ge k\ge 3$. Cho t_1, t_2, ..., t_n là các số thực dương thỏa mãn $(t_1+t_2+...+t_n)\left(\dfrac{1}{t_1}+\dfrac{1}{t_2}+\cdots+\dfrac{1}{t_n}\right)<\left(n+\sqrt{2k^2-4k+4}-k\right)^2$ (1)

Chứng minh rằng mỗi số trong k số $t_{i_1}, t_{i_2}, ..., t_{i_k}$ bé hơn tổng của k-1 số còn lại với mọi $1\le i_1<i_2<...<i_k\le i_n$.

Chứng minh

Giả sử tồn tại t_1, t_2, ..., t_k và $t_1+t_2+...+t_{k-1}\le t_k$, ta chứng minh

$$(t_1+t_2+...+t_k)\left(\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}+...+\frac{1}{t_k}\right)\ge 2(k-1)^2+2 \qquad (2)$$

Thật vậy, đặt $(k-1)^2+1=p$. Sử dụng bất đẳng thức ***AM – GM*** ta có

$$(t_1+...+t_k)\left(\frac{1}{t_1}+...+\frac{1}{t_k}\right)=(t_1+...+t_{k-1})\left(\frac{1}{t_1}+...+\frac{1}{t_{k-1}}\right)+\frac{t_1+...+t_{k-1}}{t_k}+t_k\left(\frac{1}{t_1}+...+\frac{1}{t_{k-1}}\right)+1$$

$$\ge(k-1)\sqrt[k-1]{t_1...t_{k-1}}\cdot(k-1)\sqrt[k-1]{\frac{1}{t_1}...\frac{1}{t_{k-1}}}+\frac{t_1+...+t_{k-1}}{t_k}+\frac{(k-1)^2t_k}{t_1+...+t_{k-1}}+1$$

$$\geq (k-1)^2 + \left[(k-1)^2+1\right] \sqrt[(k-1)^2+1]{\left(\frac{t_k}{t_1+\ldots+t_{k-1}}\right)^{(k-1)^2-1}} + 1$$

$$\geq (k-1)^2 + \left[(k-1)^2+1\right] \sqrt[(k-1)^2+1]{\left(\frac{t_k}{t_k}\right)^{(k-1)^2-1}} + 1 = 2(k-1)^2+2 \Rightarrow \text{(2) đúng.}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = t_2 = \ldots = t_{k-1} = a > 0 \\ t_k = (k-1)a \end{cases}$. Xét hai khả năng:

- Nếu $n = k$ thì (2) mâu thuẫn với (1)
- Nếu $n \geq k+1$ thì

$$\left(\sum_{i=1}^{n} t_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{t_i}\right) = \left(\sum_{i=1}^{k} t_i\right)\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{t_i}\right) + \left(\sum_{i=k+1}^{n} t_i\right)\left(\sum_{i=k+1}^{n}\frac{1}{t_i}\right) + \sum_{i=k+1}^{n}\left[\left(\sum_{j=1}^{k} t_j\right)\frac{1}{t_i} + \left(\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{t_j}\right)t_i\right]$$

$$\geq 2(k-1)^2 + 2 + (n-k)^2 + (n-k)\cdot 2\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{k} t_i\right)\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{t_i}\right)}$$

$$\geq 2(k-1)^2 + 2 + (n-k)^2 + 2(n-k)\sqrt{2(k-1)^2+2}$$

$= \left(n-k+\sqrt{2(k-1)^2+2}\right)^2 = \left(n+\sqrt{2k^2-4k+4}-k\right)^2$. Điều này mâu thuẫn với (2). Vì vậy ta có điều phải chứng minh.

Bài 38. Cho $a_1, \ldots, a_n$ là các số thực dương ($3 \leq n \in \mathbb{N}$) thỏa mãn

$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 < \frac{3}{3n-1}(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2$ (1). Chứng minh rằng

a_i, a_j, a_k là độ dài ba cạnh của một tam giác với mọi $1 \leq i < j < k \leq n$

Chứng minh

Không mất tính tổng quát, giả sử tồn tại i, j, k thỏa mãn a_i, a_j, a_k không là độ dài ba cạnh một tam giác, giả sử là a_1, a_2, a_3 với $a_3 \geq a_1 + a_2$.

Bước 1. Ta sẽ chứng minh $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \geq \frac{3}{8}(a_1+a_2+a_3)^2$ (2)

(2) $\Leftrightarrow 8\left(a_1^2+a_2^2+a_3^2\right) \geq 3(a_1+a_2+a_3)^2 \Leftrightarrow 5\left(a_1^2+a_2^2+a_3^2\right) \geq 6(a_1a_2+a_2a_3+a_3a_1)$

$\Leftrightarrow T = 5\left[a_3 - \frac{3}{5}(a_1+a_2)\right]^2 + 5\left(a_1^2+a_2^2\right) - \frac{9}{5}(a_1+a_2)^2 - 6a_1a_2 \geq 0$

Ta có $T \geq 5\left[(a_1+a_2) - \frac{3}{5}(a_1+a_2)\right]^2 + 5\left(a_1^2+a_2^2\right) - \frac{9}{5}(a_1+a_2)^2 - 6a_1a_2$

$= \frac{4}{5}(a_1+a_2)^2 + 5\left(a_1^2+a_2^2\right) - \frac{9}{5}(a_1+a_2)^2 - 6a_1a_2 = 4(a_1-a_2)^2 \geq 0 \Rightarrow$ (2) đúng.

Bước 2. Ta sẽ chứng minh $I = 3(a_1^2+a_2^2+a_3^2)+8a_k^2-6(a_1+a_2+a_3)a_k \geq 0$, $\forall 4 \leq k \leq n$ (3). Ta có:

$$I \geq \frac{9}{8}(a_1+a_2+a_3)^2+8a_k^2-6(a_1+a_2+a_3)a_k = 8\left[a_k-\frac{3}{8}(a_1+a_2+a_3)\right]^2 \geq 0$$

Bước 3. Ta sẽ chứng minh $a_1^2+a_2^2+...+a_n^2 \geq \frac{3}{3n-1}(a_1+a_2+...+a_n)^2$ (4)

Ta có: $(3n-1)(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2)-3(a_1+a_2+...+a_n)^2 = 8\left[(a_1^2+a_2^2+a_3^2)-3(a_1+a_2+a_3)^2\right]+$

$$+\sum_{k=4}^{n}\left[3(a_1^2+a_2^2+a_3^2)+8a_k^2-6(a_1+a_2+a_3)a_k\right]+\left[(n-3)(a_4^2+...+a_n^2)-(a_4+...+a_n)^2\right] \geq 0$$

Bất đẳng thức cuối cùng đúng bởi vì (2), (3) cũng đúng theo bất đẳng thức ***Cauchy – Schwarz***, ta có $(n-3)(a_4^2+...+a_n^2) \geq (a_4+...+a_n)^2 \Rightarrow$ (4) đúng.

Do (4) mâu thuẫn với (1), suy ra giả sử ban đầu là sai $\Rightarrow$ (đpcm)

Bài 39. [Austrian – Polish MO – 1999] Cho $5 \leq n \in \mathbb{N}$. Tìm các số thực tốt nhất k_1, k_2 thỏa mãn $k_1 < T = \frac{a_1}{a_1+a_2}+\frac{a_2}{a_2+a_3}+...+\frac{a_n}{a_n+a_1} < k_2$, $\forall a_1, a_2, ..., a_n > 0$ (1)

Chứng minh

Ta sẽ chứng minh $k_1 = 1$, $k_2 = n-1$. Thật vậy, đặt $S = a_1 + a_2 + ... + a_n$, thì

$T > \frac{a_1}{S}+\frac{a_2}{S}+...+\frac{a_n}{S} = \frac{a_1+...+a_n}{S} = \frac{S}{S} = 1$. Giả sử $T > 1 + x$ với $x > 0$.

Đặt $a_1 = 1$, $a_2 = t$, ... , $a_n = t^{n-1}$ $(t > 0)$ thì $T = \frac{t^{n-1}}{1+t^{n-1}}+\frac{n-1}{1+t}$

Đặt $t > \frac{n-1-x}{x} \Rightarrow \frac{n-1}{1+t} < \frac{n-1}{1+\frac{n-1-x}{x}} = x \Rightarrow T < 1 + x \Rightarrow$ mâu thuẫn.

Vì vậy, $k_1 = 1$ là cận dưới lớn nhất..

Sử dụng tính chất: nếu $0 < x < y$ và $m > 0$ thì $\frac{x}{y} < \frac{x+m}{y+m}$, suy ra

$$\frac{a_1}{a_1+a_2} < \frac{S-a_2}{S}, \frac{a_2}{a_2+a_3} < \frac{S-a_3}{S}, ..., \frac{a_n}{a_n+a_1} < \frac{S-a_1}{S} \Rightarrow T < \frac{nS-S}{S} = n-1$$

Giả sử $T < n - 1 - x$ với $x > 0$.

Đặt $a_1 = 1$, $a_2 = t$, ... , $a_n = t^{n-1}$ $(t > 0)$ thì $T = \frac{t^{n-1}}{1+t^{n-1}}+\frac{n-1}{1+t} > \frac{n-1}{1+t}$.

Đặt $t < \frac{x}{n-1-x} \Rightarrow \frac{1}{1+t} < \frac{n-1-x}{n-1} \Rightarrow \frac{n-1}{t+1} > n-1-x \Rightarrow T > n-1-x \Rightarrow$ mâu thuẫn.

Vì vậy, $k_2 = n - 1$ là cận trên nhỏ nhất.

Bài 40. Đặt $a, b, c > 0$ và $a + b + c = 1$.

Chứng minh rằng: $(1 + a)(1 + b)(1 + c) \ge (3a + c)(3b + a)(3c + b)$

Chứng minh

$$(1+a)(1+b)(1+c) - (3a+c)(3b+a)(3c+b) = 2\sum_{cyc}(b+c)(a-b)^2 \ge 0 \Rightarrow \text{(đpcm)}$$

Bài 41. Đặt $a, b, c \ge 0$ và $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{a+bc} + \frac{b}{b+ca} + \frac{c}{c+ab} \ge \frac{3}{2} \quad (1)$$

Chứng minh

$$(1) \Leftrightarrow a(b+ac)(c+ab) + b(c+ab)(a+bc) + c(a+bc)(b+ca) \ge \frac{3}{2}(a+bc)(b+ca)(c+ab)$$

$$\Leftrightarrow 3abc + a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \ge 3a^2b^2c^2 + abc\left(a^2+b^2+c^2\right) \text{ với } a+b+c=3$$

$$\Leftrightarrow (ab+bc+ca)^2 + 2abc(ab+bc+ca) \ge 3a^2b^2c^2 + 12abc$$

$$\Leftrightarrow (ab+bc+ca)^2 - 3abc(a+b+c) \ge abc\left[3 + 3abc - 2(ab+bc+ca)\right]$$

$$\Leftrightarrow 3c^2(a-b)^2 + 3b^2(c-a)^2 + 3a^2(a-b)^2 \ge$$

$$\ge abc\left[(a+b+c)^2 - 3(ab+bc+ca) + 9abc - (a+b+c)(ab+bc+ca)\right]$$

$$\Leftrightarrow \left(3a^2 + bca^2 - \frac{1}{2}abc\right)(b-c)^2 + \left(3b^2 + cab^2 - \frac{1}{2}abc\right)(c-a)^2 + \left(3c^2 + abc^2 - \frac{1}{2}abc\right)(a-b)^2 \ge 0$$

Đặt $A_1 = 3a^2 + bca^2 - \frac{1}{2}abc$; $A_2 = 3b^2 + cab^2 - \frac{1}{2}abc$; $A_3 = 3c^2 + abc^2 - \frac{1}{2}abc$

Không mất tính tổng quát giả sử $a \ge b \ge c \Rightarrow A_1 \ge A_2 \ge A_3$. Ta có $A_2 + A_3 =$ $3\left(b^2+c^2\right) + abc(b+c) - abc \ge 6bc - abc = (6-a)bc \ge 0$.

Suy ra $A_1(b-c)^2 + A_2(c-a)^2 + A_3(a-b)^2 \ge \left(A_2 + A_3\right)(a-b)^2 \ge 0 \Rightarrow$ (đpcm)

Bài 42. Cho $a, b, c \ge 0$ và $ab + bc + ca = 3$.

Chứng minh rằng: $\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} + \frac{1}{1+c^2} \ge \frac{3}{2} \quad (1)$

Chứng minh

Không mất tính tổng quát, giả sử $c \ge b \ge a \Rightarrow bc \ge \frac{ab+bc+ca}{3} = 1$. Do đó

$$\frac{1}{1+b^2} + \frac{1}{1+c^2} - \frac{2}{1+bc} = \left(\frac{1}{1+b^2} - \frac{1}{1+bc}\right) + \left(\frac{1}{1+c^2} - \frac{1}{1+bc}\right) = \frac{(b-c)^2(bc-1)}{\left(1+b^2\right)\left(1+c^2\right)(1+bc)} \ge 0$$

$\Rightarrow \frac{1}{1+b^2} + \frac{1}{1+c^2} \ge \frac{2}{1+bc}$. Ta sẽ chứng minh $\frac{1}{1+a^2} + \frac{2}{1+bc} \ge \frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow 2(3+bc+2a^2)\ge 3(1+a^2)(1+bc)\Leftrightarrow a^2+ab+ac\ge 3a^2bc\Leftrightarrow \frac{a+b+c}{3}\ge abc$

Ta có: $\frac{a+b+c}{3}\ge\sqrt[3]{abc}=\frac{ab+bc+ca}{3}\cdot\sqrt[3]{abc}\ge\sqrt[3]{ab\cdot bc\cdot ca}\cdot\sqrt[3]{abc}=abc$ (đpcm)

Bài 43. Cho $a, b, c\ge 0$ và $a+b+c+abc=1$.

Chứng minh rằng: $ab+bc+ca\le\frac{(2+abc)(1+2abc)}{7-abc}$ (1)

Chứng minh

Đặt $m=\frac{a+b+c}{3}\Rightarrow 3m=a+b+c=1-abc\Rightarrow$

$$A=\frac{(2+abc)(1+2abc)}{7-abc}=\frac{(3-3m)(3-6m)}{6+3m}=\frac{3(1-m)(1-2m)}{2+m}$$

$$\Rightarrow A-3m^2=\frac{3(1-m)(1-2m)}{2+m}-3m^2=\frac{3(1-3m-m^3)}{2+m}=3\cdot\frac{abc-m^3}{2+m}$$

Ta có (1) $\Leftrightarrow ab+bc+ca\le A\Leftrightarrow 3\cdot\frac{m^3-abc}{2+m}\le 3m^2-(ab+bc+ca)$

$$\Leftrightarrow\frac{(a+b+c)^3-27abc}{2+m}\le 3(a+b+c)^2-9(ab+bc+ca)$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c)^3-27abc\le 3(2+m)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)\quad(2)$$

$$3m=1-abc\le 1\Rightarrow m\le\frac{1}{3}\Rightarrow 2+m\ge 7m=\frac{7}{3}(a+b+c)\Rightarrow 3(2+m)\ge 4(a+b+c)$$

Nhưng $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=a^3+b^3+c^3-3abc$. Suy ra (2) sẽ đúng nếu ta có thể chứng minh $(a+b+c)^3-27abc\le 4(a^3+b^3+c^3-3abc)$

$\Leftrightarrow a^3+b^3+c^3+3abc\ge ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)$ đúng theo ***Schur***.

Bài 45. Cho $a, b, c, d\ge 0$ và $abc+bcd+cda+dab=4$.

Chứng minh rằng: $a^2+b^2+c^2+d^2\ge 4$

Chứng minh

Luôn tồn tại $x, y, z\ge 0$ thỏa mãn $abc+bcd+cda+dab=4xyz$; $xyz=1$;

$ab+ac+ad+bc+bd+cd=2(xy+yz+zx)$; $3(a+b+c+d)=4(x+y+z)$.

$$\Rightarrow a^2+b^2+c^2+d^2=(a+b+c+d)^2-2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)\ge 4$$

$$\Leftrightarrow\left[\frac{4}{3}(x+y+z)\right]^2-4(xy+yz+zx)\ge 4\Leftrightarrow 4(x+y+z)^2-9(xy+yz+zx)\ge 9$$

$$VT=3(x^2+y^2+z^2)+(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)\ge 9\sqrt[3]{x^2y^2z^2}+\frac{1}{2}\sum_{cyc}(x-y)^2\ge 9$$

CHƯƠNG VI. TỔNG KẾT

§ 25.1 TÓM TẮT NHỮNG VIÊN KIM CƯƠNG VÀ CÁC BẤT ĐẲNG THỨC CƠ BẢN

1.1 Bất đẳng thức AM – GM:

$$\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n} \ge \sqrt[n]{a_1a_2...a_n}\ ,\ \forall a_1,a_2,...,a_n \ge 0$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a_1 = a_2 = ... = a_n$

1.2 Bất đẳng thức AM – GM suy rộng:

Cho $\begin{cases} a_1,a_2,....,a_n \in R^+ \\ \alpha_1,\alpha_2,....,\alpha_n \in R^+ \end{cases}$ Khi đó $\dfrac{\alpha_1a_1+\alpha_2a_2+...+\alpha_na_n}{\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n} \ge \left(a_1^{\alpha_1}a_2^{\alpha_2}...a_n^{\alpha_n}\right)^{\frac{1}{\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n}}$

2.1 Bất đẳng thức Cauchy – Buniakowski – Schwarz

$$\left(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2\right)\left(b_1^2+b_2^2+...+b_n^2\right) \ge \left(a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n\right)^2, \forall a_i,b_i \in \mathbb{R}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = ... = \dfrac{a_n}{b_n}$

2.2 Bất đẳng thức Cauchy – Buniakowski – Schwarz suy rộng:

Cho m bộ số thực không âm $(a_1,a_2,...,a_{n-1},a_n);(b_1,b_2,...,b_{n-1},b_n);...;(p_1,p_2,...,p_{n-1},p_n)$

Khi đó: $\left(a_1b_1...p_1+a_2b_2...p_2+a_nb_n...p_n\right)^m \le \left(a_1^m+a_2^m+...+a_n^m\right)...\left(p_1^m+p_2^m+...+p_n^m\right)$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a_1:b_1:...:p_1 = a_2:b_2:...:p_2 = ... = a_n:b_n:...:p_n$

3.1 Bất đẳng thức Holder:

Cho 2 bộ số $\begin{cases} a_1,a_2,....,a_n \in \mathbb{R}^+ \\ b_1,b_2,....,b_n \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$ và $p,q \in \mathbb{Q}^+$ sao cho $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$

Khi đó ta có: $\left(a_1^p+a_2^p+...+a_n^p\right)^{\frac{1}{p}}.\left(b_1^q+b_2^q+...+b_n^q\right)^{\frac{1}{q}} \ge a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n$

3.2 Mở rộng 1 của bất đẳng thức Holder

Cho $\begin{cases} a_1,a_2,...,a_n \in \mathbb{R}^+ \\ b_1,b_2,....,b_n \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$ và $p,\ q \in \mathbb{R}$ sao cho $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$. Khi đó ta có:

$$\left(a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n\right)^{pq} \le \left(a_1^p+a_2^p+...+a_n^p\right)^q\left(b_1^q+b_2^q+...+b_n^q\right)^p \quad (3)\ \forall pq \ne 0$$

(Bất đẳng thức Francis – Lithewood)

3.3 Mở rộng 2 của bất đẳng thức Holder

Cho m bộ số $\begin{cases} a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{R}^+ \\ b_1, b_2, ..., b_n \in \mathbb{R}^+ \\ .... \\ l_1, l_2, ..., l_n \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$ và $\begin{cases} p_1, p_2, ..., p_n \in \mathbb{R}^+ \\ p_1 + p_2 + ... + p_n = 1 \end{cases}$. Khi đó ta có

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i ... l_i \le \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{\frac{1}{p}} ... \left(\sum_{i=1}^{n} l_i^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

3.4 Mở rộng 3 của bất đẳng thức Holder

Cho m bộ số $\begin{cases} a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{R}^+ \\ b_1, b_2, ..., b_n \in \mathbb{R}^+ \\ .... \\ l_1, l_2, ..., l_n \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$ và m số thỏa mãn $\begin{cases} \alpha, \beta, ..., \lambda > 0 \\ \alpha + \beta + ... + \lambda = 1 \end{cases}$

Khi đó ta có $\displaystyle \sum_{i=1}^{n} \left(a_i^{\alpha} b_i^{\beta} ... l_i^{\lambda}\right) \le \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^{\alpha} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)^{\beta} ... \left(\sum_{i=1}^{n} l_i\right)^{\lambda}$

4.1 Bất đẳng thức Minkowski

Cho $\begin{cases} a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{R}^+ \\ b_1, b_2, ..., b_n \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$ và $1 < p \in \mathbb{Q}^+$, khi đó $\displaystyle \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^p\right)^{\frac{1}{q}} \ge \left[\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^p\right]^{\frac{1}{p}}$

4.2 Mở rộng của bất đẳng thức Minkowski

Cho m bộ số thực dương $\begin{cases} a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{R}^+ \\ b_1, b_2, ..., b_n \in \mathbb{R}^+ \\ .... \\ l_1, l_2, ..., l_n \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$ và $\begin{cases} q_1, q_2, ..., q_n \in \mathbb{R}^+ \\ q_1 + q_2 + ... + q_n = 1 \end{cases}$

a. $\displaystyle \left(\sum_{i=1}^{n} q_i a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} q_i b_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + ... + \left(\sum_{i=1}^{n} q_i l_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \ge \left[\sum_{i=1}^{n} q_i (a_i + b_i + ... + l_i)^p\right]^{\frac{1}{p}} \quad \forall p > 1$

b. $\displaystyle \left(\sum_{i=1}^{n} q_i a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} q_i b_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + ... + \left(\sum_{i=1}^{n} q_i l_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left[\sum_{i=1}^{n} q_i (a_i + b_i + ... + l_i)^p\right]^{\frac{1}{p}} \quad \forall p < 1$

5.1 Bất đẳng thức Chebyshev

Cho hai dãy hữu hạn các số thực $a_1, a_2, ..., a_n$ và $b_1, b_2, ..., b_n$, khi đó

• Nếu có 2 dãy đơn điệu cùng chiều $\begin{cases} a_1 \ge a_2 \ge ... \ge a_n \\ b_1 \ge b_2 \ge ... \ge b_n \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a_1 \le a_2 \le ... \le a_n \\ b_1 \le b_2 \le ... \le b_n \end{cases}$ thì

$$\frac{a_1b_1 + a_2b_2 ... + a_nb_n}{n} \ge \frac{a_1 + a_2 ... + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + b_2 ... + b_n}{n}$$

• Nếu có 2 dãy đơn điệu ngược chiều $\begin{cases} a_1 \ge a_2 \ge ... \ge a_n \\ b_1 \le b_2 \le ... \le b_n \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a_1 \le a_2 \le ... \le a_n \\ b_1 \ge b_2 \ge ... \ge b_n \end{cases}$ thì

$$\frac{a_1b_1 + a_2b_2 ... + a_nb_n}{n} \le \frac{a_1 + a_2 ... + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + b_2 ... + b_n}{n}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a_1 = a_2 = ... = a_n \\ b_1 = b_2 = ... = b_n \end{array}\right.$

5.2 Bất đẳng thức Chebyshev suy rộng:

Cho $m_1, m_2, ..., m_n > 0$ thỏa mãn $m_1 + m_2 + ... + m_n = 1$

• Nếu có 2 dãy đơn điệu cùng chiều $\begin{cases} a_1 \ge a_2 \ge ... \ge a_n \\ b_1 \ge b_2 \ge ... \ge b_n \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a_1 \le a_2 \le ... \le a_n \\ b_1 \le b_2 \le ... \le b_n \end{cases}$ thì

$$m_1a_1b_1 + m_2a_2b_2 + ... + m_na_nb_n \ge (m_1a_1 + m_2a_2 + ... + m_na_n)(m_1b_1 + m_2b_2 + ... + m_nb_n)$$

• Nếu có 2 dãy đơn điệu ngược chiều $\begin{cases} a_1 \ge a_2 \ge ... \ge a_n \\ b_1 \le b_2 \le ... \le b_n \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a_1 \le a_2 \le ... \le a_n \\ b_1 \ge b_2 \ge ... \ge b_n \end{cases}$ thì

$$m_1a_1b_1 + m_2a_2b_2 + ... + m_na_nb_n \le (m_1a_1 + m_2a_2 + ... + m_na_n)(m_1b_1 + m_2b_2 + ... + m_nb_n)$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a_1 = a_2 = ... = a_n \\ b_1 = b_2 = ... = b_n \end{array}\right.$

6.1 Bất đẳng thức Hoán vị cho hai dãy đơn điệu cùng chiều

• Cho hai dãy số thực hữu hạn được sắp thứ tự cùng chiều nhau chẳng hạn là hai dãy đơn điệu tăng $\begin{cases} a_1 \le a_2 \le ... \le a_n \\ b_1 \le b_2 \le ... \le b_n \end{cases}$. Gọi $(t_1, t_2, ..., t_n)$ là 1 hoán vị tuỳ ý của $(b_1, b_2, ..., b_n)$, khi đó ta có

$$a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n \ge a_1t_1 + a_2t_2 + ... + a_nt_n$$

6.2 Bất đẳng thức Hoán vị cho hai dãy đơn điệu ngược chiều

Cho hai dãy số thực hữu hạn được sắp thứ tự ngược chiều nhau chẳng hạn là

$\begin{cases} a_1 \le a_2 \le ... \le a_n \\ b_1 \ge b_2 \ge ... \ge b_n \end{cases}$. Gọi $(t_1, t_2, ..., t_n)$ là 1 hoán vị tuỳ ý của $(b_1, b_2, ..., b_n)$, khi đó ta có

$a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n \le a_1t_1 + a_2t_2 + ... + a_nt_n$

6.3 Bất đẳng thức Hoán vị tổng quát

Vì với mọi dãy hữu hạn ta có thể đánh số và sắp lại thứ tự nên không mất tính tổng quát ta có thể giả sử có hai dãy số thực hữu hạn được sắp xếp thứ tự cùng chiều tức là

$$\begin{cases} a_1 \le a_2 \le ... \le a_n \\ b_1 \le b_2 \le ... \le b_n \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a_1 \ge a_2 \ge ... \ge a_n \\ b_1 \ge b_2 \ge ... \ge b_n \end{cases}$$

Gọi $(t_1, t_2, ..., t_n)$ là 1 hoán vị tuỳ ý của $(b_1, b_2, ..., b_n)$.

Đặt $S = a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n$; $T = a_1t_1 + a_2t_2 + ... + a_nt_n$; $s = a_1b_n + a_2b_{n-1} + ... + a_nb_1$, khi đó $s = a_1b_n + a_2b_{n-1} + ... + a_nb_1 \le T = a_1t_1 + a_2t_2 + ... + a_nt_n \le S = a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n$

Nhận xét:

- Số các bất đẳng thức hoán vị chính là số hoán vị của bộ n số $(b_1, b_2, ..., b_n)$ nên có $(n!)$ bất đẳng thức hoán vị và $\underset{(t_1...t_n)}{\text{Max}}\, T = S$; $\underset{(t_1...t_n)}{\text{Min}}\, T = s$

- Bất đẳng thức hoán vị xảy ra dấu bằng khi và chỉ khi một trong hai dãy $(a_1, a_2, ..., a_n)$ hoặc $(b_1, b_2, ..., b_n)$ là dãy dừng, tức là $\left[\begin{array}{l} a_1 = a_2 = ... = a_n \\ b_1 = b_2 = ... = b_n \end{array}\right.$

- Ta cũng có các bất đẳng thức hoán vị tương tự như trên nếu cố định bộ $(b_1, b_2, ..., b_n)$ và gọi $(t_1, t_2, ..., t_n)$ là một hoán vị tuỳ ý của $(a_1, a_2, ..., a_n)$

6.4 Các trường hợp đặc biệt của bất đẳng thức hoán vị

Giả sử $(x'_1, x'_2, ..., x'_n)$ là một hoán vị của $(x_1, x_2, ..., x_n)$.

- Nếu f(x) là hàm số không giảm trên (a, b) và $x_1, x_2, ..., x_n \in (a, b)$ ta có

$$x_1 f(x_1) + x_2 f(x_2) + ... + x_n f(x_n) \ge x'_1 f(x_1) + x'_2 f(x_2) + ... + x'_n f(x_n)$$

- Nếu f(x) là hàm số không tăng trên (a, b) và $x_1, x_2, ..., x_n \in (a, b)$ ta có

$$x_1 f(x_1) + x_2 f(x_2) + ... + x_n f(x_n) \le x'_1 f(x_1) + x'_2 f(x_2) + ... + x'_n f(x_n)$$

- Nếu $f(x), g(x)$ là hàm số không giảm trên (a, b) và $x_1, x_2, ..., x_n \in (a, b)$ ta có

$$f(x_1)g(x_1) + f(x_2)g(x_2) + ... + f(x_n)g(x_n) \ge f(x_1)g(x'_1) + f(x_2)g(x'_2) + ... + f(x_n)g(x'_n)$$

• Nếu $f(x)$ là hàm số không giảm trên $(a,\ b)$ và $g(x)$ là hàm số không tăng trên $(a,\ b)$ thì $\forall\, x_1, x_2, ..., x_n \in (a,\ b)$ ta có bất đẳng thức sau

$$f(x_1)g(x_1)+f(x_2)g(x_2)+...+f(x_n)g(x_n)\le f(x_1)g(x_1')+f(x_2)g(x_2')+...+f(x_n)g(x_n')$$

7.1 Bất đẳng thức Schur

Với $a,b,c\ge 0$ và k là số thực bất kì ta luôn có:

$$a^k(a-b)(a-c)+b^k(b-a)(b-c)+c^k(c-a)(c-b)\ge 0$$

7.2 Bất đẳng thức Schur suy rộng 1 (Vornicu Schur)

Xét bất đẳng thức: $x(a-b)(a-c)+y(b-c)(b-a)+z(c-a)(c-b)\ge 0$ (1)

Khi đó (1) đúng với mọi $a\ge b\ge c\ge 0$ và $x,\ y,\ z\ge 0$ nếu thỏa mãn 1 trong các khả năng:

i. $x\ge y$ (hoặc $z\ge y$)

ii. $ax\ge by$

iii. $bz\ge cy$ (nếu a,b,c là độ dài 3 cạnh của 1 tam giác)

iIV. $\sqrt{x}+\sqrt{z}\ge\sqrt{y}$

iV. $x^2+y^2+z^2\le 2(xy+yz+zx)$

7.3 Bất đẳng thức Schur suy rộng 2

Cho p,q,x,y,z,a,b,c là các số dương sao cho $(a,\ b,\ c)$ và (x,y,z) là các bộ đơn điệu cùng chiều. Khi đó ta luôn có:

$$x\left[(a^p-b^p)(a^q-c^q)+(a^q-b^q)(a^p-c^p)\right]+y\left[(b^p-c^p)(b^q-a^q)+(b^q-c^q)(b^p-a^p)\right]$$
$$+z\left[(c^p-a^p)(c^q-b^q)+(c^q-a^q)(c^p-b^p)\right]\ge 0 \qquad (1)$$

7.4 Bất đẳng thức Schur suy rộng 3

Định lí 4: Xét bất đẳng thức sau, trong mỗi hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$:

$$\sum f(a-b)f(a-c)f(a-d)f(a-e)\ge 0$$

Khi đó để bất đẳng thức đúng thì hàm số f phải thỏa mãn 2 điều kiện sau đây:

i. f là hàm đơn điệu tăng. **ii.** $x f(x)\ge 0$ với $\forall\, x\in\mathbb{R}$

7.5 Bất đẳng thức Schur mở rộng cho tam giác

Cho hai tam giác với độ dài các cạnh tương ứng ABC$(a,\ b,\ c)$; $A_1B_1C_1\ (a_1,b_1,c_1)$. Khi đó:

$$a_1bc(a^\alpha-b^\alpha)(a^\alpha-c^\alpha)+b_1ca(b^\alpha-c^\alpha)(b^\alpha-a^\alpha)+c_1ab(c^\alpha-a^\alpha)(c^\alpha-b^\alpha)\ge 0\quad\forall\alpha\ge 1$$

7.6 Hệ quả bất đẳng thức Schur với cấu trúc đối xứng 3 biến

Cho $a,b,c\ge 0$, đặt $p=a+b+c$, $q=ab+bc+ca$, $r=abc$. Khi đó ta có

$p^2\ge 3q$ $\quad p^2q+3pr\ge 4q^2$ $\quad p^2q\ge 3pr+2q^2$ $\quad q^3+9r^2\ge 4pqr$

$q^2\ge 3pr$ $\quad pq^2+3qr\ge 4p^2r$ $\quad pq^2\ge 2p^2r+3qr$ $\quad 2q^3+9r^2\ge 7pqr$

$p^3\ge 27r$ $\quad p^4+3q^2\ge 4p^2q$ $\quad 2p^3+9r\ge 7pq$ $\quad p^3r+q^3\ge 6pqr$

$p^3+9r\ge 4pq$; $p^4+4q^2+6pr\ge 5p^2q$

8.1 Bất đẳng thức Muirhead

• ***Định nghĩa:*** Giả sử các biến số $a_1,a_2,...a_n\in\mathbb{R}^+$ và bộ số mũ $\alpha_1,\alpha_2,....,\alpha_n\in\mathbb{R}$

Ký hiệu: Tập biến số $X=\{a_1,a_2,...a_n\}$; Tập số mũ $\alpha=\{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n\}$

Đa thức đối xứng S với các biến số của tập X và số mũ của tập α là

$$S_X^{\alpha}=S_{a_1,a_2,...,a_n}^{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n}=a_1^{\alpha_1}.S_{X\setminus\{a_1\}}^{\alpha\setminus\{\alpha_1\}}+....+a_n^{\alpha_1}.S_{X\setminus\{a_n\}}^{\alpha\setminus\{\alpha_1\}}$$

Hai bộ số $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,....,\alpha_n);\beta=(\beta_1,\beta_2,....,\beta_n)$ gọi là hai bộ số đồng bậc khi và chỉ khi $\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n=\beta_1+\beta_2+...+\beta_n$

Cho hai bộ số $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,....,\alpha_n);\beta=(\beta_1,\beta_2,....,\beta_n)$ đồng bậc, ta nói bộ α trội hơn bộ β và viết kí hiệu $\alpha\succ\beta$ khi và chỉ khi ta có $\begin{cases}\alpha_1\ge\alpha_2\ge...\alpha_n;\beta_1\ge\beta_2\ge...\beta_n\\ \alpha_1+...+\alpha_k\ge\beta_1+...+\beta_k\ \forall k=\overline{1,n-1}\\ \alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n=\beta_1+\beta_2+...+\beta_n\end{cases}$

• Định lý Muirhead với số mũ thực:

Xét các biến số $a_1,a_2,...a_n\in\mathbb{R}^+$ và $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n,\beta_1,\beta_2,...,\beta_n\in\mathbb{R}$. Khi đó nếu $\alpha\succ\beta$ tức là

$\begin{cases}\alpha_1\ge\alpha_2\ge...\alpha_n;\beta_1\ge\beta_2\ge...\beta_n\\ \alpha_1+...+\alpha_k\ge\beta_1+...+\beta_k\ \forall k=\overline{1,n-1}\\ \alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n=\beta_1+\beta_2+...+\beta_n\end{cases}$ thì $S_X^{\alpha}=S_{a_1,a_2,...,a_n}^{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n}\ge S_{a_1,a_2,...,a_n}^{\beta_1,\beta_2,...,\beta_n}=S_X^{\beta}$

Đảo lại: Nếu mọi bộ $X=\{a_1,a_2,...a_n\}$ gồm n số thực dương ta có $S_X^{\alpha}\ge S_X^{\beta}$ thì $\alpha\succ\beta$

8.2 Hệ quả: Bất đẳng thức ASYM

Cho m bộ số $(\alpha_{11},\alpha_{12},....,\alpha_{1n}),(\alpha_{21},\alpha_{22},...,\alpha_{2n}),...,(\alpha_{m1},\alpha_{m2},....,a_{mn})$ với $m,n\in\mathbb{Z}^+$

, đặt $t_i=\dfrac{\alpha_{1i}+\alpha_{2i}+...+\alpha_{mi}}{m}\ \forall i=\overline{1,n}$. Khi đó với các biến số $x_1,x_2,...x_n\ge 0$ ta có:

$$\boxed{S_{\alpha_{11}\alpha_{12}...\alpha_{1n}}+S_{\alpha_{21}\alpha_{22}...\alpha_{2n}}+...+S_{\alpha_{m1}\alpha_{m2}...\alpha_{mn}}\ge mS_{t_1t_2...t_n}}$$

9. Các định lý Fermat cho hàm một biến số

9.1 Định lý về hàm đơn điệu

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $[a, b]$.

• Nếu $f'(x) \geq 0\ \forall x \in (a, b)$ thì $f(x)$ tăng trên $[a, b]$ và $\underset{x\in[a,b]}{\text{Min}} f(x) = f(a)$, $\underset{x\in[a,b]}{\text{Max}} f(x) = f(b)$

• Nếu $f'(x) \leq 0\ \forall x \in (a, b)$ thì $f(x)$ giảm trên $[a, b]$ và $\underset{x\in[a,b]}{\text{Min}} f(x) = f(b)$, $\underset{x\in[a,b]}{\text{Max}} f(x) = f(a)$

9.2 Định lý về điều kiện cần để hàm số có cực trị

Giả sử $y = f(x)$ xác định trên một lân cận đủ bé của điểm $x_0 \in (a, b)$ và có đạo hàm tại điểm x_0. Khi đó nếu hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại x_0 thì $f'(x_0) = 0$

9.3 Định lý 1 về điều kiện đủ để hàm số có cực trị

Giả sử $y = f(x)$ xác định trên $[a, b]$ và $x_0 \in (a, b)$. Trong một lân cận đủ bé $\varepsilon > 0$ của điểm x_0, nếu $f'(x)$ thay đổi dấu khi x đi qua x_0 (có thể không tồn tại $f'(x_0)$), thì $f(x)$ đạt cực trị tại x_0.

• Nếu $f'(x) < 0\ \forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0)$ và $f'(x) > 0\ \forall x \in (x_0, x_0 + \varepsilon)$ thì x_0 là điểm cực tiểu.

• Nếu $f'(x) > 0\ \forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0)$ và $f'(x) < 0\ \forall x \in (x_0, x_0 + \varepsilon)$ thì x_0 là điểm cực đại

9.4 Định lý 2 về điều kiện đủ để hàm số có cực trị

Giả sử $y = f(x)$ xác định trên $[a, b]$ và $x_0 \in (a, b)$. Trong một lân cận đủ bé $\varepsilon > 0$ của điểm x_0, hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp 2 liên tục, đồng thời $f'(x_0) = 0$ và $f''(x_0) \neq 0$ thì x_0 là một điểm cực trị của hàm số với sự phân loại chi tiết:

• Nếu $f'(x_0) = 0$ và $f''(x_0) > 0$ thì x_0 là điểm cực tiểu của hàm $f(x)$.

• Nếu $f'(x_0) = 0$ và $f''(x_0) < 0$ thì x_0 là điểm cực đại của hàm $f(x)$.

10. Định lý Lagrange hàm một biến số

Nếu hàm số f liên tục trên đoạn $[a, b]$ và có đạo hàm trên khoảng (a, b) thì tồn tại ít nhất một giá trị c (với $a < c < b$) sao cho $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

11. Định lý Lagrange hàm nhiều biến số

11.1 Điều kiện cần của cực trị hàm nhiều biến

Giả sử hàm số $w = f(x_1, x_2, ..., x_n) = f(X)$ xác định, liên tục và có các đạo hàm riêng theo tất cả các biến độc lập trong miền $D = \left\{ X(x_1, x_2, ..., x_n) \middle| x_i \in (a_i, b_i), i = \overline{1, n} \right\}$ khi đó ta có định lý:

Định lý: Điều kiện cần để hàm số $w = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ đạt được cực trị (cực đại hoặc cực tiểu) tại điểm $\overline{X}(\overline{x_1}, \overline{x_2}, ...\overline{x_n}) \in D$ là tại điểm đó tất cả các đạo hàm riêng cấp một triệt tiêu:

$$\begin{cases} w'_{x_i} = f'_{x_i}(\overline{x_1}, \overline{x_2}, ..., \overline{x_n}) = 0 \\ i = 1, 2, ..., n \end{cases}$$

11.2 Điều kiện đủ của cực trị hàm nhiều biến

Giả sử $\overline{X}(\overline{x_1}, \overline{x_2}, ...\overline{x_n}) \in D$ là một điểm dừng của hàm số $w = f(x_1, x_2, ..., x_n) = f(X)$ và tại điểm đó hàm số có tất cả các đạo hàm riêng cấp 2 liên tục. Như đã biết, vi phân toàn phần cấp hai của hàm số n biến số $w = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ tại điểm $\overline{X}(\overline{x_1}, \overline{x_2}, ...\overline{x_n}) \in D$ là một dạng toàn phương của n biến số $dx_1, dx_2, ..., dx_n$: $d^2 f = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} dx_i dx_j$

Trong đó a_{ij} là các đạo hàm riêng cấp hai: $a_{ij} = \dfrac{\partial^2 f(\overline{X})}{\partial x_i \partial x_j} = f_{ij}(\overline{x_1}, \overline{x_2}, ...\overline{x_n})$

Định lý:

1. Nếu $d^2 f$ là một dạng toàn phương xác định dương thì điểm dừng $\overline{X}(\overline{x_1}, \overline{x_2}, ...\overline{x_n})$ là *điểm cực tiểu* của hàm số $f(X)$;
2. Nếu $d^2 f$ là một dạng toàn phương xác định âm thì điểm dừng $\overline{X}(\overline{x_1}, \overline{x_2}, ...\overline{x_n})$ là *điểm cực đại* của hàm số $f(X)$.
3. Nếu $d^2 f$ là một dạng toàn phương không xác định thì điểm dừng $\overline{X}(\overline{x_1}, \overline{x_2}, ...\overline{x_n})$ *không phải là điểm cực trị* của hàm số $f(X)$.

Ma trận của dạng toàn phương $d^2 f$ là ma trận vuông với các phần tử là các đạo hàm riêng cấp hai tại điểm dừng $\overline{X}$ (gọi là ma trận Hess):

$$H = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_n \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} \\ \dots\dots & & \\ a_{n1} & a_{n2} \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \text{ trong đó: } a_{ij} = \frac{\partial^2 f(\overline{X})}{\partial x_i \partial x_j}. \text{ Đặt } H_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2k} \\ \dots\dots & & \\ a_{k1} & a_{k2} \dots & a_{kk} \end{vmatrix}, \quad (k = 1, 2, ..., n)$$

Một trong các phương pháp xem xét tính xác định của một dạng toàn phương là dựa vào các định thức con chính của mà trận của dạng toàn phương đó. Chú ý rằng, định thức con H_k tạo thành từ *k* dòng đầu và *k* cột đầu của nó. Như vậy *H* có n định thức con chính từ cấp 1 đến *n*.

Áp dụng định lý về dấu hiệu dạng toàn phương xác định ta có quy tắc sau đây:

Quy tắc xác định cực trị bằng xét dấu các định thức con chính

1. Nếu tất cả các định thức con chính của ma trận H đều dương ($H_k > 0$ với mọi $k = 1, 2, ..., n$) thì điểm dừng $\overline{X}\left(\overline{x_1}, \overline{x_2}, ..., \overline{x_n}\right)$ là *điểm cực tiểu* của hàm số $f(X)$.

2. Nếu $(-1)^k H_k > 0$ với mọi $k = 1, 2, ..., n$, tức là ma trận H có tất cả các định thức con chính cấp lẻ âm và tất cả các định thức con chính cấp chẵn dương, thì điểm dừng $\overline{X}\left(\overline{x_1}, \overline{x_2}, ..., \overline{x_n}\right)$ là *điểm cực đại* của hàm số $f(X)$.

12. Bất đẳng thức Bernoulli

12.1 Dạng nguyên thủy của bất đẳng thức

Giả sử $a_1, a_2, ... a_n$ là các số thực cùng dấu và lớn hơn (-1). Khi đó ta có:

$$(1+a_1)(1+a_2)...(1+a_n) \geq 1 + (a_1 + a_2 + ... + a_n)$$

12.2 Dạng cơ bản của bất đẳng thức

• Số mũ tự nhiên: $\forall a > -1, \forall n \in \mathbb{N}^*$ ta có $(1 + a)^n \geq 1 + na$

• Số mũ thực:

$\forall a > -1, \forall r \in \mathbb{Q}$ và $0 \leq r \leq 1$ ta có $(1 + a)^r \leq 1 + ra$

$\forall a > -1, \forall r \in \mathbb{Q}$ và $(r \leq 0) \cup (r \geq 1)$ ta có: $(1 + a)^r \geq 1 + ra$

12.3 Dạng tổng quát của bất đẳng thức

• **Trường hợp 1:** $\forall x > -1, \forall 0 \leq \alpha \leq 1$ ta có: $(1 + x)^\alpha \leq 1 + \alpha x$

Hệ quả 1: $\forall t > 0, \forall 0 \leq \alpha \leq 1$ ta có: $t^\alpha \leq \alpha t + (1 - \alpha)$

Hệ quả 2: $u^\alpha + \left(\frac{\alpha}{\beta} - 1\right) \leq \frac{\alpha}{\beta} \cdot u^\beta, \forall u > 0, \forall 0 < \alpha < \beta$. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \boxed{u = 1}$

Hệ quả 3: $u^\alpha + (\alpha - 1)u_0^\alpha \leq \alpha u_0^{\alpha-1}.u, \forall u, u_0 > 0, \forall 0 < \alpha < 1$ Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \boxed{\mathbf{u = u_0}}$

• **Trường hợp 2:** $\forall x > -1, \forall \alpha \in (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$ ta có: $(1 + x)^\alpha \geq 1 + \alpha x$

Hệ quả 1: $\forall t > 0, \forall \alpha \in (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$ ta có: $t^\alpha \geq \alpha t + (1 - \alpha)$

Hệ quả 2: $u^\alpha + \left(\frac{\alpha}{\beta} - 1\right) > \frac{\alpha}{\beta} \cdot u^\beta, \forall u > 0, \forall \alpha > \beta > 0$. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \boxed{u = 1}$

Hệ quả 3: $u^\alpha + (\alpha - 1)u_0^\alpha \geq \alpha u_0^{\alpha-1}.u, \forall u, u_0 > 0, \forall \alpha > 1$ Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \boxed{\mathbf{u = u_0}}$

13. Bất đẳng thức Jensen

Giả sử $x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{I}$ và $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in [0;1]$ với $\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n = 1$.

• Nếu $f(x)$ là hàm lồi trên $\mathbb{I}$ thì ta có bất đẳng thức

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n) \leq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + ... + \alpha_n f(x_n)$$

• Nếu $f(x)$ là hàm lõm trên $\mathbb{I}$ thì ta có bất đẳng thức

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n) \geq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + ... + \alpha_n f(x_n)$$

14. Bất đẳng thức Karamata

Cho 2 bộ n số thực được sắp thứ tự $(a)=(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ và $(b)=(b_1,b_2,\ldots,b_n)$ với $(a)\succ(b)$ tức là thỏa mãn hệ điều kiện

$$\begin{cases} a_1\ge b_1 \\ a_1+a_2\ge b_1+b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}\ge b_1+b_2+\ldots+b_{n-1} \\ a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}+a_n=b_1+b_2+\ldots+b_{n-1}+b_n \end{cases}$$ Khi đó ta có:

- Nếu f là hàm lồi trên **I** thì $f(a_1)+f(a_2)+\ldots+f(a_n)\ge f(b_1)+f(b_2)+\ldots+f(b_n)$
- Nếu f là hàm lõm trên **I** thì $f(a_1)+f(a_2)+\ldots+f(a_n)\le f(b_1)+f(b_2)+\ldots+f(b_n)$

15. Bất đẳng thức với các hàm lồi bên phải và lõm bên trái

15.1 Định lý hàm số lồi bên phải (Định lý RCF)

Cho $f(u)$ là một hàm số xác định trên khoảng $\mathbb{I}\subset\mathbb{R}$ và lồi với $u\ge s, s\in\mathbb{I}$.

Nếu $f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)\ge nf\left(\dfrac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right)$ (1) $\forall x_1,x_2,\ldots,x_n\in\mathbb{I}$ *thỏa mãn*

$\begin{cases} x_1+x_2+\ldots+x_n=ns \\ x_2=x_3=\ldots=x_n\ge s \end{cases}$ *thì (1) cũng đúng* $\forall x_1,x_2,\ldots,x_n\in\mathbb{I}$ *thỏa mãn* $\dfrac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\ge s$

15.2 Định lý hàm số lõm bên trái (Định lý LCF)

Cho $f(u)$ là hàm xác định trên khoảng $\mathbb{I}\subset\mathbb{R}$ và lõm với $u\le s, s\in\mathbb{I}$.

Nếu $f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)\le nf\left(\dfrac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right)$ (2) $\forall\ x_1,x_2,\ldots,x_n\in\mathbb{I}$ thỏa mãn

$\begin{cases} x_1+x_2+\ldots+x_n=ns \\ x_1=x_2=\ldots=x_{n-1}\le s \end{cases}$ *thì (2) cũng đúng* $\forall x_1,x_2,\ldots,x_n\in\mathbb{I}$ *thỏa mãn* $\dfrac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\le s$

15.3 Định lý hàm lõm bên trái – lồi bên phải (Định lý LCRCF).

Cho $a<c$ là các số thực. f là hàm liên tục trên khoảng $\mathbb{I}=[a,+\infty)$, lõm trên $[a,c]$ và lồi trên $[c,+\infty)$. Nếu $x_1,x_2,\ldots,x_n\in\mathbb{I}$ thỏa mãn $x_1+x_2+\ldots+x_n=S=\text{const}$, thì thì biểu thức $E=f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)$ đạt giá trị lớn nhất với $x_1=x_2=\ldots=x_{n-1}\le x_n$

15.4 Định lý điểm uốn đơn (Định lý SIP).

Cho f là hàm khả vi cấp 2 trên $\mathbb{R}$ với điểm uốn đơn, *cho S là số thực cố định và cho $g(x)=f(x)+(n-1)f\left(\dfrac{S-x}{n-1}\right)$. Nếu $x_1,x_2,\ldots,x_n$ là các số thực thỏa mãn $x_1+x_2+\ldots+x_n=S$, thì* $\inf_{x\in\mathbb{R}} g(x)\le f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)\le\sup_{x\in\mathbb{R}} g(x)$

16. Bất đẳng thức Popoviciu và các dạng mở rộng

16. 1 Bất đẳng thức Popoviciu (1965)

Cho hàm f là hàm lồi trên khoảng $\mathbb{I}$ và $x, y, z \in \mathbb{I}$, khi đó ta có bất đẳng thức

$$f(x)+f(y)+f(z)+3f\left(\frac{x+y+z}{3}\right) \geq 2f\left(\frac{x+y}{2}\right)+2f\left(\frac{y+z}{2}\right)+2f\left(\frac{x+z}{2}\right)$$

16. 2 Mở rộng 1 Bất đẳng thức Popoviciu (A. Lupas, 1982)

Cho hàm f là hàm lồi trên khoảng $\mathbb{I}$ và $x, y, z \in \mathbb{I}$, khi đó với mọi $p, q, r > 0$ ta có:

$$pf(x)+qf(y)+rf(p+q+r)f\left(\frac{px+qr+rz}{p+q+r}\right) \geq$$

$$\geq (p+q)f\left(\frac{px+qy}{p+q}\right)+(q+r)f\left(\frac{qy+rz}{q+r}\right)+(r+p)f\left(\frac{rz+px}{r+p}\right)$$

16.3 Mở rộng 2 Bất đẳng thức Popoviciu (Vasile Cirtoaje, 2002)

Nếu f là hàm lồi trên khoảng $\mathbb{I}$ *và* $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{I}$ *thì*

$$f(a_1)+f(a_2)+\ldots+f(a_n)+n(n-2)f(a) \geq (n-1)\left[f(b_1)+f(b_2)+\ldots+f(b_n)\right],$$

16.4 Mở rộng 3 Bất đẳng thức Popoviciu (Vasile Cirtoaje, 2004)

Nếu f là hàm lồi trên khoảng $\mathbb{I}$ *và* $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{I}$ *thì*

$$f(a_1)+f(a_2)+\ldots+f(a_n)+\frac{n}{n-2}f(a) \geq \frac{2}{n-2}\sum_{1\leq i<j\leq n} f\left(\frac{a_i+a_j}{2}\right)$$

trong đó $a=\dfrac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$, *và* $b_i=\dfrac{1}{n-1}\sum_{j\neq i} a_j$ *với mọi* i.

16.5 Mở rộng 2 Bất đẳng thức Popoviciu (Bill Zhao, 2005)

Nếu f là hàm lồi trên khoảng $\mathbb{I}$ *và* $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{I}$, *thì*

$$\binom{m-1}{n-2}\sum_{k=1}^{n} f(a_k)+n\binom{m-2}{n-2}f\left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\right) \geq m\sum_{1\leq i_1<\ldots<i_m\leq n} f\left(\frac{a_{i1}+a_{i2}+\ldots+a_{im}}{m}\right)$$

17.1 Bất đẳng thức Petrovica

Cho $f(x)$ là hàm lồi trên $[0, a]$. Giả sử $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [0, a]$ sao cho $x_1+x_2+\ldots+x_n \in [0, a]$.

Khi đó ta có : $f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n) \leq f(x_1+x_2+\ldots+x_n)+(n-1)f(0)$

17.2 Mở rộng 1 Bất đẳng thức Petrovica

Cho $f(x)$ là hàm lồi trên $[0, a]$ và $p_1, p_2, \ldots, p_n \geq 0$. Giả sử $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \left[0, \sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right]$ và

$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i < a$. Khi đó ta có bất đẳng thức $\sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i) \leq f\left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right)+\left(\sum_{i=1}^{n} p_i - 1\right).f(0)$

17.3 Mở rộng 2 Bất đẳng thức Petrovica (Vasic)

Cho $f(x)$ là hàm lồi trên $[0, a]$ và $x_1, x_2, ..., x_n, p_1, p_2, ..., p_n \geq 0$ thỏa mãn các điều kiện sau:

1. $x_1, x_2, ..., x_n \in [0, a]$ *2.* $p_1, p_2, ..., p_n \geq 1$ *3.* $\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{n} p_i x_i \in [0, a]$

4. $\sum_{i=1}^{n_1-1} p_i x_i = \sum_{i=n_1}^{n_2-1} p_i x_i = ... = \sum_{i=n_{k-1}}^{n} p_i x_i \quad (n_1 < n_2 < ... < n_{k-1})$

Khi đó ta có bất đẳng thức: $\sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i) \leq kf\left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right) - \left(k - \sum_{i=1}^{n} p_i\right) f(0)$

18. Bất đẳng thức trong tích phân Riman

18.1 Bất đẳng thức cơ bản trong tích phân Riman

- ***Mệnh đề 1:*** Nếu f là một hàm số liên tục trên $[a, b]$ và $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [a, b]$ thì $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$

- ***Mệnh đề 2:*** Nếu f, g liên tục trên $[a, b]$ và $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in [a, b]$ thì $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$

- ***Mệnh đề 3:*** Nếu f là một hàm số liên tục trên $[a, b]$ thỏa mãn $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [a, b]$ và hàm số $f(x)$ không đồng nhất bằng 0 trên $[a, b]$ thì $\int_a^b f(x)\,dx > 0$

- ***Mệnh đề 4:*** Nếu f, g là hai hàm số liên tục trên $[a,b]$ thỏa mãn $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in [a,b]$ và $f(x)$, $g(x)$ không đồng nhất với nhau trên $[a, b]$ thì $\int_a^b f(x)\,dx < \int_a^b g(x)\,dx$

- ***Mệnh đề 5:*** Nếu f là một hàm số liên tục trên $[a, b]$ thỏa mãn $m \leq f(x) \leq M$ $\forall x \in [a, b]$ và hàm $f(x)$ không đồng nhất với m hoặc M thì $m(b-a) < \int_a^b f(x)dx < M(b-a)$

- ***Mệnh đề 6:*** Nếu f là một hàm số liên tục trên $[a, b]$ thì $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$

- ***Mệnh đề 7:*** Nếu f, g là hai hàm số liên tục trên $[a, b]$ thì $\left|\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)\,g(x)|\,dx$

- ***Định lý về giá trị trung bình:*** Nếu f là một hàm số liên tục trên $[a, b]$ thì tồn tại ít nhất 1 điểm $c \in [a, b]$ sao cho $\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$

• ***Định lý mở rộng về giá trị trung bình:*** Giả sử f, g là hai hàm số liên tục trên $[a, b]$.

Nếu $g(x) \geq 0\ \forall x \in [a, b]$ hoặc $g(x) \leq 0\ \forall x \in [a, b]$ thì tồn tại ít nhất một điểm $c \in [a, b]$ sao cho

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{dx} = f(c)\int_a^b g(x)\,\mathrm{dx}$$

18.2 Bất đẳng thức Cauchy – Bunhiakowski – Schwarz

Cho hai hàm số f, g liên tục trên $[a, b]$. Khi đó ta có: $\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \leq \int_a^b f^2(x)dx\int_a^b g^2(x)dx$

18. 3 Bất đẳng thức Young

Cho p, $q > 1$ thỏa mãn $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Khi đó ta có: $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\quad \forall a, b > 0$

18.4 Bất đẳng thức Hilbert

Nếu $a_i, b_i \geq 0$; $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$; $p > 1$ thì khi đó: $\sum_{m=1}^{k}\sum_{n=1}^{k}\frac{a_n b_m}{m+n} \leq \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{p}}\left(\sum_{n=1}^{k} a_n^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{m=1}^{k} b_m^q\right)^{\frac{1}{q}}$

18.5 Bất đẳng thức tích phân Holder

Cho p, $q > 1$ với $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ và f, g là hai hàm số liên tục trên $[a,b]$.

Khi đó ta có: $\int_a^b |f(x)g(x)|dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \exists$ A, B $\in$ R, $A^2 + B^2 > 0$: $A|f(x)|^p = B|g(x)|^q\quad \forall x \in [a,b]$

18.6 *Bất đẳng thức tích phân Minkowski*

Cho $p > 1$ và f, g là hàm số liên tục trên $[a, b]$. Khi đó ta có:

$$\left(\int_a^b |f(x) + g(x)|^p\,\mathrm{dx}\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p\,\mathrm{dx}\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g(x)|^p\,\mathrm{dx}\right)^{\frac{1}{p}}$$

18.7 *Bất đẳng thức tích phân Diaz*

Cho $f(x)$, $g(x)$ là các hàm liên tục trên $[a,b]$, $f(x) \neq 0$ và $m \leq \frac{g(x)}{f(x)} \leq M\quad \forall x \in [a,b]$.

Khi đó ta có: $\int_a^b g^2(x)\mathrm{dx} + Mm\int_a^b f^2(x)\mathrm{dx} \leq (M+m)\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{dx}$

18.8 *Bất đẳng thức tích phân G.Polya*

Cho f, g là các hàm liên tục trên $[a,b]$ và $\begin{cases} 0<a\le f(x)\le A \\ 0<b\le g(x)\le B \end{cases} \forall x\in[a,b]$

Khi đó ta có: $$\frac{(ab+AB)^2}{4aAbB}\ge\frac{\int_a^b g^2(x)\,\mathrm{dx}.\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{dx}}{\left(\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{dx}\right)^2}\ge\frac{4aAbB}{(ab+AB)^2}$$

18. 9 Bất đẳng thức tích phân Chebyshev

Cho hai hàm số $f(x)$, $g(x)$ liên tục và đơn điệu trên $[a, b]$. Khi đó ta có:

a. Nếu $f(x)$, $g(x)$ là hai hàm cùng đồng biến hoặc là hai hàm cùng nghịch biến thì ta có

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{dx}\ge\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx}\right)\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)\,\mathrm{dx}\right)$$

b. Nếu $f(x)$, $g(x)$ có tính đơn điệu ngược chiều nhau tức là một hàm đồng biến và một hàm nghịch biến thì ta có bất đẳng thức:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{dx}\le\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx}\right)\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)\,\mathrm{dx}\right)$$

19. PHƯƠNG PHÁP PHÂN TÍCH TỔNG BÌNH PHƯƠNG (S.O.S)

Xét bất đẳng thức $A\ge B$ trong đó A, B là các biểu thức chứa các biến số a,b,c.

Giả sử ta biến đổi được bất đẳng thức $A-B\ge 0$ có dạng:

$S=A-B=S_a(b-c)^2+S_b(c-a)^2+S_c(a-b)^2\ge 0$ **(1)**. Xét các mệnh đề sau:

19.1 Mệnh đề 1: Nếu $S_a\ge 0; S_b\ge 0; S_c\ge 0$ thì

$S=S_a(b-c)^2+S_b(c-a)^2+S_c(a-b)^2\ge 0$

Đây là một trường hợp tầm thường. Dưới đây ta sẽ xét các dấu hiệu khác để (1) đúng.

19.2 Mệnh đề 2: Cho các số thực a,b,c,S_a,S_b,S_c thoả mãn 2 điều kiện:

i) $S_a+S_b\ge 0; S_b+S_c\ge 0; S_c+S_a\ge 0$.

ii) Nếu $a\le b\le c$ hoặc $a\ge b\ge c$ thì $S_b\ge 0$

Khi đó ta có $S=S_a(b-c)^2+S_b(c-a)^2+S_c(a-b)^2\ge 0$ (1)

19.3 Mệnh đề 3: Cho các số thực a, b, c, S_a, S_b, S_c thoả mãn điều kiện:

Nếu $a \le b \le c$ hoặc $a \ge b \ge c$ thì $S_a \ge 0, S_c \ge 0$ và $S_a + 2S_b \ge 0; S_c + 2S_b \ge 0$

Khi đó ta có $S = S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \ge 0$ (1)

19.4. Mệnh đề 4: Cho các số thực a, b, c, S_a, S_b, S_c thoả mãn điều kiện:

Nếu $a \le b \le c$ thì $S_a \ge 0, S_b \ge 0$ và $b^2S_c + c^2S_b \ge 0$

Khi đó ta có $S = S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \ge 0$ (1)

19.5. Mệnh đề 5: Cho các số thực a, b, c, S_a, S_b, S_c thoả mãn 2 điều kiện:

i) $S_a + S_b > 0 \vee S_b + S_c > 0 \vee S_c + S_a > 0$

ii) $S_aS_b + S_bS_c + S_cS_a \ge 0$

Khi đó ta có $S = S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \ge 0$ (1)

19.6. Mệnh đề 6: Cho các số thực a, b, c, S_a, S_b, S_c thoa mãn điều kiện:

i) $a \le b \le c$ hoặc $a \ge b \ge c$

ii) Tồn tại $\alpha > 0$ sao cho $S_a + \alpha^2 S_c + (\alpha+1)^2 S_b \ge 0$

iii) $\begin{cases} |a-b| \ge \alpha|c-b| \\ S_c + S_b \ge 0 \\ S_c + \dfrac{\alpha+1}{\alpha} S_b \ge 0 \end{cases} \vee \begin{cases} |c-b| \ge \alpha|a-b| \\ S_a + S_b \ge 0 \\ S_a + \dfrac{\alpha+1}{\alpha} S_b \ge 0 \end{cases}$

Khi đó ta có: $S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \ge 0$ (1)

Hệ quả: Cho các số thực a, b, c, S_a, S_b, S_c thoả mãn các điều kiện

i) $a \le b \le c$ hoặc $a \ge b \ge c$ **ii)** $S_a + S_c + 4S_b \ge 0$

iii) $\begin{cases} |a-b| \ge |c-b| \\ S_c + S_b \ge 0 \\ S_c + 2S_b \ge 0 \end{cases} \vee \begin{cases} |c-b| \ge |a-b| \\ S_a + S_b \ge 0 \\ S_a + 2S_b \ge 0 \end{cases}$

Khi đó ta có: $S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \ge 0$

20. PHƯƠNG PHÁP DỒN BIẾN (MV)

20.1 BẤT ĐẲNG THỨC 3 BIẾN VỚI CỰC TRỊ ĐẠT TẠI GIÁ TRỊ BIẾN ĐỐI XỨNG

• Giả sử ta cần chứng minh bất đẳng thức $f(x,y,z)\ge 0$ với x, y, z là các biến số thực thỏa mãn các tính chất nào đấy. Khi đó ta sẽ thực hiện 2 bước chính sau:

Bước 1: (Kĩ thuật dồn về 2 biến bằng nhau) Đánh giá $f(x,y,z)\ge f(t,t,z)$ với t là biến sao cho bộ số (t,t,z) thỏa mãn mọi tính chất của bộ (x,y,z).

Bước 2: Đánh giá $f(t,t,z)\ge 0$.

Chú ý: Đối với các bất đẳng thức đồng bậc ta có thể làm cho chứng minh đơn giản hơn bằng cách chuẩn hóa các biến trong bất đẳng thức trước khi thực hiện 2 bước

20.1.1 Bất đẳng thức không điều kiện:

Đối với những bất đẳng thức không có điều kiện thì dồn biến theo các đại lượng trung bình chẳng hạn $t=\dfrac{x+y}{2}; t=\sqrt{xy}; t=\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{2}}$... là kỹ thuật chính dùng để dồn 2 biến bằng nhau.

20.1.2 Dồn biến với bất đẳng thức có điều kiện

Để chứng minh bất đẳng thức $f(a,b,c)\ge 0$ với các biến a,b,c thỏa mãn điều kiện $g(a,b,c)=0$ thì thực hiện bước 1 ta cần chứng minh $f(a,b,c)\ge f(a,t,t)$ với t là biến thỏa mãn $g(a,t,t)=0$

20.2 DỒN BIẾN BẰNG KĨ THUẬT HÀM SỐ

Giả sử cần chứng minh $f(x,y,z)\ge f(x,t,t)$ với $t=\dfrac{y+z}{2}$, ta xét hàm: $g(s)=f(x,t+s,t-s)$ với $s\ge 0$. Sau đó chứng minh g tăng $\forall s\ge 0$ (thường sử dụng đạo hàm), suy ra $g(s)\ge g(0)$.

20.3 BẤT ĐẲNG THỨC 3 BIẾN VỚI CỰC TRỊ ĐẠT ĐƯỢC TẠI BIÊN

Xét bất đẳng thức $f(x,y,z)\ge 0$ với $x,y,z\ge 0$, ta sẽ chứng minh $f(x,y,z)\ge f(0,s,t)$, trong đó s, t là các đại lượng thích hợp sinh ra từ các biến a, b, c. Thích hợp ở đây chính là việc bộ số $(0,s,t)$ phải thỏa mãn tất cả các điều kiện của (a, b, c), đồng thời hiệu $d=f(x,y,z)-f(0,s,t)\ge 0$ cần đơn giản nhất có thể.

Cuối cùng ta chỉ việc kiểm chứng $f(0,s,t)\ge 0$.

Định lý dồn biến mạnh [SMV–Strongly Mixing Variables]

Cho: • $D\in\mathbb{R}^n, D=\left\{x=(x_1,x_2,...x_n)\,|\,x_i\ge\alpha, \sum x_i\ge\alpha, \sum x_i=ns=const\right\}$ và $s_0=(s,s,...,s)\in D$

• Phép biến đổi $T: D\to D$ như sau: với mỗi phần tử $a=(a_1,a_2,...a_n)\in D, a\ne s_0$.

ta chọn ra 2 chỉ số $i \neq j$ nào đó (tùy theo hàm f bên dưới) sao cho $a_i \neq a_j$, rồi thay a_i, a_j bởi trung bình cộng của chúng.

• $f : D \to \mathbb{R}$ là hàm số liên tục thỏa mãn: $f(a) \geq f(T(a)), \forall a \in D$.

Khi đó: $f(a) \geq f(s_0), \forall a \in D$

20.4 DỒN BIẾN KHÔNG XÁC ĐỊNH [UMV – UNDERFINE MIXING VARIABLES]

Định lý UMV:

Cho $D \subset \{x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geq 0, \forall i = 1, ..., n\}$, D đóng và bị chặn. Gọi Λ là tập hợp các phần tử trong D có t thành phần bằng 0 và $n - t$ thành phần bằng nhau $(t \geq 0)$.

• Xét 2 phép biến đổi $T_1, T_2 : D \to D$ như sau: Với mỗi phần tử $a = (a_1, a_2, ... a_n) \in D \setminus \Lambda$, chọn ra 2 chỉ số $i \neq j$ sao cho $a_i = \min\{a_t > 0, t = 1, ..., n\}$ và $a_j = \max\{a_1, a_2, ... a_n\}$, sau đó thay a_i, a_j bởi $\alpha, \beta \in (a_i, a_j)$ (ứng với T_1) và $\alpha' < a_i < a_j < \beta'$ (ứng với T_2).

• Giả sử $f : D \to \mathbb{R}$ liên tục thỏa mãn: $f(a) \geq \min\{f(T_1(a)), f(T_2(a))\}, \forall a \in D$

Khi đó ta có $f(x) \geq \min\limits_{y \in \Lambda}\{f(y)\}, \forall x \in D$

20.5 DỒN BIẾN VỀ GIÁ TRỊ TRUNG BÌNH

Là phương pháp dồn biến nữa dành cho hàm lồi được dựa trên cơ sở hai định lý sau:

Định lý 1: Cho f là hàm lồi $[a, b] \to \mathbb{R}$. Ta có: $f(a) + f(b) \geq f(x) + f(a + b - x), \forall x \in [a, b]$

Định lý 2: (bất đẳng thức ***Jensen***) Cho f là hàm số lồi $[a, b] \to \mathbb{R}$. Khi đó:

$\forall x_1, x_2, ..., x_n \in [a, b]$ ta có: $f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_n) \geq n f\left(\dfrac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}\right) = n f(T)$

20.6 DỒN BIẾN BẰNG QUY NẠP THỪA

Giả sử ta cần chứng minh một bất đẳng thức của n biến $a_1, a_2, ..., a_n$ có điều kiện ràng buộc là $a_1 a_2 ... a_n = 1$, trong đó đẳng thức xảy ra khi n biến bằng nhau. Chính đẳng thức ràng buộc này không cho phép chúng ta giải bài toán bằng quy nạp. Tuy nhiên, nếu chúng ta sửa điều kiện ràng buộc lại thành $a_1 a_2 ... a_n \geq 1$ thì khi đó ta có thể giả sử, chẳng hạn $a_n = \min\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ để có $a_1 a_2 ... a_{n-1} \geq 1$ và ta có thể dùng giả thiết cho n-1 biến này để quy về trường hợp n-1 biến bằng nhau. Sau đây là một ví dụ đặc sắc cho kĩ thuật này.

20.7 DỒN BIẾN TOÀN MIỀN [EMV – ENTIRELY MIXING VARIABLES]

Tất cả những kỹ thuật dồn biến mà chúng ta đã được đề cập ở các mục trên đều có một đặc điểm chung là khi thực hiện phép dồn biến: $f(a,b,c)\ge f(a',b',c')$ thì bộ ba số (a,b,c) và (a',b',c') đều có một đại lượng đặc trưng giống nhau, chẳng hạn như tổng, tích…

Phương pháp *EMV* cũng có đại lượng đặc trưng không đổi sau khi dồn biến. Tuy nhiên, sự khác biệt hoàn toàn so với các phương pháp dồn biến trước là: "Đại lượng đặc trưng không đổi khi sử dụng *EMV* là hiệu các biến, tức là các đại lượng $a-b, b-c, c-a$".

Tư tưởng chủ đạo của *EMV* là chứng minh khi tăng hoặc giảm các biến đi cùng một đại lượng, bất đẳng thức yếu đi hoặc không đổi. Từ đó chỉ cần chứng minh bất đẳng thức trong trường hợp một biến ở biên.

Chú ý rằng nếu sử dụng *EMV* trong bất đẳng thức n biến, khi dồn một biến về biên, thì bất đẳng thức còn $n-1$ biến, tuy nhiên, nếu số biến còn lại vẫn ≥ 3 thì việc chứng minh là khá phức tạp. Vì vậy *EMV* thường sử dụng trong bất đẳng thức ba biến với phương pháp dồn biến có biên tại 0 hoặc dồn biến với các đại lượng trong tam giác.

20.8. DỒN BIẾN TỔNG QUÁT [GMV – GENERAL MIXING VARIABLES]

Đây là một định lý rất tổng quát, bao gồm gần như toàn bộ các khả năng dồn biến.

20.8.1 Chúng ta bắt đầu bằng một số định nghĩa trong không gian $\mathbb{R}^n$.

Định nghĩa 1:

• Không gian $\mathbb{R}^n$ là tập hợp các bộ thứ tự $x=(x_1,x_2,...x_n)$ với $x_i\in\mathbb{R},\forall i$.

• Một dãy $\{x_m=(x_{1,m},x_{2,m},....,x_{n,m})\}$ trong $\mathbb{R}^n$ gọi là hội tụ về $z=(z_1,z_2,...,z_n)\in\mathbb{R}^n$ nếu từng dãy $x_{i,m}$ hội tụ về z_i khi $m\to\infty,\forall i=1,2,...,n$.

• Cho $D\subset\mathbb{R}^n$. Một hàm số $f:D\to\mathbb{R}$ gọi là liên tục trên D nếu: với mọi dãy $\{x_m\}\subset D$ và với mọi $z\in D$ sao cho $\{x_m\}$ hội tụ về z thì ta đều có: $f(x_m)$ hội tụ về $f(z)$.

Định nghĩa 2: Cho $D\subset\mathbb{R}^n$. Ta nói:

• D đóng nếu với mọi dãy $\{x_m\}\subset D$ và với mọi $z\in\mathbb{R}^n$ sao cho $\{x_m\}$ hội tụ về z, thì ta có $z\in D$.

• D bị chặn nếu tồn tại số thực M sao cho: $\forall x=(x_1,x_2,...x_n)\in D$, thì $|x_i|\le M,\forall i=1,2,...,n$.

Ví dụ như một tập hợp hữu hạn thì đóng và bị chặn.

Chúng ta có kết quả căn bản sau đây (sẽ chứng minh ở cuối mục này)

Định lý Weierstrass: Cho D đóng và bị chặn trong $\mathbb{R}^n$, và $f: D \to \mathbb{R}$ liên tục. Thì f đạt giá trị nhỏ nhất trên D, nghĩa là tồn tại $x_0 \in D$ sao cho: $f(x_0) \le f(x), \forall x \in \mathbb{R}$. Chúng ta cũng có kết quả tương tự với giá trị lớn nhất.

• ***Bình luận:*** Định lý này là một mở rộng của một kết quả quen thuộc: "Cho $[a, b]$ là 1 khoảng đóng trong R và $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ liên tục, thì f có giá trị nhỏ nhất trên $[a, b]$". Do đó, về mặt trực giác thì định lý 1 khá rõ ràng.

20.8.2 Định lý GMV: Ta sẽ luôn giả thiết rằng:

• D là 1 tập con trong $\mathbb{R}^n$, và Λ là 1 tập con đóng của D.

• $f: D \to \mathbb{R}$ là một hàm số liên tục liên tục sao cho f có giá trị nhỏ nhất trên Λ.

• $T_1, \dots, T_k: D \to D$ là các phép biến đổi sao cho $T_1(x) = \dots = T_k(x) = x, \forall x \in \Lambda$.

Ta sẽ đặt ra các tiêu chuẩn để giá trị nhỏ nhất của f trên Λ cũng chính là giá trị nhỏ nhất của f trên D. Ta có

Định lý GMV1: Nếu

• $f(x) \ge \min\limits_{j=\overline{1,k}} \{f(T_j(x)\}, \forall x \in D \setminus \Lambda$

• $\forall j = \overline{1,k}, \forall x \in D$ ta có $\lim\limits_{m \to \infty} T_j^m(x) \in \Lambda$, trong đó $T_j^0(x) = x, T_j^m(x) = T_j\left(T_j^{m-1}(x)\right)$

thì $f(x) \ge \min\limits_{y \in \Lambda} \{f(y)\}, \forall x \in D$.

Hơn nữa, đẳng thức không xảy ra trên $D \setminus \Lambda$ nếu $f(x) > \min\limits_{j=\overline{1,k}} f(T_j(x)), \forall x \in D \setminus \Lambda$.

Định lý GMV2: Nếu

• D đóng và bị chặn trong $\mathbb{R}^n$.

• $f(x) > \min\limits_{j=\overline{1,k}} f(T_j(x)), \forall x \in D \setminus \Lambda$.

thì $f(x) \ge \min\limits_{y \in \Lambda} \{f(y)\}, \forall x \in D$, hơn nữa đẳng thức không xảy ra trên $D \setminus \Lambda$.

Định lý GMV3: Nếu

• D đóng và bị chặn trong $\mathbb{R}^n$.

• $f(x) \ge \min\limits_{j=\overline{1,k}} f(T_j(x)), \forall x \in D \setminus \Lambda$

• Tồn tại các hàm số h_j liên tục $D \to \mathbb{R}$ thỏa mãn: $h_j(x) > h_j(T_j(x)), \forall x \in D \setminus \Lambda$.

thì $f(x) \ge \min\limits_{y \in \Lambda} \{f(y)\}, \forall x \in D$.

21. PHƯƠNG PHÁP ABC

Xét lớp các bất đẳng thức đối xứng ba biến a, b, c có thể đưa về bất đẳng thức hàm $f(a,b,c)$ chỉ chứa các đại lượng $a+b+c$, $ab+bc+ca$, abc so sánh với hằng số. Khi đó chúng ta sẽ khảo sát hàm $f(a,b,c)$ theo biến abc với hai đại lượng cố định là $a+b+c$, $ab+bc+ca$.

21.1 Định lý 1: Nếu $f(abc, ab+bc+ca, a+b+c)$ là hàm đơn điệu trên $\mathbb{R}$ theo abc thì giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất xảy ra khi trong ba số a,b,c có hai số bằng nhau, còn trong tập $\mathbb{R}^+$ thì xảy ra khi có một số bằng 0 hay có hai số bằng nhau.

21.2 Định lý 2: Nếu $f(abc, ab+bc+ca, a+b+c)$ là hàm lồi trên $\mathbb{R}$ theo abc thì giá trị lớn nhất xảy ra khi trong ba số a,b,c có hai số bằng nhau, còn trong tập $\mathbb{R}^+$ thì xảy ra khi có một số bằng 0 hay có hai số bằng nhau.

21.3 Định lý 3: Nếu $f(abc, ab+bc+ca, a+b+c)$ là hàm lõm trên $\mathbb{R}$ theo abc thì giá trị nhỏ nhất xảy ra khi trong ba số a,b,c có hai số bằng nhau, còn trong tập $\mathbb{R}^+$ thì xảy ra khi có một số bằng 0 hay có hai số bằng nhau

21.4 Định lý ABC mở rộng

i) Cho a,b,c đồng thời là các số thực hoặc là các số thực dương. Khi đó nếu đại lượng $abc, a+b+c$ đã được cho trước (nghĩa là đã được cố định sẵn) thì $ab+bc+ca$ sẽ đạt giá trị lớn nhất và nho nhất khi có hai trong ba biến a,b,c bằng nhau.

ii) Cho a,b,c đồng thời là các số thực dương. Khi đó nếu đại lượng abc, $ab+bc+ca$ đã được cho trước (nghĩa là đã được cố định sẵn) thì $a+b+c$ sẽ đạt giá trị nhỏ nhất khi có hai trong ba biến a,b,c bằng nhau.

21.5. ĐỊNH LÝ ABC TỔNG QUÁT

21.5.1 Khả ABC: Ta gọi $f(a,b,c)$ là một biểu thức khả *ABC* nếu như bất đẳng thức $f(a,b,c) \geq 0$ có thể được chứng minh dựa vào định lý *ABC* để đưa về hai trường hợp sau:

i) Hai biến bằng nhau.

ii) Một biến bằng 0 (Điều kiện này chỉ xuất hiện khi chứng minh khả *ABC* đối với abc)

21.5.2 Định lý : Xét một biểu thức đối xứng n biến $f(a_1, a_2, ..., a_n)$, trong đó f có giá trị nhỏ nhất và $n \geq 3$. Ta sẽ coi $f(a_1, a_2, ..., a_n)$ như là một biểu thức ba biến $g(a_1, a_2, a_3)$ với các số $a_4, a_5, ..., a_n$ được coi như là các hằng số. Khi đó nếu g khả ABC thì bất đẳng thức $f(a_1, a_2, ..., a_n) \geq 0$ có thể đưa về xét hai trường hợp sau:

i) m biến bằng nhau, $n-m$ biến bằng nhau.

ii) Một biến bằng 0 (điều kiện này chỉ xuất hiện khi chứng minh khả ABC đối với abc)

Bất đẳng thức được chứng minh là đúng nếu nó được chứng minh trong hai trường hợp trên

22. PHƯƠNG PHÁP HÌNH HỌC HÓA BẤT ĐẲNG THỨC ĐẠI SỐ (GLA)

22.1 PHƯƠNG PHÁP GLA VỚI 3 BIẾN SỐ VÀ PHÉP ĐỔI BIẾN SỐ TRONG TAM GIÁC

• Với $a, b, c > 0$, đặt $x = b + c, y = c + a, z = a + b$ thì x, y, z trở thành độ dài 3 cạnh của một tam giác XYZ với p, R, r, S lần lượt là nửa chu vi, bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp và diện tích của tam giác XYZ. Khi đó ta có các đẳng thức và các định lý quan trọng sau đây:

22.1.1 Các đẳng thức cơ bản

1. $a^2 + b^2 + c^2 = p^2 - 8Rr - 2r^2$; $ab + bc + ca = 4Rr + r^2$

Hệ quả: $\dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca} = \dfrac{p^2 - 8Rr - 2r^2}{4Rr + r^2} = \dfrac{p^2}{4Rr + r^2} - 2$

2. $(a+b)(b+c)(c+a) = xyz = 4Rrp$; $abc = (p-x)(p-y)(p-z) = \dfrac{S^2}{p} = pr^2$

Hệ quả: $\dfrac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} = \dfrac{r}{4R}$; $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = \dfrac{4R + r}{pr}$; $\dfrac{1}{ab} + \dfrac{1}{bc} + \dfrac{1}{ca} = \dfrac{1}{r^2}$

3. $\dfrac{a+b}{c} + \dfrac{b+c}{a} + \dfrac{c+a}{b} = \dfrac{2(2R - r)}{r}$

4. $a^3 + b^3 + c^3 = (a+b+c)\left[(a^2 + b^2 + c^2) - (ab + bc + ca)\right] + 3abc$

$= p(p^2 - 8Rr - 2r^2 - 4Rr - r^2) + 3pr^2 = p(p^2 - 12Rr)$

5. $a^4 + b^4 + c^4 = (p^2 - 8Rr - 2r^2)^2 - 2(4Rr + r^2)^2 + 4p^2r^2 = p^4 - 16Rrp^2 + 2(4Rr + r^2)^2$

6. $\dfrac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}} = \dfrac{p}{\sqrt[3]{pr^2}} = \sqrt[3]{\dfrac{p^2}{r^2}}$

7. $16S^2 = 2(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) - (x^4 + y^4 + z^4)$

8. $\dfrac{a}{b+c} + \dfrac{b}{c+a} + \dfrac{c}{a+b} = (a+b+c)\left(\dfrac{1}{a+b} + \dfrac{1}{b+c} + \dfrac{1}{c+a}\right) - 3 = \dfrac{p^2 - 8Rr + r^2}{4Rr}$

9. $\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2} = \dfrac{(ab + bc + ca)^2 - 2abc(a+b+c)}{a^2b^2c^2} = \dfrac{(4R + r)^2 - 2p^2}{p^2r^2}$

10. $\dfrac{1}{a+b} + \dfrac{1}{b+c} + \dfrac{1}{c+a} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{xy + yz + zx}{xyz} = \dfrac{p^2 + 4Rr + r^2}{4Rrp}$

11. $\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} + \dfrac{1}{z^2} = \dfrac{(xy + yz + zx)^2 - 2xyz(x+y+z)}{x^2y^2z^2} = \dfrac{(p^2 + 4Rr + r^2)^2}{16R^2r^2p^2} - \dfrac{1}{Rr}$

12. $\frac{ab}{c}+\frac{ac}{b}+\frac{bc}{a}=\frac{(ab+bc+ca)^2-2abc(a+b+c)}{abc}=\frac{(4R+r)^2-2p^2}{p}$

13. $a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3=(ab+bc+ca)^3-3abc(a+b)(b+c)(c+a)=r^3(4R+r)^3-12p^2r^3R$

14. $\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{1}{b^2+c^2}+\frac{1}{c^2+a^2}=\frac{p^4-8(2R+r)rp^2+5r^2(4R+r)^2}{4r^2(4R^2+6Rr+r^2)p^2-2p^4r^2-2r^3(4R+r)^3}$

15. $(a^2b+b^2c+c^2a)(a^2c+b^2a+c^2b)=a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3+3a^2b^2c^2+abc(a^3+b^3+c^3)$

$=r^3(4R+r)^3-12R^2r^3p+3p^2r^4+p^2r^2(p^2-12Rr)=r^2\left[r(4R+r)^3+3p^2r^2+p^4-24Rrp^2\right]$

22.1.2 Các định lý

1. Định lý 1: Tam giác có hai góc $\geq 60^\circ \Leftrightarrow p\geq\sqrt{3}(R+r)$

Tam giác có hai góc $\leq 60^\circ \Leftrightarrow p\leq\sqrt{3}(R+r)$

Tam giác có một góc bằng $60^\circ \Leftrightarrow p=\sqrt{3}(R+r)$

2. Định lý 2: Với mọi tam giác ta có các bất đẳng thức

$2R^2+10Rr-r^2-2(R-2r)\sqrt{R(R-2r)}\leq p^2\leq 2R^2+10Rr+r^2+2(R-2r)\sqrt{R(R-2r)}$

3. Định lý 3: Với mọi tam giác nhọn ta có các bất đẳng thức:

$p^2\geq 2R^2+8Rr+3r^2$; $a^2+b^2+c^2\geq 4(R+r)^2$ (1); $ab+bc+ca\geq 2R^2+12Rr+4r^2$

4. Định lý 4: Với mọi tam giác ta có $a^2+b^2+c^2\leq 8R^2+4r^2$

5. Định lý 5: Với mọi tam giác ta có $p^2\geq 16Rr-5r^2+\frac{r^2(R-2r)}{R}$ (*)

22.1.3 Phương pháp chung

Để chứng minh một bất đẳng thức đối xứng $F(a,b,c)\geq G(a,b,c)$ với a, b, c không âm, ta đặt $x=b+c, y=c+a, z=a+b$, khi đó x, y, z trở thành độ dài 3 cạnh của một tam giác XYZ và một bất đẳng thức đại số được đưa về bất đẳng thức hình học với các biến p, R, r lần lượt là nửa chu vi, bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp của tam giác XYZ. Sau đó ta phải chứng minh $f(p)=VT-VP\geq 0$. Xét dấu $f'(p)$ rồi tìm cách đánh giá p theo R, r.

Ta chú ý đến đánh giá rất quan trọng sau đây:

$2R^2+10Rr-r^2-2(R-2r)\sqrt{R(R-2r)}\leq p^2\leq 2R^2+10Rr-r^2+2(R-2r)\sqrt{R(R-2r)}$

Khi đó nếu đặt $\begin{cases} p_1=\sqrt{2R^2+10Rr-r^2-2(R-2r)\sqrt{R(R-2r)}} \\ p_2=\sqrt{2R^2+10Rr-r^2+2(R-2r)\sqrt{R(R-2r)}}\end{cases}$ thì $p\in[p_1,p_2]$

Nhận xét:

1. Nếu ΔXYZ cân thì $p = p_1$ hoặc $p = p_2$.

• Nếu giá trị lớn nhất $f(p)$ hoặc giá trị nhỏ nhất $f(p)$ đạt tại $p = p_1$ thì ΔXYZ cân có 2 góc đáy bằng nhau và $\le 60°$, khi đó trong 3 biến x, y, z có 2 biến bằng nhau và nhỏ hơn biến còn lại $\Leftrightarrow$ Trong 3 biến a, b, c có 2 biến bằng nhau và lớn hơn hoặc bằng biến còn lại.

• Nếu giá trị lớn nhất $f(p)$ hoặc giá trị nhỏ nhất $f(p)$ đạt tại $p = p_2$ thì ΔXYZ cân có 2 góc đáy bằng nhau và $\ge 60°$, khi đó trong 3 biến x, y, z có 2 biến bằng nhau và lớn hơn biến còn lại $\Leftrightarrow$ Trong 3 biến a, b, c có 2 biến bằng nhau và nhỏ hơn hoặc bằng biến còn lại.

2. Khi đưa bất đẳng thức về dạng chứa p, R, r nếu có biểu thức chứa r làm nhân tử chung thì khi $r = 0$ hay trong 3 biến a, b, c có 1 biến bằng 0 thì đẳng thức xảy ra.

3. Từ các nhận xét 1 và 2 suy ra nếu $f(p)$ đạt giá trị lớn nhất, nhỏ nhất tại p_1 hoặc p_2 hoặc $r = 0$ thì công việc còn lại là chứng minh bất đẳng thức với 2 biến số.

Với câu hỏi đặt ra là khi nào $f(p)$ đạt giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất tại p_1 hoặc p_2 ta có kết luận sau:

3.1. Nếu $f'(p) \ge 0$, $\forall p \in [p_1, p_2]$ thì $\text{Min } f(p) = f(p_1)$; $\text{Max } f(p) = f(p_2)$

Nếu $f'(p) \le 0$, $\forall p \in [p_1, p_2]$ thì $\text{Min } f(p) = f(p_2)$; $\text{Max } f(p) = f(p_1)$

Đẳng thức xảy ra khi $p = p_1$ hoặc $p = p_2$ ứng với trong 3 biến số a, b, c có 2 biến số bằng nhau hoặc có một biến số bằng 0.

p	p_1		p_2
$f'(p)$		$+$	
$f(p)$	$f(p_1)$	$\nearrow$	$f(p_2)$

p	p_1		p_2
$f'(p)$		$-$	
$f(p)$	$f(p_1)$	$\searrow$	$f(p_2)$

3.2. Nếu $f'(p_0) = 0; f''(p) \ge 0$ thì $\text{Min } f(p) = f(p_0)$; $\text{Max } f(p) = \text{Max}\{f(p_1), f(p_2)\}$

Nếu $f'(p_0) = 0; f''(p) \le 0$ thì $\text{Max } f(p) = f(p_0)$; $\text{Min } f(p) = \text{Min}\{f(p_1), f(p_2)\}$

p	p_1		p_0		p_2
$f'(p)$		$-$		$+$	
$f(p)$	$f(p_1)$	$\searrow$	$f(p_0)$	$\nearrow$	$f(p_2)$

p	p_1		p_0		p_2
$f'(p)$		$+$		$-$	
$f(p)$	$f(p_1)$	$\nearrow$	$f(p_0)$	$\searrow$	$f(p_2)$

4. Trong một số ít các bài toán ta tìm Giá trị lớn nhất, Giá trị nhỏ nhất bằng cách tính đạo hàm theo biến $t = p^2$ hoặc theo R hoặc theo r.

Chú ý. Hãy nhớ lại cách chứng minh hình học ở trên, chính từ chứng minh đó suy ra ngay với mọi R, r cố định thì có thể tìm được ba số thực không âm a', b', c' mà trong ba số đó có 2 số bằng nhau hoặc 1 số bằng 0, sao cho tam giác X'Y'Z' với độ dài 3 cạnh là b'+c', c'+a', a'+b' cũng có R = R' và r = r'. Như thế, kết hợp nhận xét này với các kết quả ở trên ta suy ra trong các trường hợp hàm f(p) đủ tốt (đơn điệu) thì ta chỉ cần xét hai trường hợp đối với ba biến a, b, c ban đầu là hoặc trong 3 biến có 1 biến bằng 0, hoặc trong 3 biến có 2 biến bằng nhau.

22.2 PHƯƠNG PHÁP GLA CHO n BIẾN SỐ:

Giả sử $f\left(a_1,a_2,...a_n\right)$ là đa thức đối xứng với n biến số $a_1,a_2,...,a_n>0$ $(n\geq 4)$

Xét 3 biến số bất kì a_m,a_n,a_p $(m,n,p\in\{1,2,3,4...,n\})$ và cố định các biến số còn lại như hằng số. Đặt $x=a_m+a_n$, $y=a_n+a_p$, $z=a_p+a_m$, khi đó x,y,z là 3 cạnh của tam giác XYZ và 3 biến số a_m,a_n,a_p có thể đưa về thành 3 biến p,R,r (trong đó p,R,r là nửa chu vi, bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp của tam giác XYZ). Ta có các kết quả mở rộng sau đây:

22.2.1 Một đa thức đối xứng n biến dương có đạo hàm cấp 1 đơn điệu theo p, R hoặc r đều đạt giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất khi có $n-1$ biến số bằng nhau.

Tức là: $f\left(p,R,r,a_4,...,a_n\right)\geq f\underbrace{(a,...,a}_{n-1\text{ số }a},x)$ hoặc $f\left(p,R,r,a_4,...,a_n\right)\leq f\underbrace{(a,...,a}_{n-1\text{ số }a},x)$

(ở đây ta chọn 3 biến a_1,a_2,a_3 để chuyển về p,R,r)

• Nếu $f'_p\left(p,R,r,a_4,...,a_n\right)\geq 0$ thì nó sẽ đạt giá trị nhỏ nhất khi có $n-1$ biến bằng nhau và $n-1$ biến này lớn hơn hoặc bằng biến còn lại, và đạt giá trị lớn nhất khi có $n-1$ biến bằng nhau và $n-1$ biến này nhỏ hơn hoặc bằng biến còn lại.

• Nếu $f'_p\left(p,R,r,a_4,...,a_n\right)\leq 0$ thì nó sẽ đạt giá trị nhỏ nhất khi có $n-1$ biến bằng nhau và $n-1$ biến này nhỏ hơn hoặc bằng biến còn lại, và đạt giá trị lớn nhất khi có $n-1$ biến bằng nhau và $n-1$ biến này lớn hơn hoặc bằng biến còn lại.

Ta sẽ chứng minh đại diện cho trường hợp $f'_p\left(p,R,r,a_4,...,a_n\right)\geq 0$

Do $f'_p\left(p,R,r,a_4,...,a_n\right)\geq 0$ nên $f\left(p,R,r,a_4,....a_n\right)$ đồng biến theo p.

Tức là: $f\left(p_1,R,r,a_4,...,a_n\right)\leq f\left(p,R,r,a_4,...,a_n\right)\leq f\left(p_2,R,r,a_4,...,a_n\right)$

Theo như nhận xét 3 trong **21.1.3** ta có:

• $p=p_1$ khi tam giác là tam giác cân có 2 cạnh bên nhỏ hơn hoặc bằng cạnh đáy tức là trong 3 biến ban đầu có 2 biến bằng nhau và lớn hơn hoặc bằng biến còn lại. Do a_1,a_2,a_3 được chọn một cách tuỳ ý để chuyển về p,R,r và $f\left(a_1,a_2,...a_n\right)$ là đa thức đối xứng với $a_1,a_2,...a_n$ nên áp dụng liên tiếp với các biến còn lại ta được: $f(x,\underbrace{y,...,y}_{n-1})\leq f\left(a_1,a_2,...,a_n\right)$ $(x\geq y)$

• $p = p_2$ khi tam giác là tam giác cân có 2 cạnh bên lớn hơn hoặc bằng cạnh đáy tức là trong 3 biến ban đầu có 2 biến bằng nhau và nhỏ hơn hoặc bằng biến còn lại. Do a_1, a_2, a_3 được chọn một cách tuỳ ý để chuyển về $p.R.r$ và $f(a_1, a_2, ..., a_n)$ là đa thức đối xứng với $a_1, a_2, ..., a_n$ nên áp dụng liên tiếp với các biến còn lại ta được: $f(\underbrace{x,...,x}_{n-1}, y) \ge f(a_1, a_2, ..., a_n)$ $(x \le y)$

22.2.2 Mọi đa thức n biến dương có đạo hàm cấp 2 $f''(p) \ge 0$ đều đạt giá trị lớn nhất khi trong n biến có $n-1$ biến bằng nhau.

22.2.3 Mọi đa thức n biến dương có đạo hàm cấp 2 $f''(p) \le 0$ đều đạt giá trị nhỏ nhất khi trong n biến có $n-1$ biến bằng nhau.

22.2.4 Nếu $f(a_1, a_2, ... a_n)$ là đa thức đối xứng với $a_1, a_2, ... a_n \ge 0$ thì từ các nhận xét **3.1, 3.2** trong **22.1.3** ta mới chỉ có một kết quả tạm thời là giá trị nhỏ nhất của và giá trị lớn nhất của f đạt được khi có 1 số biến số bằng nhau và 1 số biến số thì chưa so sánh được (vì có thể có một số biến số bằng 0). Ta sẽ chứng minh một kết quả mạnh hơn là khi $a_1, a_2, ... a_n \ge 0$ thì vẫn có kết luận: giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất f đạt được khi trong n biến có $n-1$ biến bằng nhau. Thật vậy, giả sử giá trị nhỏ nhất hoặc giá trị lớn nhất của $f(a_1, a_2, ..., a_n)$ đạt tại $(0,...,0,a,...,a,b)$. Xét bộ 3 số $(0,a,b)$ thì theo các nhận xét **3.1, 3.2** trong **22.1.3** ta có $a = 0$ hoặc $b = 0$. Nếu $a = 0$ thì giá trị nhỏ nhất hoặc giá trị lớn nhất sẽ đạt tại $(\underbrace{0,...,0}_{n-1}, b)$ suy ra kết luận đúng. Nếu $b = 0$ thì lại xét tiếp 2 bộ $(a,a,0);(0,0,a)$. Áp dụng tiếp các kết luận 21.1.3, ta suy ra $a = 0$. Giá trị nhỏ nhất hoặc giá trị lớn nhất đạt tại $(0,0,...,0)$. Vậy các kết luận trên đã được mở rộng ra đối với các biến không âm.

22.3. PHƯƠNG PHÁP GLA TỔNG QUÁT:

Định lý: Cho $a,b,c > 0$ thỏa mãn $\begin{cases} abc = const \\ ab + ac + bc = const \end{cases}$ khi đó ta có:

- Nếu $f(a,b,c)$ là một hàm đồng biến theo $a+b+c$ thì nó sẽ đạt *min* khi trong 3 biến a,b,c có 2 biến bằng nhau và lớn hơn hoặc bằng biến còn lại; $f(a,b,c)$ đạt *max* khi trong 3 biến a,b,c có 2 biến bằng nhau và nhỏ hơn hoặc bằng biến còn lại.
- Nếu $f(a,b,c)$ là một hàm nghịch biến theo $a+b+c$ thì nó sẽ đạt *min* khi trong 3 biến a,b,c có 2 biến bằng nhau và nhỏ hơn hoặc bằng biến còn lại; $f(a,b,c)$ đạt *max* khi trong 3 biến a,b,c có 2 biến bằng nhau và lớn hơn hoặc bằng biến còn lại.

23. PHƯƠNG PHÁP EV (EQUAL VARIABLE THEOREM)

23.1 Bổ đề. Cho a, b, c là các số thực không âm không đồng thời bằng nhau và có nhiều nhất một số bằng 0, và giả sử các số thực không âm $x \le y \le z$ thỏa mãn

$$x + y + z = a + b + c \ (1), \quad x^p + y^p + z^p = a^p + b^p + c^p \ (2)$$

Trong đó $p \in (-\infty, 0] \cup (1, +\infty)$. Với $p = 0$, phương trình thứ 2 trở thành $xyz = abc > 0$. Như thế tồn tại hai số thực x_1, x_2 với $0 \le x_1 < x_2$, thỏa mãn $x \in [x_1, x_2]$, hơn nữa

1) Nếu $x = x_1$ và $p \le 0$ thì $0 < x < y = z$

2) Nếu $x = x_1$ và $p > 1$ thì hoặc $0 = x < y \le z$ hoặc $0 < x < y = z$

3) Nếu $x \in (x_1, x_2)$ thì $x < y < z$

4) Nếu $x = x_2$ thì $x = y < z$

23.2 Mệnh đề. Cho a, b, c là các số thực không âm không đồng thời bằng nhau và có nhiều nhất một số bằng 0, và giả sử $0 \le x \le y \le z$ thỏa mãn

$$x + y + z = a + b + c \ (1), \quad x^p + y^p + z^p = a^p + b^p + c^p \ (2)$$

Trong đó $p \in (-\infty, 0] \cup (1, +\infty)$. Với $p = 0$, phương trình (2) trở thành $xyz = abc > 0$. Giả sử $f(u)$ là hàm khả vi trên $(0, +\infty)$, thỏa mãn $g(x) = f'\left(x^{\frac{1}{p-1}}\right)$ là hàm lồi nghiêm ngặt trên $(0, +\infty)$, và đặt $F_3(x, y, z) = f(x) + f(y) + f(z)$

1) Nếu $p \le 0$ thì F_3 nhận giá trị lớn nhất khi và chỉ khi $0 < x = y < z$, và F_3 nhận giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi $0 < x < y = z$

2) Nếu $p > 1$ và hoặc $f(u)$ liên tục tại $u = 0$ hoặc $\lim_{u \to 0} f(u) = -\infty$, thì F_3 lớn nhất chỉ khi $0 < x = y < z$, và nhỏ nhất chỉ khi hoặc $x = 0$ hoặc $0 < x < y = z$.

23.3 Định lý EV (Định lý về các biến số bằng nhau)

Cho $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $(n \ge 3)$ là các số thực không âm, và $0 \le x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n$ thỏa mãn

$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$; $x_1^p + x_2^p + \ldots + x_n^p = a_1^p + a_2^p + \ldots + a_n^p$

Trong đó p là số thực, $p \ne 1$.

Với $p = 0$, phương trình thứ hai được quy ước thay thế bởi điều kiện $x_1 x_2 \ldots x_n = a_1 a_2 \ldots a_n > 0$.

Giả sử $f(u)$ là hàm khả vi trên $(0, \infty)$, thỏa mãn $g(x) = f'\left(x^{\frac{1}{p-1}}\right)$ là lồi nghiêm ngặt trên $(0, \infty)$, và đặt $F_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)$

• Nếu $p \le 0$ thì F_n lớn nhất khi $0 < x_1 = x_2 = \ldots = x_{n-1} \le x_n$, và nhỏ nhất khi

$0 \le x_1 \le x_2 = x_3 = \ldots = x_n$

• Nếu $p > 0$ và hoặc $f(u)$ liên tục tại $u = 0$ hoặc $\lim\limits_{u \to 0} f(u) = -\infty$ thì F_n lớn nhất khi

$0 < x_1 = x_2 = \ldots = x_{n-1} \le x_n$, và nhỏ nhất khi $x_1 = \ldots = x_k = 0$ và $x_{k+2} = \ldots = x_n$

Trong đó $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$

23.4 Các hệ quả của định lý EV

Hệ quả 1. Cho $a_1, a_2, \ldots, a_n \ge 0$; $(n \ge 3)$ và giả sử $0 \le x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n$ thỏa mãn

$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n, x_1^2 + x_2^2 + \ldots x_n^2 = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2$

Giả sử f là hàm khả vi trên $(0, +\infty)$, thỏa mãn $g(x) = f'(x)$ lồi nghiêm ngặt trên $(0, +\infty)$. Hơn nữa, hoặc $f(x)$ liên tục tại $x = 0$ hoặc $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$. Như thế

$F_n = f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)$ lớn nhất khi $0 \le x_1 = x_2 = \ldots x_{n-1} \le x_n$, và nhỏ nhất khi $x_1 = \ldots = x_k = 0$ và $x_{k+2} = \ldots = x_n$, trong đó $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$

Hệ quả 2. Cho $a_1, a_2, \ldots, a_n \ge 0$; $(n \ge 3)$ và giả sử $0 < x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n$ thỏa mãn

$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \ldots + \dfrac{1}{x_n} = \dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \ldots + \dfrac{1}{a_n}$

Giả sử f là hàm khả vi trên $(0, \infty)$ thỏa mãn $g(x) = f'\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$ lồi nghiêm ngặt trên $(0, +\infty)$. Như thế $F_n = f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)$ lớn nhất khi $0 \le x_1 = x_2 = \ldots = x_{n-1} \le x_n$, và nhỏ nhất khi $0 < x_1 \le x_2 = x_3 = \ldots = x_n$

Hệ quả 3. Cho $a_1, a_2, \ldots, a_n \ge 0$; $(n \ge 3)$ và giả sử $0 \le x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n$ thỏa mãn

$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$; $x_1 x_2 \ldots x_n = a_1 a_2 \ldots a_n$

Giả sử f là hàm khả vi trên $(0, +\infty)$ thỏa mãn $g(x) = f'\left(\dfrac{1}{x}\right)$ lồi nghiêm ngặt trên $(0, +\infty)$. Như thế $F_n = f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)$ lớn nhất khi $0 < x_1 = x_2 = \ldots = x_{n-1} \le x_n$, và nhỏ nhất khi $0 < x_1 \le x_2 = x_3 = \ldots = x_n$

Hệ quả 4. Cho $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $(n \ge 3)$ là các số không âm và giả sử $0 \le x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n$ thỏa mãn $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$; $x_1^p + x_2^p + \ldots x_n^p = a_1^p + a_2^p + \ldots + a_n^p$

Trong đó p là một số thực, $p \ne 0$, $p \ne 1$

a) Với $p<0, P=x_1x_2\dots x_n$ nhận giá trị nhỏ nhất khi $0\le x_1=x_2=\dots=x_{n-1}\le x_n$ và nhận giá trị lớn nhất khi $0<x_1\le x_2=x_3=\dots=x_n$

b) Với $p>0, P=x_1x_2\dots x_n$ nhận giá trị nhỏ nhất khi $0\le x_1=x_2=\dots=x_{n-1}\le x_n$ và nhận giá trị lớn nhất khi hoặc $x_1=0$ hoặc $0<x_1\le x_2=x_3=\dots=x_n$

Hệ quả 5. Cho $a_1,a_2,\dots,a_n$ $(n\ge 3)$ là các số không âm và giả sử $0\le x_1\le x_2\le\dots\le x_n$ thỏa mãn $x_1+x_2+\dots+x_n=a_1+a_2+\dots+a_n, x_1^p+x_2^p+\dots x_n^p=a_1^p+a_2^p+\dots+a_n^p$

1. Nếu $p\le 0$ ($p=0$ dẫn tới $x_1x_2\dots x_n=a_1a_2\dots a_n>0$)

a) Với $q\in(p,0)\cup(1,+\infty)$, $E=x_1^q+x_2^q+\dots+x_n^q$ nhận giá trị lớn nhất khi $0\le x_1=x_2=\dots=x_{n-1}\le x_n$, và nhận giá trị nhỏ nhất khi hoặc $x_1=0$ hoặc $0<x_1\le x_2=x_3=\dots=x_n$

b) Với $q\in(-\infty,0)\cup(p,1)$, $E=x_1^q+x_2^q+\dots+x_n^q$ nhận giá trị lớn nhất khi $0\le x_1=x_2=\dots=x_{n-1}\le x_n$, nhận giá trị nhỏ nhất khi $x_1=\dots x_k=0$ và $x_{k+2}=\dots=x_n$, với chỉ số $k\in\{0,1,\dots,n-1\}$ nào đó

2. Nếu $0<p<1$

a) Với $q\in(0,1)\cup(p,+\infty)$, $E=x_1^q+x_2^q+\dots+x_n^q$ nhận giá trị lớn nhất khi $0\le x_1=x_2=\dots=x_{n-1}\le x_n$, và nhận giá trị nhỏ nhất khi hoặc $x_1=0$ hoặc $0<x_1\le x_2=x_3=\dots=x_n$

b) Với $q=(-\infty,p)\cup(1,+\infty)$, $E=x_1^q+x_2^q+\dots+x_n^q$ nhận giá trị lớn nhất khi $0\le x_1=x_2=\dots x_{n-1}\le x_n$, nhận giá trị nhỏ nhất khi $x_1=\dots x_k=0$ và $x_{k+2}=\dots=x_n$, với chỉ số $k\in\{0,1,\dots,n-1\}$ nào đó

3. Nếu $p>1$:

a) Với $q=(0,1)\cup(p,\infty)$, $E=x_1^q+x_2^q+\dots+x_n^q$ nhận giá trị lớn nhất khi $0\le x_1=x_2=\dots=x_{n-1}\le x_n$, và nhận giá trị nhỏ nhất khi $x_{k+2}=\dots=x_n$ trong đó $k\in\{0,1,\dots,n-1\}$

b) Với $q=(-\infty,0)\cup(1,p)$, $E=x_1^q+x_2^q+\dots+x_n^q$ nhận giá trị lớn nhất khi $0\le x_1=x_2=\dots=x_{n-1}\le x_n$, và nhận giá trị nhỏ nhất khi $x_1=\dots x_k=0$ và $x_{k+2}=\dots=x_n$, trong đó $k\in\{0,1,\dots,n-1\}$

Hệ quả 6. Cho $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $(n \ge 3)$ là các số không âm, $p \in \{1, 2\}$ và giả sử $0 \le x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n$ thỏa mãn

$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$; $x_1^p + x_2^p + \ldots x_n^p = a_1^p + a_2^p + \ldots + a_n^p$

Biểu thức $E = \sum x_1 x_2 x_3$ lớn nhất khi $0 \le x_1 = x_2 = \ldots = x_{n-1} \le x_n$, và nhỏ nhất khi $x_1 = \ldots x_k = 0$ và $x_{k+2} = \ldots = x_n$, trong đó $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$

Hệ quả 7. Cho $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $(n \ge 3)$ là các số không âm và giả sử $0 \le x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n$ thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 + \ldots x_n^2 = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2$; $x_1^3 + x_2^3 + \ldots x_n^3 = a_1^3 + a_2^3 + \ldots + a_n^3$

Biểu thức $E = \sum x_1 x_2 x_3$ lớn nhất khi $0 \le x_1 = x_2 = \ldots x_{n-1} \le x_n$, và nhỏ nhất khi $x_1 = \ldots = x_k = 0$ và $x_{k+2} = \ldots = x_n$ trong đó $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$

24. PHƯƠNG PHÁP CHIA ĐỂ TRỊ (DIVIDE AND CONQUER)

24.1 PHƯƠNG PHÁP CHIA ĐỂ TRỊ VỚI HÀM 1 BIẾN

Định lý: Cho $f(x, y)$ là hàm liên tục từ $[a, b] \times [a, b]$ vào $\mathbb{R}$, tăng theo biến x và giảm theo biến y. Khi đó 2 điều sau là tương đương.

(*i*) $f(x, x) > 0$, với mọi x thuộc $[a, b]$

(*ii*) Tồn tại dãy hữu hạn tăng $a = x_0 \le x_1 \le \ldots \le x_{m+1} = b$ sao cho:

$$f(x_n, x_{n+1}) > 0 \quad \forall n = 0, 1, \ldots, m$$

24.2 PHƯƠNG PHÁP CHIA ĐỂ TRỊ VỚI HÀM 2 BIẾN

Định lí: Cho $f(x, y, z)$ là hàm liên tục trên $[a, b] \times [c, d] \times [c, d]$ vào $\mathbb{R}$, tăng theo biến y và giảm theo biến z. Khi đó 2 điều sau là tương đương.

(*i*) $f(x, y, y) > 0$, $\forall x \in [a, b]$, $y \in [c, d]$.

(*ii*) Tồn tại dãy hữu hạn tăng $c = y_0 \le y_1 \le y_2 \le \ldots \le y_{m+1} = d$ sao cho:

Với mọi $n = 0, 1, \ldots, m$ thì $f(x, y_n, y_{n+1}) > 0$, $\forall x \in [a, b]$

24.3 PHƯƠNG PHÁP CHIA ĐỂ TRỊ VỚI BẤT ĐẲNG THỨC THUẦN NHẤT BA BIẾN

- ***Bước 1:*** Dự đoán các trường hợp xảy ra dấu đẳng thức (ta gọi là các điểm "nhạy cảm"), khoanh vùng chúng lại xét riêng ra. Phần còn lại ta chỉ làm việc với các bất đẳng thức thực sự.
- ***Bước 2:*** Biến đổi, chuẩn hóa các bất đẳng thức thực sự về dạng thích hợp rồi dứt điểm bằng cách băm nhỏ theo từng biến để xử lí.

25. BẤT ĐẲNG THỨC NESBITT–SHAPIRO

25.1 Bất đẳng thức Nesbitt

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}\quad\forall\ a,b,c>0\quad(1)$$

25.2 Bất đẳng thức Shapiro

Giả sử $a_1,a_2,...a_n>0$. Xét tính đúng sai của bất đẳng thức sau:

$$f_n(a_1,a_2,...,a_n)=\frac{a_1}{a_2+a_3}+\frac{a_2}{a_3+a_4}+...+\frac{a_{n-1}}{a_n+a_1}+\frac{a_n}{a_1+a_2}\geq\frac{n}{2}\quad(2)$$

Bất đẳng thức **(2) đúng** với mọi ***n* chẵn** ≤ 12 và **n lẻ** ≤ 23 ,mọi giá trị còn lại của n thì **(2) sai**

25.3 Bất đẳng thức Shapiro với dãy đơn điệu

Cho bộ dãy số đơn điệu bất kỳ $a_1,a_2,....a_n>0$ tức là:

$$\left[\begin{array}{l}0<a_1\leq a_2\leq...\leq a_{n-1}\leq a_n\\ a_1\geq a_2\geq...\geq a_{n-1}\geq a_n>0\end{array}\right.\quad\text{Khi đó ta có}\quad\frac{a_1}{a_2+a_3}+...+\frac{a_{n-1}}{a_n+a_1}+\frac{a_n}{a_1+a_2}\geq\frac{n}{2}$$

25.4 Đánh giá xấp xỉ bất đẳng thức Shapiro

Kvant 4/ 1991 : $\dfrac{a_1}{a_2+a_3}+\dfrac{a_2}{a_3+a_4}+...+\dfrac{a_{n-1}}{a_n+a_1}+\dfrac{a_n}{a_1+a_2}>(\sqrt{2}-1)n=0.41421356n,\ \forall a_i>0$

Kvant 4/ 1991: $\dfrac{a_1}{a_2+a_3}+\dfrac{a_2}{a_3+a_4}+...+\dfrac{a_{n-1}}{a_n+a_1}+\dfrac{a_n}{a_1+a_2}>\dfrac{5}{12}n=0.41666666n,\ \forall a_i>0$

Trần Phương 2004: $S=\dfrac{a_1}{a_2+a_3}+\dfrac{a_2}{a_3+a_4}+...+\dfrac{a_{n-1}}{a_n+a_1}+\dfrac{a_n}{a_1+a_2}>0.4577996n\ .\ \forall a_i>0$

Drinfeljd 1971 $\dfrac{a_1}{a_2+a_3}+\dfrac{a_2}{a_3+a_4}+...+\dfrac{a_{n-1}}{a_n+a_1}+\dfrac{a_n}{a_1+a_2}>0.989133\times\dfrac{n}{2}\ ,\ \forall a_1,a_2,...a_n>0$

Elbert 1973: $\dfrac{a_1+a_3}{a_1+a_2}+\dfrac{a_2+a_4}{a_2+a_3}+...+\dfrac{a_{n-1}+a_1}{a_{n-1}+a_n}+\dfrac{a_n+a_2}{a_n+a_1}\geq 0.978012n\ ,\ \forall a_1,a_2,...a_n>0$

Hillel Gauchman, Eastern Illinois University, Charleston, Illinois (2002).

Đặt $E_n=\dfrac{a_1}{a_2+a_3}+\dfrac{a_2}{a_3+a_4}+...+\dfrac{a_n}{a_1+a_2};\quad F_n=\dfrac{a_1}{a_1+a_2}+\dfrac{a_2}{a_2+a_3}+...+\dfrac{a_n}{a_n+a_1},\forall a_i>0$

Và $\lambda=-0.0219875218...$ Khi đó ta có các định lý sau:

Định lí 1. Với mọi số nguyên dương n và mọi số thực dương $a_1,a_2,...a_n$ ta có $E_n-F_n\geq\lambda n$

Định lí 2. Trong Định lí 1, λ là hằng số tốt nhất. Hay nói cách khác, với mọi $\varepsilon>0$ tồn tại ít nhất một số nguyên dương n và các số thực dương $a_1,a_2,...a_n$ thỏa mãn $E_n-F_n<(\lambda+\varepsilon)n$

26.1 Bất đẳng thức trung bình lũy thừa với số mũ tự nhiên

Giả sử $a_1, a_2, ..., a_n \geq 0$ và $m, k \in \mathbb{N}^*$ thỏa mãn $m < k$, khi đó ta có bất đẳng thức:

$$T_k = \sqrt[k]{\frac{a_1^k + a_2^k + ... + a_n^k}{n}} \geq \sqrt[m]{\frac{a_1^m + a_2^m + ... + a_n^m}{n}} = T_m$$

26.2 Bất đẳng thức trung bình lũy thừa với số mũ hữu tỷ

Giả sử $a_1, a_2, ..., a_n \geq 0$ và $p, q \in \mathbb{Q}^*$ thỏa mãn $p < q$, khi đó ta có bất đẳng thức

$$T_q = \left(\frac{a_1^q + a_2^q + ... + a_n^q}{n}\right)^{\frac{1}{q}} \geq \left(\frac{a_1^p + a_2^p + ... + a_n^p}{n}\right)^{\frac{1}{p}} = T_p$$

26.3 Bất đẳng thức trung bình đối xứng

Giả sử $a_1, a_2, ..., a_n \geq 0$. Kí hiệu các tổng và các giá trị trung bình tương ứng:

$S_1 = a_1 + a_2 + ... + a_n$ và $T_1 = \frac{S_1}{n} = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}$

$S_2 = \sum\limits_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j$ và $T_2 = \sqrt{\frac{S_2}{\binom{n}{2}}} = \sqrt{\sum\limits_{1 \leq i < j \leq n} \frac{a_i a_j}{\binom{n}{2}}}$

....

$S_k = \sum\limits_{1 \leq i_1 < ... < i_k \leq n} a_{i_1} ... a_{i_k}$ và $T_k = \sqrt[k]{\frac{S_k}{\binom{n}{k}}} = \sqrt[k]{\sum\limits_{1 \leq i_1 < ... < i_k \leq n} \frac{a_{i_1} ... a_{i_k}}{\binom{n}{k}}}$

....

$S_n = a_1 a_2 ... a_n$ và $T_n = \sqrt[n]{\frac{S_n}{\binom{n}{n}}} = \sqrt[n]{\frac{a_1 a_2 ... a_n}{\binom{n}{n}}} = \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n}$

Đặt $P_1 = \frac{S_1}{n}; P_2 = \frac{S_2}{\binom{n}{2}}; ....; P_k = \frac{S_k}{\binom{n}{k}}; ...; P_n = \frac{S_n}{\binom{n}{n}}$

Ở đây $\binom{n}{k} = C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$; $\binom{n}{0} = C_n^0 = C_n^n = \binom{n}{n} = 1$

26.3.1 Bất đẳng thức Newton:

$$P_{k-1} P_{k+1} < P_k^2 \text{ và } S_{k-1} S_{k+1} \leq S_k^2$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ $a_1 = a_2 = ... = a_n$

2563.2 Bất đẳng thức Maclaurin

$T_1 \geq T_2 \geq ... \geq T_k \geq T_{k+1} \geq ... \geq T_n$

Đẳng thức xảy ra trong $(n-1)$ bất đẳng thức $\Leftrightarrow$ $a_1 = a_2 = ... = a_n$

27. Các bất đẳng thức sử dụng tam thức bậc hai

27.1 Bất đẳng thức Aczela

Cho $a_1^2 - a_2^2 - ... - a_n^2 > 0$. Khi đó ta có bất đẳng thức

$$\left(a_1^2 - a_2^2 - ... - a_n^2\right)\left(b_1^2 - b_2^2 - ... - b_n^2\right) \le \left(a_1b_1 - a_2b_2 - ... - a_nb_n\right)^2$$

27.2 Bất đẳng thức G.Polya

Cho $\begin{cases} 0 < a \le a_1, a_2, ..., a_n \le A \\ 0 < b \le b_1, b_2, ..., b_n \le B \end{cases}$ Khi đó ta có bất đẳng thức

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \le \frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{AB}{ab}} + \sqrt{\frac{ab}{AB}}\right)^2 \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2$$

27.3 Bất đẳng thức Abel

Cho 2 dãy số $(a_1, a_2, ..., a_n)$; $(b_1, b_2, ..., b_n)$ trong đó $b_1 \ge b_2 \ge ... \ge b_n \ge 0$.

Đặt $S_k = \sum_{i=1}^{k} a_i \left(k = \overline{1,n}\right)$. Gọi $m = Min\{S_1, S_2 ... S_n\}; M = Max\{S_1, S_2, ... S_n\}$

khi đó ta có: $mb_1 \le a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n \le Mb_1$

27.4 Bất đẳng thức Diaz

Cho 2 dãy số $a_1, a_2, ..., a_n$ và $b_1, b_2, ..., b_n$ trong đó $a_1a_2...a_n \ne 0$

Giả sử m, M là 2 số thỏa mãn $m \le \frac{b_k}{a_k} \le M \quad \forall k = \overline{1,n}$

Khi đó ta có $\sum_{k=1}^{n} b_k^2 + mM\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \le (m+M)\sum_{k=1}^{n} a_k b_k$

27.5 Bất đẳng thức Kantorovis 1

Cho 2 dãy số $(a_1, a_2, ..., a_n)$; $(b_1, b_2, ..., b_n)$ và 2 số m, M thỏa mãn điều kiện

$0 < m \le b_1, b_2, ..., b_n \le M$. Khi đó ta có: $\left[\sum_{k=1}^{n} b_k a_k^2\right]\left[\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{b_k} a_k^2\right] \le \frac{1}{4}\left[\sqrt{\frac{M}{m}} + \sqrt{\frac{m}{M}}\right]^2 \left[\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right]^2$

27.6 Bất đẳng thức Kantorovis 2

Cho dãy số $a_1, a_2, ..., a_n$ $(n \ge 2)$ thỏa mãn điều kiện $0 < m \le a_1, a_2, ..., a_n \le M$.

Khi đó ta có $\sum_{k=1}^{n} a_k \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} \le n^2 + \frac{n(n-1)}{2}\left(\sqrt{\frac{M}{m}} - \sqrt{\frac{m}{M}}\right)^2$

27.7 Bất đẳng thức Grussa

Cho $\begin{cases} 0 < a \le a_1, a_2, ..., a_n \le A \\ 0 < b \le b_1, b_2, ..., b_n \le B \end{cases}$. Khi đó $\left| \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i b_i - \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{i=1}^{n} b_i \right| \le \frac{1}{4}(A-a)(B-b)$

28. Bất đẳng thức Sleyfer

Cho $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{R}$. Khi đó $(n-1)\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + n \cdot \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i^2} \ge \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2$

29. Bất đẳng thức Vâyetstrat

Cho $a_1, a_2, ..., a_n \ge 0$. Đặt $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$. Khi đó ta có các bất đẳng thức

a) $(1+a_1)(1+a_2)...(1+a_n) \ge 1 + S_n$

b) $(1-a_1)(1-a_2)...(1-a_n) \ge 1 - S_n, \forall 0 \le a_i \le 1$

c) $(1+a_1)(1+a_2)...(1+a_n) \le \frac{1}{1-S_n}, \forall S_n < 1$

d) $(1-a_1)(1-a_2)...(1-a_n) \le \frac{1}{1-S_n}, \forall 0 \le a_i \le 1; S_n < 1$

30. Bất đẳng thức Ky Fan

Giả sử $x_1, x_2, ..., x_n$ là các số dương trong $\left(0, \frac{1}{2}\right]$. Khi đó $\frac{\prod_{k=1}^{n} x_k}{\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^n} \le \frac{\prod_{k=1}^{n} (1-x_k)}{\left[\sum_{k=1}^{n} (1-x_k)\right]^n}$

31. Bất đẳng thức A.M.Ostrowski

Cho hai dãy không tỷ lệ $a = (a_1, ..., a_n)$ và $b = (b_1, ..., b_n)$ và dãy số thực $x = (x_1, ..., x_n)$ thỏa mãn điều kiện $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$. $\sum_{i=1}^{n} b_i x_i = 1$

32. Bất đẳng thức K.Fan và J.Todd

Với mọi dãy số thực $a = (a_1, ..., a_n)$ và $b = (b_1, ..., b_n)$ thỏa mãn điều kiện $a_i . b_j \ne a_j b_i$ ứng với $i \ne j$, ta đều có $\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2} \le \binom{n}{2}^{-2} \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1, j\ne i} \frac{a_j}{a_j b_i - a_i b_j} \right)^2$

33. Bất đẳng thức K.Fan và J.Todd

Giả sử $p_{ij}\ (i,j=1,\ldots,n; i\neq j)$ thỏa mãn điều kiện $p_{ij}=pji$, $p=\sum_{1\le i<j\le n} p_{ij}\neq 0$

khi đó với mọi cặp dãy số thực $a_1,\ldots,a_n$ và $b_1,\ldots,b_n$ sao cho $a_ib_j\neq a_jb_i\ (i\neq j)$, ta đều có

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)-\left(\sum_{i=1}^{n} a_ib_i\right)^2}\le \frac{1}{p^2}\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1;\,j\neq i}\frac{p_{ij}a_j}{a_jb_i-a_ib_j}\right)^2$$

34. Bất đẳng thức Beckenbach

Cho $x_i,y_i>0\ \forall i\in\overline{1,n};\ n\in N^*;\ p\in[1;2]$. Khi đó $\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^p}{\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^{p-1}}\le\dfrac{\sum_{i=1}^{n}x_i^p}{\sum_{i=1}^{n}x_i^{p-1}}+\dfrac{\sum_{i=1}^{n}y_i^p}{\sum_{i=1}^{n}y_i^{p-1}}$

35. Bất đẳng thức SuranYi

Cho các số dương $a_1,a_2,\ldots a_n$. Khi đó ta có bất đẳng thức:

$$(n-1)\left(a_1^n+a_2^n+\ldots+a_n^n\right)+na_1a_2\ldots a_n\ge\left(a_1+a_2+\ldots+a_n\right)\left(a_1^{n-1}+a_2^{n-1}+\ldots+a_n^{n-1}\right)$$

36. Bất đẳng thức Vasile

Cho các số dương $a_1,a_2,\ldots a_n$. Khi đó ta có bất đẳng thức

$$a_1^n+a_2^n+\ldots+a_n^n+n(n-1)a_1a_2\ldots a_n\ge a_1a_2\ldots a_n\left(a_1+a_2+\ldots+a_n\right)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right)$$

37. Bất đẳng thức Jack Garfunkel

Với các số thực không âm a, b, c ta có bất đẳng thức:

$$\frac{a}{\sqrt{a+b}}+\frac{b}{\sqrt{b+c}}+\frac{c}{\sqrt{c+a}}\le\frac{5}{4}\sqrt{a+b+c}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ (a,b,c) là các hoán vị của (3,1,0).

§ 25.2. CÁC BẤT ĐẲNG THỨC CHỌN LỌC DÀNH CHO BẠN ĐỌC

Bài 1. Cho $a,b,c>0$. Chứng minh: $\sum_{cyc}\frac{a(b+c)}{a^2+bc}\le\frac{1}{2}\sqrt{27+(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)}$

Bài 2. Cho $a,b,c>0$. Chứng minh: $\sqrt{\frac{3}{2}\left(\sum_{cyc}\frac{a+b}{c}\right)}\le\sum_{cyc}\frac{a^2+bc}{a(b+c)}\le 1+\frac{1}{3}\left(\sum_{cyc}\frac{a+b}{c}\right)$

Bài 3. Cho $a,b,c\ge 0$. Chứng minh: $(a+b+c)^2(a^2b+b^2c+c^2a)\ge 9abc(a^2+b^2+c^2)$

Bài 4. Cho $a,b,c>0$. Chứng minh: $\sum_{cyc}\sqrt{\frac{a(b+c)}{a^2+bc}}\le\sqrt{(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})\left(\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{c}}\right)}$

Bài 5. Cho $a,b,c>0$. Chứng minh: $(a^2+b^2+c^2)^2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\ge 2(a+b+c)^3-27abc$

Bài 6. Cho $a,b,c\ge 0$. Chứng minh: $\sum_{cyc}\frac{1}{\sqrt{a^2+bc}}\le\frac{3(a+b+c)}{\sqrt{2}(ab+bc+ca)}$

Bài 7. Cho $a,b,c\ge 0$. Chứng minh: $\sum_{cyc}\frac{1}{a^2+bc}\ge\frac{3(a+b+c)^2}{2(a^2+b^2+c^2)(ab+bc+ca)}$

Bài 8. Cho $a,b,c>0$. Chứng minh: $\sum_{cyc}\sqrt[6]{\frac{a+b}{a+c}}\le\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}$

Bài 9. Cho $a,b,c>0$. Chứng minh: $\sum_{cyc}\sqrt{\frac{a+b}{c}}\ge\frac{2}{3}\sum_{cyc}\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}}$

Bài 10. Cho $\begin{cases}a,b,c\ge 0\\ Min\{a+b,b+c,c+a\}>0\end{cases}$. Chứng minh: $\sum_{cyc}\frac{a^2+b^2}{a+c}\le\frac{3(a^2+b^2+c^2)}{a+b+c}$

Bài 11. Cho $a,b,c>0$. Chứng minh: $\sum_{cyc}\sqrt[6]{\frac{a^2+b^2}{c^2+ab}}\le\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}$

Bài 12. Cho $a,b,c>0$. Chứng minh: $\sum_{cyc}\sqrt[4]{\frac{a^2+b^2}{c^2+ab}}\le\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}$

Bài 13. Cho $\begin{cases}a,b,c\ge 0\\ Min\{a+b,b+c,c+a\}>0\end{cases}$. Chứng minh: $\sum_{cyc}\sqrt{\frac{a^3}{a^2+8b^2}}\ge\sqrt{\frac{a^3+b^3+c^3}{a^2+b^2+c^2}}$

Bài 14. Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng: $\sum_{cyc}\sqrt[4]{\frac{a^2+bc}{a(b+c)}}\ge\sqrt{10-\frac{3\sqrt[3]{abc}}{a+b+c}}$

Bài 15. Cho $\begin{cases}a,b,c\ge 0\\ a+b+c>0\end{cases}$. Chứng minh: $\sum_{cyc}\frac{a^2+b^2}{2(a+b)+c}\ge\frac{2\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}}{5}$

Bài 16. Cho $\begin{cases} a,b,c \geq 0 \\ Min\{a+b, b+c, c+a\} > 0 \end{cases}$. Chứng minh: $\sum_{cyc} \frac{ab(a^2+bc)}{b+c} \geq \sqrt{3abc(a^2b+b^2c+c^2a)}$

Bài 17. Cho $\begin{cases} a,b,c \geq 0 \\ Min\{a+b, b+c, c+a\} > 0 \end{cases}$, $0 \leq k \in \mathbb{R}$ và $2 \leq n \in \mathbb{N}$. Chứng minh:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b+c}} + \sqrt[n]{\frac{b}{c+a}} + \sqrt[n]{\frac{c}{b+a}} + k\sqrt[n]{\frac{a^2b+b^2c+c^2a}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}} \geq 2\sqrt{k+1}$$

Bài 18. Cho $\begin{cases} a,b,c \geq 0 \\ Min\{a+b, b+c, c+a\} > 0 \end{cases}$, $4 \leq k \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{b+a}} + k\sqrt{\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{(a+b+c)^3}} \geq 2\sqrt{k}$$

Bài 19. Cho $\begin{cases} a,b,c \geq 0 \\ Min\{a+b, b+c, c+a\} > 0 \end{cases}$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} + \frac{15}{8}\sqrt[3]{\frac{50(a+b)(b+c)(c+a)}{(a+b+c)^3}} \geq \frac{25}{4}$$

Bài 20. Cho $\begin{cases} a,b,c \geq 0 \\ Min\{a+b, b+c, c+a\} > 0 \end{cases}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b+c}} + \sqrt[3]{\frac{b}{b+a}} + \sqrt[3]{\frac{c}{b+a}} + \frac{65}{84}\sqrt[3]{\frac{65(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2}}$$

Bài 21. Cho $\begin{cases} a,b,c \geq 0 \\ a+b+c > 0 \end{cases}$, $k > 0$, chứng minh bất đẳng thức:

$$\frac{a}{(2k-3\sqrt{k}+2)a+kb+c} + \frac{b}{(2k-3\sqrt{k}+2)b+kc+a} + \frac{c}{(2k-3\sqrt{k}+2)c+ka+b} \leq \frac{1}{k-\sqrt{k}+1}$$

Bài 22. Cho $\begin{cases} a,b,c \geq 0 \\ Min\{a+b, b+c, c+a\} > 0 \end{cases}$, $k \geq 2$ và $p \geq 0$, chứng minh bất đẳng thức:

$$\sqrt{\frac{a^2+4(k+p)^3bc}{b^2+pbc+c^2}} + \sqrt{\frac{b^2+4(k+p)^3ca}{c^2+pac+a^2}} + \sqrt{\frac{c^2+4(k+p)^3cb}{b^2+pbc+a^2}} \geq 3k+2p$$

Bài 23. Cho $\begin{cases} a,b,c \geq 0 \\ Min\{a+b, b+c, c+a\} > 0 \end{cases}$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + 4\frac{(a+b+c)(ab+bc+ca)}{a^3+b^3+c^3} \geq 5$$

Bài 24. Cho $\begin{cases} a,b,c\ge 0 \\ Min\{a+b,b+c,c+a\}>0 \end{cases}$. Chứng minh: $\sum_{cyc}\frac{a}{b+c}+9\frac{(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2}\ge 6$

Bài 25. Cho $\begin{cases} a,b,c\ge 0 \\ Min\{a+b,b+c,c+a\}>0 \end{cases}$. Chứng minh: $\sum_{cyc}\frac{a}{b+c}+16\frac{(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2}\ge 8$

Bài 26. Cho $\begin{cases} a,b,c\ge 0 \\ Min\{a+b,b+c,c+a\}>0 \end{cases}$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+4\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{a^3+b^3+c^3}\ge 5$$

Bài 27. Cho $\begin{cases} a,b,c\ge 0 \\ Min\{a+b,b+c,c+a\}>0 \end{cases}$. Chứng minh: $\frac{a^3+b^3+c^3}{(a+b)(b+c)(c+a)}+9\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}\ge 5$

Bài 28. Cho $\begin{cases} a,b,c\ge 0 \\ Min\{a+b,b+c,c+a\}>0 \end{cases}$. Chứng minh:

$$\frac{a^4}{b^2+c^2}+\frac{b^4}{c^2+a^2}+\frac{c^2}{a^2+b^2}+12\sqrt{6}(ab+bc+ca)\ge 15(a^2+b^2+c^2)$$

Bài 29. Cho $\begin{cases} a,b,c\ge 0 \\ Min\{a+b,b+c,c+a\}>0 \end{cases}$. Chứng minh: $\sum_{cyc}\sqrt[3]{\frac{a(a+b)}{a^2+2b^2}}\ge 3\sqrt[3]{\frac{2abc}{a+b+c}}$

Bài 30. Cho $\begin{cases} a,b,c\ge 0 \\ Min\{a+b,b+c,c+a\}>0 \end{cases}$. Chứng minh: $\sum_{cyc}\sqrt[4]{\frac{a^2+3bc}{2(b^2+c^2)}}\ge\frac{3(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2}$

Bài 31. Cho $\begin{cases} a,b,c\ge 0 \\ Min\{a+b,b+c,c+a\}>0 \end{cases}$. Chứng minh rằng:

$$\sum_{cyc}\frac{a+b-c}{k(a^2+b^2)+ab}\le\frac{9}{2k+1}\cdot\frac{1}{a+b+c}$$

Bài 32. Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng: $\sum_{cyc}\frac{a+5b}{c\sqrt{a^2+5b^2}}\ge\frac{9\sqrt{2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

Bài 33. Cho $\begin{cases} a,b,c\ge 0 \\ Min\{a+b,b+c,c+a\}>0 \end{cases}$. Chứng minh: $\sum_{cyc}\frac{a}{b+c}+\frac{5}{2}\sqrt{\frac{10(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2}}\ge\frac{15}{2}$

Bài 34. Cho $\begin{cases} a,b,c\ge 0 \\ Min\{a+b,b+c,c+a\}>0 \end{cases}$. Chứng minh: $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+128\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{a+b+c}}\ge 46$

Bài 35. Cho $\begin{cases} a,b,c\ge 0 \\ Min\{a+b,b+c,c+a\}>0 \end{cases}$, $k>0$. Chứng minh:

$$(ab+bc+ca)^k\left[\frac{1}{(a+b)^{2k}}+\frac{1}{(b+c)^{2k}}+\frac{1}{(c+a)^{2k}}\right]\ge Max\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^k;\frac{(k-1)^k+(k-1)k^k}{k^k(k-1)}\right\}$$

Bài 36. Cho $\begin{cases} a,b,c \geq 0 \\ Min\{a+b,b+c,c+a\} > 0 \end{cases}$, $\alpha > 0$, $n \in \mathbb{N}$. Chứng minh rằng:

$$\left(1+\frac{\alpha a^n}{(b+c)^n}\right)\left(1+\frac{\alpha b^n}{(c+a)^n}\right)\left(1+\frac{\alpha c^n}{(a+b)^n}\right) \geq Min\left\{(\alpha+1)^3;\left(\frac{\alpha+2^n}{2^n}\right)^3\right\}$$

Bài 37. Cho $\begin{cases} a,b,c \geq 0 \\ Min\{a+b,b+c,c+a\} > 0 \end{cases}$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}+\frac{12(a+b)(b+c)(c+a)}{(a+b+c)^3} \geq \frac{41}{9}$$

Bài 38. Cho $a,b,c > 0$. Chứng minh rằng: $\sum\limits_{cyc} a^2\left(\sum\limits_{cyc}\frac{1}{a^2+2(b^2+c^2)}\right) \geq \sum\limits_{cyc}\frac{b^2+bc+c^2}{a^2+(b+c)^2}$

Bài 39. Cho $\begin{cases} a,b,c \geq 0, 3 \leq n \in \mathbb{N} \\ Min\{a+b,b+c,c+a\} > 0 \end{cases}$. Chứng minh: $\sum\limits_{cyc}\frac{a(b^n+c^n)}{a^2+bc} \geq a^{n-1}+b^{n-1}+c^{n-1}$

Bài 40. Cho $\begin{cases} a,b,c \geq 0 \\ Min\{a+b,b+c,c+a\} > 0 \end{cases}$. Chứng minh rằng:

$$ab+bc+ca \leq \sum_{cyc}\frac{a^3(b+c)}{a^2+bc} \leq a^2+b^2+c^2$$

Bài 41. Cho $a,b,c > 0$. Chứng minh rằng: $\sum\limits_{cyc}\left(\frac{a^2}{b}+b\right) \geq 2\sqrt{(a^2+b^2+c^2)\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)}$

Bài 42. Cho $a,b,c > 0$. Chứng minh rằng: $\sum\limits_{cyc}\frac{a^2+b^2}{c(a+b)} \geq (a^2+b^2+c^2)\sqrt{\frac{3}{abc(a+b+c)}}$

Bài 43. Cho $\begin{cases} a,b,c \geq 0 \\ Min\{a+b,b+c,c+a\} > 0 \end{cases}$. Chứng minh: $\sum\limits_{cyc}\frac{a(b+c)}{a^2+2bc} \geq 1+\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}$

Bài 44. Cho $a,b,c > 0$. Chứng minh rằng: $\sum\limits_{cyc}\frac{ab^2}{c(c+a)} \geq \frac{3(a^2+b^2+c^2)}{2(a+b+c)}$

Bài 45. Cho $\begin{cases} a,b,c \geq 0 \\ a+b+c > 0 \end{cases}$. Chứng minh rằng: $\sum\limits_{cyc}\frac{9(a^2+b^2)}{2(a+b+c)^2+9(a^2+b^2)} \geq \frac{3}{2}$

Bài 46. Cho $a,b,c > 0$. Chứng minh rằng: $\sum\limits_{cyc}\sqrt{\frac{b+c}{a}} \geq 2\sqrt{3+\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}}$

Bài 47. Cho $a,b,c > 0$. Chứng minh rằng: $\sum\limits_{cyc}\sqrt{\frac{a+b}{c^2}} \geq 3\sqrt{2}\sqrt{\frac{a+b+c}{ab+bc+ca}}$

Bài 48. Cho $\begin{cases} a,b,c \geq 0 \\ Min\{a+b,b+c,c+a\} > 0 \end{cases}$. Chứng minh: $\sum\limits_{cyc}\frac{a+b-c}{a^2+ab+b^2} \leq \frac{3}{a+b+c}$

Bài 49. Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng: $\sum_{cyc}\frac{a^2+b^2}{c(a+b)}\ge 3\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}$

Bài 50. Cho $\begin{cases}a,b,c\ge 0\\ Min\{a+b,b+c,c+a\}>0\end{cases}$. Chứng minh: $\sum_{cyc}\sqrt{\frac{2a(b+c)}{(2b+c)(b+2c)}}\ge 2$

Bài 51. Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng: $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+2\sqrt{2}\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}\ge\left(1+\sqrt{2}\right)^2$

Bài 52. Cho $\begin{cases}a,b,c\ge 0\\ Min\{a+b,b+c,c+a\}>0\end{cases}$. Chứng minh rằng: $\sum_{cyc}\frac{\sqrt{a^2+bc}}{b+c}\ge\frac{3\sqrt{2}}{2}$

Bài 53. Cho $\begin{cases}a,b,c\ge 0\\ Min\{a+b,b+c,c+a\}>0\end{cases}$. Chứng minh rằng:

$$\sum_{cyc}\sqrt{\frac{a}{b+c}}\ge 2\sqrt{\frac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}+1}$$

Bài 54. Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}+\frac{1+\sqrt{2}}{2}(a+b+c)\ge\frac{9+3\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}$$

Bài 55. Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng: $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+3\ge 2\left(\frac{a+b}{b+c}+\frac{b+c}{c+a}+\frac{c+a}{a+b}\right)$

Bài 56. Cho $\begin{cases}a,b,c>0\\ abc=1\end{cases}$. Chứng minh rằng: $23+3\left(a^2+b^2+c^2\right)\ge 4(1+a)(1+b)(1+c)$

Bài 57. Cho $\begin{cases}a,b,c>0\\ abc=1\end{cases}$. Chứng minh rằng: $18+2\left(a^2+b^2+c^2\right)\ge 3(1+a)(1+b)(1+c)$

Bài 58. Cho $\begin{cases}a,b,c>0\\ ab+bc+ca>0\\ k>1\end{cases}$ và $C_k=\max\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{k}},\frac{(k-1)^k+k^k(k-1)}{k^k(k-1)}\right)$. Chứng minh:

$\sum_{cyc}\frac{a}{(a+b)^{\frac{1}{k}}}\le C_k(a+b+c)^{\frac{k-1}{k}}$ (với $k=2$, chúng ta có bất đẳng thức ***Jackgarfukel***)

Bài 59. Cho $0<a<b<c<1$. Chứng minh rằng:

$$3(a+b+c)\ge(a+b+c+3abc)\left(\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}\right)$$

Bài 60. Cho $\begin{cases}a,b,c,d>0\\ a^2+b^2+c^2+d^2=4\end{cases}$. Chứng minh: $\frac{a+b+c+d}{2}\le\sqrt[3]{(1+abcd)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)}$

Bài 61. Cho $\begin{cases}a,b,c>0\\ a^2+b^2+c^2=3\end{cases}$. Chứng minh: $\sqrt[3]{a+\frac{b^2}{c}}+\sqrt[3]{b+\frac{c^2}{a}}+\sqrt[3]{c+\frac{a^2}{b}}\ge\sqrt[3]{12abc+42}$

Bài 62. Cho $\begin{cases} a_1, a_2, ..., a_n > 0 \\ a_1 a_2 ... a_{n-1} a_n = 1 \end{cases}$. Chứng minh: $\sum \frac{1}{a_i(a_{i+1}+1)} \ge \frac{n}{2}$. Trong đó quy ước: $a_{n+1} = a_1$

Bài 63. Chứng minh: $2(x^2+y^2+z^2)^3 \ge ((x+y+z)(x^2+y^2+z^2)-2xyz)^2, \forall x,y,z \in \mathbb{R}$

Bài 64. $a_1, a_2, ..., a_n \ge 0$. Chứng minh rằng:

$$(a_1^n+n-1)(a_2^n+n-1)...(a_n^n+n-1) \ge (a_1+a_2+...+a_n)^n$$

Bài 65. Cho $\begin{cases} a_1, a_2, ..., a_n \ge 0 \\ a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = ... = a_{n+1} - a_n \end{cases}$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + ... + \frac{1}{a_n^2} \le \frac{n-1}{2} \cdot \frac{a_1 q_n + a_2 a_{n+1}}{a_1 a_2 a_n a_{n+1}}$$

Bài 66. Cho $a,b,c > 0$. Chứng minh rằng:

$$\sum_{cw} \sqrt{\frac{a(b+c)}{a^2+bc}} \ge \sqrt{2+2\sqrt{1+4\sqrt{\frac{abc(a+b)(b+c)(c+a)}{(a^2+bc)(b^2+ca)(c^2+ab)}}}}$$

Bài 67. Cho $\begin{cases} a_1, a_2, ..., a_n > 0 \\ a_1 a_2 ... a_{n-1} a_n = 1 \end{cases}$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{\sqrt{a_1^2+a_1}} + \frac{1}{\sqrt{a_2^2+a_2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{a_n^2+a_n}} \ge \frac{n\sqrt{2}}{2}$$

Bài 68. Cho $a,b,c \ge 0$ và $n > 0$. Chứng minh: $\frac{abc}{n(a^3+b^3+c^3)} + \frac{3n-1}{n} \ge \sqrt[n]{\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}}$

Bài 69. Cho $\begin{cases} a,b,c,d \ge 0 \\ a^3+b^3+c^3+d^3 = 4 \end{cases}$. Chứng minh rằng:

$$abc+bcd+cda+dab+\frac{\sqrt[3]{2}}{2-\sqrt[3]{2}}(a^2+b^2+c^2+d^2) \le \frac{2}{2-\sqrt[3]{2}}(a+b+c+d)$$

Bài 70. Cho $a,b,c \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng:

$$\frac{8}{3}(a^2+b^2+c^2)^2 - \frac{1}{3}(a^4+b^4+c^4-abc(a+b+c)) \ge a(a+b)^3+b(b+c)^3+c(c+a)^3 \ge$$
$$\ge \frac{8}{27}(a+b+c)^4 - \frac{1}{125}(a^4+b^4+c^4-abc(a+b+c))$$

Bài 71. [Iran National Mathematical Olympiad 2007]

Cho a,b,c là các số thực dương phân biệt. Chứng minh: $\left|\frac{a+b}{a-b}+\frac{b+c}{b-c}+\frac{c+a}{c-a}\right|>1$

Bài 72[Iran National Mathematical Olympiad 2007]

Tìm số T lớn nhất sao cho $\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2+e^2}\geq T\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}+\sqrt{e}\right)^2$

đúng với mọi $a,b,c,d,e\geq 0$ và thoả mãn điều kiện $a+b=c+d+e$.

Bài 73. [Middle European Mathematical Olympiad 2007]

Cho $a,b,c,d>0$ thoả mãn điều kiện $a+b+c+d=4$.

Chứng minh rằng: $a^2bc+b^2cd+c^2da+d^2ab\leq 4$

Bài 74. . [Middle European Mathematical Olympiad 2007]

Cho a,b,c,d là các số thực thỏa mãn điều kiện $\frac{1}{2}\leq a,b,c,d\leq 2$ và $abcd=1$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $S=\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{1}{c}\right)\left(c+\frac{1}{d}\right)\left(d+\frac{1}{a}\right)$

Bài 75. [China Northern Mathematical Olympiad 2007]

Cho a,b,c là độ dài 3 cạnh tam giác sao cho $a+b+c=3$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $T=a^2+b^2+c^2+\frac{4}{3}abc$

Bài 76. [China Northern Mathematical Olympiad 2007]

Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $abc=1$ và $2\leq k\in N$.

Chứng minh rằng: $\frac{a^k}{a+b}+\frac{b^k}{b+c}+\frac{c^k}{c+a}\geq\frac{3}{2}$

Bài 77. [Croatia Team Seletion Test 2007]

Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng: $\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\geq 3(a^2+b^2+c^2)$

Bài 78. [Romania Juior Balkan Team Selection Tests 2007]

Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn $\frac{1}{a+b+1}+\frac{1}{b+c+1}+\frac{1}{c+a+1}\geq 1$.

Chứng minh rằng: $a+b+c\geq ab+bc+ca$

Bài 79. [Romania Juior Balkan Team Selection Tests 2007]

Cho $x, y, z \geq 0$. Chứng minh rằng: $\dfrac{x^3+y^3+z^3}{3} \geq xyz + \dfrac{3}{4}|(x-y)(y-z)(z-x)|$

Bài 80. [Yugoslavia National Olympiad 2007]

Cho $x, y, z > 0$ thỏa mãn $x+y+z=1$. Chứng minh rằng với số tự nhiên k bất kỳ ta có:

$$\frac{x^{k+2}}{x^{k+1}+y^k+z^k}+\frac{y^{k+2}}{y^{k+1}+z^k+x^k}+\frac{z^{k+2}}{z^{k+1}+x^k+y^k} \geq \frac{1}{7}$$

Bài 81. [Cezar Lupu & Tudorel Lupu, Romania TST 2007]

Cho $a_1, a_2, \ldots, a_n; b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbb{R}, (n \geq 2)$ thỏa mãn $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} b_i^2 = 1, \sum_{i=1}^{n} a_i b_i = 0$.

Chứng minh rằng: $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\right)^2 + \left(\sum\limits_{i=1}^{n} b_i\right)^2 \leq n$.

Bài 82. [Macedonia Team Selection Test 2007]

Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng: $1 + \dfrac{3}{ab+bc+ca} \geq \dfrac{6}{a+b+c}$

Bài 83. [Italian National Olympiad 2007]

a) Với $n \geq 2$, tìm giá trị lớn nhất hằng số c_n sao cho bất đẳng thức

$\dfrac{1}{a_1+1}+\dfrac{1}{a_2+1}+\ldots+\dfrac{1}{a_n+1} \geq c_n$ đúng với mọi $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$ thỏa mãn $a_1 a_2 \ldots a_n = 1$

b) Với $n \geq 2$, tìm giá trị lớn nhất hằng số d_n sao cho bất đẳng thức

$\dfrac{1}{2a_1+1}+\dfrac{1}{2a_2+1}+\ldots+\dfrac{1}{2a_n+1} \geq d_n$ đúng với mọi $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$ thỏa mãn $a_1 a_2 \ldots a_n = 1$

Bài 84. [France Team Selection Test 2007]

Cho $a, b, c, d > 0$ thỏa mãn $a+b+c+d=1$. Chứng minh rằng:

$6(a^3+b^3+c^3+d^3) \geq a^2+b^2+c^2+d^2+\dfrac{1}{8}$

Bài 85. [Greece National Olympiad 2007]

Cho a,b,c là độ dài 3 cạnh tam giác. Chứng minh rằng:

$$\frac{(c+a-b)^4}{a(a+b-c)}+\frac{(a+b-c)^4}{b(b+c-a)}+\frac{(b+c-a)^4}{c(c+a-b)}\ge ab+bc+ca$$

Bài 86. [Bulgaria Team Selection Test 2007]

Cho $2\le n\in N$. Tìm giá trị tốt nhất của hằng số $C(n)$ sao cho bất đẳng thức

$\sum_{i=1}^{n}x_i\ge C(n)\sum_{1\le j<i\le n}\left(2x_jx_i+\sqrt{x_ix_j}\right)$ đúng $\forall x_1,x_2,\ldots,x_n\in(0,1)$ thỏa mãn $(1-x_i)(1-x_j)\ge\frac{1}{4}$

Bài 87. [Poland Second Round 2007]

Cho $a,b,c,d>0$ thỏa mãn điều kiện $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=4$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt[3]{\frac{a^3+b^3}{2}}+\sqrt[3]{\frac{b^3+c^3}{2}}+\sqrt[3]{\frac{c^3+d^3}{2}}+\sqrt[3]{\frac{d^3+a^3}{2}}\le 2(a+b+c+d)-4$$

Bài 88. [Turkey Team Selection Test 2007]

Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{ab+2c^2+2c}+\frac{1}{bc+2a^2+2a}+\frac{1}{ac+2b^2+2b}\ge\frac{1}{ab+bc+ac}$$

Bài 89. [Moldova National Mathematical Olympiad 2007]

Cho $a_1,a_2,\ldots,a_n\in\mathbb{R}$ thỏa mãn $a_k\ge\frac{1}{k},\forall k=\overline{1,n}$. Chứng minh rằng:

$$(a_1+1)\left(a_2+\frac{1}{2}\right)\ldots\left(a_n+\frac{1}{n}\right)\ge\frac{2^n}{(n+1)!}(1+a_1+2a_2+\ldots+na_n)$$

Bài 90. [Moldova National Mathematical Olympiad 2007]

Cho $a_1,a_2,\ldots,a_n\in[0,1]$. Đặt $S=a_1^3+a_2^3+\ldots+a_n^3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a_1}{2n+1+S-a_1^3}+\frac{a_2}{2n+1+S-a_2^3}+\ldots+\frac{a_n}{2n+1+S-a_n^3}\le\frac{1}{3}$$

Bài 91. [Peru Team Selection Test 2007]

Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn $a+b+c\ge\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$. Chứng minh: $a+b+c\ge\frac{3}{a+b+c}+\frac{2}{abc}$

Bài 92. [Peru Team Selection Test 2007]

Cho a,b,c là 3 cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$\frac{\sqrt{b+c-a}}{\sqrt{b}+\sqrt{c}-\sqrt{a}}+\frac{\sqrt{c+a-b}}{\sqrt{c}+\sqrt{a}-\sqrt{b}}+\frac{\sqrt{a+b-c}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}}\le 3$$

Bài 93. [Romania Team Selection Tests 2007]

Cho $\begin{cases} a_1, a_2, ..., a_n \geq 0 \\ a_n^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 = 1 \end{cases}$. Tìm giá trị lớn nhất của $S = (1-a_1)(1-a_2)...(1-a_n)$

Bài 94. [Ukraine Mathematical Festival 2007]

Cho $a, b, c > 0$ và $abc \geq 1$. Chứng minh rằng:

a) $\left(a + \frac{1}{a+1}\right)\left(b + \frac{1}{b+1}\right)\left(c + \frac{1}{c+1}\right) \geq \frac{27}{8}$

b) $27(a^3 + a^2 + a + 1)(b^3 + b^2 + b + 1)(c^3 + c^2 + c + 1) \geq 64(a^2 + a + 1)(b^2 + b + 1)(c^2 + c + 1)$

Bài 95. [Asian Pacific Mathematical Olympiad 2007]

Cho $x, y, z > 0$ thỏa mãn $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{x^2 + yz}{\sqrt{2x^2(y+z)}} + \frac{y^2 + zx}{\sqrt{2y^2(z+x)}} + \frac{z^2 + xy}{\sqrt{2z^2(x+y)}} \geq 1$$

Bài 96. [Brazilian Olympiad Revenge 2007]

Cho $a, b, c \in \mathbb{R}$ với $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$a^2 + b^2 + c^2 + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + 2\left(a + b + c + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 6 + 2\left(\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} + \frac{c}{a} + \frac{c}{b} + \frac{b}{c}\right)$$

Bài 97. [India National Mathematical Olympiad 2007]

Cho $x, y, z > 0$. Chứng minh rằng:

$$(x+y+z)^2(yz + zx + xy)^2 \leq 3(y^2 + yz + z^2)(z^2 + zx + x^2)(x^2 + xy + y^2)$$

Bài 98. [Brirish National Mathematical Olympiad 2007]

Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng: $(a^2 + b^2)^2 \geq (a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$

Bài 99. [Korean National Mathematical Olympiad 2007]

Tìm tất cả các giá trị k dương để bất đẳng thức sau đúng với mọi $a, b, c > 0$

$$\frac{a}{c+kb} + \frac{b}{a+kc} + \frac{c}{b+ka} \geq \frac{1}{2007}$$

Bài 100. [Hungary–Isarel National Mathematical Olympiad 2007]

Cho $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $a^2 \leq 1, a^2 + b^2 \leq 5, a^2 + b^2 + c^2 \leq 14, a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \leq 30$.

Chứng minh rằng: $a + b + c + d \leq 10$

§ 25.3 NHÌN LẠI VÀ MỞ RA

Các bạn thân mến! Vậy là các bạn đã cùng chúng tôi đi tới mục cuối cùng của cuốn sách lớn này. Quả thực các bạn đã bước những bước đi thật dài, bắt đầu với những bất đẳng thức đại số cổ điển (***AM – GM***, ***Cauchy – Schwarz***, ***Holder***, ***Minkowski***, ***Chebyshev***) tới những bất đẳng thức cận đại (bất đẳng thức ***hoán vị***, ***Shur***, ***Muirhead***). Từ những hòn đá tảng của phương pháp giải tích (ứng dụng của đạo hàm, các định lý ***Lagrange***, ***Bernoulli***, ***Jensen***, ***Karamata***, ***RCF***, ***LCF***, ***Popoviciu***, ứng dụng của tích phân ***Riman***) chuyển sang làm quen với những phương pháp đầy mới mẻ, những viên kim cương sáng lấp lánh trong thế giới bất đẳng thức đại số sơ cấp hiện đại (***S.O.S***, ***MV***, ***A.B.C***, ***G.L.A***, ***E.V***, ***D.A.C***). Các bạn đã được thưởng thức những bài viết rất đặc sắc về bất đẳng thức theo nhiều cách tiếp cận khác nhau (***U.C.T***, ứng dụng của phép đổi biến, đổi biến thuận nghịch, ứng dụng của định lý ***Viet – Rolle***, các bất đẳng thức không thuần nhất, hoán vị). Các bạn cũng đã cùng chúng tôi khảo sát nhiều bài toán riêng rất đặc biệt, những bài toán có nhiều lời giải, và mỗi lời giải lại có một ý nghĩa khác nhau, đôi khi cũng có cả những bài toán chỉ có một cách giải, nhưng cách giải của nó lại thực sự ấn tượng. Hàng chục chuyên đề, hàng trăm ví dụ và hàng nghìn bài toán. Đó chính xác là tất cả những gì chúng tôi đã trình bày với các bạn. Nhưng qua tất cả những trang sách đó, các bạn đã thu lượm được cho mình những gì, đây mới thực sự là điều chúng tôi cảm thấy trăn trở nhất khi thực hiện công việc biên soạn nội dung cuốn sách. Vì lẽ đó, các bạn hãy tiếp tục cùng chúng tôi "đi" nốt những dòng dưới đây sau khi đã trải qua một quá trình tự rèn luyện không dễ dàng ở những chương trước. Chúng tôi hi vọng những phân tích này sẽ giúp chúng tôi (những người làm sách) và các bạn (những độc giả đầy đam mê) có thể trở nên gần gũi với nhau hơn, và như vậy, hẳn nội dung cuốn sách cũng sẽ tới với các bạn đọc một cách dễ dàng hơn trước.

Đối với hầu hết mọi người, bắt đầu bao giờ cũng là một việc khó. Chương thứ nhất của cuốn sách được dành riêng để trình bày về năm bất đẳng thức đại số kinh điển. Lần lượt là ***AM – GM***, ***Cauchy – Schwarz***, ***Holder***, ***Minkowski***, ***Chebyshev***, trong đó bốn bất đẳng thức đầu tiên có thể dùng để chứng minh lẫn nhau. Không dễ để có thể diễn tả hết sức mạnh của các bất đẳng thức này đối với những bất đẳng thức cổ điển thông qua một vài ví dụ cụ thể. Hơn nữa nếu có thể nắm vững và ứng dụng được chúng trong các bài toán cụ thể một cách linh hoạt thì có thể coi như bạn đã "biết" khá nhiều về các bất đẳng thức đại số. Vì lẽ đó, chúng tôi lựa chọn cách trình bày quy phạm, đi từ dễ đến khó, chi tiết ở từng định lý, cặn kẽ trong từng ví dụ và lựa chọn một số lượng bài tự giải khá lớn để bạn đọc luyện tập. Bên cạnh đó chúng tôi cũng đã gửi gắm khá nhiều những kỹ thuật áp dụng các bất đẳng thức cổ điển mới vào từng trang sách. Tiêu biểu phải nhắc lại, đó là kỹ thuật chọn điểm rơi, cân bằng hệ số, kỹ thuật tách phân thức âm và đánh giá mẫu số trong ứng dụng của bất đẳng thức $AM - GM$. Kỹ thuật sắp xếp biến để áp dụng bất đẳng thức Chebyshev cũng là một kỹ thuật tinh tế và đáng chú ý, các bạn cần thực hành nhiều nếu muốn sử dụng thành thạo trong các bài toán đối xứng, và kể cả một số bài toán hoán vị nữa.

Trong chương II, chúng tôi tiếp tục cách trình bày quy phạm khi tiến hành giới thiệu các bất đẳng thức cận đại. Các bất đẳng thức đó lần lượt là bất đẳng thức hoán vị, bất đẳng thức ***Schur*** và bất đẳng thức ***Muirhead***. Có thể hiểu bất đẳng thức hoán vị là cái nhân của bất đẳng thức ***Chebyshev***, và do đó những bài toán đối xứng có thể giải bằng ***Chebyshev*** cũng giải được nhờ bất đẳng thức hoán vị, hơn nữa có khá nhiều bài toán hoán vị chỉ có thể sử dụng bất đẳng thức hoán vị để giải quyết vì nếu sử dụng bất đẳng thức ***Chebyshev*** thì các đánh giá sẽ trở nên rất phức tạp. Cũng trong chương này chúng ta đã bắt đầu công phá các bất đẳng thức đối xứng một cách có hệ thống hơn. Bắt đầu với việc sử dụng bất đẳng thức Shur nhờ việc quy các bất đẳng thức ban đầu về các bài toán đơn giản hơn trên các đa thức ***Viet*** ba biến cơ bản $p = a + b + c,\ q = ab + bc + ca,\ r = abc$. Tiếp theo đó lược đồ ***Young*** cùng những phép biến đổi đối xứng, bất đẳng thức ***Muirhead***, và đặc biệt là bất đẳng thức ***ASYM*** đã đưa ra một con đường "chuẩn mực" khi giải các bài toán đối xứng. Đó là quy bất đẳng thức đối xứng về các đa thức đối xứng cơ bản của các biến, sau đó sử dụng những đánh giá trên các đa thức đối xứng cơ bản đó để đưa ra kết luận bài toán. Phương pháp này đặc biệt tỏ ra có hiệu lực khi ta đã có trước trong tay những đánh giá đủ chặt, đặc biệt là khi có sự trộn lẫn của các tổng đối xứng đồng bậc khác nhau.

Bước vào chương III, lần đầu tiên trong cuốn sách này các bạn được làm quen với những ứng dụng của phép đạo hàm, và có thể ngay lập tức nhận thấy sức mạnh tiềm tàng của phương pháp khảo sát hàm số trong chứng minh bất đẳng thức. Thật vậy, nếu là bất đẳng thức một biến, ta có thể áp dụng trực tiếp định lý ***Fermat*** về các điểm tới hạn, nếu là bất đẳng thức nhiều biến, ta có thể khảo sát lần lượt theo từng biến. Dù là bài toán đơn giản hay có hình thức phức tạp, kết quả vẫn đạt được khi chúng ta kiểm soát được dấu của đạo hàm của các hàm số thông qua các không điểm của chúng. Phát triển sâu sắc hơn ý tưởng này, bài toán cực trị có ràng buộc trên lý thuyết đã được giải quyết triệt để nhờ các định lý ***Lagrange***. Một mặt khác công cụ đạo hàm và các định lý của giải tích cho phép ta khảo sát hình dáng của các hàm số chính xác tới từng "địa phương" (sự tăng giảm của hàm số tại một điểm). Tuy nhiên với những bất đẳng thức nhiều biến thì số "địa phương" sẽ bị tăng lên quá nhanh và quá "lớn". Do đó cần có những hướng tiếp cận đặc biệt khác. Các bất đẳng thức ***Jensen***, ***Karamata***, ***RCF***, ***LCF***, ***Popoviciu*** được phát triển theo cùng một tư tưởng. Đó là với những hàm đủ tốt (đạo hàm cấp 2 thỏa mãn các tính chất nào đấy) thì ta có thể tiến hành dồn các bộ nhiều biến về một số bộ nhiều biến khác đặc biệt hơn. Như vậy bài toán sẽ trở nên khá dễ dàng. Cuối cùng vẫn giữ nguyên tinh thần của phương pháp giải tích, chúng ta lại tìm cách tiếp cận các bất đẳng thức một cách "toàn cục", đó chính là những ứng dụng đặc sắc của tích phân ***Riman***. Trong chương này, mặc dù vẫn cố gắng đáp ứng những chuẩn mực trong cách trình bày lý thuyết và bài tập, chúng tôi đã chủ động tạo cho các bạn một nhịp suy nghĩ tìm tòi để cải tiến các phương pháp, khắc phục nhược điểm, phát huy ưu điểm của chúng. Đây cũng là một cách khởi động tốt để các bạn có thể bước vào chương thứ tư, chương bao gồm các bài toán rất đẹp, các ý tưởng rất mới, cũng là chương hay và khó nhất cuốn sách.

Chương IV, những viên kim cương của bất đẳng thức sơ cấp hiện đại. Đây thực sự là tập hợp của những hướng đi mới, những ý tưởng mới nhằm công phá thế giới bất đẳng thức đa dạng và phong phú. Đây cũng là lần đầu tiên những ý tưởng này được đặt cạnh nhau trong một mối quan hệ thống nhất. Bắt đầu với phương pháp ***S.O.S***, phương pháp này được phát triển nhờ việc đánh giá các hệ số của tổng bình phương có dạng $S_1(b-c)^2+S_2(c-a)^2+S_3(a-b)^2\ge 0$, hoặc dạng cải tiến của nó là $S_1(b-c)^2+S_2(c-a)^2+S_3(a-b)^2\ge S(a-b)(b-c)(a-c)$ dùng để xử lý tốt hơn đối với các bất đẳng thức hoán vị. Tiếp theo đó là ý tưởng về phép dồn biến. Như đã nói, ý tưởng của phương pháp dồn biến là không chứng minh "ngay" như ***S.O.S*** mà tìm cách thu hẹp bài toán $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)\ge 0$ trên tập D về tập Λ nhỏ hơn, ở đây tập Λ có những tính chất đặc biệt nào đó, rồi sau đó mới xử lý cụ thể trên tập Λ. Ý tưởng rất đơn giản này đã được triển khai với hàng loạt định lý rất mạnh như ***S.M.V***, ***U.M.V***, ***G.M.V***, mỗi định lý thích hợp với những bất đẳng thức có số biến khác nhau. Sau phương pháp dồn biến, chúng ta đến với chùm ba phương pháp ***A.B.C***, ***G.L.A***, ***E.V***. Và mặc dù bắt đầu với mục đích đổi biến để tiến hành khảo sát nhằm giảm biến, hầu như ngay lập tức có thể nhận thấy ba phương pháp này đã thực hiện cùng một ý tưởng, đó là dồn biến gián tiếp. Khác với dồn biến trực tiếp, để dồn biến gián tiếp ta tiến hành đổi biến trước, rồi mới thực hiện phép dồn biến trên các biến mới, sau đó có thể lại quay lại làm việc trên các biến cũ, các biến đó lúc này đã được dồn về những trường hợp đặc biệt. Ý tưởng tinh tế này cũng đồng thời đặt ra một câu hỏi khó là có những phép đổi biến nào thực sự có ý nghĩa và hiệu quả, đây vẫn còn là câu hỏi mở. Cuối cùng, phương pháp chia để trị đưa ra và triển khai một ý tưởng không mới, nhưng không hề đơn giản. Đó là thay vì tìm cách chứng minh trên toàn miền xác định ta tìm cách chia nhỏ thành các miền đơn giản hơn, để sau khi có những đánh giá trên từng miền ta có thể kết hợp những kết quả đó lại nhờ những định lý nối dài. Đây là tất cả những ý tưởng lớn nhất đã được triển khai trong suốt chương bốn. Trong chương này các bất đẳng thức đối xứng đã được giải quyết một cách khá triệt để, một bài toán cũng có thể được giải quyết bằng tất cả các phương pháp, tùy tình huống cụ thể mà lời giải sẽ có độ phức tạp khác nhau. Trong một chương mà cảm hứng sáng tạo có thể bắt gặp ở tất cả các bài toán, chúng tôi lựa chọn sử dụng một cách trình bày mang đậm tính tìm tòi khám phá, cách trình bày quy phạm truyền thống đã được nới lỏng với niềm tin rằng các bạn, những độc giả rất năng động, sẽ tiếp thu được những ý tưởng và những phương pháp này một cách đúng đắn và đầy đủ nhất khi được chứng kiến lại chính xác con đường mà các tác giả đã đi qua để tìm ra chúng. Chúng tôi kì vọng rằng sau khi đã quen thuộc với các đặt và giải quyết vấn đề trong từng chuyên đề, các bạn cũng sẽ có những sáng tạo của riêng mình trong tương lai.

Sau bốn chương đầu với cách trình bày khá quen thuộc, ở chương cuối cùng, chương năm, chúng tôi đã tổng hợp và chọn lọc một số bài viết, cũng như bài toán đặc sắc nhất để gửi tới các bạn. Đó là phương pháp ***U.C.T***, đó là bất đẳng thức ***Nesbitt – Sharpiro***, đó là kỹ thuật ***p,q,r*** hoán vị, và đó là rất nhiều bài toán với lời giải độc đáo cùng một danh sách dài các bài tập không có lời giải. Và còn nhiều chuyên đề hơn nữa chúng tôi muốn gửi tới các bạn. Có tất cả những điều đó vì chúng tôi muốn nói với các bạn rằng thế giới bất đẳng thức còn rất rộng và còn rất nhiều điều thú vị. Tất cả những phương pháp đã có, theo một khía cạnh nào đó, chỉ là tương đối, và dĩ nhiên không thể là toàn năng, chính vì thế luôn có những điều mới mẻ đón chờ các bạn ở phía trước sự sáng tạo và tinh thần làm việc nghiêm túc. Để minh họa cho điều đó bây giờ thay vì đánh giá sức mạnh của những phương pháp đã có, chúng ta hãy thử cùng nhau nhìn lại xem, còn những bài toán nào vẫn đang ở ngoài tầm với, hiển nhiên rằng việc tiếp tục tìm tòi về những bài toán còn sót lại và hướng tới những điều mới lạ sẽ là chương kết không thể thích hợp hơn với một bản nghiên cứu rộng khắp như cuốn sách mà chính các bạn đang cầm trên tay.

Các bất đẳng thức thường được phân loại theo nhiều cách. Phân chia theo số biến ta có bất đẳng thức ba biến, bốn biến, và bất đẳng thức nhiều biến. Phân chia theo hình thức ta có bất đẳng thức đối xứng, bất đẳng thức hoán vị. Phân chia theo đặc tính ta có bất đẳng thức thuần nhất, bất đẳng thức không thuần nhất. Mỗi phương pháp tỏ ra có ưu thế với dạng này không có gì đảm bảo vẫn giữ được ưu thế đó khi áp dụng để giải quyết những bài toán thuộc dạng khác. Trước hết chúng ta hãy xem các bất đẳng thức đối xứng, thuần nhất, bởi vì đây là dạng bất đẳng thức đơn giản, quen thuộc, và phổ biến nhất. Đối với những bất đẳng thức dạng này việc áp dụng các bất đẳng thức cổ điển thường đem lại hiệu quả cao. Một hướng đi rất mang hơi hướng cận đại khi tấn công các bất đẳng thức trong nhóm này là sử dụng các bất đẳng thức ***Muirhead***, ***Shur*** và ***ASYM***. Ý tưởng chủ chốt là do mọi bất đẳng thức đối xứng đều có thể quy về bất đẳng thức trộn lẫn giữa các tổng đối xứng cơ bản của các biến ban đầu, cho nên nếu có những bất đẳng thức cơ sở đủ mạnh, thì ta cũng sẽ dễ dàng có được những kết quả cần chứng minh. Hạn chế ở đây là với những bất đẳng thức có sẵn như ***Muirhead***, ***Shur*** và ***ASYM*** thì việc giải quyết những khó khăn phát sinh khi có nhiều tổng đối xứng bậc khác nhau xuất hiện cùng trong bài toán trở nên rất khó khăn. Cụ thể hơn, có thể liệt kê lại ở đây 13 bài toán rất khó và hơn nữa trong số chúng chưa có lời giải trọn vẹn. Các bạn có thể xem lại các ký hiệu trong chuyên đề về bất đẳng thức ***Muirhead***.

Bài 1: Cho các biến $x,y,z \geq 0$. Tìm hằng số k tốt nhất sao cho bất đẳng thức sau luôn đúng $S_M + kS_{a_2b_2c_2} \geq (k+1)S_{a_1b_1}$ trong đó $M, a_1, b_1, a_2, b_2, c_2$ là các số nguyên dương thỏa mãn:

$$M = a_1 + b_1 = a_2 + b_2 + c_2; a_1 \geq b_1; a_2 \geq b_2 \geq c_2; a_1 \geq a_2$$

Bài 2: Cho các biến $x, y, z \ge 0$. Tìm hằng số k tốt nhất sao cho bất đẳng thức sau luôn đúng: $S_M + kS_{a_2b_2c_2} \ge (k+1)S_{a_1b_1c_1}$ trong đó $M, a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ là các số nguyên dương thỏa mãn:

$$a_1 \ge b_1 \ge c_1 \text{ ; } a_1 + b_1 \ge a_2 + b_2 \text{ ; } M = a_1 + b_1 + c_1 = a_2 + b_2 + c_2$$

Bài 3: Cho các biến $x, y, z \ge 0$. Tìm hằng số k tốt nhất sao cho bất đẳng thức sau luôn đúng: $S_{a_1b_1c_1} + kS_{a_3b_3c_3} \ge (k+1)S_{a_2b_2c_2}$ trong đó $a_1, b_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3, c_3$ là các số nguyên dương thỏa mãn:

$$a_1 \ge b_1 \ge c_1 \text{ ; } a_1 + a_2 \ge b_1 + b_2 \ge c_1 + c_2 \text{ ; } a_1 + b_1 = a_2 + b_2 + c_2 = a_3 + b_3 + c_3$$

Bài 4: Cho các biến $x_1, x_2, ..., x_n \ge 0$. Tìm hằng số k tốt nhất sao cho bất đẳng thức sau luôn đúng: $S_{a_1a_2...a_n} + kS_{c_1c_2...c_n} \ge (k+1)S_{b_1b_2...b_n}$ trong đó

$(a_1, a_2, ..., a_n), (b_1, b_2, ..., b_n), (c_1, c_2, ..., c_n)$ là 3 dãy nguyên dương không giảm sao cho:

$a_1 + a_2 + ... + a_k \ge b_1 + b_2 + ... + b_k \ge c_1 + c_2 + ... + c_k \quad \forall k = \overline{1, n-1}$

$a_1 + a_2 + ... + a_n = b_1 + b_2 + ... + b_n = c_1 + c_2 + ... + c_n$

Tổng quát hơn 1 chút nữa là bài toán sau:

Bài 5: Cho các biến không âm $x_1, x_2, ..., x_n$. Tìm hằng số k tốt nhất sao cho bất đẳng thức sau luôn đúng: $S_{a_1a_2...a_n} - S_{b_1b_2...b_n} \ge k\left(S_{c_1c_2...c_n} - S_{d_1d_2...d_n}\right)$ trong đó

$(a_1, a_2, ..., a_n), (b_1, b_2, ..., b_n), (c_1, c_2, ..., c_n), (d_1, d_2, ..., d_n)$ là các dãy số nguyên dương không giảm:

$a_1 + a_2 + ... + a_k \ge b_1 + b_2 + ... + b_k \ge c_1 + c_2 + ... + c_k \ge d_1 + d_2 + ... + d_k \quad \forall k = \overline{1, n-1}$

$a_1 + a_2 + ... + a_n = b_1 + b_2 + ... + b_n = c_1 + c_2 + ... + c_n = d_1 + d_2 + ... + d_n$

Bài 6: Cho dãy số không tăng $\{a_n\}$ và 1 hoán vị của nó $\{b_n\}$ $(n \in \mathbb{Z}^+)$. Chứng minh rằng nếu $x_1 \ge x_2 \ge ... \ge x_n \ge 0$ thì $\sum_{cyc} x_1^{a_1}x_2^{a_2}...x_n^{a_n} \ge \sum_{cyc} x_1^{b_1}x_2^{b_2}...x_n^{b_n} \ge \sum_{cyc} x_1^{a_n}x_2^{a_{n-1}}...x_n^{a_1}$.

Chú ý: Bài toán trên có ý nghĩa đối với bất đẳng thức hoán vị tương tự như bất đẳng thức ***Muirhead*** đối với bất đẳng thức đối xứng. Làm mạnh hơn bài toán trên ta có:

Bài 7: Cho 2 dãy không tăng $\{a_n\}, \{b_n\}$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

$a_1 + a_2 + ... + a_n = b_1 + b_2 + ... + b_n$

$a_1 + a_2 + ... + a_k \ge b_1 + b_2 + ... + b_k \quad \forall k = \overline{1, n-1}$

Dãy biến $\{x_n\}$ không tăng và không âm có $\{y_n\}$ là 1 hoán vị của nó.

Chứng minh rằng: $\sum_{cyc} x_1^{a_1}x_2^{a_2}...x_n^{a_n} \ge \sum_{cyc} y_1^{b_1}y_2^{b_2}...y_n^{b_n}$

Và tương tự quá trình ta sẽ có những bài bất đẳng thức hoán vị sau:

Kí hiệu: $C_X^{\alpha}=\sum_{sym}a_1^{\alpha_1}a_2^{\alpha_2}...a_n^{\alpha_n}=C(\alpha_1,\alpha_2,....,\alpha_n)$. Đặc biệt nếu $\alpha_1,\alpha_2,...\alpha_n$ là các số tự nhiên từ 0 đến 9 thì kí hiệu mới được đổi là: $C_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n}=C(\alpha_1,\alpha_2,....,\alpha_n)$.

Ngoài ra nếu $\alpha_1\ge\alpha_2\ge...\ge\alpha_k>\alpha_{k+1}=\alpha_{k+2}=...=\alpha_n=0$ thì $C_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n}=C_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_k}$

Bài 8: Cho M,a_1,b_1,a_2,b_2 là các số nguyên dương sao cho: $M=a_1+b_1=a_2+b_2$; $a_1>a_2\ge b_2>b_1$. Cho 2 biến $x,y\ge 0$. Tìm hằng số k tốt nhất để bất đẳng thức sau đúng với mọi $x,y\ge 0$:

$C_M+kC_{a_2b_2}\ge(k+1)C_{a_1b_1}$

Bài 9: Cho các biến $x,y,z\ge 0$. Tìm hằng số k tốt nhất sao cho bất đẳng thức sau luôn đúng: $C_m+kC_{a_2b_2c_2}\ge(k+1)C_{a_1b_1}$ trong đó M,a_1,b_1,a_2,b_2,c_2 là các số nguyên dương thỏa mãn:

$M=a_1+b_1=a_2+b_2+c_2;a_1\ge b_1;a_2\ge b_2\ge c_2;a_1\ge a_2$

Bài 10: Cho các biến $x,y,z\ge 0$. Tìm hằng số k tốt nhất sao cho bất đẳng thức sau luôn đúng: $C_m+kC_{a_2b_2c_2}\ge(k+1)C_{a_1b_1c_1}$ trong đó $M,a_1,b_1,c_1,a_2,b_2,c_2$ là các số nguyên dương thỏa mãn:

$a_1\ge b_1\ge c_1$; $a_1+b_1\ge a_2+b_2$; $M=a_1+b_1+c_1=a_2+b_2+c_2$;

Bài 11: Cho các biến $x,y,z\ge 0$. Tìm hằng số k tốt nhất sao cho bất đẳng thức sau luôn đúng: $C_{a_1b_1}+kC_{a_3b_3c_3}\ge(k+1)C_{a_2b_2c_2}$ trong đó $a_1,b_1,a_2,b_2,c_2,a_3,b_3,c_3$ là các số nguyên dương thỏa mãn:

$a_1\ge b_1\ge c_1$; $a_1+a_2\ge b_1+b_2\ge c_1+c_2$; $a_1+b_1=a_2+b_2+c_2=a_3+b_3+c_3$;

Bài 12: Cho các biến $x_1,x_2,...x_n\ge 0$. Tìm hằng số k tốt nhất sao cho bất đẳng thức sau luôn đúng: $C_{a_1a_2...a_n}+kC_{c_1c_2...c_n}\ge(k+1)C_{b_1b_2...b_n}$ trong đó

$(a_1,a_2,...a_n),(b_1,b_2,...b_n),(c_1,c_2,...c_n)$ là 3 dãy nguyên dương không giảm sao cho:

$a_1+a_2+...+a_k\ge b_1+b_2+...+b_k\ge c_1+c_2+...+c_k\ \ \forall k=\overline{1,n-1}$

$a_1+a_2+...+a_n=b_1+b_2+...+b_n=c_1+c_2+...+c_n$

Tổng quát hơn 1 chút nữa là bài toán sau:

Bài 13: Cho các biến không âm $x_1,x_2,...x_n$. Tìm hằng số k tốt nhất sao cho bất đẳng thức sau luôn đúng: $C_{a_1a_2...a_n}-C_{b_1b_2...b_n}\ge k\left(C_{c_1c_2...c_n}-C_{d_1d_2...d_n}\right)$ trong đó

$(a_1,a_2,...a_n),(b_1,b_2,...b_n),(c_1,c_2,...c_n),(d_1,d_2,...d_n)$ là các dãy số nguyên dương không giảm sao cho:

$a_1+a_2+...+a_k\ge b_1+b_2+...+b_k\ge c_1+c_2+...+c_k\ge d_1+d_2+...+d_k\ \ \forall k=\overline{1,n-1}$

$a_1 + a_2 + ... + a_n = b_1 + b_2 + ... + b_n = c_1 + c_2 + ... + c_n = d_1 + d_2 + ... + d_n$

Đây thực sự là những bài toán rất khó có lời giải trọn vẹn. Tuy nhiên nếu có thể có lời giải trọn vẹn cho bài toán nào đó trong số những bài toán này thì ta sẽ lại có thể có thêm những bất đẳng thức đối xứng thuần nhất rất chặt, và những chứng minh sáng sủa hơn cho nhiều bài toán đối xứng cũ. Từ bài 6 trở đi, các kết quả tìm được sẽ hỗ trợ trực tiếp việc giải các bài toán hoán vị. Bây giờ, chúng ta hãy nói một chút về các bài toán hoán vị. Rõ ràng trong cả cuốn sách này đã có rất nhiều lần chúng ta công phá các bài toán hoán vị bằng nhiều cách với những công cụ khác nhau. Tuy nhiên mọi việc vẫn rất khó khăn. Vậy đâu là khó khăn chính. Có thể nói đơn giản khó khăn chính nằm ở chỗ đẳng thức trong các bất đẳng thức hoán vị là rất khó kiểm soát. Thông thường trong các bất đẳng thức đối xứng thì đẳng thức xảy ra tại những vị trí khá đẹp, như các biến bằng nhau, hoặc 1 biến đạt giá trị biên và các biến còn lại bằng nhau. Ngoại lệ có một số bất đẳng thức đối xứng mà dấu bằng đạt được khi các biến rất lệch nhau, số này rất ít. Tuy nhiên đối với các bất đẳng thức hoán vị thì việc đẳng thức xảy ra khi các biến rất lệch nhau, lệch cả tâm và ở rất xa biên là rất thường gặp. Thường thì khi đó đẳng thức sẽ xảy ra khi các biến thỏa mãn một hoặc một vài hệ thức đặc biệt nào đó, và do đó có thể có trường hợp đẳng thức xảy ra tại vô hạn bộ số (các bộ này thậm chí không tỷ lệ với nhau). Đâu sẽ là hướng đi sáng sủa nhất với những bài toán loại này. Cho đến giờ chúng ta có hai hướng đi sau đây. Hướng đi thứ nhất là sử dụng các phương pháp vốn dành cho bất đẳng thức đối xứng kèm theo một số sự cải tiến nào đó. Chẳng hạn có thể cải tiến phương pháp ***S.O.S***, ***D.A.C*** và thậm chí cả phương pháp sử dụng ***Shur*** dựa vào phép biến đổi bài toán về dạng tổng các bình phương như sau $S_1(b-c)^2 + S_2(c-a)^2 + S_3(a-b)^2 \geq S(a-b)(b-c)(c-a)$. Hướng đi này tỏ ra có hiệu quả trong rất nhiều bài toán khó, đặc biệt khi nó được hỗ trợ bởi một số bất đẳng thức phụ đủ mạnh. Hướng đi thứ hai là tìm cách đổi biến nhằm quy tất cả các trường hợp đẳng thức xảy ra khi các biến ban đầu lệch nhau về trường hợp đẳng thức xảy ra khi các biến mới khá "đẹp". Để thực hiện được điều đó chúng ta cần sử dụng đến những định lý đã nêu ra trong mục phương pháp ***G.L.A*** tổng quát. Theo đó đối với bất đẳng thức cần chứng minh có dạng $F(a,b,c) \geq 0$, ta sẽ chọn cách đổi biến thích hợp có thể dẫn tới bất đẳng thức $A^t + B^t + C^t \geq const$. Sau đó chứng minh rằng với mọi giá trị có thể của A, B, C luôn tồn tại a', b', c' sao cho khi đổi biến ta nhận được A', B', C' thỏa mãn:

$$\begin{cases} A'B' = B'C' + C'A' = AB + BC + CA \\ A'B'C' = ABC \\ (A' - B')(B' - C')(C' - A') = 0 \end{cases} \qquad (*)$$

Lúc này ta đã có thể áp dụng định lý 1 và định lý 2 trong mục 20.VIII để quy bài toán về trường hợp trong 3 biến A, B, C có 2 biến bằng nhau. Thực ra ta cần chứng minh hệ (*) có nghiệm vì định lý 1 chỉ được phát biểu cho R_+^3, trong khi đó (A, B, C) chỉ chạy trong 1 tập con nào đó của R_+^3, vì chúng còn bị ràng buộc bởi một quan hệ qua chính phép đổi biến. Tuy nhiên đây cũng chính là "gót chân Asin" của phương pháp này. Tại sao vậy. Bởi vì trước khi đổi biến chúng ta không thể biết được hệ (*) có nghiệm hay không. Trong một số trường hợp đơn giản thì ta có thể khẳng định ngay điều đó. Nhưng trong trường hợp tổng quát thì mọi việc không có gì chắc chắn. Hơn nữa ngay cả khi đã quy về trường hợp đẳng thức đơn giản của biến mới, nếu cách đổi biến quá phức tạp thì khi quay lại biến cũ chúng ta cũng sẽ gặp rất nhiều khó khăn về mặt tính toán. Để hình dung được những khó khăn đó các bạn có thể thử tìm phép đổi biến thích hợp với bài toán sau đây:

Bài 14. [Võ Quốc Bá Cẩn]

Tìm hằng số k tốt nhất sao cho bất đẳng thức sau đúng với mọi số thực dương a, b, c:

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\ge\sqrt{\frac{k(a^2+b^2+c^2)}{ab+bc+ca}+9-k}$$

Như vậy vấn đề này có thể nói là mới đang ở vạch xuất phát và vẫn đang đợi những tìm tòi của chính các bạn trong tương lai. Chúng ta hãy chuyển sang các bất đẳng thức không thuần nhất. Có thể coi các bất đẳng thức này là 1 phần của các bất đẳng thức đối xứng. Bởi vì nó vẫn là sự trộn lẫn giữa các tổng đối xứng cơ bản trên các biến gốc, số bất đẳng thức như thế này tuy không thực sự nhiều, cách phát biểu có thể hơi cồng kềnh, nhưng đặc biệt ấn tượng.

Đặt $S_{k,n}=\sum\limits_{i_1<\ldots<i_k\subset\{1,2,\ldots,n\}} x_{i_1}\ldots x_{i_k}$ $(k<n)$ và $x_1,x_2,\ldots,x_n\in\mathbb{R}$. Khi đó ta có các bất đẳng thức sau

Bài 15. $\left(S_{4,4}-S_{2,4}+1\right)^2+\left(S_{3,4}-S_{1,4}\right)^2\ge\frac{125}{216}\left(\sqrt{2}S_{3,4}+\sqrt{3}S_{2,4}\right)^2$

Bài 16. $\left(49S_{4,4}-371S_{2,4}+2809\right)^2+371\left(7S_{3,4}-53S_{1,4}\right)^2\ge 360^3\left(S_{4,4}+S_{2,4}+3S_{1,4}+1\right)^2$

Bài 17. $\left(9S_{4,4}-21S_{2,4}+49\right)^2+21\left(3S_{3,4}-7S_{1,4}\right)^2\ge\frac{2000}{7}\left(S_{4,4}+2S_{2,4}+5S_{1,4}+2\right)^2$

Bài 18. $\left(S_{5,5}-2S_{3,5}+4S_{1,5}\right)^2+2\left(S_{4,5}-2S_{2,5}+4\right)^2\ge\left(S_{3,5}-S_{4,5}+1\right)^2$

Bài 19. $\left(S_{6,6}-S_{4,6}+S_{2,6}-1\right)^2+\left(S_{5,6}-S_{3,6}+S_{1,6}\right)^2\ge\frac{16}{121}\left(6S_{6,6}-S_{4,6}+5S_{1,6}+1\right)^2$

Bài 20. $\left(8S_{6,6}-20S_{4,6}+50S_{2,6}-125\right)^2+10\left(4S_{5,6}-10S_{3,6}+25S_{1,6}\right)^2\ge 96.04\left(S_{4,6}+S_{3,6}\right)^2$

Như vậy, có thể nói các bài toán hoán vị và các bài toán không thuần nhất (không mẫu mực) sẽ là những hướng đi chủ yếu của chúng ta trong tương lai, tất nhiên, những bài toán đối xứng thuần nhất vẫn là một mảnh đất màu mỡ để các bạn tiếp tục triển khai những ý tưởng mới của mình. Chúng tôi sẽ liệt kê lại một số bài toán hoán vị có dạng khá đơn giản, nhưng việc giải quyết được nó vẫn là những câu hỏi mở, thách thức bạn đọc.

Bài 21. [Phan Thành Việt] Cho $x, y, z > 0, xyz = 1$. Tìm k tốt nhất để

$$\frac{x+y^2}{y+z^k}+\frac{y+z^2}{z+x^k}+\frac{z+x^2}{x+y^k}\ge 3.$$

Ghi chú: bất đẳng thức đúng với $k = 1, 2, 3, 4$ nhưng sai với $k = 5$.

Bài 22. [Mở rộng bất đẳng thức Jackgarfukel]

1. Cho $\begin{cases} a,b,c>0 \\ k>1 \end{cases}$ và $C_k = max\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{k}}, \frac{(k-1)^k + k^k(k-1)}{k^k(k-1)}\right)$. Chứng minh rằng:

$$\sum_{cyc}\frac{a}{(a+b)^{\frac{1}{k}}}\le C_k(a+b+c)^{\frac{k-1}{k}}$$ (với $k=2$, chúng ta có bất đẳng thức ***Jackgarfukel***)

2. Cho $a, b, c > 0$ và q là hằng số thực dương. Tìm k tốt nhất sao cho bất đẳng thức sau đúng

$$\frac{a}{\sqrt{a+qb}}+\frac{b}{\sqrt{b+qc}}+\frac{c}{\sqrt{c+qa}}\le k\sqrt{a+b+c}$$

3. Cho $a, b, c, d > 0$. Tìm số thực k nhỏ nhất sao cho bất đẳng thức sau đúng

$$\frac{a}{\sqrt{a+b}}+\frac{b}{\sqrt{b+c}}+\frac{c}{\sqrt{c+d}}+\frac{d}{\sqrt{d+a}}\le k\sqrt{a+b+c+d}$$

Bài 23. [Cậu bé quàng khăn đỏ - MnF] Cho $a, b, c > 0$, $abc = 1$. Tìm k tốt nhất để

$$\frac{a}{b^k+2}+\frac{b}{c^k+2}+\frac{c}{a^k+2}\ge 1$$

Ghi chú: Bất đẳng thức đúng với $k = 4$ nhưng sai với $k = 5$. Lưu ý rằng khi k gần với giá trị tốt nhất thì a,b,c chạy tới ba giá trị lệch nhau và lệch biên.

Bài 24. [Dương Đức Lâm] Cho $a,b,c\ge 0: a+b+c=3$. Tìm số dương k tốt nhất để

$$\frac{ab}{k+a^2}+\frac{bc}{k+b^2}+\frac{ca}{k+c^2}\le\frac{3}{k+1}$$

Ghi chú: Về hình thức, bài toán này gần giống với bài toán 3.5 của §18 (Phương pháp dồn biến), và ở đó ta đã phải sử dụng kỹ thuật dồn biến bằng hàm số rất vất vả. Tuy nhiên bài toán ở trên lại là bài toán hoán vị và đã khó hơn gấp nhiều lần. Cũng như bài 23, đẳng thức xảy ra ở bài này cũng lệch tâm và lệch biên.

Bài 25. [Dương Đức Lâm] Cho $a,b,c\ge 0: a+b+c=3$ và $k>0$.

Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức $\dfrac{1}{a^2+b+k}+\dfrac{1}{b^2+c+k}+\dfrac{1}{c^2+a+k}$

Ghi chú: Xét trường hợp riêng $k=1$, bằng phương pháp dồn biến bạn *Võ Quốc Bá Cẩn* đã tìm được giá trị nhỏ nhất của biểu thức xấp xỉ 0.9168… là nghiệm của một phương trình bậc cao với những tính toán rất phức tạp; còn giá trị lớn nhất thì có thể dự đoán xấp xỉ 1.3532… bằng máy tính và rất khó có thể tìm được một đánh giá thích hợp vì đẳng thức xảy ra khi ba biến lệch nhau và lệch biên (không có biến nào bằng 0).

Bài 26. [Phan Thành Việt] Xét tập hợp D gồm n số thực dương thỏa mãn $\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+...+\frac{a_n}{a_1}=n+1$.

Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\frac{(a_1+a_2+...+a_n)^2}{a_1^2+a_2^2+...+a_n^2}$ trên D.

Ghi chú: Lớp bài toán không thuần nhất thuộc dạng này còn rất nhiều và ngay cả với những bài toán đối xứng nó cũng ẩn chứa những khó khăn nhất định.

Bài 27. [Phạm Kim Hùng] Cho $a, b, c > 0$, $a+b+c=1$ và các số thực r, s.

Tìm giá trị lớn nhất giá trị nhỏ nhất của $a^r b^s + b^r c^s + c^r a^s$.

Ghi chú: Bài toán này đã xuất hiện hơn 3 năm trên các diễn đàn thảo luận, tuy nhiên, cho đến nay vẫn chỉ có những lời giải cho một số trường hợp đặc biệt.

Bài 28. [Phạm Kim Hùng] Tìm giá trị nhỏ nhất của $\frac{a+kb}{b+kc}+\frac{b+kc}{c+ka}+\frac{c+ka}{a+kb}$ với $a, b, c, k > 0$

Ghi chú: Với $k = 1$ thì ta có bất đẳng thức $AM-GM$, với $k = 2$ bài toán có một lời giải khá đẹp. Trong trường hợp tổng quát, chúng ta chưa có lời giải trọn vẹn.

Thông thường, sau khi một bất đẳng thức được chứng minh, ta thường tìm cách tham số hóa nó và đặt ra các bài toán tìm hằng số tốt nhất để bài toán vẫn đúng, bài 21, 23, 24 là những điển hình. Việc đặt ra các câu đố như thế thực sự là những thách thức lớn với những phương pháp hiện có. Tất nhiên, những câu đố có hình dạng quá phức tạp sẽ bị bỏ qua, và người ta sẽ chỉ tập trung vào những bài toán có dạng đơn giản và đẹp đẽ nhất. Các bài toán 27 và 28 là những ví dụ rất tốt. Trên thực tế kể từ lúc chúng được đặt ra, đã có rất nhiều phương pháp mới ra đời, nhưng vẫn chưa đủ để giải quyết triệt để, và vì thế vẫn đang cần những cố gắng tìm tòi tiếp theo.

Các bạn thân mến! Vậy là chúng tôi đã trình bày tất cả những gì mình muốn gửi gắm tới các bạn. Đó là những kiến thức rất cơ bản về bất đẳng thức, những nền tảng vững chắc để các bạn vừa có thể tiếp tục tìm tòi sâu hơn về thế giới của các dấu lớn hơn nhỏ hơn, vừa có thể tìm được những ứng dụng trong các bài toán thực tế. Đó là những tư tưởng và những tìm tòi rất nghiêm túc cả về lý thuyết lẫn thực hành của nhiều tác giả. Các tư tưởng ấy đã được phát triển một cách triệt để. Và cũng nhờ đó nó trở thành những phương pháp đẹp đẽ nhất hiện nay. Chúng tôi hi vọng rằng tinh thần sáng tạo ấy sẽ được các bạn tiếp tục và phát triển lên những tầng cao hơn. Trong Toán học, không chỉ có riêng bất đẳng thức, nhưng để có thể học và làm toán tốt, thì tinh thần sáng tạo là yếu tố không thể thiếu. Một mong mỏi lớn của chúng tôi khi bắt tay thực hiện cuốn sách này là phải làm sao xây dựng được một cuốn từ điển bất đẳng thức sơ cấp dành cho tất cả các đối tượng bạn đọc. Quả thực chúng tôi đã cố gắng hết sức để thể hiện được tâm nguyện đó trên từng trang sách. Nhưng qua thời gian chúng tôi nhận thấy việc truyền được cảm hứng sáng tạo và tinh thần học tập toán học tới các bạn độc giả đã là một cái gì đó lớn lao hơn như thế rất nhiều. Vì vậy chúng tôi hi vọng các bạn độc giả sẽ đón nhận những kiến thức được trình bày một cách chủ động và tích cực nhất có thể. Có như thế cuốn sách này mới thực sự có ích. Chúc các bạn thành công!

Lời kết

"Non sông Việt Nam có trở nên vẻ vang hay không, dân tộc Việt Nam có được vẻ vang sánh vai các cường quốc năm châu được hay không, chính là nhờ một phần rất lớn ở công học tập của các cháu."

(Hồ Chí Minh nhân dịp khai trường đầu tiên của nước Việt Nam Dân chủ Cộng hòa năm 1946)

Life is good for only two things, discovering mathematics and teaching mathematics.

Simeon Poisson

"Nhà giáo không phải là người nhồi nhét kiến thức mà đó là công việc của người khơi dậy ngọn lửa cho tâm hồn." **(Uyliam Bato Dit)**

1. Sự ra đời của cuốn sách:

Chúng ta đã đi đến trang cuối cùng của một cuốn sách đã được tác giả hoài thai ***20 năm*** và được chấp bút trong gần ***10 năm***. Trong suốt cuộc hành bút này, cảm xúc của tác giả cũng được thay đổi theo thời gian. Bắt đầu là khát vọng tuổi trẻ với ước muốn được viết về mảng kiến thức đam mê nhất từ khi còn là học sinh phổ thông. Tiếp đó là sự bổ trợ quảng bá hình ảnh cá nhân để dạy luyện thi đại học với một cuốn sách đầu tay: ***Các phương pháp và kỹ thuật chứng minh Bất đẳng thức*** do Nhà xuất bản TP.HCM phát hành năm 1993. Sau này cảm xúc được bổ sung đầy đủ hơn khi được biết về sự đầu tư công phu của các gia đình có con em đam mê học toán với mong muốn trở thành học sinh giỏi thi quốc gia, quốc tế. Nhiều gia đình tốn rất nhiều tiền của lo cho con ăn học nhiều thầy khác nhau, thậm chí có gia đình phải thế chấp nhà để lấy tiền cho con học luyện thi Toán quốc tế. Như vậy đằng sau của tấm huy chương là: "Học sinh Việt Nam đã mất rất nhiều thời gian chỉ để học được một kiến thức hay một kỹ năng phục vụ cho một cuộc thi nào đó", khác với học sinh nước ngoài ***với cùng một đơn vị thời gian*** ngoài việc tự học chuyên sâu môn học yêu thích họ còn được nắm bắt nhiều kiến thức kỹ năng bổ ích thiết thực và gần gũi với cuộc sống. Phải chăng với ***các học sinh giỏi*** chúng ta không nên dạy học theo kiểu ***"nhỏ giọt kiến thức"***, cho vài ba bài toán để học sinh nghĩ gần hết buổi học rồi chữa mà nên dạy học theo ***"nhu cầu ăn kiến thức của học sinh"*** với phương thức đối thoại cởi mở: "Trao toàn bộ thông tin, tài liệu cho học sinh và hướng dẫn học sinh cách tiếp cận, xử lý thông tin rồi cách mở rộng vấn đề, cách tạo ra các vấn đề mới". Nhận thức là như vậy nhưng việc biến thành hành động lại liên quan trực tiếp đến một sự kiện, đó là chuyến viếng thăm của ***Tổng thống Mỹ Bill Clinton*** sang thăm Việt Nam từ **16/11/2000** đến **20/11/2000**. Tác giả đã dõi theo sự hiện diện của Tổng thống Mỹ khi đến thăm Văn Miếu Quốc Tử Giám, gặp gỡ thân thiện với người dân Hà Nội tại khu phố cổ buôn bán Hàng Đào và đặc biệt vào lúc ***16h ngày 17/11/2000*** khi gặp gỡ với các giảng viên và sinh viên **ĐH QGHN** Tổng thống đã phát biểu: ***"We cannot change the past. What we can change is the future"*** tạm dịch là: ***"Chúng ta không thể thay đổi được quá khứ, cái mà chúng ta thay đổi là tương lai"***.

Chính câu nói này đã làm tác giả rời bỏ ***"mảnh đất màu mỡ luyện thi đại học"*** từ năm 2001 cho đến nay để quyết tâm viết một cuốn sách giới thiệu nền Toán học phổ thông của Việt Nam ra thế giới và cũng là thông điệp mong muốn được đáp lại thiện chí của Tổng thống Bill Clinton: ***"Khép lại quá khứ đau thương để hướng đến tương lai"***.

Với ý định giới thiệu cuốn sách không chỉ mang ý nghĩa thuần túy về Toán học mà còn mang ý nghĩa về sự liên tưởng với tư duy cuộc sống, từ năm 2003 tác giả đã sưu tầm và mua các đoạn phim tư liệu để tạo ra một video clip dài 60 phút giới thiệu về cuốn sách.

2. Vai trò của Toán học trong cuộc sống

Có hai quan điểm cực đoan đối lập nhau về quan niệm vai trò của Toán học trong đời sống xã hội. Một quan điểm suy tôn Toán học là ông vua của các ngành khoa học đến mức đồng nhất hai khái niệm thông minh có nghĩa là phải giỏi toán. Một quan điểm cổ súy cho các ngành kinh tế, tài chính, quản trị kinh doanh mà xem nhẹ vai trò của Toán học. Về quan điểm đầu tiên chúng ta có thể thấy sự lạc hậu khi không cập nhật thông tin nắm bắt kiến thức mới. Các nhà khoa học ***Howard Gardner, Thomas Amstrong*** đã chỉ ra có bảy loại hình thông minh mà khả năng thông minh về tính toán chỉ là một trong bảy loại hình này. Tất nhiên thông minh về Toán học là loại hình thông minh chủ đạo nên dễ có thể nắm bắt nhanh chóng khi chuyển sang các lĩnh vực khác. Người giỏi Toán là người có khả năng suy luận logic tốt, tính toán cẩn thận và kiên trì suy nghĩ khi gặp tình huống khó, nắm vững những khái niệm, nguyên tắc trừu tượng cơ bản để có thể áp dụng chúng vào những bài toán cụ thể. Những đức tính đó là yếu tố cho việc thành công trong mọi lĩnh vực cần đến đầu óc (trừ các lĩnh vực nghệ thuật?). Về quan điểm xem nhẹ vai trò của Toán học cũng bộc lộ sự tiếp cận tri thức một cách hời hợt mang nặng văn hóa tiêu dùng kiểu mì ăn liền. Toán học không chỉ hiện diện phổ biến với các phép toán số học trong các giao dịch, buôn bán thông thường mà nó luôn ẩn hiện với vai trò công cụ không chỉ trong các ngành khoa học như Vật lý, Thiên văn, Công nghệ thông tin, Hóa học, Sinh học mà còn được ứng dụng rộng rãi trong các ngành Y học, Kinh tế, Tài chính, Ngân hàng và cả ngành Luật pháp... Để có thể phóng được các tàu vũ trụ **Apolo** và lắp ghép chúng trong không gian thì phải có sự đóng góp của phương trình vi phân, đạo hàm riêng, hình học vi phân, lý thuyết biểu diễn, đại số toán tử,... trong Vật lý học hiện đại. Để có thể trao đổi mua bán qua Internet mà không sợ bị trộm cắp tài khoản thì phải cần đến ứng dụng của lý thuyết mã hóa thông tin với những ứng dụng của toán rời rạc, lý thuyết số và hình học đại số. Các nhà kinh tế học được giải Nobel gần đây đều có liên quan đến môn kinh tế lượng với sự đóng góp quan trọng của các mô hình toán học. Những điều trên mọi người có thể nghe đâu đó đã đề cập đến nhưng chúng ta chưa thấy hết vai trò ẩn của Toán học trong tư duy logic áp dụng cho các vấn đề xã hội. Nhân đây tôi xin kể hai câu chuyện vui về tư duy logic. Chuyện thứ nhất là lần tôi được mời làm giám khảo cho cuộc thi nữ sinh thanh lịch của một trường đại học tại Hà Nội. Ở phần thi ứng xử tôi có đặt một câu hỏi cho một nữ sinh với nội dung: ***"Theo em điều kiện cần để một người đàn ông lấy được một người vợ trẻ là gì?"***. Rất nhanh chóng nữ sinh đã trả lời với nhiều điều kiện: ***"người đàn ông đó phải tài giỏi, có học vị, địa vị, có nhà, tài sản, có sức khỏe..."*** Khi đó tôi nói đây là câu hỏi logic chứ không phải là màn thi hiểu biết xã hội. Điều kiện cần là điều kiện chung nhất để cấu thành nên một sự vật hiện tượng nào đó mà nếu tước bỏ đi thì không thể tạo ra được sự vật hiện tượng này nữa. Em đưa ra 1 loạt các điều kiện nhưng đó không phải là điều kiện bao quát chung nhất vì vẫn có thể 1 người lái xe ôm không có tài sản, địa vị, học vị mà vẫn có vợ là các tiếp viên trẻ, đẹp. Ở đây điều kiện cần để 1 người đàn ông lấy được cô ***vợ trẻ*** rất đơn giản ***"Ông ấy phải già đã!"*** bởi vì nếu ***mất thuộc tính già*** thì không thể có khái niệm ***lấy được vợ trẻ*** được! Tất nhiên đây chỉ là điều kiện cần mà không phải là điều kiện đủ vì thực tế cho thấy nếu chỉ có mỗi thuộc tính ***"già"*** thôi thì rất khó lấy được vợ chứ chưa nói đến lấy được vợ trẻ! (đầy triển vọng trăm năm cô đơn)

Câu chuyện thứ hai là một cô bạn gái lâu ngày gặp lại mời tôi đến nhà ăn trưa cùng gia đình. Khi đó tôi nói: ***"Được rồi nhưng nếu trời mưa thì anh không đến đâu nhé!"***. Lần gặp lại cô ấy đã trách tôi là: ***"Mất lịch sự"*** vì hôm đó trời trong xanh, nắng dịu dàng mà anh đã sai hẹn không đến và cũng không gọi điện làm cả nhà chờ cơm mãi. Tôi cười và đáp lại: Anh đâu có sai hẹn, khi đã nói: "Nếu trời mưa thì anh không đến" không có nghĩa là ***"Trời nắng chắc chắn anh sẽ đến"*** mà chỉ tương đương với câu: ***"Khi anh đến thì trời chắc chắn không mưa"***.

Hai câu chuyện trên là một minh chứng thú vị về sử dụng tư duy logic trong ngôn ngữ. Mở rộng ra nếu chúng ta phải tư vấn soạn thảo các văn bản pháp luật, hợp đồng kinh tế cho các đối tác thì vai trò của tư duy logic là rất quan trọng. Chẳng hạn ta biến thể câu chuyện thứ hai thành một điều kiện trong hợp đồng giao nhận hàng nhập khẩu giữa hai bên : ***"Nếu trời mưa thì bên A không giao hàng tại chân công trình cho bên B"***, như vậy khi trời nắng bên A vẫn có thể giao nhận tại một chỗ khác cách xa hàng trăm kilômét (tại Cảng chẳng hạn) mà vẫn không bị sai hợp đồng!...

Hiện nay tại Mỹ và các nước phương Tây nghề luật sư là nghề có thu nhập cao nhất và mặc dù chúng ta có nhiều người làm Giáo sư tại các trường Đại học, Viện nghiên cứu nhưng không có một ai trở thành một luật sư nổi tiếng tại các nước này. Bởi có lẽ điều kiện cần để trở thành luật sư giỏi là phải có năng khiếu Toán học và ngôn ngữ nhưng những người Việt Nam có khả năng này đều đi vào các ngành khoa học tự nhiên mà quên đi mất ngành Luật đầy hấp dẫn. Trong nước cũng vậy chúng ta cũng cần rất nhiều người có tư duy logic hoạt động trong các lĩnh vực xã hội để kiện toàn các văn bản pháp luật hoặc tư vấn cho các đối tác trong nước kí kết hợp đồng kinh tế với các đối tác nước ngoài mà không cần phải thuê luật sư nước ngoài tư vấn...

Chúng tôi vừa nêu ra vai trò của Toán học dưới nhiều khía cạnh khác nhau với kết luận

– Toán học đóng vai trò nền tảng then chốt để phát triển khoa học tự nhiên cũng như là sợi dây logic để kết nối các vấn đề xã hội.

– Không nên và không thể đồng nhất chỉ có một loại hình trí thông minh là Toán học

– Có rất nhiều con đường rộng mở cho những người có tư duy Toán học. Những người xuất sắc nhất có thể tiên phong đi đầu trong các lĩnh vực sáng tạo của các chuyên ngành tự nhiên. Những người tiếp sau có thể sử dụng tư duy Toán học vào các ngành nghề xã hội như: Y tế, Kinh tế, Tài chính, Ngân hàng, Xây dựng, Môi trường... và ngành Luật.

3. Vai trò của bất đẳng thức ở bậc học phổ thông

Bất đẳng thức được giới thiệu cho học sinh ngay từ lớp 4, 5 bậc Tiểu học với khái niệm so sánh phân số. Ở lớp 6 là sự so sánh các lũy thừa với số mũ tự nhiên. Ở lớp 7, 8 là so sánh các biểu thức đại số dạng đa thức, phân thức. Ở lớp 9, 10 học sinh được giới thiệu bất đẳng thức ***Côsi*** (AM – GM), ***Buniakowski*** (CBS) (2 số rồi đến n số) để có thêm công cụ chứng minh bất đẳng thức cho các biểu thức chứa căn. Ở lớp 11, 12 các em được trang bị thêm phương pháp chứng minh bất đẳng thức bằng đạo hàm, tích phân và các phương pháp tham khảo: Tam thức bậc hai; Hình học, Vecto và Lượng giác...

Nhìn tổng quát trong chương trình Toán phổ thông ta có thể nói bất đẳng thức đóng vai trò rất quan trọng trong việc phát triển tư duy Toán học nói riêng và phát triển tư duy logic nói chung. Bạn đọc có thể đồng cảm với nhận định này khi đã đọc qua hơn **1000** trang trong cuốn sách này. Mặc dù có thể nói đây là một cuốn sách viết rất công phu và chi tiết giới thiệu các phương pháp đặc sắc nhất chứng minh bất đẳng thức đại số, nhưng nói chung trừ các học sinh giỏi quốc gia, quốc tế thì những bạn đọc còn lại vẫn gặp khó khăn khi giải các bất đẳng thức không tầm thường có trong sách hoặc nằm ngoài sách. Sự hấp dẫn của bất đẳng thức chính là tính đa dạng không lặp lại nằm trong tư tưởng của những người đặt ra các đề toán mới. Tất nhiên nếu chúng ta dùng các công cụ mạnh được giới thiệu trong sách như: ***Muirhead,Đạo hàm, SOS, ABC, MV, EV, RCF, LCF, GLA, DAC...*** thì hầu như mọi bài đều có thể giải được. Ở đây chúng tôi muốn nhấn mạnh đến tính hấp dẫn của bất đẳng thức còn được hiểu không chỉ về độ khó mà còn được nhìn nhận theo khía cạnh sử dụng công cụ hạn chế để chứng minh. Do có rất nhiều công cụ khác nhau để chứng minh bất đẳng thức nên đòi hỏi người giải phải nhận diện chính xác đặc điểm rồi từ đó lựa chọn công cụ cho phù hợp. Bất đẳng thức là một lĩnh vực khó nhưng cái khó không nằm ở gánh nặng về lượng kiến thức mà ở yêu cầu về óc quan sát, linh cảm tinh tế và sức sáng tạo dồi dào của người giải.

4. Ý nghĩa của việc ứng dụng tư duy bất đẳng thức vào cuộc sống

Trong cuốn sách này ngoài việc giới thiệu một cách đầy đủ những viên kim cương trong bất đẳng thức thì điều tác giả tâm đắc nhất là: ***"Kỹ thuật chọn điểm rơi"*** với tính triết học được thể hiện trong câu chuyện về bộ phim ***"Têhêran 43"*** đã được giới thiệu ở phần mở đầu cuốn sách. Tuy nhiên dù bạn đọc có thể lĩnh hội đầy đủ các phương pháp để có thể giải quyết mọi bài bất đẳng thức thì vẫn chỉ là một kết quả khiêm tốn (không khác gì một người chơi giỏi cờ vua) nếu các bạn không vận dụng được ảnh hưởng của ***"Kỹ thuật chọn điểm rơi"*** sang các lĩnh vực dự báo, đánh giá hay so sánh những sự vật hiện tượng diễn ra trong đời sống. Bởi vì Bất đẳng thức toán học là so sánh tĩnh còn đánh giá sự biến đổi trong cuộc sống là so sánh động và: *"Trong một thế giới vận động và biến đổi, con người vẫn nhận thức được những gì đã xảy ra hoặc đang xảy ra nhưng luôn gặp khó khăn khi đánh giá về những gì sẽ đến.Người ta trăn trở với những **bất đẳng thức tương lai** khi phải đưa ra những quyết định cho **cuộc đời mình** và có khi cho **vận mệnh của cả một dân tộc.** Những ngả đường mở ra trước mắt, ngả đường nào dẫn đến thành công, ngả đường nào sẽ gặp thất bại.Chỉ khi thời gian qua đi con người mới hiểu được tính đúng, sai của quyết định trong quá khứ."*. Chúng ta có thể lấy thêm những ví dụ điển hình minh họa cho vấn đề dự báo để chọn điểm rơi trong cuộc sống.

– Ngày xưa các gia đình và các thiếu nữ thôn quê luôn khát khao được Vua tuyển làm cung phi, nhưng họ đâu ngờ rằng do vua có hàng trăm cung tần mỹ nữ nên mới có câu nói: ***"cuộc đời của người cung phi chỉ là cái may mắn dẫn đến niềm cô đơn tê tái!"***

– Không ai có thể ngờ rằng, sự mở đầu hôn lễ huy hoàng của Công nương ***Diana*** với Thái tử Vương quốc Anh ***Charles*** lại dẫn đến một kết cục đầy bi thảm.

– Ngày **7/11/1917** Chủ nghĩa Mác–Lênin đã đột phá thành công với cách mạng Nga, mở toang cánh cửa con đường tiến thẳng lên Chủ nghĩa xã hội cho nước Nga và nhiều dân tộc khác trên thế giới.Năm **1991**, **Mikhail Gorbachov** với chính sách cải tổ đã nhấn chìm con đường tiến lên Chủ nghĩa xã hội của nước Nga và mở đầu cho sự sụp đổ hệ thống các nước xã hội chủ nghĩa ở Đông Âu. Nước Nga đã mất 74 năm đi theo con đường của chủ nghĩa xã hội và giờ đây họ đã quay về con đường phát triển của chủ nghĩa tư bản…

– Sau thất bại nặng nề trong Đại chiến thế giới lần thứ II, giới lãnh đạo Nhật chia làm 2 phe theo 2 đường lối xây dựng đất nước. Một đường lối dẫn ví dụ thảm họa chiến tranh và bom nguyên tử để xây dựng các nhà máy ở trong núi cho an toàn (thời gian xây dựng ***5 – 7 năm***). Một đường lối khác tính đến chu kỳ xảy ra chiến tranh để thuyết phục xây dựng nhanh các nhà máy tại các thành phố ven biển nhằm giảm chi phí xuất nhập khẩu tạo gia tốc tăng trưởng đột phá (thời gian xây dựng ***1 – 2 năm***). Nhật Hoàng đã sáng suốt chọn phương án hai và thực tiễn đã chứng minh quyết định này đúng khi chỉ sau ***15 năm*** nước Nhật đã vươn lên trở thành cường quốc thứ hai trên thế giới về kinh tế.

5. So sánh giá trị sản phẩm để suy ngẫm trong nền kinh tế tri thức

Việt Nam đứng thứ hai thế giới về xuất khẩu gạo và cà phê, đứng thứ nhất về xuất khẩu hạt tiêu và hạt điều nhưng **GDP** của Việt Nam xếp hạng **123** trên thế giới. Nhưng thông điệp mà nhà báo ***Thomas Friendman*** của tờ báo ***New York Times*** muốn đưa ra là khái niệm dùng trọng lượng và giá trị của sản phẩm để so sánh trình độ Quốc gia. Hãy xem một ví dụ: để thu được 500 USD, người ta có thể làm gì?

–Tập đoàn Than và Khoáng sản Việt Nam bán ***5 tấn than đá***.
–Nông dân ở Đồng bằng sông Cửu Long bán ***2 tấn gạo.***
–Trung Quốc bán chiếc xe gắn máy trọng lượng ***100kg.***
–Hãng Sony bán chiếc tivi trọng lượng ***10kg.***
–Hãng Nokia bán chiếc điện thoại trọng lượng ***0,1kg.***
–Hãng Intel bán con chip máy tính trọng lượng ***0,01kg***.
–Hãng Microsoft bán một phần mềm trọng lượng ***0kg.***

Còn rất nhiều những sản phẩm có giá trị cao nhưng trọng lượng chỉ là 0kg như các phát minh sáng chế hay giá trị thương hiệu… Hàm lượng tri thức càng cao, trọng lượng sản phẩm càng nhẹ. Đo lường xuất khẩu bằng tấn hàng đã trở nên vô nghĩa. Giá trị sản phẩm được đo bằng hàm lượng chất xám và giá trị kinh tế chứ không phải bằng trọng lượng. Quan trọng hơn nữa, đó là bao nhiêu giá trị gia tăng và bao nhiêu lợi nhuận.

Kết luận: Xã hội là một giá trị tổng hòa, sự phát triển của các cá nhân hay của các ngành nghề đều phải hướng đến mục đích phục vụ sự phát triển của xã hội. Trong sự biến đổi vận động muôn màu của xã hội, Toán học luôn đóng vai trò nền tảng then chốt để phát triển khoa học tự nhiên cũng như là sợi dây logic để kết nối các vấn đề xã hội. Rèn luyện tư duy bất đẳng thức cũng là rèn luyện tư duy toán học và là những bước đi đầu tiên nhưng rất quan trọng đối với mỗi học sinh trong việc chuẩn bị hành trang tư duy để bước vào nền kinh tế tri thức.

Hà Nội, ngày 01 tháng 01 năm 2009

Trần Phương

PHỤ LỤC
I. THỐNG KÊ TÁC GIẢ CÁC CHUYÊN ĐỀ VÀ BÀI VIẾT

CHƯƠNG I: NHỮNG VIÊN KIM CƯƠNG CỦA BẤT ĐẲNG THỨC CỔ ĐIỂN	
§1. Bất đẳng thức AM – GM và các kỹ thuật chọn điểm rơi	Trần Phương
§2. Bất đẳng thức Cauchy – BunhiaCôpski – Schwarz và kỹ thuật chọn điểm rơi	Trần Phương và Võ Quốc Bá Cẩn
§3. Bất đẳng thức Holder và kỹ thuật chọn điểm rơi	Trần Phương và Võ Quốc Bá Cẩn
§4. Bất đẳng thức Minkowski và kỹ thuật sử dụng	Trần Phương
§5. Bất đẳng thức Chebyshev và kỹ thuật sử dụng	Trần Phương
CHƯƠNG II. NHỮNG VIÊN KIM CƯƠNG CỦA BẤT ĐẲNG THỨC CẬN ĐẠI	
§6. Bất đẳng thức hoán vị và kỹ thuật sử dụng	Trần Phương
§7. Bất đẳng thức Schur và kỹ thuật sử dụng	Trần Phương và Lê Trung Kiên
§8. Định lý Muirhead và bất đẳng thức đối xứng	Trần Phương và Hoàng Trọng Hiền
CHƯƠNG III. NHỮNG VIÊN KIM CƯƠNG CỦA PHƯƠNG PHÁP GIẢI TÍCH	
§9. Định lý Fermat và ứng dụng trong bất đẳng thức	Trần Phương
§10. Định lý Lagrange và các ứng dụng trong bất đẳng thức	Trần Phương
§11. Bất đẳng thức Bernoulli và các ứng dụng	Trần Phương
§12. Bất đẳng thức Jensen và kỹ thuật sử dụng	Trần Phương
§13. Bất đẳng thức Karamata và kỹ thuật sử dụng	Trần Phương
§14. Bất đẳng thức với các hàm số lồi bên phải và lõm bên trái	Vasile Cirtoaje
§15. Bất đẳng thức Popoviciu	Vasile Cirtoaje
§16. Bất đẳng thức trong tích phân Riman	Trần Phương

CHƯƠNG IV. NHỮNG VIÊN KIM CƯƠNG CỦA BẤT ĐẲNG THỨC HIỆN ĐẠI	
§17. Phương pháp phân tích tổng bình phương (SOS)	Trần Tuấn Anh và Trần Phương
§18. Phương pháp dồn biến (MV)	Phan Thành Việt và Lê Trung Kiên
§19. Phương pháp ABC	Nguyễn Anh Cường
§20. Phương pháp hình học hóa đại số (GLA)	Bùi Việt Anh
§21. Phương pháp EV	Vasile Cirtoaje
§22. Phương pháp chia để trị (DAC)	Phan Thành Việt
CHƯƠNG V. MỘT SỐ SÁNG TẠO VỀ BẤT ĐẲNG THỨC	
§23.1. Về một dãy bất đẳng thức bậc ba và ứng dụng	Cao Minh Quang
§23.2. Đổi biến số để sáng tạo và chứng minh bất đẳng thức	Phan Thành Việt
§23.3. Phương pháp đánh giá hàm số tại biên	Trần Phương Phạm Văn Thuận
§23.4. Phương pháp tiếp tuyến chứng minh bất đẳng thức	Lê Phi Hùng
§23.5. Phương pháp hệ số bất định	Võ Quốc Bá Cẩn
§23.6. Các phép biến đổi theo các độ dài trong tam giác	Trần Phương
§23.7. Đánh giá các hệ số của đa thức bằng định lý Viète	Trần Phương
§23.8. Bất đẳng thức không thuần nhất	Nguyễn Quốc Hưng Nguyên
§23.9. Phương pháp SS	Bạch Ngọc Thành Công
§23.10. Các tổng đối xứng và bất đẳng thức hoán vị	Bạch Ngọc Thành Công
§24.1. Các bài toán có nhiều lời giải	Trần Phương
§24.2. Về một bất đẳng thức thi toán quốc tế	Trần Phương
§24.3. Câu chuyện về bất đẳng thức Nesbitt - Shapiro	Trần Phương
§24.4. Bất đẳng thức Jack Garfunkel và một số mở rộng	Lê Hữu Điền Khuê
§24.5. Các bất đẳng thức có lời giải hay	Trần Phương
CHƯƠNG VI. TỔNG KẾT	Trần Phương

II. THỐNG KÊ TÊN TÁC GIẢ CÁC BÀI TOÁN THAM KHẢO

(không thống kê các bài toán của tác giả Trần Phương)

Chú thích kí hiệu các bài toán: **21.9**: Bài toán 9 của §21; **7.2.17**: Bài toán 17 của §7.2; **1.II.3**: Bài toán 3 của mục II §1; **1.2.III.4**: Bài toán 4 của mục III §1.2

CHƯƠNG I. NHỮNG VIÊN KIM CƯƠNG CỦA BẤT ĐẲNG THỨC CỔ ĐIỂN

Dương Đức Lâm: 1.V.8, 1.V.9, 1.VI.7, 1.VI.8, 1.VII.12, 1.VIII.7, 1.XI.10, 1.XII.9, 1.XV.4, 1.XVI.22, 1.XVI.24, 1.XVI.27, 1.XVI.32, 1.XVI.34, 1.XVI.36, 1.XVI.38, 1.XVI.42, 1.XVI.46, 1.XVI.52, 1.XVI.53, 1.XVI.54, 1.XVI.56, 1.XVI.59, 1.XVI.61, 1.XVI.65, 2.2.4, 2.3.I.6, 2.3.I.9, 2.3.III.15, 2.3.III.16, 2.3.III.23, 2.3.III.25, 2.IV.36, 2.IV.38, 2.IV.40, 2.IV.41, 2.IV.44, 2.IV.45, 2.IV.50; 3.2.I.13, 3.2.IV.9, 3.2.IV.11, 3.2.IV.14, 3.2.IV.15, 3.2.IV.17, 3.2.IV.19, 3.2.IV.23, 3.2.IV.30; 5.I.16.

Trần Quốc Luật: 1.VI.7, 1.VI.9, 1.VI.11, 1.X.3, 1.X.14, 1.XVI.40, 1.XVI.41, 3.2.IV.16.

Võ Quốc Bá Cẩn: 1.XVI.25, 2.2.16, 2.3.III.2, 2.3.III.5, 2.3.III.6, 2.3.III.20, 2.IV.32, 2.IV.39, 3.2.II.9, 3.2.IV.18,

Phạm Kim Hùng: 1.VII.14, 1.XI.7; 2.2.7, 2.3.III.8, 2.IV.47; 3.2.I.11, 3.2.II.6, 5.I.17,

Vasile Cirtoaje: 1.VIII.9, 1.IX.10, 1.XVI.30, 1.XVI.48; 2.2.8, 2.2.19, 2.IV.48; 3.2.II.2, 3.2.IV.25; 5.I.9, 5.I.19, 5.I.22.

Darij Grinberg: 1.IV.6, 1.IX.5; 2.2.13, 2.3.III.24, 2.3.III.26, 5.I.20.

Michael Rozenberg: 2.IV.46; 3.2.IV.20, 3.2.IV.21.

Phan Thành Nam: 1.XV.7, 1.XVI.23; 2.2.15, 2.3.III.9.

Phan Thành Việt: 1.XII.13; 3.2.II.1, 3.2.II.4, **Trần Tuấn Anh**: 1.I.11, 1.V.2, 1.XII.12.

Trần Nam Dũng: 1.IX.4, 1.XVI.26.; **Phạm Hữu Đức**: 1.XV.3; 2.2.17, 2.3.III.18

Phạm Văn Thuận: 1.XV.8, 1.XVI.33.; **Mircea Lascu**: 1.VI.4; **Lê Trung Kiên**:1.IX.9

Phạm Thành Tín: 1.X.9; **Gabriel Dospinescu**: 1.XVI.43.; **Nayel**: 1.XVI.60.

Bạch Ngọc Thành Công: 1.XVI.57 ; **Samin Riasa**: 2.2.18 ; **Jack Garfunkel**: 2.3.III.1

Nguyễn Việt Anh: 2.3.III.4; **Nguyễn Anh Tuấn**: 2.3.III.17; **Vũ Đình Quý**: 2.3.III.21,

Nguyễn Văn Thạch: 2.IV.37; 3.2.IV.29 ; **Harazi**: 2.IV.42 ; **Fedor Petrov**: 2.IV.43.

Sung Yoon Kim: 2.IV.49 ; **Hojoo Lee**: 3.2.I.12 ; **Alexey Gladkich**: 3.2.I.15.

Tripleth: 3.2.II.3 ; **Parkdoosung**: 3.2.II.5 ; **Lê Hữu Điền Khuê**: 3.2.II.8

CHƯƠNG II. NHỮNG VIÊN KIM CƯƠNG CỦA BẤT ĐẲNG THỨC CẬN ĐẠI

Vasile Cirtoaje: 7.2.2, 7.2.10, 7.2.11, 7.2.12, 7.2.20, 7.2.21, 7.3.III.4, 7.3.III.18, 7.3.IV.35, 7.3.IV.37, 7.3.IV.39.

Dương Đức Lâm: 7.2.17, 7.3.III.3, 7.3.III.6, 7.3.IV.23, 7.3.IV.26, 7.3.IV.28, 7.3.IV.30.

Phạm Kim Hùng: 7.2.13, 7.3.III.5, 7.3.III.6, 7.3.III.9, 7.3.IV.24, 7.3.IV.25.

Phạm Hữu Đức: 7.2.5, 7.2.15, 7.3.III.17, 7.3.IV.23.

Võ Quốc Bá Cẩn: 7.2.6, 7.2.14, 7.2.19, 7.3.III.8.

Nguyễn Thúc Vũ Hoàng: 7.3.III.2, 7.3.III.7, 7.3.III.11.

Phạm Sinh Tân: 7.3.III.10, 7.3.III.15, 7.3.III.19.

Ji Chen: 7.2.4 ; **Walther Janous**: 7.2.7 ; **Hojoo Lee**: 7.2.8, 7.2.9.

Nguyễn Anh Tuấn: 7.3.III.16 ; **Darij Grinberg**: 7.3.IV.27.

CHƯƠNG III. NHỮNG VIÊN KIM CƯƠNG CỦA PHƯƠNG PHÁP GIẢI TÍCH

Vasile Cirtoaje: 14.2.1, 14.2.2, 14.2.3, 14.2.4, 14.2.5, 14.2.10, 14.2.12, 14.2.14, 14.2.16, 14.2.19, 14.2.21, 14.2.26, 14.2.28, 14.2.31, 15.5, 15.9.

Jack Garfunkel: 9.2.VI.5 ; **Trần Nam Dũng**: 10.2.VI.2;

Phạm Kim Hùng: 10.2.VII.9, 14.2.29.

Marian Tetiva: 14.2.27 ; **Bin Zhao**: 15.2; **Gabriel Dospinescu**: 15.7.

CHƯƠNG IV. NHỮNG VIÊN KIM CƯƠNG CỦA BẤT ĐẲNG THỨC HIỆN ĐẠI

Hojoo Lee: 17.III.3, 17.III.23, 18.4.2, 19.III.4, 20.V.26,

Phạm Kim Hùng: 17.III.5, 17.III.6, 17.IV.5, 17.IV.25; 18.3.3, 18.4.6, 18.5.7, 18.7.4, 18.11.2,18.XIII.6, 18.XIII.20, 18.XIII.29, 18.XIII.30, 18.XIII.42, 19.V.9, 20.V.13, 20.VII.4.5, 20.VII.4.10, 20.VII.4.19, 20.VIII.4, 20.VIII.6, 20.VIII.11, 21.11, 21.12, 21.34, 22.IV.1, 22.V.4, 22.VI.1, 22.VIII.8,

Vasile Cirtoaje: 17.III.9, 17.III.15, 17.III.16, 17.III.20, 17.III.24, 17.IV.14; 18.2.4, 18.XIII.12, 18.XIII.15, 19.II.15, 19.III.1, 19.III.19, 19.IV.6, 19.IV.7, 19.IV.9, 19.IV.10, 19.IV.6, 19.IV.8, 19.IV.9, 19.IV.13, 19.V.6, 19.V.12, 19.V.13, 19.V.14, 19.VI.9, 20.VII.4, 20.VII.4.3, 20.VII.4.7, 20.VII.4.13, 20.VIII.9, 20.VIII.10; 21.1, 21.3, 21.6, 21.9, 21.10, 21.11, 21.14, 21.15, 21.17, 21.18, 21.20, 21.21, 21.23, 21.24, 21.25, 21.26, 21.27, 21.28, 21.29, 21.31, 21.33, 21.34,

Võ Quốc Bá Cẩn:

17.III.12, 18.2.9, 18.XIII.34, 18.XIII.35, 19.III.7, 19.III.8, 19.VI.18, 19.VI.29,

Nguyễn Văn Thạch: 17.III.13, 17.III.14, 19.VI.18. **Trần Quốc Luật**: 17.IV.12.

Dương Đức Lâm: 17.III.17, 17.IV.3, 17.IV.4, 17.IV.5, 17.IV.8, 17.IV.9, 17.IV.13, 17.IV.15, 17.IV.17, 17.IV.18, 17.IV.22, 17.IV.23, 17.IV.24; 18.XIII.25, 18.XIII.26, 18.XIII.31, 18.XIII.32, 18.XIII.37, 18.XIII.48, 18.XIII.49, 19.II.10, 19.IV.11, 19.IV.12, 19.IV.13, 19.VI.19, 19.VI.25, 19.VI.27, 19.VI.28, 19.VI.30, 20.V.31, 20.VIII.5,

Lê Trung Kiên: 17.III.22, 18.2.9, 18.4.3, 18.7.1, 18.7.2, 18.10.5, 18.10.8, 18.10.12, 18.10.13, 18.10.14, 18.XIII.16, 18.XIII.18, 18.XIII.22, 18.XIII.33.

Phạm Hữu Đức: 17.III.21, 17.IV.20, 17.IV.21; **DarijGrinberg**:17.IV.2, 19.II.9, 20.VII.4.9

Michael Rozenberg: 17.IV.16, 21.16; **Trần Nam Dũng**: 18.2.7, 19.IV.5, 21.32, 22.V.3,

Nguyễn Anh Cường: 17.IV.19; 19.II.1, 19.II.4, 19.II.6, 19.II.13, 19.II.16, 19.II.17, 19.III.17, 19.IV.2, 19.V.1, 19.V.2, 19.V.3, 19.V.8, 19.VI.5, 19.VI.7, 19.VI.8, 19.VI.13, 19.VI.16, 19.VI.17, 19.VI.20, 19.VI.21, 19.VI.23, 19.VI.24, 20.VI.9, 22.V.2,

Phan Thành Nam: 18.2.5,18.2.6, 18.4.5, 18.5.3, 18.6.5, 18.11.1, 18.12.4, 18.13.1, 18.XIII.13, 18.XIII.41, 18.XIII.44, 18.XIII.45; 21.5, 22.V.3, 22.VIII.2,

Phan Thành Việt: 18.3.4, 18.12.3, 18.XIII.17, 18.XIII.38, 18.XIII.52, 18.XIII.55, 18.XIII.56, 18.XIII.58, 22.IV.2, 22.IV.3, 22.VI.2, 22.VI.4, 22.VIII.1, 22.VIII.3, 22.VIII.4, 22.VIII.6, 22.VIII.7, 22.VIII.9, 22.VIII.10.

Bùi Việt Anh: 19.III.5; 20.V.10, 20.V.11, 20.V.12, 20.V.13, 20.V.14, 20.V.15, 20.V.16, 20.V.17, 20.V.18, 20.V.19, 20.V.20, 20.V.21, 20.V.22, 20.V.23, 20.V.24, 20.V.27, 20.V.28, 20.V.29, 20.V.30, 20.V.31, 20.V.32, 20.V.33, 20.VI.6, 20.VI.7, 20.VI.8, 20.VII.3, 20.VIII.7,

Jackgarfukel: 18.4.4, 18.XIII.39, 18.XIII.40 ; **Nguyễn Minh Đức**: 18.5.1.

Đào Hải Long: 18.10.1; **Đinh Ngọc An**: 18.12.2; **Murray Klamkin**: 18.XIII.7.

Trần Hồ Thạnh Phú: 18.XIII.57; **Mircea Lascu**: 19.2.11, 20.VII.4.2.

Nguyễn Việt Anh: 19.III.19; **Phạm Sinh Tân**: 19.III.20; **Nguyễn Anh Tuấn**: 19.III.22.

Gabriel Dospinescu: 19.V.7, 21.19; **Bodan**: 19.VI.1; **Vũ Đình Quý**: 19.VI.10, 20.V.4,

Nguyễn Duy Khánh: 20.V.8, 20.V.9; **W.I.Gridasov**: 20.VI.1; **Marian Tetiva**: 20.VII.4.2.

Faruk Zejnulahi: 20.VII.4.8; **Walther Janous**: 20.VII.4.18, 20.VIII.9, 21.14,

Janos Suranyi: 21.22; **Nguyễn Trường Thọ**: 22.V.1,

"Cậu bé quàng khăn đỏ": 22.VI.3, 22.VIII.5.

CHƯƠNG V. MỘT SỐ SÁNG TẠO VỀ BẤT ĐẲNG THỨC.

Nguyễn Thúc Vũ Hoàng: 23.5.I.1, 23.5.I.4, 23.5.IV.2,

DANH MỤC TÀI LIỆU THAM KHẢO

- www.mathlinks.ro www.kalva.demon.co.uk
- www.diendantoanhoc.net www.mathnfriend.org
- C.H. Hardy, J.E. Littlewood, G.Polya – Inequalities, Cambridge University press (1952)
- D.S. Mitrinovic, J.E. Pecaric, A.M. Fink – Classic and New Inequalities in Analysis, Kluwer academic publishers.
- Titu Andresscu, Vasile Cirtoaje, Gabriel Dospinesu, Micea Lascu
  Old and New Inequality, Gil publishing house
- Vasile Cirtoaje – Algebraic inequalities, Gil publishing house 2006
- Titu Andresscu, ZumingFeng – Mathematical Olympiads 1998 – 2002
  Problem and Giải from Around the world.
- Titu Andresscu and Rawzvan Gelca – Putnam and Beyond, Springer (2007)
- J. Michael Steele – The Cauchy-Schwarz Master Class, Mathematical association of America, Cambridge University press (2004)
- Thomas J. Mildorf – Olympiad Inequalities (2006)
- IMO Shortlist, 1990 – 2007
- Kiran S. Kedlaya, Bjorn Poonen, Ravi Vakil – The William Lowell Putnam Mathematical Competition 1985 – 2000: Problems, Giảis and Commentary.
- Crux Mathematicorum & Mathematical Mayhem (Canada, 1995–2005)
- Kvant Magazine (Russia, 1990 – 2002)
- Gazeta Matematica (Romania, 1996 – 2004)
- Komal Mathematical Magazine (Hungary, 1996 – 2000)
- Mathematical Refletions (4/2006)
- Hojoo Lee – Topics in Inequalities (2005)
- Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ (Việt Nam, 1990 – 2008)
- Tuyển tập các bài toán Olympic 30 - 4 (1999 – 2005)
- Phan Huy Khải – 500 Bài toán bất đẳng thức – Nhà xuất bản Hà Nội 1994
- Nguyễn Văn Mậu – Bất đẳng thức, định lý và áp dụng, Nhà xuất bản Giáo dục 2006
- Phạm Kim Hùng – Sáng tạo bất đẳng thức, Nhà xuất bản Tri thức 2006
- Phạm Văn Thuận – Bất đẳng thức suy luận và khám phá, Nhà xuất bản ĐH QGHN 2007

Cuối cùng là một bài hát của Tác giả dành tặng cho bạn đọc. Đây là một trong sáu bài hát của tác giả được sáng tác theo nguyên lý tổ hợp trong âm nhạc và được **VTV** phát sóng trong một số sự kiện lớn. Bài hát được sáng tác ngày ***29/7/2007*** để chào mừng **IMO 48** diễn ra thành công tốt đẹp. Bài hát được tổng duyệt lúc **11h00** ngày ***30/7/2007*** và được **BTC** chọn làm bài hát chính thức trong lễ bế mạc **IMO 48**. Ngay sau đó bài hát đã được vang lên vào khoảnh khắc cuối cùng lúc **18h20** trong lễ bế mạc **IMO 48** được **VTV1** truyền hình trực tiếp tại TT Hội nghị Quốc gia.

FLAME OF IMO

Tran Phuong - Dob October, 17th 1966 - Pob: Haiphong, Vietnam
Director of Center for Research and Support Development of Intellectual Product (Censip) by the Vietnam Union of Science and Technology Associations
Email: tranphuong.math@yahoo.com
Vietnam Quintessence 2007 award for the proposal of the book ***"Diamonds in Mathematical Inequalities"*** *as the product of excellence of the Vietnam - WTO Trade Fair 2007.*
Vietnam Quintessence 2008 award for the gameshow ***"Vietnamese Infant Prodigy"*** *as the service of excellence of the Vietnam - WTO Trade Fair 2008.*

CURRICULUM VITAE

Tran Phuong has experienced professional education and training of mathematics. Being one of the most talented students of Mathematics Gifted High School, the Hanoi University of Sciences, he continued his higher education of mathematics in Hanoi University of Education, the leading university for training mathematics professionals in Vietnam.

During the 10 years from 1990 to 2000, thousands of students attended his classes on mathematics. In order to further socialize mathematics knowledge, Tran Phuong has spent much time and efforts to write mathematics books for high school readership, especially on inequalities. His first book published in 1993 was a comprehensive work on mathematical inequalities. Thereafter, he has completed a total of 10 books, all of which were introduced by reputable publishers in Vietnam and became the bestsellers among mathematics references for secondary students.

With the passion for helping young Vietnamese talents to absorb advanced knowledge in the world as well as to be successful in their future career, he has opened a model of supporting and educating high potential youths. Recently, the initial phase has been succeeded by the five sixthgrade pupils to properly overcome university entrance math exam after only 150 hours training (www.tienphongonline.com.vn)

Also, he is the author of an intellectual game show "Vietnamese Infant Prodigy" broadcasted on Vietnamese Television.

AUTHORS PUBLICATIONS IN VIETNAM

(1) Techniques in Proving Inequalities Ho Chi Minh City Publish House - 1993.
(2) New Methods in Solving Math Problems in Vietnamese University Entrance Examinations, Educational Publish House - 1995.
(3) Classification in Topics of Math Problems in Vietnamese University Entrance Examinations Ho Chi Minh City Publishing House - 1998.
(4) Solutions for Math Problems in Vietnamese University Entrance Examinations 2000, Hanoi Publishing house - 2000.
(5) Math problems in Vietnamese University Entrance Examinations in Three Decades (1970 - 2000), Publishing House of National University Ho Chi Minh City - 2000.
(6) Collections of Problems of Functions, Hanoi Publish House -2001.
(7) Excellent Problems of Trigonometric Relations, Hanoi Publishing House - 2002.
(8) Excellent Problems of Trigonometric equations, Hanoi Publishing House - 2003.
(9) Common Mistakes and Creations when Solving Math Problems, Hanoi Publishing House - 2004.
(10) Collections of topics, Methods, Problems of Integral , Knowledge Publishing House - 2006.

8 935092 745084
Giá: 300.000đ