BOXMATH.VN

CHUYÊN ĐỀ TOÁN PHỔ THÔNG

TUYỂN TẬP
BẤT ĐẲNG THỨC

BAN BIÊN TẬP DIỄN ĐÀN TOÁN HỌC BOXMATH.VN

Tháng 10 – 2011

Lời nói đầu

Chinh phục bất cứ một sự khó khăn nào luôn đem lại cho người ta một niềm vui sướng thầm lặng, bởi điều đó cũng có nghĩa là đẩy lùi một đường ranh giới và tăng thêm tự do của bản thân.

Quyển sách này đến với các bạn chính là bắt nguồn từ câu triết lí ấy. Với mong muốn đem lại niềm yêu thích và say mê cho các bạn về một mảng toán khó trong chương trình toán học của trung học phổ thông nhưng ẩn chứa trong nó biết bao nhiêu điều thú vị và đam mê. Đó chính là bài toán về "Bất đẳng thức". Quyển sách các bạn đang đọc là sự tổng hợp từ các bài toán hay và cách giải thật đơn giản chỉ sử dụng những "chất liệu" thường gặp trong chương trình trung học phổ thông, nhưng lại mang đến sự hiệu quả cùng những điều thú vị đến bất ngờ mà ban quản trị diễn đàn http://boxmath.vn/ biên tập lại từ các bài toán bất đẳng thức trên diễn đàn, nhằm mang lại cho các bạn một tài liệu học tập tốt nhất. Và ban biên tập xin gửi lời cảm ơn chân thành và kính trọng tới thầy giáo Châu Ngọc Hùng - THPT Ninh Hải – Ninh Thuận đã nhiệt tình hỗ trợ kĩ thuật về Latex, đồng thời cảm ơn các bạn đã tham gia gửi bài, giải bài trên diễn đàn. Chính sự nhiệt huyết của các bạn đã đem đến sự ra đời của quyển sách này.

Mỗi bước đi để dẫn đến thành công trong bất kì lĩnh vực nào của cuộc sống luôn gắn kết với sự đam mê, tìm tòi, học hỏi và chắt lọc kinh nghiệm. Vì thế qua quyển sách này hy vọng các bạn sẽ tìm được cho mình những gì cần thiết nhất cho hướng giải quyết một bài toán bất đẳng thức. Để có được điều đó các bạn hãy xem quyển sách như một người bạn và đọc quyển sách như các bạn đang đối ngẫu say mê với người bạn tri kỷ này vậy!

Và quyển sách này cũng mong muốn mang đến cho các thầy cô có thêm tư liệu để phục vụ trong việc giảng dạy và gieo cho các học sinh của mình niềm yêu thích và đam mê trong các bài toán bất đẳng thức.

Mặc dù đã có sự cố gắng tập trung cao độ trong việc biên tập nhưng chắc chắn không thể không có sai xót, mong các bạn đọc thông cảm và gửi những chia sẻ của mình về quyển sách để ban biên tập có thêm những ý kiến quý báu để hoàn thiện quyển sách hơn.

Mọi chia sẻ của các bạn xin gửi về địa chỉ liltee_tm@yahoo.com.vn

Thay mặt nhóm biên soạn, tôi xin chân thành cảm ơn.

Thái Bình, ngày 29 tháng 10 năm 2011.

Đại diện nhóm biên soạn
Chủ biên
Tăng Hải Tuân - Lil.Tee

Các thành viên tham gia biên soạn

Nội dung

- Tăng Hải Tuân - A12 [2008 - 2011] - THPT Nguyễn Đức Cảnh - TP Thái Bình.
- Phạm Tuấn Khải - THPT Trần Văn Năng - Đồng Tháp.
- Tạ Hồng Quảng - TP Hồ Chí Minh - Vũng Tàu.
- Nguyễn Quốc Vương Anh - A1 [2008 - 2011] - THPT Ninh Giang - Hải Dương.
- Đặng Nguyễn Duy Nhân - A1 [2009 - 2012] - THPT Sào Nam - Quảng Nam.
- Giang Hoàng Kiệt - A6 [2009 - 2012] - THPT Mạc Đĩnh Chi - TP Hồ Chí Minh.
- Trần Quốc Huy - THPT Phan Đình Phùng - Phú Yên.
- Nguyễn Văn Thoan - Nam Định.
- Nguyễn Khắc Minh - [2009 - 2012] - Trường THPT Kiến Thụy - Hải Phòng.
- Uchiha Itachi - TP Hồ Chí Minh.

LaTeX

Hỗ trợ kĩ thuật Latex

- Châu Ngọc Hùng - THPT Ninh Hải - Ninh Thuận.
- Tăng Hải Tuân - A12 [2008 - 2011] - THPT Nguyễn Đức Cảnh - TP Thái Bình.
- Phạm Tuấn Khải - THPT Trần Văn Năng - Đồng Tháp.
- Tạ Hồng Quảng - TP Hồ Chí Minh - Vũng Tàu.
- Đặng Nguyễn Duy Nhân - A1 [2009 - 2012] - THPT Sào Nam - Quảng Nam.

Trình bày bìa

- Phạm Tuấn Khải - THPT Trần Văn Năng - Đồng Tháp.

MỘT SỐ BẤT ĐẲNG THỨC THƯỜNG DÙNG TRONG CHƯƠNG TRÌNH THPT

I. Bất đẳng thức AM-GM.

1. Bất đẳng thức AM-GM cho 2 số.

Cho a, b là các số thực không âm. Khi đó bất đẳng thức sau đúng:
$$a + b \geq 2\sqrt{ab}$$
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b$.

2. Bất đẳng thức AM-GM cho 3 số.

Cho a, b, c là các số thực không âm. Khi đó bất đẳng thức sau đúng:
$$a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}$$
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

II. Bất đẳng thức Cauchy-Schwarz.

Nếu a, b, c, x, y, z là các số thực tùy ý thì
$$(ax + by + cz)^2 \leq (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2)$$
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\dfrac{a}{x} = \dfrac{b}{y} = \dfrac{c}{z}$ (qui ước: nếu mẫu bằng 0 thì tử cũng bằng 0).

Hệ quả:

Nếu a, b, c là các số thực và x, y, z là các số dương thì:

- $\dfrac{a^2}{x} + \dfrac{b^2}{y} + \dfrac{c^2}{z} \geq \dfrac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$
- $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} \geq \dfrac{4}{x+y}$
- $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} \geq \dfrac{9}{x+y+z}$

III. Bất đẳng thức Véc tơ.

Xét vec tơ $\overrightarrow{u} = (a; b)$, $\overrightarrow{v} = (x; y)$, $\overrightarrow{w} = (m; n)$
Ta có $|\overrightarrow{u}| + |\overrightarrow{v}| \geq |\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}|$, hay là.
$$\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{x^2 + y^2} \geq \sqrt{(a+x)^2 + (b+y)^2}$$
Đẳng thức xảy ra khi $\overrightarrow{u}$ và $\overrightarrow{v}$ cùng hướng.
Ta có $|\overrightarrow{u}| + |\overrightarrow{v}| + |\overrightarrow{w}| \geq |\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}|$, hay là
$$\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{m^2 + n^2} \geq \sqrt{(a+x+m)^2 + (b+y+n)^2}$$
Đẳng thức xảy ra khi $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ và $\overrightarrow{w}$ cùng hướng.

III. Bất đẳng thức Holder.

Cho $a, b, c, x, y, z, m, n, p$ là các số thực dương. Khi đó ta có

$$\left(a^3+b^3+c^3\right)\left(x^3+y^3+z^3\right)\left(m^3+n^3+p^3\right) \geq (axm+byn+czp)^3$$

Chứng minh:

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$\frac{a^3}{a^3+b^3+c^3}+\frac{x^3}{x^3+y^3+z^3}+\frac{m^3}{m^3+n^3+p^3} \geq \frac{3axm}{\sqrt[3]{\left(a^3+b^3+c^3\right)\left(x^3+y^3+z^3\right)\left(m^3+n^3+p^3\right)}}$$

Thiết lập 2 biểu thức tương tự với bộ (b, y, n) và (c, z, p) rồi cộng vế với vế ta có điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi các biến bằng nhau.

Chú ý: Bất đẳng thức Holder không được học trong chương trình toán phổ thông, nên khi đi thi phải chứng minh.

IV. Một số bất đẳng thức hay sử dụng.

Với a, b, c, x, y, z là các số không âm. Khi đó ta có

1. $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$
2. $a^2+b^2+c^2 \geq \dfrac{(a+b+c)^2}{3}$
3. $(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca)$
4. $x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2 \geq xyz(x+y+z)$
5. $(xy+yz+zx)^2 \geq 3xyz(x+y+z)$
6. $3(a^3+b^3+c^3)^2 \geq (a^2+b^2+c^2)^3$
7. $(a+b+c)(ab+bc+ca) \leq \dfrac{9}{8}(a+b)(b+c)(c+a)$

Chứng minh:

1 $\quad a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$

Lời giải:

Bất đẳng thức đúng do

$$a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca \Leftrightarrow 2\left(a^2+b^2+c^2\right) \geq 2(ab+bc+ca) \Leftrightarrow (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geq 0$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

2 $\quad a^2+b^2+c^2 \geq \dfrac{(a+b+c)^2}{3}$

Lời giải:

Bất đẳng thức đúng theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz

$$\left(1^2+1^2+1^2\right)\left(a^2+b^2+c^2\right) \geq (a+b+c)^2$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

3	$(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca)$

Lời giải:

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với 1 bất đẳng thức đúng sau:

$$(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca) \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

4	$x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2 \geq xyz(x+y+z)$

Lời giải:

Bất đẳng thức đúng vì khi ta đặt $a=xy, b=yz, c=zx$ thì bất đẳng thức trở thành bất đẳng thức $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z$ hoặc $y=z=0$ hoặc $x=y=0$ hoặc $z=x=0$.

5	$(xy+yz+zx)^2 \geq 3xyz(x+y+z)$

Lời giải:

Bất đẳng thức đúng vì khi ta đặt $a=xy, b=yz, c=zx$ thì bất đẳng thức trở thành bất đẳng thức $(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca)$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z$ hoặc $y=z=0$ hoặc $x=y=0$ hoặc $z=x=0$.

6	$3(a^3+b^3+c^3)^2 \geq (a^2+b^2+c^2)^3$

Lời giải:

Bất đẳng thức đúng vì theo bất đẳng thức Holder ta có:

$$\left(1^3+1^3+1^3\right)\left(a^3+b^3+c^3\right)\left(a^3+b^3+c^3\right) \geq \left(\sqrt[3]{1^3.a^3.a^3}+\sqrt[3]{1^3.b^3.b^3}+\sqrt[3]{1^3.c^3.c^3}\right)^3 = \left(a^2+b^2+c^2\right)^3$$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$.

7	$(a+b+c)(ab+bc+ca) \leq \dfrac{9}{8}(a+b)(b+c)(c+a)$

Lời giải:

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 2\sqrt{ab}.2\sqrt{bc}.2\sqrt{ca} = 8abc$$

Do đó

$$(a+b+c)(ab+bc+ca) = abc+(a+b)(b+c)(c+a) \leq \left(\frac{1}{8}+1\right)(a+b)(b+c)(c+a)$$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$.

V. Một số hằng đẳng thức đáng nhớ

- $(x+y)(y+z)+(y+z)(z+x)+(z+x)(x+y) = (x+y+z)^2+xy+yz+zx$
- $(x+y)(y+z)(z+x)+xyz = (x+y+z)(xy+yz+zx)$
- $x^2+y^2+z^2 = (x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)$
- $x^3+y^3+z^3 = (x+y+z)^3-3(x+y)(y+z)(z+x)$

Bài 1. *Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn* $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq a^2b^2c^2$.
Tìm giá trị nhỏ nhất của:

$$A = \frac{a^2b^2}{c^3\left(a^2+b^2\right)} + \frac{b^2c^2}{a^3\left(b^2+c^2\right)} + \frac{c^2a^2}{b^3\left(c^2+a^2\right)}$$

Lời giải:

Đặt $x = \dfrac{1}{a}, y = \dfrac{1}{b}, z = \dfrac{1}{c}$.
Khi đó giả thiết được viết lại là:

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq 1$$

và

$$A = \frac{x^3}{y^2+z^2} + \frac{y^3}{z^2+x^2} + \frac{z^3}{x^2+y^2}$$

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có:

$$\begin{aligned}
x(y^2+z^2) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2x^2(y^2+z^2)(y^2+z^2)} \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\left(\frac{2x^2+y^2+z^2+y^2+z^2}{3}\right)^3} \\
&= \frac{2\sqrt{3}}{9}.\left(x^2+y^2+z^2\right).\sqrt{x^2+y^2+z^2}
\end{aligned}$$

Tương tự, ta cũng có:

$$\begin{aligned}
y(z^2+x^2) &\leq \frac{2\sqrt{3}}{9}.\left(x^2+y^2+z^2\right).\sqrt{x^2+y^2+z^2} \\
z(x^2+y^2) &\leq \frac{2\sqrt{3}}{9}.\left(x^2+y^2+z^2\right).\sqrt{x^2+y^2+z^2}
\end{aligned}$$

Mặt khác, sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz và kết hợp các đánh giá trên, ta thấy rằng:

$$\begin{aligned}
A &= \frac{x^3}{y^2+z^2} + \frac{y^3}{z^2+x^2} + \frac{z^3}{x^2+y^2} \\
&\geq \frac{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}{x(y^2+z^2)+y(z^2+x^2)+z(x^2+y^2)} \\
&\geq \frac{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}{3.\frac{2\sqrt{3}}{9}.\left(x^2+y^2+z^2\right).\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{x^2+y^2+z^2} \\
&\geq \frac{\sqrt{3}}{2}.
\end{aligned}$$

Mà khi $x = y = z = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ thì $A = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ khi $x = y = z = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Bài 2. *Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn* $x + y + 1 = 3xy$.
Tìm giá trị lớn nhất của:

$$M = \frac{3x}{y(x+1)} + \frac{3y}{x(y+1)} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}$$

Lời giải:

Cách 1.

Từ giả thiết

$$3xy - 1 = x + y \geq 2\sqrt{xy} \Leftrightarrow \left(\sqrt{xy} - 1\right)\left(3\sqrt{xy} + 1\right) \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{xy} \geq 1 \Leftrightarrow xy \geq 1$$

Và

$$xy + x + y + 1 = 4xy \Leftrightarrow (x+1)(y+1) = 4xy$$

Ta có

$$\frac{3x}{y(x+1)} - \frac{1}{y^2} = \frac{3xy - x - 1}{y^2(x+1)} = \frac{y}{y^2(x+1)} = \frac{1}{y(x+1)}$$

Suy ra

$$M = \frac{1}{y(x+1)} + \frac{1}{x(y+1)} = \frac{2xy + x + y}{4x^2y^2} = \frac{5xy - 1}{4x^2y^2}$$

Xét hàm số $f(t) = \dfrac{5t-1}{4t^2}$ với $t = xy \geq 1$. Ta có

$$f'(t) = \frac{20t^2 - 8t(5t-1)}{16t^4} = \frac{8t - 20t^2}{16t^4} \leq 0 \text{ với } t \geq 1$$

Vì vậy hàm số nghịch biến với $t \geq 1$

$\Rightarrow f(t)_{MAX} = f(1) = 1$ khi $t = 1 \Leftrightarrow M_{MAX} = 1$ khi $x = y = 1$

Cách 2.

Đặt $\dfrac{1}{x} = a, \dfrac{1}{y} = b \Rightarrow a + b + ab = 3$

Ta có: $3 = a + b + ab \geq ab + 2\sqrt{ab} \geq 3.\sqrt[3]{a^2b^2} \Leftrightarrow ab \leq 1$

Suy ra

$$M = \frac{ab}{a+1} + \frac{ab}{b+1} = ab.\left(\frac{a+1+b+1}{ab+a+b+1}\right) = ab.\frac{5-ab}{4}$$
$$= \frac{-\left[(ab)^2 - 2ab + 1\right] + 3a + 1}{4} = \frac{-(ab-1)^2 + 3ab + 1}{4} \leq 1$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = 1$.

Bài toán được hoàn tất.

Bài 3. *Cho a, b, c là các số thực dương.*

Chứng minh rằng:

$$\frac{a+b+c}{3} \leq \frac{1}{4}\sqrt[3]{\frac{(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2}{abc}}$$

Lời giải:

Do bất đẳng thức thuần nhấn nên ta chuẩn hóa $a + b + c = 1$

Ta có bất đẳng thức tương đương

$$27[(a+b)(b+c)(c+a)]^2 \geq 64abc$$

Dễ thấy

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq \frac{8}{9}(a+b+c)(ab+bc+ca)$$

(biến đổi tương đương và sử dụng AM-GM)

nên ta được

$$(ab+bc+ca)^2 \geq 3abc \Leftrightarrow (ab+bc+ca)^2 \geq 3abc(a+b+c)$$

Điều cuối luôn đúng, do đó phép chứng minh hoàn tất.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Bài 4. *Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc = 1$.*
Chứng minh rằng:
$$\sqrt{\frac{a^4+b^4}{1+ab}}+\sqrt{\frac{b^4+c^4}{1+bc}}+\sqrt{\frac{c^4+a^4}{1+ca}}\geq 3$$

Lời giải:

Ta có
$$\sum_{sym}\sqrt{\frac{a^4+b^4}{1+ab}}=\sum_{sym}\sqrt{\frac{2(a^4+b^4)}{2+2ab}}\geq\sum_{cyc}\frac{a^2}{\sqrt{2+2ab}}+\sum_{cyc}\frac{b^2}{\sqrt{2+2ab}}$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz và AM-GM ta có:
$$\sum_{cyc}\frac{a^2}{\sqrt{2+2ab}}\geq\frac{2(a+b+c)^2}{\sum 2\sqrt{2+2ab}}\geq\frac{2(a+b+c)^2}{ab+bc+ca+9}\geq\frac{3}{2}$$

Tương tự
$$\sum_{cyc}\frac{b^2}{\sqrt{2+2ab}}\geq\frac{3}{2}$$

Cộng 2 bất đẳng thức ta được
$$\sqrt{\frac{a^4+b^4}{1+ab}}+\sqrt{\frac{b^4+c^4}{1+bc}}+\sqrt{\frac{c^4+a^4}{1+ca}}\geq 3$$

Phép chứng minh hoàn tất.
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Bài 5. *Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$.*
Chứng minh rằng:
$$\sum_{cyc}\frac{a^2-bc}{2a^2+b^2+c^2}\geq 0$$

Lời giải:

Cách 1.

Ta có
$$\begin{aligned}\sum_{cyc}\frac{2a^2-2bc}{2a^2+b^2+c^2}&=\sum_{cyc}\frac{(a-c)(a+b)+(a-b)(a+c)}{2a^2+b^2+c^2}\\&=\sum_{cyc}(a-c)(\frac{a+b}{2a^2+b^2+c^2}-\frac{b+c}{2a^2+b^2+c^2})\\&=\sum_{cyc}\frac{(a-c)^2(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)}{(2a^2+b^2+c^2)(2c^2+b^2+a^2)}\geq 0\end{aligned}$$

Bất đẳng thức cuối luôn đúng, do đó ta có điều phải chứng minh.
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$

Cách 2.

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương
$$-\frac{2a^2-2bc}{2a^2+b^2+c^2}+1-\frac{2b^2-2ac}{2b^2+a^2+c^2}+1-\frac{2c^2-2ab}{2c^2+a^2+b^2}+1\geq 3$$
$$\Leftrightarrow\sum_{cyc}\frac{(a+b)^2}{2c^2+b^2+a^2}\leq 3$$

Mặt khác

$$\frac{(b+c)^2}{2a^2+b^2+c^2} = \frac{(b+c)^2}{a^2+b^2+a^2+c^2} \le \frac{b^2}{a^2+b^2} + \frac{c^2}{a^2+c^2}$$

Tương tự ta được

$$\frac{(a+c)^2}{2b^2+a^2+c^2} \le \frac{a^2}{b^2+a^2} + \frac{c^2}{b^2+c^2}$$

Và

$$\frac{(b+c)^2}{2a^2+b^2+c^2} \le \frac{b^2}{a^2+b^2} + \frac{c^2}{a^2+c^2}$$

Cộng vế theo vế ta được

$$\sum_{cyc} \frac{(a+b)^2}{2c^2+b^2+a^2} \le 3$$

Đó chính là điều cần chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Bài 6. *Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a + b + c = 3$.*

Chứng minh rằng:

$$\sum_{cyc} \sqrt{a(b+c)} \ge 3.\sqrt{2abc}$$

Lời giải:

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương

$$\sqrt{\frac{b+c}{2bc}} + \sqrt{\frac{c+a}{2ac}} + \sqrt{\frac{a+b}{2ab}} \ge 3$$

Ta có

$$1 = \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 \ge abc$$

và

$$(a+b)(b+c)(c+a) \ge 8abc$$

Suy ra

$$(a+b)(b+c)(c+a) \ge 8(abc)^2$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt[6]{\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{8(abc)^2}} \ge 3$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{b+c}{2bc}} + \sqrt{\frac{c+a}{2ac}} + \sqrt{\frac{a+b}{2ab}} \ge 3$$

Phép chứng minh hoàn tất.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Bài 7. *Cho a, b, c là các số thực dương.*

Chứng minh rằng:

$$\left(1+\tfrac{x}{y}\right)\left(1+\frac{y}{z}\right)\left(1+\frac{z}{x}\right) \ge 2 + \frac{2(x+y+z)}{\sqrt[3]{xyz}}$$

Lời giải:

Ta có:

$$\left(1+\frac{x}{y}\right)\left(1+\frac{y}{z}\right)\left(1+\frac{z}{x}\right) \ge 2 + \frac{2(x+y+z)}{\sqrt[3]{xyz}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} + \frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{x}{z} \ge \frac{2(x+y+z)}{\sqrt[3]{xyz}}$$

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta thấy

$$\frac{x}{y}+\frac{x}{z}+\frac{x}{x}\geq\frac{3x}{\sqrt[3]{xyz}}$$

$$\frac{y}{x}+\frac{y}{y}+\frac{y}{z}\geq\frac{3y}{\sqrt[3]{xyz}}$$

$$\frac{z}{x}+\frac{z}{y}+\frac{z}{z}\geq\frac{3z}{\sqrt[3]{xyz}}$$

Cộng từng vế ta được

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}+\frac{y}{x}+\frac{z}{y}+\frac{x}{z}+3\geq\frac{3(x+y+z)}{\sqrt[3]{xyz}}$$

Mặt khác:

$$\frac{x+y+z}{\sqrt[3]{xyz}}\geq 3$$

Suy ra

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}+\frac{y}{x}+\frac{z}{y}+\frac{x}{z}\geq\frac{2(x+y+z)}{\sqrt[3]{xyz}}$$

Phép chứng minh hoàn tất.
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Bài 8. *Cho a,b,c là các số thực dương.*
Chứng minh rằng:

$$\left(1+a^3\right)\left(1+b^3\right)\left(1+c^3\right)\geq\left(1+ab^2\right)\left(1+bc^2\right)\left(1+ca^2\right)$$

Lời giải:

Áp dụng bất đẳng thức Holder ta được:

$$\left(1+a^3\right)\left(1+b^3\right)\left(1+b^3\right)\geq\left(1+ab^2\right)^3$$

$$\left(1+b^3\right)\left(1+c^3\right)\left(1+c^3\right)\geq\left(1+bc^2\right)^3$$

$$\left(1+c^3\right)\left(1+a^3\right)\left(1+a^3\right)\geq\left(1+ca^2\right)^3$$

Nhân từng vế của 3 bất đẳng thức trên ta được

$$\left(1+a^3\right)\left(1+b^3\right)\left(1+c^3\right)\geq\left(1+ab^2\right)\left(1+bc^2\right)\left(1+ca^2\right)$$

Phép chứng minh hoàn tất.
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Bài 9. *Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=1$.*
Chứng minh rằng:

$$\sum\frac{bc}{\sqrt{a+bc}}\leq 2$$

Lời giải:

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM và kết hợp giả thiết, ta có:

$$\frac{bc}{\sqrt{a+bc}}=\frac{bc}{\sqrt{a(a+b+c)+bc}}=\frac{bc}{\sqrt{(a+b)(a+c)}}\leq\frac{1}{2}\left(\frac{bc}{a+b}+\frac{bc}{a+c}\right)$$

Tương tự ta được:

$$\frac{ac}{\sqrt{b+ac}} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{ac}{b+a}+\frac{ac}{b+c}\right)$$

$$\frac{ab}{\sqrt{c+ab}} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{ab}{c+a}+\frac{ab}{c+b}\right)$$

Cộng vế theo vế các bất đẳng thức trên, ta được

$$\sum \frac{bc}{\sqrt{a+bc}} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{ab}{a+c}+\frac{ab}{b+c}+\frac{bc}{a+b}+\frac{bc}{a+c}+\frac{ca}{b+a}+\frac{ca}{b+c}\right)=\frac{1}{2}$$

Phép chứng minh hoàn tất.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{3}$.

Bài 10. *Cho a,b,c là các số thực dương.*
Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{\sqrt{b+c}}+\frac{b}{\sqrt{a+c}}+\frac{c}{\sqrt{a+b}} \geq \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)$$

Lời giải:

Cách 1.

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương

$$P=\frac{a}{\left(\sqrt{2a}+\sqrt{2b}+\sqrt{2c}\right)\sqrt{b+c}}+\frac{b}{\left(\sqrt{2a}+\sqrt{2b}+\sqrt{2c}\right)\sqrt{a+c}}+\frac{c}{\left(\sqrt{2a}+\sqrt{2b}+\sqrt{2c}\right)\sqrt{a+b}} \geq \frac{1}{2}$$

Theo bất đẳng thức AM-GM ta được

$$\sqrt{2a}\sqrt{b+c} \leq \frac{2a+b+c}{2}$$

$$\sqrt{2b}\sqrt{a+c} \leq \frac{2b+a+c}{2}$$

$$\sqrt{2c}\sqrt{a+b} \leq \frac{2c+a+b}{2}$$

Do đó ta có:

$$P \geq \frac{2a}{2a+5b+5c}+\frac{2b}{2b+5a+5c}+\frac{2c}{2c+5a+5b}=2\left(\frac{a^2}{2a^2+5ab+5ac}+\frac{b^2}{2b^2+5ab+5bc}+\frac{c^2}{2c^2+5ac+5bc}\right)$$

Theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz

$$\sum_{cyc}\frac{a^2}{2a^2+5ab+5ac} \geq 2.\frac{(a+b+c)^2}{2a^2+2b^2+2c^2+10ab+10bc+10ca} \geq 2.\frac{(a+b+c)^2}{4(a+b+c)^2}=\frac{1}{2}$$

Chứng minh hoàn tất.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Cách 2.

Ta có

$$P=\frac{a}{\sqrt{b+c}}+\frac{b}{\sqrt{a+c}}+\frac{c}{\sqrt{a+b}}=(a+b+c)\left(\frac{1}{\sqrt{b+c}}+\frac{1}{\sqrt{a+b}}+\frac{1}{\sqrt{a+c}}\right)-\left(\sqrt{b+c}+\sqrt{a+c}+\sqrt{a+b}\right)$$

Theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{\sqrt{b+c}}+\frac{1}{\sqrt{a+b}}+\frac{1}{\sqrt{a+c}}\right)\geq\frac{9.(a+b+c)}{\sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a}}$$

Theo bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$\sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a}\leq\sqrt{3.2.(a+b+c)}$$

Suy ra

$$P\geq\frac{9(a+b+c)}{\sqrt{3.2.(a+b+c)}}-\sqrt{3.2.(a+b+c)}=\frac{\sqrt{3(a+b+c)}}{\sqrt{2}}\geq\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)$$

Phép chứng minh hoàn tất.
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Cách 3.
Do bất đẳng thức thuần nhất, chuẩn hóa: $a+b+c=3$.
Ta sẽ chứng minh:

$$\frac{t}{\sqrt{3-t}}\geq\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{2}}+\frac{3}{4\sqrt{2}}(t-1)$$

Thật vậy, ta có:

$$\frac{t}{\sqrt{3-t}}-\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{2}}-\frac{3(t-1)}{4\sqrt{2}}=\frac{3}{\sqrt{2}}\frac{\left(\sqrt{3-t}-\sqrt{2}\right)^2\left(\sqrt{3-t}+\sqrt{2}\right)\left(5\sqrt{3-t}+6\sqrt{2}\right)}{4\sqrt{3-t}\left(\sqrt{2}+\sqrt{3-t}\right)}\geq 0$$

Suy ra

$$\frac{a}{\sqrt{3-a}}+\frac{b}{\sqrt{3-b}}+\frac{c}{\sqrt{3-c}}\geq\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)+\frac{3}{4\sqrt{2}}(a+b+c-3)\geq\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)$$

Phép chứng minh hoàn tất.
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Bài 11. *Cho x,y,z là các số thực dương thỏa mãn $x+y+z=6$.*
Chứng minh rằng:

$$8^x+8^y+8^z\geq 4^{x+1}+4^{y+1}+4^{z+1}$$

Lời giải:

Cách 1.
Đặt $a=2^x,b=2^y,c=2^z\to abc=64$
Bất đẳng thức đã cho được viết lại như sau:

$$a^3+b^3+c^3\geq\sqrt[3]{abc}\left(a^2+b^2+c^2\right)$$

Theo bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$3\sqrt[3]{abc}\leq(a+b+c)$$

Suy ra ta sẽ chứng minh

$$3\left(a^3+b^3+c^3\right)\geq(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2\right)$$

Hay
$$2\left(a^3+b^3+c^3\right) \geq ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)$$
Thật vậy, theo bất đẳng thức AM-GM ta có:
$$\begin{aligned}
&a^3+a^3+b^3 \geq 3a^2b\\
&a^3+a^3+c^3 \geq 3a^2c\\
&a^3+b^3+b^3 \geq 3ab^2\\
&a^3+c^3+c^3 \geq 3ac^2\\
&b^3+b^3+c^3 \geq 3b^2c\\
&b^3+c^3+c^3 \geq 3bc^2
\end{aligned}$$
Cộng từng vế của các bất đẳng thức trên ta được
$$2\left(a^3+b^3+c^3\right) \geq ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)$$
Phép chứng minh hoàn tất.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Cách 2.

Đặt $a=2^x, b=2^y, c=2^z \rightarrow abc=64$

Ta phải chứng minh:
$$a^3+b^3+c^3 \geq 4\left(a^2+b^2+c^2\right)$$
Thật vậy, ta có:
$$\begin{cases} a^3+a^3+64 \geq 12a^2\\ b^3+b^3+64 \geq 12b^2\\ c^3+c^3+64 \geq 12c^2 \end{cases} \Rightarrow a^3+b^3+c^3+96 \geq 4\left(a^2+b^2+c^2\right)+2\left(a^2+b^2+c^2\right)$$
Ta lại có: $$2(a^2+b^2+c^2) \geq 23\sqrt[3]{a^2b^2c^2}=96$$
Suy ra $$a^3+b^3+c^3 \geq 4\left(a^2+b^2+c^2\right)$$
Phép chứng minh hoàn tất.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Cách 3.

Ta có
$$8^x+8^y+8^z=\frac{\left(4^x+4^y+4^z\right)\left(2^x+2^y+2^z\right)}{3}+\frac{\sum\limits_{cyclic}\left(2^x-2^y\right)^2\left(2^x+2^y\right)}{3}$$
Theo bất đăng thức AM-GM ta có
$$2^x+2^y+2^z \geq 3.\sqrt[3]{2^{x+y+z}}=3.2^{\frac{x+y+z}{3}}=3.2^2=12$$
Do đó:
$$\frac{\left(4^x+4^y+4^z\right)\left(2^x+2^y+2^z\right)}{3} \geq 4.\left(4^x+4^y+4^z\right)=4^{x+1}+4^{y+1}+4^{z+1}$$
Dễ thấy:
$$\sum_{cyc}\frac{\left(2^x-2^y\right)^2\left(2^x+2^y\right)}{3} \geq 0$$
Suy ra:
$$8^x+8^y+8^z \geq 4^{x+1}+4^{y+1}+4^{z+1}$$
Phép chứng minh hoàn tất.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=2$.

Bài 12. *Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $xy + yz + zx = xyz$.*
Chứng minh rằng:
$$\frac{x}{y^2} + \frac{y}{z^2} + \frac{z}{x^2} \geq 3\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}\right)$$

Lời giải:

Đặt $x = \frac{1}{a}, y = \frac{1}{b}, z = \frac{1}{c} \Rightarrow a + b + c = 1.$
Ta cần chứng minh:
$$\frac{a^2}{c} + \frac{b^2}{a} + \frac{c^2}{b} \geq 3(a^2 + b^2 + c^2)$$

Cách 1.
Theo Cauchy-Schwarz ta có:
$$\frac{a^2}{c} + \frac{b^2}{a} + \frac{c^2}{b} = \frac{a^4}{a^2c} + \frac{b^4}{b^2a} + \frac{c^4}{c^2b} \geq \frac{\left(a^2 + b^2 + c^2\right)^2}{a^2c + b^2a + c^2b}$$
Ta sẽ chứng minh:
$$\frac{\left(a^2 + b^2 + c^2\right)^2}{a^2c + b^2a + c^2b} \geq 3\left(a^2 + b^2 + c^2\right)$$
$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq 3\left(a^2c + b^2a + c^2b\right)$$
$$\Leftrightarrow (a + b + c)\left(a^2 + b^2 + c^2\right) \geq 3\left(a^2c + b^2a + c^2b\right)$$
$$\Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 + ac^2 + ba^2 + cb^2 \geq 2\left(a^2c + b^2a + c^2b\right)$$
Vậy mà theo AM-GM thì:
$$\begin{cases} a^3 + ac^2 \geq 2a^2c \\ b^3 + ba^2 \geq 2b^2a \\ c^3 + cb^2 \geq 2c^2b \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 + ac^2 + ba^2 + cb^2 \geq 2\left(a^2c + b^2a + c^2b\right)$$
Phép chứng minh hoàn tất. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = y = z = 3.$

Cách 2.
Ta có:
$$\frac{a^2}{c} + \frac{b^2}{a} + \frac{c^2}{b} \geq 3\left(a^2 + b^2 + c^2\right)$$
$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{c} + \frac{b^2}{a} + \frac{c^2}{b} - (a + b + c)^2 \geq 3\left(a^2 + b^2 + c^2\right) - (a + b + c)^2$$
$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{c} + \frac{b^2}{a} + \frac{c^2}{b} - (a + b + c) \geq 3\left(a^2 + b^2 + c^2\right) - (a + b + c)^2$$
$$\Leftrightarrow \frac{(a - c)^2}{c} + \frac{(b - a)^2}{a} + \frac{(c - b)^2}{b} \geq (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2$$
$$\Leftrightarrow \sum (a - b)^2\left(\frac{1}{a} - 1\right) \geq 0$$
Vì $a + b + c = 1 \Rightarrow \frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c} > 1$, do đó bất đẳng thức cuối đúng.
Phép chứng minh hoàn tất. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = y = z = 3.$

Bài 13. *Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x, y \geq 1; x + y + 3 = xy$.*
Tìm giá trị lớn nhất của:
$$P = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} + \frac{\sqrt{y^2 - 1}}{y} + \frac{1}{x + y}$$

Lời giải:

Đặt $a=\dfrac{1}{x}, b=\dfrac{1}{y}$

Suy ra: $a+b+3ab=1\le a+b+\dfrac{3(a+b)^2}{4}\Leftrightarrow a+b\ge\dfrac{2}{3}$

Ta có:

$$\begin{aligned}P&=\sqrt{1-a^2}+\sqrt{1-b^2}+\frac{ab}{a+b}\\&\le\sqrt{2\left[2-(a^2+b^2)\right]}+\frac{1-(a+b)}{3(a+b)}\\&\le\sqrt{2\left[2-\frac{(a+b)^2}{2}\right]}+\frac{1}{3(a+b)}-\frac{1}{3}\\&\le\sqrt{2\left[2-\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2}{2}\right]}+\frac{1}{3.\frac{2}{3}}-\frac{1}{3}=\frac{1+8\sqrt{2}}{6}\end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=\dfrac{1}{3}\Leftrightarrow x=y=3$. Vậy $minP=\dfrac{1+8\sqrt{2}}{6}$.

Bài 14. *Cho x,y,z là các số thực dương thỏa mãn $x^2+y^2+z^2+2xy=3(x+y+z)$.*
Tìm giá trị nhỏ nhất của:

$$P=x+y+z+\frac{20}{\sqrt{x+z}}+\frac{20}{\sqrt{y+2}}$$

Lời giải:

Cách 1.

Theo bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$3(x+y+z)=(x+y)^2+z^2\ge\frac{1}{2}(x+y+z)^2\to 0<x+y+z\le 6$$
$$2\sqrt{x+z}\le\frac{1}{2}(4+x+z)$$
$$2\sqrt{y+2}\le\frac{1}{2}(6+y)$$

Suy ra:

$$P\ge x+y+z+\frac{80}{4+x+z}+\frac{80}{6+y}\ge +x+y+z+\frac{320}{10+x+y+z}$$

Xét $f(t)=t+\dfrac{320}{10+t}$

Ta có: $f'(t)=1-\dfrac{320}{(10+t)^2}\le 0$ với $\forall t\in(0,6]$

Vậy hàm số nghịch biến với $\forall t\in(0,6]$

Suy ra $f(t)_{Min}=f(6)=26$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=1,y=2,z=3$.

Cách 2.

Ta có:

$$3(x+y+z)=(x+y)^2+z^2\ge\tfrac{1}{2}(x+y+z)^2\Rightarrow 0<x+y+z\le 6$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz và AM-GM, ta có:

$$
\begin{aligned}
P &= x+y+z+\frac{20}{\sqrt{x+z}}+\frac{20}{\sqrt{y+2}}\\
&\ge x+y+z+\frac{80}{\sqrt{x+z}+\sqrt{y+2}}\\
&\ge x+y+z+\frac{80}{\sqrt{2(x+z+y+2)}}\\
&= \left(x+y+z+2+\frac{16\sqrt{2}}{\sqrt{(x+z+y+2)}}+\frac{16\sqrt{2}}{\sqrt{(x+z+y+2)}}\right)+\frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{(x+z+y+2)}}-2\\
&\ge 3\sqrt[3]{16\sqrt{2}.16\sqrt{2}}+\frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{6+2}}-2
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow P \ge 26.$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=1, y=2, z=3$. Vậy $minP=26$.

Bài 15. *Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=1$.*
Chứng minh rằng

$$\sum\frac{1+a}{b+c}\le 2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)$$

Lời giải:

Ta phải chứng minh:

$$
\begin{aligned}
&\sum\frac{1+a}{b+c}\le 2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)\\
&\Leftrightarrow \sum\frac{2a+b+c}{b+c}\le 2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)\\
&\Leftrightarrow \sum\frac{2a}{b+c}+3\le 2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)\\
&\Leftrightarrow \frac{a}{b}-\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c}-\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a}-\frac{c}{a+b}\ge\frac{3}{2}\\
&\Leftrightarrow \frac{ac}{b(b+c)}+\frac{bc}{a(a+b)}+\frac{ab}{c(c+a)}\ge\frac{3}{2}\\
&\Leftrightarrow \frac{(ac)^2}{abc(b+c)}+\frac{(bc)^2}{abc(a+b)}+\frac{(ab)^2}{abc(c+a)}\ge\frac{3}{2}
\end{aligned}
$$

Mặt khác: Theo bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$(ab+bc+ca)^2\ge 3\left(a^2bc+ab^2c+abc^2\right)=3abc(a+b+c)$$

Theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có:

$$\frac{(ac)^2}{abc(b+c)}+\frac{(bc)^2}{abc(a+b)}+\frac{(ab)^2}{abc(c+a)}\ge\frac{(ab+bc+ca)^2}{2abc(a+b+c)}\ge\frac{3}{2}$$

Bài toán được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{3}$.

Bài 16. *Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=3$.*
Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$P=100+(ab+bc+ca)\frac{1+a^2b+b^2c+c^2a}{a^2b+b^2c+c^2a}+\frac{81}{(a+b)(b+c)(c+a)+abc}$$

Lời giải:

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có:

$$\begin{cases} a^3+a^3+b^3\ge 3a^2b\\ b^3+b^3+c^3\ge 3b^2c\\ c^3+c^3+a^3\ge 3ac^2\end{cases}\Rightarrow a^3+b^3+c^3\ge a^2b+b^2c+c^2a.$$

Và: $(a+b)(b+c)(c+a)+abc=(a+b+c)(ab+bc+ca)=3(ab+bc+ca)$.

Cách 1.

Ta có:

$$P \geq 100+ab+bc+ca+\frac{ab+bc+ca}{a^3+b^3+c^3}+\frac{81}{3(ab+bc+ca}$$
$$=100+ab+bc+ca+\frac{ab+bc+ca}{30-9(ab+bc+ca)}+\frac{27}{ab+bc+ca}$$

Đặt $ab+bc+ca=t(0<t\leq 3)$

Ta có:

$P=f(t)=100+t+\dfrac{t}{30-9t}+\dfrac{81}{3t}$

$f'(t)=1+\dfrac{(30-9t)+9t}{(30-9t)^2}-\dfrac{27}{t^2}=1+\dfrac{30}{(30-9t)^2}-\dfrac{27}{t^2}<0$ với $0<t\leq 3$

Vậy $f(t)$ nghịch biến với $0<t\leq 3$

$\Rightarrow f(t)_{Min}=f(3)=113$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Cách 2.

Ta sẽ có thêm 1 đánh giá như sau:

$$\begin{aligned}a^2b+b^2c+c^2a&=\frac{1}{3}\left(a^2b+b^2c+c^2a\right)+\frac{2}{3}(a^2b+b^2c+c^2a)\\&\leq\frac{1}{3}\left(a^3+b^3+c^3\right)+\frac{2}{3}\left(a^2b+b^2c+c^2a\right)\\&=\frac{1}{3}(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2\right)=a^2+b^2+c^2\\&=9-2(ab+bc+ca).\end{aligned}$$

Suy ra:

$$P\geq 100+ab+bc+ca+\frac{ab+bc+ca}{a^2b+b^2c+c^2a}+\frac{27}{ab+bc+ca}$$
$$\geq 100+ab+bc+ca+\frac{ab+bc+ca}{9-2(ab+bc+ca)}+\frac{27}{ab+bc+ca}.$$

Đặt $ab+bc+ca=t, 0<t\leq 3$

Khi đó $P\geq 100+\dfrac{t}{9-2t}+t+\dfrac{27}{t}=95+\left[\dfrac{9}{2(9-2t)}+\dfrac{9(9-2t)}{2}\right]+\left(2t+\dfrac{18}{t}\right)+\dfrac{9}{t}$

Theo bất đẳng thức AM-GM ta có

$$\frac{t}{2(9-2t)}+\frac{9-2t}{2}\geq 3,$$
$$2t+\frac{18}{t}\geq 12$$

Mặt khác $\dfrac{9}{t}\geq 3$

Vì vậy $P\geq 95+3+12+3=113$

Kết luận: $\mathrm{P}_{MIN}=113$ khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài toán được hoàn tất.

Bài 17. *Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng*

$$P=\frac{1}{a(b+1)}+\frac{1}{b(c+1)}+\frac{1}{c(a+1)}\geq\frac{3}{\sqrt[3]{abc}\left(\sqrt[3]{abc}+1\right)}$$

Lời giải:

Đặt: $x=\sqrt[3]{a}, y=\sqrt[3]{b}, z=\sqrt[3]{c}$

Suy ra

$$P=\frac{1}{x^3\left(y^3+1\right)}+\frac{1}{y^3\left(z^3+1\right)}+\frac{1}{z^3\left(x^3+1\right)}\geq\frac{3}{xyz\left(xyz+1\right)}$$

Ta có:

$$M=3+\left(1+x^3y^3z^3\right)\left(\frac{1}{x^3\left(y^3+1\right)}+\frac{1}{y^3\left(z^3+1\right)}+\frac{1}{z^3\left(x^3+1\right)}\right)$$

$$=\sum_{cyc}\frac{1}{x^3\left(y^3+1\right)}+\sum_{cyc}\left(\frac{y^3z^3}{y^3+1}+1\right)=\sum_{cyc}\frac{1+x^3}{x^3\left(y^3+1\right)}+\sum_{cyc}\frac{y^3\left(x^3+1\right)}{\left(1+y^3\right)}$$

Theo bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$\sum_{cyc}\frac{x^3+1}{x^3\left(y^3+1\right)}\geq 3xyz$$

$$\sum_{cyc}\frac{x^3+1}{x^3\left(1+y^3\right)}\geq\frac{3}{xyz}$$

Suy ra

$$M\geq 3xyz+\frac{3}{xyz}$$

$$\Rightarrow\left(1+x^3y^3z^3\right).P\geq 3xyz+\frac{3}{xyz}-3$$

Ta lại có:

$$\frac{3}{xyz(xyz+1)}\left(x^3y^3z^3+1\right)=\frac{3\left(x^2y^2z^2-xyz+1\right)}{xyz}=3xyz-3+\frac{3}{zyz}$$

Vì vậy

$$\left(1+x^3y^3z^3\right)P\geq\left(1+x^3y^3z^3\right)\frac{3}{xyz(xyz+1)}\Leftrightarrow P\geq\frac{3}{xyz(xyz+1)}$$

Chứng minh hoàn tất. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z\Leftrightarrow a=b=c$

Bài 18. *Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng*

$$\frac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}\leq\frac{(a+b)(a+b+2c)}{(3a+3b+2c)^2}\leq\frac{1}{8}$$

Lời giải:

Trước hết ta chứng minh:

$$\frac{(a+b)(a+b+2c)}{(3a+3b+2c)^2}\leq\frac{1}{8}$$

Thật vậy, ta có:

$$\begin{aligned}(a+b)(a+b+2c)&=\frac{1}{2}(2a+2b)(a+b+2c)\\&\leq\frac{1}{2}\left[\frac{(2a+2b)+(a+b+2c)}{2}\right]^2\\&=\frac{1}{8}(3a+3b+2c)^2\end{aligned}$$

Suy ra

$$\frac{(a+b)(a+b+2c)}{(3a+3b+2c)^2}\leq\frac{1}{8}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a+b=2c$.

Bài 19. *Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x^2+y^2+z^2=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:*

$$P=\frac{1}{xy+2}+\frac{1}{yz+2}+\frac{1}{zx+2}$$

Lời giải:

Theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có

$$P=\frac{1}{xy+2}+\frac{1}{yz+2}+\frac{1}{zx+2}\geq\frac{9}{xy+yz+zx+6}$$

Theo bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$x^2+y^2+z^2\geq xy+yz+zx$$

Suy ra:

$$P\geq\frac{9}{a^2+b^2+c^2+6}=1$$

Bài toán được hoàn tất. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1$.

Bài 20. *Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn: $a+b+c=3$. Chứng minh rằng*

$$\sqrt[5]{a(a+c)(2a+b)}+\sqrt[5]{b(b+a)(2b+c)}+\sqrt[5]{c(c+b)(2c+a)}\leq 3\sqrt[5]{6}$$

Lời giải:

Theo bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$\sqrt[5]{1.1.a.\frac{a+c}{2}.\frac{2a+b}{3}}\leq\frac{1+1+a+\dfrac{a+c}{2}+\dfrac{2a+b}{3}}{5}=\frac{2}{5}+\frac{13a}{30}+\frac{b}{15}+\frac{c}{10}$$

Tương tự ta có:

$$\sqrt[5]{b(b+a)(2b+c)}\leq\frac{2}{5}+\frac{13b}{30}+\frac{c}{15}+\frac{a}{10}$$

$$\sqrt[5]{c(c+b)(2c+a)}\leq\frac{2}{5}+\frac{13c}{30}+\frac{a}{15}+\frac{b}{10}$$

Cộng vế với vế các bất đẳng thức trên, ta được:

$$\frac{1}{\sqrt[5]{6}}\left[\sqrt[5]{a(a+c)(2a+b)}+\sqrt[5]{b(b+a)(2b+c)}+\sqrt[5]{c(c+b)(2c+a)}\right]\leq\frac{3.2}{5}+\left(\frac{13}{30}+\frac{1}{15}+\frac{1}{10}\right)(a+b+c)=3$$

$$\Leftrightarrow\sqrt[5]{a(a+c)(2a+b)}+\sqrt[5]{b(b+a)(2b+c)}+\sqrt[5]{c(c+b)(2c+a)}\leq 3\sqrt[5]{6}$$

Chứng minh hoàn tất. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài 21. *Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn: $a+b+c=3$. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\geq a^2+b^2+c^2$$

Lời giải:

Cách 1.

Do $a, b, c>0\Rightarrow a^2+b^2+c^2<(a+b+c)^2=9$

TH1: Giả sử 1 trong 3 số a, b, c nhỏ hơn $\dfrac{1}{3}$

Khi đó tổng $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}>9$ Bất đẳng thức luôn đúng trong trường hợp này.
TH2: Giả sử cả 3 số a,b,c đều lớn hơn $\frac{1}{3}$. Do $a+b+c=3 \Rightarrow a,b,c \le \frac{7}{3}$
Ta có:
$$\frac{1}{a^2}-a^2-(-4a+4)=\frac{-(a-1)^2\left(a^2-2a-1\right)}{a^2}, \forall a \in \left[\frac{1}{3},\frac{7}{3}\right]$$
Suy ra:
$$\frac{1}{a^2}-a^2 \ge -4a+4$$
Tương tự ta có:
$$\frac{1}{b^2}-b^2 \ge -4b+4$$
$$\frac{1}{c^2}-c^2 \ge -4c+4$$
Cộng vế theo vế, ta được:
$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}-a^2-b^2-c^2 \ge 4\left(3-a-b-c\right)=0 \Rightarrow \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2} \ge a^2+b^2+c^2$$
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.
Cách 2.
TH1: Với $a,b,c \in (0;1+\sqrt{2})$. Khi đó ta có ước lượng:
$$\begin{aligned}\frac{1}{a^2}-a^2 \ge -4a+4 &\Leftrightarrow -a^4+4a^3-4a^2+1 \ge 0\\ &\Leftrightarrow (a-1)^2\left[2-(a-1)^2\right] \ge 0\end{aligned}, \text{ luôn đúng}$$
Tương tự
$$\frac{1}{b^2}-b^2 \ge -4b+4$$
$$\frac{1}{c^2}-c^2 \ge -4c+4$$
Cộng từng vế của 3 bất đẳng thức ta được
$$\frac{1}{a^2}-a^2+\frac{1}{b^2}-b^2+\frac{1}{c^2}-c^2 \ge 12-4(a+b+c) \ge 9$$
TH2: Nếu có một trong 3 số a,b,c lớn hơn hoặc bằng $1+\sqrt{2}$.
Không mất tính tổng quát giả sử $a \ge b \ge c$ suy ra:
$$a \ge 1+\sqrt{2} \Rightarrow b+c \le 2-\sqrt{2} \Rightarrow c \le \frac{2-\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \frac{1}{c^2} \ge 6+4\sqrt{2}$$
Khi đó $VT(1) \ge 6+4\sqrt{2}$. Trong khi đó $VP(1)<(a+b+c)^2=9$.
Như vậy trong TH2, (1) cũng đúng, ta đi đến lời giải như ở trên.
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.
Cách 3.
Theo bất đẳng thức AM-GM ta dễ dàng có được
$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2} \ge \frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}=\frac{a+b+c}{abc}$$
Và
$$3abc(a+b+c) \le (ab+bc+ca)^2$$

Do đó ta có:

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\geq\frac{a+b+c}{abc}=\frac{(a+b+c)^2}{abc(a+b+c)}\geq\frac{3(a+b+c)^2}{(ab+bc+ca)^2}$$

Mặt khác:

$$\begin{aligned}(a+b+c)^2&=\left(a^2+b^2+c^2\right)+(ab+bc+ca)+(ab+bc+ca)\\&\geq 3.\sqrt[3]{\left(a^2+b^2+c^2\right)(ab+bc+ca)^2}\\ \Leftrightarrow (a+b+c)^6&\geq 27\left(a^2+b^2+c^2\right)(ab+bc+ca)^2\\ \Rightarrow \frac{3(a+b+c)^2}{(ab+bc+ca)^2}&\geq a^2+b^2+c^2\end{aligned}$$

Do đó ta có:

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\geq a^2+b^2+c^2$$

Chứng minh hoàn tất.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài 22. *Cho x,y,z thỏa mãn $13x+5y+12z=9$. Tìm giá trị lớn nhất của*

$$A=\frac{xy}{2x+y}+\frac{3yz}{2y+z}+\frac{6zx}{2z+x}$$

Lời giải:

Ta có

$$A=\frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{y}}+\frac{1}{\frac{1}{3z}+\frac{1}{3z}+\frac{1}{3y}}+\frac{1}{\frac{1}{6x}+\frac{1}{6x}+\frac{1}{6z}}$$

Theo bất đẳng thức AM-GM ta có

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq 9$$

Áp dụng ta được

$$(x+y+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{y}\right)\geq 9\Leftrightarrow\frac{x+y+y}{9}\geq\frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{y}}$$

$$(y+z+z)\left(\frac{1}{3y}+\frac{1}{3z}+\frac{1}{3z}\right)\geq 3\Leftrightarrow\frac{y+z+z}{3}\geq\frac{1}{\frac{1}{3y}+\frac{1}{3z}+\frac{1}{3z}}$$

$$(z+x+x)\left(\frac{1}{6z}+\frac{1}{6x}+\frac{1}{6x}\right)\geq\frac{3}{2}\Leftrightarrow\frac{2(z+x+x)}{3}\geq\frac{1}{\frac{1}{3z}+\frac{1}{3x}+\frac{1}{3x}}$$

Cộng vế với vế các bất đẳng thức trên ta được

$$A\leq\left(\frac{1}{9}+2\frac{3}{2}\right)x+\left(2\frac{1}{9}+\frac{1}{3}\right)y+\left(2\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)z=\frac{1}{9}(13x+5y+12z)=1$$

Vậy $A_{\text{MAX}}=1$

Bài toán được hoàn tất. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=\dfrac{3}{10}$

Bài 23. *Cho $a,b,c>0, ab\geq 12, bc\geq 8$. Chứng minh rằng:*

$$S=a+b+c+2\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)+\frac{8}{abc}\geq\frac{121}{12}$$

Lời giải:

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$\frac{2}{ab}+\frac{a}{18}+\frac{b}{24}\geq\frac{1}{2}$$
$$\frac{2}{bc}+\frac{b}{16}+\frac{c}{8}\geq\frac{3}{4}$$
$$\frac{2}{ca}+\frac{a}{9}+\frac{c}{6}\geq 1$$
$$\frac{8}{abc}+\frac{a}{9}+\frac{b}{12}+\frac{c}{6}\geq\frac{4}{3}$$
$$\frac{13a}{18}+\frac{13b}{24}\geq\frac{13}{3}$$
$$\frac{13c}{24}+\frac{13b}{48}\geq\frac{13}{6}$$
Cộng từng vế của các bất đẳng thức trên ta được
$$a+b+c+2\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)+\frac{8}{abc}\geq\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+1+\frac{4}{3}+\frac{13}{3}+\frac{13}{6}=\frac{121}{12}$$
Chứng minh hoàn tất. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=3,b=4,c=2$.

Bài 24. *Cho $ab+bc+ca=abc$ và $a,b,c>0$. Chứng minh rằng*
$$P=\frac{a^4+b^4}{ab\left(a^3+b^3\right)}+\frac{b^4+c^4}{bc\left(b^3+c^3\right)}+\frac{c^4+a^4}{ac\left(a^3+b^3\right)}\geq 1$$

Lời giải:

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:
$$a^4+a^4+a^4+b^4\geq 4a^3b$$
$$b^4+b^4+b^4+a^4\geq 4ab^3$$
Suy ra:
$$2a^4+2b^4\geq a^4+b^4+a^3b+ab^3=(a^3+b^3)(a+b)$$
Vì vậy:
$$P\geq\frac{a+b}{2ab}+\frac{b+c}{2bc}+\frac{c+a}{2ac}=\frac{ab+bc+ca}{abc}=1.$$
Chứng minh hoàn tất. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=3$.

Bài 25. *Cho $a,b,c\geq 0;a+b+c=1$. Chứng minh rằng:*
$$-\frac{\sqrt{3}}{18}\leq(a-b)(b-c)(c-a)\leq\frac{\sqrt{3}}{18}$$

Lời giải:

Không mất tính tổng quát. Giả sử $a\geq b\geq c\geq 0$

Ta có biến đổi sau:
$$[(a-b)(b-c)(c-a)]^2\leq[(a-b)ab]^2\leq\frac{\left(\sqrt[3]{2ab2ab(a-b)^2}\right)^3}{4}$$
Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có
$$\frac{\left(\sqrt[3]{2ab2ab(a-b)^2}\right)^3}{4}\leq\frac{\left(\dfrac{2ab+2ab+(a-b)^2}{3}\right)^3}{4}=\frac{(a+b)^6}{4.3^3}\leq\frac{(a+b+c)^6}{108}$$
Suy ra:
$$[(a-b)(b-c)(c-a)]^2\leq\frac{1}{108}\Leftrightarrow|(a-b)(b-c)(c-a)|\leq\frac{\sqrt{3}}{18}.$$
Hay ta có điều phải chứng minh.

Bài 26. *Cho $x,y,z>0;xy+yz+zx=3$. Chứng minh rằng:*
$$P=\frac{1}{xyz}+\frac{4}{(x+y)(y+z)(z+x)}\geq\frac{3}{2}$$

Lời giải:

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$\sqrt[3]{xyz(x+y)(y+z)(z+x)} \le \frac{x(y+z)+y(z+x)+z(x+y)}{3} = 2$$
$$\Rightarrow \sqrt[3]{xyz} \le \frac{2}{\sqrt[3]{(x+y)(y+z)(z+x)}}$$
$$\Rightarrow \frac{xyz}{2} \le \frac{4}{(x+y)(y+z)(z+x)}$$

Mặt khác:

$3 = xy + yz + zx \ge 3\sqrt{x^2y^2z^2} \Leftrightarrow xyz \le 1$. Do đó

$$P \ge \frac{1}{xyz} + \frac{xyz}{2} \ge \frac{1}{xyz} + xyz - \frac{xyz}{2} \ge 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

Chứng minh hoàn tất. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Bài 27. *Cho a, b, c thỏa mãn $a \ge 4; b \ge 5; 7 \ge c \ge 6; a^2 + b^2 + c^2 = 90$. Tìm giá trị nhỏ nhất của*

$$S = a + b + c$$

Lời giải:

Đặt $a = x + 4, b = y + 5, c = z + 6$ thì $x, y, z \ge 0$

Ta có:

$$a^2 + b^2 + c^2 = 90$$
$$\Rightarrow (x+4)^2 + (y+5)^2 + (z+6)^2 = 90$$
$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 8x + 10y + 12z = 13$$

Giả sử: $x + y + z < 1$

Mà $x, y, z \ge 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 < 1$

Ta có:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 + 8x + 10y + 12z &= \left(x^2 + y^2 + z^2\right) + 8(x+y+z) + 2(y+z) + 2z \\ &< 1 + (8+2+2).(x+y+z) \\ &< 1 + 8 + 2 + 2 = 13 \end{aligned}$$

Điều này là vô lí, vì vậy $x + y + z \ge 1$

Do đó

$$S = a + b + c = 4 + x + 5 + y + 6 + z \ge 15 + x + y + z \ge 16$$

Vậy $S_{MIN} = 16$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = 4, b = 5, c = 7$.

Chú ý: việc tìm ra điều kiện $x + y + z \ge 1$ chỉ là điều kiện cần của bài toán. Bài toán được coi là hoàn tất khi chỉ ra được dấu bằng.

Cách 2.

Do $a^2 + b^2 + c^2 = 90$ nên ta sẽ có các điều kiện rộng và hệ quả sau đây

$$4 \le a < 9 \Rightarrow (a-4)(9-a) \ge 0 \Leftrightarrow a \ge \frac{a^2+36}{13}$$
$$5 \le b < 8 \Rightarrow (b-5)(8-b) \ge 0 \Leftrightarrow b \ge \frac{b^2+40}{13}$$
$$6 \le c \le 7 \Rightarrow (c-6)(7-c) \ge 0 \Leftrightarrow c \ge \frac{c^2+42}{13}$$

Cộng vế theo vế ta được

$$S = a + b + c \ge \frac{a^2 + b^2 + c^2 + 42 + 36 + 40}{13} = 16$$

Vậy $S_{MIN} = 16$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = 4, b = 5, c = 7$.

Bài toán hoàn tất.

Bài 28. *Cho $a > b > 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của*
$$P = 2a + \frac{32}{(a-b)(2b+3)^2}$$

Lời giải:

Cách 1.

Biểu thức được viết lại như sau:
$$P = (2a-2b) + \frac{2b+3}{2} + \frac{2b+3}{2} + \frac{32}{(a-b)(2b+3)^2} - 3$$
Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:
$$(2a-2b) + \frac{2b+3}{2} + \frac{2b+3}{2} + \frac{32}{(a-b)(2b+3)^2} \geq 4\sqrt[4]{(2a-2b)\left(\frac{2b+3}{2}\right)^2\frac{32}{(a-b)(2b+3)^2}} = 8$$
Do đó $P \geq 8 - 3 = 5$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $2a - 2b = \frac{2b+3}{2} = \frac{32}{(a-b)(2b+3)^2}$ hay $a = \frac{3}{2}, b = \frac{1}{2}$.

Cách 2.

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM
$$(4a-4b)(2b+3)(2b+3) \leq \left(\frac{4a-4b+2b+3+2b+3}{3}\right)^3 = \left(\frac{4a+6}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}(2a+3)^3$$
Từ đó ta có:
$$P \geq 2a + \frac{32}{\frac{8}{27}(2a+3)^3} = \frac{2a+3}{3} + \frac{2a+3}{3} + \frac{2a+3}{3} + \frac{432}{(2a+3)^3} - 3$$
Áp dụng bất đẳng thức AM-GM
$$\frac{2a+3}{3} + \frac{2a+3}{3} + \frac{2a+3}{3} + \frac{432}{(2a+3)^3} \geq 8$$
Do đó $P \geq 8 - 3 = 5$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $2a - 2b = \frac{2b+3}{2} = \frac{32}{(a-b)(2b+3)^2}$ hay $a = \frac{3}{2}, b = \frac{1}{2}$.

Vậy $P_{MIN} = 5$

Bài 29. *Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Chứng minh rằng:*
$$P = \frac{a}{a^2+2b+3} + \frac{b}{b^2+2c+3} + \frac{c}{c^2+2a+3} \leq \frac{1}{2}$$

Lời giải:

Ta có: $a^2 + 2b + 3 = a^2 + 1 + 2b + 2 \geq 2a + 2b + 2$
$$P \leq \frac{1}{2}\left(\frac{a}{a+b+1} + \frac{b}{b+c+1} + \frac{c}{c+a+1}\right)$$
Suy ra
$$\frac{3}{2} - P \geq \frac{1}{2}\left(\frac{b+1}{a+b+1} + \frac{c+1}{b+c+1} + \frac{a+1}{c+a+1}\right)$$
Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta được
$$\begin{aligned} M &= \frac{b+1}{a+b+1} + \frac{c+1}{b+c+1} + \frac{a+1}{c+a+1} \\ &= \frac{(b+1)^2}{(b+1)(a+b+1)} + \frac{(c+1)^2}{(c+1)(b+c+1)} + \frac{(a+1)^2}{(a+1)(c+a+1)} \\ &\geq \frac{(a+b+c+3)^2}{(a+1)(a+c+1)+(b+1)(b+a+1)+(c+1)(c+b+1)} \end{aligned}$$
Ta có

$$\begin{aligned}
&(a+1)(a+c+1)+(b+1)(b+a+1)+(c+1)(c+b+1)\\
&=a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca+3(a+b+c)+3\\
&=\frac{1}{2}\left(a^2+b^2+c^2\right)+ab+bc+ca+3(a+b+c)+\frac{9}{2}\\
&=\frac{1}{2}(a+b+c+3)^2
\end{aligned}$$

Từ đó:

$$M \geq \frac{(a+b+c+3)^2}{\frac{1}{2}(a+b+c+3)^2}=2$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2}-P \geq 2.\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow P \leq \frac{1}{2}$$

Bài toán hoàn tất. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài 30. *Cho $x,y,z>0$ thỏa mãn $xy+yz+zx=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của*

$$P=\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{y^2+1}+\frac{1}{z^2+1}$$

Lời giải:

Cách 1.

Không mất tính tổng quát, giả sử $x \geq y \geq z$

Do $xy+yz+zx=3 \Rightarrow yz \geq 1$

Ta có bổ đề:

$$\frac{1}{y^2+1}+\frac{1}{z^2+1} \geq \frac{2}{yz+1}$$

Thật vậy, ta có:

$$\left(y^2+z^2+2\right)(yz+1) \geq 2\left(y^2+1\right)\left(z^2+1\right) \Leftrightarrow (y-z)^2(yz-1) \geq 0$$

(luôn đúng do $yz \geq 1$)

Suy ra

$$P=\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{y^2+1}+\frac{1}{z^2+1} \geq \frac{1}{x^2+1}+\frac{2}{yz+1}$$

Do đó ta sẽ chứng minh

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{x^2+1}+\frac{2}{yz+1} \geq \frac{3}{2}\\
&\Leftrightarrow \frac{2x^2+yz+3}{x^2yz+x^2+yz+1} \geq \frac{3}{2}\\
&\Leftrightarrow x^2+3-yz-3x^2yz \geq 0\\
&\Leftrightarrow x^2+xy+xz-3x^2yz \geq 0\\
&\Leftrightarrow x(x+y+z-3xyz) \geq 0(*)
\end{aligned}$$

Từ $xy+yz+zx=3$ ta có $x+y+z \geq 3$ và $xyz \leq 1$. Do đó $x+y+z-3xyz \geq 0$

Do đó (*) đúng. Vậy

$$P=\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{y^2+1}+\frac{1}{z^2+1} \geq \frac{1}{x^2+1}+\frac{2}{yz+1} \geq \frac{3}{2}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1$.

Cách 2.

$$P=\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{y^2+1}+\frac{1}{z^2+1}=3-\left(\frac{x^2}{x^2+1}+\frac{y^2}{y^2+1}+\frac{z^2}{z^2+1}\right)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta được

$$\frac{4x^2}{3x^2+3}=\frac{4x^2}{3x^2+xy+yz+zx}\le\frac{x^2}{x^2+xy+xz}+\frac{x^2}{2x^2+yz}=\frac{x}{x+y+z}+\frac{x^2}{2x^2+yz}$$

Tương tự với 2 biểu thức còn lại.

$$\sum_{cyc}\frac{4x^2}{3x^2+3yz}\le\sum_{cyc}\frac{x}{x+y+z}+\sum_{cyc}\frac{x^2}{2x^2+\mathrm{yz}}=1+\sum_{cyc}\frac{x^2}{2x^2+\mathrm{yz}}$$

Ta sẽ chứng minh: $\sum\limits_{cyc}\frac{x^2}{2x^2+yz}\le 1$

Ta có

$$\frac{3}{2}-\sum_{cyc}\frac{x^2}{2x^2+yz}=\frac{1}{2}\sum_{cyc}\frac{yz}{2x^2+yz}=\frac{1}{2}\left(\sum_{cyc}\frac{(yz)^2}{2x^2yz+y^2z^2}\right)$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM – Cauchy-Schwarz ta được:

$$\sum_{cyc}\frac{(yz)^2}{2x^2yz+y^2z^2}\ge\frac{(xy+yz+zx)^2}{x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+2xyz(x+y+z)}=1$$

$$\Rightarrow\frac{3}{2}-\sum_{cyc}\frac{x^2}{2x^2+yz}\ge\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow\sum_{cyc}\frac{x^2}{2x^2+yz}\le 1$$

$$\Rightarrow\sum_{cyc}\frac{4x^2}{3x^2+3yz}\le 2$$

$$\Leftrightarrow\sum_{cyc}\frac{x^2}{x^2+1}\le\frac{3}{2}\Rightarrow P\ge\frac{3}{2}$$

Đẳng thứcxảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1$.

Vậy $P_{MIN}=\frac{3}{2}$.

Bài 31. *Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn $3a(a+b+c)=bc$. Tìm giá trị nhỏ nhất của*

$$P=\frac{b+c}{a}$$

Lời giải:

Do $a>0$ nên ta có: $3\left(1+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}\right)=\frac{bc}{a^2}$

Đặt $x=\frac{b}{a},y=\frac{c}{a}$ thì ta có $3(1+x+y)=xy$ $(x,y>0)$

Ta phải tìm GTNN của $P=x+y$

Theo bất đẳng thức AM-GM ta có

$$3(1+x+y)=xy\le\frac{(x+y)^2}{4}$$

Từ đó ta có $(x+y)^2-12(x+y)-12\ge 0\Rightarrow x+y\ge 6+4\sqrt{3}$ (do $x,y>0$)

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=3+2\sqrt{3}\Leftrightarrow\frac{b}{a}=\frac{c}{a}=3+2\sqrt{3}$

Vậy $P_{MIN}=6+4\sqrt{3}$.

Bài 32. *Cho $x,y,z>0$ thoả mãn $x^2+y^2+z^2\le xyz$. Chứng minh rằng*

$$\frac{x}{x^2+yz}+\frac{y}{y^2+zx}+\frac{z}{z^2+xy}\le\frac{1}{2}$$

Lời giải:

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có:

$$\frac{x}{x^2+yz}=\frac{x^2}{x^3+xyz}\le\frac{x^2}{x^3+x^2+y^2+z^2}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}+\frac{x^2}{x^2+y^2+z^2}\right)$$

Suy ra:
$$\sum_{cyc}\frac{x}{x^2+yz}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\sum_{cyc}\frac{x^2}{x^2+y^2+z^2}\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)+\frac{1}{4}$$
Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta được:
$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{xy+yz+zx}{xyz}\le\frac{x^2+y^2+z^2}{xyz}\le 1$$
Do đó
$$\sum_{cyc}\frac{x}{x^2+yz}\le\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$
Bài toán hoàn tất. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=3$.

Bài 33. *Cho $a,b,c\in[3;5]$. Chứng minh rằng:*
$$\sqrt{ab+1}+\sqrt{bc+1}+\sqrt{ca+1}>a+b+c$$

Lời giải:

Do $a,b\in[3;5]\Rightarrow|a-b|\le 2\Leftrightarrow(a-b)^2\le 4$

Ta sẽ chứng minh
$$2\sqrt{ab+1}\ge a+b$$
Thật vậy, bất đẳng thức cần chứng minh tương đương:
$$4ab+4\ge a^2+b^2+2ab\Leftrightarrow(a-b)^2\le 4(\text{luôn đúng})$$
Tương tự
$$2\sqrt{bc+1}\ge b+c$$
$$2\sqrt{ac+1}\ge a+c$$
Cộng vế theo vế các bất đẳng thức trên, ta có:
$$\sqrt{ab+1}+\sqrt{bc+1}+\sqrt{ca+1}\ge a+b+c$$
Đẳng thức không xảy ra, do đó:
$$\sqrt{ab+1}+\sqrt{bc+1}+\sqrt{ca+1}>a+b+c$$
Chứng minh hoàn tất.

Bài 34. *Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng:*
$$\frac{1}{a^3}+\frac{a^3}{b^3}+b^3\ge\frac{1}{a}+\frac{a}{b}+b$$

Lời giải:

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:
$$\frac{1}{a^3}+1+1\ge\frac{3}{a}$$
$$\frac{a^3}{b^3}+1+1\ge\frac{3a}{b}$$
$$b^3+1+1\ge 3b$$
$$\frac{1}{a}+\frac{a}{b}+b\ge 3$$
Cộng vế với vế các bất đẳng thức trên, ta có:
$$\frac{1}{a^3}+\frac{a^3}{b^3}+b^3+6\ge 3\left(\frac{1}{a}+\frac{a}{b}+b\right)\ge\frac{1}{a}+\frac{a}{b}+b+6$$
$$\Leftrightarrow\frac{1}{a^3}+\frac{a^3}{b^3}+b^3\ge\frac{1}{a}+\frac{a}{b}+b$$
Bài toán chứng minh hoàn tất. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=1$.

Bài 35. *Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng:*
$$P=\frac{a}{\sqrt{ab+b^2}}+\frac{b}{\sqrt{bc+c^2}}+\frac{c}{\sqrt{ca+a^2}}\ge\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Lời giải:

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$\sqrt{2b.(a+b)} \le \frac{2b+(a+b)}{2} = \frac{a+3b}{2}$$

Từ đó:

$$P \ge \frac{2a\sqrt{2}}{a+3b} + \frac{2b\sqrt{2}}{b+3c} + \frac{2c\sqrt{2}}{c+3a}$$

Ta sẽ chứng minh

$$M = \frac{a}{a+3b} + \frac{b}{b+3c} + \frac{c}{c+3a} \ge \frac{3}{4}$$

Thật vậy, ta có:

$$M = \frac{a^2}{a^2+3ab} + \frac{b^2}{b^2+3bc} + \frac{c^2}{c^2+3ca}$$

Theo bât đẳng thức AM-GM ta có:

$$ab+bc+ca \le a^2+b^2+c^2$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta được

$$M \ge \frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+3ab+3bc+3ca} = \frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+\frac{8}{3}(ab+bc+ca)+\frac{1}{3}(ab+bc+ca)}$$

Hay là

$$M \ge \frac{(a+b+c)^2}{\frac{4}{3}(a^2+b^2+c^2)+\frac{8}{3}(ab+bc+ca)} = \frac{(a+b+c)^2}{\frac{4}{3}(a+b+c)^2} = \frac{3}{4}$$

Vì vậy

$$\frac{a}{a+3b} + \frac{b}{b+3c} + \frac{c}{c+3a} \ge \frac{3}{4}$$

Từ đó ta có:

$$P \ge \frac{2a\sqrt{2}}{a+3b} + \frac{2b\sqrt{2}}{b+3c} + \frac{2c\sqrt{2}}{c+3a} \ge 2\sqrt{2}.\frac{3}{4} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Chứng minh hoàn tất. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Bài 36. *Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng:*

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \sqrt[3]{abc} \ge \frac{10}{9(a^2+b^2+c^2)}$$

Lời giải:

Theo bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$\frac{a}{c} + \frac{a}{c} + \frac{c}{b} \ge \frac{3\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{bc}} = \frac{3a}{\sqrt[3]{abc}}$$

Tương tự:

$$\frac{b}{a} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b} \ge \frac{3b}{\sqrt[3]{abc}}$$

$$\frac{c}{b} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} \ge \frac{3c}{\sqrt[3]{abc}}$$

Cộng vế theo vế ba bất đẳng thức trên, ta có

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b} \ge \frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}$$

Suy ra:

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \sqrt[3]{abc} \ge \frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}} + \sqrt[3]{abc}$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$\frac{1}{9\sqrt[3]{abc}} + \sqrt[3]{abc} \ge \frac{2}{3}$$

Và

$$a+b+c=1 \Rightarrow \sqrt[3]{abc} \le \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{8}{9\sqrt[3]{abc}} \ge \frac{8}{3}$$
$$\Rightarrow \frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}} + \sqrt[3]{abc} = \frac{1}{9\sqrt[3]{abc}} + \sqrt[3]{abc} + \frac{8}{9\sqrt[3]{abc}} \ge \frac{2}{3} + \frac{8}{3} = \frac{10}{3}$$
$$\Rightarrow \frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \sqrt[3]{abc} \ge \frac{10}{3}$$

Mặt khác:
Cũng do
$$a+b+c=1 \Rightarrow a^2+b^2+c^2 \le \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{10}{9(a^2+b^2+c^2)} \le \frac{10}{3}$$

Từ đó suy ra
$$\frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \sqrt[3]{abc} \ge \frac{10}{9(a^2+b^2+c^2)}$$

Chứng minh hoàn tất. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{3}$.

Bài 37. *Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=3$. Chứng minh rằng*
$$\frac{a}{\sqrt{b}} + \frac{b}{\sqrt{c}} + \frac{c}{\sqrt{a}} \ge a+b+c$$

Lời giải:

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có
$$\frac{a}{\sqrt{b}} + \frac{b}{\sqrt{c}} + \frac{c}{\sqrt{a}} = \frac{a^2}{a\sqrt{b}} + \frac{b^2}{b\sqrt{c}} + \frac{c^2}{c\sqrt{a}} \ge \frac{(a+b+c)^2}{a\sqrt{b}+b\sqrt{c}+c\sqrt{a}}$$

Ta sẽ chứng minh
$$a\sqrt{b}+b\sqrt{c}+c\sqrt{a} \le a+b+c$$

Thật vậy,
Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:
$$a\sqrt{b} \le \frac{a(b+1)}{2}$$
$$b\sqrt{c} \le \frac{b(c+1)}{2}$$
$$c\sqrt{a} \le \frac{c(a+1)}{2}$$

Cộng vế theo vế các bất đẳng thức trên, ta được
$$a\sqrt{b}+b\sqrt{c}+c\sqrt{a} \le \frac{1}{2}(a+b+c+ab+bc+ca)$$

Ta lại có: $a^2+b^2+c^2=3 \Rightarrow a+b+c \le 3$
Suy ra: $(a+b+c)(a+b+c) \ge 3(ab+bc+ca) \ge (a+b+c)(ab+bc+ca)$
$$\Rightarrow a+b+c \ge ab+bc+ca$$

Do đó ta có
$$a\sqrt{b}+b\sqrt{c}+c\sqrt{a} \le \frac{1}{2}(a+b+c+a+b+c) \Leftrightarrow a\sqrt{b}+b\sqrt{c}+c\sqrt{a} \le a+b+c$$
$$\Rightarrow \frac{(a+b+c)^2}{a\sqrt{b}+b\sqrt{c}+c\sqrt{a}} \ge \frac{(a+b+c)^2}{a+b+c} = a+b+c$$
$$\Rightarrow \frac{a}{\sqrt{b}} + \frac{b}{\sqrt{c}} + \frac{c}{\sqrt{a}} \ge a+b+c$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài 38. *Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng:*
$$\frac{\sqrt{y+z}}{x} + \frac{\sqrt{z+x}}{y} + \frac{\sqrt{x+y}}{z} \ge \frac{4(x+y+z)}{\sqrt{(y+z)(z+x)(x+y)}}$$

Lời giải:

$$\frac{\sqrt{y+z}}{x}+\frac{\sqrt{z+x}}{y}+\frac{\sqrt{x+y}}{z}\geq\frac{4(x+y+z)}{\sqrt{(y+z)(z+x)(x+y)}}$$

$$\Leftrightarrow\sum\frac{(y+z)\sqrt{(x+y)(x+z)}}{x}\geq 4(x+y+z)$$

Theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz và AM-GM ta có:

$$\frac{(y+z)\sqrt{(x+y)(x+z)}}{x}\geq\frac{(y+z)\left(x+\sqrt{yz}\right)}{x}=y+z+\frac{(y+z)\sqrt{yz}}{x}\geq y+z+\frac{2yz}{x}$$

Suy ra:

$$\sum\frac{(y+z)\sqrt{(x+y)(x+z)}}{x}\geq 2(x+y+z)+2\left(\frac{yz}{x}+\frac{xz}{y}+\frac{xy}{z}\right)$$

Mặt khác theo bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$\left(\frac{yz}{x}+\frac{xy}{z}+\frac{xz}{y}\right)^2\geq 3(x^2+y^2+z^2)\geq(x+y+z)^2$$

$$\Rightarrow\frac{yz}{x}+\frac{xz}{y}+\frac{xy}{z}\geq a+b+c$$

$$\Rightarrow\sum\frac{(y+z)\sqrt{(x+y)(x+z)}}{x}\geq 4(x+y+z)$$

Chứng minh hoàn tất. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z$

Bài 39. *Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng:*

$$\frac{a(b+c)}{(b+c)^2+a^2}+\frac{b(a+c)}{(c+a)^2+b^2}+\frac{c(a+b)}{(a+b)^2+c^2}\leq\frac{6}{5}$$

Lời giải:

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$a^2+(b+c)^2=\left[a^2+\frac{(b+c)^2}{4}\right]+\frac{3}{4}(b+c)^2\geq a(b+c)+\frac{3}{4}(b+c)^2=\frac{(b+c)(4a+3b+3c)}{4}$$

$$\Rightarrow\frac{a(b+c)}{a^2+(b+c)^2}\leq\frac{4a(b+c)}{(4a+3b+3c)(b+c)}=\frac{4a}{4a+3b+3c}$$

Theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta được:

$$\frac{1}{25}\left(\frac{9^2a}{3(a+b+c)}+\frac{a}{a}\right)\geq\frac{4a}{4a+3b+3c}\Rightarrow\frac{a(b+c)}{a^2+(b+c)^2}\leq\frac{27a}{25(a+b+c)}+\frac{1}{25}$$

Tương tự:

$$\frac{b(c+a)}{b^2+(c+a)^2}\leq\frac{27b}{25(a+b+c)}+\frac{1}{25}$$

$$\frac{c(c+a)}{c^2+(c+a)^2}\leq\frac{27c}{25(a+b+c)}+\frac{1}{25}$$

Cộng vế theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{a(b+c)}{(b+c)^2+a^2}+\frac{b(a+c)}{(c+a)^2+b^2}+\frac{c(a+b)}{(a+b)^2+c^2}\leq\frac{27(a+b+c)}{25(a+b+c)}+\frac{3}{25}=\frac{6}{5}$$

Chứng minh hoàn tất. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Bài 40. *Cho $a,b,c>0, abc=1$. Chứng minh rằng:*

$$\frac{4a^3}{(1+b)(1+c)}+\frac{4b^3}{(1+a)(1+c)}+\frac{4c^3}{(1+b)(1+a)}\geq 3$$

Lời giải:

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$$\frac{4a^3}{(1+b)(1+c)}+\frac{1+b}{2}+\frac{1+c}{2}\geq 3a$$

$$\frac{4b^3}{(1+c)(1+a)}+\frac{1+c}{2}+\frac{1+a}{2}\geq 3b$$
$$\frac{4a^3}{(1+b)(1+c)}+\frac{1+a}{2}+\frac{1+b}{2}\geq 3c$$
Cộng vế theo vế các bất đẳng thức trên ta được
$$\frac{4a^3}{(1+b)(1+c)}+\frac{4b^3}{(1+a)(1+c)}+\frac{4c^3}{(1+b)(1+a)}+a+b+c+3\geq 3(a+b+c)$$
Cũng theo bất đẳng thức AM-GM :
$$a+b+c\geq 3\sqrt[3]{abc}=3$$
Do đó ta có:
$$\frac{4a^3}{(1+b)(1+c)}+\frac{4b^3}{(1+a)(1+c)}+\frac{4c^3}{(1+b)(1+a)}\geq 2(a+b+c)-3\geq 2.3-3=3$$
Chứng minh hoàn tất. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài 41. *Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng:*
$$1+\frac{3}{a+b+c}\geq\frac{6}{ab+bc+ca}$$

Lời giải:

Đặt: $a=\dfrac{1}{x},b=\dfrac{1}{y},c=\dfrac{1}{z}\Rightarrow abc=1$

Khi đó ta có:
$$1+\frac{3}{a+b+c}\geq\frac{6}{ab+bc+ca}\Leftrightarrow 1+\frac{3abc}{a+b+c}\geq\frac{6abc}{ab+bc+ca}$$
$$\Leftrightarrow 1+\frac{3}{\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}}\geq\frac{6}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}\Leftrightarrow 1+\frac{3}{xy+yz+zx}\geq\frac{6}{x+y+z}$$
Theo bất đẳng thức AM-GM ta có:
$$3(xy+yz+zx)\leq(x+y+z)^2\Rightarrow 1+\frac{3}{xy+yz+zx}\geq 1+\frac{9}{(x+y+z)^2}$$
Mặt khác:
$$1+\frac{9}{(x+y+z)^2}-\frac{6}{x+y+z}=\left(1+\frac{3}{x+y+z}\right)^2\geq 0 \text{ với } \forall\text{ x, y, z}$$
$$\Rightarrow 1+\frac{9}{(x+y+z)^2}\geq\frac{6}{x+y+z}\Rightarrow 1+\frac{3}{xy+yz+zx}\geq\frac{6}{x+y+z}$$
Chứng minh hoàn tất. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1\Leftrightarrow a=b=c=1$

Bài 42. *Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng:*
$$\frac{a}{3a^2+2b^2+c^2}+\frac{b}{3b^2+2c^2+a^2}+\frac{c}{3c^2+2a^2+b^2}\leq\frac{1}{6}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

Lời giải:

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:
$$3a^2+2b^2+c^2=2\left(a^2+b^2\right)+\left(a^2+c^2\right)\geq 4ab+2ac$$
Do đó ta có:
$$\frac{a}{3a^2+2b^2+c^2}\leq\frac{a}{4ab+2ac}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2b+c}\right)$$
Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Cauchy-Schwarz ta có:
$$\frac{1}{2b+c}\leq\frac{1}{9}\left(\frac{2}{b}+\frac{1}{c}\right)$$
Từ đó ta suy ra:

$$\frac{a}{3a^2+2b^2+c^2} \le \frac{1}{18}\left(\frac{2}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

Tương tự ta có:

$$\frac{b}{3b^2+2c^2+a^2} \le \frac{1}{18}\left(\frac{2}{c}+\frac{1}{a}\right)$$

$$\frac{c}{3c^2+2a^2+b^2} \le \frac{1}{18}\left(\frac{2}{a}+\frac{1}{b}\right)$$

Cộng vế theo vế ta có

$$\frac{a}{3a^2+2b^2+c^2}+\frac{b}{3b^2+2c^2+a^2}+\frac{c}{3c^2+2a^2+b^2} \le \frac{1}{6}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

Chứng minh hoàn tất. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài 43. *Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:*

$$\sum \frac{a^3+b^3}{3a^2-4ab+11b^2} \ge \frac{3}{5}$$

Lời giải:

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{t^3+1}{3t^2-4t+11}; t\in(0;3]$ Ta có:

$$f'(t)=\frac{3t^2\left(3t^2-4t+11\right)-\left(t^3+1\right)(6t-4)}{\left(3t^2-4t+11\right)^2}=\frac{3t^4-8t^3+33t^2-6t+4}{\left(3t^2-4t+11\right)^2}$$

$\Rightarrow f'(1)=\dfrac{13}{50}$. Vậy phương trình tiếp tuyến của $f(t)$ tại $t=1$ là:

$y(t)-f(1)=f'(1)(t-1)\Leftrightarrow y(t)-\dfrac{1}{5}=\dfrac{13}{50}(t-1)\Leftrightarrow y(t)=\dfrac{13}{50}t-\dfrac{3}{50}$

Xét: $g(t)=f(t)-y(t)=\dfrac{t^3+1}{3t^2-4t+11}-\dfrac{13}{50}t+\dfrac{3}{50}$

$\Leftrightarrow g(t)=\dfrac{(t-1)^2(11t+81)}{50(3t^2-4t+11)}\ge 0;\forall t\in(0;3]$

$\Rightarrow \dfrac{t^3+1}{3t^2-4t+11}\ge\dfrac{13}{50}t-\dfrac{3}{50};\forall t\in(0;3]$

Với $t=\dfrac{a}{b}\Rightarrow \dfrac{a^3+b^3}{3a^2-4ab+11b^2}\ge\dfrac{13a-3b}{50}$

Tương tự ta có:

$$\frac{b^3+c^3}{3b^2-4bc+11c^2}\ge\frac{13b-3c}{50}$$

$$\frac{a^3+c^3}{3c^2-4ac+11a^2}\ge\frac{13c-3a}{50}$$

Cộng vế theo vế các bất đẳng thức trên, ta được:

$$\frac{a^3+b^3}{3a^2-4ab+11b^2}+\frac{b^3+c^3}{3b^2-4bc+11c^2}+\frac{a^3+c^3}{3c^2-4ac+11a^2}\ge\frac{1}{5}(a+b+c)=\frac{3}{5}$$

Chứng minh hoàn tất. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$

Bài 44. *Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng:*

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{9}{a+b+c}\ge 4\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)$$

Lời giải:

Do bất đẳng thức thuần nhất nên ta sẽ chuẩn hóa $a+b+c=1$

Khi đó:

$$BDT\Leftrightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+9\ge 4\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+9\ge 4(a+b+c)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c} \ge 4\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có:

$$\frac{a}{b}+\frac{a}{c} \ge \frac{4a}{b+c}, \frac{b}{c}+\frac{b}{a} \ge \frac{4b}{a+c}, \frac{c}{a}+\frac{c}{b} \ge \frac{4c}{a+b}$$

Cộng vế theo vế các bất đẳng thức trên, ta được:

$$\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{b}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b} \ge \frac{4a}{b+c}+\frac{4b}{c+a}+\frac{4c}{a+b}$$

$$\Leftrightarrow \frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c} \ge 4\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)$$

Chứng minh hoàn tất. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Bài 45. *Cho $a,b,c>0; abc=2$. Chứng minh rằng:*

$$a^3+b^3+c^3 \ge a\sqrt{b+c}+b\sqrt{a+c}+c\sqrt{a+b}$$

Lời giải:

Cách 1.

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$\frac{a^3+b^3}{2} \ge \frac{ab(a+b)}{2} = \frac{ab(a+b)}{abc} = \frac{a+b}{c}$$

Từ đó ta có:

$$c^3+\frac{a^3+b^3}{2} \ge c^3+\frac{a+b}{c} \ge 2c\sqrt{a+b}$$

Tương tự ta có:

$$b^3+\frac{a^3+c^3}{2} \ge b^3+\frac{a+c}{b} \ge 2b\sqrt{a+c}$$

$$a^3+\frac{b^3+c^3}{2} \ge a^3+\frac{b+c}{a} \ge 2a\sqrt{b+c}$$

Cộng vế theo vế các bất đẳng thức trên, ta được:

$$a^3+b^3+c^3 \ge a\sqrt{b+c}+b\sqrt{a+c}+c\sqrt{a+b}$$

Bài toán được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\sqrt[3]{2}$.

Cách 2.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có:

$$\left(a\sqrt{b+c}+b\sqrt{a+c}+c\sqrt{a+b}\right)^2 \le 2(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2\right) = abc(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2\right)$$

Mà:

$$abc(a+b+c) \le \frac{1}{3}(ab+bc+ca)^2$$

$$\Rightarrow abc(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2\right) \le \left(a^2+b^2+c^2\right)(ab+bc+ca)^2$$

$$\le \frac{\left(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca+ab+bc+ca\right)^3}{3^4} = \frac{(a+b+c)^6}{3^4}$$

Từ đó ta có

$$\left(a\sqrt{b+c}+b\sqrt{a+c}+c\sqrt{a+b}\right)^2 \le \frac{(a+b+c)^6}{3^4}$$

$$\Leftrightarrow a\sqrt{b+c}+b\sqrt{a+c}+c\sqrt{a+b} \le \frac{(a+b+c)^3}{3^2}$$

Theo bất đẳng thức Holder ta có:

$$(1+1+1)^{\frac{2}{3}}(a^3+b^3+c^3)^{\frac{1}{3}} \ge a+b+c \Rightarrow (a^3+b^3+c^3) \ge \frac{(a+b+c)^3}{3^2}$$

Như vậy,

$$a^3+b^3+c^3 \geq a\sqrt{b+c}+b\sqrt{a+c}+c\sqrt{a+b}$$
Bài toán được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\sqrt[3]{2}$.

Bài 46. *Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn $a+b+c=1$. Tìm giá trị lớn nhất của*
$$P=\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2}+\frac{1}{1+c^2}$$

Lời giải:

Xét hàm số $f(x)=\frac{1}{1+x^2};x\in(0;1] \Rightarrow f'(x)=\dfrac{-2x}{(1+x^2)^2} \Rightarrow f'\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{-27}{50}$

Tiếp tuyến của hàm số $f(x)$ tại $x=\dfrac{1}{3}$ là:

$y(x)-f\left(\dfrac{1}{3}\right)=f'\left(\dfrac{1}{3}\right)\left(x-\dfrac{1}{3}\right) \Leftrightarrow y(x)=\dfrac{-27x}{50}+\dfrac{27}{25}$

Ta có:

$f(x)-y(x)=\dfrac{1}{1+x^2}-\left(\dfrac{-27x}{50}+\dfrac{27}{25}\right)=\dfrac{(3x-4)(3x-1)^2}{50\left(1+x^2\right)} \geq 0;\forall x\in(0;1]$

$\Rightarrow \dfrac{1}{1+x^2} \geq \dfrac{-27x}{50}+\dfrac{27}{25}$

Với $x=a,b,c$ ta có các bất đẳng thức:
$$\frac{1}{1+a^2} \geq \frac{-27a}{50}+\frac{27}{25}$$
$$\frac{1}{1+b^2} \geq \frac{-27b}{50}+\frac{27}{25}$$
$$\frac{1}{1+c^2} \geq \frac{-27c}{50}+\frac{27}{25}$$
Cộng vế theo vế các bất đẳng thức trên, ta được:
$$\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2+}+\frac{1}{1+c^2} \geq \left(\frac{27}{50}\right)(a+b+c)+3.\frac{27}{25}=\frac{27}{10}$$
Bài toán được hoàn tất. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\dfrac{1}{3}$.

Bài 47. *Cho $x,y>0$ thay đổi thỏa mãn $x+2x-xy=0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của*
$$P=\frac{x^2}{4+8y}+\frac{y^2}{1+x}$$

Lời giải:

Từ giả thiết ta có:
$$x+2y=\frac{1}{2}.x.2y \leq \frac{1}{8}.(x+2y)^2 \Leftrightarrow (x+2y)(x+2y-8) \geq 0 \Leftrightarrow x+2y \geq 8$$
Theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz:
$$P=\frac{x^2}{4+8y}+\frac{y^2}{1+x}=\frac{x^2}{4+8y}+\frac{(2y)^2}{4+4x} \geq \frac{(x+2y)^2}{8+4(x+2y)}$$
Đặt: $x+2y=t \Rightarrow P=\dfrac{t^2}{8+4t}$ với $t \geq 8$

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{t^2}{8+4t}$ với $t \geq 8$

$\Rightarrow f'(t)=\dfrac{2t(8+4t)-4.t^2}{(8+4t)^2}=\dfrac{4t^2+8t}{(8+4t)^2} \geq 0$ với $t \geq 8$

$\Rightarrow f(t)_{MIN}=f(8)=\dfrac{8}{5}$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=4,y=2$.

Bài 48. *Cho $x,y,z>0$ thỏa mãn $x+y+1=z$. Chứng minh rằng*
$$\frac{x^3y^3}{(x+yz)(y+zx)(z+xy)^2} \leq \frac{4}{729}$$

Lời giải:

Cách 1.

Ta có:

$$\frac{x^3y^3}{(x+yz)(y+zx)(z+xy)^2} = \frac{x^3y^3}{(x+y+yx+y^2)(y+x+x^2+yx)(1+x+y+yx)^2}$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM:

$$x+y+xy+y^2 = x+y+\frac{xy}{2}+\frac{xy}{2}+\frac{y^2}{2}+\frac{y^2}{2} \geq 6.\sqrt[6]{\frac{x^3y^7}{16}}$$

$$x+y+xy+x^2 = x+y+\frac{xy}{2}+\frac{xy}{2}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^2}{2} \geq 6.\sqrt[6]{\frac{x^7y^3}{16}}$$

$$(1+x+y+xy)^2 = \left(1+\frac{x}{2}+\frac{x}{2}+\frac{y}{2}+\frac{y}{2}+\frac{xy}{4}+\frac{xy}{4}+\frac{xy}{4}+\frac{xy}{4}\right)^2 \geq \left(9\sqrt[9]{\frac{x^6y^6}{8^4}}\right)^2$$

Nhân vế theo vế của ba bất đẳng thức trên, ta được:

$$(x+y+yx+y^2)(y+x+x^2+yx)(1+x+y+yx)^2 \geq \frac{729x^3y^3}{4}$$

Hay là:

$$\frac{x^3y^3}{(x+yz)(y+zx)(z+xy)^2} \leq \frac{4}{729}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=2, z=5$

Cách 2.

Ta có:

$$z-1 = x+y$$

$$y+yz = yz-y+z-1 = (y+1)(z-1) = (y+1)(x+y)$$

$$y+zx = zx-x+z-1 = (x+1)(z-1) = (x+1)(x+y)$$

$$z+xy = xy+x+y+1 = (x+1)(y+1)$$

Do đó:

$$\frac{x^3y^3}{(x+yz)(y+zx)(z+xy)^2} = \frac{x^3y^3}{(x+y)^2(x+1)^3(y+1)^3}$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$x+y \geq 2\sqrt{xy} \Rightarrow (x+y)^2 \geq 4xy$$

$$x+1 = \frac{x}{2}+\frac{x}{2}+1 \geq 3\sqrt[3]{\frac{x^2}{4}} \Rightarrow (x+1)^3 \geq \frac{27x^2}{4}$$

$$y+1 = \frac{y}{2}+\frac{y}{2}+1 \geq 3\sqrt[3]{\frac{y^2}{4}} \Rightarrow (y+1)^3 \geq \frac{27y^2}{4}$$

Nhân vế theo vế của ba bất đẳng thức trên, ta được:

$$(x+y)^2(x+1)^3(y+1)^3 \geq 4xy.\frac{27x^2}{4}.\frac{27y^2}{4} = \frac{729x^3y^3}{4}$$

Như vậy:

$$\frac{x^3y^3}{(x+yz)(y+zx)(z+xy)^2} \leq \frac{4}{729}$$

Chứng minh hoàn tất.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=2, z=5$.

Bài 49. *Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=\frac{5}{3}$. Chứng minh rằng:*

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c} < \frac{1}{abc}$$

Lời giải:

Ta có:

$(a+b-c)^2 \geq 0$ với $\forall a,b,c>0$ nên:

$$bc+ca-ab \leq \frac{1}{2}\left(a^2+b^2+c^2\right) \Leftrightarrow bc+ca-ab \leq \frac{1}{2}.\frac{5}{3}=\frac{5}{6} \qquad \text{Do } a,b,c>0 \Rightarrow abc>0$$

Chia cả 2 vế của (*) cho abc ta được:

$$\frac{bc+ca-ab}{abc} \leq \frac{5}{6abc} < \frac{1}{abc} \Leftrightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c} < \frac{1}{abc}$$

Chứng minh hoàn tất.

Bài 50. *Cho $a,b,c>0$ và $a^2+b^2+c^2 \leq abc$. Tìm giá trị lớn nhất của:*

$$P=\frac{a}{a^2+bc}+\frac{b}{b^2+ca}+\frac{c}{c^2+ab}$$

Lời giải:

Cách 1.

Theo bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có:

$$\frac{a}{a^2+bc} \leq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{a}{bc}\right)$$
$$\frac{b}{b^2+ac} \leq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{b}+\frac{b}{ac}\right)$$
$$\frac{c}{c^2+ab} \leq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{c}+\frac{c}{ab}\right)$$

Cộng vế theo vế các bất đẳng thức trên, ta có:

$$P=\frac{a}{a^2+bc}+\frac{b}{b^2+ca}+\frac{c}{c^2+ab} \leq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{a}{bc}+\frac{b}{ac}+\frac{c}{ab}\right)$$
$$\leq \frac{1}{4}\left(\frac{a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca}{abc}\right) \leq \frac{1}{2}\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{abc}\right) \leq \frac{1}{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=3$.

Vậy $maxP=\frac{1}{2}$.

Cách 2.

Theo bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$a^2+bc \geq 2a\sqrt{bc} \Rightarrow \frac{a}{a^2+bc} \leq \frac{a}{2a\sqrt{bc}}=\frac{1}{2\sqrt{bc}}$$

Mặt khác:

$$\frac{2}{\sqrt{bc}} \leq \frac{1}{b}+\frac{1}{c} \Rightarrow \frac{a}{a^2+bc} \leq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

Tương tự ta có:

$$\frac{b}{b^2+ac} \leq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right)$$
$$\frac{c}{c^2+ab} \leq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$$

Cộng vế theo vế các bất đẳng thức trên, ta có:

$$\frac{a}{a^2+bc}+\frac{b}{b^2+ca}+\frac{c}{c^2+ab} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{ab+bc+ca}{abc}\right) \leq \frac{1}{2}\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{abc}\right) \leq \frac{1}{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=3$.

Vậy $maxP=\frac{1}{2}$.

Bài 51. *37. Cho $a,b,c \ge 0; a+b+c=1$. Tìm giá trị lớn nhất của:*

$$P=\sqrt{a+\frac{(b-c)^2}{4}}+\sqrt{b+\frac{(a-c)^2}{4}}+\sqrt{c+\frac{(a-b)^2}{4}}$$

Lời giải:

Ta có:

$$a+\frac{(b-c)^2}{4}-\left(a+\frac{b+c}{2}\right)^2=a(a+b+c)+\frac{(b-c)^2}{4}-\left(a+\frac{b+c}{2}\right)^2$$
$$=\frac{(b-c)^2}{4}-\frac{(b+c)^2}{4}=-bc\le 0$$

Từ đó:

$$\Rightarrow a+\frac{(b-c)^2}{4}\le\left(a+\frac{b+c}{2}\right)^2\Leftrightarrow\sqrt{a+\frac{(b-c)^2}{4}}\le a+\frac{b+c}{2}$$

Tương tự:

$$\sqrt{b+\frac{(a-c)^2}{4}}\le b+\frac{a+c}{2}$$
$$\sqrt{c+\frac{(a-b)^2}{4}}\le c+\frac{a+b}{2}$$

Cộng vế theo vế ta có:

$P=\sqrt{a+\frac{(b-c)^2}{4}}+\sqrt{b+\frac{(a-c)^2}{4}}+\sqrt{c+\frac{(a-b)^2}{4}}\le 2(a+b+c)=2.$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=0; c=1$ và các hoán vị của chúng.

Vậy $maxP=2$.

Bài 52. *Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng:*

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)^2\ge(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

Lời giải:

Ta có:

$\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)^2\ge(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\Leftrightarrow\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}+\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}\ge 3+\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM:

$$\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a}\ge 3\quad(1)$$
$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\ge 3$$

Mặt khác, cũng theo bất đẳng thức AM-GM:

$$\frac{a^2}{b^2}+1\ge\frac{2a}{b}$$
$$\frac{b^2}{c^2}+1\ge\frac{2b}{c}$$
$$\frac{c^2}{a^2}+1\ge\frac{2c}{a}$$

Cộng vế với vế ta có

$$\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}+3\ge 2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)\Rightarrow\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}+3\ge\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+3$$
$$\Leftrightarrow\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}\ge\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\quad(2)$$

Cộng từng vế của (1) và (2) ta được:

$$\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}+\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}\ge 3+\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}$$

Chứng minh hoàn tất. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Bài 53. *Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:*
$$S = \sqrt[4]{a^4+b^4} + \sqrt[4]{b^4+c^4} + \sqrt[4]{c^4+a^4} \geq \sqrt[4]{2}(a+b+c)$$

Lời giải:

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:
$$a^4+b^4 \geq \frac{(a^2+b^2)^2}{2} \geq \frac{(a+b)^4}{2^3} \Rightarrow \sqrt[4]{a^4+b^4} \geq \frac{a+b}{\sqrt[4]{8}}$$

Tương tự:
$$\sqrt[4]{b^4+c^4} \geq \frac{b+c}{\sqrt[4]{8}}$$
$$\sqrt[4]{a^4+c^4} \geq \frac{a+c}{\sqrt[4]{8}}$$

Cộng vế với vế, ta có:
$$\sqrt[4]{a^4+b^4} + \sqrt[4]{b^4+c^4} + \sqrt[4]{a^4+c^4} \geq \frac{2(a+b+c)}{\sqrt[4]{8}} = \sqrt[4]{2}(a+b+c)$$

Chứng minh hoàn tất. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Bài 54. *Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:*
$$P = \sqrt{\frac{a^3}{a^3+(b+c)^3}} + \sqrt{\frac{b^3}{b^3+(a+c)^3}} + \sqrt{\frac{c^3}{c^3+(b+a)^3}} \geq 1$$

Lời giải:

Viết lại P dưới dạng
$$P = \sqrt{\frac{a^3}{a^3+(b+c)^3}} + \sqrt{\frac{b^3}{b^3+(a+c)^3}} + \sqrt{\frac{c^3}{c^3+(b+a)^3}} = \sum_{cyc}\sqrt{\frac{a^3}{a^3+(b+c)^3}} = \sum_{cyc}\sqrt{\frac{1}{1+\frac{(b+c)^3}{a^3}}}$$

Ta sẽ chứng minh:
$$\sqrt{1+\left(\frac{b+c}{a}\right)^3} \leq 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{b+c}{a}\right)^2 \quad (*)$$

Thật vậy, ta có:
$$(*) \Leftrightarrow \left(\frac{b+c}{a}\right)^3 \leq \left(\frac{b+c}{a}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{b+c}{a}\right)^4 \Leftrightarrow \left(\frac{b+c}{a}\right)^2 - \left(\frac{b+c}{a}\right)^3 + \frac{1}{4}\left(\frac{b+c}{a}\right)^4 \geq 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}.\left(\frac{b+c}{a}\right)^2\left[\left(\frac{b+c}{a}\right) - 2\right]^2 \geq 0$$

(luôn đúng)

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{1}{1+\frac{(b+c)^3}{a^3}}} \geq \frac{1}{1+\frac{1}{2}\left(\frac{b+c}{a}\right)^2} \Rightarrow P = \sum_{cyc}\sqrt{\frac{1}{1+\frac{(b+c)^3}{a^3}}} \geq \sum_{cyc}\frac{1}{1+\frac{1}{2}\left(\frac{b+c}{a}\right)^2}$$

Mặt khác, do $\sum\limits_{cyc}(b+c)^2 \leq \sum\limits_{cyc} 2\left(b^2+c^2\right)$ nên ta có:
$$\sum_{cyc}\frac{1}{1+\frac{1}{2}\left(\frac{b+c}{a}\right)^2} = \sum_{cyc}\frac{2a^2}{2a^2+(b+c)^2} \geq \sum_{cyc}\frac{2a^2}{2a^2+2\left(b^2+c^2\right)} = \sum_{cyc}\frac{a^2}{a^2+b^2+c^2} = 1$$

Vậy

$$P \geq \sum_{cyc} \frac{1}{1+\frac{1}{2}\left(\frac{b+c}{a}\right)^2} \geq 1$$

Chứng minh hoàn tất. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Bài 55. *Cho $a, b, c \in R$. Chứng minh rằng:*

$$(a^2+3)(b^2+3)(c^2+3) \geq 4(a+b+c+1)^2$$

<u>Lời giải:</u>

Cách 1.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có:

$$\left(a^2+1+1+1\right)\left(1+\left(\frac{b+c}{2}\right)^2+\left(\frac{b+c}{2}\right)^2+1\right) \geq \left(1.a+\frac{b+c}{2}.1+\frac{b+c}{2}.1+1.1\right)^2$$

$$\Leftrightarrow 4\left(a^2+3\right)\left(2+\frac{(b+c)^2}{2}\right) \geq 4(a+b+c+1)^2$$

Mặt khác, áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$\begin{aligned}\left(b^2+3\right)\left(c^2+3\right) &= 3b^2+3c^2+b^2c^2+1+8 = 2b^2+2c^2+\left(b^2+c^2\right)+\left(b^2c^2+1\right)+8\\ &\geq 2b^2+2c^2+2bc+2bc+8 = 2(b+c)^2+8\\ &= 4\left(\frac{(b+c)^2}{2}+4\right)\end{aligned}$$

Như vậy,

$$\left(a^2+3\right)\left(b^2+3\right)\left(c^2+3\right) \geq 4\left(\frac{(b+c)^2}{2}+4\right)\left(a^2+3\right) \geq 4(a+b+c+1)^2$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Cách 2.

Áp dụng bất đẳng AM-GM ta được:

$$\begin{aligned}&\left(a^2+1+1+1\right)\left(1+\left(\frac{b+c+1}{3}\right)^2+\left(\frac{b+c+1}{3}\right)^2+\left(\frac{b+c+1}{3}\right)^2\right)\\ &\geq \left(1.a+\frac{b+c+1}{3}+\frac{b+c+1}{3}+\frac{b+c+1}{3}\right)^2\\ &\Leftrightarrow 4\left(a^2+3\right)\left(1+\frac{(b+c+1)^2}{3}\right) \geq 4(a+b+c+1)^2\end{aligned}$$

Ta sẽ chứng minh:

$$\begin{aligned}&\left(b^2+3\right)\left(c^2+3\right) \geq 4\left[1+\frac{(b+c+1)^2}{3}\right]\\ &\Leftrightarrow 3b^2c^2+5\left(b^2+c^2\right)-8\left(b+c\right)-8bc+11 \geq 0\\ &\Leftrightarrow 2(b+c-2)^2+(b-c)^2+3(bc-1)^2 \geq 0\end{aligned}$$

Điều cuối luôn đúng. Do đó ta có

$$\left(a^2+3\right)\left(b^2+3\right)\left(c^2+3\right) \geq 4\left(\frac{(b+c)^2}{2}+4\right)\left(a^2+3\right) \geq 4(a+b+c+1)^2$$

Chứng minh hoàn tất. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Bài 56. *Cho $x, y, z > 0$ thỏa mãn $x + y + z = 9$. Chứng minh rằng:*
$$P = \frac{x^3 + y^3}{xy + 9} + \frac{y^3 + z^3}{yz + 9} + \frac{z^3 + x^3}{zx + 9} \geq 9$$

Lời giải:

Cách 1.

Áp dụng bất đẳng thức Holder ta có:

$$\left(x^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{3}{2}} + z^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}} (1 + 1 + 1)^{\frac{1}{3}} \geq x + y + z \Rightarrow 3\left(x^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{3}{2}} + z^{\frac{3}{2}}\right)^2 \geq (x + y + z)^3$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có:

$$\frac{x^3}{xy + 9} + \frac{y^3}{yz + 9} + \frac{z^3}{xz + 9} \geq \frac{\left(x^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{3}{2}} + z^{\frac{3}{2}}\right)^2}{xy + yz + xz + 27} \geq \frac{(x + y + z)^3}{3(27 + xy + yz + zx)}$$
$$\frac{y^3}{xy + 9} + \frac{z^3}{yz + 9} + \frac{x^3}{xz + 9} \geq \frac{\left(x^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{3}{2}} + z^{\frac{3}{2}}\right)^2}{xy + yz + xz + 27} \geq \frac{(x + y + z)^3}{3(27 + xy + yz + zx)}$$

Cộng từng vế ta được:

$$P = \frac{x^3}{xy + 9} + \frac{y^3}{yz + 9} + \frac{z^3}{xz + 9} + \frac{y^3}{xy + 9} + \frac{z^3}{yz + 9} + \frac{x^3}{xz + 9} \geq \frac{2(x + y + z)^3}{3(27 + xy + yz + zx)}$$

Mặt khác, theo AM-GM ta có:

$$xy + yz + xz \leq \frac{(x + y + z)^2}{3} = 27 \Rightarrow \frac{2(x + y + z)^3}{3(27 + xy + yz + zx)} \geq \frac{2.9^3}{3.(27 + 27)} = 9$$

Bài toán được chứng minh xong.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z$.

Cách 2.

$$P = \frac{x^3 + y^3}{xy + 9} + \frac{y^3 + z^3}{yz + 9} + \frac{z^3 + x^3}{zx + 9}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có:

$$x^3\left(\frac{1}{xy + 9} + \frac{1}{zx + 9}\right) \geq \frac{4x^3}{xy + xz + 18} = \frac{4x^3}{x(9 - x) + 18}$$
$$y^3\left(\frac{1}{xy + 9} + \frac{1}{zy + 9}\right) \geq \frac{4y^3}{xy + yz + 18} = \frac{4y^3}{y(9 - y) + 18}$$
$$z^3\left(\frac{1}{xz + 9} + \frac{1}{zy + 9}\right) \geq \frac{4z^3}{xz + yz + 18} = \frac{4z^3}{z(9 - z) + 18}$$

Cộng vế theo vế ta được:

$$P = x^3\left(\frac{1}{xy + 9} + \frac{1}{zx + 9}\right) + y^3\left(\frac{1}{yz + 9} + \frac{1}{yx + 9}\right) + z^3\left(\frac{1}{xz + 9} + \frac{1}{zy + 9}\right)$$
$$\geq \frac{4x^3}{9x - x^2 + 18} + \frac{4y^3}{9y - y^2 + 18} + \frac{4z^3}{9z - z^2 + 18}$$

Xét hàm số: $f(x)=\dfrac{4x^3}{9x-x^2+18}$ với $x\in(0;9]$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{12x^2\left(9x-x^2+18\right)-4x^3(9-2x)}{\left(9x-x^2+18\right)^2}\Rightarrow f'(3)=\frac{11}{4}$$

Ta có: $f(3)=3$

Phương trình tiếp tuyến của hàm số $f(x)$ tại $x=3$ là:

$$g(x)-f(3)=f'(3)(x-3)\Leftrightarrow g(x)-3=\frac{11}{4}(x-3)\Leftrightarrow g(x)=\frac{11}{4}x-\frac{21}{4}$$

Ta sẽ chứng minh:

$$\begin{aligned}&f(x)-g(x)=\frac{4x^3}{9x-x^2+18}-\left(\frac{11}{4}x-\frac{21}{4}\right)\geq 0\\&\Leftrightarrow 16x^3-(11x-21)\left(9x-x^2+18\right)\geq 0\\&\Leftrightarrow 27x^3-120x^2+9x+278\geq 0\\&\Leftrightarrow (x-3)^2(9x+14)\geq 0\end{aligned}$$

Điều cuối luôn đúng, do đó

$$\frac{4x^3}{9x-x^2+18}\geq\frac{11}{4}x-\frac{21}{4}$$

Tương tự ta có:

$$\frac{4y^3}{9y-y^2+18}\geq\frac{11}{4}y-\frac{21}{4}$$
$$\frac{4z^3}{9z-z^2+18}\geq\frac{11}{4}z-\frac{21}{4}$$

Cộng vế theo vế 3 bất đẳng thức trên, ta được:

$$\frac{4x^3}{9x-x^2+18}+\frac{4y^3}{9y-y^2+18}+\frac{4z^3}{9z-z^2+18}\geq\frac{11}{4}(x+y+z)-\frac{3.21}{4}=9$$

Vậy $P\geq 9$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z$

Cách 3.

Theo bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$\begin{aligned}&x^3+x^3+y^3\geq 3x^2y\\&y^3+y^3+x^3\geq 3xy^2\\&\Rightarrow 4\left(x^3+y^3\right)\geq x^3+y^3+3x^2y+3xy^2=(x+y)^3\end{aligned}$$

Mặt khác, cũng theo bất đẳng thức AM-GM ta có: $(x+y)^2+36\geq 12(x+y)$ và $4xy\leq(x+y)^2$

$$\Rightarrow\frac{x^3+y^3}{xy+9}=\frac{4\left(x^3+y^3\right)}{4xy+36}\geq\frac{(x+y)^3}{(x+y)^2+36}=x+y-\frac{36}{(x+y)^2+36}\geq x+y-\frac{3(x+y)}{(x+y)}=x+y-3$$

(*) Tương tự ta có:

$$\frac{z^3+y^3}{zy+9}\geq z+y-3$$
$$\frac{x^3+z^3}{xz+9}\geq x+z-3$$

Cộng vế theo vế 3 bất đẳng thức trên, ta được:

$$\frac{4x^3}{9x-x^2+18}+\frac{4y^3}{9y-y^2+18}+\frac{4z^3}{9z-z^2+18}\geq\frac{11}{4}(x+y+z)-\frac{3.21}{4}=9$$

Vậy $P\geq 9$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z$

Cách 4.

Sử dụng bất đẳng thức quen thuộc $4\left(x^3+y^3\right)\geq(x+y)^3$ ta có:

$$\frac{x^3+y^3}{xy+9}\geq\frac{(x+y)^3}{4xy+36}=\left[\frac{(x+y)^3}{4xy+36}+\frac{4xy+6}{24}+3\right]-\frac{xy}{6}-\frac{9}{2}$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM:

$$\frac{(x+y)^3}{4xy+36}+\frac{4xy+6}{24}+3\geq 3\sqrt[3]{3.\frac{(x+y)^3}{4xy+36}.\frac{4xy+6}{24}}=3.\frac{x+y}{2}$$

$$\Rightarrow\frac{x^3+y^3}{xy+9}\geq\frac{3(x+y)}{2}-\frac{xy}{6}-\frac{9}{2}$$

Tương tự ta có:

$$\frac{z^3+y^3}{zy+9}\geq\frac{3(z+y)}{2}-\frac{zy}{6}-\frac{9}{2}$$
$$\frac{z^3+x^3}{zx+9}\geq\frac{3(z+x)}{2}-\frac{zx}{6}-\frac{9}{2}$$

Cộng vế theo vế 3 bất đẳng thức trên, ta được:

$$P=\frac{x^3+y^3}{xy+9}+\frac{y^3+z^3}{yz+9}+\frac{z^3+x^3}{zx+9}\geq 3(x+y+z)-\frac{xy+yz+zx}{6}-\frac{27}{2}$$

Theo bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$xy+yz+zx\leq\frac{(x+y+z)^2}{3}=27\Rightarrow 3(x+y+z)-\frac{xy+yz+zx}{6}-\frac{27}{2}\geq 3.9-\frac{27}{6}-\frac{27}{2}=9$$

Vậy $P\geq 9$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z$

Bài 57. *Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng:*

$$\sqrt{(a^2b+b^2c+c^2a)(ab^2+bc^2+ca^2)}\geq abc+\sqrt[3]{(a^3+abc)(b^3+abc)(c^3+abc)}$$

Lời giải:

Do $abc\neq 0$ nên ta chia cả 2 vế của bất đẳng thức cho abc. Ta được:

$$\sqrt{\left(\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}\right)\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{a}{b}\right)}\geq 1+\sqrt[3]{\left(1+\frac{bc}{a^2}\right)\left(1+\frac{ca}{b^2}\right)\left(1+\frac{ab}{c^2}\right)}$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{3+\frac{bc}{a^2}+\frac{ca}{b^2}+\frac{ab}{c^2}+\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab}}\geq 1+\sqrt[3]{\left(1+\frac{bc}{a^2}\right)\left(1+\frac{ca}{b^2}\right)\left(1+\frac{ab}{c^2}\right)}$$

Đặt: $x = \dfrac{bc}{a^2}; y = \dfrac{ca}{b^2}; z = \dfrac{ab}{c^2} \Rightarrow xyz = 1$
Khi đó ta phải chứng minh:

$$\sqrt{3 + x + y + z + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}} \geq 1 + \sqrt[3]{(1+x)(1+y)(1+z)}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3 + x + y + z + xy + yz + zx} \geq 1 + \sqrt[3]{2 + x + y + z + xy + yz + zx}$$

Đặt $t = \sqrt[3]{2 + x + y + z + xy + yz + zx}$
Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$x + y + z + xy + yz + zx \geq 6\sqrt[6]{xyz.xy.yz.xz} = 6\sqrt[6]{x^3y^3z^3} = 6$$

$$\Rightarrow t \geq \sqrt[3]{2+6} = 2$$

Bất đẳng thức đã cho tương đương với:

$$\sqrt{t^3+1} \geq 1 + t \Leftrightarrow t^3 + 1 \geq t^2 + 2t + 1 \Leftrightarrow t^3 - t^2 - 2t \geq 0 \Leftrightarrow t(t+1)(t-2) \geq 0$$

(đúng với $t \geq 2$)

Chứng minh hoàn tất. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$

Bài 58. *Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:*

$$(a+b+c)(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}) \geq 3\left[1 + \sqrt[3]{\frac{3(a+b+c)(a+b)(b+c)(c+a)}{(ab+bc+ca)^2}}\right]$$

Lời giải:

Điều phải chứng minh tương đương với:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} \geq 3\sqrt[3]{\frac{3(a+b+c)(a+b)(b+c)(c+a)}{(ab+bc+ca)^2}}$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$a^2c + a^2c + b^2a \geq 3\sqrt[3]{a^5b^2c^2} = 3a\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$$

$$a^2c + c^2b + c^2b \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^5} = 3c\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$$

$$b^2a + b^2a + bc^2 \geq 3\sqrt[3]{a^2b^5c^2} = 3b\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$$

Cộng vế với vế các bất đẳng thức trên, ta được:

$$a^2c + b^2a + c^2b \geq (a+b+c)\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$$

Mặt khác, ta có:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = \frac{a^2c + b^2a + c^2a}{abc} \geq \frac{(a+b+c)\sqrt[3]{a^2b^2c^2}}{abc} = \frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}$$

Tương tự:

$$\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} = \frac{b^2c + c^2a + a^2b}{abc} \geq \frac{(a+b+c)\sqrt[3]{a^2b^2c^2}}{abc} = \frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}$$

Cộng vế với vế 2 bất đẳng thức này ta được:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} \geq \frac{2(a+b+c)}{\sqrt[3]{abc}}$$

Ta sẽ chứng minh:

$$\frac{2(a+b+c)}{\sqrt[3]{abc}} \ge 3.\sqrt[3]{\frac{3.(a+b+c)(a+b)(b+c)(c+a)}{(ab+bc+ca)^2}}$$

$$\Leftrightarrow 8\frac{(a+b+c)^3}{abc} \ge \frac{81(a+b+c)(a+b)(b+c)(c+a)}{(ab+bc+ca)^2}$$

$$\Leftrightarrow 8(a+b+c)^3(ab+bc+ca)^2 \ge 81abc(ab+bc+ca)(a+b)(b+c)(c+a)(a+b+c)$$

$$\Leftrightarrow 8(a+b+c)^2(ab+bc+ca)^2 \ge 81abc(a+b)(b+c)(c+a) = 81(ac+bc)(ca+ab)(ab+bc)$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$81(ab+bc)(bc+ca)(ca+ab) \le 81.\frac{8(ab+bc+ca)^3}{27} = 24(ab+bc+ca)^3$$

Mặt khác:

$$3(ab+bc+ca) \le (a+b+c)^2$$

$$\Rightarrow 24(ab+bc+ca)^3 = 8.(ab+bc+ca)^2.3(ab+bc+ca) \le 8(ab+bc+ca)^2(a+b+c)^2$$

$$\Rightarrow 81abc(a+b)(b+c)(c+a) \le 8(a+b+c)^2(ab+bc+ca)^2$$

Suy ra điều chứng minh là đúng hay

$$\frac{2(a+b+c)}{\sqrt[3]{abc}} \ge 3.\sqrt[3]{\frac{3.(a+b+c)(a+b)(b+c)(c+a)}{(ab+bc+ca)^2}}$$

Như vậy,

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c} \ge \frac{2\left(a+b+c\right)}{\sqrt[3]{abc}} \ge 3.\sqrt[3]{\frac{3.(a+b+c)(a+b)(b+c)(c+a)}{(ab+bc+ca)^2}}$$

Chứng minh hoàn tất. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Bài 59. *Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng:*

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)^2 \ge (a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

Lời giải:

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương:

$$\left(\frac{a^2c+b^2a+c^2a}{abc}\right)^2 \ge (a+b+c)\left(\frac{ab+bc+ca}{abc}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(a^2c+b^2a+c^2b\right)^2 \ge abc\left(a+b+c\right)\left(ab+bc+ca\right)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có:

$$\left(a^2c+b^2a+c^2b\right)\left(c+a+b\right) \ge (ab+bc+ca)^2$$

$$\left(a^2c+b^2a+c^2b\right)\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \ge (a+b+c)^2$$

Nhân vế với vế 2 bất đẳng thức này ta được

$$\left(a^2c+b^2a+c^2a\right)^2\left(a+b+c\right)\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \ge (ab+bc+ca)^2(a+b+c)^2$$

$$\Leftrightarrow \left(a^2c+b^2a+c^2a\right)^2\left(a+b+c\right)\left(\frac{ab+bc+ca}{abc}\right) \ge (ab+bc+ca)^2(a+b+c)^2$$

$$\Leftrightarrow \left(a^2c+b^2a+c^2a\right)^2 \ge abc\left(ab+bc+ca\right)\left(a+b+c\right)$$

Chứng minh hoàn tất. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Bài 60. *Cho $x.y > 0$ thỏa mãn $x+y+1=3xy$. Tìm giá trị lớn nhất của:*

$$P = \frac{3x}{y\left(x+1\right)} + \frac{3y}{x\left(y+1\right)} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}$$

Lời giải:

Cách 1.

Ta có:

$$P = \frac{3xy}{y^2\left(x+1\right)} + \frac{3xy}{x^2\left(y+1\right)} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2} = \frac{y+(x+1)}{y^2(x+1)} + \frac{x+(y+1)}{x^2(y+1)} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}$$

$$\Leftrightarrow P = \frac{y}{y^2(x+1)} + \frac{x}{x^2(y+1)} = \frac{1}{y(x+1)} + \frac{1}{x(y+1)}$$

Đặt: $a = \dfrac{1}{x}; b = \dfrac{1}{y} \Rightarrow a+b+ab=3$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$3 = a+b+ab \geq ab+2\sqrt{ab} \Leftrightarrow ab+2\sqrt{ab}-3 \leq 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{ab}-1\right)\left(\sqrt{ab}+3\right) \leq 0 \Rightarrow \sqrt{ab} \leq 1 \Leftrightarrow ab \leq 1$

Khi đó ta có:

$$\begin{aligned} P &= \frac{ab}{a+1} + \frac{ab}{b+1} = ab\left(\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1}\right) = ab.\frac{a+b+2}{(a+1)(b+1)} \\ &= ab.\frac{(3-ab)+2}{(ab+a+b)+1} = \frac{ab.(5-ab)}{4} = \frac{-(ab)^2+5ab}{4} \\ &= \frac{\left[-(ab)^2+2ab-1\right]+3ab+1}{4} \\ &= \frac{-(ab-1)^2+3ab+1}{4} \\ &\leq \frac{3+1}{4} = 1 \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=1 \Leftrightarrow x=y=1$.

Vậy $maxP = 1$

Cách 2.

Đặt $a = x+y$ và $b = xy$ thì ta có $a, b > 0$; $a+1 = 3b$; $a^2 \geq 4b$.

$$\Rightarrow (3b-1)^2 \geq 4b \Leftrightarrow 9b^2 - 10b + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (9b-1)(b-1) \geq 0 \Rightarrow b \geq 1$$

$$(\text{vì } a+1 = 3b \Leftrightarrow b \geq \frac{1}{3})$$

Ta có:

$$\begin{aligned} P &= \frac{3x}{y\left(x+1\right)} + \frac{3y}{x\left(y+1\right)} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2} = \frac{3x^2(y+1)+3y^2(x+1)}{xy(xy+x+y+1)} - \frac{x^2+y^2}{x^2y^2} \\ &= \frac{3xy(x+y)+3\left(x^2+y^2\right)}{xy(xy+x+y+1)} - \frac{x^2+y^2}{x^2y^2} = \frac{3xy(x+y)+3\left[(x+y)^2-2xy\right]}{xy(xy+x+y+1)} - \frac{\left[(x+y)^2-2xy\right]}{x^2y^2} \\ &= \frac{3ab+3\left(a^2-2b\right)}{b(a+b+1)} - \frac{a^2-2b}{b^2} = \frac{3b(3b-1)+3\left[(3b-1)^2-2b\right]}{b\left[b+(3b-1)+1\right]} - \frac{\left[(3b-1)^2-2b\right]}{4b^2} \\ &= \frac{3b(3b-1)+2\left[(3b-1)^2-2b\right]}{4b^2} = \frac{21}{4} - \frac{19}{4b} + \frac{1}{2b^2} \end{aligned}$$

Xét $f(t)=\dfrac{21}{4}-\dfrac{19t}{4}+\dfrac{t^2}{2}; t\in(0;1]\Rightarrow f'(t)=t-\dfrac{19}{4}<0$ với $\forall t\in(0;1]\Rightarrow f(t)\le 1$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=1\Leftrightarrow x=y=1$.

Vậy $maxP=1$

Bài 61. *Cho $a,b,c\in[0;1]$ thỏa mãn $a+b+c=\dfrac{3}{2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của*

$$A=\cos\left(a^2+b^2+c^2\right)$$

Lời giải:

Từ giả thiết suy ra:

$$0<a^2+b^2+c^2\le a+b+c=\frac{3}{2}<\frac{\pi}{2}$$

Do đó A đạt GTNN khi $Q=a^2+b^2+c^2$ đạt GTLN.

Không mất tính tổng quát, giả sử

$$a\le b\le c\Rightarrow\frac{3}{2}=a+b+c\le 3c\Leftrightarrow c\ge\frac{1}{2}$$

Từ đó suy ra:

$$Q=a^2+b^2+c^2=(a+b)^2-2ab+c^2\le\left(\frac{3}{2}-c\right)^2+c^2$$

Ta có:

$$\left(\frac{3}{2}-c\right)^2+c^2\le\frac{5}{4}\Leftrightarrow(c-1)(2c-1)\le 0$$

Bất đẳng thức cuối luôn đúng, do đó $Q\le\dfrac{5}{4}$

Vậy GTNN của A là $\cos\dfrac{5}{4}$.

Đẳng thức xảy ra khi $(a;b;c)=\left(0;\dfrac{1}{2};1\right)$ và các hoán vị.

Bài 62. *Cho $a,b,c>0$ và $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:*

$$\frac{a}{2a^2+bc}+\frac{b}{2b^2+ca}+\frac{c}{2c^2+ab}\ge abc.$$

Lời giải:

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương:

$$\frac{1}{2a^2bc+b^2c^2}+\frac{1}{2ab^2c+c^2a^2}+\frac{1}{2abc^2+a^2b^2}\ge 1$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz và chú ý bất đẳng thức quen thuộc

$$(ab+bc+ca)^2\le\left[\frac{(a+b+c)^2}{3}\right]^2=9$$

ta có:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2a^2bc+b^2c^2}+\frac{1}{2ab^2c+c^2a^2}+\frac{1}{2abc^2+a^2b^2}&\ge\frac{9}{a^2b^2+b^2c^2+b^2c^2+2abc(a+b+c)}\\&=\frac{9}{(ab+bc+ca)^2}\ge 1.\end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xày ra khi $a=b=c=1$.

Bài 63. *Cho $a, b, c \geq 0$ và $a+b+c=2$. Tìm GTLN của biểu thức:*
$$P = \frac{ab}{\sqrt{2c+ab}} + \frac{bc}{\sqrt{2a+bc}} + \frac{ac}{\sqrt{2b+ac}}.$$

Lời giải:

Kết hợp giả thiết bài toán và áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta được:
$$P = \sum_{cyc} \frac{ab}{\sqrt{c(a+b+c)+ab}} = \sum_{cyc} \frac{ab}{(c+a)(c+b)} \leq \frac{1}{2} \sum_{cyc} ab\left(\frac{1}{c+a} + \frac{1}{c+b}\right) = \frac{1}{2}(a+b+c) = 1.$$

Vậy P đạt giá trị lớn nhất bằng 1. Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=\frac{2}{3}$.

Bài 64. *Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:*
$$\frac{a^3}{b+2c} + \frac{b^3}{c+2a} + \frac{c^3}{a+2b} \geq \frac{1}{9}(a+b+c)^2.$$

Lời giải:

Đầu tiên ta cần chú ý hai bất đẳng thức quen thuộc:
$$a^2+b^2+c^2 \geq \frac{1}{3}(a+b+c)^2.$$
$$3(ab+bc+ca) \leq (a+b+c)^2.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz và hai bất đẳng thức trên ta có:
$$\sum_{cyc} \frac{a^3}{b+2c} = \sum_{cyc} \frac{a^4}{ab+2ac} \geq \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{3(ab+bc+ca)} \geq \frac{\left(\frac{(a+b+c)^2}{3}\right)^2}{(a+b+c)^2} = \frac{1}{9}(a+b+c)^2.$$

Bất đẳng thức đã được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$.

Bài 65. *Cho $x, y, z > 0$ và $x+y+1=z$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:*
$$P = \frac{x^3y^3}{(x+yz)(y+xz)(z+xy)^2}.$$

Lời giải:

Từ giả thiết ta có:
$$x+yz = yz-y+z-1 = (y+1)(z-1).$$
$$y+zx = zx-x+z-1 = (x+1)(z-1).$$
$$z+xy = xy+x+y+1 = (x+1)(y+1).$$
$$z-1 = x+y.$$

Do đó:
$$P = \frac{x^3y^3}{(x+yz)(y+zx)(z+xy)^2} = \frac{x^3y^3}{(z-1)^2(x+1)^3(y+1)^3} = \frac{x^3y^3}{(x+y)^2(x+1)^3(y+1)^3}.$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:
$$x+y \geq 2\sqrt{xy} \Rightarrow (x+y)^2 \geq 4xy.$$
$$x+1 = \frac{x}{2} + \frac{x}{2} + 1 \geq 3\sqrt[3]{\frac{x^2}{4}} \Rightarrow (x+1)^3 \geq \frac{27}{4}x^2.$$
$$y+1 = \frac{y}{2} + \frac{y}{2} + 1 \geq 3\sqrt[3]{\frac{y^2}{4}} \Rightarrow (y+1)^3 \geq \frac{27}{4}y^2.$$

Từ đó ta có: $P \leq \dfrac{x^3y^3}{4xy.\dfrac{27}{4}x^2.\dfrac{27}{4}y^2} = \dfrac{4}{729}$.

Vậy giá trị lớn nhất của P là $\dfrac{4}{729}$. Đẳng thức xảy ra khi $(x;y;z) = (2;2;5)$.

Bài 66. *Cho $a+b+c \leq 2$. Chứng minh:*
$$P = \sum_{cyc} \sqrt{a^2 + \frac{1}{b^2}} \geq \frac{\sqrt{97}}{2}.$$

Lời giải:

Ta dễ dàng thấy $P > 0$. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có:
$$P^2 \geq (a+b+c)^2 + \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2 \geq (a+b+c)^2 + \frac{81}{(a+b+c)^2}.$$

Áp dụng thêm bất đẳng thức AM-GM và chú ý giả thiết $a+b+c \leq 2$:
$$(a+b+c)^2 + \frac{81}{(a+b+c)^2} = \left[(a+b+c)^2 + \frac{16}{(a+b+c)^2}\right] + \frac{65}{(a+b+c)^2} \geq \frac{97}{4}.$$

Suy ra $P \geq \dfrac{\sqrt{97}}{2}$. Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = \dfrac{2}{3}$.

Bài 67. *Cho $a, b, c > 0$ và $abc = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:*
$$P = \frac{a^3}{(1+b)(1+c)} + \frac{b^3}{(1+c)(1+a)} + \frac{c^3}{(1+a)(1+b)}.$$

Lời giải:

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM:
$$\begin{aligned}
&\frac{a^3}{(1+b)(1+c)} + \frac{1+b}{8} + \frac{1+c}{8} \geq \frac{3a}{4} \ (1).\\
&\frac{b^3}{(1+c)(1+a)} + \frac{1+c}{8} + \frac{1+a}{8} \geq \frac{3b}{4} \ (2).\\
&\frac{c^3}{(1+a)(1+b)} + \frac{1+a}{8} + \frac{1+b}{8} \geq \frac{3c}{4} \ (3).\\
&a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc} = 3 \ (4).
\end{aligned}$$

Kết hợp (1), (2), (3), (4) suy ra: $P + \dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{4}(a+b+c) \geq \dfrac{3}{4}(a+b+c) \Leftrightarrow P \geq \dfrac{a+b+c}{2} - \dfrac{3}{4} \geq \dfrac{3}{4}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\dfrac{3}{4}$. Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$.

Bài 68. *Cho x, y là các số thực không âm thay đổi. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của:*
$$P = \frac{(x-y)(1-xy)}{(1+x)^2(1+y)^2}.$$

Lời giải:

Cách 1.
$$P = \frac{x}{(x+1)^2} - \frac{y}{(y+1)^2}.$$

Xét hàm số $f(t) = \dfrac{t}{(t+1)^2}, \forall t \geq 0$ thì ta có kết quả sau $0 \leq f(t) \leq \frac{1}{4}$.

Từ đó suy ra:

$$P_{\max} = \max_{x\ge 0} f(x) - \min_{y\ge 0} f(y) = \frac{1}{4}.$$
$$P_{\min} = \min_{x\ge 0} f(x) - \max_{y\ge 0} f(y) = -\frac{1}{4}.$$

Cách 2.

$$|P| = \left|\frac{(x-y)(1-xy)}{(1+x)^2(1+y)^2}\right| \le \frac{(x+y)(1+xy)}{[(x+y)+(1+xy)]^2} \le \frac{1}{4}$$
$$\Rightarrow P_{\max} = \frac{1}{4};\ P_{\min} = -\frac{1}{4}.$$

Bài 69. *Cho $a,b,c \ge 0$ và $a+b+c=1$. Tìm giá trị lớn nhất của:*
$$P = \frac{1+a^2}{1+b^2} + \frac{1+b^2}{1+c^2} + \frac{1+c^2}{1+a^2}.$$

Lời giải:

Giả sử $a = \max\{a,b,c\} \Rightarrow \dfrac{1}{3} \le a \le 1$.

Từ đó ta có:

$$P \le \frac{1+a^2}{1+b^2} + \frac{1+b^2}{1+c^2} + \frac{c^2}{1+c^2} + \frac{1}{1+a^2} = \frac{1+a^2}{1+b^2} + \frac{1+b^2+c^2}{1+c^2} + \frac{1}{1+a^2}$$
$$\le \frac{1+a^2}{1+b^2} + 1 + (b+c)^2 + \frac{1}{1+a^2} \le 2 + a^2 + (1-a)^2 + \frac{1}{1+a^2}.$$

Xét hàm số $f(a) = a^2 + (1-a)^2 + \dfrac{1}{1+a^2}$, với $a \in \left[\dfrac{1}{3};1\right]$ ta được $f(a) \le f(1) = \dfrac{3}{2}$.

Suy ra: $P \le \dfrac{7}{2}$..

Đẳng thức xảy ra khi $(a;b;c) = (1;0;0)$ và các hoán vị.

Bài 70. *Cho $a,b > 0$ và $a+b+ab=3$. Chứng minh:*
$$\frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1} + \frac{ab}{a+b} \le \frac{3}{2}.$$

Lời giải:

Từ giả thiết suy ra: $(a+1)(b+1) = 4$. Áp dụng bất đẳng thức AM-GM:

$$3 = a+b+ab \ge ab + 2\sqrt{ab} \Rightarrow 0 < ab \le 1.$$

Do đó bất đẳng thức đã cho viết lại:

$$\frac{1}{4}a(b+1) + \frac{1}{4}b(a+1) + \frac{ab}{a+b} \le \frac{3}{2}.$$
$$\Leftrightarrow \frac{3-ab}{4} + \frac{ab}{2} + \frac{ab}{3-ab} \le \frac{3}{2}.$$
$$\Leftrightarrow \frac{ab}{4} + \frac{ab}{3-ab} - \frac{3}{4} \le 0.$$

Xét hàm số
$$f(t) = \frac{t}{4} + \frac{t}{3-t} - \frac{3}{4}\ (0 < t \le 1) \Rightarrow f(t) \le 0.$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $a=b=1$.

Bài 71. *Cho $a,b,c > 0$ và $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=1$. Chứng minh:*
$$\frac{a^2+bc}{a\sqrt{b+c}} + \frac{b^2+ca}{b\sqrt{c+a}} + \frac{c^2+ab}{c\sqrt{a+b}} \ge \sqrt{2}.$$

Lời giải:
Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz liên tục:

$$\begin{aligned}
&\sum_{cyc}\frac{a^2}{a\sqrt{b+c}}+\sum_{cyc}\frac{bc}{a\sqrt{b+c}}=\sum_{cyc}\frac{a^2}{\sqrt{a}\sqrt{ab+ac}}+\sum_{cyc}\frac{(bc)^2}{abc\sqrt{b+c}}\\
&\geq\frac{(a+b+c)^2}{\sum\limits_{cyc}\left(\sqrt{a}\sqrt{ab+ac}\right)}+\frac{(ab+bc+ca)^2}{abc\sum\limits_{cyc}\sqrt{a+b}}\geq\frac{(a+b+c)^2}{\sqrt{2(a+b+c)(ab+bc+ca)}}+\frac{(ab+bc+ca)^2}{abc\sum\limits_{cyc}\sqrt{a+b}}\\
&\geq\frac{(a+b+c)^2}{(a+b+c)\sqrt{\frac{2}{3}(a+b+c)}}+\frac{3abc(a+b+c)}{abc\sum\limits_{cyc}\sqrt{a+b}}\geq\sqrt{\frac{3}{2}(a+b+c)}+\frac{3(a+b+c)}{\sqrt{6(a+b+c)}}\\
&=\sqrt{6(a+b+c)}\geq\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=\dfrac{1}{9}$.

Bài 72. *Cho $a,b,c>0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của:*
$$P=\frac{3(b+c)}{2a}+\frac{4a+3c}{3b}+\frac{12(b-c)}{2a+3c}.$$

Lời giải:
Đặt $x=2a,y=3b,z=3c$.
Biểu thức đã cho viết lại:

$$\begin{aligned}
P&=\frac{y+z}{x}+\frac{2x+z}{y}+\frac{4y-4z}{x+z}=\frac{y+z+x-x}{x}+\frac{2x+z}{y}+\frac{4y+4x-4x-4z}{x+z}\\
&=\left(\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\right)+\left(\frac{z+x}{x}+\frac{x+z}{y}+\frac{4x}{x+z}+\frac{4y}{x+z}\right)-5\geq 10-5=5.
\end{aligned}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất cần tìm là $P=5$.

Bài 73. *Cho $a,b,c>0$ và $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}=3$. Chứng minh:*
$$\frac{1}{1+\sqrt{(a+b)^3+abc}}+\frac{1}{1+\sqrt{(b+c)^3+abc}}+\frac{1}{1+\sqrt{(c+a)^3+abc}}\leq\frac{3}{4}.$$

Lời giải:
Cách 1.
Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+\sqrt{(a+b)^3+abc}}&=\frac{1}{1+\dfrac{\sqrt{(a+b)^3+abc}}{3}+\dfrac{\sqrt{(a+b)^3+abc}}{3}+\dfrac{\sqrt{(a+b)^3+abc}}{3}}\\
&\leq\frac{1}{16}\left(1+\frac{9}{\sqrt{(a+b)^3+abc}}\right).
\end{aligned}$$

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM và bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{(a+b)^3+abc}}=\frac{1}{\sqrt{(a+b)(a+b)^2+abc}}&\leq\frac{1}{\sqrt{(a+b)4ab+abc}}=\frac{3}{\sqrt{9ab(4a+4b+c)}}\\
&\leq\frac{3}{2}\left(\frac{1}{9ab}+\frac{1}{4a+4b+c}\right).
\end{aligned}$$

và
$$\frac{1}{4a+4b+c} \le \frac{1}{81}\left(\frac{4}{a}+\frac{4}{b}+\frac{1}{c}\right)$$
Từ đó ta có:
$$\frac{1}{1+\sqrt{(a+b)^3+abc}} \le \frac{1}{16}+\frac{3}{32ab}+\frac{1}{96}\left(\frac{4}{a}+\frac{4}{b}+\frac{1}{c}\right).$$
$$\Rightarrow \sum_{cyc}\frac{1}{1+\sqrt{(a+b)^3+abc}} \le \frac{3}{16}+\frac{3}{32}\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)+\frac{9}{96}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).$$

Mặt khác ta có hai bất đẳng thức quen thuộc sau:
$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \le \sqrt{3\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)}=3.$$
$$\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca} \le \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=3.$$
$$\Rightarrow \sum_{cyc}\frac{1}{1+\sqrt{(a+b)^3+abc}} \le \frac{3}{16}+\frac{3}{32}.3+\frac{9}{96}.3=\frac{3}{4}.$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$.

Cách 2.

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM:
$$3=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2} \ge \frac{3}{\sqrt[3]{a^2b^2c^2}} \Rightarrow abc \ge 1.$$
Do đó:
$$\sum_{cyc}\frac{1}{1+\sqrt{(a+b)^3+abc}} \le \sum_{cyc}\frac{1}{1+\sqrt{(a+b)^3+1}} = \sum_{cyc}\frac{\sqrt{(a+b)^3+1}-1}{(a+b)^3}.$$
Ta có:
$$\sqrt{x^3+1}=\sqrt{(1+x)(1-x+x^2)} \le \frac{(1+x)+(1-x+x^2)}{2}=1+\frac{x^2}{2}$$
$$\Rightarrow \sqrt{1+x^3}-1 \le \frac{x^2}{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{1+x^3}-1}{x^3} \le \frac{1}{2x}.$$
Suy ra:
$$\sum_{cyc}\frac{\sqrt{(a+b)^3+1}-1}{(a+b)^3} \le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right) \le \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \le \frac{1}{4}\sqrt{3\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)}=\frac{3}{4}.$$
Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$.

Bài 74. *Cho $a,b,c>0$ và $ab+bc+ca=3$. Chứng minh:*
$$\frac{1}{a^2+2}+\frac{1}{b^2+2}+\frac{1}{c^2+2} \le 1.$$

Lời giải:

Bất đẳng thức đã cho tương đương:
$$\frac{a^2}{a^2+2}+\frac{b^2}{b^2+2}+\frac{c^2}{c^2+2} \ge 1.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz:

$$\frac{a^2}{a^2+2}+\frac{b^2}{b^2+2}+\frac{c^2}{c^2+2}\geq\frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+6}=\frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)}=1.$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$.

Bài 75. *Cho $x,y,z>0$ và $x^3+y^3+z^3=3$. Chứng minh:*

$$\frac{x}{(y+z)^4}+\frac{y}{(z+x)^4}+\frac{z}{(x+y)^4}\geq\frac{3}{16}.$$

Lời giải:

Cách 1.

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM:

$$\frac{x}{(y+z)^4}+\frac{x^3}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}\geq\frac{1}{2}.\frac{x}{y+z}.$$
$$\frac{y}{(z+x)^4}+\frac{y^3}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}\geq\frac{1}{2}.\frac{y}{z+x}.$$
$$\frac{z}{(x+y)^4}+\frac{z^3}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}\geq\frac{1}{2}.\frac{z}{x+y}.$$

$$\Rightarrow\sum_{cyc}\frac{x}{(y+z)^4}\geq\frac{1}{2}\left(\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}\right)-\frac{x^3+y^3+z^3}{16}-\frac{3}{8}\geq\frac{1}{2}.\frac{3}{2}-\frac{3}{16}-\frac{3}{8}=\frac{3}{16}.$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $x=y=z=1$.

Cách 2.

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM:

- $2\left(x^3+y^3+z^3\right)+3\geq3\left(x^2+y^2+z^2\right)\Leftrightarrow3\geq x^2+y^2+z^2.$
- $\sum_{cyc}\frac{x}{(y+z)^4}\geq\sum_{cyc}\frac{x}{4(y^2+z^2)^2}=\sum_{cyc}\frac{x}{4(3-x^2)^2}=\sum_{cyc}\frac{x^3}{16x^2.\frac{3-x^2}{2}.\frac{3-x^2}{2}}\geq\frac{1}{16}\left(x^3+y^3+z^3\right)=\frac{3}{16}.$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $x=y=z=1$.

Bài 76. *Cho $x,y,z>0$ và $x+y+z=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của:*

$$P=15.\frac{x^2}{z}+\frac{5}{36}.\frac{y^2}{x}+\frac{24}{25}.\frac{z^2}{y}.$$

Lời giải:

Áp dụng bất đẳngt thức AM-GM:

$$\frac{5}{36}.\frac{y^2}{x}+5x\geq\frac{10y}{6}.$$
$$\frac{24}{25}.\frac{z^2}{y}+\frac{24}{36}y\geq\frac{48}{5}.\frac{1}{6}z.$$
$$15.\frac{x^2}{z}+\frac{15}{25}z\geq6x.$$

$$\Rightarrow15.\frac{x^2}{z}+\frac{5}{36}.\frac{y^2}{x}+\frac{24}{25}.\frac{z^2}{y}\geq x+y+z=1.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất cần tìm là $P=1\Leftrightarrow(x;y;z)=\left(\frac{1}{12};\frac{1}{2};\frac{5}{12}\right)$.

Bài 77. *Cho $a,b,c>0$ và $abc=1$. Chứng minh:*
$$P=\frac{1}{a^2+2b^2+3}+\frac{1}{b^2+2c^2+3}+\frac{1}{c^2+2a^2+3}\le\frac{1}{2}.$$

Lời giải:

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM:
$$a^2+2b^2+3=\left(a^2+b^2\right)+\left(b^2+1\right)+2\ge 2ab+2b+2.$$
$$\Rightarrow P\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{ab+b+1}+\frac{1}{bc+c+1}+\frac{1}{ca+a+1}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{ab+b+1}+\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{ab}+1}+\frac{1}{\frac{1}{b}+a+1}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{ab+b+1}+\frac{ab}{b+1+ab}+\frac{b}{1+ab+b}\right)=\frac{1}{2}.$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$.

Bài 78. *Cho $a,b,c>0$ và $a+b+c=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của:*
$$P=\frac{a+b}{\sqrt{ab+c}}+\frac{b+c}{\sqrt{bc+a}}+\frac{c+a}{\sqrt{ca+b}}.$$

Lời giải:

Kết hợp giả thiết $a+b+c=1$ và bất đẳng thức AM-GM:
$$P=\sum_{cyc}\frac{a+b}{\sqrt{ab+c(a+b+c)}}=\sum_{cyc}\frac{a+b}{\sqrt{(a+c)(b+c)}}\ge 3.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất cần tìm là $P=3$. Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=\frac{1}{3}$.

Bài 79. *Cho $a,b,c>0$ và $a+b+c=1$. Chứng minh:*
$$\frac{a^2+b^2+2}{a+b-ab}+\frac{b^2+c^2+2}{b+c-bc}+\frac{c^2+a^2+2}{c+a-ca}\ge 12.$$

Lời giải:

Bất đẳng thức đã cho tương đương:
$$\sum_{cyc}\frac{a^2+b^2+2}{(a+b)(a+b+c)-ab}\ge 12$$
$$\Leftrightarrow\sum_{cyc}\frac{a^2+b^2+2}{a^2+b^2+ab+bc+ca}\ge 12$$
$$\Leftrightarrow(2-ab-bc-ca)\sum_{cyc}\frac{1}{a^2+b^2+ab+bc+ca}\ge 9.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz:
$$(2-ab-bc-ca)\sum_{cyc}\frac{1}{a^2+b^2+ab+bc+ca}\ge\frac{9(2-ab-bc-ca)}{2\left(a^2+b^2+c^2\right)+3(ab+bc+ca)}$$
$$=\frac{9\left(2(a+b+c)^2-ab-bc-ca\right)}{2\left(a^2+b^2+c^2\right)+3(ab+bc+ca)}=9.$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=\frac{1}{3}$.

Bài 80. *Cho $x,y,z\ge 0$ và $x+y+z=1$. Tìm giá trị lớn nhất của:*
$$P=xy+yz+zx-\frac{4}{3}xyz.$$

Lời giải:

Cách 1.

Đầu tiên ta sẽ chứng minh bất đẳng thức sau:

$$xyz \geq (x+y-z)(y+z-x)(z+x-y)\,(*).$$

Ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức (*) với trường hợp không tầm thường x, y, z là độ dài ba cạnh tam giác.

Thật vậy, áp dụng bất đẳng thức AM-GM:

$$(x+y-z)(y+z-x) \leq \frac{[(x+y-z)+(y+z-x)]^2}{4} = y^2.$$

Tương tự ta cũng có:

$$(y+z-x)(z+x-y) \leq z^2.$$
$$(z+x-y)(x+y-z) \leq x^2.$$

Từ đó suy ra bất đẳng thức (*).

Quay lại bài toán.

Ta có:

$$\begin{aligned} &xyz \geq (x+y-z)(y+z-x)(z+x-y) = (1-2z)(1-2x)(1-2y) \\ &\Leftrightarrow xy+yz+zx \leq \frac{1}{4} + \frac{9xyz}{4}. \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta được:

$$P = xy+yz+zx - \frac{4xyz}{3} \leq \frac{1}{4} + \frac{11xyz}{12} \leq \frac{1}{4} + \frac{11}{12}\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3 = \frac{23}{81}.$$

Vậy $maxP = \dfrac{23}{81}$. Đẳng thức xảy ra khi $x = y = z = \dfrac{1}{3}$.

Cách 2.

Giả sử

$$0 \leq x \leq y \leq z \Rightarrow 0 \leq x \leq \frac{1}{3}.$$

Từ đó suy ra:

$$P = x(y+z) + yz\left(1 - \frac{4x}{3}\right) \leq x(1-x) + \frac{(1-x)^2}{4}\left(1 - \frac{4x}{3}\right).$$

Khảo sát hàm số $f(x) = x(1-x) + \dfrac{(1-x)^2}{4}\left(1 - \dfrac{4x}{3}\right)$ ta cũng được kết quả trên!

Hoặc phân tích và đánh giá như sau:

$$x(1-x) + \frac{(1-x)^2}{4}\left(1 - \frac{4x}{3}\right) = \frac{-4x^3 - x^2 + 2x + 3}{12} = \frac{-4\left(x - \frac{1}{3}\right)^2\left(x + \frac{11}{12}\right) + \frac{92}{27}}{12} \leq \frac{23}{81}.$$

Bài toán được chứng minh.

Bài 81. *Cho* $a, b, c > 0$ *và* $\dfrac{3}{a} + \dfrac{2}{b} + \dfrac{1}{c} = 1$. *Tìm giá trị nhỏ nhất của:*

$$P = a + b + c.$$

Lời giải:

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz:

$$1 = \frac{3}{a} + \frac{2}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{\left(\sqrt{3} + \sqrt{2} + 1\right)^2}{a + b + c}.$$
$$\Rightarrow P = a + b + c \geq \left(\sqrt{3} + \sqrt{2} + 1\right)^2.$$

Vậy $p_{\min} = \left(\sqrt{3} + \sqrt{2} + 1\right)^2$. Đẳng thức xảy ra khi

$$(a; b; c) = \left(\sqrt{3} + \sqrt{6} + 3; \sqrt{2} + \sqrt{6} + 2; \sqrt{3} + \sqrt{2} + 1\right).$$

Bài 82. *Cho* $a, b, c > 0$. *Chứng minh:*

$$\sqrt[4]{\sum_{cyc} \left(1 + \frac{1}{a}\right)^4} - \sqrt[4]{3} \geq \frac{\sqrt[4]{243}}{2 + abc}.$$

Lời giải:

Bất đẳng thức đã cho tương đương:

$$\left(1 + \frac{1}{a}\right)^4 + \left(1 + \frac{1}{b}\right)^4 + \left(1 + \frac{1}{c}\right)^4 \geq 3\left(1 + \frac{3}{2 + abc}\right)^4.$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM :

$$\left(1 + \frac{1}{a}\right)^4 + \left(1 + \frac{1}{b}\right)^4 + \left(1 + \frac{1}{c}\right)^4 \geq 3\sqrt[3]{\left(1 + \frac{1}{a}\right)^4 \left(1 + \frac{1}{b}\right)^4 \left(1 + \frac{1}{c}\right)^4}.$$

Ta lại có:

$$\left(1 + \frac{1}{a}\right)\left(1 + \frac{1}{b}\right)\left(1 + \frac{1}{c}\right) \geq \left(1 + \frac{1}{\sqrt[3]{abc}}\right)^3 = \left(1 + \frac{3}{3\sqrt[3]{abc}}\right)^3 \geq \left(1 + \frac{3}{2 + abc}\right)^3.$$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$.

Bài 83. *Cho* $a, b, c \geq 0$ *và* $(a - b)(b - c)(c - a) \neq 0$. *Chứng minh:*

$$(ab + bc + ca)\left(\frac{1}{(a - b)^2} + \frac{1}{(b - c)^2} + \frac{1}{(c - a)^2}\right) \geq 4.$$

Lời giải:

Giả sử $c = \min\{a, b, c\}$. Từ đó ta có:

$$ab + bc + ca \geq ab.$$
$$\frac{1}{(b - c)^2} \geq \frac{1}{b^2}.$$
$$\frac{1}{(c - a)^2} \geq \frac{1}{a^2}.$$

Do đó ta chỉ cần chứng minh:

$$ab\left(\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\geq 4 \Leftrightarrow \frac{ab}{(a-b)^2}+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 4$$
$$\Leftrightarrow \frac{ab}{(a-b)^2}+\frac{(a-b)^2}{ab}\geq 2\,(*).$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho (*) ta dễ dàng có điều phải chứng minh.

Bài 84. *Cho $a,b,c>0$. Chứng minh:*

$$\left(\sum_{cyc}\frac{1}{a}\right)\left(\sum_{cyc}\frac{1}{1+a}\right)\geq \frac{9}{\sqrt[3]{abc}\left(1+\sqrt[3]{abc}\right)}.$$

Lời giải:

Đặt

$$a=k\frac{x}{y}, b=k\frac{y}{z}, c=k\frac{z}{x}.$$

Bật đẳng thức cần chứng minh tương đương:

$$\left(\frac{y}{x}+\frac{z}{y}+\frac{x}{z}\right)\left(\frac{y}{y+kx}+\frac{z}{z+ky}+\frac{x}{x+kz}\right)\geq \frac{9}{1+k}.$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM:

$$\begin{aligned}\left(\frac{y}{x}+\frac{z}{y}+\frac{x}{z}\right)\left(\frac{y}{y+kx}+\frac{z}{z+ky}+\frac{x}{x+kz}\right) &\geq \frac{x+y+z}{\sqrt[3]{xyz}}.3\sqrt[3]{\frac{y}{y+kx}.\frac{z}{z+ky}.\frac{x}{x+kz}}\\ &=\frac{3\left(x+y+z\right)}{\sqrt[3]{\left(y+kx\right)\left(z+ky\right)\left(x+kz\right)}}\\ &\geq \frac{9}{1+k}.\end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xày ra khi $a=b=c=1$.

Bài 85. *Cho x,y là các số thực thỏa mãn $x^2y^2+2yx^2+1=0$. Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của:*

$$P=\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x}+y\left(y+\frac{1}{x}+2\right).$$

Lời giải:

Đặt

$$a=\frac{1}{x};\ b=y+1\Rightarrow a^2+b^2=1; P=a^2+ab.$$

Tiếp tục đặt

$$a=cos\alpha; b=sin\alpha \Rightarrow P=cos^2\alpha+sin\alpha.cos\alpha=\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}cos\left(2\alpha-\frac{\pi}{4}\right).$$
$$\Rightarrow P_{\max}=\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}; P_{\min}=\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Bài 86. *Cho $a,b,c>0$ và $abc=1$. Chứng minh:*

$$\frac{1}{a^5(b+2c)^2}+\frac{1}{b^5(c+2a)^2}+\frac{1}{c^5(a+2b)^2}\geq\frac{1}{3}.$$

Lời giải:

Đặt

$$x=\frac{1}{a}, y=\frac{1}{b}, z=\frac{1}{c}\Rightarrow xyz=1.$$

Bất đẳng thức đã cho viết lại:
$$\sum_{cyc} \frac{x^3}{(z+2y)^2} \geq \frac{1}{3}.$$
Áp dụng bất đẳng thức AM-GM:
$$\frac{x^3}{(z+2y)^2} + \frac{z+2y}{27} + \frac{z+2y}{27} \geq \frac{3x}{9}.$$
Từ đó suy ra:
$$\sum_{cyc} \frac{x^3}{(z+2y)^2} \geq \frac{x+y+z}{9} \geq \frac{3\sqrt[3]{xyz}}{9} = \frac{1}{3}.$$
Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$.

Bài 87. *Cho $a,b,c>0$ và $a+b+c=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của:*
$$P = \frac{1}{\left(1+\sqrt{ab}\right)^2} + \frac{1}{\left(1+\sqrt{bc}\right)^2} + \frac{1}{(1+\sqrt{ca})^2}.$$

Lời giải:

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có:
$$3P = 3\left[\frac{1}{\left(1+\sqrt{ab}\right)^2} + \frac{1}{\left(1+\sqrt{bc}\right)^2} + \frac{1}{(1+\sqrt{ca})^2}\right] \geq \left(\frac{1}{1+\sqrt{ab}} + \frac{1}{1+\sqrt{bc}} + \frac{1}{1+\sqrt{ca}}\right)^2$$
$$\geq \frac{81}{\left(3+\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}\right)^2} \geq \frac{81}{(3+a+b+c)^2} = \frac{9}{4}.$$
$$\Rightarrow P \geq \frac{3}{4}.$$
Vậy $minP = \frac{3}{4}$. Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$.

Bài 88. *Cho $a,b,c>0$. Chứng minh:*
$$\frac{(a+b+c)^2}{abc} + \frac{18\sqrt{3}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \geq \frac{81}{a+b+c}.$$

Lời giải:

Sử dụng bất đẳng thức quen thuộc sau:
$$3abc\,(a+b+c) \leq (ab+bc+ca)^2$$
$$\Rightarrow \frac{(a+b+c)^2}{abc} = \frac{3(a+b+c)^3}{3abc\,(a+b+c)} \geq \frac{3(a+b+c)^3}{(ab+bc+ca)^2}.$$
Do đó ta chỉ cần chứng minh:
$$\frac{3(a+b+c)^3}{(ab+bc+ca)^2} + \frac{18\sqrt{3}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \geq \frac{81}{a+b+c}.$$
Thật vậy, áp dụng bất đẳng thức AM-GM:
$$\frac{3(a+b+c)^3}{(ab+bc+ca)^2} + \frac{9\sqrt{3}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} + \frac{9\sqrt{3}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \geq \frac{27(a+b+c)}{\sqrt[3]{(ab+bc+ca)^2(a^2+b^2+c^2)}}$$
$$\geq \frac{27(a+b+c)}{\dfrac{(ab+bc+ca)+(ab+bc+ca)+(a^2+b^2+c^2)}{3}}$$
$$= \frac{81}{a+b+c}.$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$.

Bài 89. *Cho* $a,b,c>0$ *và* $a^3+b^3+c^3\le 3$. *Chứng minh:*

$$\frac{ab}{\sqrt{3+c}}+\frac{bc}{\sqrt{3+a}}+\frac{ca}{\sqrt{3+b}}\le\frac{3}{2}.$$

Lời giải:

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM:

$$3(a+b+c)\le\left(a^3+b^3+c^3\right)+6\le 9\Rightarrow a+b+c\le 3.$$
$$ab+bc+ca\le\frac{1}{3}(a+b+c)^2\le 3.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz:

$$\begin{aligned}&\left(\frac{ab}{\sqrt{3+c}}+\frac{bc}{\sqrt{3+a}}+\frac{ca}{\sqrt{3+b}}\right)^2\le(ab+bc+ca)\left(\frac{ab}{3+c}+\frac{bc}{3+a}+\frac{ca}{3+b}\right)\\&\le 3\left[\frac{ab}{(a+c)+(b+c)}+\frac{bc}{(b+a)+(c+a)}+\frac{ca}{(b+c)+(b+a)}\right]\\&\le\frac{3}{4}\left(\frac{ab}{a+c}+\frac{ab}{b+c}+\frac{bc}{b+a}+\frac{bc}{c+a}+\frac{ca}{b+c}+\frac{ca}{b+a}\right)\\&=\frac{3}{4}\left[\left(\frac{ab}{a+c}+\frac{bc}{c+a}\right)+\left(\frac{ab}{b+c}+\frac{ca}{b+c}\right)+\left(\frac{bc}{b+a}+\frac{ca}{b+a}\right)\right]\le\frac{3}{4}(a+b+c)\le\frac{9}{4}.\end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$.

Bài 90. *Cho* $a,b,c>0$ *và* $a+b+c=1$. *Chứng minh:*

$$\frac{ab}{\sqrt{(1-c)^3(1+c)}}+\frac{bc}{\sqrt{(1-a)^3(1+a)}}+\frac{ca}{\sqrt{(1-b)^3(1+b)}}\le\frac{3\sqrt{2}}{8}.$$

Lời giải:

Ta có:

$$\begin{aligned}&\sum_{cyc}\frac{ab}{\sqrt{(1-c)^3(1+c)}}=\sum_{cyc}\frac{ab}{(a+b)\sqrt{1-c^2}}\\&=\sum_{cyc}\frac{ab}{(a+b)\sqrt{(a+b+c)^2-c^2}}=\sum_{cyc}\frac{ab}{(a+b)\sqrt{a^2+b^2+2(ab+bc+ca)}}.\end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM:

- $a^2+b^2+2(ab+bc+ca)\ge 2(ab+bc)+2(ab+ca)$.
- $a+b\ge 2\sqrt{ab}$.

Do đó ta có:

$$\begin{aligned}\sum_{cyc}\frac{ab}{(a+b)\sqrt{a^2+b^2+2(ab+bc+ca)}}&\le\frac{1}{2}\sum_{cyc}\sqrt{\frac{ab}{2(ab+bc)+2(ab+ca)}}\\&\le\frac{1}{4\sqrt{2}}\sum_{cyc}\sqrt{\frac{ab}{ab+bc}+\frac{ab}{ab+ca}}\\&\le\frac{1}{4\sqrt{2}}.\sqrt{3}.\sqrt{\sum_{cyc}\left(\frac{ab}{ab+bc}+\frac{ab}{ab+ca}\right)}\\&=\frac{1}{4\sqrt{2}}.\sqrt{3}.\sqrt{3}=\frac{3\sqrt{2}}{8}.\end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = \dfrac{1}{3}$.

Bài 91. *Cho $a, b, c > 0$ và $abc = 1$. Chứng minh:*

$$\sum_{cyc} \frac{1}{2(a^3+1)+b^3+c^3} \le \frac{1}{2}.$$

Lời giải:

Đặt

$$a^3 = x^2, b^3 = y^2, c^3 = z^2 \Rightarrow xyz = 1.$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM:

$$\begin{aligned}
&\sum_{cyc} \frac{1}{2(a^3+1)+b^3+c^3} = \sum_{cyc} \frac{1}{2(x^2+1)+y^2+z^2} \le \sum_{cyc} \frac{1}{2(x^2+1+yz)} \\
&= \sum_{cyc} \frac{1}{2(x^2+1+yz)} = \sum_{cyc} \frac{x}{2(x^3+x+1)} \\
&\le \sum_{cyc} \frac{x}{2(2x^2+1)} \le \sum_{cyc} \frac{x}{2(x^2+2x)} = \sum_{cyc} \frac{1}{2(x+2)}.
\end{aligned}$$

Vậy ta chỉ cần chứng minh:

$$\sum_{cyc} \frac{1}{(x+2)} \le 1.$$

Đặt

$$x = \frac{m}{n}, y = \frac{n}{p}, z = \frac{p}{m}.$$

Biến đổi tương đương và sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned}
&\sum_{cyc} \frac{1}{(x+2)} = \frac{n}{m+2n} + \frac{p}{n+2p} + \frac{m}{p+2m} \\
&= \frac{n}{m+2n} - \frac{1}{2} + \frac{p}{n+2p} - \frac{1}{2} + \frac{m}{p+2m} - \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \\
&= -\frac{1}{2}\left(\frac{m}{m+2n} + \frac{n}{n+2p} + \frac{p}{p+2m}\right) + \frac{3}{2} \\
&= -\frac{1}{2}\left(\frac{m^2}{m^2+2nm} + \frac{n^2}{n^2+2pn} + \frac{p^2}{p^2+2mp}\right) + \frac{3}{2} \\
&\le -\frac{1}{2}\left[\frac{(m+n+p)^2}{m^2+n^2+p^2+2nm+2pn+2mp}\right] + \frac{3}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 1.
\end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$.

Bài 92. *Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh:*

$$\frac{a}{a+\sqrt{(a+b)(a+c)}} + \frac{b}{b+\sqrt{(b+c)(b+a)}} + \frac{c}{c+\sqrt{(c+a)(c+b)}} \le 1.$$

Lời giải:

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz:

$$\sqrt{(a+b)(c+a)} \ge \sqrt{ac} + \sqrt{ab}.$$

Do đó ta có:

$$\sum_{cyc} \frac{a}{a+\sqrt{(a+b)(a+c)}} \le \sum_{cyc} \frac{a}{a+\sqrt{ac}+\sqrt{ab}} = \sum_{cyc} \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}} = 1.$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$.

Bài 93. *Cho* $a, b, c > 0$ *và* $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. *Chứng minh:*

$$\frac{a^2b^2+7}{(a+b)^2} + \frac{b^2c^2+7}{(b+c)^2} + \frac{c^2a^2+7}{(c+a)} \geq 6.$$

Lời giải:

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM:

$$\frac{a^2b^2+7}{(a+b)^2} = \frac{a^2b^2+1+2(a^2+b^2+c^2)}{(a+b)^2} \geq \frac{2ab+2(a^2+b^2+c^2)}{(a+b)^2}$$

$$= 1 + \frac{a^2+b^2+2c^2}{(a+b)^2} \geq 1 + \frac{a^2+b^2+2c^2}{2(a^2+b^2)} = \frac{3}{2} + \frac{c^2}{a^2+b^2}.$$

$$\Rightarrow \sum_{cyc} \frac{a^2b^2+7}{(a+b)^2} \geq \frac{9}{2} + \sum_{cyc} \frac{c^2}{a^2+b^2}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz:

$$\sum_{cyc} \frac{c^2}{a^2+b^2} = \sum_{cyc} \frac{c^4}{a^2c^2+b^2c^2} \geq \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)} \geq \frac{3(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)}{2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)} = \frac{3}{2}.$$

$$\Rightarrow \sum_{cyc} \frac{a^2b^2+7}{(a+b)^2} \geq \frac{9}{2} + \frac{3}{2} = 6.$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$.

Bài 94. *Cho* $a, b, c > 0$ *và* $a^3 + b^3 + c^3 = 3$. *Chứng minh:*

$$\frac{a^2}{\sqrt{b^3+8}} + \frac{b^2}{\sqrt{c^3+8}} + \frac{c^2}{\sqrt{a^3+8}} \leq 1.$$

Lời giải:

$$\left(\sum_{cyc} \frac{a^2}{\sqrt{b^3+8}}\right)^2 \leq \left(\sum_{cyc} \frac{a^2}{\sqrt{3(b+2)}}\right)^2 \leq \left(a^3+b^3+c^3\right)\left(\frac{a}{3(b+2)} + \frac{b}{3(c+2)} + \frac{c}{3(a+2)}\right).$$

Ta sẽ chứng minh:

$$\frac{a}{b+2} + \frac{b}{c+2} + \frac{c}{a+2} \leq 1.$$

$$\Leftrightarrow a^2c + b^2a + c^2b + 2(a^2+b^2+c^2) \leq abc + 8.$$

Mặc khác: $a^2 + b^2 + c^2 \leq 3$. Do đó ta chỉ cần chứng minh: (giả sử b là số ở giữa)

$$a^2c + b^2a + c^2b - 2 - abc \leq 0 \Leftrightarrow a^2c + b^2a + b(3 - a^2 - b^2) - 2 - abc \leq 0$$

$$\Leftrightarrow -(b-1)^2(b+2) - a(b-c)(a-b) \leq 0$$

Bất đẳng thức cuối luôn đúng, do đó bài toán được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$.

Bài 95. *Cho* $x, y, z > 0$. *Chứng minh:*

$$\frac{(x+y+z)^3}{3xyz} + \frac{xy^2+yz^2+zx^2}{x^3+y^3+z^3} \geq 10.$$

Lời giải:

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM:

$$(x+y+z)^3 = x^3+y^3+z^3+3(x+y+z)(xy+yz+zx) - 3xyz \geq x^3+y^3+z^3+24xyz.$$

$$\frac{(x+y+z)^3}{3xyz}+\frac{xy^2+yz^2+zx^2}{x^3+y^3+z^3}\geq \frac{x^3+y^3+z^3}{3xyz}+\frac{3xyz}{x^3+y^3+z^3}+8\geq 2+8=10.$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $x=y=z$.

Bài 96. *Cho* $x,y,z>0$ *và* $xyz=1$. *Chứng minh:*

$$\frac{x^3+1}{\sqrt{x^4+y+z}}+\frac{y^3+1}{\sqrt{y^4+z+x}}+\frac{z^3+1}{\sqrt{z^4+x+y}}\geq 2\sqrt{xy+yz+zx}.$$

Lời giải:

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM:

$$2\sqrt{(x^4+y+z)(xy+yz+zx)}=2\sqrt{[x^4+xyz(y+z)](xy+yz+zx)}$$
$$=2\sqrt{(x^3+y^2z+yz^2)(x^2y+x^2z+xyz)}\leq (x+y+z)\left(x^2+yz\right)=(x+y+z)\frac{x^3+1}{x}.$$
$$\Rightarrow \frac{x^3+1}{\sqrt{x^4+y+z}}\geq \frac{2x\sqrt{xy+yz+zx}}{x+y+z}.$$
$$\Rightarrow \sum_{cyc}\frac{x^3+1}{\sqrt{x^4+y+z}}\geq 2\sqrt{xy+yz+zx}.$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $x=y=z=1$.

Bài 97. *Cho* $a,b,c>0$ *và* $a+b+c=1$. *Chứng minh:*

$$2\left(\frac{ab}{c+ab}+\frac{bc}{a+bc}+\frac{ca}{a+ca}\right)\geq \sqrt{\frac{ab}{c+ab}}+\sqrt{\frac{bc}{a+bc}}+\sqrt{\frac{ca}{a+ca}}.$$

Lời giải:

Ta có:

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2abc(a+b+c)=(ab+bc+ca)^2.$$
$$abc(a+b+c)\leq \frac{(ab+bc+ca)^2}{3}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz:

$$\frac{ab}{c+ab}+\frac{bc}{a+bc}+\frac{ca}{a+ca}\geq \frac{(ab+bc+ca)^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2abc(a+b+c)+abc(a+b+c)}$$
$$\geq \frac{(ab+bc+ca)^2}{(ab+bc+ca)^2+\frac{(ab+bc+ca)^2}{3}}=\frac{3}{4}\,(1).$$

$$3\left(\frac{ab}{c+ab}+\frac{bc}{a+bc}+\frac{ca}{a+ca}\right)\geq \left(\sqrt{\frac{ab}{c+ab}}+\sqrt{\frac{bc}{a+bc}}+\sqrt{\frac{ca}{a+ca}}\right)^2\,(2)$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$2\left(\frac{ab}{c+ab}+\frac{bc}{a+bc}+\frac{ca}{a+ca}\right)\geq \sqrt{\frac{ab}{c+ab}}+\sqrt{\frac{bc}{a+bc}}+\sqrt{\frac{ca}{a+ca}}.$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=\frac{1}{3}$.

Bài 98. *Cho* $a,b,c>0$ *và* $16(a+b+c)\geq \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$. *Chứng minh:*

$$\sum_{cyc}\frac{1}{\left[a+b+\sqrt{2(a+c)}\right]^3}\leq \frac{8}{9}.$$

Lời giải:

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM:

- $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\le 16\left(a+b+c\right)\Rightarrow ab+bc+ca\le 16abc\left(a+b+c\right)\le \frac{16}{3}(ab+bc+ca)^2.$

  $\Rightarrow \frac{3}{16}\le ab+bc+ca.$

- $a+b+\sqrt{2\left(a+c\right)}=a+b+\sqrt{\frac{a+c}{2}}+\sqrt{\frac{a+c}{2}}\ge 3\sqrt[3]{\frac{\left(a+b\right)\left(a+c\right)}{2}}.$

  $\Rightarrow \left(a+b+\sqrt{2\left(a+c\right)}\right)^3\ge \frac{27}{2}\left(a+b\right)\left(a+c\right).$

  $\Rightarrow \sum_{cyc}\frac{1}{\left[a+b+\sqrt{2\left(a+c\right)}\right]^3}\le \frac{2}{27}\sum_{cyc}\frac{1}{\left(a+b\right)\left(a+c\right)}$

  $=\frac{4}{27}\frac{a+b+c}{\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right)}=\frac{64}{81}.\frac{\frac{3}{16}\left(a+b+c\right)}{\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right)}\le \frac{64}{81}.\frac{\left(ab+bc+ca\right)\left(a+b+c\right)}{\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right)}$

  $=\frac{64}{81}.\frac{\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right)+abc}{\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right)}=\frac{64}{81}.\left[1+\frac{abc}{\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right)}\right]\le \frac{64}{81}.\left(1+\frac{1}{8}\right)=\frac{8}{9}.$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=\frac{1}{4}$.

Bài 99. *Cho $a,b,c>0$ và $\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{2}{b}$. Tìm Giá trị nhỏ nhất của:*

$$P=\frac{a+b}{2a-b}+\frac{c+b}{2c-b}.$$

Lời giải:

Từ giả thiết suy ra: $b=\frac{2ac}{a+c}$.

$$\Rightarrow P=\frac{a+3c}{2a}+\frac{c+3a}{2c}=1+\frac{3}{2}\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)\ge 4.$$

Vậy $minP=4$. Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$.

Bài 100. *Cho $a,b,c\in[1;3]$ và $a+b+c=6$. Tìm giá trị lớn nhất của:*

$$P=a^2+b^2+c^2.$$

Lời giải:

Đặt $x=a-1,y=b-1,z=c-1$ thì:

- $(x-2)(y-2)(z-2)\le 0\Leftrightarrow -2(xy+yz+zx)\le 8-4(x+y+z)-xyz=-4-xyz\le -4.$
- $P=x^2+y^2+z^2+2(x+y+z)+3=-2(xy+yz+zx)+18\le 14.$

Vậy $P_{\max}=14$. Đẳng thức xảy ra khi $(a;b;c)=(1;2;3)$ và các hoán vị.

Bài 101. *Cho $a,b,c>0$ và $a+b+c=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của:*

$$P=\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1}+\frac{1}{c^2+1}.$$

Lời giải:

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM:

$$\frac{1}{a^2+1}=1-\frac{a^2}{a^2+1}\geq 1-\frac{a^2}{2a}=1-\frac{a}{2}.$$
$$\Rightarrow\sum_{cyc}\frac{1}{a^2+1}\geq 3-\frac{a+b+c}{2}=\frac{3}{2}.$$

Vậy $minP=\frac{3}{2}$. Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$.

Bài 102. *Cho $x,y,z>0$ và $x+y+z=3$. Chứng minh:*
$$\frac{x^2}{y^2-2y+3}+\frac{y^2}{z^2-2z+3}+\frac{z^2}{x^2-2x+3}\geq\frac{3}{2}.$$

Lời giải:

$$\frac{x^2}{y^2-2y+3}=\frac{3x^2}{3y^2-3.2y+3^2}=\frac{3x^2}{3y^2-(x+y+z).2y+(x+y+z)^2}=\frac{3x^2}{x^2+2y^2+z^2+2xz}.$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM:

$$\frac{3x^2}{x^2+2y^2+z^2+2xz}\geq\frac{3}{2}.\frac{x^2}{x^2+y^2+z^2}.$$
$$\Rightarrow\sum_{cyc}\frac{x^2}{y^2-2y+3}\geq\frac{3}{2}\sum_{cyc}\frac{x^2}{x^2+y^2+z^2}=\frac{3}{2}.$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xày ra khi $x=y=z=1$.

Bài 103. *Cho $x,y,z>0$ và $xyz\geq 1$. Chứng minh:*
$$\frac{1}{x^4+y^3+z^2}+\frac{1}{y^4+z^3+x^2}+\frac{1}{z^4+x^3+y^2}\leq 1.$$

Lời giải:

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz:

$$(x^4+y^3+z^2)(1+y+z^2)\geq(x^2+y^2+z^2)^2.$$

Do đó:

$$\sum_{cyc}\frac{1}{x^4+y^3+z^2}=\sum_{cyc}\frac{1+y+z^2}{(x^4+y^3+z^2)(1+y+z^2)}\leq\sum_{cyc}\frac{1+y+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}=\frac{3+x+y+z+x^2+y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}.$$

Mặc khác, áp dụng bất đẳng thức AM-GM:

$$(x^2+y^2+z^2)^2\geq 3(x^2+y^2+z^2)=\left(x^2+y^2+z^2\right)+\left(x^2+y^2+z^2\right)+\left(x^2+y^2+z^2\right)$$
$$\geq x^2+y^2+z^2+\frac{(x+y+z)(x+y+z)}{3}+3\sqrt[3]{x^2y^2z^2}\geq x^2+y^2+z^2+x+y+z+3.$$
$$\Rightarrow\sum_{cyc}\frac{1}{x^4+y^3+z^2}\leq 1.$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $x=y=z=1$.

Bài 104. *Cho $a,b,c>0$. Chứng minh:*
$$\sqrt{\frac{a^2+2b^2}{a^2+ab+bc}}+\sqrt{\frac{b^2+2c^2}{b^2+bc+ca}}+\sqrt{\frac{c^2+2a^2}{c^2+ca+ab}}\geq 3.$$

Lời giải:

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM:

$$\sum_{cyc}\sqrt{\frac{a^2+2b^2}{a^2+ab+bc}}\geq 3\sqrt[3]{\sqrt{\frac{a^2+2b^2}{a^2+ab+bc}}.\sqrt{\frac{b^2+2c^2}{b^2+bc+ca}}.\sqrt{\frac{c^2+2a^2}{c^2+ca+ab}}}.$$

Mặc khác, áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz:

$$(a^2+2b^2)(b^2+2c^2)=(a^2+b^2+b^2)(b^2+c^2+c^2)\geq (b^2+bc+ac)^2.$$
$$(b^2+2c^2)(c^2+2a^2)=(b^2+c^2+c^2)(c^2+a^2+a^2)\geq (c^2+ca+ab)^2.$$
$$(c^2+2a^2)(a^2+2b^2)=(c^2+a^2+a^2)(a^2+b^2+b^2)\geq (a^2+ab+bc)^2.$$

Từ đó suy ra:

$$\sqrt{\frac{a^2+2b^2}{a^2+ab+bc}}.\sqrt{\frac{b^2+2c^2}{b^2+bc+ca}}.\sqrt{\frac{c^2+2a^2}{c^2+ca+ab}}\geq 1.$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$.

Bài 105. *Cho $a,b,c>0$. Chứng minh:*

$$\frac{a^2-ab}{a+b}+\frac{b^2-bc}{b+c}+\frac{c^2-ca}{c+a}\geq 0.$$

Lời giải:

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM:

$$\frac{a^2-ab}{a+b}\geq\frac{a^2-\frac{a^2+b^2}{2}}{a+b}=\frac{a^2-b^2}{2(a+b)}=\frac{a-b}{2}.$$
$$\Rightarrow\sum_{cyc}\frac{a^2-ab}{a+b}\geq\frac{a-b+b-c+c-a}{2}=0.$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$.

Bài 106. *Cho $a,b>0$và $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của:*

$$P=a^3+b^3+a(b^2-6)+b(a^2-6).$$

Lời giải:

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có:

$$2=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geq\frac{4}{a+b}\Leftrightarrow a+b\geq 2.$$
$$2=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geq 2\sqrt{\frac{1}{ab}}\Leftrightarrow ab\geq 1.$$

Từ đó ta có:

$$P=a^3+b^3+a(b^2-6)+b(a^2-6)=(a+b)(a^2+b^2-6)\geq (a+b)(2ab-6)\geq (2)(2.1-6)=-8.$$

Vậy $minP=-8$. Đẳng thức xảy ra khi $a=b=1$.

Bài 107. *Cho $ab\neq 0$ và $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=\frac{4}{b}-\frac{2}{a}$. Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của:*

$$P=a^2+b^2-a+3b.$$

Lời giải:

Từ giải thiết ta có:

$$a^2+b^2=4a-2b\Leftrightarrow (a-2)^2+(b+1)^2=5.$$

Đặt
$$a = 2 + \sqrt{5}\sin\alpha \Rightarrow b = -1 + \sqrt{5}\cos\alpha.$$
Do đó:
$$P = 9 + \sqrt{5}(5\sin\alpha + \cos\alpha) = 9 + \sqrt{130}\sin\beta,\ \left(\beta = \alpha + \arcsin\frac{1}{\sqrt{26}}\right).$$
$$\Rightarrow 9 - \sqrt{130} \le P \le 9 + \sqrt{130}.$$
Vậy $P_{\min} = 9 - \sqrt{130},\ P_{\max} = 9 + \sqrt{130}$.

Bài 108. *Cho $a, b, c > 0$ và $a + b + c = 3$. Chứng minh:*
$$\sqrt{\frac{a+b}{c+ab}} + \sqrt{\frac{b+c}{a+bc}} + \sqrt{\frac{c+a}{b+ca}} \ge 3.$$

Lời giải:

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM:
$$\sqrt{\frac{a+b}{c+ab}} + \sqrt{\frac{b+c}{a+bc}} + \sqrt{\frac{c+a}{b+ca}} \ge 3\sqrt[6]{\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{(c+ab)(a+bc)(b+ca)}}.$$
$$(a+1)^2(b+1)^2(c+1)^2 \le \left(\frac{a+b+c+3}{3}\right)^6 = 64.$$
$$4(c+ab)(a+bc) \le (c+ab+a+bc)^2 = (b+1)^2(a+c)^2.$$
$$\Rightarrow 64(c+ab)^2(a+bc)^2(b+ca)^2 \le (a+1)^2(b+1)^2(c+1)^2(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2$$
$$\le 64(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2.$$
$$(c+ab)(a+bc)(b+ca) \le (a+b)(b+c)(c+a).$$
Đến đây ta dễ dàng có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$.

Bài 109. *Cho $a, b \ge 0$. Chứng minh:*
$$\left(a^2 + b + \frac{3}{4}\right)\left(b^2 + a + \frac{3}{4}\right) \ge \left(2a + \frac{1}{2}\right)\left(2b + \frac{1}{2}\right).$$

Lời giải:

$$\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 \ge 0 \Leftrightarrow a^2 + \frac{1}{4} \ge a \Leftrightarrow a^2 + b + \frac{3}{4} \ge a + b + \frac{1}{2}.$$
$$\left(b - \frac{1}{2}\right)^2 \ge 0 \Leftrightarrow b^2 + \frac{1}{4} \ge b \Leftrightarrow b^2 + a + \frac{3}{4} \ge a + b + \frac{1}{2}.$$
Áp dụng đánh giá trên và bất đẳng thức AM-GM:
$$\left(a^2 + b + \frac{3}{4}\right)\left(b^2 + a + \frac{3}{4}\right) \ge \left(a + b + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{\left[\left(2a + \frac{1}{2}\right) + \left(2b + \frac{1}{2}\right)\right]^2}{4} \ge \left(2a + \frac{1}{2}\right)\left(2b + \frac{1}{4}\right).$$
Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $a = b = \frac{1}{2}$.

Bài 110. *Cho $a, b, c > 0$ và $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Chứng minh:*
$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + a + b + c \ge 6.$$

Lời giải:

Cách 1.

Đặt
$$a + b + c = 3 - t^2 \Rightarrow -\sqrt{3 - \sqrt{3}} < t < \sqrt{3 - \sqrt{3}}.$$

Ta có:
$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+a+b+c-6 \geq \frac{2(3-t^2)^2}{(3-t^2)^2-3}-3-t^2=\frac{t^4(5-t^2)}{t^4-6t^2+6} \geq 0.$$

Cách 2.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz:

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \geq \frac{a+b+c)^2}{ab+bc+ca}=\frac{3}{ab+bc+ca}+2.$$

Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức sau:

$$\begin{aligned}
&\frac{3}{ab+bc+ca}+a+b+c \geq 4\\
&\Leftrightarrow \frac{6}{(a+b+c)^2-3}+a+b+c-4 \geq 0\\
&\Leftrightarrow (a+b+c-3)^2(a+b+c+2) \geq 0
\end{aligned}$$

Bất đẳng thức cuối luôn đúng, do đó bài toán được chứng minh xong.
Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$.

Bài 111. *Cho* $a,b,c>0$ *và* $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$. *Tìm giá trị nhỏ nhất của:*
$$P=\frac{b+c}{a^2}+\frac{c+a}{b^2}+\frac{a+b}{c^2}.$$

Lời giải:

Đặt $x=\frac{1}{a},\ y=\frac{1}{b},\ z=\frac{1}{c} \Rightarrow x+y+z=1$.
Áp dụng bất đẳng thức AM-GM và Cauchy-Schwarz ta có:

$$P=\sum_{cyc}\frac{a^2(b+c)}{bc} \geq \sum_{cyc}\frac{4a^2}{b+c} \geq 2(a+b+c)=2.$$

Vậy $P_{\min}=2$.
Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=3$.

Bài 112. *Cho* $a,b,c>0$ *và* $a+b+c=1$. *Tìm giá trị nhỏ nhất của:*
$$P=\frac{2}{a^2+b^2+c^2}+\frac{3}{ab+bc+ca}.$$

Lời giải:

Ta có: $a^2+b^2+c^2 \geq \frac{1}{3}(a+b+c)^2=\frac{1}{3}$. Đặt $a^2+b^2+c^2=t,\ \left(t \geq \frac{1}{3}\right)$.
Do đó:
$$P=f(t)=\frac{2}{t}+\frac{6}{1-t}.$$
Xét hàm số $f(t)$, từ đó suy ra
$$P \geq 4\left(2+\sqrt{3}\right).$$
Vậy $P_{\min}=4\left(2+\sqrt{3}\right)$.

Bài 113. *Cho* $x.y \geq 0$ *và* $x^2+2y^2=1$. *Chứng minh:*
$$\sqrt{1+2x}+\sqrt{1+2y} \geq 1+\sqrt{1+\sqrt{2}}.$$

Lời giải:

Ta có:

$$\left(\sqrt{1+2x}+\sqrt{1+2y}\right)^2=2+2(x+y)+2\sqrt{1+2(x+y)+4xy}\geq 2+2(x+y)+2\sqrt{1+2(x+y)}.$$

Mặc khác:

$$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2\geq \frac{x^2}{2}+y^2=\frac{x^2+2y^2}{2}=\frac{1}{2}\Rightarrow x+y\geq \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Do đó

$$\left(\sqrt{1+2x}+\sqrt{1+2y}\right)^2\geq 2+\sqrt{2}+2\sqrt{1+\sqrt{2}}=(1+\sqrt{1+\sqrt{2}})^2.$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $(x;y)=\left(0;\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Bài 114. *Cho $x,y,z>0$ và $x+y+z=xyz$. Tìm giá trị lớn nhất của:*

$$P=\frac{2}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+z^2}}.$$

Lời giải:

Đặt

$$a=\frac{1}{x};b=\frac{1}{y};c=\frac{1}{z}\Rightarrow ab+bc+ca=1.$$

$$\Rightarrow P=\frac{2a}{\sqrt{1+a^2}}+\frac{b}{\sqrt{1+b^2}}+\frac{c}{\sqrt{1+c^2}}.$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM:

$$\begin{aligned}P&=\frac{2a}{\sqrt{(a+b)(a+c)}}+\frac{b}{\sqrt{(b+a)(b+c)}}+\frac{c}{\sqrt{(c+a)(c+b)}}\\&\leq a\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}\right)+b\left(\frac{1}{4(b+c)}+\frac{1}{a+b}\right)+c\left(\frac{1}{4(b+c)}+\frac{1}{a+c}\right)=\frac{9}{4}.\end{aligned}$$

Vậy $P_{\max}=\dfrac{9}{4}$. Đẳng thức xảy ra khi $(x;y;z)=\left(\dfrac{\sqrt{15}}{7};\sqrt{15};\sqrt{15}\right)$.

Bài 115. *Cho $a+b+c=0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của:*

$$P=\sqrt{3+4^a}+\sqrt{3+4^b}+\sqrt{3+4^c}.$$

Lời giải:

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz và AM-GM:

$$\sqrt{(3+1)\left(3+4^a\right)}\geq\ 3+2^a.$$

$$\Rightarrow\sum_{cyc}\sqrt{3+4^a}\geq\frac{3+2^a+3+2^b+3+2^c}{2}\geq\ \frac{9+3\sqrt[3]{2^{a+b+c}}}{2}=6.$$

Vậy $P_{\min}=6$. Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=0$.

Bài 116. *Cho $a,b,c>0$ và $a+b+c=1$. Chứng minh:*

$$\frac{a^2+b^2+2}{a+b-ab}+\frac{b^2+c^2+2}{b+c-bc}+\frac{c^2+a^2+2}{c+a-ca}\geq 12.$$

Lời giải:

Ta có:

$$a+b-ab=(a+b)\left(a+b+c\right)-ab=a^2+b^2+ab+bc+ca.$$

Do đó:

$$\begin{aligned}
\sum_{cyc}\frac{a^2+b^2+2}{a+b-ab} &= \sum_{cyc}\frac{a^2+b^2+2}{a^2+b^2+ab+bc+ca}\\
&= \sum_{cyc}\left(\frac{a^2+1}{a^2+b^2+ab+bc+ca}+\frac{a^2+1}{c^2+a^2+ab+bc+ca}\right)\\
&\geq \sum_{cyc}\frac{4\left(a^2+1\right)}{a^2+a^2+b^2+c^2+2\left(ab+bc+ca\right)}\\
&= \sum_{cyc}\frac{4\left(a^2+1\right)}{a^2+\left(a+b+c\right)^2}=\sum_{cyc}\frac{4\left(a^2+1\right)}{a^2+1}=12.
\end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=\dfrac{1}{3}$.

Bài 117. *Với mọi số thực dương a,b,c thỏa mãn $a+b+c=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:*

$$P=\frac{a^3}{\left(1-a\right)^2}+\frac{b^3}{\left(1-b\right)^2}+\frac{c^3}{\left(1-c\right)^2}$$

Lời giải:

Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức phụ sau:

$$\frac{a^3}{\left(a-1\right)^2}\geq a-\frac{1}{4}$$

Thật vậy, bất đẳng thức trên tương đương với bất đẳng thức đúng sau:

$$\frac{9}{4}a^2-\frac{3}{2}a+\frac{1}{4}\geq 0\Leftrightarrow\left(a-\frac{1}{3}\right)^2\geq 0$$

Tương tự, ta chứng minh được:

$$\frac{b^3}{\left(b-1\right)^2}\geq b-\frac{1}{4}$$
$$\frac{c^3}{\left(c-1\right)^2}\geq c-\frac{1}{4}$$

Cộng ba bất đẳng thức trên theo vế ta được:

$$P\geq a+b+c-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $\dfrac{1}{4}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\dfrac{1}{3}$.$\square$

Bài 118. *Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn $a+b+c\leq 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau:*

$$A=\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{ab(a+b)}+\frac{1}{cb(c+b)}+\frac{1}{ac(a+c)}$$

Lời giải:

Theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có:

$$\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{ab+bc+ca}+\frac{1}{ab+bc+ca}\geq\frac{9}{\left(a+b+c\right)^2}\geq 9\qquad(1)$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta được:

$$\frac{1}{ab(a+b)}+\frac{1}{cb(c+b)}+\frac{1}{ac(a+c)}\geq\frac{3}{\sqrt[3]{\dfrac{\left(a+b+c\right)^3}{27}.\dfrac{8\left(ab+bc+ca\right)^3}{27}}}\geq\frac{27}{2(ab+bc+ca)}\qquad(2)$$

Mặt khác:

$$\begin{aligned}\frac{27}{2(ab+bc+ca)}&=\frac{2}{ab+bc+ca}+\frac{23}{2(ab+bc+ca)}\\&\ge\frac{2}{ab+bc+ca}+\frac{23}{\frac{2}{3}(a+b+c)^2}\\&=\frac{2}{ab+bc+ca}+\frac{69}{2}\qquad(3)\end{aligned}$$

Từ (1), (2) và (3) ta suy ra:

$$\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{ab(a+b)}+\frac{1}{cb(c+b)}+\frac{1}{ac(a+c)}\ge\frac{87}{2}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A bằng $\frac{87}{2}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{3}$.$\square$

Bài 119. *Chứng minh rằng với mọi số thực không âm a,b,c thoả $a+b+c=1$ thì:*

$$\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{1}{b^2+c^2}+\frac{1}{c^2+a^2}\ge 10$$

Lời giải:

Giả sử $c=\min\{a,b,c\}$, ta có các đánh giá sau:

$$a^2+b^2\le\left(a^2+ac+\frac{c^2}{4}\right)+\left(b^2+bc+\frac{c^2}{4}\right)=\left(a+\frac{c}{2}\right)^2+\left(b+\frac{c}{2}\right)^2$$

$$b^2+c^2\le\left(b+\frac{c}{2}\right)^2$$

Tương tự:

$$c^2+a^2\le\left(a+\frac{c}{2}\right)^2$$

Do đó:

$$\begin{aligned}P&\ge\frac{1}{\left(a+\frac{c}{2}\right)^2+\left(b+\frac{c}{2}\right)^2}+\frac{1}{\left(b+\frac{c}{2}\right)^2}+\frac{1}{\left(a+\frac{c}{2}\right)^2}\\&=\frac{1}{\left(a+\frac{c}{2}\right)^2+\left(b+\frac{c}{2}\right)^2}+\frac{1}{4}\left[\frac{1}{\left(b+\frac{c}{2}\right)^2}+\frac{1}{\left(a+\frac{c}{2}\right)^2}\right]+\frac{3}{4}\left[\frac{1}{\left(b+\frac{c}{2}\right)^2}+\frac{1}{\left(a+\frac{c}{2}\right)^2}\right]\end{aligned}$$

Theo bất đẳng thức AM-GM, ta có:

$$\frac{1}{4}\left[\frac{1}{\left(b+\frac{c}{2}\right)^2}+\frac{1}{\left(a+\frac{c}{2}\right)^2}\right]\ge\frac{1}{4}.\frac{2}{\left(b+\frac{c}{2}\right)\left(a+\frac{c}{2}\right)}$$

$$\frac{3}{4}\left[\frac{1}{\left(b+\frac{c}{2}\right)^2}+\frac{1}{\left(a+\frac{c}{2}\right)^2}\right]\ge\frac{3}{4}.\frac{2}{\left(b+\frac{c}{2}\right)\left(a+\frac{c}{2}\right)}\ge\frac{3}{4}.\frac{8}{\left(a+b+\frac{c}{2}+\frac{c}{2}\right)^2}=\frac{6}{(a+b+c)^2}$$

Do đó:

$$P\ge\frac{1}{\left(a+\frac{c}{2}\right)^2+\left(b+\frac{c}{2}\right)^2}+\frac{1}{2}.\frac{1}{\left(b+\frac{c}{2}\right)\left(a+\frac{c}{2}\right)}+\frac{6}{(a+b+c)^2}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có:

$$P\ge\frac{4}{\left(a+b+\frac{c}{2}+\frac{c}{2}\right)^2}+\frac{6}{(a+b+c)^2}=\frac{10}{(a+b+c)^2}=10$$

Vậy bất đẳng thức đã được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $(a;b;c)=\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};0\right)$.$\square$

Bài 120. *Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $abc = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:*
$$P = \frac{a^3+b^3}{a^2+ab+b^2} + \frac{b^3+c^3}{b^2+bc+c^2} + \frac{c^3+a^3}{c^2+ac+c^2}$$

Lời giải:

Ta có:
$$P = \frac{(a+b)(a^2-ab+b^2)}{a^2+ab+b^2} + \frac{(b+c)(b^2-bc+c^2)}{b^2+bc+c^2} + \frac{(c+a)(c^2-ca+a^2)}{c^2+ca+a^2}$$
Ta sẽ chứng minh:
$$\frac{x^2-xy+y^2}{x^2+xy+y^2} \geq \frac{1}{3}$$
Thật vậy, bất đẳng thức trên tương đương với bất đẳng thức đúng sau:
$$2(x-y)^2 \geq 0$$
Áp dụng kết quả trên ta suy ra:
$$P \geq \frac{1}{3}(a+b+b+c+c+a) = \frac{2}{3}(a+b+c)$$
Lại theo bất đẳng thức AM-GM, ta có:
$$P \geq \frac{2}{3}.3\sqrt[3]{abc} = 2$$
Vậy giá trị nhỏ nhất của A bằng 2.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.□

Bài 121. *Cho x, y là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của:*
$$P = \frac{x^3+y^3+7xy(x+y)}{xy\sqrt{x^2+y^2}}$$

Lời giải:

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có:
$$\sqrt{2xy}.\sqrt{x^2+y^2} \leq \frac{(x+y)^2}{2}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{xy}.\sqrt{x^2+y^2} \leq \frac{(x+y)^2}{2\sqrt{2}}$$
Do đó:
$$P \geq \frac{2\sqrt{2}\left[x^3+y^3+7xy(x+y)\right]}{\sqrt{xy}(x+y)^2} = \frac{2\sqrt{2}(x+y)(x^2+y^2+6xy)}{\sqrt{xy}(x+y)^2} = \frac{2\sqrt{2}\left[(x+y)^2+4xy\right]}{\sqrt{xy}(x+y)}$$
Lại theo bất đẳng thức AM-GM, ta có:
$$P \geq \frac{8\sqrt{2}\sqrt{xy}(x+y)}{\sqrt{xy}(x+y)} = 8\sqrt{2}$$
Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $8\sqrt{2}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y$.□

Bài 122. *Cho x, y, z là các số thực dương. Chứng minh rằng:*
$$\frac{x^2}{(2y+z)(2z+y)} + \frac{y^2}{(2z+x)(2x+z)} + \frac{z^2}{(2x+y)(2y+x)} \geq \frac{1}{3}$$

Lời giải:

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có:
$$(2y+z)(2z+y) \leq \frac{1}{4}(3y+3z)^2 = \frac{9}{4}(y+z)^2$$

Tương tự:
$$(2z+x)(2x+z) \le \frac{9}{4}(z+x)^2$$
$$(2x+y)(2y+x) \le \frac{9}{4}(x+y)^2$$
Do đó:
$$\frac{x^2}{(2y+z)(2z+y)} + \frac{y^2}{(2z+x)(2x+z)} + \frac{z^2}{(2x+y)(2y+x)} \ge \frac{4}{9}\left[\frac{x^2}{(y+z)^2} + \frac{y^2}{(z+x)^2} + \frac{z^2}{(x+y)^2}\right]$$
Theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz. ta có:
$$\frac{4}{9}\left[\frac{x^2}{(y+z)^2} + \frac{y^2}{(z+x)^2} + \frac{z^2}{(x+y)^2}\right] \ge \frac{4}{27}\left(\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y}\right)^2$$
Bây giờ ta cần chứng minh $\frac{4}{27}\left(\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y}\right)^2 \ge \frac{1}{3}$ là bài toán được giải quyết.

Thật vậy, bất đẳng thức trên lại tương đương với bất đẳng thức đúng sau:
$$\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} \ge \frac{3}{2} \text{ (bất đẳng thức Nesbit)}$$
Vậy bất đẳng thức đã được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z$.$\square$

Nhận xét: Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức Nesbit như sau:

Ta có:
$$\begin{aligned}\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} &= (x+y+z)\left(\frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x}\right) - 3\\ &= \frac{1}{2}\left[(x+y)+(y+z)+(z+x)\right]\left(\frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x}\right) - 3\end{aligned}$$
Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta được:
$$\frac{1}{2}\left[(x+y)+(y+z)+(z+x)\right]\left(\frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x}\right) - 3 \ge \frac{9}{2} - 3 = \frac{3}{2}$$
Phép chứng minh hoàn tất.

Bài 123. *Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab + bc + ca = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:*
$$P = \frac{\sqrt{a^2+1}\sqrt{b^2+1}}{\sqrt{c^2+1}} + \frac{\sqrt{b^2+1}\sqrt{c^2+1}}{\sqrt{a^2+1}} + \frac{\sqrt{c^2+1}\sqrt{a^2+1}}{\sqrt{b^2+1}}$$

Lời giải:

Để ý rằng:
$$a^2+1 = (a+b)(c+a)$$
$$b^2+1 = (a+b)(b+c)$$
$$c^2+1 = (b+c)(c+a)$$
Khi đó biểu thức P viết lại thành:
$$P = (a+b) + (b+c) + (c+a) = 2(a+b+c)$$
Mặt khác, ta lại có:
$$(a+b+c)^2 \ge 3(ab+bc+ca) = 3$$
Do đó:
$$P \ge 2\sqrt{3}$$
Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $2\sqrt{3}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{\sqrt{3}}{3}$.$\square$

Bài 124. *Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:*
$$\frac{2\sqrt{3}a}{\sqrt{(a+b)(a+c)}}+\frac{6b}{\sqrt{(b+a)(b+c)}}+\frac{6c}{\sqrt{(c+a)(c+b)}}<5\sqrt{3}$$

Lời giải:

Viết bất đẳng thức cần chứng minh dưới dạng:
$$\frac{2a}{\sqrt{(a+b)(a+c)}}+\frac{2\sqrt{3}b}{\sqrt{(b+a)(b+c)}}+\frac{2\sqrt{3}c}{\sqrt{(c+a)(c+b)}}<5$$
Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có:
$$\frac{2a}{\sqrt{(a+b)(a+c)}}\le\frac{a}{a+b}+\frac{a}{a+c}$$
Tương tự:
$$\frac{2\sqrt{3}b}{\sqrt{(b+a)(b+c)}}\le\frac{b}{b+a}+\frac{3b}{b+c}$$
$$\frac{2\sqrt{3}c}{\sqrt{(c+a)(c+b)}}\le\frac{c}{c+a}+\frac{3c}{c+b}$$
Cộng các bất đẳng thức trên theo vế, ta được:
$$\frac{2a}{\sqrt{(a+b)(a+c)}}+\frac{2\sqrt{3}b}{\sqrt{(b+a)(b+c)}}+\frac{2\sqrt{3}c}{\sqrt{(c+a)(c+b)}}$$
$$\le\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+a}+\frac{c}{c+a}+\frac{a}{a+c}+\frac{3b}{b+c}+\frac{3c}{c+b}=5$$
Đẳng thức không xảy ra. Do đó:
$$\frac{2a}{\sqrt{(a+b)(a+c)}}+\frac{2\sqrt{3}b}{\sqrt{(b+a)(b+c)}}+\frac{2\sqrt{3}c}{\sqrt{(c+a)(c+b)}}<5$$
Vậy bất đẳng thức đã được chứng minh.□

Bài 125. *Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:*
$$\frac{1}{a(a+b)}+\frac{1}{b(b+c)}+\frac{1}{c(c+a)}\ge\frac{27}{2(a+b+c)^2}$$

Lời giải:

Áp dụng bất đẳng AM-GM, ta có:
$$\frac{1}{a(a+b)}+\frac{1}{b(b+c)}+\frac{1}{c(c+a)}\ge 3\sqrt[3]{\frac{1}{abc(a+b)(b+c)(c+a)}}\qquad(1)$$
$$abc\le\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3\qquad(2)$$
$$(a+b)(b+c)(c+a)\le\left[\frac{2(a+b+c)}{3}\right]^3\qquad(3)$$
Từ (1), (2) và (3) suy ra:
$$\frac{1}{a(a+b)}+\frac{1}{b(b+c)}+\frac{1}{c(c+a)}\ge\frac{27}{2(a+b+c)^2}$$
Vậy bất đẳng thức đã được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.□

Bài 126. *Cho a, b là các số thực dương. Chứng minh rằng:*
$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{4}{a^2+b^2}\ge\frac{32(a^2+b^2)}{(a+b)^4}$$

Lời giải:

Ta có:

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{4}{a^2+b^2}=\frac{(a^2+b^2)^2}{a^2b^2(a^2+b^2)}+\frac{4a^2b^2}{a^2b^2(a^2+b^2)}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có:

$$\frac{(a^2+b^2)^2}{a^2b^2(a^2+b^2)}+\frac{4a^2b^2}{a^2b^2(a^2+b^2)}\ge\frac{(a^2+b^2+2ab)^2}{2a^2b^2(a^2+b^2)}=\frac{(a+b)^4}{2a^2b^2(a^2+b^2)}$$

Ta cần chứng minh:

$$\frac{(a+b)^4}{2a^2b^2(a^2+b^2)}\ge\frac{32(a^2+b^2)}{(a+b)^4}$$

Thật vậy, bất đẳng thức trên tương đương với:

$$(a+b)^4\ge 8ab(a^2+b^2)$$
$$\Leftrightarrow\left[(a^2+b^2)+2ab\right]^2\ge 8ab(a^2+b^2)$$
$$\Leftrightarrow (a-b)^4\ge 0$$

Bất đẳng thức cuối luôn đúng với mọi a,b.

Vậy bất đẳng thức đã được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b$.□

Bài 127. *Cho x,y,z là các số thực dương thỏa mãn $x+y+z=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:*

$$P=x^4+2y^4+3z^4$$

Lời giải:

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có:

$$(x^4+2y^4+3z^4)\left(1+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)\ge\left(x^2+\sqrt[3]{2}y^2+\sqrt[3]{3}z^2\right)^2 \qquad (1)$$
$$\left(x^2+\sqrt[3]{2}y^2+\sqrt[3]{3}z^2\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)\ge(x+y+z)^2=9 \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$P\ge\frac{81}{\left(1+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)^3}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $\dfrac{81}{\left(1+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)^3}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}x=\dfrac{3\sqrt[3]{6}}{\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}}\\ y=\dfrac{3\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}}\\ z=\dfrac{3\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}}\end{cases}$.□

Bài 128. *Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:*

$$A=\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$$

Lời giải:

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có:

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\ge\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}$$

Do đó:

$$A \geq \frac{1}{a^2+b^2+c^2} + \frac{3^2}{9ab} + \frac{3^2}{9bc} + \frac{3^2}{9ca}$$
Liên tiếp sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta được:
$$\begin{aligned} A &\geq \frac{1}{a^2+b^2+c^2} + \frac{9^2}{9(ab+bc+ca)} \\ &\geq \frac{10^2}{a^2+b^2+c^2+9(ab+bc+ca)} \\ &= \frac{10^2}{(a+b+c)^2+7(ab+bc+ca)} \end{aligned}$$
Theo bất đẳng thức AM-GM, ta có:
$$7(ab+bc+ca) \leq \frac{7}{3}(a+b+c)^2 = 21$$
Do đó:
$$A \geq \frac{10^2}{3^2+21} = \frac{10}{3}$$
Vậy giá trị nhỏ nhất của A bằng $\frac{10}{3}$.
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.$\square$

Bài 129. *Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=3$.*
Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:
$$A = a^3+b^3+c^3+a^2+b^2+c^2+abc$$

Lời giải:
Xét đẳng thức sau:
$$a^3+b^3+c^3-3abc = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$
Suy ra:
$$abc = \frac{1}{3}(a^3+b^3+c^3) - (a^2+b^2+c^2) + ab+bc+ca$$
Do đó:
$$\begin{aligned} A &= \frac{4}{3}(a^3+b^3+c^3) + ab+bc+ca \\ &\geq \frac{4}{3}(a^2+b^2+c^2) + ab+bc+ca \\ &= \frac{1}{2}(a+b+c)^2 + \frac{5}{6}(a^2+b^2+c^2) \\ &= \frac{9}{2} + \frac{5}{6}(a^2+b^2+c^2) \end{aligned}$$
Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có:
$$a^2+b^2+c^2 \geq \frac{(a+b+c)^2}{3} = 3$$
Từ đó suy ra:
$$A \geq 7$$
Vậy giá trị nhỏ nhất của A bằng 7.
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.$\square$

Bài 130. *Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=3$.*
Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:
$$A = \frac{a^3}{a^2+3ab+b^2} + \frac{b^3}{b^2+3bc+c^2} + \frac{c^3}{c^2+3ca+a^2}$$

Lời giải:

Biến đổi và sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có:
$$\frac{a^3}{a^2+3ab+b^2}=a-\frac{ab(3a+b)}{a^2+3ab+b^2}\geq a-\frac{ab(3a+b)}{5ab}=\frac{2a-b}{5}$$
Tương tự:
$$\frac{b^3}{b^2+3bc+c^2}\geq\frac{2b-c}{5}$$
$$\frac{c^3}{c^2+3ca+a^2}\geq\frac{2c-a}{5}$$
Cộng ba bất đẳng thức trên theo vế, ta được:
$$A\geq\frac{a+b+c}{5}=\frac{3}{5}$$
Vậy giá trị nhỏ nhất của A bằng $\frac{3}{5}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.$\square$

Bài 131. *Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng:*
$$\frac{2a^2}{a^2+b^2}+\frac{2b^3}{b^2+c^2}+\frac{2c^3}{c^2+a^2}\geq a+b+c$$

Lời giải:

Biến đổi và sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có:
$$\frac{2a^3}{a^2+b^2}=2a-\frac{2ab^2}{a^2+b^2}\geq 2a-\frac{2ab^2}{2ab}=2a-b$$
Tương tự:
$$\frac{2b^3}{b^2+c^2}\geq 2b-c$$
$$\frac{2c^3}{c^2+a^2}\geq 2c-a$$
Cộng ba bất đẳng thức trên theo vế, ta được:
$$\frac{2a^2}{a^2+b^2}+\frac{2b^3}{b^2+c^2}+\frac{2c^3}{c^2+a^2}\geq a+b+c$$
Vậy bất đẳng thức đã được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.$\square$

Bài 132. *Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng:*
$$\frac{1}{a^2+bc}+\frac{1}{b^2+ca}+\frac{1}{c^2+ab}\leq\frac{a+b+c}{abc}$$

Lời giải:

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có:
$$a^2+bc\geq 2a\sqrt{bc}$$
$$b^2+ca\geq 2b\sqrt{ca}$$
$$c^2+ab\geq 2c\sqrt{ab}$$
Do đó:
$$\frac{1}{a^2+bc}+\frac{1}{b^2+ca}+\frac{1}{c^2+ab}\leq\frac{1}{2a\sqrt{bc}}+\frac{1}{2b\sqrt{ca}}+\frac{1}{2c\sqrt{ab}}=\frac{\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}}{2abc}$$
Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta lại có:
$$\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}\leq a+b+c$$
Từ đó suy ra:
$$\frac{1}{a^2+bc}+\frac{1}{b^2+ca}+\frac{1}{c^2+ab}\leq\frac{a+b+c}{abc}$$
Vậy bất đẳng thức đã được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.$\square$

Bài 133. *Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng:*
$$\frac{\sqrt{a}}{2+b\sqrt{a}}+\frac{\sqrt{b}}{2+c\sqrt{b}}+\frac{\sqrt{c}}{2+a\sqrt{c}}\geq 1$$

Lời giải:

Đặt $\sqrt{a}=\dfrac{x}{y}$, $\sqrt{b}=\dfrac{y}{z}$, $\sqrt{c}=\dfrac{z}{x}$

Khi đó vế trái của bất đẳng thức cần chứng minh trở thành:
$$P=\frac{(zx)^2}{(xy)^2+2xyz^2}+\frac{(xy)^2}{(yz)^2+2x^2yz}+\frac{(yz)^2}{(zx)^2+2xy^2z}$$
Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có:
$$\begin{aligned}P&=\frac{(zx)^2}{(xy)^2+2xyz^2}+\frac{(xy)^2}{(yz)^2+2x^2yz}+\frac{(yz)^2}{(zx)^2+2xy^2z}\\&\geq\frac{(xy+yz+zx)^2}{(xy)^2+(yz)^2+(zx)^2+2xyz(x+y+z)}=1\end{aligned}$$
Vậy bất đẳng thức đã được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.$\square$

Bài 134. *Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x, y, z \in (0;1)$ và $xyz=(1-x)(1-y)(1-z)$. Chứng minh rằng:*
$$\frac{x^2+y^4}{y}+\frac{y^2+z^4}{z}+\frac{z^2+x^4}{x}\geq\frac{15}{8}$$

Lời giải:

Đặt $a=\dfrac{1-x}{x}$, $b=\dfrac{1-y}{y}$, $c=\dfrac{1-z}{z}$. Từ điều kiện ta có $abc=1$ và $a,b,c>0$.

Nhận xét:

Trong 3 số a, b, c có tích bằng 1 luôn tồn tại 2 số nằm cùng phía so với 1. Giả sử 2 số đó là a và b. Khi đó:
$$(a-1)(b-1)\geq 0\Leftrightarrow a+b\leq 1+ab=\frac{1+c}{c}$$
Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có:
$$\begin{aligned}\frac{1}{(1+a)^2}+\frac{1}{(1+b)^2}&\geq\frac{1}{(1+ab)\left(1+\dfrac{a}{b}\right)}+\frac{1}{(1+ab)\left(1+\dfrac{b}{a}\right)}\\&=\frac{b}{(1+ab)(a+b)}+\frac{a}{(1+ab)(a+b)}\\&=\frac{1}{1+ab}=\frac{c}{c+1}\end{aligned}$$
Suy ra:
$$\begin{aligned}x^2+y^2+z^2&=\frac{1}{(1+a)^2}+\frac{1}{(1+b)^2}+\frac{1}{(1+c)^2}\\&\geq\frac{c}{c+1}+\frac{1}{(c+1)^2}\\&=\frac{(c-1)^2}{4(c+1)^2}+\frac{3}{4}\geq\frac{3}{4}\end{aligned}$$
Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có:

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x} &\geq \frac{(x^2+y^2+z^2)^2}{x^2y+y^2z+z^2x}\\ &\geq \frac{(x^2+y^2+z^2)^2}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)}}\\ &\geq \frac{(x^2+y^2+z^2)^2}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)\dfrac{(x^2+y^2+z^2)}{3}}}\\ &= \sqrt{3(x^2+y^2+z^2)} \geq \frac{3}{2} \qquad (1)\end{aligned}$$

Mặt khác, theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta cũng có:

$$(x^3+y^3+z^3)(x+y+z) \geq (x^2+y^2+z^2)^2 \qquad (*)$$

$$3(x^2+y^2+z^2) \geq (x+y+z)^2 \qquad (**)$$

Từ (*) và (**) ta có:

$$3(x^3+y^3+z^3)^2 \geq (x^2+y^2+z^2)^3 \geq \left(\frac{3}{4}\right)^3$$

Suy ra:

$$x^3+y^3+z^3 \geq \frac{3}{8} \qquad (2)$$

Cộng (1) và (2) theo vế ta được:

$$\frac{x^2+y^4}{y}+\frac{y^2+z^4}{z}+\frac{z^2+x^4}{x} \geq \frac{15}{8}$$

Vậy bất đẳng thức đã được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=\dfrac{1}{2}$.□

Bài 135.

a) *Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng:*

$$(a+b)(a+c) \geq 2\sqrt{abc(a+b+c)}$$

b) *Cho a,b,c là các số thực không âm. Chứng minh rằng:*

$$3a^3+17b^3 \geq 18ab^2$$

Lời giải:

a) Theo bất đẳng thức AM-GM, ta có:

$$\begin{aligned}(a+b)(a+c) &= (a^2+ac+ab)+bc\\ &= a(a+b+c)+bc\\ &\geq 2\sqrt{abc(a+b+c)}\end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức đã được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a(a+b+c)=bc$. Cụ thể $a=1, b=2, c=3$.□

b) Theo bất đẳng thức AM-GM, ta có:

$$3a^3+17b^3 = 3a^3+8b^3+9b^3 \geq 3\sqrt[3]{216a^3b^6} = 18ab^2$$

Vậy bất đẳng thức đã được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=0$.□

Bài 136. *Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn $a,b,c>1$ và $abc=8$.*

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}$$

Lời giải:

Trước hết, ta chứng minh:

$$\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}\ge\frac{2}{1+\sqrt{ab}} \text{ với mọi } a,b>1$$

Thật vậy, bất đẳng thức trên tương đương với bất đẳng thức đúng sau:

$$\frac{1}{1+a}-\frac{1}{1+\sqrt{ab}}+\frac{1}{1+b}-\frac{1}{1+\sqrt{ab}}\ge 0\Leftrightarrow\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2(\sqrt{ab}-1)}{(1+a)(1+b)(1+\sqrt{ab})}\ge 0 \text{ với mọi } a,b>1$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b$.

Áp dụng kết quả trên, ta có:

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}+\frac{1}{1+\sqrt[3]{abc}}&\ge\frac{2}{1+\sqrt{ab}}+\frac{2}{1+\sqrt[6]{abc^4}}\\&\ge\frac{4}{1+\sqrt[12]{a^4b^4c^4}}=\frac{4}{1+\sqrt[3]{abc}}\end{aligned}$$

Từ đó suy ra:

$$P=\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}\ge\frac{3}{1+\sqrt[3]{abc}}=1$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 1.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=2$.□

Bài 137. *Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $abc=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:*

$$F=\frac{\sqrt{a^2+1}+\sqrt{b^2+1}+\sqrt{c^2+1}}{a+b+c}$$

Lời giải:

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có:

$$\sqrt{a^2+1}+\sqrt{2a}\le\sqrt{2(a^2+1+2a)}=\sqrt{2}(a+1)$$

Tương tự:

$$\sqrt{b^2+1}+\sqrt{2b}\le\sqrt{2}(b+1)$$
$$\sqrt{c^2+1}+\sqrt{2c}\le\sqrt{2}(c+1)$$

Cộng ba bất đẳng thức trên theo vế, ta được:

$$\sqrt{a^2+1}+\sqrt{b^2+1}+\sqrt{c^2+1}+\sqrt{2}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)\le\sqrt{2}(3+a+b+c)$$
$$\Leftrightarrow\sqrt{a^2+1}+\sqrt{b^2+1}+\sqrt{c^2+1}\le\sqrt{2}(3+a+b+c)-\sqrt{2}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)$$

Mặt khác, theo bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\ge 3\sqrt[6]{abc}=3$$

Do đó:

$$\sqrt{a^2+1}+\sqrt{b^2+1}+\sqrt{c^2+1}\le\sqrt{2}(a+b+c)$$
$$\Leftrightarrow\frac{\sqrt{a^2+1}+\sqrt{b^2+1}+\sqrt{c^2+1}}{a+b+c}\le\sqrt{2}$$

Vậy giá trị lớn nhất của F bằng $\sqrt{2}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.□

Bài 138. *Cho a,b,c là độ dài ba cạnh của tam giác. Chứng minh rằng:*

$$\frac{a}{3a-b+c}+\frac{b}{3b-c+a}+\frac{c}{3c-a+b}\ge 1$$

Lời giải:

Kí hiệu:

$$P=\frac{a}{3a-b+c}+\frac{b}{3b-c+a}+\frac{c}{3c-a+b}$$

Ta có:

$$
\begin{aligned}
Q = 4P &= \frac{4a}{3a-b+c} + \frac{4b}{3b-c+a} + \frac{4c}{3c-a+b} \\
&= \frac{(3a-b+c)+(a+b-c)}{3a-b+c} + \frac{(3b-c+a)+(b+c-a)}{3b-c+a} + \frac{(3c-a+b)+(c+a-b)}{3c-a+b} \\
&= 3 + \frac{a+b-c}{3a-b+c} + \frac{b+c-a}{3b-c+a} + \frac{c+a-b}{3c-a+b} \\
&= 3 + \frac{(a+b-c)^2}{(a+b-c)(3a-b+c)} + \frac{(b+c-a)^2}{(b+c-a)(3b-c+a)} + \frac{(c+a-b)^2}{(c+a-b)(3c-a+b)}
\end{aligned}
$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có:

$$
\begin{aligned}
Q &\geq 3 + \frac{(a+b+c)^2}{(a+b-c)(3a-b+c)+(b+c-a)(3b-c+a)+(c+a-b)(3c-a+b)} \\
&= 3 + \frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)} = 4
\end{aligned}
$$

Suy ra:

$$P \geq 1 \text{ hay } \frac{a}{3a-b+c} + \frac{b}{3b-c+a} + \frac{c}{3c-a+b} \geq 1$$

Vậy bất đẳng thức đã được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.$\square$

Bài 139. *Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng:*

$$\frac{a^2}{a+b^2} + \frac{b^2}{b+c^2} + \frac{c^2}{c+a^2} \geq \frac{3}{2}$$

<u>Lời giải:</u>

Biến đổi và sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có:

$$\frac{a^2}{a+b^2} = a - \frac{ab^2}{a+b^2} \geq a - \frac{ab^2}{2b\sqrt{a}} = a - \frac{b\sqrt{a}}{2}$$

Tương tự:

$$\frac{b^2}{b+c^2} \geq b - \frac{c\sqrt{b}}{2}$$
$$\frac{c^2}{c+a^2} \geq c - \frac{a\sqrt{c}}{2}$$

Cộng ba bất đẳng thức trên theo vế, ta được:

$$\frac{a^2}{a+b^2} + \frac{b^2}{b+c^2} + \frac{c^2}{c+a^2} \geq a+b+c - \frac{1}{2}\left(b\sqrt{a} + c\sqrt{b} + a\sqrt{c}\right)$$

Bây giờ ta cần chứng minh $b\sqrt{a} + c\sqrt{b} + a\sqrt{c} \leq 3$ là bài toán được giải quyết.

Thật vậy, theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có:

$$
\begin{aligned}
b\sqrt{a} + c\sqrt{b} + a\sqrt{c} &= \sqrt{b}\sqrt{ab} + \sqrt{c}\sqrt{bc} + \sqrt{a}\sqrt{ca} \\
&\leq \sqrt{(a+b+c)(ab+bc+ca)} \\
&\leq \sqrt{(a+b+c)\frac{(a+b+c)^2}{3}} = 3
\end{aligned}
$$

Do đó:

$$\frac{a^2}{a+b^2} + \frac{b^2}{b+c^2} + \frac{c^2}{c+a^2} \geq \frac{3}{2}$$

Vậy bất đẳng thức đã được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chi khi $a = b = c = 1$.$\square$

Bài 140. *Cho a, b, c, d là 4 số thực dương thỏa mãn $a + b + c + d = 1$. Chứng minh rằng:*

$$\frac{1}{a^4+b^4+c^4+abcd} + \frac{1}{b^4+c^4+d^4+abcd} + \frac{1}{c^4+d^4+a^4+abcd} + \frac{1}{d^4+a^4+b^4+abcd} \leq \frac{1}{abcd}$$

<u>Lời giải:</u>

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có:

$$a^4+b^4+c^4 \geq a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$$
$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 \geq abc(a+b+c)$$

Do đó:

$$a^4+b^4+c^4 \geq abc(a+b+c)$$
$$\Leftrightarrow a^4+b^4+c^4+abcd \geq abc(a+b+c+d)$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{a^4+b^4+c^4+abcd} \leq \frac{d}{abcd}$$

Chứng minh tương tự ta có:

$$\frac{1}{b^4+c^4+d^4+abcd} \leq \frac{a}{abcd}$$
$$\frac{1}{c^4+d^4+a^4+abcd} \leq \frac{b}{abcd}$$
$$\frac{1}{d^4+a^4+b^4+abcd} \leq \frac{c}{abcd}$$

Cộng các bất đẳng thức trên theo vế, ta được:

$$\frac{1}{a^4+b^4+c^4+abcd}+\frac{1}{b^4+c^4+d^4+abcd}+\frac{1}{c^4+d^4+a^4+abcd}+\frac{1}{d^4+a^4+b^4+abcd} \leq \frac{1}{abcd}$$

Vậy bất đẳng thức đã được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=d=\dfrac{1}{4}$.□

Bài 141. *Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:*

$$\frac{a}{a^3+b^2+c}+\frac{b}{b^3+c^2+a}+\frac{c}{c^3+a^2+b} \leq 1$$

Lời giải:

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có:

$$\frac{a}{a^3+b^2+c}=\frac{a\left(\dfrac{1}{a}+1+c\right)}{(a^3+b^2+c)\left(\dfrac{1}{a}+1+c\right)} \leq \frac{a\left(\dfrac{1}{a}+1+c\right)}{(a+b+c)^2}=\frac{1+a+ca}{9}$$

Tương tự:

$$\frac{b}{b^3+c^2+a} \leq \frac{1+b+ab}{9}$$
$$\frac{c}{c^3+a^2+b} \leq \frac{1+c+bc}{9}$$

Cộng ba bất đẳng thức trên theo vế, ta được:

$$\frac{a}{a^3+b^2+c}+\frac{b}{b^3+c^2+a}+\frac{c}{c^3+a^2+b} \leq \frac{3+a+b+c+ab+bc+ca}{9}$$

Mặt khác, theo bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$ab+bc+ca \leq \frac{1}{3}(a+b+c)^2=3$$

Do đó:

$$\frac{a}{a^3+b^2+c}+\frac{b}{b^3+c^2+a}+\frac{c}{c^3+a^2+b} \leq 1$$

Vậy bất đẳng thức đã được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.□

Bài 142. *Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a+b+c=3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:*

$$P = a\sqrt{b} + b\sqrt{c} + c\sqrt{a} - \sqrt{abc}$$

Lời giải:

Đặt $x=\sqrt{a}$, $y=\sqrt{b}$, $z=\sqrt{c}$.

Điều kiện trở thành $x^2+y^2+z^2=3$ và $P=x^2y+y^2z+z^2x-xyz$.

Dễ thấy $P \geq 3$ theo bất đẳng thức AM-GM.

Không mất tính tổng quát, giả sử y là số nằm giữa x và z.

Khi đó ta có:

$$z(y-x)(y-z) \leq 0 \Leftrightarrow y^2z+z^2x-xyz \leq yz^2$$

Do đó:

$$P \leq yx^2+yz^2 = y(x^2+z^2)$$

Mặt khác, theo bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$2y^2(x^2+z^2)(x^2+z^2) \leq \left[\frac{2(x^2+y^2+z^2)}{3}\right]^3 = 8$$

Từ đó suy ra:

$$P \leq y(x^2+z^2) \leq 2$$

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng 2.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\left[\begin{array}{l} x=y=z \\ \begin{cases} z=0 \\ x^2=2y^2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=b=c=1 \\ \begin{cases} a=2 \\ b=1 \\ c=0 \end{cases} \end{array}\right.$ và các hoán vị.□

Bài 143. *Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:*

$$P = \frac{1}{(1+a)^2} + \frac{1}{(1+b)^2} + \frac{1}{(1+c)^2} + \frac{2}{(1+a)(1+b)(1+c)}$$

Lời giải:

Trong ba số a, b, c có tích bằng 1 luôn tồn tại hai số cùng nằm một phía so với 1.

Giả sử hai số đó là a và b.

Khi đó ta có:

$$(a-1)(b-1) \geq 0 \Leftrightarrow a+b \leq 1+ab = \frac{1+c}{c}$$

Suy ra:

$$\begin{aligned}(1+a)(1+b)(1+c) &= (1+a+b+ab)(1+c) \\ &\leq 2(1+ab)(1+c) = \frac{2(1+c)^2}{c}\end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có:

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1+a)^2} + \frac{1}{(1+b)^2} &\geq \frac{1}{(1+ab)\left(1+\dfrac{a}{b}\right)} + \frac{1}{(1+ab)\left(1+\dfrac{b}{a}\right)} \\ &= \frac{b}{(1+ab)(a+b)} + \frac{a}{(1+ab)(a+b)} \\ &= \frac{1}{1+ab} = \frac{c}{c+1}\end{aligned}$$

Do đó:

$$P \geq \frac{c}{c+1} + \frac{1}{(c+1)^2} + \frac{c}{(c+1)^2} = \frac{c(c+1)+1+c}{(c+1)^2} = 1$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 1.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1.\square$

Bài 144. *Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn $\min\{a+b; b+c; c+a\} > 0$ và $a^2+b^2+c^2 = 2(ab+bc+ca)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:*

$$P = \sqrt{\frac{ab}{a^2+b^2}} + \sqrt{\frac{bc}{b^2+c^2}} + \sqrt{\frac{ca}{c^2+a^2}}$$

Lời giải:

Ta có:

$$\sqrt{2}P = \sqrt{\frac{2ab}{a^2+b^2}} + \sqrt{\frac{2bc}{b^2+c^2}} + \sqrt{\frac{2ca}{c^2+a^2}}$$
$$= \frac{\sqrt{2ab(a^2+b^2)}}{a^2+b^2} + \frac{\sqrt{2bc(b^2+c^2)}}{b^2+c^2} + \frac{\sqrt{2ca(c^2+a^2)}}{c^2+a^2}$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có:

$$\frac{\sqrt{2ab(a^2+b^2)}}{a^2+b^2} \geq \frac{2ab}{a^2+b^2}$$

Tương tự:

$$\frac{\sqrt{2bc(b^2+c^2)}}{b^2+c^2} \geq \frac{2bc}{b^2+c^2}$$
$$\frac{\sqrt{2ca(c^2+a^2)}}{c^2+a^2} \geq \frac{2ca}{c^2+a^2}$$

Cộng ba bất đẳng thức trên theo vế, ta được:

$$\sqrt{2}P \geq \frac{2ab}{a^2+b^2} + \frac{2bc}{b^2+c^2} + \frac{2ca}{c^2+a^2}$$

Suy ra:

$$Q = \sqrt{2}P + 3 = \frac{(a+b)^2}{a^2+b^2} + \frac{(b+c)^2}{b^2+c^2} + \frac{(c+a)^2}{c^2+a^2}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có:

$$Q \geq \frac{(a+b+b+c+c+a)^2}{2(a^2+b^2+c^2)}$$
$$= \frac{2\left[a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)\right]}{a^2+b^2+c^2}$$
$$= \frac{2.4(ab+bc+ca)}{2(ab+bc+ca)} = 4$$

Do đó:

$$P \geq \frac{4-3}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $(a, b, c) = (x, x, 0)$ và các hoán vị.$\square$

Bài 145. *Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:*

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} + \sqrt{\frac{b^2+c^2}{2}} + \sqrt{\frac{c^2+a^2}{2}}$$

Lời giải:

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có:

$$\begin{aligned}\left(\frac{a^2}{b} - a + b\right) + b &= \frac{a^2 - ab + b^2}{b} + b \\ &\geq 2\sqrt{a^2 + b^2 - ab} \\ &= \sqrt{a^2 + b^2 - ab} + \sqrt{a^2 - ab + b^2} \\ &= \sqrt{a^2 + b^2 - ab} + \sqrt{\frac{3}{4}(a-b)^2 + \frac{1}{4}(a+b)^2} \\ &\geq \sqrt{a^2 + b^2 - \frac{a^2 + b^2}{2}} + \frac{1}{2}(a+b) \\ &= \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} + \frac{a+b}{2}\end{aligned}$$

Do đó:

$$\frac{a^2}{b} \geq \frac{3(a-b)}{2} + \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$$

Chứng minh tương tự ta có:

$$\frac{b^2}{c} \geq \frac{3(b-c)}{2} + \sqrt{\frac{b^2 + c^2}{2}}$$
$$\frac{c^2}{a} \geq \frac{3(c-a)}{2} + \sqrt{\frac{c^2 + a^2}{2}}$$

Cộng ba bất đẳng thức trên theo vế, ta được:

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} + \sqrt{\frac{b^2 + c^2}{2}} + \sqrt{\frac{c^2 + a^2}{2}}$$

Vậy bất đẳng thức đã được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.□

Bài 146. *Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a + b + c = 3$.*
Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = a\sqrt{a} + b\sqrt{b} + c\sqrt{c} - \sqrt{abc}$$

Lời giải:

Đặt $x = \sqrt{a}$, $y = \sqrt{b}$, $z = \sqrt{c}$.

Điều kiện đã cho trở thành $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ và $P = x^3 + y^3 + z^3 - xyz$.

Dễ thấy $P \geq 0$ theo bất đẳng thức AM-GM.

Không mất tính tổng quát giả sử $x \geq y \geq z$.

Khi đó ta có:

$$z^2 \leq xy \text{ , } x^2 + y^2 = 3 - z^2 \leq 3$$

Suy ra:

$$P = x^3 + y^3 + z(z^2 - xy) \leq x^3 + y^3$$

Mặt khác, theo bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$(x^3 + y^3)^2 = (x^2 + 2xy + y^2)(x^2 - xy + y^2)^2 \leq \left[\frac{3(x^2 + y^2)}{3}\right]^3 \leq 27$$

Suy ra:

$$P = x^3 + y^3 \leq 3\sqrt{3}$$

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng $3\sqrt{3}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $(a, b, c) = (0, 0, 3)$ và các hoán vị.□

Bài 147. *Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:*
$$\frac{(a+b+c)^2}{3} \geq a\sqrt{bc} + b\sqrt{ca} + c\sqrt{ab}$$

Lời giải:

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có:
$$\begin{aligned}\frac{(a+b+c)^2}{3} &\geq ab+bc+ca \\ &= \frac{ab+ac}{2} + \frac{bc+ba}{2} + \frac{ca+cb}{2} \\ &\geq a\sqrt{bc} + b\sqrt{ca} + c\sqrt{ab}\end{aligned}$$
Vậy bất đẳng thức đã được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.□

Bài 148. *Cho a, b là các số thực thỏa mãn $a, b > 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:*
$$P = \frac{a^2}{b-1} + \frac{b^2}{a-1}$$

Lời giải:

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có:
$$\frac{a^2}{b-1} + 4(b-1) \geq 4a$$
$$\frac{b^2}{a-1} + 4(a-1) \geq 4b$$
Cộng hai bất đẳng thức trên theo vế, ta được:
$$\frac{a^2}{b-1} + \frac{b^2}{a-1} \geq 8$$
Vậy giá trị lớn nhất của P bằng 8.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = 2$.□

Bài 149. *Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = 1$.*

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:
$$P = \sqrt{\frac{ab}{a+b+2c}} + \sqrt{\frac{bc}{b+c+2a}} + \sqrt{\frac{ca}{c+a+2b}}$$

Lời giải:

Cách 1.

Đặt $x = \sqrt{a}$, $y = \sqrt{b}$, $z = \sqrt{c}$.

Điều kiện đã cho trở thành $x+y+z = 1$ và $P = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2+2z^2}} + \dfrac{yz}{\sqrt{y^2+z^2+2x^2}} + \dfrac{zx}{\sqrt{z^2+x^2+2y^2}}$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có:
$$\begin{aligned}P = &\frac{xy}{\frac{3}{2}\sqrt{\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{2}{9}\right)(x^2+y^2+2z^2)}} + \frac{yz}{\frac{3}{2}\sqrt{\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{2}{9}\right)(y^2+z^2+2x^2)}} \\ &+ \frac{zx}{\frac{3}{2}\sqrt{\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{2}{9}\right)(z^2+x^2+2y^2)}}\end{aligned}$$

$$\le \frac{xy}{\frac{3}{2}\left(\frac{x}{3}+\frac{y}{3}+\frac{2z}{3}\right)}+\frac{yz}{\frac{3}{2}\left(\frac{y}{3}+\frac{z}{3}+\frac{2x}{3}\right)}+\frac{zx}{\frac{3}{2}\left(\frac{z}{3}+\frac{x}{3}+\frac{2y}{3}\right)}$$
$$\le \frac{1}{4}\left(\frac{2xy}{z+x}+\frac{2xy}{y+z}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{2yz}{y+z}+\frac{2yz}{x+y}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{2zx}{x+y}+\frac{2zx}{y+z}\right)$$
$$=\frac{x+y+z}{2}=\frac{1}{2}$$
Vậy giá trị lớn nhất của P bằng $\frac{1}{2}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=\frac{1}{3}\Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{9}$.□

Cách 2.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có:
$$\frac{1}{\sqrt{4(a+b+2c)}}\le\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+2\sqrt{c}}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{c}}+\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}\right)$$
Suy ra:
$$\sqrt{\frac{ab}{a+b+2c}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{c}}+\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}\right)$$
Chứng minh tương tự ta có:
$$\sqrt{\frac{bc}{b+c+2a}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{bc}}{\sqrt{b}+\sqrt{a}}+\frac{\sqrt{bc}}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}\right)$$
$$\sqrt{\frac{ca}{c+a+2b}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{ca}}{\sqrt{c}+\sqrt{b}}+\frac{\sqrt{ca}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)$$
Cộng ba bất đẳng thức trên theo vế, ta được:
$$P\le\frac{1}{2}(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})=\frac{1}{2}$$
Vậy giá trị lớn nhất của P bằng $\frac{1}{2}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{9}$.□

Bài 150. *Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $a^4+b^4+c^4\le 3$. Chứng minh rằng:*
$$\frac{\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}}{\sqrt[3]{\frac{1}{(a+b)^3}+\frac{1}{(b+c)^3}+\frac{1}{(c+a)^3}}}\le 2\sqrt{2}\sqrt[3]{9}$$

Lời giải:

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có:
$$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}\le\sqrt{6\left(a^2+b^2+c^2\right)}\le\sqrt{6\sqrt{3\left(a^4+b^4+c^4\right)}}\le 3\sqrt{2}\qquad(1)$$
Mặt khác, ta có:
$$\left[(x^3+y^3+z^3)(x+y+z)\right]^2\ge(x^2+y^2+z^2)^4\qquad(*)$$
$$x^2+y^2+z^2\ge\frac{1}{3}(x+y+z)^2\qquad(**)$$
Từ (*) và (**) suy ra:
$$\left(x^3+y^3+z^3\right)^2\ge\frac{1}{3}\left(x^2+y^2+z^2\right)^3$$
Áp dụng kết quả trên và sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có:

$$\begin{aligned}
\left[\frac{1}{(a+b)^3}+\frac{1}{(b+c)^3}+\frac{1}{(c+a)^3}\right]^2 &\ge \frac{1}{3}\left[\frac{1}{(a+b)^2}+\frac{1}{(b+c)^2}+\frac{1}{(c+a)^2}\right]^3\\
&\ge \frac{1}{3}\left[\frac{1}{2\left(a^2+b^2\right)}+\frac{1}{2\left(b^2+c^2\right)}+\frac{1}{2\left(c^2+a^2\right)}\right]^3\\
&\ge \frac{1}{3}\left[\frac{9}{4\left(a^2+b^2+c^2\right)}\right]^3\\
&\ge \frac{1}{3}\left[\frac{9}{4\sqrt{3\left(a^4+b^4+c^4\right)}}\right]^3\\
&\ge \frac{9}{64}
\end{aligned}$$

Suy ra:

$$\sqrt[3]{\frac{1}{(a+b)^3}+\frac{1}{(b+c)^3}+\frac{1}{(c+a)^3}} \ge \frac{\sqrt[3]{3}}{2} \qquad (2)$$

Nhân (1) và (2) ta được:

$$\frac{\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}}{\sqrt[3]{\frac{1}{(a+b)^3}+\frac{1}{(b+c)^3}+\frac{1}{(c+a)^3}}} \le \frac{3\sqrt{2}}{\frac{\sqrt[3]{3}}{2}} = 2\sqrt{2}\sqrt[3]{9}$$

Vậy bất đẳng thức đã được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.□

Bài 151. *Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng:*

$$\frac{a^2+b^2}{a+b}+\frac{b^2+c^2}{b+c}+\frac{c^2+a^2}{c+a} \ge \frac{3(ab+bc+ca)}{a+b+c}$$

Lời giải:

Cách 1.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có:

$$\frac{a^2+b^2}{a+b}+\frac{b^2+c^2}{b+c}+\frac{c^2+a^2}{c+a} \ge \frac{(a+b)^2}{2(a+b)}+\frac{(b+c)^2}{2(b+c)}+\frac{(c+a)^2}{2(c+a)} = a+b+c \qquad (1)$$

Mặt khác, theo bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$a+b+c \ge \frac{3(ab+bc+ca)}{a+b+c} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$\frac{a^2+b^2}{a+b}+\frac{b^2+c^2}{b+c}+\frac{c^2+a^2}{c+a} \ge \frac{3(ab+bc+ca)}{a+b+c}$$

Vậy bất đẳng thức đã được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.□

Cách 2.

Bất đẳng thức đã cho tương đương với:

$$\left(\frac{a^2+b^2}{a+b}-\frac{ab+bc+ca}{a+b+c}\right)+\left(\frac{b^2+c^2}{b+c}-\frac{ab+bc+ca}{a+b+c}\right)+\left(\frac{c^2+a^2}{c+a}-\frac{ab+bc+ca}{a+b+c}\right) \ge 0$$

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow (a-b)^2\left[\frac{1}{2(a+b)}+\frac{1}{a+b+c}\right]+(b-c)^2\left[\frac{1}{2(b+c)}+\frac{1}{a+b+c}\right]&\\
+(c-a)^2\left[\frac{1}{2(c+a)}+\frac{1}{a+b+c}\right] &\ge 0
\end{aligned}$$

Bất đẳng thức cuối luôn đúng nên ta có:

$$\frac{a^2+b^2}{a+b}+\frac{b^2+c^2}{b+c}+\frac{c^2+a^2}{c+a} \ge \frac{3(ab+bc+ca)}{a+b+c}$$

Vậy bất đẳng thức đã được chứng minh.
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.□

Bài 152. *Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $9a^2 + 8ab + 7b^2 \leq 6$.*
Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = 7a + 5b + 12ab$$

Lời giải:

Cách 1.

Xét hàm số:

$$f(a; b) = 9a^2 + 7b^2 - 4ab - 7a - 5b + 3$$

Ta có:

$$\Delta_a = -59(2b-1)^2 \leq 0$$

Theo định lí về dấu của tam thức bậc hai, ta có:

$$f(a; b) \geq 0$$

Suy ra:

$$7a + 5b + 12ab - 9 \leq 9a^2 + 8ab + 7b^2 - 6 \Leftrightarrow 7a + 5b + 12ab \leq 9$$

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng 9.
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = \dfrac{1}{2}$.□

Cách 2.

Theo bất đẳng thức AM-GM, ta có:

$$\begin{aligned} 7a + 5b + 12ab &\leq 7\left(a^2 + \frac{1}{4}\right) + 5\left(b^2 + \frac{1}{4}\right) + 12ab \\ &= \left[\left(9a^2 + 8ab + 7b^2\right) + 3\right] - 2(a-b)^2 \leq 9 \end{aligned}$$

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng 9.
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = \dfrac{1}{2}$.□

Bài 153. *Giả sử các số thực $x, y, z > 1$ thỏa mãn $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 2$. Chứng minh rằng:*

$$\sqrt{x+y+z} \geq \sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-1}$$

Lời giải:

Theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có:

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-1}\right)^2 &= \left(\sqrt{x}.\sqrt{1-\frac{1}{x}} + \sqrt{y}.\sqrt{1-\frac{1}{y}} + \sqrt{z}.\sqrt{1-\frac{1}{z}}\right)^2 \\ &\leq (x+y+z)\left(3 - \frac{1}{x} - \frac{1}{y} - \frac{1}{z}\right) \\ &= x + y + z \end{aligned}$$

Suy ra:

$$\sqrt{x+y+z} \geq \sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-1}$$

Vậy bất đẳng thức đã được chứng minh.
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = \dfrac{3}{2}$.□

Bài 154. *Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:*

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}}\ge\frac{5}{2}$$

Lời giải:

Theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có:

$$\begin{aligned}\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}&=\frac{a^2}{ca+ab}+\frac{b^2}{ab+bc}+\frac{c^2}{bc+ca}\\&\ge\frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)}\\&=1+\frac{a^2+b^2+c^2}{2(ab+bc+ca)}\end{aligned}$$

Đặt

$$u=\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}}\text{ với }0<u\le 1$$

Ta chỉ cần chứng minh $1+\dfrac{1}{2u^2}+u\ge\dfrac{5}{2}$ là bài toán được giải quyết.

Tuy nhiên, bất đẳng thức trên tương đương với:

$$\frac{1}{2u^2}+u\ge\frac{3}{2}\Leftrightarrow(u-1)^2(2u+1)\ge 0\text{ (luôn đúng với mọi }0<u\le 1)$$

Do đó:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}}\ge\frac{5}{2}$$

Vậy bất đẳng thức đã được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.$\square$

Bài 155. *Cho a, b, c là các số thực dương. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:*

$$P=\frac{ab}{c^2+2ab}+\frac{bc}{a^2+2bc}+\frac{ca}{b^2+2ca}$$

Lời giải:

Thực hiện phép biến đổi biểu thức P, ta được :

$$Q=3-2P=\frac{a^2}{a^2+2bc}+\frac{b^2}{b^2+2ca}+\frac{c^2}{c^2+2ab}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có:

$$Q\ge\frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca}=1$$

Từ đó suy ra:

$$P\le 1$$

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng 1.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.$\square$

Bài 156. *Cho a, b, c là các số thực không âm. Chứng minh rằng:*

$$\sqrt{\frac{ab+ac}{a^2+bc}}+\sqrt{\frac{ab+bc}{b^2+ca}}+\sqrt{\frac{ac+bc}{c^2+ba}}\ge 2$$

Lời giải:

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có:

$$\frac{a^2+bc}{ab+ac}+1\ge 2\sqrt{\frac{a^2+bc}{ac+ab}}\Leftrightarrow\sqrt{\frac{a^2+bc}{ac+ab}}\ge\frac{2a(b+c)}{(a+b)(c+a)}$$

Tương tự:

$$\sqrt{\frac{ab+bc}{b^2+ca}} \geq \frac{2b(c+a)}{(b+c)(a+b)}$$
$$\sqrt{\frac{ac+bc}{c^2+ba}} \geq \frac{2c(a+b)}{(c+a)(b+c)}$$

Cộng vế theo vế ba bất đẳng thức trên, ta được:

$$\sqrt{\frac{ab+ac}{a^2+bc}}+\sqrt{\frac{ab+bc}{b^2+ca}}+\sqrt{\frac{ac+bc}{c^2+ba}} \geq 2\left[\frac{a(b+c)}{(a+b)(c+a)}+\frac{b(c+a)}{(b+c)(a+b)}+\frac{c(a+b)}{(c+a)(b+c)}\right]$$

Ta chỉ cần chứng minh $\frac{a(b+c)}{(a+b)(c+a)}+\frac{b(c+a)}{(b+c)(a+b)}+\frac{c(a+b)}{(c+a)(b+c)} \geq 1$ là bài toán được giải quyết.

Tuy nhiên, bất đẳng thức trên lại tương đương với bất đẳng thức đúng sau:

$$a(b+c)^2+b(c+a)^2+c(a+b)^2-(a+b)(b+c)(c+a) \geq 0 \Leftrightarrow 4abc \geq 0$$

Do đó:

$$\sqrt{\frac{ab+ac}{a^2+bc}}+\sqrt{\frac{ab+bc}{b^2+ca}}+\sqrt{\frac{ac+bc}{c^2+ba}} \geq 2$$

Vậy bất đẳng thức đã được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $(a,b,c)=(x,x,0)$ và các hoán vị.$\square$

Bài 157. *Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $a+2b-ab=0$.*
Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{a^2}{4+8b}+\frac{b^2}{1+a}$$

Lời giải:

Theo giả thiết, ta có:

$$a+2b=ab \Leftrightarrow \frac{1}{b}+\frac{2}{a}=1$$

Theo bất đẳng thức AM-GM, ta có:

$$\frac{1}{b}+\frac{2}{a} \geq 2\sqrt{\frac{2}{ba}} \Rightarrow \sqrt{ab} \geq 2\sqrt{2}$$

Mặt khác , lần lượt sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz và AM-GM, ta có:

$$P=\frac{a^2}{4+8b}+\frac{b^2}{1+a}=\frac{\frac{a^2}{b}}{\frac{4}{b}+8}+\frac{8.\frac{b^2}{a}}{\frac{8}{a}+8}$$

$$\geq \frac{\left(\frac{a}{\sqrt{b}}+\frac{\sqrt{8}b}{\sqrt{a}}\right)^2}{20} \geq \frac{\left(2\sqrt{8ab}\right)^2}{20} \geq \frac{8}{5}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $\frac{8}{5}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=4, b=2$.$\square$

Bài 158. *Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $ab+bc+ca=3$.*
Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P=\frac{1}{a^2+2}+\frac{1}{b^2+2}+\frac{1}{c^2+2}$$

Lời giải:

Thực hiện phép biến đổi biểu thức P, ta được:

$$Q=3-2P=\frac{a^2}{a^2+2}+\frac{b^2}{b^2+2}+\frac{c^2}{c^2+2}$$

Theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có:

$$Q \geq \frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+6} = \frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)} = 1$$

Do đó:

$$3 - 2P \geq 1 \Leftrightarrow P \leq 1$$

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng 1.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.□

Bài 159. *Với x, y, z là các số thực dương.Chứng minh rằng:*

$$\frac{xy+yz+zx}{x^2+y^2+z^2} + \frac{(x+y+z)^3}{xyz} \geq 28$$

Lời giải:

Theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz và AM-GM, ta có:

$$\begin{aligned}
\frac{(x+y+z)^3}{9xyz} &= \frac{1}{9}\left(x^2+y^2+z^2\right)\left(\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}\right) + \frac{2(xy+yz+zx)(x+y+z)}{9xyz} \\
&\geq \left[\frac{(x^2+y^2+z^2)}{9}\right]\left(\frac{9}{xy+yz+zx}\right) + \frac{2.3\sqrt[3]{(xyz)^2}.3\sqrt[3]{xyz}}{9xyz} \\
&= \frac{(x^2+y^2+z^2)}{xy+yz+zx} + 2 \qquad (1)
\end{aligned}$$

Theo bất đẳng thức AM-GM, ta lại có:

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{xy+yz+zx} + \frac{xy+yx+zx}{x^2+y^2+z^2} \geq 2 \qquad (2)$$

$$\frac{8(x+y+z)^3}{9xyz} \geq \frac{8\left(3\sqrt[3]{xyz}\right)^3}{9xyz} = 24 \qquad (3)$$

Cộng (1), (2) và (3) vế theo vế, ta được:

$$\frac{xy+yz+zx}{x^2+y^2+z^2} + \frac{(x+y+z)^3}{xyz} \geq 28$$

Vậy bất đẳng thức đã được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z$.□

Bài 160. *Cho a, b, c là ba số dương thoả mãn $a + b + c = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:*

$$P = \frac{1}{a^2+b^2+c^2} + \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}$$

Lời giải:

Liên tiếp sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có:

$$\begin{aligned}
P &\geq \frac{1}{a^2+b^2+c^2} + \frac{9}{ab+bc+ca} \\
&= \frac{1}{a^2+b^2+c^2} + \frac{4}{2(ab+bc+ca)} + \frac{7}{(ab+bc+ca)} \\
&\geq \frac{9}{(a+b+c)^2} + \frac{7}{ab+bc+ca} \\
&= 9 + \frac{7}{ab+bc+ca}
\end{aligned}$$

Mặt khác, bất đẳng thức AM-GM cho ta:

$$3(ab+bc+ca) \leq (a+b+c)^2 \Leftrightarrow ab+bc+ca \leq \frac{1}{3}$$

Do đó:

$$P \geq 9 + 21 = 30$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 30.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \dfrac{1}{3}$.$\square$

Bài 161. *Cho x, y, z là ba số dương thoả mãn $\sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx} = 1$.*
Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{x^2}{x+y} + \frac{y^2}{y+z} + \frac{z^2}{z+x}$$

Lời giải:

Theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz và AM-GM, ta có:

$$\begin{aligned} P &\geq \frac{(x+y+z)^2}{2(x+y+z)} = \frac{x+y+z}{2} \\ &\geq \frac{\sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx}}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $\dfrac{1}{2}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = \dfrac{1}{3}$.$\square$

Bài 162. *Cho x, y là hai số thực dương thoả mãn $x + y = 1$. Chứng minh rằng:*

$$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} \geq \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Lời giải:

Từ giả thiết suy ra:

$$\frac{x}{\sqrt{3\left(1-x^2\right)}} + \frac{y}{\sqrt{3\left(1-y^2\right)}} = \frac{x}{\sqrt{3y\left(y+2x\right)}} + \frac{y}{\sqrt{3x\left(x+2y\right)}}$$

Mặt khác, lần lượt sử dụng bất đẳng thức AM-GM và Cauchy-Schwarz, ta có:

$$\begin{aligned} \frac{x}{\sqrt{3y\left(y+2x\right)}} + \frac{y}{\sqrt{3x\left(x+2y\right)}} &\geq \frac{x}{2y+x} + \frac{y}{2x+y} \\ &= \frac{x^2}{x^2+2xy} + \frac{y^2}{y^2+2xy} \\ &\geq \frac{(x+y)^2}{(x+y)^2+2xy} \geq \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Do đó:

$$\begin{aligned} &\frac{x}{\sqrt{3\left(1-x^2\right)}} + \frac{y}{\sqrt{3\left(1-y^2\right)}} \geq \frac{2}{3} \\ \Leftrightarrow &\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} \geq \frac{2}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức đã được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = \dfrac{1}{2}$.$\square$

Bài 163. *Cho a, b, c là các số thực dương thoả mãn $a + b + c \leq 3$.*
Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \frac{ab}{\sqrt{ab+3c}} + \frac{bc}{\sqrt{bc+3a}} + \frac{ca}{\sqrt{ca+3b}}$$

Lời giải:

Từ giả thiết suy ra:

$$P \le \frac{ab}{\sqrt{ab+(a+b+c)c}} + \frac{bc}{\sqrt{bc+(a+b+c)a}} + \frac{ca}{\sqrt{ca+(a+b+c)b}}$$
$$= \frac{ab}{\sqrt{(b+c)(c+a)}} + \frac{bc}{\sqrt{(c+a)(a+b)}} + \frac{ca}{\sqrt{(a+b)(b+c)}}$$

Mặt khác, lần lượt sử dụng bất đẳng thức AM-GM và Cauchy-Schwarz, ta được:

$$P \le \frac{2ab}{(b+c)+(c+a)} + \frac{2bc}{(c+a)+(a+b)} + \frac{2ca}{(a+b)+(b+c)}$$
$$\le \frac{1}{4}\left(\frac{2ab}{b+c}+\frac{2ab}{c+a}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{2bc}{c+a}+\frac{2bc}{a+b}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{2ca}{a+b}+\frac{2ca}{b+c}\right)$$
$$= \frac{a+b+c}{2} \le \frac{3}{2}$$

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng $\frac{3}{2}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.□

Bài 164. *Cho x, y, z là các số thực dương thoả mãn $x^2+y^2+z^2=3$.*
Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{1}{xy+1} + \frac{1}{yz+1} + \frac{1}{zx+1}$$

Lời giải:

Viết lại biểu thức đã cho dưới dạng:

$$P = 3 - \left(\frac{xy}{1+xy} + \frac{yz}{1+yz} + \frac{zx}{1+zx}\right)$$

Lần lượt sử dụng bất đẳng thức AM-GM và Cauchy-Schwarz, ta có:

$$P \ge 3 - \frac{1}{2}\left(\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}\right)$$
$$\ge 3 - \frac{1}{2}\sqrt{3\left(xy+yz+zx\right)}$$
$$\ge 3 - \frac{1}{2}\sqrt{3\left(x^2+y^2+z^2\right)} = \frac{3}{2}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $\frac{3}{2}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1$.□

Bài 165. *Cho x, y, z là các số thực dương thoả mãn $x^3+y^3+z^3$.*
Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = x+y+z$$

Lời giải:

Theo bất đẳng thức AM-GM, ta có:

$$x^3+1+1 \ge 3\sqrt[3]{x^3} = 3x$$

Tương tự:

$$y^3+1+1 \ge 3y$$
$$z^3+1+1 \ge 3z$$

Cộng ba bất đẳng thức trên theo vế, ta được:

$$3(x+y+z) \le x^3+y^3+z^3+6 = 9$$
$$\Leftrightarrow x+y+z \le 3$$

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng 3.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1$.□

Bài 166. *Cho x, y, z là các số thực dương thoả mãn $x + 2y + 4z = 12$.*
Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:
$$P = \frac{2xy}{x+2y} + \frac{8yz}{2y+4z} + \frac{4zx}{4z+x}$$

Lời giải:

Từ bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta suy ra:
$$\begin{aligned} P &= \frac{2xy}{x+2y} + \frac{8yz}{2y+4z} + \frac{4zx}{4z+x} \\ &\le \frac{1}{4}\left(\frac{2xy}{x} + \frac{2xy}{2y} + \frac{8yz}{2y} + \frac{8yz}{4z} + \frac{4zx}{4z} + \frac{4zx}{x}\right) \\ &= \frac{1}{4}\left[2(x+2y+4z)\right] = 6 \end{aligned}$$
Vậy giá trị lớn nhất của P bằng 6.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $(x; y; z) = (2; 3; 1)$.□

Bài 167. *Cho các số thực x, y, z thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 5$ và $x - y + z = 3$.*
Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức:
$$P = \frac{x+y-2}{z+2}$$

Lời giải:

Từ điều kiện ta có:
$$\begin{gathered} 5 - z^2 = x^2 + y^2 = \frac{(x+y)^2 + (x-y)^2}{2} \\ \Leftrightarrow (x+y)^2 = 10 - 2z^2 - (3-z)^2 \\ \Leftrightarrow (x+y)^2 = 1 + 6z - 3z^2 \end{gathered}$$
Dễ thấy $z \neq 0$. Ta có:
$$\begin{gathered} P(z+2) + 2 = x + y \\ \Leftrightarrow \left[P(z+2)+2\right]^2 = 1 + 6z - 3z^2 \\ \Leftrightarrow \left(P^2+3\right)z^2 + \left(4P^2 + 4P - 6\right)z + 4P^2 + 8P + 3 = 0 \end{gathered}$$
Phương trình có nghiệm ẩn z khi và chỉ khi
$$\begin{aligned} \Delta'_z \ge 0 &\Leftrightarrow \left(2P^2 + 2P - 3\right)^2 - \left(P^2+3\right)\left(4P^2+8P+3\right) \ge 0 \\ &\Leftrightarrow -\frac{36}{23} \le P \le 0 \end{aligned}$$
- Với $P = 0$ khi và chỉ khi $x = 2, y = 0, z = 1$.
- Với $P = -\dfrac{36}{23}$ khi và chỉ khi $x = \dfrac{20}{31}, y = -\dfrac{66}{31}, z = \dfrac{7}{31}$.

Vậy giá trị lớn nhất của P là 0, giá trị nhỏ nhất của P là $-\dfrac{36}{23}$.□

Bài 168. *Cho a, b, c là các số thực dương thoả mãn $a + b + c \le \dfrac{3}{2}$. Chứng minh rằng:*
$$a + b + c + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \ge \frac{27}{2}$$

Lời giải:

Theo bất đẳng thức AM-GM, ta có:
$$\frac{1}{a^2} + 4 \ge \frac{4}{a}$$
Tương tự:
$$\frac{1}{b^2} + 4 \ge \frac{4}{b}$$

$$\frac{1}{c^2}+4\geq\frac{4}{c}$$
Cộng ba bất đẳng thức trên theo vế, ta được:
$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\geq\frac{4}{a}+\frac{4}{b}+\frac{4}{c}-12$$
$$\Leftrightarrow P=a+b+c+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\geq\left(a+b+c+\frac{4}{a}+\frac{4}{b}+\frac{4}{c}\right)-12$$
Mặt khác, theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có:
$$\frac{4}{a}+\frac{4}{b}+\frac{4}{c}\geq\frac{6^2}{a+b+c}=\frac{36}{a+b+c}$$
Suy ra:
$$P\geq a+b+c+\frac{36}{a+b+c}-12$$
Đến đây, sử dụng tiếp bất đẳng thức AM-GM ta được:
$$P=\left[a+b+c+\frac{9}{4(a+b+c)}\right]+\frac{135}{4(a+b+c)}-12$$
$$\geq 2\sqrt{(a+b+c)\left[\frac{9}{4(a+b+c)}\right]}+\frac{21}{2}=\frac{27}{2}$$
Vậy bất đẳng thức đã được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\dfrac{1}{2}$.$\square$

Bài 169. *Cho các số thực dương a,b,c có tích bằng 1. Chứng minh rằng:*
$$(a^2+b^2+c^2)^3\geq 9(a^3+b^3+c^3)$$

Lời giải:

Chúng ta cần chứng minh tính đồng bậc của bất đẳng thức sau:
$$(a^2+b^2+c^2)^3\geq 9abc(a^3+b^3+c^3)$$
Theo bất đẳng thức AM-GM, ta có:
$$9abc(a^3+b^3+c^3)=27(ab)(ac)\frac{a^3+b^3+c^3}{3a}\leq\left(ab+ac+\frac{a^3+b^3+c^3}{3a}\right)^3$$
$$=\left[ab+bc+ca+\frac{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)}{3a}\right]^3$$
Để kết thúc chứng minh, ta cần chỉ ra rằng:
$$ab+bc+ca+\frac{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)}{3a}\leq(a^2+b^2+c^2)^3$$
Tuy nhiên, bất đăng thức trên lại tương đương với:
$$(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)\left(1-\frac{a+b+c}{3a}\right)\geq 0$$
Đánh giá trên thì luôn đúng do ta có thể giả sử $a=\max\{a,b,c\}$

Vậy bất đẳng thức đã được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.$\square$

Bài 170. *Cho a,b,c là các số thực dương. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức sau:*
$$P=\frac{\sqrt{ab}}{c+2\sqrt{ab}}+\frac{\sqrt{bc}}{a+2\sqrt{bc}}+\frac{\sqrt{ca}}{b+2\sqrt{ca}}$$

Lời giải:

Cách 1.

Biểu thức đã cho được viết lại thành:

$$P=\frac{\sqrt{ab}}{c+2\sqrt{ab}}+\frac{\sqrt{bc}}{a+2\sqrt{bc}}+\frac{\sqrt{ca}}{b+2\sqrt{ca}}=\frac{1}{\frac{c}{\sqrt{ab}}+2}+\frac{1}{\frac{b}{\sqrt{ca}}+2}+\frac{1}{\frac{a}{\sqrt{bc}}+2}$$

Đặt

$$\frac{a}{\sqrt{bc}}=x,\ \frac{b}{\sqrt{ca}}=y,\ \frac{c}{\sqrt{ab}}=z.$$

Suy ra

$$xyz=1 \text{ và } P=\frac{1}{2+x}+\frac{1}{2+y}+\frac{1}{2+z}$$

Ta sẽ chứng minh rằng $P=\frac{1}{2+x}+\frac{1}{2+y}+\frac{1}{2+z}\le 1$

Thật vậy , bất đẳng thức trên tương đương với:

$$(x+2)(y+2)+(y+2)(z+2)+(z+2)(x+2)\le (x+2)(y+2)(z+2)$$
$$\Leftrightarrow xy+yz+zx+4(x+y+z)+12\le xyz+2(xy+yz+zx)+4(x+y+z)+8$$
$$\Leftrightarrow xy+yz+zx\ge 3$$

Bất đẳng thức cuối hiển nhiên đúng theo AM-GM ta có:

$$xy+yz+zx\ge 3\sqrt[3]{(xyz)^2}=3$$

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng 1.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.□

Cách 2.

Ta biến đổi biểu thức P như sau:

$$2P=\frac{2\sqrt{ab}}{c+2\sqrt{ab}}+\frac{2\sqrt{bc}}{a+2\sqrt{bc}}+\frac{2\sqrt{ca}}{b+2\sqrt{ca}}=3-\left(\frac{c}{c+2\sqrt{ab}}+\frac{a}{a+2\sqrt{bc}}+\frac{b}{b+2\sqrt{ca}}\right)$$

(Hướng 1)

Theo bất đẳng thức AM-GM, ta có:

$$2\sqrt{ab}\le a+b;\ 2\sqrt{bc}\le b+c;\ 2\sqrt{ca}\le c+a$$

Do đó:

$$2P\le 3-\left(\frac{c}{c+a+b}+\frac{a}{a+b+c}+\frac{b}{b+c+a}\right)=2$$

(Hướng 2)

Theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có:

$$2P\le 3-\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})^2}{a+b+c+2\sqrt{ab}+2\sqrt{bc}+2\sqrt{ca}}=2$$

Từ đó suy ra:

$$P\le 1$$

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng 1.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.□

Bài 171. *Cho các số thực dương a,b,c thoả mãn $a+b+c=3abc$.*
Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}$$

Lời giải:

Ta có:

$$a+b+c=3abc\Leftrightarrow\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}=3$$

Theo bất đẳng thức AM-GM, ta có:

$$\frac{1}{a^3}+1+1\ge\frac{3}{a}$$

Tương tự, ta cũng có:

$$\frac{1}{b^3}+1+1\geq\frac{3}{b};\ \frac{1}{c^3}+1+1\geq\frac{3}{c}$$

Do đó:

$$P+6\geq 3\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

Từ bất đẳng thức AM-GM, ta có:

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2\geq 3\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)=9$$

Suy ra:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq 3$$

Do đó:

$$P\geq 3$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 3.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.□

Bài 172. *Cho các số thực a,b thoả mãn $a^2+b^2\leq a+b$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức sau:*

$$P=a+2b$$

Lời giải:

Ta có:

$$a^2+b^2\leq a+b\Leftrightarrow (a-\frac{1}{2})^2+(b-\frac{1}{2})^2\leq\frac{1}{2}$$

Biểu thức P được biến đổi thành:

$$P=(a-\frac{1}{2})+2(b-\frac{1}{2})+\frac{3}{2}$$

Theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có:

$$\left[(a-\frac{1}{2})+2(b-\frac{1}{2})\right]^2\leq(1^2+2^2)\left[(a-\frac{1}{2})^2+(b-\frac{1}{2})^2\right]\leq\frac{5}{2}$$

Từ đó suy ra:

$$P\leq\frac{3+\sqrt{10}}{2}$$

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng $\dfrac{3+\sqrt{10}}{2}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $(a;b)=\left(\dfrac{5+\sqrt{10}}{10};\dfrac{5+2\sqrt{10}}{10}\right)$.□

Bài 173. *Cho các số thực dương a,b,c. Chứng minh rằng:*

$$\frac{ab+bc+ca+1}{(a+b+c+1)^2}+\frac{3}{8}\sqrt[3]{\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}}\geq 1$$

Lời giải:

Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức sau:

$$\frac{ab+ba+ca+1}{(a+b+c)^2}\geq\frac{2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

(Hướng 1)

Thật vậy, bất đẳng thức trên tương đương với:

$$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)(a+b+c+abc)+2abc(ab+bc+ca)+(ab+bc+ca)(a+b+c)$$
$$\geq 4abc(a+b+c)+3abc$$

Từ bất đẳng thức AM-GM, ta suy ra:

$$(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)(a+b+c+abc)\geq 0\qquad(1)$$

$$\frac{(ab+bc+ca)(a+b+c)}{3} \geq \frac{3\sqrt[3]{(abc)^2}.3\sqrt[3]{abc}}{3} = 3abc \qquad (2)$$

$$2abc(ab+bc+ca) + \frac{2(ab+bc+ca)(a+b+c)}{3} \geq 4\sqrt{\frac{(ab+bc+ca)^2.abc(a+b+c)}{3}}$$

$$\geq 4\sqrt{\frac{3abc(a+b+c)abc(a+b+c)}{3}} = 4abc(a+b+c) \qquad (3)$$

Cộng (1), (2) và (3) vế theo vế ta được:

$$\frac{ab+ba+ca+1}{(a+b+c)^2} \geq \frac{2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

(Hướng 2)

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có:

$$(ab+bc+ca+1)\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+1\right) \geq (a+b+c+1)^2$$

$$(ab+bc+ca+1)\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}+1\right) \geq (b+c+a+1)^2$$

Cộng hai bất đẳng thức này lại theo vế, ta thu được:

$$(ab+bc+ca+1)\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc} \geq 2(a+b+c+1)^2$$

Từ đó suy ra:

$$\frac{ab+bc+ca+1}{(a+b+c+1)^2} \geq \frac{2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

Như vậy, ta chỉ còn phải chứng minh:

$$\frac{2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} + \frac{3}{8}\sqrt[3]{\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}} \geq 1$$

Bất đẳng thức này lại đúng theo AM-GM:

$$\frac{2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} + \frac{3}{8}\sqrt[3]{\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}}$$

$$= \frac{2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} + \frac{1}{8}\sqrt[3]{\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}} + \frac{1}{8}\sqrt[3]{\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}} + \frac{1}{8}\sqrt[3]{\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}}$$

$$\geq 4\sqrt[4]{\frac{abc}{256}\left[\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}\right]^3} = 1$$

Vậy bất đẳng thức đã được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.□

Bài 174. *Cho các số thực dương a, b, c thoả mãn $(1-a)(1-b)(1-c) = 8abc$.*
Chứng minh rằng:

$$a+b+c \geq 1$$

Lời giải:

Giả sử $a \geq b \geq c$.Vì $8abc > 0$ nên ta xét 2 trường hợp sau:

Trường hợp 1: $a > 1$, $b > 1$, $c < 1$. Khi đó bất đẳng thức đã cho hiển nhiên đúng.

Trường hợp 2: $a < 1$, $b < 1$, $c < 1$.

Ta có:

$$(1-a)(1-b)(1-c) = 8abc \Leftrightarrow \frac{1-a}{a}.\frac{1-b}{b}.\frac{1-c}{c} = 8$$

Đặt:

$$\frac{1-a}{a}=x,\ \frac{1-b}{b}=x,\ \frac{1-c}{c}=x$$

Từ điều kiện ta có $xyz=8$ và bất đẳng thức cần chứng minh trở thành:

$$\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}+\frac{1}{z+1}\ge 1 \Leftrightarrow x+y+z\ge 6$$

Bất đẳng thức trên luôn đúng theo AM-GM:

$$x+y+z\ge 3\sqrt[3]{xyz}=6$$

Vậy bất đẳng thức đã được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{3}$.□

Bài 175. *Cho các số thực dương a,b,c thoả mãn $a^2+2b^2+3c^2=3abc$. Chứng minh rằng:*

$$P=3a+2b+c+\frac{8}{a}+\frac{6}{b}+\frac{4}{c}$$

Lời giải:

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có:

$$\begin{aligned}P&=a+\frac{b}{2}+2\left(a+\frac{4}{a}\right)+\frac{3}{2}\left(b+\frac{4}{b}\right)+\left(c+\frac{4}{c}\right)\\&\ge a+\frac{b}{2}+2\cdot 4+\frac{3}{2}\cdot 4+4\\&=\frac{2a+b}{2}+18\end{aligned}$$

Mặt khác:

$$\begin{gathered}3abc=(a^2+c^2)+2(b^2+c^2)\ge 2ac+4bc\\ \Leftrightarrow 3ab\ge 2(a+2b)\\ \Leftrightarrow \frac{3}{2}\ge\frac{2}{a}+\frac{1}{b}\end{gathered}$$

Mà theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có:

$$\frac{2}{a}+\frac{1}{b}\ge\frac{9}{2a+b}$$

Từ đó suy ra:

$$2a+b\ge 6$$

Do đó:

$$P\ge\frac{6}{2}+18=21$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 21.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=2$.□

Bài 176. *Cho các số thực a,b,c lớn hơn 1 và thỏa mãn điều kiện $a+b+c=abc$.*

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau:

$$P=\frac{a-2}{b^2}+\frac{b-2}{c^2}+\frac{c-2}{a^2}$$

Lời giải:

Từ giả thiết, ta có:

$$a+b+c=abc\Leftrightarrow\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}=1$$

Ta biến đổi biểu thức P thành:

$$\begin{aligned}P&=\frac{(a-1)+(b-1)}{b^2}-\frac{1}{b}+\frac{(b-1)+(c-1)}{c^2}-\frac{1}{c}+\frac{(c-1)+(a-1)}{a^2}-\frac{1}{a}\\&=(a-1)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)+(b-1)\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)+(c-1)\left(\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}\right)-\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\end{aligned}$$

Theo bất đẳng thức AM-GM, ta có:

$$\begin{aligned}
P &\geq \frac{2(a-1)}{ab}+\frac{2(b-1)}{bc}+\frac{2(c-1)}{ca}-\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\\
&=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)-2\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)\\
&=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-2\\
&\geq \sqrt{3\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)}-2=\sqrt{3}-2
\end{aligned}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $\sqrt{3}-2$.
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\sqrt{3}$.□

Bài 177. *Cho x,y,z là số thực thuộc đoạn $[1;4]$ và $x\geq y; x\geq z$.*
Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau:

$$P=\frac{x}{2x+3y}+\frac{y}{y+z}+\frac{z}{z+x}$$

Lời giải:

Đặt $a=\dfrac{y}{x}$, $b=\dfrac{z}{y}$, $c=\dfrac{x}{z}$ và $t=\sqrt{bc}$.Ta có $\dfrac{1}{4}\leq a\leq 1$, $abc=1$ và $1\leq t\leq 2$
Khi đó:

$$P=\frac{1}{3a+2}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}$$

Theo bất đẳng thức AM-GM, ta có:

$$\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}=\frac{b+c+2}{(b+1)(c+1)}=1+\frac{1-bc}{bc+b+c+1}\geq 1+\frac{1-bc}{bc+2\sqrt{bc}+1}=\frac{2}{\sqrt{bc}+1}=\frac{2}{t+1}$$

Do đó:

$$P\geq \frac{1}{3a+2}+\frac{2}{t+1}=\frac{1}{\dfrac{3}{t^2}+2}+\frac{2}{t+1}=\frac{t^2}{2t^2+3}+\frac{2}{t+1}=f(t)$$

Xét hàm $f(t)$ trên đoạn $[1;2]$, ta thấy $f'(t)=2\left[\dfrac{3t}{(2t^2+3)^2}-\dfrac{1}{(1+t)^2}\right]$, vì

$$\sqrt{3}t(t+1)-(2t^2+3)\leq \frac{t+3}{2}(t+1)-(2t^2+3)\leq \frac{2+3}{2}(t+1)-(2t^2+3)=-\frac{(t-1)(4t-1)}{4}\leq 0$$

Do đó $f(t)$ nghịch biến trên đoạn $[1;2]$.
Vì vậy $P\geq f(2)=\dfrac{34}{33}$
Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $\dfrac{34}{33}$.
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $(x;y;z)=(4;1;2)$.□

Bài 178. *Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của xyz biết:*

$$\frac{8-x^4}{16+x^4}+\frac{8-y^4}{16+y^4}+\frac{8-z^4}{16+z^4}\geq 0$$

Lời giải:

Biểu thức đã cho được biến đổi thành:

$$\frac{8-x^4}{16+x^4}+\frac{8-y^4}{16+y^4}+\frac{8-z^4}{16+z^4}\geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{16+x^4}+\frac{1}{16+y^4}+\frac{1}{16+z^4}\geq \frac{1}{8}$$

Từ đó suy ra:

$$\begin{aligned}\frac{1}{16+x^4} &\geq \frac{1}{8}-\frac{1}{16+y^4}-\frac{1}{16+z^4}\\ &= \frac{1}{16}-\frac{1}{16+y^4}+\frac{1}{16}-\frac{1}{16+z^4}\\ &= \frac{y^4}{16(16+y^4)}+\frac{z^4}{16(16+z^4)}\end{aligned}$$

Theo bất đẳng thức AM-GM, ta có:

$$\frac{y^4}{16(16+y^4)}+\frac{z^4}{16(16+z^4)} \geq \frac{y^2z^2}{8\sqrt{(16+y^4)(16+z^4)}} \qquad (1)$$

Tương tự ta có:

$$\frac{z^4}{16(16+z^4)}+\frac{x^4}{16(16+x^4)} \geq \frac{z^2x^2}{8\sqrt{(16+z^4)(16+x^4)}} \qquad (2)$$

$$\frac{x^4}{16(16+x^4)}+\frac{y^4}{16(16+y^4)} \geq \frac{x^2y^2}{8\sqrt{(16+x^4)(16+y^4)}} \qquad (3)$$

Nhân (1), (2) và (3) vế theo vế ta được:

$$\frac{1}{(16+x^4)(16+y^4)(16+z^4)} \geq \frac{(xyz)^4}{8^3(16+x^4)(16+y^4)(16+z^4)}$$

$$\Leftrightarrow (xyz)^4 \leq 8^3$$

$$\Leftrightarrow -4\sqrt[4]{2} \leq xyz \leq 4\sqrt[4]{2}$$

- Với $xyz=-4\sqrt[4]{2}$ khi và chỉ khi $x=y=z=-\sqrt[4]{8}$ - Với $xyz=4\sqrt[4]{2}$ khi và chỉ khi $x=y=z=\sqrt[4]{8}$
Vậy giá trị lớn nhất của xyz bằng $4\sqrt[4]{2}$; giá trị nhỏ nhất của xyz bằng $-4\sqrt[4]{2}$.□

Bài 179. *Cho các số thực dương a,b,c. Chứng minh rằng:*

$$\frac{a^2}{2a^2+bc}+\frac{b^2}{2b^2+ca}+\frac{c^2}{2c^2+ab} \leq 1$$

Lời giải:

Bất đẳng thức đã cho tương đương với:

$$\frac{bc}{2a^2+bc}+\frac{ca}{2b^2+ca}+\frac{ab}{2c^2+ab} \geq 1$$

Theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có:

$$\begin{aligned}\frac{bc}{2a^2+bc}+\frac{ca}{2b^2+ca}+\frac{ab}{2c^2+ab} &= \frac{(bc)^2}{2a^2bc+(bc)^2}+\frac{(ca)^2}{2ab^2c+(ca)^2}+\frac{(ab)^2}{2abc^2+(ab)^2}\\ &\geq \frac{(ab+bc+ca)^2}{(ab)^2+(bc)^2+(ca)^2+2abc(a+b+c)}=1\end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức đã được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.□

Bài 180. *Cho các số thực dương a,b,c. Chứng minh rằng:*

$$\frac{a}{b^2+bc+c^2}+\frac{b}{c^2+ca+a^2}+\frac{c}{a^2+ab+b^2} \geq \frac{a+b+c}{ab+bc+ca}$$

Lời giải:

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có:

$$\begin{aligned}\frac{a}{b^2+bc+c^2}+\frac{b}{c^2+ca+a^2}+\frac{c}{a^2+ab+b^2} &= \frac{a^2}{ab^2+abc+c^2a}+\frac{b^2}{bc^2+abc+a^2b}+\frac{c^2}{ca^2+abc+b^2c}\\ &\geq \frac{(a+b+c)^2}{ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)+3abc}\end{aligned}$$

Để ý rằng:

$$ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)+3abc=(a+b+c)(ab+bc+ca)$$

Do đó:
$$\frac{a}{b^2+bc+c^2}+\frac{b}{c^2+ca+a^2}+\frac{c}{a^2+ab+b^2}\geq\frac{a+b+c}{ab+bc+ca}$$
Vậy bất đẳng thức đã được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.□

Bài 181. *Cho các số thực dương a,b,c. Chứng minh rằng:*
$$\frac{a}{a^2+ab+b^2}+\frac{b}{b^2+bc+c^2}+\frac{c}{c^2+ca+a^2}\geq\frac{a+b+c}{a^2+b^2+c^2}$$

Lời giải:

Theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có:
$$\begin{aligned}\frac{a}{a^2+ab+b^2}+\frac{b}{b^2+bc+c^2}+\frac{c}{c^2+ca+a^2}&=\frac{a^2}{a^3+a^2b+ab^2}+\frac{b^2}{b^3+b^2c+bc^2}+\frac{c^2}{c^3+c^2a+ca^2}\\&\geq\frac{(a+b+c)^2}{a^3+b^3+c^3+ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)}\end{aligned}$$
Để ý rằng:
$$a^3+b^3+c^3+ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)=(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2\right)$$
Do đó:
$$\frac{a}{a^2+ab+b^2}+\frac{b}{b^2+bc+c^2}+\frac{c}{c^2+ca+a^2}\geq\frac{a+b+c}{a^2+b^2+c^2}$$
Vậy bất đẳng thức đã được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.□

Bài 182. *Cho x,y,z là các số thực thỏa mãn $x^2+y^2+z^2=1-\frac{9}{16}xy$.*

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức sau:
$$P=xy+yz+zx$$

Lời giải:

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta được:
$$\frac{12\sqrt{5}-17}{32}x^2+\frac{12\sqrt{5}-17}{32}y^2\geq\frac{12\sqrt{5}-17}{16}xy\qquad(1)$$
$$\frac{49-12\sqrt{5}}{32}y^2+\frac{z^2}{2}\geq\frac{3\sqrt{5}-2}{4}yz\qquad(2)$$
$$\frac{49-12\sqrt{5}}{32}x^2+\frac{z^2}{2}\geq\frac{3\sqrt{5}-2}{4}zx\qquad(3)$$
Từ (1), (2) và (3) suy ra:
$$x^2+y^2+z^2+\frac{9}{16}xy\geq\frac{3\sqrt{5}-2}{4}(zy+yz+zx)$$
Do đó:
$$xy+yz+zx\leq\frac{4}{3\sqrt{5}-2}=\frac{4(3\sqrt{5}+2)}{41}$$
Vậy giá trị lớn nhất của P bằng $\frac{4(3\sqrt{5}+2)}{41}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} x = \dfrac{2}{41}\sqrt{\dfrac{82}{15}\left(15+2\sqrt{5}\right)} \\ y = \dfrac{2}{41}\sqrt{\dfrac{82}{15}\left(15+2\sqrt{5}\right)} \\ z = \sqrt{\dfrac{1}{30}\left(15-2\sqrt{5}\right)} \end{cases}$.□

Bài 183. *Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=3$.*
Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức sau:

$$P = \frac{\sqrt{ab}}{4-\sqrt{ab}} + \frac{\sqrt{bc}}{4-\sqrt{bc}} + \frac{\sqrt{ca}}{4-\sqrt{ca}}$$

Lời giải:

Đặt $a = x^2$, $b = y^2$, $c = z^2$.
Điều kiện đã cho được viết lại $x^4+y^4+z^4=3$ và $P = \dfrac{xy}{4-xy} + \dfrac{yz}{4-yz} + \dfrac{zx}{4-zx}$
Ta có:

$$Q = \frac{P+3}{2} = \frac{2}{4-xy} + \frac{2}{4-yz} + \frac{2}{4-zx}$$

Mà:

$$\begin{aligned} \frac{2}{4-xy} &= 1 - \frac{2-xy}{4-xy} = 1 - \frac{4-(xy)^2}{9-(xy-1)^2} \\ &\le 1 - \frac{4-(xy)^2}{9} \le 1 - \frac{4}{9} + \frac{(xy)^2}{9} \\ &= \frac{5}{9} + \frac{(xy)^2}{9} \end{aligned}$$

Chứng minh tương tự, ta được:

$$\frac{2}{4-yz} \le \frac{5}{9} + \frac{(yz)^2}{9}$$
$$\frac{2}{4-zx} \le \frac{5}{9} + \frac{(zx)^2}{9}$$

Do đó:

$$Q \le \frac{5}{3} + \frac{x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2}{9}$$

Tuy nhiên, theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta lại có:

$$(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)^2 \le (x^4+y^4+z^4)^2 = 9$$
$$\Leftrightarrow x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2 \le 3$$

Vì vậy:

$$Q \le \frac{5}{3} + \frac{1}{3} = 2 \text{ hay } P \le 1$$

Vậy giá trị lớn nhất của P là 1.
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.□

Bài 184. *Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng:*

$$\frac{a^2+b^2+2}{a+b-ab} + \frac{b^2+c^2+2}{b+c-bc} + \frac{c^2+a^2+2}{c+a-ca} \ge 12$$

Lời giải:

Ta có:

$$a+b-ab = (a+b)(a+b+c) - ab = a^2+b^2+ab+bc+ca$$

Do đó:

$$\begin{aligned}
VT &= \frac{a^2+b^2+2}{a^2+b^2+ab+bc+ca}+\frac{b^2+c^2+2}{b^2+c^2+ab+bc+ca}+\frac{c^2+a^2+2}{c^2+a^2+ab+bc+ca}\\
&= \frac{(a^2+1)+(b^2+1)}{a^2+b^2+ab+bc+ca}+\frac{(b^2+1)+(c^2+1)}{b^2+c^2+ab+bc+ca}+\frac{(c^2+1)+(a^2+1)}{c^2+a^2+ab+bc+ca}\\
&= \sum_{cyc}\left(\frac{a^2+1}{a^2+b^2+ab+bc+ca}+\frac{a^2+1}{c^2+a^2+ab+bc+ca}\right)\\
&\geq \sum_{cyc}\left(\frac{4\left(a^2+1\right)}{a^2+a^2+b^2+c^2+2\left(ab+bc+ca\right)}\right)\\
&\geq \frac{4\left(a^2+1\right)}{a^2+\left(a+b+c\right)^2}+\frac{4\left(b^2+1\right)}{b^2+\left(a+b+c\right)^2}+\frac{4\left(c^2+1\right)}{c^2+\left(a+b+c\right)^2}\\
&\geq \frac{4\left(a^2+1\right)}{a^2+1}+\frac{4\left(b^2+1\right)}{b^2+1}+\frac{4\left(c^2+1\right)}{c^2+1}=12
\end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=\frac{1}{3}$.

Bài 185. *Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=3$. Chứng minh rằng:*

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+a+b+c\geq 6$$

Lời giải:

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có: $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geq\frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca}=\frac{3}{ab+bc+ca}+2$

Ta cần chứng minh:

$$\frac{3}{ab+bc+ca}+a+b+c\geq 4$$

Đặt $t=a+b+c>0$, bất đẳng thức trở thành:

$$\frac{6}{t^2-3}+t\geq 4$$

Tương đương $(t-3)^2(t+2)\geq 0$ (luôn đúng)

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$

Bài 186. *Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$. Tìm GTNN của*

$$P=\frac{b+c}{a^2}+\frac{c+a}{b^2}+\frac{a+b}{c^2}$$

Lời giải:

Cách 1.

Đặt $x=\frac{1}{a},\ y=\frac{1}{b},\ z=\frac{1}{c}$

Khi đó giả thiết được viết lại là

$$x+y+z=1$$

và

$$P=\frac{x^2(y+z)}{yz}+\frac{y^2(x+z)}{xz}+\frac{z^2(x+y)}{xy}$$

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$$\begin{aligned}
xy &\leq \frac{1}{4}(x+y)^2\\
yz &\leq \frac{1}{1}4(y+z)^2\\
xz &\leq \frac{1}{4}(x+z)^2
\end{aligned}$$

Do đó ta có

$$P \geq \frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}$$

Mặt khác, sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có

$$P=\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y} \geq \frac{(x+y+z)^2}{2(x+y+z)}=\frac{x+y+z}{2}=\frac{1}{2}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=\dfrac{1}{3} \Leftrightarrow a=b=c=3$.

Cách 2.

Đặt $x=\dfrac{1}{a}, y=\dfrac{1}{b}, z=\dfrac{1}{c}, x+y+z=1$

Khi đó:

$$P=x^2\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)+y^2\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{x}\right)+z^2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có

$$\left(\frac{x}{\sqrt{y+z}}\cdot\sqrt{y+z}+\frac{y}{\sqrt{z+x}}\cdot\sqrt{z+x}+\frac{z}{\sqrt{x+y}}\cdot\sqrt{x+y}\right)^2 \leq 2\left(\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y} \geq \frac{1}{2}(x+y+z)^2=\frac{1}{2}$$

Mặt khác, sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz:

$$x^2\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=\frac{x^2}{y+z}\cdot(y+z)\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \geq \frac{4x^2}{y+z}$$

Do đó:

$$P \geq 4\left(\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}\right)=2$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=\dfrac{1}{3}$, hay $a=b=c=3$.

Bài 187. *Cho a,b,c là các số thực thỏa mãn: $a+b+c=0$ .Tìm giá trị nhỏ nhất của:*

$$P=\sqrt{3+4^a}+\sqrt{3+4^b}+\sqrt{3+4^c}$$

Lời giải:

Cách 1.

Ta có:

$$3+4^a=1+1+1+4^a \geq 4\sqrt[4]{4^a} \Rightarrow \sqrt{3+4^a} \geq 2\sqrt[8]{4^a}$$

Do đó:

$$P \geq 2.3\sqrt[3]{\sqrt[8]{4^a.4^b.4^c}}=6\sqrt[24]{4^{a+b+c}}=6$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=0$.

Cách 2.

$$\begin{aligned}P&=\sqrt{3+4^a}+\sqrt{3+4^b}+\sqrt{3+4^c}\\&\overset{Minkovski}{\geq}\sqrt{\left(\sqrt{3}+\sqrt{3}+\sqrt{3}\right)^2+\left(2^a+2^b+2^c\right)^2}\\&\overset{AM-GM}{\geq}\sqrt{27+9(\sqrt[3]{2^{a+b+c}})^2}=6\end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=0$.

Cách 3.

Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức sau: $\sqrt{4^x+3} \geq \left(\dfrac{1}{2}\ln 2\right)x+2$ với $x \in \mathbb{R}$.

Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Bài 188. *Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng:*
$$\frac{1}{1-ab}+\frac{1}{1-bc}+\frac{1}{1-ca}\le\frac{27}{8}$$

Lời giải:

Ta có
$$a+b+c=p=1, ab+bc+ca=q, abc=r\Rightarrow q\le\frac{1}{3}; r\le\frac{1}{27}\quad(*)$$
$$BDT\Leftrightarrow\frac{3-2(ab+bc+ca)+abc(a+b+c)}{1-(ab+bc+ca)+abc(a+b+c)-a^2b^2c^2}\le\frac{27}{8}$$
$$\Leftrightarrow\frac{3-2q+r}{1-q+r-r^2}\le\frac{27}{8}\Leftrightarrow 3+19r-11q-27r^2\ge 0\quad(1)$$
Ta luôn có:
$$(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)\le abc\Leftrightarrow(1-2c)(1-2b)(1-2a)\le abc\quad\Leftrightarrow 4q\le 1+9r\quad(2)$$
Từ $(1);(2)\Rightarrow 11(1+9r)\le 4(3+19r-27r^2)\Leftrightarrow(1-27r)+4r(1-27r)\ge 0$ (luôn đúng do $(*)$)

Vậy bất đẳng thức đã cho đúng!

Bài 189. *Chứng minh rằng nếu* $0\le y\le x\le 1$ *thì:*
$$x\sqrt{y}-y\sqrt{x}\le\frac{1}{4}$$

Cách 1.

Vì $0\le x\le 1$ nên $\sqrt{x}\ge x^2$

Ta có:

$y\sqrt{x}+\frac{1}{4}\ge yx^2+\frac{1}{4}\ge 2\sqrt{\frac{1}{4}.x^2y}=x\sqrt{y}$

Do đó: $x\sqrt{y}-y\sqrt{x}\le\frac{1}{4}$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $(x;y)=(1;\frac{1}{4})$

Cách 2.

Ta có:

$x\sqrt{y}-y\sqrt{x}=\sqrt{x}.\sqrt{y}(\sqrt{x}-\sqrt{y})\overset{AM-GM}{\le}\sqrt{x}.\left(\frac{\sqrt{y}+\sqrt{x}-\sqrt{y}}{2}\right)^2\le\frac{x}{4}\le\frac{1}{4}$

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases}x=1\\ \sqrt{y}=\sqrt{x}-\sqrt{y}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ y=\frac{1}{4}\end{cases}$

Bài 190. *Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng:*
$$\left(1+\frac{2a}{b}\right)^2+\left(1+\frac{2b}{c}\right)^2+\left(1+\frac{2c}{a}\right)^2\ge\frac{9(a+b+c)^2}{ab+bc+ca}$$

Lời giải:

Cách 1.

Theo bất đẳng thức AM-GM, ta có
$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\ge 3$$

$$\begin{aligned}
VT &= \left(1+\frac{2a}{b}\right)^2+\left(1+\frac{2b}{c}\right)^2+\left(1+\frac{2c}{a}\right)^2\\
&= 3+4\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}\right)+4\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)\\
&= \left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)+\left(1+\frac{b^2}{c^2}\right)+\left(1+\frac{c^2}{a^2}\right)+3\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}\right)+4\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)\\
&\geq 2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)^2+4\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)\\
&\geq 2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)+3\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)+4\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)\\
&= 9\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)\\
&\geq \frac{9(a+b+c)^2}{ab+bc+ca}
\end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Cách 2.

Ta có

$$\begin{aligned}
VT &= \left(1+\frac{2a}{b}\right)^2+\left(1+\frac{2b}{c}\right)^2+\left(1+\frac{2c}{a}\right)^2\\
&\geq \frac{1}{3}\left(3+2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)\right)^2
\end{aligned}$$

Mặt khác, áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)(ab+bc+ca)\geq (a+b+c)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca}\leq \frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}$$

nên ta cần chứng minh

$$\left(3+2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)\right)^2\geq 27\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)$$

Đặt $t=\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}$ $(t\geq 3)$, thì bất đẳng thức trở thành:

$$(3+2t)^2\geq 27t$$

$$\Leftrightarrow (t-3)(4t-3)\geq 0$$

(luôn đúng do $t\geq 3$)

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Bài 191. *Cho a,b,c là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:*

$$P=\frac{a+b}{a+b+c}+\frac{b+c}{b+c+4a}+\frac{c+a}{a+c+16b}$$

Lời giải:

Đặt

$$\begin{cases} x=a+b+c\\ y=b+c+4a\\ z=c+a+16b\end{cases}$$

Khi đó ta có

$$\begin{cases} a = \dfrac{y-x}{3} \\ b = \dfrac{z-x}{15} \\ c = \dfrac{21x-5y-z}{15} \end{cases}$$

và

$$\begin{aligned} P &= \frac{-6x+5y+z}{15x} + \frac{20x-5y}{15y} + \frac{16x-z}{15z} \\ &= \frac{-4}{5} + \frac{y}{3x} + \frac{4x}{3y} + \frac{z}{15x} + \frac{16x}{15z} \end{aligned}$$

Mặt khác, theo bất đẳng thức AM-GM ta có

$$\frac{y}{3x} + \frac{4x}{3y} \geq \frac{4}{3}$$
$$\frac{z}{15x} + \frac{16x}{15z} \geq \frac{8}{15}$$

nên ta suy ra

$$P \geq \frac{-4}{5} + \frac{4}{3} + \frac{8}{15} = \frac{16}{15}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} \dfrac{y}{3x} = \dfrac{4x}{3y} \\ \dfrac{z}{15x} = \dfrac{16x}{15z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{5}{7}c \\ b = \dfrac{3}{7}c \end{cases}$$

Bài 192. *Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng:*

$$\frac{ab}{1-c^2} + \frac{bc}{1-a^2} + \frac{ca}{1-b^2} \leq \frac{3}{8}$$

Lời giải:

Ta có

$$1-c^2 = (a+b+c)^2 - c^2 = a^2+b^2+2(ab+bc+ca) \overset{AM-GM}{\geq} 2(ab+bc)+2(ab+ac)$$

Mặt khác, áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có

$$\frac{1}{2(ab+bc)+2(ab+ac)} \leq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2(ab+bc)} + \frac{1}{2(ab+ac)}\right)$$

Do đó

$$\frac{ab}{1-c^2} \leq \frac{ab}{2(ab+bc)+2(ab+ac)} \leq \frac{1}{8}\left(\frac{ab}{ab+bc} + \frac{ab}{ab+ac}\right)$$

Tương tự ta cũng có

$$\frac{bc}{1-a^2} \leq \frac{1}{8}\left(\frac{bc}{bc+ac} + \frac{bc}{bc+ab}\right)$$
$$\frac{ac}{1-b^2} \leq \frac{1}{8}\left(\frac{ac}{ac+ab} + \frac{ac}{ac+bc}\right)$$

Cộng lại thì ta có

$$\frac{ab}{1-c^2} + \frac{bc}{1-a^2} + \frac{ac}{1-b^2} \leq \frac{1}{8}\sum_{cyc}\left(\frac{ab}{ab+bc} + \frac{bc}{ab+bc}\right) = \frac{3}{8}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\dfrac{1}{3}$.

Bài 193. *Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $ab+bc+ca=3$. Chứng minh rằng:*

$$\frac{a^2}{\sqrt{b^3+8}} + \frac{b^2}{\sqrt{c^3+8}} + \frac{c^2}{\sqrt{a^3+8}} \geq 1$$

Lời giải:

Theo bất đẳng thức AM-GM thì ta có

$$\sqrt{b^3+8}=\sqrt{(b+2)(b^2-2b+4)}\le \frac{1}{2}(b^2-b+6)$$

Tương tự thì ta cũng có

$$\sqrt{c^3+8}\le \frac{1}{2}(c^2-c+6)$$
$$\sqrt{a^3+8}\le \frac{1}{2}(a^2-a+6)$$

Do đó

$$\frac{a^2}{\sqrt{b^3+8}}+\frac{b^2}{\sqrt{c^3+8}}+\frac{c^2}{\sqrt{a^3+8}}\ge \frac{2a^2}{b^2-b+6}+\frac{2b^2}{c^2-c+6}+\frac{2c^2}{a^2-a+6}$$

Mặt khác, áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có

$$\frac{a^2}{b^2-b+6}+\frac{b^2}{c^2-c+6}+\frac{c^2}{a^2-a+6}\ge \frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2-(a+b+c)+18}$$

Do đó, ta cần chứng minh

$$\frac{2(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2-(a+b+c)+18}\ge 1$$
$$\Leftrightarrow 2(a+b+c)^2\ge (a+b+c)^2-(a+b+c)+12$$
$$\Leftrightarrow (a+b+c)^2+(a+b+c)-12\ge 0$$

Mà điều trên thì luôn đúng bởi vì

$$a+b+c\ge \sqrt{3(ab+bc+ca)}=3$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi a=b=c=1.

Bài 194. *Cho a,b,c là các số thực dương . Chứng minh rằng:*

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\ge \frac{x^2+2010y^2}{x^3+2010y^3}+\frac{y^2+2010z^2}{y^3+2010z^3}+\frac{z^2+2010x^2}{z^3+2010x^3}$$

Lời giải:

Theo bất đẳng thức Holder thì ta có

$$(x^3+2010y^3)^2(1+2010)\ge (x^2+2010y^2)^3$$
$$(x^2+2010y^2)(1+2010)\ge (x+2010y)^2$$

Do đó ta có

$$2011^2(x^3+2010y^3)^2(x^2+2010y^2)\ge (x^2+2010y^2)^3(x+2010y)^2$$
$$\Leftrightarrow \frac{x^2+2010y^2}{x^3+2010y^3}\le \frac{2011}{x+2010y}\quad (1)$$

Tương tự thì ta cũng có

$$\frac{y^2+2010z^2}{y^3+2010z^3}\le \frac{2011}{y+2010z}\quad (2)$$
$$\frac{z^2+2010x^2}{z^3+2010x^3}\le \frac{2011}{z+2010x}\quad (3)$$

Cộng (1), (2), (3) vế theo vế ta có

$$\sum_{cyc}\frac{x^2+2010y^2}{x^3+2010y^3}\le \frac{2011}{x+2010y}+\frac{2011}{y+2010z}+\frac{2011}{z+2010x}\quad (4)$$

Mặc khác, sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có

$$2010.\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\ge \frac{2011^2}{2010x+y}$$
$$2010.\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\ge \frac{2011^2}{2010y+z}$$
$$2010.\frac{1}{z}+\frac{1}{x}\ge \frac{2011^2}{2010z+x}$$

Cộng lại ta có

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geq\frac{2011}{2010x+y}+\frac{2011}{2010y+z}+\frac{2011}{2010z+x}\quad(5)$$

Từ (4), (5) ta có

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geq\frac{x^2+2010y^2}{x^3+2010y^3}+\frac{y^2+2010z^2}{y^3+2010z^3}+\frac{z^2+2010x^2}{z^3+2010x^3}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z$.

Bài 195. *Cho a,b,c, d là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c+d=4$. Chứng minh rằng:*

$$1,\ \frac{a}{1+b^2c}+\frac{b}{1+c^2d}+\frac{c}{1+d^2a}+\frac{d}{1+a^2b}\geq 2$$

$$2,\ \frac{a+1}{b^2+1}+\frac{b+1}{c^2+1}+\frac{c+1}{d^2+1}+\frac{d+1}{a^2+1}\geq 4$$

Lời giải:

Cách 1.

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$$\frac{a}{1+b^2c}=a-\frac{ab^2c}{1+b^2c}\geq a-\frac{ab^2c}{2b\sqrt{c}}=a-\frac{1}{2}b\cdot\sqrt{a\cdot ac}\geq a-\frac{1}{4}b(a+ac)=a-\frac{1}{4}(ab+abc)$$

Tương tự ta có

$$\frac{b}{1+c^2d}\geq b-\frac{1}{4}(bc+bcd)$$
$$\frac{c}{1+d^2a}\geq c-\frac{1}{4}(cd+cda)$$
$$\frac{c}{1+d^2a}\geq d-\frac{1}{4}(da+dab)$$

Cộng lại ta có

$$\sum_{cyc}\frac{a}{1+b^2c}\geq(a+b+c+d)-\frac{1}{4}(ab+bc+cd+da)-\frac{1}{4}(abc+bcd+cda+adb)$$

Mặt khác, theo bất đẳng thức AM-GM thì ta có

$$ab+bc+cd+da=(a+c)(b+d)\leq\frac{1}{4}(a+b+c+d)^2=4$$

$$\begin{aligned}&abc+bcd+cda+adb\\&=ab(c+d)+cd(a+b)\\&\leq\frac{1}{4}(a+b)^2(c+d)+\frac{1}{4}(c+d)^2(a+b)\\&=\frac{1}{4}(a+b)(c+d)(a+b+c+d)\\&\leq\frac{1}{16}(a+b+c+d)^3=4\end{aligned}$$

Do đó ta có

$$\frac{a}{1+b^2c}+\frac{b}{1+c^2d}+\frac{c}{1+d^2a}+\frac{d}{1+a^2b}\geq 4-\frac{1}{4}\cdot 4-\frac{1}{4}\cdot 4=2$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=d=1$.

Cách 1.

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$$\frac{a+1}{b^2+1}=(a+1)-\frac{(a+1)b^2}{b^2+1}\geq a+1-\frac{(ab+b)b}{2b}=a+1-\frac{1}{2}(ab+b)$$

Tương tự ta có

$$\frac{b+1}{c^2+1}\geq b+1-\frac{1}{2}(bc+c)$$
$$\frac{c+1}{d^2+1}\geq c+1-\frac{1}{2}(cd+d)$$

$$\frac{d+1}{a^2+1} \geq d+1-\frac{1}{2}(ad+a)$$

Cộng lại ta có

$$\sum_{cyc}\frac{a+1}{b^2+1} \geq (a+b+c+d)+4-\frac{1}{2}(a+b+c+d)-\frac{1}{2}(ab+bc+cd+da)$$
$$=\frac{1}{2}(a+b+c+d)+4-\frac{1}{2}(ab+bc+cd+da)$$

Theo bất đẳng thức AM-GM ta lại có

$$ab+bc+cd+da=(a+c)(b+d) \leq \frac{1}{4}(a+b+c+d)^2=4$$

nên suy ra

$$\sum_{cyc}\frac{a+1}{b^2+1} \geq \frac{1}{2}\cdot 4+4-\frac{1}{2}\cdot 4=4$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=d=1$.

Bài 196. *Cho a,b,c, d là các số thực dương thỏa mãn* $\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{c}}=2$. *Chứng minh rằng:*

$$\frac{1}{\sqrt{a+3b}}+\frac{1}{\sqrt{b+3c}}+\frac{1}{\sqrt{c+3a}} \leq 1$$

Lời giải:

Theo bất đẳng thức AM-GM ta có

$$a+3b=a+b+b+b \geq 4\sqrt[4]{ab^3}$$

Từ đó suy ra

$$\frac{1}{\sqrt{a+3b}} \leq \frac{1}{2.\sqrt{\sqrt[4]{ab}.\sqrt[4]{b^2}}} \leq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{ab}}+\frac{1}{\sqrt[4]{b^2}}\right) \leq \frac{1}{8}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}+\frac{2}{\sqrt{b}}\right)=\frac{1}{8}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{3}{\sqrt{b}}\right)$$

Tương tự ta có

$$\frac{1}{\sqrt{b+3c}} \leq \frac{1}{8}\left(\frac{1}{\sqrt{b}}+\frac{3}{\sqrt{c}}\right)$$
$$\frac{1}{\sqrt{c+3a}} \leq \frac{1}{8}\left(\frac{1}{\sqrt{c}}+\frac{3}{\sqrt{a}}\right)$$

Cộng lại ta có

$$\sum_{cyc}\frac{1}{\sqrt{a+3b}} \leq \frac{1}{8}\sum_{cyc}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{3}{\sqrt{b}}\right)=\frac{1}{8}\cdot 4\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{c}}\right)=1$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} a=b=c \\ \frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{c}}=2 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c=\frac{9}{4}.$

Bài 197. *Cho a,b,c, d là các số thực dương. Chứng minh rằng:*

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3}{c^2+ac+a^2} \geq \frac{a+b+c}{3}$$

Lời giải:

Cách 1.

Ta có

$$\frac{3a^3}{a^2+ab+b^2} \geq 2a-b \quad (1)$$

Thật vậy

$$(1) \Leftrightarrow 3a^3 \geq (2a-b)(a^2+ab+b^2)$$
$$\Leftrightarrow (a-b)^2(a+b) \geq 0 \text{ (luôn đúng)}$$

Tương tự ta có

$$\frac{3b^3}{b^2+bc+c^2} \geq 2b-c$$
$$\frac{3c^3}{c^2+ac+a^2} \geq 2c-a$$
Cộng lại ta có
$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3}{c^2+ac+a^2} \geq \frac{1}{3}\left(2a-b+2b-c+2c-a\right)=\frac{a+b+c}{3}$$
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$

Cách 2.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có
$$VT=\sum_{cyc}\frac{a^4}{a(a^2+ab+b^2)} \geq \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{\sum\limits_{cyc}(a(a^2+ab+b^2))}$$
Ta có hằng đẳng thức
$$\sum_{cyc}\left(a(a^2+ab+b^2)\right)=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)$$
và theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz thì ta có
$$a^2+b^2+c^2 \geq \frac{1}{3}(a+b+c)^2$$
Do đó ta có
$$VT \geq \frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c} \geq \frac{a+b+c}{3}$$
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Cách 3.

Ta có
$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}-\frac{b^3}{a^2+ab+b^2}=a-b$$
nên ta có
$$\sum_{cyc}\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}-\sum_{cyc}\frac{b^3}{a^2+ab+b^2}=(a-b)+(b-c)+(c-a)=0$$
$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}=\sum_{cyc}\frac{b^3}{a^2+ab+b^2}$$
Từ đó suy ra
$$2VT=\sum_{cyc}\frac{a^3+b^3}{a^2+ab+b^2}$$
Mà ta lại có
$$a^3+b^3 \geq \frac{1}{3}(a+b)(a^2+ab+b^2)$$
$$\Leftrightarrow (a+b)(a-b)^2 \geq 0 \text{ (luôn đúng)}$$
Do đó
$$2VT \geq \frac{1}{3}\sum_{cyc}(a+b)=\frac{2(a+b+c)}{3}$$
$$\Leftrightarrow VT \geq \frac{a+b+c}{3}$$
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Bài 198. *Cho a,b,c, d là các số thực dương. Chứng minh rằng:*
$$\frac{a^2}{a+b}+\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+a}+\frac{1}{2}(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}) \geq a+b+c$$

Lời giải:

Bất đẳng thức đã cho tương đương với:

$$\frac{1}{2}(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}) \geq \left(a-\frac{a^2}{a+b}\right)+\left(b-\frac{b^2}{b+c}\right)+\left(c-\frac{c^2}{c+a}\right)$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}) \geq \sum_{cyc}\frac{ab}{a+b}$$

Mặt khác, theo bất đẳng thức AM-GM thì

$$\frac{ab}{a+b} \leq \frac{ab}{2\sqrt{ab}} = \frac{\sqrt{ab}}{2}$$

Tương tự ta cũng có

$$\frac{bc}{b+c} \leq \frac{\sqrt{ab}}{2}$$
$$\frac{ca}{c+a} \leq \frac{\sqrt{ac}}{2}$$

Cộng lại thì ta có

$$\frac{1}{2}(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}) \geq \sum_{cyc}\frac{ab}{a+b}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Bài 199. *Cho $x,\ y,\ z$ là các số thực dương thỏa mãn $xy+yz+zx=3xyz$. Chứng minh rằng:*

$$\frac{y^2}{xy^2+2x^2}+\frac{x^2}{zx^2+2z^2}+\frac{z^2}{yz^2+2y^2} \geq 1$$

Lời giải:

Đặt $a=\dfrac{1}{x},\ b=\dfrac{1}{y},\ c=\dfrac{1}{z}$

Khi đó điều kiện được viết lại là

$$\begin{cases} a,\ b,\ c>0 \\ a+b+c=3 \end{cases}$$

và bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\frac{a^2}{a+2b^2}+\frac{b^2}{b+2c^2}+\frac{c^2}{c+2a^2} \geq 1$$

Theo bất đẳng thức AM-GM ta có

$$\frac{a^2}{a+2b^2} = a-\frac{2ab^2}{a+b^2+b^2} \geq a-\frac{2ab^2}{3\sqrt[3]{ab^4}} = a-\frac{2}{3}\cdot\sqrt[3]{ab\cdot ab\cdot 1} \geq a-\frac{2}{9}(2ab+1)$$

Tương tự ta cũng có

$$\frac{b^2}{b+2c^2} \geq b-\frac{2}{9}(2bc+1)$$
$$\frac{c^2}{c+2a^2} \geq c-\frac{2}{9}(2ac+1)$$

Cộng lại ta có

$$\frac{a^2}{a+2b^2}+\frac{b^2}{b+2c^2}+\frac{c^2}{c+2a^2} \geq (a+b+c)-\frac{4}{9}(ab+bc+ca)-\frac{2}{3}$$

Mà theo ta lại có

$$ab+bc+ca \leq \frac{1}{3}(a+b+c)^2 = 3$$

Suy ra

$$\frac{a^2}{a+2b^2}+\frac{b^2}{b+2c^2}+\frac{c^2}{c+2a^2} \geq 3-\frac{4}{9}\cdot\frac{2}{3}-\frac{2}{3} = 1$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1 \Leftrightarrow x=y=z=\dfrac{1}{3}$.

Bài 200. *Cho x, y, z là các số thực dương lớn hơn 1 thỏa mãn* $xy + yz + zx \geq 2xyz$. *Tìm giá trị lớn nhất của:*

$$P = (x-1)(y-1)(z-1)$$

Lời giải:

Từ giả thiết ta suy ra

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq 2$$

Do đó ta có

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x} \geq \dfrac{y-1}{y} + \dfrac{z-1}{x} \geq 2\sqrt{\dfrac{y-1}{y} \cdot \dfrac{z-1}{x}} \\ \dfrac{1}{y} \geq \dfrac{z-1}{z} + \dfrac{x-1}{x} \geq 2\sqrt{\dfrac{z-1}{z} \cdot \dfrac{x-1}{x}} \\ \dfrac{1}{z} \geq \dfrac{x-1}{x} + \dfrac{y-1}{y} \geq 2\sqrt{\dfrac{x-1}{x} \cdot \dfrac{y-1}{y}} \end{cases}$$

Suy ra

$$\frac{1}{xyz} \geq 8\sqrt{\frac{y-1}{y} \cdot \frac{z-1}{x} \cdot \frac{z-1}{z} \cdot \frac{x-1}{x} \cdot \frac{x-1}{x} \cdot \frac{y-1}{y}}$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(y-1)(z-1) \leq \frac{1}{8}$$

Vậy $Max\ P = \dfrac{1}{8} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = z \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = \dfrac{3}{2}$

Bài 201. *Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn* $x^2 + y^2 + z^2 = 3$. *Tìm giá trị lớn nhất của:*

$$P = xy + yz + zx + \frac{5}{x+y+z}$$

Lời giải:

Ta có

$$2P + 3 = (x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx)) + \frac{10}{x+y+z} = (x+y+z)^2 + \frac{10}{x+y+z}$$

Đặt $t = x + y + z$ thì ta có

$$\begin{cases} t \leq \sqrt{3(x^2 + y^2 + z^2} = 3 \\ t > \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow t \in (\sqrt{3}; 3]$$

và

$$2P + 3 = f(t) = t^2 + \frac{10}{t} \quad (t \in (\sqrt{3}; 3])$$

Ta có

$$f'(t) = \frac{2(t^3 - 5)}{t^2} > 0 \quad \forall t \in (\sqrt{3}; 3]$$

Suy ra hàm số f(t) đồng biến $\forall t \in (\sqrt{3}; 3]$

$\Rightarrow f(t) \leq f(3) = \dfrac{37}{3}$

Hay $P \geq \dfrac{14}{3}$. Vậy $Max\ P = \dfrac{14}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 3 \\ x + y + z = 3 \\ x, y, z > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = 1.$

Bài 202. *Cho $a,\ b \in [0;1]$. Chứng minh rằng:*
$$\frac{1}{1+a+b} \le 1 - \frac{a+b}{2} + \frac{ab}{3}$$

Lời giải:

Bằng phép quy đồng ta có bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với
$$6 \le 6(1+a+b) - 3(a+b)(1+a+b) + 2ab(1+a+b)$$
$$\Leftrightarrow a(1-a)(3-2b) + b(1-b)(3-2a) \ge 0 (\text{luôn đúng do } a,\ b \in [0;1]\ )$$
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = 1$.

Bài 203. *Cho $a,\ b,\ c$ là các số thực dương thỏa mãn $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \ge a^2b^2c^2$.*
Tìm GTNN của:
$$A = \frac{a^2b^2}{c^3(a^2+b^2)} + \frac{b^2c^2}{a^3(b^2+c^2)} + \frac{a^2c^2}{b^3(a^2+c^2)}$$

Lời giải:

Đặt $x = \dfrac{1}{a},\ y = \dfrac{1}{b},\ z = \dfrac{1}{c}$

Khi đó điều kiện được viết lại là
$$\begin{cases} x,\ y,\ z > 0 \\ x^2+y^2+z^2 \ge 1 \end{cases}$$
và
$$A = \sum_{cyc} \frac{x^3}{y^2+z^2}$$
Theo bất đẳng thức Cauchy Schwarz ta có
$$A = \sum_{cyc} \frac{x^4}{x(y^2+z^2)} \ge \frac{(x^2+y^2+z^2)^2}{\sum\limits_{cyc}(x(y^2+z^2))}$$
Mặt khác, theo bất đẳng thức AM-GM ta có
$$\begin{aligned} x(y^2+z^2) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2x^2 \cdot (y^2+z^2) \cdot (y^2+z^2)} \\ &\le \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\left(\frac{2x^2+y^2+z^2+y^2+z^2}{3}\right)^3} \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{9}(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2+z^2} \end{aligned}$$
Tương tự ta cũng có
$$y(x^2+z^2) \le \frac{2\sqrt{3}}{9}(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$
$$z(x^2+y^2) \le \frac{2\sqrt{3}}{9}(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$
Do đó
$$A \ge \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{x^2+y^2+z^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
Vậy $Max\ A = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = z \\ x^2+y^2+z^2 = 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow x = y = z = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow a = b = c = \sqrt{3}$

Bài 204. *Cho $a,\ b$ là các số không âm thỏa mãn $a^2+b^2 = 4$. Chứng minh rằng:*
$$\frac{ab}{a+b+2} \le \sqrt{2} - 1$$

Lời giải:

Ta có
$$\frac{ab}{a+b+2}=\frac{(a+b)^2-(a^2+b^2)}{2(a+b+2)}=\frac{(a+b)^2-4}{2(a+b+2)}=\frac{a+b-2}{2}\quad(1)$$
Lại có
$$a+b\le\sqrt{2(a^2+b^2)}=2\sqrt{2}$$
nên ta có
$$\frac{a+b-2}{2}\le\frac{2\sqrt{2}-2}{2}=\sqrt{2}-1\quad(2)$$
Từ (1) và (2) ta có điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}a=b\\a^2+b^2=4\end{cases}\Leftrightarrow a=b=\sqrt{2}$

Bài 205. *Cho $a,b,c,d,e\in[0;1]$. Chứng minh rằng:*
$$\frac{1}{2-a}+\frac{1}{2-b}+\frac{1}{2-c}\ge 3abc$$

Lời giải:

Theo bất đẳng thức AM-GM, ta có
$$(a-1)^2\ge 0\Leftrightarrow a(2-a)\le 1\Leftrightarrow\frac{1}{2-a}\ge a\ (do\ a\in[0;1])$$
Tương tự ta cũng có
$$\frac{1}{2-b}\ge b$$
$$\frac{1}{2-c}\ge c$$
Suy ra
$$\frac{1}{2-a}+\frac{1}{2-b}+\frac{1}{2-c}\ge a+b+c\quad(1)$$
Mà ta lại có $a,\ b,\ c\in[0;1]\Rightarrow a^2+b^2+c^2\le 3$ nên kết hợp với bất đẳng thức AM-GM thì ta có
$$3(a+b+c)\ge(a^2+b^2+c^2)(a+b+c)\ge 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}\cdot 3\sqrt[3]{abc}=3abc$$
$$\Leftrightarrow a+b+c\ge 3abc\quad(2)$$
Từ (1) và (2) ta suy ra
$$\frac{1}{2-a}+\frac{1}{2-b}+\frac{1}{2-c}\ge 3abc\ \text{(đpcm)}$$
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài 206. *Cho $a,\ b,\ c$ là các số thực dương thỏa mãn $ab+a+b=3$. Chứng minh rằng:*
$$\frac{3a}{b+1}+\frac{3b}{a+1}+\frac{ab}{a+b}\le a^2+b^2+\frac{3}{2}$$

Lời giải:

Từ giả thiết ta suy ra
$$\begin{cases}ab=3-(a+b)\\3-(a+b)=ab\le\dfrac{(a+b)^2}{4}\Rightarrow a+b\ge 2\end{cases}$$
Ta có bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với
$$\frac{3((a+b)^2-2ab)+3(a+b)}{ab+a+b+1}+\frac{3-(a+b)}{a+b}\le(a+b)^2-2ab+\frac{3}{2}$$
$$\Leftrightarrow\frac{3(a+b)^2-6(3-(a+b))+3(a+b)}{4}+\frac{3-(a+b)}{a+b}\le(a+b)^2-2(3-(a+b))+\frac{3}{2}$$
Đặt $t=a+b(2\le t\le 3)$ thì ta cần chứng minh

$$\frac{3t^2+9t-18}{4}+\frac{3-t}{t}\le t^2+2t-\frac{9}{2}$$
$$\Leftrightarrow 3t^3+9t^2-18t+12-4t\le 4t^3+8t^2-18t$$
$$\Leftrightarrow (t-2)(t^2+t+6)\ge 0 \text{ (luôn đúng do } t\ge 2\text{)}$$

Vậy bất đẳng thức đã cho đúng.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} a+b=2 \\ ab=1 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=1.$

Bài 207. *Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn* $a+b+c=\dfrac{bc}{3a}$. *Chứng minh rằng:*
$$a\le \frac{2\sqrt{3}-3}{6}\cdot(b+c)$$

Lời giải:

Ta có
$$a+b+c=\frac{bc}{3a}\le\frac{(b+c)^2}{12a}$$
Suy ra
$$12a^2+12a(b+c)-(b+c)^2\le 0$$
$$\Leftrightarrow 12\left(\frac{a}{b+c}\right)^2+12\left(\frac{a}{b+c}\right)-1\le 0$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{a}{b+c}+\frac{3+2\sqrt{3}}{6}\right)\left(\frac{a}{b+c}-\frac{2\sqrt{3}-3}{6}\right)\le 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{a}{b+c}\le\frac{2\sqrt{3}-3}{6}$$
$$\Leftrightarrow a\le\frac{2\sqrt{3}-3}{6}\cdot(b+c)(\text{đpcm})$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} b=c \\ a=\dfrac{(2\sqrt{3}-3)b}{3} \end{cases}.$

Bài 208. *Cho* $a\ge b>0$. *Chứng minh rằng:*
$$\left(2^a+\frac{1}{2^a}\right)^b\le\left(2^b+\frac{1}{2^b}\right)^a$$

Lời giải:

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với
$$(1+4^a)^b\le(1+4^b)^a\Leftrightarrow\frac{\ln(1+4^a)}{a}\le\frac{\ln(1+4^b)}{b}$$
Xét hàm $f(x)=\dfrac{\ln(1+4^x)}{x}$ với $x>0$. Ta có:
$$f'(x)=\frac{4^x.\ln 4^x-(1+4^x)\ln(1+4^x)}{x^2(1+4^x)}<0$$
Suy ra f(x) nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$

Do f(x) nghịch biến trên $(0;+\infty)$ và $a\ge b>0$ nên $f(a)\le f(b)$ và ta có điều phải chứng minh.

Bài 209. *Cho* $x,\ y$ *là các số thực dương thỏa mãn* $x+y\ge 4$. *Tìm GTNN của*
$$A=\frac{3x^2+4}{4x}+\frac{y^3+2}{y^2}$$

Lời giải:

Ta có

$$A = \frac{3}{4}x + \frac{1}{x} + \frac{2}{y^2} + y$$
$$= \left(\frac{x}{4} + \frac{1}{x}\right) + \left(\frac{x}{2} + \frac{y}{2}\right) + \left(\frac{2}{y^2} + \frac{y}{4} + \frac{y}{4}\right)$$

Mặt khác, theo bất đẳng thức AM-GM ta có

$$\frac{x}{4} + \frac{1}{x} \geq 2 \cdot \sqrt{\frac{x}{4} \cdot \frac{1}{x}} = 1$$
$$\frac{2}{y^2} + \frac{y}{4} + \frac{y}{4} \geq 3\sqrt[3]{\frac{2}{y^2} \cdot \frac{y}{4} \cdot \frac{y}{4}} = \frac{3}{2}$$

Do đó ta có

$$A \geq 1 + 2 + \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} \dfrac{x}{4} = \dfrac{1}{x} \\ x + y = 4 \\ \dfrac{2}{y^2} = \dfrac{y}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$

Bài 210. *Tìm GTNN, GTLN của hàm số*

$$y = \frac{2\sqrt{x} - \sqrt{1-x} + 4}{\sqrt{x} + \sqrt{1-x} + 2}$$

Lời giải:

Ta có

$$y - 2 = \frac{-3\sqrt{1-x}}{\sqrt{x} + \sqrt{1-x} + 2} \leq 0$$

Suy ra

Vậy $\mathbf{Max\ y = 2 \Leftrightarrow x = 1}$

Mặt khác, ta có

$$y - 1 = \frac{\sqrt{x} + 2(1 - \sqrt{1-x})}{\sqrt{x} + \sqrt{1-x} + 2} \geq 0$$

Suy ra

Vậy $\mathbf{Min\ y = 1 \Leftrightarrow x = 0}$

Bài 211. *Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của:*

$$\frac{a^2}{1 + ab + bc} + \frac{b^2}{1 + bc + ca} + \frac{c^2}{1 + ca + ab}$$

Lời giải:

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz ta có

$$\frac{a^2}{1 + ab + bc} + \frac{b^2}{1 + bc + ca} + \frac{c^2}{1 + ca + ab} \geq \frac{(a+b+c)^2}{3 + 2(ab + bc + ca)} = \frac{(a+b+c)^2}{a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)} = 1$$

Vậy $Min \left(\dfrac{a^2}{1 + ab + bc} + \dfrac{b^2}{1 + bc + ca} + \dfrac{c^2}{1 + ca + ab}\right) = 1 \Leftrightarrow a = b = c = 1$

Bài 212. *Cho a,b,c là các số thực không âm. Chứng minh rằng:*

$$(ab + bc + ca)\left(\frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(c-a)^2}\right) \geq 4$$

Lời giải:

Không mất tính tổng quát giả sử $a \geq b \geq c$, khi đó ta có

$$ab + bc + ca \geq ab,\ \frac{1}{(b-c)^2} \geq \frac{1}{b^2},\ \frac{1}{(c-a)^2} \geq \frac{1}{a^2}$$

Do đó ta có

$$\begin{aligned}VT &\geq ab\left(\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\\ &\geq \frac{ab}{(a-b)^2}+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\\ &= \frac{ab}{(a-b)^2}+\frac{(a-b)^2}{ab}+2\end{aligned}$$

Mặt khác, áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$$\frac{ab}{(a-b)^2}+\frac{(a-b)^2}{ab}\geq 2$$

Suy ra

$$VT \geq 2+2=4$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}c=0\\(a-b)^2=ab\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}c=0\\a=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}b\end{cases}$

Bài 213. *Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $xyz=1$. Chứng minh rằng:*

$$\frac{1}{x^2+2y^2+3}+\frac{1}{y^2+2z^2+3}+\frac{1}{z^2+2x^2+3}\leq\frac{1}{2}$$

Lời giải:

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$$x^2+y^2\geq 2xy$$
$$y^2+1\geq 2y$$

Suy ra

$$\frac{1}{x^2+2y^2+3}\leq\frac{1}{2xy+2y+2}$$

Tương tự ta cũng có

$$\frac{1}{y^2+2z^2+3}\leq\frac{1}{2yz+2z+2}$$
$$\frac{1}{z^2+2x^2+3}\leq\frac{1}{2xz+2x+2}$$

Do đó ta có

$$VT\leq\frac{1}{2}\left(\frac{1}{xy+y+1}+\frac{1}{yz+z+1}+\frac{1}{zx+x+1}\right)$$

Mặt khác, do $xyz=1$ nên ta có

$$\begin{aligned}&\frac{1}{xy+y+1}+\frac{1}{yz+z+1}+\frac{1}{zx+x+1}\\ &=\frac{1}{xy+y+1}+\frac{y}{xy+y+1}+\frac{xy}{xy+y+1}\\ &=\frac{xy+y+1}{xy+y+1}\\ &=1\end{aligned}$$

Suy ra $VT\leq\dfrac{1}{2}$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1$.

Bài 214. *Cho x,y là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của:*

$$P=\sqrt{\frac{x^3}{x^3+8y^3}}+\sqrt{\frac{4y^3}{y^3+(x+y)^3}}$$

Lời giải:

Do $x > 0$ nên ta có
$$P = \sqrt{\frac{1}{1+\frac{8y^3}{x^3}}} + \sqrt{\frac{4}{1+\left(\frac{x}{y}+1\right)^3}}$$
Đặt $t = \frac{y}{x}$ $\quad (t > 0)$ thì ta có
$$P = \sqrt{\frac{1}{1+8t^3}} + \sqrt{\frac{4}{1+(\frac{1}{t}+1)^3}}$$
Mặt khác, theo bất đẳng thức AM-GM ta có
$$1+8t^3 = (1+2t)(4t^2-2t+1) \le \frac{1}{4}(4t^2+2)^2 = (2t^2+1)^2$$
$$\Rightarrow \sqrt{\frac{1}{1+8t^3}} \ge \frac{1}{2t^2+1}(1)$$
Ta sẽ chứng minh
$$\sqrt{\frac{4}{1+(\frac{1}{t}+1)^3}} \ge \frac{2t^2}{2t^2+1}(2)$$
Thật vậy, ta có
$$(2) \Leftrightarrow (2t^2+1)^2 \ge t^4 + t(t+1)^3$$
$$\Leftrightarrow (t-1)^2(2t^2+t+1) \ge 0(\text{luôn đúng})$$
Từ (1) và (2) ta suy ra
$$P \ge \frac{1}{2t^2+1} + \frac{2t^2}{2t^2+1} = 1$$
Vậy $Min\ P = 1$, Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} 1+2t = 4t^2-2t+1 \\ t = 1 \end{cases} \Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow x = y$

Bài 215. *Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn: $a+b+c=3$ và làm cho biểu thức T luôn xác định. Tìm GTLN của:*
$$T = \sqrt{a^2+a-1} + \sqrt{b^2+b-1} + \sqrt{c^2+c-1}$$

Lời giải:

Biểu thức T có nghĩa khi và chỉ khi
$$a,\ b,\ c \ge \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$
Ta có:
$$\sqrt{a^2+a-1} = \sqrt{\frac{(3a-1)^2}{4} - \frac{5(a-1)^2}{4}} \le \frac{3a-1}{2}$$
Tương tự ra có
$$\sqrt{b^2+b-1} \le \frac{3b-1}{2}$$
$$\sqrt{c^2+c-1} \le \frac{3c-1}{2}$$
Suy ra
$$T \le \frac{3(a+b+c)-3}{2} = 3$$
Vậy $Max\ T = 3 \Leftrightarrow x = y = z = 1$.

Bài 216. *Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn: $ab+bc+ca=5$. Tìm GTNN của biểu thức*
$$P = \frac{3a+3b+2c}{\sqrt{6(a^2+5)} + \sqrt{6(b^2+5)} + \sqrt{c^2+5}}$$

Lời giải:

Từ giả thiết $ab + bc + ca = 5$ và theo bất đẳng thức AM-GM thì ta có

$$\begin{aligned}
&2\sqrt{6(a^2+5)} + 2\sqrt{6(b^2+5)} + 2\sqrt{c^2+5}\\
&= 2\sqrt{6(a+b)(a+c)} + 2\sqrt{6(b+a)(b+c)} + 2\sqrt{(c+a)(c+b)}\\
&= 2\sqrt{(3a+3b)(2a+2c)} + 2\sqrt{(3b+3a)(2b+2c)} + 2\sqrt{(c+a)(c+b)}\\
&\le\ 3a+3b+2a+2c+3b+3a+2b+2c+c+a+c+b\\
&= 3(3a+3b+2c)
\end{aligned}$$

Do đó

$$P = \frac{3a+3b+2c}{\sqrt{6(a^2+5)} + \sqrt{6(b^2+5)} + \sqrt{c^2+5}} \ge \frac{2}{3}$$

Suy ra Min P = 1.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = 1,\ c = 2$.

Bài 217. *Cho các số thực dương x, y thỏa mãn:* $2x + 3y = 5$. *Tìm GTNN của biểu thức*

$$P = \frac{\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}-1}{2y} + \frac{\sqrt{(1+x^3)(1+y^3)}-1}{3x^2}$$

Lời giải:

Theo bất đẳng thức Cauchy Schwarz thì ta có

$$\begin{aligned}
P &= \frac{\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}-1}{2y} + \frac{\sqrt{(1+x^3)(1+y^3)}-1}{3x^2}\\
&\ge \frac{1+xy-1}{2y} + \frac{1+\sqrt{x^3y^3}-1}{3x^2}\\
&= \frac{x}{2} + \frac{y\sqrt{y}}{3\sqrt{x}}\\
&= \frac{x}{3} + \left(\frac{x}{6} + \frac{y\sqrt{y}}{6\sqrt{x}} + \frac{y\sqrt{y}}{6\sqrt{x}}\right)
\end{aligned}$$

Mặt khác, sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$$\frac{x}{6} + \frac{y\sqrt{y}}{6\sqrt{x}} + \frac{y\sqrt{y}}{6\sqrt{x}} \ge 3\sqrt[3]{\frac{x}{6}\cdot\frac{y\sqrt{y}}{6\sqrt{x}}\cdot\frac{y\sqrt{y}}{6\sqrt{x}}} = \frac{y}{2}$$

Suy ra

$$P \ge \frac{x}{3} + \frac{y}{2} = \frac{2x+3y}{6} = \frac{5}{6}$$

Vậy GTNN của $P = \dfrac{5}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ \dfrac{x}{6} = \dfrac{y\sqrt{y}}{6\sqrt{x}} \\ 2x+3y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 1.$

Bài 218. *Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn:* $abc = 1$. *Tìm GTLN của biểu thức*

$$P = \frac{ab}{a+b+ab} + \frac{bc}{b+c+bc} + \frac{ca}{c+a+ab}$$

Lời giải:

Đặt $x = \dfrac{1}{a^3},\ y = \dfrac{1}{b^3},\ z = \dfrac{1}{c^3}$

Ta có điều kiện đã cho được viết lại thành

$$\begin{cases} xyz = 1 \\ x,\ y,\ z > 0 \end{cases}$$

và

$$P=\frac{1}{x^3+y^3+1}+\frac{1}{y^3+z^3+1}+\frac{1}{x^3+z^3+1}$$

Ta lại có $x^3+y^3\ge xy(x+y)\Leftrightarrow (x-y)^2(x+y)\ge 0$(luôn đúng)

Do đó ta có

$$\frac{1}{x^3+y^3+1}\le\frac{1}{xy(x+y)+xyz}=\frac{z}{x+y+z}$$

Tương tự ta có

$$\frac{1}{y^3+z^3+1}\le\frac{x}{x+y+z}$$
$$\frac{1}{x^3+z^3+1}\le\frac{y}{x+y+z}$$

Suy ra

$$P\le\frac{x}{x+y+z}+\frac{y}{x+y+z}+\frac{z}{x+y+z}=1$$

Vậy Max P = 1, Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1\Leftrightarrow a=b=c=1$.

Bài 219. *Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn:* $ab+bc+ca=3$. *Chứng minh rằng:*

$$\frac{1}{1+a^2(b+c)}+\frac{1}{1+b^2(a+c)}+\frac{1}{1+c^2(a+b)}\le\frac{1}{abc}$$

Lời giải:

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$$abc=\sqrt{ab\cdot bc\cdot ac}\le\sqrt{\left(\frac{ab+bc+ca}{3}\right)^3}=1$$

Suy ra

$$\begin{aligned}VT&=\frac{1}{1+a^2(b+c)}+\frac{1}{1+b^2(a+c)}+\frac{1}{1+c^2(a+b)}\\&\le\frac{1}{abc+a^2(b+c)}+\frac{1}{abc+b^2(a+c)}+\frac{1}{abc+c^2(a+b)}\\&=\frac{1}{ab+bc+ca}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\\&=\frac{1}{ab+bc+ca}\cdot\frac{ab+bc+ca}{abc}\\&=\frac{1}{abc}\end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}ab=bc=ca\\ab+bc+ca=3\end{cases}\Leftrightarrow a=b=c=1$

Bài 220. *Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn:* $a+b+c\le 2$. *Chứng minh rằng:*

$$\frac{1}{a^2+bc}+\frac{1}{b^2+ac}+\frac{1}{c^2+ab}\le\frac{1}{abc}$$

Lời giải:

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$$\begin{aligned}VT&\le\frac{1}{2a\cdot\sqrt{bc}}+\frac{1}{2b\sqrt{ac}}+\frac{1}{2c\sqrt{ab}}\\&=\frac{\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ac}}{2abc}\end{aligned}$$

Sử dụng AM-GM ta có

$$\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ac}\le\frac{1}{2}(a+b)+\frac{1}{2}(b+c)+\frac{1}{2}(a+c)=a+b+c\le 2$$

Do đó

$$VT\le\frac{2}{2abc}=\frac{1}{abc}\text{(đpcm)}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} a=b=c \\ a+b+c=2 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c=\dfrac{2}{3}.$

Bài 221. *Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn:* $a+b+c=\dfrac{3}{4}$. *Tìm GTNN của:*
$$P=\frac{1}{\sqrt[3]{a+3b}}+\frac{1}{\sqrt[3]{b+3b}}+\frac{1}{\sqrt[3]{c+3a}}$$

Lời giải:

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta có
$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{\sqrt[3]{a+3b}}+\frac{1}{\sqrt[3]{b+3b}}+\frac{1}{\sqrt[3]{c+3a}} \\ &\geq \frac{1}{\dfrac{a+3b+1+1}{3}}+\frac{1}{\dfrac{b+3c+1+1}{3}}+\frac{1}{\dfrac{c+3a+1+1}{3}} \\ &= \frac{3}{a+3b+2}+\frac{3}{b+3c+2}+\frac{3}{c+3a+2} \end{aligned}$$
Mặt khác, sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz ta có
$$\frac{1}{a+3b+2}+\frac{1}{b+3c+2}+\frac{1}{c+3a+2}\geq\frac{9}{4(a+b+c)+6}=\frac{9}{3+6}=1$$
Suy ra $P\geq 3$

Vậy Min P $=3\Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c=\dfrac{3}{4} \\ a=b=c \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c=\dfrac{1}{4}.$

Bài 222. *Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng:*
$$\frac{2}{(a+1)^2+b^2+1}+\frac{2}{(b+1)^2+c^2+1}+\frac{2}{(a+1)^2+b^2+1}\leq 1$$

Lời giải:

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có:
$$(a+1)^2+b^2+1=a^2+b^2+2a+2\geq 2(ab+a+1)$$
Suy ra:
$$\frac{2}{(a+1)^2+b^2+1}\leq\frac{1}{ab+a+1}$$
Tương tự:
$$\frac{2}{(b+1)^2+c^2+1}\leq\frac{1}{bc+b+1}$$
$$\frac{2}{(c+1)^2+a^2+1}\leq\frac{1}{ca+c+1}$$
Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên, ta được:
$$\frac{2}{(a+1)^2+b^2+1}+\frac{2}{(b+1)^2+c^2+1}+\frac{2}{(a+1)^2+b^2+1}\leq\frac{1}{ab+a+1}+\frac{1}{bc+b+1}+\frac{1}{ca+c+1}$$
Từ điều kiện $abc=1$, ta có:
$$\begin{aligned} \frac{1}{ab+a+1}+\frac{1}{bc+b+1}+\frac{1}{ca+c+1} &= \frac{1}{ab+a+1}+\frac{a}{abc+ab+a}+\frac{ab}{a^2bc+abc+ab} \\ &= \frac{1}{ab+a+1}+\frac{a}{ab+a+1}+\frac{ab}{ab+a+1} \\ &= 1 \end{aligned}$$
Do đó:

$$\frac{2}{(a+1)^2+b^2+1}+\frac{2}{(b+1)^2+c^2+1}+\frac{2}{(a+1)^2+b^2+1}\leq 1$$

Vậy bất đẳng thức đã được chứng minh.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1.\square$

Bài 223. *Cho a,b,c là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:*

$$P=\frac{3a}{b+c}+\frac{4b}{c+a}+\frac{5c}{a+b}$$

Lời giải:

Cộng hai vế của biểu thức P với 12, ta được:

$$P+12=(a+b+c)\left(\frac{3}{b+c}+\frac{4}{c+a}+\frac{5}{a+b}\right)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có:

$$\frac{3}{b+c}+\frac{4}{c+a}+\frac{5}{a+b}\geq\frac{(\sqrt{3}+2+\sqrt{5})^2}{a+b+c}$$

Do đó:

$$P+12\geq(a+b+c)\frac{(\sqrt{3}+2+\sqrt{5})^2}{a+b+c}\Leftrightarrow P\geq(\sqrt{3}+2+\sqrt{5})^2-12$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $(\sqrt{3}+2+\sqrt{5})^2-12$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: $\dfrac{b+c}{\sqrt{3}}=\dfrac{c+a}{2}=\dfrac{a+b}{\sqrt{5}}.\square$

Bài 224. *Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=3$.*

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P=\frac{1}{a^2-a+3}+\frac{1}{b^2-b+3}+\frac{1}{c^2-c+3}$$

Lời giải:

Đầu tiên ta chứng minh:

$$\frac{1}{a^2-a+3}\leq\frac{4-a}{9},\forall a\in(0;3)\ (*)$$

Thật vậy:

$$(*)\Leftrightarrow 9\leq(4-a)(a^2-a+3)\Leftrightarrow(a-3)(a-1)^2\leq 0$$

Biểu thức trên luôn đúng $\forall a\in(0;3)$

Tương tự, ta có:

$$\frac{1}{b^2-b+3}\leq\frac{4-b}{9}$$
$$\frac{1}{c^2-c+3}\leq\frac{4-c}{9}$$

Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên, ta được:

$$\frac{1}{a^2-a+3}+\frac{1}{b^2-b+3}+\frac{1}{c^2-c+3}\leq\frac{12-a-b-c}{9}=1$$

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng 1.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1.\square$

Bài 225. *Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}=1$.*

Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{a+b}+\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+a}\geq\frac{1}{2}$$

Lời giải:

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có:

$$\frac{a^2}{a+b}+\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+a}\geq\frac{(a+b+c)^2}{2(a+b+c)}=\frac{a+b+c}{2}\ (1)$$

Theo bất đẳng thức AM-GM, ta có:

$$a+b+c=\frac{a+b}{2}+\frac{b+c}{2}+\frac{c+a}{2}\geq\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}=1\quad(2)$$

Từ (1) và (2), suy ra:

$$\frac{a^2}{a+b}+\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+a}\geq\frac{1}{2}$$

Vậy bất đẳng thức đã được chứng minh.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$. $\square$

Bài 226. *Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $ab+bc+ca=1$. Chứng minh rằng:*

$$\sqrt[3]{\frac{1}{a}+6b}+\sqrt[3]{\frac{1}{b}+6c}+\sqrt[3]{\frac{1}{c}+6a}\leq\frac{1}{abc}$$

Lời giải:

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có:

$$\sqrt[3]{\frac{1}{a}+6b}=\frac{3\sqrt[3]{3.9bc.(1+6ab)}}{9\sqrt[3]{abc}}\leq\frac{4+9bc+6ab}{9\sqrt[3]{abc}}$$

Tương tự:

$$\sqrt[3]{\frac{1}{b}+6c}\leq\frac{4+9ca+6bc}{9\sqrt[3]{abc}}$$

$$\sqrt[3]{\frac{1}{c}+6a}\leq\frac{4+9ab+6ca}{9\sqrt[3]{abc}}$$

Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên, ta được:

$$\sqrt[3]{\frac{1}{a}+6b}+\sqrt[3]{\frac{1}{b}+6c}+\sqrt[3]{\frac{1}{c}+6a}\leq\frac{12+15(ab+bc+ca)}{9\sqrt[3]{abc}}=\frac{3}{\sqrt[3]{abc}}\ (1)$$

Từ điều kiện $ab+bc+ca=1$ và bất đẳng thức AM-GM, ta có:

$$1=ab+bc+ca\geq3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}\Leftrightarrow\frac{3}{\sqrt[3]{abc}}\leq\frac{1}{abc}\ (2)$$

Từ (1) và (2), suy ra:

$$\sqrt[3]{\frac{1}{a}+6b}+\sqrt[3]{\frac{1}{b}+6c}+\sqrt[3]{\frac{1}{c}+6a}\leq\frac{1}{abc}$$

Vậy bất đẳng thức đã được chứng minh.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{\sqrt{3}}{3}$.$\square$

Bài 227. *Cho $a,b,c\in[0,1]$ và $a+b+c\neq0$. Chứng minh rằng:*

$$\frac{1}{ab+1}+\frac{1}{bc+1}+\frac{1}{ca+1}\leq\frac{5}{a+b+c}$$

Lời giải:

Không mất tính tổng quát ta giả sử $1\geq a\geq b\geq c\geq0$.

Ta có:

$$\frac{c}{ab+1}+\frac{a}{bc+1}+\frac{b}{ca+1}\leq\frac{a+b+c}{bc+1}\leq\frac{1+b+c+(1-b)(1-c)+bc}{bc+1}=2\ (1)$$

Mặt khác:

$$\begin{aligned}\frac{a+b}{ab+1}+\frac{b+c}{bc+1}+\frac{c+a}{ca+1}&=\left(\frac{a+b}{ab+1}-1\right)+\left(\frac{b+c}{bc+1}-1\right)+\left(\frac{c+a}{ca+1}-1\right)+3\\&=-\frac{(1-a)(1-b)}{ab+1}-\frac{(1-b)(1-c)}{bc+1}-\frac{(1-c)(1-a)}{ca+1}+3\\&\leq3\ (2)\end{aligned}$$

Cộng (1) và (2) theo vế ta được:
$$\frac{a+b+c}{ab+1}+\frac{a+b+c}{bc+1}+\frac{a+b+c}{ca+1}\le 5\Leftrightarrow \frac{1}{ab+1}+\frac{1}{bc+1}+\frac{1}{ca+1}\le\frac{5}{a+b+c}$$
Vậy bất đẳng thức đã được chứng minh.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=1,c=0$ và các hoán vị.$\square$

Bài 228. *Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng:*
$$\frac{1}{1-a}+\frac{1}{1-b}+\frac{1}{1-c}\ge\frac{2}{1+a}+\frac{2}{1+b}+\frac{2}{1+c}$$

Lời giải:

Áp dụng bất đẳng quen thuộc $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\ge\frac{4}{x+y}$, ta có:
$$\frac{1}{1-a}+\frac{1}{1-b}\ge\frac{4}{2-a-b}=\frac{4}{1+c}$$
Tương tự:
$$\frac{1}{1-b}+\frac{1}{1-c}\ge\frac{4}{1+a}$$
$$\frac{1}{1-c}+\frac{1}{1-a}\ge\frac{4}{1+b}$$
Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên,ta được:
$$2\left(\frac{1}{1-a}+\frac{1}{1-b}+\frac{1}{1-c}\right)\ge 4\left(\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}\right)$$
$$\Leftrightarrow\frac{1}{1-a}+\frac{1}{1-b}+\frac{1}{1-c}\ge\frac{2}{1+a}+\frac{2}{1+b}+\frac{2}{1+c}$$
Vậy bất đẳng thức đã được chứng minh.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{3}$.$\square$

Bài 229. *Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng:*
$$\frac{a^2+3ab}{a+b}+\frac{b^2+3bc}{b+c}+\frac{c^2+3ca}{c+a}\le 2$$

Lời giải:

Sử dụng bất đẳng thức quen thuộc $4xy\le(x+y)^2$, ta có:
$$\frac{a^2+3ab}{a+b}=a+\frac{2ab}{a+b}\le a+\frac{1}{2}(a+b)$$
Tương tự:
$$\frac{b^2+3bc}{b+c}\le b+\frac{1}{2}(b+c)$$
$$\frac{c^2+3ca}{c+a}\le c+\frac{1}{2}(c+a)$$
Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên, ta được:
$$\frac{a^2+3ab}{a+b}+\frac{b^2+3bc}{b+c}+\frac{c^2+3ca}{c+a}\le 2(a+b+c)=2$$
Vậy bất đẳng thức đã được chứng minh.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{3}$. $\square$

Bài 230. *Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng:*
$$\sqrt{\frac{a^3}{a^3+(b+c)^3}}+\sqrt{\frac{b^3}{b^3+(c+a)^3}}+\sqrt{\frac{c^3}{c^3+(a+b)^3}}\ge 1$$

Lời giải:

Với mọi số thực x dương, ta có:

$$4(1+x^3) = 4(1+x)(1-x+x^2) \le (2+x^2)^2$$

Áp dụng bất đẳng thức trên và bất đẳng thức Cauchy-Schwarz:

$$4\left[1+\left(\frac{b+c}{a}\right)^3\right] \le \left[2+\left(\frac{b+c}{a}\right)^2\right]^2 \le \left[2+\frac{2(b^2+c^2)}{a^2}\right]^2$$

$$\Leftrightarrow 4\left[\frac{a^3+(b+c)^3}{a^3}\right] \le 4\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{a^2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{a^3}{a^3+(b+c)^3}} \ge \frac{a^2}{a^2+b^2+c^2}$$

Tương tự:

$$\sqrt{\frac{b^3}{b^3+(c+a)^3}} \ge \frac{b^2}{a^2+b^2+c^2}$$

$$\sqrt{\frac{c^3}{c^3+(a+b)^3}} \ge \frac{c^2}{a^2+b^2+c^2}$$

Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên, ta được:

$$\sqrt{\frac{a^3}{a^3+(b+c)^3}}+\sqrt{\frac{b^3}{b^3+(c+a)^3}}+\sqrt{\frac{c^3}{c^3+(a+b)^3}} \ge 1$$

Vậy bất đẳng thức đã được chứng minh.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$. $\square$

Bài 231. *Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=\frac{3}{4}$. Chứng minh rằng:*

$$\sqrt[3]{a+3b}+\sqrt[3]{b+3c}+\sqrt[3]{c+3a} \le 3$$

Lời giải:

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có:

$$(a+3b)+1+1 \ge 3\sqrt[3]{a+3b} \Leftrightarrow \sqrt[3]{a+3b} \le \frac{a+3b+2}{3}$$

Tương tự:

$$\sqrt[3]{b+3c} \le \frac{b+3c+2}{3}$$

$$\sqrt[3]{c+3a} \le \frac{c+3a+2}{3}$$

Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên, ta được:

$$\sqrt[3]{a+3b}+\sqrt[3]{b+3c}+\sqrt[3]{c+3a} \le \frac{4(a+b+c)+6}{3} = 3$$

Vậy bất đẳng thức đã được chứng minh.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{4}$. $\square$

Bài 232. *Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=3$.*
Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{a^3}{a+bc}+\frac{b^3}{b+ca}+\frac{c^3}{c+ab}$$

Lời giải:

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có:

$$\frac{a^3}{a+bc}+\frac{a+bc}{4}+\frac{1}{2} \ge \frac{3a}{2}$$

$$\frac{b^3}{b+ca}+\frac{b+ca}{4}+\frac{1}{2}\geq\frac{3b}{2}$$
$$\frac{c^3}{c+ab}+\frac{c+ab}{4}+\frac{1}{2}\geq\frac{3c}{2}$$
Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên, ta được:
$$\frac{a^3}{a+bc}+\frac{b^3}{b+ca}+\frac{c^3}{c+ab}\geq\frac{5}{4}(a+b+c)-\frac{1}{4}(ab+bc+ca)-\frac{3}{2}$$
Ta lại có:
$$ab+bc+ca\leq\frac{1}{3}(a+b+c)^2=3$$
Do đó:
$$P=\frac{a^3}{a+bc}+\frac{b^3}{b+ca}+\frac{c^3}{c+ab}\geq\frac{3}{2}$$
Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $\frac{3}{2}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$. □

Bài 233. *Cho tam giác ABC có ba cạnh a,b,c thỏa mãn* $\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1}+\frac{1}{c^2+1}=2$.
Chứng minh rằng:
$$S_{ABC}\leq\frac{\sqrt{3}}{8}$$

Lời giải:

Từ điều kiện đã cho ta biến đổi tương đương: $\frac{a^2}{a^2+1}+\frac{b^2}{b^2+1}+\frac{c^2}{c^2+1}=1$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có:
$$\frac{a^2}{a^2+1}+\frac{b^2}{b^2+1}+\frac{c^2}{c^2+1}\geq\frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+3}$$
Do đó:
$$\frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+3}\leq 1\Leftrightarrow ab+bc+ca\leq\frac{3}{2}$$
Áp dụng hai bất đẳng thức quen thuộc:
- $(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)\leq abc$
- $3abc(a+b+c)\leq(ab+bc+ca)^2$

Ta có:
$$\begin{aligned}S_{ABC}&=\frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)}\\&\leq\frac{1}{4}\sqrt{abc(a+b+c)}\\&\leq\frac{1}{4}\sqrt{\frac{(ab+bc+ca)^2}{3}}\\&\leq\frac{\sqrt{3}}{8}\end{aligned}$$
Vậy bất đẳng thức đã được chứng minh.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{\sqrt{2}}{2}$. □

Bài 234. *Cho a,b,c là ba cạnh của tam giác. Chứng minh rằng:*
$$\frac{a+c}{3a+b}+\frac{a+b}{3a+c}+\frac{2a}{2a+b+c}<2$$

Lời giải:

Do a,b,c là ba cạnh của tam giác nên: $a+b>c, b+c>a, c+a>b$

Ta đặt: $x = \dfrac{a+b}{2}, y = \dfrac{a+c}{2}, z = a \ (x,y,z>0)$
Suy ra: $x+y>z, y+z>x, z+x>y$
Ta có:
$$\frac{a+c}{3a+b}+\frac{a+b}{3a+c}+\frac{2a}{2a+b+c}=\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}$$
Mặt khác:
$$x+y>z \Leftrightarrow 2z(x+y)>z(x+y+z) \Leftrightarrow \frac{2z}{x+y+z}>\frac{z}{x+y}$$
Tương tự:
$$\frac{2x}{x+y+z}>\frac{x}{y+z}$$
$$\frac{2y}{x+y+z}>\frac{y}{z+x}$$
Cộng ba bất đẳng thức trên theo vế, ta được:
$$\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}<2$$
Do đó:
$$\frac{a+c}{3a+b}+\frac{a+b}{3a+c}+\frac{2a}{2a+b+c}<2$$
Vậy bất đẳng thức đã được chứng minh.□

Bài 235. *Cho a,b,c là các số thực dương. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:*
$$P=\frac{\sqrt{ab}}{c+3\sqrt{ab}}+\frac{\sqrt{bc}}{a+3\sqrt{bc}}+\frac{\sqrt{ca}}{b+3\sqrt{ca}}$$

Lời giải:

Đặt $x=\sqrt{a}, y=\sqrt{b}, z=\sqrt{c}$. Khi đó:
$$\begin{aligned}P&=\frac{yz}{x^2+3yz}+\frac{zx}{y^2+3zx}+\frac{xy}{z^2+3xy}\\&=1-\frac{1}{3}\left(\frac{x^2}{x^2+3yz}+\frac{y^2}{y^2+3zx}+\frac{z^2}{z^2+3xy}\right)\end{aligned}$$
Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz và bất đẳng thức $3(xy+yz+zx)\le(x+y+z)^2$, ta có:
$$\frac{x^2}{x^2+3yz}+\frac{y^2}{y^2+3zx}+\frac{z^2}{z^2+3xy}\ge\frac{(x+y+z)^2}{(x+y+z)^2+xy+yz+zx}\ge\frac{3}{4}$$
Suy ra: $P\le\dfrac{3}{4}$
Vậy giá trị lớn nhất của P bằng $\dfrac{3}{4}$.
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$. □

Bài 236. *Cho a,b,c là các số thực thỏa mãn $a+b+c=6$. Chứng minh rằng:*
$$8^a+8^b+8^c\ge4^{a+1}+4^{b+1}+4^{c+1}$$

Lời giải:

Đặt $x=2^a, y=2^b, z=2^c$. Ta có
$$xyz=2^{a+b+c}=64,\ (x,y,z>0)$$
Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:
$$x^3+y^3+z^3\ge4(x^2+y^2+z^2)$$
Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có:
$$x^3+y^3+y^3\ge3xy^2$$

$$x^3+z^3+z^3 \geq 3xz^2$$

$$\Rightarrow 2x^3+2z^3+2z^3 \geq 3x(y^2+z^2) \Leftrightarrow 5x^3+2y^3+2z^3 \geq 3x(x^2+y^2+z^2)$$

Tương tự:

$$5y^3+2z^3+2x^3 \geq 3y(x^2+y^2+z^2)$$

$$5z^3+2x^3+2y^3 \geq 3z(x^2+y^2+z^2)$$

Cộng ba bất đẳng thức theo vế, ta được:

$$3(x^3+y^3+z^3) \geq (x+y+z)(x^2+y^2+z^2)$$

Theo bất đẳng thức AM-GM, ta lại có:

$$x+y+z \geq 3\sqrt[3]{xyz}=12$$

Suy ra:

$$x^3+y^3+z^3 \geq 4(x^2+y^2+z^2)$$

Vậy bất đẳng thức đã được chứng minh.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=2$. □

Bài 237. *Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $ab+bc+ca=1$. Chứng minh rằng:*

$$\frac{a}{1+a^2}+\frac{b}{1+b^2}+\frac{3c}{\sqrt{1+c^2}} \leq \sqrt{10}$$

Lời giải:

Đặt $a=tan\dfrac{A}{2}, b=tan\dfrac{B}{2}, c=tan\dfrac{C}{2}$ với $A,B,C \in (0,\pi)$

Từ điều kiện ta có:

$$tan\frac{A}{2}tan\frac{B}{2}+tan\frac{B}{2}tan\frac{C}{2}+tan\frac{C}{2}tan\frac{A}{2}=1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{tan\frac{A}{2}}=\frac{tan\frac{B}{2}+tan\frac{C}{2}}{1-tan\frac{B}{2}tan\frac{C}{2}}$$

$$\Leftrightarrow tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}\right)=tan\left(\frac{B}{2}+\frac{C}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow A+B+C=\pi$$

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$\frac{1}{2}sinA+\frac{1}{2}sinB+3sin\frac{C}{2} \leq \sqrt{10}$$

Thật vậy, áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}sinA+\frac{1}{2}sinB+3sin\frac{C}{2} &= sin\frac{A+B}{2}cos\frac{A-B}{2}+3sin\frac{C}{2}\\ &= cos\frac{C}{2}cos\frac{A-B}{2}+3sin\frac{C}{2}\\ &\leq cos\frac{C}{2}+3sin\frac{C}{2}\\ &\leq \sqrt{10}\sqrt{cos^2\frac{C}{2}+sin^2\frac{C}{2}}=\sqrt{10}\end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức đã được chứng minh.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} cos\dfrac{A-B}{2}=1 \\ \dfrac{cos\frac{C}{2}}{1}=\dfrac{sin\frac{C}{2}}{3} \end{cases} \Leftrightarrow a=b=-3+\sqrt{10}, c=3$ □

Bài 238. *Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:*
$$\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b} \geq 3\sqrt[3]{\frac{3(a+b)(b+c)(c+a)(a+b+c)}{(ab+bc+ca)^2}}$$

Lời giải:

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có:
$$\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b} \geq 3\sqrt[3]{\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{(ab+bc+ca)^2}} \ (1)$$
Sử dụng bất đẳng thức $(x+y+z)^2 \geq 3(xy+yz+zx)$, ta lại có:
$$(ab+bc+ca)^2 \geq 3abc(a+b+c) \Leftrightarrow \frac{1}{abc} \geq \frac{3(a+b+c)}{(ab+bc+ca)^2} \ (2)$$
Từ (1) và (2) suy ra:
$$\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b} \geq 3\sqrt[3]{\frac{3(a+b)(b+c)(c+a)(a+b+c)}{(ab+bc+ca)^2}}$$
Vậy bất đẳng thức đã được chứng minh.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$. $\square$

Bài 239. *Cho a, b là hai số thực dương. Chứng minh rằng:*
$$\frac{(1+a^2b)(1+b^2)}{(a^2-a+1)(1+b^3)} \leq 2$$

Lời giải:

Trước tiên ta chứng minh bất đẳng thức sau:
$$(1+x)(1+y)(1+z) \geq (1+\sqrt[3]{xyz})^3 \ (*)$$
Thật vậy, áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:
$$\begin{aligned}(1+x)(1+y)(1+z) &= 1+x+y+z+xy+yz+zx+xyz \\ &\geq 1+3\sqrt[3]{xyz}+3\sqrt[3]{x^2y^2z^2}+xyz=(1+\sqrt[3]{xyz})^3\end{aligned}$$
Do đó bất đẳng thức (*) đã được chứng minh.

Dấu bằng trong (*) xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z$.

Áp dụng bất đẳng thức (*), ta có:
$$(1+a^3)(1+a^3)(1+b^3) \geq (1+a^2b)^3$$
$$(1+1)(1+1)(1+a^3) \geq (1+a)^3$$
$$(1+1)(1+b^3)(1+b^3) \geq (1+b^2)^3$$
Nhân ba bất đẳng thức trên theo vế, ta được:
$$8(1+a^3)^3(1+b^3)^3 \geq (1+a)^3(1+a^2b)^3(1+b^2)^3 \Leftrightarrow \frac{(1+a^2b)(1+b^2)}{(a^2-a+1)(1+b^3)} \leq 2$$
Vậy bất đẳng thức đã được chứng minh.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=1$. $\square$

Bài 240. *Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c \leq \frac{3}{2}$.*

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:
$$P=a+b+c+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$

Lời giải:

Áp dụng bất đẳng Cauhy-Schwarz và bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$
\begin{aligned}
P &= a+b+c+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\\
&\geq a+b+c+\frac{9}{a+b+c}\\
&= \left[a+b+c+\frac{9}{4(a+b+c)}\right]+\frac{27}{4(a+b+c)}\\
&\geq 2.\frac{3}{2}+\frac{27}{4}.\frac{2}{3}=\frac{15}{2}
\end{aligned}
$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $\dfrac{15}{2}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\dfrac{1}{2}$. □

Bài 241. *Cho a,b là hai số thực thỏa mãn $(a+b)^3+4ab\geq 2$.*
Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P=3(a^4+b^4+a^2b^2)-2(a^2+b^2)+1$$

Lời giải:

Từ điều kiện và bất đẳng thức quen thuộc $(a+b)^2\geq 4ab$, ta có:

$$\left.\begin{array}{c}(a+b)^3+4ab\geq 2\\ (a+b)^2\geq 4ab\end{array}\right\}\Rightarrow (a+b)^3+(a+b)^2\geq 2\Leftrightarrow a+b\geq 1$$

Suy ra:

$$a^2+b^2\geq\frac{(a+b)^2}{2}\geq\frac{1}{2}$$

Ta có:

$$
\begin{aligned}
P &= 3(a^4+b^4+a^2b^2)-2(a^2+b^2)+1\\
&= 3\left[(a^2+b^2)^2-a^2b^2\right]-2(a^2+b^2)+1\\
&\geq 3\left[(a^2+b^2)^2-\frac{(a^2+b^2)^2}{4}\right]-2(a^2+b^2)+1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P &\geq \frac{9}{4}(a^2+b^2)^2-2(a^2+b^2)+1\\
&= \frac{1}{4}(a^2+b^2)^2+\left[\left(\sqrt{2}a^2+\sqrt{2}b^2\right)^2-2.\left(\sqrt{2}a^2+\sqrt{2}b^2\right).\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\right]+\frac{1}{2}\\
&= \frac{1}{4}(a^2+b^2)^2+\left(\sqrt{2}a^2+\sqrt{2}b^2-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}\\
&\geq \frac{1}{4}.\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{9}{16}
\end{aligned}
$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $\dfrac{9}{16}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=\dfrac{1}{2}$. □

Bài 242. *Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:*

$$P=\frac{1}{\sqrt{5a^2+2ab+2b^2}}+\frac{1}{\sqrt{5b^2+2bc+2c^2}}+\frac{1}{\sqrt{5c^2+2ca+2a^2}}$$

Lời giải:

Từ điều kiện, áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta được:
$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \le \sqrt{3\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)} = \sqrt{3}$$
Ta có:
$$5a^2+2ab+2b^2 = (2a+b)^2+(a-b)^2 \ge (2a+b)^2$$
Do đó:
$$\frac{1}{\sqrt{5a^2+2ab+2b^2}} \le \frac{1}{2a+b}$$
Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta lại có:
$$\frac{1}{2a+b} \le \frac{1}{9}\left(\frac{2}{a}+\frac{1}{b}\right)$$
Suy ra:
$$\frac{1}{\sqrt{5a^2+2ab+2b^2}} \le \frac{1}{9}\left(\frac{2}{a}+\frac{1}{b}\right)$$
Tương tự:
$$\frac{1}{\sqrt{5b^2+2bc+2c^2}} \le \frac{1}{9}\left(\frac{2}{b}+\frac{1}{c}\right)$$
$$\frac{1}{\sqrt{5c^2+2ca+2a^2}} \le \frac{1}{9}\left(\frac{2}{c}+\frac{1}{a}\right)$$
Cộng ba bất đẳng trên theo vế, ta được:
$$P \le \frac{1}{3}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \le \frac{\sqrt{3}}{3}$$
Vậy giá trị lớn nhất của P bằng $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\sqrt{3}$. □

Bài 243. *Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:*
$$3(a^2+b^2+c^2)+4abc \ge 13$$

Lời giải:

Cách 1.

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:
$$3\left[(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)\right]+4abc \ge 13$$
$$\Leftrightarrow 3\left[9-2(ab+bc+ca)\right]+4abc \ge 13$$
$$\Leftrightarrow 3(ab+bc+ca)-2abc \le 7$$
Không mất tính tổng quát ta giả sử $a \le b \le c \Rightarrow a \le 1$
Ta có:
$$\begin{aligned}3(ab+bc+ca)-2abc &= 3a(b+c)+bc(3-2a)\\ &\le 3a(b+c)+\frac{(b+c)^2}{4}(3-2a)\\ &= 3a(3-a)+\frac{(3-a)^2}{4}(3-2a)\\ &= -\frac{1}{2}a^3+\frac{3}{4}a^2+\frac{27}{4}\end{aligned}$$
Xét hàm số $f(a) = -\dfrac{1}{2}a^3+\dfrac{3}{4}a^2+\dfrac{27}{4}$ với $0<a\le 1$
Ta có: $f'(a) = -\dfrac{3}{2}a^2+\dfrac{3}{2}a = \dfrac{3}{2}a(1-a) \ge 0\ \forall a \in (0;1]$
$\Rightarrow$ hàm số $f(a)$ luôn đồng biến trên $(0;1]$
$\Rightarrow f(a) \le f(1) = 7$
Do đó:
$$3(ab+bc+ca)-2abc \le 7$$

Vậy bất đẳng thức đã được chứng minh.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$. $\square$

Cách 2.

Ta có:

$$\begin{aligned}(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) &= (3-2a)(3-2b)(3-2c)\\ &= 27-18(a+b+c)+12(ab+bc+ca)-8abc\\ &= 12(ab+bc+ca)-27-8abc\end{aligned}$$

Từ bất đẳng thức $abc \geq (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$, ta có:

$$abc \geq 12(ab+bc+ca)-27-8abc \Leftrightarrow abc \geq \frac{4}{3}(ab+bc+ca)-3$$

Do đó:

$$\begin{aligned}3(a^2+b^2+c^2)+4abc &\geq 3(a^2+b^2+c^2)+\frac{16}{3}(ab+bc+ca)-12\\ &= \frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)+\frac{8}{3}(a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca)-12\\ &\geq \frac{1}{9}(a+b+c)^2+\frac{8}{3}(a+b+c)^2-12=13\end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức đã được chứng minh.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$. $\square$

Cách 3.

Không mất tính tổng quát ta giả sử $c(1-a)(1-b) \geq 0 \Rightarrow abc \geq c(a+b)-c$

Khi đó:

$$\begin{aligned}3(a^2+b^2+c^2)+4abc &\geq 3\left[\frac{1}{2}(a+b)^2+c^2\right]+4c(a+b)-4c\\ &= 3\left[\frac{1}{2}(3-c)^2+c^2\right]+4c(3-c)-4c\\ &= \frac{(c-1)^2+26}{2}\\ &\geq 13\end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức đã được chứng minh.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.$\square$

Bài 244. *Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a+b+c > 0$.*
Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{a^3+b^3+16c^3}{(a+b+c)^3}$$

Lời giải:

Đặt $x = \dfrac{a}{a+b+c}, y = \dfrac{b}{a+b+c}, z = \dfrac{c}{a+b+c} (x, y, z > 0)$

Khi đó:

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ P = x^3+y^3+16z^3 \end{cases}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có:

$$(x^2+y^2+4z^2)\left(1+1+\frac{1}{4}\right) \geq (x+y+z)^2 \Rightarrow x^2+y^2+4z^2 \geq \frac{4}{9}$$

$$(x+y+z)(x^3+y^3+16z^3) \geq (x^2+y^2+4z^2)^2 \Rightarrow x^3+y^3+16z^3 \geq \frac{16}{81}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $\dfrac{16}{81}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = 4z \Leftrightarrow a = b = 4c$. $\square$

Bài 245. *Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Chứng minh rằng:*

$$ab^2 + bc^2 + ca^2 \leq 2 + abc$$

Lời giải:

Không mất tính tổng quát giả sử b nằm giữa a và c. Ta có: $(b-a)(b-c) \leq 0$

Do đó:

$$\begin{aligned} ab^2 + bc^2 + ca^2 - abc &= b(a^2 + c^2) + a(b-a)(b-c) \\ &\leq b(a^2 + c^2) \\ &= 2\sqrt{b^2.\frac{a^2+c^2}{2}.\frac{a^2+c^2}{2}} \\ &\overset{AM-GM}{\leq} 2\sqrt{\left(\frac{b^2 + \frac{a^2+c^2}{2} + \frac{a^2+c^2}{2}}{3}\right)^3} = 2 \end{aligned}$$

Suy ra:

$$ab^2 + bc^2 + ca^2 \leq 2 + abc$$

Vậy bất đẳng thức đã được chứng minh.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$. $\square$

Bài 246. *Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab + bc + ca = 2abc$. Chứng minh rằng:*

$$\frac{1}{a(2a-1)^2} + \frac{1}{b(2b-1)^2} + \frac{1}{c(2c-1)^2} \geq \frac{1}{2}$$

Lời giải:

Đặt $x = \dfrac{1}{a}, y = \dfrac{1}{b}, z = \dfrac{1}{c}$

Từ điều kiện ta có: $x + y + z = 2$

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$\frac{x^3}{(2-x)^2} + \frac{y^3}{(2-y)^2} + \frac{z^3}{(2-z)^2} \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{x^3}{(y+z)^2} + \frac{y^3}{(z+x)^2} + \frac{z^3}{(x+y)^2} \geq \frac{1}{2}$$

Thật vậy, áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$\begin{aligned} \frac{x^3}{(y+z)^2} + \frac{y+z}{8} + \frac{y+z}{8} \geq \frac{3}{4}x \\ \frac{y^3}{(z+x)^2} + \frac{z+x}{8} + \frac{z+x}{8} \geq \frac{3}{4}y \\ \frac{z^3}{(x+y)^2} + \frac{x+y}{8} + \frac{x+y}{8} \geq \frac{3}{4}z \end{aligned}$$

Cộng ba bất đẳng thức trên theo vế, ta được:

$$\begin{aligned} &\frac{x^3}{(y+z)^2} + \frac{y^3}{(z+x)^2} + \frac{z^3}{(x+y)^2} + \frac{x+y+z}{2} \geq \frac{3}{4}(x+y+z) \\ \Leftrightarrow &\frac{x^3}{(y+z)^2} + \frac{y^3}{(z+x)^2} + \frac{z^3}{(x+y)^2} \geq \frac{1}{4}(x+y+z) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức đã được chứng minh.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = \dfrac{2}{3} \Leftrightarrow a = b = c = \dfrac{3}{2}$. $\square$

Bài 247. *Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab + bc + ca = 1$.*
Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = 2a^2 + 2b^2 + c^2$$

Lời giải:

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có:

$$\frac{\sqrt{17}-1}{4}a^2 + \frac{\sqrt{17}-1}{4}b^2 \geq \frac{\sqrt{17}-1}{2}ab$$
$$\frac{9-\sqrt{17}}{4}b^2 + \frac{1}{2}c^2 \geq \frac{\sqrt{17}-1}{2}bc$$
$$\frac{1}{2}c^2 + \frac{9-\sqrt{17}}{4}a^2 \geq \frac{\sqrt{17}-1}{2}ca$$

Cộng ba bất đẳng thức trên theo vế, ta được:

$$2a^2 + 2b^2 + c^2 \geq \frac{\sqrt{17}-1}{2}(ab + bc + ca) = \frac{\sqrt{17}-1}{2}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $\dfrac{\sqrt{17}-1}{2}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = \dfrac{1}{\sqrt[4]{17}}, c = \dfrac{\sqrt{17}-1}{2\sqrt[4]{17}}$. □

Bài 248. *Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^3 + b^3 + c^3 = 1$.*
Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = a + 2b + 5c$$

Lời giải:

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có:

$$a^3 + \frac{1}{1+2\sqrt{2}+5\sqrt{5}} + \frac{1}{1+2\sqrt{2}+5\sqrt{5}} \geq 3\frac{a}{\sqrt[3]{(1+2\sqrt{2}+5\sqrt{5})^2}}$$
$$b^3 + \frac{2\sqrt{2}}{1+2\sqrt{2}+5\sqrt{5}} + \frac{2\sqrt{2}}{1+2\sqrt{2}+5\sqrt{5}} \geq 3\frac{2a}{\sqrt[3]{(1+2\sqrt{2}+5\sqrt{5})^2}}$$
$$c^3 + \frac{5\sqrt{5}}{1+2\sqrt{2}+5\sqrt{5}} + \frac{5\sqrt{5}}{1+2\sqrt{2}+5\sqrt{5}} \geq 3\frac{5a}{\sqrt[3]{(1+2\sqrt{2}+5\sqrt{5})^2}}$$

Cộng ba bất đẳng thức trên theo vế, ta được:

$$a^3 + b^3 + c^3 + 2 \geq \frac{3}{\sqrt[3]{(1+2\sqrt{2}+5\sqrt{5})^2}}(a + 2b + 5c)$$
$$\Leftrightarrow a + 2b + 5c \leq \sqrt[3]{(1+2\sqrt{2}+5\sqrt{5})^2}$$

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng $\sqrt[3]{(1+2\sqrt{2}+5\sqrt{5})^2}$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = \dfrac{1}{\sqrt[3]{1+2\sqrt{2}+5\sqrt{5}}}, b = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{1+2\sqrt{2}+5\sqrt{5}}}, c = \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt[3]{1+2\sqrt{2}+5\sqrt{5}}}$.□

Bài 249. *Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng:*

$$\frac{1}{a^2+b^2+1} + \frac{1}{b^2+c^2+1} + \frac{1}{c^2+a^2+1} \leq 1$$

Lời giải:

Đặt $x^3 = a^2, y^3 = b^2, z^3 = c^2$ $(x, y, z > 0)$.

Ta có $x^3y^3z^3 = a^2b^2c^2 = 1 \Rightarrow xyz = 1$

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$\frac{1}{x^3+y^3+1}+\frac{1}{y^3+z^3+1}+\frac{1}{z^3+x^3+1}\le 1$$

Thật vậy, áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$\begin{aligned} x^3+y^3+1 &= (x+y)(x^2+y^2-xy)+xyz \\ &\ge (x+y)xy+xyz \\ &= xy(x+y+z) \end{aligned}$$

Suy ra:

$$\frac{1}{x^3+y^3+1}\le\frac{1}{xy(x+y+z)}$$

Tương tự:

$$\frac{1}{y^3+z^3+1}\le\frac{1}{yz(x+y+z)}$$
$$\frac{1}{z^3+x^3+1}\le\frac{1}{zx(x+y+z)}$$

Cộng ba bất đẳng thức trên theo vế, ta được:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^3+y^3+1}+\frac{1}{y^3+z^3+1}+\frac{1}{z^3+x^3+1} &\le \frac{1}{xy(x+y+z)}+\frac{1}{yz(x+y+z)}+\frac{1}{zx(x+y+z)} \\ &= \frac{1}{x+y+z}\left(\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}\right) \\ &= \frac{1}{x+y+z}.\frac{x+y+z}{xyz} \\ &= \frac{1}{xyz}=1 \end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức đã được chứng minh.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1\Leftrightarrow a=b=c=1$. $\square$

Bài 250. *Cho a,b là hai số thực dương thỏa mãn $a+b=2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:*

$$P=\frac{a}{1+b^2}+\frac{b}{1+a^2}$$

Lời giải:

Ta có:

$$\begin{aligned} \frac{a}{1+b^2}+\frac{b}{1+a^2} &= \left(a-\frac{ab^2}{1+b^2}\right)+\left(b-\frac{ba^2}{1+a^2}\right) \\ &= 2-\frac{ab^2}{1+b^2}-\frac{ba^2}{1+a^2} \\ &\ge 2-\frac{ab^2}{2b}-\frac{ba^2}{2a} \\ &= 2-ab \\ &\ge 2-\frac{1}{4}(a+b)^2=1 \end{aligned}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 1.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=1$. $\square$

Bài 251. *Cho $a,b,c\in(0,1]$. Chứng minh rằng:*

$$\frac{1}{a+b+c}\ge\frac{1}{3}+(1-a)(1-b)(1-c)$$

Lời giải:

Không mất tính tổng quát ta giả sử $1\ge a\ge b\ge c>0\Rightarrow\dfrac{a}{a+b+c}\ge\dfrac{1}{3}$

Áp dụng bất đẳng AM-GM, ta có:

$$\begin{aligned}(1-b)+(1-c)+(1+b+c) &\geq 3\sqrt[3]{(1-b)(1-c)(1+b+c)}\\ \Leftrightarrow 1 &\geq (1-b)(1-c)(1+b+c)\\ \Leftrightarrow \frac{1-a}{1+b+c} &\geq (1-a)(1-b)(1-c)\end{aligned}$$

Do $\dfrac{1-a}{a+b+c} \geq \dfrac{1-a}{1+b+c}$ nên:

$$\begin{aligned}\frac{1-a}{a+b+c} &\geq (1-a)(1-b)(1-c)\\ \Rightarrow \frac{1}{a+b+c} &\geq (1-a)(1-b)(1-c)+\frac{a}{a+b+c}\\ &\geq \frac{1}{3}+(1-a)(1-b)(1-c)\end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức đã được chứng minh.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$. □

Bài 252. *Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng:*

$$\frac{1}{a+b+1}+\frac{1}{b+c+1}+\frac{1}{c+a+1} \leq 1$$

Lời giải:

Đặt $x^3=a, y^3=b, z^3=c$ $(x,y,z>0)$.

Ta có $x^3y^3z^3=abc=1 \Rightarrow xyz=1$

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$\frac{1}{x^3+y^3+1}+\frac{1}{y^3+z^3+1}+\frac{1}{z^3+x^3+1} \leq 1$$

Thật vậy, áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$\begin{aligned}x^3+y^3+1 &= (x+y)(x^2+y^2-xy)+xyz\\ &\geq (x+y)xy+xyz\\ &= xy(x+y+z)\end{aligned}$$

Suy ra:

$$\frac{1}{x^3+y^3+1} \leq \frac{1}{xy(x+y+z)}$$

Tương tự:

$$\frac{1}{y^3+z^3+1} \leq \frac{1}{yz(x+y+z)}$$
$$\frac{1}{z^3+x^3+1} \leq \frac{1}{zx(x+y+z)}$$

Cộng ba bất đẳng thức trên theo vế, ta được:

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^3+y^3+1}+\frac{1}{y^3+z^3+1}+\frac{1}{z^3+x^3+1} &\leq \frac{1}{xy(x+y+z)}+\frac{1}{yz(x+y+z)}+\frac{1}{zx(x+y+z)}\\ &= \frac{1}{x+y+z}\left(\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}\right)\\ &= \frac{1}{x+y+z}.\frac{x+y+z}{xyz}\\ &= \frac{1}{xyz}=1\end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức đã được chứng minh.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1 \Leftrightarrow a=b=c=1$. □

Bài 253. *Cho a, b, c là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:*
$$P = \sqrt[3]{4(a^3+b^3)} + \sqrt[3]{4(b^3+c^3)} + \sqrt[3]{4(c^3+a^3)} + 2\left(\frac{a}{b^2}+\frac{b}{c^2}+\frac{c}{a^2}\right)$$

Lời giải:

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có:
$$\begin{aligned}4(x^3+y^3) &= x^3+y^3+3(x+y)(x^2+y^2-xy)\\ &\geq x^3+y^3+3(x+y)xy\\ &= (x+y)^3\end{aligned}$$
Suy ra:
$$\begin{aligned}P &\geq (a+b)+(b+c)+(c+a)+2\left(\frac{a}{b^2}+\frac{b}{c^2}+\frac{c}{a^2}\right)\\ &= 2\left(a+b+c+\frac{a}{b^2}+\frac{b}{c^2}+\frac{c}{a^2}\right)\\ &\overset{AM-GM}{\geq} 12\end{aligned}$$
Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 12.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$. $\square$

Bài 254. *Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c \leq \dfrac{3}{2}$.*

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:
$$P = (a+b)\sqrt{1+\frac{1}{a^2b^2}} + \sqrt{c^2+\frac{1}{c^2}}$$

Lời giải:

Áp dụng bất đẳng thức quen thuộc $\sqrt{a_1^2+a_2^2}+\sqrt{b_1^2+b_2^2} \geq \sqrt{(a_1+b_1)^2+(a_2+b_2)^2}$, ta có:
$$\begin{aligned}P &= \sqrt{(a+b)^2+\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^2} + \sqrt{c^2+\frac{1}{c^2}}\\ &\geq \sqrt{(a+b+c)^2+\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2}\end{aligned}$$
Theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta lại có:
$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c}$$
Do đó:
$$\begin{aligned}P &\geq \sqrt{(a+b+c)^2+\frac{81}{(a+b+c)^2}}\\ &= \sqrt{\left[(a+b+c)^2+\frac{81}{16(a+b+c)^2}\right]+\frac{1215}{16(a+b+c)^2}}\\ &\overset{AM-GM}{\geq} \sqrt{\frac{9}{2}+\frac{135}{4}} = \frac{3\sqrt{17}}{2}\end{aligned}$$
Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $\dfrac{3\sqrt{17}}{2}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\dfrac{1}{2}$. $\square$

Bài 255. *Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 1$.*
Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:
$$P = \sqrt{a^2 + abc} + \sqrt{b^2 + abc} + \sqrt{c^2 + abc} + 9\sqrt{abc}$$

Lời giải:

Ta có:
$$\begin{aligned} P &= \sqrt{a^2(a+b+c) + abc} + \sqrt{b^2(a+b+c) + abc} + \sqrt{c^2(a+b+c) + abc} + 9abc \\ &= \sqrt{a(a+b)(a+c)} + \sqrt{b(b+c)(b+a)} + \sqrt{c(c+a)(c+b)} + 9abc \end{aligned}$$
Áp dụng bất đẳng thức AM-GM:
$$\sum_{cyc} \sqrt{a(a+b)(a+c)} \le \sum_{cyc} \frac{1}{2}\sqrt{a}\left[(a+b) + (a+c)\right] = \frac{1}{2}\sum_{cyc}\sqrt{a}(a+1)$$
Ta lại có:
$$\frac{1}{2}\sqrt{a}(a+1) + \sqrt{abc} = \frac{1}{2}\sqrt{a}(a+1+2\sqrt{bc}) \le \frac{1}{2}\sqrt{a}(a+b+c+1)$$
Do đó:
$$\begin{aligned} P &\le \frac{1}{2}(a+b+c+1)(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}) + 6\sqrt{abc} \\ &\le \frac{1}{2}(a+b+c+1)\sqrt{3(a+b+c)} + 6\sqrt{\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3} \\ &= \frac{5\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$
Vậy giá trị lớn nhất của P bằng $\dfrac{5\sqrt{3}}{3}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \dfrac{1}{3}$. $\square$

Bài 256. *Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $\dfrac{1}{a} + \dfrac{8}{b} + \dfrac{27}{c} = 1$.*
Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:
$$P = a^2 + b^2 + c^2$$

Lời giải:

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có:
$$(a + 2b + 3c)\left(\frac{1}{a} + \frac{8}{b} + \frac{27}{c}\right) \ge (1+4+9)^2 \Rightarrow a + 2b + 3c \ge 196$$
$$(a^2 + b^2 + c^2)(1+4+9) \ge (a+2b+3c)^2 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \ge 2744$$
Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 2744.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} \dfrac{1}{a} + \dfrac{8}{b} + \dfrac{27}{c} = 1 \\ \dfrac{a}{1} = \dfrac{b}{2} = \dfrac{c}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 14 \\ b = 28 \\ c = 42 \end{cases}$. $\square$

Bài 257. *Cho a, b là hai số thực dương. Chứng minh rằng:*
$$(1+a)\left(1 + \frac{b}{a}\right)\left(1 + \frac{9}{\sqrt{b}}\right)^2 \ge 256$$

Lời giải:

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có:
$$(1+a)\left(1 + \frac{b}{a}\right) \ge (1 + \sqrt{b})^2$$
$$(1+\sqrt{b})^2\left(1 + \frac{9}{\sqrt{b}}\right)^2 \ge (1+3)^4$$

Nhân hai bất đẳng thức trên theo vế, ta được:

$$(1+a)\left(1+\frac{b}{a}\right)\left(1+\frac{9}{\sqrt{b}}\right)^2 \geq 256$$

Vậy bất đẳng thức đã được chứng minh.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=3, b=9$. □

Bài 258. *Cho a, b là hai số thực khác 0. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:*

$$P = \frac{a^4}{b^4} + \frac{b^4}{a^4} - \frac{a^2}{b^2} - \frac{b^2}{a^2} + \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$$

Lời giải:

Đặt $t = \dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} \Rightarrow t^2 = \dfrac{a^2}{b^2} + \dfrac{b^2}{a^2} + 2 \geq 4 \Rightarrow |t| \geq 2$

Khi đó:

$$P = (t^2-2)^2 - 2 - (t^2-2) + t = t^4 - 5t^2 + t + 6$$
$$\Rightarrow P + 2 = t^4 - 5t^2 + t + 8 = (t+2)(t^3 - 2t^2 - t + 3)$$

• Nếu $t \geq 2$ thì:

$$t^3 - 2t^2 - t + 3 = (t-2)(t^2-1) + 1 \geq 1$$
$$\Rightarrow P + 2 = (t+2)(t^3 - 2t^2 - t + 3) \geq (2+2).1$$
$$\Rightarrow P \geq 2 \ (1)$$

• Nếu $t \leq -2$ thì:

$$t^3 - 2t^2 - t + 3 = (t+2)\left[(t-2)^2 + 3\right] - 11 \leq -11 < 0$$
$$\Rightarrow P + 2 = (t+2)(t^3 - 2t^2 - t + 3) \geq 0$$
$$\Rightarrow P \geq -2 \ (2)$$

Từ (1) và (2) ta có: $P \geq -2$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng -2.

Đẳng thức xảy khi và chỉ khi $t = -2 \Leftrightarrow a = -b$.□

Bài 259. *Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng:*

$$\frac{a}{a+b^3+c^3} + \frac{b}{b+c^3+a^3} + \frac{c}{c+a^3+b^3} \leq 1$$

Lời giải:

Áp dụng bất đẳng Cauchy-Schwarz, ta có:

$$(a^2+b^2+c^2)^2 \leq (a+b^3+c^3)(a^3+b+c)$$
$$\Rightarrow \frac{a}{a+b^3+c^3} \leq \frac{a^4+ab+ac}{(a^2+b^2+c^2)^2}$$
$$\Rightarrow \sum_{cyc} \frac{a}{a+b^3+c^3} \leq \frac{a^4+b^4+c^4+2(ab+bc+ca)}{(a^2+b^2+c^2)^2}$$

Ta cần chứng minh:

$$\frac{a^4+b^4+c^4+2(ab+bc+ca)}{(a^2+b^2+c^2)^2} \leq 1$$
$$\Leftrightarrow a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq ab + bc + ca$$

Thật vậy, áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz và bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$3(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) \geq (ab+bc+ca)^2$$
$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq 3\sqrt[3]{a^4b^4c^4} = 3$$

Nhân theo vế hai bất đẳng thức trên, ta được:

$$(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)^2 \geq (ab+bc+ca)^2$$

$$\Leftrightarrow a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 \geq ab+bc+ca$$

Vậy bất đẳng thức đã được chứng minh.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$. $\square$

Bài 260. *Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=1$. Chứng minh rằng:*

$$\frac{a}{b^2+c^2}+\frac{b^2}{c^2+a^2}+\frac{c}{a^2+b^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Lời giải:

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có:

$$\begin{aligned} a^2(b^2+c^2)^2 &= \frac{1}{2}.2a^2(1-a^2)(1-a^2) \\ &\leq \frac{1}{2}\left(\frac{2a^2+1-a^2+1-a^2}{3}\right)^3 \\ &= \frac{4}{27} \end{aligned}$$

Suy ra:

$$a(b^2+c^2) \leq \frac{2\sqrt{3}}{9} \Leftrightarrow \frac{a}{b^2+c^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$$

Tương tự:

$$\frac{b}{c^2+a^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}b^2$$
$$\frac{c}{a^2+b^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}c^2$$

Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên, ta được:

$$\frac{a}{b^2+c^2}+\frac{b^2}{c^2+a^2}+\frac{c}{a^2+b^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}(a^2+b^2+c^2)=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Vậy bất đẳng thức đã được chứng minh.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{\sqrt{3}}{3}$. $\square$

Bài 261. *Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $abc+a+c=b$.*

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P=\frac{2}{a^2+1}-\frac{2}{b^2+1}+\frac{3}{c^2+1}$$

Lời giải:

Ta có:

$$abc+a+c=b \Leftrightarrow b=\frac{a+c}{1-ac}$$

Đặt $a=tanA, b=tanB, c=tanC$. Khi đó:

$$tanB=\frac{tanA+tanC}{1-tanAtanC}=tan(A+C) \Leftrightarrow B=A+C$$

Do đó:

$$\begin{aligned}P &= \frac{2}{1+tan^2A} - \frac{2}{1+tan^2B} + \frac{3}{1+tan^2C}\\ &= 2cos^2A - 2cos^2B + 3cos^2C\\ &= cos2A - cos2B + 3cos^2C\\ &= 2sinCsin(A+B) - 3sin^2C + 3\\ &= -\left[\sqrt{3}sinC - \frac{1}{\sqrt{3}}sin(A+B)\right]^2 + \frac{1}{3}sin^2(A+B) + 3\\ &\le 3 + \frac{1}{3} = \frac{10}{3}\end{aligned}$$

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng $\frac{10}{3}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} \sin(A-B) = 1 \\ \sin C = \frac{1}{3}\sin(A-B) \\ B = A + C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ b = \sqrt{2} \\ c = \frac{\sqrt{2}}{4} \end{cases}$. $\square$

Bài 262. *Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $c = 8ab$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:*

$$P = \frac{1}{4a+2b+3} + \frac{c}{4bc+3c+2} + \frac{c}{2ac+3c+4}$$

Lời giải:

Đặt $x^2 = 2a, y^2 = 2b, z^2 = \frac{2}{c}\ (x, y, z > 0)$

$\Rightarrow x^2y^2z^2 = \frac{8ab}{c} = 1 \Rightarrow xyz = 1$

Ta có:

$$\begin{aligned}P &= \frac{1}{2x^2+3+y^2} + \frac{1}{2y^2+3+z^2} + \frac{1}{2z^2+3+x^2}\\ &= \frac{1}{(x^2+y^2)+(x^2+1)+2} + \frac{1}{(y^2+z^2)+(y^2+1)+2} + \frac{1}{(z^2+x^2)+(z^2+1)+2}\\ &\overset{AM-GM}{\le} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{xy+x+1} + \frac{1}{yz+y+1} + \frac{1}{zx+z+1}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{xy+x+1} + \frac{x}{xyz+xy+x} + \frac{xy}{x^2yz+xyz+xy}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{xy+x+1} + \frac{x}{xy+x+1} + \frac{xy}{xy+x+1}\right) = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng $\frac{1}{2}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 1 \Leftrightarrow a = b = \frac{1}{2}, c = 2$. $\square$

Bài 263. *Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3$.*
Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \sqrt[3]{a+3b+4} + \sqrt[3]{b+3c+4} + \sqrt[3]{c+3a+4}$$

Lời giải:

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có:

$$(a+3b+4) + 8 + 8 \ge 12\sqrt[3]{a+3b+4}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{a+3b+4} \le \frac{a+3b+20}{12}$$

Tương tự:

$$\sqrt[3]{b+3c+4} \le \frac{b+3c+20}{12}$$
$$\sqrt[3]{c+3a+4} \le \frac{c+3a+20}{12}$$

Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên, ta được:

$$\sqrt[3]{a+3b+4}+\sqrt[3]{b+3c+4}+\sqrt[3]{c+3a+4} \le \frac{4(a+b+c)+60}{12}$$

Ta lại có:

$$a+b+c \le \sqrt{3(a^2+b^2+c^2)} = 3$$

Do đó:

$$\sqrt[3]{a+3b+4}+\sqrt[3]{b+3c+4}+\sqrt[3]{c+3a+4} \le 6$$

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng 6.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$. $\square$

Bài 264. *Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng:*

$$\frac{a^2}{\sqrt{b+c}}+\frac{b^2}{\sqrt{c+a}}+\frac{c^2}{\sqrt{a+b}} \ge \frac{b^2}{\sqrt{b+c}}+\frac{c^2}{\sqrt{c+a}}+\frac{a^2}{\sqrt{a+b}}$$

Lời giải:

Bổ đề: Với hai dãy số $a \ge b \ge c > 0; x \ge y \ge z > 0$. Ta có: $ax+by+cz \ge bx+cy+az$ $(*)$.

Thật vậy:

$$ax+by+cz \ge bx+cy+az$$
$$\Leftrightarrow x(a-b)+y(b-c)+z(c-a) \ge 0$$
$$\Leftrightarrow x(a-b)-y(a-b)+y(a-c)-z(a-c) \ge 0$$
$$\Leftrightarrow (x-y)(a-b)+(y-z)(a-c) \ge 0$$

Bất đẳng thức cuối luôn đúng. Vậy (*) đã được chứng minh.

Không mất tính tổng quát ta giả sử $a \ge b \ge c$

$$\Rightarrow a^2 \ge b^2 \ge c^2; \frac{1}{\sqrt{b+c}} \ge \frac{1}{\sqrt{c+a}} \ge \frac{1}{\sqrt{a+b}}$$

Áp dụng bổ đề trên ta có:

$$\frac{a^2}{\sqrt{b+c}}+\frac{b^2}{\sqrt{c+a}}+\frac{c^2}{\sqrt{a+b}} \ge \frac{b^2}{\sqrt{b+c}}+\frac{c^2}{\sqrt{c+a}}+\frac{a^2}{\sqrt{a+b}}$$

Vậy bất đẳng thức đã được chứng minh.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$. $\square$

Bài 265. *Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c \le abc$. Chứng minh rằng:*

$$\frac{1}{a^2+2bc}+\frac{1}{b^2+2ca}+\frac{1}{c^2+2ab} \le \frac{1}{3}$$

Lời giải:

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có:

$$a^2+2bc = a^2+bc+bc \ge 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{a^2+2bc} \le \frac{1}{3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}}$$

Tương tự:

$$\frac{1}{b^2+2ca} \le \frac{1}{3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}}$$
$$\frac{1}{c^2+2ab} \le \frac{1}{3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}}$$

Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên, ta được:

$$\frac{1}{a^2+2bc}+\frac{1}{b^2+2ca}+\frac{1}{c^2+2ab}\le\frac{1}{\sqrt[3]{a^2b^2c^2}}$$

Ta lại có:

$$abc\ge a+b+c\ge 3\sqrt[3]{abc}\Rightarrow\frac{1}{\sqrt[3]{a^2b^2c^2}}\le\frac{1}{3}$$

Do đó:
$$\frac{1}{a^2+2bc}+\frac{1}{b^2+2ca}+\frac{1}{c^2+2ab}\le\frac{1}{3}$$

Vậy bất đẳng thức đã được chứng minh.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\sqrt{3}$. $\square$

Bài 266. *Cho a,b,c là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:*

$$P=\frac{4a}{a+b+2c}+\frac{b+3c}{2a+b+c}-\frac{2c}{a+b+3c}$$

<u>Lời giải:</u>

Đặt $\begin{cases}x=a+b+2c\\y=2a+b+c\\z=a+b+3c\end{cases}$. Ta có: $\begin{cases}a=-2x+y+z\\b=5x-y-3z\\c=-x+z\end{cases}$

Khi đó:

$$\begin{aligned}P&=\frac{4(-2x+y+z)}{x}+\frac{5x-y-3z+3(-x+z)}{y}-\frac{2(-x+z)}{z}\\&=\frac{4y}{x}+\frac{4z}{x}+\frac{2x}{y}+\frac{2x}{z}-11\\&\ge 4\sqrt[4]{\frac{4y}{x}.\frac{4z}{x}.\frac{2x}{y}.\frac{2x}{z}}-11=8\sqrt{2}-11\end{aligned}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $8\sqrt{2}-11$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\dfrac{a}{2-2\sqrt{2}}=\dfrac{b}{-4+5\sqrt{2}}=\dfrac{c}{1-\sqrt{2}}$. $\square$

Bài 267. *Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $ab+bc+ca=abc$. Chứng minh rằng:*

$$\sqrt{a+bc}+\sqrt{b+ca}+\sqrt{c+ab}\ge\sqrt{abc}+\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$$

<u>Lời giải:</u>

Đặt $x=\dfrac{1}{a},y=\dfrac{1}{b},z=\dfrac{1}{c}$

Từ điều kiện ta có: $x+y+z=1$

Bất đẳng thức cần chứng minh:

$$\sqrt{x+yz}+\sqrt{y+zx}+\sqrt{z+xy}\ge 1+\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}$$

Thật vậy, áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có:

$$\begin{aligned}\sqrt{x+yz}&=\sqrt{x(x+y+z)+yz}\\&=\sqrt{(x+y)(x+z)}\\&\ge x+\sqrt{yz}\end{aligned}$$

Tương tự:

$$\sqrt{y+zx}\ge y+\sqrt{zx}$$
$$\sqrt{z+xy}\ge z+\sqrt{xy}$$

Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên, ta được:

$$\sqrt{x+yz}+\sqrt{y+zx}+\sqrt{z+xy}\ge x+y+z+\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}=1+\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}$$

Vậy bất đẳng thức đã được chứng minh.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=\dfrac{1}{3}\Leftrightarrow a=b=c=3$. $\square$

Bài 268. *Cho a, b là hai số thực dương thỏa mãn $a^2+2b^2=1$. Chứng minh rằng:*
$$\frac{a}{b^2}+\frac{4b}{a^2+b^2}\geq 3\sqrt{3}$$

Lời giải:

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có:
$$\frac{a^4}{a^2.b^2.b^2}\geq\frac{a^4}{\left(\dfrac{a^2+b^2+b^2}{3}\right)^3}=\frac{a^4}{\left(\dfrac{1}{3}\right)^3}$$
$$\Rightarrow\frac{a^2}{b^4}\geq 3^3a^4\Rightarrow\frac{a}{b^2}\geq 3\sqrt{3}a^2\ (1)$$
$$\frac{16b^4}{2b^2(a^2+b^2)(a^2+b^2)}\geq\frac{16b^4}{\left(\dfrac{2b^2+a^2+b^2+a^2+b^2}{3}\right)^3}=\frac{16b^4}{\left(\dfrac{2}{3}\right)^3}$$
$$\Rightarrow\frac{16b^2}{(a^2+b^2)^2}\geq 108b^4\Rightarrow\frac{4b}{a^2+b^2}\geq 3\sqrt{3}.2b^2\ (2)$$
Cộng (1) và (2) theo vế, ta được:
$$\frac{a}{b^2}+\frac{4b}{a^2+b^2}\geq 3\sqrt{3}(a^2+2b^2)=3\sqrt{3}$$
Vậy bất đẳng thức đã được chứng minh.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. $\square$

Bài 269. *Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:*
$$\frac{1}{a+b+c}+\frac{6}{(a^2+b^2+c^2)^2}\geq\frac{3}{a^3+b^3+c^3}$$

Lời giải:

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có:
$$(a^3+b^3+c^3)(a+b+c)\geq(a^2+b^2+c^2)^2$$
$$3(a^2+b^2+c^2)\geq(a+b+c)^2$$
Nhân theo vế ba bất đẳng thức trên, ta được:
$$3(a^3+b^3+c^3)\geq(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)$$
$$\Leftrightarrow\frac{a^3+b^3+c^3}{a+b+c}\geq\frac{a^2+b^2+c^2}{3}\ (1)$$
Cũng từ hai bất đẳng thức trên cho ta:
$$3(a^3+b^3+c^3)^2\geq(a^2+b^2+c^2)^3$$
$$\Leftrightarrow\frac{(a^3+b^3+c^3)^2}{(a^2+b^2+c^2)^4}\geq\frac{1}{3(a^2+b^2+c^2)}$$
$$\Leftrightarrow\frac{6(a^3+b^3+c^3)}{(a^2+b^2+c^2)^2}\geq\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\ (2)$$
Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có:
$$\frac{a^2+b^2+c^2}{3}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\geq 3\ (3)$$
Cộng (1), (2) và (3) theo vế ta được:
$$\frac{a^3+b^3+c^3}{a+b+c}+\frac{6(a^3+b^3+c^3)}{(a^2+b^2+c^2)^2}\geq 3$$
$$\Leftrightarrow\frac{1}{a+b+c}+\frac{6}{(a^2+b^2+c^2)^2}\geq\frac{3}{a^3+b^3+c^3}$$
Vậy bất đẳng thức đã được chứng minh.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$. $\square$

Bài 270. *Cho a, b là hai số thực khác 0 thỏa mãn $(a+b)ab = a^2 + b^2 - ab$.*
Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:
$$P = \frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3}$$

Lời giải:

Biến đổi tương đương điều kiện:
$$(a+b)ab = a^2 + b^2 - ab$$
$$\Leftrightarrow (a+b)ab = (a+b)^2 - 3ab$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)^2 - \frac{3}{ab}$$
Từ bất đẳng thức quen thuộc $4xy \leq (x+y)^2$. Ta có:
$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)^2 - \frac{3}{4}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)^2$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)^2$$
$$\Leftrightarrow 0 < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \leq 4$$
Ta có:
$$\begin{aligned}
P &= \frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} \\
&= \frac{(a+b)(a^2+b^2-ab)}{a^3b^3} \\
&= \frac{(a+b)(a+b)ab}{a^3b^3} \\
&= \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)^2 \\
&\leq 16
\end{aligned}$$
Vậy giá trị lớn nhất của P bằng 16.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = \frac{1}{2}$. $\square$

Bài 271. *Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:*
$$\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} \geq 2\sqrt{\frac{(a+b+c)(ab+bc+ca)}{abc}}$$

Lời giải:

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có:
$$2\sqrt{\frac{(a+b+c)(ab+bc+ca)}{abc}} \leq \frac{a+b+c}{a} + \frac{ab+bc+ca}{bc} = \frac{b+c}{a} + \frac{a}{c} + \frac{a}{b} + 2$$
Ta cần chứng minh:
$$\frac{b+c}{a} + \frac{a}{c} + \frac{a}{b} + 2 \leq \frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b}$$
$$\Leftrightarrow 2 \leq \frac{b}{c} + \frac{c}{b}$$
Bất đẳng thức cuối luôn đúng.

Vậy bất đẳng thức đã được chứng minh.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$. $\square$

Bài 272. *Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng:*
$$\frac{1}{ab+2c^2+2c}+\frac{1}{bc+2a^2+2a}+\frac{1}{ca+2b^2+2b}\geq\frac{1}{ab+bc+ca}$$

Lời giải:

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có:
$$\begin{aligned}(ab+bc+ca)^2&=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2abc(a+b+c)\\&=a^2b^2+(b^2c^2+c^2a^2)+2abc\\&\geq a^2b^2+2abc^2+2abc\\&=ab(ab+2c^2+2c)\end{aligned}$$
Suy ra:
$$\frac{1}{ab+2c^2+2c}\geq\frac{ab}{(ab+bc+ca)^2}$$
Tương tự:
$$\frac{1}{bc+2a^2+2a}\geq\frac{bc}{(ab+bc+ca)^2}$$
$$\frac{1}{ca+2b^2+2b}\geq\frac{ca}{(ab+bc+ca)^2}$$
Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên, ta được:
$$\frac{1}{ab+2c^2+2c}+\frac{1}{bc+2a^2+2a}+\frac{1}{ca+2b^2+2b}\geq\frac{1}{ab+bc+ca}$$
Vậy bất đẳng thức đã được chứng minh.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\dfrac{1}{3}$. $\square$

Bài 273. *Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:*
$$\frac{a}{4a+4b+c}+\frac{b}{4b+4c+a}+\frac{c}{4c+4a+b}\leq\frac{1}{3}$$

Lời giải:

Bất đẳng thức cần chứng minh:
$$\Leftrightarrow\frac{a\left(4a+4b+4c\right)}{4a+4b+c}+\frac{b\left(4a+4b+4c\right)}{4b+4c+a}+\frac{c\left(4a+4b+4c\right)}{4c+4a+b}\leq\frac{\left(4a+4b+4c\right)}{3}$$
$$\Leftrightarrow a+\frac{3ca}{4a+4b+c}+b+\frac{3ab}{4b+4c+a}+c+\frac{3bc}{4c+4a+b}\leq\frac{\left(4a+4b+4c\right)}{3}$$
$$\Leftrightarrow\frac{ca}{4a+4b+c}+\frac{ab}{4b+4c+a}+\frac{bc}{4c+4a+b}\leq\frac{a+b+c}{9}$$
Thật vậy, áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có:
$$\frac{ca}{4a+4b+c}=\frac{ca}{(a+a+b)+(a+a+b)+(b+b+c)}\leq\frac{1}{9}\left(\frac{ca}{2a+b}+\frac{ca}{2a+b}+\frac{ca}{2b+c}\right)$$
$$\frac{ab}{4b+4c+a}=\frac{ab}{(b+b+c)+(b+b+c)+(c+c+a)}\leq\frac{1}{9}\left(\frac{ab}{2b+c}+\frac{ab}{2b+c}+\frac{ab}{2c+a}\right)$$
$$\frac{bc}{4c+4a+b}=\frac{bc}{(c+c+a)+(c+c+a)+(a+a+b)}\leq\frac{1}{9}\left(\frac{bc}{2c+a}+\frac{bc}{2c+a}+\frac{bc}{2a+b}\right)$$
Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên, ta được:
$$\begin{aligned}\frac{ca}{4a+4b+c}+\frac{ab}{4b+4c+a}+\frac{bc}{4c+4a+b}&\leq\frac{1}{9}\left(\frac{2ca}{2a+b}+\frac{bc}{2a+b}+\frac{2ab}{2b+c}+\frac{ca}{2b+c}+\frac{2bc}{2c+a}+\frac{ab}{2c+a}\right)\\&=\frac{a+b+c}{9}\end{aligned}$$
Vậy bất đẳng thức đã được chứng minh.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$. $\square$

Bài 274. *Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $2\sqrt{ab} + \sqrt{ac} = 1$.*
Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:
$$P = \frac{3bc}{a} + \frac{4ca}{b} + \frac{5ab}{c}$$

Lời giải:

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có:
$$\frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \geq 2c$$
$$\frac{2bc}{a} + \frac{2ab}{c} \geq 4b$$
$$\frac{3ca}{b} + \frac{3ab}{c} \geq 6a$$
Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên, ta được:
$$\frac{3bc}{a} + \frac{4ca}{b} + \frac{5ab}{c} \geq 6a + 4b + 2c$$
Tiếp tục sử dụng bất đẳng thức AM-GM:
$$6a + 4b + 2c = 4(a + b) + 2(a + c) \geq 8\sqrt{ab} + 4\sqrt{ac} = 4$$
$$\Rightarrow \frac{3bc}{a} + \frac{4ca}{b} + \frac{5ab}{c} \geq 4$$
Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 4.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{3}$. □

Bài 275. *Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a + b + c = \sqrt{5}$. Chứng minh rằng:*
$$|(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)(c^2 - a^2)| \leq \sqrt{5}$$

Lời giải:

Không mất tính tổng quát ta giả sử $a = min\{a, b, c\}$

Ta có: $b + c = \sqrt{5} - a \leq \sqrt{5}$

Đặt: $P = |(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)(c^2 - a^2)|$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có:
$$\begin{aligned} P^2 &= (b^2 - a^2)^2(c^2 - a^2)^2(b^2 - c^2)^2 \\ &\leq b^4c^4(b - c)^2(b + c)^2 \\ &\leq 5b^4c^4(b - c)^2 \\ &\leq 5\left[\frac{bc + bc + bc + bc + (b^2 + c^2 - 2bc)}{5}\right]^5 \\ &= 5\left[\frac{(b + c)^2}{5}\right]^5 \leq 5 \end{aligned}$$
$$\Rightarrow P \leq \sqrt{5}$$
Vậy bất đẳng thức đã được chứng minh.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = 0, b = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}, c = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$ và các hoán vị. □

Bài 276. *Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng:*
$$\frac{1}{a^2 + b + c} + \frac{1}{b^2 + c + a} + \frac{1}{c^2 + a + b} \leq 1$$

Lời giải:

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có:
$$(a^2 + b + c)(1 + b + c) \geq (a + b + c)^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a^2+b+c} \le \frac{1+b+c}{(a+b+c)^2}$$

Tương tự:

$$\frac{1}{b^2+c+a} \le \frac{1+c+a}{(a+b+c)^2}$$
$$\frac{1}{c^2+a+b} \le \frac{1+a+b}{(a+b+c)^2}$$

Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên, ta được:

$$\frac{1}{a^2+b+c}+\frac{1}{b^2+c+a}+\frac{1}{c^2+a+b} \le \frac{3+2(a+b+c)}{(a+b+c)^2}=1$$

Vậy bất đẳng thức đã được chứng minh.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$. $\square$

Bài 277. *Chứng minh rằng với mọi số thực x ta có:*

$$\left(\frac{12}{5}\right)^x+\left(\frac{15}{4}\right)^x+\left(\frac{20}{3}\right)^x \ge 3^x+4^x+5^x$$

Lời giải:

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có:

$$\left(\frac{12}{5}\right)^x+\left(\frac{15}{4}\right)^x \ge 2.3^x$$
$$\left(\frac{15}{4}\right)^x+\left(\frac{20}{3}\right)^x \ge 2.5^x$$
$$\left(\frac{20}{3}\right)^x+\left(\frac{12}{5}\right)^x \ge 2.4^x$$

Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên ta được:

$$\left(\frac{12}{5}\right)^x+\left(\frac{15}{4}\right)^x+\left(\frac{20}{3}\right)^x \ge 3^x+4^x+5^x$$

Vậy bất đẳng thức đã được chứng minh.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=0$. $\square$

Bài 278. *Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng:*

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)^2 \ge \frac{3}{2}\left(\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}\right)$$

Lời giải:

Đặt $x=\dfrac{a}{b}, y=\dfrac{b}{c}, z=\dfrac{c}{a} \Rightarrow xyz=1$

Bất đẳng thức cần chứng minh:

$$(x+y+z)^2 \ge \frac{3}{2}(xy+yz+zx+x+y+z)$$

Thật vậy, áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$x+y+z \ge 3\sqrt[3]{xyz}=3$$
$$(x+y+z)^2 \ge 3(x+y+z)\ (1)$$

Ta cũng có:

$$(x+y+z)^2 \ge 3(xy+yz+zx)\ (2)$$

Cộng (1) và (2) theo vế, ta được:

$$2(x+y+z)^2 \ge 3(xy+yz+zx+x+y+z)$$
$$\Leftrightarrow (x+y+z)^2 \ge \frac{3}{2}(xy+yz+zx+x+y+z)$$

Vậy bất đẳng thức đã được chứng minh.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1 \Leftrightarrow a=b=c$. $\square$

Bài 279. *Cho $a,b,c>0$ thỏa $a+b+c=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau:*
$$P=\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{abc}$$

Lời giải:

Cách 1.

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, và chú ý $a+b+c=1$, ta có:

$$ab+bc+ca\ge 3\sqrt[3]{(abc)^2(a+b+c)^3}\ge 9abc$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, kết hợp với đánh giá trên ta có:

$$\begin{aligned}P&=\left(\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{9abc}+\frac{1}{9abc}\right)+\frac{7}{9abc}\\&\ge\frac{9}{a^2+b^2+c^2+2.9abc}+\frac{7}{9abc}\ge\frac{9}{(a+b+c)^2}+\frac{7}{9.\dfrac{(a+b+c)^3}{27}}=30\end{aligned}$$

Khi $a=b=c=\dfrac{1}{3}$ thì $P=30$.

Vậy gía trị nhỏ nhất của P là 30 khi $a=b=c=\dfrac{1}{3}$.

Cách 2.

Với giả thiết $a+b+c=1$, biểu thức P được viết lại như sau:

$$P=\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{a+b+c}{abc}=\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz và đánh giá quen thuộc $ab+bc+ca\le\dfrac{(a+b+c)^2}{3}$, ta có:

$$\begin{aligned}P&\ge\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{9}{ab+bc+ca}\\&=\left(\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{ab+bc+ca}+\frac{1}{ab+bc+ca}\right)+\frac{7}{ab+bc+ca}\\&\ge\frac{9}{(a+b+c)^2}+\frac{7}{ab+bc+ca}\\&\ge\frac{9}{(a+b+c)^2}+\frac{7}{\dfrac{(a+b+c)^2}{3}}=30\end{aligned}$$

Khi $a=b=c=\dfrac{1}{3}$ thì $P=30$.

Vậy gía trị nhỏ nhất của P là 30 khi $a=b=c=\dfrac{1}{3}$.

Bài 280. *Cho a,b,c không âm và $a+b+c=3$, hãy chứng minh rằng:*
$$a^2+b^2+c^2+abc\ge 4$$

Lời giải:

Không mất tính tổng quát, giả sử: $a\ge b\ge c\ge 0$. Từ đó ta có $c\le 1$

Để ý rằng ta có phân tích sau với giả thiết $a+b+c=3$:

$$a^2+b^2+c^2+abc=9-2(ab+bc+ca)+abc=9+ab(c-2)-2c(3-c)$$

Ta lại có: $ab \le (\frac{a+b}{2})^2 = (\frac{3-c}{2})^2$ và $c \le 1$ dẫn đến $c-2 \le 0$
Như vậy ta dễ dàng suy ra được:

$$a^2+b^2+c^2+abc \ge 9+(c-2)(\frac{3-c}{2})^2 - 2c(3-c)$$

Việc còn lại của ta là chứng minh :

$$9+(c-2)(\frac{3-c}{2})^2 - 2c(3-c) \ge 4$$

Mà: $(c-1)^2(c+2) \ge 0$ (bất đẳng thức này luôn đúng)
Như vậy, bài toán được chứng minh xong.
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài 281. *Cho $a,b,c \ge 0$ thỏa $a+b+c=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức sau:*

$$P = a^2b+b^2c+c^2a$$

Lời giải:

Giả sử a = max {a; b; c}, ta đi xét 2 trường hợp :
* $-a \ge b \ge c$ dẫn đến kết quả sau:

$$P \le a^2b+abc+c^2b = b(a^2+ac+c^2) \le b(a+c)^2 \le \frac{1}{2}\left[\frac{2b+(a+c)+(a+c)}{3}\right]^3 = \frac{4}{27}$$

* $-a \ge c \ge b$ dẫn đến kết quả sau:

$$P \le a^2c+b^2c+abc = c(a^2+b^2+ab) \le b(a+c)^2 \le \frac{1}{2}\left[\frac{2b+(a+c)+(a+c)}{3}\right]^3 = \frac{4}{27}$$

Đẳng thức xảy ra khi $(a;b;c) = (\frac{2}{3};\frac{1}{3};0)$ và các hoán vị.
Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức là: $\frac{4}{27}$

Bài 282. *cho $a,b>0$, thỏa mãn $ab+a+b=3$. Chứng minh rằng:*

$$\tfrac{3a}{b+1}+\tfrac{3b}{a+1}+\tfrac{ab}{a+b} \le a^2+b^2+\tfrac{3}{2}$$

Lời giải:

Với giả thiết : $ab+a+b=3$, vế trái của biểu thức được viết lại như sau:

$$\begin{aligned}LHS &= \frac{(ab+a+b)a}{b+1}+\frac{(ab+a+b)b}{a+1}+\frac{ab}{a+b}\\ &= \frac{a^2(b+1)+ab}{b+1}+\frac{b^2(a+1)+ab}{(a+1)}+\frac{ab}{a+b}\\ &= a^2+b^2+\frac{ab}{b+1}+\frac{ab}{a+1}+\frac{ab}{a+b}\end{aligned}$$

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, và chú ý $ab+a+b=3$, ta có:

$$a^2+b^2+\frac{ab}{b+1}+\frac{ab}{a+1}+\frac{ab}{a+b} \le a^2+b^2+\frac{a(b+1)}{4}+\frac{(a+1)b}{4}+\frac{a+b}{4} \le a^2+b^2+\frac{3}{2}$$

Vậy bài toán được chứng minh.

Bài 283. *Cho $x, y, z > 0$. Chứng minh rằng:*
$$(x^3+y^3+z^3)\left(\frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}+\frac{1}{z^3}\right) \geq \frac{3}{2}\left(\frac{y+z}{x}+\frac{z+x}{y}+\frac{x+y}{z}\right)$$

Lời giải:

Cách 1.

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương

$$3+\frac{x^3+y^3}{z^3}+\frac{y^3+z^3}{x^3}+\frac{z^3+x^3}{y^3} \geq \frac{3}{2}(\frac{x+y}{z}+\frac{y+z}{x}+\frac{z+x}{y})$$

Mà ta có

$$x^3+y^3 \geq \frac{(x+y)^3}{4}$$

ta đặt

$$a=\frac{x+y}{z}; b=\frac{y+z}{x}; c=\frac{z+x}{y}$$

Do đó ta cần chứng minh:

$$12+\left(a^3+b^3+c^3\right) \geq 6(a+b+c)$$

Mà theo AM-GM ta có

$$a^3+8+8 \geq 12a$$
$$b^3+8+8 \geq 12b$$
$$c^3+8+8 \geq 12c$$
$$6(a+b+c) \geq 36$$

Cộng vế theo vế ta có điều phải chứng minh Đẳng thức xảy ra khi $x=y=z$.

Cách 2.

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$\left(x^3+y^3+z^3\right)\left(\frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}+\frac{1}{z^3}\right) \geq \left(x^3+y^3+z^3\right)\frac{3}{xyz}$$

Ta sẽ chứng minh

$$\left(x^3+y^3+z^3\right)\frac{3}{xyz} \geq \frac{3}{2}\left(\frac{y+z}{x}+\frac{z+x}{y}+\frac{x+y}{z}\right)$$
$$\Leftrightarrow 2\left(x^3+y^3+z^3\right) \geq (x^2y+y^2z+z^2x)+(x^2z+y^2x+z^2y)$$

Theo AM-GM ta có

$$x^3+x^3+y^3 \geq 3x^2y$$
$$y^3+y^3+z^3 \geq 3y^2z$$
$$z^3+z^3+x^3 \geq 3z^2x$$
$$\Rightarrow x^3+y^3+z^3 \geq x^2y+y^2z+z^2x$$

Mặt khác

$$x^3+x^3+z^3 \geq 3x^2z$$
$$y^3+y^3+x^3 \geq 3y^2x$$
$$z^3+z^3+y^3 \geq 3z^2y$$

$$\Rightarrow x^3 + y^3 + z^3 \geq x^2z + y^2x + z^2y$$

Cộng vế với vế ta có điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi $x = y = z$.

Bài 284. *Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:*
$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{b+c}{a^2+bc} + \frac{c+a}{b^2+ca} + \frac{a+b}{c^2+ab}$$

Lời giải:

Cách 1.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz có:

$$\frac{a+b}{c^2+ab} = \frac{(a+b)^2}{(a+b)(c^2+ab)} = \frac{(a+b)^2}{a(b^2+c^2)+b(a^2+c^2)} \leq \frac{b^2}{a(b^2+c^2)} + \frac{a^2}{b(a^2+c^2)}$$

Làm tương tự cho các biểu thức còn lại có:

$$\frac{b+c}{a^2+bc} \leq \frac{c^2}{b(a^2+c^2)} + \frac{b^2}{c(a^2+b^2)}$$

$$\frac{c+a}{b^2+ca} \leq \frac{a^2}{c(a^2+b^2)} + \frac{c^2}{a(b^2+c^2)}$$

Để ý rằng :

$$\sum_{sym} \frac{b^2}{a(b^2+c^2)} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

Cộng 3 bất đẳng thức trên ta có điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$.

Cách 2.

Không mất tính tổng quát giả sử $b = max\,\{a; b; c\}$. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$\left(\frac{1}{a} - \frac{a+b}{c^2+ab}\right) + \left(\frac{1}{c} - \frac{b+c}{a^2+bc}\right) + \left(\frac{1}{b} - \frac{a+c}{b^2+ac}\right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (c^2 - a^2)\left[\frac{1}{a(c^2+ab)} - \frac{1}{c(a^2+bc)}\right] + \frac{(b-c)(b-a)}{b^3+abc} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(c-a)^2(c+a)(bc+ab-ca)}{ca(c^2+ab)(a^2+bc)} + \frac{(b-c)(b-a)}{b^3+abc} \geq 0$$

Bất đẳng thức cuối luôn đúng, do đó bài toán chứng minh xong.

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$.

Bài 285. *Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:*
$$\frac{1}{a^4} + \frac{1}{b^4} + \frac{1}{c^4} \geq \frac{2a}{a^6+b^4} + \frac{2b}{b^6+c^4} + \frac{2c}{c^6+a^4}$$

Lời giải:

Cách 1.

Sử dụng bất đẳng thức $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$ và bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$\begin{aligned}\frac{1}{a^4} + \frac{1}{b^4} + \frac{1}{c^4} &\geq \frac{1}{a^2b^2} + \frac{1}{b^2c^2} + \frac{1}{c^2a^2} \\ &= \frac{a}{a^3b^2} + \frac{b}{b^3c^2} + \frac{c}{c^3a^2} \\ &\geq \frac{2a}{a^6+b^4} + \frac{2b}{b^6+c^4} + \frac{2c}{c^6+a^4}\end{aligned}$$

Bất đẳng thức đã được chứng minh.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Cách 2.

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz và bất đẳng thức AM-GM như sau

$$\begin{aligned} VT &= \frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{a^6}+\frac{1}{b^4}+\frac{b^2}{b^6}+\frac{1}{c^4}+\frac{c^2}{c^6}+\frac{1}{a^4}\right) \\ &\geq \frac{1}{2}\left(\frac{(a+1)^2}{a^6+b^4}+\frac{(b+1)^2}{b^6+c^4}+\frac{(c+1)^2}{c^6+a^4}\right) \\ &\geq \frac{2a}{a^6+b^4}+\frac{2b}{b^6+c^4}+\frac{2c}{c^6+a^4} \end{aligned}$$

Bất đẳng thức đã được chứng minh.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Bài 286. *Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:*

$$\frac{a^2-bc}{2a^2+ab+ac}+\frac{b^2-ca}{2b^2+bc+ba}+\frac{c^2-ab}{2c^2+ca+cb} \leq 0$$

Lời giải:

Cách 1.

Bằng phương pháp biến đổi thêm bớt, bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$\sum_{cyc}(a-b)^2\frac{2ac+2bc+c^2+ab}{(2a^2+ab+ac)(2b^2+bc+ab)} \geq 0$$

Bất đẳng thức đã được chứng minh.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$. □

Cách 2.

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\Leftrightarrow \frac{bc-a^2}{2a^2+ab+ac}+1+\frac{ac-b^2}{2b^2+ab+bc}+1+\frac{ba-c^2}{2c^2+cb+ac}+1 \geq 3$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{(a+b)(a+c)}{a(2a+b+c)}+\frac{(b+c)(b+a)}{b(2b+a+c)}+\frac{(c+a)(c+b)}{c(2c+b+a)}\right) \geq 3$$

Ta lại có:

$$\begin{aligned} VT &= \left(\frac{(a+b)(a+c)}{a(2a+b+c)}+\frac{(b+c)(b+a)}{b(2b+a+c)}+\frac{(c+a)(c+b)}{c(2c+b+a)}\right) \\ &\geq \frac{3(a+b)(b+c)(c+a)}{\sqrt[3]{abc(a+b)(b+c)(c+a)(2a+b+c)(2b+c+a)(2c+a+b)}} \\ &= 3\sqrt[3]{\frac{[(a+b)(b+c)(c+a)]^2}{abc(2a+b+c)(2b+a+c)(2c+a+b)}} \end{aligned}$$

Giờ ta chỉ cần chứng minh:

$$3.\sqrt[3]{\frac{[(a+b)(b+c)(c+a)]^2}{abc(2a+b+c)(2b+a+c)(2c+a+b)}} \geq 3$$

$$\Leftrightarrow [(a+b)(b+c)(c+a)]^2 \geq abc(2a+b+c)(2b+a+c)(2c+a+b)$$

$$\Leftrightarrow (ab+bc+ca)^2(a+b+c) \geq 2abc(a+b+c)^2+3abc(ab+bc+ca)$$

Thật vậy ta có

$$\frac{(ab+bc+ca)(a+b+c)(ab+bc+ca)}{3} \geq \frac{9abc(ab+cb+ac)}{3} = 3abc(ab+bc+ca)$$

$$\frac{2(ab+bc+ca)^2(a+b+c)}{3} \geq \frac{2.3abc(a+b+c)(a+b+c)}{3} = 2abc(a+b+c)^2$$

Cộng từng vế của hai bất đẳng thức trên trên ta có điều phải chứng minh. □

Cách 3.

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\sum_{cyc} \frac{bc}{2a^2+ab+ac} \geq \sum_{cyc} \frac{a}{2a+b+c}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có

$$\sum_{cyc} \frac{bc}{2a^2+ab+ac} \geq \frac{(ab+bc+ca)^2}{\sum\limits_{cyc} bc\left(2a^2+ab+ac\right)} = \frac{(ab+bc+ca)^2}{4abc(a+b+c)} \geq \frac{3}{4}$$

Còn vế phải được đánh giá nhờ bất đẳng thức Cauchy-Schwarz

$$\sum_{cyc} \frac{a}{2a+b+c} \leq \frac{1}{4} \sum_{cyc} \left(\frac{a}{a+b} + \frac{a}{a+c}\right) = \frac{3}{4}$$

Do đó ta có

$$\sum_{cyc} \frac{bc}{2a^2+ab+ac} \geq \sum_{cyc} \frac{a}{2a+b+c}$$

Bất đẳng thức đã được chứng minh.

Bài 287. *Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $\frac{27}{4}abc \geq 3(a+b+c)+4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$P = a+b+c$$

Lời giải:

Ta có:

$$\frac{(a+b+c)^3}{4} \geq \frac{27abc}{4} \geq 3(a+b+c)+4$$

Tương đương với

$$(a+b+c+2)^2(a+b+c-4) \geq 0 \Leftrightarrow a+b+c \geq 4$$

Vậy $Min\ P = 4$. Dấu bằng đạt được khi $a = b = c = \frac{4}{3}$. □

Bài 288. *Chứng minh rằng: Nếu $a+b \geq 0$ thì :*

$$(a+b)(a^3+b^3)(a^5+b^5) \leq 4(a^9+b^9)$$

Lời giải:

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có

$$(a^9+b^9)(a+b) \geq (a^5+b^5)^2$$

$$(a^5+b^5)(a+b) \geq (a^3+b^3)^2$$

$$4(a^3+b^3) \geq (a+b)^3$$

Nhân vế theo vế ba bất đẳng thức trên ta có điều phải chứng minh.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Bài 289. *Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:*

$$\frac{a+b+3c}{3a+3b+2c} + \frac{a+3b+c}{3a+2b+3c} + \frac{3a+b+c}{2a+3b+3c} \geq \frac{15}{8}$$

Lời giải:

Cách 1.

Đặt $x = 3b + 3c + 2a,\ y = 3a + 3c + 2b,\ z = 3a + 3b + 2c$. Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\Leftrightarrow \frac{7}{8}\left(\frac{x}{z} + \frac{z}{x}\right) + \frac{7}{8}\left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y}\right) + \frac{7}{8}\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) - \frac{27}{8} \geq \frac{15}{8}$$
$$\Leftrightarrow \frac{7}{8}\left(\frac{x}{z} + \frac{z}{x}\right) + \frac{7}{8}\left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y}\right) + \frac{7}{8}\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) \geq \frac{42}{8}$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM

$$\frac{7}{8}\left(\frac{x}{z} + \frac{z}{x}\right) + \frac{7}{8}\left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y}\right) + \frac{7}{8}\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) \geq \frac{14}{8} + \frac{14}{8} + \frac{14}{8} = \frac{42}{8}$$

Bất đẳng thức đã được chứng minh.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Cách 2.

$$\begin{aligned} VT &= 1 + \frac{7}{3}\left(\frac{c}{2c + 3a + 3b} + \frac{b}{2b + 3a + 3c} + \frac{a}{2a + 3b + 3c}\right) \\ &= 1 + 7(a + b + c)\left(\frac{1}{2a + 3b + 3c} + \frac{1}{2b + 3c + 3a} + \frac{1}{2c + 3b + 3a}\right) - 7 \\ &\geq -6 + \frac{63(a + b + c)}{8(a + b + c)} = \frac{15}{8} \end{aligned}$$

Bất đẳng thức đã được chứng minh.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$. □

Bài 290. *Cho a, b, c là các số thực dương thoả mãn $a + b + c = 3$.*
Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{a^3}{b(2c + a)} + \frac{b^3}{c(2a + b)} + \frac{c^3}{a(2b + c)}$$

Lời giải:

Cách 1.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có

$$\begin{aligned} (\sqrt{a^3} + \sqrt{b^3} + \sqrt{c^3})(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}) &\geq (a + b + c)^2 \\ &= 3\sqrt{3(a + b + c)} \\ &\geq 3(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (\sqrt{a^3} + \sqrt{b^3} + \sqrt{c^3}) \geq 3$$

Từ đây áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz một lần nữa ta có

$$\begin{aligned} P &\geq \frac{(\sqrt{a^3} + \sqrt{b^3} + \sqrt{c^3})^2}{3(ab + bc + ca)} \\ &\geq \frac{(\sqrt{a^3} + \sqrt{b^3} + \sqrt{c^3})^2}{(a + b + c)^2} \\ &\geq \frac{3^2}{3^2} = 1 \end{aligned}$$

Bất đẳng thức đã được chứng minh.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Cách 2.

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$$\begin{aligned}\frac{a^3}{b(2c+a)} &= \frac{a^3}{b(2c+a)} + \frac{b}{3} + \frac{2c+a}{9} - \frac{b}{3} - \frac{2c}{9} - \frac{a}{9}\\ &\geq a - \frac{b}{3} - \frac{2c}{9} - \frac{a}{9}\\ &= \frac{8a}{9} - \frac{b}{3} - \frac{2c}{9}\end{aligned}$$

Do đó ta có:

$$\begin{aligned}P &= \frac{a^3}{b(2c+a)} + \frac{b^3}{c(2a+b)} + \frac{c^3}{a(2b+c)}\\ &\geq \left(\frac{8a}{9} - \frac{b}{3} - \frac{2c}{9}\right) + \left(\frac{8b}{9} - \frac{c}{3} - \frac{2a}{9}\right) + \left(\frac{8c}{9} - \frac{a}{3} - \frac{2b}{9}\right)\\ &= \frac{a+b+c}{3} = 1\end{aligned}$$

Bất đẳng thức đã được chứng minh.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$. $\square$

Bài 291. *Cho a, b, c là các số thực dương thoả mãn $ab + bc + ca = abc$. Chứng minh rằng:*

$$\frac{\sqrt{a^2+3b^2}}{ab} + \frac{\sqrt{b^2+3c^2}}{bc} + \frac{\sqrt{c^2+3a^2}}{ca} \geq 2$$

Lời giải:

Cách 1.

Ta có

$$ab + bc + ca = abc \Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$$

Theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có

$$(1+3)(a^2+3b^2) \geq (a+3b)^2 \ \Rightarrow \sqrt{a^2+3b^2} \geq \frac{a+3b}{2}$$

từ đây ta suy ra

$$\frac{\sqrt{a^2+3b^2}}{ab} + \frac{\sqrt{b^2+3c^2}}{bc} + \frac{\sqrt{c^2+3a^2}}{ca} \geq \frac{a+3b}{2ab} + \frac{b+3c}{2cb} + \frac{c+3a}{2ac} = 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = 2$$

Bất đẳng thức đã được chứng minh.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 3$..

Cách 2.

Áp dụng bất đẳng thức Minkowski ta có

$$\begin{aligned}VT &= \sum_{cyc} \frac{\sqrt{a^2+3b^2}}{ab}\\ &= \sum_{cyc} \sqrt{\frac{1}{b^2} + \frac{3}{a^2}}\\ &\geq \sqrt{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2 + 3\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2} = 2\end{aligned}$$

Bất đẳng thức đã được chứng minh.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 3$. $\square$

Bài 292. *Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:*

$$\frac{ab}{a^2+bc+ca} + \frac{bc}{b^2+ca+ab} + \frac{ca}{c^2+ab+bc} \leq \frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}$$

Lời giải:

Cách 1.

Bất đẳng thức cần chứng minh (ký hiệu BDT) tương đương với

$$\sum\nolimits_{cyc} a(\frac{a}{ab+bc+ca} - \frac{b}{a^2+bc+ca}) \geq 0$$

Có thể coi $c = min\{a; b; c\}$, bằng phép biến đổi tương đương ta có

$$BDT \Leftrightarrow \sum_{cyc} a(\frac{a}{ab+bc+ca} - \frac{b}{a^2+bc+ca}) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{a(a-b)(a+b)(a+c)}{a^2+bc+ca} + \frac{b(b-c)(b+c)(b+a)}{b^2+ca+cb} + \frac{c(c-a)(c+a)(c+b)}{c^2+ab+bc} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{a(a-b)(a+b)(a+c)}{a^2+bc+ca} + \frac{b(b-a+a-c)(b+c)(b+a)}{b^2+ca+cb} + \frac{c(c-a)(c+a)(c+b)}{c^2+ab+bc} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{c(a+b)(a-b)^2(a^2+b^2+ab+ca+cb)}{(a^2+bc+ac)(b^2+ca+ab)} +$$

$$+ \frac{(b+c)(c-a)(c-b)(2ac^2+2ab^2+abc+c^2b+b^2c)}{(b^2+ca+cb)(c^2+ab+bc)} \geq 0$$

Đúng do $c = min\{a; b; c\}$

Bất đẳng thức đã được chứng minh.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$. $\square$

Cách 2.

Theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có

$$(a^2+bc+ca)(b^2+bc+ca) \geq (ab+bc+ca)^2$$

cũng theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz

$$\frac{a^2}{c} + \frac{b^2}{a} + \frac{c^2}{b} \geq a+b+c,$$

Nên suy ra:

$$a^3b + b^3c + c^3a \geq abc(a+b+c)$$

Vậy

$$\frac{ab^3+bc^3+ca^3+2abc(a+b+c)}{(ab+bc+ca)^2} \leq \frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}$$

Từ các đánh giá trên ta có:

$$\begin{aligned}\sum_{cyc} \frac{ab}{a^2+bc+ca} &= \sum_{cyc} \frac{ab(b^2+bc+ca)}{(a^2+bc+ca)(b^2+bc+ca)} \\ &\leq \sum_{cyc} \frac{ab(b^2+bc+ca)}{(ab+bc+ca)^2} \\ &= \frac{ab^3+bc^3+ca^3+2abc(a+b+c)}{(ab+bc+ca)^2} \\ &\leq \frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}\end{aligned}$$

Cuối cùng ta chứng minh được

$$\frac{ab}{a^2+bc+ca} + \frac{bc}{b^2+ca+ab} + \frac{ca}{c^2+ab+bc} \leq \frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}$$

Bất đẳng thức đã được chứng minh.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$. $\square$

Bài 293. *Cho a, b, c là các số thực dương thoả mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:*

$$2(a^2b+b^2c+c^2a) + 3(a^2+b^2+c^2) + 4abc \geq 19$$

Lời giải:

Ta có $$19 = 27 - 8 = 3(a+b+c)^2 - 8 = 3(a^2+b^2+c^2) + 6(ab+bc+ca) - 8.$$

Khi đó, bất đẳng thức tương đương với
$$a^2b+b^2c+c^2a+2abc+4\geq 3(ab+bc+ca).$$
Lại có, $\quad 3(ab+bc+ca)=(a+b+c)(ab+bc+ca)=(a^2b+b^2c+c^2a)+(ab^2+bc^2+ca^2)+3abc.$
Nên bất đẳng thức trở thành
$$4\geq ab^2+bc^2+ca^2+abc.$$
Không mất tính tổng quát giả sử b nằm giữa a và c, suy ra $a(b-a)(b-c)\leq 0$, hay
$$ab^2+ca^2\leq abc+a^2b.$$
Như vậy, $\quad ab^2+bc^2+ca^2+abc\leq a^2b+c^2b+2abc=b(a+c)^2=4b\cdot\left(\frac{a+c}{2}\right)^2\leq 4\left(\frac{b+\frac{a+c}{2}+\frac{a+c}{2}}{3}\right)^3=4.$

Ta có điều phải chứng minh.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c.=1$.

Bài 294. *Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:*
$$\sum_{cyc}\frac{a(a-2b+c)}{ab+1}\geq 0$$

Lời giải:

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với
$$\sum_{cyc}\frac{a(a-b)+a(c-b)}{1+ab}=\sum_{cyc}\frac{(a-b)^2ac}{(1+ab)(1+ac)}+\sum_{cyc}\frac{(a-c)(a-b)}{(1+ab)(1+ac)}\geq 0$$
Đúng theo bất đẳng thức Schur . Bất đẳng thức đã được chứng minh.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$. □

Bài 295. *Cho a, b, c là các số thực dương thoả mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:*
$$\frac{1}{1+bc}+\frac{1}{1+ca}+\frac{1}{1+ab}\geq\frac{9}{2(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})}$$

Lời giải:

Ta có: $$\sum_{cyc}\frac{1}{1+ab}=3-\sum_{cyc}\frac{ab}{1+ab}\geq 3-\sum_{cyc}\frac{\sqrt{ab}}{2}=\frac{15-(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})^2}{4}$$
Đặt $x=\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$ Ta cần chứng minh:
$$\frac{15-x^2}{4}\geq\frac{9}{2x}\Leftrightarrow(x-3)\left(x+\frac{3+\sqrt{33}}{2}\right)\left(x-\frac{3-\sqrt{33}}{2}\right)\leq 0$$
bất đẳng thức này đúng $\forall x\in[\sqrt{3};3]$. Bất đẳng thức đã được chứng minh.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$. □

Bài 296. *Cho $0\leq a,b,c\leq 1$. Chứng minh rằng:*
$$\frac{a}{b+c+1}+\frac{b}{c+a+1}+\frac{c}{a+b+1}+(1-a)(1-b)(1-c)\leq 1$$

Lời giải:

Giả sử: $a\geq b\geq c$ khi đó suy ra
$$\sum_{cyc}\frac{a}{b+c+1}\leq\frac{a+b+c}{b+c+1}=1-\frac{1-a}{1+b+c}.$$
Ta chỉ cần chứng minh
$$(1-a)\left(1-b\right)\left(1-c\right)-\frac{1-a}{b+c+1}\leq 0$$
là xong. Điều đó tương đương với
$$(1-b)\left(1-c\right)\left(1+b+c\right)-1\leq 0$$

bất đẳng thức cuối đúng theo AM-GM. Bất đẳng thức đã được chứng minh.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c(= 0\ hay = 1)$. □

Bài 297. *Cho $x + y + z = xyz$ và $x, y, z > 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$P = \frac{y-2}{x^2} + \frac{z-2}{y^2} + \frac{x-2}{z^2}$$

Lời giải:

Từ giả thiết ta suy ra $\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} = 1$. Ta lại có:

$$P = \frac{(y-1)+(x-1)}{x^2} + \frac{(z-1)+(y-1)}{y^2} + \frac{(x-1)+(z-1)}{z^2}) - \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)$$

Tiếp tục biến đổi

$$\begin{aligned}
P &= \sum_{cyc}(y-1)\cdot\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}\right) - \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \\
&\geq \sum_{cyc}(y-1)\cdot\frac{2}{xy} - \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \\
&= \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) - 2\left(\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{xz}\right) \\
&\geq \sqrt{3.\left(\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{xz}\right)} - 2\left(\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{xz}\right) \\
&= \sqrt{3} - 2
\end{aligned}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $P = \sqrt{3} - 2$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = \sqrt{3}$.

Bài toán đã được giải quyết. □

Bài 298. *Cho $x, y, z > 0, x + y + z = 1$. Chứng minh rằng:*

$$9xyz + 1 \geq 4(xy + yz + zx).$$

Lời giải:

Cách 1.

Ký hiệu BDT là bất đẳng thức cần chứng minh, khi đó ta có:

$$\begin{aligned}
BDT &\Leftrightarrow (x+y+z)^3 - 4(x+y+z)(xy+yz+xz) + 9xyz \geq 0 \\
&\Leftrightarrow x(x-y)(x-z) + y(y-z)(y-x) + z(z-x)(z-y) \geq 0
\end{aligned}$$

Giả sử $x \geq y \geq z > 0$. Khi đó ta có:

$$z(z-x)(z-y) \geq 0$$

$$\begin{aligned}
x(x-y)(x-z) + y(y-z)(y-x) &= (x-y)(x^2 - xz - y^2 + yz) \\
&= (x-y)^2(x+y-z) \geq 0
\end{aligned}$$

Cộng các vế của hai bất đẳng thức trên ta được điều phải chứng minh.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = \frac{1}{3}$. □

Cách 2.

Giả sử $z = min\,(x;y;z)$

$$\begin{aligned}
BDT &\Leftrightarrow xy\,(9z-4) + 1 - 4z\,(1-z) \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{(1-z)^2}{4}(9z-4) + 1 - 4z\,(1-z) \geq 0
\end{aligned}$$

Bất đẳng thức cuối cùng đúng. Bất đẳng thức đã được chứng minh. □

Cách 3.

Ta có bất đẳng thức quen thuộc sau: (dành cho bạn đọc)

$$xyz \geq (x+y-z)(y+z-x)(z+x-y$$

Kết hợp với điều kiện $x+y+z=1$ ta có:

$$\begin{aligned} BDT &\Leftrightarrow xyz \geq (1-2z)(1-2x)(1-2y) \\ &\Leftrightarrow xyz \geq 1-2(x+y+z)+4(xy+yz+zx)-8xyz \\ &\Leftrightarrow 9xyz \geq 1-2(x+y+z)+4(xy+yz+zx) \end{aligned}$$

Lưu ý $x+y+z=1$, từ đó ta có điều phải chứng minh. □

Bài 299. *Cho* $x, y, z \in [0;1]$. *Chứng minh rằng:*

$$2(x^3+y^3+z^3)-(x^2y+y^z+z^2x) \leq 3.$$

Lời giải:

Ta có $(x-1)(y-1)x \geq 0$. Nên suy ra $x^2-x^2y \leq x-xy$ Tương tự cho các bộ số khác. Từ đây suy ra

$$\begin{aligned} 2(x^3+y^3+z^3)-(x^2y+y^2z+z^2x) &\leq 2(x^2+y^2+z^2)-x^2y-y^2z-z^2x \\ &\leq x^2+y^2+z^2+x+y+z-xy-yz-xz \end{aligned}$$

Mặt khác ta có: $(x-1)(y-1) \geq 0$. Nên suy ra $x-xy \leq 1-y$

Cho nên ta nhận được

$$x^2+y^2+z^2+x+y+z-xy-yz-xz \leq x^2+y^2+z^2-x-y-z+3 = x(x-1)+y(y-1)+z(z-1)+3 \leq 3$$

Bất đẳng thức đã được chứng minh. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1$. □

Bài 300. *Cho* $a, b, c > 0, a+b+c=3$. *Chứng minh rằng:*

$$\frac{a+b}{ab+3}+\frac{b+c}{bc+3}+\frac{c+a}{ca+3} \geq \frac{3}{2}$$

Lời giải:

Ký hiệu BDT là bất đẳng thức cần chứng minh, khi đó ta có:

$$\begin{aligned} BDT &\Leftrightarrow 4abc(ab+bc+ca)+6(a+b+c)(ab+bc+ca)+ \\ &+18abc+36(a+b+c) \geq 3[a^2b^2c^2+3abc(a+b+c)+9(ab+bc+ca)+27] \\ &\Leftrightarrow 4qr+27 \geq 3r^2+9r+9q \qquad (*) \end{aligned}$$

Với $p=a+b+c=3, q=ab+bc+ca \leq 3, r=abc \leq 1$

Do ta có: $3r^2+9r+q(9-4r) \leq 3r^2+9r+3(9-4r) = 3r(r-1)+27 \leq 27$, nên (*) đúng.

Bất đẳng thức đã được chứng minh.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$. □

Bài 301. *a, b, c dương thoả mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:*
$$\frac{a^2b}{2a+b}+\frac{b^2c}{2b+c}+\frac{c^2a}{2c+a}\le\frac{3}{2}$$

Lời giải:

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có

$$\sum_{cyc}\frac{a^2b}{2a+b}\le\sum_{cyc}\frac{1}{9}(\frac{a^2b}{a}+\frac{a^2b}{a}+\frac{a^2b}{b})=\frac{(a+b+c)^2}{9}<\frac{3}{2}$$

Bất đẳng thức đã được chứng minh. $\square$

Bài 302. *a, b, c là các số thực dương tuỳ ý. Chứng minh rằng:*
$$\frac{ab}{c^2}+\frac{bc}{a^2}+\frac{ca}{b^2}\ge\frac{1}{2}(\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b})$$

Lời giải:

Cách 1.

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\sum\frac{a(b+c)(b-c)^2}{b^2c^2}\ge 0$$

Luôn đúng do $a;b;c>0$.

Bất đẳng thức đã được chứng minh.

Cách 2.

Sau khi quy đồng và phá ngoặc ta được bất đẳng thức tương đương:

$$2[(ab)^3+(bc)^3+(ca)^3]\ge\sum_{cyc}(ab)^2(ac+bc)$$

Đặt $ab=x, bc=y, ca=z$, ta cần chứng minh:

$$2(x^3+y^3+z^3)\ge\sum_{cyc}x^2(y+z)=\sum_{cyc}xy(x+y)$$

áp dụng $m^3+n^3\ge mn(m+n)$ ta có

$$\sum_{cyc}x^3+y^3\ge\sum_{cyc}xy(x+y)$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$. $\square$

Bài 303. *a, b, c là là các số không âm thoả mãn $a+b+c\le 3$. Chứng minh rằng:*
$$a^3\left(\frac{b+c}{2}\right)^4+b^3\left(\frac{c+a}{2}\right)^4+c^3\left(\frac{a+b}{2}\right)^4\le\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)^2$$

Lời giải:

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$\begin{aligned}
a^3\left(\frac{b+c}{2}\right)^4 &= a^2.(b+c)^2.\frac{2a(b+c)(b+c)}{2^5}\\
&\le a^2.2(b^2+c^2).\frac{8(a+b+c)^3}{2^5.27}\\
&\le \frac{a^2b^2+a^2c^2}{2}
\end{aligned}$$

Từ đây suy ra:

$$\begin{aligned}
\sum_{cyc} a^3\left(\frac{b+c}{2}\right)^4 &\le \frac{1}{2}\sum_{cyc}\left(a^2b^2+a^2c^2\right)\\
&= a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\\
&\le \frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{3}
\end{aligned}$$

Bất đẳng thức đã được chứng minh.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$. □

Bài 304. *a, b, c là là các số không âm thoả mãn $a+b+c \le 3$. Chứng minh rằng:*

$$a^4\left(\frac{b+c}{2}\right)^5 + b^4\left(\frac{c+a}{2}\right)^5 + c^4\left(\frac{a+b}{2}\right)^5 \le \frac{1}{9}(a^2+b^2+c^2)^3$$

Lời giải:

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

Trong bài trên ta đã chứng minh:

$$a^3\left(\frac{b+c}{2}\right)^4 \le \frac{a^2\left(b^2+c^2\right)}{2}$$

Ta có các kết quả sau đây:

$$\begin{aligned}
a^5\left(\frac{b+c}{2}\right)^6 &= a^3\left(\frac{b+c}{2}\right)^4.\frac{a^2(b+c)^2}{2^2}\\
&\le \frac{a^2\left(b^2+c^2\right)}{2}.\frac{a^2\left(b^2+c^2\right)}{2}\\
&= a^2.\frac{2a^2.\left(b^2+c^2\right).\left(b^2+c^2\right)}{8}\\
&\le a^2.\frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^3}{27}
\end{aligned}$$

Từ đây suy ra:

$$\sum_{cyc} a^5\left(\frac{b+c}{2}\right)^6 \le \left(a^2+b^2+c^2\right).\frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^3}{27} = \frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^4}{27}$$

Mặt khác theo kết quả bài 303 ta có:

$$\sum_{cyc} a^3\left(\frac{b+c}{2}\right)^4 \le \frac{1}{3}\left(a^2+b^2+c^2\right)^2$$

Từ các kết quả trên ta nhận được:

$$\begin{aligned}
\left[\sum_{cyc} a^4\left(\frac{b+c}{2}\right)^5\right]^2 &\le \left[\sum_{cyc} a^3\left(\frac{b+c}{2}\right)^4\right]\cdot\left[\sum_{cyc} a^5\left(\frac{b+c}{2}\right)^6\right]\\
&\le \frac{1}{3}\left(a^2+b^2+c^2\right)^2.\frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^4}{27}
\end{aligned}$$

Bất đẳng thức đã được chứng minh.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$. □

Bài 305. *a, b, c là là các số thực dương. Chứng minh rằng:*

$$\frac{a^2(b+c)}{b^2+bc+c^2}+\frac{b^2(c+a)}{c^2+ca+a^2}+\frac{c^2(a+b)}{a^2+ab+b^2}\geq\frac{2(a^2+b^2+c^2)}{a+b+c}$$

Lời giải:

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$4(ab+bc+ca)(bc+b^2+c^2)\leq(ab+bc+ca+bc+b^2+c^2)^2=(b+c)^2(a+b+c)^2$$

Từ đây suy ra:

$$\frac{a^2(b+c)}{b^2+bc+c^2}\geq\frac{4a^2(ab+bc+ca)}{(b+c)(a+b+c)^2}$$

Vậy

$$VT\geq\frac{4(ab+bc+ca)}{(a+b+c)^2}\left(\sum_{cyc}\frac{a^2}{b+c}\right)$$

Do đó, để chứng minh bất đẳng thức

$$\sum_{cyc}\frac{a^2}{b+c}\geq\frac{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)}{2(ab+bc+ca)}$$

Ta sẽ chứng minh

$$\sum_{cyc}\frac{a^2}{b+c}\geq\frac{(a+b+c)^3}{2(ab+bc+ca)}-(a+b+c)$$

Hay cần phải chứng minh

$$\sum_{cyc}(\frac{a^2}{b+c}+a)\geq\frac{(a+b+c)^3}{2(ab+bc+ca)}$$

Điều đó tương đương với

$$\sum_{cyc}\frac{a}{b+c}\geq\frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)}$$

Bất đẳng thức cuối cùng hiển nhiên đúng theo Cauchy-Shwarz. Bất đẳng thức đã được chứng minh.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$. □

Bài 306. *a, b là là các số thực dương thoả mãn $a^2+b^2=1$. Chứng minh rằng:*

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geq 2\sqrt{2}+\left(\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2$$

Lời giải:

Ta thực hiện các phép biến đổi tương đương

$$\begin{aligned}&\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geq 2\sqrt{2}+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-2\\&\Leftrightarrow a+b+2ab\geq 2\sqrt{2}ab+1\\&\Leftrightarrow a+b+(a+b)^2-1\geq\sqrt{2}(a+b)^2+1-\sqrt{2}\\&\Leftrightarrow(1-\sqrt{2})t^2+t+\sqrt{2}-2\geq 0, t=a+b\\&\Leftrightarrow(1-\sqrt{2})(t-\sqrt{2})(t-1)\geq 0\end{aligned}$$

Từ điều kiện đầu bài dễ suy ra được $1 < t \le \sqrt{2}$ nên bất đẳng thức cuối cùng đúng.
Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b$. $\square$

Bài 307. *a, b, c là là các số thực dương thoả mãn $a^2+b^2+c^2=3$. Chứng minh rằng:*
$$\frac{1}{2-a}+\frac{1}{2-b}+\frac{1}{2-c}\ge 3$$

Lời giải:

Cách 1.
Ta có bất đẳng thức sau đây đúng
$$\frac{1}{2-a}\ge\frac{a^2+1}{2}$$
Do ta có $a(a-1)^2\ge 0$
Do đó
$$\frac{1}{2-a}+\frac{1}{2-b}+\frac{1}{2-c}\ge\frac{a^2+b^2+c^2+3}{2}=3$$

Cách 2.
Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với
$$\frac{a}{2-a}+\frac{b}{2-b}+\frac{c}{2-c}\ge 3$$
Do:
$$\frac{a}{2-a}+\frac{b}{2-b}+\frac{c}{2-c}\ge\frac{(a+b+c)^2}{2(a+b+c)-(a^2+b^2+c^2)}=\frac{(a+b+c)^2}{2(a+b+c)-3}\ge 3$$
Tương đương với
$$(a+b+c)^2+9\ge 6(a+b+c)$$
(đúng theo bất đẳng thức AM-GM)

Cách 3.
Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với
$$\frac{a}{2-a}+\frac{b}{2-b}+\frac{c}{2-c}\ge 3$$
Ta chứng minh
$$\frac{9}{2\left(a^3+b^3+c^3\right)-\left(a^4+b^4+c^4\right)}\ge 3$$
Thậy vậy, bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với
$$a^4+b^4+c^4+3\ge 2\left(a^3+b^3+c^3\right)$$
Hay tương đương với
$$\left(a^4+a^2\right)+\left(b^4+b^2\right)+\left(c^4+c^2\right)\ge 2\left(a^3+b^3+c^3\right)$$
Bất đẳng thức cuối cùng đúng theo bất đẳng thức AM-GM
Từ đây, sau khi áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có
$$\frac{a}{2-a}+\frac{b}{2-b}+\frac{c}{2-c}\ge\frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{2\left(a^3+b^3+c^3\right)-\left(a^4+b^4+c^4\right)}\ge 3$$

Bất đẳng thức đã được chứng minh.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$. $\square$

Bài 308. *x, y, z là là các số thực dương thoả mãn $xy + yz + zx = 1$. Chứng minh rằng:*
$$\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} \geq 3 + \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1} + \sqrt{\frac{1}{y^2} + 1} + \sqrt{\frac{1}{z^2} + 1}$$

Lời giải:

Cách 1.

Ta có:
$$3 + \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1} + \sqrt{\frac{1}{y^2} + 1} + \sqrt{\frac{1}{z^2} + 1} \leq 3 + \sqrt{3(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} + 3)}$$

Giờ ta phải chứng minh:
$$\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} \geq 3 + \sqrt{3(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} + 3)}$$
$$\Leftrightarrow (\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} - 3)^2 \geq 3(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} + 3)$$
$$\Leftrightarrow \frac{(x+y+z)^2 - 3}{x^2y^2z^2} \geq 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2}{z^2x^2y^2} \geq 0$$

Bất đẳng thức cuối cùng hiển nhiên đúng

Bất đẳng thức đã được chứng minh.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = \frac{1}{\sqrt{3}}$. $\square$

Cách 2.

Ta có
$$\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} = (xy + yz + zx)\left(\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx}\right)$$
$$= 3 + \frac{z}{x} + \frac{z}{y} + \frac{x}{y} + \frac{x}{z} + \frac{y}{z} + \frac{y}{x}$$
$$= 3 + \frac{1}{2}\sum\left(\frac{x+y}{x} + \frac{x+z}{x}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{x} + \frac{z}{y} + \frac{x}{y} + \frac{x}{z} + \frac{y}{z} + \frac{y}{x}\right) - 3$$
$$\geq 3 + \sqrt{\frac{x+y}{x}.\frac{x+z}{x}} + \sqrt{\frac{y+z}{y}.\frac{y+x}{y}} + \sqrt{\frac{z+x}{z}.\frac{z+y}{z}} + \frac{1}{2}.6 - 3$$
$$= 3 + \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1} + \sqrt{\frac{1}{y^2} + 1} + \sqrt{\frac{1}{z^2} + 1} + \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx}$$
$$= \left(1 + \frac{z}{y} + \frac{z}{x}\right) + \left(1 + \frac{y}{x} + \frac{y}{z}\right) + \left(1 + \frac{x}{z} + \frac{x}{y}\right)$$
$$= 3 + \left(\frac{z}{y} + \frac{y}{x} + \frac{x}{z}\right) + \left(\frac{z}{x} + \frac{y}{z} + \frac{x}{y}\right)$$
$$\geq 3 + \left[\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{y} + \frac{y}{x} + \frac{x}{z}\right)\right] + \left[\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{x} + \frac{y}{z} + \frac{x}{y}\right)\right]$$
$$\geq 3 + \frac{1}{2}\left[\left(1 + \frac{y}{x}\right) + \left(1 + \frac{z}{x}\right) + \left(1 + \frac{z}{y}\right) + \left(1 + \frac{x}{y}\right) + \left(1 + \frac{x}{z}\right) + \left(1 + \frac{y}{z}\right)\right]$$

$$\geq 3+\frac{1}{2}\left[\frac{(x+y)+(x+z)}{x}+\frac{(y+z)+(y+x)}{y}+\frac{(z+x)+(z+y)}{z}\right]$$
$$\geq 3+\frac{\sqrt{(x+y)(x+z)}}{x}+\frac{\sqrt{(y+z)(y+x)}}{y}+\frac{\sqrt{(z+x)(z+y)}}{z}$$
$$\geq 3+\frac{\sqrt{x^2+xy+yz+zx}}{x}+\frac{\sqrt{y^2+xy+yz+zx}}{y}+\frac{\sqrt{z^2+xy+yz+zx}}{z}$$
$$\geq 3+\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}+\frac{\sqrt{y^2+1}}{y}+\frac{\sqrt{z^2+1}}{z}$$
$$\geq 3+\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}+\sqrt{\frac{1}{y^2}+1}+\sqrt{\frac{1}{z^2}+1}$$

Cách 3.

Từ giả thiết đặt $\frac{1}{x}=tanA$; $\frac{1}{y}=tanB$; $\frac{1}{z}=tanC$. Từ đây suy ra $A+B+C=\pi$

Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$\sum sinAsinBcosC \geq \prod 3cosA+\sum cosAcosB$$
$$\Leftrightarrow \sum sin^2A \geq 6\prod cosA+2\sum cosAcosB$$
$$\Leftrightarrow 1 \geq 2\prod cosA+\sum cosAcosB$$

(Bất đẳng thức cuối cùng đúng theo $AM-GM$) Bất đẳng thức đã được chứng minh.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=\frac{1}{\sqrt{3}}$. □

Bài 309. *a,b,c là là các số thực dương. Chứng minh rằng:*
$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{9}{a+b+c} \geq 4\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)$$

Lời giải:

Nhân $(a+b+c)$ vào hai vế bất đẳng thức cần chứng minh; sau khi thu gọn ta được:

$$\sum_{cyc}(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}) \geq \sum_{cyc}\frac{4c}{a+b}$$

Bất đẳng thức cuối cùng tương đương với

$$\sum_{cyc}\frac{c(a-b)^2}{ab(a+b)} \geq 0$$

hiển nhiên đúng.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$. □

Bài 310. *a,b,c là là các số thực dương. Chứng minh rằng:*
$$\sum_{cyc}\frac{a^2}{b} \geq \sum_{cyc}\sqrt{a^2-ab+b^2}$$

Lời giải:

Ta có
$$\sum_{cyc}\frac{a^2}{b}=\sum_{cyc}\frac{a^2-ab+b^2}{b}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta nhận được
$$(a+b+c)\left(\sum_{cyc}\frac{a^2-ab+b^2}{b}\right) \geq \left(\sum_{cyc}\sqrt{a^2-ab+b^2}\right)^2$$
và
$$\sum_{cyc}\sqrt{a^2-ab+b^2} \geq a+b+c$$

Từ đây suy ra $$(a+b+c)\left(\sum_{cyc}\frac{a^2}{b}\right) \ge (a+b+c)\left(\sum_{cyc}\sqrt{a^2-ab+b^2}\right)$$

Bất đẳng thức đã được chứng minh.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$. □

Bài 311. *a, b, c là các số không âm thoả mãn $a^7+b^7+c^7 \le 3$. Chứng minh rằng:*
$$\frac{1}{2-a}+\frac{1}{2-b}+\frac{1}{2-c} \le 3.$$

Lời giải:

Ta có bất đẳng thức đại diện: $\frac{1}{2-a} \le \frac{a^7+6}{7}$

(do tương đương với $(a-1)^2(a^6-a^4-2a^3-3a^2-4a-5) \le 0 \quad (*)$

Vì: $a \le \sqrt[7]{3}$. Nên $a^6 \le \sqrt[7]{3^6} < 5$

Từ đây suy ra $$a^6-a^4-2a^3-3a^2-4a-5 \le 0$$

Vậy $(*)$ đúng).Tương tự áp dụng cho hai bất đẳng thức còn lại.

Bất đẳng thức đã được chứng minh.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$. □

Bài 312. *Cho x, y, z là số thực dương thoả $x+y+z = 3xyz$*

Tìm giá trị nhỏ nhất của
$$P = \tfrac{1}{x^3}+\tfrac{1}{y^3}+\tfrac{1}{z^3}$$

Lời giải:

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:
$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}+1 \ge \frac{3}{xy} \\ \frac{1}{y^3}+\frac{1}{z^3}+1 \ge \frac{3}{yz} \\ \frac{1}{z^3}+\frac{1}{x^3}+1 \ge \frac{3}{zx} \end{array}\right\} \Rightarrow 2\left(\tfrac{1}{x^3}+\tfrac{1}{y^3}+\tfrac{1}{z^3}\right)+3 \ge 3\left(\tfrac{1}{xy}+\tfrac{1}{yz}+\tfrac{1}{zx}\right) = 9 \Rightarrow \tfrac{1}{x^3}+\tfrac{1}{y^3}+\tfrac{1}{z^3} \ge 3.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức bằng 3 đạt được khi $x = y = z = 1$.

Bài 313. *a, b, c là các số không âm thoả mãn $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2} = 3$. Chứng minh rằng:*
$$\frac{1}{1+\sqrt{(a+b)^3+abc}}+\frac{1}{1+\sqrt{(b+c)^3+abc}}+\frac{1}{1+\sqrt{(c+a)^3+abc}} \le \frac{3}{4}$$

Lời giải:

Từ điều kiện ta có:
$$3 = \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2} \ge \frac{3}{\sqrt[3]{a^2b^2c^2}}$$
$$\Leftrightarrow 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} \ge 3 \Leftrightarrow abc \ge 1$$

Do đó:
$$\begin{aligned} VT &\le \frac{1}{1+\sqrt{(a+b)^3+1}}+\frac{1}{1+\sqrt{(b+c)^3+1}}+\frac{1}{1+\sqrt{(c+a)^3+1}} \\ &= \frac{\sqrt{(a+b)^3+1}-1}{(a+b)^3}+\frac{\sqrt{(b+c)^3+1}-1}{(b+c)^3}+\frac{\sqrt{(c+a)^3+1}-1}{(c+a)^3} \end{aligned}$$

Mặt khác ta có:

$$\begin{aligned}\sqrt{1+x^3} &= \sqrt{(1+x)\left(1-x+x^2\right)}\\ &\le \frac{(1+x)+\left(1-x+x^2\right)}{2}\\ &= 1+\frac{x^2}{2} \Rightarrow \sqrt{1+x^3}-1 \le \frac{x^2}{2}\\ &\Leftrightarrow \frac{\sqrt{1+x^3}-1}{x^3} \le \frac{1}{2x}\end{aligned}$$

Suy ra:

$$\begin{aligned}VT &\le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)\\ &\le \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\\ &\le \frac{1}{4}\sqrt{3\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)}\\ &= \frac{3}{4}\end{aligned}$$

Bất đẳng thức đã được chứng minh.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$. □

Bài 314. *a, b, c thực dương thoả mãn $a^2+b^2+c^2=3$. Chứng minh rằng:*

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a} \ge \frac{4}{a^2+7}+\frac{4}{b^2+7}+\frac{4}{c^2+7}$$

Lời giải:

Ta có:

$$\begin{aligned}\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c} &\ge \frac{4}{a+2b+c},\\ \frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a} &\ge \frac{4}{a+b+2c},\\ \frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b} &\ge \frac{4}{2a+b+c}\end{aligned}$$

Từ đây suy ra:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a} \ge \frac{2}{a+2b+c}+\frac{2}{a+b+2c}+\frac{2}{2a+b+c}\\ &= \frac{4}{2a+2b+2b+2c}+\frac{4}{2a+2b+2c+2c}+\frac{4}{2a+2a+2b+2c}\\ &\ge \frac{4}{(a^2+1)+(b^2+1)+(b^2+1)+(c^2+1)}+\frac{4}{(a^2+1)+(b^2+1)+(c^2+1)+(c^2+1)}+\\ &+\frac{4}{(a^2+1)+(a^2+1)+(b^2+1)+(c^2+1)}\\ &= \frac{4}{a^2+7}+\frac{4}{b^2+7}+\frac{4}{c^2+7}\end{aligned}$$

Vậy ta có: $$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a} \ge \frac{4}{a^2+7}+\frac{4}{b^2+7}+\frac{4}{c^2+7}$$

Bất đẳng thức đã được chứng minh.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$. □

Bài 315. *a, b, c thực dương thoả mãn $a^2+b^2+c^2=3$. Chứng minh rằng:*

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b+c}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+c+a}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+a+b}} \le \sqrt{3}$$

Lời giải:

Cách 1.

Ta có:

$$LHS = \frac{a\sqrt{1+b+c}}{\sqrt{(a^2+b+c)(1+b+c)}} + \frac{b\sqrt{1+a+c}}{\sqrt{(b^2+c+a)(1+a+c)}} + \frac{c\sqrt{1+a+b}}{\sqrt{(c^2+a+b)(1+a+b)}}$$
$$\leq \frac{a\sqrt{1+b+c}+b\sqrt{1+a+c}+c\sqrt{1+b+a}}{a+b+c}$$

Ta chỉ cần chứng minh:

$$\frac{a\sqrt{1+b+c}+b\sqrt{1+a+c}+c\sqrt{1+b+a}}{a+b+c} \leq \sqrt{3}$$

Hay tương đương với chứng minh

$$a\sqrt{1+b+c}+b\sqrt{1+a+c}+c\sqrt{1+b+a} \leq \sqrt{3}(a+b+c)$$

Biến đổi vế trái bất đẳng thức cuối ta có

$$a\sqrt{1+b+c}+b\sqrt{1+a+c}+c\sqrt{1+b+a} \leq$$
$$\leq \sqrt{(a+b+c)(a+ab+ac+b+bc+ba+c+ac+cb)}$$
$$= \sqrt{(a+b+c)[(a+b+c)+2(ab+bc+ca)]}$$
$$\leq \sqrt{(a+b+c)[(a+b+c)+2\frac{(a+b+c)^2}{3}]}$$
$$\leq \sqrt{(a+b+c)[(a+b+c)+2(a+b+c)]} = \sqrt{3}(a+b+c)$$

Bất đẳng thức đã được chứng minh.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$. $\square$

Cách 2.

Ta có các đánh giá sau:

$$a+b+c \leq \sqrt{3(a^2+b^2+c^2)} = 3 = a^2+b^2+c^2$$
$$(1+b+c)(a^2+b+c) \geq (a+b+c)^2$$
$$\left(\sum_{cyc} \frac{a}{\sqrt{a^2+b+c}}\right)^2 \leq (a+b+c)\left(\frac{a}{a^2+b+c}+\frac{b}{b^2+c+a}+\frac{c}{c^2+a+b}\right)$$
$$\leq 3.\frac{a(1+b+c)+b(1+c+a)+c(1+a+b)}{(a+b+c)^2}$$
$$= 3.\frac{a+b+c+2ab+2bc+2ca}{(a+b+c)^2}$$
$$\leq 3.\frac{a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca}{(a+b+c)^2} = 3$$

Từ đây ta có:

$$\sum_{cyc} \frac{a}{\sqrt{a^2+b+c}} \leq \sqrt{3}$$

Bất đẳng thức đã được chứng minh.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$. $\square$

Bài 316. *a, b, c là các số không âm . Chứng minh rằng:*

$$(a^2+b^2+c^2)^2 \geq 4(a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a)$$

<u>Lời giải:</u>

Không mất tính tổng quát, giả sử b nằm giữa a và c. Khi đó, ta có hai trường hợp xảy ra.
a/ Nếu $a \geq b \geq c$, thì bất đẳng thức hiển nhiên đúng do $VT \geq 0 \geq VP$.
b/ Xét trường hợp $c \geq b \geq a$. Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$4(a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a) = 4(c-a)(c-b)(b-a)(a+b+c) \leq [(c-a)(c-b) + (b-a)(a+b+c)]^2$$

Mặt khác, lại thấy

$$(c-a)(c-b) + (b-a)(a+b+c) - (a^2+b^2+c^2) = -a(2a+2c-b) \leq 0$$

Kết hợp hai đánh giá này lại, ta có ngay kết quả cần chứng minh.□

Bài 317. *a, b, c thực dương thoả mãn $a^2+b^2+c^2 = 1$. Chứng minh rằng:*

$$\frac{1-ab}{(a+b)^2} + \frac{1-bc}{(b+c)^2} + \frac{1-ca}{(c+a)^2} \geq \frac{3}{2}$$

Lời giải:

Cách 1.

Ta có các kết quả sau đây

$$\sum_{cyc} \frac{1}{(a+b)^2} \geq \frac{9}{(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2} \geq \frac{9}{4(a^2+b^2+c^2)} = \frac{9}{4}$$

$$\sum_{cyc} \frac{c^2}{(a+b)^2} \geq \frac{1}{3}\left(\sum_{cyc} \frac{c}{a+b}\right)^2 \overset{Nesbit}{\geq} \frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$$

$$\frac{1-ab}{(a+b)^2} = \frac{1}{2}\frac{2-2ab}{(a+b)^2} = \frac{1}{2}\frac{2(a^2+b^2+c^2)-2ab}{(a+b)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(a+b)^2} + \frac{(a-b)^2}{(a+b)^2} + \frac{c^2}{(a+b)^2}\right] \geq \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(a+b)^2} + \frac{c^2}{(a+b)^2}\right]$$

Từ đây rút ra:

$$\sum_{cyc} \frac{1-ab}{(a+b)^2} \geq \frac{1}{2}\left[\sum_{cyc} \frac{1}{(a+b)^2} + \sum_{cyc} \frac{c^2}{(a+b)^2}\right] \geq \frac{1}{2}\left(\frac{9}{4} + \frac{3}{4}\right)$$

Vậy, ta đã chứng minh được:

$$\frac{1-ab}{(a+b)^2} + \frac{1-bc}{(b+c)^2} + \frac{1-ca}{(c+a)^2} \geq \frac{3}{2}$$

Bất đẳng thức đã được chứng minh.
Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. □

Cách 2.

Ta có các kết quả sau đây

$$\sum_{cyc} \frac{1}{(a+b)^2} \geq \frac{9}{(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2} \geq \frac{9}{4(a^2+b^2+c^2)} = \frac{9}{4}$$

$$\frac{1-ab}{(a+b)^2} \geq \frac{1-\dfrac{(a+b)^2}{4}}{(a+b)^2} = \frac{1}{(a+b)^2} - \frac{1}{4}$$

$$\sum_{cyc} \frac{1-ab}{(a+b)^2} \geq \sum_{cyc} \frac{1}{(a+b)^2} - \frac{3}{4} \geq \frac{9}{4} - \frac{3}{4} = \frac{3}{2}$$

Từ đây rút ra:

$$\frac{1-ab}{(a+b)^2}+\frac{1-bc}{(b+c)^2}+\frac{1-ca}{(c+a)^2}\geq\frac{3}{2}$$

Bất đẳng thức đã được chứng minh.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{\sqrt{3}}$. □

Cách 3.

Từ điều kiện suy ra: $1=a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca\Rightarrow 2\geq a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca$ Do đó ta có:

$$\begin{aligned}2.\frac{1-ab}{(a+b)^2}&=\frac{2-2ab}{(a+b)^2}\\&\geq\frac{a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca-2ab}{(a+b)^2}\\&=\frac{(a-b)^2+c^2+ab+bc+ca}{(a+b)^2}\geq\frac{(c+a)(c+b)}{(a+b)^2}\end{aligned}$$

Từ đây suy ra:

$$2\left[\frac{1-ab}{(a+b)^2}+\frac{1-bc}{(b+c)^2}+\frac{1-ca}{(c+a)^2}\right]\geq\frac{(c+a)(c+b)}{(a+b)^2}+\frac{(a+b)(a+c)}{(b+c)^2}+\frac{(b+c)(b+a)}{(c+a)^2}\geq 3$$

Vậy ta có

$$\frac{1-ab}{(a+b)^2}+\frac{1-bc}{(b+c)^2}+\frac{1-ca}{(c+a)^2}\geq\frac{3}{2}$$

Bất đẳng thức đã được chứng minh.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{\sqrt{3}}$. □

Bài 318. *a,b,c thực dương thoả mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng:*

$$\frac{ab}{c+6ab}+\frac{bc}{a+6bc}+\frac{ca}{b+6ca}\leq\frac{1}{3}$$

Lời giải:

Ta lần lượt có các kết quả sau:

- $c+6ab=c(a+b+c)+6ab=(ab+bc+ca)+(c^2+2ab)+3ab$
- $\sum\limits_{cyc}\frac{ab}{ab+bc+ca}=\frac{ab}{ab+bc+ca}+\frac{bc}{ab+bc+ca}+\frac{ca}{ab+bc+ca}=1$
- $\sum\limits_{cyc}\frac{ab}{c^2+2ab}=\frac{3-\sum\limits_{cyc}\frac{c^2}{c^2+2ab}}{2}\overset{Cauchy-Schwarz}{\leq}\frac{3-\frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)}}{2}=1$
- $\frac{ab}{c+6ab}=\frac{ab}{(ab+bc+ca)+(c^2+2ab)+3ab}\leq\frac{1}{9}\left(\frac{ab}{ab+bc+ca}+\frac{ab}{c^2+2ab}+\frac{ab}{3ab}\right)$

$\sum\limits_{cyc}\frac{ab}{c+6ab}\leq\frac{1}{9}\left(\sum\limits_{cyc}\frac{ab}{ab+bc+ca}+\sum\limits_{cyc}\frac{ab}{c^2+2ab}+1\right)\leq\frac{1}{9}(1+1+1)$

Từ đây kết luận

$$\sum_{cyc}\frac{ab}{c+6ab}\leq\frac{1}{3}$$

Bất đẳng thức đã được chứng minh.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \dfrac{1}{3}$. □

Bài 319. *a, b, c thực dương thoả mãn $a + b + c = abc$. Chứng minh rằng:*

$$\frac{1}{a^2(1+bc)} + \frac{1}{b^2(1+ca)} + \frac{1}{c^2(1+ab)} \leq \frac{1}{4}$$

Lời giải:

Chú ý đẳng thức quen thuộc sau:

$$\sum_{cyc}\left(\frac{ac}{a+b} + \frac{ac}{c+b}\right) = a + b + c$$

Đặt: $x = \dfrac{1}{a}, y = \dfrac{1}{b}, z = \dfrac{1}{c}$ Ta có $xy + yz + zx = 1$

Khi đó Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$\frac{x^2yz}{1+yz} + \frac{y^2zx}{1+zx} + \frac{z^2xy}{1+xy} \leq \frac{1}{4}$$

Ta có các đánh giá sau:

$$\frac{x^2yz}{1+yz} = \frac{xy.xz}{(xy+yz)+(zx+yz)} \leq \frac{1}{4}\left(\frac{xy.xz}{xy+yz} + \frac{xy.xz}{zx+yz}\right)$$

$$\sum_{cyc}\frac{x^2yz}{1+yz} \leq \frac{1}{4}\sum_{cyc}\left(\frac{xy.xz}{xy+yz} + \frac{xy.xz}{zx+yz}\right) = \frac{1}{4}(xy+yz+zx) = \frac{1}{4}$$

Từ đây suy ra

$$\frac{x^2yz}{1+yz} + \frac{y^2zx}{1+zx} + \frac{z^2xy}{1+xy} \leq \frac{1}{4}$$

Bất đẳng thức đã được chứng minh.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \sqrt{3}$. □

Cách 2.

Ta có các đánh giá sau

$$\begin{aligned}\frac{1}{a^2(1+bc)} + \frac{1}{b^2(1+ca)} + \frac{1}{c^2(1+ab)} &= \frac{1}{a(a+abc)} + \frac{1}{b(b+abc)} + \frac{1}{c(c+abc)} \\ &= \frac{1}{a(2a+b+c)} + \frac{1}{b(2b+a+c)} + \frac{1}{c(2c+b+a)} \\ &\leq \sum_{cyc}\left(\frac{1}{4a(a+b)} + \frac{1}{4a(a+c)}\right) \\ &= \frac{1}{4ab} + \frac{1}{4bc} + \frac{1}{4ca} = \frac{1}{4}\end{aligned}$$

Và ta cũng có:

$$\frac{1}{a^2+a^2bc} = \frac{1}{a^2+a(a+b+c)} = \frac{abc}{a(a+b+c)(2a+b+c)} = \frac{bc}{(a+b+c)(2a+b+c)}$$

Do biểu thức cuối cùng là đồng nhất nên ta có thể giả sử $a + b + c = 1$.

(Nếu $a + b + c = k$, ta có thể đặt $a = ka'$; $b = kb'$, $c = kc'$.) khi đó ta có

$$VT = \sum_{cyc}\frac{bc}{2a+b+c} = \sum_{cyc}\frac{bc}{a+b+a+c} \leq \frac{1}{4}\sum_{cyc}\left(\frac{bc}{a+b} + \frac{bc}{a+c}\right) \leq \frac{1}{4}$$

Bài 320. *a, b thực dương. Chứng minh rằng:*

$$1 + \frac{2(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{a+b} \le \frac{1+a+b}{\sqrt{ab}}$$

Lời giải:

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$(a+b)\sqrt{ab} + 2(\sqrt{a}+\sqrt{b})\sqrt{ab} \le (a+b) + (a+b)^2$$

Ta có

$$\frac{(a+b)^2}{2} \ge \frac{(a+b).2\sqrt{ab}}{2} = \sqrt{ab}(a+b)$$

$$\frac{(a+b)^2}{2} + (a+b) \ge \frac{4ab + (\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{2} \ge 2(\sqrt{a}+\sqrt{b})\sqrt{ab}$$

Cộng các vế của hai bất đẳng thức trên ta có điều phải chứng minh.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = 1$. $\square$

Bài 321. *Cho x, y, z là các số thực không âm thỏa mãn $x^2+y^2+z^2=3$.*
Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = x^3 + y^3 + z^3 - xyz$$

Lời giải:

Giả sử $x \le y \le z \Rightarrow \begin{cases} x^2 \le yz \Rightarrow x^2 - yz \le 0 \\ y^2 + z^2 = 3 - x^2 \le 3 \end{cases}$

Khi đó ta có

$$P = y^3 + z^3 + x(x^2 - yz) \le y^3 + z^3 = Q$$

Mặt khác, theo bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$Q^2 = (y+z)^2(y^2-yz+z^2)^2 = (y^2+2yz+z^2)(y^2-yz+z^2)(y^2-yz+z^2) \le \left(\frac{3(y^2+z^2)}{3}\right)^3 \le 3^3$$

$$\Rightarrow P \le Q \le 3\sqrt{3}$$

Đẳng thức xảy ra khi $x = y = 0, z = \sqrt{3}$ hoặc các hoán vị.

Vậy giá trị lớn nhất của P là $3\sqrt{3}$.

Bài 322. *a, b, c thực dương thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=3$. Chứng minh rằng:*

$$\frac{a^2b^2+7}{(a+b)^2} + \frac{b^2c^2+7}{(b+c)^2} + \frac{c^2a^2+7}{(c+a)} \ge 6$$

Lời giải:

Cách 1.

Sử dụng giả thiết và kết hợp với bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có:

$$\frac{a^2b^2+7}{(a+b)^2} \geq \frac{2ab+2(a^2+b^2+c^2)}{(a+b)^2} = 1+\frac{a^2+b^2+2c^2}{(a+b)^2} \geq 1+\frac{a^2+b^2+2c^2}{2\left(a^2+b^2\right)} = \frac{3}{2}+\frac{c^2}{a^2+b^2}$$

Từ đó ta có

$$\sum_{cyc} \frac{a^2b^2+7}{(a+b)^2} \geq \frac{9}{2}+\sum_{cyc} \frac{c^2}{a^2+b^2} \geq \frac{9}{2}+\frac{3}{2}=6$$

Bất đẳng thức cuối đúng theo Nesbit.

Bất đẳng thức đã được chứng minh.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = 1$. $\square$

Cách 2.

Ta có các đánh giá sau:

$$\frac{a^2b^2+7}{(a+b)^2} \geq \frac{2ab+2(a^2+b^2+c^2)}{(a+b)^2} = 1+\frac{a^2+b^2+2c^2}{(a+b)^2}$$

Suy ra:

$$\sum_{cyc} \frac{a^2b^2+7}{(a+b)^2} \geq 3+\sum_{cyc} \frac{a^2+b^2+2c^2}{(a+b)^2}$$

Từ $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$ suy ra

$$(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2 \leq 8(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)$$

Từ kết quả

$$4(a^2+b^2)(a^2+c^2) \leq \left(a^2+b^2+2c^2\right)^2$$

Suy ra

$$64\left[(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)\right]^2 \leq \left(a^2+b^2+2c^2\right)^2\left(b^2+c^2+2a^2\right)^2\left(c^2+a^2+2b^2\right)^2$$

$$8(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2) \leq \left(a^2+b^2+2c^2\right)\left(b^2+c^2+2a^2\right)\left(c^2+a^2+2b^2\right)$$

Từ đó ta có

$$(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2 \leq \left(a^2+b^2+2c^2\right)\left(b^2+c^2+2a^2\right)\left(c^2+a^2+2b^2\right)$$

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM

$$\sum_{cyc} \frac{a^2+b^2+2c^2}{(a+b)^2} \geq 3\sqrt[3]{\frac{\left(a^2+b^2+2c^2\right)\left(b^2+c^2+2a^2\right)\left(c^2+a^2+2b^2\right)}{(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2}} \geq 3$$

Vậy ta nhận được:

$$\sum_{cyc} \frac{a^2b^2+7}{(a+b)^2} \geq 3+3=6$$

Bất đẳng thức đã được chứng minh.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = 1$. $\square$

Cách 3.

Ta có :

$$\frac{a^2b^2+7}{(a+b)^2} = \frac{a^2b^2++1+2(a^2+b^2+c^2)}{(a+b)^2} \geq \frac{2ab+2c^2}{(a+b)^2}+1$$

Vậy giờ ta sẽ chứng minh: $\sum \dfrac{2ab+2c^2}{(a+b)^2} \geq 3$

Ta có :

$$\frac{2ab+2c^2}{(a+b)^2}-1 = \frac{2c^2-a^2-b^2}{(a+b)^2}$$

Giả sử: $a \le b \le c$, khi đó
$$\frac{2c^2}{(a+b)^2} \ge \frac{2b^2}{(c+a)^2} \ge \frac{2a^2}{(b+c)^2}$$
Và
$$\frac{a^2+b^2}{(a+b)^2} \le \frac{a^2+c^2}{(a+c)^2} \le \frac{b2+c^2}{(b+c)^2}$$
Vậy bất đẳng thức đúng theo Chê-bư-sép . Bất đẳng thức đã được chứng minh.
Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = 1$. □

Cách 4.
Ta có:
$$\sum_{cyc} \frac{a^2b^2+7}{(a+b)^2} \ge \sum_{cyc} \frac{a^2b^2+7}{2(a^2+b^2)}$$
Đổi biến $a^2 = x$, $b^2 = y$, $c^2 = z$ và đặt $x+y+z = p, xy+yz+zx = q, xyz = r$. Ta cần chứng minh:
$$\sum_{cyc} \frac{xy+7}{x+y} \ge 12$$
tương đương với chứng minh
$$\sum_{cyc} (xy+7)(y+z)(z+x) \ge 12(x+y)(y+z)(z+x)$$
khai triển và thu gọn lại ta có:
$$7p^2+7q+q^2+rp \ge 12pq-12r$$
$$\Leftrightarrow q^2-29q+15r+63 \ge 0 (p=3)$$
Theo bất đẳng thức Schur ta có $r \ge \dfrac{4q-9}{3}$
Suy ra
$$q^2-29q+15r+63 \ge q^2-29q+15.\frac{4q-9}{3}+63 = (q-3)(q-6) \ \ge 0 \,(\, q \le 3\,)$$
Bất đẳng thức đã được chứng minh.
Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = 1$. □

Bài 323. *Cho x, y, z thực dương thỏa mãn $xy+yz+zx = 1$. Chứng minh rằng:*
$$\frac{x}{y(1+x^2)} + \frac{y}{z(1+y^2} + \frac{z}{x(1+z^2)} \ge \frac{9}{4}$$

Lời giải:
Ta có các đánh giá sau đây:
$$x^2y^2+x^2y^2+x^2y^2+xyz\,(x+y+z) = (xy+yz+zx)^2 - xyz\,(x+y+z)$$
$$xyz\,(x+y)\,(y+z)\,(z+x) \le \frac{8(xy+yz+zx)^3}{27} = \frac{8}{27}$$
$$(x+y+z) = (x+y+z)\,(xy+yz+zx) \le \frac{9}{8}\,(x+y)\,(y+z)\,(z+x)$$
Do đó nếu ký kiệu VT - vế trái của bất đẳng thức cần chứng minh ta sẽ có:

$$\begin{aligned}
VT &= \sum_{cyc} \frac{x}{y\left(1+x^2\right)} = \sum_{cyc} \frac{x}{y\left(x+y\right)\left(x+z\right)} \\
&= \sum_{cyc} \frac{x^2 z\left(y+z\right)}{xyz\left(x+y\right)\left(x+z\right)\left(y+z\right)} \\
&= \frac{x^2y^2+x^2y^2+x^2y^2+xyz\left(x+y+z\right)}{xyz\left(x+y\right)\left(y+z\right)\left(z+x\right)} \\
&= \frac{\left(xy+yz+zx\right)^2}{xyz\left(x+y\right)\left(y+z\right)\left(z+x\right)} - \frac{\left(x+y+z\right)}{\left(x+y\right)\left(y+z\right)\left(z+x\right)} \\
&\geq \frac{27}{8} - \frac{9}{8} = \frac{9}{4}
\end{aligned}$$

Vậy ta có

$$\frac{x}{y(1+x^2)} + \frac{y}{z(1+y^2)} + \frac{z}{x(1+z^2)} \geq \frac{9}{4}$$

Bất đẳng thức đã được chứng minh.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. □

Bài 324. *Cho x, y, z thực dương thỏa mãn $xy + yz + zx = 1$. Chứng minh rằng:*

$$\frac{x}{y(1+z^2)} + \frac{y}{z(1+x^2)} + \frac{z}{x(1+y^2)} \geq \frac{9}{4}$$

Lời giải:

Ta có các đánh giá sau:

$$xyz(x+y+z) \leq \frac{(xy+yz+xy)^2}{3} = \frac{1}{3}$$
$$(x+y+z)^2 \geq 3(xy+yz+xz) = 3$$

Vậy ta có:

$$\begin{aligned}
&\frac{x}{y(1+z^2)} + \frac{y}{z(1+x^2)} + \frac{z}{x(1+y^2)} \\
&\geq \frac{(z+x+y)^2}{xy+yz+xz+xyz(x+y+z)} \\
&\geq \frac{9}{4}
\end{aligned}$$

Bất đẳng thức đã được chứng minh.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. □

Bài 325. *Cho a; b; c thực dương thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng:*

$$\frac{a^2+b^2+2}{a+b-ab} + \frac{b^2+c^2+2}{b+c-bc} + \frac{c^2+a^2+2}{c+a-ca} \geq 12$$

Lời giải:

Ta lần lượt đánh giá

$$\begin{aligned}
\frac{a^2+b^2+2}{a+b-ab} + \frac{b^2+c^2+2}{b+c-bc} + \frac{c^2+a^2+2}{c+a-ca} &= \sum_{cyc}(a^2+1)\left(\frac{1}{a+b-ab} + \frac{1}{a+c-ac}\right) \\
\geq \sum_{cyc} \frac{4(a^2+1)}{2a+b+c-a(b+c)} = \sum_{cyc} \frac{4(a^2+1)}{2a+1-a-a(1-a)} &= \sum_{cyc} \frac{4(a^2+1)}{a^2+1} = 12
\end{aligned}$$

Bất đẳng thức đã được chứng minh.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \dfrac{1}{3}$. $\square$

Bài 326. *Cho a, b, c thực dương thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng:*

$$\frac{ab}{\sqrt{(1-c)^3(1+c)}} + \frac{bc}{\sqrt{(1-a)^3(1+a)}} + \frac{ca}{\sqrt{(1-b)^3(1+b)}} \le \frac{3\sqrt{2}}{8}$$

Lời giải:

Ta nhận thấy rằng

$$\begin{aligned}\frac{ab}{\sqrt{(1-c)^3(1+c)}} &= \frac{ab}{(a+b)\sqrt{(a+b)(a+c+b+c)}}\\ &\le \frac{1}{2}\sqrt{\frac{ab}{(a+b)(a+c+b+c)}} \le \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\sqrt{ab}\sqrt{ab}}{(a+b)2\sqrt{(a+c)(b+c)}}}\\ &\le \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{4}\sqrt{\frac{ab}{(a+c)(b+c)}}} \le \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{8}\left(\frac{a}{a+c}+\frac{b}{b+c}\right)}\end{aligned}$$

Từ đây, sau khi áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta sẽ có

$$VT \le \sum_{cyc} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{8}\left(\frac{a}{a+c}+\frac{b}{b+c}\right)} \le \frac{1}{2}\sqrt{\frac{9}{8}} = \frac{3\sqrt{2}}{8}$$

Bất đẳng thức đã được chứng minh.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \dfrac{1}{3}$. $\square$

Bài 327. *Cho a, b, c thực dương thỏa mãn $a^3 + b^3 + c^3 \le 3$. Chứng minh rằng:*

$$\frac{ab}{\sqrt{3+c}} + \frac{bc}{\sqrt{3+a}} + \frac{ca}{\sqrt{3+b}} \le \frac{3}{2}$$

Lời giải:

Ta có

$$9 \ge a^3 + 1 + 1 + b^3 + 1 + 1 + c^3 + 1 + 1 \ge 3(a+b+c)$$

Suy ra $3 \ge (a+b+c)$ và từ $9 \ge (a+b+c)^2 \ge 3(ab+bc+ca)$ suy ra $3 \ge (ab+bc+ca)$

Từ đó ta có

$$\begin{aligned}\frac{ab}{\sqrt{3+c}} + \frac{bc}{\sqrt{3+a}} + \frac{ca}{\sqrt{3+b}} &\le \frac{ab}{\sqrt{a+b+c+c}} + \frac{bc}{\sqrt{a+b+c+a}} + \frac{ca}{\sqrt{a+b+c+b}}\\ &\le \sqrt{\left(\frac{ab}{a+c+b+c} + \frac{bc}{a+c+b+a} + \frac{ca}{a+c+b+b}\right)(ab+bc+ca)}\\ &\le \sqrt{\frac{3}{4}\left(\sum_{cyc}\frac{ab}{a+c}+\frac{ba}{b+c}\right)} = \sqrt{\frac{3}{4}(a+b+c)} \le \frac{3}{2}\end{aligned}$$

Bất đẳng thức đã được chứng minh.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$. $\square$

Bài 328. *Cho a, b, c thực dương thỏa mãn* $\dfrac{1}{a^2+b^2+1}+\dfrac{1}{b^2+c^2+1}+\dfrac{1}{c^2+a^2+1} \geq 1.$
Chứng minh rằng:
$$ab+bc+ca \leq 3$$

Lời giải:

Áp dung bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có:
$$1 \leq \sum_{cyc} \frac{1}{a^2+b^2+1} \leq \sum_{cyc} \frac{1+1+a^2}{(a+b+c)^2} = \frac{6+a^2+b^2+c^2}{(a+b+c)^2}$$
Từ đây dễ dàng suy ra
$$ab+bc+ca \leq 3$$
Bất đẳng thức đã được chứng minh.
Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$. $\square$

Bài 329. *Cho a, b, c thực dương thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:*
$$\sqrt{\frac{a^2+b^2+c}{a+b+c^2}}+\sqrt{\frac{b^2+c^2+a}{b+c+a^2}}+\sqrt{\frac{c^2+a^2+b}{c+a+b^2}} \geq 3$$

Lời giải:

Ta có
$$(a^2+b^2+c)(a+b+c^2) \leq \frac{(a^2+b^2+c^2+3)^2}{4}$$
$$\sqrt{\frac{a^2+b^2+c}{a+b+c^2}} = \frac{a^2+b^2+c}{\sqrt{(a^2+b^2+c)(a+b+c^2)}} \geq \frac{2(a^2+b^2+c)}{a^2+b^2+c^2+3}$$
suy ra
$$\begin{aligned}&\sqrt{\frac{a^2+b^2+c}{a+b+c^2}}+\sqrt{\frac{b^2+c^2+a}{b+c+a^2}}+\sqrt{\frac{c^2+a^2+b}{c+a+b^2}}\\ &\geq \frac{2(a^2+b^2+b^2+c^2+c^2+a^2+a+b+c)}{a^2+b^2+c^2+3}\\ &= \frac{4(a^2+b^2+c^2)+6}{a^2+b^2+c^2+3}\end{aligned}$$
Ta cần chứng minh
$$\frac{4(a^2+b^2+c^2)+6}{a^2+b^2+c^2+3} \geq 3$$
Tương đương với chứng minh
$$a^2+b^2+c^2 \geq 3$$
Điều đó luôn đúng với mọi $a, b, c > 0$ và $a+b+c=3$ bởi vì :
$$a^2+b^2+c^2 \geq \frac{(a+b+c)^2}{3} = 3$$
Bất đẳng thức đã được chứng minh.
Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$. $\square$

Bài 330. *Cho a, b, c thực dương thỏa mãn $a^3 + b^3 + c^3 = 3$. Chứng minh rằng:*

$$\frac{a^2}{b+5} + \frac{b^2}{c+5} + \frac{c^2}{a+5} \le \frac{1}{2}.$$

Lời giải:

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$\frac{a^2}{b+5} + \frac{b^2}{c+5} + \frac{c^2}{a+5} \le \frac{1}{2\sqrt{3}} \left(\sum_{cyc} \frac{a^2}{\sqrt{b+2}} \right)$$

Theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta lại có

$$\frac{1}{2\sqrt{3}} \left(\sum_{cyc} \frac{a^2}{\sqrt{b+2}} \right) \le \frac{1}{2\sqrt{3}} \sqrt{3 \left(\sum_{cyc} \frac{a}{b+2} \right)}$$

Ta chỉ cần chứng minh

$$\sum_{cyc} \frac{a}{b+2} \le 1$$

Hay tương đương với

$$\sum_{cyc} a(a+2)(b+2) \le (a+2)(b+2)(c+2)$$

$$\Leftrightarrow a^2c + b^2a + c^2b + 2(a^2 + b^2 + c^2) \le 8 + abc$$

Bất đẳng thức cuối suy ra từ hai bất đẳng thức sau

$$a^2 + b^2 + c^2 \le 3$$
$$a^2c + b^2a + c^2b \le 2 + abc$$

Hai bất đẳng thức này dành cho độc giả như là một bài tập nhỏ.

Bất đẳng thức đã được chứng minh.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$. $\square$

Bài 331. *Cho a; b; c thực dương thỏa mãn $(a + b + c)^2 = 9abc$. Chứng minh rằng:*

$$\frac{1}{\sqrt{1+3a^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+3b^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+3c^2}} \le \frac{3}{2}$$

Lời giải:

Cách 1.

Đặt $a = yz$; $b = zx$; $c = xy$, ta có:

$9x^2y^2z^2 = (xy + yz + zx)^2 \Leftrightarrow 3xyz = xy + yz + zx \ge 3\sqrt[3]{xyz} \Rightarrow xyz \ge 1$

Khi đó ta có:

$$\begin{aligned}
VT =& \frac{1}{\sqrt{1+3y^2z^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+3z^2x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+3x^2y^2}} \\
=& \frac{x}{\sqrt{x^2+3x^2y^2z^2}} + \frac{y}{\sqrt{y^2+3x^2y^2z^2}} + \frac{z}{\sqrt{z^2+3x^2y^2z^2}} \\
\le& \frac{x}{\sqrt{x^2+3xyz}} + \frac{y}{\sqrt{y^2+3xyz}} + \frac{z}{\sqrt{z^2+3xyz}} \\
\le& \frac{x}{\sqrt{x^2+xy+yz+zx}} + \frac{y}{\sqrt{y^2+xy+yz+zx}} + \frac{z}{\sqrt{z^2+xy+yz+zx}} \\
\le& \frac{x}{\sqrt{(x+y)(x+z)}} + \frac{y}{\sqrt{(y+z)(y+x)}} + \frac{z}{\sqrt{(z+x)(z+y)}} \\
\le& \frac{1}{2}\left(\frac{x}{x+y} + \frac{x}{x+z}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{y}{y+z} + \frac{y}{y+x}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{z+x} + \frac{z}{z+y}\right) \\
\le& \frac{1}{2}\left(\frac{x}{x+y} + \frac{y}{y+x}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{y}{y+z} + \frac{z}{z+y}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{z+x} + \frac{x}{x+z}\right) \le \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

Bất đẳng thức đã được chứng minh.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$. $\square$

Cách 2.

Từ giả thiết $(a+b+c)^2 = 9abc \ge 3(ab+bc+ca)$ và đặt $x = \frac{1}{a}, y = \frac{1}{b}, z = \frac{1}{c}$

Ta có $x + y + z \le 3$.

Do $3(xy + yz + zx) \le (x + y + z)^2 \le 9$ nên $xy + yz + zx \le 3$

Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\sum_{cyc} \frac{x}{\sqrt{x^2+3}} \le \frac{3}{2}$$

Thật vậy, ta có:

$$\sum_{cyc} \frac{x}{\sqrt{x^2+3}} \le \sum_{cyc} \frac{x}{\sqrt{x^2+xy+yz+zx}} = \sum_{cyc} \frac{x}{\sqrt{(x+y)(x+z)}} \le \frac{1}{2}\sum_{cyc}\left(\frac{x}{x+y} + \frac{x}{x+z}\right) = \frac{3}{2}$$

Bất đẳng thức đã được chứng minh.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$. $\square$

Bài 332. *Cho a; b; c thực dương thỏa mãn $abc = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$P = \frac{a^2b}{a+b} + \frac{b^2c}{b+c} + \frac{c^2a}{c+a}$$

Lời giải:

Ta có $abc = 1$, nên có thể đặt $a = \frac{x}{y}, b = \frac{y}{z}, c = \frac{z}{x}$. Khi đó ta có:

$$\begin{aligned}
& x^4 + y^4 + z^4 + 3\left(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2\right) \\
&= \left(x^2+y^2+z^2\right)^2 + \left(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2\right) \\
&\le \frac{4}{3}\left(x^2+y^2+z^2\right)^2
\end{aligned}$$

Từ đây suy ra:

$$
\begin{aligned}
P &= \sum_{cyc} \frac{a^2b}{a+b} \\
&= \sum_{cyc} \frac{\frac{x^2}{y^2}.\frac{y}{z}}{\frac{x}{y}+\frac{y}{z}} \\
&= \sum_{cyc} \frac{2x^2}{2xz+2y^2}
\end{aligned}
$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$\sum_{cyc} \frac{2x^2}{2xz+2y^2} \geq 2.\sum_{cyc} \frac{x^2}{x^2+z^2+2y^2}$$

Lại áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có

$$2.\sum_{cyc} \frac{x^2}{x^2+z^2+2y^2} \geq 2.\frac{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}{x^4+y^4+z^4+3\left(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2\right)} \geq 2.\frac{3}{4} = \frac{3}{2}$$

Từ đây suy ra

$$P = \sum_{cyc} \frac{a^2b}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

Giá trị nhỏ nhất này của P đạt được khi cho $a = b = c = 1$. $\square$

Bài 333. *Cho a; b; c thực dương thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=1$. Chứng minh rằng:*

$$P = \frac{a}{b^2+c^2} + \frac{b}{c^2+a^2} + \frac{c}{a^2+b^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Lời giải:

Theo bất đẳng thức AM-GM ta có

$$27.2a^2\left(b^2+c^2\right)\left(b^2+c^2\right) \leq 8\left(a^2+b^2+c^2\right)^3 = 8$$

Từ đó suy ra:

$$\frac{a}{b^2+c^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$$

Thiết lập hai biểu thức tương tự và cộng vế với vế, ta có:

$$P \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}\left(a^2+b^2+c^2\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{\sqrt{3}}$. $\square$

Bài 334. *Cho a; b; c thực dương thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:*

$$\frac{a^2b}{2a+b} + \frac{b^2c}{2b+c} + \frac{c^2a}{2c+a} \leq 1$$

Lời giải:

Ta có:

$$\frac{1}{2a+b} = \frac{1}{a+a+b} \le \frac{1}{9}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) = \frac{1}{9}\left(\frac{2}{a}+\frac{1}{b}\right)$$

Từ đây suy ra

$$\frac{a^2b}{2a+b} \le a^2b.\frac{\frac{2}{a}+\frac{1}{b}}{9} = \frac{2ab+a^2}{9}$$

Tương tự cho hai phân số còn lại , ta có được

$$\frac{a^2b}{2a+b}+\frac{b^2c}{2b+c}+\frac{c^2a}{2c+a} \le \frac{1}{9}(a+b+c)^2 = 1$$

Bài 335. *Cho a; b; c là độ dài các cạnh của tam giác. Chứng minh rằng:*

$$(a+b)^4+(c+b)^4+(a+c)^4+ \ge 9(a^4+b^4+c^4)$$

Lời giải:

Sau khi phá ngoặc và rút gọn, bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$6(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-7(a^4+b^4+c^4)+4(a^3b+ab^3+c^3b+cb^3+a^3c+ac^3) \ge 0$$

Áp dụng AM-GM ta có

$$4(a^3b+ab^3+c^3b+cb^3+a^3c+ac^3) \ge 8(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$$

Ta lại có theo bất đẳng thức trong tam giác

$$14(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-7(a^4+b^4+c^4) = 7(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(b-a+c) \ge 0$$

từ đây suy ra

$$6(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-7(a^4+b^4+c^4)+4(a^3b+ab^3+c^3b+cb^3+a^3c+ac^3) \ge 0$$

Bất đẳng thức đã được chứng minh. □

Bài 336. *Cho x , y , z là các số dương thỏa mãn $xyz = 1$. Chứng minh rằng:*

$$\sqrt{\frac{x}{x+8z}}+\sqrt{\frac{y}{y+8x}}+\sqrt{\frac{z}{z+8y}} \ge 1$$

Lời giải:

Cách 1.

Từ điều kiện ta có thể đặt $x = \frac{a}{b}; y = \frac{b}{c}; z = \frac{c}{a}$

khi đó bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{c^2+8ab} \ge 1$$

Trước hết ta chứng minh bất đẳng thức đại diện sau:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} \ge \frac{a^{4/3}}{a^{4/3}+2(bc)^{2/3}}$$

Tương đương với chứng minh

$$a^2(a^{\frac{4}{3}}+2(bc)^{\frac{2}{3}})^2 \ge a^{\frac{8}{3}}(a^2+8bc)$$

Hay tương đương với

$$(bc)^{\frac{4}{3}}+a^{\frac{4}{3}}(bc)^{\frac{2}{3}} \ge 2a^{\frac{2}{3}}bc$$

Bất đẳng thức này đúng theo AM-GM

Từ đây suy ra

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}$$
$$\ge \sum_{cyc}\frac{a^{4/3}}{a^{4/3}+2(bc)^{2/3}} \ge$$
$$\sum_{cyc}\frac{a^{4/3}}{a^{4/3}+b^{4/3}+c^{4/3}}=1$$

Bất đẳng thức đã được chứng minh.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$. □

Cách 2.

Cũng biến đổi như trên ta cần chứng minh

$$\sum_{cyc}\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} \ge 1$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz:

$$VT \ge \frac{(a+b+c)^2}{a\sqrt{a^2+8bc}+b\sqrt{b^2+8ac}+c\sqrt{c^2+8ba}}$$

Lại áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz

$$(a\sqrt{a^2+8bc}+b\sqrt{b^2+8ac}+c\sqrt{c^2+8ba})^2 \le (a+b+c)(a^3+b^3+c^3+24abc) \le (a+b+c)^4$$

Từ đây suy ra

$$a\sqrt{a^2+8bc}+b\sqrt{b^2+8ac}+c\sqrt{c^2+8ba} \le (a+b+c)^2$$

Bất đẳng thức đã được chứng minh.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$. □

Bài 337. *Cho a; b; c là các số thực dương thoả mãn $a^2+b^2+c^2=12$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$P=\frac{1}{1+ab}+\frac{1}{1+bc}+\frac{1}{1+ca}$$

Lời giải:

Cách 1.

Ta có:

$$P \ge \frac{9}{3+ab+bc+ca} \ge \frac{9}{3+a^2+b^2+c^2}=\frac{3}{5}$$

Vậy $MinP = \dfrac{3}{5}$ $khi\, a = b = c = 2$. □

Cách 2.

Ta có

$$\frac{1}{1+ab} + \frac{1+ab}{25} \geq \frac{2}{5}$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$ab + bc + ca \leq a^2 + b^2 + c^2 = 12$$

Khi đó ta có

$$P = \frac{1}{1+ab} + \frac{1}{1+bc} + \frac{1}{1+ca} \geq \frac{9}{3+ab+bc+ca} \geq \frac{9}{3+12} = \frac{3}{5}$$

Vậy $MinP = \dfrac{3}{5}$ $khi\, a = b = c = 2$. □

Bài 338. *Cho a; b; c là các số thực dương. Chứng minh rằng:*

$$\frac{a^2}{\sqrt{3a^2+8b^2+14ab}} + \frac{b^2}{\sqrt{3b^2+8c^2+14bc}} + \frac{c^2}{\sqrt{3c^2+8a^2+14ca}} \geq \frac{a+b+c}{5}$$

Lời giải:

Cách 1.

Ta có: $3a^2 + 8b^2 + 14ab \leq (2a+3b)^2$, suy ra

$$\sum_{cyc} \frac{a^2}{\sqrt{3a^2+8b^2+14ab}} \geq \sum_{cyc} \frac{a^2}{2a+3b} \geq 2\sum_{cyc} \sqrt{\frac{a^2}{2a+3b}.\frac{2a+3b}{25}} - \sum_{cyc} \frac{2a+3b}{25} = \frac{a+b+c}{5}$$

Bất đẳng thức đã được chứng minh.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$. □

Cách 2.

Ta có:

$$\sum_{cyc} \frac{a^2}{\sqrt{3a^2+8b^2+14ab}} = \sum_{cyc} \frac{a^2}{\sqrt{(2a+3b)^2 - (a-b)^2}} \geq \sum_{cyc} \frac{a^2}{2a+3b}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có

$$\sum_{cyc} \frac{a^2}{2a+3b} \geq \frac{(a+b+c)^2}{5(a+b+c)} = \frac{a+b+c}{5}$$

Bất đẳng thức đã được chứng minh.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$. □

Bài 339. *Cho a; b; c là các số thực dương mãn điều kiện $3ab + bc + 2ac = 6$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức*

$$A = \frac{1}{a^2+1} + \frac{4}{b^2+4} + \frac{9}{c^2+9}$$

Lời giải:

Cách 1.

Đặt $x = a; y = \dfrac{b}{2}; z = \dfrac{c}{3}$. Từ điều kiện suy ra $xy + yz + zx = 1$
Từ đây ta có

$$\begin{aligned}3 - A &= \frac{x^2}{1+x^2} + \frac{y^2}{1+y^2} + \frac{z^2}{1+z^2} \\ &\geq \frac{(x+y+z)^2}{x^2+y^2+z^2+3} \\ &= \frac{(x+y+z)^2}{(x+y+z)^2+1} \\ &= 1 - \frac{1}{(x+y+z)^2+1} \\ &\geq 1 - \frac{1}{3(xy+yz+zx)+1} = \frac{3}{4}\end{aligned}$$

Vậy

$$A = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} + \frac{1}{1+z^2} \leq \frac{9}{4}$$

Dấu bằng đạt được khi và chỉ khi

$$x = y = z = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Tương đương với

$$a = \frac{1}{\sqrt{3}}, b = \frac{2}{\sqrt{3}}, c = \sqrt{3}$$

Cách 2.
Đặt: $a = x, b = 2y, c = 3z$
Từ điều kiện, suy ra: $xy + yz + zx = 1$. Khi đó ta có

$$\begin{aligned}A &= \frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{y^2+1} + \frac{1}{z^2+1} \\ &= \frac{1}{x^2+xy+yz+zx} + \frac{1}{y^2+xy+yz+zx} + \frac{1}{z^2+xy+yz+zx} \\ &= \frac{1}{(x+y)(x+z)} + \frac{1}{(y+z)(y+x)} + \frac{1}{(z+x)(z+y)} \\ &= \frac{2(x+y+z)}{(x+y)(y+z)(z+x)} \\ &= \frac{2(x+y+z)(xy+yz+zx)}{(x+y)(y+z)(z+x)}\end{aligned}$$

Do:

$$(x+y+z)(xy+yz+zx) = (x+y)(y+z)(z+x) + xyz$$

Suy ra:

$$A = 2[1 + \frac{xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)}]$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có: $8xyz \leq (x+y)(y+z)(z+x)$, nên ta có

$$\frac{xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)} \leq \frac{1}{8}$$

Suy ra $A \leq \dfrac{9}{4}$
Vậy $MaxA = \dfrac{9}{4}$

Dấu bằng đạt được khi và chỉ khi $x = y = z = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ Tương đương với

$$a = \frac{1}{\sqrt{3}}, b = \frac{2}{\sqrt{3}}, c = \sqrt{3}$$

Cách 3.

Đặt $a = x, b = 2y, c = 3z$, suy ra $xy + yz + zx = 1$ta có $A = \dfrac{1}{x^2+1} + \dfrac{1}{y^2+1} + \dfrac{1}{z^2+1}$

Tiếp tục đặt $x = tan\dfrac{A}{2}, y = tan\dfrac{B}{2}; z = tan\dfrac{C}{2}$ ta có

$$\begin{aligned}2A &= (cos^2\frac{A}{2} + cos^2\frac{B}{2} + cos^2\frac{C}{2})\\ &= 3 + cosA + cosB + cosC \le 3 + \frac{3}{2}\\ &= \frac{9}{2}\end{aligned}$$

Vậy $A \le \dfrac{9}{4}$. Dấu bằng đạt được khi và chỉ khi

$$a = \frac{1}{\sqrt{3}}, b = \frac{2}{\sqrt{3}}, c = \sqrt{3}$$

Bài 340. *Cho a; b là các số thực dương. Chứng minh rằng*

$$(1+a)\left(1+\frac{b}{a}\right)\left(1+\frac{9}{\sqrt{b}}\right)^2 \ge 256$$

Lời giải:

Cách 1.

Ta có theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz:

$$\begin{aligned}(1+a)(1+\frac{b}{a})(1+\frac{9}{\sqrt{b}})^2 &\ge (1+\sqrt{b})^2(1+\frac{9}{\sqrt{b}})^2\\ &\ge (1+3)^4 = 256\end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = 3; b = 9$. □

Cách 2.

Ta có theo bất đẳng thức Holder:

$$(1+a)(1+\frac{b}{a})(1+\frac{9}{\sqrt{b}})^2 = (1+a+\frac{b}{a}+b)(1+\frac{9}{\sqrt{b}})^2$$

$$\ge (1.1.1.1 + +\sqrt[4]{a}.\sqrt[4]{\frac{b}{a}}.\sqrt[4]{\frac{9}{\sqrt{b}}}.\sqrt[4]{\frac{9}{\sqrt{b}}})^4 = 256$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = 3; b = 9$. □

Cách 3.

$$\begin{aligned}VT =&(1+a+\frac{b}{a}+b)(1+\frac{9}{\sqrt{b}})^2\\ &\ge^{AM-GM} (1+2\sqrt{b}+b)(1+\frac{9}{\sqrt{b}})^2\\ &= [(1+\sqrt{b})(1+\frac{9}{\sqrt{b}})]^2 \ge 256\end{aligned}$$

(Bất đẳng thức cuối cùng đúng theo AM-GM) Đẳng thức xảy ra khi $a = 3; b = 9$. □

Cách 4.

Sử dụng đồng nhất thức sau

$$(1+a)\left(1+\frac{b}{a}\right)\left(1+\frac{9}{\sqrt{b}}\right)^2=256+32(\frac{3}{\sqrt[4]{b}}-\sqrt[4]{b})^2+(\frac{3}{\sqrt[4]{b}}-\sqrt[4]{b})^4+(\sqrt{\frac{b}{a}}-\sqrt{a})^2\left(1+\frac{9}{\sqrt{b}}\right)^2$$

Đẳng thức xảy ra khi $a=3; b=9$. □

Bài 341. *Cho a; b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{a^2+b+c}+\frac{1}{b^2+c+a}+\frac{1}{c^2+a+b}\le 1$$

Lời giải:

Cách 1.

Ta có:

$$(1+b+c)(a^2+b+c)\ge (a+b+c)^2$$

Suy ra

$$\sum_{cyc}\frac{1}{a^2+b+c}\le\sum_{cyc}\frac{1+b+c}{(a+b+c)^2}=\frac{3+2(a+b+c)}{(a+b+c)^2}=1$$

Bất đẳng thức đã được chứng minh.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$. □

Cách 2.

Sử dụng phương pháp tiếp tuyến ta có :

$$\frac{4-a}{9}-\frac{1}{a^2+3-a}=\frac{(3-a)(a-1)^2}{9(a^2+3-a)}\ge 0$$

Do đó

$$\frac{1}{a^2+b+c}+\frac{1}{b^2+c+a}+\frac{1}{c^2+a+b}\le\sum_{cyc}\frac{4-a}{9}=1$$

Bất đẳng thức đã được chứng minh.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$. □

Bài 342. *Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab+bc+ca+abc=4$. Chứng minh rằng*

$$\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}\le 3$$

Lời giải:

Cách 1.

Đặt $x=\sqrt{bc}; y=\sqrt{ca}; z=\sqrt{ab}$ Suy ra

$$x^2+y^2+z^2+xyz=4$$
$$\Leftrightarrow (x+y+z)^2-4=2\left(xy+yz+zx\right)-xyz$$
$$\Leftrightarrow (x+y+z)^2-4(x+y+z)+4=(2-x)(2-y)(2-z)$$
$$\leq \left(\frac{6-x-y-z}{3}\right)^3$$

Đặt $t=x+y+z$, ta có:

$$(t-6)^3+27(t^2-4t+4)\leq 0$$
$$\Leftrightarrow (t-3)(t+6)^2\leq 0$$
$$\Leftrightarrow t\leq 3$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}\leq 3$$

Bất đẳng thức đã được chứng minh.
Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$. $\square$

Cách 2.
Đặt $\sqrt{ab}=2x, \sqrt{bc}=2y; \sqrt{ca}=2z$ ta có:

$$x^2+y^2+z^2+2xyz=1$$

Ta cần chứng minh $x+y+z\leq \frac{3}{2}$, thật vậy
Sử dụng phương pháp lượng giác, đặt $x=cosA$, $y=cosB$, $z=cosC$ ta có

$$cosA+cosB+cosC\leq 3cos\left(\frac{A+B+C}{3}\right)=\frac{3}{2}$$

Bất đẳng thức đã được chứng minh.
Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$. $\square$

Bài 343. *Cho a, b, c là các số không âm thỏa mãn $a+b+c=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$A=\frac{a}{b^2+c^2+1}+\frac{b}{c^2+a^2+1}+\frac{c}{a^2+b^2+1}$$

Lời giải:

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có:

$$\sum_{cyc} a(b^2+c^2+1)].A\geq (a+b+c)^2=9$$

Suy ra

$$A\geq \frac{9}{a(b^2+c^2+1)}$$

Đặt

$$P=a(b^2+c^2+1)=3+ab(a+b)$$

Giả sử $a \geq b, a \geq c$ suy ra

$$\begin{aligned} & ab(a+b) \leq ab(a+b) + 2abc + ca(a+c) \\ & = ab(a+b+c) + ac(a+b+c) \\ & = 3a(b+c) \leq \frac{3}{4}(a+b+c)^2 \\ & = \frac{27}{4} \end{aligned}$$

Bất đẳng thức thức cuối cùng đúng theo AM-GM.
Từ đây suy ra

$$P \leq \frac{39}{4}$$

Vậy

$$A \geq \frac{12}{13}$$

Đẳng thức khi $a = b = \frac{3}{2}$, $c = 0$ và các hoán vị. □

Bài 344. *Cho $-1 \leq a \leq \frac{5}{4}$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức*

$$P = \frac{\sqrt{5-4a} - \sqrt{1+a}}{\sqrt{5-4a} + 2\sqrt{1+a} + 6}$$

Lời giải:

Ta chứng tỏ rằng giá trị lớn nhất và nhỏ nhất biểu thức bằng $\frac{1}{3}$ và $-\frac{1}{6}$. Thật vậy ta có

$$P - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.\frac{2\sqrt{5-4a} - 5\sqrt{1+a} - 6}{\sqrt{5-4a} + 2\sqrt{1+a} + 6} \leq 0$$

Đúng vì hàm $6 - 2\sqrt{5-4a} + 5\sqrt{1+a}$ đơn điệu do có đạo hàm bằng $\frac{4}{\sqrt{5-4a}} + \frac{5}{2\sqrt{1+a}} \geq 0$. Giá trị lớn nhất này đạt được khi cho $a = -1$ Ta có tiếp

$$P + \frac{1}{6} = \frac{1}{6}.\frac{7\sqrt{5-4a} - 4\sqrt{1+a} - 6}{\sqrt{5-4a} + 2\sqrt{1+a} + 6} \geq 0$$

Đúng do hàm ở tử số đơn điệu. Giá trị này đạt được khi cho $x = \frac{5}{4}$. □

Bài 345. *Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x + y + z = 1$.*
Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{2xy}{z+xy} + \frac{3yz}{x+yz} + \frac{2zx}{y+zx}$$

Lời giải:

Ta sẽ chứng minh $P \geq \frac{5}{3}$ bằng phương pháp đồng bậc.

Đặt

$$\begin{aligned} T &= \frac{2xy}{(z+x)(z+y)} + \frac{3yz}{(x+y)(x+z)} + \frac{2zx}{(y+z)(y+x)} \\ &= \frac{2x(x+y)+3yz(y+z)+2zx(x+z)}{(x+y)(y+z)(z+x)} \end{aligned}$$

Xét

$$\begin{aligned} T-\frac{5}{3} &= \frac{6xy(x+y)+9yz(y+z)+6zx(x+z)-5\left(xy(x+y)+yz(y+z)+zx(x+z)+2xyz\right)}{3(x+y)(y+z)(z+x)} \\ &= \frac{TS}{MS} \end{aligned}$$

Với

$$\begin{aligned} TS &= xy(x+y)+4yz(y+z)+zx(z+x)-10xyz \\ &= x(y^2+xy+z^2+zx)+4yz(y+z)-10xyz \\ &\geq 2x^2\sqrt{yz}+8yx\sqrt{yz}-8xyz = 2\sqrt{yz}(x-2\sqrt{yz})^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=\frac{1}{2}$; $y=\frac{1}{4}$; $z=\frac{1}{4}$. $\square$

Bài 346. *Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng:*

$$1+\frac{3}{a+b+c} \geq \frac{6}{ab+bc+ca}$$

Lời giải:

Đặt

$$x=\frac{1}{a}; y=\frac{1}{b}; z=\frac{1}{c}$$

bất đẳng thức được viết lại dưới dạng

$$1+\frac{3}{xy+yz+xz} \geq \frac{6}{x+y+z}$$

Áp dụng bất đẳng thức quen thuộc

$$(x+y+z)^2 \geq 3(xy+yz+zx)$$

ta có

$$1+\frac{3}{xy+yz+zx} \geq 1+\frac{9}{(x+y+z)^2}$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho ta

$$1+\frac{9}{(x+y+z)^2} \geq \frac{6}{x+y+z}$$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài 347. *Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn $a^2+b^2+c^2 \leq \frac{3}{4}$. Chứng minh rằng*

$$(a+b)(b+c)(c+a)+\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3} \geq 25$$

Lời giải:

Ta có:

$$\frac{3}{4} \geq a^2+b^2+c^2 \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} \Rightarrow abc \leq \frac{1}{8}$$

Mà sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$\begin{aligned} &(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc \\ &\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3} \geq \frac{3}{abc} \end{aligned}$$

Từ đó ta có

$$P = (a+b)(b+c)(c+a) + \frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} \geq 8abc + \frac{1}{8abc} + \frac{23}{8abc} \geq 2 + 23 = 25$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = \frac{1}{2}$.

Bài 348. *Trong tam giác ABC có các cạnh a, b, c. Chứng minh rằng :*
$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq a(b^2+c^2) + b(a^2+c^2) + c(a^2+b^2)$$

Lời giải:

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) \leq abc$$

Theo bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$(a+b-c)(b+c-a) \leq \left(\frac{a+b-c+b+c-a}{2}\right)^2 = b^2$$

Xây dựng các bất đẳng thức tương tự:

$$(b+c-a)(c+a-b) \leq c^2$$
$$(a+b-c)(c+a-b) \leq a^2$$

Nhân 3 bất đẳng thức trên ta sẽ có điều phải chứng minh.

Bài 349. *Cho các số $a, b, c, \in [0;1]$. Chứng minh rằng :*
$$a(1-b) + b(1-c) + c(1-a) \leq 1$$

Lời giải:

Do $a, b, c, \in [0;1]$ nên ta có

$$0 \leq (1-a)(1-b)(1-c)$$
$$\Leftrightarrow 0 \leq 1 - (a+b+c) + ab + bc + ca - abc \leq 1 - (a+b+c) + ab + bc + ca$$
$$\Leftrightarrow (1-b) + b(1-c) + c(1-a) \leq 1$$

Dấu bằng xảy ra khi $a = b = 0, c = 1$ và các hoán vị.

Bài 350. *Cho $a, b, c > 0$ và $ab + bc + ca = 1$. Chứnh minh rằng*
$$\sqrt[3]{\frac{1}{a} + 6b} + \sqrt[3]{\frac{1}{b} + 6c} + \sqrt[3]{\frac{1}{c} + 6a} \leq \frac{1}{abc}$$

Lời giải:

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM:

$$\sqrt[3]{(1+6ab).\frac{\sqrt{3}}{a}.3} \leq \frac{4 + 6ab + \frac{\sqrt{3}}{a}}{3}$$

Xây dựng các bất đẳng thức tương tự rồi cộng lại ta được :

$$VT \leq \frac{12 + 6(ab+bc+ca) + \sqrt{3}\frac{ab+bc+ca}{abc}}{3\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} + \frac{1}{3abc} \leq \frac{2}{3abc} + \frac{1}{3abc} = \frac{1}{abc}$$

$$\text{Vì } (abc \le \frac{1}{3\sqrt{3}})$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Bài 351. *Với số thực dương x, hãy tìm giá trị nhỏ nhất của*
$$T = x + \frac{11}{2x} + \sqrt{4\left(1 + \frac{7}{x^2}\right)}$$

Lời giải:

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$T = x + \frac{11}{2x} + \sqrt{\frac{\left(3 + \frac{7}{x}\right)^2 + 7\left(1 - \frac{3}{x}\right)^2}{4}} \ge x + \frac{11}{2x} + \frac{3}{2} + \frac{7}{2x} = \frac{3}{2} + x + \frac{9}{x} \ge \frac{3}{2} + 2\sqrt{x.\frac{9}{x}} = \frac{15}{2}$$

Đẳng thức xảy ra khi $x = 3$.

Vậy $minP = \dfrac{15}{2}$.

Bài 352. *Cho $x, y, z \in [0; 2]$ và $x + y + z$. Tìm giá trị lớn nhất của*
$$A = x^2 + y^2 + z^2$$

Lời giải:

Do $x \in [0; 2]$ ta có :

$$(2 - x)(2 - y)(2 - z) \ge 0 \Leftrightarrow -4 + 2(xy + yz + zx) - xyz \ge 0$$

Do đó

$$A = 9 - 2(xy + yz + zx) \le 5 - xyz \le 5$$

Đẳng thức xảy ra khi $x = 2, y = 1, z = 0$ và các hoán vị.

Vậy $maxA = 5$.

Bài 353. *Gọi a, b, c là độ dài 3 cạnh của 1 tam giác có chu vi $a + b + c = 2$. Chứng minh rằng*
$$\frac{52}{27} \le a^2 + b^2 + c^2 + 2abc < 2$$

Lời giải:

Vì $a + b + c = 2$ nên độ dài mỗi cạnh nhỏ hơn 1.

Sử dụng AM-GM cho ba số dương: $1 - a, 1 - b, 1 - c$ ta được:

$$\begin{aligned}
&3 - (a + b + c) \ge 3\sqrt[3]{(1 - a)(1 - b)(1 - c)} > 0\\
&\Leftrightarrow \frac{1}{27} \ge (1 - a)(1 - b)(1 - c) > 0\\
&\Leftrightarrow \frac{28}{27} \ge ab + bc + ca - abc > 1\\
&\Leftrightarrow 2 < 2ab + 2bc + 2ca - 2abc \le \frac{56}{27}\\
&\Leftrightarrow 2 < (a + b + c)^2 - (a^2 + b^2 + c^2 + 2abc) \le \frac{56}{27}\\
&\Leftrightarrow \frac{52}{27} \le a^2 + b^2 + c^2 + 2abc < 2
\end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = \dfrac{2}{3}$.

Bài 354. *Cho x, y là các số thực. Tìm giá trị nhỏ nhất của*
$$A=\sqrt{(x-1)^2+y^2}+\sqrt{(x+1)^2+y^2}+|y-2|$$

Lời giải:

Sử dụng bất đẳng thức véc tơ và bất đẳng thức về trị tuyệt đối, ta có:

$$\begin{aligned}
A&=\sqrt{(x-1)^2+y^2}+\sqrt{(x+1)^2+y^2}+|y-2|\\
&=\sqrt{\left[(x-1)^2+y^2\right]\left[\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]}+\sqrt{\left[(x+1)^2+y^2\right]\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]}+|2-y|\\
&\geq\left|\frac{-\sqrt{3}}{2}(x-1)+\frac{y}{2}\right|+\left|\frac{\sqrt{3}}{2}(x+1)+\frac{y}{2}\right|+|2-y|\\
&\geq\left|\frac{-\sqrt{3}}{2}(x-1)+\frac{y}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}(x+1)+\frac{y}{2}+2-y\right|\\
&=2+\sqrt{3}
\end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi $x=0, y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Vậy $minA=2+\sqrt{3}$.

Bài 355. *Cho các số thực x, y, z thỏa mãn: $x^2+y^2+z^2=2$. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức:*
$$P=x^3+y^3+z^3-3xyz$$

Lời giải:

Sử dụng hằng đẳng thức quen thuộc có:

$$P=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$$

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có:

$$\begin{aligned}
P^2&=(x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)\\
&\leq\left[\frac{3(x^2+y^2+z^2)}{3}\right]^3=8
\end{aligned}$$

Do đó ta có:
$$-2\sqrt{2}\leq P\leq 2\sqrt{2}$$

Từ đó ta có kết luận
$$\max P=2\sqrt{2}$$
$$minP=-2\sqrt{2}$$

Bài 356. *Cho $a, b, c>0$ thoả mãn $a+b+c=1$.Chứng minh rằng:*
$$\sqrt{\frac{ab}{c}+1}+\sqrt{\frac{bc}{a}+1}+\sqrt{\frac{ca}{b}+1}\geq 2(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})$$

Lời giải:

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có :

$$(c+b)(a+c)\geq(\sqrt{ac}+\sqrt{bc})^2$$

Do đó:
$$\sqrt{\frac{ab}{c}+1}=\sqrt{\frac{ab+c(a+b+c)}{c}}=\sqrt{\frac{(c+b)(c+a)}{c}}\geq\frac{\sqrt{ca}+\sqrt{cb}}{\sqrt{c}}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$$
Tạo các bất đẳng thức tương tự cộng vào ta sẽ có điều phải chứng minh.
Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=\dfrac{1}{3}$.

Bài 357. *Cho $x,y\neq 0$ thoả mãn điều kiện $xy(x+y)=x^2-xy+y^2$. Tìm giá trị lớn nhất của:*
$$P=\frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}$$

Lời giải:
Đặt $a=\dfrac{1}{x},b=\dfrac{1}{y}$
Khi đó giả thiết $xy(x+y)=x^2-xy+y^2$ được viết lại là $a+b=a^2-ab+b^2$ và
$$P=a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)=(a+b)^2$$
Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta có
$$\begin{aligned}&a+b=a^2-ab+b^2=(a+b)^2-3ab\geq(a+b)^2-3.\frac{(a+b)^2}{4}\\&\Rightarrow(a+b)^2-4(a+b)\leq 0\Leftrightarrow 0\leq(a+b)\leq 4\\&\Rightarrow P=(a+b)^2\leq 16\end{aligned}$$
Vậy $maxP=16$ khi $x=y=\dfrac{1}{2}$.

Bài 358. *Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng :*
$$\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{(2b+c+a)^2}{2b^2+(c+a)^2}+\frac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2}\leq 8$$

Lời giải:
Để ý rằng
$$3-\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}=\frac{2(b+c-a)^2}{2a^2+(b+c)^2}$$
Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương
$$\frac{2(b+c-a)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{2(c+a-b)^2}{2b^2+(c+a)^2}+\frac{2(a+b-c)^2}{2c^2+(a+b)^2}\geq 1$$
Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có
$$\frac{2(b+c-a)^2}{2a^2+(b+c)^2}\geq\frac{2(b+c-a)^2}{2a^2+2(b^2+c^2)}=\frac{(b+c-a)^2}{a^2+b^2+c^2}$$
Thiết lập 2 biểu thức tương tự, sau đó cộng vế theo vế, ta được
$$LHS\geq\frac{(b+c-a)^2+(c+a-b)^2+(a+b-c)^2}{a^2+b^2+c^2}$$
Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta thấy rằng
$$\begin{aligned}&\frac{(b+c-a)^2}{2}+\frac{(c+a-b)^2}{2}\geq\frac{(b+c-a+c+a-b)^2}{2+2}=c^2\\&\frac{(c+a-b)^2}{2}+\frac{(a+b-c)^2}{2}\geq a^2\\&\frac{(a+b-c)^2}{2}+\frac{(b+c-a)^2}{2}\geq b^2\end{aligned}$$

Cộng vế theo vế các bất đẳng thức trên, ta được:

$$(b+c-a)^2+(c+a-b)^2+(a+b-c)^2 \geq a^2+b^2+c^2$$

Từ đó ta có

$$\frac{2(b+c-a)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{2(c+a-b)^2}{2b^2+(c+a)^2}+\frac{2(a+b-c)^2}{2c^2+(a+b)^2} \geq 1$$

Bài toán được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Bài 359. *Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng :*

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}$$

Lời giải:

Đặt $x=\dfrac{1}{a}, y=\dfrac{1}{b}, z=\dfrac{1}{c}$ thì $xyz=1$. Khi đó

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}=\frac{xyz.x^2}{y+z}+\frac{xyz.y^2}{z+x}+\frac{xyz.z^2}{x+y}=\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}=P$$

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có:

$$\frac{x^2}{y+z}+\frac{y+z}{4} \geq 2\sqrt{\frac{x^2}{4}}=x$$

Tương tự cho 2 biểu thức còn lại, cộng vế với vế ta đc:

$$P+\frac{x+y+z}{2} \geq x+y+z$$
$$\Rightarrow P \geq \frac{x+y+z}{2} \geq \frac{3\sqrt[3]{xyz}}{2}=\frac{3}{2}$$

Đẳng thức xảy ra khi: $a=b=c=1$.

Bài 360. *Tìm giá trị nhỏ nhất của P với $x+y+z=1$ và $x, y, z \geq 0$*

$$P=2(x^2+y^2+z^2)-4xyz-9x+2011$$

Lời giải:

Cách 1.

$$\begin{aligned} P &= 2(x^2+y^2+z^2)-4xyz-9x+2011 \\ &\geq 2x^2+(y+z)^2-x(y+z)^2-9x+2011 \\ &= 2x^2+(y+z)^3-9x+2011 \\ &= 2(x-1)^2+(y+z)^3-5(x-1)+2004 \geq 2004. \end{aligned}$$

Vậy $minP=2004$ khi $x=1; y=z=0$.

Cách 2.

$$\begin{aligned} P &= 2(x^2+y^2+z^2)-4xyz-9x+2011 \\ &\geq 2x^2+(y+z)^2-x(y+z)^2-9x+2011 \\ &= 2x^2+(1-x)^3-9x+2011 \\ &= -x^3+5x^2-12x+2012=f(x), (x \in [0;1]) \end{aligned}$$

Ta có:

$$f'(x) = -3x^2 + 10x - 12 < 0,\ x \in [0;1]$$

$$\Rightarrow f(x) \geq f(1) = 2004$$

Vậy $minP = 2004$ khi $x = 1; y = z = 0$.

Bài 361. *Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng :*

$$\frac{a}{a^2+2} + \frac{b}{b^2+2} + \frac{c}{c^2+2} \leq 1$$

Lời giải:

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\frac{a}{a^2+1+1} + \frac{b}{b^2+1+1} + \frac{c}{c^2+1+1} \leq \frac{a}{2a+1} + \frac{b}{2b+1} + \frac{c}{2c+1}$$

Ta sẽ chứng minh

$$\frac{a}{2a+1} + \frac{b}{2b+1} + \frac{c}{2c+1} \leq 1$$

Thật vậy sau khi quy đồng và rút gọn, với chú ý $abc = 1$ ta có

$$2(a+b+c) \geq 6$$

Bất đẳng thức đúng theo AM-GM, do đó bài toán chứng minh xong.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Bài 362. *Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Chứng minh rằng :*

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq \frac{9}{a+b+c}$$

Lời giải:

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq \frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ac}$$

Ta sẽ chứng minh

$$\frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ac} \geq \frac{9}{a+b+c} \Leftrightarrow \frac{3}{ab+bc+ca} + 2 \geq \frac{9}{a+b+c}$$

Đặt $a + b + c = t$ thì ta cần chứng minh

$$\frac{6}{t^2-3} + 2 \geq \frac{9}{t} \Leftrightarrow (t+3)(t-3)^2 \geq 0$$

Bất đẳng thức cuối luôn đúng, do đó bài toán được chứng minh xong.

Đẳng thức ra khi $a = b = c = 1$.

Bài 363. *Cho $a, b, c \geq 0$ và $min\left\{a+b; b+c; c+a\right\} > 0$ thoả mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 2(ab + bc + ca)$. Chứng minh rằng*

$$\sqrt{\frac{ab}{a^2+b^2}} + \sqrt{\frac{bc}{b^2+c^2}} + \sqrt{\frac{ca}{c^2+a^2}} \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Lời giải:

Ta có:

$$\sqrt{\frac{ab}{a^2+b^2}}=\frac{\sqrt{ab(a^2+b^2)}}{a^2+b^2}\geq\frac{\sqrt{2}ab}{a^2+b^2}$$

Do đó ta chỉ cần chứng minh:

$$\sum_{cyc}\frac{2ab}{a^2+b^2}\geq 1\Leftrightarrow 3+\sum_{cyc}\frac{2ab}{a^2+b^2}\geq 4\Leftrightarrow\sum_{cyc}\frac{(a+b)^2}{a^2+b^2}\geq 4$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có

$$\sum_{cyc}\frac{(a+b)^2}{a^2+b^2}\geq\frac{4(a+b+c)^2}{2(a^2+b^2+c^2}=2+\frac{4(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2}=4$$

Bài toán được chứng minh xong.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=0,b=c$ và các hoán vị.

Bài 364. *Cho x,y là hai số thực dương thoả mãn điều kiện $x^2+y^2=1$.*
Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=(1+x^2)\left(1+\frac{1}{y}\right)^2+(1+y)^2\left(1+\frac{1}{x}\right)^2$$

Lời giải:

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz và bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\begin{aligned}
2P&=2\left[(1+x)^2\left(1+\frac{1}{y}\right)^2+(1+y)^2\left(1+\frac{1}{x}\right)^2\right]\\
&\geq\left[(1+x)\left(1+\frac{1}{y}\right)+(1+y)\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]^2\\
&=\left(1+\frac{1}{y}+x+\frac{x}{y}+1+\frac{1}{x}+y+\frac{y}{x}\right)^2\\
&=\left[\frac{x\left(y^2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)+y\left(x^2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)}{xy}+\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+2\right]^2\\
&\geq\left[\frac{x.3\sqrt[3]{\frac{y^2}{4}}+y.3\sqrt[3]{\frac{x^2}{4}}}{xy}+\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+2\right]^2\\
&\geq\left(\frac{2.3.\sqrt{xy\sqrt[3]{\frac{y^2}{4}.\frac{x^2}{4}}}}{xy}+2+2\right)^2=\left(\frac{6}{\sqrt[6]{16}}.\frac{1}{\sqrt[6]{xy}}+2\right)^2\\
&\geq\left(\frac{6}{\sqrt[6]{16}}.\frac{1}{\sqrt[6]{\frac{1}{2}}}+4\right)^2\\
&=2(17+12\sqrt{2}).
\end{aligned}$$

Vậy $P \ge 17 + 12\sqrt{2}$, đẳng thức đạt được khi $x = y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Bài 365. *Giả sử $a, b, c \ge 0$ và $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Chứng minh rằng :*
$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + a + b + c \ge 4\sqrt{3}$$

Lời giải:

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$1 = a^2 + b^2 + c^2 \ge 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} \Rightarrow abc \le \frac{1}{3\sqrt{3}}$$

Do đó
$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \ge \frac{3}{\sqrt[3]{abc}} \ge \frac{3}{\sqrt[3]{\frac{1}{3\sqrt{3}}}} = 3\sqrt{3}$$
$$\Rightarrow 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \ge 6\sqrt{3}\ (1)$$

Mặt khác cũng theo AM-GM thì

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + 3a + 3b + 3c \ge \frac{3}{\sqrt[3]{abc}} + 3.3\sqrt[3]{abc} = 3\left(\frac{1}{\sqrt[3]{abc}} + 3\sqrt[3]{abc}\right) \ge 6\sqrt{3}$$
$$\Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + 3a + 3b + 3c \ge 6\sqrt{3}\ (2)$$

Cộng vế với vế (1) và (2) ta có điều phải chứng minh.

Bài 366. *Cho các số thực không âm thoả mãn $x + y + z = 1$. Chứng minh rằng*
$$\frac{x^2+1}{y^2+1} + \frac{y^2+1}{z^2+1} + \frac{z^2+1}{x^2+1} \le \frac{7}{2}$$

Lời giải:

Giả sử $a = max\{a, b, c\}$. Ta sẽ chứng minh rằng

$$\frac{b^2+1}{c^2+1} + \frac{c^2+1}{a^2+1} \le (b+c)^2 + 1 + \frac{1}{a^2+1}$$

Thật vậy. bất đẳng thức đã trên tương đương với

$$\frac{c^2}{a^2+1} \le \frac{(b+c)^2c^2 + (b+c)^2 + c^2 - b^2}{c^2+1} \Leftrightarrow \frac{c^2}{a^2+1} \le \frac{(b+c)^2c^2 + 2bc + 2c^2}{c^2+1}$$

Luôn đúng do $a = max\{a, b, c\}$.

Do đó:
$$\frac{a^2+1}{b^2+1} + \frac{b^2+1}{c^2+1} + \frac{c^2+1}{a^2+1} \le a^2 + (b+c)^2 + 1 + \frac{1}{a^2+1} + 2$$

Như vậy ta sẽ chứng minh:

$$a^2 + (b+c)^2 + \frac{1}{a^2+1} \le \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{(1-a)(1-3a-4a^3)}{2(1+a^2)} \le 0$$

Bất đẳng thức cuối luôn đúng do
$$1 \ge a \ge \frac{1}{3}$$

Bài toán được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi $a = 1; b = c = 0$.

Bài 367. *Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=1$. Chứng minh rằng:*
$$a^2\sqrt{1-bc}+b^2\sqrt{1-ca}+c^2\sqrt{1-ab}\geq\sqrt{\frac{2}{3}}$$

Lời giải:

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương tương đương :

$$a^2\sqrt{2-2bc}+b^2\sqrt{2-2ca}+c^2\sqrt{2-2ab}\geq\frac{2}{\sqrt{3}}$$

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$$a^2\sqrt{2-2bc}\geq a^2\sqrt{2-(b^2+c^2)}=a^2\sqrt{1+a^2}=\sqrt{a^4+a^6}$$

Tương tự

$$b^2\sqrt{2-2ca}\geq\sqrt{b^4+b^6}$$
$$c^2\sqrt{2-2ab}\geq\sqrt{c^4+c^6}$$

Từ đó ta có

$$\begin{aligned}LHS&\geq\sqrt{a^4+a^6}+\sqrt{b^4+b^6}+\sqrt{c^4+c^6}\\&\geq\sqrt{(a^2+b^2+c^2)^2+(a^3+b^3+c^3)^2}\\&=\sqrt{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}+(a^3+b^3+c^3)^2}\geq\sqrt{\frac{2}{3}+2\frac{(a^3+b^3+c^3)}{\sqrt{3}}}\quad(1)\end{aligned}$$

Mặt khác theo Cauchy-Schwarz ta có

$$(a^3+b^3+c^3)(a+b+c)\geq(a^2+b^2+c^2)^2$$

Và

$$(a+b+c)\leq\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}$$

Nên

$$(a^3+b^3+c^3)\geq\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\quad(2)$$

Từ (1) và (2) ta có

$$a^2\sqrt{1-bc}+b^2\sqrt{1-ca}+c^2\sqrt{1-ab}\geq\sqrt{\frac{2}{3}}$$

Bài toán được chứng minh xong.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Bài 368. *Cho $a, b, c>0$ thoả $abc=8$. Tìm giá trị lớn nhất của*
$$P=\frac{1}{2a+b+6}+\frac{1}{2b+c+6}+\frac{1}{2c+a+6}$$

Lời giải:

Đặt $a=2x^2, b=2y^2, c=2z^2\Leftrightarrow xyz=1$

$$\Rightarrow P=\frac{1}{2}.\sum\frac{1}{2x^2+y^2+3}$$

Mặt khác

$$\sum(2x^2+y^2+3)=\sum[(x^2+y^2)+(x^2+1)+2]\geq\sum2(xy+x+1)$$

$$\Rightarrow P \le \frac{1}{4}\sum \frac{1}{xy+x+1}$$

Ta có : $\sum \dfrac{1}{xy+x+1} = 1.$

Thật vậy, dựa vào tích $xyz = 1$ ta có :

$$\sum \frac{1}{xy+x+1} = \frac{1}{x+xy+1} + \frac{1}{y+\frac{1}{x}+1} + \frac{xyz}{zx+z+xyz} = \frac{1}{x+xy+1} + \frac{x}{xy+x+1} + \frac{xy}{xy+x+1} = 1$$

Nên ta có $P \le \dfrac{1}{4}\sum \dfrac{1}{xy+x+1} \le \dfrac{1}{4}$

Vậy giá trị lớn nhất $P_{max} = \dfrac{1}{4}$ đạt được khi $a = b = c = 2$.

Bài 369. *Cho các số thực a, b, c thỏa mãn: $ab + bc + ca = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :*

$$P = 40a^2 + 27b^2 + 14c^2$$

Lời giải:

Theo AM-GM ta có

$$16a^2 + 9b^2 \ge 24ab$$

$$24a^2 + 6c^2 \ge 24ac$$

$$18b^2 + 8c^2 \ge 24bc$$

Cộng vế theo vế của các bất đẳng thức cùng chiều ta có :

$$P \ge 24(ab + bc + ca) = 24$$

Vậy $minP = 24$.

Bài 370. *Cho a, b, c là các số thực dương và thỏa mãn điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$P = \left(3a + \frac{2}{b+c}\right)^2 + \left(3b + \frac{2}{c+a}\right)^2 + \left(3c + \frac{2}{a+b}\right)^2$$

Lời giải:

Ta có:

$$P = \left(3a + \frac{2}{b+c}\right)^2 + \left(3b + \frac{2}{c+a}\right)^2 + \left(3c + \frac{2}{a+b}\right)^2$$
$$= 9(a^2+b^2+c^2) + 12\left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}\right) + 4\left(\frac{1}{(a+b)^2} + \frac{1}{(b+c)^2} + \frac{1}{(c+a)^2}\right)$$

Sử dụng bất đẳng thức Nesbit và bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có:

$$P \ge 27 + 12.\frac{3}{2} + \frac{4}{3}\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}\right)^2$$
$$\ge 45 + \frac{4}{3}.\frac{9^2}{2^2(a+b+c)^2}$$
$$\ge 45 + \frac{27}{3(a^2+b^2+c^2)} = 48$$

Dấu bằng xảy ra khi $a = b = c = 1$.

Bài 371. *Cho a, b, c là các số thực dương và thỏa mãn điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*
$$P = \left(6a^2 - 6a + 5 + \frac{2}{ab + ac}\right)^3 + \left(6b^2 - 6b + 5 + \frac{2}{bc + ba}\right)^3 + \left(6c^2 - 6c + 5 + \frac{2}{ca + cb}\right)^3$$

Lời giải:

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$$\begin{aligned}
6a^2 - 6a + 5 + \frac{2}{ab + ac} &= 5(a^2 + 1) - 6a + a^2 + \frac{2}{ab + ac} \\
&\geq 4a + a^2 + \frac{2}{ab + ac} = 2a + 2a + \left(a^2 + \frac{2}{ab + ac}\right) \\
&\geq 3\sqrt[3]{2a.2a.\left(a^2 + \frac{2}{ab + ac}\right)}
\end{aligned}$$
$$\Rightarrow \left(6a^2 - 6a + 5 + \frac{2}{ab + ac}\right)^3 \geq 27\left(4a^4 + \frac{8a}{b + c}\right)$$

Tương tự

$$\left(6b^2 - 6b + 5 + \frac{2}{bc + ba}\right)^3 \geq 27\left(4b^4 + \frac{8b}{c + a}\right)$$
$$\left(6c^2 - 6c + 5 + \frac{2}{ca + cb}\right)^3 \geq 27\left(4c^4 + \frac{8c}{a + b}\right)$$

Từ đó ta có:

$$\begin{aligned}
&P \geq 108\left(a^4 + b^4 + c^4\right) + 216\left(\frac{a}{b + c} + \frac{b}{c + a} + \frac{c}{a + b}\right) \\
&\geq 108\frac{\left(a^2 + b^2 + c^2\right)^2}{3} + 216.\frac{3}{2} \\
&= 648
\end{aligned}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 648$. Đạt được khi $a = b = c = 1$

Bài 372. *Cho x, y, z là các số thực dương và thỏa mãn điều kiện $x + y + z = 3xyz$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:*
$$P = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)^2\left[\frac{x^4}{(xy + 1)(xz + 1)} + \frac{y^4}{(yz + 1)(yx + 1)} + \frac{z^4}{(zx + 1)(zy + 1)}\right]$$

Lời giải:

Cách 1.

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$P \geq \frac{9}{\sqrt[3]{x^2y^2z^2}}\left[\frac{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^2}{xyz(x + y + z) + 3 + 2(xy + z + zx)}\right] \geq \frac{27(x^2 + y^2 + z^2)}{xyz(x + y + z) + 3 + 2(xy + zy + zx)}$$

Ta sẽ chứng minh

$$\frac{27(x^2 + y^2 + z^2)}{xyz(x + y + z) + 3 + 2(xy + zy + zx)} \geq \frac{27}{4}$$
$$\Leftrightarrow 4(x^2 + y^2 + z^2) \geq xyz(x + y + z) + 3 + 2(xy + zy + zx)$$

Lại có:

$$2(x^2 + y^2 + z^2) \geq 2(xy + yz + zx)$$
$$2(x^2 + y^2 + x^2) \geq \frac{2}{3}(x + y + z)^2 = 2xyz(x + y + z)$$

Nên công việc trở về chứng minh

$$xyz(x+y+z) \geq 3$$

Thật vậy dựa vào điều kiện ta có $xyz \geq 1$ nên bất đẳng thức trên đúng theo AM-GM .
Đẳng thức xảy ra khi $x = y = z = 1$. Vậy $minP = \dfrac{27}{4}$.

Cách 2.

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz và kết hợp giả thiết, ta có

$$\begin{aligned}
P &\geq \frac{81}{(x+y+z)^2}\left[\frac{x^4}{(xy+1)(xz+1)} + \frac{y^4}{(yz+1)(yx+1)} + \frac{z^4}{(zx+1)(zy+1)}\right] \\
&= \frac{9}{x^2y^2z^2}\left[\frac{x^4}{(xy+1)(xz+1)} + \frac{y^4}{(yz+1)(yx+1)} + \frac{z^4}{(zx+1)(zy+1)}\right] \\
&= 9\left[\frac{x^2}{y^2z^2(xy+1)(xz+1)} + \frac{y^2}{z^2x^2(yz+1)(yx+1)} + \frac{z^2}{x^2y^2(zx+1)(zy+1)}\right] \\
&= 9\left[\frac{xy.xz}{y^3z^3(xy+1)(xz+1)} + \frac{yz.yx}{z^3x^3(yz+1)(yx+1)} + \frac{zx.zy}{x^3y^3(zx+1)(zy+1)}\right]
\end{aligned}$$

Đặt $a = \dfrac{1}{yz}, b = \dfrac{1}{zx}, c = \dfrac{1}{xy}$

Từ điều kiện ta có $a+b+c=3$. Khi đó P được viết lại là

$$P = 9\left[\frac{a^3}{(1+b)(1+c)} + \frac{b^3}{(1+c)(1+a)} + \frac{c^3}{(1+a)(1+b)}\right]$$

Áp dụng AM-GM :

$$\begin{aligned}
\frac{a^3}{(1+b)(1+c)} + \frac{1+b}{8} + \frac{1+c}{8} \geq \frac{3}{4}a \\
\frac{b^3}{(1+c)(1+a)} + \frac{1+c}{8} + \frac{1+a}{8} \geq \frac{3}{4}b \\
\frac{c^3}{(1+a)(1+b)} + \frac{1+a}{8} + \frac{1+b}{8} \geq \frac{3}{4}c
\end{aligned}$$

Từ đó ta có

$$\begin{aligned}
&\frac{a^3}{(1+b)(1+c)} + \frac{b^3}{(1+c)(1+a)} + \frac{c^3}{(1+a)(1+b)} + \frac{3}{4} + \frac{1}{4}(a+b+c) \geq \frac{3}{4}(a+b+c) \\
&\Rightarrow \frac{a^3}{(1+b)(1+c)} + \frac{b^3}{(1+c)(1+a)} + \frac{c^3}{(1+a)(1+b)} \geq \frac{3}{4}
\end{aligned}$$

Vậy $P \geq \dfrac{27}{4}$

Giá trị nhỏ nhất của $P = \dfrac{27}{4}$ đạt được khi $a = b = c = 1$.

Bài 373. *Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab+bc+ca=3$. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{1+a^2(b+c)} + \frac{1}{1+b^2(c+a)} + \frac{1}{1+c^2(a+b)} \leq \frac{1}{abc}$$

Lời giải:

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$ab+bc+ca = 3 \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} \Leftrightarrow abc \leq 1$$

Từ đó ta suy ra

$$1 + a^2(b+c) \geq a(ab+bc+ca) = 3a$$

Tương tự 2 biểu thức còn lại, ta có :

$$\sum_{cyc} \frac{1}{1+a^2(b+c)} \le \sum_{cyc} \frac{1}{3a} = \frac{1}{3}\left(\frac{ab+bc+ca}{abc}\right) = \frac{1}{abc}$$

Bài toán được chứng minh xong.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Bài 374. *Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng*

$$a\sqrt[3]{1+b-c} + b\sqrt[3]{1+c-a} + c\sqrt[3]{1+a-b} \le 1.$$

Lời giải:

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$\sqrt{1.1(1+b-c)} \le \frac{3+b-c}{3}$$

Từ đó ta có:

$$a\sqrt[3]{1+b-c} + b\sqrt[3]{1+c-a} + c\sqrt[3]{1+a-b} \le \sum_{cyc}\left(a + \frac{ab-ac}{3}\right) = 1$$

Bài toán được chứng minh xong.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{3}$.

Bài 375. *Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Chứng minh rằng:*

$$\frac{x^2}{1+yz} + \frac{y^2}{1+zx} + \frac{z^2}{1+xy} \ge \frac{3}{2}$$

Lời giải:

Cách 1.

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có:

$$\frac{x^2}{1+yz} + \frac{y^2}{1+zx} + \frac{z^2}{1+xy} \ge \frac{(x^2+y^2+z^2)^2}{3+xyz(x+y+z)} \ge \frac{9}{3+\dfrac{(xy+yz+zx)^2}{3}} \ge \frac{3}{2}$$

Bài toán được chứng minh xong.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 1$

Cách 2.

Ta có

$$\begin{aligned}
\frac{x^2}{1+yz} + \frac{y^2}{1+zx} + \frac{z^2}{1+xy} &= x^2+y^2+z^2 - \left(\frac{x^2yz}{1+yz} + \frac{y^2zx}{1+zx} + \frac{z^2xy}{1+xy}\right) \\
&\ge 3 - \frac{1}{4}\left(x^2(1+yz) + y^2(1+zx) + z^2(1+xy)\right) \\
&\ge \frac{9}{4} - \frac{1}{12}(xy+yz+zx)^2 \\
&\ge \frac{9}{4} - \frac{1}{12}\left(x^2+y^2+z^2\right)^2 \\
&= \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

Bài toán được chứng minh xong.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 1$.

Bài 376. *Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab + bc + ca = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của*

$$P = a^2 + 2b^2 + 5c^2$$

Lời giải:

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$$P = \frac{2}{3}a^2 + \frac{3}{2}b^2 + \frac{1}{2}b^2 + 2c^2 + 3c^2 + \frac{1}{3}a^2 \geq 2(ab + bc + ca) = 2.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $(a; b; c) = \left(\frac{3}{\sqrt{11}}; \frac{2}{\sqrt{11}}; \frac{1}{\sqrt{11}}\right)$.

Vậy $minP = 2$.

Bài 377. *Cho a, b, c là các số thực dương thỏa $a^2 + b^2 + c^2 \leq abc$. Tìm giá trị lớn nhất của*

$$T = \sqrt{\frac{a}{6a^2 + 9}} + \sqrt{\frac{b}{6b^2 + 9}} + \sqrt{\frac{c}{6b^2 + 9}}$$

Lời giải:

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$T^2 \leq 3\sum \frac{a}{6a^2 + 9} \leq \frac{3}{7}\sum \frac{a}{\sqrt[7]{9a^{12}}} = \frac{3}{7}\sum \frac{1}{\sqrt[7]{9a^5}} \leq \frac{3}{49}\sum \left(\frac{2}{3} + \frac{5}{a}\right)$$

Mà

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{ab + bc + ca}{abc} \leq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{abc} \leq 1$$

Từ đó ta suy ra $T \leq \sqrt{\frac{3}{7}}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \sqrt{3}$.

Bài 378. *Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn: $a + b + c = \frac{3}{4}$ Chứng minh rằng:*

$$\frac{1}{\sqrt[3]{a + 3b}} + \frac{1}{\sqrt[3]{b + 3c}} + \frac{1}{\sqrt[3]{c + 3a}} \geq 3$$

Lời giải:

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$\frac{a + 3b + 1 + 1}{3} \geq \sqrt[3]{a + 3b}$$

Từ đó ta suy ra

$$\frac{1}{\sqrt[3]{a + 3b}} \geq \frac{3}{a + 3b + 2}$$

Chứng minh tương tự với 2 hạng tử còn lại, sau đó cộng vế theo vế, ta có

$$\frac{1}{\sqrt[3]{a + 3b}} + \frac{1}{\sqrt[3]{b + 3c}} + \frac{1}{\sqrt[3]{c + 3a}} \geq 3\left(\frac{1}{a + 3b + 2} + \frac{1}{b + 3c + 2} + \frac{1}{c + 3a + 2}\right)$$

Đến đây, sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có

$$3\left(\frac{1}{a + 3b + 2} + \frac{1}{b + 3c + 2} + \frac{1}{c + 3a + 2}\right) \geq \frac{27}{4(a + b + c) + 6} = 3$$

Như vậy

$$\frac{1}{\sqrt[3]{a + 3b}} + \frac{1}{\sqrt[3]{b + 3c}} + \frac{1}{\sqrt[3]{c + 3a}} \geq 3$$

Bài toán được chứng minh xong.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \dfrac{1}{4}$.

Bài 379. *Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x + y + z = 1$. Chứng minh rằng:*
$$\sqrt{\frac{xy}{xy+z}} + \sqrt{\frac{yz}{yz+x}} + \sqrt{\frac{zx}{zx+y}} \le \frac{3}{2}$$

Lời giải:

Sử dụng giả thiết $x + y + z = 1$ và bất đẳng thức AM-GM ta có:
$$\begin{aligned}
LHS &= \sqrt{\frac{xy}{xy+z(x+y+z)}} + \sqrt{\frac{yz}{yz+x(x+y+z)}} + \sqrt{\frac{zx}{zx+y(x+y+z)}}\\
&= \sqrt{\frac{xy}{(z+x)(y+z)}} + \sqrt{\frac{yz}{(x+y)(z+x)}} + \sqrt{\frac{zx}{(y+z)(x+y)}}\\
&\le \frac{1}{2}\left(\frac{x}{z+x} + \frac{y}{y+z}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{y}{x+y} + \frac{z}{z+x}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{y+z} + \frac{x}{x+y}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{x}{z+x} + \frac{z}{z+x}\right) + \left(\frac{y}{y+z} + \frac{z}{y+z}\right) + \left(\frac{y}{x+y} + \frac{x}{x+y}\right)\right]\\
&= \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

Bài toán được chứng minh xong.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = \dfrac{1}{3}$

Bài 380. *Cho a, b, c là các số thực dương và thỏa mãn $a + b + c = 3$.*
$$\sqrt{\frac{ab}{2a^2+3b^2+7}} + \sqrt{\frac{bc}{2b^2+3c^2+7}} + \sqrt{\frac{ca}{2c^2+3a^2+7}} \le \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Lời giải:

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:
$$\frac{ab}{2a^2+3b^2+7} = \frac{ab}{2(a^2+1)+3(b^2+1)+2} \le \frac{ab}{4a+6b+2} \le \frac{ab}{4}\left(\frac{1}{6b} + \frac{1}{4a+2}\right)$$

Đến đây, sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có:
$$\frac{ab}{4a+6b+2} \le \frac{ab}{4}\left(\frac{1}{6b} + \frac{1}{4a+2}\right) = \frac{a}{24} + \frac{1}{8}\frac{ab}{a+a+1} \le \frac{a}{24} + \frac{1}{8}.\frac{ab}{9}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a} + 1\right) = \frac{a}{24} + \frac{b}{36} + \frac{ab}{72}$$

Từ đó ta có
$$\frac{ab}{2a^2+3b^2+7} \le \frac{a}{24} + \frac{b}{36} + \frac{ab}{72}$$

Tiếp tục sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz và kết hợp đánh giá trên, ta có
$$\begin{aligned}
LHS^2 &\le 3\left(\frac{ab}{2a^2+3b^2+7} + \frac{bc}{2b^2+3c^2+7} + \frac{ca}{2c^2+3a^2+7}\right)\\
&\le 3\left[\left(\frac{a}{24} + \frac{b}{36} + \frac{ab}{72}\right) + \left(\frac{b}{24} + \frac{c}{36} + \frac{bc}{72}\right) + \left(\frac{c}{24} + \frac{a}{36} + \frac{ca}{72}\right)\right]\\
&= 3\left(\frac{a+b+c}{24} + \frac{a+b+c}{36} + \frac{ab+bc+ca}{72}\right) \le \frac{3}{4}
\end{aligned}$$

Như vậy
$$\sqrt{\frac{ab}{2a^2+3b^2+7}} + \sqrt{\frac{bc}{2b^2+3c^2+7}} + \sqrt{\frac{ca}{2c^2+3a^2+7}} \le \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Bài toán được chứng minh xong.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Bài 381. *Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=3$. Chứng minh rằng:*

$$\sqrt{\frac{a^2}{a^2+b+c}}+\sqrt{\frac{b^2}{b^2+c+a}}+\sqrt{\frac{c^2}{c^2+a+b}}\le\sqrt{3}$$

Lời giải:

Cách 1.

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có

$$\begin{aligned}\left(a^2+b+c\right)(1+b+c)\ge(a+b+c)^2\\ \Rightarrow\frac{a^2}{a^2+b+c}\le\left(\frac{a}{a+b+c}\right)^2(1+b+c)\\ \Rightarrow\sqrt{\frac{a^2}{a^2+b+c}}\le\sqrt{\frac{a}{a+b+c}}.\sqrt{\frac{a(1+b+c)}{a+b+c}}\\ \Rightarrow\sum\sqrt{\frac{a^2}{a^2+b+c}}\le\sum\sqrt{\frac{a}{a+b+c}}.\sqrt{\frac{a(1+b+c)}{a+b+c}}\ (1)\end{aligned}$$

Tiếp tục sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có:

$$\begin{aligned}\left(\sum\sqrt{\frac{a}{a+b+c}}.\sqrt{\frac{a(1+b+c)}{a+b+c}}\right)^2&\le\left(\sum\frac{a}{a+b+c}\right)\left(\sum\frac{a(1+b+c)}{a+b+c}\right)\\ &=1.\left[1+\frac{2(ab+bc+ca)}{a+b+c}\right]\le1+\frac{2(a+b+c)^2}{3(a+b+c)}\\ &=1+\frac{2}{3}(a+b+c)\le1+\frac{2}{3}\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}=3\end{aligned}$$

Từ đó ta có

$$\sum\sqrt{\frac{a}{a+b+c}}.\sqrt{\frac{a(1+b+c)}{a+b+c}}\le\sqrt{3}\ (2)$$

Kết hợp (1) và (2) ta được

$$\sqrt{\frac{a^2}{a^2+b+c}}+\sqrt{\frac{b^2}{b^2+c+a}}+\sqrt{\frac{c^2}{c^2+a+b}}\le\sqrt{3}$$

Bài toán được chứng minh xong.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Cách 2.

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có

- $a+b+c\le\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}=3=a^2+b^2+c^2$
- $(1+b+c)(a^2+b+c)\ge(a+b+c)^2$

Từ đó ta có

$$\begin{aligned}\frac{a}{a^2+b+c}+\frac{b}{b^2+c+a}+\frac{c}{c^2+a+b}&\le\frac{a(1+b+c)+b(1+c+a)+c(1+a+b)}{(a+b+c)^2}\\ &=\frac{a+b+c+2ab+2bc+2ca}{(a+b+c)^2}\\ &\le\frac{a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca}{(a+b+c)^2}=1\end{aligned}$$

Mặt khác, cũng theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz thì

$$\left(\sqrt{a}\sqrt{\frac{a}{a^2+b+c}}+\sqrt{b}\sqrt{\frac{b}{b^2+c+a}}+\sqrt{c}\sqrt{\frac{c}{c^2+a+b}}\right)^2$$
$$\leq (a+b+c)\left(\frac{a}{a^2+b+c}+\frac{b}{b^2+c+a}+\frac{c}{c^2+a+b}\right)\leq 3.$$

Căn bậc 2 hai vế ta có điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài 382. *Cho a,b,c là các số thực dương và thỏa mãn $a+b+c=3$.*

$$2\left(\frac{1}{\sqrt{3a^2+4b^2+5}}+\frac{1}{\sqrt{3b^2+4c^2+5}}+\frac{1}{\sqrt{3c^2+4a^2+5}}\right)\leq\sqrt{\frac{3}{abc}}$$

Lời giải:

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương

$$\sqrt{\frac{abc}{3a^2+4b^2+5}}+\sqrt{\frac{abc}{3b^2+4c^2+5}}+\sqrt{\frac{abc}{3c^2+4a^2+5}}\leq\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$$\frac{abc}{3a^2+4b^2+5}=\frac{abc}{a^2+b^2+2a^2+2+3b^2+3}\leq\frac{abc}{2ab+4a+6b}$$

Mặt khác, theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có

$$\frac{abc}{2ab+4a+6b}\leq\frac{abc}{8}\left(\frac{1}{ab+2}+\frac{1}{3b}\right)\leq\frac{abc}{8.9}\left(\frac{1}{ab}+1+1\right)+\frac{ac}{24}=\frac{c}{72}+\frac{abc}{36}+\frac{ac}{24}$$

Từ đó ta suy ra

$$\frac{abc}{3a^2+4b^2+5}\leq\frac{c}{72}+\frac{abc}{36}+\frac{ac}{24}$$

Thiết lập 2 biểu thức tương tự, sau đó cộng vế theo vế, ta được

$$\frac{abc}{3a^2+4b^2+5}+\frac{abc}{3b^2+4c^2+5}+\frac{abc}{3c^2+4a^2+5}$$
$$\leq\left(\frac{c}{72}+\frac{abc}{36}+\frac{ac}{24}\right)+\left(\frac{a}{72}+\frac{abc}{36}+\frac{ba}{24}\right)+\left(\frac{b}{72}+\frac{abc}{36}+\frac{bc}{24}\right)$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có

$$\begin{aligned}LHS^2&\leq 3\left(\frac{abc}{3a^2+4b^2+5}+\frac{abc}{3b^2+4c^2+5}+\frac{abc}{3c^2+4a^2+5}\right)\\&\leq 3\left[\left(\frac{c}{72}+\frac{abc}{36}+\frac{ac}{24}\right)+\left(\frac{a}{72}+\frac{abc}{36}+\frac{ba}{24}\right)+\left(\frac{b}{72}+\frac{abc}{36}+\frac{bc}{24}\right)\right]\\&=3\left(\frac{a+b+c}{72}+\frac{3abc}{36}+\frac{ab+bc+ca}{24}\right)\leq\frac{3}{4}\end{aligned}$$

Như vậy

$$\sqrt{\frac{abc}{3a^2+4b^2+5}}+\sqrt{\frac{abc}{3b^2+4c^2+5}}+\sqrt{\frac{abc}{3c^2+4a^2+5}}\leq\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Bài toán được chứng minh xong.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài 383. *Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=3$. Chứng minh rằng*
$$\frac{a}{1+bc}+\frac{b}{1+ca}+\frac{c}{1+ab}\ge\frac{3}{2}abc$$

Lời giải:

Cách 1.

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với
$$\frac{1}{ab\left(1+ab\right)}+\frac{1}{bc\left(1+bc\right)}+\frac{1}{ca\left(1+ca\right)}\ge\frac{3}{2}$$
Để ý rằng ta có phân tích sau:
$$\frac{1}{ab(1+ab)}=\frac{5-3ab}{4}+\frac{(ab-1)^2(3ab+4)}{4ab(1+ab)}$$
Thiết lập dương tự đối với bc và ca ta có:
$$\frac{1}{bc(1+bc)}=\frac{5-3bc}{4}+\frac{(bc-1)^2(3bc+4)}{4bc(1+bc)}$$
$$\frac{1}{ca(1+ca)}=\frac{5-3ca}{4}+\frac{(ca-1)^2(3ca+4)}{4ca(1+ca)}$$
Cộng vế với vế các bất đẳng thức trên, ta được
$$\sum_{cyc}\frac{1}{ab(1+ab)}=\frac{15-3(ab+bc+ca)}{4}+\sum_{cyclic}\frac{(ab-1)^2(3ab+4)}{4ab(1+ab)}\ge\frac{3}{2}+\sum_{cyclic}\frac{(ab-1)^2(3ab+4)}{4ab(1+ab)}\ge\frac{3}{2}$$
Bài toán được chứng minh xong.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Cách 2.

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có

- $(a+b+c)^2\le 3\left(a^2+b^2+c^2\right)=9$
- $(ab+bc+ca)^2\le\left(a^2+b^2+c^2\right)^2=9$

Mặt khác, cũng theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz thì
$$\begin{aligned}\frac{a}{1+bc}+\frac{b}{1+ca}+\frac{c}{1+ab}&\ge\frac{(a+b+c)^2}{a+b+c+3abc}=\frac{(a+b+c)^3}{(a+b+c)^2+3abc\left(a+b+c\right)}\\&\ge\frac{(a+b+c)^3}{(a+b+c)^2+(ab+bc+ca)^2}\\&\ge\frac{(a+b+c)^3}{9+9}\\&\ge\frac{3}{2}abc.\end{aligned}$$
Bài toán được chứng minh xong.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài 384. *Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=3$.*
$$\frac{\sqrt{a^2-ab+b^2}}{a^2+b^2}+\frac{\sqrt{b^2-bc+c^2}}{b^2+c^2}+\frac{\sqrt{c^2-ca+a^2}}{c^2+a^2}\ge\frac{3}{2}$$

Lời giải:

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có

$$(a+b)\sqrt{a^2+b^2-ab} = \sqrt{(a+b)(a^3+b^3)} \geq a^2+b^2$$

Từ đó ta suy ra

$$\frac{\sqrt{a^2-ab+b^2}}{a^2+b^2} \geq \frac{1}{a+b}$$

Thiết lập tương tự, ta có

$$\frac{\sqrt{b^2-bc+c^2}}{b^2+c^2} \geq \frac{1}{b+c}$$

$$\frac{\sqrt{c^2-ca+a^2}}{c^2+a^2} \geq \frac{1}{c+a}$$

Cộng vế với vế các bất đẳng thức trên, ta có:

$$\frac{\sqrt{a^2-ab+b^2}}{a^2+b^2}+\frac{\sqrt{b^2-bc+c^2}}{b^2+c^2}+\frac{\sqrt{c^2-ca+a^2}}{c^2+a^2} \geq \frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a} \geq \frac{9}{2(a+b+c)} = \frac{3}{2}$$

Bài toán được chứng minh xong.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài 385. *Cho các số thực dương x, y, z. Chứng minh rằng*

$$(x+y+z)\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\right) \geq 3\sqrt{3(x^2+y^2+z^2)}$$

Lời giải:

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có

$$\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\right)(xy+yz+zx) \geq (x+y+z)^2$$

Mặt khác, theo AM-GM ta có:

$$\begin{aligned}3(xy+yz+zx)\sqrt{3(x^2+y^2+z^2)} &= \sqrt{27(x^2+y^2+z^2)(xy+yz+zx)^2}\\ &\leq \sqrt{(x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx)^3}\\ &= (x+y+z)^3\end{aligned}$$

Nhân vế với vế hai bất đẳng trên ta có

$$(x+y+z)\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\right) \geq 3\sqrt{3(x^2+y^2+z^2)}$$

Bài toán được chứng minh xong.

Đẳng thức xảy ra khi $x=y=z$.

Bài 386. *Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $13x+5y+12z=9$. Tìm giá trị lớn nhất của:*

$$T = \frac{xy}{2x+y}+\frac{3yz}{2y+z}+\frac{6zx}{2z+x}$$

Lời giải:

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có

$$\frac{2x+y}{xy} = \frac{1}{y}+\frac{1}{y}+\frac{1}{x} \geq \frac{9}{y+y+x}$$

Từ đó suy ra
$$\frac{xy}{2x+y} \le \frac{2y+x}{9}$$
Tương tự ta có:
$$\frac{3yz}{2y+z} \le \frac{2y+z}{3}$$
$$\frac{6zx}{2z+x} \le \frac{4x+2z}{3}$$
Cộng vế với vế ba bất đẳng thức trên ta có
$$T \le \frac{13x+5y+12z}{9} = 1.$$
Vậy giá trị lớn nhất của T là 1.

Bài 387. *Cho các số dương a,b,c thoả mãn $abc=1$. Chứng minh rằng*
$$\frac{\sqrt{a}}{2+b\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{b}}{2+c\sqrt{b}} + \frac{\sqrt{c}}{2+a\sqrt{c}} \ge 1$$

Lời giải:

Vì $abc=1$ nên ta có thể đặt $\sqrt{a}=\frac{x}{y}, \sqrt{b}=\frac{y}{z}, \sqrt{c}=\frac{z}{x}$.

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có:
$$\sum_{cyc} \frac{\sqrt{a}}{2+b\sqrt{a}} = \sum_{cyc} \frac{\frac{x}{y}}{2+\frac{y^2}{z^2}.\frac{x}{y}} = \sum_{cyclic} \frac{(xz)^2}{2xyz^2+(xy)^2} \ge \frac{(xy+yz+zx)^2}{(xy)^2+(yz)^2+(zx)^2+2xyz(x+y+z)} = 1$$
Bài toán được chứng minh xong.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài 388. *Cho a,b,c là số thực dương thỏa mãn $a+b+c=abc$. Chứng minh rằng*
$$\frac{bc}{a(1+bc)} + \frac{ca}{b(1+ca)} + \frac{ab}{c(1+ab)} \ge \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

Lời giải:

Đặt $a=\frac{1}{x}, b=\frac{1}{y}, c=\frac{1}{z}$ thì giả thiết được viết lại là: $xy+yz+zx=1$.

Dễ thấy $x+y+z \ge \sqrt{3(xy+yz+zx)} = \sqrt{3}$.

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có
$$\begin{aligned}
\frac{x}{yz+1} + \frac{y}{zx+1} + \frac{z}{xy+1} &\ge \frac{(x+y+z)^2}{3xyz+x+y+z} = \frac{(x+y+z)^3}{3xyz(x+y+z)+(x+y+z)^2} \\
&\ge \frac{(x+y+z)^3}{(xy+yz+zx)^2+(x+y+z)^2} = \frac{(x+y+z)^3}{1+(x+y+z)^2} \\
&= \frac{\left(x+y+z-\sqrt{3}\right)\left(4(x+y+z)^2+\sqrt{3}(x+y+z)^2+3\right)}{4\left(1+(x+y+z)^2\right)} + \frac{3\sqrt{3}}{4} \\
&\ge \frac{3\sqrt{3}}{4}.
\end{aligned}$$
Bài toán được chứng minh xong.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\sqrt{3}$.

Bài 389. *Cho x, y, z là các số thực dương thoả mãn $xy + yz + zx = 3xyz$. Chứng minh rằng:*
$$\frac{y^2}{xy^2 + 2x^2} + \frac{x^2}{zx^2 + 2z^2} + \frac{z^2}{yz^2 + 2y^2} \geq 1$$

Lời giải:

Đặt $x = \frac{1}{a}, y = \frac{1}{b}, z = \frac{1}{c}$ thì giả thiết được viết lại là $a + b + c = 3$

Khi đó ta có:

$$\begin{aligned}\frac{y^2}{xy^2 + 2x^2} + \frac{x^2}{zx^2 + 2z^2} + \frac{z^2}{yz^2 + 2y^2} &= \frac{a^2}{a + 2b^2} + \frac{b^2}{b + 2c^2} + \frac{c^2}{c + 2a^2} \\ &= a + b + c - \left(\frac{2ab^2}{a + 2b^2} + \frac{2bc^2}{b + 2c^2} + \frac{2ca^2}{c + 2a^2}\right) \\ &\geq a + b + c - \frac{2}{3}\left(\sqrt[3]{a^2b^2} + \sqrt[3]{b^2c^2} + \sqrt[3]{c^2a^2}\right)\end{aligned}$$

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$$\sqrt[3]{a^2b^2} = \sqrt[3]{ab.ab.1} \leq \frac{ab + ab + 1}{3}$$

Tương tự

$$\sqrt[3]{b^2c^2} \leq \frac{bc + bc + 1}{3}$$
$$\sqrt[3]{c^2a^2} \leq \frac{ca + ca + 1}{3}$$

Từ đó ta có

$$a + b + c - \frac{2}{3}\left(\sqrt[3]{a^2b^2} + \sqrt[3]{b^2c^2} + \sqrt[3]{c^2a^2}\right) \geq a + b + c - \frac{2}{9}(2ab + 2bc + 2ca + 3) \geq 1$$

Bài toán được chứng minh xong.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 1$.

Bài 390. *Cho $a, b, c \in [-1; 4]$ thỏa $a + 2b + 3c \leq 4$. Chứng minh rằng*
$$a^2 + 2b^2 + 3c^2 \leq 36$$

Lời giải:

Vì $a, b, c \in [-1; 4]$ nên ta có

$$(a + 1)(a - 4) \leq 0 \Leftrightarrow a^2 \leq 3a + 4$$
$$2(b + 1)(b - 4) \leq 0 \Leftrightarrow 2b^2 \leq 6b + 8$$
$$3(c + 1)(c - 4) \leq 0 \Leftrightarrow 3c^2 \leq 9c + 12$$

Từ đó suy ra

$$a^2 + 2b^2 + 3c^2 \leq 3(a + 2b + 3c) + 24 \leq 36$$

Bài toán được chứng minh xong.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = c = -1, b = 4$.

Bài 391. *Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x + y + z \geq \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$. Chứng minh rằng:*
$$x + y + z \geq \frac{3}{x + y + z} + \frac{2}{xyz}$$

Lời giải:

Theo giả thiết và sử dụng bất đẳng thức quen thuộc $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$ ta có

$$(x+y+z)^2 \geq \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^2 \geq 3\left(\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}\right) = 3\frac{x+y+z}{xyz}$$

Từ đó ta có

$$\frac{2}{3}(x+y+z) \geq \frac{2}{xyz}$$

Như vậy, ta có

$$x+y+z = \frac{1}{3}(x+y+z)+\frac{2}{3}(x+y+z) \geq \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)+\frac{2}{3}(x+y+z) \geq \frac{3}{x+y+z}+\frac{2}{xyz}$$

Bài toán được chứng minh xong.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1$.

Bài 392. *Cho a,b,c là độ dài 3 cạnh của tam giác. Chứng minh :*

$$a\left(\frac{1}{3a+b}+\frac{1}{3a+c}+\frac{2}{2a+b+c}\right)+\frac{b}{3a+c}+\frac{c}{3a+b} < 2$$

Lời giải:

Nhận xét: Nếu $x,y,z>0, x<y$ thì $\dfrac{x}{y} < \dfrac{x+z}{y+z}$

Do đó

$$\begin{aligned} a\left(\frac{1}{3a+b}+\frac{1}{3a+c}+\frac{2}{2a+b+c}\right)+\frac{b}{3a+c}+\frac{c}{3a+b} &= \frac{a+c}{3a+b}+\frac{a+b}{3a+c}+\frac{2a}{2a+b+c} \\ &< \frac{2a+2b}{4a+b+c}+\frac{2a+2c}{4a+b+c}+\frac{4a}{4a+b+c} \\ &= 2. \end{aligned}$$

Bài toán được chứng minh xong.

Bài 393. *Cho $x,y>0$ thỏa mãn: $x+y=2$. Chứng minh rằng*

$$x^2y^2(x^2+y^2) \leq 2$$

và

$$x^3y^3(x^3+y^3) \leq 2$$

Lời giải:

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

- $\dfrac{1}{4}.2xy.2xy(x^2+y^2) \leq \dfrac{1}{4}.\dfrac{(x+y)^2}{2}.\dfrac{(2xy+x^2+y^2)^2}{4} = 2$
- $x^3y^3(x^3+y^3) = 2xy.xy.xy(x^2-xy+y^2) \leq 2\left(\dfrac{xy+xy+xy+x^2-xy+y^2}{4}\right)^4 = 2$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=1$.

Bài 394. *Cho a,b,c là ba số thực dương. Chứng minh rằng*

$$\frac{(a+2)(b+2)}{(b+1)(b+5)}+\frac{(b+2)(c+2)}{(c+1)(c+5)}+\frac{(c+2)(a+2)}{(a+1)(a+5)} \geq \frac{9}{4}$$

Lời giải:

Ta có bất đẳng thức luôn đúng sau:

$$\frac{(b+2)}{(b+1)(b+5)} \geq \frac{3}{4(b+2)} \Leftrightarrow 4b^2+16b+16 \geq 3b^2+18b+15 \Leftrightarrow (b-1)^2 \geq 0$$

Từ đó ta suy ra

$$\frac{(a+2)(b+2)}{(b+1)(b+5)} \geq \frac{3(a+2)}{4(b+2)}$$

Tương tự

$$\frac{(b+2)(c+2)}{(c+1)(c+5)} \geq \frac{3(b+2)}{4(c+2)}$$

$$\frac{(c+2)(a+2)}{(a+1)(a+5)} \geq \frac{3(c+2)}{4(a+2)}$$

Cộng vế với vế các bất đẳng thức trên, và sử dụng bất đẳng thức AM-GM cho 3 số, ta được:

$$\frac{(a+2)(b+2)}{(b+1)(b+5)} + \frac{(b+2)(c+2)}{(c+1)(c+5)} + \frac{(c+2)(a+2)}{(a+1)(a+5)} \geq \frac{3}{4}\left[\frac{(a+2)}{(b+2)} + \frac{(b+2)}{(c+2)} + \frac{(c+2)}{(a+2)}\right] \geq \frac{9}{4}.$$

Bất đẳng thức được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$

Bài 395. *Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:*

$$\frac{1}{a(1+b)} + \frac{1}{b(1+c)} + \frac{1}{c(1+a)} \geq \frac{3}{1+abc}$$

Lời giải:

Đặt $a = k\dfrac{x}{y}, b = k\dfrac{y}{z}, c = k\dfrac{z}{x}$ với $k > 0$

Khi đó ta có $RHS = \dfrac{3}{1+k^3}$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có

$$\begin{aligned} LHS = \sum_{cyc} \frac{1}{a(1+b)} = \sum_{cyc} \frac{1}{k\frac{x}{y}(1+k\frac{y}{z})} = \sum_{cyc} \frac{yz}{kxz + k^2xy} = \sum_{cyc} \frac{a_1^2}{ka_1b_1 + k^2a_1c_1} \\ \geq \frac{(a_1+b_1+c_1)^2}{(k^2+k)(a_1b_1+b_1c_1+c_1a_1)} \geq \frac{3}{k^2+k} \end{aligned}$$

với $a_1 = yz; b_1 = zx; c_1 = xy$. Như vậy ta cần chứng minh

$$k^3 + 1 \geq k^2 + k \leftrightarrow (k-1)^2(k+1) \geq 0$$

Bất đẳng thức cuối luôn đúng, bài toán được chứng minh xong.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Bài 396. *Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc = 1$.*

$$(a^2+8)(b^2+8)(c^2+8) \leq (a+b+c)^6$$

Lời giải:

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$$\begin{aligned}
\frac{(a^2+8)(b^2+8)(c^2+8)}{(a+b+c)^6} &= \frac{(a^2+8abc)(b^2+8abc)(c^2+8abc)}{(a+b+c)^6} \\
&= \frac{(a+8bc)(b+8ca)(c+8ab)}{(a+b+c)^6} \\
&\le \frac{[a+b+c+8(ab+bc+ca)]^3}{27(a+b+c)^6} \\
&\le \frac{\left[a+b+c+\dfrac{8}{3}(a+b+c)^2\right]^3}{27(a+b+c)^6} \\
&= \frac{1}{27}\left(\frac{1}{a+b+c}+\frac{8}{3}\right)^3 \\
&\le \frac{1}{27}\left(\frac{1}{3\sqrt[3]{abc}}+\frac{8}{3}\right)^3 \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Do đó

$$(a^2+8)(b^2+8)(c^2+8) \le (a+b+c)^6$$

Bài toán được chứng minh xong.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài 397. *Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng:*

$$a+\sqrt{ab}+\sqrt[3]{abc} \le \frac{4}{3}$$

Lời giải:

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

- $\sqrt{ab} = 2\sqrt{\dfrac{a}{4}b} \le \dfrac{a}{4}+b$
- $\sqrt[3]{abc} = \sqrt[3]{\dfrac{a}{4}b(4c)} \le \dfrac{\dfrac{a}{4}+b+4c}{3}$

Từ đó ta có

$$a+\sqrt{ab}+\sqrt[3]{abc} \le \frac{4(a+b+c)}{3} = \frac{4}{3}$$

Bài toán được chứng minh xong.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=\dfrac{16}{21}, b=\dfrac{4}{21}, c=\dfrac{1}{21}$.

Bài 398. *Cho x,y,z là những số dương thỏa mãn $x+y+z\ge 6$.*

$$\frac{x^3}{y+z}+\frac{y^3}{x+z}+\frac{z^3}{x+y} \ge 6$$

Lời giải:

Cách 1.

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$$\begin{aligned}
\frac{x^3}{y+z}+\frac{x^3}{y+z}+\frac{(y+z)^2}{8} &\geq \frac{3}{2}x^2\\
\frac{y^3}{z+x}+\frac{y^3}{z+x}+\frac{(z+x)^2}{8} &\geq \frac{3}{2}y^2\\
\frac{z^3}{x+y}+\frac{z^3}{x+y}+\frac{(x+y)^2}{8} &\geq \frac{3}{2}z^2
\end{aligned}$$

Cộng vế với vế các bất đẳng thức trên, ta có

$$2\left(\frac{x^3}{y+z}+\frac{y^3}{z+x}+\frac{z^3}{x+y}\right)+\frac{1}{4}\left(x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx\right) \geq \frac{3}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)$$

$$\Leftrightarrow 2\left(\frac{x^3}{y+z}+\frac{y^3}{z+x}+\frac{z^3}{x+y}\right) \geq \frac{5}{4}\left(x^2+y^2+z^2\right)-\frac{1}{4}\left(xy+yz+zx\right)$$

Mặt khác, ta có

$$\frac{5}{4}\left(x^2+y^2+z^2\right)-\frac{1}{4}\left(xy+yz+zx\right) \geq \frac{5}{12}(x+y+z)^2-\frac{1}{12}(x+y+z)^2=\frac{1}{3}(x+y+z)^2 \geq 12$$

Do đó

$$\frac{x^3}{y+z}+\frac{y^3}{x+z}+\frac{z^3}{x+y} \geq 6$$

Bài toán được chứng minh xong.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1$.

Cách 2.

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có:

$$\frac{x^4}{x(y+z)}+\frac{y^4}{y(z+x)}+\frac{z^4}{z(x+y)} \geq \frac{(x^2+y^2+z^2)^2}{2(xy+yz+zx)} \geq \frac{x^2+y^2+z^2}{2} \geq \frac{(x+y+z)^2}{6}=6$$

Do đó

$$\frac{x^3}{y+z}+\frac{y^3}{x+z}+\frac{z^3}{x+y} \geq 6$$

Bài toán được chứng minh xong.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1$.

Bài 399. *Cho a,b,c là các số thực không âm thỏa mãn $a+b+c=3$. Tìm giá trị lớn nhất của:*

$$P=(a^2-ab+b^2)(b^2-bc+c^2)(c^2-ca+a^2)$$

Lời giải:

Giả sử $a=\min\{a,b,c\}$. Ta có $b+c=3-c \leq 3$

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$
\begin{aligned}
P &= \left(a(a-b)+b^2\right)\left(b^2-bc+c^2\right)\left(a(a-c)+c^2\right)\\
&\le b^2(b^2-bc+c^2)c^2\\
&= \frac{4}{9}.\frac{3}{2}bc.\frac{3}{2}bc(b^2-bc+c^2)\\
&\le \frac{4}{9}.\left[\frac{\frac{3}{2}bc+\frac{3}{2}bc+(b^2-bc+c^2)}{3}\right]^3\\
&= \frac{4}{9}.\left[\frac{(b+c)^2}{3}\right]^3\\
&\le 12
\end{aligned}
$$

Đẳng thức xảy ra khi $a=0, b=2, c=1$ và các hoán vị.
Vậy giá trị lớn nhất của P là 12.

Bài 400. *Chứng minh rằng với mọi a, b, c không âm ta có:*

$$\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{3}} \le \sqrt[3]{\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{8}}$$

Lời giải:

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta thu được

$$abc = \sqrt[3]{abc}.\sqrt[3]{a^2b^2c^2} \le \frac{a+b+c}{3}.\frac{ab+bc+ca}{3} = \frac{(ab+bc+ca)(a+b+c)}{9}$$

Mà theo 1 hằng đẳng thức quen biết thì

$$(ab+bc+ca)(a+b+c) = (a+b)(b+c)(c+a)+abc$$

Do đó ta có

$$\frac{8}{9}(ab+bc+ca)(a+b+c) \le (a+b)(b+c)(c+a)$$

Mặt khác, sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$$3\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)} \le (a+b)+(b+c)+(c+a) = 2(a+b+c)$$

Từ đó suy ra

$$(a+b)(b+c)(c+a) \ge \frac{8}{9}(ab+bc+ca)(a+b+c) \ge \frac{8}{9}(ab+bc+ca).\frac{3}{2}\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

hay tương đương

$$\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{3}} \le \sqrt[3]{\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{8}}$$

Bài toán được chứng minh xong.
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.