TRẦN PHƯƠNG

Cộng tác viên: TRẦN TUẤN ANH,
NGUYỄN ANH CƯỜNG, BÙI VIỆT ANH

NHỮNG VIÊN KIM CƯƠNG

TRONG BẤT ĐẲNG THỨC TOÁN HỌC

RCF; LCF; SOS; MV; ABC; GLA; EV; DAC
Jensen; Karamata; Popoviciu; Riman
Muirhead; Fermat; Langrange; Bernoulli
Holder; Minkowski; Chebyshev; Schur
AM-GM; Cauchy-Buniakowski-Schwarz

NHÀ XUẤT BẢN TRI THỨC

TRẦN PHƯƠNG

Cộng tác viên: Trần Tuấn Anh
Nguyễn Anh Cường; Bùi Việt Anh

NHỮNG VIÊN KIM CƯƠNG
TRONG BẤT ĐẲNG THỨC TOÁN HỌC

(Tái bản lần thứ nhất)

NHÀ XUẤT BẢN TRI THỨC

MỤC LỤC

LỜI NÓI ĐẦU

Tiền bạc ư?
rồi sẽ hết.
Sắc đẹp ư?
rồi sẽ pha ...
Chỉ có:
Tri thức đi vào khối óc.
Tình cảm đi vào con tim.
Sẽ còn
sống mãi với thời gian.
(Trần Phương – 1990)

Từ những phép so sánh trong cuộc sống

Thế giới vật chất và tinh thần trong vũ trụ luôn vận động và biến đổi không ngừng tạo nên các sự vật, hiện tượng khác nhau. Chúng ta có thể thấy rõ sự khác nhau đó bằng các hình ảnh đối lập: to – nhỏ; rộng – hẹp; dài – ngắn; cao – thấp; nhiều – ít; giàu – nghèo; đẹp – xấu; ... Rộng ra là sự khác biệt của Phật giáo, Hồi giáo và Thiên chúa giáo; sự khác nhau giữa các nền văn hoá Đông – Tây và các tư tưởng triết học chủ đạo trên thế giới.

Cuộc sống của mỗi người liên tục là sự tìm kiếm và khẳng định giá trị bản thân. Mỗi vật có chỗ đứng trong thế giới luôn thay đổi này là nhờ giá trị của nó nhưng người ta thường không nhận ra rằng mọi vật chỉ có thể nhận giá trị trong quan hệ so sánh. Chính quan hệ đó đã tạo ra các bất đẳng thức của cuộc sống.

Thực tế là dù câu nói "mọi so sánh đều khập khiễng" có đúng đắn đến mức nào, con người vẫn không thể ngừng đánh giá – so sánh. Một kilogam nhân sâm Hàn Quốc về mặt khối lượng nhỏ hơn 1000 lần so với 1 tấn thóc nhưng nếu xét về mặt trị giá thì lại gấp hơn 10 lần. Một tổng thống và một vận động viên đua xe, ai hơn ai? Bạn sẽ cười mà nói với tôi rằng tổng thống đương nhiên hơn một vận động viên đua xe, nhưng đó chỉ là xét về tầm quan trọng đối với công việc quốc gia. Còn nếu xét về thu nhập hàng năm, 300.000 USD/năm của tổng thống Mỹ Bush chỉ bằng một phần hai trăm lần so với tay đua xe công thức I nổi tiếng thế giới Michael Schumacher với thu nhập khoảng 60.000.000 USD/năm. Vậy là khi so sánh, muốn hay không, người ta cần xác định những nhân tố tham gia vào so sánh, lượng hoá các phẩm chất và quy về một đơn vị.

Để phát triển tư duy so sánh đánh giá trong cuộc sống, ngay từ nhỏ chúng ta đã được giới thiệu về bất đẳng thức toán học. Học sinh mẫu giáo phải so sánh 1 với 2 để được một bất đẳng thức $1 < 2$. Học sinh cuối cấp tiểu học bắt đầu phải thực hiện những so sánh khó hơn như so sánh: hai phân số $\frac{135}{143}$ và $\frac{189}{197}$. Có em quy đồng mẫu số để so sánh hai phân số rất cồng kềnh

Quy đồng : $\frac{135}{143} = \frac{135\times197}{143\times197} = \frac{26595}{28171}; \frac{189}{197} = \frac{189\times143}{197\times143} = \frac{27027}{28171}$ mà $\frac{26595}{28171} < \frac{27027}{28171}$ nên $\frac{135}{143} < \frac{189}{197}$

nhưng có em lại dùng phương pháp phần bù quy về so sánh phân số cùng tử số:

So sánh phần bù của phân số: Ta có $\frac{135}{143}+\frac{8}{143}=1=\frac{8}{197}+\frac{189}{197}$ mà $\frac{8}{143}>\frac{8}{197}$ nên $\frac{135}{143}<\frac{189}{197}$

Các bài toán so sánh đặt ra về sau ngày càng khó hơn với sự mở rộng của các phép toán. Tất cả các nhà toán học đều có chung một quan điểm là *"Các kết quả cơ bản của toán học thường được biểu thị bằng những bất đẳng thức chứ không phải bằng những đẳng thức"*. Điều đó cũng giống như trong cuộc sống người ta luôn gặp sự khác nhau giữa các sự vật hiện tượng và ngay trong bản thân mỗi sự vật hiện tượng cũng biến đổi theo từng giây phút. Thật thế, nếu sau mỗi giây mà chúng ta đều không thay đổi thì theo nguyên lý quy nạp sau 50 năm chúng ta cũng không thể bị già đi. Mặt khác trong đời sống xã hội chúng ta luôn sử dụng tư duy bất đẳng thức để đánh giá hoạt động của doanh nghiệp, hoạt động xuất nhập khẩu, thị trường chứng khoán, tài chính, ngân hàng,... Vì thế, để phát triển tư duy và đánh giá tốt các sự biến đổi trong cuộc sống thì cần phải có tư duy tốt về bất đẳng thức toán học. Nói những lời làm quen đầu tiên như vậy, tác giả muốn bạn đọc coi vấn đề bộ sách trình bày như một điều thật gần gũi và thân thiện.

******

Đến

1. Một bộ sách trọn vẹn và sâu sắc về các phương pháp chứng minh bất đẳng thức được ví như là những viên kim cương trong bất đẳng thức toán học

Bộ sách là một hệ thống phân loại các phương pháp chứng minh bất đẳng thức đầy đủ và tỉ mỉ nhất: Gồm 5 chương với 25 chuyên đề. Bốn chương đầu tiên giới thiệu các viên kim cương theo trình tự thời gian và đặc điểm: Những viên kim cương của bất đẳng thức cổ điển; Những viên kim cương của bất đẳng thức cận đại; Những viên kim cương trong bất đẳng thức giải tích; Những viên kim cương của bất đẳng thức hiện đại, chương cuối là một số sáng tạo về bất đẳng thức. Trong mỗi chuyên đề đều có phần dẫn, bài tập mẫu minh hoạ, bài tập tự giải với tổng lượng các bài toán lên đến **2000 bài**. Công phu nhất có thể kể đến phần trích giới thiệu **15 kỹ thuật** sử dụng bất đẳng thức **AM – GM** (trên tổng số **30 kỹ thuật**), những sáng tạo và các kinh nghiệm của các tác giả chưa xuất hiện tại bất cứ một cuốn sách nào khác.

Theo dõi bộ sách ta có thể nhận thấy sự sắp xếp thứ tự giữa các chương và các chuyên đề trong chương rất biện chứng. Chương I, chương II, chương IV được sắp xếp theo trình tự thời gian. Riêng chương III tác giả không đặt tên theo thời gian mà đặt tên theo đặc điểm: "Những viên kim cương trong bất đẳng thức giải tích" bởi vì các viên kim cương có mặt trong chương ở cả 3 trạng thái thời gian: Cổ điển, cận đại và hiện đại. Chương V gồm 3 chuyên đề: Chuyên đề mở đầu là các bài viết nhỏ về bất đẳng thức, tiếp theo là các bất đẳng thức chọn lọc có lời giải tổng hợp của nhiều phương pháp, cuối cùng là các bài toán thách thức.

Khi trình bày các vấn đề, dù cũ hay mới, người viết luôn cố gửi vào các trang sách những nét tươi mới. Mặt khác, mặc dù có dung lượng rất lớn, nhưng sự khúc chiết vẫn được đảm bảo. Và vì thế, cả bộ sách giống như một chuyến viễn chinh thế giới bất đẳng thức rất dài và đầy thú vị.

2. Một công trình thực nghiệm về phương pháp học tập toán học

Khi trình bày một khối lượng lớn các kỹ thuật chứng minh bất đẳng thức, người viết ý thức được rằng cần phải đảm bảo cho người đọc nắm bắt được tinh thần chung của từng chương, từng chuyên đề và từng kỹ thuật. Mở đầu mỗi chương là lời dẫn lý thú cho các chuyên đề và khép lại là phần nhìn nhận đánh giá, so sánh và làm rõ mối liên hệ giữa những vấn đề đã được trình bày.

Phần mở đầu mỗi chuyên đề là sự mô tả rất chi tiết về ***"viên kim cương"*** có trong chuyên đề, sau đó là các bài tập mẫu minh họa và cuối cùng là các bài tập dành cho bạn đọc tự giải. Khi trình bày chương I, tác giả muốn dành sự thiện cảm của bạn đọc trong một phạm vi rộng lớn nên cách viết luôn bám theo quy luật của nhận thức ***"Từ đơn giản đến phức tạp"*** và nhiều bài toán được trình bày theo cách tiếp cận tự nhiên ***"Đi từ cái sai đến cái gần đúng, rồi mới đến cái đúng"***. Cụ thể trong hai chuyên đề mở đầu về hai bất đẳng thức rất quen biết là AM – GM và bất đẳng thức Cauchy – Buniakowski – Schwarz, tác giả đã đưa đến một phong cách viết mới về các bất đẳng thức này với kỹ thuật "chọn điểm rơi". Đi kèm với kỹ thuật "chọn điểm rơi" là các bài toán minh họa theo sơ đồ nhận thức: ***"Sai lầm thường gặp – Nguyên nhân sai lầm – Phân tích và tìm tòi lời giải"***. Từ khái niệm "chọn điểm rơi" trong bất đẳng thức, chúng ta có thể lấy ý tưởng đề làm phương pháp luận cho cách chọn điểm rơi trong cuộc sống. Đó chính là hướng dẫn cách nhìn sự việc kết thúc tại đâu để điều chỉnh biến đổi cuộc sống lúc xuất phát.

Không chỉ dừng lại ở việc đưa các bài tập, giới thiệu các kỹ thuật, người viết ý thức được việc phải tạo ra những điểm nhấn, từ cách đặt vấn đề, đến cách phân tích, tìm tòi hướng đi, khai thác và triển khai các ý tưởng một cách có bài bản, triệt để. Đây đều là những kỹ năng quan trọng đối với những người yêu thích học tập toán học cũng như làm nhiều công việc khác trong xã hội.

3. Một bộ sách dành cho nhiều đối tượng độc giả

Đó cũng là hệ quả tất yếu từ những phẩm chất vừa kể trên của bộ sách. Ngoài ra, các bài toán nêu ra trong bộ sách này còn được sắp xếp một cách sư phạm theo trình độ nâng dần từ thấp đến cao. Các bài toán mẫu minh hoạ bao gồm từ những bài rất cơ bản đến những bài toán khó. Các bài tập dành cho độc giả tự giải cũng trải trên một miền từ đơn giản đến phức tạp với biên độ rất rộng.

Người viết thực sự muốn hướng đến một diện rộng độc giả. Bộ sách này là dành cho học sinh khá cấp THCS, cho học sinh cấp PTTH đi thi học sinh giỏi Toán Quốc gia và Quốc tế, cho giáo viên dạy toán các cấp, cho những nhà nghiên cứu về toán học phổ thông... Tác giả hi vọng một bộ sách như thế sẽ mang đến cho độc giả sự tự tin khi đọc sách, sẽ có thể khơi gợi ở những em học sinh mới tiếp xúc với Toán học một cách nghiêm túc ước mơ trở thành học sinh giỏi toán Quốc tế, thành nhà toán học và niềm tin vào khả năng hiện thực hoá ước mơ ấy.

4. Một bộ sách khẳng định trí tuệ sáng tạo

Nếu như việc giải toán là đi tìm cái tĩnh trong cái động thì sự sáng tạo khi vận dụng các phương pháp giải chính là phát huy cái động trong cái tĩnh. Hai mặt đối lập đã hoà vào làm một trong bộ sách này.

Bất đẳng thức là một lĩnh vực khó nhưng cái khó không nằm ở gánh nặng về lượng kiến thức mà ở yêu cầu về óc quan sát, linh cảm tinh tế và sức sáng tạo dồi dào của người giải. Một bộ sách tốt về bất đẳng thức phải đặt ra mục tiêu trở thành một miền đất nuôi dưỡng và thử thách trí tuệ sáng tạo của con người. Để làm điều đó, trước hết bản thân bộ sách phải thể hiện một sức tìm tòi sáng tạo.

Có thể nói ở bộ sách này, người đọc dễ hiểu, cảm nhận phương pháp trình bày nội dung và các "sáng tạo toán học" của tác giả và các cộng tác viên. Phần sáng tạo nổi trội được thể hiện trong chương IV: "Những viên kim cương trong bất đẳng thức hiện đại". Đó là các "viên kim cương": **S.O.S; MV; ABC; GLA; DAC**. Đây là những ***"viên kim cương"*** được sáng tạo bởi người Việt Nam và là những công cụ mạnh nhất để chứng minh bất đẳng thức sơ cấp. Ngoài ra cuốn sách còn đưa ra những góc nhìn mới về nhiều bài toán quen thuộc. Với bộ sách này, độc giả sẽ có nhiều cơ hội để khẳng định chính mình.

5. Một bộ sách thể hiện tinh thần hội nhập

Cuốn sách này được tác giả ấp ủ từ năm 1990 và được bắt tay viết từ năm 2001. Đến đầu năm 2005, bản thảo với tên gọi ***" Tuyển tập các phương pháp và kỹ thuật chứng minh Bất đẳng thức Đại số"*** dày 2222 trang được hoàn thành. Tuy nhiên với sự phát triển của Internet cùng với sự ra đời của các website toán học nổi tiếng trên thế giới đã làm tác giả thấy có nhiều thông tin trong bản thảo lạc hậu so với sự biến đổi chóng mặt thông tin có trên các website. Chính vì thế tác giả đã dũng cảm loại bỏ những kiến thức không phù hợp với tính chất chọn lọc của cuốn sách đồng thời mua bản quyền của các viên kim cương ***MV; ABC; GLA; DAC*** hoặc một phần bản quyền ***SOS*** của các cộng tác viên như Trần Tuấn Anh, Nguyễn Anh Cường, Bùi Việt Anh, Phan Thành Việt cũng như một số kỹ thuật của các sinh viên Võ Quốc Bá Cẩn, Hoàng Trọng Hiền, Lê Hữu Điền Khuê... Những đóng góp này đã được tác giả biên tập cô đọng, súc tích và được trân trọng ghi nhận với chỉ dẫn phần đóng góp bản thảo có mặt trong sách đồng thời được trả thù lao trong các hợp đồng về bản quyền cao gấp nhiều lần so với các bản thảo thông thường.

******

Cuốn sách là một công trình tâm huyết của tác giả trong nhiều năm. Hi vọng lớn của tác giả là cuốn sách sẽ còn sống mãi với thời gian như một người bạn thân thiết của những người yêu toán học. Tất nhiên, quyền đánh giá cuốn sách vẫn thuộc về độc giả.

Hà nội, từ 1/1/2005 đến 1/1/2009

Trần Phương

DANH SÁCH CỘNG TÁC VIÊN

1. Trần Tuấn Anh

Nghiên cứu sinh toán học bậc Tiến sĩ Trường Đại học Công nghệ Georgia, Atlanta, USA.

2. Phạm Gia Vĩnh Anh

Nghiên cứu sinh toán học bậc Tiến sĩ Trường Đại học Berkeley, California, USA.

Huy chương vàng Toán Quốc tế lần thứ 43 tại Vương quốc Anh năm 2002.

3. Nguyễn Anh Cường

Sinh viên khoa Toán – Tin khóa 2006 – 2010, Trường Đại học Quốc gia Singapore.

4. Bùi Việt Anh

Sinh viên khoa Điện tử – Viễn thông khóa 2005 – 2009, Trường Đại học Bách khoa, Hà Nội.

5. Lê Trung Kiên

Sinh viên khoa Điện tử – Viễn thông khóa 2007 – 2011, Trường Đại học Bách khoa, Hà Nội.

6. Phan Thành Việt

Sinh viên khoa Toán, khóa 2007 – 2011, Trường Đại học Khoa học tự nhiên, ĐHQG TP. HCM.

7. Võ Quốc Bá Cẩn

Sinh viên khoa Dược, khóa 2006 – 2011, Trường Đại học Y – Dược Cần Thơ.

8. Dương Đức Lâm

Học sinh khóa 2003 – 2006, trường THPT Nguyễn Trung Thiên, Thạch Hà, Hà Tĩnh.

9. Lê Hữu Điền Khuê

Sinh viên hệ Kỹ sư tài năng, khóa 2007 – 2011, Trường Đại học Blois, Cộng hòa Pháp.

10. Hoàng Trọng Hiền

Sinh viên khoa Toán – Tin, khóa 2008 – 2012, Trường Đại học Bách khoa TP. HCM.

11. Nguyễn Quốc Hưng

Sinh viên khoa Toán, khóa 2005 – 2009, Trường Đại học Khoa học tự nhiên, ĐHQG TP. HCM.

12. Bạch Ngọc Thành Công

Lớp 12 chuyên Toán, khóa 2006–2009, Trường Phổ thông năng khiếu Trần Phú, Hải Phòng

Tác giả chân thành cảm ơn Giáo sư, Tiến sĩ Vasile Cirtoaje và ngài M.Lascu (Rumani) đã đồng ý cho phép dịch một số chuyên đề trong cuốn sách *"Algebraic Inequalities"* do nhà xuất bản Gil xuất bản năm 2006 sang tiếng Việt để cuốn sách được hoàn thiện hơn. Tác giả cũng chân thành cảm ơn các đồng nghiệp Mạc Đăng Nghị, Cao Minh Quang và một số học sinh gửi bài đóng góp cho cuốn sách. Các bài viết đã đóng góp cho cuốn sách hoặc sử dụng thông tin một số bài toán được trích dẫn ở phần cuối cuốn sách. Mặc dù đã cố gắng chú dẫn chi tiết nhưng vẫn không thể tránh khỏi thiếu sót. Tác giả mong bạn đọc đóng góp ý kiến để lần xuất bản sau được hoàn thiện hơn.

MỘT SỐ CHỮ VIẾT TẮT VÀ CÁC KÍ HIỆU TOÁN HỌC TRONG SÁCH

I. MỘT SỐ CHỮ VIẾT TẮT

MO – Olympic Toán Quốc gia.

IMO – Olympic Toán Quốc tế.

IMO Shortlish – Danh sách ngắn các bài đề nghị của các quốc gia trong **IMO**.

APMO – Olympic châu Á Thái Bình Dương.

VMEO – Kì thi giải toán trên mạng của trang www.diendantoanhoc.net.

TST – Đề dự tuyển thi Toán Quốc tế.

APMO – Olympic châu Á Thái Bình Dương.

Crux – Tạp chí toán học Canada.

II. CÁC KÝ HIỆU TỔNG VÀ TÍCH THÔNG DỤNG

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

$$\prod_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

$$\sum_{1 \le i < j \le n} a_i a_j = a_1 a_2 + a_1 a_3 + \ldots + a_1 a_n + a_2 a_3 + a_2 a_4 + \ldots + a_2 a_n + \ldots + a_{n-1} a_n$$

$\sum_{sym} f(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ – Tổng đối xứng theo n biến số $a_1, a_2, \ldots, a_n$

$\sum_{cyc} f(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ – Tổng hoán vị theo n biến số $a_1, a_2, \ldots, a_n$

$$\sum_{sym} f(a,b,c) = f(a,b,c) + f(a,c,b) + f(b,c,a) + f(b,a,c) + f(c,a,b) + f(c,b,a)$$

$$\sum_{cyc} f(a,b,c) = f(a,b,c) + f(b,c,a) + f(c,a,b)$$

Ví dụ: $\sum_{sym} a^2 b = a^2 b + ab^2 + b^2 c + bc^2 + c^2 a + ca^2$;

$$\sum_{cyc} a^2 b = a^2 b + b^2 c + c^2 a$$

CHƯƠNG I: NHỮNG VIÊN KIM CƯƠNG TRONG BẤT ĐẲNG THỨC CỔ ĐIỂN

Trong chương này chúng tôi sẽ lần lượt giới thiệu với các bạn 5 bất đẳng thức đại số cổ điển, đó là các bất đẳng thức so sánh trung bình cộng, trung bình nhân hay còn gọi là bất đẳng thức ***AM – GM*** **(§1)**, bất đẳng thức ***Cauchy – Buniakowski – Schwarz (CBS –§2)*** và tổng quát của nó là bất đẳng thức ***Holder*** **(§3)**, bất đẳng thức ***Mincowski*** **(§4)**, cuối cùng là bất đẳng thức ***Chebyshev*** **(§5)**. Cả 5 bất đẳng thức này mặc dù có hình thức và chứng minh rất đơn giản nhưng đều có tầm ứng dụng rất lớn.

Điểm đáng chú ý là giữa các bất đẳng thức này có mối quan hệ qua lại rất thú vị, chẳng hạn ta có thể sử dụng bất đẳng thức ***AM – GM*** để chứng minh bất đẳng thức ***CBS*** và ngược lại, cũng có thể sử dụng bất đẳng thức ***CBS*** để chứng minh bất đẳng thức ***AM – GM***. Theo một nghĩa nào đó chúng ***tương đương*** với nhau. Tuy nhiên chúng tôi sẽ không dành nhiều thời gian để phân tích kỹ hơn về chi tiết này. Các bạn đọc có hứng thú hãy tự tìm tòi cho mình một câu trả lời đầy đủ.

Chúng tôi sẽ tập trung trình bày về cách kết hợp các bất đẳng thức cổ điển với nghệ thuật chọn điểm rơi để có được những chứng minh thật đẹp mắt, ngắn gọn cho một lớp rộng các bất đẳng thức từ cũ đến mới, từ đơn giản đến phức tạp. Quan điểm của tác giả trong chương này là viết sao cho mọi vấn đề đều đơn giản, dễ hiểu và rõ ràng để hướng đến nhiều đối tượng độc giả. Do đó các bạn có thể thấy ngay từ phần nội dung mở đầu cuốn sách, các kỹ thuật chọn điểm rơi của bất đẳng thức ***AM – GM*** được phân tích rất chi tiết, tỉ mỉ với 16 nội dung dưới tựa đề ***"Những sắc màu điểm rơi trong bất đẳng thức AM – GM"***. Các bạn đọc mới làm quen với bất đẳng thức nên đọc thật kỹ mục này.

Chú ý rằng ngoại trừ bất đẳng thức ***Chebyshev*** thì 4 bất đẳng thức còn lại đều được phát biểu một cách đối xứng. Do đó không nên ngạc nhiên khi phần lớn các ví dụ sẽ là các bất đẳng thức đối xứng, hơn nữa phải là đối xứng đồng bậc. Tuy nhiên chính nhờ sự kết hợp giữa hai bất đẳng thức ***CBS*** và bất đẳng thức ***Holder*** với nghệ thuật chọn điểm rơi mà rất nhiều bất đẳng thức hoán vị đã được giải quyết gọn gàng. Các bạn hãy đọc cẩn thận các mục 2.III và 3.II để hiểu rõ hơn.

Cũng cần lưu ý sự phân chia các ví dụ và bài tập trong chương này có nhiều chỗ chỉ mang tính tương đối. Nguyên nhân chính là vì một bài toán có thể giải quyết bằng bất đẳng thức ***AM – GM*** cũng rất có thể giải quyết bằng bất đẳng thức ***CBS***, một bất đẳng thức có thể chứng minh bằng cách sắp thứ tự các biến sau đó áp dụng bất đẳng thức ***Chebyshev*** cũng có khả năng chứng minh được một cách ***đối xứng*** bằng các bất đẳng thức khác. Do đó chúng tôi tin rằng nếu các bạn đọc lại chương này một lần nữa sau khi đã đọc hết cả 5 chương của cuốn sách, khi đó rất có thể các bạn sẽ có cách cảm nhận mới với nhiều bài toán cũ của chúng tôi.

Cuối cùng, chúng tôi cũng rất chú ý đến việc chọn lựa các bài tập hay, đặc sắc để giúp các bạn có thể rèn luyện. Các bài toán này có thể tìm thấy mọi nơi trong suốt chương này và cả các chương sau nữa. Chúc các bạn thành công!

§1. BẤT ĐẲNG THỨC AM – GM VÀ CÁC KĨ THUẬT CHỌN ĐIỂM RƠI

Chúng ta thường được nghe khái niệm "điểm rơi" trong thể thao, ví dụ:

+ Một vận động viên thể thao cần xác định ngày thi đấu để điều chỉnh khối lượng vận động cho phù hợp để khi dự thi đạt phong độ "điểm rơi" về sức khỏe, tâm lý ở trạng thái sung sức và hưng phấn nhất.

+ Một vận động viên tenis cần rất nhiều khả năng phán đoán điểm rơi của trái tenis, đặc biệt khi nó bật xuống mặt sân, để tiếp cận cú đánh trả hiệu quả.

+ Một cầu thủ bóng đá cần chọn đúng điểm rơi để đón nhận một quả tạt bóng và bật lên đánh đầu cho hiệu quả. Một thủ môn cũng cần phải chọn đúng điểm rơi để bắt những quả bóng bổng. Chúng ta hãy cùng nhớ lại một ví dụ tiêu biểu về điểm rơi trong Football World Cup 1998 lần thứ 16 tổ chức tại Pháp: *" Trong trận đội tuyển Brazil gặp đội tuyển Anh, cầu thủ Ronaldinho của Brazil nhận thấy thủ môn của đội tuyển Anh là David Seaman dâng lên cao cách xa khung thành nên đã sút bóng điệu nghệ từ khoảng cách 45m. Khi đó Seaman nhận thấy nguy cơ và lùi xuống để bắt bóng. Rất tiếc David Seaman đã chọn sai điểm rơi nên lỡ trớn và để bóng vượt khỏi tầm tay lăn vào lưới "*

Tuy nhiên một ví dụ đặc sắc và rất ấn tượng mà chúng tôi muốn dành cho bạn đọc suy ngẫm để khám phá tính triết học của **"thế giới điểm rơi"** lại là một câu chuyện trong một bộ phim nổi tiếng gắn liền với một sự kiện lịch sử trong chiến tranh thế giới thứ hai.

I. CÂU CHUYỆN CHỌN ĐIỂM RƠI TRONG BỘ PHIM TEHERAN 43

*Bộ phim **Teheran 43** do điện ảnh ba nước Nga, Pháp, Italia hợp tác. Chủ đề của bộ phim nói về tàn dư của Đức quốc xã vẫn còn tồn tại trong thế giới ngày nay. Bộ phim này đã được giải vàng trong Liên hoan phim Matxcova 1980. Một trong những mạch chính của phim nói về âm mưu ám sát ba lãnh tụ đồng minh. Bối cảnh trong phim xảy ra vào mùa hè năm 1943. Mật vụ Sinler đến nhà sát thủ chuyên nghiệp Max để giao nhiệm vụ ám sát ba lãnh tụ đồng minh: **Rudơven, Sơcsin, Stalin**. Chúng ta hãy chú ý đến mẩu đối thoại cực kỳ ngắn gọn đến mức khô khan giữa Max và Sinler:*

Bối cảnh:** Sinler xuất hiện tại nhà Max vào **tháng 7/1943

1. Max chỉ nhìn Sinler và nêu câu hỏi: "Thời gian". Sinler đáp: "Hãy tự tìm lấy".

2. Max nhìn Sinler và hỏi tiếp: "Địa điểm". Sinler đáp: "Ông hãy tự tìm lấy".

3. Max suy nghĩ và lấy quyển lịch niên giám rồi nói: "Tôi đã nghĩ ra rồi".

4. Sau đó Max đã lấy bút chì và viết trên mẩu giấy: "Thời gian họp là 30 – 11" rồi nói thêm địa điểm sẽ là Đại sứ quán Anh tại Teheran (thủ đô của Iran).

***5. Bình luận:** Căn cứ vào diễn biến quân sự trên mặt trận chính của thế giới thứ hai là Nga – Đức và sự kiện Nhật Bản đánh tan nát hạm đội Mỹ tại Trân Châu cảng vào cuối năm 1941 thì cả thế giới đều tin rằng Mỹ sẽ phải nhảy vào cuộc chiến thế giới thứ hai, nhưng người Mỹ cần phải chọn thời điểm thích hợp để giảm thiểu tổn thất mà thu được tối đa cho lợi ích quốc gia. Tiếp theo là một chuỗi các chiến thắng của Hồng quân Xô Viết tại mặt trận Xô - Đức như trận đấu tăng thế kỷ tại vòng cung Cuốc-xcơ, chiến thắng Stalingrad (1943) đã buộc Mỹ phải sớm chọn thời điểm liên kết với hai nước Anh, Nga mở mặt trận đồng minh. Như vậy tất yếu sẽ có một cuộc họp thượng đỉnh giữa ba nước, nhưng thời gian cụ thể của cuộc họp lại là một ẩn số? Max đã phán đoán cả Mỹ, Nga và Anh sẽ phải chọn thời điểm cuộc họp vừa phải theo kịp diễn biến quân sự đang thay đổi từng ngày, vừa phải đảm bảo bối cảnh ngoại giao cho cuộc gặp mặt giữa ba nguyên thủ quốc gia. Căn cứ vào diễn biến quân sự, bối cảnh ngoại giao cần có, Max nhận định cuộc họp sẽ được tiến hành vào cuối năm 1943 và chính xác phải là ngày 30/11/1943. Vì đây chính là ngày sinh nhật của Thủ tướng Anh Sơcsin, một thời điểm vàng đánh dấu mốc son cho sự ra đời của mặt trận đồng minh. Từ đó Max đã luận ra địa điểm cuộc họp phải là một thuộc địa của Anh ở xa chiến trường. Như thế cuộc họp sẽ diễn ra vào ngày 30/11/1943 tại Sứ quán Anh ở Teheran – thủ đô Iran, một thuộc địa của Anh.*

*Vậy là khi mà cả ba nguyên thủ quốc gia mới chỉ có ý định gặp nhau nhưng vẫn chưa chọn được thời gian cũng như địa điểm để ký kết thì "nhà chiêm tinh" Max đã phán đoán trước bốn tháng cả về thời gian lẫn địa điểm cuộc họp. Nhờ phán đoán được **"điểm rơi cuộc họp"**, Max đã bay sang Teheran vào tháng 9/1943, thuê thổ dân đào đường hầm từ ngoại ô Thủ đô Teheran thông với hệ thống hầm của Sứ quán Anh để thực hiện nhiệm vụ mưu sát.*

Mặc dù cuối cùng vụ mưu sát đã không thành (do Max bị lộ thông tin từ cô phiên dịch Mary), nhưng phương pháp suy luận chọn điểm rơi của Max là một điều đáng để chúng ta suy ngẫm.

***6. Kết luận:** Thế giới vật chất luôn vận động và phát triển. Chọn điểm rơi chính là dự đoán sự vật kết thúc ở đâu để điều chỉnh hành động lúc xuất phát.*

II. ĐIỂM RƠI TRONG BẤT ĐẲNG THỨC

1. Ví dụ dẫn: Trước khi đi vào khái niệm "điểm rơi" có tính chất học thuật, mời bạn đọc làm quen với một ví dụ có trong bài kiểm tra khi tác giả đang là học sinh phổ thông. Bài kiểm tra làm trong **15 phút** gồm hai bài toán sau đây:

Bài 1. Có thể có hay không một tam giác có thể chia thành 5 tam giác bằng nhau?

Bài 2. Cho $a, b, c, d > 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$S=\frac{a}{b+c+d}+\frac{b}{c+d+a}+\frac{c}{a+b+b}+\frac{d}{a+b+c}+\frac{b+c+d}{a}+\frac{c+a+d}{b}+\frac{d+a+b}{c}+\frac{a+b+c}{d}$$

Hồi đó cả lớp nhận được ba loại điểm: 0, 5 và 10. Có 2 người đạt điểm 10 và 2 người bị điểm 0. Những người bị điểm 0 và một số bạn được điểm 5 (giải được bài 1) thường mắc sai lầm khi giải bài 2 như sau: Sử dụng bất đẳng thức ***Côsi*** cho 4 cặp 2 số ta có

$$+\begin{cases}\dfrac{a}{b+c+d}+\dfrac{b+c+d}{a}\ge 2\sqrt{\dfrac{a}{b+c+d}\cdot\dfrac{b+c+d}{a}}=2\\[2mm]\dfrac{b}{c+d+a}+\dfrac{c+a+d}{b}\ge 2\sqrt{\dfrac{b}{c+d+a}\cdot\dfrac{c+a+d}{b}}=2\\[2mm]\dfrac{c}{a+b+b}+\dfrac{d+a+b}{c}\ge 2\sqrt{\dfrac{c}{a+b+b}\cdot\dfrac{d+a+b}{c}}=2\\[2mm]\dfrac{d}{a+b+c}+\dfrac{a+b+c}{d}\ge 2\sqrt{\dfrac{d}{a+b+c}\cdot\dfrac{a+b+c}{d}}=2\end{cases}$$

$$S=\frac{a}{b+c+d}+\frac{b}{c+d+a}+\frac{c}{a+b+b}+\frac{d}{a+b+c}+\frac{b+c+d}{a}+\frac{c+a+d}{b}+\frac{d+a+b}{c}+\frac{a+b+c}{d}\ge 8$$

Suy ra Min S = 8.

Cũng có bạn mắc sai lầm nhanh hơn với lời giải sau đây:

Sử dụng bất đẳng thức ***AM – GM*** trực tiếp cho 8 số, ta có:

$$S\ge 8\cdot\sqrt[8]{\frac{a}{b+c+d}\cdot\frac{b}{c+d+a}\cdot\frac{c}{d+a+b}\cdot\frac{d}{a+b+c}\cdot\frac{b+c+d}{a}\cdot\frac{c+d+a}{b}\cdot\frac{d+a+b}{c}\cdot\frac{a+b+c}{d}}=8\Rightarrow Min\,S=8$$

Chúng ta có thể thấy ngay sai lầm này khi xét điều kiện MinS = 8 xảy ra khi và chỉ khi

$\dfrac{a}{b+c+d}=\dfrac{b}{c+d+a}=\dfrac{c}{a+b+b}=\dfrac{d}{a+b+c}=\dfrac{b+c+d}{a}=\dfrac{c+a+d}{b}=\dfrac{d+a+b}{c}=\dfrac{a+b+c}{d}=1$. Hay

$$\text{Min S} = 8 \Leftrightarrow \begin{cases}a=b+c+d\\ b=c+d+a\\ c=d+a+b\\ d=a+b+c\end{cases}\Rightarrow a+b+c+d=3(a+b+c+d)\Rightarrow 1=3 : \text{vô lý}$$

Chúng ta có thể thấy sai lầm bắt nguồn từ sự cẩu thả không kiểm tra kỹ điều kiện xảy ra dấu bằng, một cách hình tượng hơn chúng ta sẽ gọi là điểm rơi trong bất đẳng thức.

2. Đặt vấn đề: Trong các phương pháp chứng minh bất đẳng thức **A ≥ B** ta thường chứng minh theo một trong hai sơ đồ sau:

Sơ đồ 1: Tạo ra dãy các bất đẳng thức trung gian

$$\mathbf{A \geq A_1 \geq A_2 \geq \ldots \geq A_{n-1} \geq A_n \geq B}$$

Sơ đồ 2: Tạo ra các bất đẳng thức bộ phận

$$+\begin{cases} A_1 \geq B_1 \\ A_2 \geq B_2 \\ \ldots\ldots \\ A_n \geq B_n \end{cases} \qquad \text{hoặc} \qquad \times\begin{cases} A_1 \geq B_1 \geq 0 \\ A_2 \geq B_2 \geq 0 \\ \ldots\ldots \\ A_n \geq B_n \geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow A \geq B \qquad\qquad \Rightarrow A \geq B$$

Để tạo ra các bất đẳng thức trung gian hoặc các bất đẳng thức bộ phận ta cần chú ý rằng:

Nếu bất đẳng thức **"Trung ương: A ≥ B"** xảy ra trạng thái **"A = B"** tại **tiêu chuẩn P** nào đó thì tại **tiêu chuẩn P** này tất cả các bất đẳng thức trung gian trong **sơ đồ 1** hoặc các bất đẳng thức bộ phận ***(bất đẳng thức địa phương)*** trong **sơ đồ 2** cũng đồng thời xảy ra dấu bằng.

Muốn tìm được **tiêu chuẩn P** ta cần chú ý tính đối xứng của biến số và điều kiện xảy ra dấu bằng trong các bất đẳng thức cổ điển *AM–GM*; ***Cauchy – Buniakowski – Schwarz (CBS), Bernouli*** hoặc trong các phương pháp mới được đề cập trong cuốn sách như: ***SOS, MV, ABC, EV, GLA, DAC***. Do việc dự đoán điều kiện trạng thái **"A = B"** xảy ra theo một tiêu chuẩn nào đó để định hướng biến đổi đại số và đánh giá các bất đẳng thức trung gian hoặc bộ phận nên có thể gọi các ý tưởng này là: **"Kỹ thuật kiểm tra điều kiện xảy ra dấu bằng"** hoặc có thể gọi một cách ấn tượng hơn là **"Kỹ thuật chọn điểm rơi trong bất đẳng thức"**.

Trong chương I, chúng tôi sẽ giới thiệu rất kỹ về **"Kỹ thuật chọn điểm rơi"** đặc biệt là trong phần giới thiệu về bất đẳng thức *AM – GM* với tựa đề **"Những sắc màu điểm rơi trong bất đẳng thức AM – GM"**. Ở phần này chúng ta sẽ làm quen với **"Kỹ thuật chọn điểm rơi"** từ những ví dụ đơn giản đến những phức tạp với phần bình luận chi tiết trong các bài tập mẫu minh họa.

Trong chương IV chúng ta sẽ được giới thiệu về **"Kỹ thuật chọn điểm rơi"** của các bất đẳng thức đối xứng hoặc hoán vị nhưng có điều kiện dấu bằng xảy ra tại hai trạng thái khác nhau.

III. TÓM TẮT NỘI DUNG

§ 1.1 Giới thiệu về bất đẳng thức AM - GM

1. Dạng tổng quát

2. Các trường hợp đặc biệt

3. Chứng minh

§ 1.2 Những sắc màu điểm rơi trong bất đẳng thức AM – GM

I. Điểm rơi trong đánh giá từ AM sang GM

II. Điểm rơi trong đánh giá từ GM sang AM

III. Nguyên lý đồng bậc trong bất đẳng thức Côsi

IV. Đặc biệt hóa đưa về bất đẳng thức đồng bậc

V. Phối hợp hai bất đẳng thức đồng bậc ngược chiều nhau

VI. Phương pháp chuẩn hóa bất đẳng thức ba biến số

VII. Bất đẳng thức đồng bậc dạng cộng mẫu số

VIII. Bất đẳng thức đồng bậc chứa căn thức

IX. Bất đẳng thức không đồng bậc

X. Đặc biệt hóa bất đẳng thức không đồng bậc

XI. Điểm rơi không đối xứng

XII. Phương pháp cân bằng hệ số

XIII. Kỹ thuật tách phân thức âm và đánh giá mẫu số

XIV. Vẻ đẹp điểm rơi trong bất đẳng thức lượng giác

XV. Một số bài toán chọn lọc ứng dụng điểm rơi

XVI. Các bài tập dành cho bạn đọc tự giải

§1.1. BẤT ĐẲNG THỨC AM – GM

CÁC DẠNG BIỂU DIỄN BẤT ĐẲNG THỨC AM – GM

1. Dạng tổng quát: Giả sử $a_1, a_2, ...a_n$ là n số thực không âm, khi đó ta có:

Dạng 1	Dạng 2	Dạng 3
$\dfrac{a_1+a_2+...+a_n}{n} \ge \sqrt[n]{a_1a_2...a_n}$	$a_1+a_2+...+a_n \ge n.\sqrt[n]{a_1a_2...a_n}$	$\left(\dfrac{a_1+a_2+...+a_n}{n}\right)^n \ge a_1a_2....a_n$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a_1 = a_2 = ... = a_n \ge 0$

2. Hệ quả:

- Nếu $a_1 + a_2 + ... + a_n = S$ **const** thì $Max(a_1a_2...a_n) = \left(\dfrac{S}{n}\right)^n$ xảy ra $\Leftrightarrow a_1 = a_2 = ... = a_n = \dfrac{S}{n}$
- Nếu $a_1a_2...a_n = P$ **const** thì $Min(a_1 + a_2 + ...a_n) = n.\sqrt[n]{P}$ xảy ra $\Leftrightarrow a_1 = a_2 = ... = a_n = \sqrt[n]{P}$

2. Các trường hợp đặc biệt

n	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$
Điều kiện	$\forall\ a, b \ge 0$	$\forall\ a, b, c \ge 0$	$\forall\ a, b, c, d \ge 0$
Dạng 1	$\dfrac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab}$	$\dfrac{a+b+c}{3} \ge \sqrt[3]{abc}$	$\dfrac{a+b+c+d}{4} \ge \sqrt[4]{abcd}$
Dạng 2	$a+b \ge 2.\sqrt{ab}$	$a+b+c \ge 3.\sqrt[3]{abc}$	$a+b+c+d \ge 4.\sqrt[4]{abcd}$
Dạng 3	$\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2 \ge ab$	$\left(\dfrac{a+b+c}{3}\right)^3 \ge abc$	$\left(\dfrac{a+b+c+d}{4}\right)^4 \ge abcd$
Dấu bằng	$a = b$	$a = b = c$	$a = b = c = d$

Bình luận: Khi chứng minh bất đẳng thức, nói chung ta rất ít gặp các bất đẳng thức có dạng cân đối, đầy đủ như các dạng được phát biểu trong lý thuyết mà thường gặp các bất đẳng thức có một vế phức tạp, một vế rút gọn. Cũng giống như khi chứng minh đẳng thức ta phải đánh giá từ vế phức tạp sang vế rút gọn. Các dạng 1, 2, 3 đặt ở cạnh nhau có vẻ tầm thường nhưng việc phân loại chi tiết các dạng 1, 2, 3 giúp chúng ta nhận dạng nhanh và phản ứng linh hoạt hơn khi sử dụng $AM - GM$. Đặc biệt là dạng 3 không chứa căn thức nhắc chúng ta có thể sử dụng $AM - GM$ ngay cả khi không có dấu hiệu căn thức. Ví dụ sau đây sẽ minh họa cho nhận xét này:

Ví dụ: Chứng minh rằng: $16ab(a-b)^2 \le (a+b)^4, \forall a, b \ge 0$ (1)

Phân tích: Ta thường khai triển (1)

$\Leftrightarrow 16ab\left(a^2 - 2ab + b^2\right) \le a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

Khi đó việc phân tích hiệu giữa hai vế thành tổng các bình phương sẽ gặp nhiều khó khăn. Gặp bài toán này chúng ta ít nghĩ ngay đến sử dụng ***AM – GM*** vì thói quen tâm lý hình thức "***chỉ sử dụng AM – GM khi một vế có chứa căn thức***". Tuy nhiên nhờ có dạng 3 mà gợi ý cho chúng ta ***"có thể sử dụng AM – GM ngay cả khi cả hai vế đều không chứa căn thức"***

Giải: $16ab(a-b)^2 = 4(4ab)(a-b)^2 \le 4\left[\dfrac{4ab+(a-b)^2}{2}\right]^2 = 4\left[\dfrac{(a+b)^2}{2}\right]^2 = (a+b)^4$

3. *Chứng minh*: $\dfrac{a_1+a_2+...+a_n}{n} \ge \sqrt[n]{a_1a_2...a_n}$, $\forall a_1, a_2, ...a_n \ge 0$ (1)

Có khoảng **40** cách chứng minh bất đẳng thức (1), sau đây là hai cách chứng minh tiêu biểu:

Cách 1: **Phương pháp quy nạp thông thường:**

• Với $n = 2$: Ta cần chứng minh: $\dfrac{a_1+a_2}{2} \ge \sqrt{a_1a_2}$, $\forall a_1, a_2 \ge 0$. Thật vậy ta có:

$\dfrac{a_1+a_2}{2} - \sqrt{a_1a_2} = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2}\right)^2 \ge 0 \Rightarrow \dfrac{a_1+a_2}{2} \ge \sqrt{a_1a_2}$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a_1 = a_2$.

• Giả sử bất đẳng thức (1) đúng với $n \ge 2$.

Ta phải chứng minh bất đẳng thức (1) đúng với $(n+1)$ số: $a_1, a_2, ...a_n, a_{n+1} \ge 0$

Sử dụng giả thiết quy nạp cho n số: $a_1, a_2, ...a_n \ge 0$ ta có:

$S_{n+1} = \dfrac{(a_1+a_2+...+a_n)+a_{n+1}}{n+1} \ge \dfrac{n.\sqrt[n]{a_1a_2...a_n}+a_{n+1}}{n+1}$.Đặt $\begin{cases} a_1a_2...a_n = p^{n(n+1)} \\ a_{n+1} = q^{n+1}\ \forall p, q \ge 0 \end{cases} \Rightarrow S_{n+1} \ge \dfrac{np^{n+1}+q^{n+1}}{n+1}$

Ta sẽ chứng minh $\dfrac{np^{n+1}+q^{n+1}}{n+1} \ge p^nq = \sqrt[n+1]{a_1a_2...a_na_{n+1}}$ (2) Ta có

$$\frac{np^{n+1}+q^{n+1}}{n+1} - p^nq = \frac{1}{n+1}\left[np^n(p-q) - q\left(p^n - q^n\right)\right]$$

$$= \frac{p-q}{n+1}\left[np^n - q\left(p^{n-1}+p^{n-2}.q+...+q^{n-1}\right)\right]$$

$$= \frac{p-q}{n+1}\left[(p^n - qp^{n-1}) + (p^n - q^2p^{n-2}) + ... + (p^n - q^{n-1}p) + (p^n - q^n)\right]$$

$$= \frac{(p-q)^2}{n+1}\left[p^{n-1} + p^{n-2}(p+q) + ... + p\left(p^{n-2}+p^{n-3}.q+...+q^{n-2}\right) + \left(p^{n-1}+p^{n-2}q+...q^{n-1}\right)\right] \ge 0$$

Như vậy (2) được chứng minh nên suy ra $\dfrac{a_1+a_2+...+a_n+a_{n+1}}{n+1} \ge \sqrt[n+1]{a_1a_2...a_na_{n+1}}$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = a_2 = ... = a_n \\ p = q \end{cases} \Leftrightarrow a_1 = a_2 = ... = a_n = a_{n+1}$

Theo nguyên lý quy nạp suy ra bất đẳng thức đúng với mọi $n \ge 2$, $n \in \mathbb{N}$.

Chú dẫn: Tên gọi ***AM – GM*** là viết tắt của thuật ngữ tiếng Anh ***Arithmetic mean – Geometric mean*** nêu lên bản chất của bất đẳng thức $\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \ge \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n}$ $\forall a_i \ge 0$.

Các sách toán học đã xuất bản ở Việt Nam thường gọi bất đẳng thức trên là bất đẳng thức ***Côsi***. Cách gọi này xuất phát từ việc nhà toán học Pháp ***Côsi (Cauchy)*** là người đầu tiên đã chứng minh bất đẳng thức này và ông đã chứng minh nó bằng một phương pháp quy nạp đặc biệt có thể gọi là phương pháp ***"Quy nạp Côsi"*** (***Quy nạp Tiến Lùi***) . Ý tưởng của phương pháp quy nạp này là:

Bước 1: Kiểm tra mệnh đề đúng với $n = 2$.

Bước 2: Giả sử mệnh đề đúng với $n = k$, chứng minh mệnh đề đúng với $n = 2k$.

Bước 3: Giả sử mệnh đề đúng với $n = p$, chứng minh mệnh đề đúng với $n = p - 1$

Sau đây chúng tôi giới thiệu cách chứng minh ***AM – GM*** của ***Côsi***

Cách 2: **Phương pháp *"Quy nạp Côsi"***

Với $n = 2$: $\frac{a_1 + a_2}{2} - \sqrt{a_1 a_2} = \frac{\left(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2}\right)^2}{2} \ge 0 \Rightarrow \frac{a_1 + a_2}{2} \ge \sqrt{a_1 a_2}$ (đúng)

Giả sử bất đẳng thức đúng với $n = k$, ta sẽ chứng minh bất đẳng thức đúng với $n = 2k$.

Thật vậy xét $2k$ số thực $a_1, a_2, ... a_k, a_{k+1}, ... a_{2k} \ge 0$. Sử dụng giả thiết quy nạp ta có

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_{2k}}{2k} = \frac{1}{2}\left(\frac{a_1 + a_2 + ... + a_k}{k} + \frac{a_{k+1} + ... + a_{2k}}{k}\right) \ge$$

$$\ge \frac{1}{2}\left[\sqrt[k]{a_1 ... a_k} + \sqrt[k]{a_{k+1} ... a_{2k}}\right] \ge \sqrt{\sqrt[k]{a_1 ... a_k}\sqrt[k]{a_{k+1} ... a_{2k}}} = \sqrt[2k]{a_1 a_2 ... a_k ... a_{2k}}$$

Giả sử bất đẳng thức đúng với $n = p$, ta sẽ chứng minh bất đẳng thức đúng với $n = p - 1$.

Thật vậy xét $(p - 1)$ số: $a_1, a_2, ..., a_{p-1} \ge 0$. Sử dụng giả thiết quy nạp với $n = p$ ta có:

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_{p-1} + \sqrt[p-1]{a_1 a_2 ... a_{p-1}}}{p} \ge \sqrt[p]{a_1 ... a_{p-1} . \sqrt[p-1]{a_1 a_2 ... a_{p-1}}} = \sqrt[p-1]{a_1 a_2 ... a_{p-1}}$$

$$\Leftrightarrow a_1 + a_2 + ... + a_{p-1} + \sqrt[p-1]{a_1 a_2 ... a_{p-1}} \ge p . \sqrt[p-1]{a_1 a_2 ... a_{p-1}}$$

$$\Leftrightarrow a_1 + a_2 + ... + a_{p-1} \ge (p-1) . \sqrt[p-1]{a_1 a_2 ... a_{p-1}} \Leftrightarrow \frac{a_1 + a_2 + ... + a_{p-1}}{p-1} \ge \sqrt[p-1]{a_1 a_2 ... a_{p-1}}$$

Theo nguyên lý quy nạp ta có bất đẳng thức đúng với mọi $n \ge 2$, $n \in \mathbb{N}$.

§1.2. NHỮNG SẮC MÀU ĐIỂM RƠI TRONG BẤT ĐẲNG THỨC AM – GM

I. ĐIỂM RƠI TRONG ĐÁNH GIÁ TỪ TRUNG BÌNH CỘNG SANG TRUNG BÌNH NHÂN

Chúng ta cùng bước vào *"thế giới điểm rơi"* với bài toán đơn giản và quen biết sau đây:

Bài toán xuất phát: Cho $a, b > 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$

Giải. Sử dụng bất đẳng thức ***AM – GM:*** $S = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2\sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a}} = 2$. Với $a = b$ thì Min S = 2

Nhận xét: Từ bài toán này ta có thể thay đổi miền xác định để có các bài toán sau đây:

Bài 1. Cho $a \geq 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = a + \frac{1}{a}$

Bình luận và lời giải

• ***Sai lầm thường gặp:*** $S = a + \frac{1}{a} \geq 2\sqrt{a \cdot \frac{1}{a}} = 2 \Rightarrow \text{Min} S = 2$

• ***Nguyên nhân sai lầm:*** $\text{Min} S = 2 \Leftrightarrow a = \frac{1}{a} = 1$ mâu thuẫn với giả thiết $a \geq 3$

• ***Phân tích và tìm tòi lời giải:*** Xét bảng biến thiên của a.$\frac{1}{a}$ và S để dự đoán Min S

a	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	....	30
$\frac{1}{a}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{12}$	....	$\frac{1}{30}$
S	$3\frac{1}{3}$	$4\frac{1}{4}$	$5\frac{1}{5}$	$6\frac{1}{6}$	$7\frac{1}{7}$	$8\frac{1}{8}$	$9\frac{1}{9}$	$10\frac{1}{10}$	$11\frac{1}{11}$	$12\frac{1}{12}$	....	$30\frac{1}{30}$

Nhìn bảng biến thiên ta thấy khi a càng tăng thì $\frac{1}{a}$ càng nhỏ nhưng độ tăng của a rất lớn so với độ giảm của $\frac{1}{a}$ nên khi a càng tăng thì tổng S càng lớn và từ đó dẫn đến dự đoán khi $a = 3$ thì S nhận giá trị nhỏ nhất. Để dễ hiểu và tạo cảm xúc ta sẽ nói rằng

Min S = $\frac{10}{3}$ đạt tại ***"Điểm rơi: a = 3"***.

Do bất đẳng thức ***AM – GM*** xảy ra dấu bằng tại điều kiện các số tham gia phải bằng nhau, nên tại ***"Điểm rơi: a = 3"*** ta không thể sử dụng bất đẳng thức ***AM – GM*** trực tiếp cho 2 số a và $\frac{1}{a}$ vì $3 \neq \frac{1}{3}$. Lúc này ta sẽ giả định sử dụng bất đẳng thức ***AM – GM*** cho cặp số $\left(\frac{a}{\alpha}, \frac{1}{a}\right)$ để tại ***"Điểm rơi: a = 3"*** thì $\frac{a}{\alpha} = \frac{1}{a}$ tức là ta có sơ đồ ***"Điểm rơi"***:

Sơ đồ điểm rơi: $\boxed{a=3} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{a}{\alpha}=\dfrac{3}{\alpha} \\ \dfrac{1}{a}=\dfrac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{1}{3}=\dfrac{3}{\alpha} \Rightarrow \boxed{\alpha=9}$: ***Hệ số điểm rơi***

Từ đó ta biến đổi S theo sơ đồ ***"Điểm rơi"*** được nêu ở trên.

• ***Lời giải đúng:*** $S=a+\dfrac{1}{a}=\left(\dfrac{a}{9}+\dfrac{1}{a}\right)+\dfrac{8a}{9}\ge 2.\sqrt{\dfrac{a}{9}\cdot\dfrac{1}{a}}+\dfrac{8.3}{9}=\dfrac{10}{3}$. Với $a=3$ thì $\text{Min}\,S=\dfrac{10}{3}$

Bài 2. Cho $a \ge 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\mathbf{S}=a+\dfrac{1}{a^2}$

Bình luận và lời giải

• ***Sơ đồ điểm rơi:***

$$\boxed{a=2} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{a}{\alpha}=\dfrac{2}{\alpha} \\ \dfrac{1}{a^2}=\dfrac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{1}{4}=\dfrac{2}{\alpha} \Rightarrow \boxed{\alpha=8}$$: ***Hệ số điểm rơi***

• ***Sai lầm thường gặp:***

$$S=a+\frac{1}{a^2}=\left(\frac{a}{8}+\frac{1}{a^2}\right)+\frac{7a}{8}\ge 2.\sqrt{\frac{a}{8}\cdot\frac{1}{a^2}}+\frac{7a}{8}=\frac{2}{\sqrt{8a}}+\frac{7a}{8}$$

$$\ge \frac{2}{\sqrt{8.2}}+\frac{7.2}{8}=\frac{2}{4}+\frac{7}{4}=\frac{9}{4}.$$ Với $a=2$ thì $\text{Min}\,S=\dfrac{9}{4}$

• ***Nguyên nhân sai lầm:***

Mặc dù ta đã biến đổi S theo điểm rơi $a=2$ và $\text{Min}\,S=\dfrac{9}{4}$ là đáp số đúng nhưng cách giải trên đã mắc sai lầm trong việc đánh giá mẫu số:

"Nếu $a \ge 2$ thì $\dfrac{2}{\sqrt{8a}} \ge \dfrac{2}{\sqrt{8.2}}=\dfrac{2}{4}$ là đánh giá sai"

Để điều chỉnh lời giải sai thành lời giải đúng ta cần phải biến đổi S sao cho khi sử dụng bất đẳng thức ***AM – GM*** sẽ khử hết biến số a ở mẫu số.

• ***Lời giải đúng:*** Biến đổi S và sử dụng bất đẳng thức ***AM – GM*** ta có:

$$S=a+\frac{1}{a^2}=\left(\frac{a}{8}+\frac{a}{8}+\frac{1}{a^2}\right)+\frac{6a}{8}\ge 3.\sqrt[3]{\frac{a}{8}\cdot\frac{a}{8}\cdot\frac{1}{a^2}}+\frac{6.2}{8}=\frac{9}{4}.$$ Với $a=2$ thì $\text{Min}\,S=\dfrac{9}{4}$

Bài 3. Cho $\begin{cases} a,b>0 \\ a+b\le 1 \end{cases}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $S = ab + \dfrac{1}{ab}$

Bình luận và lời giải

• ***Sai lầm thường gặp:*** $S = ab + \dfrac{1}{ab} \ge 2.\sqrt{ab\cdot\dfrac{1}{ab}} = 2 \Rightarrow \text{Min } S = 2$

• ***Nguyên nhân sai lầm:***

$\text{Min } S = 2 \Leftrightarrow ab = \dfrac{1}{ab} = 1 \Rightarrow 1 = \sqrt{ab} \le \dfrac{a+b}{2} \le \dfrac{1}{2} \Rightarrow 1 \le \dfrac{1}{2}$ (Vô lý)

• ***Phân tích và tìm tòi lời giải:***

Biểu thức của S chứa 2 biến số *a*, *b* nhưng nếu đặt $t = ab$ hoặc $t = \dfrac{1}{ab}$ thì $S = t + \dfrac{1}{t}$ là biểu thức chứa 1 biến số. Khi đổi biến số ta sẽ tìm miền xác định cho biến số mới, cụ thể là:

Đặt $t = \dfrac{1}{ab} \Rightarrow ab = \dfrac{1}{t}$ và $t = \dfrac{1}{ab} \ge \dfrac{1}{\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2} \ge \dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2} = 4$

• ***Bài toán trở thành:*** Cho $t \ge 4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = t + \dfrac{1}{t}$

• ***Sơ đồ điểm rơi:***

$$\boxed{t=4} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{t}{\alpha} = \dfrac{4}{\alpha} \\ \dfrac{1}{t} = \dfrac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{1}{4} = \dfrac{4}{\alpha} \Rightarrow \boxed{\alpha = 16}$$: ***Hệ số điểm rơi***

• ***Lời giải tổng hợp:*** Biến đổi và sử dụng bất đẳng thức *AM – GM* ta có:

$S = t + \dfrac{1}{t} = \left(\dfrac{t}{16} + \dfrac{1}{t}\right) + \dfrac{15t}{16} \ge 2.\sqrt{\dfrac{t}{16}\cdot\dfrac{1}{t}} + \dfrac{15.2}{16} = \dfrac{17}{4}$. Với $t = 4$ hay $a = b = \dfrac{1}{2}$ thì $\text{Min } S = \dfrac{17}{4}$

• ***Lời giải thu gọn:***

Do $t = 4 \Leftrightarrow a = b = \dfrac{1}{2}$ nên biến đổi trực tiếp S sử dụng bất đẳng thức *AM – GM* ta có:

$$S = ab + \frac{1}{ab} = \left(ab + \frac{1}{16ab}\right) + \frac{15}{16ab} \ge 2.\sqrt{ab\cdot\frac{1}{16ab}} + \frac{15}{16\left(\frac{a+b}{2}\right)^2} \ge \frac{2}{4} + \frac{15}{4} = \frac{17}{4}.$$

Với $a = b = \dfrac{1}{2}$ thì $\text{Min } S = \dfrac{17}{4}$

Bài 4. Cho a, $b > 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = \frac{a+b}{\sqrt{ab}} + \frac{\sqrt{ab}}{a+b}$

Bình luận và lời giải

• ***Sai lầm thường gặp:*** $S = \frac{a+b}{\sqrt{ab}} + \frac{\sqrt{ab}}{a+b} \ge 2.\sqrt{\frac{a+b}{\sqrt{ab}} \cdot \frac{\sqrt{ab}}{a+b}} = 2 \Rightarrow \text{Min } S = 2$

• ***Nguyên nhân sai lầm:***

$\text{Min } S = 2 \Leftrightarrow \frac{a+b}{\sqrt{ab}} + \frac{\sqrt{ab}}{a+b} = 1 \Rightarrow \sqrt{ab} = a+b \ge 2\sqrt{ab} \Rightarrow 1 \ge 2 \Rightarrow$ Vô lý

• ***Phân tích và tìm tòi lời giải:***

Do S là một biểu thức đối xứng với a,b nên dự đoán Min S đạt tại $a = b > 0$

• ***Sơ đồ điểm rơi:***

$$\boxed{a=b} \Rightarrow \begin{cases} \frac{a+b}{\alpha\sqrt{ab}} = \frac{2a}{\alpha a} = \frac{2}{\alpha} \\ \frac{\sqrt{ab}}{a+b} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{2}{\alpha} \Rightarrow \boxed{\alpha = 4}$$: ***Hệ số điểm rơi***

• ***Lời giải đúng:***

$$S = \frac{a+b}{\sqrt{ab}} + \frac{\sqrt{ab}}{a+b} = \left(\frac{a+b}{4\sqrt{ab}} + \frac{\sqrt{ab}}{a+b}\right) + \frac{3(a+b)}{4.\sqrt{ab}} \ge 2.\sqrt{\frac{a+b}{4.\sqrt{ab}} \cdot \frac{\sqrt{ab}}{a+b}} + \frac{3(a+b)}{4.\sqrt{ab}} = \frac{5}{2}$$

Với $a = b > 0$ thì $\text{Min } S = \frac{5}{2}$

Bài 5. Cho $\begin{cases} a,b,c > 0 \\ a+b+c \le \frac{3}{2} \end{cases}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $S = a+b+c+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$

Bình luận và lời giải

• ***Sai lầm thường gặp:***

$$S = a+b+c+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \ge 6\cdot\sqrt[6]{abc\cdot\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{c}} = 6 \Rightarrow \text{Min } S = 6$$

• ***Nguyên nhân sai lầm:***

$\text{Min } S = 6 \Leftrightarrow a = b = c = \frac{1}{a} = \frac{1}{b} = \frac{1}{c} = 1 \Rightarrow a+b+c = 3 > \frac{3}{2}$ trái với giả thiết.

• ***Phân tích và tìm tòi lời giải:***

Do S là một biểu thức đối xứng với *a, b, c* nên dự đoán Min *S* đạt tại $a=b=c=\frac{1}{2}$

• ***Sơ đồ điểm rơi:***

$$\boxed{a=b=c=\frac{1}{2}} \Rightarrow \begin{cases} a=b=c=\frac{1}{2} \\ \frac{1}{\alpha a}=\frac{1}{\alpha b}=\frac{1}{\alpha c}=\frac{2}{\alpha} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2}=\frac{2}{\alpha} \Rightarrow \boxed{\alpha=4}$$: ***Hệ số điểm rơi***

• ***Lời giải đúng:*** $S=a+b+c+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\left(a+b+c+\frac{1}{4a}+\frac{1}{4b}+\frac{1}{4c}\right)+\frac{3}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq$

$$\geq 6\cdot\sqrt[6]{abc\cdot\frac{1}{4a}\cdot\frac{1}{4b}\cdot\frac{1}{4c}}+\frac{3}{4}\left(3\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{c}}\right)=3+\frac{9}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{abc}}\geq 3+\frac{9}{4}\cdot\frac{1}{\frac{a+b+c}{3}}\geq 3+\frac{9}{4}\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}}=\frac{15}{2}$$

Với $a=b=c=\frac{1}{2}$ thì $\text{Min } S=\frac{15}{2}$.

Bài 6. Cho $\begin{cases} a,b,c>0 \\ a+b+c\leq\frac{3}{2} \end{cases}$. Tìm Min $\mathbf{S}=\sqrt{a^2+\frac{1}{b^2}}+\sqrt{b^2+\frac{1}{c^2}}+\sqrt{c^2+\frac{1}{a^2}}$

Bình luận và lời giải

• ***Sai lầm thường gặp:***

$$S\geq 3\cdot\sqrt[3]{\sqrt{a^2+\frac{1}{b^2}}\cdot\sqrt{b^2+\frac{1}{c^2}}\cdot\sqrt{c^2+\frac{1}{a^2}}}=3\cdot\sqrt[6]{\left(a^2+\frac{1}{b^2}\right)\left(b^2+\frac{1}{c^2}\right)\left(c^2+\frac{1}{a^2}\right)}$$

$$\geq 3\cdot\sqrt[6]{\left(2\sqrt{a^2\cdot\frac{1}{b^2}}\right)\left(2\sqrt{b^2\cdot\frac{1}{c^2}}\right)\left(2\sqrt{c^2\cdot\frac{1}{a^2}}\right)}=3.\sqrt[6]{8}=3\sqrt{2}\Rightarrow \text{Min } S=3\sqrt{2}$$

• ***Nguyên nhân sai lầm:***

$\text{Min } S=3\sqrt{2}\Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{a}=\frac{1}{b}=\frac{1}{c}=1 \Rightarrow a+b+c=3>\frac{3}{2}$ trái với giả thiết.

• ***Phân tích và tìm tòi lời giải:*** Dự đoán Min S đạt tại điểm rơi $a=b=c=\frac{1}{2}$

• ***Sơ đồ điểm rơi:***

$$\boxed{a=b=c=\frac{1}{2}} \Rightarrow \begin{cases} a^2=b^2=c^2=\frac{1}{4} \\ \frac{1}{\alpha a^2}=\frac{1}{\alpha b^2}=\frac{1}{\alpha c^2}=\frac{4}{\alpha} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{4}=\frac{4}{\alpha} \Rightarrow \boxed{\alpha=16}$$: ***Hệ số điểm rơi***

• ***Lời giải đúng:*** Biến đổi S và sử dụng bất đẳng thức $AM-GM$ ta có:

$$S=\sqrt{a^2+\underbrace{\frac{1}{16b^2}+...+\frac{1}{16b^2}}_{16\text{ số}}}+\sqrt{b^2+\underbrace{\frac{1}{16c^2}+...+\frac{1}{16c^2}}_{16\text{ số}}}+\sqrt{c^2+\underbrace{\frac{1}{16a^2}+...+\frac{1}{16a^2}}_{16\text{ số}}}$$

$$\geq\sqrt{17.\sqrt[17]{a^2.\left(\frac{1}{16b^2}\right)^{16}}}+\sqrt{17.\sqrt[17]{b^2.\left(\frac{1}{16c^2}\right)^{16}}}+\sqrt{17.\sqrt[17]{c^2.\left(\frac{1}{16a^2}\right)^{16}}}$$

$$=\sqrt{17}\left[\sqrt[17]{\frac{a}{16^8b^{16}}}+\sqrt[17]{\frac{b}{16^8c^{16}}}+\sqrt[17]{\frac{c}{16^8a^{16}}}\right]\geq\sqrt{17}\left[3\cdot\sqrt[3]{\sqrt[17]{\frac{a}{16^8b^{16}}}\cdot\sqrt[17]{\frac{b}{16^8c^{16}}}\cdot\sqrt[17]{\frac{c}{16^8a^{16}}}}\right]$$

$$=3\sqrt{17}\cdot\sqrt[17]{\frac{1}{16^8a^5b^5c^5}}=\frac{3\sqrt{17}}{2\cdot\sqrt[17]{(2a.2b.2c)^5}}\geq\frac{3\sqrt{17}}{2\cdot\sqrt[17]{\left(\frac{2a+2b+2c}{3}\right)^{15}}}\geq\frac{3\sqrt{17}}{2}$$

Với $a=b=c=\frac{1}{2}$ thì $\text{Min}\,S=\frac{3\sqrt{17}}{2}$

Bài 7. [Macedonia 1999] Cho $a,b,c\geq0$ thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=a+b+c+\frac{1}{abc}$

Bình luận và lời giải

• ***Sai lầm thường gặp:*** $a+b+c+\frac{1}{abc}\geq4\cdot\sqrt[4]{a\cdot b\cdot c\cdot\frac{1}{abc}}=4\Rightarrow\text{Min T}=4$

• ***Nguyên nhân sai lầm:*** $\text{Min T}=4\Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{abc}=1\Rightarrow a^2+b^2+c^2=3$

• ***Phân tích và tìm tòi lời giải:***

Dự đoán điểm rơi của Min T là $a=b=c=\frac{1}{\sqrt3}$, khi đó $\frac{1}{abc}=3\sqrt3$

• ***Sơ đồ điểm rơi:***

$$\boxed{a=b=c=\frac{1}{\sqrt3}}\Rightarrow\begin{cases}a=b=c=\frac{1}{\sqrt3}\\ \frac{1}{\alpha abc}=\frac{3\sqrt3}{\alpha}\end{cases}\Rightarrow\frac{3\sqrt3}{\alpha}=\frac{1}{\sqrt3}\Rightarrow\boxed{\alpha=9}$$: ***Hệ số điểm rơi***

• ***Lời giải đúng:***

$$a+b+c+\frac{1}{9abc}+\frac{8}{9abc}\geq4\cdot\sqrt[4]{a\cdot b\cdot c\cdot\frac{1}{9abc}}+\frac{8}{9\left(\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}\right)^3}=\frac{4}{\sqrt3}+\frac{8}{\sqrt3}=4\sqrt3$$

Bài 8. Cho $a, b, c, d > 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$S = \frac{a}{b+c+d}+\frac{b}{c+d+a}+\frac{c}{a+b+b}+\frac{d}{a+b+c}+\frac{b+c+d}{a}+\frac{c+a+d}{b}+\frac{d+a+b}{c}+\frac{a+b+c}{d}$$

Giải

• ***Sai lầm thường gặp:*** Sử dụng bất đẳng thức ***AM – GM*** trực tiếp cho 8 số

$$S \ge 8\cdot\sqrt[8]{\frac{a}{b+c+d}\cdot\frac{b}{c+d+a}\cdot\frac{c}{d+a+b}\cdot\frac{d}{a+b+c}\cdot\frac{b+c+d}{a}\cdot\frac{c+d+a}{b}\cdot\frac{d+a+b}{c}\cdot\frac{a+b+c}{d}} = 8 \Rightarrow Min\,S = 8$$

• ***Nguyên nhân sai lầm:***

$$\text{Min S} = 8 \Leftrightarrow \begin{cases} a = b+c+d \\ b = c+d+a \\ c = d+a+b \\ d = a+b+c \end{cases} \Rightarrow a+b+c+d = 3(a+b+c+d) \Rightarrow 1 = 3 : \text{vô lý}$$

• ***Phân tích và tìm tòi lời giải:***

Để tìm Min S ta cần chú ý S là một biểu thức đối xứng với a, b, c, d do đó Min S (hoặc Max S) nếu có thường đạt tại **"Điểm rơi tự do"**: $a = b = c = d > 0$.

Vậy ta cho trước $a = b = c = d > 0$ và dự đoán Min S $= \frac{4}{3}+12 = 13\frac{1}{3}$

Từ đó suy ra các đánh giá của các bất đẳng thức bộ phận phải có điều kiện dấu bằng xảy ra là tập con của điều kiện dự đoán: $a = b = c = d > 0$

• ***Sơ đồ điểm rơi:*** Cho $a = b = c = d > 0$ ta có

$$\begin{cases} \frac{a}{b+c+d}=\frac{b}{c+d+a}=\frac{c}{d+a+b}=\frac{d}{a+b+c}=\frac{1}{3} \\ \frac{b+c+d}{\alpha a}=\frac{c+d+a}{\alpha b}=\frac{d+a+b}{\alpha c}=\frac{a+b+c}{\alpha d}=\frac{3}{\alpha} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{3}=\frac{3}{\alpha} \Rightarrow \alpha = 9$$

• ***Lời giải đúng:*** $S = \sum_{cyc}\left(\frac{a}{b+c+d}+\frac{b+c+d}{9a}\right)+\sum_{cyc}\frac{8}{9}\cdot\frac{b+c+d}{9a} \ge$

$$\ge 8\cdot\sqrt[8]{\prod_{cyc}\frac{a}{b+c+d}\cdot\prod_{cyc}\frac{b+c+d}{9a}}+\frac{8}{9}\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{d}{a}+\frac{c}{b}+\frac{d}{b}+\frac{a}{b}+\frac{d}{c}+\frac{a}{c}+\frac{b}{c}+\frac{a}{d}+\frac{b}{d}+\frac{c}{d}\right)$$

$$\ge \frac{8}{3}+\frac{8}{9}\cdot 12\cdot\sqrt[12]{\frac{b}{a}\cdot\frac{c}{a}\cdot\frac{d}{a}\cdot\frac{c}{b}\cdot\frac{d}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}\cdot\frac{a}{c}\cdot\frac{b}{c}\cdot\frac{a}{d}\cdot\frac{b}{d}\cdot\frac{c}{d}} = \frac{8}{3}+\frac{8}{9}.12 = \frac{8}{3}+\frac{32}{3} = \frac{40}{3} = 13\frac{1}{3}$$

Với $a = b = c = d > 0$ thì Min S $= 13\frac{1}{3}$.

Bài 9. Cho $a, b, c, d > 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$S = \left(1+\frac{2a}{3b}\right)\left(1+\frac{2b}{3c}\right)\left(1+\frac{2c}{3d}\right)\left(1+\frac{2d}{3a}\right)$$

Giải

• *Sai lầm thường gặp:*

$$S = \left(1+\frac{2a}{3b}\right)\left(1+\frac{2b}{3c}\right)\left(1+\frac{2c}{3d}\right)\left(1+\frac{2d}{3a}\right) \geq 2\sqrt{\frac{2a}{3b}}\cdot 2\sqrt{\frac{2b}{3c}}\cdot 2\sqrt{\frac{2c}{3d}}\cdot 2\sqrt{\frac{2d}{3a}} = \frac{64}{9} \Rightarrow \operatorname{Min} S = \frac{64}{9}$$

• *Nguyên nhân sai lầm:*

$$\operatorname{Min} S = \frac{64}{9} \Leftrightarrow \quad 1 = \frac{2a}{3b} = \frac{2b}{3c} = \frac{2c}{3d} = \frac{2d}{3a} = \frac{2(a+b+c+d)}{3(a+b+c+d)} = \frac{2}{3} \Rightarrow \text{ Vô lý}$$

• *Phân tích và tìm tòi lời giải:*

Do S là biểu thức đối xứng với a, b, c, d nên dự đoán Min S đạt tại điểm rơi tự do:

$a = b = c = d > 0$, khi đó $S = \left(1+\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{625}{81}$

• *Lời giải đúng:*

Cách 1: Sử dụng bất đẳng thức $AM - GM$ ta có:

$$+\begin{cases} 1+\dfrac{2a}{3b} = \dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{a}{3b}+\dfrac{a}{3b} \geq 5\cdot\sqrt[5]{\left(\dfrac{1}{3}\right)^3\cdot\left(\dfrac{a}{3b}\right)^2} = \dfrac{5}{3}\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{2}{5}} \\ 1+\dfrac{2b}{3c} = \dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{b}{3c}+\dfrac{b}{3c} \geq 5\cdot\sqrt[5]{\left(\dfrac{1}{3}\right)^3\cdot\left(\dfrac{b}{3c}\right)^2} = \dfrac{5}{3}\left(\dfrac{b}{c}\right)^{\frac{2}{5}} \\ 1+\dfrac{2c}{3d} = \dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{c}{3d}+\dfrac{c}{3d} \geq 5\cdot\sqrt[5]{\left(\dfrac{1}{3}\right)^3\cdot\left(\dfrac{c}{3d}\right)^2} = \dfrac{5}{3}\left(\dfrac{c}{d}\right)^{\frac{2}{5}} \\ 1+\dfrac{2d}{3a} = \dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{d}{3a}+\dfrac{d}{3a} \geq 5\cdot\sqrt[5]{\left(\dfrac{1}{3}\right)^3\cdot\left(\dfrac{d}{3a}\right)^2} = \dfrac{5}{3}\left(\dfrac{d}{a}\right)^{\frac{2}{5}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow S = \left(1+\frac{2a}{3b}\right)\left(1+\frac{2b}{3c}\right)\left(1+\frac{2c}{3d}\right)\left(1+\frac{2d}{3a}\right) \geq \frac{625}{81}\cdot\left(\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{d}\cdot\frac{d}{a}\right)^{\frac{2}{5}} = \frac{625}{81}$$

Với $a = b = c = d > 0$ thì Min S $= \dfrac{625}{81}$

Cách 2: Sử dụng bất đẳng thức $AM - GM$ ta có:

$$S = \left(1+\frac{2a}{3b}\right)\left(1+\frac{2b}{3c}\right)\left(1+\frac{2c}{3d}\right)\left(1+\frac{2d}{3a}\right) = \frac{1}{81}\prod_{cyc}\frac{2a+3b}{b} = \frac{1}{81}\prod_{cyc}\frac{a+a+b+b+b}{b} \geq$$

$$\geq \frac{1}{81}\prod_{cyc}\frac{5\sqrt[5]{a.a.b.b.b}}{b} = \frac{1}{81}\,\frac{625abcd}{abcd} = \frac{625}{81}$$

Bài 10. Cho $\begin{cases} x, y > 0 \\ x + y = 1 \end{cases}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = \dfrac{x}{\sqrt{1-x}} + \dfrac{y}{\sqrt{1-y}}$

Giải

Biến đổi biểu thức S và sử dụng bất đẳng thức *AM – GM* ta có:

$$S = \frac{x}{\sqrt{y}} + \frac{y}{\sqrt{x}} = \left(\frac{x}{\sqrt{y}} + \sqrt{y}\right) + \left(\frac{y}{\sqrt{x}} + \sqrt{x}\right) - \left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right) \geq 2\sqrt{x} + 2\sqrt{y} - \left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right) = \sqrt{x} + \sqrt{y} \quad (1)$$

Mặt khác viết lại $S = \dfrac{x}{\sqrt{1-x}} + \dfrac{y}{\sqrt{1-y}} = \dfrac{1-y}{\sqrt{y}} + \dfrac{1-x}{\sqrt{x}} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt{y}}\right) - \left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right) \quad (2).$

Từ (1) và (2) suy ra

$$2S \geq \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} \geq \frac{2}{\sqrt[4]{xy}} \geq \frac{2}{\sqrt{\dfrac{x+y}{2}}} = 2\sqrt{2} \Rightarrow S \geq \sqrt{2}.$$ Với $x = y = \dfrac{1}{2}$ thì Min $S = \sqrt{2}$.

Bài 11. Cho $a, b, c \geq 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \sqrt[4]{\frac{a}{b+c}} + \sqrt[4]{\frac{b}{c+a}} + \sqrt[4]{\frac{c}{a+b}} + \sqrt{\frac{b+c}{a}} + \sqrt{\frac{c+a}{b}} + \sqrt{\frac{a+b}{c}}$$

Giải

Sử dụng bất đẳng thức *AM – GM* ta có

$$2P = \left(\sqrt[4]{\frac{a}{b+c}} + \sqrt[4]{\frac{a}{b+c}} + \frac{1}{\sqrt[4]{8}}\sqrt{\frac{b+c}{a}}\right) + \left(\sqrt[4]{\frac{b}{c+a}} + \sqrt[4]{\frac{b}{c+a}} + \frac{1}{\sqrt[4]{8}}\sqrt{\frac{c+a}{b}}\right) +$$

$$+\left(\sqrt[4]{\frac{c}{a+b}} + \sqrt[4]{\frac{c}{a+b}} + \frac{1}{\sqrt[4]{8}}\sqrt{\frac{a+b}{c}}\right) + \left(2 - \frac{1}{\sqrt[4]{8}}\right)\left(\sqrt{\frac{b+c}{a}} + \sqrt{\frac{c+a}{b}} + \sqrt{\frac{a+b}{c}}\right)$$

$$\geq 3.\sqrt[3]{\sqrt[4]{\frac{a}{b+c}}.\sqrt[4]{\frac{a}{b+c}}.\frac{1}{\sqrt[4]{8}}\sqrt{\frac{b+c}{a}}} + 3.\sqrt[3]{\sqrt[4]{\frac{b}{c+a}}.\sqrt[4]{\frac{b}{c+a}}.\frac{1}{\sqrt[4]{8}}\sqrt{\frac{c+a}{b}}} +$$

$$+3.\sqrt[3]{\sqrt[4]{\frac{c}{a+b}}.\sqrt[4]{\frac{c}{a+b}}.\frac{1}{\sqrt[4]{8}}\sqrt{\frac{a+b}{c}}} + \left(2 - \frac{1}{\sqrt[4]{8}}\right)\left(3.\sqrt[6]{\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}}\right)$$

$$\geq \frac{3}{\sqrt[4]{2}} + \frac{3}{\sqrt[4]{2}} + \frac{3}{\sqrt[4]{2}} + \left(2 - \frac{1}{\sqrt[4]{8}}\right).3.\sqrt[6]{\frac{2\sqrt{ab}.2\sqrt{bc}.2\sqrt{ca}}{abc}} =$$

$$= \frac{9}{\sqrt[4]{2}} + \left(2 - \frac{1}{\sqrt[4]{8}}\right).3\sqrt{2} = \frac{6}{\sqrt[4]{2}} + 6\sqrt{2} \Rightarrow P \geq \frac{3}{\sqrt[4]{2}} + 3\sqrt{2}.$$

Với $a = b = c$ thì $Min\, P = \dfrac{3}{\sqrt[4]{2}} + 3\sqrt{2}.$

II. ĐIỂM RƠI TRONG ĐÁNH GIÁ TỪ GM SANG AM

Nhận xét: Xét bất đẳng thức ***AM – GM***: $\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n} \ge \sqrt[n]{a_1a_2...a_n}$, $\forall a_1, a_2, ...a_n \ge 0$

Để ý rằng trong vế phải (vế yếu) của bất đẳng thức trên tức là biểu thức ***GM*** có số các thừa số trong căn thức đúng bằng chỉ số căn thức (cùng bằng n). Do đó, khi gặp bất đẳng thức mà vế yếu của bất đẳng thức có chứa căn thức và số các thừa số ở trong căn thức nhỏ hơn chỉ số căn thức thì ta cần nhân thêm các hằng số thích hợp để số các thừa số trong căn thức bằng chỉ số của căn thức. Để xác định được các hằng số thích hợp chúng ta phải dự đoán được dấu bằng của bất đẳng thức nên kỹ thuật này có tên gọi điểm rơi trong đánh giá từ ***GM*** sang ***AM***.

Bài 1. Cho $\begin{cases} a,b,c \ge 0 \\ a+b+c=1 \end{cases}$. Tìm giá trị lớn nhất của $S = \sqrt[3]{a+b} + \sqrt[3]{b+c} + \sqrt[3]{c+a}$

Phân tích và tìm tòi lời giải

• ***Sai lầm thường gặp:***

$$+\begin{cases} \sqrt[3]{a+b} = \sqrt[3]{(a+b).1.1} \le \dfrac{a+b+1+1}{3} \\ \sqrt[3]{b+c} = \sqrt[3]{(b+c).1.1} \le \dfrac{b+c+1+1}{3} \\ \sqrt[3]{c+a} = \sqrt[3]{(c+a).1.1} \le \dfrac{c+a+1+1}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow S = \sqrt[3]{a+b} + \sqrt[3]{b+c} + \sqrt[3]{c+a} \le \frac{2(a+b+c)+6}{3} = \frac{8}{3} \quad \Rightarrow \text{Max } S = \frac{8}{3}$$

• ***Nguyên nhân sai lầm:***

$$Max\, S = \frac{8}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=1 \\ b+c=1 \\ c+a=1 \end{cases} \Rightarrow 2(a+b+c) = 3 \Leftrightarrow 2 = 3 \Rightarrow \text{vô lý}$$

• ***Dự đoán và tìm điểm rơi của Max S:***

Vì S là một biểu thức đối xứng với a, b, c nên Max S đạt tại điều kiện

$$\begin{cases} a=b=c \\ a+b+c=1 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{3} \Leftrightarrow a+b=b+c=c+a=\frac{2}{3}$$

• ***Lời giải đúng:*** Sử dụng biến đổi và bất đẳng thức ***AM – GM*** ta có

$$+\begin{cases}\sqrt[3]{a+b}=\sqrt[3]{\dfrac{9}{4}}\cdot\sqrt[3]{(a+b)\cdot\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{2}{3}}\le\sqrt[3]{\dfrac{9}{4}}\cdot\dfrac{(a+b)+\dfrac{2}{3}+\dfrac{2}{3}}{3}\\ \sqrt[3]{b+c}=\sqrt[3]{\dfrac{9}{4}}\cdot\sqrt[3]{(b+c)\cdot\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{2}{3}}\le\sqrt[3]{\dfrac{9}{4}}\cdot\dfrac{(b+c)+\dfrac{2}{3}+\dfrac{2}{3}}{3}\\ \sqrt[3]{c+a}=\sqrt[3]{\dfrac{9}{4}}\cdot\sqrt[3]{(c+a)\cdot\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{2}{3}}\le\sqrt[3]{\dfrac{9}{4}}\cdot\dfrac{(c+a)+\dfrac{2}{3}+\dfrac{2}{3}}{3}\end{cases}$$

$$\Rightarrow S=\sqrt[3]{a+b}+\sqrt[3]{b+c}+\sqrt[3]{c+a}\le\sqrt[3]{\frac{9}{4}}\cdot\frac{2(a+b+c)+4}{3}=\sqrt[3]{\frac{9}{4}}\cdot\frac{6}{3}=\sqrt[3]{18}$$

Với $a+b=b+c=c+a=\dfrac{2}{3}\Leftrightarrow a=b=c=\dfrac{1}{3}$, Max $S=\sqrt[3]{18}$

Bài 2. Cho $\begin{cases}a,b,c>0\\ a+b+c=3\end{cases}$ Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$\mathbf{S}=\sqrt[3]{a(b+2c)}+\sqrt[3]{b(c+2a)}+\sqrt[3]{c(a+2b)}$$

Phân tích và tìm tòi lời giải

• ***Dự đoán và tìm điểm rơi của Max S:***

Vì S là một biểu thức đối xứng với a, b, c nên Max S đạt tại điều kiện

$$\begin{cases}a=b=c\\ a+b+c=3\end{cases}\Leftrightarrow a=b=c=1\Rightarrow\begin{cases}3a=3b=3c=3\\ b+2c=c+2a=a+2b=3\end{cases}$$

• ***Lời giải đúng:***

$$+\begin{cases}\sqrt[3]{a(b+2c)}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{9}}\cdot\sqrt[3]{3a(b+2c).3}\le\dfrac{1}{\sqrt[3]{9}}\cdot\dfrac{3a+(b+2c)+3}{3}\\ \sqrt[3]{b(c+2a)}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{9}}\cdot\sqrt[3]{3b(c+2a).3}\le\dfrac{1}{\sqrt[3]{9}}\cdot\dfrac{3b+(c+2a)+3}{3}\\ \sqrt[3]{c(a+2b)}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{9}}\cdot\sqrt[3]{3c(a+2b).3}\le\dfrac{1}{\sqrt[3]{9}}\cdot\dfrac{3c+(a+2b)+3}{3}\end{cases}$$

$$\Rightarrow S=\sqrt[3]{a(b+2c)}+\sqrt[3]{b(c+2a)}+\sqrt[3]{c(a+2b)}\le\frac{1}{\sqrt[3]{9}}\cdot\frac{6(a+b+c)+9}{3}=3\cdot\sqrt[3]{3}$$

Với $a=b=c=1$, Max $S=3.\sqrt[3]{3}$

Bài 3. Cho $\begin{cases}a,b,c>0\\ a^2+b^2+c^2=12\end{cases}$ Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$\mathbf{S}=a\cdot\sqrt[3]{b^2+c^2}+b\cdot\sqrt[3]{c^2+a^2}+c\cdot\sqrt[3]{a^2+b^2}$$

Phân tích và tìm tòi lời giải

• ***Dự đoán và tìm điểm rơi của Max S:***

Vì S là một biểu thức đối xứng với a, b, c nên Max S đạt tại điều kiện

$$\begin{cases} a=b=c>0 \\ a^2+b^2+c^2=12 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c=2 \Rightarrow \begin{cases} 2a^2=2b^2=2c^2=8 \\ b^2+c^2=c^2+a^2=a^2+b^2=8 \end{cases}$$

• ***Lời giải đúng:***

$$+\begin{cases} a\cdot\sqrt[3]{b^2+c^2}=\sqrt[6]{a^6\left(b^2+c^2\right)^2}=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt[6]{\left(2a^2\right)^3\left(b^2+c^2\right)^2.8}\le\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{6a^2+2\left(b^2+c^2\right)+8}{6} \\ b\cdot\sqrt[3]{c^2+a^2}=\sqrt[6]{b^6\left(c^2+a^2\right)^2}=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt[6]{\left(2b^2\right)^3\left(c^2+a^2\right)^2.8}\le\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{6b^2+2\left(c^2+a^2\right)+8}{6} \\ c\cdot\sqrt[3]{a^2+b^2}=\sqrt[6]{c^6\left(a^2+b^2\right)^2}=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt[6]{\left(2c^2\right)^3\left(a^2+b^2\right)^2.8}\le\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{6c^2+2\left(a^2+b^2\right)+8}{6} \end{cases}$$

$$\Rightarrow S=a\cdot\sqrt[3]{b^2+c^2}+b\cdot\sqrt[3]{c^2+a^2}+c\cdot\sqrt[3]{a^2+b^2}\le\frac{1}{2}\cdot\frac{10\left(a^2+b^2+c^2\right)+24}{6}=12$$

Với $a=b=c=2$, Max $S=12$

Bài 4. Cho $a\ge 2$; $b\ge 6$; $c\ge 12$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$S=\frac{bc\sqrt{a-2}+ca\cdot\sqrt[3]{b-6}+ab\cdot\sqrt[4]{c-12}}{abc}$$

Giải

$$+\begin{cases} bc\sqrt{a-2}=\dfrac{bc}{\sqrt{2}}\sqrt{(a-2).2}\le\dfrac{bc}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{(a-2)+2}{2}=\dfrac{abc}{2\sqrt{2}} \\ ca\cdot\sqrt[3]{b-6}=\dfrac{ca}{\sqrt[3]{9}}\cdot\sqrt[3]{(b-6).3.3}\le\dfrac{ca}{\sqrt[3]{9}}\cdot\dfrac{(b-6)+3+3}{2}=\dfrac{abc}{2.\sqrt[3]{9}} \\ ab\cdot\sqrt[4]{c-12}=\dfrac{ab}{\sqrt[4]{64}}\cdot\sqrt[4]{(c-12).4.4.4}\le\dfrac{ab}{\sqrt[4]{64}}\cdot\dfrac{(c-12)+4+4+4}{4}=\dfrac{abc}{8.\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow S\le\frac{1}{abc}\cdot\left(\frac{abc}{2\sqrt{2}}+\frac{abc}{8\sqrt{2}}+\frac{abc}{3.\sqrt[3]{9}}\right)=\frac{5}{8\sqrt{2}}+\frac{1}{2.\sqrt[3]{9}}$$

Với $\begin{cases} a-2=2 \\ b-6=3 \\ c-12=4 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a=4 \\ b=9 \\ c=16 \end{cases}$, Max $S=\dfrac{5}{8\sqrt{2}}+\dfrac{1}{3.\sqrt[3]{9}}$

Bài 5. Cho $0 < a, b, c \le 1$. Chứng minh rằng $\dfrac{1}{a+b+c} \ge \dfrac{1}{3} + (1-a)(1-b)(1-c)$ (1)

Chứng minh

Không mất tính tổng quát, giả sử $0 < a \le b \le c \le 1$. Khi đó bất đẳng thức (1) tương đương với

$$\frac{1}{a+b+c} - \frac{1}{3} \ge (1-a)(1-b)(1-c) \Leftrightarrow \frac{(1-a)+(1-b)+(1-c)}{3(a+b+c)} \ge (1-a)(1-b)(1-c) \quad (2)$$

Do $1-a \ge 1-b \ge 1-c \ge 0$ nên $VT(2) \ge \dfrac{3(1-c)}{3(a+b+c)} = \dfrac{1-c}{a+b+c}$.

Vậy (2) đúng nếu ta chứng minh được $\dfrac{1}{a+b+c} \ge (1-a)(1-b) \Leftrightarrow (1-a)(1-b)(a+b+c) \le 1$.

Theo ***AM – GM***: $(1-a)(1-b)(a+b+c) \le \left(\dfrac{1-a+1-b+a+b+c}{3}\right)^3 = \left(\dfrac{2+c}{3}\right)^3 \le \left(\dfrac{3}{3}\right)^3 = 1$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = 1$.

Bài 6. Chứng minh rằng: $S = 1 + \sqrt{\dfrac{2+1}{2}} + \sqrt[3]{\dfrac{3+1}{3}} + \ldots + \sqrt[n]{\dfrac{n+1}{n}} < n+1$

Chứng minh

Xét đánh giá đại diện $\sqrt[k]{\dfrac{k+1}{k}} = \sqrt[k]{\dfrac{k+1}{k} \cdot \underbrace{1 \ldots 1}_{k-1}} < \dfrac{1}{k}\left[\dfrac{k+1}{k} + (k-1)\right] = 1 + \dfrac{1}{k^2}$.

Suy ra $S < 1 + \left(1 + \dfrac{1}{2^2}\right) + \left(1 + \dfrac{1}{3^2}\right) + \ldots + \left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right) = n + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \ldots + \dfrac{1}{n^2}$

$$< n + \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \ldots + \frac{1}{(n-1)\times n} = n + \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = n + \left(1 - \frac{1}{n}\right) < n+1$$

Bài 7. Chứng minh rằng: $\sqrt[n]{1 + \dfrac{\sqrt[n]{n}}{n}} + \sqrt[n]{1 - \dfrac{\sqrt[n]{n}}{n}} < 2$

Chứng minh

$$+\begin{cases} \sqrt[n]{1 + \dfrac{\sqrt[n]{n}}{n}} = \sqrt[n]{\left(1 + \dfrac{\sqrt[n]{n}}{n}\right).\underbrace{1 \ldots 1}_{n-1}} < \dfrac{1}{n}\left[\left(1 + \dfrac{\sqrt[n]{n}}{n}\right) + (n-1)\right] = 1 + \dfrac{\sqrt[n]{n}}{n^2} \\ \sqrt[n]{1 - \dfrac{\sqrt[n]{n}}{n}} = \sqrt[n]{\left(1 - \dfrac{\sqrt[n]{n}}{n}\right).\underbrace{1 \ldots 1}_{n-1}} < \dfrac{1}{n}\left[\left(1 - \dfrac{\sqrt[n]{n}}{n}\right) + (n-1)\right] = 1 - \dfrac{\sqrt[n]{n}}{n^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sqrt[n]{1 + \frac{\sqrt[n]{n}}{n}} + \sqrt[n]{1 - \frac{\sqrt[n]{n}}{n}} < \left(1 + \frac{\sqrt[n]{n}}{n^2}\right) + \left(1 - \frac{\sqrt[n]{n}}{n^2}\right) = 2.$$

III. ĐIỂM RƠI TỰ DO HAY NGUYÊN LÝ ĐỒNG BẬC TRONG BẤT ĐẲNG THỨC CÔSI

Các bất đẳng thức đề cập trong kỹ thuật này được minh họa bởi các hàm đa thức với ba biến số a, b, c > 0, mà không làm giảm bản chất và tính khái quát của vấn đề. Chúng ta sẽ tiếp cận kỹ thuật này từ những vấn đề đơn giản nhất.

1. Bậc của đơn thức: Đơn thức $a^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma}$ có bậc là $(\alpha + \beta + \gamma)$

Ví dụ: Các đơn thức bậc 3: $a^3, b^3, c^3, a^2b, b^2c, c^2a, \frac{a^4}{b}, \frac{b^4}{c}, \frac{c^4}{a}, \frac{a^5}{b^2}, \frac{b^5}{c^2}, \frac{c^5}{a^2},$

$$\frac{a^5}{bc}, \frac{a^6}{b^3}, \frac{a^6}{b^2c}, \frac{a^7}{b^4}, \frac{a^7}{bc^3}, \frac{a^7}{b^2c^2}, a^2\sqrt{bc}; \sqrt{a^5b}; \sqrt{a^4bc}; \sqrt[3]{a^5b^3c}; \sqrt{\frac{a^9}{b^2c}}; \sqrt[3]{\frac{a^7b^4}{c^5}}; \frac{c^4}{\sqrt{ab}} \ldots$$

Như vậy có vô số các đơn thức bậc 3 biểu diễn qua 3 biến số a, b, c và tổng quát ta có vô số các đơn thức bậc k cho trước biểu diễn qua 3 biến số a, b, c.

2. Tại sao phải so sánh các biểu thức đồng bậc

Giả sử ta phải so sánh 2 đa thức không đồng bậc chẳng hạn xét bài toán sau đây:

Bài toán: ***Chứng minh rằng*** $\forall a,b,c > 0$ ta có: $a^{2000} + b^{2000} + c^{2000} \geq a + b + c$ (*)

Phân tích: Giả sử (*) đúng, khi đó cho a = b = c = x > 0

ta có (*) $\Leftrightarrow 3x^{2000} \geq 3x \Leftrightarrow \mathbf{x^{2000} \geq x}$

Do bất đẳng thức $x^{2000} \geq x$ đúng nếu $x \geq 1$ và $x^{2000} \geq x$ sai nếu $x \in (0, 1)$ nên suy ra:

- Nếu a, b, c > 0 thì bất đẳng thức $a^{2000} + b^{2000} + c^{2000} \geq a + b + c$ không đúng
- Nếu co hẹp miền xác định: $a, b, c \geq 1$ thì $a^{2000} \geq a$, $b^{2000} \geq b$, $c^{2000} \geq c$ và ta có bất đẳng thức rất tầm thường: $a^{2000} + b^{2000} + c^{2000} \geq a+b+c \ \forall a,b,c \geq 1$
- Nếu co hẹp miền xác định: $a, b, c \in (0,1)$ thì $a^{2000} < a$, $b^{2000} < b$, $c^{2000} < c$ và ta cũng có bất đẳng thức rất tầm thường: $a^{2000} + b^{2000} + c^{2000} < a+b+c \ \forall a,b,c \in (0,1)$

• ***Kết luận:*** Không nên đặt vấn đề so sánh các đa thức không đồng bậc trên miền xác định là $\mathbb{R}^+$. Vì có vô số cách biểu diễn các đơn thức có cùng bậc k cho trước nên các bài toán dưới đây đặt vấn đề là so sánh các hàm đa thức đồng bậc với bậc của các đơn thức được biểu diễn bởi những trạng thái khác nhau.

3. Nguyên lý chung:

Các bất đẳng thức trong mục này đều được chứng minh theo đường lối tách thành các bất đẳng thức bộ phận. Do bất đẳng thức đã cho xảy ra đẳng thức tại các biến số bằng nhau và chạy khắp $\mathbb{R}^+$ nên các bất đẳng thức bộ phận cũng xảy ra đẳng thức tại các biến số bằng nhau và chạy khắp $\mathbb{R}^+$. Khi đó nếu sử dụng bất đẳng thức ***AM – GM*** thì ta thường lấy đại diện một đơn thức ở vế lớn rồi cộng thêm với các đơn thức đồng bậc với đơn thức đại diện này. Các bài tập sau đây sẽ minh họa cho các bất đẳng thức ba biến số với các bậc cụ thể nhưng không làm mất đi tính tổng quát của vấn đề.

34 Kim Cương.

Bài 1. Chứng minh rằng: $\dfrac{a^2}{b}+\dfrac{b^2}{c}+\dfrac{c^2}{a}\ge a+b+c, \forall a,b,c>0$

Chứng minh

Nhận xét: Cả hai vế là các biểu thức bậc 1 nên biểu thức cộng thêm cũng là bậc 1

Sử dụng bất đẳng thức ***AM – GM*** ta có

$$\left(\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\right)+(a+b+c)=\sum_{cyc}\left(\frac{a^2}{b}+b\right)\ge\sum_{cyc}2\cdot\sqrt{\frac{a^2}{b}\cdot b}=2(a+b+c)\Rightarrow \text{(đpcm)}$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c>0$

Bài 2. Chứng minh rằng: $\dfrac{a^3}{b^2}+\dfrac{b^3}{c^2}+\dfrac{c^3}{a^2}\ge a+b+c, \forall a,b,c>0$

Chứng minh

Nhận xét: Cả hai vế là các biểu thức bậc 1 nên biểu thức cộng thêm cũng là bậc 1

Sử dụng bất đẳng thức ***AM – GM*** ta có

$$\left(\frac{a^3}{b^2}+\frac{b^3}{c^2}+\frac{c^3}{a^2}\right)+2(a+b+c)=\sum_{cyc}\left(\frac{a^3}{b^2}+b+b\right)\ge\sum_{cyc}3.\sqrt[3]{\frac{a^3}{b^2}\cdot b\cdot b}=3(a+b+c)$$

$\Rightarrow \dfrac{a^3}{b^2}+\dfrac{b^3}{c^2}+\dfrac{c^3}{a^2}\ge a+b+c$. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c>0$

Bài 3. Chứng minh rằng: $\dfrac{a^3}{b^2}+\dfrac{b^3}{c^2}+\dfrac{c^3}{a^2}\ge\dfrac{a^2}{b}+\dfrac{b^2}{c}+\dfrac{c^2}{a}, \ \forall a,b,c>0$

Chứng minh

Nhận xét: Cả hai vế là các biểu thức bậc 1 nên biểu thức cộng thêm cũng là bậc 1

•***Lời giải 1:*** •**Bổ đề:** $\dfrac{a^2}{b}+\dfrac{b^2}{c}+\dfrac{c^2}{a}\ge a+b+c, \forall a,b,c>0$

Áp dụng: $\left(\dfrac{a^3}{b^2}+\dfrac{b^3}{c^2}+\dfrac{c^3}{a^2}\right)+(a+b+c)=\displaystyle\sum_{cyc}\left(\frac{a^3}{b^2}+a\right)\ge\sum_{cyc}2\sqrt{\frac{a^3}{b^2}\cdot a}=2\left(\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\right)$

$\Rightarrow \dfrac{a^3}{b^2}+\dfrac{b^3}{c^2}+\dfrac{c^3}{a^2}\ge\dfrac{a^2}{b}+\dfrac{b^2}{c}+\dfrac{c^2}{a}$. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c>0$

• ***Lời giải 2:*** • **Bổ đề:** $x^3+y^3\ge xy(x+y) \quad \forall x,y>0$

Áp dụng:

$$\left(\frac{a^3}{b^2}+\frac{b^3}{c^2}+\frac{c^3}{a^2}\right)+(a+b+c)=\sum_{cyc}\left(\frac{a^3}{b^2}+b\right)=\sum_{cyc}\frac{a^3+b^3}{b^2}\ge\sum_{cyc}\frac{ab(a+b)}{b^2}=\sum_{cyc}\left(\frac{a^2}{b}+a\right)$$

$\Rightarrow \dfrac{a^3}{b^2}+\dfrac{b^3}{c^2}+\dfrac{c^3}{a^2}\ge\dfrac{a^2}{b}+\dfrac{b^2}{c}+\dfrac{c^2}{a}$. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c>0$

Bài 4. [Canada MO 2002] Chứng minh: $\frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ca}+\frac{c^3}{ab} \ge a+b+c,\ \forall a,b,c>0$

Chứng minh

Nhận xét: Cả hai vế là các biểu thức bậc 1 nên biểu thức cộng thêm cũng là bậc 1

Sử dụng bất đẳng thức $AM-GM$ ta có

$$\frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ca}+\frac{c^3}{ab}+2(a+b+c)=\sum_{cyc}\left(\frac{a^3}{bc}+b+c\right)\ge\sum_{cyc}3\cdot\sqrt[3]{\frac{a^3}{bc}\cdot b\cdot c}=3(a+b+c)$$

$\Rightarrow \frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ca}+\frac{c^3}{ab}\ge a+b+c$. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c>0$

Bài 5. Chứng minh rằng: $\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\ge ab+bc+ca,\forall a,b,c>0$

Chứng minh

Nhận xét: Cả hai vế là các biểu thức bậc 2 nên biểu thức cộng thêm cũng là bậc 2

Sử dụng bất đẳng thức $AM-GM$ ta có

$$2\left(\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\right)+(ab+bc+ca)=\sum_{cyc}\left(\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+bc\right)\ge\sum_{cyc}3.\sqrt[3]{\frac{a^3}{b}\cdot\frac{b^3}{c}\cdot bc}=3(ab+bc+ca)$$

$\Rightarrow \frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\ge ab+bc+ca$. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c>0$

Bài 6. Chứng minh rằng: $\frac{a^5}{b^3}+\frac{b^5}{c^3}+\frac{c^5}{a^3}\ge a^2+b^2+c^2,\forall a,b,c>0$

Chứng minh

Nhận xét: Cả hai vế là các biểu thức bậc 2 nên biểu thức cộng thêm cũng là bậc 2

Sử dụng bất đẳng thức $AM-GM$ ta có

$$2\left(\frac{a^5}{b^3}+\frac{b^5}{c^3}+\frac{c^5}{a^3}\right)+3\left(a^2+b^2+c^2\right)=\sum_{cyc}\left(\frac{a^5}{b^3}+\frac{a^5}{b^3}+b^2+b^2+b^2\right)$$

$$\ge\sum_{cyc}5.\sqrt[5]{\frac{a^5}{b^3}\cdot\frac{a^5}{b^3}\cdot b^2\cdot b^2\cdot b^2}=5\left(a^2+b^2+c^2\right)$$

$\Rightarrow \frac{a^5}{b^3}+\frac{b^5}{c^3}+\frac{c^5}{a^3}\ge a^2+b^2+c^2$. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c>0$

Bài 7. Chứng minh rằng: $\frac{a^5}{b^3}+\frac{b^5}{c^3}+\frac{c^5}{a^3}\ge\frac{a^4}{b^2}+\frac{b^4}{c^2}+\frac{c^4}{a^2}, \forall a,b,c>0$

Chứng minh

Nhận xét: Cả hai vế là các biểu thức bậc 2 nên biểu thức cộng thêm cũng là bậc 2

Sử dụng bất đẳng thức $AM-GM$ ta có

$$4\left(\frac{a^5}{b^3}+\frac{b^5}{c^3}+\frac{c^5}{a^3}\right)+(a^2+b^2+c^2)=\sum_{cyc}\left(4\cdot\frac{a^5}{b^3}+b^2\right)\ge\sum_{cyc}5.\sqrt[5]{\left(\frac{a^5}{b^3}\right)^4\cdot b^2}=5\left(\frac{a^4}{b^2}+\frac{b^4}{c^2}+\frac{c^4}{a^2}\right)(1)$$

$$\left(\frac{a^4}{b^2}+\frac{b^4}{c^2}+\frac{c^4}{a^2}\right)+(a^2+b^2+c^2)=\sum_{cyc}\left(\frac{a^4}{b^2}+b^2\right)\ge\sum_{cyc}2\sqrt{\frac{a^4}{b^2}\cdot b^2}=2(a^2+b^2+c^2)$$

$$\Rightarrow\frac{a^4}{b^2}+\frac{b^4}{c^2}+\frac{c^4}{a^2}\ge a^2+b^2+c^2\ (2).$$ Từ (1) và (2) suy ra

$$4\left(\frac{a^5}{b^3}+\frac{b^5}{c^3}+\frac{c^5}{a^3}\right)+(a^2+b^2+c^2)\ge4\left(\frac{a^4}{b^2}+\frac{b^4}{c^2}+\frac{c^4}{a^2}\right)+(a^2+b^2+c^2)$$

$\Leftrightarrow\frac{a^5}{b^3}+\frac{b^5}{c^3}+\frac{c^5}{a^3}\ge\frac{a^4}{b^2}+\frac{b^4}{c^2}+\frac{c^4}{a^2}$ (đpcm). Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c>0$

Bài 8. Chứng minh rằng: $\frac{a^3}{b^3}+\frac{b^3}{c^3}+\frac{c^3}{a^3}\ge\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}, \forall a,b,c>0$

Chứng minh

Nhận xét: Cả hai vế là các biểu thức bậc 0 nên biểu thức cộng thêm cũng là bậc 0

Sử dụng bất đẳng thức $AM-GM$ ta có

$$2\left(\frac{a^3}{b^3}+\frac{b^3}{c^3}+\frac{c^3}{a^3}\right)+3=\sum_{cyc}\left(\frac{a^3}{b^3}+\frac{a^3}{b^3}+1\right)\ge\sum_{cyc}3.\sqrt[3]{\frac{a^3}{b^3}\cdot\frac{a^3}{b^3}\cdot1}=3\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}\right)$$

$$\ge2\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}\right)+3.\sqrt[3]{\frac{a^2}{b^2}\cdot\frac{b^2}{c^2}\cdot\frac{c^2}{a^2}}=2\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}\right)+3$$

$\Rightarrow\frac{a^3}{b^3}+\frac{b^3}{c^3}+\frac{c^3}{a^3}\ge\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}$ (đpcm). Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c>0$

Bài 9. Chứng minh rằng: $\frac{a^2}{b^5}+\frac{b^2}{c^5}+\frac{c^2}{a^5}\ge\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}+\frac{1}{a^3}, \forall a,b,c>0$

Chứng minh

Nhận xét: Hai vế là các biểu thức bậc (-3) nên biểu thức cộng thêm có bậc (-3).

Sử dụng bất đẳng thức $AM-GM$, ta có

$$\sum_{cyc}\left(\frac{3a^2}{b^5}+\frac{2}{a^3}\right)\ge\sum_{cyc}5.\sqrt[5]{\left(\frac{a^2}{b^5}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{a^3}\right)^2}=5\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}\right)$$

$$3\left(\frac{a^2}{b^5}+\frac{b^2}{c^5}+\frac{c^2}{a^5}\right)+2\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}\right)=\sum_{cyc}\left(3\cdot\frac{a^2}{b^5}+2\cdot\frac{1}{a^3}\right)$$

$\Rightarrow \dfrac{a^2}{b^5}+\dfrac{b^2}{c^5}+\dfrac{c^2}{a^5}\ge\dfrac{1}{a^3}+\dfrac{1}{b^3}+\dfrac{1}{c^3}$. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c>0$

Bài 10. [USAMO 1998] Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc}+\frac{1}{b^3+c^3+abc}+\frac{1}{c^3+a^3+abc}\le\frac{1}{abc}$$

Chứng minh

Nhận xét: Hai vế là các biểu thức đồng bậc bậc (-3) nhưng chúng ta sẽ đánh giá mẫu số mà không sử dụng kỹ thuật cộng thêm các biểu thức đồng bậc.

Sử dụng bất đẳng thức ***AM − GM,*** ta có

Bổ đề: $x^3+y^3=(x+y)\left(x^2+y^2-xy\right)\ge(x+y)(2xy-xy)=(x+y)xy,\ \forall x,y\ge0$

Áp dụng: $\displaystyle\sum_{cyc}\frac{1}{a^3+b^3+abc}\le\sum_{cyc}\frac{1}{(a+b)ab+abc}=\sum_{cyc}\frac{1}{ab(a+b+c)}=\frac{a+b+c}{abc(a+b+c)}=\frac{1}{abc}$

Bài 11. [APMO 1998] Chứng minh: $\left(1+\dfrac{a}{b}\right)\left(1+\dfrac{b}{c}\right)\left(1+\dfrac{c}{a}\right)\ge2+\dfrac{2(a+b+c)}{\sqrt[3]{abc}},\ \forall a,b,c>0\,(1)$

Chứng minh

$$(1)\Leftrightarrow 2+\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\ge2+\frac{2(a+b+c)}{\sqrt[3]{abc}}\Leftrightarrow\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\right)\ge\frac{2(a+b+c)}{\sqrt[3]{abc}}\,(2)$$

Sử dụng bất đẳng thức ***AM − GM*** ta có

$$+\begin{cases}\dfrac{a}{b}+\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{c}\ge3\cdot\sqrt[3]{\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{b}{c}}=\dfrac{3a}{\sqrt[3]{abc}}\\ \dfrac{b}{c}+\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{a}\ge3\cdot\sqrt[3]{\dfrac{b}{c}\cdot\dfrac{b}{c}\cdot\dfrac{c}{a}}=\dfrac{3b}{\sqrt[3]{abc}}\\ \dfrac{c}{a}+\dfrac{c}{a}+\dfrac{a}{b}\ge3\cdot\sqrt[3]{\dfrac{c}{a}\cdot\dfrac{c}{a}\cdot\dfrac{a}{b}}=\dfrac{3c}{\sqrt[3]{abc}}\end{cases}\qquad +\begin{cases}\dfrac{b}{a}+\dfrac{b}{a}+\dfrac{c}{b}\ge3\cdot\sqrt[3]{\dfrac{b}{a}\cdot\dfrac{b}{a}\cdot\dfrac{c}{b}}=\dfrac{3b}{\sqrt[3]{abc}}\\ \dfrac{c}{b}+\dfrac{c}{b}+\dfrac{a}{c}\ge3\cdot\sqrt[3]{\dfrac{c}{b}\cdot\dfrac{c}{b}\cdot\dfrac{a}{c}}=\dfrac{3c}{\sqrt[3]{abc}}\\ \dfrac{a}{c}+\dfrac{a}{c}+\dfrac{b}{a}\ge3\cdot\sqrt[3]{\dfrac{a}{c}\cdot\dfrac{a}{c}\cdot\dfrac{b}{a}}=\dfrac{3a}{\sqrt[3]{abc}}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\ge\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}\quad(3)\qquad\qquad\Rightarrow\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\ge\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}\quad(4)$$

Từ (3) và (4) suy ra (đpcm). Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c>0$

Bài 12. Chứng minh rằng: $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\ge\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a},\ \forall a,b,c>0$

Chứng minh

Nhận xét: Hai vế là các biểu thức đồng bậc bậc 0

Sử dụng bất đẳng thức ***AM – GM*** ta có

$$\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)+\left(\frac{b}{a+b}+\frac{c}{b+c}+\frac{a}{c+a}\right)$$

$$=\frac{b+c}{a+b}+\frac{c+a}{b+c}+\frac{a+b}{c+a}\ge 3\cdot\sqrt[3]{\frac{b+c}{a+b}\cdot\frac{c+a}{b+c}\cdot\frac{a+b}{c+a}}=3\quad(1)$$

$$\left(\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}\right)+\left(\frac{b}{a+b}+\frac{c}{b+c}+\frac{a}{c+a}\right)=\frac{a+b}{a+b}+\frac{b+c}{b+c}+\frac{c+a}{c+a}=3\quad(2)$$

Từ (1) và (2) : $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\ge\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c>0$.

Bài 13. [Bất đẳng thức Nesbit] Chứng minh: $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\ge\frac{3}{2},\ \forall a,b,c>0$

Chứng minh

Đặt $S=\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b};A=\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}+\frac{a}{a+b};B=\frac{c}{b+c}+\frac{a}{c+a}+\frac{b}{a+b}$

Ta có: $A+B=\frac{b+c}{b+c}+\frac{c+a}{c+a}+\frac{a+b}{a+b}=3$

$$A+S=\frac{a+b}{b+c}+\frac{b+c}{c+a}+\frac{c+a}{a+b}\ge 3\cdot\sqrt[3]{\frac{a+b}{b+c}\cdot\frac{b+c}{c+a}\cdot\frac{c+a}{a+b}}=3$$

$$B+S=\frac{c+a}{b+c}+\frac{a+b}{c+a}+\frac{b+c}{a+b}\ge 3\cdot\sqrt[3]{\frac{c+a}{b+c}\cdot\frac{a+b}{c+a}\cdot\frac{b+c}{a+b}}=3$$

$$\Rightarrow 6\le(A+S)+(B+S)=(A+B)+2S=3+2S\Rightarrow 3\le 2S\Rightarrow S\ge\frac{3}{2}$$

Bài 14. Cho $a,b,c>0$. Chứng minh: $\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\ge 3+\frac{2\left(a^3+b^3+c^3\right)}{abc}$ (1)

Chứng minh

$$(1)\Leftrightarrow 1+\frac{b^2+c^2}{a^2}+1+\frac{c^2+a^2}{b^2}+1+\frac{a^2+b^2}{c^2}\ge 3+\frac{2\left(a^3+b^3+c^3\right)}{abc}$$

$$\Leftrightarrow\frac{a^2}{b^2}+\frac{a^2}{c^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{b^2}{a^2}+\frac{c^2}{b^2}+\frac{c^2}{a^2}\ge 2\left(\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab}\right)$$

Sử dụng bất đẳng thức ***AM – GM,*** ta có

$$VT(2)\ge 2\sqrt{\frac{a^2}{b^2}\cdot\frac{a^2}{c^2}}+2\sqrt{\frac{b^2}{c^2}\cdot\frac{b^2}{a^2}}+2\sqrt{\frac{c^2}{b^2}\cdot\frac{c^2}{a^2}}=2\left(\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab}\right)$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c>0$

Bài 15. [Hi Lạp MO 2007] Cho a,b,c là độ dài ba cạnh cua một tam giác. Chứng minh:

$$\frac{(b+c-a)^4}{a(a+b-c)}+\frac{(c+a-b)^4}{b(b+c-a)}+\frac{(a+b-c)^4}{c(c+a-b)}\ge ab+bc+ca$$

Chứng minh

Sử dụng bất đẳng thức ***AM − GM,*** ta có

$$+\begin{cases}\dfrac{(b+c-a)^4}{a(a+b-c)}+a(a+b-c)\ge 2(b+c-a)^2=2(a^2+b^2+c^2)+4(bc-ca-ab)\\ \dfrac{(c+a-b)^4}{b(b+c-a)}+b(b+c-a)\ge 2(c+a-b)^2=2(a^2+b^2+c^2)+4(ca-ab-bc)\\ \dfrac{(a+b-c)^4}{c(c+a-b)}+c(c+a-b)\ge 2(a+b-c)^2=2(a^2+b^2+c^2)+4(ab-bc-ca)\end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{(b+c-a)^4}{a(a+b-c)}+\frac{(c+a-b)^4}{b(b+c-a)}+\frac{(a+b-c)^4}{c(c+a-b)}\ge 5(a^2+b^2+c^2)-4(ab+bc+ca)$$

Ta chỉ cần chứng minh $5(a^2+b^2+c^2)-4(ab+bc+ca)\ge ab+bc+ca$

$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca \Leftrightarrow (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\ge 0$ (đpcm)

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

Bài 16. Cho $a_1,a_2,...,a_n>0$; $3\le n\in\mathbb{N}$. Đặt

$$A_1=\frac{a_1}{a_2+a_3}+\frac{a_2}{a_3+a_4}+...+\frac{a_{n-1}}{a_n+a_1}+\frac{a_n}{a_1+a_2};$$

$$A_2=\frac{a_1}{a_n+a_2}+\frac{a_2}{a_1+a_3}+...+\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}+a_n}+\frac{a_n}{a_{n-1}+a_1}$$

Chứng minh rằng: $\operatorname{Max}\{A_1,A_2\}\ge\frac{n}{2}$

Chứng minh

Sử dụng bất đẳng thức ***AM − GM,*** ta có:

$$A_1+\frac{n}{2}=\sum_{cyc}\left(\frac{a_1}{a_2+a_3}+\frac{1}{2}\right)=\sum_{cyc}\frac{1}{2}\left[\frac{a_1+a_2}{a_2+a_3}+\frac{a_1+a_3}{a_2+a_3}\right]$$

$$\ge\sum_{cyc}\sqrt{\frac{(a_1+a_2)(a_1+a_3)}{(a_2+a_3)^2}}\ge n\cdot\sqrt[2n]{\frac{(a_1+a_3)(a_2+a_4)...(a_n+a_2)}{(a_1+a_2)(a_2+a_3)...(a_n+a_1)}}$$

$$A_2+\frac{n}{2}=\sum_{cyc}\left(\frac{a_1}{a_n+a_2}+\frac{1}{2}\right)=\sum_{cyc}\frac{1}{2}\left[\frac{a_1+a_2}{a_n+a_2}+\frac{a_1+a_n}{a_n+a_2}\right]$$

Để ý rằng: $\text{Max}\left\{\dfrac{(a_1+a_3)(a_2+a_4)...(a_n+a_2)}{(a_1+a_2)(a_2+a_3)...(a_n+a_1)},\dfrac{(a_1+a_2)(a_2+a_3)...(a_n+a_1)}{(a_1+a_3)(a_2+a_4)...(a_n+a_2)}\right\}\geq 1.$

Từ đó suy ra: $\text{Max}\left\{A_1+\dfrac{n}{2},A_2+\dfrac{n}{2}\right\}\geq n \Rightarrow \text{Max}\{A_1,A_2\}\geq\dfrac{n}{2}.$

Bài 17. Chứng minh rằng: $a^{n+k}+b^{n+k}+c^{n+k}\geq a^nb^k+b^nc^k+c^na^k, \forall n,k\in\mathbb{N}$

Chứng minh

Sử dụng bất đẳng thức *AM − GM*, ta có

$$(n+k)\left(a^{n+k}+b^{n+k}+c^{n+k}\right)=\sum_{cyc}\left(na^{n+k}+kb^{n+k}\right)\geq$$

$$\sum_{cyc}(n+k)\cdot\sqrt[n+k]{a^{n(n+k)}b^{k(n+k)}}=(n+k)\sum_{cyc}a^nb^k$$

Bài 18. Chứng minh rằng: $\dfrac{a^n+b^n+c^n}{3}\geq\left(\dfrac{a+b+c}{3}\right)^n, \forall a,b,c>0;n\in\mathbb{N}$

Chứng minh

Sử dụng bất đẳng thức *AM - GM* ta có:

$$+\begin{cases} a^n+(n-1)\left(\dfrac{a+b+c}{3}\right)^n\geq n\cdot\sqrt[n]{a^n\left(\dfrac{a+b+c}{3}\right)^{n(n-1)}}=n\left(\dfrac{a+b+c}{3}\right)^{n-1}a \\ b^n+(n-1)\left(\dfrac{a+b+c}{3}\right)^n\geq n\cdot\sqrt[n]{b^n\left(\dfrac{a+b+c}{3}\right)^{n(n-1)}}=n\left(\dfrac{a+b+c}{3}\right)^{n-1}b \\ c^n+(n-1)\left(\dfrac{a+b+c}{3}\right)^n\geq n\cdot\sqrt[n]{c^n\left(\dfrac{a+b+c}{3}\right)^{n(n-1)}}=n\left(\dfrac{a+b+c}{3}\right)^{n-1}c \end{cases}$$

$$\Rightarrow\left(a^n+b^n+c^n\right)\geq n\left(\dfrac{a+b+c}{3}\right)^{n-1}(a+b+c)-3(n-1)\left(\dfrac{a+b+c}{3}\right)^n=3\left(\dfrac{a+b+c}{3}\right)^n$$

Bài 19. Chứng minh: $a^n+b^n+c^n\geq\left(\dfrac{a+2b}{3}\right)^n+\left(\dfrac{b+2c}{3}\right)^n+\left(\dfrac{c+2a}{3}\right)^n, \forall a,b,c>0;n\in\mathbb{N}$

Chứng minh

- ***Bổ đề:*** $\dfrac{x^n+y^n+z^n}{3}\geq\left(\dfrac{x+y+z}{3}\right)^n, \forall x,y,z>0;n\in\mathbb{N}$
- ***Áp dụng:***

$$a^n+b^n+c^n=\sum_{cyc}\dfrac{a^n+b^n+b^n}{3}\geq\sum_{cyc}\left(\dfrac{a+b+b}{3}\right)^n=\left(\dfrac{a+2b}{3}\right)^n+\left(\dfrac{b+2c}{3}\right)^n+\left(\dfrac{c+2a}{3}\right)^n$$

Bài 20. Cho $a,b,c>0$. Chứng minh bất đẳng thức sau:

$$\left(a^2+2bc\right)\left(b^2+2ca\right)\left(c^2+2ab\right)\ge abc(a+2b)(b+2c)(c+2a)\ (1)$$

Chứng minh

Đặt $x=\frac{a}{b},\ y=\frac{b}{c},\ z=\frac{c}{a}$ thì ta có: $x,y,z>0$ và xyz = 1. Khi đó, (1) trở thành:

$$\left(1+\frac{2x}{y}\right)\left(1+\frac{2y}{z}\right)\left(1+\frac{2z}{x}\right)\ge(2+x)(2+y)(2+z)\Leftrightarrow\sum_{cyc}\frac{x}{y}+2\sum_{cyc}\frac{y}{x}\ge2\sum_{cyc}x+\sum_{cyc}xy$$

Do đó ta chỉ cần chứng minh các bất đẳng thức: $\sum_{cyc}\frac{x}{y}\ge\sum_{cyc}x$ (1) ; $\sum_{cyc}\frac{y}{x}\ge\sum_{cyc}xy$ (2)

Sử dụng bất đẳng thức ***AM – GM*** ta có:

$$2\cdot\frac{x}{y}+\frac{y}{z}\ge3\cdot\sqrt[3]{\frac{x^2}{yz}}=3x;\ 2\cdot\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\ge3y;\ 2\cdot\frac{z}{x}+\frac{x}{y}\ge3z\Rightarrow3\sum_{cyc}\frac{x}{y}\ge3\sum_{cyc}x\Rightarrow\text{(1) đúng}$$

Trong (1) thay (x,y,z) bởi $\left(\frac{1}{x};\frac{1}{y};\frac{1}{z}\right)$ ta được: $\sum_{cyc}\frac{y}{x}\ge\sum_{cyc}\frac{1}{x}=\sum_{cyc}xy\Rightarrow$ (2) đúng.

Từ (1) và (2) suy ra (đpcm). Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c>0$.

Bài 21. [IMO 2001] Chứng minh: $\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{a^2+8ab}}\ge1,\forall a,b,c>0$

Chứng minh

Nhận xét:

$$(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)=x^2+\left(y^2+z^2+xy+xy+yz+yz+zx+zx\right)$$
$$\ge x^2+8\cdot\sqrt[8]{y^2z^2(xy)^2(yz)^2(zx)^2}=x^2+8x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{3}{4}}z^{\frac{3}{4}}=x^{\frac{1}{2}}\left(x^{\frac{3}{2}}+8y^{\frac{3}{4}}z^{\frac{3}{4}}\right)$$

$$\Rightarrow x+y+z\ge x^{\frac{1}{4}}\cdot\sqrt{x^{\frac{3}{2}}+8y^{\frac{3}{4}}z^{\frac{3}{4}}}\Rightarrow\frac{x^{\frac{3}{4}}}{\sqrt{x^{\frac{3}{2}}+8y^{\frac{3}{4}}z^{\frac{3}{4}}}}\ge\frac{x}{x+y+z}\ (*)$$

Đặt $a=x^{\frac{3}{4}},b=y^{\frac{3}{4}},c=z^{\frac{3}{4}}\Rightarrow a^{\frac{4}{3}}=x,b^{\frac{4}{3}}=y,c^{\frac{4}{3}}=z$. Thế vào bất đẳng thức (*) ta có

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}\ge\frac{a^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}};\ \frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}\ge\frac{b^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}};\ \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}\ge\frac{c^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}}$$

Vậy $\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{a^2+8ab}}\ge\frac{a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}}=1$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c>0$.

Bài 22. Chứng minh: $\frac{b(a+c)}{c(a+b)}+\frac{c(b+d)}{d(b+c)}+\frac{d(a+c)}{a(c+d)}+\frac{a(b+d)}{b(d+a)}\geq 4,\ \forall a,b,c,d>0$ (1)

Chứng minh

Ta có: $VT(1)=(a+c)\left[\frac{b}{c(a+b)}+\frac{d}{a(c+d)}\right]+(b+d)\left[\frac{c}{d(b+c)}+\frac{a}{b(d+a)}\right]$

$$=(abc+abd+acd+bcd)\left[\frac{a+c}{ac(a+b)(c+d)}+\frac{b+d}{bd(b+c)(d+a)}\right]$$

$$=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)\left[\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{c}}{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)}+\frac{\frac{1}{b}+\frac{1}{d}}{\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{d}+\frac{1}{a}\right)}\right]$$

Sử dụng bất đẳng thức ***AM – GM*** ta có:

$$\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{c}}{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)}\geq\frac{4\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right)}{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)^2};\ \frac{\frac{1}{b}+\frac{1}{d}}{\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{d}+\frac{1}{a}\right)}\geq\frac{4\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{d}\right)}{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)^2}$$

$$\Rightarrow \text{VT}(1)\geq\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)\left[\frac{4\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right)}{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)^2}+\frac{4\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{d}\right)}{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)^2}\right]=4\ \Rightarrow \text{(đpcm)}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow\ a=c>0, b=d>0$.

Bài 23. Chứng minh rằng: $\forall a,b,c,d\geq 0$ ta có:

$$\frac{1}{a^3+b^3}+\frac{1}{a^3+c^3}+\frac{1}{a^3+d^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}+\frac{1}{b^3+d^3}+\frac{1}{c^3+d^3}\geq\frac{243}{2(a+b+c+d)^3}\ (1)$$

Chứng minh

Không mất tính tổng quát giả sử $a\geq b\geq c\geq d\geq 0$. Khi đó ta có:

$$a^3+b^3\leq\left(a+\frac{d}{3}\right)^3+\left(b+\frac{d}{3}\right)^3\Rightarrow\frac{1}{a^3+b^3}\geq\frac{1}{\left(a+\frac{d}{3}\right)^3+\left(b+\frac{d}{3}\right)^3}$$

Tương tự: $\frac{1}{a^3+c^3}\geq\frac{1}{\left(a+\frac{d}{3}\right)^3+\left(c+\frac{d}{3}\right)^3};\ \frac{1}{b^3+c^3}\geq\frac{1}{\left(b+\frac{d}{3}\right)^3+\left(c+\frac{d}{3}\right)^3}$

Mặt khác dễ thấy $\left(a+\frac{d}{3}\right)^3\geq a^3+d^3\Rightarrow\frac{1}{a^3+d^3}\geq\frac{1}{\left(a+\frac{d}{3}\right)^3}$.

Tương tự ta có:

$\frac{1}{b^3+d^3}\ge\frac{1}{\left(b+\frac{d}{3}\right)^3}$; $\frac{1}{c^3+d^3}\ge\frac{1}{\left(c+\frac{d}{3}\right)^3}$. Đặt $x=a+\frac{d}{3}; y=b+\frac{d}{3}; z=c+\frac{d}{3}$ suy ra:

$VT(1)\ge\frac{1}{x^3+y^3}+\frac{1}{x^3+z^3}+\frac{1}{y^3+z^3}+\frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}+\frac{1}{z^3}$; $VP(1)=\frac{243}{2(x+y+z)^3}$

Ta sẽ chứng minh: $\frac{1}{x^3+y^3}+\frac{1}{x^3+z^3}+\frac{1}{y^3+z^3}+\frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}+\frac{1}{z^3}\ge\frac{243}{2(x+y+z)^3}$ (2)

Thật vậy ta có: (2) $\Leftrightarrow\sum_{cyc}\left(\frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}+\frac{2}{x^3+y^3}\right)\ge\frac{243}{(x+y+z)^3}$

Sử dụng bất đẳng thức ***AM – GM*** ta có:

$$\frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}+\frac{2}{x^3+y^3}\ge3\cdot\sqrt[3]{\frac{2}{x^3y^3\left(x^3+y^3\right)}}=3\cdot\sqrt[3]{\frac{2}{(xy)^3\left(x^2-xy+y^2\right)(x+y)}}$$

$\ge3\cdot\sqrt[3]{\frac{2}{\left[\frac{3xy+\left(x^2-xy+y^2\right)}{4}\right]^4(x+y)}}=\frac{24}{(x+y)^3}$. Tương tự và suy ra

$$\sum_{cyc}\left(\frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}+\frac{2}{x^3+y^3}\right)\ge24\sum_{cyc}\frac{1}{(x+y)^3}\ge\frac{84}{(x+y)(y+z)(z+x)}\ge\frac{243}{(x+y+z)^3}\text{ (đpcm)}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow(a,b,c,d)$ là một hoán vị của $(x,x,x,0)$ với $x>0$.

Bài 24. Chứng minh: $\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)^2\ge\frac{3}{2}\left(\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}\right), \forall a,b,c>0$

Chứng minh

Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}+2\left(\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}\right)\ge\frac{3}{2}\left(\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}\right)$$

Đặt $x=\frac{a}{b}$, $y=\frac{b}{c}$, $z=\frac{c}{a}$, bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$x^2+y^2+z^2+2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\ge\frac{3}{2}\left(x+y+z+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$$

$\Leftrightarrow2\left(x^2+y^2+z^2\right)+\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\ge3(x+y+z)$ (1). Theo ***AM – GM*** ta có

$$VT(1)=\left(x^2+x^2+\frac{1}{x}\right)+\left(y^2+y^2+\frac{1}{y}\right)+\left(z^2+z^2+\frac{1}{z}\right)\ge3(x+y+z).$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c>0$.

IV. ĐỒNG BẬC BẤT ĐẲNG THỨC

Bài 1. Cho $\begin{cases} a,b,c>0 \\ a+b+c=3 \end{cases}$. Chứng minh: $\dfrac{a^3}{(a+b)(a+c)}+\dfrac{b^3}{(b+c)(b+a)}+\dfrac{c^3}{(c+a)(c+b)}\ge\dfrac{3}{4}$

Chứng minh

Sử dụng giả thiết $a+b+c=3$ để đưa về bất đẳng thức đồng bậc bậc 1 ở hai vế:

$$\frac{a^3}{(a+b)(a+c)}+\frac{b^3}{(b+c)(b+a)}+\frac{c^3}{(c+a)(c+b)}\ge\frac{a+b+c}{4}$$

Sử dụng bất đẳng thức ***AM - GM***, ta có:

$$+\begin{cases} \dfrac{a^3}{(a+b)(a+c)}+\dfrac{a+b}{8}+\dfrac{a+c}{8}\ge 3\cdot\sqrt[3]{\dfrac{a^3}{(a+b)(a+c)}\cdot\dfrac{a+b}{8}\cdot\dfrac{a+c}{8}}=\dfrac{3a}{4} \\ \dfrac{b^3}{(b+c)(b+a)}+\dfrac{b+c}{8}+\dfrac{b+a}{8}\ge 3\cdot\sqrt[3]{\dfrac{b^3}{(b+c)(b+a)}\cdot\dfrac{b+c}{8}\cdot\dfrac{b+a}{8}}=\dfrac{3b}{4} \\ \dfrac{c^3}{(c+a)(c+b)}+\dfrac{c+a}{8}+\dfrac{c+b}{8}\ge 3\cdot\sqrt[3]{\dfrac{c^3}{(c+a)(c+b)}\cdot\dfrac{c+a}{8}\cdot\dfrac{c+b}{8}}=\dfrac{3c}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{a^3}{(a+b)(a+c)}+\frac{b^3}{(b+c)(b+a)}+\frac{c^3}{(c+a)(c+b)}\ge\frac{a+b+c}{4}=\frac{3}{4}\ \text{(đpcm)}$$

Bài 2. Cho $\begin{cases} a,b,c>0 \\ a+b+c=3 \end{cases}$. Chứng minh rằng: $\dfrac{a^3}{b(2c+a)}+\dfrac{b^3}{c(2a+b)}+\dfrac{c^3}{a(2b+c)}\ge 1$

Chứng minh

Sử dụng giả thiết $a+b+c=3$ để đưa về bất đẳng thức đồng bậc bậc 1 ở hai vế:

$\dfrac{a^3}{b(2c+a)}+\dfrac{b^3}{c(2a+b)}+\dfrac{c^3}{a(2b+c)}\ge\dfrac{a+b+c}{3}$. Sử dụng ***AM - GM***, ta có:

$$+\begin{cases} \dfrac{9a^3}{b(2c+a)}+3b+(2c+a)\ge 3\cdot\sqrt[3]{\dfrac{9a^3}{b(2c+a)}\cdot 3b(2c+a)}=9a \\ \dfrac{9b^3}{c(2a+b)}+3c+(2a+b)\ge 3\cdot\sqrt[3]{\dfrac{b^3}{c(2a+b)}\cdot 3c(2a+b)}=9b \\ \dfrac{9c^3}{a(2b+c)}+3a+(2b+c)\ge 3\cdot\sqrt[3]{\dfrac{c^3}{a(2b+c)}\cdot 3a(2b+c)}=9c \end{cases}$$

$$\Rightarrow 9\left[\frac{a^3}{b(2c+a)}+\frac{b^3}{c(2a+b)}+\frac{c^3}{a(2b+c)}\right]+6(a+b+c)\ge 9(a+b+c)$$

$$\Rightarrow \frac{a^3}{b(2c+a)}+\frac{b^3}{c(2a+b)}+\frac{c^3}{a(2b+c)}\ge\frac{a+b+c}{3}=1\ \text{(đpcm)}$$

Bài 3. Cho $\begin{cases} a,b,c>0 \\ a^2+b^2+c^2=1 \end{cases}$. Chứng minh rằng: $\dfrac{a^3}{b+2c}+\dfrac{b^3}{c+2a}+\dfrac{c^3}{a+2b}\geq\dfrac{1}{3}$

Chứng minh

Sử dụng giả thiết $a^2+b^2+c^2=1$ để đưa về bất đẳng thức đồng bậc bậc 2 ở hai vế:

$$\frac{a^3}{b+2c}+\frac{b^3}{c+2a}+\frac{c^3}{a+2b}\geq\frac{a^2+b^2+c^2}{3}$$

Sử dụng bất đẳng thức ***AM - GM***, ta có:

$$+\begin{cases} \dfrac{9a^3}{b+2c}+a(b+2c)\geq 2\sqrt{\dfrac{9a^3}{b+2c}\cdot a(b+2c)}=6a^2 \\ \dfrac{9b^3}{c+2a}+b(c+2a)\geq 2\sqrt{\dfrac{9b^3}{c+2a}\cdot b(c+2a)}=6b^2 \\ \dfrac{9c^3}{a+2b}+c(a+2b)\geq 2\sqrt{\dfrac{9c^3}{a+2b}\cdot c(a+2b)}=6c^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 9\left(\frac{a^3}{b+2c}+\frac{b^3}{c+2a}+\frac{c^3}{a+2b}\right)+3(ab+bc+ca)\geq 6(a^2+b^2+c^2)$$

$$\Rightarrow 9\left(\frac{a^3}{b+2c}+\frac{b^3}{c+2a}+\frac{c^3}{a+2b}\right)\geq 3(a^2+b^2+c^2)\Rightarrow \frac{a^3}{b+2c}+\frac{b^3}{c+2a}+\frac{c^3}{a+2b}\geq\frac{a^2+b^2+c^2}{3}=\frac{1}{3}$$

Bài 4. Cho $\begin{cases} a,b,c>0 \\ ab+bc+ca=1 \end{cases}$. Chứng minh rằng: $S=\dfrac{a}{\sqrt{1+a^2}}+\dfrac{b}{\sqrt{1+b^2}}+\dfrac{c}{\sqrt{1+c^2}}\leq\dfrac{3}{2}$

Chứng minh

Sử dụng giả thiết $ab+bc+ca=1$ để đưa về bất đẳng thức đồng bậc bậc 0 ở hai vế:

$$\begin{cases} \dfrac{a}{\sqrt{1+a^2}}=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+ab+bc+ca}}=\sqrt{\dfrac{a}{a+b}\cdot\dfrac{a}{a+c}}\leq\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a}{a+b}+\dfrac{a}{a+c}\right) \\ \dfrac{b}{\sqrt{1+b^2}}=\dfrac{b}{\sqrt{b^2+ab+bc+ca}}=\sqrt{\dfrac{b}{b+c}\cdot\dfrac{b}{b+a}}\leq\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{b}{b+c}+\dfrac{b}{b+a}\right) \\ \dfrac{c}{\sqrt{1+c^2}}=\dfrac{c}{\sqrt{c^2+ab+bc+ca}}=\sqrt{\dfrac{c}{c+a}\cdot\dfrac{c}{c+b}}\leq\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{c}{c+a}+\dfrac{c}{c+b}\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow S\leq\frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{a+b}+\frac{b+c}{b+c}+\frac{c+a}{c+a}\right)=\frac{3}{2}$$

Bài 5. Cho $\begin{cases} a,b,c>0 \\ ab+bc+ca=1 \end{cases}$. Chứng minh rằng: $\dfrac{1}{a(a+b)}+\dfrac{1}{b(b+c)}+\dfrac{1}{c(c+a)}\geq\dfrac{9}{2}$

Chứng minh

Sử dụng giả thiết $ab+bc+ca=1$ để đưa về bất đẳng thức đồng bậc bậc 0 ở hai vế:

$$\frac{c(a+b)+ab}{a(a+b)}+\frac{a(b+c)+bc}{b(b+c)}+\frac{b(c+a)+ca}{c(c+a)}\ge\frac{9}{2}\Leftrightarrow\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{b}{a+b}+\frac{c}{b+c}+\frac{a}{c+a}\right)\ge\frac{9}{2}$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{a+b}{b}+\frac{b+c}{c}+\frac{c+a}{a}\right)+\left(\frac{b}{a+b}+\frac{c}{b+c}+\frac{a}{c+a}\right)\ge\frac{15}{2}\ (1)$$

Ta có: $\text{VT (1)}=\frac{a+b}{4b}+\frac{b+c}{4c}+\frac{c+a}{4a}+\frac{b}{a+b}+\frac{c}{b+c}+\frac{a}{c+a}+\frac{3}{4}\left(\frac{a+b}{b}+\frac{b+c}{c}+\frac{c+a}{a}\right)$

$$\ge 6\cdot\sqrt[6]{\frac{a+b}{4b}\cdot\frac{b+c}{4c}\cdot\frac{c+a}{4a}\cdot\frac{b}{a+b}\cdot\frac{c}{b+c}\cdot\frac{a}{c+a}}+\frac{3}{4}\left(3\cdot\sqrt[3]{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{a}}+3\right)=\frac{15}{2}$$

Bài 6. Cho $\begin{cases}a,b,c>0\\ a+b+c=1\end{cases}$. Chứng minh rằng: $\frac{a}{(b+c)^2}+\frac{b}{(c+a)^2}+\frac{c}{(a+b)^2}\ge\frac{9}{4}$

Chứng minh

- ***Bổ đề:*** $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\ge\frac{3}{2},\ \forall a,b,c>0$

$x^2+y^2+z^2\ge\frac{1}{3}(x+y+z)^2,\ \forall x,y,z\in\mathbb{R}$

- ***Áp dụng:***

Sử dụng giả thiết $a+b+c=1$ để đưa về bất đẳng thức đồng bậc bậc 0 ở hai vế:

$$\frac{a(a+b+c)}{(b+c)^2}+\frac{b(a+b+c)}{(c+a)^2}+\frac{c(a+b+c)}{(a+b)^2}\ge\frac{9}{4}$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{a}{b+c}\right)^2+\left(\frac{b}{c+a}\right)^2+\left(\frac{c}{a+b}\right)^2+\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\ge\frac{9}{4}\ (1)$$

Ta có: $\text{VT(1)}\ge\frac{1}{3}\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)^2+\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\ge\frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{2}=\frac{9}{4}\Rightarrow$ (đpcm).

Bài 7. [France Pre-MO 2005] Cho $\begin{cases}a,b,c>0\\ a^2+b^2+c^2=3\end{cases}$. Chứng minh: $\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}\ge 3$

Chứng minh

Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$\left(\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}\right)^2\ge 9\Leftrightarrow\frac{a^2b^2}{c^2}+\frac{b^2c^2}{a^2}+\frac{c^2a^2}{b^2}+2(a^2+b^2+c^2)\ge 3(a^2+b^2+c^2)$$

$$\Leftrightarrow\frac{a^2b^2}{c^2}+\frac{b^2c^2}{a^2}+\frac{c^2a^2}{b^2}\ge a^2+b^2+c^2.$$

Sử dụng bất đẳng thức ***AM - GM***, ta có:

$$+\begin{cases} \dfrac{a^2b^2}{c^2}+\dfrac{b^2c^2}{a^2}\ge 2\sqrt{\dfrac{a^2b^2}{c^2}\cdot\dfrac{b^2c^2}{a^2}}=2b^2 \\ \dfrac{b^2c^2}{a^2}+\dfrac{c^2a^2}{b^2}\ge 2\sqrt{\dfrac{b^2c^2}{a^2}\cdot\dfrac{c^2a^2}{b^2}}=2c^2 \\ \dfrac{c^2a^2}{b^2}+\dfrac{a^2b^2}{c^2}\ge 2\sqrt{\dfrac{c^2a^2}{b^2}\cdot\dfrac{a^2b^2}{c^2}}=2a^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{a^2b^2}{c^2}+\frac{b^2c^2}{a^2}+\frac{c^2a^2}{b^2}\ge a^2+b^2+c^2 \Rightarrow \text{(đpcm)}$$

Bài 8. Cho $\begin{cases} a,b,c>0 \\ a+b+c=1 \end{cases}$. Chứng minh rằng: $S=\dfrac{bc}{\sqrt{a+bc}}+\dfrac{ca}{\sqrt{b+ca}}+\dfrac{ab}{\sqrt{c+ab}}\le\dfrac{1}{2}$

Chứng minh

$$\begin{cases} \dfrac{bc}{\sqrt{a+bc}}=\dfrac{bc}{\sqrt{a(a+b+c)+bc}}=\dfrac{bc}{\sqrt{(a+b)(a+c)}}\le\dfrac{bc}{2}\left(\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{a+c}\right) \\ \dfrac{ca}{\sqrt{b+ca}}=\dfrac{ca}{\sqrt{b(a+b+c)+ca}}=\dfrac{ca}{\sqrt{(b+c)(b+a)}}\le\dfrac{ca}{2}\left(\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{b+a}\right) \\ \dfrac{ab}{\sqrt{c+ab}}=\dfrac{ab}{\sqrt{c(a+b+c)+ab}}=\dfrac{ab}{\sqrt{(c+a)(c+b)}}\le\dfrac{ab}{2}\left(\dfrac{1}{c+a}+\dfrac{1}{c+b}\right) \end{cases}$$

$$S\le\frac{bc+ca}{2(a+b)}+\frac{bc+ab}{2(c+a)}+\frac{ca+ab}{2(c+b)}=\frac{a+b+c}{2}=\frac{1}{2}$$

Bài 9. [IMO Shortlist 1998] Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3}{(1+b)(1+c)}+\frac{b^3}{(1+c)(1+a)}+\frac{c^3}{(1+a)(1+b)}\ge\frac{3}{4}$$

Chứng minh

Sử dụng bất đẳng thức ***AM - GM***, ta có:

$$+\begin{cases} \dfrac{a^3}{(1+b)(1+c)}+\dfrac{1+b}{8}+\dfrac{1+c}{8}\ge 3\cdot\sqrt[3]{\dfrac{a^3}{(1+b)(1+c)}\cdot\dfrac{1+b}{8}\cdot\dfrac{1+c}{8}}=\dfrac{3a}{4} \\ \dfrac{b^3}{(1+c)(1+a)}+\dfrac{1+c}{8}+\dfrac{1+a}{8}\ge 3\cdot\sqrt[3]{\dfrac{b^3}{(1+c)(1+a)}\cdot\dfrac{1+c}{8}\cdot\dfrac{1+a}{8}}=\dfrac{3b}{4} \\ \dfrac{c^3}{(1+a)(1+b)}+\dfrac{1+a}{8}+\dfrac{1+b}{8}\ge 3\cdot\sqrt[3]{\dfrac{c^3}{(1+a)(1+b)}\cdot\dfrac{1+a}{8}\cdot\dfrac{1+b}{8}}=\dfrac{3c}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{a^3}{(a+b)(a+c)}+\frac{b^3}{(b+c)(b+a)}+\frac{c^3}{(c+a)(c+b)}\ge\frac{a+b+c}{2}-\frac{3}{4}\ge\frac{3\cdot\sqrt[3]{abc}}{2}-\frac{3}{4}=\frac{3}{4}.$$

Bài 10. [IMO 1995] Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\ge\frac{3}{2}\quad(1)$$

Chứng minh

Sử dụng giả thiết $abc=1$ biến đổi và đổi biến số để đưa về bất đẳng thức đồng bậc bậc 0:

$$\frac{abc}{a^3(b+c)}+\frac{abc}{b^3(c+a)}+\frac{abc}{c^3(a+b)}\ge\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\Leftrightarrow\frac{\frac{1}{a^2}}{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}+\frac{\frac{1}{b^2}}{\frac{1}{c}+\frac{1}{a}}+\frac{\frac{1}{c^2}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\ge\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)(2)$$ Đặt

$x=\frac{1}{a},y=\frac{1}{b},z=\frac{1}{c}$ với $x,y,z>0$, $xyz=1$ thì $(2)\Leftrightarrow\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}\ge\frac{1}{2}(x+y+z)$.

Sử dụng bất đẳng thức ***AM - GM***, ta có:

$$+\begin{cases}\dfrac{x^2}{y+z}+\dfrac{y+z}{4}\ge2\cdot\sqrt{\dfrac{x^2}{y+z}\cdot\dfrac{y+z}{4}}=x\\ \dfrac{y^2}{z+x}+\dfrac{z+x}{4}\ge2\cdot\sqrt{\dfrac{y^2}{z+x}\cdot\dfrac{z+x}{4}}=y\\ \dfrac{z^2}{x+y}+\dfrac{x+y}{4}\ge2\cdot\sqrt{\dfrac{z^2}{x+y}\cdot\dfrac{x+y}{4}}=z\end{cases}$$

$$\Rightarrow\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}\ge\frac{1}{2}(x+y+z)\ge\frac{1}{2}\cdot3\cdot\sqrt[3]{xyz}=\frac{3}{2}\text{ (đpcm)}$$

Bài 11. [IMO Shortlist 1996] Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{ab}{a^5+b^5+ab}+\frac{bc}{b^5+c^5+bc}+\frac{ca}{c^5+a^5+ca}\le1$$

Chứng minh

- ***Bổ đề:*** $x^5+y^5\ge x^3y^2+x^2y^3=x^2y^2(x+y)$, $\forall x,y>0$
- ***Áp dụng:*** Sử dụng ***bổ đề*** ta có:

$$+\begin{cases}\dfrac{ab}{a^5+b^5+ab}\le\dfrac{ab}{a^2b^2(a+b)+ab}=\dfrac{1}{ab(a+b)+1}=\dfrac{abc}{ab(a+b)+abc}=\dfrac{c}{a+b+c}\\ \dfrac{bc}{b^5+c^5+bc}\le\dfrac{bc}{b^2c^2(b+c)+bc}=\dfrac{1}{bc(b+c)+1}=\dfrac{abc}{bc(b+c)+abc}=\dfrac{a}{a+b+c}\\ \dfrac{ca}{c^5+a^5+ca}\le\dfrac{ca}{c^2a^2(c+a)+ca}=\dfrac{1}{ca(c+a)+1}=\dfrac{abc}{ca(c+a)+abc}=\dfrac{b}{a+b+c}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\frac{ab}{a^5+b^5+ab}+\frac{bc}{b^5+c^5+bc}+\frac{ca}{c^5+a^5+ca}\le\frac{a+b+c}{a+b+c}=1$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$.

Bài 12. Cho $\begin{cases} a,b,c>0 \\ abc=8 \end{cases}$. Chứng minh rằng: $\dfrac{1}{\sqrt{1+a^3}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+b^3}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+c^3}}\ge 1$

Chứng minh

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{1+a^3}}=\dfrac{1}{\sqrt{(1+a)(1-a+a^2)}}\ge\dfrac{2}{(1+a)+(1-a+a^2)}=\dfrac{2}{2+a^2} \\ \dfrac{1}{\sqrt{1+b^3}}=\dfrac{1}{\sqrt{(1+b)(1-b+b^2)}}\ge\dfrac{2}{(1+b)+(1-b+b^2)}=\dfrac{2}{2+b^2} \\ \dfrac{1}{\sqrt{1+c^3}}=\dfrac{1}{\sqrt{(1+c)(1-c+c^2)}}\ge\dfrac{2}{(1+c)+(1-c+c^2)}=\dfrac{2}{2+c^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1+a^3}}+\frac{1}{\sqrt{1+b^3}}+\frac{1}{\sqrt{1+c^3}}\ge 2\left(\frac{1}{2+a^2}+\frac{1}{2+b^2}+\frac{1}{2+c^2}\right)$$

Ta sẽ chứng minh $\dfrac{1}{2+a^2}+\dfrac{1}{2+b^2}+\dfrac{1}{2+c^2}\ge\dfrac{1}{2}2\Leftrightarrow\sum\limits_{cyc}(2+b^2)(2+c^2)\ge\dfrac{1}{2}(2+a^2)(2+b^2)(2+c^2)$

$$\Leftrightarrow 8+2(a^2+b^2+c^2)\ge\frac{1}{2}a^2b^2c^2 \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2\ge 12$$

Sử dụng bất đẳng thức ***AM – GM*** ta có $a^2+b^2+c^2\ge 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}=12$.

Bài 13. Cho $\begin{cases} a,b,c>0 \\ abc=1 \end{cases}$. Chứng minh: $\dfrac{a^2(b+c)}{b\sqrt{b}+2c\sqrt{c}}+\dfrac{b^2(c+a)}{c\sqrt{c}+2a\sqrt{a}}+\dfrac{c^2(a+b)}{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}\ge 2$ (1)

Chứng minh

$$+\begin{cases} \dfrac{a^2(b+c)}{b\sqrt{b}+2c\sqrt{c}}\ge\dfrac{a^2.2\sqrt{bc}}{b\sqrt{b}+2c\sqrt{c}}=\dfrac{2a\sqrt{a}}{b\sqrt{b}+2c\sqrt{c}}=\dfrac{2x}{y+2z} \\ \dfrac{b^2(c+a)}{c\sqrt{c}+2a\sqrt{a}}\ge\dfrac{b^2.2\sqrt{ca}}{c\sqrt{c}+2a\sqrt{a}}=\dfrac{2b\sqrt{b}}{c\sqrt{c}+2a\sqrt{a}}=\dfrac{2y}{z+2x} \\ \dfrac{c^2(a+b)}{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}\ge\dfrac{c^2.2\sqrt{ab}}{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}=\dfrac{2c\sqrt{c}}{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}=\dfrac{2z}{x+2y} \end{cases} \text{ trong đó } \begin{cases} x=a\sqrt{a}>0 \\ y=b\sqrt{b}>0 \\ z=c\sqrt{c}>0 \\ xyz=1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \mathrm{S}=\frac{a^2(b+c)}{b\sqrt{b}+2c\sqrt{c}}+\frac{b^2(c+a)}{c\sqrt{c}+2a\sqrt{a}}+\frac{c^2(a+b)}{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}\ge\frac{2x}{y+2z}+\frac{2y}{z+2x}+\frac{2z}{x+2y}=\mathrm{T}$$

Đặt $\begin{cases} y+2z=m \\ z+2x=n \\ x+2y=p \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x=\dfrac{4n+p-2m}{9} \\ y=\dfrac{4p+m-2n}{9} \\ z=\dfrac{4m+n-2p}{9} \end{cases}\Rightarrow T=\dfrac{2}{9}\left(\dfrac{4n+p-2m}{m}+\dfrac{4p+m-2n}{n}+\dfrac{4m+n-2p}{p}\right)$

$$=\frac{2}{9}\left[4\left(\frac{n}{m}+\frac{m}{p}+\frac{p}{n}\right)+\left(\frac{p}{m}+\frac{m}{n}+\frac{n}{p}\right)-6\right]\ge\frac{2}{9}\left(4\cdot 3\cdot\sqrt[3]{\frac{n}{m}\cdot\frac{m}{p}\cdot\frac{p}{n}}+3\cdot\sqrt[3]{\frac{p}{m}\cdot\frac{m}{n}\cdot\frac{n}{p}}-6\right)=2$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow m=n=p \Leftrightarrow x=y=z=1 \Leftrightarrow a=b=c=1$.

V. PHỐI HỢP CÁC BẤT ĐẲNG THỨC ĐỒNG BẬC NGƯỢC CHIỀU

Bài 1. Cho $\begin{cases} a,b>0 \\ a+b=1 \end{cases}$. Chứng minh rằng: $S=\dfrac{1}{a^4+b^4}+\dfrac{2}{a^2b^2}\geq 40$

Chứng minh

Nhận xét: Để ý rằng ta có hai bất đẳng thức ngược chiều sau đây:

$$\frac{1}{a^4+b^4}\leq\frac{2}{(a^2+b^2)^2}\leq\frac{8}{(a+b)^4}=8\ ;\ \frac{2}{a^2b^2}\geq\frac{2}{\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^4}=32$$

$$S=\frac{1}{a^4+b^4}+\frac{2}{a^2b^2}=\left(\frac{1}{a^4+b^4}+\frac{1}{2a^2b^2}\right)+\frac{3}{2a^2b^2}\geq\frac{2}{\sqrt{(a^4+b^4)2a^2b^2}}+\frac{3}{2a^2b^2}$$

$$\geq\left(\frac{2}{a^2+b^2}\right)^2+\left(\frac{1}{ab}\right)^2+\frac{1}{2a^2b^2}\geq\frac{1}{2}\left(\frac{2}{a^2+b^2}+\frac{1}{ab}\right)^2+\frac{1}{2a^2b^2}=$$

$$=2\left[\frac{1}{2}\left(\frac{2}{a^2+b^2}+\frac{1}{ab}\right)\right]^2+\frac{1}{2a^2b^2}=2\left(\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{1}{2ab}\right)^2+\frac{1}{2a^2b^2}$$

$$\geq 2\left(\frac{4}{(a^2+b^2)+2ab}\right)^2+\frac{1}{2(ab)^2}\geq\frac{32}{(a+b)^4}+\frac{1}{2\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^4}=\frac{40}{(a+b)^4}\geq\frac{40}{1^4}=40.$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=\dfrac{1}{2}$.

Bài 2. Chứng minh rằng: $\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\right)+4\sqrt{2}\dfrac{a+b}{\sqrt{a^2+b^2}}\geq 10,\ \forall\, a,b>0$

Chứng minh

Nhận xét: Để ý rằng ta có hai bất đẳng thức ngược chiều sau đây

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2;\ 4\sqrt{2}\frac{a+b}{\sqrt{a^2+b^2}}\leq 4\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=8$$

Bất đẳng thức tương đương $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}-2\geq 4\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-\dfrac{a+b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$

$$\Leftrightarrow\frac{(a-b)^2}{4\sqrt{2}ab}\geq\frac{\sqrt{2(a^2+b^2)}-(a+b)}{\sqrt{a^2+b^2}}\Leftrightarrow\frac{(a-b)^2}{4\sqrt{2}ab}\geq\frac{(a-b)^2}{\sqrt{a^2+b^2}\left[\sqrt{2(a^2+b^2)}+(a+b)\right]}$$

$\Leftrightarrow\sqrt{a^2+b^2}\left[\sqrt{2(a^2+b^2)}+(a+b)\right]\geq 4\sqrt{2}ab$. Sử dụng ***AM – GM*** ta có:

$$\sqrt{a^2+b^2}\left[\sqrt{2(a^2+b^2)}+(a+b)\right]\geq\sqrt{2ab}\left(\sqrt{4ab}+2\sqrt{ab}\right)=4\sqrt{2}ab$$

Bài 3. Cho $\begin{cases} a,b,c>0 \\ a+b+c=1 \end{cases}$. Chứng minh rằng: $S=\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\geq 30$

Chứng minh

• ***Nhận xét:*** Để ý rằng ta có hai bất đẳng thức ngược chiều sau đây

$$\frac{1}{a^2+b^2+c^2}\leq\frac{3}{(a+b+c)^2}=3\ ;\ \frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\geq\frac{9}{ab+bc+ca}\geq\frac{27}{(a+b+c)^2}=27$$

• ***Bổ đề:*** $3(xy+yz+zx)\leq(x+y+z)^2\quad\forall x,y,z$

• ***Áp dụng:*** Sử dụng bất đẳng thức $AM-GM$ ta có:

$$\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\geq 3.\sqrt[3]{\frac{1}{ab}.\frac{1}{bc}.\frac{1}{ca}}=\frac{3}{\sqrt[3]{ab.bc.ca}}\geq\frac{3}{\frac{ab+bc+ca}{3}}=\frac{9}{ab+bc+ca}$$

$$\Rightarrow S=\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\geq\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{9}{ab+bc+ca}$$

$$=\left(\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{ab+bc+ca}+\frac{1}{ab+bc+ca}\right)+\frac{7}{ab+bc+ca}$$

$$\geq 3.\sqrt[3]{\frac{1}{a^2+b^2+c^2}.\frac{1}{ab+bc+ca}.\frac{1}{ab+bc+ca}}+\frac{7}{ab+bc+ca}$$

$$=\frac{9}{(a^2+b^2+c^2)+(ab+bc+ca)+(ab+bc+ca)}+\frac{21}{3(ab+bc+ca)}\geq$$

$$\frac{9}{(a+b+c)^2}+\frac{21}{(a+b+c)^2}=\frac{30}{(a+b+c)^2}\geq\frac{30}{1^2}=30.$$ Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{3}$.

Bài 4. Cho $a,b,c\geq 0$. Chứng minh rằng: $\frac{3(a^4+b^4+c^4)}{(a^2+b^2+c^2)^2}+\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}\geq 2\ (1)$

Chứng minh

Nhận xét: Để ý rằng ta có hai bất đẳng thức ngược chiều sau đây

$$\frac{3(a^4+b^4+c^4)}{(a^2+b^2+c^2)^2}\geq 1;\ \frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}\leq 1$$

Bất đẳng thức tương đương với

$$3(a^4+b^4+c^4)+(ab+bc+ca)(a^2+b^2+c^2)\geq 2(a^2+b^2+c^2)^2$$

$$\Leftrightarrow a^4+b^4+c^4+ab\left(a^2+b^2\right)+bc\left(b^2+c^2\right)+ca\left(c^2+a^2\right)\geq 4\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)$$

Sử dụng bất đẳng thức **AM – GM** ta có

$$a^4+b^4\geq 2a^2b^2\ ;\ b^4+c^4\geq 2b^2c^2\ ;\ c^4+a^4\geq 2c^2a^2$$

$$ab\left(a^2+b^2\right)\geq 2a^2b^2\ ;\ bc\left(b^2+c^2\right)\geq 2b^2c^2\ ;\ ca\left(c^2+a^2\right)\geq 2c^2a^2$$

Cộng theo vế sáu bất đẳng thức trên ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

Bài 5. Chứng minh rằng: $S=\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{a}+\dfrac{a+b+c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\geq 3+\sqrt{3}\ \forall a,b,c>0$

Chứng minh

Nhận xét: Để ý rằng ta có hai bất đẳng thức ngược chiều sau đây

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geq 3\quad ;\quad \frac{a+b+c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\leq\sqrt{3}$$

Theo **AM – GM** ta có: $\left(\dfrac{ab^2}{c}+ac\right)+\left(\dfrac{bc^2}{a}+ba\right)+\left(\dfrac{ca^2}{b}+cb\right)\geq 2(ab+bc+ca)$ suy ra

$\dfrac{ab^2}{c}+\dfrac{bc^2}{a}+\dfrac{ca^2}{b}\geq ab+bc+ca$. Khi đó ta có:

$(ab+bc+ca)\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{a}\right)=\left(a^2+b^2+c^2\right)+(ab+bc+ca)+\left(\dfrac{ab^2}{c}+\dfrac{bc^2}{a}+\dfrac{ca^2}{b}\right)\geq(a+b+c)^2$ suy ra

$\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{a}\geq\dfrac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca}$. Từ đó ta có đánh giá

$$S\geq\frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca}+\frac{a+b+c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca}+\frac{\sqrt{3}(a+b+c)}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}-\frac{(\sqrt{3}-1)(a+b+c)}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$\geq 2\cdot\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt{\dfrac{(a+b+c)^3}{(ab+bc+ca)\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}-\sqrt{3}\left(\sqrt{3}-1\right)=P$. Mặt khác:

$$(ab+bc+ca)^2\left(a^2+b^2+c^2\right)\leq\left[\frac{2(ab+bc+ca)+\left(a^2+b^2+c^2\right)}{3}\right]^3=\frac{(a+b+c)^6}{27}$$

Từ đó suy ra $S\geq P\geq 2\cdot\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt{3\sqrt{3}}-\sqrt{3}\left(\sqrt{3}-1\right)=2\cdot\sqrt[4]{81}-\left(3-\sqrt{3}\right)=3+\sqrt{3}$.

Bài 6. Chứng minh rằng: $\dfrac{(a+b+c)^2}{abc}+\dfrac{54}{\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}}\ge\dfrac{81}{a+b+c}\quad\forall a,b,c>0$

Chứng minh

Viết lại bất đẳng thức dưới dạng $\dfrac{(a+b+c)^3}{abc}+\dfrac{54(a+b+c)}{\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}}\ge 81$.

Nhận xét: Để ý rằng ta có hai bất đẳng thức ngược chiều sau đây

$$\frac{(a+b+c)^3}{abc}\ge 27\ ;\ \frac{54(a+b+c)}{\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}}\le 54$$

Sử dụng bất đẳng thức ***AM – GM*** cho ba số dương, ta có

$$\frac{(a+b+c)^3}{abc}+\frac{27(a+b+c)}{\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}}+\frac{27(a+b+c)}{\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}}\ge 3\sqrt[3]{\frac{27^2(a+b+c)^5}{3abc(a^2+b^2+c^2)}}$$

Cuối cùng ta chỉ việc chứng minh $(a+b+c)^5\ge 81abc(a^2+b^2+c^2)$

Theo ***AM – GM*** : $3abc(a+b+c)\le(ab+bc+ca)^2$

$$\Rightarrow 81abc(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)\le 27(ab+bc+ca)(ab+bc+ca)(a^2+b^2+c^2)$$

$$\le\left(2(ab+bc+ca)+(a^2+b^2+c^2)\right)^3=(a+b+c)^6\Rightarrow 81abc(a^2+b^2+c^2)\le(a+b+c)^5$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

Bài 7. Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng: $\dfrac{a^3+b^3+c^3}{abc}+\dfrac{9(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2}\ge 12$

Chứng minh

Nhận xét: Ta có hai bất đẳng thức ngược chiều: $\dfrac{a^3+b^3+c^3}{abc}\ge 3\ ;\ \dfrac{9(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2}\le 9$

Sử dụng $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$ và ***AM – GM*** ta có

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}=3+\frac{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)}{abc}$$

$$=3+\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)\ge 3+\frac{9(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)}{ab+bc+ca}$$

$$=3+\frac{9(a^2+b^2+c^2)}{ab+bc+ca}-9=\frac{9(a^2+b^2+c^2)}{ab+bc+ca}-6$$

Vậy ta chỉ cần chứng minh $\frac{9(a^2+b^2+c^2)}{ab+bc+ca}-6+\frac{9(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2}\ge 12$, hay

$\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}+\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}\ge 2$, đây chính là bất đẳng thức ***AM – GM*** cho hai số.

Bài 8. Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng: $\frac{8(a^2+b^2+c^2)}{ab+bc+ca}+\frac{27(a+b)(b+c)(c+a)}{(a+b+c)^3}\ge 16$

Chứng minh

Nhận xét: Để ý rằng ta có hai bất đẳng thức ngược chiều sau đây

$$\frac{8(a^2+b^2+c^2)}{ab+bc+ca}\ge 8\,;\;\frac{27(a+b)(b+c)(c+a)}{(a+b+c)^3}\le 8$$

Áp dụng bất đẳng thức ***AM – GM*** ta có

$$\frac{8(a^2+b^2+c^2)}{ab+bc+ca}+\frac{27(a+b)(b+c)(c+a)}{(a+b+c)^3}\ge 2\sqrt{\frac{8(a^2+b^2+c^2)}{ab+bc+ca}.\frac{27(a+b)(b+c)(c+a)}{(a+b+c)^3}}$$

Suy ra bất đẳng thức đã cho là đúng nếu ta chứng minh được

$$27(a^2+b^2+c^2)(a+b)(b+c)(c+a)\ge 8(ab+bc+ca)(a+b+c)^3 \qquad (1)$$

Sử dụng đẳng thức $(a+b)(b+c)(c+a)=(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc$

và theo ***AM – GM*** : $abc\le\frac{1}{9}(a+b+c)(ab+bc+ca)$

ta được $(a+b)(b+c)(c+a)\ge\frac{8}{9}(a+b+c)(ab+bc+ca) \qquad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra ta chỉ cần chứng minh

$3(a^2+b^2+c^2)\ge(a+b+c)^2\Leftrightarrow(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\ge 0$ đúng $\Rightarrow$ (đpcm) .

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

Chú ý. Ta cũng có một số kết quả tương tự sau với mọi $a,b,c\ge 0$.

1. $\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}+\frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}\ge 2$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$ hoặc $a=b,c=0$ và các hoán vị.

2. $\dfrac{4\left(a^3+b^3+c^3\right)}{a^2+b^2+c^2}+\dfrac{9(a+b)(b+c)(c+a)}{(a+b+c)^2}\ge 4(a+b+c)$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$ hoặc $(a+b)(b+c)(c+a)=0$.

3. $\dfrac{4(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2}+\dfrac{(a+b)(b+c)(c+a)}{8abc}\ge 12$

4. $\dfrac{8\left(a^3+b^3+c^3\right)}{ab+bc+ca}+\dfrac{9(a+b)(b+c)(c+a)}{(a+b+c)^2}\ge\dfrac{2}{3}(a+b+c)$

Bài 9. Cho $a,b,c\ge 0$. Chứng minh rằng: $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}+\sqrt[3]{\dfrac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}}\ge 2$

Chứng minh

Nhận xét: Để ý rằng ta có hai bất đẳng thức ngược chiều sau đây

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\ge\frac{3}{2}\ ;\ \sqrt[3]{\frac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}}\le\sqrt[3]{\frac{1}{8}}=\frac{1}{2}$$

Bổ đề: $x^3+y^3+z^3+3xyz\ge xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x)$, (1) $\forall x,y,z\ge 0$

Chứng minh: Không mất tính tổng quát, giả sử $x\ge y\ge z$. Khi đó

$VT(1)-VP(1)=x(x-y)^2+z(y-z)^2+(x-y+z)(x-y)(y-z)\ge 0$

Áp dụng: Sử dụng bất đẳng thức ***AM – GM*** ta có

$(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2\ge 64(abc)^2\Leftrightarrow\dfrac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}\ge\left[\dfrac{4abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}\right]^3$

Suy ra ta chỉ cần chứng minh $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}+\dfrac{4abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}\ge 2$

$\Leftrightarrow a(a+b)(a+c)+b(b+c)(b+a)+c(c+a)(c+b)+4abc\ge 2(a+b)(b+c)(c+a)$

$\Leftrightarrow a^3+b^3+c^3+3abc\ge ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)$ đúng theo bổ đề.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$ hoặc $a=b,c=0$ và các hoán vị.

Bài 10. Cho $a,b,c>0$ và $k\ge\frac{2}{9}$. Chứng minh: $S=k\cdot\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}+\frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2}\ge 3k+3$

Chứng minh

Nhận xét: Ta có hai bất đẳng thức ngược chiều: $k\cdot\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}\ge 3k$; $\frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2}\le 3$

Bất đẳng thức tương đương $\Leftrightarrow k\cdot\frac{a^3+b^3+c^3-3abc}{abc}\ge 3-\frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2}$

$$\Leftrightarrow\frac{k(a+b+c)\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]}{2abc}\ge\frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{a^2+b^2+c^2}$$

$\Leftrightarrow\frac{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)}{abc}\ge\frac{2}{k}$. Ta có $VT\ge\frac{3\sqrt[3]{abc}\cdot 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}}{abc}=9\ge\frac{2}{k},\ \forall k\ge\frac{2}{9}$

Bài 11. Chứng minh rằng: $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+\frac{2}{3}\cdot\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}\ge\frac{13}{6}\quad\forall a,b,c>0$

Chứng minh

Nhận xét: Để ý rằng ta có hai bất đẳng thức ngược chiều sau đây

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\ge\frac{3}{2}\ ;\ \frac{2}{3}\cdot\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}\le\frac{2}{3}\cdot 1=\frac{2}{3}$$

Bất đẳng thức tương đương $\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)-\frac{3}{2}\ge\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\cdot\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}$

$$\Leftrightarrow\frac{(a-b)^2}{(c+a)(c+b)}+\frac{(b-c)^2}{(a+b)(a+c)}+\frac{(c-a)^2}{(b+c)(b+a)}\ge\frac{2}{3}\cdot\frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{a^2+b^2+c^2}$$

Ta có

$$(c+a)(c+b)\le\left[\frac{(c+a)+(c+b)}{2}\right]^2=\frac{1}{4}[2c+(a+b)]^2\le\frac{1}{4}\left[(\sqrt{2})^2+1^2\right]\left[(c\sqrt{2})^2+(a+b)^2\right]$$
$$=\frac{3}{4}\left[2c^2+(a+b)^2\right]\le\frac{3}{4}\left[2c^2+2(a^2+b^2)\right]=\frac{3}{2}(a^2+b^2+c^2)$$

Suy ra $\frac{(a-b)^2}{(c+a)(c+b)}\ge\frac{2}{3}\cdot\frac{(a-b)^2}{a^2+b^2+c^2}\Rightarrow$ (đpcm)

Chú ý: $k=\sqrt{3}-1$ là hằng số tốt nhất để bất đẳng thức sau đúng $\forall\, a,b,c>0$

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+k\cdot\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}\ge\frac{3}{2}+k$$

VI. KỸ THUẬT CHUẨN HÓA BẤT ĐẲNG THỨC THUẦN NHẤT BA BIẾN SỐ

1. Định nghĩa hàm thuần nhất ba biến số

Hàm số $f(a,b,c)$ là hàm thuần nhất bậc k trên D $\Leftrightarrow f(ta,tb,tc)=t^k f(a,b,c)$, $\forall a,b,c,t\in D$

2. Chuẩn hóa bất đẳng thức

Xét bất đẳng thức thuần nhất 3 biến số a, b, c và đồng bậc: $f(a,b,c)\ge g(a,b,c)$

Phép đặc biệt hóa bởi một hàm đối xứng với a, b, c tức là tạo ra một đẳng thức $\varphi(a,b,c)=\lambda$ mà không làm thay đổi bản chất của bất đẳng thức $f(a,b,c)\ge g(a,b,c)$ gọi là phép chuẩn hóa bất đẳng thức. Các phép chuẩn hóa thường gặp là:

$$\boxed{a+b+c=\lambda\ ;\ ab+bc+ca=\lambda\ ;\ abc=\lambda\ ;\ a^2+b^2+c^2=\lambda}$$

3. Chú ý: Kỹ thuật chuẩn hóa được ứng dụng rộng rãi trong nhiều phương pháp khác nhau có mặt trong sách .Sau đây là 1 số bài toán chuẩn hóa chỉ sử dụng ***AM – GM.***

Bài 1. Cho $a,b,c>0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\dfrac{a^2b+ab^2}{a^3+b^3}+\dfrac{(a+b)^2}{ab}$

Chứng minh.

Nhận xét: Đặt $P=f(a,b)=\dfrac{a^2b+ab^2}{a^3+b^3}+\dfrac{(a+b)^2}{ab}$ suy ra $f(ta,tb)=t^0 f(a,b)$.

Như vậy $f(a, b)$ là hàm thuần nhất bậc 0 với các biến a, $b>0$.

Ta chuẩn hóa bất đẳng thức bởi điều kiện $a+b=2$.

Đặt $t=a^2b+ab^2=ab(a+b)\Rightarrow a^3+b^3=8-3t$, khi đó $P=\dfrac{t}{8-3t}+\dfrac{1}{ab}=\dfrac{t^4}{t^3(8-3t)}+\dfrac{4}{ab}$.

Sử dụng bất đẳng thức ***AM – GM***, ta có: $t^3(8-3t)=t.t.t.(8-3t)\le\left(\dfrac{8}{4}\right)^4=16$.

Từ đó suy ra $P=\dfrac{t^4}{t^3(8-3t)}+\dfrac{4}{ab}\ge\dfrac{t^4}{16}+\dfrac{4}{ab}=\dfrac{a^4b^4(a+b)^4}{16}+\dfrac{4}{ab}$

$$=a^4b^4+\frac{1}{ab}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{ab}\ge 5.\sqrt[5]{a^4b^4\,\frac{1}{ab}.\frac{1}{ab}.\frac{1}{ab}.\frac{1}{ab}}=5$$

Dấu bằng xảy ra với $a+b=2$ là $a=b=1$, nên dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a=b>0$

Bình luận: Nếu đặt $x=\dfrac{2a}{a+b}, y=\dfrac{2b}{a+b}$ thì $P=\dfrac{x^2y+xy^2}{x^3+y^3}+\dfrac{(x+y)^2}{xy}$ với $x,y>0$ và $x+y=2$. Ta thấy biểu thức P không thay đổi về bản chất toán học nhưng các biến x, y thì bị ràng buộc bởi điều kiện $x+y=2$. Đó là lí do tại sao ta có thể chuẩn hóa $a+b=2$. Ngoài ra ta hoàn toàn có thể chọn $ab=1$ hay $a^3+b^3=1$... nhưng như thế sẽ khó để đi đến kết quả

Bài 2. Chứng minh rằng: $\sqrt[3]{\dfrac{(a+b)(b+c)(c+a)}{8}} \ge \sqrt{\dfrac{ab+bc+ca}{3}}$, $\forall a,b,c>0$

Chứng minh

Nhận xét: Đặt $f(a,b,c)=\sqrt[3]{\dfrac{(a+b)(b+c)(c+a)}{8}}$; $g(a,b,c)=\sqrt{\dfrac{ab+bc+ca}{3}}$. Khi đó:

$f(ta,tb,tc)=t.f(a,b,c)$; $g(ta,tb,tc)=t.g(a,b,c) \Rightarrow f$, g là 2 hàm thuần nhất bậc 1.

Đặt $ab+bc+ca=3t^2$ và $x=\dfrac{a}{t}, y=\dfrac{b}{t}, z=\dfrac{c}{t} \Rightarrow \begin{cases} x,y,z>0 \\ xy+yz+zx=3 \end{cases}$. Khi đó:

$f(a,b,c)\ge g(a,b,c) \Leftrightarrow f(x,y,z)\ge g(x,y,z)$.

Như vậy ta có thể chuẩn hóa $ab+bc+ca=3$ và chứng minh:

$$f(a,b,c)=\sqrt[3]{\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{8}} \ge \sqrt{\frac{ab+bc+ca}{3}}=g(a,b,c) \quad (1)$$

Thật vậy, sử dụng $\begin{cases} (a+b+c)^2 \ge 3(ab+bc+ca)=9 \\ 3=ab+bc+ca \ge 3\cdot\sqrt[3]{a^2b^2c^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b+c\ge 3 \\ abc\le 1 \end{cases}$

Ta có: $(a+b)(b+c)(c+a)=(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc=3(a+b+c)-abc\ge 8$

Khi đó: $f(a,b,c)=\sqrt[3]{\dfrac{(a+b)(b+c)(c+a)}{8}}\ge 1=\sqrt{\dfrac{ab+bc+ca}{3}}=g(a,b,c)$

Bình luận: Ta cũng có thể chuẩn hóa $(a+b)(b+c)(c+a)=8$ và giải tương tự.

Bài 3. Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng: $\dfrac{a}{(b+c)^3}+\dfrac{b}{(c+a)^3}+\dfrac{c}{(a+b)^3}\ge\dfrac{27}{8(a+b+c)^2}$

Chứng minh

Bổ đề: $\dfrac{a^2}{x}+\dfrac{b^2}{y}+\dfrac{c^2}{z}\ge\dfrac{(a+b+c)^2}{x+y+z}, \forall x,y,z>0$

CM: $(x+y+z)\left(\dfrac{a^2}{x}+\dfrac{b^2}{y}+\dfrac{c^2}{z}\right)=(a^2+b^2+c^2)+\left(\dfrac{a^2y}{x}+\dfrac{b^2z}{y}+\dfrac{c^2x}{z}\right)+\left(\dfrac{a^2z}{x}+\dfrac{b^2x}{y}+\dfrac{c^2y}{z}\right)$

$$\ge(a^2+b^2+c^2)+2\sqrt{\frac{a^2y}{x}.\frac{b^2x}{y}}+2\sqrt{\frac{b^2z}{y}.\frac{c^2y}{z}}+2\sqrt{\frac{c^2x}{z}.\frac{a^2z}{x}}=(a+b+c)^2$$

Áp dụng: Chuẩn hoá $a+b+c=1$ và sử dụng bất đẳng thức ***AM – GM*** ta có

$$\frac{a}{(b+c)^3}=\frac{a}{(1-a)^3}=\frac{2a^2}{2a.(1-a).(1-a).(1-a)}\ge\frac{2a^2}{\left[\dfrac{2a+(1-a)+(1-a)}{3}\right]^3(1-a)}=\frac{27a^2}{4(1-a)}$$

Tương tự ta cũng có $\dfrac{b}{(c+a)^3} \geq \dfrac{27b^2}{4(1-b)}$ và $\dfrac{c}{(a+b)^3} \geq \dfrac{27c^2}{4(1-c)}$.

Sử dụng bổ đề suy ra:

$$\frac{a}{(b+c)^3}+\frac{b}{(c+a)^3}+\frac{c}{(a+b)^3} \geq \frac{27}{4}\left[\frac{a^2}{1-a}+\frac{b^2}{1-b}+\frac{c^2}{1-c}\right] \geq \frac{27}{4}\left[\frac{(a+b+c)^2}{3-(a+b+c)}\right]=\frac{27}{8}$$

Bài 4. Cho $a,b,c \geq 0$. Chứng minh rằng: $\left(1+\dfrac{4a}{b+c}\right)\left(1+\dfrac{4b}{c+a}\right)\left(1+\dfrac{4c}{a+b}\right) \geq 25$

Chứng minh

Chuẩn hoá $a+b+c=2$, bất đẳng thức có dạng $\left(1+\dfrac{4a}{2-a}\right)\left(1+\dfrac{4b}{2-b}\right)\left(1+\dfrac{4c}{2-c}\right) \geq 25$

$\Leftrightarrow (2+3a)(2+3b)(2+3c) \geq 25(2-a)(2-b)(2-c) \Leftrightarrow 52abc-32(ab+bc+ca)+32 \geq 0 (*)$

- Trường hợp 1: $ab+bc+ca \leq 1$. Khi đó bất đẳng thức (*) luôn đúng.
- Trường hợp 2: $ab+bc+ca > 1$. Sử dụng bất đẳng thức quen thuộc

$$xyz \geq (y+z-x)(z+x-y)(x+y-z)$$

Ta được $abc \geq (2-2a)(2-2b)(2-2c) \Leftrightarrow 9abc \geq 8(ab+bc+ca)-8$

Suy ra $52abc = 16abc+4.9abc \geq 16abc+32(ab+bc+ca)-32 \geq 32(ab+bc+ca)-32$

Vậy (*) đúng với mọi $a,b,c \geq 0$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b, c=0$ và các hoán vị.

Bài 5. Cho $a,b,c > 0$. Chứng minh rằng: $\sqrt{\dfrac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}}+\dfrac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}} \geq 4$ (1)

Chứng minh

Chuẩn hóa $a+b+c=1$ và đặt u = $ab+bc+ca \Rightarrow a^2+b^2+c^2=1-2u$.

Sử dụng bất đẳng thức ***AM – GM*** ta có

$$\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}=\frac{u}{1-2u}=\frac{u^3}{u.u.(1-2u)} \geq \frac{u^3}{\left[\dfrac{u+u+(1-2u)}{3}\right]^3}=27(ab+bc+ca)^3 \geq (27abc)^2$$

Từ đó và bất đẳng thức ***AM – GM*** ta được

$$\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}}+\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}} \geq 27abc+\frac{1}{\sqrt[3]{abc}}=27abc+\frac{1}{3\sqrt[3]{abc}}+\frac{1}{3\sqrt[3]{abc}}+\frac{1}{3\sqrt[3]{abc}} \geq$$

$\geq 4\sqrt[4]{27abc(\dfrac{1}{3\sqrt[3]{abc}})^3}=4$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c>0$.

Bài 6. Chứng minh: $\dfrac{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)}{9} \ge \sqrt{\dfrac{(a^2+bc)(b^2+ca)(c^2+ab)}{8}}. \forall a,b,c>0$

Chứng minh.

Chuẩn hoá $a+b+c=3$. Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$8(a^2+b^2+c^2)^2 \ge 9(a^2+bc)(b^2+ca)(c^2+ab)$. Sử dụng bất đẳng thức ***AM – GM***

$$(a^2+bc)(b^2+ca)(c^2+ab) \le \left(\frac{a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca}{3}\right)^3$$

Đặt $u=ab+bc+ca \Rightarrow u \le 3$ và $a^2+b^2+c^2=9-2u$. Ta cần chứng minh

$8(9-2u)^2 \ge 9\left(\dfrac{9-u}{3}\right)^3 \Leftrightarrow (u-3)(u^2+72u-405) \ge 0$ luôn đúng vì $u \le 3$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c>0$.

Bài 7. Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng

1. $\dfrac{\sqrt{3(a^3+b^3+c^3)}}{3abc} \ge \dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}{ab+bc+ca}$ **2.** $\dfrac{(a+b)(b+c)(c+a)}{8abc} \ge \dfrac{a+b+c}{\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}}$

Chứng minh.

1. Chuẩn hóa $a^3+b^3+c^3=3$. Ta cần chứng minh $ab+bc+ca \ge abc(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})$

Theo ***AM – GM***: $3=a^3+b^3+c^3 \ge 3abc \Rightarrow abc \le 1$.

Mặt khác:

$$ab+bc+ca-\sqrt{abc}(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}) = \frac{1}{2}\left[a(\sqrt{b}-\sqrt{c})^2+b(\sqrt{c}-\sqrt{a})^2+c(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\right] \ge 0$$

Suy ra $ab+bc+ca \ge \sqrt{abc}(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}) \ge abc(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})$ (đpcm)

2. Chuẩn hóa $abc=1$. Ta cần chứng minh $(a+b)(b+c)(c+a)(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}) \ge 8(a+b+c)$

Sử dụng bất đẳng thức ***AM – GM*** ta có

$$(a+b)(b+c)(c+a)=(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc \ge \frac{8}{9}(a+b+c)(ab+bc+ca)$$

Suy ra bất đẳng thức đã cho đúng nếu ta chứng minh được

$(ab+bc+ca)(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}) \ge 9$. Bất đẳng thức này luôn đúng theo ***AM – GM***.

Chú ý. Bạn đọc có thể chứng minh được bất đẳng thức tương tự sau đây

$$\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{8abc} \ge \left(\frac{a+b+c}{\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}}\right)^2$$

Bài 8. Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng: $\dfrac{(a+b+c)^3}{abc}+27\sqrt[3]{\dfrac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}}\geq 54$ (1)

Chứng minh.

Cách 1.(** __**Mehdi Cherif**__**) Sử dụng bất đẳng thức $\boldsymbol{AM-GM}$ ta có

$$\sqrt[3]{\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+ac+bc}}=\sqrt[3]{\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+ac+bc}.1.1}\leq\frac{a^2+b^2+c^2}{3(ab+ac+bc)}+\frac{2}{3}=\frac{(a+b+c)^2}{3(ab+ac+bc)}.$$

Suy ra $\sqrt[3]{\dfrac{ab+ac+bc}{a^2+b^2+c^2}}\geq\dfrac{3(ab+ac+bc)}{(a+b+c)^2}$. Từ đó bất đẳng thức (1) được chứng minh nếu ta chứng minh được bất đẳng thức $\dfrac{(a+b+c)^3}{abc}+\dfrac{81(ab+ac+bc)}{(a+b+c)^2}\geq 54$

Chuẩn hóa $a+b+c=1$, khi đó ta phải chứng minh $\dfrac{1}{abc}+81(ab+ac+bc)\geq 54$ (2)

Theo bất đẳng thức $\boldsymbol{AM-GM}$ thì $\dfrac{1}{abc}\geq\dfrac{9}{ab+ac+bc}$

Do đó (2) đúng nếu chứng minh được $\dfrac{9}{ab+ac+bc}+81(ab+ac+bc)\geq 54$.

Thật vậy biến đổi tương đương bất đẳng thức ta được $9\left[3(ab+bc+ca)-1\right]^2\geq 0$ (đúng)

Cách 2.(** __**Võ Quốc Bá Cẩn**__**)

Sử dụng bất đẳng thức $\boldsymbol{AM-GM}$ ta có $abc\leq\dfrac{(ab+bc+ca)^2}{a+b+c}$

Ta chỉ cần chứng minh $\dfrac{3(a+b+c)^4}{(ab+bc+ca)^2}+27\cdot\sqrt[3]{\dfrac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}}\geq 54$

Sử dụng $\boldsymbol{AM-GM}$ ta có

$$\frac{(a+b+c)^2}{3(ab+bc+ca)}+\sqrt[3]{\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}}\geq\frac{2(a+b+c)}{\sqrt{3}\sqrt[6]{(ab+bc+ca)^2(a^2+b^2+c^2)}}$$

và $(ab+bc+ca).(ab+bc+ca).(a^2+b^2+c^2)\leq\dfrac{1}{27}(a+b+c)^6$

Từ hai đánh giá này suy ra $\dfrac{(a+b+c)^2}{3(ab+bc+ca)}+\sqrt[3]{\dfrac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}}\geq\dfrac{2(a+b+c)}{\sqrt{3}\sqrt[6]{\dfrac{1}{27}(a+b+c)^6}}=2$

hay $\dfrac{9(a+b+c)^2}{ab+bc+ca}+27\sqrt[3]{\dfrac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}}\geq 54$. Ta sẽ chứng minh

$$\frac{3(a+b+c)^4}{(ab+bc+ca)^2} \geq \frac{9(a+b+c)^2}{ab+bc+ca} \text{ hay } (a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca) \text{ (đúng)}$$

Cách 3.(***<u>Dương Đức Lâm</u>*** ***)*** Không mất tính tổng quát,giả sử $a+b+c=3$.

Đặt $t = ab+bc+ca \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$ thì $a^2+b^2+c^2 = 9-2t$ .Sử dụng $\boldsymbol{AM-GM}$ ta có

$$\sqrt[3]{\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}} = \sqrt[3]{\frac{t}{9-2t}} = \frac{3t}{\sqrt[3]{t.t.(9-2t)}} \geq \frac{3t}{t+t+(9-2t)} = \frac{t}{3} \geq \sqrt[3]{a^2b^2c^2}$$

Ta chỉ cần chứng minh $\dfrac{27}{abc} + 27\sqrt[3]{a^2b^2c^2} \geq 54$. Sử dụng $\boldsymbol{AM-GM}$ ta có

$$\frac{27}{abc} + 27\sqrt[3]{a^2b^2c^2} = 9\left(3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} + 2\frac{1}{abc}\right) + \frac{9}{abc} \geq 9.5\sqrt[5]{a^2b^2c^2 \cdot \frac{1}{abc} \cdot \frac{1}{abc}} + 9 = 54$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c>0$.

Nhận xét. Cách giải 3 giúp ta chứng minh được bất đẳng thức mạnh hơn sau đây:

$$\frac{2(a+b+c)^3}{abc} + 81\sqrt[3]{\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}} \geq 135,\ \forall a,b,c>0$$

Bài 9. Cho x,y,z là độ dài ba cạnh của một tam giác.

Chứng minh: $(x+y+z)xyz \geq (xy+yz+zx)\sqrt[3]{(y+z-x)(z+x-y)(x+y-z)}$

Chứng minh

Đặt $a=y+z-x, b=z+x-y, c=x+y-z$ thì $a,b,c \geq 0$ và $x=\dfrac{b+c}{2}, y=\dfrac{c+a}{2}, z=\dfrac{a+b}{2}$ Chuẩn hóa $abc=1$. Bất đẳng thức trở thành

$$(a+b+c)(a+b)(b+c)(c+a) \geq 2\left[(a+b)(b+c)+(b+c)(c+a)+(c+a)(a+b)\right]$$

$\Leftrightarrow a+b+c \geq \dfrac{2}{a+b} + \dfrac{2}{b+c} + \dfrac{2}{c+a}$. Theo $\boldsymbol{AM-GM}$:

$$\frac{2}{a+b} + \frac{2}{b+c} + \frac{2}{c+a} \leq \frac{2}{2\sqrt{ab}} + \frac{2}{2\sqrt{ab}} + \frac{2}{2\sqrt{ab}} = \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \leq \frac{a+1+b+1+c+1}{2} \leq a+b+c$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z$.

Bài 10. Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng

$$\frac{\sqrt{a+b+c}+\sqrt{a}}{b+c} + \frac{\sqrt{a+b+c}+\sqrt{b}}{c+a} + \frac{\sqrt{a+b+c}+\sqrt{c}}{a+b} \geq \frac{9+3\sqrt{3}}{2\sqrt{a+b+c}} \quad (1)$$

Chứng minh

$(1) \Leftrightarrow 2(a+b+c)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)+2\sqrt{a+b+c}.\left(\frac{\sqrt{a}}{b+c}+\frac{\sqrt{b}}{c+a}+\frac{\sqrt{c}}{a+b}\right)\geq 9+3\sqrt{3}$

Chuẩn hóa $a+b+c=3$. Ta nhận được bất đẳng thức

$$6\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)+2\sqrt{3}.\left(\frac{\sqrt{a}}{b+c}+\frac{\sqrt{b}}{c+a}+\frac{\sqrt{c}}{a+b}\right)\geq 9+3\sqrt{3}$$

Sử dụng bất đẳng thức ***AM – GM*** ta có $6\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)\geq \frac{6.9}{2(a+b+c)}=9$

Cuối cùng ta cần chứng minh $\frac{\sqrt{a}}{b+c}+\frac{\sqrt{b}}{c+a}+\frac{\sqrt{c}}{a+b}\geq \frac{3}{2}$. Theo ***AM – GM*** :

$$\frac{a}{(b+c)^2}=\frac{a}{(3-a)^2}=\frac{2a^2}{2a(3-a)(3-a)}\geq \frac{2a^2}{\left(\frac{2a+(3-a)+(3-a)}{3}\right)^3}=\frac{a^2}{4}\Rightarrow \frac{\sqrt{a}}{b+c}\geq \frac{a}{2}$$

Tương tự suy ra $\frac{\sqrt{a}}{b+c}+\frac{\sqrt{b}}{c+a}+\frac{\sqrt{c}}{a+b}\geq \frac{a+b+c}{2}=\frac{3}{2}$. (đpcm)

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c>0$.

Bài 11. Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng $\left(\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}\right)^2\geq 4\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)+3$ (1)

Chứng minh

Chuẩn hóa $abc=1$ thì bất đẳng thức $(1)\Leftrightarrow (a+b+c)^2\geq 4\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)+3$.

Theo ***AM – GM*** ta có $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\leq \frac{a}{2\sqrt{bc}}+\frac{b}{2\sqrt{ca}}+\frac{c}{2\sqrt{ab}}=\frac{1}{2}\left(a\sqrt{a}+b\sqrt{b}+c\sqrt{c}\right)$

Suy ra bất đẳng thức (1) đúng nếu ta chứng minh được bất đẳng thức sau

$(a+b+c)^2\geq 2\left(a\sqrt{a}+b\sqrt{b}+c\sqrt{c}\right)+3$. Theo ***AM - GM*** ta có $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\geq 3$, suy ra

$$6\left(a\sqrt{a}+b\sqrt{b}+c\sqrt{c}\right)+9\leq 2\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)\left(a\sqrt{a}+b\sqrt{b}+c\sqrt{c}\right)+3\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)$$

Ta chỉ cần chứng minh

$$3(a+b+c)^2\geq 2\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)\left(a\sqrt{a}+b\sqrt{b}+c\sqrt{c}\right)+3\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)\Leftrightarrow$$

$$a^2+b^2+c^2+6(ab+bc+ca)\geq 2\left(\sqrt{ab}(a+b)+\sqrt{bc}(b+c)+\sqrt{ca}(c+a)\right)+3\sqrt{abc}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)$$

$$\Leftrightarrow a\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)^2+b\left(\sqrt{c}-\sqrt{a}\right)^2+c\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2+\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^4+\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)^4+\left(\sqrt{c}-\sqrt{a}\right)^4\geq 0$$

Bất đẳng thức cuối luôn đúng nên (1) đúng. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

VII. BẤT ĐẲNG THỨC ĐỒNG BẬC DẠNG CỘNG MẪU SỐ

1. Dạng tổng quát: Cho $x_1, x_2, ..., x_n > 0$ với $n \geq 2,\ n \in \mathbb{N}$, khi đó ta có:

- ***Dạng cộng mẫu số:*** $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \cdots + \dfrac{1}{x_n} \geq \dfrac{n^2}{x_1 + x_2 + ... + x_n}$

- ***Dạng tích nghịch đảo:*** $(x_1 + x_2 + ... + x_n)\left(\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + ... + \dfrac{1}{x_n}\right) \geq n^2$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x_1 = x_2 = ... = x_n > 0$.

Chứng minh: Sử dụng bất đẳng thức ***AM – GM*** ta có

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n} \geq \frac{n}{\sqrt[n]{x_1 x_2 ... x_n}} \geq \frac{n}{\dfrac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}} = \frac{n^2}{x_1 + x_2 + ... + x_n}.$$

Hoặc $(x_1 + x_2 + ... + x_n)\left(\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + ... + \dfrac{1}{x_n}\right) \geq n\sqrt[n]{x_1 . x_2 ... x_n} . n . \sqrt[n]{\dfrac{1}{x_1} . \dfrac{1}{x_2} ... \dfrac{1}{x_n}} = n^2$

Suy ra: $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \cdots + \dfrac{1}{x_n} \geq \dfrac{n^2}{x_1 + x_2 + ... + x_n}$

Ý nghĩa: Khi gặp một biểu thức là tổng của *n* phân số, chúng ta thường tiếp cận theo cách biến đổi đẳng thức với phép quy đồng mẫu số rất phức tạp. Tuy nhiên nếu tiếp cận theo cách đánh giá bởi bất đẳng thức trên thì ta nhận được một phân số được thu gọn với mẫu là tổng các mẫu số của *n* phân số đã cho. Có rất nhiều bất đẳng thức ứng dụng cả hai dạng trên nhưng ở đây chúng tôi sẽ chỉ giới thiệu các bài tập minh họa cho dạng cộng mẫu số của bất đẳng thức. Chúng ta sẽ gặp lại kỹ thuật này được mở rộng trong phần giới thiệu về kỹ thuật mở đầu của bất đẳng thức ***Cauchy – Schwarz***..

2. Các trường hợp đặc biệt

n / Dạng	$n=2: \forall x, y > 0$	$n=3: \forall x, y, z > 0$	$n=4: \forall x, y, z, t > 0$
Dạng 1	$(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) \geq 4$	$(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \geq 9$	$(x+y+z+t)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}\right) \geq 16$
Dạng 2	$\frac{1}{x}+\frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$	$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \geq \frac{9}{x+y+z}$	$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t} \geq \frac{16}{x+y+z+t}$
Điều kiện	$x = y$	$x = y = z$	$x = y = z = t$

3. Các bài tập mẫu minh họa

Bài 1. Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge 2\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)$

Chứng minh

Biến đổi và sử dụng bất đẳng thức cộng mẫu số với $n=2$ ta có:

$$VT=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)\right]\ge\frac{1}{2}\left(\frac{4}{a+b}+\frac{4}{b+c}+\frac{4}{c+a}\right)=2\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c>0$

Bài 2. Cho $\begin{cases}a,b,c>0\\ a+b+c\le 1\end{cases}$. Chứng minh rằng: $\frac{1}{a^2+2bc}+\frac{1}{b^2+2ca}+\frac{1}{c^2+2ab}\ge 9$

Chứng minh

Biến đổi và sử dụng bất đẳng thức cộng mẫu số với $n=3$ ta có:

$$\frac{1}{a^2+2bc}+\frac{1}{b^2+2ca}+\frac{1}{c^2+2ab}\ge\frac{9}{(a^2+2bc)+(b^2+2ca)+(c^2+2ab)}=\frac{9}{(a+b+c)^2}\ge 9$$

Bài 3. Cho $\begin{cases}a,b>0\\ a+b\le 1\end{cases}$ Chứng minh rằng: $S=\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{1}{ab}\ge 6$

Chứng minh

Biến đổi và sử dụng bất đẳng thức cộng mẫu số với $n=2$ ta có:

$$S=\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{1}{ab}=\left(\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{1}{2ab}\right)+\frac{1}{2ab}\ge\frac{4}{(a^2+b^2)+2ab}+\frac{1}{2ab}$$

$$\ge\frac{4}{(a+b)^2}+\frac{2}{(a+b)^2}=\frac{6}{(a+b)^2}\ge\frac{6}{1^2}=6$$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=\frac{1}{2}$

Bài 4. Cho $\begin{cases}a,b>0\\ a+b\le 1\end{cases}$ Chứng minh rằng: $S=\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{1}{ab}+4ab\ge 7$

Chứng minh

$$S=\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{1}{ab}+4ab=\left(\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{1}{2ab}\right)+\frac{1}{4ab}+\left(\frac{1}{4ab}+4ab\right)$$

$$\ge\frac{4}{(a^2+b^2)+2ab}+\frac{1}{4ab}+\left(\frac{1}{4ab}+4ab\right)\ge\frac{4}{(a+b)^2}+\frac{1}{(a+b)^2}+2\cdot\sqrt{\frac{1}{4ab}\cdot 4ab}$$

$$=\frac{4}{(a+b)^2}+\frac{1}{(a+b)^2}+2=\frac{5}{(a+b)^2}+2\ge 7$$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=\frac{1}{2}$

Bài 5. [Tạp chí THTT] Cho $a, b, c, d > 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$S = \frac{a-d}{b+d} + \frac{d-b}{c+b} + \frac{b-c}{a+c} + \frac{c-a}{d+a}$$

Giải

Biến đổi và sử dụng bất đẳng thức cộng mẫu số với $n = 2$ ta có:

$$S+4 = \left(\frac{a-d}{b+d}+1\right) + \left(\frac{d-b}{c+b}+1\right) + \left(\frac{b-c}{a+c}+1\right) + \left(\frac{c-a}{d+a}+1\right)$$

$$= \frac{a+b}{d+b} + \frac{d+c}{b+c} + \frac{b+a}{c+a} + \frac{c+d}{a+d} = (a+b)\left(\frac{1}{d+b}+\frac{1}{c+a}\right) + (c+d)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+d}\right)$$

$$\geq (a+b)\frac{4}{(d+b)+(c+a)} + (c+d)\frac{4}{(b+c)+(a+d)} = \frac{4(a+b+c+d)}{a+b+c+d} = 4$$

Từ đó suy ra $S \geq 0$. Với $a = b = c = d > 0$ thì Min $S = 0$

Bài 6. Cho $a, b, c \in (0, 1]$. Chứng minh rằng: $\frac{1}{a+3b} + \frac{1}{b+3c} + \frac{1}{c+3a} \geq \frac{3}{3+abc}$

Chứng minh

Biến đổi và sử dụng bất đẳng thức cộng mẫu số với $n = 3$ ta có:

$$\frac{1}{a+3b} + \frac{1}{b+3c} + \frac{1}{c+3a} \geq \frac{9}{(a+3b)+(b+3c)+(c+3a)} = \frac{9}{4(a+b+c)} \quad (1)$$

Ta sẽ chứng minh $\frac{9}{4(a+b+c)} \geq \frac{3}{3+abc}$ (2) $\Leftrightarrow 9 + 3abc \geq 4(a+b+c)$ (3)

Đặt $a = 1-x; b = 1-y; c = 1-z$ với $x, y, z \in [0, 1)$, khi đó (3)

$\Leftrightarrow 9 + 3(1-x)(1-y)(1-z) \geq 4(3-x-y-z) \Leftrightarrow x+y+z+3(xy+yz+zx) \geq 3xyz$

Sử dụng bất đẳng thức ***AM – GM*** với $x, y, z \in [0, 1)$ ta có

$x+y+z+3(xy+yz+zx) \geq 3.\sqrt[3]{xyz} + 9.\sqrt[3]{x^2y^2z^2} \geq 12xyz \geq 3xyz \Rightarrow$ (3) đúng

$\Rightarrow$ (2) đúng. Từ (1),(2) suy ra đpcm. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = 1$.

Bài 7. [British Mathematical Olympiad – 1992] Cho $a, b, c, d > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{12}{a+b+c+d} \leq \mathrm{S} = \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{a+d} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{b+d} + \frac{1}{c+d} \leq \frac{3}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)$$

Chứng minh

Biến đổi và sử dụng bất đẳng thức cộng mẫu số ta có:

$$S \ge \frac{6^2}{(a+b)+(a+c)+(a+d)+(b+c)+(b+d)+(c+d)} = \frac{12}{a+b+c+d}$$

$$S \le \frac{1}{4}\left[\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right)+\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{d}\right)+\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{d}\right)+\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)\right] = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)$$

Bài 8. Chứng minh rằng: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \ge 4\left(\frac{1}{3a+b}+\frac{1}{3b+c}+\frac{1}{3c+a}\right)\ \forall a,b,c>0$

Chứng minh

Sử dụng bất đẳng thức cộng mẫu số với $n = 4$ ta có:

$$+\begin{cases} \frac{3}{a}+\frac{1}{b} = \frac{1}{a}+\frac{1}{a}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \ge \frac{4^2}{a+a+a+b} = \frac{4^2}{3a+b} \\ \frac{3}{b}+\frac{1}{c} = \frac{1}{b}+\frac{1}{b}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \ge \frac{4^2}{b+b+b+c} = \frac{4^2}{3b+c} \\ \frac{3}{c}+\frac{1}{a} = \frac{1}{c}+\frac{1}{c}+\frac{1}{c}+\frac{1}{a} \ge \frac{4^2}{c+c+c+a} = \frac{4^2}{3c+a} \end{cases}$$

Suy ra $4\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \ge 4^2\left(\frac{1}{3a+b}+\frac{1}{3b+c}+\frac{1}{3c+a}\right)$

$\Leftrightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \ge 4\left(\frac{1}{3a+b}+\frac{1}{3b+c}+\frac{1}{3c+a}\right)$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c>0$.

Bài 9. Cho $a, b, c, d > 0$ và $a + b + c + d \le 2$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d} \ge 3\left(\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}+\frac{1}{1+d}\right)$$

Chứng minh

$$+\begin{cases} \frac{1}{a}+\frac{1}{a}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d} \ge \frac{36}{2a+(a+b+c+d)} \ge \frac{36}{2a+2} = \frac{18}{1+a} \\ \frac{1}{b}+\frac{1}{b}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{a} \ge \frac{36}{2b+(a+b+c+d)} \ge \frac{36}{2b+2} = \frac{18}{1+b} \\ \frac{1}{c}+\frac{1}{c}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \ge \frac{36}{2c+(a+b+c+d)} \ge \frac{36}{2c+2} = \frac{18}{1+c} \\ \frac{1}{d}+\frac{1}{d}+\frac{1}{d}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \ge \frac{36}{2d+(a+b+c+d)} \ge \frac{36}{2d+2} = \frac{18}{1+d} \end{cases}$$

$\Rightarrow 6\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right) \ge 18\left(\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}+\frac{1}{1+d}\right)$ (đpcm)

Bài 10. Cho $\begin{cases} a,b,c>0 \\ a+b+c=1 \end{cases}$ Chứng minh rằng: $\frac{1}{a+bc}+\frac{1}{b+ca}+\frac{1}{c+ab}\geq\frac{27}{4}$

Chứng minh

Bổ đề: $ab+bc+ca\leq\frac{1}{3}(a+b+c)^2$

Áp dụng: Sử dụng bất đẳng thức cộng mẫu số với $n=3$ ta có:

$$\frac{1}{a+bc}+\frac{1}{b+ca}+\frac{1}{c+ab}\geq\frac{9}{(a+b+c)+(ab+bc+ca)}\geq\frac{9}{(a+b+c)+\frac{1}{3}(a+b+c)^2}=\frac{27}{4}$$

Bài 11. Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn điều kiện $a^3c+b^3a+c^3b=abc$

Chứng minh rằng: $S=\frac{b}{a^2+ab}+\frac{c}{b^2+bc}+\frac{a}{c^2+ca}\geq\frac{9}{2}$

Chứng minh

Bổ đề: $\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\geq a+b+c;\forall a,b,c>0$

Áp dụng: $a^3c+b^3a+c^3b=abc\Rightarrow 1=\frac{a^3c+b^3a+c^3b}{abc}=\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\geq a+b+c$

$$S=\frac{1}{\frac{a^2}{b}+a}+\frac{1}{\frac{b^2}{c}+b}+\frac{1}{\frac{c^2}{a}+c}\geq\frac{9}{\left(\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\right)+(a+b+c)}\geq\frac{9}{2\left(\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\right)}=\frac{9}{2}$$

Bài 12. Cho $a,b,c\geq 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{b^3+2abc+c^3}{a^2+bc}+\frac{c^3+2abc+a^3}{b^2+ca}+\frac{a^3+2abc+b^3}{c^2+ab}\geq 2(a+b+c)\ (1)$$

Chứng minh

$$(1)\Leftrightarrow\sum_{cyc}\left(\frac{b^3+2abc+c^3}{a^2+bc}+a\right)\geq 3(a+b+c)\Leftrightarrow\left(a^3+b^3+c^3+3abc\right)\left(\sum_{cyc}\frac{1}{a^2+bc}\right)\geq 3(a+b+c)$$

Sử dụng bất đẳng thức cộng mẫu số với $n=3$ ta có: $\sum_{cyc}\frac{1}{a^2+bc}\geq\frac{9}{a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca}$

Suy ra (1) đúng nếu ta chứng minh được bất đẳng thức sau:

$$3\left(a^3+b^3+c^3+3abc\right)\geq(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca\right)$$

$$\Leftrightarrow a^3+b^3+c^3+3abc\geq ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)\ (2)$$

Không mất tính tổng quát giả sử $a\geq b\geq c$, khi đó

$VT(2)-VP(2)=a(a-b)^2+c(b-c)^2+(c+a-b)(a-b)(b-c)\geq 0\ \Rightarrow$(đpcm).

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$ hoặc $a=b,c=0$ và các hoán vị.

Bài 13. Cho $a,b,c \geq 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{ab}{a+b+2c}+\frac{bc}{b+c+2a}+\frac{ca}{c+a+2b} \leq \frac{a+b+c}{4}$$

Chứng minh

Biến đổi và sử dụng bất đẳng thức cộng mẫu số với $n=2$ ta có:

$$+\begin{cases} \dfrac{ab}{a+b+2c}=ab\cdot\dfrac{1}{(a+c)+(b+c)} \leq ab\cdot\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{a+c}+\dfrac{1}{b+c}\right) \\ \dfrac{bc}{b+c+2a}=bc\cdot\dfrac{1}{(b+a)+(c+a)} \leq bc\cdot\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{b+a}+\dfrac{1}{c+a}\right) \\ \dfrac{ca}{c+a+2b}=ca\cdot\dfrac{1}{(c+b)+(a+b)} \leq ca\cdot\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{c+b}+\dfrac{1}{a+b}\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{ab}{a+b+2c}+\frac{bc}{b+c+2a}+\frac{ca}{c+a+2b} \leq \frac{1}{4}\left(\frac{bc+ca}{a+b}+\frac{ca+ab}{b+c}+\frac{ab+bc}{a+c}\right)=\frac{a+b+c}{4}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$ hoặc $a=b, c=0$ và các hoán vị.

Bài 14. [Tạp chí TTT] Cho $a,b,c \geq 0$. Chứng minh rằng :

$$\frac{ab}{a+3b+2c}+\frac{bc}{b+3c+2a}+\frac{ca}{c+3a+2b} \leq \frac{a+b+c}{6}$$

Chứng minh

Biến đổi và sử dụng bất đẳng thức cộng mẫu số với $n=3$ ta có:

$$+\begin{cases} \dfrac{ab}{a+3b+2c}=ab\cdot\dfrac{1}{(a+c)+(b+c)+2b} \leq ab\cdot\dfrac{1}{9}\left(\dfrac{1}{a+c}+\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{2b}\right) \\ \dfrac{bc}{b+3c+2a}=bc\cdot\dfrac{1}{(b+a)+(c+a)+2c} \leq bc\cdot\dfrac{1}{9}\left(\dfrac{1}{b+a}+\dfrac{1}{c+a}+\dfrac{1}{2c}\right) \\ \dfrac{ca}{c+3a+2b}=ca\cdot\dfrac{1}{(c+b)+(a+b)+2a} \leq ca\cdot\dfrac{1}{9}\left(\dfrac{1}{c+b}+\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{2a}\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{ab}{a+3b+2c}+\frac{bc}{b+3c+2a}+\frac{ca}{c+3a+2b} \leq \frac{1}{9}\left(\frac{a+b+c}{2}+\frac{ab+bc}{a+c}+\frac{ab+ca}{b+c}+\frac{bc+ca}{a+b}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{ab}{a+3b+2c}+\frac{bc}{b+3c+2a}+\frac{ca}{c+3a+2b} \leq \frac{1}{9}\left(\frac{a+b+c}{2}+a+b+c\right)=\frac{a+b+c}{6}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c>0$.

VIII. BẤT ĐẲNG THỨC ĐỒNG BẬC CHỨA CĂN THỨC

Các bất đẳng thức trong mục này được sắp xếp từ đơn giản đến phức tạp theo xu hướng khái quát hóa các vấn đề đặt ra. Các bổ đề trong các bài toán mở đầu được chứng minh nhờ sử dụng khai triển nhị thức ***Newton*** và nguyên lý đồng bậc trong bất đẳng thức ***AM – GM*** nhằm phổ cập rộng rãi cho các bạn yêu thích bất đẳng thức mặc dù tiếp nối các bài toán này là bài toán tổng quát được chứng minh bằng một phương pháp ngắn gọn hơn trong ***AM – GM***.

Bài 1. Chứng minh: $S=\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}\ge\sqrt{2}(a+b+c)$, $\forall a,b,c\ge 0$

Chứng minh

Bổ đề: Sử dụng hằng đẳng thức và đánh giá sau đây:

• $(x+y)^2=x^2+y^2+2xy$ • $x^2+y^2\ge 2xy$

Áp dụng: $S=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2a^2+2b^2}+\sqrt{2b^2+2c^2}+\sqrt{2c^2+2a^2}\right)$

$$\ge\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{a^2+b^2+2ab}+\sqrt{b^2+c^2+2bc}+\sqrt{c^2+a^2+2ca}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\sqrt{(a+b)^2}+\sqrt{(b+c)^2}+\sqrt{(c+a)^2}\right]=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[(a+b)+(b+c)+(c+a)\right]=\sqrt{2}(a+b+c)$$

Bài 2. Chứng minh rằng: $S=\sqrt[3]{a^3+b^3}+\sqrt[3]{b^3+c^3}+\sqrt[3]{c^3+a^3}\ge\sqrt[3]{2}(a+b+c)$

Chứng minh

Bổ đề: Sử dụng hằng đẳng thức và đánh giá sau đây:

• $(x+y)^3=x^3+y^3+3xy(x+y)$ • $x^3+y^3=xy(x+y)$, $\forall x,y\ge 0$

Áp dụng: $S=\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\left[\sqrt[3]{a^3+b^3+3(a^3+b^3)}+\sqrt[3]{b^3+c^3+3(b^3+c^3)}+\sqrt[3]{c^3+a^3+3(c^3+a^3)}\right]$

$$\ge\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\left[\sqrt[3]{a^3+b^3+3ab(a+b)}+\sqrt[3]{b^3+c^3+3bc(b+c)}+\sqrt[3]{c^3+a^3+3ca(c+a)}\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\left[\sqrt[3]{(a+b)^3}+\sqrt[3]{(b+c)^3}+\sqrt[3]{(c+a)^3}\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\left[(a+b)+(b+c)+(c+a)\right]=\sqrt[3]{2}(a+b+c)$$

Bài 3. Chứng minh rằng $\forall a,b,c\ge 0$ ta có bất đẳng thức sau luôn đúng:

$$S=\sqrt[4]{a^4+b^4}+\sqrt[4]{b^4+c^4}+\sqrt[4]{c^4+a^4}\ge\sqrt[4]{2}(a+b+c)$$

Chứng minh

Bổ đề: • $(x+y)^4 = x^4 + y^4 + 4xy(x^2+y^2) + 6x^2y^2$

• $x^4 + y^4 \geq x^3y + xy^3 = xy(x^2+y^2)$, $\forall x, y \geq 0$ • $x^4 + y^4 \geq 2x^2y^2$

Áp dụng: $S = \frac{1}{\sqrt[4]{8}} \sum_{cyc} \sqrt[4]{a^4 + b^4 + 4(a^4+b^4) + 3(a^4+b^4)}$

$$\geq \frac{1}{\sqrt[4]{8}} \sum_{cyc} \sqrt[4]{a^4 + b^4 + 4ab(a^2+b^2) + 6a^2b^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt[4]{8}}\left[\sqrt[4]{(a+b)^4} + \sqrt[4]{(b+c)^4} + \sqrt[4]{(c+a)^4}\right] = \frac{2}{\sqrt[4]{8}}(a+b+c) = \sqrt[4]{2}\,(a+b+c)$$

Bài 4. Chứng minh rằng $\forall a, b, c \geq 0$ ta có bất đẳng thức sau luôn đúng:

$$S = \sqrt[5]{a^5+b^5} + \sqrt[5]{b^5+c^5} + \sqrt[5]{c^5+a^5} \geq \sqrt[5]{2}(a+b+c)$$

Chứng minh

Bổ đề: • $(x+y)^5 = x^5 + y^5 + 5xy(x^3+y^3) + 10x^2y^2(x+y)$

• $x^5 + y^5 \geq x^4y + xy^4 = xy(x^3+y^3)$, $\forall x, y \geq 0$

• $x^5 + y^5 \geq x^3y^2 + x^2y^3 = x^2y^2(x+y)$, $\forall x, y \geq 0$

$$S = \frac{1}{\sqrt[5]{16}}\left(\sqrt[5]{16a^5+16b^5} + \sqrt[5]{16b^5+16c^5} + \sqrt[5]{16c^5+16a^5}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt[5]{16}} \sum_{cyc} \sqrt[5]{a^5+b^5+5(a^5+b^5)+10(a^5+b^5)}$$

$$\geq \frac{1}{\sqrt[5]{16}} \sum_{cyc} \sqrt[5]{a^5+b^5+5ab(a^3+b^3)+10a^2b^2(a+b)} = \frac{1}{\sqrt[5]{16}} \sum_{cyc} \sqrt[5]{(a+b)^5} = \sqrt[5]{2}\,(a+b+c)$$

Bài 5. Cho $a, b, c > 0$ và $n \geq 1$, $n \in \mathbb{Z}$. Chứng minh rằng:

$$S = \sqrt[n]{a^n+b^n} + \sqrt[n]{b^n+c^n} + \sqrt[n]{c^n+a^n} \geq \sqrt[n]{2}(a+b+c)$$

Chứng minh

• ***Bình luận:*** Ta có thể sử dụng khai triển nhị thức ***Newton*** $(x+y)^n$ rồi sử dụng các đánh giá của các cặp đôi đơn thức đối xứng đồng bậc n với các biến số x, y. Tuy nhiên trong trường hợp tổng quát ở đây thì cách làm thủ công như các bài toán 1, 2, 3, 4 sẽ rất dài. Với bất đẳng thức tổng quát này chúng ta sẽ chứng minh nó bằng các sử dụng bổ đề sau đây:

• ***Bổ đề:*** $x + y \leq \sqrt[n]{2^{n-1}(x^n+y^n)}$, $\forall x, y > 0$ (1)

Chứng minh. (1) $\Leftrightarrow \sqrt[n]{x^n}+\sqrt[n]{y^n}\le\sqrt[n]{2^{n-1}(x^n+y^n)}\Leftrightarrow\sqrt[n]{\underbrace{1\cdots1}_{n-1}.x^n}+\sqrt[n]{\underbrace{1\cdots1}_{n-1}.y^n}\le\sqrt[n]{\underbrace{2\cdots2}_{n-1}.(x^n+y^n)}$

$$T=\sqrt[n]{\underbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdots\frac{1}{2}}_{n-1}\cdot\frac{x^n}{x^n+y^n}}+\sqrt[n]{\underbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdots\frac{1}{2}}_{n-1}\cdot\frac{y^n}{x^n+y^n}}\le1$$

Sử dụng bất đẳng thức $AM-GM$ ta có

$$T\le\frac{1}{n}\left(\underbrace{\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2}}_{n-1}+\frac{x^n}{x^n+y^n}\right)+\sqrt[n]{\underbrace{\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2}}_{n-1}+\frac{y^n}{x^n+y^n}}=\frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{2}+\frac{n-1}{2}+\frac{x^n+y^n}{x^n+y^n}\right)=\frac{1}{n}\cdot n=1$$

• ***Áp dụng bổ đề ta có:***

$$S=\frac{1}{\sqrt[n]{2^{n-1}}}\left[\sqrt[n]{2^{n-1}(a^n+b^n)}+\sqrt[n]{2^{n-1}(b^n+c^n)}+\sqrt[n]{2^{n-1}(c^n+a^n)}\right]$$

$$\ge\frac{1}{\sqrt[n]{2^{n-1}}}[(a+b)+(b+c)+(c+a)]=\frac{2}{\sqrt[n]{2^{n-1}}}(a+b+c)=\sqrt[n]{2}(a+b+c)$$

Bài 6. Cho các số thực $a, b, c>0$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt[4]{2a^4+3b^4}+\sqrt[4]{2b^4+3c^4}+\sqrt[4]{2c^4+3a^4}\ge\frac{1}{\sqrt[12]{5}}\left(\sqrt[3]{2a^3+3b^3}+\sqrt[3]{2b^3+3c^3}+\sqrt[3]{2c^3+3a^3}\right)$$

Chứng minh

Đặt $m=\sqrt[4]{\dfrac{2a^4+3b^4}{5}}\Rightarrow\dfrac{2a^4}{m^4}+\dfrac{3b^4}{m^4}=5$

$$+\begin{cases}\dfrac{2a^3}{m^3}=2\cdot\dfrac{a}{m}\cdot\dfrac{a}{m}\cdot\dfrac{a}{m}\cdot1\le\dfrac{2}{4}\left(\dfrac{a^4}{m^4}+\dfrac{a^4}{m^4}+\dfrac{a^4}{m^4}+1\right)\\ \dfrac{3b^3}{m^3}=3\cdot\dfrac{b}{m}\cdot\dfrac{b}{m}\cdot\dfrac{b}{m}\cdot1\le\dfrac{3}{4}\left(\dfrac{b^4}{m^4}+\dfrac{b^4}{m^4}+\dfrac{b^4}{m^4}+1\right)\end{cases}$$

$$\Rightarrow\frac{2a^3}{m^3}+\frac{3b^3}{m^3}\le\frac{1}{4}\left[3\left(\frac{2a^4+3b^4}{m^4}\right)+5\right]=5\Rightarrow\sqrt[3]{\frac{2a^3+3b^3}{5}}\le m=\sqrt[4]{\frac{2a^4+3b^4}{5}}$$

Suy ra: $\sqrt[3]{\dfrac{2a^3+3b^3}{5}}+\sqrt[3]{\dfrac{2b^3+3c^3}{5}}+\sqrt[3]{\dfrac{2c^3+3a^3}{5}}\le\sqrt[4]{\dfrac{2a^4+3b^4}{5}}+\sqrt[4]{\dfrac{2b^4+3c^4}{5}}+\sqrt[4]{\dfrac{2c^4+3a^4}{5}}$

$$\Rightarrow\sqrt[4]{2a^4+3b^4}+\sqrt[4]{2b^4+3c^4}+\sqrt[4]{2c^4+3a^4}\ge\frac{1}{\sqrt[12]{5}}\left(\sqrt[3]{2a^3+3b^3}+\sqrt[3]{2b^3+3c^3}+\sqrt[3]{2c^3+3a^3}\right)$$

Bài 7. Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng:

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\ge 3\left[1+\sqrt[3]{\frac{3(a+b+c)(a+b)(b+c)(c+a)}{(ab+bc+ca)^2}}\right] \quad (1)$$

Chứng minh

$$(1)\Leftrightarrow \frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}\ge 3\sqrt[3]{\frac{3(a+b+c)(a+b)(b+c)(c+a)}{(ab+bc+ca)^2}}$$

Sử dụng bất đẳng thức **AM – GM** ta có

$$\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}\ge 3\sqrt[3]{\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}} \quad (2)$$

Ta sẽ chứng minh $\sqrt[3]{\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}}\ge\sqrt[3]{\frac{3(a+b+c)(a+b)(b+c)(c+a)}{(ab+bc+ca)^2}}$ (3)

$$\Leftrightarrow \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}\ge\frac{3(a+b+c)(a+b)(b+c)(c+a)}{(ab+bc+ca)^2}$$

$$\Leftrightarrow 3abc(a+b+c)\le(ab+bc+ca)^2 \Leftrightarrow a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2\ge 0.$$

Bất đẳng thức cuối đúng nên (3) được chứng minh .

Từ (2) và (3) suy ra (1) đúng. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c>0$.

Bài 8. Chứng minh: $\sqrt{\frac{a^3}{a^3+(b+c)^3}}+\sqrt{\frac{b^3}{b^3+(c+a)^3}}+\sqrt{\frac{c^3}{c^3+(a+b)^3}}\ge 1$, $\forall a,b,c>0$

Chứng minh

Với $u\ge 0$, sử dụng bất đẳng thức **AM – GM** ta có:

$\sqrt{1+u^3}=\sqrt{(1+u)(1-u+u^2)}\le\frac{(1+u)+(1-u+u^2)}{2}=1+\frac{u^2}{2}$. Từ đó suy ra:

$$VT=\sum_{cyc}\sqrt{\frac{a^3}{a^3+(b+c)^3}}=\sum_{cyc}\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{b+c}{a}\right)^3}}\ge\sum_{cyc}\frac{1}{1+\frac{1}{2}\left(\frac{b+c}{a}\right)^2}\ge\sum_{cyc}\frac{1}{1+\frac{b^2+c^2}{a^2}}=\sum_{cyc}\frac{a^2}{a^2+b^2+c^2}=1$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c>0$

Bài 9. Chứng minh rằng: $\sqrt{\frac{a(b+c)}{a^2+bc}}+\sqrt{\frac{b(c+a)}{b^2+ca}}+\sqrt{\frac{c(a+b)}{c^2+ab}}\ge 2$, $\forall a,b,c>0$

Chứng minh

Sử dụng bất đẳng thức **AM – GM**, ta có:

$$\sqrt{\frac{a(b+c)}{a^2+bc}}=\frac{a(b+c)}{\sqrt{(a^2+bc)(ab+bc)}}\ge\frac{2a(b+c)}{(a^2+bc)+(ab+bc)}=\frac{2a(b+c)}{(a+b)(a+c)}.$$

Ta sẽ chứng minh

$$\sum_{cyc}\frac{2a(b+c)}{(a+b)(a+c)}\ge 2\Leftrightarrow a(b+c)^2+b(c+a)^2+c(a+b)^2\ge(a+b)(b+c)(c+a)\Leftrightarrow 4abc\ge 0$$

Bài 10. Cho các số thực $a,b,c>0$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{a(b+c)}{a^2+bc}}+\sqrt{\frac{b(c+a)}{b^2+ca}}+\sqrt{\frac{c(a+b)}{c^2+ab}}\le\sqrt{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{c}}\right)}\quad(1)$$

Chứng minh

$$(1)\Leftrightarrow\left(\sum_{cyc}\sqrt{\frac{a(b+c)}{a^2+bc}}\right)^2\le\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{c}}\right)$$

$$\Leftrightarrow\sum_{cyc}\frac{a(b+c)}{a^2+bc}+2\sum_{cyc}\sqrt{\frac{ab(a+c)(b+c)}{(a^2+bc)(b^2+ca)}}\le 3+\sum_{cyc}\frac{b+c}{\sqrt{bc}}$$

$$\Leftrightarrow\sum_{cyc}\frac{a(b+c)}{a^2+bc}+2\sum_{cyc}\sqrt{\frac{ab(a+c)(b+c)}{(a^2+bc)(b^2+ca)}}-\sum_{cyc}\frac{b+c}{\sqrt{bc}}-3\le 0\quad(2)$$

Sử dụng bất đẳng thức ***AM – GM*** ta có: $\sum_{cyc}\frac{a(b+c)}{a^2+bc}\le\sum_{cyc}\frac{a(b+c)}{2\sqrt{a^2bc}}=\sum_{cyc}\frac{b+c}{2\sqrt{bc}}$

Mặt khác, $(a^2+bc)(b^2+ca)-ab(a+c)(b+c)=c(a-b)^2(a+b)\ge 0$

$$\Rightarrow\sqrt{\frac{ab(a+c)(b+c)}{(a^2+bc)(b^2+ca)}}\le 1\quad\Rightarrow\sum_{cyc}\sqrt{\frac{ab(a+c)(b+c)}{(a^2+bc)(b^2+ca)}}\le 3$$

$$\Rightarrow VT(2)\le\sum_{cyc}\frac{b+c}{2\sqrt{bc}}+6-\sum_{cyc}\frac{b+c}{\sqrt{bc}}-3=\sum_{cyc}\left(1-\frac{b+c}{2\sqrt{bc}}\right)=-\sum_{cyc}\frac{\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)^2}{2\sqrt{bc}}\le 0$$

$\Rightarrow$ (2) đúng $\Rightarrow$ (đpcm). Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c>0$

Bài 11. Cho $\begin{cases}a,b,c\ge 0\\ Min\{a+b;b+c;c+a\}>0\end{cases}$. Chứng minh: $\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}}\ge 2$

Chứng minh

Sử dụng bất đẳng thức ***AM – GM*** ta có:

$$+\begin{cases}\sqrt{\dfrac{a}{b+c}}=\dfrac{2a}{2\sqrt{a(b+c)}}\ge\dfrac{2a}{a+(b+c)}=\dfrac{2a}{a+b+c}\\ \sqrt{\dfrac{b}{c+a}}=\dfrac{2b}{2\sqrt{b(c+a)}}\ge\dfrac{2b}{b+(c+a)}=\dfrac{2b}{a+b+c}\\ \sqrt{\dfrac{c}{a+b}}=\dfrac{2c}{2\sqrt{c(a+b)}}\ge\dfrac{2c}{c+(a+b)}=\dfrac{2c}{a+b+c}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}}\ge\frac{2(a+b+c)}{a+b+c}=2$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow(a,b,c)$ là một hoán vị của $(x,x,0)$ với $x>0$

Bài 12. Cho $\begin{cases}a,b,c\ge0\\ Min\{a+b;b+c;c+a\}>0\end{cases}$. Chứng minh: $\sqrt[3]{\dfrac{a}{b+c}}+\sqrt[3]{\dfrac{b}{c+a}}+\sqrt[3]{\dfrac{c}{a+b}}\ge2$.

Chứng minh

Đặt $\sqrt[3]{a}=\sqrt{m};\sqrt[3]{b}=\sqrt{n};\sqrt[3]{c}=\sqrt{p}\Leftrightarrow a^2=m^3;b^2=n^3;c^2=p^3$

Ta sẽ chứng minh $\sqrt[3]{\dfrac{a}{b+c}}\ge\sqrt{\dfrac{m}{n+p}}\Leftrightarrow\left(\dfrac{a}{b+c}\right)^2\ge\left(\dfrac{m}{n+p}\right)^3\Leftrightarrow(n+p)^3\ge(b+c)^2$

$$\Leftrightarrow n^3+3np(n+p)+p^3\ge b^2+2bc+c^2\Leftrightarrow 3np(n+p)\ge2bc$$

Ta có $3np(n+p)\ge3np\left(2\sqrt{np}\right)=6\left(\sqrt{np}\right)^3=6bc\ge2bc$, đúng $\Rightarrow\sqrt[3]{\dfrac{a}{b+c}}\ge\sqrt{\dfrac{m}{n+p}}$

Tương tự ta có : $\sqrt[3]{\dfrac{a}{b+c}}+\sqrt[3]{\dfrac{b}{c+a}}+\sqrt[3]{\dfrac{c}{a+b}}\ge\sqrt{\dfrac{m}{n+p}}+\sqrt{\dfrac{n}{p+m}}+\sqrt{\dfrac{p}{m+n}}$

Sử dụng **Bài 10.** Ta có: $\sqrt{\dfrac{m}{n+p}}+\sqrt{\dfrac{n}{p+m}}+\sqrt{\dfrac{p}{m+n}}\ge2\Rightarrow\sqrt[3]{\dfrac{a}{b+c}}+\sqrt[3]{\dfrac{b}{c+a}}+\sqrt[3]{\dfrac{c}{a+b}}\ge2$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow(a,b,c)$ là một hoán vị của $(x,x,0)$ với $x>0$

Bài 13. Cho $\begin{cases}a,b,c\ge0\\ Min\{a+2c;b+2c;a+b+c\}>0\end{cases}$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{a}{b+2c}}+\sqrt{\frac{b}{a+2c}}+2\sqrt{\frac{c}{a+b+c}}\ge2$$

Chứng minh

Sử dụng bất đẳng thức ***AM – GM*** ta có:

$$+\begin{cases}\sqrt{\dfrac{a}{b+2c}}=\dfrac{2a}{2\sqrt{a(b+2c)}}\geq\dfrac{2a}{a+(b+2c)}=\dfrac{2a}{a+b+2c}\\ \sqrt{\dfrac{b}{a+2c}}=\dfrac{2b}{2\sqrt{b(a+2c)}}\geq\dfrac{2b}{b+(a+2c)}=\dfrac{2b}{a+b+2c}\\ 2\sqrt{\dfrac{c}{a+b+c}}=\dfrac{4c}{2\sqrt{c(a+b+c)}}\geq\dfrac{4c}{c+(a+b+c)}=\dfrac{4c}{a+b+2c}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\sqrt{\frac{a}{b+2c}}+\sqrt{\frac{b}{a+2c}}+2\sqrt{\frac{c}{a+b+c}}\geq\frac{2(a+b+2c)}{a+b+2c}=2.$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a=b=x>0;c=0$

Bài 14. Cho $\begin{cases}a,b,c\geq 0\\ Min\{a;b\}>0\end{cases}$. Chứng minh rằng: $\sqrt[3]{\dfrac{a}{a+b}}+\sqrt[3]{\dfrac{b}{4a+b}}\geq 1$ (1)

Chứng minh

Đặt $a_1=a;b_1=\dfrac{b}{2}$ thì (1) $\Leftrightarrow\sqrt[3]{\dfrac{a_1}{a_1+2b_1}}+\sqrt[3]{\dfrac{b_1}{2a_1+b_1}}\geq 1.$

Đặt $\sqrt{\alpha}=\sqrt[3]{a_1};\sqrt{\beta}=\sqrt[3]{b_1}\Leftrightarrow a_1^2=\alpha^3;b_1^2=\beta^3$

Ta sẽ chứng minh $\sqrt[3]{\dfrac{a_1}{a_1+2b_1}}\geq\sqrt{\dfrac{\alpha}{\alpha+2\beta}}\Leftrightarrow\left(\dfrac{a_1}{a_1+2b_1}\right)^2\geq\left(\dfrac{\alpha}{\alpha+2\beta}\right)^3$

$$\Leftrightarrow(\alpha+2\beta)^3\geq(a_1+2b_1)^2\Leftrightarrow\alpha^3+8\beta^3+6\alpha\beta(\alpha+2\beta)\geq a_1^2+4b_1^2+4a_1b_1$$

$$\Leftrightarrow 4\beta^3+6\alpha\beta(\alpha+2\beta)\geq 4a_1b_1\Leftrightarrow 2\beta^3+3\alpha\beta(\alpha+2\beta)\geq 2a_1b_1$$

Ta có $3\alpha\beta(\alpha+2\beta)\geq 6\sqrt{2}\left(\sqrt{\alpha\beta}\right)^3=6\sqrt{2}a_1b_1\Rightarrow 2\beta^3+3\alpha\beta(\alpha+2\beta)\geq 2a_1b_1$

$\Rightarrow\sqrt[3]{\dfrac{a_1}{a_1+2b_1}}\geq\sqrt{\dfrac{\alpha}{\alpha+2\beta}}$. Tương tự ta có: $\sqrt[3]{\dfrac{b_1}{2a_1+b_1}}\geq\sqrt{\dfrac{\beta}{2\alpha+\beta}}$.

Sử dụng bất đẳng thức ***AM – GM*** ta có:

$$+\begin{cases}\sqrt[3]{\dfrac{a_1}{a_1+2b_1}}\geq\sqrt{\dfrac{\alpha}{\alpha+2\beta}}=\dfrac{2\alpha}{2\sqrt{\alpha(\alpha+2\beta)}}\geq\dfrac{2\alpha}{\alpha+(\alpha+2\beta)}=\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}\\ \sqrt[3]{\dfrac{b_1}{2a_1+b_1}}\geq\sqrt{\dfrac{\beta}{2\alpha+\beta}}=\dfrac{2\beta}{2\sqrt{\beta(2\alpha+\beta)}}\geq\dfrac{2\beta}{\beta+(2\alpha+\beta)}=\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\sqrt[3]{\frac{a_1}{a_1+2b_1}}+\sqrt[3]{\frac{b_1}{2a_1+b_1}}\geq\frac{\alpha}{\alpha+\beta}+\frac{\beta}{\alpha+\beta}=1\Rightarrow\text{(đpcm.)}$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow(a,b)$ là một hoán vị của $(x,0)$ với $x>0$

Bài 15. Cho $\begin{cases} a,b,c,d \geq 0 \\ Min\{a+b+c;b+c+d;c+d+a;d+a+b\} > 0 \end{cases}$

Chứng minh rằng $\sqrt{\dfrac{a}{b+c+d}}+\sqrt{\dfrac{b}{c+d+a}}+\sqrt{\dfrac{c}{d+a+b}}+\sqrt{\dfrac{d}{a+b+c}} \geq 2$

Chứng minh

Sử dụng bất đẳng thức ***AM − GM*** ta có:

$$+\begin{cases} \sqrt{\dfrac{a}{b+c+d}}=\dfrac{2a}{2\sqrt{a(b+c+d)}} \geq \dfrac{2a}{a+(b+c+d)}=\dfrac{2a}{a+b+c+d} \\ \sqrt{\dfrac{b}{c+d+a}}=\dfrac{2b}{2\sqrt{b(c+d+a)}} \geq \dfrac{2b}{b+(c+d+a)}=\dfrac{2b}{a+b+c+d} \\ \sqrt{\dfrac{c}{d+a+b}}=\dfrac{2c}{2\sqrt{c(d+a+b)}} \geq \dfrac{2c}{c+(d+a+b)}=\dfrac{2c}{a+b+c+d} \\ \sqrt{\dfrac{d}{a+b+c}}=\dfrac{2d}{2\sqrt{d(a+b+c)}} \geq \dfrac{2d}{d+(a+b+c)}=\dfrac{2d}{a+b+c+d} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\dfrac{a}{b+c+d}}+\sqrt{\dfrac{b}{c+d+a}}+\sqrt{\dfrac{c}{d+a+b}}+\sqrt{\dfrac{d}{a+b+c}} \geq \dfrac{2(a+b+c+d)}{a+b+c+d}=2$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow (a,b,c,d)$ là một hoán vị của $(x,x,0,0)$ với $x>0$

Bài 16. Cho $\begin{cases} a,b,c,d \geq 0 \\ Min\{a+b+c;b+c+d;c+d+a;d+a+b\} > 0 \end{cases}$

Chứng minh rằng: $\sqrt[3]{\dfrac{a}{b+c+d}}+\sqrt[3]{\dfrac{b}{c+d+a}}+\sqrt[3]{\dfrac{c}{d+a+b}}+\sqrt[3]{\dfrac{d}{a+b+c}} \geq 2$

Chứng minh

Đặt $\sqrt[3]{a}=\sqrt{m};\sqrt[3]{b}=\sqrt{n};\sqrt[3]{c}=\sqrt{p};\sqrt[3]{d}=\sqrt{q} \Leftrightarrow a^2=m^3;b^2=n^3;c^2=p^3;d^2=q^3$

Ta sẽ chứng minh $\sqrt[3]{\dfrac{a}{b+c+d}} \geq \sqrt{\dfrac{m}{n+p+q}} \Leftrightarrow \dfrac{a^2}{(b+c+d)^2} \geq \dfrac{m^3}{(n+p+q)^3}$

$\Leftrightarrow (n+p+q)^3 \geq (b+c+d)^2 \Leftrightarrow (n+p)^3+q^3+3q(n+p)(n+p+q)$

$\geq b^2+c^2+d^2+2(bc+cd+db)$

$\Leftrightarrow S=3np(n+p)+3nq(n+q)+3pq(p+q)+6npq \geq 2(bc+cd+db)$.

Sử dụng bất đẳng thức ***AM − GM*** ta có:

$$+\begin{cases} 3np(n+p)\ge 3np\left(2\sqrt{np}\right)=6\sqrt{n^3p^3}=6\sqrt{b^2c^2}=6bc\ge 2bc \\ 3nq(n+q)\ge 3nq\left(2\sqrt{nq}\right)=6\sqrt{n^3q^3}=6\sqrt{b^2d^2}=6bd\ge 2bd \\ 3pq(p+q)\ge 3pq\left(2\sqrt{pq}\right)=6\sqrt{p^3q^3}=6\sqrt{c^2d^2}=6cd\ge 2cd \\ 6npq\ge 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow S=3np(n+p)+3nq(n+q)+3pq(p+q)+6npq\ge 2(bc+cd+db)$, đúng

Tương tự ta có 3 bất đẳng thức tương ứng, suy ra $\sum_{cyc}\sqrt[3]{\dfrac{a}{b+c+d}}\ge\sum_{cyc}\sqrt{\dfrac{m}{n+p+q}}\ge 2$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow (a,b,c,d)$ là một hoán vị của $(x,x,0,0)$ với $x>0$.

Bài 17. Cho a,b,c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{a}{b+c-a}}+\sqrt{\frac{b}{c+a-b}}+\sqrt{\frac{c}{a+b-c}}\ge 3$$

Chứng minh

Đặt $x=b+c-a;y=c+a-b;z=a+b-c$. Khi đó $x,y,z>0$ và $a=\dfrac{y+z}{2};b=\dfrac{z+x}{2};c=\dfrac{x+y}{2}$.

Bất đẳng thức trở thành $\sqrt{\dfrac{y+z}{2x}}+\sqrt{\dfrac{z+x}{2y}}+\sqrt{\dfrac{x+y}{2z}}\ge 3$.

Sử dụng bất đẳng thức quen biết $p^2+q^2\ge\dfrac{(p+q)^2}{2}$. Ta có:

$$\sqrt{\frac{y+z}{2x}}+\sqrt{\frac{z+x}{2y}}+\sqrt{\frac{x+y}{2z}}\ge\sqrt{\frac{\left(\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)^2}{4x}}+\sqrt{\frac{\left(\sqrt{z}+\sqrt{x}\right)^2}{4y}}+\sqrt{\frac{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2}{4z}}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{z}}+\frac{\sqrt{y}+\sqrt{z}}{\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{z}+\sqrt{x}}{\sqrt{y}}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}+\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{z}}+\frac{\sqrt{z}}{\sqrt{y}}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{z}}{\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{z}}\right)$$

$$\ge\sqrt{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}\cdot\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}}+\sqrt{\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{z}}\cdot\frac{\sqrt{z}}{\sqrt{y}}}+\sqrt{\frac{\sqrt{z}}{\sqrt{x}}\cdot\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{z}}}=3$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

Nhận xét: Nếu sử dụng bất đẳng thức quen biết $xyz\ge(y+z-x)(z+x-y)(x+y-z)$ thì theo ***AM – GM*** ta có

$$\sqrt{\frac{a}{b+c-a}}+\sqrt{\frac{b}{c+a-b}}+\sqrt{\frac{c}{a+b-c}}\ge 3\sqrt[6]{\frac{abc}{(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}}\ge 3$$

Cách làm này có thể áp dụng khi thay căn bậc 2 bởi căn bậc *n*.

IX. SỬ DỤNG AM – GM TRONG BẤT ĐẲNG THỨC KHÔNG ĐỒNG BẬC TRÊN $\mathbb{R}^+$

Trong mục III chúng ta đã đề cập đến việc so sánh hai đa thức đồng bậc trên $\mathbb{R}^+$. Các bất đẳng thức dưới đây là sự pha trộn giữa nhiều biểu thức không đồng bậc trên $\mathbb{R}^+$.

Bài 1. Cho các số $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^7}{b^2c^2}+\frac{b^7}{c^2a^2}+\frac{c^7}{a^2b^2}+\frac{1}{a^2b^2c^2}\ge\frac{bc}{a^2}+\frac{ca}{b^2}+\frac{ab}{c^2}+abc$$

Chứng minh

Biến đổi và sử dụng bất đẳng thức ***AM - GM*** ta có

$$+\begin{cases}\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{b^7}{a^2c^2}+\dfrac{c^7}{a^2b^2}+\dfrac{1}{a^2b^2c^2}\right)\ge\sqrt[3]{\dfrac{b^7}{a^2c^2}\cdot\dfrac{c^7}{a^2b^2}\cdot\dfrac{1}{a^2b^2c^2}}=\dfrac{bc}{a^2}\\ \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{c^7}{b^2a^2}+\dfrac{a^7}{b^2c^2}+\dfrac{1}{a^2b^2c^2}\right)\ge\sqrt[3]{\dfrac{c^7}{b^2a^2}\cdot\dfrac{a^7}{b^2c^2}\cdot\dfrac{1}{a^2b^2c^2}}=\dfrac{ca}{b^2}\\ \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{a^7}{c^2b^2}+\dfrac{b^7}{c^2a^2}+\dfrac{1}{a^2b^2c^2}\right)\ge\sqrt[3]{\dfrac{a^7}{c^2b^2}\cdot\dfrac{b^7}{c^2a^2}\cdot\dfrac{1}{a^2b^2c^2}}=\dfrac{ab}{c^2}\\ \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{a^7}{c^2b^2}+\dfrac{b^7}{c^2a^2}+\dfrac{c^7}{a^2b^2}\right)\ge\sqrt[3]{\dfrac{a^7}{c^2b^2}\cdot\dfrac{b^7}{c^2a^2}\cdot\dfrac{c^7}{a^2b^2}}=abc\end{cases}$$

$$\Rightarrow\frac{a^7}{b^2c^2}+\frac{b^7}{c^2a^2}+\frac{c^7}{a^2b^2}+\frac{1}{a^2b^2c^2}\ge\frac{bc}{a^2}+\frac{ca}{b^2}+\frac{ab}{c^2}+abc.$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$.

Bài 2. Chứng minh rằng $\dfrac{a^9}{bc}+\dfrac{b^9}{ca}+\dfrac{c^9}{ab}+\dfrac{2}{abc}\ge a^5+b^5+c^5+2\quad,\forall a,b,c>0\ (1)$

Chứng minh

Sử dụng bất đẳng thức ***AM – GM*** ta có: $\dfrac{a^9}{bc}+abc\ge 2a^5;\dfrac{b^9}{ca}+abc\ge 2b^5;\dfrac{c^9}{ab}+abc\ge 2c^5$

$$\Rightarrow\frac{a^9}{bc}+\frac{b^9}{ca}+\frac{c^9}{ab}\ge 2\left(a^5+b^5+c^5\right)-3abc\ge a^5+b^5+c^5+3\cdot\sqrt[3]{a^5b^5c^5}-3abc$$

Khi đó, bất đẳng thức (1) được chứng minh nếu ta chứng minh được bất đẳng thức sau:

$$3\cdot\sqrt[3]{a^5b^5c^5}-3abc+\frac{2}{abc}\ge 2\Leftrightarrow 3t^5-3t^3+\frac{2}{t^3}\ge 2\ \ (\text{với } t=\sqrt[3]{abc}>0)$$

$$\Leftrightarrow\frac{(t-1)^2\left(3t^6+6t^5+6t^4+6t^3+6t^2+4t+2\right)}{t^3}\ge 0\ (\text{luôn đúng})\Rightarrow(\text{đpcm})$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$.

Bài 3. Chứng minh rằng $\frac{a^9}{bc}+\frac{b^9}{ca}+\frac{c^9}{ab}+\frac{3}{abc}\geq a^4+b^4+c^4+3$, $\forall a,b,c>0$ (1)

Chứng minh

Sử dụng bất đẳng thức ***AM – GM*** ta có:

$\frac{a^9}{bc}+abc+a^2\geq 3a^4, \frac{b^9}{ca}+abc+b^2\geq 3b^4, \frac{c^9}{ab}+abc+c^2\geq 3c^4$

$\Rightarrow \frac{a^9}{bc}+\frac{b^9}{ca}+\frac{c^9}{ab}\geq 3(a^4+b^4+c^4)-(a^2+b^2+c^2)-3abc$ (2)

$\frac{1}{2}(1+a^4)\geq a^2; \frac{1}{2}(1+b^4)\geq b^2; \frac{1}{2}(1+c^4)\geq c^2 \Rightarrow \frac{1}{2}(a^4+b^4+c^4)+\frac{3}{2}\geq a^2+b^2+c^2$

Từ (2) $\Rightarrow \frac{a^9}{bc}+\frac{b^9}{ca}+\frac{c^9}{ab}\geq \frac{5}{2}(a^4+b^4+c^4)-3abc-\frac{3}{2}\geq a^4+b^4+c^4+\frac{9}{2}\cdot\sqrt[3]{a^4b^4c^4}-3abc-\frac{3}{2}$

Bất đẳng thức (1) được chứng minh nếu ta chứng minh được bất đẳng thức sau:

$\frac{9}{2}\cdot\sqrt[3]{a^4b^4c^4}-3abc-\frac{3}{2}+\frac{3}{abc}\geq 3 \Leftrightarrow \frac{9}{2}\cdot t^4-3t^3+\frac{3}{t^3}\geq\frac{9}{2}$ (với $t=\sqrt[3]{abc}>0$)

$\Leftrightarrow \frac{3}{2}(t-1)^2(t+1)(3t^4+t^3+4t^2+2t+2)\geq 0$, đúng $\Rightarrow$ (đpcm.).

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow$ $a=b=c=1$

Bài 4. Cho $a,b,c\geq 0$. Chứng minh rằng: $2(a^2+b^2+c^2)+abc+8\geq 5(a+b+c)$ (1)

Chứng minh

• ***Bổ đề:*** *(Bất đẳng thức Schur)*

$x^3+y^3+z^3+3xyz\geq xy(x+y)+xy(y+z)+zx(z+x)$, $\forall x,y,z\geq 0$ (*)

• ***Chứng minh:*** Không mất tính tổng quát giả sử $x\geq y\geq z\geq 0$. Khi đó ta có:

VT(*) – VP(*) = $x(x-y)^2+z(y-z)^2+(z+x-y)(x-y)(y-z)\geq 0$

• ***Áp dụng:*** Sử dụng bất đẳng thức ***AM – GM*** và bất đẳng thức ***Schur*** ta có:

$6.[\text{VT}(1)-\text{VP}(1)]=12(a^2+b^2+c^2)+6abc+48-30(a+b+c)$

$=12(a^2+b^2+c^2)+3(2abc+1)+45-5\cdot 2\cdot 3(a+b+c)$

$\geq 12(a^2+b^2+c^2)+9\cdot\sqrt[3]{(abc)^2}+45-5\left[(a+b+c)^2+9\right]$

$=\frac{9abc}{\sqrt[3]{abc}}+3(a^2+b^2+c^2)-6(ab+bc+ca)+2\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]$

$\geq\frac{9abc}{\sqrt[3]{abc}}+3(a^2+b^2+c^2)-6(ab+bc+ca)\geq\frac{27abc}{a+b+c}+3(a+b+c)^2-12(ab+bc+ca)$

$=\frac{3}{a+b+c}\left[9abc+(a+b+c)^3-4(ab+bc+ca)(a+b+c)\right]$

$=\frac{3}{a+b+c}\left[a^3+b^3+c^3+3abc-ab(a+b)-bc(b+c)-ca(c+a)\right]\geq 0 \Rightarrow$ (đpcm.)

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$.

Bài 5. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng: $a^2+b^2+c^2+2abc+1 \ge 2(ab+bc+ca)$

Chứng minh

Sử dụng bất đẳng thức ***AM – GM*** và bất đẳng thức ***Schur*** ta có:

$$a^2+b^2+c^2+2abc+1-2(ab+bc+ca) \ge a^2+b^2+c^2+3a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{2}{3}}c^{\frac{2}{3}}-2(ab+bc+ca)$$

$$\ge a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{2}{3}}\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)+b^{\frac{2}{3}}c^{\frac{2}{3}}\left(b^{\frac{2}{3}}+c^{\frac{2}{3}}\right)+c^{\frac{2}{3}}a^{\frac{2}{3}}\left(c^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{2}{3}}\right)-2(ab+bc+ca)$$

$$=a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{2}{3}}\left(a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}\right)^2+b^{\frac{2}{3}}c^{\frac{2}{3}}\left(b^{\frac{1}{3}}-c^{\frac{1}{3}}\right)^2+c^{\frac{2}{3}}a^{\frac{2}{3}}\left(c^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{1}{3}}\right)^2 \ge 0.$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$

Bài 6. [APMO 2004] Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng

$$(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2) \ge 9(ab+bc+ca) \quad (1)$$

Chứng minh

Sử dụng bất đẳng thức ***AM – GM*** ta có:

$$\text{VT}(1)-\text{VP}(1)=(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2)-9(ab+bc+ca)$$

$$=4(a^2+b^2+c^2)+2\left[(a^2b^2+1)+(b^2c^2+1)+(c^2a^2+1)\right]+(a^2b^2c^2+1)+1-9(ab+bc+ca)$$

$$\ge 4(a^2+b^2+c^2)+4(ab+bc+ca)+2abc+1-9(ab+bc+ca)$$

$$\ge a^2+b^2+c^2+2abc+1-2(ab+bc+ca)$$

Sử dụng bài 5 ta có (đpcm). Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$

Bài 7. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng: $\dfrac{1}{a(1+b)}+\dfrac{1}{b(1+c)}+\dfrac{1}{c(1+a)} \ge \dfrac{3}{\sqrt[3]{abc}(1+\sqrt[3]{abc})}$

Chứng minh

Bổ đề: $(x+y+z)^2 \ge 3(xy+yz+zx),\ \forall x, y, z$

Áp dụng: Gọi vế trái của bất đẳng thức là P, sử dụng bổ đề ta có

$$P^2 \ge 3\left(\frac{1}{ab(1+b)(1+c)}+\frac{1}{bc(1+c)(1+a)}+\frac{1}{ca(1+a)(1+b)}\right)$$

$$=\frac{3(a(1+b)+b(1+c)+c(1+a))}{abc(1+a)(1+b)(1+c)}=\frac{3}{abc}-\frac{3}{(1+a)(1+b)(1+c)}-\frac{3}{abc(1+a)(1+b)(1+c)}$$

Đặt $k=\sqrt[3]{abc}$, sử dụng bất đẳng thức ***AM – GM*** ta có

$$(1+a)(1+b)(1+c)=1+a+b+c+ab+bc+ca+abc \ge 1+3k+3k^2+k^3=(1+k)^3$$

Suy ra $P^2 \geq \frac{3}{k^3} - \frac{3}{(1+k)^3} - \frac{3}{k^3(1+k)^3} = \frac{3(1+k)^3 - 3k^3 - 3}{k^3(1+k)^3} = \frac{9}{k^2(1+k)^2}$

Hay $P \geq \frac{3}{k(1+k)} = \frac{3}{\sqrt[3]{abc}\left(1+\sqrt[3]{abc}\right)}$ (đpcm). Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$.

Bài 8. Cho các số $a, b, c, d > 0$. Chứng minh rằng

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+d}+\frac{1}{d+a}\right) \geq 16\,\mathrm{Max}\left\{\frac{1}{1+abcd}\,;\,\frac{1}{ac+bd}\right\} \quad (1)$$

Chứng minh

Sử dụng bất đẳng thức ***AM – GM*** ta có:

$$VT(1) = \left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{cd}\right) + \left[\frac{a+b}{ab(c+d)} + \frac{c+d}{cd(a+b)}\right] + \frac{a+b}{ab(d+a)} + \frac{a+b}{ab(b+c)} + \frac{c+d}{cd(b+c)} + \frac{c+d}{cd(d+a)}$$

$$\geq \frac{4}{\sqrt{abcd}} + \frac{a+b}{ab(d+a)} + \frac{a+b}{ab(b+c)} + \frac{c+d}{cd(b+c)} + \frac{c+d}{cd(d+a)}$$. Tương tự ta có:

$$VT(1) \geq \frac{4}{\sqrt{abcd}} + \frac{b+c}{bc(a+b)} + \frac{b+c}{bc(c+d)} + \frac{a+d}{ad(a+b)} + \frac{a+d}{ad(c+d)}$$. Suy ra:

$$2\cdot VT(1) \geq \frac{8}{\sqrt{abcd}} + \left[\frac{a+b}{ab(d+a)} + \frac{a+d}{ad(a+b)}\right] + \left[\frac{a+b}{ab(b+c)} + \frac{b+c}{bc(a+b)}\right] +$$

$$+\left[\frac{c+d}{cd(b+c)} + \frac{b+c}{bc(c+d)}\right] + \left[\frac{c+d}{cd(d+a)} + \frac{a+d}{ad(c+d)}\right]$$

$$\geq \frac{8}{\sqrt{abcd}} + \frac{2}{a\sqrt{bd}} + \frac{2}{b\sqrt{ac}} + \frac{2}{c\sqrt{bd}} + \frac{2}{d\sqrt{ac}} = \frac{8}{\sqrt{abcd}} + \frac{2}{\sqrt{bd}}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right) + \frac{2}{\sqrt{ac}}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{d}\right)$$

$$\geq \frac{8}{\sqrt{abcd}} + \frac{4}{\sqrt{abcd}} + \frac{4}{\sqrt{abcd}} = \frac{16}{\sqrt{abcd}} \Rightarrow VT(1) \geq \frac{8}{\sqrt{abcd}}$$

Mặt khác, Sử dụng bất đẳng thức ***AM – GM*** ta có:

$$\frac{1+abcd}{2} \geq \sqrt{abcd}\,;\, \frac{ac+bd}{2} \geq \sqrt{abcd} \Rightarrow \sqrt{abcd} \leq \frac{\mathrm{Min}\{1+abcd\,;ac+bd\}}{2}$$

$$\Rightarrow VT(1) \geq \frac{16}{\mathrm{Min}\{1+abcd\,;\,ac+bd\}} = 16\,\mathrm{Max}\left\{\frac{1}{1+abcd}\,;\,\frac{1}{ac+bd}\right\}$$ (đpcm.)

Đẳng thức xảy ra $a=b=c=d.>0$

Bài 9. Cho các số $a, b, c \geq 0$. Chứng minh rằng

$$a^3+b^3+c^3+4(a+b+c)+9abc \geq 8(ab+bc+ca), \quad (1)$$

Chứng minh

Bổ đề: $a^4+b^4+c^4+abc(a+b+c)\ge ab(a^2+b^2)+bc(b^2+c^2)+ca(c^2+a^2)$ (1)

Chứng minh: Không mất tính tổng quát giả sử $a\ge b\ge c$. Ta có:

(1) $\Leftrightarrow (b^2+c^2-a^2)(b-c)^2+(c^2+a^2-b^2)(c-a)^2+(a^2+b^2-c^2)(a-b)^2\ge 0$

$\Leftrightarrow c^2(b-c)^2+a^2(a-b)^2+(c^2+a^2-b^2)(a-b)(b-c)\ge 0$ (luôn đúng)

Áp dụng: Sử dụng ***AM – GM*** ta có: $4(a+b+c)+\dfrac{4(ab+bc+ca)^2}{a+b+c}\ge 8(ab+bc+ca)$

Tiếp theo ta sẽ chứng minh: $a^3+b^3+c^3+9abc\ge\dfrac{4(ab+bc+ca)^2}{a+b+c}$.

Thật vậy bất đẳng thức $\Leftrightarrow$

$a^4+b^4+c^4+abc(a+b+c)+ab(a^2+b^2)+bc(b^2+c^2)+ca(c^2+a^2)\ge 4(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$ (*)

Sử dụng bổ đề ta có:

VT (*) $\ge 2\left[ab(a^2+b^2)+bc(b^2+c^2)+ca(c^2+a^2)\right]\ge 4(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)\Rightarrow$ (đpcm)

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$ hoặc (a,b,c) là các hoán vị của $(2;2;0)$.

Bài 10. Cho $a,b,c\ge 0$. Chứng minh: $2(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)\ge(a+1)(b+1)(c+1)(abc+1)$

Chứng minh

Đặt $a=\dfrac{1-x}{1+x};b=\dfrac{1-y}{1+y};c=\dfrac{1-z}{1+z}$, với $x,y,z\in(-1;1]$ khi đó

$$\frac{a^2+1}{a+1}=\frac{x^2+1}{x+1};\frac{b^2+1}{b+1}=\frac{y^2+1}{y+1};\frac{c^2+1}{c+1}=\frac{z^2+1}{z+1};abc+1=\frac{2(xy+yz+zx+1)}{(x+1)(y+1)(z+1)}$$

Bất đẳng thức trở thành $(x^2+1)(y^2+1)(z^2+1)\ge xy+yz+zx+1$

$\Leftrightarrow x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+x^2+y^2+z^2\ge xy+yz+zx$. Theo ***AM – GM*** ta có:

$$x^2+y^2+z^2=\frac{x^2+y^2}{2}+\frac{y^2+z^2}{2}+\frac{z^2+x^2}{2}\ge|xy|+|yz|+|zx|\ge xy+yz+zx$$

và $x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2\ge 0$. Cộng theo vế hai bất đẳng thức trên $\Rightarrow$ (đpcm)

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$.

X. ĐẶC BIỆT HÓA BẤT ĐẲNG THỨC KHÔNG ĐỒNG BẬC

Bài 1. Cho $\begin{cases} a,b,c>0 \\ a+b+c=3 \end{cases}$. Chứng minh rằng $2(ab+bc+ca)+\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\ge 9$ (1)

Chứng minh

Sử dụng bất đẳng thức ***AM – GM*** ta có:

$$VT(1)=(ab+bc+ca)+(ab+bc+ca)+\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\ge 3\cdot\sqrt[3]{(ab+bc+ca)^2\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)}$$

Mặt khác, $(ab+bc+ca)^2\ge 3abc(a+b+c)=9abc$

$$\Rightarrow VT(1)\ge 3\cdot\sqrt[3]{9abc\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)}=3\cdot\sqrt[3]{9(a+b+c)}=9 \text{ (đpcm)}$$

Bài 2. Cho $\begin{cases} a,b,c>0 \\ a+b+c=3abc \end{cases}$. Chứng minh rằng $\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}\ge 3$ (1)

Chứng minh

Từ $a+b+c=3abc\Rightarrow\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}=3$. Sử dụng bất đẳng thức ***AM – GM*** ta có:

$$2\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}\right)+3=\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+1\right)+\left(\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}+1\right)+\left(\frac{1}{c^3}+\frac{1}{a^3}+1\right)\ge 3\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)=9$$

Bài 3. Cho $\begin{cases} a,b,c>0 \\ abc=1 \end{cases}$. Chứng minh rằng $a^3+b^3+c^3\ge 2\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)$ (1)

Chứng minh

Sử dụng bất đẳng thức ***AM – GM*** ta có:

$$\begin{cases} a^3+b^3\ge ab(a+b)=\frac{a+b}{c} \\ b^3+c^3\ge bc(b+c)=\frac{b+c}{a} \\ c^3+a^3\ge ca(c+a)=\frac{c+a}{b} \end{cases}\quad(1)\quad;\quad \begin{cases} \frac{a}{b}+\frac{a}{c}=a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\ge\frac{2a}{\sqrt{bc}}\ge\frac{4a}{b+c} \\ \frac{b}{c}+\frac{b}{a}=b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)\ge\frac{2b}{\sqrt{ca}}\ge\frac{4b}{c+a} \\ \frac{c}{a}+\frac{c}{b}=c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\ge\frac{2c}{\sqrt{ab}}\ge\frac{4c}{a+b} \end{cases}\quad(2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $a^3+b^3+c^3\ge\frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}\right)\ge 2\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)$ (đpcm)

Bài 4. Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{1+a^2+2bc}+\sqrt{1+b^2+2ca}+\sqrt{1+c^2+2ab}\le 6$$

Chứng minh

$$+\begin{cases}\sqrt{1+a^2+2bc}=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{4(1+a^2+2bc)}\le\dfrac{4+(1+a^2+2bc)}{4}=\dfrac{a^2+2bc+5}{4}\\ \sqrt{1+b^2+2ca}=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{4(1+b^2+2ca)}\le\dfrac{4+(1+b^2+2ca)}{4}=\dfrac{b^2+2ca+5}{4}\\ \sqrt{1+c^2+2ab}=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{4(1+c^2+2ab)}\le\dfrac{4+(1+c^2+2ab)}{4}=\dfrac{c^2+2ab+5}{4}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\sqrt{1+a^2+2bc}+\sqrt{1+b^2+2ca}+\sqrt{1+c^2+2ab}\le\frac{(a+b+c)^2+15}{4}=6\text{ (đpcm.)}$$

Bài 5. Cho các số a, b, $c>0$ thỏa mãn $ab^2+bc^2+ca^2=3$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt[3]{a+7}+\sqrt[3]{b+7}+\sqrt[3]{c+7}\le 2\left(a^4+b^4+c^4\right)$$

Chứng minh

Sử dụng bất đẳng thức ***AM – GM*** ta có:

$$+\begin{cases}\sqrt[3]{a+7}=\dfrac{1}{4}\cdot\sqrt[3]{(a+7)\times8\times8}\le\dfrac{a+7+8+8}{12}\le\dfrac{\dfrac{a^4+1+1+1}{4}+23}{12}=\dfrac{a^4+95}{48}\\ \sqrt[3]{b+7}=\dfrac{1}{4}\cdot\sqrt[3]{(b+7)\times8\times8}\le\dfrac{b+7+8+8}{12}\le\dfrac{\dfrac{b^4+1+1+1}{4}+23}{12}=\dfrac{b^4+95}{48}\\ \sqrt[3]{c+7}=\dfrac{1}{4}\cdot\sqrt[3]{(c+7)\times8\times8}\le\dfrac{c+7+8+8}{12}\le\dfrac{\dfrac{c^4+1+1+1}{4}+23}{12}=\dfrac{c^4+95}{48}\end{cases}$$

$\Rightarrow\sqrt[3]{a+7}+\sqrt[3]{b+7}+\sqrt[3]{c+7}\le\dfrac{a^4+b^4+c^4+3\times95}{48}$. Mặt khác ta có

$$3\left(a^4+b^4+c^4\right)+3=\sum_{cyc}\left(a^4+a^4+a^4+1\right)\ge4\left(ab^2+bc^2+ca^2\right)=12\Leftrightarrow3\le a^4+b^4+c^4$$

$$\Rightarrow\sqrt[3]{a+7}+\sqrt[3]{b+7}+\sqrt[3]{c+7}\le\frac{a^4+b^4+c^4+95\left(a^4+b^4+c^4\right)}{48}=2\left(a^4+b^4+c^4\right)$$

Đẳng thức xảy ra $a=b=c=1$.

Bài 6. [IMO Shortlist 1990] Cho $a,b,c,d>0$ thỏa mãn $ab+bc+cd+da=1$.

Chứng minh rằng $\frac{a^3}{b+c+d}+\frac{b^3}{c+d+a}+\frac{c^3}{d+a+b}+\frac{d^3}{a+b+c}\ge\frac{1}{3}$ (1)

Chứng minh

Sử dụng bất đẳng thức ***AM – GM*** ta có:

$$+\begin{cases}\frac{36a^3}{b+c+d}+2(b+c+d)+6a+3\ge 4\cdot\sqrt[4]{\frac{36a^3}{b+c+d}\cdot 2(b+c+d)\cdot 6a\cdot 3}=24a\\ \frac{36b^3}{c+d+a}+2(c+d+a)+6b+3\ge 4\cdot\sqrt[4]{\frac{36b^3}{c+d+a}\cdot 2(c+d+a)\cdot 6b\cdot 3}=24b\\ \frac{36c^3}{d+a+b}+2(d+a+b)+6c+3\ge 4\cdot\sqrt[4]{\frac{36c^3}{d+a+b}\cdot 2(d+a+b)\cdot 6c\cdot 3}=24c\\ \frac{36d^3}{a+b+c}+2(a+b+c)+6d+3\ge 4\cdot\sqrt[4]{\frac{36d^3}{a+b+c}\cdot 2(a+b+c)\cdot 6d\cdot 3}=24d\end{cases}$$

$$\Rightarrow\frac{a^3}{b+c+d}+\frac{b^3}{c+d+a}+\frac{c^3}{d+a+b}+\frac{d^3}{a+b+c}\ge\frac{a+b+c+d}{3}-\frac{1}{3}$$

Mặt khác, $(a+b+c+d)^2\ge 4(ab+bc+cd+da)=4\Rightarrow a+b+c+d\ge 2$

$\Rightarrow$ VT(1) $\ge\frac{a+b+c+d}{3}-\frac{1}{3}\ge\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$ (đpcm)

Bài 7. Cho $\begin{cases}a,b,c>0\\ a^2+b^2+c^2=6\end{cases}$. Chứng minh rằng $S=\frac{a}{bc}+\frac{2b}{ca}+\frac{5c}{ab}\ge 2\sqrt{6}$

Chứng minh

Sử dụng bất đẳng thức ***AM – GM*** ta có:

$$S=3\cdot\frac{a}{3bc}+4\cdot\frac{b}{2ca}+5\cdot\frac{c}{ab}\ge 12\cdot\sqrt[12]{\left(\frac{a}{3bc}\right)^3\cdot\left(\frac{b}{2ca}\right)^4\cdot\left(\frac{c}{ab}\right)^5}=\frac{12}{\sqrt[12]{3^3 2^4}}\cdot\frac{1}{\sqrt[12]{a^6b^4c^2}}$$

$$6=3\cdot\frac{a^2}{3}+2\cdot\frac{b^2}{2}+c^2\ge 6\cdot\sqrt[6]{\left(\frac{a^2}{3}\right)^3\cdot\left(\frac{b^2}{2}\right)^2\cdot c^2}=6\cdot\sqrt[6]{\frac{a^6b^4c^2}{3^3\cdot 2^2}}\Rightarrow a^6b^4c^2\le 3^3\cdot 2^2$$

$$\Rightarrow S\ge\frac{12}{\sqrt[12]{3^3 2^4}}\cdot\frac{1}{\sqrt[12]{a^6b^4c^2}}\ge\frac{12}{\sqrt[12]{3^3 2^4}}\cdot\frac{1}{\sqrt[12]{3^3 2^2}}=\frac{12}{\sqrt[12]{3^6 2^6}}=2\sqrt{6}$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a=\sqrt{3};b=\sqrt{2};c=1$

Bài 8. [Russia MO 2000] Cho $\begin{cases}a,b,c\ge 0\\ a+b+c=3\end{cases}$. Chứng minh $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\ge ab+bc+ca$ (1)

Chứng minh

(1) $\Leftrightarrow(a^2+b^2+c^2)+2(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})\ge(a+b+c)^2$ (2)

Sử dụng bất đẳng thức **AM – GM** ta có:

$$VT(2)=\sum_{cyc}\left(a^2+\sqrt{a}+\sqrt{a}\right)\geq\sum_{cyc}3\cdot\sqrt[3]{a^2\cdot\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}}=3(a+b+c)=(a+b+c)^2\Rightarrow \text{(đpcm)}$$

Bài 9. Cho $\begin{cases}x,y,z\geq 0\\ x+y+z=3\end{cases}$ và số thực $k\geq 1$.

Chứng minh rằng $\sqrt{x+k^2-1}+\sqrt{y+k^2-1}+\sqrt{z+k^2-1}\geq k(xy+yz+zx)$ (1)

Chứng minh

Đặt $a=\dfrac{x+k^2-1}{k^2}, b=\dfrac{y+k^2-1}{k^2}, c=\dfrac{z+k^2-1}{k^2}$, khi đó

$x=ak^2+1-k^2, y=bk^2+1-k^2, z=ck^2+1-k^2$ và $a+b+c=3$. Khi đó (1) trở thành:

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\geq(ak^2+1-k^2)(bk^2+1-k^2)+$$
$$(bk^2+1-k^2)(ck^2+1-k^2)+(ck^2+1-k^2)(ak^2+1-k^2)$$

$$\Leftrightarrow\ \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\geq(ab+bc+ca)k^4-2(a+b+c)k^2(k^2-1)+3(k^2-1)^2$$

$$\Leftrightarrow\ \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}-(ab+bc+ca)\geq(k^4-1)(ab+bc+ca-3)\ (2)$$

Ta có $a+b+c=3\Rightarrow\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\geq ab+bc+ca$ và $ab+bc+ca\leq\dfrac{(a+b+c)^2}{3}=3$

Vậy $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}-(ab+bc+ca)\geq 0\geq(k^4-1)(ab+bc+ca-3)\Rightarrow$ (2) đúng $\Rightarrow$ (đpcm)

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1\Leftrightarrow x=y=z=1$

Bài 10. Cho $\begin{cases}a,b,c>0\\ ab+bc+ca=3\end{cases}$. Chứng minh: $2(a+b+c)+\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)\geq 9$ (1)

Chứng minh

Sử dụng bất đẳng thức **AM – GM** ta có:

$$\text{VT}(1)=(a+b+c)+(a+b+c)+\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)\geq 3\cdot\sqrt[3]{(a+b+c)^2\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)}$$

Ta sẽ chứng minh $(a+b+c)^2\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)\geq 27$ (2)

Ta có: $(a+b+c)^2\geq 3(ab+bc+ca)=9\Rightarrow\sqrt{a+b+c}\geq\sqrt{3}$. Suy ra bất đẳng thức (2) được chứng minh nếu ta chứng minh được bất đẳng thức:

$$(a+b+c)\sqrt{a+b+c}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)\geq 9\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c)\sqrt{a+b+c}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)\geq 3\sqrt{3}(ab+bc+ca)\ (3)$$

Chuẩn hóa $a+b+c=3$. Bất đẳng thức (3) trở thành $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\ge ab+bc+ca$

Đây chính là bất đẳng thức đã chứng minh ở Bài 8.

Bài 11. Cho $\begin{cases}a,b,c>0\\ a+b+c=1\end{cases}$. Chứng minh: $\sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a}\ge\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}(1+ab+bc+ca)$ (1)

Chứng minh

Ta có: $1+ab+bc+ca=(a+b+c)^2+ab+bc+ca=\sum_{cyc}(a+b)(b+c)$

Bất đẳng thức (1) trở thành $\sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a}\ge\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\sum_{cyc}(a+b)(b+c)$

$$\Leftrightarrow\sqrt{\frac{a+b}{a+b+c}}+\sqrt{\frac{b+c}{a+b+c}}+\sqrt{\frac{c+a}{a+b+c}}\ge\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\sum_{cyc}\frac{(a+b)(b+c)}{(a+b+c)^2}\quad(2)$$

Đặt $x=\frac{a+b}{a+b+c};y=\frac{b+c}{a+b+c};z=\frac{c+a}{a+b+c}$, khi đó $\begin{cases}x,y,z>0\\ x+y+z=2\end{cases}$

Bất đẳng thức (2) trở thành $2\sqrt{2}\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)\ge3\sqrt{3}(xy+yz+zx)$

$$\Leftrightarrow3\sqrt{3}\left(x^2+y^2+z^2\right)+4\sqrt{2}\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)\ge3\sqrt{3}(x+y+z)^2\quad(3)$$

Sử dụng bất đẳng thức ***AM – GM*** ta có:

$$VT(3)=\sum_{cyc}\left(3\sqrt{3}x^2+2\sqrt{2x}+2\sqrt{2x}\right)\ge\sum_{cyc}3\cdot\sqrt[3]{3\sqrt{3}\,x^2\left(2\sqrt{2x}\right)^2}=6\sqrt{3}(x+y+z)=3\sqrt{3}(x+y+z)^2$$

Vậy (3) đúng suy ra (đpcm). Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z=\frac{2}{3}\Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{3}$

Bài 12. Cho $\begin{cases}a,b,c>0\\ a^2+b^2+c^2=3\end{cases}$. Chứng minh: $S=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{3}{2}(a+b+c)\ge\frac{15}{2}$ (*)

Chứng minh

Bước 1: $3(a^2+b^2+c^2)\ge(a+b+c)^2$ hay $\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}\ge a+b+c$

Bước 2: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge3\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{c}}=\frac{3}{\sqrt[3]{abc}}\ge\frac{9}{a+b+c}\ge\frac{9}{\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}}=3$

Bước 3: $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)(a+b+c)^2=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)(a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca)=$

$$=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)(3+2ab+2bc+2ca)=3\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+4(a+b+c)+2\left(\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}+\frac{ab}{c}\right)$$

$$=3\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+4(a+b+c)+\left(\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}\right)+\left(\frac{ca}{b}+\frac{ab}{c}\right)+\left(\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}\right)\ge$$

$$3\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+4(a+b+c)+2\sqrt{\frac{bc}{a}\cdot\frac{ca}{b}}+2\sqrt{\frac{ca}{b}\cdot\frac{ab}{c}}+2\sqrt{\frac{ab}{c}\cdot\frac{bc}{a}}$$

$$=3\left[\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+(a+b+c)+(a+b+c)\right]\ge 9\cdot\sqrt[3]{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)(a+b+c)^2}$$

$$\left(\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)(a+b+c)^2\right)^3\ge 9^3\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)(a+b+c)^2\Rightarrow\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)(a+b+c)^2\ge 27$$

Bước 4: $S=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+\frac{3}{4}\left[\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+(a+b+c)+(a+b+c)\right]$

$$\ge\frac{1}{4}\cdot\frac{9}{\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}}+\frac{3}{4}\cdot 3\sqrt[3]{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)(a+b+c)^2}\ge\frac{1}{4}\cdot 3+\frac{3}{4}\cdot 3.\sqrt[3]{27}=\frac{15}{2}$$

Bài 13. Cho $\begin{cases}a,b,c>0\\(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)=1\end{cases}$. Chứng minh : $\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^5\ge\frac{a^2+b^2+c^2}{3}$

Chứng minh

Bước 1: Chứng minh cả ba $(a+b-c)$, $(b+c-a)$ và $(c+a-b)$ đều dương.

Bước 2: Sử dụng bất đẳng thức $\boldsymbol{AM-GM}$ ta có

$$1=\sqrt{(a+b-c)(b+c-a)}.\sqrt{(b+c-a)(c+a-b)}.\sqrt{(c+a-b)(a+b-c)}\le abc.$$

Áp dụng: $\frac{a^2+b^2+c^2}{3}\le\frac{abc(a^2+b^2+c^2)}{3}=\frac{abc(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)}{3(a+b+c)}$

$$\le\frac{(ab+bc+ca)^2(a^2+b^2+c^2)}{9(a+b+c)}\le\frac{\left(2(ab+bc+ca)+(a^2+b^2+c^2)\right)^3}{27.9.(a+b+c)}=\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^5.$$

Bài 14. Cho $\begin{cases}a,b,c>0\\(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)=1\end{cases}$. Chứng minh

$$(a+b)(a+c)\sqrt{b+c-a}+(a+b)(a+c)\sqrt{b+c-a}+(a+b)(a+c)\sqrt{b+c-a}\ge 4(a+b+c)$$

Chứng minh

Sử dụng bất đẳng thức $\boldsymbol{AM-GM}$ ta có

$$\sum_{cyc}(a+b)(a+c)\sqrt{b+c-a}=\sum_{cyc}\frac{(a+b)(a+c)}{\sqrt{(c+a-b)(a+b-c)}}\ge\sum_{cyc}\frac{2(a+b)(a+c)}{a}$$

Ta cần chứng minh $\frac{(a+b)(a+c)}{a}+\frac{(b+c)(b+a)}{b}+\frac{(c+a)(c+b)}{c}\ge 4(a+b+c)$

$$\Leftrightarrow bc(a+b)(a+c)+ca(b+c)(b+a)+ab(c+a)(c+b)\ge 4abc(a+b+c)$$

$$\Leftrightarrow a^2bc+b^2ca+c^2ab+(ab+bc+ca)^2\ge 4abc(a+b+c)$$

$$\Leftrightarrow (ab+bc+ca)^2\ge 3abc(a+b+c)\ \Leftrightarrow a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2\ge 0\ \text{(đpcm)}$$

XI. ĐIỂM RƠI KHÔNG ĐỐI XỨNG TRONG BẤT ĐẲNG THỨC AM - GM

Các bài toán dưới đây thể hiện bản chất Toán học của ngôn ngữ cũng như kỹ thuật với tên gọi ***"điểm rơi"*** trong bất đẳng thức. Nó được thể hiện sự tự nhiên tùy ý khi ta tạo ra ***"điểm rơi"*** cho các biến số trước rồi mới dựng ra các bất đẳng thức sau. Để khác với các phần trước, chúng ta sẽ minh họa cho ý tưởng này với ***"điểm rơi"*** của các biến số là không bằng nhau. Như vậy bắt buộc ta phải dự đoán được ***"điểm rơi"*** trước khi chứng minh bất đẳng thức.

Bài 1. Cho $\begin{cases} a,b,c>0 \\ a+2b+3c\ge 20 \end{cases}$. Chứng minh rằng $S = a+b+c+\dfrac{3}{a}+\dfrac{9}{2b}+\dfrac{4}{c}\ge 13$

Chứng minh

Dự đoán S = 1đạt tại điểm rơi: $a=2,\ b=3,\ c=4$

Sử dụng bất đẳng thức ***AM – GM*** ta có:

$$\begin{cases} a+\dfrac{4}{a}\ge 2\sqrt{a\cdot\dfrac{4}{a}}=4 \\ b+\dfrac{9}{b}\ge 2\sqrt{b\cdot\dfrac{9}{b}}=6 \\ c+\dfrac{16}{c}\ge 2\sqrt{c\cdot\dfrac{16}{c}}=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{3}{4}\left(a+\dfrac{4}{a}\right)\ge\dfrac{3}{4}\cdot 4=3 \\ \dfrac{1}{2}\left(b+\dfrac{9}{b}\right)\ge\dfrac{1}{2}\cdot 6=3 \\ \dfrac{1}{4}\left(c+\dfrac{16}{c}\right)\ge\dfrac{1}{4}\cdot 8=2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{4}a+\frac{1}{2}b+\frac{1}{4}c+\frac{3}{a}+\frac{9}{2b}+\frac{4}{c}\ge 8 \qquad (1)$$

Từ $a+2b+3c\ge 20 \Rightarrow \dfrac{1}{4}a+\dfrac{b}{2}+\dfrac{3}{4}c\ge 5$ (2). Từ (1) và (2) $\Rightarrow S = a+b+c+\dfrac{3}{a}+\dfrac{9}{2b}+\dfrac{4}{c}\ge 13$

Bài 2. Cho $a, b, c>0$. Chứng minh: $S = 30a+3b^2+\dfrac{2c^3}{9}+36\left(\dfrac{1}{ab}+\dfrac{1}{bc}+\dfrac{1}{ca}\right)\ge 84$

Chứng minh

Dự đoán S = 84 đạt tại điểm: $a=1,\ b=2,\ c=3$

Sử dụng bất đẳng thức ***AM – GM*** ta có:

$$\begin{cases} 2.a+1\cdot\dfrac{b^2}{4}+2\cdot\dfrac{2}{ab}\ge 5\cdot\sqrt[5]{a^2\cdot\dfrac{b^2}{4}\left(\dfrac{2}{ab}\right)^2}=5 \\ 3\cdot\dfrac{b^2}{4}+2\cdot\dfrac{c^3}{27}+6\cdot\dfrac{6}{bc}\ge 11\cdot\sqrt[11]{\left(\dfrac{b^2}{4}\right)^3\left(\dfrac{c^3}{27}\right)^2\cdot\left(\dfrac{6}{bc}\right)^6}=11 \\ \dfrac{c^3}{27}+3.a+3\cdot\dfrac{3}{ca}\ge 7\cdot\sqrt[7]{\dfrac{c^3}{27}\cdot a^3\left(\dfrac{3}{ca}\right)^3}=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9\left(2a+\dfrac{b^2}{4}+\dfrac{4}{ab}\right)\ge 45 \\ \dfrac{3b^2}{4}+\dfrac{2c^3}{27}+\dfrac{36}{bc}\ge 11 \\ 4\left(\dfrac{c^3}{27}+3a+\dfrac{9}{ca}\right)\ge 28 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 30a+3b^2+\frac{2c^3}{9}+36\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)\ge 45+11+28\ge 84$$

Bài 3. Cho $\begin{cases} a,b,c>0 \\ ac\ge 12\,;\,bc\ge 8 \end{cases}$. Chứng minh $S=(a+b+c)+2\left(\dfrac{1}{ab}+\dfrac{1}{bc}+\dfrac{1}{ca}\right)+\dfrac{8}{abc}\ge\dfrac{121}{2}$

Chứng minh

Dự đoán S = $\dfrac{121}{2}$ đạt tại điểm rơi: $a=3,\ b=2,\ c=4$

Sử dụng bất đẳng thức ***AM – GM*** ta có:

$$\begin{cases} \dfrac{a}{3}+\dfrac{b}{2}+\dfrac{6}{ab}\ge 3\cdot\sqrt[3]{\dfrac{a}{3}\cdot\dfrac{b}{2}\cdot\dfrac{6}{ab}}=3 \\ \dfrac{b}{2}+\dfrac{c}{4}+\dfrac{8}{bc}\ge 3\cdot\sqrt[3]{\dfrac{b}{2}\cdot\dfrac{c}{4}\cdot\dfrac{8}{bc}}=3 \\ \dfrac{c}{4}+\dfrac{a}{3}+\dfrac{12}{ca}\ge 3\cdot\sqrt[3]{\dfrac{c}{4}\cdot\dfrac{a}{3}\cdot\dfrac{12}{ca}}=3 \\ \dfrac{a}{3}+\dfrac{b}{2}+\dfrac{c}{4}+\dfrac{24}{abc}\ge 4\cdot\sqrt[4]{\dfrac{a}{3}\cdot\dfrac{b}{2}\cdot\dfrac{c}{4}\cdot\dfrac{24}{abc}}=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1\cdot\left(\dfrac{a}{3}+\dfrac{b}{2}+\dfrac{6}{ab}\right)\ge 3 \\ 4\cdot\left(\dfrac{b}{2}+\dfrac{c}{4}+\dfrac{8}{bc}\right)\ge 12 \\ 7\cdot\left(\dfrac{c}{4}+\dfrac{a}{3}+\dfrac{12}{ca}\right)\ge 21 \\ 1\cdot\left(\dfrac{a}{3}+\dfrac{b}{2}+\dfrac{c}{4}+\dfrac{24}{abc}\right)\ge 4 \end{cases}$$

$3(a+b+c)+\dfrac{6}{ab}+\dfrac{32}{bc}+\dfrac{84}{ca}+\dfrac{24}{abc}\ge 40$. Do $\begin{cases} ac\ge 12 \\ bc\ge 8 \end{cases}$ nên $\dfrac{1}{ac}\le 12;\dfrac{1}{bc}\le 8$

Từ đó ta có $40\le 3S+26\cdot\dfrac{1}{bc}+78\cdot\dfrac{1}{ca}\le 3S+26\cdot\dfrac{1}{8}+78\cdot\dfrac{1}{12}\Rightarrow\dfrac{363}{2}\le 3S\Leftrightarrow\dfrac{121}{2}\le S$ (đpcm)

Bài 4. Cho các số $a,b,c>0$ thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh:

$$S=\ a^4b+b^4c+c^4a\le\frac{256}{3125}$$

Chứng minh

Không mất tính tổng quát, giả sử

$a=\text{Max}\{a,b,c\}\Rightarrow b^4c\le a^3bc$ và $c^4a\le c^2a^3\le ca^4$.

Biến đổi biểu thức S và đánh giá với chú ý chi tiết $\dfrac{3c}{4}\ge\dfrac{c}{2}$ ta có

$$S=a^4b+b^4c+\frac{c^4a}{2}+\frac{c^4a}{2}\le a^4b+a^3bc+\frac{ca^4}{2}+\frac{c^2a^3}{2}$$

$$=a^3b(a+c)+\frac{a^3c}{2}(a+c)=a^3(a+c)\left(b+\frac{c}{2}\right)$$

$$\Rightarrow S=a^4b+b^4c+c^4a\le a^3(a+c)\left(b+\frac{c}{2}\right)\le a^3(a+c)\left(b+\frac{3c}{2}\right)$$

$$S = 4^4\frac{a}{4}\cdot\frac{a}{4}\cdot\frac{a}{4}\cdot\frac{a+c}{4}\left(b+\frac{3c}{2}\right) \le 4^4\left[\frac{\frac{a}{4}+\frac{a}{4}+\frac{a}{4}+\frac{a+c}{4}+\left(b+\frac{3c}{2}\right)}{5}\right]^5$$

$$= 4^4.\left(\frac{a+b+c}{5}\right)^5 = \frac{4^4}{5^5} = \frac{256}{3125} \Rightarrow S = a^4b+b^4c+c^4a \le \frac{256}{3125}$$

Dấu bằng xảy ra (theo a = Max (a, b, c)) $\Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c=1; c=0 \\ \frac{a}{4}=\frac{a+c}{4}=b+\frac{3c}{4} \end{cases} \Leftrightarrow a=\frac{4}{5}; b=\frac{1}{5}; c=0$

Trong trường hợp tổng quát, dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow$ (a, b, c) là một hoán vị của $\left(\frac{4}{5},\frac{1}{5},0\right)$.

Bài 5. Cho $0\le a\le b\le c\le 1$. Chứng minh rằng: $a^2(b-c)+b^2(c-b)+c^2(1-c)\le\frac{108}{529}$

Chứng minh

Biến đổi và sử dụng bất đẳng thức ***AM – GM*** ta có

$$a^2(b-c)+b^2(c-b)+c^2(1-c)\le 0+\frac{1}{2}\left[b.b\left(2c-2b\right)\right]+c^2(1-c)$$

$$\le\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{b+b+2c-2b}{3}\right)^3+c^2(1-c)=c^2\left(\frac{4}{27}\cdot c+1-c\right)=c^2\left(1-\frac{23}{27}\cdot c\right)$$

$$=\left(\frac{54}{23}\right)^2\left(\frac{23}{54}\cdot c\right)\left(\frac{23}{54}\cdot c\right)\left(1-\frac{23}{27}\cdot c\right)\le\left(\frac{54}{23}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{108}{529}$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow$ a = 0, b = $\frac{12}{23}$, c = $\frac{18}{23}$

Bài 6. Đặt $x, y, z, t \in [0, 1]$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$S = x^2y+y^2z+z^2t+t^2x-xy^2-yz^2-zt^2-tx^2$$

Giải

Không mất tính tổng quát, giả sử $x=\text{Max}\{x,y,z,t\}$. Ta có

$$S=y\left(x^2-z^2+yz-xy\right)+t\left(z^2-x^2+xt-zt\right)=y(x-z)(x+z-y)+t(z-x)(x+z-t)$$

$$\le y(x-z)(x+z-y)+0\le\left[\frac{y+(x-z)+(x+z-y)}{3}\right]^3=\frac{8}{27}\cdot x^3\le\frac{8}{27}\cdot 1^3=\frac{8}{27}$$

Với $x=1; y=\frac{2}{3}; z=\frac{1}{3}; t=0$, Max $S=\frac{8}{27}$

Bài 7. Cho các số $a, b, c \geq 0$ thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng

$$(a^2-ab+b^2)(b^2-bc+c^2)(c^2-ca+a^2) \leq 12 \quad (1)$$

Chứng minh

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b \geq c \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq b^2-bc+c^2 \leq b^2 \\ 0 \leq c^2-ca+a^2 \leq a^2 \end{cases} \Rightarrow$

$(b^2-bc+c^2)(c^2-ca+a^2) \leq a^2b^2$

$$\text{VT (1)} \leq a^2b^2(a^2-ab+b^2) = \frac{4}{9}\cdot\frac{3ab}{2}\cdot\frac{3ab}{2}(a^2-ab+b^2) \leq \frac{4}{9}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{3ab}{2}+\frac{3ab}{2}+(a^2-ab+b^2)\right)\right]^3$$

$$= \frac{4}{9}\left(\frac{(a+b)^2}{3}\right)^3 \leq \frac{4}{9}\left(\frac{(a+b+c)^2}{3}\right)^3 = \frac{4}{9}\cdot\frac{(a+b+c)^6}{3^3} = \frac{4}{9}\cdot\frac{3^6}{3^3} = \frac{4}{9}\cdot 3^3 = 12$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \dfrac{3ab}{2} = a^2-ab+b^2 \;, c=0 \Leftrightarrow a=2, b=1, c=0$

Bài 8. Cho $\begin{cases} a \geq 7 ; 5a + 7b \geq 70 \\ 10a+14b+35c \geq 210 \end{cases}$. Tìm giá trị nhỏ nhất $\mathbf{S} = a^3+b^3+c^3$

Giải

• ***Bổ đề:*** $\dfrac{x^3+y^3+z^3}{3} \geq \left(\dfrac{x+y+z}{3}\right)^3 \quad \forall x, y, z > 0$

Bạn đọc tự chứng minh bổ đề

• ***Áp dụng:*** $S = a^3+b^3+c^3 = 8\left[\left(\frac{a}{7}\right)^3+\left(\frac{b}{5}\right)^3+\left(\frac{c}{2}\right)^3\right]+117\left[\left(\frac{a}{7}\right)^3+\left(\frac{b}{5}\right)^3\right]+218\left(\frac{a}{7}\right)^3$

$$\geq 8\left[3\left(\frac{\frac{a}{7}+\frac{b}{5}+\frac{c}{2}}{3}\right)^3\right]+117\left[2\left(\frac{\frac{a}{7}+\frac{b}{5}}{2}\right)^3\right]+218\left(\frac{a}{7}\right)^3 \geq 8\times 3+117\times 2+218=476$$

Với $a=7$, $b=5$, $c=2$ ta có Min S = 476

Bài 9. Cho a, b, c, d là các số thực thỏa mãn điều kiện

$$\begin{cases} 3 \geq a \geq b \geq c \geq d > 0 \\ 4a^2+9b^2 \geq 2a^2b^2 \\ 4a^2b^2+9b^2c^2+4c^2a^2 \geq 3a^2b^2c^2 \\ a^2b^2c^2+9b^2c^2d^2+4c^2d^2a^2+4d^2a^2b^2 \geq 4a^2b^2c^2d^2 \end{cases}$$

Chứng minh rằng :

$$a^3+b^3+c^3+d^3 \leq 44$$

Chứng minh

• ***Bổ đề:*** $\left(\dfrac{x^3+y^3+z^3+t^3}{4}\right)^{\frac{1}{3}} \ge \left(\dfrac{x^2+y^2+z^2+t^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \forall x,y,z,t>0$

Bạn đọc tự chứng minh bổ đề

• ***Áp dụng:***

$$44 = 1^3+2^3+2^3+3^3 = d^3\left[\left(\frac{3}{a}\right)^3+\left(\frac{2}{b}\right)^3+\left(\frac{2}{c}\right)^3+\left(\frac{1}{d}\right)^3\right]$$

$$+(c^3-d^3)\left[\left(\frac{3}{a}\right)^3+\left(\frac{2}{b}\right)^3+\left(\frac{2}{c}\right)^3\right]+(b^3-c^3)\left[\left(\frac{3}{a}\right)^3+\left(\frac{2}{b}\right)^3\right]+(a^3-b^3)\left(\frac{3}{a}\right)^3 \ge$$

$$4d^3\left[\frac{\left(\frac{3}{a}\right)^2+\left(\frac{2}{b}\right)^2+\left(\frac{2}{c}\right)^2+\left(\frac{1}{d}\right)^2}{4}\right]^{\frac{3}{2}}+3(c^3-d^3)\left[\frac{\left(\frac{3}{a}\right)^2+\left(\frac{2}{b}\right)^2+\left(\frac{2}{c}\right)^2}{3}\right]^{\frac{3}{2}}+2(b^3-c^3)\left[\frac{\left(\frac{3}{a}\right)^2+\left(\frac{2}{b}\right)^2}{2}\right]^{\frac{3}{2}}$$

$$+(a^3-b^3)\left(\frac{3}{a}\right)^3 \ge 4d^3+3(c^3-d^3)+2(b^3-c^3)+(a^3-b^3)=a^3+b^3+c^3+d^3 \Rightarrow \text{(đpcm)}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=3;b=c=2;d=1$

Bài 10. Cho các số $a,b,c\ge 0$ thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=3$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P=ab^2+bc^2+ca^2-abc$

Chứng minh

Nhận xét rằng rong ba số a,b,c luôn có một số nằm giữa hai số còn lại (*), không mất tính tổng quát, ta giả sử số đó là b, nghĩa là $(b-a)(b-c)\le 0$.

Biến đổi biểu thức đã cho như sau :

$P=ab^2+bc^2+ca^2-abc=(ab^2+ca^2-a^2b-abc)+(bc^2+a^2b)=a(b-a)(b-c)+b(c^2+a^2)$

Theo nhận xét trên thì $a(b-a)(b-c)\le 0$, suy ra $P\le b(c^2+a^2)$.

Mặt khác, sử dụng bất đẳng thức ***AM – GM*** ta có :

$$b(c^2+a^2)=2\sqrt{b^2.\frac{c^2+a^2}{2}.\frac{c^2+a^2}{2}}\le 2\sqrt{\left(\frac{b^2+\frac{c^2+a^2}{2}+\frac{c^2+a^2}{2}}{3}\right)^3}=2\sqrt{\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{3}\right)^3}=2$$

Từ đó ta có $P\le 2$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} a(b-a)(b-c)=0 \\ c^2+a^2=2b^2 \\ a^2+b^2+c^2=3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=b=c=1 \\ a=0,b=1,c=\sqrt{2} \end{array}\right.$

Vậy giá trị lớn nhất của P là 2, đạt được tại $a=b=c=1$ hoặc $a=0,b=1,c=\sqrt{2}$ và các hoán vị tương ứng.

XII. PHƯƠNG PHÁP CÂN BẰNG HỆ SỐ

Trong các phần trước, các bất đẳng thức được đề cập đến có thể dự đoán được điểm rơi một cách trực giác (dù đối xứng hay không đối xứng). Tuy nhiên với các bất đẳng thức mà điểm rơi không là các số nguyên dương thậm chí là các số vô tỷ thì không thể dự đoán được bằng trực giác. Khi đó, chúng ta cần phải đưa thêm các tham số giả định rồi mới sử dụng bất đẳng thức *AM – GM*. Việc xác lập điều kiện các đẳng thức xảy ra sẽ dẫn đến hệ điều kiện để tìm tham số. Vì thế phương pháp này có tên gọi: Phương pháp cân bằng hệ số.

Bài 1. Cho $x \in [0, 1]$. Tìm giá trị lớn nhất của $S = 13\sqrt{x^2 - x^4} + 9\sqrt{x^2 + x^4}$

Giải

Với $\alpha, \beta > 0$, Sử dụng bất đẳng thức ***AM - GM*** ta có:

$$+\begin{cases} 13\sqrt{x^2 - x^4} = \dfrac{13}{\alpha}\cdot\sqrt{\alpha^2 x^2(1 - x^2)} \le \dfrac{13}{\alpha}\cdot\dfrac{\alpha^2 x^2 + (1 - x^2)}{2} = \dfrac{13(\alpha^2 - 1)x^2 + 13}{2\alpha} \\ 9\sqrt{x^2 + x^4} = \dfrac{9}{\beta}\cdot\sqrt{\beta^2 x^2(1 + x^2)} \le \dfrac{9}{\beta}\cdot\dfrac{\beta^2 x^2 + (1 + x^2)}{2} = \dfrac{9(\beta^2 + 1)x^2 + 9}{2\beta} \end{cases}$$

$$\Rightarrow S = 13\sqrt{x^2 - x^4} + 9\sqrt{x^2 + x^4} \le \left[\frac{13(\alpha^2 - 1)}{2\alpha} + \frac{9(\beta^2 + 1)}{2\beta}\right]x^2 + \frac{13}{2\alpha} + \frac{9}{2\beta}$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2 x^2 = 1 - x^2 \\ \beta^2 x^2 = 1 + x^2 \end{cases} \Leftrightarrow (\alpha^2 + 1)x^2 = (\beta^2 - 1)x^2 = 1$

Chọn $\alpha, \beta > 0$ sao cho $\begin{cases} \alpha^2 + 1 = \beta^2 - 1 \\ \dfrac{13(\alpha^2 - 1)}{2\alpha} + \dfrac{9(\beta^2 + 1)}{2\beta} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = \dfrac{1}{2}; \beta = \dfrac{3}{2}$. Vậy $S \le \dfrac{13}{2\alpha} + \dfrac{9}{2\beta} = 16$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow (\alpha^2 + 1)x^2 = 1 \Leftrightarrow \dfrac{5}{4}x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$. Vậy Max S = 16

Bài 2. Cho $a, b, c > 0$; $a + b + c = 3$.

a. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = a^3 + 8b^3 + c^3$

b. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T = \sqrt{ab} + 2\sqrt{ac} + \sqrt{bc}$

Giải

a. Biến đổi S với các tham số α, $\beta > 0$ sau đó sử dụng bất đẳng thức ***AM – GM*** ta có:

$$S = (a^3 + \alpha^3 + \alpha^3) + (8b^3 + \beta^3 + \beta^3) + (c^3 + \alpha^3 + \alpha^3) - (4\alpha^3 + 2\beta^3)$$

$$\ge (3\alpha^2 a + 6\beta^2 b + 3\alpha^2 c) - (4\alpha^3 + 2\beta^3) = S_0$$

Ràng buộc điều kiện S_0 là hằng số và Min$S = S_0$, ta nhận được hệ điều kiện của α, β

$$\begin{cases} 3\alpha^2 = 6\beta^2; a = c = \alpha \\ 2b = \beta; a+b+c = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha + \dfrac{\beta}{2} = 3 \\ \alpha^2 = 2\beta^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4\alpha = 6 - \beta \\ \alpha^2 = 2\beta^2 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \frac{6\sqrt{2}}{4\sqrt{2}+1}; \beta = \frac{6}{4\sqrt{2}+1}$$

$$\Rightarrow S \ge 3\alpha^2(a+b+c) - 2(4\sqrt{2}+1)\beta^3 = \frac{9\times 72}{(4\sqrt{2}+1)^2} - \frac{2(4\sqrt{2}+1)\times 216}{(4\sqrt{2}+1)^3} = \frac{1080}{(4\sqrt{2}+1)^2}$$

b. Biến đổi T với các tham số $\alpha, \beta > 0$ rồi sử dụng bất đẳng thức ***AM - GM*** ta có:

$$T = \sqrt{ab} + 2\sqrt{ac} + \sqrt{bc} = \sqrt{\alpha a}\sqrt{\frac{b}{\alpha}} + 2\sqrt{a}\sqrt{c} + \sqrt{\beta b}\sqrt{\frac{c}{\beta}}$$

$$T \le \frac{1}{2}\left(\alpha a + \frac{b}{\alpha}\right) + (a+c) + \frac{1}{2}\left(\beta b + \frac{c}{\beta}\right) = \frac{1}{2}\left[(\alpha+2)a + \left(\frac{1}{\alpha} + \beta\right)b + \left(\frac{1}{\beta} + 2\right)c\right] = T_0$$

Ràng buộc điều kiện T_0 là hằng số và Min$T = T_0$ ta nhận được hệ điều kiện của α, β

$$\begin{cases} \alpha a = \dfrac{b}{\alpha}; \beta b = \dfrac{c}{\beta} \\ a = c; a+b+c = 3 \\ \alpha + 2 = \dfrac{1}{\alpha} + \beta = \dfrac{1}{\beta} + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = c = \dfrac{3}{2+\alpha^2}; b = \dfrac{3\alpha^2}{2+\alpha^2} \\ \alpha + 2 = \dfrac{1}{\alpha} + \beta = \dfrac{1}{\beta} + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \sqrt{3} - 1 \\ \beta = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow T \le \frac{\sqrt{3}+1}{2}(a+b+c) = \frac{3}{2}(\sqrt{3}+1) \Rightarrow \text{Max}\, T = \frac{3}{2}(\sqrt{3}+1)$$

Bài 3. Cho $\begin{cases} x, y \ge 0 \\ x^3 + y^3 = 1 \end{cases}$ Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T = \sqrt{x} + 2\sqrt{y}$

Giải

Biến đổi T với các tham số $\alpha, \beta > 0$ rồi sử dụng bất đẳng thức ***AM – GM*** ta có:

$$x^3 + 5\alpha = x^3 + \alpha + \alpha + \alpha + \alpha + \alpha \ge 6\cdot\sqrt[6]{\alpha^5 x^3} = 6\alpha^{\frac{5}{6}}\sqrt{x}$$

$$y^3 + 5\beta = y^3 + \beta + \beta + \beta + \beta + \beta \ge 6\cdot\sqrt[6]{\beta^5 y^3} = 6\beta^{\frac{5}{6}}\sqrt{y}$$

$\Rightarrow 1 + 5\alpha + 5\beta \ge 3\left(2\alpha^{\frac{5}{6}}\sqrt{x} + \beta^{\frac{5}{6}}2\sqrt{y}\right)$. Chứng minh hệ điều kiện $\begin{cases} x^3 = \alpha; y^3 = \beta \\ 2\alpha^{\frac{5}{6}} = \beta^{\frac{5}{6}}; \alpha + \beta = 1 \end{cases}$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{1}{1 + 2\cdot\sqrt[5]{2}}; \beta = 2\cdot\sqrt[5]{2}\alpha \Rightarrow \sqrt{x} + 2\sqrt{y} \le \alpha^{-\frac{5}{6}} = (1 + 2\cdot\sqrt[5]{2})^{\frac{5}{6}} \Rightarrow \text{Max}\, T = (1 + 2\cdot\sqrt[5]{2})^{\frac{5}{6}}$$

Bài 4. Cho các số $a>0$ và các số x, y, z thỏa mãn $x^2+y^2+z^2+\frac{9}{16}xy=a^2$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $S=xy+yz+zx$

Giải

Với $\alpha\in(0;1)$, Sử dụng bất đẳng thức ***AM - GM*** ta có:

$$+\begin{cases}\alpha\left(x^2+y^2\right)\geq 2\alpha.xy\\(1-\alpha)x^2+\dfrac{z^2}{2}\geq 2\sqrt{(1-\alpha)x^2\cdot\dfrac{z^2}{2}}\geq\sqrt{2(1-\alpha)}.xz\\(1-\alpha)y^2+\dfrac{z^2}{2}\geq 2\sqrt{(1-\alpha)y^2\cdot\dfrac{z^2}{2}}\geq\sqrt{2(1-\alpha)}.yz\end{cases}$$

$$\Rightarrow x^2+y^2+z^2\geq 2\alpha.xy+\sqrt{2(1-\alpha)}\,(xz+yz)\ \Rightarrow\ a^2\geq\left(2\alpha+\frac{9}{16}\right)xy+\sqrt{2(1-\alpha)}\,(xz+yz)$$

Chọn $\alpha\in(0;1)$ sao cho $2\alpha+\frac{9}{16}=\sqrt{2(1-\alpha)}\Leftrightarrow\alpha=\frac{12\sqrt{5}-17}{32}$. Khi đó ta có

$$a^2\geq\frac{3\sqrt{5}-2}{4}(xy+yz+zx)\Rightarrow S=xy+yz+zx\leq\frac{4a^2}{3\sqrt{5}-2}=\frac{4(3\sqrt{5}+2)}{41}a^2\Rightarrow\text{Max}\,S=\frac{4(3\sqrt{5}+2)}{41}a^2$$

Dấu bằng xảy ra$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases}\sqrt{\dfrac{49-12\sqrt{5}}{32}}x=\sqrt{\dfrac{49-12\sqrt{5}}{32}}y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}z\\x^2+y^2+z^2+\dfrac{9}{16}xy=a^2\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&x=y=\frac{4a}{\sqrt{90-12\sqrt{5}}};z=\sqrt{\frac{49-12\sqrt{5}}{90-12\sqrt{5}}}\,a\\&x=y=\frac{-4a}{\sqrt{90-12\sqrt{5}}};z=-\sqrt{\frac{49-12\sqrt{5}}{90-12\sqrt{5}}}\,a\end{aligned}\right.$$

Bài 5. Cho $\begin{cases}a,b,c\geq 0\\a^2+2b^2+3c^2=1\end{cases}$ Tìm giá trị nhỏ nhất của $S=2a^3+3b^3+4c^3$

Giải

Xét các tham số $\alpha,\beta,\gamma\geq 0$ và sử dụng bất đẳng thức ***AM – GM*** ta có:

$$a^3+a^3+\alpha^3\geq 3\alpha a^2;\ \frac{3}{2}\left(b^3+b^3+\beta^3\right)\geq\frac{9}{2}\beta b^2;\ 2\left(c^3+c^3+\gamma^3\right)\geq 6\gamma c^2$$

$$\Rightarrow 2a^3+3b^3+4c^3+\alpha^3+\frac{3}{2}\beta^3+2\gamma^3\geq 3\alpha.a^2+\frac{9}{4}\beta\cdot 2b^2+2\gamma\cdot 3c^2$$

Dấu bằng xảy ra$\Leftrightarrow\begin{cases}a=\alpha,b=\beta,c=\gamma\\a^2+2b^2+3c^2=1\end{cases}$. Chọn α,β,γ sao cho

$$\begin{cases}3\alpha=\dfrac{9}{4}\beta=2\gamma=k\geq 0\\\alpha^2+2\beta^2+3\gamma^2=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3\alpha=\dfrac{9}{4}\beta=2\gamma=k>0\\\left(\dfrac{1}{9}+\dfrac{32}{81}+\dfrac{3}{4}\right)k^2=1\end{cases}\Leftrightarrow 3\alpha=\frac{9}{4}\beta=2\gamma=k=\frac{18}{\sqrt{407}}.$$

Ta có : $2a^3+3b^3+4c^3+\left(\frac{6}{\sqrt{407}}\right)^3+\frac{3}{2}\left(\frac{8}{\sqrt{407}}\right)^3+2\left(\frac{9}{\sqrt{407}}\right)^3\geq\frac{18}{\sqrt{407}}\left(a^2+2b^2+3c^2\right)$

$$\Leftrightarrow 2a^3+3b^3+4c^3+\frac{6}{\sqrt{407}}\geq\frac{18}{\sqrt{407}}\Leftrightarrow 2a^3+3b^3+4c^3\geq\frac{12}{\sqrt{407}}$$

Với $a=\frac{6}{\sqrt{407}},b=\frac{8}{\sqrt{407}},c=\frac{9}{\sqrt{407}}$, ta có $\text{Min}\,S=\frac{12}{\sqrt{407}}$

Bài 6. Cho $\begin{cases}a,b,c\geq 0\\ a+b+c=3\end{cases}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $S = 4ab+8bc+6ca$

Giải

Giả sử rằng $S=ma(b+c)+nb(c+a)+pc(a+b)=(m+n)ab+(n+p)bc+(p+m)ca$

$$\Rightarrow\begin{cases}m+n=4\\ n+p=8\\ p+m=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=1\\ n=3\\ p=5\end{cases}\Rightarrow S=4ab+8bc+6ca=a(b+c)+3b(c+a)+5c(a+b)$$

$$=a(3-a)+3b(3-b)+5c(3-c)$$

$$\Rightarrow S=\frac{81}{4}-\left[\left(a-\frac{3}{2}\right)^2+3\left(b-\frac{3}{2}\right)^2+5\left(c-\frac{3}{2}\right)^2\right]$$

Đặt $x=\left|a-\frac{3}{2}\right|;\ y=\left|b-\frac{3}{2}\right|;\ z=\left|c-\frac{3}{2}\right|\Rightarrow x+y+z\geq\left|a+b+c-\frac{9}{2}\right|=\frac{3}{2}$

Khi đó: $S=\frac{81}{4}-\left(x^2+3y^2+5z^2\right)\Leftrightarrow x^2+3y^2+5z^2=\frac{81}{4}-S$. Với các tham số $\alpha,\beta,\gamma>0$ ta có

$$\begin{cases}x^2+\alpha^2\geq 2\sqrt{x^2\alpha^2}=2\alpha x\\ 3y^2+3\beta^2\geq 6\sqrt{y^2\beta^2}=6\beta y\\ 5z^2+5\gamma^2\geq 10\sqrt{z^2\gamma^2}=10\gamma z\end{cases}\Rightarrow\left(\frac{81}{4}-S\right)+\left(\alpha^2+3\beta^2+5\gamma^2\right)\geq 2\left(\alpha x+3\beta y+5\gamma z\right)$$

Chọn $\alpha=3\beta=5\gamma\Rightarrow S\leq\frac{81}{4}+\left(\alpha^2+3\beta^2+5\gamma^2\right)-2\alpha(x+y+z)\leq\frac{81}{4}+\left(\alpha^2+3\beta^2+5\gamma^2\right)-3\alpha$

$\text{Max}\,S=\frac{81}{4}+\left(\alpha^2+3\beta^2+5\gamma^2\right)-3\alpha\Leftrightarrow x=\alpha;y=\beta;z=\gamma$ và $x+y+z=\frac{3}{2}$

$\Rightarrow x+y+z=\alpha+\beta+\gamma=\alpha+\frac{\alpha}{3}+\frac{\alpha}{5}=\frac{3}{2}\Rightarrow\alpha=\frac{45}{46};\beta=\frac{15}{46};\gamma=\frac{9}{46}$. Khi đó:

$$\text{Max}\,S=\frac{81}{4}+\left(\alpha^2+3\beta^2+5\gamma^2\right)-3\alpha=\frac{81}{4}+\frac{23\alpha^2}{15}-3\alpha=\frac{432}{23}$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow\left|a-\frac{3}{2}\right|=\alpha=\frac{45}{46};\left|b-\frac{3}{2}\right|=\beta=\frac{15}{46};\left|c-\frac{3}{2}\right|=\gamma=\frac{9}{46}$

$\Leftrightarrow a-\frac{3}{2}=-\frac{45}{46}$; $b-\frac{3}{2}=-\frac{15}{46}$; $c-\frac{3}{2}=-\frac{9}{46} \Leftrightarrow a=\frac{12}{23}$; $b=\frac{27}{23}$; $c=\frac{30}{23}$

Bài 7. Cho $a,b,c,m>0$ thỏa mãn $ab+bc+ca=1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=m\left(a^2+b^2\right)+c^2$ theo tham số m

Giải

Với tham số $\alpha \in (0;m)$, sử dụng bất đẳng thức ***AM – GM*** ta có:

$$+\begin{cases} \alpha a^2+\dfrac{c^2}{2}\geq 2\sqrt{\dfrac{\alpha}{2}}\,ac \\ \alpha b^2+\dfrac{c^2}{2}\geq 2\sqrt{\dfrac{\alpha}{2}}\,bc \\ (m-\alpha)\left(a^2+b^2\right)\geq 2(m-\alpha)ab \end{cases}$$

$$\Rightarrow m\left(a^2+b^2\right)+c^2\geq 2\sqrt{\frac{\alpha}{2}}(ac+bc)+2(m-\alpha)ab$$

Chọn $\alpha\in(0;m)$ sao cho $\sqrt{\frac{\alpha}{2}}=m-\alpha \Leftrightarrow \sqrt{\frac{\alpha}{2}}=\frac{-1+\sqrt{1+8m}}{4}$. Khi đó ta có:

$$S=m\left(a^2+b^2\right)+c^2\geq\frac{-1+\sqrt{1+8m}}{2}(ab+bc+ca)=\frac{-1+\sqrt{1+8m}}{2}$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a=b=\frac{1}{\sqrt[4]{1+8m}}$, $c=\frac{-1+\sqrt{1+8m}}{2\cdot\sqrt[4]{1+8m}}$. Vậy $\text{Min}\,S=\frac{-1+\sqrt{1+8m}}{2}$

Bài 8. Cho $a,b,c,m,n>0$ thỏa mãn điều kiện $ab+bc+ca=1$.

Tìm giá trị của biểu thức $S=ma^2+nb^2+c^2$ theo tham số m, n

Giải

Xét các tham số $x,y,z>0$ sao cho $m-x, n-y, 1-z>0$.

Sử dụng bất đẳng thức ***AM – GM*** ta có:

$$+\begin{cases} x.a^2+y.b^2\geq 2\sqrt{xyab} \\ (m-x)a^2+z.c^2\geq 2\sqrt{(m-x)z\,ac} \\ (n-y)b^2+(1-z)c^2\geq 2\sqrt{(n-y)(1-z)\,bc} \end{cases}$$

$$\Rightarrow S=ma^2+nb^2+c^2\geq 2\sqrt{xy}\,ab+2\sqrt{(m-x)z}\,ac+2\sqrt{(n-y)(1-z)}\,bc$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} xa^2=yb^2 \\ (m-x)a^2=zc^2 \\ (n-y)b^2=(1-z)c^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2=\dfrac{x}{y}a^2 \\ c^2=\dfrac{m-x}{z}a^2 \\ (n-y)xz=(1-z)(m-x)y \end{cases}$

Chọn x, y, z sao cho $\sqrt{xy} = \sqrt{(m-x)z} = \sqrt{(n-y)(1-z)} = k > 0 \Rightarrow (n-y)xz = (1-z)(m-x)y = k^3$

Ta có: $mn = [x + (m-x)][y + (n-y)][z + (1-z)] = k^2(m+n+1) + 2k^3$

Đặt $f(k) = 2k^3 + k^2(m+n+1) - mn \Rightarrow f'(k) = f'(k) = 6k^2 + 2(m+n+1)k > 0, \forall k > 0$

$\Rightarrow f(k)$ tăng trên $(0;+\infty) \Rightarrow$ Phương trình $f(k) = 0$ có nghiệm duy nhất $k_0 > 0$

$\Rightarrow S = ma^2 + nb^2 + c^2 \geq 2k(ab + bc + ca) = 2k_0 \Rightarrow \text{Min}\, S = 2k_0$.

Bài 9. [Tạp chí TTT] Cho a, b, c là các số thực đôi một khác nhau thuộc $[0; 2]$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \dfrac{1}{(a-b)^2} + \dfrac{1}{(b-c)^2} + \dfrac{1}{(c-a)^2}$

Giải

Không mất tính tổng quát giả sử $2 \geq a > b > c \geq 0$. Sử dụng $AM - GM$ ta có:

$$+\begin{cases} \dfrac{1}{(a-b)^2} + (a-b) + (a-b) \geq 3\sqrt[3]{\dfrac{1}{(a-b)^2}.(a-b).(a-b)} = 3 \\ \dfrac{1}{(b-c)^2} + (b-c) + (b-c) \geq 3\sqrt[3]{\dfrac{1}{(b-c)^2}.(b-c).(b-c)} = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b-c)^2} + 2(a-c) \geq 6 \Rightarrow P \geq \frac{1}{(a-c)^2} - 2(a-c) + 6$$

Vì $2 \geq a > b > c \geq 0$ nên $0 < a - c \leq 2 \Rightarrow P \geq \dfrac{1}{2^2} - 2.2 + 6 = \dfrac{9}{4}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\dfrac{9}{4}$, đạt được tại $a = 2; b = 1; c = 0$ và các hoán vị.

Bài 10. [IMO 2006] Cho các số a, b, c thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = (a-b)(a-c)(b-c)(a+b+c)$

Giải

Biến đổi và sử dụng bất đẳng thức $AM - GM$ ta có

$$\left[3(a^2+b^2+c^2)\right]^2 = \left[2(a-b)^2 + 2(a-c)(b-c) + (a+b+c)^2\right]^2 \geq$$

$$\geq 8|(a-c)(b-c)|\left[2(a-b)^2 + (a+b+c)^2\right] \geq$$

$$\geq 16\sqrt{2}|(a-c)(b-c)(a-b)(a+b+c)| \geq 16\sqrt{2}\, P \Rightarrow P \leq \frac{9}{16\sqrt{2}}.$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = \dfrac{3\sqrt{3}+\sqrt{6}}{6\sqrt{2}}; b = \dfrac{\sqrt{6}}{6\sqrt{2}}; c = \dfrac{\sqrt{6}-3\sqrt{3}}{6\sqrt{2}}$. Vậy Max $P = \dfrac{9}{16\sqrt{2}}$.

Bài 11. Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn điều kiện $6a+\sqrt{3}b+\sqrt[3]{2}c=3$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=\frac{1}{a}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^3}$.

Giải

$$\begin{cases} 6\left(6a+\frac{1}{6a}\right)\geq 6.2\sqrt{\frac{1}{6a}.6a}=12 \\ 3\left(\frac{1}{3b^2}+\sqrt{3}b+\sqrt{3}b\right)\geq 3.3=9 \quad \Rightarrow S+6\left(6a+\sqrt{3}b+\sqrt[3]{2}c\right)\geq 29\Rightarrow S\geq 11 \\ 2\left(\frac{1}{2c^3}+\sqrt[3]{2}c+\sqrt[3]{2}c+\sqrt[3]{2}c\right)\geq 8 \end{cases}$$

Với $a=\frac{1}{6};\ b=\frac{1}{\sqrt{3}};\ c=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ thì $Min\,S=11$.

Bài 12. Cho $a,b,c\geq 0$ thỏa mãn điều kiện $a+b+c=1$.

Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của: $F(a,b,c)=a(b-c)^3+b(c-a)^3+c(a-b)^3$

Giải

Cho $a=b\vee b=c\vee c=a$ thì $F(a,b,c)=0$ mà $\deg F(a,b,c)=4$ nên

$F(a,b,c)=k(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)=k(a-b)(b-c)(c-a)$ (do $a+b+c=1$) với k là hằng số mà ta cần xác định. Cho $a=\frac{2}{3};b=\frac{1}{3};c=0$ thì $k=1$ suy ra

$$F(a,b,c)=(a-b)(b-c)(c-a)$$

Ta có $F(a,c,b)=(a-c)(c-b)(b-a)=-F(a,b,c)$ nên giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $F(a,b,c)$ là hai số đối nhau. Ta sẽ tìm giá trị lớn nhất của $F(a,b,c)$ với giả định $a>c>b$ mà không làm mất đi tính tổng quát.

Đặt $a+b=d$ ta có $d+c=1$, khi đó ta biến đổi và đưa tham số giả định α,β

$$F=(a-b)(b-c)(c-a)=(a-b)(c-b)(a-c)\leq(a+b)c(a+b-c)=d.c(d-c)=$$

$$=\frac{1}{\alpha\beta}\cdot\alpha d.\beta c(d-c)\leq\frac{1}{\alpha\beta}\left(\frac{\alpha d+\beta c+(d-c)}{3}\right)^3=\frac{1}{\alpha\beta}\left(\frac{(\alpha+1)d+(\beta-1)c}{3}\right)^3 \quad (*)$$

Ta cần chọn $\alpha,\beta>0$ để $\alpha+1=\beta-1$ và tồn tại $d>c>0$ sao cho $\alpha d=\beta c=d-c$

$\Leftrightarrow\beta-\alpha=2;\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}=\frac{d}{d-c}-\frac{c}{d-c}=1\Leftrightarrow\begin{cases}\beta-\alpha=2\\ \beta.\alpha=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=\sqrt{3}-1\\ \beta=\sqrt{3}+1\end{cases}$. Thay vào (*)

$F\leq\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}(d+c)}{3}\right)^3=\frac{\sqrt{3}}{18}$. Với $a=\frac{3+\sqrt{3}}{6};b=0;c=\frac{3-\sqrt{3}}{6}$ thì $\text{Max}F=\frac{\sqrt{3}}{18}$

Theo nhận xét ban đầu ta suy ra Min $F=-\frac{\sqrt{3}}{18}$.

Bài 13. Cho $a_1, a_2, \ldots, a_n \ge 0$ thỏa mãn $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 1$.

Chứng minh rằng $S = (a_1 + a_2)(a_1 + a_2 + a_3)\ldots\ldots(a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}) \ge 4^{n-1} a_1 a_2 \ldots a_n$

Chứng minh

Với $x_1, x_2, \ldots, x_n \ge 0$ và $S_k = x_1 + x_2 + \ldots + x_k$, $\forall k = \overline{1,n}$.

Sử dụng bất đẳng thức ***AM – GM*** ta có:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_k = x_1 \cdot \frac{a_1}{x_1} + x_2 \cdot \frac{a_2}{x_2} + \ldots + x_k \cdot \frac{a_k}{x_k} \ge (x_1 + \ldots + x_k)\left(\frac{a_1}{x_1}\right)^{\frac{x_1}{S_k}}\left(\frac{a_2}{x_2}\right)^{\frac{x_2}{S_k}}\ldots\left(\frac{a_k}{x_k}\right)^{\frac{x_k}{S_k}}$$

Suy ra : $S = (a_1 + a_2)(a_1 + a_2 + a_3)\ldots(a_1 + \ldots + a_{n-1})(a_1 + \ldots + a_n)^2 \ldots \ge C.a_1^{C_1} a_2^{C_2} \ldots a_n^{C_n}$

$$C_1 = \frac{x_1}{S_2} + \ldots + \frac{x_1}{S_{n-1}} + \frac{2x_1}{S_n};\ C_k = \frac{x_k}{S_k} + \ldots + \frac{x_k}{S_{n-1}} + \frac{2x_k}{S_n},\ \forall k = \overline{2,n-1};\ C_n = \frac{2x_n}{S_n},$$

$$C = \frac{S_2 S_3 \ldots S_{n-1} S_n^2}{x_1^{C_1} x_2^{C_2} \ldots x_n^{C_n}}$$

Chọn $x_1 = \frac{1}{2^{n-1}}$; $x_k = \frac{1}{2^{n+1-k}}\ \forall k = \overline{2,n}$ vì vậy $S_k = \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^{n-2}} + \ldots + \frac{1}{2^{n+1-k}} = \frac{1}{2^{n-k}}$

$$\Rightarrow C_1 = \frac{1}{2^{n-1}}(2^{n-2} + 2^{n-3} + \ldots + 2 + 1) = 1;\ C_k = \frac{1}{2^{n+1-k}}(2^{n-k} + 2^{n-k+1} + \ldots + 2 + 1) = 1,\ \forall k = \overline{2,n-1}$$

$C_n = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = 1$; $C = \frac{2^{1+2+\ldots+(n-2)+2(n-1)}}{2^{1+2+\ldots+(n-2)}} = 4^{n-1}$. Vậy $S \ge 4^{n-1} a_1 a_2 \ldots a_n$ (đpcm)

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow$ $a_1 = \frac{1}{2^{n-1}}$; $a_k = \frac{1}{2^{n+1-k}}, \forall k = \overline{2,n}$

Bài 14. Đặt $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là số thực n thỏa mãn $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0$ và

$|x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n| = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \prod_{1 \le i \le j \le n} |x_i - x_j|$

Giải

Trường hợp 1: Với $n = 2$, thì điều kiện giả thiết trở thành $x_1 + x_2 = 0; |x_1| + |x_2| = 1$

$\Rightarrow x_1 = \frac{1}{2}; x_2 = -\frac{1}{2}$ hoặc $x_1 = -\frac{1}{2}; x_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow P = |x_1 - x_2| = 1$

Trường hợp 2: Với $n = 3$, không mất tính tổng quát, giả sử $x_1 \le x_2 \le x_3$. Ta có

$\frac{P}{2} = (x_2 - x_1)\frac{x_3 - x_1}{2}(x_3 - x_2)$. Sử dụng bất đẳng thức ***AM – GM*** ta có:

$$\frac{P}{2} \le \left(\frac{1}{3}\left[(x_2 - x_1) + \frac{x_3 - x_1}{2} + (x_3 - x_2)\right]\right)^3 = \left(\frac{x_3 - x_1}{2}\right)^3 \le \frac{1}{8} \Leftrightarrow P \le \frac{1}{4}$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ |x_1| + |x_2| + |x_3| = 1 \\ x_2 - x_1 = \dfrac{x_3 - x_1}{2} = x_3 - x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -\dfrac{1}{2} \\ x_2 = 0 \\ x_3 = \dfrac{1}{2} \end{cases}$. Vậy $\max P = \dfrac{1}{4}$

Trường hợp 3: Với $n = 4$. Không mất tính tổng quát, giả sử $x_1 \le x_2 \le x_3 \le x_4$, khi đó ta có thể dự đoán giá trị Max P đạt được khi $x_1 = -x_4; x_2 = -x_3 \Rightarrow x_2 - x_1 = x_4 - x_3$.

Đặt $x_3 - x_2 = a(x_4 - x_3)$, từ đó suy ra để P đạt Max thì các biến số phải thỏa mãn điều kiện: $x_2 - x_1 = x_4 - x_3 = \dfrac{x_3 - x_2}{a} = \dfrac{x_3 - x_1}{a+1} = \dfrac{x_4 - x_2}{a+1} = \dfrac{x_4 - x_1}{a+2}$.

Từ cách phân tích trên, ta đi đến lời giải cho trường hợp $n = 4$ như sau:

Không mất tính tổng quát, giả sử $x_1 \le x_2 \le x_3 \le x_4$

$\Rightarrow P = (x_2 - x_1)(x_3 - x_2)(x_4 - x_1)(x_3 - x_2)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3)$

Do đó $\dfrac{P}{a(a+2)(a+1)^2} = (x_2 - x_1)\dfrac{(x_3 - x_2)}{a+1}\dfrac{(x_4 - x_1)}{a+2}\dfrac{(x_3 - x_2)}{a}\dfrac{(x_4 - x_2)}{a+1}(x_4 - x_3)$

$$\le \left[\frac{1}{6}\left((x_2 - x_1)\frac{(x_3 - x_2)}{a+1} + \frac{(x_4 - x_1)}{a+2} + \frac{(x_3 - x_2)}{a} + \frac{(x_4 - x_2)}{a+1} + (x_4 - x_3)\right)\right]^6$$

Suy ra : $P \le \dfrac{1}{2^8}\left[(x_2 - x_1)\left(1 + \dfrac{1}{a+1} + \dfrac{1}{a+2}\right) + \left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{a+1} + -1\right)(x_3 - x_2)\right]^6$

Chọn a sao cho $\left(1 + \dfrac{1}{a+1} + \dfrac{1}{a+2}\right) = \left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{a+1} + -1\right) \Leftrightarrow a = \sqrt{2} - 1$.

Khi đó ta có $\left(1 + \dfrac{1}{a+1} + \dfrac{1}{a+2}\right) = \left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{a+1} + -1\right) = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow (\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 P \le \dfrac{1}{2^8}\left[\dfrac{3\sqrt{2}}{2}(-x_1 - x_2 + x_3 + x_4)^6\right]^6 \Rightarrow P \le \dfrac{1}{2^6}$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi các biến số thỏa mãn hệ điều kiện sau

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ -x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = |x_1| + |x_2| + |x_3| + |x_4| = 1 \\ (x_1 - x_2) = (x_4 - x_3) = \dfrac{x_4 - x_3}{\sqrt{2}-1} = \dfrac{x_3 - x_1}{\sqrt{2}} = \dfrac{x_4 - x_2}{\sqrt{2}} = \dfrac{x_4 - x_1}{\sqrt{2}+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_4 = -x_1 = \dfrac{2-\sqrt{2}}{4} \\ x_3 = -x_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{4} \end{cases} \quad (1)$$

Như vậy với trường hợp n = 4 thì: Max $P = \dfrac{1}{2^8}$ (khi các biến số thỏa mãn điều kiện (1))

Trường hợp 4: $n=5$: Không mất tính tổng quát, giả sử $x_1 \le x_2 \le x_3 \le x_4 \le x_5$, ta dự đoán bộ các biến số để P đạt Max là $x_5=-x_1, x_4=-x_2, x_3=0 \Rightarrow x_2-x_1=x_5-x_4, x_3-x_2=x_4-x_3$.

Đặt $x_3-x_2=a(x_2-x_1)$, từ đó suy ra để P đạt Max thì các biến số phải thỏa mãn điều kiện:

$\frac{x_2-x_1}{1}=\frac{x_4-x_3}{a}=\frac{x_3-x_2}{a}=\frac{x_3-x_1}{a+1}=\frac{x_5-x_3}{a+1}=\frac{x_4-x_2}{2a}=\frac{x_5-x_2}{2a+1}=\frac{x_4-x_1}{2a+1}=\frac{x_5-x_1}{2a+2}=\frac{x_5-x_4}{1}$ Từ cách phân tích trên, ta đi đến lời giải cho trường hợp $n=5$ như sau:

Không mất tính tổng quát, giả sử $x_1 \le x_2 \le x_3 \le x_4 \le x_5$. Khi đó ta có :

$$P=(x_2-x_1)(x_3-x_1)(x_4-x_1)(x_5-x_1)(x_3-x_2)(x_4-x_2)(x_5-x_2)(x_5-x_2)(x_5-x_4)$$

Xét biểu thức: $Q=\frac{P}{4a^2(a+1)^3(2a+1)^2}$. Biến đổi Q theo và sử dụng ***AM – GM*** ta có:

$$Q=\frac{x_2-x_1}{1}\cdot\frac{x_3-x_1}{a+1}\cdot\frac{x_4-x_1}{2a+1}\cdot\frac{x_5-x_1}{2a+2}\cdot\frac{x_3-x_2}{a}\cdot\frac{x_4-x_2}{2a}\cdot\frac{x_5-x_2}{2a+1}\cdot\frac{x_4-x_3}{a}\cdot\frac{x_5-x_3}{a+1}\cdot\frac{x_5-x_4}{1}\le$$

$$\frac{1}{10^{10}}\left[\frac{x_2-x_1}{1}+\frac{x_3-x_1}{a+1}+\frac{x_4-x_1}{2a+1}+\frac{x_5-x_1}{2a+2}+\frac{x_3-x_2}{a}+\frac{x_4-x_2}{2a}+\frac{x_5-x_2}{2a+1}+\frac{x_4-x_3}{a}+\frac{x_5-x_3}{a+1}+\frac{x_5-x_4}{1}\right]^{10}$$

$$\Rightarrow Q\le\frac{1}{10^{10}}\left[\left(\frac{3}{2(a+1)}+\frac{1}{2a+1}+1\right)(-x_1+x_5)+\left(-1+\frac{3}{2a}+\frac{1}{2a+1}\right)(-x_2+x_4)\right]^{10} \quad (2)$$

Chọn $a>0$ sao cho $\left(\frac{3}{2(a+1)}+\frac{1}{2a+1}+1\right)=\left(-1+\frac{3}{2a}+\frac{1}{2a+1}\right)=q \Leftrightarrow a=\frac{1}{2}, q=\frac{5}{2}$

Suy ra $Q=\frac{P}{27/4}$ hay: $Q\le\frac{1}{10^{10}}\left[\frac{5}{2}(-x_1-x_2+x_4+x_5)\right]^{10}=\frac{1}{2^{10}} \Leftrightarrow P\le\frac{1}{2^{20}}\frac{27}{4}=\frac{27}{2^{22}}$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x_3=0 \\ x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=0 \\ -x_1-x_2+x_3+x_4+x_5=|x_1|+|x_2|+|x_3|+|x_4|+|x_5|=1 \\ (x_2-x_1)=\frac{x_3-x_1}{3/2}=\frac{x_4-x_1}{2}=\frac{x_5-x_1}{3}=\frac{x_3-x_2}{1/2}=\frac{x_4-x_2}{1}=\frac{x_5-x_2}{2}=\frac{x_4-x_3}{1/2}=\frac{x_5-x_3}{3/2}=\frac{x_5-x_4}{1} \end{cases}$$

$\Leftrightarrow x_1=-x_5=-\frac{3}{8}$; $x_2=-x_4=-\frac{1}{8}$; $x_3=0$. Vậy với trường hợp $\boldsymbol{n}$ **= 5** thì Max $P=\frac{27}{2^{22}}$

Bình luận. Bằng phương pháp tương tự ta sẽ tìm được chứng minh ứng với $n\ge 6$.

XIII. KỸ THUẬT ĐÁNH GIÁ PHỦ ĐỊNH CỦA PHỦ ĐỊNH

Kỹ thuật này lần đầu tiên được xuất hiện trong quá trình chứng minh của một bất đẳng thức có trong cuốn sách ***Các phương pháp và kỹ thuật chứng minh bất đẳng thức*** của tác giả được NXB TP HCM xuất bản năm 1993. Kỹ thuật này cũng được giới thiệu trong tạp chí ***Mathemmatical Reflections 3, 2006*** của các tác giả ***Iurie Boreico, Marcel Teleuca*** và trong cuốn sách ***Algebraic inequalities*** của ***Vasile Cirtoaje (NXB Gil, 2006)***. Xét theo khía cạnh triết học có thể gọi kĩ thuật này là kĩ thuật ***"Phủ định của phủ định"***. Bản chất của kỹ thuật là tách một biểu thức dương thành hiệu hai biểu thức dương và đánh giá mẫu số của biểu thức ở sau dấu "–". Chúng ta có thể mô hình hóa kỹ thuật này bằng mệnh đề sau đây:

Mệnh đề: $A \ge B > 0 \Rightarrow 0 < \frac{1}{A} \le \frac{1}{B} \Rightarrow -\frac{1}{A} \ge -\frac{1}{B}$

Bài 1. [Bulgarian TST 2003] Cho $\begin{cases} a,b,c>0 \\ a+b+c=3 \end{cases}$. Chứng minh: $S = \frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2} \ge \frac{3}{2}$

Phân tích và tìm tòi lời giải

• ***Sai lầm thường gặp 1:*** $S \ge 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{abc}{(1+b^2)(1+c^2)(1+a^2)}} \le 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{abc}{2b.2c.2a}} = \frac{3}{2} \Rightarrow S \ge \frac{3}{2}$

• ***Sai lầm thường gặp 2:*** $S \le \frac{a}{2b} + \frac{b}{2c} + \frac{c}{2a} = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right) \ge \frac{3}{2} \cdot \sqrt[3]{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a}} = \frac{3}{2} \Rightarrow S \ge \frac{3}{2}$

• ***Lời giải đúng:***

Biến đổi và sử dụng bất đẳng thức ***AM – GM*** để đánh giá mẫu số, ta có

$$+\begin{cases} \frac{a}{1+b^2} = a - \frac{ab^2}{1+b^2} \ge a - \frac{ab^2}{2b} = a - \frac{ab}{2} \\ \frac{b}{1+c^2} = b - \frac{bc^2}{1+c^2} \ge b - \frac{bc^2}{2c} = b - \frac{bc}{2} \\ \frac{c}{1+a^2} = c - \frac{ca^2}{1+a^2} \ge c - \frac{ca^2}{2a} = c - \frac{ca}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow S \ge (a+b+c) - \frac{1}{2}(ab+bc+ca) = 3 - \frac{1}{2}(ab+bc+ca) \quad (1)$$

Mặt khác, $9 = (a+b+c)^2 \ge 3(ab+bc+ca) \Rightarrow ab+bc+ca \le 3$ (2)

Từ (1) và(2), suy ra $S \ge 3 - \frac{1}{2}(ab+bc+ca) \ge 3 - \frac{1}{2} \cdot 3 = \frac{3}{2}$.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = 1$.

Bài 2. Cho các số $a, b, c, d > 0$. Chứng minh rằng:

$$S = \frac{a^3}{a^2+b^2} + \frac{b^3}{b^2+c^2} + \frac{c^3}{c^2+d^2} + \frac{d^3}{d^2+a^2} \ge \frac{a+b+c+d}{2}$$

Chứng minh

Biến đổi và sử dụng bất đẳng thức $AM-GM$ để đánh giá mẫu số, ta có:

$$S=\sum_{cyc}\frac{a^3}{a^2+b^2}=\sum_{cyc}\left(a-\frac{ab^2}{a^2+b^2}\right)\ge\sum_{cyc}\left(a-\frac{ab^2}{2ab}\right)=\sum_{cyc}\left(a-\frac{b}{2}\right)=\frac{a+b+c+d}{2}$$

Bài 3. Cho $\begin{cases}a,b,c,d>0\\ a+b+c+d=4\end{cases}$. Chứng minh: $S=\frac{a}{1+b^2}+\frac{b}{1+c^2}+\frac{c}{1+d^2}+\frac{d}{1+a^2}\ge 2$

Chứng minh

Biến đổi và sử dụng bất đẳng thức $AM-GM$ để đánh giá mẫu số, ta có:

$$S=\sum_{cyc}\frac{a}{1+b^2}=\sum_{cyc}\left(a-\frac{ab^2}{1+b^2}\right)\ge\sum_{cyc}\left(a-\frac{ab^2}{2b}\right)=\sum_{cyc}\left(a-\frac{ab}{2}\right)=4-\frac{1}{2}(ab+bc+cd+da)\,(1)$$

Mặt khác, $ab+bc+cd+da=(a+c)(b+d)\le\left[\frac{(a+c)+(b+d)}{2}\right]^2=4$ (2)

Từ (1) và (2),suy ra: $S\ge 4-\frac{1}{2}(ab+bc+cd+da)\ge 4-\frac{1}{2}\cdot 4=2$

Bài 4. Cho $\begin{cases}a,b,c,d>0\\ a+b+c+d=4\end{cases}$. Chứng minh: $S=\frac{a}{1+b^2c}+\frac{b}{1+c^2d}+\frac{c}{1+d^2a}+\frac{d}{1+a^2b}\ge 2$

Chứng minh

Biến đổi và sử dụng bất đẳng thức $AM-GM$ để đánh giá mẫu số, ta có:

$$S=\sum_{cyc}\frac{a}{1+b^2c}=\sum_{cyc}\left(a-\frac{ab^2c}{1+b^2c}\right)\ge\sum_{cyc}\left(a-\frac{ab^2c}{2\sqrt{b^2c}}\right)=\sum_{cyc}\left(a-\frac{ab\sqrt{c}}{2}\right)=\sum_{cyc}\left(a-\frac{b.2\sqrt{a(ac)}}{4}\right)$$

$$\ge\sum_{cyc}\left(a-\frac{b(a+ac)}{4}\right)=4-\frac{1}{4}\left[(ab+bc+cd+da)+(abc+bcd+dca+abd)\right]\quad(1)$$

Mặt khác, $ab+bc+cd+da=(a+c)(b+d)\le\left[\frac{(a+c)+(b+d)}{2}\right]^2=4$ (2)

và $abc+bcd+dca+abd=ab(c+d)+cd(a+b)\le\left(\frac{a+b}{2}\right)^2(c+d)+\left(\frac{c+d}{2}\right)^2(a+b)$

$$=\frac{1}{4}(a+b)(c+a)(a+b+c+d)=(a+b)(c+a)\le\left[\frac{(a+c)+(b+d)}{2}\right]^2=4\quad(3)$$

Từ (1), (2) và (3),suy ra: $S\ge(a+b+c+d)-\frac{1}{4}(4+4)=4-\frac{1}{4}(4+4)=2$

Bài 5. Cho $\begin{cases}a,b,c>0\\ ab+bc+ca=3\end{cases}$. Chứng minh rằng: $S=\frac{a^2}{a+2b^2}+\frac{b^2}{b+2c^2}+\frac{c^2}{c+2a^2}\ge 1$

Chứng minh

Biến đổi và sử dụng bất đẳng thức $AM-GM$ để đánh giá mẫu số, ta có:

$$S=\sum_{cyc}\frac{a^2}{a+2b^2}\ge\sum_{cyc}\left(a-\frac{2ab^2}{3\cdot\sqrt[3]{ab^2b^2}}\right)=\sum_{cyc}\left[a-\frac{2}{3}(ab)^{\frac{2}{3}}\right]=(a+b+c)-\frac{2}{3}\left[(ab)^{\frac{2}{3}}+(bc)^{\frac{2}{3}}+(ca)^{\frac{2}{3}}\right]$$

Ta có: $(a+b+c)^2\ge 3(ab+bc+ca)=9\Rightarrow a+b+c\ge 3$. Mặt khác,

$$+\begin{cases} ab+ab+1\ge 3\cdot\sqrt[3]{ab.ab.1}=3(ab)^{\frac{2}{3}} \\ bc+bc+1\ge 3\cdot\sqrt[3]{bc.bc.1}=3(bc)^{\frac{2}{3}} \\ ca+ca+1\ge 3\cdot\sqrt[3]{ca.ca.1}=3(ca)^{\frac{2}{3}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2(ab+bc+ca)+3=9\ge 3\left[(ab)^{\frac{2}{3}}+(bc)^{\frac{2}{3}}+(ca)^{\frac{2}{3}}\right]\Rightarrow (ab)^{\frac{2}{3}}+(bc)^{\frac{2}{3}}+(ca)^{\frac{2}{3}}\le 3$$

Suy ra: $S\ge(a+b+c)-\frac{2}{3}\left[(ab)^{\frac{2}{3}}+(bc)^{\frac{2}{3}}+(ca)^{\frac{2}{3}}\right]\ge 3-\frac{2}{3}\cdot 3=1$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$

Bài 6. Cho các số $\begin{cases} a,b,c>0 \\ a+b+c=3 \end{cases}$. Chứng minh rằng: $S=\frac{a+1}{b^2+1}+\frac{b+1}{c^2+1}+\frac{c+1}{a^2+1}\ge 3$

Chứng minh

Biến đổi và sử dụng bất đẳng thức ***AM – GM*** để đánh giá mẫu số, ta có:

$$S=\sum_{cyc}\frac{a+1}{b^2+1}=\sum_{cyc}\left[(a+1)-\frac{(a+1)b^2}{b^2+1}\right]\ge\sum_{cyc}\left[a+1-\frac{(a+1)b^2}{2b}\right]=\sum_{cyc}\left[a+1-\frac{(a+1)b}{2}\right]$$

$$=\frac{a+b+c}{2}+3-\frac{1}{2}(ab+bc+ca)=\frac{9}{2}-\frac{1}{2}(ab+bc+ca)$$

Mặt khác, $9=(a+b+c)^2\ge 3(ab+bc+ca)\Rightarrow 3\ge ab+bc+ca$

$\Rightarrow S\ge\frac{9}{2}-\frac{1}{2}(ab+bc+ca)\ge\frac{9}{2}-\frac{1}{2}\cdot 3=3$. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$

Bài 7. Cho các số $\begin{cases} a,b,c>0 \\ a+b+c=3 \end{cases}$. Chứng minh: $\frac{a+b}{1+a}+\frac{b+c}{1+b}+\frac{c+a}{1+c}\ge ab+bc+ca$

Chứng minh

Biến đổi và sử dụng bất đẳng thức ***AM – GM*** để đánh giá, ta có:

$$\text{VT}=\sum_{cyc}\frac{a+b}{1+a}=\sum_{cyc}\left(a+b-\frac{a^2+ab}{1+a}\right)=2(a+b+c)-\sum_{cyc}\frac{a^2+ab}{1+a}=6-\sum_{cyc}\frac{a^2+ab}{1+a}$$

Ta có: $4a\le(1+a)^2\Rightarrow\frac{1}{1+a}\le\frac{1}{4}\cdot\frac{1+a}{a}\Rightarrow\frac{a^2+ab}{1+a}\le\frac{1}{4}(a^2+ab)\frac{1+a}{a}=\frac{1}{4}(a^2+ab+a+b)$

$$\Rightarrow \sum_{cyc}\frac{a^2+ab}{1+a}\le\frac{1}{4}\left[a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca+2(a+b+c)\right]=\frac{1}{4}\left[(a+b+c)^2-(ab+bc+ca)+6\right]$$

$$\Rightarrow VT=6-\sum_{cyc}\frac{a^2+ab}{1+a}\ge 6-\frac{1}{4}\left[(a+b+c)^2-(ab+bc+ca)+6\right]=6-\frac{1}{4}\left[15-(ab+bc+ca)\right]$$

$$=\frac{1}{4}\left[9+(ab+bc+ca)\right]=\frac{1}{4}\left[(a+b+c)^2+(ab+bc+ca)\right]\ge$$

$$\frac{1}{4}\left[3(ab+bc+ca)+(ab+bc+ca)\right]=ab+bc+ca$$

Bài 8. Cho các số $\begin{cases}a,b,c>0\\a+b+c=3\end{cases}$. Chứng minh: $S=\dfrac{a}{ab+b^3}+\dfrac{b}{bc+c^3}+\dfrac{c}{ca+a^3}\ge\dfrac{3}{2}$

Chứng minh

Biến đổi và sử dụng bất đẳng thức ***AM – GM*** để đánh giá mẫu số, ta có:

$$S=\sum_{cyc}\frac{a}{ab+b^3}=\sum_{cyc}\left(\frac{1}{b}-\frac{b}{a+b^2}\right)=\sum_{cyc}\frac{1}{b}-\sum_{cyc}\frac{b}{a+b^2}\ge\sum_{cyc}\frac{1}{b}-\sum_{cyc}\frac{b}{2\sqrt{ab^2}}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{c}}\right)$$

Ta có: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+3=\left(\frac{1}{a}+1\right)+\left(\frac{1}{b}+1\right)+\left(\frac{1}{c}+1\right)\ge 2\left(\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{c}}\right)$

$$\Rightarrow S\ge 2\left(\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{c}}\right)-3-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{c}}\right)$$

$$=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{c}}\right)-3\ge\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{\sqrt{\frac{a+b+c}{3}}}-3=\frac{3}{2}$$

Bài 9. Cho các số $\begin{cases}a,b,c>0\\abc=1\end{cases}$. Chứng minh rằng: $S=\dfrac{a^4b}{a^2+1}+\dfrac{b^4c}{b^2+1}+\dfrac{c^4a}{c^2+1}\ge\dfrac{3}{2}$

Chứng minh

Biến đổi và sử dụng bất đẳng thức ***AM – GM*** để đánh giá mẫu số, ta có:

$$S=\sum_{cyc}\frac{a^4b}{a^2+1}=\sum_{cyc}\left(a^2b-\frac{a^2b}{a^2+1}\right)\ge\sum_{cyc}a^2b-\sum_{cyc}\frac{a^2b}{2a}=(a^2b+b^2c+c^2a)-\frac{1}{2}(ab+bc+ca)$$

Ta có : $+\begin{cases}a^2b+a^2b+b^2c\ge 3\cdot\sqrt[3]{a^4b^4c}=3\cdot\sqrt[3]{a^3b^3(abc)}=3ab\\b^2c+b^2c+c^2a\ge 3\cdot\sqrt[3]{b^4c^4a}=3\cdot\sqrt[3]{b^3c^3(abc)}=3bc\\c^2a+c^2a+a^2b\ge 3\cdot\sqrt[3]{c^4a^4b}=3\cdot\sqrt[3]{c^3a^3(abc)}=3ca\end{cases}$

$$\Rightarrow 3(a^2b+b^2c+c^2a)\ge 3(ab+bc+ca)\ \Rightarrow\ a^2b+b^2c+c^2a\ge ab+bc+ca$$

$$\Rightarrow S\ge(a^2b+b^2c+c^2a)-\frac{1}{2}(ab+bc+ca)\ge(ab+bc+ca)-\frac{1}{2}(ab+bc+ca)=\frac{1}{2}(ab+bc+ca)\ge\frac{3}{2}$$

XIV. VẺ ĐẸP ĐIỂM RƠI QUA BỐN BẤT ĐẲNG THỨC LƯỢNG GIÁC KINH ĐIỂN

Bài 1. Cho tam giác ABC. Chứng minh bốn bất đẳng thức sau trong tam giác ABC

$$\mathrm{T}_1 = \sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\le\frac{3}{2} \quad ; \quad \mathrm{T}_2 = \cos A+\cos B+\cos C\le\frac{3}{2}$$

$$\mathrm{T}_3 = \sin A+\sin B+\sin C\le\frac{3\sqrt{3}}{2} \quad ; \quad \mathrm{T}_4 = \cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}\le\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Chứng minh

$$\mathrm{T}_1 = \sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}=\left(\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}\right).1+\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}-\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}$$

$$\le\frac{1}{2}\left[\left(\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}\right)^2+1^2\right]+\frac{1}{2}\left(\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}\right)-\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}=\frac{3}{2}$$

$$\mathrm{T}_2 = \cos A+\cos B+\cos C=(\cos A+\cos B).1+\sin A\sin B-\cos A\cos B$$

$$\le\frac{1}{2}\left[(\cos A+\cos B)^2+1^2\right]+\frac{1}{2}\left(\sin^2 A+\sin^2 B\right)-\cos A\cos B\le\frac{3}{2}$$

$$\mathrm{T}_3 = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\sin A\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\sin B\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\sqrt{3}\left(\frac{\sin A}{\sqrt{3}}\cdot\cos B+\frac{\sin B}{\sqrt{3}}\cdot\cos A\right)$$

$$\le\frac{1}{\sqrt{3}}\left[\left(\sin^2 A+\frac{3}{4}\right)+\left(\sin^2 B+\frac{3}{4}\right)\right]+\frac{\sqrt{3}}{2}\left[\left(\frac{\sin^2 A}{3}+\cos^2 B\right)+\left(\frac{\sin^2 B}{3}+\cos^2 A\right)\right]=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$\mathrm{T}_4 = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\cos\frac{A}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\cos\frac{B}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\sqrt{3}\left(\frac{\cos\frac{A}{2}}{\sqrt{3}}\cdot\sin\frac{B}{2}+\frac{\cos\frac{B}{2}}{\sqrt{3}}\cdot\sin\frac{A}{2}\right)$$

$$\le\frac{1}{\sqrt{3}}\left[\left(\cos^2\frac{A}{2}+\frac{3}{4}\right)+\left(\cos^2\frac{B}{2}+\frac{3}{4}\right)\right]+\frac{\sqrt{3}}{2}\left[\left(\frac{\cos^2\frac{A}{2}}{3}+\sin^2\frac{B}{2}\right)+\left(\frac{\cos^2\frac{B}{2}}{3}+\sin^2\frac{A}{2}\right)\right]=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Bình luận: Theo nhận xét của bạn đọc thì phương pháp chung chứng minh bốn bài toán trên là ngắn gọn và độc đáo nhất. Lời giải này đã được giới thiệu trong các cuốn sách của tác giả xuất bản năm 2000, 2002. Vẻ đẹp của lời giải là sự kết hợp giữa kỹ thuật chọn ***"điểm rơi"*** trong bất đẳng thức lượng giác với bất đẳng thức rất đơn giản $2xy\le x^2+y^2$ và đẳng thức $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$. Nhìn chung các sách đã xuất bản trên thế giới đều chứng minh bất đẳng thức này theo sơ đồ mô phỏng chứng minh bất đẳng thức ***Jensen*** được minh họa sau đây.

Phương pháp cổ điển:

- $\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}\le 2\sin\frac{x+y}{2},\quad \forall x,y\in(0,\pi)$
- $\sin x+\sin y+\sin z+\sin t=$

$$=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}+2\sin\frac{z+t}{2}\cos\frac{z-t}{2}\le 2\sin\frac{x+y}{2}+2\sin\frac{z+t}{2}$$

$$= 4\sin\frac{x+y+z+t}{4}\cos\frac{x+y-z-t}{4} \le 4\sin\frac{x+y+z+t}{4}\ ,\ \forall x,y,z,t\in(0;\pi)$$

• Lấy $x = A, y = B, z = C, t = \dfrac{A+B+C}{3}$

$$\Rightarrow \sin A + \sin B + \sin C \le 3\sin\frac{A+B+C}{3} = 3\sin\frac{\pi}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Sau đây là một bài toán tích hợp kỹ thuật đổi biến lượng giác và chọn điểm rơi

Bài 2. Cho các số $a, b, c > 0$ thỏa mãn điều kiện $a+b+c=1$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $S = \dfrac{a}{a+bc} + \dfrac{b}{b+ca} + \dfrac{\sqrt{abc}}{c+ab}$

Giải

$$S = \frac{a}{a+bc} + \frac{b}{b+ca} + \frac{\sqrt{abc}}{c+ab} = \frac{1}{1+\dfrac{bc}{a}} + \frac{1}{1+\dfrac{ca}{b}} + \frac{\sqrt{ab/c}}{1+\dfrac{ab}{c}}$$

Đặt $\dfrac{bc}{a} = \tan^2\dfrac{A}{2}$; $\dfrac{ca}{b} = \tan^2\dfrac{B}{2}$ với $0 < A, B < \pi$

Khi đó $1 = a+b+c = \sqrt{\dfrac{ab}{c}}\cdot\sqrt{\dfrac{ca}{b}} + \sqrt{\dfrac{bc}{a}}\cdot\sqrt{\dfrac{ab}{c}} + \sqrt{\dfrac{ca}{b}}\cdot\sqrt{\dfrac{bc}{a}}$

Suy ra $\sqrt{\dfrac{ab}{c}} = \dfrac{1-\tan\dfrac{A}{2}\cdot\tan\dfrac{B}{2}}{\tan\dfrac{A}{2}+\tan\dfrac{B}{2}} = \cot\left(\dfrac{A+B}{2}\right) = \tan\dfrac{C}{2}$ với $\begin{cases} A,B,C>0 \\ A+B+C=\pi \end{cases}$

Thay thế $\dfrac{bc}{a} = \tan^2\dfrac{A}{2}$; $\dfrac{ca}{b} = \tan^2\dfrac{B}{2}$; $\sqrt{\dfrac{ab}{c}} = \tan\dfrac{C}{2}$ vào biểu thức S rồi biến đổi ta có :

$$S = \frac{1}{1+\tan^2\dfrac{A}{2}} + \frac{1}{1+\tan^2\dfrac{B}{2}} + \frac{\tan\dfrac{C}{2}}{1+\tan^2\dfrac{C}{2}} = \cos^2\frac{A}{2} + \cos^2\frac{B}{2} + \frac{\sin C}{2} = 1 + \frac{1}{2}(\cos A + \cos B + \sin C)$$

$$= 1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos B\right) + \frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\sqrt{3}\sin A.\cos B + \sqrt{3}\sin B.\cos A\right)$$

$$\le 1 + \frac{1}{2\sqrt{3}}\left[\left(\frac{3}{4}+\cos^2 A\right) + \left(\frac{3}{4}+\cos^2 B\right)\right] + \frac{1}{4\sqrt{3}}\left[(3\sin^2 A + \cos^2 B) + (3\sin^2 B + \cos^2 A)\right]$$

$$= 1 + \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}(\cos^2 A + \sin^2 A) + \frac{\sqrt{3}}{4}(\cos^2 B + \sin^2 B) = 1 + \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow A = B = \dfrac{\pi}{6}, C = \dfrac{2\pi}{3}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{bc}{a}} = \sqrt{\frac{ca}{b}} = \tan\frac{\pi}{12} = 2-\sqrt{3}\ ,\ \sqrt{\frac{ab}{c}} = \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3} \Leftrightarrow a = b = 2\sqrt{3}-3\ , c = 7-4\sqrt{3}$$

XV. MỘT SỐ BÀI TOÁN CHỌN LỌC MINH HỌA KỸ THUẬT CHỌN ĐIỂM RƠI TRONG AM – GM

Bài 1. Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác.

Chứng minh rằng: $\sqrt[3]{\left(\dfrac{3a}{3b+3c-a}\right)^2}+\sqrt[3]{\left(\dfrac{3b}{3c+3a-b}\right)^2}+\sqrt[3]{\left(\dfrac{3c}{3a+3b-c}\right)^2}\ge\dfrac{3}{5}\cdot\sqrt[3]{45}$ (1)

Chứng minh

Đặt $\begin{cases}\dfrac{3a}{3b+3c-a}=\dfrac{1}{x}\\ \dfrac{3b}{3c+3a-b}=\dfrac{1}{y}\\ \dfrac{3c}{3a+3b-c}=\dfrac{1}{z}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{3b+3c-a}{3a}\\ y=\dfrac{3c+3a-b}{3b}\\ x=\dfrac{3a+3b-c}{3c}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+\dfrac{4}{3}=\dfrac{a+b+c}{a}\\ y+\dfrac{4}{3}=\dfrac{a+b+c}{b}\\ z+\dfrac{4}{3}=\dfrac{a+b+c}{c}\end{cases}$

$\Rightarrow\dfrac{1}{x+\frac{4}{3}}+\dfrac{1}{y+\frac{4}{3}}+\dfrac{1}{z+\frac{4}{3}}=\dfrac{a+b+c}{a+b+c}=1$; (1) $\Leftrightarrow\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{y^2}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{z^2}}\ge\dfrac{3}{5}\cdot\sqrt[3]{45}$.

Sử dụng bất đẳng thức ***AM – GM*** cho 9 số ta có:

$$\begin{cases}x^5\cdot\left(\dfrac{5}{3}\right)^4\le\left[\dfrac{5\left(x+\frac{4}{3}\right)}{9}\right]^9=\left(\dfrac{5}{3}\right)^9\cdot\left(\dfrac{x+\frac{4}{3}}{3}\right)^9\\ y^5\cdot\left(\dfrac{5}{3}\right)^4\le\left[\dfrac{5\left(y+\frac{4}{3}\right)}{9}\right]^9=\left(\dfrac{5}{3}\right)^9\cdot\left(\dfrac{y+\frac{4}{3}}{3}\right)^9\\ z^5\cdot\left(\dfrac{5}{3}\right)^4\le\left[\dfrac{5\left(z+\frac{4}{3}\right)}{9}\right]^9=\left(\dfrac{5}{3}\right)^9\cdot\left(\dfrac{z+\frac{4}{3}}{3}\right)^9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^5\le\left(\dfrac{5}{3}\right)^5\cdot\left(\dfrac{x+\frac{4}{3}}{3}\right)^9\\ y^5\le\left(\dfrac{5}{3}\right)^5\cdot\left(\dfrac{y+\frac{4}{3}}{3}\right)^9\\ z^5\le\left(\dfrac{5}{3}\right)^5\cdot\left(\dfrac{z+\frac{4}{3}}{3}\right)^9\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\le\dfrac{5}{3}\cdot\left(\dfrac{x+\frac{4}{3}}{3}\right)^{\frac{9}{5}}\\ y\le\dfrac{5}{3}\cdot\left(\dfrac{y+\frac{4}{3}}{3}\right)^{\frac{9}{5}}\\ z\le\dfrac{5}{3}\cdot\left(\dfrac{z+\frac{4}{3}}{3}\right)^{\frac{9}{5}}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{x}\ge\dfrac{3}{5}\cdot\left(\dfrac{x+\frac{4}{3}}{3}\right)^{\frac{-9}{5}}\\ \dfrac{1}{y}\ge\dfrac{3}{5}\cdot\left(\dfrac{y+\frac{4}{3}}{3}\right)^{\frac{-9}{5}}\\ \dfrac{1}{z}\ge\dfrac{3}{5}\cdot\left(\dfrac{z+\frac{4}{3}}{3}\right)^{\frac{-9}{5}}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\ge\sqrt[3]{\dfrac{9}{25}}\left(\dfrac{x+\frac{4}{3}}{3}\right)^{\frac{-6}{5}}\\ \dfrac{1}{\sqrt[3]{y^2}}\ge\sqrt[3]{\dfrac{9}{25}}\left(\dfrac{y+\frac{4}{3}}{3}\right)^{\frac{-6}{5}}\\ \dfrac{1}{\sqrt[3]{z^2}}\ge\sqrt[3]{\dfrac{9}{25}}\left(\dfrac{z+\frac{4}{3}}{3}\right)^{\frac{-6}{5}}\end{cases}$$

Đặt $m=\left(x+\dfrac{4}{3}\right)^{-1}$; $n=\left(y+\dfrac{4}{3}\right)^{-1}$; $p=\left(z+\dfrac{4}{3}\right)^{-1}\Rightarrow m+n+p=1$

Sử dụng bất đẳng thức ***AM – GM*** cho 6 số ta có:

$$+\begin{cases} 5.(3m)^{\frac{6}{5}}+1=(3m)^{\frac{6}{5}}+(3m)^{\frac{6}{5}}+(3m)^{\frac{6}{5}}+(3m)^{\frac{6}{5}}+(3m)^{\frac{6}{5}}+1\ge 18m \\ 5.(3n)^{\frac{6}{5}}+1=(3n)^{\frac{6}{5}}+(3n)^{\frac{6}{5}}+(3n)^{\frac{6}{5}}+(3n)^{\frac{6}{5}}+(3n)^{\frac{6}{5}}+1\ge 18n \\ 5.(3p)^{\frac{6}{5}}+1=(3p)^{\frac{6}{5}}+(3p)^{\frac{6}{5}}+(3p)^{\frac{6}{5}}+(3p)^{\frac{6}{5}}+(3p)^{\frac{6}{5}}+1\ge 18p \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{y^2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{z^2}}\ge \sqrt[3]{\frac{9}{25}}\left[(3m)^{\frac{6}{5}}+(3n)^{\frac{6}{5}}+(3p)^{\frac{6}{5}}\right]\ge \sqrt[3]{\frac{9}{25}}\cdot\left[\frac{18(m+n+p)-3}{5}\right]=\frac{3}{5}\sqrt[3]{45}$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c>0$.

Bài 2. Cho các số $a, b, c>0$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt[4]{\frac{a^3+b^3}{c^3}}+\sqrt[4]{\frac{b^3+c^3}{a^3}}+\sqrt[4]{\frac{c^3+a^3}{b^3}}\ge \sqrt[12]{2}\left(\sqrt[3]{\frac{a^2+b^2}{c^2}}+\sqrt[3]{\frac{b^2+c^2}{a^2}}+\sqrt[3]{\frac{c^2+a^2}{b^2}}\right)$$

Chứng minh

• ***Bổ đề:*** $\sqrt[3]{\frac{a^3+b^3}{2}}\ge\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ (Bạn đọc tự chứng minh)

• ***Áp dụng:*** Sử dụng bất đẳng thức *AM – GM* và bổ đề ta có

$$\begin{cases} \underbrace{\sqrt[4]{\frac{a^3+b^3}{2c^3}}+\sqrt[4]{\frac{a^3+b^3}{2c^3}}+\ldots+\sqrt[4]{\frac{a^3+b^3}{2c^3}}}_{8}+1\ge 9\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{c^2}\left(\frac{a^3+b^3}{2}\right)^{\frac{2}{3}}}\ge 9\cdot\sqrt[3]{\frac{a^2+b^2}{2c^2}} \\ \underbrace{\sqrt[4]{\frac{b^3+c^3}{2a^3}}+\sqrt[4]{\frac{b^3+c^3}{2a^3}}+\ldots+\sqrt[4]{\frac{b^3+c^3}{2a^3}}}_{8}+1\ge 9\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{a^2}\left(\frac{b^3+c^3}{2}\right)^{\frac{2}{3}}}\ge 9\cdot\sqrt[3]{\frac{b^2+c^2}{2a^2}} \\ \underbrace{\sqrt[4]{\frac{c^3+a^3}{2b^3}}+\sqrt[4]{\frac{c^3+a^3}{2b^3}}+\ldots+\sqrt[4]{\frac{c^3+a^3}{2b^3}}}_{8}+1\ge 9\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{b^2}\left(\frac{c^3+a^3}{2}\right)^{\frac{2}{3}}}\ge 9\cdot\sqrt[3]{\frac{c^2+a^2}{2b^2}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 8\left(\sqrt[4]{\frac{a^3+b^3}{2c^3}}+\sqrt[4]{\frac{b^3+c^3}{2a^3}}+\sqrt[4]{\frac{c^3+a^3}{2b^3}}\right)+3\ge 9\left(\sqrt[3]{\frac{a^2+b^2}{2c^2}}+\sqrt[3]{\frac{b^2+c^2}{2a^2}}+\sqrt[3]{\frac{c^2+a^2}{2b^2}}\right)$$

$$=8\left(\sqrt[3]{\frac{a^2+b^2}{2c^2}}+\sqrt[3]{\frac{b^2+c^2}{2a^2}}+\sqrt[3]{\frac{c^2+a^2}{2b^2}}\right)+\left(\sqrt[3]{\frac{a^2+b^2}{2c^2}}+\sqrt[3]{\frac{b^2+c^2}{2a^2}}+\sqrt[3]{\frac{c^2+a^2}{2b^2}}\right)$$

$$\ge 8\left(\sqrt[3]{\frac{a^2+b^2}{2c^2}}+\sqrt[3]{\frac{b^2+c^2}{2a^2}}+\sqrt[3]{\frac{c^2+a^2}{2b^2}}\right)+3.\sqrt[9]{\frac{a^2+b^2}{2c^2}\cdot\frac{b^2+c^2}{2a^2}\cdot\frac{c^2+a^2}{2b^2}}$$

$$\ge 8\left(\sqrt[3]{\frac{a^2+b^2}{2c^2}}+\sqrt[3]{\frac{b^2+c^2}{2a^2}}+\sqrt[3]{\frac{c^2+a^2}{2b^2}}\right)+3.\sqrt[9]{\frac{2ab}{2c^2}\cdot\frac{2bc}{2a^2}\cdot\frac{2ca}{2b^2}}$$

$$=8\left(\sqrt[3]{\frac{a^2+b^2}{2c^2}}+\sqrt[3]{\frac{b^2+c^2}{2a^2}}+\sqrt[3]{\frac{c^2+a^2}{2b^2}}\right)+3.$$ Suy ra

$$\sqrt[4]{\frac{a^3+b^3}{2c^3}}+\sqrt[4]{\frac{b^3+c^3}{2a^3}}+\sqrt[4]{\frac{c^3+a^3}{2b^3}}\geq\sqrt[3]{\frac{a^2+b^2}{2c^2}}+\sqrt[3]{\frac{b^2+c^2}{2a^2}}+\sqrt[3]{\frac{c^2+a^2}{2b^2}}\Rightarrow \text{(đpcm.)}$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c>0$

Bài 3. Cho các số $a, b, c>0$. Chứng minh rằng

$$\sqrt[3]{\frac{a^2+bc}{b^2+c^2}}+\sqrt[3]{\frac{b^2+ca}{c^2+a^2}}+\sqrt[3]{\frac{c^2+ab}{a^2+b^2}}\geq\frac{9\cdot\sqrt[3]{abc}}{a+b+c}\quad(1)$$

Chứng minh

Sử dụng bất đẳng thức ***AM – GM*** ta có:

$$\frac{a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)}{a^2+bc}=\frac{a(b^2+c^2)}{a^2+bc}+b+c\geq 3\cdot\sqrt[3]{\frac{abc(b^2+c^2)}{a^2+bc}}$$

$$\Rightarrow\sqrt[3]{\frac{a^2+bc}{b^2+c^2}}\geq\frac{3(a^2+bc)\cdot\sqrt[3]{abc}}{a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)}$$

$$\Rightarrow VT(1)=\sum_{cyc}\sqrt[3]{\frac{a^2+bc}{b^2+c^2}}\geq\frac{3(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)\cdot\sqrt[3]{abc}}{a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)}\quad(2)$$

Không mất tính tổng quát giả sử $a\geq b\geq c$, ta có:

$$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)-3\left[a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)\right]$$

$$=a(a-b)^2+c(b-c)^2+(a-b+c)(a-b)(b-c)\geq 0$$

$$\Rightarrow\frac{3(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)}{a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)}\geq\frac{9}{a+b+c}\quad(3)$$

Từ (2) và (3) suy ra $VT(1)\geq\dfrac{9\cdot\sqrt[3]{abc}}{a+b+c}$ (đpcm). Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c\geq 0$.

Bài 4. Cho các số $a,b,c>0$ thỏa mãn $a+b+c=3$.

Chứng minh rằng: $$\sqrt{\frac{a^3}{a^2+8b^2}}+\sqrt{\frac{b^3}{b^2+8c^2}}+\sqrt{\frac{c^3}{c^2+8a^2}}\geq 1\quad(1)$$

Chứng minh

Bổ đề: $\dfrac{a^2}{x}+\dfrac{b^2}{y}+\dfrac{c^2}{z}\geq\dfrac{(a+b+c)^2}{x+y+z},\forall x,y,z>0$

Chứng minh:

$$(x+y+z)\left(\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z}\right)=\left(a^2+b^2+c^2\right)+\left(\frac{a^2y}{x}+\frac{b^2z}{y}+\frac{c^2x}{z}\right)+\left(\frac{a^2z}{x}+\frac{b^2x}{y}+\frac{c^2y}{z}\right)$$

$$\geq \left(a^2+b^2+c^2\right)+2\sqrt{\frac{a^2y}{x}\cdot\frac{b^2x}{y}}+2\sqrt{\frac{b^2z}{y}\cdot\frac{c^2y}{z}}+2\sqrt{\frac{c^2x}{z}\cdot\frac{a^2z}{x}}=\left(a+b+c\right)^2$$

Áp dụng: Sử dụng bất đẳng thức ***AM – GM*** ta có:

$$\sqrt{\frac{a^3}{a^2+8b^2}}=\frac{3a^2}{\sqrt{9a(a^2+8b^2)}}\geq\frac{6a^2}{9a+a^2+8b^2}$$

Tương tự: $\sqrt{\frac{b^3}{b^2+8c^2}}\geq\frac{6b^2}{9b+b^2+8c^2}$, $\sqrt{\frac{c^3}{c^2+8a^2}}\geq\frac{6c^2}{9c+c^2+8a^2}$

Suy ra bất đẳng thức (1) đúng nếu ta chứng minh được

$$\frac{6a^2}{9a+a^2+8b^2}+\frac{6b^2}{9b+b^2+8c^2}+\frac{6c^2}{9c+c^2+8a^2}\geq 1 \qquad (2)$$

Sử dụng bổ đề ta có $\sum_{cyc}\frac{6a^2}{9a+a^2+8b^2}=\sum_{cyc}\frac{6a^4}{9a^3+a^4+8a^2b^2}\geq\frac{6(a^2+b^2+c^2)^2}{\sum_{cyc}a^4+9\sum_{cyc}a^3+8\sum_{cyc}a^2b^2}$

Ta chỉ cần chứng minh $6(a^2+b^2+c^2)^2\geq\sum_{cyc}a^4+9\sum_{cyc}a^3+8\sum_{cyc}a^2b^2$

$$\Leftrightarrow 6\sum_{cyc}a^4+12\sum_{cyc}a^2b^2\geq\sum_{cyc}a^4+3\sum_{cyc}a.\sum_{cyc}a^3+8\sum_{cyc}a^2b^2$$

$$\Leftrightarrow 2\sum_{cyc}a^4+4\sum_{cyc}a^2b^2\geq 3\left(\sum_{cyc}a^3b+\sum_{cyc}ab^3\right)\Leftrightarrow\sum_{cyc}\left[a^4+b^4+4a^2b^2-3ab(a^2+b^2)\right]\geq 0$$

$$\Leftrightarrow\sum_{cyc}\left[a^4+b^4-ab(a^2+b^2)-2ab\left(a^2+b^2-2ab\right)\right]\geq 0\Leftrightarrow\sum_{cyc}\left(a^2-ab+b^2\right)(a-b)^2\geq 0$$

Bất đẳng thức cuối luôn đúng $\Rightarrow$(đpcm). Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

Nhận xét. Ta có bất đẳng thức mạnh hơn sau đây với mọi $a,b,c\geq 0$:

$$\sqrt{\frac{a^3}{a^2+8b^2}}+\sqrt{\frac{b^3}{b^2+8c^2}}+\sqrt{\frac{c^3}{c^2+8a^2}}\geq\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}}$$

với đẳng thức xảy ra tại $a=b=c$ hoặc $a=b\to 0, c\geq 0$ và các hoán vị. Ngoài ra bất đẳng thức cũng đúng nếu thay vế phải bởi đại lượng mạnh hơn $\sqrt{\frac{a^3+b^3+c^3}{a^2+b^2+c^2}}$.

Bài 5. Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{(a+b+c)^3}{abc}+\left(\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}\right)^2\geq 28$$

Chứng minh

Áp dụng bất đẳng thức ***AM – GM*** ta có:

$$(ab+bc+ca)^2\left(a^2+b^2+c^2\right)\leq\left(\frac{2(ab+bc+ca)+(a^2+b^2+c^2)}{3}\right)^3=\frac{(a+b+c)^6}{27}$$

Suy ra $\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}=\frac{(ab+bc+ca)^3}{(ab+bc+ca)^2\left(a^2+b^2+c^2\right)}\geq\frac{27(ab+bc+ca)^3}{(a+b+c)^6}$

Ta phải chứng minh $\frac{(a+b+c)^3}{abc}+\frac{27^2(ab+bc+ca)^6}{(a+b+c)^{12}}\geq 28$. Theo ***AM – GM***:

$$4.\frac{(a+b+c)^3}{27abc}+\frac{27^2(ab+bc+ca)^6}{(a+b+c)^{12}}\ge 5\sqrt[5]{\frac{(ab+bc+ca)^6}{27^2(abc)^4}}\ge 5\sqrt[5]{\frac{\left(3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}\right)^6}{27^2(abc)^4}}=5$$

Cũng theo **AM – GM** thì $23.\frac{(a+b+c)^3}{27abc}\ge 23$.

Cộng theo vế hai bất đẳng thức trên suy ra đpcm. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c>0$.

Bài 6. [Japan MO 1997] Cho $a,b,c\ge 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{(b+c-a)^2}{(b+c)^2+a^2}+\frac{(c+a-b)^2}{(c+a)^2+b^2}+\frac{(a+b-c)^2}{(a+b)^2+c^2}\ge\frac{3}{5}\quad(1)$$

Chứng minh

$$(1)\Leftrightarrow\frac{(b+c)^2+a^2-2a(b+c)}{(b+c)^2+a^2}+\frac{(c+a)^2+b^2-2b(c+a)}{(c+a)^2+b^2}+\frac{(a+b)^2+c^2-2c(a+b)}{(a+b)^2+c^2}\ge\frac{3}{5}$$

$$\Leftrightarrow\frac{(b+c)a}{(b+c)^2+a^2}+\frac{(c+a)b}{(c+a)^2+b^2}+\frac{(a+b)c}{(a+b)^2+c^2}\le\frac{6}{5}\quad(2)$$

Chuẩn hóa $a+b+c=1$, khi đó bất đẳng thức (2) trở thành

$$\frac{(1-a)a}{2a^2-2a+1}+\frac{(1-b)b}{2b^2-2b+1}+\frac{(1-c)c}{2c^2-2c+1}\le\frac{6}{5}$$

Sử dụng bất đẳng thức **AM – GM** ta có:

$$2a(1-a)\le\frac{(1+a)^2}{4}\Leftrightarrow 2a^2-2a+1\ge 1-\frac{(1+a)^2}{4}=\frac{(1-a)(a+3)}{4}$$

Suy ra: $\frac{(1-a)a}{2a^2-2a+1}\le\frac{4(1-a)a}{(1-a)(a+3)}=\frac{4a}{a+3}$

Tương tự ta cũng có: $\frac{(1-b)b}{2b^2-2b+1}\le\frac{4b}{b+3}$ và $\frac{(1-c)c}{2c^2-2c+1}\le\frac{4c}{c+3}$

Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên suy ra ta chỉ cần chứng minh:

$$\frac{4a}{a+3}+\frac{4b}{b+3}+\frac{4c}{c+3}\le\frac{6}{5}\Leftrightarrow\frac{1}{a+3}+\frac{1}{b+3}+\frac{1}{c+3}\ge\frac{9}{10}$$

Sử dụng bất đẳng thức **AM – GM** dạng cộng mẫu số ta có

$$\frac{1}{a+3}+\frac{1}{b+3}+\frac{1}{c+3}\ge\frac{9}{(a+3)+(b+3)+(c+3)}=\frac{9}{(a+b+c)+9}=\frac{9}{10}$$

Bất đẳng thức (2) đúng nên (1) được chứng minh. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c>0$.

Bài 7. Cho $a,b,c\ge 0$ thỏa mãn $a+b+c=1$.

Chứng minh rằng: $\sqrt{a+b^2}+\sqrt{b+c^2}+\sqrt{c+a^2}\ge 2$

Chứng minh

- ***Bổ đề 1:*** $a^4+b^4+c^4\ge a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$

- ***Bổ đề 2:*** $a^3b+b^3c+c^3a\ge a^2bc+b^2ca+c^2ab$

Biến đổi rồi sử dụng bất đẳng thức ***AM – GM*** và đồng bậc bởi $a+b+c=1$ ta có:

$$\sum_{cyc}\sqrt{a+b^2}=\sum_{cyc}\frac{a+b^2}{\sqrt{a+b^2}}=\sum_{cyc}\frac{(a+b)(a+b^2)}{(a+b)\sqrt{a+b^2}}\ge\sum_{cyc}\frac{2(a+b)(a+b^2)}{(a+b)^2+a+b^2}$$

$$\sum_{cyc}\frac{2(a+b)[a(a+b+c)+b^2]}{(a+b)^2+a(a+b+c)+b^2}=\sum_{cyc}\frac{2(a+b)(a^2+b^2+ab+ac)}{2a^2+2b^2+3ab+ac}$$

Ta cần chứng minh: $\displaystyle\sum_{cyc}\frac{2(a+b)(a^2+b^2+ab+ac)}{2a^2+2b^2+3ab+ac}\ge a+b+c$

$$\Leftrightarrow\sum_{cyc}a^5b^2+\sum_{cyc}a^4b^2c+2\sum_{cyc}a^5bc\ge2\sum_{cyc}a^3b^3c+2\sum_{cyc}a^3b^2c^2$$

$$\Leftrightarrow\sum_{cyc}\left(\frac{9}{19}a^5b^2+\frac{6}{19}b^5c^2+\frac{6}{19}c^5a^2-a^3b^2c^2\right)+2abc\left(\sum_{cyc}a^4-\sum_{cyc}a^2b^2\right)+abc\left(\sum_{cyc}a^3b-\sum_{cyc}a^2bc\right)\ge0$$

Bất đẳng thức cuối đúng theo ***AM – GM*** và bổ đề 1, 2 (đpcm).

Bài 8. Cho $a,b,c\ge0$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}}\ge2\sqrt{1+\frac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}}\quad(1)$$

Chứng minh

$$(1)\Leftrightarrow\sum_{cyc}\sqrt{a(a+b)(a+c)}\ge2\sqrt{(a+b+c)(ab+bc+ca)}$$

$$\Leftrightarrow\sum_{cyc}a(a+b)(a+c)+2\sum_{cyc}(b+c)\sqrt{bc(a+b)(a+c)}\ge4\sum_{cyc}bc(b+c)+12abc$$

Theo ***AM – GM:*** $(a+b)(a+c)=a^2+a(b+c)+bc\ge a^2+2a\sqrt{bc}+bc=\left(a+\sqrt{bc}\right)^2$ suy ra

$$\sum_{cyc}(b+c)\sqrt{bc(a+b)(a+c)}\ge\sum_{cyc}(b+c)\sqrt{bc}\left(a+\sqrt{bc}\right)=\sum_{cyc}bc(b+c)+\sqrt{abc}\sum_{cyc}(b+c)\sqrt{a}$$

Sử dụng ***AM – GM*** ta có: $\sqrt{abc}.\sum_{cyc}(b+c)\sqrt{a}\ge6abc$. Do đó ta chỉ cần chứng minh:

$$\sum_{cyc}a(a+b)(a+c)+2\sum_{cyc}bc(b+c)+12abc\ge4\sum_{cyc}bc(b+c)+12abc$$

$\Leftrightarrow\sum_{cyc}a^3+3abc\ge\sum_{cyc}bc(b+c)$. Không mất tính tổng quát giả sử $a\ge b\ge c$, khi đó biến đổi bất đẳng thức $\Leftrightarrow a(a-b)^2+c(c-b)^2+(c+a-b)(a-b)(b-c)\ge0$ (đúng)

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$ hoặc $a=b,c=0$ và các hoán vị.

XVI. CÁC BÀI TẬP DÀNH CHO BẠN ĐỌC TỰ GIẢI

Bài 1. Cho $a \in \left[-\sqrt{3}, \sqrt{3}\,\right]$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$S = \frac{a^6 - 10a^5 + 19a^4 + 62a^3 - 151a^2 - 96a + 257}{a^3 - 5a^2 - 3a + 16}$$

Bài 2. Chứng minh rằng: $\dfrac{a^4 + a + 1 + 32.\sqrt[4]{a^3 - 4a^2 + 7a - 12}}{a^4 + a^2 + 16a - 11} \le 1 \quad \forall a \ge 3$

Bài 3. Cho số thực a thoả mãn: $a^5 - a^3 + a - 2 = 0$. Chứng minh rằng:

$$S = \frac{a^{16} + a^{12} + 7a^8 + 12a^4 + 12}{a^{12} + 7a^8 + 7a^4 + 12} < \sqrt[3]{4}$$

Bài 4. Cho a, b, c là ba số thực phân biệt. Chứng minh rằng:

$$\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2 + \left(\frac{b+c}{b-c}\right)^2 + \left(\frac{c+a}{c-a}\right)^2 + \frac{1}{\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2 + \left(\frac{b+c}{b-c}\right)^2 + \left(\frac{c+a}{c-a}\right)^2} \ge \frac{5}{2}$$

Bài 5. Cho $a, b, c > 0$ và $a = \mathrm{Max}\{a, b, c\}$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\mathbf{S} = \dfrac{a}{b} + 2\sqrt{1 + \dfrac{b}{c}} + 3.\sqrt[3]{1 + \dfrac{c}{a}}$

Bài 6. Cho $\begin{cases} a, b, c, d > 0 \\ a + b + c + d \le 2 \end{cases}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$S = \left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{1}{c}\right)\left(c + \frac{1}{d}\right)\left(d + \frac{1}{a}\right)$$

Bài 7. Cho $\begin{cases} a, b, c, d > 0 \\ abcd \ge 16 \end{cases}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$S = \left(a + \frac{2}{b} + \frac{1}{c}\right)\left(b + \frac{2}{c} + \frac{1}{d}\right)\left(c + \frac{2}{d} + \frac{1}{a}\right)\left(d + \frac{2}{a} + \frac{1}{b}\right)$$

Bài 8. Cho $\begin{cases} a, b > 0 \\ a + b \le 1 \end{cases}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của : $S = \dfrac{1}{a^3 + b^3} + \dfrac{1}{a^2 b} + \dfrac{1}{a\, b^2}$

Bài 9. Cho $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ a + b + c \le 1 \end{cases}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$S = \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{1}{ab(a+b)} + \frac{1}{bc(b+c)} + \frac{1}{ca(c+a)}$$

Bài 10. Cho $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ a + b + c = 3 \end{cases}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$S = \sqrt[5]{(2a+b)(a+c)a} + \sqrt[5]{(2b+c)(b+a)b} + \sqrt[5]{(2c+a)(c+b)c}$$

Bài 11. Cho $\begin{cases} a,b,c>0 \\ a+b+c\le \dfrac{3}{2} \end{cases}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$S=\sqrt{a^2+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}+\sqrt{b^2+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}}+\sqrt{c^2+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}$$

Bài 12. Cho a, b, $c>0$ và $2\le n\in \mathrm{N}$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^n}{b+c}+\frac{b^n}{c+a}+\frac{c^n}{a+b}\ge \frac{3}{2}\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{n-1}$$

Bài 13. Cho a, b, $c>0$ và $2\le n\in \mathrm{N}$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^n}{b+c}+\frac{b^n}{c+a}+\frac{c^n}{a+b}\ge \frac{a^{n-1}+b^{n-1}+c^{n-1}}{2}$$

Bài 14. Cho a, b, $c>0$ và $2\le n\in \mathrm{N}$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^n}{b+c}+\frac{b^n}{c+a}+\frac{c^n}{a+b}\ge \frac{3}{2}\left(\frac{a^n+b^n+c^n}{a+b+c}\right)$$

Bài 15. Chứng minh rằng bất đẳng thức sau đúng $\forall\ a,\ b,\ c\ge 0$:

$$\sqrt[3]{a^3+b^3}+\sqrt[3]{b^3+c^3}+\sqrt[3]{c^3+a^3}\ge \frac{1}{\sqrt[6]{2}}\left(\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}\right)$$

Bài 16. Chứng minh rằng bất đẳng thức sau đúng $\forall\ a,\ b,\ c\ge 0$:

$$\sqrt[3]{a^3+2b^3}+\sqrt[3]{b^3+2c^3}+\sqrt[3]{c^3+2a^3}\ge \frac{1}{\sqrt[6]{3}}\left(\sqrt{a^2+2b^2}+\sqrt{b^2+2c^2}+\sqrt{c^2+2a^2}\right)$$

Bài 17. Chứng minh rằng bất đẳng thức sau đúng $\forall\ a,\ b,\ c>0$:

$$\sqrt[3]{\frac{a^2+b^2}{c^2}}+\sqrt[3]{\frac{b^2+c^2}{a^2}}+\sqrt[3]{\frac{c^2+a^2}{b^2}}\ge \sqrt[6]{2}\left(\sqrt{\frac{a+b}{c}}+\sqrt{\frac{b+c}{a}}+\sqrt{\frac{c+a}{b}}\right)$$

Bài 18. Chứng minh rằng bất đẳng thức sau đúng $\forall\ a,\ b,\ c\ge 0$:

$$\sqrt[5]{\frac{a^4+b^4}{c^4}}+\sqrt[5]{\frac{b^4+c^4}{a^4}}+\sqrt[5]{\frac{c^4+a^4}{b^4}}\ge \sqrt[20]{2}\left(\sqrt[4]{\frac{a^3+b^3}{c^3}}+\sqrt[4]{\frac{b^3+c^3}{a^3}}+\sqrt[4]{\frac{c^3+a^3}{b^3}}\right)$$

Bài 19. [Tạp chí THTT] Chứng minh: $\dfrac{(a+b+c)^3}{abc}+\dfrac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}\ge 28$, $\forall a,b,c>0$

Bài 20. [Việt Nam TST 2005] Chứng minh: $\left(\dfrac{a}{a+b}\right)^3+\left(\dfrac{b}{b+c}\right)^3+\left(\dfrac{c}{c+a}\right)^3\ge \dfrac{3}{8}$, $\forall a,b,c>0$

Bài 21. Cho a, b, $c>0$. Chứng minh rằng: $\dfrac{(a+b+c)^3}{abc}+9\left(\dfrac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}\right)^2\ge 36$

Bài 22. Cho $a,b,c>0$. Chứng minh: $\dfrac{(a+b+c)^3}{abc}+27\sqrt{\dfrac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}}\geq 54$

Bài 23. Chứng minh rằng $\forall a,b,c>0$ thỏa mãn $a+b+c=1$:

$$\sqrt{a+(b-c)^2}+\sqrt{b+(c-a)^2}+\sqrt{c+(a-b)^2}\geq\sqrt{3}$$

Bài 24. Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng :

$$\frac{1}{2}\leq\sqrt{\frac{a}{4a+b+c}}+\sqrt{\frac{b}{4b+c+a}}+\sqrt{\frac{c}{4c+a+b}}\leq\sqrt{\frac{3}{2}}$$

Bài 25. Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng:

$$3(a^3+b^3+c^3)+2abc\geq 11\sqrt{\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{3}\right)^3}$$

Bài 26. [Việt Nam MO] Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng:

$$6(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)\leq 27abc+10\sqrt{(a^2+b^2+c^2)^3}$$

Bài 27. Cho $a,b,c,k>0$ thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng:

$$a+b+c\geq\frac{k+a}{k+b}+\frac{k+b}{k+c}+\frac{k+c}{k+a}$$

Bài 28. Cho $\begin{cases}a,b,c\in\mathbb{R}\\ a+b+c=3\end{cases}$. Chứng minh rằng $(3+2a^2)(3+2b^2)(3+2c^2)\geq 125$

Bài 29. Cho $a,b,c\geq 0$. Chứng minh rằng

$$(a+b+c)^2(a^2+b^2+c^2)^2\geq 3(2a^2+bc)(2b^2+ca)(2c^2+ab)$$

Bài 30. Cho $a,b,c\geq 0$. Chứng minh rằng

$$(a+b)(b+c)(c+a)\geq 2\sqrt{(a^2+bc)(b^2+ca)(c^2+ab)}$$

Bài 31. Cho $a,b,c\geq 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{(a+b+c)^3}+\frac{10abc}{9(a+b)(b+c)(c+a)}\geq\frac{1}{4}$$

Bài 32. Cho a,b,c là độ dài ba cạnh của một tam giác thỏa mãn $a+b+c=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$.

Chứng minh rằng $\dfrac{1}{b+c-a}+\dfrac{1}{c+a-b}+\dfrac{1}{a+b-c}\leq\dfrac{3}{(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)}$

Bài 33. Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng $\dfrac{2(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2}+\dfrac{a^3+b^3+c^3}{abc}-\dfrac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}\ge 8$

Bài 34. Cho $a,b,c\ge 0$ thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh

$$\sqrt{\frac{a^3}{a^2+5b^2}}+\sqrt{\frac{b^3}{b^2+5c^2}}+\sqrt{\frac{c^3}{c^2+5a^2}}\ge\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Bài 35. Cho $a,b,c\ge 0$ và $1\le n\in\mathbb{N}$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{(b+c)^n}+\frac{b}{(c+a)^n}+\frac{c}{(a+b)^n}\ge\left(\frac{3}{2}\right)^n.\frac{1}{(a+b+c)^{n-1}}$$

Bài 36. Cho $a,b,c\ge 0$ thỏa mãn $abc=1$ và $1\le n\in\mathbb{N}$.

Chứng minh rằng $\dfrac{1}{a^n+(n+1)bc}+\dfrac{1}{b^n+(n+1)ca}+\dfrac{1}{c^n+(n+1)ab}\le\dfrac{3}{n+2}$

Bài 37. Cho $a,b,c,d\in\left[\dfrac{1}{n},n\right]$ với $2\le n\in\mathbb{N}$ và $a+b+c+d=4$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\left(a+\dfrac{1}{b}\right)\left(b+\dfrac{1}{c}\right)\left(c+\dfrac{1}{d}\right)\left(d+\dfrac{1}{a}\right)$.

Bài 38. Cho $a,b,c\ge 0$. Chứng minh rằng

$$\left(\frac{a}{b+c}\right)^2+\left(\frac{b}{c+a}\right)^2+\left(\frac{c}{a+b}\right)^2+\frac{15\sqrt[3]{abc}}{4(a+b+c)}\ge 2$$

Bài 39. Cho $a,b,c\ge 0$. Chứng minh rằng

$$(a+b+c)(ab+bc+ca)\ge 3abc+2\sqrt{(ab+bc+ca)\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)}$$

Bài 40. Cho $a,b,c\ge 0$. Chứng minh rằng $a^3+b^3+c^3+6abc\ge\sqrt[3]{abc}\,(a+b+c)^2$

Bài 41. Cho $a,b,c>0$. Chứng minh $\dfrac{a^3+b^3+c^3}{2abc}\ge\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}$

Bài 42. Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\ge\sqrt{\frac{a^3+b^3}{a+b}}+\sqrt{\frac{b^3+c^3}{b+c}}+\sqrt{\frac{c^3+a^3}{c+a}}$$

Bài 43. Cho $a,b,c\ge 0$. Chứng minh rằng

$$27+\left(2+\frac{a^2}{bc}\right)\left(2+\frac{b^2}{ca}\right)\left(2+\frac{c^2}{ab}\right)\ge 6(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

Bài 44. Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng : $\dfrac{abc}{(1+3a)(a+8b)(b+9c)(c+6)}\le\dfrac{1}{7^4}$

Bài 45. Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng: $\dfrac{a+b+c}{3}\le\dfrac{1}{4}\sqrt[3]{\dfrac{(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2}{abc}}$

Bài 46. Cho $a,b,c\ge 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^3b}{a^4+a^2b^2+b^4}+\frac{b^3c}{b^4+b^2c^2+c^4}+\frac{c^3a}{c^4+c^2a^2+a^4}\le 1$$

Bài 47. [Iran TST 2008] Cho $a,b,c\ge 0$ và $ab+bc+ca=1$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{a^3+a}+\sqrt{b^3+b}+\sqrt{c^3+c}\ge 2\sqrt{a+b+c}$$

Bài 48. Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{1+a+b^2}+\frac{1}{1+b+c^2}+\frac{1}{1+c+a^2}\le 1$$

Bài 49. Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng

$$\frac{\sqrt{2(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}}{abc}+\frac{4(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2}\ge 8$$

Bài 50. Cho $a,b,c\ge 0$ và $a+b+c=3$. Chứng minh $(1-a+a^2)(1-b+b^2)(1-c+c^2)\ge 1$

Bài 51. Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab}\ge\sqrt[9]{\frac{a^9+b^9}{2c^9}}+\sqrt[9]{\frac{b^9+c^9}{2a^9}}+\sqrt[9]{\frac{c^9+a^9}{2b^9}}$$

Bài 52. Cho $a,b,c\ge 0$ thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=2$. Chứng minh rằng

$$\frac{1-a^2}{b^2+bc+c^2}+\frac{1-b^2}{c^2+ca+a^2}+\frac{1-c^2}{a^2+ab+b^2}\le\frac{1}{2}$$

Bài 53. Cho $a,b,c\ge 0$. Chứng minh rằng:

$$24(a^3+b^3+c^3)^2\ge(5a^2+bc)(5b^2+ca)(5c^2+ab)$$

Bài 54. Cho $a,b,c\ge 0$ thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{a(b+c)}+\sqrt{b(c+a)}+\sqrt{c(a+b)}\ge 3\sqrt{2abc}$$

Bài 55. Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{\sqrt{(1+a)(1+b)}}+\frac{1}{\sqrt{(1+b)(1+c)}}+\frac{1}{\sqrt{(1+c)(1+a)}}\ge\frac{3}{2}$$

Bài 56. Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{2}{a-a^2}+\frac{2}{b-b^2}+\frac{2}{c-c^2}\geq 5\left(\sqrt{\frac{a}{bc}}+\sqrt{\frac{b}{ca}}+\sqrt{\frac{c}{ab}}\right)$$

Bài 57. Cho $a,b,c\geq 0$. Chứng minh rằng:

$$(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2\geq 4(a^2+bc)(b^2+ca)(c^2+ab)+32a^2b^2c^2$$

Bài 58. Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng:

$$(1+a)(1+b)(1+c)\leq 5+\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}$$

Bài 59. Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng:

$$(a+b+c)(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)\geq \frac{3(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)}{ab+bc+ca}+2(a^2+b^2+c^2)$$

Bài 60. Cho $a,b,c\geq 0$ thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng:

$$a^3+b^3+c^3\leq \sqrt{3(a^3+b^3+c^3-a^2b-b^2c-c^2a)}+3abc$$

Bài 61. Cho $a,b,c\geq 0$ thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng:

$$\left(\frac{a}{1+a}\right)^2+\left(\frac{b}{1+b}\right)^2+\left(\frac{c}{1+c}\right)^2\geq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}\right)$$

Bài 62. Cho $a,b,c\geq 0$ thỏa mãn $a+b+c=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$P=a^3\sqrt{a}+b^3\sqrt{b}+c^3\sqrt{c}$$

Bài 63. Cho $a,b,c\in\mathbb{R}$. Chứng minh rằng :

$$\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}+3\geq \frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}$$

Bài 64. Cho $a,b,c\geq 0$. Chứng minh rằng: $a^3+b^3+c^3-3abc\geq \frac{9}{4}\left|(a-b)(b-c)(c-a)\right|$

Bài 65. Cho $a,b,c\geq 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b^3+c^3}+\frac{b}{c^3+a^3}+\frac{c}{a^3+b^3}\geq \frac{4}{a^2+b^2+c^2}$$

Bài 66. [Peru MO 2007] Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn điều kiện $a+b+c\geq \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$.

Chứng minh rằng: $a+b+c\geq \frac{3}{a+b+c}+\frac{2}{abc}$

§2. KỸ THUẬT SỬ DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC CAUCHY - BUNIAKOWSKI - SCHWARZ

§2.1. BẤT ĐẲNG THỨC CAUCHY- BUNIAKOWSKI-SCHWARZ (CBS)

I. DẠNG TỔNG QUÁT: Cho $2n$ số thực tùy ý $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$, khi đó:

1. ***Dạng 1:*** $\left(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2\right)\left(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2\right)\geq\left(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n\right)^2$

2. ***Dạng 2:*** $\sqrt{\left(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2\right)\left(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2\right)}\geq\left|a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n\right|$

3. ***Dạng 3:*** $\sqrt{\left(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2\right)\left(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2\right)}\geq a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n$

4. ***Điều kiện xảy ra dấu bằng:***

- Dấu bằng ở dạng 1 và dạng 2 xảy ra $\Leftrightarrow \dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\ldots\dfrac{a_n}{b_n}$
- Dấu bằng ở dạng 3 xảy ra $\Leftrightarrow \dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\ldots\dfrac{a_n}{b_n}\geq 0$

5. ***Hệ quả:*** • Nếu $a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n=c$ là hằng số thì

$$\text{Min}\left(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2\right)=\frac{c^2}{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}\Leftrightarrow\frac{x_1}{a_1}=\frac{x_2}{a_2}=\ldots=\frac{x_n}{a_n}$$

• Nếu $x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2=c^2$ là hằng số thì

$$\text{Max}\left\{a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n\right\}=|c|.\sqrt{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}\quad\Leftrightarrow\quad\frac{x_1}{a_1}=\frac{x_2}{a_2}=\ldots=\frac{x_n}{a_n}\geq 0$$

$$\text{Min}\left\{a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n\right\}=-|c|.\sqrt{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}\quad\Leftrightarrow\quad\frac{x_1}{a_1}=\frac{x_2}{a_2}=\ldots=\frac{x_n}{a_n}\leq 0$$

II. CÁC TRƯỜNG HỢP ĐẶC BIỆT VÀ CHÚ DẪN LỊCH SỬ:

n / Dạng	$n=2$: $\forall\, a, b, c, d\in\mathbb{R}$	$n=3$: $\forall\, a, b, c, m, n, p\in\mathbb{R}$
Dạng 1	$(a^2+b^2)(c^2+d^2)\geq(ac+bd)^2$	$(a^2+b^2+c^2)(m^2+n^2+p^2)\geq(am+bn+cp)^2$
Dạng 2	$\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}\geq\lvert ac+bd\rvert$	$\sqrt{(a^2+b^2+c^2)(m^2+n^2+p^2)}\geq\lvert am+bn+cp\rvert$
Dạng 3	$\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}\geq ac+bd$	$\sqrt{(a^2+b^2+c^2)(m^2+n^2+p^2)}\geq am+bn+cp$
Dấu bằng	①② $\dfrac{a}{c}=\dfrac{b}{d}$; ③ $\dfrac{a}{c}=\dfrac{b}{d}\geq 0$	①② $\dfrac{a}{m}=\dfrac{b}{n}=\dfrac{c}{p}$; ③ $\dfrac{a}{m}=\dfrac{b}{n}=\dfrac{c}{p}\geq 0$

CHÚ DẪN LỊCH SỬ: Bất đẳng thức trên được nhà toán học người Pháp ***Cauchy*** đề cập vào năm 1821, nhà toán học người Nga ***Buniakowski (BunhiaCôpski)*** đề cập vào năm 1859, còn nhà toán học người Đức ***Schwarz*** đề cập năm 1884. Do ba nhà toán học đã độc lập nghiên cứu nên bất đẳng thức trên được mang tên cả ba nhà toán học: ***Cauchy – Buniakowski – Schwarz***, trong cuốn sách này chúng ta sẽ viết tắt là ***CBS***. Đôi khi nó còn được gọi là ***Cauchy – Schwarz***, và ở Việt Nam, người ta thường nhắc đến bất đẳng thức này với cái tên ***Buniakowski.***

III. MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH TIÊU BIỂU

Sau đây là năm phương pháp đại diện cho 10 phương pháp chứng minh bất đẳng thức này

1. Phương pháp: ***Sử dụng đồng nhất thức Lagrange***

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^2\sum_{k=1}^{n} b_k^2-\left(\sum_{k=1}^{n} a_kb_k\right)^2=\sum_{k=1}^{n} a_k^2\sum_{i=1}^{n} b_i^2-\sum_{k=1}^{n} a_kb_k\sum_{i=1}^{n} a_ib_i=\sum_{k=1}^{n} a_k^2b_k^2+\sum_{1\le i<k\le n}\left(a_i^2b_k^2+a_k^2b_i^2\right)-$$

$$-\sum_{k=1}^{n}\left(a_kb_k\right)^2-2\sum_{1\le i<k\le n}\left(a_ib_i\right)\left(a_kb_k\right)=\sum_{1\le i<k\le n}\left(a_i^2b_k^2+a_k^2b_i^2-2a_ib_ia_kb_k\right)=\sum_{1\le i<k\le n}\left(a_ib_k-a_kb_i\right)^2\ge 0$$

2. Phương pháp: ***Sử dụng bất đẳng thức AM – GM***

- Nếu $\text{Min}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2, \sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a_1=a_2=\ldots=a_n=0 \\ b_1=b_2=\ldots=b_n=0 \end{array}\right.$ thì bất đẳng thức đúng

- Nếu $\sum_{i=1}^{n} a_i^2>0$; $\sum_{i=1}^{n} b_i^2>0$ thì $\left|\sum_{i=1}^{n} a_ib_i\right|\le\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}.\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2} \Leftrightarrow \left|\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}}.\frac{b_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}}\right|\le 1$

Ta có: $$\left|\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}}.\frac{b_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}}\right|\le\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{a_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}}.\frac{b_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}}\right|\le\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{a_i^2}{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}+\frac{b_i^2}{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}\right)=\frac{1}{2}\times 2=1$$

3. Phương pháp: ***So sánh giá trị nhỏ nhất tổng thể và bộ phận***

Ta có $\left(\frac{a}{\alpha}-\alpha b\right)^2\ge 0 \Leftrightarrow \left(\frac{a}{\alpha}\right)^2+(\alpha b)^2\ge 2ab \Rightarrow ab=\frac{1}{2}\underset{\alpha>0}{\text{Min}}\left\{\left(\frac{a}{\alpha}\right)^2+(\alpha b)^2\right\}$

Do đó với mọi $a, b>0$ luôn tồn tại $\alpha=\sqrt{\frac{a}{b}}$ sao cho $ab=\frac{1}{2}\underset{\alpha>0}{\text{Min}}\left\{\left(\frac{a}{\alpha}\right)^2+(\alpha b)^2\right\}$

- Nếu $\text{Min}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2, \sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a_1=a_2=\ldots=a_n \\ a_1=a_2=\ldots=a_n \end{array}\right.$ thì bất đẳng thức đúng.

- Nếu $\sum_{i=1}^{n} a_i^2>0$; $\sum_{i=1}^{n} b_i^2>0$ thì theo nhận xét trên ta có:

$$\sqrt{a_1^2+\ldots+a_n^2}\times\sqrt{b_1^2+\ldots+b_n^2}=\frac{1}{2}\underset{\alpha>0}{\text{Min}}\left\{\frac{a_1^2+\ldots+a_n^2}{\alpha^2}+\alpha^2\left(b_1^2+\ldots+b_n^2\right)\right\}$$

Mặt khác $\frac{1}{2}\left[\frac{a_1^2+\ldots+a_n^2}{\alpha^2}+\alpha^2\left(b_1^2+\ldots+b_n^2\right)\right]=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k^2}{\alpha^2}+\alpha^2b_k^2\right)\ge\sum_{k=1}^{n} a_kb_k$

Để ý nếu $f=f_1+f_2+\ldots+f_n$ thì $\text{Min} f\ge\text{Min} f_1+\text{Min} f_2+\ldots+\text{Min} f_n$, suy ra

$$\Rightarrow\sqrt{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}\times\sqrt{b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2}\ge\sum_{k=1}^{n} a_kb_k=a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n$$

4. Phương pháp 4: ***Phương pháp tam thức bậc hai***

• Nếu $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = 0 \Leftrightarrow a_1 = a_2 = ... = a_n = 0$ thì bất đẳng thức đúng.

• Nếu $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 > 0$, xét: $F(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) X^2 + 2\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right) X + \sum_{i=1}^{n} b_i^2$

Ta có $A = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 > 0$; $F(x) = \sum_{i=1}^{n}\left(a_i^2 + 2a_i b_i X + b_i^2\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(a_i X + b_i\right)^2 \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Delta' = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 - \sum_{i=1}^{n} a_i^2 . \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \leq 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \geq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2$$

5. Phương pháp 5: ***Phương pháp quy nạp***

Bước 1: Với $n = 2$ thì bất đẳng thức trở thành $\left(a_1^2 + a_2^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2\right) \geq \left(a_1 b_1 + a_2 b_2\right)^2$

$\Leftrightarrow a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2 \geq 2a_1 b_1 a_2 b_2 \Leftrightarrow \left(a_1 b_2 - a_2 b_1\right)^2 \geq 0$ luôn đúng.

Bước 2: Giả sử bất đẳng thức đúng với $n = k$, tức là ta có

$$\left(a_1^2 + a_2^2 ... + a_k^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 ... + b_k^2\right) \geq \left(a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_k b_k\right)^2$$

Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức đúng với $n = k + 1$

Ta có $\left(a_1^2 + a_2^2 ... + a_k^2 + a_{k+1}^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 ... + b_k^2 + b_{k+1}^2\right) =$

$$= \left(a_1^2 + a_2^2 ... + a_k^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 ... + b_k^2\right) + b_{k+1}^2\left(a_1^2 + a_2^2 ... + a_k^2\right) + a_{k+1}^2\left(b_1^2 + b_2^2 ... + b_k^2\right) + a_{k+1}^2 b_{k+1}^2$$

$$\geq \left(a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_k b_k\right)^2 + b_{k+1}^2\left(a_1^2 + a_2^2 ... + a_k^2\right) + a_{k+1}^2\left(b_1^2 + b_2^2 ... + b_k^2\right) + a_{k+1}^2 b_{k+1}^2$$

$$= \left(a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_k b_k\right)^2 + \left(b_{k+1}^2 a_1^2 + a_{k+1}^2 b_1^2\right) + ... + \left(b_{k+1}^2 a_k^2 + a_{k+1}^2 b_k^2\right) + a_{k+1}^2 b_{k+1}^2$$

$$\geq \left(a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_k b_k\right)^2 + 2a_1 b_1 a_{k+1} b_{k+1} + 2a_2 b_2 a_{k+1} b_{k+1} + ... + 2a_k b_k a_{k+1} b_{k+1} + a_{k+1}^2 b_{k+1}^2$$

$$= \left(a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_k b_k + a_{k+1} b_{k+1}\right)^2$$

Như vậy bất đẳng thức đúng với $n = k + 1$ nên theo nguyên lý quy nạp ta có (đpcm).

Kết luận: Chúng ta đã chứng minh bằng năm cách khác nhau cho bất đẳng thức ***CBS*** ở dạng 1 $\left(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2\right) \geq \left(a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_n b_n\right)^2$.

Dễ thấy đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = ... \frac{a_n}{b_n}$ với quy ước nếu mẫu số nào bằng 0 thì tử số của phân số ấy cũng bằng 0.

§2.2. KỸ THUẬT SỬ DỤNG DẠNG CỘNG MẪU SỐ ENGEL CỦA BẤT ĐẲNG THỨC CAUCHY – SCHWARZ

Sau đây là một dạng phát biểu của bất đẳng thức *Cauchy – Buniakowski – Schwarz*

• ***Dạng cộng mẫu số:*** $\dfrac{a_1^2}{x_1}+\dfrac{a_2^2}{x_2}+...+\dfrac{a_n^2}{x_n}\ge\dfrac{(a_1+a_2+...+a_n)^2}{x_1+x_2+...+x_n}$, $\forall\ x_1, x_2, ..., x_n>0$

Về mặt toán học có thể hiểu là dạng cộng mẫu số bởi vì: Vế trái là tổng của n phân số nhờ chuyển hóa qua dấu bất đẳng thức mà ta nhận được một phân số có mẫu số là tổng của n mẫu số ở vế trái. Về mặt lịch sử bất đẳng thức này còn có tên gọi ***Engel***.

• ***Chứng minh:*** Sử dụng bất đẳng thức ***Cauchy – Buniakowski – Schwarz*** ta có

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)\left(\sum_{i=1}^n\frac{a_i^2}{x_i}\right)=\left(\sum_{i=1}^n\sqrt{x_i}\right)\left(\sum_{i=1}^n\frac{a_i}{\sqrt{x_i}}\right)\ge\left(\sum_{i=1}^n\sqrt{x_i}.\frac{a_i}{\sqrt{x_i}}\right)^2=\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^2$$

Sau đây chúng ta xét các bài toán từ đơn giản đến phức tạp minh họa cho kỹ thuật này.

Bài 1. Cho $a, b, c>0$. Chứng minh các bất đẳng thức sau:

1. $\dfrac{a^2}{b+c}+\dfrac{b^2}{c+a}+\dfrac{c^2}{a+b}\ge\dfrac{a+b+c}{2}$ **2.** $\dfrac{a^3}{b+c}+\dfrac{b^3}{c+a}+\dfrac{c^3}{a+b}\ge\dfrac{a^2+b^2+c^2}{2}$

Chứng minh

Sử dụng bất đẳng thức ***CBS*** dạng ***Engel*** ta có

1. Ta có $\dfrac{a^2}{b+c}+\dfrac{b^2}{c+a}+\dfrac{c^2}{a+b}\ge\dfrac{(a+b+c)^2}{(b+c)+(c+a)+(a+b)}=\dfrac{a+b+c}{2}$

2. Ta có: $\dfrac{a^3}{b+c}+\dfrac{b^3}{c+a}+\dfrac{c^3}{a+b}=\dfrac{a^4}{ab+ac}+\dfrac{b^4}{bc+ba}+\dfrac{c^4}{ca+cb}\ge$

$$\ge\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{2(ab+bc+ca)}\ge\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{2(a^2+b^2+c^2)}=\frac{a^2+b^2+c^2}{2}$$

Bài 2. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh một tam giác. Chứng minh rằng:

1. $\dfrac{a^2}{b+c-a}+\dfrac{b^2}{c+a-b}+\dfrac{c^2}{a+b-c}\ge a+b+c$

2. $\dfrac{a^3}{b+c-a}+\dfrac{b^3}{c+a-b}+\dfrac{c^3}{a+b-c}\ge a^2+b^2+c^2$

Chứng minh