Cho $\begin{cases} p' = \dfrac{1}{p}, q' = \dfrac{-q}{p} \\ u_i = (a_i b_i)^p ; v_i = b_i^{-p} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p' > 0, q' > 0, u_i > 0; v_i > 0 \\ \dfrac{1}{p'} + \dfrac{1}{q'} = p\left(1 - \dfrac{1}{q}\right) = p \cdot \dfrac{1}{p} = 1 \end{cases}$

Sử dụng kết quả của phần **a.** ta có

$$\sum_{i=1}^{n} u_i v_i \le \left(\sum_{i=1}^{n} u_i^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} v_i^{q'}\right)^{\frac{1}{q'}} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i^p \le \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^p \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{-p}{q}}$$

$$\Leftrightarrow \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{-1}{q}} \Leftrightarrow \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}} \le \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

c. Bất đẳng thức (3) là cách phát biểu khái quát của 2 bất đẳng thức (1) & (2)

• Dấu bằng các bất đẳng thức (1), (2) và (3) xảy ra $\Leftrightarrow \dfrac{a_1^p}{b_1^q} = \dfrac{a_2^p}{b_2^q} = \ldots = \dfrac{a_n^p}{b_n^q}$

3. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \ldots l_i \le \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{p_1}\right)^{\frac{1}{p_1}} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^{p_2}\right)^{\frac{1}{p_2}} \ldots \left(\sum_{i=1}^{n} l_i^{p_m}\right)^{\frac{1}{p_m}} \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{p_1}\right)^{\frac{1}{p_1}}} \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k}{\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^{p_2}\right)^{\frac{1}{p_2}}} \ldots \sum_{k=1}^{n} \frac{l_k}{\left(\sum_{i=1}^{n} l_i^{p_m}\right)^{\frac{1}{p_m}}} \le 1$

Sử dụng bất đẳng thức ***AM – GM*** mở rộng ta có:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{p_1}\right)^{\frac{1}{p_1}}} \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k}{\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^{p_2}\right)^{\frac{1}{p_2}}} \ldots \sum_{k=1}^{n} \frac{l_k}{\left(\sum_{i=1}^{n} l_i^{p_m}\right)^{\frac{1}{p_m}}} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{a_k^{p_1}}{\sum_{i=1}^{n} a_i^{p_1}}\right)^{\frac{1}{p_1}} \cdot \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{b_k^{p_2}}{\sum_{i=1}^{n} b_i^{p_2}}\right)^{\frac{1}{p_2}} \ldots \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{l_k^{p_m}}{\sum_{i=1}^{n} l_i^{p_m}}\right)^{\frac{1}{p_m}}$$

$$\le \frac{1}{p_1} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{a_k^{p_1}}{\sum_{i=1}^{n} a_i^{p_1}}\right) + \frac{1}{p_2} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{b_k^{p_2}}{\sum_{i=1}^{n} b_i^{p_2}}\right) + \ldots + \frac{1}{p_m} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{l_k^{p_m}}{\sum_{i=1}^{n} l_i^{p_m}}\right) = 1$$

4. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \left(a_i^\alpha b_i^\beta \ldots l_i^\lambda\right) \le \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^\alpha \left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)^\beta \ldots \left(\sum_{i=1}^{n} l_i\right)^\lambda \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{a_k}{\sum_{i=1}^{n} a_i}\right)^\alpha \left(\frac{b_k}{\sum_{i=1}^{n} b_i}\right)^\beta \ldots \left(\frac{l_k}{\sum_{i=1}^{n} l_i}\right)^\lambda \le 1$

Sử dụng bất đẳng thức ***AM – GM*** mở rộng ta có

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{a_k}{\sum_{i=1}^{n} a_i}\right)^\alpha \left(\frac{b_k}{\sum_{i=1}^{n} b_i}\right)^\beta \ldots \left(\frac{l_k}{\sum_{i=1}^{n} l_i}\right)^\lambda \le \alpha \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{a_k}{\sum_{i=1}^{n} a_i}\right) + \beta \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{b_k}{\sum_{i=1}^{n} b_i}\right) + \ldots + \lambda \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{l_k}{\sum_{i=1}^{n} l_i}\right)$$

$= \alpha + \beta + \ldots + \lambda = 1$. Vậy $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \left(a_i^\alpha b_i^\beta \ldots l_i^\lambda\right) \le \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^\alpha \left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)^\beta \ldots \left(\sum_{i=1}^{n} l_i\right)^\lambda$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \left(a_1^\alpha + a_2^\alpha + \ldots + a_n^\alpha\right) = \left(b_1^\beta + b_2^\beta + \ldots + b_n^\beta\right) = \ldots = \left(l_1^\lambda + l_2^\lambda + \ldots + l_n^\lambda\right)$

§3.2. KỸ THUẬT SỬ DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC HOLDER

I. ĐIỂM RƠI ĐỐI XỨNG TRONG BẤT ĐẲNG THỨC HOLDER

Bài 1. Cho các số thực $a_1, a_2, ..., a_n > 0$. Chứng minh rằng:

$$\left(1+a_1^3\right)\left(1+a_2^3\right)...\left(1+a_n^3\right) \ge \left(1+a_1^2 a_2\right)\left(1+a_2^2 a_3\right)...\left(1+a_{n-1}^2 a_n\right)\left(1+a_n^2 a_1\right)$$

Chứng minh

Sử dụng bất đẳng thức ***Holder*** với $p=\frac{2}{3}; q=\frac{1}{3}$. Ta có:

$$\times\begin{cases}\left(1+a_1^3\right)^{2/3}\left(1+a_2^3\right)^{1/3} \ge 1+\left(a_1^3\right)^{2/3}\left(a_2^3\right)^{1/3} = 1+a_1^2 a_2\\ \left(1+a_2^3\right)^{2/3}\left(1+a_3^3\right)^{1/3} \ge 1+\left(a_2^3\right)^{2/3}\left(a_3^3\right)^{1/3} = 1+a_2^2 a_3\\ \dots\dots\dots \ge \dots\dots\dots\\ \left(1+a_{n-1}^3\right)^{2/3}\left(1+a_n^3\right)^{1/3} \ge 1+\left(a_{n-1}^3\right)^{2/3}\left(a_n^3\right)^{1/3} = 1+a_{n-1}^2 a_n\\ \left(1+a_n^3\right)^{2/3}\left(1+a_1^3\right)^{1/3} \ge 1+\left(a_n^3\right)^{2/3}\left(a_1^3\right)^{1/3} = 1+a_n^2 a_1\end{cases}$$

$$\Rightarrow \left(1+a_1^3\right)\left(1+a_2^3\right)...\left(1+a_n^3\right) \ge \left(1+a_1^2 a_2\right)\left(1+a_2^2 a_3\right)...\left(1+a_{n-1}^2 a_n\right)\left(1+a_n^2 a_1\right)$$

Bài 2. Cho các số $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$\left(1+b^3+c^3\right)\left(1+c^3+a^3\right)\left(1+a^3+b^3\right) \ge \left(1+a^2b+b^2c\right)\left(1+b^2c+c^2a\right)\left(1+c^2a+a^2b\right) \quad (1)$$

Chứng minh

Sử dụng bất đẳng thức ***Holder*** với $p=\frac{2}{3}; q=\frac{1}{3}$. Ta có:

$$\times\begin{cases}\left(1+b^3+c^3\right)^{2/3}\left(1+c^3+a^3\right)^{1/3} \ge 1+b^2c+c^2a\\ \left(1+c^3+a^3\right)^{2/3}\left(1+a^3+b^3\right)^{1/3} \ge 1+c^2a+a^2b\\ \left(1+a^3+b^3\right)^{2/3}\left(1+b^3+c^3\right)^{1/3} \ge 1+a^2b+b^2c\end{cases}$$

$$\Rightarrow \left(1+b^3+c^3\right)\left(1+c^3+a^3\right)\left(1+a^3+b^3\right) \ge \left(1+a^2b+b^2c\right)\left(1+b^2c+c^2a\right)\left(1+c^2a+a^2b\right)$$

Bài 3. CMR: $\left(1+\frac{a^3}{b^3}\right)\left(1+\frac{b^3}{c^3}\right)\left(1+\frac{c^3}{a^3}\right) \ge \left(1+\frac{a^2}{bc}\right)\left(1+\frac{b^2}{ca}\right)\left(1+\frac{c^2}{ab}\right)\ \forall a,b,c>0\ (1)$

Chứng minh

$$(1) \Leftrightarrow \left(a^3+b^3\right)\left(b^3+c^3\right)\left(c^3+a^3\right) \ge abc\left(a^2+bc\right)\left(b^2+ca\right)\left(c^2+ab\right)$$

$$\times\begin{cases}\left(a^3+b^3\right)^{2/3}\left(b^3+c^3\right)^{1/3} \ge a^2b+b^2c = b\left(a^2+bc\right)\\ \left(b^3+c^3\right)^{2/3}\left(c^3+a^3\right)^{1/3} \ge b^2c+c^2a = c\left(b^2+ca\right)\\ \left(c^3+a^3\right)^{2/3}\left(a^3+b^3\right)^{1/3} \ge c^2a+a^2b = a\left(c^2+ab\right)\end{cases}$$

$$\Rightarrow \left(a^3+b^3\right)\left(b^3+c^3\right)\left(c^3+a^3\right) \ge abc\left(a^2+bc\right)\left(b^2+ca\right)\left(c^2+ab\right)$$

Bài 4. Cho các số $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$\left(1+\frac{b^3c^3}{a^3}\right)\left(1+\frac{c^3a^3}{b^3}\right)\left(1+\frac{a^3b^3}{c^3}\right)\ge\left(1+\frac{bc^3}{a}\right)\left(1+\frac{ca^3}{b}\right)\left(1+\frac{ab^3}{c}\right) \quad (1)$$

Chứng minh

$$(1) \Leftrightarrow (a^3+b^3c^3)(b^3+c^3a^3)(c^3+a^3b^3)\ge a^2b^2c^2(a+bc^3)(b+ca^3)(c+ab^3)$$

Sử dụng bất đẳng thức ***Holder*** ta có:

$$\times\begin{cases}(a^3+b^3c^3)^{2/3}(b^3+c^3a^3)^{1/3}\ge a^2b+b^2c^3a=ab(a+bc^3)\\(b^3+c^3a^3)^{2/3}(c^3+a^3b^3)^{1/3}\ge b^2c+c^2a^3b=bc(b+ca^3)\\(c^3+a^3b^3)^{2/3}(a^3+b^3c^3)^{1/3}\ge c^2a+a^2b^3c=ca(c+ab^3)\end{cases}$$

$$\Rightarrow (a^3+b^3c^3)(b^3+c^3a^3)(c^3+a^3b^3)\ge a^2b^2c^2(a+bc^3)(b+ca^3)(c+ab^3)$$

$$\Leftrightarrow \left(1+\frac{b^3c^3}{a^3}\right)\left(1+\frac{c^3a^3}{b^3}\right)\left(1+\frac{a^3b^3}{c^3}\right)\ge\left(1+\frac{bc^3}{a}\right)\left(1+\frac{ca^3}{b}\right)\left(1+\frac{ab^3}{c}\right) \text{ (đpcm)}$$

Bài 5. Cho các số $a, b, c\in\mathbb{R}$. Chứng minh rằng:

$$(1+a^7)(1+b^7)(1+c^7)\ge(1+a^4b^2c)(1+b^4c^2a)(1+c^4a^2b) \quad (1)$$

Chứng minh

Sử dụng mở rộng 2 của bất đẳng thức ***Holder*** ta có:

$$\times\begin{cases}(1+a^7)^{4/7}(1+b^7)^{2/7}(1+c^7)^{1/7}\ge 1+a^4b^2c\\(1+b^7)^{4/7}(1+c^7)^{2/7}(1+a^7)^{1/7}\ge 1+b^4c^2a\\(1+c^7)^{4/7}(1+a^7)^{2/7}(1+b^7)^{1/7}\ge 1+c^4a^2b\end{cases}$$

$$\Rightarrow (1+a^7)(1+b^7)(1+c^7)\ge(1+a^4b^2c)(1+b^4c^2a)(1+c^4a^2b)$$

Bài 6. Cho $x, y, z\ge 0$ và $x+y+z=3$, tìm giá trị nhỏ nhất của $x^4+2y^4+3z^4$

Giải

Xét $a,b,c>0$ và $a+b+c=3$. Sử dụng bất đẳng thức ***Holder*** ta có:

$$(x^4+2y^4+3z^4)(a^4+2b^4+3c^4)^3\ge(a^3x+2b^3y+3c^3z)^4$$

Chọn a,b,c sao cho $a^3=2b^3=3c^3 \Leftrightarrow a=k, b=\frac{k}{\sqrt[3]{2}}, c=\frac{k}{\sqrt[3]{3}}\ (k>0)$

Khi đó $x^4+2y^4+3z^4\ge\frac{(a^3x+2b^3y+3c^3z)^4}{(a^4+2b^4+3c^4)^3}\ge\frac{k^{12}(x+y+z)^4}{k^9(a+b+c)^3}=3k^3$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}\Leftrightarrow\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=\frac{x+y+z}{a+b+c}=1$

Từ $a+b+c=3$ suy ra $k+\frac{k}{\sqrt[3]{2}}+\frac{k}{\sqrt[3]{3}}=3 \Leftrightarrow k=\dfrac{3}{1+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}}$

Vậy, $\text{Min}\left(x^4+2y^4+3z^4\right)=3k^3$ với $k=\dfrac{3}{1+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}}$ và $x=k, y=\frac{k}{\sqrt[3]{2}}, z=\frac{k}{\sqrt[3]{3}}$

Bài 7. Chứng minh rằng: $a\sqrt{\frac{a}{b+c}}+b\sqrt{\frac{b}{c+a}}+c\sqrt{\frac{c}{a+b}}\ge\frac{a+b+c}{\sqrt{2}}$, $\forall a,b,c\ge 0$

Chứng minh

Sử dụng bất đẳng thức ***Holder*** ta có:

$$\left(a\sqrt{\frac{a}{b+c}}+b\sqrt{\frac{b}{c+a}}+c\sqrt{\frac{c}{a+b}}\right)^2(b+c+a+c+a+b)\ge(a+b+c)^3$$

$$\Leftrightarrow a\sqrt{\frac{a}{b+c}}+b\sqrt{\frac{b}{c+a}}+c\sqrt{\frac{c}{a+b}}\ge\frac{a+b+c}{\sqrt{2}} \text{ (đpcm)}$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$

Bài 8. Chứng minh rằng: $\sqrt[3]{a.\frac{a+b}{2}\cdot\frac{a+b+c}{3}}\ge\frac{a+\sqrt{ab}+\sqrt[3]{abc}}{3}$, $\forall a,b,c\ge 0$

Chứng minh

Sử dụng bất đẳng thức ***Holder*** ta có:

$$a.\frac{a+b}{2}\cdot\frac{a+b+c}{3}\ge\frac{(a+a+a)\left(a+\sqrt{ab}+b\right)(a+b+c)}{27}\ge\left(\frac{a+\sqrt{ab}+\sqrt[3]{abc}}{3}\right)^3$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{a.\frac{a+b}{2}\cdot\frac{a+b+c}{3}}\ge\frac{a+\sqrt{ab}+\sqrt[3]{abc}}{3} \text{ (đpcm)}$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$

Bài 9. [USAMO – 2004] Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng:

$$\left(a^5-a^2+3\right)\left(b^5-b^2+3\right)\left(c^5-c^2+3\right)\ge(a+b+c)^3$$

Chứng minh

Bước 1: Ta có $\left(x^5-x^2+3\right)-\left(x^3+2\right)=\left(x^3-1\right)\left(x^2-1\right)\ge 0\ \forall x\ge 0$

$$\Rightarrow\left(a^5-a^2+3\right)\left(b^5-b^2+3\right)\left(c^5-c^2+3\right)\ge\left(a^3+2\right)\left(b^3+2\right)\left(c^3+2\right)$$

Bước 2: Mặt khác, sử dụng bất đẳng thức ***Holder*** ta có:

$$\left(a^3+2\right)\left(b^3+2\right)\left(c^3+2\right)=\left(a^3+1+1\right)\left(1+b^3+1\right)\left(1+1+c^3\right)\ge(a+b+c)^3$$

$$\Rightarrow\left(a^5-a^2+3\right)\left(b^5-b^2+3\right)\left(c^5-c^2+3\right)\ge(a+b+c)^3 \text{ (đpcm)}$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$

Bài 10. Chứng minh: $3\left(x^2-x+1\right)\left(y^2-y+1\right)\left(z^2-z+1\right)\geq x^2y^2z^2+xyz+1$, $\forall x,y,z\geq 0$

Chứng minh

• ***Bổ đề:*** $3\left(a^2-a+1\right)^3\geq a^6+a^3+1,\ \forall a\geq 0$

• ***Chứng minh:*** $3\left(a^2-a+1\right)^3\geq a^6+a^3+1\Leftrightarrow (a-1)^4\left(2a^2-a+2\right)\geq 0$

Điều này hiển nhiên đúng, suy ra bổ đề được chứng minh.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a=1$

• ***Áp dụng:*** Sử dụng bổ đề ta có:

$$\left(3\left(x^2-x+1\right)\left(y^2-y+1\right)\left(z^2-z+1\right)\right)^3=3\left(x^2-x+1\right)^3 3\left(y^2-y+1\right)^3 3\left(z^2-z+1\right)^3$$

$$\geq\left(x^6+x^3+1\right)\left(y^6+y^3+1\right)\left(z^6+z^3+1\right)\geq\left(x^2y^2z^2+xyz+1\right)^3$$

$$\Leftrightarrow 3\left(x^2-x+1\right)\left(y^2-y+1\right)\left(z^2-z+1\right)\geq x^2y^2z^2+xyz+1 \text{ (đpcm)}$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z=1$

Bài 11. Chứng minh rằng: $\dfrac{a}{\sqrt{a+2b}}+\dfrac{b}{\sqrt{b+2c}}+\dfrac{c}{\sqrt{c+2a}}\geq\sqrt{a+b+c}$, $\forall a,b,c\geq 0$

Chứng minh

Sử dụng bất đẳng thức ***Holder*** ta có:

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a+2b}}+\frac{b}{\sqrt{b+2c}}+\frac{c}{\sqrt{c+2a}}\right)^2\left[a(a+2b)+b(b+2c)+c(c+2a)\right]\geq(a+b+c)^3$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{a}{\sqrt{a+2b}}+\frac{b}{\sqrt{b+2c}}+\frac{c}{\sqrt{c+2a}}\right)^2\geq$$

$$\geq\frac{(a+b+c)^3}{a(a+2b)+b(b+2c)+c(c+2a)}=\frac{(a+b+c)^3}{(a+b+c)^2}=a+b+c$$

Như vậy bất đẳng thức được chứng minh. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c>0$ hoặc (a,b,c) là một hoán vị của $(x,0,0)$ với $x>0$.

Bài 12. [IMO 2001] Chứng minh: $\dfrac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\dfrac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\dfrac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}\geq 1$, $\forall a,b,c\geq 0$

Chứng minh

Sử dụng bất đẳng thức ***Holder*** ta có:

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}\right)^2\left[a(a^2+8bc)+b(b^2+8ca)+c(c^2+8ab)\right]$$

$$\geq \left[\sum_{cyc}\sqrt[3]{\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}\cdot a(a^2+8bc)}\right]^3 = (a+b+c)^3$$

Do $(a+b+c)^3-\left[a(a^2+8bc)+b(b^2+8ca)+c(c^2+8ab)\right]=3c(a-b)^2+3b(c-a)^2+3c(a-b)^2\geq 0$

nên $(a+b+c)^3\geq a(a^2+8bc)+b(b^2+8ca)+c(c^2+8ab)$.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c>0$ hoặc (a,b,c) là một hoán vị của $(x,0,0)$ với $x>0$.

Bài 13. Cho $a,b,c\geq 0$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{a^3+abc}{b+c}}+\sqrt{\frac{b^3+abc}{c+a}}+\sqrt{\frac{c^3+abc}{a+b}}\geq a+b+c$$

Chứng minh

Sử dụng bất đẳng thức ***Holder*** ta có:

$$\left(\sum_{cyc}\sqrt{\frac{a^3+abc}{b+c}}\right)\left(\sum_{cyc}\sqrt{\frac{a^3(b+c)}{a^2+bc}}\right)(a+b+c)\geq(a+b+c)^3$$

Bất đẳng thức sẽ được chứng minh nếu ta chứng minh được

$$\sqrt{\frac{a^3(b+c)}{a^2+bc}}+\sqrt{\frac{b^3(c+a)}{b^2+ca}}+\sqrt{\frac{c^3(a+b)}{c^2+ab}}\leq a+b+c$$

Sử dụng bất đẳng thức ***Cauchy – Schwarz*** ta có:

$$\sum_{cyc}\sqrt{\frac{a^3(b+c)}{a^2+bc}}\leq\sqrt{(a+b+c)\left(\frac{a^2(b+c)}{a^2+bc}+\frac{b^2(c+a)}{b^2+ac}+\frac{c^2(a+b)}{c^2+ab}\right)}$$

Ta sẽ chứng minh $\dfrac{a^2(b+c)}{a^2+bc}+\dfrac{b^2(c+a)}{b^2+ac}+\dfrac{c^2(a+b)}{c^2+ab}\leq a+b+c$

$$\Leftrightarrow\frac{a(a-b)(a-c)}{a^2+bc}+\frac{b(b-c)(b-a)}{b^2+ca}+\frac{c(c-a)(c-b)}{c^2+ab}\geq 0$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a\geq b\geq c$ ta có: $\dfrac{c(c-a)(c-b)}{c^2+ab}\geq 0$

Và $\dfrac{a(a-b)(a-c)}{a^2+bc}+\dfrac{b(b-c)(b-a)}{b^2+ca}\geq 0\Leftrightarrow(a-b)(a+b-c)\geq 0$ (luôn đúng) $\Rightarrow$ đpcm

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$ hoặc $a=b,c=0$ hoặc các hoán vị.

Bài 14. Chứng minh rằng: $\dfrac{a^2}{b}+\dfrac{b^2}{c}+\dfrac{c^2}{a}\geq 3\cdot\sqrt[4]{\dfrac{a^4+b^4+c^4}{3}}$, $\forall a,b,c>0$

Chứng minh

Sử dụng bất đẳng thức ***Holder*** ta có:

$$\left(\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\right)\left(\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\right)(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)\geq(a^2+b^2+c^2)^3$$

Ta sẽ chứng minh $(a^2+b^2+c^2)^3\geq 3(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2)\sqrt{3(a^4+b^4+c^4)}$

Đặt $x=a^2, y=b^2, z=c^2$. Ta sẽ chứng minh:

$$(x+y+z)^3 \ge 3(xy+yz+zx)\sqrt{3(x^2+y^2+z^2)} \Leftrightarrow \frac{(x+y+z)^2}{xy+yz+zx} \ge \frac{3\sqrt{3(x^2+y^2+z^2)}}{x+y+z}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2}{2(xy+yz+zx)} \ge \frac{3\left((x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\right)}{(x+y+z)\left(x+y+z+\sqrt{3(x^2+y^2+z^2)}\right)}$$

$$\Leftrightarrow 6(xy+yz+zx) \le (x+y+z)\left(x+y+z+\sqrt{3(x^2+y^2+z^2)}\right)$$

Dễ thấy bất đẳng thức này đúng vì ta có:

$$(x+y+z)\left(x+y+z+\sqrt{3(x^2+y^2+z^2)}\right) \ge 2(x+y+z)^2 \ge 6(xy+yz+zx)$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z \Leftrightarrow a=b=c$

Bài 15. Cho $a,b,c \ge 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b} \ge \frac{3}{2}\sqrt[4]{\frac{a^4+b^4+c^4}{3}}$$

Chứng minh

Chuẩn hóa $a^4+b^4+c^4=3$, ta cần chứng minh $\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b} \ge \frac{3}{2}$.

Sử dụng bất đẳng thức ***Holder*** tao có:

$$\left(\sum_{cyc}\frac{a^2}{b+c}\right)\left(\sum_{cyc}\frac{a^2}{b+c}\right)\left(\sum a^2(b+c)^2\right) \ge \left(\sum_{cyc} a^2\right)^3$$

Suy ra bất đẳng thức được chứng minh nếu ta chứng minh được:

$$(a^2+b^2+c^2)^3 \ge \frac{9}{4}\left(a^2(b+c)^2+b^2(c+a)^2+c^2(a+b)^2\right)$$

Mặt khác, theo một kết quả đã được chứng minh ở bài 14 thì

$$(a^2+b^2+c^2)^3 \ge 9(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$$

Cuối cùng ta chỉ cần chỉ ra

$$4(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2) \ge \left(a^2(b+c)^2+b^2(c+a)^2+c^2(a+b)^2\right)$$

$\Leftrightarrow a^2(b-c)^2+b^2(c-a)^2+c^2(a-b)^2 \ge 0$ luôn đúng $\Rightarrow$ (đpcm)

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

II. ĐIỂM RƠI HOLDER VỚI CÁC BIỂU THỨC CHỨA BIẾN

Bài 1. Cho $a, b, c \geq 0$ thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{a}{1+b+bc}}+\sqrt{\frac{b}{1+c+ca}}+\sqrt{\frac{c}{1+a+ab}} \geq \sqrt{3} \quad (1)$$

Phân tích và tìm tòi lời giải

Phân tích: Chúng ta sẽ sử dụng bất đẳng thức ***Holder*** với các tham số giả định p_1, p_2, p_3 để sau khi đánh giá sẽ loại bỏ được căn thức và mẫu thức:

$$[VT(1)]^2\left[a^2(1+b+bc)p_1^3+b^2(1+c+ca)p_2^3+c^2(1+a+ab)p_1^3\right] \geq (ap_1+bp_2+cp_3)^3$$

Ta thấy rằng p_1, p_2, p_3 không thể là những tham số cố định mà chúng phải là tham số chạy theo a, b, c và trong mọi trường hợp, tham số chạy đơn giản nhất luôn là những hàm tuyến tính theo a, b, c. Vì thế, ta đặt $p_1=ma+nb+pc, p_2=mb+nc+pa$ và $p_3=mc+na+pb$. Khi đó sử dụng bất đẳng thức ***Holder*** ta có:

$$[VT(1)]^2\left(\sum_{cyc} a^2(1+b+bc)(ma+nb+pc)^3\right) \geq$$

$$\geq\left[a(ma+nb+pc)+b(mb+nc+pa)+c(mc+na+pb)\right]^3$$
$$=\left[m(a^2+b^2+c^2)+(n+p)(ab+bc+ca)\right]^3$$

Chọn $n+p=2m$ khi đó ta có: $[VT(1)]^2 \geq \dfrac{m^3(a+b+c)^6}{\sum\limits_{cyc} a^2(1+b+bc)(ma+nb+pc)^3}$

Bây giờ chúng ta hãy chú ý đến đẳng thức của bất đẳng thức đã cho, có thể thấy nó đạt được khi $a=b=c=1$ và $a=3, b=c=0$ (đây chính là một điều thú vị và làm nên sự khó khăn của bài toán). Ở trên, đẳng thức xảy ra khi

$$\frac{\sqrt{\frac{a}{1+b+bc}}}{a^2(1+b+bc)(ma+nb+pc)^3}=\frac{\sqrt{\frac{b}{1+c+ca}}}{b^2(1+c+ca)(mb+nc+pa)^3}=\frac{\sqrt{\frac{c}{1+a+ab}}}{c^2(1+a+ab)(mc+na+pb)^3}$$

Ta chọn được $m=2, n=1, p=3$. Khi đó, ta có lời giải như sau:

Giải: Sử dụng bất đẳng thức ***Holder*** ta có:

$$\left(\sum_{cyc}\sqrt{\frac{a}{1+b+bc}}\right)^2\left(\sum_{cyc} a^2(1+b+bc)(2a+b+3c)^3\right) \geq \left(\sum_{cyc} a(2a+b+3c)\right)^3=8(a+b+c)^6$$

Ta sẽ chứng minh: $8(a+b+c)^6 \geq 3\sum\limits_{cyc} a^2(1+b+bc)(2a+b+3c)^3$

$$\Leftrightarrow 8(a+b+c)^7 \ge \sum_{cyc} a^2\left[(a+b+c)^2+3b(a+b+c)+9bc\right](2a+b+3c)^3 \quad (2)$$

Bằng khai triển trực tiếp, ta có

$$\frac{VT(2)-VP(2)}{a+b+c} = 4\sum_{cyc} ab(a^4+b^4)+26\sum_{cyc} a^2b^4+39\sum_{cyc} a^4b^2+54\sum_{cyc} a^3b^3+261a^2b^2c^2$$
$$-24\sum_{cyc} a^4bc-93\sum_{cyc} a^3b^2c-97\sum_{cyc} a^2b^3c$$

Mặt khác từ bất đẳng thức ***AM – GM*** và ***Schur***, ta có thể dễ dàng chứng minh được

$$4\sum_{cyc} ab(a^4+b^4)+26\sum_{cyc} a^2b^4+39\sum_{cyc} a^4b^2+54\sum_{cyc} a^3b^3+261a^2b^2c^2 \ge$$

$$24\sum_{cyc} a^4bc+93\sum_{cyc} a^3b^2c+97\sum_{cyc} a^2b^3c$$

Như vậy (2) được chứng minh từ đó suy ra (1) được chứng minh.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$ hoặc $a=3, b=c=0$ và các hoán vị.

Bài 2. Cho $a; b, c \ge 0$. Chứng minh rằng: $\dfrac{a}{\sqrt{b^2+3c^2}}+\dfrac{b}{\sqrt{c^2+3a^2}}+\dfrac{c}{\sqrt{a^2+3b^2}} \ge \dfrac{3}{2}$ (1)

Phân tích và tìm tòi lời giải

Phân tích: Sử dụng bất đẳng thức ***Holder*** ta có:

$$[VT(1)]^2\left(\sum_{cyc} a(b^2+3c^2)(ma+nb+pc)^3\right) \ge$$

$$\ge\left[a(ma+nb+pc)+b(mb+nc+pa)+c(mc+na+pb)\right]^3$$
$$=\left[m(a^2+b^2+c^2)+(n+p)(ab+bc+ca)\right]^3$$

Chọn $\boxed{m=2(n+p)}$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

$$\frac{\dfrac{a}{\sqrt{b^2+3c^2}}}{a(b^2+3c^2)(ma+nb+pc)^3}=\frac{\dfrac{b}{\sqrt{c^2+3a^2}}}{b(c^2+3a^2)(mb+nc+pa)^3}=\frac{\dfrac{c}{\sqrt{a^2+3b^2}}}{c(a^2+3b^2)(mc+na+pb)^3}$$

Đây là một bài toán khá chặt nên ta phải có gắng chọn m, n, p cho thật sát. Như vậy ta mới có thể đi đến một lời giải đúng được. Đối với bất đẳng thức đã cho, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$ nhưng có một trường hợp "khá nhạy cảm" là khi một trong ba biến, chẳng hạn $c=0$ thì giá trị của biểu thức bên trái nhỏ nhất khi $a=1, b=\sqrt[4]{3}$, vì vậy tốt nhất là ta nên chọn làm sao để cả 2 đẳng thức trên cùng xảy ra đối với bất đẳng thức trung gian.

Nhưng rõ ràng là điều kiện đẳng thức trên hiển nhiên xảy ra với $a=b=c$, còn với $a=1, b=\sqrt[4]{3}, c=0$ thì ta có $m=\dfrac{2\cdot\sqrt[4]{3}\left(1+\sqrt{3}\right)}{4+\sqrt[4]{27}}n$.

Chọn $n=1$ thì $m=\dfrac{2\cdot\sqrt[4]{3}\left(1+\sqrt{3}\right)}{4+\sqrt[4]{27}}\approx 1.145179403$. Nhưng để đảm bảo cho các biểu thức mà ta đã sử dụng bất đẳng thức ***Holder*** là không âm, ta phải chọn làm sao cho $p=\dfrac{m-2n}{2}\ge 0$ nên ta không thể lấy $m=\dfrac{2\cdot\sqrt[4]{3}\left(1+\sqrt{3}\right)}{4+\sqrt[4]{27}}$, nhưng từ đây ta có thể thấy giá trị nhỏ nhất của m đảm bảo được điều này là $m=2$. Khi đó $p=0$. Từ đó, ta có lời giải:

Giải: Sử dụng bất đẳng thức ***Holder*** ta có:

$$\left(\sum_{cyc}\frac{a}{\sqrt{b^2+3c^2}}\right)^2\left(\sum_{cyc}a(b^2+3c^2)(2a+b)^3\right)\ge\left(2\sum_{cyc}a^2+\sum_{cyc}ab\right)^3.$$

Bất đẳng thức (1) được chứng minh nếu ta chứng minh được bất đẳng thức:

$$4\left(2\sum_{cyc}a^2+\sum_{cyc}ab\right)^3\ge 9\sum_{cyc}a(b^2+3c^2)(2a+b)^3 \quad (2)$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $c=\min\{a,b,c\}$. Đặt $a=c+x, b=c+y\ (x,y\ge 0)$

Khi đó, bất đẳng thức (2) tương đương $Ac^4+Bc^3+Dc^2+Ec+F\ge 0$, trong đó

$$A=810(x^2-xy+y^2)\ge 0$$

$$B=27\left(53x^3+17x^2y-56xy^2+53y^3\right)=27\left[53x^3+x^2y+4y^3+y(4x-7y)^2\right]\ge 0$$

$$D=9\left(101x^4+146x^3y-111x^2y^2-73xy^3+101y^4\right)=\frac{909\left(2x^2+xy-2y^2\right)^2+9xy\left(180x^2+263xy+112y^2\right)}{4}\ge 0$$

$$E=9\left(31x^5+48x^4y+33x^3y^2-88x^2y^3-xy^4+31y^5\right)$$

$$=9\left[31x^5+3y\left(4x^2+xy-3y^2\right)^2+xy^2(3x-4y)^2+y^3\left(5x^2+xy+4y^2\right)\right]\ge 0$$

$$F=32x^6+48x^5y+48x^4y^2-8x^3y^3-150x^2y^4+39xy^5+32y^6$$

$$=2\left(4x^3+3x^2y-4y^3\right)^2+xy^2\left(30x^3+56x^2y-102xy^2+39y^3\right)$$

$$=2\left(4x^3+3x^2y-4y^3\right)^2+\frac{xy^2}{x+y}\left[\left(5x^2+6xy-6y^2\right)^2+5x^4+26x^3y-22x^2y^2+9xy^3+3y^4\right]\ge 0$$

Sử dụng bất đẳng thức ***AM – GM*** ta có:

$$5x^4+26x^3y-22x^2y^2+9xy^3+3y^4\ge 26x^3y-16x^2y^2+9xy^3=xy\left(26x^2-16xy+9y^2\right)\ge 0$$

Như vậy (2) đúng suy ra (1) đúng. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c\ge 0$

Bài 3. Cho $a, b, c \ge 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{\sqrt{2a^2+ab+bc}}+\frac{1}{\sqrt{2b^2+bc+ca}}+\frac{1}{\sqrt{2c^2+ca+ab}}\ge\frac{9}{2(a+b+c)}\quad(1)$$

Phân tích và tìm tòi lời giải

Phân tích: Sử dụng bất đẳng thức ***Holder*** ta có:

$$\left(\sum_{cyc}\frac{1}{\sqrt{2a^2+ab+bc}}\right)^2\left(\sum_{cyc}(2a^2+ab+bc)(ma+nb+pc)^3\right)\ge(m+n+p)^3(a+b+c)^3$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow$

$$\frac{1}{(ma+nb+pc)\sqrt{2a^2+ab+bc}}=\frac{1}{(mb+nc+pa)\sqrt{2b^2+bc+ca}}=\frac{1}{(mc+na+pb)\sqrt{2c^2+ca+ab}}$$

Ở bất đẳng thức đã cho, ngoài trường hợp đẳng thức là $a=b=c$ còn có một trường hợp đáng lưu tâm là $a=1.84, b=1, c=0$. Do đó, ta nên chọn làm sao đăng thức ở bất đẳng thức trung gian xảy ra tại cả 2 điểm này, từ đây với cách tính xấp xỉ, ta có thể chọn được $m=1$, $n=3$, $p=4$. Như vậy ta có lời giải:

Giải: Sử dụng bất đăng thức ***Holder*** ta có:

$$\left(\sum_{cyc}\frac{1}{\sqrt{2a^2+ab+bc}}\right)^2\left(\sum_{cyc}(2a^2+ab+bc)(a+3b+4c)^3\right)\ge512(a+b+c)^3$$

Bất đẳng thức (1) được chứng minh nếu ta chứng minh được bất đẳng thức

$$512(a+b+c)^5\ge\frac{81}{4}\sum_{cyc}(2a^2+ab+bc)(a+3b+4c)^3$$

$$\Leftrightarrow1886\sum a^5+6514\sum_{cyc}a^4b+925\sum_{cyc}ab^4+8236\sum_{cyc}a^3bc\ge5521\sum_{cyc}a^2b^3+3739\sum_{cyc}a^3b^2+8301\sum_{cyc}a^2b^2c$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a=\min\{a,b,c\}$. Đặt $b=a+x, c=a+y\ (x,y\ge0)$

Khi đó, bất đẳng thức trên trở thành $Aa^3+Ba^2+Ca+D\ge0$, trong đó

$A=34560(x^2-xy+y^2)\ge0$; $B=47592x^3-108x^2y-38988xy^2+45792y^3\ge0$

$C=16869x^4+26814x^3y-36081x^2y^2+894xy^3+16869y^4\ge0$

$D=1886x^5+6514x^4y-3739x^3y^2-5521x^2y^3+925xy^4+1886y^5\ge0$

Vậy bất đẳng thức (1) được chứng minh. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

Bài 4. Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh:

$$\sqrt{\frac{a^3}{a^2+3b^2}}+\sqrt{\frac{b^3}{b^2+3c^2}}+\sqrt{\frac{c^3}{c^2+3a^2}}\ge\frac{3}{2}\quad(1)$$

Chứng minh

Bổ đề: $a^6+b^6+c^6-3a^2b^2c^2\ge4(a^2-b^2)(b^2-c^2)(c^2-a^2)=4\sum_{cyc}a^2b^4-4\sum_{cyc}a^4b^2$

Sử dụng bất đẳng thức ***Holder*** ta có:

$$\left(\sum_{cyc}\sqrt{\frac{a^3}{a^2+3b^2}}\right)^2\left(\sum_{cyc}(a^2+3b^2)(a+c)^3\right)\ge\left(\sum_{cyc}a^2+\sum_{cyc}ab\right)^3$$

Bất đẳng thức (1) được chứng minh nếu ta chứng minh được bất đẳng thức

$$\left(\sum_{cyc}a^2+\sum_{cyc}ab\right)^3\ge\frac{9}{4}\sum_{cyc}(a^2+3b^2)(a+c)^3$$

$$\Leftrightarrow 4\left(\sum_{cyc}a^2+\sum_{cyc}ab\right)^3\ge 3(a+b+c)\sum_{cyc}(a^2+3b^2)(a+c)^3$$

$$\Leftrightarrow\sum_{cyc}a^6+9\sum_{cyc}a^5b+12\sum_{cyc}a^4b^2-3\sum_{cyc}a^2b^4-2\sum_{cyc}a^3b^3+27\sum_{cyc}a^4bc-12\sum_{cyc}a^2b^3c-6\sum_{cyc}a^3b^2c-78a^2b^2c^2\ge 0$$

Sử dụng bổ đề, ta chỉ cần chứng minh:

$$9\sum_{cyc}a^5b+8\sum_{cyc}a^4b^2+\sum_{cyc}a^2b^4-2\sum_{cyc}a^3b^3+27\sum_{cyc}a^4bc-12\sum_{cyc}a^2b^3c-6\sum_{cyc}a^3b^2c-75a^2b^2c^2\ge 0$$

$$9\sum_{cyc}a^5b+7\sum_{cyc}a^4b^2+27\sum_{cyc}a^4bc-12\sum_{cyc}a^2b^3c-6\sum_{cyc}a^3b^2c-75a^2b^2c^2\ge 0$$

Mặt khác, sử dụng bất đẳng thức ***AM – GM*** ta có $\sum_{cyc}a^4b^2+\sum_{cyc}a^2b^4-2\sum_{cyc}a^3b^3\ge 0$

Vậy bất đẳng thức (1) được chứng minh. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$.

Bài 5. Cho $a,b,c\ge 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{\sqrt{b^2+15ca}}+\frac{b}{\sqrt{c^2+15ab}}+\frac{c}{\sqrt{a^2+15bc}}\ge\frac{3}{4}\ (1)$$

Chứng minh

Sử dụng bất đẳng thức ***Holder*** ta có:

$$\left(\sum_{cyc}\frac{a}{\sqrt{b^2+15ca}}\right)^2\left(\sum_{cyc}a(a+2b)^3(b^2+15ca)\right)\ge(a+b+c)^6$$

Bất đẳng thức (1) được chứng minh nếu ta chứng minh được bất đẳng thức:

$$16(a+b+c)^6\ge 9\sum_{cyc}a(a+2b)^3(b^2+15ca)$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a=\min\{a,b,c\}$. Đặt $b=a+x, c=a+y\ (x,y\ge 0)$

Khi đó, bất đẳng thức trên trở thành $Aa^4+Ba^3+Ca^2+Da+E\ge 0$, trong đó

$A=567(x^2-xy+y^2)\ge 0$; $B=54(x^3+41x^2y-2x^2y+y^3)\ge 0$

$C=18(11x^4+47x^3y+204x^2y^2-82xy^3+11y^4)\ge 0$

$D=9(9x^5+68x^4y+118x^3y^2+134x^2y^3-69xy^4+9y^5)\ge 0$

$E=16x^6+96x^5y+231x^4y^2+266x^3y^3+132x^2y^4-111xy^5+16y^6\ge 0$

Vậy bất đẳng thức (1) được chứng minh. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c\ge 0$.

Bài 6. Cho $a,b,c\ge 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{\sqrt{4a^2+bc}}+\frac{1}{\sqrt{4b^2+ca}}+\frac{1}{\sqrt{4c^2+ab}}\ge\frac{4}{a+b+c}$$

Chứng minh

Sử dụng bất đẳng thức ***Holder*** ta có:

$$\left(\sum_{cyc}\frac{1}{\sqrt{4a^2+bc}}\right)^2\left(\sum_{cyc}(b+c)^3(4a^2+bc)\right)\ge 8(a+b+c)^3$$

Bất đẳng thức (1) được chứng minh nếu ta chứng minh được bất đẳng thức:

$$(a+b+c)^5\ge 2\sum_{cyc}(b+c)^3(4a^2+bc)$$

$$\Leftrightarrow\sum_{cyc}a^3(a-b)(a-c)+4\sum_{cyc}ab(a-b)(a^2-b^2)+abc\left(19\sum_{cyc}a^2-18\sum_{cyc}ab\right)\ge 0$$

Bất đẳng thức cuối hiển nhiên đúng nên bất đẳng thức được chứng minh

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a=b, c=0$ và các hoán vị.

Bài 7. Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2-bc}{\sqrt{a^2+2b^2+3c^2}}+\frac{b^2-ca}{\sqrt{b^2+2c^2+3a^2}}+\frac{c^2-ab}{\sqrt{c^2+2a^2+3b^2}}\ge 0\quad(1)$$

Chứng minh

Sử dụng bất đẳng thức ***Holder*** ta có: $8.\text{VT}(1)=\sum_{cyc}\left(\frac{8(a^2-bc)}{\sqrt{6(a^2+2b^2+3c^2)}}+b+c\right)-2\sum_{cyc}a$

$$=\sum_{cyc}\frac{8(a^2-bc)+(b+c)\sqrt{6(a^2+2b^2+3c^2)}}{\sqrt{6(a^2+2b^2+3c^2)}}-2\sum_{cyc}a\ge\sum_{cyc}\frac{8(a^2-bc)+(b+c)(a+2b+3c)}{\sqrt{6(a^2+2b^2+3c^2)}}-2\sum_{cyc}a$$

$$=\sum_{cyc}\frac{8a^2+ab+bc+ca+c^2}{\sqrt{6(a^2+2b^2+3c^2)}}+2\sum_{cyc}\frac{(b-c)^2}{\sqrt{6(a^2+2b^2+3c^2)}}-2\sum_{cyc}a\ge\sum_{cyc}\frac{8a^2+ab+bc+ca+c^2}{\sqrt{6(a^2+2b^2+3c^2)}}-2\sum_{cyc}a$$

Bất đẳng thức (1) được chứng minh nếu ta chứng minh được bất đẳng thức:

$$\sum_{cyc}\frac{8a^2+ab+bc+ca+c^2}{\sqrt{a^2+2b^2+3c^2}}\ge 2\sqrt{6}\sum_{cyc}a\Leftrightarrow\left(\sum_{cyc}\frac{8a^2+ab+bc+ca+c^2}{\sqrt{a^2+2b^2+3c^2}}\right)^2\ge 24(a+b+c)^2\ (2).$$

Sử dụng bất đẳng thức ***Holder*** ta có:

$$\left(\sum_{cyc}\frac{8a^2+ab+bc+ca+c^2}{\sqrt{a^2+2b^2+3c^2}}\right)^2\left(\sum_{cyc}(8a^2+ab+bc+ca+c^2)(a^2+2b^2+3c^2)\right)\ge 27\left(3\sum_{cyc}a^2+\sum_{cyc}ab\right)^3$$

$$\Rightarrow VT(2)\ge\frac{27\left(3\sum_{cyc}a^2+\sum_{cyc}ab\right)^3}{\sum_{cyc}(8a^2+ab+bc+ca+c^2)(a^2+2b^2+3c^2)}=\frac{27\left(3\sum_{cyc}a^2+\sum_{cyc}ab\right)^3}{11\left(\sum_{cyc}a^2\right)^2+21\sum_{cyc}a^2b^2+6\left(\sum_{cyc}a^2\right)\left(\sum_{cyc}ab\right)}$$

Bất đẳng thức (2) được chứng minh nếu ta chứng minh được bất đăng thức:

$$\frac{9\left(3\sum_{cyc}a^2+\sum_{cyc}ab\right)^3}{11\left(\sum_{cyc}a^2\right)^2+21\sum_{cyc}a^2b^2+6\left(\sum_{cyc}a^2\right)\left(\sum_{cyc}ab\right)}\ge 8(a+b+c)^2\quad(3)$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a+b+c=1$. Khi đó đặt $q=ab+bc+ca\le\frac{1}{3}$.

Sử dụng bất đẳng thức Schur ta có $abc\ge\frac{4q-1}{9}$ và khi đó bất đẳng thức (3) trở thành:

$9(3-5q)^3\ge 8\left[11(1-2q)^2+21(q^2-2r)+6q(1-2q)\right]$

$\Leftrightarrow 336r+155-911q+1601q^2-1125q^3\ge 0$

Ta có: $336r+155-911q+1601q^2-1125q^3\ge 336\cdot\frac{4q-1}{9}+155-911q+1601q^2-1125q^3$

$=\frac{1}{3}(1-3q)(1125q^2-1226q+353)\ge 0\Rightarrow$ (đpcm). Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

Bài 8. Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{a^2}{a^2+7ab+b^2}}+\sqrt{\frac{b^2}{b^2+7bc+c^2}}+\sqrt{\frac{c^2}{c^2+7ca+a^2}}\ge 1\quad(1)$$

Chứng minh

Đặt $x=\frac{b}{a},y=\frac{c}{b},z=\frac{a}{c}$, khi đó (1) trở thành

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+7x+1}}+\frac{1}{\sqrt{y^2+7y+1}}+\frac{1}{\sqrt{z^2+7z+1}}\ge 1$$

Do $x,y,z>0, xyz=1$ nên tồn tại $m,n,p>0$ sao cho $x=\frac{n^2p^2}{m^4},y=\frac{p^2m^2}{n^4},z=\frac{m^2n^2}{p^4}$.

Chúng ta cần chứng minh $\sum_{cyc}\frac{m^4}{\sqrt{m^8+7m^4n^2p^2+n^4p^4}}\ge 1$.

Sử dụng bất đẳng thức ***Holder*** ta có:

$$\left(\sum_{cyc}\frac{m^4}{\sqrt{m^8+7m^4n^2p^2+n^4p^4}}\right)^2\left(\sum_{cyc}m(m^8+7m^4n^2p^2+n^4p^4)\right)\ge(m^3+n^3+p^3)^3$$

Bất đẳng thức trên được chứng minh nếu ta chứng minh được bất đẳng thức:

$$(m^3+n^3+p^3)^3 \geq \sum_{cyc} m(m^8+7m^4n^2p^2+n^4p^4)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{sym}(5m^6n^3+2m^3n^3p^3-7m^5n^2p^2)+\sum_{sym}(m^6n^3-m^4n^4p) \geq 0$$

Bất đẳng thức này hiển nhiên đúng suy ra bất đẳng thức (1) được chứng minh.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$ hoặc a,b,c thỏa mãn $\frac{a}{b}\to+\infty, \frac{b}{c}\to+\infty$ và các hoán vị.

Bài 9. Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{a^2}{a^2+6ab+2b^2}}+\sqrt{\frac{b^2}{b^2+6bc+2c^2}}+\sqrt{\frac{c^2}{c^2+6ca+2a^2}} \geq 1 \quad (1)$$

Chứng minh

Đặt $x=\frac{b}{a}, y=\frac{c}{b}, z=\frac{a}{c}$, khi đó (1) trở thành

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+6x+2}}+\frac{1}{\sqrt{y^2+6y+2}}+\frac{1}{\sqrt{z^2+6z+2}} \geq 1$$

Do $x,y,z>0, xyz=1$ nên tồn tại $m,n,p>0$ sao cho $x=\frac{np}{m^2}, y=\frac{pm}{n^2}, z=\frac{mn}{p^2}$.

Ta cần chứng minh $\sum_{cyc}\frac{m^2}{\sqrt{m^4+6m^2np+2n^2p^2}} \geq 1$.

Sử dụng bất đẳng thức ***Holder*** ta có:

$$\left(\sum_{cyc}\frac{m^2}{\sqrt{m^4+6m^2np+2n^2p^2}}\right)^2\left(\sum_{cyc}m^2(m^4+6m^2np+2n^2p^2)\right) \geq (m^2+n^2+p^2)^3$$

Bất đẳng thức (1) được chứng minh nếu ta chứng minh được bất đẳng thức:

$$(m^2+n^2+p^2)^3 \geq \sum_{cyc}m^2(m^4+6m^2np+2n^2p^2) \Leftrightarrow 3\sum_{cyc}m^4(n-p)^2 \geq 0$$

Bất đẳng thức này hiển nhiên đúng suy ra bất đẳng thức (1) được chứng minh.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$ hoặc a,b,c thỏa mãn $\frac{a}{b}\to+\infty, \frac{b}{c}\to+\infty$ và các hoán vị.

III. BÀI TẬP DÀNH CHO BẠN ĐỌC TỰ GIẢI

Bài 1. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$\left(1+\frac{a^3}{b^3c^3}\right)\left(1+\frac{b^3}{c^3a^3}\right)\left(1+\frac{c^3}{a^3b^3}\right)\geq\left(1+\frac{a}{bc^3}\right)\left(1+\frac{b}{ca^3}\right)\left(1+\frac{c}{ab^3}\right)$$

Bài 2. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$(1+a^6b^3)(1+b^6c^3)(1+c^6a^3)\geq(1+a^4b^4c)(1+b^4c^4a)(1+c^4a^4b)$$

Bài 3. Cho $a, b, c \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng:

$$(a^7+b^7)(b^7+c^7)(c^7+a^7)\geq(ab^6+bc^6)(bc^6+ca^6)(ca^6+ab^6)$$

Bài 4. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$(a^3+b^6)(b^3+c^6)(c^3+a^6)\geq(a^2b+b^4c^2)(b^2c+c^4a^2)(c^2a+a^4b^2)$$

Bài 5. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$\left(1+\frac{a^{12}}{b^3c^6}\right)\left(1+\frac{b^{12}}{c^3a^6}\right)\left(1+\frac{c^{12}}{a^3b^6}\right)\geq\left(1+\frac{a^7}{b^4}\right)\left(1+\frac{b^7}{c^4}\right)\left(1+\frac{c^7}{a^4}\right)$$

Bài 6. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$\left(1+\frac{a^{12}}{b^8c^4}\right)\left(1+\frac{b^{12}}{c^8a^4}\right)\left(1+\frac{c^{12}}{a^8b^4}\right)\geq\left(1+\frac{a^7}{b^7}\right)\left(1+\frac{b^7}{c^7}\right)\left(1+\frac{c^7}{a^7}\right)\geq\left(1+\frac{b^3c}{a^4}\right)\left(1+\frac{c^3a}{b^4}\right)\left(1+\frac{a^3b}{c^4}\right)$$

Bài 7. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$(1+a^{11})(1+b^{11})(1+c^{11})\geq(1+a^7b^3c)(1+b^7c^3a)(1+c^7a^3b)$$

Bài 8. Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$(1+a^{x+2})(1+b^{x+2})(1+c^{x+2})\geq(1+a^x)(1+b^x)(1+c^x)\geq(1+a^y)(1+b^y)(1+c^y),\ \forall x>y$$

Bài 9. Cho a,b,c là độ dài ba cạnh của một tam giác.

Chứng minh rằng: $$\frac{1}{\sqrt{b+c-a}}+\frac{1}{\sqrt{c+a-b}}+\frac{1}{\sqrt{a+b-c}}\leq\frac{1}{3}\left(\sqrt[4]{\frac{a}{bc}}+\sqrt[4]{\frac{b}{ca}}+\sqrt[4]{\frac{c}{ab}}\right)^2$$

Bài 10. Chứng minh rằng:

$$3\left(a+\sqrt{ab}+\sqrt[3]{abc}\right)\leq\left(8+\frac{2\sqrt{ab}}{a+b}\right)\sqrt[3]{a\cdot\frac{a+b}{2}\cdot\frac{a+b+c}{3}},\ \forall a,b,c>0$$

Bài 11. Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\geq\sqrt[6]{\frac{a^6+b^6}{2}}+\sqrt[6]{\frac{b^6+c^6}{2}}+\sqrt[6]{\frac{c^6+a^6}{2}}$$

Bài 12. Cho a,b,c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh:

$$\frac{a}{\sqrt{b+c-a}}+\frac{b}{\sqrt{c+a-b}}+\frac{c}{\sqrt{a+b-c}}\geq\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$$

Bài 13. [Romania 2005] Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn $a+b+c=1$.

Chứng minh: $\dfrac{a}{\sqrt{b+c}}+\dfrac{b}{\sqrt{c+a}}+\dfrac{c}{\sqrt{a+b}}\geq\sqrt{\dfrac{3}{2}}$

Bài 14. Cho $a,b,c\geq 0$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{a^2}{a^2+14ab+b^2}}+\sqrt{\frac{b^2}{b^2+14bc+c^2}}+\sqrt{\frac{c^2}{c^2+14ca+a^2}}\geq\frac{3}{4}$$

Bài 15. Cho $a,b,c\geq 0$ và $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

1. $\sqrt{\dfrac{a}{1+3a^2}}+\sqrt{\dfrac{b}{1+3b^2}}+\sqrt{\dfrac{c}{1+3c^2}}\leq\dfrac{3}{2}$

2. $\sqrt{\dfrac{a}{1+3b^2}}+\sqrt{\dfrac{b}{1+3c^2}}+\sqrt{\dfrac{c}{1+3a^2}}\geq\dfrac{3}{2}$

Bài 16. Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=3$. Chứng minh:

$$\frac{a}{\sqrt{b+c-a}}+\frac{b}{\sqrt{c+a-b}}+\frac{c}{\sqrt{a+b-c}}\geq 3$$

Bài 17. Cho $a,b,c,d\geq 0$ thỏa mãn $abcd=1$. Chứng minh:

$$\frac{1}{(1+a+ab)^2}+\frac{1}{(1+b+bc)^2}+\frac{1}{(1+c+cd)^2}+\frac{1}{(1+d+da)^2}\geq\frac{4}{9}$$

Bài 18. Cho $a,b,c,k\geq 0$ thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh:

$$\sqrt[4]{\frac{a}{b+k}}+\sqrt[4]{\frac{b}{c+k}}+\sqrt[4]{\frac{c}{a+k}}\geq\frac{3}{\sqrt[4]{1+k}}$$

Bài 19. Cho $a,b,c,k\geq 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$\frac{b+c}{\sqrt{a^2+kbc}}+\frac{c+a}{\sqrt{b^2+kca}}+\frac{a+b}{\sqrt{c^2+kab}}$$

Bài 20. Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh:

$$\frac{\sqrt[3]{a}}{b^2+bc+c^2}+\frac{\sqrt[3]{b}}{c^2+ca+a^2}+\frac{\sqrt[3]{c}}{a^2+ab+b^2}\geq 1$$

Bài 21. Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh:

$$\frac{a^{\frac{7}{4}}}{(a+b)(a+c)}+\frac{b^{\frac{7}{4}}}{(b+c)(b+a)}+\frac{c^{\frac{7}{4}}}{(c+a)(c+b)}\geq\frac{3}{4}$$

Bài 22. Cho $a,b,c\in\mathbb{R}$. Chứng minh rằng:

$$(a^2+ab+b^2)(b^2+bc+c^2)(c^2+ca+a^2)\ge(ab+bc+ca)^3$$

Bài 23. Tìm số dương k nhỏ nhất sao cho bất đẳng thức sau đúng với mọi $a,b,c\ge 0$:

$$\sqrt{\frac{a}{kb+c}}+\sqrt{\frac{b}{kc+a}}+\sqrt{\frac{c}{ka+b}}\ge\frac{3}{\sqrt{k+1}}$$

Bài 24. Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{\sqrt[3]{b^2+c^2}}+\frac{b}{\sqrt[3]{c^2+a^2}}+\frac{c}{\sqrt[3]{a^2+b^2}}\ge\frac{3}{\sqrt[3]{2}}$$

Bài 25. Cho $a,b,c\ge 0$. Chứng minh rằng:

$$\sum_{cyc}\sqrt{\frac{3a^2}{7a^2+5(b+c)^2}}\le 1\le\sum_{cyc}\sqrt{\frac{a^2}{a^2+2(b+c)^2}}$$

Bài 26. Cho $a,b,c\ge 0$ thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a\sqrt{a}}{a+b}+\frac{b\sqrt{b}}{b+c}+\frac{c\sqrt{c}}{c+a}\ge\frac{ab+bc+ca}{2}$$

Bài 27. [Ukraine 2007] Cho $a,b,c\ge\frac{1}{\sqrt{6}}$ thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=1$. Chứng minh:

$$\frac{1+a^2}{\sqrt{2a^2+3ab-c^2}}+\frac{1+b^2}{\sqrt{2b^2+3bc-a^2}}+\frac{1+c^2}{\sqrt{2c^2+3ca-b^2}}\ge 2(a+b+c)$$

Bài 28. Cho $a,b,c\ge 0$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{2a(b+c)}{(2b+c)(b+2c)}}+\sqrt{\frac{2b(c+a)}{(2c+a)(c+2a)}}+\sqrt{\frac{2c(a+b)}{(2a+b)(a+2b)}}\ge 2$$

Bài 29. Cho $a,b,c\ge 0$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{a^2+ab+b^2}{ab+c^2}}+\sqrt{\frac{b^2+bc+c^2}{bc+a^2}}+\sqrt{\frac{c^2+ca+a^2}{ca+b^2}}\ge\frac{3\sqrt{6}}{2}$$

Bài 30. Cho $a,b,c\ge 0$. Tìm hằng số k dương lớn nhất để bất đẳng thức sau đúng

$$\sqrt{\frac{ab}{k+c^2}}+\sqrt{\frac{bc}{k+a^2}}+\sqrt{\frac{ca}{k+b^2}}\le\frac{3}{\sqrt{k+1}}$$

§4. BẤT ĐẲNG THỨC MINKOWSKI VÀ KỸ THUẬT SỬ DỤNG

§4. 1. BẤT ĐẲNG THỨC MINKOWSKI

I. BẤT ĐẲNG THỨC MINKOWSKI 1

1.Dạng tổng quát:

Cho $\begin{cases} a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{R}^+ \\ b_1, b_2, ..., b_n \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$ và $1 < p \in \mathbb{Q}^+$, khi đó $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum\limits_{k=1}^{n} b_k^p\right)^{\frac{1}{q}} \ge \left[\sum\limits_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^p\right]^{\frac{1}{p}}$

• **Đặc biệt:** $\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{c^2+d^2} \ge \sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}$

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2} + \sqrt{m^2+n^2+p^2} \ge \sqrt{(a+m)^2+(b+n)^2+(c+p)^2}$$

$$\sqrt{a_1^2+b_1^2} + \sqrt{a_2^2+b_2^2} + ... + \sqrt{a_n^2+b_n^2} \ge \sqrt{(a_1+a_2+...+a_n)^2 + (b_1+b_2+...+b_n)^2}$$

2. Dạng mở rộng:

Cho m bộ số thực dương $\begin{cases} a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{R}^+ \\ b_1, b_2, ..., b_n \in \mathbb{R}^+ \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ l_1, l_2, \ldots, l_n \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$ và $\begin{cases} q_1, q_2, \ldots, q_n \in \mathbb{R}^+ \\ q_1 + q_2 + \ldots + q_n = 1 \end{cases}$

a. $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} q_i a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum\limits_{i=1}^{n} q_i b_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \ldots + \left(\sum\limits_{i=1}^{n} q_i l_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \ge \left[\sum\limits_{i=1}^{n} q_i (a_i + b_i + \ldots + l_i)^p\right]^{\frac{1}{p}} \quad \forall p > 1$

b. $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} q_i a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum\limits_{i=1}^{n} q_i b_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \ldots + \left(\sum\limits_{i=1}^{n} q_i l_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left[\sum\limits_{i=1}^{n} q_i (a_i + b_i + \ldots + l_i)^p\right]^{\frac{1}{p}} \quad \forall p < 1$

Chứng minh :*1.** Lấy $q \in \mathbb{Q}^+$ sao cho $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Sử dụng ***Holder cho hai bộ dãy số sau:

$\begin{cases} a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{R}^+ \\ (a_1+b_1)^{p-1}, (a_2+b_2)^{p-1}, ..., (a_n+b_n)^{p-1} \end{cases}$ và $\begin{cases} b_1, b_2, ..., b_n \in \mathbb{R}^+ \\ (a_1+b_1)^{p-1}, (a_2+b_2)^{p-1}, ..., (a_n+b_n)^{p-1} \end{cases}$

$$\left(a_1^p + a_2^p + ... + a_n^p\right)^{\frac{1}{p}} \left[(a_1+b_1)^{(p-1)q} + ... + (a_n+b_n)^{(p-1)q}\right]^{\frac{1}{q}} \ge \sum_{k=1}^{n} a_k (a_k+b_k)^{p-1}$$

$$\left(b_1^p + b_2^p + ... + b_n^p\right)^{\frac{1}{p}} \left[(a_1+b_1)^{(p-1)q} + ... + (a_n+b_n)^{(p-1)q}\right]^{\frac{1}{q}} \ge \sum_{k=1}^{n} b_k (a_k+b_k)^{p-1}$$

Vì $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Leftrightarrow p + q = pq \Leftrightarrow p = (p-1)q$, nên cộng hai bất đẳng thức trên ta có:

$$\left[\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^q\right)^{\frac{1}{q}}\right]\left[\sum_{k=1}^{n} (a_k+b_k)^p\right]^{\frac{1}{q}} \ge \sum_{k=1}^{n} (a_k+b_k)^p \Leftrightarrow \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^p\right)^{\frac{1}{q}} \ge \left[\sum_{k=1}^{n} (a_k+b_k)^p\right]^{\frac{1}{p}}$$

2. a. Đặt $t_i = a_i + b_i + ... + l_i$. Sử dụng bất đẳng thức ***Francis – Lithewood***

$$+\begin{cases} \left(\sum_{i=1}^{n} q_i a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} q_i t_i^p\right)^{1-\frac{1}{p}} \geq \sum_{i=1}^{n} \left(q_i a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(q_i t_i^p\right)^{1-\frac{1}{p}} = \sum_{i=1}^{n} q_i a_i t_i^{p-1} \\ \left(\sum_{i=1}^{n} q_i b_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} q_i t_i^p\right)^{1-\frac{1}{p}} \geq \sum_{i=1}^{n} \left(q_i b_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(q_i t_i^p\right)^{1-\frac{1}{p}} = \sum_{i=1}^{n} q_i b_i t_i^{p-1} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \left(\sum_{i=1}^{n} q_i l_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} q_i t_i^p\right)^{1-\frac{1}{p}} \geq \sum_{i=1}^{n} \left(q_i l_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(q_i t_i^p\right)^{1-\frac{1}{p}} = \sum_{i=1}^{n} q_i a_i t_i^{p-1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left[\left(\sum_{i=1}^{n} q_i a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} q_i b_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + ... + \left(\sum_{i=1}^{n} q_i l_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\right] \left(\sum_{i=1}^{n} q_i t_i^p\right)^{\frac{p-1}{p}} \geq \sum_{i=1}^{n} q_i t_i^p$$

$$\Rightarrow \left(\sum_{i=1}^{n} q_i a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} q_i b_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + ... + \left(\sum_{i=1}^{n} q_i l_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \geq \left(\sum_{i=1}^{n} q_i t_i^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left[\sum_{i=1}^{n} q_i \left(a_i + b_i + ... + l_i\right)^p\right]^{\frac{1}{p}}$$

b. Xét $\begin{cases} p < 1 \\ p \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < p < 1 \\ p < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{p}\left(1 - \frac{1}{p}\right) < 0$. Sử dụng bất đẳng thức ***Francis – Lithewood***

$$+\begin{cases} \left(\sum_{i=1}^{n} q_i a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} q_i t_i^p\right)^{1-\frac{1}{p}} \leq \sum_{i=1}^{n} \left(q_i a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(q_i t_i^p\right)^{1-\frac{1}{p}} = \sum_{i=1}^{n} q_i a_i t_i^{p-1} \\ \left(\sum_{i=1}^{n} q_i b_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} q_i t_i^p\right)^{1-\frac{1}{p}} \leq \sum_{i=1}^{n} \left(q_i b_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(q_i t_i^p\right)^{1-\frac{1}{p}} = \sum_{i=1}^{n} q_i b_i t_i^{p-1} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \left(\sum_{i=1}^{n} q_i l_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} q_i t_i^p\right)^{1-\frac{1}{p}} \leq \sum_{i=1}^{n} \left(q_i l_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(q_i t_i^p\right)^{1-\frac{1}{p}} = \sum_{i=1}^{n} q_i a_i t_i^{p-1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left[\left(\sum_{i=1}^{n} q_i a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} q_i b_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + ... + \left(\sum_{i=1}^{n} q_i l_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\right] \left(\sum_{i=1}^{n} q_i t_i^p\right)^{\frac{p-1}{p}} \leq \sum_{i=1}^{n} q_i t_i^p$$

$$\Rightarrow \left(\sum_{i=1}^{n} q_i a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} q_i b_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + ... + \left(\sum_{i=1}^{n} q_i l_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} q_i t_i^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left[\sum_{i=1}^{n} q_i \left(a_i + b_i + ... + l_i\right)^p\right]^{\frac{1}{p}}$$

II. BẤT ĐẲNG THỨC MINKOWSKI 2

1. Cho $\begin{cases} a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{R}^+ \\ b_1, b_2, ..., b_n \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$ khi đó ta có $\sqrt[n]{a_1a_2...a_n} + \sqrt[n]{b_1b_2...b_n} \le \sqrt[n]{(a_1+b_1)(a_2+b_2)...(a_n+b_n)}$

2. Cho $\begin{cases} a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{R}^+ \\ b_1, b_2, ..., b_n \in \mathbb{R}^+ \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ l_1, l_2, ..., l_n \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$ khi đó ta có bất đẳng thức

$$\sqrt[n]{a_1a_2...a_n} + \sqrt[n]{b_1b_2...b_n} + ... + \sqrt[n]{l_1l_2...l_n} \le \sqrt[n]{(a_1+b_1+...+l_1)(a_2+b_2+...+l_2)...(a_n+b_n+...+l_n)}$$

Chứng minh

1. $\sqrt[n]{a_1a_2...a_n} + \sqrt[n]{b_1b_2...b_n} \le \sqrt[n]{(a_1+b_1)(a_2+b_2)...(a_n+b_n)}$

$$\Leftrightarrow \sqrt[n]{\frac{a_1a_2...a_n}{(a_1+b_1)(a_2+b_2)...(a_n+b_n)}} + \sqrt[n]{\frac{b_1b_2...b_n}{(a_1+b_1)(a_2+b_2)...(a_n+b_n)}} \le 1.$$ Ta có:

$$+\begin{cases} \sqrt[n]{\dfrac{a_1a_2...a_n}{(a_1+b_1)(a_2+b_2)...(a_n+b_n)}} \le \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{a_1}{a_1+b_1} + \dfrac{a_2}{a_2+b_2} + ... + \dfrac{a_n}{a_n+b_n}\right) \\ \sqrt[n]{\dfrac{b_1b_2...b_n}{(a_1+b_1)(a_2+b_2)...(a_n+b_n)}} \le \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{b_1}{a_1+b_1} + \dfrac{b_2}{a_2+b_2} + ... + \dfrac{b_n}{a_n+b_n}\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sqrt[n]{\frac{a_1a_2...a_n}{(a_1+b_1)(a_2+b_2)...(a_n+b_n)}} + \sqrt[n]{\frac{b_1b_2...b_n}{(a_1+b_1)(a_2+b_2)...(a_n+b_n)}} \le \frac{1}{n}\left(\frac{a_1+b_1}{a_1+b_1} + ... + \frac{a_n+b_n}{a_n+b_n}\right) = 1$$

2. $\sqrt[n]{a_1a_2...a_n} + \sqrt[n]{b_1b_2...b_n} + ... + \sqrt[n]{l_1l_2...l_n} \le \sqrt[n]{(a_1+b_1+...+l_1)(a_2+b_2+...+l_2)...(a_n+b_n+...+l_n)}$

$$\Leftrightarrow \sqrt[n]{\frac{a_1a_2...a_n}{(a_1+b_1+...+l_1)...(a_n+b_n+...+l_n)}} + ... + \sqrt[n]{\frac{l_1l_2...l_n}{(a_1+b_1+...+l_1)...(a_n+b_n+...+l_n)}} \le 1$$

Sử dụng bất đẳng thức ***AM – GM*** ta có:

$$+\begin{cases} \sqrt[n]{\dfrac{a_1a_2...a_n}{(a_1+b_1+...+l_1)...(a_n+b_n+...+l_n)}} \le \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{a_1}{a_1+b_1+...+l_1} + ... + \dfrac{a_n}{a_n+b_n+...+l_n}\right) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \sqrt[n]{\dfrac{l_1l_2...l_n}{(a_1+b_1+...+l_1)...(a_n+b_n+...+l_n)}} \le \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{l_1}{a_1+b_1+...+l_1} + ... + \dfrac{l_n}{a_n+b_n+...+l_n}\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sqrt[n]{\frac{a_1a_2...a_n}{(a_1+b_1+...+l_1)...(a_n+b_n+...+l_n)}} + ... + \sqrt[n]{\frac{l_1l_2...l_n}{(a_1+b_1+...+l_1)...(a_n+b_n+...+l_n)}} \le 1$$

§4. 2. KỸ THUẬT SỬ DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC MINKOWSKI

I. CÁC BÀI TẬP MẪU MINH HỌA

Bài 1. Chứng minh rằng:

$$T=\sqrt[5]{\left(\frac{1}{1+\sqrt{2}}\right)^5+\left(\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\right)^5}+\sqrt[5]{\left(\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\right)^5+\left(\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}\right)^5}+\ldots+\sqrt[5]{\left(\frac{1}{\sqrt{98}+\sqrt{99}}\right)^5+\left(\frac{1}{\sqrt{99}+10}\right)^5}\geq\frac{35\sqrt[5]{2}}{4}$$

Chứng minh

Biến đổi biểu thức T rồi sử dụng bất đẳng thức ***Minkowski*** ta có:

$$\mathrm{T}=\sqrt[5]{\left(\sqrt{2}-1\right)^5+\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^5}+\sqrt[5]{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^5+\left(\sqrt{4}-\sqrt{3}\right)^5}+\ldots+\sqrt[5]{\left(\sqrt{99}-\sqrt{98}\right)^5+\left(10-\sqrt{99}\right)^5}$$

$$\geq\sqrt[5]{\left[\left(\sqrt{2}-1\right)+\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)+\ldots+\left(\sqrt{99}-\sqrt{98}\right)\right]^5+\left[\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)+\left(\sqrt{4}-\sqrt{3}\right)+\ldots+\left(10-\sqrt{99}\right)\right]^5}$$

$$=\sqrt[5]{\left(\sqrt{99}-1\right)^5+\left(10-\sqrt{2}\right)^5}>\sqrt[5]{2\left(\frac{\sqrt{99}-1+10-\sqrt{2}}{2}\right)^5}=\frac{9+\sqrt{99}-\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt[5]{2}>\frac{35\cdot\sqrt[5]{2}}{4}$$

Bài 2. Cho $0\leq a,b\leq 1$ và $a\leq 2b;b\leq 2a$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$\mathrm{T}=\sqrt[3]{8a^3-2b^3-6ab^2+12ab+3b^2-3b+2}+\sqrt[3]{8b^3-2a^3-6a^2b+12ab+3a^2-3a+2}$$

Giải

$$T=\sqrt[3]{(1-b)^3+(2a-b)^3+1}+\sqrt[3]{(1-a)^3+(2b-a)^3+1}\geq\sqrt[3]{(2-a-b)^3+(a+b)^3+2^3}$$

$$\geq\sqrt[3]{3\cdot\left[\frac{(2-a-b)+(a+b)+2}{3}\right]^3}=\frac{4\cdot\sqrt[3]{3}}{3}.$$ Với $a=b=\frac{1}{2}$ thì $\operatorname{Min}T=\frac{4\cdot\sqrt[3]{3}}{3}$

Bài 3. Cho $\begin{cases}a,b,c>0\\ a+b+c\leq\dfrac{3}{2}\end{cases}$. Tìm Min của: $\mathbf{S}=\sqrt[3]{a^3+\dfrac{1}{b^3}}+\sqrt[3]{b^3+\dfrac{1}{c^3}}+\sqrt[3]{c^3+\dfrac{1}{a^3}}$

Phân tích và tìm tòi lời giải

• Xét các đánh giá với các tham số α, β >0

$$+\begin{cases}\sqrt[3]{a^3+\dfrac{1}{b^3}}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{\left(\alpha^3+\beta^3\right)^2}}\cdot\sqrt[3]{\left(a^3+\dfrac{1}{b^3}\right)\left(\alpha^3+\beta^3\right)\left(\alpha^3+\beta^3\right)}\geq\dfrac{1}{\sqrt[3]{\left(\alpha^3+\beta^3\right)^2}}\cdot\left(\alpha^2a+\dfrac{\beta^2}{b}\right) & (1)\\ \sqrt[3]{b^3+\dfrac{1}{c^3}}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{\left(\alpha^3+\beta^3\right)^2}}\cdot\sqrt[3]{\left(b^3+\dfrac{1}{c^3}\right)\left(\alpha^3+\beta^3\right)\left(\alpha^3+\beta^3\right)}\geq\dfrac{1}{\sqrt[3]{\left(\alpha^3+\beta^3\right)^2}}\cdot\left(\alpha^2b+\dfrac{\beta^2}{c}\right) & (2)\\ \sqrt[3]{c^3+\dfrac{1}{a^3}}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{\left(\alpha^3+\beta^3\right)^2}}\cdot\sqrt[3]{\left(c^3+\dfrac{1}{a^3}\right)\left(\alpha^3+\beta^3\right)\left(\alpha^3+\beta^3\right)}\geq\dfrac{1}{\sqrt[3]{\left(\alpha^3+\beta^3\right)^2}}\cdot\left(\alpha^2c+\dfrac{\beta^2}{a}\right) & (3)\end{cases}$$

$$\Rightarrow S\geq\frac{1}{\sqrt[3]{\left(\alpha^3+\beta^3\right)^2}}\geq\left[\alpha^2(a+b+c)+\beta^2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\right]=S_0$$ (với S_0 là hằng số)

Do S là một biểu thức đối xứng với a, b, c nên dự đoán S = S_0 đạt tại ***"điểm rơi"***: $a=b=c=\frac{1}{2}$, khi đó tất cả các bất đẳng thức (1), (2), (3) đều trở thành đẳng thức. Kết hợp với điều kiện xảy ra đẳng thức của bất đẳng thức ***Minkowski 2*** ta có sơ đồ điểm rơi sau đây:

Sơ đồ: $$\boxed{a=b=c=\frac{1}{2}} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{a}{\alpha}=\dfrac{1/b}{\beta} \\ \dfrac{b}{\alpha}=\dfrac{1/c}{\beta} \\ \dfrac{c}{\alpha}=\dfrac{1/a}{\beta} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta}=\frac{a}{\frac{1}{b}}=\frac{b}{\frac{1}{c}}=\frac{c}{\frac{1}{a}}=\frac{1}{4} \Rightarrow \boxed{\begin{cases}\alpha=1\\ \beta=4\end{cases}}$$

Kết hợp với kỹ thuật ***"Chọn điểm rơi"*** trong ***AM – GM*** ta có lời giải sau đây:

• ***Giải:***

Sử dụng bất đẳng thức ***Minkowski 2*** ta có:

$$+\begin{cases} \sqrt[3]{a^3+\dfrac{1}{b^3}}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{(1^3+4^3)^2}}\cdot\sqrt[3]{\left(a^3+\dfrac{1}{b^3}\right)(1^3+4^3)(1^3+4^3)}\ge\dfrac{1}{\sqrt[3]{4225}}\cdot\left(a+\dfrac{16}{b}\right) \\ \sqrt[3]{b^3+\dfrac{1}{c^3}}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{(1^3+4^3)^2}}\cdot\sqrt[3]{\left(b^3+\dfrac{1}{c^3}\right)(1^3+4^3)(1^3+4^3)}\ge\dfrac{1}{\sqrt[3]{4225}}\cdot\left(b+\dfrac{16}{c}\right) \\ \sqrt[3]{c^3+\dfrac{1}{a^3}}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{(1^3+4^3)^2}}\cdot\sqrt[3]{\left(c^3+\dfrac{1}{a^3}\right)(1^3+4^3)(1^3+4^3)}\ge\dfrac{1}{\sqrt[3]{4225}}\cdot\left(c+\dfrac{16}{a}\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow S=\sqrt[3]{a^3+\frac{1}{b^3}}+\sqrt[3]{b^3+\frac{1}{c^3}}+\sqrt[3]{c^3+\frac{1}{a^3}}\ge\frac{1}{\sqrt[3]{4225}}\left[(a+b+c)+16\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt[3]{4225}}\left[\left(a+b+c+\frac{1}{4a}+\frac{1}{4b}+\frac{1}{4c}\right)+\frac{63}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\right]$$

$$\ge\frac{1}{\sqrt[3]{4225}}\left[6.\sqrt[6]{abc\cdot\frac{1}{4a}\cdot\frac{1}{4b}\cdot\frac{1}{4c}}+\frac{63}{4}\cdot3\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{c}}\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt[3]{4225}}\left[3+\frac{189}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{abc}}\right]\ge\frac{1}{\sqrt[3]{4225}}\left[3+\frac{189}{4}\cdot\frac{1}{\frac{a+b+c}{3}}\right]$$

$$\ge\frac{1}{\sqrt[3]{4225}}\left[3+\frac{189}{4}\cdot2\right]=\frac{1}{\sqrt[3]{4225}}\cdot\frac{195}{2}=\frac{3.\sqrt[3]{65}}{2}$$

Với $a=b=c=\frac{1}{2}$ thì $\operatorname{Min} S=\frac{3.\sqrt[3]{65}}{2}$.

Bài 4. Cho $a, b, c>0$ và $a+b+c\le1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$T=\sqrt[3]{\frac{a^3}{2}+\frac{b^3}{3}+\frac{1}{6c^3}}+\sqrt[3]{\frac{b^3}{2}+\frac{c^3}{3}+\frac{1}{6a^3}}+\sqrt[3]{\frac{c^3}{2}+\frac{a^3}{3}+\frac{1}{6b^3}}$$

Giải

Sử dụng bất đẳng thức ***Minkowski*** mở rộng ta có:

$$T\ge\sqrt[3]{\frac{1}{2}(a+b+c)^3+\frac{1}{3}(b+c+a)^3+\frac{1}{6}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^3}=\sqrt[3]{\frac{5}{6}(a+b+c)^3+\frac{1}{6}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^3}$$

Sử dụng bất đẳng thức ***Holder*** và bất đẳng thức ***AM – GM*** ta có:

$$\sqrt[3]{\left[\frac{5}{6}\cdot 1^3+\frac{1}{6}\cdot 9^3\right]\left[\frac{5}{6}\cdot 1^3+\frac{1}{6}\cdot 9^3\right]\left[\frac{5}{6}(a+b+c)^3+\frac{1}{6}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^3\right]}\ge$$

$$\ge\frac{5}{6}(a+b+c)+\frac{1}{6}\cdot 9\cdot 9\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=\frac{5}{6}\left(a+b+c+\frac{1}{9a}+\frac{1}{9b}+\frac{1}{9c}\right)+\frac{362}{27}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

$$\ge\frac{5}{6}\cdot 6\cdot\sqrt[6]{abc\cdot\frac{1}{9a}\cdot\frac{1}{9b}\cdot\frac{1}{9c}}+\frac{362}{27}\cdot\frac{3}{\sqrt[3]{abc}}\ge\frac{5}{3}+\frac{362}{27}\cdot\frac{9}{a+b+c}\ge\frac{367}{3}$$

$$\Rightarrow T\ge\frac{367}{3}:\left(\frac{5}{6}\cdot 1^3+\frac{1}{6}\cdot 9^3\right)^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{\frac{367}{3}}$$. Với $a=b=c=\frac{1}{3}$ thì $\text{Min}\,T=\sqrt[3]{\frac{367}{3}}$

Bài 5. Chứng minh rằng: $\left(1+\sqrt[3]{abc}\right)^3\le(1+a)(1+b)(1+c)$ (1), $\forall a,b,c\ge 0$

Chứng minh

$(1)\Leftrightarrow 1+\sqrt[3]{abc}\le\sqrt[3]{(1+a)(1+b)(1+c)}\Leftrightarrow\sqrt[3]{1.1.1}+\sqrt[3]{abc}\le\sqrt[3]{(1+a)(1+b)(1+c)}$

$\Leftrightarrow S=\sqrt[3]{\frac{1.1.1}{(1+a)(1+b)(1+c)}}+\sqrt[3]{\frac{abc}{(1+a)(1+b)(1+c)}}\le 1$. Sử dụng bất đẳng thức ***AM – GM*** ta có:

$$S\le\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}+\frac{c}{1+c}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{1+a}{1+a}+\frac{1+b}{1+b}+\frac{1+c}{1+c}\right)=1$$

Bài 6. Chứng minh rằng: $\sqrt[3]{\frac{a}{b}}+\sqrt[3]{\frac{b}{a}}\le\sqrt[3]{(a+b)\left(\frac{2}{a}+\frac{2}{b}\right)}$, $\forall a, b>0$ (1)

Chứng minh

$$(1)\Leftrightarrow\sqrt[3]{1\cdot a\cdot\frac{1}{b}}+\sqrt[3]{1\cdot b\cdot\frac{1}{a}}\le\sqrt[3]{(1+1)(a+b)\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{a}\right)}\Leftrightarrow\sqrt[3]{\frac{1\cdot a\cdot\frac{1}{b}}{(1+1)(a+b)\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{a}\right)}}+\sqrt[3]{\frac{1\cdot b\cdot\frac{1}{a}}{(1+1)(a+b)\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{a}\right)}}\le 1$$

Ta có $VT\le\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}+\frac{a}{a+b}+\frac{\frac{1}{b}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}+\frac{b}{a+b}+\frac{\frac{1}{a}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\right)=\frac{1}{3}\cdot 3=1$

Bài 7. Chứng minh rằng: $\sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}}+\sqrt[3]{3-\sqrt[3]{3}}<2.\sqrt[3]{3}$ (1)

Chứng minh

$(1)\Leftrightarrow\sqrt[3]{1.1.\left(3+\sqrt[3]{3}\right)}+\sqrt[3]{1.1.\left(3-\sqrt[3]{3}\right)}<\sqrt[3]{(1+1)(1+1)\left[\left(3+\sqrt[3]{3}\right)+\left(3-\sqrt[3]{3}\right)\right]}$

Cho $\begin{cases} a_1 = a_2 = 1 ; a_3 = 3 + \sqrt[3]{3} \\ b_1 = b_2 = 1 ; b_3 = 3 - \sqrt[3]{3} \end{cases}$ khi đó (1) $\Leftrightarrow \sqrt[3]{a_1a_2a_3} + \sqrt[3]{b_1b_2b_3} < \sqrt[3]{(a_1+b_1)(a_2+b_2)(a_3+b_3)}$

Do $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} \neq \frac{a_3}{b_3}$, nên dấu đẳng thức không xảy ra và ta có (1) được chứng minh.

Bài 8. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh một tam giác và các số $x, y, z \in [-1, 1]$ sao cho $x + y + z = 1$. Chứng minh rằng:

$$(xa + yb + zc)(ya + zb + xc)(za + xb + yc) \geq (b + c - a)(c + a - b)(a + b - c) \quad (1)$$

Chứng minh

Do trong một tam giác luôn có vòng tròn nội tiếp nên tồn tại các số $u, v, w > 0$ sao cho ta có $a = v + w$; $b = u + w$; $c = u + v$

Đặt $A = 1 - x$; $B = 1 - y$; $C = 1 - z \Rightarrow$ A, B, C ≥ 0 và A + B + C = 2.

Bất đẳng thức (1) $\Leftrightarrow (Au + Bv + Cw)(Av + Bw + Cu)(Aw + Bu + Cv) \geq 8uvw$

Sử dụng bất đẳng thức ***Minkowski 2*** ta có:

$$\sqrt[3]{(Au + Bv + Cw)(Av + Bw + Cu)(Aw + Bu + Cv)} \geq (A + B + C)\sqrt[3]{uvw} = 2 \cdot \sqrt[3]{uvw}$$

$\Rightarrow (Au + Bv + Cw)(Av + Bw + Cu)(Aw + Bu + Cv) \geq 8uvw \Rightarrow$ (đpcm)

Bài 10. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$2(1 + a^2)(1 + b^2)(1 + c^2) \geq (1 + a)(1 + b)(1 + c)(1 + abc) \quad (1)$$

Chứng minh

• ***Bổ đề:*** $2(1 + u^2)^3 \geq (1 + u)^3(1 + u^3),\ \forall u > 0 \quad (2)$

Chứng minh: (2) $\Leftrightarrow 2(u^6 + 3u^4 + 3u^2 + 1) \geq (u^3 + 3u^2 + 3u + 1)(u^3 + 1)$

$$\Leftrightarrow u^6 - 3u^5 + 3u^4 - 2u^3 + 3u^2 - 3u + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (u - 1)^4(u^2 + u + 1) \geq 0$$

• ***Áp dụng:*** Sử dụng bổ đề và bất đẳng thức ***Minkowski 2*** ta có:

$$\left[2(1 + a^2)(1 + b^2)(1 + c^2)\right]^3 = 2(1 + a^2)^3\, 2(1 + b^2)^3\, 2(1 + c^2)^3$$

$$\geq (1 + a)^3(1 + a^3)(1 + b)^3(1 + b^3)(1 + c)^3(1 + c^3)$$

$$= (1 + a^3)(1 + b^3)(1 + c^3)[(1 + a)(1 + b)(1 + c)]^3 \geq [(1 + abc)(1 + a)(1 + b)(1 + c)]^3$$

$$\Leftrightarrow 2(1 + a^2)(1 + b^2)(1 + c^2) \geq (1 + a)(1 + b)(1 + c)(1 + abc)$$

II. CÁC BÀI TẬP DÀNH CHO BẠN ĐỌC TỰ GIẢI

Bài 1. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{1+a^2}+\sqrt{1+b^2}+\sqrt{1+c^2} \geq \sqrt{1+\left(\frac{a+2b}{3}\right)^2}+\sqrt{1+\left(\frac{b+2c}{3}\right)^2}+\sqrt{1+\left(\frac{c+2a}{3}\right)^2}$$

Bài 2. Chứng minh rằng: $\left(1+\frac{a}{3b}\right)\left(1+\frac{b}{3c}\right)\left(1+\frac{c}{3d}\right)\left(1+\frac{d}{3a}\right) \geq \frac{625}{256} \quad \forall a, b, c, d > 0$

Bài 3. Chứng minh rằng: $\sqrt[n]{(n+1)!}-\sqrt[n]{n!} > 1 \quad \forall n \geq 2, n \in \mathrm{N}$

Bài 4. Chứng minh: $\left(1+\frac{a_1}{na_2}\right)\left(1+\frac{a_2}{na_3}\right)\cdots\left(1+\frac{a_n}{na_1}\right) \geq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \ \forall a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$

Bài 5. Chứng minh rằng: $\sqrt[n]{m+\sqrt[k]{p}}+\sqrt[n]{m-\sqrt[k]{p}} < 2.\sqrt[n]{m}, \ \forall \begin{cases} n, k \in N \\ m, p, m-\sqrt[k]{p} > 0 \end{cases}$

Bài 6. Chứng minh rằng: $\frac{1}{\sqrt[n-1]{n!}}+\frac{1}{\sqrt[n-1]{n}} \leq 1, \ \forall n \geq 2, n \in N$

Bài 7. Chứng minh rằng: $\sqrt[n]{\binom{m+n}{n}} \geq 1+\frac{m}{\sqrt[n]{n!}}, \ \forall m, n \geq 1; m, n \in N$

Bài 8. Chứng minh rằng: $\left(1+\sqrt[n]{a_1a_2 \ldots a_n}\right)^n \leq (1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n), \ \forall a_i > 0$

Bài 9. Chứng minh rằng: $\left(p+\sqrt[n]{a_1a_2 \ldots a_n}\right)^n \leq (p+a_1)(p+a_2)\ldots(p+a_n), \forall p, a_i > 0$

Bài 10. Chứng minh rằng: $\sum_{i=1}^{m}\left(\prod_{j=1}^{n} a_{ij}\right)^{\frac{1}{n}} \leq \left(\prod_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\right)^{\frac{1}{n}}, \ \forall a_{ij} > 0$

Bài 11. Chứng minh rằng: $(a_1-1)(a_2-1)\ldots(a_n-1) \leq \left(\sqrt[n]{a_1a_2 \ldots a_n}-1\right)^n, \ \forall a_i \geq 1$

Bài 12. Chứng minh: $\left(1+\frac{1}{\sin A}\right)\left(1+\frac{1}{\sin B}\right)\left(1+\frac{1}{\sin C}\right) \geq \left(1+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3, \ \forall \Delta ABC$

Bài 13. Chứng minh: $\left(1+\frac{1}{\sin\frac{A}{2}}\right)\left(1+\frac{1}{\sin\frac{B}{2}}\right)\left(1+\frac{1}{\sin\frac{C}{2}}\right) \geq 27, \ \forall \Delta ABC$

Bài 14. Chứng minh: $\left(n+\frac{1}{\sin\frac{A}{2}}\right)\left(n+\frac{1}{\sin\frac{B}{2}}\right)\left(n+\frac{1}{\sin\frac{C}{2}}\right) \geq (n+2)^3$ với $\begin{cases} \forall \Delta ABC \\ \forall n \in N \end{cases}$

§5. BẤT ĐẲNG THỨC CHEBYSHEV VÀ KỸ THUẬT SỬ DỤNG

§5. 1. BẤT ĐẲNG THỨC CHEBYSHEV

1. Bất đẳng thức Chebyshev trên 2 dãy đơn điệu cùng chiều

Cho hai dãy hữu hạn các số thực $a_1, a_2, ..., a_n$ và $b_1, b_2, ..., b_n$, khi đó

Nếu có $\begin{cases} a_1 \ge a_2 \ge ... \ge a_n \\ b_1 \ge b_2 \ge ... \ge b_n \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a_1 \le a_2 \le ... \le a_n \\ b_1 \le b_2 \le ... \le b_n \end{cases}$ ta có:

1.1. Dạng 1: $\dfrac{a_1b_1 + a_2b_2... + a_nb_n}{n} \ge \dfrac{a_1 + a_2... + a_n}{n} \cdot \dfrac{b_1 + b_2... + b_n}{n}$

1.1. Dạng 2: $n(a_1b_1 + a_2b_2... + a_nb_n) \ge (a_1 + a_2... + a_n)(b_1 + b_2... + b_n)$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a_1 = a_2 = ... = a_n \\ b_1 = b_2 = ... = b_n \end{array}\right.$

2. Bất đẳng thức Chebyshev trên 2 dãy đơn điệu ngược chiều

Cho hai dãy số hữu hạn các số thực $a_1, a_2, ..., a_n$ và $b_1, b_2, ..., b_n$, khi đó:

Nếu có $\begin{cases} a_1 \ge a_2 \ge ... \ge a_n \\ b_1 \le b_2 \le ... \le b_n \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a_1 \le a_2 \le ... \le a_n \\ b_1 \ge b_2 \ge ... \ge b_n \end{cases}$ ta có:

2.1. Dạng 1: $\dfrac{a_1b_1 + a_2b_2... + a_nb_n}{n} \le \dfrac{a_1 + a_2... + a_n}{n} \cdot \dfrac{b_1 + b_2... + b_n}{n}$

2.2. Dạng 2: $n(a_1b_1 + a_2b_2... + a_nb_n) \le (a_1 + a_2... + a_n)(b_1 + b_2... + b_n)$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a_1 = a_2 = ... = a_n \\ b_1 = b_2 = ... = b_n \end{array}\right.$

Chứng minh

Biến đổi $n\sum\limits_{i=1}^{n} a_ib_i - \sum\limits_{i=1}^{n} a_i \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} b_i = \sum\limits_{j=1}^{n}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_ib_i\right) - \sum\limits_{j=1}^{n}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_jb_i\right)$

$$= \sum_{1 \le i < j \le n}\left[a_ib_i + a_jb_j - a_ib_j - a_jb_i\right] = \sum_{1 \le i < j \le n}\left[(a_i - a_j)(b_i - b_j)\right] = S$$

- Nếu 2 dãy số: $\{a_k\}_1^n, \{b_k\}_1^n$ là 2 dãy đơn điệu cùng chiều thì $S \ge 0$

  Suy ra $n(a_1b_1 + a_2b_2... + a_nb_n) \ge (a_1 + a_2... + a_n)(b_1 + b_2... + b_n)$

- Nếu 2 dãy số $\{a_k\}_1^n, \{b_k\}_1^n$ là 2 dãy đơn điệu ngược chiều thì $S \le 0$

  Suy ra $n(a_1b_1 + a_2b_2... + a_nb_n) \le (a_1 + a_2... + a_n)(b_1 + b_2... + b_n)$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow S = 0 \Leftrightarrow (a_i - a_j)(b_i - b_j) = 0 \quad \forall\ 1 \le i < j \le n$

$\Rightarrow (a_1 - a_n)(b_1 - b_n) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a_1 = a_n \\ b_1 = b_n \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a_1 = a_2 = ... = a_n \\ b_1 = b_2 = ... = b_n \end{array}\right.$

3. Bất đẳng thức Chebyshev mở rộng

Cho $m_1, m_2, ..., m_n > 0$ thỏa mãn $m_1 + m_2 + ... + m_n = 1$

3.1. Nếu có $\begin{cases} a_1 \ge a_2 \ge ... \ge a_n \\ b_1 \ge b_2 \ge ... \ge b_n \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a_1 \le a_2 \le ... \le a_n \\ b_1 \le b_2 \le ... \le b_n \end{cases}$ thì

$$m_1a_1b_1 + m_2a_2b_2 + ... + m_na_nb_n \ge (m_1a_1 + m_2a_2 + ... + m_na_n)(m_1b_1 + m_2b_2 + ... + m_nb_n)$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a_1 = a_2 = ... = a_n \\ b_1 = b_2 = ... = b_n \end{array}\right.$

3.2. Nếu có $\begin{cases} a_1 \ge a_2 \ge ... \ge a_n \\ b_1 \le b_2 \le ... \le b_n \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a_1 \le a_2 \le ... \le a_n \\ b_1 \ge b_2 \ge ... \ge b_n \end{cases}$ thì

$$m_1a_1b_1 + m_2a_2b_2 + ... + m_na_nb_n \le (m_1a_1 + m_2a_2 + ... + m_na_n)(m_1b_1 + m_2b_2 + ... + m_nb_n)$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a_1 = a_2 = ... = a_n \\ b_1 = b_2 = ... = b_n \end{array}\right.$

Chứng minh

Ta sẽ chứng minh đại diện **3.1** còn **3.2** được chứng minh tương tự.

Xét trường hợp đại diện $\begin{cases} a_1 \ge a_2 \ge ... \ge a_n \\ b_1 \ge b_2 \ge ... \ge b_n \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a_1 \le a_2 \le ... \le a_n \\ b_1 \le b_2 \le ... \le b_n \end{cases}$

Ta có $(a_k - a_p)(b_k - b_p) \ge 0 \Leftrightarrow a_kb_k + a_pb_p \ge a_kb_p + a_pb_k$

$\Leftrightarrow m_km_pa_kb_k + m_km_pa_pb_p \ge m_km_pa_kb_p + m_km_pa_pb_k$

Cho p chạy từ 1 đến n suy ra

$$m_ka_kb_k\sum_{p=1}^{n} m_p + m_k\sum_{p=1}^{n} m_pa_pb_p \ge m_ka_k\sum_{p=1}^{n} m_pb_p + m_kb_k\sum_{p=1}^{n} m_pa_p$$

$$\Leftrightarrow m_ka_kb_k + m_k\sum_{p=1}^{n} m_pa_pb_p \ge m_ka_k\sum_{p=1}^{n} m_pb_p + m_kb_k\sum_{p=1}^{n} m_pa_p$$

Bây giờ cho k chạy từ 1 đến n suy ra

$$\sum_{k=1}^{n} m_ka_kb_k + \sum_{k=1}^{n} m_k\sum_{p=1}^{n} m_pa_pb_p \ge \sum_{k=1}^{n} m_ka_k\sum_{p=1}^{n} m_pb_p + \sum_{k=1}^{n} m_kb_k\sum_{p=1}^{n} m_pa_p$$

$$\Leftrightarrow 2\sum_{i=1}^{n} m_ia_ib_i \ge 2\sum_{i=1}^{n} m_ia_i.\sum_{i=1}^{n} m_ib_i \quad \text{(đổi chỉ số)}$$

$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} m_ia_ib_i \ge \sum_{i=1}^{n} m_ia_i.\sum_{i=1}^{n} m_ib_i$ Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a_1 = a_2 = ... = a_n \\ b_1 = b_2 = ... = b_n \end{array}\right.$

Chú ý: Cho $m_1 = m_2 = ... = m_n = \frac{1}{n}$ suy ra ***bất đẳng thức Chebyshev***

§5. 2. KỸ THUẬT SỬ DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC CHEBYSHEV

I. CÁC BÀI TẬP MẪU MINH HỌA

Bài 1. Chứng minh rằng: $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}\quad\forall a,b,c>0$

Chứng minh

Không mất tính tổng quát, giả sử $a\leq b\leq c\Rightarrow\begin{cases}b+c\geq c+a\geq a+b\\ \frac{a}{b+c}\leq\frac{b}{c+a}\leq\frac{c}{a+b}\end{cases}$

Sử dụng bất đẳng thức ***Chebyshev*** cho 2 dãy đơn điệu ngược chiều ta có:

$$\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)\left[(b+c)+(c+a)+(a+b)\right]\geq$$

$$\geq 3\left[\frac{a}{b+c}(b+c)+\frac{b}{c+a}(c+a)+\frac{c}{a+b}(a+b)\right]$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)\left[2(a+b+c)\right]\geq 3(a+b+c)$$

$$\Leftrightarrow\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3(a+b+c)}{2(a+b+c)}=\frac{3}{2}$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c>0$.

Bài 2. [PSFJIMO 28 – Cuba 1987] Cho $a,b,c>0$ và $n\in\mathbb{Z}^+$.

Chứng minh rằng: $\frac{a^n}{b+c}+\frac{b^n}{c+a}+\frac{c^n}{a+b}\geq\frac{(a+b+c)^{n-1}}{2.3^{n-2}}$

Chứng minh

Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức bằng phương pháp Quy nạp toán học:

- Với $n=1$ thì bất đẳng thức ***Nesbit*** quen biết $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}$.
- Giả sử bất đẳng thức đúng với $n=k$: $\frac{a^k}{b+c}+\frac{b^k}{c+a}+\frac{c^k}{a+b}\geq\frac{(a+b+c)^{k-1}}{2.3^{k-2}}$

Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức đúng với $n=k+1$.

Không mất tính tổng quát, giả sử $0<a\leq b\leq c\Rightarrow\begin{cases}a\leq b\leq c\\ \frac{a^k}{b+c}\leq\frac{b^k}{c+a}\leq\frac{c^k}{a+b}\end{cases}$

Sử dụng bất đẳng thức ***Chebyshev*** cho 2 dãy đơn điệu cùng chiều ta có:

$$3\left(\frac{a^k}{b+c}\cdot a+\frac{b^k}{c+a}\cdot b+\frac{c^k}{a+b}\cdot c\right)\geq\left(\frac{a^k}{b+c}+\frac{b^k}{c+a}+\frac{c^k}{a+b}\right)(a+b+c)$$

$$\geq \frac{(a+b+c)^{k-1}}{2.3^{k-2}}\cdot(a+b+c)=\frac{(a+b+c)^{k}}{2.3^{k-2}} \Leftrightarrow \frac{a^{k+1}}{b+c}+\frac{b^{k+1}}{c+a}+\frac{c^{k+1}}{a+b}\geq\frac{(a+b+c)^{k}}{2.3^{k-1}}$$

Theo nguyên lý quy nạp suy ra (1) đúng $\forall n\in\mathbb{Z}^{+}$. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c>0$.

Bài 3 Cho $\begin{cases}a,b,c>0\\ \alpha\in\mathbb{Z}^{+}\end{cases}$ Chứng minh rằng: $\frac{a^{\alpha}}{b+c}+\frac{b^{\alpha}}{c+a}+\frac{c^{\alpha}}{a+b}\geq\frac{3}{2}\cdot\frac{a^{\alpha}+b^{\alpha}+c^{\alpha}}{a+b+c}$ (1)

Chứng minh

Không mất tính tổng quát, giả sử $a\geq b\geq c>0 \Rightarrow \begin{cases}b+c\leq a+c\leq a+b\\ \frac{a^{\alpha}}{b+c}\geq\frac{b^{\alpha}}{c+a}\geq\frac{c^{\alpha}}{a+b}\end{cases}$

Sử dụng bất đẳng thức ***Chebyshev*** cho 2 dãy đơn điệu ngược chiều ta có:

$$VT(1)=\frac{1}{2(a+b+c)}\cdot\left(\frac{a^{\alpha}}{b+c}+\frac{b^{\alpha}}{c+a}+\frac{c^{\alpha}}{a+b}\right)\left[(b+c)+(c+a)+(a+b)\right]\geq$$

$$\geq\frac{1}{2(a+b+c)}\cdot 3\left[\frac{a^{\alpha}}{b+c}(b+c)+\frac{b^{\alpha}}{c+a}(c+a)+\frac{c^{\alpha}}{a+b}(a+b)\right]=\frac{3\left(a^{\alpha}+b^{\alpha}+c^{\alpha}\right)}{2(a+b+c)}$$

Bài 4. Cho $\begin{cases}a,b,c,d>0\\ a^2+b^2+c^2+d^2=1\end{cases}$. Chứng minh: $\frac{a^2}{b+c+d}+\frac{b^2}{c+d+a}+\frac{c^2}{d+a+b}+\frac{d^2}{a+b+c}\geq\frac{2}{3}$

Chứng minh

Đặt $A=b+c+d$; $B=c+d+a$; $C=d+a+b$; $D=a+b+c$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a\geq b\geq c\geq d>0 \Rightarrow \begin{cases}a^2\geq b^2\geq c^2\geq d^2>0\\ \frac{1}{A}\geq\frac{1}{B}\geq\frac{1}{C}\geq\frac{1}{D}>0\end{cases}$

Sử dụng bất đẳng thức ***Chebyshev*** rồi ***AM – GM*** và ***CBS*** ta có:

$$VT\geq\frac{1}{4}\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}+\frac{1}{D}\right)\geq\sqrt[4]{\frac{1}{A}\cdot\frac{1}{B}\cdot\frac{1}{C}\cdot\frac{1}{D}}=\frac{1}{\sqrt[4]{ABCD}}\geq\frac{4}{A+B+C+D}$$

$$=\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{a+b+c+d}\geq\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{4\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)}}=\frac{2}{3}$$. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=d=\frac{1}{2}$

Bài 4. [PSFJIMO 36 – Canada 1995] Cho $a,b,c,d>0$ thỏa mãn $ab+bc+cd+da=1$.

Chứng minh rằng: $S=\frac{a^3}{b+c+d}+\frac{b^3}{c+d+a}+\frac{c^3}{d+a+b}+\frac{d^3}{a+b+c}\geq\frac{1}{3}$

Chứng minh

Đặt $A=b+c+d$; $B=c+d+a$; $C=d+a+b$; $D=a+b+c$

$\Rightarrow A+B+C+D=(b+c+d)+(c+d+a)+(d+a+b)+(a+b+c)=3(a+b+c+d)$

Ta có $a^2+b^2+c^2+d^2=\frac{a^2+b^2}{2}+\frac{b^2+c^2}{2}+\frac{c^2+d^2}{2}+\frac{d^2+a^2}{2}\geq ab+bc+cd+da=1$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a\geq b\geq c\geq d>0 \Rightarrow \begin{cases} a^3\geq b^3\geq c^3\geq d^3>0 \\ \frac{1}{A}\geq\frac{1}{B}\geq\frac{1}{C}\geq\frac{1}{D}>0\end{cases}$

Sử dụng bất đẳng thức ***Chebyshev*** ta có

$$S=\frac{a^3}{A}+\frac{b^3}{B}+\frac{c^3}{C}+\frac{d^3}{D}\geq\frac{1}{4}\left(a^3+b^3+c^3+d^3\right)\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}+\frac{1}{D}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(a^2a+b^2b+c^2c+d^2d\right)\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}+\frac{1}{D}\right)$$

$$\geq\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)(a+b+c+d)\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}+\frac{1}{D}\right)$$

$$\geq\frac{1}{16}\cdot(a+b+c+d)\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}+\frac{1}{D}\right)=\frac{1}{48}\cdot(A+B+C+D)\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}+\frac{1}{D}\right)$$

$$\geq\frac{1}{48}\cdot4\cdot4\sqrt[4]{A.B.C.D}.4\sqrt[4]{\frac{1}{A}\cdot\frac{1}{B}\cdot\frac{1}{C}\cdot\frac{1}{D}}=\frac{1}{3}\text{ (đpcm).}$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=d=\frac{1}{2}$

Bài 5. Cho các số thực $a,b,c>0$ thỏa mãn điều kiện $a^2+b^2+c^2\geq1$.

Chứng minh rằng: $\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\geq\frac{\sqrt{3}}{2}$

Chứng minh

- ***Bổ đề:*** • $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geq\frac{9}{x+y+z}\ \forall x,y,z>0$;
  • $x+y+z\leq\sqrt{3(x^2+y^2+z^2)}\ \forall x,y,z\in\mathbb{R}$
- ***Áp dụng:***

Không mất tính tổng quát, giả sử $a\geq b\geq c>0\Rightarrow\begin{cases}a^2\geq b^2\geq c^2\\ \frac{1}{b+c}\geq\frac{1}{c+a}\geq\frac{1}{a+b}\end{cases}$

Sử dụng bất đẳng thức ***Chebyshev*** ta có

$$3\left(a^2\frac{1}{b+c}+b^2\frac{1}{c+a}+c^2\frac{1}{a+b}\right)\geq\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)$$

$$=\left(a^2+b^2+c^2\right)\frac{9}{(b+c)+(c+a)+(a+b)}=\frac{9\left(a^2+b^2+c^2\right)}{2(a+b+c)}\geq\frac{9\left(a^2+b^2+c^2\right)}{2\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}}$$

$$=\frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{a^2+b^2+c^2}\geq\frac{3\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\geq\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{\sqrt{3}}$

Bài 6. [IMO36 – Canada 1995] Cho các số thực $a, b, c > 0$ thỏa mãn $abc = 1$.

Chứng minh rằng: $\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\ge\frac{3}{2}$ (1)

Chứng minh

Đặt $\frac{1}{a}=x, \frac{1}{b}=y, \frac{1}{c}=z \Rightarrow \begin{cases} x, y, z > 0 \\ x.y.z = 1 \end{cases}$.

Khi đó bất đẳng thức (1) $\Leftrightarrow \frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}\ge\frac{3}{2}$ (2)

Không mất tính tổng quát, giả sử $x \ge y \ge z > 0 \Rightarrow \begin{cases} x \ge y \ge z > 0 \\ \frac{x}{y+z} \ge \frac{y}{z+x} \ge \frac{z}{x+y} > 0 \end{cases}$

Sử dụng bất đẳng thức ***Chebyshev*** và bất đẳng thức ***AM – GM*** ta có

$$\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}\ge\frac{1}{3}(x+y+z)\left(\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}\right)$$

$$=\frac{1}{6}[(y+z)+(z+x)+(x+y)]\left(\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}\right)\ge$$

$$\ge\frac{1}{6}\cdot 3\left[\frac{x}{y+z}\cdot(y+z)+\frac{y}{z+x}\cdot(z+a)+\frac{z}{x+y}\cdot(x+y)\right]=\frac{1}{2}(x+y+z)\ge\frac{3\cdot\sqrt[3]{xyz}}{2}=\frac{3}{2}$$

$\Rightarrow$ Bất đẳng thức (2) đúng suy ra (1) đúng. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = 1$.

Bài 7. Giả sử a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{\sqrt{b+c-a}}+\frac{b}{\sqrt{c+a-b}}+\frac{c}{\sqrt{a+b-c}}\ge\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$$

Chứng minh

- ***Bổ đề:*** $(b + c - a)(c + a - b)(a + b - c) \le abc$
- ***Chứng minh:*** Sử dụng bất đẳng thức ***AM – GM*** ta có:

$$\times\begin{cases} 0<\sqrt{(b+c-a)(c+a-b)}\le\frac{(b+c-a)+(c+a-b)}{2}=c \\ 0<\sqrt{(c+a-b)(a+b-c)}\le\frac{(c+a-b)+(a+b-c)}{2}=a \\ 0<\sqrt{(a+b-c)(b+c-a)}\le\frac{(a+b-c)+(b+c-a)}{2}=b \end{cases}$$

$$\Rightarrow 0 < (b + c - a)(c + a - b)(a + b - c) \le abc$$

- ***Áp dụng:*** Không mất tính tổng quát, giả sử $a \ge b \ge c > 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{b+c-a} \geq \frac{1}{c+a-b} \geq \frac{1}{a+b-c} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{a} \geq \sqrt{b} \geq \sqrt{c} \\ \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b+c-a}} \geq \dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{c+a-b}} \geq \dfrac{\sqrt{c}}{\sqrt{a+b-c}} \end{cases}$$

Sử dụng bất đẳng thức ***Chebyshev*** ta có:

$$VT \geq \frac{1}{3}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b+c-a}}+\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{c+a-b}}+\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a+b-c}}\right) \geq$$

$$\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right).\sqrt[3]{\frac{abc}{(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}} \geq \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

Bài 8. [CWMO 2005] Cho $a,b,c,d,e > 0$ thỏa mãn $\frac{1}{4+a}+\frac{1}{4+b}+\frac{1}{4+c}+\frac{1}{4+d}+\frac{1}{4+e}=1$.

Chứng minh rằng: $\frac{a}{4+a^2}+\frac{b}{4+b^2}+\frac{c}{4+c^2}+\frac{d}{4+d^2}+\frac{e}{4+e^2} \leq 1$

Chứng minh

$$(1) \Leftrightarrow \frac{1}{4+a}+\frac{1}{4+b}+\frac{1}{4+c}+\frac{1}{4+d}+\frac{1}{4+e} \geq \frac{a}{4+a^2}+\frac{b}{4+b^2}+\frac{c}{4+c^2}+\frac{d}{4+d^2}+\frac{e}{4+e^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-a}{(4+a)(4+a^2)}+\frac{1-b}{(4+b)(4+b^2)}+\frac{1-c}{(4+c)(4+c^2)}+\frac{1-d}{(4+d)(4+d^2)} \geq 0$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b \geq c \geq d \geq e \Rightarrow$

$\frac{1-a}{4+a} \leq \frac{1-b}{4+b} \leq \frac{1-c}{4+c} \leq \frac{1-d}{4+d} \leq \frac{1-e}{4+e}$ và $\frac{1}{4+a^2} \leq \frac{1}{4+b^2} \leq \frac{1}{4+c^2} \leq \frac{1}{4+d^2} \leq \frac{1}{4+e^2}$

Sử dụng bất đẳng thức ***Chebyshev*** ta có:

$$\sum_{cyc}\frac{1-a}{(4+a)(4+a^2)} \geq \frac{1}{5}\sum_{cyc}\frac{1-a}{4+a}\cdot\sum_{cyc}\frac{1}{4+a^2} = \frac{1}{5}\sum_{cyc}\frac{1}{4+a^2}\cdot\sum_{cyc}\left(\frac{5}{4+a}-1\right)=0$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=d=e=1$.

Bài 9. Chứng minh rằng: $\frac{\sqrt{a^2+bc}}{b+c}+\frac{\sqrt{b^2+ca}}{c+a}+\frac{\sqrt{c^2+ab}}{a+b} \geq \frac{3\sqrt{2}}{2}$, $\forall a,b,c>0$ (1)

Chứng minh

$$(1) \Leftrightarrow \sum_{cyc}\left(\frac{\sqrt{a^2+bc}}{b+c}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{cyc}\frac{2a^2-b^2-c^2}{(b+c)\left[\sqrt{2(a^2+bc)}+b+c\right]} \geq 0$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \leq b \leq c$ suy ra $(b+c)^2 \geq (c+a)^2 \geq (a+b)^2$

và $2a^2-b^2-c^2 \leq 2b^2-c^2-a^2 \leq 2c^2-a^2-b^2$.

Ta có : $(b+c)\sqrt{a^2+bc}-(c+a)\sqrt{b^2+ca}=\dfrac{c(b-a)(a^2+b^2+c^2-ab+bc+ca)}{(b+c)\sqrt{a^2+bc}+(c+a)\sqrt{b^2+ca}}\geq 0$

và $(c+a)\sqrt{b^2+ca}-(a+b)\sqrt{c^2+ab}=\dfrac{a(c-b)(a^2+b^2+c^2+ab-bc+ca)}{(c+a)\sqrt{b^2+ca}+(a+b)\sqrt{c^2+ab}}\geq 0$

$$(b+c)\sqrt{2(a^2+bc)}+(b+c)^2\geq(c+a)\sqrt{2(b^2+ca)}+(c+a)^2\geq(a+b)\sqrt{2(c^2+ab)}+(a+b)^2$$

Sử dụng bất đẳng thức ***Chebyshev*** ta có:

$$\sum_{cyc}\frac{2a^2-b^2-c^2}{(b+c)\left[\sqrt{2(a^2+bc)}+b+c\right]}\geq\frac{1}{3}\sum_{cyc}(2a^2-b^2-c^2)\sum_{cyc}\frac{1}{(b+c)\left[\sqrt{2(a^2+bc)}+b+c\right]}=0.$$

Bài 10. Chứng minh: $\sqrt{\dfrac{b+c}{a}}+\sqrt{\dfrac{a+c}{b}}+\sqrt{\dfrac{a+b}{c}}\geq 2\left(\sqrt{\dfrac{a}{b+c}}+\sqrt{\dfrac{b}{c+a}}+\sqrt{\dfrac{c}{a+b}}\right), \forall a,b,c>0\ (1)$

Chứng minh

Biểu thức (1) $\Leftrightarrow\left(\sqrt{\dfrac{b+c}{a}}-2\sqrt{\dfrac{a}{b+c}}\right)+\left(\sqrt{\dfrac{a+c}{b}}-2\sqrt{\dfrac{b}{a+c}}\right)+\left(\sqrt{\dfrac{a+b}{c}}-2\sqrt{\dfrac{c}{a+b}}\right)\geq 0$

$\Leftrightarrow\dfrac{b+c-2a}{\sqrt{a(b+c)}}+\dfrac{c+a-2b}{\sqrt{b(c+a)}}+\dfrac{a+b-2c}{\sqrt{c(a+b)}}\geq 0\ (2)$

Giả sử $a\geq b\geq c$, khi đó $b+c-2a\leq c+a-2b\leq a+b-2c$

Và $\dfrac{1}{\sqrt{a(b+c)}}\leq\dfrac{1}{\sqrt{b(c+a)}}\leq\dfrac{1}{\sqrt{c(a+b)}}$. Sử dụng bất đẳng thức ***Chebyshev*** ta có :

$$VT(2)\geq(b+c-2a+c+a-2b+a+b-2c)\left(\frac{1}{\sqrt{a(b+c)}}+\frac{1}{\sqrt{b(c+a)}}+\frac{1}{\sqrt{c(a+b)}}\right)=0$$

Như vậy bất đẳng thức được chứng minh. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c>0$

Bài 11. Cho a,b,c sao cho $\dfrac{1}{a},\dfrac{1}{b},\dfrac{1}{c}$ là độ dài ba cạnh của một tam giác.

Chứng minh rằng $\dfrac{ab+ac+2bc}{a^2+bc}+\dfrac{ab+bc+2ac}{b^2+ac}+\dfrac{ca+cb+2ab}{c^2+ab}\leq 6\ (1)$

Chứng minh

(1) $\Leftrightarrow\dfrac{a(b+c-2a)}{a^2+bc}+\dfrac{b(a+c-2b)}{b^2+ac}+\dfrac{c(a+b-2c)}{c^2+ab}\leq 0\ (2)$

Giả sử $a\geq b\geq c\Rightarrow b+c-2a\leq a+c-2b\leq b+c-2a$

Vì $\dfrac{1}{a},\dfrac{1}{b},\dfrac{1}{c}$ là độ dài của một tam giác, ta có $ab+ac-bc\geq ab+bc-ac\geq bc+ca-ab>0$.

Dẫn đến $\dfrac{a}{a^2+bc}-\dfrac{b}{b^2+ac}=\dfrac{(a-b)(bc+ca-ab)}{(a^2+bc)(b^2+ac)}\geq 0\Leftrightarrow\dfrac{a}{a^2+bc}\geq\dfrac{b}{b^2+ac}$.

Tương tự, ta có $\dfrac{a}{a^2+bc} \ge \dfrac{b}{b^2+ac} \ge \dfrac{c}{c^2+ab}$. Sử dụng bất đẳng thức ***Chebyshev*** ta có :

$$\text{VT }(2) \le (b+c-2a+c+a-2b+a+b-2c)\left(\frac{a}{a^2+bc}+\frac{b}{b^2+ac}+\frac{c}{c^2+ab}\right)=0$$

Như vậy bất đẳng thức được chứng minh. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$

Bài 12. Cho $\begin{cases} a,b,c \ge 0 \\ a+b+c=3 \end{cases}$. Chứng minh $\dfrac{1}{c^2+a+b}+\dfrac{1}{a^2+b+c}+\dfrac{1}{b^2+a+c} \le 1$ (1)

Chứng minh

Ta có : $\dfrac{1}{c^2+a+b}-\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{c^2-c+3}-\dfrac{1}{3}=\dfrac{c(1-c)}{3(c^2-c+3)}$. Tương tự và suy ra:

Bất đẳng thức (1) $\Leftrightarrow$

$$\frac{a(a-1)}{a^2-a+3}+\frac{b(b-1)}{b^2-b+3}+\frac{c(c-1)}{c^2-c+3} \ge 0 \Leftrightarrow \frac{a-1}{a-1+\frac{3}{a}}+\frac{b-1}{b-1+\frac{3}{b}}+\frac{c-1}{c-1+\frac{3}{c}} \ge 0$$

Giả sử $a \ge b \ge c$, thì $a-1 \ge b-1 \ge c-1$

Từ $a+b+c=3$ suy ra $ab, bc, ca \le 3 \Rightarrow \dfrac{1}{a-1+\frac{3}{a}} \ge \dfrac{1}{b-1+\frac{3}{b}} \ge \dfrac{1}{c-1+\frac{3}{c}}$

Sử dụng bất đẳng thức ***Chebyshev*** ta có :

$$\frac{a-1}{a-1+\frac{3}{a}}+\frac{b-1}{b-1+\frac{3}{b}}+\frac{c-1}{c-1+\frac{3}{c}} \ge (a-1+b-1+c-1)\left(\frac{1}{a-1+\frac{3}{a}}+\frac{1}{b-1+\frac{3}{b}}+\frac{1}{c-1+\frac{3}{c}}\right)=0$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$

Bài 13. Chứng minh rằng: $\dfrac{a^2-bc}{b^2+c^2+2a^2}+\dfrac{b^2-ca}{c^2+a^2+2b^2}+\dfrac{c^2-ab}{a^2+b^2+2c^2} \ge 0$, $\forall a,b,c \ge 0$

Chứng minh

Chúng ta sẽ chứng minh bất đẳng thức tổng quát hơn với mọi $k \le 2$

$$\frac{a^2-bc}{b^2+c^2+ka^2}+\frac{b^2-ca}{c^2+a^2+kb^2}+\frac{c^2-ab}{a^2+b^2+kc^2} \ge 0 \quad (1)$$

Thật vậy, nhân thêm các hệ số tương ứng vào mỗi phân số ta được

$$(1) \Leftrightarrow \frac{(a^2-bc)(b+c)}{(b^2+c^2+ka^2)(b+c)}+\frac{(b^2-ca)(c+a)}{(c^2+a^2+kb^2)(c+a)}+\frac{(c^2-ab)(a+b)}{(a^2+b^2+kc^2)(a+b)} \ge 0 \ (2)$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \ge b \ge c$, thì

$$(a^2-bc)(b+c)-(b^2-ca)(c+a)=(ab+c^2)(a-b)+c(a^2-b^2) \ge 0$$

$$(b^2+c^2+ka^2)(b+c)-(c^2+a^2+kb^2)(c+a)=(b-a)(a^2+b^2+c^2-(k-1)(ab+bc+ca)) \le 0$$

Tương tự, ta có: $(a^2-bc)(b+c)\ge(b^2-ca)(c+a)\ge(c^2-ab)(a+b)$

và $\dfrac{1}{(b^2+c^2+ka^2)(b+c)}\ge\dfrac{1}{(c^2+a^2+kb^2)(c+a)}\ge\dfrac{1}{(a^2+b^2+kc^2)(a+b)}\ge 0$

Sử dụng bất đẳng thức ***Chebyshev*** ta có:

$$VT\ (2)\ge\left[(a^2-bc)(b+c)+(b^2-ca)(c+a)+(c^2-ab)(a+b)\right]$$

$$\times\left[\frac{1}{(b^2+c^2+ka^2)(b+c)}+\frac{1}{(c^2+a^2+kb^2)(c+a)}+\frac{1}{(a^2+b^2+kc^2)(a+b)}\right]=0$$

Như vậy bất đẳng thức được chứng minh. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c\ge 0$

Bài 14. Cho $a,b,c\ge 0$. Chứng minh rằng:

$$2\le\frac{(a+b)^2}{a^2+b^2+c^2+ab}+\frac{(b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+bc}+\frac{(c+a)^2}{a^2+b^2+c^2+ca}\le 3$$

Chứng minh

• ***Bước 1:*** *Chứng minh* $\dfrac{(a+b)^2}{a^2+b^2+c^2+ab}+\dfrac{(b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+bc}+\dfrac{(c+a)^2}{a^2+b^2+c^2+ca}\ge 2$

$$\sum_{cyc}\frac{(a+b)^2}{a^2+b^2+c^2+ab}\ge\sum_{cyc}\frac{(a+b)^2}{a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca}=\frac{(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2}{a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca}=2.$$

• ***Bước 2:*** *Chứng minh* $\dfrac{(a+b)^2}{a^2+b^2+c^2+ab}+\dfrac{(b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+bc}+\dfrac{(c+a)^2}{a^2+b^2+c^2+ca}\le 3$ (1)

$$(1)\Leftrightarrow\sum_{cyc}\left[\frac{(a+b)^2}{a^2+b^2+c^2+ab}-1\right]\le 0\Leftrightarrow\sum_{cyc}\frac{c^2-ab}{a^2+b^2+c^2+ab}\ge 0\Leftrightarrow\sum_{cyc}\frac{(c^2-ab)(a+b)}{(a^2+b^2+c^2+ab)(a+b)}\ge 0$$

Không mất tính tổng quát giả sử $a\ge b\ge c$, đặt $u=a^2+b^2+c^2$.

Ta sẽ chứng minh:

$(a^2-bc)(b+c)\ge(b^2-ca)(c+a)\ge(c^2-ab)(a+b)$

$(u+bc)(b+c)\le(u+ca)(c+a)\le(u+ab)(a+b)$

Thật vậy, ta có: $(a^2-bc)(b+c)-(b^2-ca)(c+a)=(c^2+ab)(a-b)+2c(a^2-b^2)\ge 0$

$(b^2-ca)(c+a)-(c^2-ab)(a+b)=(a^2+bc)(b-c)+2a(b^2-c^2)\ge 0$

và $(u+ca)(c+a)-(u+bc)(b+c)=(a-b)\left[u+c^2+c(a+b)\right]\ge 0$

$(u+ab)(a+b)-(u+ca)(c+a)=(b-c)\left[u+a^2+a(b+c)\right]\ge 0$

Sử dụng bất đẳng thức ***Chebyshev*** và chú ý $\sum_{cyc}(a^2-bc)(b+c)=0$ ta có:

$$\sum_{cyc}\frac{c^2-ab}{a^2+b^2+c^2+ab}\geq\frac{1}{3}\cdot\sum_{cyc}(c^2-ab)(a+b)\cdot\sum_{cyc}\frac{1}{(a^2+b^2+c^2+ab)(a+b)}=0$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

Nhận xét: Phép biến đổi: $\displaystyle\sum_{cyc}\frac{c^2-ab}{a^2+b^2+c^2+ab}\geq 0\Leftrightarrow\sum_{cyc}\frac{(c^2-ab)(a+b)}{(a^2+b^2+c^2+ab)(a+b)}\geq 0$

chính là điểm mấu chốt của chứng minh vì khi đó chúng ta mới tạo ra hai dãy có tính sắp thứ tự.

Bài 15. Cho a,b,c là độ dài 3 cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2-bc}{3a^2+b^2+c^2}+\frac{b^2-ca}{3b^2+c^2+a^2}+\frac{c^2-ab}{3c^2+a^2+b^2}\leq 0$$

Chứng minh

• ***Bổ đề:*** Nếu a,b,c là độ dài 3 cạnh của một tam giác thì $a^2+b^2+c^2<2(ab+bc+ca)$

• ***Chứng minh:***

$2(ab+bc+ca)-(a^2+b^2+c^2)=a(b+c-a)+b(c+a-b)+c(a+b-c)>0$

• ***Áp dụng:*** Không mất tính tổng quát, giả sử $a\geq b\geq c$.

Tương tự như bài **14.** ta có : $(a^2-bc)(b+c)\geq(b^2-ca)(c+a)\geq(c^2-ab)(a+b)$

Để ý rằng

$(3a^2+b^2+c^2)(b+c)-(3b^2+c^2+a^2)(c+a)=(a-b)\left[2(ab+bc+ca)-(a^2+b^2+c^2)\right]\geq 0$

Tương tự ta có : $(3a^2+b^2+c^2)(b+c)\geq(3b^2+c^2+a^2)(c+a)\geq(3c^2+a^2+b^2)(a+b)$

Sử dụng $\displaystyle\sum_{cyc}(a^2-bc)(b+c)=0$ và bất đẳng thức ***Chebyshev*** ta có:

$$\sum_{cyc}\frac{a^2-bc}{3a^2+b^2+c^2}=\sum_{cyc}\frac{(a^2-bc)(b+c)}{(3a^2+b^2+c^2)(b+c)}$$
$$\leq\frac{1}{3}\sum_{cyc}(a^2-bc)(b+c)\cdot\sum_{cyc}\frac{1}{(3a^2+b^2+c^2)(b+c)}=0$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$ hoặc $a=b, c=0$ và các hoán vị.

Bài 16. Cho $a,b,c\geq 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{2}{3}(ab+bc+ca)\left[\frac{1}{(a+b)^2}+\frac{1}{(b+c)^2}+\frac{1}{(c+a)^2}\right]\quad(1)$$

Chứng minh

$$(1)\Leftrightarrow 3\sum_{cyc}\frac{a}{b+c}\geq 2\sum_{cyc}\frac{bc+a(b+c)}{(b+c)^2}=2\sum_{cyc}\frac{bc}{(b+c)^2}+2\sum_{cyc}\frac{a}{b+c}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{a}{b+c}\ge 2\sum_{cyc}\frac{bc}{(b+c)^2}\Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{ab+ac-2bc}{(b+c)^2}\ge 0$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a\ge b\ge c$, thì

$ab+ac-2bc\ge bc+ba-2ca\ge ca+cb-2ab$ và $\frac{1}{(b+c)^2}\ge\frac{1}{(c+a)^2}\ge\frac{1}{(a+b)^2}$.

Sử dụng bất đẳng thức ***Chebyshev*** ta có:

$$\sum_{cyc}\frac{ab+ac-2bc}{(b+c)^2}\ge\frac{1}{3}\left[\sum_{cyc}(ab+ac-2bc)\right]\left[\sum_{cyc}\frac{1}{(b+c)^2}\right]=0$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

Nhận xét. Ta đã biết bất đẳng thức ***Nesbitt*** $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\ge\frac{3}{2}$ và ***Iran 1996***

$$(ab+bc+ca)\left[\frac{1}{(a+b)^2}+\frac{1}{(b+c)^2}+\frac{1}{(c+a)^2}\right]\ge\frac{9}{4}.$$

Như vậy bất đẳng thức trên chính là một sự *làm mạnh* của bất đẳng thức ***Nesbitt.***

Bài 17. Cho $a,b,c,d>0$ thỏa mãn $a+b+c+d=4\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)$.

Chứng minh rằng $2(a+b+c+d)\ge\sqrt{3a^2+4}+\sqrt{3b^2+4}+\sqrt{3c^2+4}+\sqrt{3d^2+4}$ (1)

Chứng minh

$$(1)\Leftrightarrow\sum_{cyc}\left(2a-\sqrt{3a^2+4}\right)\ge 0\Leftrightarrow\sum_{cyc}\frac{a^2-4}{2a+\sqrt{3a^2+4}}\ge 0\Leftrightarrow\sum_{cyc}\left(a-\frac{4}{a}\right)\frac{1}{2+\sqrt{3+\frac{4}{a^2}}}\ge 0$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a\ge b\ge c\ge d>0\Rightarrow a-\frac{4}{a}\ge b-\frac{4}{b}\ge c-\frac{4}{c}\ge d-\frac{4}{d}$

và $\frac{1}{2+\sqrt{3+\frac{4}{a^2}}}\ge\frac{1}{2+\sqrt{3+\frac{4}{b^2}}}\ge\frac{1}{2+\sqrt{3+\frac{4}{c^2}}}\ge\frac{1}{2+\sqrt{3+\frac{4}{d^2}}}$.

Sử dụng bất đẳng thức ***Chebyshev*** ta có:

$$\sum_{cyc}\left(a-\frac{4}{a}\right)\frac{1}{2+\sqrt{3+\frac{4}{a^2}}}\ge\frac{1}{4}\sum_{cyc}\left(a-\frac{4}{a}\right)\cdot\sum_{cyc}\frac{1}{2+\sqrt{3+\frac{4}{a^2}}}=0$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=d=2$.

Bài 18. Cho $\begin{cases}a,b,c>0\\ a+b+c=1\end{cases}$. Chứng minh rằng: $\frac{1}{1-ab}+\frac{1}{1-bc}+\frac{1}{1-ca}\le\frac{27}{8}$ (1)

Chứng minh

Đặt $x = bc, y = ca, z = ab$, khi đó (1) $\Leftrightarrow$

$$\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1-y}+\frac{1}{1-z}\le\frac{27}{8}\Leftrightarrow\frac{1-9x}{1-x}+\frac{1-9y}{1-y}+\frac{1-9z}{1-z}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(1-9x)(2+3x)}{(1-x)(2+3x)}+\frac{(1-9y)(2+3y)}{(1-y)(2+3y)}+\frac{(1-9z)(2+3z)}{(1-z)(2+3z)}\ge 0 \quad (2)$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a\ge b\ge c>0 \Rightarrow x\le y\le z$. Khi đó

$$(1-9x)(2+3x)-(1-9y)(2+3y)=(y-x)(15+27x+27y)\ge 0$$

$$(1-9y)(2+3y)-(1-9z)(2+3z)=(z-y)(15+27y+27z)\ge 0$$

$$\Rightarrow (1-9x)(2+3x)\ge(1-9y)(2+3y)\ge(1-9z)(2+3z)$$

Do $a+b+c=1$, nên ta có $z+y=a(b+c)\le\frac{1}{4}, z+x\le\frac{1}{4}, x+y\le\frac{1}{4}$. Từ đó suy ra

$$(1-x)(2+3x)-(1-y)(2+3y)=(x-y)(1-3x-3y)\le 0$$

$$(1-y)(2+3y)-(1-z)(2+3z)=(y-z)(1-3y-3z)\le 0$$

$$\Rightarrow (1-x)(2+3x)\le(1-y)(2+3y)\le(1-z)(2+3z).$$

Sử dụng bất đẳng thức ***Chebyshev*** ta có:

$$\frac{(1-9x)(2+3x)}{(1-x)(2+3x)}+\frac{(1-9y)(2+3y)}{(1-y)(2+3y)}+\frac{(1-9z)(2+3z)}{(1-z)(2+3z)}\ge\left(\sum_{cyc}(1-9x)(2+3x)\right)\sum_{cyc}\frac{1}{(1-x)(2+3x)}$$

Ta chỉ cần chứng minh $\sum_{cyc}(1-9x)(2+3x)\ge 0 \Leftrightarrow 6-15(x+y+z)-27(x^2+y^2+z^2)\ge 0$

$$\Leftrightarrow 5(ab+bc+ca)+9(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)\le 2$$
$$\Leftrightarrow 5(ab+bc+ca)+9(ab+bc+ca)^2\le 18abc+2$$

Sử dụng bất đẳng thức $(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)\le abc$ và $a+b+c=1$ ta có:

$$(1-2a)(1-2b)(1-2c)\le abc \Leftrightarrow 4(ab+bc+ca)\le 9abc+1.$$

Mặt khác, $ab+bc+ca\le\frac{(a+b+c)^2}{3}=\frac{1}{3}\Rightarrow$

$$5(ab+bc+ca)+9(ab+bc+ca)^2\le 8(ab+bc+ca)\le 18abc+2$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{3}$

Bài 19. Cho $a,b,c,d>0$ thỏa mãn $a+b+c+d=4$.

Chứng minh rằng: $\frac{1}{5-abc}+\frac{1}{5-bcd}+\frac{1}{5-cda}+\frac{1}{5-dab}\le 1$

Chứng minh

Đặt $x=abc, y=bcd, z=cda, t=dab$, khi đó bất đẳng thức tương đương

$$\sum_{cyc}\frac{1}{5-x}\le 1\Leftrightarrow \sum_{cyc}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5-x}\right)\ge 0\Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{1-x}{5-x}\ge 0\Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{(1-x)(2+x)}{(5-x)(2+x)}\ge 0$$

Để ý $x+y=bc(a+d)\le\left(\frac{b+c+a+d}{3}\right)^3=\frac{64}{27}<3$ từ đó suy ra nếu $x\ge y$ thì xét hiệu

$$(1-x)(2+x)-(1-y)(2+y)=(y-x)(x+y+1)\le 0\Rightarrow (1-x)(2+x)\le(1-y)(2+y)$$

$$\frac{1}{(5-x)(2+x)}-\frac{1}{(5-y)(2+y)}=\frac{(x-y)(x+y-5)}{(5-x)(5-y)(2+x)(2+y)}\le 0\Rightarrow \frac{1}{(5-x)(2+x)}\le\frac{1}{(5-y)(2+y)}$$

Không mất tính tổng quát giả sử $x\ge y\ge z\ge t$, khi đó sử dụng bất đẳng thức ***Chebyshev***

cho $\begin{cases}(1-x)(2+x)\le(1-y)(2+y)\le(1-z)(2+z)\le(1-t)(2+t)\\ \frac{1}{(5-x)(2+x)}\le\frac{1}{(5-y)(2+y)}\le\frac{1}{(5-z)(2+z)}\le\frac{1}{(5-t)(2+t)}\end{cases}$

Ta có $\sum_{cyc}\frac{(1-x)(2+x)}{(5-x)(2+x)}\ge\frac{1}{4}\cdot\left[\sum_{cyc}(1-x)(2+x)\right]\left[\sum_{cyc}\frac{1}{(5-x)(2+x)}\right]$

Ta sẽ chứng minh: $\sum_{cyc}(1-x)(2+x)=8-x-y-z-t-x^2-y^2-z^2-t^2\ge 0$

$$\Leftrightarrow a^2b^2c^2+b^2c^2d^2+c^2d^2a^2+d^2a^2b^2+abc+bcd+cda+dab\le 8$$

Bất đẳng thức cuối có thể chứng minh bằng phương pháp dồn biến hoặc ***EV***.

Bài 20. Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{\sqrt{a+b}}{c}+\frac{\sqrt{b+c}}{a}+\frac{\sqrt{c+a}}{b}\ge\frac{4(a+b+c)}{\sqrt{(a+b)(b+c)(c+a)}}\quad(1)$$

Chứng minh

Đặt $x=\sqrt{b+c}, y=\sqrt{c+a}, z=\sqrt{a+b}$, khi đó bất đẳng thức (1) trở thành

$$\frac{x}{y^2+z^2-x^2}+\frac{y}{z^2+x^2-y^2}+\frac{z}{x^2+y^2-z^2}\ge\frac{x^2+y^2+z^2}{xyz}\quad(2)$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a\le b\le c\Rightarrow x\ge y\ge z$, khi đó

$$x(y^2+z^2-x^2)-y(z^2+x^2-y^2)=(y-x)(2xy+x^2+y^2-z^2)\le 0$$

$$y(x^2+z^2-y^2)-z(x^2+y^2-z^2)=(z-y)(2yz+y^2+z^2-x^2)\le 0$$

$\Rightarrow x\left(y^2+z^2-x^2\right) \le y\left(z^2+x^2-y^2\right) \le z\left(x^2+y^2-z^2\right)$

Sử dụng bất đẳng thức ***Chebyshev*** ta có $VT(2) \ge \frac{1}{3}\left(\sum_{cyc} x^2\right)\left(\sum_{cyc}\frac{1}{x(y^2+z^2-x^2)}\right)$ (3)

Mặt khác, theo một kết quả quen biết thì

$\left(x^2+y^2-z^2\right)\left(y^2+z^2-x^2\right)\left(x^2+z^2-y^2\right) \le x^2y^2z^2$

Sử dụng bất đẳng thức ***AM – GM*** ta có:

$$\sum_{cyc}\frac{1}{x\left(y^2+z^2-x^2\right)} \ge \frac{3}{\sqrt[3]{xyz\left(x^2+y^2-z^2\right)\left(y^2+z^2-x^2\right)\left(x^2+z^2-y^2\right)}} \ge \frac{3}{\sqrt[3]{xyz(xyz)^2}} = \frac{3}{xyz} \ (4)$$

Từ (3) và (4) ta có: $\sum_{cyc}\frac{x}{y^2+z^2-x^2} \ge \frac{1}{3}\left(x^2+y^2+z^2\right)\cdot\frac{3}{xyz} = \frac{x^2+y^2+z^2}{xyz} \Rightarrow$ (2) đúng

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$

Bài 21. Cho a,b,c là độ dài ba cạnh một tam giác, thỏa mãn $a+b+c=1$.

Chứng minh rằng: $\sqrt{\frac{b+c-a}{a^2+bc}}+\sqrt{\frac{c+a-b}{b^2+ca}}+\sqrt{\frac{a+b-c}{c^2+ab}} \ge 2$ (1)

Chứng minh

Ta có $\left(\sqrt{\frac{b+c-a}{a^2+bc}}+\sqrt{\frac{c+a-b}{b^2+ca}}+\sqrt{\frac{a+b-c}{c^2+ab}}\right)^2 \ge \frac{b+c-a}{a^2+bc}+\frac{c+a-b}{b^2+ca}+\frac{a+b-c}{c^2+ab}$ (2)

Ta sẽ chứng minh $\frac{b+c-a}{a^2+bc}+\frac{c+a-b}{b^2+ca}+\frac{a+b-c}{c^2+ab} \ge 4 \Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{(b+c-a)(a+b+c)}{a^2+bc} \ge 4$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\left[\frac{(b+c)^2-a^2}{a^2+bc}+1\right] \ge 7 \Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{(b+c)^2}{a^2+bc}+\sum_{cyc}\frac{bc}{a^2+bc} \ge 7.$$

Ta sẽ chứng minh $\sum_{cyc}\frac{bc}{a^2+bc} \ge 1$ (3) và $\sum_{cyc}\frac{(b+c)^2}{a^2+bc} \ge 6$ hay

$$\sum_{cyc}\left[\frac{(b+c)^2}{a^2+bc}-2\right] \ge 0 \Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{b^2+c^2-2a^2}{a^2+bc} \ge 0 \ (4)$$

Ta chứng minh (3) bằng bất đẳng thức ***CBS***. Thật vậy ta có:

$$\sum_{cyc}\frac{bc}{a^2+bc} \ge \sum_{cyc}\frac{bc}{2a^2+bc} \ge \frac{(bc+ca+ab)^2}{bc\left(2a^2+bc\right)+ca\left(2b^2+ca\right)+ab\left(2c^2+ab\right)} = 1$$

Giả sử $a \ge b \ge c$ suy ra $\begin{cases} b^2+c^2-2a^2 \le c^2+a^2-2b^2 \le a^2+b^2-2c^2 \\ \frac{1}{a^2+bc} \le \frac{1}{b^2+ca} \le \frac{1}{c^2+ab} \end{cases}$

Ta chứng minh (4) bằng bất đẳng thức ***Chebyshev***. Thật vậy ta có:

$$\sum_{cyc}\frac{b^2+c^2-2a^2}{a^2+bc}\geq\frac{1}{3}\sum_{cyc}\left(b^2+c^2-2a^2\right)\sum_{cyc}\frac{1}{a^2+bc}=\frac{1}{3}\cdot 0\cdot\sum_{cyc}\frac{1}{a^2+bc}=0$$

Do (3) và (4) đúng nên (2) đúng suy ra (1) đúng.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow (a,b,c)\sim\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)$

Bài 22. Cho $a,b,c\geq 0$. Chứng minh rằng: $\frac{a^3+3abc}{(b+c)^3}+\frac{b^3+3abc}{(c+a)^3}+\frac{c^3+3abc}{(a+b)^3}\geq\frac{3}{2}$

Chứng minh

Không mất tính tổng quát giả sử $a\geq b\geq c$, ta có

$\frac{1}{(b+c)^2}\geq\frac{1}{(c+a)^2}\geq\frac{1}{(a+b)^2}$ và $\frac{a^3+3abc}{b+c}\geq\frac{b^3+3abc}{c+a}\geq\frac{c^3+3abc}{a+b}$

Áp dụng bất đẳng thức ***Chebyshev*** cho 2 dãy đơn điệu cùng chiều ta có:

$$\sum_{cyc}\frac{a^3+3abc}{(b+c)^3}=\sum_{cyc}\left(\frac{1}{(b+c)^2}\cdot\frac{a^3+3abc}{b+c}\right)\geq\frac{1}{3}\cdot\left(\sum_{cyc}\frac{1}{(b+c)^2}\right)\left(\sum_{cyc}\frac{a^3+3abc}{b+c}\right),$$

Suy ra bất đẳng thức đã cho đúng nếu ta chứng minh được hai bất đẳng thức sau

$$\frac{1}{(a+b)^2}+\frac{1}{(b+c)^2}+\frac{1}{(c+a)^2}\geq\frac{9}{4(ab+bc+ca)}\quad(1)$$

$$\frac{a^3+3abc}{b+c}+\frac{b^3+3abc}{c+a}+\frac{c^3+3abc}{a+b}\geq 2(ab+bc+ca)\quad(2)$$

Thật vậy, $(1)\Leftrightarrow\sum_{sym}\left(a^5b-a^4b^2\right)+3\sum_{sym}\left(a^5b-a^3b^3\right)+2abc\left(\sum_{cyc}a^3+3abc-\sum_{cyc}ab(a+b)\right)\geq 0$

luôn đúng theo ***AM – GM*** và ***Schur***.

$$(2)\Leftrightarrow\sum_{cyc}\frac{a(a-b)(a-c)}{b+c}+\sum_{cyc}\frac{bc(b-c)^2}{(a+b)(a+c)}\geq 0$$

Ta chỉ cần chứng minh $\frac{a(a-b)(a-c)}{b+c}+\frac{b(b-c)(b-a)}{c+a}+\frac{c(c-a)(c-b)}{a+b}\geq 0$ (3)

Do $a\geq b\geq c$ nên $\frac{c(c-a)(c-b)}{a+b}\geq 0$, suy ra (3) đúng nếu ta có

$\frac{a(a-b)(a-c)}{b+c}+\frac{b(b-c)(b-a)}{c+a}\geq 0\Leftrightarrow(a-b)^2\left(a^2+ab+b^2-c^2\right)\geq 0$ luôn đúng.

Bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

Bài 23. Cho $x_i\in(0,1), i=\overline{1,n}$. Chứng minh rằng:

$$\frac{(x_1+x_2+...+x_n)^2}{\sqrt{1-x_1}+\sqrt{1-x_2}+...+\sqrt{1-x_n}}\geq\frac{\left(\sqrt{x_1^2-x_1^3}+\sqrt{x_2^2-x_2^3}+...+\sqrt{x_n^2-x_n^3}\right)^2}{\sqrt{(1-x_1)^3}+\sqrt{(1-x_2)^3}+...+\sqrt{(1-x_n)^3}}$$

Chứng minh

Không mất tính tổng quát, giả sử $x_1 \ge x_2 \ge ... \ge x_n$, suy ra $\sqrt{1-x_1} \le \sqrt{1-x_2} \le ... \le \sqrt{1-x_n}$.

Sử dụng bất đẳng thức ***Chebyshev*** cho 2 dãy đơn điệu ngược chiều ta có:

$$\sqrt{x_1^2 - x_1^3} + \sqrt{x_2^2 - x_2^3} + ... + \sqrt{x_n^2 - x_n^3} \le \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + ... + x_n)\left(\sqrt{1-x_1} + \sqrt{1-x_2} + ... + \sqrt{1-x_n}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\sum_{i=1}^{n} \sqrt{x_i^2 - x_i^3}\right)^2 \le \frac{1}{n^2}(x_1 + x_2 + ... + x_n)^2 \left(\sum_{i=1}^{n} \sqrt{1-x_i}\right)^2 \quad (1)$$

Sử dụng bất đẳng thức cơ bản $\frac{a_1^k + a_2^k + ... + a_n^k}{n} \ge \left(\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}\right)^k$ ta được

$$\frac{\sqrt{(1-x_1)^3} + \sqrt{(1-x_2)^3} + ... + \sqrt{(1-x_n)^3}}{n} \ge \left(\frac{\sqrt{1-x_1} + \sqrt{1-x_2} + ... + \sqrt{1-x_n}}{n}\right)^3$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{(1-x_1)^3} + \sqrt{(1-x_2)^3} + ... + \sqrt{(1-x_n)^3}} \le \frac{n^2}{\left(\sqrt{1-x_1} + \sqrt{1-x_2} + ... + \sqrt{1-x_n}\right)^3} \quad (2)$$

Nhân theo vế (1) và (2) ta có đpcm.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x_1 = x_2 = ... = x_n$.

Bài 24. Cho $a_1, a_2, ..., a_n > 0$ và hai số $\alpha, \beta > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a_1^{\alpha+\beta} + a_2^{\alpha+\beta} + ... + a_n^{\alpha+\beta}}{a_1^{\beta} + a_2^{\beta} + ... + a_n^{\beta}} \ge \frac{a_1^{\alpha} + a_2^{\alpha} + ... + a_n^{\alpha}}{n}$$

Chứng minh

Giả sử $0 < a_1 \le a_2 \le ... \le a_{n-1} \le a_n \Rightarrow \begin{cases} 0 < a_1^{\alpha} \le a_2^{\alpha} \le ... \le a_n^{\alpha} \\ 0 < a_1^{\beta} \le a_2^{\beta} \le ... \le a_n^{\beta} \end{cases}$

Sử dụng bất đẳng thức ***Chebyshev*** ta có

$$n\left[a_1^{\alpha}.a_1^{\beta} + a_2^{\alpha}.a_2^{\beta} + ... + a_n^{\alpha}.a_n^{\beta}\right] \ge \left[a_1^{\alpha} + a_2^{\alpha} + ... + a_n^{\alpha}\right]\left[a_1^{\beta} + a_2^{\beta} + ... + a_n^{\beta}\right]$$

$$\Leftrightarrow \frac{a_1^{\alpha+\beta} + a_2^{\alpha+\beta} + ... + a_n^{\alpha+\beta}}{a_1^{\beta} + a_2^{\beta} + ... + a_n^{\beta}} \ge \frac{a_1^{\alpha} + a_2^{\alpha} + ... + a_n^{\alpha}}{n}$$

Bài 25. Cho $a_1, a_2, ..., a_n > 0$. Chứng minh: $(a_1 a_2 ... a_n)^{\frac{1}{n}(a_1 + a_2 + ... + a_n)} \le a_1^{a_1} a_2^{a_2} ... a_n^{a_n}$ (1)

Chứng minh

Bất đẳng thức $\Leftrightarrow \ln(a_1 a_2 ... a_n)^{\frac{1}{n}(a_1 + a_2 + ... + a_n)} \le \ln\left(a_1^{a_1} a_2^{a_2} ... a_n^{a_n}\right)$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + ... + a_n)(\ln a_1 + \ln a_2 + ... + \ln a_n) \le a_1 \ln a_1 + a_2 \ln a_2 + ... + a_n \ln a_n$$

$$\Leftrightarrow (a_1 + a_2 + ... + a_n)(\ln a_1 + \ln a_2 + ... + \ln a_n) \le n(a_1 \ln a_1 + a_2 \ln a_2 + ... + a_n \ln a_n)$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a_1 \ge a_2 \ge ... \ge a_n > 0 \Rightarrow \ln a_1 \ge \ln a_2 \ge ... \ge \ln a_n$

Sử dụng bất đẳng thức ***Chebyshev*** ta có:

$$(a_1 + a_2 + ... + a_n)(\ln a_1 + \ln a_2 + ... + \ln a_n) \le n(a_1 \ln a_1 + a_2 \ln a_2 + ... + a_n \ln a_n)$$

Bài 26. Cho $\begin{cases} a_1, a_2, ..., a_n > 0 \\ a_1 + a_2 + ... + a_n = 1 \end{cases}$. Chứng minh: $\dfrac{a_1}{3-2a_1} + \dfrac{a_2}{3-2a_2} + ... + \dfrac{a_n}{3-2a_n} \ge \dfrac{n}{3n-2}$

Chứng minh

Không mất tính tổng quát giả sử $a_1 \ge a_2 \ge ... \ge a_n$ suy ra $\dfrac{1}{3-2a_1} \ge \dfrac{1}{3-2a_2} \ge ... \ge \dfrac{1}{3-2a_n}$

Sử dụng bất đẳng thức ***Chebyshev*** rồi bất đẳng thức ***AM – GM*** ta có:

$$VT \ge \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + ... + a_n)\left(\frac{1}{3-2a_1} + \frac{1}{3-2a_2} + ... + \frac{1}{3-2a_n}\right) \ge \sqrt[n]{\frac{1}{3-2a_1} \cdot \frac{1}{3-2a_2} \cdots \frac{1}{3-2a_n}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt[n]{(3-2a_1)(3-2a_2)...(3-2a_n)}} \ge \frac{n}{(3-2a_1) + (3-2a_2) + ... + (3-2a_n)} = \frac{n}{3n-2}$$

Bài 27. Cho đa giác n cạnh có độ dài tương ứng là $a_1, a_2, ..., a_n \ge 1$ và chu vi P thỏa mãn $\dfrac{1}{1+a_1^2} + \dfrac{1}{1+a_2^2} + \dots + \dfrac{1}{1+a_n^2} = 1$. Chứng minh: $\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + ... + \dfrac{1}{a_n} \le \dfrac{P}{n-1}$ (1)

Chứng minh

$$(1) \Leftrightarrow P = \sum_{i=1}^{n} a_i \ge (n-1)\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} \Leftrightarrow (a_1 + a_2 + ... + a_n) + \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}\right) \ge n\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1+a_1^2}{a_1} + \frac{1+a_2^2}{a_2} + ... + \frac{1+a_n^2}{a_n} \ge n\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}\right).$$

Sử dụng bất đẳng thức ***AM – GM*** ta có:

$$\left(\frac{1+a_1^2}{a_1} + \frac{1+a_2^2}{a_2} + ... + \frac{1+a_n^2}{a_n}\right)\left(\frac{a_1}{1+a_1^2} + \frac{a_2}{1+a_2^2} + \dots + \frac{a_n}{1+a_n^2}\right) \ge n^2 \quad (2)$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a_1 \ge a_2 \ge ... \ge a_n > 0 \Rightarrow \dfrac{1}{a_1} \le \dfrac{1}{a_2} \le ... \le \dfrac{1}{a_n}$

Ta có $\dfrac{a_k}{1+a_k^2} - \dfrac{a_{k+1}}{1+a_{k+1}^2} = \dfrac{(a_k - a_{k+1})(1 - a_k a_{k+1})}{(1+a_k^2)(1+a_{k+1}^2)} \le 0$, suy ra $\dfrac{a_1}{1+a_1^2} \le \dfrac{a_2}{1+a_2^2} \le \dots \le \dfrac{a_n}{1+a_n^2}$

Sử dụng bất đẳng thức ***Chebyshev*** cho 2 dãy đơn điệu cùng chiều ta có:

$$\left(\frac{a_1}{1+a_1^2} + \frac{a_2}{1+a_2^2} + \dots + \frac{a_n}{1+a_n^2}\right)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}\right) \le n\left(\frac{a_1}{1+a_1^2} \cdot \frac{1}{a_1} + \frac{a_2}{1+a_2^2} \cdot \frac{1}{a_2} + ... + \frac{a_n}{1+a_n^2} \cdot \frac{1}{a_n}\right)$$

$$= n\left(\frac{1}{1+a_1^2} + \frac{1}{1+a_2^2} + \dots + \frac{1}{1+a_n^2}\right) = n \Rightarrow \frac{a_1}{1+a_1^2} + \frac{a_2}{1+a_2^2} + \dots + \frac{a_n}{1+a_n^2} \le \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}} \quad (3)$$

Từ (2) và (3) suy ra $\left(\frac{1+a_1^2}{a_1}+\frac{1+a_2^2}{a_2}+...+\frac{1+a_n^2}{a_n}\right)\geq\frac{n^2}{\frac{a_1}{1+a_1^2}+\frac{a_2}{1+a_2^2}+\dots+\frac{a_n}{1+a_n^2}}\geq$

$$\geq\frac{n^2}{\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}}}=n\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}\right)\Rightarrow\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}\leq\frac{P}{n-1}$$

Bài 28. Cho $a_1,a_2,\dots,a_n>0$ ($n\geq 2$) thỏa mãn $a_1+a_2+\dots+a_n=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\dots+\frac{1}{a_n}$

Chứng minh rằng $S=\frac{1}{n-1+a_1^2}+\frac{1}{n-1+a_2^2}+\dots+\frac{1}{n-1+a_n^2}\leq 1$ (1)

Chứng minh

Chúng ta xét 2 trường hợp sau đây:

• ***Trường hợp 1:*** Nếu tồn tại $i,j\in\{1,2,...,n\}$ ($i\neq j$) sao cho $a_ia_j\geq n-1$, giả sử $a_1a_2\geq n-1$. Khi đó

$$\frac{1}{n-1+a_1^2}+\frac{1}{n-1+a_2^2}=\frac{2(n-1)+a_1^2+a_2^2}{(n-1)^2+(a_1a_2)^2+(n-1)\left(a_1^2+a_2^2\right)}\leq\frac{2(n-1)+a_1^2+a_2^2}{2(n-1)^2+(n-1)\left(a_1^2+a_2^2\right)}=\frac{1}{n-1}$$

$$\Rightarrow S\leq\frac{1}{n-1}+\sum_{i=3}^{n}\frac{1}{n-1+a_i^2}\leq\frac{1}{n-1}+(n-2)\cdot\frac{1}{n-1}=1$$

• ***Trường hợp 2:*** $a_ia_j\leq n-1$ với mọi $i\neq j$.

Bất đẳng thức (1) $\Leftrightarrow\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n-1+a_1^2}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n-1+a_2^2}\right)+...+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n-1+a_n^2}\right)\geq 0$

$$\Leftrightarrow\frac{a_1^2-1}{n-1+a_1^2}+\frac{a_2^2-1}{n-1+a_2^2}+...+\frac{a_n^2-1}{n-1+a_n^2}\geq 0\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{n}\left(a_i-\frac{1}{a_i}\right)\frac{a_i}{n-1+a_i^2}\geq 0$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a_1\geq a_2\geq...\geq a_n\Rightarrow a_1-\frac{1}{a_1}\geq a_2-\frac{1}{a_2}\geq...\geq a_n-\frac{1}{a_n}$. Ta có:

$$\frac{a_i}{n-1+a_i^2}-\frac{a_j}{n-1+a_j^2}=\frac{(n-1-a_ia_j)(a_i-a_j)}{(n-1)^2+(a_ia_j)^2+(n-1)\left(a_i^2+a_j^2\right)}\Rightarrow$$

$$\left(\frac{a_i}{n-1+a_i^2}-\frac{a_j}{n-1+a_j^2}\right)(a_i-a_j)\geq 0\Rightarrow\frac{a_1}{n-1+a_1^2}\geq\frac{a_2}{n-1+a_2^2}\geq...\geq\frac{a_n}{n-1+a_n^2}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(a_i-\frac{1}{a_i}\right)\frac{a_i}{n-1+a_i^2}\geq\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(a_i-\frac{1}{a_i}\right)\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{n-1+a_i^2}=0$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a_1=a_2=...=a_n=1$.

II. CÁC BÀI TẬP DÀNH CHO BẠN ĐỌC TỰ GIẢI

Bài 1. Cho ΔABC có độ dài 3 cạnh là a, b, c. Chứng minh:

$$\sum_{cyc} \frac{a^n}{b+c-a} \ge \frac{(a+b+c)^{n-1}}{3^{n-2}}$$

Bài 2. Cho ΔABC có độ dài 3 cạnh là a, b, c. Chứng minh:

$$\sum_{cyc} \frac{a^x}{(b+c-a)^y} \ge a^{x-y} + b^{x-y} + c^{x-y}$$

Bài 3. Chứng minh $\sqrt{a^2+8bc}+\sqrt{b^2+8ca}+\sqrt{c^2+8ab} \le 3(a+b+c)$, $\forall a,b,c \ge 0$

Bài 4. Cho $\begin{cases} a,b,c>0 \\ a+b+c=3 \end{cases}$. Chứng minh: $\dfrac{1}{9-ab}+\dfrac{1}{9-bc}+\dfrac{1}{9-ca} \le \dfrac{3}{8}$

Bài 5. Cho $\begin{cases} a,b,c,d>0 \\ a^2+b^2+c^2+d^2=4 \end{cases}$. Chứng minh:

$$\frac{1}{3-abc}+\frac{1}{3-bcd}+\frac{1}{3-cda}+\frac{1}{3-dab} \le 2$$

Bài 6. Cho $\begin{cases} a,b,c,d>0 \\ a+b+c+d=4 \end{cases}$. Chứng minh: $\dfrac{1}{11+a^2}+\dfrac{1}{11+b^2}+\dfrac{1}{11+c^2}+\dfrac{1}{11+d^2} \le \dfrac{1}{3}$

Bài 7. Cho $a_1, a_2, ..., a_n > 0$ thỏa mãn $a_1^2+a_2^2+...+a_n^2 \ge 1$. Đặt $S = a_1+a_2+...+a_n$.

Chứng minh rằng: $\displaystyle\sum_{cyc} \frac{a_1^3}{S-a_1} \ge \frac{1}{n-1}$ và $\displaystyle\sum_{cyc} \frac{a_1^2}{S-a_1} \ge \frac{\sqrt{n}}{n-1}$

Bài 8. Cho $\begin{cases} a_1, a_2, ..., a_n > 0 \\ a_1+a_2+...+a_n=1 \end{cases}$. Chứng minh rằng: $\displaystyle\sum_{cyc} \frac{a_1}{\sqrt{1-a_1}} \ge \frac{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}+...+\sqrt{a_n}}{\sqrt{n-1}}$

Bài 9. Cho $a_1, a_2, ..., a_n > 0$ với $2 \le n \in \mathbb{N}$. Chứng minh: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\displaystyle\sum_{j\ne k}^{n} \frac{1}{a_j^n} + \prod_{j=1}^{n} a_j} \le \frac{1}{\displaystyle\prod_{k=1}^{n} a_k^{\cdot}}$

Bài 10. Cho $a_1, a_2, ..., a_n > 0$ $(n \ge 2)$ thỏa mãn $\dfrac{1}{1+a_1}+\dfrac{1}{1+a_2}+...+\dfrac{1}{1+a_n}=1$.

Chứng minh rằng: $\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}+...+\sqrt{a_n} \ge (n-1)\left(\dfrac{1}{\sqrt{a_1}}+\dfrac{1}{\sqrt{a_2}}+...+\dfrac{1}{\sqrt{a_n}}\right)$

Bài 11. Cho các số thực $a_1, a_2, ..., a_n$ thỏa mãn

$$a_1 \ge \frac{a_1+a_2}{2} \ge ... \ge \frac{a_1+a_2+...+a_n}{n} \quad \text{và } b_1 \ge \frac{b_1+b_2}{2} \ge ... \ge \frac{b_1+b_2+...+b_n}{n}$$

Chứng minh rằng

$$a_1b_2 + a_2b_2 + ... + a_nb_n \ge \frac{1}{n}(a_1+a_2+...+a_n)(b_1+b_2+...+b_n)$$

Nhìn lại chương I

Có thể các bạn cho rằng bây giờ vẫn còn là quá sớm để có một bản tổng kết nhỏ. Tuy nhiên chúng tôi nghĩ việc tổng kết và nhìn nhận lại những điều đã làm được nên được thực hiện mọi lúc mọi nơi. Bởi vì làm như vậy không chỉ giúp chúng ta có cái nhìn tổng quát và chính xác hơn về những vấn đề đã đặt ra và giải quyết được mà còn góp phần định hướng những công việc tiếp theo. Hơn nữa, vì đây là chương mở đầu dành cho một lớp rộng các bạn đọc giả cho nên những chỉ dẫn mang tính chi tiết là rất cần thiết.

Lưu ý rằng như đã nói, trong chương này chúng ta đã làm quen với 5 bất đẳng thức cổ điển cùng những ứng dụng đẹp đẽ của chúng. Mặt khác do mối liên quan - ***sự tương đương*** - đặc biệt giữa chúng nên nhờ sự đơn giản của mình, bất đẳng thức $AM - GM$ đã được tập trung trình bày trong hơn một nửa số trang sách. Phát biểu và chứng minh bất đẳng thức này được đưa ra trong mục **1.1**. Các kỹ thuật chuyển từ trung bình cộng sang trung bình nhân và từ trung bình nhân sang trung bình cộng được trình bày trong mục **1.2.I** và **1.2.II**. Trong mục **1.2.III** chúng tôi đã đưa ra một ví dụ cho thấy tại sao chỉ nên xét các bất đẳng thức đồng bậc trên $\mathbb{R}^+$. Mục **1.2.IV** và đề cập khả năng ***đồng bậc hóa*** bằng cách sử dụng thêm các điều kiện đặc biệt với các biến, ý tưởng này được triển khai chi tiết hơn với kỹ thuật chuẩn hóa được phân tích trong **1.2.VI**. Sự phối hợp giữa các bất đẳng thức ngược chiều, các bất đẳng thức đồng bậc chứa căn thức và các bất đẳng thức không đồng bậc lần lượt được khảo sát trong các mục **1.2.V**, **1.2.VII**, **1.2.VIII**, **1.2.IX**. Mục **1.2.X** điểm rơi không đối xứng trong bất đẳng thức AM-GM là khởi điểm cho phương pháp cân bằng hệ số (mục **1.2.XI**). Nội dung chính về các bất đẳng thức $AM - GM$ kết thúc bằng kỹ thuật tách phân thức âm và đánh giá mẫu số ở mục **1.2.XII**. Kỹ thuật rất độc đáo này giúp cho việc sử dụng bất đẳng thức $AM - GM$ trở nên linh hoạt và mang tính nghệ thuật hơn rất nhiều.

Tiếp theo đó các mục 2.1 và 3.1 phát biểu và chứng minh bất đẳng thức ***Cauchy – Schwarz*** và bất đẳng thức ***Holder***, trong đó bất đẳng thức ***Cauchy – Schwarz*** là trường hợp riêng của bất đẳng thức Holder, tuy nhiên nhờ dạng phát biểu rất ***giản dị,*** trong nhiều trường hợp chúng ta không cần dùng tới bất đẳng thức Holder, mà chỉ cần sử dụng bất đẳng thức ***Cauchy – Schwarz*** là đủ. Cũng với hai bất đẳng thức này, các bất đẳng thức với điểm rơi đối xứng tiếp tục được giải quyết trong các mục **2.2.I** và **3.2.I**. Nội dung đặc sắc nhất về ứng dụng của 2 bất đẳng thức ***Cauchy – Schwarz*** và ***Holder*** là sử dụng điểm rơi với các biểu thức chứa biến. Các mục **2.2.II**, **2.2.III** và **3.2.II** đưa chúng ta tới gần hơn với một phương pháp cân bằng hệ số đại số tổng quát. hơn nữa. chính những ý tưởng này sẽ được tiếp nối một cách giải tích hơn trong chương **III**. nơi các bạn có thể làm quen với phương pháp nhân tử ***Lagrange*** tuyệt đẹp.

Trong chương này chúng ta cũng đã làm quen với các bất đẳng thức ***Minkowski 1*** và ***2***. Các bất đẳng thức này cũng tương đương với hai bất đẳng thức ***AM – GM***, ***Cauchy – Schwarz***. Tuy nhiên. khả năng áp dụng của nó khá hạn chế so với hai bất đẳng thức kia. sự hạn chế này bắt nguồn từ hình thức hơi ***kì lạ*** của nó. Thực ra có hình thức như vậy là vì bất đẳng thức ***Minkowski*** vốn được đặt ra để phục vụ cho việc xây dựng các chuẩn và các không gian hình học ***Minkowski*** trong toán học hiện đại, nơi mà sức mạnh của bất đẳng thức này được phát huy một cách triệt để.

Chú ý rằng do các bất đẳng thức nêu trên đều được phát biểu một cách đối xứng. nên khi áp dụng với các bất đẳng thức hoán vị hoặc bất đẳng thức bất đối xứng thì chúng ta sẽ gặp rất nhiều khó khăn. khó khăn chính là ở việc dấu đẳng thức xảy ra khi nào. Phương pháp chọn điểm rơi và cân bằng hệ số đã cung cấp một giải pháp tốt để xử lý vấn đề này một cách ***đối xứng***. Không giống như vậy. bất đẳng thức ***Chebyshev*** cho một cách nhìn khác về việc giải quyết các bất đẳng thức đối xứng. theo cách này chúng ta sẽ không cần quan tâm đến tính ***bình đẳng*** giữa các biến. mà sẽ chủ động tìm cách ***sắp xếp*** lại các biến theo cách thích hợp với dấu đẳng thức trước khi chứng minh. Ý tưởng này cũng đồng thời mở ra một hướng đi mới để tấn công các bất đẳng thức hoán vị. hướng đi này sẽ được tiếp tục tìm tòi và hoàn thiện hơn trong chương **II**.

CHƯƠNG II: NHỮNG VIÊN KIM CƯƠNG TRONG BẤT ĐẲNG THỨC CẬN ĐẠI

Tiếp nối chương I: ***"Những viên kim cương trong bất đẳng thức cổ điển"*** chúng ta sẽ làm quen với chương II: ***"Những viên kim cương trong bất đẳng thức cận đại"***. Trong chương này chúng ta sẽ được giới thiệu ba viên kim cương của bất đẳng thức cận đại. Đó là các viên kim cương của bất đẳng thức ***hoán vị*** (**§6**), các bất đẳng thức ***Schur*** (**§7**) và các bất đẳng thức đối xứng ***Muirhead*** (**§8**). Một điều dễ nhận thấy chúng ta không có tên gọi riêng của một cá nhân thay thế cho tên gọi viên kim cương của bất đẳng thức ***hoán vị.*** Điều này có thể hiểu là có rất nhiều người đã chứng minh các bài toán riêng lẻ dưới dạng không mất tính tổng quát giả sử $a \geq b \geq c$ hoặc tổng quát hơn $a_1 \geq a_2 \geq ... \geq a_n$ sau đó hệ thống hóa thành cấu trúc đơn giản rồi bồi đắp dần thêm các tính chất. Cuối cùng vì là tài sản tri thức của nhân dân nên tên gọi được đặt theo bản chất toán học của bất đẳng thức. Các nội dung quan trọng cần nắm được trong chương này là:

1. Bất đẳng thức hoán vị: Có rất nhiều sách trong và ngoài nước viết về bất đẳng thức hoán vị nhưng có lẽ chưa có cuốn sách nào đề cập bất đẳng thức này chi tiết, tỉ mỉ với các ví dụ minh họa rất phong phú, đa dạng. Chúng ta có thể cảm nhận sự cầu toàn của tác giả khi dẫn nhập bất đẳng thức bởi các ví dụ đầu tiên sắp xếp trình tự tối ưu diễn ra trong đời sống hàng ngày. Có thể thấy ý nghĩa khái quát của vấn đề trong việc sắp xếp lắp ráp các chi tiết máy một cách tối ưu trong các mô hình sản xuất với hàng triệu chi tiết như sản xuất máy bay Boeing, Airbus, tàu con thoi. Tiếp theo lời dẫn nhập là phần giới thiệu chi tiết đi kèm với chứng minh, các bất đẳng thức hoán vị trên dãy số hữu hạn (**6.II**) trong các định lý mục **II.1.1**, **II.1.2** và **II.2**. Mục **6.2.I** giới thiệu với các bạn một số kỹ thuật sử dụng bất đẳng thức hoán vị với các bài tập minh họa là các bất đẳng thức đại số và các bất đẳng thức lượng giác trong tam giác. Các bạn có thể tự rèn luyện bằng các bài toán được đưa ra trong mục **6.2.II**.

2. Bất đẳng thức Schur: Đây là một bất đẳng thức rất đơn giản nhưng lại là một công cụ hữu hiệu khi chứng minh các bất đẳng thức đối xứng hoặc hoán vị khó và rất khó. Điểm đặc biệt là bất đẳng thức Schur xảy ra dấu bằng tại 2 trạng thái: $a = b = c$ hoặc $a = b, c = 0$ nên toàn bộ các bất đẳng thức xảy ra dấu bằng tại 2 trạng thái trên đều không sử dụng được ***AM – GM*** (dấu bằng chỉ xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$) hoặc ***CBS.*** Các bất đẳng thức ***Schur*** và bất đẳng thức ***Schur*** suy rộng được trình bày chi tiết theo các dạng trong các định lý mục **7.1**. Sau khi làm quen với các dạng bất đẳng thức ***Schur*** các bạn sẽ được làm quen các kỹ thuật áp dụng bất đẳng thức ***Schur*** trong mục **7.2**.

Ở mục **7.3**. chúng tôi trình bày một phương pháp sử dụng bất đẳng thức ***Schur*** trong chứng minh bất đẳng thức ba biến đối xứng dựa trên phép biến đổi với các đa thức đối xứng ***Viete***. Các bài tập tự giải có trong mục **7.3.IV**.

3. Bất đẳng thức Muirhead: Bất đẳng thức ***Muirhead*** được ra đời vào đầu thế kỷ 20 nhưng chỉ được thực sự mọi người quan tâm việc ứng dụng của nó trong chứng minh bất đẳng thức khi Internet phát triển cùng với sự ra đời các website Toán học nổi tiếng trên thế giới. Sở dĩ bất đẳng thức ***Muirhead*** được chú ý muộn vì phạm vi của nó chủ yếu là công cụ để so sánh các đa thức đồng bậc nhưng việc chuyển đổi từ một bất đẳng thức đẹp đẽ (dạng phân thức thu gọn) về dạng đa thức cồng kềnh nhiều số hạng là việc làm bất đắc dĩ mang tính chất thợ thủ công hơn là sự thông minh khéo léo. Tuy nhiên phải thừa nhận bất đẳng thức ***Muirhead*** là một công cụ mạnh hơn ***AM – GM*** bởi vì nó so sánh 2 cấu trúc liên kết cộng có cả 2 vế chứ không phải giữa một liên kết cộng (liên kết mạnh) với liên kết nhân (liên kết yếu). Với việc mã hóa trong ngôn ngữ kí hiệu thì chúng ta có thể dễ dàng chuyển đổi bất đẳng thức dạng phân thức sang dạng đa thức. Trong phần mở đầu **§8.1** bất đẳng thức ***Muirhead*** được trình bày tỉ mỉ với các ví dụ và sơ đồ minh họa cùng với ý nghĩa của lược đồ ***Young*** và mối quan hệ giữa nhận biết bất đẳng thức đúng bằng ***Muirhead*** và chứng minh bằng ***AM – GM***. Trong mục **§8.2,** các bạn được giới thiệu một số dạng ký hiệu và kỹ thuật biến đổi đưa về đa thức đối xứng dưới dạng ký hiệu. Tiếp đó là mối quan hệ giữa bất đẳng thức ***Muirhead*** với các bất đẳng thức ***AM – GM, HOLDER, ASYM*** và các bài tập minh họa. Đặc sắc nhất của phần này chính là kỹ thuật thêm biến và các ứng dụng đặc biệt là việc chứng minh hai bất đẳng thức ***SuranYi*** và ***Vasile***. Phần cuối là sự sáng tạo bất đẳng thức bằng các phương pháp tương tự hóa, tổng quát hóa và đặc biệt hóa cùng với kỹ thuật thêm biến.

Như vậy, nội dung chương này mặc dù sẽ không quá dài, nhưng số lượng bài tập và tính toán là khá lớn. Vì vậy chúng tôi khuyên các bạn nên đọc một cách cẩn thận và từ tốn. Chậm mà chắc! Như thế mới có thể cảm nhận được hết cái hay của từng phương pháp. Chúc các bạn thành công!

§6. BẤT ĐẲNG THỨC HOÁN VỊ VÀ KỸ THUẬT SỬ DỤNG

§6. 1. GIỚI THIỆU VỀ BẤT ĐẲNG THỨC HOÁN VỊ

I. NHỮNG VÍ DỤ TIÊU BIỂU TRONG ĐỜI SỐNG VỀ SẮP XẾP TRÌNH TỰ TỐI ƯU

Trong đời sống hàng ngày ta thường gặp những sự việc có nhiều phương án giải quyết mà đòi hỏi phải lựa chọn ra được phương án tối ưu. Ta xét hai ví dụ đơn giản mà tiêu biểu sau:

1. Ví dụ 1: ***Sắp xếp trình tự bán hàng để tổng thời gian mua bán nhỏ nhất***

Tại một trạm bán xăng có 1 mô tô dung tích 8 lít với thời gian để bơm đầy xăng là 1 phút và 1 ô tô tải dung tích 100 lít với thời gian bơm đầy xăng là 10 phút. Khi đó ta có thể thực hiện việc bán xăng theo 1 trong 2 cách sau:

• ***Cách 1:*** Nếu để xe ô tô tải lấy xăng trước thì xe tải phải mất 10 phút để chờ bơm đầy xăng còn xe mô tô phải mất 10 phút chờ xe tải bơm đầy xăng cộng với 1 phút lấy xăng bằng 11 phút. Lúc đó tổng thời gian cả hai xe phải sử dụng để lấy đầy xăng là:

10 phút + 11 phút = 21 phút.

• ***Cách 2:*** Nếu sắp xếp xe mô tô lấy xăng trước còn xe tải lấy xăng sau thì tổng cộng thời gian cả hai xe phải chờ và lấy xăng là **12 phút**. Như vậy nếu thực hiện theo phương án 2 thì sẽ tiết kiệm được **9 phút** so với phương án 1.

Từ ví dụ đơn giản này ta thấy khi số lượng mô tô, ô tô tăng gấp hàng ngàn, vạn lần thì việc sắp xếp trình tự lấy xăng sẽ tiết kiện được rất nhiều thời gian. Ta sẽ gặp lại bài toán tổng quát này trong **bài 19 ở phần III**.

2. Ví dụ 2: ***Phân phối các sản phẩm có tổng giá trị lớn nhất, nhỏ nhất***

Giả sử Liên hiệp quốc cần viện trợ cho một số quốc gia, mỗi quốc gia đều nhận được 20 xe ô tô gồm 3 loại ô tô: Lexus, Toyota, Hyundai với số lượng các loại ô tô này là một hoán vị của bộ số (5, 7, 8). Trị giá của các xe Lexus là 100.000 USD/chiếc; Toyota là 50.000 USD/1chiếc; Hyundai là 30.000 USD/chiếc. Khi đó các nước được ưu ái nhất sẽ nhận được giá trị viện trợ lớn nhất gồm: 8 chiếc xe Lexus, 7 chiếc xe Toyota và 5 chiếc xe Hyundai với tổng giá trị:

8×US\$100,000 + 7×US\$50,000 + 5×US\$30,000 = US\$1,300,000.

• ***Kết luận:*** Những ý tưởng trên rất gần gũi với việc chúng ta nghiên cứu các bất đẳng thức hoán vị dưới đây:

II. BẤT ĐẲNG THỨC HOÁN VỊ TRÊN DÃY SỐ HỮU HẠN

1. *Đặt vấn đề:*

Vì mọi dãy số hữu hạn đều có thể được đánh số để sắp xếp nó thành 1 dãy đơn điệu tăng hoặc đơn điệu giảm nên có thể chuyển việc nghiên cứu các bất đẳng thức hoán vị trên dãy số hữu hạn thành việc nghiên cứu các bất đẳng thức hoán vị trên các dãy số đơn điệu. Chúng ta sẽ bắt đầu tiếp cận với bất đẳng thức hoán vị bởi 2 định lý sau đây:

1. Định lý 1: Cho hai dãy số thực hữu hạn được sắp thứ tự cùng chiều nhau chẳng hạn là hai dãy đơn điệu tăng $\begin{cases} a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n \\ b_1 \le b_2 \le \ldots \le b_n \end{cases}$. Gọi $(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ là 1 hoán vị tuỳ ý của $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$, khi đó ta có $a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n \ge a_1t_1 + a_2t_2 + \ldots + a_nt_n$

Chứng minh

Cách 1: Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức bằng phương pháp quy nạp

• Với $n = 2$: Xét hai dãy số gồm 2 phần tử $\begin{cases} a_1 \le a_2 \\ b_1 \le b_2 \end{cases}$

+ Nếu $(t_1, t_2) = (b_1, b_2)$ thì $a_1b_1 + a_2b_2 = a_1t_1 + a_2t_2 \Rightarrow$ bất đẳng thức đúng

+ Nếu $(t_1, t_2) = (b_2, b_1)$ thì $a_1b_1 + a_2b_2 - (a_1t_1 + a_2t_2) = a_1b_1 + a_2b_2 - (a_1b_2 + a_2b_1)$

$= (a_1 - a_2)(b_1 - b_2) \ge 0 \Rightarrow a_1b_1 + a_2b_2 \ge a_1t_1 + a_2t_2 \Rightarrow$ bất đẳng thức đúng

• Giả sử bất đẳng thức đúng đến $(n-1)$ ta sẽ chứng minh bất đẳng thức đúng với n.

Đặt $b_1 = t_k \Rightarrow \begin{cases} a_1 \le a_k \\ t_k = b_1 \le t_1 \end{cases} \Rightarrow a_1t_1 + a_kt_k = a_1t_1 + a_kb_1 \le a_1b_1 + a_kt_1 \quad (1)$.

Sử dụng giả thiết quy nạp là bất đẳng thức đúng với $(n-1)$ ta có

$$a_2t_2 + \ldots + a_{k-1}t_{k-1} + a_kt_1 + a_{k+1}t_{k+1} + \ldots + a_nt_n \le a_2b_2 + \ldots + a_{k-1}b_{k-1} + a_kb_k + a_{k+1}b_{k+1} + \ldots + a_nb_n \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $a_1t_1 + a_2t_2 + \ldots + a_kt_k + \ldots + a_nt_n \le$

$$\le a_1b_1 + \left[a_2t_2 + \ldots + a_{k-1}t_{k-1} + a_kt_1 + a_{k+1}t_{k+1} + \ldots + a_nt_n\right] \le a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_kb_k + \ldots + a_nb_n$$

Theo nguyên lý quy nạp suy ra bất đẳng thức đúng $\forall n$.

Cách 2: Đặt $\begin{cases} S = a_1t_1 + a_2t_2 + \ldots + a_nt_n \\ S^* = a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n \end{cases}$

Giả sử i là chỉ số nhỏ nhất sao cho $t_i \ne b_i$ tức là $t_k = b_k \quad \forall k = \overline{1, i-1}$

Do $b_1 \le b_2 \le \ldots \le b_n$, nên $t_i > b_i$. Mặt khác $(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ là 1 hoán vị tuỳ ý của $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ nên tồn tại $j > i$ sao cho $t_j = b_i$.

Xét hoán vị $(t'_1, t'_2, \ldots, t'_n)$ được xác định theo quy tắc $\begin{cases} t'_i = t_j \\ t'_j = t_i \\ t'_k = t_k \ \forall k \neq i, j \end{cases}$

Từ $t_i > b_i$ và $t_j = b_i$ suy ra $t_i > t_j$.

Đặt $S' = a_1 t'_1 + a_2 t'_2 + \ldots + a_i t'_i + \ldots + a_j t'_j + \ldots + a_n t'_n$

Khi đó theo cách xây dựng hoán vị $(t'_1, t'_2, \ldots, t'_n)$ ta có

$$S - S' = a_i(t_i - t'_i) + a_j(t_j - t'_j) = a_i(t_i - t_j) - a_j(t_i - t_j) = (a - a_j)_i (t_i - t_j) \leq 0 \Rightarrow \mathrm{S} \leq \mathrm{S}'$$

Nếu $(t'_1, t'_2, \ldots, t'_n) \neq (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ thì ta lại tiếp tục lặp lại quá trình trên và chỉ sau nhiều nhất $(n-1)$ bước ta có điều phải chứng minh $\mathrm{S} \leq \mathrm{S}^*$.

2. Định lý 2: Cho hai dãy số thực hữu hạn được sắp thứ tự ngược chiều nhau chẳng hạn là $\begin{cases} a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n \\ b_1 \geq b_2 \geq \ldots \geq b_n \end{cases}$. Gọi $(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ là 1 hoán vị tuỳ ý của $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$, khi đó ta có

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n \leq a_1 t_1 + a_2 t_2 + \ldots + a_n t_n$$

Chứng minh

Cách 1: Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức bằng phương pháp quy nạp

• Với $n = 2$: Xét hai dãy số gồm 2 phần tử $\begin{cases} a_1 \leq a_2 \\ b_1 \geq b_2 \end{cases}$

+ Nếu $(t_1, t_2) = (b_1, b_2)$ thì $a_1 b_1 + a_2 b_2 = a_1 t_1 + a_2 t_2 \Rightarrow$ bất đẳng thức đúng

+ Nếu $(t_1, t_2) = (b_2, b_1)$ thì $a_1 b_1 + a_2 b_2 - (a_1 t_1 + a_2 t_2) = a_1 b_1 + a_2 b_2 - (a_1 b_2 + a_2 b_1)$

$= (a_1 - a_2)(b_1 - b_2) \leq 0 \Rightarrow a_1 b_1 + a_2 b_2 \leq a_1 t_1 + a_2 t_2 \Rightarrow$ bất đẳng thức đúng

• Giả sử bất đẳng thức đúng đến $(n-1)$ ta sẽ chứng minh bất đẳng thức đúng với n.

Đặt $b_1 = t_k \Rightarrow \begin{cases} a_1 \leq a_k \\ t_k = b_1 \geq t_1 \end{cases} \Rightarrow a_1 t_1 + a_k t_k = a_1 t_1 + a_k b_1 \geq a_1 b_1 + a_k t_1 \quad (1)$

Sử dụng giả thiết quy nạp là bất đẳng thức đúng với $(n-1)$ ta có

$a_2 t_2 + \ldots + a_{k-1} t_{k-1} + a_k t_1 + a_{k+1} t_{k+1} + \ldots + a_n t_n \geq$

$\geq a_2 b_2 + \ldots + a_{k-1} b_{k-1} + a_k b_k + a_{k+1} b_{k+1} + \ldots + a_n b_n \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $a_1 t_1 + a_2 t_2 + \ldots + a_k t_k + \ldots + a_n t_n \geq$

$\geq a_1 b_1 + [a_2 t_2 + \ldots + a_{k-1} t_{k-1} + a_k t_1 + a_{k+1} t_{k+1} + \ldots + a_n t_n] \geq a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_k b_k + \ldots + a_n b_n$

Theo nguyên lý quy nạp suy ra bất đẳng thức đúng $\forall n$.

Cách 2: $\begin{cases} a_1 \le a_2 \le \dots \le a_n \\ b_1 \ge b_2 \ge \dots \ge b_n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 \le a_2 \le \dots \le a_n \\ -b_1 \le -b_2 \le \dots \le -b_n \end{cases}$. Theo kết quả của định lý 1 suy ra

$$a_1(-b_1) + a_2(-b_2) + \dots + a_n(-b_n) \le a_1(-t_1) + a_2(-t_2) + \dots + a_n(-t_n)$$

$$\Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n \le a_1t_1 + a_2t_2 + \dots + a_nt_n$$

2. Bất đẳng thức hoán vị

Giả sử có hai dãy số thực hữu hạn được sắp xếp thứ tự cùng chiều tức là

$$\begin{cases} a_1 \le a_2 \le \dots \le a_n \\ b_1 \le b_2 \le \dots \le b_n \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a_1 \ge a_2 \ge \dots \ge a_n \\ b_1 \ge b_2 \ge \dots \ge b_n \end{cases}$$

Gọi (t_1, t_2, ..., t_n) là 1 hoán vị tuỳ ý của (b_1, b_2,..., b_n).

Đặt $S = a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n$; $T = a_1t_1 + a_2t_2 + \dots + a_nt_n$; $s = a_1b_n + a_2b_{n-1} + \dots + a_nb_1$, khi đó $s = a_1b_n + a_2b_{n-1} + \dots + a_nb_1 \le T = a_1t_1 + a_2t_2 + \dots + a_nt_n \le S = a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n$

Nhận xét:

2.1. Số các bất đẳng thức hoán vị chính là số hoán vị của bộ n số $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ nên có (n!) bất đẳng thức hoán vị.

2.2. $\underset{(t_1 \dots t_n)}{\text{Max}}\, T = S$; $\underset{(t_1 \dots t_n)}{\text{Min}}\, T = s$

2.3. Bất đẳng thức hoán vị xảy ra dấu bằng khi và chỉ khi một trong hai dãy $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ hoặc $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ là dãy dừng, tức là $\left[\begin{array}{l} a_1 = a_2 = \dots = a_n \\ b_1 = b_2 = \dots = b_n \end{array}\right.$

2.4. Ta cũng có các bất đẳng thức hoán vị tương tự như trên nếu cố định bộ $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ và gọi $(t_1, t_2, \dots, t_n)$ là một hoán vị tuỳ ý của $(a_1, a_2, \dots, a_n)$

3. Các trường hợp đặc biệt của bất đẳng thức hoán vị

Giả sử (x'_1, x'_2, ..., x'_n) là một hoán vị của $(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

3.1. Nếu f(x) là hàm số không giảm trên (a, b) và $x_1, x_2, \dots, x_n \in (a, b)$ ta có

$$x_1 f(x_1) + x_2 f(x_2) + \dots + x_n f(x_n) \ge x_1' f(x_1) + x_2' f(x_2) + \dots + x_n' f(x_n)$$

3.2. Nếu f(x) là hàm số không tăng trên (a, b) và $x_1, x_2, \dots, x_n \in (a, b)$ ta có

$$x_1 f(x_1) + x_2 f(x_2) + \dots + x_n f(x_n) \le x_1' f(x_1) + x_2' f(x_2) + \dots + x_n' f(x_n)$$

3.3. Nếu $f(x), g(x)$ là hàm số không giảm trên (a, b) và $x_1, x_2, \dots, x_n \in (a, b)$ ta có

$$f(x_1)g(x_1) + f(x_2)g(x_2) + \dots + f(x_n)g(x_n) \ge f(x_1)g(x_1') + f(x_2)g(x_2') + \dots + f(x_n)g(x_n')$$ **3.**

4. Nếu $f(x)$ là hàm số không giảm trên (a, b) và $g(x)$ là hàm số không tăng trên (a, b) thì $\forall\, x_1, x_2, \dots, x_n \in (a, b)$ ta có bất đẳng thức sau

$$f(x_1)g(x_1) + f(x_2)g(x_2) + \dots + f(x_n)g(x_n) \le f(x_1)g(x_1') + f(x_2)g(x_2') + \dots + f(x_n)g(x_n')$$

§6. 2. KỸ THUẬT SỬ DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC HOÁN VỊ

I. CÁC BÀI TẬP MẪU MINH HỌA

Bài 1. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh bất đẳng thức sau:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}$$

Chứng minh

Không mất tính tổng quát giả sử $a\leq b\leq c\Rightarrow a+b\leq a+c\leq b+c$

$$\Rightarrow\begin{cases}a\leq b\leq c\\ \dfrac{1}{b+c}\leq\dfrac{1}{c+a}\leq\dfrac{1}{a+b}\end{cases}.$$ Sử bất đẳng thức hoán vị ta có

$$+\begin{cases}\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}\geq\dfrac{b}{b+c}+\dfrac{c}{c+a}+\dfrac{a}{a+b}\\ \dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}\geq\dfrac{c}{b+c}+\dfrac{a}{c+a}+\dfrac{b}{a+b}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\frac{2a}{b+c}+\frac{2b}{c+a}+\frac{2c}{a+b}\geq\frac{b+c}{b+c}+\frac{c+a}{c+a}+\frac{a+b}{a+b}=3\Leftrightarrow\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}\text{ (đpcm)}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

Bài 2. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh bất đẳng thức sau:

$$a+b+c\leq\frac{b^2+c^2}{2a}+\frac{c^2+a^2}{2b}+\frac{a^2+b^2}{2c}\leq\frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ca}+\frac{c^3}{ab}$$

Chứng minh

Không mất tính tổng quát giả sử $a\geq b\geq c\Rightarrow\begin{cases}a^2\geq b^2\geq c^2\\ \dfrac{1}{c}\geq\dfrac{1}{b}\geq\dfrac{1}{a}\end{cases}$.

Sử dụng bất đẳng thức hoán vị ta có:

$$+\begin{cases}a^2\cdot\dfrac{1}{a}+b^2\cdot\dfrac{1}{b}+c^2\cdot\dfrac{1}{c}\leq a^2\cdot\dfrac{1}{b}+b^2\cdot\dfrac{1}{c}+c^2\cdot\dfrac{1}{a}\\ a^2\cdot\dfrac{1}{a}+b^2\cdot\dfrac{1}{b}+c^2\cdot\dfrac{1}{c}\leq a^2\cdot\dfrac{1}{c}+b^2\cdot\dfrac{1}{a}+c^2\cdot\dfrac{1}{b}\end{cases}$$

$$\Rightarrow 2(a+b+c)\leq\frac{b^2+c^2}{a}+\frac{c^2+a^2}{b}+\frac{a^2+b^2}{c}\Leftrightarrow a+b+c\leq\frac{b^2+c^2}{2a}+\frac{c^2+a^2}{2b}+\frac{a^2+b^2}{2c}\quad(1)$$

Mặt khác từ $a\geq b\geq c\Rightarrow\begin{cases}a^3\geq b^3\geq c^3\\ \dfrac{a}{abc}\geq\dfrac{b}{abc}\geq\dfrac{c}{abc}\end{cases}$

Sử dụng bất đẳng thức hoán vị ta có:

$$+\begin{cases} a^3\cdot\dfrac{b}{abc}+b^3\cdot\dfrac{c}{abc}+c^3\cdot\dfrac{a}{abc}\le a^3\cdot\dfrac{a}{abc}+b^3\cdot\dfrac{b}{abc}+c^3\cdot\dfrac{c}{abc} \\ a^3\cdot\dfrac{c}{abc}+b^3\cdot\dfrac{a}{abc}+c^3\cdot\dfrac{b}{abc}\le a^3\cdot\dfrac{a}{abc}+b^3\cdot\dfrac{b}{abc}+c^3\cdot\dfrac{c}{abc} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{b^2+c^2}{a}+\frac{c^2+a^2}{b}+\frac{a^2+b^2}{c}\le 2\left(\frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ca}+\frac{c^3}{ab}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{b^2+c^2}{2a}+\frac{c^2+a^2}{2b}+\frac{a^2+b^2}{2c}\le\frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ca}+\frac{c^3}{ab}\quad (2)$$

Dấu bằng ở (1) và (2) xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

Bài 3. Chứng minh rằng: $\dfrac{a^3}{b+c}+\dfrac{b^3}{c+a}+\dfrac{c^3}{a+b}\ge\dfrac{a^2+b^2+c^2}{2}$ (1) $\forall a, b, c>0$

Chứng minh

Không mất tính tổng quát giả sử $a\ge b\ge c\Rightarrow\begin{cases} a^3\ge b^3\ge c^3 \\ \dfrac{1}{b+c}\ge\dfrac{1}{c+a}\ge\dfrac{1}{a+b}\end{cases}$

Sử dụng bất đẳng thức hoán vị ta có: $+\begin{cases}\dfrac{a^3}{b+c}+\dfrac{b^3}{c+a}+\dfrac{c^3}{a+b}\ge\dfrac{a^3}{a+b}+\dfrac{b^3}{b+c}+\dfrac{c^3}{c+a} \\ \dfrac{a^3}{b+c}+\dfrac{b^3}{c+a}+\dfrac{c^3}{a+b}\ge\dfrac{a^3}{c+a}+\dfrac{b^3}{a+b}+\dfrac{c^3}{b+c}\end{cases}$

$$\Rightarrow VT(1)\ge\frac{1}{2}\left(\frac{a^3+b^3}{a+b}+\frac{b^3+c^3}{b+c}+\frac{c^3+a^3}{c+a}\right)=\frac{1}{2}\left[(a^2+b^2-ab)+(b^2+c^2-bc)+(c^2+a^2-ca)\right]$$

$$\ge\frac{1}{2}\left(\frac{a^2+b^2}{2}+\frac{b^2+c^2}{2}+\frac{c^2+a^2}{2}\right)=\frac{a^2+b^2+c^2}{2}\text{ (đpcm).}$$

Bài 4. Chứng minh rằng: $\dfrac{a^8+b^8+c^8}{a^3b^3c^3}\ge\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$ (1) $\forall a, b, c>0$

Chứng minh

Bất đẳng thức (1) $\Leftrightarrow\dfrac{a^5}{b^3c^3}+\dfrac{b^5}{c^3a^3}+\dfrac{c^5}{a^3b^3}\ge\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$ (2)

Giả sử $a\ge b\ge c\Rightarrow\begin{cases}a^5\ge b^5\ge c^5 \\ \dfrac{1}{b^3c^3}\ge\dfrac{1}{c^3a^3}\ge\dfrac{1}{a^3b^3}\end{cases}$. Sử dụng bất đẳng thức hoán vị ta có:

$$a^5\cdot\frac{1}{b^3c^3}+b^5\cdot\frac{1}{c^3a^3}+c^5\cdot\frac{1}{a^3b^3}\ge a^5\cdot\frac{1}{c^3a^3}+b^5\cdot\frac{1}{a^3b^3}+c^5\cdot\frac{1}{b^3c^3}$$

$$\Leftrightarrow\frac{a^5}{b^3c^3}+\frac{b^5}{c^3a^3}+\frac{c^5}{a^3b^3}\ge\frac{a^2}{c^3}+\frac{b^2}{a^3}+\frac{c^2}{b^3}\quad (3)$$

Từ $a \ge b \ge c \Rightarrow \begin{cases} a^2 \ge b^2 \ge c^2 \\ \dfrac{1}{c^3} \ge \dfrac{1}{b^3} \ge \dfrac{1}{a^3} \end{cases}$. Khi đó ta có:

$$a^2 \cdot \frac{1}{c^3} + b^2 \cdot \frac{1}{a^3} + c^2 \cdot \frac{1}{b^3} \ge a^2 \cdot \frac{1}{a^3} + b^2 \cdot \frac{1}{b^3} + c^2 \cdot \frac{1}{c^3} \Leftrightarrow \frac{a^2}{c^3} + \frac{b^2}{a^3} + \frac{c^2}{b^3} \ge \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \quad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra bất đẳng thức (2) đúng $\Rightarrow$ (1) đúng.

Bài 5. Cho $a, b, c, \alpha, \beta > 0$. Chứng minh bất đẳng thức sau:

1. $a^{\alpha+\beta} + b^{\alpha+\beta} + c^{\alpha+\beta} \ge c^\alpha a^\beta + a^\alpha b^\beta + b^\alpha c^\beta$ **2.** $\dfrac{a^\alpha}{c^\beta} + \dfrac{b^\alpha}{a^\beta} + \dfrac{c^\alpha}{b^\beta} \ge a^{\alpha-\beta} + b^{\alpha-\beta} + c^{\alpha-\beta}$

Chứng minh

1. Giả sử $a \le b \le c \Rightarrow \begin{cases} a^\alpha \le b^\alpha \le c^\alpha \\ a^\beta \le b^\beta \le c^\beta \end{cases}$. Sử dụng bất đẳng thức hoán vị ta có:

$$a^\alpha a^\beta + b^\alpha b^\beta + c^\alpha c^\beta \ge c^\alpha a^\beta + a^\alpha b^\beta + b^\alpha c^\beta \Leftrightarrow a^{\alpha+\beta} + b^{\alpha+\beta} + c^{\alpha+\beta} \ge c^\alpha a^\beta + a^\alpha b^\beta + b^\alpha c^\beta$$

2. Giả sử $a \le b \le c \Rightarrow \begin{cases} a^\alpha \le b^\alpha \le c^\alpha \\ \dfrac{1}{a^\beta} \ge \dfrac{1}{b^\beta} \ge \dfrac{1}{c^\beta} \end{cases}$. Sử dụng bất đẳng thức hoán vị ta có:

$$a^\alpha \cdot \frac{1}{a^\beta} + b^\alpha \cdot \frac{1}{b^\beta} + c^\alpha \cdot \frac{1}{c^\beta} \le a^\alpha \cdot \frac{1}{c^\beta} + b^\alpha \cdot \frac{1}{a^\beta} + c^\alpha \cdot \frac{1}{b^\beta}$$

$$\Leftrightarrow a^{\alpha-\beta} + b^{\alpha-\beta} + c^{\alpha-\beta} \le \frac{a^\alpha}{c^\beta} + \frac{b^\alpha}{a^\beta} + \frac{c^\alpha}{b^\beta}$$

Bài 6. Cho $a, b, c, \alpha, \beta > 0$.Chứng minh rằng:

$$\frac{a^\alpha}{b^\beta + c^\beta} + \frac{b^\alpha}{c^\beta + a^\beta} + \frac{c^\alpha}{a^\beta + b^\beta} \ge \frac{a^\alpha}{a^\beta + b^\beta} + \frac{b^\alpha}{b^\beta + c^\beta} + \frac{c^\alpha}{c^\beta + a^\beta}$$

Chứng minh

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \le b \le c$ suy ra

$$\begin{cases} a^\alpha \le b^\alpha \le c^\alpha \\ a^\beta \le b^\beta \le c^\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^\alpha \le b^\alpha \le c^\alpha \\ a^\beta + b^\beta \le a^\beta + c^\beta \le b^\beta + c^\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^\alpha \le b^\alpha \le c^\alpha \\ \dfrac{1}{b^\beta + c^\beta} \le \dfrac{1}{c^\beta + a^\beta} \le \dfrac{1}{a^\beta + b^\beta} \end{cases}$$

Sử dụng bất đẳng thức hoán vị ta có:

$$\frac{a^\alpha}{b^\beta + c^\beta} + \frac{b^\alpha}{c^\beta + a^\beta} + \frac{c^\alpha}{a^\beta + b^\beta} \ge \frac{a^\alpha}{a^\beta + b^\beta} + \frac{b^\alpha}{b^\beta + c^\beta} + \frac{c^\alpha}{c^\beta + a^\beta}$$

Bài 7. Cho $\begin{cases} x,y,z \ge 0 \\ x+y+z=1 \end{cases}$. Chứng minh rằng: $x^2y+y^2z+z^2x \le \dfrac{4}{27}$

Chứng minh

Gọi (a,b,c) là một hoán vị của (x,y,z) sao cho $a \ge b \ge c$ suy ra $ab \ge ac \ge bc$.

Do đó $x(xy)+y(yz)+z(zx) \le a(ab)+b(ac)+c(bc)=b\left(a^2+ac+c^2\right) \le b(a+c)^2$

$$=\frac{1}{2}2b(a+c)^2 \le \frac{1}{2}\left[\frac{2b+(a+c)+(a+c)}{3}\right]^3=\frac{1}{2}\left[\frac{2(a+b+c)}{3}\right]^3=\frac{4}{27}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow (a,b,c)=\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},0\right) \Leftrightarrow (x,y,z)$ là một hoán vị của $\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},0\right)$

Bài 8. Cho $\begin{cases} x,y,z \ge 0 \\ x+y+z=1 \end{cases}$. Chứng minh rằng: $x^ny+y^nz+z^nx \le \dfrac{n^n}{(n+1)^{n+1}}, \forall 2 \le n \in \mathbb{N}$

Chứng minh

Gọi (a,b,c) là một hoán vị của (x,y,z) sao cho $a \ge b \ge c$ suy ra $\begin{cases} a^{n-1} \ge b^{n-1} \ge c^{n-1} \\ ab \ge ac \ge bc \end{cases}$

Suy ra $x^ny+y^nz+z^nx = x^{n-1}(xy)+y^{n-1}(yz)+z^{n-1}(zx)$

$\le a^{n-1}(ab)+b^{n-1}(ac)+c^{n-1}(bc)=b\left(a^n+acb^{n-2}+c^n\right) \le b\left(a^n+a^{n-1}c+c^n\right)$

$\le b(a+c)^n=\dfrac{1}{n}nb(a+c)^n \le \dfrac{1}{n}\left[\dfrac{n(a+b+c)}{n+1}\right]^{n+1}=\dfrac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$

Đẳng thức xảy ra khi (x,y,z) là hoán vị của $\left(\dfrac{n}{n+1},\dfrac{1}{n+2},0\right)$

Bài 9. Cho $a,b,c \ge 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{ab}{a+4a+4c}+\frac{bc}{b+4c+4a}+\frac{ca}{c+4a+4b} \le \frac{a+b+c}{9} \quad (1)$$

Chứng minh

Ta có (1) $\Leftrightarrow \sum_{cyc}\left(\dfrac{ab}{a+4b+4c}+\dfrac{b}{3}\right) \le \dfrac{4(a+b+c)}{9} \Leftrightarrow \sum_{cyc}\dfrac{4b(a+b+c)}{3(a+4b+4c)} \le \dfrac{4(a+b+c)}{9}$

$\Leftrightarrow \dfrac{b}{a+4b+4c}+\dfrac{c}{b+4c+4a}+\dfrac{c}{c+4a+4b} \le \dfrac{1}{3}$ (2). Chuẩn hóa $a+b+c=1$.

Khi đó (2) $\Leftrightarrow \frac{b}{4-3a}+\frac{c}{4-3b}+\frac{a}{4-3c}\le\frac{1}{3}\Leftrightarrow a^2b+b^2c+c^2a+abc\le\frac{4}{27}$

Giả sử x,y,z là hoán vị của (a,b,c) mà $x\ge y\ge z\Rightarrow xy\ge xz\ge yz$

Do đó $a(ab)+b(bc)+c(ca)+abc\le x(xy)+y(xz)+z(yz)+xyz$

$$=y(x^2+2xz+z^2)=y(x+z)^2=\frac{1}{2}2y(x+z)^2\le\frac{1}{2}\left[\frac{2y+(x+z)+(x+z)}{3}\right]^3=\frac{4}{27}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$ hoặc (a,b,c) là một hoán vị của $(2x,x,0)$, $x>0$.

Bài 10. Chứng minh: $\frac{2a^3-b^3-c^3}{b^2+c^2}+\frac{2b^3-c^3-a^3}{c^2+a^2}+\frac{2c^3-a^3-b^3}{a^2+b^2}\ge0$, $\forall a,b,c>0$

Chứng minh

Không mất tính tổng quát, giả sử $0<a\le b\le c$, suy ra

$$\begin{cases}a^3\le b^3\le c^3\\a^2\le b^2\le c^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a^3\le b^3\le c^3\\a^2+b^2\le a^2+c^2\le b^2+c^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a^3\le b^3\le c^3\\\frac{1}{b^2+c^2}\le\frac{1}{a^2+c^2}\le\frac{1}{a^2+b^2}\end{cases}$$

Sử dụng bất đẳng thức hoán vị, ta có:

$$+\begin{cases}\frac{a^3}{b^2+c^2}+\frac{b^3}{c^2+a^2}+\frac{c^3}{a^2+b^2}\ge\frac{a^3}{a^2+b^2}+\frac{b^3}{b^2+c^2}+\frac{c^3}{c^2+a^2}\\\frac{a^3}{b^2+c^2}+\frac{b^3}{c^2+a^2}+\frac{c^3}{a^2+b^2}\ge\frac{b^3}{a^2+b^2}+\frac{c^3}{b^2+c^2}+\frac{a^3}{c^2+a^2}\end{cases}$$

$\Rightarrow\frac{2a^3}{b^2+c^2}+\frac{2b^3}{c^2+a^2}+\frac{2c^3}{a^2+b^2}\ge\frac{a^3+b^3}{a^2+b^2}+\frac{b^3+c^3}{b^2+c^2}+\frac{c^3+a^3}{c^2+a^2}\Rightarrow$ (đpcm).

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c>0$.

Bài 11. Cho $\begin{cases}a,b,c,d\ge0\\a+b+c+d=4\end{cases}$. Chứng minh rằng: $a^2bc+b^2cd+c^2da+d^2ab\le4$

Chứng minh

Gọi (x,y,z,t) là hoán vị của (a,b,c,d) sao cho $x\ge y\ge z\ge t\Rightarrow xyz\ge xyt\ge xzt\ge yzt$

Suy ra $a(abc)+b(bcd)+c(cda)+d(dab)\le x(xyz)+y(xyz)+z(xzt)+t(yzt)$

$$=xy(xz+yt)+zt(xz+yt)=(xy+zt)(xz+yt)\le\frac{1}{4}(xy+zt+xz+yt)$$

$$=\frac{1}{4}\left[(x+t)(y+z)\right]^2\le\frac{1}{4}\left(\frac{x+y+z+t}{2}\right)^4=4\Rightarrow\text{(đpcm)}.$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow(a,b,c,d)$ là $(1,1,1,1)$ hoặc hoán vị của $(2,1,1,0)$.

Bài 12. Cho $\begin{cases} a,b,c,d,e \ge 0 \\ a+b+c+d+e=5 \end{cases}$.

Chứng minh: $a^2bcd + b^2cde + c^2dea + d^2eab + e^2abc \le 5$

Chứng minh

Gọi (x,y,z,t,u) là hoán vị của (a,b,c,d,e) sao cho $x \ge y \ge z \ge t \ge u$

$\Rightarrow xyzt \ge xyzu \ge xytu \ge xztu \ge yztu$. Suy ra

$a(abcd)+b(bcde)+c(cdea)+d(deab)+e(eabc) \le$

$\le x(xyzt)+y(xyzu)+z(xytu)+t(xztu)+u(yztu)$

$= xyz(xt+yu)+xyztu+uzt(tx+uy) = z(xt+yu)(xy+ut)$

$$\le z\left(\frac{xt+yu+xy+ut}{2}\right)^2 + \left(\frac{x+y+t+u}{5}\right)^5 = \frac{1}{4}z\left[\frac{(x+u)(y+z)}{2}\right]^4 + 1 \le \frac{1}{4}z\left(\frac{x+u+y+t}{2}\right)^4 + 1$$

$$= \frac{1}{64}\cdot\frac{1}{4}4z(x+y+z+u)^4 + 1 \le \frac{1}{4^4}\left(\frac{4(x+y+z+t+u)}{5}\right)^5 + 1 = 5 \Rightarrow \text{(đpcm).}$$

Bài 13. Cho $\begin{cases} a,b,c,d \ge 0 \\ a^2+b^2+c^2+d^2=4 \end{cases}$. Chứng minh: $a^3bc + b^3cd + c^3da + d^3ab \le 4$

Chứng minh

Gọi (x,y,z,t) là hoán vị của (a,b,c,d) sao cho $x \ge y \ge z \ge t$.

Suy ra $\begin{cases} x^2 \ge y^2 \ge z^2 \ge t^2 \\ xyz \ge xyt \ge xzt \ge yzt \end{cases}$. Do đó $a^2(abc)+b^2(bcd)+c^2(cda)+d^2(dab)$

$\le x^2(xyz)+y^2(xyt)+z^2(xzt)+t^2(yzt) = xy(x^2z+y^2t)+zt(xz^2+yt^2)$

$\le xy\sqrt{(x^2+y^2)(x^2z^2+y^2t^2)} + zt\sqrt{(z^2+t^2)(x^2z^2+y^2t^2)}$

$= \sqrt{x^2z^2+y^2t^2}\left(xy\sqrt{x^2+y^2}+zt\sqrt{z^2+t^2}\right) \le \sqrt{x^2z^2+y^2t^2}\left(\sqrt{x^2y^2+z^2y^2}+\sqrt{x^2+y^2+z^2+t^2}\right)$

$= 2\sqrt{(x^2z^2+y^2t^2)(x^2y^2+z^2y^2)} \le x^2z^2+y^2t^2+x^2y^2+z^2y^2$

$= (y^2+z^2)(x^2+t^2) \le \left(\dfrac{y^2+z^2+x^2+t^2}{2}\right)^2 = 4 \Rightarrow$ (đpcm).

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=d=1$.

Bài 14. Cho $\begin{cases} a,b,c>0 \\ a^2+b^2+c^2=3 \end{cases}$. Chứng minh rằng: $a^3b^2+b^3c^2+c^3a^2\le 3$

Chứng minh

Gọi (x,y,z) là hoán vị của (a,b,c) sao cho $x\ge y\ge z$. Khi đó

$$a^3b^2+b^3c^2+c^3a^2=a\left(a^2b^2\right)+b\left(b^2c^2\right)+c\left(c^2a^2\right)\le x\left(x^2y^2\right)+y\left(x^2z^2\right)+z\left(y^2z^2\right)$$

$$=y\left(x^3y+x^2z^2+z^3y\right)=y\left[x^2\left(xy+\frac{1}{2}z^2\right)+z^2\left(yz+\frac{1}{2}x^2\right)\right]$$

$$\le y\left(x^2\frac{x^2+y^2+z^2}{2}+z^2\frac{y^2+z^2+x^2}{2}\right)=\frac{x^2+y^2+z^2}{2}y\left(x^2+z^2\right)$$

$$=\frac{3}{2}\sqrt{y^2\left(x^2+z^2\right)^2}=\frac{3}{2\sqrt{2}}\sqrt{2y^2\left(x^2+z^2\right)\left(x^2+z^2\right)}\le\frac{3}{2\sqrt{2}}\sqrt{\left(\frac{2\left(x^2+y^2+z^2\right)}{3}\right)^3}=3$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$.

Bài 15. Cho $\begin{cases} a_1,a_2,...,a_n\ge 0 \\ a_1+a_2+...+a_n=1 \end{cases}$. Chứng minh: $a_1^2a_2+a_2^2a_3+...+a_n^2a_1\le\frac{4}{27}\;\forall n\ge 3$

Chứng minh

Ta chứng minh bài toán bằng quy nạp theo n

Với $n=3$, theo bài 6 ta có bất đẳng thức đúng

Giả sử, bất đẳng thức đúng với n. Xét $n+1$ số $a_1,a_2,...,a_{n+1}$ sao cho $a_1+a_2+...+a_{n+1}=1$.

Không mất tính tổng quát giả sử $a_2=Min\left\{a_1,a_2,....,a_n,a_{n+1}\right\}$. Khi đó ta có

$$a_1^2a_2+a_2^2a_3+...+a_n^2a_{n+1}+a_{n+1}^2a_1$$

$$\le\left(a_1+a_2\right)^2a_3+a_3^2a_4+...+a_{n+1}^2a_{n+1}+...+a_{n+1}^2\left(a_1+a_2\right)\le\frac{4}{27}$$

Như vậy bất đẳng thức đúng với $n+1$, nên theo nguyên lý quy nạp ta có (đpcm).

Bài 16. Cho $a_1,a_2,...,a_n>0$. Chứng minh rằng:

$$a_1+a_2+...+a_n\le\frac{a_1^{2003}}{a_2^{2002}}+\frac{a_2^{2003}}{a_3^{2002}}+...+\frac{a_{n-1}^{2003}}{a_n^{2002}}+\frac{a_n^{2003}}{a_1^{2002}}$$

Chứng minh

Giả sử $0<a_1\le a_2\le...\le a_{n-1}\le a_n$. Khi đó $\begin{cases} a_1^{2003}\le a_2^{2003}\le...\le a_n^{2003} \\ \dfrac{1}{a_1^{2002}}\ge\dfrac{1}{a_2^{2002}}\ge...\ge\dfrac{1}{a_n^{2002}} \end{cases}$

Sử dụng bất đẳng thức hoán vị ta có:

$$a_1^{2003}\cdot\frac{1}{a_1^{2002}}+a_2^{2003}\cdot\frac{1}{a_2^{2002}}+\ldots+a_n^{2003}\cdot\frac{1}{a_n^{2002}}\le a_1^{2003}\cdot\frac{1}{a_2^{2002}}+a_2^{2003}\cdot\frac{1}{a_3^{2002}}+\ldots+a_n^{2003}\cdot\frac{1}{a_1^{2002}}$$

$$\Leftrightarrow a_1+a_2+\ldots+a_n\le\frac{a_1^{2003}}{a_2^{2002}}+\frac{a_2^{2003}}{a_3^{2002}}+\ldots+\frac{a_{n-1}^{2003}}{a_n^{2002}}+\frac{a_n^{2003}}{a_1^{2002}}$$

Bài 17. Cho $a_1,a_2,\ldots,a_n>0$ và $\alpha>\beta>0$. Chứng minh rằng:

$$\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{\alpha}+\left(\frac{a_2}{a_3}\right)^{\alpha}+\ldots+\left(\frac{a_{n-1}}{a_n}\right)^{\alpha}+\left(\frac{a_n}{a_1}\right)^{\alpha}\ge\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{\beta}+\left(\frac{a_2}{a_3}\right)^{\beta}+\ldots+\left(\frac{a_{n-1}}{a_n}\right)^{\beta}+\left(\frac{a_n}{a_1}\right)^{\beta}$$

Chứng minh

Đặt $\gamma=\alpha-\beta>0\Rightarrow\alpha=\beta+\gamma$. Dễ thấy $\left(a_1^{\beta}-a_2^{\beta}\right)\left(a_1^{\gamma}-a_2^{\gamma}\right)\ge0$

$$\Leftrightarrow a_1^{\beta+\gamma}+a_2^{\beta+\gamma}\ge a_1^{\beta}.a_2^{\gamma}+a_2^{\beta}.a_1^{\gamma}\Leftrightarrow a_1^{\alpha}+a_2^{\alpha}\ge a_1^{\beta}.a_2^{\gamma}+a_2^{\beta}.a_1^{\gamma}\Leftrightarrow\frac{a_1^{\alpha}}{a_2^{\alpha}}+1\ge\frac{a_1^{\beta}}{a_2^{\beta}}+\frac{a_1^{\gamma}}{a_2^{\gamma}}$$

Tương tự ta có:

$$+\begin{cases}\dfrac{a_1^{\alpha}}{a_2^{\alpha}}+1\ge\dfrac{a_1^{\beta}}{a_2^{\beta}}+\dfrac{a_1^{\gamma}}{a_2^{\gamma}}\\[2mm]\dfrac{a_2^{\alpha}}{a_3^{\alpha}}+1\ge\dfrac{a_2^{\beta}}{a_3^{\beta}}+\dfrac{a_2^{\gamma}}{a_3^{\gamma}}\\\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\\dfrac{a_n^{\alpha}}{a_1^{\alpha}}+1\ge\dfrac{a_n^{\beta}}{a_1^{\beta}}+\dfrac{a_n^{\gamma}}{a_1^{\gamma}}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{\alpha}+\left(\frac{a_2}{a_3}\right)^{\alpha}+\ldots+\left(\frac{a_n}{a_1}\right)^{\alpha}+n\ge\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{\beta}+\ldots+\left(\frac{a_n}{a_1}\right)^{\beta}+\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{\gamma}+\ldots+\left(\frac{a_n}{a_1}\right)^{\gamma}\quad(1)$$

Mặt khác có thể giả sử rằng $a_1\le a_2\le\ldots\le a_{n-1}\le a_n$.

Nếu $\gamma>0$, $\begin{cases}a_1^{\gamma}\le a_2^{\gamma}\le\ldots\le a_n^{\gamma}\\\dfrac{1}{a_1^{\gamma}}\ge\dfrac{1}{a_2^{\gamma}}\ge\ldots\ge\dfrac{1}{a_n^{\gamma}}\end{cases}$ suy ra $\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{\gamma}+\left(\frac{a_2}{a_3}\right)^{\gamma}+\ldots+\left(\frac{a_n}{a_1}\right)^{\gamma}\ge n\quad(2)$

Từ (1), (2) suy ra $\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{\alpha}+\left(\frac{a_2}{a_3}\right)^{\alpha}+\ldots+\left(\frac{a_n}{a_1}\right)^{\alpha}\ge\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{\beta}+\left(\frac{a_2}{a_3}\right)^{\beta}+\ldots+\left(\frac{a_n}{a_1}\right)^{\beta}$

Bài 18. Cho $a_1,a_2,\ldots,a_n>0$. Chứng minh rằng:

$$a_1+a_2+\ldots+a_n\le\frac{a_1^2+a_2^2}{(n-1)a_3}+\frac{a_2^2+a_3^2}{(n-1)a_4}+\ldots+\frac{a_n^2+a_1^2}{(n-1)a_2}$$

Chứng minh

Không mất tính tổng quát, giả sử $0<a_1\le a_2\le\ldots\le a_{n-1}\le a_n$.

Khi đó ta có $\begin{cases} a_1^2 \le a_2^2 \le ... \le a_n^2 \\ \dfrac{1}{a_1} \ge \dfrac{1}{a_2} \ge ... \ge \dfrac{1}{a_n} \end{cases}$. Gọi $\left(\dfrac{1}{a_1'}, \dfrac{1}{a_2'}, ..., \dfrac{1}{a_n'}\right)$ là một hoán vị của $\left(\dfrac{1}{a_1}, \dfrac{1}{a_2}, ..., \dfrac{1}{a_n}\right)$

Ta có: $a_1^2 \cdot \dfrac{1}{a_1} + a_2^2 \cdot \dfrac{1}{a_2} + ... + a_n^2 \cdot \dfrac{1}{a_n} \le a_1^2 \dfrac{1}{a_1'} + a_2^2 \dfrac{1}{a_2'} + ... + a_n^2 \cdot \dfrac{1}{a_n'}$

Từ bất đẳng thức này suy ra

$$+\begin{cases} a_1 + a_2 + ... + a_n \le \dfrac{a_1^2}{a_2} + \dfrac{a_2^2}{a_3} + ... + \dfrac{a_{n-1}^2}{a_n} + \dfrac{a_n^2}{a_1} \\ a_1 + a_2 + ... + a_n \le \dfrac{a_1^2}{a_3} + \dfrac{a_2^2}{a_4} + ... + \dfrac{a_{n-1}^2}{a_1} + \dfrac{a_n^2}{a_2} \\ .... \\ a_1 + a_2 + ... + a_n \le \dfrac{a_1^2}{a_n} + \dfrac{a_2^2}{a_1} + ... + \dfrac{a_{n-1}^2}{a_{n-2}} + \dfrac{a_n^2}{a_{n-1}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow (n-1)(a_1 + a_2 + ... + a_n) \le \frac{a_1^2 + a_2^2}{a_3} + \frac{a_2^2 + a_3^2}{a_4} + ... + \frac{a_n^2 + a_1^2}{a_2}$$

$$\Leftrightarrow a_1 + a_2 + ... + a_n \le \frac{a_1^2 + a_2^2}{(n-1)a_3} + \frac{a_2^2 + a_3^2}{(n-1)a_4} + ... + \frac{a_n^2 + a_1^2}{(n-1)a_2}$$

Bài 19. Cho $a_1, a_2, ..., a_n > 0$. Chứng minh $S = \dfrac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \ge \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n} = P$

(Bất đẳng thức AM – GM)

Chứng minh

• Nếu $\text{Min}\{a_1, a_2, ..., a_n\} = 0$ thì bất đẳng thức luôn đúng.

• Nếu $\text{Min}\{a_1, a_2, ..., a_n\} > 0$ thì $P = \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n} > 0$. Không mất tính tổng quát giả sử ta có thứ tự các biến số là $a_1 \ge a_2 \ge ... \ge a_n > 0$. Khi đó ta có 2 dãy số sắp xếp thứ tự ngược chiều nhau

$$\begin{cases} \dfrac{a_1}{P} \ge \dfrac{a_1 a_2}{P^2} \ge ... \ge \dfrac{a_1 a_2 ... a_n}{P^n} = 1 \\ \dfrac{P}{a_1} \le \dfrac{P^2}{a_1 a_2} \le ... \le \dfrac{P^n}{a_1 a_2 ... a_n} = 1 \end{cases}.$$

Suy ra: $n = \dfrac{a_1}{P} \cdot \dfrac{P}{a_1} + \dfrac{a_1 a_2}{P^2} \cdot \dfrac{P^2}{a_1 a_2} + ... + \dfrac{a_1 a_2 ... a_n}{P^n} \cdot \dfrac{P^n}{a_1 a_2 ... a_n}$

$$\le \frac{a_1}{P} \cdot 1 + \frac{a_1 a_2}{P^2} \cdot \frac{P}{a_1} + ... + \frac{a_1 a_2 ... a_n}{P^n} \cdot \frac{P^{n-1}}{a_1 a_2 ... a_{n-1}} = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{P} = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{\sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n}}$$

$\Leftrightarrow \dfrac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \ge \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n}$. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a_1 = a_2 = ... = a_n$

Bài 20. Cho $2n$ số thực tuỳ ý $a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_n$

Chứng minh: $\left(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2\right) \ge \left(a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n\right)^2$

(Bất đẳng thức Buniakowski)

Chứng minh

• ***Bổ đề:*** Nếu $x_1, x_2, ..., x_m$ là m số thực tuỳ ý và $(x'_1, x'_2, ..., x'_m)$ là một hoán vị của $\left(x_1, x_2, ..., x_m\right)$, $x_1^2 + x_2^2 + ... + x_m^2 \ge x'_1x_1 + x'_2x_2 + ... + x'_mx_m$

• ***Chứng minh:*** Không mất tính tổng quát giả sử $x_1 \le x_2 \le ... \le x_m$

Sử dụng bất đẳng thức hoán vị cho 2 dãy $\begin{cases} x_1 \le x_2 \le ... \le x_m \\ x_1 \le x_2 \le ... \le x_m \end{cases} \Rightarrow$ (đpcm).

• ***Áp dụng:*** Nếu $\left[\begin{array}{l} a_1 = a_2 = ... = a_n \\ b_1 = b_2 = ... = b_n \end{array}\right.$ thì bất đẳng thức hiển nhiên đúng.

Nếu $a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 > 0$ và $b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2 > 0$.

Đặt $\begin{cases} A = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2} > 0 \\ B = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2} > 0 \end{cases}$ và $\begin{cases} x_i = \dfrac{a_i}{A} \quad voi\ i = \overline{1.n} \\ x_{n+i} = \dfrac{b_i}{B}\ voi\ i = \overline{1.n} \end{cases}$

Sử dụng bổ đề cho dãy số $x_1, x_2, ..., x_n$, $x_{n+1}, x_{n+2}, ..., x_{2n}$ ta có:

$$x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 + x_{n+1}^2 + x_{n+2}^2 + ... + x_{2n}^2 \ge$$
$$x_1x_{n+1} + x_2x_{n+2} + ... + x_nx_{2n} + x_{n+1}x_1 + x_{n+2}x_2 + ... + x_{2n}x_n$$
$$\Leftrightarrow 2 \ge \frac{2\left(a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n\right)}{AB} \Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n \le AB \quad (1)$$

Sử dụng bổ đề cho dãy số $x_1, x_2, ..., x_n$, $-x_{n+1}, -x_{n+2}, ..., -x_{2n}$ ta có:

$$x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 + x_{n+1}^2 + x_{n+2}^2 + ... + x_{2n}^2 \ge$$
$$\ge x_1\left(-x_{n+1}\right) + x_2\left(-x_{n+2}\right) + ... + x_n\left(-x_{2n}\right) + \left(-x_{n+1}\right)x_1 + \left(-x_{n+2}\right)x_2 + ... + \left(-x_{2n}\right)x_n$$
$$\Leftrightarrow 2 \ge \frac{-2\left(a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n\right)}{AB} \Leftrightarrow -\left(a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n\right) \le AB \quad (2)$$

Từ (1) và (2), suy ra: $\left|a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n\right| \le AB$

$$\Leftrightarrow A^2B^2 = \left(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2\right) \ge \left(a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n\right)^2$$

Bài 21. Cho hai dãy hữu hạn các số thực $a_1, a_2, ..., a_n$ và $b_1, b_2, ..., b_n$. Chứng minh rằng:

1. Nếu $\begin{cases} a_1 \ge a_2 \ge ... \ge a_n \\ b_1 \ge b_2 \ge ... \ge b_n \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a_1 \le a_2 \le ... \le a_n \\ b_1 \le b_2 \le ... \le b_n \end{cases}$ thì

$$n(a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n) \ge (a_1 + a_2 + ... + a_n)(b_1 + b_2 + ... + b_n)$$

2. Nếu $\begin{cases} a_1 \ge a_2 \ge ... \ge a_n \\ b_1 \le b_2 \le ... \le b_n \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a_1 \le a_2 \le ... \le a_n \\ b_1 \ge b_2 \ge ... \ge b_n \end{cases}$ thì

$$n(a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n) \le (a_1 + a_2 + ... + a_n)(b_1 + b_2 + ... + b_n)$$

(Bất đẳng thức Chebyshev)

Chứng minh

1. Nếu $\begin{cases} a_1 \ge a_2 \ge ... \ge a_n \\ b_1 \ge b_2 \ge ... \ge b_n \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a_1 \le a_2 \le ... \le a_n \\ b_1 \le b_2 \le ... \le b_n \end{cases}$ thì sử dụng bất đẳng thức hoán vị ta có:

$$+\begin{cases} a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + ... + a_{n-1}b_{n-1} + a_nb_n \ge a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_{n-1}b_{n-1} + a_nb_n \\ a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + ... + a_{n-1}b_{n-1} + a_nb_n \ge a_1b_2 + a_2b_3 + ... + a_{n-1}b_n + a_nb_1 \\ a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + ... + a_{n-1}b_{n-1} + a_nb_n \ge a_1b_3 + a_2b_4 + ... + a_{n-1}b_1 + a_nb_2 \\ \dots\dots\dots\dots \ge \dots\dots\dots\dots \\ a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + ... + a_{n-1}b_{n-1} + a_nb_n \ge a_1b_n + a_2b_1 + ... + a_{n-1}b_{n-2} + a_nb_{n-1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow n(a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n) \ge (a_1 + a_2 + ... + a_n)(b_1 + b_2 + ... + b_n)$$

2. Nếu $\begin{cases} a_1 \ge a_2 \ge ... \ge a_n \\ b_1 \le b_2 \le ... \le b_n \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a_1 \le a_2 \le ... \le a_n \\ b_1 \ge b_2 \ge ... \ge b_n \end{cases}$ thì sử dụng bất đẳng thức hoán vị ta có n bất đẳng thức sau đây:

$$+\begin{cases} a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + ... + a_{n-1}b_{n-1} + a_nb_n \le a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_{n-1}b_{n-1} + a_nb_n \\ a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + ... + a_{n-1}b_{n-1} + a_nb_n \le a_1b_2 + a_2b_3 + ... + a_{n-1}b_n + a_nb_1 \\ a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + ... + a_{n-1}b_{n-1} + a_nb_n \le a_1b_3 + a_2b_4 + ... + a_{n-1}b_1 + a_nb_2 \\ \dots\dots\dots\dots \le \dots\dots\dots\dots \\ a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + ... + a_{n-1}b_{n-1} + a_nb_n \le a_1b_n + a_2b_1 + ... + a_{n-1}b_{n-2} + a_nb_{n-1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow n(a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n) \le (a_1 + a_2 + ... + a_n)(b_1 + b_2 + ... + b_n)$$

Dấu bằng ở (1) và (2) xảy ra $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a_1 = a_2 = ... = a_n \\ b_1 = b_2 = ... = b_n \end{array}\right.$

Bài 22. [IMO 1975] Cho $\begin{cases} a_1 \ge a_2 \ge ... \ge a_n \\ b_1 \ge b_2 \ge ... \ge b_n \end{cases}$. Gọi $(c_1, c_2, ..., c_n)$ là một hoán vị tuỳ ý của $(b_1, b_2, ..., b_n)$. Chứng minh: $(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + ... + (a_n - b_n)^2 \le (a_1 - c_1)^2 + (a_2 - c_2)^2 + ... + (a_n - c_n)^2$

Chứng minh

Vì $(c_1, c_2, ..., c_n)$ là một hoán vị của $(b_1, b_2, ..., b_n)$ nên $b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2 = c_1^2 + c_2^2 + ... + c_n^2$.

Sử dụng bất đẳng thức hoán vị ta có $a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_n b_n \ge a_1 c_1 + a_2 c_2 + ... + a_n c_n$

Ta có: $(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + ... + (a_n - b_n)^2 =$

$= (a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2) + (b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2) - 2(a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_n b_n) \le$

$(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2) + (c_1^2 + c_2^2 + ... + c_n^2) - 2(a_1 c_1 + a_2 c_2 + ... + a_n c_n) = (a_1 - c_1)^2 + ... + (a_n - c_n)^2$

Bài 23. Cho hàm số $f(x)$. Giả sử $f(x) = 0$ có n nghiệm thực $b_1 \ge b_2 \ge ... \ge b_n \ge 0$ và $f'(x) = 0$ có $(n - 1)$ nghiệm thực $a_1 \ge a_2 \ge ... \ge a_{n-1}$. Gọi $(c_1, c_2, ..., c_n)$ là một hoán vị tùy ý của bộ $(b_1, b_2, ..., b_n)$. Chứng minh rằng: $\sum_{k=1}^{n-1} (a_k - b_k)^3 - b_n^3 \ge \sum_{k=1}^{n-1} (a_k - c_k)^3 - c_n^3$ (1)

Chứng minh

Đặt $a_n = 0$ khi đó $\sum_{k=1}^{n-1} (a_k - b_k)^3 - b_n^3 \ge \sum_{k=1}^{n-1} (a_k - c_k)^3 - c_n^3 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} (a_k - b_k)^3 \ge \sum_{k=1}^{n} (a_k - c_k)^3$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} \left(a_k^3 - 3a_k^2 b_k + 3a_k b_k^2 - b_k^3\right) \ge \sum_{k=1}^{n} \left(a_k^3 - 3a_k^2 c_k + 3a_k c_k^2 - c_k^3\right)$$

$$\Leftrightarrow 3\sum_{k=1}^{n} a_k b_k (b_k - a_k) \ge 3\sum_{k=1}^{n} a_k c_k (c_k - a_k) \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} a_k b_k (b_k - a_k) \ge \sum_{k=1}^{n} a_k c_k (c_k - a_k) \quad (2)$$

Sử dụng định lý ***Rolle*** ta có: $b_1 \ge a_1 \ge b_2 \ge a_2 \ge ... \ge b_n \ge a_n = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 b_1 \ge a_2 b_2 \ge ... \ge a_{n-1} b_{n-1} \ge a_n b_n \\ b_1 - a_1 \ge b_2 - a_2 \ge ... \ge b_{n-1} - a_{n-1} \ge b_n - a_n \end{cases} \Rightarrow (2) \text{ đúng} \Rightarrow (1) \text{ đúng.}$$

Bài 24. [IMO 1978] Cho $a_1, a_2, ..., a_n$ là n số nguyên dương phân biệt. Chứng minh rằng:

$$\frac{a_1}{1^2} + \frac{a_2}{2^2} + ... + \frac{a_n}{n^2} > \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}$$

Chứng minh

Gọi $(a'_1, a'_2, ..., a'_n)$ là một hoán vị của $(a_1, a_2, ..., a_n)$ thoả mãn điều kiện $a'_1 < a'_2 < ... < a'_n$.

Vì $a_1, a_2, ..., a_n$ là n số nguyên dương phân biệt nên $a_i' \ge i \ \forall i = \overline{1, n}$

Xét 2 dãy số ngược chiều nhau $\begin{cases} a_1' < a_2' < ... < a_n' \\ \dfrac{1}{1^2} > \dfrac{1}{2^2} > ... > \dfrac{1}{n^2} \end{cases}$ và coi $(a_1, a_2, ..., a_n)$ là một hoán vị của

bộ $(a'_1, a'_2, ..., a'_n)$, khi đó theo bất đẳng thức hoán vị ta có

$$\frac{a_1}{1^2} + \frac{a_2}{2^2} + ... + \frac{a_n}{n^2} \ge \frac{a_1'}{1^2} + \frac{a_2'}{2^2} + ... + \frac{a_n'}{n^2} \ge \frac{1}{1^2} + \frac{2}{2^2} + ... + \frac{n}{n^2} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}$$

Bài 25. [IMO 1964] Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$a^2(b + c - a) + b^2(c + a - b) + c^2(a + b - c) \le 3abc$$

Chứng minh

Bất đẳng thức (1) $\Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \ge a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + c^2a + ca^2$

$\Leftrightarrow a(a^2 + bc) + b(b^2 + ca) + c(c^2 + ab) \ge a(b^2 + ca) + b(c^2 + ab) + c(ac + bc)$

Giả sử $a \ge b \ge c \Rightarrow \begin{cases} a \ge b \\ a^2 + bc \ge b^2 + ca \end{cases}$ khi đó $a(a^2 + bc) + b(b^2 + ca) \ge a(b^2 + ca) + b(a^2 + bc)$ (2)

Do $\begin{cases} b \ge c \\ a \ge c \end{cases}$ nên $ba + c^2 \ge ac + bc \Rightarrow c(c^2 + ab) \ge c(ac + bc)$ (3)

Lấy (2) cộng (3) ta có

$a(a^2 + bc) + b(b^2 + ca) + c(c^2 + ab) \ge a(b^2 + ca) + b(c^2 + ab) + c(ac + bc)$

Vậy bất đẳng thức (1) được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$.

Bài 26. [IMO 1983] Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$a^2b(a - b) + b^2c(b - c) + c^2a(c - a) \ge 0 \quad (1)$$

Chứng minh

Bất đẳng thức (1) $\Leftrightarrow a^3b + b^3c + c^3a \ge a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$

Giả sử $a \ge b \ge c$ khi đó dễ dàng chứng minh được $\begin{cases} bc \le ac \le ab \\ a^2 + bc \ge b^2 + ac \ge c^2 + ab \end{cases}$

Sử dụng bất đẳng thức hoán vị cho hai dãy số trên ta có:

$bc(a^2 + bc) + ca(b^2 + ca) + ab(c^2 + ab) \le bc(b^2 + ca) + ca(c^2 + ab) + ab(a^2 + bc)$

$\Leftrightarrow a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \le a^3b + b^3c + c^3a$

Bình luận: Nếu chuyển điều kiện a, b, c là độ dài 3 cạnh tam giác thành điều kiện $a, b, c > 0$ thì không thể chứng minh được bất đẳng thức đồng bậc

$a^3b + b^3c + c^3a \ge a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$, $\forall a, b, c > 0$.

Chúng ta có thể chỉ ra vô số cặp *(a, b, c)* chứng tỏ bất đẳng thức này không đúng, chẳng hạn a = 4, b = 1, c = 1 thì bất đẳng thức trên đổi chiều ngược lại. Ngoài ra bạn đọc cũng có thể chứng minh được rằng khi thay điều kiện *a, b, c* là độ dài 3 cạnh tam giác bởi điều kiện $a \ge b \ge c$ thì bất đẳng thức đã cho vẫn đúng.

Bài 27. Cho $\alpha, \beta, \gamma \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Chứng minh rằng:

$$\tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma \ge \frac{\alpha}{\beta}\tan\beta + \frac{\beta}{\gamma}\tan\gamma + \frac{\gamma}{\alpha}\tan\alpha$$

Chứng minh

• ***Bổ đề:*** Hàm số $y = \frac{\tan x}{x}$ đồng biến trên khoảng $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

• ***Chứng minh:*** $y' = \frac{\frac{x}{\cos^2 x} - \tan x}{x^2} = \frac{x - \sin x\cos x}{x^2\cos^2 x} > \frac{x - \sin x}{x^2\cos^2 x} > \frac{x - x}{x^2\cos^2 x} = 0$

$\Rightarrow y' > 0\ \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Vậy $y = \frac{\tan x}{x}$ đồng biến trên khoảng $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

• ***Áp dụng:*** Giả sử $0 < \alpha \le \beta \le \gamma < \frac{\pi}{2}$. Khi đó theo bổ đề suy ra,

$\frac{\tan\alpha}{\alpha} \le \frac{\tan\beta}{\beta} \le \frac{\tan\gamma}{\gamma}$. Sử dụng bất đẳng thức hoán vị ta có

$$\alpha\cdot\frac{\tan\alpha}{\alpha} + \beta\cdot\frac{\tan\beta}{\beta} + \gamma\cdot\frac{\tan\gamma}{\gamma} \ge \alpha\cdot\frac{\tan\beta}{\beta} + \beta\cdot\frac{\tan\gamma}{\gamma} + \gamma\cdot\frac{\tan\alpha}{\alpha}$$

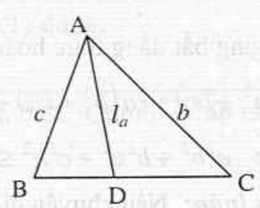
$$\Leftrightarrow \tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma \ge \frac{\alpha}{\beta}\tan\beta + \frac{\beta}{\gamma}\tan\gamma + \frac{\gamma}{\alpha}\tan\alpha$$

Bài 28. Cho ΔABC có độ dài 3 cạnh là *a, b, c*; độ dài 3 đường phân giác trong tương ứng với các cạnh *a, b, c* là l_a, l_b, l_c. Chứng minh rằng:

1. $al_a + bl_b + cl_c \le al_b + bl_c + cl_a$ **2.** $\frac{l_a}{a} + \frac{l_b}{b} + \frac{l_c}{c} \ge \frac{l_a}{b} + \frac{l_b}{c} + \frac{l_c}{a}$

Chứng minh

• ***Bổ đề:*** $a \le b \Leftrightarrow l_a \ge l_b$



• ***Chứng minh:*** $S_{ABC} = S = S_{ABD} + S_{ACD}$

$\Leftrightarrow S = \frac{1}{2}cl_a\sin\frac{A}{2} + \frac{1}{2}bl_a\sin\frac{A}{2} = \frac{1}{2}l_a\sin\frac{A}{2}(b + c)$

$\Leftrightarrow l_a = \frac{2S}{(b+c)\sin\frac{A}{2}}$. Tương tự ta có $l_b = \frac{2S}{(c+a)\sin\frac{B}{2}}$

$l_a \geq l_b \Leftrightarrow (b+c)\sin\frac{A}{2} \leq (c+a)\sin\frac{B}{2} \Leftrightarrow (\sin B + \sin C)\sin\frac{A}{2} \leq (\sin C + \sin A)\sin\frac{B}{2}$

$\Leftrightarrow \sin C\left(\sin\frac{B}{2} - \sin\frac{A}{2}\right) + 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\left(\cos\frac{A}{2} - \cos\frac{B}{2}\right) \geq 0 \quad (1)$

Giả sử $a \geq b$ thì $A \geq B \Leftrightarrow \frac{A}{2} \geq \frac{B}{2} \Leftrightarrow \sin\frac{A}{2} \geq \sin\frac{B}{2}$ và $\cos\frac{A}{2} \leq \cos\frac{B}{2}$

$\Rightarrow$ (1) không thoả mãn $\Rightarrow$ Nếu $l_a \geq l_b$ thì $a \leq b$.

Mặt khác $a \leq b \Leftrightarrow A \leq B \Leftrightarrow \frac{A}{2} \leq \frac{B}{2} \Leftrightarrow \sin\frac{A}{2} \leq \sin\frac{B}{2}$ và $\cos\frac{A}{2} \geq \cos\frac{B}{2}$

$\Rightarrow \sin C\left(\sin\frac{B}{2} - \sin\frac{A}{2}\right) + 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\left(\cos\frac{A}{2} - \cos\frac{B}{2}\right) \geq 0$

$\Rightarrow$ Nếu $a \leq b$ thì $l_a \geq l_b$. Vậy $a \leq b \Leftrightarrow l_a \geq l_b$.

Bây giờ ta sử dụng bổ đề để chứng minh **1.** và **2.**

1. Không mất tính tổng quát giả sử $a \leq b \leq c \Rightarrow l_a \geq l_b \geq l_c$

Sử dụng bất đẳng thức hoán vị, ta có $al_a + bl_b + cl_c \leq al_b + bl_c + cl_a$

2. Không mất tính tổng quát giả sử $a \leq b \leq c \Rightarrow \begin{cases} l_a \geq l_b \geq l_c \\ \frac{1}{a} \geq \frac{1}{b} \geq \frac{1}{c} \end{cases}$

Sử dụng bất đẳng thức hoán vị, ta có $\frac{l_a}{a} + \frac{l_b}{b} + \frac{l_c}{c} \geq \frac{l_a}{b} + \frac{l_b}{c} + \frac{l_c}{a}$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ ΔABC đều.

Bài 29. Cho ΔABC có độ dài 3 đường trung tuyến và độ dài 3 đường phân giác trong tương ứng với các cạnh *a, b, c* là m_a, m_b, m_c và l_a, l_b, l_c.

1. Chứng minh rằng: $m_al_a + m_bl_b + m_cl_c \geq m_al_b + m_bl_c + m_cl_a$

2. Chứng minh rằng: $\frac{l_a}{m_a} + \frac{l_b}{m_b} + \frac{l_c}{m_c} \leq \frac{l_a}{m_b} + \frac{l_b}{m_c} + \frac{l_c}{m_a}$

Chứng minh

• ***Bổ đề 1:*** $a \leq b \Leftrightarrow l_a \geq l_b$. • ***Bổ đề 2:*** $m_a \geq m_b \Leftrightarrow l_a \geq l_b$.

• ***Chứng minh bổ đề 2:*** $m_a \geq m_b \Leftrightarrow m_a^2 \geq m_b^2 \Leftrightarrow \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4} \geq \frac{2c^2 + 2a^2 - b^2}{4}$

$\Leftrightarrow 2b^2 + 2c^2 - a^2 \geq 2c^2 + 2a^2 - b^2 \Leftrightarrow 3b^2 \geq 3a^2 \Leftrightarrow a^2 \leq b^2 \Leftrightarrow a \leq b \Leftrightarrow l_a \geq l_b$

• ***Áp dụng:***

1. Không mất tính tổng quát, giả sử $a \leq b \leq c \Rightarrow \begin{cases} m_a \geq m_b \geq m_c \\ l_a \geq l_b \geq l_c \end{cases}$

Sử dụng bất đẳng thức hoán vị ta có: $m_al_a + m_bl_b + m_cl_c \geq m_al_b + m_bl_c + m_cl_a$

2. Không mất tính tổng quát, giả sử $a \le b \le c \Rightarrow \begin{cases} l_a \ge l_b \ge l_c \\ \dfrac{1}{m_a} \le \dfrac{1}{m_b} \le \dfrac{1}{m_c} \end{cases}$

Sử dụng bất đẳng thức hoán vị, ta có $\dfrac{l_a}{m_a} + \dfrac{l_b}{m_b} + \dfrac{l_c}{m_c} \le \dfrac{l_a}{m_b} + \dfrac{l_b}{m_c} + \dfrac{l_c}{m_a}$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ ΔABC đều.

• ***Bây giờ chúng ta sẽ xét bài toán khái quát từ ví dụ 1 ở phần I***

Bài 30. Tại một trạm bán xăng, có n người xếp hàng mua xăng. Mỗi người cần mua một số lượng xăng khác nhau. Hãy chọn cách sắp xếp thứ tự người mua để tổng số thời gian chờ đợi của mọi người là nhỏ nhất.

Giải

Gọi thời gian của người thứ i cần để mua xăng là t_i ($i = \overline{1, n}$). Khi đó tổng số thời gian chờ đợi của mọi người là: $T = nt_1 + (n-1)t_2 + \ldots + 2t_{n-1} + t_n$.

Nếu thay đổi thứ tự của mọi người thì tổng số thời gian chờ đợi là

$T' = nt'_1 + (n-1)t'_2 + \ldots + 2t'_{n-1} + t'_n$ trong đó $(t'_1, t'_2, \ldots, t'_n)$ là một hoán vị của $(t_1, t_2, \ldots, t_n)$

Không mất tính tổng quát giả sử $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$. Khi đó theo bất đẳng thức hoán vị tổng số thời gian chờ đợi của mọi người nhỏ nhất là $T^* = nt_1 + (n-1)t_2 + \ldots + 2t_{n-1} + t_n$

• ***Ý nghĩa:*** Để tiết kiệm thời gian cho xã hội thì cần phải sắp xếp theo thứ tự: người mua ít xăng đứng trước người mua nhiều xăng. Từ ý tưởng này chúng ta có thể mở rộng sang việc sắp xếp trình tự tối ưu để sản xuất các chi tiết và lắp ráp trong các dây truyền tự động hóa của các nhà máy chẳng hạn trong các nhà máy sản xuất ô tô, máy bay Boeing…

Bài 31. Cho $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ a + b + c = 1 \end{cases}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $S = \dfrac{a\sqrt{a}}{\sqrt{b}} + \dfrac{b\sqrt{b}}{\sqrt{c}} + \dfrac{c\sqrt{c}}{\sqrt{a}}$

Giải

Không mất tính tổng quát, giả sử $0 < a \le b \le c$.

Sử dụng bất đẳng thức hoán vị cho hai dãy sắp thứ tự sau đây

$\begin{cases} a\sqrt{a} \le b\sqrt{b} \le c\sqrt{c} \\ \dfrac{1}{\sqrt{a}} \ge \dfrac{1}{\sqrt{b}} \ge \dfrac{1}{\sqrt{c}} \end{cases}$ ta có $S = \dfrac{a\sqrt{a}}{\sqrt{b}} + \dfrac{b\sqrt{b}}{\sqrt{c}} + \dfrac{c\sqrt{c}}{\sqrt{a}} \le \dfrac{a\sqrt{a}}{\sqrt{a}} + \dfrac{b\sqrt{b}}{\sqrt{b}} + \dfrac{c\sqrt{c}}{\sqrt{c}} = a + b + c = 1$

Với $a = b = c = \dfrac{1}{3}$ thì Max $S = 1$.

Bài 32. Cho ABC là tam giác nhọn. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức sau:

$$T = \frac{A}{B}\sin B + \frac{B}{C}\sin C + \frac{C}{A}\sin A$$

Giải

• ***Bổ đề 1:*** Hàm số $y = f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ giảm trên khoảng $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$

• ***Chứng minh:***

Ta có $y' = \dfrac{x\cos x - \sin x}{x^2} = \dfrac{u(x)}{x^2}$ trong đó $u(x) = x\cos x - \sin x$

Ta có $u'(x) = \cos x - x\sin x - \cos x = -x\sin x < 0 \quad \forall x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$

$\Rightarrow u(x)$ giảm trên khoảng $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right) \Rightarrow u(x) < u(0) = 0 \Rightarrow y' < 0 \;\; \forall x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$

$\Rightarrow y = f(x)$ giảm trên khoảng $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$

• ***Bổ đề 2:*** $Q = \sin A + \sin B + \sin C \le \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ với mọi tam giác ABC.

• ***Chứng minh:***

Biến đổi biểu thức Q và sử dụng đánh giá $2xy \le x^2 + y^2$ ta có:

$$Q = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\sin A \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \sin B \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \sqrt{3}\left(\frac{\sin A}{\sqrt{3}} \cdot \cos B + \frac{\sin B}{\sqrt{3}} \cdot \cos A\right)$$

$$\le \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\left(\sin^2 A + \frac{3}{4}\right) + \left(\sin^2 B + \frac{3}{4}\right)\right] + \frac{\sqrt{3}}{2}\left[\left(\frac{\sin^2 A}{3} + \cos^2 B\right) + \left(\frac{\sin^2 B}{3} + \cos^2 A\right)\right] = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

• ***Áp dụng:***

Không mất tính tổng quát, giả sử $A \le B \le C < \dfrac{\pi}{2}$. Do hàm số $y = f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ giảm trên khoảng $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ nên suy ra $\dfrac{\sin A}{A} \ge \dfrac{\sin B}{B} \ge \dfrac{\sin C}{C}$.

Sử dụng bất đẳng thức hoán vị cho hai dãy ngược chiều ta có:

$$T = \frac{A}{B}\sin B + \frac{B}{C}\sin C + \frac{C}{A}\sin A = \frac{\sin B}{B}A + \frac{\sin C}{C}B + \frac{\sin A}{A}C$$

$$\le \frac{\sin B}{B}B + \frac{\sin C}{C}C + \frac{\sin A}{A}A = \sin A + \sin B + \sin C \le \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Khi tam giác ABC đều thì $\operatorname{Max} T = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

II. CÁC BÀI TẬP DÀNH CHO BẠN ĐỌC TỰ GIẢI

Bài 1. Cho $a_1, a_2, ..., a_n > 0$; $\alpha, \beta > 0$. Gọi $(t_1, t_2, ..., t_n)$ là một hoán vị tuỳ ý của $(a_1, a_2, ..., a_n)$. Khi đó ta có các bất đẳng thức sau:

1. $a_1^{\alpha+\beta} + a_2^{\alpha+\beta} + ... + a_{n-1}^{\alpha+\beta} + a_n^{\alpha+\beta} \geq t_1^{\alpha} a_1^{\beta} + t_2^{\alpha} a_2^{\beta} + ... + t_{n-1}^{\alpha} a_{n-1}^{\beta} + t_n^{\alpha} a_n^{\beta}$

2. $a_1^{\alpha+\beta} + a_2^{\alpha+\beta} + ... + a_{n-1}^{\alpha+\beta} + a_n^{\alpha+\beta} \geq a_1^{\alpha} a_2^{\beta} + a_2^{\alpha} a_3^{\beta} + ... + a_{n-1}^{\alpha} a_n^{\beta} + a_n^{\alpha} a_1^{\beta}$

3. $\dfrac{a_1^{\alpha}}{t_1^{\beta}} + \dfrac{a_2^{\alpha}}{t_2^{\beta}} + ... + \dfrac{a_{n-1}^{\alpha}}{t_{n-1}^{\beta}} + \dfrac{a_n^{\alpha}}{t_n^{\beta}} \geq a_1^{\alpha-\beta} + a_2^{\alpha-\beta} + ... + a_{n-1}^{\alpha-\beta} + a_n^{\alpha-\beta}$

4. $\dfrac{a_1^{\alpha}}{a_2^{\beta}} + \dfrac{a_2^{\alpha}}{a_3^{\beta}} + ... + \dfrac{a_{n-1}^{\alpha}}{a_n^{\beta}} + \dfrac{a_n^{\alpha}}{a_1^{\beta}} \geq a_1^{\alpha-\beta} + a_2^{\alpha-\beta} + ... + a_{n-1}^{\alpha-\beta} + a_n^{\alpha-\beta}$

Bài 2. Cho $a_1, a_2, ..., a_n > 0$; $\alpha > \beta > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a_1^{\alpha}}{a_2^{\alpha}} + \frac{a_2^{\alpha}}{a_3^{\alpha}} + ... + \frac{a_{n-1}^{\alpha}}{a_n^{\alpha}} + \frac{a_n^{\alpha}}{a_1^{\alpha}} \geq \frac{a_1^{\beta}}{a_2^{\beta}} + \frac{a_2^{\beta}}{a_3^{\beta}} + ... + \frac{a_{n-1}^{\beta}}{a_n^{\beta}} + \frac{a_n^{\beta}}{a_1^{\beta}}$$

Bài 3. Cho $a_1, a_2, ..., a_n > 0$. Gọi $(a'_1, a'_2, ..., a'_n)$ là một hoán vị tuỳ ý của $(a_1, a_2, ..., a_n)$.

Chứng minh rằng: $a_1^{a_1} a_2^{a_2} ... a_n^{a_n} \geq a_1^{a'_1} a_2^{a'_2} ... a_n^{a'_n}$

Bài 4. Cho 2 dãy số $\begin{cases} 0 < a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_{n-1} \leq a_n \\ 0 < b_1 \leq b_2 \leq ... \leq b_{n-1} \leq b_n \end{cases}$

Chứng minh rằng $a_1^{b_1} a_2^{b_2} ... a_{n-1}^{b_{n-1}} a_n^{b_n} \geq a_1^{b_n} a_2^{b_{n-1}} ... a_{n-1}^{b_2} a_n^{b_1}$

Bài 5. Cho $a, b, c > e^{-1}$. Chứng minh các bất đẳng thức sau:

1. $a^{a-1} + b^{b-1} + c^{c-1} \leq \dfrac{a^a}{b} + \dfrac{b^b}{c} + \dfrac{c^c}{a}$ **2.** $a^{a+1} + b^{b+1} + c^{c+1} \leq a^a b + b^b c + c^c a$

Bài 6. Cho $0 < a_1, a_2, ..., a_n < e^{-1}$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a_1^{a_1}}{a_1} + \frac{a_2^{a_2}}{a_2} + ... + \frac{a_{n-1}^{a_{n-1}}}{a_{n-1}} + \frac{a_n^{a_n}}{a_n} \geq \frac{a_1^{a_1}}{a_2} + \frac{a_2^{a_2}}{a_3} + ... + \frac{a_{n-1}^{a_{n-1}}}{a_n} + \frac{a_n^{a_n}}{a_1}$$

Bài 7. Cho $\alpha, \beta, \gamma \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Chứng minh bất đẳng thức sau:

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \geq \frac{\alpha}{\beta}\sin\beta + \frac{\beta}{\gamma}\sin\gamma + \frac{\gamma}{\alpha}\sin\alpha$$

Bài 8. Cho ΔABC. Gọi (A', B', C') là một hoán vị của (A, B, C). Chứng minh rằng:

1. $\sin A + \sin B + \sin C \le \cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2} - 4\sin\frac{A-A'}{4}\sin\frac{B-B'}{4}\sin\frac{C-C'}{4}$

2. $\sin A + \sin B + \sin C \le \cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2} - 4\sin\frac{A-B}{4}\sin\frac{B-C}{4}\sin\frac{C-A}{4}$

Bài 9. Cho ΔABC. Chứng minh các bất đẳng thức sau:

1. $\sin A\cos B\cos C + \sin B\cos C\cos A + \sin C\cos A\cos B \le$

$\le \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} - \sin\frac{A-B}{2}\sin\frac{B-C}{2}\sin\frac{C-A}{2}$

2. $\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} + \cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2} + \cos\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} \le$

$\le \frac{1}{4}\left(\cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2}\right) - \sin\frac{A-B}{4}\sin\frac{B-C}{4}\sin\frac{C-A}{4}$

Bài 10. Cho ΔABC, gọi n là số tự nhiên lẻ và $\alpha > 0$. Chứng minh rằng:

1. $\tan^n A + \tan^n B + \tan^n C \le \frac{\sin^n A}{\cos^n B} + \frac{\sin^n B}{\cos^n C} + \frac{\sin^n C}{\cos^n A}$

2. $\cot^n A + \cot^n B + \cot^n C \ge \frac{\cos^n A}{\sin^n B} + \frac{\cos^n B}{\sin^n C} + \frac{\cos^n C}{\sin^n A}$

3. $\tan^\alpha\frac{A}{2} + \tan^\alpha\frac{B}{2} + \tan^\alpha\frac{C}{2} \ge \frac{\sin^\alpha\frac{A}{2}}{\cos^\alpha\frac{B}{2}} + \frac{\sin^\alpha\frac{B}{2}}{\cos^\alpha\frac{C}{2}} + \frac{\sin^\alpha\frac{C}{2}}{\cos^\alpha\frac{A}{2}}$

4. $\cot^\alpha\frac{A}{2} + \cot^\alpha\frac{B}{2} + \cot^\alpha\frac{C}{2} \ge \frac{\cos^\alpha\frac{A}{2}}{\sin^\alpha\frac{B}{2}} + \frac{\cos^\alpha\frac{B}{2}}{\sin^\alpha\frac{C}{2}} + \frac{\cos^\alpha\frac{C}{2}}{\sin^\alpha\frac{A}{2}}$

Bài 11. Cho ΔABC. Gọi độ dài 3 đường cao, 3 đường trung tuyến, 3 đường phân giác trong ứng với các cạnh a, b, c là h_a, h_b, h_c, m_a, m_b, m_c, l_a, l_b, l_c; độ dài các bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp là R, r. Chứng minh rằng:

1. $l_ah_a + l_bh_b + l_ch_c \ge l_ah_b + l_bh_c + l_ch_a$

2. $\frac{l_a}{h_a} + \frac{l_b}{h_b} + \frac{l_c}{h_c} \le \frac{l_a}{h_b} + \frac{l_b}{h_c} + \frac{l_c}{h_a}$

3. $m_ah_a + m_bh_b + m_ch_c \ge m_ah_b + m_bh_c + m_ch_a$

4. $\frac{m_a}{h_a} + \frac{m_b}{h_b} + \frac{m_c}{h_c} \le \frac{m_a}{h_b} + \frac{m_b}{h_c} + \frac{m_c}{h_a}$

5. $ah_b + bh_c + ch_a \ge 6S$

6. $\frac{a}{h_a} + \frac{b}{h_b} + \frac{c}{h_c} \le \frac{a}{h_b} + \frac{b}{h_c} + \frac{c}{h_a}$

7. $\dfrac{a}{h_a}+\dfrac{b}{h_b}+\dfrac{c}{h_c}\ge\dfrac{a+b+c}{3r}$ **8.** $\dfrac{h_a}{ab}+\dfrac{h_b}{bc}+\dfrac{h_c}{ca}\ge\dfrac{3}{2R}$

9. $\dfrac{\sin\frac{A}{2}}{h_a}+\dfrac{\sin\frac{B}{2}}{h_b}+\dfrac{\sin\frac{C}{2}}{h_c}\ge\dfrac{\sin\frac{A}{2}}{h_b}+\dfrac{\sin\frac{B}{2}}{h_c}+\dfrac{\sin\frac{C}{2}}{h_a}$ **10.** $\dfrac{\cos\frac{A}{2}}{l_b}+\dfrac{\cos\frac{B}{2}}{l_c}+\dfrac{\cos\frac{C}{2}}{l_a}\ge\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$

11. $\dfrac{\cot A}{m_a}+\dfrac{\cot B}{m_b}+\dfrac{\cot C}{m_c}\le\dfrac{\cot A}{m_b}+\dfrac{\cot B}{m_c}+\dfrac{\cot C}{m_a}$

12. $A\cot A+B\cot B+C\cot C\le A\cot B+B\cot C+C\cot A$ **13.** $\dfrac{am_a+bm_b+cm_c}{a+b+c}\le\dfrac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

14. $\dfrac{a^\alpha}{\sin^\beta A}+\dfrac{b^\alpha}{\sin^\beta B}+\dfrac{c^\alpha}{\sin^\beta C}\ge\dfrac{a^\alpha}{\sin^\beta B}+\dfrac{b^\alpha}{\sin^\beta C}+\dfrac{c^\alpha}{\sin^\beta A},\quad \forall\alpha,\beta>0$

15. $\dfrac{\cos^3 A}{B^3+C^3}+\dfrac{\cos^3 B}{C^3+A^3}+\dfrac{\cos^3 C}{A^3+B^3}\le\dfrac{\cos^3 A}{A^3+C^3}+\dfrac{\cos^3 B}{B^3+A^3}+\dfrac{\cos^3 C}{C^3+B^3}$

16. $\dfrac{\cos^\alpha A}{(l_b+l_c)^\beta}+\dfrac{\cos^\alpha B}{(l_c+l_a)^\beta}+\dfrac{\cos^\alpha C}{(l_a+l_b)^\beta}\le\dfrac{\cos^\alpha A}{(l_a+l_b)^\beta}+\dfrac{\cos^\alpha B}{(l_b+l_c)^\beta}+\dfrac{\cos^\alpha C}{(l_c+l_a)^\beta}\quad\begin{cases}\Delta ABC \text{ nhọn}\\ \alpha,\beta>0\end{cases}$

Bài 12. Cho ΔABC. Chứng minh bất đẳng thức sau:

$$(1+\sin A)^{\cos A}+(1+\sin B)^{\cos B}+(1+\sin C)^{\cos C}\le(1+\sin A)^{\cos B}+(1+\sin B)^{\cos C}+(1+\sin C)^{\cos A}$$

Bài 13. Cho $a\ge b\ge c\ge d\ge 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{b+c+d}{c^3+d^3+a^3}+\frac{c+d+a}{d^3+a^3+b^3}+\frac{d+a+b}{a^3+b^3+c^3}+\frac{a+b+c}{b^3+c^3+d^3}\ge$$
$$\ge\frac{b+c+d}{a^3+b^3+c^3}+\frac{c+d+a}{b^3+c^3+d^3}+\frac{d+a+b}{c^3+d^3+a^3}+\frac{a+b+c}{d^3+a^3+b^3}$$

Bài 14. Cho 2 bộ n số thực được sắp xếp $\begin{cases}(a)=(a_1,a_2,...,a_n)\\(b)=(b_1,b_2,...,b_n)\end{cases}$

được sắp xếp $\begin{cases}a_i\ge a_{i+1}\\ b_i\ge b_{i+1}\end{cases}\ \forall i=\overline{1,n-1}$. Khi đó ta nói rằng bộ (a) trội hơn bộ (b) và được ký hiệu $(a)\succ(b)$ nếu nó thỏa mãn các điều kiện sau:

$$\sum_{k=1}^m a_k\ge\sum_{k=1}^m b_k\quad\forall m=\overline{1,n-1}\ \ and\ \ \sum_{k=1}^n a_k=\sum_{k=1}^n b_k$$

Giả sử $(a_1,a_2,...,a_n)$ và $(b_1,b_2,...,b_n)$ là hai bộ số thực không âm được sắp thứ tự sao cho $(a_1,a_2,...,a_n)\succ(b_1,b_2,...,b_n)$ và $x_1,x_2,...,x_n$ là các số thực dương. Chứng minh:

$$\prod_{sym}(a_1x_1+a_2x_2+...+a_nx_n)\le\prod_{sym}(b_1x_1+b_2x_2+...+b_nx_n)$$

ở đây các thừa số trong tích được lấy theo $(n!)$ hoán vị của bộ $(x_1,x_2,...,x_n)$.

§7. BẤT ĐẲNG THỨC SCHUR VÀ KỸ THUẬT SỬ DỤNG

§7.1. GIỚI THIỆU BẤT ĐẲNG THỨC SCHUR

I. DẠNG CHÍNH TẮC CỦA BẤT ĐẲNG THỨC SCHUR:

Định lí 1: Với $a,b,c\ge 0$ và k là số thực bất kì ta luôn có:

$$a^k(a-b)(a-c)+b^k(b-a)(b-c)+c^k(c-a)(c-b)\ge 0$$

Chứng minh

Có nhiều cách chứng minh cho ***Schur***, xin được giới thiệu với các bạn cách chứng minh đơn giản nhất. Không mất tính tổng quát, giả sử $a\ge b\ge c$ ta có:

$\text{VT}=c^k(a-c)(b-c)+(a-b)\left[a^k(a-c)-b^k(b-c)\right]\ge 0$

Điều này hiển nhiên đúng. Bất đẳng thức ***Schur*** được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$ hoặc $a=b,c=0$ và các hoán vị.

Các trường hợp hay gặp của ***Shur*** là khi $k=1$ và $k=2$:

$$a^3+b^3+c^3+3abc\ge ab(a+b)+bc(b+c)+ca(a+c)\qquad (1)$$

$$a^4+b^4+c^4+abc(a+b+c)\ge ab\left(a^2+b^2\right)+bc\left(b^2+c^2\right)+ca\left(a^2+c^2\right)\qquad (2)$$

II. CÁC DẠNG SUY RỘNG CỦA BẤT ĐẲNG THỨC SCHUR

1 ***Bất đẳng thức Schur suy rộng 1 (Vornicu Schur):***

Định lí 2: Xét bất đẳng thức: $x(a-b)(a-c)+y(b-c)(b-a)+z(c-a)(c-b)\ge 0$ (1)

Khi đó (1) đúng với mọi $a\ge b\ge c\ge 0$ và $x,y,z\ge 0$ nếu thỏa mãn 1 trong các khả năng:

i. $x\ge y$ (hoặc $z\ge y$)

ii. $ax\ge by$

iii. $bz\ge cy$ (nếu a,b,c là độ dài 3 cạnh của 1 tam giác)

iIV. $\sqrt{x}+\sqrt{z}\ge\sqrt{y}$

iV. $x^2+y^2+z^2\le 2(xy+yz+zx)$

Chứng minh

i. Ta có 2 cách biến đổi ứng với 2 trường hợp $x\ge y$ hoặc $z\ge y$:

Nếu $x\ge y$ thì biến đổi $\text{VT}=z(a-c)(b-c)+(a-b)\left[x(a-c)-y(b-c)\right]\ge 0$

Nếu $z\ge y$ thì biến đổi $\text{VT}=x(a-b)(a-c)+(b-c)\left[z(a-c)-y(a-b)\right]\ge 0$

ii. Để ý rằng với $a\ge b\ge c\ge 0$ thì $a-c\ge\frac{a}{b}(b-c)$. Vì vậy:

$$\text{VT}=z(a-c)(b-c)+(a-b)\left[x(a-c)-y(b-c)\right]\ge z(a-c)(b-c)+\frac{(a-b)(b-c)(ax-by)}{b}\ge 0$$

iii. Do $a \ge b \ge c \ge 0$ và a,b,c là độ dài ba cạnh của một tam giác nên $a-c \ge \frac{b}{c}(a-b)$.

Suy ra: $VT = x(a-b)(a-c)+(b-c)\left[z(a-c)-y(a-b)\right] \ge x(a-b)(a-c)+\frac{(b-c)(a-b)(bz-cy)}{c} \ge 0$

iv. Ta có: $x(a-b)(a-c)+y(b-c)(b-a)+z(c-a)(c-b) \ge 0$

$$\Leftrightarrow x(a-b)(a-c)+z(a-c)(b-c) \ge y(b-c)(a-b)$$

$$\Leftrightarrow x\cdot\frac{a-c}{b-c}+z\cdot\frac{a-c}{a-b} \ge y \Leftrightarrow x+z+\left(x\cdot\frac{a-b}{b-c}+z\cdot\frac{b-c}{a-b}\right) \ge y.$$

Sử dụng bất đẳng thức ***AM – GM*** và điều kiện $\sqrt{x}+\sqrt{z} \ge \sqrt{y}$ ta có:

$$x+z+\left(x\cdot\frac{a-b}{b-c}+z\cdot\frac{b-c}{a-b}\right) \ge x+z+2\sqrt{xz} = \left(\sqrt{x}+\sqrt{z}\right)^2 \ge y$$

iv. Bất đẳng thức tương đương với

$(x+y-z)(a-b)^2+(y+z-x)(b-c)^2+(z+x-y)(c-a)^2 \ge 0$

$\Leftrightarrow (x+y-z)(a-b)^2+(y+z-x)\left[(a-b)+(c-a)\right]^2+(z+x-y)(c-a)^2 \ge 0$

$\Leftrightarrow y(a-b)^2+(y+z-x)(c-a)(a-b)+z(c-a)^2 \ge 0$. (*)

Nếu $y=0$ thì điều kiện $x^2+y^2+z^2 \le 2(xy+yz+zx)$ trở thành $x^2+z^2 \le 2zx$

$\Leftrightarrow (z-x)^2 \le 0 \Leftrightarrow z=x$. Khi đó (*) trở thành $z(c-a)^2 \ge 0$ luôn đúng.

Xét $y>0$ khi đó biểu thức vế trái là một tam thức bậc hai với biến số $(a-b)$ và hệ số bậc hai là $y>0$. Để chứng minh (*) đúng ta sẽ chứng minh biệt thức $\Delta \le 0$. Thật vậy ta có: $\Delta \le 0 \Leftrightarrow (y+z-x)^2(c-a)^2-4yz(c-a)^2 \le 0$

$$\Leftrightarrow (y+z-x)^2-4yz \le 0 \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2 \le 2(xy+yz+zx)$$

Bất đẳng thức cuối cùng đúng do điều kiện có trong giả thiết.

2 Bất đẳng thức Schur suy rộng 2:

Định lí 3: Cho p,q,x,y,z,a,b,c là các số dương sao cho $(a,\ b,\ c)$ và (x,y,z) là các bộ đơn điệu cùng chiều. Khi đó ta luôn có:

$$x\left[(a^p-b^p)(a^q-c^q)+(a^q-b^q)(a^p-c^p)\right]+y\left[(b^p-c^p)(b^q-a^q)+(b^q-c^q)(b^p-a^p)\right]$$
$$+z\left[(c^p-a^p)(c^q-b^q)+(c^q-a^q)(c^p-b^p)\right] \ge 0 \quad (1)$$

Chứng minh

Giả sử $a \ge b \ge c$ và $p \ge q \Rightarrow x \ge y \ge z$ và $\frac{p}{q}=m \ge 1$. Đặt $a_1=a^p, b_1=b^p, c_1=c^p$, khi đó: (1) $\Leftrightarrow \sum x\left[(a^m-b^m)(a-c)+(a-b)(a^m-c^m)\right]\geq 0$

$\Leftrightarrow \sum x\left(\dfrac{a^m-b^m}{a-b}+\dfrac{a^m-c^m}{a-c}\right)(a-b)(a-c)\geq 0$ (2)

Theo định lí 2, bất đẳng thức (2) sẽ được chứng minh nếu ta có:

$\dfrac{a^m-b^m}{a-b}+\dfrac{a^m-c^m}{a-c}\geq\dfrac{b^m-c^m}{b-c}+\dfrac{b^m-a^m}{b-a}\geq\dfrac{c^m-a^m}{c-a}+\dfrac{c^m-b^m}{c-b}\Leftrightarrow$

$\dfrac{a^m-b^m}{a-b}\geq\dfrac{a^m-c^m}{a-c}\geq\dfrac{b^m-c^m}{b-c}$ (3)

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{x^m-y^m}{x-y},\ m\geq 1; x,y>0$

Ta có: $f'(x)=\dfrac{mx^{m-1}(x-y)-(x^m-y^m)}{(x-y)^2}=\dfrac{(m-1)x^m-mx^{m-1}y+y^m}{(x-y)^2}$

Sử dụng bất đẳng thức ***AM – GM*** mở rộng ta có:

$(m-1)x^m+y^m\geq m\left(x^{m(m-1)}y^m\right)^{\frac{1}{m}}=mx^{m-1}y\Rightarrow f'(x)\geq 0\Rightarrow f(x)$ đồng biến

$\Rightarrow\dfrac{a^m-c^m}{a-c}\geq\dfrac{b^m-c^m}{b-c}$; $\dfrac{b^m-a^m}{b-a}\geq\dfrac{c^m-a^m}{c-a}\Leftrightarrow\dfrac{a^m-b^m}{a-b}\geq\dfrac{a^m-c^m}{a-c}$

Vậy (3) đúng suy ra (đpcm)

Các bất đẳng thức hệ quả: Cho $a,b,c,m,p,q\geq 0$. Khi đó:

$$\sum_{cyc}\left[a^m(a^p-b^p)(a^q-c^q)+a^m(a^q-b^q)(a^p-c^p)\right]\geq 0$$

$$\sum_{cyc}(a^mb^n+a^nb^m)(c^p-a^p)(c^p-b^p)\geq 0$$

$$\sum_{cyc}(a^mb^n+a^nb^m)\left[(a^pb^p-a^pc^p)(a^qb^q-b^qc^q)+(a^qb^q-a^qc^q)(a^pb^p-b^pc^p)\right]\geq 0$$

3 Bất đẳng thức Schur suy rộng 3:

Định lí 4: Xét bất đẳng thức sau, trong mỗi hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$:

$$\sum f(a-b)f(a-c)f(a-d)f(a-e)\geq 0$$

Khi đó để bất đẳng thức đúng thì hàm số f phải thỏa mãn 2 điều kiện sau đây:

i. f là hàm đơn điệu tăng. **ii.** $xf(x)\geq 0$ với $\forall x\in\mathbb{R}$.

Phần chứng minh xin dành cho bạn đọc.

Để bạn đọc có thể hình dung bất đẳng thức này ta xét hai ví dụ sau đây:

• Với $f(x)=x$ thì $f(x)=x$ là hàm tăng và $x.f(x)=x^2\ge 0$, khi đó ta có:

$$(a-b)(a-c)(a-d)(a-e)+(b-a)(b-c)(b-d)(b-e)+(c-a)(c-b)(c-d)(c-e)+$$
$$+(d-a)(d-b)(d-c)(d-e)+(e-a)(e-b)(e-c)(e-d)\ge 0$$

• Với $f(x)=x^3$ thì $f(x)=x^3$ là hàm tăng và $x.f(x)=x^4\ge 0$, khi đó ta có:

$$(a-b)^3(a-c)^3(a-d)^3(a-e)^3+(b-a)^3(b-c)^3(b-d)^3(b-e)^3+(c-a)^3(c-b)^3(c-d)^3(c-e)^3+$$
$$+(d-a)^3(d-b)^3(d-c)^3(d-e)^3+(e-a)^3(e-b)^3(e-c)^3(e-d)^3\ge 0$$

4 Bất đẳng thức Schur mở rộng cho tam giác

Cho hai tam giác với độ dài các cạnh tương ứng ABC(a, b, c) ; $A_1B_1C_1(a_1,b_1,c_1)$. Khi đó:

$$a_1bc(a^\alpha-b^\alpha)(a^\alpha-c^\alpha)+b_1ca(b^\alpha-c^\alpha)(b^\alpha-a^\alpha)+c_1ab(c^\alpha-a^\alpha)(c^\alpha-b^\alpha)\ge 0 \quad \forall\alpha\ge 1 \ (*)$$

Chứng minh

Không mất tính tổng quát giả sử $a\ge b\ge c$, khi đó ta có:

$$(*)\Leftrightarrow \frac{a_1}{a(b^\alpha-c^\alpha)}+\frac{b_1}{b(c^\alpha-a^\alpha)}+\frac{c_1}{c(a^\alpha-b^\alpha)}\ge 0$$

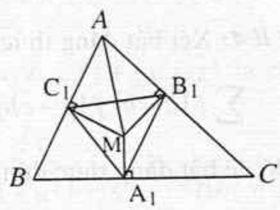
$$\Leftrightarrow (b_1+c_1-a_1)\cdot\frac{a^\alpha(b-c)+bc(b^{\alpha-1}-c^{\alpha-1})}{bc(a^\alpha-b^\alpha)(a^\alpha-c^\alpha)}+(c_1+a_1-b_1)\cdot\left[\frac{1}{a(b^\alpha-c^\alpha)}+\frac{1}{c(a^\alpha-b^\alpha)}\right]$$

$$+(a_1+b_1-c_1)\cdot\frac{ab(a^{\alpha-1}-b^{\alpha-1})+c^\alpha(a-b)}{ab(a^\alpha-c^\alpha)(b^\alpha-c^\alpha)}\ge 0$$ luôn đúng, suy ra (đpcm)

Bây giờ chúng ta xét các trường hợp đặc biệt của bất đẳng thức này:

4.1. Gọi M là điểm bất kỳ nằm trong tam giác ABC với độ dài ba cạnh là a, b, c. Khi đó ta có: $MA(a^\alpha-b^\alpha)(a^\alpha-c^\alpha)+MB(b^\alpha-c^\alpha)(b^\alpha-a^\alpha)+MC(c^\alpha-a^\alpha)(c^\alpha-b^\alpha)\ge 0$, $\forall\alpha\ge 1$

Chứng minh



Gọi A_1, B_1, C_1 là hình chiếu của M lên ba cạnh BC, CA, AB. Xét tứ giác MB_1AC_1 nội tiếp trong đường tròn đường kính AM. Áp dụng định lý hàm số Sine cho hai tam giác AB_1C_1 và ABC ta có:

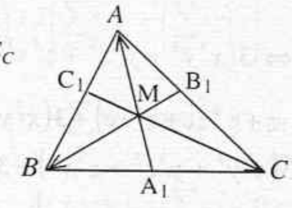
$B_1C_1=MA\sin A=\dfrac{aMA}{2R}$. Tương tự ta có: $C_1A_1=\dfrac{bMB}{2R}$; $A_1B_1=\dfrac{cMC}{2R}$

Áp dụng bất đẳng thức (*) đối với 2 tam giác $A_1B_1C_1$ và ABC ta có (đpcm).

4.2. Bây giờ chúng ta sẽ xét một mệnh đề quan trọng để tạo ra các bất đẳng thức mới của (*)

Mệnh đề: Cho M là một điểm nằm trong tam giác ABC. Các đường thẳng AM, BM, CM cắt các cạnh BC, CA, AB tại A_1, B_1, C_1. Khi đó: ($aMA.MA_1$; $bMB.MB_1$; $cMC.MC_1$) là độ dài ba cạnh của một tam giác.

Chứng minh



Bổ đề: Với M là điểm nằm trong tam giác ABC, gọi S_A, S_B, S_C là diện tích của các tam giác MBC, MCA, MAB.

Khi đó: $S_A.\overrightarrow{MA}+S_B.\overrightarrow{MB}+S_C.\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{0}$

Thật vậy, đặt $\overrightarrow{u}=S_A.\overrightarrow{MA}+S_B.\overrightarrow{MB}+S_C.\overrightarrow{MC}$.

Chiếu vectơ $\overrightarrow{u}$ xuống cạnh BC theo phương $\overrightarrow{MA}$ ta nhận được $\overrightarrow{u_A}=S_B.\overrightarrow{A_1B}+S_C.\overrightarrow{A_1C}$. Khi đó

$$\frac{\left|\overrightarrow{A_1B}\right|}{\left|\overrightarrow{A_1C}\right|}=\frac{S_{AA_1B}}{S_{AA_1C}}=\frac{S_{MA_1B}}{S_{MA_1C}}=\frac{S_{AA_1B}-S_{MA_1B}}{S_{AA_1C}-S_{MA_1C}}=\frac{S_{AMB}}{S_{AMC}}=\frac{S_C}{S_B}\Rightarrow\frac{\overrightarrow{A_1B}}{\overrightarrow{A_1C}}=-\frac{S_C}{S_B}\Rightarrow\overrightarrow{u_A}=\overrightarrow{0}$$

Tương tự, chiếu $\overrightarrow{u}$ xuống cạnh CA theo phương $\overrightarrow{MB}$ ta nhận được $\overrightarrow{u_B}=S_C.\overrightarrow{B_1C}+S_A.\overrightarrow{B_1A}=\overrightarrow{0}$.

Vì $\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}$ là các vectơ không cùng phương nên $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{0}$

Hệ quả: Sử dụng mệnh đề trên và bất đẳng thức (*) ta có các bất đẳng thức sau:

. $\frac{m_a}{a}(a-b)(a-c)+\frac{m_b}{b}(b-c)(b-a)+\frac{m_c}{c}(c-a)(c-b)\geq 0$

. $a^2m_a+b^2m_b+c^2m_c\geq bc(m_b+m_c-m_a)+ca(m_c+m_a-m_b)+ab(m_a+m_b-m_c)$

. $\sqrt{\frac{x}{y+z}}(x-y)(x-z)+\sqrt{\frac{y}{z+x}}(y-z)(y-x)+\sqrt{\frac{z}{x+y}}(z-x)(z-y)\geq 0$, $\forall x,y,z>0$

. $MA.MA_1(a-b)(a-c)+MB.MB_1(b-c)(b-a)+MC.MC_1(c-a)(c-b)^30$

. $m_ah_a(a-b)(a-c)+m_bh_b(b-c)(b-a)+m_ch_c(c-a)(c-b)\geq 0$

. $IA(a-b)(a-c)+IB(b-c)(b-a)+IC(c-a)(c-b)\geq 0$

. $\cos A(a-b)(a-c)+\cos B(b-c)(b-a)+\cos C(c-a)(c-b)\geq 0$

§7.2. KỸ THUẬT SỬ DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC SCHUR

CÁC BÀI TẬP MẪU MINH HỌA

Bài 1. Cho $x, y, z \ge 0$. Chứng minh: $3\left(x^2y + y^2z + z^2x\right)\left(xy^2 + yz^2 + zx^2\right) \ge xyz\left(x+y+z\right)^3$

Chứng minh

$$(1) \Leftrightarrow 3\left(x^3y^3 + y^3z^3 + z^3x^3\right) + 9x^2y^2z^2 + 3\left(x^4yz + y^4zx + z^4xy\right) \ge$$

$$\left(x^4yz + y^4zx + z^4xy\right) + 3\left(x^3y^2z + y^3z^2x + z^3x^2y\right) + 3\left(x^3yz^2 + y^3zx^2 + z^3xy^2\right) + 6x^2y^2z^2$$

$$\Leftrightarrow 3\left(x^3y^3 + y^3z^3 + z^3x^3\right) + 3x^2y^2z^2 + 2\left(x^4yz + y^4zx + z^4xy\right)$$

$$\ge 3\left(x^3y^2z + y^3z^2x + z^3x^2y\right) + 3\left(x^3yz^2 + y^3zx^2 + z^3xy^2\right)$$

Sử dụng bất đẳng thức ***Schur,*** ta có: $x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz \ge x^2y + xy^2 + y^2z + yz^2 + z^2x + zx^2$

$$\Rightarrow x^4yz + y^4zx + z^4xy + 3x^2y^2z^2 \ge x^3y^2z + y^3z^2x + z^3x^2y + x^2y^3z + y^2z^3x + z^2x^3y \quad (1)$$

Sử dụng bất đẳng thức ***AM – GM,*** ta có:

$$2\left(x^3y^3 + y^3z^3 + z^3x^3\right) = 2\left(\frac{2x^3y^3 + y^3z^3}{3} + \frac{2y^3z^3 + z^3x^3}{3} + \frac{2z^3x^3 + x^3y^3}{3}\right) \ge 2\left(x^2y^3z + y^2z^3x + z^2x^3y\right) \quad (2)$$

$$x^3y^3 + y^3z^3 + z^3x^3 = \frac{2x^3y^3 + z^3x^3}{3} + \frac{2y^3z^3 + x^3y^3}{3} + \frac{2z^3x^3 + y^3z^3}{3} \ge x^3y^2z + y^3z^2x + z^3x^2y \quad (3)$$

$$x^3 + y^3 + z^3 = \frac{2x^3 + y^3}{3} + \frac{2y^3 + z^3}{3} + \frac{2z^3 + x^3}{3} \ge x^2y + y^2z + z^2x$$

$$\Rightarrow x^4yz + y^4zx + z^4xy \ge x^3y^2z + y^3z^2x + z^3x^2y \quad (4)$$

Kết hợp các bất đẳng thức (1), (2), (3), (4) ta có điều cần phải chứng minh.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow$ $x = y = z$ hoặc $x = t > 0, y = z = 0$ và các hoán vị.

Bài 2. Cho $x, y, z \ge 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{y^2 + yz + z^2} + \frac{1}{z^2 + zx + x^2} + \frac{1}{x^2 + xy + y^2} \ge \frac{9}{(x+y+z)^2} \quad (1)$$

Chứng minh

Không mất tính tổng quát, giả sử $x + y + z = 1$. Khi đó

$$(1) \Leftrightarrow T = \frac{1}{1 - z - (xy + yz + zx)} + \frac{1}{1 - y - (xy + yz + zx)} + \frac{1}{1 - x - (xy + yz + zx)} \ge 9$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\left[(1-x) - (xy + yz + zx)\right]\left[(1-y) - (xy + yz + zx)\right] \ge 9\prod_{cyc}\left[(1-x) - (xy + yz + zx)\right]$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}(1-x)(1-y)-\sum_{cyc}xy\sum_{cyc}\left[(1-x)+(1-y)\right]+3\left(\sum_{cyc}xy\right)^2\ge$$

$$\ge 9\left[(1-x)(1-y)(1-z)-\sum_{cyc}xy\sum_{cyc}(1-x)(1-y)+\left(\sum_{cyc}xy\right)^2\sum_{cyc}(1-x)-\left(\sum_{cyc}xy\right)^3\right]$$

$$\Leftrightarrow \left(1+\sum_{cyc}xy\right)-4\sum_{cyc}xy+3\left(\sum_{cyc}xy\right)^2\ge 9\left[\left(\sum_{cyc}xy-xyz\right)-\sum_{cyc}xy\left(1+\sum_{cyc}xy\right)+2\left(\sum_{cyc}xy\right)^2-\left(\sum_{cyc}xy\right)^3\right]$$

$$\Leftrightarrow 9\left(\sum_{cyc}xy\right)^3-6\left(\sum_{cyc}xy\right)^2-3\sum_{cyc}xy+9xyz+1\ge 0\Leftrightarrow \sum_{cyc}xy\left(3\sum_{cyc}xy-1\right)^2+\left(1-4\sum_{cyc}xy+9xyz\right)\ge 0$$

Ta sẽ chứng minh: $1-4\sum_{cyc}xy+9xyz\ge 0 \Leftrightarrow (x+y+z)^3+9xyz-4(x+y+z)\sum_{cyc}xy\ge 0\Leftrightarrow$

$$x^3+y^3+z^3+3(x+y)(y+z)(z+x)+9xyz-4\left(x^2y+xy^2+y^2z+yz^2+z^2x+zx^2+3xyz\right)\ge 0$$
$$\Leftrightarrow x^3+y^3+z^3+3xyz-\left(x^2y+xy^2+y^2z+yz^2+z^2x+zx^2\right)\ge 0$$

$\Leftrightarrow x(x-y)(x-z)+y(y-z)(y-x)+z(z-x)(z-y)\ge 0$ (đúng theo bất đẳng thức ***Schur***).

Bài 3. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác. Chứng minh rằng:

$$\frac{3\left(a^4+b^4+c^4\right)}{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}+\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}\ge 2 \quad (1)$$

Chứng minh

$$(1)\Leftrightarrow 3\left(a^4+b^4+c^4\right)+\left(a^2+b^2+c^2\right)(ab+bc+ca)\ge 2\left(a^2+b^2+c^2\right)^2$$
$$\Leftrightarrow \left(a^4+b^4+c^4\right)+\left(a^2+b^2+c^2\right)(ab+bc+ca)\ge 4\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)$$
$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}a^4+\sum_{cyc}a^2bc+\sum_{cyc}\left(a^3b+ab^3\right)\ge 4\sum_{cyc}a^2b^2 \quad (2)$$

Sử dụng bất đẳng thức ***Schur*** ta có:

$$(a+b+c)\left(a^3+b^3+c^3+3abc\right)\ge(a+b+c)\left(a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2\right)$$
$$\Leftrightarrow a^4+b^4+c^4+\left(a^2bc+b^2ca+c^2ab\right)\ge 2\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right) \quad (3)$$

Sử dụng bất đẳng thức ***AM – GM*** ta có:

$$a^3b+ab^3+b^3c+bc^3+c^3a+ca^3\ge 2\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right) \quad (4)$$

Cộng (3) với (4) suy ra (2) đúng. Vậy (1) đúng (đpcm).

Bài 4. [Iranian Mathematical Olympiad 1996] Cho $x,y,z\ge 0$. Chứng minh:

$$(xy+yz+zx)\left[\frac{1}{(x+y)^2}+\frac{1}{(y+z)^2}+\frac{1}{(z+x)^2}\right]\ge\frac{9}{4}.$$

Chứng minh

Biến đổi bất đẳng thức trở thành: $\sum_{sym}\left(4x^5y-x^4y^2-3x^3y^3+x^4yz-2x^3y^2z+x^2y^2z^2\right)\ge 0$

Sử dụng bất đẳng thức ***Schur*** với $r=1$ ta có:

$x(x-y)(x-z)+y(y-z)(y-x)+z(z-x)(z-y)\ge 0$

Nhân 2 vế của bất đẳng thức trên với 2xyz rồi khai triển thành các tổng đối xứng.

Ta có: $\sum_{sym}\left(x^4yz-2x^3y^2z+x^2y^2z^2\right)\ge 0$, (1).

Mặt khác, sử dụng bất đẳng thức ***AM – GM*** ta có:

$$\begin{cases}x^5y+y^5z+z^5x\ge x^4y^2+y^4z^2+z^4x^2\\ x^5y+y^5z+z^5x\ge x^3y^3+y^3z^3+z^3x^3\end{cases}\Rightarrow\sum_{sym}\left[\left(x^5y-x^4y^2\right)+3\left(x^5y-x^3y^3\right)\right]\ge 0\ (2)$$

Từ (1) và (2)suy ra: $\sum_{sym}\left(4x^5y-x^4y^2-3x^3y^3+x^4yz-2x^3y^2z+x^2y^2z^2\right)\ge 0$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z>0$ hoặc $x=y>0,\ z=0$

hoặc $y=z>0,\ x=0$ hoặc $z=x>0,\ y=0$.

Bài 5. Cho $a,b,c\ge 0$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt[3]{\frac{a^2+bc}{b^2+c^2}}+\sqrt[3]{\frac{b^2+ca}{c^2+a^2}}+\sqrt[3]{\frac{c^2+ab}{a^2+b^2}}\ge\frac{9\cdot\sqrt[3]{abc}}{a+b+c}$$

Chứng minh

Sử dụng bất đẳng thức ***AM – GM*** ta có:

$$\frac{a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)}{a^2+bc}=\frac{a(b^2+c^2)}{a^2+bc}+b+c\ge 3\cdot\sqrt[3]{\frac{abc(b^2+c^2)}{a^2+bc}}=3\cdot\sqrt[3]{abc}\cdot\sqrt[3]{\frac{b^2+c^2}{a^2+bc}}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{abc}}\cdot\sum_{cyc}\sqrt[3]{\frac{a^2+bc}{b^2+c^2}}\ge\frac{a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca}{a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)}\ (1)$$

Sử dụng bất đẳng thức ***Schur*** ta có:

$$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)-3\left[a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)\right]=$$

$$=a^3+b^3+c^3+3abc-ab(a+b)-bc(b+c)-ca(c+a)\ge 0$$

$$\Rightarrow\frac{a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca}{a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)}\ge\frac{3}{a+b+c}\ (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$\frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{abc}}\cdot\sum_{cyc}\sqrt[3]{\frac{a^2+bc}{b^2+c^2}}\ge\frac{3}{a+b+c}\Leftrightarrow\sum_{cyc}\sqrt[3]{\frac{a^2+bc}{b^2+c^2}}\ge\frac{9\cdot\sqrt[3]{abc}}{a+b+c}\ \text{(đpcm)}$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c\ge 0$.

Bài 6. Cho $a, b, c \geq 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3}{\sqrt{b^2-bc+c^2}}+\frac{b^3}{\sqrt{c^2-ca+a^2}}+\frac{c^3}{\sqrt{a^2-ab+b^2}} \geq a^2+b^2+c^2$$

Chứng minh

Sử dụng bất đẳng thức ***CBS*** ta có: $\sum_{cyc}\frac{a^3}{\sqrt{b^2-bc+c^2}}=\sum_{cyc}\frac{a^4}{a\sqrt{b^2-bc+c^2}} \geq \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{\sum_{cyc} a\sqrt{b^2-bc+c^2}}$

và $\left(\sum_{cyc} a\sqrt{b^2-bc+c^2}\right)^2 \leq (a+b+c)\sum_{cyc} a(b^2-bc+c^2)$.

Từ đó bất đẳng thức được chứng minh khi ta chứng minh được bất đẳng thức $(a^2+b^2+c^2)^2 \geq (a+b+c)\sum_{cyc} a(b^2-bc+c^2)$.

Thật vậy bất đẳng thức tương đương $(a^4+b^4+c^4)+abc(a+b+c) \geq \sum_{cyc} ab(a^2+b^2)$,

đúng theo bất đẳng thức ***Schur***.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow$ $a=b=c$ hoặc $a=b, c=0$ và các hoán vị.

Bài 7. Cho $a,b,c,x,y,z>0$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b+c}(y+z)+\frac{b}{c+a}(z+x)+\frac{c}{a+b}(x+y) \geq \frac{3(xy+yz+zx)}{x+y+z}$$

Chứng minh

Sử dụng bất đẳng thức ***CBS*** ta có:

$$\sum_{cyc}\frac{a}{b+c}(y+z)=\sum_{cyc}\left[\frac{a}{b+c}(y+z)+y+z\right]-2(x+y+z)=\frac{1}{2}\sum_{cyc}(b+c)\sum_{cyc}\frac{y+z}{b+c}-2(x+y+z)$$

$$\geq \frac{1}{2}\left(\sqrt{x+y}+\sqrt{y+z}+\sqrt{z+x}\right)^2-2(x+y+z)=\sum_{cyc}\sqrt{(x+y)(x+z)}-(x+y+z)$$

Ta sẽ chứng minh: $\sum_{cyc}\sqrt{(x+y)(x+z)}-(x+y+z) \geq \frac{3(xy+yz+zx)}{x+y+z}$ (2)

Đặt $2m^2=y+z, 2n^2=z+x, 2p^2=x+y$ $(m,n,p>0)$, khi đó (2) tương đương với

$$(mn+np+pm)-(m^2+n^2+p^2) \geq \frac{6(m^2n^2+n^2p^2+p^2m^2)-3(m^4+n^4+p^4)}{m^2+n^2+p^2}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} m^4+\sum_{cyc} mn(m^2+n^2)+\sum_{cyc} m^2np \geq 4\sum_{cyc} m^2n^2 \quad (3)$$

Sử dụng bất đẳng thức ***Schur*** ta có: $\sum_{cyc} m^4+\sum_{cyc} m^2np \geq \sum_{cyc} mn(m^2+n^2)$

Mặt khác theo bất đẳng thức ***AM – GM*** ta có: $\sum_{cyc} mn(m^2+n^2) \geq 2\sum_{cyc} m^2n^2$

Vậy (3) được chứng minh, nên (2) đúng, suy ra (đpcm).

Bài 8. Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge\frac{b+c}{a^2+bc}+\frac{c+a}{b^2+ca}+\frac{a+b}{c^2+ab}$$

Chứng minh

Bất đẳng thức tương đương với $\sum\limits_{cyc}\frac{(a-b)(a-c)}{a^3+abc}\ge 0$.

Không mất tính tổng quát, giả sử rằng $a\ge b\ge c$. Khi đó ta có $\frac{1}{c^3+abc}\ge\frac{1}{b^3+abc}$

Theo định lí 2, ta có (đpcm). Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

Bài 9. Cho $a,b,c\ge 0$. Chứng minh: $\frac{a^2+bc}{b+c}+\frac{b^2+ca}{c+a}+\frac{c^2+ab}{a+b}\ge a+b+c$ (1)

Chứng minh

Bất đẳng thức (1) $\Leftrightarrow \sum\limits_{cyc}\frac{(a-b)(a-c)}{b+c}\ge 0$. Không mất tính tổng quát, giả sử

$a\ge b\ge c$, khi đó $\frac{1}{b+c}\ge\frac{1}{c+a}$. Theo định lí 2, ta có (đpcm).

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

Bài 10. Cho a, b, $c>0$ thỏa mãn $a+b+c=3$.

Chứng minh rằng: $3\left(a^4+b^4+c^4\right)+a^2+b^2+c^2+6\ge 6\left(a^3+b^3+c^3\right)$ (1)

Chứng minh

$$(1)\Leftrightarrow\sum_{cyc}\left(3a^4-6a^3+a^2+4a-2\right)\ge 0\Leftrightarrow\sum_{cyc}(a-1)^2\left(3a^2-2\right)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow\sum_{cyc}(2a-b-c)^2\left(3a^2-2\right)\ge 0\Leftrightarrow\sum_{cyc}\left(4a^2+b^2+c^2-4\right)(a-b)(a-c)\ge 0$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a\ge b\ge c$. Khi đó:

$4a^2+b^2+c^2-4\ge 4b^2+c^2+a^2-4\ge 4c^2+a^2+b^2-4$

và $4c^2+a^2+b^2-4\ge 4c^2+\frac{(a+b)^2}{2}-4=\frac{(3c-1)^2}{2}\ge 0$. Theo định lí 2, ta có (đpcm).

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow (a,b,c)=(1;1;1)\vee\left(\frac{4}{3};\frac{4}{3};\frac{1}{3}\right)$ và các hoán vị.

Bài 11. Cho a, b, $c>0$ và $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{a+bc}+\frac{b}{b+ca}+\frac{c}{c+ab}\ge\frac{3}{2}\quad(1)$$

Chứng minh

Bất đẳng thức (1) $\Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{a}{a+bc}-\frac{3}{2}\ge 0 \Leftrightarrow \sum_{cyc}\left[\frac{a}{a+bc}-\frac{2a(b+c)-bc}{2(ab+bc+ca)}\right]\ge 0$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{(3a+bc-2ab-2ac)bc}{2(ab+bc+ca)(a+bc)}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{[(a+b+c)a+bc-2ab-2ac]bc}{a+bc}\ge 0 \Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{(a-b)(a-c)}{a^2+abc}\ge 0$$

Không mất tính tổng quát giả sử $a\ge b\ge c$. khi đó $\frac{1}{c^2+abc}\ge\frac{1}{b^2+abc}>0$

Theo định lí 2, ta có (đpcm). Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$.

Bài 12. Cho $a, b, c>0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\ge\frac{2a}{3a^2+bc}+\frac{2b}{3b^2+ca}+\frac{2c}{3c^2+ab}\quad(1)$$

Chứng minh

Đặt $x=\sqrt{\frac{bc}{a}}, y=\sqrt{\frac{ca}{b}}, z=\sqrt{\frac{ab}{c}}$, khi đó (1) $\Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{1}{x(y+z)}\ge\sum_{cyc}\frac{2}{x^2+3yz}$. Ta có:

$$\sum_{cyc}\frac{1}{x(y+z)}-\sum_{cyc}\frac{2}{x^2+3yz}=\sum_{cyc}\frac{(x-y)(x-z)}{x(y+z)(x^2+3yz)}+\sum_{cyc}\frac{z(x-y)^2\left[z(x-y)^2+xy(x+y)\right]}{xy(x+z)(y+z)(x^2+3yz)(y^2+3zx)}$$

Bất đẳng thức này đúng nếu ta chứng minh được: $\sum_{cyc}\frac{(x-y)(x-z)}{x(y+z)(x^2+3yz)}\ge 0$.

Không mất tính tổng quát giả sử $x\ge y\ge z$. Khi đó:

$$\frac{1}{z(x+y)(z^2+3xy)}-\frac{1}{y(z+x)(y^2+3zx)}=\frac{(y-z)\left[x(y-z)^2+yz(y+z)\right]}{yz(x+y)(x+z)(y^2+3zx)(z^2+3xy)}\ge 0$$

Theo định lí 2, ta có (đpcm). Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

Bài 13. Cho $a, b, c\ge 0$ thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=3$.

Chứng minh rằng: $\frac{a^2\sqrt{b+c}}{\sqrt{a^2+bc}}+\frac{b^2\sqrt{c+a}}{\sqrt{b^2+ca}}+\frac{c^2\sqrt{a+b}}{\sqrt{c^2+ab}}\le 3\quad(1)$

Chứng minh

Sử dụng bất đẳng thức ***CBS*** ta có:

$$\left(\frac{a^2\sqrt{b+c}}{\sqrt{a^2+bc}}+\frac{b^2\sqrt{c+a}}{\sqrt{b^2+ca}}+\frac{c^2\sqrt{a+b}}{\sqrt{c^2+ab}}\right)^2\le\sum_{cyc}a^2\sum_{cyc}\frac{a^2(b+c)}{a^2+bc}=3\sum_{cyc}\frac{a^2(b+c)}{a^2+bc}$$

Ta cần chứng minh $\sum_{cyc}\frac{a^2(b+c)}{a^2+bc}\le 3$. Do $a^2+b^2+c^2=3$, nên $a+b+c\le 3$.

Ta chứng minh $\sum_{cyc}\frac{a^2(b+c)}{a^2+bc}\le a+b+c$, hay phải chứng minh $\sum_{cyc}\frac{a(a-b)(a-c)}{a^2+bc}\ge 0$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a\ge b\ge c$, khi đó $a\frac{a}{a^2+bc}-b\frac{b}{b^2+ca}=\frac{c(a^3-b^3)}{(a^2+bc)(b^2+ca)}\ge 0$

Theo định lí 2, ta có (đpcm). Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$.

Bài 14. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác.

Chứng minh rằng: $\frac{b+c}{a^2+bc}+\frac{c+a}{b^2+ca}+\frac{a+b}{c^2+ab}\le\frac{3(a+b+c)}{ab+bc+ca}$ (1)

Chứng minh

$$(1)\Leftrightarrow\sum_{cyc}\left(\frac{1}{a}-\frac{b+c}{a^2+bc}\right)\ge\sum_{cyc}\frac{1}{a}-\frac{3(a+b+c)}{ab+bc+ca}\Leftrightarrow\sum_{cyc}\frac{(a-b)(a-c)}{a(a^2+bc)}\ge\sum_{cyc}\frac{bc(a-b)(a-c)}{abc(ab+bc+ca)}$$

$$\Leftrightarrow\sum_{cyc}\left[(a-b)(a-c)\left(\frac{1}{a(a^2+bc)}-\frac{1}{a(ab+bc+ca)}\right)\right]\ge 0\Leftrightarrow\sum_{cyc}\frac{(b+c-a)(a-b)(a-c)}{a^2+bc}\ge 0$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a\ge b\ge c$. Do a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác nên ta có: $a+b-c\ge c+a-b\ge 0$ và $b(b^2+ca)\ge c(c^2+ab)$.

Vậy $b\cdot\frac{a+b-c}{c^2+ab}\ge c\cdot\frac{c+a-b}{b^2+ca}$. Theo định lí 2, ta có (đpcm).

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$ hoặc $a=b=2c$ và các hoán vị.

Bài 15. Cho $a,b,c\ge 0$. Chứng minh rằng:

$$ab+bc+ca\le\frac{a^3(b+c)}{a^2+bc}+\frac{b^3(c+a)}{b^2+ca}+\frac{c^3(a+b)}{c^2+ab}\le a^2+b^2+c^2$$

Chứng minh

Ta có: $\sum_{cyc}\frac{2a^3(b+c)}{a^2+bc}-\sum_{cyc}a(b+c)=\sum_{cyc}\frac{a(b+c)(a^2-bc)}{a^2+bc}$

$$=\sum_{cyc}\left[\frac{a(b+c)(a^2-bc)}{a^2+bc}-(a^2-bc)\right]+\sum_{cyc}(a^2-bc)$$

$$=\sum_{cyc}\frac{(bc-a^2)(a-b)(a-c)}{a^2+bc}+\sum_{cyc}(a-b)(a-c)=2abc\sum_{cyc}\frac{(a-b)(a-c)}{a^3+abc}$$

và $\sum_{cyc}a^2-\sum_{cyc}\frac{a^3(b+c)}{a^2+bc}=\sum_{cyc}\frac{a^2(a-b)(a-c)}{a^2+bc}$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a\ge b\ge c$, khi đó $\frac{1}{c^3+abc}\ge\frac{1}{b^3+abc}$.

Theo định lí 2, ta có $\sum_{cyc}\frac{(a-b)(a-c)}{a^3+abc}\geq 0$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{2a^3(b+c)}{a^2+bc}\geq\sum_{cyc}a(b+c)\Leftrightarrow\frac{a^3(b+c)}{a^2+bc}+\frac{b^3(c+a)}{b^2+ca}+\frac{c^3(a+b)}{c^2+ab}\geq ab+bc+ca$$

Mặt khác, do $a\geq b\geq c$, nên $\frac{a^2}{a^2+bc}\geq\frac{b^2}{b^2+ca}$. Theo định lí 2, ta có $\sum_{cyc}\frac{a^2(a-b)(a-c)}{a^2+bc}\geq 0$

$$\Leftrightarrow\sum_{cyc}a^2\geq\sum_{cyc}\frac{a^3(b+c)}{a^2+bc}\Leftrightarrow\frac{a^3(b+c)}{a^2+bc}+\frac{b^3(c+a)}{b^2+ca}+\frac{c^3(a+b)}{c^2+ab}\leq a^2+b^2+c^2$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c>0$ hoặc $a=b>0$, $c=0$ và các hoán vị.

Bài 16. Cho $a, b, c>0$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{a^2+bc}{b+c}}+\sqrt{\frac{b^2+ca}{c+a}}+\sqrt{\frac{c^2+ab}{a+b}}\geq\sqrt{3(a+b+c)}$$

Chứng minh

Sử dụng bất đẳng thức ***AM – GM*** ta có: $\sum_{cyc}\sqrt{\frac{(a+b)(a+c)}{b+c}}\geq\sqrt{6(a+b+c)}$

$$\sum_{cyc}\sqrt{\frac{2(a^2+bc)}{b+c}}\geq\sum_{cyc}\sqrt{\frac{(a+b)(a+c)}{b+c}}\text{ hay }\sum_{cyc}M_a(a-b)(a-c)\geq 0$$

trong đó: $M_a=\frac{1}{\sqrt{b+c}\left(\sqrt{2(a^2+bc)}+\sqrt{(a+b)(a+c)}\right)}$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a\geq b\geq c>0$. Khi đó :

$a(a+c)(b^2+ca)\geq b(b+c)(a^2+bc)\Rightarrow M_a\sqrt{a}\geq M_b\sqrt{b}\Rightarrow a.M_a\geq b.M_b$.

Theo định lí 2, ta có (đpcm). Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c>0$.

Bài 17. Cho $a,b,c\geq 0$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{a^3+abc}{b+c}}+\sqrt{\frac{b^3+abc}{c+a}}+\sqrt{\frac{c^3+abc}{a+b}}\geq a+b+c$$

Chứng minh

Ta có: $\sqrt{\frac{a^3+abc}{b+c}}+\sqrt{\frac{b^3+abc}{c+a}}+\sqrt{\frac{c^3+abc}{a+b}}-(a+b+c)=\sum_{cyc}\left(\sqrt{\frac{a^3+abc}{b+c}}-a\right)$

$$=\sum_{cyc}\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{(b+c)(a^2+bc)}+(b+c)\sqrt{a}}(a-b)(a-c)\geq 0$$

Đặt $A=\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{(b+c)(a^2+bc)}+(b+c)\sqrt{a}}$, $B=\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{(c+a)(b^2+ca)}+(c+a)\sqrt{b}}$. Ta có:

$$A-B=\frac{\sqrt{a(b^2+ca)(c+a)}+(c+a)\sqrt{ab}-\sqrt{b(a^2+bc)(b+c)}-(b+c)\sqrt{ab}}{\left(\sqrt{(b+c)(a^2+bc)}+(b+c)\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{(c+a)(b^2+ca)}+(c+a)\sqrt{b}\right)}$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a\ge b\ge c$ thì

$$\sqrt{a(b^2+ca)(c+a)}+(c+a)\sqrt{ab}-\sqrt{b(a^2+bc)(b+c)}-(b+c)\sqrt{ab}$$

$$=\frac{a(b^2+ca)(c+a)-b(a^2+bc)(b+c)}{\sqrt{a(b^2+ca)(c+a)}+\sqrt{b(a^2+bc)(b+c)}}+(a-b)\sqrt{ab}$$

$$=\frac{(a-b)\left(c(a^2+ab+b^2)+c^2(a+b)-abc\right)}{\sqrt{a(b^2+ca)(c+a)}+\sqrt{b(a^2+bc)(b+c)}}+(a-b)\sqrt{ab}\ge 0$$

(vì $a\ge b$ và $c(a^2+ab+b^2)-abc\ge c(2ab+ab)-abc=2abc\ge 0$). Theo định lí 2 $\Rightarrow$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$ hoặc $a=b, c=0$ và các hoán vị.

Bài 18. Chứng minh: $\dfrac{a^2}{(2a+b)(2a+c)}+\dfrac{b^2}{(2b+c)(2b+a)}+\dfrac{c^2}{(2c+a)(2c+b)}\le\dfrac{1}{3}$, $\forall a,b,c\ge 0$

Chứng minh

Ta có: $\dfrac{1}{3}-\left[\dfrac{a^2}{(2a+b)(2a+c)}+\dfrac{b^2}{(2b+c)(2b+a)}+\dfrac{c^2}{(2c+a)(2c+b)}\right]$

$$=\sum_{cyc}\left[\frac{a}{3(a+b+c)}-\frac{a^2}{(2a+b)(2a+c)}\right]=\frac{1}{3(a+b+c)}\sum_{cyc}\frac{a(a-b)(a-c)}{(2a+b)(2a+c)}$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a\ge b\ge c$. Khi đó $\begin{cases}a(a+2b)\ge b(b+2a)>0\\ a(2b+c)\ge b(2a+c)\ge 0\end{cases}$

$\Rightarrow a\cdot\dfrac{a}{(2a+b)(2a+c)}\ge b\cdot\dfrac{b}{(2b+c)(2b+a)}$. Theo định lí 2, ta có (đpcm).

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c>0$ hoặc $a=b>0,\ c=0$ và các hoán vị.

Bài 19. Cho $x,y,z\ge 0$ thỏa mãn $3\le x+y+z\le 6$.

Chứng minh rằng: $\sqrt{1+x}+\sqrt{1+y}+\sqrt{1+z}\ge\sqrt{xy+yz+zx+15}$ (1)

Chứng minh

Đặt $a^2=1+x, b^2=1+y, c^2=1+z, d=a^2+b^2+c^2$, khi đó $a,b,c\ge 1$ và $9\ge d\ge 6$.

Bất đẳng thức (1) $\Leftrightarrow a+b+c\ge\sqrt{18-2d+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}$

$\Leftrightarrow 3d+2(ab+bc+ca)\ge 18+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$

Từ $9 \ge d \ge 6$ và sử dụng bất đẳng thức $AM - GM$ ta có:

$$3d(d-6) \ge \frac{1}{3}d^2(d-6) \ge (d-6)(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2).$$

Suy ra: $3d + \dfrac{6(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)}{d} \ge 18 + a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$.

Ta chứng minh: $ab+bc+ca \ge \dfrac{3(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)}{d}$

$\Leftrightarrow (ab+bc+ca)(a^2+b^2+c^2) \ge 3(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2) \Leftrightarrow \sum_{cyc}(b+c)(4a-b-c)(a-b)(a-c) \ge 0$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \ge b \ge c$. Khi đó:

$(b+c)(4a-b-c)-(c+a)(4b-c-a) = (a-b)(a+b+6c) \ge 0$

$(c+a)(4b-c-a)-(a+b)(4c-a-b) = (b-c)(b+c+6a) \ge 0$

Mặt khác, $9c^2 \ge 9 \ge a^2+b^2+c^2 \Rightarrow 8c^2 \ge a^2+b^2 \ge \dfrac{(a+b)^2}{2} \Rightarrow 4c-a-b \ge 0$

Suy ra: $(b+c)(4a-b-c) \ge (c+a)(4b-c-a) \ge (a+b)(4c-a-b) \ge 0$

Theo định lí 2, ta có (đpcm). Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z=2$ hoặc $x=y=z=1$.

Bài 20. Cho $a, b, c \ge 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2-bc}{b^2+bc+c^2} + \frac{b^2-ca}{c^2+ca+a^2} + \frac{c^2-ab}{a^2+ab+b^2} \ge 0$$

Chứng minh

Ta có: $\sum_{cyc}\dfrac{a^2-bc}{b^2+bc+c^2} = \sum_{cyc}\dfrac{(a-b)(a-c)}{b^2+bc+c^2} + \sum_{cyc}\dfrac{ab(a-b)^2}{(a^2+ac+c^2)(b^2+bc+c^2)}$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \ge b \ge c$, khi đó

$$\frac{1}{b^2+bc+c^2} - \frac{1}{a^2+ac+c^2} = \frac{(a-b)(a+b+c)}{(a^2+ac+c^2)(b^2+bc+c^2)} \ge 0$$

Theo định lí 2, ta có $\sum_{cyc}\dfrac{(a-b)(a-c)}{b^2+bc+c^2} \ge 0 \Rightarrow \sum_{cyc}\dfrac{a^2-bc}{b^2+bc+c^2} \ge 0$ (đpcm).

Bài 21. [Romani TST 2006] Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a+b+c=3$.

Chứng minh rằng: $\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2} \ge a^2+b^2+c^2$ (1)

Chứng minh

Bất đẳng thức (1) $\Leftrightarrow \sum_{cyc}\left[\dfrac{1}{a^2} - a^2 + 2(a-1)\right] \ge 0 \Leftrightarrow \sum_{cyc}(a-1)^2\dfrac{1+2a-a^2}{a^2} \ge 0$

$\Leftrightarrow \sum_{cyc}(4M_a+M_b+M_c)(a-b)(a-c) \ge 0$ trong đó $M_a = \dfrac{1+2a-a^2}{a^2}$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \ge b \ge c$, khi đó $M_b - M_a = \dfrac{(a-b)(a+b+2ab)}{a^2b^2} \ge 0$.

Tương tự, ta có: $M_c \ge M_b \ge M_a \Rightarrow 4M_c + M_a + M_b \ge 4M_b + M_c + M_a \ge 4M_a + M_b + M_c$.

Mặt khác, $4M_a + M_b + M_c = \dfrac{4}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2} + \dfrac{8}{a} + \dfrac{2}{b} + \dfrac{2}{c} - 6 \ge 2\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} - 3\right) \ge 0$

Theo định lí 2, ta có (đpcm). Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = 1$.

Bài 22. Chứng minh rằng: $\sqrt{\dfrac{a^3+abc}{(b+c)^3}} + \sqrt{\dfrac{b^3+abc}{(c+a)^3}} + \sqrt{\dfrac{c^3+abc}{(a+b)^3}} \ge \dfrac{3}{2}$, $\forall a,b,c \ge 0$

Chứng minh

Do $\dfrac{a}{b+c} + \dfrac{b}{c+a} + \dfrac{c}{a+b} \ge \dfrac{3}{2}$, ta cần chứng minh $\sum\limits_{cyc} \sqrt{\dfrac{a^3+abc}{(b+c)^3}} \ge \sum\limits_{cyc} \dfrac{a}{b+c}$

$\Leftrightarrow \sum\limits_{cyc} M_a (a-b)(a-c) \ge 0$, trong đó $M_a = \dfrac{\sqrt{a}}{(b+c)\sqrt{b+c}\left(\sqrt{a^2+bc} + \sqrt{a(b+c)}\right)}$;

$M_b = \dfrac{\sqrt{b}}{(c+a)\sqrt{c+a}\left(\sqrt{b^2+ca} + \sqrt{b(c+a)}\right)}$ và $M_c = \dfrac{\sqrt{c}}{(a+b)\sqrt{a+b}\left(\sqrt{c^2+ab} + \sqrt{c(a+b)}\right)}$

Không mất tổng quát, giả sử $a \ge b \ge c \ge 0$, khi đó

$(c+a)^2 b - (b+c)^2 a = (a-b)(ab-c^2) \ge 0$

và $(c+a)^2(b^2+ca) - (b+c)^2(a^2+bc) = c(a-b)(a^2+b^2+c^2+ac+bc-ab) \ge 0$

suy ra : $(c+a)\sqrt{b} \ge (b+c)\sqrt{a}$ và $(c+a)\sqrt{b^2+ca} \ge (b+c)\sqrt{a^2+bc} \Rightarrow M_a \ge M_b \ge 0$

Theo định lí 2, ta có (đpcm). Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c > 0$.

Bài 23. Cho $x, y, z \ge 1$. Chứng minh rằng: $x^{x^2+2yz} y^{y^2+2zx} z^{z^2+2xy} \ge (xyz)^{xy+yz+zx}$ (1)

Chứng minh

Bất đẳng thức (1) tương đương với $\ln\left(x^{x^2+2yz} y^{y^2+2zx} z^{z^2+2xy}\right) \ge \ln\left[(xyz)^{xy+yz+zx}\right]$

$\Leftrightarrow (x^2+2yz)\ln x + (y^2+2zx)\ln y + (z^2+2xy)\ln z \ge (xy+yz+zx)(\ln x + \ln y + \ln z)$

$\Leftrightarrow \ln x(x^2-xy-xz+yz) + \ln y(y^2-yx-yz+zx) + \ln z(z^2-zx-zy+xy) \ge 0$

$\Leftrightarrow \ln x \cdot (x-y)(x-z) + \ln y \cdot (y-z)(y-x) + \ln z \cdot (z-x)(z-y) \ge 0$

Không mất tính tổng quát, giả sử $x \ge y \ge z \ge 1$, khi đó $\ln x \ge \ln y \ge 0$

Theo định lí 2, ta có (đpcm).

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z$ hoặc $x = 1, y = z$ và các hoán vị.

§7. 3. ỨNG DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC SCHUR TRONG CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC ĐỐI XỨNG 3 BIẾN

I. ĐA THỨC ĐỐI XỨNG 3 BIẾN

1. Định nghĩa: Giả sử $F(a,b,c)$ là đa thức với bộ 3 biến số thực a,b,c có dạng:

$$F(a,b,c)=\sum_{s=0}^{N} M_s(a,b,c)\text{, trong đó } M_s(a,b,c)=\sum_{i+j+k=s} T_{ijk}a^i b^j c^k\ \ (i,j,k\in\mathbb{N})$$

Ta gọi $F(a,b,c)$ là một đa thức đối xứng nếu thỏa mãn tính chất sau

$F(a',b',c')=F(a,b,c)$ với (a',b',c') là một hoán vị tùy ý của (a,b,c)

2. Đa thức đối xứng Viete:

2.1. Định nghĩa:

$p=a+b+c,\ q=ab+bc+ca,\ r=abc$ là các đa thức đối xứng ***Viet.***

2.2. Mệnh đề:

Mọi đa thức đối xứng $F(a,b,c)$ đều có thể biểu diễn dưới dạng đa thức $T(p,q,r)$

2.3. Các hằng đẳng thức đáng nhớ:

- $(a+b)(b+c)(c+a)=pq-r$
- $(a+b)(b+c)+(c+a)(a+b)+(c+a)(b+c)=p^2+q$
- $a^2+b^2+c^2=p^2-2q$
- $a^3+b^3+c^3=p^3-3pq+3r$
- $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=q^2-2pr$
- $a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3=q^3-3pqr+3r^2$
- $ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)=pq-3r$
- $a^4+b^4+c^4=(p^2-2q)^2-2(q^2-2pr)=p^4-4p^2q+2q^2+4pr$
- $ab(a^2+b^2)+bc(b^2+c^2)+ca(a^2+c^2)=p^2q-2q^2-pr$

Ngoài ra, chúng ta có thể thiết lập các hằng đẳng thức có bậc lớn hơn 4.

II. XÂY DỰNG CÁC BẤT ĐẲNG THỨC CỦA p,q,r

1. Xây dựng các bất đẳng thức từ bất đẳng thức Schur:

1.1. Bất đẳng thức Schur: Cho a,b,c là các số thực dương. thì:

$$a^r(a-b)(a-c)+b^r(b-c)(b-a)+c^r(c-a)(c-b)\ge 0,\ \forall r\ge 0$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$ hoặc $a=b$ và $c=0$ cùng các hoán vị của nó.

Chứng minh

Không mất tính tổng quát ta có thể giả sử $a\ge b\ge c$, khi đó:

$$a^r(a-b)(a-c)+b^r(b-c)(b-a)+c^r(c-a)(c-b)$$

$$=(a-b)\left[a^r(a-c)-b^r(b-c)\right]+c^r(a-c)(b-c)\ge 0$$

1.2. Các trường hợp đặc biệt của định lý Schur

- $r=0$: $a^0(a-b)(a-c)+b^0(b-c)(b-a)+c^0(c-a)(c-b)\ge 0\Leftrightarrow p^2-3q\ge 0$
- $r=1$: $a^1(a-b)(a-c)+b^1(b-c)(b-a)+c^1(c-a)(c-b)\ge 0\Leftrightarrow p^3-4pq+9r\ge 0$
- $r=2$:

$$a^2(a-b)(a-c)+b^2(b-c)(b-a)+c^2(c-a)(c-b)\ge 0\Leftrightarrow p^4-5p^2q+4q^2+6pr\ge 0$$

$$\boxed{p^2\ge 3q;\ p^3-4pq+9r\ge 0;\ p^4-5p^2q+4q^2+6pr\ge 0}$$

2. Xây dựng các bất đẳng thức cơ bản theo p, q, r:

Sử dụng bất đẳng thức ***Schur*** và ***AM – GM*** ta có các bất đẳng thức quan trọng sau đây:

$p^2\ge 3q$	$p^2q+3pr\ge 4q^2$	$p^2q\ge 3pr+2q^2$	$q^3+9r^2\ge 4pqr$
$q^2\ge 3pr$	$pq^2+3qr\ge 4p^2r$	$pq^2\ge 2p^2r+3qr$	$2q^3+9r^2\ge 7pqr$
$p^3\ge 27r$	$p^4+3q^2\ge 4p^2q$	$2p^3+9r\ge 7pq$	$p^3r+q^3\ge 6pqr$

Chứng minh

- $p^2\ge 3q\Leftrightarrow (a+b+c)^2-3(ab+bc+ca)\ge 0\Leftrightarrow (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\ge 0$
- $q^2\ge 3pr\Leftrightarrow (ab+bc+ca)^2-3(a+b+c)abc\ge 0$

$\Leftrightarrow (ab-bc)^2+(bc-ca)^2+(ca-ab)^2\ge 0$. Hệ quả: $p^2q^2\ge 9pqr\Leftrightarrow pq\ge 9r$

- $p^3\ge 27r\Leftrightarrow (a+b+c)^3\ge 27abc$ (đúng theo ***AM – GM***)
- $p^2q+3pr\ge 4q^2\Leftrightarrow ab(a-b)^2+bc(b-c)^2+ca(c-a)^2\ge 0$
- $pq^2+3qr\ge 4p^2r\Leftrightarrow a^3(b-c)^2+b^3(c-a)^2+c^3(a-b)^2\ge 0$
- $p^4+3q^2\ge 4p^2q\Leftrightarrow (p^2-3q)(p^2-q)\ge 0$ (đúng do $p^2\ge 3q$)
- $p^2q\ge 3pr+2q^2\Leftrightarrow (p^2q+3pr-4q^2)+2(q^2-3pr)\ge 0$

$$\Leftrightarrow (ab+c^2)(a-b)^2+(bc+a^2)(b-c)^2+(ca+b^2)(c-a)^2\ge 0$$

- $pq^2\ge 2p^2r+3qr \Leftrightarrow (pq^2+3qr-4p^2r)+2r(p^2-3q)\ge 0$

$$\Leftrightarrow (abc+c^3)(a-b)^2+(abc+a^3)(b-c)^2+(abc+b^3)(c-a)^2\ge 0$$

- $q^3+9r^2\ge 4pqr$

$\Leftrightarrow ab(ab-bc)(ab-ca)+bc(bc-ca)(bc-ab)+ca(ca-ab)(ca-bc)\ge 0$

$\Leftrightarrow x(x-y)(x-z)+y(y-z)(y-x)+z(z-x)(z-y)\ge 0$ (đúng)

Trong đó ta đặt $x=ab, y=bc, z=ca$ ở biểu thức vế trái

- $2p^3+9r\ge 7pq \Leftrightarrow 2(p^3-4pq+9r)+(pq-9r)\ge 0$
- $2q^3+9r^2\ge 7pqr \Leftrightarrow 2(q^3-4pqr+9r^2)+r(pq-9r)\ge 0$
- $p^3r+q^3\ge 6pqr \Leftrightarrow (p^2-3q)pr+q(q^2-3pr)\ge 0$

III. CÁC BÀI TOÁN MINH HỌA

Bài 1 [Balkan Contest] Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $abc=1$.

Chứng minh: $2(a^2+b^2+c^2)+12\ge 3(a+b+c)+3(ab+bc+ca)$ (1)

Chứng minh

(1) $\Leftrightarrow 2(p^2-2q)+12\ge 3p+3q \Leftrightarrow 2p^2-3p-7q+12\ge 0$ (2)

Theo bất đẳng thức ***Schur*** ta có $p^3+9r\ge 4pq \Leftrightarrow q\le \dfrac{p^3+9r}{4q}=\dfrac{p^3+9}{4q}$

Từ đó suy ra (2) được chứng minh nếu ta chứng minh được bất đẳng thức sau:

$$2p^2-3p-\frac{7(p^3+9)}{4p}+12\ge 0\Leftrightarrow \frac{(p-3)(p^2-9p+21)}{4p}\ge 0 \Leftrightarrow p\ge 3$$

Ta có: $p=a+b+c\ge 3\cdot\sqrt[3]{abc}=3 \Rightarrow$ (đpcm).

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài 2. Cho $a,b,c\ge 0$ thỏa mãn $ab+bc+ca+abc=4$.

Chứng minh rằng: $3(a^2+b^2+c^2)+abc\ge 10$ (1)

Chứng minh

(1) $\Leftrightarrow 3p^2-6q+r\ge 10 \Leftrightarrow 3p^2-7q-6\ge 0$ (2)

Theo bất đẳng thức ***Schur*** ta có $p^3+9r\ge 4pq \Leftrightarrow p^3+9(4-q)\ge 4pq \Leftrightarrow q\le \dfrac{36+p^3}{4p+9}$

$$3p^2-7\frac{36+p^3}{4p+9}-6\ge 0\Leftrightarrow 5p^3+27p^2-24p-306\ge 0\Leftrightarrow (p-3)(5p^2+42p+102)\ge 0\Leftrightarrow p\ge 3$$

Ta có: $q^3=(ab+bc+ca)^3\ge 27(abc)^2=27r^2=27(4-q)^2$

Nếu $q<3$ thì $27(4-q)^2>27>q^3\Rightarrow$ vô lý. Vậy $q\ge 3\Rightarrow p^2\ge 3q\ge 9\Rightarrow p\ge 3\Rightarrow$ (đpcm)

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$.

Bài 3. Cho $a,b,c\ge 0$ thỏa mãn $ab+bc+ca+abc=4$.

Chứng minh rằng: $a^2+b^2+c^2+5abc\ge 8$ (1)

Chứng minh

(1) $\Leftrightarrow p^2-2q+5r\ge 8\Leftrightarrow p^2-7q+12\ge 0$ (để ý là $q+r=4$ và $p\ge q\ge 3$)

Nếu $p\le 4$, sử dụng bất đẳng thức ***Schur*** ta có

$$r\ge\frac{p(4q-p^2)}{9}\Leftrightarrow 4-q\ge\frac{p(4q-p^2)}{9}\Leftrightarrow q\le\frac{p^3+36}{4p+9}$$

Ta chỉ cần chứng minh $p^2-7\dfrac{p^3+36}{4p+9}+12\ge 0\Leftrightarrow (p-3)(p^2-16)\le 0$

Bất đẳng thức này luôn đúng vì $3\le p\le 4$.

Nếu $p\ge 4$ thì $p^2\ge 4q$ nên $p^2-2q+5r\ge p^2-2q\ge p^2-\dfrac{p^2}{2}=\dfrac{p^2}{2}\ge 8$

Bất đẳng thức được chứng minh hoàn toàn. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$ hoặc $a=b=2, c=0$ và các hoán vị.

Nhận xét. Chú ý rằng $k=5$ cũng là hằng số tốt nhất sao cho bất đẳng thức sau đúng với mọi số thực không âm a,b,c thỏa mãn $ab+bc+ca+abc=4$: $a^2+b^2+c^2+kabc\ge 3+k$

Bài 4. Cho a,b,c là các số thực không âm. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\ge\frac{a+b+c}{2(ab+bc+ca)}+\frac{3}{a+b+c}\quad(1)$$

Chứng minh

Không mất tính tổng quát, chuẩn hóa $q=3$,

khi đó (1) $\Leftrightarrow \dfrac{p^2+q}{pq-r}\ge\dfrac{p}{2q}+\dfrac{3}{p}\Leftrightarrow\dfrac{p^2+3}{3p-r}\ge\dfrac{p}{6}+\dfrac{3}{p}$

$\Leftrightarrow (p^2+3)6p-p^2(3p-r)-18(3p-r)\ge 0\Leftrightarrow 3p^3+p^2r-36p+18r\ge 0$ (2)

Theo bất đẳng thức ***Schur*** ta có: $p^3-4pq+9r\ge 0\Leftrightarrow p^3-12p+9r\ge 0$

Mặt khác, $p^2\ge 3q=9$, suy ra: $3p^3+p^2r-36p+18r=3(p^3-12p+9r)+r(p^2-9)\ge 0$

$\Rightarrow$ (2) đúng $\Rightarrow$ (đpcm). Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$ hoặc $a=b, c=0$ và hoán vị.

Bài 5. Cho a,b,c là các số thực không âm và $k \geq 3$.

Chứng minh rằng: $\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{c+a}+\dfrac{k}{a+b+c} \geq \dfrac{2\sqrt{k+1}}{\sqrt{ab+bc+ca}}$ (1)

Chứng minh

(1) $\Leftrightarrow \dfrac{p^2+q}{pq-r}+\dfrac{k}{p} \geq \dfrac{2\sqrt{k+1}}{\sqrt{q}}$. Ta có: $\dfrac{p^2+q}{pq-r}+\dfrac{k}{p} \geq \dfrac{p^2+q}{pq}+\dfrac{k}{p}=\dfrac{p}{q}+\dfrac{k+1}{p} \geq \dfrac{2\sqrt{k+1}}{\sqrt{q}}$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow (a,b,c)=\left(0;t;\dfrac{k-1+\sqrt{k^2-2k-3}}{2}t\right);\left(0;t;\dfrac{k-1-\sqrt{k^2-2k-3}}{2}t\right)$

Bài 6. Cho $a,b,c \geq 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{b+a}+\frac{3\cdot\sqrt[3]{abc}}{2(a+b+c)} \geq 2 \quad (1)$$

Chứng minh

Sử dụng bất đẳng thức ***Buniakowski*** ta có:

$$\text{VT}(1)=\frac{a^2}{a(b+c)}+\frac{b^2}{b(c+a)}+\frac{c^2}{c(a+b)}+\frac{3\cdot\sqrt[3]{abc}}{2(a+b+c)} \geq \frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)}+\frac{3\cdot\sqrt[3]{abc}}{2(a+b+c)}$$

Ta sẽ chứng minh $\dfrac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca}+\dfrac{3\cdot\sqrt[3]{abc}}{a+b+c} \geq 4 \Leftrightarrow \dfrac{p^2}{q}+\dfrac{3\cdot\sqrt[3]{r}}{p} \geq 4$ (2)

Không mất tính tổng quát, chuẩn hóa $r=1$. Khi đó (2) $\Leftrightarrow p^3+3q \geq 4pq$

Theo bất đẳng thức ***Schur*** ta có: $p^3-4pq+9r \geq 0 \Rightarrow p^3+3q \geq 4pq+3(q-3)$

Mặt khác, $q^3 \geq 27r^2=27 \Rightarrow q \geq 3 \Rightarrow p^3+3q \geq 4pq \Rightarrow$ (đpcm)

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$ hoặc $a=b, c=0$ hoặc các hoán vị.

Bài 7. Cho $a,b,c \geq 0$ thỏa mãn $a+b+c=3$.

Chứng minh rằng: $\dfrac{27}{2} \geq 4(ab+bc+ca)+\dfrac{a^2b^2}{a+b}+\dfrac{b^2c^2}{b+c}+\dfrac{a^2c^2}{c+a}$ (1)

Chứng minh

(1) $\Leftrightarrow \dfrac{27}{2} \geq 4q+\dfrac{q^3-2pqr+3r^2}{pq-r} \Leftrightarrow \dfrac{27}{2} \geq 4q+\dfrac{q^3-6qr+3r^2}{3q-r}$

$\Leftrightarrow 2q^3+24q^2-81q-20qr+6r^2+27r \leq 0$

Theo bất đẳng thức ***Schur*** ta có: $p^3-4pq+9r \geq 0$ và $pq \geq 9r$, suy ra:

$4pq-p^3 \leq 9r \leq pq \Leftrightarrow 12q-27 \leq 9r \leq 3q \Leftrightarrow \dfrac{4q-9}{3} \leq r \leq \dfrac{q}{3}$. Ta chỉ cần chứng minh:

$2q^3+24q^2-81q-20q\cdot\dfrac{4q-9}{3}+\dfrac{6q^2}{9}+\dfrac{27q}{3} \leq 0 \Leftrightarrow 2q^3-2q^2-12q \leq 0 \Leftrightarrow 2q(q+2)(q-3) \leq 0$ (2)

Ta có: $3q \leq p^2=9 \Rightarrow q \leq 3 \Rightarrow$ (2) đúng. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$.

Bài 8. Cho $a,b,c\ge 0$ thỏa mãn $ab+bc+ca+6abc=9$.

Tìm hằng số k tốt nhất sao cho: $a+b+c+kabc\ge k+3$ (1) đúng $\forall a,b,c\ge 0$

Giải

Cho $a=0,b=c=3$, khi đó (1) $\Leftrightarrow 6\ge k+3\Leftrightarrow k\le 3$. Ta chứng minh (1) đúng với $k=3$, tức là chứng minh: $a+b+c+3abc\ge 6$

$\Leftrightarrow 2(a+b+c)-(ab+bc+ca)-3\ge 0 \Leftrightarrow 2p-q-3\ge 0$ (2)

Từ điều kiện $q+6r=9$ ta suy ra $q\ge 3 \Rightarrow p\ge 3$. Nếu $p\ge 6$ thì ta có đpcm.

Xét $p\in[3;6]$: Theo bất đẳng thức ***Schur*** ta có: $p^3-4pq+9r\ge 0$

$\Leftrightarrow p^3-4pq+9\cdot\dfrac{9-q}{6}\ge 0\Leftrightarrow 2p^3+27\ge(8p+3)q\Leftrightarrow q\le\dfrac{2p^3+27}{8p+3}$. Khi đó:

$$2p-q-3\ge 2p-\frac{2p^3+27}{8p+3}-3=\frac{-2p^3+16p^2-18p-36}{8p+3}=\frac{2(p+1)(p-3)(6-p)}{8p+3}\ge 0 \Rightarrow \text{(đpcm)}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$ hoặc $a=0;b=c=3$ và các hoán vị.

Vậy $k=3$ là hằng số cần tìm.

Bài 9. Chứng minh với các số thực không âm a,b,c ta có:

$$\left(a^4+b^4+c^4\right)(ab+bc+ca)\ge\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)\quad(1)$$

Chứng minh

Không mất tính tổng quát chuẩn hóa $ab+bc+ca=1$. Khi đó:

(1) $\Leftrightarrow\left(p^4-4p^2q+2q^2+4pr\right)q\ge\left(p^2-2q\right)\left(q^2-2pr\right)$

$\Leftrightarrow p^4-4p^2+2+4pr\ge p^2-2p^3r-2+4pr\Leftrightarrow p^4-5p^2+4+2p^3r\ge 0$

Theo bất đẳng thức ***Schur*** ta có: $p^4-5p^2q+4q^2+6pr\ge 0 \Leftrightarrow p^4-5p^2+4+6pr\ge 0$.

Mặt khác $p^2\ge 3q=3$, suy ra:

$$p^4-5p^2+4+2p^3r=\left(p^4-5p^2+4+6pr\right)+2pr\left(p^2-3\right)\ge 0$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$ hoặc $a=b,c=0$ hoặc $a=t,b=c=0$ và các hoán vị.

Bài 10. Cho $a,b,c\ge 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+4\frac{(a+b+c)(ab+bc+ca)}{a^3+b^3+c^3}\ge 5\quad(1)$$

Chứng minh

Đặt $p=a+b+c,q=ab+bc+ca$ và $r=abc$.

Không mất tính tổng quát chuẩn hóa $p=1$.

Bất đẳng thức (1) trở thành $\dfrac{1-2q+3r}{q-r}+\dfrac{4q}{1-3q+3r}\ge 5$ (2)

Ta có: $VT(2) \ge 1+\frac{1-3q+3r}{q}+\frac{4q}{1-3q+3r}\ge 1+2\sqrt{\frac{1-3q+3r}{q}\cdot\frac{4q}{1-3q+3r}}=5$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow (a,b,c)=\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}x,x,0\right)$ và $(a,b,c)=\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}x,x,0\right)$ và các hoán vị.

Bài 11. Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn $abc=1$.

Chứng minh rằng: $\sqrt[3]{(a^3+1)(b^3+1)(c^3+1)}+1\ge\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ (1)

Chứng minh

Ta có: $(a^3+1)(b^3+1)(c^3+1)=a^3b^3c^3+a^3b^3+b^3c^3+a^3c^3+a^3+b^3+c^3+1$

$$=r^3+q^3-3pqr+3r^2+p^3-3pq+3r+1=p^3-6pq+q^3+8$$

$(1)\Leftrightarrow p^3-6pq+q^3+8\ge(q-1)^3 \Leftrightarrow p^3+9-6pq+3q^2-3q\ge 0$

Do $r=1$ nên ta có $p\ge 3, q\ge 3$. Xét hai trường hợp:

• Nếu $q\ge p\ge 3$ thì $p^3+9-6pq+3q^2-3q=(p^3+9-4pq)+(3q-2p-3)q\ge 0$

• Nếu $p\ge q\ge 3$ thì

$$p^3+9-6pq+3q^2-3q=(p^2-3q)(p-3)+3(q-1)(q-3)+3p(p-q)\ge 0$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$.

Bài 12. [Iran 1996] Cho $x,y,z\ge 0$. Chứng minh rằng

$$(xy+yz+zx)\left(\frac{1}{(x+y)^2}+\frac{1}{(y+z)^2}+\frac{1}{(x+z)^2}\right)\ge\frac{9}{4}\ (1)$$

Chứng minh

Đặt $x+y+z=p,\ xy+yz+zx=q$ và $xyz=r$. Ta có:

$(x+y)(y+z)(z+x)=(x+y+z)(xy+yz+zx)-xyz=pq-r$

Bất đẳng thức (1) $\Leftrightarrow q\cdot\frac{(p^2+q)^2-4p(pq-r)}{(pq-r)^2}\ge\frac{9}{4}\Leftrightarrow 4p^4q-17p^2q^2+4q^3+34pqr-9r^2\ge 0$

$\Leftrightarrow 3pq(p^3-4pq+9r)+q(p^4-5p^2q+4q^2+6pr)+r(pq-9r)\ge 0$ (2)

Từ kết quả trong ***1.2*** suy ra (2) đúng suy ra (đpcm)

Bài 13. Cho $\begin{cases}x,y,z>0\\x+y+z=1\end{cases}$. Chứng minh rằng: $\frac{1}{1-xy}+\frac{1}{1-yz}+\frac{1}{1-zx}\le\frac{27}{8}$

Chứng minh

Đặt $p=x+y+z,\ q=xy+yz+zx$ và $r=xyz$. Ta có:

$(1-xy)(1-yz)(1-zx)=1-q+pr-r^2=1-q+r-r^2$

$(1-xy)(1-yz)+(1-yz)(1-zx)+(1-zx)(1-xy)=3-2q+pr=3-2q+r$

$$(1)\Leftrightarrow \frac{3-2q+r}{1-q+r-r^2}\le\frac{27}{8}\Leftrightarrow 3-11q+19r-27r^2\ge 0.$$

Ta có: $p^3\ge 27r$ nên $27r^2\le p^3r=r$, do đó ta chỉ cần chứng minh: $3-11q+19r-r\ge 0$

$\Leftrightarrow 11(xy+yz+zx)-18xyz\le 3$ (2).Không mất tính tổng quát giả sử $z=\min\{x,y,z\}\Rightarrow z\le\frac{1}{3}$

$$\text{VT}(2)=11z(x+y)+xy(11-18z)\le 11z(x+y)+\left(\frac{x+y}{2}\right)^2(11-18z)=11z(1-z)+\left(\frac{1-z}{2}\right)^2(11-18z)$$

Ta chứng minh: $11z(1-z)+\left(\frac{1-z}{2}\right)^2(11-18z)\le 3\Leftrightarrow 18z^3-3z^2-4z+1\ge 0\Leftrightarrow$

$(3z-1)^2(2z+1)\ge 0$ đúng nên (2) đúng. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z=\frac{1}{3}$

Bài 14. Cho $\begin{cases}x,y,z>0\\x+y+z=1\end{cases}$ Chứng minh: $\dfrac{z-xy}{x^2+xy+y^2}+\dfrac{y-zx}{x^2+xz+z^2}+\dfrac{x-yz}{y^2+yz+z^2}\ge 2$ (1)

Chứng minh

Đặt $p=x+y+z=1$, $q=xy+yz+zx$ và $r=xyz$. Suy ra $xy=q-z(x+y)=q-z+z^2$

Ta có: $x^2+xy+y^2=(x+y)^2-xy=(x+y)(1-z)-xy=x+y-q=1-z-q$

Tương tự: $y^2+yz+z^2=1-x-q$, $x^2+xz+z^2=1-y-q$

Để ý rằng $x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2=q^2-2r$, $x^2(y+z)+y^2(z+x)+z^2(x+y)=q-3r$

$$(1)\Leftrightarrow\frac{z-xy}{1-z-q}+\frac{y-zx}{1-y-q}+\frac{x-yz}{1-x-q}\ge 2\Leftrightarrow\sum_{cyc}\frac{\left[(1-q)^2+xy-(x+y)(1-q)\right](z-xy)}{(1-q)q^2-r}\ge 2$$

$$\Leftrightarrow\frac{(1-q)^3-2q(1-q)+3r+(1-q)(q-3r)-(q^2-2r)}{(1-q)q^2-r}\ge 2$$

$\Leftrightarrow(1-q)^3-(1-q)(q+3r)-q^2+5r\ge 2\left[(1-q)q^2-r\right]\Leftrightarrow q^3+q^2-4q+3qr+4r+1\ge 0$

$\Leftrightarrow 9q^3+9q^2-36q+9r(3q+4)+9\ge 0$. Theo ***Schur***, ta có $9r\ge 4q-1$,

do đó ta chỉ cần chứng minh $9q^3+9q^2-36q+(4q-1)(3q+4)+9\ge 0$

$\Leftrightarrow(3q-1)(3q^2+8q-5)\ge 0$. Bất đẳng thức này đúng vì $3q\le(x+y+z)^2=1$.

Vậy ta có (đpcm). Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z=\frac{1}{3}$.

Bài 15. Cho $x,y,z\ge 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}+\frac{4(x+y)(y+z)(z+x)}{x^3+y^3+z^3}\ge 5\quad(1)$$

Chứng minh

Không mất tổng quát, ta giả sử $x+y+z=1$, và đặt $xy+yz+zx=q$, $xyz=r$.

Bất đẳng thức (1) trở thành: $\frac{1-2q+3r}{q-r}+\frac{4(q-r)}{1-3q+3r}\ge 5 \Leftrightarrow \frac{1-3q+4r}{q-r}+\frac{4(q-r)}{1-3q+3r}\ge 4$

Ta có: $\frac{1-3q+4r}{q-r}+\frac{4(q-r)}{1-3q+3r}\ge\frac{1-3q+3r}{q-r}+\frac{4(q-r)}{1-3q+3r}\ge 2\sqrt{\frac{1-3q+3r}{q-r}\cdot\frac{4(q-r)}{1-3q+3r}}=4$

Bài 16. Cho x,y,z là các số dương thỏa mãn $xy+yz+zx+xyz=4$, chứng minh:

$$\frac{x+y+z}{xy+yz+zx}\le 1+\frac{1}{48}((x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2)$$

Chứng minh

Do $x,y,z>0, xy+yz+zx+xyz=4$ nên tồn tại các số dương a,b,c sao cho $x=\frac{2a}{b+c}, y=\frac{2b}{c+a}, z=\frac{2c}{a+b}$. Khi đó bất đẳng thức trở thành

$$P(a,b,c)=\frac{(a+b+c)^2\sum_{cyc}(a^2-b^2)^2}{(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2}-\frac{6\sum_{cyc}a(a+b)(a+c)}{\sum_{cyc}ab(a+b)}+12\ge 0$$

Chuẩn hóa cho $p=1$, khi đó $q\in[0,1]$. Bất đẳng thức tương đương

$$f(r)=729r^3+27(22q^2-1)r^2+27(6q^4-4q^2+1)r+(q^2-1)(13q^4-5q^2+1)\le 0$$

Ta có $f'(r)=27(r(81r+44q^2-2)+6q^4-4q^2+1)$

Sử dụng bất đẳng thức ***Schur*** ta có: $81r+44q^2-2\ge 3(1-4q^2)+44q^2-2=1+32q^2>0$

Do đó $f'(r)>0$, suy ra $f(r)$ là hàm đồng biến. Như vậy

$$f(r)\le f\left(\frac{(1-q)^2(1+2q)}{27}\right)=\frac{2}{27}q^2(q-1)(q+2)^2(4q^4+14q3^4+15q^2-7q+1)\le 0$$

Bất đẳng thức chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1$.

Bài 17. Cho các số dương a,b,c, chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^2+bc}+\frac{1}{b^2+ca}+\frac{1}{c^2+ab}\le\frac{(a+b+c)^2}{3(ab+bc+ca)}\left(\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{1}{b^2+c^2}+\frac{1}{c^2+a^2}\right)$$

Chứng minh

Bổ đề: Giả sử a,b,c là các số thực thỏa mãn $a+b+c=1$, đặt $ab+bc+ca=\frac{1-q^2}{3}$ $(q\ge 0)$ và $r=abc$, khi đó ta có $\frac{(1+q)^2(1-2q)}{27}\le r\le\frac{(1-q)^2(1+2q)}{27}$

Chứng minh: Ta có $0\le(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2=-27r^2+2(1-3q^2)r+\frac{1}{27}(1-q^2)^2(4q^2-1)$

$$= -\frac{1}{27}\left[27r-(1-q)^2(1+2q)\right]\left[27r-(1+q)^2(1-2q)\right]$$

Chú ý rằng $(1-q)^2(1+2q)-(1+q)^2(1-2q)=4q^3\geq 0$ và đây là một tam thức bậc 2 theo r nên theo định lý về dấu của tam thức bậc 2, ta phải có:

$$\frac{(1+q)^2(1-2q)}{27}\leq r\leq \frac{(1-q)^2(1+2q)}{27}$$

Áp dụng: Chuẩn hóa cho $p=1$, khi đó $q\in[0,1]$.

Sử dụng bất đẳng thức ***AM – GM*** và bất đẳng thức ***Schur***, ta có

$\frac{(1-q^2)^2}{9}\geq 3r\geq \max\left\{0,\frac{1-4q^2}{9}\right\}$. Bằng biến đổi tương đương, bất đẳng thức được viết lại

$$f(r)=-486(9-q^2)r^3+27(q^6+64q^4-35q^2+24)r^2+9(4q^2-1)(11q^4-4q^2+2)r$$
$$+q^2(1-q^2)^3(2q^4+8q^2-1)\geq 0$$

Ta có

$$f'(r)=9(-162(9-q^2)r^2+6(q^6+64q^4-35q^2+24)r+(4q^2-1)(11q^4-4q^2+2))$$
$$f''(r)=54(-54(9-q^2)r+q^6+64q^4-35q^2+24)$$
$$\geq 54(-2(1-q^2)^2(9-q^2)+q^6+64q^4-35q^2+24)$$
$$=162(q^6+14q^4+q^2+2)>0$$

Suy ra $f'(r)$ là hàm đồng biến, do đó

+, Nếu $2q\geq 1$, $f'(r)\geq f'(0)=(4q^2-1)(11q^4-4q^2+2)\geq 0$

Do đó $f(r)$ là hàm đồng biến, suy ra $f(r)\geq f(0)=q^2(1-q^2)^3(2q^4+8q^2-1)>0$

+, Nếu $1\geq 2q$, $f'(r)\geq f'\left(\frac{1-4q^2}{27}\right)=(1-4q^2)(q^2+2)(2q^4+17q^2+6)\geq 0$

Do đó $f(r)$ là hàm đồng biến nên ta có

$$f(r)\geq f\left(\frac{(1+q)^2(1-2q)}{27}\right)=\frac{1}{81}q^2(2-q)(1+q)^2(6q^3+4q^2-7q+4)(5q^2-2q+2)^2\geq 0$$

Bất đẳng thức chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Bài 18. Cho $x,y,z\geq 0$, chứng minh rằng:

$$x^4(y+z)+y^4(z+x)+z^4(x+y)\leq \frac{1}{12}(x+y+z)^5 \quad (1)$$

Chứng minh

Đặt $p=x+y+z, q=xy+yz+zx$ và $r=xyz$. Không mất tính tổng quát, chuẩn hóa $p=1$.

Ta có: $x^4(y+z)+y^4(z+x)+z^4(x+y)=x^3(xy+xz)+y^3(yz+yx)+z^3(zx+zy)$

$=(x^3+y^3+z^3)(xy+yz+zx)-(x^2+y^2+z^2)xyz=(1-3q+3r)q-(1-2q)r=(1-3q)q+(5q-1)r$

Nếu $q\le\frac{1}{5}$ thì ta có: $(1-3q)q+(5q-1)r\le(1-3q)q=\frac{1}{3}(1-3q)3q\le\frac{1}{3}\left(\frac{1-3q+3q}{2}\right)^2=\frac{1}{12}$

Nếu $q>\frac{1}{5}$ thì ta phải chứng minh $f(q)=(1-3q)q+(5q-1)r\le\frac{1}{12}$

Ta có: $f'(q)=1-6q+5r<5r-q<0$ (do $q\ge 9r$) Vậy $f(q)$ nghịch biến với $q>\frac{1}{5}$,

suy ra $f(q)<f\left(\frac{1}{5}\right)=\frac{2}{25}<\frac{1}{12}$. Với $p=1$, đẳng thức đạt được khi $r=0, 3q=\frac{1}{2}$

Vậy đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=0; y=(2\pm\sqrt{3})z$ và các hoán vị.

Bài 19. Cho $a,b,c\ge 0$. Chứng minh: $\frac{a^3+b^3+c^3}{(a+b)(b+c)(c+a)}+9\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}\ge 5$ (1)

Chứng minh

Đặt $p=a+b+c, q=ab+bc+ca$ và $r=abc$. Không mất tính tổng quát chuẩn hóa $p=1$.

Khi đó bất đẳng thức (1) trở thành $\frac{1-3p+3r}{q-r}+9\frac{q}{1-2q}\ge 5\Leftrightarrow\frac{1}{q-r}+\frac{9q}{1-2q}\ge 8$ (2)

$$\text{VT}(2)\ge\frac{1}{q}+\frac{9q}{1-2q}=2+\frac{1-2q}{q}+\frac{9q}{1-2q}\ge 2+2\sqrt{\frac{1-2q}{q}\cdot\frac{9q}{1-2q}}=2+2\sqrt{9}=8$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow (a,b,c)=\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}x,x,0\right)$ và $(a,b,c)=\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}x,x,0\right)$ và các hoán vị.

Bài 20. Cho $\begin{cases}x,y,z>0\\x+y+z=1\end{cases}$. Chứng minh: $xy+yz+zx\ge 12(x^3+y^3+z^3)(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)$

Chứng minh

Đặt $p=x+y+z=1, q=xy+yz+zx$ và $r=xyz$. Khi đó bất đẳng thức (1) trở thành:

$q\ge 12\left[p(p^2-3q)+3r\right](q^2-2pr)\Leftrightarrow q\ge 12(1-3q+3r)(q^2-2r)$ (2)

Do $pq\ge 9r$ nên $3r\le\frac{q}{3}$, suy ra: $12(1-3q+3r)(q^2-2r)\le 12\left(1-3q+\frac{q}{3}\right)q^2=4q^2(3-8q)$

Để chứng minh (2) ta chỉ cần chứng minh: $4q(3-8q)\le 1\Leftrightarrow(1-4q)(1-8q)\ge 0$

Bất đẳng thức cuối đúng với mọi $q\ge\frac{1}{4}$, vậy ta chỉ cần chứng minh (2) với $0\le q\le\frac{1}{4}$

Bất đẳng thức (2) $\Leftrightarrow q\ge 12q^2(1-3q)+12r(3q^2+6q-2)-72r^2$

Ta có: $3q^2+6q-2<0, \forall 0\le q\le\frac{1}{4}$, do đó ta chỉ cần chứng minh $q\ge 12q^2(1-3q)$ (3)

Thật vậy, theo ***AM – GM*** $12q(1-3q)=4\cdot 3q(1-3q)\le\left[3q+(1-3q)\right]^2=1\Rightarrow$ (3) đúng

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow (x,y,z)\sim\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}};\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}};0\right)$ hoặc $(x,y,z)\sim(1;0;0)$

IV. BÀI TẬP DÀNH CHO BẠN ĐỌC TỰ GIẢI

Bài 1. Cho $x, y, z \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng:

$$x^6 + y^6 + z^6 + 3x^2y^2z^2 \ge 2\left(x^3y^3 + y^3z^3 + z^3x^3\right)$$

Bài 2. Chứng minh: $\dfrac{(a+b+c+d)^2}{16} + \dfrac{4(ab+ac+ad+bc+bd+cd)}{9(abc+abd+acd+bcd)} \ge 1\ \forall a, b, c, d > 0.$

Bài 3. Cho $a, b, c, d \ge 0$ thỏa mãn

$$2(ab+ac+ad+bc+bd+cd) + abc + abd + acd + bcd = 16.$$

Chứng minh rằng: $a+b+c+d \ge \dfrac{2}{3}(ab+ac+ad+bc+bd+cd)$

Bài 4. Cho $a, b, c, d \ge 0$. Chứng minh rằng:

$$a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + 2abcd \ge a^2b^2 + a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 + c^2d^2$$

Bài 5. Cho $a_1, a_2, ..., a_n \ge 0$ $(3 \le n \in \mathbb{N})$ thỏa mãn

$$(n-2)\sum_{1\le i<j\le n} a_ia_j + \sum_{1\le i<j<k\le n} a_ia_ja_k = 4\binom{n}{3}.$$

Chứng minh rằng: $\binom{n}{2}.\sum_{i=1}^{n} a_i \ge \binom{n}{1}\sum_{1\le i<j\le n} a_ia_j$

Bài 6. Cho $a, b, c > 0$ và $m, n, p \in \mathbb{R}$ với $m \ge n + p$. Chứng minh rằng:

$$a^m b^n (a^p - b^p) + b^m c^n (b^p - c^p) + c^m a^n (c^p - a^p) \ge 0$$

Bài 7. Cho $a_1, a_2, ..., a_n > 0$, đặt $A = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i; G = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i}; H = \dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n}\dfrac{1}{a_i}}$.

Chứng minh: $\dfrac{A}{H} \le -1 + \left(\dfrac{A}{G}\right)^n$ nếu n là số chẵn và $\dfrac{A}{H} \le \dfrac{2-n}{n} + \dfrac{2(n-1)}{n}\left(\dfrac{A}{G}\right)^n$ nếu n là số lẻ.

Bài 8. Cho $A = \left(\dfrac{a+b+c+d}{4}\right)^4 - abcd$; $B = \dfrac{(a+b+c+d)^3}{16} - (abc+abd+acd+bcd)$

$$C = \frac{3}{8}(a+b+c+d)^2 - (ab+ac+ad+bc+bd+cd)$$

Chứng minh rằng: $2A + 13B \ge 5C$, $\forall a, b, c, d \ge 0$

Bài 9. Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh của 1 tam giác với diện tích S.

Đặt $A = \sum_{cyc} ab$; $B = \dfrac{1}{2(a^2+b^2+c^2)}$.

Chứng minh rằng: $\dfrac{(A-B)(3A-5B)}{12} \le S^2 \le \dfrac{(A-B)^2}{12}$.

Bài 10. Cho $a, b, c \ge 0$. Chứng minh: $(8a^2+bc)(8b^2+ca)(8c^2+ab) \le (a+b+c)^6$ (1)

Bài 11. Cho $a,b,c\ge 0$. Chứng minh $\frac{ab+4bc+ca}{a^2+bc}+\frac{bc+4ca+ab}{b^2+ca}+\frac{ca+4ab+bc}{c^2+ab}\ge 6$

Bài 12. Cho $\begin{cases}a,b,c\ge 0\\ ab+bc+ca=1\end{cases}$. Chứng minh: $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}-\frac{1}{a+b+c}\ge 2$

Bài 13: Cho $\begin{cases}x,y,z\ge 0\\ x^2+y^2+z^2=1\end{cases}$. Chứng minh: $\frac{9}{4}\le\frac{1}{1+xy}+\frac{1}{1+yz}+\frac{1}{1+zx}\le\frac{27}{4(x+y+z)^2}$

Bài 14: Cho $x,y,z\ge 0$. Chứng minh: $(x+y+z)^5\ge\left(\frac{9}{4\sqrt{6}-9}\right)(x^3+y^3+z^3)(xy+yz+zx)$

Bài 15: Chứng minh rằng nếu a,b,c là độ dài cạnh của một tam giác thì

$$\frac{(a-b)^2}{a^2+ab+b^2}+\frac{(b-c)^2}{b^2+bc+c^2}+\frac{(c-a)^2}{c^2+ca+a^2}\le 2$$

Bài 16: Cho $x,y,z\ge 0$. Chứng minh: $\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}+2\left[\frac{xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)}\right]^{2/3}\ge 2$

Bài 17: Cho $\begin{cases}x,y,z\ge 0\\ xy+yz+zx=3\end{cases}$. Chứng minh rằng: $x^2+y^2+z^2+3xyz\ge 6$

Bài 18. Cho ba số thực dương x,y,z thỏa mãn điều kiện $x+y+z=1$

Chứng minh rằng: $(1-x^2)^2+(1-y^2)^2+(1-z^2)^2\le(1+x)(1+y)(1+z)$

Bài 19. Cho $\begin{cases}x,y,z>0\\ xyz=1\end{cases}$ Chứng minh:

$$\frac{1}{(1+x)^2}+\frac{1}{(1+y)^2}+\frac{1}{(1+z)^2}+\frac{2}{(1+x)(1+y)(1+z)}\ge 1$$

Bài 20. Cho $\begin{cases}x,y,z>0\\ x^2+y^2+z^2=1\end{cases}$ Chứng minh: $(1-xy)(1-yz)(1-zx)\ge\frac{8}{27}$

Bài 21. Cho $\begin{cases}x,y,z>0\\ x+y+z=1\end{cases}$. Chứng minh rằng: $1\le\frac{x}{1-yz}+\frac{y}{1-zx}+\frac{z}{1-xy}\le\frac{9}{8}$

Bài 22. Cho $\begin{cases}x,y,z>0\\ x+y+z=1\end{cases}$. Chứng minh rằng: $(x^2+y^2)(y^2+z^2)(z^2+x^2)\le\frac{1}{32}$

Bài 23. Cho $a,b,c\ge 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{3(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)(a^2+b^2+c^2)}\le\frac{1}{a^2+bc}+\frac{1}{b^2+ca}+\frac{1}{c^2+ab}\le\frac{(a+b+c)^3}{6abc(a^2+b^2+c^2)}$$

Bài 24. Cho $x,y,z\ge 0$ và $x+y+z=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{x^2y}{1+x+y}+\frac{y^2z}{1+y+z}+\frac{z^2x}{1+z+x}\le 1$$

Bài 25. Cho $x,y,z\geq 0$ và $x+y+z=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{x^2y}{4-xy}+\frac{y^2z}{4-yz}+\frac{z^2x}{4-zx}\leq 1.$$

Bài 26. Cho $a,b,c\geq 0$. Chứng minh rằng $k=\sqrt{2}-1$ là hằng số tốt nhất để bất đẳng thức sau đây đúng:

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}}+\frac{8kabc}{(a+b)(b+c)(c+a)}\geq k+1$$

Bài 27. Cho $a,b,c\geq 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2(b+c)}{b^2+c^2}+\frac{b^2(c+a)}{c^2+a^2}+\frac{c^2(a+b)}{a^2+b^2}\geq a+b+c$$

Bài 28. Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq\frac{4a}{a^2+3bc}+\frac{4b}{b^2+3ca}+\frac{4c}{c^2+3ab}$$

Bài 29. [Tạp chí Crux] Cho $a,b,c\geq 0$ thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{9-ab}+\frac{1}{9-bc}+\frac{1}{9-ca}\leq\frac{3}{8}$$

Bài 30. Cho các số thực a,b,c,k thỏa mãn $a,b,c\geq-\frac{k}{3}$.

Chứng minh rằng: $\dfrac{a+2b+k}{c+2b+k}+\dfrac{b+2c+k}{a+2c+k}+\dfrac{c+2a+k}{b+2a+k}\geq 3$

Bài 31. Cho $x,y,z,k>0$. Chứng minh:

$$\sum_{cyc}\frac{x}{y+z}+k\cdot\frac{(x+y+z)(xy+yz+zx)}{x^3+y^3+z^3}\geq 2\sqrt{k}+1$$

Bài 32. Tìm số a nhỏ nhất sao cho bất đẳng thức sau đúng với mọi $x,y,z\geq 0$

$$\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^a\left(\frac{xy+yz+zx}{3}\right)^{\frac{3-a}{2}}\geq\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{8}$$

Bài 34. Cho $a,b,c\geq 0$ thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng: $abc+\dfrac{12}{ab+bc+ca}\geq 5$

Bài 35. Cho $a,b,c\geq 0$ thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=3$. Chứng minh: $12+9abc\geq 7(ab+bc+ca)$

Bài 36. Cho $a,b,c\geq 0$ thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng: $a^2+b^2+c^2+\dfrac{3}{2}abc\geq\dfrac{9}{2}$

Bài 37. Cho $a,b,c\geq 0$ thỏa mãn $ab+bc+ca=3$. Chứng minh: $a^3+b^3+c^3+7abc\geq 10$

Bài 38. Cho $a,b,c\geq 0$ thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng: $\dfrac{2}{a+b+c}+\dfrac{1}{3}\geq\dfrac{3}{ab+bc+ca}$

Bài 39. Cho $a,b,c\geq 0$ thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=3$. Chứng minh: $\dfrac{3}{abc}+5(a+b+c)\geq 18$

§8. ĐỊNH LÝ MUIRHEAD VÀ BẤT ĐẲNG THỨC ĐỐI XỨNG

§8.1. GIỚI THIỆU VỀ ĐỊNH LÝ MUIRHEAD

I. ĐA THỨC ĐỐI XỨNG

Giả sử các biến số $a_1, a_2, \ldots a_n \in \mathbb{R}^+$ và bộ số mũ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{N}$

Ký hiệu: Tập biến số $X = \{a_1, a_2, \ldots a_n\}$; Tập số mũ $\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$

1. Định nghĩa: Đa thức đối xứng S với các biến số của tập X và số mũ của tập α là

$$S_X^{\alpha} = S_{a_1, a_2, \ldots, a_n}^{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n} = a_1^{\alpha_1} . S_{X \backslash \{a_1\}}^{\alpha \backslash \{\alpha_1\}} + \ldots + a_n^{\alpha_1} . S_{X \backslash \{a_n\}}^{\alpha \backslash \{\alpha_1\}}$$

Nhận xét: Nếu nhân khai triển mà không ước lược các số hạng đồng dạng thì trong biểu thức khai triển của S_X^{α} có $n!$ số hạng. Nếu giao hoán bộ $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ hoặc bộ $(a_1, a_2, \ldots a_n)$ thì các S_X^{α} nhận được đều trùng nhau.

2. Ví dụ: ① $S_{a_1}^{\alpha_1} = a_1^{\alpha_1}$. ② $S_{a_1, a_2}^{\alpha_1, \alpha_2} = a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} + a_2^{\alpha_1} a_1^{\alpha_2}$

③ $S_{a_1, a_2, a_3}^{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3} = a_1^{\alpha_1}\left(a_2^{\alpha_2} a_3^{\alpha_3} + a_3^{\alpha_2} a_2^{\alpha_3}\right) + a_2^{\alpha_1}\left(a_1^{\alpha_2} a_3^{\alpha_3} + a_3^{\alpha_2} a_1^{\alpha_3}\right) + a_3^{\alpha_1}\left(a_1^{\alpha_2} a_2^{\alpha_3} + a_2^{\alpha_2} a_1^{\alpha_3}\right)$

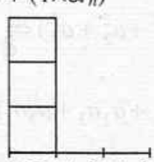
- $S_{a_1, a_2, a_3}^{3,0,0} = 2\left(a_1^3 + a_2^3 + a_3^3\right)$
- $S_{a_1, a_2, a_3}^{2,1,0} = a_1^2(a_2 + a_3) + a_2^2(a_3 + a_1) + a_3^2(a_1 + a_2)$
- $S_{a_1, a_2, a_3}^{1,1,1} = 6a_1 a_2 a_3$

II. LƯỢC ĐỒ YOUNG VÀ SO SÁNH 2 ĐA THỨC ĐỐI XỨNG

Xét các đa thức đối xứng với $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{N}$. Biểu diễn $S_{a_1, a_2, \ldots, a_n}^{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n}$ là tổng diện tích của các hình chữ nhật kích thước $(1 \times \alpha_i)$, tức là $S = (1 \times \alpha_1) + (1 \times \alpha_2) + \ldots + (1 \times \alpha_n)$

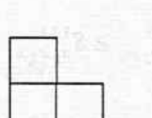
1. Ví dụ:

① • $S_{a_1, a_2, a_3}^{3,0,0} = 2\left(a_1^3 + a_2^3 + a_3^3\right) \Leftrightarrow$



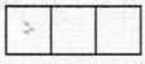
(1x3) (1x0) (1x0)

• $S_{a_1, a_2, a_3}^{2,1,0} = a_1^2(a_2 + a_3) + a_2^2(a_3 + a_1) + a_3^2(a_1 + a_2) \Leftrightarrow$



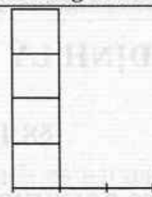
(1x2) (1x1) (1x0)

• $S_{a_1, a_2, a_3}^{1,1,1} = 6a_1 a_2 a_3 \Leftrightarrow$



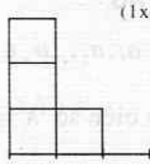
(1x1)(1x1)(1x1)

② • $S^{4,0,0}_{a_1,a_2,a_3} = 2\left(a_1^4 + a_2^4 + a_3^4\right) \Leftrightarrow$



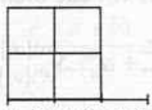
(1x4) (1x1) (1x0)

• $S^{3,1,0}_{a_1,a_2,a_3} = a_1^3(a_2 + a_3) + a_2^3(a_3 + a_1) + a_3^3(a_1 + a_2) \Leftrightarrow$



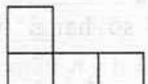
(1x3) (1x1) (1x0)

• $S^{2,2,0}_{a_1,a_2,a_3} = 2\left(a_1^2a_2^2 + a_2^2a_3^2 + a_3^2a_1^2\right) \Leftrightarrow$



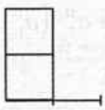
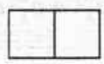
(1x2) (1x2) (1x0)

• $S^{2,1,1}_{a_1,a_2,a_3} = 2a_1a_2a_3(a_1 + a_2 + a_3) \Leftrightarrow$

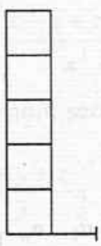
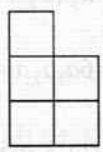


(1x2) (1x1) (1x1)

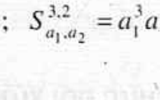
2. So sánh hình học lược đồ Young và bất đẳng thức đối xứng:

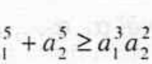
• $S^{2,0}_{a_1,a_2} = a_1^2 + a_2^2 \Leftrightarrow$  ; $S^{1,1}_{a_1,a_2} = 2a_1\,a_2 \Leftrightarrow$ 

Nhìn vào lược đồ ***Young*** suy ra: $S^{2,0}_{a_1,a_2} \ge S^{1,1}_{a_1,a_2} \Leftrightarrow a_1^2 + a_2^2 \ge 2a_1a_2$

• $S^{5,0}_{a_1,a_2} = a_1^5 + a_2^5 \Leftrightarrow$  ; $S^{3,2}_{a_1,a_2} = a_1^3a_2^2 + a_2^3a_1^2 \Leftrightarrow$ 

Nhìn vào lược đồ ***Young*** suy ra: $S^{5,0}_{a_1,a_2} \ge S^{3,2}_{a_1,a_2} \Leftrightarrow a_1^5 + a_2^5 \ge a_1^3a_2^2 + a_2^3a_1^2$

• $S^{2,0,0}_{a_1,a_2,a_3} = 2(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) \Leftrightarrow$  ;

$S^{1,1,0}_{a_1,a_2,a_3} = 2(a_1\,a_2 + a_2a_3 + a_3a_1) \Leftrightarrow$ 

Nhìn vào lược đồ ***Young*** $\Rightarrow$ $S^{2,0,0}_{a_1,a_2,a_3} \ge S^{1,1,0}_{a_1,a_2,a_3} \Leftrightarrow a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \ge a_1\,a_2 + a_2a_3 + a_3a_1$

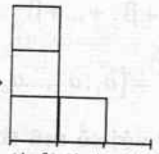
• $S^{3,0,0}_{a_1,a_2,a_3} \ge S^{2,1,0}_{a_1,a_2,a_3} \ge S^{1,1,1}_{a_1,a_2,a_3}$ • $S^{4,0,0}_{a_1,a_2,a_3} \ge S^{3,1,0}_{a_1,a_2,a_3} \ge S^{2,1,1}_{a_1,a_2,a_3}$

• ***Sự hạn chế của lược đồ Young:***

Giả sử $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ và $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ là 2 bộ số mũ đồng bậc tức là: $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n$. Khi đó nếu trong hình biểu diễn bằng lược đồ ***Young*** số các hình chữ nhật (1×0) của $S^{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n}_{a_1,a_2,\ldots,a_n}$ và $S^{\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n}_{a_1,a_2,\ldots,a_n}$ là bằng nhau thì chưa so sánh được 2 đa thức đối xứng này với nhau bằng lược đồ ***Young***.

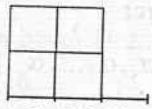
Ví dụ:

• $S^{3,1,0}_{a_1,a_2,a_3} = a_1^3(a_2+a_3) + a_2^3(a_3+a_1) + a_3^3(a_1+a_2) \Leftrightarrow$



(1x3) (1x1) (1x0)

• $S^{2,2,0}_{a_1,a_2,a_3} = 2(a_1^2a_2^2 + a_2^2a_3^2 + a_3^2a_1^2) \Leftrightarrow$



(1x2) (1x2) (1x0)

Chúng ta sẽ giải quyết sự bế tắc này bằng định lý ***Muirhead*** sau đây:

III. SO SÁNH CÁC ĐA THỨC ĐỐI XỨNG ĐỒNG BẬC

1. Trường hợp $n = 3$

Xét 2 bộ số mũ $\begin{cases} \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3); \alpha_i \in \mathbb{N} \\ \beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3); \ \beta_i \in \mathbb{N} \end{cases}$ với $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3$

Ta nói rằng bộ α trội hơn bộ β và kí hiệu là $\alpha \succ \beta$ nếu như có thể từ α biến thành β bằng cách thực hiện một số lần với 3 phép toán được mô tả theo sơ đồ sau:

$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$

① $\to (\alpha_1 - 1, \alpha_2 + 1, \alpha_3)$ ② $\to (\alpha_1 - 1, \alpha_2, \alpha_3 + 1)$ ③ $\to (\alpha_1, \alpha_2 - 1, \alpha_3 + 1)$

• ***Điều kiện tương đương:***

Cho $\begin{cases} \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \\ \beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \end{cases}$ với $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3$. Khi đó nếu $\alpha \succ \beta$ tức là có thể sắp xếp α, β thoả mãn các điều kiện: $\begin{cases} \alpha_1 \ge \alpha_2 \ge \alpha_3; \beta_1 \ge \beta_2 \ge \beta_3 \\ \alpha_1 \ge \beta_1; \alpha_1 + \alpha_2 \ge \beta_1 + \beta_2 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \end{cases}$

• ***Quy tắc so sánh:*** Nếu $\alpha \succ \beta$ thì $S^\alpha_X = S^{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3}_{a_1,a_2,a_3} \ge S^{\beta_1,\beta_2,\beta_3}_{a_1,a_2,a_3} = S^\beta_X$

2. Định lý Muirhead với số mũ tự nhiên:

Xét các biến số $a_1, a_2, \ldots a_n \in \mathbb{R}^+$ và $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n \in \mathbb{N}$

Giả sử $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ và $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ là 2 bộ số mũ đồng bậc tức là:

$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n$. Khi đó nếu $\alpha \succ \beta$ tức là có thể sắp xếp các bộ α, β thoả mãn các điều kiện:

$$\begin{cases}\alpha_1 \ge \alpha_2 \ge \ldots \alpha_n; \beta_1 \ge \beta_2 \ge \ldots \beta_n \\ \alpha_1 + \ldots + \alpha_k \ge \beta_1 + \ldots + \beta_k \ \forall k = \overline{1, n-1} \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n\end{cases} \text{ thì } S_X^\alpha = S_{a_1,a_2,\ldots,a_n}^{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n} \ge S_{a_1,a_2,\ldots,a_n}^{\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n} = S_X^\beta$$

Đảo lại: Nếu mọi bộ $X = \{a_1, a_2, \ldots a_n\}$ gồm n số thực dương ta có $S_X^\alpha \ge S_X^\beta$ thì $\alpha \succ \beta$

3. Định lý Muirhead với số mũ thực:

Xét các biến số $a_1, a_2, \ldots a_n \in \mathbb{R}^+$ và $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n \in \mathbb{R}$

Giả sử $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ và $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ là 2 bộ số mũ đồng bậc tức là: $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n$. Khi đó nếu $\alpha \succ \beta$ tức là có thể sắp xếp α, β thoả mãn các điều kiện: $\begin{cases}\alpha_1 \ge \alpha_2 \ge \ldots \alpha_n; \beta_1 \ge \beta_2 \ge \ldots \beta_n \\ \alpha_1 + \ldots + \alpha_k \ge \beta_1 + \ldots + \beta_k \ \forall k = \overline{1, n-1} \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n\end{cases}$ thì

$$S_X^\alpha = S_{a_1,a_2,\ldots,a_n}^{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n} \ge S_{a_1,a_2,\ldots,a_n}^{\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n} = S_X^\beta$$

Đảo lại: Nếu mọi bộ $X = \{a_1, a_2, \ldots a_n\}$ gồm n số thực dương ta có $S_X^\alpha \ge S_X^\beta$ thì $\alpha \succ \beta$

Chứng minh: Ta sẽ chứng minh bằng qui nạp

- Với $n = 2$: Nếu $\begin{cases}\alpha_1 \ge \alpha_2; \beta_1 \ge \beta_2 \\ \alpha_1 \ge \beta_1; \alpha_1 + \alpha_2 = \beta_1 + \beta_2\end{cases}$ thì $S_{a_1,a_2}^{\alpha_1,\alpha_2} \ge S_{a_1,a_2}^{\beta_1,\beta_2}$

Ta có: $S_{a_1,a_2}^{\alpha_1,\alpha_2} - S_{a_1,a_2}^{\beta_1,\beta_2} = \left(a_1^{\alpha_1}a_2^{\alpha_2} + a_1^{\alpha_2}a_2^{\alpha_1}\right) - \left(a_1^{\beta_1}a_2^{\beta_2} + a_1^{\beta_2}a_2^{\beta_1}\right)$

$$= (a_1a_2)^{\alpha_2}\left(a_1^{\alpha_1-\beta_1} - a_2^{\alpha_1-\beta_1}\right)\left(a_1^{\alpha_1-\beta_2} - a_2^{\alpha_1-\beta_2}\right) \ge 0 \Rightarrow \text{(đpcm)}$$

- Với $n = 3$: Nếu $\begin{cases}\alpha_1 \ge \alpha_2 \ge \alpha_3; \beta_1 \ge \beta_2 \ge \beta_3 \\ \alpha_1 \ge \beta_1; \alpha_1 + \alpha_2 \ge \beta_1 + \beta_2 \\ \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3\end{cases}$ thì $S_{a_1,a_2,a_3}^{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3} \ge S_{a_1,a_2,a_3}^{\beta_1,\beta_2,\beta_3}$

Gọi I_3 là một hoán vị (i_1, i_2, i_3) của bộ số (1, 2, 3). Sử dụng kết quả với $n = 2$ ta có:

$$S_{a_1,a_2,a_3}^{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3} = \sum_{I_3} a_{i_3}^{\alpha_3}.S_{a_{i_1},a_{i_2}}^{\alpha_1,\alpha_2} \ge \sum_{I_3} a_{i_3}^{\alpha_3}.S_{a_{i_1},a_{i_2}}^{\beta_1,\alpha_1+\alpha_2-\beta_1} = S_{a_{i_1},a_{i_2},a_{i_3}}^{\beta_1,\alpha_1+\alpha_2-\beta_1,\alpha_3}$$

$$= \sum_{I_3} a_{i_1}^{\beta_1}.S_{a_{i_2},a_{i_3}}^{\alpha_1+\alpha_2-\beta_1,\alpha_3} \ge \sum_{I_3} a_{i_1}^{\beta_1}.S_{a_{i_2},a_{i_3}}^{\beta_2,\beta_3} = S_{a_{i_1},a_{i_2},a_{i_3}}^{\beta_1,\beta_2,\beta_3} = S_{a_1,a_2,a_3}^{\beta_1,\beta_2,\beta_3}$$

- Với $4 \le n \in \mathbb{N}$: Giả sử bất đẳng thức đúng với $n = k$, tức là ta có mệnh đề:

$$\text{Nếu } \begin{cases} \alpha_1 \ge \alpha_2 \ge ... \ge \alpha_k ; \beta_1 \ge \beta_2 \ge ... \ge \beta_k \\ \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_p \ge \beta_1 + \beta_2 + ... + \beta_p \quad \forall p = \overline{1, k-1} \\ \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_k = \beta_1 + \beta_2 + ... + \beta_k \end{cases} \text{ thì } S^{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k}_{a_1, a_2, ..., a_k} \ge S^{\beta_1, \beta_2, ..., \beta_k}_{a_1, a_2, ..., a_k}$$

Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức đúng với $n = k + 1$, tức là ta có mệnh đề:

$$\text{Nếu } \begin{cases} \alpha_1 \ge \alpha_2 \ge ... \ge \alpha_k \ge \alpha_{k+1} ; \beta_1 \ge \beta_2 \ge ... \ge \beta_k \ge \beta_{k+1} \\ \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_p \ge \beta_1 + \beta_2 + ... + \beta_p \quad \forall p = \overline{1, k} \\ \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_k + \alpha_{k+1} = \beta_1 + \beta_2 + ... + \beta_k + \beta_{k+1} \end{cases} \text{ thì } S^{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{k+1}}_{a_1, a_2, ..., a_{k+1}} \ge S^{\beta_1, \beta_2, ..., \beta_{k+1}}_{a_1, a_2, ..., a_{k+1}}$$

Gọi I_{k+1} là một hoán vị $(i_1, i_2, ..., i_{k+1})$ của bộ số $(1, 2, ..., k+1)$.

Biến đổi và sử dụng giả thiết qui nạp ta có:

$$S^{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k, \alpha_{k+1}}_{a_1, a_2, ..., a_k, a_{k+1}} = \sum_{I_{k+1}} a_{i_{k+1}}^{\alpha_{k+1}} S^{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k}_{a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{ik}} \ge \sum_{I_{k+1}} a_{i_{k+1}}^{\alpha_{k+1}} S^{\beta_1, \alpha_1 + \alpha_2 - \beta_1, \alpha_3, ..., \alpha_k}_{a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{ik}}$$

$$= S^{\beta_1, \alpha_1 + \alpha_2 - \beta_1, \alpha_3, ..., \alpha_k, \alpha_{k+1}}_{a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{ik}, a_{ik+1}} = \sum_{I_{k+1}} a_{i_1}^{\beta_1} S^{\alpha_1 + \alpha_2 - \beta_1, \alpha_3, ..., \alpha_k, \alpha_{k+1}}_{a_{i2}, a_{i3}, ..., a_{ik}, a_{ik+1}}$$

$$\ge \sum_{I_{k+1}} a_{i_1}^{\beta_1} S^{\beta_2, \beta_3, ..., \beta_k, \beta_{k+1}}_{a_{i2}, a_{i3}, ..., a_{ik}, a_{ik+1}} = S^{\beta_1, \beta_2, ..., \beta_k, \beta_{k+1}}_{a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{ik}, a_{ik+1}} = S^{\beta_1, \beta_2, ..., \beta_{k+1}}_{a_1, a_2, ..., a_{k+1}}$$

Theo nguyên lý qui nạp bất đẳng thức ***Muirhead*** được chứng minh.

4. Một số ví dụ minh họa quan hệ giữa Muirhead và AM – GM

*Dùng lược đồ Young và Muirhead dự đoán các bất đẳng thức và chứng minh bằng **AM – GM***

Ví dụ 1. Cho $a, b, c > 0$. So sánh 2 biểu thức sau và chứng minh kết quả so sánh:

$$S_1 = 2(a^5 + b^5 + c^5);\ S_2 = a^3\left(b^{\frac{3}{2}}c^{\frac{1}{2}} + c^{\frac{3}{2}}b^{\frac{1}{2}}\right) + b^3\left(c^{\frac{3}{2}}a^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{3}{2}}c^{\frac{1}{2}}\right) + c^3\left(a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{3}{2}}a^{\frac{1}{2}}\right)$$

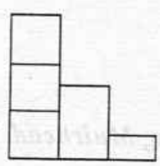
Chứng minh

Chúng ta có thể thấy bất đẳng thức trên đúng bằng lược đồ ***Young***

• $S^{5,0,0}_{a,b,c} = 2(a^5 + b^5 + c^5) \Leftrightarrow$

(1×5) (1×0) (1×0)

$$S^{3,\frac{3}{2},\frac{1}{2}}_{a,b,c} = a^3\left(b^{\frac{3}{2}}c^{\frac{1}{2}} + c^{\frac{3}{2}}b^{\frac{1}{2}}\right) + b^3\left(c^{\frac{3}{2}}a^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{3}{2}}c^{\frac{1}{2}}\right) + c^3\left(a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{3}{2}}a^{\frac{1}{2}}\right) \Leftrightarrow$$



$(1\times 3)(1\times \frac{3}{2})(1\times \frac{1}{2})$

Từ lược đồ Young ta có $S^{5,0,0}_{a,b,c} \ge S^{3,\frac{3}{2},\frac{1}{2}}_{a,b,c}$. Ta sẽ chứng minh kết quả này bằng ***AM - GM***

$$+\begin{cases} a^5+a^5+a^5+a^5+a^5+a^5+b^5+b^5+b^5+c^5 \ge 10.\sqrt[10]{a^{30}.b^{15}.c^5}=10a^3b^{\frac{3}{2}}c^{\frac{1}{2}} \\ a^5+a^5+a^5+a^5+a^5+a^5+c^5+c^5+c^5+b^5 \ge 10.\sqrt[10]{a^{30}.c^{15}.b^5}=10a^3c^{\frac{3}{2}}b^{\frac{1}{2}} \\ b^5+b^5+b^5+b^5+b^5+b^5+c^5+c^5+c^5+a^5 \ge 10.\sqrt[10]{b^{30}.c^{15}.a^5}=10b^3c^{\frac{3}{2}}a^{\frac{1}{2}} \\ b^5+b^5+b^5+b^5+b^5+b^5+a^5+a^5+a^5+c^5 \ge 10.\sqrt[10]{b^{30}.a^{15}.c^5}=10b^3a^{\frac{3}{2}}c^{\frac{1}{2}} \\ c^5+c^5+c^5+c^5+c^5+c^5+a^5+a^5+a^5+b^5 \ge 10.\sqrt[10]{c^{30}.a^{15}.b^5}=10c^3a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{1}{2}} \\ c^5+c^5+c^5+c^5+c^5+c^5+b^5+b^5+b^5+a^5 \ge 10.\sqrt[10]{c^{30}.b^{15}.a^5}=10c^3b^{\frac{3}{2}}a^{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 20(a^5+b^5+c^5) \ge 10\left[a^3\left(b^{\frac{3}{2}}c^{\frac{1}{2}}+c^{\frac{3}{2}}b^{\frac{1}{2}}\right)+b^3\left(c^{\frac{3}{2}}a^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{3}{2}}c^{\frac{1}{2}}\right)+c^3\left(a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{3}{2}}a^{\frac{1}{2}}\right)\right]$$

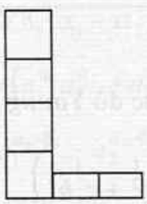
$$\Leftrightarrow\ 2(a^5+b^5+c^5) \ge a^3\left(b^{\frac{3}{2}}c^{\frac{1}{2}}+c^{\frac{3}{2}}b^{\frac{1}{2}}\right)+b^3\left(c^{\frac{3}{2}}a^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{3}{2}}c^{\frac{1}{2}}\right)+c^3\left(a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{3}{2}}a^{\frac{1}{2}}\right)$$

Ví dụ 2. Cho $a, b, c > 0$. So sánh 2 biểu thức sau:

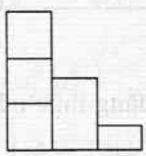
$$S_1=2\left(a^4b^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{2}}+b^4c^{\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{2}}+c^4a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}\right);\ S_2=a^3\left(b^{\frac{3}{2}}c^{\frac{1}{2}}+c^{\frac{3}{2}}b^{\frac{1}{2}}\right)+b^3\left(c^{\frac{3}{2}}a^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{3}{2}}c^{\frac{1}{2}}\right)+c^3\left(a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{3}{2}}a^{\frac{1}{2}}\right)$$

Chứng minh

Chúng ta có thể thấy không thể so sánh $S_{a,b,c}^{4,\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$ với $S_{a,b,c}^{3,\frac{3}{2},\frac{1}{2}}$ được bằng lược đồ ***Young***

$S_{a,b,c}^{4,\frac{1}{2},\frac{1}{2}} \Leftrightarrow$ 

$(1\times4)\left(1\times\frac{1}{2}\right)\left(1\times\frac{1}{2}\right)$

$S_{a,b,c}^{3,\frac{3}{2},\frac{1}{2}} \Leftrightarrow$ 

$(1\times3)(1\times\frac{3}{2})(1\times\frac{1}{2})$

Sử dụng ***Muirhead*** ta dự đoán $S_{a,b,c}^{4,\frac{1}{2},\frac{1}{2}} \ge S_{a,b,c}^{3,\frac{3}{2},\frac{1}{2}}$ và chứng minh bằng ***AM – GM***

$$2\left(a^4b^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{2}}+b^4c^{\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{2}}+c^4a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}\right)=2.a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{2}}\left(a^{\frac{7}{2}}+b^{\frac{7}{2}}+c^{\frac{7}{2}}\right)$$

$$+\begin{cases} a^{\frac{7}{2}}+a^{\frac{7}{2}}+a^{\frac{7}{2}}+a^{\frac{7}{2}}+a^{\frac{7}{2}}+b^{\frac{7}{2}}+b^{\frac{7}{2}} \ge 7.a^{\frac{5}{2}}b \\ a^{\frac{7}{2}}+a^{\frac{7}{2}}+a^{\frac{7}{2}}+a^{\frac{7}{2}}+a^{\frac{7}{2}}+c^{\frac{7}{2}}+c^{\frac{7}{2}} \ge 7.a^{\frac{5}{2}}c \\ b^{\frac{7}{2}}+b^{\frac{7}{2}}+b^{\frac{7}{2}}+b^{\frac{7}{2}}+b^{\frac{7}{2}}+c^{\frac{7}{2}}+c^{\frac{7}{2}} \ge 7.b^{\frac{5}{2}}c \\ b^{\frac{7}{2}}+b^{\frac{7}{2}}+b^{\frac{7}{2}}+b^{\frac{7}{2}}+b^{\frac{7}{2}}+a^{\frac{7}{2}}+a^{\frac{7}{2}} \ge 7.b^{\frac{5}{2}}a \\ c^{\frac{7}{2}}+c^{\frac{7}{2}}+c^{\frac{7}{2}}+c^{\frac{7}{2}}+c^{\frac{7}{2}}+a^{\frac{7}{2}}+a^{\frac{7}{2}} \ge 7.c^{\frac{5}{2}}a \\ c^{\frac{7}{2}}+c^{\frac{7}{2}}+c^{\frac{7}{2}}+c^{\frac{7}{2}}+c^{\frac{7}{2}}+b^{\frac{7}{2}}+b^{\frac{7}{2}} \ge 7.c^{\frac{5}{2}}b \end{cases}$$

$$\Rightarrow 14\left(a^{\frac{7}{2}}+b^{\frac{7}{2}}+c^{\frac{7}{2}}\right) \ge 7\left(a^{\frac{5}{2}}b+a^{\frac{5}{2}}c+b^{\frac{5}{2}}c+b^{\frac{5}{2}}a+c^{\frac{5}{2}}a+c^{\frac{5}{2}}b\right)$$

$$\Rightarrow 2\left(a^{\frac{7}{2}}+b^{\frac{7}{2}}+c^{\frac{7}{2}}\right) \ge \left(a^{\frac{5}{2}}b+a^{\frac{5}{2}}c+b^{\frac{5}{2}}c+b^{\frac{5}{2}}a+c^{\frac{5}{2}}a+c^{\frac{5}{2}}b\right)$$

$$\Rightarrow 2.a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{2}}\left(a^{\frac{7}{2}}+b^{\frac{7}{2}}+c^{\frac{7}{2}}\right) \ge a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{2}}\left(a^{\frac{5}{2}}b+a^{\frac{5}{2}}c+b^{\frac{5}{2}}c+b^{\frac{5}{2}}a+c^{\frac{5}{2}}a+c^{\frac{5}{2}}b\right)$$

$$= a^3\left(b^{\frac{3}{2}}c^{\frac{1}{2}}+c^{\frac{3}{2}}b^{\frac{1}{2}}\right)+b^3\left(c^{\frac{3}{2}}a^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{3}{2}}c^{\frac{1}{2}}\right)+c^3\left(a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{3}{2}}a^{\frac{1}{2}}\right)$$

Ví dụ 3. Cho $a, b, c > 0$. Sử dụng bất đẳng thức ***AM – GM***, chứng minh rằng:

$$a^3\left(b^{\frac{3}{2}}c^{\frac{1}{2}}+c^{\frac{3}{2}}b^{\frac{1}{2}}\right)+b^3\left(c^{\frac{3}{2}}a^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{3}{2}}c^{\frac{1}{2}}\right)+c^3\left(a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{3}{2}}a^{\frac{1}{2}}\right) \ge$$

$$\ge a^{\frac{8}{3}}\left(b^{\frac{5}{3}}c^{\frac{2}{3}}+c^{\frac{5}{3}}b^{\frac{2}{3}}\right)+b^{\frac{8}{3}}\left(c^{\frac{5}{3}}a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{5}{3}}c^{\frac{2}{3}}\right)+c^{\frac{8}{3}}\left(a^{\frac{5}{3}}b^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{5}{3}}a^{\frac{2}{3}}\right)$$

Chứng minh

Bất đẳng thức đã cho có dạng $S_{a,b,c}^{3,\frac{3}{2},\frac{1}{2}} \ge S_{a,b,c}^{\frac{8}{3},\frac{5}{3},\frac{2}{3}}$ (1)

• ***Bước 1:*** Chứng minh $S_{a,b,c}^{3,\frac{3}{2},\frac{1}{2}} \ge S_{a,b,c}^{3,\frac{4}{3},\frac{2}{3}}$ (2)

Bổ đề: $x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{3}{2}}x^{\frac{1}{2}} \ge x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{4}{3}}x^{\frac{2}{3}} \quad \forall x, y > 0$

Thật vậy theo bất đẳng thức ***AM – GM*** ta có

$$+\begin{cases} x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{3}{2}}x^{\frac{1}{2}} \ge 6x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{2}{3}} \\ y^{\frac{3}{2}}x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{3}{2}}x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{3}{2}}x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{3}{2}}x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{3}{2}}x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{1}{2}} \ge 6y^{\frac{4}{3}}x^{\frac{2}{3}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 6\left(x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{3}{2}}x^{\frac{1}{2}}\right)\ge 6\left(x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{4}{3}}x^{\frac{2}{3}}\right)\Rightarrow x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{3}{2}}x^{\frac{1}{2}}\ge x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{4}{3}}x^{\frac{2}{3}}$$

• ***Bước 2:*** Ta sẽ chứng minh $S_{a,b,c}^{3,\frac{4}{3},\frac{2}{3}} \ge S_{a,b,c}^{\frac{8}{3},\frac{5}{3},\frac{2}{3}}$ (3)

Bổ đề: $x^3y^{\frac{4}{3}}+y^3x^{\frac{4}{3}}\ge x^{\frac{8}{3}}y^{\frac{5}{3}}+y^{\frac{8}{3}}x^{\frac{5}{3}}\quad \forall x,y>0$

Thật vậy theo bất đẳng thức ***AM – GM*** ta có

$$+\begin{cases} x^3y^{\frac{4}{3}}+x^3y^{\frac{4}{3}}+x^3y^{\frac{4}{3}}+x^3y^{\frac{4}{3}}+y^3x^{\frac{4}{3}}\ge 5.x^{\frac{8}{3}}y^{\frac{5}{3}}\\ y^3x^{\frac{4}{3}}+y^3x^{\frac{4}{3}}+y^3x^{\frac{4}{3}}+y^3x^{\frac{4}{3}}+x^3y^{\frac{4}{3}}\ge 5.y^{\frac{8}{3}}x^{\frac{5}{3}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 5\left(x^3y^{\frac{4}{3}}+y^3x^{\frac{4}{3}}\right)\ge 5\left(x^{\frac{8}{3}}y^{\frac{5}{3}}+y^{\frac{8}{3}}x^{\frac{5}{3}}\right)\Leftrightarrow x^3y^{\frac{4}{3}}+y^3x^{\frac{4}{3}}\ge x^{\frac{8}{3}}y^{\frac{5}{3}}+y^{\frac{8}{3}}x^{\frac{5}{3}}$$

Từ đó (2) và (3) đúng và suy ra (1) được chứng minh tức là $S_{a,b,c}^{3,\frac{3}{2},\frac{1}{2}} \ge S_{a,b,c}^{\frac{8}{3},\frac{5}{3},\frac{2}{3}}$

5.12. Cho $a, b, c, d > 0$. Chứng minh rằng:

$$\mathbf{T}_{\mathbf{a,b,c,d}}^{8,\frac{9}{2},\frac{5}{2},\frac{1}{3}}=\sum_{a,b,c,d}a^8\left(b^{\frac{9}{2}}c^{\frac{5}{2}}d^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{9}{2}}d^{\frac{5}{2}}c^{\frac{1}{3}}+c^{\frac{9}{2}}b^{\frac{5}{2}}d^{\frac{1}{3}}+c^{\frac{9}{2}}d^{\frac{5}{2}}b^{\frac{1}{3}}+d^{\frac{9}{2}}b^{\frac{5}{2}}c^{\frac{1}{3}}+d^{\frac{9}{2}}c^{\frac{5}{2}}b^{\frac{1}{3}}\right)\ge$$

$$\ge T_{a,b,c,d}^{7,\frac{16}{3},\frac{13}{6},\frac{5}{6}}=\sum_{a,b,c,d}a^7\left(b^{\frac{16}{3}}c^{\frac{13}{6}}d^{\frac{5}{6}}+b^{\frac{16}{3}}d^{\frac{13}{6}}c^{\frac{5}{6}}+c^{\frac{16}{3}}b^{\frac{13}{6}}d^{\frac{5}{6}}+c^{\frac{16}{3}}d^{\frac{13}{6}}b^{\frac{5}{6}}+d^{\frac{16}{3}}b^{\frac{13}{6}}c^{\frac{5}{6}}+d^{\frac{16}{3}}c^{\frac{13}{6}}b^{\frac{5}{6}}\right)$$

Hướng dẫn

• ***Bước 1:*** Chứng minh: $T_{a,b,c,d}^{8,\frac{9}{2},\frac{5}{2},\frac{1}{3}} \ge T_{a,b,c,d}^{7,\frac{11}{2},\frac{5}{2},\frac{1}{3}}$

Bổ đề: $x^8y^{\frac{9}{2}}+y^8x^{\frac{9}{2}}\ge x^7y^{\frac{11}{2}}+y^7x^{\frac{11}{2}},\ \forall x,y>0$

• ***Bước 2:*** Chứng minh: $T_{a,b,c,d}^{7,\frac{11}{2},\frac{5}{2},\frac{1}{3}} \ge T_{a,b,c,d}^{7,\frac{16}{3},\frac{8}{3},\frac{1}{3}}$

Bổ đề: $x^{\frac{11}{2}}y^{\frac{5}{2}}+y^{\frac{11}{2}}x^{\frac{5}{2}}\ge x^{\frac{16}{3}}y^{\frac{8}{3}}+y^{\frac{16}{3}}x^{\frac{8}{3}},\ \forall x,y>0$

• ***Bước 3:*** Chứng minh: $T_{a,b,c,d}^{7,\frac{16}{3},\frac{8}{3},\frac{1}{3}} \ge T_{a,b,c,d}^{7,\frac{16}{3},\frac{13}{6},\frac{5}{6}}$

Bổ đề: $x^{\frac{8}{3}}y^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{8}{3}}x^{\frac{1}{3}}\ge x^{\frac{13}{6}}y^{\frac{5}{6}}+y^{\frac{13}{6}}x^{\frac{5}{6}},\ \forall x,y>0$

Kết luận: $T_{a,b,c,d}^{8,\frac{9}{2},\frac{5}{2},\frac{1}{3}} \ge T_{a,b,c,d}^{7,\frac{11}{2},\frac{5}{2},\frac{1}{3}} \ge T_{a,b,c,d}^{7,\frac{16}{3},\frac{8}{3},\frac{1}{3}} \ge T_{a,b,c,d}^{7,\frac{16}{3},\frac{13}{6},\frac{5}{6}}$

IV. MỘT SỐ DẠNG KÍ HIỆU ĐA THỨC ĐỐI XỨNG TRONG CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

Giả sử $a_1, a_2, ... a_n \in \mathbb{R}^+$ và $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$ với $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq ... \geq \alpha_n$. Khi đó ta có:

1. Kí hiệu gốc: $S_X^{\alpha} = S_{a_1, a_2, ..., a_n}^{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n} = a_1^{\alpha_1} . S_{X \setminus \{a_1\}}^{\alpha \setminus \{\alpha_1\}} + ... + a_n^{\alpha_1} . S_{X \setminus \{a_n\}}^{\alpha \setminus \{\alpha_1\}} = \sum_{sym} a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} ... a_n^{\alpha_n}$

2. Kí hiệu mới: $S_X^{\alpha} = S(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$; $d(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) = \frac{1}{n!} S(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$

Đặc biệt nếu $\alpha_1, \alpha_2, ... \alpha_n$ là các số tự nhiên từ 0 đến 9 thì kí hiệu mới được đổi là:

$$S_{\alpha_1 \alpha_2 ... \alpha_n} = S(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n); \quad d_{\alpha_1 \alpha_2 ... \alpha_n} = \frac{1}{n!} S_{\alpha_1 \alpha_2 ... \alpha_n}$$

Ngoài ra nếu $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq ... \geq \alpha_k > \alpha_{k+1} = \alpha_{k+2} = ... = \alpha_n = 0$ thì $S_{\alpha_1 \alpha_2 ... \alpha_n} = S_{\alpha_1 \alpha_2 ... \alpha_k}$

Trường hợp đặc biệt cho 3 biến số *a, b, c*: $S_3 = \sum_{sym} a^3 = 2(a^3 + b^3 + c^3)$

$$S_{21} = \sum_{sym} a^2 b = a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b); \; S_{111} = \sum_{sym} abc = 6abc$$

3. Thực hiện phép biến đổi đa thức đối xứng bằng kí hiệu

3.1. Phép cộng các đa thức đối xứng giống nhau

Ta xét một ví dụ minh họa cho phép cộng: $(a+b)+(b+c)+(c+a) = 2(a+b+c)$

Để ý rằng vế trái là tổng của 3 đa thức đối xứng S_1 xét trên 3 cặp biến $(a;b),(b;c),(c;a)$ còn vế phải là 1 đa thức đối xứng S_1 xét trên 3 biến *a, b, c*. Từ đó suy ra:

Qui tắc: Khi cộng các đa thức đối xứng giống nhau xét trên tất cả các hoán vị của một vài biến số thì nhận được một đa thức đối xứng đồng bậc xét trên tất cả các biến số.

3.2. Phép nhân 2 đa thức đối xứng

$$S(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \times S(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n) = \sum_{(i_1, i_2, ..., i_n) \in \sigma(1,2,...,n)} S(\alpha_1 + \beta_{i_1}; \alpha_2 + \beta_{i_2}; ...; \alpha_n + \beta_{i_n})$$

4.Hệ quả: Phép nhân các đa thức đối xứng với 3 biến số

$(a+b+c)(ab+bc+ca) = \frac{1}{2} S_1 \cdot \frac{1}{2} S_{11} = S_{21} + \frac{1}{2} S_{111}$

$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2) = \frac{1}{2} S_1 \cdot \frac{1}{2} S_2 = \frac{1}{2} S_3 + S_{21}$; $(a+b)(b+c)(c+a) = S_{21} + \frac{1}{3} S_{111}$;

$(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) = -\frac{1}{2} S_3 + S_{21} - \frac{1}{3} S_{111}$

$(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) = S_{22} - \frac{1}{2} S_4$

$(a+b+c)^2 = \left(\frac{1}{2} S_1\right)^2 = \frac{1}{4}(2S_2 + 4S_{11}) = \frac{1}{2} S_2 + S_{11}$

$(a+b+c)^3 = \left(\frac{1}{2} S_1\right)^3 = \frac{1}{8}(4S_3 + 24S_{21} + 8S_{111}) = \frac{1}{2} S_3 + 3S_{21} + S_{111}$

$(a^2b + b^2c + c^2a + ab^2 + bc^2 + ca^2)^2 = S_{21}^2 = S_{42} + S_{411} + S_{33} + 2S_{321} + S_{222}$

§8.2. KỸ THUẬT SỬ DỤNG ĐỊNH LÝ MUIRHEAD

I. Sử dụng biến đổi tương đương và định lý Muirhead

1. Phương pháp chung

Để ứng dụng đa thức đối xứng và định lý *Muirhead* trong chứng minh bất đẳng thức, ta cần thực hiện theo 2 bước cơ bản sau:

Bước 1: Phân tích:

+ Biến đổi bất đẳng thức cần chứng minh về dạng tổng các đa thức đối xứng ở cả 2 vế của bất đẳng thức.

+ Biểu diễn các đa thức đối xứng theo kí hiệu qui ước trong lý thuyết.

Bước 2: Đánh giá:

+ Cách đánh giá: Sử dụng các bất đẳng thức để làm mất dần các đa thức đối xứng có giá trị lớn ở vế có giá trị nhỏ hơn (Chẳng hạn: ta sẽ làm mất dần các đa thức đối xứng có giá trị lớn ở vế phải nếu các phép biến đổi tương đương đưa bất đẳng thức đã cho được biểu diễn dưới dạng VT ≥ VP). Thay vào đó là các đa thức đối xứng nhỏ nhất có thể (thường là các đa thức ở VT để giản lược cả hai vế)

+ Phép đánh giá được thực hiện nhờ các nguyên tắc sau:

Sử dụng các đánh giá (bất đẳng thức) sẵn có.

Tìm tòi, dự đoán các bất đẳng thức nhỏ cần phải chứng minh.

Sử dụng các cách biến đổi để tạo ra các đánh giá mới.

2. Các bài tập mẫu minh họa

Hãy biến đổi về dạng cơ sở và chứng minh các bất đẳng thức sau đây:

Bài 1. Cho $x, y, z > 0$. Chứng minh rằng: $\frac{x+y}{xy+z^2}+\frac{y+z}{yz+x^2}+\frac{z+x}{zx+y^2}\le\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$ (1)

Chứng minh

$$(1)\Leftrightarrow\frac{(x+y)(yz+x^2)(zx+y^2)+(y+z)(zx+y^2)(xy+z^2)+(z+x)(xy+z^2)(yz+x^2)}{(xy+z^2)(yz+x^2)(zx+y^2)}\le\frac{xy+yz+zx}{xyz}$$

$$\Leftrightarrow(S_{41}+S_{32}+S_{311}+S_{221})\cdot\frac{1}{6}S_{111}\le\frac{1}{2}S_{11}\left(\frac{1}{3}S_{222}+\frac{1}{2}S_{411}+\frac{1}{2}S_{33}\right)$$

$$\Leftrightarrow S_{521}+S_{431}+S_{422}+S_{332}\le S_{332}+S_{521}+\frac{1}{2}S_{422}+\frac{1}{2}S_{44}+S_{431}$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{2}S_{422}\le\frac{1}{2}S_{44}\Leftrightarrow S_{422}\le S_{44}$$ (đúng theo *Muirhead*)

Bài 2. Cho $\begin{cases}a,b,c\ge0\\ ab+bc+ca=\frac{1}{3}\end{cases}$. Chứng minh: $\frac{a}{a^2-bc+1}+\frac{b}{b^2-ca+1}+\frac{c}{c^2-ab+1}\ge\frac{1}{a+b+c}$ (1)

Chứng minh

$(1) \Leftrightarrow \sum \frac{a}{a(a+b+c)+2(ab+bc+ca)} \geq \frac{1}{a+b+c}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{16} \cdot S_1\left(S_{111}.S_1^2 + 8S_1 \cdot S_{11}^2\right) \geq \frac{1}{8}\left(\frac{1}{6}S_{111}.S_1^3 + 3.S_{11}^2.S_1^2 + 8.S_{11}^3\right) \Leftrightarrow \frac{1}{24}S_{111}.S_1^3 + \frac{1}{8}S_1^2 \cdot S_{11}^2 \geq S_{11}^3$

$\Leftrightarrow S_{411} + 6S_{311} + 2S_{222} + 2S_{42} + S_{222} + 2S_{111} + 4S_{321} + 2S_{33} + 4S_{321} + 8S_{321} + 4S_{222} \geq 4S_{33} + 24S_{321} + 8S_{222}$

$\Leftrightarrow 2S_{42} + 3S_{411} \geq 2S_{33} + 2S_{321} + S_{222}$

Theo định lý ***Muirhead*** ta có: $2S_{42} \geq 2S_{33}; 2S_{411} \geq 2S_{321}; S_{411} \geq S_{222} \Rightarrow$ (đpcm)

Bài 3. Cho $\begin{cases} a,b,c \geq 0 \\ ab+bc+ca = \frac{1}{3} \end{cases}$. Chứng minh: $\frac{1}{a^2-bc+1} + \frac{1}{b^2-ca+1} + \frac{1}{c^2-ab+1} \leq 3$ (1)

Chứng minh

$(1) \Leftrightarrow \sum \frac{1}{a(a+b+c)+2(ab+bc+ca)} \leq \frac{1}{ab+bc+ca}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot S_{11}\left(\frac{1}{8}S_{11}.S_1^2 + \frac{1}{2}S_{11} \cdot S_1^2 + 3S_{11}^3\right) \leq \frac{1}{48}S_{111}.S_1^3 + \frac{1}{8}S_{11}^2.S_1^2 + \frac{1}{4}S_1^2.S_{11}^2 + S_{11}^3$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}S_{11}^3 \leq \frac{1}{48}S_{111}S_1^3 + \frac{1}{16}S_1^2.S_{11}^2$

$\Leftrightarrow 2S_{33} + 12S_{321} + 4S_{222} \leq \frac{1}{2}S_{411} + 3S_{321} + S_{222} + S_{42} + S_{33} + S_{411} + 8S_{321} + \frac{5}{2}S_{222}$

$\Leftrightarrow S_{33} + S_{321} + \frac{1}{2}S_{222} \leq \frac{3}{2}S_{411} + S_{42}$, đúng do $S_{33} \leq S_{42}; S_{321} \leq S_{411}; \frac{1}{2}S_{222} \leq \frac{1}{2}S_{411}$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{3}$ hoặc $a = b = \frac{1}{\sqrt{3}}, c = 0$ và các hoán vị.

Bài 4. Cho $a,b,c > 0$. Chứng minh rằng: $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \leq \frac{3(a+b+c)}{2(ab+bc+ca)}$ (1)

Chứng minh

$(1) \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{2}S_2 + \frac{3}{2}S_{11}}{S_{21} + \frac{1}{3}S_{111}} \leq \frac{\frac{3}{2}S_1}{S_{11}} \Leftrightarrow S_{11}\left(\frac{1}{2}S_2 + \frac{3}{2}S_{11}\right) \leq \frac{3}{2}S_1\left(S_{21} + \frac{1}{3}S_{111}\right)$

$\Leftrightarrow 2S_{31} + S_{211} + 3S_{22} + 6S_{211} \leq 3S_{31} + 3S_{22} + 3S_{211} + 3S_{211} \Leftrightarrow S_{211} \leq S_{31}$ (đúng)

Bài 5. Cho $a,b,c > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{a^2+bc} + \frac{b}{b^2+ca} + \frac{c}{c^2+ab} \leq \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}$$

Chứng minh

$(1) \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{2}S_{211} + S_{32} + \frac{1}{2}S_{311}}{\frac{1}{3}S_{222} + \frac{1}{2}S_{33} + \frac{1}{2}S_{411}} \leq \frac{\frac{1}{2}S_2 + \frac{3}{2}S_{11}}{S_{21} + \frac{1}{3}S_{111}}$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}S_{211}+S_{32}+\frac{1}{2}S_{311}\right)\left(S_{21}+\frac{1}{3}S_{111}\right)\le\left(\frac{1}{2}S_{2}+\frac{3}{2}S_{11}\right)\left(\frac{1}{3}S_{222}+\frac{1}{2}S_{33}+\frac{1}{2}S_{411}\right)$$

$$\Leftrightarrow S_{431}+S_{422}+S_{332}+S_{332}+S_{53}+S_{521}+S_{44}+S_{431}+S_{422}+S_{332}+2S_{431}+S_{521}+S_{431}+S_{332}+S_{422}$$
$$\le S_{422}+S_{53}+\frac{1}{2}S_{332}+\frac{1}{2}S_{611}+S_{431}+3S_{332}+\frac{3}{2}S_{44}+3S_{431}+3S_{521}+\frac{3}{2}S_{422}$$

$\Leftrightarrow S_{431}+\frac{1}{2}S_{332}+\frac{1}{2}S_{422}\le\frac{1}{2}S_{611}+\frac{1}{2}S_{44}+S_{521}$ (đúng theo ***Muirhead***)

Bài 6. Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng: $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\le\frac{1}{2}+\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}$

Chứng minh

(1) $\Leftrightarrow \dfrac{\frac{1}{2}S_3+S_{11}+\frac{1}{2}S_{111}}{S_{21}+\frac{1}{3}S_{111}}\le\dfrac{\frac{1}{2}S_{11}+S_2}{S_{11}}\Leftrightarrow 2S_{41}+S_{311}+2S_{32}+2S_{311}+2S_{221}+3S_{221}$

$\le S_{32}+S_{311}+S_{221}+S_{221}+2S_{41}+2S_{32}+2S_{221}+2S_{311}\Leftrightarrow S_{221}\le S_{32}$ (đúng theo ***Muirhead***)

Bài 7. Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng:

$$(ab+bc+ca)\left[\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}-2\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)\right]\ge(a+b+c)\left(\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}\right)\ (1)$$

Chứng minh

$$(1)\Leftrightarrow\frac{1}{2}S_{11}\left[\frac{S_{21}}{\frac{1}{6}S_{111}}-2\cdot\frac{\frac{1}{2}S_3+S_{11}+\frac{1}{2}S_{111}}{S_{21}+\frac{1}{3}S_{111}}\right]\ge\frac{1}{2}S_1\cdot\frac{\frac{1}{2}S_{22}}{\frac{1}{6}S_{111}}$$

$$\Leftrightarrow S_{11}\left[\frac{6S_{21}}{S_{111}}-\frac{S_3+2S_{11}+S_{111}}{S_{21}+\frac{1}{3}S_{111}}\right]\ge S_1\frac{3S_{22}}{S_{111}}\Leftrightarrow S_{431}\ge S_{332}\ \text{(đúng)}$$

Bài 9. Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng: $\frac{a^2+1}{bc+1}+\frac{b^2+1}{ca+1}+\frac{c^2+1}{ab+1}\ge 3$ (1)

Chứng minh

$$(1)\Leftrightarrow\frac{1}{2}S_{411}+S_{31}+\frac{1}{2}S_2+\frac{1}{2}S_{211}+S_{11}+3\ge\frac{1}{2}S_{222}+\frac{3}{2}S_{211}+\frac{3}{2}S_{11}+3$$
$$\Leftrightarrow\frac{1}{2}S_{411}+S_{31}+\frac{1}{2}S_2\ge\frac{1}{2}S_{222}+S_{211}+\frac{1}{2}S_{11}.$$

Theo định lý ***Muirhead*** ta có: $\frac{1}{2}S_{411}\ge\frac{1}{2}S_{222};S_{31}\ge S_{211};\frac{1}{2}S_2\ge\frac{1}{2}S_{11}\Rightarrow$ (đpcm)

Bài 10. Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng: $\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}\ge\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}$ (1)

Chứng minh

$(1)\Leftrightarrow(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)^2\ge 3a^2b^2c^2(a^2+b^2+c^2)$

$\Leftrightarrow\frac{1}{2}S_{44}+S_{422}\ge\frac{3}{2}S_{422}\Leftrightarrow\frac{1}{2}S_{44}\ge\frac{1}{2}S_{422}$ (đúng theo ***Muirhead***)

Bài 11. Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{(a+b)(a+c)}+\frac{b}{(b+c)(b+a)}+\frac{c}{(c+a)(c+b)}\le\frac{9}{4(a+b+c)}\quad(1)$$

Chứng minh

$$(1)\Leftrightarrow\frac{S_{11}}{S_{21}+\frac{1}{3}S_{111}}\le\frac{9}{2S_1}\Leftrightarrow 8S_{21}+4S_{111}\le 9S_{21}+3S_{111}\Leftrightarrow S_{111}\le S_{21}\ \text{(đúng)}$$

Bài 12. Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3}{b^3}+\frac{a^3}{c^3}+\frac{b^3}{c^3}+\frac{b^3}{a^3}+\frac{c^3}{a^3}+\frac{c^3}{b^3}\ge\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab}+\frac{ab}{c^2}+\frac{bc}{a^2}+\frac{ca}{b^2}\quad(1)$$

Chứng minh

$(1)\Leftrightarrow 2S(3;-3)\ge S(2;-1;-1)+S(1;1;-2)$

Theo ***Muirhead***: $S(3;-3)\ge S(2;-1;-1)$, $S(3;-3)\ge S(1;1;-2)\Rightarrow$ (đpcm)

Bài 13: Cho $a,b,c\ge0$, $ab+bc+ca=1$. Chứng minh rằng: $a+b+c+3abc\ge2$ (1)

Chứng minh

$$(1)\Leftrightarrow[(a+b+c)(ab+bc+ca)+3abc]^2\ge4(ab+bc+ca)^3$$

$$\Leftrightarrow(S_{21}+S_{111})^2\ge\frac{1}{2}S_{11}^3\Leftrightarrow S_{42}+S_{411}+S_{33}+2S_{321}+S_{222}+12S_{321}+6S_{222}\ge2S_{33}+12S_{321}+4S_{222}$$

$\Leftrightarrow S_{42}+S_{411}+2S_{321}+3S_{222}\ge S_{33}$ (đúng theo ***Muirhead*** và $S_{411}+2S_{321}+3S_{222}\ge0$)

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=1,c=0$ và các hoán vị.

Bài 14. Cho $a,b,c\ge0$. Chứng minh rằng:

$$(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2\ge abc(a+2b+c)(b+2c+a)(c+2a+b)\quad(1)$$

Chứng minh

$$(1)\Leftrightarrow\left(S_{21}+\frac{1}{3}S_{111}\right)^2\ge abc[a+(a+b+c)][b+(a+b+c)][c+(a+b+c)]$$

$$\Leftrightarrow S_{42}+S_{411}+S_{33}+2S_{321}+S_{222}+4S_{321}+\frac{2}{3}S_{222}\ge\frac{1}{6}S_{222}+S_{321}+\frac{1}{2}S_{222}+S_{411}+6S_{321}+2S_{222}$$

$\Leftrightarrow S_{42}+S_{33}\ge S_{321}+S_{222}$ (đúng theo ***Muirhead***)

II. SỬ DỤNG ĐỊNH LÝ MUIRHEAD VỚI AM – GM, HOLDER, ASYM

1. Bất đẳng thức AM – GM:

Dạng tổng quát: $\dfrac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \ge \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n}$, $\forall a_1, a_2, ... a_n > 0$

Dạng suy rộng: $a_1 x_1 + a_2 x_2 + ... + a_n x_n \ge a_1^{x_1} a_2^{x_2} ... a_n^{x_n}$,

2. Bất đẳng thức Holder:

$$\prod_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\right) \ge \left(\sum_{j=1}^{n}\sqrt[m]{\prod_{i=1}^{m} a_{ij}}\right)^m , \ \forall a_{ij} > 0; i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n}$$

Sử dụng đa thức đối xứng, định lý ***Muirhead*** và 2 bất đẳng thức trên ta có :

3. Hệ quả: Bất đẳng thức ASYM

Cho m bộ số $(\alpha_{11}, \alpha_{12}, ..., \alpha_{1n}), (\alpha_{21}, \alpha_{22}, ... \alpha_{2n}), ... (\alpha_{m1}, \alpha_{m2}, ..., a_{mn})$ với $m, n \in \mathbb{Z}^+$

và $x_1, x_2, ... x_n \ge 0$, đặt $t_i = \dfrac{\alpha_{1i} + \alpha_{2i} + ... + \alpha_{mi}}{m}$ $\forall i = \overline{1,n}$. Khi đó ta có:

$$S_{\alpha_{11}\alpha_{12}...\alpha_{1n}} + ... + S_{\alpha_{m1}\alpha_{m2}...\alpha_{mn}} \ge m \cdot \sqrt[m]{S_{\alpha_{11}\alpha_{12}...\alpha_{1n}} S_{\alpha_{21}\alpha_{22}...\alpha_{2n}} ... S_{\alpha_{m1}\alpha_{m2}...\alpha_{mn}}} \ge m S_{t_1 t_2 ... t_n}$$

Bất đẳng thức bên trái chính là hệ qủa của bất đẳng thức ***AM – GM***, còn bất đẳng thức bên phải được suy ra từ bất đẳng thức ***Holder***. Điều mà chúng ta cần quan tâm ở đây là bất đẳng thức mà ta sẽ gọi là bất đẳng thức ***ASYM***:

$$\boxed{S_{\alpha_{11}\alpha_{12}...\alpha_{1n}} + S_{\alpha_{21}\alpha_{22}...\alpha_{2n}} + ... + S_{\alpha_{m1}\alpha_{m2}...\alpha_{mn}} \ge m S_{t_1 t_2 ... t_n}}$$

4. Ứng dụng của ASYM và Muirhead

Bài 1. Cho $a, b, c \ge 0$. Chứng minh rằng:

$$(a^2 + b^2)(b^2 + c^2)(c^2 + a^2)(ab + bc + ca)^2 \ge 8a^2b^2c^2(a^2 + b^2 + c^2)^2 \quad (1)$$

Chứng minh

$(1) \Leftrightarrow \left(S_{42} + \frac{1}{3}S_{222}\right)\left(\frac{1}{2}S_{22} + S_{211}\right) \ge \frac{4}{3}S_{222}\left(\frac{1}{2}S_4 + S_{22}\right)$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(2S_{64} + 2S_{622} + 2S_{442}) + 2S_{631} + 2S_{541} + 2S_{532} + S_{442} + 2S_{433} \ge 4S_{622} + 8S_{442}$

$\Leftrightarrow S_{64} + 2S_{631} + 2S_{541} + 2S_{532} + 2S_{433} \ge 3S_{622} + 6S_{442}$ (2)

Theo định lý ***Muirhead*** ta có: $S_{64} \ge S_{622}; 2S_{631} \ge 2S_{622}$ (3)

Theo ***ASYM*** ta có: $2S_{541} + 2S_{352} + 2S_{433} \ge 6S_{442}$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra (2) đúng $\Rightarrow$ (1) đúng

Bài 2. Cho $a,b,c\ge 0$: $a+b+c=1$. Chứng minh rằng:

$$\left(a^2+b^2\right)\left(b^2+c^2\right)\left(c^2+a^2\right)\ge 8\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)^2 \quad (1)$$

Chứng minh

$(1)\Leftrightarrow \left(a^2+b^2\right)\left(b^2+c^2\right)\left(c^2+a^2\right)(a+b+c)^2\ge 8\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)^2$

$\Leftrightarrow \left(S_{42}+\frac{1}{3}S_{222}\right)\left(\frac{1}{2}S_2+S_{11}\right)\ge 8\left(\frac{1}{2}S_{44}+S_{422}\right)$

$\Leftrightarrow S_{62}+S_{44}+S_{422}+2S_{53}+2S_{521}+2S_{431}+S_{422}+2S_{332}\ge 4S_{44}+8S_{422}$

$\Leftrightarrow S_{62}+2S_{53}+2S_{521}+2S_{431}+2S_{332}\ge 3S_{44}+6S_{422}$ (2)

Theo định lý ***Muirhead*** ta có: $S_{62}\ge S_{44}; 2S_{53}\ge 2S_{44}$ (3)

Theo ***ASYM*** ta có: $2S_{521}+2S_{413}+2S_{332}\ge 6S_{422}$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra (2) đúng $\Rightarrow$ (1) đúng.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{3}$ hoặc $a=b=\frac{1}{2}, c=0$ và các hoán vị.

III. SỬ DỤNG ĐỊNH LÝ MUIRHEAD VỚI BẤT ĐẲNG THỨC SCHUR

1. Biểu diễn bất đẳng thức Schur dưới dạng Muirhead

1.1. Dạng chính tắc: Với các số thực dương a, b, c và k bất kì ta luôn có:

$$a^k(a-b)(a-c)+b^k(b-a)(b-c)+c^k(c-a)(c-b)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow S(k+2;0;0)+S(k;1;1)\ge 2S(k+1;1;0)$$

1.2. Dạng suy rộng: Với $a,b,c,m,p,q\ge 0$ ta luôn có:

1.2.1. $\sum\left[a^m\left(a^p-b^p\right)\left(a^q-c^q\right)+a^m\left(a^q-b^q\right)\left(a^p-c^p\right)\right]\ge 0$

$$\Leftrightarrow S(m+p+q)+S(m;n;p)\ge S(m+p;q)+S(m+q;p)$$

1.2.2. $\sum\left(a^mb^n+a^nb^m\right)\left(c^p-a^p\right)\left(c^p-b^p\right)\ge 0$

$$\Leftrightarrow S(m+p;n+p)+S(m;n;2p)\ge S(m+p;n;p)+S(m;n+p;p)$$

1.2.3. $\sum\left(a^mb^n+a^nb^m\right)\left[\left(a^pb^p-a^pc^p\right)\left(a^qb^q-b^qc^q\right)+\left(a^qb^q-a^qc^q\right)\left(a^pb^p-b^pc^p\right)\right]\ge 0$

$$\Leftrightarrow S(m+p+q;n+p+q)+S(m+p;n+q;p+q)\ge S(m+p+q;n+q;p)+S(m+p;n+p+q;q)$$

1.2.4. Đặc biệt khi $m=n$:

$$S(m+p+q;m+p+q)+S(m+p;m+q;p+q)\ge S(m+p+q;m+q;p)+S(m+p+q;m+p;q)$$

Ví dụ: $m=n=p=q=1$: $S_{33}+S_{222}\ge 2S_{321}$

2. Ứng dụng của bất đẳng thức Schur và Muirhead

Bài 1: Cho $x, y, z > 0$ thỏa mãn $xyz = 1$. Chứng minh rằng:

$$x^2 + y^2 + z^2 + x + y + z \geq 2(xy + yz + zx) \quad (1)$$

Chứng minh

Đặt $a = \sqrt[3]{x}; b = \sqrt[3]{y}; c = \sqrt[3]{z} \Rightarrow abc = 1$. Khi đó

$(1) \Leftrightarrow a^6 + b^6 + c^6 + (a^3 + b^3 + c^3)abc \geq 2(a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3)$

Theo ***Schur*** và ***Muirhead*** ta có: $S_6 + S_{411} \geq 2S_{51}$; $2S_{51} \geq 2S_{33} \Rightarrow$ (đpcm)

Bài 2: Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{a^2 + 2bc} + \frac{b}{b^2 + 2ca} + \frac{c}{c^2 + 2ab} \leq \frac{a + b + c}{ab + bc + ca} \quad (1)$$

Chứng minh

$(1) \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}S_{211} + 2S_{32} + 2S_{311}\right) \cdot \frac{1}{2}S_{11} \leq \frac{1}{2}S_1\left(\frac{3}{2}S_{222} + S_{33} + 2S_{411}\right)$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}S_{331} + S_{322} + 2S_{43} + 2S_{421} + 2S_{331} + 4S_{421} + 2S_{322} \leq \frac{9}{2}S_{322} + 2S_{43} + S_{331} + 2S_{511} + 4S_{421}$

$\Leftrightarrow 2S_{511} + \frac{3}{2}S_{322} \geq 2S_{421} + \frac{3}{2}S_{331} \Leftrightarrow 2S_4 + \frac{3}{2}S_{211} \geq 2S_{31} + \frac{3}{2}S_{22}$ (2)

Theo ***Schur*** và ***Muirhead*** ta có:

$$\frac{3}{2}S_4 + \frac{3}{2}S_{211} \geq 3S_{31};\ \frac{1}{2}S_4 \geq \frac{1}{2}S_{22}; S_{31} \geq S_{22} \Rightarrow \text{(đpcm)}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$ hoặc $a = b, c = 0$ và các hoán vị.

Bài 3: Cho $a, b, c > 0 : abc = 1$. Chứng minh: $a^4 + b^4 + c^4 + 3 \geq 2\left(\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b}\right)$ (1)

Chứng minh

Đặt $x = \sqrt[3]{a}; y = \sqrt[3]{b}; z = \sqrt[3]{c} \Rightarrow xyz = 1$. Khi đó

$(1) \Leftrightarrow x^{12} + y^{12} + z^{12} + 3x^4y^4z^4 \geq 2(x^6y^6 + y^6z^6 + z^6x^6)$

$\Leftrightarrow S(12) + S(4;4;4) \geq 2S(6;6)$. Theo ***Schur*** và ***Muirhead*** ta có:

$S(12) + S(4;4;4) \geq 2S(8;4)$; $S(8;4) \geq S(6;6) \Rightarrow$ (đpcm)

Bài 4: Cho $x, y, z \geq 0$. Chứng minh: $8(x + y + z)^2(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) + 64x^2y^2z^2 \geq$

$\geq 6xyz(x + y + z)\left[(x + y)^2 + (y + z)^2 + (z + x)^2\right] + (x + y)^2(y + z)^2(z + x)^2$ (1)

Chứng minh

$(1) \Leftrightarrow 8\left(\frac{1}{2}S_2 + S_{11}\right)\cdot\frac{1}{2}S_{22} + \frac{32}{3}S_{222} \ge 3S_{211}(S_2 + S_{11}) + \left(S_{21} + \frac{1}{3}S_{111}\right)^2$

$\Leftrightarrow 8S_{42} + 4S_{222} + 8S_{33} + 16S_{321} + \frac{32}{3}s_{222} \ge$

$\ge 6S_{411} + 12S_{321} + 12S_{321} + 6S_{222} + S_{42} + S_{411} + S_{33} + 2S_{321} + S_{222} + 4S_{321} + \frac{2}{3}S_{222}$

$\Leftrightarrow 7S_{42} + 7S_{33} + 7S_{222} \ge 7S_{411} + 14S_{321} \Leftrightarrow S_{42} + S_{33} + S_{222} \ge S_{411} + 2S_{321}$

Theo ***Schur*** và ***Schur 5*** ta có: $S_{42} \ge S_{411}$; $S_{33} + S_{222} \ge 2S_{321} \Rightarrow$ (đpcm)

Bài 5: Cho $x, y, z \ge 0$; $x + y + z = 1$. Chứng minh rằng: $xy + yz + zx - 2xyz \le \frac{7}{27}$ (1)

Chứng minh

$(1) \Leftrightarrow 27\left[(x+y+z)(xy+yz+zx) - 2xyz\right] \le 7(x+y+z)^3$

$\Leftrightarrow 27\left(S_{21} + \frac{1}{6}S_{111}\right) \le 7\left(\frac{1}{2}S_3 + 3S_{21} + S_{111}\right) \Leftrightarrow 6S_{21} \le \frac{7}{2}S_3 + \frac{5}{2}S_{111}$

Theo ***Schur***: $3S_3 + 3S_{111} \ge 6S_{21}$; và ***Muirhead***: $\frac{1}{2}S_3 \ge \frac{1}{2}S_{111}$. Từ đó suy ra (đpcm)

Bài 6. Cho $a,b,c > 0$. Chứng minh rằng: $\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} + 3 \ge \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c}$ (1)

Chứng minh

Đặt $\frac{a}{b} = x^3; \frac{b}{c} = y^3; \frac{c}{a} = z^3 \Rightarrow xyz = 1$. Khi đó

$(1) \Leftrightarrow x^6 + y^6 + z^6 + 3x^2y^2z^2 \ge (x^3 + y^3 + z^3)xyz + x^3y^3 + y^3z^3 + z^3x^3$

$\Leftrightarrow S_6 + S_{222} \ge S_{411} + S_{33}$. Theo ***Schur*** và ***Muirhead*** ta có:

$S_6 + S_{222} \ge 2S_{42}$; $S_{42} \ge S_{411}; S_{42} \ge S_{33} \Rightarrow$ (đpcm)

Bài 7. Cho $a,b,c>0$. Chứng minh: $27 + \left(2 + \frac{a^2}{bc}\right)\left(2 + \frac{b^2}{ca}\right)\left(2 + \frac{c^2}{ab}\right) \ge 6(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$ (1)

Chứng minh

$(1) \Leftrightarrow 27 + \frac{(a^2+2bc)(b^2+2ca)(c^2+2ab)}{a^2b^2c^2} \ge \frac{6(a+b+c)(ab+bc+ca)}{abc}$

$\Leftrightarrow 27a^2b^2c^2 + 9a^2b^2c^2 + 2(a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3) + 4(a^4bc + ab^4c + abc^4)$

$\ge 6abc\left(S_{21} + \frac{1}{2}S_{111}\right) \Leftrightarrow 6S_{222} + S_{33} + 2S_{411} \ge 6S_{321} + 3S_{222} \Leftrightarrow 2S_{411} + S_{33} + 3S_{222} \ge 6S_{321}$.

Theo ***Schur*** ta có: $S_{33} + S_{222} \ge 2S_{321}$; $S_3 + S_{111} \ge 2S_{21} \Leftrightarrow 2S_{411} + 2S_{222} \ge 4S_{321}$

Bài 8. Cho $x, y, z \ge 0$. Chứng minh: $3(x^2y + y^2z + z^2x)(xy^2 + yz^2 + zx^2) \ge xyz(x+y+z)^3$ (1)

Chứng minh

$(1) \Leftrightarrow \frac{3}{2}S_{411} + \frac{3}{2}S_{33} + \frac{3}{2}S_{222} \ge \frac{1}{2}S_{411} + 3S_{321} + S_{222} \Leftrightarrow S_{411} + \frac{3}{2}S_{33} + \frac{1}{2}S_{222} \ge 3S_{321}$

Theo ***Schur 5*** và ***Schur*** ta có: $\frac{1}{2}S_{33} + \frac{1}{2}S_{222} \ge S_{321}$; $S_{33} \ge S_{321}; S_{411} \ge S_{321}$

IV. KỸ THUẬT THÊM BIẾN VÀ CÁC ỨNG DỤNG

1. Kỹ thuật thêm biến

1.1. Đặt vấn đề: Chúng ta sẽ mở đầu kỹ thuật này với 2 bài toán sau

Bài toán 1: Cho $a,b>0$. Chứng minh rằng: $\frac{a}{b^2}+\frac{b}{a^2}\geq\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ (1)

Chứng minh

(1) $\Leftrightarrow a^3+b^3\geq a^2b+ab^2 \Leftrightarrow S_3\geq S_{21}$ (đúng theo ***Muirhead***)

Bài toán 2: Cho $a,b,c>0$. Chứng minh: $\frac{a+b}{c^2}+\frac{b+c}{a^2}+\frac{c+a}{b^2}\geq 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$ (1)

Chứng minh

(1) $\Leftrightarrow S(1;-2)\geq S(-1;0)\Leftrightarrow S_{32}\geq S_{221}$ (đúng) (nhân cả 2 vế với $a^2b^2c^2$)

Nhận xét: Thay bộ số (a,b) trong bài toán 1 bằng các bộ số $(a;b),(b;c),(c;a)$ rồi cộng lại thì nhận được bài toán 2. Ngoài ra ta thấy nếu tăng thêm một biến số bằng cách điền thêm số 2 vào hai dãy chỉ số của bất đẳng thức $S_3\geq S_{21}$ ở bài toán 1 thì thu được bài toán 2. Đây chính là ý tưởng của kỹ thuật thêm biến.

1.2. Mệnh đề: Với một bất đẳng thức đúng đối xứng $f(x_1,x_2,...x_n)\geq 0\ \forall x_1,..x_n\geq 0$ với n biến ta có thể thêm vào m biến để được một bất đẳng thức đối xứng mới đúng với $(n+m)$ biến bằng cách lấy tổng dưới dạng:

$\sum f(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n).g(\alpha_{n+1},\alpha_{n+2},...,\alpha_{n+m})\geq 0$ trong đó $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_{n+m}$ chạy trên tất cả các hoán vị của $(n+m)$ biến $x_1,x_2,...x_{n+m}$ và $g(\alpha_{n+1},\alpha_{n+2},...,\alpha_{n+m})$ là một hàm đối xứng có giá trị không âm với mọi $\alpha_{n+1},\alpha_{n+2},...,\alpha_{n+m}$ không âm.

1.3. Hệ quả:

Khi $f(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$ là 1 biểu thức có giá trị không âm được biểu diễn dưới dạng cơ sở và $g(\alpha_{n+1},\alpha_{n+2},...,\alpha_{n+m})=\sum_{sym}\alpha_{n+1}^{t_1},\alpha_{n+2}^{t_2},...,\alpha_{n+m}^{t_m}$ (tổng bên xét trên m biến $\alpha_{n+1},\alpha_{n+2},...,\alpha_{n+m}$) thì ta có 2 định lý sau đây:

. ***Định lý 1:*** Khi thêm m số $t_1,t_2,...t_m$ vào tất cả các bộ số ở cả 2 vế của một bất đẳng thức đối xứng n biến được biểu diễn dưới dạng cơ sở thì ta thu được một bất đẳng thức mới đúng với $n+m$ biến $(m,n\in\mathbb{Z}^+)$

. ***Định lý 2:*** Khi $g(\alpha_{n+1},\alpha_{n+2},...,\alpha_{n+m})=1$ thì một bất đẳng thức đối xứng đúng với n biến thì cũng đúng với m biến $(m,n\in\mathbb{Z}^+;m\geq n)$

. Ý nghĩa: Từ 2 định lý trên, ta có thể rút ra được phương pháp sau đây:

– Muốn chứng minh 1 bất đẳng thức đối xứng đúng với số biến lớn (n biến) ta có thể chứng minh nó đúng với số biến nhỏ hơn.

– Khi bất đẳng thức được biểu diễn dưới dạng cơ sở, nếu tất cả các bộ số ở cả 2 vế của bất đẳng thức đều chứa 1 số nào đó thì có thể chứng minh bất đẳng thức đúng khi bỏ số đó ở tất cả các bộ số và giảm số biến đi 1.

Ví dụ: Chứng minh rằng bất đẳng thức sau đúng khi xét trên 5000 biến không âm

$$S_{31} + S_{1111} \geq 2S_{211} \quad (*)$$

Ta chứng minh (*) đúng với 4 biến. Nhận thấy tất cả các bộ số ở 2 vế đều chứa số 1 nên ta tìm cách chứng minh bất đẳng thức: $S_3 + S_{111} \geq 2S_{21}$ đúng với 3 biến.

Bất đẳng thức trên đúng vì nó chính là bất đẳng thức ***Schur*** với $r = 1$.

Nhận xét: Kỹ thuật thêm biến là một kỹ thuật vô cùng quan trọng trong việc nghiên cứu và chứng minh các bất đẳng thức đối xứng. Nó giúp chúng ta mở ra một con đường đi từ bất đẳng thức 3 biến, 4 biến đến n biến và ngược lại. Và nó là phần nào xóa đi rào cản về số biến trong một bất đẳng thức đối xứng.

2. Ứng dụng kỹ thuật thêm biến:

Kỹ thuật thêm biến có rất nhiều ứng dụng trong giải toán. Và một trong những ứng dụng khá đẹp của nó là 2 bất đẳng thức ***SuranYi*** và ***Vasile***.

. Bất đẳng thức SuranYi: Cho các số dương $a_1, a_2, \ldots a_n$. Chứng minh rằng:

$$(n-1)\left(a_1^n + a_2^n + \ldots + a_n^n\right) + na_1a_2\ldots a_n \geq \left(a_1 + a_2 + \ldots + a_n\right)\left(a_1^{n-1} + a_2^{n-1} + \ldots + a_n^{n-1}\right)$$

. Bất đẳng thức Vasile: Cho các số dương $a_1, a_2, \ldots a_n$. Chứng minh rằng:

$$a_1^n + a_2^n + \ldots + a_n^n + n(n-1)a_1a_2\ldots a_n \geq a_1a_2\ldots a_n\left(a_1 + a_2 + \ldots + a_n\right)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right)$$

Chứng minh: Ta biểu diễn 2 bất đẳng thức trên dưới dạng cơ sở:

SuranYi: $(n-2)S_n + S_{\underbrace{11\ldots1}_{n \text{ số } 1}} \geq (n-1)S(n-1;1)$

Vasile: $S_n + (n-2)S_{\underbrace{11\ldots1}_{n \text{ số } 1}} \geq (n-1)S_{2\underbrace{11\ldots1}_{n-2 \text{ số } 1}2}(n-1;1)$

Cả 2 bất đẳng thức trên đều là trường hợp riêng của bất đẳng thức sau:

Với k nguyên dương, $1 \leq k \leq n$ thì $(k-1)S_n + (n-k)S_{\underbrace{11\ldots1}_{n \text{ số } 1}} \geq (n-1)S(k;\underbrace{1;1;\ldots;1}_{n-k \text{ số } 1})$ (*)

Đặt $S(q+1;\underbrace{1;1;\ldots;1}_{n-q-1 \text{ số } 1}) - S(q;\underbrace{1;1;\ldots;1}_{n-q \text{ số } 1}) = \alpha_q \quad (q \in \mathbb{N}; 1 \leq q \leq n-1)$

Bất đẳng thức (*) trở thành: $(k-1)(\alpha_{n-1}+\alpha_{n-2}+...+\alpha_k)\geq(n-k)(\alpha_{k-1}+\alpha_{k-2}+...+\alpha_1)(1)$

Mặt khác, ta có: $S(q+2)+S(q;1;1)\geq 2S(q+1;1)$ đúng với ba biến (Schur)

Theo định lý 2, ta thêm $n-q-2$ số 1 và $q-1$ số 0 vào cả 3 bộ số của bất đẳng thức trên, ta được

$S(q+2;\underbrace{1;1;...;1}_{n-q-2 \text{ số } 1})-S(q;\underbrace{1;1;...;1}_{n-q \text{ số } 1})\geq 2S(q+1;\underbrace{1;1;...;1}_{n-q-1 \text{ số } 1})$ hay $\alpha_{q+1}\geq\alpha_q\ \forall q=\overline{1,n-2}$

Cho q chạy từ 1 đến $n-2$ ta có: $\alpha_{n-1}\geq\alpha_{n-2}\geq...\geq\alpha_k\geq\alpha_{k-1}\geq...\geq\alpha_1$

Từ đó hiển nhiên ta có: $VT(1)\geq(n-k)(k-1)\alpha_k\geq VP(1)$. Vậy ta có (đpcm).

V. SÁNG TẠO CÙNG "TỔNG ĐỐI XỨNG"

Trong rất nhiều cách sáng tạo bất đẳng thức, chúng tôi giới thiệu 3 cách sáng tạo tiêu biểu: "Tương tự hóa, tổng quát hóa và đặc biệt hóa".

1. Tương tự hóa:

Phép tương tự hóa ở đây là việc phối hợp các bất đẳng thức đơn giản bằng cách nhân, cộng, trừ các bất đẳng thức đơn giản với nhau hoặc thay đổi số biến; ...

Ví dụ: Từ 2 bất đẳng thức: $a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca$ hay $S_2\geq S_{11}$

và $a^3+b^3+c^3+3abc\geq a^2b+b^2c+c^2a+ab^2+bc^2+ca^2$, $\forall a,b,c\geq 0$ hay $S_3+S_{111}\geq 2S_{21}$.

Ta có bất đẳng thức sau: $(S_2-S_{11})(S_3+S_{111}-2S_{21})\geq 0$, $\forall a,b,c\geq 0$

$\Leftrightarrow S_5+3S_{311}+2S_{32}\geq 4S_{41}+2S_{221}$ hay

$$a^5+b^5+c^5+3(a^3bc+ab^3c+abc^3)+(a^3b^2+b^3c^2+c^3a^2+a^2b^3+b^2c^3+c^2a^3)$$

$$\geq 2(a^4b+b^4c+c^4a+ab^4+bc^4+ca^4)+2(a^2b^2c+b^2c^2a+c^2a^2b)$$

2. Tổng quát hóa

Xét bất đẳng thức $(a-b)^4\geq 0$. Viết dưới dạng cơ sở là: $S_4+3S_{22}\geq 4S_{31}$

Ta xét bài toán tổng quát của bất đẳng thức trên:

Bài toán 1: Cho M,a_1,b_1,a_2,b_2 là các số nguyên dương sao cho: $M=a_1+b_1=a_2+b_2$; $a_1>a_2\geq b_2>b_1$. Cho 2 biến $x,y\geq 0$. Tìm hằng số k tốt nhất để bất đẳng thức sau đúng với mọi $x,y\geq 0$: $S_M+kS_{a_2b_2}\geq(k+1)S_{a_1b_1}$

Giải: Nếu $x=y\Rightarrow S_M=S_{a_1b_1}=S_{a_2b_2}\Rightarrow$ bất đẳng thức đã cho đúng với mọi k.

Nếu $x\neq y$: Bất đẳng thức đã cho $\Leftrightarrow S_M-S_{a_1b_1}\geq k(S_{a_1b_1}-S_{a_2b_2})$

$$\Leftrightarrow x^M+y^M-x^{a_1}y^{b_1}-x^{b_1}y^{a_1}\geq k(x^{a_1}y^{b_1}+x^{b_1}y^{a_1}-x^{a_2}y^{b_2}-x^{b_2}y^{a_2})$$

$$\Leftrightarrow(x^{a_1}-y^{a_1})(x^{b_1}-y^{b_1})\geq k\,x^{b_1}y^{b_1}(x^{a_2-b_1}-y^{a_2-b_1})(x^{b_2-b_1}-y^{b_2-b_1})$$

$$\Leftrightarrow (x-y)^2\left(x^{a_1-1}+x^{a_1-2}y+...+y^{a_1-1}\right)\left(x^{b_1-1}+x^{b_1-2}y+...+y^{b_1-1}\right)$$

$$\geq k(x-y)^2 x^{b_1}y^{b_1}\left(x^{a_2-b_1-1}+x^{a_2-b_1-2}y+...+y^{a_2-b_1-1}\right)\left(x^{b_2-b_1-1}+...+y^{b_2-b_1-1}\right)$$

Cho $\frac{x}{y}\to 1$ suy ra $a_1b_1x^{M-2}\geq k(a_2-b_1)(b_2-b_1)x^{M-2} \Rightarrow k\leq \frac{a_1b_1}{(a_2-b_1)(b_2-b_1)}$

Ta chứng minh bất đẳng thức đã cho đúng với $k=\frac{a_1b_1}{(a_2-b_1)(b_2-b_1)}$ hay

chứng minh bất đẳng thức $\frac{x^{a_1}-y^{a_1}}{a_1(x-y)}\cdot\frac{x^{b_1}-y^{b_1}}{b_1(x-y)}\geq x^{b_1}y^{b_1}\cdot\frac{x^{a_2-b_1}-y^{a_2-b_1}}{(a_2-b_1)(x-y)}\cdot\frac{x^{b_2-b_1}-y^{b_2-b_1}}{(b_2-b_1)(x-y)}$

Để chứng minh bất đẳng thức này ta sẽ sử dụng 2 bổ đề sau:

Bổ đề 1. $\frac{a^{m+2}-b^{m+2}}{(m+2)(a-b)}\cdot\frac{a^m-b^m}{m(a-b)}\geq\left[\frac{a^{m+1}-b^{m+1}}{(m+1)(a-b)}\right]^2$ (*), $\forall a,b>0; a\neq b; m\in\mathbb{Z}^+$

$$(*)\Leftrightarrow (m+1)^2\left(a^{m+2}-b^{m+2}\right)\left(a^m-b^m\right)\geq m(m+2)\left(a^{m+1}-b^{m+1}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow (m+1)^2\left(a^{2m+2}+b^{2m+2}\right)-(m+1)^2\left(a^{m+2}b^m+a^mb^{m+2}\right)\geq$$

$$\geq m(m+2)\left(a^{2m+2}+b^{2m+2}\right)-2m(m+2)a^{m+1}b^{m+1}$$

$$\Leftrightarrow a^{2m+2}+b^{2m+2}-2a^{m+1}b^{m+1}\geq (m+1)^2\left(a^{m+2}b^m+a^mb^{m+2}-2a^{m+1}b^{m+1}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(a^{m+1}-b^{m+1}\right)^2\geq (m+1)^2a^mb^m(a-b)^2 \Leftrightarrow \left(a^m+a^{m-1}b+...+b^m\right)^2\geq (m+1)^2a^mb^m$$

$\Leftrightarrow a^m+a^{m-1}b+...+b^m\geq (m+1)\sqrt{a^mb^m}$ đúng theo $AM-GM$, suy ra (đpcm)

Bổ đề 2. $\left[\frac{a^m-b^m}{m(a-b)}\right]^{n-1}\geq\left[\frac{a^n-b^n}{n(a-b)}\right]^{m-1}$ (1), $\forall a,b>0; a\neq b; m,n\in\mathbb{Z}^+; m\geq n$

Đặt $\frac{m\left(a^{m+1}-b^{m+1}\right)}{(m+1)\left(a^m-b^m\right)}=\alpha_m$ $\forall m\in\mathbb{Z}^+$, khi đó (*) $\Leftrightarrow \alpha_{m+1}\geq\alpha_m$ $\forall m\in\mathbb{Z}^+$

Ta có: (1) $\Leftrightarrow \left(\alpha_{m-1}\alpha_{m-2}...\alpha_n\right)^{n-1}\geq\left(\alpha_{n-1}\alpha_{n-2}...\alpha_1\right)^{m-n}$

Bất đẳng thức này đúng vì $\left(\alpha_{m-1}\alpha_{m-2}...\alpha_n\right)^{n-1}\geq\alpha_n^{(m-n)(n-1)}\geq\left(\alpha_{n-1}\alpha_{n-2}...\alpha_1\right)^{m-n}$.

Áp dụng: $\frac{x^{a_1}-y^{a_1}}{a_1(x-y)}\cdot\frac{x^{b_1}-y^{b_1}}{b_1(x-y)}\geq x^{b_1}y^{b_1}\cdot\frac{x^{a_2-b_1}-y^{a_2-b_1}}{(a_2-b_1)(x-y)}\cdot\frac{x^{b_2-b_1}-y^{b_2-b_1}}{(b_2-b_1)(x-y)}$

Ta có: $\frac{x^{b_1}-y^{b_1}}{b_1(x-y)}=\frac{x^{b_1-1}+x^{b_1-2}y+...+y^{b_1-1}}{b_1}\geq\sqrt{(xy)^{b_1-1}}$ (2)

$$\left[\frac{x^{a_1}-y^{a_1}}{a_1(x-y)}\right]^{b_1+1}=\left(\frac{x^{a_1-1}+x^{a_1-2}y+...+y^{a_1-1}}{a_1}\right)^{b_1+1}\geq\sqrt{(xy)^{(a_1-1)(b_1+1)}}\quad (3)$$

Sử dụng bổ đề 2 ta có: $\left[\frac{x^{a_1}-y^{a_1}}{a_1(x-y)}\right]^{a_2-b_1-1} \geq \left[\frac{x^{a_2-b_1}-y^{a_2-b_1}}{(a_2-b_1)(x-y)}\right]^{a_1-1}$ (4)

$$\left[\frac{x^{a_1}-y^{a_1}}{a_1(x-y)}\right]^{b_2-b_1-1} \geq \left[\frac{x^{b_2-b_1}-y^{b_2-b_1}}{(b_2-b_1)(x-y)}\right]^{a_1-1} \quad (5)$$

Nhân vế với vế của các bất đẳng thức (3), (4) và (5) ta được:

$$\left[\frac{x^{a_1}-y^{a_1}}{a_1(x-y)}\right]^{a_1-1} \geq \sqrt{(xy)^{(a_1-1)(b_1+1)}}\left[\frac{x^{a_2-b_1}-y^{a_2-b_1}}{(a_2-b_1)(x-y)}\cdot\frac{x^{b_2-b_1}-y^{b_2-b_1}}{(b_2-b_1)(x-y)}\right]^{a_1-1}$$

$\Leftrightarrow \frac{x^{a_1}-y^{a_1}}{a_1(x-y)} \geq \frac{x^{a_2-b_1}-y^{a_2-b_1}}{(a_2-b_1)(x-y)}\cdot\frac{x^{b_2-b_1}-y^{b_2-b_1}}{(b_2-b_1)(x-y)}\sqrt{(xy)^{b_1+1}}$ (6) Nhân vế với vế (2) và (6) ta có:

$$\frac{x^{a_1}-y^{a_1}}{a_1(x-y)}\cdot\frac{x^{b_1}-y^{b_1}}{b_1(x-y)} \geq (xy)^{b_1}\cdot\frac{x^{a_2-b_1}-y^{a_2-b_1}}{(a_2-b_1)(x-y)}\cdot\frac{x^{b_2-b_1}-y^{b_2-b_1}}{(b_2-b_1)(x-y)} \Rightarrow \text{(đpcm)}$$

Từ bài toán trên, ta tổng quát lên để dùng làm công cụ giải quyết các bài toán khác.

Bài toán 2: Cho M, a_1, b_1, a_2, b_2 là các số nguyên dương sao cho: $M = a_1 + b_1 = a_2 + b_2$; $a_1 > a_2 \geq b_2 > b_1$. Xét bài toán với n biến dương $(n \in \mathbb{N}, n \geq 2)$. Chứng minh rằng:

$k = \frac{a_1 b_1}{(a_2-b_1)(b_2-b_1)}$ là hằng số tốt nhất để $S_M + kS_{a_2b_2} \geq (k+1)S_{a_1b_1}$ (*) luôn đúng:

Chứng minh

Các biến dương $x_1, x_2, ... x_n$. Biến đổi tương tự bài toán 1 ở trên rồi cho

$x_1 : x_2 : ... : x_n \to 1:1:...:1$ ta thu được: $k \leq \frac{a_1 b_1}{(a_2-b_1)(b_2-b_1)}$.

Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức đúng với $k = \frac{a_1 b_1}{(a_2-b_1)(b_2-b_1)}$

Theo bài toán 1 ở trên, ta có bất đẳng thức (*) đúng với 2 biến dương. Theo định lý 3, ta có bất đẳng thức (*) đúng với n biến dương $(n \geq 2; n \in \mathbb{Z}^+)$. Vậy bài toán được chứng minh.

Ví dụ 1: Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^4+b^4+c^4}{ab+bc+ca} + \frac{3abc}{a+b+c} \geq \frac{2}{3}(a^2+b^2+c^2) \quad (1)$$

Chứng minh

$(1) \Leftrightarrow 3(a^4+b^4+c^4)(a+b+c) + 9abc(ab+bc+ca) \geq 2(a^2+b^2+c^2)(a+b+c)(ab+bc+ca)$

$\Leftrightarrow \frac{3}{2}S_5 + 3S_{41} + \frac{9}{2}S_{221} \geq S_2\left(S_{21} + \frac{1}{2}S_{111}\right) \Leftrightarrow \frac{3}{2}S_5 + 3S_{41} + \frac{9}{2}S_{221} \geq 2S_{41} + 2S_{32} + 2S_{221} + 3S_{311}$

$\Leftrightarrow \frac{3}{2}S_5 + S_{41} + \frac{5}{2}S_{221} \ge 2S_{32} + 3S_{311}$. Bất đẳng thức này được chứng minh từ các bất đẳng thức: $S_{41} + 3S_{221} \ge 4S_{311} \Leftarrow S_4 + 3S_{22} \ge 4S_{31}$; $\frac{3}{2}S_5 + \frac{3}{2}S_{221} \ge 3S_{32}$; $S_{32} \ge S_{221}$; $S_{311} \ge S_{221}$ và sử dụng ***Kĩ thuật thêm biến***: Thêm số 1 vào cả 3 bộ số của bất đẳng thức ta có $S_{41} + 3S_{221} \ge 4S_{311}$. Suy ra đpcm. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$.

Ví dụ 2: Cho $a,b,c > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{abc(a+b+c)}{a^4+b^4+c^4} + \frac{12(a^3+b^3+c^3)}{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)} \ge 5 \ (1)$$

Chứng minh

$$(1) \Leftrightarrow abc(a+b+c)^2(a^2+b^2+c^2) + 12(a^3+b^3+c^3)(a^4+b^4+c^4) \ge 5(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)(a^4+b^4+c^4)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}S_{311}\left(\frac{1}{2}S_2 + S_{11}\right) + 12\left(\frac{1}{2}S_7 + S_{43}\right) \ge \frac{5}{2}S_4\left(S_{21} + \frac{1}{2}S_3\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}S_{511} + S_{331} + 2S_{421} + S_{322} + 12S_{43} + 6S_7 \ge \frac{5}{2}S_7 + 5S_{43} + 5S_{61} + 5S_{421} + 5S_{52}$$

$$\Leftrightarrow \frac{7}{2}S_7 + 7S_{43} + \frac{1}{2}S_{511} + S_{331} + S_{322} \ge 5S_{61} + 5S_{52} + 3S_{421}$$

$$\Leftrightarrow 7S_7 + 14S_{43} + S_{511} + 2S_{331} + 2S_{322} \ge 10S_{61} + 10S_{52} + 6S_{421}$$

Bất đẳng thức cuối được chứng minh từ các bất đẳng thức sau:

$7S_7 + 7S_{43} \ge 14S_{61}$; $S_{511} + 2S_{322} \ge 3S_{421} \Leftrightarrow S_5 + 2S_{32} \ge 3S_{41}$;

$4S_{61} + 8S_{43} \ge 12S_{52} \Leftrightarrow S_5 + 2S_{32} \ge 3S_{41}$

$S_{52} + 2S_{322} \ge 3S_{421} \Leftrightarrow S_5 + 2S_{32} \ge 3S_{41}$; $S_{52} \ge S_{43}$; $S_{421} \ge S_{331}$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$.

Ví dụ 3: Cho $a,b,c > 0$. Chứng minh: $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + \frac{abc}{2(a^3+b^3+c^3)} \ge \frac{5}{3}$ (1)

Chứng minh

Bất đẳng thức cần chứng minh $\Leftrightarrow \dfrac{\frac{1}{2}S_3 + S_{21} + \frac{1}{2}S_{111}}{S_{21} + \frac{1}{3}S_{111}} + \dfrac{\frac{1}{6}S_{111}}{S_3} \ge \frac{5}{3}$

$$\Leftrightarrow 3S_3\left(\frac{1}{2}S_3 + S_{21} + \frac{1}{2}S_{111}\right) + \frac{1}{2}S_{111}\left(S_{21} + \frac{1}{3}S_{111}\right) \ge 5S_3\left(S_{21} + \frac{1}{3}S_{111}\right)$$

$$\Leftrightarrow 3\left(S_6 + 2S_{33} + 2S_{51} + 2S_{42} + 2S_{321} + 3S_{411} + S_{321} + \frac{1}{3}S_{222}\right) \ge 5(2S_{51} + 2S_{42} + 2S_{321} + 2S_{411})$$

$\Leftrightarrow 3S_6+6S_{33}+S_{222}\ge 4S_{51}+4S_{42}+S_{321}+S_{411}$

Bất đẳng thức cuối được chứng minh nhờ các bất đẳng thức sau:

$\frac{1}{2}S_{33}+\frac{1}{2}S_{222}\ge S_{321}$, $\frac{1}{2}S_6+\frac{1}{2}S_{222}\ge S_{42}$; $\frac{5}{2}S_6+\frac{25}{6}S_{42}\ge\frac{20}{3}S_{51}\Leftrightarrow S_6+\frac{5}{3}S_{42}\ge\frac{8}{3}S_{51}$;

$\frac{8}{3}S_{51}+8S_{33}\ge\frac{32}{3}S_{42}\Leftrightarrow S_4+3S_{22}\ge 4S_{31}$; $\frac{5}{2}S_{42}\ge\frac{5}{2}S_{33}$; $S_{42}\ge S_{321}$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

Chú ý: Đọc xong lời giải bài này chắc chắn các bạn sẽ tự hỏi tại sao lại có những hệ số ở trước các bất đẳng thức trên như vậy? Câu trả lời là trong quá trình giải, chúng ta vô tình sử dụng giải hệ phương trình bậc nhất nhiều ẩn nên mới tạo ra những hệ số đó.

Ví dụ 4: Cho $a,b,c\ge 0$. Chứng minh: $\frac{7(a^3+b^3+c^3)}{a^2+b^2+c^2}+\frac{4(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)}{a^3+b^3+c^3}\ge\frac{11}{3}(a+b+c)$ (1)

Chứng minh

$$(1)\Leftrightarrow 21(a^3+b^3+c^3)^2+12(a^2+b^2+c^2)(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$$
$$\ge 11(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)(a^3+b^3+c^3)$$

$$\Leftrightarrow\frac{21}{2}S_6+21S_{33}+12S_{42}+6S_{222}\ge 11S_{51}+11S_{42}+11S_{321}+\frac{11}{2}S_6+\frac{11}{3}S_{33}$$

$$\Leftrightarrow 5S_6+S_{42}+10S_{33}+6S_{222}\ge 11S_{51}+11S_{321}$$

Đúng vì: $\frac{9}{2}S_{33}+\frac{9}{2}S_{222}\ge 9S_{321}$; $\frac{1}{2}S_{42}+\frac{3}{2}S_{222}\ge 2S_{321}\Leftrightarrow S_4+3S_{22}\ge 4S_{31}$

$\frac{3}{10}S_6+\frac{1}{2}S_{42}\ge\frac{4}{5}S_{51}\Leftrightarrow S_6+\frac{5}{3}S_{42}\ge\frac{8}{3}S_{51}$;

$\frac{22}{5}S_6+\frac{11}{2}S_{33}\ge\frac{99}{10}S_{51}\Leftrightarrow S_6+\frac{5}{4}S_{33}\ge\frac{9}{4}S_{51}$, $\frac{3}{10}S_6\ge\frac{3}{10}S_{51}$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

Nhận xét: Cũng giống với ví dụ 3 ở trên, bài này ta cũng phải giải hệ phương trình bậc nhất nhiều ẩn để chọn hệ số đứng trước mỗi bất đẳng thức.

3. Phương pháp chung sáng tạo các bài tập áp dụng

Nhận xét: Hai bài toán 3 và 4 dưới đây là những bài toán rất khó. Hai bài toán 1, 2 và các bất đẳng thức ***Schur***, ***SuranYi***, ***Vasile*** đều là những trường hợp rất riêng của nó. Và cho đến nay vẫn chưa có 1 lời giải thỏa đáng cho nó. Đây chính là một thử thách cho tất cả những người say mê toán học, đặc biệt là bất đẳng thức.

3.1. Đặc biệt hóa

Xét các trường hợp riêng của các bất đẳng thức tổng quát sẽ giúp ta có được những bài toán đẹp và dễ áp dụng.

3.2. Mối liên hệ giữa các phương pháp sáng tạo

Từ một cấu trúc về một dạng bất đẳng thức nào đó, ta có thể sử dụng phép "tương tự hóa" để nhận được các bất đẳng thức mới. Từ các bất đẳng thức mới này, ta có thể "tổng quát hóa" các dạng bất đẳng thức này. Sau khi "tổng quát hóa" một bất đẳng thức, ta có thể quay về sử dụng phương pháp "đặc biệt hóa" để tạo ra các bất đẳng thức đơn giản và đẹp. Chúng ta có thể thấy rõ điều này qua các bài toán sau:

Bài 1: Cho các biến $x, y, z \geq 0$. Tìm hằng số k tốt nhất sao cho bất đẳng thức sau luôn đúng: $S_m + kS_{a_2b_2c_2} \geq (k+1)S_{a_1b_1}$ trong đó $M, a_1, b_1, a_2, b_2, c_2$ là các số nguyên dương thỏa mãn: $M = a_1 + b_1 = a_2 + b_2 + c_2$; $a_1 \geq b_1$; $a_2 \geq b_2 \geq c_2$; $a_1 \geq a_2$

Bài 2: Cho các biến $x, y, z \geq 0$. Tìm hằng số k tốt nhất sao cho bất đẳng thức sau luôn đúng: $S_m + kS_{a_2b_2c_2} \geq (k+1)S_{a_1b_1c_1}$ trong đó $M, a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 \in \mathrm{N}$ thỏa mãn:

$a_1 \geq b_1 \geq c_1$; $a_1 + b_1 \geq a_2 + b_2$; $M = a_1 + b_1 + c_1 = a_2 + b_2 + c_2$

Bài 3: Cho các biến $x, y, z \geq 0$. Tìm hằng số k tốt nhất sao cho bất đẳng thức sau luôn đúng:

$S_{a_1b_1} + kS_{a_3b_3c_3} \geq (k+1)S_{a_2b_2c_2}$ trong đó $a_1, b_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3, c_3 \in \mathrm{N}$ thỏa mãn:

$a_1 \geq b_1 \geq c_1$; $a_1 + a_2 \geq b_1 + b_2 \geq c_1 + c_2$; $a_1 + b_1 = a_2 + b_2 + c_2 = a_3 + b_3 + c_3$

Bài 4: Cho các biến $x_1, x_2, \ldots x_n \geq 0$. Tìm hằng số k tốt nhất sao cho bất đẳng thức sau luôn đúng: $S_{a_1a_2\ldots a_n} + kS_{c_1c_2\ldots c_n} \geq (k+1)S_{b_1b_2\ldots b_n}$ trong đó $(a_1, a_2, \ldots a_n), (b_1, b_2, \ldots b_n), (c_1, c_2, \ldots c_n)$ là 3 dãy nguyên dương không giảm sao cho:

$a_1 + a_2 + \ldots + a_k \geq b_1 + b_2 + \ldots + b_k \geq c_1 + c_2 + \ldots + c_k \quad \forall k = \overline{1, n-1}$

$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n = c_1 + c_2 + \ldots + c_n$

Tổng quát hơn một chút nữa là bài toán 5 sau:

Bài 5: Cho các biến không âm $x_1, x_2, \ldots x_n$. Tìm hằng số k tốt nhất sao cho bất đẳng thức sau luôn đúng: $S_{a_1a_2\ldots a_n} - S_{b_1b_2\ldots b_n} \geq k\left(S_{c_1c_2\ldots c_n} - S_{d_1d_2\ldots d_n}\right)$ trong đó

$(a_1, a_2, ... a_n), (b_1, b_2, ... b_n), (c_1, c_2, ... c_n), (d_1, d_2, ... d_n)$ là các dãy số nguyên dương không giảm sao cho:

$a_1 + a_2 + ... + a_k \geq b_1 + b_2 + ... + b_k \geq c_1 + c_2 + ... + c_k \geq d_1 + d_2 + ... + d_k \ \forall k = \overline{1, n-1}$

$a_1 + a_2 + ... + a_n = b_1 + b_2 + ... + b_n = c_1 + c_2 + ... + c_n = d_1 + d_2 + ... + d_n$

Bài 6: Cho dãy số không tăng $\{a_n\}$ và 1 hoán vị của nó $\{b_n\}$ ($n \in \mathbb{Z}^+$)

Chứng minh: nếu $x_1 \geq x_2 \geq ... \geq x_n \geq 0$ thì $\sum_{cyc} x_1^{a_1} x_2^{a_2} ... x_n^{a_n} \geq \sum_{cyc} x_1^{b_1} x_2^{b_2} ... x_n^{b_n} \geq \sum_{cyc} x_1^{a_n} x_2^{a_{n-1}} ... x_n^{a_1}$

Chú ý: Bài toán trên có ý nghĩa đối với bất đẳng thức hoán vị tương tự như bất đẳng thức Muirhead đối với bất đẳng thức đối xứng. Làm mạnh hơn bài toán trên ta có:

Bài 7: Cho 2 dãy không tăng $\{a_n\}, \{b_n\}$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

$a_1 + a_2 + ... + a_n = b_1 + b_2 + ... + b_n$

$a_1 + a_2 + ... + a_k \geq b_1 + b_2 + ... + b_k \ \forall k = \overline{1, n-1}$

Dãy biến $\{x_n\}$ không tăng và không âm có $\{y_n\}$ là 1 hoán vị của nó.

Chứng minh rằng: $\sum_{cyc} x_1^{a_1} x_2^{a_2} ... x_n^{a_n} \geq \sum_{cyc} y_1^{b_1} y_2^{b_2} ... y_n^{b_n}$

Và tương tự quá trình ta sẽ có những bài bất đẳng thức hoán vị sau:

Kí hiệu: $C_X^{\alpha} = \sum_{cyc} a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} ... a_n^{\alpha_n} = C(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$

Đặc biệt nếu $\alpha_1, \alpha_2, ... \alpha_n$ là các số tự nhiên từ 0 đến 9 thì kí hiệu mới được đổi là:

$C_{\alpha_1 \alpha_2 ... \alpha_n} = C(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$

Ngoài ra nếu $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq ... \geq \alpha_k > \alpha_{k+1} = \alpha_{k+2} = ... = \alpha_n = 0$ thì $C_{\alpha_1 \alpha_2 ... \alpha_n} = C_{\alpha_1 \alpha_2 ... \alpha_k}$

Bài 8: Cho M, a_1, b_1, a_2, b_2 là các số nguyên dương sao cho: $M = a_1 + b_1 = a_2 + b_2$; $a_1 > a_2 \geq b_2 > b_1$. Cho 2 biến $x, y \geq 0$. Tìm hằng số k tốt nhất để bất đẳng thức sau đúng với mọi $x, y \geq 0$: $C_M + kC_{a_2 b_2} \geq (k+1) C_{a_1 b_1}$

Bài 9: Cho các biến $x, y, z \geq 0$. Tìm hằng số k tốt nhất sao cho bất đẳng thức sau luôn đúng: $C_m + kC_{a_2b_2c_2} \geq (k+1)C_{a_1b_1}$ trong đó $M, a_1, b_1, a_2, b_2, c_2$ là các số nguyên dương thỏa mãn: $M = a_1 + b_1 = a_2 + b_2 + c_2; a_1 \geq b_1; a_2 \geq b_2 \geq c_2; a_1 \geq a_2$

Bài 10: Cho các biến $x, y, z \geq 0$. Tìm hằng số k tốt nhất sao cho bất đẳng thức sau luôn đúng: $C_m + kC_{a_2b_2c_2} \geq (k+1)C_{a_1b_1c_1}$ trong đó $M, a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ là các số nguyên dương thỏa mãn: $a_1 \geq b_1 \geq c_1$; $a_1 + b_1 \geq a_2 + b_2$; $M = a_1 + b_1 + c_1 = a_2 + b_2 + c_2$;

Bài 11: Cho các biến $x, y, z \geq 0$. Tìm hằng số k tốt nhất sao cho bất đẳng thức sau luôn đúng: $C_{a_1b_1} + kC_{a_3b_3c_3} \geq (k+1)C_{a_2b_2c_2}$ trong đó $a_1, b_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3, c_3$ là các số nguyên dương thỏa mãn: $a_1 \geq b_1 \geq c_1$; $a_1 + a_2 \geq b_1 + b_2 \geq c_1 + c_2$;
$a_1 + b_1 = a_2 + b_2 + c_2 = a_3 + b_3 + c_3$;

Bài 12: Cho các biến $x_1, x_2, ... x_n \geq 0$. Tìm hằng số k tốt nhất sao cho bất đẳng thức sau luôn đúng: $C_{a_1a_2...a_n} + kC_{c_1c_2...c_n} \geq (k+1)C_{b_1b_2...b_n}$ trong đó
$(a_1, a_2, ... a_n), (b_1, b_2, ... b_n), (c_1, c_2, ... c_n)$ là 3 dãy nguyên dương không giảm sao cho:

$$a_1 + a_2 + ... + a_k \geq b_1 + b_2 + ... + b_k \geq c_1 + c_2 + ... + c_k \quad \forall k = \overline{1, n-1}$$

$$a_1 + a_2 + ... + a_n = b_1 + b_2 + ... + b_n = c_1 + c_2 + ... + c_n$$

Tổng quát hơn 1 chút nữa là bài toán 4 sau:

Bài 13: Cho các biến không âm $x_1, x_2, ... x_n$. Tìm hằng số k tốt nhất sao cho bất đẳng thức sau luôn đúng: $C_{a_1a_2...a_n} - C_{b_1b_2...b_n} \geq k\left(C_{c_1c_2...c_n} - C_{d_1d_2...d_n}\right)$ trong đó
$(a_1, a_2, ... a_n), (b_1, b_2, ... b_n), (c_1, c_2, ... c_n), (d_1, d_2, ... d_n)$ là các dãy số nguyên dương không giảm sao cho:

$$a_1 + a_2 + ... + a_k \geq b_1 + b_2 + ... + b_k \geq c_1 + c_2 + ... + c_k \geq d_1 + d_2 + ... + d_k \quad \forall k = \overline{1, n-1}$$

$$a_1 + a_2 + ... + a_n = b_1 + b_2 + ... + b_n = c_1 + c_2 + ... + c_n = d_1 + d_2 + ... + d_n$$

Nhìn lại chương II

Cũng giống như chương **I**, trong chương này chúng ta đã tiếp tục khám phá thế giới các bất đẳng thức đồng bậc. Các bất đẳng thức được khai thác chủ yếu là các bất đẳng thức đối xứng ba biến. Ngoài ra dựa trên bất đẳng thức ***hoán vị*** (mục **6**) một lớp các bài toán hoán vị đã được giải quyết. Đối với các bất đẳng thức đối xứng ba biến, các bất đẳng thức ***Schur*** có tính ứng dụng rất cao. Thực hiện phép đổi biến trên các đa thức ***Viete*** (mục *7.3.2*) từ bất đẳng thức ***Schur*** ta thu được các đánh giá rất chặt giữa $p=a+b+c,\ q=ab+bc+ca,\ r=abc$. Chuyển các bất đẳng thức đối xứng ba biến về ba đại lượng mới này, từ đó ta có thể tiến tới chứng minh hoàn thiện bài toán.

Sự phát triển tự nhiên của phép đổi biến dựa trên các đa thức ***Viete*** đưa ta đến với một hệ thống ký hiệu đầy đủ trong mục **8.I** và **8.IV**, nhờ hệ thống ký hiệu này mối liên quan giữa các định lý tưởng như khác xa nhau trở nên rất rõ ràng. Thật vậy, từ lược đồ ***Young*** ta có thể so sánh được mọi tổng đối xứng đồng bậc với nhau nhờ bất đẳng thức ***Muirhead*** $S_X^{\alpha} \ge S_X^{\beta}$ trong đó α và β là hai bộ số mũ đồng bậc, và $\alpha \succ \beta$ (định lý **III.3**, mục **8**). Từ kết quả này có thể thu lại bất đẳng thức ***AM –GM*** rất dễ dàng, ngược lại, sử dụng các bất đẳng thức ***AM – GM*** cũng có thể chứng minh lại được bất đẳng thức ***Muirhead***. Điều này khá phổ biến trong thế giới các bất đẳng thức đồng bậc đối xứng. Mặt khác, kết hợp bất đẳng thức ***Muirhead*** và bất đẳng thức ***AM – GM*** ta nhận được bất đẳng thức ***ASYM***, bất đẳng thức này đưa ra một đánh giá khá chặt chẽ khi hai vế được pha trộn bởi các tổng đối xứng đồng bậc, cụ thể

$$\boxed{S_{\alpha_{11}\alpha_{12}\ldots\alpha_{1n}} + S_{\alpha_{21}\alpha_{22}\ldots\alpha_{2n}} + \ldots + S_{\alpha_{m1}\alpha_{m2}\ldots\alpha_{mn}} \ge mS_{t_1t_2\ldots t_n}}$$

Lưu ý rằng mọi bất đẳng thức đối xứng đều là sự pha trộn giữa các tổng đối xứng đồng bậc khác nhau (sử dụng phép biến đổi trình bày trong mục **8.IV.3**). Như vậy bất đẳng thức ***ASYM*** là một sự phát triển của bất đẳng thức ***Muirhead*** để tấn công thế giới đó. Cũng như vậy, nhờ việc biểu diễn bất đẳng thức ***Schur*** theo dạng ***Muirhead*** ta dễ dàng nhận thấy bất đẳng thức ***Schur*** (dạng tổng quát) cũng là một đánh giá thú vị khi hai vế được trộn lẫn bởi các tổng đối xứng đồng bậc. Tuy nhiên phạm vi áp dụng của bất đẳng thức ***ASYM*** và bất đẳng thức Schur là rất khác nhau. Chính vì thế, chúng bổ sung hỗ trợ cho nhau rất hiệu quả khi chứng minh bất đẳng thức đối xứng.

Tiếp theo đó, kỹ thuật thêm biến trình bày trong mục **8.VIII.2** cho ta một hướng đi mới rất hấp dẫn, đó là chuyển từ bất đẳng thức đối xứng ba biến lên bất đẳng thức đối xứng n biến dựa trên chính các tổng đối xứng, mà nếu như đi theo cách thức tổng quát lược đồ ***Young*** rồi tổng quát định lý ***Muirhead*** cho n biến thì sẽ gặp nhiều khó khăn trong khâu kỹ thuật và tính toán. Hai bất đẳng thức ***SuranYi*** và ***Vasile*** trong mục **8.VIII.2.3** là những ứng dụng đẹp nhất của ý tưởng này.

Mục **8.IX** tìm cách kết hợp những điểm mạnh nhất của ***Muirhead***, ***ASYM*** và ***Schur***. Tuy nhiên các kết quả thu được còn khá hạn chế, chúng ta mới chỉ dừng lại ở hai bài toán 1 và 2 mục **8.IX.2**. Có thể nhận thấy nhờ kỹ thuật thêm biến, hai kết quả này cũng đã là rất mạnh. Như thế, 13 bài toán cuối chương sẽ là những bài toán mở, rất khó, thách thức khả năng tìm tòi của bạn đọc.

CHƯƠNG III: NHỮNG VIÊM KIM CƯƠNG TRONG GIẢI TÍCH

Theo lẽ thông thường thì sau phần trình bày những viên kim cương của bất đẳng thức cổ điển, bất đẳng thức cận đại là phải đến những viên kim cương của bất đẳng thức hiện đại. Tuy nhiên trước khi đề cập những viên kim cương của bất đẳng thức hiện đại chúng tôi đặt 1 chương trung gian nối giữa bất đẳng thức cận đại và hiện đại. Sự sắp đặt và tên gọi của chương III có thể hiểu vì sự ra đời của các viên kim cương trong giải tích xuyên suốt theo chiều dọc thời gian cả cổ điển, cận đại lẫn hiện đại và để phù hợp với tính chất phát triển hệ thống của chương thì một số viên kim cương mới được phát hiện không lâu như: ***Popoviciu, RCF, LCF*** sẽ được sắp đặt sau các viên kim cương như ***Jensen, Karamata***, một số khác sẽ được xếp vào chương IV: ***"Những viên kim cương trong bất đẳng thức hiện đại"***.

Có thể nói phương pháp giải tích là một sự tiếp nối của các bất đẳng thức đại số cả về mặt lịch sử lẫn ý tưởng, nhưng kèm theo nó là một đột phá về mặt công cụ, đó chính là phép toán đạo hàm, bởi vì sử dụng đạo hàm cho phép ta có thể khảo sát bất đẳng thức một cách "địa phương" hơn (điều này sẽ được mô tả cụ thể ở cuối chương). Mặt khác, như đã thấy đối với các phương pháp đại số, kỹ thuật chọn điểm rơi có tầm ứng dụng rất rộng rãi. Trong chương này, các định lý cụ thể của phương pháp giải tích còn cung cấp cho chúng ta những giải pháp rất hiệu quả để tìm ra các điểm rơi đó. Toàn bộ bố cục của chương gồm các nội dung chính sau đây:

1. Định lý Fermat và ứng dụng trong bất đẳng thức

2. Định lý Lagrange cho hàm một biến và các ứng dụng

3. Cực trị của hàm nhiều biến và phương pháp nhân tử Lagrange

4. Bất đẳng thức Bernoulli và các ứng dụng

5. Bất đẳng thức Jensen và kỹ thuật sử dụng

6. Bất đẳng thức Karamata và kỹ thuật sử dụng

7. Bất đẳng thức với các hàm số lồi bên phải và lõm bên trái (***RCF***, ***LCF***)

8. Bất đẳng thức Popoviciu

9. Ứng dụng tích phân Riman

Các định lý ***Fermat*** trong mục **9** là nền tảng của toàn bộ **chương III** và thậm chí của cả các chương sau nữa. Các định lý ***Lagrange*** và phương pháp nhân tử ***Lagrange*** trong mục **10** là những sự phát triển sâu sắc và triệt để của các định lý đó. Bất đẳng thức ***Bernoulli*** trong mục **11** là một đánh giá cụ thể đặc biệt có ý nghĩa đối với các hàm số mũ thực. Một cách chung nhất, các định lý được trình bày trong ba mục này cho ta cách xác định điểm rơi bất đẳng thức rất đáng ***tin cậy***.

Mặt khác, cũng nhờ đạo hàm ta có thể khảo sát dáng điệu của các bất đẳng thức một cách cụ thể hơn. Các bất đẳng thức ***Jensen***, ***Karamata***, ***RCF***, ***LCF***, ***Popoviciu*** là các bất đẳng thức phát biểu cho các hàm lồi, lõm, nửa lồi, nửa lõm, tức là các hàm có dáng điệu đặc biệt. Điểm thú vị nhất là các bất đẳng thức này đều mang hơi hướng một phép dồn biến trực tiếp, mà nội dung của nó ta sẽ bắt gặp một cách đầy đủ hơn trong **chương IV: *"Những viên kim cương trong bất đẳng thức hiện đại"*.**

Cuối cùng, những ứng dụng của tích phân Riman cho ta một cái nhìn toàn cục trong chứng minh bất đẳng thức, bởi vì phép lấy tích phân là phép toán ngược của phép đạo hàm.

Tóm lại, đây sẽ là một chương vừa mang màu sắc cổ điển, vừa phảng phất hơi hướng hiện đại. Chính sự pha trộn đặc biệt này sẽ giúp cho các bạn độc giả có đủ hứng thú để đi suốt chặng đường đầy gian nan sắp tới. Chúc các bạn may mắn!

§9. ĐỊNH LÝ FERMAT VÀ CÁC ỨNG DỤNG TRONG BẤT ĐẲNG THỨC

§9.1. GIỚI THIỆU ĐỊNH LÝ FERMAT

1. Định lý 1: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $[a, b]$.

• Nếu $f'(x)\geq 0\ \forall x\in(a, b)$ thì $f(x)$ tăng trên $[a, b]$ và khi đó ta có

$$\underset{x\in[a,b]}{\text{Min}} f(x)=f(a),\ \underset{x\in[a,b]}{\text{Max}} f(x)=f(b)$$

• Nếu $f'(x)\leq 0\ \forall x\in(a, b)$ thì $f(x)$ giảm trên $[a, b]$ và khi đó ta có

$$\underset{x\in[a,b]}{\text{Min}} f(x)=f(b),\ \underset{x\in[a,b]}{\text{Max}} f(x)=f(a)$$

Chứng minh: Với mọi $x_0;x\in(a,b);x_0<x$, ta có $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

• Nếu $f'(x)\geq 0\ \forall x\in(a, b)$ thì $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geq 0$ mà $x>x_0$ nên $f(x)>f(x_0)$

Do $y=f(x)$ liên tục trên $[a, b]$ nên $\underset{x\in[a,b]}{\text{Min}} f(x)=f(a)$, $\underset{x\in[a,b]}{\text{Max}} f(x)=f(b)$

• Nếu $f'(x)\leq 0\ \forall x\in(a, b)$ thì $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\leq 0$ mà $x>x_0$ nên $f(x)<f(x_0)$

Do $y=f(x)$ liên tục trên $[a, b]$ nên $\underset{x\in[a,b]}{\text{Min}} f(x)=f(b)$, $\underset{x\in[a,b]}{\text{Max}} f(x)=f(a)$

2. Định lý 2 (Điều kiện cần để hàm số có cực trị): Giả sử $y=f(x)$ xác định trên một lân cận đủ bé của điểm $x_0\in(a, b)$ và có đạo hàm tại điểm x_0. Khi đó nếu hàm số $y=f(x)$ đạt cực trị tại x_0 thì $f'(x_0)=0$

Chứng minh:

Giả sử x_0 là điểm cực đại của hàm số. Khi đó tồn tại $\varepsilon>0$ sao cho $f(x_0)=\underset{x\in(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)}{Max} f(x)$.

Nếu $x\in(x_0-\varepsilon,x_0)\Rightarrow\begin{cases}f(x)<f(x_0)\\ x<x_0\end{cases}\Rightarrow\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}>0\Rightarrow f'(x_0^-)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geq 0$

Nếu $x\in(x_0,x_0+\varepsilon)\Rightarrow\begin{cases}f(x)>f(x_0)\\ x>x_0\end{cases}\Rightarrow\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}>0\Rightarrow f'(x_0^+)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geq 0$

Do hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm tại x_0 nên $f'(x_0^-)=f'(x_0^+)=0\Rightarrow f'(x_0)=0$

3. Định lý 3 (Điều kiện đủ để hàm số có cực trị):

Giả sử $y = f(x)$ xác định trên $[a, b]$ và $x_0 \in (a, b)$. Trong một lân cận đủ bé $\varepsilon > 0$ của điểm x_0, nếu $f'(x)$ thay đổi dấu khi x đi qua x_0 (có thể không tồn tại $f'(x_0)$) thì $f(x)$ đạt cực trị tại x_0.

- Nếu $f'(x) < 0\ \forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0)$ và $f'(x) > 0\ \forall x \in (x_0, x_0 + \varepsilon)$ thì x_0 là điểm cực tiểu.
- Nếu $f'(x) > 0\ \forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0)$ và $f'(x) < 0\ \forall x \in (x_0, x_0 + \varepsilon)$ thì x_0 là điểm cực đại.

Chứng minh: Xem minh họa trong 2 bảng biến thiên sau:

x	$x_0 - \varepsilon$	x_0	$x_0 + \varepsilon$
$f'(x)$	$+$	0 ||	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	CĐ	$\searrow$

x	$x_0 - \varepsilon$	x_0	$x_0 + \varepsilon$
$f'(x)$	$-$	0 ||	$+$
$f(x)$	$\searrow$	CT	$\nearrow$

4. Định lý 4: Giả sử $y = f(x)$ xác định trên $[a, b]$ và $x_0 \in (a, b)$. Trong một lân cận đủ bé $\varepsilon > 0$ của điểm x_0, hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp 2 liên tục, đồng thời $f'(x_0) = 0$ và $f''(x_0) \neq 0$ thì x_0 là một điểm cực trị của hàm số với sự phân loại chi tiết:

- Nếu $f'(x_0) = 0$ và $f''(x_0) > 0$ thì x_0 là điểm cực tiểu của hàm $f(x)$.
- Nếu $f'(x_0) = 0$ và $f''(x_0) < 0$ thì x_0 là điểm cực đại của hàm $f(x)$.

Chứng minh:

Giả sử $f'(x_0) = 0$ và $f''(x_0) < 0$. Do $f''(x)$ liên tục tại x_0 nên tồn tại một lân cận đủ bé $\varepsilon > 0$ của điểm x_0 sao cho $f''(x) < 0 \Rightarrow f'(x)$ nghịch biến trên $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$. Khi đó ta có

Với mọi $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0)$ thì $f'(x) > f'(x_0) = 0 \Rightarrow f(x)$ đồng biến trên $(x_0 - \varepsilon, x_0)$

Với mọi $x \in (x_0, x_0 + \varepsilon)$ thì $f'(x) < f'(x_0) = 0 \Rightarrow f(x)$ nghịch biến trên $(x_0, x_0 + \varepsilon)$

Vậy x_0 là điểm cực đại của hàm số và $f(x_0)$ là một cực đại của hàm số.

Xét tương tự khi $f'(x_0) = 0$ và $f''(x_0) > 0$ thì x_0 là điểm cực tiểu của hàm $f(x)$.

§9.2. ỨNG DỤNG ĐỊNH LÝ FERMAT

I. DẠNG 1. Khi gặp các bất đẳng thức có dạng $f(x) > 0$ ta có thể tiến hành đạo hàm để khảo sát trực tiếp các cực trị của $f(x)$, từ đó suy ra kết luận bài toán. Sau đây là một số ví dụ:

Bài 1. Chứng minh rằng: $x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x \quad \forall x>0$

Chứng minh

- $x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x) \Leftrightarrow f(x)=\ln(1+x)+\frac{x^2}{2}-x>0 \ \ \forall x>0$

  Ta có: $f'(x)=\frac{1}{x+1}+x-1=\frac{x^2}{x+1}>0,\ \forall x>0 \Rightarrow f(x)$ tăng trên $(0,+\infty)$

  $\Rightarrow f(x)>f(0)=0 \Rightarrow x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)$

- $\ln(1+x)<x \Leftrightarrow g(x)=\ln(1+x)-x<0,\ \ \forall x>0$

  Ta có: $g'(x)=\frac{1}{1+x}-1=-\frac{x}{1+x}<0 \ \ \forall x>0 \Rightarrow g(x)$ giảm trên $(0,+\infty)$

  $\Rightarrow g(x)<g(0)=0 \Rightarrow \ln(1+x)<x$

Bài 2. Chứng minh rằng: $\ln x<\sqrt{x} \quad \forall x>0$ (1)

Chứng minh

(1) $\Leftrightarrow f(x)=\sqrt{x}-\ln x>0 \quad \forall x>0$

Ta có $f'(x)=\frac{\sqrt{x}-2}{2x}=0 \Leftrightarrow x=4$

x	0		4		$+\infty$
f'	‖	$-$	0	$+$	
f	‖	↘	$2-2\ln 2$	↗	

Từ bảng biến thiên suy ra

$f(x)\ge f(4)>0 \Leftrightarrow \ln x<\sqrt{x} \ \ \forall x>0$

Bài 3. Chứng minh rằng: $1+x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\ge\sqrt{1+x^2},\ \forall x\in\mathbb{R}$

Chứng minh

Bất đẳng thức $\Leftrightarrow f(x)=1+x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\sqrt{1+x^2}\ge 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$

Ta có $f'(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)=0 \Leftrightarrow x=0$

$\Rightarrow$ Bảng biến thiên của $f(x)$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f		↘	0	↗	

Từ bảng biến thiên suy ra $f(x)\ge f(0)=0.\ \ \forall x\in\mathbb{R}$

Bài 4. Tìm giá trị nhỏ nhất của $T = a^a$ với $a > 0$

Giải

Đặt $f(a) = \ln T = a\ln a$.

Ta có: $f'(a) = 1 + \ln a = 0 \Leftrightarrow a = e^{-1}$

$\Rightarrow$ Bảng biến thiên

x	$-\infty$		e^{-1}		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	$f(e^{-1})$	$\nearrow$	

$\Rightarrow \text{Min } f(a) = f(e^{-1}) = -e^{-1} \Rightarrow \text{Min } T = \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}$

Bài 5. Cho $3 \le n$ là số chẵn. Chứng minh rằng $\forall x \ne 0$ ta có bất đẳng thức sau:

$$\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^n}{n!}\right)\left(1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}...-\frac{x^n}{n!}\right)<1$$

Chứng minh

Đặt $\begin{cases} u(x)=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+...+\dfrac{x^n}{n!} \\ v(x)=1-x+\dfrac{x^2}{2!}-\dfrac{x^3}{3!}...-\dfrac{x^n}{n!} \end{cases}$ ta cần chứng minh $f(x) = u(x).v(x) < 1$

Ta có $\begin{cases} u'(x)=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+...+\dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!}=u(x)-\dfrac{x^n}{n!} \\ v'(x)=-1+x-\dfrac{x^2}{2!}...-\dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!}=-v(x)-\dfrac{x^n}{n!} \end{cases}$

x	0		0		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$	1	$\searrow$	

Vậy $f'(x) = [u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$

$$f'(x)=\left[u(x)-\frac{x^n}{n!}\right]v(x)-u(x)\left[v(x)+\frac{x^n}{n!}\right]=\frac{-x^n}{n!}\left[u(x)+v(x)\right]$$

$$f'(x)=\frac{-2x^n}{n!}\left[1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+...+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right]$$

Vì $3 \le n$ chẵn nên $f'(x)$ cùng dấu với $(-2x)$

Nhìn bảng biến thiên ta có, $f(x) < f(0) = 1\ \forall x \ne 0 \Rightarrow$ (đpcm)

Bài 6. Cho $3 \le n \in \mathbb{N}$ và $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Chứng minh rằng: $\sin^n x + \cos^n x \ge 2^{\frac{2-n}{2}}$

Chứng minh

Đặt $y = \sin^n x + \cos^n x \Rightarrow y' = n\sin x\cos x\left(\sin^{n-2} x - \cos^{n-2} x\right)$

Ta có với $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ thì $y' = 0 \Leftrightarrow \sin x = \cos x \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}$

Nhìn bảng biến thiên suy ra: $\text{Min } y = y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2^{\frac{2-n}{2}}$

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
f'	0	$-$	0	$+$	0
f	1	$\searrow$	CT	$\nearrow$	1

II. DẠNG 2. Đối với các trường hợp đơn giản như trên chỉ cần đạo hàm một lần và lập bảng biến thiên là có thể biết được đủ thông tin về f(x), tuy nhiên trong các bài toán phức tạp, ta phải tiến hành đạo hàm vài lần, thậm chí phải khảo sát thêm một số hàm phụ mới xuất hiện.

Bài 1. Chứng minh rằng: $x-\frac{x^3}{3!}<\sin x<x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!},\ \forall x>0$

Chứng minh

• $x-\frac{x^3}{3!}<\sin x\ \ \forall x>0 \Leftrightarrow f(x)=\frac{x^3}{3!}-x+\sin x>0,\ \forall x>0$

Ta có $f'(x)=\frac{x^2}{2!}-1+\cos x \Rightarrow f''(x)=x-\sin x \Rightarrow f'''(x)=1-\cos x\geq 0,\ \forall x>0$

$\Rightarrow f''(x)$ đồng biến $[0, +\infty) \Rightarrow f''(x)>f''(0)=0,\ \forall x>0$

$\Rightarrow f'(x)$ đồng biến $[0, +\infty) \Rightarrow f'(x)>f'(0)=0,\ \forall x>0$

$\Rightarrow f(x)$ đồng biến $[0, +\infty) \Rightarrow f(x)>f(0)=0,\ \forall x>0 \Rightarrow$ (đpcm).

• $\sin x<x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}\ \ \forall x>0 \Leftrightarrow g(x)=\frac{x^5}{5!}-\frac{x^3}{3!}+x-\sin x>0,\ \forall x>0$

Ta có $g'(x)=\frac{x^4}{4!}-\frac{x^2}{2!}+1-\cos x \Rightarrow g''(x)=\frac{x^3}{3!}-x+\sin x=f(x)>0,\ \forall x>0$

$\Rightarrow g'(x)$ đồng biến $[0, +\infty) \Rightarrow g'(x)>g'(0)=0,\ \forall x>0$

$\Rightarrow g(x)$ đồng biến $[0, +\infty) \Rightarrow g(x)>g(0)=0,\ \forall x>0 \Rightarrow$ (đpcm).

Bài 2. Chứng minh rằng: $\sin x>\frac{2x}{\pi},\ \forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

Chứng minh

$\sin x>\frac{2x}{\pi},\ \forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow f(x)=\frac{\sin x}{x}>\frac{2}{\pi},\ \forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. Xét

$f'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}=\frac{g(x)}{x^2}$

trong đó $g(x)=x\cos x-\sin x$.. Ta có $g'(x)=\cos x-x\sin x-\cos x=-x\sin x<0$,

$\forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ suy ra $g(x)$ giảm trên $\left(0,\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow g(x)<g(0)=0 \Rightarrow f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}<0$

$\forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow f(x)$ giảm trên $\left(0,\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow f(x)>f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{2}{\pi} \Leftrightarrow \sin x>\frac{2x}{\pi},\forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

Bài 3. Chứng minh rằng: $x^{\frac{x}{1-x}}+x^{\frac{1}{1-x}}>\frac{2}{e},\quad \forall x\in(0,1)$

Chứng minh

Xét hàm số $f(x)=x^{\frac{x}{1-x}}+x^{\frac{1}{1-x}}=x^{\frac{x}{1-x}}+x.x^{\frac{x}{1-x}}=(1+x)x^{\frac{x}{1-x}}$ với $x\in(0,1)$

$\Rightarrow \ln f(x) = \ln (1+x) x^{\frac{x}{1-x}} = \ln(1+x) + \frac{x}{1-x} \cdot \ln x$

$\Rightarrow [\ln f(x)]' = \left[\ln(1+x) + \frac{x}{1-x} \cdot \ln x\right]' \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} + \frac{\ln x}{(1-x)^2}$

$\Rightarrow f'(x) = f(x)\left[\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} + \frac{\ln x}{(1-x)^2}\right] = (1+x)x^{\frac{x}{1-x}} \cdot \left[\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} + \frac{\ln x}{(1-x)^2}\right]$

$\Rightarrow f'(x) = (1+x)x^{\frac{x}{1-x}} \cdot (1-x)^{-2} \cdot \left(2 \cdot \frac{1-x}{1+x} + \ln x\right)$

Xét $g(x) = 2 \cdot \frac{1-x}{1+x} + \ln x \Rightarrow g'(x) = \frac{-4}{(1+x)^2} + \frac{1}{x} = \frac{(1-x)^2}{x(1+x)^2} > 0$

$\Rightarrow g(x)$ tăng trên $(0, 1) \Rightarrow g(x) < g(1) = 0 \Rightarrow f'(x) < 0 \;\; \forall x \in (0, 1)$

$\Rightarrow f(x)$ giảm trên $(0, 1) \Rightarrow f(x) > \lim\limits_{x \to 1} f(x)$

Ta có $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (1+x)x^{-1}.x^{\frac{1}{1-x}} = 2\lim\limits_{x\to 1}\left(1 + \frac{1}{\frac{1}{x-1}}\right)^{\frac{1}{x-1}} = 2e^{-1} = \frac{2}{e}$

Vậy $f(x) = x^{\frac{x}{1-x}} + x^{\frac{1}{1-x}} > \frac{2}{e} \;\; \forall x \in (0, 1)$

Bài 4. Cho $a, b, x > 0$ và $a \neq b$. Chứng minh rằng: $\left(\frac{a+x}{b+x}\right)^{b+x} > \left(\frac{a}{b}\right)^b$

Chứng minh

Xét $f(x) = \left(\frac{a+x}{b+x}\right)^{b+x}$ với $x \geq 0$

$\Rightarrow \ln f(x) = (b+x)\ln\frac{a+x}{b+x} \Rightarrow [\ln f(x)]' = \left[(b+x)\ln\frac{a+x}{b+x}\right]'$

$\Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \ln\frac{a+x}{b+x} + (b+x)\frac{b+x}{a+x}\left(\frac{a+x}{b+x}\right)' = \ln\frac{a+x}{b+x} + \frac{(b+x)^2}{a+x} \cdot \frac{b-a}{(b+x)^2} = \ln\frac{a+x}{b+x} + \frac{b-a}{a+x}$

$\Rightarrow f'(x) = f(x).\left(\ln\frac{a+x}{b+x} + \frac{b-a}{a+x}\right) = \left(\frac{a+x}{b+x}\right)^{b+x}\left(\ln\frac{a+x}{b+x} + \frac{b-a}{a+x}\right)$

Xét $g(x) = \ln\frac{a+x}{b+x} + \frac{b-a}{a+x} \Rightarrow f'(x) = g(x)\left(\frac{a+x}{b+x}\right)^{b+x}$

Ta có: $g'(x) = \frac{b+x}{a+x} \cdot \frac{b-a}{(b+x)^2} + \frac{a-b}{(a+x)^2} = \frac{-(a-b)^2}{(a+x)^2(b+x)} < 0$

$\Rightarrow g(x)$ giảm trên $(0, +\infty) \Rightarrow g(x) > \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln\frac{a+x}{b+x} + \frac{b-a}{a+x}\right) = 0$

$\Rightarrow f'(x) > 0 \;\; \forall x > 0 \Rightarrow f(x)$ tăng trên $[0, +\infty) \Rightarrow f(x) > f(0) \Rightarrow$ (đpcm)

Bài 5. Tìm số thực α lớn nhất thỏa mãn bất đẳng thức $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\alpha} \le e,\ \forall n \in \mathbb{Z}^+$

Giải

Gọi $f(n)$ là số thực thoa mãn điều kiện

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+f(n)} = e \Leftrightarrow \left[n+f(n)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right] = 1 \Leftrightarrow f(n) = \frac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} - n$$

Xét $f(x) = \frac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} - x$ với $x \in [1, +\infty)$. Khi đó $f'(x) = \frac{-1}{x(x+1)\ln^2\left(1+\frac{1}{x}\right)} - 1$

Ta chứng minh $\ln(1+t) < \frac{1}{\sqrt{1+t}}$ với $t > 0$. Thật vậy, $g(t) = \frac{t}{\sqrt{1+t}} - \ln(1+t)$

$$\Rightarrow g'(t) = \frac{\sqrt{1+t} - \frac{t}{\sqrt{1+t}}}{1+t} - \frac{1}{1+t} = \frac{1}{(1+t)\sqrt{1+t}} - \frac{1}{1+t} < 0 \Rightarrow g(t) \text{ giảm}$$

Suy ra $g(t) < g(0),\ \forall t > 0$ hoặc $\ln(1+t) < \frac{t}{\sqrt{1+t}}$. Vậy

$$\ln^2\left(1+\frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)} \Leftrightarrow x(x+1)\ln^2\left(x+\frac{1}{x}\right) < 1,\ \forall x > 0 \Rightarrow f'(x) > 0,\ \forall x > 0$$

Vậy hàm số n $f(x)$ tăng trên $[1, +\infty)$.

Vậy suy ra $\alpha \le f(n)$, và khi đó $\alpha = f(1) = \frac{1}{\ln 2} - 1$ là giá trị cần tìm.

III. DẠNG 3. Đối với một lớp các bất đẳng thức hai biến số, ta có thể biến đổi để quy về bất đẳng thức một biến. Biến này có thể là một trong hai biến số ban đầu, hoặc là một biến mới.

Bài 1. Cho $x^2 + y^2 = 1$ và $S = \frac{2(xy+y^2)}{2xy+2x^2+1}$. Chứng minh: $\frac{2-\sqrt{6}}{2} \le S \le \frac{2+\sqrt{6}}{2}$

$$S = \frac{2(xy+y^2)}{2xy+2x^2+1} = \frac{2(xy+y^2)}{2xy+2x^2+(x^2+y^2)} = \frac{2(xy+y^2)}{3x^2+2xy+y^2}$$. Nếu $y = 0$ thì $S = 0$.

Với $y \ne 0$, đặt $\frac{x}{y} = t \Rightarrow S = \frac{2y^2(t+1)}{y^2(3t^2+2t+1)} = \frac{2(t+1)}{3t^2+2t+1}$.

$$S' = \frac{2(3t^2+2t+1) - 2(t+1)(6t+2)}{(3t^2+2t+1)^2} = \frac{-2(3t^2+6t+1)}{(3t^2+2t+1)^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow t = t_1 = \frac{-3-\sqrt{6}}{3};\ t = t_2 = \frac{-3+\sqrt{6}}{3}$$

t	$-\infty$		t_1		t_2		$+\infty$
S'		$-$	0	$+$	0	$-$	
S	0	$\searrow$	$\frac{2-\sqrt{6}}{2}$	$\nearrow$	$\frac{2+\sqrt{6}}{2}$	$\searrow$	0

Nhìn bảng biến thiên suy ra: $\frac{2-\sqrt{6}}{2} \le S \le \frac{2+\sqrt{6}}{2}$

Bài 2. Chứng minh rằng: $\sqrt[3]{\dfrac{a^3+b^3}{2}} \le \sqrt[4]{\dfrac{a^4+b^4}{2}}, \forall a, b > 0.$

Chứng minh

Bất đẳng thức $\Leftrightarrow \dfrac{\sqrt[4]{a^4+b^4}}{\sqrt[3]{a^3+b^3}} \ge \dfrac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt[3]{2}} \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt[4]{1+\left(\frac{a}{b}\right)^4}}{\sqrt[3]{1+\left(\frac{a}{b}\right)^3}} = \dfrac{\sqrt[4]{1+t^4}}{\sqrt[3]{1+t^3}} \ge \dfrac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt[3]{2}}$ với $t = \dfrac{a}{b} > 0.$

Xét hàm số $f(t) = \dfrac{\sqrt[4]{1+t^4}}{\sqrt[3]{1+t^3}} = \dfrac{(1+t^4)^{\frac{1}{4}}}{(1+t^3)^{\frac{1}{3}}}$ với $t > 0$;

Ta có $f'(t) = \dfrac{(1+t^4)^{\frac{-3}{4}} t^3 (1+t^3)^{\frac{1}{3}} - (1+t^4)^{\frac{1}{4}} t^2 (1+t^3)^{\frac{-2}{3}}}{(1+t^3)^{\frac{2}{3}}}$

$$f'(t) = \frac{t^2\left(1+t^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{-2}{3}}(1+t^4)^{\frac{-3}{4}}\left[t(1+t^3)-(1+t^4)\right]}{(1+t^3)^{\frac{2}{3}}} = \frac{t^2\left(1+t^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{-2}{3}}(1+t^4)^{\frac{-3}{4}}(t-1)}{(1+t^3)^{\frac{2}{3}}}$$

$f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow$ Bảng biến thiên $f(t)$

t	0		1		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f	1	$\searrow$	$\frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt[3]{2}}$	$\nearrow$	1

Từ bảng biến thiên suy ra $\dfrac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt[3]{2}} \le f(t) < 1 \quad \forall t > 0$

$\Rightarrow \dfrac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt[3]{2}} \le \dfrac{\sqrt[4]{a^4+b^4}}{\sqrt[3]{a^3+b^3}} \Rightarrow \sqrt[3]{\dfrac{a^3+b^3}{2}} \le \sqrt[4]{\dfrac{a^4+b^4}{2}}.$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a = b > 0.$

Bài 3. Cho $\begin{cases} x, y \ge 0 \\ x^3 + y^3 = 1 \end{cases}$. Chứng minh rằng: $\sqrt{x} + 2\sqrt{y} \le \left(1 + 2\cdot\sqrt[5]{2}\right)^{\frac{5}{6}}$

Chứng minh

Ta có $x^3 + y^3 = 1 \Leftrightarrow y = \sqrt[3]{1-x^3}$.

Xét $f(x) = \sqrt{x} + 2\sqrt{y} = \sqrt{x} + 2.\sqrt[6]{1-x^3}$ với $x \in [0, 1] \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \dfrac{x^2}{\sqrt[6]{(1-x^3)^5}}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x_0 = \dfrac{1}{1+2.\sqrt[5]{2}} \Rightarrow$ Bảng biến thiên

x	0		x_0		1
f'		$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$	M	$\searrow$	

Từ bảng biến thiên suy ra:

$f(x) \le f(x_0) = \text{M} = \left(2.\sqrt[5]{2} + 1\right)^{\frac{5}{6}} \quad \forall x \in [0, 1]$

Bài 4. Cho $\begin{cases} 2y \ge x^2 \\ y \le -2x^2 + 3x \end{cases}$. Chứng minh rằng: $x^2 + y^2 \le 2$

Chứng minh

$$\begin{cases} 2y \ge x^2 \\ y \le -2x^2 + 3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \ge 0 \\ \frac{1}{2}x^2 \le -2x^2 + 3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \ge 0 \\ 5x^2 - 6x \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \ge 0 \\ 0 \le x \le \frac{6}{5} \end{cases}$$

Ta có $x^2 + y^2 \le x^2 + (-2x^2 + 3x)^2 = f(x)$.

Ta sẽ chứng minh $f(x) \le 2$

Biến đổi $f(x) = 4x^4 - 12x^3 + 10x^2$

$\Rightarrow f'(x) = 4x(x-1)(x-5)$

x	0		1		6/5
f'		+	0	−	
f		↗	2	↘	

Từ bảng biến thiên suy ra Max $f(x) = f(1) = 2 \Rightarrow x^2 + y^2 \le f(x) \le 2$

Bài 5. Chứng minh rằng: $\dfrac{x+y}{2} > \dfrac{x-y}{\ln x - \ln y} \quad \forall x > y > 0$

Chứng minh

Vì $x > y > 0$, $\ln x > \ln y \Leftrightarrow \ln x - \ln y > 0$, khi đó bất đẳng thức $\Leftrightarrow \ln x - \ln y > 2 \cdot \dfrac{x-y}{x+y}$

$$\Leftrightarrow \ln\frac{x}{y} > 2 \cdot \frac{\frac{x}{y} - 1}{\frac{x}{y} + 1} \Leftrightarrow \ln t > 2 \cdot \frac{t-1}{t+1}, \text{ với } t = \frac{x}{y} > 1 \Leftrightarrow f(t) = \ln t - 2 \cdot \frac{t-1}{t+1} > 0 \ \forall t > 1.$$

Ta có $f'(t) = \dfrac{1}{t} - \dfrac{4}{(t+1)^2} = \dfrac{(t-1)^2}{t(t+1)^2} > 0 \quad \forall t > 1$

$\Rightarrow f(t)$ tăng trên $[1, +\infty) \Rightarrow f(t) > f(1) = 0 \quad \forall t > 1 \Rightarrow$ (đpcm.)

Bài 6. Cho $x^2 + y^2 = 1$. Tìm Max, Min của biểu thức $A = x\sqrt{1+y} + y\sqrt{1+x}$

Giải

Xét Max A: Sử dụng bất đẳng thức ***CBS*** ta có:

$$A = x\sqrt{1+y} + y\sqrt{1+x} \le \sqrt{(x^2+y^2)\left[(1+x)+(1+y)\right]} = \sqrt{2 + 1.x + 1.y}$$

$$\le \sqrt{2 + \sqrt{(1^2+1^2)(x^2+y^2)}} = \sqrt{2+\sqrt{2}}$$

Xét Min A:

i) Nếu $xy \ge 0$. Xét hai khả năng sau đây:

- $x \ge 0, y \ge 0 \Rightarrow \text{Min } A > 0 \quad (1)$
- $x \le 0, y \le 0$: $|A| \le \sqrt{(x^2+y^2)\left[(1+x)+(1+y)\right]} = \sqrt{2+x+y} = \sqrt{2 - |x| - |y|}$

Vì $x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow |x|, |y| \le 1 \Rightarrow |x| + |y| \ge x^2 + y^2 = 1$

$\Rightarrow |A| \le \sqrt{2}-1 = 1 \Rightarrow A \ge -1 \Rightarrow \text{Min } A = -1 \quad (2)$

ii) Nếu $xy < 0$ thì đặt $t = x + y \Rightarrow xy = \frac{1}{2}(t^2 - 1) < 0 \Rightarrow -1 < t < 1$

Sử dụng $x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow 2A^2 = 2x^2(1+y) + 4xy\sqrt{(1+y)(1+x)} + 2y^2(1+x)$

$= 2 + 2xy(x+y) + 4xy\sqrt{1+x+y+xy} = f(t) = 2 + (t^2-1)t + 2(t^2-1)\sqrt{1+t+\frac{t^2-1}{2}}$

$\Rightarrow f(t) = (1+\sqrt{2})t^3 + \sqrt{2}t^2 - (1+\sqrt{2})t + 2 - \sqrt{2} \Rightarrow f'(t) = 3(1+\sqrt{2})t^2 + 2\sqrt{2}t - (1+\sqrt{2})$

Ta có: $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t_1 = \frac{-(1+\sqrt{2})}{3}; t_2 = \sqrt{2}-1$

t	-1		t_1		t_2		1
$f'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(t)$	2	$\nearrow$	$f(t_1)$	$\searrow$	$f(t_2)$	$\nearrow$	2

Từ bảng biến thiên suy ra

$f(t) \le f(t_1) = \frac{76-12\sqrt{2}}{27} \quad \forall t \in (-1, 1)$

$\Rightarrow 2A^2 \le \frac{76-12\sqrt{2}}{27} \Leftrightarrow -\sqrt{\frac{38-6\sqrt{2}}{27}} \le A \le \sqrt{\frac{38-6\sqrt{2}}{27}} \Rightarrow \text{Min } A = -\sqrt{\frac{38-6\sqrt{2}}{27}} \quad (3)$

Từ (1), (2) và (3) suy ra $\text{Min } A = -\sqrt{\frac{38-6\sqrt{2}}{27}}$ xảy ra $\Leftrightarrow x, y = \frac{-(1+\sqrt{2}) \pm \sqrt{15-2\sqrt{2}}}{6}$

IV. DẠNG 4. Đối với một lớp các bất đẳng thức hai biến số khác, ta thường phải tìm cách phân ly hai biến và đưa ra một hàm đặc trưng để khảo sát.. Phương pháp này cũng có hiệu quả với một số bài toán ba biến.

Bài 1. Chứng minh rằng: $a^b < b^a, \quad \forall a > b \ge e$

Chứng minh

$a^b < b^a \Leftrightarrow \ln a^b < \ln b^a \Leftrightarrow b\ln a < a\ln b \Leftrightarrow \frac{\ln a}{a} < \frac{\ln b}{b}$

Xét hàm số $f(x) = \frac{\ln x}{x} \quad \forall x \ge e$. Ta có $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2} \le \frac{1-\ln e}{x^2} = 0$

$\Rightarrow f(x)$ giảm trên $[e, +\infty) \Rightarrow f(a) < f(b) \Leftrightarrow \frac{\ln a}{a} < \frac{\ln b}{b} \Leftrightarrow a^b < b^a$

Bài 2. Chứng minh rằng: $\left(2^a + \frac{1}{2^a}\right)^b \le \left(2^b + \frac{1}{2^b}\right)^a, \forall a \ge b > 0$

Chứng minh

$\left(2^a + \frac{1}{2^a}\right)^b \le \left(2^b + \frac{1}{2^b}\right)^a \Leftrightarrow \left(\frac{1+4^a}{2^a}\right)^b \le \left(\frac{1+4^b}{2^b}\right)^a$

$\Leftrightarrow (1+4^a)^b \le (1+4^b)^a \Leftrightarrow \ln(1+4^a)^b \le \ln(1+4^b)^a \Leftrightarrow \frac{\ln(1+4^a)}{a} \le \frac{\ln(1+4^b)}{b}$.

Xét hàm số $f(x) = \frac{\ln(1+4^x)}{x}$ với $x > 0$.

Ta có $f'(x) = \frac{4^x \ln 4^x - (1+4^x)\ln(1+4^x)}{x^2(1+4^x)} < 0 \Rightarrow f(x)$ giảm trên $(0, +\infty) \Rightarrow f(a) \le f(b)$

Bài 3. Chứng minh rằng: $\frac{1}{y-x}\left(\ln\frac{y}{1-y}-\ln\frac{x}{1-x}\right)>4$ $\begin{cases}\forall x,y\in(0,1)\\ x\neq y\end{cases}$ (1)

Chứng minh

• Nếu $y>x$ thì (1) $\Leftrightarrow \ln\frac{y}{1-y}-\ln\frac{x}{1-x}>4(y-x) \Leftrightarrow \ln\frac{y}{1-y}-4y>\ln\frac{x}{1-x}-4x$

• Nếu $y<x$ thì (1) $\Leftrightarrow \ln\frac{y}{1-y}-\ln\frac{x}{1-x}<4(y-x) \Leftrightarrow \ln\frac{y}{1-y}-4y<\ln\frac{x}{1-x}-4x$

Xét $f(t)=\ln\frac{t}{1-t}-4t$ với $t\in(0,1)$

Ta có $f'(t)=\frac{1-t}{t}\left(\frac{t}{1-t}\right)'-4=\frac{1-t}{t}\cdot\frac{1}{(1-t)^2}-4=\frac{1}{t(1-t)}-4=\frac{(2t-1)^2}{t(1-t)}>0\ \forall t\in(0,1)$

$\Rightarrow f(t)$ tăng trên $(0,1)\Rightarrow f(y)>f(x)$ nếu $y>x$ và $f(y)<f(x)$ nếu $y<x$

$\Leftrightarrow \frac{1}{y-x}\left(\ln\frac{y}{1-y}-\ln\frac{x}{1-x}\right)>4$ $\begin{cases}\forall x,y\in(0,1)\\ x\neq y\end{cases}$

Bài 4. Cho $\begin{cases}a,b,c>0\\ a^2+b^2+c^2=1\end{cases}$. Chứng minh rằng: $\frac{a}{b^2+c^2}+\frac{b}{c^2+a^2}+\frac{c}{a^2+b^2}\geq\frac{3\sqrt{3}}{2}$ (1)

Chứng minh

Bất đẳng thức (1) $\Leftrightarrow \frac{a}{1-a^2}+\frac{b}{1-b^2}+\frac{c}{1-c^2}\geq\frac{3\sqrt{3}}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{a^2}{a(1-a^2)}+\frac{b^2}{b(1-b^2)}+\frac{c^2}{c(1-c^2)}\geq\frac{3\sqrt{3}}{2}$ (2)

Xét $f(x)=x(1-x^2)$ với $x\in(0,1)$

Ta có $f'(x)=1-3x^2=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{\sqrt{3}}\in(0,1)$

x	0		$1/\sqrt{3}$		$+\infty$
f'		+	0	−	
f		↗	$\frac{2}{3\sqrt{3}}$	↘	

Từ bảng biến thiên $\Rightarrow f(x)\leq\frac{2}{3\sqrt{3}}$ $\forall x\in(0,1)$, khi đó ta có:

$$\frac{a^2}{a(1-a^2)}+\frac{b^2}{b(1-b^2)}+\frac{c^2}{c(1-c^2)}\geq\frac{3\sqrt{3}}{2}\left(a^2+b^2+c^2\right)=\frac{3\sqrt{3}}{2}\Rightarrow \text{(2) đúng}\Rightarrow\text{(đpcm)}.$$

Bài 5. **a.** Lập bảng biến thiên và tìm cực trị của $y=\frac{x+3}{\sqrt{x^2+1}}$

b. Cho $a+b+c=1$. Chứng minh rằng: $\sqrt{a^2+1}+\sqrt{b^2+1}+\sqrt{c^2+1}\geq\sqrt{10}$

Chứng minh

a. $y=\frac{x+3}{\sqrt{x^2+1}}$ Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

• Đạo hàm: $y' = \dfrac{\sqrt{x^2+1} - \dfrac{(x+3)x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \dfrac{1-3x}{(x^2+1)^{3/2}}$

• Giải phương trình $y' = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3} \Rightarrow y\left(\frac{1}{3}\right) = \sqrt{10}$

$$\lim_{x\to\infty} y = \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{(x+3)}{|x|}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}} = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{|x|} = \left[\begin{array}{l} 1 \quad \text{nếu } x \to +\infty \\ (-1) \ \text{nếu } x \to -\infty \end{array}\right.$$

x	$-\infty$		$1/3$		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	
f	-1	↗	$\sqrt{10}$	↘	1

Từ bảng biến thiên suy ra $y_{\text{Max}} = y\left(\frac{1}{3}\right) = \sqrt{10}$

b. Sử dụng kết quả của **a.** $\Rightarrow y = \dfrac{x+3}{\sqrt{x^2+1}} \le y\left(\dfrac{1}{3}\right) = \sqrt{10} \Leftrightarrow x+3 \le \sqrt{10}.\sqrt{x^2+1}$, $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\text{Đặt } \begin{cases} x = a \Rightarrow \\ x = b \Rightarrow \\ x = c \Rightarrow \end{cases} + \begin{cases} a+3 \le \sqrt{10}\,.\sqrt{a^2+1} \\ b+3 \le \sqrt{10}\,.\sqrt{b^2+1} \\ c+3 \le \sqrt{10}\,.\sqrt{c^2+1} \end{cases}$$

Do $a+b+c=1 \Rightarrow 10 \le \sqrt{10}\left[\sqrt{a^2+1} + \sqrt{b^2+1} + \sqrt{c^2+1}\right]$

$\Leftrightarrow \sqrt{10} \le \sqrt{a^2+1} + \sqrt{b^2+1} + \sqrt{c^2+1}$. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = \dfrac{1}{3}$.

Bài 6. a. Lập bảng biến thiên và tìm cực trị của $y = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}}$

b. Cho $a+b+c=3$. Chứng minh: $\sqrt{a^2-a+1} + \sqrt{b^2-b+1} + \sqrt{c^2-c+1} \ge 3$

Chứng minh

a. $y' = \dfrac{\sqrt{x^2-x+1} - \dfrac{(x+1)(2x-1)}{2\sqrt{x^2-x+1}}}{x^2-x+1} = \dfrac{3(1-x)}{2(x^2-x+1)^{\frac{3}{2}}}$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	
f	-1	↗	2	↘	1

$y' = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y(1) = 2 \Rightarrow$ Bảng biến thiên

Từ bảng biến thiên suy ra $y_{\text{Max}} = y(1) = 2$

b. Theo **a.** suy ra $\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}} \le 2 \Leftrightarrow x+1 \le 2\sqrt{x^2-x+1} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$\text{Đặt } \begin{cases} x = a \Rightarrow a+1 \le 2\sqrt{a^2-a+1} \\ x = b \Rightarrow b+1 \le 2\sqrt{b^2-b+1} \\ x = c \Rightarrow c+1 \le 2\sqrt{c^2-c+1} \end{cases}$$

Vì $a+b+c=3 \Rightarrow 6 \le 2\left(\sqrt{a^2-a+1} + \sqrt{b^2-b+1} + \sqrt{c^2-c+1}\right)$

$\Leftrightarrow \sqrt{a^2-a+1} + \sqrt{b^2-b+1} + \sqrt{c^2-c+1} \ge 3$. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = 1$.

V. DẠNG 5. Đối với các bất đẳng thức nhiều biến, ta có thể chọn một biến làm tham số biến thiên và cố định các biến còn lại, bài toán lúc này trở thành bất đẳng thức một biến và ta có thể sử dụng các kết quả đã biết trong định lý Fermat.

Bài 1. Chứng minh rằng: $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}\quad\forall a,b,c>0\quad(1)$

Chứng minh

Không mất tính tổng quát, giả sử $a\geq b\geq c$. Đặt $x=a\Rightarrow x\geq b\geq c>0$.

Ta có (1) $\Leftrightarrow f(x)=\frac{x}{b+c}+\frac{b}{c+x}+\frac{c}{x+b}$ với $x\geq b\geq c>0$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{b+c}-\frac{b}{(x+c)^2}-\frac{c}{(x+b)^2}>\frac{1}{b+c}-\frac{b}{(b+c)^2}-\frac{c}{(b+c)^2}=0$$

$\Rightarrow f(x)$ tăng trên $[b,+\infty)\Rightarrow f(x)\geq f(b)=\frac{2b+c}{b+c}\quad(2)$

Đặt $x=b\Rightarrow x\geq c>0$, Xét $g(x)=\frac{2x+c}{x+c}$ với $x\geq c>0\Rightarrow g'(x)=\frac{c}{(x+c)^2}>0\ \forall c>0$

$\Rightarrow g(x)$ tăng trên $[c,+\infty)\Rightarrow g(x)\geq g(c)=\frac{3}{2}\quad(3)$

Từ (2), (3) suy ra $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}\quad\forall a,b,c>0$

Bài 2. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2+4abc>a^3+b^3+c^3\quad(1)$$

Chứng minh

Không mất tính tổng quát, giả sử $0<a\leq b\leq c<a+b$.

Bất đẳng thức (1) $\Leftrightarrow f(c)=c^3-c^2(a+b)-c(a^2+b^2-2ab)+a^3+b^3-a^2b-ab^2<0$

Chúng ta sẽ khảo sát hàm $f(c)$ với $b\leq c<a+b$. Ta có

$$f'(c)=3c^2-2c(a+b)-(a-b)^2=0\Leftrightarrow c=c_1=\frac{(a+b)-\sqrt{(a+b)^2+3(a-b)^2}}{3}<0$$

hoặc $c=c_2=\frac{(a+b)+\sqrt{(a+b)^2+3(a-b)^2}}{3}=\frac{(a+b)+2\sqrt{\left(b-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{3}{4}a^2}}{3}\in(b,a+b)$

Ta có bảng biến thiên với chú ý:

$f(a+b)=0$; $f(b)=a^2(a-2b)<0$ (vì $0<a\leq b$)

c	b		c_2		$a+b$
f'		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	$f(c_2)$	$\nearrow$	

Từ bảng biến thiên suy ra $f(c)<0$, $\forall c\in(b,a+b]$

Bài 3. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác có thể suy biến

(tức là $a, b, c > 0$; $b + c \ge a$; $c + a \ge b$; $a + b \ge c$)

Đặt $T = \left|\dfrac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)}\right|$. Tìm Max T và chứng minh rằng Max $T < \dfrac{1}{21}$

Giải

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \ge b \ge c$, theo giả thiết ta có $a \le b + c$.

Xét $f(a) = \dfrac{a-b}{a+b}\cdot\dfrac{b-c}{b+c}\cdot\dfrac{a-c}{a+c} \Rightarrow f'(a) = \dfrac{2(a^2-bc)(b-c)}{(a+b)^2(a+c)^2} \ge 0$

$\Rightarrow f(a)$ tăng $\Rightarrow f(a) \le f(b+c) = \dfrac{bc(b-c)}{(b+c)(2b+c)(2c+b)}$. Đặt $\dfrac{b}{c} = x$, Ta có

$$f(b+c) = \frac{(x-1)x}{(x+1)(2x+1)(2+x)} = g(x) \Rightarrow g'(x) = \frac{-2x^4+4x^3+13x^2+4x-2}{[(x+1)(2x+1)(2+x)]^2}$$

Xét $-2x^4+4x^3+13x^2+4x-2=0 \Leftrightarrow \left[2x^2+2+(\sqrt{38}-2)x\right]\left[2x^2+2-(\sqrt{38}+2)x\right]=0$

$\Rightarrow x = \dfrac{\sqrt{28+4\sqrt{38}}+(2+\sqrt{38})}{2} = x_0$. Sử dụng máy tính bỏ túi ta có:

$$\text{Max } f(a) = \frac{(x_0-1)x_0}{(x_0+1)(2x_0+1)(2+x_0)} < \frac{1}{21}$$

Bài 4. Chứng minh rằng: $2(x^3+y^3+z^3)-(x^2y+y^2z+z^2x) \le 3 \quad \forall x, y, z \in [0, 1]$

Chứng minh

Bất đẳng thức đã cho $\Leftrightarrow f(x) = 2x^3 - yx^2 - z^2x + 2(y^3+z^3) - y^2z \le 3$. Ta có:

$f'(x) = 6x^2 - 2yx - z^2$ và $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_1 = \frac{1}{6}\left(y - \sqrt{y^2+6z^2}\right)$; $x = x_2 = \frac{1}{6}\left(y + \sqrt{y^2+6z^2}\right)$

Vì $x_1 \le 0$ nên $x_1 \notin (0, 1)$. Xét hai trường hợp:

- Nếu $x_2 \notin (0, 1) \Rightarrow f'(x) \le 0, \forall x \in [0, 1]$

$\Rightarrow f(x)$ giảm trên $[0, 1]$

$\Rightarrow \underset{x\in[0,1]}{\text{Max}} f(x) = \text{Max}\{f(0), f(1)\}$

x	0	x_2	1
f'	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	$f(x_2)$	$\nearrow$

- Nếu $x_2 \in (0, 1)$ thì ta có bảng biến thiên:

Từ bảng biến thiên $\Rightarrow \underset{x\in[0,1]}{\text{Max}} f(x) = \text{Max}\{f(0), f(1)\}$

Như vậy trong cả hai trường hợp ta có $\underset{x\in[0,1]}{\text{Max}} f(x) = \text{Max}\{f(0), f(1)\}$

Mặt khác: $f(0) = 2(y^3+z^3) - y^2z \le 2(y^3+z^3) - y^2z + (2 - y - z^2) = f(1)$

Ta sẽ chứng minh $f(1) \le 3$. Thật vậy, đặt $f(1) = g(y) = 2(y^3+z^3) - y^2z + (2 - y - z^2)$.

Ta có: $g'(y)=6y^2-2zy-1=0 \Leftrightarrow y=y_1=\frac{1}{6}\left(z-\sqrt{z^2+6}\right)<0;\ y=y_2=\frac{1}{6}\left(z+\sqrt{z^2+6}\right)$

• Nếu $y_2 \notin (0,1) \Rightarrow g'(y) \le 0\ \forall y \in [0,1] \Rightarrow g(y)$ giảm trên $[0,1]$

Khi đó ta có $\underset{y\in[0,1]}{\text{Max}}\, g(y)=\text{Max}\{g(0), g(1)\}$

• Nếu $y_2 \in (0,1)$ thì ta có bảng biến thiên:

y	0	y_2	1
g'	$-$	0	$+$
g	$\searrow$	$g(y_2)$	$\nearrow$

Từ bảng biến thiên $\Rightarrow \underset{y\in[0,1]}{\text{Max}}\, g(y)=\text{Max}\{g(0), g(1)\}$

Như vậy trong cả hai trường hợp thì $\underset{y\in[0,1]}{\text{Max}}\, g(y)=\text{Max}\{g(0), g(1)\}$

Ta có $g(0)=2z^3+2-z^2 \le 2z^3+2-z^2+(1-z)=g(1)=z(z-1)(2z+1)+3\le 3\ \forall z\in[0,1]$

Bài 5. Cho $a,b,c\in\left[\frac{1}{3},3\right]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $S=\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}$

Giải

Đặt $f(a)=\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}$. Xét hai trường hợp sau:

• ***Trường hợp 1:*** $a\ge b\ge c$: Ta có $f'(a)=\frac{b}{(a+b)^2}-\frac{c}{(a+c)^2}=\frac{(b-c)(a^2-bc)}{(a+b)^2(a+c)^2}\ge 0$

$\Rightarrow f(a)\le f(3)=\frac{3}{b+3}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+3}=g(c)$. Mặt khác,

$g'(c)=\frac{-b}{(b+c)^2}+\frac{3}{(c+3)^2}=\frac{(b-3)(3b-c^2)}{(b+c)^2(c+3)^2}\le 0 \Rightarrow g(c)\le g\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{3}{b+3}+\frac{3b}{3b+1}+\frac{1}{10}=h(b)$

Ta có: $h'(b)=\frac{3}{(3b+1)^2}-\frac{3}{(b+3)^2}=\frac{(1-b)(1+b)}{(3b+1)(b+3)} \Rightarrow$ Bảng biến thiên

b	$\frac{1}{3}$	1	3
$f'_b\left(3,b,\frac{1}{3}\right)$		$+$	$-$
$f_b\left(3,b,\frac{1}{3}\right)$	$\nearrow$	$\frac{8}{5}$	$\searrow$

Từ bảng biến thiên $\Rightarrow f\left(3,b,\frac{1}{3}\right)\le f\left(3,1,\frac{1}{3}\right)=\frac{8}{5}$

• ***Trường hợp 2:*** $c\ge b\ge a$: Từ kết quả của trường hợp 1, ta có $f(c,b,a)\le\frac{8}{5}$. Mặt khác,

$f(a,b,c)-f(c,b,a)=\frac{(a-b)(b-c)(a-c)}{(a+b)(b+c)(a+c)}\le 0$

$\Rightarrow f(a,b,c)\le\frac{8}{5}$. Vậy Max $S=\frac{8}{5}$, xảy ra $\Leftrightarrow (a,b,c)=\left\{\left(3,1,\frac{1}{3}\right);\left(\frac{1}{3},3,1\right);\left(1,\frac{1}{3},3\right)\right\}$

Bài 6. Cho $a, b, c\in[0,1]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$S=\frac{a}{b^3+c^3+6}+\frac{b}{c^3+a^3+6}+\frac{c}{a^3+b^3+6}$$

Giải

Ta có $f'(c)=\frac{1}{6+a^3+b^3}-\frac{3ac^2}{(6+b^3+c^3)^2}-\frac{3bc^2}{(6+c^3+a^3)^2}$

$f''(c)=-\frac{6ca(6+b^3-2c^3)}{(6+b^3+c^3)^2}-\frac{6bc(6+a^3-2c^3)}{(6+c^3+a^3)^2}\le 0 \Rightarrow f'(c)$ giảm trên $[0, 1]$

$\Rightarrow f'(c)\ge f'(1)=\frac{1}{6+a^3+b^3}-\frac{3a}{(7+b^3)^2}-\frac{3b}{(7+a^3)^2}\ge\frac{1}{8}-2\cdot\frac{3}{49}>0$

$\Rightarrow f(c)$ tăng trên $[0, 1] \Rightarrow S=f(c)\le f(1)=\frac{a}{b^3+7}+\frac{b}{a^3+7}+\frac{1}{a^3+b^3+6}=g(a)$

Ta có: $g'(a)=\frac{1}{b^3+7}-\frac{3a^2b}{(a^3+7)^2}-\frac{3a^2}{(a^3+b^3+6)^2}$

$g''(a)=-\frac{6ab(7-2a^3)}{(a^3+7)^3}-\frac{6a(b^3+6-2a^3)}{(a^3+b^3+6)^3}\le 0 \Rightarrow g'(a)$ giảm trên $[0, 1]$

$\Rightarrow g'(a)\ge g'(1)=\frac{1}{b^3+7}-\frac{3b}{64}-\frac{3}{(b^3+7)^2}=\left(\frac{1}{b^3+7}-\frac{1}{8}\right)\left(\frac{5}{8}-\frac{3}{b^3+7}\right)+\frac{5-3b}{64}>0$

$\Rightarrow g(a)$ tăng trên $[0, 1] \Rightarrow S\le g(a)\le g(1)=\frac{2}{b^3+7}+\frac{b}{8}=h(b)$

Ta có: $h'(b)=\frac{1}{8}-\frac{6b^2}{(b^3+7)^2}=\frac{(b^3+7)^2-48b^2}{8(b^3+7)^2}>0 \quad \forall b\in[0, 1]$

$\Rightarrow h(b)$ tăng trên $[0, 1] \Rightarrow h(b)\le h(1)=\frac{3}{8} \Rightarrow S\le\frac{3}{8}$.

Với $a=b=c=1$ thì $\text{Max } S=\frac{3}{8}$

Bài 7. [USAMO – 1980] Cho $a, b, c\in[0, 1]$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b+c+1}+\frac{b}{c+a+1}+\frac{c}{a+b+1}+(1-a)(1-b)(1-c)\le 1$$

Chứng minh

Xét $f(a)=\frac{a}{b+c+1}+\frac{b}{c+a+1}+\frac{c}{a+b+1}+(1-a)(1-b)(1-c)$. Ta có

$f'(a)=\frac{1}{b+c+1}-\frac{b}{(a+c+1)^2}-\frac{c}{(a+b+1)^2}-(1-b)(1-c)$

$f''(a)=\frac{2b}{(a+c+1)^3}+\frac{2c}{(a+b+1)^3}\ge 0 \Rightarrow f'(a)$ tăng trên $[0, 1]$. Xét các trường hợp sau:

a. Nếu $f'(a)\ge 0 \quad \forall a\in[0, 1] \Rightarrow f(a)\le f(1)=\frac{1}{b+c+1}+\frac{b}{c+1+1}+\frac{c}{1+b+1}\le\frac{1+b+c}{b+c+1}=1$

b. Nếu $f'(a)\le 0 \quad \forall a\in[0, 1] \Rightarrow f(a)$ giảm trên $[0, 1]$

$\Rightarrow f(a)\le f(0)=\frac{b}{c+1}+\frac{c}{b+1}+(1-b)(1-c)=\frac{1+b+c+b^2c^2}{1+b+c+bc}\le\frac{1+b+c+bc}{1+b+c+bc}=1$

c. Nếu $f'(x)$ thay đổi dấu trên đoạn [0, 1], khi đó kết hợp với $f'(x)$ là hàm liên tục và tăng trên [0, 1] nên phương trình $f'(x)=0$

có nghiệm duy nhất $x=\alpha\in(0,1)$

Từ đó suy ra bảng biến thiên như hình vẽ

x	0		α		1
f'		$-$	0	$+$	
f	$f(0)$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$f(1)$

Theo kết quả **a.** & **b.** ta có $f(0)\le 1$, $f(1)\le 1$

Nên suy ra $\underset{x\in[0,1]}{\text{Max}}\, f(x)\le 1$

Kết luận: Tổng hợp các kết quả từ **a.**, **b.** và **c.** ta có (đpcm).

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow$ (a, b, c) là 1 hoán vị (1, 1, 0) hoặc (1, 0, 0)

Bài 8. Cho $a, b, c\in[0,1]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)\quad(1)$$

Giải

Chúng ta sẽ tìm giá trị lớn nhất của $Q=\left|(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)\right|$

Không mất tính tổng quát, giả sử $1\ge a\ge b\ge c\ge 0\Rightarrow Q=(a-b)(b-c)(a-c)(a+b+c)$

Đặt $f(a)=(a-b)(a-c)(a+b+c)$. Ta có:

$$f'(a)=(a-c)(a+b+c)+(a-b)(a+b+c)+(a-b)(a-c)\ge 0\ ,\ \forall a\in[b;1]$$

$\Rightarrow f(x)$ tăng trên $[b, 1]$. Suy ra $f(a)\le f(1)=(1-b)(1-c)(1+b+c)$

$$\Rightarrow Q=(b-c)f(a)\le(1-b)(b-c)(1-c)(1+b+c)\qquad(2)$$

Đặt $g(c)=(b-c)(1-c)(1+b+c)$. Ta có:

$$g'(c)=(c-1)(1+b+c)+(c-b)(1+b+c)+(b-c)(1-c)=3c^2-(b^2+b+1)$$

Vì $1\ge b\ge c\ge 0$ nên $1\ge b\ge b^2\ge c^2\Rightarrow g'(c)\le 0$

$\Rightarrow g(c)$ giảm trên $[0, b]\Rightarrow g(c)\le g(0)=b(1+b)\qquad(3)$

Từ (2) và (3)suy ra: $Q\le(1-b)g(c)\le(1-b)b(1+b)=b-b^3=b(1-b^2)=T$

Ta có: $T^2=b^2(1-b^2)^2=\frac{1}{2}(2b^2)(1-b^2)(1-b^2)\le\frac{1}{2}\left[\frac{2b^2+(1-b^2)+(1-b^2)}{3}\right]^3=\frac{4}{27}$

Vậy $P\le Q\le T\le\frac{2\sqrt{3}}{9}\Rightarrow \text{Max}\,P=\text{Max}\,Q=\frac{2\sqrt{3}}{9}$ với $a=1,\ b=\frac{\sqrt{3}}{3},\ c=0$

Kết luận: Với (a, b, c) là hoán vị của $\left(1,\frac{\sqrt{3}}{3},0\right)$ thì $\text{Max}\,P=\frac{2\sqrt{3}}{9}$

Bài 9. Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn điều kiện $21ab + 2bc + 8ca \le 12$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $S = \frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c}$

Giải

Đặt $x = \frac{1}{a}, y = \frac{1}{b}, z = \frac{1}{c} \Rightarrow x, y, z > 0$; $2x + 8y + 21z \le 12xyz$ và $S = x + 2y + 3z$.

Từ $2x + 8y + 21z \le 12xyz$

suy ra $z(12xy - 21) \ge 2x + 8y > 0$

$\Rightarrow z \ge \frac{2x+8y}{12xy-21}$ và $x > \frac{7}{4y}$

x	$7/4y$		x_0		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	$f(x_0)$	$\nearrow$	

$\Rightarrow S \ge x + 2y + \frac{2x+8y}{4xy-7} = f(x)$. Ta có

$$f'(x) = 1 - \frac{14+32y^2}{(4xy-7)^2} = 0 \Leftrightarrow x = x_0 = \frac{7}{4y} + \frac{\sqrt{32y^2+14}}{4y} \in \left(\frac{7}{4y}, +\infty\right)$$

y	0		$5/4$		$+\infty$
g'		$-$	0	$+$	
g		$\searrow$	$\frac{15}{2}$	$\nearrow$	

Từ bảng biến thiên suy ra

$$S \ge f(x) \ge f(x_0) = 2y + \frac{9}{4y} + \frac{\sqrt{32y^2+14}}{2y} = g(y) \Rightarrow g'(y) = \frac{(8y^2-9)\sqrt{32y^2+14} - 28}{4y^2\sqrt{32y^2+14}}$$

Đặt $t = \sqrt{32y^2+14} > 0$ thì phương trình $g'(y) = 0 \Leftrightarrow (8y^2-9)\sqrt{32y^2+14} - 28 = 0$

$\Leftrightarrow t^3 - 50t - 112 = 0 \Leftrightarrow (t-8)(t^2+8t+14) = 0 \Leftrightarrow t = 8 \Leftrightarrow y = \frac{5}{4}$

Từ bảng biến thiên suy ra $S \ge g(y) \ge g\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{15}{2}$

Với $y = \frac{5}{4}, x = 3; z = \frac{2}{3} \Leftrightarrow a = \frac{1}{3}; b = \frac{4}{5}; c = \frac{3}{2}$ thì $\text{Min } S = \frac{15}{2}$

Bài 10. Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn điều kiện $abc + a + c = b$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $S = \frac{2}{1+a^2} - \frac{2}{1+b^2} + \frac{3}{1+c^2}$

Giải

Ta có: $abc + a + c = b \Leftrightarrow b(1 - ac) = a + c > 0 \Rightarrow a < \frac{1}{c}$ và $b = \frac{a+c}{1-ac}$

$$\Rightarrow S = \frac{2}{1+a^2} + \frac{2b^2}{1+b^2} - 2 + \frac{3}{1+c^2} = \frac{2}{1+a^2} + \frac{2(a+c)^2}{(1+a^2)(1+c^2)} - 2 + \frac{3}{1+c^2} \quad (2)$$

Xét $f(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{(x+c)^2}{(1+x^2)(1+c^2)} - 1$ với $0 < x < \frac{1}{c}$. Khi đó

$$f'(x) = \frac{-2c(x^2+2cx-1)}{(1+x^2)^2(1+c^2)} = 0 \text{ có một nghiệm duy nhất } x_0 = -c + \sqrt{1+c^2} \in \left(0, \frac{1}{c}\right)$$

Từ bảng biến thiên suy ra $f(x) \le f(x_0) = \dfrac{c}{\sqrt{1+c^2}}$

x	0		x_0		$1/c$
f'		+	0	−	
f		↗	$f(x_0)$	↘	

Khi đó $S = 2f(a) + \dfrac{3}{1+c^2} \le \dfrac{2c}{\sqrt{1+c^2}} + \dfrac{3}{1+c^2} = g(c)$

Ta có: $g'(c) = \dfrac{2(1-8c^2)}{(1+c^2)^2\left(3c+\sqrt{1+c^2}\right)} = 0$

$\Leftrightarrow c = c_0 = \dfrac{1}{\sqrt{8}} \in (0, +\infty)$

$\Rightarrow$ Bảng biến thiên

c	0		c_0		$+\infty$
g'		+	0	−	
g		↗	$g(c_0)$	↘	

Từ bảng biến thiên suy ra: $g(c) \le g(c_0)$

$\Rightarrow S \le g(c) \le g(c_0) = \dfrac{10}{3}$.

Với $c = \dfrac{1}{\sqrt{8}}$, $a = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ và $b = \sqrt{2}$ thì Max $S = \dfrac{10}{3}$.

VI. DẠNG 6. Đối với các bài toán phức tạp, cần phối hợp áp dụng định lý Fermat và nhiều bất đẳng thức phụ, như bất đẳng thức ***AM – GM***, ***CBS***, hoặc các đánh giá khác.

Bài 1. [IMO25 – Czech 1984] Cho $x, y, z > 0$ thỏa mãn $x + y + z = 1$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $S = xy + yz + zx - 2xyz$

Giải

Không mất tính tổng quát, giả sử $x \ge y \ge z \Rightarrow 0 < z \le \dfrac{1}{3}$

Biến đổi rồi đánh giá: $S = xy(1-2z) + z(x+y) = xy(1-2z) + z(1-z)$

$$\le \left(\frac{x+y}{2}\right)^2(1-2z) + z(1-z) = \left(\frac{1-z}{2}\right)^2(1-2z) + z(1-z) = \frac{-1}{2}z^3 + \frac{1}{4}z^2 + \frac{1}{4} = f(z)$$

Ta có: $f'(z) = -\dfrac{z}{2}(3z-1) = 0 \Leftrightarrow z = 0$; $z = \dfrac{1}{3}$

z	0		1/3
$f'(z)$		+	
$f(z)$	1	↗	$\dfrac{7}{27}$

Từ bảng biến thiên suy ra $S \le \text{Max } f(z) = \dfrac{7}{27}$

Với $x = y = z = \dfrac{1}{3}$ thì Max S = Max $f(z) = \dfrac{7}{27}$

Bài 2. Cho $x, y, z \ge 0$ thỏa mãn $x + y + z = 3$. Chứng minh rằng:

$$S = \frac{1}{4+2\ln(1+x)-y} + \frac{1}{4+2\ln(1+y)-z} + \frac{1}{4+2\ln(1+z)-x} \ge \frac{3}{3+\ln 4}$$

Chứng minh

Vì $x, y, z \ge 0$ và $x + y + z = 3$, suy ra $0 \le x, y, z \le 3$

$\Rightarrow 4 + 2\ln(x+1) - y > 0$; $4 + 2\ln(y+1) - z > 0$ và $4 + \ln(z+1) - x > 0$.

Sử dụng bất đẳng thức ***AM – GM*** ta có:

$$\left[(4+2\ln(1+x)-y)+(4+2\ln(1+y)-z)+(4+2\ln(1+z)-x)\right].S\ge 9$$

$$\Rightarrow S\ge\frac{9}{(4+2\ln(1+x)-y)+(4+2\ln(1+y)-z)+(4+2\ln(1+z)-x)}$$

$$=\frac{9}{12+2\ln(x+1)-x+2\ln(y+1)-y+2\ln(z+1)-z}$$

t	0		1		3
f'		+	0	−	
f	0	↗	ln4 − 1	↘	2ln4 − 3

Xét hàm số $f(t) = 2\ln(1 + t) - t$ với $0 \le t \le 3$.

Ta có $f'(t) = \dfrac{1-t}{1+t} = 0 \Leftrightarrow t = 1$

$\Rightarrow$ Bảng biến thiên của $f(t)$. Từ bảng biến thiên suy ra

$0 \le f(t) \le \ln4 - 1 \Rightarrow 0 \le f(x) + f(y) + f(z) \le 3\ln4 - 3$

$\Rightarrow S \ge \dfrac{9}{12+3\ln4-3}=\dfrac{9}{9+3\ln4}=\dfrac{3}{3+3\ln4}$. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = 1$

Bài 3. Cho $x,y,z>0$ và $xyz=1$. Chứng minh $x^2+y^2+z^2+x+y+z\ge 2xy+2yz+2xz$

Chứng minh

Giả sử $x=\min\{x,y,z\}\Rightarrow x\in(0,1]$. Đặt $f(x)=x^2+y^2+z^2+x+y+z-(2xy+2yz+2xz)$

$\Rightarrow f(x)=x^2+\dfrac{1}{x^2z^2}+z^2+x+\dfrac{1}{xz}+z-\dfrac{2}{x}-\dfrac{2}{z}-2xz$. Ta có:

$f'(x)=2x-\dfrac{2xz^2}{x^4z^4}+1-\dfrac{z}{x^2z^2}-\dfrac{2}{x^2}-2z=2(x-z)+1-\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{2}{x^3z^2}-\dfrac{1}{x^2z}<0$ (vì $x\le z; 1<\dfrac{2}{x^2}$)

$\Rightarrow f(x)$ giảm trên $(0,1]\Rightarrow f(x)\ge f(1)=z+z^2+\dfrac{1}{z^2}+2+\dfrac{1}{z}-2-\dfrac{2}{z}-2z$

$=z^2+\dfrac{1}{z^2}-z-\dfrac{1}{z}=z(z-1)-(z-1)\cdot\dfrac{1}{z^2}=\dfrac{(z-1)(z^3-1)}{z^2}\ge 0\Rightarrow$ (đpcm)

Bài 4. Cho $a, b, c \in \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện $a^2+b^2+c^2=1$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $S = 3(a + b + c) - 22abc$

Giải

Không mất tính tổng quát, giả sử $a = \text{Min}\{a, b, c\}$. Xét các trường hợp sau:

• Nếu $a=-1$ thì $b=c=0\Rightarrow S=-3$

• Nếu $-1<a<0$ thì sử dụng bất đẳng thức ***CBS*** ta có:

$S = 3(a + b + c) + 11(-a)(2bc) \le 3\left[a+\sqrt{2(b^2+c^2)}\right]-11a(b^2+c^2)$

$=11a^3-8a+3\sqrt{2(1-a^2)}=f(a)\Rightarrow f'(a)=33a^2-8-\dfrac{3\sqrt{2}\,a}{\sqrt{1-a^2}}$; $f''(a)=66a-\dfrac{3\sqrt{2}}{(1-a^2)\sqrt{1-a^2}}$

Ta có $f'(a)=0$ có một nghiệm duy nhất $a=-\sqrt{\frac{2}{11}}\in(-1,0)$. Mặt khác, $f''\left(-\sqrt{\frac{2}{11}}\right)<0$

$\Rightarrow f(a)$ đạt giá trị lớn nhất tại $a=-\sqrt{\frac{2}{11}} \Rightarrow \text{Max } S=\underset{-1<a<0}{\text{Max}} f(a)=f\left(-\sqrt{\frac{2}{11}}\right)=15\sqrt{\frac{2}{11}}$

• Nếu $0\le a\le 1\Rightarrow S\le 3(a+b+c)$. Sử dụng bất đẳng thức **CBS** ta có:

$$3(a+b+c)\le 3\sqrt{(1^2+1^2+1^2)(a^2+b^2+c^2)}=3\sqrt{3}\Rightarrow S\le 3\sqrt{3}<15\sqrt{\frac{2}{11}}$$

Kết luận: Tổng hợp các khả năng đã xét ta có: $\text{Max } S=15\sqrt{\frac{2}{11}}$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi (a,b,c) là một hoán vị của $\left(-\sqrt{\frac{2}{11}};\frac{3}{\sqrt{22}};\frac{3}{\sqrt{22}}\right)$

Bài 5. Tìm giá trị lớn nhất của $T=\frac{x}{\sqrt{x+y}}+\frac{y}{\sqrt{y+z}}+\frac{z}{\sqrt{z+x}}-\frac{5}{4}\sqrt{x+y+z}\quad\forall x,y,z\ge 0$

Giải

Bước 1: Dự đoán Max T:

Đặt $x=0,\ y=3,\ z=1\Rightarrow T=0$; Đặt $x=y=z=2\Rightarrow T=3-\frac{5\sqrt{6}}{4}<0$

Dự đoán Max $T=0\Leftrightarrow$ Chứng minh: $\frac{x}{\sqrt{x+y}}+\frac{y}{\sqrt{y+z}}+\frac{z}{\sqrt{z+x}}-\frac{5}{4}\sqrt{x+y+z}\le 0$

Bước 2: Chứng minh : $\frac{x}{\sqrt{x+y}}+\frac{y}{\sqrt{y+z}}+\frac{z}{\sqrt{z+x}}\le\frac{5}{4}\sqrt{x+y+z}\quad\forall x,y,z\ge 0$ (1)

Đặt $\begin{cases}x+y=c^2, c>0\\ y+z=a^2, a>0\\ z+x=b^2, b>0\end{cases}\Rightarrow x=\frac{b^2+c^2-a^2}{2};\ y=\frac{c^2+a^2-b^2}{2};\ z=\frac{a^2+b^2-c^2}{2}$

$$(1)\Leftrightarrow\ \frac{b^2+c^2-a^2}{c}+\frac{c^2+a^2-b^2}{a}+\frac{a^2+b^2-c^2}{b}\le\frac{5}{2\sqrt{2}}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

Giả sử $a=\text{Max}\{a,b,c\}$. Ta sẽ chứng minh: $\sqrt{a^2+b^2+c^2}\ge\frac{a+\sqrt{b^2+c^2}}{\sqrt{2}}$ (2)

Ta có: (2) $\Leftrightarrow\sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}\ge a+\sqrt{b^2+c^2}\Leftrightarrow$

$2(a^2+b^2+c^2)\ge a^2+b^2+c^2+2a\sqrt{b^2+c^2}$

$\Leftrightarrow a^2+(b^2+c^2)\ge 2a\sqrt{b^2+c^2}\Leftrightarrow\left(a-\sqrt{b^2+c^2}\right)^2\ge 0$. Điều này luôn đúng $\Rightarrow$ (2) đúng

Vậy (1) sẽ được chứng minh nếu ta có thể chứng minh được bất đẳng thức sau

$$\frac{b^2+c^2-a^2}{c}+\frac{c^2+a^2-b^2}{a}+\frac{a^2+b^2-c^2}{b}\le\frac{5}{4}\left(a+\sqrt{b^2+c^2}\right)$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c)+\frac{(a+b+c)(a-b)(a-c)(c-b)}{abc}\le\frac{5}{4}\left(a+\sqrt{b^2+c^2}\right)\quad (3)$$

Nếu $c<b$ thì $c-b<0$ nên khi thay đổi vai trò c và b cho nhau tức là tạo ra $c-b\ge 0$ ta thấy vế trái tăng còn vế phải không thay đổi.

Do đó chỉ cần chứng minh (3) với $c\ge b$. Khi đó

$(3)\Leftrightarrow 4abc(a+b+c)+4(a+b+c)(a-b)(a-c)(c-b)\le 5abc\left(a+\sqrt{b^2+c^2}\right)$

$\Leftrightarrow f(a)=4(c-b)a^3-bca^2+\left(4b^3+4b^2c+4bc^2-4c^3-5bc\sqrt{b^2+c^2}\right)a+4bc(c^2-b^2)\le 0$

Ta có: $x=\frac{b^2+c^2-a^2}{2}\ge 0\Rightarrow a\le\sqrt{b^2+c^2}$, vậy $(3)\Leftrightarrow f(a)\le 0\ \forall b\le c\le a\le\sqrt{b^2+c^2}$

Nếu $b=c$ thì $f(a)=-ab^2\left[(a-b)+(5\sqrt{2}-7)b\right]<0$

Xét $b<c$ Ta có: $f(-\infty)<0$; $f(+\infty)>0$; $f(0)=4bc(c^2-b^2)>0$;

$f(c)=-bc^2\left(5\sqrt{b^2+c^2}-4b-3c\right)=-bc^2\left[\sqrt{(4^2+3^2)(b^2+c^2)}-(4b+3c)\right]\le 0$;

$f\left(\sqrt{b^2+c^2}\right)=2bc\left(4b\sqrt{b^2+c^2}-5b^2-c^2\right)=-2bc\left(\sqrt{b^2+c^2}-2b\right)^2\le 0$

Từ đó ta có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$	0	c	$\sqrt{b^2+c^2}$	$+\infty$
$f(x)$	$-$	$+$	$-$	$-$	$+$

Do $f(a)$ là đa thức bậc ba theo biến a nên $f(a)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, nhìn bảng biến thiên suy ra $f(a)=0$ có ba nghiệm thỏa mãn $a_1\in(-\infty,\ 0)$, $a_2\in(0,\ c)$, $a_3\in\left(\sqrt{b^2+c^2},+\infty\right)$. Suy ra $f(a)<0,\forall c\le a\le\sqrt{b^2+c^2}$. Vậy (3) đúng nên (2) đúng, suy ra (1) đúng.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases}a=\sqrt{b^2+c^2}\\ 2b=\sqrt{b^2+c^2}\end{cases}\Leftrightarrow a:b:c=2:1:\sqrt{3}\Leftrightarrow x:y:z=0:3:1$

Bài 6. Cho $a_1,a_2,...,a_n,b_1,b_2,...,b_n>0$ thỏa mãn điều kiện

$a_1+a_2+...+a_n=b_1+b_2+...+b_n$. Chứng minh rằng:

$$a_1\ln a_1+a_2\ln a_2+...+a_n\ln a_n\ge a_1\ln b_1+a_2\ln b_2+...+a_n\ln b_n\quad (1)$$

Chứng minh

$(1)\Leftrightarrow\left(a_1\ln a_1+a_2\ln a_2+...+a_n\ln a_n\right)-\left(a_1\ln b_1+a_2\ln b_2+...+a_n\ln b_n\right)\ge 0$

$\Leftrightarrow \left[a_1\left(\ln a_1 - \ln b_1\right) + a_2\left(\ln a_2 - \ln b_2\right) + \ldots + a_n\left(\ln a_n - \ln b_n\right)\right] \ge 0$

Xét hàm $f(x) = x\ln x - x + 1$ với $x > 0$

Ta có $f'(x) = \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow$ Bảng biến thiên

x	0	1	$+\infty$
f'	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	0	$\nearrow$

Từ bảng biến thiên suy ra

$f(x) \ge f(1) = 0 \Rightarrow x\ln x \ge x - 1,\ \forall x > 0$

Vì $\dfrac{a_i}{b_i} > 0\ \left(i = \overline{1,n}\right)$ nên ta có $\dfrac{a_i}{b_i}\ln\dfrac{a_i}{b_i} \ge \dfrac{a_i}{b_i} - 1$

$\Leftrightarrow a_i\ln\dfrac{a_i}{b_i} \ge a_i - b_i \Leftrightarrow a_i\left(\ln a_i - \ln b_i\right) \ge a_i - b_i \quad \left(i = \overline{1,n}\right)$

$\Rightarrow \left[a_1\left(\ln a_1 - \ln b_1\right) + a_2\left(\ln a_2 - \ln b_2\right) + \ldots + a_n\left(\ln a_n - \ln b_n\right)\right] \ge$

$\ge \left(a_1 - b_1\right) + \left(a_2 - b_2\right) + \ldots + \left(a_n - b_n\right) = \left(a_1 + a_2 + \ldots + a_n\right) - \left(b_1 + b_2 + \ldots + b_n\right) = 0$

$\Rightarrow a_1\ln a_1 + a_2\ln a_2 + \ldots + a_n\ln a_n \ge a_1\ln b_1 + a_2\ln b_2 + \ldots + a_n\ln b_n$ (đpcm)

Bài 7. Cho $e \le x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n < y_1 \le y_2 \le \ldots \le y_k$ sao cho

$x_1 + x_2 + \ldots + x_n \ge y_1 + y_2 + \ldots + y_k$. Chứng minh rằng: $x_1x_2\ldots x_n > y_1y_2\ldots y_k$

Chứng minh

Xét $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ với $x > e$. Ta có $f'(x) = \dfrac{1 - \ln x}{x^2} \le \dfrac{1 - \ln e}{x^2} = 0$

$\Rightarrow f(x)$ giảm trên $[e, +\infty) \Rightarrow$ Với $e \le x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n < y_1 \le y_2 \le \ldots \le y_k$

Ta có $\dfrac{\ln x_1}{x_1} \ge \dfrac{\ln x_2}{x_2} \ge \ldots \ge \dfrac{\ln x_n}{x_n} \ge \dfrac{\ln y_1}{y_1} \ge \dfrac{\ln y_2}{y_2} \ge \ldots \ge \dfrac{\ln y_k}{y_k}$

$\Rightarrow \ln x_1 \ge x_1 \cdot \dfrac{\ln y_1}{y_1};\ \ln x_2 \ge x_2 \cdot \dfrac{\ln y_1}{y_1};\ \ldots \ln x_n \ge x_n \cdot \dfrac{\ln y_1}{y_1}$

$\Rightarrow \ln x_1 + \ln x_2 + \ldots + \ln x_n \ge \left(x_1 + x_2 + \ldots + x_n\right)\dfrac{\ln y_1}{y_1} \ge \left(y_1 + y_2 + \ldots + y_k\right)\dfrac{\ln y_1}{y_1} \quad (1)$

Mặt khác, $\ln y_1 = y_1 \cdot \dfrac{\ln y_1}{y_1};\ \ln y_2 \le y_2 \cdot \dfrac{\ln y_1}{y_1};\ \ln y_3 \le y_3 \cdot \dfrac{\ln y_1}{y_1};\ldots;\ln y_k \le y_k \cdot \dfrac{\ln y_1}{y_1}$

$\Rightarrow \ln y_1 + \ln y_2 + \ldots + \ln y_k \le \left(y_1 + y_2 + \ldots + y_k\right)\dfrac{\ln y_1}{y_1} \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $\ln x_1 + \ln x_2 + \ldots + \ln x_n \ge \ln y_1 + \ln y_2 + \ldots + \ln y_k$

$\Leftrightarrow \ln\left(x_1x_2\ldots x_n\right) \ge \ln\left(y_1y_2\ldots y_k\right) \Leftrightarrow x_1x_2\ldots x_n \ge y_1y_2\ldots y_k$ (đpcm)

Bài 8. Cho $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{a_1^2}{a_2^2 + \ldots + a_n^2} + \ldots + \frac{a_n^2}{a_1^2 + \ldots + a_{n-1}^2} \ge \frac{a_1}{a_1 + \ldots + a_n} + \ldots + \frac{a_n}{a_1 + \ldots + a_{n-1}}$$

Chứng minh

Đặt $S=a_1^t+a_2^t+\ldots+a_n^t$ và $f(t)=\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{a_i^t}{S-a_i^t}$. Ta cần chứng minh $f(2)\ge f(1)$.

Ta sẽ chứng minh: $f(t)$ tăng với $t\ge 0$. Thật vậy,

$$f'(t)=\sum_{1}^{n}\frac{a_1^t\ln a_1\left(a_2^t+a_3^t+\ldots+a_n^t\right)-a_1^t\left(a_2^t\ln a_2+a_3^t\ln a_3+\ldots+a_n^t\ln a_n\right)}{\left(S-a_1^t\right)^2}$$

$$=\sum_{1}^{n}\frac{a_1^ta_2^t\left(\ln a_1-\ln a_2\right)+a_1^ta_3^t\left(\ln a_1-\ln a_3\right)+\ldots+a_1^ta_n^t\left(\ln a_1-\ln a_n\right)}{\left(S-a_1^t\right)^2}$$

$$=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{a_i^ta_j^t\left(\ln a_i-\ln a_j\right)}{\left(S-a_i^t\right)^2}=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}a_i^ta_j^t\left(\ln a_i-\ln a_j\right)\left(\frac{1}{\left(S-a_i^t\right)^2}-\frac{1}{\left(S-a_j^t\right)^2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}a_i^ta_j^t\left(\ln a_i-\ln a_j\right)\left(a_i^t-a_j^t\right)\frac{2S-a_i^t-a_j^t}{\left(S-a_i^t\right)^2\left(S-a_j^t\right)^2}\ge 0$$

Vậy $f(t)$ tăng với $t\ge 0\Rightarrow f(2)\ge f(1)$ (đpcm)

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a_1=a_2=\ldots=a_n>0$

Nhận xét. Bằng cách làm trên ta chứng minh được bài toán tổng quát sau:

Bài toán tổng quát. Cho $a_1,a_2,\ldots,a_n>0$ và $p>q>0$ Chứng minh rằng

$$\frac{a_1^p}{a_2^p+\ldots+a_n^p}+\ldots+\frac{a_n^p}{a_1^p+\ldots+a_{n-1}^p}\ge\frac{a_1^q}{a_1^q+\ldots+a_n^q}+\ldots+\frac{a_n^q}{a_1^q+\ldots+a_{n-1}^q}$$

Trường hợp đặc biệt khi $n=3,p=2,q=1$ ta có một bài toán rất đẹp và có thể giải bằng nhiều cách của tác giả ***Vasile Cirtoaje***:

$$\frac{a^2}{b^2+c^2}+\frac{b^2}{c^2+a^2}+\frac{c^2}{a^2+b^2}\ge\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}$$

Bài 9. Cho $a,b,c>1$ thỏa mãn $a+b+c=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}+6$ (1)

Chứng minh rằng: $ab+bc+ca\le 9+6\sqrt{2}$

Chứng minh

Đặt $x=a+b+c, y=ab+bc+ca, z=abc$. Từ (1) suy ra $x=\dfrac{y}{z}+6\Leftrightarrow y=(x-6)z$.

Theo ***AM – GM***: $x=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}+6\ge\dfrac{9}{a+b+c}+6=\dfrac{9}{x}+6\Leftrightarrow x^2-6x-9\ge 0\Rightarrow x\ge 3+3\sqrt{2}$.

Theo ***Viet*** thì a,b,c là ba nghiệm của phương trình $f(u)=u^3-xu^2+yu-z=0$.

Vì $f(u)=0$ có ba nghiệm $a,b,c>1$ nên $f'(u)=3u^2-2xu+y=0$ có 2 nghiệm $u_{1,2}=\dfrac{x\mp\sqrt{x^2-3y}}{3}>1$. Thực hiện phép chia $f(u)$ cho $f'(u)$ ta có

$f(u)=f'(u)\left(\dfrac{u}{3}-\dfrac{x}{9}\right)+\left(\dfrac{2y}{3}-\dfrac{2x^2}{9}\right)u+\dfrac{xy}{9}-z$. Do $f'(u_1)=f'(u_2)=0$ nên suy ra

$f(u_1)=\left(\dfrac{2y}{3}-\dfrac{2x^2}{9}\right)u_1+\dfrac{xy}{9}-z\geq 0$; $f(u_2)=\left(\dfrac{2y}{3}-\dfrac{2x^2}{9}\right)u_2+\dfrac{xy}{9}-z\leq 0$. Khi đó

$$f(u_1)f(u_2)\leq 0\Leftrightarrow 2(x^2-3y)\sqrt{x^2-3y}\geq 2x^3+27z-9xy\Leftrightarrow 4(x^2-3y)^3\geq(2x^3+27z-9xy)^2$$

$$\Leftrightarrow 4(x^6-27y^3-9x^4y+27x^2y^2)\geq 4x^6+729z^2+81x^2y^2+108x^3z-36x^4y-486xyz$$

$$\Leftrightarrow x^2y^2+18xyz\geq 4y^3+4x^3z+27x^2\Leftrightarrow x^2(x-6)^2+18x(x-6)\geq 4(x-6)3z+\frac{4}{3}x^3+27 \quad (2)$$

Ta cần chứng minh $y\leq 9+6\sqrt{2}\Leftrightarrow z\leq\dfrac{9+6\sqrt{2}}{x-6}$. Giả sử ngược lại $z>\dfrac{9+6\sqrt{2}}{x-6}$ (3)

Do $a,b,c>1\Rightarrow(a-1)(b-1)(c-1)>0\Leftrightarrow x+z>y+1\Leftrightarrow\dfrac{x-1}{x-7}>z$ (4)

Lấy (3) + (4) ta có $\dfrac{x-1}{x-7}>\dfrac{9+6\sqrt{2}}{x-6}\Rightarrow x<7{,}61$. Từ đó suy ra $y\leq 9+6\sqrt{2};\forall x\in\left[3+3\sqrt{2};7{,}61\right]$

Xét $f(z)=(x-6)^3z+\dfrac{x^3}{z}$; $f'(z)=(x-6)^2-\dfrac{x^3}{z^2}$; $f'(z)=0\Leftrightarrow z=\left(\dfrac{x}{x-6}\right)^{\frac{3}{2}}$

Ta chứng minh: $\dfrac{9+6\sqrt{2}}{x-6}\geq\left(\dfrac{x}{x-6}\right)^{3/2}\Leftrightarrow\left(\dfrac{9+6\sqrt{2}}{x-6}\right)^2\geq\left(\dfrac{x}{x-6}\right)^3\Leftrightarrow(x-6)(9+6\sqrt{2})^2\geq x^3$.

$\Leftrightarrow h(x)=x^3-(9+6\sqrt{2})^2x+6(9+6\sqrt{2})^2\leq 0$; $h'(x)=3x^2-(9-6\sqrt{2})^2$;

$h'(x)=0\Leftrightarrow x_0=\dfrac{9+6\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=3\sqrt{3}+2\sqrt{6}>3+3\sqrt{2}$. Có $h(3+3\sqrt{2})=0$, $h(7{,}61)=-51{,}52<0\Rightarrow h(x)<0$

Vậy ta có $f(z)\geq 4A(x-6)^2+\dfrac{4x^3}{A}(x-6)+27$ với $A=9+6\sqrt{2}$.

Ta chứng minh $4A(x-6)^2+\dfrac{4x^2}{A}(x-6)+27\geq x^2(x-6)^2+18x(x-6)$

$H(x)=4A(x-6)+\dfrac{4}{A}x^3+\dfrac{27}{x-6}-x^2(x-6)-18x\geq 0$

Có $H'(x)=4A+\dfrac{12}{A}x^2+12x-3x^2-18-\dfrac{27}{(x-6)^2}$; $H''(x)=12+\dfrac{24}{A}x-6x+\dfrac{54}{(x-6)^3}$

$=12+\dfrac{54}{(x-6)^3}+\left(\dfrac{24}{A}-6\right)x=12+\dfrac{54}{(x-6)^3}-\dfrac{6(5+6\sqrt{2})}{9+6\sqrt{2}}x$

Bài 10. Cho $\begin{cases} a,b,c \ge 1 \\ \dfrac{1}{1+a}+\dfrac{1}{1+b}+\dfrac{1}{1+c}=1 \end{cases}$. Chứng minh rằng: $\dfrac{8}{ab-1}+\dfrac{1}{bc-1}+\dfrac{1}{ca-1}\ge 2$ (1)

Chứng minh

Đặt $x=\dfrac{1}{1+a};y=\dfrac{1}{1+b};z=\dfrac{1}{1+c}$ thì $0<x,y,z\le\dfrac{1}{2}$ và $x+y+z=1$. Để ý rằng:

$ab-1=\dfrac{1-x}{x}\cdot\dfrac{1-y}{y}-1=\dfrac{z}{xy}$. Khi đó bất đẳng thức (1) $\Leftrightarrow S=\dfrac{8xy}{z}+\dfrac{yz}{x}+\dfrac{zx}{y}\ge 2$, (2)

Đặt $xy=u$ và $x+y=v$. Do $0<x,y,z\le\dfrac{1}{2}$ và $x+y+z=1$ nên $\dfrac{1}{2}\le v\le 1$ và

$u^2=(xy)^2\le\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^2=\dfrac{v^2}{4}$. Ta có $S=\dfrac{8xy}{z}+\dfrac{z\left(x^2+y^2\right)}{xy}=\dfrac{8u}{1-v}+(1-v)\cdot\dfrac{v^2-2u}{u}$

Xét hàm số $f(u)=\dfrac{8u}{1-v}+(1-v)\dfrac{v^2-2u}{u}$. Ta có: $f'(u)=\dfrac{8}{1-v}-\dfrac{v^2(1-v)}{u^2}$

Giải phương trình $f'(u)=0$ cho ta $u=\dfrac{v(1-v)}{2\sqrt{2}}$.

Nếu $v\ge 2-\sqrt{2}$ thì $\dfrac{v(1-v)}{2\sqrt{2}}\le\dfrac{v^2}{4}$. Khi đó $f(u)\ge f\left(\dfrac{v(1-v)}{2\sqrt{2}}\right)=\left(4\sqrt{2}+2\right)v-2\ge 7\sqrt{2}-6$

Nếu $v\le 2-\sqrt{2}$ thì $\dfrac{v^2}{4}\le\dfrac{v(1-v)}{2\sqrt{2}}$. Khi đó

$$f(u)\ge f\left(\dfrac{v^2}{4}\right)=\dfrac{2v^2}{1-v}+2(1-v)=\dfrac{4v^2-4v+2}{1-v}\ge 2, \forall\dfrac{1}{2}\le v\le 2-\sqrt{2}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=\dfrac{1}{4}$ và $z=\dfrac{1}{2}$, tức là $a=b=3$ và $c=1$.

Bài 11. Chứng minh : $(a+b+c)^4\ge 16\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)+11abc(a+b+c)$, $\forall a,b,c\ge 0$

Chứng minh

Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $a\ge b\ge c$ và $a+b+c=1$. Khi đó $0\le c\le\dfrac{1}{3}$.

Đặt $v=a+b,u=ab$ thì $\dfrac{2}{3}\le v\le 1$ và $u\le\dfrac{v^2}{4}$. Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh

$\Leftrightarrow f(u)=16u^2+16(1-v)^2\left(v^2-2u\right)+11u(1-v)\le 1$.

Ta có $f'(u)=32u+(1-v)(32v-21)>0$ với $\dfrac{2}{3}\le v\le 1$. Suy ra $f(u)$ đồng biến trên

$\left[0,\dfrac{v^2}{4}\right]$ và $f(u)\le f\left(\dfrac{v^2}{4}\right)=9v^4-\dfrac{75}{4}v^3+\dfrac{43}{4}v^2=\dfrac{1}{4}(3v-2)^2(v-1)(4v+1)+1\le 1$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$ hoặc $a=b>0;c=0$ và các hoán vị.

VII. CÁC BÀI TẬP DÀNH CHO BẠN ĐỌC TỰ GIẢI

Bài 1. Chứng minh các bất đẳng thức đúng với mọi $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ và $n\in\mathbb{N}^*$:

$\sin x+\tan x>2x$; $2^{\sin x}+2^{\tan x}>2^{x+1}$; $2^{2\sin x}+2^{\tan x}>2^{\frac{3x}{2}+1}$; $\frac{1}{\sin^2 x}<\frac{1}{x^2}+1-\frac{4}{\pi^2}$

$\sin 2x<\frac{2}{3x-x^3}$; $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3>\cos x$; $\frac{1}{\sqrt[n]{1+\sin x}}+\frac{1}{\sqrt[n]{1-\sin x}}\ge 2$; $\tan^n x+\cot^n x\ge 2+n^2\cos^2 2x$

Bài 2. Chứng minh rằng: $\frac{\sin y}{\sin x}>\frac{y-\frac{y^3}{3!}}{x-\frac{x^3}{3!}}$ cho $0<x<y<\sqrt{6}$

Bài 3. Chứng minh rằng: $\cos(x+y)<\frac{y\sin x}{x\sin y}$ $\begin{cases}\forall x,y>0\\ x+2y<\frac{5\pi}{4}\end{cases}$

Bài 4. Chứng minh rằng: $\cos(x+y)<\text{Min}\left(\frac{y\sin x}{x\sin y},\frac{x\sin y}{y\sin x}\right)$ $\forall x,y\in\left(0,\frac{5\pi}{12}\right)$

Bài 5. Chứng minh rằng: $x\sin x-y\sin y>2(\cos y-\cos x)$ $\forall 0<x<y<\frac{\pi}{2}$

Bài 6. Chứng minh rằng: $x-\frac{x^3}{3}<\arctan x<x-\frac{x^3}{6}$, $\forall x\in(0,1)$

Bài 7. Chứng minh rằng: $\tan^n x+\cot^n x\ge 2+n^2\cos^2 2x$ $\forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, $n\in\mathbb{N}$

Bài 8. Chứng minh rằng: $\sin^m x\cos^n x\le\sqrt{\frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}}$ $\forall m,n\in\mathbb{N}^*$

Bài 9. Chứng minh rằng: $1-x\le e^{-x}\le 1-x+\frac{x^2}{2}$ $\forall x\in[0,1]$

Bài 10. Chứng minh rằng: $1-x\le\frac{e^{-x^2}}{1+x}\le 1-x+\frac{x^4}{2(1+x)}$ $\forall x\in[0,1]$

Bài 11. Chứng minh rằng: $\log_x(x+1)>\log_{x+1}(x+2)$ $\forall x>1$

Bài 12. Chứng minh rằng: $\sqrt{xy}<\frac{x-y}{\ln x-\ln y}<\frac{x+y}{2}$ $\begin{cases}x,y>0\\ x\ne y\end{cases}$

Bài 13. Chứng minh rằng: $\frac{1}{x}\cdot\ln\left(a^x+b^x\right)>\frac{1}{y}\cdot\ln\left(a^y+b^y\right)$ $\forall y>x>0$

Bài 14. Cho $p_1,p_2,\dots,p_n,a_1,a_2,\dots,a_n,k>0$ and $x>y>0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{p_1a_1^x+p_2a_2^x+...+p_na_n^x}{p_1a_1^{x-k}+p_2a_2^{x-k}+...++p_na_n^{x-k}}>\frac{p_1a_1^y+p_2a_2^y+...++p_na_n^y}{p_1a_1^{y-k}+p_2a_2^{y-k}+...+p_na_n^{y-k}}$$

Bài 15. Chứng minh rằng: $\sin x<x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-...-\frac{x^{4k+3}}{(4k+3)!}+\frac{x^{4k+5}}{(4k+5)!}$ $\begin{cases}\forall x>0\\ k\in N\end{cases}$

Bài 16. Chứng minh rằng: $\sin x>x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-...+\frac{x^{4k+1}}{(4k+1)!}-\frac{x^{4k+3}}{(4k+3)!}$ $\begin{cases}\forall x>0\\ k\in N\end{cases}$

Bài 17. Chứng minh: $\cos x<1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-...-\frac{x^{4k+2}}{(4k+2)!}+\frac{x^{4k+4}}{(4k+4)!}$ $\begin{cases}\forall x>0\\ k\in N\end{cases}$

Bài 18. Chứng minh rằng: $\cos x>1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-...+\frac{x^{4k}}{(4k)!}-\frac{x^{4x+2}}{(4k+2)!}$ $\begin{cases}\forall x>0\\ k\in N\end{cases}$

Bài 19. Chứng minh rằng: $e^x>1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...+\frac{x^n}{n!}$ $\begin{cases}\forall x>0\\ n\in N^*\end{cases}$

Bài 20. Chứng minh rằng: $\ln(1+x)>x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-...+(-1)^{n-1}\cdot\frac{x^n}{n}$ $\begin{cases}\forall x>0\\ n\in N^*\end{cases}$

Bài 21. Chứng minh rằng: $k\ln k-k<\ln k!<\left(k+\frac{1}{2}\right)\ln k-k+1$ $\quad\forall 2\le k\in N$

Bài 22. Cho $f(x)=a_0+a_1\cos x+a_2\cos 2x+...+a_n\cos nx>0$ $\forall x\in$ CMR: $a_0>0$

Bài 23. Cho $y\ge x+1\ge 4.15$. Chứng minh rằng: $x^y-y^x>x+y$

Bài 24. Cho $a, b, c, r, s>0$ thỏa mãn điều kiện $a>b>c$ và $r>s$.

Chứng minh rằng: $a^rb^s+b^rc^s+c^ra^s>a^sb^r+b^sc^r+c^sa^r$

Bài 25. a. Lập bảng biến thiên của hàm số $y=\frac{x+2}{\sqrt{x^2+8}}$

b. Cho $a+b+c=12$. Chứng minh rằng: $\sqrt{a^2+8}+\sqrt{b^2+8}+\sqrt{c^2+8}\ge 6\sqrt{6}$

Bài 26. a. Lập bảng biến thiên của hàm số $y=\frac{2(x-1)^2}{\sqrt{4x^2+2x+1}}$

b. Cho $a, b, c\in[-1, 6]$ thỏa mãn điều kiện $a+b+c=-9/4$.

Chứng minh : $\sqrt{4a^2+2a+1}+\sqrt{4b^2+2b+1}+\sqrt{4c^2+2c+1}\ge\frac{3\sqrt{7}}{2}$

Bài 27. Chứng minh rằng: $\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x+\frac{1}{4}\sin 4x\ge\frac{2}{3}$ $\quad\forall x\in\left[\frac{\pi}{5},\frac{3\pi}{5}\right]$

Bài 28. Chứng minh rằng: $\sin x+\frac{\sin 2x}{2}+...+\frac{\sin nx}{n}\ge\sin nx$ $\ \forall x\in\left(0,\frac{\pi}{n}\right)$, $2\le n\in N$

Bài 29. Chứng minh rằng: $\dfrac{1+2x\arctan x}{2+\ln(1+x^2)} \geq \dfrac{1+e^{x/2}}{3+e^x} \quad \forall x \in R$

Bài 30. Cho tam giác nhọn ABC. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$T = (1+\sin^2 A)(1+\sin^2 B)(1+\sin^2 C)$$

Bài 31. Cho tam giác nhọn ABC. Chứng minh rằng:

$$\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\left(1-4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right) < \frac{3\pi}{16}$$

Bài 32. Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng:

$$1+\cos A\cos B+\cos B\cos C+\cos C co A \leq \frac{13}{12}(\cos A+\cos B+\cos C)+\cos A\cos B\cos C$$

Bài 33. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng: $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c} \geq \dfrac{9}{3+\ln(a^a b^b c^c)}$

Bài 34. Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$2\left(\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}\right)+5\ln\frac{(a+1)(b+1)(c+1)}{8} \geq 3$$

Bài 35. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh: $\dfrac{(a+1)^5(b+1)^5(c+1)^5}{a^4b^4c^4} \geq \dfrac{243}{16}\cdot e^{\frac{2-a}{a+1}+\frac{2-b}{b+1}+\frac{2-c}{c+1}}$

Bài 36. Cho $a, b, c \geq 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{4+a^3}{4+(a^2+1)\ln\frac{a^2+1}{5}}+\frac{4+b^3}{4+(b^2+1)\ln\frac{b^2+1}{5}}+\frac{4+c^3}{4+(c^2+1)\ln\frac{c^2+1}{5}} \geq 9$$

Bài 37. Cho $a, b, c > 1$ thỏa mãn $ab+bc+ca=12$. Chứng minh rằng:

$$\sum_{a,b,c}\frac{8+15\ln\frac{a^2-1}{3}-32\ln\frac{a}{2}}{a} \leq a+b+c+\frac{48}{abc}$$

Bài 38. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh bất đẳng thức sau:

$$\sqrt[3]{5(16a^3+9)}+\sqrt[3]{5(16b^3+9)}+\sqrt[3]{5(16c^3+9)}+$$

$$+\frac{16}{3}\ln\frac{\left(3+\sqrt{16a^2+9}\right)\left(3+\sqrt{16b^2+9}\right)\left(3+\sqrt{16c^2+9}\right)}{512abc} \geq 15$$

Bài 39. Chứng minh: $\cot\dfrac{x}{2}\cot\dfrac{y}{2}\cot\dfrac{z}{2} \leq \left(\sqrt{2}-1\right)^3 e^{3\sqrt{2}+2(\cos x+\cos y+\cos z)}$, $\forall x, y, z \in \left[\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}\right]$

Bài 40. Cho $a, b, c > 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\ln(\sqrt{2}-1)\left(a+\sqrt{a^2-1}\right)}+\frac{1}{\sqrt{2}+\ln(\sqrt{2}-1)\left(b+\sqrt{b^2-1}\right)}+\frac{1}{\sqrt{2}+\ln(\sqrt{2}-1)\left(c+\sqrt{c^2-1}\right)}$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{a^2-1}+\sqrt{b^2-1}+\sqrt{c^2-1}+\frac{1}{a^2-1}+\frac{1}{b^2-1}+\frac{1}{c^2-1}\right)$$

Bài 41. [USAMO – 1977] Cho $a, b, c, d, e \in [p, q], p > 0$. Chứng minh rằng:

$$(a+b+c+d+e)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}\right) \le 25 + 6\left(\sqrt{\frac{p}{q}}-\sqrt{\frac{q}{p}}\right)^2$$

Bài 42. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức:

$$T = \frac{\sin^6 x|\cos x| + \cos^6 x|\sin x|}{|\sin x| + |\cos x|}$$

Bài 43. Cho $2 \le m, n \in \mathbb{N}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $S = \sin^m x \cos^n x$

Bài 44. Cho $x, y, z \in [0, 1]$ thỏa mãn điều kiện $x + y + z = \frac{3}{2}$

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức: $S = \cos\left(x^2 + y^2 + z^2\right)$

Bài 45. Cho $\cos 2x + \cos 2y = 1$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $S = \tan^2 x + \tan^2 y$

Bài 46. Cho $x, y > 0$ thỏa mãn điều kiện $x + y = 1$ và $a > 0$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $S = \frac{1}{x^2 + y^2} + \frac{a}{xy}$

Bài 47. Cho tam giác nhọn ABC. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$T = \cot A + \cot B + \cot C - 2\left(\frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C}\right)$$

Bài 48. Cho tam giác nhọn ABC với $A, B, C \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T = \cot A + \cot B + \cot C + 3\cot A\cot B\cot C$

Bài 49. Cho tam giác nhọn ABC. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$T = \sin A \cos B + \sin B \cos C + \sin C \cos A$$

Bài 50. Cho tam giác nhọn ABC. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$T = 2\tan A + 3\tan B + \tan C$$

Bài 51. Cho $x, y, z > 0$ thỏa mãn điều kiện $x + y + z \le 2$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = \sqrt[3]{x^3 + \frac{1}{y^3}} + \sqrt[3]{y^3 + \frac{1}{z^3}} + \sqrt[3]{z^3 + \frac{1}{x^3}}$

Bài 52. Cho $a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_n > 0$. Chứng minh rằng:

$$\prod_{i=1}^{n}\left[xa_i + (1-x)b_i\right] \le \text{Max}\left(\prod_{i=1}^{n} a_i, \prod_{i=1}^{n} b_i\right) \qquad \forall x \in [0, 1]$$

§10. ĐỊNH LÝ LAGRANGE VÀ CÁC ỨNG DỤNG TRONG BẤT ĐẲNG THỨC

§10.1 ĐỊNH LÝ LAGRANGE CHO HÀM MỘT BIẾN VÀ CÁC ỨNG DỤNG

I. ĐỊNH LÝ LAGRANGE

Nếu hàm số f liên tục trên đoạn $[a, b]$ và có đạo hàm trên khoảng (a, b) thì tồn tại ít nhất một giá trị c (với $a < c < b$) sao cho $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

II. CÁC BÀI TẬP MẪU MINH HỌA

Bài 1. Chứng minh rằng: $\dfrac{b-a}{1+b^2} < \arctan b - \arctan a < \dfrac{b-a}{1+a^2} \quad \forall 0 < a < b$

Chứng minh

Xét hàm số $f(x) = \arctan x$. Ta có: $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Vì $f(x)$ liên tục và có đạo hàm với mọi x nên $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$ và có đạo hàm trên khoảng (a, b). Sử dụng định lý ***Lagrange*** suy ra tồn tại ít nhất một giá trị $c \in (a, b)$ thoả mãn $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a} \Leftrightarrow \dfrac{1}{1+c^2} = \dfrac{\arctan b - \arctan a}{b-a}$

Vì $c \in (a, b) \Rightarrow 0 < a < c < b \Rightarrow a^2 < c^2 < b^2 \Rightarrow \dfrac{1}{1+a^2} > \dfrac{1}{1+c^2} > \dfrac{1}{1+b^2}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{1+a^2} > \dfrac{\arctan b - \arctan a}{b-a} > \dfrac{1}{1+b^2}$.

Mặt khác ta có: $a < b \Rightarrow b - a > 0 \Rightarrow \dfrac{b-a}{1+b^2} < \arctan b - \arctan a < \dfrac{b-a}{1+a^2}$

Bài 2. Chứng minh rằng: $\dfrac{1}{1+(n+1)^2} < \arctan \dfrac{1}{n^2+n+1} < \dfrac{1}{1+n^2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

Chứng minh

Theo kết quả bài 1, thay $a = n$, $b = n+1$ ta có

$$\frac{1}{1+(n+1)^2} < \arctan(n+1) - \arctan n < \frac{1}{1+n^2}$$

Đặt $y = \arctan(n+1) - \arctan n \Rightarrow \tan y = \tan\left[\arctan(n+1) - \arctan n\right]$

$$\Rightarrow \tan y = \frac{\tan[\arctan(n+1)] - \tan(\arctan n)}{1 + \tan[\arctan(n+1)]\ \tan(\arctan n)} = \frac{(n+1) - n}{1 + (n+1)n} = \frac{1}{n^2+n+1}$$

$$\Rightarrow y = \arctan\frac{1}{n^2+n+1} \Rightarrow \frac{1}{1+(n+1)^2} < \arctan\frac{1}{n^2+n+1} < \frac{1}{1+n^2}$$

Bài 3. Chứng minh rằng: $\dfrac{b-a}{\cos^2 a} < \tan b - \tan a < \dfrac{b-a}{\cos^2 b}$, $\forall\, 0 < a < b < \dfrac{\pi}{2}$

Chứng minh

Xét hàm số $f(x) = \tan x$. Ta có $f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

Vì $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$ và có đạo hàm trên khoảng $(a, b) \subset \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ nên theo định lý ***Lagrange*** suy ra tồn tại ít nhất một giá trị $c \in (a, b)$ thỏa mãn

$f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a} \Leftrightarrow \dfrac{1}{\cos^2 c} = \dfrac{\tan b - \tan a}{b-a}$. Vì $c \in (a, b) \Rightarrow 0 < a < c < b < \dfrac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow 0 < \cos b < \cos c < \cos a < 1 \Rightarrow \frac{1}{\cos^2 a} < \frac{1}{\cos^2 c} < \frac{1}{\cos^2 b} \Rightarrow \frac{1}{\cos^2 a} < \frac{\tan b - \tan a}{b-a} < \frac{1}{\cos^2 b}$$

Mặt khác, $a < b \Rightarrow b - a > 0 \Rightarrow \dfrac{b-a}{\cos^2 a} < \tan b - \tan a < \dfrac{b-a}{\cos^2 b}$

Bài 4. Chứng minh rằng: $\dfrac{1}{2n+1} < \ln\left(1 + \dfrac{1}{2n}\right) < \dfrac{1}{2n}$ $\forall n \in \mathbb{Z}^+$

Chứng minh

Xét hàm số $f(x) = \ln x$. Ta có $f'(x) = \dfrac{1}{x}$. Vì $f(x)$ liên tục và có đạo hàm $\forall x > 0$ nên $f(x)$ liên tục trên đoạn $[2n, 2n+1]$ và có đạo hàm trên khoảng $(2n, 2n+1)$.

Sử dụng định lý ***Lagrange*** suy ra tồn tại ít nhất một giá trị $c \in (2n, 2n+1)$ thỏa mãn

$$f'(c) = \frac{f(2n+1) - f(2n)}{(2n+1) - 2n} \Leftrightarrow \frac{1}{c} = \ln(2n+1) - \ln 2n \Leftrightarrow \frac{1}{c} = \ln\frac{2n+1}{2n}.$$

Vì $c \in (2n, 2n+1) \Rightarrow 0 < 2n < c < 2n+1 \Rightarrow \dfrac{1}{2n+1} < \dfrac{1}{c} < \dfrac{1}{2n}$

$$\Rightarrow \frac{1}{2n+1} < \ln\left(\frac{2n+1}{2n}\right) < \frac{1}{2n} \Rightarrow \frac{1}{2n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{2n}\right) < \frac{1}{2n}.$$

Bài 5. Chứng minh rằng: $x^n\sqrt{1-x} < \dfrac{1}{\sqrt{2n\mathrm{e}}}$, $\forall x \in (0, 1)$ và $n \in \mathbb{Z}^+$

Chứng minh

Bất đẳng thức $\Leftrightarrow x^{2n}(1-x) < \dfrac{1}{2n\mathrm{e}} \Leftrightarrow x^{2n}(2n - 2nx) < \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ $\forall x \in (0, 1)$

Sử dụng bất đẳng thức ***AM – GM*** ta có:

$$x^{2n}(2n-2nx)=\underbrace{x.x....x}_{2n}(2n-2nx)\le\left(\frac{2nx+2n-2nx}{2n+1}\right)^{2n+1}=\left(\frac{2n}{2n+1}\right)^{2n+1}$$

Ta sẽ chứng minh $\left(\frac{2n}{2n+1}\right)^{2n+1}<\frac{1}{e}\Leftrightarrow\left(\frac{2n+1}{2n}\right)^{2n+1}>e\Leftrightarrow\ln\left(\frac{2n+1}{2n}\right)^{2n+1}>\ln e=1$

Theo bài 4 ta có: $\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)>\frac{1}{2n+1}\Rightarrow\ln\left(\frac{2n+1}{2n}\right)>\frac{1}{2n+1}$

$\Rightarrow(2n+1)\ln\left(\frac{2n+1}{2n}\right)>1\Rightarrow\ln\left(\frac{2n+1}{2n}\right)^{2n+1}>1\Rightarrow$ (đpcm)

Bài 6. Chứng minh rằng: $\frac{a-b}{a}<\ln\frac{a}{b}<\frac{a-b}{b},\quad\forall a>b>0$

Chứng minh

Xét hàm số $f(x)=\ln x$, ta có $f'(x)=\frac{1}{x}$. Vì $f(x)$ liên tục và có đạo hàm $\forall x>0$ nên $f(x)$ liên tục trên đoạn $[b,a]$ và có đạo hàm trên khoảng (b,a).

Sử dụng định lý ***Lagrange*** suy ra tồn tại ít nhất một giá trị $c\in(b,a)$ thỏa mãn

$$f'(c)=\frac{f(a)-f(b)}{a-b}\Leftrightarrow\frac{1}{c}=\frac{\ln a-\ln b}{a-b}\Leftrightarrow\frac{a-b}{c}=\ln a-\ln b\Leftrightarrow\frac{a-b}{c}=\ln\frac{a}{b}.$$

Vì $c\in(b,a)\Rightarrow0<b<c<a\Rightarrow\frac{1}{a}<\frac{1}{c}<\frac{1}{b}$.

Mặt khác, Vì $a-b>0\Rightarrow\frac{a-b}{a}<\frac{a-b}{c}<\frac{a-b}{b}\Rightarrow\frac{a-b}{a}<\ln\frac{a}{b}<\frac{a-b}{b}$

Bài 7. Chứng minh rằng: $|\arctan a-\arctan b|\le|a-b|,\quad\forall a,b\in\mathbb{R}$

Chứng minh

- Với $a=b$, bất đẳng thức luôn đúng $\forall a,b\in\mathbb{R}$
- Với $a\ne b$: Không mất tính tổng quát giả sử $a>b\Rightarrow a-b>0$

Xét hàm số $f(x)=\arctan x$. Ta có $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$. Vì $f(x)$ liên tục và có đạo hàm với mọi x nên $f(x)$ liên tục trên đoạn $[b,a]$ và có đạo hàm trên khoảng (b,a).

Sử dụng định lý ***Lagrange*** suy ra tồn tại ít nhất một giá trị $c\in(b,a)$ thỏa mãn

$$f'(c)=\frac{f(a)-f(b)}{a-b}\Leftrightarrow\frac{1}{1+c^2}=\frac{\arctan a-\arctan b}{a-b}$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{1+c^2}(a-b)=\arctan a-\arctan b\Rightarrow|\arctan a-\arctan b|=\frac{1}{1+c^2}\cdot|a-b|$$

Ta có $c^2\ge0\Rightarrow0<\frac{1}{1+c^2}\le1\Rightarrow\frac{1}{1+c^2}\cdot|a-b|\le|a-b|\Rightarrow$ (đpcm).

Bài 8. Chứng minh rằng: $\forall\ a < b < c$. Ta có:

$$3a < a+b+c-\sqrt{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca} < a+b+c+\sqrt{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca} < 3c$$

Chứng minh

Xét $f(x) = (x-a)(x-b)(x-c) \;\Rightarrow\; f(a) = f(b) = f(c) = 0$

$$f(x) = x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x - abc$$

Ta có $f(x)$ là hàm liên tục và có đạo hàm với $\forall x\in \mathbb{R}$ nên theo định lý ***Lagrange*** suy ra tồn tại $x_1\in(a, b)$ và $x_2\in(b, c)$ sao cho $f'(x_1) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$; $f'(x_2) = \dfrac{f(c)-f(b)}{c-b} \Rightarrow f'(x_1) = f'(x_2) = 0$.

Mặt khác $f'(x) = 3x^2 - 2(a+b+c)x + (ab+bc+ca)$

$\Rightarrow x_1, x_2$ là nghiệm của phương trình $f'(x) = 0$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{a+b+c-\sqrt{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca}}{3};\ x_2 = \frac{a+b+c+\sqrt{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca}}{3}$$

Ta lại có $a < x_1 < b < x_2 < c \Rightarrow 3a < 3x_1 < 3x_2 < 3c \Rightarrow$ (đpcm)

Bài 9. Chứng minh rằng: $\left(1+\dfrac{1}{x+1}\right)^{x+1} > \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x \quad \forall x > 0$

Chứng minh

Bất đẳng thức $\Leftrightarrow \ln\left(1+\dfrac{1}{x+1}\right)^{x+1} > \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x \Leftrightarrow (x+1)\ln\left(1+\dfrac{1}{x+1}\right) > x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$

Xét hàm số $f(x) = x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) = x[\ln(x+1)-\ln x]$, $x > 0 \Rightarrow f'(x) = \ln(x+1) - \ln x - \dfrac{1}{x+1}$

Sử dụng định lý ***Lagrange*** cho hàm số $g(t) = \ln t$ trên $[x, x+1] \Rightarrow$

Tồn tại $\alpha\in(x, x+1)$ sao cho $\dfrac{\ln(x+1)-\ln x}{(x+1)-x} = g'(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha} > \dfrac{1}{x+1}$

$\Rightarrow \ln(x+1) - \ln x > \dfrac{1}{x+1} \Rightarrow f'(x) = \ln(x+1) - \ln x - \dfrac{1}{x+1} > 0\ \ \forall x > 0 \Rightarrow f(x)$ đồng biến

$\Rightarrow f(x+1) > f(x) \Leftrightarrow (x+1)\ln\left(1+\dfrac{1}{x+1}\right) > x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) \Leftrightarrow \left(1+\dfrac{1}{x+1}\right)^{x+1} > \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$

Bài 10. Cho hàm số $f(x)$ xác định $\forall x > 0$. Chứng minh rằng:

1. Nếu $f''(x) \ge 0\ \forall x > 0$ thì $f(x) \ge f(a) + f'(a)(x-a)\ \forall a > 0$

2. Nếu $f''(x) \le 0\ \forall x > 0$ thì $f(x) \le f(a) + f'(a)(x-a)\ \forall a > 0$

3. Cho $x > 0$. Chứng minh rằng: $x^\alpha + (1-x)\alpha \ge 1\ \ \forall \alpha \le 0$ hoặc $\alpha \ge 1$

$$x^\alpha + (1-x)\alpha \le 1\quad \forall 0 \le \alpha \le 1$$

Chứng minh

Ta sẽ chứng minh **1.** đại diện. Xét hai khả năng sau:

• Nếu $x \geq a > 0$ thì $x - a \geq 0$, nên theo định lý ***Lagrange*** suy ra tồn tại điểm $c \in (a, x)$

Sao cho $f'(c) = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$. Vì $f''(x) \geq 0\ \forall x > 0$ nên $f'(x)$ đồng biến $\forall x > 0$

$\Rightarrow f'(c) > f'(a) \Rightarrow f(x) - f(a) \geq f'(a)(x - a) \Rightarrow f(x) \geq f(a) + f'(a)(x - a)$

• Nếu $0 < x \leq a$ thì $x - a \leq 0$, nên theo định lý ***Lagrange*** suy ra tồn tại điểm $d \in (x, a)$

Sao cho $f'(d) = \dfrac{f(a) - f(x)}{a - x}$. Vì $f''(x) \geq 0\ \forall x > 0$ nên $f'(x)$ đồng biến $\forall x > 0$

$\Rightarrow f'(d) < f'(a) \Rightarrow f(a) - f(x) \leq f'(a)(a - x) \Rightarrow f(x) \geq f(a) + f'(a)(x - a)$

Kết luận: Nếu $f''(x) \geq 0\ \ \forall x > 0$ thì $f(x) \geq f(a) + f'(a)(x - a)\ \ \forall a > 0$

3. Chọn $f(x) = x^{\alpha}$ với $x > 0$ và $a = 1$ ta có

$$\begin{cases} f''(x) = \alpha(\alpha - 1)x^{\alpha - 2} \geq 0 \Leftrightarrow \alpha \leq 0 \text{ hoac } \alpha \geq 1 \\ f''(x) = \alpha(\alpha - 1)x^{\alpha - 2} \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq \alpha \leq 1 \end{cases} \Rightarrow (\text{đpcm})$$

Bài 11. Cho $0 < b < a < 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{\sqrt{1 - a^2}} - \frac{b}{\sqrt{1 - b^2}} + \frac{\sqrt{1 - b^2}}{b} - \frac{\sqrt{1 - a^2}}{a} \geq \frac{25\sqrt{15}}{18}(a - b) \quad (1)$$

Chứng minh

Xét $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}} - \dfrac{\sqrt{1 - x^2}}{x}$ với $x \in (0, 1)$, khi đó (1) $\Leftrightarrow \dfrac{f(a) - f(b)}{a - b} \geq \dfrac{25\sqrt{15}}{18}$

Khi đó $f'(x) = \dfrac{1}{(1 - x^2)\sqrt{1 - x^2}} + \dfrac{1}{x^2\sqrt{1 - x^2}} = \dfrac{1}{x^2(1 - x^2)\sqrt{1 - x^2}}$

Từ định lý ***Lagrange*** có tồn tại $c \in (b, a)$ sao cho $f'(c) = \dfrac{f(a) - f(b)}{a - b}$

Ta có $f'(c) = \dfrac{1}{c^2(1 - c^2)\sqrt{1 - c^2}}$. Đặt $M = c^2(1 - c^2)\sqrt{1 - c^2} \Rightarrow M > 0$

$$\Rightarrow M^2 = c^4(1 - c^2)^3 = \frac{4}{9} \cdot \left(\frac{3}{2}c^2\right)\left(\frac{3}{2}c^2\right)(1 - c^2)(1 - c^2)(1 - c^2)$$

$$\leq \frac{4}{9} \cdot \left[\frac{1}{5}\left(\frac{3}{2}c^2 + \frac{3}{2}c^2 + (1 - c^2) + (1 - c^2) + (1 - c^2)\right)\right]^5 = \frac{4}{9} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^5 = \frac{108}{5^5}$$

$$\Rightarrow 0 < M \leq \frac{6\sqrt{15}}{125} \Rightarrow \frac{f(a) - f(b)}{a - b} = f'(c) = \frac{1}{M} \geq \frac{125}{6\sqrt{15}} = \frac{25\sqrt{15}}{18}$$

Bài 12. Cho $0 < a < b < \dfrac{\pi}{2}$. Chứng minh rằng:

$$\frac{2a\cos^2 a - 2b\cos^2 b - \cos(a+b)\sin(a-b) - (a-b)}{\cos a - \cos b} \le \pi(\cos a + \cos b) \quad (1)$$

Chứng minh

$$\frac{2a\cos^2 a - 2b\cos^2 b - \cos(a+b)\sin(a-b) - (a-b)}{\cos a - \cos b} \le \pi(\cos a + \cos b)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2a\cos^2 a - 2b\cos^2 b - \cos a\sin a + \cos b\sin b - (a-b)}{\cos a - \cos b} \le \pi(\cos a + \cos b)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2a\cos^2 a - 2b\cos^2 b - \cos a\sin a + \cos b\sin b - (a-b) - \pi(\cos^2 a - \cos^2 b)}{\cos a - \cos b} \le 0$$

Đặt $u = \cos a$, $v = \cos b \Rightarrow a = \arccos u$, $b = \arccos v$. Khi đó (1) $\Leftrightarrow$

$$\frac{2u^2\arccos u - 2v^2\arccos v - u\sqrt{1-u^2} + v\sqrt{1-v^2} - (\arccos u - \arccos v) - \pi(u^2 - v^2)}{u - v} \le 0 \quad (2)$$

Xét hàm số $f(x) = 2x^2\arccos x - \arccos x - x\sqrt{1-x^2} - \pi x^2$

Ta có $f'(x) = 4x\arccos x - \dfrac{2x^2}{\sqrt{1-x^2}} + \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \sqrt{1-x^2} + \dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} - 2\pi x$

$$f'(x) = 4x\arccos x - 2\pi x \Rightarrow f''(x) = 4\arccos x - \frac{4x}{\sqrt{1-x^2}} - 2\pi$$

$\Rightarrow f'''(x) = \dfrac{-4}{\sqrt{1-x^2}} - \dfrac{4}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} < 0 \Rightarrow f''(x)$ nghịch biến trên $(0, 1)$.

$\Rightarrow f''(x) < f''(0) = 0 \Rightarrow f'(x)$ nghịch biến trên $(0, 1) \Rightarrow f'(x) < f'(0) = 0$

Sử dụng định lý ***Lagrange*** suy ra tồn tại $p \in (v, u)$ sao cho $f'(p) = \dfrac{f(u) - f(v)}{u - v} < 0$

$$\Leftrightarrow \frac{2u^2\arccos u - 2v^2\arccos v - u\sqrt{1-u^2} + v\sqrt{1-v^2} - (\arccos u - \arccos v) - \pi(u^2 - v^2)}{u - v} \le 0$$

Bài 13. Chứng minh rằng: $\dfrac{1}{1+a} + \dfrac{1}{1+2a} + \ldots + \dfrac{1}{1+na} \le \dfrac{n}{\sqrt{1+na}}$, $\forall a > 0$, $n \in \mathbb{N}^*$ (1)

Chứng minh

Với $n = 1$ thì hiển nhiên (1) đúng. Giả sử bất đẳng thức (1) đúng với $n = k$, ta sẽ chứng minh (1) đúng với $n = k + 1$, tức là $\dfrac{1}{1+a} + \dfrac{1}{1+2a} + \ldots + \dfrac{1}{1+ka} + \dfrac{1}{1+(k+1)a} \le \dfrac{k+1}{\sqrt{1+(k+1)a}}$ (2)

Sử dụng giả thiết quy nạp với $n = k$ suy ra (2) được chứng minh nếu ta chứng minh được:

$$\frac{k}{\sqrt{1+ka}} + \frac{1}{1+(k+1)a} \le \frac{k+1}{\sqrt{1+(k+1)a}} \Leftrightarrow \frac{1}{1+(k+1)a} \le \frac{k+1}{\sqrt{1+(k+1)a}} - \frac{k}{\sqrt{1+ka}}$$

Sử dụng định lý ***Lagrange*** với $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+xa}}$ thì tồn tại $c \in (k, k+1)$ sao cho

$$f'(c)=f(k+1)-f(k)\Rightarrow \frac{k+1}{\sqrt{1+(k+1)a}}-\frac{k}{\sqrt{1+ka}}=\frac{2+ca}{2[1+ca]^{\frac{3}{2}}}>\frac{1}{1+ca}>\frac{1}{1+(k+1)a}$$

Vậy (2) đúng suy ra (1) đúng. Theo nguyên lý quy nạp ta có (đpcm)

Bài 14. Cho $a,\ b,\ c,\ d\ge 0$. Chứng minh rằng

$$\sqrt[3]{\frac{abc+abd+acd+bcd}{4}}\le\sqrt{\frac{ab+ac+ad+bc+bd+cd}{6}}$$

Chứng minh

Đặt $a=x_1;b=x_2;c=x_3;d=x_4$. Không mất tính tổng quát, giả sử: $0\le x_1\le x_2\le x_3\le x_4$

Xét đa thức $P(x)=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)$

$$P(x)=x^4-(x_1+x_2+x_3+x_4)x^3+(x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4)x^2$$
$$-(x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_1x_3x_4+x_2x_3x_4)x+x_1x_2x_3x_4$$

$$P'(x)=4x^3-3(x_1+x_2+x_3+x_4)x^2+2(x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4)x$$
$$-(x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_1x_3x_4+x_2x_3x_4)\qquad(1)$$

Trường hợp 1: Xét $x_i<x_{i+1}$. Áp dụng định lý ***Lagrange*** ta có $\exists y_1\in(x_1;x_2)$ sao cho:

$$0=P(x_1)-P(x_2)=(x_1-x_2)P'(y_1)\Rightarrow P'(y_1)=0$$

Tương tự $\exists y_2\in(x_2;x_3)$ sao cho $P'(y_2)=0$; $\exists y_3\in(x_3;x_4)$ sao cho $P'(y_3)=0$

Trường hợp 2: nếu $x_i=x_{i+1}$ thì $P'(x)$ có nghiệm $y_i=x_i=x_{i+1}$

Vậy với cả hai trường hợp trên ta đều có $P'(x)$ có 3 nghiệm y_1,y_2,y_3 trong đó $x_1\le y_1\le x_2\le y_2\le x_3\le y_3\le x_4$. Từ đó suy ra:

$$P'(x)=4(x-y_1)(x-y_2)(x-y_3)=4x^3-4(y_1+y_2+y_3)x^2$$
$$+4(y_1y_2+y_1y_3+y_2y_3)x-4y_1y_2y_3\qquad(2)$$

Từ (1) và (2) đồng nhất các hệ số ta được:

$$\begin{cases} y_1y_2+y_1y_3+y_2y_3=\frac{1}{2}(x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4)\\ y_1y_2y_3=\frac{1}{4}(x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_1x_3x_4+x_2x_3x_4)\end{cases}\qquad(3)$$

Theo bất đẳng thức ***AM – GM*** thì $y_1y_2+y_1y_3+y_2y_3\ge 3\sqrt[3]{(y_1y_2y_3)^2}$

Từ đó suy ra

$$\sqrt[3]{\frac{x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_1x_3x_4+x_2x_3x_4}{4}}\le\sqrt{\frac{x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4}{6}}$$

Hay ta có $\sqrt[3]{\frac{abc+abd+acd+bcd}{4}}\le\sqrt{\frac{ab+ac+ad+bc+bd+cd}{6}}$ (đpcm)

III. CÁC BÀI TẬP DÀNH CHO BẠN ĐỌC TỰ GIẢI

Bài 1. Chứng minh rằng: $\frac{x}{1+x^2} < \arctan x < x \quad \forall x > 0$

Bài 2. Chứng minh rằng: $|\sin x - \sin y| \le |x - y| \quad \forall x, y$

Bài 3. Chứng minh rằng: $(x+1)\cos\frac{\pi}{x+1} - x\cos\frac{\pi}{x} > 1 \quad \forall x \ge 2$

Bài 4. Cho $x \ge y \ge z > 0$ và $a \ge b > 0$. Chứng minh rằng:

$$x^a\left(y^b - z^b\right) + y^a\left(z^b - x^b\right) + z^a\left(x^b - y^b\right) \ge 0$$

Bài 5. Cho $a > b > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{b}{\sqrt{b^2-1}} - \frac{a}{\sqrt{a^2-1}} + \frac{a(a^2-1)\sqrt{a^2-1} - b(b^2-1)\sqrt{b^2-1}}{4} -$$

$$-\frac{3}{8}\left(a\sqrt{a^2-1} - b\sqrt{b^2-1}\right) + \frac{3}{8}\ln\frac{a+\sqrt{a^2-1}}{b+\sqrt{b^2-1}} \ \ge\ 2(a-b)$$

Bài 6. Cho $a, b \in [-2, 2]$. Chứng minh rằng: $\frac{b\sqrt{4-a^2} - a\sqrt{4-b^2}}{4ab(b-a)} \ge \frac{3\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}$

Bài 7. Cho $a > b > 0$. Chứng minh rằng: $\ln\frac{a\left(2+\sqrt{4-b^2}\right)}{b\left(2+\sqrt{4-a^2}\right)} \ge a - b$.

Bài 8. Cho $a > b > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{(4-a^2)^2\sqrt{4-a^2} - (4-b^2)^2\sqrt{4-b^2}}{5} - \frac{4}{3}\cdot\left[(4-a^2)\sqrt{4-a^2} - (4-b^2)\sqrt{4-b^2}\right] \le 3\sqrt{3}(a-b)$$

Bài 9. Chứng minh rằng: $\ln\frac{a^2+1}{b^2+1} + 2(\arctan a - \arctan b) \le \left(1+\sqrt{2}\right)(a-b)$, $\forall a > b > 0$

Bài 10. Cho $a, b > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{ba-1}{(a^2+1)(b^2+1)} - \frac{a+b}{2a^2b^2} + \frac{\ln\frac{a^2+1}{b^2+1} - 2\ln\left(\frac{a^2}{b^2}\cdot\frac{b^2+1}{a^2+1}\right) - 2(\arctan a - \arctan b)}{2(a-b)} \ge 0$$

Bài 11. Cho $0 \le b \le a \le 1$. Chứng minh rằng: $\ln\frac{(1+a)^2(1-b)}{(1+b)^2(1-a)} + a + b \ge 0$

Bài 12. Cho $a > b > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{\sqrt{a^2-1}}{a} - \frac{\sqrt{b^2-1}}{b} + \frac{a(a^2-1)\sqrt{a^2-1} - b(b^2-1)\sqrt{b^2-1}}{4} +$$

$$+\frac{a\sqrt{a^2-1} - b\sqrt{b^2-1}}{8} - \frac{1}{8}\cdot\ln\frac{b-\sqrt{b^2-1}}{a-\sqrt{a^2-1}} \ \ge\ 2(a-b)$$

Bài 13. Cho $a, b, c, d \ge 0$ thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = \frac{1}{2}$.

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức: $P = a^3 + b^3 + 2c^3 + d^4$

§ 10.2 CỰC TRỊ CỦA HÀM NHIỀU BIẾN VÀ PHƯƠNG PHÁP NHÂN TỬ LAGRANGE

§ 10.2.1. CỰC TRỊ KHÔNG CÓ ĐIỀU KIỆN RÀNG BUỘC

I. CỰC TRỊ HÀM NHIỀU BIẾN VÀ ĐIỀU KIỆN CẦN NHẬN BIẾT CỰC TRỊ

a. Khái niệm cực trị địa phương

Cho $w=f\left(x_1,x_2,...,x_n\right)=f\left(X\right)$ xác định và liên tục trong

$$D=\left\{X\left(x_1,x_2,...x_n\right)\middle|x_i\in\left(a_i,b_i\right),i=\overline{1,n}\right\}$$

Định nghĩa: Ta nói rằng hàm số $w=f\left(x_1,x_2,....,x_n\right)$ đạt *giá trị cực đại* tại điểm $\overline{X}\left(\overline{x_1},\overline{x_2},...\overline{x_n}\right)\in D$ nếu tồn tại số $r>0$ sao cho ta có $f\left(x_1,x_2,...x_n\right)<f\left(\overline{x_1},\overline{x_2},...\overline{x_n}\right)$ (1.1)

đúng với mọi $X\left(x_1,x_2,...x_n\right)\in D$ thỏa mãn điều kiện khoảng cách: $0<d\left(X,\overline{X}\right)<r$

Ta nói rằng hàm số $w=f\left(x_1,x_2,....,x_n\right)$ đạt *giá trị cực tiểu* tại điểm $\overline{X}\left(\overline{x_1},\overline{x_2},...\overline{x_n}\right)\in D$ nếu tồn tại số $r>0$ sao cho $f\left(x_1,x_2,...x_n\right)>f\left(\overline{x_1},\overline{x_2},...\overline{x_n}\right)$ đúng với mọi $X\left(x_1,x_2,...x_n\right)\in D$ thỏa mãn điều kiện khoảng cách: $0<d\left(X,\overline{X}\right)<r$

Điểm $\overline{X}\left(\overline{x_1},\overline{x_2},...\overline{x_n}\right)\in D$ mà tại đó hàm số $f\left(x_1,x_2,...x_n\right)$ đạt giá trị cực đại (cực tiểu) được gọi là *điểm cực đại (điểm cực tiểu)* của hàm số. Nói cách khác, *điểm cực đại (điểm cực tiểu) địa phương của một hàm số là điểm mà tại đó hàm số đạt giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) trong phạm vi một lân cận nào đó.*

b. Điều kiện cần của cực trị

Giả sử hàm số $w=f\left(x_1,x_2,...,x_n\right)=f\left(X\right)$ xác định, liên tục và có các đạo hàm riêng theo tất cả các biến độc lập trong miền $D=\left\{X\left(x_1,x_2,...x_n\right)\middle|x_i\in\left(a_i,b_i\right),i=\overline{1,n}\right\}$ khi đó ta có định lý:

Định lý: Điều kiện cần để hàm số $w=f\left(x_1,x_2,...,x_n\right)$ đạt được cực trị (cực đại hoặc cực tiểu) tại điểm $\overline{X}\left(\overline{x_1},\overline{x_2},...\overline{x_n}\right)\in D$ là tại điểm đó tất cả các đạo hàm riêng cấp một triệt tiêu:

$$\begin{cases} w'_{x_i}=f'_{x_i}\left(\overline{x_1},\overline{x_2},...,\overline{x_n}\right)=0 \\ i=1,2,...,n \end{cases} \quad (1.2)$$

Chứng minh

Với mỗi i cố định $(i=1,...,n)$ ta xét hàm số một biến x_i: $\varphi(x_i)=f\left(\overline{x_1},...,x_i,...,\overline{x_n}\right)$

Nếu hàm số $f(x_1, x_2, ... x_n)$ đạt giá trị cực đại tại điểm $\overline{X}(\overline{x_1}, \overline{x_2}, ... \overline{x_n}) \in D$ thì bất đẳng thức (1.1) thỏa mãn khi $X \in D$ và $0 < d(X, \overline{X}) < r$. Từ đây suy ra

$$\varphi(x_i) = f(\overline{x_1}, ..., x_i, ..., \overline{x_n}) < f(\overline{x_1}, ... \overline{x_i}, ... \overline{x_n}) = \varphi(\overline{x_i}) \text{ với mọi } 0 < |x_i - \overline{x_i}| < r.$$

Điều này chứng tỏ hàm số $\varphi(x_i)$ đạt giá trị cực đại tại điểm $\overline{x_i}$. Theo định lý về điều kiện cần để hàm một biến đạt cực trị ta có: $\varphi'(\overline{x_i}) = f'_{x_i}(\overline{x_1}, \overline{x_2}, ... \overline{x_n}) = 0$. Định lý được chứng minh.

Định nghĩa: Điểm $\overline{X}$ thỏa mãn điều kiện (1.2) được gọi là *điểm dừng* của hàm số. Hàm số $f(x_1, x_2, ... x_n)$ *chỉ có thể đạt cực trị tại các điểm dừng*. Tuy nhiên đây mới chỉ là điều kiện cần, chứ chưa phải là điều kiện đủ. Điều kiện đủ nêu dưới đây cho phép ta kiểm tra xem tại điểm dừng hàm số có thực sự đạt cực trị hay không. Chú ý rằng điều kiện đủ chỉ áp dụng sau khi điều kiện cần đã được thỏa mãn (chỉ áp dụng cho các điểm dừng).

II. ĐIỀU KIỆN ĐỦ

a. Trường hợp hàm số hai biến số

Giả sử $M_0(x_0, y_0)$ là một điểm dừng của hàm số $w = f(x, y)$ và tại điểm đó tất cả các đạo hàm riêng cấp 2 của nó đều tồn tại và liên tục. Đặt $\begin{cases} a_{11} = f''_{xx}(x_0, y_0); a_{12} = f''_{xy}(x_0, y_0) \\ a_{21} = f''_{yx}(x_0, y_0); a_{22} = f''_{yy}(x_0, y_0) \end{cases}$

Với giả thiết về sự tồn tại và liên tục của các đạo hàm riêng cấp hai nên ta có $a_{12} = a_{21}$

Xét định thức: $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$.

Định lý:

1. Nếu $D > 0$ thì điểm dừng $M_0(x_0, y_0)$ là *điểm cực trị* của hàm số $w = f(x, y)$:
   - $M_0(x_0, y_0)$ là *điểm cực đại* nếu $a_{11} < 0$
   - $M_0(x_0, y_0)$ là *điểm cực tiểu* nếu $a_{11} > 0$
2. Nếu $D < 0$ thì điểm $M_0(x_0, y_0)$ *không phải là điểm cực trị* của hàm số $w = f(x, y)$.
3. Trường hợp $D = 0$ ta không có kết luận gì về cực trị tại điểm dừng $M_0(x_0, y_0)$: hàm số có thể đạt cực trị hoặc không đạt cực trị tại điểm đó. Muốn có được kết luận ta phải sử dụng phương pháp khác. Để tìm các điểm cực trị của hàm số trước hết ta phải xét điều kiện cần để tìm các điểm dừng, sau đó dùng điều kiện đủ để kiểm tra lần lượt từng điểm dừng và kết luận.

Ví dụ: Tìm các điểm cực trị của hàm số $w = x^3 + 3xy + y^2 - y$

Điều kiện cần: Ta có $w'_x = 3x^2 + 3y, w'_y = 3x + 2y - 1$, $w''_{xx} = 6x, w''_{xy} = w''_{yx} = 3, w''_{yy} = 2$

Giải hệ phương trình tìm điểm dừng:

$$\begin{cases} w'_x = 0 \\ w'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 3y = 0 \\ 3x + 2y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0; y = 0 \\ x = 1; y = -1 \\ x = \frac{1}{2}; y = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

Điều kiện đủ:

Tại điểm ($x = 0$ và $y = 0$) ta có $a_{11} = 0, a_{12} = a_{21} = 3, a_{22} = 2;\ D = -3^2 = -9 < 0$

Vậy điểm $(x = 0, y = 0)$ không phải là điểm cực trị của hàm số đã cho.

Tại điểm $(x = 1, y = -1)$ ta có: $a_{11} = 6 > 0, a_{12} = a_{21} = 3, a_{22} = 2;\ D = 6.2 - 3^2 = 3 > 0$;

Vậy điểm $(x = 1, y = -1)$ là điểm cực tiểu của hàm số đã cho với $w_{\min} = w(1, -1) = 0$.

Tại điểm $\left(x = \frac{1}{2}, y = -\frac{1}{4}\right)$ ta có: $a_{11} = 3 > 0, a_{12} = a_{21} = 3, a_{22} = 2;\ D = 3.2 - 3^2 = -3 < 0$;

Vậy điểm $\left(x = \frac{1}{2}, y = -\frac{1}{4}\right)$ là điểm cực đại của hàm số đã cho với

$w_{\max} = w\left(x = \frac{1}{2}, y = -\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{16}$.

Ví dụ: Tìm các điểm cực trị của hàm số $w = 8x^3 + 2xy - 3x^3 + y^2$

Điều kiện cần:

Ta có $w'_x = 24x^2 + 2y - 6x, w'_y = 2x + 2y.\ w''_{xx} = 48x\ 6, w''_{xy} = w''_{yx} = 2, w''_{yy} = 2$

Giải hệ phương trình tìm điểm dừng:

$$\begin{cases} w'_x = 0 \\ w'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12x^2 + y - 3x = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, y = 0 \\ x = \frac{1}{3}; y = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Điều kiện đủ:

Tại điểm ($x = 0$ và $y = 0$) ta có $a_{11} = -6, a_{12} = a_{21} = 2, a_{22} = 2;\ D = (-6)2 - 2^2 = -16 < 0$

Vậy điểm $(x = 0, y = 0)$ không phải là điểm cực trị của hàm số đã cho.

Tại điểm $\left(x = \frac{1}{3}, y = -\frac{1}{3}\right)$ ta có: $a_{11} = 10 > 0, a_{12} = a_{21} = 2, a_{22} = 2;\ D = 20 - 4 > 0$;

Vậy điểm $\left(x = \frac{1}{3}, y = -\frac{1}{3}\right)$ là điểm cực tiểu của hàm số đã cho với $w_{\min} = w\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) = -\frac{4}{17}$.

b. Trường hợp hàm số n biến số

Giả sử $\overline{X}\left(\overline{x_1}, \overline{x_2}, ... \overline{x_n}\right) \in D$ là một điểm dừng của hàm số $w = f(x_1, x_2, ..., x_n) = f(X)$ và tại điểm đó hàm số có tất cả các đạo hàm riêng cấp 2 liên tục. Như đã biết, vi phân toàn phần cấp hai của hàm số n biến số $w = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ tại điểm $\overline{X}\left(\overline{x_1}, \overline{x_2}, ... \overline{x_n}\right) \in D$ là một dạng toàn phương của n biến số $dx_1, dx_2, ..., dx_n$: $d^2 f = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} dx_i dx_j$

Trong đó a_{ij} là các đạo hàm riêng cấp hai: $a_{ij} = \dfrac{\partial^2 f(\overline{X})}{\partial x_i \partial x_j} = f_{ij}(\overline{x_1}, \overline{x_2}, ..., \overline{x_n})$

Định lý:

1. Nếu $d^2 f$ là một dạng toàn phương xác định dương thì điểm dừng $\overline{X}(\overline{x_1}, \overline{x_2}, ..., \overline{x_n})$ là *điểm cực tiểu* của hàm số $f(X)$;
2. Nếu $d^2 f$ là một dạng toàn phương xác định âm thì điểm dừng $\overline{X}(\overline{x_1}, \overline{x_2}, ..., \overline{x_n})$ là *điểm cực đại* của hàm số $f(X)$.
3. Nếu $d^2 f$ là một dạng toàn phương không xác định thì điểm dừng $\overline{X}(\overline{x_1}, \overline{x_2}, ..., \overline{x_n})$ *không phải là điểm cực trị* của hàm số $f(X)$.

Ma trận của dạng toàn phương $d^2 f$ là ma trận vuông với các phần tử là các đạo hàm riêng cấp hai tại điểm dừng $\overline{X}$ (gọi là ma trận Hess):

$$H = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_n \\ a_{21} & a_{22} \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \text{ trong đó: } a_{ij} = \frac{\partial^2 f(\overline{X})}{\partial x_i \partial x_j}. \text{ Đặt } H_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} \cdots & a_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}, \quad (k = 1, 2, ..., n)$$

Một trong các phương pháp xem xét tính xác định của một dạng toàn phương là dựa vào các định thức con chính của mà trận của dạng toàn phương đó. Chú ý rằng, định thức con H_k tạo thành từ k dòng đầu và k cột đầu của nó. Như vậy H có n định thức con chính từ cấp 1 đến n.

Áp dụng định lý về dấu hiệu dạng toàn phương xác định ta có quy tắc sau đây:

Định lý:

1. Nếu tất cả các định thức con chính của ma trận H đều dương ($H_k > 0$ với mọi $k = 1, 2, ..., n$) thì điểm dừng $\overline{X}(\overline{x_1}, \overline{x_2}, ..., \overline{x_n})$ là *điểm cực tiểu* của hàm số $f(X)$.
2. Nếu $(-1)^k H_k > 0$ với mọi $k = 1, 2, ..., n$, tức là ma trận H có tất cả các định thức con chính cấp lẻ âm và tất cả các định thức con chính cấp chẵn dương, thì điểm dừng $\overline{X}(\overline{x_1}, \overline{x_2}, ..., \overline{x_n})$ là *điểm cực đại* của hàm số $f(X)$.

Ví dụ: Tìm cực trị hàm số $w = x + \dfrac{y^2}{4x} + \dfrac{z^2}{y} + \dfrac{2}{z} (x > 0, y > 0, z > 0)$

Giải: Để tìm các điểm cực trị, trước hết ta tính đạo hàm riêng:

$$w'_x = 1 - \frac{y^2}{4x^2}, w'_y = \frac{y}{2x} - \frac{z^2}{y^2}, w'_z = \frac{2z}{y} - \frac{2}{z^2}; w''_x = \frac{y^2}{2x^3}, w''_{yy} = w''_{yx} = \frac{1}{2x} + \frac{2z^2}{y^3},$$

$$w''_{zz} = \frac{2}{y} + \frac{4}{z^3}; w''_{xy} = w''_{yx} = -\frac{y}{2x^2}, w''_{xz} = w''_{zx} = 0, w''_{yz} = w''_{xy} = -\frac{2z}{y^2}$$

Giải hệ $w'_x = w'_y = w'_z = 0$ với $x > 0, y > 0, z > 0$ ta được 1 nghiệm: $\left(x = \frac{1}{2}, y = 1, x = 1\right)$. Thay các đạo hàm riêng cấp 2 ta được:

$a_{11} = 4, a_{22} = 3, a_{33} = 6, \; a_{12} = a_{21} = -2, \; a_{13} = a_{31} = 0, a_{23} = a_{32} = -2;$

Xét $H = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix}$ có: $H_1 = 4 > 0; H_2 = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 8 > 0; H_3 = \begin{vmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 6 \end{vmatrix} = 32 > 0$

Vậy $\left(x = \frac{1}{2}, y = 1, z = 1\right)$ là điểm cực tiểu của hàm số đã cho và $w_{\min} = w\left(\frac{1}{2}, 1, 1\right) = 4$

c. Từ cực trị địa phương đến cực trị toàn cục

Điểm $\overline{X}\left(\overline{x_1}, \overline{x_2}, ... \overline{x_n}\right)$ là điểm cực trị của hàm số $w = f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ nếu tại điểm này hàm số đạt giá trị lớn nhất hoặc nhỏ nhất so với mọi giá trị của hàm số tại những điểm $X\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ cách điểm $\overline{X}\left(\overline{x_1}, \overline{x_2}, ..., \overline{x_n}\right)$ một khoảng cách nhỏ hơn một số $r > 0$ nào đó gọi là cực trị địa phương. Bài toán tìm điểm cực trị toàn cục (điểm mà tại đó hàm số đạt giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất) của hàm số nhiều biến số trên toàn bộ một miền D bất kì cho trước là một bài toán khá phức tạp. Ngay cả khi D là một miền đóng và bị chặn, ngoài việc tìm các điểm cực trị địa phương, ta còn phải tiếp tục xét cực trị trên tập hợp các điểm biên.

Định lý: Giả sử hàm số $f(X) = f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ xác định, liên tục và có các đạo hàm riêng liên tục đến cấp hai trong miền: $D = \left\{X\left(x_1, x_2, ... x_n\right) \middle| x_i \in \left(a_i, b_i\right), i = \overline{1, n}\right\}$

Nếu trong miền **D** hàm số $f(X)$ chỉ có một điểm dừng duy nhất $\overline{X}\left(\overline{x_1}, \overline{x_2}, ... \overline{x_n}\right)$ và điều kiện đủ để hàm số đạt giá trị cực đại (giá trị cực tiểu) được thỏa mãn tại mọi điểm thuộc miền **D** thì giá trị của hàm số tại điểm cực đại (điểm cực tiểu) địa phương $\overline{X}$ đồng thời là giá trị lớn nhất (giá trị nhỏ nhất) của hàm số $f(X)$ trên toàn bộ miền **D**.

> ***Ví dụ:*** Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số:
>
> $$w = 2x^2 + y^2 + z^2 - 2xz - 4y - 6z + 10\ ; (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

Giải: Điều kiện cần: Xét hệ sau đây để tìm điểm cực trị của hàm số

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial x} = 4x - 2y = 0 \\ \dfrac{\partial w}{\partial y} = 2y - 4 = 0 \\ \dfrac{\partial w}{\partial z} = 2z - 2x - 16 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \\ z = 6 \end{cases}$$

Ta có: $H = \begin{vmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{vmatrix}$; $H_1 = 4 > 0,\ H_2 = 8 > 0,\ H_3 = |H| = 8 > 0$

Suy ra $(x = 3, y = 2, z = 6)$ là điểm cực tiểu của hàm số

Điều kiện đủ: Do hàm số đạt cực tiểu duy nhất thỏa mãn với mọi điểm $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, do đó điểm dừng $(x = 3, y = 2, z = 6)$ là điểm mà tại đó hàm số đã cho nhận giá trị nhỏ nhất trong toàn bộ $\mathbb{R}^3$ với Min $w = w(x = 3, y = 2, z = 6) = -12$

§ 10.2.2 CỰC TRỊ CÓ ĐIỀU KIỆN RÀNG BUỘC

I. CỰC TRỊ CÓ ĐIỀU KIỆN VỚI HAI BIẾN CHỌN VÀ MỘT ĐIỀU KIỆN RÀNG BUỘC

Xét bài toán: Tìm các điểm cực trị của hàm số $w = f(x, y)$ (2.1)

Với điều kiện ràng buộc $g(x, y) = b$ (2.2)

Trong đó: x và y là các biến chọn; w là biến mục tiêu; f là hàm mục tiêu.

a. Liên hệ với cực trị tự do

Nếu từ (2.2) ta biểu diễn được y dưới dạng hàm ẩn $y = \varphi(x)$ thì bài toán cực tiểu có điều kiện nêu trên quy về bài toán cực trị tự dơ của hàm số một biến số x: $w = f[x, \varphi(x)] = h(x)$

Ví dụ: Chọn (x, y) để hàm số $w = 2xy + 7x + y$ đạt cực đại, với điều kiện $3x + y = 4$.

Giải: Từ $3x + y = 4$ suy ra $y = 4 - 3x$, suy ra $w = -6x^2 + 12x + 4$.

Ta có $w' = -12x + 12 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Từ đó suy ra hàm số đạt giá trị cực đại khi $x = 1$.

Khi đó điểm cực đại là: $(x, y) = (1,1)$.

b. Phương pháp nhân tử Lagrange

Trong cách tiếp cận nêu trên ta xem một trong hai biến chọn là biến độc lập và biến kia phụ thuộc vào nó. Hơn nữa, khi biểu thức $g(x, y)$ phức tạp thì việc áp dụng phương pháp thế để loại bớt biến chọn sẽ gặp khó khăn. Nhà toán học Lagrange đề ra một phương pháp cho phép đưa bài toán cực tiểu có điều kiện về bài toán cực trị do mà vẫn giữ vai trò bình đẳng của các biến chọn.

Xuất phát từ hàm mục tiêu (2.1) và điều kiện (2.2) ta lập hàm số sau (gọi là hàm Lagrange):
$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda[b - g(x, y)]$ (2.3)

Hàm số (2.3) có thêm một biến phụ λ, gọi là *nhân tử Lagrange*. Chú ý rằng với tất cả các điểm $M(x, y)$ thỏa mãn điều kiện (2.2), tức là khi xét cặp biến chọn (x, y) trong miền biến thiên đã bị thu hẹp bởi điều kiện (2.2), hàm mục tiêu w đồng nhất với hàm số L.

Định lý sau đây cho biết mối liên hệ giữa hàm số Lagrange (2.3) và bài toán cực trị có điều kiện mà ta đang xem xét.

Định lý:

Giả sử các hàm số $f(x, y)$ và $g(x, y)$ có các đạo hàm riêng liên tục trong một lân cận của điểm $M_0(x_0, y_0)$ và $g'_y(x_0, y_0) \neq 0$. Khi đó, nếu hàm số (2.1), với điều kiện (2.2), đạt cực tiểu tại điểm $M_0(x_0, y_0)$ thì tồn tại số λ_o sao cho bộ ba số thực (x_0, y_0, λ_0) là nghiệm của hệ phương trình:
$$\begin{cases} L'_\lambda = b - g(x, y) = 0 \\ L'_x = f'_x - \lambda g'_x = 0 \\ L'_y = f'_y - \lambda g'_y = 0 \end{cases} \quad (2.4)$$

Chứng minh

Với các giả thiết đã nêu, phương trình ràng buộc (2.2) xác định một hàm ẩn $y = y(x)$ nhận giá trị y_0 tại điểm $x_0: y(x_0) = y_0$.

Giả sử hàm số (2.1), với điều kiện (2.2), đạt giá trị cực đại (cực tiểu) tại điểm $M_0(x_0, y_0)$.

Do (x_0, y_0) thỏa mãn điều kiện (2.2), ta có: $b - g(x_0, y_0) = 0$ (2.5)

Xét hàm số: $h(x) = f[x, y(x)]$

Do hàm số (2.1), với điều kiện (2.2), đạt giá trị cực đại (cực tiểu) tại điểm $M_0(x_0, y_0)$ nên $h(x)$ đạt giá trị cực đại (cực tiểu) tại điểm x_0. Từ điều kiện $h'(x_0) = 0$ suy ra;

$$f'_x(x_0, y_0) + f'_y(x_0, y_0).y'(x_0) = 0 \qquad (2.6)$$

Mặt khác, lấy đạo hàm hai vế của phương trình ràng buộc (2.2) theo *x*, ta có:

$$g'_x(x, y) + g'(x, y).y'(x) = 0$$

Tại điểm $x = x_0$ hàm ẩn $y = y(x)$ nhận giá trị y_0, do đó

$$g'_x(x_0, y_0) + g(x_0, y_0).y'(x_0) = 0 \; (2.7)$$

Đặt $\lambda_0 = \dfrac{f'(x_0, y_0)}{g'_y(x_0, y_0)}$, ta có $f'_y(x_0, y_0) - \lambda_0 g'_y(x_0, y_0) = 0$ (2.8)

Từ (2.7) suy ra $\lambda_0 g'_x(x_0, y_0) + \lambda_0 g'_y(x_0, y_0).y'(x_0) = 0$ (2.9)

Trừ các vế tương ứng của (2.6), (2.9) và lưu ý đến (2.8) ta được:

$$f'_x(x_0, y_0) - \lambda_0 g'(x_0, y_0) + \left[f'_y(x_0, y_0) - \lambda_0 g'_y(x_0, y_0)\right].y'(x_0) = 0$$

$$\Rightarrow f'_x(x_0, y_0) - \lambda_0 g'_x(x_0, y_0) = 0 \qquad (2.10)$$

Các hệ thức (2.5), (2.8) và (2.10) chứng tỏ (x_0, y_0, λ_0) là một nghiệm của hệ phương trình (2.4). Định lý đã được chứng minh.

Định lý vừa chứng minh cho thấy điều kiện cần để hàm số (2.1) với điều kiện (2.2) đạt cực trị quy về điều kiện cần để hàm số Lagrange (2.3) đạt cực trị không có điều kiện. Điều lý thú là phương trình đầu của hệ điều kiện (2.4) chính là điều kiện ràng buộc (2.2) của bài toán cực trị có điều kiện.

Ví dụ: Trở lại bài toán tìm cực trị $w = 2xy + 7x + y$, với điều kiện $3x + y = 4$.

Giải: Hàm số Lagrange trong trường hợp này là: $L = 2xy + 7x + y + \lambda(4 - 3x - y)$

Giải hệ phương trình $\begin{cases} L_\lambda = 4 - 3x - y = 0 \\ L_x = 2y + 7 - 3\lambda = 0 \\ L_y = 2x + 1 - \lambda = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + y = 4 \\ \lambda = 2x + 1 = \dfrac{2y + 7}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ \lambda = 3 \end{cases}$

Vậy hàm số $w = 2xy + 7x + y$, với điều kiện $3x + y = 4$ chỉ có thể đạt cực trị tại điểm $(x = 1, y = 1)$. Để có được kết luận cuối cùng về cực trị ta phải dùng điều kiện đủ để kiểm tra.

c. Điều kiện đủ

Gọi (x_0, y_0, λ_0) là một điểm dừng của hàm số Lagrange, tức là một nghiệm của hệ phương trình (2.4). Giả sử rằng các hàm số $f(x, y)$ và $g(x, y)$ có các đạo hàm riêng cấp hai liên tục tại điểm (x_0, y_0). Xét ma trận

$$\overline{H} = \begin{pmatrix} 0 & g_1 & g_2 \\ g_1 & L_{11} & L_{12} \\ g_2 & L_{21} & L_{22} \end{pmatrix} \text{ với } g_1 = \frac{\partial g}{\partial x}, g_2 = \frac{\partial g}{\partial y}; L_{11} = \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}, L_{12} = \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} = L_{21}, L_{22} = \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}$$

Được tính khi $x = x_0, y = y_0, \lambda = \lambda_0$.

Định lý: Nếu định thức $|\overline{H}| > 0 \quad (< 0)$ thì hàm số $w = f(x, y)$ với điều kiện $g(x, y) = b$, đạt giá trị cực đại (giá trị cực tiểu) tại điểm $M_0(x_0, y_0)$.

Ví dụ 1: Ta lại tiếp tục xét bài toán tìm cực trị $w = 2xy + 7x + y$, với điều kiện $3x + y = 4$.

Giải: Như đã nêu ở trên, hàm số ***Lagrange*** $L = 2xy + 7x + y + \lambda(4 - 3x - y)$

Có một điểm dừng duy nhất: $(x = 1, y = 1, \lambda = 3)$

Tại điểm này ta có: $g_1 = \dfrac{\partial g}{\partial x} = 3;\ g_2 = \dfrac{\partial g}{\partial y} = 1\ g = 3x + y;$

$$L_{11} = \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 0,\ L_{12} = \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} = L_{21} = 2,\ L_{22} = \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 0;\ |\overline{H}| = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 12 > 0$$

Vậy hàm số đã cho đạt cực đại khi $x = 1, y = 1$.

Ví dụ 2:

Tìm các điểm cực trị của hàm số $u = 6x + 8y + 7$ với điều kiện $x^2 + 2y^2 = 17$

Giải: Hàm số ***Lagrange*** trong ví dụ này là $L = 6x + 8y + 7 + \lambda(17 - x^2 - 2y^2)$

Hệ phương trình điều kiện cần là hệ: $\begin{cases} L'_\lambda = 17 - x^2 - 2y^2 = 0 \\ L'_x = 6 - 2\lambda x = 0 \\ L'_y = 8 - 4\lambda y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2y^2 = 17 \\ \lambda = \dfrac{3}{x} = \dfrac{2}{y} \end{cases}$

Từ phương trình thứ hai của hệ suy ra $y = \dfrac{2x}{3}$. Thay vào phương trình thứ nhất của hệ ta được

$$x^2 + 2\frac{4x^2}{9} = 17 \Rightarrow 17x^2 = 9.17 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3.$$

Với $x = 3$ ta có tương ứng: $y = 2, \lambda = 1$.

Với $x=-3$ ta có tương ứng: $y=-2, \lambda=-1$.

Hàm số Lagrange có 2 điểm dừng: $(x=3, y=2, \lambda=1)$ và $(x=-3, y=-2, \lambda=-1)$

Để xét điều kiện đủ đối với các điểm dừng này ta phải tính các đạo hàm riêng cấp hai của hàm số Lagrange và các đạo hàm riêng của hàm số $g=x^2+2y^2$ ở vế trái của phương trình ràng buộc: $L_{11}=L'_{xx}=-2\lambda, L_{12}=L'_{xy}=0, L_{21}=L''_{yx}=0, L_{22}=L'_{yy}=-4\lambda$;

$g_1=g_x=2x, g_2=g_y=4y.$

Ta có: $|\overline{H}|=\begin{vmatrix}0 & 2x & 4y\\ 2x & -2\lambda & 0\\ 4y & 0 & -4\lambda\end{vmatrix}=16\lambda x^2+32\lambda y^2=16\lambda\left(x^2+2y^2\right)$

Để xét điều kiện đủ ta không nhất thiết phải tính trị số của định thức $|\overline{H}|$, mà chỉ cần xác định dấu của nó. Ta có $|\overline{H}|>0$ tại điểm $(x=3, y=2, \lambda=1)$ và $|\overline{H}|<0$ tại điểm $(x=-3, y=-2, \lambda=-1)$. Theo định lý về điều kiện đủ ta đi đến kết luận:

Hàm số có hai điểm cực trị: Điểm cực đại: $(x=3, y=2)$; Điểm cực tiểu: $(x=-3, y=-2)$

II. CỰC TRỊ CÓ ĐIỀU KIỆN VỚI n BIẾN CHỌN VÀ MỘT PHƯƠNG TRÌNH RÀNG BUỘC

Xét bài toán:

Tìm các điểm cực trị của hàm số $\quad w=f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$. $\quad$ (2.11)

Với điều kiện $\quad g\left(x_1, x_2, ... x_n\right)=b \quad$ (2.12)

Hàm số (2.11) được gọi là *hàm mục tiêu;* $x_1, x_2, ..., x_n$ được gọi là các *biến chọn*; phương trình (2.12) được gọi là *phương trình ràng buộc*. Các nội dung đã trình bày về bài toán cực trị có điều kiện trong trường hợp hai biến chọn được phát triển tương tự cho trường hợp n biến chọn như sau:

a. Hàm số Lagrange

Hàm số Lagrange là hàm số $n+1$ biến số:

$$L(x_1, x_2, ..., x_n, \lambda)=f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)+\lambda\left[b-g\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)\right]$$

Biến phụ λ được gọi là *nhân tử Lagrange.*

b. Điều kiện cần

Với giả thiết rằng các hàm số *f* và *g* có các đạo hàm riêng liên tục trong một lân cận của điểm $\overline{X}\left(\overline{x_1}, \overline{x_2}, ...\overline{x_n}\right)$ và tại điểm $\overline{X}$ ít nhất một trong các đạo hàm riêng của *g* khác 0, ta có định lý sau đây:

Định lý:

Nếu hàm số (2.11), với điều kiện (2.12), đạt cực trị tại điểm $\left(\overline{x_1}, \overline{x_2}, ...\overline{x_n}\right)$ thì tồn tại một giá trị $\lambda=\overline{\lambda}$ của nhân tử Lagrange sao cho $\left(\overline{x_1}, \overline{x_2}, ...\overline{x_n}, \overline{\lambda}\right)$ là nghiệm của hệ phương trình: .

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = b - g\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_i} = \dfrac{\partial f}{\partial x_i} - \lambda \dfrac{\partial g}{\partial x_i} = 0 \\ i = 1, 2, ..., n \end{cases} \quad (2.13)$$

Nói cách khác, điều kiện cần để hàm số (2.11), với điều kiện (2.12) đạt cực trị tại điểm $\overline{X}\left(\overline{x_1}, \overline{x_2}, ...\overline{x_n}\right)$ là tồn tại số $\overline{\lambda}$ sao cho $\left(\overline{x_1}, \overline{x_2}, ..., \overline{x_n}, \overline{\lambda}\right)$ là một điểm dừng của hàm số *Lagrange*. Chú ý rằng phương trình đầu của hệ phương trình (2.13) chính là điều kiện ràng buộc (2.12) của bài toán đang xét.

c. ***Điều kiện đủ***

Điều kiện đủ được áp dụng với những điểm đã thỏa mãn điều kiện cần.

Gọi $\left(\overline{x_1}, \overline{x_2}, ...\overline{x_n}, \overline{\lambda}\right)$ là một điểm dùng của hàm số ***Lagrange***. Giả sử, ngoài các điều kiện đã nói ở trên, các hàm số *f* và *g* có các đạo hàm riêng cấp hai liên tục tại điểm $\left(\overline{x_1}, \overline{x_2}, ...\overline{x_n}\right)$.

Lập ma trận $\overline{H} = \begin{pmatrix} 0 & g_1 & g_2 \dots g_n \\ g_1 & L_{11} & L_{12} \dots L_{1n} \\ g_2 & L_{21} & L_{22} \dots L_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \dots \\ g_n & L_{n1} & L_{n2} \dots L_{nn} \end{pmatrix}$, với $g_k = \dfrac{\partial g}{\partial x_k}(k = 1, 2, ..., n), L_{ij} = \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j}(i, j = 1, 2, ..., n)$

được tính tại điểm $\left(\overline{x_1}, \overline{x_2}, ...\overline{x_n}, \overline{\lambda}\right)$.

Định lý về điều kiện đủ dưới đây căn cứ vào các *định thức con chính* của ma trận $\overline{H}$:

$\overline{H_k} = \begin{pmatrix} 0 & g_1 & g_2 \dots g_k \\ g_1 & L_{11} & L_{12} \dots L_{1k} \\ g_2 & L_{21} & L_{22} \dots L_{2k} \\ \dots & \dots & \dots \dots \\ g_k & L_{k1} & L_{k2} \dots L_{kk} \end{pmatrix}$ $(k = 2, 3, ..., n)$. Chú ý rằng $\overline{H}$ là một ma trận vuông cấp $n+1$ và

$\overline{H_k}$ là định thức con chính cấp $k+1$ có phần tử ở góc dưới bên phải là L_{kk}. Để xét điều kiện đủ ta phải tính các định thức con chính từ cấp 3 đến cấp $n+1$ (định thức con chính cấp $n+1$ chính là định thức của ma trận $\overline{H}$)

Định lý:

1. Nếu $(-1)^k \overline{H_k} > 0$ với mọi $k = 2, 3, ...n$ tức là: $\overline{H_2} > 0, \overline{H_3} < 0, ..., (-1)^n \overline{H_n} > 0$

Thì hàm số (2.11), với điều kiện (2.12), đạt *giá trị cực đại* tại điểm $\overline{X}\left(\overline{x_1}, \overline{x_2}, ...\overline{x_n}\right)$.

2. Nếu $\overline{H_k} < 0$ với mọi $k = 2,3,...n$ thì hàm số (2.11) với điều kiện (2.12) đạt *giá trị cực tiểu* tại điểm $\overline{X}\left(\overline{x_1}, \overline{x_2}, ...\overline{x_n}\right)$.

Ví dụ: Tìm các điểm cực trị của hàm số $w = x + y + z$ với điều kiện $xyz = 8$

Giải: Hàm số ***Lagrange*** trong trường hợp này có dạng: $L = x + y + z + \lambda(8 - xyz)$

Điều kiện cần là: $\begin{cases} xyz = 8 \\ \dfrac{\partial L}{\partial x} = 1 - \lambda yz = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 1 - \lambda xz = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial z} = 1 - \lambda xy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{x} = 2 \\ \overline{y} = 2 \\ \overline{z} = 2 \\ \overline{\lambda} = \dfrac{1}{4} \end{cases}$

Để xét điều kiện đủ ta tính các đạo hàm riêng cấp 1 của hàm số $g(x, y, z) = xyz$ và các đạo hàm riêng cấp 2 của hàm số ***Lagrange*** tại điểm $(\overline{x} = \overline{y} = \overline{z} = 2, \overline{\lambda} = \dfrac{1}{4})$.

Tại điểm này, ta có

$$\begin{cases} g_1 = yz = 4, g_2 = xz = 4, g_3 = xy = 4 \\ L_{11} = L_{22} = L_{33} = 0, L_{12} = L_{21} = -\lambda z = -\dfrac{1}{2} \\ L_{13} = L_{31} = -\lambda y = -\dfrac{1}{2}, L_{23} = L_{32} = -\lambda x = -\dfrac{1}{2} \end{cases}; \overline{H} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 0 & -\dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} \\ 4 & -\dfrac{1}{2} & 0 & -\dfrac{1}{2} \\ 4 & -\dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}; \begin{cases} \overline{H_2} = -16 < 0 \\ \overline{H_3} = -12 < 0 \\ |\overline{H}| = -12 < 0 \end{cases}$$

Vậy theo định lý về điều kiện đủ, hàm số đạt giá trị cực tiểu tại điểm $(x = y = z = 2)$.

III. Ý NGHĨA CỦA NHÂN TỬ LARGRANGE

Trong mô hình bài toán cực trị có điều kiện (2.11) - (2.12) ta phân biệt vai trò của các biến số $x_1, x_2, ..., x_n$, w với tham số *b*. Các biến chọn $x_1, x_2, ..., x_n$ và biến mục tiêu w được gọi là các *biến nội sinh*, do bản thân mô hình quyết định thông qua phương pháp nhân tử ***Lagrange***. Khác với biến nội sinh, tham số b là một hằng số cho trước, không do mô hình quyết định. Trong nhiều mô hình kinh tế tham số *b* là giá trị của một biến số nào đó và giá trị đó được xác định bên ngoài mô hình. Người ta gọi *b* đặc trưng cho sự thay đổi của ngoại cảnh, làm nới rộng hoặc thu hẹp ràng buộc, dẫn đến sự thay đổi lời giải tối ưu của bài toán. Nói cách khác phương án chọn tối ưu $\overline{X}\left(\overline{x_1}, \overline{x_2}, ...\overline{x_n}\right)$ của bài toán và giá trị tối ưu $\overline{w}$ của hàm mục tiêu phụ thuộc vào *b*:

$\overline{x_1} = \overline{x_1}(b), \overline{x_2} = \overline{x_2}(b), ..., \overline{x_n} = \overline{x_n}(b)$;

Theo phương pháp nhân tử ***Lagrange***, phương án chọn tối ưu nói trên được xác định cùng với một giá trị của nhân tử ***Lagrange*** $\overline{\lambda} = \overline{\lambda}(b)$ và giá trị tối ưu của *w* là hàm số của *b*

$\overline{w} = f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) = \overline{w}(b)$

Theo quy tắc tính đạo hàm hợp ta có: $\frac{d\overline{w}}{db}=\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{d\overline{x_1}}{db}+\frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{d\overline{x_2}}{db}+...+\frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{d\overline{x_n}}{db}$.

Do $\left(\overline{\lambda},\overline{x_1},\overline{x_2},...\overline{x_n}\right)$ là điểm dừng của hàm số *Lagrange* nên từ (2.19), ta có:

$\frac{\partial f}{\partial x_i}=\overline{\lambda}\frac{\partial g}{\partial x_i}\ \forall i=1,2,...,n$. Vậy $\frac{d\overline{w}}{db}=\overline{\lambda}\frac{\partial g}{\partial x_1}\frac{d\overline{x_1}}{db}+\overline{\lambda}\frac{\partial g}{\partial x_2}\frac{d\overline{x_2}}{db}+...+\overline{\lambda}\frac{\partial g}{\partial x_n}\frac{d\overline{x_n}}{db}$

$$\Rightarrow\frac{d\overline{w}}{db}=\overline{\lambda}\left(\frac{\partial g}{\partial x_1}\frac{d\overline{x_1}}{db}+\frac{\partial g}{\partial x_2}\frac{d\overline{x_2}}{db}+...+\frac{\partial g}{\partial x_n}\frac{d\overline{x_n}}{db}\right) \qquad (2.14)$$

Mặt khác, $\left(\overline{x_1},\overline{x_2},...\overline{x_n}\right)$ thỏa mãn phương trình ràng buộc (2.12), do đó $g\left(\overline{x_1},\overline{x_2},...\overline{x_n}\right)=b$.

Lấy đạo hàm hai vế của đồng nhất thức này theo b ta được:

$$\frac{\partial g}{\partial x_1}\frac{d\overline{x_1}}{db}+\frac{\partial g}{\partial x_2}\frac{d\overline{x_2}}{db}+...+\frac{\partial g}{\partial x_n}\frac{d\overline{x_n}}{db}=1 \qquad (2.15)$$

Từ các hệ thức (2.14) và0 (2.15) suy ra: $\overline{\lambda}=\frac{d\overline{w}}{db}$ (2.16)

Hệ thức (2.16) cho thấy *nhân tử Lagrange* $\overline{\lambda}$ *chính là giá trị* $\overline{w}$ *cận biên của b*. Điều này có nghĩa là khi b tăng thêm 1 đơn vị thì giá trị tối ưu $\overline{w}$ của hàm mục tiêu thay đổi một lượng xấp xỉ bằng $\overline{\lambda}$.

IV. CỰC TRỊ CÓ ĐIỀU KIỆN VỚI n BIẾN CHỌN VÀ m PHƯƠNG TRÌNH RÀNG BUỘC

Bài toán tổng quát: Tìm các điểm cực trị của hàm số $w=f\left(x_1,x_2,...,x_n\right)$ (2.17)

$$\text{Với điều kiện}\quad\begin{cases}g_1\left(x_1,x_2,...,x_n\right)=b_1\\ g_2\left(x_1,x_2,...,x_n\right)=b_2\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ g_m\left(x_1,x_2,...,x_n\right)=b_m\end{cases} \qquad (2.18)$$

Trong mô hình này hàm số (2.17) là *hàm mục tiêu;* các biến $x_1,x_2,...,x_n$ là *các biến chọn*; hệ phương trình (2.18) là *hệ phương trình ràng buộc*. Ta luôn luôn giả thiết rằng số phương trình ràng buộc nhỏ hơn số biến chọn $(m<n)$

Phương pháp nhân tử ***Lagrange*** để giải bài toán này được thực hiện với các giả thiết sau đây:

- Hàm mục tiêu *f* và các hàm số $g_k\ (k=1,2,...,m)$ ở vế trái của các phương trình ràng buộc (2.18) có các đạo hàm riêng cấp hai liên tục:

- Ma trận Jacobi $\begin{pmatrix}\frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n}\\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_2}{\partial x_n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \frac{\partial g_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n}\end{pmatrix}$

Có *hạng* bằng m tại tất cả các điểm được xét.

a. Hàm số Lagrange

Trong trường hợp này, hàm số ***Lagrange*** là hàm số n + m biến số $x_1, x_2, ..., x_n ; \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$:

$L = f + \lambda_1(b_1 - g_1) + \lambda_2(b_2 - g_2) + ... + \lambda_m(b_1 - g_m)$.

Trong đó các biến phụ $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ được gọi là các nhân tử ***Lagrange***.

b. Điều kiện cần

Định lý:

Nếu hàm số (2.17), với điều kiện (2.18), đạt cực trị tại điểm $\overline{X}(\overline{x_1}, \overline{x_2}, ...\overline{x_n})$ thì tồn tại các số $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ sao cho bộ $m+n$ số $(\overline{x_1}, \overline{x_2}, ...\overline{x_n}, \overline{\lambda_1}, \overline{\lambda_2}, ...\overline{\lambda_m})$ là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_k} = b_k - g_k(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, \ (k = 1, 2, ..., m) \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_i} = \dfrac{\partial f}{\partial x_i} - \lambda_1 \dfrac{\partial g_1}{\partial x_i} - \lambda_2 \dfrac{\partial g_2}{\partial x_i} - ... - \lambda_m \dfrac{\partial g_m}{\partial x_i} = 0, \quad (i = 1, 2, ..., n) \end{cases} \quad (2.19)$$

Nói cách khác, điều kiện cần để hàm số (2.17), với điều kiện (2.18), đạt cực trị tại điểm $\overline{X}(\overline{x_1}, \overline{x_2}, ...\overline{x_n})$ là: tồn tại các số $\overline{\lambda_1}, \overline{\lambda_2}, ..., \overline{\lambda_m}$ sao cho bộ $m+n$ số $(\overline{x_1}, \overline{x_2}, ...\overline{x_n}, \overline{\lambda_1}, \overline{\lambda_2}, ...\overline{\lambda_m})$ là một điểm dừng của hàm số ***Lagrange***. Chú ý rằng m phương trình đầu của hệ (2.19) trùng với các điều kiện ràng buộc (2.18).

Điểm $\overline{X}(\overline{x_1}, \overline{x_2}, ...\overline{x_n})$ thỏa mãn điều kiện cần chưa chắc đã phải là điểm cực trị. Ta còn phải tiếp tục xét điều kiện đủ.

c. Điều kiện đủ

Điều kiện đủ được sử dụng để xét các điểm đã thỏa mãn điều kiện cần. Tại mỗi điểm dừng $(\overline{x_1}, \overline{x_2}, ...\overline{x_n}, \overline{\lambda_1}, \overline{\lambda_2}, ...\overline{\lambda_m})$ của hàm số ***Lagrange*** ta lập ma trận

$$\overline{H} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ... & 0 & g_{11} & g_{12} & ... & g_{1n} \\ 0 & 0 & ... & 0 & g_{21} & g_{22} & ... & g_{2n} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 & g_{m_1} & g_{m_2} & ... & g_{mn} \\ g_{11} & g_{21} & ... & g_{m_1} & L_{11} & L_{12} & ... & L_{1n} \\ g_{12} & g_{22} & ... & g_{m2} & L_{21} & L_{22} & ... & L_{2n} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ g_{1n} & g_{2n} & ... & g_{mn} & L_{n1} & L_{n2} & ... & L_{mn} \end{pmatrix}, \text{ trong đó}$$

$$g_{ki} = \frac{\partial g_k}{\partial x_i} = -\frac{\partial^2 L}{\partial \lambda_k \partial x_i}, L_{ij} = \frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j}$$

$$(i, j = 1, 2, ..., n; k = 1, 2, ..., m)$$

Ma trận $\overline{H}$ có $m+n$ định thức con chính, nhưng khi xét điều kiện đủ ta chỉ xét $n-m$ định thức con chính từ cấp $2m+1$ đến cấp $m+n$. Để cho tiện ta gọi $\overline{H_p}$ $(p=m+1,...,n)$ là định thức con chính cấp $m+p$ có phần tử ở góc dưới cùng bên phải là L_{pp} ($\overline{H_n}$ chính là định thức của ma trận $\overline{H}$).

Định lý:

- Nếu tại điểm $\left(\overline{x_1},\overline{x_2},...\overline{x_n},\overline{\lambda_1},\overline{\lambda_2},...\overline{\lambda_m}\right)$ tất cả các định thức con chính $\overline{H_p}$ cùng dấu với $(-1)^p$, tức là $(-1)^p\,\overline{H_p}>0$ $(\forall p=m+1,...,n)$ thì hàm số (2.17), với điều kiện (2.18) đạt giá trị cực đại tại điểm $\left(\overline{x_1},\overline{x_2},...\overline{x_n}\right)$;
- Nếu tại điểm $\left(\overline{x_1},\overline{x_2},...\overline{x_n},\overline{\lambda_1},\overline{\lambda_2},...\overline{\lambda_m}\right)$ tất cả các định thức con chính $\overline{H_p}$ $(p=m+1,...,n)$ luôn luôn giữ dấu không đổi như $(-1)^m$ thì hàm số (2.17), với điều kiện (2.18) đạt cực tiểu tại điểm $\left(\overline{x_1},\overline{x_2},...\overline{x_n}\right)$.

Ví dụ: Tìm các điểm cực trị của hàm số $w=xyz$ với điều kiện $\begin{cases}x+y+z=5\\ xy+yz+zx=8\end{cases}$

Giải: Hàm số ***Lagrange*** trong trường hợp này là:

$$L=xyz+\lambda(5-x-y-z)+\mu(8-xy-yz-zx)$$

Điều kiện cần: $\begin{cases}x+y+z=5\\ xy+yz+zx=8\\ L'_x=yz-\lambda-\mu(y+z)=0\\ L'_y=xz-\lambda-\mu(x+z)=0\\ L'_z=xy-\lambda-\mu(y+x)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y+z=5\\ xy+yz+zx=8\\ yz=\lambda+\mu(y+z)\\ xz=\lambda+\mu(x+z)\\ xy=\lambda+\mu(y+x)\end{cases}$

Trừ các vế của phương trình thứ ba và phương trình thứ tư, ta được

$z(y-x)=\mu(y-x)\Rightarrow y=x$ hoặc $\mu=z$

- Với $y=x$, theo hai điều kiện phía trên ta có:

$2x+z=5$ và $x^2+2xz=8\Rightarrow x^2+2x(5-2x)=8\ \Rightarrow 3x^2-10x+8=0\Rightarrow x=2, x=\dfrac{4}{3}$

Từ đây suy ra hai nghiệm của hệ phương trình điều kiện cần:

$M_1(x=2,y=2,z=1,\lambda=-4,\mu=2)$; $M_2\left(x=\dfrac{4}{3},y=\dfrac{4}{3},z=\dfrac{7}{3},\lambda=-\dfrac{16}{9},\mu=\dfrac{4}{3}\right)$.

- Với $\mu=z$ thì từ ba phương trình cuối ta có: $\lambda=-z^2=xy=z(x+y)\Rightarrow xy=z(x+y)-z^2$

Kết hợp với phương trình thứ hai, ta được:

$$z(x+y)-z^2=z(x+y)+8\Rightarrow 2z(x+y)-z^2-8=0$$

Thay $x+y=5-z$ từ phương trình thứ hai, ta được: $2z(5-z)-z^2-8=0 \Rightarrow 3z^2-10z+8=0$

Từ đây ta tìm được $z=2, z=\frac{4}{3}$.

Ứng với z = 2 ta tìm được hai nghiệm của hệ phương trình điều kiện cần:

$$M_5\left(x=\frac{4}{3}, y=\frac{7}{3}, z=\frac{4}{3}, \lambda=-\frac{16}{9}, \mu=\frac{4}{3}\right), M_6\left(x=\frac{7}{3}, y=\frac{4}{3}, z=\frac{4}{3}, \lambda=-\frac{16}{9}, \mu=\frac{4}{3}\right).$$

Tóm lại, hàm số ***Lagrange*** có 6 điểm dừng. Vì các biến chọn x, y, z có vai trò như nhau nên ta chỉ cần xét điều kiện đủ tại hai điểm M_1 và M_2.

Ta có: $g_{11}=g_{12}=g_{13}=1, g_{21}=2x, g_{22}=2y, g_{23}=2z;\ L_{11}=L_{22}=L_{33}=0.$

$L_{12}=L_{21}=z-\mu, L_{13}=L_{31}=y-\mu, L_{23}=L_{32}=x-\mu$;

$$\overline{H}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2x & 2y & 2z \\ 1 & 2x & 0 & z-\mu & y-\mu \\ 1 & 2y & z-\mu & 0 & x-\mu \\ 1 & 2z & y-\mu & x-\mu & 0 \end{pmatrix}$$

Trong bài toán này ta chỉ cần xét một định thức con chính của ma trận $\overline{H}\,(n-m=1)$ là định thức $\overline{H}_3=|\overline{H}|$ (định thức con chính có phần tử ở góc dưới cùng bên phải là L_{33})

Tại điểm M_1 có: $|\overline{H}|=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=8>0$; Tại điểm

M_2 có: $|\overline{H}|=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{8}{3} & \frac{8}{3} & \frac{14}{3} \\ 1 & \frac{8}{3} & 0 & -1 & 0 \\ 1 & \frac{8}{3} & -1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{14}{3} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=-8<0$

Theo định lý về điều kiện đủ, ta đi đến kết luận:

Điểm cực đại là các điểm:

$$(x=2, y=2, z=1), (x=2, y=1, z=2), (x=1, y=2, z=2);$$

Điểm cực tiểu là các điểm:

$$\left(x=\frac{4}{3}, y=\frac{4}{3}, z=\frac{7}{3}\right), \left(x=\frac{4}{3}, y=\frac{7}{3}, z=\frac{4}{3}\right), \left(x=\frac{7}{3}, y=\frac{4}{3}, z=\frac{4}{3}\right)$$

d. *Ý nghĩa của nhân tử Lagrange*

Điểm tối ưu $\left(\overline{x_1}, \overline{x_2}, ... \overline{x_n}\right)$ của bài toán cực trị có điều kiện trên đây được xác định cùng với các nhân tử ***Lagrange*** $\left(\overline{\lambda_1}, \overline{\lambda_2}, ..., \overline{\lambda_m}\right)$. Nếu $b_1, b_2, ..., b_m$ ở vế phải của các phương trình ràng buộc (2.24) là các biến ngoại sinh thì điểm tối ưu $\left(\overline{x_1}, \overline{x_2}, ..., \overline{x_n}\right)$ phụ thuộc vào các biến ngoại sinh đó, do vậy giá trị tối ưu của hàm mục tiêu (2.23) là hàm số của $b_1, b_2, ..., b_m$:

$\overline{w} = f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) = \overline{w}\left(b_1, b_2, ... b_m\right)$

Tương tự như trường hợp cực trị có điều kiện với một phương trình ràng buộc, có thể chứng minh được rằng $\dfrac{\partial \overline{w}}{\partial b_k} = \overline{\lambda_k} \; (\forall k = 1, 2, ..., m)$

Điều này có ý nghĩa là *nhân tử Lagrange $\overline{\lambda}$ chính là giá trị $\overline{w}$ - cận biên của bán kính: khi tăng bán kính thêm 1 đơn vị thì giá trị tối ưu $\overline{w}$ của hàm mục tiêu thay đổi một lượng xấp xỉ bằng $\overline{\lambda}$*

V. CỰC TRỊ CÓ ĐIỀU KIỆN VỚI RÀNG BUỘC LÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH

Trong các bài toán liên quan đến đời sống nhiều khi chúng ta gặp các tình huống lựa chọn với ràng buộc là các bất phương trình. Sau đây chúng tôi nêu một cách vắn tắt phương pháp giải bài toán loại này trong trường hợp hai biến chọn và một bất phương trình ràng buộc.

Bài toán: Chọn (x, y) để hàm số $w = f(x, y)$ đạt cực đại (cực tiểu) với điều kiện $g(x, y) \geq b \left[\text{hoặc } g(x, y) \leq b\right]$.

Phương pháp chung: Để giải bài toán này, trước hết ta thay điều kiện bằng phương trình $g(x, y) = b$. Bằng phương pháp nhân tử ***Lagrange*** ta tìm được $x = \overline{x}, y = \overline{y}$ và $\lambda = \overline{\lambda}$. Quyết định cuối cùng được thực hiện theo quy tắc sau đây:

1. Đối với bài toán cực đại hóa hàm số $w = f(x, y)$ với điều kiện $g(x, y) \geq b$:

- Nếu $\overline{\lambda} < 0$ thì điều kiện áp đặt thực sự là ràng buộc và phương án chọn tối ưu là $x = \overline{x}, y = \overline{y}$.
- Nếu $\overline{\lambda} \geq 0$ thì điều kiện áp đặt không phải là ràng buộc thực sự. Trong trường hợp này ta bỏ điều kiện và quay sang giải bài toán cực trị không có điều kiện.

2. Đối với bài toán cực đại hóa hàm số $w = f(x, y)$ với điều kiện $g(x, y) \leq b$:

- Nếu $\overline{\lambda} \geq 0$ thì điều kiện áp đặt thực sự là ràng buộc và phương án chọn tối ưu là $x = \overline{x}, y = \overline{y}$.
- Nếu $\overline{\lambda} < 0$ thì điều kiện áp đặt không phải là ràng buộc thực sự. Trong trường hợp này ta bỏ điều kiện và quay sang giải bài toán cực trị không có điều kiện.

3. Đối với bài toán cực tiểu hóa hàm số $w = f(x, y)$ với điều kiện $g(x, y) \geq b$:

- Nếu $\overline{\lambda} \geq 0$ thì điều kiện áp đặt thực sự là ràng buộc và phương án chọn tối ưu là $x = \overline{x}, y = \overline{y}$.

- Nếu $\overline{\lambda} < 0$ thì điều kiện áp đặt không phải là ràng buộc thực sự. Trong trường hợp này ta bỏ điều kiện và quay sang giải bài toán cực trị không có điều kiện.

4. Đối với bài toán cực tiểu hóa hàm số $w = f(x, y)$ với điều kiện $g(x, y) \leq b$:

- Nếu $\overline{\lambda} < 0$ thì điều kiện áp đặt thực sự là ràng buộc và phương án chọn tối ưu là $x = \overline{x}, y = \overline{y}$;

- Nếu $\overline{\lambda} \geq 0$ thì điều kiện áp đặt không phải là ràng buộc thực sự. Trong trường hợp này ta bỏ điều kiện và quay sang giải bài toán cực trị không có điều kiện.

Ví dụ 1: Chọn (x, y) để hàm số $w = 3x^2 - xy + 2y^2 - 4x - 7y + 20$

đạt giá trị cực tiểu, với điều kiện $x + y \geq 15$

Giải: Trước hết ta thay điều kiện bằng phương trình $x + y = 15$.

Lập trình số ***Lagrange***: $L = 3x^2 - xy + 2y^2 - 4x - 7y + 20 + \lambda(15 - x - y)$

Giải điều kiện cần: $\begin{cases} x + y = 15 \\ L_x = 6x - y - 4 - \lambda = 0 \\ L_y = -x + 4y - 7 - \lambda = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 15 \\ \lambda = 6x - y - 4 = -x + 4y - 7 \end{cases}$

Ta tìm được $\overline{x} = 6, \overline{y} = 9, \overline{\lambda} = 23$. Điều kiện đủ trong trường hợp này thỏa mãn (bạn đọc tự kiểm tra). Đối chiếu với quy tắc 3 nêu trên, do $\overline{\lambda} > 0$, điều kiện $x + y \geq 15$ thực sự là ràng buộc và phương án chọn tối ưu là $x = 6, y = 9$. Giá trị tối ưu cực tiểu của hàm mục tiêu w là $w = 149$.

Ví dụ 2: Chọn (x, y) để hàm số $w = 64x - 2x^2 + 4xy - 4y^2 + 32y + 50$

đạt giá trị cực đại, với điều kiện $x + y \leq 79$

Giải: Trước hết ta thay điều kiện bằng phương trình $x + y = 79$. Lập hàm số ***Lagrange***:

$L = w = 64x - 2x^2 + 4xy - 4y^2 + 32y + 50 + \lambda(79 - x - y)$

Giải điều kiện cần: $\begin{cases} x + y = 79 \\ L'_x = 64 - 4x + 4y - \lambda = 0 \\ L'_y = 4x - 8y + 32 - \lambda = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 79 \\ \lambda = 64 - 4x + 4y = 4x - 8y + 32 \end{cases}$

Ta tìm được $\overline{x} = 49, \overline{y} = 30, \overline{\lambda} = -12$. Điều kiện đủ để w đạt cực đại trong trường hợp này thỏa mãn. Theo quy tắc 2 nêu trên, do $\overline{\lambda} < 0$, điều kiện $x + y \leq 79$ không phải là ràng buộc thực. Để chọn (x, y) ta chuyển sang bài toán cực trị không có điều kiện và xác định được rằng w đạt cực đại khi $x = 40, y = 24$.

VI. ỨNG DỤNG PHƯƠNG PHÁP NHÂN TỬ LANGRANGE CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

Bài 1: Cho $x, y \geq 0$ thỏa mãn $x + y = 3$. Tìm Max, Min của $P = 2x^2 + 3y^2 + xy$

Giải

Đặt $f(x, y) = 2x^2 + 3y^2 + xy - \lambda(x + y)$. Điểm cực trị của $f(x, y)$ là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \\ x + y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + y - \lambda = 0 \\ 6y + x - \lambda = 0 \\ x + y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda = \frac{69}{8}, x = \frac{15}{8}, y = \frac{9}{8}$$

Khi đó: $P = \dfrac{207}{16}$. Xét các trường hợp tại biên:

Với x = 0, y = 3 thì P = 27; Với x = 3, y = 0 thì P = 18

Kết luận: $Min\ P = \dfrac{207}{16}$ đạt được khi và chỉ khi $x = \dfrac{15}{8}, y = \dfrac{9}{8}$

$Max\ P$=27 đạt được khi và chỉ khi x = 0, y = 3

Bài 2. [Việt Nam TST 2001] Cho $x, y, z > 0$ thỏa mãn điều kiện $2x + 4y + 7z = 2xyz$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = x + y + z$

Giải

Đặt $S = f(x, y, z) = x + y + z + \lambda(2x + 4y + 7z - 2xyz)$.

Điểm cực trị của $f(x, y, z)$ là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial z} = 0 \\ 2x + 4y + 7z = 2xyz \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + \lambda(2 - 2yz) = 0 \\ 1 + \lambda(4 - 2zx) = 0 \\ 1 + \lambda(7 - 2xy) = 0 \\ 2x + 4y + 7z = 2xyz \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2yz = 2 + \dfrac{1}{\lambda}; 2zx = 4 + \dfrac{1}{\lambda}; 2xy = 7 + \dfrac{1}{\lambda} \\ \dfrac{2}{2yz} + \dfrac{4}{2zx} + \dfrac{7}{2xy} = \dfrac{2\lambda}{2\lambda + 1} + \dfrac{4\lambda}{4\lambda + 1} + \dfrac{7\lambda}{7\lambda + 1} = 1 \end{cases}$$

Biến đổi phương trình cuối ta nhận được $112\lambda^3 + 50\lambda^2 - 1 = 0$.

Phương trình này có các nghiệm $\lambda = \dfrac{1}{8}, \lambda = \dfrac{-4 \pm \sqrt{2}}{14}$.

Với $\lambda = \dfrac{-4 \pm \sqrt{2}}{14}$ thì $2yz = 2 + \dfrac{1}{\lambda} < 0$ nên không thỏa mãn.

Với $\lambda = \dfrac{1}{8}$ thì $2yz = 10; 2zx = 12; 2xy = 15$.

Từ đó ta có điểm dừng $(x, y, z) = \left(3, \dfrac{5}{2}, 2\right)$ và suy ra MinS= $\dfrac{15}{2}$.

Bài 3. Cho tham số $x, y > 1$. Tìm Min của: $P = \dfrac{(a^2+1)^x(b^2+1)^y}{(a+b)^2}$ theo $a, b > 0$

Giải

Đặt $f(a,b) = \dfrac{(a^2+1)^x(b^2+1)^y}{(a+b)^2}$. Điểm cực trị của $f(a,b)$ là nghiệm của hệ:

$$\frac{\partial f}{\partial a} = \frac{\partial f}{\partial b} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases}(x-1)a^2 + xab - 1 = 0\\(y-1)b^2 + yab - 1 = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-1)a^2 + xab - 1 = 0\\(x-1)a^2 + (x-y)ab - (y-1)b^2 = 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}a^2(x-1) + \dfrac{x(x-1)}{y-1}a^2 - 1 = 0\\ b = \dfrac{x-1}{y-1}a\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a = \sqrt{\dfrac{y-1}{(x-1)(x+y-1)}}\\ b = \sqrt{\dfrac{x-1}{(y-1)(x+y-1)}}\end{cases}.$$

Từ đó suy ra $Min\,P = \dfrac{x^x}{(x-1)^{x-1}} \cdot \dfrac{y^y}{(y-1)^{y-1}} \cdot \dfrac{(x+y-2)^{x+y-2}}{(x+y-1)^{x+y-1}}$ tại

$a = \sqrt{\dfrac{y-1}{(x-1)(x+y-1)}}, b = \sqrt{\dfrac{x-1}{(y-1)(x+y-1)}}$

Bài 4. Cho $x, y, z \geq 0$ thỏa mãn $x + y + z = \dfrac{1}{9}$. Tìm Min và Max của: $P = x^2 + 2y^2 + 3z^3$

Giải

Đặt $f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^3 - \lambda(x+y+z)$. Điểm cực trị của $f(x,y,z)$ là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial z} = 0\\ x + y + z = \dfrac{1}{9}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x - \lambda = 0\\ 4y - \lambda = 0\\ 9z^2 - \lambda = 0\\ x + y + z = \dfrac{1}{9}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = \dfrac{\lambda}{2}, y = \dfrac{\lambda}{4}, z = \dfrac{\sqrt{\lambda}}{3}\\ \dfrac{\lambda}{2} + \dfrac{\lambda}{4} + \dfrac{\sqrt{\lambda}}{3} = \dfrac{1}{9}\end{cases} \Leftrightarrow \lambda = \frac{4}{81}, x = \frac{2}{81}, y = \frac{1}{81}, z = \frac{2}{27}$$

Khi đó: $P = \dfrac{14}{6561}$. Xét các trường hợp tại biên:

Trường hợp 1: $z = 0$. Khi đó: $x + y = \dfrac{1}{9}$ và $f(x,y,0) = x^2 + 2y^2 - \lambda(x+y) = g(x,y)$.

Điểm cực trị của $g(x,y)$ là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial g}{\partial x}=\dfrac{\partial g}{\partial y}=0\\ x+y=\dfrac{1}{9}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x-\lambda=0\\ 4y-\lambda=0\\ x+y=\dfrac{1}{9}\end{cases}\Leftrightarrow\lambda=\frac{4}{27},x=\frac{2}{27},y=\frac{1}{27}.\text{ Khi đó: }P=\frac{2}{243}$$

Trường hợp 2: y = 0. Khi đó: $x+z=\frac{1}{9}$ và $f(x,0,z)=x^2+3z^3-\lambda(x+z)=h(x,z)$.

Điểm cực trị của $h(x,z)$ là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial h}{\partial x}=\dfrac{\partial h}{\partial z}=0\\ x+z=\dfrac{1}{9}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x-\lambda=0\\ 9z^2-\lambda=0\\ x+z=\dfrac{1}{9}\end{cases}\Leftrightarrow\lambda=\frac{4-2\sqrt{3}}{9},x=\frac{2-\sqrt{3}}{9},z=\frac{\sqrt{3}-1}{9}.\text{ Khi đó: }P=\frac{11-6\sqrt{3}}{243}$$

Trường hợp 3: x = 0. Khi đó: $y+z=\frac{1}{9}$ và $f(0,y,z)=2y^2+3z^3-\lambda(y+z)=q(y,z)$.

Điểm cực trị của $q(y,z)$ là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial q}{\partial y}=\dfrac{\partial q}{\partial z}=0\\ y+z=\dfrac{1}{9}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4y-\lambda=0\\ 9z^2-\lambda=0\\ y+z=\dfrac{1}{9}\end{cases}\Leftrightarrow\lambda=\frac{12-8\sqrt{2}}{9},y=\frac{3-2\sqrt{2}}{9},z=\frac{2\sqrt{2}-2}{9}.\text{ Khi đó }P=\frac{46-32\sqrt{2}}{243}$$

Trường hợp 4: Hai trong ba số x,y,z bằng 0. Khi đó: $P=\left\{\frac{1}{81},\frac{2}{81},\frac{1}{243}\right\}$. So sánh các giá trị ta có:

Kết luận: $Min\,P=\frac{14}{6561}$ đạt được khi và chỉ khi $x=\frac{2}{81},y=\frac{1}{81},z=\frac{2}{27}$

$Max\,P=\frac{2}{81}$ đạt được khi và chỉ khi $x=0,y=\frac{1}{9},z=0$

Bài 5. Cho $a,b,c\ge 0$ thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$a^4+b^4+c^4+ab+bc+ca\ge 6$$

Chứng minh

Đặt $f(a,b,c)=a^4+b^4+c^4+ab+bc+ca-6-\lambda(a+b+c-3)$

Điểm cực trị của $f(a,b,c)$ là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial a}=\dfrac{\partial f}{\partial b}=\dfrac{\partial f}{\partial c}=0\\ a+b+c=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4a^3+b+c-\lambda a=0\\ 4b^3+a+c-\lambda b=0\\ 4c^3+a+b-\lambda c=0\\ a+b+c=3\end{cases}\Leftrightarrow a=b=c=1.\text{ Khi đó: }f(a,b,c)=0.$$

Xét trường hợp tại biên, chẳng hạn c = 0, khi đó $a+b=3$.

Ta có: $a^4+b^4+ab \ge a^4+b^4 \ge 2\left(\frac{a+b}{2}\right)^4 = 2\left(\frac{3}{2}\right)^4 > 6$

Kết luận: $f(a,b,c)=a^4+b^4+c^4+ab+bc+ca-6-\lambda(a+b+c-3)\ge 0$

hay $a^4+b^4+c^4+ab+bc+ca\ge 6$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài 6. Cho $a,b,c\ge 0$ thỏa mãn $ab+bc+ca=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=ma^2+nb^2+pc^2,\ m,n,p>0$$

Giải

Đặt $f(a,b,c)=ma^2+nb^2+pc^2-\lambda(ab+bc+ca)$.

Điểm cực trị của $f(a,b,c)$ là nghiệm của hệ:

$$\frac{\partial f}{\partial a}=\frac{\partial f}{\partial b}=\frac{\partial f}{\partial c}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2ma-\lambda(b+c)=0 \\ 2nb-\lambda(c+a)=0 \\ 9pc-\lambda(a+b)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=\dfrac{\lambda+2m}{\lambda+2p}a \\ b=\dfrac{\lambda+2m}{\lambda+2n}a \\ \lambda^3+2(m+n+p)\lambda^2-8mnp=0 \end{cases}$$

Dễ thấy phương trình: $h(x)=x^3+2(m+n+p)x^2-8mnp=0$ chỉ có duy nhất một nghiệm dương, giả sử nghiệm dương duy nhất này là λ_0. Khi đó ta có:

$$a_0=\sqrt{\frac{(\lambda_0+2p)(\lambda_0+2n)}{(\lambda_0+2m)(3\lambda_0+2m+2n+2p)}},\ b_0=\sqrt{\frac{(\lambda_0+2p)(\lambda_0+2m)}{(\lambda_0+2n)(3\lambda_0+2m+2n+2p)}},$$

$$c_0=\sqrt{\frac{(\lambda_0+2m)(\lambda_0+2n)}{(\lambda_0+2p)(3\lambda_0+2m+2n+2p)}}.$$

$$\lambda_0=\frac{2ma}{b+c}=\frac{2nb}{c+a}=\frac{2pc}{a+b}=\frac{ma^2+nb^2+pc^2}{ab+bc+ca}=ma^2+nb^2+pc^2$$

Xét các trường hợp tại biên:

Trường hợp 1: a = 0: Khi đó: bc = 1 và $P=nb^2+pc^2\ge 2\sqrt{pn}bc\ge 2\sqrt{pn}$

Trường hợp 2: b = 0: Khi đó: ac = 1 và $P=ma^2+pc^2\ge 2\sqrt{mpac}\ge 2\sqrt{mp}$

Trường hợp 3: c = 0: Khi đó: ab = 1 và $P=ma^2+nb^2\ge 2\sqrt{mnab}\ge 2\sqrt{mn}$

Mặt khác, dễ thấy $h(2\sqrt{mn}),h(2\sqrt{mp}),h(2\sqrt{pn})>0$ nên $\lambda_0\le\min\left\{2\sqrt{mn},2\sqrt{mp},2\sqrt{pn}\right\}$

Kết luận: $\min P=\lambda_0$ đạt được khi và chỉ khi: $a=a_0$; $b=b_0$; $c=c_0$

Bài 7. Cho $a,b,c \geq 0$ thỏa mãn $a+b+c=3$.

Tìm Max của: $P=(2a+c)b^2+(a+c)(2c+a)b$

Giải

Đặt $f(a,b,c)=(2a+c)b^2+(a+c)(2c+a)b-\lambda(a+b+c)$.

Điểm cực trị của $f(a,b,c)$ là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial a}=\dfrac{\partial f}{\partial b}=\dfrac{\partial f}{\partial c}=0\\ a+b+c=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2b^2+2ab+3bc-\lambda=0\\ a^2+2c^2+2bc+3ac+4ab-\lambda=0\\ b^2+3ab+4bc-\lambda=0\\ a+b+c=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda=\dfrac{81}{8}\\ a=\dfrac{3}{4},b=\dfrac{3}{2},c=\dfrac{3}{4}\end{cases} \Rightarrow P=\dfrac{81}{8}$$

Xét các trường hợp tại biên:

Trường hợp 1: Hai trong ba số a,b,c bằng 0. Khi đó: P = 0

Trường hợp 2: b = 0. Khi đó: P = 0

Trường hợp 3: $c=0$. Khi đó $a+b=3$ và $f(a,b,0)=2ab^2+a^2b=g(a,b)$.

Điểm cực trị của $g(a,b)$ là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial g}{\partial a}=\dfrac{\partial g}{\partial b}=0\\ a+b=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2b^2+2ab-\lambda=0\\ a^2+4ab-\lambda=0\\ a+b=3\end{cases} \Leftrightarrow a=3-\sqrt{3}, b=\sqrt{3} \quad \text{Khi đó: } P=6\sqrt{3}$$

Trường hợp 4: a = 0. Khi đó $b+c=3$ và $f(0,b,c)=cb^2+2c^2b=h(b,c)$.

Điểm cực trị của $h(b,c)$ là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial h}{\partial b}=\dfrac{\partial h}{\partial c}=0\\ b+c=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2c^2+2bc-\lambda=0\\ b^2+4bc-\lambda=0\\ b+c=3\end{cases} \Leftrightarrow b=3-\sqrt{3}, c=\sqrt{3} \quad \text{Khi đó: } P=6\sqrt{3}$$

Kết luận: $\text{Max}P=6\sqrt{3}$ đạt được khi và chỉ khi $(a,b,c)=\{(3-\sqrt{3},\sqrt{3},0),(0,3-\sqrt{3},\sqrt{3})\}$

Bài 8. Cho $\begin{cases}a+b+c=0\\ a^2+b^2+c^2=6\end{cases}$. Tìm Max, Min của biểu thức: $P=a^2b+b^2c+c^2a$

Giải

Đặt $f(a,b,c)=a^2b+b^2c+c^2a-\lambda(a+b+c)-\eta(a^2+b^2+c^2)$.

Điểm cực trị của $f(a,b,c)$ là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial a} = \dfrac{\partial f}{\partial b} = \dfrac{\partial f}{\partial c} = 0 \\ a+b+c=0 \\ a^2+b^2+c^2=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2ab+c^2-\lambda-2\eta a=0 \\ 2bc+a^2-\lambda-2\eta b=0 \\ 2ca+b^2-\lambda-2\eta c=0 \\ a+b+c=0 \\ a^2+b^2+c^2=6 \end{cases}$$

Giải hệ này ta thu được (a,b,c) là hoán vị vòng quanh của

$$\left(2\cos\frac{2\pi}{9}, 2\cos\frac{4\pi}{9}, 2\cos\frac{8\pi}{9}\right), \left(-2\cos\frac{2\pi}{9}, -2\cos\frac{4\pi}{9}, -2\cos\frac{8\pi}{9}\right)$$

Mà ta có: $f\left(2\cos\frac{2\pi}{9}, 2\cos\frac{4\pi}{9}, 2\cos\frac{8\pi}{9}\right)=6, f\left(-2\cos\frac{2\pi}{9}, -2\cos\frac{4\pi}{9}, -2\cos\frac{8\pi}{9}\right)=-6$

Kết luận: $\mathrm{Max} f(a,b,c)=6 \Leftrightarrow (a,b,c)$ là hoán vị của $\left(2\cos\frac{2\pi}{9}, 2\cos\frac{4\pi}{9}, 2\cos\frac{8\pi}{9}\right)$

$\mathrm{Min} f(a,b,c)=-6 \Leftrightarrow (a,b,c)$ là hoán vị của $\left(-2\cos\frac{2\pi}{9}, -2\cos\frac{4\pi}{9}, -2\cos\frac{8\pi}{9}\right)$

Bài 9. Cho $\begin{cases} a,b,c>0 \\ a^2+b^2+c^2=3 \end{cases}$. Chứng minh rằng: $a^3b^2+b^3c^2+c^3a^2 \le 3$

Chứng minh

Nếu $abc=0$ thì bất đẳng thức đúng. Giả sử rằng $a,b,c>0$. Đặt $x=a^2, y=b^2, z=c^2$.

Xét hàm số: $f(x,y,z)=x^ky+y^kz+z^kx-\varphi(x+y+z-3)$ với $k=\frac{3}{2}$

$$\frac{\delta f}{\delta x}=kx^{k-1}y+z^k-\varphi,\ \frac{\delta f}{\delta y}=ky^{k-1}z+x^k-\varphi,\ \frac{\delta f}{\delta z}=kz^{k-1}x+y^k-\varphi$$

Để ý rằng nếu (x,y,z) là một hoán vị của (α,β,γ) với $\alpha\ge\beta\ge\gamma>0$ khi đó ta có $Max\left(x^ky+y^kz+z^kx\right)=\alpha^k\beta+\beta^k\gamma+\gamma^k\alpha$. Do đó ta sẽ xét $Max\, f(x,y,z)$ với $x\ge y\ge z, x+y+z=3$ và $k=\frac{3}{2}$. Dễ dàng chứng minh $ky^{k-1}z+x^k \ge kz^{k-1}x+y^k$ và đăng thức chỉ xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1$, từ đó suy ra $Max\, f(x,y,z)=f(1,1,1)=3$ hay $f(x,y,z)\le 3$

Bài 10. Cho $a,b,c\ge 0$. Chứng minh:

$$a^3+b^3+c^3+3abc \ge ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)$$

Chứng minh

Đặt $f(a,b,c)=a^3+b^3+c^3+3abc-ab(a+b)-bc(b+c)-ca(c+a)$.

Điểm cực trị của $f(a,b,c)$ là nghiệm của hệ:

$$\frac{\partial f}{\partial a}=\frac{\partial f}{\partial b}=\frac{\partial f}{\partial c}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3a^2+3bc=2ab+2ac+b^2+c^2 \\ 3b^2+3ac=2ba+2bc+a^2+c^2 \\ 3c^2+3ab=2ca+2cb+a^2+b^2 \end{cases}$$

Cộng vế theo vế: $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca \Leftrightarrow a=b=c$. Khi đó: $f(a,b,c)=0$.

Xét trường hợp $a=0$: $b^3+c^3 \ge bc(b+c) \Leftrightarrow (b+c)(b-c)^2 \ge 0$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$ hoặc $a=0, b=c$ và các hoán vị.

Bài 11. Cho $a,b,c,d \ge 0$. Chứng minh rằng:

$$a^4+b^4+c^4+d^4+2abcd \ge a^2b^2+b^2c^2+c^2d^2+d^2a^2+a^2c^2+b^2d^2$$

Chứng minh

Đặt $f(a,b,c,d)=a^4+b^4+c^4+d^4+2abcd-(a^2b^2+b^2c^2+c^2d^2+d^2a^2+a^2c^2+b^2d^2)$.

Điểm cực trị của $f(a,b,c,d)$ là nghiệm của hệ:

$$\frac{\partial f}{\partial a}=\frac{\partial f}{\partial b}=\frac{\partial f}{\partial c}=\frac{\partial f}{\partial c}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2a^3+bcd=a(b^2+c^2+d^2) \\ 2b^3+acd=b(a^2+c^2+d^2) \\ 2c^3+abd=c(a^2+b^2+d^2) \\ 2d^3+abc=d(a^2+b^2+c^2) \end{cases}$$

Cộng vế theo vế, ta có: $2a^3+2b^3+2c^3+2d^3+cda+abc+dab+bcd$

$=a(b^2+c^2+d^2)+b(a^2+c^2+d^2)+c(a^2+b^2+d^2)+d(a^2+b^2+c^2)$ (*)

Áp dụng bất đẳng thức ***Shur*** bậc 3 ta có:

$a^3+b^3+c^3+3abc \ge a(b^2+c^2)+b(a^2+c^2)+c(a^2+b^2)$

$b^3+c^3+d^3+3bcd \ge b(d^2+c^2)+c(d^2+b^2)+d(b^2+c^2)$

$c^3+d^3+a^3+3cda \ge c(d^2+a^2)+d(a^2+c^2)+a(d^2+c^2)$

$d^3+a^3+b^3+3dab \ge d(a^2+b^2)+b(d^2+a^2)+b(a^2+d^2)$

Cộng lại ta có VT(*) $\ge$ VP(*). Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=d$ hoặc a, b, c,d là hoán vị của (0,t,t,t),(t>0). Thử lại thấy chỉ có bộ $a=b=c=d$ thỏa mãn. Khi đó: $f(a,b,c,d)=0$

Xét trường hợp có một biến bằng 0. Giả sử d = 0. Khi đó bất đẳng thức trở thành:

$a^4+b^4+c^4 \ge a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 \Leftrightarrow (a^2-b^2)^2+(b^2-c^2)^2+(c^2-a^2)^2 \ge 0$ (đúng)

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=d$ hoặc a, b, c,d là hoán vị của (0,t,t,t) (t>0).

Bài 12. Cho $a,b,c,d \in R$ thỏa mãn $a+b+c+d=2$ .Tìm Min của: $P=a^2+2b^2+2c^2+3d^2$

Giải

Đặt $f(a,b,c,d)=a^2+2b^2+2c^2+3d^2-\lambda(a+b+c+d)$ thì điểm cực trị là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial a}=\dfrac{\partial f}{\partial b}=\dfrac{\partial f}{\partial c}=\dfrac{\partial f}{\partial c}=0 \\ a+b+c+d=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a-\lambda=0 \\ 4b-\lambda=0 \\ 4c-\lambda=0 \\ 6d-\lambda=0 \\ a+b+c+d=2 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda=\frac{12}{7}, a=\frac{6}{7}, b=\frac{3}{7}, c=\frac{3}{7}, d=\frac{2}{7} \Rightarrow P=\frac{12}{7}$$

Kết luận: $\min P=\frac{12}{7}$ đạt được khi và chỉ khi $a=\frac{6}{7}, b=\frac{3}{7}, c=\frac{3}{7}, d=\frac{2}{7}$

Bài 13. Cho $n \ge 2$ và $x_1,\dots,x_n; y_1,\dots,y_n$ là $2n$ số thực thỏa mãn điều kiện

$\sum_{i=1}^{n} a_i^2=1, \sum_{i=1}^{n} b_i^2, \sum_{i=1}^{n} a_ib_i=0$. Chứng minh rằng: $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)^2 \le n$

Chứng minh

Đặt $A=\sum_{i=1}^{n} a_i, B=\sum_{i=1}^{n} b_i$. Ta có $(1-Aa_i-Bb_i)^2 \ge 0 \Rightarrow 1-2Aa_i-2Bb_i+2ABa_ib_i+A^2a_i^2+B^2b_i^2 \ge 0$

Cho i chạy từ 1 đến n rồi cộng các vế và sử dụng giả thiết ta được $n \ge A^2+B^2$

Bình luận: Lời giải hết sức ấn tượng như trên chỉ là chiếc áo khoác ngoài trong việc trình bày khi tiếp cận bài toán bằng phương pháp nhân tử ***Langrange***. Thật vậy, xét bài toán tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(a,b)=\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)^2$ với các điều kiện ràng buộc

$\sum_{i=1}^{n} a_i^2=1, \sum_{i=1}^{n} b_i^2, \sum_{i=1}^{n} a_ib_i=0$.

Lập nhân tử ***Langrange:*** $L=\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)^2+\lambda\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)+\eta\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2-1\right)+\mu\sum_{i=1}^{n} a_ib_i$

Các phương trình tìm điểm dừng có dạng

$2A+2\lambda a_i+\mu b_i=0$; $(i=1,2,\dots,n)$; $2B+2\eta b_i+\mu a_i=0$; $(i=1,2,\dots,n)$

Từ hệ này, nếu $4\lambda\eta-\mu^2 \ne 0$ thì tất cả các a_i bằng nhau và tất cả các b_i bằng nhau. Do điều này không thể xảy ra nên suy ra $4\lambda\eta-\mu^2=0$. Khi đó, để hệ có nghiệm, ta phải có $A/B=2\lambda/\mu=\mu/2\eta$ đồng thời ta cũng có $0=\sum_{i=1}^{n} a_i\mu b_i=\sum_{i=1}^{n} a_i(-2A-2\lambda a_i)=-2A^2-2\lambda$

Suy ra $2\lambda=-2A^2$ và $\mu=-2AB$. Từ đó ta có điều kiện $1-Aa_i-Bb_i=0$.

Như vậy tại điểm dừng ta có các hệ thức $1-Aa_i-Bb_i=0$ và đây chính là cơ sở để ta thực hiện các phép bình phương trong lời giải ấn tượng nói trên.

VII. CÁC BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1. Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1,\ a>0, b>0, c>0$.

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị bé nhất của biểu thức $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$

Bài 2. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị bé nhất của biểu thức $f(x,y)=x^4+y^4-2(x-y)^2$

Bài 3. Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn $2x^3+2y^3+z^3=4$.

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị bé nhất của biểu thức $f(x,y,z)=z^2-2xy$

Bài 4. Cho x, y thỏa mãn điều kiện $g(x,y)=7x^2+2xy+4y^2-3=0$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x,y)=5x^2+2xy+3y^2$

Bài 5. Cho $\begin{cases} a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=1 \\ a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2+a_5^2=13 \end{cases}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$S=a_1^3+a_2^3+a_3^3+a_4^3+a_5^3$$

Bài 6. Cho $\begin{cases} a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=1 \\ a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2+a_5^2=11 \end{cases}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$S=a_1^3+a_2^3+a_3^3+a_4^3+a_5^3$$

Bài 7. Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=3$. Chứng minh rằng

$$2(a^2b+b^2c+c^2a)+15\ge 3(a+b+c)+4(ab+bc+ca)$$

Bài 8. [Holder] Cho hai bộ số $\begin{cases} a_1,a_2,...,a_n\in\mathbb{R}^+ \\ b_1,b_2,...,b_n\in\mathbb{R}^+ \end{cases}$ với $p,q\in\mathbb{R}^+$ thỏa mãn $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$

Chứng minh rằng: $\left(a_1^p+a_2^p+...+a_n^p\right)^{\frac{1}{p}}.\left(b_1^q+b_2^q+...+b_n^q\right)^{\frac{1}{q}}\ge a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n$

Bài 9. Cho $a_1,a_2,...,a_n>0$ và $a_1...a_n=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{(1+a_1)^k}+\frac{1}{(1+a_2)^k}+...+\frac{1}{(1+a_3)^k}\ge \min\left\{1,\frac{n}{2^k}\right\}\ \forall k\ge 0$$

Bài 10. [VMEO II] Cho $a,b,c,x,y,z>0$ thỏa mãn $ax+by+cz=xyz$.

Chứng minh rằng $x+y+z>\sqrt{4(a+b+c)}+\sqrt{8(ab+bc+ca)}$

Bài 11. [IMO Shortlist 2007] Cho $a_1,a_2,...,a_{100}$ là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện $a_1^2+a_2^2+...+a_{100}^2=1$. Chứng minh $a_1^2a_2+a_2^2a_3+...+a_{100}^2a_1<\frac{12}{25}$

Bài 12. [IMO Shortlist 1995] Cho a, b, c là các số thực dương cho trước và x, y, z là các số thực thỏa mãn điều kiện $x=y+z=1$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $4xyz-\left(a^2x+b^2y+c^2z\right)$

§11. BẤT ĐẲNG THỨC BERNOULLI VÀ CÁC ỨNG DỤNG

§11.1 GIỚI THIỆU VỀ BẤT ĐẲNG THỨC BERNOULLI

I. CÁC DẠNG BIỂU DIỄN CỦA BẤT ĐẲNG THỨC BERNOULLI

1. DẠNG NGUYÊN THỦY CỦA BẤT ĐẲNG THỨC

Giả sử $a_1, a_2, ...a_n$ là các số thực cùng dấu và lớn hơn (-1). Khi đó ta có:

$$(1+a_1)(1+a_2)...(1+a_n) \geq 1+(a_1+a_2+...+a_n)$$

2. DẠNG CƠ BẢN CỦA BẤT ĐẲNG THỨC

2.1. $\forall a > -1, \forall n \in \mathbb{N}^*$ ta có $(1+a)^n \geq 1 + na$

2.2. $\forall a > -1, \forall r \in Q$ và $0 \leq r \leq 1$ ta có $(1+a)^r \leq 1 + ra$

2.3. $\forall a > -1, \forall r \in Q$ và $(r \leq 0) \cup (r \geq 1)$ ta có: $(1+a)^r \geq 1 + ra$

3. DẠNG TỔNG QUÁT CỦA BẤT ĐẲNG THỨC

3.1. $\forall x > -1, \forall 0 \leq \alpha \leq 1$ ta có: $(1+x)^\alpha \leq 1 + \alpha x$

Hệ quả: $\forall t > 0, \forall 0 \leq \alpha \leq 1$ ta có: $t^\alpha \leq \alpha t + (1-\alpha)$

3.2. $\forall x > -1, \forall \alpha \in (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$ ta có: $(1+x)^\alpha \geq 1 + \alpha x$

Hệ quả: $\forall t > 0, \forall \alpha \in (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$ ta có: $t^\alpha \geq \alpha t + (1-\alpha)$

Chứng minh

• Nếu $\alpha = 0$ hoặc $\alpha = 1$ thì bất đẳng thức trở thành đẳng thức đúng.

Đặt $f(x) = (1+x)^\alpha - \alpha x - 1$ với $x > -1$. Ta có $f'(x) = \alpha[(1+x)^{\alpha-1} - 1]$

Nếu $\alpha \neq 0$ và $\alpha \neq 1$ thì $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

3.1. Nếu $0 < \alpha < 1$ thì ta có bảng biến thiên sau:

x	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\searrow$

Nhìn bảng biến thiên suy ra $f(x) \leq 0 \quad \forall x > -1$

$\Leftrightarrow (1+x)^\alpha \leq 1 + \alpha x \quad \forall x > -1,\ 0 < \alpha < 1$

3.2. Nếu $\alpha > 1$ hoặc $\alpha < 0$ thì ta có bảng biến thiên

x	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

Nhìn bảng biến thiên suy ra $f(x) \geq 0 \quad \forall x > -1$

$\Leftrightarrow (1+x)^\alpha \geq 1 + \alpha x \quad \forall x > -1, \left[\begin{array}{l}\alpha > 1 \\ \alpha < 0\end{array}\right.$

Chú ý: Cũng có thể chứng minh các bất đẳng thức ở **3.1** và **3.2** bằng cách sử dụng bất đẳng thức ***AM – GM*** suy rộng.

§11. 2. KĨ THUẬT CHỌN ĐIỂM RƠI TRONG BẤT ĐẲNG THỨC BERNOULLI

I. ĐIỂM RƠI ĐỐI XỨNG TRONG BẤT ĐẲNG THỨC BERNOULLI

Các bài toán dưới đây chủ yếu xét các bất đẳng thức với số mũ vô tỉ dương là điểm hạn chế khi sử dụng bất đẳng thức ***Buniakowski*** và bất đẳng thức ***Holder***. Để nắm vững kỹ thuật này chúng ta phải xác định điều kiện xảy ra dấu bằng trong bất đẳng thức ***Bernoulli*** với các tình huống khác nhau. Dấu bằng xảy ra khi các biến số bằng nhau nên có thể gọi đây là:

"Kỹ thuật chọn điểm rơi đối xứng trong bất đẳng thức Bernoulli"

1. BẤT ĐẲNG THỨC CƠ SỞ

$t^\alpha \geq \alpha.t + (1-\alpha) \quad \forall t>0, \forall\alpha>1 \Leftrightarrow t^\alpha + (\alpha-1) \geq \alpha.t \quad \forall t>0, \forall\alpha>1$

$\Rightarrow t^{\frac{\alpha}{\beta}} + \left(\dfrac{\alpha}{\beta}-1\right) \geq \dfrac{\alpha}{\beta}t \;\; \forall t>0, \forall\alpha>\beta>0$. Đặt $u = t^{\frac{1}{\beta}} \Leftrightarrow t = u^\beta$ khi đó:

$\boxed{u^\alpha + \left(\dfrac{\alpha}{\beta}-1\right) \geq \dfrac{\alpha}{\beta}\cdot u^\beta \quad \forall u>0, \forall\alpha>\beta>0}$ (*). Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \boxed{u=1}$

2. CÁC BÀI TẬP MẪU MINH HỌA

Bài 1. Cho $x, y > 0$, $\alpha \geq 2$. Chứng minh rằng: $x^\alpha + y^\alpha \geq 2^{1-\alpha}(x+y)^\alpha$

Chứng minh

Sử dụng: $x^2+y^2 \geq 2xy \Leftrightarrow 2(x^2+y^2) \geq (x+y)^2 \Leftrightarrow \left(\dfrac{x}{x+y}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{x+y}\right)^2 \geq \dfrac{1}{2}$

Áp dụng bất đẳng thức ***Bernoulli*** (*) ta có:

$$+\begin{cases} \left(\dfrac{2x}{x+y}\right)^\alpha + \dfrac{\alpha}{2} - 1 \geq \dfrac{\alpha}{2}\left(\dfrac{2x}{x+y}\right)^2 \\ \left(\dfrac{2y}{x+y}\right)^\alpha + \dfrac{\alpha}{2} - 1 \geq \dfrac{\alpha}{2}\left(\dfrac{2y}{x+y}\right)^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2^\alpha\left[\left(\dfrac{x}{x+y}\right)^\alpha + \left(\dfrac{y}{x+y}\right)^\alpha\right] + \alpha - 2 \geq 2\alpha\left[\left(\dfrac{x}{x+y}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{x+y}\right)^2\right] \geq \dfrac{2\alpha}{2} = \alpha \geq 2$$

$$\Leftrightarrow \left(\dfrac{x}{x+y}\right)^\alpha + \left(\dfrac{y}{x+y}\right)^\alpha \geq 2^{1-\alpha} \Leftrightarrow x^\alpha + y^\alpha \geq 2^{1-\alpha}(x+y)^\alpha$$

Bài 2. Cho $\begin{cases} x,\ y,\ z > 0 \\ x^{\sqrt{2}} + y^{\sqrt{2}} + z^{\sqrt{2}} \leq 1 \end{cases}$. Tìm giá trị lớn nhất của: $S = x+y+z$

Giải

Sử dụng bất đẳng thức ***Bernoulli*** (*) ta có:

$$+\begin{cases} x^{\sqrt{2}} + (\sqrt{2}-1) \geq \sqrt{2}\,x \\ y^{\sqrt{2}} + (\sqrt{2}-1) \geq \sqrt{2}\,y \\ z^{\sqrt{2}} + (\sqrt{2}-1) \geq \sqrt{2}\,z \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left(x^{\sqrt{2}} + y^{\sqrt{2}} + z^{\sqrt{2}}\right) + 3\sqrt{2} - 3 \geq \sqrt{2}\,(x+y+z)$$

$$\Rightarrow x+y+z \leq \frac{\left(x^{\sqrt{2}} + y^{\sqrt{2}} + z^{\sqrt{2}}\right) + 3\sqrt{2} - 3}{\sqrt{2}} \leq \frac{3\sqrt{2}-2}{\sqrt{2}} = 3 - \sqrt{2}$$

Với $x = y = z = 3^{\frac{-1}{\sqrt{2}}}$ thì $\text{Min}\, S = 3 - \sqrt{2}$

Bài 3. Cho $a, b > 0$. Chứng minh rằng: $a^{3\sqrt{2}} + b^{3\sqrt{2}} \geq 2^{1-\sqrt{2}}\left[ab(a+b)\right]^{\sqrt{2}}$

Chứng minh

Sử dụng: $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2+b^2-ab) \geq (a+b)\,ab \Leftrightarrow \dfrac{a^2}{b(a+b)} + \dfrac{b^2}{a(a+b)} \geq 1$

Áp dụng bất đẳng thức ***Bernoulli*** (*) ta có:

$$+\begin{cases} \left[\sqrt{2}\cdot\dfrac{a}{\sqrt{b(a+b)}}\right]^{2\sqrt{2}} + \dfrac{2\sqrt{2}}{2} - 1 \geq \dfrac{2\sqrt{2}}{2}\left[\sqrt{2}\cdot\dfrac{a}{\sqrt{b(a+b)}}\right]^2 \\ \left[\sqrt{2}\cdot\dfrac{b}{\sqrt{a(a+b)}}\right]^{2\sqrt{2}} + \dfrac{2\sqrt{2}}{2} - 1 \geq \dfrac{2\sqrt{2}}{2}\left[\sqrt{2}\cdot\dfrac{b}{\sqrt{a(a+b)}}\right]^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2^{\sqrt{2}}\left[\frac{a^{2\sqrt{2}}}{b^{\sqrt{2}}(a+b)^{\sqrt{2}}} + \frac{b^{2\sqrt{2}}}{a^{\sqrt{2}}(a+b)^{\sqrt{2}}}\right] + 2\sqrt{2} - 2 \geq 2\sqrt{2}\left[\frac{a^2}{b(a+b)} + \frac{b^2}{a(a+b)}\right]^2 \geq 2\sqrt{2}$$

$\Rightarrow a^{3\sqrt{2}} + b^{3\sqrt{2}} \geq 2^{1-\sqrt{2}}\left[ab(a+b)\right]^{\sqrt{2}}$. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a = b$

Bài 4. Cho $a, b, c, p > 0$ và $n \in \mathbb{N}$. Chứng minh: $a^{n+p} + b^{n+p} + c^{n+p} \geq 3^{1-(n+p)}(a+b+c)^{n+p}$

Chứng minh

- ***Bổ đề:*** $\dfrac{x^n + y^n + z^n}{3} \geq \left(\dfrac{x+y+z}{3}\right)^n$
- ***Hệ quả:*** $\left(\dfrac{a}{a+b+c}\right)^n + \left(\dfrac{b}{a+b+c}\right)^n + \left(\dfrac{c}{a+b+c}\right)^n \geq \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$
- ***Áp dụng:*** Sử dụng bất đẳng thức ***Bernoulli*** ta có:

$$+\begin{cases}\left(3\cdot\dfrac{a}{a+b+c}\right)^{n+p}+\dfrac{n+p}{n}-1\ge\dfrac{n+p}{n}\left(3\cdot\dfrac{a}{a+b+c}\right)^{n}\\ \left(3\cdot\dfrac{b}{a+b+c}\right)^{n+p}+\dfrac{n+p}{n}-1\ge\dfrac{n+p}{n}\left(3\cdot\dfrac{b}{a+b+c}\right)^{n}\\ \left(3\cdot\dfrac{c}{a+b+c}\right)^{n+p}+\dfrac{n+p}{n}-1\ge\dfrac{n+p}{n}\left(3\cdot\dfrac{c}{a+b+c}\right)^{n}\end{cases}$$

$$\Rightarrow 3^{n+p}\left[\left(\frac{a}{a+b+c}\right)^{n+p}+\left(\frac{b}{a+b+c}\right)^{n+p}+\left(\frac{c}{a+b+c}\right)^{n+p}\right]+\frac{3p}{n}\ge$$

$$\ge\frac{n+p}{n}\cdot 3^{n}\left[\left(\frac{a}{a+b+c}\right)^{n}+\left(\frac{b}{a+b+c}\right)^{n}+\left(\frac{c}{a+b+c}\right)^{n}\right]$$

$$\ge\frac{n+p}{n}\cdot 3^{n}\cdot 3\cdot\left[\frac{1}{3}\left(\frac{a}{a+b+c}+\frac{b}{a+b+c}+\frac{c}{a+b+c}\right)\right]^{n}=3\cdot\frac{n+p}{n}=3+\frac{3p}{n}$$

$$\Rightarrow 3^{n+p}\left[\left(\frac{a}{a+b+c}\right)^{n+p}+\left(\frac{b}{a+b+c}\right)^{n+p}+\left(\frac{c}{a+b+c}\right)^{n+p}\right]\ge 3$$

$$\Rightarrow\left(\frac{a}{a+b+c}\right)^{n+p}+\left(\frac{b}{a+b+c}\right)^{n+p}+\left(\frac{c}{a+b+c}\right)^{n+p}\ge 3^{1-(n+p)}$$

$$\Rightarrow a^{n+p}+b^{n+p}+c^{n+p}\ge 3^{1-(n+p)}(a+b+c)^{n+p}$$

Bài 5. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng: $\left(\dfrac{a}{b+c}\right)^{\sqrt{2}}+\left(\dfrac{b}{c+a}\right)^{\sqrt{2}}+\left(\dfrac{c}{a+b}\right)^{\sqrt{2}}\ge 3\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}}$

Chứng minh

• ***Bổ đề:*** $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}\ge\dfrac{3}{2}\quad\forall a, b, c>0$

• ***Áp dụng:*** Sử dụng bất đẳng thức ***Bernoulli*** (*) ta có:

$$+\begin{cases}\left(\dfrac{2a}{b+c}\right)^{\sqrt{2}}+\sqrt{2}-1\ge\sqrt{2}\left(\dfrac{2a}{b+c}\right)\\ \left(\dfrac{2b}{c+a}\right)^{\sqrt{2}}+\sqrt{2}-1\ge\sqrt{2}\left(\dfrac{2b}{c+a}\right)\\ \left(\dfrac{2c}{a+b}\right)^{\sqrt{2}}+\sqrt{2}-1\ge\sqrt{2}\left(\dfrac{2c}{a+b}\right)\end{cases}$$

$$\Rightarrow 2^{\sqrt{2}}\left[\left(\frac{a}{b+c}\right)^{\sqrt{2}}+\left(\frac{b}{c+a}\right)^{\sqrt{2}}+\left(\frac{c}{a+b}\right)^{\sqrt{2}}\right]+3\left(\sqrt{2}-1\right)\ge 2\sqrt{2}\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)$$

$$\Rightarrow 2^{\sqrt{2}}\left[\left(\frac{a}{b+c}\right)^{\sqrt{2}}+\left(\frac{b}{c+a}\right)^{\sqrt{2}}+\left(\frac{c}{a+b}\right)^{\sqrt{2}}\right]+3\left(\sqrt{2}-1\right)\ge 2\sqrt{2}\left(\frac{3}{2}\right)=3\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{a}{b+c}\right)^{\sqrt{2}}+\left(\frac{b}{c+a}\right)^{\sqrt{2}}+\left(\frac{c}{a+b}\right)^{\sqrt{2}}\ge\frac{3}{2^{\sqrt{2}}}=3\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}}$$. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$

Bài 6. Cho $a, b, c, d > 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$S=\left(\frac{a}{b+c+d}\right)^{\sqrt{3}}+\left(\frac{b}{c+d+a}\right)^{\sqrt{3}}+\left(\frac{c}{d+a+b}\right)^{\sqrt{3}}+\left(\frac{d}{a+b+c}\right)^{\sqrt{3}}$$

Giải

• ***Bổ đề:*** $\frac{a}{b+c+d}+\frac{b}{c+d+a}+\frac{c}{d+a+b}+\frac{d}{a+b+c}\ge\frac{4}{3}$

• ***Chứng minh:*** $\frac{a}{b+c+d}+\frac{b}{c+d+a}+\frac{c}{d+a+b}+\frac{d}{a+b+c}\ge\frac{4}{3}$

$$\Leftrightarrow\left(1+\frac{a}{b+c+d}\right)+\left(1+\frac{b}{c+d+a}\right)+\left(1+\frac{c}{d+a+b}\right)+\left(1+\frac{d}{a+b+c}\right)\ge 4+\frac{4}{3}$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c+d)\left(\frac{1}{b+c+d}+\frac{1}{c+d+a}+\frac{1}{d+a+b}+\frac{1}{a+b+c}\right)\ge\frac{16}{3}$$

$$\Leftrightarrow P=3(a+b+c+d)\left(\frac{1}{b+c+d}+\frac{1}{c+d+a}+\frac{1}{d+a+b}+\frac{1}{a+b+c}\right)\ge 16$$

Sử dụng Bất đẳng thức ***Côsi*** ta có:

$$\times\begin{cases}(a+b+c)+(b+c+d)+(c+d+a)+(d+a+b)\ge 4\cdot\sqrt[4]{(a+b+c)(b+c+d)(c+d+a)(d+a+b)}\\[2ex] \dfrac{1}{b+c+d}+\dfrac{1}{c+d+a}+\dfrac{1}{d+a+b}+\dfrac{1}{a+b+c}\ge 4\cdot\sqrt[4]{\dfrac{1}{(a+b+c)(b+c+d)(c+d+a)(d+a+b)}}\end{cases}$$

$$\Rightarrow P=3(a+b+c+d)\left(\frac{1}{b+c+d}+\frac{1}{c+d+a}+\frac{1}{d+a+b}+\frac{1}{a+b+c}\right)$$

$$=\left[(b+c+d)+(c+d+a)+(d+a+b)+(a+b+c)\right]\left(\frac{1}{b+c+d}+\frac{1}{c+d+a}+\frac{1}{d+a+b}+\frac{1}{a+b+c}\right)$$

$$\ge 4\cdot\sqrt[4]{(a+b+c)(b+c+d)(c+d+a)(d+a+b)}\times$$

$$\times 4\cdot\sqrt[4]{\frac{1}{(a+b+c)(b+c+d)(c+d+a)(d+a+b)}}=16$$

• ***Áp dụng:*** Sử dụng bất đẳng thức ***Bernoulli*** ta có:

$$+\begin{cases}\left(\dfrac{3a}{b+c+d}\right)^{\sqrt{3}}+\sqrt{3}-1\ge\sqrt{3}\left(\dfrac{3a}{b+c+d}\right)\\ \left(\dfrac{3b}{c+d+a}\right)^{\sqrt{3}}+\sqrt{3}-1\ge\sqrt{3}\left(\dfrac{3b}{c+d+a}\right)\\ \left(\dfrac{3c}{d+a+b}\right)^{\sqrt{3}}+\sqrt{3}-1\ge\sqrt{3}\left(\dfrac{3c}{d+a+b}\right)\\ \left(\dfrac{3d}{a+b+c}\right)^{\sqrt{3}}+\sqrt{3}-1\ge\sqrt{3}\left(\dfrac{3d}{a+b+c}\right)\end{cases}$$

$$\Rightarrow 3^{\sqrt{3}}\left[\left(\frac{a}{b+c+d}\right)^{\sqrt{3}}+\left(\frac{b}{c+d+a}\right)^{\sqrt{3}}+\left(\frac{c}{d+a+b}\right)^{\sqrt{3}}+\left(\frac{d}{a+b+c}\right)^{\sqrt{3}}\right]+4\left(\sqrt{3}-1\right)$$

$$\ge 3\sqrt{3}\left(\frac{a}{b+c+d}+\frac{b}{c+d+a}+\frac{c}{d+a+b}+\frac{d}{a+b+c}\right)\ge 4\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{a}{b+c+d}\right)^{\sqrt{3}}+\left(\frac{b}{c+d+a}\right)^{\sqrt{3}}+\left(\frac{c}{d+a+b}\right)^{\sqrt{3}}+\left(\frac{d}{a+b+c}\right)^{\sqrt{3}}\ge\frac{4}{3^{\sqrt{3}}}$$

Với $a=b=c=d>0$ thì $\operatorname{Min} S=\dfrac{4}{3^{\sqrt{3}}}$

Bài 7. Chứng minh: $\left(\dfrac{b+c}{2a}\right)^{\alpha}+\left(\dfrac{c+a}{2b}\right)^{\alpha}+\left(\dfrac{a+b}{2c}\right)^{\alpha}\ge\left(\dfrac{b+c}{2a}\right)^{\beta}+\left(\dfrac{c+a}{2b}\right)^{\beta}+\left(\dfrac{a+b}{2c}\right)^{\beta},\ \forall\begin{cases}a,b,c>0\\ \alpha>\beta>0\end{cases}$

Chứng minh

Đặt: $F(t)=\left(\dfrac{b+c}{2a}\right)^{t}+\left(\dfrac{c+a}{2b}\right)^{t}+\left(\dfrac{a+b}{2c}\right)^{t},\ \forall t>0$. Ta cần chứng minh $F(t)$ là hàm số đồng biến trên $(0,+\infty)$ hay $\forall t_1,t_2\in(0,+\infty), t_1<t_2$, ta cần chứng minh $F(t_1)\le F(t_2)$ tức là:

$$\left(\frac{b+c}{2a}\right)^{t_2}+\left(\frac{c+a}{2b}\right)^{t_2}+\left(\frac{a+b}{2c}\right)^{t_2}\ge\left(\frac{b+c}{2a}\right)^{t_1}+\left(\frac{c+a}{2b}\right)^{t_1}+\left(\frac{a+b}{2c}\right)^{t_1}.$$

Theo bất đẳng thức ***Bernoulli:***

$$\left(\frac{b+c}{2a}\right)^{t_2}+\frac{t_2}{t_1}-1\ge\frac{t_2}{t_1}\left(\frac{b+c}{2a}\right)^{t_1},\ \left(\frac{c+a}{2b}\right)^{t_2}+\frac{t_2}{t_1}-1\ge\frac{t_2}{t_1}\left(\frac{c+a}{2b}\right)^{t_1},\ \left(\frac{a+b}{2c}\right)^{t_2}+\frac{t_2}{t_1}-1\ge\frac{t_2}{t_1}\left(\frac{a+b}{2c}\right)^{t_1},$$

$$\left(\frac{t_2}{t_1}-1\right)\left[\left(\frac{b+c}{2a}\right)^{t_1}+\left(\frac{c+a}{2b}\right)^{t_1}+\left(\frac{a+b}{2c}\right)^{t_1}\right]\ge\left(\frac{t_2}{t_1}-1\right)3\sqrt[3]{\left[\frac{(b+c)(c+a)(a+b)}{8abc}\right]^{t_1}}\ge 3\frac{t_2}{t_1}-3$$

Cộng theo vế 4 bất đẳng thức trên ta nhận được

$$\left(\frac{b+c}{2a}\right)^{t_2}+\left(\frac{c+a}{2b}\right)^{t_2}+\left(\frac{a+b}{2c}\right)^{t_2}\ge\left(\frac{b+c}{2a}\right)^{t_1}+\left(\frac{c+a}{2b}\right)^{t_1}+\left(\frac{a+b}{2c}\right)^{t_1},\ \forall t_2>t_1>0$$

Suy ra $F(t)$ là hàm số đồng biến trên $(0,\infty)$. Khi đó $\forall\alpha>\beta$ ta luôn có

$$\left(\frac{b+c}{2a}\right)^{\alpha}+\left(\frac{c+a}{2b}\right)^{\alpha}+\left(\frac{a+b}{2c}\right)^{\alpha}\ge\left(\frac{b+c}{2a}\right)^{\beta}+\left(\frac{c+a}{2b}\right)^{\beta}+\left(\frac{a+b}{2c}\right)^{\beta}.$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$

Bài 8. Cho $\begin{cases}a,b,c>0\\ abc=1\end{cases}$ và $\begin{cases}m,k\in\mathbb{N},k\ge1\\ \alpha>\beta>0\end{cases}$. Chứng minh rằng:

$$\left(\frac{a^{m+k}}{b^m}\right)^{\alpha}+\left(\frac{b^{m+k}}{c^m}\right)^{\alpha}+\left(\frac{c^{m+k}}{a^m}\right)^{\alpha}\ge\left(\frac{a^{m+k}}{b^m}\right)^{\beta}+\left(\frac{b^{m+k}}{c^m}\right)^{\beta}+\left(\frac{c^{m+k}}{a^m}\right)^{\beta}$$

Chứng minh

Đặt: $F(t)=\left(\frac{a^{m+k}}{b^m}\right)^{t}+\left(\frac{b^{m+k}}{c^m}\right)^{t}+\left(\frac{c^{m+k}}{a^m}\right)^{t}$, $\forall t>0$. Ta cần chứng minh $F(t)$ là hàm số đồng biến trên $(0,+\infty)$ hay $\forall t_1,t_2\in(0,+\infty),t_1<t_2$, ta cần chứng minh $F(t_1)\le F(t_2)$ tức là:

$$\left(\frac{a^{m+k}}{b^m}\right)^{t_2}+\left(\frac{b^{m+k}}{c^m}\right)^{t_2}+\left(\frac{c^{m+k}}{a^m}\right)^{t_2}\ge\left(\frac{a^{m+k}}{b^m}\right)^{t_1}+\left(\frac{b^{m+k}}{c^m}\right)^{t_1}+\left(\frac{c^{m+k}}{a^m}\right)^{t_1}.$$

Theo ***Bernoulli*** ta có

$$\left(\frac{a^{m+k}}{b^m}\right)^{t_2}+\frac{t_2}{t_1}-1\ge\frac{t_2}{t_1}\left(\frac{a^{m+k}}{b^m}\right)^{t_1},\left(\frac{b^{m+k}}{c^m}\right)^{t_2}+\frac{t_2}{t_1}-1$$

$$\ge\frac{t_2}{t_1}\left(\frac{b^{m+k}}{c^m}\right)^{t_1},\left(\frac{c^{m+k}}{a^m}\right)^{t_2}+\frac{t_2}{t_1}-1\ge\frac{t_2}{t_1}\left(\frac{c^{m+k}}{a^m}\right)^{t_1}$$

$$\left(\frac{t_2}{t_1}-1\right)\left[\left(\frac{a^{m+k}}{b^m}\right)^{t_1}+\left(\frac{b^{m+k}}{c^m}\right)^{t_1}+\left(\frac{c^{m+k}}{a^m}\right)^{t_1}\right]$$

$$\ge\left(\frac{t_2}{t_1}-1\right)3\sqrt[3]{\left(\frac{a^{m+k}}{b^m}\right)^{t_1}\cdot\left(\frac{b^{m+k}}{c^m}\right)^{t_1}\cdot\left(\frac{c^{m+k}}{a^m}\right)^{t_1}}=3\left(\frac{t_2}{t_1}-1\right)$$

Cộng theo vế 4 bất đẳng thức trên ta nhận được

$$\left(\frac{a^{m+k}}{b^m}\right)^{t_2}+\left(\frac{b^{m+k}}{c^m}\right)^{t_2}+\left(\frac{c^{m+k}}{a^m}\right)^{t_2}\ge\left(\frac{a^{m+k}}{b^m}\right)^{t_1}+\left(\frac{b^{m+k}}{c^m}\right)^{t_1}+\left(\frac{c^{m+k}}{a^m}\right)^{t_1}$$

$\Rightarrow F(t)$ là hàm đồng biến trên $(0,+\infty)$. Khi đó $\forall\alpha>\beta\ge1$ ta có (đpcm)

Bài 9. Cho a,b,c là 3 cạnh của một tam giác và $\alpha>\beta\ge1$. Chứng minh rằng

$$\left(\frac{c}{a+b-c}\right)^{\alpha}+\left(\frac{a}{b+c-a}\right)^{\alpha}+\left(\frac{b}{c+a-b}\right)^{\alpha}\ge\left(\frac{c}{a+b-c}\right)^{\beta}+\left(\frac{a}{b+c-a}\right)^{\beta}+\left(\frac{b}{c+a-b}\right)^{\beta}$$

Chứng minh

Bổ đề: Nếu a,b,c là 3 cạnh của 1 tam giác và $t\ge1$ thì

$$\left(\frac{c}{a+b-c}\right)^{t}+\left(\frac{a}{b+c-a}\right)^{t}+\left(\frac{b}{c+a-b}\right)^{t}\ge3$$

Áp dụng: Xét hàm số $F(t)=\left(\frac{c}{a+b-c}\right)^t+\left(\frac{a}{b+c-a}\right)^t+\left(\frac{b}{c+a-b}\right)^t$; $\forall t\ge 1$

Ta cần chứng minh $F(t)$ là hàm số đồng biến trên $[0,+\infty)$ hay $\forall t_1,t_2\in[0,+\infty), t_1<t_2$, ta cần chứng minh $F(t_1)\le F(t_2)$ hay cần chứng minh

$$\left(\frac{c}{a+b-c}\right)^{t_2}+\left(\frac{a}{b+c-a}\right)^{t_2}+\left(\frac{b}{c+a-b}\right)^{t_2}\ge\left(\frac{c}{a+b-c}\right)^{t_1}+\left(\frac{a}{b+c-a}\right)^{t_1}+\left(\frac{b}{c+a-b}\right)^{t_1}$$

Ta có: $\left(\frac{c}{a+b-c}\right)^{t_2}+\frac{t_2}{t_1}-1\ge\frac{t_2}{t_1}\left(\frac{c}{a+b-c}\right)^{t_1}, \left(\frac{a}{b+c-a}\right)^{t_2}+\frac{t_2}{t_1}-1$

$$\ge\frac{t_2}{t_1}\left(\frac{a}{b+c-a}\right)^{t_1}, \left(\frac{b}{c+a-b}\right)^{t_2}+\frac{t_2}{t_1}-1\ge\frac{t_2}{t_1}\left(\frac{b}{c+a-b}\right)^{t_1}$$

$$\left(\frac{t_2}{t_1}-1\right)\left[\left(\frac{c}{a+b-c}\right)^{t_1}+\left(\frac{a}{b+c-a}\right)^{t_1}+\left(\frac{b}{c+a-b}\right)^{t_1}\right]\ge 3\left(\frac{t_2}{t_1}-1\right)$$

Cộng theo vế 4 bất đẳng thức trên ta nhận được

$$\left(\frac{c}{a+b-c}\right)^{t_2}+\left(\frac{a}{b+c-a}\right)^{t_2}+\left(\frac{b}{c+a-b}\right)^{t_2}\ge\left(\frac{c}{a+b-c}\right)^{t_1}+\left(\frac{a}{b+c-a}\right)^{t_1}+\left(\frac{b}{c+a-b}\right)^{t_1}, \forall t_2>t_1\ge 1$$

Hay $F(t)$ là hàm đồng biến trên $(0,+\infty)$. Khi đó $\forall\alpha>\beta\ge 1$ ta luôn có

$$\left(\frac{c}{a+b-c}\right)^{\alpha}+\left(\frac{a}{b+c-a}\right)^{\alpha}+\left(\frac{b}{c+a-b}\right)^{\alpha}\ge\left(\frac{c}{a+b-c}\right)^{\beta}+\left(\frac{a}{b+c-a}\right)^{\beta}+\left(\frac{b}{c+a-b}\right)^{\beta}$$

Từ đây ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Bài 10. Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh của tam giác ABC.

Tìm giá trị nhỏ nhất của $T=\left(\frac{a}{2b+2c-a}\right)^{\sqrt{2}}+\left(\frac{b}{2c+2a-b}\right)^{\sqrt{2}}+\left(\frac{c}{2a+2b-c}\right)^{\sqrt{2}}$

Giải

• ***Bổ đề:*** $\frac{a}{2b+2c-a}+\frac{b}{2c+2a-b}+\frac{c}{2a+2b-c}\ge 1$ (1)

• ***Chứng minh:*** $(1)\Leftrightarrow\frac{3a}{2b+2c-a}+\frac{3b}{2c+2a-b}+\frac{3c}{2a+2b-c}\ge 3$

$$\Leftrightarrow\left(1+\frac{3a}{2b+2c-a}\right)+\left(1+\frac{3b}{2c+2a-b}\right)+\left(1+\frac{3c}{2a+2b-c}\right)\ge 6$$

$$\Leftrightarrow P=3(a+b+c)\left(\frac{1}{2b+2c-a}+\frac{1}{2c+2a-b}+\frac{1}{2a+2b-c}\right)\ge 6\cdot\frac{3}{2}=9$$

$$P=[(2b+2c-a)+(2c+2a-b)+(2a+2b-c)]\left(\frac{1}{2b+2c-a}+\frac{1}{2c+2a-b}+\frac{1}{2a+2b-c}\right)$$

$$\geq 3\cdot\sqrt[3]{(2b+2c-a)(2c+2a-b)(2a+2b-c)}\cdot 3\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{(2b+2c-a)(2c+2a-b)(2a+2b-c)}}=9$$

• ***Áp dụng:*** Sử dụng bất đẳng thức ***Bernoulli*** ta có::

$$+\begin{cases}\left(\dfrac{3a}{2b+2c-a}\right)^{\sqrt{2}}+\sqrt{2}-1\geq\sqrt{2}\left(\dfrac{3a}{2b+2c-a}\right)\\ \left(\dfrac{3b}{2c+2a-b}\right)^{\sqrt{2}}+\sqrt{2}-1\geq\sqrt{2}\left(\dfrac{3b}{2c+2a-b}\right)\\ \left(\dfrac{3c}{2a+2b-c}\right)^{\sqrt{2}}+\sqrt{2}-1\geq\sqrt{2}\left(\dfrac{3c}{2a+2b-c}\right)\end{cases}$$

$$\Rightarrow 3^{\sqrt{2}}\left[\left(\frac{a}{2b+2c-a}\right)^{\sqrt{2}}+\left(\frac{b}{2c+2a-b}\right)^{\sqrt{2}}+\left(\frac{c}{2a+2b-c}\right)^{\sqrt{2}}\right]+3\left(\sqrt{2}-1\right)$$

$$\geq\sqrt{2}\left(\frac{3a}{2b+2c-a}+\frac{3b}{2c+2a-b}+\frac{3c}{2a+2b-c}\right)\geq 3\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow T=\left(\frac{a}{2b+2c-a}\right)^{\sqrt{2}}+\left(\frac{b}{2c+2a-b}\right)^{\sqrt{2}}+\left(\frac{c}{2a+2b-c}\right)^{\sqrt{2}}\geq\frac{3}{3^{\sqrt{2}}}=3^{1-\sqrt{2}}$$

Với $a=b=c>0\Leftrightarrow\Delta ABC$ đều thì $\operatorname{Min}T=3^{1-\sqrt{2}}$

Bài 11. Cho ΔABC. Chứng minh rằng: $\sin^{\sqrt{2}}A+\sin^{\sqrt{2}}B+\sin^{\sqrt{2}}C\leq 3\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^{\sqrt{2}}$

Chứng minh

• ***Bổ đề:*** $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C\leq\dfrac{9}{4}$

• ***Áp dụng:*** Sử dụng bất đẳng thức ***Bernoulli*** (*) ta có:

$$+\begin{cases}\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\sin A\right)^{2}+\dfrac{2}{\sqrt{2}}-1\geq\dfrac{2}{\sqrt{2}}\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\sin A\right)^{\sqrt{2}}\\ \left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\sin B\right)^{2}+\dfrac{2}{\sqrt{2}}-1\geq\dfrac{2}{\sqrt{2}}\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\sin B\right)^{\sqrt{2}}\\ \left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\sin C\right)^{2}+\dfrac{2}{\sqrt{2}}-1\geq\dfrac{2}{\sqrt{2}}\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\sin C\right)^{\sqrt{2}}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\frac{4}{3}\left(\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C\right)+3\sqrt{2}-3\geq\frac{2}{\sqrt{2}}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{2}}\left(\sin^{\sqrt{2}}A+\sin^{\sqrt{2}}B+\sin^{\sqrt{2}}C\right)$$

$$\Rightarrow 3\sqrt{2} = \frac{4}{3}\cdot\frac{9}{4} + 3\sqrt{2} - 3 \geq \frac{2}{\sqrt{2}}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{2}}\left(\sin^{\sqrt{2}} A + \sin^{\sqrt{2}} B + \sin^{\sqrt{2}} C\right)$$

$$\Rightarrow \sin^{\sqrt{2}} A + \sin^{\sqrt{2}} B + \sin^{\sqrt{2}} C \leq 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{\sqrt{2}}$$. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow A = B = C = \frac{\pi}{3}$

Bài 12. Cho ΔABC. Chứng minh: $\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2}\right)^{2\sqrt{2}} + \left(\operatorname{tg}\frac{B}{2}\right)^{2\sqrt{2}} + \left(\operatorname{tg}\frac{C}{2}\right)^{2\sqrt{2}} \geq 3^{1-\sqrt{2}}$

Chứng minh

- ***Bổ đề:*** $\operatorname{tg}\frac{A}{2} + \operatorname{tg}\frac{B}{2} + \operatorname{tg}\frac{C}{2} \geq \sqrt{3} \quad \forall \Delta ABC$

- ***Áp dụng:*** Sử dụng bất đẳng thức ***Bernoulli*** (*) ta có:

$$+\begin{cases} \left(\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{A}{2}\right)^{2\sqrt{2}} + \left(2\sqrt{2}-1\right) \geq 2\sqrt{2}\left(\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{A}{2}\right) \\ \left(\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\right)^{2\sqrt{2}} + \left(2\sqrt{2}-1\right) \geq 2\sqrt{2}\left(\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\right) \\ \left(\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{C}{2}\right)^{2\sqrt{2}} + \left(2\sqrt{2}-1\right) \geq 2\sqrt{2}\left(\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{C}{2}\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{3}\right)^{2\sqrt{2}}\left[\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2}\right)^{2\sqrt{2}} + \left(\operatorname{tg}\frac{B}{2}\right)^{2\sqrt{2}} + \left(\operatorname{tg}\frac{C}{2}\right)^{2\sqrt{2}}\right] + 3\left(2\sqrt{2}-1\right) \geq 2\sqrt{2}.\sqrt{3}\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2} + \operatorname{tg}\frac{B}{2} + \operatorname{tg}\frac{C}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{3}\right)^{2\sqrt{2}}\left[\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2}\right)^{2\sqrt{2}} + \left(\operatorname{tg}\frac{B}{2}\right)^{2\sqrt{2}} + \left(\operatorname{tg}\frac{C}{2}\right)^{2\sqrt{2}}\right] + 6\sqrt{2} - 3 \geq 2\sqrt{2}.\sqrt{3}.\sqrt{3} = 6\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \left(\operatorname{tg}\frac{A}{2}\right)^{2\sqrt{2}} + \left(\operatorname{tg}\frac{B}{2}\right)^{2\sqrt{2}} + \left(\operatorname{tg}\frac{C}{2}\right)^{2\sqrt{2}} \geq 3^{1-\sqrt{2}}$$. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow A = B = C = \frac{\pi}{3}$

Bài 13. Cho ΔABC. Gọi h_a, h_b, h_c là độ dài 3 đường cao và r là bán kính đường tròn nội tiếp. Chứng minh rằng: $\left(\frac{1}{h_a}\right)^{\sqrt{2}} + \left(\frac{1}{h_b}\right)^{\sqrt{2}} + \left(\frac{1}{h_c}\right)^{\sqrt{2}} \geq 3\left(\frac{1}{3r}\right)^{\sqrt{2}}$

Chứng minh

- ***Bổ đề:*** $\frac{r}{h_a} + \frac{r}{h_b} + \frac{r}{h_c} = 1$

- ***Áp dụng:*** Sử dụng bất đẳng thức ***Bernoulli*** (*) ta có:

$$+\begin{cases}\left(3r\cdot\dfrac{1}{h_a}\right)^{\sqrt{2}}+\sqrt{2}-1\ge\sqrt{2}\left(3r\cdot\dfrac{1}{h_a}\right)\\ \left(3r\cdot\dfrac{1}{h_a}\right)^{\sqrt{2}}+\sqrt{2}-1\ge\sqrt{2}\left(3r\cdot\dfrac{1}{h_a}\right)\\ \left(3r\cdot\dfrac{1}{h_a}\right)^{\sqrt{2}}+\sqrt{2}-1\ge\sqrt{2}\left(3r\cdot\dfrac{1}{h_a}\right)\end{cases}$$

$$\Rightarrow (3r)^{\sqrt{2}}\left[\left(\frac{1}{h_a}\right)^{\sqrt{2}}+\left(\frac{1}{h_b}\right)^{\sqrt{2}}+\left(\frac{1}{h_c}\right)^{\sqrt{2}}\right]+3\sqrt{2}-3\ge\sqrt{2}.3\left(\frac{r}{h_a}+\frac{r}{h_b}+\frac{r}{h_c}\right)=3\sqrt{2}$$

$\Rightarrow \left(\dfrac{1}{h_a}\right)^{\sqrt{2}}+\left(\dfrac{1}{h_b}\right)^{\sqrt{2}}+\left(\dfrac{1}{h_c}\right)^{\sqrt{2}}\ge 3\left(\dfrac{1}{3r}\right)^{\sqrt{2}}$. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow$ ΔABC đều.

Bài 14. Cho ΔABC. Gọi m_a, m_b, m_c là độ dài 3 đường trung tuyến và bán kính đường tròn ngoại tiếp $R = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{\left(\dfrac{1}{m_a}\right)^5+\left(\dfrac{1}{m_b}\right)^5+\left(\dfrac{1}{m_c}\right)^5}{\left(\dfrac{1}{m_a}\right)^{\sqrt{2}}+\left(\dfrac{1}{m_b}\right)^{\sqrt{2}}+\left(\dfrac{1}{m_c}\right)^{\sqrt{2}}}\ge\left(\frac{2}{3}\right)^{5-\sqrt{2}}$$

Chứng minh

• ***Bổ đề:*** $m_a+m_b+m_c\le\dfrac{9R}{2}=\dfrac{9}{2}$

• ***Hệ quả:*** $\dfrac{1}{m_a}+\dfrac{1}{m_b}+\dfrac{1}{m_c}\ge\dfrac{9}{m_a+m_b+m_c}=\dfrac{9}{9/2}=2$

• ***Áp dụng:*** Không mất tính tổng quát giả sử $m_a \ge m_b \ge m_c$

$$\Rightarrow\frac{1}{m_a}\le\frac{1}{m_b}\le\frac{1}{m_c}\Rightarrow\begin{cases}\left(\dfrac{1}{m_a}\right)^{\sqrt{2}}\le\left(\dfrac{1}{m_b}\right)^{\sqrt{2}}\le\left(\dfrac{1}{m_c}\right)^{\sqrt{2}}\\ \left(\dfrac{1}{m_a}\right)^{5-\sqrt{2}}\le\left(\dfrac{1}{m_b}\right)^{5-\sqrt{2}}\le\left(\dfrac{1}{m_c}\right)^{5-\sqrt{2}}\end{cases}$$

Sử dụng bất đẳng thức ***Chebyshev*** ta có:

$$\frac{\left(\dfrac{1}{m_a}\right)^5+\left(\dfrac{1}{m_b}\right)^5+\left(\dfrac{1}{m_c}\right)^5}{\left(\dfrac{1}{m_a}\right)^{\sqrt{2}}+\left(\dfrac{1}{m_b}\right)^{\sqrt{2}}+\left(\dfrac{1}{m_c}\right)^{\sqrt{2}}}\ge\frac{1}{3}\left[\left(\frac{1}{m_a}\right)^{5-\sqrt{2}}+\left(\frac{1}{m_b}\right)^{5-\sqrt{2}}+\left(\frac{1}{m_c}\right)^{5-\sqrt{2}}\right]\quad(1)$$

Sử dụng bất đẳng thức ***Bernoulli*** (*) ta có:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{3\cdot\frac{1}{m_a}}{\frac{1}{m_a}+\frac{1}{m_b}+\frac{1}{m_c}}\right)^{5-\sqrt{2}}+(5-\sqrt{2})-1\ge(5-\sqrt{2})\left(\dfrac{3\cdot\frac{1}{m_a}}{\frac{1}{m_a}+\frac{1}{m_b}+\frac{1}{m_c}}\right) \\ \left(\dfrac{3\cdot\frac{1}{m_b}}{\frac{1}{m_a}+\frac{1}{m_b}+\frac{1}{m_c}}\right)^{5-\sqrt{2}}+(5-\sqrt{2})-1\ge(5-\sqrt{2})\left(\dfrac{3\cdot\frac{1}{m_b}}{\frac{1}{m_a}+\frac{1}{m_b}+\frac{1}{m_c}}\right) \\ \left(\dfrac{3\cdot\frac{1}{m_c}}{\frac{1}{m_a}+\frac{1}{m_b}+\frac{1}{m_c}}\right)^{5-\sqrt{2}}+(5-\sqrt{2})-1\ge(5-\sqrt{2})\left(\dfrac{3\cdot\frac{1}{m_c}}{\frac{1}{m_a}+\frac{1}{m_b}+\frac{1}{m_c}}\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow 3^{5-\sqrt{2}}\left[\left(\frac{1}{m_a}\right)^{5-\sqrt{2}}+\left(\frac{1}{m_b}\right)^{5-\sqrt{2}}+\left(\frac{1}{m_c}\right)^{5-\sqrt{2}}\right]\left(\frac{1}{m_a}+\frac{1}{m_b}+\frac{1}{m_c}\right)^{\sqrt{2}-5}+12-3\sqrt{2}\ge 15-3\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{m_a}\right)^{5-\sqrt{2}}+\left(\frac{1}{m_b}\right)^{5-\sqrt{2}}+\left(\frac{1}{m_c}\right)^{5-\sqrt{2}}\ge\frac{3}{3^{5-\sqrt{2}}}\cdot 2^{5-\sqrt{2}}\quad(2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\dfrac{\left(\frac{1}{m_a}\right)^5+\left(\frac{1}{m_b}\right)^5+\left(\frac{1}{m_c}\right)^5}{\left(\frac{1}{m_a}\right)^{\sqrt{2}}+\left(\frac{1}{m_b}\right)^{\sqrt{2}}+\left(\frac{1}{m_c}\right)^{\sqrt{2}}}\ge\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{3}{3^{5-\sqrt{2}}}\cdot 2^{5-\sqrt{2}}=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{5-\sqrt{2}}$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \dfrac{1}{m_a}=\dfrac{1}{m_b}=\dfrac{1}{m_c}=\dfrac{2}{3}\Leftrightarrow m_a=m_b=m_c=\dfrac{3}{2}$

Bài 15. Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh của tam giác ABC.

Tìm giá trị nhỏ nhất của $T=\left(\dfrac{a}{m_a}\right)^{\sqrt{3}}+\left(\dfrac{b}{m_b}\right)^{\sqrt{3}}+\left(\dfrac{c}{m_c}\right)^{\sqrt{3}}$

Giải

• ***Bổ đề:*** $\dfrac{a}{m_a}+\dfrac{b}{m_b}+\dfrac{c}{m_c}\ge 2\sqrt{3}\quad(1)$

• ***Chứng minh:*** (1) $\Leftrightarrow \dfrac{a^2}{a.m_a}+\dfrac{b^2}{b.m_b}+\dfrac{c^2}{c.m_c}\ge 2\sqrt{3}$

Ta có: $a.m_a=a\sqrt{\dfrac{2b^2+2c^2-a^2}{4}}=\dfrac{1}{2}\sqrt{(2b^2+2c^2-a^2).a^2}$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3}}\sqrt{(2b^2+2c^2-a^2).3a^2} \le \frac{1}{2\sqrt{3}}\cdot\frac{(2b^2+2c^2-a^2)+3a^2}{2} = \frac{a^2+b^2+c^2}{2\sqrt{3}}$$

Suy ra: $+\begin{cases} \dfrac{a}{m_a} = \dfrac{a^2}{a.m_a} \ge \dfrac{a^2}{\dfrac{1}{2\sqrt{3}}(a^2+b^2+c^2)} = \dfrac{2\sqrt{3}a^2}{a^2+b^2+c^2} \\ \dfrac{b}{m_b} = \dfrac{b^2}{b.m_b} \ge \dfrac{b^2}{\dfrac{1}{2\sqrt{3}}(a^2+b^2+c^2)} = \dfrac{2\sqrt{3}b^2}{a^2+b^2+c^2} \\ \dfrac{c}{m_c} = \dfrac{c^2}{c.m_c} \ge \dfrac{c^2}{\dfrac{1}{2\sqrt{3}}(a^2+b^2+c^2)} = \dfrac{2\sqrt{3}.c^2}{a^2+b^2+c^2} \end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{a}{m_a} + \frac{b}{m_b} + \frac{c}{m_c} \ge \frac{2\sqrt{3}(a^2+b^2+c^2)}{a^2+b^2+c^2} = 2\sqrt{3}$$

• ***Áp dụng:*** Sử dụng bất đẳng thức ***Bernoulli*** ta có:

$$+\begin{cases} \left(\dfrac{\sqrt{3}.a}{2m_a}\right)^{\sqrt{3}} + \sqrt{3} - 1 \ge \sqrt{3}\left(\dfrac{\sqrt{3}.a}{2m_a}\right) \\ \left(\dfrac{\sqrt{3}.b}{2m_b}\right)^{\sqrt{3}} + \sqrt{3} - 1 \ge \sqrt{3}\left(\dfrac{\sqrt{3}.b}{2m_b}\right) \\ \left(\dfrac{\sqrt{3}.c}{2m_c}\right)^{\sqrt{3}} + \sqrt{3} - 1 \ge \sqrt{3}\left(\dfrac{\sqrt{3}.c}{2m_c}\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{\sqrt{3}}\left[\left(\frac{a}{m_a}\right)^{\sqrt{3}} + \left(\frac{b}{m_b}\right)^{\sqrt{3}} + \left(\frac{c}{m_c}\right)^{\sqrt{3}}\right] + 3(\sqrt{3}-1) \ge \frac{3}{2}\left(\frac{a}{m_a} + \frac{b}{m_b} + \frac{c}{m_c}\right) \ge 3\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow T = \left(\frac{a}{m_a}\right)^{\sqrt{3}} + \left(\frac{b}{m_b}\right)^{\sqrt{3}} + \left(\frac{c}{m_c}\right)^{\sqrt{3}} \ge 3\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{3}}$$

Với $a = b = c \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều thì $\text{MinT} = 3\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{3}}$

Bài 16. Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh của tam giác nhọn ABC.

Tìm giá trị nhỏ nhất của $T = \left(\dfrac{ab}{m_a m_b}\right)^{\sqrt{5}} + \left(\dfrac{bc}{m_b m_c}\right)^{\sqrt{5}} + \left(\dfrac{ca}{m_c m_a}\right)^{\sqrt{5}}$

Giải

• ***Bổ đề:*** $\dfrac{ab}{m_a m_b} + \dfrac{bc}{m_b m_c} + \dfrac{ca}{m_c m_a} \ge 4$

• ***Chứng minh:*** Ta có: $m_a^2 = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2) = R^2(2\sin^2 B + 2\sin^2 C - \sin^2 A)$

$= R^2(1 - \cos 2B + 1 - \cos 2C - 1 + \cos^2 A) = R^2\left[1 - 2\cos(B+C)\cos(B-C) + \cos^2 A\right]$

$= R^2\left[1 - +2\cos A\cos(B-C) + \cos^2 A\right] \le R^2\left(1 + 2\cos A + \cos^2 A\right) = R^2\left(1 + \cos A\right)^2$

$\Rightarrow m_a \le R(1 + \cos A)$. Tương tự suy ra: $m_b \le R(1 + \cos B)$; $m_c \le R(1 + \cos C)$. Khi đó

$$\begin{cases} m_a m_b \le R^2(1+\cos A)(1+\cos B) \\ m_b m_c \le R^2(1+\cos B)(1+\cos C) \\ m_c m_a \le R^2(1+\cos C)(1+\cos A) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{ab}{m_a m_b} \ge \dfrac{ab}{R^2(1+\cos A)(1+\cos B)} = 4tg\dfrac{A}{2}tg\dfrac{B}{2} \\ \dfrac{bc}{m_b m_c} \ge \dfrac{bc}{R^2(1+\cos B)(1+\cos C)} = 4tg\dfrac{B}{2}tg\dfrac{C}{2} \\ \dfrac{ca}{m_c m_a} \ge \dfrac{ca}{R^2(1+\cos C)(1+\cos A)} = 4tg\dfrac{C}{2}tg\dfrac{A}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{ab}{m_a m_b} + \frac{bc}{m_b m_c} + \frac{ca}{m_c m_a} \ge 4\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2} + \operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2} + \operatorname{tg}\frac{C}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2}\right) = 4$$

• ***Áp dụng:***

$$+\begin{cases} \left(\dfrac{3ab}{4m_a m_b}\right)^{\sqrt5} + \sqrt5 - 1 \ge \sqrt5\left(\dfrac{3ab}{4m_a m_b}\right) \\ \left(\dfrac{3bc}{4m_b m_c}\right)^{\sqrt5} + \sqrt5 - 1 \ge \sqrt5\left(\dfrac{3bc}{4m_b m_c}\right) \\ \left(\dfrac{3ca}{4m_c m_a}\right)^{\sqrt5} + \sqrt5 - 1 \ge \sqrt5\left(\dfrac{3ca}{4m_c m_a}\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^{\sqrt5}\left[\left(\frac{ab}{m_a m_b}\right)^{\sqrt5} + \left(\frac{bc}{m_b m_c}\right)^{\sqrt5} + \left(\frac{ca}{m_c m_a}\right)^{\sqrt5}\right] + 3\left(\sqrt5 - 1\right)$$

$$\ge \frac{3\sqrt5}{4}\left(\frac{ab}{m_a m_b} + \frac{bc}{m_b m_c} + \frac{ca}{m_c m_a}\right) \ge 3\sqrt5 \Leftrightarrow \left(\frac{ab}{m_a m_b}\right)^{\sqrt5} + \left(\frac{bc}{m_b m_c}\right)^{\sqrt5} + \left(\frac{ca}{m_c m_a}\right)^{\sqrt5} \ge 3\left(\frac{4}{3}\right)^{\sqrt5}$$

Với $a = b = c \Leftrightarrow \Delta ABC$ là tam giác đều thì $\operatorname{Min} T = 3\left(\dfrac{4}{3}\right)^{\sqrt5}$

Bài 17. Cho ΔABC có độ dài các đường trung tuyến là m_a, m_b, m_c và độ dài các đường phân giác trong là l_a, l_b, l_c. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$T = \left(\frac{m_a}{l_a}\right)^{\sqrt3} + \left(\frac{m_b}{l_b}\right)^{\sqrt3} + \left(\frac{m_c}{l_c}\right)^{\sqrt3}$$

Giải

• ***Bổ đề:*** $m_a \ge l_a$; $m_b \ge l_b$; $m_c \ge l_c$

• ***Chứng minh:*** Ta sẽ chứng minh $\begin{cases} m_a \ge \sqrt{p(p-a)} \\ l_a \le \sqrt{p(p-a)} \end{cases} \Rightarrow m_a \ge l_a$

Ta có: $m_a = \sqrt{\dfrac{2(b^2+c^2)-a^2}{4}} \ge \sqrt{\dfrac{(b+c)^2-a^2}{4}} = \sqrt{\dfrac{b+c+a}{2}\cdot\dfrac{b+c-a}{2}} = \sqrt{p(p-a)}$

$$l_a = \frac{2bc}{b+c}\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}} = \sqrt{p(p-a)}\cdot\frac{2\sqrt{bc}}{b+c} \le \sqrt{p(p-a)}\cdot\frac{b+c}{b+c} = \sqrt{p(p-a)}$$

• ***Hệ quả:*** $\dfrac{m_a}{l_a}+\dfrac{m_b}{l_b}+\dfrac{m_c}{l_c}\ge 3$

• ***Áp dụng:*** Sử dụng bất đẳng thức ***Bernoulli*** ta có:

$$+\begin{cases}\left(\dfrac{m_a}{l_a}\right)^{\sqrt{3}}+\sqrt{3}-1\ge\sqrt{3}\left(\dfrac{m_a}{l_a}\right)\\ \left(\dfrac{m_b}{l_b}\right)^{\sqrt{3}}+\sqrt{3}-1\ge\sqrt{3}\left(\dfrac{m_b}{l_b}\right)\\ \left(\dfrac{m_c}{l_c}\right)^{\sqrt{3}}+\sqrt{3}-1\ge\sqrt{3}\left(\dfrac{m_c}{l_c}\right)\end{cases}$$

$$\Rightarrow\left(\frac{m_a}{l_a}\right)^{\sqrt{3}}+\left(\frac{m_b}{l_b}\right)^{\sqrt{3}}+\left(\frac{m_c}{l_c}\right)^{\sqrt{3}}+3\left(\sqrt{3}-1\right)\ge\sqrt{3}\left(\frac{m_a}{l_a}+\frac{m_b}{l_b}+\frac{m_b}{l_b}\right)\ge 3\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow\left(\frac{m_a}{l_a}\right)^{\sqrt{3}}+\left(\frac{m_b}{l_b}\right)^{\sqrt{3}}+\left(\frac{m_c}{l_c}\right)^{\sqrt{3}}\ge 3$$

Với ΔABC đều hay $m_a=m_b=m_c=l_a=l_b=l_c$ thì MinT = 3

Bài 18. Cho ΔABC có độ dài các đường trung tuyến là m_a, m_b, m_c và độ dài các đường phân giác trong là l_a, l_b, l_c. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$T=\left(\frac{m_a}{l_b+l_c}\right)^{\sqrt{3}}+\left(\frac{m_b}{l_c+l_a}\right)^{\sqrt{3}}+\left(\frac{m_c}{l_a+l_b}\right)^{\sqrt{3}}$$

Giải

• ***Bổ đề 1:*** $\dfrac{x}{y+z}+\dfrac{y}{z+x}+\dfrac{z}{x+y}\ge\dfrac{3}{2}\quad\forall x,y,z>0$

• ***Bổ đề 2:*** $\begin{cases}m_a\ge\sqrt{p(p-a)}\\ l_a\le\sqrt{p(p-a)}\end{cases}$; $\begin{cases}m_b\ge\sqrt{p(p-b)}\\ l_b\le\sqrt{p(p-b)}\end{cases}$; $\begin{cases}m_c\ge\sqrt{p(p-c)}\\ l_c\le\sqrt{p(p-c)}\end{cases}$

• ***Hệ quả:*** $\dfrac{m_a}{l_b+l_c}+\dfrac{m_b}{l_c+l_a}+\dfrac{m_c}{l_a+l_b}\ge\dfrac{3}{2}$

• ***Chứng minh:***

$$+\begin{cases}\dfrac{m_a}{l_b+l_c}\ge\dfrac{\sqrt{p(p-a)}}{\sqrt{p(p-b)}+\sqrt{p(p-c)}}=\dfrac{\sqrt{p-a}}{\sqrt{p-b}+\sqrt{p-c}}=\dfrac{x}{y+z}\\ \dfrac{m_b}{l_c+l_a}\ge\dfrac{\sqrt{p(p-b)}}{\sqrt{p(p-c)}+\sqrt{p(p-a)}}=\dfrac{\sqrt{p-b}}{\sqrt{p-c}+\sqrt{p-a}}=\dfrac{y}{z+x}\\ \dfrac{m_c}{l_a+l_b}\ge\dfrac{\sqrt{p(p-c)}}{\sqrt{p(p-a)}+\sqrt{p(p-b)}}=\dfrac{\sqrt{p-c}}{\sqrt{p-a}+\sqrt{p-b}}=\dfrac{z}{x+y}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\frac{m_a}{l_b+l_c}+\frac{m_b}{l_c+l_a}+\frac{m_c}{l_a+l_b}=\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}\ge\frac{3}{2}$$

• ***Áp dụng:*** Sử dụng bất đẳng thức ***Bernoulli*** ta có:

$$+\begin{cases}\left(\dfrac{2m_a}{l_b+l_c}\right)^{\sqrt{3}}+\sqrt{3}-1\ge\sqrt{3}\left(\dfrac{2m_a}{l_b+l_c}\right)\\ \left(\dfrac{2m_b}{l_c+l_a}\right)^{\sqrt{3}}+\sqrt{3}-1\ge\sqrt{3}\left(\dfrac{2m_b}{l_c+l_a}\right)\\ \left(\dfrac{2m_c}{l_a+l_b}\right)^{\sqrt{3}}+\sqrt{3}-1\ge\sqrt{3}\left(\dfrac{2m_c}{l_a+l_b}\right)\end{cases}$$

$$\Rightarrow 2^{\sqrt{3}}\left[\left(\frac{m_a}{l_b+l_c}\right)^{\sqrt{3}}+\left(\frac{m_b}{l_c+l_a}\right)^{\sqrt{3}}+\left(\frac{m_c}{l_a+l_b}\right)^{\sqrt{3}}\right]+3\left(\sqrt{3}-1\right)\ge 2\sqrt{3}\left(\frac{m_a}{l_b+l_c}+\frac{m_b}{l_c+l_a}+\frac{m_c}{l_a+l_b}\right)\ge 3\sqrt{3}$$

$\Leftrightarrow T\ge\dfrac{3}{2^{\sqrt{3}}}$. Với ΔABC đều hay $m_a=m_b=m_c=l_a=l_b=l_c$ thì $\text{Min}\,T=3\times 2^{-\sqrt{3}}$

Bài 19. Cho ΔABC có độ dài 3 cạnh là a, b, c và độ dài các đường trung tuyến là m_a, m_b, m_c. Tìm giá trị lớn nhất của: $T=\left(\dfrac{m_a^2}{b^2+c^2}\right)^{\frac{1}{\sqrt{3}}}+\left(\dfrac{m_b^2}{c^2+a^2}\right)^{\frac{1}{\sqrt{3}}}+\left(\dfrac{m_c^2}{a^2+b^2}\right)^{\frac{1}{\sqrt{3}}}$

Giải

• ***Bổ đề:*** $\dfrac{m_a^2}{b^2+c^2}+\dfrac{m_b^2}{c^2+a^2}+\dfrac{m_c^2}{a^2+b^2}\le\dfrac{9}{8}$ (1)

• ***Chứng minh:*** (1) $\Leftrightarrow\dfrac{2b^2+2c^2-a^2}{b^2+c^2}+\dfrac{2c^2+2a^2-b^2}{c^2+a^2}+\dfrac{2a^2+2b^2-c^2}{a^2+b^2}\le\dfrac{9}{2}$

$$\Leftrightarrow\frac{a^2}{b^2+c^2}+\frac{b^2}{c^2+a^2}+\frac{c^2}{a^2+b^2}\ge\frac{3}{2}\Leftrightarrow 1+\frac{a^2}{b^2+c^2}+1+\frac{b^2}{c^2+a^2}+1+\frac{c^2}{a^2+b^2}\ge\frac{9}{2}$$

$$\Leftrightarrow Q=\left[\left(b^2+c^2\right)+\left(c^2+a^2\right)+\left(a^2+b^2\right)\right]\left(\frac{1}{b^2+c^2}+\frac{1}{c^2+a^2}+\frac{1}{a^2+b^2}\right)\ge 9$$

Ta có: $Q\ge 3.\sqrt[3]{(b^2+c^2)(c^2+a^2)(a^2+b^2)}.3.\sqrt[3]{\dfrac{1}{(b^2+c^2)(c^2+a^2)(a^2+b^2)}}=9$

• ***Áp dụng:*** ***Sử dụng bất đẳng thức Bernoulli ta có::***

$$+\begin{cases}\dfrac{8m_a^2}{3(b^2+c^2)}+\sqrt{3}-1\ge\sqrt{3}\left(\dfrac{8m_a^2}{3(b^2+c^2)}\right)^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\\ \dfrac{8m_b^2}{3(c^2+a^2)}+\sqrt{3}-1\ge\sqrt{3}\left(\dfrac{8m_b^2}{3(c^2+a^2)}\right)^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\\ \dfrac{8m_c^2}{3(a^2+b^2)}+\sqrt{3}-1\ge\sqrt{3}\left(\dfrac{8m_c^2}{3(a^2+b^2)}\right)^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\end{cases}$$

$$\Rightarrow 3\sqrt{3}=\frac{8}{3}\cdot\frac{9}{8}+3\left(\sqrt{3}-1\right)=\frac{8}{3}\left(\frac{m_a^2}{b^2+c^2}+\frac{m_b^2}{c^2+a^2}+\frac{m_c^2}{a^2+b^2}\right)+3\left(\sqrt{3}-1\right)\ge$$

$$\geq \sqrt{3}\left(\frac{8}{3}\right)^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\left[\left(\frac{m_a^2}{b^2+c^2}\right)^{\frac{1}{\sqrt{3}}}+\left(\frac{m_b^2}{c^2+a^2}\right)^{\frac{1}{\sqrt{3}}}+\left(\frac{m_c^2}{a^2+b^2}\right)^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\right]$$

$\Rightarrow\left(\frac{m_a^2}{b^2+c^2}\right)^{\frac{1}{\sqrt{3}}}+\left(\frac{m_b^2}{c^2+a^2}\right)^{\frac{1}{\sqrt{3}}}+\left(\frac{m_c^2}{a^2+b^2}\right)^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\leq 3\left(\frac{3}{8}\right)^{\frac{1}{\sqrt{3}}}$. Với ΔABC đều thì $\text{Max}\, T = 3\left(\frac{3}{8}\right)^{\frac{1}{\sqrt{3}}}$

Bài 20. Cho ΔABC có độ dài 3 cạnh là a, b, c và độ dài 3 đường phân giác trong là l_a, l_b, l_c. Tìm giá trị lớn nhất của $T=\left(\frac{l_a}{b+c}\right)^{\frac{2}{\sqrt{5}}}+\left(\frac{l_b}{c+a}\right)^{\frac{2}{\sqrt{5}}}+\left(\frac{l_c}{a+b}\right)^{\frac{2}{\sqrt{5}}}$

Giải

• ***Bổ đề 1:*** $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}\geq\dfrac{3}{2}\quad \forall a,b,c>0$

• ***Bổ đề 2:*** $\dfrac{l_a}{b+c}+\dfrac{l_b}{c+a}+\dfrac{l_c}{a+b}\leq\dfrac{3\sqrt{3}}{4}\quad \forall\Delta ABC$

• ***Chứng minh:*** $l_a=\dfrac{2bc}{b+c}\sqrt{\dfrac{p(p-a)}{bc}}=\dfrac{2\sqrt{bc}}{b+c}\cdot\sqrt{p(p-a)}\leq\sqrt{p(p-a)}$ suy ra

$$+\begin{cases}\dfrac{l_a}{b+c}\leq\dfrac{\sqrt{p(p-a)}}{b+c}=\dfrac{\sqrt{(b+c+a)(3b+3c-3a)}}{2\sqrt{3}(b+c)}\leq\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\cdot\dfrac{2b+2c-a}{b+c}=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\left(2-\dfrac{a}{b+c}\right)\\[2ex] \dfrac{l_b}{c+a}\leq\dfrac{\sqrt{p(p-b)}}{c+a}=\dfrac{\sqrt{(c+a+b)(3c+3a-3b)}}{2\sqrt{3}(c+a)}\leq\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\cdot\dfrac{2c+2a-b}{c+a}=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\left(2-\dfrac{b}{c+a}\right)\\[2ex] \dfrac{l_c}{a+b}\leq\dfrac{\sqrt{p(p-c)}}{a+b}=\dfrac{\sqrt{(a+b+c)(3a+3b-3c)}}{2\sqrt{3}(a+b)}\leq\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\cdot\dfrac{2a+2b-c}{a+b}=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\left(2-\dfrac{c}{a+b}\right)\end{cases}$$

$$\Rightarrow\frac{l_a}{b+c}+\frac{l_b}{c+a}+\frac{l_c}{a+b}\leq\frac{1}{2\sqrt{3}}\left[6-\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)\right]\leq\frac{1}{2\sqrt{3}}\left(6-\frac{3}{2}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{4}$$

• ***Áp dụng:*** Sử dụng bất đẳng thức ***Bernoulli*** ta có:

$$+\begin{cases}\dfrac{4l_a}{\sqrt{3}(b+c)}+\dfrac{\sqrt{5}}{2}-1\geq\dfrac{\sqrt{5}}{2}\left(\dfrac{4l_a}{\sqrt{3}(b+c)}\right)^{\frac{2}{\sqrt{5}}}\\[2ex] \dfrac{4l_b}{\sqrt{3}(c+a)}+\dfrac{\sqrt{5}}{2}-1\geq\dfrac{\sqrt{5}}{2}\left(\dfrac{4l_b}{\sqrt{3}(c+a)}\right)^{\frac{2}{\sqrt{5}}}\\[2ex] \dfrac{4l_c}{\sqrt{3}(a+b)}+\dfrac{\sqrt{5}}{2}-1\geq\dfrac{\sqrt{5}}{2}\left(\dfrac{4l_c}{\sqrt{3}(a+b)}\right)^{\frac{2}{\sqrt{5}}}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\frac{3\sqrt{5}}{2}=\frac{4}{\sqrt{3}}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{4}+3\left(\frac{\sqrt{5}}{2}-1\right)\geq\frac{4}{\sqrt{3}}\sum_{a,b,c}\frac{l_a}{b+c}+3\left(\frac{\sqrt{5}}{2}-1\right)\geq\frac{\sqrt{5}}{2}\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^{\frac{2}{\sqrt{5}}}\sum_{a,b,c}\left(\frac{l_a}{b+c}\right)^{\frac{2}{\sqrt{5}}}$$

$$\Rightarrow T=\left(\frac{l_a}{b+c}\right)^{\frac{2}{\sqrt{5}}}+\left(\frac{l_b}{c+a}\right)^{\frac{2}{\sqrt{5}}}+\left(\frac{l_c}{a+b}\right)^{\frac{2}{\sqrt{5}}}\leq 3\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^{\frac{2}{\sqrt{5}}}$$

III. ĐIỂM RƠI KHÔNG ĐỐI XỨNG TRONG BERNOULLI

Trong các mục trước chúng ta đã xây dựng các bất đẳng thức đối xứng với luỹ thừa có số mũ là số vô tỉ dương. Các bất đẳng thức này đều có dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi các biến số bằng nhau. Trong mục này ta xét các bất đẳng thức không đối xứng với luỹ thừa có số mũ vô tỷ dương mà khi sử dụng bất đẳng thức Bernoulli dấu bằng xảy ra khi các biến số nhận các giá trị khác nhau.

1. BẤT ĐẲNG THỨC CƠ SỞ

$t^{\alpha} \ge \alpha.t + (1-\alpha)$ $\forall t > 0, \forall \alpha > 1$. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow t = 1$

Thay $t = \dfrac{u}{u_0}$ ta có: $\left(\dfrac{u}{u_0}\right)^{\alpha} + \alpha - 1 \ge \alpha \cdot \dfrac{u}{u_0}$

$\Leftrightarrow \boxed{u^{\alpha} + (\alpha-1)u_0^{\alpha} \ge \alpha u_0^{\alpha-1}.u}$ Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \boxed{u = u_0}$ (**)

2. CÁC BÀI TẬP MẪU MINH HỌA

Bài 1. Cho $\begin{cases} y \ge 3 \\ 3x + 2y \ge 12 \end{cases}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức S = $x^{\sqrt{2}} + y^{\sqrt{2}}$

Giải

Từ giả thiết suy ra: $\dfrac{y}{3} \ge 1; \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} \ge 2$. Sử dụng bất đẳng thức ***Bernoulli*** (**):

$$+\begin{cases} x^{\sqrt{2}} + (\sqrt{2}-1)2^{\sqrt{2}} \ge \sqrt{2}.2^{\sqrt{2}-1}x = \sqrt{2}\cdot\dfrac{x}{2}\cdot 2^{\sqrt{2}} \\ y^{\sqrt{2}} + (\sqrt{2}-1)3^{\sqrt{2}} \ge \sqrt{2}.3^{\sqrt{2}-1}y = \sqrt{2}\cdot\dfrac{y}{3}\cdot 3^{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^{\sqrt{2}} + y^{\sqrt{2}} + (\sqrt{2}-1)(2^{\sqrt{2}} + 3^{\sqrt{2}}) \ge \sqrt{2}\left[2^{\sqrt{2}}\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3}\right) + (3^{\sqrt{2}} - 2^{\sqrt{2}})\dfrac{y}{3}\right]$$

$$\ge \sqrt{2}(2^{\sqrt{2}}.2 + 3^{\sqrt{2}} - 2^{\sqrt{2}}) = \sqrt{2}(3^{\sqrt{2}} + 2^{\sqrt{2}}) \Rightarrow x^{\sqrt{2}} + y^{\sqrt{2}} \ge 2^{\sqrt{2}} + 3^{\sqrt{2}}$$

Với $x = 2$, $y = 3$ thì MinS = $2^{\sqrt{2}} + 3^{\sqrt{2}}$

Bài 2. Cho $\begin{cases} x, y, z > 0; x \ge 4 \\ 3x + 4y \ge 24 \\ 3x + 4y + 6z \ge 36 \end{cases}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của S = $x^{\sqrt{2}} + y^{\sqrt{2}} + z^{\sqrt{2}}$

Giải

Từ giả thiết suy ra: $\dfrac{x}{4} \ge 1; \dfrac{x}{4} + \dfrac{y}{3} \ge 2; \dfrac{x}{4} + \dfrac{y}{3} + \dfrac{z}{2} \ge 3$.

Sử dụng bất đẳng thức ***Bernoulli*** ta có:

$$+\begin{cases} x^{\sqrt{2}} + (\sqrt{2}-1)4^{\sqrt{2}} \ge \sqrt{2}.4^{\sqrt{2}-1}.x = \sqrt{2}\cdot\dfrac{x}{4}\cdot 4^{\sqrt{2}} \\ y^{\sqrt{2}} + (\sqrt{2}-1)3^{\sqrt{2}} \ge \sqrt{2}.3^{\sqrt{2}-1}.y = \sqrt{2}\cdot\dfrac{y}{3}\cdot 3^{\sqrt{2}} \\ z^{\sqrt{2}} + (\sqrt{2}-1)2^{\sqrt{2}} \ge \sqrt{2}.2^{\sqrt{2}-1}.z = \sqrt{2}\cdot\dfrac{z}{2}\cdot 2^{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^{\sqrt{2}}+y^{\sqrt{2}}+z^{\sqrt{2}}+(\sqrt{2}-1)(4^{\sqrt{2}}+3^{\sqrt{2}}+2^{\sqrt{2}})\geq\sqrt{2}\left(4^{\sqrt{2}}\cdot\frac{x}{4}+3^{\sqrt{2}}\cdot\frac{y}{3}+2^{\sqrt{2}}\cdot\frac{z}{2}\right)$$

$$=\sqrt{2}\left[\left(\frac{x}{4}+\frac{y}{3}+\frac{z}{2}\right)4^{\sqrt{2}}+\left(\frac{y}{3}+\frac{z}{2}\right)(3^{\sqrt{2}}-4^{\sqrt{2}})+\frac{z}{2}(2^{\sqrt{2}}-3^{\sqrt{2}})\right]$$

$$\geq\sqrt{2}\left[3.4^{\sqrt{2}}+2(3^{\sqrt{2}}-4^{\sqrt{2}})+(2^{\sqrt{2}}-3^{\sqrt{2}})\right]=\sqrt{2}(4^{\sqrt{2}}+3^{\sqrt{2}}+2^{\sqrt{2}})$$

$\Rightarrow x^{\sqrt{2}}+y^{\sqrt{2}}+z^{\sqrt{2}}\geq 4^{\sqrt{2}}+3^{\sqrt{2}}+2^{\sqrt{2}}$. Với $x=4,\ y=3,\ z=2$ thì $\text{Min } S=4^{\sqrt{2}}+3^{\sqrt{2}}+2^{\sqrt{2}}$

Bài 3. Cho $\begin{cases}4\geq x\geq y\geq z>0\\3x+4y\geq 2xy\\2xy+3xz+4yz\geq 3xyz\end{cases}$. Tìm giá trị lớn nhất của S = $x^{\sqrt{3}}+y^{\sqrt{3}}+z^{\sqrt{3}}$

Giải

Từ giả thiết suy ra $\frac{4}{x}\geq 1$; $\frac{4}{x}+\frac{3}{y}\geq 2$; $\frac{4}{x}+\frac{3}{y}+\frac{2}{z}\geq 3$.

Sử dụng bất đẳng thức ***Bernoulli*** ta có

$$+\begin{cases}4^{\sqrt{3}}+(\sqrt{3}-1)x^{\sqrt{3}}\geq\sqrt{3}.4.x^{\sqrt{3}-1}=\sqrt{3}\cdot\frac{4}{x}\cdot x^{\sqrt{3}}\\3^{\sqrt{3}}+(\sqrt{3}-1)y^{\sqrt{3}}\geq\sqrt{3}.3.y^{\sqrt{3}-1}=\sqrt{3}\cdot\frac{3}{y}\cdot y^{\sqrt{3}}\\2^{\sqrt{3}}+(\sqrt{3}-1)z^{\sqrt{3}}\geq\sqrt{3}.2.z^{\sqrt{3}-1}=\sqrt{3}\cdot\frac{2}{z}\cdot z^{\sqrt{3}}\end{cases}$$

$$\Rightarrow 4^{\sqrt{3}}+3^{\sqrt{3}}+2^{\sqrt{3}}+(\sqrt{3}-1)(x^{\sqrt{3}}+y^{\sqrt{3}}+z^{\sqrt{3}})\geq\sqrt{3}\left(\frac{4}{x}\cdot x^{\sqrt{3}}+\frac{3}{y}\cdot y^{\sqrt{3}}+\frac{2}{z}\cdot z^{\sqrt{3}}\right)$$

$$=\sqrt{3}\left[\left(\frac{4}{x}+\frac{3}{y}+\frac{2}{z}\right)x^{\sqrt{3}}+\left(\frac{3}{y}+\frac{2}{z}\right)(y^{\sqrt{3}}-x^{\sqrt{3}})+\frac{2}{z}(z^{\sqrt{3}}-y^{\sqrt{3}})\right]$$

$$\geq\sqrt{3}\left[3.x^{\sqrt{3}}+2(y^{\sqrt{3}}-x^{\sqrt{3}})+(z^{\sqrt{3}}-y^{\sqrt{3}})\right]=\sqrt{3}(x^{\sqrt{3}}+y^{\sqrt{3}}+z^{\sqrt{3}})$$

$\Rightarrow x^{\sqrt{3}}+y^{\sqrt{3}}+z^{\sqrt{3}}\leq 4^{\sqrt{3}}+3^{\sqrt{3}}+2^{\sqrt{3}}$. Với $x=4,\ y=3,\ z=2$ thì Max $=4^{\sqrt{3}}+3^{\sqrt{3}}+2^{\sqrt{3}}$

IV. BÀI TẬP DÀNH CHO BẠN ĐỌC TỰ GIẢI

Bài 1. Cho $\begin{cases}2a+3b+4c\geq 3\\a,b,c>0\end{cases}$ Chứng minh rằng: $2a^{\sqrt{2}}+3b^{\sqrt{2}}+4c^{\sqrt{2}}\geq 3^{2-\sqrt{3}}$

Bài 2. Cho $\begin{cases}a+b+c\geq 3\\a,b,c>0\end{cases}$ Chứng minh rằng: $a^{\sqrt{5}}+2^{1-\sqrt{5}}b^{\sqrt{5}}+3^{1-\sqrt{5}}c^{\sqrt{5}}\geq 3\times 2^{1-\sqrt{5}}$

Bài 3. Cho $\begin{cases}a+b+c\geq 3\\a,b,c>0\end{cases}$ Chứng minh rằng: $2^{1-\sqrt{2}}a^{\sqrt{2}}+3^{1-\sqrt{2}}b^{\sqrt{2}}+4^{1-\sqrt{2}}c^{\sqrt{2}}\geq 3^{2-\sqrt{3}}$

Bài 4. Cho a, b, c là 3 cạnh của tam giác, $\alpha, \beta \geq 1$. Chứng minh các bất đẳng thức sau:

1. $\left(\frac{3a}{2b+c}\right)^{\alpha}+\left(\frac{3b}{2c+a}\right)^{\alpha}+\left(\frac{3c}{2a+b}\right)^{\alpha} \geq \left(\frac{3a}{2b+c}\right)^{\beta}+\left(\frac{3b}{2c+a}\right)^{\beta}+\left(\frac{3c}{2a+b}\right)^{\beta}$

2. $\left(\frac{3a}{2b+2c-a}\right)^{\alpha}+\left(\frac{3b}{2c+2a-b}\right)^{\alpha}+\left(\frac{3c}{2a+2b-c}\right)^{\alpha}$

$\geq \left(\frac{3a}{2b+2c-a}\right)^{\beta}+\left(\frac{3b}{2c+2a-b}\right)^{\beta}+\left(\frac{3c}{2a+2b-c}\right)^{\beta}$

Bài 5. Cho $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ \alpha > \beta > 0 \end{cases}$. Chứng minh: $\left(\frac{a^2}{bc}\right)^{\alpha}+\left(\frac{b^2}{ac}\right)^{\alpha}+\left(\frac{c^2}{ab}\right)^{\alpha} \geq \left(\frac{a^2}{bc}\right)^{\beta}+\left(\frac{b^2}{ac}\right)^{\beta}+\left(\frac{c^2}{ab}\right)^{\beta}$

Bài 6. Cho $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ \alpha > \beta \geq \frac{2}{3} \end{cases}$. Chứng minh: $\left(\frac{2a}{b+c}\right)^{\alpha}+\left(\frac{2a}{b+c}\right)^{\alpha}+\left(\frac{2a}{b+c}\right)^{\alpha} \geq \left(\frac{2a}{b+c}\right)^{\beta}+\left(\frac{2a}{b+c}\right)^{\beta}+\left(\frac{2a}{b+c}\right)^{\beta}$

Bài 7. Cho $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ \alpha > \beta \geq 1 \end{cases}$. Chứng minh các bất đẳng thức sau:

1. $\left(\frac{3a}{\sqrt{a^2+8bc}}\right)^{\alpha}+\left(\frac{3b}{\sqrt{b^2+8ca}}\right)^{\alpha}+\left(\frac{3c}{\sqrt{c^2+8ab}}\right)^{\alpha}$

$\geq \left(\frac{3a}{\sqrt{a^2+8bc}}\right)^{\beta}+\left(\frac{3b}{\sqrt{b^2+8ca}}\right)^{\beta}+\left(\frac{3c}{\sqrt{c^2+8ab}}\right)^{\beta}$

2. $\left(\frac{2a^2}{bc+ca}\right)^{\alpha}+\left(\frac{2b^2}{ca+ab}\right)^{\alpha}+\left(\frac{2c^2}{ab+bc}\right)^{\alpha} \geq \left(\frac{2a^2}{bc+ca}\right)^{\beta}+\left(\frac{2b^2}{ca+ab}\right)^{\beta}+\left(\frac{2c^2}{ab+bc}\right)^{\beta}$

3. $\left(\frac{a^2+bc}{a(b+c)}\right)^{\alpha}+\left(\frac{b^2+ac}{b(a+c)}\right)^{\alpha}+\left(\frac{b^2+ab}{c(a+b)}\right)^{\alpha} \geq \left(\frac{a^2+bc}{a(b+c)}\right)^{\beta}+\left(\frac{b^2+ac}{b(a+c)}\right)^{\beta}+\left(\frac{b^2+ab}{c(a+b)}\right)^{\beta}$

4. $\left(\frac{4a^3+4b^3}{(a+b)^3}\right)^{\alpha}+\left(\frac{4b^3+4c^3}{(b+c)^3}\right)^{\alpha}+\left(\frac{4c^3+4a^3}{(c+a)^3}\right)^{\alpha} \geq \left(\frac{4a^3+4b^3}{(a+b)^3}\right)^{\beta}+\left(\frac{4b^3+4c^3}{(b+c)^3}\right)^{\beta}+\left(\frac{4c^3+4a^3}{(c+a)^3}\right)^{\beta}$

5. $\sum_{cyc}\left(\frac{6(a+b-3c)^2}{2c^2+(b+a)^2}\right)^{\alpha} \geq \sum_{cyc}\left(\frac{6(a+b-3c)^2}{2c^2+(b+a)^2}\right)^{\beta}$

6. $\sum_{cyc}\left(\frac{3a}{\sqrt{a^2+2(b+c)^2}}\right)^{\alpha} \geq \sum_{cyc}\left(\frac{3a}{\sqrt{a^2+2(b+c)^2}}\right)^{\beta}$

7. $\sum_{cyc}\left(\frac{2\sqrt{a^3c}}{\sqrt{b^3a}+bc}\right)^{\alpha} \geq \sum_{cyc}\left(\frac{2\sqrt{a^3c}}{\sqrt{b^3a}+bc}\right)^{\beta}$ **8.** $\sum_{cyc}\left(\frac{3b^4}{c\sqrt{5a^6+4b^3c^3}}\right)^{\alpha} \geq \sum_{cyc}\left(\frac{3b^4}{c\sqrt{5a^6+4b^3c^3}}\right)^{\beta}$

9. $\sum_{cyc}\left(\frac{5a^2}{a^2+(b+c)^2}\right)^{\alpha} \geq \sum_{cyc}\left(\frac{5a^2}{a^2+(b+c)^2}\right)^{\beta}$ **10.** $\sum_{cyc}\left(\frac{9a^3}{a^3+(b+c)^3}\right)^{\alpha} \geq \sum_{cyc}\left(\frac{9a^3}{a^3+(b+c)^3}\right)^{\beta}$

§12. BẤT ĐẲNG THỨC JENSEN VÀ KỸ THUẬT SỬ DỤNG

§12.1. HÀM LỒI, HÀM LÕM VÀ BẤT ĐẲNG THỨC JENSEN

I. KHÁI NIỆM VỀ HÌNH LỒI

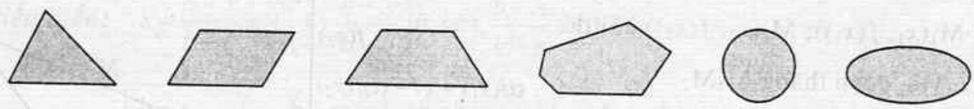
1. Định nghĩa

Một bộ phận $\mathcal{H}$ của mặt phẳng gọi là hình lồi khi và chỉ khi với hai điểm bất kỳ A và B thuộc $\mathcal{H}$ thì đoạn thẳng AB cũng nằm hoàn toàn ở trong $\mathcal{H}$

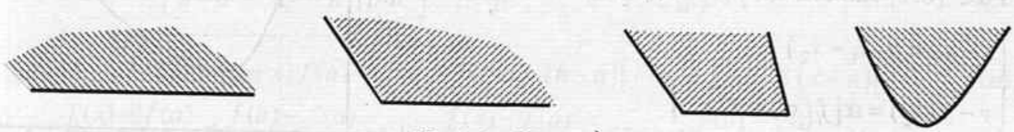
$\Leftrightarrow \forall A, B \in \mathcal{H}, [AB] \subset \mathcal{H} \Leftrightarrow \left\{A + \alpha\overrightarrow{AB} \,\middle|\, \alpha \in [0,1]\right\} \subset \mathcal{H}$

Nếu một hình lồi có thể phủ nó bởi một hình tròn đủ lớn thì gọi là hình lồi đóng và ngược lại một hình lồi không có tính chất như vậy gọi là một hình lồi mở.

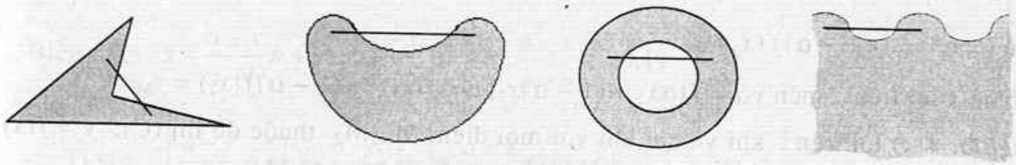
2. CÁC VÍ DỤ HÌNH HỌC VỀ HÌNH LỒI VÀ HÌNH KHÔNG LỒI



Hình 1: Hình lồi đóng



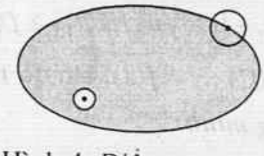
Hình 2: Hình lồi mở



Hình 3: Hình không lồi

3. ĐIỂM TRONG, ĐIỂM BIÊN VÀ BIÊN CỦA MỘT HÌNH LỒI

- Điểm M gọi là điểm trong của hình lồi $\mathcal{H}$ nếu tồn tại một hình tròn tâm M nằm hoàn toàn trong hình lồi $\mathcal{H}$.



Hình 4: Điểm trong và điểm biên

- Điểm $N \in \mathcal{H}$ gọi là điểm biên của hình lồi $\mathcal{H}$ nếu mọi hình tròn tâm N đều có ít nhất một điểm không nằm trong $\mathcal{H}$.

- Một hình lồi đóng có thể có điểm biên hoặc không có điểm biên nhưng nếu có điểm biên thì tập hợp các điểm biên là một đường liên tục khép kín và được gọi là biên của hình lồi. Nói chung người ta chỉ xét đến các hình lồi đóng có biên còn gọi là Oval.

II. HÀM LỒI, HÀM LÕM

1. Định nghĩa hàm lồi, hàm lõm

Giả sử $\mathbb{I}$ là một khoảng trong $\mathbb{R}$ tức là $\mathbb{I}$ thuộc 1 trong 9 khoảng sau:

$(-\infty, a)$; $(-\infty, a]$; (a, b); $(a, b]$; $[a, b)$; $[a, b]$; $(b, +\infty)$; $[b, +\infty)$; $(-\infty, +\infty)$

- Hàm số $f:\mathbb{I}\to\mathbb{R}$ được gọi là lồi trên khoảng $\mathbb{I}$ khi và chỉ khi

$\forall x_1, x_2\in\mathbb{I}$, $\forall\alpha\in[0,1]$ ta có $f(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2)\le\alpha f(x_1)+(1-\alpha)f(x_2)$

- Hàm số $f:\mathbb{I}\to\mathbb{R}$ được gọi là lõm trên khoảng $\mathbb{I}$ khi và chỉ khi $(-f)$ lồi trên $\mathbb{I}$

$\Leftrightarrow\forall x_1, x_2\in\mathbb{I}$, $\forall\alpha\in[0,1]$ ta có $f(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2)\ge\alpha f(x_1)+(1-\alpha)f(x_2)$

Sau đây chúng ta chỉ xét đại diện các ý nghĩa và tính chất của hàm lồi.

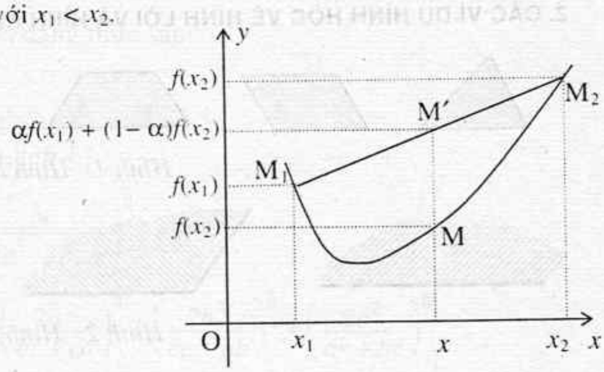
2. Ý nghĩa hình học

Giả sử f lồi trên $\mathbb{I}$. Lấy bất kỳ $x_1, x_2\in\mathbb{I}$ với $x_1<x_2$.

Gọi $M_1(x_1, f(x_1))$; $M_2(x_2, f(x_2))$ khi đó

$M'(x, y)\in$ đoạn thẳng M_1M_2

$\Leftrightarrow\exists\,\alpha\in[0,1]$ sao cho $\overrightarrow{M_2M'}=\alpha\overrightarrow{M_2M_1}$



$$\Leftrightarrow\begin{cases}x-x_2=\alpha(x_1-x_2)\\ y-f(x_2)=\alpha[f(x_1)-f(x_2)]\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=\alpha x_1+(1-\alpha)x_2\\ y=\alpha f(x_1)+(1-\alpha)f(x_2)\end{cases}$$

Vì hàm f lồi trên $\mathbb{I}$ nên $y_M=f[\alpha x_1+(1-\alpha)x_2]\le\alpha f(x_1)+(1-\alpha)f(x_2)=y_{M'}$

Ý nghĩa: $f(x)$ lồi trên $\mathbb{I}$ khi và chỉ khi với mọi điểm M_1, M_2 thuộc đồ thị (C): $y=f(x)$, đều có cung M_1M_2 của đồ thị (C) nằm ở phía dưới đoạn thẳng M_1M_2.

3. Quan hệ giữa Hàm lồi và Hình lồi

Gọi $\mathcal{H}_f=\{(x, y)\in I\times R\,|\,y\ge f(x)\}$ suy ra $\mathcal{H}_f$ là bộ phận của mặt phẳng nằm ở phía trên của đồ thị (C) : $y=f(x)$, khi đó f lồi khi và chỉ khi $\mathcal{H}_f$ là hình lồi

Chứng minh:

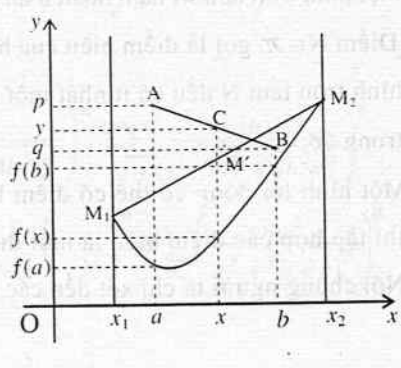
Lấy bất kỳ $A, B\in\mathcal{H}_f$, gọi C là điểm bất kỳ$\in[AB]\Leftrightarrow C=\alpha.\overrightarrow{AB}$ với $\alpha\in[0,1]$

Giả sử $A(a, p)$, $B(b, q)$, $C(x, y)$

$\Rightarrow x=a+\alpha(b-a)=(1-\alpha)a+\alpha b$

Do f lồi theo định nghĩa ta có

$f(x)=f\left((1-\alpha)a+\alpha b\right)\le(1-\alpha)f(a)+\alpha f(b)$



Vì A, B $\in \mathcal{H}_f$ nên $f(a) \le p$, $f(b) \le q \Rightarrow f(x) \le (1-\alpha)p + \alpha q = y \Rightarrow C \in \mathcal{H}_f$

$\Rightarrow \forall A, B \in \mathcal{H}_f$, $[AB] \subset \mathcal{H}_f \Rightarrow \mathcal{H}_f$ là hình lồi.

Đảo lại: Giả sử $\mathcal{H}_f$ là hình lồi với biên là đồ thị $f(x)$ trên $\mathbb{I}$.

Lấy bất kỳ $x_1, x_2 \in \mathbb{I}$ và đặt $x = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2$ với $\alpha \in [0,1]$.

$M_1(x_1, f(x_1))$, $M_2(x_2, f(x_2))$, $M(x, f(x))$. Do $M_1, M_2 \in \mathcal{H}_f$ nên $[M_1M_2] \subset \mathcal{H}_f$

Mà điểm $M' \in [M_1M_2] \Rightarrow M'\left(x, \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2)\right) \in \mathcal{H}_f$

$\Rightarrow f(x) = f(\alpha x_1 + (1-\alpha x_2)) \le \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2) \Rightarrow f$ lồi trên $\mathbb{I}$

4. Dấu hiệu nhận biết hàm lồi

4.1. Định lý: Giả sử f có đạo hàm trên $\mathbb{I}$, khi đó f lồi trên $\mathbb{I}$ khi và chỉ khi f' tăng trên $\mathbb{I}$

Chứng minh: Giả sử f lồi và $a, b \in \mathbb{I}$ với $a < b$. Lấy bất kỳ $x \in (a, b)$

Biểu diễn: $x = \dfrac{b-x}{b-a}.a + \left(1 - \dfrac{b-x}{b-a}\right)b$ với $\dfrac{b-x}{b-a} \in (0,1)$

$$\Rightarrow f(x) = f\left[\frac{b-x}{b-a}.a + \left(1-\frac{b-x}{b-a}\right)b\right] \le \frac{b-x}{b-a} f(a) + \left(1-\frac{b-x}{b-a}\right) f(b)$$

$$\Leftrightarrow (b-a) f(x) \le (b-x) f(a) + (x-a) f(b) \Leftrightarrow (b-a)[f(x) - f(a)] \le (x-a)[f(b) - f(a)]$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \le \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \Rightarrow \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a) \le \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \quad (1)$$

Biểu diễn $x = \dfrac{a-x}{a-b}.b + \left(1 - \dfrac{a-x}{a-b}\right)a$ với $\dfrac{a-x}{a-b} \in (0,1)$

$$\Rightarrow f(x) = f\left[\frac{a-x}{a-b}.b + \left(1-\frac{a-x}{a-b}\right)a\right] \le \frac{a-x}{a-b} f(b) + \left(1-\frac{a-x}{a-b}\right) f(a)$$

$$\Leftrightarrow (a-b) f(x) \le (a-x) f(b) + (x-b) f(a) \Leftrightarrow (a-b)[f(x) - f(b)] \le (x-b)[f(a) - f(b)]$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x)-f(b)}{x-b} \ge \frac{f(a)-f(b)}{a-b} \Rightarrow f'(b) = \lim_{x \to b} \frac{f(x)-f(b)}{x-b} \ge \frac{f(a)-f(b)}{a-b} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \quad (2)$$

Từ (1), (2) $\Rightarrow f'(a) \le f'(b) \Rightarrow f'$ tăng trên $\mathbb{I}$

• **Đảo lại**: Giả sử f' tăng trên $\mathbb{I}$ và $a, b \in \mathbb{I}$ với $a < b$; $\alpha \in (0,1)$, lấy $x \in (a, b)$

Suy ra $x = \alpha a + (1-\alpha)b$ (chú ý: $\alpha = 0$, $\alpha = 1$ thì bất đẳng thức luôn đúng).

Sử dụng định lý ***Lagrange*** ta có:

$$\begin{cases}\exists c\in(a,x)\\ \exists d\in(x,b)\end{cases}\text{sao cho}\begin{cases}f'(c)=\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\dfrac{f(x)-f(a)}{(1-\alpha)(b-a)}\\ f'(d)=\dfrac{f(b)-f(x)}{b-x}=\dfrac{f(b)-f(x)}{\alpha(b-a)}\end{cases}$$

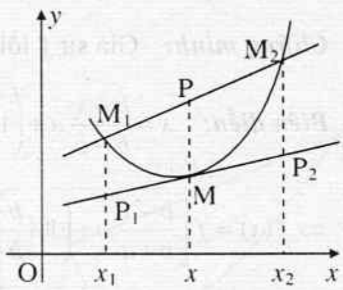
Do f' tăng trên $f'(c)\le f'(d)\Leftrightarrow\dfrac{f(x)-f(a)}{(1-\alpha)(b-a)}\le\dfrac{f(b)-f(x)}{\alpha(b-a)}$

$\Leftrightarrow\alpha\left[f(x)-f(a)\right]\le(1-\alpha)\left[f(b)-f(x)\right]\Leftrightarrow f(x)\le\alpha f(a)+(1-\alpha)f(b)\Rightarrow f$ lồi

Hệ quả: Giả sử f có đạo hàm đến cấp hai, khi đó f lồi khi và chỉ khi $f''\ge 0\ \forall x\in\mathbb{I}$

4.2. Định lý 2:

Giả sử f có đạo hàm trên khoảng $\mathbb{I}$. Nếu tiếp tuyến tại mỗi điểm của đường cong (C): $y=f(x)$ đều nằm về phía dưới của (C), thì f lồi trên $\mathbb{I}$



Chứng minh: Giả sử $M_1(x_1, f(x_1))$; $M_2(x_2, f(x_2))$ là 2 điểm bất kỳ thuộc (C): $y=f(x)$ với $x_1<x_2\in\mathbb{I}$. Lấy điểm $M(x, f(x))\in(C)$, $P\in M_1M_2$ với $x_1<x<x_2$ và $x_P=x$. Ta cần chứng minh $y_M<y_P$.

Gọi P_1, P_2 là các giao điểm của tiếp tuyến tại M với 2 đường thẳng $x=x_1$ và $x=x_2$. Giả sử các đường thẳng P_1P_2 và M_1M_2 lần lượt có phương trình là: $y=g(x)$ và $y=\varphi(x)$. Theo giả thiết thì tiếp tuyến nằm về phía dưới của (C) $\forall x\in\mathbb{I}$ nên $y_{P_1}<y_{M_1}$ và $y_{P_2}<y_{M}$,

$\Rightarrow P_1P_2$ nằm ở phía dưới $M_1M_2\Leftrightarrow g(\alpha)<\varphi(\alpha)\ \ \forall\alpha\in(x_1,x_2)\Rightarrow y_P<y_M\Rightarrow f$ lồi trên $\mathbb{I}$

4.3. Định lý 3: Giả sử f là một hàm liên tục trên khoảng $\mathbb{I}$ thỏa mãn điều kiện

$f\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\le\dfrac{f(x)+f(y)}{2}\quad\forall x,y\in\mathbb{I}$ (1). Chứng minh rằng hàm f lồi trên $\mathbb{I}$, hoặc

$f\left[(1-\alpha)x+\alpha y\right]\le(1-\alpha)f(x)+\alpha f(y)\quad\forall x,y\in\mathbb{I}$ và $\forall\alpha\in[0,1]$ (2)

Giải

• ***Bổ đề 1:*** Với mỗi $n\in\mathbb{N}^*$ ta có bất đẳng thức

$$f\left(\frac{m}{2^n}x+\frac{2^n-m}{2^n}y\right)\le\frac{m}{2^n}f(x)+\frac{2^n-m}{2^n}f(y)\quad\forall m\in[0,2^n],\ m\in\mathbb{N},\ \forall x,y\in\mathbb{I}\quad(3)$$

• ***Chứng minh:*** Ta chứng minh bằng quy nạp theo $n\in\mathbb{N}^*$

+ Với $n=1$, thì $m\in\{0,1,2\}$, sử dụng (1) dễ thấy (3) đúng

+ Giả sử (3) đúng đến $n=k\in\mathbb{N}^*$, ta chứng minh (3) đúng với $n=k+1$.

Nếu m chẵn, $m = 2p$ với $0 \le p \le 2^k$ thì $\frac{m}{2^{k+1}} = \frac{p}{2^k}; \frac{2^{k+1}-m}{2^{k+1}} = \frac{2^k - p}{2^k}$

$$\Rightarrow f\left(\frac{m}{2^{k+1}}x + \frac{2^{k+1}-m}{2^{k+1}}y\right) = f\left(\frac{p}{2^k}x + \frac{2^k - p}{2^k}y\right) \le \frac{p}{2^k}f(x) + \frac{2^k - p}{2^k}f(y) = \frac{m}{2^{k+1}}f(x) + \frac{2^{k+1}-m}{2^{k+1}}f(y)$$

Nếu m lẻ: Để ý rằng trong (1) vai trò của x, y có tính đối xứng nên không mất tính tổng quát có thể giả sử $0 < m < 2^k$. Theo giả thiết quy nạp ta có:

$$f\left(\frac{m}{2^{k+1}}x + \frac{2^{k+1}-m}{2^{k+1}}y\right) = f\left(\frac{2p+1}{2^{k+1}}x + \frac{2^{k+1}-2p-1}{2^{k+1}}y\right)$$

$$= f\left(\frac{1}{2}\left(\frac{2p+1}{2^k}x + \frac{2^k-2p-1}{2^k}y\right) + \frac{1}{2}y\right) \le \frac{1}{2}f\left(\frac{2p+1}{2^k}x + \frac{2^k-2p-1}{2^k}y\right) + \frac{1}{2}f(y)$$

$$\le \frac{1}{2}\cdot\frac{2p+1}{2^k}f(x) + \frac{1}{2}\cdot\frac{2^k-2p-1}{2^k}f(y) + \frac{1}{2}f(y) = \frac{2p+1}{2^{k+1}}f(x) + \frac{2^{k+1}-2p-1}{2^{k+1}}f(y)$$

$$= \frac{m}{2^{k+1}}f(x) + \frac{2^{k+1}-m}{2^{k+1}}f(y) \Rightarrow f\left(\frac{m}{2^{k+1}}x + \frac{2^{k+1}-m}{2^{k+1}}y\right) \le \frac{m}{2^{k+1}}f(x) + \frac{2^{k+1}-m}{2^{k+1}}f(y)$$

Ta đã chứng minh (3) đúng với m chẵn và m lẻ nên (3) đúng với $n = k+1$

Theo nguyên lý quy nạp suy ra bổ đề được chứng minh.

• ***Bổ đề 2:*** Giả sử $\alpha \in [0, 1]$, khi đó tồn tại dãy số $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sao cho

$$a_n \in \mathbb{N} \cap [0, 2^n] \text{ và } \lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{2^n} = \alpha$$

• ***Chứng minh:*** Với mỗi $n \in \mathbb{N}^*$: $[0, 1] = \bigcup_{m=0}^{2^n-1}\left[\frac{m}{2^n}, \frac{m+1}{2^n}\right]$ suy ra tồn tại

$a_n \in \mathbb{N} \cap [0, 2^n - 1]$ sao cho $\frac{a_n}{2^n} \le \alpha \le \frac{a_n+1}{2^n}$.

Do $\left|\frac{a_n}{2^n} - \alpha\right| \le \frac{a_n + 1 - a_n}{2^n} = \frac{1}{2^n}$ và $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2^n} = 0$ nên $\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{2^n} = \alpha$

• ***Áp dụng:*** Với mỗi $\alpha \in [0, 1]$, theo ***bổ đề 2*** thì tồn tại dãy $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sao cho

$a_n \in \mathbb{N} \cap [0, 2^n]$ và $\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{2^n} = \alpha$. Theo ***bổ đề 1*** thì $\forall x, y \in \mathbb{I}$ ta có

$$f\left(\frac{a_n}{2^n}y + \frac{2^n - a_n}{2^n}x\right) \le \frac{a_n}{2^n}f(y) + \frac{2^n - a_n}{2^n}f(x) \qquad (4)$$

Do f liên tục nên $\lim_{n\to+\infty} f\left(\frac{a_n}{2^n}y + \frac{2^n-a_n}{2^n}x\right) \le \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{a_n}{2^n}f(y) + \frac{2^n - a_n}{2^n}f(x)\right]$

$\Leftrightarrow f[(1-\alpha)x + \alpha y] \le (1-\alpha)f(x) + \alpha f(y)$ $\forall x, y \in \mathbb{I}$ với $\forall \alpha \in [0,1] \Leftrightarrow f$ lồi trên $\mathbb{I}$

Bình luận: Với kết quả trên ta có thể thay thế định nghĩa hàm lồi bởi điều kiện đơn giản hơn: Hàm f lồi trên khoảng $\mathbb{I} \Leftrightarrow f\left(\frac{x+y}{2}\right) \le \frac{f(x)+f(y)}{2}$, $\forall x, y \in \mathbb{I}$

5. Các ví dụ về hàm lồi

- $y = x^{\alpha}$ $(x > 0) \Rightarrow y'' = \alpha(\alpha - 1)x^{\alpha - 2} \Rightarrow y$ là hàm số lồi với $\alpha < 0$ hoặc $\alpha > 1$
- $y = a^x$ $(0 < a \neq 1) \Rightarrow y'' = a^x.\ln^2 a > 0 \Rightarrow y$ là hàm số lồi
- $y = \log_a x \Rightarrow y'' = \dfrac{-1}{x^2 \ln a} > 0\ \forall\ 0 < a < 1 \Rightarrow y$ là hàm số lồi $\forall 0 < a < 1$
- $y = x\ln x \Rightarrow y'' = \dfrac{1}{x} > 0\ \forall x > 0 \Rightarrow y$ là hàm số lồi $\forall x > 0$
- $y = \ln(1 + e^x) \Rightarrow y'' = \dfrac{e^x}{(1 + e^x)^2} > 0 \Rightarrow y$ là hàm số lồi $\forall x \in \mathbb{R}$
- $y = (1 + x^{\alpha})^{\frac{1}{\alpha}}$ $(x > 0) \Rightarrow y'' = (\alpha - 1)x^{\alpha - 2}(1 + x^{\alpha})^{\frac{1}{\alpha} - 2} \Rightarrow y'' > 0\ \forall \alpha > 1$

và $y'' < 0\ \forall \alpha < 1$ suy ra y là hàm số lồi nếu $\alpha > 1$ và hàm số lõm nếu $\alpha < 1$

III. BẤT ĐẲNG THỨC JENSEN

1. Giả sử $x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{I}$ và $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in [0;1]$ với $\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n = 1$. Khi đó ta có

a. Nếu $f(x)$ lồi trên $\mathbb{I}$ thì $f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n) \leq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + ... + \alpha_n f(x_n)$ (1)

b. Nếu $f(x)$ lõm trên $\mathbb{I}$ thì $f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n) \geq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + ... + \alpha_n f(x_n)$

Chứng minh

1a. Với $n = 1$, (1) là đẳng thức; với $n = 2$ thì (1) đúng (theo định nghĩa của hàm lồi)

Giả sử (1) đúng với $n \in \mathbb{N}^*$ ta phải chứng minh (1) đúng với $(n + 1)$.

Xét $x_1, ..., x_n, x_{n+1} \in \mathbb{I}$ và $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n, \alpha_{n+1} \in [0;1]$ với $\alpha_1 + ... + \alpha_n + \alpha_{n+1} = 1$

Nếu $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$ suy ra $\alpha_{n+1} = 1$ thì hiển nhiên (1) đúng với $(n + 1)$

Giả sử $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \neq (0,0,....,0)$; đặt $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n = 1 - \alpha_{n+1} > 0$

và $x_0 = \dfrac{\alpha_1 x_1 + ... + \alpha_n x_n}{\alpha} \in I$. Sử dụng định nghĩa hàm lồi của f, ta có

$$f(\alpha_1 x_1 + ... + \alpha_n x_n + \alpha_{n+1} x_{n+1}) = f(\alpha x_0 + (1 - \alpha)x_{n+1})$$

$$\leq \alpha f(x_0) + (1 - \alpha) f(x_{n+1}) = \alpha f(x_0) + \alpha_{n+1} f(x_{n+1}) = \alpha f\left(\frac{\alpha_1}{\alpha} x_1 + ... + \frac{\alpha_n}{\alpha} x_n\right) + \alpha_{n+1} f(x_{n+1})$$

$$\leq \alpha\left[\frac{\alpha_1}{\alpha} f(x_1) + ... + \frac{\alpha_n}{\alpha} f(x_n)\right] + \alpha_{n+1} f(x_{n+1}) = \alpha_1 f(x_1) + ... + \alpha_n f(x_n) + \alpha_{1+1} f(x_{1+1})$$

Do (1) đúng với $(n + 1)$ nên theo nguyên lý qui nạp ta có (1) đúng với $\forall n \in \mathbb{N}^*$

2. Bất đẳng thức hệ quả

- Giả sử $x_1, ..., x_n \in \mathbb{I}$ và $m_1, m_2, ..., m_n > 0$. Đặt $m = m_1 + m_2 + ... + m_n$ và

$$\alpha_1 = \frac{m_1}{m}, \alpha_2 = \frac{m_2}{m}, ..., \alpha_n = \frac{m_n}{m} \Rightarrow \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in [0;1],\ \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n = 1$$

Khi đó ta có bất đẳng thức $f\left(\dfrac{m_1 x_1 + ... + m_n x_n}{m_1 + m_2 + ... + m_n}\right) \leq \dfrac{m_1 f(x_1) + ... + m_n f(x_n)}{m_1 + m_2 + ... + m_n}$

- Lấy $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = \dfrac{1}{n} \Rightarrow f\left(\dfrac{x_1 + ... + x_n}{n}\right) \leq \dfrac{f(x_1) + ... + f(x_n)}{n}$

§12.2. KỸ THUẬT SỬ DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC JENSEN

1. Các bài tập mẫu minh họa

Bài 1. Chứng minh rằng: $\dfrac{a_1+a_2+...+a_n}{n} \ge \sqrt[n]{a_1.a_2...a_n}\ \ \forall a_1,a_2,...,a_n \ge 0$

(Bất đẳng thức AM – GM)

Chứng minh

• Nếu $\text{Min}\{a_1, a_2, ..., a_n\} = 0$ thì $a_1a_2...a_n = 0$ suy ra (đpcm)

• Xét trường hợp còn lại: $\text{Min}\{a_1, a_2, ..., a_n\} > 0$.

Đặt $f(x) = -\ln x$ với $x > 0$. Ta có $f'(x) = \dfrac{-1}{x}$; $f''(x) = \dfrac{1}{x^2} > 0$

$\Rightarrow f(x)$ là hàm lồi với $x > 0$. Sử dụng bất đẳng thức ***Jensen*** ta có

$$-\ln\left(\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}\right) \le -\frac{\ln a_1+\ln a_2+...+\ln a_n}{n} = -\ln\sqrt[n]{a_1a_2...a_n}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a_1+a_2+...+a_n}{n} \ge \sqrt[n]{a_1a_2...a_n}\quad \forall a_1,a_2,...,a_n > 0$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a_1 = a_2 = ... = a_n$

Bài 2. Cho $a_1, a_2,..., a_n, b_1, b_2,..., b_n$ là $2n$ số thực. Chứng minh rằng:

$$\left(a_1^2+a_2^2...+a_n^2\right)\left(b_1^2+b_2^2...+b_n^2\right) \ge \left(a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n\right)^2$$

(Bất đẳng thức BunhiaCôpski)

Chứng minh

Xét $f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x \Rightarrow f''(x) = 2 > 0 \Rightarrow f(x)$ lồi trên $\mathbb{R}$

Sử dụng bất đẳng thức ***Jensen*** với $\alpha_1, \alpha_2,..., \alpha_n \ge 0$ ta có

$$f\left(\frac{\alpha_1}{\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i}x_1+\frac{\alpha_2}{\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i}x_2+...+\frac{\alpha_n}{\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i}x_n\right) \le \sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha_k}{\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i}f(x_k)$$

Từ đó suy ra $\dfrac{(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+...+\alpha_nx_n)^2}{(\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n)^2} \le \dfrac{\alpha_1x_1^2+\alpha_2x_2^2+...+\alpha_nx_n^2}{\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n}$

$$\Leftrightarrow (\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+...+\alpha_nx_n)^2 \le (\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n)(\alpha_1x_1^2+\alpha_2x_2^2+...+\alpha_nx_n^2)$$

Đặt $\alpha_i = b_i^2, x_i = \dfrac{a_i}{b_i}$ và thế vào bất đẳng thức trên ta có

$$(a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n)^2 \le \left(a_1^2+a_2^2...+a_n^2\right)\left(b_1^2+b_2^2...+b_n^2\right)$$

Bài 3. Cho $a_1,...,a_n, b_1,...,b_n > 0$; $p, q > 0$ và $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Chứng minh rằng:

$$\left(a_1^p+a_2^p+...+a_1^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(b_1^q+b_2^q+...+b_1^q\right)^{\frac{1}{q}} \ge a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n$$

(Bất đẳng thức Holder)

Chứng minh

Do $p, q > 0$ và $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ nên $Max(p, q) > 1$, giả sử $p > 1$.

Xét hàm số $f(x) = x^p$ với $x > 0$, $p > 1$. Ta có $f'(x) = p.x^{p-1} \Rightarrow$

$f''(x) = p(p-1)x^{p-2} > 0\ \forall x > 0, p > 1 \Rightarrow f(x)$ là hàm số lồi $\forall x > 0$

Đặt $\alpha_1 = \frac{b_1^q}{\sum_{k=1}^n b_k^q}, \alpha_2 = \frac{b_2^q}{\sum_{k=1}^n b_k^q}, ..., \alpha_n = \frac{b_n^q}{\sum_{k=1}^n b_k^q} \Rightarrow \alpha_i \in [0,1]$ và $\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n = 1$

Đặt $x_1 = a_1b_1^{1-q}; x_2 = a_2b_2^{1-q}; ...; x_n = a_nb_n^{1-q} \Rightarrow x_1, x_2, ..., x_n > 0$

Sử dụng bất đẳng thức ***Jensen*** ta có:

$$f(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+...+\alpha_nx_n) \le \alpha_1f(x_1)+\alpha_2f(x_2)+...+\alpha_nf(x_n)$$

$$\Leftrightarrow f\left(\frac{a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n}{b_1^q+b_2^q+...+b_n^q}\right) \le \frac{b_1^q}{\sum_{k=1}^n b_k^q}.\left(a_1b_1^{1-q}\right)^p+...+\frac{b_n^q}{\sum_{k=1}^n b_k^q}.\left(a_nb_n^{1-q}\right)^p$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n}{b_1^q+b_2^q+...+b_n^q}\right)^p \le \frac{a_1^p.b_1^{p+q-pq}+...+a_n^p.b_n^{p+q-pq}}{b_1^q+b_2^q+...+b_n^q} \quad (2)$$

Do $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $p+q-pq=0$, khi đó bất đẳng thức (2) tương đương

$$\left(\frac{a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n}{b_1^q+b_2^q+...+b_n^q}\right)^p \le \frac{a_1^p+a_2^p+...+a_n^p}{b_1^q+b_2^q+...+b_n^q}$$

$$\Leftrightarrow (a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n)^p \le \left(a_1^p+a_2^p+...+a_n^p\right)\left(b_1^q+b_2^q+...+b_n^q\right)^{p-1}$$

$$\Leftrightarrow (a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n) \le \left(a_1^p+a_2^p+...+a_n^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(b_1^q+b_2^q+...+b_n^q\right)^{\frac{p-1}{p}}$$

$$\Leftrightarrow a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n \le \left(a_1^p+a_2^p+...+a_1^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(b_1^q+b_2^q+...+b_1^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

Bài 4. Cho $a_1, a_2,..., a_n, b_1, b_2,..., b_n > 0$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt[n]{a_1a_2...a_n}+\sqrt[n]{b_1b_2...b_n} \le \sqrt[n]{(a_1+b_1)(a_2+b_2)...(a_n+b_n)} \quad (1)$$

(Bất đẳng thức Minkowski)

Chứng minh

$$(1) \Leftrightarrow 1+\sqrt[n]{\frac{b_1.b_2...b_n}{a_1.a_2...a_n}} \le \sqrt[n]{\frac{(a_1+b_1)(a_2+b_2)....(a_n+b_n)}{a_1.a_2....a_n}}$$

$$\Leftrightarrow 1+\left(\frac{b_1}{a_1}\right)^{\frac{1}{n}}.\left(\frac{b_2}{a_2}\right)^{\frac{1}{n}}.....\left(\frac{b_n}{a_n}\right)^{\frac{1}{n}} \le \left(1+\frac{b_1}{a_1}\right)^{\frac{1}{n}}\left(1+\frac{b_2}{a_2}\right)^{\frac{1}{n}}....\left(1+\frac{b_n}{a_n}\right)^{\frac{1}{n}}$$

Đặt $x_1=\ln\frac{b_1}{a_1}, x_2=\ln\frac{b_2}{a_2},.....,x_n=\ln\frac{b_n}{a_n}$ thì bất đẳng thức (1)

$$\Leftrightarrow 1+\left(e^{x_1}\right)^{\frac{1}{n}}.\left(e^{x_2}\right)^{\frac{1}{n}}.....\left(e^{x_n}\right)^{\frac{1}{n}} \le \left(1+e^{x_1}\right)^{\frac{1}{n}}.\left(1+e^{x_2}\right)^{\frac{1}{n}}....\left(1+e^{x_n}\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$\Leftrightarrow 1+e^{\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}} \le \left[\left(1+e^{x_1}\right)\left(1+e^{x_2}\right)....\left(1+e^{x_n}\right)\right]^{\frac{1}{n}}$$

$$\Leftrightarrow \ln\left[1+e^{\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}}\right] \le \frac{\ln\left(1+e^{x_1}\right)+\ln\left(1+e^{x_2}\right)+....+\ln\left(1+e^{x_n}\right)}{n}$$

Xét hàm số $f(x)=\ln\left(1+e^x\right) \Rightarrow f'(x)=\frac{e^x}{1+e^x} \Rightarrow f''(x)=\frac{e^x}{\left(1+e^x\right)^2}>0\ \ \forall x\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow f(x)$ là hàm số lồi trên $\mathbb{R} \Rightarrow f\left(\frac{x_1+...+x_n}{n}\right) \le \frac{f(x_1)+...+f(x_n)}{n}$

$$\Leftrightarrow \ln\left[1+e^{\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}}\right] \le \frac{\ln\left(1+e^{x_1}\right)+\ln\left(1+e^{x_2}\right)+....+\ln\left(1+e^{x_n}\right)}{n} \Rightarrow \text{(đpcm)}$$

Bài 5. Cho $a_1, a_2,..., a_n > 0$. Chứng minh rằng:

$$a_1^{a_1}.a_2^{a_2}....a_n^{a_n} \ge \left(\frac{a_1+a_2+....+a_n}{n}\right)^{a_1+a_2+....+a_n} \quad (1)$$

Chứng minh

Bất đẳng thức (1) $\Leftrightarrow \ln\left(a_1^{a_1}.a_2^{a_2}....a_n^{a_n}\right) \ge \ln\left(\frac{a_1+a_2+....+a_n}{n}\right)^{a_1+a_2+....+a_n}$

$$\Leftrightarrow a_1\ln a_1+a_2\ln a_2+...+a_n\ln a_n \ge \left(a_1+a_2+...+a_n\right)\ln\left(\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a_1\ln a_1+a_2\ln a_2+...+a_n\ln a_n}{n} \ge \frac{\left(a_1+a_2+...+a_n\right)}{n}\ln\left(\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}\right)$$

Xét hàm số $f(x)=x\ln x$ với $x>0 \Rightarrow f'(x)=1+\ln x \Rightarrow f''(x)=\frac{1}{x}>0$

$\Rightarrow f(x)$ là hàm số lồi với $x>0$. Sử dụng bất đẳng thức ***Jensen*** ta có

$$\frac{f(a_1)+f(a_2)+...+f(a_n)}{n} \ge f\left(\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a_1\ln a_1+a_2\ln a_2+...+a_n\ln a_n}{n} \ge \frac{\left(a_1+a_2+...+a_n\right)}{n}\ln\left(\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}\right)$$

$$\Leftrightarrow a_1^{a_1}.a_2^{a_2}....a_n^{a_n} \ge \left(\frac{a_1+a_2+....+a_n}{n}\right)^{a_1+a_2+....+a_n}$$