KỸ THUẬT CHỌN ĐIỂM RƠI TRONG CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

Trong quá trình chứng minh bất đẳng thức, kĩ thuật chọn "điểm rơi" là kĩ thuật rất quan trọng, chọn điểm rơi nghĩa là dự đoán dấu đẳng thức xảy ra khi nào để ta có những đánh giá từ đó đưa ra phương pháp hợp lí. Với lưu ý rằng trong bất kì phép chứng minh bất đẳng thức nào, nếu không "bảo toàn" được dấu đẳng thức thì phép chứng minh của bạn bị phủ nhận hoàn toàn.

Kĩ thuật chọn "điểm rơi" là một kĩ thuật cực kì sơ đẳng đối với những bạn đã "siêu" về bất đẳng thức, nhưng nó lại là một kĩ thuật cơ bản nhất đối với những bạn mới bắt đầu tiếp cận với bất đẳng thức. Nên tôi hy vọng tài liệu này vẫn có ích với những ai cần nó.

Chúc cộng đồng yêu Toán sức khỏe và hạnh phúc!

§1. KỸ THUẬT CHỌN ĐIỂM RƠI TRONG BẤT ĐẲNG THỨC CAUCHY

A. Ví dụ minh họa

Ví dụ 1. Cho . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = a + \dfrac{1}{a}$.

Giải.

◊ *Sai lầm thường gặp:* $S = a + \dfrac{1}{a} \geq 2\sqrt{a.\dfrac{1}{a}} = 2$

◊ *Nguyên nhân sai lầm:* $MinS = 2 \Leftrightarrow a = \dfrac{1}{a} = 1$ mâu thuẫn với giả thiết $a \geq 3$.

◊ Phân tích và tìm tòi lời giải: Nhận thấy khi a tăng thì càng lớn (bằng cách thử trực tiếp) và từ đó dẫn đến dự đoán khi thì S nhận giá trị nhỏ nhất.

Do bất đẳng thức Côsi xảy ra dấu bằng tại điều kiện các tham số tham gia phải bằng nhau, nên tại ***"điểm rơi:** $a = 3$**"*** ta không thể sử dụng bất đẳng thức Côsi trực tiếp cho hai số a và $\dfrac{1}{a}$ vì $3 \neq \dfrac{1}{3}$. Lúc này ta sẽ giả định sử dụng bất đẳng thức Côsi cho cặp số $\left(\alpha a, \dfrac{1}{a}\right)$ sao cho tại ***"điểm rơi:***

" thì $\alpha a = \dfrac{1}{a}$. Với $a = 3 \Rightarrow \alpha = \dfrac{1}{9}$

◊ *Lời giải đúng:* $S = a + \dfrac{1}{a} = \left(\dfrac{a}{9} + \dfrac{1}{a}\right) + \dfrac{8a}{9} \geq 2.\sqrt{\dfrac{a}{9}.\dfrac{1}{a}} + \dfrac{8.3}{9} = \dfrac{10}{3}$

Với thì $MinS = \dfrac{10}{3}$.

Ví dụ 2. Cho $x \geq 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $y = 3x + \dfrac{1}{2x}$.

Giải.

◊ *Sai lầm thường gặp:* Ta có: $y = 3x + \frac{1}{2x} \geq 2\sqrt{3x.\frac{1}{2x}} = \sqrt{6}$.

◊ *Nguyên nhân sai lầm:* Đẳng thức xảy ra khi $3x = \frac{1}{2x} \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{6}} < 1$.

Như vậy lời giải trên không dự đoán được dấu đẳng thức xảy ra tại đâu, hay nói cách khác là chọn sai "điểm rơi".

◊ *Lời giải đúng:* Ta dự đoán dấu bằng xảy ra tại $x = 1$, khi đó ta phải chọn số a sao cho $ax = \frac{1}{2x}$.

Cho ta được $a = \frac{1}{2}$. Từ đó ta có lời giải đúng là

$$y = 3x + \frac{1}{2x} = \frac{5}{2}x + \frac{x}{2} + \frac{1}{2x} \geq \frac{5}{2}x + 2\sqrt{\frac{x}{2}.\frac{1}{2x}} = \frac{5}{2}x + 1 \geq \frac{5}{2} + 1 = \frac{7}{2}.$$

Vậy $\min y = \frac{7}{2}$ khi .

Ví dụ 3. Cho là các số thực dương thỏa mãn $x + y \geq 6$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

.

Giải.

Ta thấy vai trò của trong giả thiết là bình đẳng nhưng vai trò của x, y trong biểu thức $P = 5x + 3y + \frac{10}{x} + \frac{8}{y}$ là không bình đẳng, do đó dấu bằng sẽ không xảy ra khi $x = y = 3$, mà dấu bằng sẽ xảy ra tại các điểm "biên" là $x = 1, y = 5$ hoặc . Từ đó cho ta cách biến đổi như sau:

Ta có $P = 5x + 3y + \frac{10}{x} + \frac{8}{y} = \frac{5}{2}(x + y) + \left(\frac{5x}{2} + \frac{10}{x}\right) + \left(\frac{y}{2} + \frac{8}{y}\right)$

Áp dụng bất đẳng thức giữa TBC-TBN ta có: $\frac{5x}{2} + \frac{10}{x} \geq 2\sqrt{\frac{5x}{2}.\frac{10}{x}} = 10$

Và $\frac{y}{2} + \frac{8}{y} \geq 2\sqrt{\frac{y}{2}.\frac{8}{y}} = 4$

Suy ra $P \geq \frac{5}{2}.6 + 10 + 4 \Leftrightarrow P \geq 29$

Vậy P đạt GTNN là 29 khi $x = 2, y = 4$

Ví dụ 4. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + 2b + 3c \geq 20$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = a + b + c + \frac{3}{a} + \frac{9}{2b} + \frac{4}{c}$.

Giải.

Do nên ta dự đoán $\min P$ đạt được tại .

Từ đó phân tích P như sau:

$$= \frac{1}{4}a + \frac{1}{2}b + \frac{3}{4}c + \left(\frac{3}{4}a + \frac{3}{a}\right) + \left(\frac{b}{2} + \frac{9}{2b}\right) + \left(\frac{c}{4} + \frac{4}{c}\right)$$

$\geq \frac{1}{4}(a + 2b + 3c) + 3 + 3 + 2 \geq \frac{1}{4}.20 + 8 = 13$

Dấu "=" xảy ra khi $a = 2, b = 3, c = 4$.

Ví dụ 5. Cho $x; y$ là các số thực dương thỏa mãn . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\left(1-\frac{1}{y^2}\right)$.

Giải.

Do là một đa thức đối xứng với điều kiện $x+y\le 1$ nên ta dự đoán A đạt giá trị nhỏ nhất khi $x=y=\frac{1}{2}$. Và khi thì $A=9$. Vậy bây giờ ta chỉ cần chứng minh dự đoán là đúng, tức là chứng minh $\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\left(1-\frac{1}{y^2}\right)\ge 9$.

Thật vậy $\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\left(1-\frac{1}{y^2}\right)\ge 9 \Leftrightarrow \left(x^2-1\right)\left(y^2-1\right)\ge 9x^2y^2 \Leftrightarrow 1\ge x^2+y^2+x^2y^2$.

Do $1\ge (x+y)^2$, nên chỉ cần chứng minh $\Leftrightarrow (x+y)^2 \ge x^2+y^2+x^2y^2 \Leftrightarrow 2xy(1-4xy)\ge 0$.

BĐT này đúng do $0<xy\le \frac{(x+y)^2}{4}\le \frac{1}{4}$.

Vậy $\min A=9$ khi .

Ví dụ 6. Cho $a,b>0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức .

Giải.

Sai lầm thường gặp : $P=\frac{a+b}{\sqrt{ab}}+\frac{\sqrt{ab}}{a+b}\ge 2\sqrt{\frac{a+b}{\sqrt{ab}}.\frac{\sqrt{ab}}{a+b}}=2$.

Vậy $\min P=2$ khi $\frac{a+b}{\sqrt{ab}}=\frac{\sqrt{ab}}{a+b} \Leftrightarrow (a+b)^2=ab \Leftrightarrow a^2+ab+b^2=0 \Leftrightarrow a=b=0$ Vô lí.

Lời giải đúng :

Do P là biểu thức đối xứng theo a,b nên ta dự đoán dấu "=" xảy ra khi $a=b$.

Nên ta tìm hệ số m sao cho $\begin{cases}\frac{a+b}{m\sqrt{ab}}=\frac{\sqrt{ab}}{a+b}\\ a=b\end{cases} \Rightarrow m=4$

Ta có $P=\frac{a+b}{\sqrt{ab}}+\frac{\sqrt{ab}}{a+b}=\frac{a+b}{4\sqrt{ab}}+\frac{\sqrt{ab}}{a+b}+\frac{3(a+b)}{4\sqrt{ab}}\ge 2\sqrt{\frac{a+b}{4\sqrt{ab}}.\frac{\sqrt{ab}}{a+b}}+\frac{3.2\sqrt{ab}}{4\sqrt{ab}}=\frac{5}{2}$.

Dấu "=" xảy ra khi

Ví dụ 7. Cho $\begin{cases}a,b>0\\ a+b\le 1\end{cases}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{1}{ab}$

Giải.

Ta có: $P=\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{1}{2ab}+\frac{1}{2ab}\ \ge \frac{4}{a^2+2ab+b^2}+\frac{1}{2ab}\ge \frac{4}{(a+b)^2}+\frac{2}{(a+b)^2}\ge 4+2=6$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases}a^2+b^2=2ab\\ a=b\\ a+b=1\end{cases} \Leftrightarrow a=b=\frac{1}{2} \Rightarrow \text{Min}P=6$ khi $a=b=\frac{1}{2}$

Ví dụ 8. Cho . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{1}{1+a^2+b^2}+\frac{1}{2ab}$

Giải.

Lời giải 1. Ta có: $P=\frac{1}{1+a^2+b^2}+\frac{1}{2ab}\geq\frac{4}{a^2+2ab+b^2+1}=\frac{4}{(a+b)^2+1}\geq\frac{4}{2}=2$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}1+a^2+b^2=2ab\\a+b=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(a-b)^2+1=0\\a+b=1\end{cases}$. Vô nghiệm

Vậy không tồn tại Min$P$...?..?

Lời giải 2. Ta có: $P=\frac{1}{1+a^2+b^2}+\frac{1}{6ab}+\frac{1}{3ab}\geq\frac{4}{a^2+6ab+b^2+1}+\frac{1}{3ab}=\frac{4}{(a+b)^2+1+4ab}+\frac{1}{3ab}$

Mặt khác $ab\leq\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$. Vậy $P\geq\frac{4}{2+\left(\frac{a+b}{2}\right)^2}+\frac{1}{3\left(\frac{a+b}{2}\right)^2}\geq\frac{8}{3}$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}1+a^2+b^2=6ab\\a=b\\a+b=1\end{cases}\Leftrightarrow a=b=\frac{1}{2}$.

Ví dụ 9. Cho $\begin{cases}a,b>0\\a+b\leq1\end{cases}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{1}{ab}+4ab$.

Sai lầm thường gặp:

Sai lầm 1: Ta có :

$$P=\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{1}{2ab}+\frac{1}{2ab}+4ab\geq\frac{4}{a^2+b^2+2ab}+\frac{1}{2ab}+4ab=\frac{4}{(a+b)^2}+\left(\frac{1}{2ab}+4ab\right).$$

Mặt khác $\frac{1}{2ab}+4ab\geq2\sqrt{\frac{1}{2ab}.4ab}=2\sqrt{2}$. Vậy $P\geq4+2\sqrt{2}$ nên $MinP=2(2+\sqrt{2})$

Sai lầm 2:

$P=\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{1}{ab}+\left(4ab+\frac{1}{4ab}\right)+\frac{1}{4ab}\geq\frac{4}{(a+b)^2}2\sqrt{4ab.\frac{1}{2ab}}+\frac{1}{4ab}\geq4+2+\frac{1}{4ab}=6+\frac{1}{4ab}$ Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}a^2+b^2=2ab\\a^2b^2=\frac{1}{16}\\a+b=1\end{cases}\Leftrightarrow a=b=\frac{1}{2}$. Thay $a=b=\frac{1}{2}$ vào ta được $P\geq7$ $\Rightarrow MinP=7$ khi

.

Nguyên nhân sai lầm:

Sai lầm 1: Học sinh chưa có khái niệm "điểm rơi", việc tách $\frac{1}{ab}=\frac{1}{2ab}+\frac{1}{2ab}$ là do thói quen để làm xuất hiện $a^2+b^2+2ab=(a+b)^2$. $MinP=4+2\sqrt{2}\Leftrightarrow\begin{cases}a=b\\\frac{1}{2ab}=4ab\Rightarrow VN\\a+b=1\end{cases}$. Dấu "=" bất đẳng thức không xảy ra $\Rightarrow$ không kết luận được $MinP=4+2\sqrt{2}$

Sai lầm 2: Học sinh đã có khái niệm điểm rơi, dự đoán được dấu bằng khi nên đã tách

các số hạng và $MinP = 7$ khi là đúng, nhưng bước cuối học sinh làm sai ví dụ như

$(1-x)^2 + x \geq x$, dấu bằng xảy ra khi $x = 1 \Rightarrow Min\left[(x-1)^2 + x\right] = 1??$.

Lời giải đúng: Do P là biểu thức đối xứng với a, b, ta dự đoán $MinP$ đạt tại , ta có:

$$P = \frac{1}{a^2+b^2} + \frac{1}{2ab} + \left(4ab + \frac{1}{4ab}\right) + \frac{1}{4ab} \geq \frac{4}{(a+b)^2} + 2\sqrt{4ab.\frac{1}{2ab}} + \frac{1}{4\left(\frac{a+b}{2}\right)^2} \geq 7$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2 = 2ab \\ a^2b^2 = \dfrac{1}{16} \\ a+b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = \dfrac{1}{2}$.

Ví dụ 10. Cho $\begin{cases} a, b > 0 \\ a+b \leq 1 \end{cases}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = \dfrac{1}{a^3+b^3} + \dfrac{1}{a^2b} + \dfrac{1}{ab^2}$.

Sai lầm thường gặp:

Ta có: $S = \dfrac{1}{a^3+b^3} + \dfrac{1}{3a^2b} + \dfrac{1}{3ab^2} + \dfrac{2}{3a^2b} + \dfrac{2}{3ab^2} \geq \dfrac{9}{a^3+b^3+3a^2b+3ab^2} + \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{a^2b} + \dfrac{1}{ab^2}\right)$

$$= \frac{9}{(a+b)^3} + \frac{2}{3}.\frac{1}{ab}\left[\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right] \geq 9 + \frac{2}{3.\left(\frac{a+b}{2}\right)^2}.\frac{4}{a+b} \geq \frac{59}{3}$$

Nguyên nhân sai lầm: $MinS = \dfrac{59}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} a^3+b^3 = 3a^2b \\ a = b \\ a+b = 1 \end{cases} \quad (vn)$

Lời giải đúng

Ta dự đoán dấu bằng xảy ra khi , và ta thấy $a^3+b^3+3a^2b+3ab^2 = (a+b)^3$ vì thế ta muốn

xuất hiện $(a+b)^3$; ta áp dụng bất đẳng thức $\dfrac{1}{a^3+b^3} + \dfrac{1}{2a^2b} + \dfrac{1}{2ab^2}$ và nếu vậy:

$\dfrac{1}{a^3+b^3} + \dfrac{1}{2a^2b} + \dfrac{1}{2ab^2} \geq \dfrac{9}{(a+b)^3 - ab(a+b)}$, ta không đánh giá tiếp được cho nên ta phải áp dụng bất đẳng thức cho 5 số:

$$S = \frac{1}{a^3+b^3} + \frac{1}{2a^2b} + \frac{1}{2ab^2} + \frac{1}{2a^2b} + \frac{1}{2ab^2} \geq \frac{25}{(a+b)^3 + ab(a+b)} \geq \frac{25}{(a+b)^3 + \frac{(a+b)^3}{4}} \geq 20$$

Dấu bằng xảy ra khi $a = b = \dfrac{1}{2}$.

Ví dụ 11. Cho $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ a^2+b^2+c^2 = 1 \end{cases}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = a+b+c+\dfrac{1}{abc}$.

Sai lầm thường gặp:

$$= a+b+c+\frac{1}{abc} \geq 4\sqrt[4]{abc.\frac{1}{abc}} = 4$$

Nguyên nhân sai lầm:
Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c=1$ là không đúng với giả thiết.
Lời giải đúng:
Do biểu thức P đối xứng với a,b,c và $a^2+b^2+c^2=1$ nên ta dự đoán dấu '=" xảy ra khi $a=b=c=\frac{1}{\sqrt{3}}$, khi đó $\frac{1}{abc}=3\sqrt{3}$.

Từ đó ta tìm được hệ số của điểm rơi như sau: $a=b=c=\frac{1}{mabc}$. Cho

Ta được $m=9$.

Vậy $P=a+b+c+\frac{1}{abc}=a+b+c+\frac{1}{9abc}+\frac{8}{9abc}\ge 4\sqrt[4]{abc.\frac{1}{9abc}}+\frac{8}{9\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}}$

$=\frac{4}{\sqrt{3}}+\frac{8}{\sqrt{3}}=4\sqrt{3}$.

Vậy $\min P=4\sqrt{3}$ khi .

Ví dụ 12. Cho $\begin{cases} x,y,z>0 \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=4 \end{cases}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\frac{1}{2x+y+z}+\frac{1}{x+2y+z}+\frac{1}{x+y+2z}.$$

Sai lầm thường gặp:

Sai lầm 1: Ta có $P\le\frac{1}{9}\left(\frac{1}{2x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)+\frac{1}{9}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2y}+\frac{1}{z}\right)+\frac{1}{9}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{2z}\right)=\frac{5}{18}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=\frac{10}{9}$

$\Rightarrow MaxP=\frac{10}{9}$

Sai lầm 2:

$P\le\frac{1}{3\sqrt[3]{2xyz}}+\frac{1}{3\sqrt[3]{x.2yz}}+\frac{1}{3\sqrt[3]{xy2z}}\le\frac{1}{3}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)+\frac{1}{3}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2y}+\frac{1}{z}\right)+\frac{1}{3}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{2z}\right)=\frac{10}{9}$ *N*
guyên nhân sai lầm: Cả hai lời giải trên đều đã biết hướng "đích" song chưa biết chọn điểm rơi.

$MaxP=\frac{10}{9}\Leftrightarrow\begin{cases} 2x=y=z \\ 2y=x=z \\ 2z=x=y \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=4 \end{cases}$ (vn), tức là không tồn tại $(x,y,z)\in D: P=\frac{10}{9}$

Lời giải đúng: Từ hai lời giải trên với dự đoán $MaxP$ đạt được tại $x=y=z=\frac{3}{4}$ nên tách các số $2x=x+x$ ra cho dấu bằng xảy ra.

Ta có $\frac{1}{2x+y+z}=\frac{1}{x+x+y+z}\le\frac{1}{16}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$, tương tự và ta có:

$P\le\frac{1}{16}\left[\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)+\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{1}{z}\right)+\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{2}{z}\right)\right]=1$.

Dấu "=" xảy ra khi .

Nhận xét: Ta có thể mở rộng bài 3:

Cho $\begin{cases} x,y,z>0 \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=4 \end{cases}$. Tìm GTLN của $P=\dfrac{1}{\alpha x+\beta y+\gamma z}+\dfrac{1}{\beta x+\gamma y+\alpha z}+\dfrac{1}{\gamma x+\alpha y+\beta z}$.

Với $\alpha,\beta,\gamma\in N^*$: Cách làm tương tự như bài 3, ta tách $\alpha x=\underbrace{x+x+\cdots=x}_{\alpha\text{ soá}},...$. Nếu $\alpha,\beta,\gamma\in R^+$, thì bài toán có còn giải quyết được không? Câu trả lời dành cho độc giả trong phần sau" Kỹ thuật chọn điểm rơi trong BCS"

Ví dụ 13. Cho là các số thực dương thỏa mãn .

Chứng minh rằng $\sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a}\le\sqrt{6}$.

Giải

Ta dự đoán dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} a=b=c \\ a+b+c=1 \end{cases}\Rightarrow a=b=c=\dfrac{1}{3}$

Khi đó $a+b=b+c=c+a=\dfrac{2}{3}$.

Từ đó bài toán được viết lại thành: $\sqrt{\dfrac{2}{3}(a+b)}+\sqrt{\dfrac{2}{3}(b+c)}+\sqrt{\dfrac{2}{3}(c+a)}\le 2$.

Áp dụng BĐT AM – GM ta được:

$$\sqrt{\frac{2}{3}(a+b)}\le\frac{\frac{2}{3}+a+b}{2},\ \sqrt{\frac{2}{3}(b+c)}\le\frac{\frac{2}{3}+b+c}{2},\ \sqrt{\frac{2}{3}(c+a)}\le\frac{\frac{2}{3}+c+a}{2}.$$

Cộng ba BĐT lại vế theo vế với $a+b+c=1$ ta được đpcm.

Ví dụ 14. Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn .

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\sqrt[3]{a+b}+\sqrt[3]{b+c}+\sqrt[3]{c+a}$.

Giải.

Sai lầm thường gặp: $\sqrt[3]{a+b}\le\dfrac{a+b+1+1}{3}$, $\sqrt[3]{b+c}\le\dfrac{b+c+1+1}{3}$, $\sqrt[3]{c+a}\le\dfrac{c+a+1+1}{3}$

Suy ra $P\le\dfrac{2(a+b+c)+6}{3}=\dfrac{8}{3}$.

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} a+b=1 \\ b+c=1 \\ c+a=1 \end{cases}\Rightarrow 2(a+b+c)=3\Leftrightarrow 2=3$ Vô lí

Phân tích lời giải.

Do P là biểu thức đối xứng theo nên ta dự đoán dấu "=" xảy ra khi $a=b=c$, đồng thời $a+b+c=1\Rightarrow a=b=c=\dfrac{1}{3}$.

Suy ra $a+b=\dfrac{2}{3}$, $b+c=\dfrac{2}{3}$, $c+a=\dfrac{2}{3}$.

Từ đó cho ta lời giải đúng như sau:

$$\sqrt[3]{a+b}=\sqrt[3]{\frac{9}{4}}.\sqrt[3]{(a+b)\frac{2}{3}.\frac{2}{3}}\le\sqrt[3]{\frac{9}{4}}.\frac{a+b+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}}{3}$$

$$\sqrt[3]{b+c}=\sqrt[3]{\frac{9}{4}}.\sqrt[3]{(b+c)\frac{2}{3}.\frac{2}{3}}\le\sqrt[3]{\frac{9}{4}}.\frac{b+c+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}}{3}$$

$\sqrt[3]{c+a}=\sqrt[3]{\frac{9}{4}}.\sqrt[3]{(c+a)\frac{2}{3}.\frac{2}{3}}\le\sqrt[3]{\frac{9}{4}}.\frac{c+a+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}}{3}$

Suy ra $P\le\sqrt[3]{\frac{9}{4}}\frac{2(a+b+c)+4}{3}=\sqrt[3]{18}$.

Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c=\frac{1}{3}$.

Ví dụ 15. Cho $\begin{cases}a,b,c>0\\a+b+c=3\end{cases}$. Chứng minh rằng $\sqrt[3]{a+2b}+\sqrt[3]{b+2c}+\sqrt[3]{c+2a}\le3\sqrt[3]{3}$.

Sai lầm thương gặp:

Ta có: $\sqrt[3]{1.1.(a+2b)}\le\frac{1+1+(a+2b)}{3}=\frac{2+a+2b}{3}$, tương tự ta có

$\sqrt[3]{a+2b}+\sqrt[3]{b+2c}+\sqrt[3]{c+2a}\le\frac{2+a+2b}{3}+\frac{2+b+2c}{3}+\frac{2+c+2a}{3}=5$,

mà $5>3\sqrt[3]{3}\Rightarrow$ ñeà ra sai...?...?

$MaxP=5\Leftrightarrow\begin{cases}a+2b=1\\b+2c=1\\c+2a=1\\a+b+c=3\end{cases}$ (vn), vậy $P<5$

Lời giải đúng: Ta dự đoán dấu "=" trong bất đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases}a=b=c\\a+b+c=3\end{cases}$

$\Rightarrow a=b=c=1\Rightarrow a+2b=3$

Vậy ta áp dụng Cauchy cho ba số $a+2b,3,3$ ta có:

$\sqrt[3]{a+2b}=\frac{1}{\sqrt[3]{9}}\sqrt[3]{3.3.(a+2b)}\le\frac{1}{\sqrt[3]{9}}.\frac{3+3+(a+2b)}{3}=\frac{6+a+2b}{3\sqrt[3]{9}}$, tương tự ta có

$P\le\frac{6+a+2b}{3\sqrt[3]{9}}+\frac{6+b+2c}{3\sqrt[3]{9}}+\frac{6+c+2a}{3\sqrt[3]{9}}=3\sqrt[3]{3}$, dấu bằng xảy ra khi $a=b=c=1$

Ví dụ 16. Cho $\begin{cases}a,b,c,d>0\\a+b+c+d=1\end{cases}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\sqrt[3]{2a+b}+\sqrt[3]{2b+c}+\sqrt[3]{2c+d}+\sqrt[3]{2d+a}.$$

Sai lầm thương gặp:

Ta có: $\sqrt[3]{2a+b}=\sqrt[3]{(2a+b).1.1}\le\frac{(2a+b)+1+1}{3}=\frac{2a+b+2}{3}$, tương tự ta có:

$\sqrt[3]{2a+b}+\sqrt[3]{2b+c}+\sqrt[3]{2c+d}+\sqrt[3]{2d+a}\le\frac{3(a+b+c+d)+8}{3}=\frac{11}{3}$

$MaxP=\frac{11}{3}\Leftrightarrow\begin{cases}2a+b=1\\2b+c=1\\2c+d=1\\2d+a=1\end{cases}\Rightarrow3(a+b+c+d)=4\Leftrightarrow3.1=4$ Vô lý

Lời giải đúng: Ta dự đoán dấu "=" trong bất đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=d=\frac{1}{4}$.

$\Rightarrow 2a+b=\frac{3}{4}$. Vậy ta áp dụng Cauchy cho ba số $2a+b,\frac{3}{4},\frac{3}{4}$ ta có:

$$\sqrt[3]{2a+b}=\sqrt[3]{\frac{16}{9}}.\sqrt[3]{(2a+b).\frac{3}{4}.\frac{3}{4}}\le\sqrt[3]{\frac{16}{9}}.\frac{2a+b+\frac{3}{4}+\frac{3}{4}}{3}$$, tương tự ta có

$$P\le\sqrt[3]{\frac{16}{9}}\left(\frac{2a+b+\frac{3}{4}+\frac{3}{4}}{3}+\frac{2b+c+\frac{3}{4}+\frac{3}{4}}{3}+\frac{2c+d+\frac{3}{4}+\frac{3}{4}}{3}+\frac{2d+a+\frac{3}{4}+\frac{3}{4}}{3}\right)$$

$$=\sqrt[3]{\frac{16}{9}}\frac{3(a+b+c+d)+6}{3}=2\sqrt[3]{6}$$

Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c=d=\frac{1}{4}$.

Ví dụ 17. Cho $\begin{cases}x,y,z>0\\ xyz=1\end{cases}$. Chứng minh rằng $\frac{x^2}{1+y}+\frac{y^2}{1+z}+\frac{z^2}{1+x}\ge\frac{3}{2}$

Sai lầm thường gặp:

Sai lầm 1: $P=\frac{x^2}{1+y}+\frac{y^2}{1+z}+\frac{z^2}{1+x}\ge 3\sqrt[3]{\frac{(xyz)^2}{(1+y)(1+z)(1+x)}}$, mặt khác $\begin{cases}1+y\ge 2\sqrt{y}\\ 1+z\ge 2\sqrt{z}\\ 1+x\ge 2\sqrt{x}\end{cases}$, suy ra:

$(1+y)(1+z)(1+x)\le 8\sqrt{xyz}=8$. Vậy $P\ge\frac{3}{2}$, dấu "=" xảy ra khi $x=y=z=1$

Sai lầm 2: ta có: $\begin{cases}\frac{x^2}{1+y}+(1+y)\ge 2x\\ \frac{y^2}{1+z}+(1+z)\ge 2y\\ \frac{z^2}{1+x}+(1+x)\ge 2z\end{cases}\Rightarrow P\ge 2(x+y+z)-(x+y+z)-3=x+y+z-3,$

mặt khác $x+y+z\ge 3\sqrt[3]{xyz}=3\Rightarrow P\ge 0$

Nguyên nhân sai lầm:

Ở sai lầm 1: Học sinh quên tính chất cơ bản của bất đẳng thức: $a\ge b>0\Rightarrow\frac{1}{a}\le\frac{1}{b}$

Ở sai lầm 2: Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}x=y=z\\ \frac{x^2}{1+y}=1+y,\frac{y^2}{1+z}=1+z,\frac{z^2}{1+x}=1+x\,(vn)\\ xyz=1\end{cases}$

Lời giải đúng: Ta dự đoán dấu "=" xảy ra khi . Vì vậy khi áp dụng Cauchy cho $\frac{x^2}{1+y}$

và $\frac{1+y}{\alpha}:\frac{x^2}{1+y}=\frac{1+y}{\alpha}\Leftrightarrow\frac{1}{2}=\frac{2}{\alpha}\Leftrightarrow\alpha=4$

Ta có: $\begin{cases} \dfrac{x^2}{1+y}+\dfrac{1+y}{4}\ge x \\ \dfrac{y^2}{1+z}+\dfrac{1+z}{4}\ge y \\ \dfrac{z^2}{1+x}+\dfrac{1+x}{4}\ge z \end{cases} \Rightarrow P\ge (x+y+z)-\dfrac{1}{4}(x+y+z)-\dfrac{3}{4}=\dfrac{3}{4}(x+y+z)-\dfrac{3}{4}\ge \dfrac{3}{2}$

Dấu "=" xảy ra khi $x=y=z=1$.

Ví dụ 18. Cho $\begin{cases} a,b,c>0 \\ a+b+c\le \dfrac{3}{2} \end{cases}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

Sai lầm thường gặp:

$$\ge 3\sqrt[3]{\sqrt{a^2+\frac{1}{b^2}}.\sqrt{b^2+\frac{1}{c^2}}.\sqrt{c^2+\frac{1}{a^2}}}$$

$$=3\sqrt[6]{2\sqrt{a^2.\frac{1}{b^2}}.2\sqrt{b^2.\frac{1}{c^2}}.2\sqrt{c^2.\frac{1}{a^2}}}=3\sqrt{2}$$

Nguyên nhân sai lầm:

Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c=\dfrac{1}{a}=\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{c}\Rightarrow a+b+c=3>\dfrac{3}{2}$

Lời giải đúng: Ta dự đoán dấu "=" xảy ra khi . Vì vậy khi áp dụng Cauchy cho

$\alpha a^2=\dfrac{1}{a^2}$. Cho $a=\dfrac{1}{2}\Rightarrow \alpha =16$.

Nên

$$=\sqrt{a^2+\frac{1}{16b^2}+...+\frac{1}{16b^2}}+\sqrt{b^2+\frac{1}{16c^2}+...+\frac{1}{16c^2}}+\sqrt{c^2+\frac{1}{16a^2}+...+\frac{1}{16a^2}}$$

$$\ge \sqrt{17\sqrt[17]{a^2.\frac{1}{16^{16}b^{32}}}}+\sqrt{17\sqrt[17]{b^2.\frac{1}{16^{16}c^{32}}}}+\sqrt{17\sqrt[17]{c^2.\frac{1}{16^{16}a^{32}}}}$$

$$=\sqrt{17}\left[\sqrt[17]{\frac{a}{16^8b^{16}}}+\sqrt[17]{\frac{b}{16^8c^{16}}}+\sqrt[17]{\frac{c}{16^8a^{16}}}\right]\ge 3\sqrt{17}\sqrt[17]{\frac{1}{16^8a^5b^5c^5}}=\frac{3\sqrt{17}}{2\sqrt[17]{(2a.2b.2c)^5}}$$

$$=\frac{3\sqrt{17}}{2\sqrt[17]{\left(\frac{2a+2b+2c}{3}\right)^{15}}}\ge \frac{3\sqrt{17}}{2}.$$

Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c=\dfrac{1}{2}$.

Cách khác: Ta có $S=\sqrt{a^2+\dfrac{1}{b^2}}+\sqrt{b^2+\dfrac{1}{c^2}}+\sqrt{c^2+\dfrac{1}{a^2}}\ge \sqrt{(a+b+c)^2+\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)^2}$

$$\ge 3\sqrt{\sqrt[3]{(abc)^2}+\sqrt[3]{\frac{1}{(abc)^2}}}.$$

Đặt $t=\sqrt[3]{(abc)^2}$. Ta có $t=\sqrt[3]{(abc)^2}\le\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2\le\frac{1}{4}$.

Dấu "=" xảy ra khi .

Khi đó $S\ge 3\sqrt{\sqrt[3]{(abc)^2}+\sqrt[3]{\frac{1}{(abc)^2}}}=3\sqrt{t+\frac{1}{t}}=3\sqrt{t+\frac{1}{16t}+\frac{15}{16t}}\ge 3\sqrt{2\sqrt{t.\frac{1}{16t}}+\frac{15}{16t}}=3\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{15}{16t}}$

$\ge 3\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{15}{16}.4}=\frac{3\sqrt{17}}{2}$.

Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c=\frac{1}{2}$.

B. Bài tập và hướng dẫn

Bài 1. Cho $a\ge 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=a+\frac{1}{a^2}$.

Giải.

Do có và nên ta sẽ áp dụng Côsi cho ba số dạng .

Dự đoán dấu "=" xảy ra khi $a=2$ và $\alpha a=\frac{1}{a^2}\Rightarrow\alpha=\frac{1}{8}$

Khi đó $S=a+\frac{1}{a^2}=\left(\frac{a}{8}+\frac{a}{8}+\frac{1}{a^2}\right)+\frac{6a}{8}\ge 3\sqrt[3]{\frac{a}{8}.\frac{a}{8}.\frac{1}{a^2}}+\frac{6.2}{8}=\frac{9}{4}$

Với thì $MinS=\frac{9}{4}$

Bài 2. Cho $0<a\le\frac{1}{2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=2a+\frac{1}{a^2}$.

Giải.

Do có a và $\frac{1}{a^2}$ nên ta sẽ áp dụng Côsi cho ba số dạng $\alpha a+\alpha a+\frac{1}{a^2}$.

Dự đoán dấu "=" xảy ra khi $a=\frac{1}{2}$ và $\alpha a=\frac{1}{a^2}\Rightarrow\alpha=8$

Khi đó $S=2a+\frac{1}{a^2}=\left(8a+8a+\frac{1}{a^2}\right)-14a\ge 3\sqrt[3]{8a.8a.\frac{1}{a^2}}-14.\frac{1}{2}=5$

Vậy với thì $MinS=5$.

Bài 3. Cho $a\ge 10;b\ge 100;c\ge 1000$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$y=a+\frac{1}{a}+b+\frac{1}{b}+c+\frac{1}{c}.$$

Giải.

Xét riêng biểu thức $P=a+\frac{1}{a}$ với điều kiện $a\ge 10$, ta dự đoán P đạt giá trị nhỏ nhất khi $a=10$.

Từ đó ta cần tìm số α sao cho $\frac{a}{\alpha}=\frac{1}{a}$, với ta được $\alpha=100$, từ đó ta phân tích như sau:

$P=\frac{99}{100}a+\frac{a}{100}+\frac{1}{a}\ge\frac{99}{100}a+2\sqrt{\frac{a}{100}\frac{1}{a}}=\frac{99}{100}a+\frac{1}{5}\ge\frac{99}{100}.10+\frac{1}{5}=\frac{101}{10}$. (làm tương tự cho hai biểu thức còn lại.)

Bài 4. Cho a,b,c là ba số thực dương thoả mãn $a+b+c\le1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=a+b+c+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$.

Giải.

Vì vai trò của là bình đẳng và nên ta dự đoán dấu bằng xảy ra khi .

Nên ta phải biến đổi biểu thức P một cách khéo léo để đảm bảo dấu bằng xảy ra tại .

Ta có $P=\left(9a+\frac{1}{a}\right)+\left(9b+\frac{1}{b}\right)+\left(9c+\frac{1}{c}\right)-8(a+b+c)\ge\left(9a+\frac{1}{a}\right)+\left(9b+\frac{1}{b}\right)+\left(9c+\frac{1}{c}\right)-8\ge10$.

Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c=\frac{1}{3}$.

Bài 5. Cho a,b,c là ba số thực dương thoả mãn $a+b+c=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{bc}+\sqrt[3]{ca}$.

Giải.

Vì vai trò của là bình đẳng và nên ta dự đoán dấu bằng xảy ra khi .

Ta có $\sqrt[3]{ab}=\sqrt[3]{3}.\sqrt[3]{ab.\frac{1}{3}}\le\sqrt[3]{3}\frac{a+b+\frac{1}{3}}{3}$

Tương tự $\sqrt[3]{bc}=\sqrt[3]{3}.\sqrt[3]{bc.\frac{1}{3}}\le\sqrt[3]{3}\frac{b+c+\frac{1}{3}}{3}$

$\sqrt[3]{ca}=\sqrt[3]{3}.\sqrt[3]{ca.\frac{1}{3}}\le\sqrt[3]{3}\frac{c+a+\frac{1}{3}}{3}$

Cộng vế theo vế ta được

$$P=\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{bc}+\sqrt[3]{ca}\le\sqrt[3]{3}\left(\frac{1}{2}(a+b+c)+\frac{1}{3}\right)=\sqrt[3]{3}.$$

Vậy GTLN của $P=\frac{15}{2}$ khi $a=b=c=\frac{1}{3}$.

Bài 6. Cho là ba số thực dương thoả mãn $a+b+c\le\frac{3}{2}$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức .

Giải.

Cách 1. Ta có

$S=a+b+c+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=4a+\frac{1}{a}+4b+\frac{1}{b}+4c+\frac{1}{c}-3(a+b+c)\ge4+4+4-3.\frac{3}{2}=\frac{15}{2}$ Vậy $MinS=\frac{15}{2}$ khi $a=b=c=\frac{1}{2}$.

Cách 2. Ta có $S=a+b+c+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=a+\frac{1}{4a}+b+\frac{1}{4b}+c+\frac{1}{4c}+\frac{3}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$

$\geq 2\sqrt{a\frac{1}{4a}}+2\sqrt{b\frac{1}{4b}}+2\sqrt{c\frac{1}{4c}}+\frac{3}{4}\frac{9}{a+b+c}\geq 1+1+1+\frac{3}{4}\frac{9}{\frac{3}{2}}=\frac{15}{2}$

Vậy $MinS=\frac{15}{2}$ khi $a=b=c=\frac{1}{2}$.

Bài 7. Cho là ba số thực dương thoả mãn $a+b+c\leq 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=a+b+c+2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$.

Giải.

Ta có

$S=a+b+c+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=18a+\frac{2}{a}+18b+\frac{2}{b}+18c+\frac{2}{c}-17(a+b+c)$

$\geq 12+12+12-17.1=19$.

Vậy $MinS=19$ khi $a=b=c=\frac{1}{3}$.

Bài 8. Cho a,b,c là ba số thực dương thoả mãn $a+b+c=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$P=\frac{a^3}{(1-a)^2}+\frac{b^3}{(1-b)^2}+\frac{c^3}{(1-c)^2}$.

Giải.

Ta có
$$\frac{a^3}{(1-a)^2}+\frac{1-a}{8}+\frac{1-a}{8}\geq\frac{3}{4}a$$
$$\frac{b^3}{(1-b)^2}+\frac{1-b}{8}+\frac{1-b}{8}\geq\frac{3}{4}b$$
$$\frac{c^3}{(1-c)^2}+\frac{1-c}{8}+\frac{1-c}{8}\geq\frac{3}{4}c$$

Suy ra $P+\frac{1}{4}\left[3-(a+b+c)\right]\geq\frac{3}{4}(a+b+c)\Leftrightarrow P\geq\frac{1}{4}$

Vậy $MinP=\frac{1}{4}$ khi .

Bài 9. Cho x,y,z là các số thực dương thỏa mãn $xy+yz+zx=5$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=3x^2+3y^2+z^2$.

Giải.

Ta có $x^2+y^2\geq 2xy$, $2x^2+\frac{1}{2}z^2\geq 2xz$, $2y^2+\frac{1}{2}z^2\geq 2yz$.

Cộng vế theo vế ta được $3x^2+3y^2+z^2\geq 2(xy+yz+zx)=2.5=10$.

Dấu '=' xảy ra khi $x=y=1,z=2$.

Bài 10. Cho $x;y$ là các số thực dương thỏa mãn $x+y+xy=8$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x^2+y^2$.

Giải.

Ta có $8 = x + y + xy \le x + y + \frac{(x+y)^2}{4}$, từ đây ta tìm được $x + y \le -8$ hoặc $x + y \ge 4$ suy ra $(x+y)^2 \ge 16$.

Mà ta lại có $P = x^2 + y^2 \ge \frac{(x+y)^2}{2} = 8$.

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} x + y = 4 \\ x = y \\ x + y + xy = 8 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 2$

Vậy $\min P = 8$ khi $x = y = 2$.

Bài 11. Cho a, b là các số thực dương thỏa mãn $a + b \le 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức .

Giải.

Ta có $S = ab + \frac{1}{ab} = ab + \frac{1}{16ab} + \frac{15}{16ab} \ge 2\sqrt{ab.\frac{1}{16ab}} + \frac{15}{16}\frac{4}{(a+b)^2} = \frac{1}{2} + \frac{15}{16}.\frac{4}{1} = \frac{17}{4}$

Hoặc ta có thể giải như sau:

Đặt $t = ab \Rightarrow t = ab \le \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \le \frac{1}{4}$

Khi đó bài toán trở thành : Cho $t \le \frac{1}{4}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $S = t + \frac{1}{t}$.

Dự đoán dấu bằng xảy ra khi và $\alpha t = \frac{1}{t} \Rightarrow \alpha = 16$

$S = t + \frac{1}{t} = 16t + \frac{1}{t} - 15t \ge 2\sqrt{16t.\frac{1}{t}} - 15.\frac{1}{4} = \frac{17}{4}$

Vậy với $t = \frac{1}{4}$ hay $a = b = \frac{1}{2}$ thì $MinS = \frac{17}{4}$.

Bài 12. Cho là các số thực dương thỏa mãn .

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức .

Giải.

Ta có $P = a + b + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 8a + 8a + \frac{1}{a^2} + 8b + 8b + \frac{1}{b^2} - 15(a+b)$

$\ge 3\sqrt[3]{8a.8a.\frac{1}{a^2}} + 3\sqrt[3]{8b.8b.\frac{1}{b^2}} - 15(a+b) \ge 3.4 + 3.4 - 15.1 = 9$

Hoặc ta có thể giải như sau:

Ta có $P \ge 2\sqrt{ab} + \frac{2}{ab}$ (Dấu "=" xảy ra khi a = b)

Đặt $t = \sqrt{ab}$, khi đó $0 < t = \sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2} \le \frac{1}{2}$. Khi đó ta thu được

$$P \geq 2t + \frac{2}{t^2} = 16t + 16t + \frac{2}{t^2} - 30t$$

$$\geq 3\sqrt[3]{16t.16t.\frac{2}{t^2}} - \frac{30}{2} = 9$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $t = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a = b = \frac{1}{2}$

Bài 13. Cho a,b là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c \leq \frac{3}{2}$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức .

Giải.

Ta có $P = a+b+c+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2} = 8a+8a+\frac{1}{a^2}+8b+8b+\frac{1}{b^2}+8c+8c+\frac{1}{c^2}-15(a+b+c)$

$$\geq 3\sqrt[3]{8a.8a.\frac{1}{a^2}} + 3\sqrt[3]{8b.8b.\frac{1}{b^2}} + 3\sqrt[3]{8c.8c.\frac{1}{c^2}} - 15(a+b+c) \geq 3.4+3.4+3.4-15.\frac{3}{2} = \frac{27}{2}$$

Hoặc ta có thể giải như sau:

Ta có $P \geq 3\sqrt[3]{abc} + \frac{3}{\sqrt[3]{(abc)^2}}$ (Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c$)

Đặt $t = \sqrt[3]{abc}$, khi đó $0 < t = \sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+b+c}{3} \leq \frac{1}{2}$. Lúc này ta thu được

$$P \geq 3t + \frac{3}{t^2} = 24t + 24t + \frac{3}{t^2} - 45t$$

$$\geq 3\sqrt[3]{24.24.3} - 45.\frac{1}{2} = \frac{27}{2}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $t = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a = b = c = \frac{1}{2}$

Bài 14. Cho là các số thực dương thỏa mãn .

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = a^2+b^2+c^2+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$.

Giải.

Do P là biểu thức đối xứng theo a,b,c nên ta dự đoán dấu "=" xảy ra khi $a=b=c=\frac{1}{2}$ nên ta biến đổi như sau:

$$P = a^2+\frac{1}{8a}+\frac{1}{8a}+b^2+\frac{1}{8b}+\frac{1}{8b}+c^2+\frac{1}{8c}+\frac{1}{8c}+\frac{3}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

$$\geq 3\sqrt[3]{a^2.\frac{1}{8a}.\frac{1}{8a}} + 3\sqrt[3]{b^2.\frac{1}{8b}.\frac{1}{8b}} + 3\sqrt[3]{c^2.\frac{1}{8c}.\frac{1}{8c}} + \frac{3}{4}.\frac{9}{a+b+c} = \frac{9}{4}+\frac{3}{4}.9.\frac{2}{3} = \frac{27}{4}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

Bài 15. Cho $a;b$ là các số thực thỏa mãn $0 \leq a \leq 3$, $8 \leq b \leq 11$ và $a+b=11$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = ab$.

Giải.

Từ giả thiết $0 \le a \le 3$, $8 \le b \le 11$ và $a+b=11$, ta dự đoán đạt giá trị lớn nhất khi $a=3; b=8$, khi đó $8a=3b$, nên ta biến đổi P như sau:

$$P=\frac{1}{24}.8a.3b \le \frac{1}{24}\frac{(8a+3b)^2}{4}=\frac{\left[3(a+b)+5a\right]^2}{96}=\frac{(33+5a)^2}{96} \le \frac{(33+5.3)^2}{96}=24.$$

Vậy $\max P=24$ khi $a=3, b=8$.

Bài 16. Cho $a \ge 0, b \ge 0, c \ge 3$ là các số thực thỏa mãn . Chứng minh rằng $abc \le \frac{27}{4}$.

Giải.

Ta dự đoán đẳng thức xảy ra khi $a=b=\frac{3}{2}, c=3$ khi đó $a+b=c$.

Ta có $abc \le \frac{(a+b)^2 c}{4}=\frac{a+b}{4}.c.(a+b) \le \frac{a+b}{4}.\frac{(a+b+c)^2}{4}=\frac{9}{4}(a+b)$. Mặt khác theo giả thiết $a+b+c=6$ và $c \ge 3$ suy ra $a+b \le 3$ nên $abc \le \frac{9}{4}.3=\frac{27}{4}$ (đpcm).

Bài 17. Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{a^3}{(a+b)(b+2c)}+\frac{b^3}{(b+c)(c+2a)}+\frac{c^3}{(c+a)(a+2b)}.$$

Giải.

Ta có
$$\frac{a^3}{(a+b)(b+2c)}+\frac{a+b}{12}+\frac{b+2c}{18} \ge \frac{1}{2}a$$
$$\frac{b^3}{(b+c)(c+2a)}+\frac{b+c}{12}+\frac{c+2a}{18} \ge \frac{1}{2}b$$
$$\frac{c^3}{(c+a)(a+2b)}+\frac{c+a}{12}+\frac{a+2b}{18} \ge \frac{1}{2}c$$

Cộng vế theo vế ta được $P+\frac{2(a+b+c)}{12}+\frac{3(a+b+c)}{18} \ge \frac{1}{2}(a+b+c)$

$\Leftrightarrow P \ge \frac{1}{6}(a+b+c)=\frac{1}{6}.6=1$.

Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c=2$.

Bài 18. Cho các số thực dương thỏa mãn đẳng thức $3(ab+bc+ca)=4+3(a+b+c)$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{a^3+b^3+c^3}{2}+\frac{16}{9}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+1\right)$

Giải.

Sử dụng bất đẳng thức AM - GM, ta có: $a^3+b^3+\alpha^3 \ge 3.\alpha.ab$

$b^3+c^3+\alpha^3 \ge 3.\alpha.bc$

$c^3+a^3+\alpha^3 \ge 3.\alpha.ca$ với α là số thực dương.

Khi đó ta được: $2(a^3+b^3+c^3)+3\alpha^3 \ge 3.\alpha(ab+bc+ca)$

Bất đẳng thức tương đương với $\frac{2}{3\alpha}\left(a^3+b^3+c^3\right)+\alpha^2 \ge ab+bc+ca \quad (1)$

Mặt khác $\left(\frac{1}{a}+\frac{a}{\alpha^2}\right)+\left(\frac{1}{b}+\frac{b}{\alpha^2}\right)+\left(\frac{1}{c}+\frac{c}{\alpha^2}\right) \ge \frac{6}{\alpha}$ (Áp dụng bất đẳng thức AM-GM)

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge \frac{6}{\alpha}-\frac{1}{\alpha^2}(a+b+c)\Leftrightarrow \alpha^2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\ge 6\alpha-(a+b+c)\quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta được $\frac{2}{3\alpha}(a^3+b^3+c^3)+\alpha^2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+1\right)\ge 6\alpha+\frac{4}{3}$

Ta chọn α sao cho đẳng thức xảy ra, tức là $a=b=c=\alpha$

Chọn $\alpha=\frac{4}{3}$ là nghiệm của phương trình $9\alpha^2=9\alpha+4$

Vì vậy $P=\frac{\left(a^3+b^3+c^3\right)}{2}+\frac{16}{9}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+1\right)\ge\frac{28}{3}$

Giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{28}{3}$ khi $a=b=c=\frac{4}{3}$

Bài 19. (ĐH – K.B – 2007) Cho là các số thực dương thay đổi. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{yz}\right)+y\left(\frac{y}{2}+\frac{1}{zx}\right)+z\left(\frac{z}{2}+\frac{1}{xy}\right)$

Giải.

Do vai trò của x,y,z là bình đẳng nên ta dự đoán dấu "=" xảy ra khi $x=y=z$.

Khi đó $x\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{yz}\right)=x\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{x.x}\right)=\frac{x^2}{2}+\frac{1}{x}$, nên biểu thức P trở thành

$P=\frac{x^2}{2}+\frac{1}{x}+\frac{y^2}{2}+\frac{1}{y}+\frac{z^2}{2}+\frac{1}{z}$. Ta nghĩ ngay đến hàm đặc trưng có dạng $f(t)=\frac{t^2}{2}+\frac{1}{t}$.

Từ đó cho ta các biến đổi như sau:

$$P=\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+\frac{z^2}{2}+\frac{x}{yz}+\frac{y}{zx}+\frac{z}{xy}=\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+\frac{z^2}{2}+\frac{x^2+y^2+z^2}{xyz}\ge\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+\frac{z^2}{2}+\frac{xy+yz+zx}{xyz}$$

$$=\frac{x^2}{2}+\frac{1}{x}+\frac{y^2}{2}+\frac{1}{y}+\frac{z^2}{2}+\frac{1}{z}.$$

Xét hàm số $f(t)=\frac{t^2}{2}+\frac{1}{t}, t>0$. Ta có $f(t)\ge f(1)=\frac{3}{2},\forall t>0$

Nên $P\ge 3.\frac{3}{2}=\frac{9}{2}$.

Vậy $\min P=\frac{9}{2}$ khi $x=y=z=1$.

Bài 20. (ĐH – K.B – 2009) Cho là các số thực dương thay đổi thỏa mãn $(x+y)^3+4xy\ge 2$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=3\left(x^4+y^4+x^2y^2\right)-2\left(x^2+y^2\right)+1$

Giải.

Do vai trò của là bình đẳng nên ta dự đoán dấu "=" xảy ra khi $x=y$.

Thay vào giả thiết $(x+y)^3+4xy=2$ ta được $x=y=\frac{1}{2}$.

Mặt khác nếu kết hợp giữa giả thiết và biểu thức A thì ta được hệ bất PT đối xứng với x,y. Nên ta định hướng là biến đổi giả thiết và biểu thức về có dạng tổng $x+y$ và xy.

Ta có $\quad xy=\frac{1}{4}\left[(x+y)^2-(x-y)^2\right]\le\frac{1}{4}(x+y)^2$

$$x^2+y^2=\frac{1}{2}\left[(x+y)^2+(x-y)^2\right]\ge\frac{1}{2}(x+y)^2$$

Ta có $(x+y)^3+4xy\ge 2 \Leftrightarrow (x+y)^3+(x+y)^2-(x-y)^2\ge 2$

$\Rightarrow (x+y)^3+(x+y)^2\ge 2 \Leftrightarrow (x+y)^3+(x+y)^2-2\ge 0 \Leftrightarrow (x+y-1)\left[(x+y)^2+2(x+y)+2\right]\ge 0$

$\Leftrightarrow x+y-1\ge 0 \Leftrightarrow x+y\ge 1$.

Khi đó $x^2+y^2=\frac{1}{2}\left[(x+y)^2+(x-y)^2\right]\ge \frac{1}{2}(x+y)^2\ge \frac{1}{2}$

Khi đó

$$A=3\left[\left(x^2+y^2\right)^2-x^2y^2\right]-2\left(x^2+y^2\right)+1$$

$$=3\left[\left(x^2+y^2\right)^2-\frac{1}{4}\left(\left(x^2+y^2\right)^2-\left(x^2-y^2\right)^2\right)\right]-2\left(x^2+y^2\right)+1$$

$$=\frac{9}{4}\left(x^2+y^2\right)^2-2\left(x^2+y^2\right)+\frac{3}{4}\left(x^2-y^2\right)^2+1\ge \frac{9}{4}\left(x^2+y^2\right)^2-2\left(x^2+y^2\right)+1$$

Đặt $t=x^2+y^2\ge \frac{1}{2}$. Xét hàm số $f(t)=\frac{9}{4}t^2-2+1$ với $t\ge \frac{1}{2}$

Ta có $f(t)\ge f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{9}{16},\forall t\ge \frac{1}{2}$.

Vậy $\min A=\frac{9}{16}$ khi $x=y=\frac{1}{2}$.

Bài 21. Cho $x;y;z$ là các số thực không âm thỏa mãn $x+y+z=2$.

Chứng minh rằng $\sqrt{x^3y+y^3z+z^3x}+\sqrt{xy^3+yz^3+zx^3}\le 2$.

Giải.

Nhận xét rằng dấu bằng xảy ra khi (chẳng hạn) $x=y=1,z=0$, khi đó ta có $\sqrt{x^3y+y^3z+z^3x}=\sqrt{xy^3+yz^3+zx^3}$, nên ta hoàn toàn có thể sử dụng BĐT $\sqrt{a}+\sqrt{b}\le\sqrt{2(a+b)}$ để loại bỏ căn thức mà vẫn bảo toàn dấu "=" của bài toán. Khi đó bài toán trên tương đương

$$x^3y+y^3z+z^3x+xy^3+yz^3+zx^3\le 2$$

$$\Leftrightarrow xy\left(x^2+y^2\right)+yz\left(y^2+z^2\right)+zx\left(z^2+x^2\right)\le 2$$

Mặt khác ta lại có

$$xy\left(x^2+y^2\right)+yz\left(y^2+z^2\right)+zx\left(z^2+x^2\right)\le xy\left(x^2+y^2+z^2\right)+yz\left(y^2+z^2+x^2\right)+zx\left(z^2+x^2+y^2\right)$$

$$=(xy+yz+zx)\left(x^2+y^2+z^2\right)$$

Do vậy ta chỉ cần chứng minh: $(xy+yz+zx)\left(x^2+y^2+z^2\right)\le 2$

Áp dụng BĐT AM – GM dạng $ab\le\frac{(a+b)^2}{4}$, ta được

$$(xy+yz+zx)\left(x^2+y^2+z^2\right)=\frac{1}{2}.2.(xy+yz+zx)\left(x^2+y^2+z^2\right)$$

$$\le\frac{1}{2}.\frac{\left[2(xy+yz+zx)+\left(x^2+y^2+z^2\right)\right]^2}{4}=\frac{(x+y+z)^4}{8}=\frac{2^4}{8}=2.$$

Bài toán được chứng minh. Dấu bằng xảy ra khi và các hoán vị của nó.

Bài 22. Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC ta luôn có $\sin A+\sin B+\sin C\le\frac{3\sqrt{3}}{2}$

Phân tích để đi đến lời giải: Ta dự đoán dấu đẳng thức xảy ra khi tam giác ABC là tam giác đều $A = B = C = \frac{\pi}{3}$.

Vì $A + B + C = \pi$ ta giảm bớt số biến bằng $\sin C = \sin A\cos B + \sin B\cos A$

$P = \sin A + \sin B + \sin C = \sin A + \sin B + \sin A\cos B + \sin B\cos A$, ta nghĩ đến:

$\begin{cases} \sin^2 A + \cos^2 A = 1 \\ \sin^2 B + \cos^2 B = 1 \end{cases}$; A, B không còn quan hệ ràng buộc, làm thế nào để xuất hiện $\sin^2 A, \cos^2 A$, ta nghĩ ngay đến bất đẳng thức $ab \le \frac{a^2 + b^2}{2}$,

$\sin A = \sin B = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos A = \cos B = \frac{1}{2}$, Ta áp dụng Cauchy:

$$\left[\frac{\sin A}{\sqrt{3}}\cos B + \frac{\sin B}{\sqrt{3}}\cos A\right]\sqrt{3} \le \frac{\sqrt{3}}{2}\left[\left(\frac{\sin^2 A}{3} + \cos^2 B\right) + \left(\frac{\sin^2 B}{\sqrt{3}} + \cos^2 A\right)\right]$$

Ta có: $\sin A + \sin B \le \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\left(\sin^2 A + \frac{3}{4}\right) + \left(\sin^2 B + \frac{3}{4}\right)\right]$. Vậy:

$$VT \le \frac{\sqrt{3}}{2}\left[\left(\frac{\sin^2 A}{3} + \cos^2 B\right) + \left(\frac{\sin^2 B}{3} + \cos^2 A\right)\right] + \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\left(\sin^2 A + \frac{3}{4}\right) + \left(\sin^2 B + \frac{3}{4}\right)\right] = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

§2. KỸ THUẬT CHỌN ĐIỂM RƠI TRONG BẤT ĐẲNG THỨC BUNHIAKSKY

A. Ví dụ minh họa

Ví dụ 1. Cho x, y, z là ba số dương và $x+y+z \le 1$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{y^2+\frac{1}{y^2}}+\sqrt{z^2+\frac{1}{z^2}} \ge \sqrt{82}$$

Giải

◊ *Sai lầm* :

Nhận xét: Chúng ta có thể dùng bất đẳng thức Cauchy như ở phần 1

$$\sqrt{\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\left(1^2+1^2\right)} \ge \sqrt{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2} = x+\frac{1}{x} \Rightarrow \sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}} \ge \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x+\frac{1}{x}\right)$$

Tương tự ta có: $P \ge \frac{1}{\sqrt{2}}\left[(x+y+z)+\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\right] \ge \frac{2}{\sqrt{2}}\sqrt{(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)} = 3\sqrt{2}$

Vậy $P \ge 3\sqrt{2}$....?

◊ *Nguyên nhân sai lầm*: $P = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{1}=\frac{1}{x}, \frac{y}{1}=\frac{1}{y}, \frac{z}{1}=\frac{1}{z}\,(vn) \\ x+y+z=1 \end{cases}$

◊ ***Lời giải đúng***. Ta dự đoán dấu đẳng thức xảy ra khi , và biểu thức trong căn gợi cho ta sử dụng BCS: $\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\left(\alpha^2+\beta^2\right) \ge \left(\alpha x+\frac{\beta}{y}\right)^2$ với α, β là những số thỏa mãn:

$$\frac{x}{\alpha}=\frac{\frac{1}{x}}{\beta}=\frac{1}{\beta x} \Leftrightarrow x^2=\frac{\alpha}{\beta}=\frac{1}{9}$$, chọn $\alpha=1, \beta=9$

Ta có $\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\left(1^2+9^2\right) \ge \left(x+\frac{9}{x}\right)^2 \Rightarrow \sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}} \ge \frac{1}{\sqrt{82}}\left(x+\frac{9}{x}\right)$

Tương tự ta có $P \ge \frac{1}{\sqrt{82}}\left[9(x+y+z)+9\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\right]$

Do $x+y+z=1, \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=9$ nên ta tách

$$(x+y+z)+\frac{1}{9}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)+\frac{80}{9}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \ge \frac{2}{3}\sqrt{(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)}+\frac{80}{9}\frac{9}{x+y+z} \ge 82$$

Vậy $P \ge \sqrt{82}$, dấu "=" xảy ra khi $x=y=z=\frac{1}{3}$.

Ví dụ 2. Cho $\begin{cases} x, y, z > 0 \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \le 1 \end{cases}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}x+y+z}+\frac{1}{x+\sqrt{2}y+z}+\frac{1}{x+y+\sqrt{2}z}$$

Giải

Áp dụng BĐT Cauchy – Schwarz ta có $\frac{\alpha^2}{\sqrt{2}x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\ge\frac{(\alpha+2)^2}{\sqrt{2}x+y+z}$

Ta chọn α sao cho $x=y=z=3$ và $\frac{\alpha}{\sqrt{2}x}=\frac{1}{y}=\frac{1}{z}\Rightarrow\frac{\alpha}{\sqrt{2}}=1\Rightarrow\alpha=\sqrt{2}$

Vậy ta có $\begin{cases}\frac{2}{\sqrt{2}x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\ge\frac{\left(2+\sqrt{2}\right)^2}{\sqrt{2}x+y+z}\\ \frac{1}{x}+\frac{1}{\sqrt{2}y}+\frac{1}{z}\ge\frac{\left(2+\sqrt{2}\right)^2}{x+\sqrt{2}y+z}\\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{\sqrt{2}z}\ge\frac{\left(2+\sqrt{2}\right)^2}{x+y+\sqrt{2}z}\end{cases}\Rightarrow P\le\frac{\left(\sqrt{2}+2\right)}{\left(2+\sqrt{2}\right)^2}\left[\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right]\le\frac{1}{2+\sqrt{2}}$

Dấu bằng xảy ra khi $x=y=z=3\Rightarrow MaxP=\frac{1}{2+\sqrt{2}}$ khi $x=y=z=3$

Ví dụ 3. Cho $\begin{cases}a,b,c>0\\ a+b+c\ge 6\end{cases}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$S=\sqrt{a^2+\frac{1}{b^2}}+\sqrt{b^2+\frac{1}{c^2}}+\sqrt{c^2+\frac{1}{a^2}}$$

Giải

◊ Phân tích và tìm tòi lời giải

Xét dạng đặc biệt với $n=2$.

$\sqrt{\left[a_1^2+a_2^2\right]\left(b_1^2+b_2^2\right)}\ge a_1b_1+a_2b_2$. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}\ge 0$

Ý nghĩa: Chuyển đổi một biểu thức ở trong căn thành một biểu thức khác ở ngoài căn. Xét đánh giá giả định với các số α, β

$$\sqrt{a^2+\frac{1}{b^2}}=\frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\sqrt{\left[a^2+\left(\frac{1}{b}\right)^2\right]\left(\alpha^2+\beta^2\right)}\ge\frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\left(\alpha a+\frac{\beta}{b}\right)\quad(1)$$

$$\sqrt{b^2+\frac{1}{c^2}}=\frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\sqrt{\left[b^2+\left(\frac{1}{c^2}\right)^2\right]\left(\alpha^2+\beta^2\right)}\ge\frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\left(\alpha b+\frac{\beta}{a}\right)\quad(2)$$

$$\sqrt{c^2+\frac{1}{a^2}}=\frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\sqrt{\left[c^2+\left(\frac{1}{a}\right)\right]\left(\alpha^2+\beta^2\right)}\ge\frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\left(\alpha c+\frac{\beta}{a}\right)\quad(3)$$

$$\Rightarrow S\ge\frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\sqrt{\left[\alpha(a+b+c)+\beta\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\right]}=S_0$$

Do S là một biểu thức đối xứng với a,b,c nên dự đoán $S=S_0$ tại điểm rơi $a=b=c=2$, khi đó tất cả các bất đẳng thức (1), (2), (3) đồng thơi xảy ra dấu bằng tức là ta có sơ đồ điểm rơi sau:

Sơ đồ: $\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{a}{\alpha} = \dfrac{1}{\beta b} \\ \dfrac{b}{\alpha} = \dfrac{1}{\beta c} \\ \dfrac{c}{\alpha} = \dfrac{1}{\beta a} \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{a}{\frac{1}{b}} = \dfrac{b}{\frac{1}{c}} = \dfrac{c}{\frac{1}{a}} = \dfrac{4}{1} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 4 \\ \beta = 1 \end{cases}$

◊ Giải

$$\sqrt{a^2 + \frac{1}{b^2}} = \frac{1}{\sqrt{17}}\sqrt{\left(a^2 + \frac{1}{b^2}\right)(4^2 + 1^2)} \geq \frac{1}{\sqrt{17}}\left(4a + \frac{1}{b}\right)$$

$$\sqrt{b^2 + \frac{1}{c^2}} = \frac{1}{\sqrt{17}}\sqrt{\left(b^2 + \frac{1}{c^2}\right)(4^2 + 1^2)} \geq \frac{1}{\sqrt{17}}\left(4b + \frac{1}{c}\right)$$

$$\sqrt{c^2 + \frac{1}{a^2}} = \frac{1}{\sqrt{17}}\sqrt{\left(c^2 + \frac{1}{a^2}\right)(4^2 + 1^2)} \geq \frac{1}{\sqrt{17}}\left(4c + \frac{1}{a}\right)$$

$$\Rightarrow S \geq \frac{1}{\sqrt{17}}\left(4a + 4b + 4c + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = \frac{1}{\sqrt{17}}\left[\frac{15}{4}(a+b+c) + \left(\frac{a}{4} + \frac{b}{4} + \frac{c}{4} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)\right]$$

$$\geq \frac{1}{\sqrt{17}}\left(\frac{15}{4}\cdot 6 + 6\sqrt[6]{\frac{a}{4}\cdot\frac{b}{4}\cdot\frac{c}{4}\cdot\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{c}}\right) = \frac{1}{\sqrt{17}\left(\frac{45}{2} + 3\right)} = \frac{3\sqrt{17}}{2}$$

Với thì $MinS = \dfrac{3\sqrt{17}}{2}$

Ví dụ 4. Cho $\begin{cases} a,b,c > 0 \\ a+b+c \geq 6 \end{cases}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $S = \sqrt{a^2 + \dfrac{1}{b+c}} + \sqrt{b^2 \dfrac{1}{c+a}} + \sqrt{c^2 + \dfrac{1}{a+b}}$

◊ Phân tích và tìm tòi lời giải

Xét đánh giá giả định với các số α, β

$$\sqrt{\left[a^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{b+c}}\right)^2\right]\left(\alpha^2 + \beta^2\right)} \geq \alpha a + \frac{\beta}{\sqrt{b+c}} \qquad (1)$$

$$\sqrt{\left[b^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{c+a}}\right)^2\right]\left(\alpha^2 + \beta^2\right)} \geq \alpha b + \frac{\beta}{\sqrt{c+a}} \qquad (2)$$

$$\sqrt{\left[c^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{a+b}}\right)^2\right]\left(\alpha^2 + \beta^2\right)} \geq \alpha c + \frac{\beta}{\sqrt{a+b}} \qquad (3)$$

$$\Rightarrow \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}.S \geq \alpha(a+b+c) + \beta\left(\frac{1}{\sqrt{a+b}} + \frac{1}{\sqrt{b+c}} + \frac{1}{\sqrt{c+a}}\right)$$

$$\Leftrightarrow S \geq \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}\left[\alpha\left(a+b+c\right) + \beta\left(\frac{1}{\sqrt{a+b}} + \frac{1}{\sqrt{b+c}} + \frac{1}{\sqrt{c+a}}\right)\right] = S_o$$

Do S là một biểu thức đối xứng với a,b,c nên dự đoán $S = S_0$ tại điểm rơi $a = b = c = 2$, khi đó tất cả các bất đẳng thức (1), (2), (3) đồng thời xảy ra dấu bằng tức là ta có sơ đồ điểm rơi sau:

◊ Sơ đồ điểm rơi

Sơ đồ: $a=b=c=2 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{a}{\alpha}=\dfrac{1}{\beta b} \\ \dfrac{b}{\alpha}=\dfrac{1}{\beta c} \\ \dfrac{c}{\alpha}=\dfrac{1}{\beta a} \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{a}{\frac{1}{b}}=\dfrac{b}{\frac{1}{c}}=\dfrac{c}{\frac{1}{a}}=\dfrac{4}{1} \Rightarrow \begin{cases} \alpha=4 \\ \beta=1 \end{cases}$

Từ đó ta có lời giải sau đây

◊ Giải

$$\sqrt{\left[a^2+\left(\frac{1}{\sqrt{b+c}}\right)^2\right](4^2+1^2)} \ge 4a+\frac{1}{\sqrt{b+c}}$$

$$\sqrt{\left[b^2+\left(\frac{1}{\sqrt{c+a}}\right)^2\right]\left(4^2+1^2\right)} \ge 4b+\frac{1}{\sqrt{c+a}}$$

$$\sqrt{\left[c^2+\left(\frac{1}{\sqrt{a+b}}\right)^2\right]\left(4^2+1^2\right)} \ge 4b+\frac{1}{\sqrt{a+b}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{17}.S \ge 4\left(a+b+c\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{a+b}}+\frac{1}{\sqrt{b+c}}+\frac{1}{\sqrt{c+a}}\right)$$

$$\ge 4(a+b+c)+\frac{3}{\sqrt[3]{\sqrt{a+b}.\sqrt{b+c}.\sqrt{c+a}}} \ge 4(a+b+c)+\frac{9}{\sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a}}$$

$$\ge 4\left(a+b+c\right)+\frac{9}{\sqrt[3]{\left(1^2+1^2+1^2\right)\left[\left(a+b\right)+\left(b+c\right)+\left(c+a\right)\right]}}=4\left(a+b+c\right)+\frac{9}{\sqrt{6\left(a+b+c\right)}}$$

$$=\frac{31}{8}(a+b+c)+\frac{a+b+c}{8}+\frac{9}{2\sqrt{6(a+b+c)}}+\frac{9}{2\sqrt{6(a+b+c)}}$$

$$\ge \frac{31}{8}\cdot 6+3\sqrt[3]{\frac{a+b+c}{8}\cdot\frac{9}{2\sqrt{6\left(a+b+c\right)}}.\frac{9}{2\sqrt{6\left(a+b+c\right)}}}=\frac{93}{4}+\frac{9}{4}=\frac{51}{2}$$

$$\Rightarrow S \ge \frac{51}{2\sqrt{17}}=\frac{3.17}{2.17}=\frac{3.17}{2}.$$

Vậy $a=b=c=2$ thì $MinS=\dfrac{3\sqrt{17}}{2}$.

Ví dụ 5. Cho $a,b,c>0$ thoả mãn $a+b+c+\sqrt{2abc} \ge 10$. Chứng minh rằng

$$S=\sqrt{\frac{8}{a^2}+\frac{9b^2}{2}+\frac{c^2a^2}{4}}+\sqrt{\frac{8}{b^2}+\frac{9c^2}{2}+\frac{a^2b^2}{4}}+\sqrt{\frac{8}{c^2}+\frac{9a^2}{2}+\frac{b^2c^2}{4}} \ge 6\sqrt{6}$$

Giải

◊ Ta dự đoán dấu "=" xảy ra khi

Sử dụng bất đẳng thức bunhiacôpski ta có:

$$\sqrt{2+18+4}.\sqrt{\frac{8}{a^2}+\frac{9b^2}{2}+\frac{c^2a^2}{4}} \ge \frac{4}{a}+9b+ca$$

$$\sqrt{2+18+4}.\sqrt{\frac{8}{b^2}+\frac{9c^2}{2}+\frac{a^2b^2}{4}} \ge \frac{4}{b}+9c+ab$$

$$\sqrt{2+18+4}.\sqrt{\frac{8}{c^2}+\frac{9a^2}{2}+\frac{b^2c^2}{4}} \ge \frac{4}{c}+9a+bc$$

$$\Rightarrow \sqrt{24}.S \ge 4\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+9\left(a+b+c\right)+ab+bc+ca$$

$$=\left(\frac{4}{a}+a\right)+\left(\frac{4}{b}+b\right)+\left(\frac{4}{c}+c\right)+\left(2a+bc\right)+\left(2b+ca\right)+\left(2c+ab\right)+6\left(a+b+c\right)$$

$$\ge 2\sqrt{\frac{4}{a}\cdot a}+2\sqrt{\frac{4}{b}\cdot b}+2\sqrt{\frac{4}{c}\cdot c}+2\sqrt{abc}+2\sqrt{abc}+2\sqrt{abc}+6\left(a+b+c\right)$$

$$=12+6\left(a+b+c+\sqrt{2abc}\right) \ge 12+6.10=72$$

$$\Rightarrow S \ge \frac{72}{\sqrt{24}}=6\sqrt{6}$$