Bài 8. Cho $f(x)$ là hàm lồi trên $[0, a]$. Giả sử $x_1, x_2, ..., x_n \in [0, a]$ sao cho $x_1 + x_2 + ... + x_n \in [0, a]$. Chứng minh rằng:

$$f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_n) \le f\left(x_1 + x_2 + ... + x_n\right) + (n-1)f(0)$$

(Bất đẳng thức Petrovica)

Chứng minh

Đặt $S = x_1 + x_2 + ... + x_n$. Sử dụng bất đẳng thức ***Jensen*** ta có

$$+\begin{cases} f(x_1) = f\left(\dfrac{x_1}{S}.S + \dfrac{S - x_1}{S}.0\right) \le \dfrac{x_1}{S}f(S) + \dfrac{S - x_1}{S}.f(0) \\ f(x_2) = f\left(\dfrac{x_2}{S}.S + \dfrac{S - x_2}{S}.0\right) \le \dfrac{x_2}{S}f(S) + \dfrac{S - x_2}{S}.f(0) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f(x_n) = f\left(\dfrac{x_n}{S}.S + \dfrac{S - x_n}{S}.0\right) \le \dfrac{x_n}{S}f(S) + \dfrac{S - x_n}{S}.f(0) \end{cases}$$

Suy ra: $f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_n) \le \dfrac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{S}.f(S) + \dfrac{(n-1)S}{S}f(0)$

$$\Leftrightarrow\ f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_n) \le f\left(x_1 + x_2 + ... + x_n\right) + (n-1)f(0)$$

Bất đẳng thức Petrovica mở rộng:

Cho $f(x)$ là hàm lồi trên $[0, a]$ và $p_1, p_2, ..., p_n \ge 0$. Giả sử $x_1, x_2, ..., x_n \in \left[0, \sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right]$ và $\sum_{i=1}^{n} p_i x_i < a$. Khi đó ta có bất đẳng thức $\sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i) \le f\left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right) + \left(\sum_{i=1}^{n} p_i - 1\right).f(0)$

Bài 9. Cho $f(x)$ là hàm lồi trên $[0, a]$ và $x_1, x_2, ..., x_n, p_1, p_2, ..., p_n \ge 0$ thỏa mãn:

1. $x_1, x_2, ..., x_n \in [0, a]$ *2.* $p_1, p_2, ..., p_n \ge 1$ *3.* $\dfrac{1}{k}\sum_{i=1}^{n} p_i x_i \in [0, a]$

4. $\sum_{i=1}^{n_1 - 1} p_i x_i = \sum_{i=n_1}^{n_2 - 1} p_i x_i = ... = \sum_{i=n_{k-1}}^{n} p_i x_i \quad \left(n_1 < n_2 < ... < n_{k-1}\right)$

Chứng minh rằng: $\sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i) \le kf\left(\dfrac{1}{k}\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right) - \left(k - \sum_{i=1}^{n} p_i\right)f(0)$

(Bất đẳng thức Vasic)

Chứng minh

Sử dụng bất đẳng thức ***Petrovica*** mở rộng

$$\sum_{i=n_v}^{n_{v+1}-1} p_i f(x_i) \le f\left(\sum_{i=n_v}^{n_{v+1}-1} p_i x_i\right) - \left(1 - \sum_{i=n_v}^{n_{v+1}-1} p_i\right) f(0) \text{ với } v = 0, 1, \dots, k \quad (1)$$

Theo giả thiết ta có $\sum_{i=n_v}^{n_{v+1}-1} p_i x_i = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{n} p_i x_i$ (Chú ý ở đây $n_0 = 1$, còn $n_k = n+1$)

Cộng các vế k bất đẳng thức ở dạng (1), ta có

$$\sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i) \le kf\left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right) - \left(k - \sum_{i=1}^{n} p_i\right) f(0)$$

Bài 10. Chứng minh: $T = \frac{x_1}{\sqrt{x_1 x_2 + x_2^2}} + \frac{x_2}{\sqrt{x_2 x_3 + x_3^2}} + \dots + \frac{x_n}{\sqrt{x_n x_1 + x_1^2}} \ge \frac{n}{\sqrt{2}}$, $\forall x_k > 0$

Chứng minh

Đặt $u_k = \frac{x_k}{x_{k+1}}$ trong đó $x_{n+1} = x_1 \Rightarrow u_1 u_2 \dots u_n = 1$.

Bây giờ đặt $t_k = \ln u_k$ suy ra $t_1 + \dots + t_n = 0$

Xét $f(t) = \frac{e^t}{\sqrt{1+e^t}} \Rightarrow f''(t) > 0 \Rightarrow f(t)$ là hàm số lồi trên $\mathbb{R}$

$$\Rightarrow T = \sum_{k=1}^{n} \frac{(x_k / x_{k+1})}{\sqrt{1 + (x_k / x_{k+1})}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{u_k}{\sqrt{1+u_k}} = \sum_{k=1}^{n} f(t_k) \ge nf\left(\frac{t_1 + t_2 + \dots + t_n}{n}\right) = nf(0) = \frac{n}{\sqrt{2}}$$

Bài 11. Chứng minh: $(b+c)^a (c+a)^b (a+b)^c \le \left[\frac{2}{3}(a+b+c)\right]^{a+b+c}$, $\forall a, b, c > 0$

Chứng minh

Bất đẳng thức $\Leftrightarrow \ln\left[(b+c)^a (c+a)^b (a+b)^c\right] \le \ln\left[\frac{2}{3}(a+b+c)\right]^{a+b+c}$

$$\Leftrightarrow \frac{a\ln(b+c) + b\ln(c+a) + c\ln(a+b)}{a+b+c} \le \ln\left[\frac{2}{3}(a+b+c)\right] \quad (1)$$

Xét $f(x) = -\ln(a+b+c-x)$ với $0 < x < a+b+c$

Ta có $f'(x) = \frac{1}{a+b+c-x} \Rightarrow f''(x) = \left(\frac{1}{a+b+c-x}\right)^2 > 0 \Rightarrow f(x)$ là hàm số lồi

Sử dụng bất đẳng thức ***Jensen*** ta có ta có $f'(u) = -10\dfrac{(1-u)^4}{(1+u)^6}$; $f''(u) = 80\dfrac{(1-u)^3}{(1+u)^7} + 20\dfrac{(1-u)^4}{(1+u)^7} > 0\ \forall u \in (-1,1) \Rightarrow f(u)$ lồi trên khoảng $(-1,1)$. Áp dụng bất đẳng thức ***Jensen***, ta được:

$$f(x)+f(y)+f(z)+f(t) \ge 4f\left(\frac{x+y+z+t}{4}\right) = 4f(0) = 4$$

Bài 14. Cho $x_1, x_2, ..., x_n > 0$ thỏa mãn $x_1 + x_2 + ... + x_n = 1$ $(n \ge 2)$

Chứng minh rằng: $$\frac{1}{\sum\limits_{j=1}^{n}\left(\sum\limits_{i=1}^{j}\frac{x_i}{1+x_i^2}\right)} > \frac{1}{n} + \prod_{j=1}^{n}\left(1 - \sum_{i=1}^{j}\frac{x_i}{1+x_i^2}\right) \quad (1)$$

Chứng minh

Đặt $a_j = \sum\limits_{i=1}^{j}\dfrac{x_i}{1+x_i^2}$. Ta sẽ chứng minh $a_j < 1\ \ \forall j = \overline{1,n}$

Xét hàm số $f(t) = \dfrac{t}{1+t^2}$ với $t \in (0,1)$. Ta có $f'(t) = \dfrac{-t^2+1}{(t^2+1)^2}$

$\Rightarrow f''(t) = \dfrac{2t(t^2-3)}{(t^2+1)^3} < 0$, $\forall t \in (0,1) \Rightarrow f(t)$ là hàm số lõm.

Sử dụng bất đẳng thức ***Jensen*** ta có: $a_j = \sum\limits_{i=1}^{j} f(x_i) \le j.f\left(\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{j} x_i}{j}\right) = \dfrac{j^2}{1+j^2} < 1$

Bất đẳng thức $\Leftrightarrow \dfrac{1}{\sum\limits_{j=1}^{n} a_j} \ge \dfrac{1}{n} + \prod\limits_{j=1}^{n}(1-a_j)$, $\forall 0 < a_j < 1$ (2). Đặt $S = \sum\limits_{j=1}^{n} a_j$

Sử dụng bất đẳng thức ***AM – GM*** ta có:

$$\frac{1}{n} + \prod_{j=1}^{n}(1-a_j) \le \frac{1}{n} + \left[\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(1-a_j)\right]^n = \frac{1}{n} + \left(\frac{n-S}{n}\right)^n$$

Để chứng minh (2),ta sẽ chứng minh $\dfrac{1}{n} + \left(\dfrac{n-S}{n}\right)^n \le \dfrac{1}{S} \Leftrightarrow \dfrac{S}{n^{n-1}}(n-S)^n \le n-S$

$\Leftrightarrow (n-1)S(n-S)^{n-1} \le n^{n-1}(n-1)$. Sử dụng bất đẳng thức ***AM – GM*** ta có:

$$(n-1)S(n-S)^{n-1} \le \left[\frac{(n-1)S+(n-1)(n-S)}{n}\right]^n = (n-1)^n < n^{n-1}(n-1)$$

Như vậy bất đẳng thức (2) được chứng minh suy ra (1) được chứng minh.

2. Các bài tập dành cho bạn đọc tự giải

Bài 1. Chứng minh rằng: $1-\frac{2x}{\pi}\le\cos x\le\frac{\pi}{2}-x$, $\forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

Bài 2. Cho $p,q\ge 0, p+q=1$. Chứng minh rằng: $e^{px+qy}\le pe^x+qe^y\quad\forall x,y\in\mathbb{R}$

Bài 3. Cho $p_1,p_2,...,p_n\ge 0; p_1+p_2+...+p_n=1$. Chứng minh rằng:

$$e^{p_1x_1}e^{p_2x_2}....e^{p_nx_n}\le p_1e^{x_1}+p_2e^{x_2}+...+p_ne^{x_n};\qquad\forall x_i\in\mathbb{R}$$

Bài 4. Chứng minh rằng: $\ln\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}\ge\sqrt[n]{\ln x_1\ln x_2....\ln x_n}$, $\forall x_i>1$

Bài 5. Cho $a, b, c\in[0, 1]$. Chứng minh rằng: $(1-a)(1-b)(1-c)\le\left(1-\sqrt[3]{abc}\right)^3$

Bài 6. Chứng minh: $\frac{a}{\sqrt[3]{b^3+c^3+6abc}}+\frac{b}{\sqrt[3]{c^3+a^3+6abc}}+\frac{c}{\sqrt[3]{a^3+b^3+6abc}}\ge\frac{3}{2}$, $\forall a,b,c>0$

Bài 7. Cho $a_1, a_2, ..., a_n\in[0, 1]$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{\sqrt{1+a_1^n}}+\frac{1}{\sqrt{1+a_2^n}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{1+a_n^n}}\le\frac{n}{\sqrt{1+a_1a_2....a_n}}$$

Bài 8. Cho $a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_n>0$ và $p\ge 2$. Chứng minh rằng:

$$\left(a_1^p+a_2^p+...+a_n^p\right)\left(b_1^p+b_2^p+...+b_n^p\right)\ge n^{2-p}\left(a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n\right)^p$$

Bài 9. Cho $a_1, a_2, ..., a_n\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$, $2\le n\in\mathbb{N}$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a_1a_2...a_n}{(1-a_1)(1-a_2)...(1-a_n)}\le\left[\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n-(a_1+a_2+...+a_n)}\right]^n$$

Bài 10. Cho n góc $x_1,x_2,...,x_n\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ với $x_1+x_2+...+x_n=\pi$.

Chứng minh rằng: $\frac{n-\left(\tan^2x_1+\tan^2x_2+...+\tan^2x_n\right)}{n+\left(\tan^2x_1+\tan^2x_2+...+\tan^2x_n\right)}\le\cos\frac{2\pi}{n}$

Bài 11. Cho hàm f tăng trên $\mathbb{R}$ có $f(0)=0$, $f''(x)<0\ \forall x\in\mathbb{R}$. Chứng minh rằng

Nếu a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác thì

$f(a), f(b), f(c)$ cũng là độ dài ba cạnh của một tam giác.

Bài 12. Cho tam giác ABC. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

1. $T = \tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2} + \tan\frac{C}{2} + \sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2}$

2. $P = \tan^2\frac{A}{2} + \tan^2\frac{B}{2} + \tan^2\frac{C}{2} + 2.\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

3. $Q = \frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C} - \frac{1}{2}(\cot A + \cot B + \cot C)$

Bài 13. Cho tam giác ABC nhọn. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$T = (\tan A)^{\tan A}(\tan B)^{\tan B}(\tan C)^{\tan C}$$

Bài 14. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$(2a+1)^{\frac{5}{2}} + (2b+1)^{\frac{5}{2}} + (2c+1)^{\frac{5}{2}} + 5\left[(a+b+1)^{\frac{3}{2}} + (b+c+1)^{\frac{3}{2}} + (c+a+1)^{\frac{3}{2}}\right] \geq$$

$$\geq (a+b+1)^{\frac{5}{2}} + (b+c+1)^{\frac{5}{2}} + (c+a+1)^{\frac{5}{2}} + 5\left[(2a+1)^{\frac{3}{2}} + (2b+1)^{\frac{3}{2}} + (2c+1)^{\frac{3}{2}}\right]$$

Bài 15. Cho $a, b, c \in \left[\frac{1}{3}, 1\right]$. Chứng minh rằng:

$$\frac{27abc}{(1+\sqrt{1-a})^2(1+\sqrt{1-b})^2(1+\sqrt{1-c})^2} \leq \left(\frac{a}{1+\sqrt{1-a}} + \frac{b}{1+\sqrt{1-b}} + \frac{c}{1+\sqrt{1-c}}\right)^3$$

Bài 16. Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{9}{4} + \ln\frac{(a+1)(b+1)(c+1)}{8abc} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1}\right)$$

Bài 17. Cho $a, b, c > 1$ thỏa mãn $a + b + c = 6$. Chứng minh rằng:

$$27e^{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}-\frac{3}{4}} \geq 64\left(1-\frac{1}{a^2}\right)\left(1-\frac{1}{b^2}\right)\left(1-\frac{1}{c^2}\right)$$

Bài 18. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng: $\left[\frac{a+b+c}{3} + \sqrt[6]{2}\cdot\sqrt[3]{\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 + 1}\right]^3 \geq$

$$\ge \left(a+\frac{a+1}{\sqrt{2}}\right)\left(b+\frac{b+1}{\sqrt{2}}\right)\left(c+\frac{c+1}{\sqrt{2}}\right)e^{\frac{(a+b+c)(3+a+b+c)}{3\sqrt{2}}-(a+b+c)\sqrt[6]{2}\cdot\sqrt{a^2+1}}$$

Bài 19. Cho $a, b, c \in \left[\sqrt{2}, 2\right]$. Chứng minh rằng:

$$\frac{\left(2+\sqrt{4-a^2}\right)\left(2+\sqrt{4-b^2}\right)\left(2+\sqrt{4-c^2}\right)}{abc} \le (1+\sqrt{2})^3$$

Bài 20. Cho $x, y, z \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Chứng minh rằng: $\cos x + \cos y + \cos z \le$

$$\le \ln\left(\cot\frac{x}{2}\cot\frac{y}{2}\cot\frac{z}{2}\right) - 3\ln\left(\cot\frac{x+y+z}{6}\right) + 3\sqrt{1-\frac{1}{9}(\sin x+\sin y+\sin z)^2}$$

Bài 21. Cho $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$ và $\alpha \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng:

$$\prod_{k=1}^{n}\left(a_k+\sqrt{a_k^2+\alpha^2}\right) \le \left[\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}+\sqrt{\left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\right)^2+\alpha^2}\right]^n$$

Bài 22. Cho $a, b, c \ge 0$ thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng:

$$(a^2-a+1)(b^2-b+1)(c^2-c+1) \ge \left(\frac{7}{16}\right)^3 (a+1)^2(b+1)^2(c+1)^2$$

Bài 23. Cho $a, b, c \ge 0$ thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{\left(a^2-\sqrt{2}a+1\right)\left(b^2-\sqrt{2}b+1\right)\left(c^2-\sqrt{2}c+1\right)}{\left(10-3\sqrt{2}\right)^6} \ge \frac{\left(a^2+\sqrt{2}a+1\right)\left(b^2+\sqrt{2}b+1\right)\left(c^2+\sqrt{2}c+1\right)}{82^3}$$

Bài 24. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng : $\frac{a}{3a+2b+2c}+\frac{b}{3b+2c+2a}+\frac{c}{3c+2a+2b} \ge \frac{3}{7}$

Bài 25. Cho $x, y, z \in [0, 3]$ thỏa mãn $x+y+z=3$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt[7]{4-x^7}+\sqrt[7]{4-y^7}+\sqrt[7]{4-z^7} \le 3.\sqrt[7]{3}$$

Bài 26. Cho $\begin{cases} 0<x,y,z<1 \\ xy+yz+zx=1 \end{cases}$. Chứng minh $\frac{8x^2y^2z^2}{x^2+y^2+z^2} \ge \left(1-x^2\right)\left(1-y^2\right)\left(1-z^2\right)$

Bài 27. [China TST 2006] Cho $x, y, z > 0$ thỏa mãn $x+y+z=1$.

Chứng minh rằng $\dfrac{xy}{\sqrt{xy+yz}}+\dfrac{yz}{\sqrt{yz+zx}}+\dfrac{zx}{\sqrt{zx+xy}}\le\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Bài 28. Cho $0\le a_1\le b_1\le a_2\le b_2\le\ldots\le a_{n-1}\le b_{n-1}\le a_n$ và $b_n\ge 0$

thỏa mãn $b_1+b_2+\ldots+b_n\le a_1+a_2+\ldots+a_n$. Chứng minh rằng: Nếu $f(x)$ là hàm lồi

trên $(0,+\infty)$ thì $\sum\limits_{k=1}^{n}\left(f(a_k)-f(b_k)\right)\ge f\left(\sum\limits_{k=1}^{n}a_k-\sum\limits_{k=1}^{n}b_k\right)-f(0)$

Bài 29. Nếu f là hàm số lồi và x, y, z chạy trên tập xác định. Chứng minh rằng:

$$f(x)+f(y)+f(z)+3f\left(\frac{x+y+z}{3}\right)\ge 2f\left(\frac{x+y}{2}\right)+2f\left(\frac{y+z}{2}\right)+2f\left(\frac{z+x}{2}\right)$$

Bài 30. Nếu f là hàm số lồi và x, y, z chạy trên tập xác định. Chứng minh rằng:

$$f(x)+f(y)+f(z)+f\left(\frac{x+y+z}{3}\right)\ge\frac{4}{3}\left[f\left(\frac{x+y}{2}\right)+f\left(\frac{y+z}{2}\right)+f\left(\frac{z+x}{2}\right)\right]$$

Bài 31. [Hồng Kông, 2005] Cho $a,b,c,d>0$ thỏa mãn $a+b+c+d=1$.

Chứng minh rằng: $6\left(a^3+b^3+c^3+d^3\right)\ge a^2+b^2+c^2+d^2+\frac{1}{8}$

Bài 32. [Mỹ, 2003] Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{(2b+c+a)^2}{2b^2+(c+a)^2}+\frac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2}\le 8$$

Bài 33. [Nhật Bản, 1997] Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{(b+c-c)^2}{(b+c)^2+a^2}+\frac{(c+a-b)^2}{(c+a)^2+b^2}+\frac{(a+b-c)^2}{(a+b)^2+c^2}\ge\frac{3}{5}$$

Bài 34. Cho $a,b,c,d>0$ thỏa mãn $a+b+c+d\le 4$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{(1+a)^2}+\frac{1}{(1+b)^2}+\frac{1}{(1+c)^2}+\frac{1}{(1+d)^2}\ge 1$$

Bài 35. [Trung Quốc, 2003] Cho các số $x_1,x_2,\ldots,x_5\ge 0$ và $\sum\limits_{i=1}^{5}\frac{1}{1+x_i}=1$

Chứng minh rằng: $\sum\limits_{i=1}^{5}\frac{x_i}{4+x_i^2}\le 1$

§13. BẤT ĐẲNG THỨC KARAMATA VÀ KỸ THUẬT SỬ DỤNG

§13.1. GIỚI THIỆU VỀ BẤT ĐẲNG THỨC KARAMATA

I. ĐỊNH NGHĨA VÀ CÁC ĐỊNH LÝ

1. Bộ số sắp thứ tự

$(x) = (x_1, x_2, ..., x_n)$ với $x_i \in \mathbf{R}$ và $x_i \ge x_{i+1}$, $\forall i = \overline{1, n-1}$

2. So sánh hai bộ số sắp thứ tự

Cho 2 bộ n số sắp thứ tự $\begin{cases}(a) = (a_1, a_2, ..., a_n)\\(b) = (b_1, b_2, ..., b_n)\end{cases}$ tức là $\begin{cases}a_i \ge a_{i+1}\\b_i \ge b_{i+1}\end{cases}$ $\forall i = \overline{1, n-1}$.

Ta nói bộ số (a) trội hơn bộ số (b) và được ký hiệu $(a) \succ (b)$ nếu thỏa mãn các điều kiện:

$$\begin{cases}a_1 \ge b_1\\a_1 + a_2 \ge b_1 + b_2\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\a_1 + a_2 + ... + a_{n-1} \ge b_1 + b_2 + ... + b_{n-1}\\a_1 + a_2 + ... + a_{n-1} + a_n = b_1 + b_2 + ... + b_{n-1} + b_n\end{cases} \text{ hay } \begin{cases}\sum\limits_{k=1}^{m} a_k \ge \sum\limits_{k=1}^{m} b_k \quad \forall m = \overline{1, n-1}\\ \sum\limits_{k=1}^{n} a_k = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k\end{cases}.$$

3. Bất đẳng thức Karamata

Cho 2 bộ n số thực được sắp thứ tự $(a) = (a_1, a_2, ..., a_n)$ và $(b) = (b_1, b_2, ..., b_n)$ với $(a) \succ (b)$

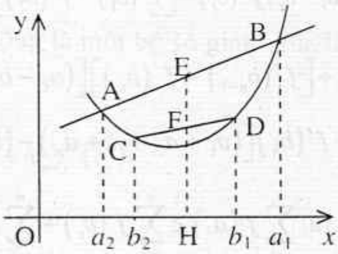
- Nếu f là hàm lồi trên **I** thì $f(a_1) + f(a_2) + ... + f(a_n) \ge f(b_1) + f(b_2) + ... + f(b_n)$
- Nếu f là hàm lõm trên **I** thì $f(a_1) + f(a_2) + ... + f(a_n) \le f(b_1) + f(b_2) + ... + f(b_n)$
- ***Đặc biệt:*** Nếu $b_1 = b_2 = ... = b_n = \dfrac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}$ ta nhận được bất đẳng thức ***Jensen***

Chứng minh 1

- ***Phương pháp quy nạp:*** Ta sẽ chứng minh đại diện khi f là hàm lồi.

Bước 1. $n = 2$: Giả sử $\begin{cases}(a) = (a_1, a_2)\\(b) = (b_1, b_2)\end{cases}$ với $\begin{cases}a_1 \ge a_2\\b_1 \ge b_2\end{cases}$ và $\begin{cases}a_1 \ge b_1\\a_1 + a_2 = b_1 + b_2\end{cases}$

Ta phải chứng minh: $f(a_1) + f(a_2) \ge f(b_1) + f(b_2)$



Trên đồ thị của hàm số $y = f(x)$,

lấy các điểm A, B, C, D sao cho

$A(a_2, f(a_2))$; $B(a_1, f(a_1))$; $C(b_2, f(b_2))$; $D(b_1, f(b_1))$

Gọi E, F là trung điểm hai đoạn thẳng AB, CD.

Do $a_2 \le b_2 \le b_1 \le a_1$ và $a_1 + a_2 = b_1 + b_2 \Rightarrow$ FH $= \frac{1}{2}\left[f(b_1) + f(b_2)\right]$;

$EH = \frac{1}{2}\left[f(a_1) + f(a_2)\right]$. Để ý rằng $FH \le EH \Rightarrow f(a_1) + f(a_2) \le f(b_1) + f(b_2)$

Bước 2. Giả sử bất đẳng thức đúng với n, tức là ta có

$$\begin{cases}(a) = (a_1, a_2, ..., a_n)\\ (b) = (b_1, b_2, ..., b_n)\end{cases} \text{ với } \begin{cases}a_i \ge a_{i+1}, \forall i = \overline{1, n-1}\\ b_i \ge b_{i+1}, \forall i = \overline{1, n-1}\end{cases} \text{ và } \begin{cases}\sum_{k=1}^{m} a_k \ge \sum_{k=1}^{m} b_k, \forall m = \overline{1, n-1}\\ a_1 + ... + a_n = b_1 + ... + b_n\end{cases}$$

Khi đó $f(a_1) + f(a_2) + ... + f(a_n) \ge f(b_1) + f(b_2) + ... + f(b_n)$ (f là hàm lồi)

Ta sẽ chứng minh rằng bất đẳng thức đúng với $n + 1$. Thật vậy, giả sử ta có 2 bộ số

$$\begin{cases}(a) = (a_1, a_2, ..., a_{n+1})\\ (b) = (b_1, b_2, ..., b_{n+1})\end{cases} \text{ với } \begin{cases}a_i \ge a_{i+1}, \forall i = \overline{1, n}\\ b_i \ge b_{i+1}, \forall i = \overline{1, n}\end{cases} \text{ và } \begin{cases}\sum_{k=1}^{m} a_k \ge \sum_{k=1}^{m} b_k, \forall m = \overline{1, n}\\ a_1 + ... + a_{n+1} = b_1 + ... + b_{n+1}\end{cases}$$

Ta sẽ chứng minh $f(a_1) + f(a_2) + ... + f(a_n) + f(a_{n+1}) \ge f(b_1) + f(b_2) + ... + f(b_n) + f(b_{n+1})$

Sử dụng giả thiết quy nạp cho 2 bộ n số thực ta có:

$f(a_1) + f(a_2) + ... + f(a_n) + f(a_{n+1}) = [f(a_1) + f(a_2)] + [f(a_3) + ... + f(a_n) + f(a_{n+1})] \ge$

$\ge [f(b_1) + f(a_1 + a_2 - b_1)] + f(a_3) + ... + f(a_n) + f(a_{n+1})$ (Vì $(a_1, a_2) \succ (b_1, a_1 + a_2 - b_1)$)

$= f(b_1) + [f(a_1 + a_2 - b_1) + f(a_3) + ... + f(a_n) + f(a_{n+1})] \ge$

$\ge f(b_1) + f(b_2) + ... + f(b_n) + f(b_{n+1})$ (Vì $(a_1 + a_2 - b_1, a_3, ..., a_{n+1}) \succ (b_2, b_3, ..., b_{n+1})$)

Theo nguyên lý quy nạp ta có bất đẳng thức đúng với mọi n.

Chứng minh 2

Sử dụng khai triển ***Taylor*** và $f''(c) \ge 0$ với f lồi, ta có:

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(c) \ge f(a) + (x-a)f'(a) \text{ với } c \in (x, a)$$

$$\Rightarrow f(a_i) = f\left[b_i + (a_i - b_i)\right] \ge f(b_i) + (a_i - b_i)f'(b_i) \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} f(a_i) \ge \sum_{i=1}^{n} f(b_i) + \sum_{i=1}^{n}(a_i - b_i)f'(b_i)$$

Sử dụng khai triển ***Abel*** ta có:

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i - b_i)f'(b_i) = \left[f'(b_1) - f'(b_2)\right](a_1 - b_1) + \left[f'(b_2) - f'(b_3)\right]\left[(a_1 - b_1) + (a_2 - b_2)\right] + ...$$

$$... + \left[f'(b_{n-1}) - f'(b_n)\right]\left[(a_1 - b_1) + ... + (a_{n-1} - b_{n-1})\right] +$$

$$+ f'(b_n)\left[(a_1 + a_2 + ... + a_n) - (b_1 + b_2 + ... + b_n)\right] \ge 0$$

Suy ra $\sum_{i=1}^{n} f(a_i) \ge \sum_{i=1}^{n} f(b_i) + \sum_{i=1}^{n}(a_i - b_i)f'(b_i) \ge \sum_{i=1}^{n} f(b_i)$

(vì f lồi nên $f'' > 0\ \forall x \in I \Rightarrow f'(x)$ tăng $\Rightarrow f'(b_i) - f'(b_{i+1}) \ge 0$)

4. Thiết lập điều kiện sử dụng bất đẳng thức Karamata

Định lý (I.Schur). Cho 2 bộ n số sắp thứ tự $\begin{cases}(a)=(a_1,a_2,...,a_n)\\(b)=(b_1,b_2,...,b_n)\end{cases}$ tức là

$$\begin{cases}a_i\ge a_{i+1}\\ b_i\ge b_{i+1}\end{cases}\quad \forall i=\overline{1,n-1}.$$

Điều kiện cần và đủ để hai bộ dãy số đơn điệu giảm (a) và (b) thỏa mãn các điều kiện:

$$\begin{cases}a_1\ge b_1\\ a_1+a_2\ge b_1+b_2\\ \dots\dots\dots\dots\\ a_1+a_2+...+a_{n-1}\ge b_1+b_2+...+b_{n-1}\\ a_1+a_2+...+a_{n-1}+a_n=b_1+b_2+...+b_{n-1}+b_n\end{cases}\quad\text{hay}\quad\begin{cases}\sum\limits_{k=1}^{m}a_k\ge\sum\limits_{k=1}^{m}b_k\quad\forall m=\overline{1,n-1}\\ \sum\limits_{k=1}^{n}a_k=\sum\limits_{k=1}^{n}b_k\end{cases}$$

là giữa chúng có một phép biến đổi tuyến tính dạng

$b_i=\sum\limits_{j=1}^{n}c_{ij}a_j, i=1,2,...,n$ trong đó $c_{kl}\ge 0$, $\sum\limits_{j=1}^{n}c_{kj}=1$; $\sum\limits_{j=1}^{n}c_{jl}=1$; $k,l=1,2,...,n$

5. Các định lý mở rộng và hệ quả của bất đẳng thức Karamata

Định lý 1: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm cấp hai tại mọi $x\in(a,b)$ sao cho $f'(x)\ge 0$ với mọi $x\in[a;b]$ và $f''(x)>0$ với mọi $x\in(a;b)$. Giả sử $a_1,a_2,...,a_n$ và $b_1,b_2,...,b_n$ là các số $\in[a;b]$, đồng thời thỏa mãn điều kiện $a_1\ge a_2\ge...\ge a_n$ và $b_1\ge b_2\ge...\ge b_n$

$$\begin{cases}b_1\ge a_1\\ b_1+b_2\ge a_1+a_2\\ \dots\dots\dots\dots\\ b_1+b_2+...+b_n\ge a_1+a_2+....+a_n\end{cases}\quad\text{Khi đó, ta luôn có }\sum_{k=1}^{n}f(b_k)\ge\sum_{k=1}^{n}f(a_k)\quad(1)$$

Chứng minh

Sử dụng biểu diễn với hàm lồi

$$f(b_1)+f(b_2)+...+f(b_n)=\max_{t_1,...,t_n\in I(a,b)}\left[\sum_{i=1}^{n}f(t_i)+\sum_{i=1}^{n}(b_i-t_i)f'(t_i)\right]$$

Không mất tính tổng quát, giả sử bộ số $t_1,...,t_n\in I(a,b)$ cũng là một bộ số giảm, tức là $t_1\ge t_2\ge...\ge t_n$. Khi đó, ta chỉ cần chứng minh rằng

$$b_1f'(t_1)+b_2f'(t_2)+...+b_nf'(t_n)\ge y_1f'(t_1)+y_2f'(t_2)+...+y_nf'(t_n).$$

Sử dụng biến đổi ***Abel***

$$b_1f'(t_1)+b_2f'(t_2)+...+b_nf'(t_n)=S_1\left[f'(t_1)-f'(t_2)\right]+S_2\left[f'(t_2)-f'(t_3)\right]+...+$$
$$S_{n-1}\left[f'(t_{n-1})-f'(t_n)\right]+S_nf'(t_n)$$

Với $S_k(b) := b_1 + b_2 + ... + b_k$.

Vì rằng $f''(x) > 0$ nên $f'(b_k) \le f'(x_{k-1})$. Mặt khác, do $S_k(b) \ge S_k(y)$; $(k = 1, 2, ..., n-1)$ và vì $S_n(b) \ge S_n(y)$ và $f'(t_n) \ge 0$, ta nhận được điều cần chứng minh.

Hoàn toàn tương tự ta cũng có.

Định lý 2: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp hai tại mọi $x \in (a.b)$ sao cho $f'(x) \ge 0$ với mọi $x \in [a;b]$ và $f''(x) < 0$ với mọi $x \in (a;b)$. Giả sử $a_1, a_2, ..., a_n$ và $b_1, b_2, ..., b_n$ là các số $\in [a;b]$, đồng thời thỏa mãn điều kiện $a_1 \le a_2 \le ... \le a_n$,

$b_1 \le b_2 \le ... \le b_n$ và

$$\begin{cases} b_1 \le a_1 \\ b_1 + b_2 \le a_1 + a_2 \\ .... \\ b_1 + b_2 + ... + b_n \le a_1 + a_2 + ... + a_n \end{cases} \quad \text{Khi đó } \sum_{k=1}^{n} f(b_k) \le \sum_{k=1}^{n} f(a_k)$$

Định lý 3: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp hai tại mọi $x \in (a.b)$ sao cho $f''(x) > 0$ với mọi $x \in [a;b]$. Giả sử $a_1, a_2, ..., a_n$ và $b_1, b_2, ..., b_n$ là các số $\in [a;b]$, thỏa mãn $a_1 \ge a_2 \ge ... \ge a_n$, và

$$\begin{cases} b_1 \ge a_1 \\ b_1 + b_2 \ge a_1 + a_2 \\ .... \\ b_1 + b_2 + ... + b_n = a_1 + a_2 + ... + a_n \end{cases} \quad \text{Khi đó } \sum_{k=1}^{n} f(b_k) \ge \sum_{k=1}^{n} f(a_k)$$

Định lý 4: Giả sử $F(b_1, b_2, ..., b_n)$ thỏa mãn (1). Khi đó với mọi cặp bộ số đơn điệu giảm $(b_1, b_2, ..., b_n)$, $(y_1, y_2, ..., y_n)$, thỏa mãn ***Schur***, ta đều có $F(b_1, b_2, ..., b_n) \ge F(y_1, y_2, ... y_n)$ (2).

Nhận xét: Có thể nói rằng định lý 4 cho ta một công cụ rất mạnh để thực hiện quá trình làm xấp xỉ liên tiếp và thuật toán dồn biến để chứng minh nhiều dạng bất đẳng thức phức tạp.

Thật vậy, từ (2), ta có hệ quả $F(b_1, b_2, ..., b_n) \ge F\left(\frac{b_1 + b_2}{2}, \frac{b_1 + b_2}{2}, b_3, ..., b_n\right)$

Định lý 5. Cho hàm số $f(x)$ xác định và lồi trên tập $[0, a]$ với $a > 0$ và cho dãy $2n-1$ số không âm và đơn điệu giảm $a \ge a_1 \ge a_2 \ge ... \ge a_{2n-1} \ge 0$.

Khi đó ta có bất đẳng thức $\displaystyle\sum_{j=1}^{2n-1} (-1)^{j-1} f(a_j) \ge f\left(\sum_{j=1}^{2n-1} (-1)^{j-1} a_j\right)$

(Bất đẳng thức Szego)

Cũng vậy, theo đúng cách thức lập luận ở trên, ta có các kết quả sau.

Định lý 6. Cho hàm số $f(x)$ xác định và lồi trên tập $[0,a]$ với $a>0$ và $f(0)\le 0$. Xét n dãy số không âm và đơn điệu giảm $a\ge a_1\ge a_2\ge ...\ge a_n\ge 0$.

Khi đó ta có bất đẳng thức $\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}f(a_j)\ge f\left(\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}a_j\right)$

(Bất đẳng thức Bellman)

Định lý 7. Cho hàm số $f(x)$ xác định và lồi trên tập $[0,a]$ với $a>0$. Xét cặp dãy số không âm và đơn điệu giảm $a_1\ge a_2\ge ...\ge a_n\ge 0$; $1\ge a_1\ge ...\ge a_n\ge 0$.

Khi đó ta có bất đẳng thức $\left[1-\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}a_j+\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}a_jf(a_j)\right]\ge f\left(\sum_{j=1}^{2n-1}(-1)^{j-1}a_ja_j\right)$

(Bất đẳng thức Olkin)

II. ỨNG DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC KARAMATA TRONG TAM GIÁC

A. Độ gần đều và tính sắp thứ tự của hai tam giác theo góc

1. Định nghĩa 1: Với mỗi tam giác ABC cho trước, kí hiệu

$$\delta_{\Delta ABC}=\mathrm{Max}\{A,B,C\}-\mathrm{Min}\{A,B,C\}$$

và ta nói $\delta_{\Delta ABC}$ là độ *"gần đều"* của tam giác ABC. Hiển nhiên $\delta_{\Delta ABC}\ge 0$ và $\delta_{\Delta ABC}=0$ khi và chỉ khi tam giác ABC đều.

2. Định nghĩa 2: Với mỗi cặp tam giác $A_1B_1C_1$ và $A_2B_2C_2$ thỏa mãn 2 điều kiện: $\mathrm{Max}\{A_1,B_1,C_1\}\le\mathrm{Max}\{A_2,B_2,C_2\}$ và $\mathrm{Min}\{A_1,B_1,C_1\}\ge\mathrm{Min}\{A_2,B_2,C_2\}$, khi đó ta nói cặp tam giác $A_1B_1C_1$ và $A_2B_2C_2$ là cặp được sắp thứ tự và ta có bất đẳng thức $\delta_{\Delta A_1B_1C_1}\le\delta_{\Delta A_2B_2C_2}$ đồng thời ta nói tam giác $A_1B_1C_1$ gần đều hơn tam giác $A_2B_2C_2$.

3. Nhận xét

3. 1. Tam giác đều có độ gần đều nhỏ nhất trong mọi tam giác ($\delta=0$).

3. 2. Trong tập hợp các tam giác không nhọn thì tam giác vuông cân gần đều hơn mọi tam giác khác.

3. 3. Cho tam giác $A_1B_1C_1$ và $A_2B_2C_2$ được sắp thứ tự trong đó $A_1B_1C_1$ gần đều hơn $A_2B_2C_2$. Không mất tính tổng quát, giả sử $A_1\ge B_1\ge C_1$ và $A_2\ge B_2\ge C_2$. Khi đó ta có:

$$\begin{cases}\mathrm{Max}\{A_1,B_1,C_1\}=A_1\le A_2=\mathrm{Max}\{A_2,B_2,C_2\}\\ \mathrm{Min}\{A_1,B_1,C_1\}=C_1\ge C_2=\mathrm{Min}\{A_2,B_2,C_2\}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A_2\ge A_1\\ A_2+B_2\ge A_1+B_1\\ A_2+B_2+C_2=A_1+B_1+C_1\end{cases}$$

Vậy (A_2,B_2,C_2) và (A_1,B_1,C_1) được sắp thứ tự và $(A_2,B_2,C_2)\succ(A_1,B_1,C_1)$

4. Tính chất: Cho tam giác ABC và 3 số thực $\alpha,\beta,\gamma\ge 0$ thỏa mãn điều kiện:

$$\alpha+\beta+\gamma=1.\ \text{Đặt}\ \begin{cases}A_0=\alpha A+\beta B+\gamma C\\ B_0=\alpha B+\beta C+\gamma A\\ C_0=\alpha C+\beta A+\gamma B\end{cases}\quad(*)$$

Khi đó tam giác $A_0B_0C_0$ gần đều hơn so với tam giác ABC.

Chứng minh

$$\begin{cases} A_0 \geq \alpha \operatorname{Min}\{A,B,C\} + \beta \operatorname{Min}\{A,B,C\} + \gamma \operatorname{Min}\{A,B,C\} = \operatorname{Min}\{A,B,C\} \\ B_0 \geq \alpha \operatorname{Min}\{A,B,C\} + \beta \operatorname{Min}\{A,B,C\} + \gamma \operatorname{Min}\{A,B,C\} = \operatorname{Min}\{A,B,C\} \\ C_0 \geq \alpha \operatorname{Min}\{A,B,C\} + \beta \operatorname{Min}\{A,B,C\} + \gamma \operatorname{Min}\{A,B,C\} = \operatorname{Min}\{A,B,C\} \end{cases}$$

Suy ra $\begin{cases} \operatorname{Max}\{A_0,B_0,C_0\} \leq \operatorname{Max}\{A,B,C\} \\ \operatorname{Min}\{A_0,B_0,C_0\} \leq \operatorname{Min}\{A,B,C\} \end{cases} \Rightarrow \delta_{\Delta A_0B_0C_0} \leq \delta_{\Delta ABC} \Rightarrow$ (đpcm)

5. Áp dụng

5. 1. Tính chất: Cho tam giác $A_1B_1C_1$ gần đều hơn tam giác $A_2B_2C_2$.

+) Nếu hàm số $f(x)$ lồi trên $(0,\pi)$, tức là $f''(x) \geq 0,\ \forall x \in (0,\pi)$ thì

$$f(A_2) + f(B_2) + f(C_2) \geq f(A_1) + f(B_1) + f(C_1)$$

+) Nếu hàm số $f(x)$ lõm trên $(0,\pi)$, tức là $f''(x) \leq 0,\ \forall x \in (0,\pi)$ thì

$$f(A_2) + f(B_2) + f(C_2) \leq f(A_1) + f(B_1) + f(C_1)$$

5. 2. Các ví dụ tiêu biểu:

• ***Ví dụ 1:*** Cho tam giác ABC và 3 số $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$ thỏa mãn điều kiện

$\alpha + \beta + \gamma = 1$. Đặt $\begin{cases} A_0 = \alpha A + \beta B + \gamma C \\ B_0 = \alpha B + \beta C + \gamma A \\ C_0 = \alpha C + \beta A + \gamma B \end{cases}$, khi đó ta có

$$\sin A + \sin B + \sin C \leq \sin A_0 + \sin B_0 + \sin C_0$$

$$\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2} \leq \sin\frac{A_0}{2} + \sin\frac{B_0}{2} + \sin\frac{C_0}{2}$$

$$\cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2} \leq \cos\frac{A_0}{2} + \cos\frac{B_0}{2} + \cos\frac{C_0}{2}$$

$$\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2} + \tan\frac{C}{2} \leq \tan\frac{A_0}{2} + \tan\frac{B_0}{2} + \tan\frac{C_0}{2}$$

• ***Ví dụ 2:*** Cho tam giác ABC không nhọn. Khi đó ta có:

$$\sin A + \sin B + \sin C \leq 1 + \sqrt{2};\quad \tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2} + \tan\frac{C}{2} \geq 2\sqrt{2} - 1$$

Chứng minh

Không mất tính tổng quát, giả sử $A \geq B \geq C$. Khi đó

$$\begin{cases} A \geq \frac{\pi}{2} \\ A + B \geq \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \\ A + B + C \geq \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{A}{2} \geq \frac{\pi}{4} \\ \frac{A}{2} + \frac{B}{2} \geq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{8} \\ \frac{A}{2} + \frac{B}{2} + \frac{C}{2} \geq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{8} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (A,B,C) \succ \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) \\ \left(\frac{A}{2}, \frac{B}{2}, \frac{C}{2}\right) \succ \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8}\right) \end{cases}$$

Xét hàm số $f(x) = \sin x,\ \forall x \in (0, \pi) \Rightarrow\ f''(x) = -\sin x < 0,\ \forall x \in (0, \pi)$.

Suy ra $f(x)$ lõm trên $(0, \pi)$. Sử dụng bất đẳng thức ***Karamata*** ta có:

$$\sin A + \sin B + \sin C \le \sin\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4} = 1 + \sqrt{2}$$

Xét hàm số $g(x) = \tan x,\ \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ suy ra $g''(x) = 2\tan x(1 + \tan^2 x) > 0,\ \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

Suy ra $g(x)$ lồi trên $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Sử dụng bất đẳng thức ***Karamata*** ta có:

$$\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2} + \tan\frac{C}{2} \ge \tan\frac{\pi}{4} + \tan\frac{\pi}{8} + \tan\frac{\pi}{8} = 2\sqrt{2} - 1$$

• ***Ví dụ 3:*** $\sin^\alpha A + \sin^\alpha B + \sin^\alpha C \ge 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^\alpha, \forall \alpha < 0$

$$\sin^\alpha A + \sin^\alpha B + \sin^\alpha C \le 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^\alpha, \forall 0 < \alpha \le 1$$

$$\sin^\alpha \frac{A}{2} + \sin^\alpha \frac{B}{2} + \sin^\alpha \frac{C}{2} \ge 3\left(\frac{1}{2}\right)^\alpha, \forall \alpha < 0$$

$$1 < \sin^\alpha \frac{A}{2} + \sin^\alpha \frac{B}{2} + \sin^\alpha \frac{C}{2} \le 3\left(\frac{1}{2}\right)^\alpha, \forall 0 < \alpha \le 1$$

B. Sắp thứ tự các đại lượng độ dài trong tam giác

Cho tam giác ABC với độ dài 3 cạnh là a, b, c. Đặt $p = \frac{a+b+c}{2}$.

Gọi m_a, m_b, m_c là độ dài 3 đường trung tuyến. Đặt $m = \frac{m_a + m_b + m_c}{2}$.

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \ge b \ge c$, khi đó ta có các bộ sắp thứ tự sau đây:

$(a,b,c) \succ (2(p-a), 2(p-b), 2(p-c))$;

$(p,p,0) \succ (a,b,c) \succ \left(\frac{2p}{3}, \frac{2p}{3}, \frac{2p}{3}\right)$; $(p,0,0) \succ (p-c, p-b, p-a) \succ \left(\frac{p}{3}, \frac{p}{3}, \frac{p}{3}\right)$

Do m_a, m_b, m_c cũng là độ dài 3 cạnh của một tam giác, giả sử $m_a \ge m_b \ge m_c$, khi đó

$(m,m,0) \succ (m_a, m_b, m_c) \succ \left(\frac{2m}{3}, \frac{2m}{3}, \frac{2m}{3}\right)$; $(m,0,0) \succ (m-m_c, m-m_b, m-m_a) \succ \left(\frac{m}{3}, \frac{m}{3}, \frac{m}{3}\right)$

Sử dụng bất đẳng thức ***Karamata*** cho hàm lồi và hàm lõm, ta có:

$\frac{1}{3} \le \frac{a^2+b^2+c^2}{(a+b+c)^2} < \frac{1}{2}$; $\frac{1}{4} < \frac{ab+bc+ca}{(a+b+c)^2} \le \frac{1}{3}$; $\sqrt{p} < \sqrt{p-a} + \sqrt{p-b} + \sqrt{p-c} < \sqrt{3p}$;

$\sqrt{a(p-a)} + \sqrt{b(p-b)} + \sqrt{c(p-c)} < \sqrt{2p}$; $\frac{1}{4} < \frac{(b+c)(c+a)(a+b)}{(a+b+c)^3} \le \frac{8}{27}$; $\frac{4}{9} \le \frac{a^2+b^2+c^2}{(m_a+m_b+m_c)^2} < \frac{2}{3}$;

$abc \ge 8(p-a)(p-b)(p-c)$; $\frac{2(p-a)(p-b)(p-c)}{(p-a)(p-b)+(p-b)(p-c)+(p-c)(p-a)} \le \frac{abc}{ab+bc+ca}$;

$32(p-a)(p-b)(p-c)\left[(p-a)(p-b)+(p-b)(p-c)+(p-c)(p-a)\right] \le abc(ab+bc+ca)$

§13. 2. KỸ THUẬT SỬ DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC KARAMATA

I. CÁC BÀI TẬP MẪU MINH HỌA

Bài 1. Chứng minh rằng $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge 2\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)$, với mọi $a,b,c>0$

Chứng minh

Không mất tính tổng quát, giả sử $a\ge b\ge c$ suy ra $a+b\ge a+c\ge b+c$. Khi đó, ta có

$$\begin{cases}2a\ge a+b\\ 2a+2b\ge(a+b)+(a+c)\\ 2a+2b+2c=(a+b)+(a+c)+(b+c)\end{cases}\quad \text{nên } (2a,2b,2c)\succ(a+b,a+c,b+c)$$

Sử dụng bất đẳng thức *Karamata* cho $f(x)=\frac{1}{x}$ là hàm lồi trên $(0,+\infty)$ ta có

$$\frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{2c}\ge\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\Leftrightarrow\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge 2\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)$$

Bài 2. Cho $a,b,c\ge 0$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{a^4+b^4+c^4}+\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}\ge\sqrt{a^3b+b^3c+c^3a}+\sqrt{ab^3+bc^3+ca^3}\quad(1)$$

Chứng minh

$A_1=a^4+b^4+c^4$; $A_2=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$; $B_1=a^3b+b^3c+c^3a$; $B_2=ab^3+bc^3+ca^3$

Ta có: $A_1-A_2=\frac{1}{2}\left[(a^2-b^2)^2+(b^2-c^2)^2+(c^2-a^2)^2\right]\ge 0\Rightarrow A_1\ge A_2$

Xét $B_1\ge B_2$. Sử dụng bất đẳng thức *AM – GM* ta có:

$$\begin{cases}a^4+a^4+a^4+b^4\ge 4a^3b\\ b^4+b^4+b^4+c^4\ge 4b^3c\\ c^4+c^4+c^4+a^4\ge 4c^3a\end{cases}\text{ và }\begin{cases}a^4+a^2b^2\ge 2a^3b;\ b^4+a^2b^2\ge 2ab^3\\ b^4+b^2c^2\ge 2b^3c;\ c^4+b^2c^2\ge 2bc^3\\ c^4+c^2a^2\ge 2c^3a;\ a^4+c^2a^2\ge 2ca^3\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}4(a^4+b^4+c^4)\ge 4(a^3b+b^3c+c^3a)\\ 2(a^4+b^4+c^4+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)\ge 2(a^3b+b^3c+c^3a)+2(ab^3+bc^3+ca^3)\end{cases}$$

$\Rightarrow\begin{cases}A_1\ge B_1\\ A_1+A_2\ge B_1+B_2\end{cases}$. Sử dụng bất đẳng thức *Karamata* với $f(x)=\sqrt{x}$ lồi ta có:

$$\sqrt{a^4+b^4+c^4}+\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}\ge\sqrt{a^3b+b^3c+c^3a}+\sqrt{ab^3+bc^3+ca^3}$$

Nếu $B_2\ge B_1$ thì tương tự ta có : $\begin{cases}A_1\ge B_2\\ A_1+A_2\ge B_2+B_1\end{cases}\Rightarrow$ (đpcm).

Bài 3. Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng:

$$(a^6+b^6+c^6)^{10}+\left[abc(a^3+b^3+c^3)\right]^{10}\ge(a^5b+b^5c+c^5a)^{10}+(ab^5+bc^5+ca^5)^{10}$$

Chứng minh

$A_1 = a^6 + b^6 + c^6$; $A_2 = abc\left(a^3 + b^3 + c^3\right)$; $B_1 = a^5 b + b^5 c + c^5 a$; $B_2 = ab^5 + bc^5 + ca^5$

Ta có : $\begin{cases} a^6 + a^6 + a^6 + a^6 + b^6 + c^6 \ge 6a^4 bc \\ b^6 + b^6 + b^6 + b^6 + c^6 + a^6 \ge 6b^4 ca \\ c^6 + c^6 + c^6 + c^6 + a^6 + b^6 \ge 6c^4 ab \end{cases} \Rightarrow A_1 \ge A_2$. Xét 2 trường hợp sau:

Nếu $B_1 \ge B_2$ khi đó ta chứng minh: $\begin{cases} A_1 \ge B_1 \\ A_1 + A_2 \ge B_1 + B_2 \end{cases}$;

nếu $B_2 \ge B_1$ khi đó ta chứng minh: $\begin{cases} A_1 \ge B_2 \\ A_1 + A_2 \ge B_2 + B_1 \end{cases}$

Sử dụng bất đẳng thức ***Karamata*** với $f(x) = x^{10}$ lồi ta có

$$\left(a^6 + b^6 + c^6\right)^{10} + \left[abc\left(a^3 + b^3 + c^3\right)\right]^{10} \ge \left(a^5 b + b^5 c + c^5 a\right)^{10} + \left(ab^5 + bc^5 + ca^5\right)^{10}$$

Bài 4. Cho $-1 \le x, y, z \le 1$ và $x + y + z = -\frac{1}{2}$.

Tìm giá trị lớn nhất của $S = x^8 + y^8 + z^8$

Giải

Xét hàm số $f(u) = u^8$ với $u \in [-1, 1]$. Ta có $f'(u) = 8x^7$; $f''(u) = 56u^6 \ge 0$

Với $f''(u) \ge 0$ $\forall u \in [-1, 1]$ khi đó $f(u)$ là hàm lồi trên $[-1, 1]$. Không mất tính tổng quát, giả sử $-1 \le z \le y \le x \le 1$. Xét hai bộ (x, y, z) và $\left(1, -\frac{1}{2}, -1\right)$ ta có:

$x \le 1$; $x + y \le 1 + \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$; $x + y + z = 1 + \left(-\frac{1}{2}\right) + (-1) = -\frac{1}{2} \Rightarrow$ bộ $\left(1, -\frac{1}{2}, -1\right) \succ (x, y, z)$.

Sử dụng bất đẳng thức ***Karamata*** với hàm lồi $f(u) = u^8$ ta có:

$$S = x^8 + y^8 + z^8 \le 1^8 + \left(-\frac{1}{2}\right)^8 + (-1)^8 = 2 + \frac{1}{256} = \frac{513}{256} \Rightarrow \text{Max } S = \frac{513}{256}.$$

Bài 5. Cho $x \ge y \ge z > 0$ và $x \le 3$; $x + y \le 5$; $x + y + z = 6$

Tìm giá trị lớn nhất của $S = x^{\sqrt{2}} + y^{\sqrt{2}} + z^{\sqrt{2}}$

Giải

Xét hàm số $f(x) = x^\alpha$ với $x > 0$, $\alpha > 1$. Ta có $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$; $f''(x) = \alpha(\alpha - 1)x^{\alpha-2}$.

Do $f''(x) > 0$ $\forall x > 0$, $\forall \alpha > 1$ khi đó $f(x)$ là hàm lồi $\forall x > 0$. Xét 2 bộ số (x, y, z) và $(3, 2, 1)$ ta có : $x \le 3$; $x + y \le 3 + 2$; $x + y + z = 3 + 2 + 1 \Rightarrow$ bộ $(3, 2, 1) \succ (x, y, z)$.

Sử dụng bất đẳng thức ***Karamata*** cho hàm lồi $f(x) = x^\alpha$ ta có:

$$S = x^{\sqrt{2}} + y^{\sqrt{2}} + z^{\sqrt{2}} \le 3^{\sqrt{2}} + 2^{\sqrt{2}} + 1^{\sqrt{2}} \Rightarrow \text{Max } S = 3^{\sqrt{2}} + 2^{\sqrt{2}} + 1^{\sqrt{2}}$$

Bài 6. Chứng minh: $(1+a_1)(1+a_2)...(1+a_n)\le\left(1+\frac{a_1^2}{a_2}\right)\left(1+\frac{a_2^2}{a_3}\right)...\left(1+\frac{a_n^2}{a_1}\right)$ (1) $\forall a_1,a_2,....,a_n>0$

Chứng minh

$$(1)\Leftrightarrow \ln\left[(1+a_1)(1+a_2)...(1+a_n)\right]\le\ln\left[\frac{(a_1^2+a_2)(a_2^2+a_3)...(a_n^2+a_1)}{a_1a_2...a_n}\right]$$

$$\Leftrightarrow \ln(1+a_1)+\ln(1+a_2)+...+\ln(1+a_n)+\ln a_1+\ln a_2+...+\ln a_n\le$$

$$\le\ln(a_1^2+a_2)+\ln(a_2^2+a_3)+...+\ln(a_n^2+a_1)$$

$$\Leftrightarrow \ln(a_1^2+a_1)+\ln(a_2^2+a_2)+...+\ln(a_n^2+a_n)\le\ln(a_1^2+a_2)+\ln(a_2^2+a_3)+...+\ln(a_n^2+a_1).$$

Cho $f(x)=\ln x\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{x}\Rightarrow f''(x)=\frac{-1}{x^2}<0,\ \forall x>0$

$\Rightarrow f(x)$ là hàm lõm $\forall x>0$. Xét 2 bộ số:

$(a)=(a_1^2+a_1,a_2^2+a_2,....,a_n^2+a_n)$ và $(b)=(a_1^2+a_2,a_2^2+a_3,....,a_n^2+a_1)$

Chúng ta có thể đánh lại ký hiệu chỉ số dưới để nhận được 2 bộ sắp thứ tự sau đây

$(a_m)=(3a_{m_1}-2a_{m_1+1};3a_{m_2}-2a_{m_2+1};...;3a_{m_n}-2a_{m_n+1})$

$(a_k)=(a_{k_1}^2+a_{k_1},a_{k_2}^2+a_{k_2},....,a_{k_n}^2+a_{k_n})$ và $(b_m)=(a_{m_1}^2+a_{m_1+1},a_{m_2}^2+a_{m_2+1},....,a_{m_n}^2+a_{m_n+1})$

Ta có : $a_{k_1}^2+a_{k_1}\ge a_{m_1}^2+a_{k_1}\ge a_{m_1}^2+a_{m_1}+1$

$(a_{k_1}^2+a_{k_1})+(a_{k_2}^2+a_{k_2})\ge(a_{m_1}^2+a_{k_1})+(a_{m_2}^2+a_{k_2})\ge(a_{m_1}^2+a_{m_1})+(a_{m_2}^2+a_{m_2})+1$

....

$(a_{k_1}^2+a_{k_1})+...+(a_{k_{n-1}}^2+a_{k_{n-1}})\ge(a_{m_1}^2+a_{k_1})+...+(a_{m_{n-1}}^2+a_{k_{n-1}})\ge(a_{m_1}^2+a_{m_1})+...+(a_{m_{n-1}}^2+a_{m_{n-1}})$

$(a_{k_1}^2+a_{k_1})+...+(a_{k_n}^2+a_{k_n})=(a_{m_1}^2+a_{m_1})+...+(a_{m_n}^2+a_{m_n})+1$

Vậy điều kiện của bất đẳng thức *Karamata* được thỏa mãn và ta có

$$(1+a_1)(1+a_2)...(1+a_n)\le\left(1+\frac{a_1^2}{a_2}\right)\left(1+\frac{a_2^2}{a_3}\right)...\left(1+\frac{a_n^2}{a_1}\right),\ \forall a_1,a_2,....,a_n>0$$

Bài 7. Cho $a_1, a_2, ..., a_n>0$ thỏa mãn $3a_j-2a_{j+1}\ne0$, $\forall j=\overline{1,n}$ $(a_1=a_{n+1})$

Chứng minh rằng: $|3a_1-2a_2|^{|3a_1-2a_2|}...|3a_n-2a_1|^{|3a_n-2a_1|}\ge a_1^{a_1}a_2^{a_2}...a_n^{a_n}$ (1)

Chứng minh

$(1)\Leftrightarrow \ln\left(|3a_1-2a_2|^{|3a_1-2a_2|}...|3a_n-2a_1|^{|3a_n-2a_1|}\right)\ge\ln\left(a_1^{a_1}a_2^{a_2}...a_n^{a_n}\right)$

$\Leftrightarrow |3a_1-2a_2|\ln|3a_1-2a_2|+...+|3a_n-2a_1|\ln|3a_n-2a_1|\ge a_1\ln a_1+...+a_n\ln a_n$

Xét hai bộ số: $(a)=(3a_1-2a_2,...,3a_n-2a_1)$ và $(b)=(a_1,a_2,...,a_n)$

Chúng ta có thể đánh lại ký hiệu chỉ số dưới để nhận được 2 bộ sắp thứ tự sau đây

$(a_m)=\left(3a_{m_1}-2a_{m_1+1};3a_{m_2}-2a_{m_2+1};...;3a_{m_n}-2a_{m_n+1}\right)$

Với $3a_{m_1}-2a_{m_1+1}\ge 3a_{m_2}-2a_{m_2+1}\ge...\ge 3a_{m_n}-2a_{m_n+1}>0$ với $a_{n+1}=a_1$

$(b_k)=\left(a_{k_1},a_{k_2},....,a_{k_n}\right)$ với $a_{k_1}\ge a_{k_2}\ge...\ge a_{k_n}$

Ta có $3a_{m_1}-2a_{m_1+1}\ge 3a_{k_1}-2a_{k_1+1}\ge 3a_{k_1}-2a_{k_1}\ge a_{k_1}$

$(3a_{m_1}-2a_{m_1+1})+(3a_{m_2}-2a_{m_2+1})\ge(3a_{k_1}-2a_{k_1+1})+(3a_{k_2}-2a_{k_2+1})\ge a_{k_1}+a_{k_2}$

....

$(3a_{m_1}-2a_{m_1+1})+...+(3a_{m_{n-1}}-2a_{m_{n-1}+1})\ge(3a_{k_1}-2a_{k_1+1})+...+(3a_{k_{n-1}}-2a_{k_{n-1}+1})\ge a_{k_1}+...+a_{k_{n-1}}$

$(3a_{m_1}-2a_{m_1+1})+...+(3a_{m_n}-2a_{m_n+1})=a_{k_1}+a_{k_2}+...+a_{k_n}$

Xét hàm số $f(x)=x\ln x$ với $x>0$. Ta có $f'(x)=1+\ln x$; $f''(x)=\dfrac{1}{x}>0,\ \forall x>0$.

Suy ra $f(x)$ là hàm lồi $\forall x>0$.Theo bất đẳng thức ***Karamata*** ta có

$\left(3a_{m_1}-2a_{m_1+1}\right)\ln\left(3a_{m_1}-2a_{m_1+1}\right)+...+\left(3a_{m_n}-2a_{m_n+1}\right)\ln\left(3a_{m_n}-2a_{m_n+1}\right)\ge a_1\ln a_1+...+a_n\ln a_n$

$\Leftrightarrow |3a_1-2a_2|\ln|3a_1-2a_2|+...+|3a_n-2a_1|\ln|3a_n-2a_1|\ge a_1\ln a_1+...+a_n\ln a_n$

$\Leftrightarrow |3a_1-2a_2|^{|3a_1-2a_2|}...|3a_n-2a_1|^{|3a_n-2a_1|}\ge a_1^{a_1}a_2^{a_2}...a_n^{a_n}$

Bài 8. Cho $x_1, x_2,..., x_n\in\left[-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{6}\right]$. Chứng minh rằng:

$\cos(2x_1-x_2)+\cos(2x_2-x_3)+...+\cos(2x_n-x_1)\le\cos x_1+\cos x_2+...+\cos x_n$

Chứng minh

Gọi $f(x)=\cos x\Rightarrow f''(x)=-\cos x<0\ \forall x\in\left[-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{6}\right]\Rightarrow f$ lõm trên $\left[-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{6}\right]$

Xét hai bộ số: $(a)=(2x_1-x_2,..., 2x_n-x_1)$ và $(b)=(x_1, x_2,..., x_n)$

Chúng ta có thể đánh lại ký hiệu chỉ số dưới để nhận được 2 bộ sắp thứ tự sau đây

$(a_m)=\left(2x_{m_1}-x_{m_1+1};2x_{m_2}-x_{m_2+1};...;2x_{m_n}-x_{m_n+1}\right)$

với $2x_{m_1}-x_{m_1+1}\ge 2x_{m_2}-x_{m_2+1}\ge...\ge 2x_{m_n}-x_{m_n+1}$ và $x_{n+1}=x_1$

$(b_k)=\left(x_{k_1},x_{k_2},....,x_{k_n}\right)$ với $x_{k_1}\ge x_{k_2}\ge...\ge x_{k_n}$

Ta có $2x_{m_1}-x_{m_1+1}\ge 2x_{k_1}-x_{k_1+1}\ge 2x_{k_1}-x_{k_1}\ge x_{k_1}$

$(2x_{m_1}-x_{m_1+1})+(2x_{m_2}-x_{m_2+1})\ge(2x_{k_1}-x_{k_1+1})+(2x_{k_2}-x_{k_2+1})\ge x_{k_1}+x_{k_2}$

....

$(2x_{m_1}-x_{m_1+1})+...+(2x_{m_{n-1}}-x_{m_{n-1}+1})\ge(2x_{k_1}-x_{k_1+1})+...+(2x_{k_{n-1}}-x_{k_{n-1}+1})\ge x_{k_1}+...+x_{k_{n-1}}$

$(2x_{m_1}-x_{m_1+1})+...+(2x_{m_n}-x_{m_n+1})=x_{k_1}+x_{k_2}+...+x_{k_n}$

Vậy điều kiện của bất đẳng thức ***Karamata*** được thỏa mãn và ta có

$\cos(2x_1-x_2)+\cos(2x_2-x_3)+...+\cos(2x_n-x_1)\le\cos x_1+\cos x_2+...+\cos x_n$

Bài 9. Chứng minh rằng: $\frac{a_1^3}{a_2}+\frac{a_2^3}{a_3}+...+\frac{a_n^3}{a_1}\ge a_1^2+a_2^2+...+a_n^2$ (1) $\forall a_1,a_2,...,a_n>0$

Chứng minh

Đặt $x_1=\ln a_1$; $x_2=\ln a_2$; ... ; $x_n=\ln a_n$, khi đó

(1) $\Leftrightarrow$ $e^{3x_1-x_2}+e^{3x_2-x_3}+...+e^{3x_n-x_1}\ge e^{2x_1}+e^{2x_2}+...+e^{2x_n}$

Đặt $f(x)=e^x\Rightarrow f''(x)=e^x>0\ \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow f(x)$ là hàm lồi trên $\mathbb{R}$.

Xét hai bộ số: $(a)=(3x_1-x_2, 3x_2-x_3..., 3x_n-x_1)$ và $(b)=(2x_1, 2x_2,..., 2x_n)$

Chúng ta có thể đánh lại ký hiệu chỉ số dưới để nhận được 2 bộ sắp thứ tự sau đây

$(a_m)=(3x_{m_1}-x_{m_1+1};3x_{m_2}-x_{m_2+1};...;3x_{m_n}-x_{m_n+1})$ với $3x_{m_1}-x_{m_1+1}\ge 3x_{m_2}-x_{m_2+1}\ge...\ge 3x_{m_n}-x_{m_n+1}$

trong đó $x_{n+1}=x_1$; $(b_k)=(2x_{k_1},2x_{k_2},...,2x_{k_n})$ với $2x_{k_1}\ge 2x_{k_2}\ge...\ge 2x_{k_n}$.

Khi đó ta có

$3x_{m_1}-x_{m_1+1}\ge 3x_{k_1}-x_{k_1+1}\ge 2x_{k_1}$

$(3x_{m_1}-x_{m_1+1})+(3x_{m_2}-x_{m_2+1})\ge(3x_{k_1}-x_{k_1+1})+(3x_{k_2}-x_{k_2+1})\ge 2x_{k_1}+2x_{k_2}$

....

$(3x_{m_1}-x_{m_1+1})+...+(3x_{m_{n-1}}-x_{m_{n-1}+1})\ge(3x_{k_1}-x_{k_1+1})+...+(3x_{k_{n-1}}-x_{k_{n-1}+1})\ge 2x_{k_1}+...+2x_{k_{n-1}}$

$(3x_{m_1}-x_{m_1+1})+...+(3x_{m_n}-x_{m_n+1})=2x_{k_1}+2x_{k_2}+...+2x_{k_n}$

Vậy điều kiện của bất đẳng thức ***Karamata*** được thỏa mãn và ta có (đpcm)

Bài 10. Tìm hằng số C nhỏ nhất để

$$\sum_{1\le i\le j\le n}x_ix_j\left(x_i^2+x_j^2\right)\le C\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^4 \text{ đúng } \forall\, x_1,x_2,...,x_n\ge 0; n\ge 2.$$

Giải

Nếu $x_1=x_2=...x_n=0$ thì bất đẳng thức đúng với mọi $C\ge 0$. Nếu có ít nhất một số $x_i>0$ thì $x_1+x_2+...+x_n>0$, khi đó chuẩn hóa bất đẳng thức thuần nhất trên với $x_1+x_2+...+x_n=1$.

$$\sum_{1\le i\le j\le n}x_ix_j\left(x_i^2+x_i^2\right)=\sum_{1\le i\le j\le n}x_i^3x_j+\sum_{1\le i\le j\le n}x_ix_j^3=\sum_{1\le i\le n}x_i^3\sum_{j\ne i}x_j=\sum_{1\le i\le n}x_i^3(1-x_i)=\sum_{i=1}^n f(x_i)$$

với $f(x)=x^3-x^4$. Vì vậy, ta cần xác định hằng số C nhỏ nhất sao cho.

$\sum_{i=1}^n f(x_i)\le C$ với $x_1+...+x_n=1$, trong đó $f(x)=x^3-x^4$ là hàm số lồi trên $[0,1/2]$.

Ta sẽ chứng minh $MinC=\frac{1}{8}$

Thật vậy, không mất tính tổng quát, giả sử $x_1\ge x_2\ge...\ge x_n$. Ta sẽ xét 2 trường hợp sau.

- $x_1\le\frac{1}{2}$. Do $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0,...,0\right)\succ(x_1,x_2,...,x_n)$ nên

$$\sum_{i=1}^n f(x_i)\le f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)+f(0)+...+f(0)=\frac{1}{8}$$

- $x_1 \ge \frac{1}{2}$. Do $(1-x_1, 0, \ldots, 0) \succ (x_2, \ldots, x_n)$ nên

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i) = f(x_1) + \sum_{i=2}^{n} f(x_i) \le f(x_1) + f(1-x_1) + (n-2)f(0) = f(x_1) + f(1-x_1) =$$

$$= x_1(1-x_1)\left[x_1^2 + (1-x_1)^2\right] = \frac{1}{2}\left(2x_1 - 2x_1^2\right)\left[2x_1^2 - 2x_1 + 1\right] \le \frac{1}{2}\left[\frac{2x_1 - 2x_1^2 + 2x_1^2 - 2x_1 + 1}{2}\right]^2 = \frac{1}{8}$$

II. BÀI TẬP DÀNH CHO BẠN ĐỌC TỰ GIẢI

Bài 1. Cho $x \ge y \ge z > 0$ và $x \ge 5$; $x + y \ge 8$; $x + y + z = 10$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = \left(\sqrt{3}-1\right)^x + \left(\sqrt{3}-1\right)^y + \left(\sqrt{3}-1\right)^z$

Bài 2. Cho $x \ge y \ge z \ge t > 0$ thỏa mãn điều kiện:

$x \le 7$; $x + y \le 13$; $x + y + z \le 18$; $x + y + z + t = 22$. Tìm Max của $T = x^x y^y z^z t^t$

Bài 3. Cho tam giác ABC với $0 < C < B < A \le 90^0$; $A + B \le 150^0$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T = (\sin A)^{\sin A} (\sin B)^{\sin B} (\sin C)^{\sin C}$

Bài 4. Cho tam giác ABC với $0 < C < B < A \le 90^0$; $A + B \le 150^0$.

Tìm giá trị lớn nhất của $T = \dfrac{1}{\sin\frac{A}{2}} + \dfrac{1}{\sin\frac{B}{2}} + \dfrac{1}{\sin\frac{C}{2}} - \left(\tan\frac{A}{4} + \tan\frac{B}{4} + \tan\frac{C}{4}\right)$

Bài 5. Cho tam giác ABC với $0 < C < B < A \le 90^0$; $A + B \le 150^0$.

Tìm giá trị lớn nhất của $T = \sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2} + \tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2} + \tan\frac{C}{2}$

Bài 6. Cho tam giác ABC. Chứng minh các bất đẳng thức sau

$$\cos^\alpha\frac{A}{2} + \cos^\alpha\frac{B}{2} + \cos^\alpha\frac{C}{2} \ge 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^\alpha, \forall\alpha < 0$$

$$2 < \cos^\alpha\frac{A}{2} + \cos^\alpha\frac{B}{2} + \cos^\alpha\frac{C}{2} \le 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^\alpha, \forall 0 < \alpha \le 1$$

Bài 7. Cho tứ giác ABCD với $A \ge 150° > B > C > D$: $A + B \ge 240°$; $A + B + C \ge 300°$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = \left(\tan\frac{A}{2}\right)^{2\sqrt{3}} + \left(\tan\frac{B}{2}\right)^{2\sqrt{3}} + \left(\tan\frac{C}{2}\right)^{2\sqrt{3}} + \left(\tan\frac{D}{2}\right)^{2\sqrt{3}}$

Bài 8. Cho $a, b, c \ge 0$. Chứng minh: $e^{a^4+b^4+c^4} + e^{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2} \ge e^{a^3b+b^3c+c^3a} + e^{ab^3+bc^3+ca^3}$

Bài 9. Cho $a, b, c \ge 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{\sqrt{a^4+b^4+c^4}} + \frac{1}{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}} \le \frac{1}{\sqrt{a^3b+b^3c+c^3a}} + \frac{1}{\sqrt{ab^3+bc^3+ca^3}}$$

Bài 10. Cho $a, b, c \ge 0$. Chứng minh: $\left(a^3+b^3+c^3\right)\ln\left(a^3+b^3+c^3\right)+3abc\ln(3abc)\ge$

$$\ge \left(a^2b+b^2c+c^2a\right)\ln\left(a^2b+b^2c+c^2a\right)+\left(ab^2+bc^2+ca^2\right)\ln\left(ab^2+bc^2+ca^2\right)$$

Bài 11. Cho $a, b, c \ge 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{e^{a^3+b^3+c^3}-e^{-\left(a^3+b^3+c^3\right)}}{a^3+b^3+c^3}+\frac{e^{3abc}-e^{-3abc}}{3abc}\ge\frac{e^{a^2b+b^2c+c^2a}-e^{-\left(a^2b+b^2c+c^2a\right)}}{a^2b+b^2c+c^2a}+\frac{e^{ab^2+bc^2+ca^2}-e^{-\left(ab^2+bc^2+ca^2\right)}}{ab^2+bc^2+ca^2}$$

Bài 12. Cho $a, b, c \ge 0$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt[6]{1+\left(a^6+b^6+c^6\right)^6}+\sqrt[6]{1+a^6b^6c^6\left(a^3+b^3+c^3\right)^6}\ge\sqrt[6]{1+\left(a^5b+b^5c+c^5a\right)^6}+\sqrt[6]{1+\left(ab^5+bc^5+ca^5\right)^6}$$

Bài 13. Cho $a, b, c \in \left[0, \frac{1}{\sqrt[5]{3}}\right)$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt[5]{1-\left(a^5+b^5+c^5\right)^5}+\sqrt[5]{1-a^5b^5c^5\left(a^2+b^2+c^2\right)^5}\le\sqrt[5]{1-\left(a^4b+b^4c+c^4a\right)^5}+\sqrt[5]{1-\left(ab^4+bc^4+ca^4\right)^5}$$

Bài 14. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{e^{a^6+b^6+c^6}}{\sqrt{1+e^{a^6+b^6+c^6}}}+\frac{e^{abc\left(a^3+b^3+c^3\right)}}{\sqrt{1+e^{abc\left(a^3+b^3+c^3\right)}}}\ge\frac{e^{a^5b+b^5c+c^5a}}{\sqrt{1+e^{a^5b+b^5c+c^5a}}}+\frac{e^{ab^5+bc^5+ca^5}}{\sqrt{1+e^{ab^5+bc^5+ca^5}}}$$

Bài 15. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt[5]{\left(a^6+b^6+c^6\right)^3}+\sqrt[5]{a^3b^3c^3\left(a^3+b^3+c^3\right)^3}\ge\sqrt[5]{\left(a^5b+b^5c+c^5a\right)^3}+\sqrt[5]{\left(ab^5+bc^5+ca^5\right)^3}$$

Bài 16. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt[3]{\left(a^4+b^4+c^4\right)^2}+\sqrt[3]{a^2b^2c^2\left(a+b+c\right)^4}\ge\sqrt[3]{\left(a^3b+b^3c+c^3a\right)^2}+\sqrt[3]{\left(ab^3+bc^3+ca^3\right)^2}$$

Bài 17. Cho 2 bộ n số thực sắp thứ tự $\begin{cases}(a)=(a_1,a_2,\dots,a_n)\\(b)=(b_1,b_2,\dots,b_n)\end{cases}$

Tức là $\begin{cases}a_i\ge a_{i+1}\\b_i\ge b_{i+1}\end{cases}\forall i=\overline{1,n-1}$. Khi đó ta nói rằng bộ (a) trội hơn bộ (b) với các hệ số thực dương $m_1, m_2, \dots, m_n$ nếu thỏa mãn điều kiện:

$$\begin{cases}m_1a_1\ge m_1b_1\\m_1a_1+m_2a_2\ge m_1b_1+m_2b_2\\\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\m_1a_1+m_2a_2+\dots+m_{n-1}a_{n-1}\ge m_1b_1+m_2b_2+\dots+m_{n-1}b_{n-1}\\m_1a_1+m_2a_2+\dots+m_{n-1}a_{n-1}+m_na_n=m_1b_1+m_2b_2+\dots+m_{n-1}b_{n-1}+m_nb_n\end{cases}$$

Chứng minh rằng nếu hàm số f lồi và bộ (a) trội hơn bộ (b) thì

$$m_1f(a_1)+m_2f(a_2)+\dots+m_nf(a_n)\ge m_1f(b_1)+m_2f(b_2)+\dots+m_nf(b_n)$$

(Bất đẳng thức Karamata mở rộng)

§14. BẤT ĐẲNG THỨC VỚI CÁC HÀM SỐ LỒI BÊN PHẢI VÀ LÕM BÊN TRÁI

§14.1. CÁC ĐỊNH LÝ VỀ HÀM SỐ LỒI BÊN PHẢI VÀ LÕM BÊN TRÁI

Cho f là hàm số xác định trên khoảng $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$. Hàm f được gọi là lồi bên phải trên $\mathbb{I}$ nếu nếu tồn tại $s \in \mathbb{I}$ sao cho f là hàm lồi với $x \geq s$. Tương tự, f được gọi là lõm bên trái trên $\mathbb{I}$ nếu tồn tại $s \in \mathbb{I}$ sao cho f là hàm lõm với $x \leq s$. Hai định lý sau đây và những hệ quả của chúng rất có ích khi chứng minh một lớp rộng các bất đẳng thức kiểu Jensen cho các hàm lồi bên phải và lõm bên trái.

I. CÁC BẤT ĐẲNG THỨC VỚI HÀM LỒI BÊN PHẢI

Định lý hàm số lồi bên phải (Định lý RCF)

Cho $f(u)$ là một hàm số xác định trên khoảng $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$ và lồi với $u \geq s, s \in \mathbb{I}$.

Nếu bất đẳng thức $f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n) \geq nf\left(\dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right)$ (1) đúng

với mọi $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{I}$ *thỏa mãn* $\dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = s$ *và* $x_2 = x_3 = \ldots = x_n \geq s$

thì (1) *cũng đúng với mọi* $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{I}$ *thỏa mãn* $\dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \geq s$

Chứng minh

Không mất tính tổng quát, giả sử rằng $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$. Nếu $x_1 \geq s$ thì bất đẳng thức cần chứng minh chỉ là bất đẳng thức Jensen cho hàm lồi f. Bây giờ giả sử $x_1 < s$. Từ $x_1 + x_2 + \ldots + x_n \geq ns$, suy ra tồn tại $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ thỏa mãn $x_1 \leq \ldots \leq x_k \leq s \leq x_{k+1} \ldots \leq x_n$

Đặt $S = \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}, z = \dfrac{x_1 + \ldots + x_k}{k}, t = \dfrac{x_{k+1} + \ldots + x_n}{n-k}$.

ta có $z \in \mathbb{I}, t \in \mathbb{I}, kz + (n-k)t = nS$ và $z < s \leq S < t$

Sử dụng bất đẳng thức ***Jensen***, ta có $f(x_{k+1}) + \ldots + f(x_n) \geq (n-k) f(t)$

Tiếp theo, ta sẽ chứng minh rằng $f(x_1) + \ldots + f(x_k) + (n-k) f(t) \geq nf(S)$

Ký hiệu $y_i = \dfrac{ns - x_i}{n-1}$ với $i = 1, 2, \ldots, k$. Ta sẽ chứng minh rằng $s < y_i < t$.

Vế trái bất đẳng thức này quy về $x_i < s$, điều này đúng với $i = 1, 2, \ldots, k$. Hơn nữa ta có

$$y_i \le y_1 = \frac{ns - x_1}{n-1} \le \frac{ns - x_1}{n-1} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n-1} \le \frac{x_{k+1} + \ldots + x_n}{n-k} = t$$

Vì vậy, theo giả thiết, bất đẳng thức sau đúng $f(x_i) + (n-1)f(y_i) \ge nf(s)$.

Cộng tất cả các bất đẳng thức với $i = 1, 2, \ldots, k$, ta thu được

$$f(x_1) + \ldots + f(x_k) \ge knf(s) - (n-1)\left[f(y_1) + \ldots + f(y_k)\right]$$

Bây giờ ta sẽ chứng minh rằng $knf(s) + (n-k)f(t) \ge nf(S) + (n-1)\left[f(y_1) + \ldots + f(y_k)\right]$.

Đặt $s_1 = \dfrac{(n+k-1)s - kz}{n-1}$. Ta có $s < s_1 \le \dfrac{ns + (k-1)S - kz}{n-1} = \dfrac{(k-1)s + (n-k)t}{n-1} \le t$

Để ý rằng vector $\vec{A} = (s_1, s, \ldots, s)$ trội hơn vector $B = (y_k, y_{k-1}, \ldots, y_1)$, với chú ý

$(k-1)s + s_1 = y_1 + \ldots + y_k$ và $s \le y_k \le y_{k-1} \le \ldots \le y_1$.

Nên sử dụng bất đẳng thức ***Karamata*** về bộ trội ta có

$$f(y_1) + \ldots + f(y_k) \le (k-1)f(s) + f(s_1)$$

Tiếp theo, chỉ cần chứng minh rằng $(n+k-1)f(s) + (n-k)f(t) \ge nf(S) + (n-1)f(s_1)$.

Bất đẳng thức này có thể nhận được bằng cách cộng các bất đẳng thức ***Jensen*** sau đây sau khi nhân chúng với n và $n-1$ tương ứng:

$$\frac{t-S}{t-s}f(s) + \frac{S-s}{t-s}f(t) \ge f(S),\quad \frac{t-s_1}{t-s}f(s) + \frac{s_1-s}{t-s}f(t) \ge f(s_1)$$

Chú ý 1. Giả thiết của định lý tương đương với điều kiện $f(x) + (n-1)f(y) \ge nf(s)$ với mọi $x, y \in \mathbb{I}$ thỏa mãn $x \le s \le y$ và $x + (n-1)y = ns$

Chú ý 2. Đặt $g(t) = \dfrac{f(t) - f(s)}{t-s}$. Với $x < s < y$ và $x + (n-1)y = ns$, ta có

$$f(x) + (n-1)f(y) - nf(s) = f(x) - f(s) + (n-1)\left[f(y) - f(s)\right]$$
$$= (x-s)g(x) + (n-1)(y-s)g(y) = (s-x)\left[g(y) - g(x)\right]$$

Vì vậy, giả thiết của định lý tương đương với điều kiện $g(x) \le g(y)$ với mọi $x, y \in \mathbb{I}$ thỏa mãn $x \le s \le y$ và $x + (n-1)y = ns$

Chú ý 3. Giả sử rằng f là hàm khả vi trên $\mathbb{I}$. Thế thì Định lý RCF đúng với các giả thiết ban đầu kèm theo điều kiện hạn chế $f'(x) \le f'(y)$ với mọi $x, y \in \mathbb{I}$ thỏa mãn $x \le s \le y$

và $x+(n-1)y=ns$. Để chứng minh bổ đề này, ta ký hiệu

$$F(x)=f(x)+(n-1)f\left(\frac{ns-x}{n-1}\right)-nf(s)$$

Từ $F'(x)=f'(x)-f'(y)\le 0$, hàm $F(x)$ tăng với $x\le s$.

Tiếp theo, $F(x)\ge F(s)=0$ với $x\le s$, và vì thế $f(x)+(n-1)f(y)-nf(s)\ge 0$

Hệ quả định lý hàm lồi bên phải (Hệ quả RCF).

Cho f là hàm số xác định trên $(0,+\infty)$, $r>0$. *Nếu hàm* $f_1(u)=f(e^u)$ *lồi với* $u\ge \ln r$, *và*

$f(a_1)+f(a_2)+\ldots+f(a_n)\ge nf\left(\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}\right)$ *(2)*

với mọi $a_1,a_2,\ldots,a_n>0$ *thỏa mãn* $\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}=r$ *và* $a_2=a_3=\ldots=a_n\ge r$

thì (2) đúng với mọi $a_1,a_2,\ldots,a_n>0$ *thỏa mãn* $\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}\ge r$

Chứng minh:

Áp dụng Định lý RCF cho hàm $f(e^u)$, ngoài ra, thay a bởi $\ln r$, và thay x_i bởi $\ln a_i$ với mọi chỉ số i

Chú ý 4. Giả thiết trong hệ quả tương đương với điều kiện $f(x)+(n-1)f(y)\ge nf(r)$ *với mọi* $x,y>0$ *thỏa mãn* $x\le r\le y$ *và* $xy^{n-1}=r^n$

Chú ý 5. Giả sử rằng f là hàm khả vi trên $\mathbb{I}$. Thế thì hệ quả RCF đúng với các giả thiết ban đầu và điều kiện hạn chế $xf'(x)\le yf'(y)$ với mọi $x,y\in\mathbb{I}$ thỏa mãn $x\le s\le y$ và $xy^{n-1}=r^n$

Chứng minh:

Ta ký hiệu $F(x)=f(x)+(n-1)f\left(r\cdot\sqrt[n-1]{\frac{r}{x}}\right)-nf(r)$

và nhận xét $F'(x)=f'(x)-\frac{r}{n}\cdot\sqrt[n-1]{\frac{r}{n}}\cdot f'(y)=\frac{xf'(x)-yf'(y)}{x}\le 0$.

Suy ra $f(x)$ tăng với $x\le r$.

Tiếp theo, $F(x)\ge F(r)=0$ với $x\le r$, và vì thế $f(x)+(n-1)f(y)-nf(r)\ge 0$

II. CÁC BẤT ĐẲNG THỨC VỚI HÀM LÕM BÊN TRÁI

Định lý hàm số lõm bên trái (Định lý LCF)

Cho $f(u)$ là hàm xác định trên khoảng $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$ và lõm với $u \le s, s \in \mathbb{I}$.

Nếu bất đẳng thức $f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n) \le nf\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right)$ (3) đúng

với mọi $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{I}$ thỏa mãn $\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n} = s$ và $x_1 = x_2 = \ldots = x_{n-1} \le s$

Thì (3) cũng đúng với mọi $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{I}$ thỏa mãn $\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n} \le s$

Chứng minh: Chứng minh định lý này tương tự chứng minh Định lý RCF

Chú ý 6. Giả thiết định lý tương đương với điều kiện $(n-1)f(x)+f(y) \le nf(s)$

với mọi $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{I}$ thỏa mãn $x \le s \le y$ và $(n-1)x + y = ns$

Chú ý 7. Đặt $g(t) = \frac{f(t)-f(s)}{t-s}$, giả thiết định lý tương đương với điều kiện:

$g(x) \ge g(y)$ với mọi $x, y \in \mathbb{I}$ thỏa mãn $x \le s \le y$ và $(n-1)x + y = ns$

Chú ý 8. Nếu f là hàm khả vi trên $\mathbb{I}$, thế thì Định lý LCF đúng với các giả thiết ban đầu và điều kiện hạn chế $f'(x) \ge f'(y)$ với mọi $x, y \in \mathbb{I}$ thỏa mãn $x \le s \le y$ và $(n-1)x + y = ns$

Hệ quả định lý hàm lõm bên trái (Hệ quả LCF).

Cho f là hàm liên tục trên $(0,+\infty)$, $r > 0$. Nếu hàm $f_1(u) = f(e^u)$ lõm với $u \le \ln r$, và bất đẳng thức $f(a_1)+f(a_2)+\ldots+f(a_n) \le nf\left(\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}\right)$ (4) đúng $\forall a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$ thỏa mãn điều kiện $\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n} = r$ và $a_1 = a_2 = \ldots = a_{n-1} \le r$ thì bất đẳng thức (4) cũng đúng với mọi $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$ thỏa mãn $\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n} \le r$

Chú ý 9. Giả thiết của hệ quả tương đương với điều kiện $(n-1)f(x)+f(y) \le ng(r)$

với mọi $x, y > 0$ thỏa mãn $x \le r \le y$ và $x^{n-1}y = r^n$.

Chú ý 10. Nếu f là hàm khả vi trên $\mathbb{I}$ thì Hệ quả LCF đúng với các giả thiết ban đầu và điều kiện hạn chế $xf'(x) \ge yf'(y)$ với mọi $x, y > 0$ thỏa mãn $x \le r \le y$ và $x^{n-1}y = r^n$.

III. CÁC BẤT ĐẲNG THỨC VỚI HÀM LÕM BÊN TRÁI VÀ LỒI BÊN PHẢI

Định lý hàm lõm bên trái – lồi bên phải (Định lý LCRCF).

Cho $a<c$ là các số thực, f là hàm liên tục trên khoảng $\mathbb{I}=[a,+\infty)$, lõm trên $[a,c]$ và lồi trên $[c,+\infty)$. Nếu $x_1,x_2,\ldots,x_n\in\mathbb{I}$ thỏa mãn $x_1+x_2+\ldots+x_n=S=\text{const}$, thế thì biểu thức $E=f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)$ đạt giá trị lớn nhất với $x_1=x_2=\ldots=x_{n-1}\le x_n$

Chứng minh

Không mất tính tổng quát, giả sử rằng $x_1\le x_2\le\ldots\le x_n$. Nếu $x_n\le c$, áp dụng bất đẳng thức ***Jensen*** cho hàm lõm ta có $f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)\le nf\left(\dfrac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right)$

Do đó biểu thức E *đạt giá trị lớn nhất* với $x_1=x_2=\ldots=x_n$.

Nếu $x_n>c$, tồn tại $k\in\{0,1,\ldots,n-1\}$ thỏa mãn $0\le x_1\le\ldots\le x_k\le c\lneq x_{k+1}\le\ldots\le x_n$

Áp dụng bất đẳng thức ***Karamata*** cho bộ trội cho hàm lồi và ***Jensen*** cho hàm lõm, ta có

$$f(x_{k+1})+\ldots+f(x_n)\le(n-k+1)f(c)+f(x_{k+1}+\ldots+x_n-(n-k-1)c)$$

và $(n-k-1)f(c)f(x_1)+\ldots+f(x_k)\le(n-1)f\left(\dfrac{(n-k-1)c+x_1+x_2+\ldots+x_n}{n-1}\right)$, tương ứng.

Cộng các bất đẳng thức lại dẫn tới $f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)\le(n-1)f(x)+f(y)$

trong đó $x=\dfrac{(n-k-1)c+x_1+\ldots+x_k}{n-1}$, $y=x_{k+1}+\ldots+x_n-(n-k-1)c$

Dễ dàng kiểm tra rằng $(n-1)x+y=x_1+x_2+\ldots+x_n$ và $x\le y$. Theo bất đẳng thức cuối cùng, biểu thức E đạt giá trị lớn nhất với $x_1=\ldots=x_{n-1}=x$ và $x_n=y$

Chú ý 11. Định lý 1 cũng đúng trong trường hợp $\mathbb{I}=(a,+\infty)$ và $\lim\limits_{x\to a}f(x)=-\infty$. Thêm nữa, Định lý 1 vẫn đúng nếu $a<c<b$, $S<(n-1)c+b$ và f là hàm liên tục trên $\mathbb{I}=[a,b)$, lõm trên $[a,c]$ và lồi trên $[c,b)$. Theo cách tương tự, ta có thể chứng minh mệnh đề sau đây

Định lý điểm uốn đơn (Định lý SIP).

Cho f là hàm khả vi cấp 2 trên $\mathbb{R}$ với điểm uốn đơn, *cho S là số thực cố định và cho $g(x)=f(x)+(n-1)f\left(\dfrac{S-x}{n-1}\right)$. Nếu $x_1,x_2,\ldots,x_n$ là các số thực thỏa mãn $x_1+x_2+\ldots+x_n=S$ thì $\inf\limits_{x\in\mathbb{R}}g(x)\le f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)\le\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}g(x)$*

§14. 2. KỸ THUẬT SỬ DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC RCF, LCF, LCRCF

I. CÁC BÀI TẬP MẪU MINH HỌA

Bài 1. Giả sử $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là các số thực không âm thỏa mãn $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = n$.

Chứng minh rằng $(n-1)\left(x_1^3 + x_2^3 + \ldots + x_n^3\right) + n^2 \geq (2n-1)\left(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2\right)$

Chứng minh

Ta viết lại bất đẳng thức dưới dạng $f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n) \geq nf\left(\dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right)$

trong đó $f(u) = (n-1)u^3 - (2n-1)u^2, u \geq 0$. Đạo hàm cấp 2 $f''(u) = 6(n-1)u - 2(2n-1)$

chỉ ra rằng f lồi với $u > \dfrac{2n-1}{3(n-1)}$, và vì vậy với $u \geq s$, trong đó

$$s = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = 1 \geq \frac{2n-1}{3(n-1)}$$

Theo Định lý RCF, chỉ cần chứng minh bất đẳng thức với $x_1 \leq 1 \leq x_2 = x_3 = \ldots = x_n$ là đủ.

Để áp dụng Chú ý 2, ta sẽ chứng minh rằng $g(x) \leq g(y)$ với $0 \leq x \leq 1 \leq y$ và $x + (n-1)y = n$, trong đó $g(t) = \dfrac{f(t) - f(1)}{t-1} = (n-1)(t^2 + t + 1) - (2n-1)(t+1)$

Thật vậy, ta có $g(x) - g(y) = (x-y)\left[(n-1)(x+y+1) - 2n + 1\right] = (n-2)x(x-y) \leq 0$

. Với $n = 2$, bất đẳng thức trở thành đẳng thức. Với $n \geq 3$, đẳng thức xảy ra khi hoặc $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 1$, hoặc một trong các số x_i bằng 0 và các số còn lại bằng $\dfrac{n}{n-1}$

Bài 2. Giả sử $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là các số thực không âm thỏa mãn $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = n$.

Chứng minh rằng $x_1^3 + x_2^3 + \ldots + x_n^3 + n^2 \leq (n+1)\left(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2\right)$

Chứng minh

Ta có thể viết lại bất đẳng thức dưới dạng

$f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n) \leq nf\left(\dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right)$ trong đó $f(u) = u^3 - (n+1)u^2, u \geq 0$.

Hàm số này lõm với $0 \leq u \leq \dfrac{n-1}{3}$, và vì vậy với $0 \leq u \leq s$, trong đó

$$s = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = 1 \leq \frac{n+1}{3}$$

Theo Định lý LCF, chỉ cần chứng minh bất đẳng thức cho $x_1 = x_2 = \ldots = x_{n-1} \leq 1 \leq x_n$

Để áp dụng Chú ý 7, ta chứng minh rằng $g(x) \geq g(y)$, với $0 \leq x \leq 1 \leq y$ và $(n-1)x + y = n$. Ta

có $g(t) = \dfrac{f(t) - f(1)}{t-1} = t^2 - nt - n$ và $g(x) - g(y) = (x+y)(x+y-n) = (n-2)x(y-x) \geq 0$

Với $n=2$, bất đẳng thức ban đầu trở thành đẳng thức. Với $n\ge 3$, đẳng thức xảy ra khi hoặc $x_1=x_2=\ldots=x_n=1$, hoặc một trong các số x_i bằng n và các số còn lại bằng 0

Bài 3. Giả sử $x_1,x_2,\ldots,x_n$ là các số thực không âm thỏa mãn $\dfrac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}=r\ge\sqrt{\dfrac{n-1}{n}}$. Chứng minh rằng: $\dfrac{1}{1+x_1^2}+\dfrac{1}{1+x_2^2}+\ldots+\dfrac{1}{1+x_n^2}\ge\dfrac{n}{1+r^2}$

Chứng minh

Áp dụng Định lý RCF cho hàm $f(u)=\dfrac{1}{1+u^2},u\ge 0$. Đạo hàm cấp 2 $f''(u)=\dfrac{2(3u^2-1)}{(1+u^2)^3}$, từ đó f lồi trên $\left[\dfrac{1}{\sqrt3},+\infty\right)$. Mà $s=\sqrt{\dfrac{n-1}{n}}>\dfrac{1}{\sqrt3}$, suy ra hàm f là lồi trên $[s,+\infty)$.

Theo Định lý RCF và Chú ý 2, ta sẽ chứng minh rằng $g(x)\le g(y)$ với $0\le x\le s\le y$ và $x+(n-1)y=ns$, trong đó $g(t)=\dfrac{f(t)-f(s)}{t-s}=\dfrac{-t-s}{(1+s^2)(1+t^2)}$

Từ $g(x)-g(y)=\dfrac{(x-y)\left[s(x+y)+xy-1\right]}{(1+s^2)(1+x^2)(1+y^2)}$, ta chứng minh $s(x+y)+xy-1\ge 0$.

Thật vậy, $s(x+y)+xy-1=\dfrac{ns^2-n+1+x[2(n-1)s-x]}{n+1}\ge\dfrac{ns^2-n+1}{n+1}=0$

Đẳng thức xảy ra khi $x_1=x_2=\ldots=x_n=r$. Trong trường hợp $r=\sqrt{\dfrac{n-1}{n}}$, đẳng thức lại xảy ra khi một trong các số x_i bằng 0, và các số còn lại bằng $\sqrt{\dfrac{n}{n-1}}$

Bài 4. Giả sử $x_1,x_2,\ldots,x_n$ là các số thực không âm thỏa mãn $\dfrac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}=r\le\sqrt{\dfrac{n-1}{n^2-n+1}}$. Chứng minh rằng: $\dfrac{1}{1+x_1^2}+\dfrac{1}{1+x_2^2}+\ldots+\dfrac{1}{1+x_n^2}\le\dfrac{n}{1+r^2}$

Chứng minh

Sử dụng Định lý LCF cho hàm số $f(u)=\dfrac{1}{1+u^2},u\ge 0$. Do f lõm trên $\left[0,\dfrac{1}{\sqrt3}\right]$ và $s=\sqrt{\dfrac{n-1}{n^2-n+1}}\le\dfrac{1}{\sqrt3}$, chứng tỏ f lõm trên $[0,s]$.

Để áp dụng Định lý LCF và Chú ý 7, ta chứng minh rằng $g(x)\ge g(y)$ với $0\le x\le s\le y$ và $(n-1)x+y=ns$, trong đó $g(t)=\dfrac{f(t)-f(s)}{t-s}=\dfrac{-t-s}{(1+s^2)(1+t^2)}$

Từ $g(x)-g(y)=\dfrac{(x-y)\left[s(x+y)+xy-1\right]}{(1+s^2)(1+x^2)(1+y^2)}=\dfrac{(x-y)[ns^2-1+2sx-(n-1)x^2]}{(1+s^2)(1+x^2)(1+y^2)}$

Ta chứng minh rằng $ns^2-1+2sx-(n-1)x^2\le 0$.

Thật vậy,

$$ns^2-1+2sx-(n-1)x^2=\frac{(n^2-n+1)s^2-n+1-[(n-1)x-s]^2}{n-1}=\frac{-[(n-1)x-s]^2}{n-1}\le 0$$

Đẳng thức xảy ra với $x_1=x_2=\ldots=x_n=r$. Trong trường hợp $r=\sqrt{\dfrac{n-1}{n^2-n+1}}$, đẳng thức lại xảy ra khi một trong các số x_i bằng $(n-1)r$, và các số còn lại bằng $\dfrac{r}{n-1}$

Bài 5. Giả sử $x_1,x_2,\ldots,x_n$ là các số thực dương thỏa mãn $x_1+x_2+\ldots+x_n=1$ thì

Chứng minh rằng $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\ldots+\dfrac{1}{x_n}\ge(n-2)^2+4n(n-1)\left(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2\right)$

Chứng minh

Ta có thể viết lại bất đẳng thức dưới dạng

$$f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)\le nf\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right)$$

Trong đó $f(u)=4n(n-1)u^2-\dfrac{1}{u},u>0$.

Nhận thấy rằng hàm $f(u)$ lõm với $0<s\le\sqrt[3]{\dfrac{1}{4n(n-1)}}$.

Do $s=\dfrac{1}{n}\le\sqrt[3]{\dfrac{1}{4n(n-1)}}$, hàm $f(u)$ lõm trên $(0,s]$

Để áp dụng Định lý LCF và Chú ý 7, chỉ cần chứng minh rằng $g(x)\ge g(y)$ với $0<x\le\dfrac{1}{n}\le y$ và $(n-1)x+y=1$ là đủ. Thật vậy, ta có

$$g(t)=\frac{f(t)-f(s)}{t-s}=4n(n-1)(t+s)+\frac{1}{st}=4(n-1)(nt+1)+\frac{n}{t}$$

và $g(x)-g(y)=n(x-y)\left(4n-4-\dfrac{1}{xy}\right)=\dfrac{n(y-x)(2nx-2x-1)^2}{xy}\ge 0$

Điều này hoàn thành chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $x_1=x_2=\ldots=x_n=\dfrac{1}{n}$, hoặc khi một trong các số x_i bằng $\dfrac{1}{2}$, và các số còn lại bằng $\dfrac{1}{2n-2}$

Bài 6. Giả sử $x_1,x_2,\ldots,x_n$ là các số thực dương thỏa mãn

$\dfrac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}=r\le\dfrac{n-1}{\left(n+\sqrt{n-1}\right)^2}$. CMR: $\dfrac{1}{1-\sqrt{x_1}}+\dfrac{1}{1-\sqrt{x_2}}+\ldots+\dfrac{1}{1-\sqrt{x_n}}\le\dfrac{n}{1-\sqrt{r}}$

Chứng minh

Do $\sqrt{x_1+x_2+\ldots+x_n} \le \frac{\sqrt{n(n-1)}}{n+\sqrt{n-1}} < 1$, sử dụng Định lý LCF cho hàm $f(u)=\frac{1}{1-\sqrt{u}}, 0\le u<1$.

Do $f''(u)=\frac{3\sqrt{u}-1}{4u\sqrt{u}\left(1-\sqrt{u}\right)^3}$, chứng tỏ f lõm trên $\left[0,\frac{1}{9}\right]$, và vì vậy trên $[0,s]$, trong đó

$s=\frac{n-1}{\left(n+\sqrt{n-1}\right)^2}$. Theo Định lý LCF, chỉ cần xét trường hợp $x_1=x_2=\ldots=x_{n-1}\le s\le x_n$.

Để áp dụng Chú ý 7, ta chứng minh rằng $g(x)\ge g(y)$, với $0\le x\le s\le y$ và $(n-1)x+y=ns$.

Từ $g(t)=\frac{f(t)-f(s)}{t-s}=\frac{1}{\left(1-\sqrt{s}\right)\left(1-\sqrt{t}\right)\left(\sqrt{s}+\sqrt{t}\right)}$

và $g(x)-g(y)=\frac{\left(\sqrt{y}-\sqrt{z}\right)\left(1-\sqrt{s}-\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)}{\left(1-\sqrt{s}\right)\left(1-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{s}+\sqrt{x}\right)\left(1-\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{s}+\sqrt{y}\right)}$

Ta sẽ chứng minh $1-\sqrt{s}\ge\sqrt{x}+\sqrt{y}$. Theo bất đẳng thức ***Cauchy – Schwarz***, ta có

$\left(\frac{1}{n-1}+1\right)\left[(n-1)x+y\right]\ge\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2$ hay $n\sqrt{\frac{s}{n-1}}\ge\sqrt{x}+\sqrt{y}$

Vì thế $1-\sqrt{s}-\sqrt{x}-\sqrt{y}\ge 1-\left(1+\frac{n}{\sqrt{n-1}}\right)\sqrt{s}=0$

Đẳng thức xảy ra khi $x_1=x_2=\ldots=x_n=r$. Trong trường hợp $r=\frac{n-1}{\left(n+\sqrt{n-1}\right)^2}$, đẳng thức còn xảy ra khi một trong các số x_i bằng $(n-1)r$, và các số còn lại bằng $\frac{r}{n-1}$

Bài 7. Giả sử $0\le x_1,x_2,\ldots,x_n<1$ thỏa mãn $\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}=r\ge\frac{n-1}{\left(\sqrt{n}+\sqrt{n-1}\right)^2}$.

Chứng minh rằng $\frac{1}{1-\sqrt{x_1}}+\frac{1}{1-\sqrt{x_2}}+\ldots+\frac{1}{1-\sqrt{x_n}}\ge\frac{n}{1-\sqrt{r}}$

Chứng minh

Ta sẽ sử dụng Định lý RCF cho hàm $f(u)=\frac{1}{1-\sqrt{u}}, 0\le u<1$.

Do $f''(u)=\frac{3\sqrt{u}-1}{4u\sqrt{u}\left(1-\sqrt{u}\right)^3}$,

chứng tỏ f lồi trên $\left[\frac{1}{9},1\right)$, và vì vậy lồi trên $[s,1)$, trong đó $s=\frac{n-1}{\left(\sqrt{n}+\sqrt{n-1}\right)^2}$.

Theo Định lý LCF, chỉ cần xét trường hợp $x_1\le s\le x_2=\ldots=x_{n-1}=x_n$

Để áp dụng Chú ý 2, ta chứng minh rằng $g(x) \le g(y)$, với $0 \le x \le s \le y < 1$ và $x + (n-1)y = ns$. Từ $g(t) = \frac{f(t) - f(s)}{t - s} = \frac{1}{(1-\sqrt{s})(1-\sqrt{t})(\sqrt{s}+\sqrt{t})}$ và

$g(x) - g(y) = \frac{(\sqrt{y}-\sqrt{x})(1-\sqrt{s}-\sqrt{x}-\sqrt{y})}{(1-\sqrt{s})(1-\sqrt{x})(\sqrt{s}+\sqrt{x})(1-\sqrt{y})(\sqrt{s}+\sqrt{y})}$, ta phải chứng minh

$1 - \sqrt{s} \le \sqrt{x} + \sqrt{y}$.

Thật vậy, ta có $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{s} - 1 \ge \sqrt{\frac{x}{n-1} + y} + \sqrt{s} - 1 = \sqrt{\frac{ns}{n-1}} + \sqrt{s} - 1 = 0$

Đẳng thức xảy ra khi $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = r$.

Trong trường hợp $r = \frac{n-1}{(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})^2}$, đẳng thức còn xảy ra khi một trong các số x_i bằng 0 và các số còn lại bằng $\frac{nr}{n-1}$

Bài 8. Giả sử $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là các số thực dương thỏa mãn

$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = r \le 1 + \frac{2\sqrt{n-1}}{n}$.

Chứng minh rằng $\left(x_1 + \frac{1}{x_1}\right)\left(x_2 + \frac{1}{x_2}\right)\ldots\left(x_n + \frac{1}{x_n}\right) \ge \left(r + \frac{1}{r}\right)^n$

Chứng minh

Sử dụng Định lý LCF cho hàm $f(u) = -\ln\left(u + \frac{1}{u}\right)$, $u > 0$. Đạo hàm cấp 1 và cấp 2 của f lần lượt là $f'(u) = \frac{1-u^2}{u(u^2+1)}$ và $f''(u) = \frac{u^4 - 4u^2 - 1}{u^2(u^2+1)^2}$.

Chứng tỏ f lõm với $0 < u \le \sqrt{2+\sqrt{5}}$.

Do $s = 1 + \frac{2\sqrt{n-1}}{n} \le 2 < \sqrt{2+\sqrt{5}}$, $f(u)$ lõm với $0 < u \le s$. Theo Định lý LCF và Chú ý 8, chỉ cần chứng minh rằng $f'(x) \ge f'(y)$ với $0 < x \le s \le y$ và $(n-1)x + y = ns$

Từ $f'(x) - f'(y) = (y-x)\frac{1 + (x+y)^2 - x^2y^2}{xy(1+x^2)(1+y^2)} \ge (y-x)\frac{(x+y)^2 - x^2y^2}{xy(1+x^2)(1+y^2)}$,

như thế chỉ cần chứng minh $x + y \ge xy$ là đủ.

Thật vậy, ta có $x + y - xy = x + (1-x)\left[n + 2\sqrt{n-1} - (n-1)x\right] = \left(\sqrt{n-1}x - 1 - \sqrt{n-1}\right)^2 \ge 0$

Đẳng thức xảy ra chỉ khi $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = r$

Ta có thể viết bất đẳng thức này dưới dạng $f(a)+f(b)+f(c)\le 3f\left(\dfrac{a+b+c}{3}\right)$

trong đó $f(x)=\dfrac{1}{3x^2-x+3}$. Đạo hàm cấp 2 $f''(x)=\dfrac{18x^2-6x-17}{(3x^2-x+3)^3}$ chứng tỏ f lõm với

$0\le x\le\dfrac{1+\sqrt{35}}{6}$, và vì vậy lõm với $0\le x\le 1=\dfrac{a+b+c}{3}$

Theo Định lý LCF, chỉ cần chứng minh bất đẳng thức với $b=c\le 1, a=3-2b$.

Thật vậy, $\dfrac{1}{3(3-2b)^2+2b}+\dfrac{2}{3b^2-b+3}\le\dfrac{3}{5}\Leftrightarrow(b-1)^2(63b^2+27b+24)\ge 0$ (hiển nhiên đúng).

Điều này hoàn thành chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$.

Bài 9. Giả sử $x_1,x_2,\ldots,x_n$ là các số thực dương thỏa mãn $x_1+x_2+\ldots+x_n=1$.

Chứng minh $\left(\dfrac{1}{\sqrt{x_1}}-\sqrt{x_1}\right)\left(\dfrac{1}{\sqrt{x_2}}-\sqrt{x_2}\right)\ldots\left(\dfrac{1}{\sqrt{x_n}}-\sqrt{x_n}\right)\ge\left(\sqrt{n}-\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$ (5)

Chứng minh

Ta sẽ sử dụng Định lý LCF cho hàm $f(u)=-\ln\left(\dfrac{1}{\sqrt{u}}-\sqrt{u}\right), 0<u<1$.

Ta có $f'(u)=\dfrac{1}{1-u}+\dfrac{1}{2u}$, $f''(u)=\dfrac{u^2+2u-1}{2u^2(1-u)^2}$. Do hàm f lõm trên khoảng $(0,\sqrt{2}-1)$ và

$s=\dfrac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}=\dfrac{1}{n}<\sqrt{2}-1$ (với $n\ge 3$) nên f lõm trên đoạn $[0,s]$. Theo Định lý

LCF, chỉ cần chứng minh $(n-1)f(x)+f(y)\le nf\left(\dfrac{1}{n}\right)$ với $0<x\le\dfrac{1}{n}\le y$ và

$(n-1)x+y=1$ là đủ.

Viết bất đẳng thức này như là $n^{\frac{n}{2}}(1-x)^{n-1}\ge(n-1)^{n-1}x^{\frac{n-3}{2}}y^{\frac{1}{2}}$

Bình phương hai vế, bất đẳng thức trở thành $(2-2x)^{2n-2}=(2n-2)^{2n-2}\dfrac{1}{n^n}x^{n-3}y$

Từ $2-2x=n\dfrac{1}{n}+(n-3)x+y$, bất đẳng thức này đúng theo bất đẳng thức ***AM – GM***.

Bất đẳng thức ban đầu trở thành đẳng thức khi $x_1=x_2=\ldots=x_n=\dfrac{1}{n}$

Nhận xét 1. Theo Chú ý 8, bất đẳng thức (5) đúng nếu $f'(x)\ge f'(y)$ với $0<x\le\dfrac{1}{n}\le y$

và $(n-1)x+y=1$. Thật vậy, ta có

$$f'(x)-f'(y)=\frac{1}{2x}+\frac{1}{1-x}-\frac{1}{2y}-\frac{1}{1-y}=\frac{(y-x)(1-x-y-xy)}{2xy(1-x)(1-y)}$$

$$=\frac{x(y-x)(n-2-y)}{2xy(1-x)(1-y)}\geq\frac{x(y-x)(1-y)}{2xy(1-x)(1-y)}=\frac{(n-1)x^2(y-x)}{2xy(1-x)(1-y)}\geq 0$$

Nhận xét 2. Bất đẳng thức (5) có thể viết ở dạng

$$\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{x_i}}-1\right)\prod_{i=1}^{n}\left(1+\sqrt{x_i}\right)\geq\left(\sqrt{n}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$$

Mặt khác, theo bất đẳng thức ***AM – GM*** và bất đẳng thức Jensen, ta có

$$\prod_{i=1}^{n}\left(1+\sqrt{x_i}\right)\leq\left(1+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i}\right)^n\leq\left(1+\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i}\right)^n=\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$$

Vì vậy, kết quả sau đây đúng.

Nếu $x_1,x_2,\ldots,x_n$ $(n\geq 3)$ là các số dương thỏa mãn $x_1+x_2+\ldots+x_n=1$ thì

$$\left(\frac{1}{\sqrt{x_1}}-1\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x_2}}-1\right)\ldots\left(\frac{1}{\sqrt{x_n}}-1\right)\geq\left(\sqrt{n}-1\right)^n$$

Bài 10. Giả sử x,y,z là các số thực không âm, không có 2 số nào cùng bằng 0.

Chứng minh rằng $$\sqrt{1+\frac{48x}{y+z}}+\sqrt{1+\frac{48y}{z+x}}+\sqrt{1+\frac{48z}{y+x}}\geq 15$$

Chứng minh

Do đây là bất đẳng thức thuần nhất, ta có thể giả sử rằng $x+y+z=1$. Với giả thiết này, bất đẳng thức trở thành $\sqrt{\frac{1+47x}{1-x}}+\sqrt{\frac{1+47y}{1-y}}+\sqrt{\frac{1+47z}{1-z}}\geq 15$. Để chứng minh, ta sẽ sử dụng Định lý RCF cho hàm $f(u)=\sqrt{\frac{1+47u}{1-u}}, 0\leq u<1$. Ta có $f''(u)=\frac{48(47u-11)}{\sqrt{(1-u)^5(1+47u)^3}}$, nên suy ra hàm số f lồi trên $\left[\frac{11}{47},1\right)$. Vì thế, f lồi trên $[s,1)$, trong đó $s=\frac{x+y+z}{3}=\frac{1}{3}$. Theo Định lý RCF, chỉ cần xét trường hợp $x\leq y=z$. Trong trường hợp này, bài toán quy về việc chứng minh từ $0\leq x\leq\frac{1}{3}$ dẫn tới $\sqrt{\frac{1+47z}{1-z}}+2\sqrt{\frac{49-47x}{1+x}}\geq 15$

Đặt $t=\sqrt{\frac{49-47x}{1+x}}$ $(5\leq t\leq 7)$, bất đẳng thức trở thành $\sqrt{\frac{1175-23t^2}{t^2-1}}\geq 15-2t$

Bình phương hai vế, ta có $350-15t-61t^2+15t^3-t^4\geq 0$ hay $(t-5)^2(t+2)(7-t)\geq 0$, điều này hiển nhiên đúng.

Đẳng thức xảy ra khi $(x,y,z)\sim(1,1,1)$ hoặc $(x,y,z)\sim(0,1,1)$ và các hoán vị vòng.

Bài 11. Cho $\begin{cases} a_1, a_2, ... a_n > 0 \\ a_1 + a_2 + ... + a_n = n \end{cases}$.

Chứng minh rằng $\dfrac{1}{a_1^2} + \dfrac{1}{a_2^2} + ... + \dfrac{1}{a_n^2} \geq a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2$

Chứng minh

Trường hợp 1: $n = 2$. Ta cần chứng minh $\dfrac{1}{a_1^2} + \dfrac{1}{a_2^2} \geq a_1^2 + a_2^2$ với $a_1, a_2 > 0$ thỏa mãn $a_1 + a_2 = 2$. Ta có: $\dfrac{1}{a_1^2} + \dfrac{1}{a_2^2} \geq a_1^2 + a_2^2 \Leftrightarrow 1 \geq a_1^2 a_2^2$ điều này hiển nhiên đúng. Đẳng thức xảy ra khi $a_1 = a_2 = 1$.

Trường hợp 2: $n \geq 3$

Ta có thể viết bất đẳng thức ở dạng $f(a_1) + f(a_2) + ... + f(a_n) \geq nf\left(\dfrac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}\right)$

trong đó $f(x) = \dfrac{1}{x^2} - x^2$. Đạo hàm cấp 2 $f''(x) = \dfrac{6}{x^4} - 2$ chứng tỏ f lồi trên $0 \leq x \leq \sqrt[4]{3}$,

và vì vậy f lồi trên $0 \leq x \leq 1 = \dfrac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}$.

Để áp dụng Định lý RCF và Chú ý 2, ta chỉ cần chứng minh $g(x) \leq g(y)$ với $0 \leq x \leq 1 \leq y \leq \dfrac{n}{n-1}$ và $x + (n-1)y = n$, trong đó $g(t) = \dfrac{f(t) - f(1)}{t - 1} = \dfrac{1 + t + t^2 + t^3}{t^2}$

Ta có:

$$g'(t) = \frac{2}{t^3} + \frac{1}{t^2} - 1 \geq 2\left(\frac{n-1}{n}\right)^3 + \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 - 1 \geq 2\left(\frac{2}{3}\right)^3 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 - 1 = \frac{1}{27} > 0, \forall 0 \leq t \leq \frac{n}{n-1}$$

Chứng tỏ g tăng với $0 \leq t \leq \dfrac{n}{n-1}$. Do đó $g(x) \leq g(y)$.

Điều này hoàn thành chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $a_1 = a_2 = ... = a_n = 1$.

Bài 12. Giả sử x, y, z là các số không âm, không có hai số nào cùng bằng 0, và nếu $r \geq r_0$, trong đó $r_0 = \dfrac{\ln 3}{\ln 2} - 1 \approx 0.585$, chứng minh rằng $\left(\dfrac{2x}{y+z}\right)^r + \left(\dfrac{2y}{z+x}\right)^r + \left(\dfrac{2z}{x+y}\right)^r \geq 3$

Chứng minh

Ta phân biệt ba trường hợp:

Nếu $r = 1$, bất đẳng thức quy về bất đẳng thức quen biết $\dfrac{x}{y+z} + \dfrac{y}{z+x} + \dfrac{z}{x+y} \geq \dfrac{3}{2}$

Nếu $r > 1$, bất đẳng thức thu được bằng cách áp dụng bất đẳng thức Jensen cho hàm lõm $f(u)=u^r$. $\left(\frac{2x}{y+z}\right)^r+\left(\frac{2y}{z+x}\right)^r+\left(\frac{2z}{x+y}\right)^r\ge 3\left(\frac{\frac{2x}{y+z}+\frac{2y}{z+x}+\frac{2z}{x+y}}{3}\right)^r\ge 3$

Nếu $r_0\le r<1$. Do bất đẳng thức này là thuần nhất, ta có thể giả sử rằng $x+y+z=1$ và viết lại nó ở dạng $f(x)+f(y)+f(z)\ge 3f\left(\frac{x+y+z}{3}\right)$ trong đó $f(u)=\left(\frac{2u}{1-u}\right)^r, 0\le u<1$.

Đạo hàm cấp 2 $f''(u)=\frac{4r}{(1-u)^4}\left(\frac{2u}{1-u}\right)^{r-2}(2u+r-1)$ chứng tỏ rằng f lồi trên $\left[\frac{1-r}{2},1\right)$.

Vì thế, f lồi trên $[s,1)$ trong đó $s=\frac{x+y+z}{3}=\frac{1}{3}>\frac{1-r}{2}$. Theo Định lý RCF, chỉ cần chứng minh trong trường hợp $x\le y=z$.

Để thuận tiện, ta trở lại bất đẳng thức ban đầu (bỏ đi điều kiện $x+y+z=1$) nhưng bây giờ chỉ xét trường hợp $y=z=1$ (và khi đó $0\le x\le 1$). Bài toán quy về việc chứng minh rằng giả thiết $0\le x\le 1$ dẫn tới $h(x)\ge 3$, trong đó $h(x)=x^r+2\left(\frac{2}{x+1}\right)^r$. Ta có

$h'(x)=rx^{r-1}-r\left(\frac{2}{x+1}\right)^{r+1}$ với $0<x\le 1$ có cùng dấu với hàm

$g(x)=(r-1)\ln x-(r+1)\ln\frac{2}{x+1}$.

Do $g'(x)=\frac{2rx+r-1}{x(x-1)}$, chứng tỏ $g'(x)=0$ với $x_0=\frac{1-r}{2r}<1$, $g'(x)>0$ với $x\in(0,x_0)$ và tăng nghiêm ngặt với $x\in[x_0,1]$.

Do $\lim_{x\to 0}g(x)=\infty$ và $g(1)=0$, tồn tại $x_1\in(0,x_0)$ thỏa mãn $g(x_1)=0$, $g(x)>0$ với $x\in(0,x_1)$ và $g(x)<0$ với $x\in(x_1,1)$; Vì vậy $h'(x_1)=0$, $h'(1)=0, h'(x)>0$ với $x\in(0,x_1)$ và $h'(x)<0$ với $x\in(x_1,1)$. Vì thế, hàm $h(x)$ tăng nghiêm ngặt với $x\in[0,x_1]$ và giảm nghiêm ngặt với $x\in[x_1,1]$. Do $h(0)=2^{r+1}\ge 2^{r_0+1}=3$ và $h(1)=3$, chứng tỏ rằng $h(x)\ge 3$ với $0\le x\le 1$.

Đẳng thức xảy ra khi $(x,y,z)\sim(1,1,1)$.

Ngoài ra khi $r=r_0$ đẳng thức còn xảy ra khi $(x,y,z)\sim(0,1,1)$ hoặc các hoán vị.

Bài 13. Giả sử x,y,z là các số thực không âm thỏa mãn $x+y+z=3$ và nếu $0<r\le r_0$, trong đó $r_0=\frac{\ln 2}{\ln 3-\ln 2}\approx 1.71$,

Chứng minh rằng $x^r(y+z)+y^r(z+x)+z^r(x+y)\le 6$

Chứng minh

Ta xét ba trường hợp:

• Nếu $r=1$ bất đẳng thức quy về bất đẳng thức quen biết $3(xy+yz+zx)\le(x+y+z)^2$

• Nếu $0<r\le 1$, bất đẳng thức thu được bằng cách áp dụng bất đẳng thức ***Jensen*** cho hàm lõm $f(u)=\sqrt{u}$ ta có:

$$(y+z)x^r+(z+x)y^r+(x+y)z^r\le 2(x+y+z)\left[\frac{(y+z)x+(z+x)y+(x+y)z}{2(x+y+z)}\right]^r$$

$$=6\left(\frac{xy+yz+zx}{3}\right)^r\le 6\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^{2r}=6$$

• Nếu $1<r\le r_0$. Ta có thể viết lại bất đẳng thức dưới dạng

$f(x)+f(y)+f(z)\ge 3f\left(\frac{x+y+z}{3}\right)$ trong đó $f(u)=u^r(u-3), 0\le u\le 3$.

Do $f''(u)=ru^{r-2}\left[(r+1)u-3(r-1)\right]$, chứng tỏ f lồi trên $\left[\frac{3r-3}{r+1},3\right]$.

Do $s=\frac{x+y+z}{3}=1>\frac{3r-3}{r+1}$, f cũng lồi trên $[s,3]$. Theo định lý RCF, chỉ cần chứng minh $x\le y=z$ là đủ. Để thuận tiện, ta viết bất đẳng thức dưới dạng thuần nhất

$$6\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^{r+1}\ge x^r(y+z)+y^r(x+z)+z^r(x+y)$$

Có thể bỏ đi điều kiện $x+y+z=3$ và chỉ cần xét trường hợp $y=z=1$ (và khi đó $0\le x\le 1$).

Bất đẳng thức quy về $g(x)\ge 0$, trong đó $g(x)=3\left(\frac{x+2}{3}\right)^{r+1}-x^r-x-1$

Ta có $g'(x)=(r+1)\left(\frac{x+2}{3}\right)^r-rx^{r-1}-1$; $\frac{1}{r}g''(x)=\frac{r+1}{3}\left(\frac{x+2}{3}\right)^{r-1}-\frac{r-1}{x^{2-r}}$,

Do g'' tăng nghiêm ngặt trên $(0,1]$, $g''(0)=-\infty$ và $\frac{1}{r}g''(1)=\frac{2(2-r)}{3}>0$ nên tồn tại $x_2\in(0,1)$ thỏa mãn $g''(x_1)=0, g''(x)<0$ với $x\in(0,x_1)$ và $g''(x)>0$ với $x\in(x_1,1]$. Vì thế hàm $g'(x)$ giảm ngiêm ngặt với $x\in[0,x_1]$ và tăng nghiêm ngặt với $x\in[x_1,1]$.

Từ $g'(0)=(r+1)\left(\frac{2}{3}\right)^r-1\ge(r+1)\left(\frac{2}{3}\right)^{r_0}-1=\frac{r+1}{2}-1=\frac{r-1}{2}>0$ và $g'(1)=0$, tồn tại $x_2\in(0,x_1)$ thỏa mãn $g'(x_2)=0, g'(x)>0$ với $x\in[0,x_2)$ và $g'(x)<0$ với $x\in(x_2,1)$. Vì vậy, hàm $g(x)$ tăng thực sự với $x\in(0,x_2]$, và giảm thực sự với $x\in(x_2,1)$.

Do $g(0)=3\left(\frac{2}{3}\right)^{r+1}-1=2\left(\frac{2}{3}\right)^r-1\ge 2\left(\frac{2}{3}\right)^{r_0}-1=0$ và $g(1)=0$, chứng tỏ $g(x)\ge 0$ với $0\le x\le 1$. Đẳng thức xảy ra khi $(x,y,z)=(1,1,1)$.

Ngoài ra khi $r=r_0$, đẳng thức còn xảy ra khi $(x,y,z)=\left(0,\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$ hoặc các hoán vị vòng.

Bài 14. Cho $x_1, x_2, \ldots, x_n < 1$ là các số thực không âm thỏa mãn $\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = r \geq \frac{1}{3}$

Chứng minh rằng $\frac{\sqrt{x_1}}{1-x_1} + \frac{\sqrt{x_2}}{1-x_2} + \ldots + \frac{\sqrt{x_n}}{1-x_n} \geq \frac{x\sqrt{r}}{1-r}$

Chứng minh

Sử dụng định lý RCF cho hàm $f(u) = \frac{\sqrt{u}}{1-u}, 0 \leq u < 1$. Do $f''(u) = \frac{3u^2 + 6u - 1}{4u\sqrt{u}(1-u)^3}$, chứng tỏ f lồi trên $\left[\frac{2}{\sqrt{3}} - 1, 1\right)$. Từ $s = \frac{1}{3} > \frac{2}{\sqrt{3}} - 1$, hàm f lồi trên $[s, 1)$.

Theo Định lý RCF và Chú ý 2, chỉ cần chứng minh rằng $g(x) \leq g(y)$ với $0 \leq x \leq s \leq y < 1$ và $x + (n-1)y = ns$, trong đó $g(t) = \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$.

Để thuận tiện, đặt $a = \sqrt{x}, b = \sqrt{y}$ và $c = \sqrt{s}$

$$g(t^2) = \frac{f(t^2) - f(c^2)}{t^2 - c^2} = \frac{1 + ct}{(1-c^2)(1-t^2)(t+c)}$$ và

$$g(x) - g(y) = g(a^2) - g(b^2) = (a^2 - b^2)\frac{a^2 + b^2 + c(a+b) + c^2 - 1 + ab(1+c^2) + abc(a+b)}{(1-c^2)(1-a^2)(1-b^2)(a+c)(b+c)}$$

Từ $a^2 + b^2 + c(a+b) + c^2 - 1 + ab(1+c^2) + abc(a+b) \geq a^2 + b^2 + c(a+b) + c^2 - 1 \geq a^2 + b^2 + c\sqrt{a^2+b^2} + c^2 - 1$

Chỉ cần chứng minh $x + y\sqrt{s(x_y)} + s - 1 \geq 0$ là đủ.

Thật vậy, ta có $x + y = \frac{ns + (n-2)x}{n-1} \geq \frac{ns}{n-1}$, và vì thế,

$$x + y + \sqrt{s(x+y)} + s - 1 \geq \left(\frac{n}{n-1} + \sqrt{\frac{n}{n-1}} + 1\right)s - 1 > 3s - 1 = 0$$

Đẳng thức xảy ra chỉ khi $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = r$

Chú ý. Bất đẳng thức vẫn đúng với điều kiện lỏng hơn

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = r \geq \frac{1}{\frac{n}{n-1} + \sqrt{\frac{n}{n-1}} + 1}.$$

Khi $r = \frac{1}{\frac{n}{n-1} + \sqrt{\frac{n}{n-1}} + 1}$, đẳng thức còn xảy ra khi một số $x_k = 0$ và các số còn lại bằng $\frac{nr}{n-1}$

Bài 15. Cho $\begin{cases} a, b, c \geq 0 \\ a + b + c = 3 \end{cases}$. Chứng minh rằng: $(1 - a + a^2)(1 - b + b^2)(1 - c + c^2) \geq 1$

Chứng minh

Ta có thể viết lại bất đẳng thức dưới dạng $f(a) + f(b) + f(c) \leq 3f\left(\frac{a+b+c}{3}\right)$

trong đó $f(u)=-\ln(1-u+u^2), 0\le u\le 3$.

Ta có $f'(u)=\dfrac{1-2u}{1-u+u^2}, f''(u)=\dfrac{2u^2-2u-1}{(1-u+u^2)^2}$

Do f lõm trên $\left[0,\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right]$ và $s=\dfrac{a+b+c}{3}=1$, f cũng lõm trên $[0,s]$.

Vì thế, để áp dụng định lý LCF và chú ý 8, chỉ cần chứng minh $f'(x)\ge f'(y)$ với $0\le x\le 1\le y$ và $2x+y=3$ là đủ. Thật vậy, ta có

$$f'(x)-f'(y)=\frac{(y-x)(1+x+y-2xy)}{(1-x+x^2)(1-y-y^2)}=\frac{(y-x)(4x^2-7x+4)}{(1-x-x^2)(1-y-y^2)}\ge$$

$$\ge\frac{(y-x)(4x^2-8x+4)}{(1-x-x^2)(1-y-y^2)}=\frac{4(y-x)(x-1)^2}{(1-x-x^2)(1-y-y^2)}\ge 0$$

Điều này hoàn thành chứng minh. Đẳng thức xảy ra chỉ khi $a=b=c=1$

Nhận xét 1. *Marian Tetiva đã tìm ra cho bất đẳng thức này một lời giải sơ cấp rất đẹp. Chú ý rằng trong các số a,b,c* luôn tồn tại hai số (chẳng hạn là b và c) cùng nhỏ hơn 1 hoặc cùng lớn hơn hoặc bằng 1, nghĩa là $(b-1)(c-1)\ge 0$. Vì vậy,

$$(1-b+b^2)(1-c+c^2)\ge(b^2-b)(c^2-c)+b^2+c^2-b-c+1\ge$$

$$\ge b^2+c^2-b-c+1\ge\frac{1}{2}(b+c)^2-(b+c)+1=\frac{a^2-4a+5}{2}$$

và do đó $(1-a+a^2)(1-b+b^2)(1-c+c^2)\ge\dfrac{(a^2-a+1)(a^2-4a+5)}{2}-1=\dfrac{(a-1)^2(a^2-3a+3)}{2}\ge 0$

Nhận xét 2. Thật ra, mệnh đề tổng quát dưới đây cũng đúng:

Cho $x_1,x_2,\dots,x_n$ là các số không âm thỏa mãn $\dfrac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n}=r\ge 1$

Nếu $n\le 13$ thì $(1-x_1+x_1^2)(1-x_2+x_2^2)\dots(1-x_n+x_n^2)\ge(1-r+r^2)^n$

Ta có thể chứng minh mệnh đề này với $n\le 10$ theo cùng cách đã chứng minh khi $n=3$. Ta chỉ phải chứng minh rằng $1+x+y-2xy\ge 0$ với $0\le x\le 1\le y$ và $(n-1)x+y=n$. Thật vậy, với $0\le x\le\frac{1}{2}$ ta có $1+x+y-2xy=1+x+y(1-2x)>0$ và với $\frac{1}{2}<x\le 1$ ta có

$$1+x+y-2xy=1+2x-2x^2-n(2x-1)(1-x)$$

$$\ge 1+2x-2x^2-10(2x-1)(1-x)=18x^2-28x+11=2\left(3x-\frac{7}{3}\right)^2+\frac{1}{9}>0$$

Nhận xét 3. *Bin Zhao* đã post trên Mathlink Site dự đoán dưới đây vào tháng 11 năm 2005
Nếu a,b,c là các số không âm thỏa mãn $a+b+c=3$ thì
$(1-a+a^p)(1-b+b^p)(1-c+c^p)\ge 1$ *với mọi $p>1$*

Bài 16. Giả sử $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là các số không âm thỏa mãn $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = n$.

Chứng minh rằng: $\dfrac{1}{n - x_1 + x_1^2} + \dfrac{1}{n - x_2 + x_2^2} + \ldots + \dfrac{1}{n - x_n + x_n^2} \le 1$

Chứng minh

Ta có thể viết lại bất đẳng thức dưới dạng:

$f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n) \le nf\left(\dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right)$ trong đó $f(u) = \dfrac{1}{n - u + u^2}, u > 0$.

Ta có $f'(u) = \dfrac{1 - 2u}{(n - u + u^2)^2}$ và $f''(u) = \dfrac{6u(u-1) + 2(1-n)}{(n - u + u^2)^3}$

Từ $f''(u) < 0$ với $0 \le u \le 1$, chứng tỏ hàm $f(u)$ lõm trên $[0, s]$, trong đó

$s = \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = 1$. Để áp dụng Định lý LCF và Chú ý 7, chỉ cần chứng minh

$g(x) \ge g(y)$ với $0 < x \le 1 \le y$ và $(n-1)x + y = n$ là đú, ở đây $g(t) = \dfrac{f(t) - f(1)}{t - 1}$

Thật vậy, ta có $g(t) = \dfrac{-t}{n(n - t + t^2)}$ và $g(x) - g(y) = \dfrac{(y - x)(n - xy)}{n(n - x + x^2)(n - y + y^2)} \ge 0$

Bởi vì $n - xy \ge n - y = (n-1)x \ge 0$. Điều này hoàn thành chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 1$

Dự đoán. *Nếu* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là các số không âm *thỏa mãn* $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = n$ *thì với mọi* $p > 1$ *bất đẳng thức sau đúng* $\dfrac{1}{n - x_1 + x_1^p} + \dfrac{1}{n - x_2 + x_2^p} + \ldots + \dfrac{1}{n - x_n + x_n^p} \le 1$

Bài 17. Giả sử a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc = 1$.

Chứng minh rằng $1 + a + b + c \ge 2\sqrt{1 + \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}}$.

Chứng minh

Bình phương hai vế, bất đẳng thức trở thành

$a^2 + b^2 + c^2 + 2(a + b + c) \ge 2\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}\right) + 3$

hay $f(a) + f(b) + f(c) \ge 3f\left(\sqrt[3]{abc}\right)$ trong đó $f(t) = t^2 + 2t - \dfrac{2}{t}, t > 0$.

Để chứng minh bất đẳng thức này, ta sẽ sử dụng hệ quả RCF với $r = 1$.

Đặt $f_1(u) = f(e^u) = e^{2u} + 2e^u - 2e^{-u}$. Đạo hàm cấp 2 $f_1''(u) = 2e^{-u}(2e^{3u} + e^{2u} - 1)$, chứng tỏ $f_1(u)$ lồi trên $u \ge \ln r = 0$. Để áp dụng hệ quả RCF, ta cần chứng minh $f(x) + 2f(y) \ge 3f(1)$ với $0 < x \le 1 \le y$ và $xy^2 = 1$. Bất đẳng thức này tương đương với một trong các dạng sau:

$x^2+2x-\frac{2}{x}+2y^2+4y-\frac{4}{y}\ge 3;\ 4y^5-3y^4-4y^3+2y^2+1\ge 0;\ (y-1)^2(y+1)(4y^2+y+1)\ge 0$

Bất đẳng thức cuối cùng hiển nhiên đúng. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$

Chú ý. *Marian Tetiva* đã lưu ý rằng

$$a^2+b^2+c^2+2(a+b+c)-2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)-3=a^2+b^2+c^2+2(a+b+c)-2(ab+bc+ca)-3$$
$$=(b-c)^2+(a-1)^2+2(1-a)(b+c-2)\ge 0$$

Bởi vì có thể giả sử rằng $a\le b\le c$ dẫn tới $1-a\ge 0$ và

$$b+c-2\ge 2\sqrt{bc}-2=2\left(\frac{1}{\sqrt{a}}-1\right)\ge 0$$

Bài 18. Giả sử a,b,c,d là các số thực dương thỏa mãn $abcd=1$.

Chứng minh rằng $(a-1)(a-2)+(b-1)(b-2)+(c-1)(c-2)+(d-1)(d-2)\ge 0$

Chứng minh

Viết bất đẳng thức dưới dạng $f(a)+f(b)+f(c)+f(d)\ge 4f\left(\sqrt[4]{abcd}\right)$, trong đó $f(t)=(t-1)(t-2), t>0$ và áp dụng Hệ quả RCF với $r=1$.

Đặt $f_1(u)=f(e^u)=(e^u-1)(e^u-2)$.

Đạo hàm cấp 2 $f''(u)=e^u(4e^u-3)$, chứng tỏ $f_1(u)$ lồi với $u\ge \ln r=0$. Để áp dụng Hệ quả RCF, ta cần chứng minh $f(x)+3f(y)\ge 4f(1)$ với $x\le 1\le y$ và $xy^3=1$. Bất đẳng thức này tương đương với $\left(\frac{1}{y^3}-1\right)\left(\frac{1}{y^3}-2\right)+3(y-1)(y-2)\ge 0$.

Hay $(y-1)^2\left[y^3(y-1)(3y^2-1)+3y^2+2y+1\right]\ge 0$, điều này hiển nhiên đúng.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=d=1$

Bài 19. Giả sử $a_1,a_2,\dots,a_n$ $(n\ge 4)$ là các số thực dương thỏa mãn $a_1a_2\dots a_n=1$.

Chứng minh rằng: $(n-1)\left(a_1^2+a_2^2+\dots+a_n^2\right)+n(n+3)\ge (2n+2)(a_1+a_2+\dots+a_n)$

Chứng minh

Viết bất đẳng thức này dưới dạng $f(a_1)+f(a_2)+\dots+f(a_n)\ge nf\left(\sqrt[n]{a_1a_2\dots a_n}\right)$

trong đó $f(t)=(n-1)t^2-(2n+2)t+n+3, t>0$ và áp dụng Hệ quả RCF với $r=1$.

Đặt $f_1(u)=f(e^u)=(n-1)e^{2u}-(2n+2)e^u+n+3$. Đạo hàm cấp 2

$f_1''(u)=2e^u\left[(2n-2)e^u-n-1\right]$, chứng tỏ $f_1(u)$ lồi trên $u\ge \ln r=0$.

Áp dụng hệ quả RCF và chú ý 5, chỉ cần chứng minh rằng $xf'(x)\le yf'(y)$ với $x\le 1\le y$ và $xy^{n-1}=1$.

Do $xf'(x)-yf'(y)=2(n-1)x^2-(2n+2)x-2(n-1)y^2+(2n+2)y$

$=2(x-y)\left[(n-1)(x+y)-n-1\right]$, ta cần chứng minh $x+y\geq\dfrac{n+1}{n-1}$.

Sử dụng bất đẳng thức ***AM – GM***, ta có

$$x+y=x+\frac{y}{n-1}+\ldots+\frac{y}{n-1}\geq n\cdot\sqrt[n]{\frac{xy^{n-1}}{(n-1)^{n-1}}}=\frac{n\cdot\sqrt[n]{n-1}}{n-1}$$

Tiếp theo, chỉ cần chứng minh rằng $n\cdot\sqrt[n]{n-1}\geq n+1$. Bất đăng thức này is tương đương với $n-1\geq\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$. Điều này đúng vì với $n\geq 4$ ta có $n-1\geq 3>\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$

Đẳng thức xảy ra khi $a_1=a_2=\ldots=a_n=1$

Nhận xét. Với cùng cách thức này, ta có thể chứng minh mệnh đề sau đây

Nếu $a_1,a_2,\ldots,a_n$ *là các số dương thỏa mãn* $a_1a_2\ldots a_n=1$ *thì*

$$a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2-n\geq\frac{2n\cdot\sqrt[n]{n-1}}{n-1}(a_1+a_2+\ldots+a_n-n)$$

(Gabriel Dospinescu và Calin Popa)

Bài 20. Giả sử $a_1,a_2,\ldots,a_n$ là các số thực dương thỏa mãn $a_1a_2\ldots a_n=1$.

Chứng minh rằng $a_1^{n-1}+a_2^{n-1}+\ldots+a_n^{n-1}+n(n-2)\geq(n-1)\left(\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\ldots+\dfrac{1}{a_n}\right)$

Chứng minh

Ta viết bất đẳng thức này dưới dạng $f(a_1)+f(a_2)+\ldots+f(a_n)\geq nf\left(\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}\right)$

trong đó $f(t)=t^{n-1}-\dfrac{n-1}{t}, t>0$. Đặt $f_1(u)=f(e^u)=e^{(n-1)u}-(n-1)e^{-u}$

Đạo hàm cấp 2 $f''(u)=(n-1)^2e^{(n-1)u}-(n-1)e^{-u}=(n-1)e^{-u}\left[(n-1)e^{nu}-1\right]$, chứng tỏ $f_1(u)$ lồi với $u\geq\ln r=0$, trong đó $r=1$. Theo hệ quả RCF và chú ý 5, chỉ cần chứng minh rằng $xf'(x)\leq yf'(y)$ với $0<x\leq 1\leq y$ và $xy^{n-1}=1$.

Ta có: $tf'(t)=(n-1)t^{n-1}+\dfrac{n-1}{t}$ và

$$yf'(y)-xf'(x)=(n-1)y^{n-1}+\frac{n-1}{y}-(n-1)x^{n-1}-\frac{n-1}{x}=$$

$$=\frac{n-1}{y}-(n-1)x^{n-1}=\frac{(n-1)\left(y^{n^2-2n}-1\right)}{y^{(n-1)^3}}\geq 0$$

Đẳng thức xảy ra khi $a_1=a_2=\ldots=a_n=1$.

Bài 21. Giả sử $a_1, a_2, \ldots, a_n$ là các số thực dương thỏa mãn $a_1 a_2 \ldots a_n = 1$ và $m \ge n$.

Chứng minh rằng $a_1^m + a_2^m + \ldots + a_n^m + mn \ge (m+1)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right)$

Chứng minh

Ta viết bất đẳng thức này dưới dạng $f(a_1) + f(a_2) + \ldots + f(a_n) \ge nf\left(\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}\right)$

trong đó $f(t) = t^m - \frac{m+1}{t}, t > 0$. Đặt $f_1(u) = f(e^u) = e^{mu} - (m+1)e^{-u}$

Đạo hàm cấp 2 $f_1''(u) = m^2 e^{mu} - (m+1)e^{-u} = e^{-u}\left[m^2 e^{(m+1)u} - m - 1\right]$, chứng tỏ $f_1(u)$ lồi với $u \ge \ln r = 0$, trong đó $r = 1$, bởi vì $m^2 e^{(m+1)u} - m - 1 \ge m^2 - m - 1 > 0$

Để áp dụng hệ quả ***LCF***, chỉ cần chứng minh rằng bất đẳng thức đã cho là đúng với $a_2 = a_3 = \ldots = a_n \ge 1$; nghĩa là chứng minh rằng

$x^m + (n-1)y^m + mn - \frac{m+1}{x} - \frac{(m+1)(n-1)}{y} \ge 0$ với $0 < x \le 1 \le y$ và $xy^{n-1} = 1$.

Sử dụng bất đẳng thức ***AM – GM***, ta có $x^m + (mn - m - 1) \ge m(n-1)\sqrt[n-1]{x} = \frac{m(n+1)}{y}$

Do đó ta cần chứng minh $(n-1)\left(y^m - \frac{1}{y}\right) - (m+1)\left(\frac{1}{x} - 1\right) \ge 0$

Bất đẳng thức này $\Leftrightarrow h(y) \ge 0 \quad y \ge 1$, trong đó $h(y) = (n-1)\left(y^{m+n} - 1\right) - (m+1)\left(y^n - y\right)$

Do $\frac{h'(y)}{m+1} = (n-1)y^m - ny^{n-1} + 1 \ge (n-1)y^n - ny^{n-1} + 1 =$

$ny^{n-1}(y-1) - \left(y^n - 1\right) = (y-1)\left[\left(y^{n-1} - y^{n-2}\right) + \left(y^{n-1} - y^{n-3}\right) + \ldots + \left(y^{n-1} - 1\right)\right] \ge 0$

Hàm $h(y)$ tăng. Vì vậy $h(y) \ge h(1) = 0$. Đẳng thức xảy ra khi $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 1$

Bài 22. Giả sử $a_1, a_2, \ldots, a_n \ (n \ge 3)$ là các số thực dương thỏa mãn

$\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} = p \ge \sqrt{n} - 1$.

Chứng minh rằng $\frac{1}{(1+a_1)^2} + \frac{1}{(1+a_2)^2} + \ldots + \frac{1}{(1+a_n)^2} \ge \frac{n}{(1+p)^2}$ (7)

Chứng minh

Áp dụng Hệ quả RCF cho hàm $f(t) = \frac{1}{(1+t)^2}, t > 0$. Trước hết ta phải chứng minh hàm

$f_1(u) = f(e^u) = \frac{1}{(1+e^u)^2}$ lồi với $u \ge \ln r$, trong đó $r = \sqrt{n} - 1$.

Thật vậy, đạo hàm cấp 2 cho bởi $f_1''(u) = \frac{2e^u\left(2e^u - 1\right)}{(1+e^u)^4}$ và với $u > \ln r$, ta có

$2e^u - 1 \ge 2r - 1 = 2\sqrt{n} - 3 > 0$

Tiếp theo, ta chứng minh rằng (7) đúng với $a_2 = a_3 = \ldots = a_n \geq r$ và $a_1 a_2 \ldots a_n = r^n$;

Nghĩa là chứng minh $h(x) \geq h(r)$ với $x \geq r$, trong đó $h(x) = \dfrac{x^{2n-2}}{(x^{n-1}+r^n)^2} + \dfrac{n-1}{(1+x)^2}$

Đạo hàm $h'(x) = \dfrac{2(n-1)r^n x^{2n-3}}{(x^{n-1}+r^n)^3} - \dfrac{2(n-1)}{(x+1)^3}$ có cùng dấu với hàm

$h_1(x) = r^{\frac{n}{3}} x^{\frac{2n}{3}-1}(x+1) - x^{n-1} - r^n$. Đặt $m = \dfrac{n}{3}, m \geq 1$. Ta nhận thấy

$h_1(x) = r^m\left(x^{2m} + x^{2m-1}\right) - x^{3m-1} - r^{3m} = \left(x^m - r^m\right)\left(r^m x^m + r^{2m} - x^{2m-1}\right) = x^m\left(x^m - r^m\right)h_2(x)$,

trong đó $h_2(x) = r^m + \dfrac{r^{2m}}{x^m} - x^{m-1}$

Do $h_2(x)$ là hàm giảm nghiêm ngặt với $x \geq r$, $h_2(x) = r^{m-1}(2r-1) = r^{m-1}\left(2\sqrt{n}-3\right)$

Và $h_2(+\infty) < 0$ $\left(h_2(+\infty) = r - 1 = \sqrt{3} - 2\right.$ với $m = 1$, và $h_2(\infty) = -\infty$ với $m > 1$), tồn tại $x_1 > r$ thỏa mãn $h_2(x_1) = 0, h_2(x) > 0$ với $r \leq x < x_1$, và $h_2(x) < 0$ với $x > x_1$.

Từ việc hai hàm $h_1(x)$ và $h'(x)$ có cùng dấu như $h_2(x)$ với $x > r$, ta có thể nói rằng hàm liên tục $h(x)$ tăng nghiêm ngặt với $r \leq x \leq x_1$, và giảm nghiêm ngặt với $x \geq x_1$; bởi vậy, $h(x) \geq \min\{h(r), h(+\infty)\}$. Do $h(r) = h(+\infty) = 1$, ta nhận được $h(x) \geq h(r)$ với $x \geq r$, và chứng minh hoàn tất.

Đẳng thức xảy ra khi $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = p$.

Nhận xét. Ta có thể viết lại bất đẳng thức (7) dưới dạng:

Cho $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $(n \geq 3)$ là các số dương thỏa mãn $a_1 a_2 \ldots a_n = 1$ và với $p \geq \sqrt{n} - 1$ thì

$$\frac{1}{(1+pa_1)^2} + \frac{1}{(1+pa_2)^2} + \ldots + \frac{1}{(1+pa_n)^2} \geq \frac{n}{(1+p)^2}$$

Với $n = 4$ và $p = 1$, ta nhận được kết quả quen thuộc

Nếu a, b, c, d là các số dương thỏa mãn $abcd = 1$ thì

$$\frac{1}{(1+a)^2} + \frac{1}{(1+b)^2} + \frac{1}{(1+c)^2} + \frac{1}{(1+d)^2} \geq 1$$

(Vasile Cirtoaje, GM-B, 11, 1989)

Bài 23. Giả sử $a_1, a_2, \ldots, a_n$ là các số dương thỏa mãn $\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} = p \geq n^2 - 1$.

Chứng minh rằng: $\dfrac{1}{\sqrt{1+a_1}} + \dfrac{1}{\sqrt{1+a_2}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{1+a_n}} \geq \dfrac{n}{\sqrt{1+p}}$ (8)

Chứng minh

Ta sẽ áp dụng Hệ quả RCF cho hàm $f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1+t}}, t > 0$

Trước hết ta phải chứng minh rằng hàm $f_1(u)=f(e^u)=\dfrac{1}{\sqrt{1+e^u}}$ lồi với $u\ge\ln r$, trong đó $r=n^2-1$. Thật vậy, đạo hàm cấp 2 cho bởi $f_1''(u)=\dfrac{e^u(e^u-2)}{4(1+e^u)^{\frac{5}{2}}}$ và với $u\ge\ln r$, ta có

$e^u-2\le r-2=n^2-3>0$

Bây giờ ta chứng minh rằng (8) đúng với $a_2=a_3\ldots=a_n\ge r$ và $a_1a_2\ldots a_n=r^n$,

nghĩa là chứng minh rằng $h(x)\ge h(r)$ với $x\ge r$ trong đó $h(x)=\sqrt{\dfrac{x^{n+1}}{x^{n-1}+r^n}}+\dfrac{n-1}{\sqrt{1+x}}$

Đạo hàm $h'(x)=\dfrac{(n-1)r^nx^{\frac{n-3}{2}}}{2(x^{n-1}+r^n)^{\frac{3}{2}}}-\dfrac{(n-1)}{2(x+1)^{\frac{3}{2}}}$ có cùng dấu với hàm

$h_1(x)=r^{\frac{2n}{3}}x^{\frac{n}{3}-1}(x+1)-x^{n-1}-r^n$. Đặt $m=\dfrac{n}{3},m\ge\dfrac{2}{3}$. Ta nhận thấy

$h_1(x)=r^{2m}(x^m+x^{m-1})-x^{3m-1}-r^{3m}=r^{2m}(x^m-r^m)+x^{m-1}(r^{2m}-x^{2m})=(x^m-r^m)h_2(x)$t rong đó $h_2(x)=r^{2m}-r^mx^{m-1}-x^{2m-1}$. Do $h_2(x)$ tăng nghiêm ngặt với $x\ge r$ trong đó $h_2(r)=r^{2m-1}(r-2)=r^{2m-1}(n^2-3)>0$ và $h_2(+\infty)<0$. Như thế tồn tại $x_1>r$ thỏa mãn $h_2(x_1)=0, h_2(x)>0$ với $r\le x<x_1$, và $h_2(x)<0$ với $x>x_1$. Từ việc $h_1(x)$ và $h'(x)$ có cùng dấu như $h_2(x)$ với $x>r$, hàm $h(x)$ tăng nghiêm ngặt với $r\le x\le x_1$, và giảm nghiêm ngặt với $x\ge x_1$; bởi vậy, $h(x)\ge\min\{h(r),h(+\infty)\}$. Từ $h(r)=h(+\infty)=1$, ta thu được $h(x)\ge h(r)$ với $x\ge r$, và chứng minh hoàn tất. Đẳng thức xảy ra khi $a_1=a_2=\ldots=a_n=p$.

Nhận xét. Các bất đẳng thức (7) và (8) là trường hợp đặc biệt của mệnh đề tổng quát sau:

Cho số nguyên $n\ge 2$, và $k\le n-1$ là số dương.

Giả sử $a_1,a_2,\ldots,a_n$ là các số dương thỏa mãn $\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}=p\ge n^{\frac{1}{k}}-1$.

Chứng minh rằng $\dfrac{1}{(1+a_1)^k}+\dfrac{1}{(1+a_2)^k}+\ldots+\dfrac{1}{(1+a_n)^k}\ge\dfrac{n}{(1+p)^k}$

(Vasile Critoaje, GM-A,2, 2005)

Ta có thể viết lại mệnh đề này dưới dạng sau đây:

Cho số nguyên $n\ge 2$, $0<k\le n-1$ và $p\ge n^{\frac{1}{k}}-1$. Nếu $a_1,a_2,\ldots,a_n$ là các số dương thỏa mãn $a_1a_2\ldots a_n=1$ thì $\dfrac{1}{(1+pa_1)^k}+\dfrac{1}{(1+pa_2)^k}+\ldots+\dfrac{1}{(1+pa_n)^k}\ge\dfrac{n}{(1+p)^k}$

Một hệ quả thú vị được chỉ ra dưới đây:

Cho số nguyên $n\ge 2$, $0<k\le n-1$ *và* $p=n^{\frac{1}{k}}-1$. *Nếu* $a_1,a_2,\ldots,a_n$ *là các số dương thỏa mãn* $a_1a_2\ldots a_n=1$ *thì* $\frac{1}{(1+pa_1)^k}+\frac{1}{(1+pa_2)^k}+\ldots+\frac{1}{(1+pa_n)^k}\ge 1$

Bài 24. Giả sử $a_1,a_2,\ldots,a_n$ là các số thực dương thỏa mặn $\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}=p\le\sqrt{\frac{n}{n-1}}-1$.

Chứng minh rằng: $\frac{1}{(1+a_1)^2}+\frac{1}{(1+a_2)^2}+\ldots+\frac{1}{(1+a_n)^2}\le\frac{n}{(1+p)^2}$ (9)

Chứng minh

Ta sẽ áp dụng Hệ quả LCF cho hàm $g(t)=\frac{1}{(1+t)^2},\ t>0$.

Trước hết ta chứng minh rằng hàm $f(u)=g(e^u)=\frac{1}{(1+e^u)^2}$ lõm với $u\le\ln r$, trong đó $r=\sqrt{\frac{n}{n-1}}-1$. Thật vậy, ta có $f''(u)=\frac{2e^u(2e^u-1)}{(1+e^u)^4}$. Và với $u\le\ln r$,

$2e^u-1\le 2r-1=2\sqrt{\frac{n}{n-1}}-3\le 2\sqrt{2}-3<0$.

Bây giờ ta cần chứng minh rằng (9) đúng với $a_1=a_2=\ldots=a_{n-1}\le r$ và $a_1a_2\ldots a_n=r^n$, nghĩa là chứng minh rằng $h(x)\le h(r)$ với $0<x\le r$ trong đó $h(x)=\frac{n-1}{(1+x)^2}+\frac{x^{2n-2}}{(x^{n-1}+r^n)^2}$

Đạo hàm $h'(x)=\frac{2(n-1)r^nx^{2n-3}}{(x^{n-1}+r^n)^3}-\frac{2(n-1)}{(x+1)^3}$ có cùng dấu với hàm

$h_1(x)=r^{\frac{n}{3}}x^{\frac{2n}{3}-1}(x+1)-x^{n-1}-r^n$. Đặt $m=\frac{n}{3},m\ge\frac{2}{3}$. Ta có

$h_1(x)=(r^m-x^m)(x^{2m-1}-r^mx^m-r^{2m})=x^m(r^m-x^m)h_2(x)$ trong đó

$h_2(x)=x^{m-1}-r^m-\frac{r^{2m}}{x^m}$

Chú ý rằng $\lim\limits_{x\to 0}h_2(x)=-\infty$; $h_2(x)=r^{m-1}(1-2r)=r^{m-1}\left(3-2\sqrt{\frac{n}{n-1}}\right)>0$

Trong trường hợp $n\ge 3(m\ge 1)$, hàm $h_2(x)$ hiển nhiên tăng nghiêm ngặt với $0<x\le r$. Có thể dễ dàng kiểm tra tính chất này là đúng với $n=2\left(m=\frac{2}{3}\right)$. Vì vậy có $x_1\in(0,r)$ thỏa mãn $h_2(x_1)=0, h_2(x)<0$ với $0<x<x_1$, và $h_2(x)>0$ với $x_1<x<r$. Từ việc $h_1(x)$ và $h'(x)$ có cùng dấu như $h_2(x)$ với $0<x<r$, hàm liên tục $h(x)$ giảm nghiêm ngặt với $0\le x\le x_1$, và tăng nghiêm ngặt với $x_1\le x\le r$; bởi vậy, $h(x)\le\max\{h(0),h(r)\}$. Từ

$h(0)=h(r)=n-1$, ta thu được $h(x)\le h(r)$ với $0\le x\le r$, và chứng minh hoàn tất Đẳng thức xảy ra khi $a_1=a_2=\ldots=a_n=p$

Chú ý. Ta có thể viết lại bất đẳng thức (9) dưới dạng

Giả sử $a_1,a_2,\ldots,a_n$ *là các số dương thỏa mãn* $a_1a_2\ldots a_n=1$, $p\le\sqrt{\frac{n}{n-1}}-1$.

Chứng minh rằng $\dfrac{1}{(1+pa_1)^2}+\dfrac{1}{(1+pa_2)^2}+\ldots+\dfrac{1}{(1+pa_n)^2}\ge\dfrac{n}{(1+p)^2}$

Bài 25. Giả sử $a_1,a_2,\ldots,a_n$ $(n\ge3)$ là các số thực dương thỏa mãn

$\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}=p\le\dfrac{2n-1}{(n-1)^2}$. Chứng minh rằng $\dfrac{1}{\sqrt{1+a_1}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+a_2}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{1+a_n}}\ge\dfrac{n}{\sqrt{1+p}}$ (10)

Chứng minh

Ta sẽ áp dụng Hệ quả RCF cho hàm $f(t)=\dfrac{1}{\sqrt{1+t}}, t>0$. Trước hết ta chứng minh rằng hàm $f_1(u)=f(e^u)=\dfrac{1}{\sqrt{1+e^u}}$ lõm với $u\le\ln r$, trong đó $r=\dfrac{2n-1}{(n-1)^2}$.

Thật vậy, đạo hàm cấp 2 cho bởi $f_1''(u)=\dfrac{e^u(e^u-2)}{4(1+e^u)^{\frac{5}{2}}}$

và với $u\le\ln r$, ta có $e^u-2\le r-2=\dfrac{-2n^2+6n-3}{(n-1)^2}=\dfrac{2n(3-n)}{(n-1)^2}\le0$

Ta cần chứng minh rằng (10) đúng với $a_1=a_2=\ldots=a_{n-1}\le r$ và $a_1a_2\ldots a_n=r^n$;

nghĩa là chứng minh rằng $h(x)\le h(r)$ với $0<x\le r$, trong đó $h(x)=\dfrac{n-1}{\sqrt{1+x}}+\sqrt{\dfrac{x^{n-1}}{x^{n-1}+r^n}}$

Đạo hàm $h'(x)=\dfrac{(n-1)r^nx^{\frac{n-3}{2}}}{2(x^{n-1}+r^n)^{\frac{3}{2}}}-\dfrac{n-1}{2(x+1)^{\frac{3}{2}}}$ có cùng dấu với $h_1(x)=r^{\frac{2n}{3}}x^{\frac{n}{3}-1}(x+1)-x^{n-1}-r^n$.

Đặt $m=\dfrac{n}{3}, m\ge1$. Ta nhận thấy

$h_1(x)=r^{2m}(x^m+x^{m-1})-x^{3m-1}-r^{3m}=r^{2m}(x^m-r^m)+x^{m-1}(r^{2m}-x^{2m})=(r^m-x^m)h_2(x)$

trong đó $h_2(x)=x^{2m-1}+r^mx^{m-1}-r^{2m}$

Chú ý rằng $h_2(x)$ là hàm tăng nghiêm ngặt với $0\le x\le r, h_2(0)<0$ và

$h_2(r)=r^{2m-1}(2-r)>0$

Do đó, tồn tại $x_1\in(0,r)$ thỏa mãn $h_2(x_1)=0, h_2(x)<0$ với $0\le x<x_1$, và $h_2(x)>0$ với $x_1<x\le r$. Từ việc $h_1(x)$ và $h'(x)$ có cùng dấu như $h_2(x)$ với $0<x<r$, hàm $h(x)$

giảm nghiêm ngặt với $0 \le x \le x_1$, tăng nghiêm ngặt với $x_1 \le x \le r$; bởi vậy, $h(x) \le \max\{h(0), h(r)\}$. Từ $h(0) = h(r) = n-1$, ta nhận được $h(x) \le h(r)$ với $0 \le x \le r$, và chứng minh hoàn tất. Đẳng thức xảy ra khi $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = p$

Chú ý. Các bất đẳng thức (9) và (10) là trường hợp đặc biệt của mệnh đề tổng quát sau: *Cho số nguyên $n \ge 2$, và số thực dương $k \ge \frac{1}{n-1}$. Giả sử $a_1, a_2, \ldots, a_n$ là các số dương thỏa mãn $\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} = p \le \left(\frac{n}{n-1}\right)^{\frac{1}{k}} - 1$, khi đó $\frac{1}{(1+a_1)^k} + \frac{1}{(1+a_2)^k} + \ldots + \frac{1}{(1+a_n)^k} \le \frac{n}{(1+p)^k}$*

(Vasile Critoaje, GM-A,2, 2005)

Ta có thể viết lại mệnh đề này dưới dạng sau đây:

Cho số nguyên $n \ge 2$, và các số thực dương $k > \frac{1}{n-1}$, $0 < p \le \left(\frac{n}{n-1}\right)^{\frac{1}{k}} - 1$. Nếu $a_1, a_2, \ldots, a_n$ là các số dương thỏa mãn $a_1 a_2 \ldots a_n = 1$ thì

$$\frac{1}{(1+pa_1)^k} + \frac{1}{(1+pa_2)^k} + \ldots + \frac{1}{(1+pa_n)^k} \le n-1$$

Bài 26. Giả sử $a_1, a_2, \ldots, a_n$ là các số thực dương thỏa mãn $\sqrt{a_1 a_2 \ldots a_n} = p \ge 1$.

Chứng minh $\frac{1}{1+a_1+\ldots+a_1^{n-1}} + \frac{1}{1+a_2+\ldots+a_2^{n-1}} + \ldots + \frac{1}{1+a_n+\ldots+a_n^{n-1}} \ge \frac{n}{1+p+\ldots+p^{n-1}}$ (11)

Chứng minh

Ta sẽ áp dụng hệ quả RCF cho hàm $f(t) = \frac{1}{1+t+\ldots+t^{n-1}}, t > 0$. Trước hết ta chứng minh rằng hàm $f_1(u) = f(e^u) = \frac{1}{1+e^u+\ldots+e^{(n-1)u}}$ lồi với $u \ge \ln r$, trong đó $r = 1$; nghĩa là với $u \ge 0$. Đặt $y = e^u$ $(y \ge 1)$, điều kiện cần $f''(u) > 0$ quy về

$$2\left[y + 2y^2 + \ldots + (n-1)y^{n-1}\right]^2 \ge \left[y + 2y^2 + \ldots + (n-1)^2 y^{n-1}\right]\left[1 + y + \ldots + y^{n-1}\right]$$

Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức này bằng quy nạp theo n. Với $n = 2$, bất đẳng thức trở thành $y(y-1) \ge 0$, hiển nhiên đúng. Giả sử rằng bất đẳng thức đã đúng đến n và ta sẽ chứng minh nó cũng đúng với $n+1, n \ge 2$. Sử dụng giả thiết quy nạp ta cần chứng minh rằng $n^2(y^n - 1) + a_1 y + a_2 y^2 + \ldots + a_{n-1} y^{n-1} \ge 0$ trong đó $a_i = 3n^2 - (2n-i)^2$. Do $a_1 < a_2 < \ldots < a_{n-1}$ và $y \le y^2 \le \ldots \le y^{n-1}$.

Sử dụng bất đẳng thức ***Chebyshev*** ta nhận được

$$n\left(a_1 y + a_2 y^2 + \ldots + a_{n-1} y^{n-1}\right) \ge \left(a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}\right)\left(y + y^2 + \ldots + y^{n-1}\right)$$

Vì vậy, chỉ cần chứng minh $a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}\ge 0$ là đủ.

Thật vậy, ta có $a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}=\dfrac{n(10n^2-15n-1)}{6}>0$

Cuối cùng, chỉ còn cần chứng minh (11) đúng với $a_2=a_3=\ldots=a_n\ge 1$ và $a_1a_2\ldots a_n=1$; nghĩa là chứng minh rằng $f(x)+(n-1)f(y)\ge 1$ với $0<x\le 1\le y$ và $xy^{n-1}=1$. Đặt $k=n-1, k\ge 1$, bất đẳng thức này tương đương với $h(y)\ge h(1)$ trong đó

$$h(y)=\frac{y^{k^2}}{1+y^k+\ldots+y^{k^2}}+\frac{k}{1+y+\ldots+y^k}$$

Đối với trường hợp không tầm thường $y>1$, ta viết lại bất đẳng thức $h(y)\ge h(1)$ dưới dạng

$$\frac{k}{1+y+\ldots+y^k}\ge\frac{1+y^k+\ldots+y^{(k-1)k}}{1+y^k+\ldots+y^{k^2}},\quad \frac{k(y-1)}{y^{k+1}-1}\ge\frac{y^{k^2}-1}{y^k-1}\cdot\frac{y^k-1}{y^{(k+1)k}-1},$$

$$\frac{k(y-1)}{y^{k+1}-1}\ge\frac{y^{k^2}-1}{y^{(k+1)k}-1},\quad k\frac{y^{k(k+1)}-1}{y^{k+1}-1}\ge\frac{y^{k^2}-1}{y-1}$$

$$k\left[1+y^{k+1}+y^{2(k+1)}+\ldots+y^{(k-1)(k+1)}\right]\ge 1+y+y^2+\ldots+y^{(k-1)(k+1)}$$

$$k\left[1\cdot 1+y\cdot y^k+y^2\cdot y^{2k}+\ldots+y^{k-1}y^{(k-1)k}\right]\ge\left(1+y+y^2+\ldots+y^{k-1}\right)\left[1+y^k+y^{2k}\ldots+y^{(k-1)k}\right]$$

Do $1<y<y^2<\ldots<y^{k-1}$ và $1<y^k<y^{2k}<\ldots<y^{(k-1)k}$, bất đẳng thức cuối cùng chính là bất đẳng thức ***Chebyshev*** áp dụng cho k bộ $(1,y,\ldots,y^k)$ và $(1,y^k,\ldots,y^{(k-1)k})$. Điều này hoàn thành chứng minh. Với $n\ge 3$, đẳng thức xảy ra nếu và chỉ nếu $a_1=a_2=\ldots=a_n$

Chú ý. Với $p=1$, ta nhận được mệnh đề rất đẹp sau đây:

Nếu $a_1,a_2,\ldots,a_n$ là các số dương thỏa mãn $a_1a_2\ldots a_n=1$ thì

$$\frac{1}{1+a_1+\ldots+a_1^{n-1}}+\frac{1}{1+a_2+\ldots+a_2^{n-1}}+\ldots+\frac{1}{1+a_n+\ldots+a_n^{n-1}}\ge 1$$

Trong trường hợp $n=4$, ta thu lại một kết quả quen biết:

Nếu a,b,c,d là các số dương thỏa mãn $abcd=1$ thì

$$\frac{1}{(1+a)(1+a^2)}+\frac{1}{(1+b)(1+b^2)}+\frac{1}{(1+c)(1+c^2)}+\frac{1}{(1+d)(1+d^2)}\ge 1$$

(Vasile Cirtoaje, GM-B, 11, 1999)

Bài 27. Giả sử $a_1,a_2,\ldots,a_n$ là các số dương thỏa mãn $a_1a_2\ldots a_n\ge 1$.

Chứng minh rằng $a_1+a_2+\ldots+a_n-\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}\ge\dfrac{1}{2n^2}\displaystyle\sum_{1\le i\le j\le n}(\ln a_i-\ln a_j)^2$

Chứng minh

Do $\sum_{1\le i\le j\le n}\left(\ln a_i-\ln a_j\right)^2=n\sum_{i=1}^{n}\ln^2 a_i-\left(\sum_{i=1}^{n}\ln a_i\right)^2=n\sum_{i=1}^{n}\ln^2 a_i-\ln^2\left(a_1a_2\ldots a_n\right)$, ta có thể viết bất đẳng thức này dưới dạng $f\left(a_1\right)+f\left(a_2\right)+\ldots+f\left(a_n\right)\ge nf\left(\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}\right)$ trong đó $f(t)=t-\frac{1}{2n}\ln^2 t, t>0$.

Hàm $f_1(u)=f\left(e^u\right)=e^u-\frac{1}{2n}u^2$ có đạo hàm cấp 2 $f_1''(u)=e^u-\frac{1}{n}$. Do $f_1''(u)>0$ với $u\ge 0$, hàm $f_1(u)$ lồi với $u\ge\ln r$, trong đó $r=1$. Sử dụng Hệ quả RCF và Chú ý 5, chỉ cần chứng minh rằng $xf'(x)\le yf'(y)$ với $0<x\le 1\le y$ và $xy^{n-1}=1$. Ta có

$tf'(t)=t-\frac{1}{n}\ln t$ và $yf'(y)-xf'(x)=y-\frac{1}{n}\ln y-x+\frac{1}{n}\ln x=y-x-\ln y=y-\frac{1}{y^{n-1}}-\ln y$

Đặt $h(y)=y-\frac{1}{y^{n-1}}-\ln y$. Do $h'(y)=1+\frac{n-1}{y^n}-\frac{1}{y}\ge\frac{n-1}{y^n}>0$, hàm $h(y)$ tăng nghiêm ngặt với $y\ge 1$. Bởi vậy, $h(y)\ge h(1)=0$ và do đó $yf'(y)-xf'(x)\ge 0$.

Đẳng thức xảy ra khi $a_1=a_2=\ldots=a_n=1$

Bài 28. Giả sử $a_1,a_2,\ldots,a_n$ là các số dương thỏa mãn $a_1a_2\ldots a_n=1$.

Chứng minh rằng: $\left(1-\frac{1}{n}\right)^{a_1}+\left(1-\frac{1}{n}\right)^{a_2}+\ldots+\left(1-\frac{1}{n}\right)^{a_n}\le n-1$

Chứng minh

Đặt $a_i=\frac{x_i}{\ln n-\ln(n-1)}$ với mỗi $i\in\{1,2,\ldots,n\}$, mệnh đề trở thành:

Nếu $x_1,x_2,\ldots,x_n$ *là các số dương thỏa mãn* $\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}=r=\ln\frac{n}{n-1}$ *thì*

$e^{-x_1}+e^{-x_2}+\ldots+e^{-x_n}\le ne^{-r}$.

Ta có thể viết bất đẳng thức này dưới dạng

$f\left(a_1\right)+f\left(a_2\right)+\ldots+f\left(a_n\right)\le nf\left(\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}\right)$ trong đó $f(t)=e^{-t}, t>0$.

Hàm $f_1(u)=f\left(e^u\right)=e^{-e^u}$ có đạo hàm cấp 2 $f_1''(u)=\left(e^u-1\right)e^{u-e^u}$

Do $f_1''(u)<0$ với $u<0$, hàm $f_1(u)$ lõm với $u<\ln r=\ln\ln\frac{n}{n-1}<0$

Để áp dụng hệ quả LCF, chỉ cần chứng minh rằng $(n-1)e^{-x}+e^{-y}\le ne^{-r}$ với $0<x\le r\le y$ và $x^{n-1}y=r^n$. Nghĩa là $g(x)\le g(r)$ với $0<x\le r$, trong đó

$g(x)=(n-1)e^{-x}+e^{-y}$, với $y=\dfrac{r^n}{x^{n-1}}$

Do $\dfrac{x^ne^y}{n-1}g'(x)=r^n-x^ne^{y-x}$, chứng tỏ rằng đạo hàm g' có cùng dấu với hàm $g_1(x)=r^n-x^ne^{y-x}$. Từ $e^{x-y}g_1'(x)=x^n-nx^{n-1}+(n-1)r^n$, ta nhận thấy $g_1'(x)$ có cùng dấu với hàm $h(x)=x^n-nx^{n-1}+(n-1)r^n$.

Đạo hàm của $h(x)$ được cho bởi $h'(x)=nx^{n-2}(x-n+1)$.

Do $h'(x)<0$ với $0<x\le r$, hàm $h(x)$ giảm nghiêm ngặt. Thêm vào đó, từ $h(0)=(n-1)r^n>0$ và $h(r)=nr^{v-1}(r-1)<0$, tồn tại $x_1\in(0,r)$ thỏa mãn $h(x)>0$ với $x\in[0,x_1), h(x_1)=0$ và $h(x)<0$ với $x\in(x_1,r)$. Bởi vậy hàm $g_1(x)$ tăng nghiêm ngặt với $(0,x_1]$ và giảm nghiêm ngặt với $[x_1,r]$. Do $g_1(0_+)=-\infty$ và $g_1(r)=0$, tồn tại $x_2\in(0,x_1)$ thỏa mãn $g_1(x)<0$ với $x\in(0,x_2), g_1(x_2)=0$ và $g_1(x)>0$ với $x\in(x_2,r)$.

Bởi vậy hàm $g(x)$ giảm nghiêm ngặt trên $(0,x_2]$ và tăng nghiêm ngặt trên $[x_2,r]$. Từ $g(0_+)=n-1$ và $g(r)=ne^{-r}=n-1=g(0_+)$ ta nhận được $g(x)\le g(r)$ với $0<x\le r$.

Đẳng thức xảy ra khi $a_1=a_2=\ldots=a_n=1$

Bài 29. Giả sử $x_1,x_2,\ldots,x_n$ là các số thực không âm thỏa mãn $x_1+x_2+\ldots+x_n=n$

Chứng minh rằng: $n^{-x_1^2}+n^{-x_2^2}+\ldots+n^{-x_n^2}\ge 1$

Chứng minh

Ta có thể viết bất đẳng thức này dưới dạng

$f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)\ge nf\left(\dfrac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right)$ trong đó $f(u)=n^{-u^2}, u\ge 0$.

Đạo hàm cấp 2 $f''(u)=2n^{-u^2}(2u^2\ln n-1)\ln n$ chứng tỏ f lồi với $u\ge 1$, và do đó cũng lồi với $u\ge s=\dfrac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}=1$

Theo định lý RCF, chỉ cần chứng minh bất đẳng thức với $x_1\le 1\le x_2=x_3\ldots=x_n$

Đặt $g(x)=n^{-x^2}+(n-1)n^{-y^2}-1$ trong đó $x+(n-1)y=n$ và $0\le x\le 1\le y$. Ta chứng minh rằng $g(x)\ge 0$ với $0\le x\le 1$. Ta có $g'(x)=2\left(yn^{-y^2}-xn^{-x^2}\right)\ln n$.

Đạo hàm g' cùng dấu với hàm $g_1(x)=\ln\left(yn^{-y^2}\right)-\ln\left(xn^{-x^2}\right)=\ln y-\ln x+\left(x^2-y^2\right)\ln n$

Từ $g_1'(x)=\frac{-1}{(n-1)y}-\frac{1}{x}+2\left(x+\frac{y}{n-1}\right)\ln n=n\left[\frac{-1}{x(n-x)}+\frac{2+2(n-2)x}{(n-1)^2}\ln n\right]$, ta nhận thấy

$g_1'(x)$ có cùng dấu với hàm $h(x)=\frac{-(n-1)^2}{2\ln n}+x(n-x)[1+(n-2)x]$ với $0<x\le 1$

Đạo hàm của $h(x)$ được cho bởi $h'(x)=n+2(n^2-2n-1)x-3(n-2)x^2$.

Do

$h'(x)=n+2(n^2-2n-1)x-3(n-2)x^2\ge nx+2(n^2-2n-1)x-3(n-2)x=2(n-1)(n-2)x>0$

với $0<x\le 1$, hàm $h(x)$ tăng nghiêm ngặt.

Do $h(0)<0$ và $h(1)=(n-1)^2\left(1-\frac{1}{2\ln n}\right)>0$, tồn tại $x_1\in(0,1)$ thỏa mãn $h(x)<0$ với $x\in[0,x_1)$, $h(x_1)=0$ và $h(x)>0$ với $x\in(x_1,1]$. Bởi vậy, hàm $g_1(x)$ giảm nghiêm ngặt trên $(0,x_1]$ và tăng nghiêm ngặt trên $[x_1,1]$. Từ $g_1(0_+)=+\infty$ và $g_1(1)=0$, tồn tại $x_2\in(0,x_1)$ thỏa mãn $g_1(x)>0$ với $x\in(0,x_2)$, $g_1(x_2)=0$ và $g_1(x)<0$ với $x\in(x_2,1)$. Bởi vậy, hàm $g(x)$ tăng nghiêm ngặt trên $[0,x_2]$ và giảm nghiêm ngặt trên $[x_2,1]$.

Do $g(0)=(n-1)n^{-\left(\frac{n}{n-1}\right)^2}>0$ và $g(1)=0$, chứng tỏ $g(x)\ge 0$ với $0\le x\le 1$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1=x_2=\ldots=x_n=1$

Bài 30. Giả sử $x_1,x_2,\ldots,x_n$ là các số thực không âm thỏa mãn $x_1+x_2+\ldots+x_n=n$.

Chứng minh rằng: $2(x_1^3+x_2^3+\ldots+x_n^3)+n^2\le(2n+1)(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2)$

Chứng minh

Viết bất đẳng thức dưới dạng $f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)\le 0$ trong đó

$f(x)=2x^3-(2n+1)x^2+n$. Đạo hàm cấp 2 $f''(x)=2(6x-2n-1)$, chứng tỏ rằng f lõm trên $\left[0,\frac{2n+1}{6}\right]$ và lồi trên $\left[\frac{2n+1}{6},+\infty\right]$.

Sử dụng định lý LCRCF, tổng $E=f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)$ đạt giá trị lớn nhất với $x_1=x_2=\ldots=x_{n-1}\le x_n$. Bởi vậy, chỉ cần chứng minh bất đẳng thức

$(n-1)f(x)+f(y)\le 0$ với $0\le x\le 1\le y$ và $(n-1)x+y=n$.

Bất đẳng thức này tương đương với $n(n-1)x[2(n-2)x^2-(4n-7)x+2n-2]\ge 0$

Điều này đúng bởi vì $2(n-2)x^2-(4n-7)x+2n-2=2(n-2)(x-1)^2+2-x\ge 0$

Đẳng thức xảy ra nếu một trong các số x_i bằng n và các số còn lại 0.

Bài 31. Giả sử x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x+y+z=3$.

Chứng minh rằng: $$8\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)+9\geq 10\left(x^2+y^2+z^2\right)$$

Chứng minh

Viết lại bất đăng thức dưới dạng $f(x)-f(y)+f(z)\leq 9$ trong đó $f(t)=10t^2-\frac{8}{t}$.

Đạo hàm cấp 2 $f''(t)=\frac{4(5t^3-4)}{t^3}$, chứng tỏ f lõm trên $\left[0,\sqrt[3]{\frac{4}{5}}\right]$ và lồi trên $\left[\sqrt[3]{\frac{4}{5}},+\infty\right)$

Sử dụng định lý LCRCF, tổng $E=f(x)+f(y)+f(z)$ đạt giá trị lớn nhất khi $x=y\leq z$.

Bởi vậy, chỉ cần chứng minh bất đăng thức $2f(x)+f(z)\leq 9$ với $0\leq x\leq 1\leq z$ và $2x+z=3$.

Bất đăng thức này tương đương với $40x^4-140x^3+174x^2-89x+16\geq 0$

hay $(2x-1)^2(10x^2-25x+16)\geq 0$

Bởi vì $10x^2-25x+16=10(x-1)^2+6-5x>0$, bất đăng thức này hiển nhiên đúng.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi (x, y, z) là một hoán vị của bộ $(\frac{1}{2},\frac{1}{2},2)$.

II. CÁC BÀI TẬP DÀNH CHO BẠN ĐỌC TỰ GIẢI

Bài 1. Cho $a_1, a_2, ..., a_n > 0$. CMR: $\dfrac{(a_1 + a_2 + ... + a_n)^2}{(a_1^2+1)(a_2^2+1)...(a_n^2+1)} \le \dfrac{(n-1)^{n-1}}{n^{n-2}}$

Bài 2. Chứng minh $\dfrac{1}{\sqrt{1+(2a-b)^2}} + \dfrac{1}{\sqrt{1+(2b-c)^2}} + \dfrac{1}{\sqrt{1+(2c-a)^2}} \le \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$; $\begin{cases} a,b,c \ge 0 \\ ab+bc+ca = 1 \end{cases}$

Bài 3. Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng: $\sin^3 A + \sin^3 B + \sin^3 C \le 2$

Bài 4. [Chinese 2003] Cho $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ thỏa mãn: $\tan\alpha_1 \tan\alpha_2 .... \tan\alpha_n = 2^{\frac{n}{2}}$ $(n \ge 3)$

Tìm giá trị nhỏ nhất của L_n sao cho $T = \cos\alpha_1 + \cos\alpha_2 + ... + \cos\alpha_n < L_n$

Bài 5. Cho $a, b, c \ge 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $T = \sqrt[3]{\dfrac{a}{b+c}} + \sqrt[3]{\dfrac{b}{c+a}} + \sqrt[3]{\dfrac{c}{a+b}}$

Bài 6. Cho $\alpha \in R$; $a, b, c \ge 0$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của $T_\alpha = \left(\dfrac{a}{b+c}\right)^\alpha + \left(\dfrac{b}{c+a}\right)^\alpha + \left(\dfrac{c}{a+b}\right)^\alpha$

Bài 7. Cho $a, b, c, p, q > 0$ và $\alpha \ge \dfrac{2}{3}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$T_\alpha = \left(\frac{a}{pb+qc}\right)^\alpha + \left(\frac{b}{pc+qa}\right)^\alpha + \left(\frac{c}{pa+qb}\right)^\alpha$$

Bài 8. Cho $x_1, x_2, ..., x_n \in [-1, 1]$. Tìm giá trị lớn nhất của $T = \sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_2} + ... + \sqrt[3]{x_n}$

§15. BẤT ĐẲNG THỨC POPOVICIU

I. GIỚI THIỆU

Năm 1965, nhà toán học Romanian *T. Popoviciu* đã chứng minh bất đẳng thức sau đây

$$f(x)+f(y)+f(z)+3f\left(\frac{x+y+z}{3}\right)\ge 2f\left(\frac{x+y}{2}\right)+2f\left(\frac{y+z}{2}\right)+2f\left(\frac{x+z}{2}\right)$$

trong đó f là hàm lồi trên khoảng $\mathbb{I}$ và $x,y,z\in\mathbb{I}$

A. *Lupas* đã mở rộng bất đẳng thức này vào năm 1982 và đạt được kết quả sau đây (với p,q và r là các số dương):

$$pf(x)+qf(y)+rf(p+q+r)f\left(\frac{px+qr+rz}{p+q+r}\right)\ge$$

$$\ge(p+q)f\left(\frac{px+qy}{p+q}\right)+(q+r)f\left(\frac{qy+rz}{q+r}\right)+(r+p)f\left(\frac{rz+px}{r+p}\right)$$

Vào các năm 2002 và 2004, chúng tôi đã mở rộng bất đẳng thức Popoviciu cho n biến [5,6] và thu được các định lý dưới đây:

Định lý 1 (Mở rộng của bất đẳng thức Popoviciu).

Nếu f là hàm lồi trên khoảng $\mathbb{I}$ và $a_1,a_2,\ldots,a_n\in\mathbb{I}$ thì

$$f(a_1)+f(a_2)+\ldots+f(a_n)+n(n-2)f(a)\ge(n-1)\left[f(b_1)+f(b_2)+\ldots+f(b_n)\right],$$

Định lý 2. *Nếu f là hàm lồi trên khoảng $\mathbb{I}$ và $a_1,a_2,\ldots,a_n\in\mathbb{I}$ thì*

$$f(a_1)+f(a_2)+\ldots+f(a_n)+\frac{n}{n-2}f(a)\ge\frac{2}{n-2}\sum_{1\le i<j\le n}f\left(\frac{a_i+a_j}{2}\right)$$

trong đó $a=\dfrac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$ *và* $b_i=\dfrac{1}{n-1}\sum_{j\ne i}a_j$ *với mọi* i.

Ngay sau khi những bất đẳng thức này được post trên Mathlinks Inequalities Forum, ***Bill Zhao*** đã dự đoán mệnh đề tổng quát sau đây là đúng:

Định lý 3. *Nếu f là hàm lồi trên khoảng $\mathbb{I}$ và $a_1,a_2,\ldots,a_n\in\mathbb{I}$ thì*

$$\binom{m-1}{n-2}\sum_{k=1}^{n}f(a_k)+n\binom{m-2}{n-2}f\left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\right)\ge m\sum_{1\le i_1<\ldots<i_m\le n}f\left(\frac{a_{i1}+a_{i2}+\ldots+a_{im}}{m}\right)$$

Cũng trên Mathlinks Inequalities Forum, vào năm 2005 ***Darij Grinberg*** đã post một chứng minh dài cho bất đẳng thức này bằng cách quy nạp theo n.

Trong mục này, chúng tôi sẽ chứng minh các định lý nêu trên, và sẽ đưa ra một số ứng dụng của chúng. Lời giải của chúng tôi dựa vào bất đẳng thức ***Karamata*** cho hàm lồi. Trước hết hãy nhắc lại bất đẳng thức ***Karamata***. Ta nói rằng vector $\vec{A}=(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ với $a_1\ge a_2\ge\ldots\ge a_n$ trội hơn vector $\vec{B}=(b_1,b_2,\ldots,b_n)$ với $b_1\ge b_2\ge\ldots\ge b_n$, và viết $\vec{A}\ge\vec{B}$ nếu thỏa mãn các điều kiện sau đây:

$$a_1 \ge b_1,$$
$$a_1 + a_2 \ge b_1 + b_2$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} \ge b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1}$$
$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n$$

Bất đẳng thức ***Karamata*** phát biểu rằng với mọi hàm lồi f và các vector $\vec{A} \ge \vec{B}$, ta có bất đẳng thức sau: $f(a_1) + f(a_2) + \dots + f(a_n) \ge f(b_1) + f(b_2) + \dots + f(b_n)$

Chứng minh định lý 1. Không mất tính tổng quát, chúng ta giả sử rằng $n \ge 3$ và $a_1 \le a_2 \le \dots \le a_n$. Thế thì tồn tại số nguyên m với $1 \le m \le n-1$, thỏa mãn

$a_1 \le \dots \le a_m \le a \le a_{m+1} \le \dots \le a_n$ và $b_1 \ge \dots \ge b_m \ge a \ge b_{m+1} \ge \dots \ge b_n$ trong đó $a = \dfrac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$.

Dễ dàng nhận thấy rằng bất đẳng thức cần chứng minh là tổng của hai bất đẳng thức dưới đây

$$f(a_1) + \dots + f(a_m) + n(n-m-1)f(a) \ge (n-1)\left[f(b_{m+1}) + \dots + f(b_n)\right] \quad (1)$$

$$f(a_{m+1}) + \dots + f(a_n) + n(m-1)f(a) \ge (n-1)\left[f(b_1) + \dots + f(b_m)\right] \quad (2)$$

Để chứng minh (1), ta sử dụng bất đẳng thức ***Jensen*** và thu được

$f(a_1) + \dots + f(a_m) + (n-m-1)f(a) \ge (n-1)f(b)$ trong đó $b = \dfrac{a_1 + \dots + a_n + (n-m-1)a}{n-1}$

Vì vậy, chúng ta chỉ còn phải chứng minh rằng
$(n-m-1)f(a) + f(b) \ge f(b_{m+1}) + \dots\dots + f(b_n)$

Đã có $a \ge b_{m+1} \ge \dots\dots \ge b_n$ và $(n-m-1)a + b = b_{m+1} + \dots\dots + b_n$, ta nhận thấy vector

$\vec{A}_{n-m} = (a, \dots, a, b)$ trội hơn vector $\vec{B}_{n-m} = (b_{m+1}, b_{m+2}, \dots\dots b_n)$.

Do đó áp dụng bất đẳng thức ***Karamata*** cho hàm lồi f ta có kết quả cần chứng minh

Tương tự, ta có thể chứng minh (2) bằng cách cộng bất đẳng thức ***Jensen***

$\dfrac{f(a_{m+1}) + \dots + f(a_n) + (m-1)f(a)}{n-1} \ge f(c)$ với bất đẳng thức

$f(c) + (m-1)f(a) \ge f(b_1) + \dots\dots + f(b_m)$ trong đó $c = \dfrac{a_{m+1} + \dots\dots + a_n + (m-1)a}{n-1}$

Bất đẳng thức sau cùng thu được từ bất đẳng thức ***Karamata***, bởi vì $b_1 \ge \dots\dots b_m \ge a$ và $c + (m-1)a = b_1 + \dots\dots + b_m$ và do đó vector $\vec{C}_m = (c, a, \dots\dots, a)$ trội hơn vector $\vec{D}_m = (b_1, b_2, \dots\dots, b_m)$

Chứng minh định lý 2. Ta sẽ chứng minh bằng cách quy nạp theo n. Với $n = 2$, bất đẳng thức trở thành đẳng thức.

Bây giờ giả sử $n \ge 3$ và bất đẳng thức đúng khi có $(n-1)$ bằng nhau. Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức đúng với n.

Đặt $a = \dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$ và đặt $x = \dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}}{n-1}$. Theo giả thiết quy nạp,

ta có $(n-3)\left[f(a_1) + f(a_2) + \ldots + f(a_{n-1})\right] + (n-1)f(x) \ge 2 \sum_{1 \le i < j \le n-1} f\left(\dfrac{a_i + a_j}{2}\right)$

Vì vậy, chỉ cần chứng minh rằng

$$f(a_1) + f(a_2) + \ldots + f(a_{n-1}) + (n-2)f(a_n) + nf(a) \ge (n-1)f(x) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f\left(\frac{a_i + a_n}{2}\right)$$

Áp dụng bất đẳng thức ***Jensen***, ta có $f(a_1) + f(a_2) + \ldots + f(a_{n-1}) \ge (n-1)f(x)$

Vì vậy, ta sẽ chứng minh rằng $(n-2)f(a_n) + nf(a) \ge 2\sum_{i=1}^{n-1} f\left(\dfrac{a_i + a_n}{2}\right)$

Từ $(n-2)a_n + na \ge 2\sum_{i=1}^{n-1} \dfrac{a_i + a_n}{2}$, lại sử dụng bất đẳng thức ***Karamata*** cho hai trường hợp:

Nếu $2a \ge \min\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} + \max\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$.

Không mất tính tổng quát, giả sử rằng $a_1 = \max\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}, a_n = \min\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$

Như thế $2a \ge a_1 + a_n$. Để áp dụng bất đẳng thức ***Karamata***, ta chứng minh rằng

$$a_n \le \min\left\{\frac{a_1 + a_n}{2}, \frac{a_2 + a_n}{2}, \ldots, \frac{a_{n-1} + a_n}{2}\right\} \text{ và } a \ge \max\left\{\frac{a_1 + a_n}{2}, \frac{a_2 + a_n}{2}, \ldots, \frac{a_{n-1} + a_n}{2}\right\}$$

Điều kiện thứ nhất hiển nhiên đúng, còn điều kiện thứ hai được quy về $a \ge \dfrac{a_1 + a_n}{2}$

Nếu $2a \le \min\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} + \max\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$.

Không mất tính tổng quát, giả sử rằng $a_1 = \max\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}, a_n = \min\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$

Như thế $2a \le a_1 + a_n$. Để áp dụng bất đẳng thức ***Karamata***, ta chứng minh rằng

$$a \le \min\left\{\frac{a_1 + a_n}{2}, \frac{a_2 + a_n}{2}, \ldots, \frac{a_{n-1} + a_n}{2}\right\} \text{ và } a_n \ge \max\left\{\frac{a_1 + a_n}{2}, \frac{a_2 + a_n}{2}, \ldots, \frac{a_{n-1} + a_n}{2}\right\}$$

Điều kiện thứ nhất quy về $a \le \dfrac{a_1 + a_n}{2}$, còn điều kiện thứ hai hiển nhiên đúng.

Bình luận. Mở rộng của bất đẳng thức ***Popoviciu*** có thể viết lại dưới dạng sau đây

$$E_n(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \frac{f(a_1) + f(a_2) + \ldots + f(a_n) - nf(a)}{f(b_1) + f(b_2) + \ldots + f(b_n) - nf(a)} \ge n-1$$

Với một số hàm lồi, chặn dưới lớn nhất của E_n là $(n-1)$ nhưng với một số khác thì chặn dưới lớn nhất của E_n lại lớn hơn $(n-1)$. Trong trường hợp sau, mở rộng của bất đẳng thức ***Popoviciu*** có thể làm mạnh hơn. Chẳng hạn, với hàm lồi $f(x)=x^2$, bất đẳng thức sau đúng: $\dfrac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2-na^2}{b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2-na^2}\ge(n-1)^2$

Trong khi đó với hàm lồi $f(x)=x^3$, chặn dưới lớn nhất của E_n là $\dfrac{(2n-1)(n-1)^3}{3n^2-5n+1}$

Bởi vậy, nếu $a_1,a_2,\ldots,a_n$ là các số không âm thì $\dfrac{a_1^3+a_2^3+\ldots+a_n^3-na^3}{b_1^3+b_2^3+\ldots+b_n^3-na^3}\ge\dfrac{(2n-1)(n-1)^3}{3n^2-5n+1}$

Với giả sử rằng $a_1+a_2+\ldots+a_n=n$, bất đẳng thức này tương đương với bất đẳng thức thứ nhất theo kết quả ở mục 3.4: $(n-1)\left(a_1^3+a_2^3+\ldots+a_n^3\right)+n^2\ge(2n-1)\left(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2\right)$

Với $n\ge3$, đẳng thức chỉ xảy ra khi hoặc $a_1=a_2=\ldots=a_n=1$, hoặc một trong các số a_i bằng 0 và các số còn lại bằng $\dfrac{n}{n-1}$.

II. CÁC BÀI TOÁN ÁP DỤNG

Bài 1. Giả sử $a_1,a_2,\ldots,a_n$ là các số dương thỏa mãn $a_1a_2\ldots a_n=1$

Chứng minh rằng: $a_1^{n-1}+a_2^{n-1}+\ldots+a_n^{n-1}+n(n-2)\ge(n-1)\left(\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\ldots+\dfrac{1}{a_n}\right)$ (3)

Chứng minh

Bất đẳng thức này thu được bằng cách áp dụng bất đẳng thức ***Popoviciu*** mở rộng (Định lý 1) với hàm lồi $f(x)=e^x$ và thay thế $a_1,a_2,\ldots,a_n$ lần lượt bởi

$(n-1)\ln a_1,(n-1)\ln a_2,\ldots,(n-1)\ln a_n$

Với $n\ge3$, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1=a_2=\ldots=a_n=1$

Nhận xét. Với $n=3$ và $a_1=\dfrac{x^2}{yz},a_2=\dfrac{y^2}{zx},a_3=\dfrac{z^2}{xy}$, ta có bất đẳng thức quen biết

$$x^6+y^6+z^6+3(xyz)^2\ge2\left(y^3z^3+z^3x^3+x^3y^3\right)$$

Bài 2. Giả sử $a_1,a_2,\ldots,a_n$ là các số dương thỏa mãn $a_1a_2\ldots a_n=1$.

Chứng minh: $a_1^{n-1}+a_2^{n-1}+\ldots+a_n^{n-1}+n(n-2)\ge\dfrac{n-1}{2}\left(a_1+a_2+\ldots+a_n+\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\ldots\ldots+\dfrac{1}{a_n}\right)$

Chứng minh

Ta có thể thu được bất đẳng thức này bằng cách cộng (3) với bất đẳng thức

$$a_1^{n-1}+a_2^{n-1}+\ldots+a_n^{n-1}+n(n-2)\ge(n-1)\left(a_1+a_2+\ldots+a_n\right)$$

Bất đẳng thức cuối cùng thu được bằng cách cộng các bất đẳng thức $a_i^{n-1}+n-2\ge(n-1)a_i$ với mọi i. Ta có

$a_i^{n-1}+n-2-(n-1)a_i=a_i^{n-1}-1-(n-1)(a_i-1)=(a_i-1)\left[\left(a_i^{n-2}-1\right)+\left(a_i^{n-3}-1\right)+\ldots+(a_i-1)\right]\ge0$

Với $n\ge3$, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1=a_2=\ldots=a_n=1$.

Bài 3. Giả sử $a_1, a_2, \ldots, a_n$ là các số dương thỏa mãn $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = n$.

Chứng minh rằng: $(n - a_1)(n - a_2)\ldots\ldots(n - a_n) \geq (n-1)^n \sqrt[n-1]{a_1 a_2 \ldots a_n}$

Chứng minh

Ta áp dụng định lý 1 cho hàm lồi $f(x) = -\ln x$ với $x > 0$.

Với $n \geq 3$, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 1$

Nhận xét. Từ $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = n$ suy ra $a_1 a_2 \ldots a_n \leq 1$ (sử dụng bất đẳng thức ***AM-GM***), bất đẳng thức trên mạnh hơn bất đẳng thức sau

$(n - a_1)(n - a_2)\ldots\ldots(n - a_n) \geq (n-1)^n \, a_1 a_2 \ldots a_n$, bất đẳng thức này dễ dàng thu được bằng cách nhân tương ứng các bất đẳng thức sau:

$$n - a_1 = a_2 + \ldots + a_n \geq (n-1)\sqrt[n-1]{a_2 \ldots a_n}$$

$$\vdots$$

$$n - a_n = a_1 + \ldots + a_{n-1} \geq (n-1)\sqrt[n-1]{a_1 \ldots a_{n-1}}$$

Bài 4. Giả sử $a_1, a_2, \ldots, a_n$ là các số dương, và $b_i = \frac{1}{n-1}\sum_{j \neq i} a_j$ với mọi i.

Chứng minh rằng: $\frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_2} + \ldots + \frac{b_n}{a_n} \geq \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \ldots + \frac{a_n}{b_n}$ (4)

Chứng minh

Đặt $a = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$. Sử dụng hệ thức $\frac{(n-1)b_i}{a_i} = \frac{na}{a_i} - 1$ và $\frac{a_i}{b_i} = \frac{na}{b_i} - n + 1$ với $i = 1, 2, \ldots\ldots, n$ bất đẳng thức trở thành:

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots. + \frac{1}{a_n} + \frac{n(n-2)}{a} \geq (n-1)\left(\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \ldots. + \frac{1}{b_n}\right)$$

Bất đẳng thức này dễ dàng thu được bằng cách áp dụng bất đẳng thức ***Popoviciu*** mở rộng cho hàm lồi $f(x) = \frac{1}{x}$ với $x > 0$.

Với $n \geq 3$, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = \ldots = 1$.

Bài 5. [AMM 1996]

Cho $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là các số dương thỏa mãn $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}$ (5).

Chứng minh rằng: **a.** $\frac{1}{1+(n-1)x_1} + \frac{1}{1+(n-1)x_2} + \ldots + \frac{1}{1+(n-1)x_n} \geq 1$ (6)

b. $\frac{1}{n-1+x_1} + \frac{1}{n-1+x_2} + \ldots + \frac{1}{n-1+x_n} \leq 1$ (7)

Chứng minh

a. Bất đẳng thức này có thể thu được từ (4) theo cách sau. Giả sử rằng bất đẳng thức (6) là sai, nghĩa là có khả năng $\frac{1}{1+(n-1)x_1}+\frac{1}{1+(n-1)x_2}+\ldots+\frac{1}{1+(n-1)x_n}<1$. Ta sẽ chỉ ra khi đó (5) cũng không thể đúng. Để chứng minh điều đó, đặt $x_i=\frac{1-a_i}{(n-1)a_i}$ với mọi $i=1,2,\ldots,n$. Thế thì, bất đẳng thức trên dẫn tới $a_1+a_2+\ldots+a_n<1$ và vì thế $1-\sum_{j\neq i}a_j=(n-1)b_i$ với mọi $i=1,2,\ldots,n$. Do đó $x_1+x_2+\ldots+x_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{1-a_i}{(n-1)a_i}>\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i}{a_i}$

Để ý tới (4), ta có $x_1+x_2+\ldots+x_n>\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i}{a_i}\geq\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{b_i}>\sum_{i=1}^{n}\frac{(n-1)a_i}{1-a_i}=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}$

Điều này chứng tỏ (5) không thể đúng. Với $n\geq 3$, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1=x_2=\ldots=x_n=1$

b) Thay thế $\frac{1}{x_i}$ bởi x_i trong (6) và sử dụng (5), dẫn tới

$\frac{x_1}{n-1+x_1}+\frac{x_2}{n-1+x_2}+\ldots+\frac{x_n}{n-1+x_n}\geq 1$ là điều tương đương với (7)

Bài 6. Giả sử $a_1,a_2,\ldots,a_n\ (n\geq 3)$ là các số dương thỏa mãn $a_1+a_2+\ldots+a_n=1$.

Chứng minh rằng: $\left(a_1+\frac{1}{a_1}-2\right)\left(a_2+\frac{1}{a_2}-2\right)\ldots\left(a_n+\frac{1}{a_n}-2\right)\geq\left(n+\frac{1}{n}-2\right)^n$

Chứng minh

Áp dụng bất đẳng thức ***Popoviciu*** mở rộng cho hàm lồi $f(x)=-\ln x$ với $x>0$, ta thu được $(b_1b_2\ldots b_n)^{n-1}\geq(a_1a_2\ldots a_n)\left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\right)^{n(n-2)}$ trong đó $b_i=\frac{1}{n-1}\sum_{j\neq i}a_j$ với mọi i.

Dưới điều kiện $a_1+a_2+\ldots+a_n=1$, bất đẳng thức trở thành

$(1-a_1)^{n-1}(1-a_2)^{n-1}\ldots(1-a_n)^{n-1}\geq n^n\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2-n}a_1a_2\ldots a_n$ (8)

Mặt khác, theo bất đẳng thức ***AM – GM***, ta có

$(1-a_1)+(1-a_2)+\ldots+(1-a_n)\geq n\cdot\sqrt[n]{(1-a_1)(1-a_2)\ldots(1-a_n)}$

Hay $\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\geq(1-a_1)(1-a_2)\ldots(1-a_n)$. Từ bất đẳng thức này, với $n\geq 3$ ta thu được

$\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n(n-3)}\geq(1-a_1)^2(1-a_2)^2\ldots(1-a_n)^2\geq(1-a_1)^{n-1}(1-a_2)^{n-1}\ldots(1-a_n)^{n-1}$

Nhân bất đẳng thức này với (8) dẫn tới bất đẳng thức mong muốn

Bất đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1=a_2=\ldots=a_n=\frac{1}{n}$

Bài 7.

Giả sử $x_1,x_2,\ldots,x_n$ là các số dương thỏa mãn $x_1+x_2+\ldots+x_n=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}=ns$.

Chứng minh: $\frac{1}{x_1+n-1}+\frac{1}{x_2+n-1}+\ldots\frac{1}{x_n+n-1}\geq\frac{1}{ns-x_1+1}+\frac{1}{ns-x_2+1}+\ldots+\frac{1}{ns-x_n+1}$

Chứng minh

Theo bất đẳng thức ***AM – GM***, ta có $(x_1+x_2+\ldots+x_n)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}\right)\geq n^2$

Từ $s\geq 1$ dẫn tới

Áp dụng bất đẳng thức ***Popoviciu*** mở rộng cho hàm lồi $f(x)=\frac{1}{1+(n-1)x}$ với $x>0$, ta thu được

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+(n-1)x_i}+\frac{n(n-2)}{1+(n-1)s}\geq (n-1)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{ns-x_i+1}$$

Vì vậy, ta chỉ cần chứng minh rằng $(n-1)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i+n-1}\geq\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+(n-1)x_i}+\frac{n(n-2)}{1+(n-1)s}$

Với $n\geq 3$, bất đẳng thức này tương đương với $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(x_i+n-1)\left(\frac{1}{x_i}+n-1\right)}\geq\frac{1}{1+(n-1)s}$

hay $\frac{1}{A_1}+\frac{1}{A_2}+.....+\frac{1}{A_n}\geq\frac{1}{1+(n-1)s}$ trong đó $A_i=(n-1)\left(x_i+\frac{1}{x_i}\right)+n^2-2n+2$.

Sử dụng bất đẳng thức ***AM – GM***, ta có:

$$\frac{1}{A_1}+\frac{1}{A_2}+.....+\frac{1}{A_n}\geq\frac{n^2}{A_1+A_2+\ldots+A_n}=\frac{n}{2(n-1)s+n^2-2n+2}$$

Do đó, chỉ cần chứng minh rằng $\frac{n}{2(n-1)s+n^2-2n+2}\geq\frac{1}{1+(n-1)s}$ là đủ

Dễ dàng kiểm tra bất đẳng thức trên là đúng với $s\geq 1$.

Với $n\geq 3$, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1=x_2=\ldots=x_n=1$

Bài 8. Giả sử $x_1,x_2,\ldots,x_n\ (n\geq 3)$ là các số dương thỏa mãn $x_1x_2\ldots x_n=1$ và $0<p\leq\frac{2n-1}{(n-1)^2}$. Chứng minh rằng $\frac{1}{\sqrt{1+px_1}}+\frac{1}{\sqrt{1+px_2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{1+px_n}}\leq\frac{n}{\sqrt{1+p}}$

Chứng minh

Ta giả sử bất đẳng thức ngược lại là có thể xảy ra

$\frac{1}{\sqrt{1+px_1}}+\frac{1}{\sqrt{1+px_2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{1+px_n}}>\frac{n}{\sqrt{1+p}}$ và chứng minh rằng bất đẳng thức này dẫn tới việc $x_1x_2\ldots x_n<1$, là điều trái với giả thiết $x_1x_2\ldots x_n=1$

Sử dụng phép đổi biến $1+px_i=\frac{1+p}{a_i^2}(a_i>0)$ với mọi $i=1,2,\ldots\ldots,n$, ta sẽ chứng minh rằng

$a_1+a_2+\ldots+a_n>n$ dẫn tới $(1+p-a_1^2)(1+p-a_2^2)\ldots\ldots(1+p-a_n^2)<p^n(a_1a_2\ldots a_n)^2$

Nhận xét rằng phân số $(1+p-a_1^2)/a_1^2$ tăng khi a_1 giảm, ta chỉ cần xét trường hợp

$a_1+a_2+\ldots+a_n=n$. Ký hiệu $1+p=q^2, 1<q\leq\frac{n}{n-1}$, bất đẳng thức trở thành

$(q^2-a_1^2)(q^2-a_2^2)\ldots.(q^2-a_n^2)\leq(q^2-1)^n(a_1a_2\ldots a_n)^2$ (9)

Sử dụng bất đẳng thức ***Popoviciu*** mở rộng cho hàm lồi $f(x)=-\ln\left(\frac{n}{n-1}-x\right)$ với $0<x<1$ dẫn tới $(a_1a_2\ldots a_n)^{n-1}\geq[n-(n-1)a_1][n-(n-1)a_2]\ldots\ldots[n-(n-1)a_n]$ (10)

Mặt khác, áp dụng bất đẳng thức ***Jensen*** cho hàm lồi $f(x)=\ln\dfrac{n-(n-1)x}{q-x}$ dẫn tới

$$\frac{[n-(n-1)a_1][n-(n-1)a_2].....[n-(n-1)a_n]}{(q-a_1)(q-a_2)....(q-a_n)}\geq\frac{1}{(q-1)^n}\quad(11)$$

Nhân (10) và (11) ta có $(a_1a_2\dots a_n)^{n-1}\geq\dfrac{(q-a_1)(q-a_2)....(q-a_n)}{(q-1)^n}$

Vì vậy, để chứng minh (9), ta sẽ chỉ cần chứng tỏ rằng

$(a_1a_2\dots a_n)^{n-3}(q+a_1)(q+a_2)....(q+a_n)\leq(q+1)^n$

Sử dụng bất đẳng thức ***AM-GM***, ta có $a_1a_2\dots a_n\leq\left(\dfrac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n}\right)^n=1$

và $(q+a_1)(q+a_2)....(q+a_n)\leq\left(q+\dfrac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n}\right)^n=(q+1)^n$

từ đó rút ra kết quả cần chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1=x_2=\dots=x_n=1$

Bài 9 [Kvant, No.3,1979].

Giả sử $x_1,x_2,\dots,x_n$ là các số dương. Chứng minh bất đẳng thức:

$$(n-1)\left(x_1^2+x_2^2+....+x_n^2\right)+n\cdot\sqrt[n]{x_1^2x_2^2....x_n^2}\geq(x_1+x_2+\dots+x_n)^2$$

Chứng minh

Bất đẳng thức này thu được bằng cách áp dụng Định lý 2 cho hàm lồi $f(x)=e^x$ và thay thế $a_1,a_2,\dots,a_n$ lần lượt bởi $2\ln x_1, 2\ln x_2,.....,2\ln x_n$

Cuối cùng, sử dụng đẳng thức $2\sum\limits_{1\leq i<j\leq n}x_ix_j=(x_1+x_2+\dots+x_n)^2-\left(x_1^2+x_2^2+....+x_n^2\right)$

Với $n\geq 3$, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1=x_2=\dots=x_n$

Bài 10. Giả sử a,b,c,d là các số dương thỏa mãn $ab+bc+cd+da=4$.

Chứng minh rằng: $\left(1+\dfrac{a}{b}\right)\left(1+\dfrac{b}{c}\right)\left(1+\dfrac{c}{d}\right)\left(1+\dfrac{d}{a}\right)\geq(a+b+c+d)^2$

Chứng minh

Áp dụng Định lý 2 cho hàm lồi $f(x)=-\ln x$, ta có

$(a+b)(b+c)(c+d)(d+a)(a+c)(b+d)\geq 4abcd(a+b+c+d)^2$

Từ $(a+c)(b+d)=ab+bc+cd+da=4$, bất đẳng thức trở thành

$(a+b)(b+c)(c+d)(d+a)\geq abcd(a+b+c+d)^2$ hay

$\left(1+\dfrac{a}{b}\right)\left(1+\dfrac{b}{c}\right)\left(1+\dfrac{c}{d}\right)\left(1+\dfrac{d}{a}\right)\geq(a+b+c+d)^2$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=d=1$.

§16. BẤT ĐẲNG THỨC TRONG TÍCH PHÂN RIMAN

I. CÁC ĐỊNH LÝ VÀ TÍNH CHẤT CƠ BẢN CỦA BẤT ĐẲNG THỨC TÍCH PHÂN

1. *Mệnh đề 1:* Nếu f là một hàm số liên tục trên $[a, b]$ và $f(x) \geq 0$ $\forall x \in [a, b]$

thì $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$

2. *Mệnh đề 2:* Nếu f, g là hai hàm số liên tục trên $[a, b]$ và $f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in [a, b]$

thì $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$

3. *Mệnh đề 3:* Nếu f là một hàm số liên tục trên $[a, b]$ thỏa mãn $f(x) \geq 0$ $\forall x \in [a, b]$

và $f(x)$ không đồng nhất bằng 0 trên $[a, b]$ thì $\int_a^b f(x)\,dx > 0$

4. *Mệnh đề 4:* Nếu f, g là hai hàm số liên tục trên $[a,b]$ thỏa mãn $f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in [a,b]$ và $f(x)$, $g(x)$ không đồng nhất với nhau trên $[a, b]$ thì

$$\int_a^b f(x)\,dx < \int_a^b g(x)\,dx$$

5. *Mệnh đề 5:* Nếu f là một hàm số liên tục trên $[a, b]$ thỏa mãn $m \leq f(x) \leq M$ $\forall x \in [a, b]$ và $f(x)$ không đồng nhất với m hoặc M thì $m(b-a) < \int_a^b f(x)dx < M(b-a)$

6. *Mệnh đề 6:* Nếu f là một hàm số liên tục trên $[a, b]$ thì $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$

7. *Mệnh đề 7:* Nếu f, g là hai hàm số liên tục trên $[a, b]$ thì

$$\left|\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)\,g(x)|\,dx$$

8. *Định lý về giá trị trung bình:* Nếu f là một hàm số liên tục trên $[a, b]$ thì tồn tại ít nhất 1 điểm $c \in [a, b]$ sao cho $\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$

9. *Định lý mở rộng về giá trị trung bình:* Giả sử f, g là hai hàm số liên tục trên $[a, b]$. Nếu $g(x) \geq 0$ $\forall x \in [a, b]$ hoặc $g(x) \leq 0$ $\forall x \in [a, b]$ thì tồn tại ít nhất một điểm $c \in [a, b]$ sao cho

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx$$

II. BẢNG CÔNG THỨC NGUYÊN HÀM CƠ BẢN

$\int (ax+b)^{\alpha}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\frac{(ax+b)^{\alpha+1}}{\alpha+1} \quad \alpha \neq -1$	$\int \cos(ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\sin(ax+b)$
$\int \frac{\mathrm{d}x}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln\lvert ax+b\rvert$	$\int \sin(ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{-1}{a}\cos(ax+b)$
$\int e^{ax+b}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}e^{ax+b}$	$\int \tan(ax+b)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{a}\ln\lvert\cos(ax+b)\rvert$
$\int m^{ax+b}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a\ln m}m^{ax+b}$	$\int \cot(ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\ln\lvert\sin(ax+b)\rvert$
$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}$	$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2(ax+b)} = \frac{-1}{a}\cot(ax+b)$
$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{a+x}{a-x}\right\rvert$	$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2(ax+b)} = \frac{1}{a}\tan(ax+b)$
$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)$	$\int \arcsin\frac{x}{a}\,\mathrm{d}x = x\arcsin\frac{x}{a} + \sqrt{a^2-x^2}$
$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{\lvert a\rvert}$	$\int \arccos\frac{x}{a}\,\mathrm{d}x = x\arccos\frac{x}{a} - \sqrt{a^2-x^2}$
$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{1}{a}\arccos\left\lvert\frac{x}{a}\right\rvert$	$\int \arctan\frac{x}{a}\,\mathrm{d}x = x\arctan\frac{x}{a} - \frac{a}{2}\ln(a^2+x^2)$
$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2+a^2}} = -\frac{1}{a}\ln\left\lvert\frac{a+\sqrt{x^2+a^2}}{x}\right\rvert$	$\int \operatorname{arccot}\frac{x}{a}\,\mathrm{d}x = x\operatorname{arccot}\frac{x}{a} + \frac{a}{2}\ln(a^2+x^2)$
$\int \ln(ax+b)\,\mathrm{d}x = \left(x+\frac{b}{a}\right)\ln(ax+b) - x$	$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin(ax+b)} = \frac{1}{a}\ln\left\lvert\tan\frac{ax+b}{2}\right\rvert$
$\int \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}$	$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos(ax+b)} = \frac{1}{a}\ln\left\lvert\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{ax+b}{2}\right)\right\rvert$
$\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}\,\mathrm{d}x = \sqrt{a^2-x^2} - a\ln\left\lvert\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right\rvert$	$\int e^{ax}\sin bx\,\mathrm{d}x = \frac{e^{ax}(a\sin bx - b\cos bx)}{a^2+b^2}$
$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3+a^3} = \frac{1}{6a^2}\ln\frac{(x+a)^2}{x^2-ax+a^2} + \frac{1}{a^2\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-a}{a\sqrt{3}}$	$\int e^{ax}\cos bx\,\mathrm{d}x = \frac{e^{ax}(a\cos bx + b\sin bx)}{a^2+b^2}$
$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^4+a^4} = \frac{1}{4a^3\sqrt{2}}\ln\left(\frac{x^2+ax\sqrt{2}+a^2}{x^2-ax\sqrt{2}+a^2}\right) - \frac{1}{2a^3\sqrt{2}}\arctan\frac{ax\sqrt{2}}{x^2-a^2}$	

III. CÁC BÀI TOÁN ĐỊNH LƯỢNG TRONG BẤT ĐẲNG THỨC TÍCH PHÂN

Bài 1. Chứng minh rằng: $\frac{\pi}{16} < \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{5+3\cos^3 x} < \frac{\pi}{10}$

Chứng minh

Xét $f(x) = \frac{1}{5+3\cos^3 x}$ liên tục trên $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Ta có $0 \le \cos x \le 1\ \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

$$\Rightarrow 0 \le \cos^3 x \le 1\quad \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \frac{1}{8} \le \frac{1}{5+3\cos^3 x} \le \frac{1}{5}\quad \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{16} = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{8} dx < \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{5+3\cos^3 x} < \int_0^{\pi/2} \frac{1}{5} dx = \frac{\pi}{10}$$

Bài 2. Chứng minh rằng: $\frac{1}{2} < \int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^{2n}}} < \frac{\pi}{6}\quad (n = 2, 3, 4, \ldots)$

Chứng minh

Do $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \Rightarrow 0 \le x^{2n} \le x^2 < 1 \Rightarrow 0 < 1 - x^2 \le 1 - x^{2n} \le 1$

$$\Rightarrow \frac{1}{1} \le \frac{1}{1-x^{2n}} \le \frac{1}{1-x^2} \Rightarrow 1 \le \frac{1}{\sqrt{1-x^{2n}}} \le \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = \int_0^{1/2} dx < \int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^{2n}}} < \int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x\Big|_0^{1/2} = \frac{\pi}{6}$$

Bài 3. Chứng minh rằng: $\frac{\pi}{6} < \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2-x^3}} < \frac{\pi\sqrt{2}}{8}$

Chứng minh

Do $x \in [0, 1] \Rightarrow 0 \le x^3 \le x^2 \le 1 \Rightarrow 0 < 4 - 2x^2 \le 4 - x^2 - x^3 \le 4 - x^2$

$$\Rightarrow 0 < \sqrt{4-2x^2} \le \sqrt{4-x^2-x^3} \le \sqrt{4-x^2} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} \le \frac{1}{\sqrt{4-x^2-x^3}} \le \frac{1}{\sqrt{4-2x^2}}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} < \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2-x^3}} < \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-2x^2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{6} = \arcsin \frac{x}{2}\Big|_0^1 < \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2-x^3}} < \arcsin \frac{x}{\sqrt{2}}\Big|_0^1 = \frac{\pi\sqrt{2}}{8}$$

Bài 4. Chứng minh rằng: $\ln 2 < \int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x\sqrt{x}} < \frac{\pi}{4}$

Chứng minh

Do $x \in [0, 1] \Rightarrow 0 \le x \le \sqrt{x} \le 1 \Rightarrow x^2 \le x\sqrt{x} \le x \Rightarrow 1 + x^2 \le 1 + x\sqrt{x} \le 1 + x$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+x} \le \frac{1}{1+x\sqrt{x}} \le \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow \int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x} < \int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x\sqrt{x}} < \int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$$

$$\Rightarrow \ln 2 = \ln|1+x|\Big|_0^1 < \int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x\sqrt{x}} < \arctan x\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

Bài 5. Chứng minh rằng: $0 < \int\limits_0^{\pi/4} x\sqrt{\tan x}\, dx < \frac{\pi^2}{32}$

Chứng minh

Do $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \Rightarrow 0 \le \tan x \le 1 \Rightarrow 0 \le x\sqrt{\tan x} \le x \Rightarrow 0 < \int\limits_0^{\pi/4} x\sqrt{\tan x}\, dx < \int\limits_0^{\pi/4} x\, dx = \frac{\pi^2}{32}$

Bài 6. Chứng minh rằng: $\frac{1}{26\sqrt[3]{2}} < \int\limits_0^1 \frac{x^{25}\, dx}{\sqrt[3]{1+x^{10}}} < \frac{1}{26}$

Chứng minh

Do $x \in [0, 1] \Rightarrow 1 \le 1 + x^{10} \le 1 + 1 = 2 \Rightarrow 1 \le \sqrt[3]{1+x^{10}} \le \sqrt[3]{2}$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \le \frac{1}{\sqrt[3]{1+x^{10}}} \le 1 \Rightarrow \frac{x^{25}}{\sqrt[3]{2}} \le \frac{x^{25}}{\sqrt[3]{1+x^{10}}} \le x^{25} \Rightarrow \int\limits_0^1 \frac{x^{25}\, dx}{\sqrt[3]{2}} < \int\limits_0^1 \frac{x^{25}\, dx}{\sqrt[3]{1+x^{10}}} < \int\limits_0^1 x^{25}\, dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{26\sqrt[3]{2}} = \frac{x^{26}}{26\sqrt[3]{2}}\Bigg|_0^1 < \int\limits_0^1 \frac{x^{25}\, dx}{\sqrt[3]{1+x^{10}}} < \frac{x^{26}}{26}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{26}$$

Bài 7. Chứng minh rằng: $\int\limits_1^{\sqrt{3}} \frac{e^{1-x}\sin x\, dx}{x^2+1} < \frac{\pi}{12}$.

Chứng minh

Do $x \in \left[1, \sqrt{3}\right] \Rightarrow 1 \le x \le \sqrt{3} \Rightarrow \begin{cases} 0 < \sin x \le 1 \\ 1 - x \le 0 \end{cases} \Rightarrow e^{1-x}\sin x \le 1$

$$\Rightarrow \int\limits_1^{\sqrt{3}} \frac{e^{1-x}\sin x\, dx}{x^2+1} < \int\limits_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2+1} = \arctan x\Big|_1^{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$$

Bài 8. Chứng minh rằng: $\frac{\sqrt{3}}{4} < \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\sin x}{x} dx < \frac{1}{2}$

Chứng minh

Xét $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ với $x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right] \Rightarrow f'(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$

Xét $g(x) = x\cos x - \sin x \Rightarrow g'(x) = -x\sin x < 0\ \forall x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$

$\Rightarrow g(x)$ nghịch biến trên $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right] \Rightarrow g(x) < g\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi\sqrt{3} - 6}{12} < 0$

$\Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ đồng biến trên $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right] \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{3}\right) \le f(x) \le f\left(\frac{\pi}{6}\right)$

$\Leftrightarrow \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} \le \frac{\sin x}{x} \le \frac{3}{\pi} \Rightarrow \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} dx < \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\sin x}{x} dx < \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{3}{\pi} dx$

$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) < \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\sin x}{x} dx < \frac{3}{\pi}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$

Bài 9. Chứng minh rằng: $\frac{\sqrt{3}}{12} < \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\cot x}{x} dx < \frac{1}{3}$

Chứng minh

Xét $f(x) = \frac{\cot x}{x}$ với $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right] \Rightarrow f'(x) = -\frac{x(1 + \cot^2 x) + \cot x}{x^2} < 0\ \forall x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right]$

$\Rightarrow f(x)$ nghịch biến trên $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right] \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{3}\right) \le f(x) \le f\left(\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{\pi} \le f(x) \le \frac{4}{\pi}$

$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{12} = \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\sqrt{3}}{\pi} dx < \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\cot x}{x} dx < \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{4}{\pi} dx = \frac{1}{3}$

Bài 10. **1.** Tìm $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x}{1 + \sin^4 x} dx$, $J = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x}{1 + \cos^4 x} dx$

2. Chứng minh rằng: $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x \cos x}{(1 + \cos^4 x)(1 + \sin^4 x)} dx > \frac{\pi}{12}$

Chứng minh

1. Đặt $t=\sin^2 x \Rightarrow dt = 2\sin x\cos x\,dx = \sin 2x\,dx \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{\pi}{2} \Rightarrow t=1 \\ x=0 \Rightarrow t=0 \end{cases}$. Khi đó

$$I=\int_0^{\pi/2}\frac{\sin 2x}{1+\sin^4 x}dx=\int_0^1\frac{dt}{1+t^2}=\arctan t\Big|_0^1=\arctan 1-\arctan 0=\frac{\pi}{4}-0=\frac{\pi}{4}$$

$$J=\int_0^{\pi/2}\frac{\sin 2x}{1+\cos^4 x}dx=\int_0^{\pi/2}\frac{dt}{1+(t-1)^2}=\arctan(t-1)\Big|_0^1=\arctan 0-\arctan(-1)=\frac{\pi}{4}$$

2. $$\frac{\pi}{2}=I+J=\int_0^{\pi/2}\frac{\sin 2x}{1+\sin^4 x}dx+\int_0^{\pi/2}\frac{\sin 2x}{1+\cos^4 x}dx=\int_0^{\pi/2}\left(\frac{\sin 2x}{1+\sin^4 x}+\frac{\sin 2x}{1+\cos^4 x}\right)dx$$

$$=\int_0^{\pi/2}\frac{\sin 2x(2+\sin^4 x+\cos^4 x)}{(1+\cos^4 x)(1+\sin^4 x)}dx=\int_0^{\pi/2}\frac{\sin 2x(3-2\sin^2 x\cos^2 x)}{(1+\cos^4 x)(1+\sin^4 x)}dx$$

$$=\int_0^{\pi/2}\frac{\sin x\cos x(6-\sin^2 2x)}{(1+\cos^4 x)(1+\sin^4 x)}dx<\int_0^{\pi/2}\frac{6\sin x\cos x}{(1+\cos^4 x)(1+\sin^4 x)}dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{12}<\int_0^{\pi/2}\frac{\sin x\cos x}{(1+\cos^4 x)(1+\sin^4 x)}dx$$

Bài 11. **1.** Tìm $I(t)=\displaystyle\int_0^t\frac{\tan^4 x}{\cos 2x}dx$ với $0<t<\dfrac{\pi}{4}$

2. Chứng minh rằng: $\tan\left(t+\dfrac{\pi}{4}\right)>e^{\frac{2}{3}(\tan^3 t+3\tan t)}$ với $0<t<\dfrac{\pi}{4}$

Chứng minh

1. $$I(t)=\int_0^t\frac{\tan^4 x\,dx}{\cos^2 x-\sin^2 x}=\int_0^t\frac{\tan^4 x\,dx}{(1-\tan^2 x)\cos^2 x}=\int_0^t\frac{\tan^4 x\,d(\tan x)}{1-\tan^2 x}=\int_0^t\frac{\left[(\tan^4 x-1)+1\right]d(\tan x)}{1-\tan^2 x}$$

$$=\int_0^t-\left(\tan^2 x+1+\frac{1}{\tan^2 x-1}\right)d(\tan x)=-\left[\frac{\tan^3 x}{3}+\tan x+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\tan x-1}{\tan x+1}\right|\right]_0^t$$

$$=-\left[\frac{\tan^3 t}{3}+\tan t+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\tan t-1}{\tan t+1}\right|\right]=-\frac{1}{3}\tan^3 t-\tan t+\frac{1}{2}\ln\left[\tan\left(t+\frac{\pi}{4}\right)\right] \quad \text{với } 0<t<\frac{\pi}{4}$$

2. Do $\dfrac{\tan^4 x}{\cos 2x}>0\ \forall 0<t<\dfrac{\pi}{4} \Rightarrow I(t)=\displaystyle\int_0^t\frac{\tan^4 x}{\cos 2x}dx=-\frac{1}{3}\tan^3 t-\tan t+\frac{1}{2}\ln\tan\left(t+\frac{\pi}{4}\right)>0$

$$\Leftrightarrow \ln\tan\left(t+\frac{\pi}{4}\right)>\frac{2}{3}(\tan^3 t+3\tan t) \Leftrightarrow \tan\left(t+\frac{\pi}{4}\right)>e^{\frac{2}{3}(\tan^3 t+3\tan t)}$$

Bài 12. Chứng minh rằng: $I = \int_0^{\pi} e^{\sin^2 x} dx > \frac{3\pi}{2}$; $J = \int_0^{1} e^{-x^2} dx < \frac{\pi}{4}$

Chứng minh

• ***Bổ đề:*** $e^t > 1 + t \ \forall t > 0$

• ***Chứng minh:*** $e^t > 1 + t \ \forall t > 0 \Leftrightarrow g(t) = e^t - t > 1 \ \ \forall t > 0$

Ta có $g'(t) = e^t - 1 > e^0 - 1 = 0 \ \forall t > 0 \Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $[0, +\infty)$

$\Rightarrow g(t) > g(0) = 1 \Rightarrow e^t - t > 1 \Rightarrow e^t > 1 + t \ \ \forall t > 0$

• ***Áp dụng:*** Sử dụng bổ đề ta có $e^{\sin^2 x} > 1 + \sin^2 x$, do đó

$$I = \int_0^{\pi} e^{\sin^2 x} dx > \int_0^{\pi} \left(1 + \sin^2 x\right) dx = \int_0^{\pi} \left(1 + \frac{1 - \cos 2x}{2}\right) dx = \left[\frac{3x}{2} - \frac{\sin 2x}{4}\right]_0^{\pi} = \frac{3\pi}{2}$$

Mặt khác $e^{x^2} > 1 + x^2 \Rightarrow e^{-x^2} < \frac{1}{1+x^2} \ \forall x \neq 0$ suy ra

$$J = \int_0^{1} e^{-x^2} dx < \int_0^{1} \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x\Big|_0^1 = \arctan 1 - \arctan 0 = \frac{\pi}{4}$$

Bài 13. Chứng minh rằng: $\frac{\pi\sqrt{3}}{3} < \int_0^{\pi} \frac{dx}{\sqrt{\cos^2 x + \cos x + 1}} < \frac{2\pi\sqrt{3}}{3}$

Chứng minh

Xét $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\cos^2 x + \cos x + 1}}$ với $x \in [0, \pi]$. Đặt $t = \cos x \in [-1, 1]$

$\Rightarrow f(x) = g(t) = \frac{1}{\sqrt{t^2 + t + 1}}$ với $t \in [-1, 1]$. Ta có $g'(t) = \frac{-2t - 1}{2(t^2 + t + 1)\sqrt{t^2 + t + 1}}$

$\Rightarrow g'(t) = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{2} \Rightarrow$ Bảng biến thiên của $g(t)$ với $t \in [-1, 1]$

Nhìn bảng biến thiên suy ra,

t	-1		$-1/2$		1
g'		$+$	0	$-$	
g	1	$\nearrow$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\searrow$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \le g(t) \le \frac{2}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} \le f(x) \le \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi} \frac{dx}{\sqrt{3}} < \int_0^{\pi} \frac{dx}{\sqrt{\cos^2 x + \cos x + 1}} < \int_0^{\pi} \frac{2dx}{\sqrt{3}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi\sqrt{3}}{3} < \int_0^{\pi} \frac{dx}{\sqrt{\cos^2 x + \cos x + 1}} < \frac{2\pi\sqrt{3}}{3}$$

Bài 14. Chứng minh rằng: $I = \int\limits_{\pi/3}^{\pi/2} \sqrt{\sin x}\left(1+2\sqrt{\sin x}\right)\left(8-5\sqrt{\sin x}\right)dx < \frac{3\pi}{2}$

Chứng minh

Đặt $f(x)=\sqrt{\sin x}\left(1+2\sqrt{\sin x}\right)\left(8-5\sqrt{\sin x}\right)$. Sử dụng bất đẳng thức ***AM – GM*** ta có

$$f(x)=\frac{1}{3}\cdot 3\sqrt{\sin x}\left(1+2\sqrt{\sin x}\right)\left(8-5\sqrt{\sin x}\right)\le\frac{1}{3}\left[\frac{3\sqrt{\sin x}+\left(1+2\sqrt{\sin x}\right)+\left(8-5\sqrt{\sin x}\right)}{3}\right]^3=9$$

$$\Rightarrow I=\int\limits_{\pi/3}^{\pi/2}\sqrt{\sin x}\left(1+2\sqrt{\sin x}\right)\left(8-5\sqrt{\sin x}\right)dx<\int\limits_{\pi/3}^{\pi/2}9\,dx=9\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3\pi}{2}$$

Bài 15. Chứng minh rằng:

$$I=\int\limits_{-1}^{1}\left(\sqrt[4]{1+x^4}+\sqrt[3]{1+x^3}+\sqrt{1+x^2}+\sqrt[4]{1-x^4}+\sqrt[3]{1-x^3}+\sqrt{1-x^2}\right)dx<12$$

Chứng minh

$$+\begin{cases}\sqrt[4]{1-x^4}=\sqrt[4]{(1-x^4).1.1.1}\le\dfrac{(1-x^4)+1+1+1}{4}=\dfrac{4-x^4}{4}\\ \sqrt[4]{1+x^4}=\sqrt[4]{(1+x^4).1.1.1}\le\dfrac{(1+x^4)+1+1+1}{4}=\dfrac{4+x^4}{4}\\ \sqrt[3]{1-x^3}=\sqrt[3]{(1-x^3).1.1}\le\dfrac{(1-x^3)+1+1}{3}=\dfrac{3-x^3}{3}\\ \sqrt[3]{1+x^3}=\sqrt[3]{(1+x^3).1.1}\le\dfrac{(1+x^3)+1+1}{3}=\dfrac{3+x^3}{3}\\ \sqrt{1-x^2}=\sqrt{(1-x^2).1}\le\dfrac{(1-x^2)+1}{2}=\dfrac{2-x^2}{2}\\ \sqrt{1+x^2}=\sqrt{(1+x^2).1}\le\dfrac{(1+x^2)+1}{2}=\dfrac{2+x^2}{2}\end{cases}$$

$$\Rightarrow \sqrt[4]{1-x^4}+\sqrt[3]{1-x^3}+\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1+x^2}+\sqrt[3]{1+x^3}+\sqrt[4]{1+x^4}\le 6$$

$$\Rightarrow I=\int\limits_{-1}^{1}\left(\sqrt[4]{1+x^4}+\sqrt[3]{1+x^3}+\sqrt{1+x^2}+\sqrt[4]{1-x^4}+\sqrt[3]{1-x^3}+\sqrt{1-x^2}\right)dx<\int\limits_{-1}^{1}6dx=12$$

Bài 16. Chứng minh rằng: $I=\int\limits_{0}^{\pi/2}e^{\sin x}\,dx+\int\limits_{0}^{\pi/2}e^{\tan x}\,dx>2\left(e^{\pi/2}-1\right)$

Chứng minh

- ***Bổ đề:*** $\sin x+\tan x>2x\quad\forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$
- ***Chứng minh:*** $\sin x+\tan x>2x\Leftrightarrow f(x)=\sin x+\tan x-2x>0\quad\forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

Ta có $f'(x)=\cos x+\dfrac{1}{\cos^2 x}-2\ge\cos^2 x+\dfrac{1}{\cos^2 x}-2=\dfrac{\left(\cos^2 x-1\right)^2}{\cos^2 x}\ge 0$

$\Rightarrow f(x)$ đồng biến trên $\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow f(x) > f(0) = 0 \Rightarrow \sin x + \tan x > 2x$, $\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

• ***Áp dụng:*** Sử dụng bất đẳng thức ***AM – GM*** ta có

$$e^{\sin x} + e^{\tan x} \ge 2\sqrt{e^{\sin x + \tan x}} \ge 2 \cdot \sqrt{e^{2x}} = 2e^x$$

$$\Rightarrow I = \int_0^{\pi/2} e^{\sin x}\,dx + \int_0^{\pi/2} e^{\tan x}\,dx = \int_0^{\pi/2} \left(e^{\sin x} + e^{\tan x}\right)dx > \int_0^{\pi/2} 2e^x\,dx = 2e^x\Big|_0^{\pi/2} = 2\left(e^{\pi/2} - 1\right)$$

Bài 17. Chứng minh rằng: $\quad I = \displaystyle\int_{100\pi}^{200\pi} \frac{\cos x}{x}\,dx < \frac{1}{200\pi}$

Chứng minh

Theo công thức tích phân từng phần ta có

$$I = \int_{100\pi}^{200\pi} \frac{d(\sin x)}{x} = \frac{\sin x}{x}\Big|_{100\pi}^{200\pi} + \int_{100\pi}^{200\pi} \frac{\sin x}{x^2}\,dx$$

$$\Rightarrow I = \int_{100\pi}^{200\pi} \frac{\sin x}{x^2}\,dx < \int_{100\pi}^{200\pi} \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_{100\pi}^{200\pi} = \frac{1}{200\pi} \Rightarrow \int_{100\pi}^{200\pi} \frac{\cos x}{x}\,dx < \frac{1}{200\pi}$$

Bài 18. Chứng minh rằng:

$$I = \int_0^{\pi/2} \sqrt[4]{3\sin^2 x + 5\cos^2 x}\,dx + \int_0^{\pi/2} \sqrt[4]{3\cos^2 x + 5\sin^2 x}\,dx < \pi\sqrt{2}$$

Chứng minh

Sử dụng bất đẳng thức ***BunhiaCôpski*** ta có

$$\sqrt[4]{3\sin^2 x + 5\cos^2 x} + \sqrt[4]{3\cos^2 x + 5\sin^2 x} \le$$

$$\le \sqrt{(1^2 + 1^2)\left[\sqrt{3\sin^2 x + 5\cos^2 x} + \sqrt{3\cos^2 x + 5\sin^2 x}\right]}$$

$$\le \sqrt{2\sqrt{(1^2 + 1^2)\left[(3\sin^2 x + 5\cos^2 x) + (3\cos^2 x + 5\sin^2 x)\right]}} = 2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow I = \int_0^{\pi/2} \left[\sqrt[4]{3\sin^2 x + 5\cos^2 x} + \sqrt[4]{3\cos^2 x + 5\sin^2 x}\right]dx < \int_0^{\pi/2} 2\sqrt{2}\,dx = \pi\sqrt{2}$$

Bài 19. Chứng minh rằng $\forall \alpha > 0$ ta có bất đẳng thức sau:

$$I = \int_0^{\pi/2} \left(1 + \frac{1}{\sin^2 x}\right)^{\alpha} dx + \int_0^{\pi/2} \left(1 + \frac{1}{\cos^2 x}\right)^{\alpha} dx > \pi.3^{\alpha-1}$$

Chứng minh

Sử dụng bất đẳng thức $AM-GM$ ta có

$$\left(1+\frac{1}{\sin^2 x}\right)^{\alpha}+\left(1+\frac{1}{\cos^2 x}\right)^{\alpha}\geq 2\sqrt{\left(1+\frac{1}{\sin^2 x}\right)^{\alpha}\left(1+\frac{1}{\cos^2 x}\right)^{\alpha}}$$

$$=2\cdot\sqrt{\left(\frac{1+\sin^2 x+\cos^2 x+\sin^2 x\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}\right)^{\alpha}}=2\sqrt{\left(\frac{2+\sin^2 x\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}\right)^{\alpha}}=2\sqrt{\left(\frac{8}{\sin^2 2x}+1\right)^{\alpha}}$$

$$=2\cdot\sqrt{\left(\frac{8}{\sin^2 2x}+1\right)^{\alpha}}\geq 2\sqrt{\left(\frac{8}{1}+1\right)^{\alpha}}=2.3^{\alpha}$$

$$I=\int_{\pi/3}^{\pi/2}\left[\left(1+\frac{1}{\sin^2 x}\right)^{\alpha}+\left(1+\frac{1}{\cos^2 x}\right)^{\alpha}\right]dx>\int_{\pi/3}^{\pi/2}2.3^{\alpha}\,dx=2.3^{\alpha}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)=\pi.3^{\alpha-1}$$

Bài 20. Cho n là số tự nhiên. Chứng minh rằng: $\left|\int_0^{\pi}e^{x^2}\sin nx\,dx\right|\leq\frac{2e^{\pi^2}}{n}$

Chứng minh

Đặt $I_n=\int_0^{\pi}e^{x^2}\sin nx\,dx$; $u=e^{x^2}\Rightarrow du=2xe^{x^2}\,dx.$ $dv=\sin nx\,dx\Rightarrow v=-\frac{1}{n}\cos nx$

Theo công thức tích phân từng phần ta có

$$I_n=\frac{-e^{x^2}}{n}\cos nx\Big|_0^{\pi}+\frac{2}{n}\int_0^{\pi}xe^{x^2}\cos nx\,dx=-\frac{1}{n}\left[(-1)^n e^{\pi^2}-1\right]+\frac{2}{n}\int_0^{\pi}xe^{x^2}\cos nx\,dx$$

Đặt $J_n=\int_0^{\pi}xe^{x^2}\cos nx\,dx\Rightarrow nI_n-2J_n=1-(-1)^n e^{\pi^2}\Rightarrow I_n=\frac{1-(-1)^n e^{\pi^2}+2J_n}{n}$

$$\Rightarrow|I_n|=\left|\frac{1-(-1)^n e^{\pi^2}}{n}+\frac{2J_n}{n}\right|\leq\left|\frac{1-(-1)^n e^{\pi^2}}{n}\right|+\left|\frac{2J_n}{n}\right|\leq\frac{1+e^{\pi^2}}{n}+\frac{2}{n}|J_n|$$

Mặt khác $|J_n|=\left|\int_0^{\pi}xe^{x^2}\cos nx\,dx\right|\leq\int_0^{\pi}\left|xe^{x^2}\cos nx\right|dx=\int_0^{\pi}xe^{x^2}|\cos nx|\,dx$

$$\Rightarrow|J_n|\leq\int_0^{\pi}xe^{x^2}dx=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}e^{x^2}d(ex^2)=\frac{e^{\pi^2}-1}{2}\Rightarrow|I_n|\leq\frac{1+e^{\pi^2}}{n}+\frac{2}{n}\cdot\frac{e^{\pi^2}-1}{2}=\frac{2e^{\pi^2}}{n}$$

Bài 21. Cho $I_n=\int_0^{\pi/2}\sin^n x\,dx$. Chứng minh rằng: $\sqrt{\frac{\pi}{2(n+1)}}<I_n<\sqrt{\frac{\pi}{2n}}$

Chứng minh

Nếu $0<x<\frac{\pi}{2}$ thì $0<\sin x<1\Rightarrow\sin^{n+1}x<\sin^n x$ tức là $I_n>I_{n+1}$ $\forall n\in N$

Xét $I_{n+2} = \int_0^{\pi/2} \sin^{n+2} x\,dx$. Đặt $u = \sin^{n+1} x$ theo công thức tích phân từng phần ta có

$$I_{n+2} = -\sin^{n+1} x\cos x\Big|_0^{\pi/2} + (n+1)\int_0^{\pi/2} \sin^n x(1-\sin^2 x)dx = (n+1)(I_n - I_{n+2}) \Rightarrow I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}I_n$$

Xét hàm số $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ được xác định bởi công thức $f(n) = (n+1)I_n.I_{n+1}$

$$\Rightarrow f(n+1) = (n+2)I_{n+1}I_{n+2} \Rightarrow f(n+1) = (n+2)I_{n+1}\cdot\frac{n+1}{n+2}I_n = (n+1)I_n.I_{n+1}$$

$$\Rightarrow f(n+1) = f(n)\ \forall n\in\mathbb{N} \Rightarrow f(n) = f(0) = I_0.I_1 = \int_0^{\pi/2} dx \int_0^{\pi/2} \sin x\,dx = \frac{\pi}{2}\quad \forall n\in\mathbb{N}$$

Do $I_{n+1} < I_n$ ta có $\frac{\pi}{2} = f(n) = (n+1)I_n.I_{n+1} < (n+1)I_n^2 \Rightarrow I_n^2 > \frac{\pi}{2(n+1)}$ (1)

Mặt khác ta có $I_{n-1} > I_n$ suy ra $\frac{\pi}{2} = f(n-1) = nI_{n-1}.I_n > nI_n^2 \Rightarrow I_n^2 < \frac{\pi}{2n}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{\pi}{2(n+1)} < I_n^2 < \frac{\pi}{2n} \Rightarrow \sqrt{\frac{\pi}{2(n+1)}} < I_n < \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$

Bài 22. Chứng minh rằng: $I_n = \int_0^1 x^n\sqrt{1-x}\,dx < \frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}}$

Chứng minh

Đặt $\begin{cases} u = x^n \\ dv = \sqrt{1-x}\,dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = nx^{n-1}\,dx \\ v = -\frac{2}{3}(1-x)\sqrt{1-x} \end{cases}$. Khi đó suy ra:

$$I_n = -\frac{2}{3}x^n(1-x)\sqrt{1-x}\Big|_0^1 + \frac{2}{3}n\int_0^1 (1-x)x^{n-1}\sqrt{1-x}\,dx$$

$$I_n = \frac{2}{3}n\left[\int_0^1 x^{n-1}\sqrt{1-x}\,dx - \int_0^1 x^n\sqrt{1-x}\,dx\right] = \frac{2}{3}n(I_{n-1} - I_n) \Rightarrow I_n = \frac{2n}{2n+3}I_{n-1}$$

$$\Rightarrow I_n = \frac{2n(2n-2)(2n-4)\ldots\times6\times4\times2}{(2n+3)(2n+1)(2n-1)\ldots\times9\times7\times5}I_0 \quad \text{trong đó } I_0 = \int_0^1 \sqrt{1-x}\,dx = \frac{2}{3}$$

$\Rightarrow I_n = \frac{2n}{2n+3}\cdot\frac{2n-2}{2n+1}\cdot\frac{2n-4}{2n-1}\cdot\ldots\cdot\frac{6}{9}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{3}$. Sử dụng bất đẳng thức *AM – GM* ta có:

$$\sqrt{(2k+2)2k} < \frac{(2k+2)+2k}{2} = 2k+1 \Rightarrow \frac{1}{2k+1} < \frac{1}{\sqrt{(2k+2)2k}}$$

$$\Rightarrow I_n < \frac{2n}{\sqrt{(2n+4)(2n+2)}} \cdot \frac{2n-2}{\sqrt{(2n+2)2n}} \cdot \frac{2n-4}{\sqrt{2n(2n-2)}} \cdots \frac{6}{\sqrt{10\times 8}} \cdot \frac{4}{\sqrt{8\times 6}} \cdot \frac{2}{\sqrt{6\times 4}} \cdot \frac{2}{\sqrt{4\times 2}}$$

$$\Rightarrow I_n < \frac{2\sqrt{2}}{(2n+2)\sqrt{(2n+4)}} = \frac{1}{(n+1)\sqrt{n+2}} < \frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}}$$

Bài 23. Cho $|I_n| \le \frac{1}{2}\left(e^{\pi^2}-1\right)$. Chứng minh rằng: $I_n = \int_0^{\pi} x e^{x^2} \cos nx \, dx$

Chứng minh

$$|I_n| = \left|\int_0^{\pi} x e^{x^2} \cos nx \, dx\right| \le \int_0^{\pi} \left|x e^{x^2} \cos nx\right| dx \le \int_0^{\pi} \left|x e^{x^2}\right| dx = \int_0^{\pi} e^{x^2} d\left(e^{x^2}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{\pi^2}-1\right)$$

Bài 24. Chứng minh rằng: $\frac{1}{2}\int_0^{\pi} x^m e^{2x} \, dx > \frac{\pi^{m+2}}{m+2} + \frac{\pi^{m+3}}{m+3} \quad (m \in \mathbb{N})$

Chứng minh

Xét $f(x) = e^{2x} - 2(x^2+x)$, $x \ge 0$. Ta có: $f'(x) = 2\left(e^{2x} - 2x - 1\right)$

$\Rightarrow f''(x) = 4\left(e^{2x}-1\right) \ge 0$, $\forall x \ge 0 \Rightarrow f'(x)$ đồng biến $\Rightarrow f'(x) \ge f'(0) = 0 \ \ \forall x \ge 0$

$\Rightarrow f(x)$ đồng biến $\Rightarrow f(x) \ge f(0) = 1$ thì $e^{2x} \ge 2\left(x^2+x\right)+1 > 2\left(x^2+x\right)$, $\forall x \ge 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\int_0^{\pi} x^m e^{2x} \, dx > \int_0^{\pi} x^m\left(x^2+x\right) dx = \left[\frac{x^{m+2}}{m+2} + \frac{x^{m+3}}{m+3}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi^{m+2}}{m+2} + \frac{\pi^{m+3}}{m+3}$$

Bài 25. Chứng minh rằng: $\int_0^{1/n}\left(\sum_{k=1}^{n} \cos^{km} x + n\sin x\right) dx < \frac{5}{4}$, $\forall m, n \in \mathbb{N}^*$, $m \ge 2$

Chứng minh

Ta có: $\cos^{km} x \le \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, $\forall x \in \left[0, \frac{1}{n}\right]$

$1 - \sin^2 x + \sin x = \frac{5}{4} - \left(\sin x - \frac{1}{2}\right)^2 \le \frac{5}{4}$, $\forall x \in \left[0, \frac{1}{n}\right] \Rightarrow \cos^{km} x + \sin x < \frac{5}{4}$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \cos^{km} x + n\sin x < \frac{5}{4} \cdot n \Rightarrow \int_0^{1/n}\left(\sum_{k=1}^{n} \cos^{km} x + n\sin x\right) dx < \int_0^{1/n} \frac{5}{4} \cdot n \, dx = \frac{5}{4}$$

Bài 26. Chứng minh rằng: $\int_0^{4\pi} (\sin x + \sin 2x + \sin 3x) \, dx < 10\pi$

Chứng minh

$f(x) = \sin x + \sin 2x + \sin 3x = \sin 2x + 2\sin 2x \cos x = 2\sin x \cos x + 2\sin 2x \cos x$

Sử dụng bất đẳng thức ***Buniakowski*** ta có:

$f(x) = 2\sin x \cos x + 2\cos x \sin 2x \le \sqrt{4\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)\left(\cos^2 x + \sin^2 2x\right)} \le$

$$2\sqrt{\cos^2 x+\sin^2 2x}=2\sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}+1-\cos^2 2x}=2\sqrt{\frac{25}{16}-\left(\cos 2x-\frac{1}{4}\right)^2}\le 2\sqrt{\frac{25}{16}}=\frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow \int_0^{4\pi}(\sin x+\sin 2x+\sin 3x)\,dx=\int_0^{4\pi} f(x)\,dx<\int_0^{4\pi}\frac{5}{2}\,dx=\frac{5}{2}\cdot 4\pi=10\pi$$

Bài 27. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x} & khi\ \ x\in(0,1]\\ 1 & khi\ \ x=0\end{cases}$. Chứng minh: $\dfrac{17}{18}<\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx<\dfrac{1703}{1800}$

Chứng minh

Bước 1: Chứng minh $f(x)$ liên tục trên $[0, 1]$.

$f(x)=\dfrac{\sin x}{x}\ \ \forall x\in(0, 1]\Rightarrow f(x)$ liên tục trên $(0, 1]$.

Do $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin x}{x}=1=f(0)\Rightarrow f(x)$ liên tục tại $x=0$.

Vậy $f(x)$ liên tục trên $[0, 1]$.

Bước 2: ***Bổ đề:*** $x-\dfrac{x^3}{6}<\sin x<x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}\quad \forall x>0$

Chứng minh: • $x-\dfrac{x^3}{3!}<\sin x\ \ \forall x>0\Leftrightarrow f(x)=\dfrac{x^3}{3!}-x+\sin x>0\quad\forall x>0$

Ta có $f'(x)=\dfrac{x^2}{2!}-1+\cos x\Rightarrow f''(x)=x-\sin x\Rightarrow f'''(x)=1-\cos x\ge 0\ \ \forall x>0$

$\Rightarrow f''(x)$ tăng trên $[0, +\infty)\Rightarrow f''(x)>f''(0)=0\ \forall x>0$

$\Rightarrow f'(x)$ tăng trên $[0, +\infty)\ \Rightarrow f'(x)>f'(0)=0\quad\forall x>0$

$\Rightarrow f(x)$ tăng trên $[0, +\infty)\ \Rightarrow f(x)>f(0)=0\quad \forall x>0\ \Rightarrow$ (đpcm)

• $\sin x<x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}\ \ \forall x>0\Leftrightarrow g(x)=\dfrac{x^5}{5!}-\dfrac{x^3}{3!}+x-\sin x>0\ \ \forall x>0$

Ta có $g'(x)=\dfrac{x^4}{4!}-\dfrac{x^2}{2!}+1-\cos x\Rightarrow g''(x)=\dfrac{x^3}{3!}-x+\sin x=f(x)>0\ \ \forall x>0$

$\Rightarrow g'(x)$ tăng trên $[0, +\infty)\Rightarrow g'(x)>g'(0)=0\ \ \forall x>0$

$\Rightarrow g(x)$ tăng trên $[0, +\infty)\Rightarrow\ g(x)\ >g(0)\ =0\ \ \forall x>0\ \Rightarrow$ (đpcm)

Bước 3: ***Áp dụng:*** $1-\dfrac{x^2}{6}<\dfrac{\sin x}{x}<1-\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{x^4}{120},\ \ \forall x>0$

$$\Rightarrow \int_0^1\left(1-\frac{x^2}{6}\right)dx<\int_0^1\frac{\sin x}{x}\,dx<\int_0^1\left(1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}\right)dx$$

$$\Rightarrow \left(x-\frac{x^3}{18}\right)\Bigg|_0^1<\int_0^1\frac{\sin x}{x}\,dx<\left(x-\frac{x^3}{18}+\frac{x^5}{600}\right)\Bigg|_0^1\Rightarrow \frac{17}{18}<\int_0^1 f(x)\,dx<\frac{1703}{1800}$$

IV. CÁC BẤT ĐẲNG THỨC CỔ ĐIỂN TRONG TÍCH PHÂN RIMAN

Bài 1. Cho hai hàm số f, g liên tục trên $[a, b]$. Chứng minh rằng:

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \le \int_a^b f^2(x)dx\int_a^b g^2(x)dx \qquad \textit{(Bất đẳng thức CBS)}$$

Chứng minh

Ta có $0 \le [tf(x)+g(x)]^2 = t^2f^2(x)+2t.f(x)g(x)+g^2(x)\quad \forall t\in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow 0 < \int_a^b\left[t^2f^2(x)+2t.f(x)g(x)+g^2(x)\right]\mathrm{dx} = t^2\int_a^b f^2(x)\mathrm{dx}+2t\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{dx}+\int_a^b g^2(x)\mathrm{dx}$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{F}(t) = t^2\int_a^b f^2(x)\mathrm{dx}+2t\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{dx}+\int_a^b g^2(x)\mathrm{dx} \ge 0\ \forall t\in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \Delta' = \left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{dx}\right)^2 - \int_a^b f^2(x)\mathrm{dx}\int_a^b g^2(x)\mathrm{dx} \le 0 \Leftrightarrow$$

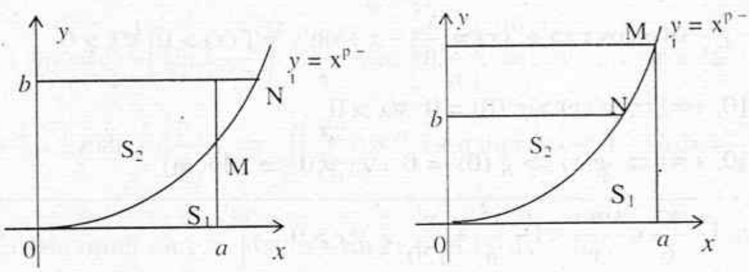
$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{dx}\right)^2 \le \int_a^b f^2(x)\mathrm{dx}\int_a^b g^2(x)\mathrm{dx}$$

Bài 2. Cho $p, q > 1$ thỏa mãn $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Chứng minh: $ab \le \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}\quad \forall a, b > 0$

(Bất đẳng thức Young)

Chứng minh

Xét hàm số $y = x^{p-1}$ liên tục và đồng biến trên $(0, +\infty)$ và có tập giá trị là $(0, +\infty)$ nên nó có hàm số ngược là $x = y^{\frac{1}{p-1}} = y^{q-1}$ trên khoảng $(0, +\infty)$. Đường thẳng $x = a$ và $y = b$ cắt đồ thị hàm số $y = x^{p-1}$ tại các điểm M, N (xem hình vẽ)



Gọi S_1 là diện tích tam giác cong tạo bởi các đường $\{y = 0; x = a; y = x^{p-1}\}$,

S_2 là diện tích tam giác cong tạo bởi các đường $\{x = 0; y = b; x = y^{q-1}\}$

và S là diện tích hình chữ nhật tạo bởi các đường $\{x = 0; x = a; y = 0; y = b\}$

Ta có $S_1 = \int_0^a x^{p-1}\,dx = \frac{a^p}{p}$; $S_2 = \int_0^a y^{q-1}dy = \frac{b^q}{q}$; S = ab.

Nhìn vào đồ thì ta có thể thấy rằng $S_1 + S_2 \ge S \Leftrightarrow \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \ge ab$

Bài 3. Chứng minh rằng: Nếu $a_i, b_j \ge 0$; $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$; $p > 1$ thì

$$\sum_{m=1}^{k}\sum_{n=1}^{k}\frac{a_n b_m}{m+n} \le \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{p}}\left(\sum_{n=1}^{k} a_n^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{m=1}^{k} b_m^q\right)^{\frac{1}{q}}$$ ***(Bất đẳng thức Hilbert)***

Chứng minh

Không mất tính tổng quát, giả sử $\left(\sum_{n=1}^{k} a_n^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{m=1}^{k} b_m^q\right)^{\frac{1}{q}} = 1$. Sử dụng bất đẳng thức ***Young*** ta có

$$\frac{a_n b_m}{n+m} = \left(n^{\frac{1}{p}} a_n m^{\frac{1}{q}} b_m\right)\cdot\frac{1}{(n+m)n^{\frac{1}{p}}m^{\frac{1}{q}}} \le \left(\frac{na_n^p}{p} + \frac{mb_m^q}{q}\right)\frac{1}{(n+m)n^{\frac{1}{p}}m^{\frac{1}{q}}}$$

Vì vậy suy ra $\sum_{m=1}^{k}\sum_{n=1}^{k}\frac{a_n b_m}{n+m} \le \frac{1}{p}\sum_{m=1}^{k}\sum_{n=1}^{k}\frac{n^{1-\frac{1}{p}}a_n^p}{(n+m)m^{\frac{1}{q}}} + \frac{1}{q}\sum_{m=1}^{k}\sum_{n=1}^{k}\frac{m^{1-\frac{1}{q}}b_m^q}{(n+m)n^{\frac{1}{p}}}$.

Sử dụng các đánh giá tích phân cơ bản ta có thể dễ dàng chứng minh rằng $\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{n^{1-\frac{1}{p}}}{(n+m)m^{\frac{1}{q}}} \le p\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^p} = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{p}}$; $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{m^{1-\frac{1}{q}}}{(n+m)n^{\frac{1}{p}}} \le q\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^q} = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{q}}$

Từ đó suy ra $\sum_{m=1}^{k}\sum_{n=1}^{k}\frac{a_n b_m}{n+m} \le \frac{1}{p}\cdot\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{p}} + \frac{1}{q}\cdot\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{q}} = \left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{p}} = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{p}}$

Bài 4. Cho $p, q > 1$ với $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ và f, g là hai hàm số liên tục trên $[a,b]$.

Chứng minh rằng: $\int_a^b |f(x)g(x)|\,dx \le \left(\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b |g(x)|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}}$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \exists$ A, B$\in$ R, $A^2 + B^2 > 0$: $A|f(x)|^p = B|g(x)|^q$ $\forall x\in[a,b]$

(Bất đẳng thức tích phân Holder)

Chứng minh

Xét hai khả năng sau đây:

- Nếu $\int_a^b |f(x)|^p\,dx = 0$ thì do $|f(x)|^p \ge 0$ $\forall x\in[a,b]$ nên suy ra $f(x) \equiv 0$ $\forall x\in[a,b]$

$\Rightarrow f(x)g(x) \equiv 0 \quad \forall x \in [a,b] \Rightarrow \int_a^b |f(x)g(x)|\,dx = 0 \Rightarrow$ (đpcm)

- Giả sử $\int_a^b |f(x)|^p\,dx > 0$ và $\int_a^b |g(x)|^q\,dx > 0$

Sử dụng bất đẳng thức ***Young*** với $a = \dfrac{|f(x)|}{\left(\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}}$ và $b = \dfrac{|g(x)|}{\left(\int_a^b |g(x)|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}}}$

Ta có $\dfrac{|f(x)|}{\left(\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}} \cdot \dfrac{|g(x)|}{\left(\int_a^b |g(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{q}}} \le \dfrac{1}{p} \cdot \dfrac{|f(x)|^p}{\int_a^b |f(x)|^p\,dx} + \dfrac{1}{q} \cdot \dfrac{|g(x)|^q}{\int_a^b |g(x)|^q\,dx}$, $\forall x \in [a,b]$

$$\Rightarrow \frac{\int_a^b |f(x)g(x)|\,dx}{\left(\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b |g(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{q}}} \le \frac{1}{p} \cdot \frac{\int_a^b |f(x)|^p\,dx}{\int_a^b |f(x)|^p\,dx} + \frac{1}{q} \cdot \frac{\int_a^b |g(x)|^q\,dx}{\int_a^b |g(x)|^q\,dx} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Rightarrow \text{(đpcm)}$$

Bài 5. Cho $p > 1$ và f, g là hàm số liên tục trên $[a, b]$. Chứng minh rằng:

$$\left(\int_a^b |f(x) + g(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

(Bất đẳng thức tích phân Minkowski)

Chứng minh

$$|f(x) + g(x)|^p = |f(x) + g(x)||f(x) + g(x)|^{p-1} \le |f(x)||f(x) + g(x)|^{p-1} + |g(x)||f(x) + g(x)|^{p-1}$$

$$\Rightarrow \int_a^b |f(x) + g(x)|^p\,dx \le \int_a^b |f(x)||f(x) + g(x)|^{p-1}\,dx + \int_a^b |g(x)||f(x) + g(x)|^{p-1}\,dx \quad (1)$$

Cho $q > 1$ sao cho $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, sử dụng bất đẳng thức ***Holder*** cho hai hàm số liên tục

$|f(x)|$ và $|f(x) + g(x)|^{p-1}$ Ta có $\int_a^b |f(x)||f(x) + g(x)|^{p-1}\,dx \le$

$$\le \left(\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b |f(x) + g(x)|^{(p-1)q}\,dx\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b |f(x) + g(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{q}} \quad (2)$$

Tương tự như trên ta sử dụng bất đẳng thức ***Holder*** cho hai hàm số liên tục $|g(x)|$ và $|f(x) + g(x)|^{p-1}$ Ta có: $\int_a^b |g(x)||f(x) + g(x)|^{p-1}\,dx \le$

$$\le \left(\int_a^b |g(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b |f(x) + g(x)|^{(p-1)q}\,dx\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\int_a^b |g(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b |f(x) + g(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{q}} \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) suy ra

$$\int_a^b |f(x)+g(x)|^p\,dx \le \left[\left(\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\right]\left(\int_a^b |f(x)+g(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{q}} \ (4)$$

+ Nếu $\int_a^b |f(x)+g(x)|^p\,dx = 0$ thì hiển nhiên bất đẳng thức đã cho đúng.

+Nếu $\int_a^b |f(x)+g(x)|^p\,dx > 0$ thì hai vế của (4) cho $\left(\int_a^b |f(x)+g(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{q}}$

$$\Rightarrow \left(\int_a^b |f(x)+g(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

Bài 6. Cho $f(x)$, $g(x)$ là các hàm liên tục trên $[a,b]$, $f(x) \ne 0$ và $m \le \frac{g(x)}{f(x)} \le M \ \forall x \in [a,b]$.

Chứng minh rằng: $\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x + Mm\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x \le (M+m)\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$

(Bất đẳng thức tích phân Diaz)

Chứng minh

Ta có $m \le \frac{g(x)}{f(x)} \le M \Rightarrow 0 \le \left(\frac{g(x)}{f(x)} - m\right)\left(M - \frac{g(x)}{f(x)}\right)f^2(x) \ \forall x \in [a,b]$

$\Leftrightarrow 0 \le -g^2(x) + (M+m)f(x)g(x) - Mmf^2(x) \ \ \forall x \in [a,b]$

$\Rightarrow \int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x + Mm\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x \le (M+m)\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$

Bài 7. Cho f, g là các hàm liên tục trên $[a,b]$ và $\begin{cases} 0 < a \le f(x) \le A \\ 0 < b \le g(x) \le B \end{cases} \ \forall x \in [a,b]$

Chứng minh rằng: $\frac{(ab+AB)^2}{4aAbB} \ge \frac{\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x.\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x}{\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2} \ge \frac{4aAbB}{(ab+AB)^2}$

(Bất đẳng thức tích phân G.Polya)

Chứng minh

Từ giả thiết $\Rightarrow \frac{b}{A} \le \frac{g(x)}{f(x)} \le \frac{B}{a} \ \forall x \in [a,b]$. Sử dụng bất đẳng thức tích phân ***Diaz*** với

$M = \frac{B}{a}$ và $m = \frac{b}{A}$. Ta có $\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x + \frac{bB}{aA}\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x \le \left(\frac{B}{a} + \frac{b}{A}\right)\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \ (1)$

Sử dụng bất đẳng thức ***AM – GM*** ta có

$$\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x + \frac{bB}{aA}\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x \ge 2\sqrt{\frac{bB}{aA}\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $4\dfrac{bB}{aA}\int\limits_a^b g^2(x)\,dx\int\limits_a^b f^2(x)\,dx \le \left(\dfrac{B}{a}+\dfrac{b}{A}\right)^2\left(\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx\right)^2$

$$\Rightarrow \frac{\int\limits_a^b g^2(x)\,dx.\int\limits_a^b f^2(x)\,dx}{\left(\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx\right)^2} \le \frac{\left(\frac{B}{a}+\frac{b}{A}\right)^2}{4\frac{bB}{aA}} = \frac{(ab+AB)^2}{4aAbB}.$$ Ta có $\dfrac{4aAbB}{(ab+AB)^2} \le 1$.

Mặt khác, sử dụng bất đẳng thức **CBS** ta có:

$$\frac{\int\limits_a^b g^2(x)\,dx\int\limits_a^b f^2(x)\,dx}{\left(\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx\right)^2} \ge 1 \Rightarrow \frac{4aAbB}{(ab+AB)^2} \le \frac{\int\limits_a^b g^2(x)\,dx.\int\limits_a^b f^2(x)\,dx}{\left(\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx\right)^2}$$

Bài 8. Cho hai hàm số $f(x)$, $g(x)$ liên tục và đơn điệu trên $[a, b]$.

1. Chứng minh rằng: Nếu $f(x)$, $g(x)$ là hai hàm cùng đồng biến hoặc là hai hàm cùng nghịch biến thì ta có bất đẳng thức:

$$\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx \ge \left(\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,dx\right)\left(\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b g(x)\,dx\right)$$

2. Chứng minh rằng: Nếu $f(x)$, $g(x)$ có tính đơn điệu ngược chiều nhau tức là một hàm đồng biến và một hàm nghịch biến thì ta có bất đẳng thức:

$$\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx \le \left(\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,dx\right)\left(\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b g(x)\,dx\right)$$

(Bất đẳng thức tích phân Chebyshev)

Chứng minh

Ta sẽ chứng minh $f(x)$, $g(x)$ là hai hàm liên tục và đồng biến $[a, b]$

Ta có $f(a) \le f(x) \le f(b)\ \forall x \in [a,b] \Rightarrow \int\limits_a^b f(a)\,dx \le \int\limits_a^b f(x)\,dx \le \int\limits_a^b f(b)\,dx$

$$\Leftrightarrow f(a)(b-a) \le \int\limits_a^b f(x)\,dx \le f(b)(b-a) \Leftrightarrow f(a) \le \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,dx \le f(b) \quad (1)$$

Theo định lý về giá trị trung gian của một hàm số liên tục thì tồn tại điểm $x_0 \in [a,b]$ sao cho $f(x_0) = \dfrac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,dx$. Mặt khác, do $f(x)$, $g(x)$ đồng biến trên $[a,b]$ nên

$[f(x) - f(x_0)][g(x) - g(x_0)] \ge 0$ với mọi $x \in [a,b]$

$\Leftrightarrow\ 0 \le f(x)g(x) - f(x_0)g(x) - g(x_0)f(x) + f(x_0)g(x_0)$

$$\Rightarrow 0 \le \int_a^b \left[f(x)g(x) - f(x_0)g(x) - g(x_0)f(x) + f(x_0)g(x_0)\right]\mathrm{dx}$$

$$= \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{dx} - f(x_0)\int_a^b g(x)\mathrm{dx} - g(x_0)\int_a^b f(x)\mathrm{dx} + f(x_0)g(x_0)(b-a)$$

$$= \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{dx} - f(x_0)\int_a^b g(x)\mathrm{dx} - g(x_0)f(x_0)(b-a) + f(x_0)g(x_0)(b-a)$$

$$\Leftrightarrow \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{dx} \ge f(x_0)\int_a^b g(x)\,\mathrm{dx} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx}\int_a^b g(x)\,\mathrm{dx} \Rightarrow \text{(đpcm)}$$

Bài 9. Cho hai hàm số f, g liên tục: $[0, 1] \to [0, 1]$.

Chứng minh rằng: $$\left(\int_0^1 f(x)g(x)dx\right)^2 \le \int_0^1 f(x)dx\int_0^1 g(x)dx$$

Chứng minh

Do $f, g:[0, 1] \to [0, 1] \Rightarrow \begin{cases} 0 \le f(x) \le 1 \\ 0 \le g(x) \le 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \le f(x)g(x) \le f(x) \\ 0 \le f(x)g(x) \le g(x) \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 \le \displaystyle\int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{dx} \le \int_0^1 f(x)\,\mathrm{dx} \\ 0 \le \displaystyle\int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{dx} \le \int_0^1 g(x)\,\mathrm{dx} \end{cases} \Rightarrow \left(\int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{dx}\right)^2 \le \int_0^1 f(x)\,\mathrm{dx}\int_0^1 g(x)\,\mathrm{dx}$$

Bài 10. Cho $f(x)$ là hàm số xác định và liên tục trên $[0, 1]$ và $|f(x)| \le 1\ \forall x \in [0,1]$.

Chứng minh rằng: $$\int_0^1 \sqrt{1 - f^2(x)}\,\mathrm{dx} \le \sqrt{1 - \left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{dx}\right)^2}$$

Chứng minh

Sử dụng bất đẳng thức ***CBS*** cho hai hàm số:

$F(x) = \sqrt{1 - f^2(x)}$ và $g(x) \equiv 1$ với $x \in [0,1]$ Ta có

$$\left(\int_0^1 \sqrt{1 - f^2(x)}\,\mathrm{dx}\right)^2 \le \int_0^1 \left[1 - f^2(x)\right]\mathrm{dx}\int_0^1 \mathrm{dx} \Rightarrow \int_0^1 \sqrt{1 - f^2(x)}\,\mathrm{dx} \le \sqrt{1 - \int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{dx}} \quad (1)$$

Sử dụng bất đẳng thức ***CBS*** cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ ta có

$$\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{dx}\right)^2 \le \int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{dx}\int_0^1 \mathrm{dx} \Rightarrow 1 - \left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{dx}\right)^2 \ge 1 - \int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{dx} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\int_0^1 \sqrt{1-f^2(x)}\,dx \le \sqrt{1-\left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^2}$ (đpcm)

Bài 11. Cho $f(x)$ là hàm liên tục cùng đạo hàm của nó trên $[0, 1]$ và $f(1)-f(0)=1$.

Chứng minh rằng: $\int_0^1 [f'(x)]^2\,dx \ge 1$

Chứng minh

Sử dụng bất đẳng thức ***CBS*** cho hai hàm số $f'(x)$ và $g(x)\equiv 1$:

$$\left(\int_0^1 f'(x)\,dx\right)^2 \le \int_0^1 [f'(x)]^2\,dx \int_0^1 dx \Rightarrow \left(\int_0^1 f'(x)\,dx\right)^2 \le \int_0^1 [f'(x)]^2\,dx$$

Theo công thức ***Newton – Leibnitz*** thì:

$$\int_0^1 f'(x)\,dx = f(x)\Big|_0^1 = f(1)-f(0)=1 \Rightarrow \int_0^1 [f'(x)]^2\,dx \ge 1$$

Bài 12. Cho $f(x)$ là một hàm liên tục trên $[0, 1]$ thỏa mãn $1 \le f(x) \le 2\ \forall x\in[0,1]$ và $\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{3}{2}$. Chứng minh rằng: $\frac{2}{3} \le \int_0^1 \frac{dx}{f(x)} < \frac{3}{4}$

Giải

• $\forall x\in[0,1]$ Ta có $\frac{1}{2} \le \frac{1}{f(x)} \le 1 \Rightarrow \frac{1}{2} = \int_0^1 \frac{1}{2}dx \le \int_0^1 \frac{dx}{f(x)} \le \int_0^1 dx = 1$

Sử dụng ***CBS*** ta có $1=\left(\int_0^1 dx\right)^2 = \left(\int_0^1 \sqrt{f(x)}\cdot\frac{1}{\sqrt{f(x)}}dx\right)^2 \le \int_0^1 f(x)\,dx \int_0^1 \frac{1}{f(x)}dx = \frac{3}{2}\int_0^1 \frac{1}{f(x)}dx$

$\Rightarrow \int_0^1 \frac{1}{f(x)}dx \ge \frac{2}{3}$. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \sqrt{f(x)} = \frac{\lambda}{\sqrt{f(x)}} \Rightarrow f(x)=\lambda=\frac{3}{2},\ \forall x\in[0,1]$

• $\forall x\in[0,1]$ Ta có $1 \le f(x) \le 2 \Rightarrow 0 \le [2-f(x)][f(x)-1] = -f^2(x)+3f(x)-2$

$\Rightarrow \frac{2}{f(x)} + f(x) \le 3 \Rightarrow 2\int_0^1 \frac{dx}{f(x)} + \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \left[\frac{2}{f(x)}+f(x)\right]dx < \int_0^1 3\,dx = 3$

$\Rightarrow 2\int_0^1 \frac{dx}{f(x)} < 3-\frac{3}{2} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \int_0^1 \frac{dx}{f(x)} < \frac{3}{4}$ (Bạn phải chứng minh rằng dấu bằng không xảy ra)

Bài 13. Cho $f(x)$ là hàm liên tục trên $[0,1]$ thỏa mãn điều kiện:

$\int_0^1 f(x)\,dx = a > 0$ và $0 \le f(x) \le a^{\frac{2}{3}}$. Chứng minh rằng: $\int_0^1 \sqrt{f(x)}\,dx = a^{\frac{2}{3}}$

Giải

Ta có: $\int_0^1 \sqrt{f(x)}dx = \int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{f(x)}}\,dx \geq \int_0^1 \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{a^{\frac{2}{3}}}} = \frac{1}{a^{\frac{1}{3}}}\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{a}{a^{\frac{1}{3}}} = a^{\frac{2}{3}}$

Bài 14. Cho $f(x)$ là một hàm số liên tục trên $[0,1]$ thỏa mãn các điều kiện

$$0 \leq f(x) \leq 1\ \forall x \in [0,1] \text{ và } f(0) = f(1) = \frac{1}{2}$$

a. Chứng minh rằng: $0 < \int_0^1 f(x)\,dx < 1$

b. Biết $c = \int_0^1 f(x)\,dx$. Đặt $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$. Chứng minh rằng: $\begin{cases} F(x) \leq x \text{ khi } 0 \leq x \leq c \\ F(x) \leq c \text{ khi } c \leq x \leq 1 \end{cases}$

c. Chứng minh rằng: $\int_0^1 F(x)\,dx < c - \frac{c^2}{2}$

d. Sử dụng kết quả trên chứng minh rằng: $\frac{c^2}{2} < \int_0^1 xf(x)\,dx < c - \frac{c^2}{2}$

Chứng minh

a. Ta có $0 \leq f(x) \leq 1$ và $f(1) = \frac{1}{2} \Rightarrow 0 < \int_0^1 f(x)\,dx < \int_0^1 1.dx = 1 \Rightarrow$ (đpcm)

b. Ta có $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ với $F(0) = 0$, $F(1) = c$; $F'(x) = f(x)\ \forall x \in [0,1]$

$\Rightarrow F(x)$ đồng biến trên $[0,1] \Rightarrow F(x) \leq F(1) = c$ (1)

Mặt khác từ giả thiết $0 \leq f(x) \leq 1\ \forall x \in [0,1]$

$\Rightarrow 0 \leq f(t) \leq 1\ \forall t \in [0, x] \Rightarrow F(x) = \int_0^x f(t)\,dt < \int_0^x 1.dt = x$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $F(x) \leq \text{Min}\{x, c\} \Leftrightarrow \begin{cases} F(x) \leq x \text{ nếu } 0 \leq x \leq c \\ F(x) \leq c \text{ nếu } c \leq x \leq 1 \end{cases}$

c. Theo **b.** Ta có $\int_0^1 F(x)\,dx = \int_0^c F(x)\,dx + \int_c^1 F(x)\,dx \leq \int_0^c x.dx + \int_c^1 c.dx = c - \frac{c^2}{2}$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} F(x) = x \text{ if } 0 \leq x \leq c \\ F(x) = c \text{ if } c \leq x \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F'(c^-) = 1 \\ F'(c^+) = 0 \end{cases} \Rightarrow$ không tồn tại $F'(c)$

Điều này mâu thuẫn với giả thiết $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt \Rightarrow F'(x) = f(x)\ \forall x \in [0,1]$

Vậy dấu bằng không xảy ra hay ta có $\int_0^1 F(x)\,dx < c - \frac{c^2}{2}$

d. Chứng minh: $\frac{c^2}{2} < \int_0^1 xf(x)\,dx < c - \frac{c^2}{2}$.

$$\int_0^1 xf(x)\,dx = \int_0^1 x\,d\big(F(x)\big) = xF(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 F(x)\,dx = F(1) - \int_0^1 F(x)\,dx > F(1) - \left(c - \frac{c^2}{2}\right) = \frac{c^2}{2}$$

Xét hàm số $g(x) = 1 - f(x) \Rightarrow g(x)$ liên tục trên $[0,1]$ và $g(0) = g(1) = \frac{1}{2}$

Do $g(x)$ thỏa mãn các điều kiện của hàm f có mặt trong giả thiết đồng thời

$\int_0^1 g(x)\,dx = \int_0^1 [1 - f(x)]\,dx = 1 - \int_0^1 f(x)\,dx = 1 - c$, sử dụng bất đẳng thức

$$\int_0^1 x\,f(x)\,dx > \frac{c^2}{2} \Rightarrow \int_0^1 x\,g(x)\,dx > \frac{(1-c)^2}{2} \Leftrightarrow \int_0^1 x[1 - f(x)]\,dx > \frac{(1-c)^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 x\,dx - \int_0^1 xf(x)\,dx > \frac{(1-c)^2}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} - \frac{(1-c)^2}{2} = c - \frac{c^2}{2} > \int_0^1 xf(x)\,dx$$

Bài 15. Cho $f(x)$ là hàm liên tục cùng đạo hàm của nó trên $[a, b]$. Giả sử $f(a) = 0$ và cho

$$M = \operatorname*{Max}_{x\in[a,b]} |f'(x)|. \text{ Chứng minh rằng: } \frac{2}{(b-a)^2}\int_a^b |f(x)|\,dx \le M$$

Chứng minh

Ta có $f(a) = 0 \Rightarrow f(x) = \int_a^x f'(x)\,dx \ \ \forall x \in [a, b]$

$$\Rightarrow |f(x)| = \left|\int_a^x f'(x)\,dx\right| \le \int_a^x |f'(x)|\,dx \le \int_a^x M\,dx = M(x-a) \Rightarrow \int_a^b |f(x)|\,dx \le M\int_a^b (x-a)\,dx$$

$$\Rightarrow \int_a^b |f(x)|\,dx \le M\cdot\frac{(x-a)^2}{2}\Bigg|_a^b = \frac{M(b-a)^2}{2} \Rightarrow M \ge \frac{2}{(b-a)^2}\int_a^b |f(x)|\,dx$$

Bài 16. Cho $f(x)$ là hàm liên tục cùng đạo hàm của nó trên $[a, b]$.

Giả sử $f(a) = f(b) = 0$ và cho $M = \operatorname*{Max}_{x\in[a,b]} |f'(x)|$. Chứng minh rằng: $\frac{4}{(b-a)^2}\int_a^b |f(x)|\,dx \le M$

Chứng minh

Lấy x tùy ý sao cho $a < x < b$. Sử dụng định lý ***Lagrange*** trên $[a, x]$:

Tồn tại $\alpha_1 \in (a, x)$ thỏa mãn $f(x) - f(a) = (x-a)f'(\alpha_1) \Rightarrow |f(x)| \le M(x-a)$ (1)

Lại sử dụng định lý ***Lagrange*** trên $[x, b]$, suy ra tồn tại $\alpha_2 \in (x, b)$ thỏa mãn

$f(b) - f(x) = (b-x)f'(\alpha_2) \Rightarrow |f(x)| \le M(b-x)$ (2)

Từ (1), (2) $\Rightarrow \int_a^b |f(x)|\,dx = \int_a^{\frac{a+b}{2}} |f(x)|\,dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b |f(x)|\,dx \le M\int_a^{\frac{a+b}{2}} (x-a)\,dx + M\int_{\frac{a+b}{2}}^b (b-x)\,dx$

$$\Rightarrow \int_a^b |f(x)|\,dx \le M\left(\frac{(b-a)^2}{8}+\frac{(b-a)^2}{8}\right)=\frac{M(b-a)^2}{4} \Rightarrow \frac{4}{(b-a)^2}\int_a^b |f(x)|\,dx \le M$$

Bài 17. Cho $f(x)$ là hàm số liên tục đến đạo hàm cấp 2 trên $[a, b]$ thỏa mãn $f(a) = f(b) = 0$.

Chứng minh rằng: $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \frac{M(b-a)^3}{12}$ với $M = \underset{x\in[a,b]}{\text{Max}}|f''(x)|$

Chứng minh

Ta có $\int_a^b f''(x)(x-a)(b-x)\,dx = 2\int_a^b f(x)\,dx \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_a^b f''(x)(x-a)(b-x)\,dx$

$$\Rightarrow \left|\int_a^b f(x)\,dx\right| = \frac{1}{2}\left|\int_a^b f''(x)(x-a)(b-x)\,dx\right| \le \frac{1}{2}\int_a^b f''(x)(x-a)(b-x)\,dx$$

Do $M = \underset{x\in[a,b]}{\text{Max}}|f''(x)|$ nên suy ra $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \frac{M}{2}\int_a^b (x-a)(b-x)\,dx$

$$\Rightarrow \left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \frac{M}{2}\left[\frac{-x^3}{3}+(a+b)\frac{x^2}{2}-abx\right]_a^b = \frac{(b-a)^3}{6} \Rightarrow \left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \frac{M(b-a)^3}{12}$$

Bài 18. Cho $f(x)$ là hàm số liên tục cùng đạo hàm của nó $[a, b]$ và $f(a) = 0$.

Đặt $M = \underset{x\in[a,b]}{\text{Max}}|f(x)|$. Chứng minh rằng: $M^2 \le (b-a)\int_a^b f'^2(x)\,dx$

Chứng minh

Giả sử x_0 là điểm thỏa mãn đẳng thức $|f(x_0)| = \underset{x\in[a,b]}{\text{Max}}|f(x)| = M$

Sử dụng bất đẳng thức ***CBS*** với hàm số $f'(x)$ và 1 ta có

$$\left(\int_a^{x_0} f'(x)dx\right)^2 \le \int_a^{x_0} f'^2(x)dx\int_a^{x_0} 1.dx = (x_0-a)\int_a^{x_0} f'^2(x)dx \quad (1)$$

Mà $\int_a^{x_0} f'(x)\,dx = f(x)\big|_a^{x_0} = f(x_0) - f(a) = f(x_0) - 0 = f(x_0)$ (2)

Từ(1) và (2) suy ra $M = |f(x_0)| = \left|\int_a^{x_0} f'(x)dx\right| \le \sqrt{x_0-a}\sqrt{\int_a^{x_0} f'^2(x)dx}$

$$\le \sqrt{x_0-a}\sqrt{\int_a^b f'^2(x)\,dx} \le \sqrt{b-a}\sqrt{\int_a^b f'^2(x)\,dx} \Rightarrow M^2 \le (b-a)\int_a^b f'^2(x)dx$$

Bài 19. Chứng minh bất đẳng thức sau: $\frac{\pi}{4\sqrt{2}} < \int_0^1 \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^{3/2}}}\,dx < \sqrt{\frac{\pi}{6}}$

Chứng minh

Do $x \in [0, 1]$ ta có $\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^{3/2}}} > \sqrt{\frac{1-x^2}{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1-x^2}$. Đặt $x = \sin t$

$$\Rightarrow \int_0^1 \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^{3/2}}}\,dx > \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\pi/2} \cos^2 t\,dt = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = \frac{\pi}{4\sqrt{2}}$$

Mặt khác $x^{3/2} \ge x^2\ \forall x \in [0, 1]$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^{3/2}}} < \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}} \Rightarrow \int_0^1 \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^{3/2}}}\,dx < \int_0^1 \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}\,dx$$

Sử dụng bất đẳng thức ***CBS*** ta có

$$\left(\int_0^1 \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^{3/2}}}\,dx\right)^2 < \left(\int_0^1 \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}\,dx\right)^2 = \left(\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx\right)^2 \le \int_0^1 (1-x^2)\,dx \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

$$= \left[\left(x - \frac{x^3}{3}\right)\operatorname{arctg} x\right]_0^1 = \frac{2}{3}\,arctg 1 = \frac{2}{3}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \int_0^1 \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^{3/2}}}\,dx < \sqrt{\frac{\pi}{6}}$$

Từ các kết quả trên $\Rightarrow \frac{\pi}{4\sqrt{2}} < \int_0^1 \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^{3/2}}}\,dx < \sqrt{\frac{\pi}{6}}$

Bài 20. Chứng minh rằng $\forall x > 0$, ta có: $e^x - 1 \le \int_0^x \sqrt{e^{2t} + e^{-t}}\,dt < \sqrt{(e^x-1)\left(e^x - \frac{1}{2}\right)}$

Chứng minh

Ta có $\int_0^x \sqrt{e^{2t}+e^{-t}}\,dt = \int_0^x e^{\frac{t}{2}}\sqrt{e^t + e^{-2t}}\,dt$. Sử dụng bất đẳng thức ***CBS***

$$\Rightarrow \left(\int_0^x e^{\frac{t}{2}}\sqrt{e^t+e^{-2t}}\,dt\right)^2 \le \int_0^x e^t\,dt \int_0^x (e^t + e^{-2t})\,dt \Rightarrow \left(\int_0^x \sqrt{e^{2t}+e^{-t}}\,dt\right)^2 \le \int_0^x e^t\,dt \int_0^x (e^t + e^{-2t})\,dt$$

$$\Rightarrow \left(\int_0^x \sqrt{e^{2t}+e^{-t}}\,dt\right)^2 \le (e^x - 1)\left(e^x - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2x}\right) < (e^x-1)\left(e^x - \frac{1}{2}\right) \quad (1)$$

Mặt khác $\sqrt{e^{2t}+e^{-t}} > e^t\ \forall 0 < t < x \Rightarrow \int_0^x \sqrt{e^{2t}+e^{-t}}\,dt > \int_0^x e^t\,dt = e^x - 1$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $e^x - 1 \le \int_0^x \sqrt{e^{2t}+e^{-t}}\,dt < \sqrt{(e^x-1)\left(e^x - \frac{1}{2}\right)}$

Bài 21. Cho $f(x)$ liên tục cùng với đạo hàm cua nó trên $[0, 2]$và $f(0) = f(2) = 1$.
$|f'(x)| \le 1\ \forall x \in [0,2]$. Chứng minh rằng: $\int_0^2 f(x)\,dx > 1$

Chứng minh

Lấy $x \in (0,2)$. Sử dụng định lý ***Lagrange*** suy ra tồn tại $\alpha_1 \in (0,x)$ và $\alpha_2 \in (x,2)$

Sao cho $\begin{cases} f(x) - f(0) = xf'(\alpha_1) \\ f(2) - f(x) = (2-x)f'(\alpha_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x) = 1 + xf'(\alpha_1) \\ f(x) = 1 + (x-2)f'(\alpha_2) \end{cases}$

Do $|f'(x)| \le 1\ \forall x \in [0,2] \Rightarrow f'(\alpha_1) \ge -1, f'(\alpha_2) \le 1$ lại có $x > 0$, $x-2 < 0$ suy ra

$$\begin{cases} f(x) \ge 1 + x(-1) \\ f(x) \le 1 + (x-2).1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \ge 1 - x \\ f(x) \ge x - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \int_0^1 f(x)\,dx \ge \int_0^1 (1-x)\,dx = \frac{1}{2} \quad (1) \\ \int_1^2 f(x)\,dx \ge \int_1^2 (x-1)\,dx = \frac{1}{2} \quad (2) \end{cases}$$

Dấu bằng trong (1) xảy ra $\Leftrightarrow f(x) \equiv 1 - x\ \ \forall x \in [0, 1] \Rightarrow f'(1^-) = -1$

Dấu bằng trong (2) xảy ra $\Leftrightarrow f(x) \equiv x - 1\ \ \forall x \in [1, 2] \Rightarrow f'(1^+) = +1$

Suy ra không tồn tại $f'(1)$ và mâu thuẫn với $f'(x)$ liên tục trên $[0,2]$

Vậy (1) và (2) không thể đồng thời xảy ra dấu bằng và ta có

$$\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^2 f(x)\,dx > \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Bài 22. Cho $f(x)$ là hàm liên tục và nghịch biến trên $[0, 1]$.

Chứng minh rằng: $\alpha \int_0^1 f(x)\,dx < \int_0^\alpha f(x)\,dx$ với mọi $\alpha \in (0, 1)$

Chứng minh

Do $f(x)$ nghịch biến trên $[0, 1]$ nên với $x \in [\alpha, 1] \subset [0, 1]$. Ta có

$$f(x) < f(\alpha) \Rightarrow \int_\alpha^1 f(x)\,dx < \int_\alpha^1 f(\alpha)\,dx = f(\alpha)\int_\alpha^1 dx = f(\alpha)(1-\alpha) \Rightarrow \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 f(x)\,dx < f(\alpha)$$

Do $f(x) > f(\alpha)\ \forall \alpha > x \ge 0$ nên $\int_0^\alpha f(x)dx > \int_0^\alpha f(\alpha)dx = \alpha f(\alpha) \Rightarrow f(\alpha) < \frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha f(x)dx$

Từ đó suy ra $\frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 f(x)\,dx < \frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha f(x)\,dx \Leftrightarrow \alpha\int_\alpha^1 f(x)\,dx < (1-\alpha)\int_0^\alpha f(x)\,dx$

$$\Rightarrow \alpha\left(\int_0^\alpha f(x)\,dx + \int_\alpha^1 f(x)\,dx\right) < (1-\alpha)\int_0^\alpha f(x)\,dx + \alpha\int_0^\alpha f(x)\,dx \Leftrightarrow \alpha\int_0^1 f(x)\,dx < \int_0^\alpha f(x)\,dx$$

Bài 23. Cho $f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x)$ là n là hàm số dương và liên tục trên $[0,1]$. Đặt

$a_k = \int_0^1 f_k(x)\,dx$ với $k = \overline{1,n}$. Chứng minh rằng tồn tại $x_0 \in [0, 1]$. Sao cho

$f_1(x_0) f_2(x_0) .... f_n(x_0) \le a_1 a_2 ... a_n$

Chứng minh

Từ giả thiết $f_k(x) > 0\ \forall x \in [0, 1] \Rightarrow a_k = \int_0^1 f_k(x)\,dx > 0\ \forall k = \overline{1,n}$

Đặt $u_k(x) = \dfrac{f_k(x)}{a_k}\ \forall k = \overline{1,n} \Rightarrow \int_0^1 u_k(x)\,dx = \dfrac{1}{a_k}\int_0^1 f_k(x)\,dx = \dfrac{1}{a_k}\cdot a_k = 1$

Sử dụng bất đẳng thức ***AM – GM*** ta có $\sqrt[n]{u_1(x).u_2(x)....u_n(x)} \le \dfrac{u_1(x) + ... + u_n(x)}{n}$

$$\Rightarrow \int_0^1 \sqrt[n]{u_1(x).u_2(x)....u_n(x)}\,dx \le \frac{1}{n}\left(\int_0^1 u_1(x)\,dx + \int_0^1 u_2(x)\,dx + ... + \int_0^1 u_n(x)\,dx\right) = \frac{1}{n}\cdot n = 1 \quad (*)$$

Nếu $\operatorname*{Min}_{x\in[0,1]}\left(\sqrt[n]{u_1(x).u_2(x)....u_n(x)}\right) = p > 1 \Rightarrow \int_0^1 \sqrt[n]{u_1(x).u_2(x)....u_n(x)}\,dx > \int_0^1 p.dx = p > 1$

$\Rightarrow$ mâu thuẫn với (*). Vậy từ (*) suy ra $\operatorname*{Min}_{x\in[0,1]}\left(\sqrt[n]{u_1(x).u_2(x)....u_n(x)}\right) \le 1$.

Mà $g(x) = \sqrt[n]{u_1(x).u_2(x)....u_n(x)}$ là hàm số dương và liên tục trên $[0, 1]$, nên theo định lý về giá trị trung gian của một hàm số liên tục thì tồn tại $x_0 \in [0, 1]$ sao cho

$$g(x_0) = \sqrt[n]{u_1(x_0).u_2(x_0)....u_n(x_0)} = p \le 1 \Leftrightarrow u_1(x_0).u_2(x_0)....u_n(x_0) \le 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{f_1(x_0)}{a_1}\cdot\frac{f_2(x_0)}{a_2}....\frac{f_n(x_0)}{a_n} \le 1 \Leftrightarrow f_1(x_0) f_2(x_0) .... f_n(x_0) \le a_1 a_2 ... a_n$$

Bài 24. Cho hàm số $f(x)$ liên tục cùng với đạo hàm của nó trên $[0, 1]$ và $f(x)$ lấy cả giá trị âm và dương trên $[0, 1]$.

Chứng minh rằng: $\int_0^1 |f(x)|\,dx < \int_0^1 |f'(x)|\,dx$

Chứng minh

Giả sử với $x_1, x_2 \in [0,1]$, $x_1 < x_2$ ta có $f(x_1) < 0, f(x_2) > 0$. Theo định lý về giá trị trung gian của hàm số liên tục thì tồn tại 1 điểm $a \in (x_1, x_2)$ sao cho $f(a) = 0$. Vì hàm số $|f(x)|$ là hàm liên tục trên $[0,1]$ nên nó đạt giá trị lớn nhất trên đoạn này, tức là tồn tại một điểm $b \in [0,1]$ sao cho $|f(x)| \le |f(b)|\ \forall x \in [0,1] \Rightarrow b \ne a$ và $b \in [0, a)$ hoặc $b \in (a,1]$.

Không mất tính tổng quát, giả sử $b \in (a,1]$. Ta có

$$\int_0^1 |f(x)|\,dx \le \int_0^1 |f(b)|\,dx = |f(b)| = |f(b) - f(a)| = \left|\int_a^b f'(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f'(x)|\,dx \le \int_0^1 |f'(x)|\,dx$$

Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức thực sự $\int_a^b |f'(x)|\,dx < \int_0^1 |f'(x)|\,dx$

Thật vậy nếu $\int_a^b |f'(x)|\,dx = \int_0^1 |f'(x)|\,dx$ thì từ phép biến đổi sau:

$$\int_0^1 |f'(x)|\,dx = \int_0^a |f'(x)|\,dx + \int_a^b |f'(x)|\,dx + \int_b^1 |f'(x)|\,dx \Rightarrow \int_0^a |f'(x)|\,dx + \int_b^1 |f'(x)|\,dx = 0$$

$\Rightarrow |f'(x)| = 0$ hay $f'(x) = 0\ \forall x \in [0, a] \Rightarrow f(x)$ là hàm hằng trên $[0, a]$ mà $f(a) = 0$,

nên $f(x) = 0\ \forall x \in [0, a]$ mâu thuẫn với $f(x_1) < 0$ trong đó $x_1 \in [0, a)$

Vậy ta có bất đẳng thức thực sự: $\int_0^1 |f(x)|\,dx < \int_0^1 |f'(x)|\,dx$

Bài 25. Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ liên tục cùng tăng hoặc cùng giảm trên $[0,1]$.

Chứng minh rằng: $\int_0^1 f(x)g(x)\,dx \ge \int_0^1 f(x)\,dx \int_0^1 g(x)\,dx$ (1)

Chứng minh

Không mất tính tổng quát ta chỉ cần xét khi f và g cùng đồng biến trên $[0, 1]$ vì nếu f và g cùng nghịch biến trên $[0, 1]$ thì $(-f)$ và $(-g)$ đồng biến trên $[0, 1]$.

Theo định lý về giá trị trung bình cua tích phân thì tồn tại 1 số $a \in [0, 1]$ sao cho

$$\int_0^1 f(x)\,dx = f(a) \Rightarrow \int_0^1 [f(x) - f(a)]\,dx = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_0^a [f(x) - f(a)]dx + \int_a^1 [f(x) - f(a)]dx = 0 \Rightarrow \int_a^1 [f(x) - f(a)]dx = \int_0^a [f(a) - f(x)]dx$$

Xét hiệu hai vế của bất đẳng thức (1):

$$\int_0^1 f(x)g(x)\,dx - \int_0^1 f(x)\,dx \int_0^1 g(x)\,dx = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx - f(a)\int_0^1 g(x)\,dx = \int_0^1 [f(x) - f(a)]\, g(x)\,dx$$

$$= \int_0^a [f(x) - f(a)]g(x)dx + \int_a^1 [f(x) - f(a)]g(x)dx = \int_a^1 [f(x) - f(a)]g(x)dx - \int_0^a [f(a) - f(x)]g(x)dx$$

Vì $f(x)$ là hàm đồng biến trên $[0, 1]$, $f(x) \ge f(a)\ \forall x \in [a, 1]$ và $f(a) \ge f(x)\ \forall x \in [0, a]$

$\Rightarrow f(x) - f(a) \ge 0\ \forall x \in [a, 1]$ và $f(a) - f(x) \ge 0\ \forall x \in [0, a]$.

Theo định lý mở rộng về giá trị trung bình của tích phân thì tồn tại ít nhất 1 điểm $b \in [0, a]$ và tồn tại ít nhất 1 điểm $c \in [a, 1]$ sao cho

$$\int_0^a [f(a) - f(x)]\ g(x)\,dx = g(b)\int_0^a [f(a) - f(x)]\ dx \text{ và}$$

$\int_a^1 [f(x)-f(a)]\,g(x)\,dx = g(c)\int_a^1 [f(x)-f(a)]\,dx$. Từ đó suy ra:

$$\int_0^1 f(x)g(x)\,dx - \int_0^1 f(x)\,dx\int_0^1 g(x)\,dx = [g(c)-g(b)]\int_0^a [f(a)-f(x)]\,dx$$

Do $b \le a \le c$ và g là hàm đồng biến trên $[0, 1]$, $g(c) \ge g(b)$ và $f(a) - f(x) \ge 0\ \forall x\in[0, a]$

$$\Rightarrow \int_0^1 f(x)g(x)\,dx - \int_0^1 f(x)\,dx\int_0^1 g(x)\,dx = [g(c)-g(b)]\int_0^a [f(a)-f(x)]\,dx \ge 0 \Rightarrow (1) \text{ đúng}$$

Bài 26. Cho hàm f xác định trên $(0, +\infty)$ với $f(\alpha) = \int_0^1 \sqrt{1-x^\alpha}\,dx$.

Chứng minh rằng: $\dfrac{\alpha}{1+\alpha} < f(\alpha) < \dfrac{\alpha+\frac{1}{2}}{\alpha+1}$

Giải

Bước 1. Chứng minh $1-x^\alpha \le \sqrt{1-x^\alpha} \le 1-\frac{1}{2}x^\alpha,\ \forall x\in[0, 1]$ (1)

Bước 2. Từ (1) suy ra $\int_0^1 (1-x^\alpha)\,dx < \int_0^1 \sqrt{1-x^\alpha}\,dx < \int_0^1 \left[1-\frac{1}{2}x^\alpha\right]dx$

$$\Leftrightarrow \left[x-\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]_0^1 < f(\alpha) < \left[x-\frac{x^{\alpha+1}}{2(\alpha+1)}\right]_0^1 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{1+\alpha} < f(\alpha) < \frac{\alpha+\frac{1}{2}}{\alpha+1}$$

Bài 27. Cho $a > 0$ và hàm f liên tục trên $[a, +\infty)$ thỏa mãn $\int_a^t f^2(x)\,dx < \int_a^t x^2\,dx$ $(t > a)$.

Chứng minh rằng: $\int_a^b f(x)\,dx < \int_a^b x\,dx$ trong đó $b > a$

Chứng minh

Sử dụng bất đẳng thức ***CBS*** ta có: $\left(\int_a^t xf(x)\,dx\right)^2 \le \int_a^t x^2\,dx\int_a^t f^2(x)\,dx$

$$0 \le \int_a^t f^2(x)\,dx < \int_a^t x^2\,dx \Rightarrow \left(\int_a^t xf(x)\,dx\right)^2 < \left(\int_a^t x^2\,dx\right)^2 \Rightarrow \int_a^t xf(x)\,dx < \int_a^t x^2\,dx$$

Xét $F(t) = \int_a^t x[x-f(x)]\,dx$. Ta có: $F'(t) = t[t-f(t)]$, $F(a) = 0$, $F(b) > 0$ và $F(t) > 0$

$\forall t\in(a, b) \Rightarrow \int_a^b [t-f(t)]\,dt = \int_a^b \frac{1}{t}F'(t)\,dt$. Đặt $u = \frac{1}{t}$; $dv = F'(t)\,dt \Rightarrow du = -\frac{dt}{t^2}$; $v = F(t)$

$$\Rightarrow \int_a^b [t-f(t)]\,dt = \frac{1}{t}F(t)\Big|_a^b + \int_a^b \frac{F(t)}{t^2}\,dt = \frac{F(b)}{b} + \int_a^b \frac{F(t)}{t^2}\,dt > 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx < \int_a^b x\,dx$$

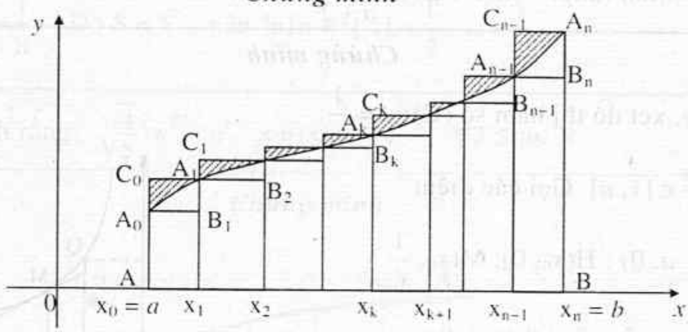
Bài 28. Cho hàm số $f(x)$ liên tục, không âm trên $[a, b]$. Gọi π là 1 phân hoạch tùy ý của đoạn $[a, b]$ bởi các điểm chia $x_1, x_2, ..., x_n$ $(a = x_0 < ... < x_n = b)$. Chứng minh rằng:

1. Nếu $f(x)$ đồng biến $[a, b]$ thì $\sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1})f(x_{k-1}) < \int_a^b f(x)\,dx < \sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1})f(x_k)$

2. Nếu $f(x)$ đồng biến trên $[a, b]$ và $f''(x) > 0$ $\forall x \in [a, b]$ thì

$$\int_a^b f(x)\,dx < \sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1})\frac{f(x_k) + f(x_{k-1})}{2}$$

Chứng minh



1. Đặt $C_k\left(x_k; f(x_{k+1})\right); B_{k+1}\left(x_{k+1}; f(x_k)\right); A_k\left(x_k; f(x_k)\right); A(a;0); B(b;0)$

Gọi S là diện tích của hình thang cong giới hạn bởi: $y = f(x)$, $x = a$; $x = b$; $y = 0$, khi đó diện tích của hình thang cong này là $S = \int_a^b f(x)\,dx$

Gọi S_1 là diện tích của đa giác $AC_0A_1C_1...A_{n-1}C_{n-1}A_nB$ gồm tổng diện tích của các hình chữ nhật với các độ dài là $f(x_k)$;$(x_k - x_{k-1})$. Khi đó, $S_1 = \sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1})f(x_k)$

Gọi S_2 là diện tích của đa giác $AA_0B_1A_1...B_{n-1}A_{n-1}B_nB$ gồm tổng diện tích của các hình chữ nhật với các độ dài là $f(x_{k-1})$;$(x_k - x_{k-1})$. Khi đó, $S_2 = \sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1})f(x_{k-1})$

Theo giả thiết, hàm $f(x)$ tăng trên $[a, b]$ nên $S_2 < S < S_1$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1})f(x_{k-1}) < \int_a^b f(x)\,dx < \sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1})f(x_k)$$

2. Gọi S_3 là diện tích của đa giác $AA_0A_1...A_nB$.

Khi đó, $S_3 = \sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1})\frac{f(x_k) + f(x_{k-1})}{2}$.

Do $f''(x) > 0$ trên $[a, b]$, Ta có: $\int_a^b f(x)\,dx < \sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1})\frac{f(x_k) + f(x_{k-1})}{2}$

V. ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN TRONG CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

Thông thường để chứng minh một bất đẳng thức ta thường tìm cách quy nó về việc khảo sát một hàm số nào đó bằng công cụ đạo hàm. Trong mục này ta sẽ nhìn hai vế của một bất đẳng thức như là nguyên hàm của các hàm số nào đó, theo cách này việc chứng minh bất đẳng thức sẽ quy về so sánh tính chất của hai hàm số trên toàn miền xác định. Nếu gọi cách chứng minh bất đẳng thức bằng đạo hàm là cách giải địa phương, thì chứng minh bất đẳng thức bằng tích phân có thể gọi là phương pháp toàn cục. Dưới đây là một số bài tập minh họa.

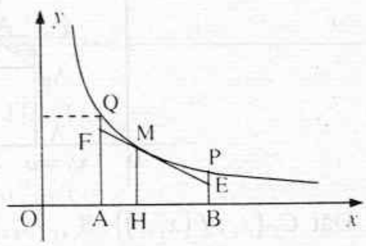
Bài 1. Chứng minh rằng: $\ln(1+a) > \dfrac{2a}{a+2}\ \forall a > 1$

Chứng minh

Trong hệ Oxy, xét đồ thị hàm số (C): $y = \dfrac{1}{x}$.

Lấy $x_0 = \dfrac{1+a}{2} \in [1, a]$. Gọi các điểm

A(1, 0); B(1+ a, 0) ; H(x_0, 0); M(x_0, $\dfrac{1}{x_0}$)



Ta có $y' = \dfrac{-1}{x^2} \Rightarrow y'' = \dfrac{2}{x^3} > 0\ \forall x > 0$

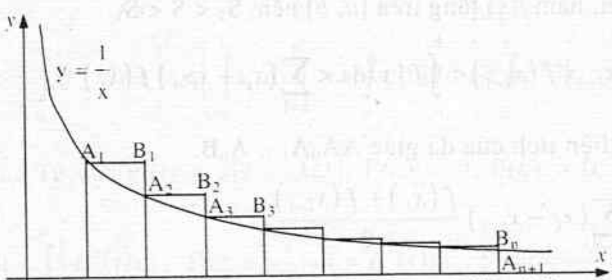
$\Rightarrow y = \dfrac{1}{x}$ là hàm lồi $\forall x > 0$ nên tiếp tuyến (t) tại M luôn nằm dưới đồ thị (C).

Giả sử tiếp tuyến (t) cắt các đường thẳng $x = 1 + a$, $x = 1$ tại 2 điểm E và F và cắt đồ thị (C) tại 2 điểm P, Q. Do diện tích hình thang cong ABPQ lớn hơn diện tích hình thang ABEF nên ta có bất đẳng thức:

$$\ln(1+a) = \int_1^{1+a} \frac{dx}{x} = S(ABPQ) > S(ABEF) = AB.MH = a \cdot \frac{1}{(1+a)/2} = \frac{2a}{a+2}$$

Bài 2. Chứng minh rằng: $\ln(n+1) < 1 + \dfrac{1}{2} + ... + \dfrac{1}{n}\quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

Chứng minh



Xét hàm số $y=\frac{1}{x}$ với $x\in[1,n+1]$. Gọi S là diện tích hình thang cong giới hạn bởi các đường

$$\left\{x=1, x=n+1, y=0, y=\frac{1}{2}\right\} \Rightarrow S=\int_1^{n+1}\frac{dx}{x}=\ln(n+1)$$

Gọi $A_1(1,1), A_2\left(2,\frac{1}{2}\right),\ldots, A_k\left(k,\frac{1}{k}\right),\ldots, A_n\left(n,\frac{1}{n}\right), A_{n-1}\left(n+1,\frac{1}{n+1}\right)$

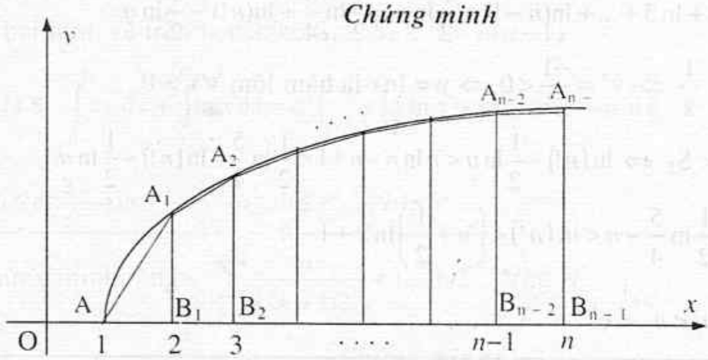
$B_1(2,1), B_2\left(3,\frac{1}{2}\right),\ldots, B_k\left(k,\frac{1}{k-1}\right),\ldots, B_n\left(n,\frac{1}{n-1}\right)$ và $A(1,0)$; $B(n+1,0)$

Gọi S^* là diện tích đa giác $AA_1B_1A_2B_2\ldots A_kB_k\ldots A_nB_nB$ thì dễ thấy

$S^*=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}$. Do $S<S^*$, nên $\ln(n+1)<1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}$

Bài 3. Chứng minh rằng: $\sqrt{\frac{4}{5}}\cdot n^{n+\frac{1}{2}}e^{1-n}<n!<n^{n+\frac{1}{2}}e^{1-n}\quad \forall 2\le n\in\mathbb{N}^*$

Chứng minh



Xét hàm số $y=\ln x$ với $x\in[1,n]$. Gọi S là diện tích tam giác cong giới hạn bởi các đường $\{x=1, x=n, y=0, y=\ln x\}$. Ta có:

$$S=\int_1^n \ln x\,dx=[x\ln x]_1^n-\int_1^n dx=[x\ln x-x]_1^n=n\ln n-n+1$$

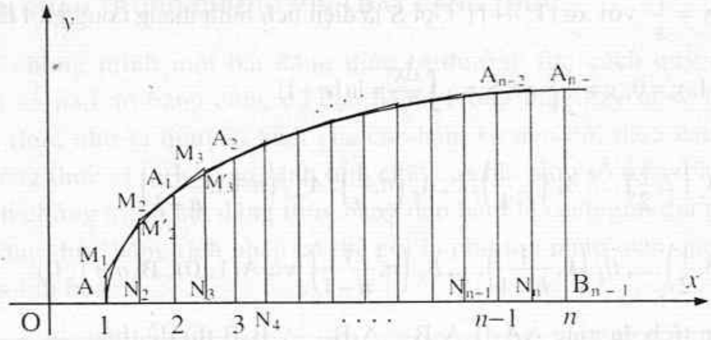
Gọi $A(1,0)$, $A_1(2,\ln 2)$, ..., $A_{k-1}(k,\ln k)$, ..., $A_{n-1}(n,\ln n)$

Và $B_1(2,0)$; $B_2(3,0)$;...; $B_{k-1}(k,0)$; ... ; $B_{n-1}(n,0)$.

Khi đó diện tích S^* của đa giác $AA_1A_2\ldots A_{n-1}B_n$ là:

$$S_1=\frac{1}{2}\left(\ln 2+(\ln 2+\ln 3)+(\ln 3+\ln 4)+\ \ldots+\left[\ln(n-2)+\ln(n-1)\right]+\left[\ln(n-1)+\ln n\right]\right)$$

$$S_1=\ln 2+\ln 3+\ldots+\ln(n-1)+\frac{1}{2}\ln n=\ln 2+\ln 3+\ldots+\ln n-\frac{1}{2}\ln n=\ln(n!)-\frac{1}{2}\ln n$$



Gọi S_2 là tổng diện tích của hình thang $AM_1M_2N_2$, $(n-2)$ hình thang $N_kM'_kM_{k+1}N_{k+1}$ $\left(k=\overline{2,n-1}\right)$ và hình chữ nhật $N_nM'_nA_{n-1}B_{n-1}$ và M_1M_2 là tiếp tuyến của đồ thị $y=\ln x$ tại điểm có hoành độ $x=\frac{5}{4}$; $N_k\left(k-\frac{1}{2},0\right), N_{k+1}\left(k+\frac{1}{2},0\right)$; AM_1, N_kM_k, $N_kM'_k$ song song với trục tung M'_kM_{k+1} và là tiếp tuyến với đồ thị $y=\ln x$ tại A_{k-1}

$$\Rightarrow S_2=\frac{1}{2}\ln\frac{5}{4}+\ln 2+\ln 3+\ldots+\ln(n-1)+\frac{1}{2}\ln n=\frac{1}{2}\ln\frac{5}{4}+\ln(n!)-\frac{1}{2}\ln n$$

Khi đó $y'=(\ln x)'=\frac{1}{x}\Rightarrow y''=\frac{-1}{x^2}<0\Rightarrow y=\ln x$ là hàm lõm $\forall x>0$

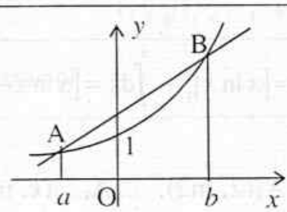
Từ đó suy ra $S_1<S<S_2\Leftrightarrow \ln(n!)-\frac{1}{2}\ln n<n\ln n-n+1<\frac{1}{2}\ln\frac{5}{4}+\ln(n!)-\frac{1}{2}\ln n$

$$\Rightarrow\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln n+1-\frac{1}{2}\ln\frac{5}{4}-n<\ln(n!)<\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln n+1-n$$

$$\Rightarrow\sqrt{\frac{4}{5}}\cdot n^{n+\frac{1}{2}}e^{1-n}<n!<n^{n+\frac{1}{2}}e^{1-n}$$

Bài 4. Chứng minh rằng: $\dfrac{e^a-e^b}{a-b}<\dfrac{e^a+e^b}{2}\quad\forall\begin{cases}a\neq b\\ a,b\in R\end{cases}$

Chứng minh



Không mất tính tổng quát, giả sử $a<b$. Ta có

$$\frac{e^a-e^b}{a-b}<\frac{e^a+e^b}{2}\Leftrightarrow e^b-e^a<\frac{e^a+e^b}{2}(b-a)$$

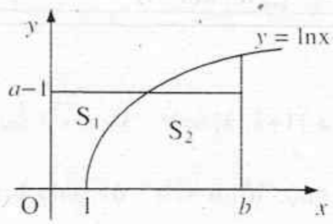
Xét hàm số $y=e^x\Rightarrow y''=e^x>0$, $\forall x\in R$

$\Rightarrow y=e^x$ là hàm lồi trên R. Gọi A, B là giao điểm của đồ thị $y=e^x$ và 2 đường thẳng $x=a$, $x=b$. Ta có diện tích hình thang cong giới hạn bởi các đường $\{x=a, x=b, y=0, y=e^x\}$ nhỏ hơn diện tích hình thang AabB

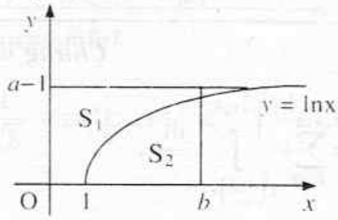
$$\Rightarrow\int_a^b e^x\,dx<\frac{e^a+e^b}{2}(b-a)\Leftrightarrow e^b-e^a<\frac{e^a+e^b}{2}(b-a)\Leftrightarrow\frac{e^a-e^b}{a-b}<\frac{e^a+e^b}{2}$$

Bài 5. Chứng minh rằng: $ab \le e^{a-1} + b\ln b, \quad \forall a, b \ge 1$

Chứng minh



Hình 1: $\ln b \ge a-1$



Hình 2: $\ln b \le a-1$

Xét hàm số $y = \ln x \ \forall x \ge 1 \Leftrightarrow x = e^y \ \ \forall y \ge 0$.

Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi $\{x = 0,\ x = e^y,\ y = 0,\ y = a-1\}$

S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi $\{x = 1,\ x = b,\ y = 0,\ y = \ln x\}$

S là diện tích hình chữ nhật giới hạn bởi $\{x = 0,\ x = b,\ y = 0,\ y = a-1\}$

Trong cả hai hình vẽ trên ta đều có $S_1 + S_2 \ge S = b(a-1)$

$$\Leftrightarrow b(a-1) \le \int_0^{a-1} e^y\,dy + \int_1^b \ln x\,dx = e^y\Big|_0^{a-1} + \left[x\ln x - x\right]_1^b = e^{a-1} + b\ln b - b$$

$$\Leftrightarrow ab - b \le e^{a-1} + b\ln b - b \quad \Leftrightarrow ab \le e^{a-1} + b\ln b$$

Bài 6. Chứng minh rằng: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)2^k} < 1 - \ln 2, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

Chứng minh

$\forall x \in (0, 1)$ ta có: $1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1} = \dfrac{1-x^n}{1-x} < \dfrac{1}{1-x}$

$\forall t \in (0,1)$ ta có $\displaystyle\int_0^t \left(1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1}\right) dx < \int_0^t \frac{1}{1-x}\,dx \Rightarrow t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + \ldots + \frac{t^n}{n} < -\ln(1-t)$

$\forall z \in (0,1)$ ta có $\displaystyle\int_0^z \left(t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + \ldots + \frac{t^n}{n}\right) dt < -\int_0^z \ln(1-t)\,dt = z + (1-z)\ln(1-z)$

$$\Leftrightarrow \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{2\times 3} + \frac{z^4}{3\times 4} + \ldots + \frac{z^{n+1}}{n(n+1)} < z + (1-z)\ln(1-z).$$

Chia 2 vế cho $z > 0$ ta có:

$$\frac{z}{1\times 2} + \frac{z^2}{2\times 3} + \frac{z^3}{3\times 4} + \ldots + \frac{z^n}{n(n+1)} < 1 + \frac{1-z}{z}\ln(1-z) \text{ đúng } \forall z \in (0, 1).$$

Cho $z = \dfrac{1}{2}$ ta nhận được bất đẳng thức $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)2^k} < 1 - \ln 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

Bài 7. Chứng minh rằng: $(x-1)\sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n+(k+1)(x-1)}<\ln x<(x-1)\sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n+k(x-1)}\quad \forall x>1$

Chứng minh

Ta có $\ln x=\int\limits_1^x\frac{dt}{t}=\sum\limits_{k=0}^{n-1}\int\limits_{k\left(\frac{x-1}{n}\right)+1}^{1+(k+1)\frac{x-1}{n}}\frac{dt}{t}$.

Chú ý rằng khi $1+k\cdot\frac{x-1}{n}<t<1+(k+1)\cdot\frac{x-1}{n}$ ta có

$$\frac{1}{1+k\cdot\frac{x-1}{n}}>\frac{1}{t}>\frac{1}{1+(k+1)\cdot\frac{x-1}{n}}\Leftrightarrow\frac{n}{n+k(x-1)}>\frac{1}{t}>\frac{n}{n+(k+1)(x-1)}$$

$$\Rightarrow\int\limits_{1+k\cdot\frac{x-1}{n}}^{1+(k+1)\frac{x-1}{n}}\frac{n}{n+k(x-1)}dt>\int\limits_{1+k\cdot\frac{x-1}{n}}^{1+(k+1)\frac{x-1}{n}}\frac{dt}{t}>\int\limits_{1+k\cdot\frac{x-1}{n}}^{1+(k+1)\frac{x-1}{n}}\frac{n}{n+(k+1)(x-1)}dt$$

$$\Leftrightarrow\frac{n}{n+k(x-1)}\cdot\frac{x-1}{n}>\int\limits_{1+k\cdot\frac{x-1}{n}}^{1+(k+1)\frac{x-1}{n}}\frac{dt}{t}>\frac{n}{n+(k+1)(x-1)}\cdot\frac{x-1}{n}$$

$\Leftrightarrow\frac{x-1}{n+k(x-1)}>\int\limits_{1+k\cdot\frac{x-1}{n}}^{1+(k+1)\frac{x-1}{n}}\frac{dt}{t}>\frac{x-1}{n+(k+1)(x-1)}$. Cho k lấy từ 0, 1, 2, ..., $n-1$

$$\Rightarrow(x-1)\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n+k(x-1)}>\sum_{k=0}^{n-1}\int\limits_{1+k\cdot\frac{x-1}{n}}^{1+(k+1)\frac{x-1}{n}}\frac{dt}{t}=\ln x>(x-1)\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n+(k+1)(x-1)}$$

Bài 8. Chứng minh rằng: $\frac{2}{3}\cdot n\sqrt{n}<\sqrt{1}+\sqrt{2}+...+\sqrt{n}<\frac{2}{3}\left[(n+1)\sqrt{n+1}-1\right]\quad\forall n\in N$

Chứng minh

Ta có $\sqrt{x}\le\sqrt{k}\ \ \forall x\in[k-1,k]$ và $\sqrt{k}\le\sqrt{x}\ \forall x\in[k,k+1]\quad \left(k=\overline{1,n}\right)$

$$\Rightarrow\int\limits_{k-1}^{k}\sqrt{x}\,dx<\int\limits_{k-1}^{k}\sqrt{k}\,dx=\sqrt{k}=\int\limits_{k}^{k+1}\sqrt{k}\,dx<\int\limits_{k}^{k+1}\sqrt{x}\,dx.$$

Cho k chạy từ 1 đến n rồi cộng lại ta có

$$\frac{2}{3}x\sqrt{x}\Big|_0^n=\int\limits_0^n\sqrt{x}\,dx=\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{k-1}^{k}\sqrt{x}\,dx<\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}<\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{k}^{k+1}\sqrt{x}\,dx=\int\limits_1^{n+1}\sqrt{x}\,dx=\frac{2}{3}x\sqrt{x}\Big|_1^{n+1}$$

$$\Leftrightarrow\frac{2}{3}\cdot n\sqrt{n}<\sqrt{1}+\sqrt{2}+...+\sqrt{n}<\frac{2}{3}\left[(n+1)\sqrt{n+1}-1\right]$$

Bài 9. Chứng minh rằng: $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}}>2\left(\sqrt{n+1}-1\right)\ \forall n\in\mathbb{N}^*$

Chứng minh

Ta có $\sqrt{x}\ge\sqrt{k}\quad\forall x\in[k,k+1]\Leftrightarrow\frac{1}{\sqrt{x}}\le\frac{1}{\sqrt{k}}\quad\forall x\in[k,k+1]\Rightarrow\int_k^{k+1}\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{dx}<\int_k^{k+1}\frac{1}{\sqrt{k}}\mathrm{dx}$.

Cho k chạy từ 1 đến n rồi cộng lại ta có

$$\sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1}\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{dx}<\sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1}\frac{1}{\sqrt{k}}\mathrm{dx}\Leftrightarrow\int_1^{n+1}\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{dx}<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}$$

$$\Leftrightarrow\ 2\sqrt{x}\Big|_1^{n+1}=2\left(\sqrt{n+1}-1\right)<1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}}$$

Bài 10. Chứng minh rằng: $\frac{3}{2}-\frac{1}{n+1}\le 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2}<2\quad\forall n\in\mathbb{N}^*$

Chứng minh

Ta có $0<x-1\le k\le x\ \ \forall x\in[k,k+1]\Rightarrow 0<(x-1)^2\le k^2\le x^2\ \forall x\in[k,k+1]$

$$\Rightarrow\frac{1}{x^2}\le\frac{1}{k^2}\le\frac{1}{(x-1)^2}\ \ \forall x\in[k,k+1]\Rightarrow\int_k^{k+1}\frac{1}{x^2}\mathrm{dx}\le\int_k^{k+1}\frac{1}{k^2}\mathrm{dx}\le\int_k^{k+1}\frac{1}{(x-1)^2}\mathrm{dx}$$

Cho k chạy từ 2 đến n rồi cộng lại ta có

$\sum_{k=2}^{n}\int_k^{k+1}\frac{1}{x^2}\mathrm{dx}\le\sum_{k=2}^{n}\int_k^{k+1}\frac{1}{k^2}\mathrm{dx}\le\sum_{k=2}^{n}\int_k^{k+1}\frac{1}{(x-1)^2}\mathrm{dx}$. Cộng 1 vào các vế ta có

$$1+\int_2^{n+1}\frac{\mathrm{dx}}{x^2}\le 1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2}\le 1+\int_2^{n+1}\frac{\mathrm{dx}}{(x-1)^2}\ \Leftrightarrow 1+\frac{-1}{x}\Big|_2^{n+1}\le\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\le 1-\frac{1}{x-1}\Big|_2^{n+1}$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{3}{2}-\frac{1}{n+1}\le 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2}\le 2-\frac{1}{n}\quad\forall n\in\mathbb{N}^*$$

Bài 11. Không dùng bảng số, chứng minh rằng: $\ln 2>\frac{2}{3}$

Chứng minh

Biến đổi và sử dụng bất đẳng thức ***Buniakowski*** ta có:

$$\ln 2=\ln(x+1)\Big|_0^1=\int_0^1\frac{\mathrm{dx}}{x+1}=\frac{2}{3}\int_0^1(x+1)\,\mathrm{dx}.\int_0^1\frac{\mathrm{dx}}{x+1}>\frac{2}{3}\left[\int_0^1\sqrt{x+1}\cdot\frac{1}{\sqrt{x+1}}\mathrm{dx}\right]^2=\frac{2}{3}$$

Bài 12. Cho $0 < a < b$. Chứng minh rằng: $\dfrac{a-b}{a} < \ln\dfrac{a}{b} < \dfrac{a-b}{b}$

Chứng minh

$\forall x \in (a, b)$ Ta có bất đẳng thức: $\dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{x} > \dfrac{1}{b} \Rightarrow \dfrac{1}{a}\displaystyle\int_a^b dx > \int_a^b \dfrac{dx}{x} > \dfrac{1}{b}\int_a^b dx$

$\Leftrightarrow \dfrac{b-a}{a} > \ln|x|\Big|_a^b < \dfrac{b-a}{b} \Leftrightarrow \dfrac{b-a}{a} > \ln\dfrac{b}{a} < \dfrac{b-a}{b} \Leftrightarrow \dfrac{a-b}{a} < \ln\dfrac{a}{b} < \dfrac{a-b}{b}$

Bài 13. Chứng minh rằng: $|\arctan x - \arctan y| \le |x - y|$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$

Chứng minh

Đặt $u(t) = \arctan t \Rightarrow u'(t) = \dfrac{1}{1+t^2} > 0 \Rightarrow u(t)$ đồng biến R

Xét $x < y$. Với $x < t < y$ khi đó: $\dfrac{1}{1+t^2} \le 1 \Rightarrow \displaystyle\int_x^y \dfrac{dt}{1+t^2} < \int_x^y dt$

$\Rightarrow 0 < \arctan y - \arctan x < y - x \Leftrightarrow |\arctan x - \arctan y| < |x - y|$

Xét $y < x$. Với $y < t < x$ thì: $\dfrac{1}{1+t^2} \le 1 \Rightarrow \displaystyle\int_y^x \dfrac{dt}{1+t^2} < \int_y^x dt$

$\Rightarrow 0 < \arctan x - \arctan y < x - y \Leftrightarrow |\arctan x - \arctan y| < |x - y|$

Bài 14. 1. Chứng minh rằng: $x > \sin x$ và $\cos x > 1 - \dfrac{x^2}{2}$ $\forall x > 0$

2. Chứng minh rằng: $\sin x > x - \dfrac{x^3}{3!}$ và $\cos x < 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!}$ $\forall x > 0$

3. Chứng minh rằng: $\sin x < x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!}$ $\forall x > 0$

Chứng minh

1. Từ $\cos t \le 1 \Rightarrow \displaystyle\int_0^x \cos t\,dt < \int_0^x dt \Leftrightarrow \sin t\Big|_0^x < x \Leftrightarrow \sin x < x$ $\forall x > 0$

$\sin t < t$ $\forall t > 0 \Rightarrow \displaystyle\int_0^x \sin t\,dt < \int_0^x t\,dt \Leftrightarrow -\cos t\Big|_0^x < \dfrac{t^2}{2}\Big|_0^x \Leftrightarrow \cos x > 1 - \dfrac{x^2}{2}$ $\forall x > 0$

2. $\displaystyle\int_0^x \cos t\,dt > \int_0^x \left(1 - \dfrac{t^2}{2}\right)dt \Rightarrow \sin t\Big|_0^x > \left[t - \dfrac{t^3}{3!}\right]_0^x \Leftrightarrow \sin x > x - \dfrac{x^3}{3!}$ $\forall x > 0$

$\displaystyle\int_0^x \sin t\,dt > \int_0^x \left(t - \dfrac{t^3}{3!}\right)dt \Leftrightarrow -\cos t\Big|_0^x > \left[\dfrac{t^2}{2!} - \dfrac{t^4}{4!}\right]_0^x \Leftrightarrow \cos x < 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!}$ $\forall x > 0$

3. $\displaystyle\int_0^x \cos t\,dt < \int_0^x \left(1 - \dfrac{t^2}{2!} + \dfrac{t^4}{4!}\right)dt \Rightarrow \sin t\Big|_0^x < \left[t - \dfrac{t^3}{3!} + \dfrac{t^5}{5!}\right]_0^x \Leftrightarrow \sin x < x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!}$

Bài 15. Cho $x, y \in R$ thỏa mãn $0 < x \le y$. Chứng minh rằng:

$$xy(\operatorname{arccot} y - \operatorname{arccot} x) \le \ln\sqrt{\frac{(x^2+1)^y}{(y^2+1)^x}} \quad (1)$$

Chứng minh

$(1) \Leftrightarrow y\left[x\operatorname{arccot} x + \frac{1}{2}\ln(x^2+1)\right] \ge x\left[y\operatorname{arccot} y + \frac{1}{2}\ln(y^2+1)\right]$.

Xét hàm số $u(t) = \operatorname{arccot} t \ (0 \le t \le y)$. Ta có: $u'(t) = -\frac{1}{1+t^2} < 0$

$\Rightarrow u(t)$ nghịch biến trên $[0, y] \Rightarrow \int_0^x \operatorname{arccot} t\,dt \ge \int_0^y \operatorname{arccot} t\,dt$

$\Leftrightarrow t\operatorname{arccot} t\Big|_0^x + \int_0^x \frac{t\,dt}{t^2+1} \ge t\operatorname{arccot} t\Big|_0^y + \int_0^y \frac{t\,dt}{t^2+1}$

$\Leftrightarrow x\operatorname{arccot} x + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) \ge y\operatorname{arccot} y + \frac{1}{2}\ln(y^2+1)$. Do $0 < x < y$ thì

$\Rightarrow y\left[x\operatorname{arccot} x + \frac{1}{2}\ln(x^2+1)\right] \ge x\left[y\operatorname{arccot} y + \frac{1}{2}\ln(y^2+1)\right]$

$\Rightarrow xy(\operatorname{arccot} y - \operatorname{arccot} x) \le \ln\sqrt{\frac{(x^2+1)^y}{(y^2+1)^x}}$. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow x = y$

Bài 16. Chứng minh rằng: $(x-y)\left[2-(x+y)\right] < 2\ln\frac{1+x}{1+y} \quad \forall x > y > 0 \quad (1)$

Chứng minh

$(1) \Leftrightarrow 2(x-y) - (x^2-y^2) < 2\left[\ln(1+x) - \ln(1+y)\right]$.

Ta có: $1 > 1 - t^2 \Rightarrow \frac{1}{1+t} > 1 - t \quad \forall t > 0 \Rightarrow \int_y^x \frac{dt}{1+t} > \int_y^x (1-t)\,dt$

$\Rightarrow \ln(1+t)\Big|_y^x > \left(t - \frac{t^2}{2}\right)\Big|_y^x \Leftrightarrow \ln\frac{1+x}{1+y} > (x-y) - \frac{x^2-y^2}{2}$

$\Rightarrow 2\ln\frac{1+x}{1+y} > (x-y)\left[2-(x+y)\right] \Leftrightarrow (x-y)\left[2-(x+y)\right] < 2\ln\frac{1+x}{1+y}$

Bài 17. Chứng minh rằng: $1 + x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) \ge \sqrt{1+x^2}$, $\forall x \in R \quad (1)$

Chứng minh

Đặt $f(t) = \ln\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)$, $t > 0 \Rightarrow f(t) > 0 \ \forall t > 0$. Nếu $x = 0$ thì (1) đúng.

Nếu $x > 0$ thì với $0 < t \le x$ ta có: $\int_0^x \ln\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)dt > 0$

$$\Rightarrow t\ln\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)\Big|_0^x - \int_0^x \frac{t\,dt}{\sqrt{1+t^2}} > 0 \Rightarrow x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) - \sqrt{1+t^2}\Big|_0^x > 0$$

$$\Rightarrow x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) - \sqrt{1+x^2} + 1 > 0 \Leftrightarrow 1 + x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) \ge \sqrt{1+x^2}$$

Nếu $x < 0$ thì đặt $y = -x > 0$, ta có (1) $\Leftrightarrow 1 - y\ln\left(-y+\sqrt{1+y^2}\right) \ge \sqrt{1+y^2}$

$\Leftrightarrow 1 + y\ln\left(y+\sqrt{1+y^2}\right) \ge \sqrt{1+y^2}$ $\forall y > 0$ (đúng) $\Rightarrow$ (đpcm)

Bài 18. 1. Chứng minh rằng: $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 > \cos x \quad \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

2. Chứng minh rằng: $\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\sin^2 y} + \frac{1}{\sin^2 z} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2} - \frac{1}{z^2} \le 3 - \frac{12}{\pi^2} \; \forall x, y, z \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$

Chứng minh

1. Sử dụng $\sin x > x - \frac{x^3}{3!} \Rightarrow \frac{\sin x}{x} > 1 - \frac{x^2}{6} \Rightarrow \left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 > \left(1 - \frac{x^2}{6}\right)^3$

$$= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{216} > 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} > \cos x \quad \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

2. $\frac{1}{t^3} > \frac{\cos t}{\sin^3 t} \Rightarrow \int_x^{\pi/2} \frac{dt}{t^3} > \int_x^{\pi/2} \frac{\cos t}{\sin^3 t}dt \Leftrightarrow \frac{-1}{2t^2}\Big|_x^{\pi/2} > \frac{-1}{2\sin^2 t}\Big|_x^{\pi/2} \Leftrightarrow \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \le 1 - \frac{4}{\pi^2}$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\sin^2 y} + \frac{1}{\sin^2 z} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2} - \frac{1}{z^2} \le 3 - \frac{12}{\pi^2} \quad \forall x, y, z \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$$

Bài 19. Cho $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng: $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{a_i a_j}{i+j} \ge 0$

Chứng minh

Đặt $f(x) = a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n \Rightarrow \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{a_i a_j}{i+j} = \int_0^1 \frac{f^2(x)}{x}dx \ge 0$

Bài 20. $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng: $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{a_i a_j}{i+j-1} \ge 0$

Chứng minh

Đặt $f(x) = a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n \Rightarrow \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{a_i a_j}{i+j-1} = \int_0^1 \frac{f^2(x)}{x^2}dx \ge 0$

VI. ĐỔI BIẾN ĐỂ ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC THUẦN NHẤT

Bài 1. Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn $a\ge b\ge c$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{3a+b}+\frac{1}{3b+c}+\frac{1}{3c+a}\ge\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)$$

Chứng minh

• ***Bổ đề:*** Với mọi $x\ge y\ge z>0$ ta có: $x^3y+y^3z+z^3x\ge x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2$ (1)

• ***Chứng minh:*** Xét hiệu $\left(x^3y+y^3z+z^3x\right)-\left(xy^3+yz^3+zx^3\right)=(x-y)(x-z)(y-z)(x+y+z)\ge 0$

Suy ra $VT(1)=x^3y+y^3z+z^3x\ge\frac{1}{2}\left(\left(x^3y+y^3z+z^3x\right)+\left(xy^3+yz^3+zx^3\right)\right)$

$$=\frac{xy}{2}\left(x^2+y^2\right)+\frac{yz}{2}\left(y^2+z^2\right)+\frac{zx}{2}\left(z^2+x^2\right)\ge(xy)^2+(yz)^2+(zx)^2=VP(1)\Rightarrow\text{(đpcm)}.$$

• ***Áp dụng:*** Đặt $x=t^a, y=t^b, z=t^c$, bất đẳng thức (1) trở thành

$$t^{3a+b}+t^{3b+c}+t^{3c+a}\ge t^{2a+2b}+t^{2b+2c}+t^{2c+2a}\Leftrightarrow\frac{1}{t}\left(t^{3a+b}+t^{3b+c}+t^{3c+a}\right)\ge\frac{1}{t}\left(t^{2a+2b}+t^{2b+2c}+t^{2c+2a}\right)$$

Lấy tích phân từ 0 đến 1 hai vế theo biến t ta có:

$$\int_0^1\frac{1}{t}\left(t^{3a+b}+t^{3b+c}+t^{3c+a}\right)dt\ge\int_0^1\frac{1}{t}\left(t^{2a+2b}+t^{2b+2c}+t^{2c+2a}\right)dt$$

$$\Leftrightarrow\int_0^1\left(t^{3a+b-1}+t^{3b+c-1}+t^{3c+a-1}\right)dt\ge\int_0^1\left(t^{2a+2b-1}+t^{2b+2c-1}+t^{2c+2a-1}\right)dt$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{t^{3a+b}}{3a+b}+\frac{t^{3b+c}}{3b+c}+\frac{t^{3c+a}}{3c+a}\right)\Bigg|_0^1\ge\left(\frac{t^{2a+2b}}{2a+2b}+\frac{t^{2b+2c}}{2b+2c}+\frac{t^{2c+2a}}{2c+2a}\right)\Bigg|_0^1$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{3a+b}+\frac{1}{3b+c}+\frac{1}{3c+a}\ge\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

Bài 2. Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{3a}+\frac{1}{3b}+\frac{1}{3c}+\frac{3}{a+b+c}\ge\frac{1}{2a+b}+\frac{1}{2b+c}+\frac{1}{2c+a}+\frac{1}{2b+a}+\frac{1}{2c+b}+\frac{1}{2a+c}$$

Chứng minh

• ***Bổ đề:*** (*Bất đẳng thức* **Schur**) Với mọi $x,y,z>0$ ta có

$$x^3+y^3+z^3+3xyz\ge xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x)$$

• ***Áp dụng:*** Đặt $x=t^a, y=t^b, z=t^c$, bất đẳng thức trở thành

$$t^{3a}+t^{3b}+t^{3c}+3t^{a+b+c}\ge t^{a+b}\left(t^a+t^b\right)+t^{b+c}\left(t^b+t^c\right)+t^{c+a}\left(t^c+t^a\right)$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{t}\left(t^{3a}+t^{3b}+t^{3c}+3t^{a+b+c}\right)\ge\frac{1}{t}\left(t^{a+b}\left(t^a+t^b\right)+t^{b+c}\left(t^b+t^c\right)+t^{c+a}\left(t^c+t^a\right)\right)$$

Lấy tích phân từ 0 đến 1 hai vế theo biến t ta có

$$\int_0^1 \frac{1}{t}\left(t^{3a}+t^{3b}+t^{3c}+3t^{a+b+c}\right)dt \ge \int_0^1 \frac{1}{t}\left(t^{a+b}\left(t^a+t^b\right)+t^{b+c}\left(t^b+t^c\right)+t^{c+a}\left(t^c+t^a\right)\right)dt$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{t^{3a}}{3a}+\frac{t^{3b}}{3b}+\frac{t^{3c}}{3c}+3\frac{t^{a+b+c}}{a+b+c}\right)\Big|_0^1 \ge \left(\frac{t^{2a+b}}{2a+b}+\frac{t^{2b+c}}{2b+c}+\frac{t^{2c+a}}{2c+a}+\frac{t^{2b+a}}{2b+a}+\frac{t^{2c+b}}{2c+b}+\frac{t^{2a+c}}{2a+c}\right)\Big|_0^1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3a}+\frac{1}{3b}+\frac{1}{3c}+\frac{3}{a+b+c} \ge \frac{1}{2a+b}+\frac{1}{2b+c}+\frac{1}{2c+a}+\frac{1}{2b+a}+\frac{1}{2c+b}+\frac{1}{2a+c}.$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

Bài 3. Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng :

$$\frac{1}{4a}+\frac{1}{4b}+\frac{1}{4c}+\frac{1}{a+3b}+\frac{1}{b+3c}+\frac{1}{c+3a} \ge \frac{2}{3a+b}+\frac{2}{3b+c}+\frac{2}{3c+a}$$

Chứng minh

• ***Bổ đề:*** Với mọi $x,y,z>0$ ta có: $x^4+y^4+z^4+xy^3+yz^3+zx^3 \ge 2\left(x^3y+y^3z+z^3x\right)$ (1)

• ***Chứng minh:*** $VT(1)-VP(1)=\sum_{cyc}\left(a^2-ab+bc-b^2\right)\ge 0$.

• ***Áp dụng:*** Đặt $x=t^a, y=t^b, z=t^c$, bất đẳng thức trên trở thành

$$t^{4a}+t^{4b}+t^{4c}+t^{a+3b}+t^{b+3c}+t^{c+3a} \ge 2\left(t^{3a+b}+t^{3b+c}+t^{3c+a}\right)$$

$$\Leftrightarrow t^{4a-1}+t^{4b-1}+t^{4c-1}+t^{a+3b-1}+t^{b+3c-1}+t^{c+3a-1} \ge 2\left(t^{3a+b-1}+t^{3b+c-1}+t^{3c+a-1}\right)$$

Lấy tích phân theo biến t từ 0 đến 1 cả hai vế ta được

$$\int_0^1\left(t^{4a-1}+t^{4b-1}+t^{4c-1}+t^{a+3b-1}+t^{b+3c-1}+t^{c+3a-1}\right)dt \ge 2\int_0^1\left(t^{3a+b-1}+t^{3b+c-1}+t^{3c+a-1}\right)dt$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{t^{4a}}{4a}+\frac{t^{4a}}{4a}+\frac{t^{4a}}{4a}+\frac{t^{a+3b}}{a+3b}+\frac{t^{b+3c}}{b+3c}+\frac{t^{c+3a}}{c+3a}\right)\Big|_0^1 \ge 2\left(\frac{t^{3a+b}}{3a+b}+\frac{t^{3b+c}}{3b+c}+\frac{t^{3c+a}}{3c+a}\right)\Big|_0^1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4a}+\frac{1}{4b}+\frac{1}{4c}+\frac{1}{a+3b}+\frac{1}{b+3c}+\frac{1}{c+3a} \ge \frac{2}{3a+b}+\frac{2}{3b+c}+\frac{2}{3c+a}$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

Bài 4. Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{4a}+\frac{1}{4b}+\frac{1}{4c}+\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a} \ge \frac{3}{3a+b}+\frac{3}{3b+c}+\frac{3}{3c+a}$$

Chứng minh

• ***Bổ đề:*** Với mọi $x,y,z>0$ ta có: $\left(x^2+y^2+z^2\right)^2 \ge 3\left(x^3y+y^3z+z^3x\right)$.

• ***Áp dụng:*** Đặt $x=t^a, y=t^b, z=t^c$, bất đẳng thức trên trở thành

$$\left(t^{2a}+t^{2b}+t^{2c}\right)^2 \ge 3\left(t^{3a+b}+t^{3b+c}+t^{3c+a}\right) \Leftrightarrow \frac{1}{t}\left(t^{2a}+t^{2b}+t^{2c}\right)^2 \ge \frac{3}{t}\left(t^{3a+b}+t^{3b+c}+t^{3c+a}\right),$$

Lấy tích phân cả 2 vế ta được

$$\int_0^1 \frac{1}{t}\left(t^{2a}+t^{2b}+t^{2c}\right)^2 dt \ge 3\int_0^1 \frac{1}{t}\left(t^{3a+b}+t^{3b+c}+t^{3c+a}\right)dt$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 \left(t^{4a-1} + t^{4b-1} + t^{4c-1} + 2t^{2a+2b-1} + 2t^{2b+2c-1} + 2t^{2c+2a-1}\right)dt \ge \int_0^1 \left(t^{3a+b-1} + t^{3b+c-1} + t^{3c+a-1}\right)dt$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{t^{4a}}{4a} + \frac{t^{4b}}{4b} + \frac{t^{4c}}{4c} + \frac{t^{2a+2b}}{a+b} + \frac{t^{2b+2c}}{b+c} + \frac{t^{2c+2a}}{c+a}\right)\Big|_0^1 \ge \left(\frac{t^{3a+b}}{3a+b} + \frac{t^{3b+c}}{3b+c} + \frac{t^{3c+a}}{3c+a}\right)\Big|_0^1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4a} + \frac{1}{4b} + \frac{1}{4c} + \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \ge \frac{3}{3a+b} + \frac{3}{3b+c} + \frac{3}{3c+a}$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Bài 5. Cho $a, b, c, d > 0$. Chứng minh rằng :

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{8}{a+b+c+d} \ge \frac{2}{a+b} + \frac{2}{a+c} + \frac{2}{a+d} + \frac{2}{b+c} + \frac{2}{b+d} + \frac{2}{c+d}$$

Chứng minh

• ***Bổ đề:*** Với mọi $x, y, z > 0$ ta có: $3\left(x^4 + y^4 + z^4 + t^4\right) + 4xyzt \ge \left(x^2 + y^2 + z^2 + t^2\right)^2$

• ***Áp dụng:*** Đặt $x = \lambda^a, y = \lambda^b, z = \lambda^c, t = \lambda^d$, bất đẳng thức trên trở thành

$$3(\lambda^{4a} + \lambda^{4b} + \lambda^{4c} + \lambda^{4d}) + 4\lambda^{a+b+c+d} \ge (\lambda^{2a} + \lambda^{2b} + \lambda^{2c} + \lambda^{2d})^2$$

$$\Leftrightarrow 2\frac{1}{\lambda}(\lambda^{4a} + \lambda^{4b} + \lambda^{4c} + \lambda^{4d}) + 4\frac{1}{\lambda}\lambda^{a+b+c+d} \ge 2\frac{1}{\lambda}\sum_{sym}\lambda^{2a+2b}$$

Lấy tích phân từ 0 đến 1 theo biến λ, ta có

$$2\int_0^1 \frac{1}{\lambda}(\lambda^{4a} + \lambda^{4b} + \lambda^{4c} + \lambda^{4d}) + 4\int_0^1 \frac{1}{\lambda}\lambda^{a+b+c+d} \ge 2\int_0^1 \frac{1}{\lambda}\sum_{sym}\lambda^{2a+2b}$$

$$\left(\frac{\lambda^{4a}}{2a} + \frac{\lambda^{4b}}{2b} + \frac{\lambda^{4c}}{2c} + \frac{\lambda^{4d}}{2d}\right)\Big|_0^1 + 4\left(\frac{\lambda^{a+b+c+d}}{a+b+c+d}\right)\Big|_0^1 \ge \left(\sum_{sym}\frac{\lambda^{2a+2b}}{a+b}\right)\Big|_0^1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{8}{a+b+c+d} \ge \frac{2}{a+b} + \frac{2}{a+c} + \frac{2}{a+d} + \frac{2}{b+c} + \frac{2}{b+d} + \frac{2}{c+d}$$

Bài 6. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{4a} + \frac{1}{4b} + \frac{1}{4c} + \frac{\sqrt{2}}{3a+b} + \frac{\sqrt{2}}{3b+c} + \frac{\sqrt{2}}{3c+a} \ge \frac{1+\sqrt{2}}{a+3b} + \frac{1+\sqrt{2}}{b+3c} + \frac{1+\sqrt{2}}{c+3a}$$

Chứng minh

• ***Bổ đề:*** Với mọi $x, y, z > 0$ ta có:

$$x^4 + y^4 + z^4 + \sqrt{2}\left(x^3y + y^3z + z^3x\right) \ge \left(1+\sqrt{2}\right)\left(xy^3 + yz^3 + zx^3\right) \quad (*)$$

• ***Áp dụng:*** Đặt $x = t^a, y = t^b, z = t^c$ thì (*) trở thành

$$t^{4a-1} + t^{4b-1} + t^{4c-1} + \sqrt{2}\left(t^{3a+b-1} + t^{3b+c-1} + t^{3c+a-1}\right) \ge \left(1+\sqrt{2}\right)\left(t^{a+3b-1} + t^{b+3c-1} + t^{c+3a-1}\right)$$

Lấy tích phân 2 vế trong $[0,1]$ ta có điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

VI. BÀI TẬP DÀNH CHO BẠN ĐỌC TỰ GIẢI

Bài 1. Chứng minh rằng: $\dfrac{-\pi}{4} < \displaystyle\int_0^2 \frac{\cos x + \sqrt{3}\sin x}{x^2+4} < \frac{\pi}{4}$

Bài 2. Chứng minh rằng: $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x}\,dx > \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx$

Bài 3. Chứng minh rằng: $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2\pi}} \sin(x^2)\,dx > 0$

Bài 4. Chứng minh rằng: $I(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\sin t}{1+t}\,dt \ge 0 \ \forall x \ge 0$

Bài 5. Chứng minh rằng: $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{8}} \left(\frac{\sin^{n+2} x}{\cos^n x} + \frac{\cos^{n+2} x}{\sin^n x}\right)dx \ge \frac{\pi}{8}$

Bài 6. Chứng minh rằng: $\displaystyle\int_2^x t^2 \arctan^n t\,dt \ge \frac{x^{n+3} - 2^{n+2}}{n+3}$; $\displaystyle\int_0^x t\tan^n t\,dt \ge \frac{x^{n+2}}{n+2}$

Bài 7. Chứng minh rằng: $9 < \displaystyle\int_0^3 \sqrt[4]{x^4+1}\,dx + \int_1^3 \sqrt[4]{x^4-1}\,dx < 9.0001$

Bài 8. Chứng minh rằng: $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^4+1}{x(x^2+a^2)^2}\,dx > \frac{3}{(1+a^2)(4+a^2)}$

Bài 9. Chứng minh rằng: $\displaystyle\int_a^{2a} \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x^4+4a^4}\,dx < \frac{1}{8a^2}$

Bài 10. Chứng minh rằng: $\displaystyle\int_{-a}^{a} \frac{dx}{x^{2n}.\sqrt{a^2-x^2}} > 2a^{2n+1}\cdot\frac{(2n+1)^{\frac{2n+1}{2}}}{(2n)^n}$

Bài 11. Chứng minh rằng: $\displaystyle\int_{a\sqrt{2}}^{2a} \frac{dx}{x.\sqrt[4]{x^4-a^4}} < \frac{\pi}{a^2}\left[\frac{1}{4}\ln\left(\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{3}\ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right]$

Bài 12. Chứng minh rằng: $\displaystyle\int_{a/\sqrt{2}}^{a} x\sqrt{(a^2-x^2)^3}\,dx < \frac{a^5}{4}\left[\ln\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+1}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

Bài 13. Chứng minh rằng: $\displaystyle\int_1^2 x^2 \sin^n x\,dx \ge \left(\frac{2}{\pi}\right)^n \left(\frac{2^{n+3}-1}{n+3}\right)$

Bài 14. Chứng minh rằng: $\int_0^{\pi/2}\left(a^2\cdot\sqrt[3]{\cos x}\tan x+b^2\sin x\right)dx>\pi ab$

Bài 15. Chứng minh rằng: $\int_{-1}^{1}\left[(1+x)^n+(1-x)^n\right]dx\le 2^{n+1}$

Bài 16. Chứng minh rằng: $\int_0^1\frac{e^x\sin x}{x}dx>1.36$; $\int_1^{10}x^x\,dx>\frac{10^{10}}{1+\ln 10}$

Bài 17. Chứng minh rằng: $\int_0^{\pi/2}e^{ax}(\cos x-a\sin x)dx>\frac{\pi}{2}$

Bài 18. Chứng minh rằng: $\int_{-2}^{2}\left[x\ln\left(x^2-3\right)+\sqrt{3}\ln\frac{x+\sqrt{3}}{x-\sqrt{3}}\right]dx<4\left(4-\sqrt{3}\ln\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}\right)$

Bài 19. Cho $I(m)=\int_0^1\left|x^2+m\right|dx$. Chứng minh rằng: $I(m)\ge I\left(\frac{-1}{4}\right)\ \forall m\in\mathbb{R}$

Bài 20. Chứng minh rằng:

$$\arctan 1+\arctan 2+...+\arctan n<\left(n-\frac{1}{2}\right)\arctan n-\ln\sqrt{1+n^2}\quad (n\in\mathbb{N}^*)$$

Bài 21. Cho hàm số $f(x)$ và đạo hàm $f'(x)$ liên lục trên $[a,b]$ thỏa mãn $f(a)=0$.Cho $M=\underset{x\in[a,b]}{\mathrm{Max}}\left|f'(x)\right|$.Chứng minh rằng: $\left|f(x)\right|\le M(x-a)$, $\forall x[a,b]$

Bài 22. Giả sử hàm số $f(x)$ và đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $[0, 1]$.

Chứng minh rằng: $\int_0^1\left|f(x)\right|dx\le \mathrm{Max}\left\{\left|\int_0^1 f(x)\,dx\right|,\int_0^1\left|f'(x)\right|dx\right\}$

Bài 23. Giả sử hàm số $f(x)$ cùng đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $[a, b]$.

Chứng minh rằng: $(b-a)\int_a^b f'^2(x)\,dx\ge\left[f(b)-f(a)\right]^2$

Bài 24. Giả sử hàm số $f(x)$ cùng đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $[a, b]$ thỏa mãn $f(a)=0$ và tồn tại $k>0$ sao cho $\left|f'(x)\right|\le k\left|f(x)\right|\ \forall x\in[a, b]$.

Chứng minh rằng: $f(x)\equiv 0\ \forall x\in[a, b]$

Bài 25. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a, b]$ với $f''(x)>0\ \forall x\in(a, b)$.

Chứng minh rằng: $\int_a^b f(x)\,dx\ge(b-a)\left[f(c)+\left(\frac{b+a}{2}-c\right)f'(c)\right]\quad\forall c\in(a, b)$

Bài 26. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a, b]$ với $f''(x) > 0 \ \forall x \in (a, b)$.

Chứng minh rằng: $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le \dfrac{f(a)+f(b)}{2}(b-a)$

Bài 27. Cho $T_n(x)$ là đa thức Chebyshev bậc n $(n \ge 2)$.

Chứng minh rằng: $\int_{-1}^{1} T_n^2(x)\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx < \dfrac{\pi\sqrt{2}}{8}$

Bài 28. Cho hàm số $f(x)$ và $f''(x)$ liên tục trên $[a, b]$ thỏa mãn

$f(a) = f(b) = 0$ và $f(x) > 0 \ \forall x \in (a, b)$. Cho $M = \underset{x\in[a,b]}{\text{Max}} f(x)$.

1. Chứng minh rằng: $\exists\, c_1, c_2 \in (a, b)$ với $c_1 < c_2$ sao cho $f'(c_1) - f'(c_2) \ge \dfrac{4M}{b-a}$

2. Chứng minh rằng: $\int_a^b \dfrac{|f''(x)|}{f(x)}dx \ge \dfrac{4}{b-a}$

Bài 29. Cho $f(x)$ là hàm liên tục và đồng biến $[0, c)$ với $c > 0$. Giả sử $f(0) = 0$ và lấy các điểm $a \in [0, c)$; $b \in [0, f(c))$. Gọi $f^{-1}(x)$ là hàm ngược của $f(x)$. Chứng minh rằng: $\int_0^a f(x)\,dx + \int_0^b f^{-1}(x)\,dx \ge ab$

(Bất đẳng thức tích phân Young)

Bài 30. Cho dãy các hàm $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ liên tục trên $[a, b]$ sao cho $\int_a^b f_n^2(x)\,dx = 1$, $\forall n = 1, 2, \ldots$ Chứng minh rằng luôn tồn tại $p_1, p_2, \ldots, p_k$ thỏa mãn $\sum_{i=1}^{k} p_i^2 = 1$ sao cho $\underset{x\in[a,b]}{\text{Max}}\left|\sum_{i=1}^{k} p_i f_i(x)\right| > 100$

Bài 31. Cho hàm f liên tục và đồng biến trên R. Chứng minh rằng:

$\forall a > 0, \forall b, c \in \mathbb{R}$ ta có $2af(b-c^2) \le \int_{c-a}^{c+a} f(x^2 - 2cx + b)\,dx \le 2a\,f(a^2 + b - c^2)$

Bài 32. Cho $a > 0$ và hàm số f liên tục trên $[a, +\infty)$ thỏa mãn

$\int_a^t f^2(x)\,dx \le \int_a^t x^2\,dx \ \ \forall t \ge a$. Chứng minh rằng: $\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b x\,dx \ \ \forall b \ge a$

Bài 33. Cho f là một số dương liên tục trên R.

Giả sử $\int f(x)\,dx = F(x) + c$. Chứng minh rằng:

$$\frac{F(a+b)-f(a)}{2\sqrt{a+b}} \le \int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{a+b}} f(x^2)\,dx \le \frac{F(a+b)-F(a)}{2\sqrt{a}} \quad \forall a, b > 0$$

Bài 34. Cho $a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2}$, $n = 1, 2, ...$ và $u_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \cos kx$

1. Chứng minh rằng: $a_n = \int_0^{\pi}\left(\frac{x^2}{2\pi} - 2x\right)u_n(x)\,dx$ **3.** Chứng minh rằng: $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{\pi^2}{6}$

2. Chứng minh rằng: $\frac{\pi^2}{6} - a_n = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} f(x)\sin\frac{(2n+1)x}{2}\,dx$ với $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x - \dfrac{x^2}{2\pi}}{\sin\dfrac{x}{2}} & \forall x \in (0, \pi] \\ 2 & \text{if } x = 0 \end{cases}$

Bài 35. Cho f liên tục và không âm trên đoạn $[0, 1]$ thỏa mãn điều kiện

$f^2(t) \le 1 + 2\int_0^t f(x)\,dx$. Chứng minh rằng: $f(t) \le 1 + t \quad \forall t \in [0, 1]$

Bài 36. Cho g liên tục, không tăng trên $[0, 1]$ thỏa mãn $0 \le g(x) \le 1$

Chứng minh rằng: $\int_0^1 g\left(x^{\frac{1}{a+b}}\right)dx \ge \int_0^1 g\left(x^{\frac{1}{a}}\right)dx \int_0^1 g\left(x^{\frac{1}{b}}\right)dx \quad \forall a, b \in R;\ ab \ne 0,\ a+b \ne 0$

Bài 37. Cho $m, k \in N^*$ và $P(x) = a_0 x^{m+1} + a_1 x^m + ... + a_m x \quad (a_0 \ne 0)$

Lập dãy số $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ với $u_n = \sum_{i=0}^{nk} P\left(\frac{1}{n+i}\right) \ \forall n \in N^*$. Tìm $\lim_{n\to\infty} u_n$

Bài 38. Cho hàm số $f(x)$ liên tục và tăng thực sự trên $[0, 1]$, $g(x)$ là hàm ngược của $f(x)$. Cho $f(0) = 0$ và $f(1) = 1$

Chứng minh rằng: $\sum_{k=1}^{9}\left[f\left(\frac{k}{10}\right) + g\left(\frac{k}{10}\right)\right] < 9.9$

Bài 39. Cho hàm $f(x)$ liên tục trên R thỏa mãn điều kiện:

$f(a) + f(b) \ge \int_a^b f^2(x)\,dx$, $\forall a, b \in R$. Chứng minh rằng: $f(x) \equiv 0 \quad \forall x \in R$

Bài 40. Cho $I_n = \int_1^e (\ln x)^n\,dx$. Tìm I_n và $\lim_{n\to\infty} I_n$

Bài 41. Cho $I_n = \int\limits_n^{n+k} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$, $n = 1, 2, ...$ Tìm $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$

Bài 42. Cho $m, n \in$ N. Chứng minh rằng:

$$(n-1)(m-1)\left(x^{m+n}+y^{m+n}\right)+(m+n-1)\left(x^n y^m + x^m y^n\right) \ge mn\left(x^{m+n-1}y + y^{m+n-1}x\right)$$

Bài 43. Chứng minh với mọi a,b,c,d dương thì

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{8}{a+b+c+d} \ge (a+b+c+d)\left(\frac{2}{(a+b)(c+d)}+\frac{2}{(b+c)(d+a)}+\frac{2}{(c+a)(b+d)}\right)$$

Bài 44. Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng

$$\frac{4}{a}+\frac{4}{b}+\frac{4}{c}-\frac{9}{a+b+c} \ge 9\left(\frac{2}{a+2b}+\frac{2}{b+2c}+\frac{2}{c+2a}-\frac{1}{2a+b}-\frac{1}{2b+c}-\frac{1}{2c+a}\right)$$

Bài 45. Chứng minh với mọi $a,b,c \ge 0$ thì

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{3}{a+b+c} \ge \frac{4}{5a+b}+\frac{4}{5b+c}+\frac{4}{5c+a}+\frac{4}{5b+a}+\frac{4}{5c+b}+\frac{4}{5a+c}$$

Bài 46. Chứng minh rằng với mọi $a,b,c \ge 0$ thì

$$\frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{2c}-\frac{1}{a+b}-\frac{1}{b+c}-\frac{1}{c+a} \ge 4\left(\frac{1}{3a+b}+\frac{1}{3b+c}+\frac{1}{3c+a}-\frac{1}{a+3b}-\frac{1}{b+3c}-\frac{1}{c+3a}\right)$$

Bài 47. Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{3a}+\frac{1}{3b}+\frac{1}{3c}+\frac{8}{3(a+b+c)} \ge \frac{17}{9}\left(\frac{1}{2a+b}+\frac{1}{2b+c}+\frac{1}{2c+a}\right)$$

Bài 48. Chứng minh với các số thực dương $a_1, a_2, ..., a_n$ thì

$$\frac{n}{a_1+a_2+...+a_n}+\frac{n-1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i} \ge \sum_{i,j=1}^{n}\frac{1}{(n-1)a_i+a_j}$$

Bài 49. Chứng minh với các số thực dương $a_1, a_2, ..., a_n$ ta có

$$\frac{n(n-1)}{a_1+a_2+...+a_n}+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i} \ge \sum_{i,j=1}^{n}\frac{1}{S-a_i+a_j}$$

Trong đó $S = a_1 + a_2 + ... + a_n$

Nhìn lại chương III

Như vậy là chúng ta đã cùng nhau đi hết 8 đề mục của chương III, một chương mà có cảm tưởng khắp nơi chỉ tràn ngập không khí giải tích và những phép đạo hàm buồn tẻ. Nhưng nếu nắm bắt được ý tưởng và không sa đà vào các kỹ năng tính toán thì chúng ta sẽ thấy các bài toán của cả chương này không buồn tẻ một chút nào.

Trước hết chúng ta hãy nhớ lại ý nghĩa hình học của phép đạo hàm. Xét đồ thị hàm số $y = f(x)$ trong một hệ trục tọa độ Oxy nào đó. Khi ấy việc chứng minh bất đẳng thức $f(x) > 0$ tương đương với việc chứng minh rằng đồ thị của hàm $y = f(x)$ nằm hoàn toàn phía trên trục hoành Ox $\mathbf{y = 0}$. Tư tưởng chính của phương pháp giải tích là thay vì ngay lập tức tìm cách chứng minh bất đẳng thức trong toàn miền như các phương pháp đại số thường làm, ta sẽ khảo sát dáng điệu chung của đồ thị hàm số $y = f(x)$, sau đó tìm ra những điểm đặc biệt, chẳng hạn điểm cao nhất hoặc điểm thấp nhất trong một lân cận đủ nhỏ (cực đại hoặc cực tiểu), cuối cùng dựa trên việc khảo sát tính chất của hàm số tại những điểm đặc biệt này ta đưa ra kết luận tổng quát. Chú ý rằng đạo hàm của f(x) tại x_0 chính là hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm đó, nó cho biết sự tăng giảm của hàm số tại các điểm cụ thể, và do đó cũng mô tả chính xác dáng điệu chung của toàn bộ đồ thị hàm số $y = f(x)$.

Các định lý ***Fermat*** trong mục I §9 cho biết các dấu hiệu nhận biết các điểm cực trị của hàm số và từ tính chất cụ thể của đạo hàm suy ra dáng điệu chung của hàm số như thế nào. Thật vậy, nếu đạo hàm luôn dương hoặc luôn âm thì hàm số tăng hoặc giảm trên toàn miền xác định và do đó sẽ đạt min hay max ở các biên (định lý I.1 §9). Tổng quát hơn hàm số sẽ chỉ đạt cực trị (cực đại hay cực tiểu địa phương) tại các điểm mà ở đó đạo hàm đổi dấu, hoặc đạo hàm một hay hai phía tại đó không xác định (định lý I.2 và I.3 §9). Định lý ***Lagrange*** (xem 10.1.I) cho ta một cái nhìn sâu sắc hơn về hình ảnh của đồ thị hàm số f liên tục trên đoạn $[a,b]$ và có đạo hàm trong khoảng (a,b), cụ thể định lý nói rằng có ít nhất 1 điểm đặc biệt c (với $a < c < b$) mà tiếp tuyến của đồ thị hàm f tại c song song với đoạn thẳng nối 2 điểm $(a, f(a))$, $(b, f(b))$. Điểm đặc biệt này rất có ý nghĩa trong việc chứng minh một lớp bất đẳng thức lượng giác tinh tế. Cũng theo hướng tiếp cận này, bài toán cực trị hàm nhiều biến không điều kiện và bài toán cực trị hàm nhiều biến có điều kiện ràng buộc giữa các biến về lý thuyết đã được giải quyết trọn vẹn bằng phương pháp nhân tử ***Lagrange*** (xem nội dung mục 10.2). Có thể nhận thấy phương pháp này đã sử dụng tối đa sức mạnh của các định lý ***Fermat*** cổ điển. Tiếp theo đó, bất đẳng thức ***Bernoulli*** dạng đại số (11.1.I.1) cho ta một đánh giá giữa dạng tổng và tích các biến số đại số, trong khi đó bất đẳng thức ***Bernoulli*** dạng giải tích (các định lý trong mục 11.1.I.2 và 11.1.I.3) đưa ra một số so sánh giữa các hàm số không đồng bậc, cụ thể là giữa hàm số bậc thực tùy ý với hàm bậc nhất. Tuy tầm ứng dụng của bất đẳng thức này khá "khiêm tốn", nhưng kết hợp với kỹ thuật chọn điểm rơi ta có thể nhận được những lời giải khá ngắn gọn và độc đáo.

Phát triển theo một hướng khác, các bất đẳng thức ***Jensen, Karamata, RCF, LCF*** và ***Popoviciu*** được xây dựng cho một lớp các hàm có tính chất đặc biệt như lồi, lõm, (***Jensen, Karamata, Popoviciu***) và nửa lồi (***RCF***), nửa lõm (***LCF***). Sự khác biệt giữa các định lý này với các nội dung ở trên không chỉ ở chỗ nó khảo sát dáng điệu của hàm số theo tính chất của đạo hàm cấp 2 mà còn ở chỗ mỗi định lý đó đều bao hàm một phép dồn biến cụ thể. Thật vậy, với bất đẳng thức Jensen (xem định lý III.1 §12) các biến $x_1, x_2, \ldots, x_n$ với các trọng số $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ thỏa mãn đẳng thức $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = 1$ được dồn về giá trị trung bình $(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n)$. Trong khi đó bất đẳng thức ***Karamata*** (định lý I.3 §13) được phát biểu cho hai bộ số được sắp thứ tự $(a) = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ và $(b) = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ với $(a) \succ (b)$. Nhờ định lý này ta có thể dồn được một bộ đủ tốt (có thể sắp thứ tự) về một bộ số khác yếu hoặc trội hơn nó. Các mở rộng và hệ quả của bất đẳng thức này cho ta những cách dồn biến khá quen thuộc, chẳng hạn trường hợp riêng của bất đẳng thức ***Karamata*** khi $b_1 = b_2 = \ldots = b_n$ chính là bất đẳng thức ***Jensen*** với các trọng số $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 1/n$, còn trong hệ quả định lý I.5.4 §13 ta có phép dồn biến từ bộ n số $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ về $\left(\frac{b_1+b_2}{2}, \frac{b_1+b_2}{2}, b_3, \ldots, b_n\right)$. Một hướng dồn biến khác rất thú vị chính là nội dung của bất đẳng thức ***Popoviciu*** được phát biểu trong hai định lý I.1 và I.2 §15. Theo đó ta sẽ thực hiện phép dồn biến không chỉ trên các biến ban đầu $a_1, a_2, \ldots, a_n$ mà còn kéo thêm một biến nữa là trung bình cộng $a = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$ của chúng vào vế trái, vế phải lúc này sẽ là các trung bình cộng của các bộ m số trong chúng, số m được xác định tùy trường hợp cụ thể. Định lý này cho ta khả năng dồn biến về các giá trị trung bình rất thoải mái và đa dạng.

Đối với các hàm số không đủ tốt, nghĩa là hàm số đó không lồi hoặc lõm trên toàn miền xác định của nó, các định lý ***RCF*** và ***LCF*** đã chỉ ra một cách khắc phục khá hiệu quả. Cụ thể nếu hàm f xác định trên khoảng $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$, nhưng chỉ lồi với $u \geq s, s \in \mathbb{I}$ khi đó nếu ta có bất đẳng thức dạng ***Jensen*** $f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n) \geq nf\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right)$ với mọi bộ n số $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{I}$ thỏa mãn $\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = s$ và $x_2 = x_3 = \ldots = x_n \geq s$ thì bất đẳng thức đó cũng đúng với mọi $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{I}$ thỏa mãn $\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \geq s$ (định lý ***RCF*** – 14.I). Định lý ***LCF*** và định lý kết hợp ***RCLCF*** được phát biểu trong các mục 14.II và 14.III. Nhờ định lý này thay vì việc phải kiểm tra bất đẳng thức trên toàn miền ta chỉ cần kiểm tra bất đẳng thức với một số các bộ số đặc biệt. Đây cũng chính là tư tưởng chính của phép dồn biến được trình bày trong chương IV, §18.

Cuối cùng, với ứng dụng của tích phân Riman trong §16, trong nhiều trường hợp ta có thể nhìn hai vế của các bất đẳng thức như là nguyên hàm của các hàm số nào đó. Khi đó việc chứng minh bất đẳng thức có thể quy về việc so sánh các tính chất mang tính toàn cục của hai hàm số.

CHƯƠNG IV: NHỮNG VIÊN KIM CƯƠNG TRONG BẤT ĐẲNG THỨC HIỆN ĐẠI

Các bạn độc giả thân mến! Vậy là chúng ta đã trải qua ba chương đầu thực sự dài với đầy những đánh giá ước lượng và chứng minh. Các bạn sẽ hơi mệt mỏi với việc theo dõi suốt từng bài toán và có thể đã tự hỏi rằng điều đó liệu có ý nghĩa gì không. Thật ra đây cũng là câu hỏi mà chính những người biên tập chúng tôi đã tự đặt ra cho mình. Chúng ta đều biết rằng thế giới bất đẳng thức vô cùng rộng lớn và phong phú, muốn đi tìm và khám phá được những bí ẩn mà chưa ai biết tới là một việc không hề đơn giản. Vì thế, giống như những ngư dân phải ngồi đan lưới trước khi ra khơi bắt cá, như người thợ săn phải chuẩn bị súng đạn kỹ càng trước khi vào rừng săn hổ, chúng ta cũng cần phải tự trang bị cho mình những hiểu biết nhất định về chính thế giới mà chúng ta đang khát khao khai phá. Cũng vì lẽ đó, các bạn hãy hiểu rằng ba chương trước chính là những nền tảng vững chắc nhất, những viên kim cương đẹp đẽ nhất mà chúng tôi đã cung cấp cho các bạn nhằm giúp các bạn có đủ hứng thú và khả năng để tiếp tục đi cùng chúng tôi trên con đường đầy chông gai sắp tới nhằm khám phá những viên kim cương mới đẹp đẽ hơn nữa. Như vậy chúng ta mới có thể tiếp tục một cuộc hành trình dài này cùng với nhau.

Những con đường không phải bao giờ cũng bằng phẳng, và những kết quả mới không phải lúc nào cũng đẹp, cũng đã ngay lập tức trở thành kim cương. Để biết được một kết quả mới có thực sự là kim cương hay không, cần phải có thời gian và những thử nghiệm cần thiết. Trong chương này, chúng tôi sẽ giới thiệu với các bạn sáu kết quả mới, mà theo quan điểm của chúng tôi, chúng thực sự là những viên kim cương còn trẻ. Những kết quả này cũng có thể đã được ấp ủ từ rất lâu bởi những tác giả khuyết tên, nhưng đây sẽ là lần đầu tiên nó được trình bày một cách đầy đủ, chi tiết và có hệ thống (trừ ra định lý ***EV*** của ***Vasile Critoaje***). Sáu kết quả đó lần lượt là phương pháp phân tích tổng bình phương ***SOS*** (nhiều tác giả), phương pháp dồn biến (nhiều tác giả), phương pháp đánh giá tích ***ABC*** của ***Nguyễn Anh Cường***, phương pháp hình học hóa đại số ***GLA*** của ***Bùi Việt Anh***, phương pháp biến số bằng nhau ***EV*** của ***Vasile Critoaje*** và phương pháp chia để trị ***DAC*** do hai anh em ***Phan Thành Nam***, ***Phan Thành Việt*** phát triển và hoàn thiện.

Sáu chuyên đề, sáu kết quả, sáu phương pháp, đó đều là những câu chuyện dài và riêng biệt. Nhưng có một đặc điểm chung là mặc dù chúng mới chỉ được phát triển trong khoảng ba, bốn năm trở lại đây, tính đẹp đẽ của chúng dường như ngay lập tức đã trở nên phổ biến và được thừa nhận trong cộng đồng những người yêu thích bất đẳng thức sơ cấp Việt Nam và thế giới. Hơn nữa, một điều đặc biệt thú vị là mặc dù chúng được các tác giả đưa ra hoàn toàn trên cơ sở làm việc độc lập, nhưng xét trong tổng thể, chúng lại vô cùng gắn bó với nhau. Chẳng hạn mặc dù phương pháp phân tích tổng bình phương ***SOS*** ban đầu chỉ có hiệu quả với các bài toán đối xứng, thì nay, nếu kết hợp nó với phương pháp chia để trị sẽ khiến cho một lớp rộng các bài toán hoán vị được giải quyết. Các định lý dồn biến mạnh (***SMV – Phạm Kim Hùng***), dồn biến không xác định (***UMV – Đinh Ngọc An***), cuối cùng đều được khái quát và trở thành trường hợp riêng của dồn biến tổng quát (***GMV – Phan Thành Việt, Phan Thành Nam***). Phương pháp đánh giá tích (***ABC – Nguyễn Anh Cường***) và phương pháp hình học hóa đại số (***GLA – Bùi Việt Anh***) lúc mới ra đời đã bị rất nhiều người cho rằng chưa chặt chẽ, thậm chí sai về logic, nhưng thật ra chúng hoàn toàn chính xác, đồng thời còn là hai anh em trong một gia đình có ba anh em sinh ba, người anh em thứ ba còn lại chính là phương pháp biến số bằng nhau ***EV*** của ***Vasile Critoaje***. Đến lượt mình, phương pháp chia để trị ***DAC*** với tính linh hoạt đáng ngạc nhiên của nó có thể kết hợp với hầu hết các phương pháp khác để cùng tấn công mọi bất đẳng thức hiện tại được cho là khó, bất kể đối xứng hay hoán vị.

Tất nhiên, nếu nói rằng với sáu phương pháp này chúng ta có thể giải quyết được mọi bất đẳng thức sơ cấp hiện nay thì hoàn toàn không đúng. Có những bất đẳng thức mà cho đến nay tất cả các phương pháp đã biết đều trở nên vô hiệu, mặc dù những bất đẳng thức như thế không phổ biến lắm. Dù sao, chúng tôi tin rằng sáu cuộc hành trình "nhỏ" sắp tới sẽ khiến cho các bạn đọc có thêm những kiến thức và những cái nhìn rộng hơn về thế giới bất đẳng thức, từ đó tiến tới khả năng có thể tự tìm kiếm cho riêng mình những viên kim cương sáng lấp lánh khác. Còn bây giờ, chúng tôi sẽ tạm ngừng phần bình luận, và để các bạn thoải mái tham gia sáu cuộc hành trình. Chúng ta sẽ gặp lại nhau ngay sau khi cuộc hành trình thứ sáu kết thúc!

§17. PHƯƠNG PHÁP S.O.S (SUM OF SQUARE)

I. BIỂU DIỄN ĐA THỨC KHÔNG ÂM DƯỚI DẠNG TỔNG BÌNH PHƯƠNG

1. Định nghĩa: Đa thức $F(a_1,a_2,....,a_n)$ là hàm n biến số $(a)=(a_1,a_2,....,a_k,....,a_n)$ và $\sum!F(a_1,a_2,....,a_n)$ là tổng $n!$ biểu thức thu được từ $F(a_1,a_2,....,a_n)$ bằng tất cả các hoán vị của bộ biến số $(a)=(a_1,a_2,....,a_n)$.

• Đa thức $F(a_1,a_2,....,a_n)$ là hàm thuần nhất bậc $m \Leftrightarrow$

$F(ta_1,ta_2,....,ta_n)=t^m.F(a_1,a_2,....,a_n)$

• Đa thức $F(a_1,a_2,....,a_n)\ge 0\ \forall a_1,a_2,....,a_n\in \mathrm{D} \Leftrightarrow F(a_1,a_2,....,a_n)$ gọi là dạng không âm trong miền D.

2. Đồng nhất thức Hurwitz – Muirhead và bất đẳng thức AM – GM

Xét trường hợp đặc biệt: $F(a_1,a_2,....,a_n)=a_1^{\alpha_1}a_2^{\alpha_2}....a_n^{\alpha_n}$ với $a_k\ge 0,\alpha_k\ge 0$

Đặt $[\alpha]=[\alpha_1,\alpha_2,...\alpha_n]=\dfrac{1}{n!}\sum!F(a_1,a_2,....,a_n)=\dfrac{1}{n!}\sum!a_1^{\alpha_1}a_2^{\alpha_2}....a_n^{\alpha_n}$

Đặc biệt: $[1,0,0,...0]=\dfrac{(n-1)!}{n!}(a_1+a_2+...+a_n)=\dfrac{a_1+a_2+...+a_n}{n}=A(a)$: Trung bình cộng (AM)

$$\left[\frac{1}{n},\frac{1}{n},....,\frac{1}{n}\right]=\frac{n!}{n!}a_1^{\frac{1}{n}}a_2^{\frac{1}{n}}....a_n^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a_1a_2....a_n}=g(a)\text{: Trung bình nhân (GM)}$$

Xét biến đổi: $A(a^n)-g(a^n)=\dfrac{a_1^n+a_2^n+...+a_n^n}{n}-a_1a_2....a_n=[n,0,0,...0]-[1,1,1,....,1]$

$=[n,0,0,...0]-[n-1,1,0,....,0]+[n-1,1,0,....,0]-[n-2,1,1,0,....,0]+$

$+[n-2,1,1,0,....,0]-[n-3,1,1,1,0,....,0]+...+[3,1,1,....,1,0,0]-[2,1,1,....,1,0]+[2,1,1,....,1,0]-[1,1,1,....,1]$

$=\dfrac{1}{2n!}\left[\sum!(a_1^{n-1}-a_2^{n-1})(a_1-a_2)+\sum!(a_1^{n-2}-a_2^{n-2})(a_1-a_2)a_3+\sum!(a_1^{n-3}-a_2^{n-3})(a_1-a_2)a_3a_4+...\right]$

Do $(a_p-a_q)(a_p^r-a_q^r)\ge 0\ \ \forall a_p,a_q\ge 0$ nên $A(a^n)-g(a^n)\ge 0$

Đặt $a_1=x_1^2;...;a_n=x_n^2$ và gọi bộ $(i_1,i_2,....,i_n)$ là một hoán vị của $(1,2,...n)$. Khi đó ta có:

$n\left[A(a^n)-g(a^n)\right]=(a_1^n+a_2^n+...+a_n^n)-na_1a_2....a_n=x_1^{2n}+...+x_n^{2n}-nx_1^2x_2^2...x_n^2=$

$=\dfrac{1}{2(n-1)!}\left[\sum!(x_{i_1}^{2n-2}-x_{i_2}^{2n-2})(x_{i_1}^2-x_{i_2}^2)+\sum!(x_{i_1}^{2n-4}-x_{i_2}^{2n-4})(x_{i_1}^2-x_{i_2}^2)x_{i_3}^2+...+\sum!(x_{i_1}^2-x_{i_2}^2)^2x_{i_3}^2x_{i_4}^2...x_{i_n}^2\right]$

Mặt khác:

$(x_{i_1}^{2n-2k}-x_{i_2}^{2n-2k})(x_{i_1}^2-x_{i_2}^2)x_{i_3}^2...x_{i_{k+1}}^2=(x_{i_1}^2-x_{i_2}^2)^2\left[x_{i_1}^{2n-2k-2}+x_{i_1}^{2n-2k-4}x_{i_2}^2+...+x_{i_2}^{2n-2k-2}\right]x_{i_3}^2...x_{i_{k+1}}^2$

$=(x_{i_1}^2-x_{i_2}^2)^2\left[\displaystyle\sum_{j=1}^{n-k}\left(x_{i_1}^{n-k-j}x_{i_2}^{j-1}\right)^2\right]x_{i_3}^2...x_{i_{k+1}}^2=\displaystyle\sum_{j=1}^{n-k}\left[(x_{i_1}^2-x_{i_2}^2)x_{i_1}^{n-k-j}x_{i_2}^{j-1}x_{i_3}...x_{i_{k+1}}\right]^2$

$\Rightarrow n\left[A(a^n)-g(a^n)\right]=s_1^2+s_2^2+...+s_m^2\ge 0\Rightarrow A(a^n)\ge g(a^n)\Rightarrow A(a)\ge g(a)$

3. Các trường hợp đặc biệt: • $n=2$: $x_1^2+x_2^2-2x_1x_2=(x_1-x_2)^2$

• $n=3$:

$$x_1^6+x_2^6+x_3^6-3x_1^2x_2^2x_3^2=\frac{1}{2}\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)\left[\left(x_1^2-x_2^2\right)^2+\left(x_2^2-x_3^2\right)^2+\left(x_3^2-x_1^2\right)^2\right]$$

• $n=4$: $x_1^4+x_2^4+x_3^4+x_4^4-4x_1x_2x_3x_4=\left(x_1^2-x_2^2\right)^2+\left(x_3^2-x_4^2\right)^2+2\left(x_1x_2-x_3x_4\right)^2$

• $n=5$: $x_1^{10}+x_2^{10}+x_3^{10}+x_4^{10}+x_5^{10}-5x_1^2x_2^2x_3^2x_4^2x_5^2=$

$$=\frac{1}{2.4!}\Big[\sum!\left(x_{i_1}^8-x_{i_2}^8\right)\left(x_{i_1}^2-x_{i_2}^2\right)+\sum!\left(x_{i_1}^6-x_{i_2}^6\right)\left(x_{i_1}^2-x_{i_2}^2\right)x_{i_3}^2$$

$$+\sum!\left(x_{i_1}^4-x_{i_2}^4\right)\left(x_{i_1}^2-x_{i_2}^2\right)x_{i_3}^2x_{i_4}^2+\sum!\left(x_{i_1}^2-x_{i_2}^2\right)^2x_{i_3}^2x_{i_4}^2x_{i_5}^2\Big]$$

$$=\frac{1}{2.4!}\Bigg[\sum!\sum_{j=1}^{4}\left[\left(x_{i_1}^2-x_{i_2}^2\right)x_{i_1}^{4-j}x_{i_2}^{j-1}\right]^2+\sum!\sum_{j=1}^{3}\left[\left(x_{i_1}^2-x_{i_2}^2\right)x_{i_1}^{3-j}x_{i_2}^{j-1}x_{i_3}\right]^2$$

$$+\sum!\sum_{j=1}^{2}\left[\left(x_{i_1}^2-x_{i_2}^2\right)x_{i_1}^{2-j}x_{i_2}^{j-1}x_{i_3}x_{i_4}\right]^2+\sum!\left[\left(x_{i_1}^2-x_{i_2}^2\right)x_{i_3}x_{i_4}x_{i_5}\right]^2\Bigg]$$

• $n=6$:

$$x_1^6+x_2^6+x_3^6+x_4^6+x_5^6+x_6^6-6x_1x_2x_3x_4x_5x_6=\frac{1}{2}\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)\left[\left(x_1^2-x_2^2\right)^2+\left(x_2^2-x_3^2\right)^2+\left(x_3^2-x_1^2\right)^2\right]+$$

$$+\frac{1}{2}\left(x_4^2+x_5^2+x_6^2\right)\left[\left(x_4^2-x_5^2\right)^2+\left(x_5^2-x_6^2\right)^2+\left(x_6^2-x_4^2\right)^2\right]+3\left(x_1x_2x_3-x_4x_5x_6\right)^2$$

4. Định lý và các ví dụ:

4.1. Định lý Hilbert 1:

Nếu đa thức $F(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ thuần nhất và không âm trong miền D, tức là:

$F(a_1,a_2,\ldots,a_n)\ge 0\ \forall a_1,a_2,\ldots,a_n\in D$ thì có thể biểu diễn

$F(a_1,a_2,\ldots,a_n)=p_1^2+p_2^2+\ldots+p_m^2$ với p_k là các hàm hữu tỉ thực.

4.2. Định lý Hilbert 2: Nếu đa thức $F(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ không thuần nhất và không âm trong miền $a_1\ge 0,a_2\ge 0,\ldots a_n\ge 0,a_1+a_2+\ldots+a_n\le 1$ thì

$F(a_1,a_2,\ldots,a_n)=\sum c_k a_1^{\alpha_1}a_2^{\alpha_2}\ldots a_n^{\alpha_n}\left(1-a_1-a_2-\ldots-a_n\right)^{\alpha_{n+1}}$

trong đó $\alpha_1,\ldots\alpha_n,\alpha_{n+1}$ là các số nguyên không âm và $c_k>0$.

4.3. Bình luận: Các Định lý Hilbert 1 và 2 mang tính chất định tính, nó giúp chúng ta tin tưởng rằng tồn tại một cách chứng minh một đa thức không âm bằng phương pháp phân tích thành tổng các bình phương (đối với hàm thuần nhất) hoặc phân tích thành tổng các đại lượng không âm (đối với hàm không thuần nhất). Tuy nhiên chính vì sự tồn tại mơ hồ này nên nó ít có giá trị thực tiễn trong chứng minh bất đẳng thức của toán học sơ cấp. Ta xét 2 ví dụ tiêu biểu sau đây để bạn đọc thấy rằng việc phân tích thành tổng các bình phương thật sự là khó khăn nếu không có niềm tin về sự tồn tại của phép phân tích. Các ví dụ 1 và ví dụ 2 có lời giải rất ngắn gọn nhưng rất thiếu tự nhiên nên việc tìm ra lời giải chẳng khác nào ta phải đoán các ô chữ mà chỉ biết kết quả là một ô chữ có ý nghĩa.

Ví dụ 1: $a^4+b^4+c^4+ab^3+bc^3+ca^3\ge 2(a^3b+b^3c+c^3a)$, $\forall a,b,c\in\mathbb{R}$

Giải: $2\left[a^4+b^4+c^4+ab^3+bc^3+ca^3-2(a^3b+b^3c+c^3a)\right]=$

$$=(a^2-ab+ac-c^2)^2+(b^2-bc+ba-a^2)^2+(c^2-ca+cb-b^2)^2\ge 0$$

Ví dụ 2: $(a^2+b^2+c^2)^2\ge 3(a^3b+b^3c+c^3a)$, $\forall a,b,c\in\mathbb{R}$ (1)

Lời giải 1:

$$(1)\Leftrightarrow a^4+b^4+c^4+2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)\ge 3(a^3b+b^3c+c^3a)\Leftrightarrow\sum_{cyc}a^4+2\sum_{cyc}a^2b^2\ge 3\sum_{cyc}a^3b$$

$$\Leftrightarrow S=\left(\sum_{cyc}a^4-\sum_{cyc}a^2b^2\right)+3\left(\sum_{cyc}a^2b^2-\sum_{cyc}a^2bc\right)-3\left(\sum_{cyc}a^3b-\sum_{cyc}a^2bc\right)\ge 0$$

Biến đổi: $\sum_{cyc}a^4-\sum_{cyc}a^2b^2=\frac{1}{2}\sum_{cyc}(a^2-b^2)^2$; $3\left(\sum_{cyc}a^2b^2-\sum_{cyc}a^2bc\right)=\frac{1}{2}\sum_{cyc}(ab+ac-2bc)^2$

$$3\left(\sum_{cyc}a^3b-\sum_{cyc}a^2bc\right)=3\left(\sum_{cyc}b^3c-\sum_{cyc}a^2bc\right)=-3\sum_{cyc}bc(a^2-b^2)$$

$$=-3\sum_{cyc}bc(a^2-b^2)+\sum_{cyc}(ab+bc+ca)(a^2-b^2)=\sum_{cyc}(a^2-b^2)(ab+ac-2bc)$$

Khi đó: $S=\frac{1}{2}\sum_{cyc}(a^2-b^2)^2+\frac{1}{2}\sum_{cyc}(ab+ac-2bc)^2-\sum_{cyc}(a^2-b^2)(ab+ac-2bc)$

$$S=\frac{1}{2}\sum_{cyc}(a^2-b^2-ab-ac+2bc)^2\ge 0\Rightarrow\text{(đpcm)}.$$

Lời giải 2: $4(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)\left[(a^2+b^2+c^2)^2-3(a^3b+b^3c+c^3a)\right]=$

$$=\left[(a^3+b^3+c^3)-5(a^2b+b^2c+c^2a)+4(ab^2+bc^2+ca^2)\right]^2+$$

$$+3\left[(a^3+b^3+c^3)-(a^2b+b^2c+c^2a)-2(ab^2+bc^2+ca^2)+6abc\right]^2\ge 0$$

II. PHƯƠNG PHÁP PHÂN TÍCH TỔNG CÁC BÌNH PHƯƠNG (S.O.S.)

1. Đặt vấn đề:

Để chứng minh một đa thức thuần nhất $F(a_1,a_2,\dots,a_n)\ge 0$ thì theo Định lý Hilbert sẽ tồn tại một cách biểu diễn $F(a_1,a_2,\dots,a_n)=p_1^2+p_2^2+\dots+p_m^2$ với p_i là các hàm hữu tỉ thực nhưng việc chỉ ra cách biểu diễn cụ thể là rất khó khăn. Phương pháp phân tích tổng các bình phương ***S.O.S.*** dưới đây sẽ giúp chúng ta khắc phục được tính trừu tượng