của định lý Hilbert, đặc biệt là đối với các hàm đối xứng $F(a,b,c)$. Ở Việt Nam, phương pháp này đã được ***Trần Phương***, ***Trần Tuấn Anh*** và ***Anh Cường*** nghiên cứu và phát biểu vào tháng 8 năm 2004. Đến năm 2006, ***Phạm Kim Hùng*** đặt tên chính thức là ***S.O.S***.

2. Giới thiệu về phương pháp S.O.S.

Xét bất đẳng thức $A \geq B$ trong đó A, B là các biểu thức chứa các biến số a,b,c.

Giả sử ta biến đổi được bất đăng thức $A - B \geq 0$ có dạng:

$S = A - B = S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \geq 0$ **(1)**. Xét các mệnh đề sau:

2.1. Mệnh đề 1: Nếu $S_a \geq 0; S_b \geq 0; S_c \geq 0$ thì

$S = S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \geq 0$

Đây là một trường hợp tầm thường. Dưới đây ta sẽ xét các dấu hiệu khác để (1) đúng.

2.2. Mệnh đề 2: Cho các số thực a,b,c,S_a,S_b,S_c thoả mãn 2 điều kiện:

i) $S_a + S_b \geq 0; S_b + S_c \geq 0; S_c + S_a \geq 0$.

ii) Nếu $a \leq b \leq c$ hoặc $a \geq b \geq c$ thì $S_b \geq 0$

Khi đó ta có $S = S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \geq 0$ (1)

Chứng minh

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \leq b \leq c$, khi đó $S_b \geq 0$ và

$(1) \Leftrightarrow S_b\left[(c-b)+(b-a)\right]^2 + S_a(b-c)^2 + S_c(a-b)^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow (S_a + S_b)(b-c)^2 + (S_b + S_c)(a-b)^2 + 2S_b(c-b)(b-a) \geq 0$ (luôn đúng)

2.3. Mệnh đề 3: Cho các số thực a,b,c,S_a,S_b,S_c thoả mãn điều kiện:

Nếu $a \leq b \leq c$ hoặc $a \geq b \geq c$ thì $S_a \geq 0, S_c \geq 0$ và $S_a + 2S_b \geq 0; S_c + 2S_b \geq 0$

Khi đó ta có $S = S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \geq 0$ (1)

Chứng minh

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \leq b \leq c$ và $S_a \geq 0, S_c \geq 0$; $S_a + 2S_b \geq 0; S_c + 2S_b \geq 0$

Nếu $S_b \geq 0$ thì (1) luôn đúng.

Nếu $S_b < 0$ thì $S = (S_b + S_a)(c-b)^2 + (S_b + S_c)(b-a)^2 + 2S_b(c-b)(b-a)$

$$\geq (S_b + S_a)(c-b)^2 + (S_b + S_c)(b-a)^2 + S_b\left[(c-b)^2 + (b-a)^2\right]$$

$$= (S_a + 2S_b)(c-b)^2 + (S_c + 2S_b)(b-a)^2 \geq 0$$

2.4. Mệnh đề 4: Cho các số thực a,b,c,S_a,S_b,S_c thoả mãn điều kiện:

Nếu $a \le b \le c$ thì $S_a \ge 0, S_b \ge 0$ và $b^2 S_c + c^2 S_b \ge 0$

Khi đó ta có $S = S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \ge 0$ (1)

Chứng minh

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \le b \le c$ và $S_a \ge 0, S_b \ge 0$; $b^2 S_c + c^2 S_b \ge 0$

$$S = S_a(b-c)^2 + (b-a)^2\left[S_b\left(\frac{c-a}{b-a}\right)^2 + S_c\right] \ge S_a(b-c)^2 + (b-a)^2\left[S_b\left(\frac{c}{b}\right)^2 + S_c\right]$$

$$= S_a(b-c)^2 + \left(c^2 S_b + b^2 S_c\right)\left(\frac{b-a}{b}\right)^2 \ge 0$$

2.5. *Mệnh đề 5:* Cho các số thực a, b, c, S_a, S_b, S_c thoả mãn 2 điều kiện:

i) $S_a + S_b > 0 \vee S_b + S_c > 0 \vee S_c + S_a > 0$

ii) $S_a S_b + S_b S_c + S_c S_a \ge 0$

Khi đó ta có $S = S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \ge 0$ (1)

Chứng minh

Không mất tính tổng quát, giả sử $S_b + S_c > 0$. Đặt $u = b - a; v = c - b$, khi đó:

$$S = S_a(b-c)^2 + S_b\left[(c-b)+(b-a)\right]^2 + S_c(a-b)^2$$

$$= (S_b + S_c)(a-b)^2 + 2S_b(c-b)(b-a) + (S_a + S_b)(b-c)^2$$

$$= (S_b + S_c)\left(u + \frac{S_b}{S_b + S_c}v\right)^2 + \frac{S_a S_b + S_b S_c + S_c S_a}{S_b + S_c}\cdot v^2 \ge 0 \Rightarrow \text{(đpcm)}$$

2.6. *Mệnh đề 6:* Cho các số thực a, b, c, S_a, S_b, S_c thoả mãn điều kiện:

i) $a \le b \le c$ hoặc $a \ge b \ge c$

ii) Tồn tại $\alpha > 0$ sao cho $S_a + \alpha^2 S_c + (\alpha+1)^2 S_b \ge 0$

iii) $\begin{cases} |a-b| \ge \alpha|c-b| \\ S_c + S_b \ge 0 \\ S_c + \dfrac{\alpha+1}{\alpha}S_b \ge 0 \end{cases} \vee \begin{cases} |c-b| \ge \alpha|a-b| \\ S_a + S_b \ge 0 \\ S_a + \dfrac{\alpha+1}{\alpha}S_b \ge 0 \end{cases}$

Khi đó ta có: $S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \ge 0$ (1)

Chứng minh

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \le b \le c$.

$\exists \alpha > 0$ sao cho $S_a + \alpha^2 S_c + (\alpha+1)^2 S_b \ge 0$ và $\begin{cases} |a-b| \ge \alpha|c-b| \\ S_c + S_b \ge 0 \\ S_c + \dfrac{\alpha+1}{\alpha}S_b \ge 0 \end{cases}$

$$\sum_{cyc} a_1^m - \sum_{cyc} a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \dots a_n^{\alpha_n} = \sum P_{ij}(a)(a_i - a_j)^2$$

Chứng minh: Ta sẽ chứng minh bổ đề bằng quy nạp theo k là số lượng các số khác không trong tập hợp $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ (n, m là các hằng số).

Nếu $k = 1$ thì định lý hiển nhiên đúng.

Nếu $k = 2$ thì ta cần chứng minh tồn tại phép biểu diễn

$$\sum_{cyc} a_1^m - \sum_{cyc} a_1^t a_2^{m-t} = \sum P_{ij}(a)(a_i - a_j)^2$$

Điều này có thể được chứng minh với chú ý rằng:

$$ta^m + (m-t)b^m - ma^t b^{m-t} = P(a,b)(a-b)^2$$

Thật vậy, trước tiên chú ý rằng phương trình $f(x) = tx^m + (m-t) - mx^t = 0$ có nghiệm kép là 1, bởi vì $f(1) = f'(1) = 0$. Vì vậy $f(x)$ có thể biểu diễn dưới dạng $Q(x)(x-1)^2, \deg(Q) = m-2$

Đặt $x = \frac{a}{b}$, khi đó ta có: $b^m f\left(\frac{a}{b}\right) = ta^m + (m-t)b^m - ma^t b^{m-t} = b^{m-2} Q\left(\frac{a}{b}\right)(a-b)^2$.

Tuy nhiên $b^{m-2} Q\left(\frac{a}{b}\right)$ là một đa thức hai biến a, b bởi vì Q là một đa thức bậc $n-2$

Giả sử rằng mệnh đề của chúng ta đã đúng với k, là số lượng các số khác không trong tập $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$, với $k+1$, chúng ta có thể đưa về trường hợp k như sau:

$$a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \dots a_{k+1}^{\alpha_{k+1}} = -\frac{\alpha_1 a_1^{\alpha_1+\alpha_2} + \alpha_2 a_2^{\alpha_1+\alpha_2} - (\alpha_1+\alpha_2) a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2}}{\alpha_1+\alpha_2} a_3^{\alpha_3} \dots a_{k+1}^{\alpha_{k+1}}$$

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2} a_1^{\alpha_1+\alpha_2} a_3^{\alpha_3} \dots a_{k+1}^{\alpha_{k+1}} + \frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2} a_2^{\alpha_1+\alpha_2} a_3^{\alpha_3} \dots a_{k+1}^{\alpha_{k+1}}$$

Chú ý rằng với $k = 2$: $\frac{\alpha_1 a_1^{\alpha_1+\alpha_2} + \alpha_2 a_2^{\alpha_1+\alpha_2} - (\alpha_1+\alpha_2) a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2}}{\alpha_1+\alpha_2} = H_{12}(a)(a_1 - a_2)^2$, ta có:

$$a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \dots a_{k+1}^{\alpha_{k+1}} = Q_{12}(a)(a_1-a_2)^2 + \frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2} a_1^{\alpha_1+\alpha_2} a_3^{\alpha_3} \dots a_{k+1}^{\alpha_{k+1}} + \frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2} a_2^{\alpha_1+\alpha_2} a_3^{\alpha_3} \dots a_{k+1}^{\alpha_{k+1}}$$

Vì vậy: $\sum_{cyc} a_1^m - \sum_{cyc} a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \dots a_{k+1}^{\alpha_{k+1}}$

$$= -\sum_{cyc} Q_{12}(a)(a_1-a_2)^2 + \sum_{cyc} a_1^m - \frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2} \sum_{cyc} a_1^{\alpha_1+\alpha_2} a_3^{\alpha_3} \dots a_{k+1}^{k+1} + \frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2} \sum_{cyc} a_2^{\alpha_1+\alpha_2} a_3^{\alpha_3} \dots a_{k+1}^{k+1}$$

$$\sum_{cyc} a_1^m - \sum_{cyc} a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \dots a_{k+1}^{\alpha_{k+1}} = -\sum_{cyc} Q_{12}(a)(a_1-a_2)^2 + \frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2}\left(\sum_{cyc} a_1^m - \sum_{cyc} a_1^{\alpha_1+\alpha_2} a_3^{\alpha_3} \dots a_{k+1}^{k+1}\right) +$$

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}\left(\sum_{cyc} a_1^m - \sum_{cyc} a_2^{\alpha_1+\alpha_2} a_3^{\alpha_3} \ldots a_{k+1}^{k+1}\right)$$

Mặt khác, hai biểu thức $\sum_{cyc} a_1^m - \sum_{cyc} a_1^{\alpha_1+\alpha_2} a_3^{\alpha_3} \ldots a_{k+1}^{k+1}$ và $\sum_{cyc} a_1^m - \sum_{cyc} a_2^{\alpha_1+\alpha_2} a_3^{\alpha_3} \ldots a_{k+1}^{k+1}$ có thể được biểu diễn dưới ***S.O.S***, từ đó suy ra $\sum_{cyc} a_1^m - \sum_{cyc} a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \ldots a_{k+1}^{\alpha_{k+1}}$ cũng biểu diễn được dưới dạng ***S.O.S***.

Theo nguyên lý quy nạp, định lý được chứng minh.

Áp dụng: Sử dụng bổ đề và đẳng thức sau ta có đpcm.

$$\sum_{cyc} a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \ldots a_n^{\alpha_n} - \sum_{cyc} a_1^{\beta_1} a_2^{\beta_2} \ldots a_n^{\beta_n} = \left(\sum_{cyc} a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \ldots a_n^{\alpha_n} - \sum_{cyc} a_1^m\right) + \left(\sum_{cyc} a_1^m - \sum_{cyc} a_1^{\beta_1} a_2^{\beta_2} \ldots a_n^{\beta_n}\right) \mathbf{3.}$$

2. Nhận xét: Nói chung các bất đẳng thức đối xứng hay hoán vị của các đa thức đồng bậc 3 biến số (hoặc dạng phân thức) đều có thể chuyển về dạng đa thức hoán vị thuần nhất 3 biến tức là có thể biểu diễn được dưới dạng ***S.O.S***. Vì vậy phương pháp ***S.O.S*** gần như có thể giải quyết tất cả các lớp bất đẳng thức 3 biến số thuần nhất. Câu hỏi tiếp theo là: "Làm thế nào để biến đổi về các dạng chuẩn của ***S.O.S*** ?" Lẽ đương nhiên thuật toán trên cũng là một gợi ý cho chúng ta một cách thức chuyển một đa thức về dạng ***S.O.S***. Tuy nhiên đối với các dạng đại số khác thì sao? Để trả lời câu hỏi này, chúng ta sẽ đưa ra một khái niệm sau đây:

Ta gọi hai đa thức A và B có mối quan hệ ***S.O.S "thân mật"*** nếu A-B có thể biểu diễn được dưới dạng ***S.O.S*** một cách trực tiếp không cần thông qua các biểu thức phụ trung gian. Khi đó chúng ta có thể biến đổi các biểu thức để làm rõ mối quan hệ ***S.O.S*** thông qua mối quan hệ trung gian ***S.O.S "thân mật"***. Dưới đây là một số dạng biểu thức mà chúng ta thường gặp:

i) $P(a,b,c)A(a,b,c)-Q(a,b,c)B(a,b,c)$. Trong đó A và B, P và Q là thân mật. Để chuyển biểu thức đã cho về dạng ***S.O.S***, chúng ta sẽ thông qua đại lượng trung gian $Q(a,b,c)A(a,b,c)$

$$P(a,b,c)A(a,b,c)-Q(a,b,c)A(a,b,c)+Q(a,b,c)A(a,b,c)-Q(a,b,c)B(a,b,c)$$

$$=A(a,b,c)\left[P(a,b,c)-Q(a,b,c)\right]+Q(a,b,c)\left[A(a,b,c)-B(a,b,c)\right]$$

ii) Hay dưới dạng phân thức

$$\frac{A(a,b,c)}{P(a,b,c)}-\frac{B(a,b,c)}{Q(a,b,c)}=\frac{A(a,b,c)-B(a,b,c)}{P(a,b,c)}+\frac{B(a,b,c)\left[Q(a,b,c)-P(a,b,c)\right]}{P(a,b,c)Q(a,b,c)}$$

iii) Cũng như căn thức:

$$\sqrt{A(a,b,c)P(a,b,c)}-\sqrt{B(a,b,c)Q(a,b,c)}=\frac{A(a,b,c)P(a,b,c)-B(a,b,c)Q(a,b,c)}{\sqrt{A(a,b,c)P(a,b,c)}+\sqrt{B(a,b,c)Q(a,b,c)}}$$

iv) Các trường hợp đặc biệt:

$$a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc=\frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{2}$$

$$a^3+b^3+c^3-3abc=\frac{(a+b+c)}{2}\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]$$

$$a^2b+b^2c+c^2a-ab^2-bc^2-ca^2=\frac{(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3}{3}$$

$$a^3+b^3+c^3-a^2b-b^2c-c^2a=\frac{(2a+b)(a-b)^2+(2b+c)(b-c)^2+(2c+a)(c-a)^2}{3}$$

$$a^4+b^4+c^4-a^3b-b^3c-c^3a=$$

$$\frac{(3a^2+2ab+b^2)(a-b)^2+(3b^2+2bc+c^2)(b-c)^2+(3c^2+2ca+a^2)(a-c)^2}{4}$$

$$a^3b+b^3c+c^3a-ab^3-bc^3-ca^3=\frac{a+b+c}{3}\left[(b-a)^3+(c-b)^3+(a-c)^3\right]$$

$$a^4+b^4+c^4-a^2b^2-b^2c^2-c^2a^2=\frac{(a-b)^2(a+b)^2+(b-c)^2(b+c)^2+(c-a)^2(c+a)^2}{2}$$

III. CÁC BÀI TẬP MẪU MINH HỌA

Bài 1. [Iranian Mathematical Olympiad 1996] Cho $a,b,c>0$. Chứng minh:

$$(ab+bc+ca)\left[\frac{1}{(a+b)^2}+\frac{1}{(b+c)^2}+\frac{1}{(c+a)^2}\right]\ge\frac{9}{4}\quad(1)$$

Chứng minh

Không mất tính tổng quát giả sử $c\ge b\ge a>0$.

Đặt $\begin{cases}b+c=2x\\c+a=2y\\a+b=2z\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-x+y+z\\b=x-y+z\\c=x+y-z\end{cases}\Rightarrow x,y,z$ là độ dài ba cạnh của một tam giác.

Do $c\ge b\ge a>0$ nên $x\ge y\ge z>0$. Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\left(2xy+2yz+2zx-x^2-y^2-z^2\right)\left(\frac{1}{4x^2}+\frac{1}{4y^2}+\frac{1}{4z^2}\right)\ge\frac{9}{4}$$

$$\Leftrightarrow\left(2xy+2yz+2zx-x^2-y^2-z^2\right)\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}\right)\ge9\Leftrightarrow\sum_{cyc}(x-y)^2\left(\frac{2}{xy}-\frac{1}{z^2}\right)\ge0$$

Đặt $S_x=\frac{2}{yz}-\frac{1}{x^2},S_y=\frac{2}{zx}-\frac{1}{y^2},S_z=\frac{2}{xy}-\frac{1}{z^2}$

Bất đẳng thức cần chứng minh $\Leftrightarrow S_x(y-z)^2+S_y(z-x)^2+S_z(x-y)^2\ge0$

Do $x\ge y\ge z>0$ và $y+z>x$ nên $S_x\ge0$ và $S_y\ge0$

Ta chứng minh $y^2S_y+z^2S_z\ge 0\Leftrightarrow y^3+z^3\ge xyz$

Mà $y+z>x$ nên ta chỉ cần chứng minh $y^3+z^3\ge(y+z)yz\Leftrightarrow(y-z)^2(y+z)\ge 0$ (đúng)

Từ đây, áp dụng ***Mệnh đề 4***, ta suy ra (đpcm).

Bài 2. Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn $\min\{a,b,c\}\ge\frac{1}{4}\max\{a,b,c\}$. Chứng minh rằng:

$$(ab+bc+ca)\left[\frac{1}{(a+b)^2}+\frac{1}{(b+c)^2}+\frac{1}{(c+a)^2}\right]\ge\frac{9}{4}+\frac{1}{16}\sum_{cyc}\frac{(a-b)^2}{(a+b)^2}\quad(1)$$

Chứng minh

Không mất tính tổng quát, giả sử $c\ge b\ge a\ge\frac{1}{4}c>0$.

Đặt $\begin{cases}b+c=2x\\c+a=2y\\a+b=2z\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-x+y+z\\b=x-y+z\\c=x+y-z\end{cases}\Rightarrow x,y,z$ là độ dài ba cạnh của một tam giác

Do $c\ge b\ge a\ge\frac{1}{4}c>0$ nên $x\ge y\ge z>0$ và $4(-x+y+z)\ge x+y-z\Rightarrow 3y+5z\ge 5x$

Bất đẳng thức (1) $\Leftrightarrow\left(2xy+2yz+2zx-x^2-y^2-z^2\right)\left(\frac{1}{4x^2}+\frac{1}{4y^2}+\frac{1}{4z^2}\right)\ge\frac{9}{4}+\frac{1}{16}\sum_{cyc}\frac{(x-y)^2}{z^2}$

$\Leftrightarrow\left(2xy+2yz+2zx-x^2-y^2-z^2\right)\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}\right)\ge 9+\frac{1}{4}\sum_{cyc}\frac{(x-y)^2}{z^2}$

$\Leftrightarrow\sum_{cyc}(x-y)^2\left(\frac{2}{xy}-\frac{5}{4z^2}\right)\ge 0$

Đặt $S_x=\frac{2}{yz}-\frac{5}{4x^2},S_y=\frac{2}{zx}-\frac{5}{4y^2},S_z=\frac{2}{xy}-\frac{5}{4z^2}$

Ta phải chứng minh $S_x(y-z)^2+S_y(z-x)^2+S_z(x-y)^2\ge 0$

Do $x\ge y\ge z>0$ và $3y+5z\ge 5x$ nên $S_x>0$ và $8y\ge 5x\Rightarrow S_y\ge 0$

Ta sẽ chứng minh $y^2S_y+z^2S_z\ge 0\Leftrightarrow\frac{2y^2}{xz}+\frac{2z^2}{xy}\ge\frac{5}{2}\Leftrightarrow 4\left(y^3+z^3\right)\ge 5xyz$

Mà $3y+5z\ge 5x$ nên ta chỉ cần chứng minh $4(y^3+z^3)\ge(3y+5z)yz$

$\Leftrightarrow(y-z)(4y^2+yz-4z^2)\ge 0$ (đúng). Vậy $y^2S_y+z^2S_z\ge 0$

Ta có $x-z\ge\frac{y}{z}(x-y)\ge 0$. Do đó:

$$S_x(y-z)^2+S_y(z-x)^2+S_z(x-y)^2\ge S_y(z-x)^2+S_z(x-y)^2$$

$$\ge S_c \cdot \frac{y^2}{z^2}(x-y)^2 + S_z(x-y)^2 = \frac{(x-y)^2(y^2 S_c + z^2 S_z)}{z^2} \ge 0 \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$ hoặc $a=b=4c$ và các hoán vị.

Bài 3. [IMO 45 – 2005] Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc \ge 1$.

Chứng minh rằng: $S = \dfrac{a^5-a^2}{a^5+b^2+c^2} + \dfrac{b^5-b^2}{b^5+c^2+a^2} + \dfrac{c^5-c^2}{c^5+a^2+b^2} \ge 0$

Chứng minh

Do $abc \ge 1$ nên $S \ge \dfrac{a^5-a^2abc}{a^5+(b^2+c^2)abc} + \dfrac{b^5-b^2abc}{b^5+(c^2+a^2)abc} + \dfrac{c^5-c^2abc}{c^5+(a^2+b^2)abc}$

$$= \sum_{cyc} \frac{a^4-a^2bc}{a^4+(b^2+c^2)bc} \ge \sum_{cyc} \frac{2a^4-a^2(b^2+c^2)}{2a^4+(b^2+c^2)^2}.$$

Đặt $x=a^2, y=b^2, z=c^2 \Rightarrow S \ge \dfrac{2x^2-x(y+z)}{2x^2+(y+z)^2} + \dfrac{2y^2-y(z+x)}{2y^2+(z+x)^2} + \dfrac{2z^2-z(x+y)}{2z^2+(x+y)^2}$

$$= \sum_{cyc}(x-y)\left(\frac{x}{2x^2+(y+z)^2} - \frac{y}{2y^2+(z+x)^2}\right) = \sum_{cyc}(x-y)^2 \frac{x^2+y^2-xy+z^2+2z(x+y)}{\left[2x^2+(y+z)^2\right]\left[2y^2+(z+x)^2\right]} \ge 0$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z \Leftrightarrow a=b=c$.

Bài 4. Tìm hằng số k lớn nhất ($k>0$) sao cho bất đẳng thức sau đúng $\forall a,b,c>0$

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + k\,\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2} \ge k + \frac{3}{2} \quad (1)$$

Giải

Biến đổi chung: (1) $\Leftrightarrow \displaystyle\sum_{cyc}\left(\frac{a}{b+c}-\frac{1}{2}\right) \ge k\left(1-\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}\right)$ (2)

Ta có:

$$\sum_{cyc}\left(\frac{a}{b+c}-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sum_{cyc}\frac{(a-b)+(a-c)}{b+c} = \frac{1}{2}\sum_{cyc}(a-b)\left(\frac{1}{b+c}-\frac{1}{c+a}\right) = \frac{1}{2}\sum_{cyc}\frac{(a-b)^2}{(b+c)(c+a)} \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{(a-b)^2}{(b+c)(c+a)} \ge k\,\frac{2(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)}{a^2+b^2+c^2}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{(a-b)^2}{(b+c)(c+a)} \ge k\sum_{cyc}\frac{(a-b)^2}{a^2+b^2+c^2}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\left[\frac{(a-b)^2}{(b+c)(c+a)} - k\,\frac{(a-b)^2}{a^2+b^2+c^2}\right] \ge 0 \Leftrightarrow \sum_{cyc}(a-b)^2\left[\frac{a^2+b^2+c^2}{(b+c)(c+a)} - k\right] \ge 0 \quad (3)$$

Điều kiện cần: Cho $c=b\neq a$ vào (3) $\Rightarrow (a-b)^2\left[\dfrac{a^2+2b^2}{2b(a+b)}-k\right]\geq 0$

$\Rightarrow k\leq \dfrac{a^2+2b^2}{2b(a+b)}=u(a,b)$. Ta có: $u(a,b)=\dfrac{a^2+2b^2}{2b(a+b)}=\dfrac{\left(\dfrac{a}{b}\right)^2+2}{2\left(\dfrac{a}{b}+1\right)}=\dfrac{t^2+2}{2t+2}$

$\Rightarrow (2t+2)u=t^2+2\Leftrightarrow f(t)=t^2-2ut+2-2u=0$

$u\in$ Tập giá trị của hàm số $\Leftrightarrow f(t)=0$ có nghiệm

$\Leftrightarrow \Delta'_t=u^2+2u-2\geq 0\Rightarrow u\geq \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$

Điều kiện đủ:

Ta sẽ chứng minh $k=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}=\operatorname{Min}u(a,b)$ là hằng số tốt nhất của bất đẳng thức (1)

Thật vậy với $k=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$ ta có (1) $\Leftrightarrow \sum\limits_{cyc}(a-b)^2\left[\dfrac{a^2+b^2+c^2}{(b+c)(c+a)}-k\right]\geq 0$ (4)

Đặt $S_a=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{(c+a)(b+a)}-k; S_b=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{(a+b)(c+b)}-k; S_c=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{(b+c)(a+c)}-k$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a\geq b\geq c\Rightarrow S_a\leq S_b\leq S_c$

Xét $S_a+S_b=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{(c+a)(b+a)}+\dfrac{a^2+b^2+c^2}{(a+b)(c+b)}-2k=\dfrac{(a^2+b^2+c^2)(a+b+2c)}{(a+b)(b+c)(c+a)}-2k$

Đặt $v=\dfrac{a+b}{2}\Rightarrow$

$$S_a+S_b\geq\frac{\left[\dfrac{(a+b)^2}{2}+c^2\right](2v+2c)}{2v(b+c)(c+a)}-2k\geq\frac{(2v^2+c^2)(v+c)}{v\left[\dfrac{(b+c)+(c+a)}{2}\right]^2}-2k=\frac{2v^2+c^2}{v(v+c)}-2k$$

$\Rightarrow S_a+S_b\geq 2\left(\dfrac{2v^2+c^2}{2v(v+c)}-k\right)=2\left[u(v,c)-k\right]\geq 0$ (do $u(v,c)\geq\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}=k$)

Do $S_a\leq S_b\leq S_c$ và $S_a+S_b\geq 0$ nên $S_b\geq 0; S_b+S_c\geq 0; S_c+S_a\geq 0$

Sử dụng ***Mệnh đề 2*** suy ra với $k=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$ thì (4) đúng $\forall a,b,c>0$.

Kết luận: $k=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$ là hằng số lớn nhất để (1) đúng $\forall a,b,c>0$.

Bài 5. Cho $a,b,c\geq 0$. Tìm hằng số tốt nhất của bất đẳng thức:

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+k\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}\geq 9+k\quad (1)$$

Chứng minh

Ta sử dụng các biến đổi sau:

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)-9=\frac{(b-c)^2}{bc}+\frac{(c-a)^2}{ca}+\frac{(a-b)^2}{ab}$$

$$1-\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}=\frac{(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2}{2(a^2+b^2+c^2)}$$

Bất đẳng thức (1) trở thành: $\sum_{cyc}\left(\frac{1}{bc}-\frac{k}{2(a^2+b^2+c^2)}\right)(b-c)^2\geq 0\Leftrightarrow\sum_{cyc}S_a(b-c)^2\geq 0$ (2)

Trong đó:

$S_a=2a(a^2+b^2+c^2)-kabc, S_b=2b(a^2+b^2+c^2)-kabc, S_c=2c(a^2+b^2+c^2)-kabc$

Bây giờ ta cho $b=c$ thì (2) $\Leftrightarrow$

$S_b\geq 0\Leftrightarrow 2(a^2+2b^2)-kab\geq 0\Leftrightarrow 2(a-\sqrt{2}b)^2+(4\sqrt{2}-k)ab\geq 0$

Cho $a=\sqrt{2}b$ thì $k\leq 4\sqrt{2}$. Ngược lại, ta sẽ chứng minh bất đẳng thức đúng với $k=4\sqrt{2}$. Giả sử $a\geq b\geq c\Rightarrow S_a\geq S_b\geq S_c$. Mặt khác:

$S_b+S_c=2(b+c)(a^2+b^2+c^2)-8\sqrt{2}abc\geq 4\sqrt{bc}.(a^2+2bc)-8\sqrt{2}abc=4\sqrt{bc}(a-\sqrt{2bc})^2\geq 0$

Sử dụng ***Mệnh đề 2*** ta có đpcm.

Kết luận: $k=4\sqrt{2}$ là hằng số tốt nhất của bất đẳng thức.

Bài 6. Cho $a,b,c\geq 0$. Tìm hằng số tốt nhất của bất đẳng thức:

$$\frac{bc}{b^2+c^2+ka^2}+\frac{ca}{c^2+a^2+kb^2}+\frac{ab}{b^2+a^2+kc^2}\leq\frac{3}{5}\ (1)$$

Giải

Cho $a=3,b=2,c=2$ ta có được: $k\leq 3$. Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức đúng khi $k=3$.

Thật vậy, không giảm tính tổng quát, giả sử $a\geq b\geq c$ và $a^2+b^2+c^2=1$. Ta sử dụng biến đổi sau: $2(b^2+c^2+3a^2)-10bc=5(b-c)^2+3(a^2-b^2+a^2-c^2)$

Do đó bất đẳng thức (1) $\Leftrightarrow\sum_{cyc}\frac{5(b-c)^2+3(a^2-b^2+a^2-c^2)}{1+2a^2}\geq 0\Leftrightarrow\sum_{cyc}S_a(b-c)^2\geq 0$

Trong đó: $S_a=5(1+2b^2)(1+2c^2)-6(b+c)^2(1+2a^2)$;

$S_b=5(1+2c^2)(1+2a^2)-6(c+a)^2(1+2b^2)$; $S_c=5(1+2a^2)(1+2b^2)-6(a+b)^2(1+2c^2)$

Đặt $x=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$. Dễ thấy $S_c\geq 0$ và: $(a+c)^2(1+2b^2)+(b+c)^2(1+2a^2)\leq 2(x+c)^2(1+2x^2)$

Ta sẽ chứng minh $S_a+S_b\geq 0$. Thật vậy:

$S_a+S_b\geq 10(1+2c^2)(1+2x^2)-6(x+c)^2(1+2x^2)\geq 0\Leftrightarrow(2x-3c)^2\geq 0$ (đúng)

Tiếp theo ta sẽ chứng minh $S_b \ge 0$. Thật vậy:

$S_b = 5(1+2c^2)(1+2a^2) - 6(c+a)^2(1+2b^2) \ge 0$

$$\Leftrightarrow \frac{3a^2+b^2+c^2}{3b^2+c^2+a^2} \ge \frac{6(a+c)^2}{5(3c^2+a^2+b^2)} \Leftrightarrow \frac{2(a^2-b^2)}{3b^2+c^2+a^2} \ge \frac{a^2+12ac-5b^2-9c^2}{5(3c^2+a^2+b^2)}.$$

Mà điều này thì hiển nhiên đúng do:

$2(a^2-b^2) \ge a^2+12ac-5b^2-9c^2,\ 3b^2+c^2+a^2 \le 5(3c^2+a^2+b^2)$

Sử dụng ***mệnh đề 2*** ta có đpcm.

Kết luận: $k = 3$ là hằng số tốt nhất của bất đẳng thức.

Bài 7. Cho $\begin{cases} a,b,c \ge 0 \\ ab+bc+ca=1 \end{cases}$. Chứng minh: $\dfrac{1+a^2b^2}{(a+b)^2} + \dfrac{1+b^2c^2}{(b+c)^2} + \dfrac{1+c^2a^2}{(c+a)^2} \ge \dfrac{5}{2}$ (1)

Chứng minh

$$(1) \Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{(ab+bc+ca)^2+a^2b^2}{(a+b)^2} \ge \frac{5}{2}(ab+bc+ca)$$

$$\Leftrightarrow 2\sum_{cyc} \frac{2ab(ab+bc+ca)+(bc+ca)^2}{(a+b)^2} \ge 5(ab+bc+ca)$$

$$\Leftrightarrow 4(ab+bc+ca)\left[\frac{ab}{(a+b)^2} + \frac{bc}{(b+c)^2} + \frac{ca}{(c+a)^2}\right] + 2(a^2+b^2+c^2) \ge 5(ab+bc+ca)$$

$$\Leftrightarrow (ab+bc+ca)\left[\frac{4ab}{(a+b)^2} + \frac{4bc}{(b+c)^2} + \frac{4ca}{(c+a)^2} - 3\right] + 2(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) \ge 0$$

$$\Leftrightarrow -(ab+bc+ca)\left[\frac{(a-b)^2}{(a+b)^2} + \frac{(b-c)^2}{(b+c)^2} + \frac{(c-a)^2}{(c+a)^2}\right] + (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \left[1 - \frac{ab+bc+ca}{(a+b)^2}\right](a-b)^2 + \left[1 - \frac{ab+bc+ca}{(b+c)^2}\right](b-c)^2 + \left[1 - \frac{ab+bc+ca}{(c+a)^2}\right](c-a)^2 \ge 0$$

Đặt $S_a = 1 - \dfrac{ab+bc+ca}{(b+c)^2};\ S_b = 1 - \dfrac{ab+bc+ca}{(c+a)^2};\ S_c = 1 - \dfrac{ab+bc+ca}{(a+b)^2}$

Không mất tính tổng quát giả sử $a \le b \le c \Rightarrow S_a \ge S_b \ge S_c$

Ta có: $S_b = 1 - \dfrac{ab+bc+ca}{(c+a)^2} = \dfrac{a^2+(a+c)(c-b)}{(c+a)^2} > 0 \Rightarrow S_a \ge S_b > 0$

Mặt khác: $b^2S_c + c^2S_b = b^2\left[1 - \dfrac{ab+bc+ca}{(a+b)^2}\right] + c^2\left[1 - \dfrac{ab+bc+ca}{(c+a)^2}\right] =$

$$=b^2\cdot\frac{a^2+(a+b)(b-c)}{(a+b)^2}+c^2\cdot\frac{a^2+(a+c)(c-b)}{(c+a)^2}=a^2\left[\frac{b^2}{(a+b)^2}+\frac{c^2}{(c+a)^2}\right]+(c-b)\left(\frac{c^2}{a+c}-\frac{b^2}{a+b}\right)$$

$$=a^2\left[\frac{b^2}{(a+b)^2}+\frac{c^2}{(c+a)^2}\right]+(c-b)^2\cdot\frac{ab+bc+ca}{(a+c)(a+b)}>0$$

Sử dụng ***Mệnh đề 4*** suy ra (đpcm). Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{\sqrt{3}}$ hoặc $a=b=1, c=0$ và các hoán vị.

Bài 8. Cho $\sqrt{a},\sqrt{b},\sqrt{c}$ là độ dài 3 cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$3\,\mathrm{Min}\left\{\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a},\ \frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\right\}\ge(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\quad(1)$$

Chứng minh

Không mất tính tổng quát giả sử $\mathrm{Min}\left\{\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a},\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\right\}=\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}$, khi đó:

$(1)\Leftrightarrow 3\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)\ge(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$

$\Leftrightarrow 3(a^2c+b^2a+c^2b)\ge(a+b+c)(ab+bc+ca)$

$\Leftrightarrow 2(a^2c+b^2a+c^2b)\ge(a^2b+b^2c+c^2a)+3abc$

$\Leftrightarrow 2\left[(a^3+b^3+c^3)-(a^2c+b^2a+c^2b)\right]$

$\le(a^3+b^3+c^3)-(a^2b+b^2c+c^2a)+(a^3+b^3+c^3)-3abc\ (2)$

$$\text{Ta có: }+\begin{cases}2b^3+a^3-3b^2a=(b-a)(2b^2-ba-a^2)=(b-a)^2(2b+a)\\2c^3+b^3-3c^2b=(c-b)(2c^2-cb-b^2)=(c-b)^2(2c+b)\\2a^3+c^3-3a^2c=(a-c)(2a^2-ac-c^2)=(a-c)^2(2a+c)\end{cases}$$

$\Rightarrow 3\left[(a^3+b^3+c^3)-(a^2c+b^2a+c^2b)\right]=(a-b)^2(2b+a)+(b-c)^2(2c+b)+(c-a)^2(2a+c)$

Tương tự:

$3\left[(a^3+b^3+c^3)-(a^2b+b^2c+c^2a)\right]=(a-b)^2(2a+b)+(b-c)^2(2b+c)+(c-a)^2(2c+a)$

Mặt khác: $a^3+b^3+c^3-3abc=\frac{1}{2}(a+b+c)\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]$

Suy ra $(2)\Leftrightarrow \frac{2}{3}\sum_{cyc}(2b+a)(a-b)^2\le\frac{1}{3}\sum_{cyc}(2a+b)(a-b)^2+\frac{1}{2}\sum_{cyc}(a+b+c)(a-b)^2$

$\Leftrightarrow \sum_{cyc}(a-b)^2\left[\frac{1}{3}(2a+b)+\frac{1}{2}(a+b+c)-\frac{2}{3}(2b+a)\right]\ge0\Leftrightarrow\frac{1}{2}\sum_{cyc}(c+a-b)(a-b)^2\ge0$

$\Leftrightarrow (c+a-b)(a-b)^2+(a+b-c)(b-c)^2+(b+c-a)(c-a)^2\ge0\qquad(3)$

Đặt $S_a=a+b-c;S_b=b+c-a;S_c=c+a-b$

$\Rightarrow S_a + S_b = 2b > 0$; $S_b + S_c = 2c > 0$; $S_c + S_a = 2a > 0$. Mặt khác ta có:

$$S_aS_b + S_bS_c + S_cS_a = (a+b-c)(b+c-a) + (b+c-a)(c+a-b) + (c+a-b)(a+b-c) =$$

$$a^2 - (b-c)^2 + b^2 - (c-a)^2 + c^2 - (a-b)^2 = 2(ab+bc+ca) - (a^2+b^2+c^2)$$

$$= 4ab - (a+b-c)^2 = (2\sqrt{ab} + a + b - c)(2\sqrt{ab} - a - b + c)$$

$$= (\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})(\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c})(\sqrt{b} + \sqrt{c} - \sqrt{a})(\sqrt{c} + \sqrt{a} - \sqrt{b})$$

Do $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}$ là độ dài 3 cạnh của 1 tam giác nên suy ra $S_aS_b + S_bS_c + S_cS_a > 0$

Theo ***Mệnh đề 5*** suy ra (3) đúng suy ra (2) đúng suy ra (1) đúng (đpcm).

Bài 9. Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác.

Chứng minh rằng: $3\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right) \ge 2\left(\frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a}\right) + 3$ (1)

Chứng minh

$$(1) \Leftrightarrow 3(a^2c + b^2a + c^2b) \ge 2(b^2c + c^2a + a^2b) + 3abc$$

$$\Leftrightarrow 3\left[(a^3+b^3+c^3) - (a^2c+b^2a+c^2b)\right] \le 2\left[(a^3+b^3+c^3) - (a^2b+b^2c+c^2a)\right] + (a^3+b^3+c^3) - 3abc$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}(2b+a)(a-b)^2 \le \frac{2}{3}\sum_{cyc}(2a+b)(a-b)^2 + \frac{1}{2}\sum_{cyc}(a+b+c)(a-b)^2$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2(5a-5b+3c) + (b-c)^2(5b-5c+3a) + (c-a)^2(5c-5a+3b) \ge 0$$

Đặt $S_a = 5b - 5c + 3a$; $S_b = 5c - 5a + 3b$; $S_c = 5a - 5b + 3c$

Không mất tính tổng quát giả sử b nằm giữa a và c. Xét 2 khả năng:

• Xét $c \ge b \ge a$: Khi đó $S_b = 5c - 5a + 3b > 0; S_a + S_b = 8b - 2a \ge 0; S_b + S_c = 8c - 2b \ge 0$

Sử dụng ***Mệnh đề 2*** ta suy ra điều phải chứng minh.

• Xét $a \ge b \ge c$: Khi đó $S_a + S_c + 4S_b = 18c + 12b - 12a > 12(c+b-a) > 0$

+ Nếu $|a-b| \ge |c-b|$ thì $c > a - b \ge b - c \ge 0 \Rightarrow 2c > b$

$\Rightarrow S_b + S_c = 8c - 2b > 4b - 2b = 2b > 0 \Rightarrow S_c + 2S_b > S_b + 2b = 5(c - a + b) > 0$

+ Nếu $|c-b| \ge |a-b|$ thì $b - c \ge a - b \ge 0 \Rightarrow 2b \ge a + c > a$

$\Rightarrow S_a + S_b = 8b - 2a > 4a - 2a = 2a > 0 \Rightarrow S_a + 2S_b > S_b + 2a = 5c - 3a + 3b > 3(c - a + b) > 0$

Sử dụng ***Mệnh đề 6*** với $\alpha = 1$ suy ra điều phải chứng minh.

Bài 10. Cho $x, y, z > 0$. Chứng minh rằng

$$x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx \ge \sqrt{2}\left(x\sqrt{y^2+z^2} + y\sqrt{z^2+x^2} + z\sqrt{x^2+y^2}\right) \quad (1)$$

Chứng minh

$$(1) \Leftrightarrow 2(x^2+y^2+z^2) - 2(xy+yz+zx) \ge 2\sqrt{2}\left(x\sqrt{y^2+z^2} + y\sqrt{z^2+x^2} + z\sqrt{x^2+y^2}\right) - 4(xy+yz+zx)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}(x-y)^2 \ge 2\sum_{cyc}\left(x\sqrt{2(y^2+z^2)} - x(y+z)\right)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}(x-y)^2 \ge 2\sum_{cyc}\frac{x(y-z)^2}{\sqrt{2(y^2+z^2)}+y+z} \Leftrightarrow \sum_{cyc}(x-y)^2 \ge 2\sum_{cyc}\frac{z(x-y)^2}{\sqrt{2(x^2+y^2)}+x+y}$$

Sử dụng bất đẳng thức ***Buniakowski*** ta có:

$$2\sum_{cyc}\frac{z(x-y)^2}{\sqrt{2(x^2+y^2)}+x+y} \le \sum_{cyc}\frac{z(x-y)^2}{x+y}$$. Do đó ta chỉ cần chứng minh:

$$\sum_{cyc}(x-y)^2 \ge \sum_{cyc}\frac{z(x-y)^2}{x+y} \Leftrightarrow \sum_{cyc}\left(1-\frac{z}{x+y}\right)(x-y)^2 \ge 0 \quad (2)$$

Đặt $S_x = 1-\dfrac{x}{y+z}, S_y = 1-\dfrac{y}{z+x}, S_z = 1-\dfrac{z}{x+y}$,

khi đó (2) $\Leftrightarrow$ $S_x(y-z)^2 + S_y(z-x)^2 + S_z(x-y)^2 \ge 0$

Không mất tính tổng quát giả sử $x \ge y \ge z > 0$. Khi đó $S_y, S_z > 0$

Ta có $x^2S_y + y^2S_x = x^2 + y^2 - \dfrac{x^2y}{x+z} - \dfrac{xy^2}{y+z} \ge x^2 + y^2 - 2xy \ge 0$

Sử dụng ***Mệnh đề 4*** suy ra điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z$.

Bài 11. [Komal] $a,b,c > 0$ thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{3}{a+b+c} \ge \left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\frac{2}{a^2+b^2+c^2}$$

Chứng minh

Ta có $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}-\dfrac{3}{a+b+c} \ge \left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}\right)\dfrac{2}{a^2+b^2+c^2}$

$$\Leftrightarrow ab+bc+ca-\frac{3abc}{a+b+c}\ge \frac{2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)}{a^2+b^2+c^2}$$

$$\Leftrightarrow ab+bc+ca-\frac{9abc}{a+b+c}\ge \frac{2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)}{a^2+b^2+c^2}-\frac{6abc}{a+b+c}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{c(a-b)^2}{a+b+c}\ge \sum_{cyc}\frac{c(a-b)^2(c^2+bc+ca-2ab)}{(a^2+b^2+c^2)(a+b+c)}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}c(a-b)^2(a^2+b^2+2ab-bc-ca)\ge 0$$

Đặt $S_a=a(b^2+c^2+2bc-ca-ab)$; $S_b=b(c^2+a^2+2ca-ab-bc)$;

$S_c=c(a^2+b^2+2ab-bc-ca)$

Bất đẳng thức cần chứng minh $\Leftrightarrow S_a(b-c)^2+S_b(c-a)^2+S_c(a-b)^2\ge 0$

Không mất tính tổng quát giả sử $a\ge b\ge c$. Khi đó, dễ thấy $S_b,S_c\ge 0$.

Ta có $a^2S_b+b^2S_a=ab\left[(a-b)^2(a+b)+2c(a^2+b^2-ab)+c(a^2+b^2)\right]>0$

Từ đây, sử dụng ***Mệnh đề 4***, ta suy ra đpcm.

Bài 12. Chứng minh rằng với mọi số dương x,y,z thỏa $xy+yz+zx=1$ ta luôn có

$$\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x}-2(x^2+y^2+z^2)\ge\sqrt{3}-2$$

Chứng minh

Ta có bất đẳng thức tương đương với

$$\left(\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x}-x-y-z\right)+x+y+z-\sqrt{3}\ge 2(x^2+y^2+z^2-1)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{(x-y)^2}{y}+\frac{1}{2}\sum_{cyc}\frac{(x-y)^2}{x+y+z+\sqrt{3}}\ge\sum_{cyc}(x-y)^2$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}(x-y)^2\left[\frac{1}{y}+\frac{1}{2\left(x+y+z+\sqrt{3}\right)}-1\right]\ge 0$$

Đặt $S_x=\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{2\left(x+y+z+\sqrt{3}\right)}-1$; $S_y=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2\left(x+y+z+\sqrt{3}\right)}-1$;

$S_z=\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{2\left(x+y+z+\sqrt{3}\right)}-1$

Khi đó, bất đẳng thức cần chứng minh $\Leftrightarrow S_x(y-z)^2+S_y(z-x)^2+S_z(x-y)^2\ge 0$

Ta có $S_x + S_y + S_z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} - 3 + \frac{3}{2\left(x+y+z+\sqrt{3}\right)}$

$= \frac{xy+yz+zx}{xyz} - 3 + \frac{3}{2\left(x+y+z+\sqrt{3}\right)} = \frac{1}{xyz} - 3 + \frac{3}{2\left(x+y+z+\sqrt{3}\right)}$

$\geq \frac{3\sqrt{3}}{(xy+yz+zx)^{\frac{3}{2}}} - 3 + \frac{3}{2\left(x+y+z+\sqrt{3}\right)} = 3\sqrt{3} - 3 + \frac{3}{2\left(x+y+z+\sqrt{3}\right)} > 0$

Đặt $t = \frac{1}{2\left(x+y+z+\sqrt{3}\right)}$. Khi đó, ta có

$S_xS_y + S_yS_z + S_zS_x = \left(t + \frac{1}{x} - 1\right)\left(t + \frac{1}{y} - 1\right) + \left(t + \frac{1}{y} - 1\right)\left(t + \frac{1}{z} - 1\right) + \left(t + \frac{1}{z} - 1\right)\left(t + \frac{1}{x} - 1\right)$

$= 3t^2 + 2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} - 3\right)t + \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} - 2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) + 3$

$> \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} - 2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) + 3 = \frac{x+y+z+3xyz-2}{xyz}$

Ta chứng minh $\frac{x+y+z+3xyz-2}{xyz} \geq 0 \Leftrightarrow x+y+z+3xyz-2 \geq 0$ (*)

Nếu $x+y+z \geq 2$ thì (*) hiển nhiên đúng.

Nếu $x+y+z \leq 2$, đặt $p = x+y+z \Rightarrow 2 \geq p \geq \sqrt{3}$.

Thế thì theo bất đẳng thức ***Schur***, ta có $xyz \geq \frac{4p-p^3}{9}$. Do đó:

$p + 3xyz - 2 \geq p - 2 + \frac{4p-p^3}{3} = \frac{-p^3+7p-6}{3} = \frac{(2-p)(p-1)(p+3)}{3} \geq 0 \Rightarrow$ (*) đúng

Vậy $\begin{cases} S_x + S_y + S_z > 0 \\ S_xS_y + S_yS_z + S_zS_x > 0 \end{cases}$ nên ta có $S_x(y-z)^2 + S_y(z-x)^2 + S_z(x-y)^2 \geq 0$ (đpcm).

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Bài 13. Cho $a,b,c > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq 3 \cdot \sqrt{\frac{a^4+b^4+c^4}{a^2+b^2+c^2}} \quad (1)$$

Chứng minh

Bất đẳng thức (1) $\Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{a^4}{b^2} + 2\sum_{cyc} \frac{a^2b}{c} \geq \frac{9(a^4+b^4+c^4)}{a^2+b^2+c^2}$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\left(\frac{a^4}{b^2}+b^2-2a^2\right)+2\sum_{cyc}\left(\frac{a^2b}{c}+bc-2ab\right)\geq\left(\frac{9(a^4+b^4+c^4)}{a^2+b^2+c^2}-3\sum_{cyc}a^2\right)+\left(2\sum_{cyc}a^2-2\sum_{cyc}ab\right)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}(a-b)^2\left(\frac{a}{b}+1\right)^2+2\sum_{cyc}(c-a)^2\frac{b}{c}\geq\frac{3\sum_{cyc}(a-b)^2(a+b)^2}{a^2+b^2+c^2}+\sum_{cyc}(a-b)^2\Leftrightarrow\sum_{cyc}S_c(a-b)^2\geq 0$$

trong đó $S_a=\frac{b^2}{c^2}+\frac{2b}{c}+\frac{2a}{b}-\frac{3(b+c)^2}{a^2+b^2+c^2}$; $S_b=\frac{c^2}{a^2}+\frac{2c}{a}+\frac{2b}{c}-\frac{3(c+a)^2}{a^2+b^2+c^2}$

$$S_c=\frac{a^2}{b^2}+\frac{2a}{b}+\frac{2c}{a}-\frac{3(a+b)^2}{a^2+b^2+c^2}.$$

Rõ ràng ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức trong trường hợp $a\geq b\geq c>0$

*** Trường hợp 1.** $b-c\geq a-b\Leftrightarrow 2(b-c)\geq a-c\Leftrightarrow 2b\geq a+c$. Ta có:

$$S_a+S_c=\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{4a}{b}+\frac{2b}{c}+\frac{2c}{a}-\frac{3(a+b)^2+3(b+c)^2}{a^2+b^2+c^2}$$

$$\geq\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{4a}{b}+4\sqrt{\frac{b}{a}}-\frac{3(a+b)^2+3(b+c)^2}{a^2+b^2+c^2}$$

$$\geq 10-\frac{3(a+b)^2+3(b+c)^2}{a^2+b^2+c^2}=\frac{7a^2+4b^2+7c^2-6ab-6bc}{a^2+b^2+c^2}\geq 0$$

$$S_a+S_b=\frac{b^2}{c^2}+\frac{2b}{c}+\frac{2a}{b}+\frac{c^2}{a^2}+\frac{2c}{a}+\frac{2b}{c}-\frac{3(a+c)^2+3(b+c)^2}{a^2+b^2+c^2}$$

$$\geq 9-\frac{3(a+c)^2+3(b+c)^2}{a^2+b^2+c^2}=\frac{3\left[(2a-b)^2+(b-2c)^2\right]}{2(a^2+b^2+c^2)}\geq 0$$

$$S_a+4S_b=\frac{4c^2}{a^2}+\frac{8c}{a}+\frac{10b}{c}+\frac{2a}{b}+\frac{b^2}{c^2}-\frac{3(b+c)^2+12(a+c)^2}{a^2+b^2+c^2}$$

$$\geq\frac{4c}{a}-1+\frac{8c}{a}+\frac{5a}{c}+5+\frac{b^2}{c^2}+\frac{2a}{b}-\frac{3(b+c)^2+12(a+c)^2}{a^2+b^2+c^2}$$

$$\geq 22-\frac{3(b+c)^2+12(a+c)^2}{a^2+b^2+c^2}=\frac{10a^2+19b^2+7c^2-24ac-6bc}{a^2+b^2+c^2}\geq 0$$

$$S_a+4S_b+S_c=\frac{4c^2}{a^2}+\frac{10c}{a}+\frac{10b}{c}+\frac{4a}{b}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{a^2}{b^2}-\frac{3(b+c)^2+12(a+c)^2+3(a+b)^2}{a^2+b^2+c^2}$$

$$\geq 26-\frac{3(b+c)^2+12(a+c)^2+3(a+b)^2}{a^2+b^2+c^2}=\frac{11a^2+20b^2+11c^2-24ab}{a^2+b^2+c^2}\geq 0$$

Nếu $S_b\geq 0$ thì ta có $\sum_{cyc}S_c(a-b)^2\geq(S_a+S_c)(a-b)^2\geq 0$

Nếu $S_b \le 0, S_c \ge 0$ thì $\sum_{cyc} S_c(a-b)^2 \ge (S_a + 4S_b)(b-c)^2 \ge 0$

Nếu $S_b . S_c \le 0$ thì $\sum_{cyc} S_c(a-b)^2 \ge (S_a + 4S_b + S_c)(b-c)^2 \ge 0$

* **Trường hợp 2.** $a-b \ge b-c$. Ta sẽ chứng minh $S_c \ge 0$, thật vậy xét hàm số

$f(c) = S_c = \dfrac{a^2}{b^2} + \dfrac{2a}{b} + \dfrac{2c}{a} - \dfrac{3(a+b)^2}{a^2+b^2+c^2}$. Dễ thấy đây là hàm tăng theo c nên

\+ Nếu $2b \le a$ ta có

$$f(c) \ge f(0) = \frac{a^2}{b^2} + \frac{2a}{b} - \frac{3(a+b)^2}{a^2+b^2} \ge 8 - \frac{3(a+b)^2}{a^2+b^2} = \frac{5a^2+5b^2-6ab}{a^2+b^2} \ge 0$$

\+ Nếu $2b \ge a$, ta có $f(c) \ge f(2b-a) = \dfrac{a^2}{b^2} + \dfrac{2a}{b} + \dfrac{4b}{a} - 2 - \dfrac{3(a+b)^2}{2a^2+5b^2-4ab} \ge 0$

Vậy ta có $S_a, S_c \ge 0$. Do đó nếu $S_b \ge 0$ thì ta có ngay đpcm.

Xét trường hợp $S_b \le 0$ ta có:

$$S_a + 2S_b = \frac{2c^2}{a^2} + \frac{4c}{a} + \frac{6b}{c} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{2a}{b} - \frac{6(a+c)^2 + 3(b+c)^2}{a^2+b^2+c^2}$$

$$\ge \frac{8c}{a} - 2 + \frac{8b}{c} - 1 + \frac{2a}{b} - \frac{6(a+c)^2+3(b+c)^2}{a^2+b^2+c^2} \ge 12 - \frac{6(a+c)^2+3(b+c)^2}{a^2+b^2+c^2} \ge 0$$

$$S_c + 2S_b = \frac{2c^2}{a^2} + \frac{6c}{a} + \frac{4b}{c} + \frac{a^2}{b^2} + \frac{2a}{b} - \frac{6(a+c)^2+3(a+b)^2}{a^2+b^2+c^2}$$

$$\ge \frac{\left(2\sqrt{2}+6\right)c}{a} - 1 + \frac{4b}{c} + \frac{4a}{b} - 1 - \frac{6(a+c)^2+3(a+b)^2}{a^2+b^2+c^2} \ge 13.6 - \frac{6(a+c)^2+3(a+b)^2}{a^2+b^2+c^2} \ge 0$$

Khi đó: $\sum_{cyc} S_c(a-b)^2 \ge (S_a + 2S_b)(b-c)^2 + (S_c + 2S_b)(a-b)^2 \ge 0$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

Bài 14. Cho các số $a,b,c > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \ge 2\left(\frac{a^2-ab+b^2}{a+b} + \frac{b^2-bc+c^2}{b+c} + \frac{c^2-ca+a^2}{c+a}\right) \quad (1)$$

Chứng minh

Bất đẳng thức (1) $\Leftrightarrow \sum_{cyc} \dfrac{a^2}{b} - (a+b+c) \ge 2\left(\sum_{cyc} \dfrac{a^2-ab+b^2}{a+b} - \dfrac{a+b+c}{2}\right)$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{(a-b)^2}{b} \ge \frac{3}{2}\sum_{cyc} \frac{(a-b)^2}{a+b} \Leftrightarrow \sum_{cyc} (a-b)^2\left(\frac{1}{b} - \frac{3}{2(a+b)}\right) \ge 0$$

Đặt $S_a=\frac{1}{c}-\frac{3}{2(b+c)}$; $S_b=\frac{1}{a}-\frac{3}{2(c+a)}$; $S_c=\frac{1}{b}-\frac{3}{2(a+b)}$

Không mất tính tổng quát, ta chỉ cần xét bất đẳng thức trong trường hợp $a\ge b\ge c$ là đủ. Khi đó, ta có $S_a,S_c\ge 0$. Như thế, nếu $S_b\ge 0$ thì ta có ngay đpcm.

Xét $S_b\le 0$, ta có: $S_a+2S_b=\frac{2}{a}-\frac{3}{a+c}+\frac{1}{c}-\frac{3}{2(b+c)}\ge\frac{3}{a+c}-\frac{3}{a+c}+\frac{3}{4c}-\frac{3}{2(b+c)}\ge 0$

$$S_c+2S_b=\frac{2}{a}+\frac{1}{b}-\frac{3}{a+c}-\frac{3}{2(a+b)}$$

* **Trường hợp 1.** $b-c\ge a-b\Leftrightarrow 2(b-c)\ge a-c\Leftrightarrow 2b\ge a+c$

Ta có $S_a+4S_b=\frac{4}{a}+\frac{1}{c}-\frac{6}{a+c}-\frac{3}{2(b+c)}\ge\frac{2}{3}\left(\frac{4}{a}+\frac{1}{c}\right)+\frac{4}{3a}+\frac{1}{3c}-\frac{6}{a+c}-\frac{3}{a+3c}$

$\ge\frac{2\cdot 9}{3(a+c)}+\frac{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}+1\right)^2}{a+3c}-\frac{6}{a+c}-\frac{3}{a+3c}\ge 0$. Khi đó: $\sum_{cyc}S_c(a-b)^2\ge(S_a+4S_b)(b-c)^2\ge 0$

* **Trường hợp 2.** $b-c\le a-b\Leftrightarrow a+c\ge 2b$. Đặt $f(c)=S_c+2S_b$.

Dễ thấy $f(c)$ là hàm tăng nên

+ Nếu $2b\le a$, ta có:

$$f(c)\ge f(0)=\frac{2}{a}-\frac{3}{a}+\frac{1}{b}-\frac{3}{2(a+b)}=\frac{a-b}{ab}-\frac{3}{2(a+b)}=\frac{2a^2-3ab-2b^2}{2ab(a+b)}\ge 0$$

+ Nếu $2b\ge a$, ta có: $f(c)\ge f(2b-a)=\frac{2}{a}-\frac{3}{2b}+\frac{1}{b}-\frac{3}{2(a+b)}\ge\frac{2}{a}-\frac{1}{a}-\frac{3}{2a+a}=0$

Vậy $f(c)\ge 0$ nên ta có: $\sum_{cyc}S_c(a-b)^2\ge(S_a+2S_b)(b-c)^2+(S_c+2S_b)(a-b)^2\ge 0$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Bình luận: Chúng ta có thể thấy được sự hiệu quả của kỹ thuật S.O.S đối với bài toán ba biến, còn đối với các bài toán nhiều biến thì như thế nào? Trong thực tế, S.O.S tỏ ra không có nhiều hiệu quả, tuy nhiên chúng ta vẫn có thể áp dụng nó trong một số trường hợp. Và nó thường đi kèm với nguyên lý quy nạp và kỹ thuật dồn biến. Chúng ta hãy xét một số ví dụ để làm rõ vấn đề này.

Bài 15. Cho n số thực dương $a_1,a_2,...,a_n$ thõa mãn $a_1+a_2+...+a_n=n$.

Chứng minh rằng: $n^2\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}\right)\ge 4(n-1)(a_1{}^2+a_2{}^2+...+a_n{}^2)+n(n-2)^2$

Chứng minh

Chúng ta sẽ chứng minh bất đẳng thức theo nguyên lý quy nạp. Ở đây chúng tôi sẽ chỉ xét phần phức tạp nhất, đó là bước chuyển quy nạp, nghĩa là bất đẳng thức sẽ đúng với n+1 biến khi nó đã đúng với n hoặc nhỏ hơn n biến.

Đầu tiên, chú ý rằng bất đẳng thức tương đương với:

$$\left[n^2\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}\right)-n(n-2)^2\right](a_1+...+a_n)^2 \ge 4(n-1)n^2(a_1^{\,2}+...+a_n^{\,2})$$

Vì vậy nếu bất đẳng thức đúng cho $a_1+...+a_n=n$ thì nó cũng đúng cho $a_1+...+a_n\le n$.

Đặt $f(a_1,a_2,...a_n)=VT-VP$. Giả sử rằng: $a_1=\max\{a_1,a_2,....,a_n\}$. Ta có:

$$f(a_1,...,a_n)-f\left(a_1,\frac{a_2+...+a_n}{n-1},....\frac{a_2+...+a_n}{n-1}\right)$$

$$=n^2\left(\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}-\frac{n^2}{a_2+...+a_n}\right)-4(n-1)\left[a_2^{\,2}+...+a_n^{\,2}-\frac{(a_2+...+a_n)^2}{n-1}\right]$$

$$=\frac{n^2}{(a_2+...+a_n)}\sum\frac{(a_i-a_j)^2}{a_ia_j}-4\sum(a_i-a_j)^2\ge\frac{n^2}{n-1}\sum\frac{(a_i-a_j)^2}{a_ia_j}-4\sum(a_i-a_j)^2 \quad (*)$$

Tuy nhiên, chúng ta đã có bất đẳng thức cho n biến:

$$(n-1)^2\left(\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right)\ge 4(n-2)(a_2^{\,2}+...+a_n^{\,2})+(n-1)(n-3)^2$$

$$\Leftrightarrow(n-1)\sum\frac{(a_i-a_j)^2}{a_ia_j}\ge\frac{4(n-2)}{n-1}\sum(a_i-a_j)^2\Leftrightarrow\frac{(n-1)^2}{n-2}\sum\frac{(a_i-a_j)^2}{a_ia_j}\ge 4\sum(a_i-a_j)^2$$

Và rõ ràng $\dfrac{n^2}{n-1}>\dfrac{(n-1)^2}{n-2}$ vậy nên $(*)\ge 0$.

Vì vậy chúng ta chỉ cần chứng minh rằng $f(a,d,...,d)\ge 0, a+(n-1)d=n$. Điều này không quá khó khăn và bạn đọc sẽ nhanh chóng tìm ra câu trả lời. Kỹ thuật áp dụng cũng chính là biểu diễn về ***S.O.S***.

Bài 16. Cho n số thực dương $a_1,a_2,....a_n$. Chứng minh rằng:

$$a_1^{\,n}+...+a_n^{\,n}+n(n-1)a_1...a_n\ge a_1...a_n(a_1+...+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}\right)$$

Chứng minh

Lời giải dưới đây sử dụng bất đẳng thức ***Suranyi***:

$$(n-1)(a_1^n+...+a_n^n)-\sum a_1\left(a_2^{n-1}+...+a_n^{n-1}\right)\ge a_1^n+...+a_n^n-na_1...a_n$$

Một lần nữa chúng ta sẽ dùng nguyên lý quy nạp. Ở đây chúng tôi cũng sẽ chỉ xét phần phức tạp nhất, đó là bước chuyển quy nạp, nghĩa là bất đẳng thức sẽ đúng với $n+1$ biến khi nó đã đúng với n hoặc nhỏ hơn n biến.

Bất đẳng thức $\Leftrightarrow \left(a_1^n+...+a_n^n-na_1a_2...a_n\right)\geq a_1...a_n\left[(a_1+...+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}\right)-n^2\right]$

$$\Leftrightarrow (a_1^n+...+a_n^n-na_1a_2...a_n)\geq a_1..a_j\left[\frac{(a_i-a_j)^2}{a_ia_j}\right]$$

Bây giờ chúng ta sẽ chuyển biểu thức $a_1^n+...+a_n^n-na_1...a_n$ về dạng ***S.O.S***. Điều này có thể được thực hiện dễ dàng thông qua biểu thức trung gian $\sum a_1\left(a_2^{n-1}+...+a_n^{n-1}\right)$.

Ta có: $(n-1)(a_1^n+...+a_n^n-na_1a_2..a_n)$

$$=(n-1)(a_1^n+...+a_n^n)-\sum a_1(a_2^{n-1}+...+a_n^{n-1})+\sum a_1\left[a_2^n+...+a_n^n-(n-1)a_2....a_n\right]$$

$$\geq a_1{}^n+...+a_n{}^n-na_1...a_n+(n-2)\sum a_1...a_n\frac{(a_i-a_j)^2}{a_ia_j},$$

$$\Rightarrow a_1^n+...+a_n^n-na_1a_2..a_n\geq\sum a_1..a_n\frac{(a_i-a_j)^2}{a_ia_j}=a_1a_2..a_n\left[(a_1+...+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right)-n^2\right]$$

Bài 17. Cho $a,b,c\geq 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{8(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2}+\frac{3(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}\geq 48$$

Chứng minh

Ta sử dụng các đẳng thức sau:

$$3-\frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2}=\frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{a^2+b^2+c^2}$$

$$\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}-8=\frac{a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2}{abc}$$

Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$3\left[\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}-8\right]\geq 8\left[3-\frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2}\right]\Leftrightarrow\sum_{cyc}\left(\frac{3}{bc}-\frac{8}{a^2+b^2+c^2}\right)(b-c)^2$$

Đặt $S_a=\frac{3}{bc}-\frac{8}{a^2+b^2+c^2}$, $S_b=\frac{3}{ca}-\frac{8}{a^2+b^2+c^2}$, $S_c=\frac{3}{ab}-\frac{8}{a^2+b^2+c^2}$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a\geq b\geq c$, suy ra $S_a\geq S_b\geq S_c$. Ta có

$$S_b=\frac{3(a^2+b^2+c^2)-8ca}{ca(a^2+b^2+c^2)}\geq\frac{3(a^2+2c^2)-8ca}{ca(a^2+b^2+c^2)}=\frac{3(a-\sqrt{2}c)^2+2(3\sqrt{2}-4)ca}{ca(a^2+b^2+c^2)}\geq 0$$

Ta chỉ cần chứng minh $S_b+S_c\geq 0\Leftrightarrow 3\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{ca}\right)\geq\frac{16}{a^2+b^2+c^2}$.

Sử dụng bất đẳng thức **AM – GM** ta có

$$3\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{ca}\right)\ge\frac{12}{a(b+c)}=\frac{12\sqrt{2}}{\sqrt{2}a.(b+c)}\ge\frac{24\sqrt{2}}{2a^2+(b+c)^2}\ge\frac{12\sqrt{2}}{a^2+b^2+c^2}>\frac{16}{a^2+b^2+c^2}$$

Sử dụng ***Mệnh đề 2*** ta suy ra điều phải chứng minh.

Nhận xét. Bằng cách làm tương tự chúng ta chứng minh được bất đẳng thức sau

$$\frac{2\sqrt{2}(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2}+\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}\ge 8+6\sqrt{2}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$ hoặc $a=\sqrt{2}b=\sqrt{2}c$ và các hoán vị. Chú ý rằng lúc đó $2\sqrt{2}$ cũng là hằng số tốt nhất (lớn nhất) để bất đẳng thức đã cho đúng.

Bài 18. [Moldova 2006] Cho a,b,c là độ dài ba cạnh của một tam giác.

Chứng minh rằng $a^2\left(\frac{b}{c}-1\right)+b^2\left(\frac{c}{a}-1\right)+c^2\left(\frac{a}{b}-1\right)\ge 0$

Chứng minh

* **Cách 1.** Ta có bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\sum_{cyc}a^3b(b-c)\ge 0\Leftrightarrow\frac{1}{2}\sum_{cyc}c^2(b+c-a)(a-b)^2\ge 0\ \text{(đúng)}\Rightarrow\text{đpcm.}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

* **Cách 2.** Ta có bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\sum_{cyc}\frac{a^2b}{c}\ge\sum_{cyc}a^2\Leftrightarrow\sum_{cyc}\left(\frac{a^2b}{c}+bc-2ab\right)\ge\frac{1}{2}\sum_{cyc}(a-b)^2$$

$$\Leftrightarrow\sum_{cyc}\frac{b(c-a)^2}{c}\ge\frac{1}{2}\sum_{cyc}(a-b)^2\Leftrightarrow\sum_{cyc}(a-b)^2\left(\frac{c}{a}-\frac{1}{2}\right)\ge 0$$

Đặt $S_a=\frac{a}{b}-\frac{1}{2},S_b=\frac{b}{c}-\frac{1}{2},S_c=\frac{c}{a}-\frac{1}{2}$.

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$S_a(b-c)^2+S_b(c-a)^2+S_c(a-b)^2\ge 0$$

+ Trường hợp 1. $b+c>a\ge b\ge c$. Thế thì ta có $S_a,S_b>0$.

Ta có $S_b+S_c=\frac{b}{c}+\frac{c}{a}-1>0$ (do $b\ge c>0$). Do đó, áp dụng tiêu chuẩn 2, ta có đpcm.

+ Trường hợp 2. $a\le b\le c<a+b$. Thế thì ta có $S_c,S_b>0$.

Ta có $S_b+S_a=\frac{b}{c}+\frac{a}{b}-1>\frac{b}{c}+\frac{c-b}{b}-1=\frac{b}{c}+\frac{c}{b}-2=\frac{(b-c)^2}{bc}\ge 0$

Do đó, áp dụng tiêu chuẩn 2, ta có đpcm.

Bài 19. $\begin{cases} a,b,c>0 \\ ab+bc+ca=1 \end{cases}$. Chứng minh rằng $a^2+b^2+c^2+\frac{3\sqrt{3}}{4}.abc \ge \frac{5}{4}$

Chứng minh

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$4(a^2+b^2+c^2)(ab+bc+ca)+3abc\sqrt{3(ab+bc+ca)} \ge 5(ab+bc+ca)^2$$

$$\Leftrightarrow 4\sum_{sym} a^3b - 5\sum_{cyc} a^2b^2 - 6(a+b+c)abc + 3abc\sqrt{3(ab+bc+ca)} \ge 0,$$

Áp dụng bất đẳng thức ***AM – GM***, ta có: $x^3y+xy^3 = xy.\left(x^2+y^2\right) \ge 2x^2y^2, \forall x,y \ge 0$, suy ra

$$\frac{5}{2}.\sum_{sym} a^3b = \frac{5}{2}\left(a^3b+ab^3+b^3c+bc^3+c^3a+ca^3\right) \ge 5\sum_{cyc} a^2b^2 = 5.\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)$$

Do đó, ta chỉ cần chứng minh $\frac{3}{2}\sum_{sym} a^3b + 3abc\sqrt{3(ab+bc+ca)} \ge 6abc(a+b+c)$

$$\Leftrightarrow \sum_{sym} a^3b + 2abc\sqrt{3(ab+bc+ca)} \ge 4abc(a+b+c)$$

$$\Leftrightarrow 2abc\left(a+b+c-\sqrt{3(ab+bc+ca)}\right) \le \sum_{sym} a^3b - 2abc(a+b+c)$$

$$\Leftrightarrow \frac{abc\sum_{cyc}(a-b)^2}{a+b+c+\sqrt{3(ab+bc+ca)}} \le \sum_{cyc}(ab+ac)(b-c)^2$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}(b-c)^2\left(ab+ac-\frac{abc}{a+b+c+\sqrt{3(ab+bc+ca)}}\right) \ge 0$$

Điều này rõ ràng đúng vì $\frac{abc}{a+b+c+\sqrt{3(ab+bc+ca)}} < \min\{ab,bc,ca\} \Rightarrow$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Bài 20. Cho $a,b,c>0$ và $a+b+c=3$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{a+bc}+\frac{b}{b+ca}+\frac{c}{c+ab} \ge \frac{3}{2}$$

Chứng minh

Ta có bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$2\sum_{cyc} a(b+ca)(c+ab) \ge 3(a+bc)(b+ca)(c+ab) \Leftrightarrow 3abc + \sum_{cyc} a^2b^2 \ge 3a^2b^2c^2 + abc\sum_{cyc} a^2$$

$$\Leftrightarrow 3abc + \frac{1}{2}\sum_{cyc} c^2(a-b)^2 \ge 3a^2b^2c^2 + abc\left(\sum_{cyc} a^2 - \sum_{cyc} a\right)$$

$$\Leftrightarrow 9abc+\frac{3}{2}\sum_{cyc}c^2(a-b)^2\ge 9a^2b^2c^2+abc\sum_{cyc}(a-b)^2\Leftrightarrow\sum_{cyc}(a-b)^2\left(abc^2+\frac{3c^2}{2}-\frac{abc}{2}\right)\ge 0$$

Đặt $S_a=a^2bc+\frac{3a^2}{2}-\frac{abc}{2}, S_b=ab^2c+\frac{3b^2}{2}-\frac{abc}{2}, S_c=abc^2+\frac{3c^2}{2}-\frac{abc}{2}$

Bất đẳng thức cần chứng minh $\Leftrightarrow S_a(b-c)^2+S_b(c-a)^2+S_c(a-b)^2\ge 0$

Không mất tính tổng quát giả sử $a\ge b\ge c$. Khi đó, dễ thấy $S_a>0$.

Ta có $S_b>\frac{3b^2}{2}-\frac{abc}{2}=\frac{b}{2}.(3b-ac)>0$; $S_b+S_c>\frac{3(b^2+c^2)}{2}-abc\ge 3bc-abc=bc(3-a)>0$

Do đó áp dụng tiêu chuẩn 2, ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

Bài 21. Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn $ab+bc+ca=1$. Chứng minh

$$\frac{a}{2+b^2+c^2}+\frac{b}{2+c^2+a^2}+\frac{c}{2+a^2+b^2}\ge\frac{3\sqrt{3}}{8}$$

Chứng minh

Áp dụng bất đẳng ***Buniakowski***, ta có

$$\sum_{cyc}\frac{a}{2+b^2+c^2}=\sum_{cyc}\frac{a^2}{2a+ab^2+ac^2}\ge\frac{(a+b+c)^2}{2(a+b+c)+\sum_{sym}a^2b}=\frac{(a+b+c)^2}{3(a+b+c)-3abc}$$

Do đó, ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{(a+b+c)^2}{3(a+b+c)-3abc}\ge\frac{3\sqrt{3}}{8}\Leftrightarrow 8(a+b+c)^2+9\sqrt{3}abc\ge 9\sqrt{3}(a+b+c)$$

$$\Leftrightarrow 8(a+b+c)^2\sqrt{ab+bc+ca}+9\sqrt{3}abc\ge 9\sqrt{3}(a+b+c)(ab+bc+ca)$$

$$\Leftrightarrow 8(a+b+c)\sqrt{ab+bc+ca}\left(a+b+c-\sqrt{ab+bc+ca}\right)\ge\sqrt{3}((a+b+c)(ab+bc+ca)-9abc)$$

$$\Leftrightarrow\frac{8(a+b+c)\sqrt{ab+bc+ca}}{a+b+c+\sqrt{3(ab+bc+ca)}}\cdot\sum_{cyc}(a-b)^2\ge\sqrt{3}\sum_{cyc}c(a-b)^2$$

$$\Leftrightarrow\sum_{cyc}(a-b)^2\left(\frac{8(a+b+c)\sqrt{ab+bc+ca}}{a+b+c+\sqrt{3(ab+bc+ca)}}-\sqrt{3}c\right)\ge 0$$

Đặt $S_a=\frac{8(a+b+c)\sqrt{ab+bc+ca}}{a+b+c+\sqrt{3(ab+bc+ca)}}-\sqrt{3}a$

$$S_b=\frac{8(a+b+c)\sqrt{ab+bc+ca}}{a+b+c+\sqrt{3(ab+bc+ca)}}-\sqrt{3}b\ ;\ S_c=\frac{8(a+b+c)\sqrt{ab+bc+ca}}{a+b+c+\sqrt{3(ab+bc+ca)}}-\sqrt{3}c$$

Bất đẳng thức cần chứng minh $\Leftrightarrow S_a(b-c)^2+S_b(c-a)^2+S_c(a-b)^2\ge 0$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a\ge b\ge c$. Khi đó, dễ thấy $S_b,S_c\ge 0$.

Ta chứng minh $a^2S_b+b^2S_a\ge 0\Leftrightarrow 4(a^2b+b^2c+ab^2+ca^2+a^3+b^3)\sqrt{ab+bc+ca}\ge$

$$\geq \sqrt{3}(a+b+c)(a^2b+ab^2)+3(a^2b+ab^2)\sqrt{ab+bc+ca}$$

$$\Leftrightarrow 4(b^2c+ca^2+a^3+b^3)\sqrt{ab+bc+ca}+(a^2b+ab^2)\sqrt{ab+bc+ca} \geq \sqrt{3}(a+b+c)(a^2b+ab^2)$$

Ta dễ dàng chứng minh được

$$4(a^3+b^3)\sqrt{ab}+(a^2b+ab^2)\sqrt{ab} > \sqrt{3}(a+b)\left(a^2b+ab^2\right) \quad (1)$$

Và $4a^2c\sqrt{ab+bc+ca} > \sqrt{3}c\left(a^2b+ab^2\right)$ (2)

Từ (1) và (2), ta suy ra $a^2S_b+b^2S_a \geq 0$.

Từ đây, áp dụng tiêu chuẩn 4, ta có ngay (đpcm).

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Bài 22. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a(b+c)}{a^2+2bc}+\frac{b(c+a)}{b^2+2ca}+\frac{c(a+b)}{c^2+2ab} \leq 2+\frac{2(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2}{(a^2+2bc)(b^2+2ca)(c^2+2ab)}$$

Chứng minh

Ta có bất đẳng thức $\Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{3a(b+c)}{a^2+2bc} \leq 6+\frac{6(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2}{(a^2+2bc)(b^2+2ca)(c^2+2ab)}$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\left(2-\frac{3a(b+c)}{a^2+2bc}\right)+\frac{6(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2}{(a^2+2bc)(b^2+2ca)(c^2+2ab)} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{2a^2-3a(b+c)+4bc}{a^2+2bc}+\frac{6(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2}{(a^2+2bc)(b^2+2ca)(c^2+2ab)} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{(a-2c)(a-b)-(a-2b)(c-a)}{a^2+2bc}+\frac{6(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2}{(a^2+2bc)(b^2+2ca)(c^2+2ab)} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{(a-2c)(a-b)}{a^2+2bc}-\sum_{cyc}\frac{(a-2b)(c-a)}{a^2+2bc}+\frac{6(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2}{(a^2+2bc)(b^2+2ca)(c^2+2ab)} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{(a-2c)(a-b)}{a^2+2bc}-\sum_{cyc}\frac{(b-2c)(a-b)}{b^2+2ca}+\frac{6(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2}{(a^2+2bc)(b^2+2ca)(c^2+2ab)} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{(a-b)^2(-4c^2+4c(a+b)-ab)}{(a^2+2bc)(b^2+2ca)}+\frac{6(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2}{(a^2+2bc)(b^2+2ca)(c^2+2ab)} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}(a-b)^2(-4c^2+4c(a+b)-ab)(c^2+2ab)+6(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 3\sum_{cyc}ab(a-b)^2(c^2+2ab)+\sum_{cyc}(a-b)^2(-4c^2+4c(a+b)-4ab)(c^2+2ab)+6(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 3\sum_{cyc}ab(a-b)^2(c^2+2ab)+4(a-b)(b-c)(c-a).\sum_{cyc}(a-b)(c^2+2ab)+6(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 3\sum_{cyc} ab(a-b)^2(c^2+2ab)-12(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2+6(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} ab(a-b)^2(c^2+2ab)-2(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2\ge 0$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a\ge b\ge c>0$. Khi đó, ta có

$$\sum_{cyc} ab(a-b)^2(c^2+2ab)\ge ab(a-b)^2(c^2+2ab)\ge 2a^2b^2(a-b)^2\ge 2(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2$$

Vậy $\sum_{cyc} ab(a-b)^2(c^2+2ab)-2(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2\ge 0$

$$\Rightarrow \frac{a(b+c)}{a^2+2bc}+\frac{b(c+a)}{b^2+2ca}+\frac{c(a+b)}{c^2+2ab}\le 2+\frac{2(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2}{(a^2+2bc)(b^2+2ca)(c^2+2ab)} \text{ (đpcm)}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$ hoặc $a=b, c=0$ và các hoán vị

Bài 23. Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{a^2+2bc}+\frac{b^2}{b^2+2ca}+\frac{c^2}{c^2+2ab}\ge 1\ge \frac{bc}{a^2+2bc}+\frac{ca}{b^2+2ca}+\frac{ab}{c^2+2ab}$$

Chứng minh

* *Chứng minh* $1\ge \sum_{cyc}\frac{bc}{a^2+2bc}$ (1)

* **Bổ đề.** Nếu a,b,c,x,y,z là sáu số thực không âm thỏa mãn điều kiện $a\ge b\ge c$ và $x\ge y\ge z$ (hoặc $x\le y\le z$) thì

$x(a-b)(a-c)+y(b-c)(b-a)+z(c-a)(c-b)\ge 0$

Chứng minh.

+ Trường hợp 1. $x\ge y\ge z\ge 0$.

Ta có $a-c\ge b-c\ge 0$ (do $a\ge b\ge c$) $\Rightarrow x(a-c)\ge y(b-c)\ge 0$

Mà $a-b\ge 0$ nên $x(a-c)(a-b)\ge y(b-c)(a-b)\ge 0 \Leftrightarrow x(a-c)(a-b)+y(b-c)(b-a)\ge 0$

Mặt khác, do $a\ge b\ge c$ và $z\ge 0$ nên $z(c-a)(c-b)\ge 0$

Do đó $x(a-b)(a-c)+y(b-c)(b-a)+z(c-a)(c-b)\ge 0$

+ Trường hợp 2. $0\le x\le y\le z$.

Ta có $a-c\ge a-b\ge 0$ (do $a\ge b\ge c$) $\Rightarrow z(a-c)\ge y(a-b)\ge 0$

Mà $b-c\ge 0$ nên $z(a-c)(b-c)\ge y(a-b)(b-c)\ge 0 \Leftrightarrow z(c-a)(c-b)+y(b-c)(b-a)\ge 0$

Mặt khác, do $a\ge b\ge c$ và $x\ge 0$ nên $x(a-c)(a-b)\ge 0$

Do đó $x(a-b)(a-c)+y(b-c)(b-a)+z(c-a)(c-b)\ge 0$

Bổ đề được chứng minh hoàn toàn. Trở lại bài toán của ta.

Ta có (1) $\Leftrightarrow \sum_{cyc}\left(\frac{bc}{ab+bc+ca}-\frac{bc}{a^2+2bc}\right)\ge 0 \Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{bc(a-b)(a-c)}{(ab+bc+ca)(a^2+2bc)}\ge 0$

$\Leftrightarrow \frac{abc}{ab+bc+ca}\sum_{cyc}\frac{(a-b)(a-c)}{a^3+2abc}\ge 0$. Không mất tính tổng quát, giả sử $a\ge b\ge c$.

Khi đó, ta có $a^3+2abc\ge b^3+2abc\ge c^3+2abc>0 \Rightarrow \frac{1}{c^3+2abc}\ge\frac{1}{b^3+2abc}\ge\frac{1}{a^3+2abc}>0$

Áp dụng bổ đề trên với $x=\frac{1}{a^3+2abc}, y=\frac{1}{b^3+2abc}, z=\frac{1}{c^3+2abc}$ ta suy ra được

$\sum_{cyc}\frac{(a-b)(a-c)}{a^3+2abc}\ge 0$. Vậy (1) đúng.

* *Chứng minh* $\sum_{cyc}\frac{a^2}{a^2+2bc}\ge 1$ (2). Ta có (2) $\Leftrightarrow \sum_{cyc}\left(\frac{a^2}{a^2+2bc}-\frac{a}{a+b+c}\right)\ge 0$

$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{a(ab+ac-2bc)}{a^2+2bc}\ge 0 \Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{ac(a-b)}{a^2+2bc}-\sum_{cyc}\frac{ab(c-a)}{a^2+2bc}\ge 0$

$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{ca(a-b)}{a^2+2bc}-\sum_{cyc}\frac{bc(a-b)}{b^2+2ca}\ge 0 \Leftrightarrow \sum_{cyc}(a-b)^2c(2bc+2ca-ab)(c^2+2ab)\ge 0$

Đặt $S_a=a(2ab+2ca-bc)(a^2+2bc)$; $S_b=b(2ab+2bc-ca)(b^2+2ca)$;

$S_c=c(2bc+2ca-ab)(c^2+2ab)$

Bất đẳng thức cần chứng minh $\Leftrightarrow S_a(b-c)^2+S_b(c-a)^2+S_c(a-b)^2\ge 0$

Không mất tính tổng quát giả sử $a\ge b\ge c$. Khi đó, dễ thấy $S_a, S_b\ge 0$.

Dễ thấy $b(b^2+2ca)\ge c(c^2+2ab)\ge 0$ nên

$S_b+S_c\ge c(c^2+2ab)(2ab+2bc-ca+2bc+2ca-ab)=c(c^2+2ab)(ab+4bc+ca)\ge 0$.

Do đó, áp dụng tiêu chuẩn 2, ta suy ra ngay (đpcm).

Bài 24. Cho $a,b,c\ge 0$ và $p\ge 3+\sqrt{7}$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{pa^2+bc}+\frac{1}{pb^2+ca}+\frac{1}{pc^2+ab}\ge\frac{9}{(p+1)(ab+bc+ca)}$$

Giải

Không mất tính tổng quát, giả sử $a\ge b\ge c$, ta có

$$\sum_{cyc}\left(\frac{(p+1)(ab+bc+ca)}{pa^2+bc}-3\right)=\sum_{cyc}\frac{(3pa+(p-2)c)(b-a)+(3pa+(p-2)b)(c-a)}{2(pa^2+bc)}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{cyc}(a-b)\left(\frac{3pa+(p-2)c}{pa^2+bc}-\frac{3pb+(p-2)c}{pb^2+ca}\right)=\frac{1}{2}\sum_{cyc}(a-b)^2\frac{3p^2ab+p(p-5)c(a+b)-(p-2)c^2}{(pa^2+bc)(pb^2+ca)}$$

Do đó, bất đẳng thức tương đương với.

$$\sum_{cyc}(a-b)^2(3p^2ab+p(p-5)c(a+b)-(p-2)c^2)(pc^2+ab)\geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}(a-b)^2((3p^2+p-2)ab+(p^2-6p+2)c(a+b))(pc^2+ab)$$

$$+(p-2)(a-b)(b-c)(c-a)\sum_{cyc}(a-b)(pc^2+ab)\geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}(a-b)^2((3p^2+p-2)ab+(p^2-6p+2)c(a+b))(pc^2+ab)$$

$$-(p+1)(p-2)(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2\geq 0$$

Chú ý rằng $a\geq b\geq c, p\geq 3+\sqrt{7}$ nên

$$a^2b^2\geq (a-c)^2(b-c)^2, 3p^2+p-2\geq (p+1)(p-2)>0, p^2-6p+2\geq 0$$

Do đó $\sum_{cyc}(a-b)^2((3p^2+p-2)ab+(p^2-6p+2)c(a+b))(pc^2+ab)$

$$\geq (3p^2+p-2)\sum_{cyc}(a-b)^2ab(pc^2+ab)\geq (3p^2+p-2)\sum_{cyc}(a-b)^2a^2b^2$$

$$\geq (3p^2+p-2)(a-b)^2a^2b^2\geq (3p^2+p-2)(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2\geq (p+1)(p-2)(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2$$

Nên bất đẳng thức hiển nhiên đúng. Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$, riêng trong trường hợp $p=3+\sqrt{7}$ đẳng thức còn xảy ra tại $a=b, c=0$ và các hoán vị.

Bài 25. Cho $x,y,z>0$ thỏa $xy+yz+zx+xyz=4$. Tìm hằng số k tốt nhất sao cho

$$x^2+y^2+z^2+3k\geq (k+1)(x+y+z)$$

Giải

Cho $x=y=\sqrt{2}, z=\sqrt{2}-1$, ta suy ra được $k\leq 2\sqrt{2}+1$. Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức với giá trị vừa tìm được: $x^2+y^2+z^2+3(2\sqrt{2}+1)\geq 2(\sqrt{2}+1)(x+y+z)$ (*)

Từ giả thiết $xy+yz+zx+xyz=4$, dẫn tới $\frac{1}{x+2}+\frac{1}{y+2}+\frac{1}{z+2}=1$

Do đó, ta có thể đặt $m=\frac{1}{x+2}, n=\frac{1}{y+2}, p=\frac{1}{z+2}\Rightarrow \begin{cases} m+n+p=1 \\ 0<m,n,p<\frac{1}{2}\end{cases}$

$\Rightarrow m,n,p$ là độ dài 3 cạnh của một tam giác. Do đó, tồn tại các số dương a,b,c sao cho $m=b+c, n=c+a, p=a+b$. Khi đó, từ cách đặt, ta có

$$x=\frac{1-2m}{m}=\frac{n+p-m}{m}=\frac{2a}{b+c};\ y=\frac{1-2n}{n}=\frac{p+m-n}{n}=\frac{2b}{c+a};\ z=\frac{1-2p}{p}=\frac{m+n-p}{p}=\frac{2c}{a+b}$$

Bất đẳng thức (*) trở thành $\sum_{cyc}\frac{4a^2}{(b+c)^2}+3(2\sqrt{2}+1)\geq 2(\sqrt{2}+1)\sum_{cyc}\frac{2a}{b+c}$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\left(\frac{4a^2}{(b+c)^2}-\frac{4(\sqrt{2}+1)a}{b+c}+(2\sqrt{2}+1)\right)\geq 0 \Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{4a^2-4(\sqrt{2}+1)a(b+c)+(2\sqrt{2}+1)(b+c)^2}{(b+c)^2}\geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{\left[2a-(2\sqrt{2}+1)b-(2\sqrt{2}+1)c\right](a-b)}{(b+c)^2}-\sum_{cyc}\frac{\left[2a-(2\sqrt{2}+1)b-(2\sqrt{2}+1)c\right](c-a)}{(b+c)^2}\geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{\left[2a-(2\sqrt{2}+1)b-(2\sqrt{2}+1)c\right](a-b)}{(b+c)^2}-\sum_{cyc}\frac{\left[2b-(2\sqrt{2}+1)c-(2\sqrt{2}+1)a\right](a-b)}{(a+c)^2}\geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}(a^2-b^2)^2\left[2a^2+2b^2+(1-2\sqrt{2})c^2+(1-2\sqrt{2})ab+(3-2\sqrt{2})c(a+b)\right]\geq 0$$

Đặt $S_{a^2}=2b^2+2c^2+(1-2\sqrt{2})a^2+(1-2\sqrt{2})bc+(3-2\sqrt{2})a(b+c)$

$S_{b^2}=2c^2+2a^2+(1-2\sqrt{2})b^2+(1-2\sqrt{2})ca+(3-2\sqrt{2})b(c+a)$

$S_{c^2}=2a^2+2b^2+(1-2\sqrt{2})c^2+(1-2\sqrt{2})ab+(3-2\sqrt{2})c(a+b)$

Khi đó, bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$S_{a^2}(b^2-c^2)^2+S_{b^2}(c^2-a^2)^2+S_{c^2}(a^2-b^2)^2\geq 0$$

Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $a\geq b\geq c>0$. Khi đó, ta có

$S_{b^2}=2c^2+2a^2+(1-2\sqrt{2})b^2+(1-2\sqrt{2})ca+(3-2\sqrt{2})b(c+a)$

$\geq 2c^2+2b^2+(1-2\sqrt{2})b^2+(1-2\sqrt{2})cb+(3-2\sqrt{2})b(c+b)$

$=2(\sqrt{2}-1)^2b^2-4(\sqrt{2}-1)bc+2c^2=2\left[(\sqrt{2}-1)b-c\right]^2\geq 0$

$S_{c^2}=2a^2+2b^2+(1-2\sqrt{2})c^2+(1-2\sqrt{2})ab+(3-2\sqrt{2})c(a+b)$

$\geq 4ab+(1-2\sqrt{2})c^2+(1-2\sqrt{2})ab+(3-2\sqrt{2})c(a+b)$

$=(5-2\sqrt{2})ab+(1-2\sqrt{2})c^2+(3-2\sqrt{2})c(a+b)\geq(5-2\sqrt{2})c^2+(1-2\sqrt{2})c^2+2(3-2\sqrt{2})c^2$

$=(6-4\sqrt{2})c^2+2(3-2\sqrt{2})c^2=4(\sqrt{2}-1)^2c^2\geq 0$

$S_{a^2}+S_{b^2}=(\sqrt{2}-1)^2(a^2+b^2)+2(\sqrt{2}-1)ab-4(\sqrt{2}-1)c(a+b)+4c^2$

$=(\sqrt{2}-1)^2(a+b)^2-4(\sqrt{2}-1)c(a+b)+4c^2=\left[(\sqrt{2}-1)(a+b)-2c\right]^2\geq 0$

Do đó $S_{a^2}(b^2-c^2)^2+S_{b^2}(c^2-a^2)^2+S_{c^2}(a^2-b^2)^2\geq(S_{a^2}+S_{b^2})(b^2-c^2)^2\geq 0$

Suy ra (*) đúng. Vậy $k_{\max}=2\sqrt{2}+1$.

IV. BÀI TẬP DÀNH CHO BẠN ĐỌC TỰ GIẢI

Bài 1. Cho $a,b,c \geq 0$. Chứng minh rằng: $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}\leq\frac{5}{2}$

Bài 2. Cho $a,b,c \geq 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{(a+b)^2}{c^2+ab}+\frac{(b+c)^2}{a^2+bc}+\frac{(c+a)^2}{b^2+ca}\geq 6$$

Bài 3. Cho $a,b,c \geq 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}+\frac{4(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2}\geq 12$$

Bài 4. Cho $a,b,c \geq 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+\frac{2abc}{3(a^3+b^3+c^3)}\geq\frac{31}{18}$$

Bài 5. Cho a,b,c là độ dài ba cạnh của một tam giác.

Chứng minh rằng: $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geq\frac{2a}{b+c}+\frac{2b}{c+a}+\frac{2c}{a+b}$.

Bài 6. Cho $a,b,c \geq 0$. Chứng minh rằng: $\frac{a^4}{a^3+b^3}+\frac{b^4}{b^3+c^3}+\frac{c^4}{c^3+a^3}\geq\frac{a+b+c}{2}$

Bài 7. Cho $a,b,c \geq 0$. Chứng minh rằng: $\frac{a^3}{2a^2+b^2}+\frac{b^3}{2b^2+c^2}+\frac{c^3}{2c^2+a^2}\geq\frac{a+b+c}{3}$

Bài 8. Tìm hằng số k tốt nhất sao cho bất đẳng thức sau đúng với mọi $a,b,c \geq 0$:

$$\frac{ab}{(a+b)^2+kc^2}+\frac{bc}{(b+c)^2+ka^2}+\frac{ca}{(c+a)^2+kb^2}\leq\frac{3}{4+k}$$

Bài 9. Cho $a,b,c \geq 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\geq\frac{(a+b+c)^2}{2\sqrt{3(ab+bc+ca)}}$$

Bài 10. Cho $a,b,c \geq 0$. Chứng minh rằng: $\frac{a^2}{a+b}+\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+a}\geq\frac{\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}}{2}$

Bài 11. Cho $a,b,c \geq 0$. Chứng minh rằng: $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+\frac{3}{2}\leq\frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca}$

Bài 12. Cho $a,b,c \geq 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\geq\frac{\sqrt[3]{9(a^3+b^3+c^3)}}{2}$$

Bài 13. Cho $a,b,c \geq 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{a^2+b^2+c^2}+\frac{9abc}{2(a+b+c)^2}\geq\frac{a+b+c}{2}$$

Bài 14. Cho $a,b,c \ge 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2+bc}+\frac{1}{b^2+ca}+\frac{1}{c^2+ab} \ge \frac{3}{ab+bc+ca}$$

Bài 15. Cho $a,b,c \ge 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^4+b^4+c^4}{a^2+b^2+c^2}+\frac{3abc}{2(a+b+c)} \ge \frac{a^2+b^2+c^2}{2}$$

Bài 16. Cho $a,b,c \ge 0$. Chứng minh rằng:

$$(ab-c^2)(a+b-c)^3+(bc-a^2)(b+c-a)^3+(ca-b^2)(c+a-b)^3 \ge 0$$

Bài 17. Cho $a,b,c \ge 0, k \ge 2$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^k}{b}+\frac{b^k}{c}+\frac{c^k}{a} \ge \frac{2a^k}{b+c}+\frac{2b^k}{c+a}+\frac{2c^k}{a+b}$$

Bài 18. Cho $a,b,c \ge 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a(a^2+2bc)}{b+c}+\frac{b(b^2+2ca)}{c+a}+\frac{c(c^2+2ab)}{a+b} \ge \frac{(a+b+c)^2}{2}$$

Bài 19. Cho $a,b,c \ge 0$. Chứng minh rằng:

$$a^3+b^3+c^3+3abc \ge ab\sqrt{2(a^2+b^2)}+bc\sqrt{2(b^2+c^2)}+ca\sqrt{2(c^2+a^2)}$$

Bài 20. Cho $a,b,c > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}+a+b+c \ge \frac{6(a^2+b^2+c^2)}{a+b+c}$$

Bài 21. Cho $a,b,c > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b} \ge \frac{3(a^3+b^3+c^3)}{2(a^2+b^2+c^2)}.$$

Bài 22. Cho $a,b,c \ge 0$ thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{12-bc-4a^2}+\frac{1}{12-ca-4b^2}+\frac{1}{12-ab-4c^2} \ge \frac{3}{7}$$

Bài 23. Cho $a,b,c \ge 0$. Tìm hằng số tốt nhất của k để bất đẳng thức sau đúng

$$\left(\frac{a}{a+b}\right)^2+\left(\frac{b}{b+c}\right)^2+\left(\frac{c}{c+a}\right)^2+k\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2} \ge k+\frac{3}{4}$$

Bài 24. Cho $a,b,c \ge 0$. Tìm hằng số tốt nhất của k để bất đẳng thức sau đúng

$$\frac{a}{a+2b}+\frac{b}{b+2c}+\frac{c}{c+2a}+\frac{kabc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \ge 1+\frac{k}{8}$$

Bài 25. Cho $a,b,c \ge 0$. Tìm hằng số tốt nhất của k để bất đẳng thức sau đúng

$$\left(\frac{a}{a+b}\right)^3+\left(\frac{a}{a+b}\right)^3+\left(\frac{a}{a+b}\right)^3+\frac{kabc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \ge \frac{3+k}{8}$$

§18. PHƯƠNG PHÁP DỒN BIẾN (MIXING VARIABLE)

Tóm tắt nội dung:

I. ĐẶT VẤN ĐỀ

• Các bạn thân mến, trong nhận thức của chúng ta có rất nhiều bất đẳng thức đặc biệt là các bất đẳng thức đối xứng hay hoán vị đều có đẳng thức xảy ra khi các biến số bằng nhau. Một ví dụ kinh điển là bất đẳng thức $AM-GM$, chẳng hạn với $n=3$ ta có bất đẳng thức sau xảy ra đẳng thức khi và chỉ khi $x=y=z\geq 0$:

Bài 1.1. Cho $x, y, z\geq 0$. Khi đó $x+y+z\geq 3\cdot\sqrt[3]{xyz}$.

• Số lượng các bất đẳng thức như vậy nhiều đến nỗi làm chúng ta luôn tin rằng đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tất cả các biến số bằng nhau là một điều hiển nhiên. Nhận xét sai lầm này có thể thông cảm được bởi vì việc xây dựng một bất đẳng thức đối xứng hoặc hoán vị sao cho đẳng thức vẫn có thể xảy ra tại trạng thái tất cả các biến số không bằng nhau thì đòi hỏi người làm toán phải có một trình độ rất chuyên nghiệp. Chẳng hạn dưới đây là một ví dụ tiêu biểu cho nhận xét này:

Bài 1.2 [VMO] Cho $x,y,z\in\mathbb{R}, x^2+y^2+z^2=9$. Khi đó $2(x+y+z)-xyz\leq 10$.

Trong bất đẳng thức này thì dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow (x,y,z)$ là 1 hoán vị của $(2;2;-1)$

• Có thể nhiều bạn sẽ ngạc nhiên hơn khi biết rằng còn có những bất đẳng thức mà dấu " = " xảy ra khi các biến số đều khác nhau, chẳng hạn là ví dụ sau:

Bài 1.3: (Jackgarfukel) Cho $a,b,c \geq 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{\sqrt{a+b}}+\frac{b}{\sqrt{b+c}}+\frac{c}{\sqrt{c+a}} \leq \frac{5}{4}\sqrt{a+b+c}$$

Ở đây, dấu đẳng thức xảy ra khi $a = 3b > 0$, $c = 0$ (và các dạng hoán vị). Các bạn có thể tự hỏi là các giá trị chẳng hạn như (3, 1, 0) có gì đặc biệt mà làm cho đẳng thức xảy ra. Một cách trực giác, ta thấy dường như điều đặc biệt đó là do có một biến bằng 0. Vì giả thiết là các biến số a, b, c là các số thực không âm nên biến bằng 0 còn được gọi là biến có giá trị ở trên biên.

• Một điều thú vị nữa là các bạn sẽ còn gặp những bất đẳng thức mà dấu "=" xảy ra nhiều hơn một chỗ (không tính các hoán vị). Chúng đều là các bất đẳng thức đẹp và khó, chẳng hạn như một bài toán rất nổi tiếng sau đây:

Bài 1.4 (Iran TST 1996) Cho $a,b,c \geq 0$. Chứng minh rằng:

$$(ab+bc+ca)\left[\frac{1}{(a+b)^2}+\frac{1}{(b+c)^2}+\frac{1}{(c+a)^2}\right] \geq \frac{9}{4}$$

Ở đây, đẳng thức xảy ra khi $a = b = c > 0$ hoặc $a = b > 0$, $c = 0$ (và các hoán vị). Tuy nhiên, nếu tinh ý các bạn sẽ nhận ra rằng, dấu đẳng thức xảy ra trong trường hợp này không nằm ngoài các trường hợp ở các ví dụ trước.

• Tóm lại, trong thế giới bất đẳng thức các trường hợp dấu "=" thường xảy ra theo một trong ba dạng sau đây:

+ Trường hợp tất cả các biến số bằng nhau ta sẽ gọi là "cực trị đạt được tại tâm".

+ Trường hợp có một số các biến bằng nhau gọi là "cực trị đạt được có tính đối xứng"

+ Trường hợp khi có một biến có giá trị trên biên ta sẽ gọi là "cực trị đạt được tại biên".

Phương pháp dồn biến được đặt ra để giải quyết các bất đẳng thức có dạng như trên. Bằng cách đưa về trường hợp có hai biến bằng nhau, hoặc là một biến có giá trị tại biên thì bất đẳng thức mới nhận được có số biến ít hơn nên đơn giản hơn bất đẳng thức ban đầu. Đặc biệt nếu bất đẳng thức mới chỉ còn một biến thì nó có thể được chứng minh đơn giản bằng cách khảo sát hàm một biến số.

• Bây giờ chúng tôi sẽ trình bày các kỹ thuật chính của phương pháp thông qua các bài toán cụ thể. Trước hết, đối tượng rất quan trọng mà chúng tôi muốn bạn đọc nắm bắt là các bất đẳng thức với ba biến số. Sau đó là các mở rộng cho bốn biến số và cuối cùng là phương pháp dồn biến tổng quát cho n biến số. Trong phần cuối này, chúng tôi sẽ giới thiệu các kết quả "cổ điển", rồi đến những sáng tạo nhỏ và kết thúc là những kết quả hết sức tổng quát. Tinh thần xuyên suốt của chúng tôi là muốn bạn đọc cảm nhận được tính tự nhiên của vấn đề. Qua đó, các bạn sẽ lý giải được "tại sao", để rồi có thể tự mình bước đi trên con đường sáng tạo.

II. BẤT ĐẲNG THỨC BA BIẾN VỚI CỰC TRỊ ĐẠT TẠI GIÁ TRỊ BIÊN ĐỐI XỨNG

• Giả sử ta cần chứng minh bất đẳng thức $f(x,y,z)\ge 0$ với $x,\ y,\ z$ là các biến số thực thỏa mãn các tính chất nào đấy. Khi đó ta sẽ thực hiện hai bước chính sau:

Bước 1: (Kỹ thuật dồn về hai biến bằng nhau) Đánh giá $f(x,\ y,\ z)\ge f(t,\ t,\ z)$ với t là biến sao cho bộ số $(t,\ t,\ z)$ thỏa mãn mọi tính chất của bộ $(x,\ y,\ z)$.

Bước 2: Đánh giá $f(t,\ t,\ z)\ge 0$.

Chú ý: Đối với các bất đẳng thức đồng bậc ta có thể làm cho chứng minh đơn giản hơn bằng cách chuẩn hóa các biến trong bất đẳng thức trước khi thực hiện hai bước.

1. Bất đẳng thức không điều kiện:

Đối với những bất đẳng thức không có điều kiện thì dồn biến theo các đại lượng trung bình chẳng hạn $t=\dfrac{x+y}{2};t=\sqrt{xy};t=\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{2}}$...là kỹ thuật chính dùng để dồn hai biến bằng nhau.

Ta xét một số bài toán:

Bài 2.1. Cho $x,\ y,\ z\ge 0$. Chứng minh rằng: $x+y+z\ge 3\cdot\sqrt[3]{xyz}$ (1)

Chứng minh

Cách 1: (1) $\Leftrightarrow\ f(x,y,z)=x+y+z-3\cdot\sqrt[3]{xyz}$. $\forall\ x,y,z>0$

Bước 1: Chứng minh: $f(x,y,z)\ge f(t,t,z)$ với $t=\dfrac{x+y}{2}$. Ta có: $t^2\ge xy$ suy ra:

$$f(x,y,z)-f(t,t,z)=x+y+z-3\cdot\sqrt[3]{xyz}-\left[2t+z-3\cdot\sqrt[3]{t^2z}\right]=3\left(\sqrt[3]{t^2z}-\sqrt[3]{xyz}\right)\ge 0$$

Bước 2: Chứng minh $f(t,t,z)=2t+z-3\cdot\sqrt[3]{t^2z}\ge 0$.

Thật vậy ta có: $f(t,t,z)\ge 0\ \Leftrightarrow\ (2t+z)^3-27t^2z\ge 0\Leftrightarrow (t-z)^2(8t+z)\ge 0$ (đúng)

Kết luận: $f(x,y,z)\ge f(t,t,z)\ge 0$

Cách 2: (1) $\Leftrightarrow\ f(x,y,z)=x+y+z-3\cdot\sqrt[3]{xyz}\ge 0$, $\forall\ x,\ y,\ z>0$.

Bước 1: Chứng minh: $f(x,y,z)\ge f(t,t,z)$ với $t=\sqrt{xy}$. Ta có: $2t\le x+y$ suy ra:

$$f(x,y,z)-f(t,t,z)=x+y+z-3\cdot\sqrt[3]{xyz}-\left[2t+z-3\cdot\sqrt[3]{xyz}\right]=x+y-2t\ge 0$$

Bước 2: Chứng minh $f(t,t,z)=2t+z-3\cdot\sqrt[3]{t^2z}\ge 0$.

Thật vậy ta có: $f(t,t,z)\ge 0\ \Leftrightarrow\ (2t+z)^3-27t^2z\ge 0\Leftrightarrow (t-z)^2(8t+z)\ge 0$ (đúng)

Kết luận: $f(x,y,z)\ge f(t,t,z)\ge 0$

Cách 3: **Bước 1:** Kỹ thuật chuẩn hóa theo tổng đối với bất đẳng thức đồng bậc:

Nếu $x+y+z=k>0$ thì (1) $\Leftrightarrow (x+y+z)^3\ge 27xyz\Leftrightarrow\left(\dfrac{x}{k}+\dfrac{y}{k}+\dfrac{z}{k}\right)^3\ge 27\cdot\dfrac{x}{k}\cdot\dfrac{y}{k}\cdot\dfrac{z}{k}$

Từ đó suy ra có thể giả sử $x+y+z=1$ (*), khi đó (1) $\Leftrightarrow f(x,y,z)=1-27xyz\ge 0$

Bước 2: Để ý rằng khi thay x và y bởi $t=\dfrac{x+y}{2}$ thì điều kiện (*) vẫn được bảo toàn tức là $t+t+z=1$, nên ta chỉ phải xem xét sự thay đổi của xyz. Theo bất đẳng thức $AM-GM$ thì $xy\le\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^2=t^2$, nên $xyz\le t^2z\Rightarrow f(x,y,z)\ge f(t,t,z)$.

Bước 3: Thay $z=1-2t$ ta có: $f(t,t,z)=1-27t^2(1-2t)=(1+6t)(1-3t)^2\ge 0$

Với điều kiện (*) thì đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}x=y\\3t=1\end{cases}\Leftrightarrow x=y=\dfrac{1}{3}\Leftrightarrow x=y=z=\dfrac{1}{3}$.

Vậy trong trường hợp tổng quát đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z>0$.

Cách 4: **Bước 1:** Kỹ thuật chuẩn hóa theo tích đối với bất đẳng thức đồng bậc:

Nếu $xyz=k^3>0$ thì (1) $\Leftrightarrow \dfrac{x}{k}+\dfrac{y}{k}+\dfrac{z}{k}\ge 3\cdot\sqrt[3]{\dfrac{x}{k}\cdot\dfrac{y}{k}\cdot\dfrac{z}{k}}$

Từ đó suy ra có thể giả sử $xyz=1$ (*), khi đó (1) $\Leftrightarrow f(x,y,z)=x+y+z-3\ge 0$

Bước 2: Để ý rằng khi thay x và y bởi $t=\sqrt{xy}$ thì điều kiện (*) vẫn được bảo toàn tức là $t.t.z=1$, nên ta chỉ phải xem xét sự thay đổi của $x+y+z$. Theo bất đẳng thức $AM-GM$ thì $x+y\ge 2\sqrt{xy}=2t$, nên $x+y+z\ge 2t+z\Rightarrow f(x,y,z)\ge f(t,t,z)$.

Bước 3: Thay $z=\dfrac{1}{t^2}$ ta có: $f(t,t,z)=2t+\dfrac{1}{t^2}-3=\dfrac{(t-1)^2(2t+1)}{t^2}\ge 0\Rightarrow$ (đpcm)

Với điều kiện (*) thì đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}x=y\\t=1\end{cases}\Leftrightarrow x=y=1\Leftrightarrow x=y=z=1$.

Vậy trong trường hợp tổng quát đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z>0$.

• ***Nhận xét:***

a) Qua bốn cách làm của ví dụ trên ta thấy nếu sử dụng phương pháp dồn biến với kỹ thuật chuẩn hóa thì việc chứng minh $f(x,y,z)\ge 0$ được qui về chứng minh hai bất đẳng thức với một biến số t: $f(x,y,z)\ge f(t,t,z)$; $f(t,t,z)\ge 0$.

b) Nếu một bài toán đã chuẩn hóa (tức là bất đẳng thức có điều kiện) thì nó sẽ "gợi ý" cho chúng ta cách dồn biến (phải đảm bảo điều kiện). Ngược lại một bài toán chưa chuẩn hóa (bất đẳng thức không điều kiện) thì chúng ta sẽ có nhiều cách để dồn biến hơn. Khi đó ta sẽ chọn cách dồn biến sao cho bảo toàn được "nhiều" biểu thức nhất trong bất đẳng thức – điều này cũng tương đương với chuẩn hóa sao cho biểu thức có dạng đơn giản nhất. Vì thế, một sự phối hợp tốt giữa kỹ thuật chuẩn hóa và dồn biến là một điều cần thiết. Tuy nhiên, khi đã quen với những điều này thì các bạn sẽ thấy không có sự khác biệt đáng kể nào giữa chúng.

• Vì bất đẳng thức *AM – GM* ($n = 3$) quá đơn giản nên phương pháp dồn biến có thể không để lại nhiều ấn tượng. Nhưng các bạn sẽ bị thuyết phục bởi sự hiệu qua của phương pháp dồn biến qua các ví dụ minh họa sau đây.

Bài 2.2. [APMO 2004] Cho $a,b,c\in\mathbb{R}$. Chứng minh rằng:

$$\left(a^2+2\right)\left(b^2+2\right)\left(c^2+2\right)\ge 9(ab+bc+ca)$$

Chứng minh

Do vế trái của bất đẳng thức là hàm chẵn với các biến a, b, c nên chỉ cần chứng minh bất đẳng thức cho các số thực a, b, c không âm.

Đặt: $f(a,b,c)=\left(a^2+2\right)\left(b^2+2\right)\left(c^2+2\right)-9(ab+bc+ca)$ với $a, b, c\ge 0$.

Xét hiệu: $d=f(a,b,c)-f\left(\sqrt{ab},\sqrt{ab},c\right)=\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2\left[2\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2c^2+4\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2-9c\right]$

Từ đó, nếu giả sử $c = min\{a, b, c\}$ thì suy ra $d\ge 0$ hay $f(a,b,c)\ge f\left(\sqrt{ab},\sqrt{ab},c\right)$

Tiếp theo ta sẽ chứng minh $f(t, t, c)\ge 0$. Biểu diễn $f(t, t, c)$ dưới dạng tam thức bậc 2 ẩn c: $f(t,t,c)=\left(t^2+2\right)^2c^2-18tc+\left(2t^4-t^2+8\right)$. Ta có:

$\Delta'=(9t)^2-\left(t^2+2\right)^2\left(2t^4-t^2+8\right)=-\left(t^2-1\right)^2\left(2t^4+11t^2+32\right)\le 0\Rightarrow f(t,t,c)\ge 0.$

Vậy bài toán chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

• ***Nhận xét:*** Việc giả sử $a = min\{a, b, c\}$ là một thủ thuật rất thường được áp dụng để dồn biến. Cần chú ý là với bất đẳng thức ba biến đối xứng thì ta có thể giả sử $a\le b\le c$ (hoặc $a\ge b\ge c$), còn trong trường hợp bất đẳng thức ba biến hoán vị vòng quanh thì ta có thể giả sử $a = min\{a, b, c\}$ (hoặc $a = max\{a, b, c\}$).

Bài 2.3. [Việt Nam TST 1996] Cho các số thực a,b,c. Tìm giá trị nhỏ nhất của :

$$f(a,b,c)=(a+b)^4+(b+c)^4+(c+a)^4-\frac{4}{7}\left(a^4+b^4+c^4\right)$$

Giải

Không giảm tính tổng quát, giả sử $a(a+b+c)\ge 0$. Xét hiệu:

$$f(a,b,c)-f\left(a,\frac{b+c}{2},\frac{b+c}{2}\right)=\left[\frac{3}{28}\left(b^2+c^2\right)+3a(a+b+c)+\frac{15}{56}(b+c)^2\right](b-c)^2\ge 0$$

Hay $f(a,b,c)\ge f\left(a,\frac{b+c}{2},\frac{b+c}{2}\right)$. Nếu $b+c=0$ thì: $f(a,b,c)=\frac{3}{7}a^4\ge 0$

Nếu $b+c\ne 0$, chuẩn hóa $b+c=2$. Khi đó: $f(a,1,1)=2(a+1)^4+16-\frac{4}{7}\left(a^4+2\right)=g(a)$

Dễ dàng chứng minh $g(a)\ge 0$ bằng khảo sát hàm theo biến a. Do đó $f(a,b,c)\ge 0$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=0$

Bài 2.4. Cho $a,b,c\ge 0$ thỏa mãn $ab+bc+ca=1$. Chứng minh:

$$\frac{1}{2a^2+bc}+\frac{1}{2b^2+ac}+\frac{1}{2c^2+ab}\ge\frac{8}{(a+b+c)^2}$$

Chứng minh

Đặt $f(a,b,c)=VT-VP$. Ta sẽ chứng minh: $f(a,b,c)\ge f(a,t,t)$, $t=\dfrac{b+c}{2}$

Trước hết dễ thấy: $\dfrac{1}{2a^2+bc}\ge\dfrac{1}{2a^2+t^2}$. Do vậy chỉ cần chứng minh:

$$\frac{1}{2b^2+ac}+\frac{1}{2c^2+ab}\ge\frac{2}{2t^2+at}\Leftrightarrow(b-c)^2\left(2b^2+2c^2+8bc+a^2-5a(b+c)\right)\ge 0$$

Giả sử $a=\min\{a,b,c\}\Rightarrow$

$$2b^2+2c^2+8bc+a^2-5a(b+c)=2b^2+2c^2+3bc-4a^2+5(b-a)(c-a)\ge 0$$

$\Rightarrow f(a,b,c)\ge f(a,t,t)$. Mặt khác: $f(a,t,t)\ge 0\Leftrightarrow a^2(4a^2-7at+6t^2)\ge 0$ (đúng)

$\Rightarrow f(a,b,c)\ge 0$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=t, c=0\,(t\ge 0)$ cùng các hoán vị.

• ***Nhận xét:*** Bài toán **2.4** là một ví dụ về bất đẳng thức đối xứng mà cực trị không đạt tại tâm. Chúng ta thấy rằng trong phương pháp dồn biến phần quan trọng nhất là dồn về hai biến bằng nhau, còn sau đó thì cực trị đạt tại tâm hay không tại tâm không phải là điều mấu chốt. Đây chính là điểm khác biệt của phương pháp so với việc áp dụng bất đẳng thức cổ điển và nói chung với các dạng toán mà cực trị không đạt tại tâm thì xử lý bằng bất đẳng thức cổ điển là tương đối khó khăn.

2. Dồn biến với bất đẳng thức có điều kiện

Khác với phần trước, ở phần này khi xét những bất đẳng thức có điều kiện, cách thức dồn biến của chúng ta sẽ có điểm khác. Chẳng hạn như với điều kiện $ab+bc+ca=1$, khi chúng ta muốn dồn hai biến bằng nhau tức dồn $f(a,b,c)\ge f(a,t,t)$ thì biến t ở đây không phải là một đại lượng trung bình của b, c mà là đại lượng thỏa mãn $2at+t^2=1$. Tổng quát hơn:

Để chứng minh bất đẳng thức $f(a,b,c)\ge 0$ với các biến a,b,c thỏa mãn điều kiện $g(a,b,c)=0$ thì thực hiện bước 1 ta cần chứng minh $f(a,b,c)\ge f(a,t,t)$ với t là biến thỏa mãn $g(a,t,t)=0$. Sau đây là một số ví dụ tiêu biểu:

Bài 2.5. [Tạp chí THTT] Cho $a,b,c\ge 0$ thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{a+(b-c)^2}+\sqrt{b+(c-a)^2}+\sqrt{c+(a-b)^2}\ge\sqrt{3}$$

Chứng minh

Đặt $VT=f(a,b,c)$. Giả sử $a=\min\{a,b,c\}$. Do $a+b+c=1$ nên $a\le\dfrac{1}{3}$.

Ta có: $\sqrt{a+(b-c)^2} \geq \sqrt{a}$. Do đó, để dồn biến ta chỉ cần chứng minh:

$$\sqrt{b+(c-a)^2}+\sqrt{c+(a-b)^2} \geq \sqrt{2(b+c)+(2a-b-c)^2} \Leftrightarrow (b-c)^2(3-8a) \geq 0$$

Do đó: $VT \geq \sqrt{a}+\sqrt{2(1-a)+(1-3a)^2} \geq \sqrt{3} \Leftrightarrow a(3a-1)^2(4-3a) \geq 0$ (đúng)

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow (a,b,c)=\left\{\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right\};\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right\}$

Bài 2.6. Cho $a+b+c \geq 3$. Tìm tất cả các số thực k sao cho:

$$(a^2+k)(b^2+k)(c^2+k) \geq (1+k)^3 \quad (1)$$

Giải

Bước 1: Trước hết, ta có vài nhận xét để đơn giản hóa bài toán.

Chọn $c=0$, $a=b>\max\left\{\sqrt{|k|},\frac{3}{2}\right\}$ suy ra $k>0$.

Hơn nữa, nếu $k>0$ thỏa mãn thì mọi $k'>k$ cũng thỏa mãn, vì:

$$(a^2+k')(b^2+k')(c^2+k')=\left[(a^2+k)+k'-k\right]\left[(b^2+k)+k'-k\right]\left[(c^2+k)+k'-k\right]$$

$$\geq\left(\sqrt[3]{(a^2+k)(b^2+k)(c^2+k)}+k'-k\right)^3 \geq \left(\sqrt[3]{(1+k)^3}+k'-k\right)^3=(1+k')^3$$

Như vậy, ta chỉ cần tìm số k nhỏ nhất thỏa mãn bài toán.

Bây giờ ta chứng tỏ với $k>1$ thì các mệnh đề sau là tương đương:

- **(i)** (1) đúng với mọi a, b, c thực thỏa mãn $a+b+c \geq 3$.
- **(ii)** (1) đúng với mọi a, b, c không âm thỏa mãn $a+b+c \geq 3$.
- **(iii)** (1) đúng với mọi a, b, c không âm thỏa mãn $a+b+c=3$.
- **(iv)** (1) đúng với $a=b=x, c=3-2x$, với mọi $x \in [0,1]$.

Thật vậy, chiều $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (iv)$ là hiển nhiên nên ta chỉ cần chứng minh chiều ngược lại.

Ta chứng minh $(iv) \Rightarrow (iii)$. Giả sử a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a+b+c=3$.

Vì tính đối xứng, ta có thể giả sử $c \geq a,b \Rightarrow 0 \leq a+b \leq 2$.

Đặt $f(a,b,c)=(a^2+k)(b^2+k)(c^2+k)-(1+k)^3$. Đặt $x=\frac{a+b}{2}$ thì $x \in [0,1]$ và $c=3-2x$

Ta có: $f(a,b,c)-f(x,x,c)=(a-b)^2\left[2k-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-ab\right](c^2+k) \geq 0$

vì $2k-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-ab \geq 2\left[k-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right] \geq 0$.

Từ đó ta có: $d=\dfrac{(2t-b-c)(2t+b+c)}{(b+c)^2(2t)^2}+\dfrac{1}{(a+b)^2}+\dfrac{1}{(a+c)^2}-\dfrac{2}{(a+b)(a+c)}$

$$=\frac{-(b-c)^2(2t+b+c)}{(\sqrt{a+b}+\sqrt{a+c})^2(b+c)^2(2t)^2}+\frac{(b-c)^2}{(a+b)^2(a+c)^2}.$$

$$=(b-c)^2\left(\frac{1}{(a+b)^2(a+c)^2}-\frac{2t+b+c}{(\sqrt{a+b}+\sqrt{a+c})^2(b+c)^2(2t)^2}\right)$$

Đến đây ta giả sử $a=\min\{a,b,c\}$ thì $a\le t$ và $2t+b+c\le(\sqrt{a+b}+\sqrt{a+c})^2$.

$(a+b)^2(a+c)^2\le(b+c)^2(2t)^2$. Do đó $d\ge 0$ hay $f(a,b,c)\ge f(a,t,t)$.

Mặt khác, thay $a=\dfrac{1-t^2}{2t}$ vào $f(a,t,t)$ và biến đổi ta có:

$f(t,t,c)=\dfrac{(1-t^2)(1-3t^2)^2}{4t^2(1+t^2)}+\dfrac{9}{4}\ge\dfrac{9}{4}$. Bất đẳng thức được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ hoặc $a=0, b=c=1$ cùng các hoán vị.

• ***Bình luận:*** Nếu các bạn chưa thực sự thành thạo kỹ thuật này, các bạn có thể thuần nhất hóa bất đẳng thức rồi lại dồn biến như phần trước. Chẳng hạn như bất đẳng thức thuần nhất của ***bài 2.8*** là: $(ab+bc+ca)\left(\dfrac{1}{(a+b)^2}+\dfrac{1}{(b+c)^2}+\dfrac{1}{(c+a)^2}\right)\ge\dfrac{9}{4}$

Tuy nhiên, nếu các bạn thử dồn biến theo các đại lượng trung bình thì các bạn sẽ thấy việc này rất phức tạp, đồng thời hiểu được nét đẹp của phép dồn biến theo điều kiện.

Bài 2.9. Cho $a,b,c\ge 0$ thỏa mãn $ab+bc+ca+6abc=9$.

Chứng minh rằng: $a+b+c+3abc\ge 6$

Chứng minh

Đặt $f(a,b,c)=a+b+c+3abc$. Giả sử t là biến thỏa mãn $2at+t^2+6at^2=9$ $(0\le t\le 3)$

Khi đó: $d=f(a,b,c)-f(a,t,t)=(b+c-2t)+3a(bc-t^2)$

Với điều kiện đề bài, việc đưa các biểu thức $(b+c-2t)$, $(bc-t^2)$ về dạng $A(b-c)^2$ là khá phức tạp. Do vậy, chúng ta sẽ xử lý một cách "khéo" hơn.

Xét điều kiện: $ab+bc+ca+6abc=2at+t^2+6at^2\Leftrightarrow\dfrac{a}{6a+1}(b+c-2t)=t^2-bc$

Để ý rằng nếu $\begin{cases}b+c-2t<0\\t^2-bc<0\end{cases}\Rightarrow\dfrac{b+c}{2}<t<\sqrt{bc}\Rightarrow$ vô lý $\Rightarrow\begin{cases}b+c-2t\ge 0\\t^2-bc\ge 0\end{cases}$

Từ đó: $d=(b+c-2t)+3a(bc-t^2)=(b+c-2t)\left(1-\dfrac{3a^2}{6a+1}\right)$.

Bây giờ, ta giả sử $a=\min\{a,b,c\}$

Khi đó $a \le 1$ nên $1 - \dfrac{3a^2}{6a+1} \ge 0$. Vậy $d \ge 0$ hay $f(a,b,c) \ge f(a,t,t)$.

Mặt khác thay $a = \dfrac{9-t^2}{2t+6t^2}$ và biến đổi ta có: $f(a,t,t) = \dfrac{3(3-t)(t+1)(t-1)^2}{2t+6t^2} + 6 \ge 6$

Bất đẳng thức được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$ hoặc $a=0, b=c=3$ cùng các hoán vị.

3. Dồn biến lượng giác trong tam giác:

Bất đẳng thức lượng giác trong tam giác cũng là bất đẳng thức ba biến. Vì đường lối chứng minh không khác biệt gì so với bất đẳng thức đại số nên ở đây chỉ xin nêu ra một vài ví dụ để minh họa cho sức mạnh của phương pháp trong dạng bất đẳng thức này.

Bài 2.10. Cho ΔABC. Tìm giá trị nhỏ nhất của: $(1+\cos^2 A)(1+\cos^2 B)(1+\cos^2 C)$

Giải

Giả sử $C = \min\{A,B,C\} \Rightarrow 0 \le C \le \dfrac{\pi}{3}$ (*). Đặt

$f(A,B,C) = (1+\cos^2 A)(1+\cos^2 B)(1+\cos^2 C)$

Ta sẽ chứng minh: $f(A,B,C) \ge f\left(\dfrac{A+B}{2}, \dfrac{A+B}{2}, C\right)$ (1). Thật vậy ta có:

(1) $\Leftrightarrow (1+\cos^2 A)(1+\cos^2 B) \ge \left(1+\cos^2\dfrac{A+B}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \sin^2\dfrac{A-B}{2}[6\cos C - \cos(A-B) - 1] \ge 0$

(2)

Từ (*) ta có: $6\cos C - \cos(A-B) - 1 \ge 3 - 1 - 1 > 0 \Rightarrow$ (2) đúng

$\Rightarrow$ (1) đúng hay $f(A,B,C) \ge f\left(\dfrac{A+B}{2}, \dfrac{A+B}{2}, C\right) = g(C) = \dfrac{1}{4}(3-\cos C)^2(1+\cos^2 C)$

Dễ thấy $g(C) \ge \dfrac{125}{64}$. Kết hợp với (1) $\Rightarrow f(A,B,C) \ge \dfrac{125}{64}$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \Delta ABC$ đều. Vậy $\min f = \dfrac{125}{64}$

Bài 2.11. Cho tam giác ABC không tù. Tìm giá trị nhỏ nhất của:

$$P = \frac{\sin A + \sin B + \sin C}{\cos A + \cos B + \cos C}$$

Giải

Giả sử $A = \max\{A,B,C\}$ thì $\dfrac{\pi}{2} \ge A \ge \dfrac{\pi}{3}$. Đặt $x = \cos\dfrac{B-C}{2}; x \in [0,1]$.

$$P = f(x) = \frac{\sin A + 2\cos\frac{A}{2}x}{\cos A + 2\sin\frac{A}{2}x} \Rightarrow f'(x) = \frac{\cos\frac{3A}{2}}{\left(\cos A + 2\sin\frac{A}{2}x\right)^2} \le 0$$

$\Rightarrow f(x)$ nghịch biến trong $[0,1]$

$\Rightarrow f(x) \geq \dfrac{\sin A + 2\cos\frac{A}{2}}{\cos A + 2\sin\frac{A}{2}} = g(A)$. Ta có: $g'(A) = \dfrac{\sin\frac{3A}{2} - 1}{\left(\cos A + 2\sin\frac{A}{2}\right)^2} \leq 0$

$\Rightarrow g(A)$ nghịch biến trong $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow g(A) \geq g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow P \geq 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow A = \frac{\pi}{2}; B = C = \frac{\pi}{4}$ và các hoán vị. Vậy $\min P = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$

Bài 2.12. Cho tam giác ABC không tù. Chứng minh rằng:

$$\left(\frac{\sin A\sin B}{\sin C}\right)^2 + \left(\frac{\sin B\sin C}{\sin A}\right)^2 + \left(\frac{\sin A\sin C}{\sin B}\right)^2 \geq \frac{9}{4}$$

Chứng minh

Không mất tính tổng quát ta giả sử $\frac{\pi}{2} \geq A \geq \frac{\pi}{3}$. Ta viết bất đẳng thức trên dưới dạng:

$$f^2(A,B,C) \geq \frac{9}{4} + 2(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C)$$

Trong đó: $f(A,B,C) = \dfrac{\sin A\sin B}{\sin C} + \dfrac{\sin A\sin C}{\sin B} + \dfrac{\sin B\sin C}{\sin A}$

Xét hiệu: $d = f(A,B,C) - f\left(A, \frac{B+C}{2}, \frac{B+C}{2}\right) = \dfrac{\sin^2\frac{B-C}{2}}{\sin A}\left(\dfrac{4\sin^2 A\sin^2\frac{A}{2}}{\sin B\sin C} - \dfrac{1}{2}\right)$

Vì $\frac{\pi}{2} > A \geq \frac{\pi}{3}$ nên $\dfrac{4\sin^2 A\sin^2\frac{A}{2}}{\sin B\sin C} \geq 16\sin^4\frac{A}{2} \geq 1$. Vì vậy $d \geq 0$

Chú ý rằng: $\sin^2 B + \sin^2 C \leq 2\cos^2\frac{A}{2}$ nên ta chỉ cần chứng minh:

$$f^2\left(A, \frac{B+C}{2}, \frac{B+C}{2}\right) \geq \frac{9}{4} + 2(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C) \Leftrightarrow \cos A(\cos A + 1)(2\cos A - 1)^2 \geq 0$$

Bất đẳng thức này đúng vì $\frac{\pi}{2} \geq A \geq \frac{\pi}{3}$. Từ đây ta có bất đẳng thức cần chứng minh.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \Delta$ABC là tam giác đều hoặc tam giác vuông cân.

Nhận xét: Sử dụng đẳng thức: $\dfrac{\sin B\sin C}{\sin A} = \dfrac{1}{\cot B + \cot C}$ và $\sum \cot B.\cot C = 1$ thì bất đẳng thức trên tương đương với Bất đẳng thức ***Iran 1996***:

$$(ab + bc + ca)\left[\frac{1}{(a+b)^2} + \frac{1}{(b+c)^2} + \frac{1}{(c+a)^2}\right] \geq \frac{9}{4}$$

III. DỒN BIẾN BẰNG KỸ THUẬT HÀM SỐ

Đây là một kỹ thuật rất quan trọng của phương pháp dồn biến. Vì thế chúng tôi giới thiệu nó ở ngay sau phần cơ bản nhất. Trong mục **II.** chúng ta thấy rằng để chứng tỏ $f(x, y, z) \geq f(t, t, z)$ ta xét hiệu $d = f(x, y, z) - f(t, t, z)$ rồi tìm cách đánh giá $d \geq 0$. Cách làm này phù hợp với f là các hàm đa thức, phân thức đơn giản nên dễ biến đổi đại số. Trong trường hợp f là các hàm khó biến đổi đại số, chẳng hạn: $f(x, y, z) = x^k + y^k + z^k$ (với $k > 0$) thì ta phải sử dụng kỹ thuật hàm số để chứng minh các đánh giá trung gian bằng tính đồng biến, nghịch biến của hàm số. Để bạn đọc dễ hình dung ta có thể mô tả kỹ thuật này như sau: Giả sử cần chứng minh $f(x, y, z) \geq f(x, t, t)$ với $t = \dfrac{y+z}{2}$, ta xét hàm: $g(s) = f(x, t+s, t-s)$ với $s \geq 0$.

Sau đó chứng minh g tăng $\forall s \geq 0$ (thường sử dụng đạo hàm), suy ra $g(s) \geq g(0)$. Một trong những ví dụ quen thuộc với các bạn là dồn biến bằng hàm lồi, tuy nhiên dưới đây chúng ta sẽ quan sát kỹ thuật dồn biến trong bối cảnh tổng quát hơn, còn vấn đề về hàm lồi sẽ được trở lại ở một mục khác trong bài toán với n biến.

Chúng tôi nhấn mạnh rằng, đây là một kỹ thuật khó, bởi nó chứa đựng những nét rất tinh tế của phương pháp dồn biến. Những ví dụ sau đây thể hiện rất rõ vẻ đẹp và sức mạnh của phương pháp dồn biến.

Bài 3.1: Cho $k \geq 0$ và $a, b, c \geq 0$. Chứng minh rằng:

$$\left(\frac{a}{b+c}\right)^k + \left(\frac{b}{c+a}\right)^k + \left(\frac{c}{a+b}\right)^k \geq \min\left\{2, \frac{3}{2^k}\right\} \quad (*)$$

Chứng minh

Bước 1: Ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức khi $2 = \dfrac{3}{2^k} \Leftrightarrow k = \dfrac{\ln 3}{\ln 2} - 1$

Các bạn hãy suy nghĩ tại sao bất đẳng thức đúng cho trường hợp này lại dẫn đến bất đẳng thức đúng cho trường hợp tổng quát.

Chú ý: Với $k = \dfrac{\ln 3}{\ln 2} - 1$ thì đẳng thức xảy ra tại $a = b = c > 0$ hoặc $\left[\begin{array}{l} a = b, c = 0 \\ b = c, a = 0 \\ c = a, b = 0 \end{array}\right.$

Bước 2: Không mất tổng quát có thể giả sử $a + b + c = 1$ và $b \geq c \geq a$.

Đặt $t = \dfrac{b+c}{2}$ và $m = \dfrac{b-c}{2}$, suy ra $b = t + m$, $c = t - m$, $a = 1 - 2t$. Khi đó:

$$(*) \Leftrightarrow f(m) = \left(\frac{1-2t}{2t}\right)^k + \left(\frac{t+m}{1-t-m}\right)^k + \left(\frac{t-m}{1+m-t}\right)^k \geq 2 \text{ với } k = \frac{\ln 3}{\ln 2} - 1$$

Vì $c \ge a$ nên $3t - 1 \ge m \ge 0$, và $1 \ge b + c = 2t$ nên $\frac{1}{2} \ge t \ge \frac{1}{3}$.

Ta sẽ khảo sát $f(m)$ trên miền $m \in [0, 3t - 1]$ với $t \in \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$ là hằng số.

Ta có: $f'(m) = \frac{k(t+m)^{k-1}}{(1-t-m)^{k+1}} - \frac{k(t-m)^{k-1}}{(1+m-t)^{k+1}} \ge 0 \Leftrightarrow \frac{k(t+m)^{k-1}}{(1-t-m)^{k+1}} \ge \frac{k(t-m)^{k-1}}{(1+m-t)^{k+1}}$

$\Leftrightarrow g(m) = [\ln(t-m) - \ln(t+m)] - \frac{1+k}{1-k}[\ln(1-t-m) - \ln(1-t+m)] \ge 0$

Ta có: $g'(m) = \left(\frac{1}{t-m} + \frac{1}{t+m}\right) + \frac{1+k}{1-k}\left(\frac{1}{1-t-m} + \frac{1}{1-t+m}\right) \ge 0 \Leftrightarrow$

$$\frac{-2t}{(t-m)(t+m)} + \frac{1+k}{1-k} \cdot \frac{2(1-t)}{(1-t-m)(1-t+m)} \ge 0 \Leftrightarrow \frac{-t}{t^2 - m^2} + \frac{1+k}{1-k} \cdot \frac{1-t}{(1-t)^2 - m^2} \ge 0 \quad (1)$$

Do $k = \frac{\ln 3}{\ln 2} - 1$ nên $\frac{1+k}{1-k} \ge 2$ suy ra để chứng minh (1) ta cần chứng minh

$$\frac{-t}{t^2 - m^2} + \frac{2(1-t)}{(1-t)^2 - m^2} \ge 0 \Leftrightarrow u(m) = -t + 4t^2 - 3t^3 + 3tm^2 - 2m^2 \ge 0$$

Ta có: $u'(m) = 2(3t-2)m < 0 \ \forall t \in \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right] \Rightarrow u(m) \ge u(3t-1) = 2(3t-1)(2t-1)^2 \ge 0$.

$\Rightarrow$ (1) đúng $\Rightarrow g'(m) \ge 0 \Rightarrow g(m)$ đồng biến $\Rightarrow g(m) \ge g(0) = 0 \Rightarrow f'(m) \ge 0$

$\Rightarrow f(m)$ đồng biến $\Rightarrow f(m) \ge f(0) = \left(\frac{1-2t}{2t}\right)^k + 2\left(\frac{t}{1-t}\right)^k$.

Bước 3: Ta cần chứng minh $f(0) = h(t) = \left(\frac{1-2t}{2t}\right)^k + 2\left(\frac{t}{1-t}\right)^k \ge 2, \ \forall t \in \left[0, \frac{1}{3}\right]$

$$h'(t) = \frac{2kt^{k-1}}{(1-t)^{k+1}} - \frac{k}{2^k} \cdot \frac{(1-2t)^{k-1}}{t^{k+1}} \le 0 \Leftrightarrow 2^{k+1} t^{2k} \le [(1-t)(1-2t)]^{k-1} \quad (2)$$

Trong bất đẳng thức cuối, vế trái là hàm đồng biến theo t và vế phải là hàm nghịch biến theo t, và lưu ý là $t \le \frac{1}{3}$ nên để chứng minh (2) ta cần chứng minh:

$2^{k+1}\left(\frac{1}{3}\right)^{2k} \le \left[\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{2}{3}\right)\right]^{k-1}$. Bất đẳng thức này đúng nên $h(t)$ nghịch biến, suy ra $h(t) \ge h\left(\frac{1}{3}\right) = 2$. Bài toán được giải quyết trọn vẹn!

Nhận xét: Để thấy được nét đẹp của bài toán này, ta xét các trường hợp đặc biệt.

a) Trường hợp $k = 1$, ta thu được bất đẳng thức ***Nesbit***: $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \ge \frac{3}{2}$

Có **45** cách chứng minh bất đẳng thức này (Xem **§24.3**). Ví dụ 1 cách tiêu biểu là:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+3=\frac{a+b+c}{b+c}+\frac{a+b+c}{c+a}+\frac{a+b+c}{a+b}$$

$$=(a+b+c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)\ge(a+b+c)\frac{9}{(b+c)+(c+a)+(a+b)}=\frac{9}{2}$$

b) Trường hợp $k=\frac{1}{2}$, ta thu được bất đẳng thức sau: $\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}}\ge 2$

Đây là một bài toán khá thú vị với một lời giải đơn giản sử dụng ***AM – GM***:

$$\sum_{cyc}\sqrt{\frac{a}{b+c}}=\sum_{cyc}\frac{2a}{2\sqrt{a(b+c)}}\ge\sum_{cyc}\frac{2a}{a+b+c}=\frac{2(a+b+c)}{a+b+c}=2$$

c) Trường hợp $k\ge\frac{2}{3}$, ta có bất đẳng thức sau: $\left(\frac{a}{b+c}\right)^k+\left(\frac{b}{c+a}\right)^k+\left(\frac{c}{a+b}\right)^k\ge\frac{3}{2^k}$

Đây cũng là một bài toán rất hay đã được đăng trên nhiều tạp chí toán học. Mặc dù $k=\frac{2}{3}$ không phải là hằng số tốt nhất, nhưng nó mang lại cho chúng ta 1 lời giải rất đẹp:

$$a+b+c=a+\frac{b+c}{2}+\frac{b+c}{2}\ge 3\cdot\sqrt[3]{a\left(\frac{b+c}{2}\right)^2}\Rightarrow\left(\frac{2a}{b+c}\right)^{\frac{2}{3}}\ge\frac{3a}{a+b+c}\Rightarrow\sum_{cyc}\left(\frac{a}{b+c}\right)^{\frac{2}{3}}\ge\frac{3}{2^{\frac{2}{3}}}$$

Bài 3.2. Cho $k>0$, $a, b, c\ge 0$ và $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$(ab)^k+(bc)^k+(ca)^k\le\max\left\{3,\left(\frac{3}{2}\right)^{2k}\right\}\ (1)$$

Chứng minh

Không mất tổng quát, có thể giả sử $b\ge c$ (việc lấy $a=\min\{a,b,c\}$ hay $a=\max\{a,b,c\}$ sẽ được lựa chọn để phù hợp với các biến đổi tiếp theo).

Đặt $t=\frac{b+c}{2}$ và $m=\frac{b-c}{2}$ suy ra $b=t+m$, $c=t-m$. Khi đó:

Bất đẳng thức (1) $\Leftrightarrow f(m)=a^k\left[(t+m)^k+(t-m)^k\right]+(t^2-m^2)^k\le\max\left\{3,\left(\frac{3}{2}\right)^{2k}\right\}$

Ta khảo sát $f(m)$ với $m\in[0,t]$. Ta có:

$$f'(m)=ka^k\left[(t+m)^{k-1}-(t-m)^{k-1}\right]-2km(t^2-m^2)^{k-1}$$

$$f'(m)\ge 0\Leftrightarrow g(m)=a^k\left[(t-m)^{1-k}-(t+m)^{1-k}\right]-2m\ge 0$$

Tất nhiên ta chỉ cần xét khi $k>1$ (khi $k\le 1$ thì bài toán đơn giản).

Ta có: $g''(m)=a^kk(k-1)\left[(t-m)^{-k-1}-(t+m)^{-k}\right]>0$

$\Rightarrow g'(m)$ đồng biến nên $g'(m) = 0$ có tối đa một nghiệm trên $(0, t)$.

Vì $g(0) = 0$, $g(t) = +\infty$ nên chỉ có hai khả năng: $g(m) > 0, \forall m \in (0; t]$ hoặc $g(m) = -0+, \forall m \in [0, t]$

$\Leftrightarrow f'(m) > 0, \forall m \in (0; t]$ hoặc $f'(m) = -0+, \forall m \in [0, t]$

$\Leftrightarrow f(m)$ đi lên hoặc $f(m)$ đi xuống rồi lại đi lên.

Trong cả 2 trường hợp thì cực đại cũng đạt ở biên do đó $f(m) \le \max\{f(0), f(t)\}$

Với $m = t \Rightarrow c = 0 \Rightarrow f(t) = (ab)^k \le \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^{2k} = \left(\dfrac{3}{2}\right)^{2k}$

Với $m = 0 \Rightarrow b = c = t \Rightarrow f(0) = 2t^k a^k + t^{2k} = 2t^k(3-2t)^k + t^{2k} = h(t)$

Ta có: $h'(t) = 2k(3-2t)^k t^{k-1} - 4k(3-2t)^{k-1} t^k + 2kt^{2k-1}$

$h'(t) \ge 0 \Leftrightarrow \left(\dfrac{3-2t}{t}\right)^k - 2\left(\dfrac{3-2t}{t}\right)^{k-1} + 1 \ge 0 \Leftrightarrow u(x) = x^k - 2x^{k-1} + 1 \ge 0$ với $x = \dfrac{3-2t}{t}$

Ta có: $u'(x) = [kx - 2(k-1)]x^{k-2}$. Vì $u'(x)$ có tối đa một nghiệm trên $\mathbb{R}^+$ nên $u(x)$ có tối đa 2 nghiệm trong $\mathbb{R}^+$, trong đó một nghiệm là $x = 1$. Từ đó, ta sẽ giả sử $a = \min\{a, b, c\}$.

Khi đó ta chỉ việc xét khi $t \ge 1$ và tương ứng sẽ là $x \le 1$.

Vì $u(x)$ chỉ có tối đa 1 nghiệm trong $(0, 1)$ nên $h'(t)$ chỉ có tối đa 1 nghiệm trong $\left(1, \dfrac{3}{2}\right)$.

Chú ý là $h'(1) = 0$, $h'\left(\dfrac{3}{2}\right) > 0$. Do đó, chỉ có hai khả năng hoặc $h(t)$ đồng biến trên $\left[1, \dfrac{3}{2}\right]$ hoặc $h(t)$ có dạng $(-0+)$ với $t \in \left[1, \dfrac{3}{2}\right]$. Trong cả 2 trường hợp thì $h(t)$ luôn đạt max tại hai biên nên $h(t) \le \max\left\{f(1), f\left(\dfrac{3}{2}\right)\right\} = \max\left\{3, \left(\dfrac{3}{2}\right)^{2k}\right\}$

• ***Nhận xét:*** Ở đây chúng tôi không giả thiết $a = \min\{a, b, c\}$ ngay từ đầu là muốn nhấn mạnh rằng việc dồn về hai biến bằng nhau luôn thực hiện được mà không cần thứ tự giữa các biến số. Chính vì lý do này nên sau khi chứng minh:

$$\begin{cases} f(a,b,c) \le \max\left\{\left(\dfrac{3}{2}\right)^{2k}, f(a,t,t)\right\} \text{ với } t = \dfrac{b+c}{2} \\ f(a,b,c) \le \max\left\{\left(\dfrac{3}{2}\right)^{2k}, f(t,t,c)\right\} \text{ với } t = \dfrac{a+b}{2} \end{cases} \quad (*)$$

ta có thể làm tiếp theo bằng cách khác mà không cần khảo sát hàm 1 biến số.

Với mỗi a, b, c cố định, xét dãy số được xác định bởi qui tắc sau:

$(a_0,b_0,c_0)=(a,b,c)$; $(a_{2n-1},b_{2n-1},c_{2n-1})=\left(a_{2n-2},\dfrac{b_{2n-2}+c_{2n-2}}{2},\dfrac{b_{2n-2}+c_{2n-2}}{2}\right)$ $\forall n\in\mathbb{Z}^+$

và $(a_{2n},b_{2n},c_{2n})=\left(\dfrac{a_{2n-1}+b_{2n-1}}{2},\dfrac{a_{2n-1}+b_{2n-1}}{2},c_{2n-1}\right)$ $\forall n\in\mathbb{Z}^+$.

Khi đó ta có: $f(a,b,c)\le\max\left\{\left(\dfrac{3}{2}\right)^{2k},f(a_n,b_n,c_n)\right\}$, $\forall n\in\mathbb{Z}^+$

Do $a+b+c=3$ nên dễ thấy các dãy $\{a_n\},\{b_n\},\{c_n\}$ đều hội tụ về 1, khi đó:

$f(a,b,c)\le\max\left\{\left(\dfrac{3}{2}\right)^{2k},f(1,1,1)\right\}=\max\left\{\left(\dfrac{3}{2}\right)^{2k},3\right\}$ (đpcm)

• ***Bình luận:*** Kỹ thuật chuyển qua giới hạn này có thể tổng quát lên thành hai định lý dồn biến tổng quát là ***SMV*** và ***UMV*** mà chúng tôi sẽ giới thiệu ở phần sau. Mặt khác nếu kết hợp tính liên tục của hàm số với một kỹ thuật khác, chúng ta còn đạt được một kết quả tổng quát hơn so với hai định lý ***SMV*** và ***UMV***, đó là định lý ***GMV***.

Ngoài ra, sau khi có (*), ta còn có một cách khác để đạt được điều phải chứng minh mà chỉ cần sử dụng một số hữu hạn lần thay thế. Tuy nhiên, để khỏi trùng lặp chúng tôi sẽ giới thiệu nó trong mục bất đẳng thức bốn biến và các mục sau đó, khi mà nó thực sự cần thiết. Còn trong trường hợp ba biến, chúng tôi sẽ chỉ sử dụng cách tiếp cận đơn giản nhất (dồn về 1 biến rồi khảo sát), nhằm giữ được tính trong sáng của phương pháp.

Chúng tôi hi vọng rằng, sau khi đọc kỹ hai bài toán trên, thì các bạn có thể sử dụng kỹ thuật hàm số để dồn biến theo những cách khác nhau. Ví dụ tiếp theo minh họa cho kiểu dồn biến về trung bình nhân.

Bài 3.3. Cho $a, b, c>0$ và $abc=1$. Chứng minh rằng:

a) $81(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)\le 8(a+b+c)^4$

b) $64(1+a^3)(1+b^3)(1+c^3)\le(a+b+c)^6$

Chứng minh

a) Đặt $f(a,b,c)=8(a+b+c)^4-81(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)$. Ta có thể giả sử $a\ge b$.

Xét hàm số $g(t)=f\left(ta,\dfrac{b}{t},c\right)$ với $t\in\left[\sqrt{\dfrac{b}{a}},1\right]$.

Ta có: $g'(t)=32\left(a-\dfrac{b}{t^2}\right)\left(ta+\dfrac{b}{t}+c\right)^3-81\left(a-\dfrac{b}{t^2}\right)\left(ta+\dfrac{b}{t}\right)(1+c^2)$

Vì $t\in\left[\sqrt{\frac{b}{a}},1\right]$ nên $g'(t)\geq 0$ nếu $32(d+c)^3\geq 81d\left(1+c^2\right)$ với $d=ta+\frac{b}{t}$

Thật vậy: $32(d+c)^3\geq 32d\left(d^2+2dc+3c^2\right)\geq 32d\left(3\sqrt[3]{d^4c^2}+3c^2\right)>81d\left(1+c^2\right)$ (vì $d^2c\geq 4$)

Vậy $g'(t)\geq 0$ với $t\in\left[\sqrt{\frac{b}{a}},1\right]\Rightarrow g(t)$ đồng biến trên $\left[\sqrt{\frac{b}{a}},1\right]$

$\Rightarrow g(1)\geq g\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\right)$, tức là $f(a,b,c)\geq f(s,s,c)$ với $s=\sqrt{ab}$.

Phần còn lại là chứng minh $f(s,s,c)\geq 0$ với $s^2c=1$.

Thay $s=\frac{1}{\sqrt{c}}$, ta được: $f(s,s,c)=f\left(\frac{1}{\sqrt{c}},\frac{1}{\sqrt{c}},c\right)=8\left(\frac{2}{\sqrt{c}}+c\right)^4-81\left(1+\frac{1}{c}\right)^2\left(1+c^2\right)$

$$=\left(\frac{\sqrt{c}-1}{c}\right)^2\left(8c^5+16c^{\frac{9}{2}}+24c^4+96c^{\frac{9}{2}}+87c^3+78c^{\frac{5}{2}}+99c^2+120c^{\frac{3}{2}}-21c+94\sqrt{c}+47\right)\geq 0$$

Vậy bất đẳng thức chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

b) Đặt $f(a,b,c)=(a+b+c)^6-64\left(1+a^3\right)\left(1+b^3\right)\left(1+c^3\right)$

Giả sử $a\geq b\geq c$. Xét hàm số $g(t)=f(ta,\frac{b}{t},c)$ với $t\in\left[\sqrt{\frac{b}{a}},1\right]$. Ta có:

$$g'(t)=6\left(a-\frac{b}{t^2}\right)\left(ta+\frac{b}{t}+c\right)^5-192\left(a-\frac{b}{t^2}\right)\left(t^2a^2+ab+\frac{b^2}{t^2}\right)\left(1+c^3\right)$$

Vì $t\in\left[\sqrt{\frac{b}{a}},1\right]$ nên $g'(t)\geq 0$ nếu $\left(ta+\frac{b}{t}+c\right)^5\geq 32\left(t^2a^2+ab+\frac{b^2}{t^2}\right)\left(1+c^3\right)$

Đặt $d=t^2a^2+ab+\frac{b^2}{t^2}$, ta có: $\left(ta+\frac{b}{t}+c\right)^5\geq 3\left(ta+\frac{b}{t}+c\right)^4$

$$=3\left(d+2ab+2tac+2\cdot\frac{bc}{t}\right)^2\geq 3(d+6)^2\geq 72d>32d\left(1+c^3\right)\ (\text{vì } c\leq 1)$$

Vậy $g'(t)\geq 0$ với $t\in\left[\sqrt{\frac{b}{a}},1\right]$, suy ra g đồng biến trên $\left[\sqrt{\frac{b}{a}},1\right]$, do đó $g(1)\geq g\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\right)$,

tức là $f(a,b,c)\geq f(s,s,c)$ với $s=\sqrt{ab}$.

Cuối cùng ta chứng minh $f(s, s, c) \geq 0$ với $s^2c = 1$. Thay $s = \frac{1}{\sqrt{c}}$, ta được:

$$f(s,s,c) = f\left(\frac{1}{\sqrt{c}}, \frac{1}{\sqrt{c}}, c\right) = \left(\frac{2}{\sqrt{c}} + c\right)^6 - 64\left(1 + \frac{1}{c\sqrt{c}}\right)^2 (1 + c^3)$$

$= c^6 + 12c^4\sqrt{c} - 4c^3 + 32c\sqrt{c} + 112 + \frac{64}{c\sqrt{c}} > 0$ vì $c \leq 1$. Bài toán chứng minh xong.

Bài 3.4. Cho $a, b, c \geq 0$, $a + b + c = 1$. Tìm số thực $k > 0$ lớn nhất sao cho:

$$\sqrt{a + k(b-c)^2} + \sqrt{b + k(c-a)^2} + \sqrt{c + k(a-b)^2} \leq \sqrt{3} \quad (1)$$

Giải

• ***Bước 1:*** Cho $a = 1, b = c = 0$ vào (1) suy ra $k \leq 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ta sẽ chứng minh với $k = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$ thì bất đẳng thức (1) đúng.

Đặt $f(a,b,c) = \sqrt{a + k(b-c)^2} + \sqrt{b + k(c-a)^2} + \sqrt{c + k(a-b)^2}$

Không mất tổng quát, có thể giả sử $a \geq b \geq c$.

Ta sẽ chứng minh $f(a,b,c) \leq f(a,t,t)$ (2) với $t = \frac{b+c}{2}$. Đặt $b = t + s$, $c = t - s$, do $a + b + c = 1$ nên $a = 1 - 2t$, và từ $a \geq b \geq c \geq 0$ suy ra $1 \geq 3t + s \geq 4s \geq 0$.

Xét $f(a,b,c) = g(s) = \sqrt{1 - 2t + 4ks^2} + \sqrt{t + s + k(3t - s - 1)^2} + \sqrt{t - s + k(3t + s - 1)^2}$, trong đó $s \in \left[0; \frac{1}{4}\right]$ và $t \in \left[0; \frac{1}{3}\right]$. Để chứng minh (2) ta cần chứng minh $g(s) \leq g(0)$, muốn vậy ta sẽ chứng minh $g(s)$ nghịch biến. Ta có:

$$g'(s) = \frac{4ks}{\sqrt{1 - 2t + 4ks^2}} + \frac{1 + 2k - 6kt + 2ks}{2\sqrt{t + s + k(3t - s - 1)^2}} + \frac{-1 - 2k + 6kt + 2ks}{2\sqrt{t - s + k(3t + s - 1)^2}}$$

Do $1 - 2t + 4ks^2 \geq t - s + k(3t + s - 1)^2 \Leftrightarrow (1 + s - 3t)(3kt + 3ks + 1 - k) \geq 0$ (đúng)

nên để có $g'(s) \leq 0$ ta chỉ cần $\frac{1 + 2k - 6kt + 2ks}{2\sqrt{t + s + k(3t - s - 1)^2}} + \frac{-1 - 2k + 6kt + 10ks}{2\sqrt{t - s + k(3t + s - 1)^2}} \leq 0$

$$\Leftrightarrow (1+2k-6kt-10ks)^2(t+s+k(3t-s-1)^2) \geq (1+2k-6kt+2ks)^2(t-s+k(3t+s-1)^2)$$

$$\Leftrightarrow h(s) = 1-24k^2t-30kt+72k^2t^2+144k^2ts+144k^3t-432k^3t^2+6k-32k^2s-8ks+40k^2s^2$$

$$+16k^3s-16k^3+80k^3s^2+48k^3s^3-96k^3ts+432k^3t^3+144k^3t^2s-240k^3ts^2 \geq 0$$

Ta có:

$$h'(s) = 144k^2t-32k^2-8k+80k^2s+16k^3+160k^3s+144k^3s^2-96k^3t+144k^3t^2-480k^3ts$$

$h''(s) = 80k^2+160k^3+288k^3s-480k^3t \geq 0 \quad \forall s \in \left[0;\frac{1}{4}\right]$ (vì $t \in \left[0;\frac{1}{3}\right]$). Do đó $h'(s)$ đồng biến nên $h'(s) \leq h'\left(\frac{1}{4}\right) < 0$, suy ra $h(s) \geq h\left(\frac{1}{4}\right) > 0$. Vậy $g'(s) \leq 0$ nên g nghịch biến, suy ra:

$f(a,b,c) = g(s) \leq g(0) = f(a,t,t)$ với $t = \dfrac{b+c}{2}$.

• ***Bước 2:*** Bây giờ ta chỉ cần chứng minh cho trường hợp $b = c$, nghĩa là:

$$\sqrt{a}+\sqrt{2(1-a)+k(1-3a)^2} \leq \sqrt{3} \Leftrightarrow 2(1-a)+k(1-3a)^2 \leq \left(\sqrt{3}-\sqrt{a}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow k(1-3a)^2 \leq (1-\sqrt{3a})^2 \Leftrightarrow (1-\sqrt{3a})^2\left[k(1+\sqrt{3a})^2-1\right] \leq 0$$

Bất đẳng thức cuối hiển nhiên đúng vì $(1+\sqrt{3a})^2 \leq (1+\sqrt{3})^2 = \dfrac{1}{k}$.

Vậy số thực dương k lớn nhất thỏa mãn bài toán là $k = 1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Bình luận: Nói chung, chúng ta sẽ gặp khó khăn khi làm quen với kỹ thuật này. Con đường để chinh phục một bất đẳng thức sẽ có nhiều chông gai thử thách, đòi hỏi chúng ta phải có một sự kiên trì liên tục. Sau đây là một bài toán mà có thể lời giải của nó sẽ khiến nhiều bạn "khiếp sợ", tuy nhiên chúng tôi hi vọng với sự nỗ lực của bản thân các bạn sẽ tìm thấy vẻ đẹp trong sáng của nó ẩn đằng sau những kỹ thuật tính toán lão luyện.

Bài 3.5. Cho $\begin{cases} a,b,c \geq 0 \\ a+b+c=3 \end{cases}$. Tìm giá trị lớn nhất của : $S = \dfrac{ab}{3+c^2}+\dfrac{bc}{3+a^2}+\dfrac{ca}{3+b^2}$

Giải

Không mất tính tổng quát giả sử $a \geq b \geq c$.

Đặt $a = s+t$, $b = s-t$ thì biểu thức S trở thành: $f(t) = \dfrac{c(s-t)}{3+(s+t)^2}+\dfrac{c(s+t)}{3+(s-t)^2}+\dfrac{s^2-t^2}{3+c^2}$

Ta khảo sát $f(t)$ trên miền $t \in [0, s-c]$.

Ta có: $f'(t)=\dfrac{-c}{3+(s+t)^2}-\dfrac{2c\left(s^2-t^2\right)}{\left[3+(s+t)^2\right]^2}+\dfrac{c}{3+(s-t)^2}+\dfrac{2c\left(s^2-t^2\right)}{\left[3+(s-t)^2\right]^2}-\dfrac{2t}{3+c^2}$

$=\dfrac{4cst}{uv}+\dfrac{8cst\left(s^2-t^2\right)(u+v)}{u^2v^2}-\dfrac{2t}{3+c^2},\forall t\in(0,s-c)$ với $u=3+(s+t)^2, v=3+(s-t)^2$

Giả sử ta đã chứng minh được $f'(t)<0,\ \forall t\in(0,\ s-c)$ (điều này sẽ được chứng minh sau), khi đó ta có: $f(t)\le f(0)=\dfrac{2cs}{3+s^2}+\dfrac{s^2}{3+c^2}=\dfrac{2s(3-2s)}{3+s^2}+\dfrac{s^2}{3+(3-2s)^2}=g(s)$ (1)

Xét $g(s)$ với $s\in\left[1;\dfrac{3}{2}\right]$. Ta có:

$$g'(s)=\frac{24s-12s^2}{\left[3+(3-2s)^2\right]^2}+\frac{18-24s-6s^2}{\left(3+s^2\right)^2}=\frac{108\left(s^2-3s+4\right)(s-1)^2\left(-s^2-3s+6\right)}{\left[3+(3-2s)^2\right]^2\left(3+s^2\right)^2}$$

Dễ thấy $s^2-3s+4>0$ và $-s^2-3s+6=\left(\dfrac{\sqrt{33}-3}{2}-s\right)\left(s+\dfrac{\sqrt{33}+3}{2}\right)$

nên $g'(s)$ dương trên $(1,\ s_0)$ và âm trên $\left(s_0;\dfrac{3}{2}\right)$ với $s_0=\dfrac{\sqrt{33}-3}{2}=1{,}372281323...$

Vậy $\forall\, s\in\left[1;\dfrac{3}{2}\right]$ ta có: $g(s)\le g(s_0)=\dfrac{11\sqrt{33}-45}{24}$ (2)

Trong (1) và (2), dấu "=" xảy ra đồng thời tại $t=0$ và $s=s_0$, tức là $a=b=s_0$ và $c=3-2s_0$.

Vậy giá trị lớn nhất cần tìm là $\dfrac{11\sqrt{33}-45}{24}=0.757924546...$

đạt được khi $a=b=\dfrac{\sqrt{33}-3}{2}=1{,}372281323...,\ c=6-\sqrt{33}=0.255437353...$

Để kết thúc, ta chứng minh $f'(t)<0,\ \forall t\in(0,\ s-c)$. Ta sẽ chứng minh:

Với $t\in(0,\ s-c)$ thì $\dfrac{4cs}{uv}<\dfrac{1}{3+c^2}$ (3) và $\dfrac{8cs\left(s^2-t^2\right)(u+v)}{u^2v^2}\le\dfrac{1}{3+c^2}$ (4)

Chứng minh (3): Vì $c+2s=1$ và $s>1$ nên $cs<1$.

Hơn nữa $u=3+(s+t)^2>4, v=3+(s-t)^2>3+c^2$ nên ta thu được (3)

Chứng minh (4): Sử dụng bất đẳng thức ***AM – GM*** ta có:

$$u^2v^2=\left[3+(s+t)^2\right]^2\left[3+(s-t)^2\right]^2\ge16\left(s^2-t^2\right)$$

và $2cs(u+v)\left(3+c^2\right)=4cs\left(3+s^2+t^2\right)\left(3+c^2\right)\le\left(\dfrac{4cs+3+s^2+t^2+3+c^2}{3}\right)^3$

Thay $c = 3 - 2s$ vào, lưu ý là $t \le s - c = 3s - 3$, ta có:

$$4cs + 3 + s^2 + t^2 + 3 + c^2 \le 4(3-2s)s + 6 + s^2 + (3s-3)^2 + (3-2s)^2 = 12 + 6(s-1)(s-2) \le 12 \text{su}$$

y ra $2cs(u+v)(3+c^2) < 4^3$.

Vậy: $\dfrac{8cs(s^2-t^2)(u+v)}{u^2v^2} = 4 \cdot \dfrac{s^2-t^2}{u^2v^2} \cdot \dfrac{2cs(u+v)(3+c^2)}{3+c^2} \le 4 \cdot \dfrac{1}{4^4} \cdot \dfrac{4^3}{3+c^2} = \dfrac{1}{3+c^2}$

Từ (3), (4) $\Rightarrow f'(t) < 0$, $\forall t \in (0, s-c)$. Vậy $\text{Max } S = \dfrac{11\sqrt{33}-45}{24} = 0.757924546...$

• ***Nhận xét:*** Cách làm này vẫn có thể áp dụng được cho bài toán:

Bài 3.6. Cho $a, b, c > 0$ và $a + b + c = 3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$S(a,b,c) = \frac{bc}{a^2+k} + \frac{ca}{b^2+k} + \frac{ab}{c^2+k} \text{ với hằng số } k \ge 3.$$

Giải

Tuy nhiên, sau khi đưa được về 1 biến thì với k tổng quát việc khảo sát hàm số là khá phức tạp, mặc dù việc này luôn thực hiện được về mặt nguyên tắc.

Từ bài toán này, chúng ta có thể phát triển thành bài toán sau:

Bài 3.7. Cho $a, b, c > 0$; $a + b + c = 3$ và $S(a,b,c) = \dfrac{bc}{a^2+k} + \dfrac{ca}{b^2+k} + \dfrac{ab}{c^2+k}$

Tìm tất cả k sao cho $S(a,b,c) \le S(1,1,1) = \dfrac{3}{1+k}$

Giải

Trước hết, từ $S(1,1,1) \ge S\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{3}{2}, 0\right)$ suy ra $k \ge 3$. Như nhận xét ở trên, bằng dồn biến ta sẽ quy được về trường hợp $a = b \ge c$ và $S_{\max} = \max\left\{\dfrac{3}{1+k}, S(s_0, s_0, 3-s_0)\right\}$

với s_0 là nghiệm lớn nhất của phương trình $6s^3 + (7k-9)s^2 - 18ks + k^2 + 9k$.

Vậy ta cần tìm tất cả $k \ge 3$ thỏa mãn bất phương trình: $S(s_0, s_0, 3-s_0) \le \dfrac{3}{1+k}$

Từ đó ta tìm được tất cả các giá trị của k là $[3, k_0]$ với $k_0 = 3.2690313$...*(Trong đó k là nghiệm của một phương trình bậc cao)*. Trong các bài toán về dồn biến, chúng ta sẽ thường xuyên gặp tình huống như vậy: sau khi dồn về 1 biến sẽ phải khảo sát hàm số khá phức tạp. Chính vì vậy, đối với các bài toán mà cực trị đạt được phức tạp (đặc biệt là các bài kiểu như tìm hằng số tốt nhất) thì dồn biến gần như là con đường duy nhất.

IV. BẤT ĐẲNG THỨC BA BIẾN VỚI CỰC TRỊ ĐẠT ĐƯỢC TẠI BIÊN

Nếu như trong phần trước chúng ta có thể hiểu "dồn biến" là "đẩy hai biến lại gần nhau" thì trong trường hợp này ta phải hiểu "dồn biến" nghĩa là "đẩy một biến ra biên".

Xét bất đẳng thức $f(x, y, z) \geq 0$ với $x, y, z \geq 0$, ta sẽ chứng minh $f(x, y, z) \geq f(0, s, t)$, trong đó s, t là các đại lượng thích hợp sinh ra từ các biến a, b, c. Thích hợp ở đây chính là việc bộ số $(0,s,t)$ phải thỏa mãn tất cả các điều kiện của (a, b, c), đồng thời hiệu $d = f(x,y,z) - f(0,s,t) \geq 0$ cần đơn giản nhất có thể.

Cuối cùng ta chỉ việc kiểm chứng $f(0,s,t) \geq 0$.

Trước hết, để các bạn làm quen với cách dồn biến "mới mẻ" này, chúng tôi xin trở lại một ví dụ ở phần trước.

Bài 4.1. [Bất đẳng thức Schur] Cho $a, b, c \geq 0$. Chứng minh rằng:

$$a^3+b^3+c^3+3abc \geq a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)$$

Chứng minh

Nhận xét là ngoài điểm $a = b = c$, đẳng thức còn đạt tại $a = b$, $c = 0$ (và các hoán vị).

Do đó, kỹ thuật dồn biến ra biên có khả năng thành công !

Đặt $f(a,b,c) = a^3+b^3+c^3+3abc-a^2(b+c)-b^2(c+a)-c^2(a+b)$

Ta hi vọng sẽ có $f(a, b, c) \geq f(0, a+b, c)$. Xét hiệu:

$$d = f(a, b, c) - f(0, a+b, c) = ab(5c-4a-4b)$$

Như vậy là ta không thể có $d \geq 0$, cho dù có thể sắp tính thứ tự của a, b, c.

Thật đáng tiếc! Tuy nhiên, nếu các bạn dừng lại ở đây thì còn đáng tiếc hơn. Thay vì bỏ dở, ta hãy xem lại vì sao không thể có $d \geq 0$. Nếu tinh ý, các bạn có thể thấy là $f(a, b, c)$ sẽ nhỏ đi khi hai biến tiến lại gần nhau (đó chính là lý do mà ta có thể dồn về hai biến bằng nhau như trong **II.**), còn ở đây khi thay bộ (a, b, c) bởi $(0, a+b, c)$ thì "dường như" các biến càng cách xa nhau. Đó chính là lý do cách dồn biến ở trên thất bại. Từ đó, ta nảy ra ý là thay (a, b, c) bởi $\left(0, b+\frac{a}{2}, c+\frac{a}{2}\right)$ và xét hiệu:

$$d_a = f(a,b,c) - f\left(0, b+\frac{a}{2}, c+\frac{a}{2}\right) = a(a+b-2c)(a+c-2b)$$

Điều thú vị là ta có thể giả sử $d_a \geq 0$. Thật vậy, điều này cũng nhờ việc sắp thứ tự nhưng không phải là giữa các biến a, b, c mà là giữa các hiệu d_a, d_b, d_c (trong đó d_b, d_c là hai hiệu tương tự như d_a). Vì tính đối xứng nên ta có thể giả sử $d_a = \max\{d_a, d_b, d_c\}$.

Khi đó nếu $d_a<0$ thì $0>d_a d_b d_c = abc(b+c-2a)^2(c+a-2b)^2(a+b-2c)^2$ và mâu thuẫn

Vậy $d_a \geq 0$ nên $f(a,b,c) \geq f(0,s,t)$ với $s=b+\frac{a}{2}, t=c+\frac{a}{2}$. Cuối cùng, ta thấy

$f(0,s,t)=t^3+s^3-t^2s-ts^2=(t+s)(t-s)^2\geq 0$ và chứng minh được hoàn tất.

• ***Bình luận:*** Nếu như cách chứng minh dồn về hai biến bằng nhau rất tự nhiên thì cách dồn một biến ra biên là một kết quả thực sự bất ngờ và độc đáo. Hơn nữa bài toán sau đây sẽ khẳng định kỹ thuật dồn biến ra biên là con đường tất yếu.

Bài 4.2. Cho $\begin{cases} a,b,c\geq 0 \\ ab+bc+ca=1 \end{cases}$ (*). Chứng minh rằng: $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\geq\frac{5}{2}$

Chứng minh

Đẳng thức không xảy ra tại tâm, mà tại $a=b=1$, $c=0$ và các hoán vị.

Xét trường hợp riêng $c=0$, cần chứng minh: $A=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{a+b}\geq\frac{5}{2}$, với $ab=1$.

Đặt $s=a+b \Rightarrow s\geq 2\sqrt{ab}=2$. Khi đó $A=s+\frac{1}{s}=\left(\frac{s}{4}+\frac{1}{s}\right)+\frac{3s}{4}\geq 2\sqrt{\frac{s}{4}\cdot\frac{1}{s}}+\frac{3\cdot 2}{4}=\frac{5}{2}$

Vậy bây giờ ta chỉ cần dồn một biến về 0 là hoàn thành chứng minh.

Đặt $f(a,b,c)=\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}$. Ta hy vọng $f(a,b,c)\geq f\left(a+b,\frac{1}{a+b},0\right)$

(chú ý là cách lấy này nhằm đảm bảo điều kiện $ab+bc+ca=1$).

Xét hiệu: $f(a,b,c)-f\left(a+b,\frac{1}{a+b},0\right)=$

$$=\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+\frac{1-ab}{a+b}}+\frac{1}{b+\frac{1-ab}{a+b}}\right)-\left(\frac{1}{a+b}+a+b+\frac{1}{a+b+\frac{1}{a+b}}\right).$$

$$=\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2}-1-\frac{1}{1+(a+b)^2}=\frac{2+a^2+b^2}{(1+a^2)(1+b^2)}-\frac{2+(a+b)^2}{1+(a+b)^2}$$

$$=\frac{\left[2+a^2+b^2\right]\left[1+(a+b)^2\right]-(1+a^2)(1+b^2)\left[2+(a+b)^2\right]}{(1+a^2)(1+b^2)\left[1+(a+b)^2\right]}.$$

$$=\frac{2ab-a^2b^2\left[2+(a+b)^2\right]}{(1+a^2)(1+b^2)\left[1+(a+b)^2\right]}=\frac{ab\left[2(1-ab)-ab(a+b)^2\right]}{(1+a^2)(1+b^2)\left[1+(a+b)^2\right]}$$

Ta thấy $d\geq 0$ nếu $2(1-ab)\geq ab(a+b)^2$. Từ đó, ta giả sử $c=\max\{a,b,c\}$,

khi đó: $2(1-ab)=2c(a+b)\geq(a+b)^2\geq ab(a+b)^2 \Rightarrow d\geq 0 \Rightarrow$ (đpcm)

Nhận xét: Bài toán 4.2 là một bài toán hay nhưng chỉ là một hệ quả đơn giản của bất đẳng thức rất nổi tiếng Iran TST 1996. Thật vậy, với giả thiết $ab+bc+ca=1$ thì từ kết quả của bất đẳng thức Iran TST 1996 ta có ngay:

$$\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)^2=\frac{1}{(a+b)^2}+\frac{1}{(b+c)^2}+\frac{1}{(c+a)^2}+\frac{4(a+b+c)}{(a+b)(b+c)(c+a)}\ge\frac{9}{4}+4=\frac{25}{4}$$

vì $a+b+c=(a+b+c)(ab+bc+ca)\ge(a+b)(b+c)(c+a)$.

Từ nhận xét trên, ta nhớ lại là trong **II.**, bất đẳng thức Iran 1996 đã được giải bằng kỹ thuật dồn về hai biến bằng nhau. Một câu hỏi tự nhiên là: Bất đẳng thức Iran 1996 có thể giải bằng cách dồn 1 biến ra biên không? Câu hỏi này sẽ được trả lời sau khi chúng ta xem xét bài toán sau đây:

Bài 4.3. Cho $a, b, c\ge 0$, $ab+bc+ca=1$ (*). Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{\sqrt{a+b}}+\frac{1}{\sqrt{b+c}}+\frac{1}{\sqrt{c+a}}\ge 2+\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Chứng minh

Ban đầu ta cũng xét trường hợp riêng $c=0$, cần chứng minh:

$A=\dfrac{1}{\sqrt{a+b}}+\dfrac{1}{\sqrt{b}}+\dfrac{1}{\sqrt{a}}\ge 2+\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, với $ab=1$

Điều này hoàn toàn đơn giản xin nhường cho bạn đọc.

Tiếp theo ta sẽ chứng minh $f(a,b,c)\ge f\left(0,a+b,\dfrac{1}{a+b}\right)$.

Để ý rằng biểu thức $f(a, b, c)$ trong bài toán 4.3 khá phức tạp nên dồn biến bằng cách xét hiệu trực tiếp là rất khó khăn. Nhưng may mắn rằng $f(a, b, c)$ lại có thể biểu diễn về các biến $x=a+b$ và c như sau:

$$f(a,b,c)=\frac{1}{\sqrt{a+b}}+\frac{1}{\sqrt{b+c}}+\frac{1}{\sqrt{c+a}}=\frac{1}{\sqrt{a+b}}+\frac{\sqrt{(c+a)}+\sqrt{(b+c)}}{\sqrt{(b+c)(c+a)}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a+b}}+\frac{\sqrt{2c+a+b+2\sqrt{c^2+1}}}{\sqrt{c^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{2c+x+2\sqrt{c^2+1}}}{\sqrt{c^2+1}}=g(c)$$

Ta có: $g'(c)=\dfrac{1-cx-c^2-c\sqrt{c^2+1}}{\sqrt{(c^2+1)^3(2c+x+2\sqrt{c^2+1})}}\le 0$.

Do đó, $g(c)$ nghịch biến. Chú ý rằng: $cx=ca+cb\le ca+cb+ab=1\Leftrightarrow c\le\dfrac{1}{x}$.

Do đó: $g(c)\ge g\left(\dfrac{1}{x}\right)=\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{\dfrac{x}{x^2+1}}\Rightarrow f(a,b,c)\ge f\left(0,a+b,\dfrac{1}{a+b}\right)$

Phép chứng minh hoàn tất. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=0, b=c=1$ và các hoán vị.

Nhận xét:

• Kỹ thuật đẩy biến ra biên ở trên có một điều rất đáng chú ý là tuy ý đồ là dồn hai biến bằng nhau hoặc dồn một biến về 0 nhưng biên mà chúng ta sử dụng với biến lại là $\left(\frac{4-x^2}{4x} \le c \le \frac{1}{x}, x = a+b\right)$. Ý tưởng này xuất phát từ sự tương ứng của bộ hai biến $(x = a+b, c)$ và bộ ba biến (a, b, c).

• Thủ thuật biến đổi biểu thức với a, b, c về biểu thức với $a+b, c$ là một kỹ thuật rất tinh tế. Các bạn hãy chú ý rằng, một bất đẳng thức có điều kiện ba biến số cũng tương đương với một bất đẳng thức hai biến số. Và kỹ thuật biến đổi trên đã giúp chúng ta sử dụng một cách triệt để nhất điều kiện khi đưa bất đẳng thức về hai biến. Từ ý tưởng đó, chúng ta có một cách chứng minh "bất ngờ" với bất đẳng thức Iran 1996.

Với điều kiện $ab+bc+ca=1$. Đặt $x = a+b$. Ta có:

$\frac{1}{(a+b)^2}+\frac{1}{(b+c)^2}+\frac{1}{(c+a)^2} = \frac{1}{x^2}+\frac{x^2+2c^2+4cx-2}{(c^2+1)^2} = g(c)$. Bất đẳng thức lại được quy về 2biến.

Đạo hàm hàm $g(c)$ ta có: $g'(c) = -\frac{4\left[cx^2+(3c^2-1)x+c^3-3c\right]}{(c^2+1)^3}$

Nhìn vào biểu thức trên, ta thấy việc đánh giá ngay $g'(c) \le 0$ là không thể.

Do vậy chúng ta sẽ phân ra hai trường hợp:

Trường hợp 1: $c \ge 1$. Khi đó: $c \ge x \ge 1$

Xét điều kiện: $1 = ab+bc+ca \le \frac{x^2}{4}+cx \Leftrightarrow x^2 \ge 4-4cx$. Do đó:

$$cx^2+(3c^2-1)x+c^3-3c \ge c(4-cx)+(3c^2-1)x+c^3-3c = c^3+c-c^2x-x \ge 0$$

$\Leftrightarrow g'(c) \le 0$. Từ đó: $g(c) \le g\left(\frac{1}{x}\right) = f\left(0, a+b, \frac{1}{a+b}\right)$.

Trường hợp 2: $c \le 1$.Theo trên ta có: $x^2 \ge 4-4cx \Leftrightarrow c \ge \frac{4-x^2}{4x}$.

Bây giờ, chúng ta sẽ tiếp tục đạo hàm đến cấp 2:

$$g''(c) = \frac{4\left[(5c^2-1)x^2+12c(c^2-1)x+3c^4-18c^2+3\right]}{(c^2+1)^3}$$

Ta sẽ chứng minh: $g''(c) \le 0 \Leftrightarrow h(x) = (5c^2-1)x^2+12c(c^2-1)x+3c^4-18c^2+3 \le 0$

Vì $h(x)$ là tam thức bậc 2 với hệ số dương nên: $h(x) \le \max\left\{h(0), h\left(\frac{1}{c}\right)\right\}$.

Mà: $h(0) = 3c^4-18c^2+3 \le 0$; $h\left(\frac{1}{c}\right) = 3c^4-6c^2-\frac{1}{c^2}-4 \le 0$. Do vậy $h(x) \le 0 \Leftrightarrow g''(c) \le 0$

Suy ra: $g(c)\le \max\left\{g\left(\frac{1}{x}\right), g\left(\frac{4-x^2}{4x}\right)\right\} \Leftrightarrow f(a,b,c)\le \max\left\{f\left(0, a+b, \frac{1}{a+b}\right), f(t,t,c)\right\}$

Vậy ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức với 2 biến bằng nhau hoặc một biến bằng 0.

Trường hợp 2 biến bằng nhau đã được chứng minh ở trên.

Trong trường hợp còn lại, ta giả sử $c = 0$. Bài toán trở thành:

Cho $ab = 1$. Chứng minh rằng: $\frac{1}{(a+b)^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{a^2}\ge\frac{9}{4} \Leftrightarrow ab(a-b)^2(8a^2+8b^2+15)\ge 0$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

• Với các bài toán trên, chúng tôi muốn bạn đọc có một cảm giác dễ dàng đối với kỹ thuật dồn biến về biên. Tuy nhiên, trong các bài này thì kỹ thuật dồn hai biến bằng nhau vẫn phát huy tác dụng, do đó không khỏi khó khăn trong việc thuyết phục bạn đọc về sức mạnh của kỹ thuật dồn biến ra biên. Vì thế với các bài toán sau đây, các bạn sẽ thấy kỹ thuật dồn về hai biến bằng nhau hoàn toàn bế tắc, đơn giản vì đẳng thức đạt được khi các biến đôi một khác nhau.

Bài 4.4. Cho $a,b,c\ge 0$. Chứng minh rằng: $\frac{a}{\sqrt{a+b}}+\frac{b}{\sqrt{b+c}}+\frac{c}{\sqrt{c+a}}\le\frac{5}{4}\sqrt{a+b+c}$ (1)

Chứng minh

Trước khi tấn công bài này, ta cần xem dấu bằng xảy ra trong trường hợp nào.

Do $a = b = c$ không thỏa mãn nên một cách tự nhiên ta nghĩ đến trường hợp biên là $c = 0$, khi đó bất đẳng thức (1) trở thành $\frac{a}{\sqrt{a+b}}+\sqrt{b}\le\frac{5}{4}\sqrt{a+b}$ (2)

Chuẩn hóa $a + b = 1$. Ta có (1) $\Leftrightarrow 1-b+\sqrt{b}\le\frac{5}{4}\Leftrightarrow\left(\sqrt{b}-\frac{1}{2}\right)^2\ge 0$ (đúng)

Vậy đẳng thức xảy ra khi $a = 3b > 0$, $c = 0$ (và các hoán vị).

Do dấu bằng xảy ra khi cả ba biến rời nhau nên không thể thực hiện phương pháp dồn về hai biến bằng nhau. Ta sẽ thực hiện theo phương pháp dồn một biến về biên.

Không mất tổng quát có thể giả sử $a = \max\{a, b, c\}$. Chuẩn hóa cho $a+b+c=1$.

Đặt $t=\frac{a+c}{2}$ và $s=\frac{a-c}{2}$, thì $a = t + s$, $c = t - s$, $b = 1 - 2t$.

Khi đó bất đẳng thức (1) $\Leftrightarrow f(s)=\frac{t+s}{\sqrt{s+1-t}}+\frac{1-2t}{\sqrt{1-t-s}}+\frac{t-s}{\sqrt{2t}}\le\frac{5}{4}$ (3)

Ta sẽ chứng minh $f(s)\le\max\{f(0), f(t)\}$ với $s\in[0, t]$.

Ta có: $f'(s)=\frac{1}{\sqrt{s+1-t}}-\frac{t+s}{2(s+1-t)^{\frac{3}{2}}}+\frac{1-2t}{2(1-t-s)^{\frac{3}{2}}}-\frac{1}{\sqrt{2t}}$

Vì chưa xác định được dấu của $f'(s)$ nên ta đạo hàm tiếp

$f''(s) = -\frac{1}{(s+1-t)^{\frac{3}{2}}} + \frac{3(t+s)}{4(s+1-t)^{\frac{5}{2}}} + \frac{3(1-2t)}{4(1-t-s)^{\frac{5}{2}}}$. Sử dụng $b = 1-2t \geq 0$ suy ra

$$f'''(s) = \frac{9}{4(s+1-t)^{\frac{5}{2}}} - \frac{15(t+s)}{8(s+1-t)^{\frac{7}{2}}} + \frac{15(1-2t)}{8(1-t-s)^{\frac{7}{2}}} = \frac{18+3s-33t}{8(s+1-t)^{\frac{7}{2}}} + \frac{15(1-2t)}{8(1-t-s)^{\frac{7}{2}}} > 0$$

Do $f'''(s) > 0\ \forall s \in [0;\ t]$ nên theo định lí ***Rolle*** thì phương trình $f'(s) = 0$ có tối đa hai nghiệm trên $[0;\ t]$. Mặt khác dễ dàng chứng minh $f'(0) \leq 0$ và $f'(t) \geq 0$, nên $f'(s)$ chỉ có thể đổi dấu tối đa một lần trên $(0,\ t)$, và hơn nữa $f'(s)$ chỉ có thể có một trong các dạng sau: $f'(s) > 0,\ \forall s \in (0;t)$ hoặc $f'(s) < 0,\ \forall s \in (0,\ t)$ hoặc $f'(s)$ có dạng $-0+$ trên $(0,\ t)$. Tuy nhiên trong cả 3 trường hợp thì $f(s)$ cũng chỉ có thể đạt cực đại tại biên. Từ đó suy ra $f(s) \leq \max\{f(0), f(t)\}\ \forall s \in [0;t]$.

Dễ dàng chứng minh $f(0) \leq \frac{5}{4}$ và $f(t) \leq \frac{5}{4}$ nên $f(s) \leq \max\{f(0), f(t)\} \leq \frac{5}{4}$

• ***Chú ý:*** Bằng cách tương tự ta có thể chứng minh bài toán tổng quát sau:

"Cho $a,\ b,\ c \geq 0$ và $k \notin (0,\ 1)$. Khi đó ta có bất đẳng thức:

$$\frac{a}{(a+b)^k} + \frac{b}{(b+c)^k} + \frac{c}{(c+a)^k} \leq C_k(a+b+c)^{1-k} \quad \text{với } C_k = 1+k-k^2\text{"}.$$

• Trong trường hợp ba biến, thông thường chúng ta cố định một biến và thay thế hai biến còn lại. Tuy nhiên, đôi khi chúng ta có thể làm khác hơn bằng cách chỉ thay thế một biến hoặc thay thế cả ba biến. Ví dụ đơn giản sau đây minh họa cho những cách dồn biến đặc sắc đó.

Bài 4.5. Cho $a,\ b,\ c \geq 0$, chứng minh rằng:

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)^2 \geq 4(a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a)$$

Chứng minh

Đặt $f(a,b,c) = \left(a^2+b^2+c^2\right)^2 - 4(a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a)$. Không giảm tổng quát, ta có thể giả sử $c = \min\{a,b,c\}$. Nếu $a \geq b \geq c$ thì hiển nhiên $f(a,b,c) \geq 0$, do đó ta chỉ cần xét khi $b \geq a \geq c$. Ta có:

$$f(a,b,c) - f(a,b,0) = \left(a^2+b^2+c^2\right) - \left(a^2+b^2\right)^2 + 4(b-a)c\left(a^2+ab+b^2-3c^2\right) \geq 0$$

Cuối cùng, vì $f(a,b,0) = (a^2+b^2)^2 - 4(b^2-a^2)ab = (a^2+2ab-b^2)^2 \geq 0$ nên bài toán chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi $(a,b,c) = \left((\sqrt{3}-1)t, t, 0\right)$, $t \geq 0$ và các hoán vị.

• Bài toán 4.3 là một ví dụ về sự cần thiết trong việc sử dụng phương pháp dồn biến ra biên đối với bất đẳng thức hoán vị. Tuy nhiên với bất đẳng thức đối xứng thì sao? Liệu có thể xảy ra dấu bằng khi không có hai biến bằng nhau.

Chúng ta xét ví dụ sau đây để làm rõ vấn đề này.

Bài 4.6. Cho $a,\ b,\ c \geq 0,\ a+b+c = 3$. Chứng minh rằng:

$$\left(a^3+b^3+c^3\right)\left(a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3\right) \leq 36(ab+bc+ca)$$

Chứng minh

Không mất tổng quát, ta có thể giả sử $a \ge b \ge c$.

Đặt $f(a,b,c) = 36(ab+bc+ca) - (a^3+b^3+c^3)(a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3)$

$\Rightarrow f(a,b+c,0) = 36a(b+c) - \left[a^3+(b+c)^3\right]a^3(b+c)^3$

Ta sẽ chứng minh $f(a,b,c) \ge f(a,b+c,0)$. Thật vậy, ta có:

$$\begin{cases} 36(ab+bc+ca) = 36a(b+c) + 36bc \ge 36a(b+c) \\ (a^3+b^3+c^3)(a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3) \le \left[a^3+(b+c)^3\right]a^3(b+c)^3 \end{cases} \Rightarrow f(a,b,c) \ge f(a,b+c,0)$$

Phần còn lại ta chỉ cần chứng minh bài toán trong trường hợp $c = 0$, hay

$$36ab \ge a^3b^3(a^3+b^3) \Leftrightarrow 36 \ge a^2b^2(a^3+b^3) \quad (1)$$

Đặt $t = ab$ thì $(1) \Leftrightarrow t^2(27-9t) \le 36 \Leftrightarrow \frac{t^3}{2} + \frac{t^3}{2} + 4 \ge 3t^2$ đúng theo ***AM – GM***.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow c = 0; a+b = 3$ và $ab = 2 \Leftrightarrow a = 2,\ b = 1,\ c = 0$ và các hoán vị.

Trên đây là các bài toán ba biến, bây giờ chúng ta sẽ xét một bài toán n biến.

Bài 4.7. Cho $x_1, x_2, \dots, x_n \ge 0$ thỏa mãn $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum\limits_{1 \le i \le j \le n} x_i x_j (x_i + x_j)$

Giải

Xét: $f(x_1, \dots, x_i + x_j, \dots, 0, \dots x_n) - f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots x_n) = 2x_i x_j \left[2 - 3(x_i + x_j)\right]$

Do đó nếu $3(x_i + x_j) \le 2$ thì $f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots x_n) \le f(x_1, \dots, x_i + x_j, \dots, 0, \dots x_n)$

Xét tất cả các bộ số $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ sao cho $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ đạt max f. Trong đó ta chọn ra bộ số $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ sao cho số phần tử dương trong bộ số đó là ít nhất (luôn có thể chọn được vì số số dương là hữu hạn)

Giả sử $a_1 \ge a_2 \ge \dots \ge a_k > 0$ và $a_{k+1} = \dots = a_n = 0$

Nếu $k \ge 3$ thì $1 = a_1 + a_2 + \dots + a_n \ge \frac{a_2 + a_3}{2} + a_2 + a_3 = \frac{3}{2}(a_2 + a_3) \Leftrightarrow 2 \ge 3(a_2 + a_3)$

Do đó: $f(a_1, a_2, \dots, a_n) \le f(a_1, a_2 + a_3, 0, \dots, a_n) \Rightarrow f(a_1, a_2 + a_3, 0, \dots, a_n) = \max f$

$\Rightarrow$ Vô lý (do bộ số $(a_1, a_2 + a_3, 0, \dots, a_n)$ có số số dương ít hơn bộ số $(a_1, a_2, \dots, a_n)$)

Vậy $k \le 2$. Khi đó $\max f(a_1, a_2, \dots, a_n) = \max a_1 a_2 (a_1 + a_2)$ với $a_1 + a_2 = 1$.

Mà $a_1 a_2 (a_1 + a_2) = a_1(1 - a_1) \le \frac{1}{4}$ (***AM – GM***). Do đó $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \le \frac{1}{4}$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: $x_1 = x_2 = \frac{1}{2}, x_3 = \dots = x_n = 0$.

V. ĐỊNH LÝ SMV – BẤT ĐẲNG THỨC BỐN BIẾN

Trước tiên, chúng ta xem xét ví dụ "kinh điển" sau đây:

Bài 5.1. [IMOSL, Việt Nam đề nghị] Cho $a, b, c, d \geq 0$, $a + b + c + d = 1$.

Chứng minh rằng: $abc + bcd + cda + dab \leq \frac{1}{27} + \frac{176}{27}abcd$ (1)

Chứng minh

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = d = \frac{1}{4}$ hoặc $a = b = c = \frac{1}{3}, d = 0$ (và các hoán vị).

Do đó, những đánh giá thông thường rất dễ rơi vào bế tắc.

Đặt $f(a, b, c, d) = abc + bcd + cda + dab - kabcd$ với $k = \frac{176}{27}$. Ta có:

$f(a, b, c, d) = ab(c + d - kcd) + cd(a + b)$

Từ đó, ta hi vọng có $f(a, b, c, d) \leq f(t, t, c, d)$ với $t = \frac{a+b}{2}$. Vì $0 \leq ab \leq t^2$ nên để có điều này ta cần $c + d - kcd \geq 0$. Trong trường hợp ngược lại, nghĩa là nếu $c + d - kcd < 0$ thì đánh giá trực tiếp $f(a, b, c, d)$ ta có:

$$f(a, b, c, d) = ab(c + d - kcd) + cd(a + b) \leq cd(a + b) \leq \left[\frac{c + d + (a + b)}{3}\right]^3 = \frac{1}{27}$$

Vậy ta có thể giả sử là luôn có $f(a,b,c,d) \leq f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, c, d\right)$. Điều này có nghĩa là ta đã thực hiện được việc dồn biến như trên mà không cần thêm bất cứ giả thiết nào cho 2 biến a, b. Do đó nhờ tính đối xứng ta có thể dồn 2 biến bất kì trong 4 biến về bằng nhau. Từ đó, đặt thêm $s = \frac{c+d}{2}$ ta có: $f(a,b,c,d) \leq f(t,t,c,d) \leq f(t,t,s,s) = f(t,s,t,s)$

$\leq f\left(\frac{t+s}{2}, \frac{t+s}{2}, t, s\right) \leq f\left(\frac{t+s}{2}, \frac{t+s}{2}, \frac{t+s}{2}, \frac{t+s}{2}\right) = f\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{27} \Rightarrow$ (đpcm)

• ***Nhận xét:*** Trong lời giải trên, thực chất là cứ mỗi bước ta lại phân ra hai trường hợp: có một trường hợp thì dồn biến được và một trường hợp mà bất đẳng thức hiển nhiên đúng. Do đó, lời giải không khỏi có phần rối rắm. Bạn đọc nên trình bày lại bằng cách phản chứng (giả sử có (a_0, b_0, c_0, d_0) sao cho $f(a_0, b_0, c_0, d_0) > \frac{1}{27}$) sẽ gọn gàng và chặt chẽ hơn. Một cách trình bày khác là gộp cả hai trường hợp lại:

$f(a,b,c,d) \leq \max\left\{\frac{1}{27}, f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, c, d\right)\right\}$ (1)

Việc chứng minh bài toán là khá dễ dàng nhờ kết quả (1), tuy nhiên thông thường thì (1) rất khó có được. Tiếp theo ta xét bài toán:

Bài 5.2. Cho $a_1, a_2, ..., a_n \geq 0$ thỏa mãn $a_1 + a_2 + ... + a_n = n$. Chứng minh rằng:

$$(n-1)\left(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2\right) + na_1a_2...a_n \geq n^2$$

Chứng minh

Với $n = 2$ và $n = 3$ thì bài toán quá đơn giản. Bây giờ ta sẽ chứng minh bài toán với $n = 4$ hay chứng minh với $a, b, c, d \geq 0$ thỏa mãn $a + b + c + d = 4$ thì:

$3\left(a^2 + b^2 + c^2 + d^2\right) + 4abcd \geq 16$

Chứng minh

Giả sử $a \leq b \leq c \leq d$. Đặt $f(a,b,c,d) = 3\left(a^2 + b^2 + c^2 + d^2\right) + 4abcd - 16$.

Xét hiệu: $f(a,b,c,d) - f(a,b,\dfrac{c+d}{2},\dfrac{c+d}{2}) = \left(\dfrac{3}{2} - ab\right)(c-d)^2$

Vì $a \leq b \leq c \leq d$ nên $ab \leq \sqrt{abcd} \leq \left(\dfrac{a+b+c+d}{4}\right)^2 = 1$. Do đó: $f(a,b,c,d) \geq f(a,b,\dfrac{c+d}{2},\dfrac{c+d}{2})$

Thế $c + d = 4 - a - b$ ta cần chứng minh:

$$f(a,b,\frac{c+d}{2},\frac{c+d}{2}) = 3\left(a^2 + b^2 + \frac{(4-a-b)^2}{2}\right) + (4-a-b)^2 ab - 16 \geq 0$$

Đặt $x = \dfrac{a+b}{2}, y = ab$ thì bất đẳng thức trên $\Leftrightarrow h(y) = (2x^2 - 8x + 5)y + (3x-2)^2 \geq 0$

Nếu $2x^2 - 8x + 5 \geq 0$ thì bất đẳng thức đúng. Nếu $2x^2 - 8x + 5 \leq 0$ thì do $y \leq x^2$ nên:

$h(y) = (2x^2 - 8x + 5)x^2 + (3x-2)^2 = 2(x-1)^2(x^2 - 2x + 2) \geq 0$ (đpcm)

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = d = 1$ hoặc $a = 0, b = c = d = \dfrac{4}{3}$ và các hoán vị.

Nhận xét: Lời giải của hai bài toán 5.1 và 5.2 với $n = 4$ đều rất đẹp và đơn giản, tuy nhiên, chúng ta có thể thấy những kỹ thuật sử dụng trong lời giải không mang tính đường lối, khó có thể áp dụng cho các bài toán bốn biến khác và là bất khả thi khi chứng minh với n biến. Vì vậy chúng ta cần chứng minh phương pháp tổng quát hơn, và phương pháp đó sẽ được giới thiệu ngay sau đây:

1. Phương pháp dồn biến mạnh [SMV – Strongly Mixing Variables]

Định lý [SMV]

Cho: • $D \in \mathbb{R}^n, D = \left\{x = (x_1, x_2, ..., x_n) \mid x_i \geq \alpha, \sum x_i \geq \alpha, \sum x_i = ns = const\right\}$ và $s_0 = (s, s, ..., s) \in D$

• Phép biến đổi $T: D \to D$ như sau: với mỗi phần tử $a = (a_1, a_2, ..., a_n) \in D, a \neq s_0$,

ta chọn ra 2 chỉ số $i \neq j$ nào đó (tùy theo hàm f bên dưới) sao cho $a_i \neq a_j$, rồi thay a_i, a_j bởi trung bình cộng của chúng.

• $f: D \to \mathbb{R}$ là hàm số liên tục thỏa mãn: $f(a) \geq f(T(a)), \forall a \in D$.

Khi đó: $f(a) \ge f(s_0), \forall a \in D$ (Phép chứng minh định lý sẽ được giới thiệu ở phần sau).

Bây giờ với tư tưởng của định lý SMV, chúng ta xét bài toán 5.2 với $n \ge 4$

Đặt $f(a_1, a_2, ..., a_n) = (n-1)\left(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2\right) + na_1a_2...a_n - n^2$ và giả sử rằng $a_1 \le a_2 \le ... \le a_n$

Xét hiệu: $f(a_1, a_2, ..., a_n) - f\left(a_1, \frac{a_2 + a_n}{2}, a_3, ..., a_{n-1}, \frac{a_2 + a_n}{2}\right) = (a_2 - a_n)^2\left(\frac{n-1}{2} - \frac{n}{4}a_1a_3...a_{n-1}\right)$

Do đó, nếu $\frac{2(n-1)}{n} \ge a_1a_3...a_{n-1}$ thì $f(a_1, a_2, ..., a_n) \ge f\left(a_1, \frac{a_2 + a_n}{2}, a_3, ..., a_{n-1}, \frac{a_2 + a_n}{2}\right)$.

Mà ta có: $n = a_1 + a_2 + ... + a_n \ge 2a_1 + \frac{n-2}{n-3}(a_3 + ... + a_{n-1})$

$\ge (n-2) \cdot \sqrt[n-2]{2a_1a_3...a_{n-1}\left(\frac{n-2}{n-3}\right)^{n-3}} \Leftrightarrow \frac{n^{n-2}(n-3)^{n-3}}{2(n-2)^{2n-5}} \ge a_1a_3...a_{n-1}$

Ta sẽ chứng minh: $\frac{2(n-1)}{n} \ge \frac{n^{n-2}(n-3)^{n-3}}{2(n-2)^{2n-5}} \Leftrightarrow 4(n-1)(n-2)^{2n-5} \ge n^{n-1}.(n-3)^{n-3}$

Ta có: $(n-2)^{2n-4} = \left(\frac{n-3+n-1}{2}\right)^{2(n-2)} \ge (n-3)^{n-2}(n-1)^{n-2}$ ***(AM – GM)***

Do vậy, ta chỉ cần chứng minh: $4(n-3)(n-1)^{n-1} \ge n^{n-1}(n-2) \Leftrightarrow 4\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1} - 1 + \frac{1}{n-3} \ge 0$

Mà điều này hiển nhiên đúng do: $4\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1} \ge 4\left(1 - \frac{1}{4}\right)^{4-1} = \frac{27}{16} > 1$

Vậy $f(a_1, a_2, ..., a_n) \ge f\left(a_1, \frac{a_2 + a_n}{2}, a_3, ..., a_n\right)$. Theo định lý ***SMV*** ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức trong trường hợp $a_1 = n - (n-1)x, a_2 = a_3 = ...a_n = x$ với $0 \le x \le \frac{n}{n-1}$.

Khi đó bất đẳng thức trở thành:

$$(n-1)\left[(n-(n-1)x)^2 + (n-1)x^2\right] + nx^{n-1}(n-(n-1)x) - n^2 \ge 0$$

$$\Leftrightarrow (n-1)x^n - nx^{n-1} - (n-1)^2x^2 + 2(n-1)^2x + 2n - n^2 \le 0$$

Đặt $g(x) = (n-1)x^n - nx^{n-1} - (n-1)^2x^2 + 2(n-1)^2x + 2n - n^2 \le 0$. Ta có:

$$g'(x) = n(n-1)x^{n-1} - n(n-1)x^{n-2} - 2(n-1)^2x + 2(n-1)^2 = (n-1)(x-1)\left[nx^{n-2} - 2(n-1)\right]$$

Do đó $g'(x)$ có hai nghiệm là $x = 1$ và $x = \sqrt[n-2]{\frac{2(n-1)}{n}} \ge 1$.

Từ đó lập bảng biến thiên ta có: $g(x) \le \max\left\{g(1), g\left(\frac{n}{n-1}\right)\right\}$

Mặt khác dễ thấy: $g(0) = g\left(\frac{n}{n-1}\right) = 0$ nên ta có $g(x) \le 0$. Bất đẳng thức được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ $a_1 = a_2 = ... = a_n = 1$ hoặc $a_1 = 0, a_2 = ... = a_n = \frac{n}{n-1}$.

Chắc hẳn, qua ví dụ trên, các bạn đã phần nào hình dung được sức mạnh và nét tinh tế của ***SMV***. Tiếp theo, chúng ta sẽ quay lại Bài 5.1 với việc áp dụng ***SMV***.

Không mất tính tổng quát của bài toán ta giả sử $a \le b \le c \le d$.

Xét $f(a,b,c,d) = abc + bcd + cda + dab - \frac{176}{27}abcd = ac(b+d) + bd\left(a + c - \frac{176}{27}ac\right)$

Từ giả thiết suy ra:

$$a+c \le \frac{1}{2}(a+b+c+d) = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{c} \ge \frac{4}{a+c} \ge 8 \ge \frac{176}{27} \Rightarrow f(a,b,c,d) \le f\left(a, \frac{b+d}{2}, c, \frac{b+d}{2}\right)$$

Theo định lý ***SMV***, ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức với $a = 1-3t, b = c = d = t$.

Thế $a = 1-3t$ vào ta cần chứng minh:

$$3at^2 + t^3 \le \frac{1}{27} + \frac{176}{27}at^3 \Leftrightarrow (1-3t)(4t-1)^2(11t+1) \ge 0$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ $a = b = c = d = \frac{1}{4}$ hoặc $a = b = c = \frac{1}{3}, d = 0$ cùng các hoán vị.

Qua việc sử dụng ***SMV*** với hai bài toán, một bài n biến và một bài 4 biến, các bạn có thể thấy rõ một điều, bước xét điều kiện để có thể dồn biến được của bài toán 4 biến là rất đơn giản, trong khi với n biến lại rất phức tạp. Đó chính là lý do mà dồn biến với định lý ***SMV*** là lựa chọn "hoàn hảo" cho bài toán bốn biến (tất nhiên phải trong điều kiện có thể dồn biến), và ngược lại bất đẳng thức bốn biến cũng chính là ứng dụng lớn nhất của ***SMV***. Chúng ta sẽ quay lại bài 5.2 để khẳng định điều này.

Dựa vào lời giải, ta thấy điều kiện để $f(a,b,c,d) \ge f\left(a, b, \frac{c+d}{2}, \frac{c+d}{2}\right)$ là $ab \le \frac{3}{2}$.

Và trong lời giải đó, khi giả sử $a \le b \le c \le d$ thì ta có ngay $ab \le 1$. Tuy nhiên, nếu chú ý hơn, các bạn có thể thấy rằng $ac \ge ab$ và $ac \le 1$. Do vậy, ta có thể 2 biến b và d và từ đó áp dụng định lý ***SMV*** ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức trong trường hợp ba biến bằng nhau. Khái quát lên, chúng ta có thể thấy rằng mọi bài toán bốn biến đối xứng nếu ta có: $f(a,b,c,d) \ge f(a,b,\frac{c+d}{2},\frac{c+d}{2})$ với $a \le b \le c \le d$ thì ta cũng có $f(a,b,c,d) \ge f(a,\frac{b+d}{2},c,\frac{b+d}{2})$, do vậy chỉ cần chứng minh bài toán với ba biến bằng nhau. Tính chất này không phải lúc nào cũng có với n biến, hoặc nếu có thì chứng minh không phải điều đơn giản. Vì vậy, tiếp theo chúng tôi sẽ chỉ nêu ứng dụng của ***SMV*** trong các bài toán bốn biến.

Bài 5.3. Cho $a, b, c, d \ge 0$ và $a+b+c+d = 4$.

Chứng minh rằng: $abc + bcd + cda + dab + (abc)^2 + (bcd)^2 + (cda)^2 + (dab)^2 \le 8$

Chứng minh

Đặt $f(a, b, c, d) = abc + bcd + cda + dab + (abc)^2 + (bcd)^2 + (cda)^2 + (dab)^2$.

Giả sử $a \ge b \ge c \ge d$. Xét hiệu: $f\left(\frac{a+c}{2}, b, \frac{a+c}{2}, d\right) - f(a,b,c,d)$

$$= \left(\frac{a-c}{2}\right)^2 \left\{(b+d) + \left[\left(\frac{a+c}{2}\right)^2 + ac\right](b^2+d^2) - 2b^2d^2\right\}$$

$$\ge \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 (b+d+4abcd-2b^2d^2) \ge 0 \text{ (do } abcd \ge b^2d^2\text{)}$$

Vì vậy: $f(a,b,c,d) \le f\left(\frac{a+c}{2}, b, \frac{a+c}{2}, d\right)$. Theo định lý ***SMV*** ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức với $a=b=c=x, d=4-3x,\ 0 \le x \le \frac{4}{3}$:

$$x^3 + 3x^2(3-3x) + 3x^4(4-3x)^2 + x^6 \le 8 \Leftrightarrow (x-1)^2(28x^4 - 16x^3 - 12x^2 - 8) \le 0$$

Dễ dàng chứng minh: $28x^4 - 16x^3 - 12x^2 - 8 \le 0$ với $0 \le x \le \frac{4}{3}$.

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=d=1$.

Bài 5.4. Cho $a,b,c,d \ge 0$ thỏa mãn $a+b+c+d=1$.

Chứng minh rằng: $a^4+b^4+c^4+d^4+\frac{148}{27}abcd \ge \frac{1}{27}$

Chứng minh

Giả sử $a \ge b \ge c \ge d$ và đặt $f(a,b,c,d) = a^4+b^4+c^4+d^4+\frac{148}{27}abcd - \frac{1}{27}$

Xét hiệu $d = f(a,b,c,d) - f\left(\frac{a+c}{2}, b, \frac{a+c}{2}, d\right) = \left[\frac{7}{8}(a-c)^2 + 3ac - \frac{37}{27}bd\right](a-b)^2$

Vì $ac \ge bd \Rightarrow d \ge 0 \Rightarrow f(a,b,c,d) \ge f\left(\frac{a+c}{2}, b, \frac{a+c}{2}, d\right)$.

Do đó, theo định lý ***SMV***, ta chỉ cần xét trường hợp $a=b=c=\frac{1-d}{3}$. Khi đó:

$$f(a,b,c,d) = \frac{(1-d)^4}{27} + d^4 + \frac{148d(1-d)^3}{729} - \frac{1}{27} = \frac{2d(4d-1)^2(19d+20)}{729} \ge 0$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=d=\frac{1}{4}$ hoặc $a=b=c=\frac{1}{3}, d=0$ và các hoán vị.

Bài 5.5. Cho $a, b, c, d \ge 0$ và $a+b+c+d=4$. Chứng minh rằng:

$$(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)(1+d^2) \ge (1+a)(1+b)(1+c)(1+d)$$

Chứng minh

Đặt $f(a,b,c,d) = (1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)(1+d^2) - (1+a)(1+b)(1+c)(1+d)$

và giả sử $a \le b \le c \le d$. Xét hiệu: $P = f(a,b,c,d) \ge f\left(\frac{a+c}{2}, b, \frac{a+c}{2}, d\right)$.

Ta sẽ chứng minh $P \ge 0$. Thật vậy, dễ thấy $a+c \le 2$ nên

$$(1+a^2)(1+c^2)-\left[1+\left(\frac{a+c}{2}\right)^2\right]^2=(a-c)^2\left(\frac{1}{2}-\frac{(a+c)^2+4ac}{16}\right)\ge 0$$

Mà theo **AM – GM** thì: $(1+a)(1+c)\le\left(1+\frac{a+c}{2}\right)^2$.

Do đó: $f(a,b,c,d)\ge f\left(\frac{a+c}{2},b,\frac{a+c}{2},d\right)$

Vậy ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức với $a=b=c=x, c=4-3x$:

$f(x,x,x,4-3x)=(1+x^2)^3\left[1+(4-3x)^2\right]-(1+x)^3(5-3x)$

$=(x^6+3x^4+3x^2+1)(9x^2-24x+17)-(x^3+3x^2+3x+1)(5-3x)$

$=9x^8-24x^7+44x^6-72x^5+81x^4-68x^3+54x^2-36x+12$

$=(9x^6-6x^5+23x^4-20x^3+18x^2-12x+12)(x-1)^2$

$=\left[x^4(3x-1)^2+2x^4+5x^2(2x-1)^2+10x^2+3(x-2)^2\right](x-1)^2\ge 0$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=d=1$

Bài 5.6 [Bất đẳng thức Tukervic] Cho $a,b,c,d\ge 0$. Chứng minh rằng

$$a^4+b^4+c^4+d^4+2abcd\ge a^2b^2+b^2c^2+c^2d^2+d^2a^2+a^2c^2+b^2d^2 \quad (1)$$

Chứng minh

Giả sử $a\ge b\ge c\ge d$. Xét $f(a,b,c,d)=LS(1)-RS(1)$

$=a^4+b^4+c^4+d^4+2abcd-a^2c^2-b^2d^2-(a^2+c^2)(b^2+d^2)$

$\Rightarrow f(a,b,c,d)-f(\sqrt{ac},b,\sqrt{ac},d)=(a-c)^2((a+c)^2-b^2-d^2)\ge 0$

Do đó theo định lí ***S.M.V***, ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức khi $a=b=c=t$.

Khi đó bất đẳng thức $\Leftrightarrow 3t^4+d^4+2t^3d\ge 3t^4+3t^2d^2 \Leftrightarrow d^4+t^3d+t^3d\ge 3t^2d^2$

Hiển nhiên đúng theo bất đẳng thức **AM – GM**.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=d$ hoặc $a=b=c, d=0$ và các hoán vị

Bài 5.7. Cho $x,y,z,t\ge 0$ thỏa mãn $x+y+z+t=4$.

Chứng minh rằng: $(1+3x)(1+3y)(1+3z)(1+3t)\le 125+131xyzt$

Chứng minh

Đặt: $f(x,y,z,t)=(1+3x)(1+3y)(1+3z)(1+3t)-131xyzt$

Không mất tính tổng quát ta giả sử $x\ge y\ge z\ge t$. Khi đó:

$$f(x,y,z,t)-f\left(\frac{x+z}{2},y,\frac{x+z}{2},t\right)=\frac{(x-z)^2}{4}(131yt-9(1+3y)(1+3t))$$

Vì $x\ge y\ge z\ge t$ nên $y+t\le 2$. Do đó dễ thấy: $9(1+3y)(1+3t)\ge 131yt$

Vậy ta có $f(x,y,z,t)\le f\left(\frac{x+z}{2},y,\frac{x+z}{2},t\right)$. Theo định lý ***S.M.V*** thì bất đẳng thức sẽ được chứng minh xong nếu $x=y=z=a\ge 1\ge t=4-3a$:

$(1+3a)^3(1+3(4-3a))\le 125+131a^3(4-3a)\Leftrightarrow (a-1)^2(3a-4)(50a+28)\le 0$

Bất đẳng thức này hiển nhiên đúng.

Đẳng thức xảy ra khi $x=y=z=t=1$ hoặc $x=y=z=\frac{4}{3},t=0$ và các hoán vị.

• Đến đây chúng ta tạm thời kết thúc phần dồn biến cho bất đẳng thức "cụ thể" (có ba hoặc bốn biến) để bước sang phần dồn biến cho bất đẳng thức n biến. Như chúng ta sẽ thấy, đây là một lĩnh vực khó hơn hẳn. Tuy nhiên các kỹ thuật chính đều đặt nền tảng thông qua việc khảo sát bất đẳng thức "cụ thể", mà đặc biệt là những tư tưởng manh nha khi khảo sát bất đẳng thức bốn biến.

VI. DỒN BIẾN BẰNG HÀM LỒI

Hàm lồi là một công cụ cơ bản để dồn biến các bất đẳng thức "dạng cổ điển".
Để bạn đọc tiện theo dõi chúng tôi xin nhắc lại các kiến thức cơ bản sau đây:

1. Định nghĩa: Một hàm số f: $[a, b]\to\mathbb{R}$ được gọi là lồi nếu:

$$f(tx+(1-ty))\le tf(x)+(1-t)f(y),\ \forall x,y\in[a,b],\forall t\in[0,1]$$

2. Tính chất:

2.1. Giả sử f là hàm có đạo hàm đến cấp 2 trên khoảng (a, b), khi đó f lồi trên $[a, b]$ khi và chỉ khi $f''(x)\ge 0,\ \forall x\in(a,b)$.

2.2. Nếu hàm f lồi trên [a, b] thì f liên tục trên [a, b]. Ngược lại, nếu f liên tục trên [a, b] thì f lồi trên $[a, b]$ $\Leftrightarrow f\left(\frac{x+y}{2}\right)\le\frac{f(x)+f(y)}{2}$, $\forall\ x, y\in (a, b)$.

2.3. Bất đẳng thức Jensen: Giả sử f là hàm số lồi trên $[a, b]$. Khi đó ta có

(i) $f\left(\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}\right)\le\frac{f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_n)}{n}\quad \forall x_1,x_2,...,x_n\in[a;b]$

(ii) Với x_i là n số thuộc đoạn $[a, b]$ và λ_i là n số không âm có tổng bằng 1 ta có:

$$f(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+...+\lambda_nx_n)\le\lambda_1f(x_1)+\lambda_2f(x_2)+...+\lambda_nf(x_n)$$

Các bạn có thể thấy tính chất 2.2 và mở rộng ra là bất đẳng thức ***Jensen*** có ứng dụng trực tiếp vào phương pháp dồn biến đặc biệt là các bất đẳng thức cổ điển. Một số các bài toán khó với các dạng toán này là sự kết hợp giữa phương pháp hàm lồi và các phương pháp khác trên các miền xác định khác nhau. Ta xét ví dụ minh họa tiêu biểu sau đây:

Bài 6.1. [Vô địch Ba Lan 1992] Cho x, y, z thỏa mãn $x+y+z=1$.

Chứng minh rằng: $\dfrac{x}{1+x^2}+\dfrac{y}{1+y^2}+\dfrac{z}{1+z^2}\le\dfrac{9}{10}$ (1)

Chứng minh

Xét $f(t)=\dfrac{t}{1+t^2}$, khi đó (1) $\Leftrightarrow f(x)+f(y)+f(z)\le 3f\left(\dfrac{x+y+z}{3}\right)$.

Ta sẽ chứng minh f lõm hay $-f$ lồi. Ta có: $-f''(t)=\dfrac{2t(3-t^2)}{(1+t^2)^3}$

nên $-f''(t)\ge 0,\ \forall t\in[0,\sqrt{3}]$. Vậy nếu $x,y,z\in[0,\sqrt{3}]$ thì bài toán được giải quyết.

Trong trường hợp còn lại thì chắc chắn ta sẽ có dấu bất đẳng thức thực sự. Do vậy cứ việc chia thành nhiều trường hợp con để xét. Để đơn giản, ta giả sử $x\ge y\ge z$.

Do $x+y+z=1$ và x, y, z không đồng thời $\in[0,1]$ nên $z<0$, suy ra $f(z)<0$.

Nếu $y<\dfrac{1}{2}$ thì $\dfrac{x}{1+x^2}+\dfrac{y}{1+y^2}+\dfrac{z}{1+z^2}<\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{5}+0=\dfrac{9}{10}$ nên ta chỉ cần xét khi $y\ge\dfrac{1}{2}$

Nếu $0\ge z\ge-\dfrac{1}{2}$ thì cùng với $y\ge\dfrac{1}{2}$ ta có:

$$\frac{x}{1+x^2}+\frac{y}{1+y^2}+\frac{z}{1+z^2}\le\frac{x}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}+\frac{y}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}+\frac{4}{5}z=\frac{4}{5}<\frac{9}{10},$$

do đó, ta chỉ cần xét khi $z<-\dfrac{1}{2}$

Nếu $-\dfrac{1}{2}>z\ge-3$ thì: $\dfrac{x}{1+x^2}+\dfrac{y}{1+y^2}+\dfrac{z}{1+z^2}\le\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{10}=\dfrac{7}{10}<\dfrac{9}{10}$

Nếu $z<-3$ thì: $2x\ge x+y=1-z\ge 4$ nên $x\ge 2$ và do đó:

$$\frac{x}{1+x^2}+\frac{y}{1+y^2}+\frac{z}{1+z^2}<\frac{2}{5}+\frac{1}{2}+0=\frac{9}{10}\text{ (đpcm).}$$

Nhận xét: Ngoài phương pháp dồn ba biến chúng ta còn có thể giải bài toán bằng phương pháp dồn theo hai biến bằng nhau. Thật vậy, nếu có hai trong ba biến x, y, z thuộc đoạn $[0,\sqrt{3}]$ thì sử dụng hàm lồi ta dồn được hai biến này về bằng nhau, khi đó bài toán đưa về một biến số và dễ dàng được chứng minh. Việc xét các trường hợp còn lại là hoàn toàn đơn giản. Mặc dù dồn biến bằng hàm lồi là một công cụ tốt, nhưng điểm yếu của nó là chỉ áp dụng được cho các bất đẳng thức với các biến số nằm trong các biểu thức độc lập nhau (để có thể viết thành dạng $f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)$). Nhưng đây là điều không phải luôn có trong bất đẳng thức .Tuy nhiên chúng tôi sẽ giới thiệu phương pháp dồn biến cho dạng tổng quát $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ mà không có tính chất trên. Một điều cũng cần chú ý: mục đích của dồn biến bằng hàm lồi là để dồn các biến về bằng nhau. Và điều bất ngờ là kỹ thuật dồn biến ra biên cũng có thể thực hiện thông qua hàm lồi. Các bạn có thể thấy ngay điều đó qua kết quả sau đây:

Định lý: Cho $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ là một hàm lồi. Khi đó: $f(x)\le \operatorname{Max}\{f(a),f(b)\},\forall x\in[a,b]$

Chứng minh: Vì f liên tục nên f đạt giá trị lớn nhất tại $x_0\in[a,b]$.

Xét khi $|x_0-a|\le|x_0-b|\Rightarrow x_1=2x_0-a\in[a,b]$.

Theo định nghĩa hàm lồi ta có: $f(a)+f(x_1)\ge 2f\left(\dfrac{a+x_1}{2}\right)=2f(x_0)$

suy ra $f(a)=f(x_0)$. Với $|x_0-b|\le|x_0-a|$ thì chứng minh tương tự.

Bài 6.2. [USA TST 2004] Cho $a\ge b\ge c\ge 0$. Chứng minh rằng:

$$2\left(\sqrt{a}-\sqrt{c}\right)^2\ge a+b+c-3\cdot\sqrt[3]{abc}$$

Chứng minh

Đặt $f(b)=a+b+c-3\cdot\sqrt[3]{abc}-2\left(\sqrt{a}-\sqrt{c}\right)^2$

Ta có $f''(b)=\dfrac{2\cdot\sqrt[3]{abc}}{3b^2}>0$ nên $f(b)\le\max\{f(a),f(c)\}$. Mặt khác:

$f(a)=2a+c-3\cdot\sqrt[3]{a^2c}-2\left(\sqrt{a}-\sqrt{c}\right)^2=-\left(c+3\cdot\sqrt[3]{a^2c}-4\sqrt{ac}\right)\le 0$ (theo ***AM − GM***)

$f(c)=a+2c-3\cdot\sqrt[3]{ac^2}-2\left(\sqrt{a}-\sqrt{c}\right)^2=-\left(a+3\cdot\sqrt[3]{ac^2}-4\sqrt{ac}\right)\le 0$ (theo ***AM − GM***)

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$

Bài toán trên có thể tổng quát lên n biến với cách giải tương tự như sau:

Bài 6.3. Cho $a_1\ge a_2\ge\ldots\ge a_n\ge 0$. Chứng minh rằng:

$$(n-1)\left(\sqrt{a_1}-\sqrt{a_n}\right)^2\ge a_1+a_2+\ldots+a_n-n\cdot\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}$$

Tiếp theo chúng tôi sẽ dẫn ra đây 2 bài toán mà chúng thực sự là các bài toán khó cho dù giải bằng biến đổi đại số hay quy nạp.

Bài 6.4. Cho $0<p<q$ và n số thực $x_i\in[p,q]$. Chứng minh rằng:

$$\left(x_1+x_2+\ldots+x_n\right)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}\right)\le n^2+\left[\frac{n^2}{4}\right]\frac{(p-q)^2}{pq}$$

trong đó kí hiệu $[x]$ là chỉ phần nguyên của x

Chứng minh

Từ giả thiết $x_i\in[p,q]$, ta dễ dàng đoán rằng: giá trị lớn nhất sẽ đạt được khi $x_i\in\{p,q\}\ \forall i$.

Khi đó, giả sử trong n số x_i có k số p và $n-k$ số q thì biểu thức bên vế trái bằng:

$$\left[kp+(n-k)q\right]\left(\frac{k}{p}+\frac{n-k}{q}\right)=k^2+(n-k)^2+k(n-k)\left(\frac{p}{q}+\frac{q}{p}\right)$$

$$=n^2+k(n-k)\frac{(p-q)^2}{pq}=n^2+\frac{1}{4}\left[n^2-(n-2k)^2\right]$$

Vì k nguyên nên $n^2-(n-2k)^2\le n^2$ (n chẵn) và $n^2-(n-2k)^2\le n^2-1$ (n lẻ).

Từ đó, ta thu được bất đẳng thức ban đầu và chỉ ra luôn trường hợp dấu bằng xảy ra.

Đến đây, ta chợt nhận ra: Mấu chốt của vấn đề chỉ là nhận xét: "Giá trị lớn nhất sẽ đạt được khi $x_i = p$ hoặc $x_i = q$ với mọi i". Và nhận xét này có thể chứng minh rất dễ. Thật vậy, với mọi i, ta xem vế trái là một hàm theo x_i và kí hiệu là $f(x_i)$, ta sẽ chứng tỏ:
$f(x_i) \le \max\{f(p), f(q)\}$, và dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x_i \in \{p, q\}$.

Ta có: $f(x) = Ax + \dfrac{B}{x} + C$. Có thể sử dụng đạo hàm để ra ngay kết quả và chỉ ra luôn dấu bằng xảy ra khi $x_i \in \{p, q\}$. Song ở đây chúng tôi trình bày một cách sơ cấp hơn.

Để ý: $f(x_i) - f(p) = (x_i - p)\left(A - \dfrac{B}{x_i p}\right)$; $f(x_i) - f(q) = (x_i - q)\left(A - \dfrac{B}{x_i q}\right)$

Từ đó nếu $f(x_i) > \max\{f(p), f(q)\}$ thì $x_i \notin \{p, q\}$ và $A - \dfrac{B}{x_i p} > 0, A - \dfrac{B}{x_i q} < 0$

$\Rightarrow \dfrac{B}{x_i p} < A < \dfrac{B}{x_i q}$ mâu thuẫn $p < q$. Vậy $f(x_i) \le \max\{f(p), f(q)\}$.

Xét trường hợp dấu bằng xảy ra: Giả sử $f(x_i) = \max\{f(p), f(q)\}$ mà $x_i \notin \{p, q\}$.

Nếu $f(x_i) = f(p)$ thì $A = \dfrac{B}{x_i p} > \dfrac{B}{x_i q}$, khi đó $f(x_i) - f(q) < 0$ (mâu thuẫn).

Nếu $f(x_i) = f(q)$ thì $A = \dfrac{B}{x_i q} < \dfrac{B}{x_i p}$, khi đó $f(x_i) - f(p) < 0$ (mâu thuẫn).

Vậy $f(x_i) = \max\{f(p), f(q)\}$ tương đương với $x_i \in \{p, q\}$

Nhận xét: (Bài toán mở rộng) Cho $a_i \in [a, A], b_i \in [b, B]$ với $0 < a \le A$ và $0 < b \le B$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $T = \dfrac{(a_1^2 + ... + a_n^2)(b_1^2 + ... + b_n^2)}{a_1 b_1 + ... + a_n b_n}$

Bài toán trên mang ý nghĩa là tìm chặn trên của bất đẳng thức ***Buniakowski***

và nhà toán học ***Polya*** đã cho một chặn trên của T là: $\dfrac{1}{4}\left(\sqrt{\dfrac{AB}{ab}} + \sqrt{\dfrac{ab}{AB}}\right)^2$.

Một điều rất tự nhiên được đặt ra là chặn trên của bất đẳng thức ***AM – GM*** là gì? Chúng ta sẽ được biết ngay kết quả với bài toán sau đây:

Bài 6.5. Cho $0 < p < q$, và n số thực $x_i \in [p, q]$.

Chứng minh rằng: $T = \dfrac{x_1}{x_2} + \dfrac{x_2}{x_3} + ... + \dfrac{x_n}{x_1} \le n + \left[\dfrac{n}{2}\right]\dfrac{(p-q)^2}{pq}$

Chứng minh

Theo nhận xét trên về hàm $f(x) = Ax + \dfrac{B}{x} + C$ ta có:

Với mọi i, thay x_i bởi p hoặc x_i bởi q thì luôn có ít nhất một trường hợp làm tăng giá trị của T và khi T không tăng lên nữa thì các giá trị $x_1, x_2, ..., x_n \in \{p, q\}$.

Sau hữu hạn phép thay thế trên ta có $x_1, x_2, ..., x_n \in \{p, q\}$. Nếu $x_1 = x_2 = ... = x_n = q$ thì $T = n$ chỉ là giá trị nhỏ nhất của T, nên để tìm cận trên của T ta chỉ cần xét khi tồn tại $x_i = p$. Do T là biểu thức hoán vị vòng quanh của $x_1, x_2, ..., x_n$ nên không mất tính tổng quát có thể giả sử $x_1 = p$. Khi đó cho dù $x_3 = p$ hay $x_3 = q$ ta thay $x_2 = q$ thì T vẫn không giảm. Sau khi thay $x_2 = q$ ta lại thay $x_3 = p$ thì T vẫn không giảm...

Cứ như vậy ta thay xen kẽ p, q cho các x_i với qui tắc thay $x_{2k} = q; x_{2k+1} = p$ cho đến x_n thì T vẫn không giảm. Kết thúc quá trình thay thế, ta nhận được:

$$T = \frac{n}{2}\left(\frac{p}{q} + \frac{q}{p}\right) \text{ (n chẵn) và } T = \frac{n-1}{2}\left(\frac{p}{q} + \frac{q}{p}\right) + 1 \text{ (n lẻ) hay } T = n + \left[\frac{n}{2}\right]\frac{(p-q)^2}{pq}, \forall n$$

Đẳng thức xảy ra khi $x_i \in \{p, q\}$ và xen kẽ kể từ x_1 tới x_n (không kể vòng x_n, x_1).

Bình luận: Như vậy, chúng ta thấy ý tưởng dồn biến đã xuất hiện từ rất sớm ngay trong cách tiếp cận cổ điển. Mặc dù bất đẳng thức cổ điển không phải là một công cụ mạnh nhưng dựa vào đó ta mới có thể ***"đứng trên vai những người khổng lồ"***. Chúng ta đã gặp lại hai kỹ thuật dồn biến quan trọng ở các mục trước là: Dồn biến về tâm và dồn biến ra biên. Đặc biệt trong trường hợp cực trị đạt được tại tâm thì hàm lồi còn cho ta một kiểu dồn biến nữa rất thú vị mà chúng ta sẽ tìm hiểu ở mục sau.

VII. DỒN BIẾN KHÔNG XÁC ĐỊNH – UMV [UNDERFINE MIXING VARIABLES]

Phương pháp dồn biến với hàm lồi mà chúng ta vừa xét có một tầm ảnh hưởng khá lớn, tuy nhiên, yếu điểm của nó là không giải quyết được những bất đẳng thức mà hàm số của các biến không ở dạng tường minh, hay việc tính đạo hàm là quá phức tạp. Và phương pháp dồn biến không xác định ***UMV*** sẽ giúp tháo gỡ yếu điểm đó.

Định lý UMV:

Cho $D \subset \{x = (x_1, x_2, ...x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geq 0, \forall i = 1, ..., n\}$. D đóng và bị chặn. Gọi Λ là tập hợp các phần tử trong D có t thành phần bằng 0 và $n - t$ thành phần bằng nhau $(t \geq 0)$.

- Xét hai phép biến đổi $T_1, T_2 : D \to D$ như sau: Với mỗi phần tử $a = (a_1, a_2, ...a_n) \in D \setminus \Lambda$, chọn ra hai chỉ số $i \neq j$ sao cho $a_i = \min\{a_t > 0, t = 1, ..., n\}$ và $a_j = \max\{a_1, a_2, ..., a_n\}$, sau đó thay a_i, a_j bởi $\alpha, \beta \in (a_i, a_j)$ (ứng với T_1) và $\alpha' < a_i < a_j < \beta'$ (ứng với T_2).
- Giả sử $f : D \to \mathbb{R}$ liên tục thỏa mãn: $f(a) \geq \min\{f(T_1(a)), f(T_2(a))\}, \forall a \in D$

Khi đó ta có $f(x)\ge\min_{y\in\Lambda}\{f(y)\},\forall x\in D$

Nội dung của định lý có vẻ khá trừu tượng, tuy nhiên thực chất lại rất "giản dị".

Chúng ta bắt đầu xem xét ***UMV*** bằng bài toán.

Bài 7.1. Cho $a,b,c\ge 0$. Chứng minh rằng:

$$a^3+b^3+c^3+9abc+4(a+b+c)\ge 8(ab+bc+ca)\quad (1)$$

Chứng minh

Đặt $f(a,b,c)=a^3+b^3+c^3+9abc+4(a+b+c)-8(ab+bc+ca)$

Đầu tiên, chúng ta thử dồn biến hai biến bằng nhau, xét hiệu:

$$f(a,b,c)-f\left(a,\frac{b+c}{2},\frac{b+c}{2}\right)=(3b+3c-9a+8)\frac{(b-c)^2}{4}$$

Rõ ràng chúng ta chưa thể có kết luận gì. Chúng ta tiếp tục thử dồn một biến về 0:

$$f(a,b,c)-f(a,b+c,0)=-(3b+3c-9a+8)bc$$

Rõ ràng, biểu thức $(3b+3c-9a+8)$ hoặc âm, hoặc không âm, hay là ta có:

$$f(a,b,c)\ge\min\left\{f\left(a,\frac{b+c}{2},\frac{b+c}{2}\right);f(a,b+c,0)\right\}$$

Áp dụng định lý ***U.M.V***: $f(a,b,c)\ge\min\{f(x,x,x);f(y,y,0);f(z,0,0)\}$

với $x=\frac{a+b+c}{3};y=\frac{a+b+c}{2};z=a+b+c$

Mặt khác: $f(z,0,0)=z^3+4z\ge 0$; $f(x,x,x)=12x^3-24x^2+12x=12x(x-1)^2\ge 0$

$f(y,y,0)=2y^3-8y^2+8y=2y(y-2)^2\ge 0\Rightarrow f(a,b,c)\ge 0$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow(a,b,c)=(0,0,0);(1,1,1);(2,2,0)$.

Nhận xét: Các bạn có thể nhận thấy rõ ràng ý nghĩa của ***UMV*** qua bài toán trên, khi mà việc hai kiểu dồn biến thông thường là dồn hai biến bằng nhau và đẩy biến ra biên không đạt hiệu quả. Nhưng sự liên hệ giữa hai kỹ thuật đó đã giúp chúng ta sử dụng ***UMV*** một cách hết sức hiệu quả.

Bài 7.2. Cho $a,b,c,d\ge 0$ thỏa mãn $a+b+c+d=4$.

Chứng minh rằng: $2(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d})\ge abc+bcd+cda+dab+4$

Chứng minh

Đặt $2(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d})-abc-bcd-cda-dab-4$. Xét các hiệu:

• $f(a,b,c,d)-f\left(\frac{a+b}{2},\frac{a+b}{2},c,d\right)=2\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{2(a+b)}\right)+(c+d)\left(\frac{(a+b)^2}{4}-ab\right)$

$$=\frac{(a-b)^2}{4}\left[c+d-\frac{8}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{2(a+b)}\right)}\right]=\frac{(a-b)^2}{4}(c+d-X)$$

• $f(a,b,c,d)-f(a+b,0,c,d)$

$$=2\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{a+b}\right)-(c+d)=ab\left[\frac{4}{\sqrt{ab}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{a+b}\right)}-c-d\right]=ab(Y-c-d)$$

Dễ dàng chứng minh: $\frac{4}{\sqrt{ab}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{a+b}\right)}\ge\frac{8}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{2(a+b)}\right)}$

hay $Y\ge X$ nên $\left[\begin{array}{l}c+d\le Y\\ c+d\ge X\end{array}\right.\Rightarrow f(a,b,c)\ge\min\left\{f\left(\frac{a+b}{2},\frac{a+b}{2},c,d\right);f(a+b,0,c,d)\right\}$

Áp dụng định lý ***U.M.V*** ta có:

$$f(a,b,c,d)\ge\min\left\{f(1,1,1,1);f\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3},\frac{4}{3},0\right);f(2,2,0,0),f(4,0,0,0)\right\}=0$$

Đăng thức xảy ra $\Leftrightarrow(a,b,c,d)=(1,1,1,1);(4,0,0,0)$

Bây giờ chúng ta sẽ trở lại Bài toán 5.2 với việc áp dụng ***UMV***.

Bài 7.3. Cho $a_1,a_2,...,a_n\ge 0$ thỏa mãn $a_1+a_2+...+a_n=n$. Chứng minh rằng:

$$(n-1)\left(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2\right)+na_1a_2...a_n\ge n^2$$

Chứng minh

Đặt: $f(a_1,a_2,\dots,a_n)=(n-1)\left(a_1^2+a_2^2+\dots+a_n^2\right)+na_1a_2\dots a_n$. Ta có:

$$f(a_1,a_2,\dots,a_n)-f\left(\frac{a_1+a_2}{2},\frac{a_1+a_2}{2},a_3,\dots,a_n\right)=\frac{n(a_1-a_2)^2}{4}\left(\frac{2(n-1)}{n}-a_3a_4\dots a_n\right)$$

$$f(a_1,a_2,\dots,a_n)-f(0,a_1+a_2,a_3,\dots,a_n)=-na_1a_2\left(\frac{2(n-1)}{n}-a_3a_4\dots a_n\right)$$

$$\Rightarrow f(a_1,a_2,\dots,a_n)\ge\min\left\{f\left(\frac{a_1+a_2}{2},\frac{a_1+a_2}{2},a_3,\dots,a_n\right),f(0,a_1+a_2,a_3,\dots,a_n)\right\}$$

Theo định lý ***UMV***, ta chỉ cần chứng minh bài toán khi có ít nhất một trong n số $a_1,a_2,\dots,a_n$ bằng 0 hoặc tất cả các số đều bằng 1. Trong các trường hợp này bất đăng thức đều dễ dàng chứng minh.

Nhận xét: Với việc áp dụng ***UMV*** lần lượt với các bài toán ba biến, bốn biến, n biến, chúng tôi muốn đề cập đến một đặc trưng của ***UMV*** là không hề phụ thuộc vào số biến của bất đẳng thức. Đặc điểm này có được vì dồn biến ***UMV*** sử dụng với hai biến bất kỳ. Đây là một điểm rất quan trọng, khiến cho rất nhiều bài toán tổng quát phức tạp trở nên đơn giản với ***UMV***. Sau đây là một trong những ví dụ điển hình nhất.

Bài 7.4. Cho $a_1, a_2, ..., a_n \ge 0$ thỏa mãn $a_1 + a_2 + ... + a_n = n$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của $S = a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 + a_1 a_2 ... a_n \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n} \right)$

Giải

Đặt $f(a_1, a_2, ...a_n) = a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 + a_1 a_2 ... a_n \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n} \right)$

Xét các hiệu:

• $f(a_1, a_2, ...a_n) - f(0, a_1 + a_2, a_3, ..., a_n) = -a_1 a_2 \left[2 - a_3 a_4 .....a_n \left(\frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4} + ... + \frac{1}{a_n} \right) \right]$ (*)

• $f(a_1, a_2, ...a_n) - f\left(\frac{a_1 + a_2}{2}, \frac{a_1 + a_2}{2}, a_3, ..., a_n \right)$

$$= \frac{(a_1 - a_2)^2}{4} \left[2 - a_3 a_4 .....a_n \left(\frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4} + ... + \frac{1}{a_n} \right) \right] \quad (**)$$

$$\Rightarrow f(a_1, a_2, ...a_n) \ge \min \left\{ f(0, a_1 + a_2, a_3, ..., a_n), f\left(\frac{a_1 + a_2}{2}, \frac{a_1 + a_2}{2}, a_3, ..., a_n \right) \right\}$$

Do vậy, áp dụng định lý ***UMV*** ta có: $f(a_1, a_2, ...a_n) \ge \underset{k=1,n}{\text{Min}}\, f\left(\frac{n}{k}, \frac{n}{k}, ..., \frac{n}{k}, 0, 0 ... 0 \right)$

Hay giá trị nhỏ nhất của biểu thức là: $\min \left\{ 2n, \frac{n^2}{n-1} + \left(\frac{n}{n-1} \right)^{n-1}, \frac{n^2}{n-2} \right\}$

VIII. DỒN BIẾN VỀ GIÁ TRỊ TRUNG BÌNH

Cho đến bây giờ, trong phương pháp dồn biến của chúng ta, số lần thực hiện thao tác dồn biến luôn là hữu hạn, nhờ đó lời giải là rõ ràng và hoàn toàn sơ cấp. Đây là một điều rất tốt mà chúng tôi muốn duy trì tiếp tục trong mục này. Bây giờ, chúng tôi giới thiệu thêm một cách dồn biến nữa dành cho hàm lồi. Ta sẽ gọi đây là kỹ thuật dồn biến về giá trị trung bình. Chúng ta sẽ mở đầu bằng hai định lí sau:

Định lý 1: Cho f là hàm lồi $[a, b] \to \mathbb{R}$. Ta có: $f(a) + f(b) \ge f(x) + f(a + b - x), \forall x \in [a, b]$

Chứng minh

Vì $x \in [a, b]$ nên $x = ta + (1 - t)b$ với $t \in [0, 1]$. Khi đó: $a + b - x = (1 - t)a + tb$.

Áp dụng định nghĩa hàm lồi, ta có: $f(x) + f(a + b - x) = f[ta + (1 - t)b] + f[(1 - t)a + tb]$

$$\le [tf(a) + (1 - t)f(b)] + [(1 - t)f(a) + tf(b)] = f(a) + f(b)$$

Định lý 2: (bất đẳng thức ***Jensen***) Cho f là hàm số lồi $[a, b] \to \mathbb{R}$. Khi đó:

$\forall x_1, x_2, ..., x_n \in [a, b]$ ta có: $f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_n) \ge n f\left(\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} \right) = n f(T)$

Chứng minh

Ta cho thực hiện thuật toán sau:

• ***Bước 1:*** Nếu $x_1 = x_2 = ... = x_n = T = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$ (*) thì bất đẳng thức đúng.

• ***Bước 2:*** Nếu điều kiện (*) không thỏa mãn thì không mất tính tổng quát có thể giả sử $x_1 > T > x_2$.

Khi đó thay bộ $(x_1, x_2, ...x_n)$ bởi bộ $(T, x_1 + x_2 - T, ..., x_n)$ thì nhận được bộ mới cũng có trung bình cộng là T, và theo định lí 1 thì giá trị của hàm f được tăng lên. Mặt khác, mỗi lần thực hiện bước 2 thì số biến bằng T tăng lên ít nhất là 1, do đó sau nhiều nhất là $(n-1)$ lần thực hiện bước 2, ta sẽ nhận được các số thỏa mãn (*). Chú ý là trong quá trình thay thế thì biểu thức f luôn được tăng lên, do vậy ta có đpcm.

Bình luận: Trong các bất đẳng thức cho n biến số ($n \ge 4$) thì kỹ thuật dồn biến về giá trị trung bình ưu việt hơn hẳn so với dồn biến về tâm. Thật vậy, nếu dồn biến về tâm thì giả sử ta dồn được hai biến về bằng nhau thì cũng chưa thu được gì đáng kể, và trong trường hợp đó thì sau hữu hạn lần dồn biến vẫn không thể đưa được về trường hợp một biến (chứ chưa nói là đưa được về trường hợp các biến bằng nhau). Tuy nhiên, nếu sử dụng kỹ thuật dồn biến về giá trị trung bình (hoặc dồn biến ra biên) thì tình hình lại khác: sau mỗi lần dồn biến thì số lượng biến có giá trị cố định tăng lên (là giá trị trung bình hoặc giá trị tại biên), do đó chỉ cần hữu hạn lần dồn biến ta sẽ đưa được tất cả các biến về các giá trị cố định và bài toán xem như giải quyết xong.

Trong mục này, chúng tôi tiếp tục giới thiệu hai bài toán khác, mà trong đó ý tưởng dồn biến về giá trị trung bình đã cho lời giải bất ngờ.

Bài 8.1. Cho $a_1, a_2, ...a_n > 0$ và $a_1 a_2 ... a_n = 1$. Chứng minh rằng:

Với $k = 4(n-1)$ ta luôn có: $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n} + \frac{k}{a_1 + a_2 + ... + a_n} \ge n + \frac{k}{n}$ (1)

Chứng minh

Với $n = 1$, $n = 2$ thì bài toán đơn giản, nên dưới đây ta xét khi $n \ge 3$.

Trước hết, ta khảo sát các trường hợp có thể dồn biến và rút ra:

Mệnh đề 1: Đặt $f(a_1, a_2, ...a_n) = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n} + \frac{k}{a_1 + a_2 + ... + a_n}$. Khi đó ta có:

(*i*) Nếu $a_1 \le x \le a_2$ và $a_1 a_2 \le 1$ thì $f(a_1, a_2, ...a_n) \ge f\left(x, \frac{a_1 a_2}{x}, a_3, ..., a_n\right)$

(*ii*) Nếu $(1-a_1)(1-a_2)\left[ka_1a_2-\sum_{i=1}^{n}a_i\left(\sum_{i=3}^{n}a_i+a_1a_2+1\right)\right]\ge 0$ thì

$$f(a_1,a_2,...a_n)\ge f(1,a_1a_2,a_3,...,a_n)$$

(*iii*) Nếu $a_1,a_2\ge 1\ge a_3$ thì: $f(a_1,a_2,...a_n)\ge \min\{f(1,a_1a_2,a_3,...,a_n),f(1,a_2,a_1a_3,a_1a_i,...,a_n)\}$

Chứng minh

(*i*) Ta có:

$$f(a_1,a_2,...a_n)-f\left(x,\frac{a_1a_2}{x},a_3,...,a_n\right)=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}-\frac{1}{x}-\frac{x}{a_1a_2}+\frac{k}{A+a_1+a_2}-\frac{k}{A+x+\frac{a_1a_2}{x}}$$

$$=\frac{(x-a_1)(x-a_2)\left[(A+a_1+a_2)\left(A+x+\frac{a_1a_2}{x}\right)-ka_1a_2\right]}{xa_1a_2(A+a_1+a_2)\left(A+x+\frac{a_1a_2}{x}\right)}\text{ trong đó } A=\sum_{i=3}^{n}a_i$$

Theo *AM – GM*: $(A+a_1+a_2)\left(A+x+\frac{a_1a_2}{x}\right)\ge n^2\ge 4(n-1)=k\ge ka_1a_2\Rightarrow$ (đpcm).

(*ii*) Cũng từ đẳng thức ở trên cho $x=1$ ta có: $f(a_1,a_2,...a_n)-f(1,a_1a_2,a_3,...,a_n)=$

$$=\frac{(1-a_1)(1-a_2)\left[ka_1a_2-(A+a_1+a_2)(A+a_1a_2+1)\right]}{a_1a_2(A+a_1+a_2)(A+a_1a_2+1)}\text{ và ta có đpcm.}$$

(*iii*) Xét hai trường hợp: $(1-a_1)(1-a_2)\left[ka_1a_2-\sum_{i=1}^{n}a_i\left(\sum_{i=3}^{n}a_i+a_1a_2+1\right)\right]\ge 0$

TH 1: Nếu $ka_1a_2\ge\sum_{i=1}^{n}a_i\left(\sum_{i=3}^{n}a_i+a_1a_2+1\right)$ thì theo (*ii*): $f(a_1,a_2,...a_n)\ge f(1,a_1a_2,a_3,...,a_n)$

TH 2: Nếu $ka_1a_2\le\sum_{i=1}^{n}a_i\left(\sum_{i=3}^{n}a_i+a_1a_2+1\right)$ thì vì $a_3\le 1\le a_2$ nên ta có:

$$\frac{\sum_{i\ne 1,3}a_i+a_1a_3+1}{a_1a_3}=\frac{\sum_{i=1}^{n}a_i-a_1-a_3+1}{a_1a_3}+1\ge\frac{\sum_{i=1}^{n}a_i-a_1-a_2+1}{a_1a_2}+1=\frac{\sum_{i=3}^{n}a_i+a_1a_2+1}{a_1a_2}$$

$\Rightarrow ka_1a_3\le\sum_{i=1}^{n}a_i\left(\sum_{i\ne 1,3}a_i+a_1a_3+1\right)$ và theo (*ii*): $f(a_1,a_2,...a_n)\ge f(1,a_2,...,a_1a_i,...,a_n)$.

Ý nghĩa: Mệnh đề 1 giúp chúng ta đưa bài toán về 1 biến.

Mệnh đề 2: Ta sẽ luôn đưa được bất đẳng thức (1) với các biến số $a_1,a_2,...a_n>0$ và $a_1a_2...a_n=1$ về trường hợp có $n-1$ biến bằng nhau và ≤ 1.

Chứng minh

• ***Bước 1:*** Đưa về trường hợp có $n-1$ biến ≤ 1.

Giả sử còn có nhiều hơn 1 biến lớn hơn 1, mà ta có thể giả sử là a_1,a_2. Thì sử dụng mệnh đề 1 (*iii*) ta luôn có thể thay bộ $(a_1,a_2,...a_n)$ bởi 1 bộ khác, vẫn có tích bằng 1, làm cho f không tăng, và hơn nữa có số biến bằng 1 tăng lên ít nhất là 1. Do đó sau nhiều nhất $(n-1)$ lần thay thế ta sẽ nhận được bộ gồm $(n-1)$ biến ≤ 1.

• *Bước 2:* Đưa $(n-1)$ biến ≤ 1 về bằng nhau.

Giả sử $a_1 \le a_2 \le ... \le a_{n-1} \le 1$ là $(n-1)$ biến có trung bình nhân là x. Nếu $(n-1)$ biến này chưa bằng nhau thì $a_1 < x < a_{n-1}$ và dùng mệnh đề 1 (i) ta có thể thay bộ $(a_1, a_2, ... a_{n-1}, a_n)$ bởi $\left(x, a_2, ..., \frac{a_1 a_{n-1}}{x}, a_n\right)$. Khi đó f không giảm và số biến bằng x tăng lên ít nhất là 1. Ta cũng lưu ý là $\frac{a_1 a_{n-1}}{x} \le \frac{a_1}{x} \le 1$ (vì a_1 là số nhỏ nhất trong $n-1$ số $a_1, a_2, ... a_{n-1}$) nên $a_1 \le x$, do đó việc thay thế này vẫn đảm bảo $n-1$ biến đều ≤ 1, điều đó cho phép việc thay thế có thể thực hiện liên tiếp. Vậy sau hữu hạn (không quá $n-1$) lần thay thế ta sẽ có $n-1$ biến ≤ 1 đều bằng nhau. Cuối cùng, ta giải quyết bài toán 1 biến, tức là chứng minh:

$$f\left(x, x, ..., x, \frac{1}{x^{n-1}}\right) \ge f(1, 1, ..., 1) \text{ với } x \le 1$$

Đặt $g(x) = f\left(x, x, ..., x, \frac{1}{x^{n-1}}\right) = \frac{n-1}{x} + x^{n-1} + \frac{k}{(n-1)x + \frac{1}{x^{n-1}}}$ với $x \in (0, 1]$

Ta có: $g'(x) = -\frac{n-1}{x^2} + (n-1)x^{n-2} - \frac{k\left[n-1-\frac{n-1}{x^n}\right]}{\left[(n-1)x + \frac{1}{x^{n-1}}\right]^2} = (n-1)\frac{x^n - 1}{x^2}\left[\frac{(n-1)x^n - 1}{(n-1)x^n + 1}\right]^2$

Do $k = 4(n-1)$ nên $g'(x) \le 0$ với $x \in (0, 1]$, suy ra $g(x) \ge g(1)$ và ta có đpcm.

Bài 8.2. Cho n số thực dương $a_1, a_2, ... a_n$ có tích bằng 1. Chứng minh rằng:

$$\left(1+a_1^2\right)\left(1+a_2^2\right)...\left(1+a_n^2\right) \le \frac{2^n}{n^{2n-2}}\left(a_1 + a_2 + ... + a_n\right)^{2n-2}$$

Chứng minh

Với $n = 1$, $n = 2$ thì đơn giản nên ta chứng minh cho $n \ge 3$. Ta thấy bài toán tương đương với $f(a_1, a_2, ... a_n) \ge 0$ và cũng tương đương với $g(a_1, a_2, ... a_n) \ge 0$, trong đó:

$f(a_1, a_2, ... a_n) = k(a_1 + a_2 + ... + a_n)^{2n-2} - \left(1+a_1^2\right)\left(1+a_2^2\right)...\left(1+a_n^2\right)$ và

$g(a_1, a_2, ... a_n) = \ln k + (2n-2)\ln(a_1 + a_2 + ... + a_n) - \ln\left(1+a_1^2\right) - \ln\left(1+a_2^2\right) - ... - \ln\left(1+a_n^2\right)$

Ở đây $k = \frac{2^n}{n^{2n-2}}$. Khảo sát sơ bộ các trường hợp có thể dồn biến, ta xét các mệnh đề sau đây:

Mệnh đề 1:

(i) Nếu $a_1 \ge 1 \ge a_2, a_3$ thì: $f(a_1, a_2, ... a_n) \ge \min\{f(1, a_1 a_2, a_3, ..., a_n), f(a_1, 1, a_2 a_3, ..., a_n)\}$

(*ii*) Nếu $a_1 = \max\{a_i\}_{i=1}^n$ và $a_1 \ge x \ge a_2 \ge 1$ thì: $g(a_1, a_2, ... a_n) \ge g\left(x, \frac{a_1a_2}{x}, a_3, ..., a_n\right)$

Chứng minh

(*i*) Xét các hiệu $f(a_1, a_2, ... a_n) - f(1, a_1a_2, a_3, ..., a_n) =$

$$= ks^{2n-2} - ku^{2n-2} + \left[2(1 + a_1^2a_2^2) - (1 + a_1^2)(1 + a_2^2)\right](1 + a_3^2)...(1 + a_n^2)$$

(với $s = a_1 + a_2 + ... + a_n, u = 1 + a_1a_2 + ... + a_n$)

$$= k(a_1 + a_2 - 1 - a_1a_2)(s^{2n-3} + s^{2n-4}u + ... + u^{2n-3}) + (1 - a_1^2)(1 - a_2^2)(1 + a_3^2)...(1 + a_n^2)$$

$$= -(1 - a_1)(1 - a_2)\left[k(s^{2n-3} + s^{2n-4}u + ... + u^{2n-3}) - (1 + a_1)(1 + a_2)(1 + a_3^2)...(1 + a_n^2)\right]$$

Sử dụng lại đẳng thức ở trên với a_3 đổi chỗ cho a_1, ta có:

$$f(a_1, a_2, ... a_n) - f(a_1, 1, a_2a_3, ..., a_n) =$$

$$= -(1 - a_2)(1 - a_3)\left[k(s^{2n-3} + s^{2n-4}v + ... + v^{2n-3}) - (1 + a_2)(1 + a_3)(1 + a_1^2)(1 + a_4^2)...(1 + a_n^2)\right]$$

(với $v = 1 + a_1 + a_2a_3 + a_4 + ... + a_n$)

Từ 2 đẳng thức ở trên, ta thấy:

- Nếu $k(s^{2n-3} + s^{2n-4}u + ... + u^{2n-3}) - (1 + a_1)(1 + a_2)(1 + a_3^2)...(1 + a_n^2) \ge 0$ (2)

  thì $f(a_1, a_2, ... a_n) \ge f(1, a_1a_2, a_3, ..., a_n)$

- Nếu $k(s^{2n-3} + s^{2n-4}v + ... + v^{2n-3}) - (1 + a_2)(1 + a_3)(1 + a_1^2)(1 + a_4^2)...(1 + a_n^2) \le 0$ (3)

  thì $f(a_1, a_2, ... a_n) \ge f(a_1, 1, a_2a_3, ..., a_n)$

Do đó, ta chỉ cần chứng minh trong 2 bất đẳng thức (2) và (3) có ít nhất một bất đẳng thức đúng là xong. Chẳng hạn, ta giả sử (2) sai, và sẽ chứng minh (3) đúng.

Muốn vậy, ta chỉ cần chứng minh: $u \ge v$ và $(1 + a_1)(1 + a_3^2) \le (1 + a_3)(1 + a_1^2)$ là xong.

Thật vậy ta có : $u - v = a_3 + a_1a_2 - a_1 - a_2a_3 = (1 - a_2)(a_1 - a_3) \ge 0$

$$(1 + a_1)(1 + a_3^2) - (1 + a_3)(1 + a_1^2) = (a_3 - a_1)(a_1a_3 + a_1 + a_3 - 1) \le 0$$

Vậy mệnh đề (*i*) chứng minh xong.

(*ii*) Với việc xuất hiện hàm *ln* ta không thể xét hiệu rồi biến đổi, mà thay vào đó ta dùng đạo hàm.

Xét: $g(t) = \ln k + 2(n-1)\ln\left(ta_1 + \frac{a_2}{t} + a_3 + ... + a_n\right)$

$$-\ln(1 + t^2a_1^2) - \ln\left(1 + \frac{a_2^2}{t^2}\right) - \ln(1 + a_3^2)... - \ln(1 + a_n^2) \text{ với } t \in \left[\sqrt{\frac{a_2}{a_1}}, 1\right]$$

Ta có: $g'(t) = \dfrac{2(n-1)\left(a_1 - \dfrac{a_2}{t^2}\right)}{ta_1 + \dfrac{a_2}{t} + a_3 + \dots + a_n} - \dfrac{2ta_1^2 - \dfrac{2a_2^2}{t^3}}{\sqrt{\left(1+t^2a_1^2\right)\left(1+\dfrac{a_2^2}{t^2}\right)}} =$

$$= 2\left(a_1 - \frac{a_2}{t^2}\right)\left[\frac{n-1}{ta_1 + \dfrac{a_2}{t} + a_3 + \dots + a_n} - \frac{ta_1 + \dfrac{a_2}{t}}{\sqrt{\left(1+t^2a_1^2\right)\left(1+\dfrac{a_2^2}{t^2}\right)}}\right]$$

Vì $t \in \left[\sqrt{\dfrac{a_2}{a_1}}, 1\right]$ nên $a_1 - \dfrac{a_2}{t^2} \ge 0$. Do đó, gọi T là thừa số còn lại, ta chỉ cần chứng minh $T \ge 0$ là có thể suy ra g đồng biến trên $\left[\sqrt{\dfrac{a_2}{a_1}}, 1\right]$

Để viết cho gọn, ta đặt $c = \sqrt{\left(1+t^2a_1^2\right)\left(1+\dfrac{a_2^2}{t^2}\right)}, d = ta_1 + \dfrac{a_2}{t}$

Ta có: $T \ge 0 \Leftrightarrow \dfrac{n-1}{d + a_3 + \dots + a_n} \ge \dfrac{d}{c^2} \Leftrightarrow (n-1)c^2 \ge d^2 + d\left(a_3 + \dots + a_n\right)$

Vì $c \ge d$ (bất đẳng thức ***Buniakowski***) nên để có bất đẳng thức trên ta chỉ cần:

$(n-2)c \ge a_3 + \dots + a_n$. Điều này đúng vì $c > a_1a_2 \ge a_1 \ge \max\{a_3, \dots, a_n\}$.

Lấy $t_0 = \max\left\{x, \dfrac{a_1a_2}{x}\right\} \cdot \dfrac{1}{a_1}$ thì $t_0 \in \left[\sqrt{\dfrac{a_2}{a_1}}, 1\right], t_0a_1 = \max\left\{x, \dfrac{a_1a_2}{x}\right\}, \dfrac{a_2}{t_0} = \min\left\{x, \dfrac{a_1a_2}{x}\right\}$

Vì g đồng biến trên $\left[\sqrt{\dfrac{a_2}{a_1}}, 1\right]$ nên $g(1) \ge g(t_0)$ và ta có (đpcm).

Vậy mệnh đề *(ii)* chứng minh xong. Mệnh đề 1 chứng minh xong.

Trở lại bài toán, ta sẽ nói là bộ $(a_1, a_2, \dots a_n)$ được thay thế bởi bộ $(b_1, b_2, \dots b_n)$ nếu

$f(a_1, a_2, \dots a_n) \ge f(b_1, b_2, \dots b_n)$ hoặc $g(a_1, a_2, \dots a_n) \ge g(b_1, b_2, \dots b_n)$

Mệnh đề 2: Luôn đưa được về trường hợp có $n-1$ biến bằng nhau ≥ 1.

Chứng minh

• ***Bước 1:*** Đưa về trường hợp có $n-1$ biến ≥ 1.

Giả sử còn có 2 biến $a_2, a_3 < 1$. Khi đó phải có 1 biến > 1, mà ta có thể giả sử là a_1. Sử dụng mệnh đề 1 *(i)*, ta có thể thay bộ $(a_1, a_2, \dots a_n)$ bởi bộ $(1, a_1a_2, a_3, \dots a_n)$ hoặc bộ $(a_1, 1, a_2a_3, \dots a_n)$. Chú ý là cho dù thay bởi bộ nào, thì số các biến bằng 1 cũng tăng lên ít nhất là 1. Do đó, động tác thay thế này sẽ phải dừng lại sau không quá $n-1$ lần. Khi đó, ta sẽ có $n-1$ biến ≥ 1.

• *Bước 2:* Ta chứng minh luôn có thể thay $n-1$ biến ≥ 1 bởi trung bình nhân của chúng.

Thật vậy, giả sử $a_1 \geq a_2 \geq ... \geq a_{n-1} \geq 1 \geq a_n$ và đặt $x = \sqrt[n-1]{a_1 a_2 ... a_{n-1}} \geq 1$.

Nếu trong $n-1$ biến đầu tiên vẫn còn biến khác x thì $a_1 > x > a_{n-1}$.

Sử dụng mệnh đề (ii) ta có thể thay bộ $(a_1, a_2, ..., a_{n-1}, a_n)$ bởi bộ $\left(x, a_3, ..., \frac{a_1 a_2}{x}, a_n\right)$.

Chú ý là $\frac{a_1 a_{n-1}}{x} \geq a_{n-1} \geq 1$ (vì a_1 là số lớn nhất trong các số $\{a_i\}_{i=1}^{n-1}$ nên $a_1 > x$) cho nên việc thay thế này vẫn đảm bảo $n-1$ biến đầu tiên ≥ 1 (để có thể thay thế liên tiếp).

Chú ý rằng sau khi thay thế thì số biến bằng x tăng lên ít nhất là 1.

Do đó, sau không quá $n-1$ lần thay thế thì cả $n-1$ biến đầu tiên đều bằng x.

Cuối cùng ta giải quyết bài toán 1 biến.

Xét hàm số $h(x) = g\left(x, x, ..., x, \frac{1}{x^{n-1}}\right)$

$= \ln k + 2(n-1)\ln\left[(n-1)x + \frac{1}{x^{n-1}}\right] - (n-1)\ln(1+x^2) - \ln\left(1 + \frac{1}{x^{2n-2}}\right)$ với $x \geq 1$.

Ta có: $h'(x) = 2(n-1)\dfrac{n-1-\dfrac{n-1}{x^n}}{(n-1)x + \dfrac{1}{x^{n-1}}} - \dfrac{2(n-1)x}{1+x^2} - \dfrac{-\dfrac{2(n-1)}{x^{2n-1}}}{1+\dfrac{1}{x^{2n-2}}}$

$= \frac{2(n-1)}{x}\left[\frac{(n-1)(x^n-1)}{(n-1)x^n+1} - \frac{x^2}{1+x^2} + \frac{1}{1+x^{2n-2}}\right] = \frac{2(n-1)}{x}\left[\frac{(n-1)(x^n-1)}{(n-1)x^n+1} - \frac{x^{2n}-1}{(1+x^2)(1+x^{2n-2})}\right]$

Chú ý là $x \geq 1$ nên để có $h'(x) \geq 0$ ta chỉ cần: $\frac{n-1}{(n-1)x^n+1} \geq \frac{x^n+1}{(1+x^2)(1+x^{2n-2})}$

Ta có điều này bằng đánh giá đơn giản: $\frac{n-1}{(n-1)x^n+1} \geq \frac{1}{x^n+1} \geq \frac{x^n+1}{(1+x^2)(1+x^{2n-2})}$

(dấu $\geq$ thứ hai là do bất đẳng thức ***Buniakowski***)

Vậy với $x \geq 1$ thì $h'(x) \geq 0$ nên $h(x)$ đồng biến, suy ra $h(x) \geq h(1) = 0$ và ta có (đpcm).

Vậy bài toán chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a_1 = a_2 = ... = a_n = 1$ với $n \geq 3$ (còn với $n = 1$, $n = 2$ thì có đẳng thức).

Nhận xét:

• Bài toán này là của tác giả Phạm Kim Hùng đặt ra dưới dạng bài toán mở và chứng minh trên đây của chúng tôi là chứng minh đầu tiên cho nó.

• Ở đây việc xét đồng thời 2 hàm f, g cho phép ta mở rộng khả năng dồn biến: khi thì xét f đơn giản hơn, khi thì xét g đơn giản hơn. Trong bài toán 1 thì vì vấn đề đơn giản hơn nên chỉ cần một hàm f là đủ.

IX. DỒN BIẾN BẰNG QUY NẠP THỪA

Trong các kỹ thuật dồn về $(n-1)$ biến bằng nhau, chúng ta cần phải nhắc đến kỹ thuật quy nạp thừa đã được ***Phạm Kim Hùng*** giới thiệu trong cuốn sách ***Sáng tạo bất đẳng thức.*** Có thể hình dung về ý tưởng dồn biến bằng quy nạp thừa như sau. Giả sử ta cần chứng minh một bất đẳng thức của n biến $a_1, a_2, ..., a_n$ có điều kiện ràng buộc là $a_1a_2...a_n = 1$, trong đó đẳng thức xảy ra khi n biến bằng nhau. Chính đẳng thức ràng buộc này không cho phép chúng ta giải bài toán bằng quy nạp. Tuy nhiên, nếu chúng ta sửa điều kiện ràng buộc lại thành $a_1a_2...a_n \geq 1$ thì khi đó ta có thể giả sử, chẳng hạn $a_n = \min\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ để có $a_1a_2...a_{n-1} \geq 1$ và ta có thể dùng giả thiết cho n-1 biến này để quy về trường hợp n-1 biến bằng nhau. Sau đây là một ví dụ đặc sắc cho kĩ thuật này.

Bài toán. [Phạm Kim Hùng] Cho $a_1, a_2, ..., a_n > 0$ và $a_1a_2...a_n = 1$.

Chứng minh rằng: $\frac{1}{(1+a_1)^k} + \frac{1}{(1+a_2)^k} + ... + \frac{1}{(1+a_n)^k} \geq \min\left\{1, \frac{n}{2^k}\right\}$, $\forall k > 0$

Chứng minh

• Ta chứng minh kết quả tổng quát hơn:

Với $k > 0$ và $a_1, a_2, ..., a_n$ là các số thực dương có tích $a_1a_2...a_n \geq 1$ thì:

$$\frac{1}{(1+a_1)^k} + \frac{1}{(1+a_2)^k} + ... + \frac{1}{(1+a_n)^k} \geq \min\left\{1, \frac{n}{(1+\sqrt[n]{a_1a_2...a_n})^k}\right\} \quad (1)$$

• Chứng minh quy nạp theo n.

Với $n = 1$: (1) hiển nhiên đúng! Giả sử đã chứng minh (1) đúng tới n $(n \geq 1)$, ta sẽ chứng minh (1) đúng với $n+1$.

Gọi $a_1, a_2, ..., a_{n+1}$ là các số thực dương có tích bằng s^{n+1} với $s \geq 1$, ta cần chứng minh:

$$\frac{1}{(1+a_1)^k} + \frac{1}{(1+a_2)^k} + ... + \frac{1}{(1+a_{n+1})^k} \geq \min\left\{1, \frac{n+1}{(1+s)^k}\right\} \quad (2)$$

Trong phần dưới đây ta xem như s cố định. Trước hết, ta hãy đơn giản hóa bài toán.

• **Mệnh đề:** Lấy $k_0 = \frac{\ln(n+1)}{\ln(1+s)}$ (nghĩa là $\frac{n+1}{(1+s)^{k_0}} = 1$)

Giả sử (2) đúng với $k = k_0$, thế thì (2) đúng với mọi $k > 0$. Hơn nữa, ta chỉ có $k_0 \geq n$ trong trường hợp $n = k_0 = s = 1$ và khi đó thì (2) cũng đúng!

Chứng minh: (2) đúng với $k = k_0$ nghĩa là $\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{(1+a)^{k_0}} \geq 1 = \frac{n+1}{(1+s)^{k_0}}$

Nếu $k > k_0$ thì ta đánh giá: $\frac{\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{(1+a_i)^k}}{n+1} \geq \left(\frac{\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{(1+a_i)^{k_0}}}{n+1}\right)^{\frac{k}{k_0}} \geq \left(\frac{\left[\frac{n+1}{(1+s)^{k_0}}\right]}{n+1}\right)^{\frac{k}{k_0}} = \frac{1}{(1+s)^k}$

Nếu $k < k_0$ thì ta đánh giá: $\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{(1+a_i)^k} \geq \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{(1+a_i)^{k_0}} \geq 1$

Hơn nữa, nếu $k_0 \geq n$ thì: $n+1 = (1+s)^{k_0} \geq 1 + k_0 s \geq 1 + n$ (vì $k_0 \geq n \geq 1$ và $s \geq 1$)

suy ra $n = k_0 = s = 1$, khi đó (2) hiển nhiên đúng.

• Trở lại bài toán của chúng ta. Mệnh đề trên cho phép ta chỉ cần chứng minh (2) với $k = k_0$, hơn nữa, chỉ cần xét trường hợp $k_0 < n$. Từ giờ trở đi để đơn giản kí hiệu, ta sẽ kí hiệu k thay vì k_0 nghĩa là $k = \frac{\ln(n+1)}{\ln(1+s)}$.

Giả sử $a_1 \geq a_2 \geq ... \geq a_{n+1}$, khi đó $a_1, a_2, ..., a_n$ là các số thực dương có tích ≥ 1, do đó theo giả thiết quy nạp ta có $\frac{1}{(1+a_1)^k} + \frac{1}{(1+a_2)^k} + ... + \frac{1}{(1+a_n)^k} \geq \min\left\{1, \frac{n}{(1+a)^k}\right\}$ với $a = \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n} \geq s$

Hơn nữa $a_{n+1} = \frac{s^{n+1}}{a^n}$. Do đó để có (2) ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{n}{(1+a)^k} + \frac{1}{\left(1+\frac{s^{n+1}}{a^n}\right)^k} \geq \min\left\{1, \frac{n+1}{(1+s)^k}\right\} = 1 \quad (3)$$

• Nhắc lại là ta đã xem như s cố định. Ta xem vế trái của (3) như là hàm theo a và kí hiệu là $f(a)$.

Để chứng minh (3), ta sẽ khảo sát f với $a \in \mathbb{R}^+$. Ta có: $f'(a) = \frac{-kn}{(1+a)^{k+1}} + \frac{kn\frac{s^{n+1}}{a^{n+1}}}{\left(1+\frac{s^{n+1}}{a^n}\right)^{k+1}}$

$f'(s) \geq 0 \Leftrightarrow g(a) = (n+1)\left[\ln(s) - \ln(a)\right] + (k+1)\left[\ln(1+a) - \ln\left(1+\frac{s^{n+1}}{a^n}\right)\right] \geq 0$

Ta có: $g'(a) = \frac{-(n-k)a^{n+1} - (n+1)a^n + (n+1)ks^{n+1}a + (kn-1)s^{n+1}}{a(1+a)(a^n + s^{n+1})}$

$$g'(a) \geq 0 \Leftrightarrow h(a) = -(n-k)a^{n+1} - (n+1)a^n + (n+1)ks^{n+1}a + (kn-1)s^{n+1} \geq 0.$$

Ta có: $h'(a) = (n+1)\left[-(n-k)a^n - na^{n-1} + ks^{n+1}\right]$

Lưu ý là $k < n$ nên $h'(a)$ đổi dấu từ dương sang âm trên $\mathbb{R}^+$. Hơn nữa $h(0) > 0$ nên $h(a)$ cũng đổi dấu từ dương sang âm trên $\mathbb{R}^+$. Vì $g'(a) = 0$ cùng dấu với $h(a)$ nên $g(a) = 0$ có tối đa 2 nghiệm trên $\mathbb{R}^+$. Vậy $f'(a) = 0$ có tối đa 2 nghiệm trên $\mathbb{R}^+$. Hơn nữa, $f'(s) = 0$ và $\lim_{a \to 0^+} f(a) = n \geq 1 = f(s) = \lim_{a \to +\infty} f(a)$ nên nghiệm còn lại của $f'(a) = 0$ trên $\mathbb{R}^+$ là $a_0 \in (s, +\infty)$.

Suy ra $f(a)$ tăng trên (s, a_0) và giảm trên các khoảng $(0, s)$ và (a_0, ∞).

Từ đó suy ra $f(a) \geq f(s) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = 1,\ \forall a \in \mathbb{R}^+$. Bài toán được giải quyết trọn vẹn.

X. DỒN BIẾN TOÀN MIỀN – EMV *[ENTIRELY MIXING VARIABLES]*

Tất cả những kỹ thuật dồn biến mà chúng ta vừa xét đều có một đặc điểm chung là khi thực hiện phép dồn biến: $f(a,b,c)\geq f(a',b',c')$ thì bộ ba số (a,b,c) và (a',b',c') đều có một đại lượng đặc trưng giống nhau, chẳng hạn như tổng, tích...

Phương pháp ***EMV*** cũng có đại lượng đặc trưng không đổi sau khi dồn biến. Tuy nhiên, sự khác biệt hoàn toàn so với các phương pháp dồn biến trước là: "Đại lượng đặc trưng không đổi khi sử dụng ***EMV*** là hiệu các biến, tức là các đại lượng $a-b, b-c, c-a$".

Tư tưởng chủ đạo của ***EMV*** là chứng minh khi tăng hoặc giảm các biến đi cùng một đại lượng, bất đẳng thức yếu đi hoặc không đổi. Từ đó chỉ cần chứng minh bất đẳng thức trong trường hợp một biến ở biên.

Chú ý rằng nếu sử dụng ***EMV*** trong bất đẳng thức n biến, khi dồn một biến về biên, thì bất đẳng thức còn $n-1$ biến, tuy nhiên, nếu số biến còn lại vẫn ≥ 3 thì việc chứng minh là khá phức tạp. Vì vậy chúng tôi chỉ nêu những ứng dụng của ***EMV*** trong bất đẳng thức ba biến.

1. EMV với biên tại 0:

Bất đẳng thức với biến số có biên tại 0 chiếm một số lượng đáng kể trong bất đẳng thức nói chung và bất đẳng thức ba biến nói riêng. Ở phần **IV**, ta đã xét đến một kỹ thuật để đẩy biến về biên tại 0. Và bây giờ phương pháp ***EMV*** sẽ cho ta một cách tiếp cận khác về kỹ thuật này. Chúng ta sẽ bắt đầu bằng một bất đẳng thức khá nổi tiếng:

Bài 10.1. Cho $a,b,c\in\mathbb{R}$. Chứng minh rằng:

$$(a^2+b^2+c^2)\left(\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(a-c)^2}+\frac{1}{(b-a)^2}\right)\geq\frac{9}{2}$$

Chứng minh

Vì $VT(a,b,c)\leq VT(|a|,|b|,|c|)$ nên ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức trong trường hợp $a\geq b\geq 0, c\leq 0$. Trước hết ta có:

$$a^2+b^2+c^2=\frac{(a+b+c)^2}{3}+\frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{3}\geq(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$$

Do vậy chỉ cần chứng minh:

$$\left((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right)\left(\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(a-c)^2}+\frac{1}{(b-a)^2}\right)\geq\frac{27}{2}\ (1)$$

Đặt VT (1) = $f(a, b, c)$. Chú ý rằng bất đẳng thức trên chỉ gồm các đại lượng đặc trưng của ***EMV*** do đó $f(a,b,c)=f(a-x,b-x,c-x), \forall x\in\mathbb{R}$. Do vậy ta có thể giả sử một biến bằng 0, ở đây ta sẽ chọn biến b, tức chọn $x=b$ vì khi đó bộ số $(a-b,0,c-b)$ mới thoa mãn $a-b\ge 0, c-b\le 0$.

Tiếp theo ta cần chứng minh: $\left((a-c)^2+c^2+a^2\right)\left(\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{(c-a)^2}\right)\ge\frac{27}{2}$ (2)

Sử dụng các bất đẳng thức: $c^2+a^2\ge\frac{(a-c)^2}{2}, \frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}\ge\frac{8}{(c-a)^2}$.

Ta có: VT (2) $\ge\left(1+\frac{1}{2}\right)(a-c)^2\frac{(1+8)}{(a-c)^2}=\frac{27}{2}$. Bất đẳng thức được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=t, b=0, c=-t$ với $t\in\mathbb{R}^*$ và các hoán vị.

Nhận xét: Phương pháp ***EMV*** trong bài toán này được sử dụng một cách khá độc đáo, khi mà biểu thức không đổi khi dùng ***EMV***.

Tiếp theo ta sẽ lại quay lại bất đẳng thức ***Schur*** một lần nữa.

Bài 10.2. (Bất đẳng thức Schur) Cho $a, b, c\ge 0$. Chứng minh rằng:

$$a^3+b^3+c^3+3abc\ge a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b) \quad (1)$$

Chứng minh

(1) $\Leftrightarrow f(a,b,c)=(b+c-a)(b-c)^2+(a+c-b)(a-c)^2+(a+b-c)(b-a)^2\ge 0$ (2)

Ta sẽ chứng minh: $f(a,b,c)\ge f(a-x,b-x,c-x),\ \forall x\in[0,\min\{a,b,c\}]$.

Điều này hiển nhiên đúng vì: $b+c-a\ge b+c-a-x=b-x+c-x-a+x$ và các kết quả tương tự. Theo kết quả của **Bài toán 4.1** thì bất đẳng thức đúng trong trường hợp một biến bằng 0. Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Nhận xét: Lời giải của ví dụ trên đã sử dụng dồn biến toàn miền với dạng ***SOS*** là:

$$S_a(a,b,c)(b-c)^2+S_b(a,b,c)(c-a)^2+S_c(a,b,c)(a-b)^2\ge 0$$

Đây là một kỹ thuật khá hiệu quả vì nó giúp ta loại bỏ một chướng ngại bậc 2 là $(a-b)^2, (b-c)^2, (c-a)^2$. Do đó chỉ cần chứng minh:

$$S_g(a,b,c)\ge S_g(a-x,b-x,c-x), g\in\{a,b,c\}$$

Tuy nhiên không phải lúc nào vấn đề cũng đơn giản như vậy, điều này sẽ được thể hiện rõ qua bài toán sau.

Bài 10.3. Cho $a, b, c\ge 0$. Chứng minh: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{9}{a+b+c}\ge 4\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)$(1)

Chứng minh

Bất đẳng thức (1) $\Leftrightarrow (a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\ge 4\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)+3$

$$\Leftrightarrow\sum\left(\frac{1}{bc}-\frac{2}{(a+b)(a+c)}\right)(b-c)^2\ge 0\Leftrightarrow\sum a(b+c)(a^2+ab+ac-bc)(b-c)^2\ge 0$$

Đến đây, các bạn có thể nhận thấy ngay rằng kỹ thuật ở bài trước không còn tác dụng gì trong bài toán này. Vì vậy, chúng ta cần đến một kiểu biến đổi thích hợp hơn. Hãy chú ý rằng, trong phương pháp ***EMV***, các đại lượng $a-b, b-c, c-a$ xuất hiện càng nhiều thì phương pháp càng hiệu quả.

Với tư tưởng đó, chúng ta bắt đầu biến đổi như sau:

$$\sum a(b+c)(a^2+ab+ac-bc)(b-c)^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sum a^3(b+c)(b-c)^2 - \sum a(b+c)(a-b)(a-c)(b-c)^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sum a^3(b+c)(b-c)^2 + (b-c)^2(c-a)^2(a-b)^2 \geq 0$$

Thật may mắn là từ biến đổi trên ta có thể thấy rằng bất đẳng thức hiển nhiên đúng.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Nhận xét: Biến đổi về biểu thức có chứa $(b-c)^2(c-a)^2(a-b)^2$ là một ý tưởng rất đẹp và hiệu quả, các bạn có thể thấy rõ độ mạnh của biểu thức trong đánh giá ≈ 0. Và các bạn sẽ thấy rõ hơn nữa vai trò của nó khi chúng ta quay trở lại bất đẳng thức Iran.

Bài 10.4. [Iran TST 1996] Cho $a,b,c \geq 0$. Chứng minh rằng:

$$(ab+bc+ca)\left[\frac{1}{(a+b)^2}+\frac{1}{(b+c)^2}+\frac{1}{(c+a)^2}\right] \geq \frac{9}{4} \quad (1)$$

Có thể nói, bài toán trên là một trong những bất đẳng thức được nghiên cứu nhiều nhất với rất nhiều lời giải. Và thật "ngạc nhiên" khi bài toán này cũng không nằm ngoài phạm vi ảnh hưởng của ***EMV***.

Đầu tiên, chúng ta sẽ biến đổi bất đẳng thức như sau:

$$\sum \frac{bc+ca+ab}{(b+c)^2} - \frac{9}{4} = \sum \frac{4b(a-b)+4c(a-c)+(b-c)^2}{4(b+c)^2}$$

$$= \sum (b-c)\left(\frac{c}{(c+a)^2} - \frac{b}{(b+a)^2}\right) + \frac{1}{4}\sum \frac{(b-c)^2}{(b+c)^2} = \sum\left(\frac{bc-a^2}{(a+b)^2(a+c)^2} + \frac{1}{4(b+c)^2}\right)(b-c)^2$$

$$= \sum \frac{(a-b)(a-c)(a^2+bc+3ab+3ac)}{4(b+c)^2(c+a)^2(a+b)^2}(b-c)^2 + \sum \frac{bc(b-c)^2}{(c+a)^2(a+b)^2}$$

$$= \sum \frac{bc(b-c)^2}{(c+a)^2(a+b)^2} - \frac{(b-c)^2(c-a)^2(a-b)^2}{4(b+c)^2(c+a)^2(a+b)^2}$$

Vậy bất đẳng thức (1) $\Leftrightarrow \sum \frac{bc(b-c)^2}{(c+a)^2(a+b)^2} \geq \frac{(b-c)^2(c-a)^2(a-b)^2}{4(b+c)^2(c+a)^2(a+b)^2}$

$$\Leftrightarrow 4\sum bc(b^2-c^2)^2 \geq (b-c)^2(c-a)^2(a-b)^2$$

Vậy rõ ràng, ta chỉ cần xét bài toán khi một biến bằng 0 và trường hợp này đã được chứng minh ở phần trước. Không dừng lại ở đây, nhìn vào phép biến đổi nêu trên ta thấy rằng hoàn toàn có thể làm chặt bất đẳng thức thêm nữa:

Bài 10.5. Cho $a,b,c \geq 0$. Chứng minh rằng:

$$(ab+bc+ca)\left(\frac{1}{(b+c)^2}+\frac{1}{(c+a)^2}+\frac{1}{(a+b)^2}\right) \geq \frac{9}{4}+\frac{15(b-c)^2(c-a)^2(a-b)^2}{4(b+c)^2(c+a)^2(a+b)^2}$$

Chứng minh

Từ kết quả trên, ta chỉ cần chứng minh với $c=0$:

$$ab\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{(a+b)^2}\right) \geq \frac{9}{4}+\frac{15(a-b)^2}{4(a+b)^2} \Leftrightarrow (a-b)^4 \geq 0$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$ hoặc $a=b, c=0$ và các hoán vị.

Chú ý: Cách trình bày trên là để thể hiện tư tưởng của ***EMV***, ngoài ra các bạn có thể trực tiếp thấy rằng bất đẳng thức tương đương với:

$$\left[ab(a+b)^2-4(a-c)^2(b-c)^2\right](a-b)^2+ca\left(c^2-a^2\right)^2+bc\left(b^2-c^2\right)^2 \geq 0$$

Điều này thì hiển nhiên đúng do: $a \geq a-c \geq 0, b \geq b-c \geq 0$ (khi giả sử $a \geq b \geq c$)

Qua các bài toán trên, ta có thể thấy được hiệu quả của phương pháp ***EMV*** trong chứng minh bất đẳng thức đối xứng ba biến. Tuy nhiên, bất đẳng thức hoán vị mới là ứng dụng lớn nhất của ***EMV***.

Bài 10.6. Cho $a,b,c \geq 0$ thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh: $a^2b+b^2c+c^2a+abc \leq 4$

Chứng minh

Trước tiên, muốn sử dụng kỹ thuật dồn biến toàn miền, ta phải loại bỏ điều kiện bằng cách thuần nhất hóa bất đẳng thức hay đưa bài toán trở thành:

Cho $a,b,c \geq 0$. Chứng minh rằng: $a^2b+b^2c+c^2a+abc \leq \frac{4}{27}(a+b+c)^3$

Bất đẳng thức cần chứng minh $\Leftrightarrow 8\sum a^3-6abc-3\sum bc(b+c)+27\sum bc(c-b) \geq 0$

$\Leftrightarrow f(a,b,c)=\sum(a+4b+4c)(b-c)^2+27(a-b)(b-c)(c-a) \geq 0$

Rõ ràng ta có: $f(a,b,c) \geq f(a-x,b-x,c-x),\ \forall x \in \left[0, \min\{a,b,c\}\right]$

Vậy chỉ cần chứng minh bất đẳng thức khi $c=0$: $a^2b \leq \frac{4}{27}(a+b)^3$

Áp dụng ***AM – GM*** ta có: $a^2b=4\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2}\cdot b \leq 4\left(\frac{\frac{a}{2}+\frac{a}{2}+b}{3}\right)^3=\frac{4}{27}(a+b)^3$

Bất đẳng thức được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$ hoặc $a=2, b=1, c=0$ và các hoán vị.

Nhận xét: Trong quá trình dồn biến toàn miền trong bài này, xuất hiện một biểu thức đáng chú ý là $(a-b)(b-c)(c-a)$. Vai trò của nó chính là làm mất tính hoán vị trong phần còn lại của bất đẳng thức, dẫn đến việc biến đổi về dạng ***SOS*** thuận lợi hơn.

ở biên. Tuy nhiên, biên trong bài toán này liệu có giống với các bài toán trước không? Chúng ta sẽ cùng nhau xem xét vấn đề này.

Trước hết, ta thử với $x = k = \min\{a, b, c\}$ tức cho một biến bằng 0, chẳng hạn $c = 0$.

Khi đó: $f(a,b,0) = \dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a}$. Không thể có kết luận gì về max trong trường hợp này.

Ta nhận thấy rằng, khi ta cho biến $c = 0$ sẽ khiến $a = b$ vì $0 = c \ge |a-b|$, và khi đó $f(a,b,c) = 2$. Việc đó đã làm biểu thức $f(a, b, c)$ yếu đi rất nhiều, thể hiện ở việc không thể tìm được max $f(a, b, 0)$.

Do vậy chúng ta cần tìm một biên thích hợp hơn. Chú ý rằng, khi $a = \max\{a,b,c\}$ thì điều kiện cần và đủ để a, b, c là ba cạnh của một tam giác (có thể suy biến) là $a \le b + c$. Do vậy ta nhận thấy ngay rằng $b + c$ chính la biên của biến a. Từ đó, ta bắt đầu quá trình đẩy a về $b + c$.

Xét đẳng thức: $a - x = b - x + c - x \Leftrightarrow x = b + c - a \ge 0$

Do đó ta nghĩ đến việc cho $x = k = b + c - a$, tức là cho $a = b + c$. Khi đó:

$$f(b+c,b,c) = 1 + \frac{b}{2c+b} + \frac{c}{2b+c} = 2 - \frac{3bc}{(2b+c)(2c+b)} \le 2$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b,\ c = 0$. Vậy max $f(a, b, c) = 2$

Bài 10.10. Cho $a,b,c \in [2,3]$. Chứng minh rằng:

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \ge 6\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right) \quad (1)$$

Chứng minh

Để thực hiện phép dồn biến toàn miền, trước hết ta phải biến đổi điều kiện đề bài cho thích hợp. Chú ý rằng với mọi $x, y, z \in [2,3]$ thì $x + y \ge z, 3x \ge 2y$. Do vậy, ta sẽ chứng minh bất đẳng thức với điều kiện a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác thỏa mãn bất đẳng thức ràng buộc $3\min\{a,b,c\} \ge 2\max\{a,b,c\}$ (*). Khi đó,

$$(1) \Leftrightarrow \sum\left(\frac{1}{bc} - \frac{3}{(a+b)(a+c)}\right)(b-c)^2 \ge 0 \Leftrightarrow \sum a(b+c)\left(a^2+ab+ac-2bc\right)(b-c)^2 \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \sum a^2(3a-b-c)(b+c)(b-c)^2 - 2\sum a(b+c)(a-b)(a-c)(b-c)^2 \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \sum a^2(3a-b-c)(b+c)(b-c)^2 + 2(b-c)^2(c-a)^2(a-b)^2 \ge 0 \quad (2)$$

Đặt $f(a,b,c) = VT(2)$ và giả sử $a = \max\{a,b,c\}$.

Ta sẽ chứng minh: $f(a,b,c) \ge f(a-x,b-x,c-x)$, trong đó $(a-x,b-x,c-x)$ lập thành 3 cạnh của một tam giác thỏa mãn điều kiện (*).

Giả sử $a \ge b \ge c$, ta có $(b-x)+(c-x) \ge (a-x)$ và $3.(c-x) \ge 2.(a-x)$,

tức là $x \in [0, 3.c - 2.a]$. Do đó ta chỉ cần xét trường hợp $3.c = 2.a$.

Việc hoàn thiện chứng minh xin dành cho bạn đọc.

Bài 10.11: Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác.

Chứng minh rằng: $4\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)\ge 3\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a}\right)+3$ (1)

Chứng minh

Bất đẳng thức (1) $\Leftrightarrow 7\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}-\frac{a}{c}-\frac{c}{b}-\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a}+\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}-6\right)\ge 0$

$\Leftrightarrow 7(a-b)(b-c)(c-a)+a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2\ge 0$

Từ đó, ta chỉ cần minh bất đẳng thức với $c=a+b$, tức là:

$7ab(b-a)+(a+b)(a-b)^2+a^3+b^3\ge 0 \Leftrightarrow 2a^3+2b^3-7ab^2+7a^2b\ge 0$

$\Leftrightarrow 2b\left(b-\frac{7}{4}a\right)^2+\frac{7}{8}a^2b+2a^3\ge 0$. Bất đẳng thức được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$

Nhận xét: Sử dụng ***EMV*** ta dễ dàng giải quyết được bài toán tổng quát:

Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác. Tìm hằng số tốt nhất của bất đẳng thức:

$$(k+1)\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)\ge k\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\right)+3$$

Bài 10.12. Cho a,b,c là độ dài cạnh của một tam giác (có thể suy biến).

Chứng minh rằng: $9\le \frac{a+5b}{b+c}+\frac{b+5c}{c+a}+\frac{c+5a}{a+b}\le 9{,}5$ (1)

Chứng minh

Ta chứng minh: $\frac{a+5b}{b+c}+\frac{b+5c}{c+a}+\frac{c+5a}{a+b}\ge 9 \Leftrightarrow \sum(b+c)(b-c)^2\ge 10(a-b)(b-c)(c-a)$

Dễ dàng nhận ra rằng ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức với $a=b+c$, tức là:

$$(b+c)(b-c)^2+(2b+c)c^2+(b+2c)b^2\ge 10bc(c-b)$$

$$\Leftrightarrow 2b^3+11b^2c-9bc^2+2c^3\ge 0 \Leftrightarrow 2c\left(c-\frac{9}{4}\right)^2+\frac{7}{8}b^2c+2b^3\ge 0$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Mặt khác: $\frac{a+5b}{b+c}+\frac{b+5c}{c+a}+\frac{c+5a}{a+b}=\sum\frac{(b-c)^2}{2(a+b)(a+c)}+\frac{5(a-b)(b-c)(c-a)}{2(a+b)(b+c)(c+a)}=f(a,b,c)$

Dễ thấy $f(a,b,c)\le f(c,b,a)$ nếu $a\le b\le c$. Do vậy ta chỉ cần xét khi $a\ge b\ge c$.

Khi đó hiển nhiên: $f(a,b,c)\le f(a-x,b-x,c-x)$, $\forall x\in[0,b+c-a]$.

Từ đó, ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức với $a=b+c$, tức là:

$\frac{6b+c}{b+c}+\frac{b+5c}{2c+b}+\frac{6c+5b}{2b+c}\le 9{,}5 \Leftrightarrow bc(b+11c)\ge 0$. Bất đẳng thức được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b, c = 0$ và các hoán vị.

Nhận xét: Chắc hẳn các bạn đều đã nhận sự điều rất thú vị ở bài toán này, đó chính là tính 2 chiều trong đánh giá lại được giải quyết trọn vẹn bằng ***EMV***.

Bài 10.13. Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác.

Chứng minh rằng: $2\left(\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\right) \ge \frac{a^2}{c}+\frac{b^2}{a}+\frac{c^2}{b}+a+b+c$ (1)

Chứng minh

$$(1) \Leftrightarrow 3\left(\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}-\frac{a^2}{c}-\frac{b^2}{a}-\frac{c^2}{b}\right)+\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}+\frac{a^2}{c}+\frac{b^2}{a}+\frac{c^2}{b}-2(a+b+c)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)}{abc}+\frac{(b+c)(b-c)^2}{bc}+\frac{(a+c)(a-c)^2}{ac}+\frac{(b+a)(b-a)^2}{ba}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow 3(a-b)(b-c)(c-a)+\frac{a(b+c)(b-c)^2+b(a+c)(a-c)^2+c(b+a)(b-a)^2}{a+b+c}\ge 0 \ (2)$$

Giả sử $c=\max\{a,b,c\}$. Khi đó: $\frac{a(b+c)}{a+b+c}=\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b+c}}\ge\frac{1}{\frac{1}{a-x}+\frac{1}{b+c-2x}}$, $\forall x\in[0,a+b-c]$

và các bất đẳng thức tương tự, suy ra chỉ cần chứng minh (2) với $c=a+b$, tức là:

$$3ab(b-a)+\frac{a^3(2b+a)+b^3(2a+b)+(a+b)^2(a-b)^2}{2(a+b)}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow a^4-2a^3b-a^2b^2+4ab^3+b^4\ge 0 \Leftrightarrow \left(a^2-ab-b^2\right)^2+2ab^3\ge 0$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$

Nhận xét: Sử dụng ***EMV*** ta dễ dàng giải quyết được bài toán tổng quát:

Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác. Tìm hằng số tốt nhất của bất đẳng thức:

$$(k+1)\left(\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\right)\ge k\left(\frac{a^2}{c}+\frac{b^2}{a}+\frac{c^2}{b}\right)+a+b+c$$

Bài 10.14. Cho a,b,c là ba cạnh của một tam giác (có thể suy biến).

Chứng minh rằng: $\frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca}+20\le 16\left(\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}\right)$ (1)

Chứng minh

Chúng ta nhận thấy rằng, đẳng thức của (1) không xảy ra khi $a=b=c$. Do vậy rõ ràng những đường lối biến đổi đã ta đã từng dùng không có tác dụng. Và vì vậy, ở bài toán này, chúng ta sẽ biến đổi theo một cách khác.

Bất đẳng thức (1) $\Leftrightarrow \frac{a^2+b^2+c^2-2(ab+bc+ca)}{ab+bc+ca}\le\frac{8(a-b)(b-c)(a-c)}{(a+b)(a+c)(b+c)}$

Vì a,b,c là ba cạnh của một tam giác nên $a^2+b^2+c^2-2ab-2bc-2ca\le 0$, do đó nếu $a \ge b \ge c$ thì bất đẳng thức đúng. Xét $c \ge b \ge a$, bất đẳng thức tương đương:

$$\frac{(a+b)(a+c)(b+c)\left(2ab+2bc+2ca-a^2-b^2-c^2\right)}{ab+ac+bc} \ge 8(a-b)(b-c)(c-a)$$

Xét $0 \le x \le a+b-c$ và $f(x)=(a+b-2x)(b+c-2x)(a+c-2x)+$

$$+\frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{2}\left(3x-a-b-c+\frac{1}{\dfrac{1}{a-x}+\dfrac{1}{b-x}+\dfrac{1}{c-x}}\right)$$

Dễ thấy $f(0)=$ VT (1). Mặt khác ta có:

$$f'(x)=-24x^2+16(a+b+c)x-2\left(a^2+b^2+c^2+3ab+3ac+3bc\right)$$

$$+\frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{2}\left[3-\frac{\dfrac{1}{(a-x)^2}+\dfrac{1}{(b-x)^2}+\dfrac{1}{(c-x)^2}}{\left(\dfrac{1}{a-x}+\dfrac{1}{b-x}+\dfrac{1}{c-x}\right)^2}\right]$$

$$\le -24x^2+16(a+b+c)x-2\left(a^2+b^2+c^2+3ab+3ac+3bc\right)+\frac{4}{3}\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]$$

$$\le -24(a+b-c)^2+16(a+b+c)(a+b-c)$$

$$-2\left(a^2+b^2+c^2+3ab+3ac+3bc\right)+\frac{4}{3}\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]$$

$$=\frac{2}{3}\left[-59c^2+59c(a+b)-11\left(a^2+b^2\right)-37ab\right]=\frac{2}{3}\left[-59(c-b)(c-a)-11(a-b)^2\right]\le 0$$

Hàm số $f(x)$ nghịch biến trong với $0 \le x \le a+b-c$, nên $f(0) \ge f(a+b-c)$ do đó ta chỉ cần chứng minh (1) với $c=a+b$, tức là chứng minh:

$$\frac{(a+b)(2a+b)(2b+a)}{a^2+b^2+3ab}4ab \ge 8ab(b-a) \Leftrightarrow 4a^3+3a^2b+11ab^2 \ge 0$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ $a=b, c=0$ và các hoán vị.

Nhận xét: Có thể nói, sức mạnh của dồn biến toàn miền đã được thể hiện đầy đủ trong bài toán trên. Các bạn hãy để ý rằng, bước đánh giá $f(a,b,c) \ge f(a-x,b-x,c-x)$ ở các bài toán trước đều khá lỏng, còn trong bài toán này, độ chặt của đánh giá thể hiện ở quá trình chứng minh $f'(x) \le 0$.

XI. MỘT SỐ KIỂU DỒN BIẾN ĐẶC BIỆT

Một trong những đặc điểm hấp dẫn nhất của phương pháp dồn biến là tính đa dạng trong kỹ thuật xử lý. Và điều này sẽ được thể hiện rõ qua một số bài toán được giải bằng những kỹ thuật dồn biến đặc biệt.

Bài 11.1. Cho $x, y, z \in [-1,1]$ và $x+y+z=0$.

Chứng minh rằng: $\sqrt{1+x+y^2}+\sqrt{1+y+z^2}+\sqrt{1+z+x^2} \ge 3$ (1)

Chứng minh

Trước hết ta sẽ chứng minh bổ đề:

Nếu $ab \ge 0;\ a,b,a+b \ge -1$ thì $\sqrt{1+a}+\sqrt{1+b} \ge 1+\sqrt{1+a+b}$

Thật vậy, bình phương 2 vế bất đẳng thức trên

$2+a+b+2\sqrt{(1+a)(1+b)} \ge 2+a+b+2\sqrt{1+a+b} \Leftrightarrow (1+a)(1+b) \ge 1+a+b \Leftrightarrow ab \ge 0$

Trở lại bài toán, trong 3 số $x+y^2, y+z^2, z+x^2$ phải tồn tại ít nhất hai số hạng cùng dấu, nên không mất tính tổng quát ta giả sử $(x+y^2)(y+z^2) \ge 0$. Khi đó, theo nhận xét trên thì

$$VT\ (1) \ge 1+\sqrt{1+x+y^2+y+z^2}+\sqrt{1+z+x^2} = 1+\sqrt{\left(\sqrt{1-z+z^2}\right)^2+y^2}+\sqrt{\left(\sqrt{1+z}\right)^2+x^2}$$

$$\ge 1+\sqrt{\left(\sqrt{1-z+z^2}+\sqrt{1+z}\right)^2+(x+y)^2} = 1+\sqrt{\left(\sqrt{1-z+z^2}+\sqrt{1+z}\right)^2+z^2}$$

Cuối cùng ta chỉ cần chứng minh $\left(\sqrt{1-z+z^2}+\sqrt{1+z}\right)^2+z^2 \ge 4$

$$\Leftrightarrow 2z^2+2\sqrt{1-z^3} \ge 2 \Leftrightarrow 1-z^3 \ge 1-2z^2+z^4 \Leftrightarrow z^2(z^2-1) \le 0$$

Bất đẳng thức trên hiển nhiên đúng vì $-1 \le z \le 1$, ta có đpcm.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow\ x=y=z=0$.

> **Bài 11.2.** Cho $a,b,c,d \ge 0; a+b+c+d=3$. Tìm max:
> $$ab(a+2b+3c)+bc(b+2c+3d)+cd(c+2d+3a)+da(d+2a+3b)$$

Giải

Dễ dàng chứng minh: $f(a,b,c,d) \le f(a,b,c+d,0)$ $(d=\min\{a,b,c,d\})$

Bài toán trở thành: Cho $a,b,c,d \ge 0; a+b+c+d=3$. Tìm max:

$$f(a,b,c)=ab(a+2b+3c)+bc(b+2c)=(2a+c)b^2+(a+2c)(a+c)b$$

Ta có: $f(a,b,c)-f(a+c,b,0)=bc(a+c-b);\ f(a,b,c)-f(0,b,a+c)=ab(b-a-c)$

Do đó: $f(a,b,c) \le \max\{f(a+c,b,0), f(0,b,a+c)\}$

Mặt khác ta có: $f(a+c,b,0)=2(a+c)b^2+(a+c)^2b=2(3-b)b^2+(3-b)^2b=g(b)$

$$f(0,b,a+c)=(a+c)b^2+2(a+c)^2b=(a+c)(3-a-c)^2+2(a+c)^2(3-a-c)=g(a+c)$$

trong đó $g(x)=9x-x^3=-(x-\sqrt{3})^2(x+2\sqrt{3})+6\sqrt{3} \le 6\sqrt{3},\ x \ge 0$.

Do đó: $f(a,b,c) \le \max\{f(a+c,b,0), f(0,b,a+c)\}=6\sqrt{3}$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow\ a=3-\sqrt{3}, b=\sqrt{3}, c=d=0$ và các hoán vị. Vậy $\max f(a,b,c)=6\sqrt{3}$

> **Bài 11.3.** Cho $x,y,z \in \left[\frac{1}{2},2\right]$. Chứng minh rằng: $8\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\right) \ge 5\left(\frac{y}{x}+\frac{z}{y}+\frac{x}{z}\right)+9$

Chứng minh

Đặt $f(x,y,z)=8\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\right)\geq 5\left(\frac{y}{x}+\frac{z}{y}+\frac{x}{z}\right)-9$.

Giả sử $x=\max\{x,y,z\}$. Ta có:

$$f(x,y,z)-f(x,\sqrt{xz},z)=8\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}-2\sqrt{\frac{x}{z}}\right)-5\left(\frac{y}{x}+\frac{z}{y}-2\sqrt{\frac{z}{x}}\right)=\frac{\left(y-\sqrt{xz}\right)^2(8x-5z)}{xyz}\geq 0$$

$\Rightarrow f(x,y,z)\geq f\left(x,\sqrt{xz},z\right)$. Bây giờ đặt $t=\sqrt{\frac{x}{z}}, 1\leq t\leq 2$ thì:

$$f\left(x,\sqrt{xz},z\right)=8\left(2\sqrt{\frac{x}{z}}+\frac{z}{x}-3\right)-5\left(2\sqrt{\frac{z}{x}}+\frac{x}{z}-3\right)=8\left(2t+\frac{1}{t^2}-3\right)-5\left(\frac{2}{t}+t^2-3\right)$$

$$=\frac{8}{t^2}(t-1)^2(2t+1)-\frac{5}{t}(t-1)^2(t+2)=\frac{(t-1)^2\left(8+6t-5t^2\right)}{t^2}=\frac{(t-1)^2(4+5t)(2-t)}{t^2}\geq 0.$$

Bất đẳng thức được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z$ hoặc $(x,y,z)=\left(2,1,\frac{1}{2}\right);\left(1,\frac{1}{2},2\right);\left(\frac{1}{2},2,1\right)$

XII. ĐỊNH LÝ DỒN BIẾN TỔNG QUÁT [GMV – GENERAL MIXING VARIABLES]

Trong mục này, chúng tôi sẽ giới thiệu định lý *GMV* (General Mixing Variables) dùng để dồn biến cho *n* số. Đây là một định lý rất tổng quát, bao gồm gần như toàn bộ các khả năng dồn biến.

1. Chúng ta bắt đầu bằng một số định nghĩa trong không gian $\mathbb{R}^n$.

Định nghĩa 1:

- Không gian $\mathbb{R}^n$ là tập hợp các bộ thứ tự $x=\left(x_1,x_2,...x_n\right)$ với $x_i\in\mathbb{R},\forall i$.
- Một dãy $\left\{x_m=\left(x_{1,m},x_{2,m},....,x_{n,m}\right)\right\}$ trong $\mathbb{R}^n$ gọi là hội tụ về $z=\left(z_1,z_2,...,z_n\right)\in\mathbb{R}^n$ nếu từng dãy $x_{i,m}$ hội tụ về z_i khi $m\to\infty,\forall i=1,2,...,n$.
- Cho $D\subset\mathbb{R}^n$. Một hàm số $f:D\to\mathbb{R}$ gọi là liên tục trên D nếu: với mọi dãy $\{x_m\}\subset D$ và với mọi $z\in D$ sao cho $\{x_m\}$ hội tụ về *z* thì ta đều có: $f\left(x_m\right)$ hội tụ về *f(z)*.

Định nghĩa 2: Cho $D\subset\mathbb{R}^n$. Ta nói:

- D đóng nếu với mọi dãy $\{x_m\}\subset D$ và với mọi $z\in\mathbb{R}^n$ sao cho $\{x_m\}$ hội tụ về *z* thì ta đều có $z\in D$.
- D bị chặn nếu tồn tại số thực *M* sao cho: $\forall x=\left(x_1,x_2,...x_n\right)\in D$ thì $|x_i|\leq M,\forall i=1,2,...,n$.

Ví dụ như một tập hợp hữu hạn thì đóng và bị chặn.

Chúng ta có kết quả căn bản sau đây (sẽ chứng minh ở cuối mục này).

Định lý Weierstrass: Cho D đóng và bị chặn trong $\mathbb{R}^n$ và $f: D \to \mathbb{R}$ liên tục. Thì f đạt giá trị nhỏ nhất trên D, nghĩa là tồn tại $x_0 \in D$ sao cho: $f(x_0) \le f(x), \forall x \in \mathbb{R}$. Chúng ta cũng có kết quả tương tự với giá trị lớn nhất.

• ***Bình luận:*** Định lý này là một mở rộng của một kết quả quen thuộc: "Cho $[a, b]$ là 1 khoảng đóng trong R và $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ liên tục thì f có giá trị nhỏ nhất trên $[a, b]$". Do đó, về mặt trực giác thì định lý 1 khá rõ ràng.

2. Định lý GMV: Ta sẽ luôn giả thiết rằng:

• D là 1 tập con trong $\mathbb{R}^n$, và Λ là 1 tập con đóng của D.

• $f: D \to \mathbb{R}$ là một hàm số liên tục liên tục sao cho f có giá trị nhỏ nhất trên Λ.

• $T_1, ..., T_k : D \to D$ là các phép biến đổi sao cho $T_1(x) = ... = T_k(x) = x, \forall x \in \Lambda$.

Ta sẽ đặt ra các tiêu chuẩn để giá trị nhỏ nhất của f trên Λ cũng chính là giá trị nhỏ nhất của f trên D. Ta có

Định lý GMV1: Nếu

• $f(x) \ge \min\limits_{j=\overline{1,k}} \{f(T_j(x))\}, \forall x \in D \setminus \Lambda$

• $\forall j = \overline{1,k}, \forall x \in D$ ta có $\lim\limits_{m\to\infty} T_j^m(x) \in \Lambda$, trong đó $T_j^0(x) = x, T_j^m(x) = T_j\left(T_j^{m-1}(x)\right)$

thì $f(x) \ge \min\limits_{y\in\Lambda}\{f(y)\}, \forall x \in D$.

Hơn nữa, đẳng thức không xảy ra trên $D \setminus \Lambda$ nếu $f(x) > \min\limits_{j=\overline{1,k}} f(T_j(x)), \forall x \in D \setminus \Lambda$.

Định lý GMV2: Nếu

• D đóng và bị chặn trong $\mathbb{R}^n$.

• $f(x) > \min\limits_{j=\overline{1,k}} f(T_j(x)), \forall x \in D \setminus \Lambda$.

thì $f(x) \ge \min\limits_{y\in\Lambda}\{f(y)\}, \forall x \in D$, hơn nữa đẳng thức không xảy ra trên $D \setminus \Lambda$.

Định lý GMV3: Nếu

• D đóng và bị chặn trong $\mathbb{R}^n$.

• $f(x) \ge \min\limits_{j=\overline{1,k}} f(T_j(x)), \forall x \in D \setminus \Lambda$

• Tồn tại các hàm số h_j liên tục $D \to \mathbb{R}$ thỏa mãn: $h_j(x) > h_j\left(T_j(x)\right)$, $\forall x \in D \setminus \Lambda$.

thì $f(x) \ge \min\limits_{y\in\Lambda}\{f(y)\}, \forall x \in D$.

Chứng minh

Chứng minh GMV1: Lấy $x \in D$ tùy ý. Ta có: $f(x) \ge \min\limits_{j=\overline{1,k}} f(T_j(x))$ và bằng quy nạp suy ra $f(x) \ge \min\limits_{j=\overline{1,k}} f(T_j^m(x)), \forall x \in D$. Do f liên tục và $\lim\limits_{m\to\infty} T_m(x) \in \Lambda$ nên:

$$f(x) \geq \lim_{m\to\infty}\left(\min_{j=1,k} f(T_j^m(x))\right) = \min_{j=1,k} f\left(\lim_{m\to\infty} T_j^m(x)\right) \geq \min_{y\in\Lambda} f(y)$$

Hơn nữa, nếu $f(x) > \min_{j=1,k} f(T_j(x))$ thì do $f(T_j(x)) \geq \min_{y\in\Lambda} f(y)$ nên $f(x) > \min_{y\in\Lambda} f(y)$.

Chứng minh GMV2: Do Định lý ***Weierstrass***, tồn tại $x_0 \in D$ sao cho

$f(x_0) \leq f(x), \forall x \in D$.

Nếu $x_0 \notin \Lambda$ thì $f(x_0) > \min_{j=1,k} f(T_j(x_0))$, mâu thuẫn. Vậy $x_0 \in \Lambda$ và ta có đpcm.

Chứng minh GMV3: Lấy $y_0 \in \Lambda$ sao cho $f(y_0) = \operatorname{Min}_{y\in\Lambda}\{f(y)\}$. Giả sử phản chứng rằng tồn tại $z \in D$ sao cho $f(z) < f(y_0)$. Do $h_j(x)$ bị chặn dưới trên D nên bằng cách cộng thêm một hằng số khi cần, ta có thể giả sử $h_j(x) \geq 0, \forall x \in D, \forall j = 1,\dots,k$.

Chọn $\varepsilon > 0$ đủ nhỏ ta có: $f(z) + \varepsilon\sum_{j=1}^{k} h_j(z) < f(y_0)$.

Đặt $g(x) = \min_{j=1,k}\{f(x) + \varepsilon h_j(x)\}, \forall x \in D$ thì $g: D \to \mathbb{R}$ liên tục và hơn nữa

$g(x) > \min_{j=1,k} g(T_j(x)), \forall x \in D \setminus \Lambda$ và $g(z) < f(y_0) \leq \operatorname{Min}_{y\in\Lambda}\{g(y)\}$.

Điều này mâu thuẫn với định lý 2.

• ***Bình luận:*** Tuy hình thức phát biểu ngắn gọn nhưng GMV có tầm ứng dụng cực kì rộng rãi. Cứ mỗi một (hay một vài) phép biến đổi T thích hợp là ta lại có một tiêu chuẩn dồn biến. Chẳng hạn, ta có ngay hai hệ quả sau đây.

Hệ quả 1: **[Phạm Kim Hùng, SMV-Strongly Mixing Variables]** Cho:

• $D \subset \mathbb{R}^n$ là một tập đóng, bị chặn và $s_0 = (s, s, \dots, s) \in D$.

• Phép biến đổi T như sau: với mỗi bộ n số $(a_1, a_2, \dots a_n) \in D$, ta chọn ra số lớn nhất và số nhỏ nhất rồi thay thế bằng trung bình cộng của chúng. Giả sử rằng $T: D \to D$.

• $f: D \to \mathbb{R}$ là một hàm số liên tục, đối xứng thỏa mãn: $f(a) \geq f(T(a)), \forall a \in D$.

Khi đó: $f(a) \geq f(s_0), \forall a \in D$

Chứng minh: Chọn $h(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2$ thì dễ thấy $h: D \to R$ liên tục và

$h(a) > h(T(a)), \forall a \in D \setminus \{s_0\}$. Áp dụng ***GMV3*** ta có đpcm.

• ***Ghi chú:***

Ta cũng có thể áp dụng ***GMV1***, khi đó chỉ cần kiểm tra với mọi $a \in D$ thì $\lim_{m\to\infty} T^m(a) = s_0$.

Sự kiện này khá rõ ràng về mặt trực giác, và đề nghị bạn đọc tự chứng minh. Với cách làm này, chúng ta có thể bỏ qua giả thiết D đóng và bị chặn (nghĩa là Hệ quả 1 ở trên đúng với mọi tập con D của $\mathbb{R}^n$ sao cho $T(D) \subset D$).

***Hệ quả 2:* [Đinh Ngọc An, UMV – Undefined Mixing Variables]** Cho:

• $D \subset \left\{ x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n} x_i = \text{const} \right\}$. Gọi Λ là tập hợp các phần tử trong D có t thành phần bằng 0 và $n - t$ thành phần bằng nhau $(t \geq 0)$.

• $f : D \to \mathbb{R}$ liên tục, đối xứng thỏa mãn:

$$f(a_1, a_2, ..., a_n) \geq \min\left\{ f\left(\frac{a_1 + a_2}{2}, \frac{a_1 + a_2}{2}, a_3, ..., a_n \right), f(0, a_1 + a_2, a_3, ..., a_n) \right\}$$

Thì $f(x) \geq \min_{y \in \Lambda} \{ f(y) \}, \forall x \in D$

Chứng minh: Chọn 2 phép biến đổi $T_1, T_2 : D \to D$ như sau: $T_1(a) = T_2(a) = a, \forall a \in \Lambda$ và với mỗi phần tử $a = (a_1, a_2, ..., a_n) \in D \setminus \Lambda$, chọn ra 2 chỉ số $i \neq j$ sao cho $a_i = \min\{a_t > 0, t = 1, ..., n\}$ và $a_j = \max\{a_1, a_2, ..., a_n\}$. ứng với T_1 ta thay a_i, a_j bởi trung bình cộng của chúng, ứng với T_2 ta thay a_i, a_j bởi $(0, a_i + a_j)$. Thì ta có $f(a) \geq \min\{ f(T_1(a)), f(T_2(a)) \}, \forall a \in D$.

Chọn $h_1(a_1, a_2, ..., a_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2$ và $h_2(a_1, a_2, ..., a_n) = -\max\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ thì $h_1, h_2 : D \to R$ liên tục và $h_j(a) > h_j(T_j(a)), \forall a \in D \setminus \{s_0\}, \forall j = 1, 2$. Áp dụng ***GMV3*** ta có điều phải chứng minh.

• ***Ghi chú:*** Ta cũng có thể kiểm tra với mọi $a \in D$ thì $\lim_{m \to \infty} T_1^m(a) = (s, s, ..., s)$ và

$\lim_{m \to \infty} T_2^m(a) = (0, ..., 0, r, ..., r)$ rồi áp dụng ***GMV1***.

3. Sau đây chúng ta sẽ dẫn ra vài ứng dụng cụ thể.

Bài 12.1. ***(Bất đẳng thức AM – GM)*** Cho n số thực không âm $x_1, x_2, ..., x_n$.

Chứng minh rằng: $x_1 + x_2 + ... + x_n \geq n \cdot \sqrt[n]{x_1 x_2 ... x_n}$

Chứng minh

Bằng cách chuẩn hóa, ta có thể giả sử $x_1 x_2 ... x_n = 1$ và chứng minh $x_1 + x_2 + ... + x_n \geq n$.

Tất nhiên ta chỉ cần xét khi $x_i \leq n, \forall i$.

Xét $D = \{ x = (x_1, x_2, ..., x_n) \mid x_i \in [0, n], x_1 x_2 ... x_n = 1 \}$ thì dễ thấy D đóng và bị chặn.

Xét $\Lambda = \{ x_0 = (1, 1, 1, ..., 1) \}$. Xét $f : D \to \mathbb{R}$ liên tục như sau:

Với mỗi $x=(x_1,x_2,...,x_n)\in D$ thì $f(x)=x_1+x_2+...+x_n$.

Xét T: $D\backslash\Lambda\to D$ như sau: Với mỗi $x=(x_1,x_2,...,x_n)\in D\backslash\Lambda$ thì tồn tại $x_i\neq x_j$ và ta đặt $T(x)$ là bộ thu được từ x sau khi thay x_i và x_j bởi trung bình nhân của chúng, khi đó dễ thấy $f(x)-f(T(x))=\left(\sqrt{x_i}-\sqrt{x_j}\right)^2>0$. Vậy ta có thể áp dụng GMV2 để suy ra $f(x)\geq f(x_0),\forall x\in D$, hơn nữa dấu " = " chỉ xảy ra khi $x=x_0$.

Bài 12.2. Cho $k>0$, $x_1,x_2,...,x_n\geq 0$ và $x_1+x_2,...+x_n=n$.

Chứng minh rằng: $(x_2x_3...x_n)^k+(x_1x_3...x_n)^k+...+(x_1x_2...x_{n-1})^k\leq \max\left\{n,\left(\frac{n}{n-1}\right)^k\right\}$

Chứng minh

Đặt $f(x_1,x_2,...,x_n)=(x_2x_3...x_n)^k+(x_1x_3...x_n)^k+...+(x_1x_2...x_{n-1})^k$.

Không giảm tổng quát, giả sử $x_1\leq x_2$. Khi đó $x_1=s-t,x_2=s+t$ với $t\in[0,s]$.

Xét $f(x_1,x_2,...,x_n)=g(t)=A\left[(s+t)^k+(s-t)^k\right]+B(s^2-t^2)^k$

với $A=(x_3...x_n)^k$, $B=(x_4x_5...x_n)^k+(x_3x_5...x_n)^k+...+(x_3x_4...x_{n-1})^k$.

Ta có: $g'(t)=Ak\left[(s+t)^{k-1}-(s-t)^{k-1}\right]-2Bkt(s^2-t^2)^{k-1}\geq 0$

$$\Leftrightarrow h(t)=(s-t)^{1-k}-(s+t)^{1-k}-\frac{2Bt}{A}\geq 0$$

$h'(t)=(k-1)\left[(s-t)^{-k}+(s+t)^{-k}\right]-\frac{2B}{A}$, $h''(t)=k(k-1)\left[(s-t)^{-k-1}-(s+t)^{-k-1}\right]>0$

Vậy $h(t)$ lồi, hơn nữa $0=h(0),\lim\limits_{t\to s}h(t)=+\infty$. Do đó, hoặc là $h(t)$ sẽ luôn dương trên $(0,s)$, hoặc là $h(t)$ đổi dấu từ âm sang dương trên $(0,s)$. Mà $g'(t)$ cùng dấu với $h(t)$ nên ta suy ra $g(t)\leq\max\{g(0),g(s)\}$. Từ đó, ta có:

$$f(x_1,x_2,...,x_n)\leq\max\left\{f\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{x_1+x_2}{2},x_3,...,x_n\right),f(0,x_1+x_2,x_3,...,x_n)\right\}$$

Áp dụng ***UMV*** ta có điều phải chứng minh.

• **Nhận xét:** Ta thấy rằng nếu giữa các biến chỉ có một đẳng thức ràng buộc thì ta có thể cố định $(n-2)$ biến và cho 2 biến biến thiên vẫn có thể bảo toàn ràng buộc đó. Khi đó, Hệ quả 3 cho phép chúng ta thay vì quan sát sự biến thiên của cả n biến, có thể chỉ cần quan sát sự biến thiên của 2 biến. Trong trường hợp giữa các biến có nhiều đẳng thức ràng buộc hơn thì số biến cho biến thiên phải nhiều hơn để bảo toàn các ràng buộc đó. Nếu như phần lớn các bất đẳng thức mà chúng ta đã gặp chỉ có một đẳng thức ràng buộc các biến thì các bất đẳng thức mà giữa các biến có nhiều đẳng thức ràng buộc vẫn là một dạng toán lạ và nói chung là rất khó. Chúng ta dẫn ra hai bài toán như vậy.

Bài 12.3. Cho $n \geq 3$, xét tập hợp D gồm tất cả các bộ n số thực dương thỏa mãn $a_1 + a_2 + ... + a_n = A$, $a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 = B$, trong đó A, B là các hằng số dương cho trước thỏa mãn $nB > A^2$. Chứng minh rằng:

a) Trong D có duy nhất một phần tử $(b_1, b_2, ..., b_n)$ sao cho $b_2 = b_3 = ... = b_n$.

b) Biểu thức $f(a_1, a_2, ..., a_n) = a_1 a_2 ... a_n$ đạt giá trị lớn nhất trong D khi và chỉ khi $(a_1, a_2, ..., a_n)$ là một hoán vị của $(b_1, b_2, ..., b_n)$.

Chứng minh

a) Giả sử $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$ thỏa $a_2 = a_3 = ... = a_n$, để $a \in D$ ta cần $a_1, a_2 > 0$.
$a_1 + (n-1)a_2 = A$, $a_1^2 + (n-1)a_2^2 = B$. Suy ra a_2 là nghiệm dương của phương trình
$\left(A - (n-1)a_2\right)^2 = B - (n-1)a_2^2 \Leftrightarrow n(n-1)a_2^2 - 2A(n-1)a_2 - B = 0$.
Phương trình này có 1 nghiệm dương duy nhất và ta có đpcm.
b)
• *Bước 1:* Ta chứng minh cho trường hợp $n = 3$. Sử dụng hằng đẳng thức

$$a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 - 3a_1 a_2 a_3 = \frac{1}{2}\left(a_1 + a_2 + a_3\right)\left[3(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) - (a_1 + a_2 + a_3)^2\right]$$

Suy ra $f(a_1, a_2, a_3) = 3a_1 a_2 a_3 + \frac{1}{2}A(3B - A)$, cho nên $f(a_1, a_2, a_3)$ đạt giá trị lớn nhất trên D khi và chỉ khi có 2 trong 3 biến a_i bằng nhau (các bạn có thể chứng minh điều này bằng cách khảo sát đưa về khảo sát hàm một biến – xem chuyên đề phương pháp ABC của Nguyễn Anh Cường ở chương sau).

• *Bước 2:* Bây giờ xét trường hợp n tổng quát. Lấy Λ là tập hợp tất cả các bộ n số trong D sao cho có $(n - 1)$ số bằng nhau. Xét phép biến đổi $T : D \setminus \Lambda \to D$ như sau. Giả sử $a = (a_1, a_2, ..., a_n) \in D \setminus \Lambda$, ta luôn có thể chọn ra 3 số, mà không giảm tổng quát có thể giả sử là (a_1, a_2, a_3), sao cho chúng đôi một phân biệt. Khi đó, tồn tại duy nhất bộ 3 số thực dương (e_1, e_2, e_3) sao cho $e_1 + e_2 + e_3 = a_1 + a_2 + a_3$, $e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$. Phép biến đổi T là thay thế (a_1, a_2, a_3) bởi (e_1, e_2, e_3). Rõ ràng $T(a) \in D$, và áp dụng trường hợp $n = 3$ ta được $f(T(a)) > f(a)$. Suy ra giá trị nhỏ nhất của $f(a)$ đạt được khi và chỉ khi $a \in \Lambda$.

Bài 12.4. Cho $n \geq 3$, xét tập hợp D gồm tất cả các bộ n số thực dương có tổng bằng A và có tích bằng B, trong đó A, B là các hằng số dương cho trước thỏa mãn $A^n > n^n B$. Chứng minh rằng:

a) Trong D có đúng 2 phần tử $(b_1, b_2, ..., b_n)$, $(c_1, c_2, ..., c_n)$ sao cho

$$b_1 > b_2 = b_3 = ... = b_n \text{ và } c_1 < c_2 = c_3 = ... = c_n.$$

b) Biểu thức $f(a_1, a_2, ..., a_n) = a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2$ đạt giá trị lớn nhất (tương ứng *nhỏ nhất*) trong D khi và chỉ khi $(a_1, a_2, ..., a_n)$ là một hoán vị của $(b_1, b_2, ..., b_n)$ (tương ứng $(c_1, c_2, ..., c_n)$).

Chứng minh

a) Giả sử $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$ thỏa $a_2 = a_3 = ... = a_n$. để $a \in D$ ta cần $a_1, a_2 > 0$.

$a_1 + (n-1)a_2 = A$, $a_1 a_2^{n-1} = B$. Suy ra a_2 là nghiệm dương của phương trình

$A - (n-1)a_2 = \frac{B}{a_2^{n-1}} \Leftrightarrow (n-1)a_2^n - Aa_2^{n-1} + B = 0$. Xét đa thức $d(x) = (n-1)x^n - Ax^{n-1} + B$.

$d'(x) = (n-1)x^{n-2}(nx - A) \Rightarrow d(x)$ nghịch biến trên $\left(0; \frac{A}{n}\right)$ và đồng biến trên $\left(\frac{A}{n}; \infty\right)$.

Hơn nữa, $d(0) = B > 0 > -\left(\frac{A}{n}\right)^n + B = d\left(\frac{A}{n}\right)$ nên đa thức $d(x)$ có đúng 2 nghiệm dương, một nghiệm thuộc $\left(0; \frac{A}{n}\right)$ và một nghiệm thuộc $\left(\frac{A}{n}; \infty\right)$. Từ đó ta có đpcm.

b)

• ***Bước 1:*** Ta chứng minh cho trường hợp $n = 3$. Trước hết, ta sẽ chứng tỏ với mọi $a = (a_1, a_2, a_3) \in D$ thì $a_i \in [c_1, b_1]$ với $i = 1, 2, 3$. Ta chứng minh với $i = 1$ là đủ.

Ta có: $\frac{4B}{a_1} = 4a_2 a_3 \le (a_2 + a_3)^2 = (A - a_1)^2 \Leftrightarrow a_1(A - a_1)^2 \ge 4B$

Đa thức $g(x) = x(A-x)^2 - 4B$ có 3 nghiệm, trong đó 2 nghiệm nhỏ hơn là b_1 và c_1

Thật vậy, vì $b_1 + 2b_2 = A, b_1 b_2^2 = B \Rightarrow (A - b_1)^2 = 4b_2^2 = \frac{4B}{b_1}$ nên b_1 là nghiệm của g(x) và tương tự với c_1, hơn nữa theo định lý ***Vi-et*** tổng 3 nghiệm là $2A > 2b_1 + c_1$ (nếu ngược lại $2A \le 2b_1 + c_1 \Rightarrow c_1 \ge 2A - 2b_1 = 4b_2 \Rightarrow c_2 = \frac{b_1 b_2^2}{c_1 c_2} \le \frac{b_1 b_2^2}{c_1^2} \le \frac{b_1}{16}$, mâu thuẫn với $3c_2 \ge c_1 + 2c_2 = A > b_1$) nên nghiệm thứ ba lớn hơn b_1.

Vậy $g(a_1) \ge 0 \Leftrightarrow a_1 \in [c_1, b_1]$. Đặc biệt, ta có $b_2, c_2 \in [c_1, b_1] \Rightarrow c_1 < b_2 < c_2 < b_1$.

Bây giờ ta có $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = a_1^2 + (a_2 + a_3)^2 - 2a_2 a_3 = a_1^2 + (A - a_1)^2 - \frac{2B}{a_1}$.

Xét hàm số $h(x) = x^2 + (A-x)^2 - \frac{2B}{x}$ với $x \in [c_1, b_1]$. Ta có: $h'(x) = \frac{2(2x^2 - Ax + B)}{x^2}$

Như trong phần ghi chú, ta thấy phương trình $h'(x) = 0$ có đúng 2 nghiệm dương là b_2 và c_2, hơn nữa $h'(x)$ âm trên (b_2, c_2) và dương trên $(c_1, b_2) \cup (c_2, b_1)$. Mặt khác, nếu $a_1 \in \{b_1, b_2\}$ thì (a_1, a_2, a_3) là một hoán vị của (b_1, b_2, b_3) nên $h(b_1) = f(b_1, b_2, b_3) = h(b_2)$, tương tự $h(c_1) = f(c_1, c_2, c_3) = h(c_2)$. Từ đó suy ra $f(c_1, c_2, c_3) \le f(a_1, a_2, a_3) \le f(b_1, b_2, b_3)$

Hơn nữa, đẳng thức chỉ xảy ra khi (a_1, a_2, a_3) là một hoán vị của (b_1, b_2, b_3) hoặc (c_1, c_2, c_3) tương ứng (đpcm).

• ***Bước 2:*** Bây giờ xét trường hợp n tổng quát. Ta chứng minh cho trường hợp giá trị nhỏ nhất, còn trường hợp giá trị lớn nhất hoàn toàn tương tự. Lấy Λ là tập hợp tất cả các hoán vị của $(c_1, c_2, ..., c_n)$, nghĩa là tập hợp tất cả các bộ n số trong D sao cho có $(n-1)$ số bằng nhau và lớn hơn số còn lại. Xét phép biến đổi $T : D \setminus \Lambda \to D$ như sau.

Giả sử $a = (a_1, a_2, ..., a_n) \in D \setminus \Lambda$, ta luôn có thể chọn ra 3 số, mà không giảm tổng quát có thể giả sử là (a_1, a_2, a_3), sao cho không rơi vào trường hợp 2 số bằng nhau và lớn hơn số còn lại.

Khi đó, tồn tại duy nhất bộ 3 số thực dương (e_1, e_2, e_3) sao cho $e_1 < e_2 = e_3$,

$e_1 + e_2 + e_3 = a_1 + a_2 + a_3$, $e_1 e_2 e_3 = a_1 a_2 a_3$. Phép biến đổi T là thay thế (a_1, a_2, a_3) bởi (e_1, e_2, e_3). Rõ ràng $T(a) \in D$, và áp dụng trường hợp $n = 3$ ta được $f(T(a)) > f(a)$.

Suy ra giá trị nhỏ nhất của $f(a)$ đạt được khi và chỉ khi $a \in \Lambda$.

Đó chính là điều phải chứng minh.

• Để kết thúc mục này, chúng tôi dẫn ra một chứng minh cho Định lý ***Weierstrass***.

Định nghĩa 3: Cho 1 dãy số $\{a_m\}_{m=1}^{\infty}$ (trong $\mathbb{R}$ hoặc trong $\mathbb{R}^n$). Một dãy $\{a_{m_k}\}_{k=1}^{\infty}$ được gọi là một dãy con của dãy $\{a_m\}_{m=1}^{\infty}$ nếu $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$ là một dãy tăng ngặt các số nguyên dương.

*Ví dụ: $\{a_{2m}\}_{m=1}^{\infty}$ là một dãy con của dãy $\{a_m\}_{m=1}^{\infty}$. Dưới đây các cận của chỉ số sẽ được bỏ qua nếu không gây hiểu lầm.

Bổ đề 1: [Weierstrass] Mỗi dãy $\{a_m\}$ bị chặn trong $\mathbb{R}$ thì có một dãy con hội tụ.

Chứng minh: Sử dụng kết quả "Mọi dãy số thực đơn điệu và bị chặn thì hội tụ" thì ta chỉ cần chứng minh có một dãy con đơn điệu.

Xét tập $T = \{m \in \mathbb{Z}^+ \mid \exists m' > m : a_{m'} \geq a_m\}$

Nếu T hữu hạn thì dãy $\{a_m\}$ sẽ giảm kể từ 1 chỉ số nào đó. Nếu T vô hạn thì ta sẽ trích được 1 dãy con tăng. Trong cả hai trường hợp thì ta luôn có 1 dãy con đơn điệu.

Bổ đề 2: [Weierstrass] Mỗi dãy $\{a_m\}$ bị chặn trong $\mathbb{R}^n$ thì có một dãy con hội tụ.

Chứng minh: Xét $\{a_m = (x_{1,m}, ..., x_{n,m})\}$ là một dãy bị chặn trong $\mathbb{R}^n$. Khi đó dãy $\{x_{1,m}\}$ bị chặn trong $\mathbb{R}$ nên có 1 dãy con $\{x_{1,m_{k_1}}\}$ hội tụ. Dãy $\{x_{2,m_{k_1}}\}$ cũng bị chặn trong $\mathbb{R}$ nên có 1 dãy con $\left\{x_{2,m_{k_2}}\right\}$ hội tụ. Bằng cách lấy "dãy con của dãy con" liên tiếp như vậy, cuối cùng ta thu được dãy con $\left\{a_{m_k}=\left(x_{1,m_k},\dots,x_{n,m_k}\right)\right\}$ mà $\forall i=\overline{1,n}$, ta có dãy $\left\{x_{i,m_k}\right\}$ hội tụ trong $\mathbb{R}$. Điều đó cũng có nghĩa là dãy $\left\{a_{m_k}\right\}$ hội tụ trong $\mathbb{R}^n$.

Bổ đề 3: (Tính đầy đủ của $\mathbb{R}$) Cho A là 1 tập bị chặn trong $\mathbb{R}$. Thì tồn tại $M\in\mathbb{R}$ sao cho: $M\le A$ (nghĩa là $M\le a,\forall a\in A$) và có một dãy $\{a_k\}$ trong A hội tụ về M. Ta sẽ kí hiệu $M=\inf A$.

Chứng minh: Ta chứng minh rằng $\forall\varepsilon>0$, $\exists a\in A$, $a-\varepsilon\le A$. Giả sử ngược lại. Khi đó lấy $x_1\in A$ tùy ý, bằng quy nạp ta xây dựng được dãy $\{x_m\}$ trong A sao cho

$x_{m+1}\le x_m-\varepsilon,\forall m\in\mathbb{Z}^+$

Khi đó ta có: $x_m\le x_1-(m-1)\varepsilon,\forall m\in\mathbb{Z}^+$ và điều này mâu thuẫn với A bị chặn dưới.

Như vậy, $\forall m\in\mathbb{Z}^+$, tồn tại $a_m\in A$ sao cho $a_m-\dfrac{1}{m}\le A$. Vì dãy $\{a_m\}$ bị chặn nên có dãy con $\left\{a_{m_k}\right\}$ hội tụ về M trong $\mathbb{R}$. Ta chứng minh $M\le A$ nữa là xong. Thật vậy, lấy $a\in A$ bất kì thì $a_{m_k}-\dfrac{1}{m_k}\le a,\forall k\in\mathbb{Z}^+$ nên cho $k\to\infty$ suy ra $M\le a$.

Chứng minh định lý Weierstrass: Xét $A=f(D)$. Ta chứng minh A có phần tử nhỏ nhất.

Ta sẽ chỉ ra A có tính chất sau: nếu dãy $\{a_m\}$ chứa trong A và $a_m\to\alpha$ thì $\alpha\in A$. Thật vậy, theo định nghĩa ta có $x_m\in D$ sao cho $f(x_m)=a_m\to\alpha$. Vì dãy $\{x_m\}$ bị chặn (chứa trong D) nên có dãy con $\left\{x_{m_k}\right\}$ hội tụ về c trong $\mathbb{R}^n$. Vì D đóng nên $c\in D$. Vì $f(x_m)\to\alpha$ nên $f\left(x_{m_k}\right)\to\alpha$. Mặt khác, vì $\left\{x_{m_k}\right\}\to c$ và f liên tục nên $f\left(x_{m_k}\right)\to f(c)$. Vì giới hạn là duy nhất nên $f(c)=\alpha$.

Bây giờ, ta thấy A bị chặn dưới (vì từ lập luận trên với $\alpha=-\infty$ ta sẽ gặp mâu thuẫn).

Do đó tồn tại $M=\inf A$. Do định nghĩa *inf* và tính chất của A vừa chỉ ra ở trên, suy ra $M\in A$.

Vậy A có phần tử nhỏ nhất là M. Định lý chứng minh xong.

XIII. NHÌN LẠI VÀ BÀI TẬP

Các bạn thân mến, có lẽ bây giờ là lúc tạm dừng để nhìn lại hành trình vừa qua. Như chúng tôi đã nói trong **VI.**, dồn biến đã được biết đến từ rất sớm thông qua hàm lồi và dẫn đến các kết quả tuyệt đẹp. Bất đẳng thức ***Jensen*** có thể xem như một tiêu chuẩn để dồn biến về tâm một cách toàn cục. Về các kết quả này, các bạn có thể tìm đọc một cách rất đầy đủ trong cuốn bất đẳng thức nổi tiếng của ba nhà toán học ***Hardy – Polya – Littewood***.

Ở trên, việc giới thiệu nhiều kỹ thuật dồn biến cho bất đẳng thức ba biến không đơn thuần chỉ là liệt kê tất cả các kỹ thuật dồn biến mà quan trọng hơn là để các bạn nắm được tư tưởng của phương pháp. Và cũng giống như nhiều phương pháp khác, có khi chúng ta không thể tiếp cận ngay bài toán bằng phương pháp dồn biến, mà cần phải biến đổi đến tình huống thích hợp. Ví dụ sau sẽ minh họa cho điều này.

Bài 13.1. [VMEO I] Tìm tất cả các số thực k sao cho tồn tại $c_k > 0$ thỏa mãn:

$$(1+x^2)(1+y^2)(1+z^2) \geq c_k\,(x+y+z)^k \;,\; \forall a,\, b,\, c > 0$$

Với các giá trị k tìm được, hãy xác định hằng số c_k tốt nhất.

Bằng giới hạn ta dễ dàng tìm được $k \in [0,\, 2]$, song tìm hằng số tốt nhất có vẻ phức tạp hơn nhiều. Các bạn có thể thử để thấy những trở ngại khi chúng ta dồn các biến $x,\, y,\, z$.

Tuy nhiên, bằng cách đổi biến $x = \operatorname{tg}\alpha,\, y = \operatorname{tg}\beta,\, z = \operatorname{tg}\gamma$ với $\alpha, \beta, \gamma \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ thì thật bất ngờ, ta dễ dàng dồn về một biến bằng cách thay α, β, γ bằng trung bình cộng của chúng. Phần còn lại của bài toán chỉ là khảo sát hàm một biến, hoặc đơn giản là áp dụng bất đẳng thức ***AM – GM*** suy rộng.

Đọc xong phần bất đẳng thức ba biến, có lẽ bạn đọc sẽ có cảm giác là hình như mọi bất đẳng thức đều có thể chuyển về trường hợp hai biến bằng nhau hoặc một biến đạt giá trị tại biên. Phải nói rằng điều này đúng cho hầu hết các bất đẳng thức mà chúng ta đã gặp. Tuy nhiên, ngay sau đây chúng tôi sẽ cung cấp cho các bạn một ví dụ nằm ngoài "thông lệ" đó. Trong ví dụ này, thậm chí bất đẳng thức đang xét là đa thức đối xứng thuần nhất ba biến.

Bài 13. 2. Cho $a,\, b,\, c \geq 0$. Chứng minh rằng:

$$(a^3+b^3+c^3-6abc)^2 + \left[(a+b+c)^3 - 36abc\right]^2 \geq 0$$

Chỉ xảy ra dấu "=" trong trường hợp $(a,\, b,\, c) = (t,\, 2t,\, 3t)$, $t \geq 0$ (và các hoán vị).

Còn với những bất đẳng thức hoán vị thì trường hợp đẳng thức không xảy ra tại một trong ba trường hợp có thể dồn biến được khá phổ biến, điển hình như bài toán:

Bài 13.3. Cho các số thực: a,b,c. CMR: $(a^2+b^2+c^2)^2 \geq 3(a^3b+bc^3+c^3a)$

Ngoài trường hợp $a=b=c$ thì đẳng thức còn xảy ra khi $a=\sin^2\frac{4\pi}{7}, b=\sin^2\frac{2\pi}{7}, c=\sin^2\frac{\pi}{7}$

Trong trường hợp này thì rõ ràng những kiểu dồn biến chúng ta vừa xét không thể áp dụng trực tiếp được.

Trong trường hợp n biến tổng quát thì việc dồn biến trở nên cực kì khó khăn. Trong trường hợp đẳng thức xảy ra khi n biến bằng nhau thì bất đẳng thức Jensen cho phép dồn một lúc cả n biến nhưng đáng tiếc nó chỉ giải quyết được một lượng khá nhỏ các bất đẳng thức, một kỹ thuật tốt hơn là dồn $(n-1)$ biến bằng nhau trước như trong **VII.** Các kỹ thuật này rất tốt ở chỗ nó chỉ cần dồn biến hữu hạn lần.

Bây giờ ta phải đối mặt với khả năng cực trị đạt tại cả tâm và biên. Rõ ràng khả năng dồn về một biến là không cao. Do đó chúng ta hi vọng vào điều tốt nhất là có một cách dồn biến toàn cục, đại loại như bất đẳng thức Jensen. Với mục tiêu đó, hai định lý tuyệt đẹp sớm ra đời phải kể đến là định lý ***SMV*** (dồn biến mạnh) và ***UMV*** (dồn biến không xác định). Hai định lý này có thể gọi là "anh em song sinh". ***SMV*** dùng để "chuyên trị" các bất đẳng thức cực trị đạt được tại tâm, trong đó cải tiến đáng kể nhất là không cần dồn được hai biến bất kì về bằng nhau mà chỉ cần dồn biến lớn nhất và biến nhỏ nhất. ***UMV*** thì đòi hỏi giả thiết đặt lên hai biến bất kì, tuy nhiên nó cho phép ta dung hòa cả hai trường hợp cực trị đạt được tại tâm và tại biên dưới một dạng tổng quát.

Chúng tôi đã quan sát hai kết quả trên và nhận thấy sự không cần thiết của việc tách rời hai trường hợp mà có thể hợp nhất ưu điểm của hai định lý. Định lý ***GMV*** không chỉ đơn thuần là tổng quát hai định lý kể trên, mà nó mở ra một chân trời mới với vô vàn các kiểu dồn biến. Ý tưởng chính là nếu bộ $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ chưa rơi vào các trường hợp "tới hạn" (tức là thuộc Λ) thì luôn có thể thay thế bằng một bộ (là $T(x)$). Nếu như sau khi thay thế vô hạn lần n biến sẽ tiến về giá trị trung bình (chẳng hạn như ***SMV*** ("cổ điển")) thì rõ ràng ta chỉ cần xét trường hợp $x\in\Lambda$. Thậm chí khi điều này không có thì dưới các điều kiện phụ trợ khác kết quả vẫn được chỉ ra.

Bài 1. [Mathlinks] Cho a, b, c là các số dương có tích bằng 1.

Chứng minh rằng: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{6}{a+b+c}\ge 5$

Bài 2. [MOSP 2001] Cho $a, b, c>0$ và $abc=1$. Chứng minh rằng:

$$(a+b)(b+c)(c+a)\ge 4(a+b+c-1)$$

Bài 3. Cho $a,b,c\ge 0$. Chứng minh rằng:

$$2(a^3+b^3+c^3)+(ab+bc+ca)+2abc+1\ge 2(a^2+b^2+c^2)+bc(b+c)+ac(a+c)+ab(a+b)$$

Bài 4. Cho $x, y, z\ge 0$ thỏa mãn $x^2+y^2+z^2=3$.

Chứng minh rằng: $7(xy+yz+zx)\le 12+9xyz$

Bài 5. Cho $a, b, c\ge 0$ thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng:

$$a^2+b^2+c^2+6\ge\frac{3}{2}\left(a+b+c+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

Bài 6. Cho $a, b, c \geq 0$. Chứng minh rằng $\dfrac{1}{\sqrt{4a^2+bc}}+\dfrac{1}{\sqrt{4b^2+ca}}+\dfrac{1}{\sqrt{4c^2+ab}} \geq \dfrac{4}{a+b+c}$

Bài 7. Cho $a, b, c \geq 0$ thỏa mãn $a+b+c=2$.

Chứng minh rằng: $(a^2+ab+b^2)(b^2+bc+c^2)(c^2+ca+a^2) \leq 3$

Bài 8. [Trung Quốc 2005] Cho $a, b, c > 0$ và $ab+bc+ca=\dfrac{1}{3}$.

Chứng minh rằng: $\dfrac{1}{a^2-bc+1}+\dfrac{1}{b^2-ca+1}+\dfrac{1}{c^2-ab+1} \leq 3$

Bài 9. Cho $a, b, c \in [p, q]$ với $0 < p \leq q$. Tìm giá trị lớn nhất của: $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}$

Bài 10. [Tổng quát RMO2000] Cho $a, b, c \geq 0$ và $a+b+c=3$. Tìm hằng số $k > 0$ nhỏ nhất sao cho bất đẳng thức sau luôn đúng: $a^k+b^k+c^k \geq ab+bc+ca$.

Bài 11. [Mathlinks] Cho $a, b, c \geq 0$ và $ab+bc+ca=1$.

Chứng minh rằng: $\dfrac{1+a^2b^2}{(a+b)^2}+\dfrac{1+b^2c^2}{(b+c)^2}+\dfrac{1+c^2a^2}{(c+a)^2} \geq \dfrac{5}{2}$

Bài 12. Chứng minh: $\sqrt{\dfrac{a}{8b+c}}+\sqrt{\dfrac{b}{8c+a}}+\sqrt{\dfrac{c}{8a+b}} \geq 1\ \forall a,b,c>0$

Bài 13. Cho $x, y, z \geq 0$ thỏa mãn $a+b+c=1$.

Chứng minh rằng: $\sqrt{x+y^2}+\sqrt{y+z^2}+\sqrt{z+x^2} \geq 2$

Bài 14. Cho $a,b,c \geq 0$. Chứng minh: $\dfrac{ab+4bc+ca}{b^2+c^2}+\dfrac{ac+4ab+bc}{b^2+a^2}+\dfrac{ab+4ac+bc}{a^2+c^2} \geq 4$

Bài 15. Cho $a, b, c \geq 0$ thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=1$.

Chứng minh rằng: $\dfrac{1}{1-ab}+\dfrac{1}{1-bc}+\dfrac{1}{1-ca} \leq \dfrac{9}{2}$

Bài 16. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác.

Tìm hằng số tốt nhất cho bất đẳng thức: $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{a}+k\dfrac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca} \geq \dfrac{a}{c}+\dfrac{b}{a}+\dfrac{c}{b}+k$

Bài 17. Cho $x, y, z \in [-1, 1]$ và $x+y+z=0$.

Chứng minh rằng $\sqrt{1+x+\dfrac{7}{9}y^2}+\sqrt{1+y+\dfrac{7}{9}z^2}+\sqrt{1+z+\dfrac{7}{9}x^2} \geq 3$

Bài 18. Cho $a,b,c \geq 0$.

Chứng minh rằng: $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{a+c}+\dfrac{c}{a+b}+\dfrac{3(a^2b+b^2c+c^2a)}{ab^2+bc^2+ca^2} \geq 4$

Bài 19. Cho $a,b,c \geq 0$. Chứng minh: $\sqrt{1+\dfrac{48a}{b+c}}+\sqrt{1+\dfrac{48b}{a+c}}+\sqrt{1+\dfrac{48c}{b+a}} \geq 15$

Bài 20. Cho $a, b, c \ge 0$, $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng:

$$a^4 + b^4 + c^4 - 3abc \ge 6\sqrt{2}(a-b)(b-c)(c-a)$$

Bài 21. Cho $a, b, c \ge 0$, $a + b + c = 2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$(a^2 - ab + b^2)(b^2 - bc + c^2)(c^2 - ca + a^2)$$

Bài 22. Cho $a, b, c \ge 0$. Tìm hằng số k lớn nhất để bất đẳng thức sau đúng:

$$\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} + k\frac{a^2+b^2+c^2}{(a+b+c)^2} \ge \frac{3}{2} + \frac{k}{3}$$

Bài 23. Cho $a,b,c \ge 0$. Chứng minh rằng hằng số tốt nhất của bất đẳng thức:

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{a^2b+b^2c+c^2a} + \frac{kabc}{ab^2+bc^2+ca^2} \ge 1 + k \text{ là } k = \frac{3}{\sqrt[3]{4}} - 1.$$

Bài 24. Cho $a, b, c \ge 0$ thỏa mãn $ab + bc + ca + abc = 4$.

Chứng minh rằng: $a + b + c \ge ab + bc + ca$

Bài 25. Cho $a, b, c \ge 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \ge \frac{1}{a+b+c} + \frac{24(a^2+b^2+c^2)}{(a+b+c)^3}.$$

Bài 26. Cho $a, b, c \ge 0$ thỏa mãn $ab + bc + ca = 3$.

Tìm hằng số tốt nhất cho bất đẳng thức: $\dfrac{1+kab}{a^2+b^2} + \dfrac{1+kbc}{b^2+c^2} + \dfrac{1+kca}{c^2+a^2} \ge \dfrac{3(k+1)}{2}$

Bài 27. Cho $a, b, c \ge 0$ thỏa mãn $\min\{ab, bc, ca\} \ge \frac{1}{4}$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{(1+a)^2} + \frac{1}{(1+b)^2} + \frac{1}{(1+c)^2} \ge \frac{3}{(1+\sqrt[3]{abc})^2}$$

Bài 28. Cho $a, b, c \ge 0$ thỏa mãn $ab + bc + ca + abc = 4$.

Tìm hằng số tốt nhất của bất đẳng thức: $a^2 + b^2 + c^2 + 3k \ge (k+1)(ab + bc + ca)$

Bài 29. Cho $a,b,c \ge 0$ thỏa mãn $a + b + c = 1$.

Chứng minh rằng $\dfrac{a}{\sqrt{a+2b}} + \dfrac{b}{\sqrt{b+2c}} + \dfrac{c}{\sqrt{c+2a}} \le \sqrt{\dfrac{2}{3}}$

Bài 30. Cho $a,b,c,d \ge 0$ thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4$.

Chứng minh rằng $\dfrac{1}{3-abc} + \dfrac{1}{3-bcd} + \dfrac{1}{3-cda} + \dfrac{1}{3-dab} \le 2$

Bài 31. Cho $a, b, c \ge 0$. Tìm hằng số k lớn nhất sao cho bất đẳng thức sau đây đúng:

$$\frac{a}{b+2c} + \frac{b}{c+2a} + \frac{c}{a+2b} + \frac{3kabc}{a^3+b^3+c^3} \ge 1 + k$$

Bài 32. Cho $a, b, c \ge 0$ thỏa mãn $abc = 1$. Tìm hằng số k tốt nhất (lớn nhất) cho bất đẳng thức: $\frac{a}{a+kbc} + \frac{b}{b+kca} + \frac{c}{c+kab} \le \frac{a+b+c}{1+k}$.

Bài 33. Cho $a, b, c \ge 0$. Chứng minh rằng:

$$a^2+b^2+c^2+\sqrt{2}abc+\left(\sqrt{2}+1\right)^2 \ge (2+\sqrt{2})(ab+bc+ca)$$

Bài 34. Cho $n > 2, n \in \mathbb{N}$ và $x_1, x_2, ..., x_n \ge 0$ thỏa mãn $x_1 + x_2 + ... + x_n = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = x_1^3 x_2^2 + x_2^3 x_3^2 + ... + x_n^3 x_1^2 + n^{2(n-1)}\left(x_1 x_2 ... x_n\right)^3$$

Bài 35. Cho $a, b, c \ge 0$ thỏa mãn $a+b+c=3$.

Tìm hằng số tốt nhất cho bất đẳng thức $\left(a^5+b^5+c^5-3\right) \ge k\left(a^3+b^3+c^3-3\right)$

Bài 36. Cho $a, b, c \ge 0$ thỏa mãn $abc = 1$ Chứng minh rằng:

$$a^2+b^2+c^2+9(ab+bc+ca) \ge 10(a+b+c)$$

Bài 37. Cho $a, b, c \ge 0$ thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=3$.

Tìm hằng số tốt nhất cho bất đẳng thức: $a^3+b^3+c^3+kabc \ge 3+k$

Bài 38. Cho tam giác ABC có độ dài 3 cạnh là $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Gọi p là nửa chu vi của tam giác và m_a, m_b, m_c là độ dài ba đường trung tuyến tương ứng hạ từ A, B, C xuống các cạnh đối diện. Chứng minh rằng:

$$m_a + m_b + m_c \le \sqrt{3p^2 + \frac{1}{2}\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]}$$

Bài 39. Cho tam giác nhọn ABC. Chứng minh rằng:

a) $\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2} \ge \frac{4}{3}\left(1+\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right)$

b) $\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2} \ge \frac{4}{\sqrt{3}}\left(1+\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\right)$

Bài 40. Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng:

$$\cos\frac{A-B}{2}+\cos\frac{B-C}{2}+\cos\frac{C-A}{2} \ge \frac{2}{\sqrt{3}}(\sin A+\sin B+\sin C)$$

Bài 41. Cho tam giác ABC không có góc tù.

a) Chứng minh: $\frac{\sin B\sin C}{\sin A}+\frac{\sin C\sin A}{\sin B}+\frac{\sin A\sin B}{\sin C} \ge \frac{5}{4}\sqrt{2+\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C}$

b) Khẳng định hoặc phủ định bất đẳng thức sau:

$$\frac{\sin B\sin C}{\sin A}+\frac{\sin C\sin A}{\sin B}+\frac{\sin A\sin B}{\sin C} \ge \frac{5}{2}+4\left(3\sqrt{3}-5\right)\cos A\cos B\cos C$$

Bài 42. Cho a, b, c, d thỏa mãn: $a+b+c+d=2$. Chứng minh rằng:

$$a^4+b^4+c^4+d^4-4abcd\ge(a-b)(c-d)$$

Bài 43. Xét 4 số thực a, b, c, d thỏa mãn $a^2+b^2+c^2+d^2=1$.

Chứng minh rằng: $\frac{1}{1-ab}+\frac{1}{1-bc}+\frac{1}{1-cd}+\frac{1}{1-da}+\frac{1}{1-db}+\frac{1}{1-ca}\le 8$

Bài 44. Cho các số thực x, y, z, t thỏa mãn $\max\{xy, yz, zt, tx\}\le 1$. Chứng minh:

$$\sqrt{1-xy+y^2}+\sqrt{1-yz+z^2}+\sqrt{1-zt+t^2}+\sqrt{1-tx+x^2}\ge\sqrt{16+(x-y+z-t)^2}$$

Bài 45. ho các số thực $x, y, z, t\in[-1;1]$ thỏa mãn $x+y+z+t=0$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{1+x+y^2}+\sqrt{1+y+z^2}+\sqrt{1+z+t^2}+\sqrt{1+t+x^2}\ge 4$$

Bài 46. Cho $a,b,c,d\ge 0$ thỏa mãn $a^2+b^2+c^2+d^2=1$. Chứng minh rằng:

$$(1-a)(1-b)(1-c)(1-d)\ge abcd$$

Bài 47. Cho $a,b,c,d\ge 0$. Chứng minh rằng:

$$4(a^3+b^3+c^3+d^3)+15(abc+bcd+cda+dab)\ge(a+b+c+d)^3$$

Bài 48. Cho $a,b,c\ge 0; a+b+c=3$ và $k>0$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\frac{ab}{k+a^2}+\frac{bc}{k+b^2}+\frac{ca}{k+c^2}$

Bài 49. Cho $a,b,c\ge 0; a+b+c=3$ và $k>0$.

Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của: $P=\frac{1}{a^2+b+k}+\frac{1}{b^2+c+k}+\frac{1}{c^2+a+k}$

Bài 50. Cho $a_1,a_2,...,a_n\ge 0$ thỏa mãn $a_1a_2...a_n=1$. Chứng minh rằng:

$$(n-1)\left(x_1^2+x_2^2+...+x_n^2\right)+n(n+3)\ge(2n+2)\left(x_1+x_2+...+x_n\right)$$

Bài 51. Cho $m>0, x_1,x_2,...x_n\ge 0$ và $x_1+x_2+...+x_n=n$.

Tìm hằng số $k>0$ tốt nhất sao cho:

$$(1+mx_1)(1+mx_2)...(1+mx_n)\le(m+1)^n+k_m\left(x_1x_2...x_n-1\right)$$

Bài 52. Cho $a_1,a_2,...a_n,s,k>0$ thỏa mãn: $a_1a_2...a_n=s^n$ và $n-1=\frac{n}{(1+s)^k}$.

Xét bất đẳng thức: $\frac{1}{(1+a_1)^k}+\frac{1}{(1+a_2)^k}+...+\frac{1}{(1+a_n)^k}\le n-1$

a) Chứng minh rằng bất đẳng thức trên nói chung không đúng.

b) Chứng minh bất đẳng thức trên đúng trong trường hợp $k=1$.

c) Tìm tất cả các giá trị k (tùy thuộc n) để bất đẳng thức trên đúng.

Bài 53. Cho $a_1, a_2, ..., a_n \geq 0$ thỏa mãn $a_1 + a_2 + ... + a_n = n$. Chứng minh rằng:

$$n^2\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}\right) \geq 4(n-1)(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2) + n(n-2)^2$$

Bài 54. Cho $a_1, a_2, ..., a_n \geq 0$ thỏa mãn $a_1 + a_2 + ... + a_n = 1$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{1-a_1}{1+a_1}} + \sqrt{\frac{1-a_2}{1+a_2}} + ... + \sqrt{\frac{1-a_2}{1+a_2}} \leq n - 2 + \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Bài 55. Xét tập hợp D gồm n số thực dương $a_1, a_2, ..., a_n$ thỏa mãn

$$a_1 + a_2 + ... + a_n = a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2.$$

Tìm giá trị lớn nhất của $f(a_1, a_2, ..., a_n) = a_1 a_2 ... a_n$.

Bài 56. Xét tập hợp D gồm n số thực $a_1, a_2, ..., a_n > 0$ thỏa mãn $a_1 + a_2 + ... + a_n = A$, $a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 = B$, trong đó A, B > 0 cho trước thỏa mãn $A^2 < nB$.

a) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_3}$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + ... + \frac{1}{a_n^2}$.

Bài 57. Xét tập hợp D gồm n số thực không âm $a_1, a_2, ..., a_n$ thỏa mãn $a_1 + a_2 + ... + a_n = A$, $a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 = B$, $a_1^3 + a_2^3 + ... + a_n^3 = C$, trong đó A, B là các hằng số dương cho trước sao cho D khác rỗng. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $a_1 a_2 ... a_n$.

Bài 58. Xét tập hợp D gồm n số thực dương thỏa mãn $\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + ... + \frac{a_n}{a_1} = n + 1$.

Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\frac{(a_1 + a_2 + ... + a_n)^2}{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2}$.

§19. PHƯƠNG PHÁP ABC (ABSTRACT CONCRETENESS)

I. CƠ SỞ CỦA PHƯƠNG PHÁP

Khi dùng đạo hàm để chứng minh một số bất đẳng thức chứa nhiều biến số, một kỹ thuật cần phải chú ý đến là khảo sát hàm theo một biến số với các biến còn lại là tham số. Tuy nhiên, trong các bất đẳng thức đối xứng ba biến a, b, c nếu sử dụng kỹ thuật trên gặp khó khăn thì chúng ta sẽ đưa bất đẳng thức về hàm $f(a,b,c)$ chỉ chứa các đại lượng $a+b+c$, $ab+bc+ca$, abc. Sau đó chúng ta sẽ khảo sát hàm $f(a,b,c)$ theo biến abc với hai đại lượng cố định là $a+b+c$, $ab+bc+ca$. Đây là ý tưởng chính của phương pháp *ABC*. Trước hết chúng ta sẽ tìm tập xác định của abc bởi các mệnh đề sau đây:

1. Mệnh đề 1. Giả sử $m\in\left[-\infty,-\sqrt{3}\right]\cup\left[\sqrt{3},+\infty\right]$ và các số thực a, b, c thỏa mãn $\begin{cases}ab+bc+ca=1\\ a+b+c=m\end{cases}$. Khi đó tập xác định abc là $\left[\dfrac{(6-2m^2)X_2+m}{9};\dfrac{(6-2m^2)X_1+m}{9}\right]$

2. Mệnh đề 2. Giả sử $m\in\left[\sqrt{3},+\infty\right]$ và các số thực a, b, c không âm thỏa mãn $\begin{cases}ab+bc+ca=1\\ a+b+c=m\end{cases}$. Khi đó tập xác định abc là $\left[\operatorname{Max}\left\{0,\dfrac{(6-2m^2)X_2+m}{9}\right\};\dfrac{(6-2m^2)X_1+m}{9}\right]$

Trong đó X_1 và X_2 là hai nghiệm của phương trình $3X^2-2mX+1=0$.

Chứng minh

Xét phương trình: $X^3-mX^2+X-abc=0$ (1). Khi đó ta cần tìm điều kiện của abc để

i) Mệnh đề 1: Phương trình (1) có ba nghiệm thực.

ii) Mệnh đề 2: Phương trình (1) có ba nghiệm thực không âm.

Đặt $f(X)=X^3-mX^2+X-abc \Rightarrow f'(X)=3X^2-2mX+1$

Ta có: $f'(X)=0 \Leftrightarrow X_1=\dfrac{m-\sqrt{m^2-3}}{3};\ X_2=\dfrac{m+\sqrt{m^2-3}}{3}$

$\Rightarrow$ Bảng biến thiên

X	$-\infty$		X_1		X_2		$+\infty$
$f'(X)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(X)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

i) (1) có ba nghiệm thực $\Leftrightarrow \begin{cases}f(X_1)\ge 0\\ f(X_2)\le 0\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \frac{m-(2m^2-6)X_2}{9} \le abc \le \frac{m-(2m^2-6)X_1}{9} \ (2)$$

Vậy tập xác định của abc là $\left[\frac{(6-2m^2)X_2+m}{9}; \frac{(6-2m^2)X_1+m}{9}\right]$

ii) Để ý rằng nếu $abc \ge 0, a+b+c \ge 0,\ ab+bc+ca \ge 0$ thì $a,b,c \ge 0$.

Do đó (1) có ba nghiệm thực không âm $\Leftrightarrow abc$ phải thoả mãn (2) và $abc \ge 0$.

$$\Leftrightarrow \text{Max}\left\{0, \frac{m-(2m^2-6)X_2}{9}\right\} \le abc \le \frac{m-(2m^2-6)X_1}{9}$$

Vậy tập xác định abc là $\left[\text{Max}\left\{0, \frac{(6-2m^2)X_2+m}{9}\right\}; \frac{(6-2m^2)X_1+m}{9}\right]$

Chú ý: • Giả thiết $a+b+c=m \in \left[-\infty, -\sqrt{3}\right] \cup \left[\sqrt{3}, +\infty\right]$ được thiết lập nên từ đẳng thức $ab+bc+ca=1$ và bất đẳng thức $(a+b+c)^2 \ge 3(ab+bc+ca)=3$ hoặc có thể được giải thích từ điều kiện $f(x)$ có 3 nghiệm thực nên $f'(X)=3X^2-2mX+1=0$ phải có nghiệm, tức là $\Delta'=m^2-3 \ge 0 \Leftrightarrow m \in \left[-\infty, -\sqrt{3}\right] \cup \left[\sqrt{3}, +\infty\right]$

• Từ mệnh đề 1 ta rút ra một nhận xét quan trọng là có thể chuyển đổi bộ (a,b,c) với $a,b,c \in \mathbb{R}$ để biểu diễn tất cả các phần tử của tập $\mathbb{R}^3$ thỏa mãn $ab+bc+ca=1$, bằng cách sử dụng bộ $(a+b+c, ab+bc+ca, abc)$ với sự ràng buộc

$$a+b+c=m \in \left[-\infty, -\sqrt{3}\right] \cup \left[\sqrt{3}, +\infty\right] \text{ và } abc \in \left[\frac{(6-2m^2)X_2+m}{9}; \frac{(6-2m^2)X_1+m}{9}\right]$$

• Từ mệnh đề 2 ta cũng rút ra nhận xét là có thể chuyển đổi bộ (a,b,c) với $a,b,c \in \mathbb{R}^+$ để biểu diễn tất cả các phần tử của tập $\mathbb{R}^{+^3}$ thỏa mãn $ab+bc+ca=1$, bằng cách sử dụng bộ $(a+b+c, ab+bc+ca, abc)$ với sự ràng buộc

$$a+b+c=m \in \left[-\infty, -\sqrt{3}\right] \cup \left[\sqrt{3}, +\infty\right],\ abc \in \left[\text{Max}\left\{0, \frac{(6-2m^2)X_2+m}{9}\right\}; \frac{(6-2m^2)X_1+m}{9}\right]$$

3. Mệnh đề 3. Với mỗi bộ $(a_0, b_0, c_0) \in \mathbb{R}^3$ đều tồn tại $(x_0, x_0, y_0); (z_0, z_0, t_0) \in \mathbb{R}^3$ sao cho

$$\begin{cases} a_0+b_0+c_0 = x_0+x_0+y_0 = z_0+z_0+t_0 \\ a_0b_0+b_0c_0+c_0a_0 = x_0x_0+x_0y_0+y_0x_0 = z_0z_0+z_0t_0+t_0z_0 \\ x_0x_0y_0 \le a_0b_0c_0 \le z_0z_0t_0 \end{cases}$$

Đẳng thức xảy ra khi hai trong ba phần tử của bộ (a_0, b_0, c_0) bằng nhau.

Chứng minh

Trước hết ta sẽ chứng minh bài toán với các bộ số thực (a_0,b_0,c_0) thỏa mãn: $a_0+b_0+c_0=m$ và $a_0b_0+b_0c_0+c_0a_0=1$. Theo mệnh đề 1 ta có:

$$s=\frac{(6-2m^2)X_2+m}{9}\le a_0b_0c_0\le\frac{(6-2m^2)X_1+m}{9}=S$$

Ta sẽ xem khi $a_0b_0c_0$ đạt giá trị biên thì đặc điểm của a_0,b_0,c_0 sẽ ra sao.

Giả sử $a_0b_0c_0=$ s. Xét phương trình $f(X)=X^3-mX^2+X-s=0$ (1)

Ta có: $f'(X)=3X^2-2mX+1$ có hai nghiệm là $X_1=\frac{m-\sqrt{m^2-3}}{3};X_2=\frac{m+\sqrt{m^2-3}}{3}$.

Mặt khác do $f(X_1)=0, f'(X_1)=0$ nên phương trình $f(X)=0$ phải có nghiệm kép X_1, ta đổi lại kí hiệu gọi nghiệm kép là x_0,x_0 và nghiệm còn lại là y_0.

Theo định lý ***Viet*** ta ta có: $\begin{cases}x_0+x_0+y_0=m=a_0+b_0+c_0\\ x_0x_0+x_0y_0+y_0x_0=1=a_0b_0+b_0c_0+c_0a_0\\ x_0x_0y_0=s\le a_0b_0c_0\end{cases}$

• Khi $a_0b_0c_0=$ S thì hoàn toàn tương tự ta có sự tồn tại của (z_0,z_0,t_0)

Như vậy là ta đã chứng minh được bài toán đã nêu trong trường hợp $a_0+b_0+c_0=m$ và $a_0b_0+b_0c_0+c_0a_0=1$. Với một tư tưởng hoàn toàn tương tự, bạn đọc hãy chứng minh sự tồn tại cho trường hợp: $a_0+b_0+c_0=m$ và $a_0b_0+b_0c_0+c_0a_0=-1$.

Bây giờ giả sử $a_0+b_0+c_0=M$ và $a_0b_0+b_0c_0+c_0a_0=\pm N$ thì liệu các bộ (x_0,x_0,y_0) và (z_0,z_0,t_0) có tồn tại không. Câu trả lời là có. Thật vậy, xét các số $(a_1,b_1,c_1)=\left(\frac{a_0}{\sqrt{|N|}},\frac{b_0}{\sqrt{|N|}},\frac{c_0}{\sqrt{|N|}}\right)$ thỏa mãn hệ điều kiện $\begin{cases}a_1+b_1+c_1=\frac{M}{\sqrt{|N|}}\\ a_1b_1+b_1c_1+c_1a_1=\pm1\end{cases}$

Theo chứng minh trên thì các bộ $(x_1,x_1,y_1),(z_1,z_1,t_1)$ là tồn tại và chọn các bộ $(x_0,x_0,y_0)=\left(\sqrt{|N|}x_1,\sqrt{|N|}x_1,\sqrt{|N|}y_1\right)$ và $(z_0,z_0,t_0)=\left(\sqrt{|N|}z_1,\sqrt{|N|}z_1,\sqrt{|N|}t_1\right)$. Khi đó:

$$\begin{cases}x_0+x_0+y_0=\sqrt{|N|}(x_1+x_1+z_1)=\sqrt{|N|}(z_1+z_1+t_1)=z_0+z_0+t_0=\sqrt{|N|}\frac{M}{\sqrt{|N|}}=M=a_0+b_0+c_0\\ x_0x_0+x_0y_0+y_0x_0=|N|(x_1x_1+x_1y_1+y_1x_1)=z_0z_0+z_0t_0+t_0z_0=|N|(z_1z_1+z_1t_1+t_1z_1)=\pm|N|=\pm N\\ x_0x_0y_0=\left(\sqrt{|N|}\right)^3x_1x_1y_1\le\left(\sqrt{|N|}\right)^3a_1b_1c_1=a_0b_0c_0=\left(\sqrt{|N|}\right)^3a_1b_1c_1\le\left(\sqrt{|N|}\right)^3z_1z_1t_1=z_0z_0t_0\end{cases}$$

4. Mệnh đề 4. Với mỗi bộ $(a_0,b_0,c_0)\in\mathbb{R}^{+^3}$ ta đều tìm được một trong hai bộ $(x_0,x_0,y_0);(z_0,z_0,t_0)\in\mathbb{R}^{+^3}$ hoặc $(0,x_0,y_0);(z_0,z_0,t_0)\in\mathbb{R}^{+^3}$ sao cho:

Hoặc $\begin{cases} a_0+b_0+c_0=x_0+x_0+y_0=z_0+z_0+t_0 \\ a_0b_0+b_0c_0+c_0a_0=x_0x_0+x_0y_0+y_0x_0=z_0z_0+z_0t_0+t_0z_0 \\ x_0x_0y_0\le a_0b_0c_0\le z_0z_0t_0 \end{cases}$

Đẳng thức xảy ra khi hai trong ba phần tử của bộ (a_0,b_0,c_0) bằng nhau.

Hoặc $\begin{cases} a_0+b_0+c_0=0+x_0+y_0=z_0+z_0+t_0 \\ a_0b_0+b_0c_0+c_0a_0=x_0y_0=z_0z_0+z_0t_0+t_0z_0 \\ 0\le a_0b_0c_0\le z_0z_0t_0 \end{cases}$

Đẳng thức xảy ra khi một trong ba phần tử của bộ (a_0,b_0,c_0) bằng 0.

Bình luận: Các mệnh đề 3, 4 là không hiển nhiên và nó cũng chính là cơ sở của phương pháp ABC. Chú ý rằng mọi biểu thức đối xứng $f(a,b,c)$ theo ba biến a,b,c đều có thể biểu diễn thành $g(A,B,C)$ thông qua 3 đại lượng: $A=a+b+c$; $B=ab+bc+ca$; $C=abc$.

Do đó để giảm số biến, ta sẽ cố định A,B và cho C chạy. Ta sẽ kì vọng hàm g đạt cực trị khi C đạt các giá trị biên. Tuy nhiên ở đây ta cũng không cần biết một cách cụ thể C sẽ đạt giá trị biên khi nào mà chỉ cần biết khi C đạt giá trị biên thì các biến a,b,c ban đầu sẽ phải có tính chất gì đặc biệt. Điều này cũng giống như ta sẽ tìm được các giá trị tới hạn của hàm số một biến mà không cần tính cụ thể các điểm tới hạn của nó vậy.

Các mệnh đề 3, 4 đảm bảo sự tồn tại của a, b, c khi C đạt các giá trị biên.

5. Mệnh đề 5:

Mọi đa thức f đối xứng theo các biến a,b,c đều có thể biểu diễn dưới dạng đa thức φ theo các biến $abc, ab+bc+ca, a+b+c$ và $\deg\varphi(abc)\le\frac{1}{3}\deg f$.

Chú ý: Bạn đọc có thể hiểu đa thức tính theo bậc của abc như sau:

Giả sử $f(a,b,c)=(a+b+c)abc+ab+bc+ca$ là một đa thức bậc 4 theo a,b,c. Nhưng khi tính bậc của đa thức theo biến abc, ta xem $a+b+c$ và $ab+bc+ca$ như các hằng số m,n. Khi đó đa thức được viết lại: $f(a,b,c)=\varphi(abc)=m\,abc+n$ là đa thức bậc nhất theo biến abc.

Chứng minh

Do mọi đa thức đối xứng với 3 biến a, b, c đều có thể biểu diễn qua các đa thức đối xứng cơ sở $P(n), Q(m,n), R(m,n,p)$ nên ta chỉ cần chứng minh sự biểu diễn cho các dạng đa thức $P(n), Q(m,n), R(m,n,p)$, với

$$\begin{cases} P(n)=a^n+b^n+c^n \\ Q(m,n)=a^m b^n+a^n b^m+b^m c^n+c^n b^m+c^m a^n+a^m c^n \\ R(m,n,p)=a^m b^n c^p+a^m b^p c^n+b^m a^n c^p+b^m a^p c^n+c^m a^n b^p+c^m a^p b^n \end{cases} \quad (m\ge n\ge p\ge 0)$$

Tuy nhiên có thể nhận xét thêm rằng:

- R có thể biểu diễn qua Q cùng với abc: $R=(abc)^n Q(m-p,n-p)$
- Q có thể biểu diễn qua P bởi hệ thức: $Q=P(m)P(n)-P(m+n)$

Như vậy ta chỉ cần chứng minh P có thể biểu diễn qua $abc, ab+bc+ca, a+b+c$.

Ta sẽ chứng minh điều này bằng phương pháp quy nạp:

Với $n=0; n=1$, mệnh đề đã cho hiển nhiên đúng.

Giả sử ta đã chứng minh được $P(k)$ có thể biểu diễn thành đa thức thông qua các biến $abc, ab+bc+ca, a+b+c, \forall k\le h-1$. Nhận xét rằng điều này cũng đúng đối với $Q(m,n)$ và $R(m,n,p)$ $\forall m\ge n\ge p\ge 0: m+n\le h-1$. Bây giờ ta sẽ chứng minh tính biểu diễn của $P(h)$.

Ta có: $P(h)=(a+b+c)P(h-1)-Q(h-1,1)$

Đồng thời: $Q(h-1,1)=(ab+bc+ca)P(h-2)-R(h-2,1,1)$.

Do đó: $P(h)=(a+b+c)P(h-1)-(ab+bc+ca)P(h-2)+R(h-2,1,1)$.

Mặt khác, theo giả thiết quy nạp, các biểu thức $P(h-1), P(h-2), R(h-2,1,1)$ đều có thể biểu diễn dưới dạng đa thức theo các biến $abc, ab+bc+ca, a+b+c$.

Điều này cho ta kết luận tính đúng đắn của mệnh đề đã nêu khi $k=h$.

Như vậy, mệnh đề đã nêu đã được chứng minh thông qua nguyên lý quy nạp.

Tính chất $\deg\varphi(abc)\le\frac{1}{3}\deg f$ được suy ra khá hiển nhiên, bởi lẽ biểu thức abc có bậc là 3 đối với các biến a, b, c. Do đó khi coi abc là một biến bậc 1 thì bậc của abc phải không lớn hơn $\frac{1}{3}$ so với bậc của đa thức tính theo các biến a, b, c.

II. ĐỊNH LÝ ABC

1. Định lý 1: Nếu $f(abc, ab+bc+ca, a+b+c)$ là hàm đơn điệu trên $\mathbb{R}$ theo abc thì giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất xảy ra khi trong ba số a,b,c có hai số bằng nhau, còn trong tập $\mathbb{R}^+$ thì xảy ra khi có một số bằng 0 hay có hai số bằng nhau.

2. Định lý 2: Nếu $f(abc, ab+bc+ca, a+b+c)$ là hàm lồi trên $\mathbb{R}$ theo abc thì giá trị lớn nhất xảy ra khi trong ba số a,b,c có hai số bằng nhau, còn trong tập $\mathbb{R}^+$ thì xảy ra khi có một số bằng 0 hay có hai số bằng nhau.

3. Định lý 3: Nếu $f(abc, ab+bc+ca, a+b+c)$ là hàm lõm trên $\mathbb{R}$ theo abc thì giá trị nhỏ nhất xảy ra khi trong ba số a,b,c có hai số bằng nhau, còn trong tập $\mathbb{R}^+$ thì xảy ra khi có một số bằng 0 hay có hai số bằng nhau.

Nhận xét: Cả ba định lý trên đều được chứng minh dựa vào các mệnh đề 3, 4.

4. Chứng minh các định lý:

Ta sẽ chứng minh đại diện định lý 1 bằng phương pháp phản chứng

Xét $f(abc, ab+bc+ca, a+b+c)$ là hàm đơn điệu trên $\mathbb{R}$ theo abc.

Không mất tính tổng quát ta sẽ chứng minh đại diện cho trường hợp f tăng và tìm giá trị lớn nhất. Giả sử hàm số f đạt giá trị lớn nhất tại điểm (a_0,b_0,c_0) trong đó a_0,b_0,c_0 khác nhau từng đôi một và giá trị lớn nhất là M. Tuy nhiên lại tồn tại một bộ (z_0,z_0,t_0) thỏa mãn:

$$M = f\left(a_0b_0c_0, a_0b_0+b_0c_0+c_0a_0, a_0b_0c_0\right)$$

Đ

$$< f\left(z_0z_0t_0, a_0b_0+b_0c_0+c_0a_0, a_0+b_0+c_0\right) = f\left(z_0z_0t_0, z_0z_0+z_0t_0+z_0t_0, z_0+z_0+t_0\right)$$

iều vô lý này cho phép ta kết luận giá trị lớn nhất xảy ra khi có hai biến bằng nhau

Xét $f(abc, ab+bc+ca, a+b+c)$ là hàm đơn điệu trên $\mathbb{R}^+$ theo abc.

Nếu f tăng và cần tìm giá trị lớn nhất thì làm hoàn toàn tương tự như trên. Xét f tăng và cần tìm giá trị nhỏ nhất. Giả sử hàm số f đạt giá trị nhỏ nhất là m tại điểm (a_0,b_0,c_0) trong đó a_0,b_0,c_0 khác nhau từng đôi một và không có biến nào bằng 0. Khi đó có một trong hai trường hợp sau xảy ra:

$$m = f\left(a_0b_0c_0, a_0b_0+b_0c_0+c_0a_0, a_0b_0c_0\right)$$

$$> f\left(x_0x_0y_0, a_0b_0+b_0c_0+c_0a_0, a_0+b_0+c_0\right) = f\left(x_0x_0y_0, x_0x_0+x_0y_0+y_0x_0, x_0+x_0+y_0\right)$$

$$m = f\left(a_0b_0c_0, a_0b_0+b_0c_0+c_0a_0, a_0b_0c_0\right)$$

$$> f\left(0, a_0b_0+b_0c_0+c_0a_0, a_0+b_0+c_0\right) = f\left(0, x_0y_0, x_0+x_0\right)$$

Điều vô lý này cho phép ta kết luận giá trị lớn nhất xảy ra khi có 2 biến bằng nhau hoặc một biến bằng 0.

• ***Chứng minh định lý 2 và 3*** hoàn toàn tương tự như định lý 1 với các chú ý về các tính chất của hàm lồi và lõm, trong đó hàm số lồi đạt giá trị lớn nhất , hàm số lõm đạt giá trị nhỏ nhất khi biến đạt các giá trị ở biên.

5. Hệ quả: Từ các kết quả trên ta rút ra được một số hệ quả lý thú sau:

5.1. Hệ quả 1: Giả sử $f(a+b+c, ab+bc+ca, abc)$ là hàm đa thức bậc nhất theo abc, khi đó hàm f đạt giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất trong $\mathbb{R}$ khi có hai biến bằng nhau và hàm f đạt giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất trong $\mathbb{R}^+$ khi có hai biến bằng nhau hoặc một số bằng 0.

5.2. Hệ quả 2: Giả sử $f(a+b+c, ab+bc+ca, abc)$ là hàm tam thức bậc hai theo abc với hệ số bậc cao nhất dương. Khi đó hàm f đạt giá trị lớn nhất trong $\mathbb{R}$ khi có hai biến bằng nhau, đạt giá trị lớn nhất trong $\mathbb{R}^+$ khi có hai biến bằng nhau hoặc một biến bằng 0.

5.3. Hệ quả 3: Mọi đa thức đối xứng ba biến a,b,c bậc bé hơn hay bằng 5 đạt giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trong $\mathbb{R}$ khi có hai biến bằng nhau và đạt giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất trong $\mathbb{R}^+$ khi có hai biến bằng nhau hoặc một biến bằng 0.

5.4. Hệ quả 4: Mọi đa thức đối xứng ba biến a,b,c bậc bé hơn hay bằng 8 có hệ số của $a^2b^2c^2$ trong biểu diễn qua dạng $f(abc, ab+bc+ca, a+b+c)$ không âm đạt giá trị lớn nhất trong $\mathbb{R}$ khi có hai biến bằng nhau và đạt giá trị lớn nhất trong $\mathbb{R}^+$ khi có hai biến bằng nhau hay một biến bằng 0.

Chứng minh

5.1. Hệ quả 1: Đa thức bậc nhất $mx+y$ là hàm đơn điệu. Do đó, theo định lý 1 hàm $f(a+b+c, ab+bc+ca, abc)$, là đa thức bậc nhất theo abc, đơn điệu đạt giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất trong tập $\mathbb{R}$ khi có hai biến bằng nhau và đạt giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất trong $\mathbb{R}^+$ khi có hai biến bằng nhau hoặc một biến bằng 0.

5.2. Hệ quả 2: Tam thức bậc hai với hệ số dương m^2x^2+nx+p là hàm lồi trên đoạn liên tục. Do đó theo định lý 2 thì đối với hàm số $f(a+b+c, ab+bc+ca, abc)$, là một tam thức bậc hai theo abc và hệ số bậc cao nhất dương, tức là một hàm lồi nên đạt giá trị lớn nhất trong $\mathbb{R}$ khi có hai biến bằng nhau và đạt giá trị lớn nhất trong $\mathbb{R}^+$ khi có hai biến bằng nhau hoặc một biến bằng 0.

5.3. Hệ quả 3: Theo mệnh đề 5, đa thức đối xứng ba biến a,b,c bậc bé hơn hay bằng 5 có thể biểu diễn thành đa thức $f(a+b+c, ab+bc+ca, abc)$ và là đa thức bậc nhất theo abc (do $\deg\varphi(abc) \le \frac{1}{3}\deg f = \frac{5}{3}$ suy ra $\deg\varphi(abc) = 1$). Do đó theo hệ quả 1 đa thức đạt giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất trong $\mathbb{R}$ khi có hai biến bằng nhau và đạt giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất trong $\mathbb{R}^+$ khi có hai biến bằng nhau hoặc một biến bằng 0.

5.4. Hệ quả 4: Theo mệnh đề 5, đa thức đối xứng ba biến a,b,c bậc bé hơn hay bằng 8 có thể biểu diễn thành đa thức $f\left(a+b+c,ab+bc+ca,abc\right)$ và là tam thức bậc hai theo abc (do $\deg\varphi(abc)\le\frac{1}{3}\deg f=\frac{8}{3}$ suy ra $\deg\varphi(abc)=2$). Hơn nữa hệ số của $a^2b^2c^2$ lại không âm nên theo hệ quả 3 ta đi đến kết luận đa thức đạt giá trị lớn nhất trong $\mathbb{R}$ khi có hai biến bằng nhau và đạt giá trị lớn nhất trong $\mathbb{R}^+$ khi có hai biến bằng nhau hoặc một biến bằng 0.

6. Bình luận: Do mọi bất đẳng thức đối xứng với 3 biến đều có thể chuyển về cách biểu diễn đa thức đối xứng 3 biến nên sử dụng 4 hệ quả trên ta có thể dễ dàng chứng minh được các bất đẳng thức đối xứng 3 biến.

7. Một số đẳng thức và điều kiện bổ trợ:

Đặt $a=x+y+z, b=xy+yz+xz, c=xyz$. Khi đó ta có:

7.1. $x^2+y^2+z^2=a^2-2b$

7.2. $x^3+y^3+z^3=a^3-3ab+3c$

7.3. $x^4+y^4+z^4=a^4-4a^2b+2b^2+4ac$

7.4. $x^5+y^5+z^5=a^5-5a^3b+5ab^2+5a^2c-5bc$

7.5. $x^6+y^6+z^6=a^6-6a^4b+6a^3c+9a^2b^2-12abc+3c^2-2b^3$

7.6. $x^7+y^7+z^7=a^7-7a^5b+14a^3b^2+7a^4c^2-7b^3a-21a^2bc+7cb^2+7ac^2$

7.7. $(xy)^2+(yz)^2+(zx)^2=b^2-2ac$

7.8. $(xy)^3+(yz)^3+(zx)^3=b^3-3abc+3c^2$

7.9. $(xy)^4+(yz)^4+(zx)^4=b^4-4b^2ac+2a^2c^2+4c^2b$

7.10. $(xy)^5+(yz)^5+(zx)^5=b^5-5ab^3c+5a^2bc^2+5b^2c^2-5ac^3$

7.11. $xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x)=ab-3c$

7.12. $xy\left(x^2+y^2\right)+yz\left(y^2+z^2\right)+zx\left(z^2+x^2\right)=a^2b-2b^2-ac$

7.13. $xy\left(x^3+y^3\right)+yz(y^3+z^3)+zx(z^3+x^3)=a^3b-3ab^2-a^2c+5bc$

7.14. $x^2y^2(x+y)+y^2z^2(y+z)+z^2x^2(z+x)=ab^2-2a^2c-bc$

7.15. $x^3y^3(x+y)+y^3z^3(y+z)+z^3x^3(z+x)=ab^3-3a^2bc+5ac^2-cb^2$

7.16. $\left(x^2y+y^2z+z^2x\right)\left(xy^2+yz^2+zx^2\right)=9c^2+\left(a^3-6ab\right)c+b^3$

7.17. $\left(x^3y+y^3z+z^3x\right)\left(xy^3+yz^3+zx^3\right)=7a^2c^2+\left(a^5-5a^3b+ab^2\right)c+b^4$

7.18. $\left(x^3y^2+y^3z^2+z^3x^2\right)\left(x^2y^3+y^2z^3+z^2x^3\right)=a^4c^2+a^2bc^2+7b^2c^2+b^5-5b^3ac$

7.19. $\left(x^4y+y^4z+z^4x\right)\left(xy^4+yz^4+zx^4\right)$

$$=b^5-12ab^3c-16a^2bc^2+13b^2c^2+ca^7-7ca^5b+14ca^3b^2+7a^4c^2$$

7.20. Phương trình bậc ba $u^3-au^2+bu-c=0$ có các nghiệm thực x,y,z

$$\Leftrightarrow -27c^2+\left(18ab-4a^3\right)c+a^2b^2-4b^3\geq 0 \quad (1)$$

7.21. Phương trình bậc ba $u^3-au^2+bu-c=0$ có các nghiệm thực $x,y,z>0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}-27c^2+\left(18ab-4a^3\right)c+a^2b^2-4b^3\geq 0\\ a>0,b>0,c>0\end{cases}$$

7.22. Phương trình bậc ba $u^3-au^2+bu-c=0$ có các nghiệm x,y,z là ba cạnh tam giác

$$\Leftrightarrow \begin{cases}-27c^2+\left(18ab-4a^3\right)c+a^2b^2-4b^3\geq 0\\ a^3-4ab+8c>0.\\ a>0,b>0,c>0\end{cases}$$

8. Các ví dụ minh họa.

Bài 1. Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng:

1. $\dfrac{abc}{a^3+b^3+c^3}+\dfrac{2}{3}\geq\dfrac{ab+ac+bc}{a^2+b^2+c^2}$ (1) **2.** $\dfrac{a^3+b^3+c^3}{4abc}+\dfrac{1}{4}\geq\left(\dfrac{a^2+b^2+c^2}{ab+ac+bc}\right)^2$ (2)

Chứng minh

1. (1) $\Leftrightarrow P=abc\left(a^2+b^2+c^2\right)+\dfrac{2}{3}\left(a^3+b^3+c^3\right)-\left(a^3+b^3+c^3\right)(ab+bc+ca)\geq 0$

Do đó P giá trị nhỏ nhất khi có hai giá trị trong ba biến bằng nhau hay một biến bằng 0.

- Trường hợp hai biến bằng nhau, giả sử $a=c$ bất đẳng thức tương đương với:

$$\frac{a^2b}{2a^3+b^3}+\frac{2}{3}\geq\frac{a^2+2ab}{2a^2+b^2}\Leftrightarrow(a-b)^2\left[\frac{1}{2a^2+b^2}-\frac{2a+b}{3\left(2a^3+b^3\right)}\right]\geq 0\Leftrightarrow(a-b)^4(a+b)\geq 0.$$

- Trường hợp có một biến bằng 0, giả sử $c=0$, bất đẳng thức tương đương với:

$$\frac{2}{3} \ge \frac{ab}{a^2+b^2} \Leftrightarrow a^2+b^2+3(a-b)^2 \ge 0.$$

2. Để ý rằng có thể đưa (2) về một đa thức đối xứng bậc 7 với a, b, c nhưng chỉ là đa thức bậc nhất đối với abc, do đó theo hệ quả 1 ta xét hai trường hợp:

• Trường hợp hai biến bằng nhau, giả sử $a = c$ bất đẳng thức tương đương với:

$$\frac{2a^3+b^3}{4a^2b}+\frac{1}{4} \ge \left(\frac{2a^2+b^2}{a^2+2ab}\right)^2 \Leftrightarrow \left(\frac{2a^3+b^3}{4a^2b}-\frac{3}{4}\right) \ge \left(\frac{2a^2+b^2}{a^2+2ab}\right)^2-1$$

$$\Leftrightarrow \frac{(a-b)^2(2a+b)}{4a^2b} \ge \frac{(a-b)^2(3a^2+b^2+2ab)}{(a^2+2ab)^2} \Leftrightarrow (a-b)^2\left[\left((2b-a)^2+a^2\right)\right] \ge 0$$

• Trường hợp có một biến bằng 0, bất đẳng thức đã cho hiển nhiên đúng.

Bài 2. [Iran 1996] Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng:

$$(ab+bc+ca)\left[\frac{1}{(a+b)^2}+\frac{1}{(b+c)^2}+\frac{1}{(c+a)^2}\right] \ge \frac{9}{4} \quad (1)$$

Chứng minh

Đưa (1) về đa thức đối xứng bậc 6 của a, b, c và là bậc hai của abc với hệ số dương như sau:

$$9\left[(a+b)(b+c)(c+a)\right]^2-4(ab+bc+ca)\left[(a+b)^2(b+c)^2+(b+c)^2(c+a)^2+(c+a)^2(a+b)^2\right] \ge 0 \quad (*)$$

$$\Leftrightarrow m(abc)^2+nabc+p \ge 0 \quad (m \ge 0)$$

Trong đó m,n,p là các đại lượng chứa hằng số hoặc chứa $a+b+c, ab+bc+ca$ mà ta cũng coi như là các hằng số. Ta có thể giải thích điều này như sau: $(a+b)(b+c)(c+a)$ có dạng $mabc+n$ nên $9\left[(a+b)(b+c)(c+a)\right]^2$ có dạng $m^2(abc)^2+nabc+p$.

$4(ab+bc+ca)\left[(a+b)^2(b+c)^2+(b+c)^2(c+a)^2+(c+a)^2(a+b)^2\right]=4mA$ trong đó $m=ab+bc+ca$ được coi là hằng số, A là một đa thức bậc 4 nên cũng có dạng $mabc+n$.

Vậy nên biểu thức (*) mới có dạng như trên.

Khi đó hàm số vế trái đạt giá trị lớn nhất khi có hai biến bằng nhau hoặc một biến bằng 0.

• Trường hợp có hai biến bằng nhau, giả sử $a = c$, bất đẳng thức tương đương với

$$(a^2+2ab)\left(\frac{1}{4a^2}+\frac{2}{(a+b)^2}\right) \ge \frac{9}{4} \Leftrightarrow (a-b)^2\left[\frac{2a+b}{2a(a+b)^2}-\frac{1}{(a+b)^2}\right] \ge 0 \Leftrightarrow b(a-b)^2 \ge 0 \bullet$$

Trường hợp có một biến bằng 0, giả sử $c = 0$, bất đẳng thức tương đương với:

$$ab\left(\frac{1}{(a+b)^2}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right) \ge \frac{9}{4} \Leftrightarrow (a-b)^2\left[\frac{1}{ab}-\frac{1}{4(a+b)^2}\right] \ge 0 \Leftrightarrow (a-b)^2(4a^2+4b^2+7ab) \ge 0$$

Sau đây một số ví dụ ta không thể làm trực tiếp từ các hệ quả đã nêu mà phải nhờ vào một số biến đổi hay các định lý đã nêu.

Bài 3. [Russia Olympiad 2005] Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=1$.

Chứng minh rằng: $\dfrac{a}{a^3+bc}+\dfrac{b}{b^3+ac}+\dfrac{c}{c^3+ab}\ge 3 \quad (1)$

Chứng minh

Bình luận: Nếu đưa (1) về đa thức đối xứng thì nhận được một đa thức bậc 9 với a, b, c và là bậc 3 với abc. Điều này không nằm trong các hệ quả.

Do đó với bài toán này ta phải sử dụng thủ thuật đổi biến số sau đây:

Đặt $x=\dfrac{bc}{a};y=\dfrac{ac}{b};z=\dfrac{ab}{c}\Rightarrow xy+yz+xz=1$ và (1) $\Leftrightarrow \dfrac{1}{xy+z}+\dfrac{1}{yz+x}+\dfrac{1}{zx+y}\ge 3$ (2)

Biến đổi (2) về đa thức bậc hai theo xyz với hệ số bậc cao nhất không âm.

Ta chỉ cần xét các trường hợp khi có hai biến bằng nhau, hay một biến bằng 0.

Trường hợp 1: $x=z$. Khi đó (2) $\Leftrightarrow \dfrac{2}{xy+x}+\dfrac{1}{x^2+y}\ge 3$ với $2xy+x^2=1$.

Thay $y=\dfrac{1-x^2}{2x}$ thì ta phải chứng minh: $\dfrac{2}{\dfrac{1-x^2}{2}+x}+\dfrac{1}{x^2+\dfrac{1-x^2}{2x}}\ge 3,\ \forall x\in[0;1]$.

Điều này không quá khó khăn và các bạn sẽ có thể giải quyết dễ dàng.

Trường hợp 2: $z=0$. Khi đó (2) $\Leftrightarrow \dfrac{1}{xy}+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\ge 3$ với $xy=1$.

Ta có $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\ge\dfrac{2}{\sqrt{xy}}\Rightarrow\dfrac{1}{xy}+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\ge\dfrac{1}{xy}+\dfrac{2}{\sqrt{xy}}=3$.

Bài 4. Cho $x,y,z>0$. Chứng minh rằng :

$$\sqrt{\frac{x^4+y^4+z^4}{x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2}}+\sqrt{\frac{2(xy+yz+xz)}{x^2+y^2+z^2}}\ge 1+\sqrt{2} \quad (1)$$

Chứng minh

Vế trái là các biểu thức chứa căn nên không thể đưa về dạng đa thức đối xứng.

Ta sẽ đánh giá trực tiếp theo hàm đối với biến xyz.

Vẫn với quy ước $a=x+y+z, b=xy+yz+zx, c=xyz$, sử dụng các hằng đẳng thức đã nêu ở trên ta biến bất đẳng thức về dạng: $\sqrt{\dfrac{a^4-2a^2b+2b^2+4ac}{b^2-2ac}}+\sqrt{\dfrac{2b}{a^2-2b}}\ge 1+\sqrt{2}$

Hàm theo c là hàm bậc nhất nên đơn điệu. Theo định lý một, giá trị nhỏ nhất xảy ra khi có hai biến bằng nhau hay một biến bằng 0.

Trường hợp 1: $x = z$. Khi đó (1) $\Leftrightarrow \sqrt{\dfrac{2x^4+y^4}{x^4+2x^2y^2}}+\sqrt{\dfrac{2(x^2+2xy)}{2x^2+y^2}} \ge 1+\sqrt{2}$ (2)

Do tính thuần nhất của bất đẳng thức này nên ta có thể giả sử $x = 1$, khi đó

$$(2) \Leftrightarrow \sqrt{\frac{y^4+2}{2y^2+1}}-1 \ge \sqrt{2}-\sqrt{\frac{2(2y+1)}{y^2+2}} \Leftrightarrow \frac{(y^2-1)^2}{2y^2+1+\sqrt{(y^4+2)(2y^2+1)}} \ge \frac{\sqrt{2}(y-1)^2}{y^2+2+\sqrt{(y^2+2)(2y+1)}}$$ T

a có thể đánh giá các mẫu số một cách nhẹ nhàng nhưng vẫn đảm bảo tính đúng đắn của dấu lớn hơn hoặc bằng sau khi đánh giá như sau:

$$\sqrt{(y^4+2)(2y^2+1)} \le \sqrt{2}y^3+\sqrt{2} \Rightarrow 2y^2+1+\sqrt{(y^4+2)(2y^2+1)} \le 2y^2+1+\sqrt{2}y^3+\sqrt{2}$$ Do

$$\sqrt{(y^2+2)(2y+1)} \ge y+\sqrt{2} \quad \Rightarrow y^2+2+\sqrt{(y^2+2)(2y+1)} \ge y^2+y+2+\sqrt{2}$$

đó công việc còn lại của chúng ta là chứng minh:

$$\frac{(y+1)^2}{\sqrt{2}y^3+2y^2+\sqrt{2}+1} \ge \frac{\sqrt{2}}{y^2+y+2+\sqrt{2}} \Leftrightarrow y^4+y^3+(5-\sqrt{2})y^2+(5+2\sqrt{2}y) \ge 0$$

Trường hợp 2: $z = 0$. Khi đó (1) $\Leftrightarrow \sqrt{\dfrac{x^4+y^4}{x^2y^2}}+\sqrt{\dfrac{2xy}{x^2+y^2}} \ge 1+\sqrt{2}$ (2)

Ta có: $x^4+y^4 \ge \dfrac{(x^2+y^2)^2}{2} \ge 2x^2y^2 \Rightarrow \sqrt{\dfrac{x^4+y^4}{2x^2y^2}} \ge \dfrac{x^2+y^2}{2xy} \ge 1$, do đó:

$$VT(2) \ge (\sqrt{2}-1)\sqrt{\frac{x^4+y^4}{2x^2y^2}}+\left(\frac{x^2+y^2}{2xy}+\sqrt{\frac{2xy}{x^2+y^2}}\right) \ge (\sqrt{2}-1)+2\cdot\sqrt[4]{\frac{x^2+y^2}{2xy}} \ge 1+\sqrt{2}$$

Bài 5. [Mongolia MO 1991] Cho $a,b,c \in \mathbb{R}$ và $a^2+b^2+c^2=2$.

Chứng minh rằng: $|a^3+b^3+c^3-abc| \le 2\sqrt{2}$

Chứng minh

Đây không phải là một bất đẳng thức dạng đa thức bình thường, dấu trị tuyệt đối đã làm mọi chuyện trở nên khó khăn. Cách giải quyết hiệu quả ở đây là bình phương để tạo đa thức bậc 6. Tuy nhiên cũng có thể thấy ngay sau khi bình phương thì hệ số của $a^2b^2c^2$ bên vế phải là không âm. Do vậy ta có thể áp dụng định lý ***ABC*** trực tiếp và đưa về bài toán hai biến như sau:

***Trường hợp 1:* Hai biến bằng nhau**

Cho các số thực x, y: $x^2+2y^2=2$. Chứng minh rằng: $|x^3+2y^3-xy^2| \le 2\sqrt{2}$ (1)

Ta có (1) $\Leftrightarrow (x^3+2y^3-xy^2)^2 \le (x^2+2y^2)^3$ (2).

Nếu $y=0$ thì ta có đẳng thức

Với $y \ne 0$, chia hai vế cho y^6 và đặt $t=\dfrac{x}{y}$, khi đó (2) $\Leftrightarrow (t^3-t+2)^2 \le (t^2+2)^3$

Ta có: $(t^3-t+2)^2 \le (t^3+2)^2 = t^6+4t^3+2 < t^6+6t^4+12t^2+8 = (t^2+2)^3$

***Trường hợp 2:* Một biến bằng 0**

Cho các số thực x, y: $x^2+y^2=2$. Chứng minh rằng: $|x^3+y^3| \le 2\sqrt{2}$

Thật vậy ta có: $|x^3+y^3| \le \sqrt{(x^4+y^4)(x^2+y^2)} \le \sqrt{(x^2+y^2)^3} = 2\sqrt{2}$

Bài 6. Cho $a,b,c \ge 0$ thỏa mãn $a+b+c=2$. Chứng minh:

$$\sqrt{a^2b+b^2c+c^2a}+\sqrt{ab^2+bc^2+ca^2} \le 2$$

Chứng minh

Đây không phải là bất đẳng thức dạng đa thức, hơn nữa không thể biểu diễn một cách mau chóng bất đẳng thức trên theo các đại lượng trung bình $abc, ab+bc+ca, a+b+c$, hai biểu thức hoán vị $a^2b+b^2c+c^2a$ và $ab^2+bc^2+ca^2$ không thể biểu diễn theo các đại lượng trung bình này. Hơn thế nữa, dấu căn bậc hai đã cắt đứt mối quan hệ của chúng.

Thông thường gặp các bài toán có chứa căn thức, chúng ta sẽ cố tìm cách phá chúng đi. Với ý tưởng này, bình phương cả hai vế của bất đẳng thức, ta được:

$$a^2b+b^2c+c^2a+ab^2+bc^2+ca^2+2\sqrt{(a^2b+b^2c+c^2a)(ab^2+bc^2+ca^2)} \le 4 \quad (1)$$

Bất đẳng thức bây giờ đã có thể biểu diễn theo các đại lượng trung bình

$A=a+b+c=2, B=ab+bc+ca, C=abc$:

$$(1) \Leftrightarrow 2B-3C+2\sqrt{9C^2+(8-12B)C+B^3} \le 4 \Leftrightarrow 2\sqrt{9C^2+(8-12B)C+B^3} \le 4-2B+3C$$

$$\Leftrightarrow 4\left(9C^2+(8-12B)C+B^3\right) \le (4-2B+3C)^2 = 9C^2+6(4-2B)C+(4-2B)^2$$

$$\Leftrightarrow 27C^2+(8-36B)C+4B^3-(4-2B)^2 \le 0$$

Đến đây là có thể áp dụng ABC, hàm theo C bên trái là hàm lồi và ta cần đi tìm giá trị lớn nhất. Như vậy là ta có thể đưa về hai trường hợp, ngay cả cho bài toán ban đầu.

***Trường hợp 1:* Hai biến bằng nhau**

Cho $x, y \ge 0$ thỏa mãn: $2x+y=2$. Chứng minh rằng: $2\sqrt{x^3+x^2y+xy^2} \le 2$

$$\Leftrightarrow x^3+x^2(2-2x)+x(2-2x)^2 \le 1, \forall x \in [0;1]$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(3x^2-3x+1) \le 0, \forall x \in [0;1] \Leftrightarrow 3x^2-3x+1 \ge 0, \forall x \in [0;1]$$

***Trường hợp 2:* Một biến bằng 0**

Cho $x, y \ge 0$ thỏa mãn: $x+y=2$. Chứng minh rằng: $\sqrt{x^2y}+\sqrt{xy^2} \le 2$

Ta có: $\sqrt{x^2y}+\sqrt{xy^2} = \sqrt{xy}\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right) \le \dfrac{x+y}{2}\sqrt{2(x+y)} = 2$

9. Bài tập áp dụng

Bài 7. Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn: $xy + yz + zx = 1$.

Chứng minh rằng: $\sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx} \le \sqrt{2} + \frac{9}{4}xyz$

Bài 8. Cho các số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{2a^2 + bc} + \frac{1}{2b^2 + ca} + \frac{1}{2c^2 + ab} \ge \frac{6}{a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca}$$

Bài 9. Cho a, b, c là các số thực dương.

Chứng minh rằng: $\frac{a}{(b+c)^2} + \frac{b}{(c+a)^2} + \frac{c}{(a+b)^2} \ge \frac{9}{4(a+b+c)}$

Bài 10. Cho a, b, c là các số thực không âm. Chứng minh rằng

$$\frac{bc}{(b+c)^2 + 5a^2} + \frac{ca}{(c+a)^2 + 5b^2} + \frac{ab}{(a+b)^2 + 5c^2} \le \frac{1}{3}$$

Bài 11. Cho a, b, c là các số thực dương.

Chứng minh rằng: $\frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c} \ge 4\left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}\right)$

Bài 12. [Vietnam TST 1996] Chứng minh bất đẳng thức sau đúng với mọi số thực a, b, c

$$(a+b)^4 + (b+c)^4 + (c+a)^4 \ge \frac{4}{7}(a^4 + b^4 + c^4)$$

Bài 13. Cho các số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng :

$$\sqrt{\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b}} + 2\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}} \ge \sqrt{6} + 2$$

Bài 14. [Russia MO] Giả sử x, y, z là các số dương có tổng bằng 3. Chứng minh:

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \ge xy + yz + zx$$

Bài 15. Cho $a, b, c \ge 0$ và $a^2 + b^2 + c^2 = 3$.

Chứng minh rằng: $(2 - ab)(2 - bc)(2 - ca) \ge 1$

Bài 16. Cho các số thực không âm x, y, z: $x + y + z = 2$.

Chứng minh rằng: $0 \le \sqrt{x^3y + y^3z + z^3x} + \sqrt{xy^3 + yz^3 + zx^3} \le 2$

Bài 17. Cho các số thực $a, b, c \ge 0$ và $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

Chứng minh rằng: $\frac{bc}{a - a^3} + \frac{ca}{b - b^3} + \frac{ab}{c - c^3} \ge \frac{5}{2}$

III. MỞ RỘNG ĐỊNH LÝ ABC

Như các bạn đã thấy, đối với các bài toán bất đẳng thức có sự ràng buộc giữa các biến a,b,c, nếu sự ràng buộc này chỉ liên quan đến $a+b+c$ và $ab+bc+ca$ thì định lý ABC sẽ có cơ hội phát huy sức mạnh. Thế nhưng đối với những bài toán mà bản thân abc bị ràng buộc thì sao.

Trong những trường hợp như vậy, chúng ta sẽ cố gắng loại bỏ đi điều kiện ràng buộc đối với abc và thay thế bằng những điều kiện thích hợp hơn đối với abc hay loại bỏ hoàn toàn điều kiện, cụ thể hơn là một số bài toán sau:

Bài 1. Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn: $abc=1$. Chứng minh:

$$a^2+b^2+c^2+6\ge\frac{3}{2}\left(a+b+c+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\ (1)$$

Chứng minh

Bất đẳng thức (1) $\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+6\ge\frac{3}{2}(a+b+c+ab+bc+ca)$

$\Leftrightarrow 2(a+b+c)^2+12\ge 3(a+b+c)+7(ab+bc+ca)\ (2)$

Tồn tại các số thực dương x,y,z sao cho: $a=\frac{x^2}{yz}, b=\frac{y^2}{xz}, c=\frac{z^2}{xy}$.

Khi đó (2) $\Leftrightarrow 2\left(\frac{x^3+y^3+z^3}{xyz}\right)^2+12\ge\frac{3(x^3+y^3+z^3)}{xyz}+7\cdot\frac{x^3y^3+y^3z^3+z^3x^3}{x^2y^2z^2}$

$\Leftrightarrow 2(x^3+y^3+z^3)^2+12x^2y^2z^2\ge 3(x^3+y^3+z^3)xyz+7(x^3y^3+y^3z^3+z^3x^3)\ (3)$

Do tính thuần nhất của (3), ta có thể giả sử $x+y+z=1, xy+yz+zx=v, xyz=w$

Ta có: $x^3+y^3+z^3=1-3v+3w$; $x^3y^3+y^3z^3+z^3x^3=v^3-3vw+3w^2$

Khi đó (3) $\Leftrightarrow 2(1-3v+3w)^2+12w^2\ge 3(1-3v+3w)w+7(v^3-3vw+3w^2)$

$\Leftrightarrow 2(1-3v)^2+9(1-3v)w+7(v^3-3vw)\ge 0$

Đa thức bậc nhất theo w, điều kiện thuận lợi để áp dụng định lý ABC cho (3).

Trường hợp 1: $z=0, y=1$

(có thể giả sử $y=1$ là do tính thuần nhất của biểu thức sau khi đã cho $z=0$)

Bất đẳng thức (3) trở thành: $2(x^3+1)^2\ge 7x^3 \Leftrightarrow 2(x^3-1)^2+x^3\ge 0$

Trường hợp 2: $y=z=1$

(có thể giả sử chúng bằng 1 là do tính thuần nhất của biểu thức sau khi cho $y=z$).

Bất đẳng thức (3) trở thành: $2(x^3+2)^2+12x^2\ge 3(x^3+2)x+7(2x^3+1)$

$\Leftrightarrow 2x^6-3x^4-6x^3+12x^2-6x+1\ge 0\Leftrightarrow (2x^4+4x^3+3x^2-4x+1)(x-1)^2\ge 0$

Vậy ta có đpcm.

Bài 2. Cho các số thực $a,b,c\ge 0$ thỏa mãn: $ab+bc+ca+abc=4$.

Chứng minh rằng: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge a+b+c$ (1)

Chứng minh

Tồn tại các số thực dương x,y,z sao cho: $a=\frac{2x}{y+z},b=\frac{2y}{x+z},c=\frac{2z}{x+y}$

Khi đó (1) trở thành: $\frac{x+y}{z}+\frac{x+z}{y}+\frac{y+z}{x}\ge 4\left(\frac{x}{y+z}+\frac{y}{x+z}+\frac{z}{x+y}\right)$

Do tính thuần nhất ta hãy đặt $x+y+z=1, xy+yz+zx=v, xyz=w$ và viết lại bất đẳng thức:

$$\frac{1-z}{z}+\frac{1-y}{y}+\frac{1-x}{x}\ge 4\left(\frac{x}{1-x}+\frac{y}{1-y}+\frac{z}{1-z}\right)$$

$$\Leftrightarrow\left[xy(1-z)+xz(1-y)+yz(1-x)\right]\left[(1-x)(1-y)(1-z)\right]$$

$$\ge 4xyz\left[x(1-y)(1-z)+y(1-z)(1-x)+z(1-x)(1-y)\right]$$

$$\Leftrightarrow (v-3w)(v-w)\ge 4w(1-2v+3w)\Leftrightarrow 9w^2+4(1-v)w-v^2\le 0$$

Đến đây thì đã hội tụ đủ điều kiện để áp dụng định lý *ABC*. Ta quy về hai trường hợp sau:

Trường hợp $z=0$, bất đẳng thức hiển nhiên đúng.

Trường hợp $y=z=1$ (ta có thể giả sử chúng bằng 1 nhờ tính thuần nhất):

$$2(x+1)+\frac{2}{x}\ge 4\left(\frac{x}{2}+\frac{2}{x+1}\right)\Leftrightarrow 2x(x+1)+2(x+1)\ge 8x\Leftrightarrow 2(x-1)^2\ge 0.$$

Bài 3. Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $a\ge 1,b\ge 1,c\ge 1$ và $a+b+c+2=abc$.

Chứng minh rằng: $a+b+c+3\ge 6\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$ (1)

Chứng minh

Tồn tại các số thực dương x,y,z sao cho $a=\frac{y+z}{x},b=\frac{x+z}{y},c=\frac{x+y}{z}$

trong đó x,y,z là ba cạnh tam giác xuất từ điều kiện $a\ge 1,b\ge 1,c\ge 1$.

$$(1) \Leftrightarrow (x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \ge 6\left(\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}\right) \quad (2)$$

Do tính thuần nhất ta có thể giả sử $x+y+z=1, xy+yz+zx=n, xyz=p$

$$(2) \Leftrightarrow (x+y+z)\frac{xy+yz+zx}{xyz} \ge 6\left(\frac{x}{1-x}+\frac{y}{1-y}+\frac{z}{1-z}\right)$$

$$\Leftrightarrow (x+y+z)\frac{xy+yz+zx}{xyz} \ge 6\cdot\frac{x(1-y)(1-z)+y(1-z)(1-x)+z(1-x)(1-y)}{(1-x)(1-y)(1-z)}$$

$$\Leftrightarrow (x+y+z)\frac{xy+yz+zx}{xyz} \ge 6\cdot\frac{x+y+z-2(xy+yz+zx)+3xyz}{1-xyz-(x+y+z)+xy+yz+zx}$$

$$\Leftrightarrow \frac{n}{p} \ge \frac{6(1-2n+3p)}{n-p} \Leftrightarrow n(n-p) \ge 6(1-2n)p+3p^2 \Leftrightarrow 3p^2+(6-11n)p-n^2 \le 0$$

Do x, y, z là 3 cạnh của một tam giác nên đặt $x=v+w, y=u+w, z=u+v$.

Ta có: $a+b+c=2(u+v+w), xy+yz+zx=uv+vw+wu+(u+v+w)^2$ và

$xyz=(u+v+w)(uv+vw+wu)-uvw$ nên biểu thức (1) theo u,v,w vẫn là một tam thức bậc hai theo (uvw) và ta cần tìm giá trị lớn nhất. Điều kiện hoàn toàn thuận lợi để ta có thể áp dụng định lý ABC.

Ta xét hai trường hợp sau:

Trường hợp 1: $w=0 \Rightarrow z=x+y$. Do tính thuần nhất, ta có thể giả sử $y=1$.

Bất đẳng thức (2) trở thành: $2(x+1)\left(\frac{1}{x}+1+\frac{1}{x+1}\right) \ge 6\left(\frac{x}{x+2}+\frac{1}{2x+1}+1\right)$

$$\Leftrightarrow 2\left(3+x+\frac{1}{x}\right) \ge 6\left[\frac{2x^2+2x+2}{(x+2)(2x+1)}+1\right] \Leftrightarrow \frac{x^2+1}{2x} \ge \frac{3(x^2+x+1)}{2x^2+5x+2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-1)^2}{2x} \ge \frac{(x-1)^2}{2x^2+5x+2} \Leftrightarrow (x-1)^2(2x^2+3x+2) \ge 0 \text{ (đúng)} \Rightarrow \text{(đpcm)}$$

Trường hợp 2: $v=w \Rightarrow y=z$. Do tính thuần nhất của (2) nên ta giả sử $y=z=1, x\le 2$

Bất đẳng thức (2) $\Leftrightarrow (x+2)\left(\frac{1}{x}+2\right) \ge 6\left(\frac{x}{2}+\frac{2}{x+1}\right)$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x+2)(2x+1) \ge 3x(x^2+x+4) \Leftrightarrow (2-x)(x-1)^2 \ge 0 \text{ (đúng)} \Rightarrow \text{(đpcm)}$$

Bài toán được chứng minh.

Tuy nhiên không phải trường hợp nào ta cũng có thể đổi biến để loại bỏ điều kiện như các ví dụ ở trên, và định lý ABC mở rộng là một giải pháp cho những trường hợp như vậy:

Định lý ABC mở rộng

i) Cho a,b,c đồng thời là các số thực hoặc là các số thực dương. Khi đó nếu đại lượng $abc, a+b+c$ đã được cho trước (nghĩa là đã được cố định sẵn) thì $ab+bc+ca$ sẽ đạt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất khi có hai trong ba biến a,b,c bằng nhau.

ii) Cho a,b,c đồng thời là các số thực dương. Khi đó nếu đại lượng abc, $ab+bc+ca$ đã được cho trước (nghĩa là đã được cố định sẵn) thì $a+b+c$ sẽ đạt giá trị nhỏ nhất khi có hai trong ba biến a,b,c bằng nhau.

Chứng minh

i) Giả sử $a+b+c=1$ và $abc=m$ (trường hợp $a+b+c=n$ có thể đưa về trường hợp này một cách dễ dàng bằng cách đặt $a=nx, b=ny, c=nz$, bạn đọc cũng đã được xem qua kỹ thuật này trong phần chứng minh định lý ABC ở các phần trên).

Ta sẽ chứng minh $ab+bc+ca$ đạt giá trị nhỏ nhất và lớn nhất khi có hai trong ba biến a,b,c bằng nhau trong cả hai trường hợp $a,b,c \in \mathbb{R}$ và $a,b,c \in \mathbb{R}^+$.

Đặt $ab+bc+ca=S$. Một lần nữa, ta lại đưa về bài toán tồn tại nghiệm của phương trình:

Đặt $f(X)=X^3-X^2+SX-m$. Ta có: $f'(X)=3X^2-2X+S$.

Phương trình có hai nghiệm $X_1=\dfrac{1+\sqrt{1-3S}}{3}; X_2=\dfrac{1-\sqrt{1-3S}}{3}$

Phương trình có ba nghiệm khi và chỉ khi $f(X_2)\geq 0, f(X_1)\leq 0$.

Ta có: $f(X_2)\geq 0 \Leftrightarrow (6S-2)X_2+S-9m\geq 0$, giả sử có tập nghiệm là R_{X_2}

$f(X_1)\leq 0 \Leftrightarrow (6S-2)X_1+S-9m\leq 0$, giả sử có tập nghiệm là R_{X_1}

Trước tiên ta sẽ chứng minh cho trường hợp $a,b,c\in\mathbb{R}$.

Gọi $S_{\min}, S_{\max}$ lần lượt là giá trị nhỏ nhất và lớn nhất trong tập $R_{X_1}\cap R_{X_2}$ (giao của hai tập này khác rỗng, nếu không phương trình không có nghiệm với mọi giá trị của S). Nhận xét rằng hai giá trị này là nghiệm của một trong hai phương trình $(6S-2)X_1+S-9m=0$ hay $(6S-2)X_2+s-9m=0$ (các giá trị này chắc chắn tồn tại, nếu không thì phương trình bậc 3 sẽ có nghiệm khi S chạy tới cộng vô cùng hoặc âm vô cùng), khi đó ta sẽ có $S_{\min}\leq S\leq S_{\max}$. Bây giờ ta sẽ kiểm tra khi S đạt một trong hai giá trị này thì liệu có tồn tại ba số thực a,b,c không và hình thù của a,b,c sẽ ra sao.

Điều đầu tiên là rõ ràng, vì $S_{\min}, S_{\max}\in R_{X_1}\cap R_{X_2}$. Điều thứ hai, do $S_{\min}, S_{\max}$ là nghiệm của một trong hai phương trình $(6S-2)X_1+S-9m=0$ hay $(6S-2)X_2+s-9m=0$ nên hoặc là $f(X_1)=0$, hoặc là $f(X_2)=0$. Khi này phương trình bậc ba đã cho sẽ có nghiệm kép, hay nói cách khác, lúc này hình thù của (a,b,c) là (x,x,y).

Bây giờ ta sẽ chứng minh cho trường hợp $a,b,c\in\mathbb{R}^+$. Trước hết ta cần phải có $m\geq 0$.

Nhận xét rằng $0\notin R_{X_1}\cap R_{X_2}$, vì không tồn tại các số thực a,b,c thoả mãn $a+b+c=1$, $ab+bc+ca=0, abc\geq 0$. Điều này có nghĩa là $R_{X_1}\cap R_{X_2}$ tách biệt thành các khoảng mà các cận là cùng âm hoặc cùng dương. Gọi R_3 là tập $R_{X_1}\cap R_{X_2}$ bỏ đi các đoạn âm. Gọi $S_{\min}, S_{\max}$ là các giá trị nhỏ nhất và nhỏ nhất trong tập R_3 này. Ta có: $S_{\min}\leq S\leq S_{\max}$.

Lý luận tương tự như trường hợp $\mathbb{R}$, ta cũng sẽ suy ra được khi S chạm các biên này thì hai trong ba biến (a,b,c) là bằng nhau.

ii) Bạn đọc có thể dễ dàng suy ra chứng minh định lý này sau khi đã xem qua chứng minh phần thứ nhất ở trên. Đối với $a+b+c$ thì không có ràng buộc về cận trên khi a, b, $c\geq 0$. Tuy nhiên sẽ có cận dưới do $a+b+c$ đã bị chặn dưới bởi 0.

Do đó nên trong trường hợp này chỉ tồn tại $S_{\min}$. Và ta đi tới kết luận $a+b+c$ đạt giá trị nhỏ nhất khi hai trong ba biến a,b,c bằng nhau.

Định lý trên nói rằng chúng ta để tìm giá trị nhỏ nhất của $ab+bc+ca$ hay $a+b+c$ ta chỉ cần xét trường hợp hai trong ba biến a,b,c bằng nhau.

Chúng ta sẽ lướt qua một số ví dụ để xem cách áp dụng của định lý ABC mở rộng.

Bài 4. Cho các số thực dương a,b,c thoả mãn $abc\geq 1$.

Chứng minh rằng: $1\geq \dfrac{1}{1+a+b}+\dfrac{1}{1+b+c}+\dfrac{1}{1+c+a}$ (1)

Chứng minh

Nhận xét rằng hàm số bên phải giảm khi biến a tăng. Do đó chúng ta chỉ cần chứng minh khi $abc=1$ (đối với trường hợp $abc=k\geq 1$, ta có:

$$\frac{1}{1+a+b}+\frac{1}{1+b+c}+\frac{1}{1+c+a}\leq \frac{1}{1+\dfrac{a}{k}+b}+\frac{1}{1+b+c}+\frac{1}{1+c+\dfrac{a}{k}}\leq 1\ )$$

$$(1)\Leftrightarrow f(a,b,c)=(1+a+b)(1+b+c)(1+c+a)-(1+a+b)(1+b+c)$$
$$-(1+b+c)(1+c+a)-(1+c+a)(1+a+b)\geq 0$$

Nhận xét rằng bậc của đại lượng $ab+bc+ca$ trong $f(a,b,c)$ chỉ là bậc 1 ($f(a,b,c)$ chỉ là bậc 3 theo a,b,c). Vậy nên khi cố định $a+b+c$ thì $f(a,b,c)$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $ab+bc+ca$ đạt giá trị nhỏ nhất, khi này hai trong ba biến a,b,c bằng nhau. Ta đưa về bài toán:

Cho các số thực $x, y > 0$ thỏa mãn $x^2y = 1$. Chứng minh: $\frac{1}{1+2x} + \frac{2}{1+x+y} \le 1$ (2)

Thay $y = \frac{1}{x^2}$ vào (2) ta được: $\frac{1}{1+2x} + \frac{2}{1+x+\frac{1}{x^2}} \le 1 \Leftrightarrow \frac{2x(x-1)^2(x+1)}{(1+2x)(x^3+x^2+1)} \le 0$

Như vậy bất đẳng thức đã được chứng minh hoàn toàn.

Bài 5. Cho các số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + 2\sqrt{\frac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}} \ge 2 \quad (1)$$

Chứng minh

Đối với bài toán này thì dù có cố định hai đại lượng nào đi nữa thì chúng ta đều sẽ không thu được một hàm số tốt với biến còn lại (tốt ở đây ngụ ý lồi, lõm hay đơn điệu). Tuy nhiên ở đây, ta sẽ thấy được sự liên hệ giữa hai đại lượng $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$ và $\frac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}$, chúng là tổng và tích của các đại lượng $\frac{a}{b+c}, \frac{b}{c+a}, \frac{c}{a+b}$.

Như vậy chúng ta hãy thử chuyển biến theo hướng này xem.

Đổi biến $x = \frac{a}{b+c}, y = \frac{b}{c+a}, z = \frac{c}{b+a}$ ta dẫn tới bài toán tương đương sau:

Cho $x, y, z \ge 0$ thỏa mãn: $\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} + \frac{1}{1+z} = 2 \Leftrightarrow 2xyz + xy + yz + zx = 1$.

Chứng minh rằng: $x + y + z + 2\sqrt{xyz} \ge 2$.

Như vậy ta sẽ cố định xyz và $xy + yz + zx$ đưa về bài toán sau:

Cho $a, b \ge 0$ và $2a^2b + a^2 + 2ab = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của: $2a + b + 2a\sqrt{b}$.

Thay $b = \frac{1-a^2}{2a^2+2a} = \frac{1-a}{2a}$ $(a \le 1)$, ta cần chứng minh: $2a + \frac{1-a}{2a} + \sqrt{2a(1-a)} \ge 2$ (2)

Thật vậy, bất đẳng thức (2) $\Leftrightarrow \frac{1-a}{2a} + \sqrt{\frac{2a}{1-a}}(1-a) \ge 2(1-a) \Leftrightarrow \frac{1}{2a} + \sqrt{\frac{2a}{1-a}} \ge 2$

Mặt khác $\sqrt{\frac{2a}{1-a}} = \frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{(1-a)a}} \ge \frac{\sqrt{2}a}{\frac{1-a+a}{2}} \ge 2\sqrt{2}a$.

Nên $\frac{1}{2a} + \sqrt{\frac{2a}{1-a}} \ge \frac{1}{2a} + 2\sqrt{2}a \ge 2 \cdot \sqrt[4]{2} \ge 2$.

Tóm lại bất đẳng thức đã được chứng minh hoàn toàn.

Bài 6. Cho các số thực $x, y, z \ge 0$.

Chứng minh: $\dfrac{2x^2y^2z^2}{x^3y^3+y^3z^3+z^3x^3}+\dfrac{1}{3}\ge\dfrac{3xyz}{x^3+y^3+z^3}$ (1)

Chứng minh

Đặt $a=\dfrac{yz}{x^2}, b=\dfrac{xz}{y^2}, c=\dfrac{xy}{z^2}$, bất đẳng thức (1) $\Leftrightarrow \dfrac{2}{a+b+c}+\dfrac{1}{3}\ge\dfrac{3}{ab+bc+ca}$

trong đó a,b,c là các số thực dương thoả mãn $abc=1$.

Sau phép đổi biến này thì bài toán trở nên rất đơn giản nếu sử dụng định lý ABC mở rộng.

Ta đưa về trường hợp duy nhất sau:

Cho các số thực dương $x, y : x^2y=1$. Chứng minh rằng: $\dfrac{2}{2x+y}+\dfrac{1}{3}\ge\dfrac{3}{x^2+2xy}$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{2x+\frac{1}{x^2}}-\frac{2}{3}\ge\frac{3}{x^2+\frac{2}{x}}-1 \Leftrightarrow \frac{2x^2}{2x^3+1}-\frac{2}{3}\ge\frac{3x}{x^3+2}-1$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+2)(x-1)^2}{x^3+2}\ge\frac{2(x+1)(x-1)^2}{3(2x^3+1)} \Leftrightarrow (4x^4+10x^3-x+2)(x-1)^2\ge 0$$

Bài 7. Cho các số dương a,b,c, chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}+\frac{9(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2}\ge 12$$

Chứng minh

Bổ đề. Với mọi $x,y,z>0, xyz=1$, ta có $(x+y+z)^2+\dfrac{15}{2}\ge\dfrac{11}{4}(x+y+z+xy+yz+zx)$

Chứng minh: Thật vậy, không giảm tổng quát, giả sử

$x=\min\{x,y,z\}\Rightarrow t^2=xy\ge 1\ (t>0)$, đặt $P(x,y,z)$ là hiệu $VT-VP$ của bất đẳng thức trên. Thế thì ta có

$$P(x,y,z)-P(t,t,z)=\frac{\left(4xy(x+y)+8xy\sqrt{xy}-11xy-3\right)\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2}{4xy}\ge 0$$

Lại có: $P(t,t,z)=P\left(t,t,\dfrac{1}{t^2}\right)=\dfrac{(5t^4-12t^3+t^2+8t+4)(t-1)^2}{4t^4}\ge 0$.

Bổ đề được chứng minh.

Áp dụng: Sử dụng bổ đề này, ta có $\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}\right)^2 \ge \frac{11}{4}\sum_{cyc}\frac{a^2+b^2}{c^2}-\frac{15}{2}$

Như thế, để chứng minh bất đẳng thức đã cho, ta chỉ cần chứng minh rằng

$$\frac{11}{4}\sum_{cyc}\frac{a^2+b^2}{c^2}-\frac{15}{2}\ge\left(12-\frac{9(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2}\right)^2 \quad (1)$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a+b+c=1$,

đặt $ab+bc+ca=\frac{1-q^2}{3}$ $(1\ge q\ge 0)$, $r=abc$

Khi đó $0\le(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2=-27r^2+2(1-3q^2)r+\frac{1}{27}(1-q^2)^2(4q^2-1)$

$$=-\frac{1}{27}\left[27r-(1-q)^2(1+2q)\right]\left[27r-(1+q)^2(1-2q)\right]$$

Chú ý rằng $(1-q)^2(1+2q)-(1+q)^2(1-2q)=4q^3\ge 0$ và đây là một tam thức bậc 2 theo r nên theo định lý về dấu của tam thức bậc 2, ta phải có:

$\frac{(1+q)^2(1-2q)}{27}\le r\le\frac{(1-q)^2(1+2q)}{27}$ (*)

Bất đẳng thức (1) tương đương với

$$f(r)=\frac{11(1+2q^2)((1-q^2)^2-18r)}{27r^2}-63-\frac{36(11q^2+1)^2}{(2q^2+1)^2}\ge 0$$

Rõ ràng đây là hàm nghịch biến theo r nên có thể áp dụng định lý ABC mở rộng. Hoặc có thể chứng minh trực tiếp:

$$f(r)\ge f\left(\frac{(1-q)^2(1+2q)}{27}\right)=\frac{18q^2(8-28q+61q^2-148q^3+778q^4+1112q^5-892q^6)}{(1+2q^2)^2(1-q)^2(1+2q)^2}\ge 0$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Bài 8. Cho $x,y,z,k>0$ thỏa mãn $xyz=1$. Chứng minh

$$\sqrt[4]{\frac{x}{y+k}}+\sqrt[4]{\frac{y}{z+k}}+\sqrt[4]{\frac{z}{x+k}}\ge\frac{3}{\sqrt[4]{k+1}}$$

Chứng minh

Bổ đề. Với mọi $a,b,c\ge 0$, ta có $2\left(\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\right)+3(a+b+c)\ge\frac{15(a^2+b^2+c^2)}{a+b+c}$

Chứng minh: Không mất tính tổng quát, giả sử $a=\min\{a,b,c\}$

Đặt $b=a+x, c=a+y$ $(x,y\ge 0)$, bất đẳng thức trở thành

$(x^2-xy+y^2)a^3+3xy(2y-x)a^2+(x^4-5x^3y+6x^2y^2+xy^3+y^4)a+xy^3(x+y)\ge 0$

Ta sẽ chứng minh:

$g(a) = (x^2 - xy + y^2)a^2 + 3xy(2y - x)a + x^4 - 5x^3y + 6x^2y^2 + xy^3 + y^4 \ge 0$

Thật vậy, ta có: $\Delta_g = -(4x^6 - 24x^5y + 39x^4y^2 - 4x^3y^3 - 12x^2y^4 + 4y^6) = -f(x)$

Nếu $x \ge 3y$, ta có $f'(x) = 12xy(x-2y)(2x^2(x-3y) + xy^2 + y^3) \ge 0$ nên $f(x)$ là hàm đồng biến, do đó $f(x) \ge f(3y) = 31y^6 \ge 0$. Nếu $x \le 3y$ thì

$$f(x) = (2x^3 - 6x^2y + xy^2 + y^3)^2 + x^3y^2(3y - x) + y^3(x^3 + 4y^3 - y(x+y)^2)$$

$$\ge y^3(x^3 + 4y^3 - y(x+y)^2) \ge y^3\left[\frac{1}{4}(x+y)^3 + 3y^3 - y(x+y)^2\right]$$

$$= y^3\left[\frac{1}{8}(x+y)^3 + \frac{1}{8}(x+y)^3 + 3y^3 - y(x+y)^2\right] \ge \left(\frac{3\sqrt[3]{3}}{4} - 1\right)y^4(x+y)^2 \ge 0$$

Do đó, trong mọi trường hợp, ta luôn có $f(x) \ge 0$, suy ra $g(a) \ge 0$.

Bổ đề được chứng minh.

Áp dụng: Do $x, y, z > 0, xyz = 1$ nên tồn tại các số dương a, b, c sao cho $x = \frac{a^5}{b^5}$, $y = \frac{c^5}{a^5}$, $z = \frac{b^5}{c^5}$. Bất đẳng thức trở thành: $\sum_{cyc} \frac{a^{5/2}}{b^{5/4} \cdot \sqrt[4]{c^5 + ka^5}} \ge \frac{3}{\sqrt[4]{k+1}}$

Sử dụng bất đẳng thức ***Holder***, ta có:

$$\left(\sum_{cyc} \frac{a^{5/2}}{b^{5/4}\sqrt[4]{c^5 + ka^5}}\right)^4 \sum_{cyc}(c^5 + ka^5) \ge \left(\sum_{cyc} \frac{a^2}{b}\right)^5$$

Ta còn phải chứng minh: $\left(\sum_{cyc} \frac{a^2}{b}\right)^5 \ge \frac{81}{k+1}\sum_{cyc}(c^5 + ka^5) = 81(a^5 + b^5 + c^5)$

Sử dụng bổ đề trên, ta chỉ cần chứng minh rằng

$$3\left[\frac{5(a^2 + b^2 + c^2)}{a+b+c} - (a+b+c)\right]^5 \ge 32(a^5 + b^5 + c^5) \ (1)$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a + b + c = 1$, đặt $ab + bc + ca = \frac{1-q^2}{3}$ $(1 \ge q \ge 0)$, $r = abc$.

Sử dụng đẳng thức $a^5 + b^5 + c^5 = \frac{1}{9}(15(q^2+2)r + 35q^4 - 25q^2 - 1)$.

Khi đó (1) trở thành $(5q^2+1)^5 \ge 9\left[15(q^2+2)r + 35q^4 - 25q^2 - 1\right]$.

Nhận thấy VT – VP là hàm bậc nhất theo r do đó có thể áp dụng định lý ABC mở rộng. Tuy nhiên ta có thể sử dụng nhận xét (*) (xem bài 7) để chứng minh trực tiếp như sau:

Ta có: $(5q^2+1)^5 - 9\left[15(q^2+2)r + 35q^4 - 25q^2 - 1\right]$

$$\ge (5q^2+1)^5 - 9\left[15(q^2+2)\frac{(1-q)^2(1+2q)}{27} + 35q^4 - 25q^2 - 1\right]$$

$$= 5q^2\left(625q^8 + 625q^6 + 250q^4 - 2q^3 - 10q^2 - 4q + 55\right) \ge 0$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = 1$.

Bài tập áp dụng

Bài 9. Cho $a,b,c>0$. Chứng minh: $\frac{x+y+z}{3}+\sqrt[3]{xyz}\geq\frac{2}{3}\left(\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}\right)$

Bài 10. Cho $a,b,c>0$ có tích là 1.CMR: $a^2+b^2+c^2+3\geq a+b+c+ab+bc+ca$

Bài 11. Cho $a,b,c\geq 0$ Chứng minh rằng: $a^2+b^2+c^2+2abc+1\geq 2(ab+bc+ca)$

Bài 12. Cho các số thực dương a,b,c có tích bằng 1. Chứng minh rằng:

$$a+b+c\geq\frac{2}{1+a}+\frac{2}{1+b}+\frac{2}{1+c}$$

Bài 13. [Việt Nam MO 1996] Cho $a,b,c\geq 0$ thỏa mãn $a+b+c+abc=4$.

Chứng minh rằng: $a+b+c\geq ab+bc+ca$

Bài 14. Cho $a,b,c\geq 0$ thỏa mãn $ab+bc+ca+6abc=9$.

Chứng minh rằng: $a+b+c+3abc\geq 6$

Bài 15. Cho các số thực dương x,y,z thỏa mãn: $xyz\geq 1$.

Chứng minh rằng: $\frac{1}{2+x}+\frac{1}{2+y}+\frac{1}{2+z}\leq 1$

Bài 16. Cho các số thực dương a,b,c và $abc=1$. Chứng minh rằng:

$$3^6\left(a^2+1\right)\left(b^2+1\right)\left(c^2+1\right)\leq 8\left(a+b+c\right)^6$$

Bài 17. Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn: $(a+b)(b+c)(c+a)=8$.

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của: $P=\sqrt{abc}+\sqrt{a+b+c}$

Bài 18. Cho các số thực a,b,c thỏa mãn $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=3$.

Chứng minh rằng: $a+b+c-3\leq\frac{9}{4}(abc-1)$

Bài 19. Cho a,b,c là các số thực không âm. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{1}{b^2+c^2}+\frac{1}{c^2+a^2}\geq\frac{10}{(a+b+c)^2}.$$

Bài 20. Cho các số dương a,b,c, chứng minh

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geq 3\sqrt[3]{\frac{3(a^3+b^3+c^3)}{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)}}$$

Bài 21. Cho các số dương a,b,c, chứng minh rằng

$$\frac{1}{3}\left(\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\right)\geq\sqrt[6]{\frac{a^6+b^6+c^6}{3}}$$

Bài 22. Cho các số dương a,b,c, chứng minh rằng

$$\sqrt{(a^2-ab+b^2)(b^2-bc+c^2)}+\sqrt{(b^2-bc+c^2)(c^2-ca+a^2)}$$
$$+\sqrt{(c^2-ca+a^2)(a^2-ab+b^2)}\geq a^2+b^2+c^2$$

IV. MỞ RỘNG TẬP ĐÓNG VỚI ABC

Trong phần này, chúng ta sẽ xét qua một lớp các bài toán mà các biến bị chặn trong các tập đóng. Đối với lớp bài toán này, chúng ta cũng có một số phương pháp khác để giải quyết. Tuy nhiên ở đây xin giới thiệu với bạn đọc về phương pháp này trước, tiếp theo chúng ta sẽ nghiên cứu về cách ứng dụng ABC trong các bài toán này sau:

Bài toán tổng quát: Cho $x_1, x_2, ..., x_n \in [a, b]$. Chứng minh rằng

$f(x_1, x_2, ..., x_n) \geq C$ trong đó a, b, C là các hằng số cho trước.

Gặp những tình huống như thế này, dấu bằng của bất đẳng thức thường xảy ra tại các giá trị biên, nghĩa là bằng a hay b. Trong những trường hợp như vậy, ta sẽ cố gắng chứng minh $f(x_1, x_2, ..., x_n) \geq \min\left\{f(a, x_2, ..., x_n), f(b, x_2, ..., x_n)\right\}$. Cuối cùng ta sẽ thu được giá trị nhỏ nhất của hàm số đạt được khi một số giá trị bằng a và các giá trị còn lại bằng b (xem phương pháp dồn biến ở chương trước). Ta xét một số ví dụ:

Bài 1. Cho $a, b, c \in [0, 1]$. Tìm giá trị lớn nhất của:

$$f(a, b, c) = a + b + c - ab - bc - ca$$

Giải

Ta sẽ chứng minh: $f(a, b, c) \leq \max\left\{f(0, b, c), f(1, b, c)\right\}$ (*).

Có thể chứng minh trực tiếp bằng phương pháp đại số như sau:

$\left[f(a, b, c) - f(0, b, c)\right]\left[f(a, b, c) - f(1, b, c)\right] = c(c-1)(1-a-b)^2 \leq 0$, từ đó suy ra (*)

Hay bằng một cái nhìn giải tích, ta có thể suy ra kết quả nhanh chóng hơn nhờ nhận xét hàm số đơn điệu theo biến a. Và từ đó trực tiếp suy ra (*).

Hoàn toàn thực hiện những bất đẳng thức tương tự đối với các biến b, c, ta sẽ suy ra tính chất sau: $f(a, b, c) \leq \max\left\{f(0, 0, 0); f(0, 0, 1); f(0, 1, 1); f(1, 1, 1)\right\}$.

Ta kết luận giá trị lớn nhất của $f(a, b, c)$ là 1.

Dấu bằng xảy ra chẳng hạn như: $a = b = 0, c = 1$.

Bài 2. Cho $a, b, c \in [1, 2]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $\dfrac{a}{b+c} + \dfrac{b}{c+a} + \dfrac{c}{a+b}$

Giải

Ta sẽ coi như b, c là các hằng số, và a là biến: $g''(a, b, c) = \dfrac{2b}{(c+a)^3} + \dfrac{2c}{(b+a)^3} > 0$

Như vậy g là hàm lồi theo biến a, tức là g đạt giá trị lớn nhất khi a chạm các biên.

Từ đây ta suy ra được điều mong muốn: $g(a,b,c) \le \max\{g(1,b,c), g(2,b,c)\}$.

Viết những bất đẳng thức tương tự đối với các biến b,c, ta suy ra tính chất sau:

$g(a,b,c) \le \max\{g(1,1,1); g(2,1,1); g(2;2;1); g(2,2,2)\}$.

Suy ra giá trị lớn nhất của g là $\frac{5}{3}$, đạt được khi $(a,b,c)=(2,1,1)$ và các hoán vị.

Như vậy qua hai ví dụ các bạn cũng đã có thể phần nào làm quen được với phương pháp này. Ở đây chúng tôi sẽ nêu ra một phương pháp khác, chứng minh dựa vào định lý ABC.

Trong các phần trên, ta thấy rằng định lý ABC chỉ áp dụng được khi các biến chạy hoàn toàn trong $\mathbb{R}$ hoặc $\mathbb{R}^+$, vậy muốn áp dụng định lý ABC cho các miền nhỏ hơn, ta phải kéo dãn miền đó thành $\mathbb{R}$ hoặc $\mathbb{R}^+$.

Quay lại bài toán 1.

Bài 1. Cho $a,b,c \in [0,1]$. Tìm giá trị lớn nhất của:

$$f(a,b,c) = a+b+c-ab-bc-ca$$

Ta sẽ tìm cách kéo giãn đoạn $[0;1]$ thành $\mathbb{R}^+$.

Nhận xét nếu nghịch đảo $a \to \frac{1}{a}$, ta thu được bộ số nằm trong đoạn $[1;+\infty]$. Vẫn chưa biến thành $\mathbb{R}^+$ được, ta lại tiếp tục trừ bộ số cho 1: $\frac{1}{a} \to \frac{1}{a}-1$ và ta sẽ thu được bộ số nằm trong đoạn $[0,+\infty]$. Như vậy ta đã chuyển $a \to \frac{1}{a}-1 = x$ $a \to \frac{1}{a}-1 = x$ để kéo $[0;1] \to [0;+\infty]$.

Từ những ý tưởng như trên, ta đi tới lời giải sau:

Đặt $a=\frac{1}{1+x}, b=\frac{1}{1+y}, c=\frac{1}{1+z}$ trong đó $x,y,z \in \mathbb{R}^+$. Biểu thức đã cho trở thành:

$$f(a,b,c) = g(x,y,z) = \frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y}+\frac{1}{1+z}-\frac{1}{(1+x)(1+y)}-\frac{1}{(1+y)(1+z)}-\frac{1}{(1+z)(1+x)}$$

$$=\frac{(1+y)(1+z)+(1+z)(1+x)+(1+x)(1+y)-3-x-y-z}{(1+x)(1+y)(1+z)}=\frac{xy+yz+zx+x+y+z}{xyz+xy+yz+zx+x+y+z+1}$$

Đến đây ta có luôn $g(x,y,z) \le 1$, không cần áp dụng thêm định lý ABC nữa, tuy nhiên ta cũng có thể áp dụng định lý ABC một cách dễ dàng để đưa về trường hợp hai biến.

Có hai lợi thế khi chúng ta kéo dãn một tập đóng thành tập $\mathbb{R}^+$ như thế này, thứ nhất là ta có thể áp dụng được định lý ABC như trong ví dụ ở trên, thứ hai là ta có thể đánh giá được dễ dàng hơn, vì ở đây ta sẽ đánh giá các biến với số 0, và điều này lúc nào cũng khá đơn giản.

Bài 3. Cho $x, y, z \in [1, 2]$. Chứng minh rằng: $g(x, y, z) = (x + y + z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \le 10$

Chứng minh

Một lần nữa ta sẽ sử dụng kỹ thuật kéo dãn các biến.

Ta sẽ sử dụng định lý ABC, trước tiên kéo dãn $[1, 2] \to \mathbb{R}^+$ như sau: $x \to \frac{1}{x-1} - 1 = a$.

Như vậy, đặt $x = \frac{a+2}{a+1}, y = \frac{b+2}{b+1}, z = \frac{c+2}{c+1}$, $a, b, c \in \mathbb{R}^+$. Ta cần chứng minh bài toán sau:

$$f(a,b,c) = \left(\frac{a+2}{a+1} + \frac{b+2}{b+1} + \frac{c+2}{c+1}\right)\left(\frac{a+1}{a+2} + \frac{b+1}{b+2} + \frac{c+1}{c+2}\right) \le 10$$

$$\Leftrightarrow \frac{M.N}{(a+1)(b+1)(c+1)(a+2)(b+2)(c+2)} \le 10$$

trong đó $M = (a+2)(b+1)(c+1) + (a+1)(b+2)(c+1) + (a+1)(b+1)(c+2)$

và $N = (a+1)(b+2)(c+2) + (a+2)(b+1)(c+2) + (a+2)(b+2)(c+1)$

Thật đáng tiếc là bất đẳng thức: $MN - 10(a+1)(b+1)(c+1)(a+2)(b+2)(c+2) \le 0$ không thể đánh giá bằng định lý ABC được, do hệ số của $a^2b^2c^2$ cuối cùng thu được là âm (bạn đọc có thể nhẩm ra không mấy khó khăn). Thế nhưng chúng ta không bỏ cuộc một cách dễ dàng, chúng ta sẽ thử sử dụng định lý ABC mở rộng để giải quyết trường hợp này. Cố định abc và $a + b + c$, và ta sẽ thấy biểu thức thu được là đa thức bậc nhất theo $ab + bc + ca$. Vậy nên ta đi đến kết luận bất đẳng thức đã cho đạt cực trị khi có hai biến bằng nhau. Như vậy ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức:

$$f(a,a,b) = \left(2 \cdot \frac{a+2}{a+1} + \frac{b+2}{b+1}\right)\left(2 \cdot \frac{a+1}{a+2} + \frac{b+1}{b+2}\right) \le 10$$

$$\Leftrightarrow \left(2 \cdot \frac{a+2}{a+1} - \frac{b+2}{b+1}\right)\left(2 \cdot \frac{a+1}{a+2} - \frac{b+1}{b+2}\right) \ge 0 \Leftrightarrow (ab + 3b + 2)(ab + 3a + 2) \ge 0$$

Như vậy là bài toán đã được chứng minh.

Sau đây là một số bài tập cho các bạn áp dụng:

Bài 4: Cho $a,b,c\in[1,2]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $A=\dfrac{a^3+b^3+c^3}{3abc}$

Bài 5: [VNTST 2006]

Cho $x,y,z\in[1,2]$. Chứng minh: $(x+y+z)\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)\ge 6\left(\dfrac{x}{y+z}+\dfrac{y}{z+x}+\dfrac{z}{x+y}\right)$

Bài 6. Cho $a,b,c\ge 0$ thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{a+bc}+\frac{b}{b+ca}+\frac{c}{c+ab}\ge\frac{3}{2}$$

Bài 7. Cho $\begin{cases}a,b,c>0\\ abc=1\end{cases}$. Chứng minh rằng: $(a+b+c)^6\ge 64(a^3+1)(b^3+1)(c^3+1)$

Bài 8. Cho $\begin{cases}a,b,c>0\\ abc=1\end{cases}$ .Chứng minh rằng: $\dfrac{a+b+c}{3}\ge\sqrt[5]{\dfrac{a^2+b^2+c^2}{3}}$ (1)

Bài 9. Cho $a,b,c\ge 0$ thỏa mãn $ab+bc+ca=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1}+\frac{1}{c^2+1}\ge\frac{3}{2}\quad(1)$$

Bài 10. Cho $a,b,c\ge 0$ thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{6-ab}+\frac{1}{6-bc}+\frac{1}{6-ca}\le\frac{3}{5}$$

Bài 11. Cho $a,b,c\ge 0$ thỏa mãn $ab+bc+ca=3$. Chứng minh rằng

$$a+b+c\ge abc+2\sqrt{\frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{3}}$$

Bài 12. Cho $a,b,c\ge 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{3a^2+bc}+\frac{1}{3b^2+ca}+\frac{1}{3c^2+ab}\ge\frac{45}{7(a^2+b^2+c^2)+13(ab+bc+ca)}$$

Bài 13. Cho $a,b,c\ge 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{(a+b)c}{a^2+b^2}+\frac{(b+c)a}{b^2+c^2}+\frac{(c+a)b}{c^2+a^2}\ge 2$$

V. ĐỊNH LÝ ABC TỔNG QUÁT

Trong các mục trên định lý ABC mới chỉ được sử dụng để xét các bài toán 3 biến. Bây giờ chúng ta sẽ tìm cách mở rộng định lý ABC cho các bài toán nhiều biến. Chúng ta sẽ cần sử dụng khái niệm mới sau đây.

1. Khả ABC

a. Định nghĩa: Xét một biểu thức ba biến $f(a,b,c)$.

Ta gọi $f(a,b,c)$ là một biểu thức khả ABC nếu như bất đẳng thức $f(a,b,c) \geq 0$ có thể được chứng minh dựa vào định lý ABC để đưa về hai trường hợp sau:

i) Hai biến bằng nhau.

ii) Một biến bằng 0 (Điều kiện này chỉ xuất hiện khi chứng minh khả ABC đối với abc)

b. Phương pháp chứng minh khả ABC:

Để chứng minh một biểu thức $f(a,b,c)$ là khả ABC, ta sẽ chuyển biểu thức $f(a,b,c)$ thành biểu thức g đối với các biến $A = a+b+c, B = ab+bc+ca, C = abc$. Biểu thức $f(a,b,c)$ là một biểu thức khả ABC nếu như $g(A,B,C)$ là một hàm lồi theo biến A, B hoặc C.

Ví dụ: Chứng minh biểu thức sau là khả ABC

$$f(a,b,c) = a^3 + b^3 + c^3 + 3abc - ab(a+b) - bc(b+c) - ca(c+a)$$

Giải

Đặt $A = a+b+c, B = ab+bc+ca, C = abc$, ta có:

$f(a,b,c) = g(A,B,C) = A^3 - 3AB + 3C + 3C - AB + 3C = A^3 - 4AB + 9C$

Xét $g(A,B,C)$ theo biến C. Ta có: $g' = 9, g'' = 0$ do đó g là hàm lồi theo biến C.

Vậy biểu thức $f(a,b,c)$ là khả ABC.

2. Định lý ABC tổng quát

Định lý ABC tổng quát

Xét một biểu thức đối xứng n biến $f(a_1, a_2, ..., a_n)$, trong đó f có giá trị nhỏ nhất và $n \geq 3$. Ta sẽ coi $f(a_1, a_2, ..., a_n)$ như là một biểu thức ba biến $g(a_1, a_2, a_3)$ với các số $a_4, a_5, ..., a_n$ được coi như là các hằng số. Khi đó nếu g khả ABC thì bất đẳng thức $f(a_1, a_2, ..., a_n) \geq 0$ có thể đưa về xét hai trường hợp sau:

i) m biến bằng nhau, $n-m$ biến bằng nhau.

ii) Một biến bằng 0 (điều kiện này chỉ xuất hiện khi chứng minh khả ABC đối với abc)

Bất đẳng thức được chứng minh là đúng nếu nó được chứng minh trong hai trường hợp trên.

Ta giả sử f có giá trị nhỏ nhất như giả thiết đã nêu và giá trị nhỏ nhất xảy ra tại điểm $(x_1, x_2, ..., x_n)$ (*)

Nếu $x_1x_2...x_n = 0$ hay x_i chỉ có khả năng nhận một trong hai giá trị cố định thì giá trị nhỏ nhất này không âm theo giả thiết đã nêu trong định lý.

Nếu x_i có khả năng nhận ba giá trị khác nhau và khác 0, ta giả sử (x_1, x_2, x_3) là một bộ mà ba giá trị trong bộ khác 0 và khác nhau từng đôi một. Ta cố định các biến $x_4, x_5, ..., x_n$ như là những hằng số và xét hàm $f(x_1, x_2, x_3, x_4, ..., x_n)$ như là hàm $g(x_1, x_2, x_3)$.

Theo giả thiết thì g là khả ABC, vậy nên nó đạt giá trị nhỏ nhất khi có hai số bằng nhau, hay một số bằng 0. Điều này cũng có nghĩa là tồn tại bộ (a, b, c) để $g(x_1, x_2, x_3) > g(a, b, c)$ hay $f(x_1, x_2, x_3, x_4, ..., x_n) \geq f(a, b, c, x_4, ..., x_n)$.

Điều này mâu thuẫn với giả thiết (*). Tóm lại định lý ABC tổng quát đã được chứng minh.

3. Ứng dụng định lý ABC tổng quát

Bài 1. Cho $a, b, c, d > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{3(a^4 + b^4 + c^4 + d^4)}{4abcd} \geq 1 + \frac{3(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)}{ab + ac + ad + bc + bd + cd} \quad (1)$$

Chứng minh

Bất đẳng thức (1) $\Leftrightarrow$ $f(a, b, c, d) = 3(a^4 + b^4 + c^4 + d^4)(ab + ac + ad + bc + bd + cd)$

$$-4abcd(ab + ac + ad + bc + bd + cd) - 12abcd(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) \geq 0 \quad (2)$$

Nhận xét rằng nếu cố định biến d thì f là hàm đối xứng theo ba biến, và hơn nữa f khả ABC.

Như vậy theo định lý ta sẽ chỉ phải xét các trường hợp sau (ta sẽ xử lý với (1)):

i) Với $a = 0$: Bất đẳng thức là hiển nhiên.

ii) Xét $a = b = x, c = d = y$:

Khi đó (1) $\Leftrightarrow \dfrac{3(x^4 + y^4)}{2x^2y^2} \geq 1 + \dfrac{6(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2 + 4xy} \Leftrightarrow \dfrac{3(x+y)^2(x-y)^2}{2x^2y^2} \geq \dfrac{2(x-y)^2}{x^2 + y^2 + 4xy}$

Áp dụng bất đẳng thức $(x+y)^2 \geq 4xy$; $x^2 + y^2 \geq 2xy$ ta sẽ chứng minh được trường hợp này.

iii) Xét $a = b = c = x, d = y$:

Khi đó (1) $\Leftrightarrow \dfrac{3(3x^4 + y^4)}{4x^3y} \geq 1 + \dfrac{3(3x^2 + y^2)}{3x^2 + 3xy} \Leftrightarrow \dfrac{3(x-y)^2(3x^2 + 2xy + y^2)}{4x^3y} \geq \dfrac{3(x-y)^2}{3x^2 + 2xy}$

Áp dụng bất đẳng thức $3x^2 + 2xy \geq 3x^2$ và $3x^2 + 2xy + y^2 \geq 4xy$ ta sẽ chứng minh được trường hợp này. Tóm lại theo định lý ta có điều phải chứng minh.

Bài 2. Cho các số thực $a_1, a_2, ..., a_n \ge 0$ thỏa mãn $a_1 + a_2 + ... + a_n = n$.

Chứng minh rằng: $\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + ... + \dfrac{1}{a_n} + \dfrac{2n\sqrt{n-1}}{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2} \ge n + 2\sqrt{n-1}$ (1)

Chứng minh

Đặt $f(a_1, a_2, ..., a_n) = VT(1)$. Cố định $a_4, a_5, ..., a_n$ ta được hàm ba biến và khả ABC.

Như vậy ta chỉ cần xét 2 trường hợp:

i) Với $a_1 = 0$: Bất đẳng thức hiển nhiên đúng.

ii) Xét khi m biến bằng x và $(n-m)$ biến bằng y, ta có: $mx + (n-m)y = n$.

Chứng minh: $\dfrac{m}{x} + \dfrac{n-m}{y} + \dfrac{2n\sqrt{n-1}}{mx^2 + (n-m)y^2} \ge n + 2\sqrt{n-1}$

Ta đưa về bài toán: $\dfrac{mx + (n-m)y}{n}\left(\dfrac{m}{x} + \dfrac{n-m}{y}\right) + \dfrac{2\sqrt{n-1}\left[mx + (n-m)y\right]^2}{n\left[mx^2 + (n-m)y^2\right]} \ge n + 2\sqrt{n-1}$

$$\Leftrightarrow \frac{m(n-m)(x-y)^2}{nxy} \ge \frac{2\sqrt{n-1}\,m(n-m)(x-y)^2}{nmx^2 + n(n-m)y^2} \Leftrightarrow \left[mx^2 + (n-m)y^2 - 2\sqrt{n-1}xy\right](x-y)^2 \ge 0$$

Bất đẳng thức trên là đúng đắn do: $mx^2 + (n-m)y^2 \ge 2\sqrt{m(n-m)}\,xy \ge 2\sqrt{n-1}\,xy$.

Tóm lại bất đẳng thức được chứng minh hoàn toàn.

Bài 3. Cho $a_1, a_2, ..., a_n \ge 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{\sum\limits_{1 \le i < j \le n} (a_i - a_j)^2}{n^3(a_1 + a_2 + ... + a_n)} \le \frac{a_1 + a_2 + .. + a_n}{n} - \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n}$$

Chứng minh

Đặt $f(a_1, a_2, ..., a_{n-1}, a_n) = \dfrac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} - \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n} - 2n\dfrac{\sum\limits_{1 \le i < j \le n} (a_i - a_j)^2}{a_1 + a_2 + ... + a_n}$

Ở đây, cố định $a_1 + a_2 + ... + a_n$ và $\sum\limits_{1 \le i < j \le n} a_i a_j$ là hoàn toàn không có lợi vì bậc của $a_1 a_2 ... a_n$ khi chuyển về đa thức sẽ rất cao. Vì lý do này ta sẽ cố định $a_1 + a_2 + ... + a_{n-1}$ và $a_1 a_2 ... a_{n-1}$, rõ ràng f sẽ trở thành một đa thức bậc 2 theo $a_1, a_2, ... a_{n-1}$ hay một đa thức bậc nhất theo $\sum\limits_{1 \le i < j \le n} a_i a_j$.

Như vậy f khả ABC với ba biến bất kỳ trong $\{a_i\}_{i=1}^{n-1}$. Ở đây ta chứng minh khả ABC đối với $ab + bc + ca$ nên ta chỉ có một trường hợp duy nhất đó là: m biến bằng nhau, $n - m - 1$ biến bằng nhau.

Giả sử $(a_1,a_2,...,a_n)=(x^n,x^n,...,x^n,y^n,y^n,...y^n)$ (m biến x, $n-m$ biến y).

Giả sử $x\ge y$ ($x\le y$ làm tương tự). Ta đưa về bài toán sau:

Cho $x,y\ge 0$. Chứng minh rằng: $\dfrac{m(n-m)\left(x^n-y^n\right)^2}{n^3mx^n+n^3(n-m)y^n}\le\dfrac{mx^n+(n-m)y^n}{n}-x^my^{n-m}$

Do tính thuần nhất, ta có thể cho $y=1,x\ge 1$ và ta đưa về bài toán:

$f(x)=n^2\left(mx^n+n-m\right)^2-n^3x^m\left(mx^n+n-m\right)-m(n-m)\left(x^n-1\right)^2\ge 0$

Chúng ta đã đưa được về trường hợp một biến, nhưng việc chứng minh cho đến thời điểm này vẫn không dễ dàng chút nào. Thực chất chúng ta vẫn vướng vào một vấn đề khó khăn khi biến m vẫn chạy và không liên tục trong đoạn $[0,n]$...

Qua các bài toán 1 và 2, chúng ta có cảm giác rằng có vẻ m "ưa" $0,1,n-1,n$ hơn cả. Vậy phải chăng chúng ta có thể đưa m về một trong các giá trị này, nếu đúng như thế công việc của chúng ta sẽ dễ dàng hơn rất nhiều.

Rất tuyệt vời là điều này có thật. Điều đó sẽ được phát biểu trong các kết quả sau đây:

Kết quả 1: Trong tập $\mathbb{R}$ hay $\mathbb{R}^+$, khi hai giá trị $M_1=a+b+c,M_2=ab+bc+ca$ được cố định và giá trị $M_3=abc$ đạt giá trị lớn nhất khi $(a,b,c)=(x,x,y)$ hoặc các hoán vị thì $x\le y$, và nếu M_3 đạt giá trị nhỏ nhất khi $(a,b,c)=(z,z,t)$ hoặc các hoán vị thì $z\ge t$.

Chứng minh

Chúng ta hãy xét trường hợp khi M_3 đạt giá trị lớn nhất hay nhỏ nhất khi có hai biến bằng nhau và đưa về bài toán:

$M_1=2x+y$ và $M_2=x^2+2xy$. Hãy tìm giá trị lớn nhất của: $M_3=x^2y$.

Thay $y=M_1-2x$, chúng ta có: $3x^2-2M_1x+M_2=0$

và $M_3=x^2\left(M_1-2x\right)=-2x^3+M_1x^2=\dfrac{2\left(3M_2-M_1^2\right)x+M_1M_2}{9}$

(nhận xét $3M_2-M_1^2\le 0$)

Do đó, giá trị lớn nhất hay nhỏ nhất của M_3 phụ thuộc hoàn toàn vào giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của x. Ở đây cụ thể M_3 đạt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất lần lượt khi x đạt giá trị nhỏ nhất và lớn nhất, tức là lần lượt khi: $x=\dfrac{M_1-\sqrt{M_1^2-3M_2}}{3}\le\dfrac{M_1}{3}\le y$ và $x=\dfrac{M_1+\sqrt{M_1^2-3M_2}}{3}\ge\dfrac{M_1}{3}\ge y$.

Hoàn toàn với một ý tưởng tương tự, chúng ta mong đợi những kết quả sau:

Kết quả 2: Trong tập $\mathbb{R}^+$, khi hai giá trị $M_1 = a+b+c, M_3 = abc$ được cố định và giá trị $M_2 = ab+bc+ca$ đạt giá trị lớn nhất khi $(a,b,c)=(x,x,y)$ hoặc các hoán vị thì $x \le y$, đạt giá trị nhỏ nhất khi $(a,b,c)=(z,z,t)$ hoặc các hoán vị thì $z \ge t$.

Chứng minh

Trong phần chứng minh của kết quả 1, chúng ta đã thu được đẳng thức sau:

$$M_3 = \frac{2\left(3M_2 - M_1^2\right)x + M_1M_2}{9} \Leftrightarrow M_2 = \frac{9M_3 + 2M_1^2 x}{6x+M_1} = \frac{M_1^2}{3} + \frac{27M_3 - M_1^3}{6x+M_1}$$

Nhận xét rằng trong tập $\mathbb{R}^+$ thì $27M_3 - M_1^3 \le 0$ nên M_2 đạt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất lần lượt khi x đạt giá trị nhỏ nhất và lớn nhất. Nhận xét rằng x là nghiệm không âm của phương trình: $2x^3 - M_1x^2 + M_3 = 0$. Giả sử phương trình này có 3 nghiệm là: $a \le 0 \le b \le c$.

Như vậy M_2 đạt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất lần lượt khi x nhận giá trị b và c.

Ta sẽ chứng minh $b \le \frac{M_1}{3} \le c$ để suy ra $b \le y \le c$. Thật vậy, ta có:

$\frac{M_1}{2} = a+b+c \Rightarrow a = \frac{M_1}{2} - b - c$. Thay giá trị a này vào biểu thức: $ab+bc+ca=0$ ta thu được:

$(b+c)\left(\frac{M_1}{2} - b - c\right) + bc = 0 \Leftrightarrow \frac{M_1}{3} = \frac{2\left(b^2+c^2+bc\right)}{3(b+c)}$

Từ đây dễ dàng suy ra $b \le \frac{M_1}{3} \le c$ và ta đã thu được điều phải chứng minh.

Kết quả 3: Trong tập $\mathbb{R}^+$, khi hai giá trị $M_2 = ab+bc+ca, M_3 = abc$ được cố định thì giá trị $M_1 = a+b+c$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $(a,b,c)=(x,x,y)$ hay các hoán vị, khi đó $x \ge y$.

Chứng minh

Ta có $M_1 = 2x + \frac{M_3}{x^2}$ trong đó x là nghiệm của phương trình $x^3 - M_2x + 2M_3 = 0$.

Phương trình này có hai nghiệm dương và một nghiệm âm. Gọi chúng là $a \le 0 \le b \le c$

Ta có: $a+b+c=0 \Rightarrow a=-b-c$; $abc = -(b+c)bc = -2M_3 \Rightarrow bc(b+c) = M_3$

Từ đây dễ dàng suy ra: $b \le M_3 \le c$ hay $b \le y \le c$.

Bây giờ ta sẽ đánh giá xem $M_1(b)$ hay $M_1(c)$ là giá trị nhỏ nhất của M_1.

Ta có: $M_1(b) - M_1(c)$

$$= 2(b-c) + \frac{M_3(c-b)(c+b)}{b^2c^2} = (b-c)\frac{2b^2c^2 - M_3(b+c)}{b^2c^2} = (b-c)\frac{2b^2c^2 - bc(b+c)^2}{b^2c^2} \ge 0$$

Như vậy M_1 nhỏ nhất khi $x = c \ge y$.

Từ ba kết quả này, chúng ta có thể tổng quát định lý ABC mở rộng cho n biến như sau:

Tổng quát của định lý ABC mở rộng

Xét một biểu thức đối xứng n biến $f(a_1,a_2,...a_n)$, trong đó f có giá trị nhỏ nhất. $a_i \in \mathbb{R}^+$ và $n \ge 3$.

Ta sẽ coi $f(a_1,a_2,...a_n)$ như là một biểu thức ba biến $g(a_1,a_2,a_3)$ với các số $a_4,a_5,...a_n$ được coi như là các hằng số. Khi đó nếu g khả ABC theo tính đơn điệu * thì bất đẳng thức $f(a_1,a_2,...a_n) \ge 0$ có thể đưa về xét hai trường hợp sau:

i) $n-1$ biến bằng nhau.

ii) 1 biến bằng 0 (điều kiện này chỉ xuất hiện khi chứng minh khả ABC đối với abc)

Bất đẳng thức được chứng minh là đúng nếu nó được chứng minh trong hai trường hợp trên.

** Khả ABC theo tính đơn điệu nghĩa là g'' theo một trong ba biến $abc, ab+bc+ca, a+b+c$ bằng 0.*

Chứng minh

Theo định lý ABC tổng quát thì bất đẳng thức đưa về trường hợp có một biến bằng 0 hoặc m biến bằng a và $n-m$ biến bằng b.

Trong trường hợp đầu tiên, nếu có một biến bằng 0 thì định lý được chứng minh.

Trong trường hợp thứ hai, ta cần chứng minh $m \le 1$. Thực vậy, giả sử $m \ge 2$.

Nhận xét rằng khi g là một hàm khả ABC theo tính đơn điệu thì giá trị nhỏ nhất của f chỉ đạt khi một trong ba đại lượng $abc, ab+bc+ca, a+b+c$ đạt giá trị lớn nhất hoặc nhỏ nhất (chứ không cần xét vừa lớn nhất vừa nhỏ nhất).

Chúng ta hãy giả sử f đạt giá trị nhỏ nhất khi abc đạt giá trị nhỏ nhất (các trường hợp còn lại chứng minh hoàn toàn tương tự).

Không mất tính tổng quát, hãy giả sử $a \ge b$ và $x_1 = a, x_2 = a, x_3 = b$. Rõ ràng rằng khi ta cố định tất cả các biến còn lại $x_4, x_5, ..., x_n$ thì (a,a,b) không thể là điểm để hàm $f(x_1,x_2,x_3)$ đạt giá trị nhỏ nhất; vì như ta đã chứng minh ở trên giá trị nhỏ nhất này đạt được tại điểm (x,x,y) mà ở đó: $x \le y$.

Điều mâu thuẫn này cho thấy m không thể vượt quá 1, và như vậy phải có $n-1$ biến bằng nhau.

Như vậy là chúng ta đã chứng minh xong tổng quát của định lý ABC mở rộng.

Bây giờ hãy quay lại với bài toán 3 ở trên mà chúng ta vẫn còn bỏ ngỏ.

Chú ý rằng trong bài toán này ta đã sử dụng định lý ABC đơn điệu cho $ab+bc+ca$. Do đó, chỉ cần xét trường hợp khi có $n-1$ biến bằng nhau, và đưa về xét bài toán (vốn là trường hợp khi có $n-1$ biến bằng nhau):

$$f(x) = n^2\left[(n-1)x^n+1\right]^2 - n^3x^{n-1}\left[(n-1)x^n+1\right] - (n-1)\left(x^n-1\right)^2 \ge 0$$

$$\Leftrightarrow n^2\left[(n-1)x^n+1\right]\left[(n-1)x^n+1-nx^{n-2}\right] - (n-1)\left(x^n-1\right)^2 \ge 0 \ (*)$$

Chú ý rằng ta có hai đẳng thức sau: $x^n - 1 = (x-1)\left(x^{n-1}+x^{n-2}+..+1\right)$

và $(n-1)x^n+1-nx^{n-2}=(x-1)^2\left[(n-1)x^{n-2}+(n-2)x^{n-3}+...+2x+1\right]$. Do đó:

$$(*)\Leftrightarrow(x-1)^2\Big[n^2\left[(n-1)x^n+1\right]\left[(n-1)x^{n-2}+(n-2)x^{n-3}+...+2x+1\right]-(n-1)\left(x^{n-1}+x^{n-2}+...+1\right)^2\Big]\ge 0$$

Nhận xét rằng: $[(n-1)x^n+1]\left(\frac{1}{n-1}+1\right)\ge\left(x^{\frac{n}{2}}+1\right)^2$

$\left[(n-1)x^{n-2}+(n-2)x^{n-3}+...+2x+1\right]\left(\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n-2}+...+\frac{1}{2}+1\right)\ge\left(x^{\frac{n-2}{2}}+x^{\frac{n-3}{2}}+...+x^{\frac{1}{2}}+1\right)^2$. Do đó:

$$n^2[(n-1)x^n+1][(n-1)x^{n-2}+(n-2)x^{n-3}+...+2x+1]$$

$$\ge\frac{n^2}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)\left(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n-2}+\frac{1}{n-1}\right)}\left(x^{\frac{n}{2}}+1\right)^2\left(x^{\frac{n-2}{2}}+x^{\frac{n-3}{2}}+..+x^{\frac{1}{2}}+1\right)^2$$

$$\ge\frac{n(n-1)}{1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n-1}}\left(1+...+x^{n-2}+x^{n-1}\right)^2\ge\frac{n(n-1)}{n}\left(1+...+x^{n-2}+x^{n-1}\right)^2=(n-1)\left(1+...+x^{n-2}+x^{n-1}\right)^2$$

$$\Rightarrow\Big[n^2\left[(n-1)x^n+1\right]\left[(n-1)x^{n-2}+(n-2)x^{n-3}+...+2x+1\right]-(n-1)\left(x^{n-1}+x^{n-2}+...+1\right)^2\Big]\ge 0$$

Như vậy chứng minh cũng đã có thể kết thúc ở đây.

Bài 4. Cho các số thực dương a,b,c,d thỏa mãn: $abcd=1$.

Chứng minh rằng: $2^8\left(1+a^2\right)\left(1+b^2\right)\left(1+c^2\right)\left(1+d^2\right)\le(a+b+c+d)^6$

Chứng minh

Xét $f(a,b,c)=2^8\left(1+a^2\right)\left(1+b^2\right)\left(1+c^2\right)\left(1+d^2\right)-(a+b+c+d)^6$

$=2^8\left[1+(a+b+c)^2+(ab+bc+ca)^2-2(ab+bc+ca)-2abc(a+b+c)-a^2b^2c^2\right]\left(1+d^2\right)-(a+b+c+d)^6$

Nếu xét hàm số trên theo biến $ab+bc+ca$ thì bất đẳng thức $f(a,b,c)\le 0$ là khả ABC.

Như vậy ta chỉ cần xét một trường hợp duy nhất sau:

Cho các số thực dương $x,y: x^3y=1$. Chứng minh: $2^8\left(1+x^2\right)^3\left(1+y^2\right)\le(3x+y)^6$

Bất đẳng thức $\Leftrightarrow 2^8\left(1+x^2\right)^3\left(1+\frac{1}{x^6}\right)\le\left(3x+\frac{1}{x^3}\right)^6$. Đến đây việc hoàn thành chứng minh xin dành lại cho bạn đọc.

Bài 5. [China MO] Cho các số thực dương a,b,c,d thỏa mãn: $abcd=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2}+\frac{1}{1+c^2}+\frac{1}{1+d^2}\ge 2$$

Chứng minh

Đặt $x=2-\frac{1}{1+d^2}>1$. Ta cần chứng minh: $\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2}+\frac{1}{1+c^2}\ge x$

$$\Leftrightarrow (1+a^2)(1+b^2)+(1+b^2)(1+c^2)+(1+c^2)(1+a^2)\ge x(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)$$

$$\Leftrightarrow 1+2(a+b+c)^2+(ab+bc+ca)^2-4(ab+bc+ca)-2abc(a+b+c)$$

$$\ge x+x(a+b+c)^2+x(ab+bc+ca)^2-2x(ab+bc+ca)-2xabc(a+b+c)+xa^2b^2c^2$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(ab+bc+ca)^2+(x-2)(a+b+c)^2+2(2-x)(ab+bc+ca)+2(1-x)abc(a+b+c)+x-1\le 0$$

Bất đẳng thức trên là khả ABC khi ta xét theo biến $ab+bc+ca$.

Do đó ta chỉ cần xét trường hợp duy nhất sau:

Cho các số thực dương $x,y: x^3y=1$. Chứng minh rằng: $\frac{3}{1+x^2}+\frac{1}{1+y^2}\ge 2$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{1+x^2}+\frac{1}{1+\frac{1}{x^6}}\ge 2 \Leftrightarrow \frac{3}{1+x^2}-\frac{3}{2}+\frac{x^6}{x^6+1}-\frac{1}{2}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3(1-x)(1+x)}{2(1+x^2)}+\frac{(x-1)(x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)}{2(x^6+1)}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\left[(x^2+1)(x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)-3(x+1)(x^3+1)\right]\ge 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2(x+1)(x^2-x+1)(x^3+2x^2+4x+2)\ge 0.$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=d=1$

Bài 6. Cho n số thực dương thoả mãn: $a_1a_2...a_n=1$.

Chứng minh rằng: $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}+\frac{4n}{n+a_1+a_2+...+a_n}\ge n+2$ (1)

Chứng minh

$$(1)\Leftrightarrow \frac{a_1a_2+a_2a_3+a_3a_1}{a_1a_2a_3}+\frac{1}{a_4}+\frac{1}{a_5}+...+\frac{1}{a_n}+\frac{4n}{n+a_1+a_2+a_3+a_4+...+a_n}\ge n+2$$

Xét theo biến $a_1a_2+a_2a_3+a_3a_1$ rõ ràng bất đẳng thức trên là khả ABC. Ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức sau:

Cho các số thực dương x,y thoã $x^{n-1}y=1$ và $x\ge 1$, khi đó:

$$\frac{n-1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{4n}{n+(n-1)x+y}\ge n+2 \Leftrightarrow \frac{n-1}{x}+x^{n-1}+\frac{4n}{n+(n-1)x+\frac{1}{x^{n-1}}}\ge n+2$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^n+n-1-nx}{x}\ge \frac{2[(n-1)x^n-nx^{n-1}+1]}{nx^{n-1}+(n-1)x^n+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-1)^2\left[x^{n-2}+2x^{n-3}+...+n-1\right]}{x} \geq \frac{2(x-1)^2\left[(n-1)x^{n-2}+(n-2)x^{n-3}+...+1\right]}{nx^{n-1}+(n-1)x^n+1}$$

Ta cần chứng minh: $\dfrac{x^{n-2}+2x^{n-3}+...+n-1}{x} \geq \dfrac{(n-1)x^{n-2}+(n-2)x^{n-3}+...+1}{nx^{n-1}+(n-1)x^n+1}$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{nx^{n-1}+(n-1)x^n+1}{2x}\right)\left(x^{n-2}+2x^{n-3}+...+n-1\right) \geq (n-1)x^{n-2}+(n-2)x^{n-3}+...+1$$

Nhận xét rằng do $x \geq 1$ nên $\dfrac{nx^{n-1}+(n-1)x^n+1}{2x} \geq \dfrac{nx+(n-1)x+1}{2x} \geq n-1$. Do đó:

$\text{VT} \geq (n-1)\left(x^{n-2}+2x^{n-3}+...+n-1\right) \geq (n-1)x^{n-2}+(n-2)x^{n-3}+...+1$

Như vậy ta có điều phải chứng minh.

Bài 7. Cho các số $x_1, x_2, ..., x_n > 0$ thỏa mãn: $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+...+\dfrac{1}{x_n}=n$. Chứng minh:

$$x_1+x_2+...+x_n-n \leq e_{n-1}\left(x_1x_2...x_n-1\right) \text{ trong đó } e_{n-1}=\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}<e$$

Chứng minh

Nhận xét rằng bài toán có thể viết lại như sau:

Cho các số $x_1, x_2, ..., x_n > 0$ thỏa mãn: $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=\left(n-\dfrac{1}{x_4}-...-\dfrac{1}{x_n}\right)x_1x_2x_3$.

Chứng minh: $x_1+x_2+x_3+...+x_n-n \leq e_{n-1}\left(x_1x_2...x_n-1\right)$ với $e_{n-1}=\left(1+\dfrac{1}{n-1}\right)^{n-1}<e$

Do đó nếu xét bất đẳng thức theo biến $x_1+x_2+x_3$ thì bất đẳng thức trên là khả ABC.

Như vậy công việc của ta chỉ là bài toán sau:

Cho các số thực dương $a, b: \dfrac{n-1}{a}+\dfrac{1}{b}=n$, khi đó:

$$g(a,b)=(n-1)a+b-n \leq e_{n-1}\left(a^{n-1}b-1\right) \ (*) \text{ trong đó } e_{n-1}=\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}<e$$

Thay $b=\dfrac{a}{na-n+1}$ vào (*), ta cần chứng minh:

$$f(a)=(n-1)a+\frac{a}{na-n+1}-n \leq \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\left(\frac{a^n}{na-n+1}-1\right) \text{ trong đó } a \geq \frac{n-1}{n}$$

$$\Leftrightarrow \frac{n(n-1)a^2-(2n^2-2n)a+n^2-n}{a^n-na+n-1} \leq \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{n(n-1)(a-1)^2}{(a-1)^2\left(a^{n-2}+2a^{n-3}+...+(k-1)a^{n-k}+...+(n-1)a^0\right)} \leq \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}$$

$\Leftrightarrow \dfrac{n(n-1)}{a^{n-2}+2a^{n-3}+...+(n-1)a^0} \le \left(\dfrac{n}{n-1}\right)^{n-1}$. Nhận xét rằng: $a \ge \dfrac{n-1}{n}$.

Do đó: VT $\le \dfrac{n(n-1)}{\left(\dfrac{n-1}{n}\right)^{n-2}+2\left(\dfrac{n-1}{n}\right)^{n-3}+...+(n-1)} = f\left(\dfrac{n-1}{n}\right) = \left(\dfrac{n}{n-1}\right)^{n-1}$ (**)

Tại (**), chú ý rằng $f\left(\dfrac{n-1}{n}\right) = \left(\dfrac{n}{n-1}\right)^{n-1}$, chính là giá trị của $g(a,b)$ khi $a \to \dfrac{n-1}{n}, b \to \infty$.

Sau đây là một số bài tập cho các bạn áp dụng:

Bài 8. Cho $a,b,c,d > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^4+b^4+c^4+d^4}{abcd}+12 \ge (a+b+c+d)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)$$

Bài 9. Cho $a,b,c,d > 0$ thỏa mãn $abcd = 1$. Chứng minh rằng:

$$(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)(1+d^2) \le (a+b+c+d)^2$$

Bài 10. Cho các số thực dương $a_1, a_2, ..., a_n$ thỏa mãn: $\sum\limits_{1 \le i < j \le n} a_i a_j = 1$.

Chứng minh rằng: $a_1^2+...+a_n^2+ka_1a_2...a_n \ge \dfrac{2}{n-1} + \min\left\{2, k\left(\dfrac{2}{n(n-1)}\right)^{\frac{n}{2}}\right\}$

Bài 11. Cho $x_1, x_2, ..., x_n$ thỏa mãn $x_1^2+x_2^2+...+x_n^2 = 1$. Chứng minh rằng:

$$x_1^3+x_2^3+...+x_n^3+\frac{6}{(n-2)(\sqrt{n}+1)}\sum x_1x_2x_3 \le 1$$

Bài 12. Cho $x_1, x_2, ..., x_n > 0$. Chứng minh rằng:

$$(x_1+x_2+...+x_n-n)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+...+\frac{1}{x_n}-n\right)+x_1x_2...x_n+\frac{1}{x_1x_2...x_n} \ge 2$$

Bài 13. Cho $x_1, x_2, ..., x_n \ge 0$ thoả mãn: $x_1+x_2+...+x_n = n$. Chứng minh rằng:

$$(x_1x_2...x_n)^{\frac{1}{\sqrt{n-1}}}(x_1^2+x_2^2+...+x_n^2) \le n$$

Bài 14. Cho $0 \le a < b$ và $a_1, a_2, ..., a_n \in [a,b]$. Chứng minh rằng

$$a_1+a_2+...+a_n-n\sqrt[n]{a_1a_2...a_n} \le (n-1)(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$$

VI. ĐỊNH LÝ ABC VÀ CÁC BÀI TOÁN HOÁN VỊ

Trong các phần trước chúng ta hầu như chỉ làm việc với các bất đẳng thức đối xứng mà chưa xét đến các bất đẳng thức hoán vị. Thật ra cho đến nay các bất đẳng thức hoán vị vẫn là một khó khăn lớn đối với hầu hết các phương pháp đã biết. Trong mục này chúng ta sẽ tiếp cận các bài toán hoán vị theo cách sau, bước một sử dụng một phép đối xứng hóa để đưa bất đẳng thức hoán vị về dạng đối xứng, bước hai sử dụng định lý ABC để chứng minh bất đẳng thức đối xứng mới thu được đó.

1. Đổi biến để đưa về đối xứng

Đối với một số bài toán hoán vị, chúng ta chỉ cần sử dụng một hoặc vài phép đổi biến đơn giản là có thể đưa về dạng đối xứng một cách dễ dàng. Có thể nhận thấy công thức đổi biến cần mang tính hoán vị, bởi vì nếu đổi biến theo dạng đối xứng thì chúng ta sẽ không bao giờ chuyển được một bài toán hoán vị thành dạng toán đối xứng. Chúng ta xét các ví dụ sau:

Bài 1. Cho các số thực $x,y,z>0$. Chứng minh rằng: $1\ge\frac{x}{2x+y}+\frac{y}{2y+z}+\frac{z}{2z+x}>\frac{1}{2}$ (1)

Chứng minh

(1) $\Leftrightarrow 1\ge\frac{1}{2+\frac{y}{x}}+\frac{1}{2+\frac{z}{y}}+\frac{1}{2+\frac{x}{z}}>\frac{1}{2}$. Đặt $a=\frac{y}{x}, b=\frac{z}{y}, c=\frac{x}{z}\Rightarrow abc=1$.

Khi đó bất đẳng thức trở thành: $1\ge\frac{1}{2+a}+\frac{1}{2+b}+\frac{1}{2+c}>\frac{1}{2}$

Có thể nhận thấy khi chuyển về dạng đa thức thì đa thức đó cũng chỉ là bậc 3 theo a,b,c và do đó là bậc 1 theo $ab+bc+ca$. Cố định thêm $a+b+c$, ta sẽ suy ra trường hợp duy nhất cần xét đến là hai trong ba biến a,b,c phải bằng nhau:

Bài toán trở thành: Cho $a,b>0$ và $a^2b=1$. Chứng minh: $1\ge\frac{2}{2+a}+\frac{1}{2+b}>\frac{1}{2}$

Thay $b=\frac{1}{a^2}$ và đưa về việc chứng minh: $1\ge\frac{2}{2+a}+\frac{a^2}{2a^2+1}>\frac{1}{2}$

Bất đẳng thức ở vế trái tương đương với: $a(a-1)^2\ge 0$

Bất đẳng thức ở vế phải tương đương với: $4a^2-\frac{a}{2}+1>0\Leftrightarrow(2a-1)^2+\frac{7a}{2}>0$

Như vậy bài toán đã được chứng minh. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z>0$

Bài 2. Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng: $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{6abc}{a^2b+b^2c+c^2a}\ge 5$ (1)

Chứng minh

Đặt $x=\frac{a}{b};y=\frac{b}{c};z=\frac{c}{a}\Rightarrow xyz=1$. Khi đó (1) $\Leftrightarrow x+y+z+\frac{6}{xy+yz+zx}\ge 5$ (2)

Đây là một bài toán đơn giản đối với định lý ABC mở rộng.

Ta đưa về bài toán với hai biến bằng nhau, giả sử $y=z \Rightarrow xy^2=1 \Rightarrow x=\frac{1}{y^2}$. Khi đó

$$(2) \Leftrightarrow x+2y+\frac{6}{y^2+2xy} \geq 5 \Leftrightarrow \frac{1}{y^2}+2y+\frac{6y}{y^3+2}-5 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left[y(2y+3)(y-1)^2+y+2\right](y-1)^2}{y^2(y^3+2)} \geq 0 \text{ (đúng).}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c>0$

*. Chúng ta xét một kỹ thuật khác để đưa bài toán hoán vị về đối xứng. Kỹ thuật này phát huy hiệu quả với hầu hết các bài toán đa thức hoán vị ba biến có bậc không vượt quá 5 trên $\mathbb{R}$.

Xét ví dụ sau:

Bài 3. Chứng minh rằng: $3(a^4+b^4+c^4)+4(a^3b+b^3c+c^3a) \geq 0,\ \forall a,b,c$

Chứng minh

Chúng ta sẽ giải quyết một bài toán mạnh hơn như sau:

$$197(a^4+b^4+c^4)+280(a^3b+b^3c+c^3a) \geq 0 \quad (1)$$

Đặt $a=2x+7y; b=2y+7z; c=2z+7x$. Bất đẳng thức (1) tương đương với:

$$f(x,y,z)=222743(x^4+y^4+z^4)+240296(x^3y+y^3x+y^3z+z^3y+z^3x+zx^3)+$$
$$+92904\left(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2\right)+246960xyz(x+y+z) \geq 0$$

$f(x,y,z)$ là một đa thức đối xứng, hơn thế nữa cũng là một biểu thức thuần nhất bậc 4. Do đó ta đưa về xét trường hợp duy nhất sau:

$$f(x,1,1) \geq 0 \Leftrightarrow 222743x^4+480592x^3+432768x^2+974512x+1018982 \geq 0$$

Việc chứng minh này không khó khăn và xin được nhường lại cho bạn đọc.

Lời giải sử dụng định lý này thật sự là vô cùng gọn đẹp, tuy nhiên bí quyết ở đây chính là cách đặt ẩn để chuyển về đối xứng: $a=2x+7y; b=2y+7z; c=2z+7x$. Không phải ngẫu nhiên mà chúng ta có thể đi đến cách đặt như vậy, cũng giống như Cauchy trọng số hay hệ số bất định, chúng ta phải đặt thêm ẩn vào để có thể giải quyết vấn đề. Mục tiêu của chúng ta là cân bằng hệ số của các đại lượng hoán vị. Cụ thể ở đây, chúng ta đặt:

$a=x+ky, b=y+kz, c=z+kx$ và tìm k sao cho hệ số của cặp hoán vị

$x^3y+y^3z+z^3x, xy^3+yz^3+zx^3$ là bằng nhau. Cụ thể đối với bài toán tổng quát:

$x^4+y^4+z^4+m\left(x^3y+y^3z+z^3x\right) \geq 0$, ta phải tìm k sao cho: $mk^3-(m+4)k^2+(4-2m)k+m=0$.

Đôi khi để tìm hằng số tốt để có hai bộ hoán vị được cân bằng hệ số, chẳng hạn $x^4y+y^4z+z^4x$, $xy^4+yz^4+zx^4$ và $x^3y^2+y^3z^2+z^3x^2, x^2y^3+y^2z^3+z^2x^3$ ta cần phải tạo ra đến hai biến khác, bằng cách: $a=x+my+nz, b=y+mz+nx, c=z+mx+ny$

Như vậy đến đây có lẽ bạn đọc cũng đã đoán được tại sao phương án này lại hữu hiệu với các bài toán hoán vị đa thức bậc không vượt quá 5, từ bậc 6 trở lên chúng ta có nhiều hơn hai cặp hoán vị, chẳng hạn cho bậc 6 là $x^5y+y^5z+z^5x, xy^5+yz^5+zx^5$, $x^4y^2+y^4z^2+z^4x^2$, $x^2y^4+y^2z^4+z^2x^4$ và $xyz(x^2y+y^2z+z^2x), xyz(xy^2+yz^2+zx^2)$ như vậy không phải bao giờ cũng có thể giải để tìm ra số m,n cho hợp lý.

Ta xét thêm một số ví dụ nữa để có thể hiểu rõ hơn về kỹ thuật này:

Bài 4 [MnF]: Cho các số thực dương a,b,c. Chứng minh rằng:

$$(13a^2-10ab-5b^2+9c^2)(a-b)^2+(13b^2-10bc-5c^2+9a^2)(b-c)^2+(13c^2-10ca-5a^2+9b^2)(c-a)^2\ge 0$$

Chứng minh

Bất đẳng thức đã cho tương đương với: $[(a-2b)(a-4b)-(b-2c)(b-4c)]^2+$

$$+[(b-2c)(b-4c)-(c-2a)(c-4a)]^2+[(c-2a)(c-4a)-(a-2b)(a-4b)]^2\ge 0$$

Vốn dĩ đây là một bài toán mang tính chất thách đố hơn là một bài toán thực sự, tác giả của bài toán đã ngầm ý để bất đẳng thức này có đến hai dạng dấu bằng $a=b=c$ hoặc $a=2b=4c$ để gây khó dễ cho các phương pháp đã biết. Tuy nhiên nếu đã biết qua kỹ thuật ABC hoán vị ở trên thì đây lại là một bài tập tốt để áp dụng. Ta hãy cùng nhau xem xét:

Đặt $a=2x-y, b=2y-z, c=2z-x$. Bất đẳng thức đã cho tương đương với:

$$f(x,y,z)=4(x^4+y^4+z^4)+21(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)$$

$$-10(x^3y+xy^3+y^3z+yz^3+z^3x+zx^3)-5xyz(x+y+z)\ge 0$$

Đây là một đa thức đối xứng bậc 4 và cũng thuần nhất nên ta chỉ cần xét trường hợp sau: $f(x,1,1)=4x^4-20x^3+37x^2-30x+9=(x-1)^2(2x-3)^2\ge 0$

Bài toán này vốn dĩ không có gì đặc biệt hơn bài toán số 3 nếu nó không xuất hiện thêm một dấu bằng nữa. Việc xuất hiện thêm dấu bằng này đôi khi lại giúp ta tìm được hằng số k dễ dàng hơn. Nhưng như đã nói trong phần đầu của phương pháp, việc đầu tiên là phải phát hiện ra dấu bằng này, và khi đó thì công việc làm bài của chúng ta sẽ dễ dàng hơn rất nhiều.

Chẳng hạn ta giả sử: $a=x+ky, b=y+kz, c=z+kx$. Khi cực trị xảy ra thì trong x,y,z phải có 2 giá trị bằng nhau, giả sử ta cho $y=z=1$ và khi đó: $a=x+k, b=k+1, c=kx+1$.

Từ đây đồng thời kết hợp với hệ sau: $a=2b$ và $a=4c$ ta dễ dàng tìm ra được

$k=\frac{-1}{2}, x=\frac{3}{2}$ hoặc $k=-1, x=1$.. Từ đó thử trực tiếp và ta xuất ra cách đặt như ở trên.

Trong các bài toán ở trên, tất cả các bài đều được đặt ra trong tập $\mathbb{R}$, tuy nhiên hầu hết các bài toán lại ra ở dạng $\mathbb{R}^+$, và bắt buộc hơn là nếu bậc lẻ thì phải xét trong tập $\mathbb{R}^+$. Như vậy chẳng lẽ đối với các bài toán bậc lẻ chúng ta không có cách xử lý hay sao, chúng ta hãy thử xét qua một ví dụ để xem liệu có thể tìm ra được phương pháp nào hiệu quả hay không:

Bài 5. Cho $a,b,c\in\mathbb{R}$. Chứng minh rằng:

$$23(a^3+b^3+c^3)+17(a^2b+b^2c+c^2a)\geq 37(ab^2+bc^2+ca^2)+9abc$$

Chứng minh

Chúng ta cũng sẽ lại dùng ý tưởng đặt $a=x+ky, b=y+kz, c=z+kx$. Ở đây dấu bằng xảy ra tại hai điểm chủ yếu, trong đó có một điểm đặc biệt là $a=-1, b=1, c=2$ cùng các hoán vị của nó. Lúc này trong ba biến x,y,z sẽ có hai biến bằng nhau, ta giả sử là $y=z$ (do ta đang mong đợi một biểu thức đối với x,y,z nên việc cho hai biến nào bằng nhau cũng đều không ảnh hưởng, đồng thời cũng không thể cho chúng bằng 1 vì biểu thức vốn không thuần nhất).

Khi đó ta có hệ phương trình sau: $x+ky=-1; (k+1)y=1; kx+y=2$. Từ đây ta suy ra được phương trình theo k như sau: $2k^2+3k+1=0$, giải ra ta được $k=-1$ hay $k=-\frac{1}{2}$.

Ta chọn $k=-\frac{1}{2}$, khi đó ta đặt: $a=2x-y, b=2y-z, c=2z-x$ và bất đẳng thức đã cho trở thành:

$x^3+y^3+z^3+3xyz\geq xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x)$ là bất đẳng thức ***Schur*** quen thuộc có thể chứng minh bằng nhiều cách trong đó có cả ABC. Tuy nhiên bất đẳng thức trên chỉ quen thuộc khi $x,y,z\geq 0$. May mắn thay cho chúng ta, $x=\frac{4a+2b+c}{7}, y=\frac{a+4b+2c}{7}, z=\frac{2a+b+4c}{7}$ là không âm nên chứng minh cũng đã có thể kết thúc ở đây.

Phương pháp đổi biến như trên thật sự là hiệu quả nhưng không phải lúc nào cũng có thể làm được, ngay cả cách đặt biến thứ hai cũng không phải là lúc nào cũng tiện lợi và khả dĩ. Dưới đây xin giới thiệu một phương pháp tiếp cận khác.

2. Mối quan hệ giữa đối xứng và hoán vị

Có lẽ đã từ lâu các bạn nghe đến câu nói bất đẳng thức đối xứng chỉ là bài toán con của bất đẳng thức hoán vị, bởi lẽ hoán vị mà đúng thì ta có thể chuyển qua đối xứng một cách dễ dàng. Chẳng hạn như bài toán:

$\sqrt{\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}}+\sqrt{3}\geq\sqrt{\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}}+\sqrt{\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}}$ đúng thì bài toán đối xứng sau cũng sẽ đúng:

$$\sqrt{\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}}+\sqrt{\frac{b^2}{a^2}+\frac{c^2}{b^2}+\frac{a^2}{c^2}}+2\sqrt{3}\geq 2\left(\sqrt{\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}}+\sqrt{\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}}\right)$$

Thế nhưng một câu hỏi ngược lại, nếu bài toán đối xứng đúng thì bài toán hoán vị có đúng không. Câu trả lời là không, và ta có thể đưa ngay ra phản ví dụ:

$a^3+b^3+c^3+3abc \ge ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)$ nhưng bất đẳng thức hoán vị sau:

$a^3+b^3+c^3+3abc \ge 2\left(a^2b+b^2c+c^2a\right)$ thì lại không đúng với trường hợp $(a,b,c)=(0,3,2)$.

Tuy nhiên mọi bất đẳng thức hoán vị đều có thể đưa về các bài toán đối xứng tương đương nhờ kỹ thuật sau đây.

Phép đối xứng hóa

Kỹ thuật chuyển hoán vị về đối xứng:

Cho $f(a,b,c)$ là một hàm số theo các số thực a,b,c thỏa mãn: $f(a,b,c)=f(b,c,a)=f(c,a,b)$.

Khi đó đặt $g(a,b,c)=f(a,b,c)f(a,c,b)$; $h(a,b,c)=f(a,b,c)+f(a,c,b)$ thì g,h là các biểu thức đối xứng. Đồng thời bất đẳng thức $f(a,b,c)\ge 0$ là tương đương với: $\begin{cases} g(a,b,c)\ge 0 \\ h(a,b,c)\ge 0 \end{cases}$

Ý tưởng đối xứng hoá này có vẻ đơn giản, nhưng chúng ta hãy xem thử sức mạnh của nó như thế nào khi kết hợp với ABC nhé.

Bài 6. Cho $a,b,c\ge 0$ thỏa mãn: $a+b+c=3$. Chứng minh rằng: $P=a^2b+b^2c+c^2a\le 4$

Chứng minh

Đặt: $f(a,b,c)=a^2b+b^2c+c^2a-4$

Và: $g(a,b,c)=f(a,b,c)f(a,c,b)=9C^2+(39-18B)C+B^3-12B+16$

$h(a,b,c)=f(a,b,c)+f(a,c,b)=ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)-8$

Trong đó: $B=ab+bc+ca; C=abc$. Điều cần làm bây giờ là chứng minh hai điều sau:

i) $g(a,b,c)\ge 0$. ii) $h(a,b,c)\le 0$

Ta sẽ chứng minh điều thứ hai trước, do điều này tương đối đơn giản. Các bạn có thể thấy ngay rất nhanh chóng $h(a,b,c)\le 0$ có thể giải ngay lập tức bằng định lý ABC. Nhưng ở đây chúng tôi xin đưa ra một lời giải bằng ***Schur*** nhanh chóng hơn như sau:

$$a^3+b^3+c^3+3abc\ge ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)$$

$$\Leftrightarrow a^3+b^3+c^3+6abc+3[ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)]\ge 3abc+4[ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)]$$

$$\Rightarrow (a+b+c)^3\ge 4[ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)]$$

$$\Leftrightarrow ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)\le \frac{(a+b+c)^3}{4}=\frac{27}{4}<8 \Rightarrow h(a,b,c)\le 0$$

Sự khó khăn nằm ở phần thứ nhất, ta có thể biểu diễn g qua hai đại lượng $ab+bc+ca, abc$ nhằm áp dụng định lý ABC. Ở đây chúng ta sẽ cố gắng chứng minh g là một hàm đơn điệu theo C bằng cách lấy đạo hàm và chứng minh đạo hàm dương hay âm.

Đặt: $\omega(C)=9C^2+(39-18B)C+B^3-12B+16=9C^2+(39-18B)C+(B-2)^2(B+4)$

$\omega'(C)=18C+39-18B$

Trước hết nhận xét rằng nếu $B\le\frac{39}{18}$ thì chứng minh kết thúc, vì $39-18B\ge 0$ nên $\omega(C)\ge 0$.

Như vậy chúng ta chỉ cần xét tới trường hợp $B>\frac{39}{18}$.

Nhận xét rằng với mỗi B cố định thì hoặc là $\omega'(C)=18C+39-18B=0$ có nghiệm là $C=\frac{18B-39}{18}$, hoặc là không có nghiệm.

Trong trường hợp đầu tiên ta có: $\omega(C)\ge\omega\left(\frac{18B-39}{18}\right)=B^3-9B^2+27B-\frac{105}{4}$.

Và ta có thể chứng minh $B^3-9B^2+27B-\frac{105}{4}\ge 0$ với $B>\frac{39}{18}$

Trong trường hợp $\omega'(C)=18C+39-18B=0$ không có nghiệm, nghĩa là hàm $w(C)$ đơn điệu, ta chỉ cần chứng minh bài toán ban đầu khi có hai biến bằng nhau hay một biến bằng 0.

i) Cho $a,b\ge 0$ thỏa mãn $a+b=3$. Chứng minh rằng: $a^2b\le 4$

Theo bất đẳng thức ***AM – GM*** ta có: $a^2b=4\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2}\cdot b\le 4\left(\frac{a+b}{3}\right)^3=4$

ii) Cho $a,b\ge 0$ thỏa mãn $2a+b=3$. Chứng minh rằng: $a^2b+b^2a+a^3\le 4$.

Thay $b=3-2a$, bất đẳng thức đã cho $\Leftrightarrow 3a^3-9a^2+9a-4\le 0$ (đúng khi $0\le a\le\frac{3}{2}$)

Như vậy ta đã hoàn thành chứng minh một cách đầy đủ. Có thể nói cách chứng minh như trên cho bài toán này không phải là cách chứng minh hay nhất, tuy nhiên ý tưởng của nó thì lại có thể áp dụng cho nhiều bài toán hoán vị khác nữa.

Một câu hỏi đặt ra ngay sau bài toán là biểu thức $a^2b+b^2c+c^2a$ có đạt cực trị tại hai biến bằng nhau hay một biến bằng 0 khi ta cố định $a+b+c, ab+bc+ca$ hay không. Ta hãy cùng xét thử bài toán sau:

Bài 7. Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn: $a^2+b^2+c^2=2(ab+bc+ca)$.

Tìm giá trị lớn nhất của: $P=\frac{8(a^2b+b^2c+c^2a)}{(a+b+c)^3}$.

Giải

Đây là một bất đẳng thức hoán vị thuần nhất. Chúng ta sẽ sử dụng dần các tính chất này:

Trước hết, lợi dụng tính chất thuần nhất, chúng ta có thể đặt $ab+bc+ca=1$.

Bài toán trở thành: Cho các số thực dương a,b,c thõa mãn: $a+b+c=2, ab+bc+ca=1$.

Tìm giá trị lớn nhất của $P = a^2b + bc^2 + ca^2$.

Vẫn với ý tưởng như bài toán đầu, chúng ta đặt $Q = ab^2 + bc^2 + ca^2$. Thế nhưng ở đây bài toán là đi tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất nên ta không xác định được g và h. Nhưng điều này không làm chúng ta nao núng, chúng ta vẫn sẽ sử dụng ý tưởng này để giải quyết bài toán.

Đặt $t = abc$, theo như bài toán 1 đầu tiên của phần chuyên đề ta có: $t \in \left[0, \frac{4}{27}\right]$. Ta có:

$P + Q = a^2b + b^2c + c^2a + ab^2 + bc^2 + ca^2 = (a+b+c)(ab+bc+ca) - 3abc = 2 - 3t$

$PQ = 9(abc)^2 + \left[(a+b+c)^3 - 6(a+b+c)(ab+bc+ca)\right]c + (ab+bc+ca)^3 = 9t^2 - 4t + 1$ P, Q có thể nhận hai giá trị sau $\dfrac{2-3t-\sqrt{-27t^2+4t}}{2}; \dfrac{2-3t+\sqrt{-27t^2+4t}}{2}$.

Để tìm giá trị lớn nhất thì ta sẽ quan tâm đến biểu thức: $P = f(t) = \dfrac{2-3t+\sqrt{-27t^2+4t}}{2}$ với $t \in \left[0, \frac{4}{27}\right]$

Phương trình $f'(t) = 0$ có một nghiệm duy nhất là $t = \frac{1}{27}$.

Như vậy $f_{\max} = \max\left\{f(0), f\left(\frac{1}{27}\right), f\left(\frac{4}{27}\right)\right\}$.

Từ đây suy ra $f_{\max} = \frac{10}{9}$ khi $abc = \frac{1}{27}$, hay khi
$a \doteq 0.04020492...; b = 0.78243211...; c = 1.17736297...$

Như vậy là dự đoán của chúng ta đã bất thành, thật đáng tiếc phải không các bạn, chúng ta vẫn chưa thể làm được điều đẹp đẽ trong thế giới hoán vị như chúng ta đã làm trong thế giới đối xứng. Quả thật, dấu bằng của bất đẳng thức hoán vị luôn làm cho chúng ta cảm thấy khó chịu nhưng luôn thích thú và hào hứng. Nếu các bạn ngẫm nghĩ phần kỹ thuật chuyển hoán vị thành đối xứng các bạn sẽ hiểu tại sao chúng hay có trường hợp ba biến lệch nhau hoặc bằng nhau cả chứ không phải là chỉ có hai biến bằng nhau như bất đẳng thức đối xứng. Chúng tôi sẽ tạm dừng việc nghiên cứu ở đây, sau đây sẽ là một số ví dụ nữa để các bạn làm quen thêm cũng như khẳng định thêm tính hiệu quả tương đối của kỹ thuật đối xứng hoá hoán vị này.

Bài 8. Cho $a, b, c \geq 0$ thỏa mãn $a + b + c = 4$.

Chứng minh rằng: $3(a^2b + b^2c + c^2a) + 36 \geq 5(ab^2 + bc^2 + ca^2)$

Chứng minh

Đặt $f(a,b,c) = 3(a^2b + b^2c + c^2a) - 5(ab^2 + bc^2 + ca^2) + 36$

Và: $h(a,b,c) = f(a,b,c) + f(a,c,b) = 72 - 2(ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a))$

$g(a,b,c)=f(a,b,c).f(a,c,b)=441C^2+(4312-1176B)C+64B^3-240B^2-288B+1296$ Chúng ta sẽ áp dụng những kỹ thuật hoàn toàn tương tự như trong bài toán số 1 để giải quyết bài toán này. Trước hết, chứng minh $h(a,b,c)\geq 0$. Theo bài toán 1.

$ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)\leq \frac{(a+b+c)^3}{4}=16<36$ do đó $h(a,b,c)\geq 0$.

Chứng minh $g(a,b,c)\geq 0$.

Ta viết $g(a,b,c)$ lại thành $\omega(C)=441C^2+(4312-1176B)C+(B-3)^2(64B+144)$

Như vậy nếu $B\leq \frac{4312}{1176}=\frac{11}{3}$ thì ta sẽ có ngày điều phải chứng minh.

Xét $B>\frac{11}{3}$, ta có: $\omega'(C)=882C+4312-1176B$.

Như vậy cùng ý tưởng với bài toán 1 ta sẽ cần chứng minh ba điều sau:

i) $\omega\left(\frac{12B-44}{9}\right)=64B^3-1024B^2+\frac{16384}{3}B-\frac{83200}{9}\geq 0$ khi $B\geq \frac{11}{3}$;

Điều này có thể chứng minh tương đối dễ dàng, chúng tôi không đề cập đến chứng minh ở đây (trường hợp không xảy ra dấu bằng)

ii) Cho $a,b\geq 0$ thoả mãn: $2a+b=4$. Chứng minh rằng:

$$3(a^2b+b^2a+a^3)+36\geq 5(a^2b+b^2a+a^3)\Leftrightarrow 18\geq a^3+a^2b+b^2a$$

Thay $b=4-2a$ và ta có: $3a^3-12a^2+16a-18\leq 0$ với: $0\leq a\leq 2$, một lần nữa nhường cho bạn đọc (trường hợp không xảy ra dấu bằng)

iii) Cho $a,b\geq 0$ thoả mãn: $a+b=4$. Chứng minh rằng: $3a^2b+36\geq 5ab^2$.

Thay $a=4-b$ và ta có: $8b^3-44b^2+48b+36\geq 0\Leftrightarrow (b-3)^2(8b+4)\geq 0$

Tóm lại bất đẳng thức đã được chứng minh.

Dấu bằng xảy ra khi $(a,b,c)=(0,3,1)$ và các hoán vị vòng quanh.

Bài 9. Cho các số thực: a,b,c. Chứng minh rằng:

$$(a^2+b^2+c^2)^2\geq 3(a^3b+bc^3+c^3a)$$

Chứng minh

Một bài toán nổi tiếng của Vasile Cirtoaje, một kết quả vô cùng thú vị trong thế giới hoán vị, một bất đẳng thức rất mạnh với dấu bằng xảy ra tại ba điểm hoàn toàn lệch nhau. Và chúng ta hãy xem phép đối xứng hóa sẽ giải quyết bài toán trên như thế nào. Trước hết, do tính thuần nhất, chúng ta có thể thêm điều kiện $a+b+c=1$.

Đặt $f(a,b,c)=(a^2+b^2+c^2)^2-3(a^3b+b^3c+c^3a)$ và

$g(a,b,c)=f(a,b,c)+f(a,c,b)=2(a^2+b^2+c^2)^2-3\left[ab(a^2+b^2)+bc(b^2+c^2)+ca(c^2+a^2)\right]$

$h(a,b,c)=f(a,b,c)f(a,c,b)=63C^2+(21B^2-57B+12)C+49B^4-68B^3+42B^2-11B+1.$

Có thể sử dụng định lý ABC để chứng minh $g(a,b,c)\geq 0$, công việc này xin được nhường lại cho bạn đọc. Ở đây chúng tôi sẽ đưa ra chứng minh $h(a,b,c)\geq 0$.

Đặt $\omega(c)=63c^2+(21b^2-57b+12)c+49b^4-68b^3+42b^2-11b+1$

Ta có: $\omega'(c)=126c+21b^2-57b+12$. Ta lại xét ba trường hợp:

i) $\omega\left(\dfrac{-21b^2+57b-12}{126}\right)=\dfrac{3969b^4-4914b^3+2277b^2-468b+36}{84}=\dfrac{(63b^2-39b+6)^2}{84}\geq 0$

ii) Hai biến bằng nhau: Cho các số thực x, y. Chứng minh: $(2x^2+y^2)^2\geq 3(x^4+x^3y+y^3x)$

Cho $x=1$ và đưa về việc chứng minh: $y^4-3y^3+4y^2-3y+1\geq 0\Leftrightarrow (y-1)^2(y^2-y+1)\geq 0$

iii) Một biến bằng 0: Cho các số thực x, y. Chứng minh rằng: $(x^2+y^2)^2\geq 3x^3y$

Điều này có thể làm nhanh chóng bằng bất đẳng thức ***AM – GM***:

$\left(\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{3}x^2+y^2\right)^2\geq \frac{16}{\sqrt{27}}x^3y>3x^3y$. Như vậy là bài toán đã được chứng minh.

Một điểm nhấn về độ mạnh của phương pháp này, tại sao phương pháp này mạnh? Câu trả lời là do tính tương đương toàn bộ trong các quá trình biến đổi. Chỉ còn một điều duy nhất đáng suy nghĩ là với giá trị b nào thì $\omega'(c)$ có nghiệm hay không có nghiệm. Tuy nhiên thực chất, điều này có thể giải quyết tốt bằng định lý ABC bởi lẽ biểu thức đạo hàm này chỉ là bậc một theo ABC (đối với các bất đẳng thức hoán vị ở dạng đa thức bậc không vượt quá 4, vì khi nhân lại chúng ta sẽ thu được một biểu thức đối xứng bậc 8, vốn cao nhất là bậc 2 đối với abc).

Bài tập áp dụng:

Bài 10. Cho $a,b,c>0$. Tìm hằng số k lớn nhất sao cho:

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{kabc}{(a+b)(b+c)(c+a)}\geq 3+\frac{k}{8}$$

Bài 11. Tìm hằng số k lớn nhất sao cho:

$$\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}+3k\geq k\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right) \text{ đúng } \forall a,b,c>0.$$

Bài 12. Cho các số thực dương a,b,c và số thực dương p. Chứng minh rằng :

$$\left(\frac{a}{a+pb}\right)^2+\left(\frac{b}{b+pc}\right)^2+\left(\frac{c}{c+pa}\right)^2\geq \min\left(1,\frac{3}{(1+p)^2}\right)$$

Bài 13. Cho $a,b,c\geq 0$ thỏa mãn: $a+b+c=5$.

Chứng minh rằng: $16\left(a^3b+b^3c+c^3a\right)+640\geq 11\left(ab^3+bc^3+ca^3\right)$

Bài 14. Chứng minh rằng: $4(a+b+c)^3\geq 27\left(ab^2+bc^2+ca^2+abc\right),\ \forall a,b,c\geq 0$

Bài 15. Cho $a,b,c\geq 0$. Chứng minh rằng:

$$(a+b+c)\sqrt[3]{a^2b^2c^2}\leq a^2b+b^2c+c^2a\leq \frac{4}{27}(a+b+c)^3-abc$$

Bài 16. i) Cho các số thực không âm a,b,c thỏa mãn: $a+b+c=3$.

Chứng minh rằng: $(ab+bc+ca)\left(a^2b+b^2c+c^2a\right)\leq 9$

ii) Cho các số thực không âm a,b,c thỏa mãn: $ab+bc+ca=3$.

Chứng minh rằng: $(a+b+c)\left(a^2b+b^2c+c^2a\right)\geq 9$

Bài 17. Cho $x,y,z\geq 0$. Chứng minh rằng:

i) $2\left(x^5+y^5+z^5\right)+9\left(x^3y^2+y^3z^2+z^3x^2\right)\geq 11\left(x^2y^3+y^2z^3+z^2x^3\right)$

ii) $2\left(x^5+y^5+z^5\right)+x^4y+y^4z+z^4z\geq 3\left(xy^4+yz^4+zx^4\right)$

Bài 18. Cho các số dương a,b,c, chứng minh $2\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}\right)+\frac{17(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2}\geq 23$

Bài 19. Cho $a,b,c>0$. Tìm hằng số k lớn nhất sao cho:

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{k(ab+bc+ca)}{(a+b+c)^2}\geq 3+\frac{k}{3}$$

3. Dùng bất đẳng thức phụ để chuyển hoán vị thành đối xứng

Trong hai phần trên chúng ta đã làm quen với các bài toán hoán vị và chúng ta đã giải quyết chúng một cách hoàn toàn trực tiếp. Tuy nhiên trong thực tế lại không nhất thiết phải như vậy, chúng ta có thể áp dụng các bất đẳng thức phụ để chuyển các đại lượng hoán vị về đối xứng, tức chuyển hoá bài toán về đối xứng để có thể áp dụng ABC.

Để các bạn có thể hiểu rõ hơn ý tưởng này, xét ví dụ sau:

Bài 20. Cho $a,b,c>0$ thoả mãn $a+b+c=3$.

Chứng minh rằng: $(a^2b+b^2c+c^2a)(ab+bc+ca)\le 9\sqrt{\dfrac{a^2+b^2+c^2}{3}}$

Chứng minh

Trước tiên chúng ta sẽ chứng minh bất đẳng thức phụ sau:

Cho các số thực dương a,b,c thoả mãn điều kiện: $a+b+c=3$. Khi đó:

$a^2b+b^2c+c^2a\le \dfrac{9}{ab+bc+ca}$. Đây chính là câu bài tập của phần định lí ***ABC*** và các bài toán hoán vị, việc chứng minh xin được nhường lại cho bạn đọc. Ở đây chúng ta sẽ áp dụng bất đẳng thức này để đưa bài toán hoán vị ban đầu về bài toán đối xứng.

Như vậy: $(a^2b+b^2a+c^2a)(ab+bc+ca)\le \dfrac{9}{ab+bc+ca}(ab+bc+ca)=9$

Công việc của chúng ta là phải chứng minh: $9\sqrt{\dfrac{a^2+b^2+c^2}{3}}\ge 9$.

Bất đẳng thức này là khá hiển nhiên dựa vào bất đẳng thức sau: $3(a^2+b^2+c^2)\ge(ab+bc+ca)^2$.

Và ta cũng có thể kết thúc chứng minh ở đây.

Bài 21. Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn điều kiện: $a+b+c=3$.

Chứng minh rằng: $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{a}\ge\sqrt{\dfrac{a^2+b^2+c^2}{3}}+2$

Chứng minh

Lần này chúng ta sẽ tiếp tục sử dụng ý tưởng trên, chúng ta sẽ tìm một cận dưới đủ tốt cho $ab^2+bc^2+ca^2$. Trong bài tập của phần định lý ***ABC*** và các bài toán hoán vị, chúng ta có bài toán sau:

Cho các số thực không âm a,b,c thoã mãn: $ab+bc+ca=3$. Khi đó ta có:

$(a+b+c)(ab^2+bc^2+ca^2)\ge 9$. Hay viết lại một cách thuần nhất là:

$(a+b+c)(ab^2+bc^2+ca^2)\ge(ab+bc+ca)^2$.

Như vậy với điều kiện $a+b+c=3$ ta có bất đẳng thức sau: $ab^2+bc^2+ca^2\ge\dfrac{(ab+bc+ca)^2}{3}$

Như vậy là ta phải chứng minh bài toán sau: $\dfrac{(ab+bc+ca)^2}{3abc}\ge\sqrt{\dfrac{a^2+b^2+c^2}{3}}+2$

Xét bài toán theo biến abc, rõ ràng bất đẳng thức trên là khá ABC.

Như vậy ta chỉ cần xét hai trường hợp sau:

Trường hợp 1: $c = 0$, bất đẳng thức là hiển nhiên đúng.

Trường hợp 2: $a = b = x, c = y$, bất đẳng thức đã cho tương đương với:

$$\frac{\left(x^2+2xy\right)^2}{3x^2y} \ge \sqrt{\frac{2x^2+y^2}{3}}+2 \Leftrightarrow \frac{(x+2y)^2}{3y} \ge \sqrt{\frac{2x^2+y^2}{3}}+2$$

trong đó $x, y > 0$ và $2x + y = 3$. Thay $y = 3 - 2x, x \in (0,1.5)$ ta được:

$$\frac{(6-3x)^2}{3(3-2x)} \ge \sqrt{\frac{2x^2+(3-2x)^2}{3}}+2 \Leftrightarrow \frac{3(2-x)^2}{3-2x} - 3 \ge \sqrt{2x^2-4x+3}-1$$

$$\Leftrightarrow \frac{3(x-1)^2}{3-2x} \ge \frac{2(x-1)^2}{\sqrt{2x^2-4x+3}+1} \Leftrightarrow \left(3\sqrt{2(x-1)^2+1}+4x-3\right)(x-1)^2 \ge 0$$

Như vậy chứng minh có thể kết thúc ở đây.

Nhận xét: Qua hai bài toán vừa rồi bạn đọc cũng có thể hiểu được phần nào ý tưởng của phương pháp này. Chúng ta sẽ đi tìm các cận trên và cận dưới đối xứng tốt cho các đại lượng hoán vị để chuyển hoá bài toán ban đầu thành bài toán đối xứng.

Chúng ta hãy lần lượt nhìn lại hai đánh giá ban đầu của chúng ta:

$$\frac{(ab+bc+ca)^2}{a+b+c} \le a^2b+b^2c+c^2a \le \frac{(a+b+c)^5}{27(ab+bc+ca)} (*)$$

Và một đánh giá khác, vốn là bài tập 6 trong phần định lí ***ABC*** và các bài toán hoán vị: $(a+b+c)\sqrt[3]{a^2b^2c^2} \le a^2b+b^2c+c^2a \le \frac{4}{27}(a+b+c)^3 - abc \ (**)$

Chú ý rằng chúng ta đưa hoán vị về đối xứng cốt lõi là để áp dụng định lý ABC nhằm quy về hai trường hợp một biến bằng 0 và hai biến bằng nhau. Chính vì vậy chúng ta cũng sẽ xét hai bất đẳng thức trên trong hai trường hợp trên để xem xét độ lệch của chúng lớn như thế nào.

- Khi $c = 0, b = 1$, $(*) \Leftrightarrow \frac{a^2}{a+1} \le a^2 \le \frac{(a+1)^5}{27a}$ và $(**) \Leftrightarrow 0 \le a^2 \le \frac{4(a+1)^3}{27}$

Nhận xét rằng $0 \le \frac{a^2}{a+1} \le a^2 \le \frac{4(a+1)^3}{27} \le \frac{(a+1)^5}{27a}$ do đó trong trường hợp tiệm cận 0 đánh giá sau là tốt hơn cả: $\frac{(ab+bc+ca)^2}{a+b+c} \le a^2b+b^2c+c^2a \le \frac{4}{27}(a+b+c)^3 - abc$

- Khi $b = c = 1$, $(*) \Leftrightarrow \frac{(2a+1)^2}{a+2} \le a^2+a+1 \le \frac{(a+2)^5}{27(2a+1)}$ và

$(**) \Leftrightarrow (a+2)\cdot\sqrt[3]{a^2} \le a^2+a+1 \le \frac{4}{27}(a+2)^3 - a$

Nhận xét rằng $(a+2)\cdot\sqrt[3]{a^2} \le \frac{(2a+1)^2}{a+2} \le a^2+a+1 \le \frac{(a+2)^5}{27(2a+1)} \le \frac{4}{27}(a+2)^3 - a$ khi $a \le 1$

Và $\frac{(2a+1)^2}{a+2} \le (a+2)\sqrt[3]{a^2} \le a^2+a+1 \le \frac{4}{27}(a+2)^3 - a \le \frac{(a+2)^5}{27(2a+1)}$ khi $a \ge 1$.

Do đó tùy bài toán mà ta sẽ áp dụng các bất đẳng thức khác nhau, tuy nhiên nhớ rằng khi áp dụng cả cận trên và cận dưới thì phải áp dụng theo cặp để có được kết quả hiệu quả nhất:

i) Các bất đẳng thức có dấu bằng xảy ra tại ba biến bằng nhau và sát 0 khi có một biến tiến về 0:

$$\frac{(ab+bc+ca)^2}{a+b+c} \le a^2b+b^2c+c^2a \le \frac{4}{27}(a+b+c)^3 - abc$$

ii) Các bất đẳng thức có dấu bằng xảy ra khi có ba biến bằng nhau và khi áp dụng ABC để sử dụng giá trị nhỏ nhất của abc hay $ab+bc+ca$ $(a \le b = c)$:

$$\frac{(ab+bc+ca)^2}{a+b+c} \le a^2b+b^2c+c^2a \le \frac{(a+b+c)^5}{27(ab+bc+ca)}$$

iii) Các bất đẳng thức có dấu bằng xảy ra khi có ba biến bằng nhau và khi áp dụng ABC để sử dụng giá trị lớn nhất của abc hay $ab+bc+ca$ $(a \ge b = c)$

$$(a+b+c)\sqrt[3]{a^2b^2c^2} \le a^2b+b^2c+c^2a \le \frac{4}{27}(a+b+c)^3 - abc$$

Những cách đánh giá trên cũng chính là cách để bạn đọc có thể tìm ra được đánh giá tốt nhất mỗi khi các bạn tìm được một bất đẳng thức mới.

Ngoài ra chúng ta còn có một đánh giá thú vị nữa mà có thể sử dụng được ***ABC***, đó chính là bất đẳng thức ***Vasile Cirtoaje*** đã được đề cập ngay trong phần trên.

Cho các số thực a,b,c. Khi đó ta có bất đẳng thức sau: $3(a^3b+b^3c+c^3a) \le (a^2+b^2+c^2)^2$

Bất đẳng thức này tuy không đánh giá trực tiếp đại lượng $a^2b+b^2c+c^2a$, tuy nhiên ta có thể chuyển qua một cách dễ dàng nhờ vào đẳng thức sau:

$$a^3b+b^3c+c^3a = (a+b+c)(a^2b+b^2c+c^2a) - abc(a+b+c) - a^2b^2 - b^2c^2 - c^2a^2$$

Như vậy ta có đánh giá tốt sau:

iv) $a^2b+b^2c+c^2a \le \frac{(a^2+b^2+c^2)^2 + 3abc(a+b+c) + 3(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)}{3(a+b+c)}$

$$= \frac{(a+b+c)^4 - 4(a+b+c)^2(ab+bc+ca) + 7(ab+bc+ca)^2 - 3abc(a+b+c)}{3(a+b+c)}$$

Bất đẳng thức này xét trong trường hợp có hai biến bằng nhau thì tốt hơn nhiều so với các bất đẳng thức đã kể trên, tuy có phần khá phức tạp.

Bài 22. Cho $a,b,c \ge 0$. Chứng minh: $\frac{12(a^2+b^2+c^2)}{(a+b+c)^2} + \frac{a^2b+b^2c+c^2a}{a^3+b^3+c^3} \ge 5$ (1)

Chứng minh

$$(1) \Leftrightarrow \frac{12(a^2+b^2+c^2)}{(a+b+c)^2}+\frac{(a+b+c)(ab+bc+ca)-3abc-ab^2-bc^2-ca^2}{a^3+b^3+c^3}\ge 5$$

Áp dụng bất đẳng thức: $a^2b+b^2c+c^2a\le\frac{4}{27}(a+b+c)^3-abc$ và ta cần chứng minh:

$$\frac{12(a^2+b^2+c^2)}{(a+b+c)^2}+\frac{(a+b+c)(ab+bc+ca)-2abc-\frac{4}{27}(a+b+c)^3}{a^3+b^3+c^3}\ge 5 \quad (*)$$

Bất đẳng thức trên hoàn toàn có thể áp dụng ABC, do nó tương ứng với một đa thức bậc 5. Ta xét hai trường hợp sau:

Trường hợp 1: $b=1,c=0$, khi đó: $(*)\Leftrightarrow \frac{12(a^2+1)}{(a+1)^2}+\frac{a(a+1)-\frac{4}{27}(a+1)^3}{a^3+1}\ge 5$

đúng do $\frac{2(a^2+1)}{(a+1)^2}\ge 1\Rightarrow\frac{12(a^2+1)}{(a+1)^2}\ge 6$ và $1+\frac{27a(a+1)-4(a+1)^3}{27(a^3+1)}\ge 0$

Trường hợp 2: $b=c=1$, khi đó:

$$(*)\Leftrightarrow\frac{12(a^2+2)}{(a+2)^2}+\frac{(a+2)(2a+1)-2a-\frac{4}{27}(a+2)^3}{a^3+2}\ge 5$$

$$\Leftrightarrow\frac{12(a^2+2)}{(a+2)^2}-4\ge 1-\frac{-4a^3+30a^2+33a+22}{27(a^3+2)}\Leftrightarrow\frac{8(a-1)^2}{(a+2)^2}\ge\frac{(31a+32)(a-1)^2}{27(a^3+2)}$$

$$\Leftrightarrow(185a^3-156a^2-252a+304)(a-1)^2\ge 0$$

Như vậy bất đẳng thức đã được chứng minh.

Nhận xét: Trong trường hợp có hai biến bằng nhau thì ta gặp khó khăn nhất khi $a\ge 1$ do đó việc áp dụng bất đẳng thức trên là hợp lý. Giá trị 12 vẫn có thể thay bằng một giá trị nhỏ hơn, như 10.5. Tuy nhiên với bài toán sau thì thật sự là cách xử lý trên không hiệu quả.

Bài 23. Cho các số thực $a,b,c\ge 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{7\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}}{a+b+c}+\frac{a^2b+b^2c+c^2a}{a^3+b^3+c^3}\ge 8 \quad (1)$$

Chứng minh

$$(1)\Leftrightarrow\frac{7\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}}{a+b+c}+\frac{(a+b+c)(ab+bc+ca)-3abc-ab^2-bc^2-ca^2}{a^3+b^3+c^3}\ge 8$$

Sử dụng bất đẳng thức

$$a^2b+b^2c+c^2a\le\frac{(a^2+b^2+c^2)^2+3abc(a+b+c)+3(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)}{3(a+b+c)}$$

và ta cần phải chứng minh:

$$\frac{7\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}}{a+b+c}+\frac{3(a+b+c)^2(ab+bc+ca)-12abc(a+b+c)-(a^2+b^2+c^2)^2-3(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)}{3(a^3+b^3+c^3)(a+b+c)}\ge 8$$

Rõ ràng bất đẳng thức trên là khá ABC, ta xét hai trường hợp sau:

Trường hợp 1: $c=0, b=1$, $a\le 1$ (do biểu thức vẫn đối xứng khi ta cho $c=0$)

$$\frac{7\sqrt{3(a^2+1)}}{a+1}+\frac{3a(a+1)^2-(a^2+1)^2-3a^2}{3(a^3+1)(a+1)}\ge 8 \Leftrightarrow \frac{7\sqrt{3(a^2+1)}}{a+1}+\frac{3a^3+a^2+3a-a^4-1}{3(a^3+1)(a+1)}\ge 8$$

Ta có: $\dfrac{\sqrt{3(a^2+1)}}{a+1}=\sqrt{\dfrac{3}{2}}\cdot\dfrac{\sqrt{2(a^2+1)}}{a+1}\ge\sqrt{\dfrac{3}{2}}\Rightarrow\dfrac{7\sqrt{3(a^2+1)}}{a+1}\ge\dfrac{7\sqrt{6}}{2}$

và $\dfrac{3a^3+a^2+3a-a^4-1}{3(a^3+1)(a+1)}\ge 0$

Cộng hai bất đẳng thức vế theo vế ta thu được:

$$\frac{7\sqrt{3(a^2+1)}}{a+1}+\frac{3a^3+a^2+3a-a^4-1}{3(a^3+1)(a+1)}\ge\frac{7\sqrt{6}}{2}>8$$

Trường hợp 2: $b=c=1$

$$\frac{7\sqrt{3(a^2+2)}}{a+2}+\frac{3(a+2)^2(2a+1)-12a(a+2)-(a^2+2)^2-3(2a^2+1)}{3(a^3+2)(a+2)}\ge 8$$

$$\Leftrightarrow\frac{7\sqrt{3(a^2+2)}}{a+2}-7\ge 1-\frac{-a^4+6a^3+5a^2+12a+5}{3(a^4+2a^3+2a+4)}$$

$$\Leftrightarrow\frac{14(a-1)^2}{(a+2)\left(\sqrt{3(a^2+2)}+a+2\right)}\ge\frac{(4a^2+8a+7)(a-1)^2}{3(a^3+2)(a+2)}$$

$$\Leftrightarrow (a-1)^2\left[42(a^3+2)-(4a^2+8a+7)\left(\sqrt{3(a^2+2)}+a+2\right)\right]\ge 0$$

Việc còn lại là chứng minh: $f(a)=42(a^3+2)-(4a^2+8a+7)\left(\sqrt{3(a^2+2)}+a+2\right)\ge 0$ xin nhường lại cho bạn đọc. Như vậy bài toán cũng kết thúc ở đây.

Nhận xét: Trong các bài toán ở trên chúng ta chỉ đi tìm đánh giá cho đại lượng $a^2b+b^2c+c^2a$, $ab^2+bc^2+ca^2$ mà không đi tìm đánh giá cho các đại lượng hoán vị khác. Thực chất chỉ cần tìm đánh giá cho đại lượng $a^2b+b^2c+c^2a$ là đủ, vì mọi đại lượng hoán vị khác đều có thể được biểu diễn thông qua bốn đại lượng sau: $abc, ab+bc+ca, a+b+c, a^2b+b^2c+c^2a$.

Chúng tôi sẽ không đưa ra chứng minh cho nhận xét trên, tuy nhiên bạn đọc cũng có thể dễ dàng tìm thấy một chứng minh bằng quy nạp. Ở đây chúng tôi sẽ nêu ra một vài công thức cần thiết hơn, đó là biểu diễn các đại lượng hoán vị khác theo bốn đại lượng đã kể trên, vẫn với quy ước: $a=x+y+z, b=xy+yz+zx, c=xyz$

$$x^3y+y^3z+z^3x=a\left(x^2y+y^2z+z^2x\right)-b^2+ac$$

$$x^4y+y^4z+z^4x=\left(a^2-b\right)\left(x^2y+y^2z+z^2x\right)-ab^2+bc+a^2c$$

$$x^3y^2+y^3z^2+z^3x^2=b\left(x^2y+y^2z+z^2x\right)+bc-a^2c$$

$$x^5y+y^5z+z^5x=\left(a^3-2ab+c\right)\left(x^2y+y^2z+z^2x\right)-a^2b^2+a^3c+b^3$$

$$x^4y^2+y^4z^2+z^4x^2=\left(ab-c\right)\left(x^2y+y^2z+z^2x\right)+4abc-a^3c-b^3-3c^2$$

Bài tập áp dụng:

Bài 24. Cho $a,b,c>0$.

Chứng minh rằng: $\sqrt{\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{a}}+\sqrt{\dfrac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}}\geq\sqrt{3}+1$

Bài 25. Cho $a,b,c>0$.

Chứng minh rằng: $\sqrt{3\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{a}\right)}+2\sqrt{\dfrac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}}\geq 5$

Bài 26. Chứng minh rằng: $\dfrac{a^2}{b^2}+\dfrac{b^2}{c^2}+\dfrac{c^2}{a^2}+4\left(\dfrac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}\right)^2\geq 7,\ \forall a,b,c>0$

Bài 27. Cho $a,b,c\geq 0$ và $0<k\leq 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^4+b^4+c^4}{a^3b+b^3c+c^3a}+\frac{k(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2}\geq k+1$$

Bài 28. Tìm số dương k lớn nhất để bất đẳng thức sau đúng với mọi $a,b,c>0$:

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{3kabc}{a^2b+b^2c+c^2a}\geq 3+k.$$

Bài 29. Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng:

$$2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)+1\geq\frac{21\left(a^2+b^2+c^2\right)}{(a+b+c)^2}$$

Bài 30. Cho $a,b,c>0$. Tìm hằng số dương tốt nhất của k sao cho:

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+k\geq\frac{(k+3)\sqrt{3\left(a^2+b^2+c^2\right)}}{a+b+c}$$

§20. PHƯƠNG PHÁP GLA (GEOMETRIALIZE ALGEBRA)

I. CƠ SỞ CỦA PHƯƠNG PHÁP

Xét bất đẳng thức đối xứng 3 biến $a, b, c \geq 0$. Đặt $x = b + c, y = c + a, z = a + b$ hoặc $x = \sqrt{b+c}, y = \sqrt{c+a}, z = \sqrt{a+b}$, ... khi đó x, y, z là độ dài 3 cạnh của 1 tam giác. Do mọi tam giác đều được xác định bởi 3 yếu tố p, R, r nên bất đẳng thức sau khi đưa về x, y, z sẽ được đưa tiếp về p, R, r. Như vậy ta đã chuyển một bất đẳng thức đại số thành bất đẳng thức hình học. Trường hợp trong 3 biến a, b, c có một biến bằng 0 thì tam giác suy biến thành đường thẳng và ta nói là tam giác có $r = 0$. Vì có thể thiết lập các hệ thức, bất đẳng thức giữa p, R, r nên trong một số dạng toán thì việc chuyển bài toán gồm 3 đại lượng a, b, c về p, R, r là thuận lợi hơn.

II. CÁC ĐẲNG THỨC VỀ MỐI QUAN HỆ CÁC YẾU TỐ TRONG TAM GIÁC

Xét tam giác ABC có độ dài 3 cạnh là a, b, c; nửa chu vi $p = \frac{a+b+c}{2}$ và R, r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp của ΔABC. Khi đó diện tích tam giác ABC là: $S = pr = \frac{abc}{4R} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. Từ đó suy ra các hệ thức

1. $a + b + c = 2p$; $ab + bc + ca = p^2 + 4Rr + r^2$; $abc = 4pRr$

2. $2(ab + bc + ca) = a^2 + b^2 + c^2 + 16Rr + 4r^2$

3. $a^2 + b^2 + c^2 = 2p^2 - 8Rr - 2r^2$

4. $2Rr - r^2 - \frac{p^2}{9} = -\frac{1}{18p}(b + c - 2a)(c + a - 2b)(a + b - 2c)$

5. $4Rr - r^2 - \frac{p^2}{4} = -\frac{1}{32p}(b + c - 3a)(c + a - 3b)(a + b - 3c)$

Chứng minh

Dễ thấy: Đẳng thức **1.** $\Leftrightarrow$ Đẳng thức **2.** $\Leftrightarrow$ Đẳng thức **3.** nên ta chỉ chứng minh **1.**

Ta có: $\begin{cases} \operatorname{tg}\frac{A}{2} = \frac{r}{p-a} \\ \sin A = \frac{a}{2R} \end{cases} \Rightarrow \sin A = \frac{2\operatorname{tg}\frac{A}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{A}{2}} = \frac{2 \cdot \frac{r}{p-a}}{1 + \frac{r^2}{(p-a)^2}} \Rightarrow \frac{a}{2R} = \frac{2r(p-a)}{(p-a)^2 + r^2}$

$\Rightarrow ap^2 - 2pa^2 + a^3 + ar^2 = 4Rr(p-a) \Rightarrow a^3 - 2pa^2 + a(r^2 + p^2 + 4Rr) - 4Rrp = 0$ (1)

Từ (1) ta thấy a, b, c là 3 nghiệm của phương trình:

$x^3 - 2px^2 + (r^2 + p^2 + 4Rr)x - 4Rrp = 0$

Theo định lý ***Viet*** ta có: $ab + bc + ca = p^2 + 4Rr + r^2$

4. Hệ thức này lần đầu tiên được nhà toán học P. Nuesch công bố chứng minh trong tạp chí "*Elementary Math*", No 26, 1971 trang 19. Sau đây là một chứng minh khác:

Đặt $p-a=x, p-b=y, p-c=z \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=p-a+p-b+p-c=p \\ a=y+z\ ,\ b=z+x\ ,\ c=x+y \end{cases}$ Ta có:

$$2Rr-r^2-\frac{p^2}{9}=-\frac{1}{18p}(b+c-2a)(c+a-2b)(a+b-2c)$$

$$\Leftrightarrow 36Rrp-18pr^2-2p^3=-(b+c-2a)(c+a-2b)(a+b-2c)\ (1)$$

VT(1) = $9abc-18\frac{S^2}{p}-2p^3=9abc-18(p-a)(p-b)(p-c)-2p^3$. Khi đó (1) $\Leftrightarrow$

$$9(x+y)(y+z)(z+x)-18xyz-2(x+y+z)^3=-(2x-y-z)(2y-z-x)(2z-x-y)\ (2)$$

Ta có: VT(2) $=9\left[x^2(y+z)+y^2(z+x)+z^2(x+y)+2xy\right]-18xyz$

$$-2\left[x^3+y^3+z^3+3x^2(y+z)+3z^2(x+y)+6xyz\right]$$

$$\Leftrightarrow VT(2)=f(x,y,z)=3\left[x^2(y+z)+x^2(y+z)+z^2(x+y)\right]-2\left(x^3+y^3+z^3\right)-12xyz$$

Do $f(x,y,z)$ là đa thức đối xứng bậc 3 với x,y,z và $2x=y+z$ là một nghiệm của $f(x,y,z)$ nên $f(x,y,z)$ chia hết cho $(2x-y-z)$. Kết hợp với tính đối xứng của $f(x,y,z) \Rightarrow f(x,y,z)$ cũng chia hết cho $(2y-z-x)$ và $(2z-x-y)$.

Mà $\deg f(x,y,z)=3$ nên suy ra: $f(x,y,z)=-(2x-y-z)(2y-z-x)(2z-x-y)$

5. Hệ thức này lần đầu tiên cũng được nhà toán học P. Nuesch công bố chứng minh trong tạp chí *"Elementary Math"*, No 27, 1972 (trang 16-17). Sau đây chúng tôi xin đưa ra cách chứng minh khác:

Bổ đề: $(m+n)(n+p)(p+m)+mnp=(m+n+p)(mn+np+pm)\ \ \forall m,n,p\in\mathbb{R}$

Áp dụng: Biến đổi đẳng thức đã cho tương đương với:

$$128Rrp-32pr^2-8p^3=(3a-b-c)(3b-c-a)(3c-a-b)$$

$$\Leftrightarrow 32abc-32(p-a)(p-b)(p-c)-(a+b+c)^3=(3a-b-c)(3b-c-a)(3c-a-b)$$

Đặt $\begin{cases} a=2x+y+z \\ b=2y+z+x \\ c=2z+x+y \end{cases}$ với $\begin{cases} x+y>0 \\ y+z>0 \\ z+x>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b+c=4(x+y+z) \\ 3a-b-c=4x \\ 3b-c-a=4y \\ 3c-a-b=4z \end{cases}$ (1).

Khi đó a,b,c là độ dài 3 cạnh của 1 tam giác và: $p-a=y+z, p-b=z+x, p-c=x+y$ (2)

Từ (1) và (2) ta cần chứng minh:

$$32(2x+y+z)(2y+z+x)(2z+x+y)-32(x+y)(y+z)(z+x)-64(x+y+z)^3=64xyz$$

$$\Leftrightarrow (2x+y+z)(2y+z+x)(2z+x+y)-(x+y)(y+z)(z+x)-2(x+y+z)^3=2xyz$$

$\Leftrightarrow (2x+y+z)(2y+z+x)(2z+x+y)+(x+y)(y+z)(z+x)$

$=2(x+y+z)^3+2\left[(x+y)(y+z)(z+x)+xyz\right] \quad (3)$

Sử dụng bổ đề với $m=y+z, n=z+x, p=x+y$

$\Rightarrow VT(3)=2(x+y+z)\left[(x+y)(y+z)+(y+z)(z+x)+(z+x)(x+y)\right]$

Sử dụng bổ đề với $m=x, n=y, p=z \Rightarrow VP(3)=2(x+y+z)^3+2(x+y+z)(xy+yz+zx)$.

Khi đó (3) $\Leftrightarrow (x+y)(y+z)+(y+z)(z+x)+(z+x)(x+y)=(x+y+z)^2+xy+yz+zx$

Đẳng thức cuối đúng nên (3) đúng, suy ra (đpcm)

III. CÁC ĐỊNH LÝ

1. Định lý 1: Cho tam giác ABC, D là một điểm bất kì thuộc BC. Khi đó:

$nc^2+mb^2=(d^2+mn)a$ trong đó AD = d, BD = m, DC = n

Chứng minh

Ta có $\begin{cases} m^2+d^2-c^2=2md\cos\widehat{ADB} \\ n^2+d^2-b^2=2nd\cos\widehat{ADC} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n(m^2+d^2-c^2)=2mnd\cos\widehat{ADB} \\ m(n^2+d^2-b^2)=2mnd\cos\widehat{ADC} \end{cases}$ suy ra

$mn(m+n)+(m+n)d^2-nc^2-mb^2=2mnd\left(\cos\widehat{ADB}+\cos\widehat{ADC}\right) \Leftrightarrow (mn+d^2)a=nc^2+mb^2$

2. Định lý 2: Tam giác ABC có hai góc $\geq 60°$ $\Leftrightarrow$ $p\geq\sqrt{3}(R+r)$

Tam giác ABC có hai góc $\leq 60°$ $\Leftrightarrow$ $p\leq\sqrt{3}(R+r)$

Tam giác ABC có một góc bằng $60°$ $\Leftrightarrow$ $p=\sqrt{3}(R+r)$

Chứng minh

Ta có: $\dfrac{p-\sqrt{3}(R+r)}{2R}=\dfrac{a+b+c}{4R}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(1+\dfrac{r}{R}\right)$

$=\dfrac{\sin A+\sin B+\sin C}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}(\cos A+\cos B+\cos C) =\sin\left(A-\dfrac{\pi}{3}\right)+\sin\left(B-\dfrac{\pi}{3}\right)+\sin\left(C-\dfrac{\pi}{3}\right)=$ T

Đặt $x=A-\dfrac{\pi}{3}, y=B-\dfrac{\pi}{3}, z=C=\dfrac{\pi}{3} \Rightarrow x+y+z=0$.

Không mất tính tổng quát giả sử: $x\geq y\geq z$

$T=\sin x+\sin y+\sin z=\sin x+\sin y-\sin(x+y)=2\sin\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}-2\sin\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x+y}{2}$

$=2\sin\dfrac{x+y}{2}\left(\cos\dfrac{x-y}{2}-\cos\dfrac{x+y}{2}\right)=4\sin\dfrac{x+y}{2}\sin\dfrac{x}{2}\sin\dfrac{y}{2}$

Do $x+y+z=0$ và $x\geq y\geq z$ nên $0\leq x\leq x+y\leq\pi \Rightarrow 4\sin\dfrac{x+y}{2}\sin\dfrac{x}{2}\geq 0$

• Nếu $y \geq 0 \Leftrightarrow B \geq \frac{\pi}{3}$ thì $\sin\frac{y}{2} \geq 0$ do đó $\frac{p-\sqrt{3}(R+r)}{2R} = 4\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2} \geq 0$

Tức là $p \geq \sqrt{3}(R+r)$ khi ΔABC có 2 góc $\geq \frac{\pi}{3}$

• Nếu $y \leq 0$ thì $\sin\frac{y}{2} \leq 0$, do đó: $\frac{p-\sqrt{3}(R+r)}{2R} = 4\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2} \leq 0$

Tức là $p \leq \sqrt{3}(R+r)$ khi ΔABC có 2 góc $\leq \frac{\pi}{3}$

• Nếu $y = 0$ thì $p = \sqrt{3}(R+r)$ do $\sin\frac{y}{2} = 0$

3. Định lý 3: Cho tam giác ABC có độ dài 3 cạnh là *a, b, c*. Chứng minh rằng:

$2R^2 + 10Rr - r^2 - 2(R-2r)\sqrt{R(R-2r)} \leq p^2 \leq 2R^2 + 10Rr + r^2 + 2(R-2r)\sqrt{R(R-2r)}$

Cách 1: Giả sử $a \geq b \geq c > 0$, theo **II.1.** thì *a, b, c* là 3 nghiệm của phương trình:

$M(X) = X^3 - 2pX^2 + \left(p^2 + 4Rr + r^2\right)X - 4pRr = 0$

Do M(*X*) = 0 có 3 nghiệm *a, b, c* nên $M'(X) = 3X^2 - 4pX + p^2 + 4Rr + r^2 = 0$

có 2 nghiệm $X_1 = \frac{2p-\sqrt{\Delta'}}{3}; X_2 = \frac{2p+\sqrt{\Delta'}}{3}$ và $\begin{cases} M(X_1) \geq 0 \\ M(X_2) \leq 0 \end{cases}$ (1)

Khi đó $\Delta' = (2p)^2 - 3\left(p^2 + 4Rr + r^2\right) = p^2 - 12Rr - 3r^2 \geq 0$

Ta có: (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'\sqrt{\Delta'} \geq p\left(p^2 - 18Rr + 9r^2\right) \\ \Delta'\sqrt{\Delta'} \geq -p\left(p^2 - 18Rr + 9r^2\right) \end{cases} \Leftrightarrow \Delta'\sqrt{\Delta'} \geq \left|p\left(p^2 - 18Rr + 9r^2\right)\right|$

$\Leftrightarrow (\Delta')^3 \geq p^2\left(p^2 - 18Rr + 9r^2\right)^2 \Leftrightarrow p^4 - 2p^2\left(2R^2 + 10Rr - r^2\right) + r(4R+r)^3 \leq 0$ (2)

Ta có: $\Delta'_1 = \left(2R^2 + 10Rr - r^2\right)^2 - r(4R+r)^3 = 4R(R-2r)^3 \geq 0$ nên suy ra (2) $\Leftrightarrow$

$2R^2 + 10Rr - r^2 - 2(R-2r)\sqrt{R(R-2r)} \leq p^2 \leq 2R^2 + 10Rr + r^2 + 2(R-2r)\sqrt{R(R-2r)}$

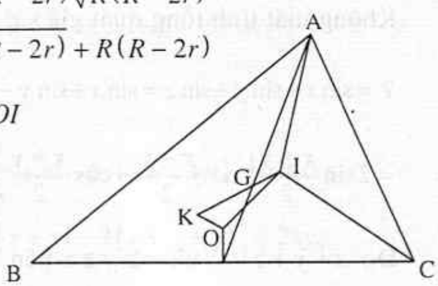
Bình luận: Với cách chứng minh trên chúng ta dễ lầm tưởng rằng đẳng thức trong định lý 2 xảy ra khi và chỉ khi *R* = 2*r* hay tam giác đã cho là tam giác đều. Chúng tôi sẽ chỉ ra chính xác khi nào 2 vế bằng nhau bằng cách giải hình học sau đây:

Cách 2: Ta sẽ chứng minh: $p^2 \leq 2R^2 + 10Rr - r^2 + 2(R-2r)\sqrt{R(R-2r)}$

$\Leftrightarrow p^2 - 16Rr + 5r^2 \leq \left(R^2 - 4Rr + 4r^2\right) + 2(R-2r)\sqrt{R(R-2r)} + R(R-2r)$

$\Leftrightarrow 9.IG^2 \leq \left[(R-2r) + \sqrt{R(R-2r)}\right]^2 \Leftrightarrow 3.IG \leq R - 2r + OI$

Trong đó O, I, G là tâm đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp và trọng tâm của ΔABC. Trên đường thẳng IG ta lấy điểm H sao cho $\overrightarrow{IK} = 3\overrightarrow{IG}$.



Theo định lý 1 ta có:

$OI^2.HG + OH^2.IG = (OG^2 + IG.GK)IK$ (*) trong đó $GK = 2IG, IK = 3IG$

$$(*) \Leftrightarrow 2R(R-2r) + OK^2 = 3\left(R^2 - \frac{a^2+b^2+c^2}{9} + 2\cdot\frac{p^2-16Rr+5r^2}{9}\right)$$

$$\Leftrightarrow 6R(R-2r) + 3.OK^2 = 9R^2 - (2p^2 - 8Rr - 2r^2) + 2p^2 - 32Rr + 10r^2$$

$$\Leftrightarrow 3.OK^2 = 3(R^2 - 4Rr + 4r^2) \Leftrightarrow OK^2 = (R-2r)^2 \Leftrightarrow OK = R - 2r$$

Trong tam giác OIK ta luôn có: OI + OK ≥ IK hay $(R - 2r)$ + OI ≥ 3.IG

Tức là: $p^2 \le 2R^2 + 10Rr - r^2 + 2(R-2r)\sqrt{R(R-2r)}$

Đẳng thức xảy ra ⇔ O nằm giữa I và K ⇔ $\sqrt{p^2 - 16Rr + 5r^2} = R - 2r + \sqrt{R(R-2r)}$

⇒ ΔABC cân. Mặt khác ta có: $p^2 - 16Rr + 5r^2 \ge R(R-2r) + 2(R-2r)\sqrt{R(R-2r)}$

$\ge R(R-2r) + 2(R-2r)^2 = (R-2r)(3R-4r) \Rightarrow p^2 \ge 3(R+r)^2 \Rightarrow p \ge 3\sqrt{R+r}$

Theo định lý 2 thì $p \ge \sqrt{3}(R+r)$ ⇔ Tam giác ABC có 2 góc ≥ 60°.

Kết hợp với ΔABC cân ⇒ Tam giác ABC cân có cạnh bên ≥ cạnh đáy.

• Tương tự sử dụng IK + OK ≥ OI ta có $p^2 \ge 2R^2 + 10Rr - r^2 - 2(R-2r)\sqrt{R(R-2r)}$

Đẳng thức xảy ra ⇔ K nằm giữa O và I ⇔ $\sqrt{p^2 - 16Rr + 5r^2} = \sqrt{R(R-2r)} - (R-2r)$

⇒ ΔABC cân. Mặt khác bình phương 2 vế ta có bất đẳng thức hệ quả:

$p^2 - 16Rr + 5r^2 \le R(R-2r) + (R-2r)^2 \le (R-2r)(3R-4r) \Rightarrow p^2 \le 3(R+r)^2 \Rightarrow p \le 3\sqrt{R+r}$

Theo định lý 2 thì $p \le \sqrt{3}(R+r)$ ⇔ Tam giác ABC có 2 góc ≤ 60°.

Kết hợp với ΔABC cân ⇒ Tam giác ABC cân có cạnh bên ≤ cạnh đáy.

Bình luận: Từ định lý 1 ta có thể tạo ra rất nhiều đoạn thẳng có độ dài đặc biệt và rất đẹp như đoạn thẳng OK có ở trong bài này.

4. Định lý 4: Với mọi tam giác nhọn ta có các bất đẳng thức:

$p^2 \ge 2R^2 + 8Rr + 3r^2$; $a^2 + b^2 + c^2 \ge 4(R+r)^2$ (1); $ab + bc + ca \ge 2R^2 + 12Rr + 4r^2$

Chứng minh

Do 3 bất đẳng thức trên là tương đương nên ta sẽ chứng minh (1) làm đại diện.

$$(1) \Leftrightarrow 4R^2(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C) \ge 4R^2(\cos A + \cos B + \cos C)^2$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \ge (\cos A + \cos B + \cos C)^2 \quad (2)$$

Do A, B, C nhọn nên ta có: $2\cos A\cos B = \sqrt{\sin 2A \operatorname{cotg} B \sin 2B \operatorname{cotg} A}$, do đó theo bất đẳng thức ***AM − GM***: $2\cos A\cos B \le \dfrac{\sin 2A \operatorname{cotg} B + \sin 2B \operatorname{cotg} A}{2}$ (3). Tương tự :

$$2\cos B\cos C \le \frac{\sin 2B \operatorname{cotg} C + \sin 2C \operatorname{cotg} B}{2};\ 2\cos C\cos A \le \frac{\sin 2C\operatorname{cotg} A + \sin 2A \operatorname{cotg} C}{2}$$

Từ đó suy ra: $2(\cos A\cos B + \cos B\cos C + \cos C\cos A) \le$

$$\le \frac{1}{2}\left[(\sin 2A \operatorname{cotg} B + \sin 2B\operatorname{cotg} A) + (\sin 2B\operatorname{cotg} C + \sin 2C\operatorname{cotg} B) + (\sin 2C\operatorname{cotg} A + \sin 2A\operatorname{cotg} C)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\operatorname{cotg} B\cdot 2\sin(A+C)\cos(A-C) + 2\operatorname{cotg} C\sin(A+B)\cos(A-B) + 2\operatorname{cotg} A\sin(B+C)\cos(B-C)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[2\cos B\cos(A-C) + 2\cos C\cos(A-B) + 2\cos A\cos(B-C)\right]$$

$$= -\frac{1}{2}\left[(\cos 2A + \cos 2C) + (\cos 2A + \cos 2B) + (\cos 2B + \cos 2C)\right] = -(2\cos^2 A + 2\cos^2 B + 2\cos^2 C - 3)$$

$$= 3 - 2(\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C) = \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C - (\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C)$$

$$\Rightarrow 2(\cos A\cos B + \cos B\cos C + \cos C\cos A) + \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C \le \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C$$

$\Rightarrow$ (2) đúng $\Rightarrow$ (1) đúng (đpcm).

5. Định lý 5: $a^2 + b^2 + c^2 \le 8R^2 + 4r^2$

Chứng minh

Có nhiều cách chứng minh định lý này. Sau đây là chứng minh sử dụng định lý 3.

Để ý rằng: $R(R-2r) \le R(R-2r) + r^2 = (R-r)^2$. Do đó:

$$p^2 \le 2R^2 + 10Rr - r^2 + 2(R-2r)(R-r) \Leftrightarrow p^2 \le 2R^2 + 10Rr - r^2 + 2(R^2 - 3Rr + 2r^2)$$

$$\Leftrightarrow p^2 \le 4R^2 + 4Rr + 3r^2 \Leftrightarrow 2p^2 \le 8R^2 + 8Rr + 6r^2$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 8Rr + 2r^2 \le 8R^2 + 8Rr + 6r^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 \le 8R^2 + 4r^2$$

Mặt khác $a^2 + b^2 + c^2 + 16Rr + 4r^2 = 2(ab + bc + bc)$

$$\Rightarrow 8R^2 + 16Rr + 8r^2 \ge 2(ab + bc + bc) \Rightarrow 4(R+r)^2 \ge ab + bc + ca$$

6. Định lý 6: $p^2 \ge 16Rr - 5r^2 + \dfrac{r^2(R-2r)}{R}$ (*)

Chứng minh

Ta có: $IG \ge IO - OG \Leftrightarrow IG \ge \sqrt{R(R-2r)} - \frac{1}{3}\sqrt{9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)}$

$$\Leftrightarrow 3.IG \ge 3\sqrt{R(R-2r)} - \sqrt{9R^2 - (a^2+b^2+c^2)} \Leftrightarrow 3.IG \ge \frac{a^2 + b^2 + c^2 - 18Rr}{3\sqrt{R(R-2r)} + \sqrt{9R^2 - (a^2+b^2+c^2)}} \quad (1)$$

Do $9.IG^2 = p^2 - 16Rr + 5r^2$ nên $p^2 \ge 16Rr - 5r^2$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 2p^2 - 8Rr - 2r^2 \ge 24Rr - 12r^2 \quad (2)$$

Từ (1), (2) $\Rightarrow$ $3.IG \ge \dfrac{6Rr - 12r^2}{3\sqrt{R(R-2r)} + \sqrt{9R^2 - 24R + 12r^2}} = \dfrac{6Rr - 12r^2}{6\sqrt{R(R-2r)}} = r\sqrt{\dfrac{R-2r}{R}}$

$\Rightarrow 9.IG^2 \geq \dfrac{r^2(R-2r)}{R^2}$. Vậy (*) được chứng minh. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ ΔABC đều

Bình luận: Định lý 6 là một đánh giá cận dưới của p^2 và chỉ chặt hơn bất đẳng thức $p^2 \geq 16Rr - 5r^2$ một chút xíu nhưng nó có thể "đương đầu" với những bất đẳng thức khó hơn nhiều. Cận dưới tốt nhất: $p^2 \geq 2R^2 + 10Rr - r^2 - 2(R-2r)\sqrt{R(R-2r)}$. Tuy nhiên hình thức của nó khá cồng kềnh nên đôi khi rất khó áp dụng.

7. Định lý 7: Cho ΔABC thỏa mãn $a \geq b \geq c$ và $a+b \geq 3c$. Khi đó: $\dfrac{r}{R} \leq \dfrac{4}{9}$

IV. CÁC ĐẲNG THỨC GIỮA BIẾN SỐ CŨ VỚI CÁC YẾU TỐ TRONG TAM GIÁC MỚI

Đây chính là phần "xương sống" của phương pháp. Chỉ cần nắm vững các đẳng thức thì có thể giải quyết được nhiều bài tập rất khó một cách đơn giản.

• Với $a, b, c > 0$, đặt $x = b+c, y = c+a, z = a+b$ thì x, y, z trở thành độ dài 3 cạnh của một tam giác XYZ và một bất đẳng thức đại số được đưa về bất đẳng thức hình học với các biến p, R, r, S lần lượt là nửa chu vi, bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp và diện tích của tam giác XYZ.

1. $a^2 + b^2 + c^2 = p^2 - 8Rr - 2r^2$; $ab + bc + ca = 4Rr + r^2$

Hệ quả: $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca} = \dfrac{p^2 - 8Rr - 2r^2}{4Rr + r^2} = \dfrac{p^2}{4Rr + r^2} - 2$

Chứng minh

Ta có: $x^2 + y^2 + z^2 = (a+b)^2 + (b+c)^2 + (c+a)^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca)$ (1)

$xy + yz + zx = (a+b)(b+c) + (b+c)(c+a) + (c+a)(a+b)$

$= a^2 + b^2 + c^2 + 3(ab + bc + ca)$(2). Từ (1) và (2) suy ra:

• $4(a^2 + b^2 + c^2) = 3(x^2 + y^2 + z^2) - 2(xy + yz + zx)$

$\Leftrightarrow 4(a^2 + b^2 + c^2) = (x+y+z)^2 - 2\left[2(xy + yz + zx) - (x^2 + y^2 + z^2)\right]$

$\Leftrightarrow 4(a^2 + b^2 + c^2) = 4p^2 - 2(16Rr + 4r^2) \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 = p^2 - 8Rr - 2r^2$

• $4(ab + bc + ca) = 2(xy + yz + zx) - (x^2 + y^2 + z^2)$

$4(ab + bc + ca) = 16Rr + 4r^2 \Leftrightarrow ab + bc + ca = 4Rr + r^2$

2. $(a+b)(b+c)(c+a) = xyz = 4Rrp$; $abc = (p-x)(p-y)(p-z) = \dfrac{S^2}{p} = pr^2$

Hệ quả: $\dfrac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} = \dfrac{r}{4R}$; $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = \dfrac{4R + r}{pr}$; $\dfrac{1}{ab} + \dfrac{1}{bc} + \dfrac{1}{ca} = \dfrac{1}{r^2}$

3. $\dfrac{a+b}{c} + \dfrac{b+c}{a} + \dfrac{c+a}{b} = \dfrac{2(2R-r)}{r}$

Chứng minh

$$\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}=\frac{a+b+c}{c}+\frac{a+b+c}{a}+\frac{a+b+c}{b}-3=\frac{(a+b+c)(ab+bc+ca)}{abc}-3$$

$$=\frac{p\left(4Rr+r^2\right)}{(p-x)(p-y)(p-z)}-3=\frac{p\left(4Rr+r^2\right)}{pr^2}-3=\frac{4R+r}{r}-3=\frac{2(2R-r)}{r}$$

4. $a^3+b^3+c^3=(a+b+c)\left[\left(a^2+b^2+c^2\right)-(ab+bc+ca)\right]+3abc$

$$=p\left(p^2-8Rr-2r^2-4Rr-r^2\right)+3pr^2=p\left(p^2-12Rr\right)$$

5. $a^4+b^4+c^4=\left(a^2+b^2+c^2\right)^2-2(ab+bc+ca)^2+4abc(a+b+c)$

$$=\left(p^2-8Rr-2r^2\right)^2-2\left(4Rr+r^2\right)^2+4p^2r^2$$

$$=p^4-4\left(4Rr+r^2\right)p^2+4\left(4Rr+r^2\right)^2-2\left(4Rr+r^2\right)^2+4p^2r^2=p^4-16Rrp^2+2\left(4Rr+r^2\right)^2$$

6. $\dfrac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}=\dfrac{p}{\sqrt[3]{pr^2}}=\sqrt[3]{\dfrac{p^2}{r^2}}$

7. $16S^2=2\left(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2\right)-\left(x^4+y^4+z^4\right)$

Chú ý: Trong một số bài toán khi xét trường hợp $x^2\ge y^2+z^2$ ta thấy ngay bài toán đúng thì chỉ cần xét thêm trường hợp $x^2<y^2+z^2$ là đầy đủ. Khi đó đặt $m=x^2, n=y^2, p=z^2$ ta lại có m,n,p là độ dài 3 cạnh của 1 tam giác. Nếu gọi R_1, r_1 lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tam giác MNP có độ dài 3 cạnh là m,n,p thì:

$$16S^2=2(mn+np+pm)-\left(m^2+n^2+p^2\right)=16R_1r_1+4r_1^2 \Rightarrow 4S^2=4R_1r_1+r_1^2$$

Vậy nhiều bài toán 3 biến qua 2 lần đổi biến số thì nhận được bài toán 2 biến. Do các bài toán ta đang nghiên cứu là bất đẳng thức đối xứng nên sau khi chuẩn hóa thì các bài toán chỉ còn 1 biến và nói chung sẽ giải được một cách dễ dàng.

8. $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}=(a+b+c)\left(\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{c+a}\right)-3=p\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)-3$

$$=\frac{p(xy+yz+zx)}{xyz}-3=\frac{p\left(p^2+4Rr+r^2\right)}{4Rrp}-3=\frac{p^2+4Rr+r^2}{4Rr}-3=\frac{p^2-8Rr+r^2}{4Rr}$$

9. $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}=\dfrac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{a^2b^2c^2}=\dfrac{(ab+bc+ca)^2-2abc(a+b+c)}{a^2b^2c^2}$

$$=\frac{r^2(4R+r)^2-2p^2r^2}{p^2r^2}=\frac{(4R+r)^2-2p^2}{p^2r^2}$$

10. $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{xy+yz+zx}{xyz}=\frac{p^2+4Rr+r^2}{4Rrp}$

11. $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}=\frac{x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2}{x^2y^2z^2}=\frac{(xy+yz+zx)^2-2xyz(x+y+z)}{x^2y^2z^2}$

$$=\frac{(p^2+4Rr+r^2)^2-16Rrp^2}{16R^2r^2p^2}=\frac{(p^2+4Rr+r^2)^2}{16R^2r^2p^2}-\frac{1}{Rr}$$

12. $\frac{ab}{c}+\frac{ac}{b}+\frac{bc}{a}=\frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{abc}$

$$=\frac{(ab+bc+ca)^2-2abc(a+b+c)}{abc}=\frac{r^2(4R+r)^2-2p^2r^2}{pr^2}=\frac{(4R+r)^2-2p^2}{p}$$

13. $a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3=(ab+bc+ca)^3-3abc(a+b)(b+c)(c+a)$

$$=r^3(4R+r)^3-12p^2r^3R$$

14. $\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{1}{b^2+c^2}+\frac{1}{c^2+a^2}$

$$=\frac{(a^2+b^2)(a^2+c^2)+(b^2+c^2)(b^2+a^2)+(c^2+a^2)(c^2+b^2)}{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}$$

$$=\frac{(a^2+b^2+c^2)^2+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{(a^2+b^2+c^2)(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-a^2b^2c^2}$$

$$=\frac{(p^2-8Rr-2r^2)^2+(4Rr+r^2)^2-2p^2r^2}{(p^2-8Rr-2r^2)\left[(4Rr+r^2)^2-2p^2r^2\right]-p^2r^4}=\frac{p^4-8(2R+r)rp^2+5r^2(4R+r)^2}{4r^2(4R^2+6Rr+r^2)p^2-2p^4r^2-2r^3(4R+r)^3}$$

15. $(a^2b+b^2c+c^2a)(a^2c+b^2a+c^2b)=a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3+3a^2b^2c^2+abc(a^3+b^3+c^3)$

$$=r^3(4R+r)^3-12R^2r^3p+3p^2r^4+p^2r^2(p^2-12Rr)=r^2\left[r(4R+r)^3+3p^2r^2+p^4-24Rrp^2\right]$$

V. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

A. CÁC BÀI TOÁN KHÔNG ĐIỀU KIỆN

Bài 1. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng :

$$\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}\geq 4\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)$$

Chứng minh

Áp dụng công thức 3 và 8 ta cần chứng minh: $\frac{2(2R-r)}{r}\geq 4\cdot\frac{p^2-8Rr+r^2}{4Rr}$

$\Leftrightarrow 2R(2R-r)\geq p^2-8Rr+r^2 \Leftrightarrow 4R^2+6Rr-r^2\geq p^2$ (đúng theo định lý 3)

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

Bài 2. [Iran 1996] Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{(a+b)^2}+\frac{1}{(b+c)^2}+\frac{1}{(c+a)^2}\geq\frac{9}{4(ab+bc+ca)}$$

Chứng minh

Áp dụng công thức 1 và 11 trong phần IV ta cần phải chứng minh:

$$\frac{\left(p^2+4Rr+r^2\right)^2}{16R^2r^2p^2}-\frac{1}{Rr}\geq\frac{9}{4(4Rr+r^2)}\Leftrightarrow\frac{\left(p^2+4Rr+r^2\right)^2}{16R^2rp^2}-\frac{1}{R}\geq\frac{9}{4(4R+r)}$$

Xét $A(p)=\frac{\left(p^2+4Rr+r^2\right)^2}{16R^2rp^2}$. Dễ thấy $A'(p)>0$ nên A đồng biến theo p.

Ta có $p^2-16Rr+5r^2=9.IG^2\geq 0\Rightarrow p^2\geq 16Rr-5r^2$. Do đó

$$A(p)\geq\frac{\left(16Rr-5r^2+4Rr+r^2\right)^2}{16R^2r\left(16Rr-5r^2\right)}=\frac{\left(20Rr-4r^2\right)^2}{16R^2r^2(16R-5r)}=\frac{(5R-r)^2}{R^2(16R-5r)}=\frac{25R^2-10Rr+r^2}{16R^3-5R^2r}$$

Cuối cùng ta sẽ chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{25R^2-10Rr+r^2}{16R^3-5R^2r}-\frac{1}{R}\geq\frac{9}{4(4R+r)}\Leftrightarrow\frac{9R^2-5Rr+r^2}{16R^3-5R^2r}\geq\frac{9}{4(4R+r)}$$

$$\Leftrightarrow 4(4R+r)\left(9R^2-5Rr+r^2\right)\geq 9\left(16R^3-5R^2r\right)$$

$$\Leftrightarrow 4\left(36R^3+9R^2r-20R^2r-5Rr^2+4Rr^2+r^3\right)\geq 9\left(16R^3-5R^2r\right)$$

$$\Leftrightarrow 4\left(36R^3-11R^2r-Rr^2+r^3\right)-9\left(16R^3-5R^2r\right)\geq 0\Leftrightarrow r(R-2r)^2\geq 0$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}r=0\\R=2r\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=b,c=0\ ;\ b=c,a=0\\c=a,b=0\ ;\ a=b=c\end{array}\right.$

Bài 3. Chứng minh rằng: $a^2+b^2+c^2+2abc+1\geq 2(ab+bc+ca)$, $\forall a, b, c\geq 0$

Chứng minh

Nếu trong 3 số a, b, c có 2 số bằng 0 thì ta có ngay (đpcm).

Nếu trong 3 số có 2 số $\neq 0$ thì áp dụng các công thức 1 và 14 ta cần chứng minh:

$$p^2 - 8Rr - 2r^2 + 2pr^2 + 1 \geq 2(4Rr + r^2) \Leftrightarrow p^2 + 2pr^2 + 1 \geq 16Rr + 4r^2$$

Ta có: $2pr^2 + 1 = pr^2 + pr + 1 \geq 3 \cdot \sqrt[3]{p^2 r^4} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{27r^2 . r^4} = 9r^2$ (1), $p^2 \geq 16Rr - 5r^2$ (2)

Từ (1) và (2) ta có (đpcm). Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = 1$.

Bài 4. Chứng minh: $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{3abc}{a^2b + b^2c + c^2a} \geq 4 \ \forall a, b, c > 0$

Chứng minh

Đặt $\frac{a}{b} = x, \frac{b}{c} = y, \frac{c}{a} = z \Rightarrow xyz = 1 \ (x, y, z > 0)$. Bài toán trở thành:

Cho $xyz = 1$. Chứng minh rằng: $x + y + z + \frac{3}{xy + yz + zx} \geq 4$

Chuyển về p, R, r ta được bài toán: Cho $pr^2 = 1$.Chứng minh rằng: $p + \frac{3}{4Rr + r^2} \geq 4$

Ta có: $p^2 \geq 16Rr - 5r^2 \geq 3(4Rr + r^2) \geq 27r^2 \Rightarrow p^3 \geq 27pr^2 = 27 \Rightarrow p \geq 3$

$p + \frac{3}{4Rr + r^2} \geq p + \frac{9}{p^2} = 3 \cdot \frac{p}{3} + \frac{9}{p^2} \geq 4 \cdot \sqrt[4]{\frac{p}{3}} \geq 4$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$.

Bài 5. Cho x, y, z là độ dài 3 cạnh tam giác và k là một số thực $\geq 2,6$.

Chứng minh rằng: $\frac{x}{\sqrt{x^2 + kyz}} + \frac{y}{\sqrt{y^2 + kzx}} + \frac{z}{\sqrt{z^2 + kxy}} \geq \frac{3}{\sqrt{1 + k}}$ (1)

Chứng minh

Theo bất đẳng thức ***Buniakowski*** ta có:

$$\left(\sum x\right)^2 \leq \left(\sum \frac{x}{\sqrt{x^2 + kyz}}\right)\left(\sum x\sqrt{x^2 + kyz}\right); \left(\sum x\sqrt{x^2 + kyz}\right)^2 \leq \left(\sum x\right)\sum\left(x^3 + kxyz\right).$$

Suy ra: $\frac{x}{\sqrt{x^2 + kyz}} + \frac{y}{\sqrt{y^2 + kzx}} + \frac{z}{\sqrt{z^2 + kxy}} \geq \frac{(x + y + z)^2}{\sqrt{x + y + z}\sqrt{x^3 + y^3 + z^3 + 3kxyz}}$ (2)

Mặt khác: $x^3 + y^3 + z^3 + 3kxyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) + 3(k + 1)xyz$
$= 2p\left(p^2 + 6Rr(k - 1) - 3r^2\right)$ (3).

Từ (2) và (3) ta thấy để chứng minh được (1) chỉ cần chứng minh:

$$\frac{2p}{\sqrt{p^2 + 6Rr(k - 1) - 3r^2}} \geq \frac{3}{\sqrt{k + 1}} \Leftrightarrow 4(k + 1)p^2 \geq 9\left[p^2 + 6Rr(k - 1) - 3r^2\right]$$

$\Leftrightarrow (4k - 5)p^2 - 54Rr(k - 1) + 27r^2$. Đặt $f(k) = (4k - 5)p^2 - 54Rr(k - 1) + 27r^2$

$\Rightarrow f'(k) = 4p^2 - 54Rr = 4\left[p^2 - (16Rr - 5r^2)\right] + 10r(R - 2r) \geq 0 \Rightarrow f(k)$ đồng biến

$\Rightarrow f(k) \geq f(2,6) = 5,4p^2 - 86,4Rr + 27r^2 = 5,4\left(p^2 - 16Rr + 5r^2\right) \geq 0$

Vậy (*) được chứng minh. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z$.

Bài 6. Cho $x, y, z > 0$. Tìm điều kiện để bất đẳng thức sau luôn đúng.

$$\sum_{cyc}\sqrt{\frac{x}{(x+y)(x+z)}} \ge \frac{4}{\sqrt{3(x+y+z)}}\left(1+\frac{xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)}\right) \ (1)$$

Chứng minh

Đặt $y+z=a, z+x=b, x+y=c$ thì a, b, c là độ dài 3 cạnh tam giác, khi đó:

$$(1) \Leftrightarrow \sum_{cyc}\sqrt{\frac{p-a}{bc}} \ge \frac{4}{\sqrt{3p}}\left(1+\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{abc}\right)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}} \ge \frac{4}{\sqrt{3}}\left(1+\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{abc}\right) \Leftrightarrow \cos\frac{A}{2} \ge \frac{4}{\sqrt{3}}\left(1+\prod\sin\frac{A}{2}\right) \ (2)$$

Điều thú vị (2) chính là một trong các bất đẳng thức của ***Jack Garfulkel***, để (2) đúng hay (1) đúng thì điều kiện cần và đủ là tam giác ABC nhọn. Không mất tính tổng quát, giả sử $a = \max\{a,b,c\}$, khi đó ΔABC nhọn $\Leftrightarrow b^2+c^2 > a^2 \Leftrightarrow$

$(x+y)^2 + (x+z)^2 > (y+z)^2$

$\Leftrightarrow x(x+y+z) > yz \Leftrightarrow x+y+z > \frac{yz}{x}$ (trong đó $x = \min\{x, y, z\}$).

Bây giờ ta sẽ chứng minh (2) đúng bằng ***GLA***.

Ta có: $\cos\frac{A}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}\right), \cos\frac{B}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{B}{2}\right), \cos\frac{C}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)$

Đặt $A' = \frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}, B' = \frac{\pi}{2}-\frac{B}{2}, C' = \frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}$. Khi đó: (2) $\Leftrightarrow \sum\sin A' \ge \frac{4}{\sqrt{3}}\left(1+\prod\cos A'\right)$ (3) trong đó A', B', C' là số đo 3 góc của 1 tam giác nhọn có $\min\{A', B', C'\} \ge \frac{\pi}{4}$

$$(3) \Leftrightarrow \frac{p}{R} \ge \frac{4}{R3}\left(1+\frac{p^2-(2R+r)^2}{4R^2}\right) \Leftrightarrow p^2 - \sqrt{3}Rp - 4Rr - r^2 \le 0$$

$$\Leftrightarrow p \le \frac{R\sqrt{3}+\sqrt{3R^2+16Rr+4r^2}}{2} \Leftrightarrow p^2 \le \frac{3R^2+8Rr+2r^2+R\sqrt{9R^2+48Rr+12r^2}}{2} \ (4)$$

Không mất tính tổng quát ta giả sử $\frac{\pi}{4} \le A' \le B' \le C' \le \frac{\pi}{2}$. Xét các khả năng sau:

Trường hợp 1: $B' \le \frac{\pi}{3}$. Áp dụng định lý 2 ta có $p^2 \le 3(R+r)^2$.

Do đó ta chỉ cần chứng minh: $6(R+r)^2 \le 3R^2 + 8Rr + 2r^2 + R\sqrt{9R^2+48Rr+12r^2}$

$\Leftrightarrow 6R^2+12Rr+6r^2 \le 3R^2+8Rr+2r^2+R\sqrt{9R^2+48Rr+12r^2}$

$\Leftrightarrow 3R^2+4Rr+4r^2 \le R\sqrt{9R^2+48Rr+12r^2}$

Ta có: $R\sqrt{9R^2+48Rr+12r^2} \ge R\sqrt{9R^2+36Rr+36r^2}=3R(R+2r)\ge 3R^2+4Rr+4r^2$

Trường hợp 2: $B'\ge\frac{\pi}{3} \Rightarrow \sin\frac{A'}{2}\sin\frac{B'}{2}\sin\frac{C'}{2}\ge\sin\frac{\pi}{8}\sin\frac{\pi}{6}\sin\frac{5\pi}{24}>0{,}116$

$\Rightarrow \frac{R}{r}=\frac{1}{4\sin\frac{A'}{2}\sin\frac{B'}{2}\sin\frac{C'}{2}}<2{,}16$. Áp dụng định lý 3 ta chỉ cần chứng minh:

$2(2R^2+10Rr-r^2)+4(R-2r)\sqrt{R(R-2r)}\le 3R^2+8Rr+2r^2+R\sqrt{9R^2+48Rr+12r^2}$

$\Leftrightarrow R^2+12Rr-4r^2+4(R-2r)\sqrt{R(R-2r)}\le R\sqrt{9R^2+48Rr+12r^2}$

$\Leftrightarrow t^2+12t-4+4(t-2)\sqrt{t(t-2)}\le t\sqrt{9t^2+48t+12}$ trong đó $t=\frac{R}{r}, t\in[2;\,2{,}16)$

$VT\le t^2+12t-4+4(t-2)\sqrt{2{,}16(2{,}16-2)}\le t^2+12t-4+2{,}4(t-2)=t^2+14{,}4t-8{,}8$

$VP\ge t\sqrt{(3{,}2t+5{,}6)^2+(t-2)(9{,}28-1{,}24t)}\ge t(3{,}2t+5{,}6)$

Mà $t(3{,}2t+5{,}6)-(t^2+14{,}4t-8{,}8)=2{,}2(t-2)^2\ge 0$, do đó VP ≥ VT.

Vậy $\sum\cos\frac{A}{2}\ge\frac{4}{\sqrt{3}}\left(1+\prod\sin\frac{A}{2}\right)$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow t=2 \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

Bài 7. Cho a,b,c là độ dài ba cạnh của một tam giác.

Chứng minh rằng: $8S^2p^2\ge\left(a^2+b^2+c^2\right)^3\cos A.\cos B.\cos C$ (1)

Chứng minh

Không mất tính tổng quát giả sử $a\ge b\ge c$. Nếu $b^2+c^2\le a^2$ thì VT ≥ 0 ≥ VP (đpcm)

Nếu $b^2+c^2>a^2$ thì đặt $a^2=m, b^2=n, c^2=p \Rightarrow m,n,p$ là độ dài 3 cạnh tam giác.

Mặt khác theo bất đẳng thức ***Holder*** ta có:

$(a^2+b^2+c^2)^3=\left(\sum\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{a^4}\right)^3\le(a+b+c)^2(a^4+b^4+c^4)$ (2)

Từ (2) và (3) suy ra để chứng minh bài toán ta chỉ cần chứng minh:

$(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)a^2b^2c^2\ge(a^4+b^4+c^4)\prod(a^2+b^2-c^2)$

$\Leftrightarrow(2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-a^4-b^4-c^4)a^2b^2c^2\ge(a^4+b^4+c^4)\prod(a^2+b^2-c^2)$

$\Leftrightarrow(2mn+2np+2pm-m^2-n^2-p^2)mnp\ge(m^2+n^2+p^2)\prod(m+n-p)$

$$\Leftrightarrow \left(16R_1r_1+4r_1^2\right)4R_1r_1p_1 \ge \left(m^2+n^2+p^2\right)8p_1r_1^2 \Leftrightarrow 8R_1^2+2R_1r_1 \ge m^2+n^2+p^2 \ (3)$$

(3) đúng theo định lý 5. Vậy (1) đúng. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

Ghi chú: R_1, r_1, p_1 lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp và nửa chu vi ΔMNP có độ dài 3 cạnh là m, n, p.

Bình luận: Xét về tính tương đương thì (1) chặt hơn bất đẳng thức $8Rr+4r^2 \ge a^2+b^2+c^2$ (*). Có nghĩa là để chứng minh trực tiếp bài toán ta cần sử dụng 1 bổ đề mạnh hơn (*). Vậy mà trong lời giải sau khi làm chặt hơn bài toán bằng việc áp dụng Holder ta lại có thể chứng minh bằng 1 bổ đề về hình thức lỏng hơn cả (*) là bất đẳng thức (3). Có được điều này là do ta đã đổi biến 1 cách khôn khéo từ a,b,c sang m,n,p. Xin giải thích kĩ hơn điều này như sau: ta biết bất đẳng thức (*) và các dạng tương tự nó xảy ra đẳng thức khi tam giác đều. Khi các biến càng gần nhau thì 2 vế càng tiến sát nhau hơn. Việc đổi biến như trên nhằm mục đích "kéo giãn" khoảng cách giữa các biến ra và vì vậy mà bài toán trở nên "lỏng hơn". Ví dụ : tam giác có các cạnh lần lượt "4, 4, 5" là một tam giác có 3 góc đều nhọn còn tam giác có cạnh là bình phương các độ dài đấy "16, 16, 25" là một tam giác tù. Đây chỉ là một mẹo nhỏ nhưng tư tưởng và tầm ứng dụng của nó là khá lớn.

Bài 8. Cho $a,b,c \ge 0$. Chứng minh rằng:

$$\sum \frac{(a+b)^2}{ab} \ge 12 + \frac{32abc(a+b+c)\sum (a-b)^2}{(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2}$$

Chứng minh

$$\sum \frac{(a+b)^2}{ab} = \frac{\sum (a+b)^2 c}{abc} = \frac{(a+b)(b+c)(c+a)+4abc}{abc} = \frac{4Rrp+4pr^2}{pr^2} = \frac{4(R+r)}{r}$$

$$VP = 12 + \frac{32p^2r^2\left[2\left(p^2-8Rr-2r^2\right)-4\left(4Rr+2r^2\right)\right]}{16p^2R^2r^2} = 12 + \frac{4\left(p^2-12Rr-3r^2\right)}{R^2}$$

Theo định lý 3 ta có $p^2 \le 2R^2+10Rr-r^2+2\sqrt{R(R-2r)}(R-2r)$

Suy ra: $VP \le 12 + \dfrac{4\left[2R^2-2Rr-4r^2+2(R-2r)\sqrt{R(R-2r)}\right]}{R^2}$

$$\le 12 + \frac{8(R-2r)\left(R-r+\sqrt{R(R-2r)}\right)}{R^2} \le 12 + \frac{16(R-2r)(R-r)}{R^2}$$

Do đó ta chỉ cần chứng minh: $\dfrac{4(R+r)}{r} \ge 12 + \dfrac{16(R-2r)(R-r)}{R^2}$

$\Leftrightarrow \dfrac{4(R-2r)}{r} \ge \dfrac{16(R-2r)(R-r)}{R^2} \Leftrightarrow 4(R-2r)^2 \ge 0$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow R=2r \Leftrightarrow a=b=c$

Bài 9. Cho $a,b,c\ge 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2}{8a^2b^2c^2}\ge\left(\frac{a+b}{b+c}+\frac{b+c}{a+b}\right)\left(\frac{b+c}{c+a}+\frac{c+a}{b+c}\right)\left(\frac{c+a}{a+b}+\frac{a+b}{c+a}\right)$$

Chứng minh

Chuyển về p,R,r ta cần chứng minh: $\dfrac{8x^2y^2z^2}{\prod(x+y-z)^2}\ge\dfrac{(x^2+y^2)(y^2+z^2)(z^2+x^2)}{x^2y^2z^2}$

Dễ thấy $VT=\dfrac{2R^2}{r^2}$; $VP=\dfrac{(x^2+y^2+z^2)\left[(xy+yz+zx)^2-2xyz(x+y+z)\right]}{x^2y^2z^2}-1$

$$=\frac{(2p^2-8Rr-2r^2)\left[(p^2+4Rr+r^2)^2-16Rrp^2\right]}{16R^2r^2p^2}-1$$

Ta có: $(p^2+4Rr+r^2)^2-16Rrp^2=p^4+2(4Rr+r^2)p^2+(4Rr+r^2)^2-16Rrp^2$

Mặt khác: $2(4Rr+r^2)p^2\le 9Rrp^2;(4Rr+r^2)^2\le\dfrac{p^2}{3}.\dfrac{9Rr}{2}=\dfrac{3Rrp^2}{2}$

$\Rightarrow(p^2+4Rr+r^2)^2-16Rrp^2\le p^2\left(p^2-\dfrac{7Rr}{2}\right)$

Lại có $p^2\le 4R^2+4Rr+3r^2\le 4R^2+\dfrac{7Rr}{2}$. Do đó $x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2\le 4R^2p^2$

Mà $x^2+y^2+z^2\le 8R^2+4r^2$. Vậy $VP\le\dfrac{(8R^2+4r^2)4R^2p^2}{16R^2r^2p^2}-1=\dfrac{2R^2}{r^2}=VT$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

Bài 10. Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt[3]{\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+2}+\frac{3}{8}\cdot\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}\ge\frac{19}{8}\quad(*)$$

Chứng minh

Áp dụng các công thức 1 và 3 trong IV ta cần phải chứng minh:

$\sqrt[3]{\dfrac{2(2R-r)}{r}+2}+\dfrac{3}{8}\cdot\dfrac{4Rr+r^2}{p^2-8Rr-2r^2}\ge\dfrac{19}{8}$ (1). Theo định lý 5 ta có:

$p^2\le 4R^2+4Rr+3r^2$. Do đó để chứng minh (1) ta chỉ cần chứng minh:

$$\sqrt[3]{\frac{4R}{r}}+\frac{3}{8}\cdot\frac{4Rr+r^2}{(4R^2+4Rr+3r^2)-8Rr-2r^2}\ge\frac{19}{8}\Leftrightarrow\sqrt[3]{\frac{4R}{r}}-2\ge\frac{3}{8}\left(1-\frac{4Rr+r^2}{4R^2-4Rr+r^2}\right)$$

$$\Leftrightarrow\frac{4(R-2r)}{r\left[\sqrt[3]{\left(\frac{4R}{r}\right)^2}+2\cdot\sqrt[3]{\frac{4R}{r}}+4\right]}\ge\frac{3}{8}\cdot\frac{4R(R-2r)}{(2R-r)^2}\Leftrightarrow 8(2R-r)^2\ge 3Rr\left[\sqrt[3]{\left(\frac{4R}{r}\right)^2}+2\cdot\sqrt[3]{\frac{4R}{r}}+4\right]\quad(2)$$

Ta nhận thấy: $\sqrt[3]{\left(\frac{4R}{r}\right)^2}+2\cdot\sqrt[3]{\frac{4R}{r}}+4\le 3\cdot\sqrt[3]{\left(\frac{4R}{r}\right)^2}\le\frac{6R}{r}$

Suy ra: $VP(2)\le 3Rr\cdot\frac{6R}{r}=18R^2=8\left(\frac{3R}{2}\right)^2\le 8(2R-r)^2=VT(2)$

Do đó (2) được chứng minh, tức là (*) đúng. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

Bài 11. Cho $a,b,c>0$. Chứng minh :

$$8(a+b+c)^2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+64a^2b^2c^2$$
$$\ge 6(a+b+c)abc\left[(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2\right]+(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2$$

Chứng minh

Áp dụng các công thức 1, 2, 5 trong IV ta cần phải chứng minh:

$$8p^2\left[(4Rr+r^2)^2-2p^2r^2\right]+64p^2r^4\ge 6p^2r^2(2p^2-8Rr-2r^2)+16p^2R^2r^2$$

$\Leftrightarrow 2(4R+r)^2-4p^2+16r^2\ge 3(p^2-4Rr-r^2)+4R^2 \Leftrightarrow 4R^2+4Rr+3r^2\ge p^2$ (đúng)

Bài 12. Cho a, b, $c>0$.

Chứng minh: $\frac{8(a^3+b^3+c^3)}{(a+b)(b+c)(c+a)}\ge\frac{4(a^2+b^2+c^2)}{ab+bc+ca}-1$

Chứng minh

Áp dụng các công thức 1, 2 và 4 trong IV ta cần chứng minh:

$$\frac{8p(p^2-12Rr)}{4pRr}\ge\frac{4(p^2-8Rr-2r^2)}{4Rr+r^2}-1\Leftrightarrow\frac{2p^2}{Rr}-24\ge\frac{4p^2}{4Rr+r^2}-9$$

$$\Leftrightarrow\frac{2p^2}{Rr}-\frac{4p^2}{4Rr+r^2}\ge 15\Leftrightarrow p^2\ge\frac{15Rr(4R+r)}{2(2R+r)}.$$

Ta có $p^2\ge 16Rr-5r^2$ và $16Rr-5r^2\ge\frac{15Rr(4R+r)}{2(2R+r)}\Leftrightarrow 4R^2\ge 3Rr+10r^2$ (đúng)

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

Bài 13. Cho a, b, $c>0$.

Chứng minh: $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+\frac{abc}{2(a^3+b^3+c^3)}\ge\frac{5}{3}$

Chứng minh

Áp dụng công thức 2, 4, 8 ta cần chứng minh: $\frac{p^2-8Rr+r^2}{4Rr}+\frac{pr^2}{2p(p^2-12Rr)}\ge\frac{5}{3}$.

$$\Leftrightarrow\frac{p^2-8Rr+r^2}{4Rr}-\frac{3}{2}\ge\frac{1}{6}-\frac{r^2}{2(p^2-12Rr)}\Leftrightarrow\frac{p^2-14Rr+r^2}{4Rr}\ge\frac{p^2-12Rr-3r^2}{6(p^2-12Rr)}$$

$\Leftrightarrow 3(p^2-14Rr+r^2)(p^2-12Rr)\ge 2Rr(p^2-12Rr-3r^2)$ (*). Do $p^2\ge 16Rr-5r^2$ nên

$$\begin{cases} 2\left(p^2-14Rr+r^2\right)=\left(p^2-12Rr-3r^2\right)+\left(p^2-16Rr+5r^2\right)\geq p^2-12Rr-3r^2 \quad (1) \\ 3\left(p^2-12Rr\right)\geq 3\left(4Rr-5r^2\right)=4Rr+r\left(8R-15r\right)\geq 4Rr \quad (2) \end{cases}$$

Nhân vế theo vế của (1) và (2) ta được (*) tức là bài toán được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

Bài 14. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+9\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}}\geq 15\,(1)$$

Chứng minh

Áp dụng công thức 1 và 3 ta cần chứng minh: $\frac{2(2R-r)}{r}+9\sqrt{\frac{4Rr+r^2}{p^2-8Rr-2r^2}}\geq 15 \quad (*)$

Theo định lý 5 ta có: $p^2\leq 4R^2+4Rr+3r^2$. Do đó để chứng minh (*) ta chỉ cần chứng minh: $\frac{4R-2r}{r}+9\cdot\frac{\sqrt{4Rr+r^2}}{2R-r}\geq 15\Leftrightarrow\frac{4R-2r}{r}-6\geq 9\left(1-\frac{\sqrt{4Rr+r^2}}{2R-r}\right)$

$$\Leftrightarrow\frac{4(R-2r)}{r}\geq 9\cdot\frac{4R(R-2r)}{(2R-r)\left(2R-r+\sqrt{4Rr+r^2}\right)}\Leftrightarrow(2R-r)\left(2R-r+\sqrt{4Rr+r^2}\right)\geq 9Rr$$

Ta có: $VT\geq(2R-r)\left(2R-r+\sqrt{9r^2}\right)=4R^2+2Rr-2r^2\geq 9Rr=VP$

Vậy (1) được chứng minh. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

Bài 15. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}+\frac{162abc}{(a+b+c)^3}\geq 9$$

Chứng minh

Áp dụng công thức 2 và 3 ta cần chứng minh:

$$\frac{p\left(p^2-12Rr\right)}{pr^2}+\frac{162pr^2}{p^3}\geq 9\Leftrightarrow\frac{p^2-12Rr}{r^2}+\frac{162r^2}{p^2}\geq 9$$

Đặt $f(p)=\frac{p^2-12Rr}{r^2}+\frac{162r^2}{p^2}\Rightarrow f'(p)=\frac{2p}{r^2}-\frac{324r^2}{p^3}=\frac{2\left(p^4-162r^4\right)}{p^3r^2}\geq 0$

Do đó $f(p)$ đồng biến theo p tức là $f(p)\geq f\left(\sqrt{16Rr-5r^2}\right)$. Ta sẽ chứng minh:

$$\frac{16Rr-5r^2-12Rr}{r^2}+\frac{162r^2}{16Rr-5r^2}\geq 9\Leftrightarrow\frac{4R-5r}{r}-3\geq 6-\frac{162r}{16R-5r}$$

$$\Leftrightarrow\frac{4(R-2r)}{r}\geq 6\cdot\frac{16(R-2r)}{16R-5r}\Leftrightarrow 16R-5r\geq 24r\Leftrightarrow 16R\geq 29r \text{ (đúng)}$$

Vậy bài toán được chứng minh. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

Bài 16. Chứng minh rằng với mọi a, b, c dương ta có:

$$\frac{abc(a+b+c)}{a^4+b^4+c^4}+\frac{12(a^3+b^3+c^3)}{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)}\ge 5 \ (*)$$

Chứng minh

Áp dụng các công thức 1, 2, 4 và 5 ta cần chứng minh:

$$\frac{p^2r^2}{p^4-16Rrp^2+2(4Rr+r^2)^2}+\frac{12p(p^2-12Rr)}{p(p^2-8Rr-2r^2)}\ge 5$$

$$\Leftrightarrow \frac{12(p^2-12Rr)}{p^2-8Rr-2r^2}-4\ge 1-\frac{p^2r^2}{p^4-16Rrp^2+2(4Rr+r^2)^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4(2p^2-28Rr+2r^2)}{p^2-8Rr-2r^2}\ge \frac{p^4-(16Rr+r^2)p^2+2(4Rr+r^2)^2}{p^4-16Rrp^2+2(4Rr+r^2)^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{8(p^2-14Rr+r^2)}{p^2-8Rr-2r^2}-\frac{p^4-(16Rr+r^2)p^2+2(4Rr+r^2)^2}{p^4-16Rrp^2+2(4Rr+r^2)^2}\ge 0 \ (1)$$

Đặt VT của (1) là $f(p)$. Ta có $f'(p)\ge 0$, do đó $f(p)\ge f\left(\sqrt{16Rr-5r^2}\right)$

Mà $f\left(\sqrt{16Rr-5r^2}\right)=\frac{8(2Rr-4r^2)}{8Rr-7r^2}-\frac{2(4R+r)^2-6(16Rr-5r^2)}{2(4R+r)^2-5(16Rr-5r^2)}$

$$=\frac{16(R-2r)}{8R-7r}-\frac{16(R-2r)(2R-r)}{32R^2-64Rr+27r^2}=\frac{32(R-2r)^2(8R-5r)}{(8R-7r)(32R^2-64Rr+27r^2)}\ge 0.$$

Vậy (*) được chứng minh. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

Bài 17. Cho $a, b, c>0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}\ge\frac{7}{2}\cdot\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}+\frac{5}{6}\cdot\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}} \ (*)$$

Chứng minh

Áp dụng công thức 1, 3 và 6 ta cần chứng minh: $\frac{4R-2r}{r}\ge\frac{7}{2}\cdot\frac{p^2-8Rr-2r^2}{4Rr+r^2}+\frac{5}{6}\cdot\sqrt[3]{\frac{p^2}{r^2}}$

$$\Leftrightarrow 6(4R-2r)\ge 21\cdot\frac{4R^2-4Rr+r^2}{4R+r}+5\left(\sqrt[3]{(4R^2+4Rr+3r^2)r}-3r\right)$$

$$\Leftrightarrow 24(R-2r)\ge 21\cdot\frac{4R(R-2r)}{4R+r}+5\cdot\frac{4(R-2r)(R+3r)}{A^2+3rA+9r^2} \text{ (trong đó } A=\sqrt[3]{(4R^2+4Rr+3r^2)r}\text{)}$$

$$\Leftrightarrow 6(4R+r)\ge 21R+\frac{5r(R+3r)(4R+r)}{A^2+3rA+9r^2}\Leftrightarrow 3(R+2r)(A^2+3rA+9r^2)\ge 5r(R+3r)(4R+r)$$

Ta có: $A^2+3rA\ge 2\sqrt{A^3 3r}=2\sqrt{3r^2(4R^2+4Rr+3r^2)}$

Suy ra: $3(A^2+3rA)\ge 2r\sqrt{27(4R^2+4Rr+3r^2)}\ge 2r(10R+7r)$

Do đó trong (2) thì $VT\ge r(R+2r)(20R+41r)\ge VP$

Vậy (*) được chứng minh. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

Bài 18. Cho $a, b, c>0$. Chứng minh rằng:

$$2(ab+bc+ca)\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)$$

$$\overset{(1)}{\le}\frac{1}{2}(ab+bc+ca)\left(\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}\right)\overset{(2)}{\le}(a+b+c)\left(\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}\right)$$

$$\overset{(3)}{\le}(ab+bc+ca)\left[\left(\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}\right)-2\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)\right]$$

Chứng minh

Theo bài 1 thì (1) đúng. Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức (2) và (3).
Áp dụng các công thức 1, 3, 8 và 12 ta cần chứng minh:

$$\frac{1}{2}(4Rr+r^2)\frac{4R-2r}{r}\overset{(2)}{\le}p\cdot\frac{(4R+r)^2-2p^2}{p}\overset{(3)}{\le}r(4R+r)\left(\frac{4R-2r}{r}-2\cdot\frac{p^2-8Rr+r^2}{4Rr}\right)$$

$(2)\Leftrightarrow(4R+r)(2R-r)\le(4R+r)^2-2p^2\Leftrightarrow 2p^2+8R^2+2Rr-4Rr-r^2\le 16R^2+8Rr+r^2$

$\Leftrightarrow p^2\le 4R^2+5Rr+r^2$ (đúng theo định lý 3)

$$(3)\Leftrightarrow(4R+r)^2-2p^2\le(4R+r)(4R-2r)-\frac{(4R+r)(p^2-8Rr+r^2)}{2R}$$

$$\Leftrightarrow 3r(4R+r)-2p^2+2(p^2-8Rr+r^2)\le-\frac{r(p^2-8Rr+r^2)}{2R}\Leftrightarrow 4R-5r\ge\frac{p^2-8Rr+r^2}{2R}$$

$\Leftrightarrow p^2-8Rr+r^2\le 8R^2-10Rr\Leftrightarrow p^2\le 8R^2-2Rr-r^2$ (đúng theo định lý 3)

Đẳng thức xảy ra trong 3 bất đẳng thức (1), (2) và (3) khi và chỉ khi $a=b=c$.

Bài 19. Cho $a, b, c\ge 0$. Chứng minh rằng :

$$\frac{a}{a^2+2bc}+\frac{b}{b^2+2ca}+\frac{c}{c^2+2ab}\le\frac{a+b+c}{ab+bc+ca}$$

Chứng minh

Dễ thấy $VP=\dfrac{p}{4Rr+r^2}$. Bây giờ ta sẽ biến đổi vế trái về biểu thức của p, R, r

Ta có: $VT=\dfrac{\sum\left[a(b^2+2ca)(c^2+2ab)\right]}{(a^2+2bc)(b^2+2ca)(c^2+2ab)}$

$$=\frac{2(a+b+c)(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+4abc(a^2+b^2+c^2)-abc(ab+bc+ca)}{9a^2b^2c^2+4abc(a^3+b^3+c^3)+2(a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3)}$$

Áp dụng các đẳng thức 1, 4, 13, 14 ở phần IV ta được:

$$VT=\frac{2p\left[(4Rr+r^2)^2-2p^2r^2\right]+4pr^2\left(p^2-8Rr-2r^2\right)-pr^3(4R+r)}{9p^2r^4+4p^2r^2\left(p^2-12Rr\right)+2r^3\left[(4R+r)^3-12p^2R\right]}$$

$$=\frac{2pr^2(4R+r)^2-4p^3r^2+4p^3r^2-8pr^3(4R+r)-pr^3(4R+r)}{9p^2r^4+4p^4r^2-48Rr^3p^2+2r^3(4R+r)^3-24Rp^2r^3}$$

$$=\frac{2pr^2(4R+r)^2-9pr^3(4R+r)}{9p^2r^4+4p^4r^2+2r^3(4R+r)^3-72Rp^2r^3}=\frac{p\left[2(4R+r)^2-9r(4R+r)\right]}{9p^2r^2+4p^4+2r(4R+r)^3-72Rrp^2}$$

Ta cần chứng minh: $VT\le\dfrac{p}{4Rr+r^2}\Leftrightarrow\dfrac{2(4R+r)^2-9r(4R+r)}{9p^2r^2+4p^4+2r(4R+r)^3-72Rrp^2}\le\dfrac{1}{4Rr+r^2}$

Đặt $p^2=t$ và $f(t)=\dfrac{1}{9tr^2+4t^2+2r(4R+r)^3-72Rrt}$

$$f'(t)=-\frac{8t+9r^2-72Rr}{\left[9tr^2+4t^2+2r(4R+r)^3-72Rrt\right]^2}<0\ \ (\text{do } t\ge16Rr-5r^2\ge9Rr)$$

Do đó $f(t)$ nghịch biến theo t tức là $f(t)\le f\left(16Rr-5r^2\right)$. Suy ra ta chỉ cần chứng minh: $\dfrac{2(4R+r)^2-9r(4R+r)}{9\left(16Rr-5r^2\right)r^2+4\left(16Rr-5r^2\right)^2+2r(4R+r)^3-72Rr\left(16Rr-5r^2\right)}\le\dfrac{1}{4Rr+r^2}$

$$\Leftrightarrow2(4R+r)^3-9r(4R+r)^2\le2(4R+r)^3+4r(16R-5r)^2+9r^2(16R-5r)-72Rr(16R-5r)$$

$$\Leftrightarrow4(16R-5r)^2+9r(16R-5r)+9(4R+r)^2-72R(16R-5r)\ge0$$

$$\Leftrightarrow4\left(256R^2-160Rr+25r^2\right)+144Rr-45r^2+9\left(16R^2+8Rr+r^2\right)-1152R^2+360Rr\ge0$$

$$\Leftrightarrow16R^2-64Rr+64r^2\ge0\Leftrightarrow16(R-2r)^2\ge0$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}R=2r\\ \left\{\begin{array}{l}p^2=16Rr-5r^2\\ r=0\end{array}\right.\end{array}\right.\Leftrightarrow I\equiv G\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=b=c\\ a=b,c=0\\ b=c,a=0\\ c=a,b=0\end{array}\right.$

Bài 20. Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3+2abc}{b+c}+\frac{b^3+2abc}{c+a}+\frac{c^3+2abc}{a+b}\ge\frac{(a+b+c)^2}{2}\ (1)$$

Chứng minh

$$(1)\Leftrightarrow\left(a^3+b^3+c^3+2abc\right)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)-\sum\frac{a^3+b^3}{a+b}\ge\frac{(a+b+c)^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow\left(a^3+b^3+c^3+2abc\right)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)\ge\frac{5}{2}\left(a^2+b^2+c^2\right)$$

Áp dụng các đẳng thức 1, 2, 3, 10 phần IV ta cần chứng minh:

$$\left[p\left(p^2-12Rr\right)+2pr^2\right]\cdot\frac{p^2+4Rr+r^2}{4Rrp}\ge\frac{5}{2}\left(p^2-8Rr-2r^2\right)$$

$$\Leftrightarrow\frac{\left(p^2-12Rr+2r^2\right)\left(p^2+4Rr+r^2\right)}{4Rr}\ge\frac{5}{2}\left(p^2-8Rr-2r^2\right)\ (*).$$

Đặt $p^2=t$ và $f(t)=VT-VP$. Ta có: $f'(t)=\frac{t+4Rr+r^2+t-12Rr+2r^2}{4Rr}-\frac{5}{2}$

$$=\frac{2t-8Rr+3r^2}{4Rr}-\frac{5}{2}=\frac{2t-18Rr+3r^2}{4Rr}\ge 0\ (\text{do } t\ge 16Rr-5r^2)$$

$\Rightarrow f(t)$ đồng biến theo p. Để chứng minh (*) ta sẽ thay $p^2=16Rr-5r^2$ vào trong biểu thức $p^2+4Rr+r^2$ và thay $p^2=16Rr-5r^2+\frac{r^2(R-2r)}{R}$ vào trong các biểu thức $p^2-12Rr+2r^2$, $p^2-8Rr-2r^2$ ta nhận được bất đẳng thức cần chứng minh:

$$\frac{\left(16Rr-5r^2+\frac{r^2(R-2r)}{R}-12Rr+2r^2\right)\left(16Rr-5r^2+4Rr+r^2\right)}{4Rr}\ge\frac{5}{2}\left(16Rr-5r^2+\frac{r^2(R-2r)}{R}-8Rr-2r^2\right)$$

$$\Leftrightarrow\frac{\left(4Rr-3r^2+\frac{r^2(R-2r)}{R}\right)\left(20Rr-4r^2\right)}{4Rr}\ge\frac{5}{2}\left(8Rr-7r^2+\frac{r^2(R-2r)}{R}\right)$$

$$\Leftrightarrow\frac{\left(4R-3r+\frac{r(R-2r)}{R}\right)(5R-r)}{R}\ge\frac{5}{2}\left(8R-7r+\frac{r(R-2r)}{R}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2\left(20R^2-19Rr+3r^2\right)+\frac{2r(R-2r)(5R-r)}{R}\ge 40R^2-35Rr+5r(R-2r)$$

$$\Leftrightarrow\frac{2r(R-2r)(5R-r)}{R}\ge 8r(R-2r)\Leftrightarrow 5R-r\ge 4R\Leftrightarrow R\ge r\ (\text{đúng})$$

Vậy (1) đúng. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}R=2r\\ \begin{cases}I\equiv G\\ r=0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=b=c\\ a=b,c=0\\ b=c,a=0\\ c=a,b=0\end{array}\right.$

Bài 21. Cho $a, b, c>0$ và $a+b+c=1$ Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a+bc}+\frac{1}{b+ca}+\frac{1}{c+ab}\le\frac{9}{4(ab+bc+ca)}\ (*)$$

Chứng minh

Biến đổi vế trái. Do $a+b+c=1$ nên $p=1$.

$$\frac{1}{a+bc}+\frac{1}{b+ca}+\frac{1}{c+ab}=\frac{\sum(a+bc)(b+ca)}{(a+bc)(b+ca)(c+ab)}$$

$$=\frac{(ab+bc+ca)+\left[a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)\right]+abc(a+b+c)}{abc+\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)+abc\left(a^2+b^2+c^2\right)+a^2b^2c^2}$$

$$=\frac{4Rr+r^2+(a+b)(b+c)(c+a)-2abc+p^2r^2}{pr^2+r^2(4R+r)^2-2p^2r^2+pr^2\left(p^2-8Rr-2r^2\right)+p^2r^4}$$

$$=\frac{4Rr+r^2+4Rr-2r^2+r^2}{r^2+r^2(4R+r)^2-2r^2+r^2(1-8Rr-2r^2)+r^4}=\frac{8Rr}{r^2(4R+r)^2-r^3(8R+2r)+r^4}$$

$=\dfrac{8R}{r(4R+r)^2-r^2(8R+2r)+r^3}=\dfrac{8R}{16R^2r}=\dfrac{1}{2Rr}$. Vậy ta cần phải chứng minh:

$\dfrac{1}{2Rr}\le\dfrac{9}{4(4Rr+r^2)}\Leftrightarrow 2r\le R$ (đúng) $\Rightarrow$ (*) đúng. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

Bài 22. Cho $a,b,c>0; ab+bc+ca=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{(a+b+c)^3}{abc}\ge 25(a^2+b^2+c^2)+2\ (*)$$

Chứng minh

Trước tiên dựa vào điều kiện ta đi tìm bài toán gốc của (*)

$$(*)\Leftrightarrow\frac{(a+b+c)^3}{abc}\ge 24(a^2+b^2+c^2)+(a+b+c)^2$$

$$\Leftrightarrow\frac{(a+b+c)(ab+bc+ca)}{abc}\ge\frac{24(a^2+b^2+c^2)}{(a+b+c)^2}+1\Leftrightarrow\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}\ge\frac{24(a^2+b^2+c^2)}{(a+b+c)^2}\ (1)$$

Bài toán đưa về $\dfrac{4Rrp}{pr^2}\ge\dfrac{24(p^2-8Rr-2r^2)}{p^2}\Leftrightarrow\dfrac{R}{r}\ge\dfrac{6(p^2-8Rr-2r^2)}{p^2}$ (**)

Ta thấy ngay VP đồng biến theo p nên vấn đề bây giờ là chọn cận trên $p^2\le 4R^2+4Rr+3r^2$ hay $p^2\le 2R^2+10Rr-r^2+2(R-2r)\sqrt{R(R-2r)}$ để giải quyết bài toán. Do (1) trở thành đẳng thức khi $a=b=c$ hoặc $a=2b=2c$ (và các hoán vị) mà $p^2\le 4R^2+4Rr+3r^2$ chỉ xảy ra đẳng thức khi tam giác là tam giác đều nên ta sẽ sử dụng đánh giá $p^2\le 2R^2+10Rr-r^2+2(R-2r)\sqrt{R(R-2r)}$.

Khi đó (**) sẽ được chứng minh nếu ta chứng minh được:

$$\frac{R}{r}\ge\frac{6\left[\left(2R^2+10Rr+2(R-2r)\sqrt{R(R-2r)}-r^2\right)-8Rr-3r^2\right]}{2R^2+10Rr-r^2+2(R-2r)\sqrt{R(R-2r)}}$$

$$\Leftrightarrow 2R^3+10R^2r-Rr^2+2R(R-2r)\sqrt{R(R-2r)}\ge 12R^2r+12Rr^2-18r^3+12r(R-2r)\sqrt{R(R-2r)}$$

$$\Leftrightarrow 2R^3-2R^2r-13Rr^2+18r^3\ge 2(6r-R)(R-2r)\sqrt{R(R-2r)}$$

$$\Leftrightarrow(R-2r)(2R^2+2Rr-9r^2)\ge 2(6r-R)(R-2r)\sqrt{R(R-2r)}$$

$$\Leftrightarrow 2R^2+2Rr-9r^2\ge 2(6r-R)\sqrt{R(R-2r)}\ (3)$$

Nếu $6r\le R$ thì ta có ngay VT $\ge 0\ge$ VP.

Nếu $6r>R$ thì (3) $\Leftrightarrow(2R^2+2Rr-9r^2)^2\ge(4R^2-48Rr+144r^2)(R-2r)R$

$$\Leftrightarrow 4R^4+4R^2r^2+81r^4+8R^3r-36Rr^3-36R^2r^2\ge(4R^3-48R^2r+144Rr^2-8R^2r+96Rr^2-288r^3)R$$

$$\Leftrightarrow 4R^4+8R^3r-32R^2r^2-36Rr^3+81r^4\ge(4R^3-56R^2r+240Rr^2-288r^3)R$$

$\Leftrightarrow 64R^3r - 272R^2r^2 + 252Rr^3 + 81r^4 \geq 0 \Leftrightarrow 64R^3 - 272R^2r + 252Rr^2 + 81r^3 \geq 0$

$\Leftrightarrow 64R\left(R - \frac{9}{4}r\right)^2 + 16r\left(R - \frac{9}{4}r\right)^2 \geq 0$ (đúng). Vậy $\frac{(a+b+c)^3}{abc} \geq 25\left(a^2 + b^2 + c^2\right) + 2$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ $a = b = c$ hoặc $a = 2b = 2c$ và các hoán vị

Bình luận: Trường hợp đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$ có thể dễ nhận thấy ngay; nhưng còn trường hợp đẳng thức xảy ra khi $a = 2b = 2c$ thì ta tìm ra như sau. Theo lời giải bằng GLA thì đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi:

$$\left[\begin{array}{l} R = 2r \\ \begin{cases} p^2 = 2R^2 + 10Rr - r^2 + 2(R-2r)\sqrt{R(R-2r)} \\ R = \frac{9}{4}r \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = b = c \\ \begin{cases} \text{O nằm giữa I và K} \\ R = \frac{9}{4}r \end{cases} \end{array}\right.$$

Điều kiện O nằm giữa I và K cho ta biết tam giác đó phải là tam giác cân còn điều kiện $R = \frac{9}{4}r$ sẽ giúp ta tìm ra được một đẳng thức nữa là $a = 2b = 2c$. Chú ý rằng ở đây K là điểm sao cho $\overline{IK} = 3\overline{IG}$).

Bài 23. Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{5a+1} + \frac{b^2}{5b+1} + \frac{c^2}{5c+1} \leq \frac{1}{8\sqrt{3(ab+bc+ca)}}$$

Chứng minh

$$VT = \frac{\sum a^2(5b+1)(5c+1)}{(5a+1)(5b+1)(5c+1)} = \frac{25abc(a+b+c) + 5\sum\left[a^2(b+c)\right] + \left(a^2+b^2+c^2\right)}{125abc + 25(ab+bc+ca) + 5(a+b+c) + 1}$$

$$= \frac{25p^2r^2 + 5\left(4Rrp - 2pr^2\right) + p^2 - 8Rr - 2r^2}{125pr^2 + 25\left(4Rr + r^2\right) + 5p + 1}$$

$$= \frac{25r^2 + 5\left(4Rr - 2r^2\right) + 1 - 8Rr - 2r^2}{125r^2 + 25\left(4Rr + r^2\right) + 5 + 1} = \frac{13r^2 + 12Rr + 1}{150r^2 + 100Rr + 6} = \frac{13r^2 + 12Rr + p^2}{150r^2 + 100Rr + 6p^2}$$

Ta cần chứng minh: $\frac{13r^2 + 12Rr + p^2}{150r^2 + 100Rr + 6p^2} \leq \frac{1}{8\sqrt{3(ab+bc+ca)}} = \frac{p}{8\sqrt{3\left(4Rr + r^2\right)}}$

Xét $f(p) = VP - VT$, suy ra

$$f'(p) = \frac{1}{8\sqrt{3\left(4Rr + r^2\right)}} - \frac{2p\left(150r^2 + 100Rr + 6p^2\right) - 12p\left(13r^2 + 12Rr + p^2\right)}{\left(150r^2 + 100Rr + 6p^2\right)^2}$$

$= \frac{1}{8\sqrt{3r(4R+r)}} - \frac{p\left(36r^2 + 14Rr\right)}{\left(75r^2 + 50Rr + 3p^2\right)^2}$. Xét $g(p) = \frac{p\left(36r^2 + 14Rr\right)}{\left(75r^2 + 50Rr + 3p^2\right)^2}$

$$\Rightarrow g'(p) = \frac{\left(36r^2 + 14Rr\right)\left(75r^2 + 50Rr - 9p^2\right)}{\left(75r^2 + 50Rr + 3p^2\right)^3}.$$

Do $p^2 \ge 16Rr - 5r^2$ và $R \ge 2r$ nên $g'(p) \le 0 \Rightarrow g(p)$ nghịch biến theo p, tức là:

$$f'(p) \ge \frac{1}{8\sqrt{3r(4R+r)}} - \frac{\sqrt{(16R-5r)r}\left(36r^2+14Rr\right)}{\left[75r^2+50Rr+3\left(16Rr-5r^2\right)\right]^2}$$

$$= \frac{1}{8\sqrt{3r(4R+r)}} - \frac{\sqrt{(16R-5r)r}\left(36r^2+14Rr\right)}{\left(60r^2+98Rr\right)^2}$$

Nhận thấy $4\left(14Rr+36r^2\right) = 56Rr + 144r^2 \le 98Rr + 60r^2$

$$2\sqrt{3r(4R+r)}\sqrt{(16R-5r)r} \le 2r(16R-5r) \le 98Rr + 60r^2$$

Từ 2 điều trên ra thấy ngay $f'(p) \ge 0 \Rightarrow f(p)$ đồng biến theo p.

Vậy ta sẽ chứng minh được $f(p) \ge 0$ nếu chứng minh được $f\left(\sqrt{(16R-5r)r}\right) \ge 0$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{16R-5r}}{8\sqrt{3(4R+r)}} \ge \frac{13r^2+12Rr+(16R-5r)r}{150r^2+100Rr+6(16R-5r)r} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{16R-5r}{3(4R+r)}} \ge \frac{56R+16r}{49R+30r}$$

$$\Leftrightarrow \frac{16R-5r}{3(4R+r)} - 1 \ge \left(\frac{56R+16r}{49R+30r}\right)^2 - 1 \Leftrightarrow \frac{4(R-2r)}{3(4R+r)} \ge \frac{(7R-14r)(105R+46r)}{(49R+30r)^2}$$

$$\Leftrightarrow 4(49R+30r)^2 \ge 21(105R+46r)(4R+r) \Leftrightarrow 784R^2 + 5571Rr + 2604r^2 \ge 0 \text{ (đúng)}$$

Vậy bài toán được chứng minh. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = \frac{1}{3}$

Bài 24. Cho $a, b, c \ge 0$. Chứng minh rằng: $\sqrt{\dfrac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}} + \dfrac{16}{5}\cdot\dfrac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \ge \dfrac{7}{5}$

Chứng minh

Áp dụng các công thức 1 và 14 phần IV ta cần chứng minh:

$$\sqrt{\frac{p^2-8Rr-2r^2}{4Rr+r^2}} + \frac{4r}{5R} \ge \frac{7}{5} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{p^2-8Rr-2r^2}{4Rr+r^2}} - 1 \ge \frac{2}{5} - \frac{4r}{5R} \quad (1)$$

Theo định lý 6 ta có: $p^2 \ge 16Rr - 5r^2 + \dfrac{r^2(R-2r)}{R}$ nên:

$$\sqrt{\frac{p^2-8Rr-2r^2}{4Rr+r^2}} \ge \sqrt{\frac{8R-7r+\frac{r(R-2r)}{R}}{4R+r}} = \sqrt{\frac{2(4R+r)(R-r)}{R(4R+r)}} = \frac{\sqrt{2R(R-r)}}{R}$$

$$\Rightarrow VT \ge \frac{\sqrt{2R(R-r)}-R}{R} = \frac{2R(R-r)-R^2}{R\left[\sqrt{2R(R-r)}+R\right]} = \frac{R-2r}{\sqrt{2R(R-r)}+R} \ge \frac{R-2r}{\sqrt{2R^2}+R}$$

$$\ge \frac{R-2r}{\frac{3}{2}R+R} = \frac{2(R-2r)}{5R} = VP$$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$

Bài 25. Cho $a,b,c>0: a+b+c+1=4abc$. Chứng minh rằng: $a+b+c\ge\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$

Chứng minh

Bài toán được đưa về: Cho $p+1=4pr^2$. Chứng minh rằng: $p^2r^2\ge 4Rr+r^2$

Ta có: $p^2\ge 27r^2\Rightarrow\frac{4p^3}{27}\ge p+1\Rightarrow p\ge 3$. Ta sẽ chứng minh: $p(p+1)\ge 4(4Rr+r^2)$

Ta có: $p^2\ge 16Rr-5r^2$ (1). Do $p\ge 3$ nên $4p^2\ge 9(p+1)\Rightarrow 4p^2\ge 9\cdot 4pr^2\Rightarrow p\ge 9r^2$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $p(p+1)\ge 4(4Rr+r^2)$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$.

Bài 26. Cho $a,\ b,\ c\ge 0$ và $ab+bc+ca=1$. Chứng minh : $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\ge\frac{5}{2}$

Chứng minh

Áp dụng đẳng thức 1 và 10 phần IV ta có bài toán sau:

Cho $x,y,z>0$ và $4Rr+r^2=1$.

Chứng minh rằng: $\frac{p^2+4Rr+r^2}{4Rrp}\ge\frac{5}{2}\Leftrightarrow p^2-10Rrp+1\ge 0$ (1)

Xét phương trình: $f(x)=x^2-10Rrx+1=0$; $\Delta'=25R^2r^2-1$

$\Rightarrow x_1=5Rr-\sqrt{25R^2r^2-1}$; $x_2=5Rr+\sqrt{25R^2r^2-1}$

Để chứng minh (1) ta chỉ phải chứng minh $p\ge x_2=5Rr+\sqrt{25R^2r^2-1}$. Ta có:

$\sqrt{25R^2r^2-1}=\sqrt{25R^2r^2-(4Rr+r^2)^2}=r\sqrt{9R^2-8Rr-r^2}\le r\sqrt{(3R-r)^2}=r(3R-r)$

$\Rightarrow 5Rr+\sqrt{25R^2r^2-1}\le 5Rr+r(3R-r)=2-3r^2$. Mặt khác

$p^2-16Rr+5r^2=9.IG^2\ge 0\Rightarrow p\ge\sqrt{16Rr-5r^2}=\sqrt{4-9r^2}$. Ta sẽ chứng minh:

$\sqrt{4-9r^2}\ge 2-3r^2\Leftrightarrow 4-9r^2\ge(2-3r^2)^2\Leftrightarrow 4-9r^2\ge 4-12r^2+9r^4$

$\Leftrightarrow r^2(1-3r^2)\ge 0$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}r^2=0\\ p^2=16Rr-5r^2\end{cases}\Leftrightarrow x=2,y=z=1$

Vậy $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\ge\frac{5}{2}$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=1,c=0$ và các hoán vị.

Mở rộng: Cho $a,\ b,\ c$ là độ dài 3 cạnh tam giác thỏa mãn $ab+bc+ca=1$.

Chứng minh rằng: $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\ge\frac{5}{a+b+c+abc}$

Chứng minh. Trước tiên ta nhận thấy bài toán này chặt hơn bài toán ban đầu bởi lẽ:

$1=ab+bc+ca\ge a(b+c)\ge a^2\Rightarrow a\le 1\Rightarrow(1-a)(1-b)(1-c)\ge 0$

$\Leftrightarrow 1-a-b-c+ab+bc+ca-abc\ge 0\Leftrightarrow 2\ge a+b+c+abc$

Áp dụng công thức 1 phần IV ta cần phải chứng minh:

$$\frac{\sum(a+c)(b+c)}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq \frac{5}{a+b+c+abc} \Leftrightarrow \frac{a^2+b^2+c^2+3(ab+bc+ca)}{(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc} \geq \frac{5}{a+b+c+abc}$$

$$\Leftrightarrow \frac{5-16Rr-4r^2}{(a+b+c)(1-2Rr)} \geq \frac{5}{(a+b+c)(1+2Rr)} \Leftrightarrow \left[5-\left(16Rr+4r^2\right)\right](1+2Rr) \geq 5(1-2Rr)$$

$$\Leftrightarrow 5+10Rr-(1+2Rr)\left(16Rr+4r^2\right) \geq 5-10Rr \Leftrightarrow 20Rr \geq (1+2Rr)\left(16Rr+4r^2\right) \ (1)$$

Ta có: $(1+2Rr)\left(16Rr+4r^2\right) \leq 18(1+2Rr)Rr = 18Rr+2Rr.18Rr \leq$

$\leq 18Rr+2Rr(ab+bc+ca) = 20Rr$. Do đó (1) được chứng minh.

Vậy $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a} \geq \frac{5}{a+b+c+abc}$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=1,\ c=0$.

Bài 27. Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $2b \geq a+c$ (b nằm giữa a và c).

Chứng minh: $$\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b} \geq \frac{6\left(a^2+b^2+c^2\right)}{ab+bc+ca}$$

Chứng minh

Điều kiện $2b \geq a+c \Leftrightarrow x+z \geq 2y$, do đó theo hằng đẳng thức **4** phần B ta có:

$$2Rr-r^2-\frac{p^2}{9} = -\frac{1}{18p}(x+y-2z)(y+z-2x)(z+x-2y) \geq 0 \Rightarrow 18Rr-9r^2 \geq p^2 \ (1)$$

Áp dụng công thức 1 và 3 ta cần chứng minh: $\frac{4R-2r}{r} \geq \frac{6\left(p^2-8Rr-2r^2\right)}{4Rr+r^2}$

$$\Leftrightarrow (2R-r)(4R+r) \geq 3\left(p^2-8Rr-2r^2\right) \Leftrightarrow 8R^2-2Rr-r^2 \geq 3p^2-24Rr-6r^2$$

$$\Leftrightarrow 8R^2+22Rr+5r^2 \geq 3p^2 \Leftrightarrow 8(R-2r)^2+3\left(18Rr-9r^2\right) \geq 3p^2 \ \text{(đúng theo (1))}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$

Bài 28. Cho là độ dài 3 cạnh tam giác. Chứng minh rằng:

$$\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+35 \geq 32\cdot\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca} \ (*)$$

Chứng minh

Điều kiện $a \leq b+c \Leftrightarrow x+y \leq 3z$, do đó theo hằng đẳng thức **5** phần B ta có:

$$4Rr-r^2-\frac{p^2}{4} = -\frac{1}{32p}(x+y-3z)(y+z-3x)(z+x-3y) \geq 0 \Rightarrow 16Rr-4r^2 \geq p^2 \ (1)$$

Áp dụng công thức 1 và 3 ta cần chứng minh: $\frac{4R-2r}{r}+35 \geq 32\cdot\frac{p^2-8Rr-2r^2}{4Rr+r^2}$

$\Leftrightarrow (4R+33r)(4R+r)\geq 32\left(p^2-8Rr-2r^2\right)$. Theo (1) ta chỉ cần chứng minh:

$(4R+33r)(4R+r)\geq 32\left(8Rr-6r^2\right)$

$\Leftrightarrow 16R^2+136Rr+33r^2-\left(256Rr-192r^2\right)\geq 0 \Leftrightarrow (4R-15r)^2$ (đúng)

Vậy (*) đúng. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=3z \\ 4R=15r \end{cases} \Leftrightarrow a:b:c=\dfrac{7+\sqrt{21}}{2}:\dfrac{5+\sqrt{21}}{2}:1$

Bài 29. Cho $a, b, c\geq 0$, $a+b+c=1$ và $1+18abc\geq 5(ab+bc+ca)$.

Chứng minh: $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}+\dfrac{12abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}\geq 3$

Chứng minh

$1+18abc\geq 5(ab+bc+ca)\Leftrightarrow (a+b+c)^3+18abc\geq 5(ab+bc+ca)(a+b+c)$

$\Leftrightarrow p^3+18pr^2\geq 5\left(4Rr+r^2\right)p\Leftrightarrow p^2\geq 20Rr-13r^2$

Theo công thức 2 và 8 phần IV ta có: $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}+\dfrac{12abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}=$

$=\dfrac{p^2-8Rr+r^2}{4Rr}+\dfrac{12r}{4R}\geq\dfrac{\left(20Rr-13r^2\right)-8Rr+r^2}{4Rr}+\dfrac{12r}{4R}=3$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$

$\begin{cases} a+b+c=1 \\ 1+18abc=5(ab+bc+ca) \end{cases} \Leftrightarrow a^3+b^3+c^3+15abc=2\left[a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)\right]$

Bài 30. Cho $a, b, c\geq 0$ thỏa mãn $a+b+c\geq\max\left\{\dfrac{ab}{c},\dfrac{bc}{a},\dfrac{ca}{b}\right\}$.

Chứng minh: $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}+\dfrac{\left(14+10\sqrt{2}\right)abc}{(a+b+c)(ab+bc+ca)}\geq 2\sqrt{2}+1$ (*)

Chứng minh

Không mất tính tổng quát, ta giả sử $a\geq b\geq c$. Theo điều kiện ta có:

$a+b+c\geq\dfrac{ab}{c}\Leftrightarrow ac+bc+c^2\geq ab\Leftrightarrow (a+c)^2+(b+c)^2\geq (a+b)^2\Leftrightarrow x^2+y^2\geq z^2$

Do đó ΔXYZ là tam giác không tù $\Rightarrow x^2+y^2+z^2\geq 8R^2\Rightarrow p^2\geq 4R^2+4Rr+r^2$

Áp dụng công thức 1 và 2 ta có: $VT-VP=\dfrac{p^2-8Rr-2r^2}{4Rr+r^2}+\dfrac{\left(14+10\sqrt{2}\right)r^2}{4Rr+r^2}-\left(2\sqrt{2}+1\right)$

$\geq\dfrac{4R^2+\left(14+10\sqrt{2}\right)r^2}{4Rr+r^2}-2\sqrt{2}-2=\dfrac{4\left[R-\left(\sqrt{2}+1\right)r\right]^2}{4Rr+r^2}\geq 0$

Vậy (*) được chứng minh. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}(a+b+c)c=ab \\ R=\left(\sqrt{2}+1\right)r\end{cases}\Leftrightarrow a=b=\left(\sqrt{2}+1\right)c$

Bài 31. Cho $a, b, c \ge 0$ thỏa mãn $a \ge b+c$. Chứng minh rằng:

a. $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+\sqrt{\frac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}} \ge 2$

b. $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+\sqrt{\frac{3abc}{5(a+b)(b+c)(c+a)}} \ge \sqrt{2}$

Chứng minh

Điều kiện $a \ge b+c$ tương đương với điều kiện $x+y \ge 3z$, do đó theo hằng đẳng thức 5 phần II ta có: $4Rr - r^2 - \frac{p^2}{4} = -\frac{1}{32p}(x+y-3z)(y+z-3x)(z+x-3y) \le 0$

$\Rightarrow 16Rr - 4r^2 \le p^2$ (1). Áp dụng các đẳng thức 8 và 14 phần IV ta cần chứng minh:

$\frac{p^2-8Rr+r^2}{4Rr}+\sqrt{\frac{r}{4R}} \ge 2 \Leftrightarrow \frac{p^2-16Rr+r^2}{4Rr}+\sqrt{\frac{r}{4R}} \ge 0$. Mặt khác:

$\frac{p^2-16Rr+r^2}{4Rr}+\sqrt{\frac{r}{4R}} \ge \frac{-3r^2}{4Rr}+\sqrt{\frac{r}{4R}} = \frac{3}{4}\sqrt{\frac{r}{R}}\left(\frac{2}{3}-\sqrt{\frac{r}{R}}\right) \ge 0$ (do $\frac{r}{R} \le \frac{4}{9}$ theo định lý 7)

Vậy $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+\sqrt{\frac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}} \ge 2$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=b, c=0 \\ a=2b=2c \end{array}\right.$

b. Ta cần chứng minh: $\sqrt{\frac{8R-3r}{4R}}+\sqrt{\frac{3r}{20R}} \ge \sqrt{2} \Leftrightarrow 2-\frac{3r}{4R}+\frac{3r}{20R}+2\sqrt{\frac{8R-3r}{4R}}\sqrt{\frac{3r}{20R}} \ge 2$

$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{8R-3r}{4}}\sqrt{\frac{3r}{5}} \ge \frac{3r}{5} \Leftrightarrow \frac{8R-3r}{4} \ge \frac{3r}{5} \Leftrightarrow 40R \ge 27r$ (đúng)

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b, c=0$

Bài 32. Cho $a, b, c \ge 0$ thỏa mãn $a \ge b \ge c$ và $2b \ge a+c$.

Chứng minh rằng: $\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{92}{27} \ge \frac{242}{27}\cdot\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}$

Chứng minh

Ta đã biết điều kiện $2b \ge a+c$ tương đương với $18Rr - 9r^2 \ge p^2$

Vậy để giải quyết bài toán ta chỉ cần chứng minh:

$\frac{4R-2r}{r}+\frac{92}{27} \ge \frac{242}{27}\cdot\frac{10R-11r}{4R+r} \Leftrightarrow 54(2R-r)(4R+r)+92r(4R+r) \ge 242(10R-11r)$

$\Leftrightarrow 432R^2+260Rr+38r^2 \ge 2420Rr-2662r^2 \Leftrightarrow 432R^2-2160Rr+2700r^2 \ge 0$

$\Leftrightarrow 108(2R-5r)^2 \ge 0$ (đúng). Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} a+c=2b \\ 2R=5r \end{cases} \Leftrightarrow a=3t, b=2t, c=t\ (t>0)$

Bài 33. Cho $a, b, c \ge 0$ thỏa mãn $a \ge b \ge c$ và $2b \le a + c$.

Chứng minh rằng: $\dfrac{1}{a^2+bc}+\dfrac{1}{b^2+ca}+\dfrac{1}{c^2+ab} \ge \dfrac{27}{2(a+b+c)^2}$

Chứng minh

Ta có: $\dfrac{1}{a^2+bc}+\dfrac{1}{b^2+ca}+\dfrac{1}{c^2+ab}=\dfrac{\sum(b^2+ca)(c^2+ab)}{(a^2+bc)(b^2+ca)(c^2+ab)}$

$$=\frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+abc(a+b+c)+(a+b+c)(a^3+b^3+c^3)-(a^4+b^4+c^4)}{2a^2b^2c^2+(a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3)+abc(a^3+b^3+c^3)}$$

$$=\frac{r^2(4R+r)^2-2p^2r^2+p^2r^2+p^2(p^2-12Rr)-p^4+16Rrp^2-2(4R+r)^2r^2}{2p^2r^4+r^3(4R+r)^3-12p^2r^3R+p^2r^2(p^2-12Rr)}$$

$$=\frac{4Rrp^2-p^2r^2-(4R+r)^2r^2}{2p^2r^4+r^3(4R+r)^3-24p^2r^3R+p^4r^2}=\frac{4Rp^2-p^2r-(4R+r)^2r}{2p^2r^3+r^2(4R+r)^3-24p^2r^2R+p^4r}$$

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{4Rt-tr-(4R+r)^2r}{2r^3t+r^2(4R+r)^3-24r^2Rt+rt^2}-\dfrac{27}{2t} \Rightarrow f'(t)\ge 0$

Do đó $f(t)$ đồng biến theo t. Mặt khác từ điều kiện $2b \le a+c \Rightarrow 18Rr-9r^2 \le p^2$

Vì vậy nếu ta chứng minh bài toán đúng với trường hợp $18Rr-9r^2=p^2$ thì nó đúng với mọi p. Thật vậy:

$$\frac{4R(18Rr-9r^2)-(18R-9r)r^2-(4R+r)^2r}{2(18Rr-9r^2)r^3+r^2(4R+r)^3-24(18Rr-9r^2)r^2R+(18Rr-9r^2)^2r}\ge\frac{27}{2(18Rr-9r^2)}$$

$$\Leftrightarrow\frac{4R(18R-9r)-(18R-9r)r-(4R+r)^2}{2(18Rr-9r^2)r+(4R+r)^3-24R(18Rr-9r^2)+r(18R-9r)^2}\ge\frac{27}{2(18R-9r)}$$

$$\Leftrightarrow\frac{56R^2-62Rr+8r^2}{64R^3-60R^2r-60Rr^2+64r^3}\ge\frac{3}{2(2R-r)}\Leftrightarrow\frac{28R^2-31Rr+4r^2}{16R^3-15R^2r-15Rr^2+16r^3}\ge\frac{3}{2R-r}$$

$$\Leftrightarrow(28R^2-31Rr+4r^2)(2R-r)\ge 3(16R^3-15R^2r-15Rr^2+16r^3)$$

$$\Leftrightarrow 56R^3-90R^2r+39Rr^2-4r^3\ge 48R^3-45R^2r-45Rr^2+48r^3$$

$$\Leftrightarrow 8R^3-45R^2r+84Rr^2-52r^3\ge 0\Leftrightarrow(8R-13r)(R-2r)^2\ge 0 \text{ (đúng)}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

VI. NHÌN LẠI TOÀN BỘ PHƯƠNG PHÁP GLA

Để chứng minh một bất đẳng thức đối xứng $F(a,b,c)\ge G(a,b,c)$ với a, b, c không âm, ta đặt $x=b+c, y=c+a, z=a+b$, khi đó x, y, z trở thành độ dài 3 cạnh của một tam giác XYZ và một bất đẳng thức đại số được đưa về bất đẳng thức hình học với các biến p, R, r lần lượt là nửa chu vi, bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp của tam giác XYZ. Sau đó ta phải chứng minh $f(p)=VT-VP\ge 0$. Xét dấu $f'(p)$ rồi tìm cách đánh giá p theo R, r. Ta chú ý đến bất đẳng thức sau:

$$2R^2+10Rr-r^2-2(R-2r)\sqrt{R(R-2r)}\le p^2\le 2R^2+10Rr-r^2+2(R-2r)\sqrt{R(R-2r)}$$

Khi đó nếu đặt $\begin{cases} p_1=\sqrt{2R^2+10Rr-r^2-2(R-2r)\sqrt{R(R-2r)}} \\ p_2=\sqrt{2R^2+10Rr-r^2+2(R-2r)\sqrt{R(R-2r)}} \end{cases}$ thì $p\in\left[p_1,p_2\right]$

***Nhận xét:** 1.* (Định lý 3 phần III): Nếu ΔXYZ cân thì $p=p_1$ hoặc $p=p_2$.

• Nếu giá trị lớn nhất *f*(*p*) hoặc giá trị nhỏ nhất *f*(*p*) đạt tại $p=p_1$ thì ΔXYZ cân có 2 góc đáy bằng nhau và $\le 60°$, khi đó trong 3 biến x, y, z có 2 biến bằng nhau và nhỏ hơn biến còn lại $\Leftrightarrow$ Trong 3 biến a, b, c có 2 biến bằng nhau và lớn hơn hoặc bằng biến còn lại.

• Nếu giá trị lớn nhất *f*(*p*) hoặc giá trị nhỏ nhất *f*(*p*) đạt tại $p=p_2$ thì ΔXYZ cân có 2 góc đáy bằng nhau và $\ge 60°$, khi đó trong 3 biến x, y, z có 2 biến bằng nhau và lớn hơn biến còn lại $\Leftrightarrow$ Trong 3 biến a, b, c có 2 biến bằng nhau và nhỏ hơn hoặc bằng biến còn lại.

2. Khi đưa bất đẳng thức về dạng chứa p,R,r nếu có biểu thức chứa r làm nhân tử chung thì khi $r=0$ hay trong 3 biến a, b, c có 1 biến bằng 0 thì đẳng thức xảy ra.

3. Từ các nhận xét 1 và 2 suy ra nếu $f(p)$ đạt giá trị lớn nhất, nhỏ nhất tại p_1 hoặc p_2 hoặc $r=0$ thì công việc còn lại là chứng minh bất đẳng thức với 2 biến số.

Với câu hỏi đặt ra là khi nào *f*(*p*) đạt giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất tại p_1 hoặc p_2 ta có kết luận sau:

3.1. Nếu $f'(p)\ge 0$, $\forall p\in\left[p_1,p_2\right]$ thì $\text{Min}\, f(p)=f(p_1);\text{Max}\, f(p)=f(p_2)$

Nếu $f'(p)\le 0$, $\forall p\in\left[p_1,p_2\right]$ thì $\text{Min}\, f(p)=f(p_2);\text{Max}\, f(p)=f(p_1)$

Đẳng thức xảy ra khi $p=p_1$ hoặc $p=p_2$ ứng với trong 3 biến số a, b, c có 2 biến số bằng nhau hoặc có một biến số bằng 0.

p	p_1		p_2
$f'(p)$		+	
$f(p)$	$f(p_1)$	$\nearrow$	$f(p_2)$

p	p_1		p_2
$f'(p)$		$-$	
$f(p)$	$f(p_1)$	$\searrow$	$f(p_2)$

3.2. Nếu $f'(p_0)=0; f''(p)\ge 0$ thì $\text{Min}\, f(p)=f(p_0);\text{Max}\, f(p)=\text{Max}\left\{f(p_1),f(p_2)\right\}$

Nếu $f'(p_0)=0; f''(p)\le 0$ thì $\text{Max} f(p)=f(p_0); \text{Min} f(p)=\text{Min}\{f(p_1), f(p_2)\}$

p	p_1		p_0		p_2
$f'(p)$		$-$		$+$	
$f(p)$	$f(p_1)$	$\searrow$	$f(p_0)$	$\nearrow$	$f(p_2)$

p	p_1		p_0		p_2
$f'(p)$		$+$		$-$	
$f(p)$	$f(p_1)$	$\nearrow$	$f(p_0)$	$\searrow$	$f(p_2)$

4. Trong một số ít các bài toán ta tìm Giá trị lớn nhất, Giá trị nhỏ nhất bằng cách tính đạo hàm theo biến $t=p^2$ hoặc theo R hoặc theo r.

Chú ý. Hãy nhớ lại cách chứng minh hình học ở trên, chính từ chứng minh đó suy ra ngay với mọi R, r cố định thì có thể tìm được ba số thực không âm a', b', c' mà trong ba số đó có 2 số bằng nhau hoặc 1 số bằng 0, sao cho tam giác X'Y'Z' với độ dài 3 cạnh là b'+c', c'+a', a'+b' cũng có R = R' và r = r'. Như thế, kết hợp nhận xét này với các kết quả ở trên ta suy ra trong các trường hợp hàm f(p) đủ tốt (đơn điệu) thì ta chỉ cần xét hai trường hợp đối với ba biến a, b, c ban đầu là hoặc trong 3 biến có 1 biến bằng 0, hoặc trong 3 biến có 2 biến bằng nhau.

Sau đây chúng ta sẽ tiếp tục xét các ví dụ để làm sáng tỏ các nhận xét trên.

Chúng ta sẽ bắt đầu với những ví dụ có thể làm được bằng các phương pháp khác như phương pháp dồn biến hoặc phương pháp ***SOS***:

Bài 1: Chứng minh: $\text{tg}A\,\text{tg}B\,\text{tg}C\sin A\sin B\sin C\ge \frac{27}{8}, \forall\Delta ABC$ (1)

Chứng minh

Đưa bất đẳng thức (1) về dạng chứa p, R, r ta có (1) $\Leftrightarrow \frac{8p^2r^2}{27R^2}\ge p^2-2(R+r)^2$.

Đặt $t=p^2$, xét hàm số $f(t)=\frac{8r^2t}{27R^2}-t+2(R+r)^2 \Rightarrow f'(t)=\frac{8r^2}{27R^2}-1<0$

nên theo nhận xét 3.1 ta chỉ cần xét 2 trường hợp $a=b$ và $c=0$

Trường hợp 1: $a=b\Rightarrow \sin A=\sin B, \cos A=\cos B$,

$\sin C=\sin(180^\circ-2A)=2\sin A\cos A$, $\cos C=\cos(180^\circ-2A)=2\sin^2A-1$.

Khi đó (1) $\Leftrightarrow \frac{4\sin^6A}{2\sin^2A-1}\ge\frac{27}{8}\Leftrightarrow 32\sin^6A+27\ge 54\sin^2A$.

Theo ***AM − GM*** ta có: $32\sin^6A+\frac{27}{2}+\frac{27}{2}\ge 3\cdot\sqrt[3]{32\sin^6A\cdot\frac{27}{2}\cdot\frac{27}{2}}=54\sin^2A$

Do đó (1) được chứng minh. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ ΔABC đều

Bài 2. Cho $a,b,c\in\mathbb{R}$. Chứng minh: $(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2)\ge 9(ab+bc+ca)$ (1)

Chứng minh

Ta nhận thấy $ab+bc+ca\le|a||b|+|b||c|+|c||a|$ do đó ta chỉ cần xét khi $a,b,c\ge 0$.

Ta có: (1) $\Leftrightarrow$ $p^2r^4+2\left[(4R+r)^2r^2-2p^2r^2\right]+4\left(p^2-8Rr-2r^2\right)+8\ge 9\left(4Rr+r^2\right)$

Đặt $f(p)=VT-VP$. Ta có: $f'(p)=2pr^4-8pr^2+8p=2p\left(r^2-2\right)^2\ge 0$

Theo kết luận 1 thì $f(p)$ đạt Min khi $a=b$ hoặc $c=0$.

Trường hợp 1: $a=b$. Ta cần chứng minh: $(a^2+2)^2(c^2+2)\ge 9(a^2+2ac)$

$\Leftrightarrow a^4c^2+4a^2c^2+4c^2+2a^4+8\ge a^2+18ac$. Theo bất đẳng thức $AM-GM$ ta có:

$$\left.\begin{aligned} a^4c^2+c^2+1+1&\ge 4ac\\ 4a^2c^2+4&\ge 8ac\\ 2a^4+2&\ge 4a^2\\ 3c^2+3a^2&\ge 6ac\end{aligned}\right\}\Rightarrow a^4c^2+4a^2c^2+4c^2+2a^4+8\ge a^2+18ac \Rightarrow \text{(đpcm)}$$

Trường hợp 2: $c=0$, khi đó (1) $\Leftrightarrow 2(a^2+2)(b^2+2)\ge 9ab \Leftrightarrow 2(a^2b^2+2a^2+2b^2+4)\ge 9ab$

Theo bất đẳng thức $AM-GM$ ta có: $a^2b^2+4\ge 4ab;2a^2+2b^2\ge 4ab \Rightarrow$ (đpcm)

Vậy $(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2)\ge 9(ab+bc+ca)$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$

Bài 3. Giả sử $a,b,c\ge 0$ và $ab+bc+ca=3$.

Với $k>0$ cho trước, tìm giá trị nhỏ nhất của $S=a+b+c+kabc$.

Chứng minh

Ta có:

$$S=a+b+c+kabc=\frac{\sqrt{3}(a+b+c)}{\sqrt{ab+bc+ca}}+\frac{3\sqrt{3}\,kabc}{\sqrt{(ab+bc+ca)^3}}=\frac{\sqrt{3}p}{\sqrt{4Rr+r^2}}+\frac{3\sqrt{3}\,kabc}{\sqrt{(4Rr+r^2)^3}}$$

Thấy ngay rằng $f(p,R,r)=\dfrac{\sqrt{3}p}{\sqrt{4Rr+r^2}}+\dfrac{3\sqrt{3}\,kabc}{\sqrt{(4Rr+r^2)^3}}$ là hàm đồng biến theo p. Do đó ta chỉ cần xét trường hợp $a=b=t\ge c$. Từ $ab+bc+ca=3$ suy ra $c=\dfrac{3-t^2}{2t}$

Suy ra $S=a+b+c+kabc=2t+\dfrac{3-t^2}{2t}+kt\dfrac{3-t^2}{2}=f(t)$

$f'(t)=\dfrac{3}{2}-\dfrac{3}{2t^2}+\dfrac{k(3-3t^2)}{2}=\dfrac{3}{2}(1-t^2)\left(k-\dfrac{1}{t^2}\right)$ Suy ra $f'(t)=0\Leftrightarrow t=1,t=\dfrac{1}{\sqrt{k}}$

và do $t^2\le 3$ nên: $f(t)\ge \text{Min}\left\{f(1),f\left(\dfrac{1}{\sqrt{k}}\right),f(\sqrt{3})\right\}=\text{Min}\{3+k,2\sqrt{3}\}$

Bài 4. Trong mọi tam giác, ta có: $\frac{ab}{p-c}+\frac{ca}{p-b}+\frac{bc}{p-a}\ge\left(5-\frac{2r}{R}\right)p$ (*)

Chuyển bài toán về p,R,r với p,R,r lần lượt là nửa chu vi, bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp của tam giác ABC ta có:

$$\frac{ab}{p-c}+\frac{ca}{p-b}+\frac{bc}{p-a}=\frac{\sum ab(p-a)(p-b)}{(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$=\frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2-p[ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)]+p^2(ab+bc+ca)}{(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$=\frac{(ab+bc+ca)^2-p^2(ab+bc+ca)-p.abc}{(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$=\frac{\left(p^2+4Rr+r^2\right)^2-p^2\left(p^2+4Rr+r^2\right)-4p^2Rr}{pr^2}=\frac{\left(p^2+4Rr+r^2\right)\left(4Rr+r^2\right)-4p^2Rr}{pr^2}$$

$$=\frac{p^2r^2+16R^2r^2+8Rr^3+r^4}{pr^2}=\frac{p^2+16R^2+8Rr+r^2}{p}$$

Do đó (*) $\Leftrightarrow\frac{p^2+16R^2+8Rr+r^2}{p}\ge\left(5-\frac{2r}{R}\right)p\Leftrightarrow16R^2+8Rr+r^2-\left(4-\frac{2r}{R}\right)p^2\ge0$.

Đặt $f(x)=16R^2+8Rr+r^2-\left(4-\frac{2r}{R}\right)x$ (trong đó $x=p^2$ và coi R,r cố định)

$\Rightarrow f'(x)=\frac{2r}{R}-4<0$. Suy ra ta chỉ cần xét bài toán trong trường hợp $a=b=1$.

$$(*)\Leftrightarrow\frac{2ab}{a+b-c}+\frac{2ca}{c+a-b}+\frac{2bc}{b+c-a}\ge\left[5-\frac{(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)}{abc}\right]\frac{a+b+c}{2}$$

$$\Leftrightarrow\frac{2}{2-c}+4\ge\left[5-(2-c)c\right]\frac{2+c}{2}\Leftrightarrow\frac{4}{2-c}+8\ge10+c+c^3$$

$$\Leftrightarrow\frac{4}{2-c}\ge2+c+c^3\Leftrightarrow c^2(c-1)^2\ge0 \text{ (đúng)}$$

Dưới con mắt hình học thì đẳng thức trong bất đẳng thức (*) xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều còn dưới con mắt đại số ta còn thêm trường hợp $a=b,c=0$ và các hoán vị.

Bài 5. Cho $a,b,c>0$, $a^2+b^2+c^2=3$. Chứng minh rằng:

$$a+b+c\ge a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\quad(1)$$

Chứng minh

Do $a,b,c>0,a^2+b^2+c^2=3$ nên ta có thể đưa về bất đẳng thức đồng bậc với a, b, c.

$$(1) \Leftrightarrow \frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^3(a+b+c)^2}{27} \geq \left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)^2, \forall a,b,c>0 \ (2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(p^2-8Rr-2r^2\right)p^2}{27} - \left[r^2(4R+r)^2-2p^2r^2\right] \geq 0 \ (3)$$

Dễ thấy (3) đồng biến theo p và do $a,b,c>0$ nên ta chỉ phải xét trường hợp $a=b$

Theo định lý 2 thì $f(p)$ đạt cực trị tại p_1 thì trong 3 biến x,y,z có 2 biến bằng nhau và nhỏ hơn hoặc bằng biến còn lại. Điều này tương ứng với trong 3 biến a,b,c có 2 biến bằng nhau và lớn hơn hoặc bằng biến còn lại. Từ đó suy ra ta có thể giả sử $a=b=1$, khi đó $c\leq 1$. Thay $a=b=1$ vào (3) ta cần chứng minh:

$$\frac{\left(2+c^2\right)^3(2+c)^2}{27} \geq \left(1+2c^2\right)^2 \Leftrightarrow \left[\frac{\left(2+c^2\right)(2+c)}{3\left(1+2c^2\right)}\right]^2 \geq \frac{3}{2+c^2}$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{(1-c)\left(1+3c-c^2\right)}{3\left(1+2c^2\right)}+1\right]^2 - 1 - \frac{1-c^2}{2+c^2} \geq 0 \ (5).$$ Do $0\leq c\leq 1$ nên $c\geq c^2$, khi đó:

$$VT(5) \geq 2\cdot\frac{(1-c)\left(1+3c-c^2\right)}{3\left(1+2c^2\right)} - \frac{1-c^2}{2+c^2} \geq \frac{2(1+2c)(1-c)}{3\left(1+2c^2\right)} - \frac{1-c^2}{2+c^2} = \frac{(1-c)^2\left(2c^2+6c+1\right)}{3\left(1+2c^2\right)\left(2+c^2\right)} \geq 0$$

$\Rightarrow$ (5) đúng $\Rightarrow$ (3) đúng $\Rightarrow$ (đpcm). Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$

Bài 6. Cho $a,b,c\geq 0$. Tìm hằng số k tốt nhất để bất đẳng thức sau luôn đúng:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+k\cdot\frac{ab+bc+ca}{(a+b+c)^2} \geq \frac{3}{2}+\frac{k}{3} \quad (1)$$

Chứng minh

Thay $a=b, c=0$ thì (1) $\Leftrightarrow 2+\frac{k}{4} \geq \frac{3}{2}+\frac{k}{3} \Leftrightarrow k\leq 6$. Xét (1) ứng với $k\leq 6$.

Chuyển về p,R,r ta có: $VT(1) = \frac{p^2-8Rr+r^2}{4Rr} + \frac{k\left(4Rr+r^2\right)}{p^2} = f(p)$

$\Rightarrow f'(p) = \frac{p}{2Rr} - \frac{2k\left(4Rr+r^2\right)}{p^3}$. Do $p^2 \geq 16Rr-5r^2$ và $k\leq 6$ nên $f'(p)\geq 0$ tức là $g(a,b,c) = \frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+k\cdot\frac{ab+bc+ca}{(a+b+c)^2}$ đạt giá trị nhỏ nhất khi trong 3 biến a,b,c có 2 biến bằng nhau và lớn hơn hoặc bằng biến còn lại.

Theo nhận xét 3.1 ta có thể giả sử $a=b=1\geq c$, khi đó bất đẳng thức (1)

$$\Leftrightarrow \frac{2}{c+1}+\frac{c}{2}+k\cdot\frac{1+2c}{(2+c)^2} \geq \frac{3}{2}+\frac{k}{3} \Leftrightarrow \frac{2}{c+1}+\frac{c}{2}-\frac{3}{2} \geq \frac{k}{3}-k\cdot\frac{1+2c}{(2+c)^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(1-c)^2}{2(c+1)} \geq \frac{k(1-c)^2}{3(2+c)^2} \Leftrightarrow 3(2+c)^2-2k(c+1)\geq 0 \Leftrightarrow \Delta' = k(6-k)\leq 0 \Leftrightarrow 0\leq k\leq 6$$

$\Rightarrow k = 6$ là hằng số tốt nhất cần tìm. Với $k \in [0;6)$ thì đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$

Với $k = 6$ thì đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$ hoặc $a = b, c = 0$ và các hoán vị

Bài 7. Cho $a,b,c \geq 0$. Tìm hằng số k lớn nhất để bất đẳng thức sau luôn đúng:

$$\frac{a^4+b^4+c^4}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2} + k\cdot\frac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq 1 + \frac{k}{8} \quad (1)$$

Chứng minh

$$(1) \Leftrightarrow f(p) = \frac{p^4 - 16Rrp^2 + (4Rr + r^2)^2}{(4Rr + r^2)^2 - 2p^2r^2} + \frac{kr}{4R} \geq 1 + \frac{k}{8}$$

Dễ thấy $f'(p) \geq 0$ nên $f(p)$ đồng biến theo p. Theo ***nhận xét 3.1***. ta có thể giả sử $a = b = 1 \geq c$, khi đó (1) $\Leftrightarrow \dfrac{2+c^4}{1+2c^2} + \dfrac{kc}{2(1+c)^2} \geq 1 + \dfrac{k}{8}$

$$\Leftrightarrow \frac{2+c^4}{1+2c^2} - 1 \geq k\left[\frac{1}{8} - \frac{c}{2(1+c)^2}\right] \Leftrightarrow \frac{(1-c^2)^2}{1+2c^2} \geq \frac{k(1-c)^2}{8(1+c)^2} \Leftrightarrow 8(1+c)^4 \geq k(1+2c^2)$$

Xét $c = 0$ suy ra $k \leq 8$. Ta sẽ chứng minh $k = 8$ là hằng số tốt nhất cần tìm.

Thật vậy ta phải chứng minh: $8(c+1)^4 \geq 8(1+2c^2) \Leftrightarrow (c+1)^4 \geq 1 + 2c^2$ (đúng)

Với $k = 8$ ta có bất đẳng thức đúng: $\dfrac{a^4+b^4+c^4}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2} + \dfrac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq 2$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$ hoặc $a = b, c = 0$ và các hoán vị.

Bài 8. Cho $a,b,c \geq 0$, $ab + bc + ca = 3$. Tìm k lớn nhất sao cho:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{k}{a+b+c} \geq 3 + \frac{k}{3}$$

Bài 9. Cho $a,b,c \geq 0$. Tìm hằng số k lớn nhất sao cho:

$$\sqrt{\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b}} + k\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}} \geq \sqrt{6} + k$$

Bạn đọc có thể tự tạo ra nhiều bài tập khác nữa để thử sức. Nếu đề bài không quá phức tạp tin chắc các bạn có thể giải quyết được bằng ***GLA***.

VII. MỞ RỘNG GLA VỚI BẤT ĐẲNG THỨC n BIẾN SỐ ($n \geq 4$)

Ít ai có thể tin ngay là ***GLA*** có thể chứng minh được cho bất đẳng thức từ 4 biến số trở lên. Điều này cũng dễ hiểu vì thông thường chúng ta sẽ cho rằng muốn áp dụng ***GLA*** để giải bài toán n biến thì phải đi xây dựng mối quan hệ giữa p, R, r của đa giác n cạnh. Nếu tiếp cận ***GLA*** theo cách thức này thì sẽ dẫn đến bế tắc. Chúng ta sẽ mở rộng ***GLA*** theo một hướng khác, bằng cách sử dụng những kết quả của định lý 3 theo cách thức như sau:

1. Lý thuyết cơ sở mở rộng GLA cho n biến:

Giả sử $f(a_1, a_2, ... a_n)$ là đa thức đối xứng với n biến số $a_1, a_2, ..., a_n > 0$ $(n \geq 4)$

Xét 3 biến số bất kì a_m, a_n, a_p $(m, n, p \in \{1, 2, 3, 4 ..., n\})$ và cố định các biến số còn lại như hằng số. Đặt $x = a_m + a_n, y = a_n + a_p, z = a_p + a_m$, khi đó x, y, z là 3 cạnh của tam giác XYZ và 3 biến số a_m, a_n, a_p có thể đưa về thành 3 biến p, R, r (trong đó p, R, r là nửa chu vi, bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp của tam giác XYZ). Tiếp theo ta sẽ mở rộng định lý 3 với các kết quả cơ bản của giải tích.

1.1. Một đa thức đối xứng n biến dương có đạo hàm cấp 1 đơn điệu theo p, R hoặc r đều đạt giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất khi có $n-1$ biến số bằng nhau.

Tức là: $f(p, R, r, a_4, ..., a_n) \geq f(\underbrace{a, ..., a}_{n-1 \text{ số } a}, x)$ hoặc $f(p, R, r, a_4, ..., a_n) \leq f(\underbrace{a, ..., a}_{n-1 \text{ số } a}, x)$

(ở đây ta chọn 3 biến a_1, a_2, a_3 để chuyển về p, R, r)

Ta sẽ làm rõ hơn mối quan hệ giữa a và x.

• Nếu $f'_p(p, R, r, a_4, ..., a_n) \geq 0$ thì nó sẽ đạt giá trị nhỏ nhất khi có $n-1$ biến bằng nhau và $n-1$ biến này lớn hơn hoặc bằng biến còn lại, và đạt giá trị lớn nhất khi có $n-1$ biến bằng nhau và $n-1$ biến này nhỏ hơn hoặc bằng biến còn lại.

• Nếu $f'_p(p, R, r, a_4, ..., a_n) \leq 0$ thì nó sẽ đạt giá trị nhỏ nhất khi có $n-1$ biến bằng nhau và $n-1$ biến này nhỏ hơn hoặc bằng biến còn lại, và đạt giá trị lớn nhất khi có $n-1$ biến bằng nhau và $n-1$ biến này lớn hơn hoặc bằng biến còn lại.

Ta sẽ chứng minh đại diện cho trường hợp $f'_p(p, R, r, a_4, ..., a_n) \geq 0$

Do $f'_p(p, R, r, a_4, ..., a_n) \geq 0$ nên $f(p, R, r, a_4, ..., a_n)$ đồng biến theo p.

Tức là: $f(p_1, R, r, a_4, ..., a_n) \leq f(p, R, r, a_4, ..., a_n) \leq f(p_2, R, r, a_4, ..., a_n)$

Theo như nhận xét trong định lý 3 ta có:

• $p = p_1$ khi tam giác là tam giác cân có 2 cạnh bên nhỏ hơn hoặc bằng cạnh đáy. Điều này có nghĩa trong 3 biến ban đầu có 2 biến bằng nhau và lớn hơn hoặc bằng biến còn lại. Do a_1, a_2, a_3 được chọn một cách tuỳ ý để chuyển về p, R, r và $f\left(a_1, a_2, ... a_n\right)$ là đa thức đối xứng với $a_1, a_2, ... a_n$ nên áp dụng liên tiếp với các biến còn lại ta được: $f(x, \underbrace{y, ..., y}_{n-1}) \leq f\left(a_1, a_2, ..., a_n\right)\ (x \geq y)$.

• $p = p_2$ khi tam giác là tam giác cân có 2 cạnh bên lớn hơn hoặc bằng cạnh đáy. Điều này có nghĩa trong 3 biến ban đầu có 2 biến bằng nhau và nhỏ hơn hoặc bằng biến còn lại. Do a_1, a_2, a_3 được chọn một cách tuỳ ý để chuyển về p, R, r và $f\left(a_1, a_2, ... a_n\right)$ là đa thức đối xứng với $a_1, a_2, ... a_n$ nên áp dụng liên tiếp với các biến còn lại ta được: $f(\underbrace{x, ..., x}_{n-1}, y) \geq f\left(a_1, a_2, ..., a_n\right)\ (x \leq y)$.

1.2. Mọi đa thức n biến dương có đạo hàm cấp 2 $f''(p) \geq 0$ đều đạt giá trị lớn nhất khi trong n biến có $n-1$ biến bằng nhau.

1.3. Mọi đa thức n biến dương có đạo hàm cấp 2 $f''(p) \leq 0$ đều đạt giá trị nhỏ nhất khi trong n biến có $n-1$ biến bằng nhau.

2. Nhận xét: Nếu $f\left(a_1, a_2, ... a_n\right)$ là đa thức đối xứng với $a_1, a_2, ... a_n \geq 0$ thì từ các nhận xét **3.1, 3.2** trong **VI** ta mới chỉ có một kết quả tạm thời là giá trị nhỏ nhất của và giá trị lớn nhất của f đạt được khi có 1 số biến số bằng nhau và 1 số biến số thì chưa so sánh được (vì có thể có một số biến số bằng 0). Ta sẽ chứng minh một kết quả mạnh hơn là khi $a_1, a_2, ... a_n \geq 0$ thì vẫn có kết luận: giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhấtf đạt được khi trong n biến có $n-1$ biến bằng nhau. Thật vậy, giả sử giá trị nhỏ nhất hoặc giá trị lớn nhất của $f\left(a_1, a_2, ..., a_n\right)$ đạt tại $(0, ..., 0, a, ..., a, b)$. Xét bộ 3 số $(0, a, b)$ thì theo các nhận xét **3.1, 3.2** trong **V** ta có $a = 0$ hoặc $b = 0$. Nếu $a = 0$ thì giá trị nhỏ nhất hoặc giá trị lớn nhất sẽ đạt tại $(\underbrace{0, ..., 0}_{n-1}, b)$ suy ra kết luận đúng.

Nếu $b = 0$ thì lại xét tiếp 2 bộ $(a, a, 0); (0, 0, a)$. Áp dụng tiếp các kết luận 1, 2, 3 ta suy ra $a = 0$. Giá trị nhỏ nhất hoặc giá trị lớn nhất đạt tại $(0, 0, ..., 0)$. Vậy các kết luận 4, 5, 6 đã được mở rộng ra đối với các biến không âm.

3. Bài tập minh họa:

Bài 1 [IMO Shortlist 1997, Vietnam] *Cho $a, b, c, d \geq 0$, $a + b + c + d = 1$.*

Chứng minh rằng: $abc + bcd + cda + dab \leq \dfrac{1}{27} + \dfrac{176}{27} abcd$ (1)

Chứng minh

$(1) \Leftrightarrow [abc + d(ab + bc + ca)](a + b + c + d) \le \dfrac{(a+b+c+d)^4}{27} + \dfrac{176}{27}abcd$ (2)

$\Leftrightarrow \left[pr^2 + (4Rr + r^2)d\right](p+d) \le \dfrac{(p+d)^4}{27} + \dfrac{176}{27}pr^2 d$

Đặt $f(p) = VP - VT = \dfrac{(p+d)^4}{27} + \dfrac{176}{27}pr^2 d - \left[pr^2 + (4Rr + r^2)d\right](p+d)$

Ta có: $f'(p) = \dfrac{4(p+d)^3}{27} + \dfrac{176}{27}dr^2 - 2pr^2 - 4Rrd - 2dr^2$. Dễ thấy:

$\dfrac{176}{27}dr^2 \ge 2dr^2$ (3) ; $\dfrac{4(p+d)^3}{27} \ge \dfrac{4p^3 + 12p^2 d}{27} \ge \dfrac{4p \cdot 27r^2 + 12 \cdot 9Rrd}{27} \ge 2pr^2 + 4Rrd$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra $f'(p) \ge 0$. Do đó: $f(a,b,c,d) \ge f(x,x,x,y)$ $(x \ge y)$

Thay $x = 1 = a = b = c, y = d$ vào (2) ta cần chứng minh: $(3y+1)(3+y) \le \dfrac{(3+y)^4}{27} + \dfrac{176}{27}y$

$\Leftrightarrow 27y^2 \le y^4 + 12y^3 + 14y \Leftrightarrow -y(y-1)^2(y+14) \le 0$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow y = 0$ hoặc $y = 1$. Vậy bất đẳng thức (1) đúng và đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = d = \dfrac{1}{4}$ hoặc $a = b = c = \dfrac{1}{3}, d = 0$

Bài 2. [Bất đẳng thức Turkervici] Chứng minh rằng với mọi số dương a, b, c, d ta có

$$a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + 2abcd \ge a^2b^2 + b^2c^2 + c^2d^2 + d^2a^2 + a^2c^2 + b^2d^2 \quad (*)$$

Chứng minh

$(*) \Leftrightarrow (a^4 + b^4 + c^4) + d^4 + 2abcd \ge (a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + (a^2 + b^2 + c^2)d^2$

$\Leftrightarrow p^4 - 16Rrp^2 + (4Rr + r^2)^2 + d^4 + 2pr^2 d \ge (4Rr + r^2)^2 - 2p^2r^2 + (p^2 - 8Rr - 2r^2)d^2$

$\Leftrightarrow p^4 - 16Rrp^2 + d^4 + 2pr^2 d + 2p^2r^2 - (p^2 - 8Rr - 2r^2)d^2 \ge 0$

Đến đây nếu ta đặt VT là một hàm theo biến p thì cho dù có đạo hàm đến cấp 2 ta cũng không thể xác định được dấu của nó. Rất may ta có thể nhận thấy ngay rằng VT nghịch biến theo R nếu coi nó là một hàm theo R với p, r cố định. Có một trục trặc là ta lại chưa xây dựng mối quan hệ giữa các biến bằng nhau với biến còn lại khi khảo sát theo R. Tuy nhiên ta có thể thấy ngay rằng điều này có thể tạm thời bỏ qua. Giả sử $a = b = c = x$. Ta cần chứng minh: $d^4 + 3x^4 + 2x^3 d \ge 3x^4 + 3x^2 d^2$

$\Leftrightarrow d(x-d)^2(2x+d) \ge 0$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = d$ hoặc $d = 0$.

Vậy bất đẳng thức (*) đúng và trở thành đẳng thức khi $a=b=c=d$ hoặc $a=b=c, d=0$ và các hoán vị.

Ta xét bài toán tổng quát sau:

Chứng minh rằng :

$$(n-1)\left(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2\right)+n\cdot\sqrt[n]{a_1^2a_2^2...a_n^2}\ge\left(a_1+a_2+...+a_n\right)^2, \forall a_1,a_2,...a_n\ge 0$$

Đặt $F=(n-1)\left(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2\right)+n\cdot\sqrt[n]{a_1^2a_2^2...a_n^2}\ge\left(a_1+a_2+...+a_n\right)^2$

Cố định $a_4,a_5,...a_n$, chuyển a_1,a_2,a_3 về p,R,r ta được:

$$F=(n-1)\left(p^2-8Rr-2r^2+a_4^2+...+a_n^2\right)+n\cdot\sqrt[n]{p^2r^4a_4^2...a_n^2}-\left(p+a_4+...+a_n\right)^2$$

Ta thấy ngay f là hàm nghịch biến theo R nên ta chỉ cần xét trường hợp $(n-1)$ biến bằng nhau. Giả sử $a_1=a_2=...=a_{n-1}=1$, đặt $a_n=a$. Ta cần chứng minh:

$$(n-1)\left(n-1+a^2\right)+n\cdot\sqrt[n]{a^2}-(n-1+a)^2\ge 0 \Leftrightarrow (n-2)a^2+n\cdot\sqrt[n]{a^2}-2(n-1)a\ge 0$$

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM cho $(n-2)$ số a^2 và n số $\sqrt[n]{a^2}$ ta có ngay điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $a_1=a_2=...=a_n$.

Bài 3. Làm chặt hơn bất đẳng thức quen thuộc:

$$\left(a_1+a_2+...+a_n\right)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}\right)\ge n^2$$

Chứng minh

Ta dễ dàng CM được các bất đẳng thức sau :

Với $n=3$: $\left(a_1+a_2+a_3\right)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}\right)\ge 5+\frac{4\left(a_1^2+a_2^2+a_3^2\right)}{a_1a_2+a_2a_3+a_3a_1}$

Với $n=4$:

$$\left(a_1+a_2+a_3+a_4\right)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\frac{1}{a_4}\right)\ge 10+\frac{9\left(a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2\right)}{a_1a_2+a_1a_3+a_1a_4+a_2a_3+a_2a_4+a_3a_4}$$

Xét bất đẳng thức: $\left(a_1+a_2+a_3\right)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}\right)\ge 9-k+\frac{k\left(a_1^2+a_2^2+a_3^2\right)}{a_1a_2+a_2a_3+a_3a_1}$

Các bạn có thể nhận ra $k=4$ chính là giá trị lớn nhất có thể để bất đẳng thức không bị đổi chiều. Với $n=4$ thì việc tìm ra hằng số k tốt nhất là 9 cũng chỉ vất vả hơn đôi chút.

Khi đã có trong tay ***GLA*** thì bước dự đoán trở nên không cần thiết và chúng ta có thể bắt tay ngay vào việc tìm hằng số k tốt nhất cho bài toán:

$$(a_1+a_2+...+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}\right)\ge n^2-k+\frac{k(n-1)\left(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2\right)}{2\sum\limits_{\substack{i,j=1\\ i\ne j}}^{n}a_ia_j}\ (*)$$

Giải: Chuyển a_1,a_2,a_3 về p,R,r ta cần tìm k sao cho:

$$(p+a_4+...+a_n)\left(\frac{4Rr+r^2}{pr^2}+\frac{1}{a_4}+...+\frac{1}{a_n}\right)\ge n^2-k+\frac{k(n-1)\left(p^2-8Rr-2r^2+a_4^2+...+a_n^2\right)}{2\left[(4Rr+r^2)+\sum\limits_{\substack{i,j=1\\ i\ne j}}^{n}a_ia_j-a_1a_2-a_2a_3-a_3a_1\right]}$$

Đến đây nếu ta chọn $(VT-VP)$ là một hàm theo p thì mọi chuyện trở nên khá phức tạp. Tuy nhiên nhận thấy $(VT-VP)$ là một hàm theo R thì ta thấy ngay hàm này đồng biến và đi đến kết luận $(VT-VP)$ đạt Min khi trong n biến $a_1,a_2,...,a_n$ có $n-1$ biến bằng nhau. Ta cần tìm k tốt nhất sao cho:

$$(n-1+x)\left(n-1+\frac{1}{x}\right)\ge n^2-k+\frac{k(n-1)(n-1+x^2)}{2\left[\frac{(n-2)(n-1)}{2}+(n-1)x\right]}$$

$$\Leftrightarrow n^2-2n+2+(n-1)\left(x+\frac{1}{x}\right)-n^2+k-\frac{k(n-1+x^2)}{n-2+2x}\ge 0\Leftrightarrow\frac{(n-1)(x-1)^2}{x}-\frac{k(x-1)^2}{n-2+2x}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow(n-1)(n-2+2x)-kx\ge 0$$

Cho $x\to+\infty$ ta dễ dàng nhận thấy hằng số k tốt nhất là $2(n-1)$. Tóm lại ta có

$$(a_1+a_2+...+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}\right)\ge n^2-2(n-1)+\frac{(n-1)^2\left(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2\right)}{\sum\limits_{\substack{i,j=1\\ i\ne j}}^{n}a_ia_j}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ $a_1=a_2=...=a_n$ hoặc $a_1=...=a_{n-1}$ và $a_n\to+\infty$ cùng các hoán vị

Bài 4. Cho $a_1,a_2,...a_n\ge 0$ và $a_1+a_2+...+a_n=n$.

Chứng minh rằng: $(n-1)\left(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2\right)+na_1a_2...a_n\ge n^2$

Chứng minh

Cố định $a_4,a_5,...a_n$ và a_1,b_1,c_1 đưa a_1,a_2,a_3 về p,R,r. Dễ thấy vế trái là một hàm nghịch biến theo R. Do đó ta chỉ cần xét trường hợp $(n-1)$ biến bằng nhau. Giả sử $a_1=a_2=...=a_{n-1}=t$ thì $a_n=n-(n-1)t$.

Ta cần chứng minh: $(n-1)\left[(n-1)t^2+(n-(n-1)t)^2\right]+nt^{n-1}[n-(n-1)t]\ge n^2$

$$\Leftrightarrow(n-1)\left[(n-1)t^2+(n-(n-1)t)^2-n\right]+n\left[nt^{n-1}-(n-1)t^n-1\right]\ge 0$$

$$\Leftrightarrow(n-1)\left[(n-1)(t^2-1)+(n-1)(1-t)[n+1-(n-1)t]\right]+n\left[nt^{n-1}(1-t)+(t^n-1)\right]\ge 0$$

$$\Leftrightarrow(n-1)^2(t-1)\left[(t+1)-(n+1-(n-1)t)\right]+n(1-t)\left[nt^{n-1}-(t^{n-1}+t^{n-2}+...+1)\right]\ge 0$$

$$\Leftrightarrow n(n-1)^2(t-1)^2-n(t-1)\left[(t^{n-1}-t^{n-2})+(t^{n-1}-t^{n-3})+...+(t^{n-1}-1)\right]\ge 0$$

$$\Leftrightarrow n(n-1)^2(t-1)^2 - n(t-1)^2\left[(n-1)t^{n-2}+(n-2)t^{n-3}+...+3t^2+2t+1\right]\ge 0$$

$$\Leftrightarrow n(t-1)^2\left[(n-1)^2-\left[(n-1)t^{n-2}+(n-2)t^{n-3}+...+3t^2+2t+1\right]\right]\ge 0$$

$$\Leftrightarrow [n-(n-1)t](t-1)^2\cdot A\ge 0 \quad (\text{trong đó } A>0)$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow t=1 \vee t=\dfrac{n}{n-1}$

Bài 5. Các số thực dương $a_1, a_2, ... a_n$ có tổng bằng n. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}-n\ge\frac{3}{n}\left(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2-n\right) \text{ với } n \text{ nguyên dương và lớn hơn 3.}$$

Chứng minh

Loại bỏ điều kiện ta cần chứng minh:

$$(a_1+a_2+...+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}\right)-n^2\ge\frac{4(n-1)}{n}\left[\frac{n^2\left(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2\right)}{(a_1+a_2+...+a_n)^2}-n\right]$$

Ta thấy ngay rằng *VT* đồng biến theo *R* còn vế phải nghịch biến theo *R*. Vì vậy ta chỉ cần xét trường hợp $(n-1)$ biến trong n biến bằng nhau. Ta cần chứng minh:

$$(n-1+a)\left(n-1+\frac{1}{a}\right)-n^2\ge\frac{4(n-1)}{n}\left[\frac{n^2(n-1+a^2)}{(n-1+a)^2}-n\right]$$

$$\Leftrightarrow\frac{(n-1)(a-1)^2}{a}\ge\frac{4(n-1)}{n}\cdot\frac{n(n-1)(a-1)^2}{(n-1+a)^2}\Leftrightarrow(a-1)^2(n-1-a)^2\ge 0$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=1$ hoặc $a=n-1$.

Vậy đẳng thức trong bất đẳng thức ban đầu xảy ra khi $a_1=a_2=...=a_n=1$

hoặc $a_1=a_2=...=a_{n-1}=\dfrac{n}{2(n-1)}, a_n=\dfrac{n}{2}$ và các hoán vị.

Bài 6. Cho $a_1, a_2, ... a_n\ge 0$ và $a_1a_2....a_n=1$. Chứng minh bất đẳng thức:

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}+\frac{3n}{a_1+a_2+...+a_n}\ge n+3$$

Chứng minh

Cố định $a_4, a_5, ... a_n$ và $a_1.b_1 + b_1.c_1 + c_1.a_1$. Ta thấy ngay VT nghịch biến theo p. Do đó ta chỉ cần xét trường hợp (n-1) biến bằng nhau. Giả sử $a_1=a_2=...=a_{n-1}=a$ thì $a_n=\dfrac{1}{a^{n-1}}$. Ta cần chứng minh: $g(a)=\dfrac{n-1}{a}+a^{n-1}+\dfrac{3na^{n-1}}{(n-1)a^n+1}\ge n+3$

$$g'(a)=(n-1)a^{n-2}-\frac{n-1}{a^2}+\frac{3n(n-1)a^{n-2}(1-a^n)}{[(n-1)a^n+1]^2}=\frac{(n-1)(a^n-1)\left\{[(n-1)a^n+1]^2-3na^n\right\}}{a^2[(n-1)a^n+1]^2}$$

$g'(a)=0 \Leftrightarrow (a^n-1)\left\{\left[(n-1)a^n+1\right]^2-3na^n\right\}=0$

Theo bất đẳng thức **AM – GM** thì $\left[(n-1)a^n+1\right]^2 \ge 4(n-1)a^n \ge 3na^n \; (\forall n \ge 4)$

Do đó $g'(a)$ cùng dấu với (a^n-1) và $g'(a)=0 \Leftrightarrow a=1$

Nếu $a \ge 1$ thì $g'(a) \ge 0 \Rightarrow g(a) \ge g(1)=n+3$;

Nếu $a \le 1$ thì $g'(a) \le 0 \Rightarrow g(a) \ge g(1)=n+3$

Vậy ta có (đpcm). Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a_1=a_2=...=a_n=1$.

Bài 7. Cho $a_1, a_2, ... a_n > 0$ có tổng bằng n. Chứng minh bất đẳng thức:

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}-n \ge \frac{8(n-1)}{n^2}(1-a_1a_2...a_n)$$

Chứng minh

Loại bỏ điều kiện ta được bài toán:

$$(a_1+a_2+...+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}\right)-n^2 \ge \frac{8(n-1)}{n}\left[1-\frac{n^n a_1a_2...a_n}{(a_1+a_2+...+a_n)^n}\right]$$

Cố định $a_4, a_5, ... a_n$ đưa a_1, a_2, a_3 về p, R, r ta cần chứng minh:

$$f(p,R,r)=(p+a_4+...+a_n)\left(\frac{4R+r}{pr}+\frac{1}{a_4}+...+\frac{1}{a_n}\right)-n^2-\frac{8(n-1)}{n}\left[1-\frac{n^n pr^2 a_4...a_n}{(p+a_4+...+a_n)^n}\right] \ge 0$$

Ta thấy ngay $f(p,R,r)$ đồng biến theo R. Do đó ta chỉ cần xét trường hợp $(n-1)$ biến bằng nhau. Giả sử $a_1=a_2=...=a_{n-1}=t \le 1$ thì $a_n=n-(n-1)t$.

Ta cần chứng minh: $\dfrac{n-1}{t}+\dfrac{1}{n-(n-1)t}-n \ge \dfrac{8(n-1)}{n^2}\left[1-t^{n-1}(n-(n-1)t)\right]$

$$\Leftrightarrow \frac{(n-1-nt)[n-(n-1)t]+t}{t[n-(n-1)t]} \ge \frac{8(n-1)}{n^2}\left[1-t^{n-1}(n-(n-1)t)\right]$$

$$\Leftrightarrow \frac{n(n-1)(t-1)^2}{t[n-(n-1)t]} \ge \frac{8(n-1)}{n^2}(t-1)^2\left[(n-1)t^{n-2}+(n-2)t^{n-3}+,,,+3t^2+2t+1\right]$$

$$\Leftrightarrow \frac{n^3}{8t[n-(n-1)t]\left[(n-1)t^{n-2}+(n-2)t^{n-3}+,,,+3t^2+2t+1\right]} \ge 1 \text{ (đúng } \forall t \le 1)$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a_1=a_2=...=a_n=1$

4. Bài tập áp dụng:

1. (China TST 2004) Chứng minh rằng nếu a,b,c,d là các số thực dương với tích bằng 1 thì $\frac{1}{(1+a)^2}+\frac{1}{(1+b)^2}+\frac{1}{(1+c)^2}+\frac{1}{(1+d)^2}\ge 1$

2. Cho $a,b,c>0$ $\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}=2$.

Chứng minh rằng: $ab+bc+ca\ge 4abc(a+b+c)$

3. Chứng minh rằng bất đẳng thức sau đúng với a,b,c,d là các số thực dương:

$$\left(1+\frac{2a}{b+c}\right)\left(1+\frac{2b}{c+a}\right)\left(1+\frac{2c}{d+a}\right)\left(1+\frac{2d}{a+b}\right)\ge 9$$

4. [Moldova TST 2005] Chứng minh rằng nếu a,b,c,d là các số thực dương và

$a^4+b^4+c^4=3$ thì: $\frac{1}{4-ab}+\frac{1}{4-bc}+\frac{1}{4-ca}\le 1$

5. Cho các số thực dương a,b,c,d và $a^2+b^2+c^2+d^2=4$.

Chứng minh rằng: $\frac{1}{a^3+bcd}+\frac{1}{b^3+cda}+\frac{1}{c^3+dab}+\frac{1}{d^3+abc}\ge 2$

6. Giả sử a,b,c là các số thực dương và $a^2+b^2+c^2=1$.

Chứng minh rằng: $\frac{a}{a^3+bc}+\frac{b}{b^3+ca}+\frac{c}{c^3+ab}\ge 3$

7. Cho $a,\ b,\ c\ge 0$ và $a+b+c=2$.

Chứng minh: $\frac{ab}{c+2}+\frac{bc}{a+2}+\frac{ca}{b+2}\le\frac{1}{2}$

8. Cho $a,\ b,\ c\ge 0$ và $a^2+b^2+c^2=1$. Chứng minh rằng:

$$1\le\frac{a}{1+bc}+\frac{b}{1+ca}+\frac{c}{1+ab}\le\sqrt{2}$$

9. Cho $a,\ b,\ c$ là các số không âm tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\frac{(a+b)^2}{c^2+ab}+\frac{(b+c)^2}{a^2+bc}+\frac{(c+a)^2}{b^2+ca}\ge 6$$

10. Chứng minh rằng với mọi số thực không âm a,b,c,d có tích bằng 1 thì:

$$(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)(1+d^2)\ge(a+b+c+d)^2$$

11. Chứng minh rằng với mọi a,b,c không âm thì:

$$\frac{7(a^3+b^3+c^3)}{a^2+b^2+c^2}+\frac{4(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)}{a^3+b^3+c^3}\geq 11(a+b+c)$$

12. Tìm hằng số thực k lớn nhất sao cho bất đẳng thức sau đúng $\forall a,b,c\geq 0$:

$$\frac{c^2+kab}{(a+b)^2}+\frac{b^2+kca}{(c+a)^2}+\frac{a^2+kbc}{(b+c)^2}\geq\frac{3(1+k)}{4}$$

13. Chứng minh rằng bất đẳng thức sau đúng với mọi a,b,c không âm và p,q là các hằng số thỏa mãn $p\geq -2, q\leq 2q+1$

$$\frac{a^2+qbc}{b^2+pbc+c^2}+\frac{b^2+qca}{c^2+pca+a^2}+\frac{c^2+qab}{a^2+pab+b^2}\geq\frac{3(q+1)}{p+2}$$

14. Cho các số dương a, b, c có tổng bằng 3. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2+b+c}+\frac{1}{b^2+c+a}+\frac{1}{c^2+a+b}\leq 1$$

15. Chứng minh rằng với mọi số thực không âm a,b,c

$$a^4+b^4+c^4+abc(a+b+c)\geq a^3(b+c)+b^3(c+a)+c^3(a+b)$$

16. Chứng minh rằng: Với mọi a, b, c không âm ta luôn có:

$$a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)\geq(ab+bc+ca)\cdot\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

17. Giả sử các số thực a, b, c thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=3$. Chứng minh rằng:

$$a^3(b+c)+b^3(c+a)+c^3(a+b)\leq 6$$

18. Giả sử a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}\right)\geq\frac{9}{1+abc}$$

19. Chứng minh rằng nếu a, b, c là các số dương và $abc\geq 1$ thì:

$$a+b+c\geq\frac{1+a}{1+b}+\frac{1+b}{1+c}+\frac{1+c}{1+a}$$

20. [USA MO 2001] Giả sử a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn đẳng thức $a^2+b^2+c^2+abc=4$. Chứng minh rằng: $abc+2\geq ab+bc+ca\geq abc$

VIII. ĐỊNH LÝ GLA TỔNG QUÁT

Trong những mục trước chúng ta đã thực hiện hai nội dung chính. Thứ nhất chúng ta đã tìm cách chuyển bất đẳng thức ban đầu với 3 biến a, b, c về bất đẳng thức mới với 3 biến *p, R, r* trong đó *p, R, r* lần lượt là nửa chu vi, bán kính đường tròn ngoại tiếp và bán kính đường tròn nội tiếp của tam giác XYZ với ba cạnh $b+c, c+a, a+b$. Sau đó với định lý III.3 và những ghi chú ở mục VII chúng ta nhận thấy nếu cực trị của hàm $f(p)$ đạt được khi p nhận giá trị biên với mọi *R, r* cố định thì ta cũng chỉ cần xét trường hợp trong 3 biến a, b, c có một biến bằng 0 hoặc hai biến bằng nhau. Nhờ nhận xét này mà việc giải quyết các bài toán đã trở nên rất gọn gàng. Tuy nhiên, với một số bài toán có dạng phức tạp thì việc quy về *p, R, r* là khá khó khăn và thiếu khôn ngoan. Trong trường hợp đó sử dụng mối tương quan giữa các biến a,b,c trong đại số và các yếu tố hình học *p, R, r* ta không cần quy về *p, R, r* nữa mà sẽ đi tìm những định lý trực tiếp cho các biến đại số.

Chú ý rằng nhờ các hệ thức IV.1 và IV.3 có thể nhận thấy thực chất việc cố định R, r là ta đã cố định hai đại lượng $ab + bc + ca$ và $\dfrac{a+b+c}{abc}$ rồi khảo sát hàm số một biến a + b + c. Ta sẽ vẫn giữ nguyên tư tưởng này, kèm theo một chút thay đổi để đi tới các định lý rất trong sáng sau đây.

Định lý 1: Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn $\begin{cases} abc = const \\ ab+ac+bc = const \end{cases}$ khi đó ta có:

- Nếu $f(a,b,c)$ là một hàm đồng biến theo $a+b+c$ thì nó sẽ đạt *min* khi trong 3 biến a,b,c có 2 biến bằng nhau và lớn hơn hoặc bằng biến còn lại; $f(a,b,c)$ đạt *max* khi trong 3 biến a,b,c có 2 biến bằng nhau và nhỏ hơn hoặc bằng biến còn lại.
- Nếu $f(a,b,c)$ là một hàm nghịch biến theo $a+b+c$ thì nó sẽ đạt *min* khi trong 3 biến a,b,c có 2 biến bằng nhau và nhỏ hơn hoặc bằng biến còn lại; $f(a,b,c)$ đạt *max* khi trong 3 biến a,b,c có 2 biến bằng nhau và lớn hơn hoặc bằng biến còn lại.

Chứng minh

Nội dung định lý có thể được phát biểu dưới dạng sau đây:

Nếu a,b,c,d,e thỏa mãn hệ điều kiện $\begin{cases} abc = d^2e \\ ab+ac+bc = d^2+2de \\ a \ge b \ge c \end{cases}$

Khi đó ta có: Nếu $d \ge e$ thì $a+b+c \ge 2d+e$

Nếu $d \le e$ thì $a+b+c \le 2d+e$

Thật vậy, xét hàm số:

$$f(x) = (x-a)(x-b)(x-c) - (x-d)^2(x-e) = (2d+e-a-b-c)x^2$$

Nếu $d \geq e$ thì $a^3 \geq abc = d^2e \geq e^3 \Rightarrow a \geq e$ mà $f(a) = -(a-d)^2(a-e) \leq 0$ hay $(2d + e - a - b - c)a^2 \leq 0 \Rightarrow a + b + c \geq 2d + e$

Nếu $d \leq e$ thì $c^3 \leq abc = d^2e \leq e^3 \Rightarrow c \leq e$ mà $f(c) = -(c-d)^2(c-e) \geq 0$ hay $(2d + e - a - b - c)a^2 \geq 0 \Rightarrow a + b + c \leq 2d + e$

Định lý được chứng minh.

Tiếp theo ta sẽ nghiên cứu hàm số $f(a,b,c) = a^t + b^t + c^t$ để dẫn đến một định lý có tính ứng dụng rất rộng rãi trong chứng minh bất đẳng thức.

Định lý 2: Cho $a,b,c > 0$ thỏa mãn tính chất $\begin{cases} abc = const \\ ab + ac + bc = const \end{cases}$ khi đó ta có

- Nếu $t \geq -1$ thì $f(a,b,c) = a^t + b^t + c^t$ đồng biến theo $a + b + c$
- Nếu $t \leq -1$ thì $f(a,b,c)$ nghịch biến theo $a + b + c$

Chứng minh

Xét $t \geq -1$

Ta cần chứng minh rằng nếu a,b,c,d,e,f là các số thực dương thỏa mãn:

$$\begin{cases} abc = def & (1) \\ ab + ac + bc = de + ef + fd & (2) \\ a + b + c \geq d + e + f \end{cases}$$

Thì $a^t + b^t + c^t \geq d^t + e^t + f^t$. Giả sử $a \geq b \geq c$ cố định d,e,f

Biểu diễn b,c theo a,d,e,f ta được:

Từ (1) $\Rightarrow bc = \dfrac{def}{a}$ (3)

Từ (2) $\Rightarrow b + c = \dfrac{de + ef + fd - bc}{a} = \dfrac{1}{a}\left(de + ef + fd - \dfrac{def}{a}\right)$ (4)

Từ (4) và (3) $\Rightarrow b - c = \dfrac{1}{a}\sqrt{\left(de + ef + fd - \dfrac{def}{a}\right)^2 - 4defa}$ (5)

Đặt $b = f_1(a); c = f_2(a)$, từ (4) và (5) suy ra:

$$f_2(a) = c = \frac{1}{2a}\left(de + ef + fe - \frac{def}{a} - \sqrt{\left(de + ef + fe - \frac{def}{a}\right)^2 - 4defa}\right)$$

Tính đạo hàm của b và c theo a ta được

$$\frac{\partial f_1(a)}{\partial b}=\frac{a\left(\dfrac{def}{a^2}+\dfrac{\dfrac{def}{a^2}\left(de+ef+fd-\dfrac{def}{a}\right)-2def}{\sqrt{\left(de+ef+fd-\dfrac{def}{a}\right)^2-4defa}}\right)-\left[de+ef+fd-\dfrac{def}{a}+\sqrt{\left(de+ef+fd-\dfrac{def}{a}\right)^2-4defa}\right]}{2a^2}$$

$$\frac{\partial f_2(a)}{\partial c}=\frac{a\left(\dfrac{def}{a^2}-\dfrac{\dfrac{def}{a^2}\left(de+ef+fd-\dfrac{def}{a}\right)-2def}{\sqrt{\left(de+ef+fd-\dfrac{def}{a}\right)^2-4defa}}\right)-\left[de+ef+fd-\dfrac{def}{a}-\sqrt{\left(de+ef+fd-\dfrac{def}{a}\right)^2-4defa}\right]}{2a^2}$$

Từ điều kiện giữa a,b,c,d,e,f ta đưa $\dfrac{\partial f_1(a)}{\partial b}$ và $\dfrac{\partial f_2(a)}{\partial c}$ về a,b,c ta có:

$$\frac{\partial f_1(a)}{\partial b}=\frac{a\left(\dfrac{abc}{a^2}+\dfrac{\dfrac{abc}{a^2}\left(ab+ac+bc-\dfrac{abc}{a}\right)-2abc}{\sqrt{(ab+ac+bc-bc)^2-4a^2bc}}\right)-\left[ab+ac+bc-\dfrac{abc}{a}+\sqrt{\left(ab+ac+bc-\dfrac{abc}{a}\right)^2-4a^2bc}\right]}{2a^2}$$

$$=\frac{bc+\dfrac{bc(ab+ac)-2abc}{\sqrt{(ab+ac)^2-4a^2bc}}-\left[ab+ac+\sqrt{(ab+ac)^2-4a^2bc}\right]}{2a^2}$$

$$=\frac{bc+\dfrac{abc(b+c-2a)}{a(b-c)}-\left[ab+ac+a(b-c)\right]}{2a^2}=-\frac{ab+\dfrac{bc(a-b)}{b-c}}{a^2}$$

Tương tự ta có: $\dfrac{\partial f_2(a)}{\partial c}=\dfrac{bc+bc\dfrac{a-b}{b-c}-ac}{a^2}$

Vậy $f(a,b,c)=a^t+b^t+c^t=a^t+\left[f_1(a)\right]^t+\left[f_2(a)\right]^t$

$$\frac{\partial f(a,b,c)}{\partial a}=t.a^{t-1}+t.b^{t-1}\cdot\frac{\partial f_1(a)}{\partial b}+t.c^{t-1}\cdot\frac{\partial f_2(a)}{\partial c}$$

$$=t.a^{t-1}+t.b^{t-1}.\left(-\frac{ab+bc\dfrac{a-b}{b-c}}{a^2}\right)+t.c^{t-1}\cdot\frac{bc+bc\dfrac{a-b}{b-c}-ac}{a^2}$$

$$=t.a^{t-1}-t.b^{t-1}\cdot\frac{b\cdot\dfrac{ab-ac+ac-bc}{b-c}}{a^2}+t.c^{t-1}\cdot\frac{c\cdot\dfrac{ab-c^2-ab+ac}{b-c}}{a^2}$$

$$=t.a^{t-1}-t.b^{t+1}\cdot\frac{\dfrac{a-c}{b-c}}{a^2}+t.c^{t+1}\cdot\frac{\dfrac{a-b}{b-c}}{a^2}$$

Xét 3 trường hợp sau đây:

- **Trường hợp 1**: Xét $t \geq 0$.

Ta sẽ chứng minh $\dfrac{\partial f(a,b,c)}{\partial a} \geq 0$. Thật vậy ta có:

$$\frac{\partial f(a,b,c)}{\partial a} \geq 0 \Leftrightarrow a^{t+1}(b-c) - b^{t+1}(a-c) + c^{t+1}(a-b) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(a^{t+1} - b^{t+1}\right)(b-c) - \left(b^{t+1} - c^{t+1}\right)(a-b) \geq 0 \qquad (*)$$

Để chứng minh (*) ta sẽ đi chứng minh:

$$\begin{cases} a^{t+1} - b^{t+1} \geq (t+1)(a-b)b^t & (6) \\ \mathrm{b}^{t+1} - c^{t+1} \leq (t+1)(b-c)b^t & (7) \end{cases}$$

Thật vậy: (6) $\Leftrightarrow a^{t+1} + t.b^t \geq (t+1)a.b^t$

Xét hàm $g(a) = a^{t+1} + t.b^t - (t+1)a.b^t$; $g'(a) = (t+1)a^t - (t+1)b^t \geq 0$

$\Rightarrow g(a)$ đồng biến theo $a \Rightarrow g(a) \geq g(b) = 0 \Rightarrow (6)$ đúng

$(7) \Leftrightarrow t.b^{t+1} + c^{t+1} \geq (t+1)b^t.c$

Xét hàm $h(c) = t.b^{t+1} + c^{t+1} - (t+1)b^t.c$; $h'(c) = (t+1)c^t - (t+1)b^t \leq 0$

$\Rightarrow h(c)$ nghịch biến theo $c \Rightarrow h(c) \geq h(b) = 0 \Rightarrow (7)$ đúng

Từ (6) và (7) suy ra $\left(a^{t+1} - b^{t+1}\right)(b-c) \geq \left(b^{t+1} - c^{t+1}\right)(a-b) \Rightarrow \dfrac{\partial f(a,b,c)}{\partial a} \geq 0$

Suy ra $f(a,b,c)$ đồng biến theo a (8)

Bây giờ ta giả sử $d \geq e \geq f$, ta sẽ chứng minh $a \geq d$

Xét hàm $f(x) = (x-a)(x-b)(x-c) - (x-d)(x-e)(x-f)$

$$= -(a+b+c-d-e-f)x^2 \leq 0,\ \forall x$$

$\Rightarrow f(d) = (d-a)(d-b)(d-c) \leq 0.$

Do $d^3 \geq def = abc \geq c^3$ nên $d \geq c$; kết hợp với $f(d) \leq 0 \Rightarrow b \leq d \leq a$ (9)

Từ (8) và (9) $\Rightarrow a^t + b^t + c^t$ đạt *min* khi $a = d$

Thay $a = d$ vào hệ phương trình ban đầu được:

$$\begin{cases} bc = ef \\ d(b+c) + bc = d(e+f) + ef \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} bc = ef \\ b+c = e+f \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{b} = \mathrm{e} \\ \mathrm{c} = \mathrm{f} \end{cases}$$

$$\Rightarrow a^t + b^t + c^t \geq d^t + e^t + f^t$$

- **Trường hợp 2:** Xét $-1 \le t < 0$

Ta sẽ chứng minh $\dfrac{\partial f(a,b,c)}{\partial a} \ge 0$. Thật vậy ta có:

$$\frac{\partial f(a,b,c)}{\partial a} \ge 0 \Leftrightarrow \left(a^{t+1} - b^{t+1}\right)(b-c) - \left(b^{t+1} - c^{t+1}\right)(b-c) \le 0$$

Với $-1 \le t < 0$ thì $g'(a) \le 0 \le h'(c) \Rightarrow \begin{cases} a^{t+1} - b^{t+1} \le (t+1)(a-b)b^t \\ b^{t+1} - c^{t+1} \ge (t+1)(b-c)b^t \end{cases}$

$$\Rightarrow \left(a^{t+1} - b^{t+1}\right)(b-c) \le (t+1)(a-b)(b-c)b^t \le \left(b^{t+1} - c^{t+1}\right)(a-b)$$

Phần tiếp theo chứng minh được trình bày như mục (8) trong trường hợp 1.

- **Trường hợp 3:** Xét $t \le -1$

Ta sẽ chứng minh $\dfrac{\partial f(a,b,c)}{\partial a} \le 0$. Thật vậy ta có:

$$\frac{\partial f(a,b,c)}{\partial a} \le 0 \Leftrightarrow \left(a^{t+1} - b^{t+1}\right)(b-c) - \left(b^{t+1} - c^{t+1}\right)(a-b) \ge 0 \quad (10)$$

Do $t \le -1$ nên $t+1 \le 0$ và $a^t \le b^t \le c^t$ nên ta có thể dễ dàng chứng minh (10) tương tự như trong chứng minh ở trường hợp (1).

Kết luận: Tổng hợp cả 3 trường hợp đã xét ta có định lý được chứng minh.

Các hệ quả

Hệ quả 1. Cho các số thực dương a, b, c. Khi đó biểu thức $a^t b^t + b^t c^t + c^t a^t$ đồng biến theo $a+b+c$ với $t < 1$ và nghịch biến theo $a+b+c$ với $t > 1$.

Chứng minh: Ta có $\dfrac{a^t b^t + b^t c^t + c^t a^t}{a^t b^t c^t} = a^{-t} + b^{-t} + c^{-t}$ đồng biến theo $a+b+c$ với $-t > -1 \Leftrightarrow t < 1$, nghịch biến theo $a+b+c$ với $-t < -1 \Leftrightarrow t > 1$

Hệ quả 2. Giả sử các số thực dương a, b, c thỏa mãn $\begin{cases} abc = const \\ a+b+c = const \end{cases}$. Khi đó biểu thức $(ab)^t + (bc)^t + (ca)^t$ đồng biến theo $ab+ac+bc$ với $t > -1$, nghịch biến theo $ab+ac+bc$ với $t < -1$

Chứng minh: Đặt $A = ab, B = ac, C = bc$.

Suy ra $\begin{cases} ABC = a^2b^2c^2 = const \\ AB + AC + BC = abc(a+b+c) = const \end{cases}$

Theo định lý 2 ta có: $A^t + B^t + C^t$ đồng biến theo $A+B+C$ với $t > -1$, nghịch biến theo $A+B+C$ với $t < -1$ ta có (đpcm).

Hệ quả 3. Giả sử các số thực dương a, b, c thỏa mãn $\begin{cases} abc = const \\ ab + ac + bc = const \end{cases}$. Khi đó

biểu thức $\sum_{cyc}(a^t + b^t)(a+b)$ đồng biến theo $a+b+c$ với $t > -1$ (*)

Chứng minh: $\sum_{cyc}(a^t + b^t)(a+b) = (a^{t+1} + b^{t+1} + c^{t+1}) + (a^t + b^t + c^t)(a+b+c)$ (**)

Từ định lý 2 và (**) suy ra (*) đúng

Hệ quả 4. Cho các số thực dương a, b, c. Khi đó biểu thức

$a^t(b+c) + b^t(c+a) + c^t(a+b)$ đồng biến theo $a+b+c$ với $0 < t < 1$

Chứng minh: $a^t(b+c) + b^t(c+a) + c^t(a+b)$ (*)

$= (a^{t-1} + b^{t-1} + c^{t-1})(ab+bc+ca) - abc(a^{t-2} + b^{t-2} + c^{t-2})$

Với $t > 0$ thì $t-1 > -1$. Suy ra $a^{t-1} + b^{t-1} + c^{t-1}$ đồng biến theo $a+b+c$ (2)

Với $t < 1$ thì $t-2 < -1$. Suy ra $a^{t-2} + b^{t-2} + c^{t-2}$ nghịch biến theo $a+b+c$ (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra (đpcm)

Nhận xét: Các hệ quả ở trên được phát biểu với số mũ t thực. Tuy nhiên trong thực tế dạng (*) chỉ hay gặp với $t = 2, 3, 4, 5$ và $0 < t < 1$ (dạng căn thức).

Chú ý: Định lý 2 không phát biểu được cho trường hợp n biến nhưng ta cũng có thể cố định $n-3$ biến trong n biến đó, sau đấy cho 3 biến còn lại biến thiên và áp dụng định lý 2 để suy ra để hàm đạt cực trị thì trong 3 biến này phải có 1 biến bằng 0 hoặc 2 biến bằng nhau.

Bây giờ ta cùng xét một số ví dụ.

<u>Ví dụ 1:</u> Cho $k \ge 0$, $a, b, c \ge 0$ và $a+b+c=3$.

Chứng minh rằng $(ab)^k + (bc)^k + (ca)^k \le \max\left\{3, \left(\frac{3}{2}\right)^{2k}\right\}$

Chứng minh

Đổi biến $A = bc$, $B = ca$, $C = ab$

Ta có: $\begin{cases} AB + BC + CA = abc(a+b+c) \\ ABC = (abc)^2 \end{cases}$

Cố định abc suy ra $AB + BC + CA$ và ABC đều cố định. Theo định lý 2 ta suy ra

$A^k + B^k + C^k$ là hàm đồng biến theo $A + B + C = ab + bc + ca$.

Theo định lý 1 ta chỉ cần chứng minh bài toán trong trường hợp 3 số A, B, C có 2 biến bằng nhau, cũng có nghĩa chỉ cần chứng minh bài toán ban đầu trong trường hợp trong 3 biến a, b, c có 2 biến bằng nhau. Đến đây bài toán chỉ còn là 1 biến và xin dành cho bạn đọc tự hoàn thiện.

Ví dụ 2: Cho $k \ge 0,\ a,b,c \ge 0$.

Chứng minh rằng $\left(\frac{a}{b+c}\right)^k + \left(\frac{b}{c+a}\right)^k + \left(\frac{c}{a+b}\right)^k \ge \min\left\{2, \frac{3}{2^k}\right\}$

Chứng minh

Đổi biến $A = \frac{a}{b+c}, B = \frac{b}{c+a}, C = \frac{c}{a+b}$. Khi đó ta có

$$AB + BC + CA = \frac{ab(a+b)bc(b+c)+ca(c+a)}{(a+b)(b+c)(c+a)} = 1 - \frac{2}{\frac{a+b+c}{abc}(ab+bc+ca)-1}$$

$$ABC = \frac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} = \frac{1}{\frac{a+b+c}{abc}(ab+bc+ca)-1}$$

Với mọi a, b, c tồn tại a', b', c' sao cho trong 3 số này có 2 số bằng nhau và

$$\begin{cases} \frac{a'+b'+c'}{a'b'c'} = \frac{a+b+c}{abc} \\ a'b'+b'c'+c'a' = ab+bc+ca \end{cases}$$

Khi đó đặt $A' = \frac{a'}{b'+c'}, B = \frac{b'}{c'+a'}, C = \frac{c'}{a'+b'}$ thì $\begin{cases} A'B'+B'C'+C'A' = AB+BC+CA \\ A'B'C' = ABC \\ (A'-B')(B'-C')(C'-A') = 0 \end{cases}$

Như vậy có thể áp dụng 2 định lý 1 và 2 suy ra chỉ cần chứng minh bài toán ban đầu trong trường hợp trong 3 số a, b, c có 2 số bằng nhau. Tóm lại, sơ đồ chứng minh của chúng ta là như sau. Đối với bất đẳng thức cần chứng minh $F(a,b,c) \ge 0$, ta đổi biến theo cách nào có thể dẫn tới bất đẳng thức $A^t + B^t + C^t \ge const$. Sau đó chứng minh rằng với mọi giá trị có thể của A, B, C luôn tồn tại a', b', c' sao cho khi đổi biến A', B', C' thỏa mãn

$$\begin{cases} A'B' = B'C' + C'A' = AB+BC+CA \\ A'B'C' = ABC \\ (A'-B')(B'-C')(C'-A') = 0 \end{cases} \qquad (*)$$

Như thế ta đã có thể áp dụng định lý 1 và định lý 2 để quy bài toán về trường hợp trong 3 biến A, B, C có 2 biến bằng nhau. Thực ra ta cần chứng minh hệ (*) có nghiệm vì định lý 1 chỉ được phát biểu cho R_+^3, trong khi đó (A, B, C) chỉ chạy trong 1 tập con nào đó của R_+^3, vì chúng còn bị ràng buộc bởi một quan hệ qua chính phép đổi biến.

Ví dụ 3. **[Tổng quát RMO 2000]** Cho $a, b, c \geq 0$ và $a+b+c=3$. Tìm hằng số k tốt nhất (nhỏ nhất) để bất đẳng thức sau đúng: $a^k+b^k+c^k \geq ab+bc+ca$ (1)

Cách 1: Ta đã biết kết quả khá quen thuộc sau: $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c} \geq ab+bc+ca$ do đó (1) đúng $\forall k \geq \frac{1}{2}$. Bây giờ ta xét bất đẳng thức khi $k \leq \frac{1}{2}$

Bổ đề: Giả sử $a+b=2t \geq 1$, khi đó: $a^k+b^k-ab \geq \min\left\{(2t)^k, 2t^k-t^2\right\}$

Chứng minh: Giả sử $a \geq b$. Tồn tại 1 số không âm x với $a=t+x, b=t-x$.

Xét hàm số $f(x)=(t+x)^k+(t-x)^k-t^2+x^2$; $f'(x)=k(t+x)^{k-1}-k(t-x)^{k-1}+2x$

$f''(x)=k(k-1)(t+x)^{k-2}+k(k-1)(t-x)^{k-2}+2$;

$f'''(x)=k(k-1)(k-2)\left[(t+x)^{k-3}-(t-x)^{k-3}\right]$

Như vậy $f'''(x)$ có nghiệm duy nhất $x=0$, do đó $f''(x)$ là hàm đơn điệu và có không quá 1 nghiệm, suy ra $f'(x)$ có không quá 2 nghiệm $(t \geq x \geq 0)$.

Vì $f'(0)=0$ và $f''(0)=2k(k-1)t^{k-2}+2=2-2k(1-k) \geq 0$. Do đó giá trị nhỏ nhất của f sẽ lấy tại $x=0$ hoặc $x=t$. Đó là đpcm.

Với bổ đề trên bài toán được chứng minh như sau:

Không mất tính tổng quát giả sử $a>b>c$. Đặt $a+b=2t \geq 1$, khi đó:

$a^k+b^k+c^k-(ab+bc+ca) \geq \min\left\{(2t)^k, 2t^k-t^2\right\}-2ct+c^k$ (2)

i) Nếu $(2t)^k \leq 2t^k-t^2$ thì áp dụng bổ đề với $2t$ và c:

$\text{VP}(2)=(2t)^k+c^k-2t\cdot c \geq \min\left\{(2t+c)^k, 2\left(t+\frac{c}{2}\right)^k-\left(t+\frac{c}{2}\right)^2\right\}$

Do $2t+c=3$ nên $a^k+b^k+c^k-(ab+bc+ca) \geq \min\left\{3^k, 2\left(\frac{3}{2}\right)^k-\frac{9}{4}\right\}$

ii) Nếu $(2t)^k \geq 2t^k-t^2$, ta có thể coi trường hợp này giống như $a=b=z \geq 1$, $c=3-2z$.

Xét hàm $g(z)=2z^k+(3-2z)^k-2z(3-2z)+z^2=2z^k+(3-2z)^k-6z+3z^2$

$g'(z)=2k.z^{k-1}-2k(3-2z)^{k-1}-6+6z$; $g''(z)=2k(k-1).z^{k-2}+4k(k-1)(3-2z)^{k-2}+6$

$g'''(z)=2k(k-1)(k-2)\left[z^{k-3}-4(3-2z)^{k-3}\right]$

Dễ thấy $g'''(z)$ vô nghiệm với $z \geq 1$, suy ra $g'(z)$ có không quá 2 nghiệm.

Do $\lim z \to \frac{3}{2} = -\infty$ nên giá trị nhỏ nhất của $g(z)$ với $\frac{3}{2} \geq z \geq 1$ lấy ở 2 đầu mút

$g(z) \geq \min\left\{0, 2\left(\frac{3}{2}\right)^k-\frac{9}{4}\right\}$. Kết hợp cả 2 trường hợp ta tìm được

$a^k+b^k+c^k-(ab+bc+ca) \geq \min\left\{0, 2\frac{3^k}{2^k}-\frac{9}{4}\right\}$

Để có $a^k+b^k+c^k \ge ab+bc+ca$ ta phải có $2\frac{3^k}{2^k}-\frac{9}{4}\ge 0 \Leftrightarrow k\ge \frac{2\ln 3-\ln 2}{\ln 3-\ln 2}\approx 0.2905$

Khi đó sẽ có 2 trường hợp xảy ra đẳng thức là $a=b=c=1$ hoặc $a=b=\frac{3}{2}, c=0$

Cách 2: Ta có $ab+bc+ca\le \frac{(a+b+c)^2}{3}=a+b+c$

Xét hàm số $f(k)=a^k+b^k+c^k\ (k\ge 1) \Rightarrow f'(k)=\ln k\left(a^k+^k+c^k\right)\ge 0$

Do $f(k)$ đồng biến theo k, tức là $a^k+b^k+c^k\ge a+b+c\ge ab+bc+ca$

Với k < 0 thì cho 1 biến = 0 và 2 biến $=\frac{3}{2}$ ta thấy ngay BĐT không thỏa mãn

Vậy ta chỉ cần xét $0\le k<1$. Loại bỏ điều kiện ta được bài toán

$(a+b+c)^{2-k}\left(a^k+b^k+c^k\right)\ge 3^{2-k}(ab+bc+ca)$

Cố định $abc, ab+bc+ca$ ta thấy ngay vế trái đồng biến theo p còn vế phải không đổi nên ta chỉ việc xét 2 biến bằng nhau và ≥ biến còn lại.

Đoạn xử lý với 1 biến bạn đọc có tham khảo cách 1.

Ví dụ 4. Cho $a,b,c,d\ \ge 0$ và $a+b+c+d=4$. Với $k>0$ cho trước, hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu thức A = $(abc)^k+(bcd)^k+(cda)^k+(dab)^k$

Giải

Biến đổi $A=(abc)^k+d^k.[(bc)^k+(ca)^k+(ab)^k]$. Cố định *d, abc*. Theo hệ quả 2 ta có A đồng biến theo *ab+ac+bc*. Suy ra A đạt max khi trong 3 biểu thức *ab,bc,ca* có 2 biểu thức bằng nhau cũng tức là trong 3 biến a,b,c có 2 biến bằng nhau. Tương tự khi cố định a,b hoặc c thay cho d. Suy ra ta chỉ phải xét trường hợp trong 4 biến a,b,c,d có 3 biến bằng nhau và lớn hơn hoặc bằng biến còn lại

Giả sử $a=b=c=t \Rightarrow d=4-3t$. Suy ra $A=g(t)=t^{3k}+3t^{2k}(4-3t)^k$

Do $t\ge 1$: Ta có $g'(t)=3k.t^{3k-1}+6k.t^{2k-1}(4-3t)^k-9k.t^{2k}(4-3t)^{k-1}$

$=3k.t^{2k-1}\left[t^k+2(4-3t)^k-3t(4-3t)^{k-1}\right]$

$g'(t)=0\Leftrightarrow t^k+2(4-3t)^k=3t(4-3t)^{k-1}\Leftrightarrow\left(\frac{t}{4-3t}\right)^k+2=3\cdot\frac{t}{4-3t}$.

Đặt $r=r(t)=\frac{t}{4-3t} \Rightarrow r(t)$ là một song ánh. Từ phương trình trên suy ra $g'(t)=0\Leftrightarrow r^k+2=3r$ (1). Phương trình (1) có không quá 2 nghiệm thực dương phân biệt do $g(1)=0 \Rightarrow g(t)\le \text{Max}\left\{g(1), g\left(\frac{4}{3}\right)\right\}=\text{Max}\left\{4,\left(\frac{4}{3}\right)^{3k}\right\}$

Các bài tập áp dụng

Bài 5: Tìm hằng số tốt nhất để bất đẳng thức sau đúng $\forall a,b,c\geq 0$:

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}}+\frac{kabc}{(a+b+c)^3}\geq 1+\frac{k}{27}$$

Bài 6: Cho $a_1,a_2,...,a_n>0$ và $a_1...a_n=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{(1+a_1)^k}+\frac{1}{(1+a_2)^k}+...+\frac{1}{(1+a_3)^k}\geq \min\left\{1,\frac{n}{2^k}\right\},\forall k\geq 0$$

Bài 7: Cho $a,b,c>0$, hằng số k cho trước. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$S=\left(\frac{a}{b+c}\right)^k+\left(\frac{b}{c+a}\right)^k+\left(\frac{c}{a+b}\right)^k \text{ với điều kiện } \frac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}=const\leq\frac{1}{8}$$

Bài 8: Cho $a_1,a_2,....,a_n\in[0,1]$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{1+a_1+a_2}+\frac{1}{1+a_2+a_3}+...+\frac{1}{1+a_n+a_1}\leq\frac{n}{1+2\sqrt[n]{a_1...a_n}}$$

Bài 9: Giả sử x,y,z là các số thực không âm thỏa mãn $xy+yz+zx=3$. Nếu $1<r\leq 2$ thì

$$x^r(y+z)+y^r(z+x)+z^r(x+y)\geq 6$$

Bài 10: Giả sử x,y,z là các số thực không âm thỏa mãn $xy+yz+zx=3$ và

$$p\geq\frac{\ln 9-\ln 4}{\ln 3}\approx 0.738 \text{ thì } x^p+y^p+z^p\geq 3$$

Bài 11: Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng

$$\left(a+\frac{b^2}{c}\right)^2+\left(b+\frac{c^2}{a}\right)^2+\left(c+\frac{a^2}{b}\right)^2\geq\frac{12(a^2+b^2+c^2)}{abc}$$

Bài 12: Cho $a,\ b,\ c\geq 0$ thỏa mãn $ab+bc+ca=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+kbc}}+\frac{1}{\sqrt{b^2+kca}}+\frac{1}{\sqrt{c^2+kab}}\geq\min\left\{\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{k}},\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{k+1}},\frac{1}{\sqrt{k}}+2\right\}$$

§21. PHƯƠNG PHÁP EV (EQUAL VARIABLE)

Định lý biến số bằng nhau (cũng được gọi là định lý $n-1$ biến số bằng nhau trên ***Mathlinks Site – Inequalities Forum***, hay thường viết tắt là ***Định lý EV – The Equal Variable Theorem***) là một công cụ rất mạnh để giải quyết một lớp các bất đẳng thức đối xứng khó. Trước tiên chúng ta sẽ trình bày cơ sở lý thuyết của phương pháp, sau đó sẽ giải quyết một số bất đẳng thức thực sự khó nếu như tấn công bằng những cách khác.

1. Phát biểu định lý

Để phát biểu và chứng minh ***Định lý EV*** ta sẽ sử dụng một bổ đề và một mệnh đề phụ sau

Bổ đề. Cho a,b,c là các số thực không âm không đồng thời bằng nhau và có nhiều nhất một số bằng 0, và giả sử các số thực không âm $x\le y\le z$ thỏa mãn

$$x+y+z=a+b+c \ (1),\quad x^p+y^p+z^p=a^p+b^p+c^p \ (2)$$

Trong đó $p\in(-\infty,0]\cup(1,+\infty)$. Với $p=0$, thì (2) được thay thế bởi điều kiện $xyz=abc>0$. Như thế tồn tại hai số thực x_1, x_2 với $0\le x_1<x_2$, thỏa mãn $x\in[x_1,x_2]$, hơn nữa

1) Nếu $x=x_1$ và $p\le 0$ thì $0<x<y=z$

2) Nếu $x=x_1$ và $p>1$ thì hoặc $0=x<y\le z$ hoặc $0<x<y=z$

3) Nếu $x\in(x_1,x_2)$ thì $x<y<z$

4) Nếu $x=x_2$ thì $x=y<z$

Chứng minh của bổ đề sẽ được trình bày trong mục (8,9)

Mệnh đề. Cho a,b,c là các số thực không âm không đồng thời bằng nhau và có nhiều nhất một số bằng 0, và giả sử $0\le x\le y\le z$ thỏa mãn

$$x+y+z=a+b+c \ (1),\quad x^p+y^p+z^p=a^p+b^p+c^p \ (2)$$

Trong đó $p\in(-\infty,0]\cup(1,+\infty)$. Với $p=0$, phương trình (2) trở thành $xyz=abc>0$. Giả sử $f(u)$ là hàm khả vi trên $(0,+\infty)$, thỏa mãn $g(x)=f'\left(x^{\frac{1}{p-1}}\right)$ là hàm lồi nghiêm ngặt trên $(0,+\infty)$, và đặt $F_3(x,y,z)=f(x)+f(y)+f(z)$

1) Nếu $p\le 0$ thì F_3 nhận giá trị lớn nhất khi và chỉ khi $0<x=y<z$ và F_3 nhận giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi $0<x<y=z$

2) Nếu $p>1$ và hoặc $f(u)$ liên tục tại $u=0$ hoặc $\lim\limits_{u\to 0}f(u)=-\infty$ thì F_3 lớn nhất chỉ khi $0<x=y<z$, và nhỏ nhất chỉ khi hoặc $x=0$ hoặc $0<x<y=z$.

Chứng minh. Theo giả sử $x \le y \le z$, từ các liên hệ $y+z=a+b+c-x$ và

$y^p+z^p=a^p+b^p+c^p-x^p$ ta có thể biểu diễn y và z theo x với $x\in[x_1,x_2]$.

Ta cho rằng hàm $F(x)=f(x)+f(y(x))+f(z(x))$ nhỏ nhất tại $x=x_1$ và lớn nhất tại $x=x_2$. Nếu điều giả định này là đúng, thì sử dụng bổ đề dẫn tới:

a) $F(x)$ nhỏ nhất khi $0<x=y<z$, nếu $p\le 0$,

và $F(x)$ nhỏ nhất khi hoặc $x=0$ hoặc $0<x<y=z$, nếu $p>1$;

b) $F(x)$ lớn nhất khi $0<x=y<z$.

Theo thứ tự, để chứng minh điều giả định ở trên, giả sử rằng $x\in(x_1,x_2)$.

Sử dụng bổ đề, ta có $0<x<y<z$. Từ $x+y(x)+z(x)=a+b+c$ và

$x^p+y^p(x)+z^p(x)=a^p+b^p+c^p$, ta thu được $y'+z'=-1,\quad y^{p-1}y'+z^{p-1}z'=-x^{p-1}$

Vì vậy $y'=\dfrac{x^{p-1}-z^{p-1}}{z^{p-1}-y^{p-1}},\quad z'=\dfrac{x^{p-1}-y^{p-1}}{y^{p-1}-z^{p-1}}$, có thể kiểm tra kết quả này là đúng khi $p=0$.

Ta có $F'(x)=f'(x)+y'f'(y)+z'f'(z)$ và

$$\frac{F'(x)}{(x^{p-1}-y^{p-1})(x^{p-1}-z^{p-1})}=\frac{g(x^{p-1})}{(x^{p-1}-y^{p-1})(x^{p-1}-z^{p-1})}+\frac{g(y^{p-1})}{(y^{p-1}-z^{p-1})(y^{p-1}-x^{p-1})}+\frac{g(z^{p-1})}{(z^{p-1}-x^{p-1})(z^{p-1}-y^{p-1})}$$

Do g là hàm lồi nghiêm ngặt, nên vế phải luôn dương.

Mặt khác, $(x^{p-1}-y^{p-1})(x^{p-1}-z^{p-1})>0$

Bởi vậy, $F'(x)>0$ và $F(x)$ tăng nghiêm ngặt với $x\in(x_1,x_2)$. Trừ trường hợp tầm thường khi $p>1$, $x_1=0$ và $\lim\limits_{u\to 0}f(u)=-\infty$, hàm $F(x)$ liên tục trên $[x_1,x_2]$ và vì vậy giá trị nhỏ nhất đạt được chỉ tại $x=x_1$ và giá trị lớn nhất đạt được chỉ tại $x=x_2$.

Định lý EV (Định lý về các biến số bằng nhau).

Cho $a_1,a_2,\dots,a_n$ $(n\ge 3)$ là các số thực không âm, và $0\le x_1\le x_2\le\ldots\le x_n$ thỏa mãn

$x_1+x_2+\ldots+x_n=a_1+a_2+\ldots+a_n$; $x_1^p+x_2^p+\ldots+x_n^p=a_1^p+a_2^p+\ldots+a_n^p$

Trong đó p là số thực, $p\ne 1$.

Với $p=0$, phương trình thứ hai được quy ước thay thế bởi $x_1x_2\ldots x_n=a_1a_2\ldots a_n>0$.

Giả sử $f(u)$ là hàm khả vi trên $(0,\infty)$, thỏa mãn $g(x)=f'\left(x^{\frac{1}{p-1}}\right)$ là lồi nghiêm ngặt trên $(0,\infty)$, và đặt $F_n(x_1,x_2,\dots,x_n)=f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)$

1. Nếu $p \le 0$ thì F_n lớn nhất khi $0 < x_1 = x_2 = \ldots = x_{n-1} \le x_n$ và nhỏ nhất khi

$0 \le x_1 \le x_2 = x_3 = \ldots = x_n$

2. Nếu $p > 0$ và hoặc $f(u)$ liên tục tại $u = 0$ hoặc $\lim\limits_{u \to 0} f(u) = -\infty$ thì F_n lớn nhất khi

$0 < x_1 = x_2 = \ldots = x_{n-1} \le x_n$, và nhỏ nhất khi $x_1 = \ldots = x_k = 0$ và $x_{k+2} = \ldots = x_n$

Trong đó $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$.

Chứng minh. Ta xét các trường hợp sau:

Nếu $p \in (-\infty, 0] \cup (1, +\infty)$. Trừ ra trường hợp tầm thường khi $p > 1$, $x_1 = 0$ và $\lim\limits_{u \to 0} f(u) = -\infty$, hàm $F_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ đạt được giá trị nhỏ nhất và lớn nhất và kết luận được suy ra từ mệnh đề đã nêu ở trên, sử dụng phản chứng. Ví dụ, xét trường hợp $p \le 0$. Cần chứng minh F_n lớn nhất tại $(b_1, b_2, \ldots b_n)$ với $b_1 \le b_2 \le \ldots \le b_n$ và $b_1 \le b_{n-1}$. Giả sử x_1, x_{n-1}, x_n là các số dương thỏa mãn $x_1 + x_{n-1} + x_n = b_1 + b_{n-1} + b_n$ và $x_1^p + x_{n-1}^p + x_n^p = b_1^p + b_{n-1}^p + b_n^p$. Áp dụng mệnh đề biểu thức $F_3(x_1, x_{n-1}, x_n) = f(x_1) + f(x_{n-1}) + f(x_n)$ lớn nhất chỉ tại $x_1 = x_{n-1} < x_n$, điều này mâu thuẫn với giả thiết của chúng ta rằng F_n đạt giá trị lớn nhất tại $(b_1, b_2, \ldots b_n)$ với $b_1 < b_{n-1}$.

Nếu $p \in (0, 1)$. Trường hợp này quy về trường hợp $p > 1$, thay thế lần lượt các biến a_i bởi $a_i^{\frac{1}{p}}$, các biến x_i bởi $x_i^{\frac{1}{p}}$, và p bởi $\frac{1}{p}$. Vì vậy ta có $h(x) = xf'\left(x^{\frac{1}{1-p}}\right)$ lồi nghiêm ngặt trên $(0, +\infty)$. Ta nhận thấy điều kiện này tương đương với điều kiện rằng $g(x) = f'\left(x^{\frac{1}{p-1}}\right)$ lồi nghiêm ngặt trên $(0, +\infty)$. Thật ra, đối với chứng minh của chúng ta, chỉ cần chứng minh rằng $g(x)$ lồi nghiêm ngặt trên $(0, +\infty)$ là đủ, khi đó $h(x)$ lồi nghiêm ngặt trên $(0, +\infty)$. Để chứng minh điều này, ta để ý $g\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} h(x)$. Do $g(x)$ lồi nghiêm ngặt trên $(0, +\infty)$, sử dụng bất đẳng thức ***Jensen*** ta có:

$$ug\left(\frac{1}{x}\right) + vg\left(\frac{1}{y}\right) > (u+v)\, g\left(\frac{\frac{u}{x} + \frac{v}{y}}{u+v}\right)$$ với mọi số dương x, y, u, v với $x \ne y$.

Bất đẳng thức này tương đương với $\frac{u}{x} h(x) + \frac{v}{y} h(y) > \left(\frac{u}{x} + \frac{v}{y}\right) h\left(\frac{u+v}{\frac{u}{x} + \frac{v}{y}}\right)$

với $u = tx$ và $v = (1-t)\, y$, trong đó $t \in (0, 1)$, bất đẳng thức này quy về

$t \cdot h(x) + (1-t)\, h(y) > h(tx + (1-t)\, y)$ điều này chứng tỏ $h(x)$ lồi nghiêm ngặt trên $(0, \infty)$

Ghi chú. Giả sử $0<\alpha<\beta$. ***Định lý EV*** vẫn đúng khi $x_1,x_2,\ldots,x_n\in(\alpha,\beta)$, hàm f khả vi trên (α,β) và hàm $g(x)=f'\left(x^{\frac{1}{p-1}}\right)$ lồi nghiêm ngặt trên $(\alpha^{p-1},\beta^{p-1})$ với $p>1$, hoặc $(\beta^{p-1},\alpha^{p-1})$ với $p<1$

Nhờ ***Định lý EV***, ta thu được một số kết quả rất có ích khi thực hành sau đây

Hệ quả 1. Cho $a_1,a_2,\ldots,a_n\geq 0;(n\geq 3)$ và giả sử $0\leq x_1\leq x_2\leq\ldots\leq x_n$ thỏa mãn $x_1+x_2+\ldots+x_n=a_1+a_2+\ldots+a_n, x_1^2+x_2^2+\ldots x_n^2=a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2$.

Giả sử f là hàm khả vi trên $(0,+\infty)$, thỏa mãn $g(x)=f'(x)$ lồi nghiêm ngặt trên $(0,+\infty)$. Hơn nữa, hoặc $f(x)$ liên tục tại $x=0$ hoặc $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=-\infty$. Như thế $F_n=f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)$ lớn nhất khi $0\leq x_1=x_2=\ldots x_{n-1}\leq x_n$ và nhỏ nhất khi $x_1=\ldots=x_k=0$ và $x_{k+2}=\ldots=x_n$, trong đó $k\in\{0,1,\ldots,n-1\}$

Hệ quả 2. Cho $a_1,a_2,\ldots,a_n\geq 0;(n\geq 3)$ và giả sử $0<x_1\leq x_2\leq\ldots\leq x_n$ thỏa mãn

$$x_1+x_2+\ldots+x_n=a_1+a_2+\ldots+a_n,\quad \frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}$$

Giả sử f là hàm khả vi trên $(0,\infty)$ thỏa mãn $g(x)=f'\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ lồi nghiêm ngặt trên $(0,+\infty)$.

Như thế $F_n=f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)$ lớn nhất khi $0\leq x_1=x_2=\ldots=x_{n-1}\leq x_n$, và nhỏ nhất khi $0<x_1\leq x_2=x_3=\ldots=x_n$

Hệ quả 3. Cho $a_1,a_2,\ldots,a_n\geq 0;(n\geq 3)$ và giả sử $0\leq x_1\leq x_2\leq\ldots\leq x_n$ thỏa mãn $x_1+x_2+\ldots+x_n=a_1+a_2+\ldots+a_n$, $x_1x_2\ldots x_n=a_1a_2\ldots a_n$.

Giả sử f là hàm khả vi trên $(0,+\infty)$ thỏa mãn $g(x)=f'\left(\frac{1}{x}\right)$ lồi nghiêm ngặt trên $(0,+\infty)$.

Như thế $F_n=f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)$ lớn nhất khi $0<x_1=x_2=\ldots=x_{n-1}\leq x_n$ và nhỏ nhất khi $0<x_1\leq x_2=x_3=\ldots=x_n$

Hệ quả 4. Cho $a_1,a_2,\ldots,a_n\ (n\geq 3)$ là các số không âm và giả sử $0\leq x_1\leq x_2\leq\ldots\leq x_n$ thỏa mãn $x_1+x_2+\ldots+x_n=a_1+a_2+\ldots+a_n$, $x_1^p+x_2^p+\ldots x_n^p=a_1^p+a_2^p+\ldots+a_n^p$

Trong đó p là một số thực, $p\neq 0, p\neq 1$

a) Với $p<0, P=x_1x_2\ldots x_n$ nhận giá trị nhỏ nhất khi $0\leq x_1=x_2=\ldots=x_{n-1}\leq x_n$ và nhận giá trị lớn nhất khi $0<x_1\leq x_2=x_3=\ldots=x_n$

b) Với $p>0, P=x_1x_2...x_n$ nhận giá trị nhỏ nhất khi $0\le x_1=x_2=...=x_{n-1}\le x_n$ và nhận giá trị lớn nhất khi hoặc $x_1=0$ hoặc $0<x_1\le x_2=x_3=...=x_n$

Chứng minh. Áp dụng ***Định lý EV*** cho hàm $f(u)=p\ln u$. Ta nhận thấy $\lim\limits_{u\to 0} f(u)=-\infty$

với $p>0$, và $f'(u)=\dfrac{p}{u}, g(x)=f'\left(x^{\frac{1}{p-1}}\right), g''(x)=\dfrac{p^2}{(1-p)^2}x^{\frac{2p-1}{1-p}}$

Do $g''(x)>0$ với $x>0$, hàm $g(x)$ lồi nghiêm ngặt trên $(0,+\infty)$, kết luận được kéo theo bởi ***Định lý EV***

Hệ quả 5. Cho $a_1,a_2,...,a_n$ $(n\ge 3)$ là các số không âm và giả sử $0\le x_1\le x_2\le...\le x_n$ thỏa mãn $x_1+x_2+...+x_n=a_1+a_2+...+a_n, x_1^p+x_2^p+...x_n^p=a_1^p+a_2^p+...+a_n^p$

1. Nếu $p\le 0$ ($p=0$ dẫn tới $x_1x_2...x_n=a_1a_2...a_n>0$)

a) Với $q\in(p,0)\cup(1,+\infty)$, $E=x_1^q+x_2^q+...+x_n^q$ nhận giá trị lớn nhất khi $0\le x_1=x_2=...=x_{n-1}\le x_n$, và nhận giá trị nhỏ nhất khi hoặc $x_1=0$ hoặc $0<x_1\le x_2=x_3=...=x_n$

b) Với $q\in(-\infty,0)\cup(p,1)$, $E=x_1^q+x_2^q+...+x_n^q$ nhận giá trị lớn nhất khi $0\le x_1=x_2=...=x_{n-1}\le x_n$, nhận giá trị nhỏ nhất khi $x_1=...x_k=0$ và $x_{k+2}=...=x_n$, với chỉ số $k\in\{0,1,...,n-1\}$ nào đó

2. Nếu $0<p<1$

a) Với $q\in(0,1)\cup(p,+\infty)$, $E=x_1^q+x_2^q+...+x_n^q$ nhận giá trị lớn nhất khi $0\le x_1=x_2=...=x_{n-1}\le x_n$, và nhận giá trị nhỏ nhất khi hoặc $x_1=0$ hoặc $0<x_1\le x_2=x_3=...=x_n$

b) Với $q=(-\infty,p)\cup(1,+\infty)$, $E=x_1^q+x_2^q+...+x_n^q$ nhận giá trị lớn nhất khi $0\le x_1=x_2=...x_{n-1}\le x_n$, nhận giá trị nhỏ nhất khi $x_1=...x_k=0$ và $x_{k+2}=...=x_n$, với chỉ số $k\in\{0,1,...,n-1\}$ nào đó

3. Nếu $p>1$:

a) Với $q=(0,1)\cup(p,\infty)$, $E=x_1^q+x_2^q+...+x_n^q$ nhận giá trị lớn nhất khi $0\le x_1=x_2=...=x_{n-1}\le x_n$, và nhận giá trị nhỏ nhất khi $x_{k+2}=...=x_n$ trong đó $k\in\{0,1,...,n-1\}$

b) Với $q=(-\infty,0)\cup(1,p)$, $E=x_1^q+x_2^q+\ldots+x_n^q$ nhận giá trị lớn nhất khi $0\le x_1=x_2=\ldots=x_{n-1}\le x_n$, và nhận giá trị nhỏ nhất khi $x_1=\ldots x_k=0$ và $x_{k+2}=\ldots=x_n$, trong đó $k\in\{0,1,\ldots,n-1\}$

Chứng minh. Ta sẽ áp dụng Định lý EV cho hàm $f(u)=q(q-1)(q-p)u^q$

Với $p>0$, dễ dàng kiểm tra rằng hoặc $f(u)$ liên tục tại $u=0$ (trong trường hợp $q>0$) hoặc $\lim\limits_{u\to 0}f(u)=-\infty$ (trong trường hợp $q<0$). Ta có $f'(u)=q^2(q-1)(q-p)u^{q-1}$ và

$$g(x)=f'\left(x^{\frac{1}{p-1}}\right)=q^2(q-1)(p-q)x^{\frac{q-1}{p-1}};g''(x)=\frac{q^2(q-1)^2(p-q)^2}{(p-1)^2}x^{\frac{2p-1}{1-p}}$$

Do $g''(x)>0$ với $x>0$, hàm số $g(x)$ lồi nghiêm ngặt trên $(0,+\infty)$ và kết luận được kéo theo bởi ***Định lý EV***

Hệ quả 6. Cho $a_1,a_2,\ldots,a_n\ (n\ge 3)$ là các số không âm, $p\in\{1,2\}$ và giả sử $0\le x_1\le x_2\le\ldots\le x_n$ thỏa mãn

$x_1+x_2+\ldots+x_n=a_1+a_2+\ldots+a_n;\ x_1^p+x_2^p+\ldots x_n^p=a_1^p+a_2^p+\ldots+a_n^p$

Biểu thức $E=\sum x_1x_2x_3$ lớn nhất khi $0\le x_1=x_2=\ldots=x_{n-1}\le x_n$, và nhỏ nhất khi $x_1=\ldots x_k=0$ và $x_{k+2}=\ldots=x_n$, trong đó $k\in\{0,1,\ldots,n-1\}$

Chứng minh. Sử dụng hệ thức quen thuộc

$6\sum x_1x_2x_3=\left(\sum x_1\right)^3-3\left(\sum x_1\right)\left(\sum x_1^2\right)+2\sum x_1^3$

Mệnh đề này kéo theo bởi hệ quả 5 (trường hợp $p=2$ và $q=3$, hoặc $p=3$ và $q=2$)

Hệ quả 7. Cho $a_1,a_2,\ldots,a_n\ (n\ge 3)$ là các số không âm và giả sử $0\le x_1\le x_2\le\ldots\le x_n$ thỏa mãn $x_1^2+x_2^2+\ldots x_n^2=a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2;\ x_1^3+x_2^3+\ldots x_n^3=a_1^3+a_2^3+\ldots+a_n^3$

Biểu thức $E=\sum x_1x_2x_3$ lớn nhất khi $0\le x_1=x_2=\ldots x_{n-1}\le x_n$ và nhỏ nhất khi $x_1=\ldots=x_k=0$ và $x_{k+2}=\ldots=x_n$ trong đó $k\in\{0,1,\ldots,n-1\}$

Chứng minh. Sử dụng hệ thức $6\sum x_1x_2x_3=\left(\sum x_1\right)^3-3\left(\sum x_1\right)\left(\sum x_1^2\right)+2\sum x_1^3$.

Tổng $\sum x_1x_2x_3$ lớn nhất (nhỏ nhất) khi $\sum x_1$ lớn nhất (nhỏ nhất). Bởi vậy, mệnh đề này kéo theo bởi hệ quả 5 (trường hợp $p=\frac{3}{2}$ và $q=\frac{1}{2}$), thay thế lần lượt $x_1,x_2,\ldots,x_n$ bởi $x_1^2,x_2^2,\ldots,x_n^2$.

2. Áp dụng

Bài 1. Nếu x, y, z là các số thực không âm thì

$$x^4(y+z)+y^4(z+x)+z^4(x+y)\le\frac{1}{12}(x+y+z)^5$$

Chứng minh

Viết lại bất đẳng thức dưới dạng $x^5+y^5+z^5+\frac{1}{12}(x+y+z)^5\ge(x+y+z)(x^4+y^4+z^4)$

Và áp dụng Hệ quả 5 (trường hợp $p=4$ và $q=5$):

- Nếu $0\le x\le y\le z$ thỏa mãn $x+y+z=\text{constant}$ và $x^4+y^4+z^4=\text{constant}$,

Thì tổng $x^5+y^5+z^5$ nhỏ nhất khi hoặc $x=0$ hoặc $0<x\le y=z$.

Trường hợp $x=0$. Bất đẳng thức trở thành $(y+z)(y^2-4yz+z^2)^2\ge 0$

Trường hợp $0<x\le y=z$. Bất đẳng thức quy về $(x+2y)^5-24x^4y-24y^4(x+y)\ge 0$

Do $(x+2y)^5>(2y)^3(x+2y)^2$, chỉ cần chứng minh $y^2(x+2y)^2-3x^4-3y^3(x+y)\ge 0$ là đủ

Thật vậy, ta có $y^2(x+2y)^2-3x^4-3y^3(x+y)=y^4-x^4+x(y^3-x^3)+x^2(y^2-x^2)\ge 0$

Nếu $x\le y\le z$, đẳng thức xảy ra khi $(x,y,z)\sim(0,3-\sqrt{3},3+\sqrt{3})$

Bài 2. Nếu x, y, z là các số thực không âm thỏa mãn $xy+yz+zx=1$ thì

$$x+y+z+3(2\sqrt{3}-3)xyz\ge 2$$

Chứng minh

Ta viết lại giả thiết dưới dạng $(x+y+z)^2=2+x^2+y^2+z^2$,

Áp dụng Hệ quả 4. (trường hợp $p=2$)

- Nếu $0\le x\le y\le z$ thỏa mãn $x+y+z=\text{constant}$ và $x^2+y^2+z^2=\text{constant}$

Thì tích xyz nhỏ nhất khi hoặc $x=0$ hoặc $0<x\le y=z$

Trường hợp $x=0$.

Ta phải chứng minh rằng từ $yz=1$ suy ra $y+z\ge 2$; điều này là hiển nhiên vì $y+z\ge 2\sqrt{yz}$.

Trường hợp $0<x\le y=z$. Giả thiết $xy+yz+zx=1$ quy về $2xy=(1-y)(1+y)$, và bất đẳng thức trở thành:

$$x+2y+3(2\sqrt{3}-3)xy^2\ge 2,\quad x+3(2\sqrt{3}-3)xy^2\ge\frac{4xy}{1+y},\quad 1+3(2\sqrt{3}-3)y^2\ge\frac{4y}{1+y}$$

$$1-3y+3(2\sqrt{3}-3)y^2+3(2\sqrt{3}-3)y^3\ge 0,\quad (1-\sqrt{3}y)^2\left[1+(2\sqrt{3}-3)y\right]\ge 0$$

Bất đẳng thức cuối cùng hiển nhiên đúng. Nếu $x \le y \le z$, ta có đẳng thức khi và chỉ khi $(x,y,z)=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ hoặc $(x,y,z)=(0,1,1)$.

Bài 3. Nếu $x,y,z \ge 0$ thỏa mãn $ab+bc+ca=1$ thì

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}-\frac{1}{a+b+c}\ge 2$$

Chứng minh

Đặt $b+c=2x,\ c+a=2y$ và $a+b=2x$. Ta cần chứng minh $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}-\frac{2}{x+y+z}\ge 4$ với $2(x^2+y^2+z^2)+1=(x+y+z)^2$. Để làm điều đó, ta sẽ áp dụng Hệ quả 5 (trường hợp $p=2$ và $q=-1$).

- Nếu $0\le x\le y\le z$ thỏa mãn $x+y+z=\text{constant}$ và $x^2+y^2+z^2=\text{constant}$ thì biểu thức $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$ nhỏ nhất khi $0<x=y\le z$

Trường hợp $0<x=y\le z$ tương đương với $a=b\ge c$. Điều kiện giả thiết $ab+bc+ca=1$ quy về $c=\frac{1-a^2}{2a}, 0<a\le 1$. Ta có

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}-\frac{1}{a+b+c}-2=\frac{1}{2a}+\frac{2}{a+c}-\frac{1}{2a+c}-2=$$

$$=\left(\frac{1}{2a}-\frac{1}{2a+c}\right)-2\left(1-\frac{1}{a+c}\right)=\frac{1-a^2}{2a(1+3a^2)}-\frac{2(1-a)^2}{1+a^2}=\frac{(1-a)(1-3a+5a^2-11a^3+12a^4)}{2a(1+3a^2)(1+a^2)}$$

Do $1-a\ge 0$, ta cần chứng minh rằng $1-3a+5a^2-11a^3+12a^4\ge 0$

Thật vậy, ta có $1-3a+5a^2-11a^3+12a^4=\left(1-\frac{3a}{2}\right)^2+11a^2\left(\frac{1}{2}-a\right)^2+a^4>0$

Nếu $a\ge b\ge c$, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $(a,b,c)=(1,1,0)$

Bài 4. Giả sử x,y,z,t là các số thực không âm thỏa mãn $x+y+z+t=3$.

Chứng minh rằng $$x^2y^2z^2+y^2z^2t^2+z^2t^2x^2+t^2x^2y^2\le 1$$

Chứng minh

Không mất tính tổng quát, ta giả sử rằng $x\le y\le z\le t$. Nếu $x=0$, bất đẳng thức trở thành $y^2z^2t^2\le 1$, với $y+z+t=3$. Từ bất đẳng thức ***AM – GM*** $yzt\le\left(\frac{y+z+t}{3}\right)^3$, ta thu được $yzt\le 1$, và vì vậy $y^2z^2t^2\le 1$.

Nếu $x>0$, viết lại bất đẳng thức dưới dạng $(xyzt)^2\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{t^2}\right)\le 1$

Và áp dụng Hệ quả 5 (trường hợp $p=0$ và $q=-2$):

• Nếu $0<x\le y\le z\le t$ thỏa mãn $x+y+z+t=3$ và $xyzt=$constant thì biểu thức $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{t^2}$ lớn nhất khi $0<x\le y=z=t$.

Nếu $0<x\le y=z=t$, từ $x+y+z+t=3$, ta thu được $0<y=z=t<1$ và $x=3(1-y)$

Bất đẳng thức quy về $3x^2y^4+y^6\le 1$

Sử dụng bất đẳng thức ***AM - GM***, ta có $x\frac{3y}{2}\cdot\frac{3y}{2}<\left(\frac{x+\frac{3y}{2}+\frac{3y}{2}}{3}\right)^3=1$, vì vậy $xy^2<\frac{4}{9}$.

Cho nên, chỉ cần chứng minh rằng $\frac{4}{3}xy^2+y^6\le 1$. Thật vậy, ta có

$$1-y^6-\frac{4}{3}xy^2=1-y^6-4(1-y)y^2=(1-y)\left(1+y-3y^2+y^3+y^4+y^5\right)>$$
$$>(1-y)\left(1+y-3y^2+y^4\right)=(1-y)\left[\left(1-y^2\right)^2+y(1-y)\right]>0$$

Đẳng thức xảy ra khi $(x,y,z,t)=(0,1,1,1)$ hoặc các hoán vị.

Ghi chú. Áp dụng này giải quyết bài toán đã được post bởi *Gabriel Dospinescu* trên *Mathlinks Site-Inequalities Forum* vào tháng 6 năm 2005 sau đây:

• Nếu x,y,z,t là các số không âm thỏa mãn $x+y+z+t=4$, tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $x^2y^2z^2+y^2z^2t^2+z^2t^2x^2+t^2x^2y^2$.

Giá trị lớn nhất là $\left(\frac{4}{3}\right)^6$, đạt được khi $(x,y,z,t)=\left(0,\frac{4}{3},\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right)$ và các hoán vị. Để nhận được kết quả này chúng ta thay x,y,z,t trong bất đẳng thức trên bởi $\frac{3x}{4},\frac{3y}{4},\frac{3z}{4},\frac{3t}{4}$

Bài 5. Giả sử x,y,z,t là các số không âm thỏa mãn $x+y+z+t=4$. Chứng minh rằng
$$xyz+yzt+ztx+txy+x^2y^2z^2+y^2z^2t^2+z^2t^2x^2+t^2x^2y^2\le 8$$

Chứng minh

Giả sử rằng $x\le y\le z\le t$. Nếu $x=0$, bất đẳng thức quy về $yzt+y^2z^2t^2\le 8$, với $y+z+t=4$. Từ bất đẳng thức ***AM – GM*** $27yzt\le(y+z+t)^3$, ta có $yzt\le\frac{64}{27}$, suy ra

$$\frac{yzt+y^2z^2t^2}{8}=\frac{yzt}{8}(1+yzt)\le\frac{8}{27}\left(1+\frac{64}{27}\right)=\frac{728}{729}<1$$

Nếu $x>0$, viết lại bất đẳng thức ở dạng
$$xyzt\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}\right)+x^2y^2z^2t^2\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{t^2}\right)\le 8,$$

và áp dụng hệ quả 5 (trường hợp $p=0$ và $q<0$):

• Nếu $0<x\le y\le z\le t$ thỏa mãn $x+y+z+t=4$ và $xyzt=$constant thì các tổng

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}$ và $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{t^2}$ lớn nhất khi $0<x\le y=z=t$

Nếu $0<x\le y=z=t$, do $x+y+z+t=4$, ta có $1\le y=z=t<\frac{4}{3}$ và $x=4-3t$.

Bất đẳng thức quy về

$3xt^2+t^3+3x^2t^4+t^6\le 8$; $4(7t^6-18t^5+12t^4-2t^3+3t^2-2)\le 0$; $4t^2(t-1)^2E(t)\le 0$

Trong đó $E(t)=7-\frac{4}{t}-\frac{3}{t^2}-\frac{4}{t^3}-\frac{2}{t^4}$.

Mà $E(t)<E\left(\frac{4}{3}\right)=\frac{-1}{128}$, bất đẳng thức cuối cùng hiển nhiên đúng.

Đẳng thức xảy ra khi $(x,y,z,t)=(1,1,1,1)$

Bài 6. Nếu x,y,z là các số thực không âm thỏa mãn $xy+yz+zx=3$ thì

$$\sqrt{\frac{1+2x}{3}}+\sqrt{\frac{1+2y}{3}}+\sqrt{\frac{1+2z}{3}}\ge 3$$

Chứng minh

Ta viết $xy+yz+zx=3$ dưới dạng $(x+y+z)^2=6+x^2+y^2+z^2$

Áp dụng Hệ quả 1 cho hàm $f(u)=\sqrt{\frac{1+2u}{3}}, u\ge 0$. Ta nhận được

$g(x)=f'(x)=\frac{1}{\sqrt{3(1+2x)}}$ và từ $g''(x)=\sqrt{3}(1+2x)^{\frac{-5}{2}}>0$, chứng tỏ $g(x)$ lồi nghiêm ngặt với $x\ge 0$. Áp dụng hệ quả 1, nếu $0\le x\le y\le z$ thỏa mãn $x+y+z=$constant và $x^2+y^2+z^2=$constant thì tổng

$\sqrt{\frac{1+2x}{3}}+\sqrt{\frac{1+2y}{3}}+\sqrt{\frac{1+2z}{3}}$ nhỏ nhất khi hoặc $x=0$ or $0<x\le y=z$

Trường hợp $x=0$. Ta phải chứng minh $\sqrt{1+2y}+\sqrt{1+2z}\ge 3\sqrt{3}-1$ với $yz=3$

Bình phương hai vế, bất đẳng thức trở thành $y+z+\sqrt{13+2(y+z)}\ge 13-3\sqrt{3}$

Thật vậy, ta có $y+z\ge 2\sqrt{yz}=2\sqrt{3}$, và do đó

$y+z+\sqrt{13+2(y+z)}\ge 2\sqrt{3}+\sqrt{13+4\sqrt{3}}>13-3\sqrt{3}$

Trường hợp $0<x\le y=z$. Từ $xy+yz+zx=3$, ta nhận được $x=\frac{3-y^2}{2y}, 0<y\le\sqrt{3}$.

Bất đẳng thức trở thành $\sqrt{1+\frac{3-y^2}{y}}+2\sqrt{1+2y}\ge 3\sqrt{3}$

Ký hiệu $t=\sqrt{\dfrac{1+2y}{3}}$, $\dfrac{1}{\sqrt{3}}<t\le\sqrt{\dfrac{1+2\sqrt{3}}{3}}<\dfrac{5}{4}$. Bất đẳng thức trở thành $\sqrt{\dfrac{3+4t^2-3t^4}{2(3t^2-1)}}\ge 3-2t$

Bình phương và nhân hai vế với 3, ta được $7-8t-14t^2+24t^3-9t^4\ge 0$ hay $(1-t)^2(7+6t-9t^2)\ge 0$. Bất đẳng thức này đúng, bởi vì

$$7+6t-9t^2=8-(3t-1)^2>8-\left(\frac{15}{4}-1\right)^2=\frac{7}{16}>0$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $(x,y,z)=(1,1,1)$

Bài 7. [Iran, 1996] Nếu $x,y,z\ge 0$, không có hai số nào cùng bằng 0 thì

$$\frac{1}{(x+y)^2}+\frac{1}{(y+z)^2}+\frac{1}{(z+x)^2}\ge\frac{9}{4(xy+yz+zx)}$$

Chứng minh

Nhờ tính thuần nhất, ta có thể giả sử $x+y+z=1$. Với giả thiết này, bất đẳng thức trở thành $\dfrac{1}{(1-x)^2}+\dfrac{1}{(1-y)^2}+\dfrac{1}{(1-z)^2}\ge\dfrac{9}{2-2(x^2+y^2+z^2)}$. Để chứng minh nó, ta sẽ áp dụng Hệ quả 1 cho hàm $f(u)=\dfrac{1}{(1-u)^2}$, $0\le u<1$. Ta có $g(x)=f'(x)=\dfrac{2}{(1-x)^3}$ và do $g''(x)=\dfrac{24}{(1-x)^5}>0$ chứng tỏ $g(x)$ lồi nghiêm ngặt với $0\le x<1$. Áp dụng hệ quả 1 và Ghi chú trong mục 5.1, nếu $0\le x\le y\le z$ thỏa mãn $x+y+z=1$ và $x^2+y^2+z^2=$constant thì tổng $\dfrac{1}{(1-x)^2}+\dfrac{1}{(1-y)^2}+\dfrac{1}{(1-z)^2}$ nhỏ nhất khi hoặc $x=0$ hoặc $0<x\le y=z$

Trường hợp $x=0$. Bất đẳng thức ban đầu trở thành

$$\frac{1}{y^2}+\frac{1}{(y+z)^2}+\frac{1}{z^2}\ge\frac{9}{4yz}\text{ hay }\frac{(y-z)^2(4y^2+7yz+4z^2)}{4y^2z^2(y+z)^2}\ge 0$$

Trường hợp $0<x\le y=z$. Bất đẳng thức ban đầu trở thành

$$\frac{2}{(x+y)^2}+\frac{1}{4y^2}\ge\frac{9}{4(2xy+y^2)}\text{ hay }\frac{x(x-y)^2}{2y^2(x+y)^2(2x+y)}\ge 0.$$

Đẳng thức xảy ra khi $(x,y,z)\sim(1,1,1)$ hoặc $(x,y,z)\sim(0,1,1)$ hoặc các hoán vị vòng.

Bài 8. Giả sử x,y,z là các số thực không âm, không có hai số nào cùng bằng 0.

Chứng minh rằng nếu $0\le r\le\dfrac{5}{2}$ thì $\displaystyle\sum\frac{1}{y^2+yz+z^2}\ge\frac{3(1+r)}{x^2+y^2+z^2+r(xy+yz+zx)}$

Chứng minh

Dựa vào tính thuần nhất, ta có thể giả sử $x+y+z=3$. Đặt $p=\dfrac{9+x^2+y^2+z^2}{6}$

Do $\dfrac{1}{2(y^2+yz+z^2)}=\dfrac{1}{(x+y+z)^2+x^2+y^2+z^2-2x(x+y+z)}=\dfrac{1}{6(p-x)}$

Bất đẳng thức trở thành $\dfrac{1}{p-x}+\dfrac{1}{p-y}+\dfrac{1}{p-z}\ge\dfrac{3(1+r)}{2p-3+r(3-p)}$

Để chứng minh bất đẳng thức này, ta sẽ áp dụng hệ quả 1 cho hàm

$f(u)=\dfrac{1}{p-u}, 0\le u<p$

Ta có $g(x)=f'(x)=\dfrac{1}{(p-x)^2}$ và $g''(x)=\dfrac{6}{(p-x)^2}>0$

Bởi thế, $g(x)$ lồi nghiêm ngặt với $0\le x<p$. Áp dụng hệ quả 1 và ghi chú trong mục 5.1, nếu $0\le x\le y\le z$ thỏa mãn $x+y+z=3$ và $x^2+y^2+z^2=$constant, thì tổng

$\dfrac{1}{p-x}+\dfrac{1}{p-y}+\dfrac{1}{p-z}$ nhỏ nhất khi hoặc $x=0$ or $0<x\le y=z$

Trường hợp $x=0$. Bất đẳng thức ban đầu trở thành

$\dfrac{1}{y^2}+\dfrac{1}{z^2}+\dfrac{1}{y^2+yz+z^2}\ge\dfrac{3(1+r)}{y^2+z^2+ryz}$ hay $s+\dfrac{1}{s+1}\ge\dfrac{3(1+r)}{s+r}$,

Trong đó $s=\dfrac{y}{z}+\dfrac{z}{y}$, $s\ge 2$. Hay $s^3+s^2-2s-3+r(s^2-2s-2)\ge 0$

Do $s^2-2s-2=(s-2)^2+2(s-1)>0$, chỉ cần xét trường hợp $r=\dfrac{5}{2}$. Trong trường hợp này, bất đẳng thức trở thành $(s-2)(2s^2+11s+8)\ge 0$

Trường hợp $0<x\le y=z$. Bất đẳng thức ban đầu trở thành

$\dfrac{2}{x^2+xy+y^2}+\dfrac{1}{3y^2}\ge\dfrac{3(1+r)}{x^2+2y^2+r(2xy+y^2)}$

Từ việc bất đẳng thức này là thuần nhất, ta có thể giả sử $x\le y=1$. Với giả thiết này, bất đẳng thức tương đương với $x^4+x^3-7x+5+2r(x-1)^3\ge 0$ hay

$(x-1)^2\left[x^2+3x+5+2r(x-1)\right]\ge 0$

Từ $x^2+3x+5+2r(x-1)=x^2+8x+(5-2r)(1-x)>0$, chứng minh hoàn thành.

Đẳng thức xảy ra khi $(x,y,z)\sim(1,1,1)$. Trong trường hợp riêng $r=\dfrac{5}{2}$, đẳng thức còn xảy ra khi $(x,y,z)\sim(0,1,1)$ hoặc các hoán vị vòng.

Ghi chú. Với $r=2$, ta có bất đẳng thức quen biết $\sum \frac{1}{y^2+yz+z^2} \ge \frac{9}{(x+y+z)^2}$

Bài 9. Giả sử x, y, z là các số thực không âm thỏa mãn $x+y+z=3$. Nếu $r \ge \frac{8}{3}$ thì

$$\frac{1}{r+x^2+y^2}+\frac{1}{r+y^2+z^2}+\frac{1}{r+x^2+z^2} \le \frac{3}{r+2}$$

Chứng minh

Đặt $p=r+x^2+y^2+z^2$. Ta cần chứng minh $\frac{1}{p-x^2}+\frac{1}{p-y^2}+\frac{1}{p-z^2} \le \frac{3}{r+2}$

Với $x+y+z=3$ và $x^2+y^2+z^2=p-r$. Để chứng minh điều này, ta sẽ áp dụng hệ quả 1 cho hàm $f(u)=\frac{1}{p-u^2}, 0 \le u \le \sqrt{p}$.

Ta có $g(x)=f'(x)=\frac{2x}{(p-x^2)^2}$ và $g''(x)=\frac{24x(p+x^2)}{(p-x^2)^4}$

Do $g''(x)>0$ với $x>0$, hàm $g(x)$ lồi nghiêm ngặt với $0 \le x \le \sqrt{p}$. Áp dụng hệ quả 1, nếu $0 \le x \le y \le z$ thỏa mãn $x+y+z=3$ và $x^2+y^2+z^2=$constant thì tổng

$\frac{1}{p-x^2}+\frac{1}{p-y^2}+\frac{1}{p-z^2}$ nhỏ nhất khi $0 \le x=y \le z$. Vì thế, chỉ cần xét trường hợp $x=y$. Ta cần chứng minh rằng với giả thiết $2x+z=3$ bất đẳng thức sau đúng

$\frac{1}{r+2x^2}+\frac{2}{r+x^2+z^2} \le \frac{3}{r+2}$. Viết bất đẳng thức này dưới dạng sau đây

$$\frac{1}{r+2x^2}+\frac{2}{r+9-12x+5x^2} \le \frac{3}{r+2} \Leftrightarrow 5x^4-12x^3+(2r+6)x^2-4(r-1)x+2r-3 \ge 0$$

$\Leftrightarrow (x-1)^2(5x^2-2x+2r-3) \ge 0$. Do $5x^2-2x+2r-3=5\left(x-\frac{1}{5}\right)^2+2\left(r-\frac{8}{5}\right) \ge 0$

Bất đẳng thức cuối cùng hiển nhiên đúng. Đẳng thức xảy ra khi $(x,y,z)=(1,1,1)$. Trong trường hợp đặc biệt $r=\frac{8}{5}$, đẳng thức còn xảy ra khi $(x,y,z)=\left(\frac{1}{5},\frac{1}{5},\frac{13}{5}\right)$ hoặc các hoán vị vòng.

Bài 10. Giả sử x, y, z là các số thực không âm thỏa mãn $x^2+y^2+z^2=3$. Nếu $r \ge 10$ thì

$$\frac{1}{r-(x+y)^2}+\frac{1}{r-(y+z)^2}+\frac{1}{r-(z+x)^2} \le \frac{3}{r-4}$$

Chứng minh

Đặt $s=x+y+z$. Ta cần chứng minh rằng

$$\frac{1}{r-(s-x)^2}+\frac{1}{r-(s-y)^2}+\frac{1}{r-(s-z)^2} \le \frac{3}{r-4}$$

Với $x+y+z=s$ và $x^2+y^2+z^2=3$.

Áp dụng Hệ quả 1 cho hàm $f(u)=\dfrac{-1}{r-(s-u)^2}$ với $0\le u\le s$.

Ta có $g(x)=f'(x)=\dfrac{2(s-x)}{\left[r-(s-x)^2\right]^2}$ và $g''(x)=\dfrac{24(s-x)\left[r+(s-x)^2\right]}{\left[r-(s-x)^2\right]^4}$

Do $g''(x)>0$ với $0\le x<s$, hàm $g(x)$ lồi nghiêm ngặt với $0\le x\le s$. Áp dụng Hệ quả 1, nếu $0\le x\le y\le z$ thỏa mãn $x+y+z=$ constant và $x^2+y^2+z^2=3$ thì tổng

$\dfrac{-1}{r-(s-x)^2}+\dfrac{-1}{r-(s-y)^2}+\dfrac{-1}{r-(s-z)^2}$ nhỏ nhất khi hoặc $x=0$ hoặc $0<x\le y=z$. Vì thế chỉ cần xét các trường hợp $x=0$ và $0<x\le y=z$.

Trường hợp $x=0$. Ta cần chứng minh rằng từ $y^2+z^2=3$ dẫn tới

$\dfrac{1}{r-y^2}+\dfrac{1}{r-z^2}+\dfrac{1}{r-(y+z)^2}\le\dfrac{3}{r-4}$. Do $\dfrac{1}{r-y^2}+\dfrac{1}{r-z^2}+\dfrac{2r-3}{r^2-3r+y^2z^2}\le\dfrac{2r-3}{r(r-3)}$

Và $(y+z)^2\le 2(y^2+z^2)=6$, chỉ cần chứng minh rằng $\dfrac{2r-3}{r(r-3)}+\dfrac{1}{r-6}\le\dfrac{3}{r-4}$

Bất đẳng thức này quy về $\dfrac{3(r^2-12r+24)}{r(r-3)(r-4)(r-6)}\ge 0$,

Điều này đúng bởi vì $r^2-12r+24=(r-2)(r-10)+4>0$

Trường hợp $0<x\le y=z$. Viết bất đẳng thức ở dạng thuần nhất

$$\sum\frac{1}{r(x^2+y^2+z^2)-3(y+z)^2}\le\frac{3}{(r-4)(x^2+y^2+z^2)}$$

Do $y=z>0$, ta có thể giả sử $y=z=1$. Đặt $t=r(x^2+2)$, $t>2r\ge 20$, bất đẳng thức trở thành

$\dfrac{1}{t-12}+\dfrac{2}{t-3x^2-6x-3}\le\dfrac{3}{t-4x^2-8}$, hay $\dfrac{6(x-1)^2(t-2x^2-8x-18)}{(t-12)(t-3x^2-6x-3)(t-4x^2-8)}\ge 0$.

Bất đẳng thức cuối cùng đúng bởi vì

$t-2x^2-8x-18=r(x^2+2)-2x^2-8x-18\ge 10(x^2+2)-2x^2-8x-18=2(2x-1)^2\ge 0$ Đẳng thức xảy ra khi $(x,y,z)=(1,1,1)$. Trong trường hợp đặc biệt $r=10$, đẳng thức còn xảy ra khi $(x,y,z)=\left(\dfrac{1}{\sqrt3},\dfrac{2}{\sqrt3},\dfrac{2}{\sqrt3}\right)$ hoặc các hoán vị vòng.

Bài 11. Nếu x,y,z là các số thực không âm thì

$$\frac{yz}{3x^2+y^2+z^2}+\frac{xz}{3y^2+z^2+x^2}+\frac{xy}{3z^2+x^2+y^2}\le\frac{3}{5}$$

Chứng minh

Thay x, y, z bởi $\sqrt{x}, \sqrt{y}, \sqrt{z}$ tương ứng, bất đẳng thức trở thành

$$\frac{\sqrt{yz}}{3x+y+z}+\frac{\sqrt{xz}}{3y+z+x}+\frac{\sqrt{xy}}{3z+x+y}\le\frac{3}{5}$$

Không mất tính tổng quát, ta giả sử rằng $x\le y\le z$. Nếu $x=0$, bất đẳng thức quy về $3\left(\sqrt{y}-\sqrt{z}\right)^2+\sqrt{yz}\ge 0$, hiển nhiên đúng. Nếu $x>0$, do bất đẳng thức này thuần nhất, ta giả sử rằng $x+y+z=2$, và viết lại nó dưới dạng

$$\frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}+\frac{1}{\sqrt{y}(y+1)}+\frac{1}{\sqrt{z}(z+1)}\le\frac{6}{5\sqrt{xyz}}$$

Bây giờ ta sẽ áp dụng hệ quả cho hàm $f(u)=\dfrac{-1}{\sqrt{u}(u+1)}, u>0$

Ta có $f'(u)=\dfrac{3u+1}{2u\sqrt{u}(u+1)^2}$ và $g(x)=f'\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{x^2\sqrt{x}(x+3)}{2(x+1)^2}$, $g''(x)=\dfrac{\sqrt{x}\left(3x^2+11x^2+5x+45\right)}{8(x+1)^4}$

Do $g''(x)>0$ với $x>0$, $g(x)$ lồi nghiêm ngặt trên $(0,+\infty)$. Áp dụng hệ quả 3, nếu $0<x\le y\le z$ thỏa mãn $x+y+z=2$ và $xyz=\text{constant}$, thì tổng

$$\frac{-1}{\sqrt{x}(x+1)}+\frac{-1}{\sqrt{y}(y+1)}+\frac{-1}{\sqrt{z}(z+1)}$$ lớn nhất khi $0<x\le y=z$

Vì thế, chỉ cần chứng minh bất đẳng thức ban đầu trong trường hợp $y=z>0$. Hơn nữa, nhờ tính thuần nhất, ta có thể giả sử $y=z=1$. Bất đẳng thức quy về

$9x^4-30x^3+37x^2-20x+4\ge 0$, hay $(x-1)^2(3x-2)^2\ge 0$

Đẳng thức xảy ra khi $(x,y,z)\sim(1,1,1)$, hoặc khi $(x,y,z)\sim\left(\dfrac{2}{3},1,1\right)$ hoặc các hoán vị vòng.

Bài 12. Nếu x, y, z là các số thực không âm thỏa mãn $x+y+z=2$.

Chứng minh rằng $$\frac{yz}{x^2+1}+\frac{zx}{y^2+1}+\frac{xy}{z^2+1}\le 1$$

Chứng minh

Ta giả sử rằng $x\le y\le z$. Nếu $x=0$, bất đẳng thức quy về $yz\le 1$, hiển nhiên đúng khi $y+z=2$. Ngược lại, ta viết bất đẳng thức dưới dạng

$\dfrac{1}{x\left(x^2+1\right)}+\dfrac{1}{y\left(y^2+1\right)}+\dfrac{1}{z\left(z^2+1\right)}\le\dfrac{1}{xyz}$ và áp dụng hệ quả 3 cho hàm

$f(u)=\dfrac{-1}{u\left(u^2+1\right)}, u>0$. Ta có $f'(u)=\dfrac{3u^2+1}{u^2\left(u^2+1\right)^2}$ và $g(x)=f'\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{x^4\left(x^2+3\right)}{\left(x^2+1\right)^2}$,

$$g''(x)=\frac{2x^2\left(x^6+5x^4-7x^2+12\right)}{\left(x^2+1\right)^4}$$

Do $g''(x)>0$ với $x>0, g(x)$ lồi nghiêm ngặt trên $(0,+\infty)$. Áp dụng hệ quả 3, nếu $0<x\le y\le z$ thỏa mãn $x+y+z=2$ và $xyz=\text{constant}$ thì tổng

$$\frac{-1}{x(x^2+1)}+\frac{-1}{y(y^2+1)}+\frac{-1}{z(z^2+1)}$$

Nhỏ nhất khi $0<x\le y=z$ ta nhận được $0<y=z\le 1$ và $x=2(1-y)$.

Bất đẳng thức trở thành $(y-1)^2(19y^2-18y+5)\ge 0$, hiển nhiên đúng.

Nếu $x\le y\le z$, đẳng thức xảy ra khi $(x,y,z)=(0,1,1)$

Bài 13. Giả sử $x,y,z\ge 0$ thỏa mãn $x+y+z=2$. Nếu $r_0<r\le 3$, trong đó

$$r_0=\frac{\ln 2}{\ln 3-\ln 2}\approx 1.71, \text{ thì } x^r(y+z)+y^r(z+x)+z^r(x+y)\le 2$$

Chứng minh

Viết lại bất đẳng thức dưới dạng thuần nhất

$$x^{r+1}+y^{r+1}+z^{r+1}+2\left(\frac{x+y+z}{2}\right)^{r+1}\ge(x+y+z)(x^r+y^r+z^r)$$

Và áp dụng Hệ quả 5 (trường hợp $p=r$ và $q=r+1$)

- Nếu $0\le x\le y\le z$ thỏa mãn $x+y+z=\text{constant}$ và $x^r+y^r+z^r=\text{constant}$

Tổng $x^{r+1}+y^{r+1}+z^{r+1}$ nhỏ nhất khi $x=0$ hoặc $0<x\le y=z$

Trường hợp $x=0$. Bất đẳng thức khởi đầu trở thành $yz\left(y^{r-1}+z^{r-1}\right)\le 2$.

Trong đó $y+z=2$. Do $0<r-1\le 2$, sử dụng bất đẳng thức trung bình lũy thừa ta

có $\frac{y^{r-1}+z^{r-1}}{2}\le\left(\frac{y^2+z^2}{2}\right)^{\frac{r-1}{2}}$. Vì vậy, chỉ cần chứng minh rằng $yz\left(\frac{y^2+z^2}{2}\right)^{\frac{r-1}{2}}\le 1$

Sử dụng $\frac{y^2+z^2}{2}=\frac{2(y^2+z^2)}{(r+z)^2}\ge 1$ và $\frac{r-1}{2}\le 1$, ta có

$$1-yz\left(\frac{y^2+z^2}{2}\right)^{\frac{r-1}{2}}\ge 1-yz\left(\frac{y^2+z^2}{2}\right)=\frac{(y+z)^4}{16}-\frac{yz(y^2+z^2)}{2}=\frac{(y-z)^4}{16}\ge 0$$

Trường hợp $0<x\le y=z$. Trong bất đẳng thức thuần nhất, ta bỏ đi điều kiện $x+y+z=2$, và xét $y=z=1, 0<x\le 1$. Bất đẳng thức quy về $\left(1+\frac{x}{2}\right)^{r+1}-x^r-x-1\ge 0$

Do $\left(1+\frac{x}{2}\right)^{r+1}$ tăng và x^r giảm khi r tăng, chỉ cần xét trường hợp $r=r_0$.

Đặt $f(x)=\left(1+\frac{x}{2}\right)^{r_0+1}-x^{r_0}-x-1$

Ta có $f'(x)=\dfrac{r_0+1}{2}\left(1+\dfrac{x}{2}\right)^{r_0}-r_0x^{r_0-1}-1$, $\dfrac{1}{r_0}f''(x)=\dfrac{r_0+1}{4}\left(1+\dfrac{x}{2}\right)^{r_0}-\dfrac{r_0-1}{x^{2-r_0}}$

Do $f''(x)$ tăng trên $(0,1]$, $f''(0_+)=-\infty$ và

$\dfrac{1}{r_0}f''(1)=\dfrac{r_0+1}{4}\left(\dfrac{3}{2}\right)^{r_0}-r_0+1=\dfrac{r_0+1}{2}-r_0+1=\dfrac{3-r_0}{2}>0$

Tồn tại $x_1\in(0,1)$ thỏa mãn $f''(x_1)=0$, $f''(x)<0$ với $x\in(0,x_1)$, và $f''(x)>0$ với $x\in(x_1,1]$. Vì thế, hàm $f'(x)$ giảm nghiêm ngặt với $x\in[0,x_1]$, và tăng nghiêm ngặt với $x\in[x_1,1]$. Do $f'(0)=\dfrac{r_0-1}{2}>0$ và $f'(1)=\dfrac{r_0+1}{2}\left[\left(\dfrac{3}{2}\right)^{r_0}-2\right]=0$, tồn tại $x_2\in(0,x_1)$ thỏa mãn $f'(x_2)=0$, $f'(x)>0$ với $x\in[0,x_2)$, và $f'(x)<0$ với $x\in(x_2,1)$. Vì vậy hàm $f(x)$ tăng nghiêm ngặt với $x\in[0,x_2]$, và giảm nghiêm ngặt với $x\in[x_2,1]$. Do $f(0)=f(1)=0$, chứng tỏ rằng $f(x)\geq 0$ với $0<x\leq 1$. Từ đó suy ra kết quả mong muốn.

Nếu $x\leq y\leq z$, đẳng thức xảy ra khi $(x,y,z)=(0,1,1)$. Hơn nữa, khi $r=r_0$, đẳng thức còn xảy ra khi $(x,y,z)=\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3}\right)$.

Ghi chú. Sử dụng cùng cách thức như trên, ta có thể chứng minh rằng với $r>3$ và $x+y+z=2$, biểu thức $E(x,y,z)=x^r(y+z)+y^r(z+x)+z^r(x+y)$

đạt giá trị lớn nhất khi một trong các biến x,y,z bằng 0. Để chứng minh mệnh đề này, chỉ cần chứng minh bất đẳng thức $E(x,y,z)\leq 2$ đúng với $0<x\leq y=z$, trong khi đó nó không đúng nếu $x=0$ và mọi số không âm y và z thỏa mãn $y+z=2$. Thật vậy, với $y=z=1$ và $0<x\leq 1$, sử dụng bất đẳng thức ***Bernoulli*** ta nhận được

$$\left(1+\frac{r}{2}\right)^{r+1}-x^r-x-1>1+\frac{(r+1)x}{2}-x^r-x-1=\frac{(r-1)x}{2}-x^r>x-x^r\geq 0$$

Trong trường hợp đặc biệt $r=4$, $E(x,y,z)$ lớn nhất khi $(x,y,z)=\left(0,\dfrac{3-\sqrt{3}}{3},\dfrac{3+\sqrt{3}}{3}\right)$

giống như ta đã chứng minh trong áp dụng 1.

Bài 14. Giả sử x,y,z là các số thực không âm thỏa mãn $xy+yz+zx=3$.

Nếu $1\leq r\leq 2$ thì $x^r(y+z)+y^r(z+x)+z^r(x+y)\geq 6$

Chứng minh

Viết lại bất đẳng thức dưới dạng thuần nhất

$$x^r(y+z)+y^r(z+x)+z^r(x+y)\geq 6\left(\frac{xy+yz+zx}{3}\right)^{\frac{r+1}{2}}$$

Để thuận tiện, ta bỏ đi điều kiện $xy+yz+zx=3$. Sử dụng điều kiện $x+y+z=1$, bất đẳng thức trở thành $x^r(1-x)+y^r(1-y)+z^r(1-z)\ge 6\left(\frac{1-x^2-y^2-z^2}{6}\right)^{\frac{r+1}{2}}$

Để chứng minh nó, ta sẽ áp dụng Hệ quả 1 cho hàm $f(u)=-u^r(1-u)$ với $0\le u\le 1$. Ta có $f'(u)=-ru^{r-1}+(r+1)u^r$ và $g(x)=f'(x)=-rx^{r-1}+(r+1)x^r$;

$g''(x)=r(r-1)x^{r-3}[(r+1)x+2-r]$

Do $g''(x)>0$ với $x>0$, $g(x)$ lồi nghiêm ngặt trên $[0,+\infty)$. Áp dụng Hệ quả 1, nếu $0\le x\le y\le z$ thỏa mãn $x+y+z=1$ và $x^2+y^2+z^2=\text{constant}$

Tổng $f(x)+f(y)+f(z)$ nhỏ nhất khi hoặc $x=0$ hoặc $0<x\le y=z$

Trường hợp $x=0$. Bất đẳng thức ban đầu trở thành $yz\left(y^{r-1}+z^{r-1}\right)\ge 6$, trong đó $yz=3$. Sử dụng bất đẳng thức ***AM – GM***, ta có

$$yz\left(y^{r-1}+z^{r-1}\right)\ge 2(yz)^{\frac{r+1}{2}}=2\cdot 3^{\frac{r+1}{2}}>6$$

Trường hợp $0<x\le y=z$. Bất đẳng thức ban đầu trở thành $x^r y+y^r(x+y)\ge 3$, trong đó $0<x\le y$ và $2xy+y^2=3$. Do $0<x\le y$ và $2xy+y^2=3$ ta nhận được $0<x\le 1$.

Đặt $f(x)=x^r y+y^r(x+y)-3$, với $y=-x+\sqrt{x^2+3}$

Ta cần chứng minh rằng $f(x)\ge 0$ với $0<x\le 1$. Nếu $x=1$, ta có $y=1$ và $f(1)=0$. Lấy vi phân, phương trình $2xy+y^2=3$ dẫn tới $y'=\frac{-y}{x+y}$. Như thế

$$f'(x)=rx^{r-1}y+y^r\left[x^r+rxy^{r-1}+(r+1)y^r\right]y'=\frac{y[(r-1)x+ry]\left(x^{r-1}-y^{r-1}\right)}{x+y}\le 0$$

Hàm $f(x)$ giảm nghiêm ngặt trên $[0,1]$ và vì vậy $f(x)\ge f(1)=0$ với $0<x\le 1$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $(x,y,z)=(1,1,1)$

Ghi chú.

Marian Tetiva đã tìm ra một lời giải đẹp cho trường hợp đặc biệt khi $r=2$.

Trước hết viết bất đẳng thức dưới dạng $(xy+yz+zx)(x+y+z)\ge 3(xyz+2)$

Hay $x+y+z\ge xyz+2$

Giả sử rằng $x\le y\le z$, giả thiết $xy+yz+zx=3$ dẫn tới $xy\le 1$ và $yz\ge 1$. Vì vậy $(1-xy)(yz-1)+(1-y)^2\ge 0$. Từ đó suy ra kết luận.

Bài 15. Nếu $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là các số dương thỏa mãn $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}$

thì $\frac{1}{1+(n-1)x_1} + \frac{1}{1+(n-1)x_2} + \ldots + \frac{1}{1+(n-1)x_n} \geq 1$

Chứng minh

Ta xét hai trường hợp

Trường hợp $n = 2$. Bất đẳng thức trở thành đẳng thức

Trường hợp $n \geq 3$. Giả sử rằng $0 < x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$, và áp dụng Hệ quả 2 cho hàm

$f(u) = \frac{1}{1-(n-1)u}$ với $u > 0$

Ta có $f'(u) = \frac{-(n-1)}{[1+(n-1)u]^2}$ và $g(x) = f'\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \frac{-(n-1)x}{(\sqrt{x}+n-1)^2}$,

$g''(x) = \frac{3(n-1)^2}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}-n-1)^4}$

Do $g''(x) > 0, g(x)$ lồi nghiêm ngặt trên $(0, +\infty)$. Áp dụng Hệ quả 2, nếu

$0 < x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$ thỏa mãn $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = \text{constant}$ và $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n} = \text{constant}$

thì tổng $f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)$ nhỏ nhất khi $0 < x_1 \leq x_2 = x_3 \ldots = x_n$.

Bởi vậy, ta đã chứng minh bất đẳng thức $\frac{1}{1+(n-1)x} + \frac{n-1}{1+(n-1)y} \geq 1$

Giả thiết $0 < x \leq 1 \leq y$ và $x + (n-1)y = \frac{1}{x} + \frac{n-1}{y}$.

Đẳng thức sau cùng tương đương với $(n-1)(y-1) = \frac{y(1-x^2)}{x(1+y)}$.

Do $\frac{1}{1+(n-1)x} + \frac{n-1}{1+(n-1)y} - 1 = \frac{1}{1+(n-1)x} - \frac{1}{n} + \frac{n-1}{1+(n-1)y} - \frac{n-1}{n} =$

$= \frac{(n-1)(1-x)}{n[1+(n-1)x]} - \frac{(n-1)^2(y-1)}{n[1+(n-1)y]} = \frac{(n-1)(1-x)}{n[1+(n-1)x]} - \frac{(n-1)y(1-x^2)}{nx(1+y)[1+(n-1)y]}$,

Ta phải chứng minh rằng $x(1+y)[1+(n-1)y] \geq y(1+x)[1+(n-1)x]$ hay

$(y-x)[(n-1)xy-1] \geq 0$. Do $y - x \geq 0$, ta sẽ chứng minh rằng $(n-1)xy \geq 1$

Thật vậy, do $x + (n-1)y = \frac{1}{x} + \frac{n-1}{y}$ ta có $xy = \frac{y+(n-1)x}{x+(n-1)y}$,

và vì vậy $(n-1)xy - 1 = \frac{n(n-2)x}{x+(n-1)y} > 0$

Với $n \geq 3$, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 1$

Bài 16. Nếu a,b,c là các số dương thỏa mãn $abc=1$, thì $a^3+b^3+c^3+15\ge 6\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$

Chứng minh

Thay a,b,c bởi $\frac{1}{x},\frac{1}{y},\frac{1}{z}$ tương ứng, ta sẽ chứng minh rằng

$$\frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}+\frac{1}{z^3}+15\ge 6(x+y+z)$$

Nếu $xyz=1$. Giả sử rằng $0<x\le y\le z$ và áp dụng Hệ quả 5 (trường hợp $p=0$ và $q=-3$)

- Nếu $0<x\le y\le z$ thỏa mãn $x+y+z=\text{constant}$ và $xyz=1$, thì tổng $\frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}+\frac{1}{z^3}$ nhỏ nhất khi $0<x=y\le z$

Vì vậy, chỉ cần chứng minh bất đẳng thức khi $0<x=y\le 1\le z$ và $x^2z=1$, hay:

$$\frac{2}{x^3}+\frac{1}{z^3}+15\ge 6(2x+z)\Leftrightarrow \frac{2}{x^3}+x^6+15\ge 6\left(2x+\frac{1}{x^2}\right)$$

$$\Leftrightarrow x^9-12x^4+15x^3-6x+2\ge 0\Leftrightarrow (1-x)^2(2-2x-6x^2+5x^3+4x^4+3x^5+2x^6+x^7)\ge 0$$

Bất đẳng thức cuối cùng đúng nếu $2-2x-6x^2+5x^3+3x^4\ge 0$ với $0<x\le 1$.

Thật vậy, ta có $2(2-2x-6x^2+5x^3+3x)^4=(2-3x)^2\left(1+2x+\frac{3}{4}x^2\right)+x^3\left(1-\frac{3}{4}x\right)>0$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$

Bài 17. Giả sử $a_1,a_2,\ldots,a_n$ là các số thực dương thỏa mãn $a_1a_2\ldots a_n=1$. Nếu m là số nguyên dương thỏa mãn $m\ge n-1$ thì $a_1^m+a_2^m+\ldots+a_n^m+(m-1)n\ge m\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right)$

Chứng minh

Với $n=2$ (vì thế $m\ge 1$), bất đẳng thức quy về $a_1^m+a_2^m+2m-2\ge m(a_1+a_2)$

Ta có thể chứng minh điều này bằng cách cộng các bất đẳng thức $a_1^m\ge 1+m(a_1-1)$ và $a_2^m\ge 1+m(a_2-1)$, là những hệ quả của bất đẳng thức ***Bernoulli***. Với $n\ge 3$, thay thế $a_1,a_2,\ldots,a_n$ bởi $\frac{1}{x_1},\frac{1}{x_2},\ldots,\frac{1}{x_n}$ tương ứng, ta sẽ chứng minh rằng

$$\frac{1}{x_1^m}+\frac{1}{x_2^m}+\ldots+\frac{1}{x_n^m}+(m-1)n\ge m(x_1+x_2+\ldots+x_n)$$

với $x_1x_2\ldots x_n=1$. Giả sử rằng $0<x_1\le x_2\le\ldots\le x_n$ và áp dụng Hệ quả 5 (trường hợp $p=0$ và $q=-m$):

- Nếu $0<x_1\le x_2\le\ldots\le x_n$ thỏa mãn $x_1+x_2+\ldots+x_n=\text{constant}$ và $x_1x_2\ldots x_n=1$ thì tổng $\frac{1}{x_1^m}+\frac{1}{x_2^m}+\ldots+\frac{1}{x_n^m}$ nhỏ nhất khi $0<x_1=x_2=\ldots x_{n-1}\le x_n$

Vì vậy, chỉ cần chứng minh bất đẳng thức này với $x_1 = x_2 = \ldots x_{n-1} = x \leq 1$, $x_n = y$ và $x^{n-1}y = 1$, khi đó nó trở thành: $\frac{n-1}{x^m} + \frac{1}{y^m} + (m-1)n \geq m(n-1)x + my$

Sử dụng bất đẳng thức ***AM – GM***, ta có $\frac{n-1}{x^m} + (m-n+1) \geq \frac{m}{x^{n-1}} = my$

Tiếp theo, ta sẽ chứng minh rằng $\frac{1}{y^m} - 1 \geq m(n-1)(x-1)$

Bất đẳng thức này tương đương với $x^{mn-m} - 1 - m(n-1)(x-1) \geq 0$

Viết lại bất đẳng thức dưới dạng $(x-1)\left[(x^{mn-m-1}-1) + (x^{mn-m-2}-1) + \ldots + (x-1)\right] \geq 0$

Điều này hiển nhiên đúng. Với $n = 2$ và $m = 1$, bất đẳng thức trở thành đẳng thức. Ngược lại, đẳng thức xảy ra nếu và chỉ nếu $a_1 = a_2 \ldots = a_n = 1$

Bài 18. Giả sử $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là các số không âm thỏa mãn $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = n$. Chứng minh nếu k là số nguyên dương thỏa mãn $2 \leq k \leq n+2$ *và* $r = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{k-1} - 1$ thì

$$x_1^k + x_2^k + \ldots + x_n^k - n \geq nr(1 - x_1 x_2 \ldots x_n)$$

Chứng minh

Nếu $n = 2$, thì bất đẳng thức quy về $x_1^k + x_2^k - 2 \geq (2^k - 2)(1 - x_1 x_2)$. Với $k = 2$ *và* $k = 3$, bất đẳng thức này trở thành đẳng thức, trong khi đó với $k = 4$ nó trở thành $6x_1 x_2(1 - x_1 x_2) \geq 0$, hiển nhiên đúng

Xét trường hợp $n \geq 3$ và $0 < x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$ thỏa mãn $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = n$ và $x_1^k + x_2^k + \ldots + x_n^k = \text{constant}$, thế thì tích $x_1 x_2 \ldots x_n$ nhỏ nhất khi hoặc $x_1 = 0$ hoặc $0 < x_1 \leq x_2 = x_3 = \ldots = x_n$.

Trường hợp $x_1 = 0$. Bất đẳng thức quy về $x_2^k + \ldots + x_n^k \geq \frac{n^k}{(n-1)^{k-1}}$

với $x_1 + \ldots + x_n = n$. Bất đẳng thức này thu được bằng cách áp dụng bất đẳng thức

Jensen cho hàm lồi $f(u) = u^k$ $\quad x_2^k + \ldots + x_n^k \geq (n-1)\left(\frac{x_2 + \ldots + x_n}{n-1}\right)^k$

Trường hợp $0 < x_1 \leq x_2 = x_3 = \ldots = x_n$. Ký hiệu $x_1 = x$ và $x_2 = x_3 = \ldots = x_n = y$

Ta cần chứng minh rằng với $0 < x \leq 1 \leq y$ và $x + (n-1)y = n$ bất đẳng thức sau đúng:

$x^k + (n-1)y^k + nrxy^{n-1} - n(r+1) \geq 0$

Ta viết bất đẳng thức này dưới dạng $f(x) \geq 0$, trong đó

$f(x) = x^k + (n-1)y^k + nrxy^{n-1} - n(r+1)$, với $y = \frac{n-x}{n-1}$

Ta nhận thấy $f(0)=f(1)=0$. Do $y'=\frac{-1}{n-1}$, ta có

$f'(x)=k\left(x^{k-1}-y^{k-1}\right)+nry^{n-2}\left(y-x\right)=$

$=\left(y-x\right)\left[nry^{n-2}-k\left(y^{k-2}+y^{k-3}+\ldots+x^{k-2}\right)\right]=\left(y-x\right)y^{n-2}\left[nr-kg\left(x\right)\right]$

Trong đó $g\left(x\right)=\frac{1}{y^{n-k}}+\frac{x}{y^{n-k+1}}+\ldots+\frac{x^{k-2}}{y^{n-2}}$

Chú ý rằng $y(x)=\frac{n-x}{n-1}$ giảm nghiêm ngặt, hàm $g\left(x\right)$ tăng nghiêm ngặt với $2\le k\le n$.

Với $k=n+1$, ta có $g\left(x\right)=y+x+\frac{x^2}{y}+\ldots+\frac{x^{n-1}}{y^{n-2}}=\frac{(n-2)x+n}{n-1}+\frac{x^2}{y}+\ldots+\frac{x^{n-1}}{y^{n-2}}$.

Và với $k=n+2$, ta có

$g\left(x\right)=y^2+yx+x^2+\frac{x^3}{y}+\ldots+\frac{x^n}{y^{n-2}}=\frac{\left(n^2-3n+3\right)x^2+n(n-3)x+n^2}{(n-1)^2}+\frac{x^3}{y}+\ldots+\frac{x^n}{y^{n-2}}$B

ởi vậy, hàm $g\left(x\right)$ tăng nghiêm ngặt với $2\le k\le n+2$, và hàm

$h(x)=nr-kg\left(x\right)$ giảm nghiêm ngặt. Chú ý rằng $f'(x)=\left(y-x\right)y^{n-2}h(x)$

Ta khẳng định rằng $h(0)>0$ và $h(1)<0$. Nếu khẳng định của ta là đúng, thì tồn tại $x_1\in(0,1)$ thỏa mãn $h(x_1)=0$, $h(x)>0$ với $x\in\left[0,x_1\right)$, và $h(x)<0$ với $x\in\left(x_1,1\right]$. Do đó, $f\left(x\right)$ tăng nghiêm ngặt với $x\in\left[0,x_1\right]$, và giảm nghiêm ngặt với $x\in\left[x_1,1\right]$. Do $f\left(0\right)=f\left(1\right)$, chứng tỏ $f\left(x\right)\ge 0$ với $0<x\le 1$, và chứng minh hoàn tất

Để chứng minh rằng $h(0)>0$, ta giả sử $h(0)\le 0$ thì $h(x)<0$ với $x\in(0,1)$, $f'(x)<0$ với $x\in(0,1)$, và $f\left(x\right)$ giảm nghiêm ngặt với $x\in[0,1]$, mâu thuẫn với $f(0)=f(1)$. Cũng vậy, nếu $h(1)\ge 0$ thì $h(x)>0$ với $x\in(0,1)$, $f'(x)>0$ với $x\in(0,1)$, và $f\left(x\right)$ tăng nghiêm ngặt với $x\in[0,1]$, mâu thuẫn với $f(0)=f(1)$.

Với $n\ge 3$ và $x_1\le x_2\le\ldots\le x_n$, đẳng thức xảy ra khi $x_1=x_2=\ldots=x_n=1$ và khi $x_1=0$ và $x_2=\ldots=x_n=\frac{n}{n-1}$

Ghi chú 1. Với $k=2$, $k=3$ và $k=4$, ta thu được các bất đẳng thức rất đẹp sau:

$$(n-1)\left(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2\right)+nx_1x_2\ldots x_n\ge n^2,$$
$$(n-1)^2\left(x_1^3+x_2^3+\ldots+x_n^3\right)+n(2n-1)x_1x_2\ldots x_n\ge n^3,$$
$$(n-1)^3\left(x_1^4+x_2^4+\ldots+x_n^4\right)+n\left(3n^2-3n+1\right)x_1x_2\ldots x_n\ge n^4$$

Với các số không âm $x_1,x_2,\ldots,x_n$ thỏa mãn $x_1+x_2+\ldots+x_n=n$

Ghi chú 2. Với $k=n$, bất đẳng thức này đã được post trên Mathlinks Inequalities Forum vào năm 2004 bởi *Gabriel Dospinescu* và *Calin Popa*

Bài 19. Giả sử $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là các số dương thỏa mãn $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}=n$ thì

$x_1+x_2+\ldots+x_n-n \le e_{n-1}\left(x_1x_2\ldots x_n-1\right)$, trong đó $e_{n-1}=\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}<e$

Chứng minh

Thay thế mỗi số x_i bởi $\frac{1}{a_i}$ tương ứng, mệnh đề trở thành:

- Nếu $a_1, a_2, \ldots, a_n$ là các số dương thỏa mãn $a_1+a_2+\ldots+a_n=n$ thì

$a_1a_2\ldots a_n\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}-n+e_{n-1}\right)\le e_{n-1}$

Dễ dàng kiểm tra bất đẳng thức này đúng với $n=2$.

Xét $n\ge 3$, giả sử rằng $0<a_1\le a_2\le\ldots\le a_n$ và áp dụng Hệ quả 4 (trường hợp $p=-1$):

Nếu $0<a_1\le a_2\le\ldots\le a_n$ thỏa mãn $a_1+a_2+\ldots+a_n=n$ và $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}=\text{const}$, thì tích $a_1a_2\ldots a_n$, là lớn nhất khi $0<a_1\le a_2=a_3=\ldots=a_n$.

Ký hiệu $a_1=x$ và $a_2=a_3=\ldots=a_n=y$, ta cần chứng minh rằng với $0<x\le 1\le y<\frac{n}{n-1}$ và $x+(n-1)y=n$, bất đẳng thức đúng: $y^{n-1}+(n-1)xy^{n-2}-(n-e_{n-1})xy^{n-1}\le e_{n-1}$

Xét $f(x)=y^{n-1}+(n-1)xy^{n-2}-(n-e_{n-1})xy^{n-1}-e_{n-1}$.

Với $y=\frac{n-x}{n-1}$, ta phải chứng minh rằng $f(x)\le 0$ với $0<x\le 1$. Ta nhận thấy

$f(0)=f(1)=0$. Do $y'=\frac{-1}{n-1}$, ta có $\frac{f'(x)}{y^{n-3}}=(y-x)\left[n-2-(n-e_{n-1})y\right]=(y-x)h(x)$

Trong đó $h(x)=n-2-(n-e_{n-1})\frac{n-x}{n-1}$ là hàm tuyến tính tăng.

Ta sẽ chứng minh rằng $h(0)<0$ và $h(1)>0$. Nếu $h(0)\ge 0$ thì $h(x)>0$ với $x\in(0,1)$, vì thế $f'(x)>0$ với $x\in(0,1)$, và $f(x)$ tăng nghiêm ngặt với $x\in[0,1]$, mâu thuẫn với $f(0)=f(1)$. Vì vậy, $h(1)=e_{n-1}-2>0$.

Do $h(0)<0$ và $h(1)>0$, chứng tỏ tồn tại $x_1\in(0,1)$ thỏa mãn $h(x_1)=0$, $h(x)<0$ với $x\in[0,x_1)$, và $h(x)>0$ với $x\in(x_1,1]$. Do đó, $f(x)$ giảm nghiêm ngặt với $x\in[0,x_1]$, và tăng nghiêm ngặt với $x\in[x_1,1]$. Do $f(0)=f(1)=0$, chứng tỏ rằng $f(x)\le 0$ với $0\le x\le 1$.

Với $n\ge 3$, đẳng thức xảy ra khi $x_1=x_2=\ldots=x_n=1$.

Bài 20. Giả sử $x_1, x_2, \dots, x_n$ là các số dương thỏa mãn $x_1 + x_2 + \dots + x_n = n$. Nếu $k \geq 3$ là số nguyên dương và $r = \dfrac{n^{k-1} - 1}{n-1}$ thì $x_1^k + x_2^k + \dots + x_n^k - n \leq r\left(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 - n\right)$

Chứng minh

Xét hai trường hợp

Trường hợp $n = 2$. Bất đẳng thức quy về $x_1^k + x_2^k + (2^k - 2)x_1 x_2 \leq 2^k$

Với $k = 3$, bất đẳng thức trở thành đẳng thức. Xét trường hợp $k \geq 4$. Ta phải chứng minh rằng $f(t) \leq 0$ với $t \in [0,1]$, trong đó $f(t) = (1+t)^k + (1-t)^k + (2^k - 2)(1-t^2) - 2^k$

Ta có $f'(t) = k\left[(1+t)^{k-1} - (1-t)^{k-1}\right] - (2^{k+1} - 4)t$,

$f''(t) = k(k-1)\left[(1+t)^{k-2} + (1-t)^{k-2}\right] - 2^{k+1} + 4, f'''(t) = k(k-1)(k-2)\left[(1+t)^{k-3} - (1-t)^{k-3}\right]$

Do $f''' > 0$ với $t \in (0,1]$, đạo hàm cấp 2 f'' tăng nghiêm ngặt. Do

$f''(0) = 2k(k-1) - 2^{k+1} + 4 < 0$ và $f''(1) = (k^2 - k - 8)2^{k-2} + 4 > 0$, tồn tại $t_1 \in (0,1)$ thỏa mãn $f''(t_1) = 0, f''(t_1) < 0$ với $t \in [0, t_1)$ và $f''(t) > 0$ với $t \in (t_1, 1]$. Vì vậy, đạo hàm cấp 1 f' giảm nghiêm ngặt trên $[0, t_1]$ và tăng nghiêm ngặt trên $[0, t_1]$. Mà $f'(0) = 0$ và $f'(1) = (k-4)2^{k-1} + 4 > 0$, tồn tại $t_2 \in (0,1)$ thỏa mãn $f'(t_2) = 0, f'(t) < 0$ với $t \in (0, t_2)$, và $f'(t) > 0$ với $t \in (t_2, 1]$. Bởi vậy, hàm f giảm nghiêm ngặt trên $[0, t_2]$ và tăng nghiêm ngặt trên $[t_2, 1]$. Sử dụng $f(0) = f(1) = 0$, suy ra $f(t) \leq 0$ với $t \in [0,1]$.

Trường hợp $n \geq 3$. Giả sử rằng $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ và áp dụng Hệ quả 5 (trường hợp $p = 2$ và $q = k > p$):

•Nếu $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ thỏa mãn $x_1 + x_2 + \dots + x_n = n$ và $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 =$ constant thì $x_1^k + x_2^k + \dots + x_n^k$ lớn nhất khi $0 \leq x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} \leq x_n$

Bởi vậy, ta cần chứng minh bất đẳng thức $(n-1)x^k + y^k - n \leq r\left[(n-1)x^2 + y^2 - n\right]$.

Trong đó $0 \leq x \leq 1 \leq y$ và $(n-1)x + y = n$. Xét

$$f(x) = (n-1)x^k + y^k - n - r\left[(n-1)x^2 + y^2 - n\right], \quad (n-1)x + y = n$$

Ta cần chứng minh rằng $f(x) \leq 0$ với $x \in [0,1]$. Do $y' = -(n-1)$, ta có

$$\frac{1}{k(n-1)}f'(x) = x^{k-1} - y^{k-1} - \frac{2r}{k}(x-y), \frac{1}{k(k-1)(n-1)}f''(x) = x^{k-2} - (n-1)y^{k-2} - \frac{2nr}{k(k-1)},$$

$$\frac{1}{k(k-1)(k-2)(n-1)}f'''(x) = x^{k-3} - (n-1)^2 y^{k-3}$$

Do $f''' < 0$ với $x \in [0,1]$, đạo hàm cấp 2 f'' giảm nghiêm ngặt. Sử dụng $(n-1)r < n^{k-1}$ và $r = n^{k-2} + n^{k-3} + \dots + n + 1 > 2^{k-2} + 2^{k-3} + \dots + 2 + 1 = 2^{k-1} - 1$. Ta có

$$f''(0)=k(k-1)(n-1)^2 n^{k-2}-2n(n-1)r>k(k-1)(n-1)^2 n^{k-2}-2n^k\geq$$
$$\geq 6(n-1)^2 n^{k-2}-2n^k=2n^{k-2}\left(2n^2-6n+3\right)>0$$

Và $\dfrac{f'(1)}{n(n-1)}=k(k-1)-2r<k(k-1)-2\left(2^{k-1}-1\right)=k^2-k+2-2^k<0$

Thì suy ra tồn tại $x_1\in(0,1)$ thỏa mãn $f''(x_1)=0$, $f''(x)>0$ với $x\in\left[0,x_1\right)$ và $f''(x)<0$ với $x\in\left(x_1,1\right]$. Vì vậy, đạo hàm cấp 1 f' tăng nghiêm ngặt trên $[0,x_1]$ và giảm nghiêm ngặt trên $[x_1,1]$.

Do $\dfrac{f'(0)}{n}=2(n-1)r-k(n-1)n^{k-2}<2n^{k-1}-k(n-1)n^{k-2}=$
$$=-n^{k-2}\left[k(n-1)-2n\right]\leq -n^{k-2}\left[3(n-1)-2n\right]=-n^{k-2}(n-3)\leq 0$$

Và $f'(1)=0$, tồn tại $x_2\in(0,1)$ thỏa mãn $f'(x_2)=0, f'(x)<0$ với $x\in(0,x_2)$ và $f'(x)>0$ với $x\in\left(0,x_2\right]$. Bởi vậy, hàm f giảm nghiêm ngặt trên $[0,x_2]$ và tăng nghiêm ngặt trên $[x_2,1]$. Mà $f(0)=f(1)=0$, suy ra $f(x)\leq 0$ với $x\in[0,1]$. Chứng minh hoàn tất. Đẳng thức xảy ra khi $x_1=x_2=\ldots=x_n$, hoặc khi $n-1$ số x_i bằng 0.

Bài 21. Nếu $x_1,x_2,\ldots,x_n$ dương thì

$$x_1^n+x_2^n+\ldots+x_n^n+n(n-1)x_1x_2\ldots x_n\geq x_1x_2\ldots x_n\left(x_1+x_2\ldots+x_n\right)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots\frac{1}{x_n}\right)$$

Chứng minh

Với $n=2$, ta có đẳng thức. Với $n\geq 3$, giả sử rằng $0<x_1\leq x_2\leq\ldots\leq x_n$

Và áp dụng Hệ quả 5 (trường hợp $p=0$)

• Nếu $0<x_1\leq x_2\leq\ldots\leq x_n$ thỏa mãn $x_1+x_2+\ldots+x_n=$ constant và $x_1x_2\ldots x_n=$ constant thì tổng $x_1^n+x_2^n+\ldots+x_n^n$ nhỏ nhất và tổng $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\ldots\dfrac{1}{x_n}$ lớn nhất khi $0<x_1\leq x_2=x_3=\ldots=x_n$.

Vì vậy, chỉ cần chứng minh bất đẳng thức thuần nhất với $0<x_1<1$ và $x_2=x_3=\ldots x_n=1$. Khi đó bất đẳng thức trở thành $x_1^n+(n-2)x_1\geq(n-1)x_1^2$,

Hay $x_1(x_1-1)\left[\left(x_1^{n-2}-1\right)+\left(x_1^{n-3}-1\right)+\ldots+\left(x_1-1\right)\right]\geq 0$, điều này hiển nhiên đúng

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1=x_2=\ldots x_n$.

Ghi chú. Với $n=3$, ta nhận được bất đẳng thức Schur cấp 3,

$$x_1^3+x_2^3+x_3^3+6x_1x_2x_3\geq(x_1+x_2+x_3)(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)$$

Bài 22. [MSC-Hungary] Nếu $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là các số không âm thì

$$(n-1)\left(x_1^n + x_2^n + \ldots + x_n^n\right) + nx_1x_2\ldots x_n \geq \left(x_1 + x_2 + \ldots + x_n\right)\left(x_1^{n-1} + x_2^{n-1} + \ldots + x_n^{n-1}\right)$$

Chứng minh

Với $n=2$, ta có đẳng thức. Với $n \geq 3$ giả sử rằng $0 < x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$ và áp dụng hệ quả 5 (trường hợp $p=n$ và $q=n-1$) và Hệ quả 4 (trường hợp $p=n$):

•Nếu $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$ thỏa mãn $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = \text{constant}$ và $x_1^n + x_2^n + \ldots + x_n^n = \text{constant}$ thì tổng $x_1^{n-1} + x_2^{n-1} + \ldots + x_n^{n-1}$ nhỏ nhất và tích $x_1x_2\ldots x_n$ lớn nhất khi hoặc $x_1 = 0$ hoặc $0 < x_1 \leq x_2 = x_3 = \ldots = x_n$.

Vì vậy, chỉ cần chứng minh cho các trường hợp $x_1 = 0$ và $0 < x_1 \leq x_2 = x_3 = \ldots = x_n$

• Trường hợp $x_1 = 0$. Bất đẳng thức quy về

$$(n-1)\left(x_2^n + \ldots + x_n^n\right) \geq \left(x_2 + \ldots + x_n\right)\left(x_2^{n-1} + \ldots + x_n^{n-1}\right)$$

Điều này thu được từ bất đẳng thức ***Chebyshev.***

• Trường hợp $0 < x_1 \leq x_2 = x_3 = \ldots = x_n$. Đặt $x_2 = x_3 = \ldots = x_n = 1$, bất đẳng thức thuần nhất quy về $(n-2)x_1^n + x_1 \geq (n-1)x_1^{n-1}$

Viết lại bất đẳng thức này dưới dạng

$$x_1(x_1-1)\left[x_1^{n-3}(x_1-1) + x_1^{n-4}(x_1^2-1) + \ldots + (x_1^{n-2}-1)\right] \geq 0$$

Ta nhận thấy điều này hiển nhiên đúng. Với $n \geq 3$ và $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$, đẳng thức xảy ra khi $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$, và khi $x_2 = \ldots = x_n$.

Bài 23. Nếu $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là các số không âm thì

$$(n-1)\left(x_1^{n+1} + x_2^{n+1} + \ldots + x_n^{n+1}\right) \geq \left(x_1 + x_2 + \ldots + x_n\right)\left(x_1^n + x_2^n + \ldots + x_n^n - x_1x_2\ldots x_n\right)$$

Chứng minh

Với $n=2$, ta có đẳng thức. Với $n \geq 3$, giả sử rằng $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$

Và áp dụng Hệ quả 5 (trường hợp $p=n+1$ và $q=n$) và Hệ quả 4 (trường hợp $p=n+1$):

•Nếu $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$ thỏa mãn $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = \text{constant}$ và $x_1^{n+1} + x_2^{n+1} + \ldots + x_n^{n+1} = \text{constant}$ thì tổng $x_1^n + x_2^n + \ldots + x_n^n$ nhỏ nhất và tích $x_1x_2\ldots x_n$ là lớn nhất khi hoặc $x_1 = 0$ hoặc $0 < x_1 \leq x_2 = x_3 = \ldots = x_n$.

Vì vậy, chỉ cần xét các trường hợp $x_1 = 0$ và $0 < x_1 \leq x_2 = x_3 = \ldots = x_n$

Trường hợp $x_1 = 0$. Bất đẳng thức quy về

$$(n-1)\left(x_1^{n+1} + \ldots + x_n^{n+1}\right) \geq \left(x_2 + \ldots + x_n\right)\left(x_2^n + \ldots + x_n^n\right)$$

Điều này thu được từ bất đẳng thức Chebyshev.

Trường hợp $0 < x_1 \le x_2 = x_3 = \ldots = x_n$. Giả sử $x_2 = x_3 = \ldots = x_n = 1$, bất đẳng thức thuần nhất quy về $(n-2)x_1^{n+1} + x_1^2 \ge (n-1)x_1^n$

Viết lại bất đẳng thức này dưới dạng

$$x_1(x_1-1)\left[x_1^{n-3}(x_1-1) + x_1^{n-4}(x_1^2-1) + \ldots + (x_1^{n-2}-1)\right] \ge 0$$

Ta nhận thấy điều này hiển nhiên đúng. Với $n \ge 3$ và $x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n$, đẳng thức xảy ra khi $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$, hoặc khi $x_1 = 0$ và $x_2 = \ldots = x_n$ và các hoán vị.

Ghi chú 1. Ta có thể viết lại bất đẳng thức trên dưới dạng:

- Nếu $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là các số không âm thỏa mãn $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = n-1$

thì $x_1^n(1-x_1) + x_2^n(1-x_2) \ldots + x_n^n(1-x_n) \le x_1x_2\ldots x_n$

Ghi chú 2. Gjergji Zaimi và ***Keler Marku*** đã mở rộng các bất đẳng thức trên với mọi số thực k dưới dạng sau đây:

$$(n-1)\left(x_1^{n+k} + x_2^{n+k} + \ldots + x_n^{n+k}\right) + x_1x_2\ldots x_n\left(x_1^k + x_2^k + \ldots + x_n^k\right) \ge$$
$$\ge (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)\left(x_1^{n+k-1} + x_2^{n+k-1} + \ldots + x_n^{n+k-1}\right)$$

Bài 24. Nếu $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là các số không âm thì

$$(x_1 + x_2 \ldots + x_n - n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots \frac{1}{x_n} - n\right) + x_1x_2\ldots x_n + \frac{1}{x_1x_2\ldots x_n} \ge 2$$

Chứng minh

Với $n = 2$, bất đẳng thức quy về $\dfrac{(1-x_1)^2(1-x_2)^2}{x_1x_2} \ge 0$

Với $n \ge 3$, giả sử rằng $0 < x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n$. Do bất đẳng thức không thay đổi khi thay thế mỗi biến x_i bởi $\frac{1}{x_i}$, ta có thể giả sử $x_1x_2\ldots x_n \ge 1$. Sử dụng bất đẳng thức ***AM – GM*** ta nhận được $x_1 + x_2 + \ldots + x_n - n \ge n\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n} - n \ge 0$

Và vì vậy ta có thể áp dụng Hệ quả 5 (trường hợp $p = 0$ và $q = -1$):

- Nếu $0 \le x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n$ thỏa mãn $x_1 + x_2 + \ldots + x_n =$ constant và $x_1x_2\ldots x_n =$ constant thì tổng $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots \frac{1}{x_n}$ nhỏ nhất và khi $0 < x_1 = x_2 = \ldots = x_{n-1} \le x_n$.

Áp dụng mệnh đề, chỉ cần xét trường hợp $x_1 = x_2 = \ldots = x_{n-1} = x$ và $x_n = y$

Khi đó bất đẳng thức quy về $[(n-1)x + y - n]\left(\dfrac{n-1}{x} + \dfrac{1}{y} - n\right) + x^{n-1}y + \dfrac{1}{x^{n-1}y} \ge 2$

Hay $\left(x^{n-1}+\frac{n-1}{x}-n\right)y+\left[\frac{1}{x^{n-1}}+(n-1)x-n\right]\frac{1}{y}\geq\frac{n(n-1)(x-1)^2}{x}$

Do $x^{n-1}+\frac{n-1}{x}-n=\frac{x-1}{n}\left[\left(x^{n-1}-1\right)+\left(x^{n-2}-1\right)+\ldots+(x-1)\right]=\frac{(x-1)^2}{x}\left[x^{n-2}+2x^{n-3}+\ldots+(n-1)\right]$

Và $\frac{1}{x^{n-1}}+(n-1)x-n=\frac{(x-1)^2}{x}\left[\frac{1}{x^{n-2}}+\frac{2}{x^{n-3}}+\ldots+(n-1)\right]$

Chỉ cần chứng minh rằng

$$\left[x^{n-2}+2x^{n-3}+\ldots+(n-1)\right]y+\left[\frac{1}{x^{n-2}}+\frac{2}{x^{n-3}}+\ldots+(n-1)\right]\frac{1}{y}\geq n(n-1)$$

Bất đẳng thức này

$$\Leftrightarrow\left(x^{n-2}y+\frac{1}{x^{n-2}y}-2\right)+2\left(x^{n-3}y+\frac{1}{x^{n-3}y}-2\right)+\ldots+(n-1)\left(y+\frac{1}{y}-2\right)\geq 0$$

Hay $\frac{\left(x^{n-2}y-1\right)^2}{x^{n-2}y}+\frac{2\left(x^{n-3}y-1\right)^2}{x^{n-3}y}+\ldots+\frac{(n-1)(y-1)^2}{y}\geq 0$

Điều này hiển nhiên đúng. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $n-1$ biến x_i bằng 1

Bài 25. Nếu $x_1,x_2,\ldots,x_n$ là các số không âm thỏa mãn $x_1x_2\ldots x_n=1$ thì

$$\left|\frac{1}{\sqrt{x_1+x_2+\ldots+x_n-n}}-\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}-n}}\right|<1$$

Chứng minh

Đặt $A=x_1+x_2+\ldots+x_n-n$ và $B=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}-n$

Sử dụng bất đẳng thức ***AM-GM***, dễ thấy A và B dương. Sử dụng bài trước, bất đẳng thức sau đây đúng với mọi số dương $x_1,x_2,\ldots,x_{n+1}$

$$\left(x_1+x_2+\ldots+x_{n+1}-n-1\right)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_{n+1}}-n-1\right)+x_1x_2\ldots x_{n+1}+\frac{1}{x_1x_2\ldots x_{n+1}}\geq 2$$

Bất đẳng thức này tương đương với

$\left(A-1+x_{n+1}\right)\left(B-1+\frac{1}{x_{n+1}}\right)+x_{n+1}+\frac{1}{x_{n+1}}\geq 2$ hay $\frac{A}{x_{n+1}}+Bx_{n+1}+AB-A-B\geq 0$

Thay x_{n+1} bởi $\sqrt{\frac{A}{B}}$, dẫn tới

$$2\sqrt{AB}+AB-A-B\geq 0\Leftrightarrow AB\geq\left(\sqrt{A}-\sqrt{B}\right)^2\Leftrightarrow 1\geq\left(\frac{1}{\sqrt{A}}-\frac{1}{\sqrt{B}}\right)^2\Leftrightarrow 1\geq\left|\frac{1}{\sqrt{A}}-\frac{1}{\sqrt{B}}\right|$$

Bất đẳng thức cuối cùng chính là điều ta mong muốn.

Bài 26. Nếu $x_1,x_2,\ldots,x_n$ là các số không âm thỏa mãn $x_1+x_2+\ldots+x_n=n$ thì

$$\left(x_1x_2\ldots x_n\right)^{\frac{1}{\sqrt{n-1}}}\left(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2\right)\leq n$$

Chứng minh

Với $n=2$, bất đẳng thức quy về $2(x_1x_2-1)^2\geq 0$. Với $n\geq 3$, giả sử rằng $0\leq x_1\leq x_2\leq\ldots\leq x_n$ và áp dụng Hệ quả 4 (trường hợp $p=2$)

- Với $0\leq x_1\leq x_2\leq\ldots\leq x_n$, $x_1+x_2+\ldots+x_n=n$ và $x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2=\text{constant}$

Tích $x_1x_2\ldots x_n$ lớn nhất khi $0\leq x_1=x_2=\ldots=x_{n-1}\leq x_n$

Bởi vậy, chỉ cần chứng minh bất đẳng thức với $x_1=x_2=\ldots=x_{n-1}=x$ và $x_n=y$, trong đó $0\leq x\leq 1\leq y$ và $(n-1)x+y=n$. Trong mọi tình huống, bất đẳng thức quy về

$x^{\sqrt{n-1}}y^{\frac{1}{\sqrt{n-1}}}\left[(n-1)x^2+y^2\right]\leq n$

Với $x=0$, bất đẳng thức này là tầm thường. Với $x>0$, nó tương đương với $f(x)\leq 0$ trong đó $f(x)=\sqrt{n-1}\ln x+\dfrac{1}{\sqrt{n-1}}\ln y+\ln\left[(n-1)x^2+y^2\right]-\ln n$.

Với $y=n-(n-1)x$. Ta có $y'=-(n-1)$ và

$$\frac{f'(x)}{\sqrt{n-1}}=\frac{1}{x}-\frac{1}{y}+\frac{2\sqrt{n-1}(x-y)}{(n-1)x^2+y^2}=\frac{(y-x)\left(x\sqrt{n-1}-y\right)^2}{xy\left[(n-1)x^2+y^2\right]}\geq 0$$

Bởi vậy, hàm $f(x)$ tăng nghiêm ngặt trên $(0,1]$ và vì thế $f(x)\leq f(1)=0$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1=x_2=\ldots=x_n=1$

Ghi chú. Với $n=5$, ta nhận được mệnh đề rất đẹp sau đây

- Nếu a,b,c,d là các số dương thỏa mãn $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2=5$ thì $abcde(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2)\leq 5$

Bài 27. Giả sử x,y,z là các số không âm thỏa mãn

$$xy+yz+zx=3,\ p\geq\frac{\ln 9-\ln 4}{\ln 3}\approx 0.738.\ \text{thì}\ x^p+y^p+z^p\geq 3$$

Chứng minh

Giả sử $r=\dfrac{\ln 9-\ln 4}{\ln 3}$. Sử dụng bất đẳng thức trung bình lũy thừa, ta có

$\dfrac{x^p+y^p+z^p}{3}\geq\left(\dfrac{x^r+y^r+z^r}{3}\right)^{\frac{p}{r}}$. Vì vậy, chỉ cần chứng minh rằng $x^r+y^r+z^r\geq 3$

Giả sử $x\leq y\leq z$. Ta xét hai trường hợp:

Trường hợp $x=0$. Ta cần chứng minh rằng $y^r+z^r\geq 3$ với $yz=3$. Thật vậy, sử dụng bất đẳng thức ***AM-GM***, ta có $y^r+z^r\geq 2(yz)^{\frac{r}{2}}=2\cdot 3^{\frac{r}{2}}=3$

Trường hợp $x>0$. Bất đẳng thức $x^r+y^r+z^r\geq 3$ tương đương với bất đẳng thức thuần nhất

$x^r+y^r+z^r\geq 3\left(\dfrac{xyz}{3}\right)^{\frac{r}{2}}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)^{\frac{r}{2}}$. Đặt $x=a^{\frac{1}{r}}, y=b^{\frac{1}{r}}, z=c^{\frac{1}{r}}$ $(0<a\leq b\leq c)$,

bất đẳng thức trở thành $a+b+c \ge 3\left(\frac{abc}{3}\right)^{\frac{1}{2}}\left(a^{\frac{-1}{r}}+b^{\frac{-1}{r}}+c^{\frac{-1}{r}}\right)^{\frac{r}{2}}$

Để chứng minh bất đẳng thức này, ta áp dụng Hệ quả 5 (trường hợp $p=0$ và $q=\frac{-1}{r}$)

• Nếu $0<a\le b\le c$ thỏa mãn $a+b+c=$ và $abc=$constant thì tổng $a^{\frac{-1}{r}}+b^{\frac{-1}{r}}+c^{\frac{-1}{r}}$ lớn nhất khi $0<a\le b=c$

Bởi vậy chỉ cần chứng minh bất đẳng thức với $0<a\le b=c$; nghĩa là chứng minh bất đẳng thức thuần nhất theo x,y,z với $0<x\le y=z=1$. Do đó bất đẳng thức quy về

$x^r+2\ge 3\left(\frac{2x+1}{3}\right)^{\frac{r}{2}}$. Ký hiệu $f(x)=\ln\frac{x^r+2}{3}-\frac{r}{2}\ln\frac{2x+1}{3}$, ta cần chứng minh rằng

$f(x)\ge 0$ với $0<x\le 1$. Đạo hàm $f'(x)=\frac{rx^{r-1}}{x^r+2}-\frac{r}{2x+1}=\frac{r\left(x-2x^{1-r}+1\right)}{x^{1-r}\left(x^2+2\right)(2x+1)}$

có cùng dấu với $g(x)=x-2x^{1-r}+1$. Do $g'(x)<0$ với $x\in(0,x_1)$ và $g'(x)>0$ với

$x\in(x_1,1]$, trong đó $x_1=(2-2r)^{\frac{1}{r}}\approx 0.416$. Hàm $g(x)$ giảm nghiêm ngặt trên $[0,x_1]$, và tăng nghiêm ngặt trên $[x_1,1]$. Do $g(0)=1$ và $g(1)=0$, tồn tại $x_2\in(0,1)$ thỏa mãn $g(x_2)=0, g(x)>0$ với $x\in[0,x_2)$ và $g(x)<0$ với $x\in(x_2,1)$. Do đó, hàm $f(x)$ tăng nghiêm ngặt trên $[0,x_2]$ và giảm nghiêm ngặt trên $[x_2,1]$. Do $f(0)=f(1)=0$, ta có $f(x)\ge 0$ với $0<x\le 1$, suy ra kết quả mong muốn.

Đẳng thức xảy ra với $x=y=z=1$. Hơn nữa, nếu $p=\frac{\ln 9-\ln 4}{\ln 3}$ và $x\le y\le z$, đẳng thức còn xảy ra với $x=0$ và $y=z=\sqrt{3}$

Bài 28. Giả sử $x,y,z>0$ thỏa mãn $x+y+z=3$, $p\ge\frac{\ln 9-\ln 8}{\ln 3-\ln 2}\approx 0.29$ thì

$$x^p+y^p+z^p\ge xy+yz+zx$$

Chứng minh.

Với $p\ge 1$, sử dụng bất đẳng thức ***Jensen*** ta có

$$x^p+y^p+z^p\ge 3\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^p=3=\frac{1}{3}(x+y+z)^2\ge xy+yz+zx$$

Bây giờ giả sử $p<1$. Đặt $r=\frac{\ln 9-\ln 8}{\ln 3-\ln 2}$ và $x\le y\le z$. Bất đẳng thức tương đương với bất đẳng thức thuần nhất $2\left(x^p+y^p+z^p\right)\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^{2-p}+x^2+y^2+z^2\ge(x+y+z)^2$

Sử dụng Hệ quả 5 (trường hợp $0<p<1$ và $q=2$), với $x\le y\le z$, thỏa mãn $x+y+z=$constant, tổng $x^2+y^2+z^2$ nhỏ nhất khi $x=0$ hoặc $0<x\le y=z$

$y^p + z^p - yz \ge 2(yz)^{\frac{p}{2}} - yz = (yz)^{\frac{p}{2}}\left[2 - (yz)^{\frac{2-p}{2}}\right] \ge$

$\ge (yz)^{\frac{p}{2}}\left[2 - \left(\frac{y+z}{2}\right)^{2-p}\right] = (yz)^{\frac{p}{2}}\left[2 - \left(\frac{3}{2}\right)^{2-p}\right] \ge (yz)^{\frac{p}{2}}\left[2 - \left(\frac{3}{2}\right)^{2-p}\right] = 0$

Trường hợp $0 < x \le y = z$. Trong bất đẳng thức thuần nhất, ta bỏ đi điều kiện ràng buộc $x + y + z = 3$, và xét $y = z = 1$, $0 < x \le 1$.

Bất đẳng thức quy về $(x^p + 2)\left(\frac{x+2}{3}\right)^{2-p} \ge 2x + 1$

Để chứng minh bất đẳng thức này ta xét hàm $f(x) = \ln(x^p + 1) + (2-p)\ln\frac{x+2}{3} - \ln(2x+1)$

Ta phải chứng minh rằng $f(x) \ge 0$ với $0 < x \le 1$. Ta có

$f'(x) = \frac{px^{p-1}}{x^p + 2} + \frac{2-p}{x} - \frac{2}{2x+1} = \frac{2g(x)}{x^{1-p}(x^p+1)(2x+1)}$

Trong đó $g(x) = x^2 + (2p-1)x + p + 2(1-p)x^{2-p} - (p+2)x^{1-p}$.

Và $g'(x) = 2x + 2p - 1 + 2(1-p)(2-p)x^{1-p} - (p+2)(1-p)x^{-p}, g''(x)$

$= 2 + 2(1-p)^2(2-p)x^{-p} + p(p+2)(1-p)x^{-p-1}$

Do $g''(x) > 0$, đạo hàm cấp 1 $g'(x)$ tăng nghiêm ngặt trên $(0,1]$. Lưu ý rằng $g'(0_+) = -\infty$ và $g'(1) = 3(1-p) + 3p^2 > 0$, tồn tại $x_1 \in (0,1)$, thỏa mãn $g'(x_1) = 0, g'(x) < 0$ với $x \in (0, x_1)$ và $g'(x) > 0$ với $x \in (x_1, 1]$. Bởi vậy, hàm $g(x)$ giảm nghiêm ngặt trên $[0, x_1]$ và tăng nghiêm ngặt trên $[x_1, 1]$. Do $g(0) = p > 0$ và $g(1) = 0$, tồn tại $x_2 \in (0, x_1)$ thỏa mãn $g(x_2) = 0, g(x) > 0$ với $x \in [0, x_2)$ và $g(x) < 0$ với $x \in (x_2, 1]$. Ta cũng có $f'(x_2) = 0, f'(x) > 0$ với $x \in (0, x_2)$ và $f'(x) < 0$ với $x \in (x_2, 1]$. Sử dụng kết quả này, hàm $f(x)$ tăng nghiêm ngặt trên $[0, x_2]$ và giảm nghiêm ngặt trên $[x_2, 1]$. Do $f(0) = \ln 2 + (2-p)\ln\frac{2}{3} \ge \ln 2 + (2-r)\ln\frac{2}{3} = 0$

Và $f(1) = 0$, ta nhận được $f(x) \ge \min\{f(0), f(1)\} \ge 0$

Đẳng thức xảy ra với $x = y = z = 1$. Hơn nữa, khi $p = \frac{\ln 9 - \ln 8}{\ln 3 - \ln 2}$ và $x \le y \le z$, đẳng thức còn xảy ra khi $x = 0$ và $y = z = \frac{3}{2}$.

Bài 29. Nếu $x_1, x_2, \ldots, x_n$ $(n \ge 4)$ là các số không âm thỏa mãn $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = n$ thì $\frac{1}{n+1-x_2x_3\ldots x_n} + \frac{1}{n+1-x_3x_4\ldots x_1} + \ldots + \frac{1}{n+1-x_1x_2\ldots x_{n-1}} \le 1$

Chứng minh

Giả sử $x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n$ và $e_{n-1} = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}$. Sử dụng bất đẳng thức ***AM-GM***, ta có

$x_2 \ldots x_n \le \left(\dfrac{x_2 + \ldots + x_n}{n-1}\right)^{n-1} \le \left(\dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n-1}\right)^{n-1} = e_{n-1}$. Vì thế

$n+1 - x_2 x_3 \ldots x_n \ge n - 1 - e_{n-1} > 0$ và tất cả các số hạng của bất đẳng thức đều dương.

Trường hợp $x_1 = 0$. Dễ dàng chứng minh rằng bất đẳng thức đúng.

Trường hợp $x_1 > 0$. Giả sử rằng $x_1 x_2 \ldots x_n = (n+1)r = \text{constant}$, $r > 0$.

Bất đẳng thức trở thành

$$\frac{x_1}{x_1 - r} + \frac{x_2}{x_2 - r} + \ldots + \frac{x_n}{x_n - r} \le n+1 \text{ hay } \frac{1}{x_1 - r} + \frac{1}{x_2 - r} + \ldots + \frac{1}{x_n - r} \le \frac{1}{r}$$

Sử dụng bất đẳng thức ***AM – GM***, ta có $(n+1)r = x_1 x_2 \ldots x_n \le \left(\dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right)^n = 1$.

Trong đó $r \le \dfrac{1}{n+1}$. Từ $x_n \le x_1 + x_2 + \ldots + x_n = n < n+1 \le \dfrac{1}{r}$ ta nhận được $x_n \le \dfrac{1}{r}$.

Bởi vậy, ta có $r < x_i < \dfrac{1}{r}$ với tất cả các biến x_i

Bây giờ ta sẽ áp dụng Hệ quả 3 cho hàm $f(u) = \dfrac{-1}{u-r}, u > r$. Ta có $f'(u) = \dfrac{1}{(u-r)^2}$ và

$$g(x) = f'\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x^2}{(1-rx)^2}, \quad g''(x) = \frac{4rx+2}{(1-rx)^4}$$

Do $g''(x) > 0$, $g(x)$ lồi nghiêm ngặt trên $\left[0, \dfrac{1}{r}\right)$. Áp dụng Hệ quả 3 và Ghi chú từ mục 5.1, nếu $0 \le x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n$ thỏa mãn $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = \text{constant}$ và $x_1 x_2 \ldots x_n = \text{constant}$, thì tổng $f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)$ nhỏ nhất khi $x_1 \le x_2 = x_3 = \ldots = x_n$. Vì vậy, để chứng minh bất đẳng thức ban đầu, chỉ cần xét trường hợp $x_1 = x$ và $x_2 = x_3 = \ldots = x_n = y$, trong đó $0 < x \le 1 \le y$ và $x + (n-1)y = n$. Phần còn lại của chứng minh dành cho bạn đọc.

Bài 30. Giả sử a, b, c là các số dương thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{(1+a)^2} + \frac{1}{(1+b)^2} + \frac{1}{(1+c)^2} + \frac{2}{(1+a)(1+b)(1+c)} \ge 1$$

Chứng minh

Ký hiệu $x = \dfrac{1}{1+a}, y = \dfrac{1}{1+b}, z = \dfrac{1}{1+c}, S = x + y + z$ và $Q = x^2 + y^2 + z^2$, trong đó $0 < x, y, z < 1$. Giả thiết $abc = 1$ trở thành $xyz = (1-x)(1-y)(1-z)$, nghĩa là $4xyz + x^2 + y^2 + z^2 = 1 + (x+y+z-1)^2$. Bất đẳng thức ban đầu trở thành

$x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz \ge 1$, nghĩa là $(x+y+z-1)^2 + x^2 + y^2 + z^2 \ge 1$

Bằng phản chứng, giả sử $(x+y+z-1)^2+x^2+y^2+z^2<1$. Chỉ cần chứng minh rằng $4xyz+x^2+y^2+z^2<1+(x+y+z-1)^2$. Áp dụng Hệ quả 4 (trường hợp $p=2$), nếu $0\le x\le y\le z$ thỏa mãn $x+y+z=\text{constant}$ và $x^2+y^2+z^2=\text{constant}$ thì tích xyz lớn nhất khi $0<x=y\le z$. Bởi vậy, chỉ cần xét trường hợp $x=y$. Ta cần chứng minh rằng $(2x+z-1)^2+2x^2+z^2<1$, dẫn tới $4x^2z+2x^2+z^2<1+(2x+z-1)^2$. Giả thiết phản chứng, nghĩa là $4x^2z+2x^2+z^2\ge 1+(2x+z-1)^2$, hay $z\ge\dfrac{(x-1)^2}{x^2+(x-1)^2}$, chỉ cần chứng minh rằng $(2x+z-1)^2+2x^2+z^2\ge 1$. Do

$$2x+z-1\ge 2x+\frac{(x-1)^2}{x^2+(x-1)^2}-1=\frac{x(4x^2-5x+2)}{2x^2-2x+1}>0$$

Chỉ cần chứng minh bất đẳng thức với $z=\dfrac{(x-1)^2}{x^2+(x-1)^2}$ là đủ.

Ta có $z^2-1=\dfrac{-x^2(3x^2-4x+2)}{(2x^2-2x+1)^2}$ và vì thế

$$(2x+z-1)^2+2x^2+z^2-1=\frac{x^2(4x^2-5x+2)^2}{(2x^2-2x+1)^2}+2x^2-\frac{x^2(3x^2-4x+2)}{(2x^2-2x+1)^2}=$$

$$=\frac{2x^2(12x^4-28x^3+27x^2-12x+2)}{(2x^2-2x+1)^2}=\frac{2x^2(2x-1)^2(3x^2-4x+2)}{(2x^2-2x+1)^2}\ge 0$$

Đẳng thức trong bất đẳng thức ban đầu xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$

Bài 31. Giả sử a,b,c là các số không âm thỏa mãn $a+b+c\ge 2$ và $ab+bc+ca\ge 1$.

Nếu $0<r<1$ thì $a^r+b^r+c^r\ge 2$.

Chứng minh

Ta có thể viết điều kiện thứ hai dưới dạng $(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)\ge 2$

Ta sẽ áp dụng Hệ quả 1 cho hàm lồi $f(u)-u^r$: Nếu $0\le a\le b\le c$ thỏa mãn $a+b+c=\text{constant}$ và $a^2+b^2+c^2=\text{constant}$, thì tổng $f(a)+f(b)+f(c)$ lớn nhất với hoặc $a=0$ hoặc $0<a\le b=c$

Trường hợp $a=0$. Từ $ab+bc+ca\ge 1$ ta nhận được $bc\ge 1$. Do đó

$a^r+b^r+c^r=b^r+c^r\ge 2\sqrt{b^rc^r}\ge 2$

Trường hợp $0<a\le b=c$. Nếu $c\ge 1$ thì $a^r+b^r+c^r=a^r+2c^r\ge 2c^r\ge 2$

Nếu $c<1$ thì $0<a\le b=c<1$ và vì thế $a^r+b^r+c^r=a+b+c\ge 2$

Với $a\le b\le c$, bất đẳng thức ban đầu trở thành đẳng thức khi và chỉ khi $a=0$ và $b=c=1$

Bài 32. [Vietnam MO 2004]

Giả sử a,b,c là các số dương thỏa mãn $(a+b+c)^3 = 32abc$.

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $E = \dfrac{a^4+b^4+c^4}{(a+b+c)^4}$

Chứng minh

Ta sẽ áp dụng Hệ quả 5 (trường hợp $p=0, q=4$):

• Nếu $0<a\le b\le c$ thỏa mãn $a+b+c=$constant và $abc=$constant, thì tổng $a^4+b^4+c^4$ nhỏ nhất khi $0<a\le b=c$ và lớn nhất khi $0<a=b\le c$

Do tính thuần nhất, E nhỏ nhất với $0<a\le b=c=1$ và $(a+2)^3=32a$ và lớn nhất với $a=b=1\le c$ và $(c+2)^3=32c$. Do phương trình $(x+2)^3=32x$ có nghiệm 2 và $-4\pm 2\sqrt{5}$, chứng tỏ E nhỏ nhất với $(a,b,c)\sim(2\sqrt{5}-4,1,1)$ hoặc các hoán vị vòng và lớn nhất với $(a,b,c)\sim(1,2,2)$ hoặc các hoán vị vòng. Các giá trị cực trị của E là $\dfrac{383-165\sqrt{5}}{256}$ và $\dfrac{9}{128}$, tương ứng.

Bài 33. Giả sử $x_1,x_2,\dots,x_n$ $(n\ge 3)$ là các số không âm thỏa mãn $\sum x_1 = 1$

Nếu $m\in\{3,4,\dots,n\}$ thì $1+\dfrac{3m}{m-2}\sum x_1x_2x_3 \ge \dfrac{3m-1}{m-1}\sum x_1x_2$

Chứng minh

(Dựa theo ý tưởng của ***Yuan Shyong Ooi***).

Do $2\sum x_1x_2 = \left(\sum x_1\right)^2 - \sum x_1^2$, ta có thể áp dụng Hệ quả 6 (trường hợp $p=2$)

• Với $0\le x_1\le x_2\le\ldots\le x_n$ thỏa mãn $\sum x_1 = 1$ và $\sum x_1^2=$constant, tổng $\sum x_1x_2x_3$ nhỏ nhất khi $x_1=\ldots=x_k=0$ và $x_{k+2}=\ldots=x_n$ trong đó $k\in\{0,1,\dots,n-1\}$,

$x_1=\ldots=x_k=0$ và $x=x_{k+1}\le x_{k+2}=\ldots=x_n=y$. Mặt khác, sử dụng

$\left(\sum x_1\right)^2=\sum x_1^2+2\sum x_1x_2$ và $\left(\sum x_1\right)^3=\sum x_1^3+3\left(\sum x_1\right)\left(\sum x_1x_2\right)-3\sum x_1x_2x_3$,

ta nhận được $2\sum x_1x_2 = 1-\sum x_1^2$ và $6\sum x_1x_2x_3 = 1-3\sum x_1^2+2\sum x_1^3$

Bởi vậy, bất đẳng thức trở thành $1+m(m-1)\sum x_1^3 \ge (2m-1)\sum x_1^2$

hay $\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i)\ge 0$ trong đó $f(t)=t(1-mt)[1-(m-1)t]$

Ta cần chứng minh rằng $f(x)+(n+k-1)f(y)\ge 0$ với

$x+(n-k-1)y=1, 0\le x\le y, 0\le x\le \dfrac{1}{n-k}$.

Từ $f''(t) = 6m(m-1)t - 2(2m-1)$, chứng tỏ rằng f lồi với $t \ge \dfrac{2m-1}{3m(m-1)}$

a. Trường hợp $x \ge \dfrac{2m-1}{3m(m-1)}$. Sử dụng bất đẳng thức ***Jensen*** ta có

$$f(x)+(n-k-1)f(y) \ge (n-k)f\left(\frac{x+(n-k-1)y}{n-k}\right) = (n-k)f\left(\frac{1}{n-k}\right) = \frac{(k-n+m)(k-n+m-1)}{(n-k)^2} \ge 0.$$

Bởi vì $(k-n+m)$ là số nguyên

b. Trường hợp $x < \dfrac{2m-1}{3m(m-1)}$.

Do $1 - mx > 1 - \dfrac{2m-1}{3(m-1)} = \dfrac{m-2}{3(m-1)} > 0$, ta có $f(x) = x(1-mx)[1-(m-1)x] \ge 0$

Xét 3 trường hợp theo chỉ số k:

Trường hợp $k \le n-m-1$.

Do $1 - my = 1 - \dfrac{m(1-x)}{n-k-1} \ge 1-(1-x) = x \ge 0$, ta có $f(y) = y(1-my)[1-(m-1)y] \ge 0$,

và vì thế $f(x)+(n-k-1)f(y) \ge 0$

Trường hợp $k \ge n-m+1$.

Do $(m-1)y - 1 = \dfrac{(m-1)(1-x)}{n-k-1} - 1 \ge \dfrac{(m-1)(1-x)}{m-2} - 1 = \dfrac{1}{m-2} - \dfrac{(m-1)x}{m-2}$

$> \dfrac{1}{m-2} - \dfrac{m-1}{m-2} \cdot \dfrac{2m-1}{3m(m-1)} = \dfrac{m+1}{3m(m-2)} > 0$, ta có $f(y) = y(my-1)[(m-1)y-1] > 0$,

và vì thế $f(x)+(n-k-1)f(y) \ge 0$

Trường hợp $k = n-m$:

Ta có $x+(m-1)y = 1$, $f(y) = y(my-1)[(m-1)y-1] = \dfrac{x(x-1)(1-mx)}{(m-1)^2}$ và

$$f(x)+(n-k-1)f(y) = f(x)+(m-1)f(y) = x(1-mx)[1-(m-1)x] + \frac{x(x-1)(1-mx)}{m-1} = \frac{(m-2)x(1-mx)^2}{m-1} \ge 0.$$

Chứng minh hoàn tất. Đẳng thức xảy ra nếu m hoặc $m-1$ số trong các biến $x_1, x_2, \ldots, x_n$ bằng nhau và các số còn lại bằng 0.

Bài 34. Giả sử x, y, z, t là các số thực không âm $x^2+y^2+z^2+t^2 = 1$. Chứng minh rằng

$$x^3+y^3+z^3+t^3+xyz+yzt+ztx+txy \le 1$$

Chứng minh

Giả sử rằng $x \le y \le z \le t$ và áp dụng Hệ quả 7:

• Với $0 \le x \le y \le z \le t$ thỏa mãn $x^2+y^2+z^2+t^2 = 1$ và $x^3+y^3+z^3+t^3 = \text{constant}$

biểu thức $xyz+yzt+ztx+txy$ lớn nhất khi $0 \le x = y = z \le t$.

Do đó, ta cần chứng minh rằng $4x^3+t^3+3x^2t\le 1$ với $3x^2+t^2=1, 0\le x\le\frac{1}{2}\le t$.

Xét $f(x)=4x^3+t^3+3x^2t$. Do đó $t'=\frac{-3x}{t}$, ta có

$$f'(x)=12x^2+3(t^2+x^2)t'+6xt=\frac{3x(t-x)(3x-t)}{t}=\frac{3x(t-x)(12x^2-1)}{t(3x+t)}$$

Do $f'(x)<0$ với $x\in\left(0,\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)$, $f'\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)=0$ và $f'(x)>0$ với $x\in\left(\frac{1}{2\sqrt{3}},\frac{1}{2}\right)$, hàm $f(x)$ giảm nghiêm ngặt trên $\left[0,\frac{1}{2\sqrt{3}}\right]$ và tăng nghiêm ngặt trên $\left[\frac{1}{2\sqrt{3}},\frac{1}{2}\right]$. Bởi vậy,

$f(x)\le\max\left\{f(0),f\left(\frac{1}{2}\right)\right\}$. Do $f(0)=f\left(\frac{1}{2}\right)=1$, ta nhận được $f(x)\le 1$, là điều mong muốn.

Đẳng thức xảy ra với $(x,y,z,t)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, và với $(x,y,z,t)=(1,0,0,0)$ hoặc các hoán vị của nó.

Ghi chú: Tương tự, ta có thể chứng minh mệnh đề tổng quát hơn dưới đây:

Nếu $x_1,x_2,\ldots,x_n$ là các số thực không âm thỏa mãn $\sum x_1^2=1$ thì

$$\sum x_1^3+\frac{6}{(n-2)(\sqrt{n}+1)}\sum x_1x_2x_3\le 1$$ **(Vasile Cirtoaje, MS, 2006)**

§22. PHƯƠNG PHÁP CHIA ĐỂ TRỊ (DIVIDE AND CONQUER)

I. TƯ TƯỞNG CHÍNH

Các bạn thân mến, về mặt lý thuyết thì rõ ràng để chứng minh một bất đẳng thức thuộc loại "chặt chẽ" (tức dấu đẳng thức có thể xảy ra) thì khó hơn một bất đẳng thức thực sự, vì nếu ta đánh giá không hợp lý thì dấu bằng không thể xảy ra và do đó phép chứng minh chắn chắn sẽ không đưa tới thành công. Sở dĩ ta gặp khó khăn đó là vì mong muốn có một đánh giá cho toàn cục (trên cả miền giá trị của các biến). Do đó, khi gặp những biểu thức biến thiên phức tạp thì sẽ rất khó khăn: một đánh giá có thể tốt cho trường hợp này nhưng lại không tốt cho trường hợp khác. Khó khăn này thường xuất hiện khi dấu đẳng thức xảy ra nhiều hơn một chỗ, chẳng hạn:

1. Ví dụ 1. Cho $x, y, z \in [-1, 1]$ và $x + y + z = 0$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{1+x+\frac{7}{9}y^2}+\sqrt{1+y+\frac{7}{9}z^2}+\sqrt{1+z+\frac{7}{9}x^2}\geq 3$$

hoặc thậm chí khi dấu đẳng thức chỉ xảy ra tại một chỗ nhưng bất đẳng thức là quá chặt, chẳng hạn:

2. Ví dụ 2. Chứng minh rằng với mọi số thực dương a, b, c thì:

$$\frac{a^7}{a^6+b^6}+\frac{b^7}{b^6+c^6}+\frac{c^7}{c^6+a^6}\geq\frac{a+b+c}{2}$$

Đây là hai bài toán khó, thậm chí rất khó, và chúng sẽ được giải quyết ở cuối chương. Một trong những cách đơn giản nhất để khắc phục khó khăn là chia miền làm việc thành nhiều miền con, mà mỗi miền tương đối đơn giản để có thể xử lí nhẹ nhàng. Nói một cách nôm na, thay vì làm một việc rất khó để nhận 100 đồng, ta nhận làm 10 việc dễ, mỗi việc chỉ cần 20 đồng, thì vẫn hiệu quả hơn. Như vậy, tư tưởng của chúng ta khi tấn công một bài toán bất đẳng thức có thể tóm tắt như sau:

• **Bước 1:** Dự đoán các trường hợp xảy ra dấu đẳng thức (ta sẽ gọi là các điểm "nhạy cảm"), khoanh vùng chúng lại và xét riêng ra. Như vậy ta chỉ còn phải làm việc với các bất đẳng thức thực sự.

• **Bước 2:** Tiếp tục chia miền xác định của các biến thành các trường hợp con để đơn giản hóa các bất đẳng thức thực sự này và giải quyết chúng.

Chúng ta hãy xét một ví dụ để hình dung tư tưởng này.

3. Ví dụ 3: Cho các số thực x, y, z có tổng bằng 1. Chứng minh rằng:

$$\frac{x}{1+x^2}+\frac{y}{1+y^2}+\frac{z}{1+z^2}\leq\frac{9}{10}\ (1)$$

Chứng minh

Nhận xét rằng đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 1$. Nhiệm vụ đầu tiên là tách li điểm nhạy cảm này. Xét $f(t)=\frac{t}{1+t^2}$ thì bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với bất đẳng thức $f(x)+f(y)+f(z)\leq 3f\left(\frac{x+y+z}{3}\right)$ (2)

Ta có: $f''(t)=\dfrac{27(3-t^2)}{(1+t^2)^3}\le 0, \forall t\in\left[0,\sqrt{3}\right]$ nên hàm f lõm trên $\left[0,\sqrt{3}\right]$.

Do đó nếu $x, y, z\in\left[0,\sqrt{3}\right]$ thì theo bất đẳng thức Jensen (2) đúng nên (1) đúng.

Đến đây điểm nhạy cảm đã được tách li. Phần còn lại ta chỉ phải chứng minh bất đẳng thức thực sự. Để giải quyết, chỉ cần chia thành nhiều trường hợp.

Giả sử $x\ge y\ge z$. Nếu $z\ge 0$ thì $x, y, z\in[0,1]\subset\left[0;\sqrt{3}\right]$ nên (2) đúng $\Rightarrow$ (1) đúng.

Do đó ta chỉ phải xét khi $z<0$. Xét các khả năng sau đây:

Xét $y<\dfrac{1}{2}$: Ta có: $\dfrac{x}{1+x^2}+\dfrac{y}{1+y^2}+\dfrac{z}{1+z^2}<\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{5}+0=\dfrac{9}{10}\Rightarrow$ (1) đúng

Xét $y\ge\dfrac{1}{2}$ và $0\ge z\ge-\dfrac{1}{2}$ ta có:

$$\frac{x}{1+x^2}+\frac{y}{1+y^2}+\frac{z}{1+z^2}\le\frac{x}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}+\frac{y}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}+\frac{4}{5}z=\frac{4}{5}<\frac{9}{10}\Rightarrow(1)\text{đúng}$$

Xét $y\ge\dfrac{1}{2}$ và $-\dfrac{1}{2}>z>-3$: Ta có: $\dfrac{x}{1+x^2}+\dfrac{y}{1+y^2}+\dfrac{z}{1+z^2}\le\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{10}=\dfrac{7}{10}<\dfrac{9}{10}$

Xét $y\ge\dfrac{1}{2}$ và $z<-3$: Ta có: $2x\ge x+y=1-z\ge 4\Rightarrow x\ge 2$. Khi đó:

$\dfrac{x}{1+x^2}+\dfrac{y}{1+y^2}+\dfrac{z}{1+z^2}<\dfrac{2}{5}+\dfrac{1}{2}+0=\dfrac{9}{10}$. Bài toán đến đây được giải quyết trọn vẹn.

Thông thường với các bài toán đơn giản như trên thì các bất đẳng thức thực sự mà ta nhận được sau bước 1 khá dễ để chứng minh. Nhưng đối với các bài toán khó thì các bất đẳng thức thực sự này cũng không hề đơn giản. Trong hai mục tiếp theo chúng ta sẽ làm quen với một cách giải quyết các bất đẳng thức thực sự. Tư tưởng vẫn là chia để trị:

- **Bước 2a:** (chuẩn bị) Biến đổi, chuẩn hóa bất đẳng thức thực sự về dạng thích hợp.
- **Bước 2b:** (dứt điểm) Băm nhỏ theo từng biến để xử lý.

Trong bước 1 thì tùy theo từng bài toán cụ thể mà chúng ta sẽ phải đề ra những chiến lược "tấn công" hợp lý (các bạn sẽ thấy điều này qua các ví dụ ở phần áp dụng). Bước 2 là một bước khó nếu các bạn chưa được làm quen, tuy nhiên sau khi đọc xong phần lý thuyết dưới đây chắc chắn các bạn sẽ đồng ý với chúng tôi rằng: đây mới chính là bước dễ nhất, bởi có thể thực hiện một cách nhanh chóng mà không phải "động não" nhiều. Bây giờ là lúc chúng ta cùng xem xét làm thế nào để giải quyết các bất đẳng thức thực sự.

II. BẤT ĐẲNG THỨC THỰC SỰ MỘT BIẾN SỐ

Giả sử chúng ta cần chứng minh một bất đẳng thức dạng $f(x)>0\ \forall x\in[a,b]$. Có lẽ ý niệm đầu tiên các bạn nghĩ đến là sử dụng đạo hàm để khảo sát hàm số. Tuy nhiên các bạn thử hình dung nếu ta phải chứng minh khoảng vài chục bất đẳng thức như vậy, trong vòng vài tiếng đồng hồ – quả là một công việc hết sức mệt mỏi (và khi mệt mỏi thì tính toán rất dễ nhầm lẫn).

Khi hàm f là liên tục (điều kiện này rất phổ biến), ta có thể xử lý đơn giản. Sau đây là một định lí có vai trò hết sức quan trọng trong phương pháp chia để trị.

1. Định lý 1: Cho $f(x, y)$ là hàm liên tục từ $[a, b] \times [a, b]$ vào $\mathbb{R}$, tăng theo biến x và giảm theo biến y. Khi đó 2 điều sau là tương đương.

(i) $f(x, x) > 0$, với mọi x thuộc $[a, b]$

(ii) Tồn tại dãy hữu hạn tăng $a = x_0 \le x_1 \le ... \le x_{m+1} = b$ sao cho:

$$f\left(x_n, x_{n+1}\right) > 0 \ \forall n = 0, 1, ..., m$$

Chứng minh

(ii) suy ra (i). Xét $x \in [a, b]$ bất kì thì tồn tại $0 \le n \le m$ sao cho $x \in \left[x_n, x_{n+1}\right]$

Khi đó: $f(x, x) \ge f\left(x_n, x\right) \ge f\left(x_n, x_{n+1}\right) > 0$

(i) suy ra (ii): Xét tập hợp A gồm tất cả các giá trị $z \in [a, b]$ sao cho: tồn tại dãy hữu hạn tăng $a = x_0 < x_1 < ... < x_{m+1} = z$ và $f\left(x_n, x_{n+1}\right) > 0 \ \forall n = 0, 1, ..., m$.

Dễ thấy rằng A có tính chất "nối dài", tức là nếu $z \in A$ thì mọi số trong $[a, z]$ cũng thuộc A. Ta thấy A khác rỗng (ít ra nó chứa a), và A bị chặn, nên tồn tại $z = \sup(A)$ (chặn trên nhỏ nhất của A).

Nếu $z < b$ thì vì $f(z, z) > 0$ và tính liên tục của f nên tồn tại $z_1 \in A$ (đủ gần z) và $z_2 \in (z, b)$ sao cho $f\left(z_1, z_2\right) > 0$. Khi đó, ta lấy dãy x_n tương ứng của z_1 và bổ sung thêm $x_{m+2} = z_2$ để suy ra $z_2 \in A$, và nhận được mâu thuẫn.

Vậy $b = \sup(A)$. Ta chứng minh b thuộc A nữa là xong. Tương tự như trên, vì $f(b, b) > 0$ và f liên tục nên tồn tại $b' \in A$ sao cho $f(b', b) > 0$. Ta lấy dãy x_n tương ứng của b' (vì b' thuộc A) và bổ sung thêm $x_{m+2} = b$ để suy ra $b \in A$.

• **Nhận xét:**

a) "Nối dài" là một kỹ thuật rất cơ bản. Có lẽ nó là một minh họa cho câu: "một bước thì ngắn, nhưng nhiều bước hiệp lại thì ngàn dặm cũng không xa".

b) Phần chứng minh (i) suy ra (ii) khá dài nhưng các bạn không phải băn khoăn vì cái mà chúng ta sử dụng chỉ là (ii) suy ra (i), mà chứng minh nó đơn giản đến mức... hiển nhiên. Chúng tôi trình bày chiều ngược lại để giúp các bạn yên tâm rằng nó ở đây có một sự tương đương, nghĩa là con đường của chúng ta chắc chắn thành công nếu bất đẳng thức cần chứng minh ban đầu là đúng.

Với cách nhìn này thì tư tưởng chia để trị nổi lên rất rõ. Đó là thay vì chứng minh (i): $f(x, x) > 0 \ \forall x \in [a, b]$, ta đưa về $m + 1$ bài toán nhỏ:

Chứng minh: $f(x, x) > 0$ với $x \in \left[x_n, x_{n+1}\right]$, $n = \overline{0, m}$. Khi phân hoạch đoạn $[a, b]$ đủ tốt (chọn dãy x_n thỏa (ii)) thì các bài toán nhỏ đúng một cách "hiển nhiên" vì $f(x, x) \ge f\left(x_n, x_{n+1}\right) > 0$.

Định lí trên còn có tên là "thuật toán cyclic", đây là một thuật toán hết sức đơn giản nhưng đem lại những tính năng hiệu quả đến không ngờ. Để các bạn dễ tưởng tượng chúng tôi xin trình bày một số thí dụ để mô phỏng lại quá trình trên:

2. Ví dụ 1: Chứng minh rằng: $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2+2,5}{x^4+x+1}}+\sqrt{\dfrac{x^3}{x+5}}+x^4-1,5\geq 0\ ,\ \forall x\geq 0,5$

Chứng minh

Nếu $x\geq 1,2$ thì $x^4>1,5$ nên hiển nhiên ta có điều phải chứng minh. Do đó ta chỉ cần xét khi $x\in[0,5;1,2]$. (đây là một bước đơn giản nhưng cần thiết bởi Định lí 1 chỉ phát huy tác dụng khi x đã được đưa về một đoạn xác định nào đó).

Đặt $f(a,b)=\sqrt{\dfrac{a^2+2,5}{b^4+b+1}}+\sqrt{\dfrac{a^3}{b+5}}+a^4-1,5$ với $b\geq a$.

Vì $f(a,\ b)$ đồng biến theo a và nghịch biến theo b nên nếu $f(a,\ b)\geq 0$ thì $f(x)\geq 0,\forall x\in[a,b]$. Vấn đề của ta là chia đoạn [0.5; 1.2] thành các đoạn nhỏ $[a,\ b]$ sao cho các đoạn nhỏ này quét hết đoạn [0.5; 1.2] là xong. Công đoạn này rất dễ dàng, xin đề xuất một cách:

$$f(0.5;0.55)=\sqrt{\frac{(0.5)^2+2.5}{(0.55)^4+0.55+1}}+\sqrt{\frac{(0.5)^3}{0.55+5}}+(0.5)^4-1.5>0$$

$$f(0.55;0.65)=\sqrt{\frac{(0.55)^2+2.5}{(0.65)^4+0.65+1}}+\sqrt{\frac{(0.55)^3}{0.65+5}}+(0.55)^4-1.5>0$$

$$f(0.65;0.8)=\sqrt{\frac{(0.55)^2+2.5}{(0.8)^4+0.8+1}}+\sqrt{\frac{(0.65)^3}{0.8+5}}+(0.65)^4-1.5>0$$

$$f(0.8;1,2)=\sqrt{\frac{(0.8)^2+2.5}{(1.2)^4+1.2+1}}+\sqrt{\frac{(0.8)^3}{1.2+5}}+(0.8)^4-1.5>0$$

Vậy bài toán được giải quyết.

• Nhận xét:

a) Về cách đặt hàm $f(a,\ b)$ thì nói chung là có nhiều cách, tuy nhiên đơn giản nhất là làm như trên: Đặt a vào những chỗ x tăng và đặt b vào những chỗ x giảm (tất nhiên, một cách đặt tốt hơn tương ứng với một lời giải ngắn hơn). Với cách đặt đơn giản này thì hàm f là duy nhất, nên sau này ta sẽ luôn hiểu là hàm f được xây dựng như vậy nếu không có chú thích nào khác.

b) Các bạn có thể thắc mắc về sự xuất hiện các đoạn chia, chẳng hạn như [0,5; 0,55]? Thực sự rất đơn giản, trong trường hợp này thì ta chỉ việc lấy một số lớn hơn 0.5 và thử trực tiếp (tất nhiên số này càng lớn càng tốt) cho đến khi nhận được kết quả đúng. Các bạn cũng có thể chia tốt hơn, chẳng hạn thay [0,5; 0,55] bằng [0.5; 0.56] (tuy nhiên nếu "tham lam" thay bằng [0,55; 0,57] thì sẽ không còn đúng nữa vì $f(0,55;\ 0,57)<0$). Trong **VII**, chúng ta sẽ trở lại vấn đề này bằng cách chỉ ra một cách chia "tối ưu", theo nghĩa số đoạn chia là ít nhất. Nhưng nói chung việc chia đoạn không cần quá chi li, chỉ cần đảm bảo tính vừa phải để từ từ đi đến thành công là được.

c) Ta thấy là đoạn ban đầu phải phải chia khá sát: [0,5; 0,55], nhưng đến đoạn thứ hai: [0,55; 0,65] khoảng cách giữa hai biên đã xa hơn, và đoạn thứ ba: [0.65; 0.8] lại xa hơn đoạn hai, và đoạn cuối lại xa hơn nữa. Việc này nói lên điều gì? Muốn biết, các bạn thử khảo sát hàm này xem sao, các bạn sẽ thấy $f(x)$ đồng biến trên [0,5; 1,2], tức khi x càng lớn thì bất đẳng thức càng lỏng. Như vậy cách làm của ta còn cho biết được bài toán mạnh và yếu ở chỗ nào!

3. Ví dụ 2: Cho $x \geq 0$. Kiểm tra xem bất đẳng thức sau đúng hay sai

$$f(x)=\sqrt{\frac{x^2+2,5}{x^4+x+1}}+\sqrt{\frac{x^3}{x+5}}+x^4-1,5\geq 0 \quad (*)$$

Giải

Trước hết ta lặp lại một số thủ tục

• Nếu $x \geq 1,2$ hiển nhiên ta có điều phải chứng minh.

• Nếu $x\in[0;1,2]$. Khi đó ta đặt $f(a,b)=\sqrt{\dfrac{a^2+2,5}{b^4+b+1}}+\sqrt{\dfrac{a^3}{b+5}}+a^4-1,5$ với $b \geq a$.

Dễ thấy $f(0;\ 0,1) > 0$ suy ra $f(x)>0, \forall x\in[0;0,1]$. Ta xét thử bất đẳng thức $f(0,1;0,2)>0$, nhưng rất tiếc bất đẳng thức này sai, ta thử hạ xuống $f(0,1;0,15)>0$ nhưng kể cả bất đẳng thức trên vẫn không đúng. Điều này báo hiệu điềm chẳng lành! Cuối cùng ta hạ xuống $f(0,1;\ 0,13) > 0$ thì mới đúng. Ta lại khảo sát xem với b bằng bao nhiêu thì $f(0,13;\ b) > 0$ rồi tiếp tục thực hiện quá trình này để thu được dãy sau: [0; 0,1], [0,1; 0,13], [0,13; 0,15], [0,15; 0,16]...

Ta thấy dãy này càng ngày càng tăng một cách chậm chạp và có vẻ như nó sẽ không tới được con số 0,18. Vậy "khu vực" này có gì đặc biệt mà cách làm của ta không thể vượt qua? Nghi ngờ này khiến ta thử kiểm nghiệm bằng cách thay $x = 0,18$ vào (*) và vấn đề được lộ ra: $f(0,18) < 0$. Vậy nguyên nhân rất đơn giản: bất đẳng thức (*) bị sai và phản ví dụ là $x = 0,18$.

Qua ví dụ trên các bạn có thể thấy được tính ưu việt của phương pháp này bởi nó không chỉ cho ta phép chứng minh đơn giản các bất đẳng thức đúng, mà thậm chí, nó còn phát hiện và chỉ giúp ta cả phản ví dụ cho những bất đẳng thức sai. Thật bất ngờ khi có một phương pháp có được tính năng đặc biệt như thế.

Sau này, để đơn giản, chúng ta sẽ chỉ cần nói ngắn gọn là:"chia để trị" theo dãy $a,x_1,x_2,...,x_{n-1},b$. Khi đó, mặc định là hàm f được xây dựng theo lối đơn giản và đoạn $[a, b]$ được chọn làm n đoạn con $[a,x_1],[x_1,x_2],...[x_{n-1},b]$. Chẳng hạn trong ví dụ 1 từ chỗ $x\in[0,5;\ 1]$ trở về sau chỉ cần nói: "chia để trị" theo biến x nhờ dãy 0.5; 0.55; 0.65; 0.8; 1; 1.2.

4. Ví dụ 3: Cho $x\in[0,5;0,65]$.

Chứng minh rằng: $f(x)=\sqrt[3]{\dfrac{x^2+3.1}{x^4-x+1}}+\dfrac{1}{(1+x)^4}-2\geq 0$

Chứng minh

Chia để trị bằng dãy sau: 0.55; 0.56; 0.57; 0.58; 0.59; 0.60; 0.61; 0.62; 0.63; 0.64; 0.65

Vì cách chia là không duy nhất nên các bạn cũng có thể tự mình thiết lập dãy mới, và chúng tôi nghĩ rằng như thế sẽ tốt hơn. Để kết thúc xin mời các bạn giải quyết một số bài tập sau:

5. Bài 1. Chứng minh rằng: $\sqrt{x+1}+x^7+\frac{1}{10}(x+1)^4>x+1,\ \forall x\in[0,1]$

6. Bài 2. Chứng minh rằng: $2x^4-2x^3-2x^2-x+3.5>0,\ \forall x>1$

7. Bài 3. Chứng minh rằng: $1.3a+\dfrac{2}{a^6+1}>2,\ \forall a\geq 1$

8. Bài 4. Chứng minh rằng: $\dfrac{x^2}{2x-1}+\sqrt{\dfrac{x}{x+2}}-1.5>0,\ \forall x>\dfrac{1}{2}$

9. Bài 5. Kiểm tra bất đẳng thức $\sqrt[3]{\dfrac{x^2+3.1}{x^4-x+1}}+\dfrac{1}{(1+x)^4}-2\geq 0$ với $x\in[0;\ 0.65]$.

III. BẤT ĐẲNG THỨC THỰC SỰ HAI BIẾN SỐ

Xét bài toán chứng minh $f(x,y)>0,\forall x\in[a.b],y\in[c,d]$. Tiếp nối ý ở **II.**, ta mong muốn chia hình hộp $[a,\ b]\times[c,\ d]$ thành các hình hộp con mà trên mỗi hình con thì bất đẳng thức sẽ đúng theo lối "hiển nhiên". Vấn đề là chia như thế nào ? Rõ ràng nếu chia theo cả x và y thì sẽ rất phức tạp. Để đơn giản, không gì hơn là ta chỉ chia theo một biến rồi mới chia theo biến kia (điều này cũng giống như cắt bánh gatô, ban đầu ta cắt theo chiều ngang trước rồi mới cắt theo chiều dọc), và các bạn lưu ý rằng khi ta thực hiện như vậy cũng đồng nghĩa với việc biến một bài toán lớn hai chiều thành các bài toán nhỏ, mà mỗi bài toán nhỏ chỉ là bài toán một chiều, cái chúng ta đã được tìm hiểu trong **II.** Chẳng hạn chia theo biến y ta có:

1. Định lí 2: Cho $f(x,\ y,\ z)$ là hàm liên tục trên $[a,\ b]\times[c,\ d]\times[c,\ d]$ vào $\mathbb{R}$, tăng theo biến y và giảm theo biến z. Khi đó 2 điều sau là tương đương.

(*i*) $f(x,\ y,\ y)>0,\ \ \forall x\in\ [a,\ b],\ y\in\ [c,\ d]$.

(*ii*) Tồn tại dãy hữu hạn tăng $c=y_0\leq y_1\leq y_2\leq ...\leq y_{m+1}=d$ sao cho:

Với mọi $n=0,1,...,m$ thì $f(x,y_n,y_{n+1})>0,\ \forall x\in\ [a,\ b]$

Chứng minh

(*ii*) **suy ra** (*i*): Xét $y\in\ [c,\ d]$ bất kì thì tồn tại $0\leq n\leq m$ sao cho $y\in[y_n,y_{n+1}]$.

Khi đó: $f(x,y,y)\geq f(x,y_n,y_{n+1})>0$

(*i*) **suy ra** (*ii*): Cũng dùng ý tưởng tương tự như Định lý 1 nhưng phức tạp hơn và chúng tôi không trình bày ở đây, vì chiều chúng ta cần sử dụng chỉ là (*ii*) suy ra (*i*).

Chiều thuận (*i*) **suy ra** (*ii*) giúp chúng ta khẳng định rằng cách làm này chắc chắn sẽ đi đến thành công, còn trong từng trường hợp cụ thể chúng ta có thể chứng minh một cách "ngây thơ" như sau:

2. Ví dụ 1: Cho $a\in[1.5;2]$ và $b\in[1;2]$. Chứng minh rằng: $\frac{a^2}{2a+b}+\sqrt{\frac{b}{2b+a}}-1\geq 0$

Chứng minh

Ta có thể chia theo biến nào cũng được, chẳng hạn chia theo b để quy về bài toán một biến theo a. Đặt: $f(a,y,z)=\frac{a^2}{2a+z}+\sqrt{\frac{y}{2z+a}}-1$ với $a\in[1.5;2]$ và $2\geq y\geq z\geq 1$.

Ta thấy $f(a, y, z)$ đồng biến theo y và nghịch biến theo z, cho nên nếu $f(a, y, z) > 0$ thì $f(a, b, b) > 0$ với mọi $b\in[y, z]$. Ta lần lượt chứng minh các bất đẳng thức sau bằng phương pháp chia để trị theo biến a với các dãy tương ứng:

$f(a;1;1.2)>0\ \forall a\in[1.5;2]$ (với dãy 1.5; 1.6; 1.8; 2)

$f(a;1.2;1.5)>0\ \forall a\in[1.5;2]$ (với dãy 1.5; 1.55; 1.65; 1.8; 2)

$f(a;1.5;1.8)>0\ \forall a\in[1.5;2]$ (với dãy 1.5; 1.54; 1.64; 1.8; 2)

$f(a;1.8;2)>0\ \forall a\in[1.5;2]$ (với dãy 1.5; 1.55; 1.7; 2)

Vậy ta có điều phải chứng minh.

***Nhận xét:** Ta thấy hàm f cũng được xây dựng theo lối đơn giản: đặt y vào những chỗ b tăng và đặt z vào những chỗ b giảm. Cách xây dựng đơn giản này là duy nhất, do đó nếu nói: "chia để trị theo biến b" thì ta ngầm hiểu là với hàm f được xây dựng theo lối đó nếu không có chú thích gì khác.

3. Ví dụ 2: Cho $z\in\left[\frac{1}{8};1\right]$ và $x\geq 1$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{x(x+1+z)}{x^2+z}}+\sqrt{\frac{x+1+z}{1+zx}}+\sqrt{\frac{z(x+1+z)}{z^2+x}}>2\sqrt{2}$$

Chứng minh

Đặt $f(x,a,b)=\sqrt{\frac{x(x+1+a)}{x^2+b}}+\sqrt{\frac{x+1+a}{1+bx}}+\sqrt{\frac{z(x+1+a)}{b^2+x}}$ với $x\geq 1$ và $1\geq b\geq a\geq\frac{1}{8}$

Ta thấy ngay $f(x, a, b)$ đồng biến theo a và nghịch biến theo b nên nếu $f(x, a, b) > 0$ thì $f(x, z, z) > 0$ với mọi $z\in[a, b]$. Ta chứng minh lần lượt các bất đẳng thức sau:

$$f\left(x,\frac{1}{8},\frac{1}{7}\right)>0, f\left(x,\frac{1}{7},\frac{1}{4}\right)>0, f\left(x,\frac{1}{4},\frac{1}{3}\right)>0, f\left(x,\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)>0, f\left(x,\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)>0, f\left(x,\frac{3}{4},1\right)>0$$

Chúng tôi sẽ trình bày kĩ trường hợp đầu tiên, các trường hợp còn lại các bạn chứng minh tương tự. Chia để trị cho $x\in[1;+\infty)$ thì không được, nên ta phải thực hiện đánh giá để giải quyết trường hợp x đủ lớn: $\sqrt{\frac{x\left(x+\frac{9}{8}\right)}{x^2+\frac{1}{7}}}>1,\ \sqrt{\frac{\frac{1}{8}\left(x+1+\frac{1}{8}\right)}{\left(\frac{1}{7}\right)^2+x}}\geq\sqrt{\frac{1}{8}}$

Do đó (1) đúng nếu ta chứng minh được bất đẳng thức $\sqrt{\dfrac{x+1+\frac{1}{8}}{1+\frac{1}{7}x}} \geq \sqrt{2.2}$ (2)

Bình phương hai vế rồi quy về phương trình bậc nhất suy ra bất đẳng thức cuối đúng với mọi $x > 1.6$. Phần còn lại là chứng minh bất đẳng thức cuối đúng bằng chia để trị. Việc hoàn thành chứng minh xin nhường lại cho các bạn.

Cho đến thời điểm này các bất đẳng thức 1 biến đã trở nên đơn giản nên tiếp theo chúng tôi sẽ không trình bày chứng minh cho các bất đẳng thức 1 biến nữa. Riêng với bất đẳng thức hai biến, chúng tôi sẽ trình bày cách chia đủ cụ thể bằng cách chỉ ra chia theo biến nào và dãy số tương ứng. Chẳng hạn trong Ví dụ 1 ta sẽ nói: "Chia để trị theo biến b để quy về bất đẳng thức một biến theo a nhờ dãy sau: 1; 1.2; 1.5; 1.8; 2". Để kết thúc **III**, đề nghị các bạn giải quyết một số bài tập sau:

4. Bài tập 1. Chứng minh: $(a-1)\dfrac{1+b^5}{1-b^5}+\dfrac{2}{1+a^5}+\dfrac{2(1-b)b^5}{a^5-b^5}-b>0$, $\forall b\in[0;1)$, $\forall a>1$.

Chú ý: Do $b\in[0;1)$ nên bạn đọc thực hiện phương pháp chia để trị theo b để quy về bất đẳng thức một biến theo a dễ hơn là chia để trị theo a để quy về bất đẳng thức một biến theo b vì ta mới chỉ có $a > 1$.

5. Bài tập 2. Cho $b\in[0;1)$, $a > 1$. Kiểm tra xem hai bất đẳng thức sau đúng hay sai

a) $(a-1)\dfrac{1+b^6}{1-b^6}+\dfrac{2}{1+a^6}+\dfrac{2(1-b)b^6}{a^6-b^6}-b>0$

b) $(a-1)\dfrac{1+b^7}{1-b^7}+\dfrac{2}{1+a^7}+\dfrac{2(1-b)b^7}{a^7-b^7}-b>0$

(Gợi ý: ta vẫn chứng minh bằng chia để trị như bình thường, nếu bất đẳng thức sai thì dãy của ta sẽ hội tụ về điểm sai của bất đẳng thức, từ đó tìm được phản ví dụ).

6. Bài tập 3. Cho $x > 2$ và $z\in\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$.

Chứng minh rằng: $\sqrt{\dfrac{x(x+1+z)}{x^2+5x+2xz+4+14z+z^2}}+$

$$+\sqrt{\frac{x+1+z}{1+5z+2x+4z^2+14xz+x^2}}+\sqrt{\frac{z(x+1+z)}{z^2+5xz+2z+4x^2+14x+1}}>1$$

IV. PHƯƠNG PHÁP CHIA ĐỂ TRỊ VỚI BẤT ĐẲNG THỨC THUẦN NHẤT BA BIẾN

Phương pháp chung:

Bất đẳng thức thuần nhất ba biến là một dạng toán hay, cổ điển nhưng vẫn chứa đựng nhiều điều mới mẽ, đặc biệt có những bài hình thức đơn giản nhưng lại mạnh và khó đến kinh ngạc. Chia để trị là một công cụ đầy hiệu lực để giải quyết những bài như thế. Trong mục này, các bài toán sẽ được giải quyết theo các bước chính như sau:

• *Bước 1:* Dự đoán các trường hợp xảy ra dấu đẳng thức (ta gọi là các điểm "nhạy cảm"), khoanh vùng chúng lại xét riêng ra. Phần còn lại ta chỉ làm việc với các bất đẳng thức thực sự.

• ***Bước 2:*** Biến đổi, chuẩn hóa các bất đẳng thức thực sự về dạng thích hợp rồi dứt điểm bằng cách băm nhỏ theo từng biến để xử lí.

Mục này sẽ chỉ xét những ví dụ thật cơ bản, mà với những gì đã trang bị trước đó, chúng ta có thể theo dõi một cách dễ dàng.

Bài toán 1. Chứng minh rằng với $a, b, c > 0$ thì:

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+bc}}+\frac{1}{\sqrt{b^2+ca}}+\frac{1}{\sqrt{c^2+ab}}>\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{ab+bc+ca}}$$

Chứng minh

Để cho gọn, bằng cách chuẩn hóa ta giả sử $ab + bc + ca = 1$. Các bạn lưu ý là khi cho $ab = ac = \frac{1}{2}$, $a \to +\infty$ thì vế trái tiến về $2\sqrt{2}$, nên mặc dù có dấu ">" nhưng có thể xem đây là 1 bất đẳng thức dạng "chặt chẽ".

Trước hết chúng ta biến đổi bài toán dưới hình thức dễ chịu hơn. Đặt $x = ab$, $y = bc$, $z = ca$ thì $x, y, z > 0$ và $x + y + z = 1$. Khi đó bất đẳng thức tương đương:

$$\sqrt{\frac{x}{x^2+yz}}+\sqrt{\frac{y}{y^2+zx}}+\sqrt{\frac{z}{z^2+xy}}>2\sqrt{2} \quad (1)$$

Ta đồng bậc hóa (1) và chứng minh bất đẳng thức sau đúng với mọi $x, y, z > 0$

$$\sqrt{\frac{x(x+y+z)}{x^2+yz}}+\sqrt{\frac{y(x+y+z)}{y^2+zx}}+\sqrt{\frac{z(x+y+z)}{z^2+xy}}>2\sqrt{2} \quad (2)$$

• ***Bước 1:*** (khoanh vùng điểm nhạy cảm)

Không mất tổng quát có thể giả sử $x \ge y \ge z$. Dễ dàng dự đoán điểm nhạy cảm trong bất đẳng thức (2) là $x = y$, $z = 0$. Điều này gợi ta đến "dồn biến" và ta thử thực hiện bằng các đánh giá thô sơ xem sao.

Đặt $f(x, y, z) = \text{VT}(2)$, ta xét khi nào thì $f(x,y,z) \ge f\left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}, z\right)$ (3)

Sử dụng bất đẳng thức ***AM – GM*** ta có: $\sqrt{\frac{z(x+y+z)}{z^2+xy}} \ge \sqrt{\frac{z(x+y+z)}{z^2+\left(\frac{x+y}{2}\right)^2}}$

và $\sqrt{\frac{x(x+y+z)}{x^2+yz}}+\sqrt{\frac{y(x+y+z)}{y^2+zx}} \ge 2\cdot\sqrt[4]{\frac{xy(x+y+z)^2}{(x^2+yz)(y^2+zx)}}$

Do đó để chứng minh (3) đúng ta chỉ cần chứng minh

$$\sqrt[4]{\frac{xy(x+y+z)^2}{(x^2+yz)(y^2+zx)}} \ge \sqrt{\frac{2(x+y+z)}{x+y+2z}} \Leftrightarrow \frac{xy}{(x^2+yz)(y^2+zx)} \ge \frac{4}{(x+y+2z)^2}$$