1. $\dfrac{a^2}{b+c-a}+\dfrac{b^2}{c+a-b}+\dfrac{c^2}{a+b-c}\ge\dfrac{(a+b+c)^2}{(b+c-a)+(c+a-b)+(a+b-c)}=a+b+c$

2. $VT=\dfrac{a^4}{a(b+c-a)}+\dfrac{b^4}{b(c+a-b)}+\dfrac{c^4}{c(a+b-c)}\ge\dfrac{(a^2+b^2+c^2)^2}{2(ab+bc+ca)-(a^2+b^2+c^2)}\ge$

$$\ge\dfrac{(a^2+b^2+c^2)^2}{(a^2+b^2)+(b^2+c^2)+(c^2+a^2)-(a^2+b^2+c^2)}=\dfrac{(a^2+b^2+c^2)^2}{a^2+b^2+c^2}=a^2+b^2+c^2$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c>0$

Bài 3. Cho $a,\ b,\ c>0$ Chứng minh rằng:

1. $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}\ge\dfrac{3}{2}$ **2.** $\dfrac{a}{b+2c}+\dfrac{b}{c+2a}+\dfrac{c}{a+2b}\ge1$

3. $\dfrac{a}{pb+qc}+\dfrac{b}{pc+qa}+\dfrac{c}{pa+qb}\ge\dfrac{3}{p+q}$, $\forall\, a,\ b,\ c,\ p,\ q>0$

Chứng minh

• ***Bổ đề:*** $(a+b+c)^2\ge3(ab+bc+ca)$

• ***Áp dụng:*** Sử dụng bất đẳng thức ***CBS*** dạng ***Engel*** ta có

1. $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}=\dfrac{a^2}{ab+ac}+\dfrac{b^2}{bc+ba}+\dfrac{c^2}{ca+cb}$

$$\ge\dfrac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)}\ge\dfrac{3(ab+bc+ca)}{2(ab+bc+ca)}=\dfrac{3}{2}$$

2. $\dfrac{a}{b+2c}+\dfrac{b}{c+2a}+\dfrac{c}{a+2b}=\dfrac{a^2}{a(b+2c)}+\dfrac{b^2}{b(c+2a)}+\dfrac{c^2}{c(a+2b)}$

$$\ge\dfrac{(a+b+c)^2}{a(b+2c)+b(c+2a)+c(2a+b)}=\dfrac{(a+b+c)^2}{3(ab+bc+ca)}\ge\dfrac{3(ab+ba+ca)}{3(ab+ba+ca)}=1$$

3. $\dfrac{a}{pb+qc}+\dfrac{b}{pc+qa}+\dfrac{c}{pa+qb}=\dfrac{a^2}{a(pb+qc)}+\dfrac{b^2}{b(pc+qa)}+\dfrac{c^2}{c(pa+qb)}$

$$\ge\dfrac{(a+b+c)^2}{a(pb+qc)+b(pc+qa)+c(pa+qb)}\ge\dfrac{3(ab+bc+ca)}{(p+q)(ab+bc+ca)}=\dfrac{3}{p+q}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c>0$

Bài 4. Cho $a,b,c\ge0$ thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh:

1. $\dfrac{a}{a+2bc}+\dfrac{b}{b+2ca}+\dfrac{c}{c+2ab}\ge1$ (1) **2.** $\dfrac{a}{2a+bc}+\dfrac{b}{2b+ca}+\dfrac{c}{2c+ab}\le1$ (2)

Chứng minh

1. Sử dụng bất đẳng thức ***CBS*** dạng ***Engel*** ta có:

$$VT(1)=\frac{a^2}{a^2+2abc}+\frac{b^2}{b^2+2abc}+\frac{c^2}{c^2+2abc}\ge\frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+6abc}$$

Ta cần chứng minh: $(a+b+c)^2\ge a^2+b^2+c^2+6abc\Leftrightarrow ab+bc+ca\ge 3abc$

Sử dụng $a+b+c=3$ và bất đẳng thức ***AM – GM*** ta có:
$3(ab+bc+ca)=(a+b+c)(ab+bc+ca)\ge 9abc\Rightarrow ab+bc+ca\ge 3abc$ (đpcm)

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$ hoặc $a\to 3, b=c\to 0$ và các hoán vị.

2. $(2)\Leftrightarrow\sum_{cyc}\frac{2a}{2a+bc}\le 2\Leftrightarrow\sum_{cyc}\left(1-\frac{bc}{2a+bc}\right)\le 2\Leftrightarrow\sum_{cyc}\frac{bc}{2a+bc}\ge 1$ (3)

Sử dụng bất đẳng thức ***CBS*** dạng ***Engel*** ta có:

$$VT(3)=\sum_{cyc}\frac{(bc)^2}{2abc+(bc)^2}\ge\frac{(ab+bc+ca)^2}{6abc+(ab)^2+(bc)^2+(ca)^2}=\frac{(ab)^2+(bc)^2+(ca)^2+2abc(a+b+c)}{6abc+(ab)^2+(bc)^2+(ca)^2}=1$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$ hoặc $abc=0$.

Bài 5. [IMO 1995] Cho $\begin{cases}a,b,c>0\\abc=1\end{cases}$ Chứng minh: $\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\ge\frac{3}{2}$

Chứng minh

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}=\frac{\frac{1}{a^2}}{a(b+c)}+\frac{\frac{1}{b^2}}{b(c+a)}+\frac{\frac{1}{c^2}}{c(a+b)}\ge\frac{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2}{2(ab+bc+ca)}$$

$=\frac{(ab+bc+ca)^2}{2(ab+bc+ca)}\ge\frac{3abc(ab+bc+ca)}{2(ab+bc+ca)}=\frac{3}{2}$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$.

Bài 6. [JaPan MO 2004] Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng :

$$2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)\ge\frac{1+a}{1-a}+\frac{1+b}{1-b}+\frac{1+c}{1-c}$$

Chứng minh

$$2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)\ge\frac{2a+b+c}{b+c}+\frac{a+b+2c}{c+a}+\frac{a+b+2c}{a+b}=\frac{2a}{b+c}+\frac{2b}{c+a}+\frac{2c}{a+b}+3$$

$$\Leftrightarrow\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\ge\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+\frac{3}{2}\Leftrightarrow\frac{ac}{b(b+c)}+\frac{ab}{c(c+a)}+\frac{bc}{a(a+b)}\ge\frac{3}{2}\ (1)$$

Sử dụng bất đẳng thức ***CBS*** dạng ***Engel*** ta có:

$$VT(1)=\frac{(ac)^2}{abc(b+c)}+\frac{(ab)^2}{abc(c+a)}+\frac{(bc)^2}{abc(a+b)}\ge\frac{(ab+bc+ca)^2}{2abc(a+b+c)}\ge\frac{3abc(a+b+c)}{2abc(a+b+c)}=\frac{3}{2}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{3}$

Bài 7. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh: $\dfrac{(a+b)^2}{a^2+b^2+2c^2}+\dfrac{(b+c)^2}{b^2+c^2+2a^2}+\dfrac{(c+a)^2}{c^2+a^2+2b^2}\le 3$

Chứng minh

Sử dụng bất đẳng thức ***CBS*** dạng ***Engel*** ta có

$$+\begin{cases}\dfrac{a^2}{a^2+c^2}+\dfrac{b^2}{b^2+c^2}\ge\dfrac{(a+b)^2}{(a^2+c^2)+(b^2+c^2)}=\dfrac{(a+b)^2}{a^2+b^2+2c^2}\\[2ex] \dfrac{b^2}{b^2+a^2}+\dfrac{c^2}{c^2+a^2}\ge\dfrac{(b+c)^2}{(b^2+a^2)+(c^2+a^2)}=\dfrac{(b+c)^2}{b^2+c^2+2a^2}\\[2ex] \dfrac{c^2}{c^2+b^2}+\dfrac{a^2}{a^2+b^2}\ge\dfrac{(c+a)^2}{(c^2+b^2)+(a^2+b^2)}=\dfrac{(c+a)^2}{c^2+a^2+2b^2}\end{cases}$$

$$3=\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2}+\frac{b^2+c^2}{b^2+c^2}+\frac{c^2+a^2}{c^2+a^2}\ge\frac{(a+b)^2}{a^2+b^2+2c^2}+\frac{(b+c)^2}{b^2+c^2+2a^2}+\frac{(c+a)^2}{c^2+a^2+2b^2}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c>0$

Bài 8. Cho $\begin{cases}a,b,c\ge 0\\ a^2+b^2+c^2=1\end{cases}$. Chứng minh rằng: $\dfrac{1}{1-ab}+\dfrac{1}{1-bc}+\dfrac{1}{1-ca}\le\dfrac{9}{2}$ (1)

Chứng minh

Biến đổi bất đẳng thức (1) về dạng tương đương sau

$$\frac{1}{1-ab}-1+\frac{1}{1-bc}-1+\frac{1}{1-ca}-1=\frac{ab}{1-ab}+\frac{bc}{1-bc}+\frac{ca}{1-ca}\le\frac{3}{2}.$$

Sử dụng bất đẳng thức ***CBS*** dạng ***Engel*** ta có

$$+\begin{cases}\dfrac{ab}{1-ab}=\dfrac{2ab}{(1+c^2)+(a-b)^2}\le\dfrac{2ab}{1+c^2}\le\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{(a+b)^2}{(c^2+a^2)+(c^2+b^2)}\le\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a^2}{c^2+a^2}+\dfrac{b^2}{c^2+b^2}\right)\\[2ex] \dfrac{bc}{1-bc}=\dfrac{2bc}{(1+a^2)+(b-c)^2}\le\dfrac{2bc}{1+a^2}\le\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{(b+c)^2}{(a^2+b^2)+(a^2+c^2)}\le\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{b^2}{a^2+b^2}+\dfrac{c^2}{a^2+c^2}\right)\\[2ex] \dfrac{ca}{1-ca}=\dfrac{2ca}{(1+b^2)+(c-a)^2}\le\dfrac{2ca}{1+b^2}\le\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{(c+a)^2}{(b^2+c^2)+(b^2+a^2)}\le\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{c^2}{b^2+c^2}+\dfrac{a^2}{b^2+a^2}\right)\end{cases}$$

$$\Rightarrow\frac{ab}{1-ab}+\frac{bc}{1-bc}+\frac{ca}{1-ca}\le\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2}+\frac{b^2+c^2}{b^2+c^2}+\frac{c^2+a^2}{c^2+a^2}\right)=\frac{3}{2}.$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$.

Bài 9. Cho $a, b, c, x, y, z, t > 0$ và $x \ge y \ge z \ge t$. Chứng minh:

$$T = \frac{x}{ay+bz+ct} + \frac{y}{az+bt+cx} + \frac{z}{at+bx+cy} + \frac{t}{ax+by+cz} \ge \frac{4}{a+b+c} \quad (1)$$

Chứng minh

Ta có: $T = \sum_{cyc} \frac{x^2}{axy+bxz+cxt} \ge \frac{(x+y+z+t)^2}{(a+c)(xy+yz+zt+tx)+b(2xz+2yt)}$

• Nếu $xy+yz+zt+tx \ge 2xz+2yt$ thì

$$\frac{(x+y+z+t)^2}{(a+c)(xy+yz+zt+tx)+b(2xz+2yt)} \ge \frac{(x+y+z+t)^2}{(a+b+c)(xy+yz+zt+tx)} \quad (2)$$

Ta có $(x+y+z+t)^2 \ge 4(xy+yz+zt+tx) \Leftrightarrow (x-y+z-t)^2 \ge 0$ đúng, nên

$$\frac{(x+y+z+t)^2}{(a+c)(xy+yz+zt+tx)+b(2xz+2yt)} \ge \frac{4(xy+yz+zt+tx)}{(a+b+c)(xy+yz+zt+tx)} = \frac{4}{a+b+c}$$

• Nếu $xy+yz+zt+tx \le 2xz+2yt$ thì

$$\frac{(x+y+z+t)^2}{(a+c)(xy+yz+zt+tx)+b(2xz+2yt)} \ge \frac{(x+y+z+t)^2}{(a+b+c)(2xz+2yt)} \quad (3)$$

Ta sẽ chứng minh

$$(x+y+z+t)^2 \ge 4(2xz+2yt) \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+t^2+2xy+2yz+2zt+2tx-6xz-6yt \ge 0$$

Đặt $u=\frac{x}{t}; v=\frac{y}{t}; w=\frac{z}{t}$ thì $u \ge v \ge w \ge 1$, khi đó (3) $\Leftrightarrow$

$u^2+v^2+w^2+1+2uv+2vw+2w+2u-6uw-6v \ge 0$

$\Leftrightarrow f(v) = v^2 + v(2u+2w-6) + u^2 + w^2 + 1 + 2w + 2u - 6uw$

$f'(v) = 2v + 2u + 2w - 6 \ge 0$ với $u \ge v \ge w \ge 1 \Rightarrow f(v)$ tăng trên $[1, +\infty)$.

Suy ra, $f(v) \ge f(w) = 4w^2 + u^2 - 4uw - 4w + 2u + 1 = (2w-u-1)^2 \ge 0$

$$\Rightarrow \frac{(x+y+z+t)^2}{(a+c)(xy+yz+zt+tx)+b(2xz+2yt)} \ge \frac{4(2xz+2yt)}{(a+b+c)(2xz+2yt)} = \frac{4}{a+b+c}$$

Bài 10 . Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $(ab)^2+(bc)^2+(ca)^2 \ge (abc)^2$. Chứng minh:

$$\frac{(ab)^2}{(a^2+b^2)c^3} + \frac{(bc)^2}{(b^2+c^2)a^3} + \frac{(ca)^2}{(c^2+a^2)b^3} \ge \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (1)$$

Chứng minh

Đặt $x=\frac{1}{a^2};y=\frac{1}{b^2};z=\frac{1}{c^2}$, khi đó bất đẳng thức (1) trở thành

Cho $\begin{cases}x,y,z>0\\x+y+z\ge 1\end{cases}$, chứng minh $\frac{x\sqrt{x}}{y+z}+\frac{y\sqrt{y}}{z+x}+\frac{z\sqrt{z}}{x+y}\ge\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Thật vậy $\frac{x\sqrt{x}}{y+z}+\frac{y\sqrt{y}}{z+x}+\frac{z\sqrt{z}}{x+y}=\frac{x^2}{(y+z)\sqrt{x}}+\frac{y^2}{(z+x)\sqrt{y}}+\frac{z^2}{(x+y)\sqrt{z}}$

$$=\frac{x^2}{\sqrt{y+z}\sqrt{x(y+z)}}+\frac{y^2}{\sqrt{z+x}\sqrt{y(z+x)}}+\frac{z^2}{\sqrt{x+y}\sqrt{z(x+y)}}$$

$$\ge\frac{(x+y+z)^2}{\sqrt{y+z}\sqrt{x(y+z)}+\sqrt{z+x}\sqrt{y(z+x)}+\sqrt{x+y}\sqrt{z(x+y)}}$$

$$\ge\frac{(x+y+z)^2}{\sqrt{\left[(y+z)+(z+x)+(x+y)\right]\left[x(y+z)+y(z+x)+z(x+y)\right]}}$$

$$=\frac{(x+y+z)^2}{\sqrt{4(x+y+z)(xy+yz+zx)}}\ge\frac{(x+y+z)^2}{2\sqrt{\frac{1}{3}(x+y+z)^3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{x+y+z}\ge\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Bài 11. Chứng minh rằng nếu $a,b,c\ge 0$, thì

$$S=\frac{a}{\sqrt{b^2+\frac{1}{4}bc+c^2}}+\frac{b}{\sqrt{c^2+\frac{1}{4}ca+a^2}}+\frac{c}{\sqrt{a^2+\frac{1}{4}ab+b^2}}\ge 2$$

Chứng minh

$S\ge\frac{(a+b+c)^2}{a\sqrt{b^2+\frac{1}{4}bc+c^2}+b\sqrt{c^2+\frac{1}{4}ca+a^2}+c\sqrt{a^2+\frac{1}{4}ab+b^2}}$. Ta sẽ chứng minh

$$T=a\sqrt{b^2+\frac{1}{4}bc+c^2}+b\sqrt{c^2+\frac{1}{4}ca+a^2}+c\sqrt{a^2+\frac{1}{4}ab+b^2}\le\frac{1}{2}(a+b+c)^2$$

Theo bất đẳng thức ***Cauchy – Schwarz*** ta có:

$$T=\sqrt{a}\sqrt{a\left(b^2+\frac{1}{4}bc+c^2\right)}+\sqrt{b}\sqrt{b\left(c^2+\frac{1}{4}ca+a^2\right)}+\sqrt{c}\sqrt{c\left(a^2+\frac{1}{4}ab+b^2\right)}$$

$$\le\sqrt{(a+b+c)\left[\frac{3}{4}abc+a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)\right]}\le\frac{1}{2}(a+b+c)^2$$

Trong đánh giá trên ta đã sử dụng bất đẳng thức

$$\frac{3}{4}abc+a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)\le\frac{1}{4}(a+b+c)^2$$

$\Leftrightarrow a^3+b^3+c^3+3abc\ge a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)$ (đúng theo ***Schur***)

Bài 12. Cho a,b,c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Tìm giá trị nhỏ nhất của:

$$P=\frac{4a}{b+c-a}+\frac{9b}{c+a-b}+\frac{16}{a+b-c}$$

Giải

$$P=4\left(\frac{a}{b+c-a}+\frac{1}{2}\right)+9\left(\frac{b}{c+a-b}+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{c}{a+b-c}-\frac{1}{2}\right)-\frac{29}{2}$$

$$=\frac{a+b+c}{2}\left(\frac{4}{b+c-a}+\frac{9}{c+a-b}+\frac{16}{a+b-c}\right)-\frac{29}{2}$$

$$\geq\frac{a+b+c}{2}\cdot\frac{(2+3+4)^2}{(a+b-c)(c+a-b)(a+b-c)}-\frac{29}{2}=\frac{a+b+c}{2}\cdot\frac{81}{a+b+c}-\frac{29}{2}=26$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow\frac{2}{b+c-a}=\frac{3}{c+a-b}=\frac{4}{a+b-c}\Leftrightarrow\frac{a}{7}=\frac{b}{6}=\frac{c}{5}$. Vậy Min $P=26$.

Bài 13. Cho $a,b,c\geq 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2(b+c)}{b^2+c^2}+\frac{b^2(c+a)}{c^2+a^2}+\frac{c^2(a+b)}{a^2+b^2}\geq a+b+c\ (1)$$

Chứng minh

Sử dụng bất đẳng thức ***CBS*** dạng ***Engel*** ta có:

$$VT(1)=\sum_{cyc}\frac{\left[a^2(b+c)\right]^2}{(b^2+c^2)\left[a^2(b+c)\right]}\geq\frac{\left[\sum_{cyc}a^2(b+c)\right]^2}{\sum_{cyc}a^2(b+c)(b^2+c^2)}$$

Ta cần chứng minh: $\left[\sum_{cyc}a^2(b+c)\right]^2\geq\left(\sum_{cyc}a\right)\left[\sum_{cyc}a^2(b+c)(b^2+c^2)\right]$ (2)

Đặt $p=a+b+c,q=ab+bc+ca$ thì $p^2\geq 3q$ và $p^3+9abc\geq 4pq$ (theo ***Schur***)

Ta có $\left[\sum_{cyc}a^2(b+c)\right]^2=(pq-3abc)^2=p^2q^2-6pqabc+9a^2b^2c^2$

$$\sum_{cyc}a^2(b+c)(b^2+c^2)=p\left(a^2b^2+b^2c^2c^2a^2\right)+qabc=p\left(q^2-2pabc\right)+qabc$$

Khi đó bất đẳng thức (2) trở thành:

$abc\left(2p^3+9abc-7pq\right)\geq 0\Leftrightarrow abc\left(p^3+9abc-4pq\right)+pabc\left(p^2-3q\right)\geq 0$ luôn đúng.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$ hoặc $a=b;c=0$ và các hoán vị.

Bài 14. Cho $a,b,c\geq 0$. Chứng minh rằng: $\frac{a^2-bc}{a+b}+\frac{b^2-ca}{b+c}+\frac{c^2-ab}{c+a}\geq 0$

Chứng minh

Bất đẳng thức $\Leftrightarrow\frac{a(a+c)}{a+b}+\frac{b(b+a)}{b+c}+\frac{c(c+b)}{c+a}\geq a+b+c$ (1)

Áp dụng bất đẳng thức ***CBS*** dạng ***Engel*** ta có:

$$VT(1)\ge\frac{\left[a(a+c)+b(b+a)+c(c+b)\right]^2}{a(a+b)(a+c)+b(b+c)(b+a)+c(c+a)(c+b)}$$

$$=\frac{\left(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca\right)^2}{a^3+b^3+c^3+(a+b+c)(ab+bc+ca)}.$$

Ta cần chứng minh:

$$\left(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca\right)^2\ge(a+b+c)\left(a^3+b^3+c^3\right)+(a+b+c)^2(ab+bc+ca)$$

$$\Leftrightarrow\left(\sum_{cyc}a^2\right)^2+2\left(\sum_{cyc}a^2\right).\left(\sum_{cyc}ab\right)+\left(\sum_{cyc}ab\right)^2\ge\left(\sum_{cyc}a\right)\left(\sum_{cyc}a^3\right)+\left(\sum_{cyc}a^2\right).\left(\sum_{cyc}ab\right)+2\left(\sum_{cyc}ab\right)^2$$

$$\Leftrightarrow\left(\sum_{cyc}a^2\right)^2+\left(\sum_{cyc}a^2\right)\left(\sum_{cyc}ab\right)\ge\left(\sum_{cyc}a\right)\left(\sum_{cyc}a^3\right)+\left(\sum_{cyc}ab\right)^2$$

$$\Leftrightarrow\sum_{cyc}a^2b^2\ge abc\left(\sum_{cyc}a\right)\Leftrightarrow a^2(b-c)^2+b^2(c-a)^2+c^2(a-b)^2\ge0\ \text{(đúng)}$$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$.

Bài 15. [VMEO] Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a\sqrt{a+b}}+\frac{1}{b\sqrt{b+c}}+\frac{1}{c\sqrt{c+a}}\ge\frac{3}{\sqrt{2abc}}$$

Chứng minh

Chuẩn hóa $abc=1$ và đặt $a=\frac{x}{y};b=\frac{z}{x};c=\frac{y}{x}$. khi đó bất đẳng thức trở thành:

$$\frac{y\sqrt{y}}{\sqrt{x\left(x^2+yz\right)}}+\frac{z\sqrt{z}}{\sqrt{y\left(y^2+zx\right)}}+\frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{x\left(z^2+xy\right)}}\ge\frac{3}{2}\quad(1)$$

Sử dụng bất đẳng thức ***CBS*** dạng ***Engel*** và ***CBS*** dạng cơ bản ta có:

$$VT(1)=\sum_{cyc}\frac{y^2}{\sqrt{xy\left(x^2+yz\right)}}\ge\frac{(x+y+z)^2}{\sqrt{xy\left(x^2+yz\right)}+\sqrt{yz\left(y^2+zx\right)}+\sqrt{zx\left(z^2+xy\right)}}\ge$$

$$\frac{(x+y+z)^2}{\sqrt{(xy+yz+zx)\left(x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx\right)}}=\frac{2\sqrt{2}(x+y+z)^2}{2\sqrt{2(xy+yz+zx)\left(x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx\right)}}$$

$$\ge\frac{2\sqrt{2}(x+y+z)^2}{\left(x^2+y^2+z^2\right)+3(xy+yz+zx)}\ge\frac{2\sqrt{2}(x+y+z)^2}{\frac{4}{3}(x+y+z)^2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}=VP(1)$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$

Bài 16. Cho $a,b,c\ge 0$ thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=1$.

Chứng minh rằng: $\dfrac{1}{1-\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2}+\dfrac{1}{1-\left(\dfrac{b+c}{2}\right)^2}+\dfrac{1}{1-\left(\dfrac{c+a}{2}\right)^2}\le\dfrac{9}{2}$ (1)

Chứng minh

$$VT(1)=\sum_{cyc}\frac{1}{1-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2}=\sum_{cyc}\left[1+\frac{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2}{1-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2}\right]=3+\sum_{cyc}\frac{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2}{1-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2}\le\frac{9}{2}\Leftrightarrow\sum_{cyc}\frac{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2}{1-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2}\le\frac{3}{2}\ (2)$$

Sử dụng bất đẳng thức ***CBS*** dạng cơ bản và dạng ***Engel*** ta có:

$$VT(2)=\sum_{cyc}\frac{(a+b)^2}{4-(a+b)^2}\le\sum_{cyc}\frac{(a+b)^2}{4-2(a^2+b^2)}=\frac{1}{2}\sum_{cyc}\frac{(a+b)^2}{2-(a^2+b^2)}=\frac{1}{2}\sum_{cyc}\frac{(a+b)^2}{2c^2+(a^2+b^2)}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{cyc}\frac{(a+b)^2}{(a^2+c^2)+(b^2+c^2)}\le\frac{1}{2}\sum_{cyc}\left(\frac{a^2}{a^2+c^2}+\frac{b^2}{b^2+c^2}\right)=\frac{3}{2}\ \text{(đpcm)}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Bài 17. Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a+b+c}\cdot\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)\ge\frac{1}{ab+bc+ca}+\frac{1}{2(a^2+b^2+c^2)}\quad(1)$$

Chứng minh

$$(1)\Leftrightarrow(ab+bc+ca)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)\ge a+b+c+\frac{(a+b+c)(ab+bc+ca)}{2(a^2+b^2+c^2)}$$

$\Leftrightarrow\dfrac{ab}{a+b}+\dfrac{bc}{b+c}+\dfrac{ca}{c+a}\ge\dfrac{(a+b+c)(ab+bc+ca)}{2(a^2+b^2+c^2)}$ (2). Sử dụng ***CBS*** dạng ***Engel***:

$$VT(2)=\frac{(ab)^2}{ab(a+b)}+\frac{(bc)^2}{bc(b+c)}+\frac{(ca)^2}{ca(c+a)}\ge\frac{(ab+bc+ca)^2}{bc(b+c)+ac(c+a)+ab(a+b)}$$

Ta cần chứng minh: $\dfrac{(ab+bc+ca)^2}{bc(b+c)+ac(c+a)+ab(a+b)}\ge\dfrac{(a+b+c)(ab+bc+ca)}{2(a^2+b^2+c^2)}$

$$\Leftrightarrow 2\left(\sum_{cyc}a^2\right)\left(\sum_{cyc}bc\right)^2\ge\left(\sum_{cyc}a\right)\left(\sum_{cyc}bc(b+c)\right)\Leftrightarrow\sum_{cyc}ab(a^2+b^2)\ge 2\sum_{cyc}a^2b^2$$

Theo ***AM – GM*** ta có $\sum_{cyc}ab(a^2+b^2)\ge\sum_{cyc}ab(2ab)=2\sum_{cyc}a^2b^2$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$ hoặc $a=b,c=0$ và các hoán vị.

Bài 18. Cho a,b,c là độ dài ba cạnh của một tam giác.

Chứng minh rằng: $\frac{a}{3a-b+c}+\frac{b}{3b-c+a}+\frac{c}{3c-a+b}\geq 1$ (1)

Chứng minh

Biến đổi rồi sử dụng bất đẳng thức ***CBS*** dạng ***Engel*** ta có

$$4VT(1)=\sum_{cyc}\frac{4a}{3a-b+c}=\sum_{cyc}\frac{(3a-b+c)+(a+b+c)}{3a-b+c}=3+\sum_{cyc}\frac{a+b-c}{3a-b+c}=$$

$$=3+\sum_{cyc}\frac{(a+b-c)^2}{(a+b-c)(3a-b+c)}\geq 3+\frac{(a+b+c)^2}{\sum_{cyc}(a+b-c)(3a-b+c)}=3+1=4$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

Bài 19. Cho $a,b,c\geq 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{a(b+c)}{a^2+2bc}+\frac{b(c+a)}{b^2+2ca}+\frac{c(a+b)}{c^2+2ab}\geq 1+\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}\ (1)$$

Chứng minh

$$(1)\Leftrightarrow\sum_{cyc}\frac{a(b+c)}{a^2+2bc}\geq 1+\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}\Leftrightarrow\sum_{cyc}\frac{ab+bc+ca-bc}{a^2+2bc}\geq 1+\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}$$

$$\Leftrightarrow\sum_{cyc}\frac{ab+bc+ca}{a^2+2bc}\geq 1+\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}+\sum_{cyc}\frac{bc}{a^2+2bc}=2+\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}+\left(\sum_{cyc}\frac{bc}{a^2+2bc}-1\right)$$

$$\Leftrightarrow(ab+bc+ca)\left(\sum_{cyc}\frac{1}{a^2+2bc}-\frac{2}{ab+bc+ca}-\frac{1}{a^2+b^2+c^2}\right)+\left(1-\sum_{cyc}\frac{bc}{a^2+2bc}\right)\geq 0$$

Suy ra bất đẳng thức đã cho sẽ đúng nếu ta chứng minh được:

$\sum_{cyc}\frac{1}{a^2+2bc}\geq\frac{2}{ab+bc+ca}+\frac{1}{a^2+b^2+c^2}$ (1) và $\sum_{cyc}\frac{bc}{a^2+2bc}\leq 1$ (2). Thật vậy

$$(1)\Leftrightarrow\frac{(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2\left[2(a^2+b^2+c^2)+ab+bc+ca\right]}{(a^2+2bc)(b^2+2ca)(c^2+2ab)(ab+bc+ca)(a^2+b^2+c^2)}\geq 0 \text{ luôn đúng.}$$

$$(2)\Leftrightarrow\sum_{cyc}\frac{bc}{a^2+2bc}=\frac{3}{2}-\sum_{cyc}\left(\frac{1}{2}-\frac{bc}{a^2+2bc}\right)\leq 1\Leftrightarrow\frac{a^2}{a^2+2bc}+\frac{b^2}{b^2+2ca}+\frac{c^2}{c^2+2ab}\geq 1\ (3)$$

Sử dụng bất đẳng thức ***CBS*** dạng ***Engel*** ta có:

$$VT(3)\geq\frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)}=1\ \text{(đpcm)}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

§2.3. KỸ THUẬT CHỌN ĐIỂM RƠI TRONG CAUCHY- BUNHIACÔPSKI-SCHARWZ

I. ĐIỂM RƠI ĐỐI XỨNG TRONG BẤT ĐẲNG THỨC CBS

Bài 1. Cho $\begin{cases} a,b,c>0 \\ a+b+c\le\dfrac{3}{2}\end{cases}$ Tìm Min của : $S=\sqrt{a^2+\dfrac{1}{b^2}}+\sqrt{b^2+\dfrac{1}{c^2}}+\sqrt{c^2+\dfrac{1}{a^2}}$

Bình luận và lời giải

• ***Sai lầm thường gặp:***

$$S\ge 3\cdot\sqrt[3]{\sqrt{a^2+\frac{1}{b^2}}\cdot\sqrt{b^2+\frac{1}{c^2}}\cdot\sqrt{c^2+\frac{1}{a^2}}}=3\cdot\sqrt[6]{\left(a^2+\frac{1}{b^2}\right)\left(b^2+\frac{1}{c^2}\right)\left(c^2+\frac{1}{a^2}\right)}$$

$$\ge 3\cdot\sqrt[6]{2\cdot\sqrt{a^2\cdot\frac{1}{b^2}}\cdot 2\cdot\sqrt{b^2\cdot\frac{1}{c^2}}\cdot 2\cdot\sqrt{c^2\cdot\frac{1}{a^2}}}=3\cdot\sqrt[6]{8}=3\sqrt{2}\;\Rightarrow\;\operatorname{Min}S=3\sqrt{2}$$

• ***Nguyên nhân sai lầm:***

$$\operatorname{Min}S=3\sqrt{2}\Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{a}=\frac{1}{b}=\frac{1}{c}=1\;\Rightarrow\;a+b+c=3>\frac{3}{2}\Rightarrow \text{vô lý}$$

• ***Phân tích và tìm lời giải:***

Xét $\sqrt{\left(a_1^2+a_2^2\right)\left(b_1^2+b_2^2\right)}\ge a_1b_1+a_2b_2$. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}\ge 0$

• ***Ý nghĩa:*** Chuyển đổi một biểu thức ở trong căn bậc hai thành một biểu thức linh động hơn ở ngoài căn thức. Xét đánh giá giả định với các số α, β

$$+\begin{cases}\sqrt{a^2+\dfrac{1}{b^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\sqrt{\left[a^2+\left(\dfrac{1}{b}\right)^2\right](\alpha^2+\beta^2)}\ge\dfrac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}(\alpha a+\dfrac{\beta}{b}) & (1)\\ \sqrt{b^2+\dfrac{1}{c^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\sqrt{\left[b^2+\left(\dfrac{1}{c}\right)^2\right](\alpha^2+\beta^2)}\ge\dfrac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}(\alpha b+\dfrac{\beta}{c}) & (2)\\ \sqrt{c^2+\dfrac{1}{a^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\sqrt{\left[c^2+\left(\dfrac{1}{a}\right)\right](\alpha^2+\beta^2)}\ge\dfrac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}(\alpha c+\dfrac{\beta}{a}) & (3)\end{cases}$$

$$\Rightarrow\; S\ge\frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\left[\alpha(a+b+c)+\beta\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\right]=S_0$$

Do S là một biểu thức đối xứng với a, b, c nên dự đoán $S = S_0$ tại điểm rơi $a=b=c=\dfrac{1}{2}$, khi đó tất cả các bất đẳng thức (1), (2), (3) đồng thời phải xảy ra dấu bằng tức là ta có sơ đồ điểm rơi sau đây:

$$\Rightarrow \sqrt{\alpha^2+\beta^2}.S \ge \alpha(a+b+c)+\beta\left(\frac{1}{\sqrt{a+b}}+\frac{1}{\sqrt{b+c}}+\frac{1}{\sqrt{c+a}}\right)$$

$$\Leftrightarrow S \ge \frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\left[\alpha(a+b+c)+\beta\left(\frac{1}{\sqrt{a+b}}+\frac{1}{\sqrt{b+c}}+\frac{1}{\sqrt{c+a}}\right)\right]=S_0$$

Do S là một biểu thức đối xứng với a, b, c nên dự đoán $S = S_0$ tại điểm rơi $a = b = c = 2$, khi đó (1), (2), (3) đồng thời phải xảy ra dấu bằng tức là ta có

• ***Sơ đồ điểm rơi:***

$$\boxed{a=b=c=2} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{a}{\alpha}=\dfrac{1}{\beta b} \\ \dfrac{b}{\alpha}=\dfrac{1}{\beta c} \\ \dfrac{c}{\alpha}=\dfrac{1}{\beta a} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta}=\frac{a}{\frac{1}{b}}=\frac{b}{\frac{1}{c}}=\frac{c}{\frac{1}{a}}=\frac{4}{1} \Rightarrow \boxed{\begin{cases}\alpha=4\\ \beta=1\end{cases}}$$

• ***Lời giải đúng:***

$$+\begin{cases} \sqrt{\left[a^2+\left(\dfrac{1}{\sqrt{b+c}}\right)^2\right](4^2+1^2)} \ge 4a+\dfrac{1}{\sqrt{b+c}} \\ \sqrt{\left[b^2+\left(\dfrac{1}{\sqrt{c+a}}\right)^2\right](4^2+1^2)} \ge 4b+\dfrac{1}{\sqrt{c+a}} \\ \sqrt{\left[c^2+\left(\dfrac{1}{\sqrt{a+b}}\right)^2\right](4^2+1^2)} \ge 4b+\dfrac{1}{\sqrt{a+b}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sqrt{17}.S \ge 4(a+b+c)+\left(\frac{1}{\sqrt{a+b}}+\frac{1}{\sqrt{b+c}}+\frac{1}{\sqrt{c+a}}\right)$$

$$\ge 4(a+b+c)+\frac{3}{\sqrt[3]{\sqrt{a+b}.\sqrt{b+c}.\sqrt{c+a}}} \ge 4(a+b+c)+\frac{9}{\sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a}}$$

$$\ge 4(a+b+c)+\frac{9}{\sqrt{(1^2+1^2+1^2)[(a+b)+(b+c)+(c+a)]}}=4(a+b+c)+\frac{9}{\sqrt{6(a+b+c)}}$$

$$=\frac{31}{8}(a+b+c)+\frac{a+b+c}{8}+\frac{9}{2\sqrt{6(a+b+c)}}+\frac{9}{2\sqrt{6(a+b+c)}}$$

$$\ge \frac{31}{8}\cdot 6+3\cdot\sqrt[3]{\frac{a+b+c}{8}.\frac{9}{2\sqrt{6(a+b+c)}}.\frac{9}{2\sqrt{6(a+b+c)}}}=\frac{93}{4}+\frac{9}{4}=\frac{51}{2}$$

$\Rightarrow S \ge \dfrac{51}{2\sqrt{17}}=\dfrac{3.17}{2.\sqrt{17}}=\dfrac{3\sqrt{17}}{2}$. Với $a=b=c=2$ thì $\text{Min } S=\dfrac{3\sqrt{17}}{2}$

Bài 3. Cho $\begin{cases} a,b,c>0 \\ \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\geq 3\sqrt{2} \end{cases}$. CM: $S=\sqrt[3]{a^2+\frac{1}{b^2}}+\sqrt[3]{b^2+\frac{1}{c^2}}+\sqrt[3]{c^2+\frac{1}{a^2}}\geq 3\cdot\sqrt[3]{\frac{17}{4}}$

Bình luận và lời giải

Sau đây là cách giải thủ công dài dòng với hình thức khủng bố nhưng vẫn dựa trên sự kết hợp ngoạn mục *"**Kỹ thuật chọn điểm rơi**"* của hai bất đẳng thức ***CBS*** và bất đẳng thức ***AM – GM***. Cách giải ngắn hơn xin dành cho bạn đọc.

Ta sẽ chứng minh: $T=\sqrt[3]{\frac{17}{4}}.S=\sum\sqrt[3]{\frac{17}{4}\left(a^2+\frac{1}{b^2}\right)}\geq 3.\sqrt[3]{\left(\frac{17}{4}\right)^2}$

Xét đánh giá đại diện:

$$\sqrt[3]{\frac{17}{4}\left(a^2+\frac{1}{b^2}\right)}=\sqrt[3]{\left(2^2+\frac{1}{2^2}\right)\left(a^2+\frac{1}{b^2}\right)}\geq\sqrt[3]{\left(2a+\frac{1}{2b}\right)}=\sqrt[3]{\left[\left(2^2+\frac{1}{2^2}\right)\left(2a+\frac{1}{2b}\right)\right]^2\left(\frac{4}{17}\right)^2}$$

$$=\sqrt[3]{\left[\left(2\sqrt{2a}+\frac{1}{2\sqrt{2b}}\right)^2\right]^2\left(\frac{4}{17}\right)^2}=\sqrt[3]{\left(\frac{4}{17}\right)^2\left(2\sqrt{2a}+\frac{1}{2\sqrt{2b}}\right)^4}$$

Sử dụng bất đẳng thức ***AM – GM*** ta có:

$$\sqrt[3]{\left(\frac{4}{17}\right)^2\left[2\sqrt{2a}+\frac{1}{2\sqrt{2b}}\right]^4}+\sqrt[3]{\left(\frac{4}{17}\right)^2\left[2\sqrt{2a}+\frac{1}{2\sqrt{2b}}\right]^4}+\sqrt[3]{\left(\frac{4}{17}\right)^2\left[2\sqrt{2a}+\frac{1}{2\sqrt{2b}}\right]^4}+\sqrt[3]{\left(\frac{17}{4}\right)^2}\geq$$

$$\geq 4\cdot\sqrt[4]{\sqrt[3]{\left(\frac{4}{17}\right)^4\cdot\left(2\sqrt{2a}+\frac{1}{2\sqrt{2b}}\right)^{12}}}=4\cdot\sqrt[3]{\frac{4}{17}}\left(2\sqrt{2a}+\frac{1}{2\sqrt{2b}}\right)$$

$$\Rightarrow\sqrt[3]{\frac{17}{4}\left(a^2+\frac{1}{b^2}\right)}\geq\sqrt[3]{\left(\frac{4}{17}\right)^2\left(2\sqrt{2a}+\frac{1}{2\sqrt{2b}}\right)^4}\geq\frac{4}{3}\sqrt[3]{\frac{4}{17}}\left(2\sqrt{2a}+\frac{1}{2\sqrt{2b}}\right)-\frac{1}{3}\sqrt[3]{\left(\frac{17}{4}\right)^2}$$

$$\Rightarrow T=\sqrt[3]{\frac{17}{4}}\cdot\sum\sqrt[3]{\left(a^2+\frac{1}{b^2}\right)}=\sqrt[3]{\frac{17}{4}}S\geq\sum\sqrt[3]{\left(\frac{4}{17}\right)^2\left(2\sqrt{2a}+\frac{1}{2\sqrt{2b}}\right)^4}\geq$$

$$\geq\frac{4}{3}\cdot\sqrt[3]{\frac{4}{17}}\left[2\sqrt{2}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)+\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{c}}\right)\right]-\sqrt[3]{\left(\frac{17}{4}\right)^2}$$

$$\ge \frac{4}{3}\cdot\sqrt[3]{\frac{4}{17}}\left[2\sqrt{2}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)+\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{3}{\sqrt[3]{\sqrt{a}.\sqrt{b}.\sqrt{c}}}\right]-\sqrt[3]{\left(\frac{17}{4}\right)^2}$$

$$\ge \frac{4}{3}\cdot\sqrt[3]{\frac{4}{17}}\left[2\sqrt{2}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)+\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{9}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}\right]-\sqrt[3]{\left(\frac{17}{4}\right)^2}$$

$$=\frac{4}{3}\sqrt[3]{\frac{4}{17}}\left[\frac{15\sqrt{2}}{8}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)+\frac{\sqrt{2}}{8}.\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)+\frac{9}{2\sqrt{2}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)}\right]-\sqrt[3]{\left(\frac{17}{4}\right)^2}$$

$$\ge \frac{4}{3}\cdot\sqrt[3]{\frac{4}{17}}\left[\frac{15\sqrt{2}}{8}\cdot 3\sqrt{2}+2\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{8}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)\cdot\frac{9}{2\sqrt{2}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)}}\right]-\sqrt[3]{\left(\frac{17}{4}\right)^2}$$

$$=\frac{4}{3}\cdot\sqrt[3]{\frac{17}{4}}\left(\frac{45}{4}+\frac{6}{4}\right)-\sqrt[3]{\left(\frac{17}{4}\right)^2}=17.\sqrt[3]{\frac{17}{4}}-\sqrt[3]{\left(\frac{17}{4}\right)^2}=3.\sqrt[3]{\left(\frac{17}{4}\right)^2}$$

Do $T=\sqrt[3]{\frac{17}{4}}.S\ge 3\cdot\sqrt[3]{\left(\frac{17}{4}\right)^2}$ nên $S\ge 3\cdot\sqrt[3]{\frac{17}{4}}$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=2$.

Bài 4. Cho $a, b, c>0$ thoả mãn $a+b+c+\sqrt{2abc}\ge 10$. Chứng minh rằng

$$S=\sqrt{\frac{8}{a^2}+\frac{9b^2}{2}+\frac{c^2a^2}{4}}+\sqrt{\frac{8}{b^2}+\frac{9c^2}{2}+\frac{a^2b^2}{4}}+\sqrt{\frac{8}{c^2}+\frac{9a^2}{2}+\frac{b^2c^2}{4}}\ge 6\sqrt{6}$$

Chứng minh

Bước 1. Dự đoán điểm rơi: $a=b=c=2$

Bước 2. Sử dụng bất đẳng thức ***CBS*** ta có:

$$+\begin{cases}\sqrt{2+18+4}.\sqrt{\frac{8}{a^2}+\frac{9b^2}{2}+\frac{c^2a^2}{4}}\ge\frac{4}{a}+9b+ca\\ \sqrt{2+18+4}.\sqrt{\frac{8}{b^2}+\frac{9c^2}{2}+\frac{a^2b^2}{4}}\ge\frac{4}{b}+9c+ab\\ \sqrt{2+18+4}.\sqrt{\frac{8}{c^2}+\frac{9a^2}{2}+\frac{b^2c^2}{4}}\ge\frac{4}{c}+9a+bc\end{cases}$$

$$\Rightarrow\sqrt{24}.S\ge 4\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+9(a+b+c)+ab+bc+ca$$

$$=\left(\frac{4}{a}+a\right)+\left(\frac{4}{b}+b\right)+\left(\frac{4}{c}+c\right)+(2a+bc)+(2b+ca)+(2c+ab)+6(a+b+c)$$

$$\ge 2\sqrt{\frac{4}{a}\cdot a}+2\sqrt{\frac{4}{b}\cdot b}+2\sqrt{\frac{4}{c}\cdot c}+2\sqrt{abc}+2\sqrt{abc}+2\sqrt{abc}+6(a+b+c)$$

$$=12+6\left(a+b+c+\sqrt{2abc}\right)\ge 12+6.10=72\ \Rightarrow\ S\ge\frac{72}{\sqrt{24}}=6\sqrt{6}$$

Bài 5. Cho $a, b, c > 0$ và $a\left(1+\sqrt{\dfrac{a}{2}}\right)+b\left(1+\sqrt{\dfrac{b}{2}}\right)+c\left(1+\sqrt{\dfrac{c}{2}}\right)\ge 12$. Chứng minh rằng:

$$S=\sqrt{\frac{16}{a^2}+\frac{5b^2}{4}+\frac{c}{2}+\frac{19a^3}{8}}+\sqrt{\frac{16}{b^2}+\frac{5c^2}{4}+\frac{a}{2}+\frac{19b^3}{8}}+\sqrt{\frac{16}{c^2}+\frac{5a^2}{4}+\frac{b}{2}+\frac{19c^3}{8}}\ge 3\sqrt{29}$$

Chứng minh

Dự đoán dấu bằng xảy ra tại điểm rơi: $a = b = c = 2$. Ta có:

$$+\left\{\begin{array}{l}\sqrt{2+5+1+19}.\sqrt{\dfrac{16}{a^2}+\dfrac{5b^2}{4}+\dfrac{c}{2}+\dfrac{19a^3}{8}}\ge\dfrac{8}{a}+\dfrac{5b}{2}+\sqrt{\dfrac{c}{2}}+\dfrac{19a}{2}\sqrt{\dfrac{a}{2}}\\ \sqrt{2+5+1+19}.\sqrt{\dfrac{16}{b^2}+\dfrac{5c^2}{4}+\dfrac{a}{2}+\dfrac{19b^3}{8}}\ge\dfrac{8}{c}+\dfrac{5c}{2}+\sqrt{\dfrac{a}{2}}+\dfrac{19b}{2}\sqrt{\dfrac{b}{2}}\\ \sqrt{2+5+1+19}.\sqrt{\dfrac{16}{c^2}+\dfrac{5a^2}{4}+\dfrac{b}{2}+\dfrac{19c^3}{8}}\ge\dfrac{8}{c}+\dfrac{5a}{2}+\sqrt{\dfrac{b}{2}}+\dfrac{19c}{2}\sqrt{\dfrac{c}{2}}\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow\sqrt{29}.S\ge\left(\frac{8}{a}+2a\right)+\left(\frac{8}{b}+2b\right)+\left(\frac{8}{c}+2c\right)+\frac{1}{2}(a+b+c)$$

$$+\left(\sqrt{\frac{a}{2}}+\frac{a\sqrt{a}}{2\sqrt{2}}\right)+\left(\sqrt{\frac{b}{2}}+\frac{b\sqrt{b}}{2\sqrt{2}}\right)+\left(\sqrt{\frac{c}{2}}+\frac{c\sqrt{c}}{2\sqrt{2}}\right)+9\left(a\sqrt{\frac{a}{2}}+b\sqrt{\frac{b}{2}}+c\sqrt{\frac{c}{2}}\right)$$

$$\ge\ 2\sqrt{\frac{8}{a}\cdot 2a}+2\sqrt{\frac{8}{b}\cdot 2b}+2\sqrt{\frac{8}{c}\cdot 2c}+\frac{1}{2}(a+b+c)+2\sqrt{\sqrt{\frac{a}{2}}\cdot\frac{a\sqrt{a}}{2\sqrt{2}}}+$$

$$+2\sqrt{\sqrt{\frac{b}{2}}\cdot\frac{b\sqrt{b}}{2\sqrt{2}}}+2\sqrt{\sqrt{\frac{c}{2}}\cdot\frac{c\sqrt{c}}{2\sqrt{2}}}+9\left(a\sqrt{\frac{a}{2}}+b\sqrt{\frac{b}{2}}+c\sqrt{\frac{c}{2}}\right)$$

$$=15+\frac{3}{2}(a+b+c)+6\left(a\sqrt{\frac{a}{2}}+b\sqrt{\frac{b}{2}}+c\sqrt{\frac{c}{2}}\right)+3\left[\left(2\cdot\frac{a}{2}\sqrt{\frac{a}{2}}+1\right)+\left(2\cdot\frac{b}{2}\sqrt{\frac{b}{2}}+1\right)+\left(2\cdot\frac{c}{2}\sqrt{\frac{c}{2}}+1\right)\right]$$

$$\ge 15+\frac{3}{2}(a+b+c)+6\left(a\sqrt{\frac{a}{2}}+b\sqrt{\frac{b}{2}}+c\sqrt{\frac{c}{2}}\right)+3\left(\frac{3a}{2}+\frac{3b}{2}+\frac{3c}{2}\right)$$

$$=15+6\left[a\left(1+\sqrt{\frac{a}{2}}\right)+b\left(1+\sqrt{\frac{b}{2}}\right)+c\left(1+\sqrt{\frac{c}{2}}\right)\right]=15+6.12=3.29$$

Vậy $S\ge 3\sqrt{29}$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=2$.

Bài 6. Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{a^3+b^2+c}+\frac{b}{b^3+c^2+a}+\frac{c}{c^3+a^2+b}\le 1 \quad (1)$$

Chứng minh

Sử dụng bất đẳng thức ***CBS*** ta có:

$$(a^3+b^2+c)\left(\frac{1}{a}+1+c\right)\ge(a+b+c)^2 \Rightarrow \frac{a^3+b^2+c}{a}(1+a+ca)\ge(a+b+c)^2$$

Hay $\dfrac{a}{a^3+b^2+c}\le\dfrac{1+a+ca}{(a+b+c)^2}$.

Tương tự $\dfrac{b}{b^3+c^2+a}\le\dfrac{1+b+ab}{(a+b+c)^2}$ và $\dfrac{c}{c^3+a^2+b}\le\dfrac{1+c+bc}{(a+b+c)^2}$

Suy ra $VT\,(1)\le\dfrac{3+a+b+c+ab+bc+ca}{(a+b+c)^2}\le\dfrac{3+a+b+c+\frac{1}{3}(a+b+c)^2}{(a+b+c)^2}=1$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$.

Bài 7. [Poland Second Round 2007] Cho $a,b,c,d>0$ thỏa mãn $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{d}=4$.

Chứng minh rằng: $\sqrt[3]{\dfrac{a^3+b^3}{2}}+\sqrt[3]{\dfrac{b^3+c^3}{2}}+\sqrt[3]{\dfrac{c^3+d^3}{2}}+\sqrt[3]{\dfrac{d^3+a^3}{2}}\le2(a+b+c+d)-4$

Chứng minh

Bổ đề: Với mọi $x,y>0$ ta có bất đẳng thức sau $\sqrt[3]{\dfrac{x^3+y^3}{2}}\le\dfrac{x^2+y^2}{x+y}$

Chứng minh: Bất đẳng thức $\Leftrightarrow\dfrac{x^3+y^3}{2}\le\left(\dfrac{x^2+y^2}{x+y}\right)^3\Leftrightarrow(x-y)^4(x^2+xy+y^2)\ge0$

Áp dụng: Sử dụng bổ đề trên ta có

$$\sqrt[3]{\frac{a^3+b^3}{2}}+\sqrt[3]{\frac{b^3+c^3}{2}}+\sqrt[3]{\frac{c^3+d^3}{2}}+\sqrt[3]{\frac{d^3+a^3}{2}}\le\frac{a^2+b^2}{a+b}+\frac{b^2+c^2}{b+c}+\frac{c^2+d^2}{c+d}+\frac{d^2+a^2}{d+a}$$

Ta sẽ chứng minh $\dfrac{a^2+b^2}{a+b}+\dfrac{b^2+c^2}{b+c}+\dfrac{c^2+d^2}{c+d}+\dfrac{d^2+a^2}{d+a}\le2(a+b+c+d)-4$

Thật vậy, sử dụng $x+y-\dfrac{x^2+y^2}{x+y}=\dfrac{2xy}{x+y}=\dfrac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$ và bất đẳng thức ***CBS*** ta có:

$$2(a+b+c+d)-\left(\frac{a^2+b^2}{a+b}+\frac{b^2+c^2}{b+c}+\frac{c^2+d^2}{c+d}+\frac{d^2+a^2}{d+a}\right)$$

$$=2\left(\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}+\frac{1}{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}+\frac{1}{\frac{1}{c}+\frac{1}{d}}+\frac{1}{\frac{1}{d}+\frac{1}{a}}\right)\ge2\frac{4^2}{2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)}=\frac{32}{8}=4$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=d=1$.

Bài 8. Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=1$.

Chứng minh rằng: $S=\sqrt{1-\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2}+\sqrt{1-\left(\dfrac{b+c}{2}\right)^2}+\sqrt{1-\left(\dfrac{c+a}{2}\right)^2}\ge\sqrt{6}\ (1)$

Chứng minh

$(1) \Leftrightarrow S^2 \ge 6 \Leftrightarrow 3-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{b+c}{2}\right)^2-\left(\frac{c+a}{2}\right)^2+2\sum\sqrt{1-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2}\cdot\sqrt{1-\left(\frac{b+c}{2}\right)^2} \ge 6$

$\Leftrightarrow 2\sum_{cyc}\sqrt{1-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2}\cdot\sqrt{1-\left(\frac{b+c}{2}\right)^2}-\frac{1}{2}(ab+bc+ca) \ge \frac{7}{2}$

Ta có: $1-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{a^2+b^2+c^2}{2}+\frac{1}{2}-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{(a-b)^2}{4}+\frac{1}{2}(1+c^2)$

Biến đổi rồi sử dụng bất đẳng thức ***CBS*** ta có

$\sqrt{1-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2}\sqrt{1-\left(\frac{b+c}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{(a-b)^2}{4}+\frac{1}{2}(1+c^2)}\sqrt{\frac{(c-b)^2}{4}+\frac{1}{2}(1+a^2)}$

$\ge \frac{(a-b)(c-b)}{4}+\frac{\sqrt{(1+c^2)(1+a^2)}}{2} \ge \frac{1}{4}(b^2+ca-ab-bc)+\frac{1}{2}(1+ca)$

Từ đó suy ra $2\sum_{cyc}\sqrt{1-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2}\cdot\sqrt{1-\left(\frac{b+c}{2}\right)^2}-\frac{1}{2}(ab+bc+ca) \ge \frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)+3=\frac{7}{2}$.

Bài 9. Cho $a,b,c \ge 0$ thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=3$.

Chứng minh rằng: $\frac{1}{\sqrt{3-ab}}+\frac{1}{\sqrt{3-bc}}+\frac{1}{\sqrt{3-ca}} \ge \frac{6}{\sqrt{(3-ab)(3-bc)(3-ca)}}$ (1)

Chứng minh

Biến đổi bất đẳng thức (1) tương đương với bất đẳng thức

$\sqrt{(3-ab)(3-bc)}+\sqrt{(3-bc)(3-ca)}+\sqrt{(3-ca)(3-ab)} \ge 6 \Leftrightarrow$

$(3-ab)(3-bc)+(3-bc)(3-ca)+(3-ca)(3-ab)+2\sum_{cyc}(3-ca)\sqrt{(3-ab)(3-bc)} \ge 36$

$\Leftrightarrow 27-6(ab+bc+ca)+abc(a+b+c)+2\sum_{cyc}(3-ca)\sqrt{(3-ab)(3-bc)} \ge 36$. (2)

Sử dụng bất đẳng thức ***AM – GM*** và ***CBS*** ta có

$\sqrt{(3-ab)(3-bc)} \ge \sqrt{\left(3-\frac{a^2+b^2}{2}\right)\left(3-\frac{b^2+c^2}{2}\right)}=\frac{1}{2}\sqrt{(3+c^2)(3+a^2)} \ge \frac{1}{2}(3+ca)$

Ta cần chứng minh $27-6(ab+bc+ca)+abc(a+b+c)+\sum_{cyc}(3-ca)(3+ca) \ge 36$

$\Leftrightarrow 18-6(ab+bc+ca)+abc(a+b+c)-(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2) \ge 0 \Leftrightarrow$

$2(a^2+b^2+c^2)^2-(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-2(a^2+b^2+c^2)(ab+bc+ca)+abc(a+b+c) \ge 0$

$\Leftrightarrow 2\sum_{cyc}a^4+3\sum_{cyc}b^2c^2-2\sum_{cyc}bc(b^2+c^2)-abc(a+b+c) \ge 0$

$\Leftrightarrow \sum_{cyc}(a^2+2b^2+2c^2)(b-c)^2 \ge 0$ luôn đúng $\Rightarrow$ (đpcm).

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$.

II. ĐIỂM RƠI KHÔNG ĐỐI XỨNG TRONG BẤT ĐẲNG THỨC *CBS*

Bài 1. Cho $p, q, x, y \geq 0$ và $x + y = 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $S = px^2 + qy^2$.

Giải

Sử dụng bất đẳng thức ***CBS*** với các tham số $a, b > 0$ ta có:

$\left(px^2 + qy^2\right)\left(pa^2 + qb^2\right) \geq \left(pax + qby\right)^2$ (1). Chọn $\begin{cases} pa = qb \\ a + b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow a = \dfrac{2q}{p+q}, b = \dfrac{2p}{p+q}$

Khi đó $S\left(pa^2 + qb^2\right) = S.\dfrac{4pq}{p+q} \geq \dfrac{16p^2q^2}{(p+q)^2} \Rightarrow S \geq \dfrac{4pq}{p+q}$. Vậy $Min\ S = \dfrac{4pq}{p+q}$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \dfrac{x}{a} = \dfrac{y}{b} \Leftrightarrow \dfrac{x}{q} = \dfrac{y}{p} = \dfrac{x+y}{p+q} = \dfrac{2}{p+q} \Leftrightarrow x = \dfrac{2q}{p+q}, y = \dfrac{2p}{p+q}$.

Bài 2. Cho $x, y, z \geq 0$ và $x + y + z = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $S = x^2 + 2y^2 + 3z^2$

Giải

Sử dụng bất đẳng thức ***CBS*** với các tham số $a, b, c > 0$ ta có:

$\left(x^2 + 2y^2 + 3z^2\right)\left(a^2 + 2b^2 + 3c^2\right) \geq \left(ax + 2by + 3cz\right)^2$ (1)

Chọn $\begin{cases} a + b + c = 3 \\ a = 2b = 3c \end{cases} \Leftrightarrow a = \dfrac{18}{11}, b = \dfrac{9}{11}, c = \dfrac{6}{11}$. Khi đó:

Từ (1) suy ra $\left[\left(\dfrac{18}{11}\right)^2 + 2\left(\dfrac{9}{11}\right)^2 + 3\left(\dfrac{6}{11}\right)^2\right]S \geq \dfrac{18}{11}(x + y + z)^2 = \dfrac{18}{11} \cdot 9 \Rightarrow S \geq 3$

Với $x = a = \dfrac{18}{11}, y = b = \dfrac{9}{11}, z = c = \dfrac{6}{11}$ thì S = 3. Vậy Min S = 3

Bài 3. Cho $\begin{cases} x \geq 1, y \geq 2, z \geq 3 \\ x + y + z = 18 \end{cases}$ Tìm giá trị lớn nhất của: $S = \sqrt[4]{x-1} + \sqrt[4]{y-2} + \sqrt[4]{z-3}$

Giải

Sử dụng bất đẳng thức ***CBS*** ta có:

$$S = 1 \cdot \sqrt[4]{x-1} + 1 \cdot \sqrt[4]{y-2} + 1 \cdot \sqrt[4]{z-3} \leq \sqrt{\left(1^2 + 1^2 + 1^2\right)\left(\sqrt{x-1} + \sqrt{y-2} + \sqrt{z-3}\right)}$$

$$\leq \sqrt{3\sqrt{3\left[(x-1) + (y-2) + (z-3)\right]}} = \sqrt{3\sqrt{3 \times 12}} = 3\sqrt{2}$$

Với $x = 5, y = 6, z = 7$ thì $\text{Max } S = 3\sqrt{2}$

Bài 4. Cho x, y, z thỏa mãn $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 4$.

Tìm giá trị lớn nhất của: $S = |x + 2y + 3z - 12|$

Giải

$$S=\left|1(x-1)+2(y-2)+3(z-3)+2\right|\le\left|1(x-1)+2(y-2)+3(z-3)\right|+2$$

$$\le\sqrt{(1^2+2^2+3^2)\left[(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2\right]}+2=2\sqrt{14}+2$$

$$\Rightarrow \text{Max } S=2\left(1+\sqrt{14}\right)\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-3}{3}=t>0\\(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1+\dfrac{2}{\sqrt{14}}\\y=2+\dfrac{4}{\sqrt{14}}\\z=3+\dfrac{6}{\sqrt{14}}\end{cases}$$

Bài 5. Cho a, b, c thỏa mãn $1\le a\le b\le c\le d\le 9$. Tìm giá trị nhỏ nhất

$$S=(a-1)^4+\left(\frac{b}{a}-1\right)^4+\left(\frac{c}{b}-1\right)^4+\left(\frac{d}{c}-1\right)^4+\left(\frac{32}{d}-1\right)^4$$

Giải

Sử dụng bất đẳng thức ***CBS*** ta có:

$$S=\frac{1}{5}(1^2+1^2+1^2+1^2+1^2)\left[(a-1)^4+\left(\frac{b}{a}-1\right)^4+\left(\frac{c}{b}-1\right)^4+\left(\frac{d}{c}-1\right)^4+\left(\frac{32}{d}-1\right)^4\right]$$

$$\ge\frac{1}{5}\left[(a-1)^2+\left(\frac{b}{a}-1\right)^2+\left(\frac{c}{b}-1\right)^2+\left(\frac{d}{c}-1\right)^2+\left(\frac{32}{d}-1\right)^2\right]^2$$

$$=\frac{1}{5^3}\left\{(1^2+1^2+1^2+1^2+1^2)\left[(a-1)^2+\left(\frac{b}{a}-1\right)^2+\left(\frac{c}{b}-1\right)^2+\left(\frac{d}{c}-1\right)^2+\left(\frac{32}{d}-1\right)^2\right]\right\}^2$$

$$\ge\frac{1}{5^3}\left[(a-1)+\left(\frac{b}{a}-1\right)+\left(\frac{c}{b}-1\right)+\left(\frac{d}{c}-1\right)+\left(\frac{9}{d}-1\right)\right]^4=\frac{1}{5^3}\left(a+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{d}{c}+\frac{9}{d}-5\right)^4$$

$$\ge\frac{1}{5^3}\left(5\cdot\sqrt[5]{a\cdot\frac{b}{a}\cdot\frac{c}{b}\cdot\frac{d}{c}\cdot\frac{32}{d}}-5\right)^4=\frac{5^4}{5^3}=5.$$ Với $a=2$, $b=4$, $c=8$, $d=16$ thì Min$S=5$

Bài 6. Cho $xy+zt=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$\text{F}(x,y,z,t)=9\left(x^2y^2+y^2z^2+z^2t^2+t^2x^2\right)+6xz\left(y^2+t^2\right)-6yt\left(x^2+z^2\right)-4xyzt$$

Giải

Cách 1: Biến đổi và sử dụng bất đẳng thức ***CBS*** ta có:

$$F=4\left[(x+z)^2+\frac{(x-z)^2}{2}\right]\left[\frac{(y+t)^2}{2}+(y-t)^2\right]\ge4\left[(x+z)\frac{y+t}{\sqrt{2}}+\frac{x-z}{\sqrt{2}}(y-t)\right]^2$$

$= 2(xy + xt + yz + zt + xy - xt - zy + zt)^2 = 2(2xy + 2zt)^2 = 8(xy + zt)^2 = 8$

Với $x = y = 1$, $z = 0$ và $t = \frac{1}{3}$ thì Min $F(x, y, z, t) = 8$

Cách 2: $F(x, y, z, t) = (3yz + xy - zt - 3xt)^2 + 8(xy + zt)^2 \geq 8$

Với $x = y = 1$, $z = 0$ và $t = \frac{1}{3}$ thì Min $F(x, y, z, t) = 8$

Bài 7. Cho $x, y \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $2x - y = 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + (y+1)^2} + \sqrt{x^2 + (y-3)^2}$$

Giải

$$VT = \frac{1}{\sqrt{5}}\sqrt{x^2 + (y+1)^2}\sqrt{2^2 + 1} + \frac{1}{5\sqrt{5}}\sqrt{x^2 + (3-y)^2}\sqrt{2^2 + 11^2}$$

$$\geq \frac{1}{\sqrt{5}}(2x + y + 1) + \frac{1}{5\sqrt{5}}(2x + 33 - 11y) = \frac{6(2x - y) + 38}{5\sqrt{5}} = \frac{50}{5\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$$

Do đó Min $f(x, y) = 2\sqrt{5}$. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow x = \frac{2}{3}; y = -\frac{2}{3}$.

Bài 8. Tìm m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x, y, z)$ nhận giá trị lớn nhất:

$$f(x, y, z) = (x - y + mz + 1)^2 + \left[x + (m+1)y - 2z + 2\right]^2 + \left[2x + 2y + (m-4)z + 1\right]^2$$

Giải

Trường hợp 1: Min $f(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow x - y + mz + 1 = x + (m+1)y - 2z + 2 = 2x + 2y + (m-4)z + 1 = 0$

có nghiệm $\Leftrightarrow m(m + 2) \neq 0$. Vậy nếu $m \notin \{-2, 0\}$ thì Min $f(x, y, z) = 0$

Trường hợp 2: Xét $m = -2$. Sử dụng bất đẳng thức ***CBS*** ta có:

$$f(x, y, z) = \frac{1}{2}\left[1^2 + (-1)^2 + 0^2\right]\left[(x - y - 2z + 1)^2 + (x - y - 2z + 2)^2 + (2x + 2y - 6z + 1)^2\right] \geq \frac{1}{2}$$

Vậy nếu $m = -2$ thì Min $f(x, y, z) = f(-1, 1/2, 0) = 1/2$

Trường hợp 3: Xét $m = 0$. Sử dụng bất đẳng thức ***CBS*** ta có:

$$f(x, y, z) = \frac{4}{5}\left[0^2 + 1^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2\right]\left[(x - y + 1)^2 + (x + y - 2z + 2)^2 + (2x + 2y - 4z + 1)^2\right] \geq \frac{4}{5}\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{5}$$

Vậy nếu $m = 0$ thì Min $f(x, y, z) = f\left(\frac{1}{10}, \frac{11}{10}, 1\right) = \frac{9}{5}$

Kết luận: Với $m = 0$ thì giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x, y, z)$ nhận giá trị lớn nhất.

Bài 9. Cho $x_1, x_2, ..., x_n$ thoả mãn $\frac{1}{2} \le x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \le 1$.

Tìm Max, Min của $A = (x_1 - 2x_2 + x_3)^2 + (x_2 - 2x_3 + x_4)^2 + (x_2 - 2x_1)^2 + (x_3 - 2x_4)^2$

Giải

Tìm Max A: $(x_1 - 2x_2 + x_3)^2 \le (1 + 2\alpha + \alpha)\left(x_1^2 + \frac{2x_2^2}{\alpha} + \frac{x_3^2}{\alpha}\right)$

$$(x_2 - 2x_3 + x_4)^2 \le (\alpha + 2\alpha + 1)\left(\frac{x_2^2}{\alpha} + \frac{2x_3^2}{\alpha} + x_4^2\right)$$

$$(x_2 - 2x_1)^2 \le (\alpha + 2)\left(\frac{x_2^2}{\alpha} + 2x_1^2\right);\ (x_3 - 2x_4)^2 \le (\alpha + 2)\left(\frac{x_3^2}{\alpha} + 2x_4^2\right)$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow x_1 = -x_4 = -\frac{x_2}{\alpha} = \frac{x_3}{\alpha} \Rightarrow \frac{1}{4(\alpha^2 + 1)} \le x_1^2 \le \frac{1}{2(\alpha^2 + 1)}$

$\Rightarrow A \le 5(\alpha + 1)(x_1^2 + x_4^2) + 5 \cdot \frac{2\alpha + 1}{\alpha}(x_2^2 + x_3^2)$. Chọn $\alpha = \alpha_0$ với $\alpha_0 + 1 = \frac{2\alpha_0 + 1}{\alpha_0}$

$\Rightarrow \alpha_0 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \Rightarrow A \le \frac{5(3 + \sqrt{5})}{2}(x_1^2 + x_4^2) + \frac{5(3 + \sqrt{5})}{2}(x_2^2 + x_3^2) \le \frac{5(3 + \sqrt{5})}{2}$

Với $x_1 = -x_4 = -\frac{2x_2}{1 + \sqrt{5}} = \frac{2x_3}{1 + \sqrt{5}}$ thì Max $A = \frac{5(3 + \sqrt{5})}{2}$.

Tìm Min A:

$$\text{Đặt} \begin{cases} y_1 = x_1 - 2x_2 + x_3 \\ y_2 = x_2 - 2x_3 + x_4 \\ y_3 = x_2 - 2x_1 \\ y_4 = x_3 - 2x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{5}(3y_1 + 2y_2 + 3y_3 + y_4) \\ x_2 = -\frac{1}{5}(6y_1 + 4y_2 + 3y_3 + 2y_4) \\ x_3 = -\frac{1}{5}(4y_1 + 6y_2 + 2y_3 + 3y_4) \\ x_1 = -\frac{1}{5}(2y_1 + 3y_2 + y_3 + 4y_4) \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_1^2 \le \frac{1}{25}(3 + 2 + 4\alpha + \alpha)\left(3y_1^2 + 2y_2^2 + \frac{4y_3^2}{\alpha} + \frac{y_4^2}{\alpha}\right)$$

$$x_2^2 \le \frac{1}{25}(6 + 4 + 3\alpha + 2\alpha)\left(6y_1^2 + 4y_2^2 + \frac{3y_3^2}{\alpha} + \frac{2y_4^2}{\alpha}\right)$$

$$x_3^2 \le \frac{1}{25}(4 + 6 + 3\alpha + 2\alpha)\left(4y_1^2 + 6y_2^2 + \frac{2y_3^2}{\alpha} + \frac{3y_4^2}{\alpha}\right)$$

$x_4^2 \le \frac{1}{25}(2 + 3 + \alpha + 4\alpha)\left(2y_1^2 + 3y_2^2 + \frac{y_3^2}{\alpha} + \frac{4y_4^2}{\alpha}\right)$. Dấu bằng $\Leftrightarrow y_1 = y_2 = \frac{y_3}{\alpha} = \frac{y_4}{\alpha}$

$\Rightarrow \frac{1}{2} \le (3\alpha + 5)(y_1^2 + y_2^2) + \frac{2\alpha + 3}{\alpha}(y_3^2 + y_4^2)$. Chọn $\alpha = \alpha_0$ với $3\alpha_0 + 3 = \frac{2\alpha_0 + 3}{\alpha_0}$

$\Rightarrow \alpha_0 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} \le \frac{7 + 3\sqrt{5}}{2}(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2) = \frac{7 + 3\sqrt{5}}{2} A$

Vậy với $y_1 = y_2 = \frac{2y_3}{\sqrt{5} - 1} = \frac{2y_4}{\sqrt{5} - 1}$ thì Min $A = \frac{1}{7 + 3\sqrt{5}} = \frac{7 - 3\sqrt{5}}{4}$

Bài 10. Cho $n\in\mathbb{N}^*$. Tìm số A = A(n) nhỏ nhất sao cho bất đẳng thức

$$\sum_{k=1}^{n}(x_1+x_2+...+x_k)^2\le A\left(x_1^2+x_2^2+...+x_n^2\right) \text{ đúng } \forall x_1,x_2,...,x_n\in\mathbb{R}$$

Giải

Lấy $\alpha=\dfrac{\pi}{2n+1}\Rightarrow \sin n\alpha=\sin(n+1)\alpha$. Đặt $c_i=\sin i\alpha-\sin(i-1)\alpha\quad (i=\overline{1,n})$

$S_k=\sum_{i=1}^{k}c_i=\sin k\alpha\ (k=\overline{1,n})$. Do $0\le(i-1)\alpha<i\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ nên $c_i>0\ \ \forall i=\overline{1,n}$

Sử dụng bất đẳng thức ***CBS*** ta có:

$$(x_1+x_2+...+x_k)^2\le(c_1+c_2+...+c_k)\left(\frac{x_1^2}{c_1}+\frac{x_2^2}{c_2}+\cdots\frac{x_k^2}{c_k}\right)$$

Khi đó: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(x_1+x_2+...+x_k)^2\le\sum_{k=1}^{n}\left[(c_1+c_2+...+c_k)\left(\frac{x_1^2}{c_1}+\frac{x_2^2}{c_2}+\cdots\frac{x_k^2}{c_k}\right)\right]$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left[S_k\left(\frac{x_1^2}{c_1}+\frac{x_2^2}{c_2}+\cdots\frac{x_k^2}{c_k}\right)\right]=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{S_k+S_{k+1}+...+S_n}{c_k}\cdot x_k^2\right)$$

Ta sẽ chứng minh: $\dfrac{S_1+S_2+...+S_n}{c_1}=\dfrac{S_2+S_3+...+S_n}{c_2}=\cdots=\dfrac{S_n}{c_n}=\dfrac{1}{4\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}$

$$\frac{S_k+S_{k+1}+...+S_n}{c_k}=\frac{\sin k\alpha+\sin(k+1)\alpha+...+\sin n\alpha}{\sin k\alpha-\sin(k-1)\alpha}=\frac{2\sin\dfrac{\alpha}{2}(\sin k\alpha+...+\sin n\alpha)}{2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cdot 2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\left(k-\dfrac{1}{2}\right)\alpha}$$

$$=\frac{\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)\alpha-\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)\alpha+\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)\alpha-\cos\left(k+\frac{3}{2}\right)\alpha+...+\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)\alpha-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha}{4\sin^2\dfrac{\alpha}{2}\cdot\cos\left(k-\dfrac{1}{2}\right)\alpha}$$

$$=\frac{\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)\alpha-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha}{4\sin^2\dfrac{\alpha}{2}\cdot\cos\left(k-\dfrac{1}{2}\right)\alpha}=\frac{\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)\alpha-\cos\dfrac{\pi}{2}}{4\sin^2\dfrac{\alpha}{2}\cdot\cos\left(k-\dfrac{1}{2}\right)\alpha}=\frac{1}{4\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}=\frac{1}{4\sin^2\dfrac{\pi}{4n+2}}$$

$$\Rightarrow\sum_{k=1}^{n}(x_1+x_2+...+x_k)^2\le\frac{1}{4\sin^2\dfrac{\pi}{4n+2}}\left(x_1^2+x_2^2+...+x_n^2\right)$$

Với $\dfrac{x_1}{c_1}=\dfrac{x_2}{c_2}=\cdots=\dfrac{x_n}{c_n}$, chẳng hạn $x_i=c_i\ (i=\overline{1,n})$ thì Min $A=\dfrac{1}{4\sin^2\dfrac{\pi}{4n+2}}$

Bài 11. Cho $a_1,a_2,...a_n>0$. Chứng minh rằng:

$$S=\frac{1}{a_1}+\frac{2}{a_1+a_2}+...+\frac{n}{a_1+a_2+...+a_n}<4\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}\right)$$

Chứng minh

Sử dụng bất đẳng thức ***CBS*** ta có:

$$\left(a_1+a_2+...+a_k\right)\left(\frac{1^2}{a_1}+\frac{2^2}{a_2}+...+\frac{k^2}{a_k}\right)\ge(1+2+...+k)^2$$

$$\Rightarrow \frac{k}{a_1+a_2+...+a_k}\le\frac{k}{(1+2+...+k)^2}\left(\frac{1^2}{a_1}+\frac{2^2}{a_2}+...+\frac{k^2}{a_k}\right)$$

$$\Rightarrow S\le\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{k}{(1+2+...+k)^2}\left(\frac{1^2}{a_1}+\frac{2^2}{a_2}+...+\frac{k^2}{a_k}\right)\right]=c_1\frac{1^2}{a_1}+c_2\frac{2^2}{a_2}+...+c_n\frac{n^2}{a_n}$$

với $c_k=\frac{k}{(1+2+...+k)^2}+\frac{k+1}{[1+2+...+k+(k+1)]^2}+...+\frac{n}{(1+2+...+n)^2}$ suy ra

$$\frac{c_k}{4}=\frac{k}{k^2(k+1)^2}+\frac{k+1}{(k+1)^2(k+2)^2}+...+\frac{n}{n^2(n+1)^2}=\frac{1}{k(k+1)^2}+...+\frac{1}{n(n+1)^2}$$

$$=\frac{1}{k+1}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)+\frac{1}{k+2}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)+...+\frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=\frac{1}{k^2}-\frac{1}{k}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)-\frac{1}{k+1}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)-...-\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)-\frac{1}{(n+1)^2}<\frac{1}{k^2}$$

$$\Rightarrow c_k\cdot k^2<4\Rightarrow S\le c_1\frac{1^2}{a_1}+c_2\frac{2^2}{a_2}+...+c_n\frac{n^2}{a_n}<4\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}\right)\text{ (đpcm)}$$

Bài 12. Cho $a_1,a_2,...a_n\in\mathbb{R}$. Chứng minh rằng:

a. $S=a_1^2+\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^2+...+\left(\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}\right)^2<4\left(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2\right)$ (1)

b. Hệ số 4 là đánh giá tốt nhất của bất đẳng thức (1)

Chứng minh

a. Sử dụng bất đẳng thức ***CBS*** ta có:

$$\left(\frac{a_1^2}{\alpha_1}+\frac{a_2^2}{\alpha_2}+...+\frac{a_k^2}{\alpha_k}\right)(\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_k)\ge(a_1+a_2+...+a_k)^2$$

$$\Rightarrow\left(\frac{a_1+a_2+...+a_k}{k}\right)^2\le\frac{\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_k}{k^2}\left(\frac{a_1^2}{\alpha_1}+\frac{a_2^2}{\alpha_2}+...+\frac{a_k^2}{\alpha_k}\right)$$

$$\Rightarrow S\le\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_k}{k^2}\left(\frac{a_1^2}{\alpha_1}+\frac{a_2^2}{\alpha_2}+...+\frac{a_k^2}{\alpha_k}\right)\right]=\sum_{k=1}^{n}\left(c_k\frac{a_k^2}{\alpha_k}\right)$$

với $c_k=\frac{\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_k}{k^2}+\frac{\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_{k+1}}{(k+1)^2}+...+\frac{\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n}{n^2}$

Chọn $\alpha_k=\sqrt{k}-\sqrt{k-1}\Rightarrow\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_k=\sqrt{k};\ \frac{1}{a_k}=\sqrt{k}+\sqrt{k-1}<2\sqrt{k-\frac{1}{2}}$

$$\Rightarrow c_k=\frac{\sqrt{k}}{k^2}+\frac{\sqrt{k+1}}{(k+1)^2}+...+\frac{\sqrt{n}}{n^2}=\frac{1}{k\sqrt{k}}+\frac{1}{(k+1)\sqrt{k+1}}+...+\frac{1}{n\sqrt{n}}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{k}} < \frac{1}{\sqrt{k-\frac{1}{2}}+\sqrt{k+\frac{1}{2}}} = \sqrt{k+\frac{1}{2}} - \sqrt{k-\frac{1}{2}}\ ;\ \sqrt{\left(k-\frac{1}{2}\right)\left(k+\frac{1}{2}\right)} = \sqrt{k^2-\frac{1}{4}} < k$$

$$\Rightarrow \frac{1}{k\sqrt{k}} < \frac{2\left(\sqrt{k+\frac{1}{2}}-\sqrt{k-\frac{1}{2}}\right)}{\sqrt{\left(k+\frac{1}{2}\right)\left(k-\frac{1}{2}\right)}} = 2\left(\frac{1}{\sqrt{k-\frac{1}{2}}} - \frac{1}{\sqrt{k+\frac{1}{2}}}\right)$$

$$\Rightarrow c_k < 2\left(\frac{1}{\sqrt{k-\frac{1}{2}}} - \frac{1}{\sqrt{k+\frac{1}{2}}}\right) + 2\left(\frac{1}{\sqrt{k+\frac{1}{2}}} - \frac{1}{\sqrt{k+\frac{3}{2}}}\right) + \ldots + 2\left(\frac{1}{\sqrt{n-\frac{1}{2}}} - \frac{1}{\sqrt{n+\frac{1}{2}}}\right)$$

$$= 2\left(\frac{1}{\sqrt{k-\frac{1}{2}}} - \frac{1}{\sqrt{n+\frac{1}{2}}}\right) < \frac{2}{\sqrt{k-\frac{1}{2}}} \Rightarrow \frac{c_k}{\alpha_k} < \frac{2}{\sqrt{k-\frac{1}{2}}} \cdot 2\sqrt{k-\frac{1}{2}} = 4$$

$$\Rightarrow S \le \sum_{k=1}^{n}\left(c_k \frac{a_k^2}{\alpha_k}\right) < 4\left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2\right) \text{ (đpcm)}$$

b. Giả sử $S < (4-\alpha)\left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2\right), 0 < \alpha < 4$ (2). Chọn $a_k = \sqrt{k} - \sqrt{k-1}$ suy ra $a_1 + a_2 + \ldots + a_k = \sqrt{k}$. Khi đó (2) $\Leftrightarrow 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} < (4-\alpha)\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{k}-\sqrt{k-1}\right)^2$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{4-\alpha}{\left(\sqrt{k}+\sqrt{k-1}\right)^2} - \frac{1}{k}\right] > 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n}\frac{\left(\sqrt{k}-\sqrt{k-1}\right)^2 + 2 - \alpha k}{\left(\sqrt{k}+\sqrt{k-1}\right)^2 k} > 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k\left(\sqrt{k}+\sqrt{k-1}\right)^4} + 2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k\left(\sqrt{k}+\sqrt{k-1}\right)^2} > \alpha\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\left(\sqrt{k}+\sqrt{k-1}\right)^2} \quad (3)$$

$$S_1 = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k\left(\sqrt{k}+\sqrt{k-1}\right)^4} < \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k\left(\sqrt{k}\right)^4} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^3} < \frac{5}{4}$$

$$S_2 = 2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k\left(\sqrt{k}+\sqrt{k-1}\right)^2} < 2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k\left(\sqrt{k}\right)^2} = 2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} < 4$$

$$S_3 = \alpha\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\left(\sqrt{k}+\sqrt{k-1}\right)^2} > \alpha\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\left(2\sqrt{k}\right)^2} = \frac{\alpha}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \to +\infty\ (n \to +\infty)$$

Từ các đánh giá của $S_1, S_2, S_3 \Rightarrow$ bất đẳng thức (3) không xảy ra $\Rightarrow$ (đpcm)

Bài 13. Chứng minh: $x_1 + \sqrt{x_1x_2} + \ldots + \sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n} < e\left(x_1 + \ldots + x_n\right), \forall x_1, \ldots, x_n \ge 0$

Chứng minh

Với $\forall a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$ ta có: $\sum_{k=1}^{n}\sqrt[k]{x_1\ldots x_n} = \sum_{k=1}^{n}\sqrt[k]{a_1\ldots a_n}\sqrt[k]{\frac{x_1}{a_1} + \ldots + \frac{x_k}{a_k}}$

$$\le \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt[k]{a_1 \ldots a_n}}{k}\left(\frac{x_1}{a_1}+\ldots+\frac{x_k}{a_k}\right) \le \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{a_k} \sum_{i=k}^{n} \frac{\sqrt[i]{a_1 \ldots a_i}}{i} = \sum_{k=1}^{n} c_k a_k$$

trong đó $C_k = \dfrac{1}{a_k}\left(\dfrac{\sqrt[k]{a_1 \ldots a_k}}{k}+\ldots+\dfrac{\sqrt[n]{a_1 \ldots a_n}}{n}\right)$. Chọn $a_k = \dfrac{k^{k-1}}{(k+1)^k}\ \forall k=\overline{1,n}$. Khi đó:

$$C_k = \frac{(k+1)^k}{k^{k-1}}\left(\frac{1}{k(k+1)}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}\right) = \frac{(k+1)^k}{k^{k-1}}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{n+1}\right) < \left(1+\frac{1}{k}\right)^k < e,\ \forall k=\overline{1,m}$$

Bài 14. Cho a, b, c thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=4$ và $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức: $y = a + b\sqrt{2}\sin x + c\sin 2x$

Giải

Sử dụng bất đẳng thức ***CBS*** ta có:

$y^2 \le (a^2+b^2+c^2)(1+2\sin^2 x+\sin^2 2x) \Leftrightarrow y^2 \le 4(1+2\sin^2 x+\sin^2 2x)$

Gọi $f(x) = 1 + 2\sin^2 x + \sin^2 2x = 1 + 2\sin^2 x + 4\sin^2 x(1-\sin^2 x)$

Đặt $t = \sin^2 x \in (0,1)$, $\forall x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ thì $f(x) = g(t) = -4t^2+6t+1 = \dfrac{13}{4} - 4\left(t-\dfrac{3}{4}\right)^2 \le \dfrac{13}{4}$

Khi đó: $\text{Max} f(x) = \text{Max} g(t) = \dfrac{13}{4}$. Từ đó suy ra $y^2 \le 13$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\sin^2 x = \dfrac{3}{4}$ và $\dfrac{1}{a} = \dfrac{\sqrt{\sin x}}{b} = \dfrac{\sqrt{\sin 2x}}{c}$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{3} \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ và $\dfrac{1}{a} = \dfrac{\sqrt{6}}{2b} = \dfrac{\sqrt{3}}{2c} \Rightarrow b = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}; c = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Kết hợp với điều kiện $a^2+b^2+c^2=4$ ta suy ra: $a = \pm\dfrac{4}{\sqrt{13}}$

- Min $y = -\sqrt{13}$ xảy ra khi $a = -\dfrac{4}{\sqrt{13}}$; $b = \dfrac{-2\sqrt{6}}{\sqrt{13}}$; $c = \dfrac{-2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}$; $x = \dfrac{\pi}{3}$

- Max $y = \sqrt{13}$ xảy ra khi $a = \dfrac{4}{\sqrt{13}}$; $b = \dfrac{2\sqrt{6}}{\sqrt{13}}$; $c = \dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}$; $x = \dfrac{\pi}{3}$

III. ĐIỂM RƠI TRONG CBS VỚI CÁC BIỂU THỨC CHỨA BIẾN

Bài 1. Cho các số không âm a,b,c, chứng minh rằng

$$\frac{a}{\sqrt{a+b}}+\frac{b}{\sqrt{b+c}}+\frac{c}{\sqrt{c+a}}\le\frac{5}{4}\sqrt{a+b+c}$$

Phân tích và tìm tòi lời giải.

Phân tích: Đây là một bất đẳng thức chứa căn bậc 2 nên chúng ta nghĩ ngay đến việc khử căn thức bằng cách sử dụng bất đẳng thức ***CBS***. Nhưng có một khó khăn là phải đảm bảo được dấu bằng của bất đẳng thức khi sử dụng ***CBS*** và đánh giá tiếp theo phải như nhau và phù hợp với điểm rơi dự đoán. Để ý rằng đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $(a,b,c)\sim(3,1,0)$. Vậy thì ta phải sử dụng bất đẳng thức ***CBS*** làm sao cho đẳng thức cũng xảy ra khi đó. Ta nảy ra ý tưởng, đó là thêm vào những tham số $p_1,p_2,p_3>0$:

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a+b}}+\frac{b}{\sqrt{b+c}}+\frac{c}{\sqrt{c+a}}\right)^2=\left(\sqrt{ap_1}\sqrt{\frac{a}{p_1(a+b)}}+\sqrt{bp_2}\sqrt{\frac{b}{p_2(b+c)}}+\sqrt{cp_3}\sqrt{\frac{c}{p_3(c+a)}}\right)^2$$

$$\le(ap_1+bp_2+cp_3)\left(\frac{a}{p_1(a+b)}+\frac{b}{p_2(b+c)}+\frac{c}{p_3(c+a)}\right)$$

Nếu chọn p_1,p_2,p_3 là những hằng số cố định thì sau khi sử dụng bất đẳng thức ***CBS*** thì đẳng thức không thể xảy ra khi $(a,b,c)\sim(3,1,0)$. Từ những điều này, chúng ta nghĩ đến việc chọn p_1,p_2,p_3 là những biến chạy theo a,b,c và ta thấy rằng chọn hàm tuyến tính là đơn giản hơn cả. Như vậy, ta sẽ đặt $p_1=ma+nb+pc$, $p_2=mb+nc+pa$, $p_3=mc+na+pb$ với m,n,p là những số không âm ($m^2+n^2+p^2>0$) mà ta sẽ chọn sao cho đẳng thức xảy ra khi $(a,b,c)\sim(3,1,0)$. Theo bất đẳng thức ***CBS*** ta có:

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a+b}}+\frac{b}{\sqrt{b+c}}+\frac{c}{\sqrt{c+a}}\right)^2=\left[\sum_{cyc}\sqrt{a(ma+nb+pc)}\cdot\sqrt{\frac{a}{(ma+nb+pc)(a+b)}}\right]^2$$

$$\le\sum_{cyc}a(ma+nb+pc)\times\sum_{cyc}\frac{a}{(ma+nb+pc)(a+b)}$$

$$=\left[m(a^2+b^2+c^2)+(n+p)(ab+bc+ca)\right]\times\sum_{cyc}\frac{a}{(ma+nb+pc)(a+b)}$$

Đến đây, các bạn nên chọn $n+p=2m$ khi đó

$m(a^2+b^2+c^2)+(n+p)(ab+bc+ca)=m(a+b+c)^2$

Và như vậy ta có thể đơn giản đi một lượng $a+b+c$ với vế phải, như thế bậc của bất đẳng thức sẽ không cao. Và ta có thể dễ dàng chứng minh hơn!

Bây giờ, chú ý rằng đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\frac{\sqrt{a(ma+nb+pc)}}{\sqrt{\dfrac{a}{(ma+nb+pc)(a+b)}}}=\frac{\sqrt{b(mb+nc+pa)}}{\sqrt{\dfrac{b}{(mb+nc+pa)(b+c)}}}=\frac{\sqrt{c(mc+na+pb)}}{\sqrt{\dfrac{c}{(mc+na+pb)(c+a)}}}$$

Khi $c=0,\ a=3,b=1$ đẳng thức trở thành

$$\frac{\sqrt{3(3m+n)}}{\sqrt{\dfrac{3}{(3m+n)(3+1)}}}=\frac{\sqrt{m+3p}}{\sqrt{\dfrac{1}{m+3p}}}\Leftrightarrow 5m+2n=3p=3(2m-n)\Leftrightarrow m=5n$$

Chọn $m=5,n=1\Rightarrow p=9$. Bây giờ chúng ta sẽ giải bài toán đã cho.

Giải: Sử dụng bất đẳng thức ***CBS*** , ta có

$$\left(\sum_{cyc}\frac{a}{\sqrt{a+b}}\right)^2=\left(\sum_{cyc}\sqrt{a(5a+b+9c)}\cdot\sqrt{\frac{a}{(a+b)(5a+b+9c)}}\right)^2$$

$$\le\left(\sum_{cyc}a(5a+b+9c)\right)\left(\sum_{cyc}\frac{a}{(a+b)(5a+b+9c)}\right)=5(a+b+c)^2\left(\sum_{cyc}\frac{a}{(a+b)(5a+b+9c)}\right)$$

Ta chỉ cần chứng minh: $(a+b+c)\left(\sum_{cyc}\frac{a}{(a+b)(5a+b+9c)}\right)\le\frac{5}{16}$

Mà điều này hiển nhiên đúng vì:

$$\frac{5}{16}-(a+b+c)\times\sum_{cyc}\frac{a}{(a+b)(5a+b+9c)}=\frac{A+\sum_{cyc}ab(a+b)(a+9b)(a-3b)^2}{16\prod_{cyc}(a+b)\prod_{cyc}(5a+b+9c)}\ge 0$$

Trong đó $A=243\sum_{cyc}a^3b^2c+835\sum_{cyc}a^3bc^2+232\sum_{cyc}a^4bc+1230a^2b^2c^2\ge 0$.

Bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow (a,b,c)\sim(3,1,0)$

Bài 2. Cho các số không âm $a,b,c,$ chứng minh rằng

$$\frac{a}{\sqrt{2a+b+3c}}+\frac{b}{\sqrt{2b+c+3a}}+\frac{c}{\sqrt{2c+a+3b}}<\sqrt{\frac{8}{15}(a+b+c)}$$

Chứng minh

Sử dụng bất đẳng thức ***CBS***, ta có:

$$\left(\sum_{cyc}\frac{a}{\sqrt{2a+b+3c}}\right)^2=\left(\sum_{cyc}\sqrt{a(4a+5b+3c)}\cdot\sqrt{\frac{a}{(2a+b+3c)(4a+5b+3c)}}\right)^2$$

$$\le\left(\sum_{cyc}a(4a+5b+3c)\right)\left(\sum_{cyc}\frac{a}{(2a+b+3c)(4a+5b+3c)}\right)=4(a+b+c)^2\left(\sum_{cyc}\frac{a}{(2a+b+3c)(4a+5b+3c)}\right)$$

Như thế, ta chỉ cần chứng minh rằng $(a+b+c)\left(\sum_{cyc}\frac{a}{(2a+b+3c)(4a+5b+3c)}\right)\le\frac{2}{15}$

Thật vậy, ta có: $\frac{2}{15}-(a+b+c)\left(\sum_{cyc}\frac{a}{(2a+b+3c)(4a+5b+3c)}\right)=\frac{A}{B}$, trong đó

$$A=45\sum_{cyc}a^6+237\sum_{cyc}a^5b+81\sum_{cyc}ab^5+1768\sum_{cyc}a^4bc+166\sum_{cyc}a^3b^3+361\sum_{cyc}a^4b^2$$
$$+25\sum_{cyc}a^2b^4+4916\sum_{cyc}a^3b^2c+4736\sum_{cyc}a^3bc^2+9651a^2b^2c^2>0$$

$B=15(2a+b+3c)(2b+c+3a)(2c+a+3b)(4a+5b+3c)(4b+5c+3a)(4c+5a+3b)>0$ Từ đó ta có bất đẳng thức được chứng minh với chú ý đẳng thức không xảy ra.

Bài 3. Cho các số dương a,b,c, chứng minh $\frac{a^4}{a^3+b^3}+\frac{b^4}{b^3+c^3}+\frac{c^4}{c^3+a^3}\ge\frac{a+b+c}{2}$

Chứng minh

- ***Bổ đề:*** $ab^3+bc^3+ca^3\le\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)^2$

Thật vậy, ta có: $VT-VP=\frac{1}{2}\sum_{cyc}(a^2-c^2-ab-ac+2bc)^2\ge0$

- ***Áp dụng:*** Sử dụng bất đẳng thức ***CBS***, ta có:

$$\left(\sum_{cyc}\frac{a^4}{a^3+b^3}\right)\left(\sum_{cyc}a^2(a^3+b^3)\right)\ge(a^3+b^3+c^3)^2$$

Ta phải chứng minh: $2(a^3+b^3+c^3)^2\ge(a+b+c)(a^5+b^5+c^5+a^2b^3+b^2c^3+c^2a^3)$

Ta có $a^2b^3+b^2c^3+c^2a^3=(ab+bc+ca)(ab^2+bc^2+ca^2)-abc(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)$

$$=\frac{ab+bc+ca}{a+b+c}\left[ab^3+bc^3+ca^3+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+abc(a+b+c)\right]-$$
$$-abc(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)$$
$$=\frac{ab+bc+ca}{a+b+c}(ab^3+bc^3+ca^3+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-abc(a^2+b^2+c^2)$$
$$\le\frac{ab+bc+ca}{a+b+c}\left(\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)^2+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)-abc(a^2+b^2+c^2)$$

Như thế, ta chỉ cần chứng minh rằng

$$2(a^3+b^3+c^3)^2\ge(a+b+c)(a^5+b^5+c^5)+$$
$$+(ab+bc+ca)\left(\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)^2+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)-abc(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)$$

Không mất tính tổng quát, chuẩn hóa $a+b+c=1$.

Đặt $ab+bc+ca=\frac{1-q^2}{3}$, $r=abc$ $(0\le q\le 1)$ thì ta có: $\frac{(1-q)^2(1+2q)}{27}\ge r\ge\frac{(1+q)^2(1-2q)}{27}$

Khi đó, bất đẳng thức tương đương

$$(54r^2+(28q^2-4)r)-3(1-q^2)r+\frac{1}{27}(7q^6+108q^4-39q^2+5)\ge 0$$

Rõ ràng $f(r)=54r^2+(28q^2-4)r$ là hàm đồng biến theo r nên ta có:

$$VT\ge\left[54\left(\frac{(1+q)^2(1-2q)}{27}\right)^2+(28q^2-4)\frac{(1+q)^2(1-2q)}{27}\right]-3(1-q^2)\frac{(1-q)^2(1+2q)}{27}$$

$$+\frac{1}{27}(7q^6+108q^4-39q^2+5)=\frac{q^2\left[q^2(15q^2-26q+24)+(1-3q)^2\right]}{27}\ge 0$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Bài 4. Cho các số dương a,b,c, chứng minh rằng:

$$\frac{a^3}{2a^2-ab+2b^2}+\frac{b^3}{2b^2-bc+2c^2}+\frac{c^3}{2c^2-ca+2a^2}\ge\frac{a+b+c}{3}$$

Chứng minh

Sử dụng bất đẳng thức ***CBS***,

$$\left(\sum_{cyc}\frac{a^3}{2a^2-ab+2b^2}\right)\left(\sum_{cyc}a(2a^2-ab+2b^2)(c+a)^2\right)\ge\left(\sum_{cyc}a^3+\sum_{cyc}ab^2\right)^2$$

Cuối cùng ta chứng minh: $3\left(\sum_{cyc}a^3+\sum_{cyc}ab^2\right)^2\ge\left(\sum_{cyc}a\right)\left(\sum_{cyc}a(2a^2-ab+2b^2)(c+a)^2\right)$

Giả sử $c=\min\{a,b,c\}$. Đặt $a=c+x, b=c+y$ $(x,y\ge 0)$. Khi đó bất đẳng thức trở thành

$Ac^4+Bc^3+Dc^2+Ec+F\ge 0$ trong đó $A=18(x^2-xy+y^2)\ge 0$

$$B=20x^3+33x^2y-21xy^2+20y^3=20x^3+22x^2y+xy^2+9y^3+11y(x-y)^2\ge 0$$

$$D=11x^4+35x^3y+21x^2y^2-19xy^3+11y^4=11x^4+35x^2y^2+11x^2y^2+xy^3+y^4+10y^2(x-y)^2\ge 0$$

$$E=5x^5+4x^4y+27x^3y^2-5x^2y^3-7xy^4+5y^5=5x^5+4x^4y+y^2(27x^3-5x^2y-7xy^2+5y^3)$$

$$F=x^6-x^5y+5x^4y^2+2x^3y^3-3x^2y^4+y^6$$

$$F=x^4(x^2-xy+y^2)+y^2(2x^2-y^2)^2+2x^3y^3+x^2y^4\ge 0$$

Vậy bất đẳng thức cần chứng minh hiển nhiên đúng. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

Bài 5. Cho $\begin{cases} a,b,c \ge 0 \\ a+b+c=1 \end{cases}$ Chứng minh rằng: $\sqrt{a+b^2}+\sqrt{b+c^2}+\sqrt{c+a^2}<\frac{11}{5}$

Chứng minh

Sử dụng bất đẳng thức ***CBS***, ta có $\left(\sum_{cyc}\sqrt{a+b^2}\right)^2=\left(\sum_{cyc}\sqrt{4a+4b+c}\cdot\sqrt{\frac{a+b^2}{4a+4b+c}}\right)^2$

$$\le\left(\sum_{cyc}(4a+4b+c)\right)\left(\sum_{cyc}\frac{a+b^2}{4a+4b+c}\right)=9\sum_{cyc}\frac{a+b^2}{4a+4b+c}=9\sum_{cyc}\frac{a(a+b+c)+b^2}{4a+4b+c}$$

Như thế, ta chỉ cần chứng minh rằng $9\sum_{cyc}\frac{a(a+b+c)+b^2}{4a+4b+c}\le\frac{121}{25}(a+b+c)$

Ta có: $VP-VT=\dfrac{163\sum_{cyc}a^4+3003\sum_{cyc}a^2b^2+1975\sum_{cyc}ab^3-725\sum_{cyc}a^3b+10920\sum_{cyc}a^2bc}{25(4a+4b+c)(4b+4c+a)(4c+4a+b)}$

$$=\frac{163\left(\sum_{cyc}a^4+11\sum_{cyc}a^2b^2-6\sum_{cyc}a^3b-6\sum_{cyc}a^2bc\right)+A}{25(4a+4b+c)(4b+4c+a)(4c+4a+b)}$$

Trong đó: $A=1210\sum_{cyc}a^2b^2+1975\sum_{cyc}ab^3+253\sum_{cyc}a^3b+11898\sum_{cyc}a^2bc\ge 0$

Ta sẽ chứng minh: $\sum_{cyc}a^4+11\sum_{cyc}a^2b^2-6\sum_{cyc}a^3b-6\sum_{cyc}a^2bc\ge 0$

$$\Leftrightarrow\left(\sum_{cyc}a^4-\sum_{cyc}a^2b^2\right)+12\left(\sum_{cyc}a^2b^2-\sum_{cyc}a^2bc\right)-6\left(\sum_{cyc}a^3b-\sum_{cyc}a^2bc\right)\ge 0$$

Ta có: $\sum_{cyc}a^4-\sum_{cyc}a^2b^2=\frac{1}{2}\sum_{cyc}(a^2-b^2)^2$

$$3\left(\sum_{cyc}a^3b-\sum_{cyc}a^2bc\right)=3\left(\sum_{cyc}b^3c-\sum_{cyc}a^2bc\right)=-3\sum_{cyc}bc(a^2-b^2)$$

$$=-3\sum_{cyc}bc(a^2-b^2)+\sum_{cyc}(ab+bc+ca)(a^2-b^2)=\sum_{cyc}(a^2-b^2)(ab+ac-2bc)$$

$6\left(\sum_{cyc}a^2b^2-\sum_{cyc}a^2bc\right)=\sum_{cyc}(ab+ac-2bc)^2$. Do đó bất đẳng thức tương đương

$$\frac{1}{2}\sum_{cyc}(a^2-b^2)^2+2\sum_{cyc}(ab+ac-2bc)^2-2\sum_{cyc}(a^2-b^2)(ab+ac-2bc)\ge 0$$

$\Leftrightarrow\frac{1}{2}\sum_{cyc}(a^2-b^2-2ab-2ac+4bc)^2\ge 0$, đúng suy ra (đpcm)

Bài 6. Cho các số không âm a,b,c. Chứng minh rằng:

$$a\sqrt{b^2+4c^2}+b\sqrt{c^2+4a^2}+c\sqrt{a^2+4b^2}\le\frac{3}{4}(a+b+c)^2$$

Chứng minh

Sử dụng bất đẳng thức ***CBS***, ta có:

$$\left(\sum_{cyc}a\sqrt{b^2+4c^2}\right)^2\le\left(\sum_{cyc}a(3a+b+5c)\right)\left(\sum_{cyc}\frac{a(b^2+4c^2)}{3a+b+5c}\right)=3(a+b+c)^2\left(\sum_{cyc}\frac{a(b^2+4c^2)}{3a+b+5c}\right)$$

Ta chỉ cần chứng minh rằng: $\sum_{cyc}\frac{a(b^2+4c^2)}{3a+b+5c}\le\frac{3}{16}(a+b+c)^2\Leftrightarrow$

$$45\sum_{cyc}a^5+165\sum_{cyc}a^4b+69\sum_{cyc}ab^4+536\sum_{cyc}a^3bc-306\sum_{cyc}a^3b^2-18\sum_{cyc}a^2b^3-410\sum_{cyc}a^2b^2c\ge 0$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $c=\min\{a,b,c\}$, bất đẳng thức tương đương với:

$(45a^5+45b^5+165a^4b+69ab^4-306a^3b^2-18a^2b^3)+Ac\ge 0$

$\Leftrightarrow 3(a+5b)(15a^2+10ab+3b^2)(a-b)^2+Ac\ge 0$

Trong đó: $A=69a^4+(536b-18c)a^3-(410b^2+410bc+306c^2)a^2$

$+(536b^3-410b^2c+436bc^2+165c^3)a+165b^4-306b^3c-18b^2c^2+69bc^3+45c^4$

Sử dụng giả thiết $c=\min\{a,b,c\}$ ta dễ dàng chứng minh được $A\ge 0$ nên ta có đpcm.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a:b:c=1:1:0$

Bài 7. Cho các số dương a,b,c, chứng minh rằng:

$$\frac{a^3}{2a^2+b^2}+\frac{b^3}{2b^2+c^2}+\frac{c^3}{2c^2+a^2}\ge\frac{a+b+c}{3}$$

Chứng minh

Sử dụng bất đẳng thức ***CBS***, ta có:

$$\left(\sum_{cyc}\frac{a^3}{2a^2+b^2}\right)\left(\sum_{cyc}a(2a^2+b^2)(2c+a)^2\right)\ge\left(\sum_{cyc}a^3+2\sum_{cyc}ab^2\right)^2$$

Như thế, ta chỉ cần chứng minh rằng

$$3\left(\sum_{cyc}a^3+2\sum_{cyc}ab^2\right)^2\ge\left(\sum_{cyc}a\right)\left(\sum_{cyc}a(2a^2+b^2)(2c+a)^2\right)$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $c=\min\{a,b,c\}$. Đặt $a=c+x, b=c+y\ (x,y\ge 0)$

Khi đó bất đẳng thức tương đương với $Ac^4+Bc^3+Dc^2+Ec+F\ge 0$

trong đó $A=18(x^2-xy+y^2)$; $B=3(7x^3+18x^2y-15xy^2+7y^3)\ge 0$

$D = 14x^4 + 53x^3y + 24x^2y^2 - 46xy^3 + 14y^4 \ge 0$

$E = 6x^5 + 4x^4y + 50x^3y^2 - 29x^2y^3 - 6xy^4 + 6y^5 \ge 0$

$F = x^6 - 2x^5y + 11x^4y^2 - 3x^3y^3 - 4x^2y^4 + 2xy^5 + y^6 \ge 0$

Bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$.

Bài 8. Cho các số không âm $a,b,c,$ chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{a}{4a+4b+c}} + \sqrt{\frac{b}{4b+4c+a}} + \sqrt{\frac{c}{4c+4a+b}} \le 1$$

Chứng minh

Sử dụng bất đẳng thức ***CBS***, ta có:

$$\left(\sum_{cyc}\sqrt{\frac{a}{4a+4b+c}}\right)^2 = \left(\sum_{cyc}\sqrt{4a+4c+b}\cdot\sqrt{\frac{a}{(4a+4b+c)(4a+4c+b)}}\right)^2 \le$$

$$\sum_{cyc}\frac{a}{(4a+4b+c)(4a+4c+b)}\sum_{cyc}(4a+4c+b) = \frac{9(a+b+c)\left[a^2+b^2+c^2+8(ab+bc+ca)\right]}{(4a+4b+c)(4b+4c+a)(4c+4a+b)}$$

Ta cần chứng minh: $\dfrac{9(a+b+c)\left[a^2+b^2+c^2+8(ab+bc+ca)\right]}{(4a+4b+c)(4b+4c+a)(4c+4a+b)} \le 1$

$\Leftrightarrow 9(a+b+c)\left[a^2+b^2+c^2+8(ab+bc+ca)\right] \le (4a+4b+c)(4b+4c+a)(4c+4a+b)$

$\Leftrightarrow 7\sum_{cyc}a^3 + 3\sum_{cyc}ab(a+b) \ge 39abc$

Theo bất đẳng thức ***AM – GM*** thì $\sum_{cyc}a^3 \ge 3abc, \sum_{cyc}ab(a+b) \ge 6abc$

Do đó ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$.

Bài 9. Cho $a,b,c \ge 0;\ a+b+c=1$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{a+k(b-c)^2} + \sqrt{b+k(c-a)^2} + \sqrt{c+k(a-b)^2} \le \sqrt{3} \text{ trong đó } k = 1-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Chứng minh

Sử dụng bất đẳng thức ***CBS***, ta có:

$$\left(\sum_{cyc}\sqrt{a+k(b-c)^2}\right)^2 = \left(\sum_{cyc}\sqrt{a+\frac{1}{\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{\frac{a+k(b-c)^2}{a+\frac{1}{\sqrt{3}}}}\right)^2$$

$$\le\left(\sum_{cyc}\sqrt{a+\frac{1}{\sqrt{3}}}\right)\left(\sum_{cyc}\frac{a+k(b-c)^2}{a+\frac{1}{\sqrt{3}}}\right)=\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sum_{cyc}\frac{a}{a+\frac{1}{\sqrt{3}}}+\frac{2-\sqrt{3}}{2}\sum_{cyc}\frac{(b-c)^2}{a+\frac{1}{\sqrt{3}}}\right)$$

Ta chỉ cần chứng minh rằng: $\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sum_{cyc}\frac{a}{a+\frac{1}{\sqrt{3}}}+\frac{2-\sqrt{3}}{2}\sum_{cyc}\frac{(b-c)^2}{a+\frac{1}{\sqrt{3}}}\right)\le 3$

Đặt $q=ab+bc+ca\le\frac{1}{3}$, $r=abc$ thì ta có $0\le r\le\frac{q^2}{3}$.

Bất đẳng thức tương đương với: $9\left(2+\sqrt{3}\right)r-q\left(6q+\sqrt{3}\right)\le 0$

Ta có: $9\left(2+\sqrt{3}\right)r-q\left(6q+\sqrt{3}\right)\le 3\left(2+\sqrt{3}\right)q^2-q\left(6q+\sqrt{3}\right)=q(3q-1)\sqrt{3}\le 0$

Bất đẳng thức được chứng minh xong.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ $a=b=c=\frac{1}{3}$ hoặc $a=1, b=c=0$ và các hoán vị.

Bài 10. Cho các số $a,b,c\ge 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{2a^2+bc}+\frac{1}{2b^2+ca}+\frac{1}{2c^2+ab}\ge\frac{6}{a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca}$$

Chứng minh

• ***Bổ đề:*** *(Bất đẳng thức Schur)*

$$x^4+y^4+z^4+xyz(x+y+z)\ge xy\left(x^2+y^2\right)+yz\left(y^2+z^2\right)+zx\left(z^2+x^2\right),\ \forall x,y,z\ge 0\ (*)$$

• *Chứng minh:* Không mất tính tổng quát, giả sử $x\ge y\ge z\ge 0$. Khi đó:

VT (*) – VP (*) = $(x-y)\left(x^2(x-z)-y^2(y-z)\right)+z^2(x-z)(y-z)\ge 0$

• ***Áp dụng:*** Sử dụng bất đẳng thức ***CBS***, ta có:

$$\left(\sum_{cyc}\frac{1}{2a^2+bc}\right)\left(\sum_{cyc}(b+c)^2(2a^2+bc)\right)\ge 4(a+b+c)^2$$

Như vậy, ta chỉ cần chứng minh rằng:

$$2(a+b+c)^2(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)\ge 3\sum_{cyc}(b+c)^2(2a^2+bc)$$

$$\Leftrightarrow 2\sum_{cyc}a^4+3\sum_{cyc}ab(a^2+b^2)+2\sum_{cyc}a^2bc\ge 10\sum_{cyc}a^2b^2$$

Sử dụng bất đẳng thức ***Schur*** và bất đẳng thức ***AM – GM***, ta có:

$\sum_{cyc}a^4+\sum_{cyc}a^2bc\ge\sum_{cyc}ab(a^2+b^2)$, $\sum_{cyc}ab(a^2+b^2)\ge 2\sum_{cyc}a^2b^2$. Từ đây, ta có đpcm.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ $a=b=c$ hoặc $a=b, c=0$ và các hoán vị.

Bài 11. Cho các $a,b,c\ge 0$ chứng minh rằng:

$$\frac{1}{22a^2+5bc}+\frac{1}{22b^2+5ca}+\frac{1}{22c^2+5ab}\ge\frac{1}{(a+b+c)^2}$$

Chứng minh

• ***Bổ đề:*** *(Bất đẳng thức Schur)*

$$x^4+y^4+z^4+xyz(x+y+z)\ge xy\left(x^2+y^2\right)+yz\left(y^2+z^2\right)+zx\left(z^2+x^2\right),\ \forall x,y,z\ge 0$$

• ***Áp dụng:*** Sử dụng bất đẳng thức ***CBS***, ta có:

$$\left(\sum_{cyc}\frac{1}{22a^2+5bc}\right)\left(\sum_{cyc}(b+c)^2(22a^2+5bc)\right)\ge 4(a+b+c)^2$$

Như vậy, ta chỉ cần chứng minh rằng: $4(a+b+c)^4\ge\sum_{cyc}(b+c)^2(2a^2+bc)$

$$\Leftrightarrow 4\sum_{cyc}a^4+11\sum_{cyc}ab(a^2+b^2)+4\sum_{cyc}a^2bc\ge 30\sum_{cyc}a^2b^2$$

Sử dụng bất đẳng thức ***Schur*** và bất đẳng thức ***AM – GM***, ta có:

$$\sum_{cyc}a^4+\sum_{cyc}a^2bc\ge\sum_{cyc}ab(a^2+b^2)\ ,\ \sum_{cyc}ab(a^2+b^2)\ge 2\sum_{cyc}a^2b^2.$$

Từ đây, ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

Bài 12. Cho các số $a,b,c\ge 0$ chứng minh rằng:

$$\frac{1}{2a^2+bc}+\frac{1}{2b^2+ca}+\frac{1}{2c^2+ab}\ge\frac{8}{(a+b+c)^2}$$

Chứng minh

• ***Bổ đề:*** *(Bất đẳng thức Schur)*

$$x^4+y^4+z^4+xyz(x+y+z)\ge xy\left(x^2+y^2\right)+yz\left(y^2+z^2\right)+zx\left(z^2+x^2\right),\ \forall x,y,z\ge 0$$

• ***Áp dụng:*** Sử dụng bất đẳng thức ***CBS***, ta có:

$$\left(\sum_{cyc}\frac{1}{2a^2+bc}\right)\left(\sum_{cyc}(b+c)^2(2a^2+bc)\right)\ge 4(a+b+c)^2$$

Như vậy, ta chỉ cần chứng minh rằng: $(a+b+c)^4\ge 2\sum_{cyc}(b+c)^2(2a^2+bc)$

$$\Leftrightarrow\sum_{cyc}a^4+2\sum_{cyc}ab(a^2+b^2)+4\sum_{cyc}a^2bc\ge 6\sum_{cyc}a^2b^2$$

Sử dụng bất đẳng thức ***Schur*** và bất đẳng thức ***AM – GM***, ta có:

$$\sum_{cyc}a^4+4\sum_{cyc}a^2bc\ge\sum_{cyc}a^4+\sum_{cyc}a^2bc\ge\sum_{cyc}ab(a^2+b^2),\ \sum_{cyc}ab(a^2+b^2)\ge 2\sum_{cyc}a^2b^2$$

Ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b,c=0$ và các hoán vị.

Bài 13. Cho các số $a,b,c\ge 0$ chứng minh rằng:

$$\frac{a^2-bc}{2b^2-3bc+2c^2}+\frac{b^2-ca}{2c^2-3ca+2a^2}+\frac{c^2-ab}{2a^2-3ab+2b^2}\ge 0 \quad (1)$$

Chứng minh

Bất đẳng thức (1) $\Leftrightarrow \sum_{cyc}\left(\frac{a^2-bc}{2b^2-3bc+2c^2}+1\right)\ge 3 \Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{a^2+2(b-c)^2}{2b^2-3bc+2c^2}\ge 3$

Sử dụng bất đẳng thức ***CBS***, ta có:

$$\left(\sum_{cyc}\frac{a^2+2(b-c)^2}{2b^2-3bc+2c^2}\right)\left(\sum_{cyc}(a^2+2(b-c)^2)(2b^2-3bc+2c^2)\right)\ge\left(5\sum_{cyc}a^2-4\sum_{cyc}bc\right)^2$$

Ta phải chứng minh: $\left(5\sum_{cyc}a^2-4\sum_{cyc}bc\right)^2\ge 3\sum_{cyc}\left[a^2+2(b-c)^2\right](2b^2-3bc+2c^2)$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}a^4+\sum_{cyc}a^2bc+2\sum_{cyc}ab(a^2+b^2)\ge 6\sum_{cyc}a^2b^2$$

Sử dụng bất đẳng thức ***Schur*** và bất đẳng thức ***AM – GM***, ta có:

$$\sum_{cyc}a^4+\sum_{cyc}a^2bc\ge\sum_{cyc}ab(a^2+b^2)\ ,\ \sum_{cyc}ab(a^2+b^2)\ge 2\sum_{cyc}a^2b^2$$

Từ đây, ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$ hoặc $a=b,c=0$ và các hoán vị.

Bài 14. Chứng minh: $\frac{2a^2-bc}{b^2-bc+c^2}+\frac{2b^2-ca}{c^2-ca+a^2}+\frac{2c^2-ab}{a^2-ab+b^2}\ge 3,\ \forall\ a,b,c\ge 0$

Chứng minh

Bất đẳng thức tương đương với $\sum_{cyc}\left(\frac{2a^2-bc}{b^2-bc+c^2}+1\right)\ge 6\Leftrightarrow\sum_{cyc}\frac{2a^2+(b-c)^2}{b^2-bc+c^2}\ge 6$

Sử dụng bất đẳng thức ***CBS***, ta có:

$$\left(\sum_{cyc}\frac{2a^2+(b-c)^2}{b^2-bc+c^2}\right)\left(\sum_{cyc}(2a^2+(b-c)^2)(b^2-bc+c^2)\right)\ge 4\left(2\sum_{cyc}a^2-\sum_{cyc}bc\right)^2$$

Ta phải chứng minh: $2\left(2\sum_{cyc}a^2-\sum_{cyc}bc\right)^2\ge 3\sum_{cyc}\left[2a^2+(b-c)^2\right](b^2-bc+c^2)$

$$\Leftrightarrow 2\sum_{cyc}a^4+2\sum_{cyc}a^2bc+\sum_{cyc}ab(a^2+b^2)\ge 6\sum_{cyc}a^2b^2$$

Sử dụng bất đẳng thức ***Schur*** và bất đẳng thức ***AM – GM***, ta có:

$$\sum_{cyc}a^4+\sum_{cyc}a^2bc\ge\sum_{cyc}ab(a^2+b^2),\ \sum_{cyc}ab(a^2+b^2)\ge 2\sum_{cyc}a^2b^2\Rightarrow \text{đpcm}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$ hoặc $a=b,c=0$ và các hoán vị.

Bài 15. Chứng minh rằng với mọi $a,b,c\ge 0$ ta có

$$\frac{a^2(b+c)}{b^2+bc+c^2}+\frac{b^2(c+a)}{c^2+ca+a^2}+\frac{c^2(a+b)}{a^2+ab+b^2}\ge\frac{2(a^2+b^2+c^2)}{a+b+c}$$

Chứng minh

Sử dụng bất đẳng thức ***CBS*** ta có

$$\left(\sum_{cyc}\frac{a^2(b+c)}{b^2+bc+c^2}\right)\left(\sum_{cyc}\frac{a^2(b^2+bc+c^2)}{b+c}\right)\ge(a^2+b^2+c^2)^2$$

Suy ra bất đẳng thức được chứng minh nếu ta chứng minh được

$$(a^2+b^2+c^2)(a+b+c)\ge 2\left(\frac{a^2(b^2+bc+c^2)}{b+c}+\frac{b^2(c^2+ca+a^2)}{c+a}+\frac{c^2(a^2+ab+b^2)}{a+b}\right)$$

$$\Leftrightarrow(a^2+b^2+c^2)(a+b+c)\ge 2\left(a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)\right)-2abc\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}-\frac{3}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow\sum_{cyc}a(a-b)(a-c)+2abc\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}-\frac{3}{2}\right)\ge 0$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a\ge b\ge c$, ta có

$$\sum_{cyc}a(a-b)(a-c)=(a-b)\left(a(a-c)-b(b-c)\right)+c(a-c)(b-c)\ge 0$$

Mặt khác theo bất đẳng thức ***Nesbitt*** thì $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\ge\frac{3}{2}$

Suy ra đpcm. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$ hoặc $a=b,c=0$ và các hoán vị.

Bài 16. Chứng minh rằng với mọi $a,b,c\ge 0$ ta có

$$\frac{a(b+c)^2}{b^3+abc+c^3}+\frac{b(c+a)^2}{c^3+abc+a^3}+\frac{c(a+b)^2}{a^3+abc+b^3}\ge 2$$

Chứng minh

Sử dụng bất đẳng thức ***CBS*** ta có:

$$\sum_{cyc}\frac{a(b+c)^2}{b^3+abc+c^3}=\sum_{cyc}\frac{a^4(b+c)^2}{a^3(b^3+abc+c^3)}\ge\frac{\left(a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)\right)^2}{\sum_{cyc}a^3(b^3+abc+c^3)}$$

Ta chỉ cần chứng minh $\left(a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)\right)^2\ge 2\sum_{cyc}a^3(b^3+abc+c^3)$

$\Leftrightarrow(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2\ge 0$ (luôn đúng)

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b,c=0$ hoặc các hoán vị.

Bài 17. Chứng minh rằng với mọi số thực $a,b,c,$ ta có

$$\frac{a^2-bc}{a^2+2b^2+3c^2}+\frac{b^2-ca}{b^2+2c^2+3a^2}+\frac{c^2-ab}{c^2+2a^2+3b^2}\ge 0$$

Chứng minh

Ta có: $\sum_{cyc}\frac{4(a^2-bc)}{a^2+2b^2+3c^2}=\sum_{cyc}\left(\frac{4(a^2-bc)}{a^2+2b^2+3c^2}+1\right)-3$

$$=2\sum_{cyc}\frac{(b-c)^2}{a^2+2b^2+3c^2}+\sum_{cyc}\frac{5a^2+c^2}{a^2+2b^2+3c^2}-3\ge\sum_{cyc}\frac{5a^2+c^2}{a^2+2b^2+3c^2}-3$$

Mặt khác, theo bất đẳng thức ***CBS*** thì

$$\left(\sum_{cyc}\frac{5a^2+c^2}{a^2+2b^2+3c^2}\right)\left(\sum_{cyc}(5a^2+c^2)(a^2+2b^2+3c^2)\right)\ge 36(a^2+b^2+c^2)^2$$

Mà: $12(a^2+b^2+c^2)^2-\sum_{cyc}(5a^2+c^2)(a^2+2b^2+3c^2)=\sum_{cyc}2(a^2-b^2)^2\ge 0\ \Rightarrow$ đpcm

Bài 18. Cho các số $a,b,c\ge 0$ chứng minh rằng

$$\frac{a^2+bc}{a^2+(b+c)^2}+\frac{b^2+ca}{b^2+(c+a)^2}+\frac{c^2+ab}{c^2+(a+b)^2}\le\frac{18}{5}\frac{a^2+b^2+c^2}{(a+b+c)^2}$$

Chứng minh

Bất đẳng thức tương đương với $\sum_{cyc}\left(1-\frac{a^2+bc}{a^2+(b+c)^2}\right)+\frac{18}{5}\frac{a^2+b^2+c^2}{(a+b+c)^2}\ge 3$

$\Leftrightarrow\sum_{cyc}\frac{(b+c)^2-bc}{a^2+(b+c)^2}+\frac{18}{5}\frac{a^2+b^2+c^2}{(a+b+c)^2}\ge 3$. Chú ý rằng $(b+c)^2-bc\ge\frac{3}{4}(b+c)^2$

nên ta chỉ cần chứng minh rằng $\frac{1}{4}\sum_{cyc}\frac{(b+c)^2}{a^2+(b+c)^2}+\frac{6}{5}\frac{a^2+b^2+c^2}{(a+b+c)^2}\ge 1$

Sử dụng bất đẳng thức ***CBS***, ta có:

$$\sum_{cyc}\frac{(b+c)^2}{a^2+(b+c)^2}\ge\frac{4(a+b+c)^2}{\sum_{cyc}(a^2+(b+c)^2)}=\frac{4(a+b+c)^2}{2(a^2+b^2+c^2)+(a+b+c)^2}$$

Ta phải chứng minh $\frac{(a+b+c)^2}{2(a^2+b^2+c^2)+(a+b+c)^2}+\frac{6}{5}\frac{a^2+b^2+c^2}{(a+b+c)^2}\ge 1$

Đặt $x=\frac{a^2+b^2+c^2}{(a+b+c)^2}\ge\frac{1}{3}$ thì ta có bất đẳng thức tương đương

$\frac{1}{2x+1}+\frac{6x}{5}\ge 1\Leftrightarrow x(3x-1)\ge 0$ luôn đúng với mọi $x\ge\frac{1}{3}$, suy ra (đpcm).

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Bài 19. Cho các số $a,b,c\ge 0$. Chứng minh: $\dfrac{1}{a^2+bc}+\dfrac{1}{b^2+ca}+\dfrac{1}{c^2+ab}\ge\dfrac{12}{(a+b+c)^2}$

Chứng minh

Không mất tính tổng quát, giả sử $a+b+c=1$, khi đó bất đẳng thức trở thành

$$\sum_{cyc}\frac{1}{a^2+bc}\ge 12\Leftrightarrow\sum_{cyc}\left(\frac{1}{a^2+bc}-1\right)\ge 9\Leftrightarrow\sum_{cyc}\frac{1-a^2-bc}{a^2+bc}\ge 9$$

Sử dụng bất đẳng thức **CBS**: $\displaystyle\sum_{cyc}\frac{1-a^2-bc}{a^2+bc}\ge\frac{\left(3-\sum_{cyc}(a^2+bc)\right)^2}{\sum_{cyc}(1-a^2-bc)(a^2+bc)}$

Như thế, ta chỉ cần chứng minh rằng: $\displaystyle\left(3-\sum_{cyc}(a^2+bc)\right)^2\ge 9\sum_{cyc}(1-a^2-bc)(a^2+bc)$

Đặt $q=ab+bc+ca$, khi đó bất đẳng thức tương đương $(1-4q)(4-7q)+36abc\ge 0$

Nếu $q\le\dfrac{1}{4}$ thì bất đẳng thức hiển nhiên đúng

Nếu $q\ge\dfrac{1}{4}$, khi đó theo bất đẳng thức ***Schur*** ta có: $9abc\ge 4q-1$.

Do đó $(1-4q)(4-7q)+36abc\ge(1-4q)(4-7q)+4(4q-1)=7q(4q-1)\ge 0$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b,c=0$ và các hoán vị.

Bài 20. Cho a,b,c là độ dài ba cạnh của một tam giác.

Chứng minh rằng: $\dfrac{a(a-b)}{a^2+2bc}+\dfrac{b(b-c)}{b^2+2ca}+\dfrac{c(c-a)}{c^2+2ab}\ge 0$

Chứng minh

Bất đẳng thức tương đương: $\displaystyle\sum_{cyc}\left(\frac{a(a-b)}{a^2+2bc}+1\right)\ge 3\Leftrightarrow\sum_{cyc}\frac{2a^2-ab+2bc}{a^2+2bc}\ge 3$

Do a,b,c là độ dài 3 cạnh của một tam giác nên $c\ge b-a$

$\Rightarrow 2a^2-ab+2bc\ge 2a^2-ab+2b(b-a)=2(a-b)^2+ab\ge 0$. Sử dụng **CBS**, ta có:

$$\left(\sum_{cyc}\frac{2a^2-ab+2bc}{a^2+2bc}\right)\left(\sum_{cyc}(2a^2-ab+2bc)(a^2+2bc)\right)\ge\left(2\sum_{cyc}a^2+\sum_{cyc}ab\right)^2.$$

Ta cần chứng minh $\displaystyle\left(2\sum_{cyc}a^2+\sum_{cyc}ab\right)^2\ge 3\sum_{cyc}(2a^2-ab+2bc)(a^2+2bc)$

$$\Leftrightarrow 7\sum_{cyc} a^3b + 4\sum_{cyc} ab^3 \ge 2\sum_{cyc} a^4 + 3\sum_{cyc} a^2b^2 + 6\sum_{cyc} a^2bc$$

Do a,b,c là độ dài 3 cạnh của một tam giác nên tồn tại $x,y,z>0$ sao cho $a=y+z, b=z+x, c=x+y$. Khi đó bất đẳng thức tương đương

$$2\sum_{cyc} x^4 + 2\sum_{cyc} xy(x^2+y^2) + 3\sum_{cyc} xy^3 \ge 6\sum_{cyc} x^2y^2 + 3\sum_{cyc} x^2yz.$$

Sử dụng bất đẳng thức ***AM – GM*** ta có:

$$2\sum_{cyc} x^4 \ge 2\sum_{cyc} x^2y^2,\ 2\sum_{cyc} xy(x^2+y^2) \ge 4\sum_{cyc} x^2y^2,\ 3\sum_{cyc} xy^3 \ge 3\sum_{cyc} x^2yz$$

Như vậy bất đẳng thức đã được chứng minh. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

Bài 21. Cho các $a,b,c>0;\ abc=1$. Chứng minh: $\dfrac{1}{a^2-a+1}+\dfrac{1}{b^2-b+1}+\dfrac{1}{c^2-c+1}\le 3$

Chứng minh

Bổ đề: Với mọi $x,y,z>0, xyz=1$ thì $\dfrac{1}{x^2+x+1}+\dfrac{1}{y^2+y+1}+\dfrac{1}{z^2+z+1}\ge 1$ (1)

Chứng minh: Do $x,y,z>0, xyz=1$ nên tồn tại $m,n,p>0$ sao cho $x=\dfrac{np}{m^2}, y=\dfrac{pm}{n^2}, z=\dfrac{mn}{p^2}$

Sử dụng bất đẳng thức ***CBS***, ta có

$$VT(1)=\sum_{cyc}\frac{m^4}{m^4+m^2np+n^2p^2}\ge\frac{(m^2+n^2+p^2)^2}{m^4+n^4+p^4+m^2n^2+n^2p^2+p^2m^2+mnp(m+n+p)}\ge 1$$

Áp dụng: Bây giờ sử dụng bất đẳng thức này với $x=\dfrac{1}{a^4}, y=\dfrac{1}{b^4}, z=\dfrac{1}{c^4}$, ta có:

$$\frac{a^4}{a^4+a^2+1}+\frac{b^4}{b^4+b^2+1}+\frac{c^4}{c^4+c^2+1}\ge 1 \Leftrightarrow \frac{2(a^2+1)}{a^4+a^2+1}+\frac{2(b^2+1)}{b^4+b^2+1}+\frac{2(c^2+1)}{c^4+c^2+1}\le 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{(a^2+a+1)+(a^2-a+1)}{(a^2+a+1)(a^2-a+1)}+\frac{(b^2+b+1)+(b^2-b+1)}{(b^2+b+1)(b^2-b+1)}+\frac{(c^2+c+1)+(c^2-c+1)}{(c^2+c+1)(c^2-c+1)}\le 4$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{a^2+a+1}+\frac{1}{b^2+b+1}+\frac{1}{c^2+c+1}\right)+\left(\frac{1}{a^2-a+1}+\frac{1}{b^2-b+1}+\frac{1}{c^2-c+1}\right)\le 4$$

Do $\dfrac{1}{a^2+a+1}+\dfrac{1}{b^2+b+1}+\dfrac{1}{c^2+c+1}\ge 1 \Rightarrow$ đpcm. Đẳng thức $\Leftrightarrow a=b=c=1$

Bài 22. Chứng minh : $\dfrac{1}{\sqrt{a^2+bc}}+\dfrac{1}{\sqrt{b^2+ca}}+\dfrac{1}{\sqrt{c^2+ab}}\le\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{c+a}\right),\ \forall a,b,c>0$

Chứng minh

Sử dụng bất đẳng thức ***CBS***, ta có:

$$\left(\sum_{cyc}\frac{1}{\sqrt{a^2+bc}}\right)^2=\left(\sum_{cyc}\sqrt{\frac{(a+b)(a+c)}{a^2+bc}}\cdot\frac{1}{\sqrt{(a+b)(a+c)}}\right)^2$$

$$\le\left(\sum_{cyc}\frac{(a+b)(a+c)}{a^2+bc}\right)\left(\sum_{cyc}\frac{1}{(a+b)(a+c)}\right)=\frac{2(a+b+c)}{(a+b)(b+c)(c+a)}\left(\sum_{cyc}\frac{a(b+c)}{a^2+bc}+3\right)$$

Ta cần chứng minh $\dfrac{a+b+c}{(a+b)(b+c)(c+a)}\left(\displaystyle\sum_{cyc}\frac{a(b+c)}{a^2+bc}+3\right)\le\left(\displaystyle\sum_{cyc}\frac{1}{b+c}\right)^2$

$$\Leftrightarrow\sum_{cyc}\frac{a(b+c)}{a^2+bc}+3\le\frac{(a^2+b^2+c^2+3ab+3bc+3ca)^2}{(a+b)(b+c)(c+a)(a+b+c)}$$

$$\Leftrightarrow\sum_{cyc}\frac{a(b+c)}{a^2+bc}-3\le\frac{a^4+b^4+c^4-a^2b^2-b^2c^2-c^2a^2}{(a+b)(b+c)(c+a)(a+b+c)}$$

$$\Leftrightarrow\sum_{cyc}(a-b)(a-c)\left(\frac{1}{a^2+bc}+\frac{1}{(b+c)(a+b+c)}\right)\ge0$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a\ge b\ge c$, khi đó ta có $a-c\ge\dfrac{a}{b}(b-c)\ge0$

Do đó: $\displaystyle\sum_{cyc}(a-b)(a-c)\left(\frac{1}{a^2+bc}+\frac{1}{(b+c)(a+b+c)}\right)$

$$\ge\frac{(a-b)(b-c)}{b}\left[a\left(\frac{1}{a^2+bc}+\frac{1}{(b+c)(a+b+c)}\right)-b\left(\frac{1}{b^2+ca}+\frac{1}{(c+a)(a+b+c)}\right)\right]$$

$=\dfrac{c(a-b)^2(a+b)(b-c)(a^2+b^2-ab+ac+bc)}{b(a^2+bc)(b^2+ca)(a+c)(b+c)(a+b+c)}\ge0$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

Bài 23. Cho $a,b,c\ge0$. Chứng minh rằng $\sqrt{\dfrac{a^3+abc}{b+c}}+\sqrt{\dfrac{b^3+abc}{c+a}}+\sqrt{\dfrac{c^3+abc}{a+b}}\ge a+b+c$

Chứng minh

Sử dụng bất đẳng thức ***CBS*** ta có: $\left(\displaystyle\sum_{cyc}\sqrt{\frac{a^3+abc}{b+c}}\right)\left(\displaystyle\sum_{cyc}\sqrt{\frac{a^3(b+c)}{a^2+bc}}\right)\ge(a+b+c)^2$

Bất đẳng thức sẽ được chứng minh nếu ta chứng minh được

$$\sqrt{\frac{a^3(b+c)}{a^2+bc}}+\sqrt{\frac{b^3(c+a)}{b^2+ca}}+\sqrt{\frac{c^3(a+b)}{c^2+ab}}\le a+b+c$$

Theo ***CBS*** ta có: $\sum_{cyc}\sqrt{\dfrac{a^3(b+c)}{a^2+bc}} \le \sqrt{(a+b+c)\left(\dfrac{a^2(b+c)}{a^2+bc}+\dfrac{b^2(c+a)}{b^2+ac}+\dfrac{c^2(a+b)}{c^2+ab}\right)}$

Ta sẽ chứng minh $\dfrac{a^2(b+c)}{a^2+bc}+\dfrac{b^2(c+a)}{b^2+ac}+\dfrac{c^2(a+b)}{c^2+ab} \le a+b+c$

$$\Leftrightarrow \frac{a(a-b)(a-c)}{a^2+bc}+\frac{b(b-c)(b-a)}{b^2+ca}+\frac{c(c-a)(c-b)}{c^2+ab} \ge 0$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \ge b \ge c$ ta có: $\dfrac{c(c-a)(c-b)}{c^2+ab} \ge 0$

Và $\dfrac{a(a-b)(a-c)}{a^2+bc}+\dfrac{b(b-c)(b-a)}{b^2+ca} \ge 0 \Leftrightarrow (a-b)(a+b-c) \ge 0$ (luôn đúng) $\Rightarrow$ đpcm

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$ hoặc $a=b, c=0$ hoặc các hoán vị.

Bài 24. Chứng minh rằng : $\dfrac{a(b+c)}{b^2+bc+c^2}+\dfrac{b(c+a)}{c^2+ca+a^2}+\dfrac{c(a+b)}{a^2+ab+b^2} \ge 2$, $\forall a,b,c \ge 0$.

Chứng minh

Sử dụng ***CBS***, ta có: $\left(\sum_{cyc}\dfrac{a(b+c)}{b^2+bc+c^2}\right)\left(\sum_{cyc}\dfrac{a(b^2+bc+c^2)}{b+c}\right) \ge (a+b+c)^2$

Như thế, ta chỉ cần chứng minh rằng $(a+b+c)^2 \ge 2\sum_{cyc}\dfrac{a(b^2+bc+c^2)}{b+c}$

$$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+2abc\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right) \ge 2(ab+bc+ca)$$

Sử dụng bất đẳng thức ***AM – GM***, ta có: $\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{c+a} \ge \dfrac{9}{2(a+b+c)}$

Như thế, ta chỉ cần chứng minh rằng: $a^3+b^3+c^3+\dfrac{9abc}{a+b+c} \ge 2(ab+bc+ca)$

$\Leftrightarrow a^3+b^3+c^3+3abc \ge ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)$. (đúng theo ***Schur***)

Vậy ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$ hoặc $a=b, c=0$ và các hoán vị.

Bài 25. Chứng minh rằng $\dfrac{x^3}{x^3+(x+y)^3}+\dfrac{y^3}{y^3+(y+z)^3}+\dfrac{z^3}{z^3+(z+x)^3} \ge \dfrac{1}{3}$ (1), $\forall x,y,z \ge 0$

Chứng minh

$(1) \Leftrightarrow \dfrac{1}{1+(1+m)^3}+\dfrac{1}{1+(1+n)^3}+\dfrac{1}{1+(1+p)^3} \ge \dfrac{1}{3}$, trong đó $m=\dfrac{y}{x}; n=\dfrac{z}{y}; p=\dfrac{x}{z} \Rightarrow mnp=1$.

Đặt $m=\dfrac{bc}{a^2}; n=\dfrac{ca}{b^2}; p=\dfrac{ab}{c^2}$, $(1) \Leftrightarrow \dfrac{a^6}{a^6+(a^2+bc)^3}+\dfrac{b^6}{b^6+(b^2+ca)^3}+\dfrac{c^6}{c^6+(c^2+ab)^3} \ge \dfrac{1}{3}$ (2)

Sử dụng ***CBS***, ta có: $VT(2)=\sum_{cyc}\dfrac{a^6}{a^6+(a^2+bc)^3} \ge \dfrac{(a^3+b^3+c^3)^2}{\sum_{cyc}\left(a^6+(a^2+bc)^3\right)}$

Suy ra (1) đúng nếu ta chứng minh được $3(a^3+b^3+c^3)^2 \ge \sum_{cyc}\left(a^6+(a^2+bc)^3\right)$

$\Leftrightarrow a^6+b^6+c^6+5(a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3) \ge 3abc(a^3+b^3+c^3)+9a^2b^2c^2$

Theo ***AM – GM*** : $a^6+a^3b^3+a^3b^3 \ge 3a^4bc$. Tương tự $b^6+b^3c^3+b^3c^3 \ge 3b^4ca$

và $c^6+c^3a^3+c^3a^3 \ge 3c^4ab$. Cũng theo ***AM – GM*** : $3(a^3b^3+b^3c^3+c^3a) \ge 9a^2b^2c^2$

Cộng tất cả các bất đẳng thức trên suy ra đpcm. Đẳng thức xảy ra $a=b=c$.

Bài 26. Cho các số không âm a,b,c, chứng minh rằng:

$$\frac{a^2(b+c)}{(b^2+c^2)(2a+b+c)}+\frac{b^2(c+a)}{(c^2+a^2)(2b+c+a)}+\frac{c^2(a+b)}{(a^2+b^2)(2c+a+b)} \ge \frac{2}{3}$$

Chứng minh

Sử dụng bất đẳng thức ***CBS***, ta có:

$\sum_{cyc}\frac{a^2(b+c)}{(b^2+c^2)(2a+b+c)}\cdot\sum_{cyc}\frac{a^2(b^2+c^2)(2a+b+c)}{b+c} \ge \left(\sum_{cyc}a^2\right)^2$. Ta cần chứng minh:

$$3\left(\sum_{cyc}a^2\right)^2 \ge 2\sum_{cyc}\frac{a^2(b^2+c^2)(2a+b+c)}{b+c} \Leftrightarrow 3\sum_{cyc}a^4+2\sum_{cyc}a^2b^2 \ge 4\sum_{cyc}\frac{a^3(b^2+c^2)}{b+c}$$

$$\Leftrightarrow 3\sum_{cyc}\left(a^4-\frac{a^3(b^2+c^2)}{b+c}\right)+\sum_{cyc}\left(a^2(b^2+c^2)-\frac{a^3(b^2+c^2)}{b+c}\right) \ge 0$$

$$\Leftrightarrow 3\sum_{cyc}\frac{a^3b(a-b)-ca^3(c-a)}{b+c}+\sum_{cyc}\frac{a^2(b^2+c^2)(b+c-a)}{b+c} \ge 0$$

$$\Leftrightarrow 3\sum_{cyc}\frac{ab(a-b)^2(a^2+b^2+ab+bc+ca)}{(a+c)(b+c)}+\sum_{cyc}\frac{a^2(b^2+c^2)(b+c-a)}{b+c} \ge 0$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \ge b \ge c$, khi đó ta có:

$$3\sum_{cyc}\frac{ab(a-b)^2(a^2+b^2+ab+bc+ca)}{(a+c)(b+c)}+\sum_{cyc}\frac{a^2(b^2+c^2)(b+c-a)}{b+c}$$

$$\ge \frac{2ab(a-b)^2(a^2+b^2+ab+bc+ca)}{(a+c)(b+c)}+\frac{a^2(b^2+c^2)(b-a)}{b+c}+\frac{b^2(c^2+a^2)(a-b)}{c+a}$$

$$=\frac{(a-b)^2}{(a+c)(b+c)}\left[2ab(a^2+b^2+ab+bc+ca)-a^2b^2-(b^2+ab+a^2)c^2-(a+b)c^3\right]$$

$$\ge \frac{(a-b)^2}{(a+c)(b+c)}\left[2ab(a^2+b^2+ab+bc+ca)-a^2b^2-(b^2+ab+a^2)ab-(a+b)abc\right]$$

$=\frac{ab(a-b)^2(a^2+b^2+bc+ca)}{(a+c)(b+c)} \ge 0$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b, c=0$ và các hoán vị.

Bài 14. Chứng minh: $\frac{a}{\sqrt{a^2+kbc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+kca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+kab}}\ge\frac{3}{\sqrt{k+1}},\ \forall a,b,c>0;\ k\ge 8$

Bài 15. Cho $\begin{cases}a,b,c>0\\abc=1\end{cases}$. Chứng minh $\sqrt{\frac{a^4+b^4}{1+ab}}+\sqrt{\frac{b^4+c^4}{1+bc}}+\sqrt{\frac{c^4+a^4}{1+ca}}\ge 3$

Bài 16. CM: $\frac{a}{b+c}(y+z)+\frac{b}{c+a}(z+x)+\frac{c}{a+b}(x+y)\ge 3\frac{xy+yz+zx}{x+y+z},\ \forall a,b,c,x,y,z>0$

Bài 17. Cho $\begin{cases}a_1,a_2,...,a_{n-1},a_n>0\\a_1a_2+a_2a_3+...+a_{n-1}a_n=1\end{cases}$. Đặt $S=\sum_{i=1}^{n}a_i$

Chứng minh rằng: $\frac{a_1^3}{S-a_1}+\frac{a_2^3}{S-a_2}+...+\frac{a_n^3}{S-a_n}\ge\frac{1}{n-1}$

Bài 18. Cho $a_1,a_2,...a_n\ge 0$. Chứng minh bất đẳng thức sau:

$$\sqrt{\frac{a_1^2+\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^2+...+\left(\frac{a_1+...+a_n}{2}\right)^2}{n}}\le\frac{a_1+\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2}{2}}+\sqrt{\frac{a_1^2+...+a_n^2}{n}}}{n}$$

Bài 19. Cho $a;\ b,\ c>0$ thỏa mãn điều kiện $a^2+b^2+c^2\ge 1$.

Chứng minh rằng: $\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+d}+\frac{c^2}{d+a}\ge\frac{\sqrt{3}}{2}$

Bài 20. Cho $a,\ b,\ c,\ d>0$ thỏa mãn điều kiện $a^2+b^2+c^2+d^2\ge 1$.

Chứng minh rằng: $\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+d}+\frac{c^2}{d+a}+\frac{d^2}{d+a}\ge 1$

Bài 21. Cho $a,\ b,\ c,\ d>0$ thỏa mãn điều kiện $a^2+b^2+c^2+d^2\ge 1$.

Chứng minh rằng: $\frac{a^2}{b+c+d}+\frac{b^2}{c+d+a}+\frac{c^2}{d+a+b}+\frac{d^2}{a+b+c}\ge\frac{2}{3}$.

Bài 22. Cho $a_1,a_2,a_3,a_4,a_5>0$ thỏa mãn điều kiện $a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2+a_5^2\ge 1$

Chứng minh rằng: $\frac{a_1^2}{a_2+a_3}+\frac{a_2^2}{a_3+a_4}+\frac{a_3^2}{a_4+a_5}+\frac{a_4^2}{a_5+a_1}+\frac{a_5^2}{a_1+a_2}\ge\frac{\sqrt{5}}{2}$

Bài 23. Cho $a_1,a_2,a_3,a_4,a_5>0$ thỏa mãn điều kiện $a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2+a_5^2\ge 1$

Chứng minh: $\frac{a_1^2}{a_2+a_3+a_4}+\frac{a_2^2}{a_3+a_4+a_5}+\frac{a_3^2}{a_4+a_5+a_1}+\frac{a_4^2}{a_5+a_1+a_2}+\frac{a_5^2}{a_1+a_2+a_3}\ge\frac{\sqrt{5}}{2}$

Bài 36. Cho $a,b,c,k \ge 0$. Chứng minh rằng: $\frac{a+2b+k}{a+2c+k}+\frac{b+2c+k}{b+2a+k}+\frac{c+2a+k}{c+2b+k} \ge 3$

Bài 37. Cho $a,b,c \ge 0$. Chứng minh $\frac{a^2+b^2}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^2+c^2}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^2+a^2}{c^2+ca+a^2} \le \frac{2(a^2+b^2+c^2)}{ab+bc+ca}$

Bài 38. Cho $\begin{cases} a,b,c \ge 0 \\ a^2+b^2+c^2=3 \end{cases}$. Chứng minh: $\frac{a}{1+\sqrt{2(b^2+c^2)}}+\frac{b}{1+\sqrt{2(c^2+a^2)}}+\frac{c}{1+\sqrt{2(a^2+b^2)}} \le 1$

Bài 39. Cho $a,b,c \ge 0$. Chứng minh rằng: $\sqrt{\frac{8a^2+bc}{b^2+c^2}}+\sqrt{\frac{8b^2+ca}{c^2+a^2}}+\sqrt{\frac{8c^2+ab}{a^2+b^2}} \ge \frac{9}{\sqrt{2}}$

Bài 40. Cho $a,b,c \ge 0$. Chứng minh: $\frac{a^3+abc}{b^3+c^3+abc}+\frac{b^3+abc}{c^3+a^3+abc}+\frac{c^3+abc}{a^3+b^3+abc} \ge 2$

Bài 41. Cho $a,b,c \ge 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2(b^2+c^2)}{a^2+bc}+\frac{b^2(c^2+a^2)}{b^2+ca}+\frac{c^2(a^2+b^2)}{c^2+ab} \le a^2+b^2+c^2 \le \frac{a(b^3+c^3)}{a^2+bc}+\frac{b(c^3+a^3)}{b^2+ca}+\frac{c(a^3+b^3)}{c^2+ab}$$

Bài 42. Cho $a,b,c \ge 0$. Chứng minh rằng:

$$2\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right) \le 3.\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca} \le 4\left[\left(\frac{a}{b+c}\right)^2+\left(\frac{b}{c+a}\right)^2+\left(\frac{c}{a+b}\right)^2\right]$$

Bài 43. Cho $a,b,c,d \ge 0$. Chứng minh rằng: $\sqrt[3]{(a+c+b)(a+c+d)} \ge \sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{cd}$

Bài 44. Cho $a,b,c \ge 0$. Chứng minh rằng: $\sqrt{\frac{a}{b+\sqrt{ab}}}+\sqrt{\frac{b}{c+\sqrt{bc}}}+\sqrt{\frac{c}{a+\sqrt{ca}}} \ge \frac{3}{2}$

Bài 45. Cho $a,b,c,k \ge 0$. Chứng minh rằng: $\frac{a^3}{a^2b+kc^3}+\frac{b^3}{b^2c+ka^3}+\frac{c^3}{c^2a+kb^3} \ge \frac{3}{k+1}$

Bài 46. Cho $a,b,c \ge 0$ thỏa mãn $(a+b)(b+c)(c+a)=8$.

Chứng minh rằng: $\frac{a+b+c}{3} \ge \sqrt[27]{\frac{a^3+b^3+c^3}{3}}$

Bài 47. Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{(a+1)(a+2)}+\frac{1}{(b+1)(b+2)}+\frac{1}{(c+1)(c+2)} \ge \frac{1}{2}$$

Bài 48. Cho $a,b,c,d>0$ thỏa mãn $abcd=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{(a+3)(2a+1)}+\frac{1}{(b+3)(2b+1)}+\frac{1}{(c+3)(2c+1)}+\frac{1}{(d+3)(2d+1)} \ge \frac{1}{3}$$

Bài 49. Chứng minh: $\frac{\sqrt{ab+4bc+4ca}}{a+b}+\frac{\sqrt{bc+4ca+4ab}}{b+c}+\frac{\sqrt{ca+4ab+4bc}}{c+a} \ge \frac{9}{2}\ \forall a,b,c \ge 0$.

Bài 50. Cho $a,b,c \ge 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{5a^2+bc}+\frac{1}{5b^2+ca}+\frac{1}{5c^2+ab} \ge \frac{3}{a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca}$$

§3. KỸ THUẬT SỬ DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC HOLDER

§3.1. BẤT ĐẲNG THỨC HOLDER

1. Dạng tổng quát:

Cho 2 bộ số $\begin{cases} a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{R}^+ \\ b_1, b_2, ..., b_n \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$ và $p, q \in \mathbb{Q}^+$ sao cho $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

Khi đó ta có: $\left(a_1^p + a_2^p + ... + a_n^p\right)^{\frac{1}{p}} . \left(b_1^q + b_2^q + ... + b_n^q\right)^{\frac{1}{q}} \geq a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n$

2. Mở rộng 1 của bất đẳng thức Holder

Cho $\begin{cases} a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{R}^+ \\ b_1, b_2, ..., b_n \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$ và $p, q \in \mathbb{R}$ sao cho $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Khi đó ta có:

a. $a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n \leq \left(a_1^p + a_2^p + ... + a_n^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(b_1^q + b_2^q + ... + b_n^q\right)^{\frac{1}{q}}$ (1) $\forall pq > 0$

b. $a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n \geq \left(a_1^p + a_2^p + ... + a_n^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(b_1^q + b_2^q + ... + b_n^q\right)^{\frac{1}{q}}$ (2) $\forall pq < 0$

c. Tổng quát chung của 2 dạng **a** và **b**:

$\left(a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n\right)^{pq} \leq \left(a_1^p + a_2^p + ... + a_n^p\right)^q \left(b_1^q + b_2^q + ... + b_n^q\right)^p$ (3) $\forall pq \neq 0$

(Bất đẳng thức Francis – Lithewood)

3. Mở rộng 2 của bất đẳng thức Holder

Cho m bộ số $\begin{cases} a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{R}^+ \\ b_1, b_2, ..., b_n \in \mathbb{R}^+ \\ \text{.....................} \\ l_1, l_2, ..., l_n \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$ và $\begin{cases} p_1, p_2, ..., p_n \in \mathbb{R}^+ \\ p_1 + p_2 + ... + p_n = 1 \end{cases}$. Khi đó ta có:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i ... l_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{\frac{1}{p}} .... \left(\sum_{i=1}^{n} l_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \quad (1)$$

4. Mở rộng 3 của bất đẳng thức Holder

Cho m bộ số $\begin{cases} a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{R}^+ \\ b_1, b_2, ..., b_n \in \mathbb{R}^+ \\ \text{.....................} \\ l_1, l_2, ..., l_n \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$ và m số thỏa mãn $\begin{cases} \alpha, \beta, ..., \lambda > 0 \\ \alpha + \beta + ... + \lambda = 1 \end{cases}$

Khi đó ta có: $\sum_{i=1}^{n}\left(a_i^{\alpha} b_i^{\beta} ... l_i^{\lambda}\right) \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^{\alpha} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)^{\beta} ... \left(\sum_{i=1}^{n} l_i\right)^{\lambda}$

(Bất đẳng thức Jensen)

Chứng minh

1. •***Bổ đề:*** Cho $a,b\in\mathbb{R}^+$ và $p,q\in\mathbb{Q}^+$ sao cho $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Khi đó $\frac{a^p}{p}+\frac{a^q}{q}\ge ab$

• ***Chứng minh:*** Vì $p,q\in\mathbb{Q}^+$, $\frac{1}{p},\frac{1}{q}\in\mathbb{Q}^+\Rightarrow\exists\, m,n,k\in\mathbb{N}$

sao cho $\frac{1}{p}=\frac{m}{k},\frac{1}{q}=\frac{n}{k}$ với $m+n=k$. Sử dụng bất đẳng thức ***AM – GM*** ta có :

$$\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}=\frac{m}{k}\cdot a^{\frac{k}{m}}+\frac{n}{k}\cdot b^{\frac{k}{n}}=\frac{ma^{\frac{k}{m}}+nb^{\frac{k}{n}}}{k}\ge\sqrt[k]{\left(a^{\frac{k}{m}}\right)^m\left(b^{\frac{k}{n}}\right)^n}=\sqrt[k]{a^kb^k}=ab$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a^p=b^q$

• ***Áp dụng:*** Sử dụng bổ đề cho $a=\frac{a_j}{\left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}};b=\frac{b_j}{\left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}}$ với $j=\overline{1,n}$. Ta có

$$\frac{1}{p}\cdot\frac{a_j^p}{\sum_{i=1}^n a_i^p}+\frac{1}{q}\cdot\frac{b_j^p}{\sum_{i=1}^n b_i^q}\ge\frac{a_jb_j}{\left(\sum_{i=1}^n a_j^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}}\Rightarrow\Rightarrow\sum_{j=1}^n\left(\frac{1}{p}\cdot\frac{a_j^p}{\sum_{i=1}^n a_i^p}+\frac{1}{q}\cdot\frac{b_j^q}{\sum_{i=1}^n b_i^q}\right)\ge\sum_{j=1}^n\frac{a_jb_j}{\left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}}$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\ge\frac{\sum_{j=1}^n a_jb_j}{\left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}}\Leftrightarrow\left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}\ge\sum_{i=1}^n a_ib_i$$

2. a. Cho $pq>0$ và $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ Khi đó $p>0,\ q>0$. Ta có bất đẳng thức (1)

$$\Leftrightarrow\sum_{i=1}^n a_ib_i\le\left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}\Leftrightarrow\sum_{k=1}^n\frac{a_k}{\left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}}\cdot\sum_{k=1}^n\frac{b_k}{\left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}}\le 1$$

Sử dụng bất đẳng thức ***AM – GM*** mở rộng ta có:

$$\sum_{k=1}^n\frac{a_k}{\left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}}\cdot\sum_{k=1}^n\frac{b_k}{\left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}}=\sum_{k=1}^n\left(\frac{a_k^p}{\sum_{i=1}^n a_i^p}\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\sum_{k=1}^n\left(\frac{b_k^q}{\sum_{i=1}^n b_i^q}\right)^{\frac{1}{q}}\le$$

$$\le\frac{1}{p}\cdot\sum_{k=1}^n\left(\frac{a_k^p}{\sum_{i=1}^n a_i^p}\right)+\frac{1}{q}\cdot\sum_{k=1}^n\left(\frac{b_k^q}{\sum_{i=1}^n b_i^q}\right)=1$$

b. Vì $pq<0$ nên không mất tính tổng quát, giả sử $p>0,\ q<0$