KỸ THUẬT TRONG BẤT ĐẲNG THỨC BUNYAKOPXKY

# 1. Kỹ thuật “biến đổi thuận”:

Biến đổi biến thức ban đầu về dạng , từ đó đánh giá theo biểu thức 

**Ví dụ 1:** Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng: 

**Giải:**

Ta có thể làm giảm biến số như sau: 

Ta đưa về bài toán cần chứng minh: 

Bất đẳng thức cuối luông đúng. Dấu “=” xảy ra khi 

**Ví dụ 2:** Cho a,b,c là các số thực. Chứng minh rằng: 

**Giải:**

Tương tự ví dụ 1, ta có:



Dấu “=” xảy ra khi .

**Ví dụ 3:** Cho a,b,c,d là các số thực thỏa mãn: . Chứng minh rằng: 

**Giải:**

Ta viết lại bất đẳng thức như sau:



Ta có: 

**Ví dụ 4:** Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng: 

**Giải:**

Ta có:



Cần chứng minh:

Thật vậy: 

**Bài tập vận dụng:**

**Bài toán 1:** Cho x,y,z>1 và . Chứng minh rằng: 

*Gợi ý:* 

**Bài toán 2:** Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng: 

*Gợi ý:* Ta có. Cần chứng minh: . Tiếp tục áp dụng Bunhiacopxki đưa về :

**Bài toán 3:** Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng: 

*Gợi ý:* Chứng minh.

**Bài toán 4:** Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng: 

*Gợi ý:* Chứng minh.

**Bài toán 5:** Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng: 

*Gợi ý:* Chứng minh.

# 2. Kỹ thuật “biến đổi nghịch”:

Biến đổi biến thức ban đầu về dạng , từ đó đánh giá theo biểu thức 

**Ví dụ 1:** Cho a,b,c là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của: 

**Giải:**

Ta có: 

Dấu “=” xảy ra khi 

**Ví dụ 2:** Cho p,q,r,x,y,z, là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của: 

**Giải:**

Đặt 

Ta có: 

Hay 

**Ví dụ 3:** Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh: 

**Giải:**

Ta có: 

Chứng minh tương tự: 

Cộng vế của bất đẳng thức suy ra điều phải chứng minh.

**Bài tập vận dụng:**

**Bài toán 1:** Cho a,b,c là độ dài 3 cạnh một tam giác và x,y,z là các số thực. Chứng minh rằng: 

*Gợi ý:* Đặt . Chứng minh

**Bài toán 2:** Cho x,y,z thỏa mãn . Chứng minh rằng: 

*Gợi ý:* Chứng minh 

**Bài toán 3:** Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn . Chứng minh rằng: 

*Gợi ý:* Chứng minh:. Tương tự với  rồi cộng vế.

**Bài toán 4:** Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng: 

*Gợi ý:* Chứng minh:. Tương tự với  rồi cộng vế.

**Bài toán 5:** Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng: 

*Gợi ý:* Chứng minh:. Tương tự với  rồi cộng vế.

# 3. Kỹ thuật “thêm bớt”:

Sử dụng thêm bớt để đưa về các bài toán có thể chứng minh.

**Ví dụ 1:** Cho x,y,z là các số thực dương thỏa mãn . Chứng minh rằng: 

**Giải:**

Nếu thử sử dụng Bunyakopxky một cách trực tiếp ta thu được:. Đây là một bất đẳng thức ngược chiều. Vậy ta có thể làm như sau:

Viết lại bất đẳng thức dưới dạng 

Ta có: 

Ta cần chứng minh: 

Bất đẳng thức cuối cùng đúng.

**Bài tập vận dụng:**

**Bài toán 1:** Cho x,y,z là các số thực dương thỏa mãn . Chứng minh rằng: 

*Gợi ý:* Viết lại thành: 

**Bài toán 2:** Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn . Chứng minh rằng: 

*Gợi ý:* Viết lại thành: . Chứng minh:

.Sau đó dùng Cauchy chứng minh.

# 4. Kỹ thuật “tham số hóa”:

**Ví dụ 1:** Cho x,y,z là các số thực dương thỏa mãn . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: 

**Giải:**

Nếu áp dụng một cách thông thường ta có: . Dấu “=” xảy ra khi không đạt yêu cầu, ta dự đoán giá trị nhỏ nhất khi  vậy ta làm như sau:



Dấu “=” xảy ra khi . Thay được . Từ đây ta có cách giải:

Áp dụng bất đẳng thức Bunyakopxky ta có:



Tương tự ta có:.

Suy ra 

Dấu “=” xảy ra khi 

**Bài tập vận dụng:**

**Bài toán 1:** Cho x,y,z là các số thực dương thỏa mãn . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức 

*Gợi ý:* Sử dụng: 

**Bài toán 2:** Cho x,y,z là các số thực dương thỏa mãn . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức 

*Gợi ý:* Sử dụng: 

**Bài toán 3:** Cho x,y thỏa mãn . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức 

*Gợi ý:* Giả sử giá trị nhỏ nhất xảy ra tại .

Sử dụng: 

. Ta chọn .

Tương tự với . Cuối cùng cần tìm a,b.