KỸ THUẬT CHỌN ĐIỂM RƠI TRONG

BẤT BẲNG THỨC VÀ CỰC TRỊ

*“Chọn điểm rơi” là một trong những kỹ thuật vô cùng thú vị trong các bài toán bất đẳng thức và cực trị. Kỹ thuật “chọn điểm rơi” giúp dự đoán dấu “=” xảy ra khi nào để từ đó giúp người làm toán giải quyết nhanh gọn và chính xác đối với các bài toán.*

# 1. Ví dụ minh họa

**Ví dụ 1:** Cho a,b > 0. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: 

**Giải:**

Do P đối xứng theo a,b nên ta dự đoán dấu “=” xảy ra khi a = b.

Bây giờ ta cần tìm hệ số m sao cho . Ta có:

.

Dấu “=” xảy ra khi a = b.

**Ví dụ 2:** Cho .Chứng minh rằng: .

**Giải:**

Ta dự đoán dấu “=” xảy ra khi x = y = z = 1.Vì vậy áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho và .

Vậy ta có:

Dấu “=” xảy ra khi x = y = z = 1.

**Ví dụ 3:** Cho 3 số thực dương a,b,c thỏa mãn: . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: .

**Giải:**

Nếu áp dụng Cauchy ngay ta có: .

Dấu “=” xảy ra khi nhưng không thỏa mãn điều kiện đề bài.

Vậy nên để làm bài này ta cần dự đoán điểm rơi trước.Xét thấy:

Kết hợp ta đoán minP đạt khi a=2,b=3,c=4. Ta có:



Dấu “=” xảy ra khi a=2,b=3,c=4.

**Ví dụ 4:** Cho thỏa mãn.Tìm giá trị lớn nhất của: .

**Giải:**

Theo giả thiết ta có: 

Để làm xuất hiệnta dùng Bunhiacopxky như sau:



Dấu “=” của bất đẳng thức xảy ra khi 

**Ví dụ 5:** Cho thỏa mãn.Tìm giá trị nhỏ nhất của:.

**Giải:**

*Phân tích:* Giả sử T đạt giá trị nhỏ nhất tại 

Ta cần tìm sao cho: 

Để dấu “=” xảy ra khi chọn .

Tương tự .

*Lời giải:*

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có:



Từ đây có: 

Chọn a,b sao cho: 

Vậy . Dấu “=” xảy ra khi 

# 2. Bài tập vận dụng

**Bài 1:** Cho 2 số thực x,y. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: 

*Gợi ý:* Vì x,y có vai trò tương đương, vậy ta giả sử giá trị nhỏ nhất của T đạt được khi

x = y = a. Từ đây ta đưa tham sốvào như sau:



Dấu “=” xảy ra khi x = y = a nên từ đó chọn 

Tương tự với biểu thức:  chọn vàchọn .

Áp dụng Bunhiacopxky ta có:







Từ đó .Chọn a sao cho 

Vậy 

**Bài 2:** Cho 2 số thực x,y. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: 

*Gợi ý:* Tương tự **Bài 1** nhưng chọn x = a và y = a-4. Từ đây ta có 

**Bài 3:** Cho 2 số thực x,y thỏa mãn. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: 

*Gợi ý:* Viết lại . Tương tự **ví dụ 5** chọn x,y sao cho . Kết quả 

**Bài 4:** Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức .

**Giải:**

Đoán điểm rơi xảy ra khi . Từ đây ta có lời giải:

Đặt (Có thể nhận thấy ). Khi đó điều kiên trở thành:

. Ta có: 

Ta có 

**Bài 5:** Nếu phương trình có nghiệm, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức .

**Giải:**

Dễ thấy nên ta có: .



Bất đẳng thức cuối tương đương với .