KỸ THUẬT CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC BẰNG PHƯƠNG PHÁP

ĐẶT ẨN PHỤ

**Ví dụ 1:** Cho 3 số dương a, b, c thỏa mãn abc=1. Chứng minh bất đẳng thức sau: 

**Giải:**

Vì a, b, c dương và abc=1 nên tồn tại x, y, z > 0 sao cho:

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwartz ta có:



Suy ra đpcm. Đẳng thức xảy ra khi .

*Nhận xét:* Đây là ví dụ thể hiện việc đặt ẩn phụ trong bất đẳng thức giúp ta có thể dễ dàng chứng minh một bất đẳng thức hơn.

Một số cách đặt ẩn phụ trong bất đẳng thức thường gặp:

**Dạng 1:** a,b,c là các số dương thoả mãn abc=1 khi đó tồn tại x,y,z dương sao cho:

*  hoặc 
* 

**Dạng 2:** a,b,c là các số dương thoả mãn khi đó tồn tại x,y,z dương sao cho: 

Mở rộng ta có: khi đó tồn tại x,y,z sao cho:

**Dạng 3:** a,b,c là các số dương thoả mãn khi đó tồn tại x,y,z dương sao cho:

* 
* 

**Dạng 4:** a,b,c là các số dương thoả mãn khi đó tồn tại x,y,z dương sao cho:

* 
* 

Tùy thuộc vào đặc điểm của bất đẳng thức cần chứng minh mà ta chọn cách đặt cho phù hợp, dễ nhìn để thuận tiện cho việc chứng minh bất đẳng thức mới. Ngoài những cách nêu ở trên ta có thể đặt ẩn phụ theo các cách khác, sau đó sử dụng giả thiết để tìm đẳng thức liên hệ giữa các ẩn mới và chứng minh bất đẳng thức mới.

*Lưu ý:* Có thể một số bài không áp dụng trực tiếp được một trong các cách đặt ẩn phụ kể trên. Ta cần biến đổi quy về giả thiết này. Dưới đây là một số ví dụ minh họa:

**Ví dụ 2:** Cho 3 số dương a, b, c thỏa mãn abc=1. Chứng minh bất đẳng thức sau: 

**Giải:**

Đặt 

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwartz ta có:



Lại có 

Suy ra và . Cộng theo vế ta được (đpcm). Dấu bằng xảy ra khi a=b=c=1.

**Ví dụ 3:** Cho 3 số dương a, b, c thỏa mãn . Chứng minh bất đẳng thức sau: 

**Giải:**

Đặt .Khi đó ta cần chứng minh:



Dễ thấy. Tương tự với vàrồi cộng theo vế suy ra đpcm. Dấu bằng xảy ra khi a=b=c=.

**Ví dụ 4:** Cho 3 số dương a, b, c thỏa mãn . Chứng minh bất đẳng thức sau: 

**Giải:**

Đặt . Theo giả thiết ta có: x+y+z+2=xyz. Do đó:



Đặt . Khi đó m+n+p=1, bất đẳng thức ban đầu tương đương với:



Tới đây ta sử dụng bất đẳng thức suy ra: .Từ đó cộng vế suy ra đpcm. Đẳng thức xảy ra khi 

**Ví dụ 5:** Cho 3 số dương a, b, c thỏa mãn . Chứng minh bất đẳng thức sau: 

**Giải:**

Từ giả thiết suy ra: . Vậy tồn tại 3 số nguyên dương x,y,z với và .Khi đó bất đẳng thức tương đương:



Áp dụng Cauchy (AM-GM) ta có:





Suy ra đpcm. Dấu bằng xảy ra khi a=b=c=1.

**Bài tập tự luyện:**

**Bài 1:** Cho 3 số dương a, b, c thỏa mãn . Chứng minh bất đẳng thức sau: 

*Gợi ý:* Điều kiện tương đương . Đặt 

**Bài 2:** Cho 3 số dương a, b, c thỏa mãn . Chứng minh bất đẳng thức sau: 

*Gợi ý:* Biến đổi bất dẳng thức về dạng .Đặt

**Bài 3:** Cho 3 số dương a, b, c thỏa mãn . Chứng minh bất đẳng thức sau: 

*Gợi ý:* Đặt 

**Bài 4:** Cho 3 số dương x, y, z thỏa mãn . Chứng minh bất đẳng thức sau: 

*Gợi ý:* Đặt 

**Bài 5:** Cho 3 số dương a, b, c thỏa mãn . Chứng minh bất đẳng thức sau: 

*Gợi ý:* Đặt  và xyz=1.