Tổng hợp các dạng nguyên hàm tích phân

BẢNG NGUYÊN HÀM CÁC HÀM CƠ BẢN

$\int oldsymbol{ar{V}} oldsymbol{ar{a}} i = rac{1}{a} \cdot rac{(ax+b)^{lpha+1}}{lpha+1} + C$	Với $lpha = -1: \int rac{1}{ax+b} dx = rac{\ln ax+b }{a} + C$
$\int a^{lpha x + eta} dx = rac{a^{lpha x + eta}}{a \cdot \ln a} + C$	$\int e^{lpha x+eta} dx = rac{e^{lpha x+eta}}{a} + C$
$\int \sin(ax+b)dx = -rac{\cos(ax+b)}{a} + C$	$\int \cos(ax+b)dx = rac{\sin(ax+b)}{a} + C$
$\int rac{1}{\cos^2(ax+b)} dx = rac{ an(ax+b)}{a} + C$	$\int rac{1}{\sin^2(ax+b)} dx = - rac{\cot(ax+b)}{a} + C$

TÓM TẮT CÁC DẠNG TÍCH PHÂN CƠ BẢN

1. Tích phân phân thức

+ Bậc $f\left(x ight)\geq$ bậc $g\left(x ight)$: Chia f cho g	
	$rac{f(x)}{g(x)} = ext{thwong} + rac{ ext{dw}}{g(x)}$
	+ Bậc $f(x)<$ bậc $g(x)$: • Nếu $f(x)=k$. $g'(x)$: Đặt $g(x)=t\Rightarrow dt=g'(x)dx=f(x)dx$ • Phân tích $g(x)$ thành nhân tử
h	$g(x)=(ext{nhân tử 1})(ext{nhân tử 2})\dots$
$\int_{a}^{b} \frac{f(x)}{g(x)} dx$	$rac{f(x)}{g(x)} = rac{a}{ ext{nhân tử 1}} + rac{b}{ ext{nhân tử 2}} + \ldots$
	+ Với mẫu là bậc 2 vô nghiệm:
	$\int\limits_a^b rac{cx+d}{ax^2+bx+c}dx = \int\limits_a^b rac{cX+d}{X^2+a^2}dX$
	(đặt $X=a an t$)

$$\int\limits_{a}^{b} rac{x^2\pm 1}{ax^4+bx^2+a}dx$$

+ Chia cảtử và mẫu cho
$$x^2$$
, sau đó biến đổi mẫu $x^2+rac{1}{x^2}=\left(x\mprac{1}{x}
ight)^2\pm 2$

$$\int\limits_a^b rac{1\pmrac{1}{x^2}}{aig(x\mprac{1}{x}ig)^2\pm 2a+b}dx$$

Đặt
$$t=x\pmrac{1}{x}\Rightarrow dt=\left(1\mprac{1}{x^2}
ight)dx$$

2. Tích phân chứa căn (khử căn)

+ Nếu
$$u\left(x\right)=ax+b$$
: Đặt $\sqrt{u\left(x\right)}=t$

- + Nếu có sẵn (hoặc làm xuất hiện) u'(x) dx
 - Đặt: $\sqrt{(u(x))}=t
 ightarrow t^2=u(x)
 ightarrow 2tdt=u'(x)dx$

+ Nếu mẫu thức chứa căn với tổng, hiệu: Nhân liên hợp

• Còn lại biểu diễn theo

$$\frac{1}{\sqrt{u(x)}}$$

$$\left| \int\limits_{0}^{b} f\left(x,\sqrt{u\left(x
ight)}
ight) dx
ight| = rac{1}{\sqrt{u\left(x
ight)} \pm v\left(x
ight)} = rac{\sqrt{u\left(x
ight)} \mp v\left(x
ight)}{u\left(x
ight) - v^{2}\left(x
ight)}$$

+ Nếu không đặt được $\sqrt{u\left(x
ight)}$ làm ẩn phụ $\Rightarrow\,$ lượng giác hóa

$\sqrt{a^2-x^2}$	Đặt $x=a.\cos t$ hoặc $a\sin t$
$\sqrt{x^2-a^2}$	Đặt $x=rac{a}{\sin t}$ hoặc $rac{a}{\cos t}$
$\sqrt{a^2+x^2}$	Đặt $x=a an t$

$\overline{$ 3. Tích phân chứa $e^x,\;e^{u(x)}$

Dạng chứa toàn e^x

$$\int\limits_{a}^{b}f\left(e^{x}
ight) dx$$

Đặt
$$e^x=t\Rightarrow x=\ln t\Rightarrow dx=rac{1}{t}dt$$

Chứa hàm hợp trên mũ

$$\int\limits_{a}^{b}f\left(e^{u\left(x
ight) }\right) u^{\prime}\left(x
ight) dx$$

$$ig|$$
 Đặt $u\left(x
ight) =t
ightarrow \ dt=u^{\prime }\left(x
ight) dx$

với $u\left(x\right)$ là một hàm, sẽ có $u'\left(x\right)dx$ ở phần còn lại.

4. Tích phân chứa \ln

Toàn $\ln x$, còn lại là $\frac{1}{x}dx$ $\int\limits_a^b f(\ln x)\frac{1}{x}dx$	Đặt $\ln x = t o dt = rac{1}{x} dx$
Không đặt được $\ln u\left(x ight)$ làm ẩn phụ	Từng phần
$\int\limits_{a}^{b}p\left(x\right) \ln u\left(x\right) dx$	$\left\{egin{aligned} u = \ln u\left(x ight) ightarrow du = rac{u'\left(x ight)}{u\left(x ight)}dx \ dv = p\left(x ight)dx ightarrow v = \int p\left(x ight)dx \end{aligned} ight.$

5. Tích phân chứa hàm số lượng giác

Toàn $\sin x$ thừa lại $\cos x dx$ $\int\limits_a^b f(\sin x)\cos x dx$	Đặt $t=\sin x o dt=\cos x dx$
Toàn $\cos x$ thừa lại $\sin x dx$ $\int\limits_a^b f(\cos x) \sin x dx$	Đặt $t=\cos x o dt=-\sin x dx$
Toàn $\tan x$ $\int\limits_a^b f(\tan x)dx$	Đặt $t= an x o dt=\left(1+ an^2 x ight)dx$ $ o dx=rac{1}{1+t^2}dt$
Toàn $ an x$ thừa $rac{1}{\cos^2 x} dx$ $\int\limits_a^b f(an x) rac{1}{\cos^2 x} dx$	Đặt $t= an x o dt=rac{1}{\cos^2\!x}dx$

Tổng hợp các dạng nguyên hàm tích phần - eStudy	
Toàn $\cot x$ thừa $\frac{1}{\sin^2 x} dx$ $\int\limits_a^b f(\cot x) \frac{1}{\sin^2 x} dx$	Đặt $t=\cot x o dt=rac{-1}{\sin^2\!x}dx$
Toàn tổng $\sin x + \cos x$, thừa hiệu $\int\limits_a^b f\left(\sin x + \cos x ight) \left(\sin x - \cos x ight) dx$	Đặt $t = \sin x + \cos x = t o dt = (\cos x - \sin x)dt$
Toàn hiệu $\sin x - \cos x$, thừa tổng $\int\limits_a^b f\left(\sin x - \cos x ight)\left(\sin x + \cos x ight) dx$	Đặt $t = \sin x - \cos x = t o dt = (\cos x + \sin x)dt$
Bậc 2 trên bậc 2 đối với sin, cos $\int_a^b \frac{a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x}{a' \sin^2 x + b' \sin x \cos x + c' \cos^2 x} dx$	Chia tử và mẫu cho $\cos^2 x$ để đưa về $\tan x$
Bậc 0 trên bậc 2 $\int\limits_a^b rac{a}{a'{\sin}^3 x + b' \sin x \cos x + c' {\cos}^2 x} dx$	Thay $a=a\left(\sin^2\!x+\cos^2\!x ight)$ đưa về bậc 2 trên bậc 2
Bậc 1 trên bậc 3 tách được $\cos^2 x$ hoặc $\sin^2 x$ ở mẫu: $\int\limits_a^b \frac{a \sin x + b \cos x}{(a' \sin x + b' \cos x) \cos^2 x} dx$	Tách riêng $rac{1}{\cos^2 x} dx$. Còn lại chia cả tử và mẫu cho $\cos x$ để đưa về $ an x$.

Bậc 1 trên bậc 2 dạng

$$\int_{a}^{b} \frac{a\sin x + b\cos x}{a'\sin^2 x + b'\cos^2 x} dx$$

Tách thành 2 tích phân rồi đưa về dạng toàn cosx thừa sinxdx và toàn sinx thừa cosxdx.

Bậc 1 trên bậc 1

$$\int_{a}^{b} \frac{a\sin x + b\cos x}{a'\sin x + b'\cos x} dx$$

Tách

$$\mathrm{T}\mathring{\mathrm{u}} = \alpha \mathrm{M}\mathbf{\tilde{a}}\mathrm{u} + \beta (\mathrm{M}\mathbf{\tilde{a}}\mathrm{u})'$$

Lũy thừa của $\sin x$ hoặc $\cos x$

$$\int\limits_a^b \sin^n x dx; \ \int\limits_a^b \cos^n x dx$$

+ n chẵn: Ha bậc

+ n lẻ: $\sin^n x = \sin^{2k} x$. $\sin x dx = \left(1 - \cos^2 x\right)^k$. $\sin x dx$

Lũy thừa dưới mẫu của $\sin x$ hoặc $\cos x$

$$\int_{a}^{b} \frac{1}{\sin^{n} x} dx; \int_{a}^{b} \frac{1}{\cos^{n} x} dx$$

+ n chẵn:

$$rac{1}{\sin^n x}dx=rac{1}{\sin^2 \! x}.\,rac{1}{\sin^2 \! x}dx=\left(1+\cot^2 x
ight)^k.rac{1}{\sin^2 \! x}dx$$

$$rac{1}{\cos^n x}dx=rac{1}{\cos^{2k} x}.\,rac{1}{\cos^2 x}dx=\left(1+ an^2 x
ight)^k.\,rac{1}{\cos^2 x}dx$$

 $oldsymbol{+} n$ lẻ: nhân cả tử và mẫu với sinx hoặc cosx

 $+n\geq 2$: Giảm dần bậc theo tích phân

Lũy thừa của $\tan x$

$$\int_{a}^{b} \tan^{n} x dx + n = 1:$$

$$\int an^n x = an^{n-2} x . an^2 x = an^{n-2} x \left(1 + an^2 x - 1
ight) = an^{n-2} x . rac{1}{\cos^2 x} - an^{n-2} x$$

$$\int an x dx = -\ln |\cos x|$$

6. Tích phân từng phần

$\int\limits_{a}^{b}e^{x}.p\left(x ight) dx$	$\left\{egin{aligned} u=p\left(x ight) ightarrow du=p'\left(x ight)dx\ dv=e^{x}dx ightarrow v=e^{x} \end{aligned} ight.$
$\int\limits_{a}^{b}\mathrm{p}\left(\mathrm{x} ight) .\sin kxdx$	$\left\{ egin{aligned} u = p\left(x ight) ightarrow du = p'\left(x ight) dx \ dv = \sin kx dx ightarrow v = -rac{\cos kx}{k} \end{aligned} ight.$
$\int_{a}^{b} p(x) \ln u(x) dx$	$\left\{egin{aligned} u = \ln u\left(x ight) ightarrow du = rac{u'\left(x ight)}{u\left(x ight)}dx \ dv = p\left(x ight)dx ightarrow v = \int p\left(x ight)dx \end{aligned} ight.$
	Tưng phần 2 lần, được phương trình ẩn I :
	$I=\sin x.\left e^{x} ight -\int e^{x}\cos xdx$
$I=\int\limits_a^b e^x\sin xdx$	$=\sin x.e^x -\left(\cos x.e^x +\int e^x\sin xdx ight)$
	$=\left(\sin x-\cos x ight)e^{x} -I$
	$ ightarrow 2I = (\sin x - \cos x)e^x$
	$I ightarrow I = rac{1}{2}(\sin x - \cos x)e^x$

7. Tích phân chứa dấu giá trị tuyệt đối

$$\int\limits_{a}^{b} |f\left(x
ight)| dx = \left|\int\limits_{a}^{x_{1}} f\left(x
ight) dx
ight| + \left|\int\limits_{x_{1}}^{x_{2}} f\left(x
ight) dx
ight| + \ldots + \left|\int\limits_{x_{n}}^{b} f\left(x
ight) dx
ight|$$

Với $x_1,x_2,\ldots,x_n\in(a;b)$ là các nghiệm thuộc (a;b) của phương trình $f\left(x
ight)=0$

8. Công thức diện tích, thể tích qua tích phân

Hình phẳng giới hạn bởi

$$\begin{cases} y=f(x) \\ y=g(x) \\ x=a \\ x=b \end{cases} \text{hoặc} \begin{cases} x=f(y) \\ x=g(y) \\ y=a \\ y=b \end{cases}$$
 Chú ý: Nếu khuyết cận, giải $f(x)=g(x)$

Có diên tích

$$S=\int\limits_{a}^{b}\lvert f\left(x
ight) -g\left(x
ight) \lvert dx$$

$$S=\int\limits_{a}^{b}\lvert f\left(y
ight) -g\left(y
ight)
vert dy$$

Hình phẳng giớ hạn bởi

$$\left\{egin{array}{ll} y=f\left(x
ight) & y=0 & & ext{ho}\ x=a & & x=b & & \ & & & & \ & & & & \ & & & & \ & & & & \ & & & \ & & & & \ & & & \ & & & \ & & & \ & & & \ & & & \ & & & \ & & \ & & & \ & & \ & & \ & & \ & & \ & & \ & & \ & \ & & \ & & \ &$$

Có thể tích

$$V=\pi\int\limits_{a}^{b}f^{2}\left(x
ight) dx$$

$$V=\pi\int\limits_{a}^{b}f^{2}\left(y
ight) dy$$

9. Tích phân đặc biệt

Xoay quanh Ox hoặc Oy

$$f(x) \quad \text{là hàm lẻ, nghĩa là} \qquad \qquad \int\limits_{-a}^{a} f(x) \, dx = 0$$
 Với hàm $f(x)$ bất kỳ
$$I = \int\limits_{a}^{b} f(x) \, dx = \int\limits_{a}^{b} f(a+b-x) \, dx$$

$$f(x) \quad \text{là hàm chẵn, nghĩa là} \qquad \qquad \int\limits_{a}^{a} \frac{f(x)}{a^x+1} dx = \int\limits_{a}^{a} f(x) \, dx$$

f(-x) = f(x)

$$\int_a^b \frac{\mathrm{T}\mathring{\mathrm{u}}}{\mathrm{M}\tilde{\mathrm{a}}\mathrm{u}} dx$$

$$egin{aligned} \mathrm{T}\mathring{\mathrm{u}} &= lpha(x)\mathrm{M} ilde{\mathrm{a}}\mathrm{u} + eta(\mathrm{M} ilde{\mathrm{a}}\mathrm{u})' \ &\int_a^b rac{\mathrm{T}\mathring{\mathrm{u}}}{\mathrm{M} ilde{\mathrm{a}}\mathrm{u}} dx = \int_a^b \left(lpha(x) + etarac{(\mathrm{M} ilde{\mathrm{a}}\mathrm{u})'}{\mathrm{M} ilde{\mathrm{a}}\mathrm{u}}
ight) \ &= \int_a^b lpha(x) dx + eta \ln |\mathrm{M} ilde{\mathrm{a}}\mathrm{u}| \end{aligned}$$

11