Bài đọc thêm 2: Ứng dụng phương pháp tọa độ hóa trong giải toán hình học không gian

I. MỘT SỐ CÔNG THỨC QUAN TRỌNG

Giới thiệu về phương pháp

Phương pháp này giúp chúng ta giải quyết nhiều bài toán khó của hình học không gian cổ điển, đặc biệt là các bài toán tính góc, khoảng cách,... Cơ sở của phương pháp là chuyển bài toán từ hình học không gian về hình học giải tích, bằng việc ứng dụng các lý thuyết, tính chất trong hệ trục tọa độ Oxyz.

Công thức tính diện tích đa giác và thể tích đa diện

1. Diện tích tam giác ABC: $\boxed{S=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|}$.

2. Diện tích hình bình hành $ABCD$: $\boxed{S=\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right]\right|}$

3. Thể tích khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$: $\boxed{V=\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right].\overrightarrow{AA'}\right|}$.

4. Thể tích khối tứ diện $ABCD$: $\boxed{V=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}\right|}$.

Công thức tính góc giữa các yếu tố hình học: điểm, đường thẳng, mặt phẳng

1. ***Góc giữa hai mặt phẳng:*** Mặt phẳng (α) có VTPT là $\overrightarrow{n_\alpha}$, mặt phẳng (β) có VTPT là $\overrightarrow{n_\beta}$ thì góc giữa hai mặt phẳng $(\alpha),(\beta)$ được tính bằng

$$\boxed{\cos\left((\alpha),(\beta)\right)=\left|\cos\left(\overrightarrow{n_\alpha},\overrightarrow{n_\beta}\right)\right|=\frac{\left|\overrightarrow{n_\alpha}.\overrightarrow{n_\beta}\right|}{\left|\overrightarrow{n_\alpha}\right|.\left|\overrightarrow{n_\beta}\right|}}$$

2. ***Góc giữa hai đường thẳng:*** Đường thẳng Δ_1 có VTCP là $\overrightarrow{u_1}$, đường thẳng Δ_2 có VTCP là $\overrightarrow{u_2}$ thì góc giữa hai đường thẳng Δ_1,Δ_2 được tính bằng

$$\boxed{\cos\left(\Delta_1,\Delta_2\right)=\left|\cos\left(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right)\right|=\frac{\left|\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2}\right|}{\left|\overrightarrow{u_1}\right|.\left|\overrightarrow{u_2}\right|}}\rightarrow\boxed{\cos\left(AB,CD\right)=\left|\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right)\right|=\frac{\left|\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{CD}\right|}}$$

3. ***Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng:*** Đường thẳng Δ có VTCP $\vec{u}$, mặt phẳng (α) có VTPT $\vec{n}$ thì góc φ giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (α) là

$$\boxed{\sin\varphi=\left|\cos\left(\vec{u},\vec{n}\right)\right|=\frac{\left|\vec{u}.\vec{n}\right|}{\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{n}\right|}}\rightarrow\boxed{\sin\left(AB,(\alpha)\right)=\left|\cos\left(\overrightarrow{AB},\vec{n}\right)\right|=\frac{\left|\overrightarrow{AB}.\vec{n}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\vec{n}\right|}}$$

Lưu ý

* Khoảng cách giữa hai mặt phẳng (α) và (β) song song nhau là khoảng cách từ điểm $M\in(\alpha)$ tới (β).

* Khoảng cách giữa hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 song song nhau là khoảng cách từ điểm $M\in\Delta_1$ tới Δ_2.

* Khoảng cách giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (α) song song nhau là khoảng cách từ điểm $M\in\Delta$ tới (α).

Công thức tính khoảng cách giữa các yếu tố hình học

1. Khoảng cách từ điểm $M\left(x_0;y_0;z_0\right)$ đến mặt phẳng $(\alpha): ax+by+cz+d=0$ là:

$$\boxed{d\left(M,(\alpha)\right)=\frac{\left|ax_0+by_0+cz_0+d\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}.$$

2. Khoảng cách từ điểm M tới đường thẳng Δ đi qua M_0 và có VTCP $\vec{u}$ là

$$\boxed{d\left(M,\Delta\right)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{MM_0},\vec{u}\right]\right|}{\left|\vec{u}\right|}}\rightarrow\boxed{d\left(M,AB\right)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}}.$$

3. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau Δ_1 và Δ_2; biết Δ_1 đi qua M_1 và có VTCP $\overrightarrow{u_1}$, Δ_2 đi qua M_2 và có VTCP $\overrightarrow{u_2}$

$$\boxed{d\left(\Delta_1,\Delta_2\right)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right].\overrightarrow{M_1M_2}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right]\right|}}\rightarrow\boxed{d\left(AB,CD\right)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right].\overrightarrow{BD}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right]\right|}}.$$

Tìm tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp một khối chóp

Lưu ý

Nếu đáy của khối chóp là ΔABC thì tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác được xác định nhanh như sau:

$$\begin{cases} x_I = \dfrac{m.x_A + n.x_B + p.x_C}{m+n+p} \\ y_I = \dfrac{m.y_A + n.y_B + p.y_C}{m+n+p} \\ z_I = \dfrac{m.z_A + n.z_B + p.z_C}{m+n+p} \end{cases}$$

Trong đó:

$$\begin{cases} m = a^2\left(b^2+c^2-a^2\right) \\ n = b^2\left(c^2+a^2-b^2\right) \\ p = c^2\left(a^2+b^2-c^2\right) \end{cases}$$

$(BC = a, AC = b, AB = c)$.

Cách 1:

* Viết phương trình đường thẳng d đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp mặt đáy và vuông góc với mặt đáy.

* Gọi I là tâm mặt cầu nên I thuộc d. Tham số hóa tọa độ điểm I (1 ẩn).

* Sử dụng tính chất cách đều của tâm I đến các đỉnh (chỉ cần chọn một điểm mặt đáy và đỉnh). Thiết lập phương trình tìm ẩn. Ta tìm được tọa độ tâm I. Từ đó suy ra bán kính.

Cách 2: (Nếu biết trước tọa độ các đỉnh của hình chóp)

Giả sử phương trình mặt cầu có dạng $(S): x^2+y^2+z^2+2ax+2by+2cz+d=0$.

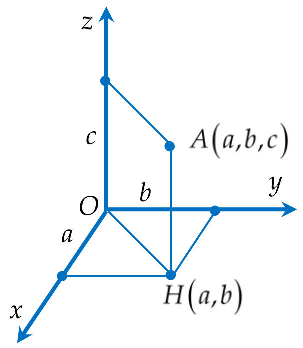
Dựa vào tính chất tâm I cách đều các đỉnh, ta thiết lập được hệ phương trình gồm bốn ẩn a,b,c,d (tọa độ các đỉnh thỏa mãn phương trình mặt cầu). Giải hệ tìm a,b,c,d.

Khi đó mặt cầu (S) có tâm $I(-a;-b;-c)$ và bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$.

Xác định tọa độ của một điểm trong mặt phẳng tọa độ *Oxyz*

Để tìm tọa độ của A, đầu tiên ta tìm tọa độ hình chiếu H của A trên một mặt phẳng tọa độ bất kì, sau đó tính độ dài AH. Tọa độ điểm A trong không gian $Oxyz$ được xác định bởi tọa độ điểm H và độ dài đoạn AH.

Cụ thể, tọa độ hình chiếu vuông góc của A trên mặt phẳng (Oxy) là điểm $H(a;b)$, ta tính được $AH=c$ thì khi đó tọa độ của A là $A(a;b;c)$ (xem hình vẽ minh họa bên dưới).



II. PHƯƠNG PHÁP GẮN HỆ TRỤC TỌA ĐỘ VÀO CÁC HÌNH ĐA DIỆN CÓ MÔ HÌNH TAM DIỆN VUÔNG

Tam diện vuông

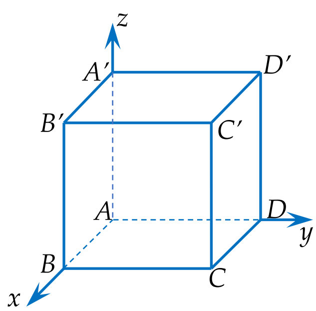
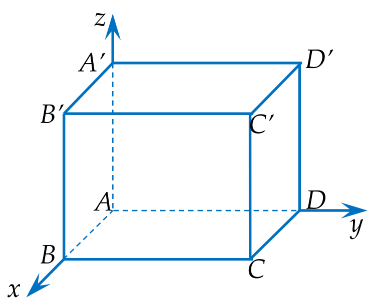
Một hình đa diện có mô hình tam diện vuông có nghĩa là hình đó tồn tại ba cạnh đôi một vuông góc với nhau. Giao điểm của ba cạnh này được gọi là đỉnh của tam diện vuông.

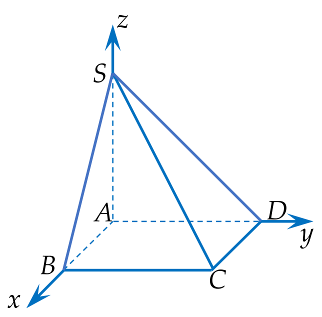
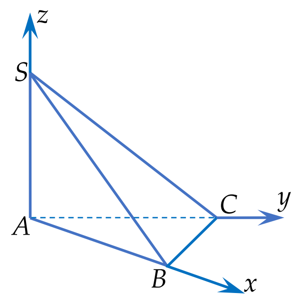
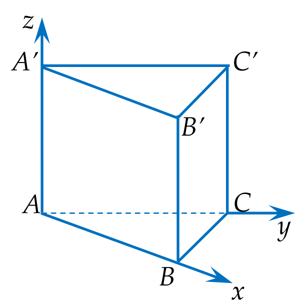
* **Bước 1:** Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho tâm O trùng với đỉnh của tam diện vuông.

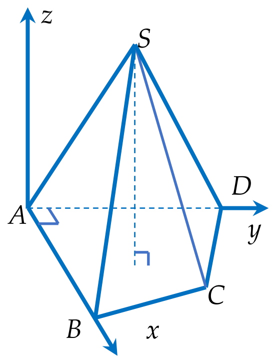
* **Bước 2:** Xác định tọa độ các đỉnh liên quan từ dữ kiện đề bài.

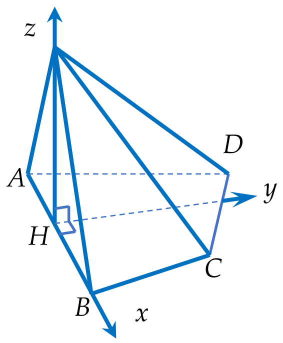
* **Bước 3:** Sử dụng các công thức, tính chất trong tọa độ $Oxyz$ để giải quyết bài toán.

Một số hình đa diện có mô hình tam diện vuông thường gặp:

<table>
<tr><th>Giả thiết và chọn hệ trục Oxyz tương ứng</th><th>Hình vẽ</th></tr>
<tr><td>1. Hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có các cạnh đều bằng a.
Chọn hệ trục tọa độ sao cho:
$A(0;0;0),B(a;0;0),C(a;a;0),D(0;a;0)$,
$A'(0;0;a),B'(a;0;a),C'(a;a;a),D'(0;a;a)$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>2. Hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có các cạnh $AB=a, AD=b$ và $AA'=c$.
Chọn hệ trục tọa độ sao cho:
$A(0;0;0),B(a;0;0),C(a;b;0),D(0;b;0)$,
$A'(0;0;c),B'(a;0;c),C'(a;b;c),D'(0;b;c)$</td><td>
</td></tr>
</table>

3. Hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông (hoặc hình chữ nhật), $SA \perp (ABCD)$ Chọn hệ trục tọa độ sao cho: * Gốc tọa độ là $A \equiv O(0;0;0)$. * Các điểm B, D, S lần lượt nằm trên các tia Ox, Oy và Oz.	
4. Hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $SA \perp (ABC)$. Chọn hệ trục tọa độ sao cho: * Gốc tọa độ là $A \equiv O(0;0;0)$. * Các điểm B, C, S lần lượt nằm trên các tia Ox, Oy và Oz.	
5. Hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A. Chọn hệ trục tọa độ sao cho: * Gốc tọa độ $A \equiv O(0;0;0)$. * Các điểm B, C, A' lần lượt nằm trên các tia Ox, Oy và Oz.	





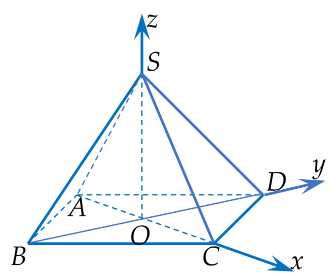
III. PHƯƠNG PHÁP GẮN HỆ TRỤC TỌA ĐỘ VÀO CÁC HÌNH ĐA DIỆN TẠO THÊM MÔ HÌNH TAM DIỆN VUÔNG

III.1. Định hướng chọn hệ trục tọa độ đối với các hình chóp, hình lăng trụ:

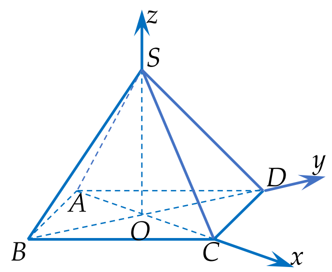
Định hướng 1: Vẽ hình theo yêu cầu, giả thiết bài toán. Trong mặt đáy, tìm mối quan hệ vuông góc, khi đó điểm có yếu tố vuông góc ở mặt đáy chính là điểm ta chọn làm gốc tọa độ O, đồng thời hai đường thẳng tương ứng vuông góc tại điểm đó được chọn làm hai trục tọa độ Ox và Oy. Từ O dựng tia vuông góc với mặt đáy (thẳng đứng) ta được trục Oz.

Định hướng 2: Từ chân hình chiếu của đỉnh của hình chóp ta chọn làm gốc tọa độ, đồng thời đường cao này ta chọn làm trục Oz. Trong mặt đáy, tại O tạo ra hai đường thẳng vuông góc thích hợp, và hai đường này tương ứng chọn làm Ox và Oy.

III.2. Một số hình đa diện tạo thêm mô hình tam diện vuông thường gặp:

Giả thiết và chọn hệ trục $Oxyz$ tương ứng	Hình vẽ
1. Hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh bằng a, đường cao $SO = h$ với $O = AC \cap BD$. Chọn hệ trục tọa độ sao cho: $O(0;0;0), A\left(-\frac{a\sqrt{2}}{2};0;0\right), B\left(0;-\frac{a\sqrt{2}}{2};0\right),$ $C\left(\frac{a\sqrt{2}}{2};0;0\right), D\left(0;\frac{a\sqrt{2}}{2};0\right), S(0;0;h)$.	

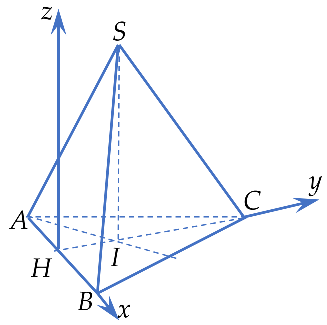
2. Hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, $SO = h$ với $SO \perp (ABCD)$ và $O = AC \cap BD$.
Chọn hệ trục tọa độ sao cho:
* Gốc tọa độ là $O = AC \cap BD$.
* Điểm C thuộc tia Ox, điểm D thuộc tia Oy, điểm S thuộc tia Oz.



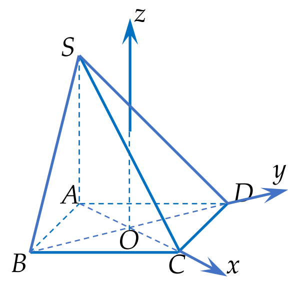
3. Hình chóp tam giác đều $S.ABC$ với đáy là ΔABC đều cạnh a, đường cao $SI = h$ với I là tâm của ΔABC.
Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ:

$H \equiv O(0;0;0), A\left(-\frac{a}{2};0;0\right), B\left(\frac{a}{2};0;0\right),$

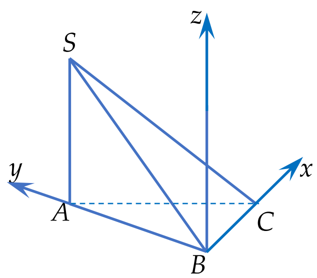
$C\left(0;\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right), S\left(0;\frac{a\sqrt{3}}{6};h\right).$



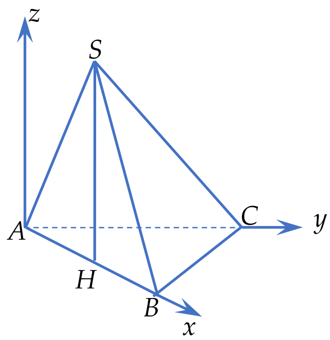
4. Hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a. $SA \perp (ABCD)$ và $SA = h$.
Gọi $O = AC \cap BD \to AC \perp BD$ tại O.
Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ sao cho $O(0;0;0)$
* $Oz // SA \to Oz \perp (ABCD)$.
* Hai điểm C, D lần lượt nằm trên hai tia Ox và Oy.



5. Hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ và ΔABC vuông tại B.
Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ sao cho:
* $B \equiv O(0;0;0)$ và $Bz // SA \to Bz \perp (ABC)$.
* Hai điểm C, A lần lượt nằm trên các tia Bx và By.



6. Hình chóp $S.ABC$ có mặt bên (SAB) là tam giác đều (hoặc cân tại S), $(SAB) \perp (ABC)$ và đáy ABC là tam giác vuông tại A.
Gọi H là trung điểm $AB \to SH \perp (ABC)$.
Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ:
* $A \equiv O(0;0;0)$ và $Az // SH$.
* Các điểm B, C lần lượt nằm trên hai tia Ax và Ay.



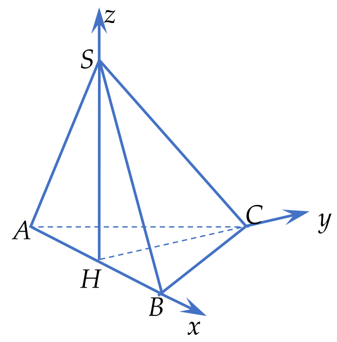
7. Hình chóp $S.ABC$ có chiều cao h, mặt bên (SAB) là tam giác đều (hoặc cân tại S), $(SAB)\perp(ABC)$ và đáy ABC là tam giác vuông tại cân tại C, $CA=CB=a$

Gọi H là trung điểm $AB \to SH\perp(ABC)$.

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ:

$H\equiv O(0;0;0), A\left(-\frac{a\sqrt{2}}{2};0;0\right),$

$B\left(\frac{a\sqrt{2}}{2};0;0\right), C\left(0;\frac{a\sqrt{2}}{2};0\right), S(0;0;h)$.



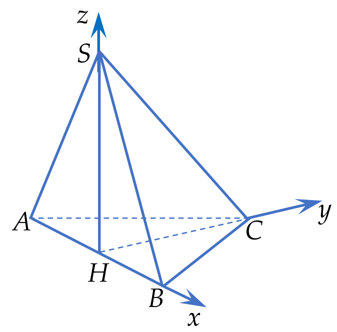
8. Hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều (hoặc cân tại C). Biết $(SAB)\perp(ABCD)$ và ΔSAB đều (hoặc cân tại S).

Gọi H là trung điểm $AB \to CH\perp AB$ và $SH\perp(ABC)$.

Chọn hệ trục tọa độ sao cho:

* Gốc tọa độ là $H\equiv O(0;0;0)$.

* Các điểm B, C, H lần lượt nằm trên các tia Ox, Oy và Oz.



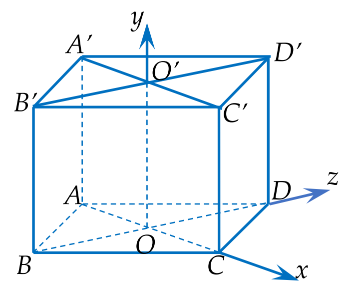
9. Hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi.

Chọn hệ trục tọa độ sao cho:

* Gốc tọa độ O trùng với giao điểm của hai đường chéo AC và BD $(O=AC\cap BD)$.

* Điểm C thuộc tia Ox, điểm D thuộc tia Oy.

* Trục Oz đi qua hai tâm của hai đáy.

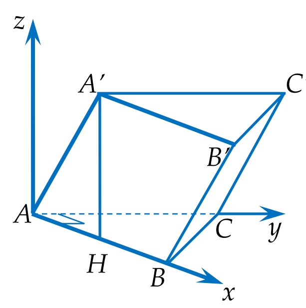


10. Hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều (hoặc vuông cân tại C, hoặc cân tại C). Hình chiếu vuông góc H của điểm A' trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của AB.

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho:

* Gốc tọa độ $O(0;0;0)\equiv H$.

* Các điểm B, C, H lần lượt thuộc các tia Ox, Oy và Oz.



11. Hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông tại A. Hình chiếu vuông góc H của điểm A' trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của AB.

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho:

* Gốc tọa độ $O(0;0;0)\equiv A$.

* B thuộc tia Ox, C thuộc tia Oy, tia Oz thẳng đứng.