TÍCH PHÂN CƠ BẢN

Kiến thức cơ bản cần nhớ:

Cho hai hàm số $F(x)$, $f(x)$ xác định trong khoảng (a,b). $F(x)$ được gọi là một nguyên hàm của $f(x)$ nếu $F'(x) = f(x), \forall x \in (a,b)$.

Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trong khoảng (a,b) thì $f(x)$ sẽ có vô số nguyên hàm trong khoảng (a,b). Các nguyên hàm này có dạng $F(x)+c$ (c là hằng số).

Người ta thường ký hiệu $\int f(x)dx$ là tập hợp các nguyên hàm của $f(x)$: $\int f(x)dx = F(x) + c$

Các nguyên hàm cơ bản:

$(1)\int 0dx = c$

$(2)\int dx = x + c$

$(3)\int \frac{dx}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + c$

$(4)\int \frac{dx}{x^2} = \frac{-1}{x} + c$

$(5)\int \frac{dx}{(ax+b)^2} = \frac{-1}{a(ax+b)} + c$

$(6)\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad (n \neq -1)$

$(7)\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$

$(8)\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + c$

$(9)\int e^x dx = e^x + c$

$(9')\int e^{ax+b}dx = \frac{1}{a}e^{ax+b} + c \ (a \neq 0)$

$(10)\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$

$(11)\int \sin x dx = -\cos x + c$

$(11')\int \sin(ax+b)dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + c$

$(12)\int \cos x dx = \sin x + c$

$(12')\int \cos(ax+b)dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + c$

$(13)\int tgx dx = -\ln|\cos x| + c$ $(14)\int \cot gx dx = \ln|\sin x| + c$

$(15)\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + c$ $(16)\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot gx + c$

$(17)\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + c$ $(17')\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c$

$(18)\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+k}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2+k}\right| + c$

$$(19)\int \sqrt{x^2+1}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+1} + \frac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right| + c$$

$$(19')\int \sqrt{x^2+k}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+k} + \frac{k}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+k}\right| + c$$

Áp dụng công thức tổng quát: $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$

$$\int (ax+b)^\alpha dx = \frac{1}{a}.\frac{(ax+b)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$$

Nếu F(x) = $\int f(x)dx$ là nguyên hàm, thì tích phân của $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$ ở

Câu toán này ta không còn chú ý đến hằng số C nữa.

Dưới đây là một ví dụ tìm nguyên hàm và tích phân để các em biết rằng vấn đề tính tích phân và tìm nguyên hàm nó có gì khác nhau.

Câu 1: Tìm họ nguyên hàm: $F(x) = \int \left(x^3 + 3x + 1\right)dx$

Giải:

$$F(x) = \int \left(x^3+3x+1\right)dx = \int x^3dx + 3\int xdx + \int dx = \frac{x^4}{4} + \frac{3x^2}{2} + x + C$$

Câu 2: Tính tích phân: $\int_{-1}^{2}\left(x^3+3x+1\right)dx$

Giải:

$$\int_{-1}^{2}\left(x^3+3x+1\right)dx = \int_{-1}^{2} x^3dx + 3\int_{-1}^{2} xdx + \int_{-1}^{2} dx = \left(\frac{x^4}{4} + \frac{3x^2}{2} + x\right)\Bigg|_{-1}^{2}$$

$$= \left(\frac{2^4}{4} + \frac{3.2^2}{2} + 2\right) - \left(\frac{(-1)^4}{4} + \frac{3(-1)^2}{2} + (-1)\right) = \frac{45}{4}$$

Bình luận : Câu toán này là tính tích phân ,việc tính tích phân thực chất ra là có 2 bước:

Bước 1: Tìm nguyên hàm F(x), không quan tâm đến con số trên dấu tích phân (cận tích phân)

Bước 2: Sau khi tìm ra F(x) là nguyên hàm rồi ta áp dụng công thức sau:

Nếu F(x) = $\int f(x)dx$ là nguyên hàm, thì tích phân của $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_b^a = F(a) - F(b)$ ở

Bài toán này ta không còn chú ý đến hằng số C nữa. (Vấn đề nữa ta cần nhớ là trên đoạn [a;b] thì f(x) liên tục) ở Câu trên ta có: $F(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{3x^2}{2} + x$, *(khi tính tích phân ta bỏ C),* $F(2) = \frac{2^4}{4} + \frac{3.2^2}{2} + 2$, $F(-1) = \frac{(-1)^4}{4} + \frac{3(-1)^2}{2} + (-1)$, $\int_{-1}^{2} f(x)dx = F(x)\Big|_{-1}^{2} = F(2) - F(-1)$

Câu 3: Tìm họ nguyên hàm: $\int (x+2)\left(x^2-2x+4\right)dx$

Giải:

$$f(x)=(x+2)(x^2-2x+4)=x^3-8$$

$$\int f(x)dx=\int(x^3-8)dx=\int x^3dx-8\int dx=\frac{x^4}{4}-8x+C$$

Kinh nghiệm: Khi có tích các đa thức , việc thường làm là ta nhân bung hết ra để thành các đa thức riêng biệt . Câu toán không có tích đa thức sẽ giải dễ hơn rất nhiều

Câu 4: Tính nguyên hàm $\int\left(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)dx$

Giải:

$$f(x)=\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}=x^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{1}{2}}\,(x>0)$$

$$\int f(x)dx=\int\left(x^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{-1}{2}}\right)dx=\int x^{\frac{1}{3}}dx+\int x^{-\frac{1}{2}}dx=\frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1}+\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}+C\;=\frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4}+2\sqrt{x}+C$$

Kinh nghiệm: Trong bài toán này ta đưa về lũy thừa vô tỉ, rồi áp dụng công thức tổng quát như đã đưa phía trên

Câu 5: Tìm họ nguyên hàm: $\int\frac{(x+2)^2}{x^3}dx$

Giải:

$$\int\frac{(x+2)^2}{x^3}dx=\int\frac{(x^2+4x+4)^2}{x^3}dx=\int\left(\frac{4}{x^3}+\frac{4}{x^2}+\frac{1}{x}\right)dx=\ln x-\frac{4}{x}-\frac{2}{x^2}+C$$

Kinh nghiệm: Trong bài có dạng phân thức, ta tiến hành thực hiện phép tách rồi đưa về các hạng tử chứa x dạng lũy thừa. Áp dụng công thức phía trên.

Câu 6: Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=x^3+x$ thỏa mãn: $F(1)=0$

Giải:

Ta có: $\int f(x)dx=\int(x^3+x)dx=\int x^3dx+\int xdx=\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}+C=F(x)$

Mà $F(1)=0\Leftrightarrow\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+C=0\Leftrightarrow C=\frac{-3}{4}$

Vậy: Nguyên hàm của hàm số cần tìm là $F(x)=\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}-\frac{3}{4}$

Kinh nghiệm: Khi bài toán tìm hỏi nguyên hàm, cụ thể tìm C, ta vẫn phải tiến hành bước đầu tiên là tìm nguyên hàm, sau đó thay giá trị x mà đầu Câu cho để tìm C. Sau khi có C ta thay ngược trở lại tìm được F(x)

Câu 7: Tính tích phân: $\int_1^2\left(x+\frac{2}{x}\right)^2dx$

Giải:

$$\int_1^2\left(x+\frac{2}{x}\right)^2dx=\int_1^2\left(x^2+\frac{4}{x^2}+4\right)dx=\int_1^2 x^2dx+4\int_1^2\frac{dx}{x^2}+4\int_1^2 dx$$

$$=\left(\frac{x^3}{3}-\frac{4}{x}+4x\right)\Bigg|_1^2=\left(\frac{2^3}{3}-\frac{4}{2}+4.2\right)-\left(\frac{1^3}{3}-\frac{4}{1}+4.1\right)=\frac{25}{3}$$

Kinh nghiệm : Câu này giống Câu 5 , việc đầu tiên ta tìm nguyên hàm , bằng các khai triển biểu thức bên trong. Rồi thay cận vào

Câu 8: Tính tích phân: $\int_0^2\left(x\sqrt{x}-1\right)dx$

Giải:

$$\int_0^2\left(x\sqrt{x}-1\right)dx=\int_0^2\left(x^{\frac{3}{2}}-1\right)dx=\int_0^2 x^{\frac{3}{2}}\mathrm{dx}-\int_0^2\mathrm{dx}=\left(\frac{2\mathrm{x}^{\frac{5}{2}}}{5}-x\right)\Bigg|_0^2=\frac{8\sqrt{2}}{5}-2$$

Câu 9: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt[3]{x}}$

Ta có: $f\left(x\right)=\dfrac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt[3]{x}}=\dfrac{x}{x^{\frac{1}{3}}}+\dfrac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{3}}}+\dfrac{1}{x^{\frac{1}{3}}}=x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{6}}+x^{-\frac{1}{3}}$

Nên $F\left(x\right)=\int f\left(x\right)dx=\int\left(x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{6}}+x^{-\frac{1}{3}}\right)dx=\dfrac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}}+\dfrac{x^{\frac{7}{6}}}{\frac{7}{6}}+\dfrac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}=\dfrac{3}{5}x\sqrt[3]{x^2}+\dfrac{6}{7}x\sqrt[6]{x}+\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}$

Câu 10: Tìm họ nguyên hàm: $\int\left(x+2\right)\left(x-3\right)dx$

Giải:

$$\int\left(x+2\right)\left(x-3\right)dx=\int\left(x^2-x-6\right)dx=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-6x+C$$

Câu 11: Tìm họ nguyên hàm: $\int\left(x^2-3x\right)\left(x+1\right)dx$

Giải:

$$\int\left(x^2-3x\right)\left(x+1\right)dx=\int\left(x^3-2x^2-3x\right)dx=\frac{x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+C$$

Câu 12: Tìm họ nguyên hàm: $\int\left(x-3\right)^3dx$

Giải:

$$\int\left(x-3\right)^3dx=\frac{\left(x-3\right)^4}{4}+C$$

Câu 13: Tìm họ nguyên hàm: $\int\left(x+2x^3\right)\left(x+1\right)dx$

Giải:

$$\int\left(x+2x^3\right)\left(x+1\right)dx=\int\left(2x^4+2x^3+x^2+x\right)dx=\frac{2x^5}{5}+\frac{x^4}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+C$$

Câu 14: Tìm họ nguyên hàm: $\int \frac{x^3 - 3x}{x} dx$

Giải:

$$\int \frac{x^3 - 3x}{x} dx = \int \left(x^2 - 3\right) dx = \frac{x^3}{3} - 3x + C$$

Câu 15: Tìm họ nguyên hàm: $\int \frac{4x^3 + 5x^2 - 1}{x^2} dx.$

Giải:

$$\int \frac{4x^3 + 5x^2 - 1}{x^2} dx = \int \left(4x + 5 - x^{-2}\right) dx = 2x^2 + 5x + x^{-1} + C$$

Câu 16: Tìm họ nguyên hàm : $\int \frac{(x^2 + 1)^2}{x^2} dx.$

Giải:

$$\int \frac{(x^2 + 1)^2}{x^2} dx = \int \left(x^2 + 2 + x^{-2}\right) dx = \frac{x^3}{3} + 2x - \frac{1}{x} + C$$

Câu 17: Tính tích phân: $\int \frac{(x+2)^2}{x^4} dx;$

Giải:

$$\int \frac{(x+2)^2}{x^4} dx = \int \left(x^{-2} + 2x^{-3} + x^{-4}\right) dx = \frac{x^{-1}}{-1} + \frac{x^{-2}}{-1} + \frac{x^{-3}}{-3} + C$$

Câu 18: Tìm họ nguyên hàm: $\int \left(x^{\frac{3}{4}} + x^{-\frac{1}{2}} - 5\right) dx;$

Giải:

$$\int \left(x^{\frac{3}{4}} + x^{-\frac{1}{2}} - 5\right) dx = \frac{x^{\frac{7}{4}}}{\frac{7}{4}} + \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} - 5x + C$$

Câu 19: Tìm họ nguyên hàm: $\int \left(x^{-3} - 2x^{-2} + 4x + 1\right) dx$

Giải:

$$\int \left(x^{-3} - 2x^{-2} + 4x + 1\right) dx = \frac{x^{-2}}{-2} - 2\frac{x^{-1}}{-1} + 2x^2 + x = \frac{-1}{2x^2} + \frac{2}{x} + 2x^2 + x + C$$

Câu 20: Tính tích phân: $\int \left[\left(2x + 3x^{-2}\right)\left(x^2 - \frac{1}{x}\right) + 3x^{-3}\right] dx$

Giải:

$$\int \left[\left(2x + 3x^{-2}\right)\left(x^2 - \frac{1}{x}\right) + 3x^{-3}\right] dx = \int \left(2x^3 + 1\right) dx = \frac{x^4}{2} + x + C$$

Câu 21: Tính tích phân: $\int_2^4 \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 dx;$

Giải:

$$\int_2^4 \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 dx = \int_2^4 \left(x^2 + x^{-2} + 2\right) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{x} + 2x \Big|_2^4 = \frac{275}{12}$$

Câu 22: Tính tích phân: $\int_2^3 (3x-4)^4 dx$

Giải:

$$\int_2^3 \left(3x-4\right)^4 dx = \left.\frac{\left(3x-4\right)^5}{15}\right|_2^3 = \frac{1031}{5}$$

Câu 23: Tính tích phân: $\int_1^2 \left(x^2 - 3x^{-4}\right) dx$

Giải:

$$\int_1^2 \left(x^2 - 3x^{-4}\right) dx = \left.\left(\frac{x^3}{3} + x^{-3}\right)\right|_1^2 = \frac{35}{24}$$

Câu 24: Tính tích phân: $\int_0^2 \left(x\sqrt{x} - x\right) dx$

Giải:

$$\int_0^2 \left(x\sqrt{x} - x\right) dx = \left.\left(\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{x^2}{2}\right)\right|_0^2 = \frac{8}{5}\sqrt{2} - 2$$

Câu 25: Tính tích phân: $\int_0^1 x^3 \left(x+1\right) dx$

Giải:

$$\int_0^1 x^3 \left(x+1\right) dx = \left.\left(\frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{4}\right)\right|_0^1 = \frac{9}{20}$$

Câu 26: Tính tích phân: $\int_1^4 \left(\sqrt{x} - 1\right)^2 dx$

Giải:

$$\int_1^4 \left(\sqrt{x} - 1\right)^2 dx = \left.\left(\frac{x^2}{2} - \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + x\right)\right|_1^4 = \frac{7}{6}$$

Câu 27: Tính tích phân: $\int_1^3 \frac{x^3 - x^2 + x}{x} dx$

Giải:

$$\int_1^3 \frac{x^3 - x^2 + x}{x} dx = \left.\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x\right)\right|_1^3 = \frac{20}{3}$$

Câu 28: Áp dụng công thức tổng quát tìm nguyên hàm của các hàm số sau:

$a)$ $y = (4x-1)^3$; $b)$ $y = (3x+5)^6$; $c)$ $y = (7-3x)^8$.

$d)$ $y = (5x+2)^{-6}$ $e)$ $y = (9-4x)^{-2}$.

Giải:

Áp dụng công thức tổng quát: $\int (ax+b)^\alpha dx = \frac{1}{a} \cdot \frac{(ax+b)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$

Để cho việc tiến hành tính toán không còn dài dòng , ta nên học thuộc công thức trên.

Câu 29:

a. $\int\left(4x-1\right)^3dx=\dfrac{\left(4x-1\right)^4}{16}+C$ bài toán này a = 4, α = 3

b. $\int(3x+5)^6dx=\dfrac{(3x+5)^7}{21}+C$ bài toán này a = 3, α = 6

c. $\int(7-3x)^8dx=\dfrac{(7-3x)^9}{-27}+C$ bài toán này a = -3, α = 8

d. $\int(5x+2)^{-6}dx=\dfrac{(5x+2)^{-5}}{-25}+C$ bài toán này a = 5 , α =-6

e. $\int(9-4x)^{-2}dx=\dfrac{(9-4x)^{-1}}{4}+C$ bài toán này a = -4 , α = -2

f. $\int(5x+3)^5dx=\dfrac{\left(5x+3\right)^6}{30}+C$ bài toán này a = 5 , α = 5

Dạng 1. Hệ số bất định - Mẫu có dạng tích

Phương pháp hệ số bất định: Khi mẫu có thể phân tích thành nhân tử.

Câu 1: Cho $\dfrac{1}{(x+2)(x-5)(x+4)}=\dfrac{A}{(x+2)}+\dfrac{B}{(x-5)}+\dfrac{C}{(x+4)}$

Khi đó tổng $S=A+B+C$ bằng:

A. $-\dfrac{1}{18}$ **B.** 0 **C.** $\dfrac{1}{14}$ **D.** $-\dfrac{1}{63}$

Giải:

$$\frac{1}{(x+2)(x-5)(x+4)}=\frac{A}{(x+2)}+\frac{B}{(x-5)}+\frac{C}{(x+4)}$$

$$\Rightarrow A(x-5)(x+4)+B(x+2)(x+4)+C(x+2)(x-5)=1$$

$$+)\,x=-2\Rightarrow -14A=1\Rightarrow A=-\frac{1}{14}$$

$$+)\,x=5\Rightarrow 63B=1\Rightarrow B=\frac{1}{63}$$

$$+)\,x=-4\Rightarrow 18C=1\Rightarrow C=\frac{1}{18}$$

$$\Rightarrow A+B+C=0$$

ĐÁP ÁN B.

Bình luận: Bài *toán này chúng ta sẽ tách phân số ở mẫu số có tích thành các phân số đơn giản hơn. Để làm được điều này ta dùng phương pháp đồng nhất hệ số .*

Câu 2: Cho $\dfrac{1}{x(x-3)(x+3)}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x-3}+\dfrac{C}{x+3}$. Khi đó $S=2A+B-C$ bằng:

A. **B. 0** **C.** $\dfrac{1}{18}$ **D.** $-\dfrac{2}{9}$

Giải:

$$\frac{1}{x(x-3)(x+3)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-3}+\frac{C}{x+3}$$

$\Rightarrow 1=A(x-3)(x+3)+Bx(x+3)+Cx(x-3)$

$+)\,x=0\Rightarrow -9A=1\Rightarrow A=-\frac{1}{9}$

$+)\,x=3\Rightarrow 18B=1\Rightarrow B=\frac{1}{18}$

$+)\,x=-3\Rightarrow 18C=1\Rightarrow C=\frac{1}{18}$

$\Rightarrow 2A+B-C=\frac{-2}{9}$

ĐÁP ÁN D

Câu 3: Cho các hằng số $A, B, C\in R$ thỏa mãn: $\frac{2}{x^3+3x^2+2x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x+2}$.

Khi đó $P=A.B.C$ bằng:

A. 2 **B.** $\frac{1}{2}$ **C.** 1 **D.** -2

Giải:

$A(x+1)(x+2)+Bx(x+2)+Cx(x+1)=2$

$+)\ x=0\Rightarrow A=1$

$+)\ x=-1\Rightarrow B=-2$

$+)\ x=-2\Rightarrow C=1$

$\Rightarrow ABC=-2$

ĐÁP ÁN D

Câu 4. Cho $\frac{2x+3}{2x^2-x-1}=A\frac{1}{2x+1}+B.\frac{1}{x+C}$. Khi đó tổng $S=A+B+C$ bằng:

A. $-\frac{1}{3}$ **B.** $\frac{1}{3}$ **C.** $\frac{2}{3}$ **D.** $-\frac{2}{3}$

Giải:

$$\frac{2x+3}{2x^2-x-1}=\frac{2x+3}{(2x+1)(x-1)}=\left[-\frac{4}{3}.\frac{1}{2x+1}+\frac{5}{3}.\frac{1}{x-1}\right]$$

$\Rightarrow A=\frac{-4}{3},B=\frac{5}{3},C=-1\Rightarrow S=A+B+C=\frac{-2}{3}$

ĐÁP ÁN D

Dạng 2. Mẫu số phân tích được thành dạng tích

Câu 6: Nguyên hàm của hàm $I=\int\frac{1-x^5}{x\left(1+x^5\right)}dx$ có dạng $=a\left[\ln\left|x^5\right|+b\ln\left|1+x^5\right|\right]+C$

Khi đó $S=10a+b$ bằng

A. 1 **B.** 2 **C.** 0 **D.**3

Giải:

$$I=\int\frac{\left(1-x^5\right)x^4dx}{x^5\left(1+x^5\right)}=\frac{1}{5}\int\frac{\left(1-x^5\right)d\left(x^5\right)}{x^5\left(1+x^5\right)}=\frac{1}{5}\int\left(\frac{1}{x^5}-\frac{2}{1+x^5}\right)d\left(x^5\right)$$

$$=\frac{1}{5}\left[\ln\left|x^5\right|-2\ln\left|1+x^5\right|\right]+C$$

Suy ra : $a=\frac{1}{5},b=-2\Rightarrow 10a+b=0$

ĐÁP ÁN C

Câu 7: Cho $I=\int\frac{5-3x}{\left(x^2-5x+6\right)\left(x^2-2x+1\right)}dx=\frac{a}{x-1}-\ln\left|\frac{x-b}{x-2}\right|+C$

Khi đó $P=2a+b$ bằng:

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

Giải:

Ta có:

$$I=\int\frac{\left(x^2-5x+6\right)-\left(x^2-2x+1\right)}{\left(x^2-5x+6\right)\left(x^2-2x+1\right)}dx=\int\frac{dx}{x^2-2x+1}-\int_1^0\frac{dx}{x^2-5x+6}=\int\frac{dx}{\left(x-1\right)^2}-\int\frac{dx}{\left(x-2\right)\left(x-3\right)}$$

$$I=\int\left(x-1\right)^{-2}dx-\int\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-2}\right)dx=\frac{-1}{x-1}-\ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right|+C$$

Suy ra: $a=-1,b=3\Rightarrow P=2a+b=1$

ĐÁP ÁN B

Câu 8. Cho $I=\int\frac{1}{x^3\left(1+x^2\right)}dx=\frac{a}{x^2}+b\ln x+c\ln\left(1+x^2\right)$

Khi đó $S=a+b+c$ bằng:

A. -2 **B.** -1 **C.** 0 **D.** $\frac{1}{2}$

Giải:

$$I=\int\frac{\left(1+x^2\right)-x^2}{x^3\left(1+x^2\right)}dx=\int\left[\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x\left(1+x^2\right)}\right]dx=\left[\frac{1}{x^3}-\frac{\left(1+x^2\right)-x^2}{x\left(1+x^2\right)}\right]=\int\left(\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x}+\frac{x}{1+x^2}\right)dx$$

$$=\int\left(\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x}\right)dx+\frac{1}{2}\int\frac{d\left(1+x^2\right)}{1+x^2}=-\frac{1}{2x^2}-\ln x+\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)$$

$$\Rightarrow a=\frac{-1}{2},b=-1,c=\frac{1}{2}\Rightarrow S=-1$$

ĐÁP ÁN B

Câu 9. Cho $I=\int\frac{x^2+1}{x^2\left(x+1\right)}dx=a\ln\left|x+1\right|+\frac{1}{x}+b\ln\left|x+c\right|$. Khi đó $P=2\left(a+b\right)c$ bằng:

A. 2 **B.** -2 **C.** 1 **D.** 0

Giải:

$$I=\int\frac{x^2+1}{x^2\left(x+1\right)}dx=\int\frac{x^2+\left(x+1\right)-x}{x^2\left(x+1\right)}dx=\int\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x\left(x+1\right)}\right)dx$$

$$=\int\left[\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x^2}-\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)\right]=\int\left[\frac{2}{x+1}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}\right]dx=2\ln\left|x+1\right|-\frac{1}{x}-\ln\left|x\right|$$

$\Rightarrow a=2,b=-1,c=0\Rightarrow P=0$

ĐÁP ÁN D.

Câu 10: Tính tích phân $I=\int_1^2\frac{1}{x\left(x+1\right)^2}dt=\ln a+b$. Khi đó $S=a+2b$ bằng:

A. $\frac{2}{3}$ **B.** $-\frac{2}{3}$ **C.** 1 **D.** -1

Giải:

$$I=\int_1^2\frac{1}{x\left(x+1\right)^2}dx=\int_1^2\frac{x+1-x}{x\left(x+1\right)^2}dx=\int_1^2\frac{1}{x\left(x+1\right)}dx-\int_1^2\frac{1}{\left(x+1\right)^2}dx$$

Suy ra $I=\int_1^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)dx-\int_1^2\left(x+1\right)^{-2}dx\left(x+1\right)=\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|\Bigg|_1^2+\left(x+1\right)^{-1}\Bigg|_1^2=\ln\frac{4}{3}-\frac{1}{6}$

$\Rightarrow a=\frac{4}{3},b=-\frac{1}{6}\Rightarrow S=1$

ĐÁP ÁN C

Câu 11: Nguyên hàm của $f\left(x\right)=\frac{1}{x^3+x^5}$ có dạng

$F\left(x\right)=\frac{a}{x^2}-\ln\left|x^2+bx+1\right|+\frac{1}{2}\ln\left(x^2+c\right)+C$ Khi đó $P=\left(a+b+2c\right)b^4$ bằng

.

A. 1 **B.** $\frac{1}{2}$ **C.** $\frac{-1}{2}$ **D.** 0

Giải:

Ta có: $f\left(x\right)=\frac{1}{x^3+x^5}=\frac{\left(1+x^2\right)-x^2}{x^3\left(1+x^2\right)}=\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x\left(1+x^2\right)}=\frac{1}{x^3}-\frac{\left(1+x^2\right)-x^2}{x\left(1+x^2\right)}=\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x}+\frac{x}{1+x^2}$

Vậy $\int f(x)dx=\int\frac{dx}{x^3}-\int\frac{dx}{x}+\int\frac{xdx}{1+x^2}=\frac{-1}{2x^2}-\ln\left|x\right|+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C$

$\Rightarrow a=-\frac{1}{2},b=0,c=1\Rightarrow P=0$

ĐÁP ÁN D

Câu 12: Cho $I=\int\limits_0^1\frac{xdx}{x+1}=a+b\ln c$. Biết b + c = 1

Với $b,c<3$. Khi đó $S=\frac{a^2}{4}+b^{2016}-\frac{c}{2}$ bằng:

A. 0 **B.** -1 **C.** $\frac{1}{4}$ **D.** $\frac{1}{2}$

Giải:

$$I=\int_0^1 \frac{(x+1)-1}{x+1}dx=\int_0^1\left(1-\frac{1}{x+1}\right)dx=\left[x-\ln(x+1)\right]_0^1=1-\ln 2$$

$$\Rightarrow a=1;b=-1;c=2\Rightarrow S=\frac{a^2}{4}+b^{2016}-\frac{c}{2}=\frac{1}{4}$$

ĐÁP ÁN C

Câu 13: Cho $I=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^4dx}{x^2-1}=a-\frac{1}{2}\ln b$. Khi đó $S=24a-\frac{b}{3}-12$ bằng:

A. 0 **B.** -1 **C.** 1 **D.** $\frac{1}{2}$

Giải:

$$I=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^4}{x^2-1}dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^4-1+1}{x^2-1}dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(x^2+1+\frac{1}{x^2-1}\right)dx$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}+x+\ln\left|x^2-1\right|\right]_0^{\frac{1}{2}}=\frac{13}{24}-\frac{1}{2}\ln 3\Rightarrow a=\frac{13}{24},b=3\Rightarrow S=24a-\frac{b}{3}-12=0$$

ĐÁP ÁN A

Dạng 3. Mẫu số có chứa biểu thức bình phương

Câu 14: Cho $y=\frac{3x^2+3x+5}{x^3-3x+2}=\frac{A}{(x-1)^2}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x+2}$. Khi đó $S=A-B-C$ bằng:

A. 1 **B.** $\frac{2}{3}$ **C.** $\frac{5}{8}$ **D.** $-\frac{5}{8}$

Giải:

$$\frac{3x^2+3x+5}{x^3-3x+2}=\frac{A}{(x-1)^2}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+2}$$

$$\Rightarrow A(x+2)+B(x-1)(x+2)+C(x-1)^2=3x^2+3x+5$$

$$+)x=1\Rightarrow A=\frac{11}{3}$$

$$+)x=-2\Rightarrow C=\frac{11}{9}$$

Tính tổng các hệ số không có x , rồi đồng nhất 2 vế ta có

$$+)A+B-2C=5\Rightarrow B=\frac{16}{9}$$

$$\Rightarrow\frac{A}{(x-1)^2}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+2}=\frac{11}{3(x-1)^2}+\frac{16}{9(x-1)}+\frac{11}{9(x+2)}$$

$$\Rightarrow A-B-C=\frac{2}{3}$$

ĐÁP ÁN B

Câu 14. Nguyên hàm của $y=\frac{3x^2+3x+5}{x^3-3x+2}$ có dạng $f\left(x\right)=\frac{a}{x-1}+b\ln\left|x-1\right|+c\ln\left|x+d\right|+C$

Biết $a,c<0$. Chọn nhận định đúng

A. $\frac{a}{3}-b=0$ **B.** $a+b+c+d=3$ **C.** $ab<cd$ **D.** $b+c=3$

Giải:

$\Rightarrow\int\frac{3x^2+3x+5}{x^3-3x+2}dx=\int\left(\frac{11}{3\left(x-1\right)^2}+\frac{16}{9(x-1)}+\frac{11}{9(x+2)}\right)dx=-\frac{11}{3(x+1)}+\frac{16}{9}\ln\left|x+1\right|+\frac{11}{9}\ln\left|x+2\right|+C$

$\Rightarrow a=-\frac{11}{3},b=\frac{16}{9},c=\frac{11}{9},d=2$

ĐÁP ÁN D

Câu 15. Cho $\frac{3x+1}{4x^3+28x^2+65x+50}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{2x+5}+\frac{C}{\left(2x+5\right)^2}$

Khi đó $S=2A+B-C$ bằng

A. 10 **B.** 13 **C.** -13 **D.** -10

Giải:

Ta phân tích:

$\frac{3x+1}{\left(x+2\right)\left(2x+5\right)^2}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{2x+5}+\frac{C}{\left(2x+5\right)^2}$

$\Leftrightarrow 3x+1=A\left(2x+5\right)^2+B\left(x+2\right)\left(2x+5\right)+C\left(x+2\right)$

Cho x = $-2;-\frac{5}{2};0$ ta được: $\begin{cases}A=-5\\B=10\\C=13\end{cases}\Rightarrow S=-13$

ĐÁP ÁN C

Câu 16: Cho A, B, C thỏa mãn $\frac{1}{\left(x+1\right)\left(x+2\right)^2}=\frac{-A}{\left(x+2\right)^2}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x+2}$

Tính S = A + B +2C

A. 2 **B.** 1 **C.** 0 **D.** -1

Gợi ý:

Đồng nhất ta được $A=B=1,C=-1$

Dạng 4. Bậc tử số luôn hơn mẫu số

Chúng ta thường thực hiện phép chia cho đa thức rồi tiếp tục tiến hành với phần dư.

Câu 17: Cho $\int_1^2\frac{x^2+x+1}{x+1}=a+\ln b$.

Chọn mệnh đề **đúng**

A. $a>2b$ **B.** $2a-b+\frac{2}{3}b^2=0$ **C.** $a=b$ **D.** $a<b$

Giải:

$$\int_1^2 \frac{x^2+x+1}{x+1}dx = \int_1^2\left(x+\frac{1}{x+1}\right)dx = \int_1^2 xdx + \int_1^2 \frac{1}{x+1}dx = \left(\frac{x^2}{2}+\ln|x+1|\right)\Big|_1^2$$

$$= 2+\ln 3 - \frac{1}{2} - \ln 2 = \frac{3}{2} + \ln\frac{3}{2} \Rightarrow a = \frac{3}{2}, b = \frac{3}{2} \Rightarrow a = b$$

ĐÁP ÁN C

Câu 18. Tìm hàm số $f(x) = x^2 + ax + \ln|bx+1| + c$ biết $f'(x) = \frac{4x^2+4x+3}{2x+1}$ và $f(0) = 1$.

Khi đó $S = (2a-b)^3 c$ bằng

A. 0 **B.** 1 **C.** $\frac{2}{3}$ **D.** 4

Giải:

Ta có $f(x) = \int \frac{4x^2+4x+3}{2x+1}dx = \int\left(2x+1+\frac{2}{2x+1}\right)dx = x^2+x+\ln|2x+1|+c$

Mà f(0) = 1 $\Rightarrow c = 1 \Rightarrow f(x) = x^2+x+\ln|2x+1|+1$

$\Rightarrow a = 1, b = 2, c = 1 \Rightarrow S = (2a-b)^3 c = 0$

ĐÁP ÁN A

Câu 19. Cho $I = \int_0^1 \frac{x^3+3x^2-x-3}{\left(x^2+2x+3\right)^2}dx = a(\ln b - 1)$. Khi đó $(2a+b)$ bằng:

A. 2 **B.** 3 **C.** $\frac{1}{3}$ **D.** $\frac{2}{3}$

Giải:.

Ta có $x^3+3x^2-x-3 = (x+1)(x^2+2x-3)$. Đặt $t = x^2+2x+3 \Rightarrow \frac{1}{2}dt = (x+1)dx$.

Đổi cận $x = 0 \Rightarrow t = 3, x = 1 \Rightarrow t = 6$

Khi đó $I = \frac{1}{2}\int_3^6 \frac{t-6}{t^2}dt = \frac{1}{2}\int_3^6\left(\frac{1}{t}-\frac{6}{t^2}\right)dt = \frac{1}{2}\left(\ln t + \frac{6}{t}\right)\Big|_3^6 = \frac{1}{2}(\ln 2 - 1)$

$\Rightarrow a = \frac{1}{2}, b = 2 \Rightarrow (2a+b) = 3$

ĐÁP ÁN B

Câu 20: $I = \int_0^1 \frac{(x+1)^2}{x^2+1}dx = a + \ln b$. Khi đó $S = \frac{a}{b}$ bằng

A. $\frac{1}{3}$ **B.** $\frac{2}{3}$ **C.** $-\frac{1}{3}$ **D.** $\frac{1}{2}$

Giải:

$$I_4 = \int_0^1 \frac{x^2+1+2x}{x^2+1}dx = \int_0^1\left(1+\frac{2x}{x^2+1}\right)dx = \int_0^1 dx + \int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}dx$$

$$= \int_0^1 dx + \int_0^1 \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} = \left(x+\ln(x^2+1)\right)\Big|_0^1 = 1+\ln 2$$

$\Rightarrow a=1,b=2\Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{1}{2}$

ĐÁP ÁN D

Câu 21: Cho $I=\int_0^1 \frac{x^3-3}{x^2-2x-3}dx=a+(b+5)\ln b-c\ln\frac{c}{2}$. Khi đó $P=a.b.c$ bằng

A. 32 **B.** 30 **B.** 26 **D.** –26

Giải:

$$I=\int_0^1 \frac{x^3-3}{x^2-2x-3}dx=\int_0^1\left(x+2+\frac{7x+3}{x^2-2x-3}\right)dt=\int_0^1\left(x+2+\frac{6(x+1)+x-3}{(x+1)(x-3)}\right)dt=\int_0^1\left(x+2+\frac{6}{x-3}+\frac{1}{x+1}\right)dx$$

$$=\left(\frac{x^2}{2}+2x+6\ln|x-3|+\ln|x+1|\right)\Big|_0^1=\frac{5}{2}+7\ln 2-6\ln 3$$

$\Rightarrow a=\frac{5}{2},b=2,c=6\Rightarrow P=30$

ĐÁP ÁN B

Câu 22: Cho $I=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{dx}{x(x+1)}=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}\right)$. Khi đó $S=(2A+B).I$ bằng:

A. 2 **B.** $\frac{2}{3}\ln 2$ **C.** $\frac{2}{3}$ **D.** $\ln 2$

Giải:

Ta có: $\frac{1}{x(x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}=\frac{(A+B)x+A}{x(x+1)}\Rightarrow\begin{cases}A+B=0\\A=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=1\\B=-1\end{cases}$

Nên $\frac{1}{x(x+1)}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}$

Suy ra $I=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{dx}{x(x+1)}=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{dx}{x}-\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{dx}{x+1}=\ln x\big|_{\frac{1}{2}}^{2}-\ln(x+1)\big|_{\frac{1}{2}}^{2}=\ln 2$

Vậy $S=(2A+B).I=I=\ln 2$

ĐÁP ÁN D

Câu 23: Cho $I=\int\frac{dx}{2x^2-x-1}=\int\left(\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(2x+1)}\right)$

Khi đó $P=(2A+B)$ bằng:

A. 1 **B.** $\frac{3}{2}$ **C.** 3 **D.** 0

Giải:

$$I=\int\frac{dx}{2x^2-x-1}=\int\frac{dx}{(x-1)(2x+1)}=\int\frac{(2x+1)-2(x-1)}{(x-1)(2x+1)}dx$$

$$=\int\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{2}{2x+1}\right)dx=\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{2}{3}\ln|x-1|+C$$

Khi đó $A=\frac{1}{3}, B=\frac{-2}{3} \Rightarrow 2A+B=0 \Rightarrow P=0$

ĐÁP ÁN D

Câu 24: $I=\int \frac{4x-3}{2x^2-3x-2}dx=\left(\ln|x-a|+b\ln|cx+1|\right)+C$ **.** Khi đó $S=\frac{a}{b}+c$ bằng:

A. 2 **B.** -2 **C.** 4 **D.** 3

Giải:

$I=\int \frac{4x-3}{2x^2-3x-2}dx=\int \frac{(2x+1)+2(x-2)}{(2x+1)(x-2)}dx=\int (\frac{1}{x-2}+\frac{2}{2x+1})dx$

$=\int\left(\frac{1}{x-2}+\frac{2}{2x+1}\right)dx=\left(\ln|x-2|+2\ln|2x+1|\right)+C \Rightarrow a=2, b=2, c=2 \Rightarrow S=\frac{a}{b}+c=3$

ĐÁP ÁN D

Câu 25: Cho $I=\int \frac{4x^3-2x^2+2x+2}{2x-1}dx=ax^3+x+b\ln|2x-1|+C$

Và các mệnh đều sau:

(1) a < b

(2) $S=a+b=\frac{16}{3}$

(3) a,b là các số nguyên dương.

(4) $P=ab=1$

Số mệnh đề đúng là:

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

Giải:

$I=\int \frac{4x^3-2x^2+2x+2}{2x-1}dx=\int\left(2x^2+1+\frac{3}{2x-1}\right)dx=\left(\frac{2x^3}{3}+x+\frac{3}{2}\ln|2x-1|\right)+C$

$\Rightarrow a=\frac{2}{3}, b=\frac{3}{2}$

(1). Đúng

(2). $S=a+b=\frac{13}{6}$. Đúng

(3). a,b không phải là số nguyên. **Sai**

(4) $P=ab=1$. Đúng

ĐÁP ÁN D.

Câu 26: Cho $I=\int \frac{x^3-3x^2-x+6}{x^2-4x+3}dx=\left(ax^2+x+b\ln\left|\frac{x-3}{x-1}\right|\right)+C$

Và các mệnh đều sau:

(1) $a=1, b=\frac{3}{2}$

(2) $S=a+b=2$

$(3)\ a>b$

$(4)\ P=ab=\dfrac{3}{2}$

Số mệnh đề **sai** là:

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

Giải:

$$I=\int\frac{x^3-3x^2-x+6}{x^2-4x+3}dx=\int\left(x+1+\frac{3}{x^2-4x+3}\right)dx$$

$$=\int\left(x+1+\frac{3}{2(x-3)}-\frac{3}{2(x-1)}\right)dx=\left(\frac{x^2}{2}+x+\frac{3}{2}\ln\left|\frac{x-3}{x-1}\right|\right)+C$$

$\Rightarrow a=\dfrac{1}{2},b=\dfrac{3}{2}$

(1). $\mathrm{a}=1,\dfrac{3}{2}$. **Sai**

(2). $S=a+b=2$. Đúng

(3). a,b không phải là số nguyên. **Sai**

$(4)\ P=ab=\dfrac{3}{4}$. **Sai**

ĐÁP ÁN D

Câu 27: Cho $I=\int\dfrac{8x^3-4x^2-2}{4x^2-4x+1}dx=\left(ax^2+x+b\ln|2x-1|+\dfrac{1}{(2x-1)}\right)+C$

Và các mệnh đều sau:

(1) Modun của số phức $z=2a+2bi$ bằng $\sqrt{5}$

$(2)\ S=a+b=2$

$(3)\ a>b$

$(4)\ P=ab=\dfrac{3}{2}$

Số mệnh đề **đúng** là:

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

Giải:

$$I=\int\frac{8x^3-4x^2-2}{4x^2-4x+1}dx=\int\left(2x+1+\frac{2x-3}{4x^2-4x+1}\right)dx=\int\left(2x+1+\frac{1}{2x-1}-\frac{2}{(2x-1)^2}\right)dx$$

$$=\left(x^2+x+\ln|2x-1|+\frac{1}{(2x-1)}\right)+C$$

$\Rightarrow a=1,b=1$

(1). **Sai** $|z|=\sqrt{(2a)^2+(2b)^2}=\sqrt{4+4}=\sqrt{8}$.

(2). $S = a + b = 2$. **Đúng**

(3). a, b không phải là số nguyên. **Sai**

(4) $P = ab = \frac{3}{4}$. **Sai**

ĐÁP ÁN B

Câu 28: Cho $I = \int_0^1 \frac{(x+1)^2}{x^2+1}dx = a + \ln b$. Cho các mệnh đề sau:

(1). $a = b$

(2) $S = a^3 + 2b^2 = 6$

(3) $I > \ln(ab)$

(4) $\log_{\frac{1}{a}} \sqrt{2}$ không tồn tại

Số mệnh đề **đúng** là:

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

Giải:

$I_4 = \int_0^1 \frac{x^2+1+2x}{x^2+1}dx = \int_0^1 \left(1 + \frac{2x}{x^2+1}\right)dx = \int_0^1 dx + \int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}dx$

$= \int_0^1 dx + \int_0^1 \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} = \left(x + \ln(x^2+1)\right)\Big|_0^1 = 1 + \ln 2$

$\Rightarrow a = 1, b = 2$

(1). $a = b$. Sai

(2) $S = a^3 + 2b^2 = 9$. Sai

(3) $I > \ln(ab) = \ln 1 + \ln 2 = 0 + \ln 2$. Đúng.

(4) Đúng vì cơ số 1 không tồn tại.

ĐÁP ÁN C

Luyện tập

Câu 1: Cho $I_1 = \int_0^1 \frac{x^3}{x^4+3x^2+2}dx = \ln a + b\ln c$. Chọn đáp án đúng

A. $a + b + c = \frac{5}{2}$

B. $a = \frac{1}{b} = \frac{3c}{2}$

C. $(b+2c)(c+2a)(a+2b) > 1$

D. $a > c > b$

Câu 2: Cho $\int_1^2 \frac{1}{x^3(1+x^2)}dx = a + b\ln\frac{5}{8}$. Chọn đáp án đúng

A. $a + b = \frac{7}{2}$

B. $4a = 3b$

C. $(5a - 3b) = \frac{8}{27}$

D. $ab = \frac{3}{18}$

Câu 3. Cho $I=\int\limits_0^1 \frac{x^3}{x^4+3x^2+2}dx=\ln 3+b\ln 2+c$. Chọn đáp án đúng

A. $b+c=\frac{3}{4}$ **B.** $-2b=c$

C. $bc=0$ **D.** b,c là các số nguyên

Câu 4: Cho $I=\int\limits_0^2 \frac{2x+3}{x^2+4x+3}dx=\int\limits_0^2\left(\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+3}\right)$. Khi đó $I.(A+B)$ bằng:

A. $2+\ln\frac{125}{3}$ **B.** $2\ln\frac{125}{3}$ **C.** $\ln\frac{125}{9}$ **D.** $\frac{1}{2}\ln\frac{125}{9}$

Câu 5: Cho $I=\int\limits_{-1}^0 \frac{dx}{2x^2+x-3}=a-\frac{1}{5}\ln b$

Và các mệnh đều sau:

(1) Modun của số phức $z=2a+5bi$ bằng 30 (2) $S=a+b=7$

(3) $a>b$ (4) $P=ab=6$

Số mệnh đề **đúng** là:

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

Câu 6: Cho $I=\int \frac{4x-5}{x^2-x-2}dx==\left(\ln|x+a|+b\ln|x+c|\right)+C$

(1) Modun của số phức $z=(a+b)+ci$ bằng $2\sqrt{2}$

(2) $S=a+b+c=2$

(3) $c>b>a$

(4) a,b,c là các số thực dương.

Số mệnh đề **sai** là:

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

Câu 7: Cho $I=\int\limits_1^2 \frac{3x+2}{4x^2-4x+1}dx=\int\limits_1^2 \frac{A}{(2x-1)}+\frac{B}{(2x-1)^2}dx$

Khi đó $P=A.B$ bằng:

A. $\ln 3$ **B.** $\frac{3}{2}\ln 2$ **C.** $\ln 2$ **D.** $\frac{21}{4}$

Câu 8. Cho $I=\int \frac{dx}{(x+1)(4x^2+8x+3)}=\int\left(\frac{A}{x+1}+\frac{B}{2x+1}+\frac{C}{2x+3}\right)dx$

Khi đó $P=(A+B+C).I$ bằng

A. $\left(-2\ln|x+1|+\ln|4x^2+8x+3|\right)+C$ **B.** $\left(-\ln|x+1|+\frac{1}{2}\ln|4x^2+8x+3|\right)+C$

C. $\left(\frac{1}{2}\ln|4x^2+8x+3|\right)+C$ **D.** $\left(\ln|4x^2+8x+3|\right)+C$

Câu 9: Tìm nguyên hàm của $\int \frac{x+3}{x^2+3x+2}dx=\int\left(\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2}\right)dx$

Khi đó $S = A + B$ bằng

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** $\frac{1}{2}$

Câu 10: Tính $I = \int_0^1 \frac{2x+1}{4-9x^2}dx = \int_0^1 \left(\frac{A}{2-3x} + \frac{B}{2+3x}\right)dx = \frac{-6\ln a - \ln b}{12}$

Khi đó $P = (A+B)(a+2b)$

A. $\frac{2}{3}$ **B.** 3 **C.** $\frac{5}{2}$ **D.** 6

Câu 11: Cho $f(x) = \frac{3x^2+3x+3}{x^3-3x+2}$

a) Xác định các hằng số A, B, C để $f(x) = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2}$

A. $A=3, B=1, C=2$ **B.** $A=1, B=2, C=3$

C. $A=2, B=1, C=3$ **D.** $A=3, B=2, C=1$

b) Tìm nguyên hàm của f(x).

A. $\frac{3}{x-1} + 2\ln|x-1| + \ln|x+2| + C$ **B.** $\frac{3}{x-1} - 2\ln|x-1| + \ln|x+2| + C$

C. $\frac{-3}{x-1} + 2\ln|x-1| + \ln|x+2| + C$ **D.** $\frac{3}{x-1} + 2\ln|x-1| + \ln|x+2|$

Câu 12: Nguyên hàm của $\frac{8-2x}{x^2+4x-5} = a\ln|x-1| - b\ln|x+5| + C$

Tính S = a+b

A. 1 **B.** 2 **C.** 4 **D.** -2

Câu 13: Để $\int_0^1 \frac{ax.dx}{x^2+3x+2} = \ln\frac{9}{8}$

Khi đó a bằng:

A. 4 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

Câu 14. Tìm a để $\int_1^2 \frac{x^2+x+a}{x+1}dx = \frac{3}{2} + \ln\frac{3}{2}$

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

Câu 15. Tính $I = \int_0^2 \frac{2x+3}{x^2+4x+3}dx = \int_0^2 \left(\frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+3}\right)$

Khi đó $P = A.B.I$ bằng:

A. $\frac{3}{4}\ln\frac{125}{9}$ **B.** $\frac{3}{2}\ln\frac{125}{9}$ **C.** $\frac{3}{8}\ln\frac{125}{9}$ **D.** $\ln\frac{125}{9}$

Câu 16.Tìm hàm số $f(x)$biết $f'(x) = \frac{4x^2+4x+3}{2x+1}$ và $f(0) = 1$.

A. $x^2 + x + \ln|2x+1|$ **B.** $x^2 + x + \ln|2x+1| + 1 + C$

C. $x^2 + x + \ln|2x+1| + 1$ **D.** $x^2 + x - \ln|2x+1| + 1$

Câu 17. Tính tích phân $\int_0^1 \frac{4x-2}{x^3+2x^2+x+2}dx = \int_0^1 \left(\frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{x^2+1}\right)dx = a + \ln b$

Khi đó $S=\left(A+B+C\right).ab$ bằng:

A. 0 **B.** $\ln\frac{4}{9}$ **C.** 1 **D.** $-2\ln\frac{4}{9}$

Câu 18. Tìm A, B, C:

$$\int\frac{dx}{\left(x+1\right)\left(x+2\right)^2}=\frac{A}{x+2}+\int\left(\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x+2}\right)dx$$

A. $A=B=1,C=-1$ **B.** $A=B=C=1$

C. $A=B=2,C=-1$ **D.** $A=B=C=-1$

Giải:

Câu 1:

Đặt $t=x^2\Rightarrow dt=2xdx\ hay\ xdx=\frac{dt}{2}$

Và $x:0\to1$ thì

$$t:0\to1\Rightarrow I_1=\int_0^1\frac{x^2.xdx}{x^4+3x^2+2}=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{t.dt}{t^2+3t+2}=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{2\left(t+1\right)-\left(t+2\right)}{\left(t+1\right)\left(t+2\right)}dt=\frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{2}{t+2}-\frac{1}{t+1}\right)dt$$

$$=\left(\ln\left|t+2\right|-\frac{1}{2}\ln\left|t+1\right|\right)\Big|_0^1=\ln3-\frac{3}{2}\ln2$$

$$\Rightarrow a=3,b=-\frac{3}{2},c=2$$

Đối chiếu các đáp án. Chú ý nên thử các đáp án đơn gian trước. Ví dụ A, B, D.

Chú ý C: $a+2b=0$ nên không cần tính phần còn lại.

Đáp án D.

Câu 2:

$$I_6=\int_1^2\frac{\left(1+x^2\right)-x^2}{x^3\left(1+x^2\right)}dx=\int_1^2\left[\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x\left(1+x^2\right)}\right]dx=\int_1^2\left[\frac{1}{x^3}-\frac{\left(1+x^2\right)-x^2}{x\left(1+x^2\right)}\right]dx=\int_1^2\left(\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x}+\frac{x}{1+x^2}\right)dx$$

$$=\int_1^2\left(\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x}\right)dx+\frac{1}{2}\int_1^2\frac{d\left(1+x^2\right)}{1+x^2}=\left[-\frac{1}{2x^2}-\ln x+\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)\right]\Big|_1^2=\frac{3}{8}-\ln2+\frac{1}{2}\ln\frac{5}{2}=\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\ln\frac{5}{8}$$

$$\Rightarrow a=\frac{3}{8},b=\frac{1}{2}$$

ĐÁP ÁN D

Câu 3.

Ta có: $I=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{x^2.2xdx}{\left(x^2+1\right)\left(x^2+2\right)}$

Đặt $t=x^2\Rightarrow dt=2xdx$

Với $x=0\Rightarrow t=0$, với $x=1\Rightarrow t=1$

Khi đó $I=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{tdt}{\left(t+1\right)\left(t+2\right)}=\frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{2}{t+2}-\frac{1}{t+1}\right)dt=\left(\ln\left|t+2\right|-\frac{1}{2}\ln\left|t+1\right|\right)\Big|_0^1=\ln3-\frac{3}{2}\ln2$

$a = 3, b = -\frac{3}{2}, c = 0$

ĐÁP ÁN C

Câu 4:

Ta có: $\frac{2x+3}{x^2+4x+3}d = \frac{2x+3}{(x+1)(x+3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+3}$

Từ đó $2x+3 \equiv (A+B)x + 3A + B$ ($x \neq -1$ và $x \neq -3$

Cân bằng các hệ số của các lũy thừa cùng bậc của x ta được

$\begin{cases} A+B=2 \\ 3A+B=3 \end{cases} \Rightarrow A = \frac{1}{2}, B = \frac{3}{2}$

Suy ra: $\int_0^2 \frac{2x+3}{x^2+4x+3}dx = \frac{1}{2}\int_0^2 \frac{dx}{x+1} + \frac{3}{2}\int_0^2 \frac{dx}{x+3} = \frac{1}{2}\left(\ln|x+1| + 3\ln|x+3|\right)\Big|_0^2 = \frac{1}{2}\ln\frac{125}{9}$

$\Rightarrow I(A+B) = \ln\frac{125}{9}$

ĐÁP ÁN C

Câu 5:

$I = \int_{-1}^{0} \frac{dx}{2x^2+x-3} = \int_{-1}^{0} \frac{dx}{(x-1)(2x+3)} = \frac{1}{5}\int_{-1}^{0} \frac{(2x+3)-2(x-1)}{(x-1)(2x+3)}dx$

$= \frac{1}{5}\int_{-1}^{0}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{2}{2x+3}\right)dx = \frac{1}{5}\ln\left|\frac{x-1}{2x+3}\right|\Bigg|_{-1}^{0} = \frac{1}{5}\ln\frac{1}{6} = -\frac{\ln 6}{5}$

$\Rightarrow a = 0, b = 6$

(1) $|z| = \sqrt{0 + 30^2} = 30$. Đúng

(2) $S = a + b = 6$. Sai

(3) $a > b$. Sai

(4) $P = ab = 0$. Đúng

ĐÁP SỐ B

Câu 6:

$I = \int \frac{4x-5}{x^2-x-2}dx = \int_0^1 \frac{(x+1)+3(x-2)}{(x+1)(x-2)}dx$

Việc phân tích $4x - 5 = x + 1 + 3(x-2)$

$4x - 5 = a(x+1) + b(x-2) \Leftrightarrow 4x - 5 = (a+b)x + a - 2b$ khi đó $\begin{cases} a+b=4 \\ a-2b=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=3 \end{cases}$

$= \int\left(\frac{1}{x-2} + \frac{3}{x+1}\right)dx = \left(\ln|x-2| + 3\ln|x+1|\right) + C$

$\Rightarrow a = -2, b = 3, c = 1$

(1) Modun của số phức $z = (a+b) + ci$ bằng $\sqrt{(-2+3)^2 + 1} = \sqrt{2}$. Sai

(2) $S = a + b + c = 2$. Đúng

(3) $c > b > a$. Sai

$(4)\ a < 0$ nên Sai.

ĐÁP ÁN D

Câu 7:

$$I = \int_1^2 \frac{3x+2}{4x^2-4x+1}dx = \int_1^2 \frac{A}{(2x-1)} + \frac{B}{(2x-1)^2}dx = \int_1^2 \left(\frac{3}{2(2x-1)} + \frac{7}{2(2x-1)^2} \right) dx$$

Ta tìm được $A = \frac{3}{2}, B = \frac{7}{2}$ bằng phương pháp đồng nhất hệ số đã trình bày ở trên.

$\Rightarrow P = \frac{21}{4}$

ĐÁP ÁN D

Câu 8.

Ta phân tích: $\frac{1}{(x+1)(4x^2+8x+3)} = \frac{1}{(x+1)(2x+1)(2x+3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{2x+1} + \frac{C}{2x+3}$

$\Leftrightarrow 1 = A(2x+1)(2x+3) + B(x+1)(2x+3) + C(x+1)(2x+1) = 1$

Thay x = $-1; -\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}$ thay vào ta được: $\begin{cases} A = -1 \\ B = C = 1 \end{cases}$

Khi đó $I = \int \left(\frac{-1}{x+1} + \frac{1}{2x+1} + \frac{1}{2x+3} \right) dx = \left(-\ln|x+1| + \frac{1}{2}\ln|4x^2+8x+3| \right) + C$

$\Rightarrow (A+B+C).I = I$

ĐÁP ÁN B.

Câu 9:

$\int \frac{x+3}{x^2+3x+2}dx = \int \frac{x+3}{(x+1)(x+2)}dx = \int \left(\frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} \right) dx \Rightarrow x+3 = A(x+2) + B(x+1) \quad (2*)$

Chọn $x = -1 \Rightarrow A = 2$ và chọn $x = -2 \Rightarrow B = -1$

$\Rightarrow S = A + B = 1$

ĐÁP ÁN B

Câu 10

$\frac{2x+1}{4-9x^2} = \frac{A}{2-3x} + \frac{B}{2+3x} \Rightarrow A(2+3x) + B(2-3x) = 2x+1$

+) $x = \frac{2}{3} \Rightarrow A = \frac{7}{12}$

+) $x = -\frac{2}{3} \Rightarrow B = -\frac{1}{12}$

$I = \int_0^1 \frac{2x+1}{4-9x^2}dx = \frac{1}{12}\int_0^1 \left(\frac{7}{(2-3x)} - \frac{1}{2+3x} \right) dx = \frac{-6\ln 2 - \ln 5}{12}$

$\Rightarrow a = 2, b = 5 \Rightarrow P = 6$

ĐÁP ÁN D

Câu 11:

a. Ta có : $x - 3x + 2 = (x-1)^2(x+2)$

Do đó $f\left(x\right)=\dfrac{3x^2+3x+3}{x^3-3x+2}=\dfrac{A}{\left(x-1\right)^2}+\dfrac{B}{x-1}+\dfrac{C}{x+2}$

$$\Rightarrow 3x^2+3x+3=\left(B+C\right)x^2+\left(A+B-2C\right)x+\left(2A-2B+C\right)\Rightarrow\begin{cases}B+C=3\\A+B-2C=3\\2A-2B+C=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=3\\B=2\\C=1\end{cases}$$

ĐÁP ÁN D

b. Vậy $\int f\left(x\right)dx=\int\dfrac{3x^2+3x+3}{x^3-3x+2}dx=\int\left(\dfrac{3}{\left(x-1\right)^2}+\dfrac{2}{x-1}+\dfrac{1}{x+2}\right)dx$

$=\dfrac{-3}{x-1}+2\ln\left|x-1\right|+\ln\left|x+2\right|+C$

ĐÁP ÁN C

Câu 12:

$\dfrac{8-2x}{x^2+4x-5}=\dfrac{8-2x}{\left(x-1\right)\left(x+5\right)}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x+5}\Leftrightarrow 8-2x=A\left(x+5\right)+B\left(x-1\right)$

Thay x lần lượt bằng $1;-5$ ta được $\begin{cases}A=1\\B=-3\end{cases}$ hay $\dfrac{8-2x}{x^2+4x-5}=\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{3}{x+5}\right)$

$\int\dfrac{8-2x}{x^2+4x-5}dx=\int\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{3}{x+5}\right)dx=\ln\left|x-1\right|-3\ln\left|x+5\right|+C$

$\Rightarrow S=a+b=4$

ĐÁP ÁN C

Câu 13:

Nhập biểu thức trên vào máy tính Casio

Nhấn **CALC** rồi thay lần lượt các giá trị (nhanh)

Nhận thấy $a=1$ thỏa mãn.

ĐÁP ÁN B

Câu 14.

Sử dụng máy tính Casio tương tự.

ĐÁP ÁN B

Câu 15

Ta có: $\dfrac{2x+3}{x^2+4x+3}d=\dfrac{2x+3}{\left(x+1\right)\left(x+3\right)}=\dfrac{A}{x+1}+\dfrac{B}{x+3}$

Từ đó $2x+3\equiv\left(A+B\right)x+3A+B$ ($x\neq-1$ và $x\neq-3$

Cân bằng các hệ số của các lũy thừa cùng bậc của x ta thu được

$\begin{cases}A+B=2\\3A+B=3\end{cases}\Rightarrow A=\dfrac{1}{2},B=\dfrac{3}{2}$

Suy ra: $\int_0^2\dfrac{2x+3}{x^2+4x+3}dx=\dfrac{1}{2}\int_0^2\dfrac{dx}{x+1}+\dfrac{3}{2}\int_0^2\dfrac{dx}{x+3}=\dfrac{1}{2}\left(\ln\left|x+1\right|+3\ln\left|x+3\right|\right)\Big|_0^2=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{125}{9}$

$\Rightarrow ABI=\dfrac{3}{8}\ln\dfrac{125}{9}$

ĐÁP ÁN C

Câu 16.

Ta có $f(x) = \int \dfrac{4x^2+4x+3}{2x+1}dx = \int\left(2x+1+\dfrac{2}{2x+1}\right)dx = x^2+x+\ln|2x+1|+c$

Mà $f(0)=1 \Rightarrow c=1 \Rightarrow f(x)=x^2+x+\ln|2x+1|+1$

ĐÁP ÁN C

Câu 17.

Tính tích phân $\int_0^1 \dfrac{4x-2}{x^3+2x^2+x+2}dx$

Ta có: $\int_0^1 \dfrac{4x-2}{x^3+2x^2+x+2}dx = \int_0^1 \dfrac{4x-2}{(x^2+1)(x+2)}dx$

Đặt $\dfrac{4x-2}{(x+2)(x^2+1)} = \dfrac{A}{x+2}+\dfrac{Bx+C}{x^2+1} = \dfrac{x^2(A+B)+x(2B+C)+2C+A}{(x+2)(x^2+1)}$

Đồng nhất hệ số, ta có: $\begin{cases} A+B=0 \\ 2B+C=4 \\ 2C+A=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-2 \\ B=2 \\ C=0 \end{cases}$

Suy ra $\int_0^1 \dfrac{4x-2}{(x^2+1)(x+2)}dx = \int_0^1\left(-\dfrac{2}{x+2}+\dfrac{2x}{x^2+1}\right)dx = -\int_0^1\left(\dfrac{2}{x+2}\right)dx+\int_0^1\left(\dfrac{2x}{x^2+1}\right)dx$

$= -2\int_0^1 \dfrac{d(x+2)}{x+2}+\int_0^1 \dfrac{d(x^2+1)}{x^2+1} = \left[-2\ln|x+2|+\ln|x^2+1|\right]\Big|_0^2 = \ln\dfrac{8}{9}$

$\Rightarrow P=0$

ĐÁP ÁN A

Câu 18.

Để ý rằng: $\int \dfrac{A}{(x+2)^2}dx = -\dfrac{A}{x+2}+C$

Do đó ta phải tìm A, B, C để cho

$\dfrac{1}{(x+1)(x+2)^2} = \dfrac{-A}{(x+2)^2}+\dfrac{B}{x+1}+\dfrac{C}{x+2}$

Đồng nhất ta được $A=B=1, C=-1$

ĐÁP ÁN A

ĐỔI BIẾN

Dùng kỹ thuật lấy vi phân hoặc đổi biến

Các em nhớ công thức vi phân như sau $du = u'dx$ **ở đây** u **là hàm hợp của x**

Câu 1: Tìm nguyên hàm của các hàm số sau:

$a)\ y = \sin x\sqrt{2\cos x - 1};$ $\qquad b)\ y = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x}.$

Giải:

a. $\int \sin x\sqrt{2\cos x - 1}dx = -\int \sqrt{2\cos x - 1}d\left(\cos x\right)$

Cách 1: Đặt $t = \cos x \Rightarrow dt = d(\cos x) = -\sin x dx$

$$= \int \sqrt{2t - 1}dt = -\int \left(2t - 1\right)^{\frac{1}{2}} dt = -\frac{1}{3}\left(2t - 1\right)^{\frac{3}{2}} + C = -\frac{1}{3}\left(2\cos x - 1\right)^{\frac{3}{2}} + C$$

Cách 2: Nếu giải bằng phương pháp lấy vi phân ta làm như sau

$$\int \sin x\sqrt{2\cos x - 1}dx = -\int \sqrt{2\cos x - 1}d\left(\cos x\right) = -\int (2\cos x - 1)^{\frac{1}{2}}d\left(\cos x\right)$$

$$= -\frac{(2\cos x - 1)^{\frac{3}{2}}}{2.\dfrac{3}{2}} = -\frac{1}{3}.(2\cos x - 1)^{\frac{3}{2}} + C$$

Trong bài toán này ta áp dụng công thức: **d(cosx) = -sinxdx.** Khi đó $(\cos x)$ là ẩn mới ta sử dụng công thức tổng quát với ẩn mới này. $\int (2\cos x - 1)^{\frac{1}{2}} d\cos x$ đã sửa theo công thức tổng quát dưới đây $\int (aX + b)^{\alpha} dx = \dfrac{1}{a}.\dfrac{(aX + b)^{\alpha+1}}{\alpha + 1} + C$ thì **X** ở bài toán trên là cosx

b. $\int \dfrac{\sin x}{\cos^2 x} dx = \int \dfrac{1}{\cos^2 x}d\left(\cos x\right)$

Cách 1: Đặt $t = \cos x \Rightarrow dt = d(\cos x) = -\sin x dx = -\int \dfrac{dt}{t^2} = \dfrac{1}{t} + C = \dfrac{1}{\cos x} + C$

Cách 2: Nếu giải bằng phương pháp lấy vi phân ta làm như sau

$$= -\int \frac{d\cos x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos x} + C$$

Qua 2 ví dụ trên ta thấy rằng việc đổi biến **(đặt ẩn phụ)** và việc lấy vi phân không khác nhau hướng giải, chỉ khác nhau ở biểu diễn mà thôi, nếu các em không quen nhìn vi phân thì các em đặt ẩn phụ, còn quen thì lấy vi phân thì bài toán sẽ chuyên nghiệp hơn.

Câu 3: Tìm nguyên hàm: **(bằng phương pháp đặt ẩn phụ)**

$a)\ \int 2x\sqrt{x^2 + 1}dx;$ $\qquad b)\ \int 3x^2\sqrt{x^3 + 1}dx.$

$c)\ \int \dfrac{x}{(3x^2 + 9)^4}dx;$ $\qquad d)\ \int \dfrac{2x + 4}{x^2 + 4x - 5}dx.$

Giải:

a. $F = \int 2x\sqrt{x^2 + 1}dx = \int \sqrt{x^2 + 1}d\left(x^2 + 1\right)$**. Đặt** $t = \left(x^2 + 1\right)$

$$F=\int\sqrt{t}dt=\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+C=\frac{2}{3}\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}+C$$

b. $\int 3x^2\sqrt{x^3+1}dx=\int\sqrt{x^3+1}d\left(x^3+1\right)$. **Đặt** $t=\left(x^3+1\right)$

$$F=\int\sqrt{t}dt=\frac{2}{3}\left(x^3+1\right)^{\frac{3}{2}}+C$$

c. $\int\frac{x}{(3x^2+9)^4}dx$. **Đặt** $t=x^2\Rightarrow 2xdx=dt$

$$F=\int\frac{dt}{2\left(3t+9\right)^4}dt=-\frac{\left(3t+9\right)^{-5}}{30}+C$$

d. $\int\frac{2x+4}{x^2+4x-5}dx$

Đặt $t=x^2+4x-5\Rightarrow dt=(2x+4)dx$

$$F=\ln\left|t\right|+C=\ln\left|x^2+4x-5\right|+C$$

Câu 4: Tìm nguyên hàm: **(bằng phương pháp đặt ẩn phụ)**

a) $\int\left(1-x\right)^9dx$.

Đặt $u=1-x\Rightarrow -du=dx$

$$\int\left(1-x\right)^9dx=\int u^9\left(-du\right)=-\int u^9du=-\frac{u^{10}}{10}+C=-\frac{\left(1-x\right)^{10}}{10}+C$$

b) $\int x\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}}dx$

Đặt $u=1+x^2\Rightarrow\frac{du}{2}=xdx$

$$\int x\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}}dx=\int u^{\frac{3}{2}}\frac{du}{2}=\frac{1}{2}\int u^{\frac{3}{2}}du=\frac{1}{2}\frac{u^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}+C=\frac{1}{5}\left(1+x^2\right)^{\frac{5}{2}}+C$$

c) $\int\cos^3x\sin xdx$

Đặt $u=\cos x\Rightarrow -du=\sin xdx$

$$\int\cos^3x\sin xdx=-\int u^3du=-\frac{u^4}{4}+C=-\frac{\cos^4x}{4}+C$$

d) $\int\frac{\text{lnex}}{1+x\ln x}dx=\int\frac{1+\ln x}{1+x\text{lnx}}dx$

Đặt $u=1+x\ln x\Rightarrow du=\left(1+\ln x\right)dx$

Vậy $\int\frac{\ln ex}{1+x\ln x}dx=\int\frac{du}{u}=\ln\left|u\right|+C=\ln\left|1+x\ln x\right|+C$

e) $\int\frac{\left(\sin x+\cos x\right)}{\sqrt[3]{\sin x-\cos x}}dx$

Đặt $u=\sqrt[3]{\text{sinx}-\text{cosx}}\Rightarrow u^3=\sin x-\cos x\qquad\Rightarrow 3u^2du=\left(\cos x+\sin x\right)dx$

Vậy $\int \frac{(\sin x+\cos x)}{\sqrt[3]{\sin x-\cos x}}dx=\int \frac{3u^2du}{u}=3\int udu=3\frac{u^2}{2}+C$

Câu 4: Tìm nguyên hàm của các hàm số sau: **(Dùng vi phân)**

$a)\ y=\frac{x^3}{(6x^4+5)^5};$

$$\int \frac{x^3}{\left(6x^4+5\right)^5}dx=\int \frac{4x^3}{4\left(6x^4+5\right)^5}dx=\int \frac{1}{4\left(6x^4+5\right)^5}dx^4=\frac{\left(6x^4+5\right)^{-4}}{4.6.(-4)}+C=-\frac{\left(6x^4+5\right)^{-4}}{96}+C$$

Bình luận: Ở bài toán này ta áp dụng vi phân: $dx^4=4x^3dx$. Mục đích giảm bớt việc đặt ẩn phụ. Sau khi biến đổi vi phân ta được một biến mới, ở bài toán trên không phải là biến x nữa mà lúc này x^4 là biến.

Khi ta coi x^4 là biến thì bài toán trên, rồi áp dụng công thức tổng quát $\int (aX+b)^\alpha dx=\frac{1}{a}.\frac{(aX+b)^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$ ở đây **X** là x^4

Câu 5 : Tìm nguyên hàm: **(Dùng vi phân)**

$a)\ \int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x}dx;$ $\quad b)\ \int \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}dx.$ $\quad c)\ \int \frac{1}{x\ln x}dx;$ $\quad d)\ \int 2xe^{x^2+4}dx.$

Giải:

a. $\int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x}dx=\int e^{\tan x}d\tan x=e^{\tan x}+C$ ở đây ta dùng công thức vi phân $d\tan x=\frac{dx}{\cos^2 x}$

b. $\int \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}dx=-\int \frac{d\left(e^{-x}\right)}{1+e^{-x}}=\ln\left(e^{-x}+1\right)+C$ ở đây ta dùng công thức vi phân $d\left(e^{-x}\right)=-e^{-x}dx$

c. $\int \frac{1}{x\ln x}dx=\int \frac{d(\ln x)}{\ln x}=\ln\left|\ln x\right|+C$ ở đây ta dùng công thức vi phân $d(\ln x)=\frac{1}{x}dx$

d. $\int 2xe^{x^2+4}dx=\int e^{x^2+4}d\left(x^2\right)=e^{x^2+4}+C$ ở đây ta dùng công thức vi phân $d\left(x^2\right)=2xdx$

b. $\int \sin^4 x\cos xdx=\int \sin^4 xd\sin x=\frac{\sin^5 x}{5}+C$ ở đây ta dùng công thức vi phân $d\sin x=\cos xdx$

c. $\int \frac{e^x}{e^x+1}dx=\frac{dt}{t+1}=\ln(t+1)+C$ ở đây ta dùng công thức vi phân $de^x=e^xdx$

Các công thức cần nhớ khi dùng vi phân

Đôi khi đổi biết khiến ta mất thời gian hơn, nhiều khi chúng ta chỉ cần áp dụng công thức vi phân vào Câu *toán sẽ đơn giản hơn:*

Nhớ các công thức vi phân sau đây:

1) $d(\cos x)=-\sin xdx$ $\qquad$ 1') $d(\cos ax)=-a.\sin axdx$

2) $d(\sin x)=\cos x.dx$ $\qquad$ 2') $d(\sin ax)=a\cos ax.dx$

$3)\, d(\tan) = \dfrac{dx}{\cos^2 x}$ 　　　　$3')\, d(\tan ax) = \dfrac{a.dx}{\cos^2 ax}$

$4)\, d(\cot) = \dfrac{-dx}{\sin^2 x}$ 　　　　$4')\, d(\cot ax) = \dfrac{-adx}{\sin^2 ax}$

$5)\, d(e^x) = e^x.dx$ 　　　　$5')\, d(e^{ax}) = ae^{ax}.dx$

$6)\, d(\ln) = \dfrac{1}{x}.dx$ 　　　　$6')\, d(\ln ax) = \dfrac{1}{x}.dx$

$7)\, d(x^a) = a.x^{a-1}.dx$ 　　　　$7')\, d(a.x+b)^{\alpha} = a.\alpha.(ax+b)^{a-1}.dx$

ĐỔI BIẾN: DẠNG CHỨA CĂN

Kinh nghiệm khi giải các bài *toán tích phân có căn ta thường đổi biết t bằng căn đó , rồi sau đó biểu diễn các biểu thức của x theo t, đồng thời đổi dx theo dt nữa,* bài *toán trở về một bài toán mới của biến t.*

Câu 6 : Cho $I = \int x\sqrt{x^2+3}dx = \dfrac{\sqrt{(x^2+3)^b}}{a} + C$. Tính $S = \log_b^2 a + \log_a b + 2016$?

A. 2018 　　　**B.** 2020 　　　**C.** 2025 　　　**D.** 2030

Giải:

Đặt $t = \sqrt{x^2+3} \Rightarrow t^2 = x^2 + 3 \Rightarrow 2tdt = 2xdx \Rightarrow xdx = tdt$.

Suy ra $I = \int t.tdt = \int t^2 dt = \dfrac{t^3}{3} + C = \dfrac{(\sqrt{x^2+3})^3}{3} + C$

Vậy $S = \log_3^2 3 + \log_3 3 + 2016 = 2018$

Bình luận: khi có căn $\sqrt{x^2+3}$ ta sẽ tìm cách đặt $t = \sqrt{x^2+3}$.Tiếp đó ta biến đổi các phần còn lại theo t , kể cả dx cũng biểu diễn theo dt . $xdx = tdt$

Câu 7. Cho $I = \int \dfrac{dx}{\sqrt{2x-1}+4} = \sqrt{2x-1} - \ln\left(\sqrt{2x-1}+4\right)^n + C$. Tính $S = Sin(\dfrac{n.\pi}{8})$

A. $\dfrac{1}{2}$ 　　　**B.** 0 　　　**C.** 1 　　　**D.** -1

Giải:

Chọn C

Đặt $t = \sqrt{2x-1} \Rightarrow t^2 = 2x - 1 \Rightarrow tdt = dx$

$\Rightarrow I = \int \dfrac{tdt}{t+4} = \int\left(1 - \dfrac{4}{t+4}\right)dt = t - 4\ln|t+4| + C = \sqrt{2x-1} - \ln\left(\sqrt{2x-1}+4\right)^4 + C$

Vậy n = 4 vậy $S = Sin(\dfrac{n.\pi}{8}) = 1$

Bình luận: Việc suất hiện căn $\sqrt{2x-1}$ ta đặt $t = \sqrt{2x-1}$, sau đó vẫn như thói quen, ta biểu diễn dx theo dt: $tdt = dx$

Câu 8. Cho $I = \int x\sqrt{3x^2+1}dx = \dfrac{1}{a}\sqrt{(3x^2+1)^b} + C$. Giá trị a và b lần lượt là:

A. 4 và 3 　　　**B.** 9 và 3 　　　**C.** 3 và 9 　　　**D.** 4 và 9

Giải:

Chọn B

Đặt $t=\sqrt{3x^2+1}\Rightarrow 2tdt=6xdx\Rightarrow \frac{1}{3}tdt=xdx$

$$I=\frac{1}{3}\int_1^2 t^2dt=\frac{1}{9}t^3\Big|_1^2=\frac{7}{9}$$

$$I=\frac{1}{3}\int t^2dt=\frac{1}{9}t^3+C=\frac{1}{9}\sqrt{\left(3x^2+1\right)^3}+C$$

Vậy a = 9; b = 3

Bình luận: Việc xuất hiện căn $\sqrt{3x^2+1}$ ta đặt $t=\sqrt{3x^2+1}$, sau đó vẫn như thói quen, ta biểu diễn dx theo dt .

Câu 9: Cho $A=\int x^5\sqrt{1+x^2}dx=at^7+bt^5+ct^3+C$, với $t=\sqrt{1+x^2}$. Tính $\mathrm{A=a-b-c}$

A. $\frac{12}{79}$ B. $\frac{95}{103}$ C. $\frac{22}{105}$ D. $\frac{48}{109}$

Giải:

Chọn C

Đặt $t=\sqrt{x^2+1}\Leftrightarrow x^2=t^2-1\Rightarrow xdx=tdt$

$$A=\int\left(t^2-1\right)^2t^2dt=\int\left(t^6-2t^4+t^2\right)dt=\frac{t^7}{7}-\frac{2}{5}t^5+\frac{t^3}{3}\Bigg|+C\Rightarrow a=\frac{1}{7};b=-\frac{2}{5};c=\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow a-b-c=\frac{22}{105}$$

Câu 10. Cho $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin^2x\sqrt{1+\cos x}}dx=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\ln\left|a+4\sqrt{3}\right|+\ln\left|b+2\sqrt{2}\right|\right)+1-\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Tính $\mathrm{A}=\frac{15}{2}(\mathrm{a+b})$

A. 30 **B.** 24 **C**. 36 **D.75**

Giải:

Chọn D

Đặt $t=\sqrt{1+\cos x}\Rightarrow t^2=1+\cos x\Rightarrow 2tdt=-\sin xdx$

$$x=\frac{\pi}{3}\Rightarrow t=\sqrt{\frac{3}{2}};x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=1$$

$$C=\int_{\sqrt{\frac{3}{2}}}^{1}\frac{-2tdt}{\left[1-\left(t^2-1\right)^2\right]}=\int_{\sqrt{\frac{3}{2}}}^{1}\frac{2}{t^2\left(t^2-2\right)}dt=2\left[\int_{\sqrt{\frac{3}{2}}}^{1}\left(\frac{1}{t^2-2}-\frac{1}{t^2}\right)dt\right]$$

$$=2\left[\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\ln\left|\frac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}}\right|+\frac{1}{t}\right)\right]\Bigg|_{\sqrt{\frac{3}{2}}}^{1}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\left(2+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}-1\right)}{\left(2-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}+1\right)}\right|+1-\sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\ln\left(7+4\sqrt{3}\right)+\ln\left(3-2\sqrt{2}\right)\right)+1-\sqrt{\frac{2}{3}}\Rightarrow a=7;b=3$$

Câu 11. Cho $I=\int_1^{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}dx=a+\ln b-\ln\sqrt{3}$. Tính $\frac{11}{2}(\mathrm{a}+\mathrm{b}-3)$.

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

Giải:

Chọn A

Đặt $t=\sqrt{1+x^2}\Rightarrow t^2=1+x^2\Rightarrow tdt=xdx$ và $x:1\to\sqrt{3}$ thì $t:\sqrt{2}\to 2$

Khi đó $I=\int_1^{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}xdx=\int_{\sqrt{2}}^2\frac{t}{t^2-1}.tdt=\int_{\sqrt{2}}^2\frac{t^2-1+1}{t^2-1}dt=\int_{\sqrt{2}}^2\left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)dt$

$=\int_{\sqrt{2}}^2\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)\right]dt=\left(t+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right)\Bigg|_{\sqrt{2}}^2=2-\sqrt{2}+\ln\left(\sqrt{2}+1\right)-\frac{1}{2}\ln 3$

$\Rightarrow a=2-\sqrt{2};b=\sqrt{2}+1\Rightarrow\frac{11}{2}(a+b-3)=0$

Bình luận: Việc xuất hiện căn $\sqrt{1+x^2}$ ta đặt $t=\sqrt{1+x^2}$, ta tiếp tục công việc biểu diễn $\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}=\frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}x$ và dồn về ẩn t , có xdx = tdt. Kinh nghiệm cho thấy khi có căn bậc 2 ta cứ đặt căn đó bằng một biến t rồi kiên trì biến đổi là giải được bài toán.

Câu 12. Cho $I=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+3}}=2\ln\left(\frac{2+\sqrt{a}}{1+\sqrt{b}}\right)$. Tính $\mathrm{A}=\mathrm{a}+\mathrm{b}$

A. 3 **B.** 2 **C.** 5 **D.** 7

Giải:

Chọn C

Đặt $t=\sqrt{x+1}+\sqrt{x+3}$

$\Rightarrow dt=\left(\frac{1}{2\sqrt{x+1}}+\frac{1}{2\sqrt{x+3}}\right)dx=\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+3}}{2\sqrt{(x+1)(x+3)}}dx=t.\frac{dx}{2\sqrt{(x+1)(x+3)}}\Leftrightarrow\frac{dx}{\sqrt{(x+1)(x+3)}}=\frac{2dt}{t}$

Và $x:0\to 1$ thì $t:1+\sqrt{3}\to 2+\sqrt{2}$.

Khi đó: $I_4=2\int_{1+\sqrt{3}}^{2+\sqrt{2}}\frac{dt}{t}=2\ln|t|\Big|_{1+\sqrt{3}}^{2+\sqrt{2}}=2\ln\left(\frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}\right)\Rightarrow a=2;b=3$

Câu 13. Cho tích phân $I=\int_a^2(4+\frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}})dx=\frac{28}{3}$. Giá trị a là: (biết a có giá trị nguyên)

A. 0 **B.** 1 **C.** - 1 **D.** 3

Giải:

Chọn A

Ta có $I=\int_a^2 4dx+\int_a^2\frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}}dx$

Tính $B=\int_a^2\frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}}dx$. Đặt $\sqrt{1+x^3}=t\Rightarrow 1+x^3=t^2\Rightarrow x^2dx=\frac{2}{3}tdt$

Khi đó $B=\int_a^2\frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}}dx=\frac{2}{3}\sqrt{1+x^3}\Big|_a^2=2-\frac{2}{3}\sqrt{1+b^3}$

Ta có: $I = 4x + \frac{2}{3}\sqrt{1+x^3}\Big|_a^2 = 10 - \left(4a + \frac{2}{3}\sqrt{1+a^3}\right)$

$\Leftrightarrow \frac{28}{3} = 10 - \left(4a + \frac{2}{3}\sqrt{1+a^3}\right) \Rightarrow 4a + \frac{2}{3}\sqrt{1+a^3} = \frac{2}{3} \Rightarrow 6a + \sqrt{1+a^3} = 1$

$\bullet SHIFT - SOLVE \Rightarrow a = 0$

Luyện tập
Đề 1

Câu 1. Cho tích phân: $I = \int_1^6 \frac{\sqrt{x+3}+1}{x+2}dx = \sqrt{a} + 2\ln a$. Tính $S = 4^3\sqrt{4a}$

A. 10 B. 5 C. 15 D. 8

Câu 2. Cho tích phân $I = \int_0^1 \frac{x^3dx}{x^2+\sqrt{x^4+1}} = \frac{\sqrt{a}-1}{3}$. Giá trị của a là:

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

Câu 3. Tính tích phân $I = \int_a^b \frac{xdx}{\sqrt[3]{2x+2}}(b>0)$. Biết $z = a + bi$ là căn bậc hai của số phức $-\frac{35}{4} - 3i$

A. $\frac{12}{5}$ B. $\frac{7}{5}$ C. $\frac{6}{5}$ D. $\frac{11}{5}$

Câu 4. Tính tích phân $I = \int_1^2 x\left(\sqrt{x-1}+\ln x\right)dx = \frac{19}{a} + \ln b$. Tính $S = \frac{3b^5 - a^2}{3} + 76$

A.100 B.-100 C.-200 D.200

Câu 5. Tính tích phân $I = \int_{.0}^1 x\left(\sqrt{x^2+1}+e^x\right)dx = \frac{\left(\sqrt{a}+b\right)^2 - 1}{3}$. Giá trị của a và b là:

A. 3 và 1 B. 2 và 3 C. 3 và 2 D. 2 và 1

Câu 6. Cho tích phân: $I = \int_0^1 x\left(ax + b\sqrt{3x^2+1}\right)dx = 3$, biết $a - b = -1$. Tính $S = a^3 - b^3$

A.-15 B. 20 C. -19 D. 15

Câu 7. Tính tích phân $I = \int_0^2 \frac{x^5}{\sqrt{x^3+1}}dx = \frac{a}{b}$. Tính $S = \left(\frac{a}{10b}\right)^3 + \left(\frac{a}{10b}\right)^2 - \frac{370}{729}$.

A. $\frac{2}{9}$ B. $-\frac{2}{9}$ C. $\frac{4}{9}$ D. $-\frac{4}{9}$

Câu 8. Cho $\int \frac{1}{\sqrt{1+x+\left(\sqrt{1+x}\right)^3}}dx = f(x) + C$. **Tính** $f'(8) = ?$

A. $\frac{1}{5}$ B. $\frac{4}{5}$ C. $\frac{1}{6}$ D. $\frac{7}{6}$

Câu 9. Cho tích phân $I = \int_{\sqrt{5}}^{2\sqrt{3}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4}} = \ln a - \ln b$. Tính $e^{8(\ln 2a - \ln 2b)}$

A. $\frac{4}{9}$ **B.** $\frac{25}{9}$ **C.** $\frac{9}{4}$ **D.** $\frac{9}{25}$

Câu 10. Cho tích phân $I=\int_1^2 \frac{x}{1+\sqrt{x-1}}dx=\frac{a}{b}-\ln 16$. Giá trị của a và b là bao nhiêu (a, b tối giản)

A. 4 và 15 B. 5 và 3 C. 6 và 3 D. 5 và 6

Đề 2

Câu 1. Cho $I=\int_1^e \frac{\sqrt{1+3\ln x}\ln x}{x}dx==a\left(3\sqrt{(1+3\ln x)^5}-5\sqrt{(1+3\ln x)^3}\right)\Big|_1^e$. Giá trị của a là

A. $\frac{7}{125}$ B. $\frac{2}{135}$ C. $\frac{9}{145}$ D. $\frac{4}{115}$

Câu 2. Cho $I=\int \frac{\sin 2x+\sin x}{\sqrt{1+3\cos x}}dx=f(x)+C$. Biết rằng f(x) không có hằng số tự do. Tính f(0)

A. $\frac{5}{27}$ B. $\frac{13}{27}$ C. $\frac{44}{27}$ D. $\frac{19}{27}$

Câu 3. Cho $\int \sqrt[6]{1-\cos^3 x}.\sin x.\cos^5 x dx=2\left(\frac{t^\alpha}{\alpha}-\frac{t^\beta}{\beta}\right)+C$ với $t=\sqrt[6]{1-\cos^3 x}$. Tỉ số $\frac{\alpha}{\beta}$ bằng bao nhiêu?

A. $\frac{5}{13}$ B. $\frac{7}{5}$ C. $\frac{7}{13}$ D. $\frac{5}{6}$

Câu 4. Tìm nguyên hàm của $I=\int_0^7 \frac{(x+2)dx}{\sqrt[3]{x+1}}=\frac{a}{b}$ biết rằng a,b tối giản . Tính a + b

A. 214 B. 124 C. 421 D. 241

Câu 5. Cho $I=\int \frac{\ln^2 x}{x\sqrt{\ln x+1}}dx=a\left(bt^5+ct^3+d.t\right)+C$, biết $t=\sqrt{\ln x+1}$. Tính $A=abcd$

A. -30 B. -60 C. -45 D. -27

Câu 6. Cho $I=\int_\alpha^\beta \frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos^2 x+4\sin^2 x}}dx=\frac{2}{3}$, biết $\begin{cases}\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}\\ \alpha,\beta\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]\end{cases}$. **Tính** $A=\cos(\alpha)$

A. $\frac{1}{2}$ B. 1 C. $-\frac{1}{2}$ D. 0

Câu 7. Tính $B=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\cos x}\sin x dx=a+\frac{4\sqrt{b}-2}{3}$. Tính $A=\sin^4 a+b^4$

A. $\frac{43}{4}$ B. 29 C. $\frac{37}{4}$ D. 16

Câu 8. $I=\int_1^a \frac{3-2\ln x}{x\sqrt{1+2\ln x}}dx=\frac{5}{3}$. Giá trị của a là:

A. e^3 B. e^2 C. e D. $\sqrt{e^3}$

Câu 9. $I=\int \frac{e^{2x}dx}{\sqrt{e^x-1}}=at^3+bt+C$ .Với $t=\sqrt{e^x-1}$; Tính $\mathrm{A}=\mathrm{a}^2+\mathrm{b}^2$

A. $\frac{52}{9}$ B. $\frac{40}{9}$ C. $\frac{47}{9}$ D. $\frac{46}{9}$

Câu 10. Cho $I=\int_0^{\ln 3}\frac{e^x dx}{\left(e^x+1\right)\sqrt{e^x+1}}=\sqrt{a}+b$. Tính $\mathrm{A}=2\left(\mathrm{a}^4+\mathrm{b}^4\right)$

A. 23 B. 34 C. 21 D. 45

Đề 3

Câu 1. Cho tích phân sau $I=\int_0^1\frac{2x+1}{1+\sqrt{3x+1}}dx=\frac{28}{27}-\frac{b}{a}\ln\frac{a}{b}$.

Tính $\mathrm{S}=\cos^2\left(\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}\right)+\frac{3997-\cos\mathrm{a}}{\mathrm{b}}$ **. Biết a, b tối giản.**

A. $\cos^2(5)+\cos(5)+1999$ B. 1999

C. 2016 D. $\cos^2(3)+\cos(3)+2016$

Câu 2. Tính tích phân: $I=\int_1^6\frac{\sqrt{x+3}+1}{x+2}dx=a+\ln b$.Tính $\mathrm{S}=\left|z+\bar{z}\right|$. Biết $z=a+bi$.

A. 2 B. 4 C. 3 D. 1

Câu 3. Tính tích phân $I=\int_5^{10}\frac{\sqrt{x^3+3x^2-4}}{x-2}dx=a+\ln b$. Chọn phát biểu đúng

A. a < b B. a = b C. b < 21 D. a, b đều nguyên

Câu 4. Cho tích phân: $I=\int_1^e x\ln x dx=\frac{e^2+b}{a}$. Tính $\mathrm{S}=\mathrm{ab}$.

A. 12 B. 4 C. 6 D. 8

Câu 5. Cho tích phân: $\int_0^7 x.\sqrt[3]{x+1}dx=\frac{a}{b}$. Giá trị của a là: (biết a, b tối giải)

A. 64 B. 356 C. 346 D. 1029

Câu 6. Cho tích phân $\int_{-1}^1\frac{dx}{1+x+\sqrt{1+x^2}}=a$. Tính $\mathrm{S}=(\mathrm{ai})^{2016}+(\mathrm{ai})^{2000}$

A. 3 B. 2 C. 0 D. 1

Câu 7. Tính tích phân: $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\cos x}(\sin x)dx=\frac{4\sqrt{a}-b}{3}$. Tính $\mathrm{S}=\sin^4 \mathrm{a}\pi+\mathrm{b}^4$

A. 1 B. 9 C. 25 D.16

Câu 8. Cho tích phân $\int_{e^3}^{e^8}\frac{dx}{x\ln x\sqrt{\ln ex}}=\ln a-\ln b$. Tính $\mathrm{S}=\cos^2(\mathrm{a}+\mathrm{b})-\frac{\cos\left(\frac{10\mathrm{ab}}{6}\right)+11}{2}$

A.-10 B.-5 C.-20 D.-40

Câu 9. Cho tích phân: $I=\int\limits_0^2 \frac{2x^3-3x^2+x}{\sqrt{x^2-x+1}}dx=\frac{b}{a}+1$. Tính $S=\log_{729}^2(a)+\log_{1999}^2(b)$? biết a, b tối giản.

A. $\frac{1}{9}$ B. $\frac{1}{27}$ C. $\frac{1}{81}$ D. $\frac{1}{36}$

Câu 10. Cho $D=\int\frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}}dx=\frac{(3x+1)\sqrt[3]{(3x+1)^2}+b\sqrt[3]{(3x+1)^2}}{a}+C$. **Tìm a + b**

A. 20 B. 75 C. 55 D. 45

Lời giải
Đề 1

Câu 1. Chọn D

Đặt: $t=\sqrt{x+3}\Leftrightarrow x=t^2-3\Rightarrow dx=2tdt$

Đổi cận: $\left|\begin{matrix}x=6\\x=1\end{matrix}\right.\Rightarrow\left|\begin{matrix}t=3\\t=2\end{matrix}\right.$

Suy ra

$$I=2\int\limits_2^3\frac{t^2+t}{t^2-1}dt=2\int\limits_2^3\frac{t}{t-1}dt=2\int\limits_2^3\left(1+\frac{t}{t-1}\right)dt=2\left(t+\ln|t-1|\right)\Big|_2^3=2+2\ln 2\Rightarrow a=2$$

$S=8$

Câu 2. Chọn B

Ta có: $I=\int\limits_0^1 x^3\sqrt{x^4+1}dx-\int\limits_0^1 x^5dx$

$\int\limits_0^1 x^5dx=\left[\frac{x^6}{6}\right]_0^1=\frac{1}{6}$

Đặt $t=\sqrt{x^4+1}\Rightarrow t^2=x^4+1\Rightarrow tdt=2x^3dx$

Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=1;\ x=1\Rightarrow t=\sqrt{2}$

Suy ra: $I=\frac{1}{2}\int\limits_1^{\sqrt{2}}t^2dt=\frac{1}{2}\left[\frac{t^3}{3}\right]_1^{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{3}-\frac{1}{6}$

Vây $I=\frac{\sqrt{2}-1}{3}\Rightarrow a=2$

Câu 3. Chọn A

Theo đề: $(a+bi)^2=\frac{-35}{4}-3i\Leftrightarrow\begin{cases}a^2-b^2=\frac{-35}{4}\\2ab=-3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-\frac{1}{2}\\b=3(b>0)\end{cases}$

Đặt $t=\sqrt[3]{2x+2}\Rightarrow x=\frac{t^3-2}{2}\Rightarrow dx=\frac{3t^2dt}{2}$

Đổi cận: $x=-\frac{1}{2}\Rightarrow t=1;x=3\Rightarrow t=2$

$$I=\int_1^2\frac{\frac{t^3-2}{2}.\frac{3t^2}{2}}{t}dt=\frac{3}{4}\int_1^2\left(t^4-2t\right)dt\ \frac{3}{4}\left[\frac{t^5}{5}-t^2\right]_1^2=\frac{12}{5}$$

Câu 4. Chọn B

$I_1=\int_1^2 x\sqrt{x-1}dx$. Đặt $u=\sqrt{x-1}$, ta được

$$I_1=\int_1^2\left(u^2+1\right).u.2udu=2\left(\frac{u^5}{5}+\frac{u^3}{3}\right)\Big|_0^1=\frac{16}{15}$$

$I_2=\int_1^2 x\ln xdx$. Đặt $u=\ln x,dv=xdx$, ta được

$$I_2=\frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^2-\int_1^2\frac{x}{2}dx=\left(\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}\right)\Big|_1^2=2\ln 2-\frac{3}{4}$$

$$I=\frac{19}{60}+2\ln 2\Rightarrow a=60,b=4\ S=\frac{3.4^5-60^2}{3}+76=-100$$

Câu 5. Chọn D

Ta có: $I=\int\limits_0^1 x\sqrt{x^2+1}dx+\int\limits_0^1 xe^x dx=I_1+I_2$

Đặt $u=\sqrt{x^2+1}\Leftrightarrow u^2=x^2+1\Rightarrow udu=xdx$

Đổi cận $x=0\Rightarrow u=1;x=1\Rightarrow u=\sqrt{2}$, ta có $I_1=\int\limits_1^{\sqrt{2}}u^2du=\frac{u^3}{3}\Big|_1^{\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}-1}{3}$

Đặt $\begin{cases}u=x\\dv=e^xdx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=dx\\x=e^x\end{cases}$, ta có $I_2=xe^x\Big|_0^1-\int\limits_0^1 e^xdx=e-e^x\Big|_0^1=1$

Vậy $I=I_1+I_2=\frac{2\sqrt{2}-1}{3}+1=\frac{2\sqrt{2}+2}{3}=\frac{\left(\sqrt{2}+1\right)^2-1}{3}\Rightarrow a=2,b=1$

Câu 6. Chọn C

Ta có: $I=\int\limits_0^1 ax^2dx+\int\limits_0^1 bx\sqrt{3x^2+1}dx=\left(\frac{ax^3}{3}\right)\Bigg|_0^1+\int\limits_0^1 bx\sqrt{3x^2+1}dx$

+) Xét $A=\int\limits_0^1 bx\sqrt{3x^2+1}dx$

Đặt $\sqrt{3x^2+1}=t\Leftrightarrow 3x^2+1=t^2\Leftrightarrow xdx=\frac{1}{3}tdt$

Đổi cận $x=0\Rightarrow t=1;x=1\Rightarrow t=2\Rightarrow A=\int\limits_1^2\frac{bt^2}{3}dt=b\left(\frac{t^3}{9}\right)\Bigg|_1^2=\frac{8b}{9}-\frac{b}{9}=\frac{7b}{9}$

Vậy $I=\left(\frac{ax^3}{3}\right)\Bigg|_0^1+\frac{7b}{9}=\frac{a}{3}+\frac{7b}{9}$

Ta có hệ $\begin{cases}\frac{a}{3}+\frac{7b}{9}=3\\a-b=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=2\\b=3\end{cases}\Rightarrow S=-19$

Câu 7. Chọn A

Ta có $I=\int_0^2 \frac{x^2.x^3}{\sqrt{x^3+1}}dx$. Đặt $t=\sqrt{x^3+1}$, khi đó với x = 0 thì t = 1, x = 2 thì t = 3

Và $dt=\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+1}}dx \Rightarrow \frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}}dx=\frac{2}{3}dt,\ \ x^3=t^2-1$

Suy ra $I=\frac{2}{3}\int_1^3\left(t^2-1\right)dt=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}t^3-t\right)\Big|_1^3=\frac{2}{3}\left(\frac{26}{3}-2\right)=\frac{40}{9}$

Vậy $I=\int_0^2\frac{x^5}{\sqrt{x^3+1}}dx=\frac{40}{9}$

Câu 8. Chọn C

Đặt $u=\sqrt{1+x}\Rightarrow u^2=1+x\Rightarrow 2udu=dx$

Vậy $\int\frac{1}{\sqrt{1+x+\left(\sqrt{1+x}\right)^3}}dx=\int\frac{2udu}{\sqrt{u^3+u^2}}=2\int\frac{du}{\sqrt{u+1}}$

Đặt $t=\sqrt{u+1}\Rightarrow t^2=u+1\Rightarrow 2tdt=du$

$\Rightarrow 2\int\frac{du}{\sqrt{u+1}}=2\int\frac{2tdt}{t}=4t+C=4\sqrt{1+\sqrt{1+x}}+C$

Do đó $f\left(x\right)=4\sqrt{1+\sqrt{1+x}}\Rightarrow f'\left(8\right)=\frac{1}{6}$

Câu 9. Chọn D

Ta có: $I=\int\limits_{\sqrt{5}}^{2\sqrt{3}}\frac{dx}{x\sqrt{x^2+4}}=\int\limits_{\sqrt{5}}^{2\sqrt{3}}\frac{xdx}{x^2\sqrt{x^2+4}}$

Đặt $t=\sqrt{x^2+4}\Rightarrow t^2-4=x^2, dt=\frac{xdx}{\sqrt{x^2+4}}$

Đổi cận $\left[\begin{array}{l}x=2\sqrt{3}\\x=\sqrt{5}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}t=4\\t=3\end{array}\right.$

$I=\int\limits_3^4\frac{dt}{t^2-4}=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right|\Bigg|_3^4=\frac{1}{4}\left(\ln\frac{1}{3}-\ln\frac{1}{5}\right)=\frac{1}{4}\ln\frac{5}{3}=\ln\sqrt[4]{5}-\ln\sqrt[4]{3}\Rightarrow a=\sqrt[4]{5};b=\sqrt[4]{3}$

$A=e^{8\ln\frac{a}{b}}=\frac{25}{9}$

Câu 10. Chọn B

Đặt $t=\sqrt{x-1}\Rightarrow t^2=x-1\Rightarrow 2tdt=dx$

Đổi cận $\left[\begin{array}{l}x=2\\x=1\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\t=0\end{array}\right.$

$\int\limits_0^1\frac{(t^2+1).2t.dt}{t+1}=2\int\limits_0^1(t^2-t+2-\frac{2}{t+1})dt=2\left[\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}+2t-2\ln\left|t+1\right|\right]\Bigg|_0^1=\frac{5}{6}-2\ln 2$

$\Rightarrow a=5;b=3$

Đề 2

Câu 1. Chọn B

Đặt $t=\sqrt{1+3\ln x}\Rightarrow t^2=1+3\ln x\Rightarrow 2tdt=\dfrac{3dx}{x}$

Đổi cận $\left[\begin{array}{l}x=e\\x=1\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}t=2\\t=1\end{array}\right.$

$$I=\int_1^2\frac{t\left(t^2-1\right)}{3}\times\frac{2tdt}{3}=\frac{2}{9}\int_1^2\left(t^4-t^2\right)dt=\frac{2}{9}\left[\frac{t^5}{5}-\frac{t^3}{3}\right]_1^2=\frac{116}{135}$$

$A=\dfrac{2}{9.15}=\dfrac{2}{135}$

Câu 2. Chọn C

Đặt $t=\sqrt{1+3\cos x}\Rightarrow t^2=1+3\cos x\Rightarrow 2tdt=-3\sin xdx$

$$I=\int\frac{2}{9}\left(2t^2+1\right)dt=\frac{2}{9}\left(\frac{2t^3}{3}+t\right)+C=\frac{2}{9}\left(\frac{2\sqrt{\left(1+3\cos x\right)^3}}{3}+\sqrt{1+3\cos x}\right)+C$$

$$\Rightarrow f\left(x\right)=\frac{2}{9}\left(\frac{2\sqrt{\left(1+3\cos x\right)^3}}{3}+\sqrt{1+3\cos x}\right)\Rightarrow f\left(0\right)=\frac{44}{27}$$

Câu 3. Chọn C

Ta có: $\int\sqrt[6]{1-\cos^3 x}\sin x\cos^5 xdx=\int\sqrt[6]{1-\cos^3 x}.\cos^3 x.\sin x.\cos^2 xdx$

Đặt $t=\sqrt[6]{1-\cos^3 x}\Rightarrow t^6=1-\cos^3 x\Rightarrow 6t^5dt=3\sin x\cos^2 xdx\Rightarrow\cos^3 x=1-t^6$

$$\int t.(1-t^6).2t^5.dt=\int(2t^6-2t^{11}).dt=\frac{2t^7}{7}-\frac{2t^{13}}{13}\Rightarrow\alpha=7;\beta=13\Rightarrow\frac{\alpha}{\beta}=\frac{7}{13}$$

Câu 4. Chọn D

Đặt $t=\sqrt[3]{x+1}\Rightarrow x=t^3-1\Rightarrow dx=3t^2dt\Rightarrow x+2=t^3+1$

Đổi cận $\left[\begin{array}{l}x=7\\x=0\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}t=2\\t=1\end{array}\right.$

Vậy $I=\displaystyle\int_1^2\frac{\left(t^3+1\right)3t^2}{t}dt=3\int_1^2\left(t^4+t\right)dt=3\left[\frac{t^5}{5}+\frac{t^2}{2}\right]_1^2=\frac{231}{10}$

Do đó a = 231 , b = 10 . tính được a + b = 241 .

Câu 5. Chọn A

Đặt $t=\sqrt{\ln x+1}\Rightarrow t^2=\ln x+1\Rightarrow 2tdt=\dfrac{dx}{x}$ và $t^2-1=\ln x$

Đổi cận $\left[\begin{array}{l}x=e^3\\x=1\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}t=2\\t=1\end{array}\right.$

Ta có: $I=\displaystyle\int_1^2\frac{t^4-2t^2+1}{t}2tdt=2\int_1^2\left(t^4-2t^2+1\right)dt=2\left[\frac{t^5}{5}-\frac{2t^3}{3}+t\right]_1^2=\frac{76}{15}$

$$I=2\left(\frac{t^5}{5}-\frac{2t^3}{3}+t\right)+C=\frac{2}{15}\left(3t^5-10t^3+15t\right)+C\Rightarrow\begin{cases}a=\dfrac{2}{15}\\b=3\\c=-10\\d=15\end{cases}$$

Câu 6. Chọn B

Đặt $t=\sqrt{\cos^2 x+4\sin^2 x}=\sqrt{1+3\sin^2 x}\Rightarrow t^2=1+3\sin^2 x\Rightarrow 2tdt=6\sin x\cos xdx\Leftrightarrow \sin 2xdx=\frac{2}{3}tdt$

Và cận $t:1\to 2\Rightarrow I_1=\frac{2}{3}\int_1^2\frac{tdt}{t}=\frac{2}{3}\int_1^2 dt=\frac{2}{3}t\Big|_1^2=\frac{2}{3}$

$\sqrt{1+3\sin^2\beta}-\sqrt{1+3\sin^2\alpha}=1\Leftrightarrow\sqrt{1+3\cos^2\alpha}-\sqrt{1+3\sin^2\alpha}=1$

$\Leftrightarrow\sqrt{1+3t^2}-\sqrt{1+3\left(1-t^2\right)}=1\Leftrightarrow t=1=\cos\alpha$

Câu 7. Chọn D

Đặt $t=\sqrt{1+\cos x}\Rightarrow t^2=1+\cos x\Rightarrow 2tdt=-\sin xdx$ và cận $t:\sqrt{2}\to 1$

$\Rightarrow B=2\int_1^{\sqrt{2}}t.tdt=2\int_1^{\sqrt{2}}t^2dt=\frac{2t^3}{3}\Big|_1^{\sqrt{2}}=\frac{4\sqrt{2}-2}{3}.$

$a=2,b=2$

$\Rightarrow\sin^4 a+b^4=16$

Câu 8. Chọn D

Đặt $t=\sqrt{1+2\ln x}\Rightarrow t^2=1+2\ln x\Rightarrow\begin{cases}tdt=\frac{dx}{x}\\2\ln x=t^2-1\end{cases}$ và cận $t:1\to 2;a\to b=\sqrt{1+2\ln x}\succ 0$

$\Rightarrow I=\int_1^b\frac{3-\left(t^2-1\right)}{t}.tdt=\int_1^b\left(4-t^2\right)dt=\left(4t-\frac{t^3}{3}\right)\Big|_1^b=\frac{5}{3}$

Giải ra ta được b = 2 ; và b = -1/4 (loại) .

Câu 9. Chọn B

Đặt $t=\sqrt{e^x-1}\Rightarrow t^2=e^x-1\Rightarrow\begin{cases}2tdt=e^xdx\\e^x=t^2+1\end{cases}$ và

$\Rightarrow I=\int\frac{e^x.e^xdx}{\sqrt{e^x-1}}=\int\frac{\left(t^2+1\right).2tdt}{t}=2\int\left(t^2+1\right)dt=2\left(\frac{t^3}{3}+t\right)\Big|+C\Rightarrow a=\frac{2}{3};b=2$

$\Rightarrow a^2+b^2=\frac{40}{9}$

Câu 10. Chọn B

Đặt $t=\sqrt{e^x+1}\Rightarrow t^2=e^x+1\Rightarrow 2tdt=e^xdx$ và $x:0\to\ln 3$ thì $t:\sqrt{2}\to 2$

$\Rightarrow I_2=\int_{\sqrt{2}}^2\frac{2tdt}{t^2.t}=2\int_{\sqrt{2}}^2\frac{dt}{t^2}=-\frac{2}{t}\Big|_{\sqrt{2}}^2=\sqrt{2}-1\Rightarrow a=2;b=-1$

$\Rightarrow 2\left(a^4+b^4\right)=34$

Đề 3

Câu 1. Chọn B

Đặt $\sqrt{3x+1}=t$ ta được $x=\frac{t^2-1}{3}\Rightarrow dx=\frac{2}{3}tdt$

Đổi cận $x=0\Rightarrow t=1; x=1\Rightarrow t=2$

Khi đó: $I=\frac{2}{9}\int_1^2\frac{2t^3+t}{1+t}dt=\frac{2}{9}\int_1^2\left(2t^2-2t+3-\frac{3}{t+1}\right)dt$

$=\frac{28}{27}-\frac{2}{3}\ln\frac{3}{2}\Rightarrow a=3,b=2$

$S=\cos^2\left(\frac{3}{2}\right)+\frac{3997-\cos(3)}{2}=\frac{1+\cos(3)}{2}+\frac{3997-\cos(3)}{2}=1999$

Câu 2. Chọn B

Đặt $t=\sqrt{x+3}\Rightarrow x=t^2-3\Rightarrow dx=2tdt$

Đổi cận $x=6\Rightarrow t=3;\ x=1\Rightarrow t=2$

$$I=2\int_2^3\frac{(t+1)t}{t^2-1}dt=2\int_2^3\frac{t}{t+1}dt=2\int_2^3\left(1+\frac{1}{t-1}\right)dt=2\left(t+\ln|t-1|\right)\Big|_2^3=2+2\ln 2$$

Do đó $a=2,b=4$

Câu 3. Chọn C

- Tính tích phân: $I=\int_5^{10}\frac{\sqrt{x^3+3x^2-4}}{x-2}dx$
- $I=\int_5^{10}\frac{\sqrt{(x-1)(x+2)^2}}{x-2}dx=\int_5^{10}\frac{(x+2)\sqrt{(x-1)}}{x-2}dx$
- Đặt $u=\sqrt{x-1}\Leftrightarrow u^2=x-1\Rightarrow\begin{cases}2udu=dx\\x=u^2+1\end{cases}$, đổi cận : $\begin{matrix}x:\ 5\to 10\\u:\ 2\to 3\end{matrix}$
- Ta có : $I=\int_2^3\frac{(u^2+3)u.2udu}{u^2-1}=2.\int_2^3(u^2+4+\frac{4}{u^2-1})du=2(\frac{1}{3}u^3+4u)\Big|_2^3+8\int_2^3\frac{du}{u^2-1}$

$$I=\frac{62}{3}+4\int_2^3(\frac{1}{u-1}-\frac{1}{u+1})du=\frac{62}{3}+4\ln\frac{u-1}{u+1}\Big|_2^3\Leftrightarrow I=\frac{62}{3}+4\ln\frac{3}{2}\Rightarrow a=\frac{62}{3},b=\frac{81}{16}$$

Câu 4. Chọn B

$$\begin{cases}u=\ln x\\dv=xdx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\frac{dx}{x}\\v=\frac{x^2}{2}\end{cases}$$

$$\int_1^e x\ln xdx=\frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^e-\frac{1}{2}\int_1^e xdx=\frac{e^2}{2}-\frac{x^2}{4}\Big|_1^e=\frac{e^2+1}{4}$$

Do đó a = 4, b = 1 suy ra S = 4

Câu 5. Chọn D

$I=\int_0^7 x.\sqrt[3]{x+1}dx$

Tìm nguyên hàm $\int x.\sqrt[3]{x+1}dx$

Đặt $t=\sqrt[3]{x+1}\Rightarrow t^3=x+1\Rightarrow x=t^3-1\Rightarrow 3t^2dt=dx$

khi x = a thì $t=\sqrt[3]{a+1}$

$$I=\int(t^3-1)3t^3dt=\int(3t^6-3t^3)dt=3\left(\frac{t^7}{7}-\frac{t^4}{4}\right)=\frac{3\sqrt[3]{(x+1)^7}}{7}-\frac{\sqrt[3]{(x+1)^4}}{4}+C$$

Thay cận 7 và 0 vào ta tìm được $I=\frac{1029}{28}$

Vậy a = 1029

Câu 6. Chọn B

Đặt $u=x+\sqrt{1+x^2}$ thì $u-x=\sqrt{1+x^2}\Rightarrow x^2-2ux+u^2=1+x^2$

$\Rightarrow x=\frac{u^2-1}{2u}\Rightarrow dx=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{u^2}\right)du$

Đổi cận $x=-1$ thì $u=\sqrt{2}-1$, $x=1$ thì $u=\sqrt{2}+1$

$$\Rightarrow I=\int_{\sqrt{2}-1}^{\sqrt{2}+1}\frac{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{u^2}\right)du}{1+u}=\frac{1}{2}\int_{\sqrt{2}-1}^{\sqrt{2}+1}\frac{du}{1+u}+\frac{1}{2}\int_{\sqrt{2}-1}^{\sqrt{2}+1}\frac{du}{(1+u)u^2}$$

$$=\frac{1}{2}\int_{\sqrt{2}-1}^{\sqrt{2}+1}\frac{du}{1+u}+\frac{1}{2}\int_{\sqrt{2}-1}^{\sqrt{2}+1}\left(\frac{1}{u^2}-\frac{1}{u}+\frac{1}{u+1}\right)du=1\Rightarrow a=1$$

$$S=i^{2016}+i^{2000}=\left(i^2\right)^{1008}+\left(i^2\right)^{1000}=(-1)^{1008}+(-1)^{1000}=2$$

Câu 7. Chọn D

$$I=\int_0^1 x^2\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)dx=\int_0^1 x^2dx+\int_0^1 x^3\sqrt{1-x^2}dx$$

$$I_1=\int_0^1 x^2dx=\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1=\frac{1}{3}$$

$$I_2=\int_0^1 x^3\sqrt{1-x^2}dx$$

Đặt $t=\sqrt{1-x^2}\Rightarrow x^2=1-t^2\Rightarrow xdx=-tdt$

Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=1$; $x=1\Rightarrow t=0$

$$\Rightarrow I_2=-\int_1^0\left(1-t^2\right)t^2dt=\int_0^1\left(t^2-t^4\right)dt=\left.\left(\frac{t^3}{3}-\frac{t^5}{5}\right)\right|_0^1=\frac{2}{15}$$

Vậy $I=I_1+I_2=\frac{7}{15}$

$i^{98}=\left(i^2\right)^{49}=-1$

$$\Rightarrow I=\frac{a}{b}-1=\frac{7}{15}\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{22}{15}\Rightarrow\begin{cases}a=22\\b=15\end{cases}\Rightarrow S=22^3-15^3=7273$$

Câu 8. Chọn B

$$I=\int_{e^3}^{e^8}\frac{dx}{x\ln x\sqrt{\ln x}}=\int_{e^3}^{e^8}\frac{dx}{x\ln x\sqrt{1+\ln x}}$$

Đặt $t=\sqrt{1+\ln x}$; $x=e^3$ thì $t=2$; $x=e^8$ thì $t=3$

$t^2=1+\ln x$

$2tdt=\frac{dx}{x}$; $\ln x=t^2-1$

$$I=\int_2^3\frac{2tdt}{\left(t^2-1\right)t}=\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\Bigg|_2^3=\ln 3-\ln 2\Rightarrow a=3,b=2$$

$$S=\cos^2\left(3+2\right)-\frac{\cos\left(\frac{10.3.2}{6}\right)+11}{2}=-5$$

Câu 9. Chọn D

Đặt $t=\sqrt{x^2-x+1}\Rightarrow dt=\frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}}dx$; với $x=0\Rightarrow t=1$, với $x=2\Rightarrow t=\sqrt{3}$

$$\Rightarrow I=2\int_1^{\sqrt{3}}\left(t^2-1\right)dt=2\left(\frac{1}{3}t^3-t\right)\Bigg|_1^{\sqrt{3}}=\frac{4}{3}\text{ , vậy } I=\frac{4}{3}=\frac{b}{a}+1\Rightarrow\frac{b}{a}=\frac{1}{3}\Rightarrow b=1;a=3$$

$$S=\log_{729}^2\left(3\right)+\log_{1999}^2\left(1\right)=\frac{1}{36}$$

Câu 10. Chọn A.

Đặt $t=\sqrt[3]{3x+1}\Leftrightarrow t^3=3x+1\Rightarrow t^2dt=dx$

$$x=0\Rightarrow t=1;x=\frac{t}{3}\Rightarrow t=2$$

$$D=\int_1^2\frac{\left(t^3+2\right)t^2}{3t}dt=\frac{1}{3}\int_1^2\left(t^4+2t\right)dt=\frac{1}{3}\left(\frac{t^5}{5}+t^2\right)\Bigg|_1^2=\frac{46}{15}$$

Do đó a = 15; b = 5

Chuyên đề tích phân lượng giác

Để học phần này các em cần phải nhớ các nội dung sau: Đó kiến thức nguyên hàm của hàm lượng giác cơ bản, các công thức lượng giác như hạ bậc …:

$\int\sin xdx=-\cos x+C$ | $\int\sin axdx=-\frac{1}{a}\cos ax+C$

$\int\cos xdx=\sin x+C$ | $\int\cos axdx=\frac{1}{a}\sin ax+C$

$\int\frac{1}{\cos^2 x}dx=tgx+C$ | $\int\frac{1}{\cos^2 ax}dx=\frac{1}{a}tgax+C$

$\int\frac{1}{\sin^2 x}dx=-\cot x+C$ | $\int\frac{1}{\sin^2 ax}dx=-\frac{1}{a}\cot x+C$

Công thức hạ bậc cần nhớ:

$\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$ | $\tan^2 x+1=\frac{1}{\cos^2 x}$

$\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$ | $\cot^2 x+1=\frac{1}{\sin^2 x}$

$$\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x\Rightarrow\cos^3 x=\frac{3\cos x+\cos 3x}{4}$$

$$\sin 3x=3\sin-4\sin^3 x\Rightarrow\sin^3 x=\frac{3\sin x-\sin 3x}{4}$$

Nhớ các công thức vi phân sau đây:

$1)d\left(\cos x\right)=-\sin x dx$ $\quad$ $2)d\left(\sin x\right)=\cos x.dx$

$3)d\left(\tan\right)=\dfrac{dx}{\cos^2 x}$ $\quad$ $4)d\left(\cot\right)=\dfrac{-dx}{\sin^2 x}$

Công thức tính phân: $\int_a^b f\left(x\right)dx=F\left(x\right)\Big|_a^b=F\left(a\right)-F\left(b\right)\left(1\right)$

Vì vậy công việc tính tích phân quan trọng nhất vẫn là tìm được nguyên hàm của hàm số, còn việc thay cận a, b vào F(x) như công thức (1) trên rất dễ dạng, chỉ là tính toán mà thôi.

Biến đổi hàm lượng giác

Câu 1:

$$A=\int \tan x dx=\int\frac{\sin x}{\cos x}dx=-\int\frac{d\left(\cos x\right)}{\cos x}=-\ln\left|\cos x\right|+C$$

Câu 2:

$$C=\int\frac{1}{\sin x}dx=\int\frac{\sin x}{\sin^2 x}dx=\int\frac{\sin x}{1-\cos^2 x}dx\ .$$

$$=-\int\frac{d\cos x}{\left(1-\cos x\right)\left(1+\cos x\right)}=-\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1+\cos x}+\frac{1}{1-\cos x}\right)d\cos x=-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\cos x}{1-\cos x}\right|+C$$

Câu 3:

$$A=\int\sin^3 x dx=\int\sin^2 x.\sin x dx=-\int\left(1-\cos^2 x\right)d\cos x=\left(-\cos x+\frac{\cos^3 x}{3}\right)+C$$

Câu 4:

$$B=\int\cos^5 x dx=\int\cos^4 x.\cos x dx=\int\left(1-\sin^2 x\right)^2.\cos x dx=\int\left(1-2\sin^2 x+\sin^4 x\right)d\sin x$$

$$=\left(\sin x-\frac{2}{3}\sin^3 x+\frac{1}{5}\sin^5 x\right)+C$$

Câu 5: Tính: $I=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin^3 x}dx$

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin^3 x}dx=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin^4 x}dx=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\left(1-\cos^2 x\right)^2}dx=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{-d\left(\cos x\right)}{\left(1-\cos^2 x\right)^2}$$

Đặt $t=\cos x\Rightarrow dt=-\sin x dx\Rightarrow \sin x dx=-dt$

$x=\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow t=0$

$x=\dfrac{\pi}{3}\Rightarrow t=\dfrac{1}{2}$

$$I=\int_{\frac{1}{2}}^{0}\frac{-dt}{\left(1-t^2\right)^2}=\int_0^{\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{\left(1-t^2\right)^2}\right]dt=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{1+t}+\frac{1}{1-t}\right]^2dt=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{\left(1+t\right)^2}+2.\frac{1}{1-t}.\frac{1}{1+t}+\frac{1}{\left(1-t\right)^2}\right]dt$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{(1+t)^2}dt+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{(1-t)}.\frac{1}{(1+t)}dt+\frac{1}{4}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{(1-t)^2}dt$$

$$I=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\ln 3$$

Biện luận : Câu này vẫn có hàm số cosx mũ lẻ ở mẫu , chính vì vậy mà chúng ta nhân cả tử và mẫu với cosx để được như sau: $\frac{1}{\sin^3 x}=\frac{\sin x}{\sin^4 x}=\frac{\sin x}{(1-\cos^2 x)^2}$

Tương tự với hàm: $\frac{1}{\sin x},\frac{1}{\sin^5 x},\frac{1}{\cos^3 x},\frac{1}{\sin x.\cos x},\frac{1}{\sin^3 x.\cos x},\frac{1}{\sin x.\cos^3 x}...$

Kinh nghiệm: Với hàm sinx và cosx mũ lẻ ta sẽ tìm cách nhân thêm (dạng phân thức $\sin^3 x$) hoặc tách (dạng không phân thức $\frac{1}{\sin x},\frac{1}{\sin^5 x},\frac{1}{\cos^3 x}$) để tạo ra hàm chẵn với sinx, cosx.

1. HÀM DÙNG CÔNG THỨC HẠ BẬC

Câu 6:

$$C=\int\sin^4 xdx=\int\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2dx=\frac{1}{4}\int\left(1-2\cos 2x+\cos^2 2x\right)dx=\frac{1}{4}\int\left(1-2\cos 2x+\frac{1+\cos 4x}{2}\right)dx$$

$$=\frac{1}{4}\int\left(\frac{3}{2}-2\cos 2x+\frac{1}{2}\cos 4x\right)dx=\frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}x-\sin 2x+\frac{1}{8}\sin 4x\right)+C$$

Câu 7 :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 2x}{2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 2x}{2}dx=\frac{1}{2}x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{4}\sin 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}$$

(Kinh nghiệm khi có bậc cao, các em nên hạ bậc rồi tiếp tục công việc tiếp theo dung các hàm cơ bản các em nhé)

Câu 8 : $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5 xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 x.\cos xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\sin^2 x\right)^2.\cos xdx$

Đặt: $\sin x=t\Rightarrow dt=\cos xdx$

$x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=1$ $\qquad x=0\Rightarrow t=0$

$$\int_0^1\left(1-t^2\right)dt=\int_0^1\left(1-2t^2+t^4\right)dt=\left(t-\frac{2t^3}{3}+\frac{t^5}{5}\right)\Bigg|_0^1=\left(1-\frac{2}{3}+\frac{1}{5}\right)=\frac{8}{5}$$

Các em thấy đấy, khi có sinx, hoặc cosx mũ lẻ thì chúng ta làm công việc tách ra như trên: $\cos^5 x=\cos^4 x.\cos x=\left(1-\sin^2 x\right)^2.\cos x$

Bài toán trên các em có thể làm thế này thì nó chuyên nghiệp hơn nhé:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\sin^2 x\right)^2 d\sin x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-2\sin^2 x+\sin^4 x\right)d(\sin x)=\left(\sin x-\frac{2\sin^3 x}{3}+\frac{\sin^5 x}{5}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{8}{5}$$

Tức là ta đã không cần đổi biến và sử dụng công thức vi phân sau: $d(\sin x)=\cos xdx$

2. HÀM DÙNG CÔNG THỨC NHÂN BIẾN ĐỔI TÍCH SANG TỔNG

Câu 10:

$$A=\int \sin x.\cos 2xdx=\frac{1}{2}\int (\sin 3x-\sin x)dx=\frac{1}{2}\left[\int \sin 3xdx-\int \sin xdx\right]=-\frac{1}{6}\cos 3x+\frac{1}{2}\cos x+C$$

3. HÀM TAN VÀ COT

Câu 11:

$$\mathrm{A}=\int \tan^2 \mathrm{x}\mathrm{dx}=\int\left(\frac{1}{\cos^2 \mathrm{x}}-1\right)\mathrm{dx}=\left(\tan \mathrm{x}-\mathrm{x}\right)+\mathrm{C}$$

Câu 12:

$$\mathrm{E}=\int \tan^3 \mathrm{x}\mathrm{dx}=\int \frac{\sin^3 \mathrm{x}}{\cos^3 \mathrm{x}}\mathrm{dx}=\int \frac{\sin^2 \mathrm{x}.\sin \mathrm{x}}{\cos^3 \mathrm{x}}\mathrm{dx}=-\int \frac{1-\cos^2 \mathrm{x}}{\cos^3 \mathrm{x}}\mathrm{d}(\cos \mathrm{x})=-\int (\frac{1}{\cos^3 \mathrm{x}}-\frac{1}{\cos \mathrm{x}})\mathrm{d}(\cos \mathrm{x})$$

$$=\frac{1}{2\cos^2 \mathrm{x}}+\ln\left|\cos \mathrm{x}\right|+\mathrm{C}=\frac{1}{2}\tan^2 \mathrm{x}+\ln\left|\cos \mathrm{x}\right|+\mathrm{C}$$

Tương tự với $\cot^3 x$; $\tan^5 x$; $\cot^5 x$

$$\mathrm{E}=\int \cot^3 \mathrm{x}\mathrm{dx}=\int \frac{\cos^3 \mathrm{x}}{\sin^3 \mathrm{x}}\mathrm{dx}=\int \frac{\cos^2 \mathrm{x}.\cos \mathrm{x}}{\sin^3 \mathrm{x}}\mathrm{dx}=\int \frac{1-\sin^2 \mathrm{x}}{\sin^3 \mathrm{x}}\mathrm{d}(\sin)=\int (\frac{1}{\sin^3 \mathrm{x}}-\frac{1}{\sin \mathrm{x}})\mathrm{d}(\sin \mathrm{x})$$

$$=-\frac{1}{2\sin^2 \mathrm{x}}-\ln\left|\sin \mathrm{x}\right|+\mathrm{C}$$

Câu 13 :

$$C \;=\int \tan^4 xdx=\int\left(\tan^2 x+\tan^4 x-\tan^2 x\right)dx=\int\left[\tan^2 x\left(1+\tan^2 x\right)-\tan^2 x\right]dx$$

$$=\int\left[\frac{\tan^2 x}{\cos^2 x}-\tan^2 x\right]dx$$

$$=\int \frac{\tan^2 x}{\cos^2 x}dx-\int \tan^2 xdx=\int \tan^2 xd\tan x-\int \tan^2 xdx=\frac{\tan^3 x}{3}+\left(\tan x-x\right)+C$$

Câu 14 :

$$G=\int \frac{1}{\sin^4 x}dx=\int \frac{1}{\sin^2 x}.\frac{1}{\sin^2 x}dx=-\int\left(1+\cot^2 x\right).d\cot x=-\left(\cot x+\frac{\cot^3 x}{2}\right)+C$$

Câu 15 : $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}dx \qquad t=\tan x\Rightarrow dt=\frac{1}{\cos^2 x}dx$

$$x=0\Rightarrow t=0 \;\; x=\frac{\pi}{4}\Rightarrow t=1$$

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}.\frac{1}{\cos^2 x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 xdx=\int_0^1 t^2.dt=\left.\frac{t^3}{3}\right|_0^1=\frac{1}{3}$$

Câu 16 :

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}dx$$

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}.\frac{1}{\cos^2 x}.\frac{1}{\cos^2 x}dx$$

Đổi biến: $t=\tan x \Rightarrow dt=\dfrac{1}{\cos^2 x}dx\ \ x=0 \Rightarrow t=0\ \ x=\dfrac{\pi}{4} \Rightarrow t=1$

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}.\frac{1}{\cos^2 x}.\frac{1}{\cos^2 x}.dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}} tg^2x.\left(1+tg^2x\right)d\left(tgx\right)=\int_0^{\frac{\pi}{4}} t^2.\left(1+t^2\right)d\left(t\right)=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(t^2+t^4\right)d\left(t\right)$$

$$I=\int_0^1\left(t^2+t^4\right)d\left(t\right)=\left(\frac{t^3}{3}+\frac{t^5}{5}\right)\Bigg|_0^1=\frac{8}{15}$$

Bình luận: Với bài toán có $\dfrac{1}{\cos^2 x}$ **hay** $\dfrac{1}{\sin^2 x},\dfrac{1}{\sin^4 x},\dfrac{1}{\cos^4 x},\dfrac{\sin^2 x}{\cos^6 x}$, ta thường hay nghĩ đến việc t = tgx hoặc t = cotx , nếu có dạng $\dfrac{1}{\sin^2 x},\dfrac{1}{\sin^4 x}$ các em đặt t = cotx nhé.

Dạng: sinx + cosx hoặc sinx – cosx

Câu 14:

$$I_2=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\sin 2x+2\left(1+\sin x+\cos x\right)}dx=\frac{4-3\sqrt{a}}{b}$$ **(B – 2008).** Tìm tỉ lệ a : b

A. 2:3 **B. 1:2** **C. 2:1** **D. 3:1**

Chọn B

Giải:

Đặt $t=\sin x+\cos x \Rightarrow \begin{cases} dt=\left(\cos x-\sin x\right)dx=-\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)dx \\ \sin 2x=t^2-1 \end{cases}$

và $x:0\rightarrow\frac{\pi}{4}$ thì $t:1\rightarrow\sqrt{2}$

$$\Rightarrow I_2=-\frac{1}{\sqrt{2}}\int_1^{\sqrt{2}}\frac{dt}{t^2-1+2\left(1+t\right)}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\int_1^{\sqrt{2}}\frac{dt}{\left(t+1\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{1}{t+1}\Bigg|_1^{\sqrt{2}}=\frac{4-3\sqrt{2}}{4}$$

Câu 15 : $I=\int\dfrac{3\cos 2x-\sin 4x}{2-\sin x-\cos x}dx=F(x)+C$

Tính F(0), biết rằng F(x) không chứa hệ số tự do.

A. $\dfrac{17}{3}$ **B.** $\dfrac{2}{3}$ **C.** $\dfrac{15}{3}$ **D.** $\dfrac{9}{3}$

Giải:

Chọn A

$$I=\int\frac{3\cos 2x-\sin 4x}{2-\sin x-\cos x}dx=\int\frac{\left(3-2\sin 2x\right)\cos 2x}{2-\sin x-\cos x}dx=\int\frac{\left(3-2\sin 2x\right)\left(\cos x+\sin x\right)\left(\cos x-\sin x\right)}{2-\left(\sin x+\cos x\right)}dx$$

Đặt $t=\sin x+\cos \Rightarrow \begin{cases} dt=\left(\text{cosx}-\text{sinx}\right)dx \\ \sin 2x=t^2-1 \end{cases}$

$$\Rightarrow I=\int\frac{\left[3-2\left(t^2-1\right)\right].t}{2-t}dt=\int\frac{2t^3-5t}{t-2}dt=\int\left(2t^2+4t+3+\frac{6}{t-2}\right)dt$$

$$=\left(\frac{2}{3}t^3+2t^2+3t+6\ln|t-2|\right)+C$$

Luyện tập
Đề 1:

Câu 1: $B=\int \cot x dx = F(x)+C$. Tính $F(\frac{\pi}{4})$. Biết rằng F(x) không chứa hằng số tự do

A. $-\ln\sqrt{2}$ **B.** $\ln\sqrt{2}$ **C. 1** **D. -1**

Câu 2: $\int \frac{1}{\cos x}dx = F(x)+C$. Tính $F(\pi)$. Biết rằng F(x) không chứa hằng số tự do

A. 1 **B. 2** **C. 1/2** **D. 0**

Câu 3: $F(x)=\int \cos^3 x dx$. Cho $F(\frac{\pi}{6})=1$. Tính C (C là hằng số trong F(x))

A. $-\frac{13}{24}$ **B.** $\frac{13}{24}$ **C.** $\frac{11}{24}$ **D.** $-\frac{11}{24}$

Câu 4: $\int \sin^5 x dx = F(x)+C$. $F(\pi)=?$

A. $\frac{3}{15}$ **B.** $-\frac{3}{15}$ **C.** $\frac{8}{15}$ **D.** $-\frac{8}{15}$

Câu 5: $F=\int \frac{1}{\cos^3 x}dx=\frac{1}{a}\left(\frac{1}{1-\sin x}-\frac{1}{1+\sin x}+b.\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|\right)+C$. **Tính S = 2a + 2b**

A. 6 **B. 8** **C. 10** **D. 12**

Câu 6: $\int \cos^2 x dx=\frac{1}{a}\left(x+\frac{1}{b}\sin 2x\right)+C$. **Tính a + b**

A. 3 **B. 4** **C. 7** **D. 9**

Câu 7: $D=\int \cos^4 x dx=\frac{1}{8}(a.x+\sin 2x+b.\sin 4x)+C$. **Tính S = a + 4b**

A. 3 **B. 7** **C. 4** **D. 0**

Câu 9: $F(x)=\int \sin x.\sin 2x dx$. Biết $F(\pi)=1$ Tính hằng số C trong F(x)

A. $\frac{5}{6}$ **B.** 1 **C.** 2 **D.** $\frac{1}{6}$

Câu 10: $F(x)=\int \cot^2 x dx=(A.\cot x+B.x)+C$. **Tính S = $A^2 + B^2$**

A. 1 **B. 2** **C. 4** **D. 13**

Câu 11: $\mathrm{B}=\int \cot^3 \mathrm{x}\,\mathrm{dx}=\mathrm{a}.\frac{1}{\sin^2 \mathrm{x}}+\mathrm{b}.\ln|\sin \mathrm{x}|+\mathrm{C}$. Tính **S = a.b**

A. $\frac{1}{2}$ **B.** $\frac{5}{6}$ **C.** $-\frac{5}{6}$ **D.** $\frac{3}{4}$

Câu 12: $F(x)=\int \cot^4 x dx$. Biết $F(\frac{\pi}{2})=1$. Tìm hằng số C trong $F(x)$

A. 1 **B.** $1+\frac{\pi}{2}$ **C.** $\frac{\pi}{2}$ **D.** $1-\frac{\pi}{2}$

Câu 13: $H=\int \frac{1}{\cos^4 x}dx=\left(A.\tan x+B.\tan^3 x\right)+C$. **Tính :** $S=\frac{A}{B}.\sin^2 x+\frac{1}{B}\cos^2 x$

A. 3 **B.** 2 **C.** 1 **D.** 4

Câu 14: $F(x)=\int \frac{3\cos 2x-\sin 4x}{2-\sin x-\cos x}dx$. $F(0)=\frac{15}{3}$. Tìm hằng số C trong $F(x)$

A. 1 **B.** -1 **C.** 2 **D.** -2

Câu 15: $I=\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\tan^4 x}{\cos 2x}dx=-\frac{10\sqrt{a}}{27}+\frac{1}{2}\ln\left(b+\sqrt{a}\right)$. **Tìm a?**

A. 5 **B.** 3 **C.** 8 **D.** 7

Đề 2:

Câu 1 : $F(x)=\int \frac{\tan^3 x-3}{\sin^2 x-\sin 2x-3\cos^2 x}dx$ $F(0)=6\ln 3+1$

Tính hằng số C trong $F(x)$

A. 2 B. ln3 C. 6ln3 D. 1

Câu 2: $F(x)=\int \frac{\sin x\left(2-\sin 2x\right)}{\cos^3 x}dx$. Biết $F(\pi)=\pi$. **Tìm đáp án đúng của :** $F(x)$

A. $2\left(\frac{\tan^2 x}{2}-\tan x+x\right)+\pi$ **B.** $2\left(\frac{\tan^2 x}{2}-\tan x+x\right)+2\pi$

C. $2\left(\frac{\tan^2 x}{2}-\tan x+x\right)+3\pi$ **D.** $2\left(\frac{\tan^2 x}{2}-\tan x+x\right)-\pi$

Câu 3: Cho hàm số $f(x)=\frac{1}{\sin x.\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}$ có nguyên hàm là $F(x)$ và $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số đã cho.

A. $F\left(x\right)=-2\ln\left|\sqrt{3}+\cot x\right|+\ln 2$ **B.** $F\left(x\right)=-2\ln\left|\sqrt{3}+\cot x\right|+\ln 3$

C. $F\left(x\right)=-2\ln\left|\sqrt{3}+\cot x\right|-\ln 2$ **D.** $F\left(x\right)=-2\ln\left|\sqrt{3}+\cot x\right|-\ln 3$

Câu 4: Cho hàm số $f(x)=\frac{\sin x}{\left(\sin x+\cos x\right)^3}$ có nguyên hàm là $F(x)$ và $F\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số đã cho.

A. $F\left(x\right)=\frac{1}{2\left(1+\cot x\right)^2}-\frac{1}{8}$ **B.** $F\left(x\right)=\frac{1}{2\left(1+\cot x\right)^2}+\frac{1}{3}$

C. $F\left(x\right)=\frac{1}{2\left(1+\cot x\right)^2}-\frac{1}{3}$ **D.** $F\left(x\right)=\frac{1}{2\left(1+\cot x\right)^2}+\frac{1}{8}$

Câu 5: Cho hàm số $f(x)=\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}$ có nguyên hàm là $F(x)$ và $F\left(0\right)=0$. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số đã cho.

A. $F\left(x\right)=\frac{\ln\left|\cos x+\sin x\right|}{2}+\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2}$ **B.** $F\left(x\right)=\frac{\ln\left|\cos x+\sin x\right|}{2}+\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}$

C. $F\left(x\right)=\frac{\ln\left|\cos x+\sin x\right|}{2}+\frac{x}{2}-\frac{\pi}{2}$ **D.** $F\left(x\right)=\frac{\ln\left|\cos x+\sin x\right|}{2}+\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}$

Câu 6: Cho hàm số $f(x)=\frac{1}{\sin x.\cos^3 x}$ có nguyên hàm là $F(x)$ và $F\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số đã cho.

A. $F\left(x\right)=\ln\left|\tan x\right|+\frac{\tan x^2}{2}-\frac{\pi^2}{32}$ **B.** $F\left(x\right)=\ln\left|\tan x\right|+\frac{\tan x^2}{2}-\frac{1}{2}$

C. $F\left(x\right)=\ln\left|\tan x\right|+\frac{\tan x^2}{2}+\frac{\pi^2}{16}$ **D.** $F\left(x\right)=\ln\left|\tan x\right|+\frac{\tan x^2}{2}+\frac{1}{2}$

Câu 7: Tính các tích phân sau: b) $B=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin 4x}{\sin^6 x+\cos^6 x}dx=a\ln 2+b$. Tính $A=3a+b$

A. 4 **B. 5** **C. 6** **D. 7**

Câu 8: Cho hàm số $f(x)=\frac{\tan x}{\cos x.\sqrt{1+2\cos^2 x}}$ có nguyên hàm là $F(x)$ và $F\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số đã cho.

A. $F(x)=\sqrt{3+\tan^2 x}-1$ **B.** $F(x)=\sqrt{3+\tan^2 x}+1$

C. $F(x)=\sqrt{3+\tan^2 x}+2$ **D.** $F(x)=\sqrt{3+\tan^2 x}-2$

Câu 9. Cho hàm số $f(x)=\tan x\left(2\cot x-\sqrt{2}\cos x+2\cos^2 x\right)$ có nguyên hàm là $F(x)$ và $F\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{2}$. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số đã cho.

A. $x+\sqrt{2}\cos x-\frac{\cos 2x}{2}-1$ **B.** $2x+\sqrt{2}\cos x-\frac{\cos 2x}{2}-1$

C. $2x-\sqrt{2}\cos x-\frac{\cos 2x}{2}-1$ **D.** $x-\sqrt{2}\cos x-\frac{\cos 2x}{2}-1$

Câu 10. Tính tích phân $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(2x-1-\sin x\right)dx=a\pi^2+b\pi+c$. Tính $A=2a+b-c+2$

A. 3 **B. 4** **C. 5** **D. 6**

Câu 11. Cho $F=\int\cot^3 x dx=\frac{a}{\sin^2 x}+b\ln\left|\sin x\right|+C$ và $F\left(0\right)=0$. Giá trị của C là:

A. $\frac{1}{2}$ **B.** $-\frac{2}{9}$ **C.** $\frac{4}{9}$ **D.** $-\frac{4}{9}$

Câu 12. Cho tích phân $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\left(\sin x+\frac{\cos 2x}{\sqrt{1+3\cos x}}\right)dx=a\pi+\frac{b}{45}$. Tính $A=8a+9b$

A. -110 **B. -124** **C. -116** **D. -140**

Câu 13. Cho $F(x) = I = \int \frac{dx}{(\sin x + \cos x)\sin x}$ và $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$. Tìm chính xác F(x).

A. -ln3 **B. ln3** **C.** $\ln 2$ **D. -ln2**

Câu 14. Cho tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sqrt{3}\sin 2x + 2\cos^2 x}dx = a\sqrt{3} + b$. Tính $A = a - b - 4$

A. 2 **B. -5** **C. 5** **D. -8**

Câu 15: $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\tan^4 x}{\cos^2 x - \sin^2 x}dx = -\frac{10\sqrt{3}}{27} + \frac{1}{2}\ln\left(2 + \sqrt{a}\right)$

Tìm a :

A. 2 **B. 3** **C. 5** **D. -8**

Đề 3:

Câu 1. Cho tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 3x + 2\cos x}{2 + 3\sin x - \cos 2x}dx = a\ln 18 + b$. Tính $A = a + b - 2$

A. -3 **B. -2** **C. 2** **D. 0**

Câu 2. Cho tích phân $I = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin^3 x}{\sin x - \cos x}dx = a\pi + b$. Tính $A = 4\left(a - b - 1\right)$

A. 0 **B. -1** **C. -2** **D. 3**

Câu 3. Cho tích phân: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos^5 x)dx = a\pi + b$. Tính $A = 4a + 15b$

A. 10 **B. 4** **C. 7** **D. 3**

Câu 4. Cho tích phân $I = \int_0^2 \left(x + \cos^5 x\right)dx = F\left(x\right) + C$. Tính $F\left(\pi\right)$.

A. $\frac{\pi^2}{4}$ **B.** $\frac{\pi^2}{2}$ **C.** $-\frac{\pi^2}{2}$ **D.** $-\frac{\pi^2}{4}$

Câu 5. Cho tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2 + 3\tan x}}{1 + \cos 2x}dx = a\sqrt{5} + b\sqrt{2}$. Tính $A = 9\left(a - b\right)$

A. 3 **B. 5** **C. 4** **D. 7**

Câu 6. Cho tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{\cos^3 x} = a\ln 3 + b$. Tính $A = 8a + 3b$

A. 3 **B. 5** **C. 4** **D. 7**

Câu 7. Tính nguyên hàm $F(x) = \int \frac{dx}{\cos 2x\left(1 + \sin 2x\right)}$

A. $F\left(x\right) = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}\right| + \frac{1}{4\left(\sin x + \cos x\right)^2} + C$

B. $F(x)=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}\right|+\frac{1}{4(\sin x+\cos x)^2}+C$

C. $F(x)=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}\right|-\frac{1}{4(\sin x+\cos x)^2}+C$

D. $F(x)=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}\right|-\frac{1}{4(\sin x+\cos x)^2}+C$

Câu 8: Cho $F(x)=I_1=\int\frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos^2 x+4\sin^2 x}}dx$ và $F(\pi)=0$. Giá trị của C là:

A. $\frac{2}{3}$ **B.** $-\frac{4}{3}$ **C.** $\frac{4}{3}$ **D.** $-\frac{2}{3}$

Câu 9: Cho $F(x)=I_2=\int\frac{\sin 2x+\sin x}{\sqrt{1+3\cos x}}dx$ và $F(0)=0$. Giá trị của C là:

A. $\frac{68}{81}$ **B.** $\frac{28}{81}$ **C.** $-\frac{68}{81}$ **D.** $-\frac{28}{81}$

Câu 10: Cho $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^3 x-1)\cos^2 x dx=a+b\pi$. Tính $A=a+b$

A. $\frac{29}{60}$ **B.** $\frac{31}{60}$ **C.** $\frac{17}{60}$ **D.** $\frac{53}{60}$

Câu 11: Cho $F(x)=I_2=\int\sin^3 2x\cos^4 x dx$ và $F(0)=0$. Giá trị của C là:

A. $\frac{1}{5}$ **B.** $-\frac{1}{5}$ **C.** $\frac{3}{5}$ **D.** $-\frac{3}{5}$

Câu 12: Tìm họ nguyên hàm của $I=\int\frac{5\cos x-4\sin x}{(\cos x+\sin x)^3}dx$. Chọn đáp án đúng:

A. $\frac{1}{2}\text{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+C$ **B.** $\frac{1}{4}\text{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+C$ **C.** $\frac{1}{2}\text{tg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+C$ **D.** $\frac{1}{4}\text{tg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+C$

Câu 13 : $F(x)=I_5=\int\frac{\cos^3 x}{\sin^2 x}dx$ và $F\left(\frac{\pi}{6}\right)=0$. Giá trị của C là:

A. $\frac{9}{2}$ **B.** $\frac{3}{2}$ **C.** $\frac{5}{2}$ **D.** $\frac{7}{2}$

Câu 14 : Tính các tích phân sau: $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x dx}{1+\cos^2 x}=\frac{\tan a}{4}$. Tính $A=\frac{\sqrt{2}\sin\left(a+\frac{\pi}{4}\right)}{\cos^3 a}$

A. $\pi^3+\pi^2-\pi+1$ **B.** $\pi^3+\pi^2-\pi-1$ **C.** $\pi^3+\pi^2+\pi-1$ **D.** $\pi^3+\pi^2+\pi+1$

Câu 15 : $F(x)=I_3=\int\frac{1-2\sin^2 x}{1+\sin 2x}dx$ và $F(\pi)=1$. Giá trị của C là:

A. -1 **B. 2** **C. 1** **D. 0**

Đề 4:

Câu 1: Cho $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x\cos x}{1+\cos x}dx=a+b\ln 2$. Tính $A=a-b$

A. 4 **B. 1** **C. 5** **D. -3**

Câu 2: Cho $I=\int_{\frac{-\pi}{2}}^{0}\frac{\sin 2x}{(2+\sin x)^2}dx=a\ln 2+b$. Tính $A=a+b$

A. -1 **B. 0** **C. 1** **D. 2**

Câu 4 : Cho $F(x)=I=\int\frac{\sin 4x dx}{1+\cos^2 x}$ và $F(\pi)=0$. Tìm chính xác hàm số $F(x)$

A. $F(x)=2\cos 2x-6\ln|\cos 2x+3|+12\ln 2-2$

B. $F(x)=2\cos 2x-6\ln|\cos 2x+3|-12\ln 2+2$

C. $F(x)=2\cos 2x+6\ln|\cos 2x+3|+12\ln 2-2$

D. $F(x)=2\cos 2x+6\ln|\cos 2x+3|-12\ln 2-2$

Câu 5: Cho $F(x)=I_2=\int\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\sin 2x+2(1+\sin x+\cos x)}dx$ **và** $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$**.** Tìm chính xác hàm số $F(x)$

A. $F(x)=\frac{\sqrt{2}}{2(\sin x+\cos x+1)}+\frac{\sqrt{2}}{4}$ **B.** $F(x)=\frac{\sqrt{2}}{2(\sin x+\cos x+1)}-\frac{\sqrt{2}}{2}$

C. $F(x)=\frac{\sqrt{2}}{2(\sin x+\cos x+1)}-\frac{\sqrt{2}}{4}$ **D.** $F(x)=\frac{\sqrt{2}}{2(\sin x+\cos x+1)}+\frac{\sqrt{2}}{2}$

Câu 6: Cho $F(x)=I=\int\frac{\cos 2x}{2-\sqrt{1+\sin x-\cos x}}dx$ và $F(0)=0$. Tìm chính xác hàm số $F(x)$

A. $F(x)=\left(\frac{t^3}{3}+t^2+3t+6\ln|t-2|\right)+12\ln 2, t=\sqrt{1+\sin x-\cos x}$

B. $F(x)=\left(\frac{t^3}{3}+t^2+3t+6\ln|t-2|\right)-12\ln 2, t=\sqrt{1+\sin x-\cos x}$

C. $F(x)=2\left(\frac{t^3}{3}+t^2+3t+6\ln|t-2|\right)-12\ln 2, t=\sqrt{1+\sin x-\cos x}$

D. $F(x)=2\left(\frac{t^3}{3}+t^2+3t+6\ln|t-2|\right)+12\ln 2, t=\sqrt{1+\sin x-\cos x}$

Câu 7: Cho tích phân $\int\frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}dx=a$. Tính $A=4\cot^2 2x$ theo a

A. 4 a^2 **B. 2** a^2 **C. 3** a^2 **D.** a^2

Câu 8: Cho tích phân $\int\frac{\cos x-3\sin x}{\sin x+3\cos x+1}dx=\ln|f(x)|+C$. Tính $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

A. 5 **B. 2** **C. 3** **D. 4**

Câu 9: Cho tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x dx = a + b\pi$. Tính $A = a + 8b$

A. 0 **B. 2** **C. -1** **D. 1**

Câu 10: Cho tích phân $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{4}{\cos^2 x} - 3\sin x\right) dx = 8\sin 2a$. Tính $A = \sin^4 a + \cos^4 a$

A. $\frac{1}{4}$ **B.** $\frac{1}{2}$ **C. 1** **D.** $\frac{3}{4}$

Câu 11: Cho tích phân $\int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos 2x} dx = ab$ và $a + b = 2 + 2\sqrt{2}$. Giá trị của a và b lần lượt là:

A. $\begin{cases} a = 2 \\ b = 2\sqrt{2} \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} a = 2\sqrt{2} \\ b = 2 \end{cases}$

C. $\begin{cases} a = 2\sqrt{2} \\ b = -2 \end{cases} \vee \begin{cases} a = 2 \\ b = 2\sqrt{2} \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} a = 2\sqrt{2} \\ b = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} a = 2 \\ b = 2\sqrt{2} \end{cases}$

Câu 12: Cho tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin^4 \frac{x}{2} - \cos^4 \frac{x}{2}\right) dx = a + b$ và $a^3 + b^3 = -7$. Giá trị của a và b lần lượt là:

A. $\begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} a = -2 \\ b = 1 \end{cases}$

C. $\begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} a = -2 \\ b = 1 \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \end{cases} \vee \begin{cases} a = -2 \\ b = 1 \end{cases}$

Câu 14 : Cho $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} dx = a + b\sqrt{3}$. Tính $A = 4a - 6b$

A.9 **B. 17** **C. 25** **D. 14**

Câu 15: Cho $\int \sin^5 x dx = F(x) + C$ và $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = a + b$. Tính $A = 25(a + b)^2$

A. $\frac{25}{9}$ **B.** $\frac{17}{9}$ **C.** $\frac{46}{9}$ **D.** $\frac{64}{9}$

Đề 5:

Câu 1: Cho $\int \sqrt[6]{1 - \cos^3 x}.\sin x.\cos^5 x dx = \sqrt[6]{\left(1 - \cos^3 x\right)^7}\left[a + b\sqrt[6]{\left(1 - \cos^3 x\right)^c}\right] + C$.

Tính $A = 7a + 26b - 5c$

A. 4 **B. -32** **C. -26** **D. 7**

Câu 2: Cho $\int \frac{\cos 2x}{\sin x + \cos x} dx = F(x) + C$ và $F(\pi) = a + b$. Tính $A = (a + b)^5$

A.-2 **B. 2** **C. 1** **D. -1**

Câu 3: Cho $\int \cos^3 x \sin x dx = F(x) + C$ và $F(0) = a + b - \frac{1}{4}$. Tính $A = a^3 + b^3 + 2016$

A. 2018 **B. 2016** **C. 2022** **D. 2020**

Câu 4: Cho $\int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt[3]{\sin x - \cos x}} dx = a(\sin x - \cos x)^b + C$. Tính $A = 4a - 3b$

A. 4 **B.** 5 **C.** 6 **D.** 7

Câu 5. Cho hàm số $f(x) = \int \sin 2x.\cos 3x dx$ và $f(0)=0$. Giá trị của C là:

A. $-\frac{4}{5}$ **B.** $\frac{2}{5}$ **C.** $-\frac{2}{5}$ **D.** $-\frac{4}{5}$

Câu 6. Cho $\int \frac{1}{1+\sin x} dx = F(x) + C$. Tính $F(\pi)$.

A. 0 **B.** 1 **C.** -1 **D.** $\frac{1}{2}$

Câu 7. Cho hàm số $f(x) = \cos^3 x.\sin 8x$ có họ nguyên hàm là $F(x) + C$. Tính $F(0)$

A. $\frac{137}{1155}$ **B.** $-\frac{152}{1155}$ **C.** $\frac{173}{1155}$ **D.** $-\frac{163}{1155}$

Câu 8: Cho tính phân $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} dx = a + b\ln 2$. Tính $A = a + 2b$

A.4 **B.** 5 **C.** 1 **D.** 7

Câu 9: Cho tích phân $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx = a + b\sqrt{3}$. Tính $A = a + 3b$

A.-5 **B.** -2 **C.** 6 **D.** 3

Câu 10 Cho tích phân $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \cos x \cos 3x dx = a + b$. Tính $A = a^5 - b^5 + 1$

A.3 **B.** 2 **C.** 1 **D.** 4

Câu 11: Cho tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^4 x dx = a\pi + b$. Tính $A = 16a + 2b$

A.11 **B.** 1 **C.** 4 **D.** 7

Câu 12: Cho $f(x) = \cos^4 x - \sin^4 x$. Tìm nguyên hàm $F(x)$ biết rằng $F\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0$

A. $F(x) = \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{\sqrt{3}}{4}$ **B.** $F(x) = \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{\sqrt{3}}{4}$

C. $F(x) = \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{\sqrt{3}}{2}$ **D.** $F(x) = \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}$

Câu 13: Cho $f(x) = \int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} dx$ **và** $f(0) = 2$ **. Giá trị của C là:**

A. 2 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 5

Câu 14: Cho $F(x)=\int\frac{\cos 2x}{\sin x+\cos x}dx$ và $F\left(\frac{3\pi}{2}\right)=0$. Giá trị của C là:

A.-1 **B.** 0 **C.** 1 **D.** 2

Câu 15: Cho $f(x)=\int\frac{1}{tg^5x}dx$ và $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=0$. Giá trị của C là:

A. $\ln 2$ **B.** $\ln 3$ **C.** $-\ln 2$ **D.** $-\ln 3$

Lời giải
Đề 1:

Câu 1: Chọn A.

$$B=\int\cot x dx=\int\frac{\cos x}{\sin x}dx=\int\frac{d(\sin x)}{\sin x}=\ln\left|\sin x\right|+C$$

Câu 2: Chọn D

$$\int\frac{1}{\cos x}dx=\int\frac{\cos x}{\cos^2 x}dx=\int\frac{\cos x}{1-\sin^2 x}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{d\sin x}{(1-\sin x)(1+\sin x)}=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1+\sin x}+\frac{1}{1-\sin x}\right)d\sin x=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|+C$$

Câu 3: Chọn B

$$B=\int\cos^3 x dx=\int\cos^2 x.\cos x dx=\int\left(1-\sin^2 x\right)d\sin x=\left(\sin x-\frac{\sin^3 x}{3}\right)+C$$

$$F(\frac{\pi}{6})=\left(\sin x-\frac{\sin^3 x}{3}\right)+C=\frac{1}{2}-\frac{1}{24}+C=1\Rightarrow C=\frac{13}{24}$$

Câu 4:Chọn D

$$A=\int\sin^5 x dx=\int\sin^4 x.\sin x dx=\int\left(1-\cos^2 x\right)^2.\sin x dx=-\int\left(1-2\cos^2 x+\cos^4 x\right).d\cos x$$

$$=-\left(\cos x-\frac{2}{3}\cos^3 x+\frac{1}{5}\cos^5 x\right)+C\Rightarrow F(\pi)=-\frac{8}{15}$$

Câu 5: Chọn C

$$F=\int\frac{1}{\cos^3 x}dx=\int\frac{\cos x}{\cos^4 x}dx=\int\frac{\cos x}{\left(1-\sin^2 x\right)^2}dx$$

Đặt $t=\sin x\Rightarrow dt=\cos x dx$

Khi đó: $F_3=\int\frac{dt}{\left(1-t^2\right)^2}=\frac{1}{4}\int\frac{\left[(1+t)+(1-t)\right]^2 dt}{(1-t)^2.(1+t)^2}=\frac{1}{4}\int\frac{(1+t)^2+(1-t)^2+2(1-t).(1+t)}{(1-t)^2.(1+t)^2}dt$

$$=\frac{1}{4}\int\left[\frac{1}{(1-t)^2}+\frac{1}{(1+t)^2}+\frac{2}{(1-t).(1+t)}\right]dt=\frac{1}{4}\int\left[\frac{1}{(1-t)^2}+\frac{1}{(1+t)^2}+\frac{1}{1+t}+\frac{1}{1-t}\right]dt$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1-t}-\frac{1}{1+t}+\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|\right)+C$$

a = 4, b = 1 vậy S = 10

Câu 6: Chọn B

$$B=\int \cos^2 x dx=\frac{1}{2}\int\left(1+\cos 2x\right)dx=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\sin 2x\right)+C$$

Câu 7: Chọn C

$$D=\int \cos^4 x dx=\int\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx=\frac{1}{4}\int\left(1+2\cos 2x+\cos^2 2x\right)dx=\frac{1}{4}\int\left(1+2\cos 2x+\frac{1+\cos 4x}{2}\right)dx$$

$$=\frac{1}{4}\int\left(\frac{3}{2}+2\cos 2x+\frac{1}{2}\cos 4x\right)dx=\frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}x+\sin 2x+\frac{1}{8}\sin 4x\right)+C$$

Tìm được a = 3 , b = ¼ $\Rightarrow$**S = 4**

Câu 9: Chọn đáp án B

$$B=\int \sin x.\sin 2x dx=\frac{1}{2}\int(\cos x-\cos 3x)dx=\frac{1}{2}\left[\int \cos x dx-\int \cos 3x dx\right]=\frac{1}{2}\sin x-\frac{1}{6}.\sin x+C$$

$$F(\pi)=\frac{1}{2}\sin\pi-\frac{1}{6}\sin 3\pi+C=1\Rightarrow C=1$$

Câu 10: Chọn đáp án B.

$$B=\int \cot^3 x dx=\int\left(\frac{1}{\sin^2 x}-1\right)dx=\left(-\cot x-x\right)+C$$

A = -1, B = -1 vậy **S = 2**

Câu 11: Chọn A

$$F=\int \cot^3 x dx=\int\frac{\cos^3 x}{\sin^3 x}dx=\int\frac{\cos^2 x.\cos x}{\sin^3 x}dx=\int\frac{\cos^2 x}{\sin^3 x}d\sin x=\int\frac{1-\sin^2 x}{\sin^3 x}d\sin x$$

$$=\int\frac{1-\sin^2 x}{\sin^3 x}d\sin x=\int\frac{d\sin x}{\sin^3 x}-\int\frac{d\sin x}{\sin x}=-\frac{1}{2\sin^2 x}-\ln\left|\sin x\right|+C$$

a = -1/2 ; b = -1 do đó S = a.b = 1/2

Câu 12: Chọn B

$$D=\int \cot^4 x dx=\int\left(\cot^2 x+\cot^4 x-\cot^2 x\right)dx=\int\left[\cot^2 x\left(1+\cot^2 x\right)-\cot^2 x\right]dx$$

$$=\int\left[\frac{\cot^2 x}{\sin^2 x}-\cot^2 x\right]dx$$

$$=\int\frac{\cot^2 x}{\sin^2 x}dx-\int \cot^2 x dx=-\int \cot^2 x d\cot x-D_2=-\frac{\cot^3 x}{3}+\left(-\cot x-x\right)+C$$

$$F(\frac{\pi}{2})=-\frac{\cot^3(\frac{\pi}{2})}{3}+\left(-\cot(\frac{\pi}{2})-\frac{\pi}{2}\right)+C=1\Rightarrow C=1+\frac{\pi}{2}$$

Câu 13: Chọn đáp án A.

$$H=\int\frac{1}{\cos^4 x}dx=\int\frac{1}{\cos^2 x}.\frac{1}{\cos^2 x}dx=\int\left(1+\tan^2 x\right).d\tan x=\left(\tan x+\frac{\tan^3 x}{3}\right)+C$$

Ta tìm được: A = 1, B = 1/3 . Do đó S = 3.

Câu 14: Chọn B.

$$I=\int\frac{3\cos 2x-\sin 4x}{2-\sin x-\cos x}dx=\int\frac{\left(3-2\sin 2x\right)\cos 2x}{2-\sin x-\cos x}dx=\int\frac{\left(3-2\sin 2x\right)\left(\cos x+\sin x\right)\left(\cos x-\sin x\right)}{2-\left(\sin x+\cos x\right)}dx$$

Đặt $t=\sin x+\cos\Rightarrow\begin{cases}dt=\left(\cos x-\sin x\right)dx\\ \sin 2x=t^2-1\end{cases}$

$$\Rightarrow I=\int\frac{\left[3-2\left(t^2-1\right)\right].t}{2-t}dt=\int\frac{2t^3-5t}{t-2}dt=\int\left(2t^2+4t+3+\frac{6}{t-2}\right)dt$$

$$=\left(\frac{2}{3}t^3+2t^2+3t+6\ln\left|t-2\right|\right)+C$$

$$F(0)=\frac{15}{3};\ t=\sin x+\cos x=1\Rightarrow\left(\frac{2}{3}+2+3+6\ln 1\right)+C=\frac{15}{3}\Rightarrow C=-1$$

Câu 15: Chọn đáp án B.

$$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\tan^4 x}{\cos^2 x-\sin^2 x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\tan^4 x}{\cos^2 x.\left(1-\tan^2 x\right)}dx$$

Đặt $t=\tan x\Rightarrow dt=\frac{dx}{\cos^2 x}$ và $x:0\to\frac{\pi}{6}$ thì $t:0\to\frac{\sqrt{3}}{3}$

$$\Rightarrow I_1=\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}}\frac{t^4}{1-t^2}dt=-\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}}\left(t^2+1+\frac{1}{t^2-1}\right)dt=\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}}\left[t^2+1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)\right]dt$$

$$=-\left.\left(\frac{t^3}{3}+t+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right)\right|_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}}=-\frac{10\sqrt{3}}{27}+\frac{1}{2}\ln\left(2+\sqrt{3}\right)$$

Tìm được a = 3.

Đề 2:

Câu 1: Chọn đáp án D.

Ta có: $I=\int\frac{\tan^3 x-3}{\cos^2 x.\left(\tan^2 x-2\tan x-3\right)}dx$. Đặt $t=\tan x\Rightarrow dt=\frac{dx}{\cos^2 x}$

$$\Rightarrow I_2=\int\frac{t^3-3}{t^2-2t-3}dt=\int\left(t+2+\frac{7t+3}{t^2-2t-3}\right)dt=\int\left(t+2+\frac{6\left(t+1\right)+t-3}{\left(t+1\right)\left(t-3\right)}\right)dt=\int\left(t+2+\frac{6}{t-3}+\frac{1}{t+1}\right)dt$$

$$=\left(\frac{t^2}{2}+2t+6\ln\left|t-3\right|+\ln\left|t+1\right|\right)=\left(\frac{\tan^2 x}{2}+2\tan x+6\ln\left|\tan x-3\right|+\ln\left|\tan x+1\right|\right)$$

Ta có: $F(0)=\left(\frac{\tan^2 x}{2}+2\tan x+6\ln\left|\tan x-3\right|+\ln\left|\tan x+1\right|\right)+C=6\ln 3+C=1+6\ln 3\Rightarrow C=1$

Câu 2: Chọn D

$$I=\int\frac{\sin x\left(2-\sin 2x\right)}{\cos^3 x}dx=\int\left(\frac{2\sin x}{\cos^3 x}-\frac{2\sin^2 x\cos x}{\cos^3 x}\right)dx=2\int\frac{\tan x}{\cos^2 x}dx-2\int\tan^2 x dx$$

$$=2\int \tan x\,d(\tan x)-2\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx=2\left(\frac{\tan^2 x}{2}-\tan x+x\right)+C$$

$$\Rightarrow 2\left(\frac{\tan^2\pi}{2}-\tan\pi+\pi\right)+C=\pi\Rightarrow C=-\pi$$

Câu 3: Chọn D

$$I=\int\frac{dx}{\sin x.\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}=\int\frac{dx}{\sin x.\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x\right)}=\int\frac{2dx}{\sin x.\left(\sqrt{3}\sin x+\cos x\right)}=2\int\frac{dx}{\sin^2 x.\left(\sqrt{3}+\cot x\right)}$$

$$=-2\int\frac{d\left(\sqrt{3}+\cot x\right)}{\left(\sqrt{3}+\cot x\right)}=-2\ln\left|\sqrt{3}+\cot x\right|+C\Rightarrow F\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\ln 3+C=0\Rightarrow C=\ln 3$$

$$\Rightarrow F(x)=-2\ln\left|\sqrt{3}+\cot x\right|+\ln 3$$

Câu 4: Chọn A

$$I=\int\frac{\sin x dx}{(\sin x+\cos x)^3}=\int\frac{\sin x dx}{\left[\sin x(1+\cot x)\right]^3}=\int\frac{\sin x dx}{\sin^3 x.(1+\cot x)^3}=\int\frac{dx}{\sin^2 x.(1+\cot x)^3}$$

$$=-\int\frac{d(1+\cot x)}{(1+\cot x)^3}=\frac{1}{2(1+\cot x)^2}+C\Rightarrow F\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{8}+C=0\Rightarrow C=-\frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow F(x)=\frac{1}{2(1+\cot x)^2}-\frac{1}{8}$$

Câu 5: Chọn C

$$I=\int\frac{\cos x dx}{\sin x+\cos x}$$

Xét $J=\int\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx$

Ta có: $I+J=\int dx=x+C$

$$I-J=\int\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}dx=\int\frac{d(\cos x+\sin x)}{\cos x+\sin x}=\ln\left|\cos x+\sin x\right|+C=0$$

$$\Rightarrow 2I=\ln\left|\cos x+\sin x\right|+x+2C\Rightarrow I=\frac{\ln\left|\cos x+\sin x\right|}{2}+\frac{x}{2}+C$$

$$\Rightarrow F(\pi)=\frac{\pi}{2}+C=0\Rightarrow C=-\frac{\pi}{2}\Rightarrow F(x)=\frac{\ln\left|\cos x+\sin x\right|}{2}+\frac{x}{2}-\frac{\pi}{2}$$

Câu 6: Chọn B

$$I=\int\frac{dx}{\sin x.\cos^3 x}=\int\frac{dx}{\tan x.\cos^4 x}=\int\frac{1}{\tan x}.\frac{1}{\cos^2 x}.\frac{dx}{\cos^2 x}=\int\frac{1+\tan^2 x}{\tan x}.\frac{dx}{\cos^2 x}$$

Đặt $t=\tan x\Rightarrow dt=\frac{dx}{\cos^2 x}$

Khi đó

$$I=\int\frac{1+t^2}{t}.dt=\int\left(\frac{1}{t}+t\right)dt=\left(\ln|t|+\frac{t^2}{2}\right)+C, t=\tan x$$

$$+F\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}+C=0\Rightarrow C=-\frac{1}{2}\Rightarrow F\left(x\right)=\ln\left|\tan x\right|+\frac{\tan x^2}{2}-\frac{1}{2}$$

Câu 7: Chọn A

$$\sin^6 x+\cos^6 x=1-\frac{3}{4}\sin^2 2x,\ \text{do đó: } B=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin 2x\cos 2x}{1-\frac{3}{4}\sin^2 2x}dx$$

Đặt $t=\sin 2x\Rightarrow B=4\int_0^1\frac{tdt}{4-3t^2}=-\frac{2}{3}\int_0^1\frac{d\left(4-3t^2\right)}{4-3t^2}$

$$=-\frac{2}{3}\ln\left|4-3t^2\right|\Big|_0^1=\frac{4}{3}\ln 2\Rightarrow a=\frac{4}{3};b=0\Rightarrow A=4$$

Câu 8: Chọn D

$$I=\int\frac{\tan x}{\cos x.\sqrt{1+2\cos^2 x}}dx=\int\frac{\tan x}{\cos x.\sqrt{\cos^2 x\left(\frac{1}{\cos^2 x}+2\right)}}dx=\int\frac{\tan x}{\cos^2 x.\sqrt{3+\tan^2 x}}dx$$

Đặt $t=\sqrt{3+\tan^2 x}\Rightarrow t^2=3+\tan^2 x\Rightarrow tdt=\frac{\tan t}{\cos^2 t}dt$

Khi đó: $I=\int\frac{tdt}{t}=\int dt=t+C\Rightarrow F(x)=\sqrt{3+\tan^2 x}+C\Rightarrow F\left(\frac{\pi}{4}\right)=2+C=0\Rightarrow C=-2$

Vậy $F(x)=\sqrt{3+\tan^2 x}-2$

Câu 9. Chọn đáp B

Tìm nguyên hàm $F(x)$

$$F(x)=\int\tan x\left(2\cot x-\sqrt{2}\cos x+2\cos^2 x\right)dx=\int\left(2-\sqrt{2}\sin x+\sin 2x\right)dx$$

$$=2x+\sqrt{2}\cos x-\frac{\cos 2x}{2}+C$$

$$F\left(\frac{\pi}{4}\right)=2.\frac{\pi}{4}+\sqrt{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}-0+C=\frac{\pi}{2}\Rightarrow C=-1$$

Vậy $F(x)=2x+\sqrt{2}\cos x-\frac{\cos 2x}{2}-1$

Câu 10. Chọn A

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(2x-1-\sin x\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2x.dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin xdx=A-B-C$$

$$A=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2x.dx=x^2\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^2}{4};\ B=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx=x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}$$

$$C=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin xdx=\left(-\cos x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=1$$

Vậy $I=A-B+C=\boxed{\frac{\pi^2}{4}-\frac{\pi}{2}-1}\Rightarrow a=\frac{1}{4};b=-\frac{1}{2};c=-1\Rightarrow A=3$

Câu 12. Chọn A

$$I=\int\frac{(\cos x+\sin x)(\cos x-\sin x)dx}{(\cos x+\sin x+2)^3}=\int\frac{(\cos x+\sin x)d(\cos x+\sin x+2)dx}{(\cos x+\sin x+2)^3}$$

Đặt $t=\cos x+\sin x+2$. $I=\int\frac{(t-2)dt}{t^3}$

Biến đổi

$I=-\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}+C, t=\cos x+\sin x+2$

$+F(0)=-\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+C=0\Rightarrow C=\frac{2}{9}$

Câu 13. Chọn C

* $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x\cos 2x}{\sqrt{1+3\cos x}}dx=I_1+I_2$

* $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 2x}{2}dx=\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}$

* $I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x\cos 2x}{\sqrt{1+3\cos x}}dx$

Đặt $\sqrt{1+3\cos x}=u\Rightarrow u^2=1+3\cos x\Rightarrow 2udu=-3\sin xdx$

$x=0\to u=2; x=\frac{\pi}{2}\to u=1$

$I_2=\frac{2}{27}\int_1^2\left(2u^4-4u^2-7\right)du=\frac{2}{27}\left(\frac{2}{5}u^5-\frac{4}{3}u^3-7u\right)\Big|_1^2=-\frac{118}{405}$

* Vậy $I=\frac{\pi}{4}-\frac{118}{45.9}\Rightarrow a=\frac{1}{4}; b=-\frac{118}{9}\Rightarrow A=-116$

Câu 14. Chọn C

$I=\int\frac{\frac{1}{\sin^2 x}}{1+\cot x}dx=-\int\frac{1}{1+\cot x}d(\cot x)$

$=-\ln\left|1+\cot x\right|+C$

$+F\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\ln 2+C=0\Rightarrow C=\ln 2$

Câu 15. Chọn D

$I=\int_0^2\sqrt{1-\sqrt{3}\sin 2x+2\cos^2 xdx}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\left(\sin x-\sqrt{3}\cos\right)^2 dx}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|\sin x-\sqrt{3}\cos x\right|dx$

$\sin x-\sqrt{3}\cos x=0\Leftrightarrow\tan x=\sqrt{3}\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3}+k\pi$

do $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ ňnx $=\frac{\pi}{3}$

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left|\sin x-\sqrt{3}\cos\right|dx+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\left|\sin x-\sqrt{3}\cos x\right|dx$$

$$=\left|\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\sin x-\sqrt{3}\cos x\right)dx\right|+\left|\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin x-\sqrt{3}\cos x\right)dx\right|$$

$$=\left|\left(-\cos x-\sqrt{3}\sin x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}\right|+\left|\left(-\cos x-\sqrt{3}\sin x\right)\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\right|$$

$$=\left|-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}+1\right|+\left|-\sqrt{3}+\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\right|=3-\sqrt{3}\Rightarrow a=-1;b=3\Rightarrow A=-8$$

Đề 3:

Câu 1. Chọn A

Ta có: $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(4\cos^2-1)\cos x}{2+3\sin x-(1-2\sin^2 x)}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{3-4\sin^2 x}{2\sin^2 x+3\sin x+1}d(\sin x)$

Đặt t = sinx. Khi x = 0 thì t = 0, khi $x=\frac{\pi}{2}$ thì t = 1. Suy ra $I=\int_0^1\frac{3-4t^2}{2t^2+3t+1}dt$

$$=\int_0^1\left(-2+\frac{6t+5}{(2t+1)(t+1)}\right)dt=\int_0^1\left(-2+\frac{(4t+4)+(2t+1)}{(2t+1)(t+1)}\right)dt=\int_0^1\left(-2+\frac{4}{2t+1}+\frac{1}{t+1}\right)dt$$

$$=\left(-2t+2\ln(2t+1)+\ln(t+1)\right)\Big|_0^1=-2+2\ln 3+\ln 2=\ln 18-2\Rightarrow a=1;b=-2\Rightarrow A=-3$$

Câu 2. Chọn C

Đặt: $x=\frac{3\pi}{2}-t\Rightarrow dx=-dt$. Đổi cận: $x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=\pi;x=\pi\Rightarrow t=\frac{3\pi}{2}$

Suy ra: $I=\int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^3\left(\frac{3\pi}{2}-t\right)}{\text{din}\left(\frac{3\pi}{2}-t\right)-\cos\left(\frac{3\pi}{2}-t\right)}\left(-dt\right)=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\cos^3 t}{\sin t-\cos t}dt$

Vậy: $2I=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\sin^3 x-\cos^3 x}{\sin x-\cos x}dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(1+\frac{1}{2}\sin 2x\right)dx$

$$2I=\left(x-\frac{1}{4}\cos 2x\right)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$2I=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\Rightarrow I=\frac{\pi-1}{4}\Rightarrow a=\frac{1}{4};b=-\frac{1}{4}\Rightarrow A=-2$$

Câu 3. Chọn A

Ta có $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\cos^5 x\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5 xdx$

Trong đó: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$

Xét $K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x.\cos x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 x)^2.\cos x\, dx$

Đặt $t = \sin x$ suy ra $dt = \cos x dx, x = 0 \Rightarrow t = 0, x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1$ khi đó $K = \int_0^1 (1-t^2)^2 dt$

$= \int_0^1 (1-2t^2+t^4)dt = \left(t - \frac{2}{3}t^3 + \frac{t^5}{5}\right)\Big|_0^1 = \frac{8}{15}$

Vậy $I = \frac{\pi}{2} + \frac{8}{15} \Rightarrow a = \frac{1}{2}; b = \frac{8}{15} \Rightarrow A = 10$

Câu 4. Chọn B

$I = \int \left(x + \cos^5 x\right) dx$

$= \int x dx + \int \cos^5 x dx = \int x dx + \int \cos^4 x d\left(\sin x\right) = \int x dx + \int \left(1 - \sin^2 x\right)^2 d\left(\sin x\right)$

$\underbrace{\left(\frac{x^2}{2} + \frac{\sin^5 x}{5} - \frac{2\sin^3 x}{3} + \sin x\right)}_{F(x)} + C \Rightarrow F\left(\pi\right) = \frac{\pi^2}{2}$

Câu 5. Chọn A

$I = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2+3\tan x}}{\cos^2 x} dx = \frac{1}{6}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(2+3\tan x\right)^{\frac{1}{2}} d(2+3\tan x)$

Đặt $2+3\tan x = t \Rightarrow I = \frac{1}{6}\int_2^5 \sqrt{t}dt = \frac{1}{6}.\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\Big|_2^5 = \frac{1}{9}\left(5\sqrt{5} - 2\sqrt{2}\right) \Rightarrow a = \frac{5}{9}; b = -\frac{2}{9} \Rightarrow A = 3$

Câu 6. Chọn A

Ta có $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos x}{\cos^4 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{d\left(\sin x\right)}{\left(1-\sin^2 x\right)^2}$.

Đặt $t = \sin x$, với x = 0 thì t = 0, với $x = \frac{\pi}{6}$ thì $t = \frac{1}{2}$

Khi đó $I = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{\left(1-t^2\right)^2} = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{\left(t-1\right)^2\left(t+1\right)^2} = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\left(t+1\right)-\left(t-1\right)}{\left(t-1\right)^2\left(t+1\right)^2}dt$

$I = \frac{1}{2}\left(\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{\left(t+1\right)\left(t-1\right)^2} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{\left(t-1\right)\left(t+1\right)^2}\right) = \frac{1}{4}\left(\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\left[\left(t+1\right)-\left(t-1\right)\right]dt}{\left(t+1\right)\left(t-1\right)^2} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\left[\left(t+1\right)-\left(t-1\right)\right]dt}{\left(t-1\right)\left(t+1\right)^2}\right)$

$= \frac{1}{4}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{\left(t-1\right)^2} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{\left(t+1\right)\left(t-1\right)} + \frac{1}{4}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{\left(t+1\right)^2} = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{d\left(t-1\right)}{\left(t-1\right)^2} - \frac{1}{4}\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right)dt + \frac{1}{4}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{d\left(t+1\right)}{\left(t+1\right)^2}$

Đáp số: $I = \frac{1}{4}\ln 3 + \frac{1}{3} \Rightarrow a = \frac{1}{4}; b = \frac{1}{3} \Rightarrow A = 3$

Câu 7. Chọn C

$$2F\left(x\right)=\int\frac{\left(\sin x+\cos x\right)^2+\left(\sin x-\cos x\right)^2}{\left(\sin x+\cos x\right)^3\left(\cos x-\sin x\right)}dx=\int\frac{dx}{\cos 2x}+\int\frac{\left(\cos x-\sin x\right)}{\left(\cos x+\sin x\right)^3}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{d\left(\sin 2x\right)}{\cos^2 2x}+\int\frac{d\left(\cos x+\sin x\right)}{\left(\cos x+\sin x\right)^3}dx=\frac{1}{2}A\left(x\right)-\frac{1}{2\left(\sin x+\cos x\right)^2}$$

Đặt $t=\sin 2x$, suy ra

$$A\left(x\right)=\int\frac{dt}{1-t^2}=\frac{-1}{2}\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt=\frac{-1}{2}\ln\left|\sin 2x-1\right|+\frac{1}{2}\ln\left|\sin 2x+1\right|+C$$

Vậy $F\left(x\right)=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}\right|-\frac{1}{4\left(\sin x+\cos x\right)^2}+C$

Câu 8: Chọn D

$$t=\sqrt{\cos^2 x+4\sin^2 x}=\sqrt{1+3\sin^2 x}\Rightarrow t^2=1+3\sin^2 x\Rightarrow 2tdt=6\sin x\cos xdx\Leftrightarrow \sin 2xdx=\frac{2}{3}tdt$$

$$I_1=\frac{2}{3}\int\frac{tdt}{t}=\frac{2}{3}\int dt=\frac{2}{3}t+C, t=\sqrt{\cos^2 x+4\sin^2 x}$$

$$F\left(\pi\right)=\frac{2}{3}+C=0\Rightarrow C=-\frac{2}{3}$$

Câu 9: Chọn C

Đặt $t=\sqrt{1+3\cos x}\Rightarrow t^2=1+3\cos x\Rightarrow\begin{cases}2tdt=-3\sin xdx\Rightarrow \sin xdx=-\frac{2}{3}tdt\\ \cos x=\frac{t^2-1}{3}\end{cases}$

$$\Rightarrow I_2=\int\frac{\left(2\cos x+1\right)\sin x}{\sqrt{1+3\cos x}}dx=\int\frac{2.\frac{t^2-1}{3}+1}{t}.\left(-\frac{2}{3}\right)tdt=\frac{2}{9}\int\left(2t^2+1\right)dt=\frac{2}{9}\left(\frac{2t^3}{3}+t\right)+C, t=\sqrt{1+3\cos x}$$

$$+F\left(0\right)=\frac{68}{81}+C=0\Rightarrow C=-\frac{68}{81}$$

Câu 10: Chọn C

Ta có: $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5 xdx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 xdx=A-B$

+) Tính $B=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 xdx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\cos 2x\right)dx=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\sin 2x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}$

+) Tính $A=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5 xdx$

Đặt $t=\sin x\Rightarrow dt=\cos xdx$ và $x:0\to\frac{\pi}{2}$ thì $t:0\to 1$

Khi đó: $A=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 x\cos xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\sin^2 x\right)^2\cos xdx=\int_0^1\left(1-t^2\right)^2dt=\int_0^1\left(t^4-2t^2+1\right)dt$

$$=\left(\frac{t^5}{5}-\frac{2}{3}t^3+t\right)\Bigg|_0^1=\frac{8}{15}\Rightarrow I_1=\frac{8}{15}-\frac{\pi}{4}\Rightarrow a=\frac{8}{15};b=-\frac{1}{4}\Rightarrow A=\frac{8}{15}-\frac{1}{4}=\frac{17}{60}$$

Câu 11: **Chọn B**

$$I=\int \sin^3 2x\cos^4 xdx=8\int \sin^3 x\cos^7 xdx \text{ (ở đây } m=3;n=7\text{)}$$

Đặt $t=\cos x\Rightarrow dt=-\sin xdx$

Khi đó:

$$I=8\int\left(1-\cos^2 x\right)\cos^7 x\sin xdx=8\int\left(1-t^2\right)t^7.\left(-dt\right)=8\int\left(t^7-t^9\right)dt=8\left(\frac{t^8}{8}-\frac{t^{10}}{10}\right)+C,t=\cos x$$

$$F\left(0\right)=8\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{10}\right)+C=0\Rightarrow C=-\frac{1}{5}$$

Câu 12: Chọn D

Đặt $t=\frac{\pi}{2}-x\Rightarrow dx=dt$

$$I=-\int\frac{5\sin t-4\cos t}{\left(\sin t+\cos t\right)^3}dt=\int\frac{5\sin x-4\cos x}{\left(\cos x+\sin x\right)^3}dx$$

Do đó: $2I=\int\frac{\cos x+\sin x}{\left(\cos x+\sin x\right)^3}dx=\int\frac{dx}{\left(\cos x+\sin x\right)^2}=\int\frac{dx}{2\cos^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{1}{4}tg\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+C$

Câu 13: Chọn C

Đặt $t=\sin x\Rightarrow dt=\cos xdx$

Khi đó $I_5=\int\frac{\cos^3 x}{\sin^2 x}dx=\int\frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}\cos xdx=\int\frac{1-t^2}{t^2}dt=\int\left(\frac{1}{t^2}-1\right)dt=-\frac{1}{t}-t+C,t=\sin x$

$$+F\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{5}{2}+C=0\Rightarrow C=\frac{5}{2}$$

Câu 14: Chọn D

Đặt $t=\cos x\Rightarrow dt=-\sin xdx\Rightarrow\sin xdx=-dt$ và cận $t:1\to 0$

$\Rightarrow I_1=-\int_1^0\frac{dt}{1+t^2}=\int_0^1\frac{dt}{1+t^2}$. Đặt $t=\tan u\Rightarrow\begin{cases}dt=\frac{du}{\cos^2 u}=\left(1+\tan^2 u\right)du\\1+t^2=1+\tan^2 u\end{cases}$ và cận $u:0\to\frac{\pi}{4}$

$$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\left(1+\tan^2 u\right)du}{1+\tan^2 u}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}du=u\Big|_0^{\pi/4}=\frac{\pi}{4}\Rightarrow\tan a=\pi$$

Đề: $A=\frac{\sin a+\cos a}{\cos^3 a}=\frac{\sin a}{\cos a}.\frac{1}{\cos^2 a}+\frac{1}{\cos^2 a}=\tan a\left(\tan^2 a+1\right)+\tan^2 a+1=\pi^3+\pi^2+\pi+1$

Câu 15: Chọn C

Ta có: $I_3=\int\frac{\cos 2x}{1+\sin 2x}dx$

Đặt $t=\sin 2x\Rightarrow dt=2\cos 2xdx\Leftrightarrow\cos 2xdx=\frac{dt}{2}$

$$\Rightarrow I_3=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{1+t}=\frac{1}{2}\ln\left|1+t\right|+C,t=\sin 2x$$

$$+F\left(\pi\right)=0+C=1\Rightarrow C=1$$

Đề 4:

Câu 1: Chọn D

Ta có: $I=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 x}{1+\cos x}.\sin xdx$

Đặt $t=\cos x\Rightarrow dt=-\sin xdx$ và

$x:0\to\frac{\pi}{2}$ thì $t:1\to 0$

$\Rightarrow I=2\int_1^0\frac{t^2}{1+t}.(-dt)=2\int_0^1\left(t-1+\frac{1}{t+1}\right)dt=2\left(\frac{t^2}{2}-t+\ln|t+1|\right)\Bigg|_0^1=-1+2\ln 2$

$\Rightarrow a=-1;b=2\Rightarrow A=-3$

Câu 2: Chọn B

$I=\int_{\frac{-\pi}{2}}^{0}\frac{\sin 2x}{(2+\sin x)^2}dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{2\sin x}{(2+\sin x)^2}\cos xdx$

Đặt $t=2+\sin x\Rightarrow dt=\cos xdx$ và $x:-\frac{\pi}{2}\to 0$ thì $t:1\to 2$

Khi đó $I_5=\int_1^2\frac{2(t-2)}{t^2}dt=\int_1^2\left(\frac{2}{t}-\frac{4}{t^2}\right)dt=\left(2\ln|t|+\frac{4}{t}\right)\Bigg|_1^2=2\ln 2-2\Rightarrow a=2;b=-2$

$\Rightarrow A=a+b=0$

Câu 3:

CHƯA CÓ ĐÁP ÁN

Câu 4: Chọn A

$I=\int\frac{\sin 4xdx}{1+\cos^2 x}=\int\frac{2\sin 2x\cos 2xdx}{1+\frac{1+\cos 2x}{2}}=4\int\frac{\sin 2x\cos 2x}{3+\cos 2x}dx$

Đặt $t=\cos 2x\Rightarrow dt=-2\sin 2xdx\Leftrightarrow \sin 2xdx=-\frac{1}{2}dt$

$\Rightarrow I=4\int\frac{t}{3+t}.\left(-\frac{1}{2}dt\right)=2\int\frac{t}{t+3}dt=2\int\left(1-\frac{3}{t+3}\right)dt=2t-6\ln|t+3|+C,t=\cos 2x$

$+F(\pi)=2-6\ln 4+C=0\Rightarrow C=12\ln 2-2$

$\Rightarrow F(x)=2\cos 2x-6\ln|\cos 2x+3|+12\ln 2-2$

Câu 5: Chọn C

Đặt $t=\sin x+\cos x\Rightarrow\begin{cases}dt=(\cos x-\sin x)dx=-\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)dx\\ \sin 2x=t^2-1\end{cases}$

$\Rightarrow I_2=-\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dt}{t^2-1+2(1+t)}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\int\frac{dt}{(t+1)^2}=+\frac{\sqrt{2}}{2(t+1)}+C,t=\sin x+\cos x$

$+F\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}+C=0\Rightarrow C=-\frac{\sqrt{2}}{4}\Rightarrow F(x)=\frac{\sqrt{2}}{2(\sin x+\cos x+1)}-\frac{\sqrt{2}}{4}$

Câu 6: Chọn C

$$I=\int\frac{\cos 2x}{2-\sqrt{1+\sin x-\cos x}}dx=\int\frac{(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)}{2-\sqrt{1+\sin x-\cos x}}dx$$

Đặt $t=\sqrt{1+\sin x-\cos x}\Rightarrow t^2=1+\sin x-\cos x\Rightarrow\begin{cases}\sin x-\cos x=t^2-1\\(\cos x+\sin x)dx=2tdt\end{cases}$

$$\Rightarrow I=\int\frac{-(t^2-1)}{2-t}.2tdt=2\int\frac{t^3-t}{t-2}dt=2\int\left(t^2+2t+3+\frac{6}{t-2}\right)dt=2\left(\frac{t^3}{3}+t^2+3t+6\ln|t-2|\right)+C$$

$F(0)=12\ln 2+C=0\Rightarrow C=-12\ln 2$

$$\Rightarrow F(x)=2\left(\frac{t^3}{3}+t^2+3t+6\ln|t-2|\right)-12\ln 2, t=\sqrt{1+\sin x-\cos x}$$

Câu 7: Chọn D

Ta có: $F(x)=\int\frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}=\int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx=\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{1}{\sin^2 x}\right)dx=\tan x-\cot x$

Theo đề:

$$\tan x-\cot x=\frac{\sin x}{\cos x}-\frac{\cos x}{\sin x}=\frac{\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin x\cos x}=\frac{-2\cos 2x}{\sin 2x}=a$$

$$\Rightarrow\frac{\cos 2x}{\sin 2x}=-\frac{a}{2}$$

$$A=4\frac{\cos^2 2x}{\sin^2 2x}=4\left(-\frac{a}{2}\right)^2=a^2$$

Câu 8: Chọn B

Đặt $u=\sin x+3\cos x+1\Rightarrow du=(\cos x-3\sin x)dx$

Ta có: $\int\frac{\cos x-3\sin x}{\sin x+3\cos x+1}dx=\int\frac{du}{u}=\ln|u|+C=\ln|\sin x+3\cos x+1|+C$

Câu 9: Chọn D

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2 xdx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\tan^2 x+1-1)dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\cos^2 x}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}dx=(\tan x-x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=1-\frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow a;=1;b=-\frac{1}{4}\Rightarrow A=-1$$

Câu 10: Chọn B

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{4}{\cos^2 x}-3\sin x\right)dx=(4\tan x+3\cos x)\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}=4+\frac{3\sqrt{2}}{2}+4-\frac{3\sqrt{2}}{2}=8$$

$$\Rightarrow\sin 2a=1\Rightarrow\sin a\cos a=\frac{1}{2}$$

$$A=(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\sin^2 a\cos^2 a=1-2.\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

Câu 11: Chọn D

$$\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\cos 2x}dx=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}|\sin x|=\sqrt{2}\int_0^{\pi}\sin xdx-\sqrt{2}\int_{\pi}^{2\pi}\sin xdx=-\sqrt{2}\cos x\Big|_0^{\pi}+\sqrt{2}\cos x\Big|_{\pi}^{2\pi}=4\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ab = 4\sqrt{2} \\ a+b = 2+2\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow X^2 - \left(2+2\sqrt{2}\right)X + 4\sqrt{2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 2\sqrt{2} \\ b = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} a = 2 \\ b = 2\sqrt{2} \end{cases}$$

Câu 12: Chọn D

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin^4\frac{x}{2} - \cos^4\frac{x}{2}\right)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin^2\frac{x}{2} - \cos^2\frac{x}{2}\right)\left(\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}\right)dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = -\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b=-1 \\ a^3+b^3=-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-b-1 \\ (-b-1)^3+b^3+7=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-2 \end{cases} \vee \begin{cases} a=-2 \\ b=1 \end{cases}$$

Câu 14: Chọn B

Ta có: $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x}dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}\cos x dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1\right)\cos x dx$

Đặt $u = \sin x \Rightarrow du = \cos x dx$

Đổi cận

x	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$
u	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

Suy ra: $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x}dx = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(\frac{1}{u^2} - 1\right)du = \left(-\frac{1}{u} - u\right)\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{5}{2} - \frac{7\sqrt{3}}{6} \Rightarrow a = \frac{5}{2}; b = -\frac{7}{6} \Rightarrow A = 17$

Câu 15: Chọn D

$\displaystyle\int \sin^5 x dx = \int \left(1-\cos^2 x\right)^2 \sin x dx$

Đặt $u = \cos x \Rightarrow du = -\sin x dx$

Suy ra $\displaystyle\int \sin^5 x dx = -\int \left(1-u^2\right)^2 du = u - \frac{2}{3}u^3 + \frac{u^5}{5} = \sin x - \frac{2}{3}\sin^3 x + \frac{\sin^5 x}{5} + C$

$F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{8}{15} = a + b \Rightarrow A = 25(a+b)^2 = \frac{64}{9}$

Đề 5:

Câu 1: Chọn B

Đặt $u = \sqrt[6]{1-\cos^3 x} \Rightarrow u^6 = 1 - \cos^3 x \Rightarrow 6u^5 du = 3\sin x \cos^2 x dx$

$\Rightarrow \sin x \cos^2 x dx = 2u^5 du$ và $\cos^3 x = 1 - u^6$

$$\int \sqrt[6]{1-\cos^3 x}.\sin x.\cos^5 x dx = \int u\left(1-u^6\right)2u^5 du = 2\int u^6 du - 2\int u^{12} du = 2\left(\frac{u^7}{7} - \frac{u^{13}}{13}\right) + C$$

$$= \frac{2}{7}\sqrt[6]{\left(1-\cos^3 x\right)^7} - \frac{2}{13}\sqrt[6]{\left(1-\cos^3 x\right)^{13}} = \sqrt[6]{\left(1-\cos^3 x\right)^7}\left[\frac{2}{7} - \frac{2}{13}\sqrt[6]{\left(1-\cos^3 x\right)^6}\right]$$

$\Rightarrow a = \frac{2}{7}; b = -\frac{2}{13}; c = 6 \Rightarrow A = -32$

Câu 2: Chọn D

Ta có: $F(x)=\int\frac{\cos 2x}{\sin x+\cos x}dx=\int\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\sin x+\cos x}dx$

$=\int\frac{(\cos x+\sin x)(\cos x-\sin x)}{(\sin x+\cos x)}dx=\int(\cos x-\sin x)dx=\sin x+\cos x$

$\Rightarrow \mathrm{F}(\pi)=-1=\mathrm{a}+\mathrm{b}\Rightarrow \mathrm{A}=-1$

Câu 3: Chọn B

$\int\cos^3 x\sin xdx$

Đặt $u=\cos x\Rightarrow -du=\sin xdx$

$\int\cos^3 x\sin xdx=-\int u^3du=-\frac{u^4}{4}+C=-\frac{\cos^4 x}{4}+C\Rightarrow \mathrm{F}(0)=-\frac{1}{4}=\mathrm{a}+\mathrm{b}-\frac{1}{4}\Rightarrow \mathrm{a}+\mathrm{b}=0$

$\mathrm{A}=\mathrm{a}^3+\mathrm{b}^3+2016=(\mathrm{a}+\mathrm{b})^3-3\mathrm{ab}(\mathrm{a}+\mathrm{b})+2016=2016$

Câu 4: Chọn A

$\int\frac{(\sin x+\cos x)}{\sqrt[3]{\sin x-\cos x}}dx$

Đặt $u=\sqrt[3]{\sin x-\cos x}\Rightarrow u^3=\sin x-\cos x\Rightarrow 3u^2du=(\cos x+\sin x)dx$

Vậy $\int\frac{(\sin x+\cos x)}{\sqrt[3]{\sin x-\cos x}}dx=\int\frac{3u^2du}{u}=3\int udu=3\frac{u^2}{2}+C=\frac{3}{2}\sqrt[3]{(\sin x-\cos x)^2}\Rightarrow \mathrm{a}=\frac{3}{2};\mathrm{b}=\frac{2}{3}$

$\Rightarrow \mathrm{A}=4$

Câu 5. Chọn C

Ta có: $\int\sin 2x.\cos 3x dx=\frac{1}{2}\int[\sin 5x+\sin(-x)]dx$

$=\frac{1}{2}\int\sin 5xdx-\frac{1}{2}\int\sin xdx=-\frac{1}{10}\cos 5x+\frac{1}{2}\cos x+C=f(x)$

Mà $f(0)=0$ $\mathrm{F}(0)=-\frac{1}{10}+\frac{1}{2}+\mathrm{C}\Rightarrow \mathrm{C}=-\frac{2}{5}$

Câu 6. Chọn B

Ta có: $1+\sin x=\left(\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\right)=\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)=2\cos^2\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$

$\Rightarrow\int\frac{1}{1+\sin x}dx=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\cos^2\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}=\tan\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+C\Rightarrow \mathrm{F}(\pi)=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=1$

Câu 7. Chọn B

Ta có:

$f(x)=\cos^3 x\sin 8x=\frac{1}{4}(\cos 3x+3\cos x)\sin 8x$

$=\frac{1}{4}(\sin 8x\cos 3x+3\sin 8x\cos x)=\frac{1}{8}(\sin 11x+\sin 5x)+\frac{3}{8}(\sin 9x+\sin 7x)$

Vậy $\int f(x)dx=-\frac{1}{88}\cos 11x-\frac{1}{40}\cos 5x-\frac{3}{72}\cos 9x-\frac{3}{56}\cos 7x+C$

$\Rightarrow F(0) = -\frac{152}{1155}$

Câu 8: Chọn D

$$I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{-d(\sin x + \cos x)}{\sin x + \cos x} = -\ln|\sin x + \cos x|\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = -\ln 1 + \ln\sqrt{2} = \ln\sqrt{2}$$

$\Rightarrow a = 0; b = \frac{1}{2} \Rightarrow A = 1$

Câu 9: Chọn A

$$I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sin^2 x} dx - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos^2 x} dx$$

$$= \left[-\cot x - \tan x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{3}\left(6 - 4\sqrt{3}\right) \Rightarrow a = 2; b = -\frac{4}{3} \Rightarrow A = -2$$

Câu 10. Chọn C

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x.\cos 3x dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\left[\cos 4x + \cos 2x\right] dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 4x dx + \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x dx = \left[\frac{1}{8}\sin 4x + \frac{1}{4}\sin 2x\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 0 \Rightarrow a + b = 0$$

$$A = a^5 - b^5 + 1 = \left(a^2 + b^2\right)\left(a^3 + b^3\right) - a^2b^2\left(a + b\right) + 1$$

$$= \left[\left(a + b\right)^2 - 2ab\right]\left[\left(a + b\right)^3 - 3ab\left(a + b\right)\right] - a^2b^2\left(a + b\right) + 1 = 1$$

Câu 11. Chọn B

$$\sin^4 x = \left(\sin^2 x\right)^2 = \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^2 = \frac{1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x}{4}$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\left(\frac{1 + \cos 4x}{2}\right) = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x\right) dx = \left[\frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{32}\left(3\pi - 8\right)$$

$\Rightarrow a = \frac{3}{32}; b = -\frac{1}{4} \Rightarrow A = 1$

Câu 12: Chọn A

$$f(x) = \left(\cos^2 x - \sin^2 x\right)\left(\cos^2 x + \sin^2 x\right) = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$$

Do đó: $F(x) = \frac{1}{2}\sin 2x + C$

$$F\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{3} + C = 0 \Leftrightarrow C - \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Vậy $F\left(x\right)=\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{\sqrt{3}}{4}$

Câu 13: Chọn A

$$a)\int \frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}dx=\int \frac{d\left(\sin x+\cos x\right)}{\sin x+\cos x}=\ln\left|\sin x+\cos x\right|+C.$$

$+F\left(0\right)=C=2$

Câu 14.

$$\int \frac{\cos 2x}{\sin x+\cos x}dx=\int \frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos x+\sin x}dx=\int\left(\cos x-\sin x\right)dx=\sin x+\cos x+C$$

$+F\left(\frac{3\pi}{2}\right)=-1+C=0\Rightarrow C=1$

Câu 15: Chọn A

$$f\left(x\right)=\int \frac{1}{tg^5 x}dx=\int \frac{\cos^5 x}{\sin^5 x}dx=\int \frac{\left(1-\sin^2 x\right)^2}{\sin^5 x}d\left(\sin x\right)$$

$$=\int\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{2}{\sin^3 x}+\frac{1}{\sin^5 x}\right)d\left(\sin x\right)$$

$$=\ln\left|\sin x\right|+\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{4\sin^4 x}+C$$

Mà $\mathrm{f}\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\ln 2+\mathrm{C}=0\Rightarrow \mathrm{C}=\ln 2$

HÀM MŨ

Ví dụ: $I_1=\int_1^3 \frac{dx}{e^x-1}$ $\left(\mathbf{D-2009}\right)$

Nhận xét: Phân thức có số hạng đặc biệt e^x: $\left(e^{ax}\right)'=ae^{ax}\Rightarrow\left(e^x\right)'=e^x$. Dựa vào tính chất này ta có thể áp dụng rất linh hoạt nhờ phép đổi biến số: Nếu ta nhân cả tử và mẫu với e^x thì hiển nhiên ta có thể đưa biến số về e^x. Cụ thể ở bài toán này ta chỉ có thể sử dụng đổi biến số:

Đặt $t=e^x\Rightarrow dt=e^x dx$ và $x=1\to t=e;\ x=3\to t=e^3$

Khi đó $I_1=\int_1^3 \frac{e^x dx}{e^x\left(e^x-1\right)}=\int_e^{e^3}\frac{dt}{t\left(t-1\right)}=\int_e^{e^3}\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t}\right)dt=\ln\left|\frac{t-1}{t}\right|\Big|_e^{e^3}=\ln\frac{e^2+e+1}{e^2}$

Thường với Câu toán có e^x ta sẽ nghĩ ngay đến đổi biến $t=e^x\Rightarrow dt=e^x dx$

Câu 1: Tìm nguyên hàm của: $\int\left(1+e^{-x}\right)e^x.dx$

A. e^x+x+C **B.** e^x-x+C **C.** $-e^x+x+C$ **D.** $2e^x+x+C$

Giải:

$$\int\left(1+e^{-x}\right).e^x dx=\int\left(e^x+e^{-x+x}\right)dx=\int e^x dx+\int dx=e^x+x+C$$

Câu 2. Tính nguyên hàm sau: $\int \frac{dx}{e^x+1}$

A. $x-\ln(e^x+1)+C$ **B.** $x+\ln(e^x+1)+C$

C. $-x-\ln(e^x+1)+C$ **D.** $-x+\ln(e^x+1)+C$

Giải:

Ta có: $\int \frac{dx}{e^x+1} = \int (1-\frac{e^x}{e^x+1})dx = \int dx - \int \frac{d(e^x+1)}{e^x+1} = x-\ln(e^x+1)+C$

Câu 3: $\int_0^1 e^{2x+1}dx$

A. $\frac{1}{2}(e^3+e)$ **B.** $\frac{1}{2}(e^3-3)$ **C.** $\frac{1}{2}(e^3-e)$ **D.** $\frac{1}{2}(e^3+3)$

Giải:

Đặt $u=2x+1 \Rightarrow du=2dx$

Đổi cận

x	0	1
u	1	3

Ta có: $\int_0^1 e^{2x+1}dx = \frac{1}{2}\int_1^3 e^u du = \left.\frac{e^u}{2}\right|_1^3 = \frac{1}{2}\left(e^3-e\right)$

Lưu ý: Học nhớ $\int e^{ax+b}dx = \frac{1}{a}e^{ax+b}+C\left(a\neq 0\right)$

Câu 4: $\int_0^{\ln 2}\left(2+e^x\right)^3 e^x dx$

A. $\frac{165}{2}$ **B.** $\frac{145}{4}$ **C.** $\frac{145}{8}$ **D.** $\frac{165}{4}$

Giải:

Đặt $u=2+e^x \Rightarrow du=e^x dx$

Đổi cận

x	0	ln2
u	3	4

Ta có: $\int_0^{\ln 2}\left(2+e^x\right)^3 e^x dx = \int_3^4 u^3 du = \left.\frac{u^4}{4}\right|_3^4 = \frac{1}{4}\left(256-81\right) = \frac{175}{4}$

Kinh nghiệm: $u=2+e^x \Rightarrow du=e^x dx$, *ở bài toán này chúng ta sẽ đưa hết các biểu thức có biến x về theo u. Biểu diễn dx theo du*

HÀM MŨ LN

Với hàm ln ta sẽ sử dụng phép tính đạo hàm $\ln x' = \frac{1}{x}$

Khi đó việc áp dụng vào bài toán sẽ dễ dàng hơn.

Các ví dụ minh họa

Câu 5 : $\int_1^e \frac{1+\ln^4 x}{x}dx$

Giải:

Đặt $u=\ln x \Rightarrow du=\frac{1}{x}dx$

đổi cận

x	1	e
u	0	1

Ta có: $\int_1^e \frac{1+\ln^4 x}{x}dx=\int_0^1\left(1+u^4\right)du=\left(u+\frac{u^5}{5}\right)\Big|_0^1=1+\frac{1}{5}=\frac{6}{5}$

Câu 6 : $I_1=\int_1^e \frac{\ln x}{x\left(2+\ln x\right)^2}dx$ **(B – 2010)**

A. $-\frac{1}{3}+\ln\frac{3}{2}$ **B.** $\frac{1}{3}+\ln\frac{3}{2}$ **C.** $\frac{1}{2}-\ln\frac{3}{2}$ **D.** $-\frac{1}{2}+\ln\frac{3}{2}$

Giải:

Đặt $t=2+\ln x \Rightarrow \begin{cases} dt=\frac{dx}{x} \\ \ln x=t-2 \end{cases}$

và $x:1\to e$ thì $t:2\to 3$

$\Rightarrow I_1=\int_2^3 \frac{t-2}{t^2}dt=\int_2^3\left(\frac{1}{t}-\frac{2}{t^2}\right)dt=\left(\ln t+\frac{2}{t}\right)\Big|_2^3=-\frac{1}{3}+\ln\frac{3}{2}$

Kinh nghiệm: khi có biểu thức $2+\ln x$ ta sẽ đặt t = $2+\ln x$, rồi biến đổi các biểu thức còn lại theo biến t. Biểu diễn dx theo dt cụ thể như trên: $\frac{dx}{x}=dt$

Câu 7: $I=\int_1^e \frac{\sqrt{1+3\ln x}\ln x}{x}dx=\frac{a}{b}$ **(B – 2004) biết a, b tối giản. Chọn nhận định đúng**

A. a + b = 240 **B.** a > b **C.** 2b – a = 154 **D.** b = 134

Giải:

Đặt $t=\sqrt{1+3\ln x}\Rightarrow t^2=1+3\ln x\Rightarrow\begin{cases} 2tdt=\frac{3dx}{x} \\ \ln x=\frac{t^2-1}{3}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{dx}{x}=\frac{3}{2}dt \\ \ln x=\frac{t^2-1}{3}\end{cases}$ và $x:1\to e$ thì $t:1\to 2$

$\Rightarrow I_2=\int_1^2 t.\frac{t^2-1}{3}.\frac{2}{3}tdt=\frac{2}{9}\int_1^2\left(t^4-t^2\right)dt=\frac{2}{9}\left(\frac{t^5}{5}-\frac{t^3}{3}\right)\Big|_1^2=\frac{116}{135}$

Kinh nghiệm: Đặt cả biểu thức $\sqrt{1+3\ln x}$ rồi sau đó biến đổi phần còn lại theo t, cả dx theo dt

Chọn C

Câu 8: $I = \int_e^{e^3} \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x\ln x}dx = 4 - 2\sqrt{2} + 2\ln\frac{\left(\sqrt{a}+1\right)}{\sqrt{b}}$. Hỏi nhận định đúng?

A. a + b = 4 **B. a.b = 6** **C. a – b = 1** **D. 2a – b = 3**

Giải:

B đúng.

Đặt $t = \sqrt{1+\ln x} \Rightarrow t^2 = 1+\ln x \Rightarrow \begin{cases} 2tdt = \dfrac{dx}{x} \\ \ln x = t^2 - 1 \end{cases}$ và cận $t: \sqrt{2} \to 2$

$$\Rightarrow I = \int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{t}{t^2-1}.2t.dt = 2\int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{t^2}{t^2-1}dt = 2\int_{\sqrt{2}}^{2}\left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)dt = 2\left(t+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right)\Bigg|_{\sqrt{2}}^{2} = 4-2\sqrt{2}+2\ln\frac{\left(\sqrt{2}+1\right)}{\sqrt{3}}$$

Tìm được a = 2 , b = 3 nên **B đúng.**

Câu 9: $I = \int_1^{\sqrt{e}} \frac{3-2\ln x}{x\sqrt{1+2\ln x}}dx = \frac{10\sqrt{a}-b}{3}$. Chọn nhận định đúng?

A. a + b = 9 **B. a.b = 20** **C. a – b = -9** **D.b = 11**

Giải:

Chọn đáp án D.

Đặt $t = \sqrt{1+2\ln x} \Rightarrow t^2 = 1+2\ln x \Rightarrow \begin{cases} tdt = \dfrac{dx}{x} \\ 2\ln x = t^2 - 1 \end{cases}$

và cận $t: 1 \to \sqrt{2}$

$$\Rightarrow I = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{3-\left(t^2-1\right)}{t}.tdt = \int_1^{\sqrt{2}}\left(4-t^2\right)dt = \left(4t-\frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_1^{\sqrt{2}} = \frac{10\sqrt{2}-11}{3}$$

Câu 10: $I_2 = \int_e^{e^2} \frac{\ln(\ln x)}{x}dx == 2\ln A - B$

A. A + B = 3 **B. A.B = 3** **C. A-B = 2** **D. $A^2 + B^2$ = 10**

Giải:

Chọn A .

Đặt $t = \ln x \Rightarrow dt = \frac{dx}{x}$ và cận $t: 1 \to 2$

$\Rightarrow I_2 = \int_1^2 \ln t dt$. Đặt $\begin{cases} u = \ln t \\ dv = dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{dt}{t} \\ v = t \end{cases}$

$$\Rightarrow I_2 = t\ln t\Big|_1^2 - \int_1^2 dt = \left(t\ln t - t\right)\Big|_1^2 = 2\ln 2 - 1$$

A = 2 , B = 1. Nên chọn A

Kinh nghiệm: Bài *toán sử dụng tích phân từng phần, đã sử dụng và trình bày kỹ ở phần tích phân từng phần .*

Luyện tập
Đề 1:

Câu 1: Tìm F(x) = $\int \frac{2008+\ln^2 x}{x}dx$ có: F(e³) = 6050. Tìm hằng số C trong biểu thức F(x)

A. 17 **B.** 19 **C.** 27 **D.** 29

Câu 2: Tính tích phân: $I=\int_{e^3}^{e^8}\frac{\ln x-1}{x^2-\ln^2 x}dx=\frac{a}{b}.\ln\frac{\left(e^8-8\right)\left(e^3+3\right)}{\left(e^8+8\right)\left(e^3-3\right)}$

Tính giá trị của: a + b biết a, b tối giản

A. 2 **B.** 5 **C.** 3 **D.** 4

Câu 3: Tính tích phân $\int_{e^3}^{e^8}\frac{dx}{x\ln x\sqrt{\ln ex}}=\ln\frac{a}{b}$. Biết a, b tối giản. Tính tổng a + 2b

A. 5 **B.** 8 **C.** 7 **D.** 9

Câu 4: Tính tích phân $I=\int_1^e x\left(\frac{1}{x^2+1}+\frac{\ln x}{x^3}\right)dx=a\ln\frac{\left(1+e^2\right)}{2}+1-\frac{b}{e}$. **Tính b : a**

A. 1 **B.** 2 **C.** 4 **D.** 6

Câu 5: Tính tích phân $I=\int_e^{e^2}\frac{2\ln \mathrm{x}+3}{x\ln \mathrm{x}}d\mathrm{x}=a+b\ln 2$ .Tính S = a^2+b^2

A. 13 **B.** 10 **C.** 25 **D.** 34

Câu 6: $\int_0^{\ln 2}\frac{e^{2x+1}+1}{e^x}dx=e+\frac{a}{b}$. **Tính a.b**

A. 1 **B.** 2 **C.** 6 **D.**12

Câu 7: $I_1=\int_0^1\frac{x^2+e^x+2x^2e^x}{1+2e^x}dx=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ln\frac{2e+1}{3}$ $\left(\mathbf{A-2010}\right)$. **Tính a - b**

A. 1 **B.** 2 **C.** -1 **D.**4

Câu 8: $I=\int_{\ln 3}^{\ln 5}\frac{dx}{e^x+2\mathrm{e}^{-x}-3}$ $\left(\mathbf{B-2006}\right)$

A. $-\ln\frac{3}{2}$ **B.** $2\ln\frac{3}{2}$ **C.** $-2\ln\frac{3}{2}$ **D.** $\ln\frac{3}{2}$

Câu 9: $I=\int_0^1\frac{d\mathrm{x}}{e^{2\mathrm{x}}+5}$

A. $\ln\frac{6e^2}{e^2+5}$ **B.** $\frac{1}{10}\ln\frac{6e^2}{e^2+5}$ **C.** $\frac{1}{5}\ln\frac{6e^2}{e^2+5}$ **D.** $\frac{1}{10}\ln\frac{3e^2}{e^2+5}$

Câu 10: $I=\int_0^1\frac{e^{-2\mathrm{x}}}{1+e^{-x}}d\mathrm{x}$

A. $\ln\frac{e+1}{2}+\frac{2}{e}$ **B.** $\ln\frac{e+1}{2}+\frac{1}{e}$ **C.** $\ln\frac{e+1}{2}-\frac{2}{e}$ **D.** $\ln\frac{e+1}{2}-\frac{1}{e}$

Đề 2:

Câu 11: $I=\int_0^1 \frac{e^x dx}{e^x+e^{-x}}=\frac{1}{2}\ln\frac{e^2+a}{b}$. **Biết a, b là các hằng số tìm được**. Tính tích a.b

A. 2 **B.**4 **C.**6 **D.** **Không xác định**

Câu 12: $F(x)=\int\frac{\left(1+e^x\right)^3}{e^x}dx$ có nguyên hàm dạng $\left(\frac{\left(1+e^x\right)^2}{a}+2t+b\ln e^x-\frac{1}{e^x}\right)+C$. Tính tích a.b. **Biết a, b là các hằng số tìm được**

A. 3 **B.** 5 **C.** 6 **D.** 8

Câu 13: $F(x)=\int\frac{e^{2x}+3e^x}{e^{2x}+3e^x+2}dx$. Nguyên hàm có dạng: $\left(a\ln\left|e^x+1\right|+b\ln\left|e^x+2\right|\right)+C$.

Tính a + 2b. **Biết a, b là các hằng số tìm được**

A. 2 **B.**1 **C.**-1 **D.** 0

Câu 14: $F(x)=\int\frac{e^{2x}dx}{\sqrt{e^x-1}}; F(\ln 2)=2$. **Tìm F(x)**

A. $2\left(\frac{\left(\sqrt{e^x-1}\right)^3}{3}+\sqrt{e^x-1}\right)-\frac{2}{3}$

B. $2\left(\frac{\left(\sqrt{e^x-1}\right)^3}{3}+\sqrt{e^x-1}\right)+\frac{2}{3}$

C. $2\left(\frac{\left(\sqrt{e^x-1}\right)^3}{3}+2\sqrt{e^x-1}\right)+\frac{2}{3}$

D. $2\left(\frac{\left(\sqrt{e^x-1}\right)^3}{3}-\sqrt{e^x-1}\right)-\frac{4}{3}$

Câu 15: $I=\int_1^e\frac{\sqrt{1+\ln^2 x}\ln x}{x}dx=\frac{2\sqrt{2}-a}{b}$. **Tính tổng a + 3b .**

A. 8 **B.** 9 **C.** 10 **D.** 12

Câu 16: $I=\int_1^e\frac{\ln x.\sqrt[3]{1+\ln^2 x}}{x}dx=\frac{6\sqrt[3]{a}-3}{b}$. Tính a : b. **Biết a, b là các hằng số tìm được**

A. 2 **B.** 4 **C.** $\frac{1}{2}$ **D.** $\frac{1}{4}$

Câu 17: $F(x)=\int\frac{2\ln x-1}{x\left(8\ln^2 x-8\ln x+3\right)}dx=\frac{a}{8}\ln\left|b\left(2\ln x-1\right)^2+1\right|+C$. **Tính b : a**

A. 3 **B.** 4 **C.**2 **D.**8

Câu 18: $\int\frac{2008+\ln^2 x}{x}dx=a\ln x+\frac{(\ln x)^3}{b}+C$. Chọn đáp án đúng

A. a – b = 2004 **B.** b < 4 **C.** a – 3b = 2000 **D.** a.b = 6025

Câu 19: $\int_1^e\frac{1+\ln^4 x}{x}dx=\frac{a}{b}$, biết a,b tối giản , tìm tổng a + b

A. 10 **B.** 12 **C.** 11 **D.** 9

Câu 20: $\int \frac{1}{x.\ln x.\ln(\ln x)}dx = F(x) + C$, chọn kết luận đúng biết $F(e) + C = e$. Tìm C

A. 1 **B. e** **C. e²** **D. e⁻¹**

Đề 3:

Câu 21: $\int \frac{\ln ex}{1 + x\ln x}dx = F(x) + C$,biết F(1) = ln2 . Tìm C

A. e B.e^2 C. 2ln2 D.ln2

Câu 22: Tính tích phân: $I = \int_1^e \frac{1 - \ln x}{x}dx = \frac{a}{b} + c\ln 2$

Tính $S = \frac{a}{b} + c$

A. ½ B.2 C. 1 D.0

Câu 23: Tính tích phân $I = \int_0^1 \frac{x\ln\left(x^2 + 4\right)}{x^2 + 4}dx = \frac{1}{4}(\ln^2 a - \ln^2 b)$. Chọn phát biểu đúng

A. a.b = 20 B.a – b = -1 C. a:b = 4:5 D. $a^2 + b^2 = 71$

Câu 24: $F(x) = \int \frac{e^{3x} + 2e^{2x} + e^x}{2 + \left(1 + e^x\right)^3}dx$

Biết rằng: $F\left(0\right) = \frac{1}{3}.ln10 + 4$. Tìm hằng số của C trong F(x)

A. 3 **B. 6** **C. 4** **D. 8**

Câu 25: $I = \int_0^{\ln 3} \frac{dx}{\sqrt{e^x + 1}} = 2\ln\left(\sqrt{a} + 1\right) - \ln b$ Hỏi tổng : $S = a^2 + b^3$

A. 17 **B. 36** **C. 31** **D. 28**

Câu 26: $I_5 = \int_0^{\ln 3} \frac{e^x dx}{\sqrt{\left(e^x + 1\right)^3}} = \sqrt{a} - b$ Tính a^b

A. 8 **B. 9** **C. 4** **D. 16**

Câu 27: $D = \int_0^{\ln 3} \frac{e^x dx}{\left(e^x + 1\right)\sqrt{e^x - 1}} = \frac{\pi\sqrt{2}}{b}$. Chọn phát biểu đúng của b

A. b là một số lẻ **B.** b là số chính phương

C. $b^2 = 25$ **D.** b chia hết cho 3

Câu 28: $A = \int_1^2 \frac{\ln\left(x + 1\right)}{x^2}dx = a\ln 2 - \frac{3}{2}\ln b$ Hỏi phát biểu nào sau đây sai

A. a = 2b **B.**$a^2 = 3b$ **C.** $a^2 + b^2 = 18$ **D.** a.b = 9

Câu 29: $B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(x + 1\right)\sin x dx$. Hỏi phát biểu nào đúng

A. $\cos\dfrac{B\pi}{4}=1$ **B.** $Sin\dfrac{B\pi}{2}=1$ **C.** $\tan\dfrac{B\pi}{8}=1$ **D.** $\tan\dfrac{B\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Câu 30: $C=\int_0^1 xe^{-2x}dx=\dfrac{1}{a}\left(1-\dfrac{b}{e^2}\right)$ Hỏi phát biểu nào sau đây đúng

A. a.b = 12 **B.** a – b = -1 **C.** $a^2+b^2=25$ **D.** $\log_3 b^a=4$

Câu 31: Tính $I=\int_0^1\dfrac{e^x}{e^x+e^{-x}}dx=\dfrac{1}{a}\ln\dfrac{e^2+1}{b}$ Chọn phát biểu đúng

A. a.b = 4 **B.** a = 2b **C.** 2a = b **D.** a + b = 3

Lời giải

Đề 1:

Câu 1: Chọn đáp án A

Đặt $u=\ln x\Rightarrow du=\dfrac{1}{x}dx$

Ta có: F(x) = $\int\dfrac{2008+\ln^2 x}{x}dx=\int\left(2008+u^2\right)du=2008\int du+\int u^2du$

$=2008u+\dfrac{u^3}{3}+C=2008\ln x+\dfrac{(\ln x)^3}{3}+C$

Thay e^3 vào biểu thức ta có: $2008.\ln e^3+9+C=6050\Rightarrow C=-17$

Câu 2:

$$I=\int_{e^3}^{e^8}\frac{\ln x-1}{x^2-\ln^2 x}dx=\int_{e^3}^{e^8}\frac{\dfrac{\ln x-1}{\ln^2 x}}{\dfrac{x^2-\ln^2 x}{\ln^2 x}}dx=\int_{e^3}^{e^8}\frac{\dfrac{\ln x-1}{\ln^2 x}}{\left(\dfrac{x}{\ln x}\right)^2-1}dx$$

Đặt $t=\dfrac{x}{\ln x}\Rightarrow dt=\dfrac{\ln x-1}{\ln^2 x}dx$, đổi cận

x	e^3	e^8
t	$\dfrac{e^3}{3}$	$\dfrac{e^8}{3}$

$$I=\int_{\frac{e^3}{3}}^{\frac{e^8}{8}}\frac{1}{t^2-1}dt=\frac{1}{2}\int_{\frac{e^3}{3}}^{\frac{e^8}{8}}\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt$$

$$\Leftrightarrow I=\frac{1}{2}\ln\left.\frac{t-1}{t+1}\right|_{\frac{e^3}{3}}^{\frac{e^8}{8}}=\frac{1}{2}\ln\frac{\left(e^8-8\right)\left(e^3+3\right)}{\left(e^8+8\right)\left(e^3-3\right)}$$

Câu 3:

$$I=\int_{e^3}^{e^8}\frac{dx}{x\ln x\sqrt{\ln ex}}=\int_{e^3}^{e^8}\frac{dx}{x\ln x\sqrt{1+\ln x}}$$

Đặt $t=\sqrt{1+\ln x};x=e^3$ thì $t=2;\ x=e^8$ thì $t=3$

$t^2 = 1 + \ln x$

$2tdt = \frac{dx}{x}$; $\ln x = t^2 - 1$

$I = \int_2^3 \frac{2tdt}{(t^2-1)t} = \ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\Big|_2^3 = \ln\frac{3}{2}$

Câu 4:

$I = \int_1^e x\left(\frac{1}{x^2+1} + \frac{\ln x}{x^3}\right)dx = \int_1^e \frac{xdx}{x^2+1} + \int_1^e \frac{\ln xdx}{x^2}$

$I_1 = \int_1^e \frac{xdx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\int_1^e \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} = \frac{1}{2}\ln(x^2+1)\Big|_1^e = \frac{1}{2}\left[\ln(1+e^2) - \ln 2\right] = \frac{1}{2}\ln\frac{(1+e^2)}{2}$

$I_2 = \int_1^e \frac{\ln x}{x^2}dx = \frac{1}{x}\ln x\Big|_1^e + \int_1^e \frac{1}{x^2}dx = \frac{1}{e} - \frac{1}{x}\Big|_1^e = \frac{2}{e} + 1$

$\Rightarrow I = I_1 + I_2 = \frac{1}{2}\ln\frac{(1+e^2)}{2} + 1 - \frac{2}{e}$

Câu 5: Đặt $t = \ln x \Rightarrow dt = \frac{dx}{x}$

Đổi cận

x	e	e²
t	1	2

Ta có $I = \int_1^2 \frac{2t+3}{t}dt = \int_1^2\left(2 + \frac{3}{t}\right)dt = (2t + 3\ln t)\Big|_1^2 = 2 + 3\ln 2$

Câu 6:

$I = \int_0^{\ln 2} \frac{e^{2x+1}+1}{e^x}dx = \int_0^{\ln 2}\left(\frac{e.e^{2x}}{e^x} + \frac{1}{e^x}\right)dx = e\int_0^{\ln 2} e^x dx + \int_0^{\ln 2}\frac{dx}{e^x}$

$= e\int_0^{\ln 2} e^x dx + \int_0^{\ln 2} e^{-x}dx = e\left[e^x\right]_0^{\ln 2} - \left[e^{-x}\right]_0^{\ln 2} = e[2-1] - \left[\frac{1}{2} - 1\right] = e + \frac{1}{2}$

Câu 7:

$I_1 = \int_0^1 \frac{x^2(1+2e^x)+e^x}{1+2e^x}dx = \int_0^1 x^2dx + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{d(2e^x+1)}{1+2e^x} = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}\ln\left|2e^x+1\right|\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\ln\frac{2e+1}{3}$

Câu 8: Đặt $t = e^x \Rightarrow dt = e^x dx$ và $x: \ln 3 \to \ln 5$ thì $t: 3 \to 5$

Khi đó

$\mathrm{I}_2 = \int_{\ln 3}^{\ln 5} \frac{e^x dx}{e^{2x} + 2 - 3e^x} = \int_3^5 \frac{dt}{t^2 - 3t + 2} = \int_3^5 \frac{dt}{(t-1)(t-2)} = \int_3^5\left(\frac{1}{t-2} - \frac{1}{t-1}\right)dt = \ln\left|\frac{t-2}{t-1}\right|\Bigg|_3^5 = \ln\frac{3}{2}$

Câu 9:

Đặt $t = e^{2x} \Rightarrow dt = 2e^{2x}dx$ và $x: 0 \to 1$ thì $t: 1 \to e^2$

Khi đó $I = \int_0^1 \frac{e^{2x}dx}{e^{2x}(e^{2x}+5)} = \frac{1}{2}\int_1^{e^2}\frac{dt}{t(t+5)} = \frac{1}{10}\int_1^{e^2}\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+5}\right)dt = \frac{1}{10}\ln\left|\frac{t}{t+5}\right|\Bigg|_1^{e^2} = \frac{1}{10}\ln\frac{6e^2}{e^2+5}$

Câu 10:

Đặt $t=e^{-x}\Rightarrow dt=-e^{-x}dx$ và cận $t:1\to\dfrac{1}{e}$

$$\Rightarrow I_4=\int_0^1\frac{e^{-x}.e^{-x}dx}{1+e^{-x}}=-\int_1^{\frac{1}{e}}\frac{t}{t+1}dt=\int_{\frac{1}{e}}^1\frac{t}{t+1}dt=\int_{\frac{1}{e}}^1\left(1-\frac{1}{t+1}\right)dt=\left(t-\ln|t+1|\right)\Big|_{1/e}^1=\ln\frac{e+1}{2}-\frac{1}{e}$$

Đề 2:

Câu 11:

Đặt $t=e^{2x}\Rightarrow dt=2e^{2x}dx$ và cận $\mathrm{t}:1\to\mathrm{e}^2$

$$\Rightarrow I=\frac{1}{2}\int_1^{e^2}\frac{dt}{t+1}=\frac{1}{2}\ln|t+1|\Big|_1^{e^2}=\frac{1}{2}\ln\frac{e^2+1}{2}$$

Câu 12: Đặt $t=\left(1+e^x\right)\Rightarrow\begin{cases}dt=e^xdx\\e^x=t-1\end{cases}$

$$\Rightarrow F(x)=\int_0^1\frac{\left(1+e^x\right)^3e^x}{e^{2x}}dx=\int\frac{t^3}{(t-1)^2}dt=\int\left[t+2+\frac{3t-2}{(t-1)^2}\right]dt$$

$$=\int\left[t+2+\frac{3}{t-1}+\frac{1}{(t-1)^2}\right]dt=\left(\frac{(1+e^x)^2}{2}+2t+3\ln e^x-\frac{1}{e^x}\right)+C$$

Câu 13: Đặt $t=e^x\Rightarrow dt=e^xdx$ $\quad I=\displaystyle\int\frac{\left(e^x+3\right)e^x}{e^{2x}+3e^x+2}dx=\int\frac{t+3}{t^2+3t+2}dt\quad(*)$

$$\frac{t+3}{t^2+3t+2}=\frac{t+3}{(t+1)(t+2)}=\frac{A}{t+1}+\frac{B}{t+2}\quad\Rightarrow t+3=A(t+2)+B(t+1)\quad(2*)$$

Chọn $t=-1\Rightarrow A=2$ và chọn $t=-2\Rightarrow B=-1$

$$\Rightarrow F(x)=\int\left(\frac{2}{t+1}-\frac{1}{t+2}\right)dt=\left(2\ln|t+1|-\ln|t+2|\right)+C=\left(2\ln\left|e^x+1\right|-\ln\left|e^x+2\right|\right)+C$$

Đối chiếu a = 2, b = -1 nên a + 2b = 0

Câu 14:

Đặt $t=\sqrt{e^x-1}\Rightarrow t^2=e^x-1\Rightarrow\begin{cases}2tdt=e^xdx\\e^x=t^2+1\end{cases}$

Khi đó $I_2=\displaystyle\int\frac{e^x}{\sqrt{e^x-1}}.e^xdx=\int\frac{t^2+1}{1}.2tdt=2\int\left(t^2+1\right)dt=2\left(\frac{\left(\sqrt{e^x-1}\right)^3}{3}+\sqrt{e^x-1}\right)+C$

$$F(\ln 2)=2\Rightarrow C=-\frac{2}{3}\Rightarrow F(x)=2\left(\frac{\left(\sqrt{e^x-1}\right)^3}{3}+\sqrt{e^x-1}\right)-\frac{2}{3}$$

Câu 15:

Đặt $t=\sqrt{1+\ln^2x}\Rightarrow t^2=1+\ln^2x\Rightarrow tdt=\dfrac{\ln x}{x}dx$ và cận $t:1\to\sqrt{2}$

$$\Rightarrow I = \int_1^{\sqrt{2}} t.tdt = \left.\frac{t^3}{3}\right|_1^{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}-1}{3}$$

Đối chiếu a = 1, b = 3. Khi đó a + 3b = 10

Câu 16:

Đặt $t = \sqrt[3]{1+\ln^2 x} \Rightarrow t^3 = 1+\ln^2 x \Rightarrow 3t^2dt = \frac{2\ln x}{x}dx \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x}dx = \frac{3}{2}t^2dt$ và cận $t:1 \to \sqrt[3]{2}$

$$\Rightarrow I = \int_1^e \sqrt[3]{1+\ln^2 x}.\frac{\ln xdx}{x} = \int_1^{\sqrt[3]{2}} t.\frac{3}{2}t^2dt = \frac{3}{2}\int_1^{\sqrt[3]{2}} t^3dt = \left.\frac{3}{8}t^4\right|_1^{\sqrt[3]{2}} = \frac{6\sqrt[3]{2}-3}{8}$$

Đối chiếu a = 2, b = 8 nên a : b = 1 : 4

Câu 17: $F(x) = \int \frac{2\ln x - 1}{x\left(8\ln^2 x - 8\ln x + 3\right)}dx = \int \frac{2\ln x - 1}{x.\left[2\left(2\ln x - 1\right)^2 + 1\right]}dx$

Đặt $t = \left(2\ln x - 1\right)^2 \Rightarrow dt = \frac{4\left(2\ln x - 1\right)}{x}dx \Leftrightarrow \frac{2\ln x - 1}{x}dx = \frac{dt}{4}$

Khi đó $F(x) == \frac{1}{4}\int \frac{dt}{2t+1} = \frac{1}{8}\ln\left|2t+1\right| = \frac{1}{8}\ln\left|2\left(2\ln x - 1\right)^2 + 1\right| + C$

Câu 18: Chọn B

Đặt $u = \ln \text{x} \Rightarrow du = \frac{1}{x}d\text{x}$

Ta có: $\int \frac{2008 + \ln^2 x}{x}d\text{x} = \int \left(2008 + u^2\right)du = 2008\int du + \int u^2du$

$= 2008u + \frac{u^3}{3} + C = 2008\ln\text{x} + \frac{\left(\ln \text{x}\right)^3}{3} + C$

Tìm được a = 2008 , b = 3 .

Câu 19: Chọn C

Đặt $u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x}dx$

đổi cận

x	1	e
u	0	1

Ta có: $\int_1^e \frac{1+\ln^4 x}{x}dx = \int_0^1 \left(1+u^4\right)du = \left.\left(u + \frac{u^5}{5}\right)\right|_0^1 = 1 + \frac{1}{5} = \frac{6}{5}$

Ở đây a = 6, b = 5.

Câu 20: Đặt $u = \ln\left(\ln x\right) \Rightarrow du = \frac{\left(\ln x\right)'}{\ln x}dx = \frac{1}{x\ln x}dx$

Vậy $\int \frac{dx}{x\ln x.\ln\left(\ln x\right)} = \int \frac{du}{u} = \ln\left|u\right| + C = \ln\left|\ln\left(\ln x\right)\right| + C$

Biết $F(e) + C = 0 + C = e \Rightarrow C = e$

Chọn B.

Đề 3:

Câu 21: Chọn D

$$\int \frac{\text{lnex}}{1+x\ln x}dx = \int \frac{1+\ln x}{1+x\text{lnx}}dx$$

Đặt $u = 1+x\ln x \Rightarrow du = (1+\ln x)dx$

Vậy $\int \frac{\ln ex}{1+x\ln x}dx = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln|1+x\ln x| + C$

F(1) = ln1 + C = ln2 . Vậy C = ln2

Câu 22: Chọn A

Tính tích phân: $I = \int_1^e \frac{1-\ln x}{x}dx$

$$I = \int_1^e \frac{1-\ln x}{x}dx = \int_1^e \frac{1}{x}dx - \int_1^e \frac{\ln x}{x}dx = I_1 - I_2.\; I_1 = \int_1^e \frac{1}{x}dx = \ln|x|\Big|_1^e = 1;\; I_2 = \int_1^e \frac{\ln x}{x}dx$$

Đặt $t = \ln x \Rightarrow dt = \frac{1}{x}dx$.

Đổi cận $x = 1 \Rightarrow t = 0;\; x = e \Rightarrow t = 1 \;\Rightarrow I_2 = \int_0^1 tdt = \frac{t^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$

Vậy $I = I_1 - I_2 = \frac{1}{2}$

Đối chiếu ta có a/b = ½ , c = 0

Câu 23: Chọn A

Đặt $\ln(x^2+4) = u \Rightarrow du = d\left(\ln(x^2+4)\right) = \frac{2x}{x^2+4}dx$

x = 0 thì u = ln4

x = 1 thì u = ln5

$$\Rightarrow I = = \frac{1}{2}\int_{\ln 4}^{\ln 5} udu = \frac{1}{2}.\frac{u^2}{2}\Big|_{\ln 4}^{\ln 5} = \frac{1}{4}(\ln^2 5 - \ln^2 4)$$

Suy ra a = 5 , b = 4

Câu 24:

Đặt $t = (1+e^x)^3 \Rightarrow dt = 3(1+e^x)^2.e^x dx \Leftrightarrow e^x(1+e^x)^2 dx = \frac{dt}{3}$

Khi đó: $I = \int \frac{e^x(1+e^x)^2 dx}{2+(1+e^x)^3} = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{2+t} = \frac{1}{3}\ln|t+2| + C$

Khi x = 0 thì t = 8

Khi thay t = 8 vào f(t) = f(8) thì I = 1/3.ln10 + C = 1/3.ln10 + 4 ⇒ C = 4

Câu 25: Chọn C

Đặt $t = \sqrt{e^x+1} \Rightarrow t^2 = e^x + 1 \Rightarrow \begin{cases} 2tdt = e^x dx \\ e^x = t^2 - 1 \end{cases}$

cận $t:\sqrt{2}\to 2$

$$\Rightarrow I_4=\int_0^{\ln 3}\frac{e^x dx}{e^x\sqrt{e^x+1}}=\int_{\sqrt{2}}^{2}\frac{2tdt}{\left(t^2-1\right)t}=2\int_{\sqrt{2}}^{2}\frac{dt}{t^2-1}=\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\Bigg|_{\sqrt{2}}^{2}=2\ln\left(\sqrt{2}+1\right)-\ln 3$$

Suy ra a = 2 , b = 3 . S = 31

Câu 26: Chọn C .

Đặt $t=e^x+1\Rightarrow dt=e^x dx$ và cận $t:2\to 4\Rightarrow I_5=\int_2^4\frac{dt}{\sqrt{t^3}}=\int_2^4 t^{-3/2}dt=\frac{-2}{\sqrt{t}}\Bigg|_2^4=\sqrt{2}-2$

Suy ra a = 2, b = 2

Câu 27: Chọn B

Đặt $t=\sqrt{e^x-1}\Rightarrow dt=\frac{e^x}{2\sqrt{e^x-1}}dx$; $x=0\Rightarrow t=0; x=\ln 3\Rightarrow t=\sqrt{2}$

$D=\int_0^{\sqrt{2}}\frac{dt}{t^2+2}$. Đặt $t=\sqrt{2}tgx\Rightarrow D=\frac{\pi\sqrt{2}}{4}$

Vậy b = 4

Câu 28: Chọn A

Đặt $u=\ln\left(x+1\right)\Rightarrow du=\frac{dx}{x+1};\quad dv=\frac{dx}{x^2}\Rightarrow v=\frac{1}{x}$

$$A=-\frac{1}{x}\ln\left(x+1\right)\Bigg|_1^2+\int_1^2\frac{dx}{x\left(x+1\right)}=-\frac{1}{x}\ln\left(x+1\right)\Bigg|_1^2+\int_1^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)dx$$

$$=-\frac{1}{x}\ln\left(x+1\right)+\ln\frac{x}{x+1}\Bigg|_1^2=-\frac{1}{2}\ln 3+\ln\frac{2}{3}+\ln 2-\ln\frac{1}{2}$$

$$A=3\ln 2-\frac{3}{2}\ln 3$$

Vậy a = b = 3.

Câu 29. Chọn C.

Đặt $u=x+1\Rightarrow dx=du\,; dv=\sin xdx\Rightarrow v=-\cos x$

$$B=-\left(x+1\right)\cos x\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx=-\left(x+1\right)\cos x+\sin x\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$B=1+1=2$$

Câu 30: Đặt $u=x\Rightarrow du=dx\,; dv=e^{-2x}dx\Rightarrow v=-\frac{1}{2}e^{-2x}dx$

$$C=-\frac{x}{2}e^{-2x}\Bigg|_0^1+\frac{1}{2}\int_0^1 e^{-2x}dx=-\frac{x}{2}e^{-2x}-\frac{1}{4}e^{-2x}\Bigg|_0^1=\frac{1}{4}\left(1-\frac{3}{e^2}\right)$$

Câu 31:

Xét $J=\int_0^1\frac{e^{-x}dx}{e^x+e^{-x}}$

Ta có: $I+J=\int_0^1 dx=1$

$$I-J=\int_0^1\frac{d\left(e^x+e^{-\pi}\right)}{e^x+e^{-x}}=\ln\left|e^x+e^{-x}\right|\Bigg|_0^1=\ln\frac{e^2+1}{2e}$$

Do đó: $I = \frac{1}{2}\ln\frac{e^2+1}{2}$