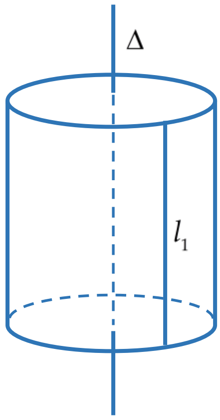
# III. Mặt trụ, hình trụ, khối trụ

## 1. Khái niệm về mặt trụ tròn xoay




Trong mặt phẳng $(P)$ cho hai đường thẳng $\Delta$ và $l$ song song với nhau, cách nhau một khoảng bằng $r$. Khi quay mặt phẳng $(P)$ xung quanh $\Delta$ thì đường thẳng $l$ sinh ra một mặt tròn xoay được gọi là mặt trụ tròn xoay.
Người ta thường gọi tắt mặt trụ tròn xoay là mặt trụ.

Khi đó đường thẳng $\Delta$ được gọi là **trục** của mặt trụ, $l$ được gọi là **đường sinh** của mặt trụ và $r$ được gọi là **bán kính** của mặt trụ.
Mặt trụ là tập hợp tất cả các điểm $M$ cách đường thẳng $\Delta$ cố định một khoảng $R$ không đổi.
Nếu điểm $M_1$ nằm trên mặt trụ thì đường thẳng $l_1$ đi qua $M_1$ và song song với $\Delta$ cũng nằm trên mặt trụ đó (vì mọi điểm của $l_1$ đều cách $\Delta$ một khoảng là $R$).
Như vậy đường thẳng $l_1$ cũng là một đường sinh của mặt trụ.

## 2. Hình trụ tròn xoay và khối trụ tròn xoay

Cắt mặt trụ $H$, có trục $\Delta$, bán kính $R$ bởi hai mặt phẳng phân biệt $(P)$ và $(P')$ cùng vuông góc với $\Delta$, ta được giao tuyến là hai đường tròn $(C);(C')$.

Phần mặt trụ $H$ nằm giữa hai mặt phẳng $(P),(P')$ cùng với hai hình tròn xác định bởi $(C);(C')$ được gọi là **hình trụ**.

Hai đường tròn $(C);(C')$ được gọi là hai **đường tròn đáy**, hai hình tròn xác định bởi chúng được gọi là hai **mặt đáy** của hình trụ, bán kính của chúng bằng $R$ gọi là **bán kính của hình trụ**. Khoảng cách giữa hai mặt đáy được gọi là **chiều cao** của hình trụ.
Nếu gọi $O$, $O'$ là tâm của hai đáy thì đoạn thẳng $OO'$ được gọi là **trục** của hình trụ.
Phần mặt trụ nằm giữa hai mặt đáy được gọi là **mặt xung quanh** của hình trụ.

Hình trụ và phần không gian được giới hạn bởi hình trụ được gọi là **khối trụ**.

## 3. Diện tích hình trụ tròn xoay và thể tích khối trụ tròn xoay

Một hình lăng trụ được gọi là nội tiếp một hình trụ nếu hai đáy của hình lăng trụ nội tiếp hai đường tròn đáy của hình trụ. Khi đó ta còn nói hình trụ ngoại tiếp hình lăng trụ.

**Định nghĩa**

**Diện tích xung quanh** của hình trụ tròn xoay là giới hạn của diện tích xung quanh của hình lăng trụ đều nội tiếp hình trụ khi có số cạnh đáy tăng lên vô hạn.
**Thể tích của khối trụ** (còn gọi là thể tích của hình trụ) là giới hạn của thể tích hình lăng trụ đều nội tiếp hình trụ khi có số cạnh đáy tăng lên vô hạn.

Diện tích xung quanh của hình trụ được tính bằng chu vi đáy nhân với chiều cao: $S_{xq} = \boxed{2\pi rl}$

Thể tích của khối trụ tròn xoay được tính bằng công thức $\boxed{V = B.h = \pi r^2 h}$

**Chú ý**

Diện tích xung quanh của hình trụ tròn xoay cũng là diện tích xung quanh của khối trụ được giới hạn bởi hình trụ đó. Người ta gọi tổng diện tích xung quanh và diện tích của hai đáy là diện tích toàn phần của hình trụ.

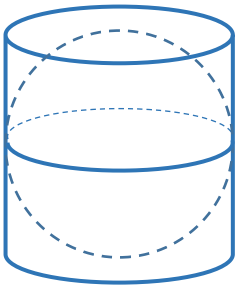
## 4. Một số ví dụ về mặt trụ

**Ví dụ 1:** Cho hình trụ $H$ có bán kính $R$, trục $OO'$ bằng $2R$ và mặt cầu $(S)$ có đường kính $OO'$.

a. So sánh diện tích mặt cầu và diện tích toàn phần của hình trụ.

b. So sánh thể tích của khối trụ $H$ và khối cầu $(S)$

**Lời giải**



a. Diện tích toàn phần của hình trụ bằng: $4\pi R^2 + 2\pi R^2 = 6\pi R^2$

Vậy $\boxed{\dfrac{S_{tp(S)}}{S_{tpH}} = \dfrac{2}{3}}$

b. Thể tích của khối cầu là: $V_{(S)} = \dfrac{4}{3}\pi R^3$.

Thể tích của khối trụ là: $V_{(H)} = \pi R^2.2R = 2\pi R^3$ $\boxed{\Rightarrow \dfrac{V_{(S)}}{V_{(H)}} = \dfrac{2}{3}}$

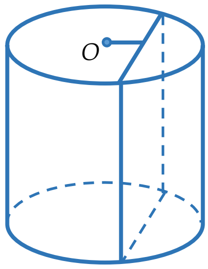
**Ví dụ 2:** Cho hình trụ có bán kính đáy $R$, đường cao $OO'$. Cắt hình trụ đó bằng mặt phẳng $(\alpha)$ vuông góc với đáy và cách điểm $O$ một khoảng $h$ cho trước $(h < R)$. Lúc này mặt phẳng $(\alpha)$ có tính chất:

**A.** Luôn tiếp xúc với một mặt trụ cố định.

**B.** Luôn cách một mặt phẳng cho trước qua trục hình trụ một khoảng $h$.

**C.** Cắt hình trụ theo thiết diện là hình vuông.

**D.** Cả ba tính chất trên đều sai.




**Đáp án A.**

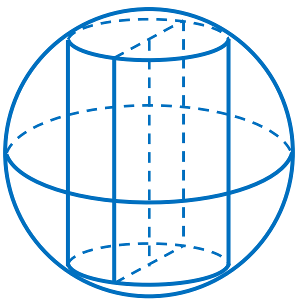
**Lời giải**

Ta có hình vẽ bên:

Ta thấy A đúng do mặt phẳng $(\alpha)$ luôn tiếp xúc với mặt trụ có đường cao $OO'$ và bán kính đáy $r = h$.

**Ví dụ 3:** Viết công thức tính thể tích của khối cầu ngoại tiếp hình trụ có đường cao $h$, bán kính đáy $r$ có tâm đối xứng trùng với tâm $O$ của khối cầu..

**Lời giải**



Ta có hệ thức $R^2 = \dfrac{h^2}{4} + r^2 \Rightarrow R = \sqrt{r^2 + \dfrac{h^2}{4}}$

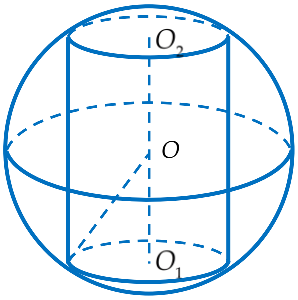
Vậy $\boxed{V = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{4}{3}\pi.\left(r^2 + \dfrac{h^2}{4}\right).\sqrt{r^2 + \dfrac{h^2}{4}}}$

**Ví dụ 4:** Trong các hình trụ nội tiếp mặt cầu bán kính $R$ cho trước, tìm hình trụ có thiết diện qua trục lớn nhất.

**Lời giải**

Gọi bán kính đáy hình trụ là $x$.

Chiều cao của hình trụ này là $y$.




Khi hình trụ nội tiếp mặt cầu thì tâm mặt cầu là trung điểm của đoạn $O_1O_2$ (với $O_1;O_2$ là tâm của hai đáy), từ đó giữa bán kính mặt cầu và *x*, *y* có mối quan hệ $x^2+\frac{y^2}{4}=R^2$.

Thiết diện qua trục qua hình trụ là hình chữ nhật với hai kích thước $2x$ và $y$, từ đó diện tích *S* của thiết diện là $S=2xy$. Suy ra $S^2=4x^2y^2=16x^2.\frac{y^2}{4}$.

Từ đó *S* lớn nhất khi và chỉ khi $16x^2.\frac{y^2}{4}$ lớn nhất.

Mặt khác ta lại có $x^2+\frac{y^2}{4}=R^2$, do đó $16x^2.\frac{y^2}{4}$ đạt max khi và chỉ khi $x^2=\frac{R^2}{2}=\frac{y^2}{4}$, tức là $x=\frac{R\sqrt{2}}{2};y=R\sqrt{2}$.

*Vậy trong các hình trụ nội tiếp mặt cầu tâm $I$, bán kính $R$ thì hình trụ có bán kính đáy $r=\frac{R\sqrt{2}}{2}$ và chiều cao $R\sqrt{2}$ có thiết diện qua trục lớn nhất. Lúc này thiết diện là hình vuông cạnh $R\sqrt{2}$.*

**Ví dụ 5:** Một hình trụ có diện tích toàn phần bằng *S*. Xác định các kích thước của hình trụ đó (bán kính đáy và chiều cao), sao cho thể tích của khối trụ đạt giá trị lớn nhất.

**Lời giải**

Gọi bán kính đáy và chiều cao của hình trụ đó lần lượt là *x*, *y* với $x,y>0$.

Khi đó $S=2\pi x^2+2\pi xy$ hay $y=\frac{S-2\pi x^2}{2\pi x}$ và thể tích *V* của khối trụ bằng:

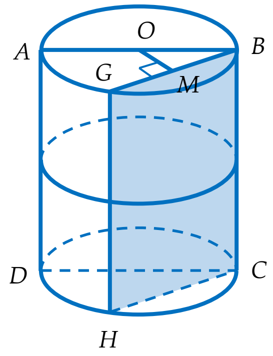
$V=\pi x^2y=\frac{1}{2}xS-\pi x^3, x>0$.

Vậy *V* lớn nhất khi và chỉ khi hàm $f(x)=\frac{1}{2}xS-\pi x^3$ lớn nhất.

Ta có $f'(x)=\frac{1}{2}S-3\pi x^2; f'(x)=0\Leftrightarrow x=\sqrt{\frac{S}{6\pi}}$.

*Vậy thể tích khối trụ lớn nhất khi thiết diện qua trục của hình trụ là hình vuông cạnh $\sqrt{\frac{S}{6\pi}}$.*

# MỘT SỐ DẠNG TOÁN VÀ CÔNG THỨC GIẢI BÀI TOÁN MẶT TRỤ THƯỜNG GẶP

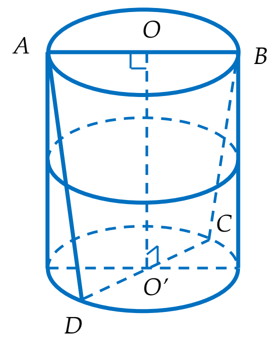



## Dạng 1: Thiết diện của hình trụ cắt bởi một mặt phẳng

+ Thiết diện ***vuông góc trục*** là một đường tròn bán kính $R$.

+ Thiết diện ***chứa trục*** là một hình chữ nhật $ABCD$ trong đó $AB=2R$ và $AD=h$. . Nếu thiết diện qua trục là một hình vuông thì $h=2R$.

+ Thiết diện ***song song với trục*** và ***không chứa trục*** là hình chữ nhật $BGHC$ có khoảng cách tới trục là: $d\left(OO';\left(BGHC\right)\right)=OM$




## Dạng 2: Thể tích khối tứ diện có 2 cạnh là đường kính 2 đáy

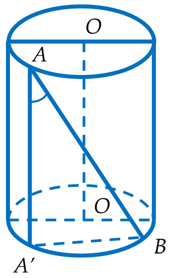
Nếu như $AB$ và $CD$ là hai đường kính bất kỳ trên hai đáy của hình trụ thì:

$$V_{ABCD}=\frac{1}{6}AB.CD.OO'.\sin\left(AB,CD\right)$$

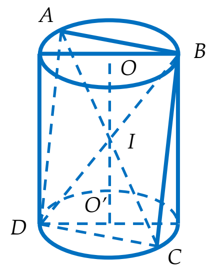
* Đặc biệt: Nếu $AB$ và $CD$ vuông góc nhau thì: $V_{ABCD}=\frac{1}{6}AB.CD.OO'$.

## Dạng 3: Xác định góc và khoảng cách

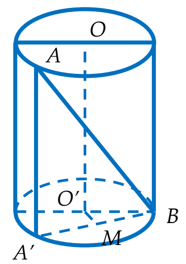
+ Góc giữa $AB$ và trục $OO'$: $\left(\widehat{AB;OO'}\right)=\widehat{A'AB}$




+ Khoảng cách giữa $AB$ và trục $OO'$: $d\left(AB;OO'\right)=OM$.




+ Nếu $ABCD$ là một hình vuông nội tiếp trong hình trụ thì đường chéo của hình vuông cũng bằng đường chéo của hình trụ. Nghĩa là cạnh hình vuông bằng $AB\sqrt{2}=\sqrt{4R^2+h^2}$.



**Dạng 4: Xác định mối liên hệ giữa diện tích xung quanh, toàn phần và thể tích khối trụ trong bài toán tối ưu**

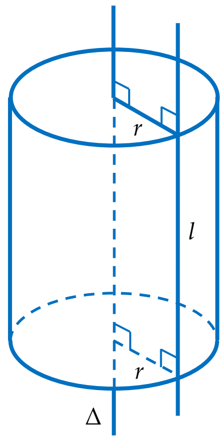
Một khối trụ có thể tích V không đổi.

+ Tìm bán kính đáy và chiều cao hình trụ để diện tích toàn phần nhỏ nhất:

$$S_{tp}\min \Leftrightarrow \begin{cases} R=\sqrt[3]{\dfrac{V}{4\pi}} \\ h=2\sqrt[3]{\dfrac{V}{4\pi}} \end{cases}$$

+ Tìm bán kính đáy và chiều cao hình trụ để diện tích xung quanh cộng với diện tích 1 đáy và nhỏ nhất:

$$S\min \Leftrightarrow \begin{cases} R=\sqrt[3]{\dfrac{V}{\pi}} \\ h=\sqrt[3]{\dfrac{V}{\pi}} \end{cases}$$




**Dạng 5: Hình trụ ngoại tiếp, nội tiếp một hình lăng trụ đứng**

+ Cho hình lăng trụ tam giác đêu nội tiếp trong một hình trụ. Thể tích khối lăng trụ là V thì thể tích khối trụ là $V_{(T)}=\dfrac{4\pi V}{9}$

+ Cho hình lăng trụ tứ giác đêu $ABCD.A'B'C'D'$ ngoại tiếp trong một hình trụ. Diện tích xung quanh hình trụ là S thì diện tích xung quanh của hình lăng trụ là

$$S_{xq}=\frac{2S}{\pi}$$

**Ví dụ:** Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có độ dài cạnh đáy bằng $a$ và chiều cao bằng $h$. Tính thể tích $v$ của khối trụ ngoại tiếp lăng trụ đã cho

**A.** $V=\dfrac{\pi a^2h}{9}$.  **B.** $V=\dfrac{\pi a^2h}{3}$.  **C.** $V=3\pi a^2h$.  **D.** $V=\pi a^2h$.

**Đáp án B.**

**Lời giải**

Thể tích khối lăng trụ là $V=S_{\Delta ABC}.AA'=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}.h$

Áp dụng công thức trên ta có thể tích khối trụ là

$$V_{(T)}=\frac{4\sqrt{3}\pi}{9}.V=\frac{4\sqrt{3}\pi}{9}.\frac{a^2h\sqrt{3}}{4}=\frac{\pi a^2h}{3}.$$