HAI ĐỒ THỊ HÀM SỐ ĐỐI XỨNG VỚI NHAU 1 ĐIỂM, 1 ĐƯỜNG THẲNG

Bài toán 1:

Xét đường cong $(C_0): y = f(x)$ và điểm $I(a;b)$.

Tìm đường cong (C) đối xứng với (C_0) qua I.

Phương pháp giải.

Xét điểm $M(x_0;y_0) \in (C_0), N(x;y) \in (C)$ đối xứng với nhau qua điểm $I(a;b)$, ta có

$$\begin{cases} x_0 = 2a - x \\ y_0 = 2b - y \end{cases}.$$

Thay x_0, y_0 vào phương trình của (C_0), ta được:

$$2b - y = f(2a - x) \Leftrightarrow y = 2b - f(2a - x) \Rightarrow (C): y = 2b - f(2a - x).$$

Bài toán 2:

Xét đường cong $(C_0): y = f(x)$ và đường thẳng $\Delta : y = ax + b$.

Tìm đường cong (C) đối xứng với (C_0) qua Δ.

Phương pháp giải.

Xét điểm $M(x_0;y_0) \in (C_0), N(x;y) \in (C)$, ta có hệ phương trình đối xứng

$$\begin{cases} a\left(\dfrac{x + x_0}{2}\right) - \dfrac{y + y_0}{2} + b = 0 \\ \dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{y - y_0}{-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = x - \dfrac{2a(ax - y + b)}{a^2 + 1} \\ y_0 = y + \dfrac{2(ax - y + b)}{a^2 + 1} \end{cases}.$$

Thay x_0, y_0 tìm được vào phương trình của (C_0) ta sẽ suy ra (C) cần tìm.

Kiến thức đã biết:

- Hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị nhận trục tung làm trục đối xứng.
- Đồ thị của hai hàm số $y = a^x, y = \log_a x$ $(0 < a \neq 1)$ đối xứng với nhau qua đường thẳng $y = x$.

Câu 1. Hỏi đồ thị của hàm số nào dưới đây đối xứng với đồ thị của hàm số $y = \dfrac{3x+2}{x-2}$ qua trục hoành?

A. $y = -\dfrac{3x+2}{x-2}$. B. $y = \dfrac{-3x+2}{x-2}$. C. $y = \dfrac{3x+2}{x+2}$. D. $y = -\dfrac{3x+2}{x+2}$.

Câu 2. Hỏi đồ thị của hàm số nào dưới đây đối xứng với đồ thị hàm số $y = \dfrac{x}{x-1}$ qua trục tung ?

A. $y=\frac{x}{x+1}$. B. $y=-\frac{x}{x+1}$. D. $y=-\frac{x}{x-1}$. D. $y=\frac{x}{x-1}$.

Câu 3. Nếu gọi (G_1) là đồ thị hàm số $y=a^x$ và (G_2)là đồ thị hàm số $y=\log_a x$ với $0<a\neq 1$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

A. (G_1) và (G_2)đối xứng với nhau qua trục hoành.

B. (G_1) và (G_2)đối xứng với nhau qua trục tung.

C. (G_1) và (G_2)đối xứng với nhau qua đường thẳng $y=x$.

D. (G_1) và (G_2)đối xứng với nhau qua đường thẳng $y=-x$.

Câu 4. Hỏi đồ thị của hàm số nào dưới đây đối xứng với đồ thị của hàm số $y=-\log_a x$ $(0<a\neq 1)$ qua đường thẳng $y=x$?

A. $y=a^x$. B. $y=a^{-x}$. C. $y=-a^x$. D. $y=a^{\frac{1}{x}}$.

Câu 5. Hỏi đồ thị của hàm số nào dưới đây đối xứng với đồ thị hàm số $y=\log_a(x+1)$ $(0<a\neq 1)$ qua đường thẳng $y=x$?

A. $y=a^{x+1}$. B. $y=a^x+1$. C. $y=a^x-1$. D. $y=a^{-x-1}$.

Câu 6. Hỏi đồ thị của hàm số nào dưới đây đối xứng với đồ thị của hàm số $y=a^{\frac{1}{x}}$ $\left(0<a\neq 1\right)$ qua đường thẳng $y=x$?

A. $y=\log_a\left(\frac{1}{x}\right)$. B. $y=\log_{\frac{1}{a}}\left(\frac{1}{x}\right)$. C. $y=-\frac{1}{\log_a x}$. D. $y=\frac{1}{\log_a x}$.

Câu 7. Hỏi đồ thị của hàm số nào dưới đây đối xứng với đồ thị của hàm số $y=\log_a x$ $(0<a\neq 1)$ qua đường thẳng $y=x+1$?

A. $y=-a^{x+1}-1$. B. $y=a^{x+1}-1$. C. $y=a^{x+1}+1$. D. $y=-a^{x+1}+1$.

Câu 8. Cho đồ thị $(C): y=\frac{(x-1)^2}{x-2}$. Tìm hàm số $f(x)$ có đồ thị đối xứng với (C) qua điểm $I(1;1)$.

A. $f(x)=-\frac{x^2+1}{x}$. B. $f(x)=\frac{x^2}{x-1}$. D. $f(x)=-\frac{x^2}{x-1}$. D. $f(x)=\frac{x^2+1}{x}$.

Câu 9. Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3+mx^2+7x+3$ có hai điểm phân biệt đối xứng nhau qua gốc toạ độ.

A. $(-\infty;0)$. B. $(-\infty;0]$. C. $\{0\}$. D. $(-\infty;-3)$.

Câu 10. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+m$ có hai điểm phân biệt đối xứng với nhau qua gốc tọa độ.

A. $0<m<1$. **B.** $m>0$. **C.** $m\leq 0$. **D.** $m>1$.

<u>ĐÁP ÁP</u>

1A	2A	3C	4B	5C	6D	7C	8D	9A	10B

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Câu 1. Ta có $Ox: y=0 \Rightarrow \begin{cases} x_0 = x \\ y_0 = -y \end{cases} \Rightarrow -y = \frac{3x+2}{x-2} \Leftrightarrow \boxed{y = -\frac{3x+2}{x-2} \text{ (A)}}$.

Câu 4. Xét điểm $M(x_0;y_0) \in (C_0): y = -\log_a x, N(x;y) \in (C)$ đối xứng với nhau qua đường thẳng $y=x.$

Ta có $\begin{cases} \frac{x+x_0}{2} - \frac{y+y_0}{2} = 0 \\ \frac{x-x_0}{1} = \frac{y-y_0}{-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y_0 \\ y = x_0 \end{cases}$.

Thay x_0, y_0 vào phương trình của (C), ta được $x = -\log_a y \Leftrightarrow y = a^{-x}$.

Chọn đáp án B.

Câu 5. Xét điểm $M(x_0;y_0) \in (C_0): y = \log_a(x+1), N(x;y) \in (C')$ cần tìm, sao cho M,N đối xứng với nhau qua đường thẳng $y=x.$

Ta có hệ điều kiện:

$$\begin{cases} \frac{x+x_0}{2} - \frac{y+y_0}{2} = 0 \\ \frac{x-x_0}{1} = \frac{y-y_0}{-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y_0 \\ y = x_0 \end{cases} \Rightarrow$$

thay x_0, y_0 vào phương trình của (C_0), ta được:

$$x = \log_a(y+1) \Leftrightarrow y+1 = a^x \Leftrightarrow y = a^x - 1.$$

Chọn đáp án C.

Câu 6. Xét điểm $M(x_0;y_0) \in (C_0): y = a^{\frac{1}{x}}, N(x;y) \in (C)$ và M,N đối xứng với nhau qua đường thẳng $y=x.$

Ta có hệ điều kiện: $\begin{cases} \frac{x+x_0}{2} - \frac{y+y_0}{2} = 0 \\ \frac{x-x_0}{1} = \frac{y-y_0}{-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y_0 \\ y = x_0 \end{cases} \Rightarrow$

thay x_0, y_0 vào phương trình của (C_0), ta được: $x = a^{\frac{1}{y}} \Leftrightarrow \frac{1}{y} = \log_a x \Leftrightarrow y = \frac{1}{\log_a x}$.

Chọn đáp án D.

Câu 7. Xét điểm $M(x_0;y_0)\in(C_0): y=\log_a x, N(x;y)\in(C)$ đối xứng với nhau qua đường thẳng $y=x+1$.

Ta có $\begin{cases}\dfrac{x+x_0}{2}-\dfrac{y+y_0}{2}+1=0\\ \dfrac{x-x_0}{1}=\dfrac{y-y_0}{-1}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_0=y-1\\ y_0=x+1\end{cases}.$

Thay x_0, y_0 vào phương trình của (C_0), ta được $x+1=\log_a(y-1)\Leftrightarrow y=1+a^{x+1}$.

Chọn đáp án C.

Câu 8. Xét điểm $M(x_0;y_0)\in(C), N(x;y)\in(C')$ cần tìm, ta có $\begin{cases}x_0=2-x\\ y_0=2-y\end{cases}.$

Thay vào phương trình của (C), ta được $2-y=\dfrac{\left[(2-x)-1\right]^2}{(2-x)-2}\Leftrightarrow y=\dfrac{x^2+1}{x}$.

Chọn đáp án D.

Câu 9. Xét hai điểm $A(x_0;y_0), B(-x_0;-y_0)\in(C), (x_0\neq 0)$ ta có

$$\begin{cases}y_0=x_0^3+mx_0^2+7x_0+3\\ -y_0=-x_0^3+mx_0^2-7x_0+3\end{cases}\Leftrightarrow 2mx_0^2+6=0\Rightarrow m<0.$$

Chọn đáp án A.

Câu 10. Ta có $\begin{cases}y_0=x_0^3-3x_0^2+m\\ -y_0=-x_0^3-3x_0^2+m\end{cases}\Rightarrow 2m-6x_0^2=0\Rightarrow m>0.$

Chọn đáp án B.