Tích phân hàm ẩn

i

TÍCH PHÂN HÀM ẨN

Một số bài tính tích phân $\int_a^b f(x)dx$ nhưng chưa cho biết hàm $f(x)$ mà chỉ cho biết $f(x)$ thỏa mãn một hoặc vài ràng buộc thì ta có thể gọi nó là tích phân hàm ẩn. Đối với dạng toán này, trước tiên ta kiểm tra xem bài toán có rơi vào dạng tích phân đặc biệt (Mục tích phân đặc biệt (//estudy.edu.vn/course/lesson/mot-so-tich-phan-dac-biet-ttop7vcwiqtsmoubrwgegnq6td)) không. Nếu không, ta lưu ý các dạng dưới đây.

Dạng 1: Phương trình vi phân tuyến tính cấp 1

$$f'(x) + p(x).\, f(x) = q(x)\ (*)$$

Cách giải:

Gọi $P(x)$ là 1 nguyên hàm của $p(x)$, ta có thể tìm ra $f(x)$ như sau:

Nhân hai vế của (*) với $e^{P(x)}$ ta được $f'(x).\, e^{P(x)} + (P(x))'.\, f(x).\, e^{P(x)} = q(x).\, e^{P(x)}\ (1)$

Chú ý vế trái (1) chính là đạo hàm của $f(x).\, e^{P(x)}$ nên ta có $\left(f(x).\, e^{P(x)}\right)' = q(x).\, e^{P(x)}$

Lấy nguyên hàm hai vế ta được $f(x).\, e^{P(x)} = \int q(x).\, e^{P(x)} + C$

Vậy $f(x) = e^{-P(x)}\left[\int q(x).\, e^{P(x)} + C\right]$.

Ví dụ 1.1: Trong tất cả những hàm số $f(x)$ liên tục và có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $3f(x)+xf'(x)\geq x^{2018}$ với mọi $x\in[0;1]$, tìm giá trị nhỏ nhất của $I=\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$.

Hướng dẫn:

Với $x>0$

Có $3f(x)+xf'(x)\geq x^{2018}\Leftrightarrow f'(x)+\dfrac{3}{x}f(x)\geq x^{2017}\ (*)$.

Vậy $p(x)=\dfrac{3}{x}\Rightarrow e^{P(x)}=x^3$. Ta nhân 2 vế của (*) với x^3 được

$3x^2f(x)+x^3f'(x)\geq x^{2020}\forall x\in[0;1]$ (đúng cho $x=0$).

$\Rightarrow \displaystyle\int_0^t \left(3x^2f(x)+x^3f'(x)\right)dx\geq\int_0^t x^{2020}dx, \forall t\in[0;1]$.

$\Rightarrow x^3.\,f(x)\Big|_0^t\geq \dfrac{x^{2021}}{2021}\Big|_0^t, \forall t\in[0;1]$.

$\Rightarrow t^3f(t)\geq\dfrac{t^{2021}}{2021}, \forall t\in[0;1]$ hay $f(t)\geq\dfrac{t^{2018}}{2021}$.

$\Rightarrow \int_0^1 f(t)dt\geq\int_0^1\dfrac{t^{2018}}{2021}=\dfrac{1}{2019.2021}$.

Đẳng thức rõ ràng xảy ra.

Dạng 2: Phương trình hàm

$$a(x).\,f(u(x))+b(x).\,f\left(v(x)\right)=c(x)\ (**)$$

Cách giải:

Trong $(**)$ đặt $u(x)=v(t)\Rightarrow v(x)=u(t)$ ta được $a'(t).\,f(v(t))+b'(t).\,f\left(u(t)\right))=c'(t)$.

Thay t bởi x nên ta có $a'(x).\,f(v(x))+b'(x).\,f\left(u(x)\right))=c'(x)$.

Giải hệ $\begin{cases}a(x).\,f(x)+b(x).\,f\left(u(x)\right)=c(x)\\ a'(x).\,f(v(x))+b'(x).\,f\left(u(x)\right))=c'(x)\end{cases}$ được $f(u(x))$.

Ví dụ 2.1: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=3x\,(*)$.

Tính $I=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{f(x)}{x}dx$.

Hướng dẫn:

Trong $(*)$ thay x bởi $\frac{1}{x}$ ta được $f\left(\frac{1}{x}\right)+2f(x)=\frac{3}{x}$

Giải hệ

$$\begin{cases} f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=3x \\ f\left(\frac{1}{x}\right)+2f(x)=\frac{3}{x} \end{cases}$$

được $f(x)=\frac{2}{x}-x$

Vậy $I=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(\frac{2}{x^2}-1\right)dx=\frac{3}{2}$.

Dạng 3: Phương trình hàm hàm hợp

Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(u(x))=v(x)$, trong đó $u(x)$ là hàm đơn điệu trên $\mathbb{R}$. Tính $I=\int_a^b f(x)dx$.

Cách giải:

Đặt $t=u(x)\Rightarrow dt=u'(x)dx$ và $f(t)=v(x)$.

Với $t=a\Rightarrow x=\alpha$; $t=b\Rightarrow x=\beta$ (do tính đơn điệu đảm bảo nghiệm duy nhất).

Vậy $f(t)dt=u'(x)v(x)dx$. Do đó $I=\int_a^b f(t)dt=\int_\alpha^\beta u'(x)v(x)dx$.

Ví dụ 3.1: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x^3+2x-2)=3x-1$. Tính $I=\int_1^{10}f(x)dx$

Hướng dẫn:

Đặt $t=x^3+2x-2\Rightarrow dt=(3x^2+2)dx$ và $f(t)=3x-1$.

Với $t = 1 \Rightarrow x = 1, t = 10 \Rightarrow x = 2$.

Nhân vế với vế của các vì phân, lấy tích phân

$$I = \int_1^{10} f(t)dt = \int_1^2 (3x^2 + 1)(3x - 1)dx$$

Dễ dàng tính được $I = \dfrac{135}{4}$.

Dạng 4: Đổi vai trò của biến x và y

Cho hàm $f(x)$ thỏa mãn $x = G(f(x))$, với $G(t)$ là hàm đơn điệu trên $\mathbb{R}$.

Tính $I = \displaystyle\int_a^b f(x)dx$.

Cách giải

Đặt $f(x) = y \Rightarrow x = G(y) \Rightarrow dx = G'(y)dy$.

Với $x = a \Rightarrow G(y) = a \Rightarrow y = \alpha$, tương tự $x = b \Rightarrow x = \beta$. Vậy $I = \displaystyle\int_\alpha^\beta yG'(y)dy$.

Ví dụ 4.1: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f^3(x) + f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$. Tính $I = \displaystyle\int_0^2 f(x)dx$.

Hướng dẫn:

Đặt $y = f(x) \Rightarrow y^3 + y = x \Rightarrow dx = (3y^2 + 1)dy$.

Với $x = 0 \Rightarrow y^3 + y = 0 \Rightarrow y = 0$, tương tự $x = 2 \Rightarrow y = 1$.

Vậy $I = \displaystyle\int_0^2 f(x)dx = \int_0^1 y(3y^2 + 1)dy = \frac{5}{4}$.

Dạng 5: Bất đẳng thức tích phân

$$\left(\int_a^b f(x).\,g(x)dx\right)^2 \le \left(\int_a^b f^2(x)dx\right).\left(\int_a^b g^2(x)dx\right)$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $f(x) = k.\,g(x)$ với $k \in \mathbb{R}$.

Ví dụ 5.1: Cho $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ thỏa $\int_0^1 f^2(x)dx = \dfrac{16}{7}$ và $\int_0^1 x^3 f(x)dx = \dfrac{4}{7}$. Tính $\int_a^b f(x)dx$.

Hướng dẫn:

Có

$$\frac{16}{49} = \left(\int_0^1 x^3 f(x)dx\right)^2 \leq \left(\int_0^1 x^6 dx\right).\left(\int_0^1 f^2(x)dx\right) = \frac{1}{7}.\frac{16}{7} = \frac{16}{49}$$

Vậy đẳng thức xảy ra nên $f(x) = kx^3$. Thay trở lại một trong hai tích phân ban đầu được $k = 4$.

Vậy $I = \int_0^1 4x^3 dx = 1$.

Ví dụ 5.2: Cho hàm $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(0) = 0,\ f(1) = 1$. Biết $\int_0^1 \sqrt{x^2+1}[f'(x)]^2 dx = \dfrac{1}{\ln(1+\sqrt{2})}$. Tính $I = \int_0^1 \dfrac{f(x)}{\sqrt{1+x^2}}dx$.

Hướng dẫn

Từ giả thiết ta có $\int_0^1 f'(x)dx = f(x)\Big|_0^1 = 1$ hay

$$\int_0^1 \sqrt[4]{1+x^2}\frac{f'(x)}{\sqrt[4]{1+x^2}}dx = 1$$

Áp dụng bất đẳng thức trên cho hai hàm $\sqrt[4]{1+x^2}.\ f'(x)$ và $\dfrac{1}{\sqrt[4]{1+x^2}}$ ta có

$$1 = \int_0^1 \sqrt[4]{1+x^2}\frac{f'(x)}{\sqrt[4]{1+x^2}}dx \leq \left(\int_0^1 \sqrt{x^2+1}[f'(x)]^2 dx\right).\left(\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx\right)$$

Mà $\int_0^1 \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx = \ln(1+\sqrt{2})$.

Do đó đẳng thức xảy ra nên $f'(x) = k\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} \Rightarrow f(x) = k\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) + C.$

Do $f(0) = 0$ và $f(1) = 1$ nên $C = 0$ và $k = \dfrac{1}{\ln(1+\sqrt{2})}.$

Thay vào I ta được

$$I = \int_0^1 \frac{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{\ln(1+\sqrt{2})\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2}\ln\left(1+\sqrt{2}\right).$$