IX. Một số dạng tích phân vận dụng cao

Ví dụ 1: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(x)+f(-x)=\cos^4 x$ với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Tính $I=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x$

A. $I=\dfrac{3\pi}{4}$. **B.** $I=\dfrac{3\pi}{2}$. **C.** $I=\dfrac{3\pi}{16}$. **D.** $I=\dfrac{3\pi}{8}$.

Đáp án C.

Lời giải

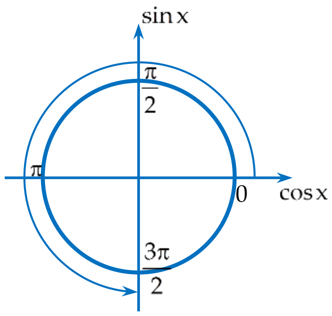
Đặt $x=-t\Rightarrow \mathrm{d}x=-dt$. Suy ra $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x=-\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} f(-t)dt=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(-t)dt=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(-x)\mathrm{d}x$.

Khi đó $2I=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(-x)\mathrm{d}x=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[f(x)+f(-x)\right]\mathrm{d}x$

$$=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 x\mathrm{d}x=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2\mathrm{d}x=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{4}\cos^2 2x\right)\mathrm{d}x$$

$$=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{4}.\frac{1+\cos 4x}{2}\right)\mathrm{d}x=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}\cos 4x\right)\mathrm{d}x$$

$$=\left.\left(\frac{3}{8}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x\right)\right|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{3\pi}{16}-\left(-\frac{3\pi}{16}\right)=\frac{3\pi}{8}.$$ Vậy $I=\dfrac{3\pi}{16}$.



Ví dụ 2: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(x)+f(-x)=\sqrt{2+2\cos 2x}$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Tính $I=\int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x$

A. $I=3$. **B.** $I=6$. **C.** $I=-1$. **D.** $I=-2$.

Đáp án B.

Lời giải

Ta có $I=\int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{0} f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_{0}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x$

Đặt $x=-t\Rightarrow \mathrm{d}x=dt$. Suy ra $\int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{0} f(x)\mathrm{d}x=-\int\limits_{\frac{3\pi}{2}}^{0} f(-t)dt=\int\limits_{0}^{\frac{3\pi}{2}} f(-t)dt=\int\limits_{0}^{\frac{3\pi}{2}} f(-x)\mathrm{d}x$.

Khi đó $I=\int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{0} f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_{0}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_{0}^{\frac{3\pi}{2}} f(-x)\mathrm{d}x+\int\limits_{0}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_{0}^{\frac{3\pi}{2}}\left[f(x)+f(-x)\right]\mathrm{d}x$

$$=\int\limits_{0}^{\frac{3\pi}{2}}\sqrt{2(1+\cos 2x)}\mathrm{d}x=\int\limits_{0}^{\frac{3\pi}{2}}\sqrt{4\cos^2 x}\mathrm{d}x=2\int\limits_{0}^{\frac{3\pi}{2}}|\cos x|\mathrm{d}x=2\left(\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\mathrm{d}x-\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\cos x\mathrm{d}x\right)$$

STUDY TIPS

Quan sát đường tròn lượng giác (hình vẽ) ta thấy trên đoạn $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ thì $\cos x>0$; trên $\left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$ thì $\cos x<0$. Do vậy:

$$\int\limits_{0}^{\frac{3\pi}{2}}|\cos x|\mathrm{d}x=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\mathrm{d}x+\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}(-\cos x)\mathrm{d}x.$$

$$=2\left(\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\sin x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\right)=6.$$

Ví dụ 3: Tính tích phân $I=\int_0^2 \max\left\{x;x^3\right\}dx$

A. $I=2.$ **B.** $I=4.$ **C.** $I=\frac{15}{4}.$ **D.** $I=\frac{17}{4}.$

Đáp án D.

Lời giải

Cách 1: Xét $x-x^3=0\Leftrightarrow x\left(1-x^2\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\\x=-2\end{array}\right.$

Do $x\in\left[0;2\right]$ nên $\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\end{array}\right.$. Bảng xét dấu:

x	0		1		2
$x-x^3$	0	+	0	−	

Trên đoạn $\left[0;1\right]$ thì $x-x^3>0\Leftrightarrow x>x^3$. Khi đó $\max\left\{x;x^3\right\}=x$.

Trên đoạn $\left[1;2\right]$ thì $x-x^3<0\Leftrightarrow x<x^3$. Khi đó $\max\left\{x;x^3\right\}=x^3$.

Khi đó $I=\int_0^2\max\left\{x;x^3\right\}dx=\int_0^1 xdx+\int_1^2 x^3dx=\frac{x^2}{2}\Big|_0^1+\frac{x^4}{4}\Big|_1^2=\frac{1}{2}+\left(4-\frac{1}{4}\right)=\frac{17}{4}.$

Bài toán: Tính $I=\int_a^b\max\left\{f\left(x\right);g\left(x\right)\right\}dx$

1. Tìm $\max\left\{f\left(x\right);g\left(x\right)\right\}$ bằng cách xét dấu của hiệu $f\left(x\right)-g\left(x\right)$:

* Giải phương trình $f\left(x\right)-g\left(x\right)=0$, giả sử ta tìm được nghiệm $x_0\in\left[a;b\right]$.

* Giả sử ta có bảng xét dấu dưới đây:

x	a		x_0		b
$f\left(x\right)-g\left(x\right)$		+	0	−	

* Từ bảng xét dấu, ta có nhận xét sau:

– Với $x\in\left[a;x_0\right]$ thì $f\left(x\right)>g\left(x\right)$, khi đó $\max\left\{f\left(x\right);g\left(x\right)\right\}=f\left(x\right)$.

– Với $x\in\left[x_0;b\right]$ thì $f\left(x\right)<g\left(x\right)$, khi đó $\max\left\{f\left(x\right);g\left(x\right)\right\}=g\left(x\right)$.

2. Ta có $I=\int_a^b\max\left\{f\left(x\right);g\left(x\right)\right\}dx=\int_a^{x_0}\max\left\{f\left(x\right);g\left(x\right)\right\}dx+\int_{x_0}^b\max\left\{f\left(x\right);g\left(x\right)\right\}dx$

$$=\int_a^{x_0}f\left(x\right)dx+\int_{x_0}^b g\left(x\right)dx.$$

STUDY TIPS

Để tính tích phân $I=\int_a^b\min\left\{f\left(x\right);g\left(x\right)\right\}dx$ ta thực hiện tương tự như cách làm bên bằng cách tìm $\min\left\{f\left(x\right);g\left(x\right)\right\}$.

STUDY TIPS

Cho hai hàm f, g liên tục trên K. Khi đó ta có:

$\max\left\{f,g\right\}=\frac{f+g+\left|f-g\right|}{2}.$

$\min\left\{f,g\right\}=\frac{f+g-\left|f-g\right|}{2}.$

Cách 2: Áp dụng công thức ở bên, ta có

$$I=\int_0^2\max\left\{x;x^3\right\}dx=\int_0^2\frac{x+x^3+\left|x-x^3\right|}{2}dx=\int_0^1\frac{x+x^3+\left|x-x^3\right|}{2}dx+\int_1^2\frac{x+x^3+\left|x-x^3\right|}{2}dx$$

$$=\int_0^1\frac{x+x^3+\left(x-x^3\right)}{2}dx+\int_1^2\frac{x+x^3+\left(x^3-x\right)}{2}dx=\int_0^1 xdx+\int_1^2 x^3dx=\frac{17}{4}.$$

Nhận xét: Thực ra việc tính tích phân ở cách 1 và cách 2 hoàn toàn giống nhau, đều là dựa vào việc xét dấu biểu thức $x-x^3$, bỏ dấu giá trị tuyệt đối của $\left|x-x^3\right|$ và sau đó tách cận tích phân ra thành các miền phù hợp.

Ví dụ 4: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\backslash\{-1;1\}$ và thỏa mãn $f'(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$.

Biết rằng $f(-3)+f(3)=0$ và $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)+f\left(\dfrac{1}{2}\right)=2$. Tính $T=f(-2)+f(0)+f(4)$

A. $T=1+\ln\dfrac{9}{5}$. **B.** $T=1+\ln\dfrac{6}{5}$.

C. $T=1+\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{9}{5}$. **D.** $T=1+\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{6}{5}$.

Đáp án C.

Lời giải

Ta có $f(x)=\int f'(x)\mathrm{d}x=\int\dfrac{\mathrm{d}x}{x^2-1}=\dfrac{1}{2}\int\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|+C$

Suy ra $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x-1}{x+1}+C_1 \text{ khi } \dfrac{x-1}{x+1}>0\\ \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1-x}{x+1}+C_2 \text{ khi } \dfrac{x-1}{x+1}<0\end{cases}$ hay $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x-1}{x+1}+C_1 \text{ khi } x^2>1\\ \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1-x}{x+1}+C_2 \text{ khi } x^2<1\end{cases}$.

Từ giả thiết, ta có: $\begin{cases}f(-3)+f(3)=0\\ f\left(-\dfrac{1}{2}\right)+f\left(\dfrac{1}{2}\right)=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(\dfrac{1}{2}\ln 2+C_1\right)+\left(\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1}{2}+C_1\right)=0\\ \left(\dfrac{1}{2}\ln 3+C_2\right)+\left(\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1}{3}+C_2\right)=2\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}C_1=0\\ C_2=1\end{cases}$

Vậy $T=f(-2)+f(0)+f(4)=\dfrac{1}{2}\ln 3+1+\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{3}{5}=1+\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{9}{5}$.

Ví dụ 5: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $\int\limits_0^1\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x=\int\limits_0^1(x+1)e^x f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{e^2-1}{4}$ và $f(1)=0$. Tính tích phân $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$

A. $I=\dfrac{e-1}{2}$. **B.** $I=\dfrac{e^2}{4}$. **C.** $I=e-2$. **D.** $I=\dfrac{e}{2}$.

Đáp án C.

Lời giải

Phân tích dữ kiện 1: Giả thiết xuất hiện tích phân $\int\limits_0^1(x+1)e^x f(x)\mathrm{d}x$ gồm tích của hàm đa thức $(x+1)$, hàm mũ e^x và một hàm chưa xác định $f(x)$, nên ta có thể nghĩ đến phương pháp tính tích phân từng phần.

Đặt $\begin{cases}u=f(x)\\ \mathrm{d}v=(x+1)e^x\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=f'(x)\mathrm{d}x\\ v=xe^x\end{cases}$

Suy ra $\int\limits_0^1(x+1)e^x f(x)\mathrm{d}x=xe^x f(x)\Big|_0^1-\int\limits_0^1 xe^x f'(x)\mathrm{d}x=e.f(1)-\int\limits_0^1 xe^x f'(x)\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow\int\limits_0^1 xe^x f'(x)\mathrm{d}x=e.f(1)-\int\limits_0^1(x+1)e^x f(x)\mathrm{d}x=e.0-\dfrac{e^2-1}{4}=\dfrac{1-e^2}{4}$.

STUDY TIPS

Ta có $\mathrm{d}v=(x+1)e^x\mathrm{d}x$ $\Rightarrow v=\int(x+1)e^x\mathrm{d}x$. Khi đó ta lại tiếp tục sử dụng phương pháp tính tích phân từng phần để tìm v, ta được $v=xe^x$.

STUDY TIPS
Sử dụng phương pháp tính tích phân từng phần để tính $\int_0^1 (xe^x)^2 dx$, ta được kết quả là $\frac{e^2-1}{4}$.

Phân tích dữ kiện 2: Giả thiết cho $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = \frac{e^2-1}{4}$, từ dữ kiện 1 ta xác định được $\int_0^1 xe^x f'(x)dx = \frac{1-e^2}{4}$, áp dụng BĐT tích phân Cauchy–Schwarz ta có:

$$\left(\frac{1-e^2}{4}\right)^2 = \left[\int_0^1 xe^x f'(x)dx\right]^2 \le \int_0^1 (xe^x)^2 dx . \int_0^1 [f'(x)]^2 dx = \frac{e^2-1}{4}\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = \left(\frac{e^2-1}{4}\right)^2$$

Dấu "=" xảy ra khi $f'(x) = k.xe^x$. Mặt khác $\int_0^1 xe^x f'(x)dx = \frac{1-e^2}{4}$ nên suy ra:

$$k\int_0^1 (xe^x)^2 dx = \frac{1-e^2}{4} \Leftrightarrow \frac{e^2-1}{4}.k = \frac{1-e^2}{4} \Leftrightarrow k = -1.$$

Từ đó $f'(x) = -xe^x$ và $f(x) = \int f'(x)dx = -\int xe^x dx = (1-x)e^x + C$.

Do $f(1) = 0$ nên $C = 0$ hay $f(x) = (1-x)e^x$. Vậy $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 (1-x)e^x dx = e-2$.

> **BĐT tích phân Cauchy–Schwarz:** Cho hai hàm số f và g liên tục trên $[a;b]$. Khi đó:
>
> $$\left(\int_a^b f(x).g(x)dx\right)^2 \le \int_a^b f^2(x)dx . \int_a^b g^2(x)dx.$$
>
> Dấu "=" xảy ra khi $f(x) = kg(x), \forall x \in [a;b], k \in \mathbb{R}$.

Ví dụ 6: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1) = 0, \int_0^1 [f'(x)]^2 dx = 7$ và $\int_0^1 x^2 f(x)dx = \frac{1}{3}$. Tích phân $\int_0^1 f(x)dx$ bằng

A. $\frac{7}{5}$. B. 1. C. $\frac{7}{4}$. D. 4.

Đáp án A.

Lời giải

Bài toán này được giải tương tự như ví dụ 5. Đặt $\begin{cases} u = f(x) \\ dv = x^2 dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x)dx \\ v = \frac{x^3}{3} \end{cases}$

$$\Rightarrow \int_0^1 x^2 f(x)dx = \frac{x^3}{3} f(x)\Big|_0^1 - \frac{1}{3}\int_0^1 x^3 f'(x)dx = \frac{1}{3}f(1) - \frac{1}{3}\int_0^1 x^3 f'(x)dx$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 x^3 f'(x)dx = f(1) - 3\int_0^1 x^2 f(x)dx = 0 - 3.\frac{1}{3} = -1.$$

Áp dụng BĐT tích phân Cauchy–Schwarz ta có:

$$1 = \left[\int_0^1 x^3 f'(x)dx\right]^2 \le \int_0^1 x^6 dx . \int_0^1 [f'(x)]^2 dx = \frac{1}{7}.7 = 1$$

Dấu "=" xảy ra khi $f'(x) = kx^3$, từ $\int_0^1 x^3 f'(x)dx = -1 \Leftrightarrow k\int_0^1 x^6 dx = -1 \Leftrightarrow k = -7$.

Suy ra $f'(x) = -7x^3$ và $f(x) = \int f'(x)dx = -7\int x^3 dx = -\frac{7}{4}x^4 + C$.

Do $f(1) = 0$ nên $C = \frac{7}{4}$, hay $f(x) = -\frac{7}{4}x^4 + \frac{7}{4}$.

Vậy $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \left(\frac{7}{4} - \frac{7}{4}x^4\right)dx = \frac{7}{5}$.

Ví dụ 7: Giả sử hàm số $y=f(x)$ liên tục nhận giá trị dương trên $(0;+\infty)$ và thỏa mãn $f(1)=1, f(x)=f'(x).\sqrt{3x+1}$, với mọi $x>0$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. $3<f(5)<4$. **B.** $1<f(5)<2$. **C.** $4<f(5)<5$. **D.** $2<f(5)<3$.

Đáp án A.

Lời giải

Từ giả thiết ta có $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{1}{\sqrt{3x+1}}\Rightarrow\int\dfrac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x=\int\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{3x+1}}$ (1)

Đặt $\sqrt{3x+1}=t\Rightarrow x=\dfrac{t^2-1}{3}\Rightarrow \mathrm{d}x=\dfrac{2}{3}t\mathrm{d}t$.

Suy ra $\int\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{3x+1}}=\dfrac{2}{3}\int\dfrac{t\mathrm{d}t}{t}=\dfrac{2}{3}\int \mathrm{d}t=\dfrac{2}{3}t+C=\dfrac{2}{3}\sqrt{3x+1}+C_1$.

Đặt $f(x)=u\Rightarrow f'(x)\mathrm{d}x=\mathrm{d}u$. Suy ra $\int\dfrac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x=\int\dfrac{\mathrm{d}u}{u}=\ln|u|+C_2=\ln|f(x)|+C_2$.

$(1)\Leftrightarrow \ln|f(x)|+C_2=\dfrac{2}{3}\sqrt{3x+1}+C_1$. Thay $x=1$ vào ta được:

$$\ln|f(1)|+C_2=\frac{2}{3}\sqrt{3.1+1}+C_1\Leftrightarrow C_2=\frac{4}{3}+C_1\Leftrightarrow C_1-C_2=-\frac{4}{3}\text{ do } f(1)=1.$$

Suy ra $\ln|f(x)|=\dfrac{2}{3}\sqrt{3x+1}-\dfrac{4}{3}\Leftrightarrow f(x)=e^{\frac{2}{3}\sqrt{3x+1}-\frac{4}{3}}$ với $x\in(0;+\infty)$.

Ta có $f(5)=e^{\frac{2}{3}\sqrt{3.5+1}-\frac{4}{3}}=e^{\frac{4}{3}}\in(3;4)$.

Ví dụ 8: Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục, dương trên $\mathbb{R}$; thỏa mãn $f(0)=1$ và $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{x}{x^2+1}$. Khi đó hiệu $T=f(2\sqrt{2})-2f(1)$ thuộc khoảng

A. $T\in(2;3)$. **B.** $T\in(7;9)$. **C.** $T\in(0;1)$. **D.** $T\in(9;12)$.

Đáp án C.

Lời giải

Từ giả thiết $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{x}{x^2+1}\Rightarrow\int\dfrac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x=\int\dfrac{x}{x^2+1}\mathrm{d}x$ (1)

Đặt $f(x)=u\Rightarrow f'(x)\mathrm{d}x=\mathrm{d}u$.

Suy ra $\int\dfrac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x=\int\dfrac{\mathrm{d}u}{u}=\ln|u|+C=\ln f(x)+C_1$ do $f(x)>0,\forall x\in\mathbb{R}$.

Ta có $\int\dfrac{x}{x^2+1}\mathrm{d}x=\int\dfrac{x}{x^2+1}.\dfrac{\mathrm{d}(x^2+1)}{2x}=\dfrac{1}{2}\int\dfrac{\mathrm{d}(x^2+1)}{x^2+1}=\dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)+C_2$.

Suy ra $(1)\Leftrightarrow\ln f(x)+C_1=\dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)+C_2$. Thay $x=0$ vào ta được:

$$\ln f(0)+C_1=\frac{1}{2}.\ln(0^2+1)+C_2\Leftrightarrow C_1-C_2=0\text{ do } f(0)=1.$$

Suy ra $(1)\Leftrightarrow\ln f(x)=\dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)\Leftrightarrow\ln f(x)=\ln\sqrt{x^2+1}\Leftrightarrow f(x)=\sqrt{x^2+1}$.

Vậy $\begin{cases}f(2\sqrt{2})=\sqrt{(2\sqrt{2})^2+1}=3\\ f(1)=\sqrt{1^2+1}=\sqrt{2}\end{cases}\Rightarrow T=f(2\sqrt{2})-2f(1)=3-2\sqrt{2}\Rightarrow T\in(0;1)$.