MỘT SỐ TÍNH CHẤT VÀ BÀI TOÁN ĐẶC BIỆT

I. Một số tính chất đặc biệt của tích phân

Tính chất 1: Cho f là hàm số liên tục trên đoạn $[a;b]$. Chứng minh rằng:

$$\int_a^b f(a+b-x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \quad (2)$$

Đặc biệt $\int_0^b f(b-x)\mathrm{d}x = \int_0^b f(x)\mathrm{d}x \quad (3)$

STUDY TIPS

Công thức bên thường được áp dụng nhiều với bài toán tính tích phân dạng $\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x$.

Lời giải tổng quát

Đặt $t=a+b-x$ thì $\mathrm{d}t=-\mathrm{d}x$. Khi đó

$$\boxed{\int_a^b f(a+b-x)\mathrm{d}x = \int_b^a -f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x}$$

Khi $a=0$, ta nhận được công thức (3).

Mở rộng từ công thức trên, ta có

$$I=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \to m.I = m.\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b m.f(x)\mathrm{d}x$$

$$I=\int_a^b (a+b-x)\mathrm{d}x \to n.I = n.\int_a^b f(a+b-x)\mathrm{d}x = \int_a^b n.f(a+b-x)\mathrm{d}x$$

$$\longrightarrow \boxed{(m+n).I = \int_a^b \left[m.f(x)+n.f(a+b-x)\right]\mathrm{d}x}.$$

Nếu $m+n\neq 0$ thì

$$I=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(a+b-x)\mathrm{d}x = \frac{1}{m+n}.\int_a^b \left[m.f(x)+n.f(a+b-x)\right]\mathrm{d}x$$

Ngoài ra, nếu $f(x).f(a+b-x)=c,(c>0)$ thì $\boxed{\int_a^b \frac{1}{\sqrt{c}+f(x)}\mathrm{d}x = \frac{b-a}{2\sqrt{c}}}$

Chứng minh: Ta có $I=\int_a^b \frac{1}{\sqrt{c}+f(x)}\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{c}+f(a+b-x)}\mathrm{d}x$

$$\Rightarrow 2I = \int_a^b \left[\frac{1}{\sqrt{c}+f(x)} + \frac{1}{\sqrt{c}+f(a+b-x)}\right]\mathrm{d}x$$

$$=\int_a^b \frac{2\sqrt{c}+f(x)+f(a+b-x)}{c+\sqrt{c}.\left[f(x)+f(a+b-x)\right]+\underbrace{f(x).f(a+b-x)}_{=c}}\mathrm{d}x$$

$$=\int_a^b \frac{2\sqrt{c}+f(x)+f(a+b-x)}{\sqrt{c}.\left[2\sqrt{c}+f(x)+f(a+b-x)\right]}\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{c}}.\int_a^b \mathrm{d}x = \frac{b-a}{\sqrt{c}}.$$

Ví dụ 1: Cho $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{a}.\ln b,(a\neq 0;b>0)$. Khi đó tổng $a+b$ bằng

A. 8. **B.** 10. **C.** 5. **D.** 4.

Đáp án B.

Lời giải

Nhận xét: $f(x)=\ln(1+\tan x)$ liên tục trên $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$, áp dụng (3) với bài toán này ta có:

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\left(1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\frac{2}{1+\tan x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\ln 2-\ln(1+\tan x)\right)dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln 2dx-I\Leftrightarrow 2I=\ln 2.x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}\Leftrightarrow I=\frac{\pi}{8}.\ln 2.$$

Vậy $a+b=10$.

Ví dụ 2: Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $f(x)+2f(-x)=\sqrt{1-\cos x}$. Tính tích phân $I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx$

A. $I=\frac{4\left(\sqrt{2}-1\right)}{3}$.

B. $I=4\left(\sqrt{2}-1\right)$.

C. $I=\frac{8}{3}\left(\sqrt{2}-1\right)$.

D. $I=12\left(\sqrt{2}-1\right)$.

Đáp án A.

Lời giải

Áp dụng công thức mở rộng với $a=-\frac{\pi}{2},b=\frac{\pi}{2},m=1,n=2$ ta có

$$I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx=\frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[f(x)+2f(-x)\right]dx=\frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\cos x}dx.$$

Dễ tính được $I=\frac{4\left(\sqrt{2}-1\right)}{3}$.

Tính chất 2: Cho f là hàm số chẵn và liên tục trên $[-a;a]$ với $a>0$. Khi đó ta có

$$\begin{cases}\int_{-a}^{0}f(x)dx=\int_0^a f(x)dx\to\int_{-a}^{a}f(x)dx=2\int_{-a}^{0}f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx\\ \int_{-a}^{a}\frac{f(x)}{b^x+1}dx=\frac{1}{2}\int_{-a}^{a}f(x)dx=\int_{-a}^{0}f(x)dx=\int_0^a f(x)dx\ (b>0)\end{cases}$$

Lời giải tổng quát

* Đặt $x=-t\Rightarrow dx=-dt$. Ta có $\int_{-a}^{0}f(x)dx=-\int_a^0 f(-t)dt=\int_0^a f(-t)dt=\int_0^a f(-x)dx$. Do $f(x)$ là hàm số chẵn nên $f(-x)=f(x)$ và $\boxed{\int_{-a}^{0}f(x)dx=\int_0^a f(x)dx}$

Suy ra $\int_{-a}^{a}f(x)dx=\int_{-a}^{0}f(x)dx+\int_0^a f(x)dx\Rightarrow\boxed{\int_{-a}^{a}f(x)dx=2\int_{-a}^{0}f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx}$

* $\int_{-b}^{0}\frac{f(x)}{a^x+1}dx=\int_{b}^{0}\frac{-f(-t)}{a^{-t}+1}dt=\int_{0}^{b}\frac{a^t f(t)}{a^t+1}dt=\int_{0}^{b}\frac{a^x f(x)}{a^x+1}dx.$

Do đó $\int_{-b}^{b}\frac{f(x)}{a^x+1}dx=\int_{-b}^{0}\frac{f(x)}{a^x+1}dx+\int_{0}^{b}\frac{f(x)}{a^x+1}dx=\int_{0}^{b}\frac{a^x f(x)}{a^x+1}dx+\int_{0}^{b}\frac{f(x)}{a^x+1}dx$

Suy ra $\boxed{\int_{-b}^{b}\frac{f(x)}{a^x+1}dx=\int_{0}^{b}f(x)dx}$.

Ví dụ 3: Cho $f(x)$ là hàm chẵn và thỏa mãn $\int_{0}^{2}f(x)dx=10$. Tính tính phân $I=\int_{-2}^{2}f(x)dx$

A. 10. **B.** 20. **C.** –10. **D.** –20.

Đáp án B.

Lời giải

Áp dụng công thức $\int_{-a}^{a}f(x)dx=2\int_{0}^{a}f(x)dx$ ta có $I=\int_{-2}^{2}f(x)dx=2\int_{0}^{2}f(x)dx=20.$

Ví dụ 4: Tính tích phân $\int_{-2^{2018}}^{2^{2018}}\frac{x^2}{e^x+1}dx$

A. 8^{2017}. **B.** $\frac{8^{2018}}{3}$. **C.** $\frac{3^{2018}}{3}$. **D.** $\frac{3^{2018}}{8}$.

Đáp án B.

Lời giải

Áp dụng công thức $\int_{-b}^{b}\frac{f(x)}{a^x+1}dx=\int_{0}^{b}f(x)dx$ ta có:

$$\int_{-2^{2018}}^{2^{2018}}\frac{x^2}{e^x+1}dx=\int_{0}^{2^{2018}}x^2dx=\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^{2^{2018}}=\frac{\left(2^{2018}\right)^3}{3}=\frac{8^{2018}}{3}.$$

Ví dụ 5: Có bao nhiêu số $a\in[-2017;2017]$ để $\int_{-a}^{a}\frac{\cos x}{2018^x+1}dx=\frac{\sqrt{3}}{2}\ (a\in\mathbb{Z})$?

A. 641. **B.** 642. **C.** 1284. **D.** 1282.

Đáp án C.

Lời giải

Áp dụng $\int_{-b}^{b}\frac{f(x)}{a^x+1}dx=\int_{0}^{b}f(x)dx$ ta có: $\int_{-a}^{a}\frac{\cos x}{2018^x+1}dx=\int_{0}^{a}\cos x dx=\left.\sin x\right|_0^a=\sin a.$

Từ giả thiết suy ra $\sin a=\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=\frac{\pi}{3}+k2\pi\\ a=\frac{2\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right.\ (k\in\mathbb{R}).$

* Với $a=\frac{\pi}{3}+k2\pi\xrightarrow{a\in[-2017;2017]}\frac{-2017-\frac{\pi}{3}}{2\pi}\le k\le\frac{2017-\frac{\pi}{3}}{2\pi}.$

Suy ra có 642 số nguyên k thỏa mãn.

* Với $a=\frac{2\pi}{3}+k2\pi \xrightarrow{a\in[-2017;2017]} \frac{-2017-\frac{2\pi}{3}}{2\pi}\le k\le \frac{2017-\frac{2\pi}{3}}{2\pi}$. Suy ra có 642 số nguyên k thỏa mãn.

Vậy có $642+642=1284$ số a thỏa mãn bài toán.

Tính chất 3: Nếu $f(x)$ liên tục và là hàm lẻ trên đoạn $[-a;a]$ thì

$$\begin{cases}\int_{-a}^{0} f(x)\mathrm{d}x=-\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x\\ \int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x=0\end{cases}$$

Lời giải tổng quát

Ta có $\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x=\int_{-a}^{0} f(x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x$.

Đặt $x=-t\Rightarrow \mathrm{d}x=-\mathrm{d}t\Rightarrow \int_{-a}^{0} f(x)\mathrm{d}x=-\int_{a}^{0} f(-t)\mathrm{d}t=\int_{0}^{a} f(-t)\mathrm{d}t=\int_{0}^{a} f(-x)\mathrm{d}x$. Do $f(x)$ là hàm số lẻ nên $f(-x)=-f(x)$. Suy ra $\boxed{\int_{-a}^{0} f(x)\mathrm{d}x=-\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x}$.

Ta có $\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x=\int_{-a}^{0} f(x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x\Rightarrow \boxed{\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x=0}$.

Mở rộng: Nếu $f(x)$ liên tục và $f(a+b-x)=-f(x)$ thì $I=\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x=0$.

Ví dụ 6: Cho $f(x)$ là hàm lẻ và $\int_{0}^{2} f(-x)\mathrm{d}x=2;\int_{1}^{2} f(-2x)\mathrm{d}x=4$. Tính tích phân $\int_{0}^{4} f(x)\mathrm{d}x$

A. 6 **B.** 10 **C.** –10 **D.** –6

Đáp án C.

Lời giải

Do $f(x)$ là hàm lẻ nên $f(-x)=-f(x)$. Từ đó ta có $\int_{0}^{2} f(-x)\mathrm{d}x=-\int_{0}^{2} f(x)\mathrm{d}x=2$

$\Rightarrow \int_{0}^{2} f(x)\mathrm{d}x=-2.$

Đặt $t=2x\Rightarrow \mathrm{d}t=2\mathrm{d}x$. Suy ra

$\int_{1}^{2} f(-2x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{2}^{4} f(-t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_{2}^{4} f(-x)\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int_{2}^{4} f(x)\mathrm{d}x=4\Rightarrow \int_{2}^{4} f(x)\mathrm{d}x=-8.$

Vậy $\int_{0}^{4} f(x)\mathrm{d}x=\int_{0}^{2} f(x)\mathrm{d}x+\int_{2}^{4} f(x)\mathrm{d}x=-2-8=-10.$

Ví dụ 7: Tính tích phân $\int_{-2018}^{2018} \sin(2018x+\sin x)\mathrm{d}x$

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** –1.

Đáp án A.

Lời giải

Đặt $f(x)=\sin(2018x+\sin x)$.

Ta có $f(-x)=\sin(-2018x+\sin(-x))=-\sin(2018x+\sin x)=-f(x)$ nên $f(x)$ là hàm số lẻ. Áp dụng bài toán 1 ta có $\int_{-2018}^{2018}\sin(2018x+\sin x)\mathrm{d}x=0$.

Lưu ý

* Các hàm số $y=\sin(ax+b)$ và $y=\cos(ax+b)$ tuần hoàn với chu kì $T=\frac{2\pi}{|a|}$.

* Các hàm số $y=\tan(ax+b)$ và $y=\cot(ax+b)$ tuần hoàn với chu kì $T=\frac{\pi}{|a|}$.

Tính chất 4: Cho $f(x)$ là hàm tuần hoàn với chu kì T, có nghĩa là $f(x+T)=f(x)$. Khi đó:

$$\begin{cases}\int_0^T f(x)\mathrm{d}x=\int_a^{a+T}f(x)\mathrm{d}x\\ \int_0^{nT}f(x)\mathrm{d}x=n.\int_0^T f(x)\mathrm{d}x\\ \int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_{a+T}^{b+T}f(x)\mathrm{d}x=\int_{a+nT}^{b+nT}f(x)\mathrm{d}x\end{cases}$$

Lời giải tổng quát

* Ta có $\int_a^{a+T}f(x)\mathrm{d}x=\int_a^0 f(x)\mathrm{d}x+\int_0^T f(x)\mathrm{d}x+\int_T^{a+T}f(x)\mathrm{d}x$. Ta cần đi chứng minh rằng

$\int_a^0 f(x)\mathrm{d}x+\int_T^{a+T}f(x)\mathrm{d}x=0\Leftrightarrow\int_T^{a+T}f(x)\mathrm{d}x=-\int_a^0 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\ (1)$

Đặt $x=t+T\Rightarrow\mathrm{d}x=\mathrm{d}t$ và $\int_T^{a+T}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^a f(t+T)\mathrm{d}t=\int_0^a f(x+T)\mathrm{d}x=\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$.

Vậy (1) được chứng minh và $\boxed{\int_0^T f(x)\mathrm{d}x=\int_a^{a+T}f(x)\mathrm{d}x}$ $(*)$

* $\int_0^{nT}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^T f(x)\mathrm{d}x+\int_T^{2T}f(x)\mathrm{d}x+\int_{2T}^{3T}f(x)\mathrm{d}x+...+\int_{(n-1)T}^{nT}f(x)\mathrm{d}x=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{kT}^{(k+1)T}f(x)\mathrm{d}x$

Ta cần chứng minh $\forall k=0,1,2,...,n-1$ thì $\int_{kT}^{(k+1)T}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^T f(x)\mathrm{d}x$.

Từ công thức $(*)$ ta có $\int_0^T f(x)\mathrm{d}x=\int_{0+kT}^{T+kT}f(x)\mathrm{d}x=\int_{kT}^{(k+1)T}f(x)\mathrm{d}x$.

Vậy $\boxed{\int_0^{nT}f(x)\mathrm{d}x=n.\int_0^T f(x)\mathrm{d}x}$

Ví dụ 8: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x+4)=f(x),\forall x$. Biết $\int_0^4 f(x)\mathrm{d}x=1;\ \int_1^2 f(3x+5)\mathrm{d}x=12$. Tính $\int_0^7 f(x)\mathrm{d}x$

A. 5. **B.** 37. **C.** 4. **D.** 36.

Đáp án B.

Lời giải

Đặt $3x+5=t\Rightarrow\mathrm{d}t=3\mathrm{d}x$ và $\int_1^2 f(3x+5)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int_8^{11}f(t)\mathrm{d}t=12\Rightarrow\int_8^{11}f(t)\mathrm{d}t=36$.

Từ giả thiết $f(x+4)=f(x)\Rightarrow$ Hàm số $f(x)$ tuần hoàn với chu kì $T=4$.

Áp dụng công thức $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_{a+T}^{b+T}f(x)\mathrm{d}x$ ta có $\int_4^7 f(x)\mathrm{d}x=\int_8^{11}f(x)\mathrm{d}x$.

Vậy $\int_0^7 f(x)dx = \int_0^4 f(x)dx + \int_4^7 f(x)dx = 1 + 36 = 37$.

Tính chất 5: Cho hàm số f liên tục trên $[0;1]$. Chứng minh rằng:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx \quad (4)$$

Lời giải tổng quát

Đặt $t = \frac{\pi}{2} - x$ thì $dt = -dx$, khi đó $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 f(\cos t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$.

Ví dụ 9: Tính tích phân: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt[2011]{\sin x^{2011}}}{\sqrt[2011]{\cos x^{2011}} + \sqrt[2011]{\sin x^{2011}}}dx$

A. $\frac{\pi}{2}$ **B.** 1 **C.** $\frac{\pi}{4}$ **D.** $\frac{\pi}{8}$

Đáp án C

Lời giải

Sử dụng công thức (4) ta có $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt[2011]{\cos x^{2011}}}{\sqrt[2011]{\sin x^{2011}} + \sqrt[2011]{\cos x^{2011}}}dx$

Từ đây suy ra $2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1dx \Rightarrow I = \frac{\pi}{4}$

**** Tính chất 6: (đọc thêm) Cho f là hàm số liên tục trên $[a;b]$ thỏa mãn $f(x) = f(a+b-x)$. Chứng minh rằng: $\int_a^b xf(x)dx = \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx$ (8)**

Đặc biệt $\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$ (9)

Lời giải tổng quát

Thực hiện phép biến đổi $x = a + b - t$ thì

$$\int_a^b xf(x)dx = \int_a^b (a+b-t)f(t)(-dt) = (a+b)\int_a^b f(x)dx - \int_a^b xf(x)dx$$

Từ đó suy ra (8). Chọn $a = 0$, $b = \pi$ ta có (9).