Một số tích phân đặc biệt

MỘT SỐ TÍCH PHÂN ĐẶC BIỆT (ĐỌC THÊM)

Định lý 1. *Nếu $f\left(x\right)$ liên tục và **là hàm lẻ** trên $\left[-a;a\right]$ thì*

$$I=\int\limits_{-a}^{a}f\left(x\right)dx=0$$

Chứng minh:

$$I=\int\limits_{-a}^{0}f\left(x\right)dx+\int\limits_{0}^{a}f\left(x\right)dx$$

Tính:

$$\int\limits_{-a}^{0}f\left(x\right)dx$$

Đặt $t=-x\Rightarrow dx=-dt$. $x=-a,\ t=a$ và $x=0,t=0$

$$\int\limits_{-a}^{0}f\left(x\right)dx=\int\limits_{a}^{0}f\left(-t\right)\left(-dt\right)=\int\limits_{a}^{0}f\left(t\right)dt=-\int\limits_{0}^{a}f\left(x\right)dx$$

Thế vào I ta được $I=0$.

Ví dụ:

$$I=\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\cos x.\ln\frac{1-x}{1+x}dx$$

Xét hàm số liên tục trên $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$ (điều này luôn đúng trong bài toán).

$$f\left(x\right)=\cos x\ln\frac{1-x}{1+x}$$

Có

$$f\left(-x\right)=\cos(-x)\ln\frac{1+x}{1-x}=-\cos x.\ln\frac{1-x}{1+x}=-f\left(x\right)$$

Vậy $f\left(x\right)$ là hàm chẵn, do đó $I=0$.

Đinh lý 2. *Nếu $f\left(x\right)$ **là hàm chẵn** liên tục trên $[-a;a]$, thì*

$$\int\limits_{-a}^{a}\frac{f\left(x\right)}{a^x+1}dx=\int\limits_{0}^{a}f\left(x\right)dx$$

Chứng minh

$$I=\int\limits_{-a}^{a}\frac{f\left(x\right)}{a^x+1}dx=\int\limits_{-a}^{0}\frac{f\left(x\right)}{a^x+1}dx+\int\limits_{0}^{a}\frac{f\left(x\right)}{a^x+1}dx$$

Tính

$$\int\limits_{-a}^{0}\frac{f\left(x\right)}{a^x+1}dx$$

Đặt $t=-x\Rightarrow dx=-dt$. Đổi cận $x=-a\Rightarrow t=a;x=0\Rightarrow t=0$

$$\int\limits_{-a}^{0}\frac{f\left(x\right)}{a^x+1}dx=\int\limits_{a}^{0}\frac{f\left(-t\right)}{a^{-t}+1}(-dt)=-\int\limits_{a}^{0}f\left(t\right).\frac{a^t}{1+a^t}dt=\int\limits_{0}^{a}\frac{f\left(t\right)a^t}{a^t+1}dt$$

Thay vào I, ta được

$$I=\int\limits_{0}^{a}f\left(x\right).\frac{a^x+1}{a^x+1}dx=\int\limits_{0}^{a}f\left(x\right)dx$$

Ví dụ:

$$\int\limits_{-1}^{1}\frac{x^4}{2^x+1}dx=\int\limits_{0}^{1}x^4dx=\frac{1}{5}$$

3. Đổi biến theo tổng hai cận

Nếu $f\left(x\right)$ liên tục trên $\left[a;b\right]$ thì ta có

$$\int\limits_a^b f\left(x\right)dx=\int\limits_a^b f\left(a+b-x\right)dx$$

Chứng minh

Đặt $t=a+b-x\Rightarrow dx=-dt$

x	a	b
t	b	a

Vậy

$$\int\limits_a^b f\left(x\right)dx=\int\limits_b^a f\left(a+b-t\right)\left(-dt\right)=\int\limits_a^b f\left(a+b-t\right)dt$$

***Ứng dụng 1*: Lượng giác**

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\sin x\right)dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\cos x\right)dx$$

Ví dụ

$$I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{10}x}{\sin^{10}x+\cos^{10}x}dx$$

Ta có

$$I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{10}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\sin^{10}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\cos^{10}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^{10}x}{\cos^{10}x+\sin^{10}x}dx$$

Mà ban đầu

$$I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{10}x}{\sin^{10}x+\cos^{10}x}dx$$

Vậy cộng lại ta có

$$2I=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{10}x+\cos^{10}x}{\sin^{10}x+\cos^{10}x}dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} dx=\frac{\pi}{2}$$

Ứng dụng 2: **Lượng giác và** x

$$\int_{0}^{\pi} x.\, f(\sin x)dx=\frac{\pi}{2}\int_{0}^{\pi} f(\sin x)dx$$

Ví dụ

$$I=\int_{0}^{\pi} x.\,\frac{\sin x}{4-\cos^2 x}dx=\frac{\pi}{2}\int_{0}^{\pi}\frac{\sin x}{4-\cos^2 x}dx=\frac{\pi}{2}\int_{-1}^{1}\frac{dt}{4-t^2}$$

Ứng dụng 3: **Mũ và logarithm**

Ví dụ 1

$$I=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \ln\frac{1+\sin x}{1+\cos x}dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \ln\frac{1+\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \ln\frac{1+\cos x}{1+\sin x}dx=-I$$

Vậy $I=0$.

Ví dụ 2:

$$I=\int_{-1}^{1}\frac{e^x}{e^x-e^{-x}}dx=\int_{-1}^{1}\frac{e^{-x}}{e^{-x}-e^{x}}dx=\int_{-1}^{1}\frac{-e^{-x}}{e^x-e^{-x}}dx$$

Suy ra

$$2I=\int_{-1}^{1}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x-e^{-x}}dx=\int_{-1}^{1}dx=2\Rightarrow I=1$$

Ứng dụng 4: Hàm ẩn

Ví dụ : Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ và thỏa mãn $f(x)+2f(1-x)=3x, \forall x\in\mathbb{R}$. Tính $I=\int_0^1 f(x)dx$

Áp dụng công thức, ta có

$$I = \int_0^1 f(1-x)dx$$

Do vậy

$$3I = \int_0^1 \left[f(x) + 2f(1-x)\right] dx = \int_0^1 3xdx = \frac{3}{2}\bigg|_0^1 = \frac{3}{2}$$

Suy ra $I = \dfrac{1}{2}$.