

CÔNG THỨC GIẢI HÀM BẬC 4 TRÙNG PHƯƠNG

Hàm trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$)

$$y' = 4ax^3 + 2bx^2 = 2x^2(2ax^2 + b)$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2ax^2 + b = 0(*) \end{cases}$$

1. Hàm số có 1 cực trị $\Leftrightarrow -\frac{b}{2a} \leq 0 (\Leftrightarrow ab \geq 0)$

1.1. $a > 0$: 1 cực tiểu.

1.2. $a < 0$: 1 cực đại.

2. Hàm số có 3 cực trị $\Leftrightarrow -\frac{b}{2a} > 0 (\Leftrightarrow ab < 0)$

2.1. $a > 0$: 1 cực đại và 2 cực tiểu

2.2. $a < 0$: 2 cực đại và 1 cực tiểu.

2.3. Tọa độ của 3 cực trị:

$$A(0; c), B\left(-\sqrt{\frac{-b}{2a}}; -\frac{\Delta}{4a}\right); C\left(\sqrt{\frac{-b}{2a}}; -\frac{\Delta}{4a}\right) \quad (\Delta = b^2 - 4ac)$$

Tam giác ABC luôn là tam giác cân vì $AB = AC = \sqrt{\frac{b^2}{16a^2} - \frac{b}{2a}}$.

$$BC = 2\sqrt{-\frac{b}{2a}}$$

2.4. Phương trình qua điểm cực trị:

$$BC: y = -\frac{\Delta}{4a}$$

$$AB: y = \left(\sqrt{\frac{-b}{2a}}\right)^3 x + c; AC: -\left(\sqrt{\frac{-b}{2a}}\right)^3 x + c.$$

2.4. Gọi $\alpha = \widehat{BAC}$ ta có: $8a(1 + \cos \alpha) + b^3(1 - \cos \alpha) = 0 \Rightarrow \cos \alpha = \frac{b^3 + 8a}{b^3 - 8a}$

$$\text{Diện tích tam giác ABC: } S_{ABC} = \sqrt{-\frac{b^5}{32a^3}}$$

2.5. Phương trình đường tròn đi qua A, B, C: $x^2 + y^2 - (c+n)x + c.n = 0$, với

$$n = \frac{2}{b} - \frac{\Delta}{4a} \quad \text{và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác là: } R = \frac{b^3 - 8a}{8|a|.b}$$

$$2.6. \text{ Tam giác ABC vuông cân tại A } \Leftrightarrow \begin{cases} ab < 0 \\ 8a + b^3 = 0 \end{cases}$$

$$2.7. \text{ Tam giác ABC đều } \Leftrightarrow \begin{cases} ab < 0 \\ 24a + b^3 = 0 \end{cases}$$

$$2.8. \text{ Tam giác ABC có } \widehat{BAC} = \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} ab < 0 \\ 8a + b^3 \cdot \tan^2 \frac{\alpha}{2} = 0 \end{cases}$$

$$2.9. \text{ Tam giác ABC có diện tích } S \Leftrightarrow \begin{cases} 32a^3 \cdot S^2 + b^5 = 0 \\ ab < 0 \end{cases}$$

$$2.10. \text{ Tam giác ABC có diện tích lớn nhất } \Leftrightarrow \begin{cases} S = S_0 = \sqrt{-\frac{b^5}{32a^3}} \\ ab < 0 \end{cases}$$

$$2.11. \text{ Tam giác ABC có bán kính đường tròn nội tiếp } r \Leftrightarrow \begin{cases} r = \frac{b^2}{4|a| \left(1 + \sqrt{1 - \frac{b^3}{8a}} \right)} \\ ab < 0 \end{cases}$$

$$2.12. \text{ Tam giác ABC có độ dài } BC = m_0 \Leftrightarrow \begin{cases} am_0^2 + 2 = 0 \\ ab < 0 \end{cases}$$

$$2.13. \text{ Tam giác ABC có độ dài } AB = AC = n_0 \Leftrightarrow \begin{cases} 16a^2 \cdot n_0^2 - b^4 + 8ab = 0 \\ ab < 0 \end{cases}$$

$$2.14. \text{ Tam giác ABC có cực trị } B, C \in Ox \Leftrightarrow \begin{cases} ab < 0 \\ b^2 - 4ac = 0 \end{cases}$$

$$2.15. \text{ Tam giác ABC có 3 góc nhọn } \Leftrightarrow \begin{cases} ab < 0 \\ b(8a + b^3) > 0 \end{cases}$$

$$2.16. \text{ Tam giác ABC có trọng tâm O } \Leftrightarrow \begin{cases} ab < 0 \\ b^2 - 6ac = 0 \end{cases}$$

$$2.17. \text{ Tam giác } ABC \text{ có trục tâm } O \Leftrightarrow \begin{cases} ab < 0 \\ b^3 + 8a - 4ac = 0 \end{cases}$$

$$2.18. \text{ Tam giác } ABC \text{ có bán kính đường tròn ngoại tiếp } R \Leftrightarrow \begin{cases} ab < 0 \\ R = \frac{b^3 - 8a}{8|a|b} \end{cases}$$

$$2.19. \text{ Tam giác } ABC \text{ cùng với điểm } O \text{ tạo thành hình thoi} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 - 2ac = 0 \\ ab < 0 \end{cases}.$$

$$2.20. \text{ Tam giác } ABC \text{ có } O \text{ là tâm đường tròn nội tiếp} \Leftrightarrow \begin{cases} ab < 0 \\ b^3 - 8a - 4abc = 0 \end{cases}$$

$$2.21. \text{ Tam giác } ABC \text{ có } O \text{ là tâm đường tròn ngoại tiếp} \Leftrightarrow \begin{cases} ab < 0 \\ b^3 - 8a - 8abc = 0 \end{cases}$$

$$2.22. \text{ Tam giác } ABC \text{ có điểm cực trị cách đều trục hoành} \Leftrightarrow \begin{cases} ab < 0 \\ b^2 - 8ac = 0. \end{cases}$$

---HẾT---

Tài liệu tham khảo:

1. Sách giáo khoa 12 cơ bản và nâng cao.
2. Thủ thuật giải nhanh đề thi trắc nghiệm Toán – Nguyễn Phú Khánh, Huỳnh Đức Khánh.
3. Một số tài liệu khác trên internet.