Bài 1: Cho số phức z thỏa mãn $|z|$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|z+1|+|z^2-z+1|$. Tính giá trị của M.n

A. $\frac{13\sqrt{3}}{4}$ B. $\frac{39}{4}$ C. $3\sqrt{3}$ D. $\frac{13}{4}$

- Cách 1:

  $\text{Re}(z)$ là phần thực của số phức z, Im(z) là phần ảo của số phức z, $|z|=1 \Leftrightarrow z.\bar{z}=1$

  - Đặt $t=|z+1|$, ta có: $0=|z|-1\le|z+1|\le|z|+1=2 \Rightarrow t\in[0;2]$
  - $t^2=(1+z)(1+\bar{z})=1+z.\bar{z}+z+\bar{z}=2+2\text{Re}(z) \Rightarrow \text{Re}(z)=\frac{t^2-2}{2}$
  - $|z^2-z+1|=|z^2-z+z.\bar{z}|=|z||z-1+\bar{z}|=\sqrt{(2\text{Re}(z)-1)^2}=|2\text{Re}(z)-1|=|t^2-3|$
  - Xét hàm số: $f(t)=t+|t^2-3|, t\in[0;2]$. Xét 2 TH:

  ⇨ $Maxf(t)=\frac{13}{4}$; $Minf(t)=\sqrt{3} \Rightarrow M.n=\frac{13\sqrt{3}}{4}$

- Cách 2:

  - $z=r(\cos x+i\sin x)=a+bi$
  - Do $|z|=1 \Rightarrow \begin{cases} z.\bar{z}=|z|^2=1 \\ r=\sqrt{a^2+b^2}=1 \end{cases}$
  - $P=\sqrt{2+2\cos x}+|2\cos x-1|$, đặt $t=\cos x\in[-1;1] \Rightarrow f(t)=\sqrt{2+2t}+|2t-1|$
  - TH1: $t\in\left[-1;\frac{1}{2}\right]$

    $$f'(t)=\frac{1}{\sqrt{2+2t}}+2>0 \Rightarrow \begin{cases} maxf(t)=f(1)=3 \\ minf(t)=f\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{3} \end{cases}$$

  - TH1: $t\in\left[\frac{1}{2};1\right]$

    $$f'(t)=\frac{1}{\sqrt{2+2t}}-2=0 \Leftrightarrow t=-\frac{7}{8} \Rightarrow maxf(t)=f\left(-\frac{7}{8}\right)=\frac{13}{4}$$

  ⇨ $Maxf(t)=\frac{13}{4}$; $Minf(t)=\sqrt{3} \Rightarrow M.n=\frac{13\sqrt{3}}{4}$

Bài 2: Cho số phức z thỏa mãn $|z-3-4i|=\sqrt{5}$. Gọi M và m là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|z+2|^2-|z-i|^2$. Tính module số phức $w=M+mi$

A. $|w|=2\sqrt{314}$ B. $|w|=\sqrt{1258}$ C. $|w|=3\sqrt{137}$ D. $|w|=2\sqrt{309}$

- Cách 1:
  - $P=4x+2y+3\Rightarrow y=\dfrac{P-4x-3}{2}$
  - $|z-3-4i|=\sqrt{5}\Leftrightarrow(x-3)^2+(y-4)^2=5\Leftrightarrow(x-3)^2+\left(\dfrac{P-4x-3}{2}-4\right)^2-5=f(x)$
  - $f'(x)=8(x-3)-8(P-4x-11)=0\Leftrightarrow x=0,2P-1,6\Rightarrow y=0,1P+1,7$
  - Thay vào $f(x)$ ta được: $(0,2P-1,6-3)^2+(0,1P+1,7-4)^2-5=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}P=33\\P=13\end{array}\right.$
- Cách 2:
  - $|z-3-4i|=\sqrt{5}\Leftrightarrow(x-3)^2+(y-4)^2=5:(C)$
  - $(\Delta):4x+2y+3-P=0$
  - Tìm P sao cho đường thẳng Δ và đường tròn (C) có điểm chung $\Leftrightarrow d(I;\Delta)\le R\Leftrightarrow|23-P|\le10\Leftrightarrow13\le P\le33$
  - Vậy $MaxP=33$; $MinP=13$
  - $w=33+13i\Rightarrow|w|=\sqrt{1258}$

Bài 3: Cho số phức $z=x+yi$ $(x,y\in\mathbb{R})$ thỏa mãn đồng thời hai điều kiện $|z-3-4i|=\sqrt{5}$ và biểu thức $P=|z+2|^2-|z-i|^2$ đạt giá trị lớn nhất. Tính $|z|$.

A. $|z|=3$ B. $|z|=4\sqrt{2}$ C. $|z|=5\sqrt{2}$ D. $|z|=5$

- Giải:
  - $|z-3-4i|=\sqrt{5}\Leftrightarrow(x-3)^2+(y-4)^2=5$
  - $P=4x+2y+3=4(x-3)+2(y-4)+23\overset{bunhia}{\le}\sqrt{(4^2+2^2)\left[(x-3)^2+(y-4)^2\right]}+23=33$
  - $MaxP=33\Rightarrow\begin{cases}4x+2y+3=33\\(x-3)^2+(y-4)^2=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=5\\y=5\end{cases}\Rightarrow|z|=5\sqrt{2}$

Chú ý: BĐT Bunhiacopxky: $ax+by\le\sqrt{(a^2+b^2)(x^2+y^2)}$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $\frac{a}{x}=\frac{b}{y}$

Bài 4: Cho số phức $z=x+yi\ \ (x,y\in R)$ thỏa mãn $|z-2-4i|=|z-2i|$ và $m=min|z|$. Tính module số phức $\mathrm{w}=m-(x+y)i$.

A. $|w|=2\sqrt{3}$ B. $|w|=3\sqrt{2}$ C. $|w|=5$ D. $|w|=2\sqrt{6}$

- Cách 1:
  - $|z-2-4i|=|z-2i|\Leftrightarrow x+y=4$
  - $|z|=\sqrt{x^2+y^2}\geq\sqrt{\frac{(x+y)^2}{2}}=\sqrt{\frac{4^2}{2}}=2\sqrt{2}$
  - $min|z|=2\sqrt{2}$, Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases}x+y=4\\x=y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\y=2\end{cases}\Rightarrow\mathrm{w}=2\sqrt{2}-4i\Rightarrow|\mathrm{w}|=2\sqrt{6}$

Chú ý: Với mọi x, y là số thực ta có: $x^2+y^2\geq\frac{(x+y)^2}{2}$

Dấu "=" xảy ra khi $x=y$

- Cách 2:
  - $|z-2-4i|=|z-2i|\Leftrightarrow y=4-x$
  - $|z|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{x^2+(4-x)^2}=\sqrt{2(x-2)^2+8}\geq2\sqrt{2}$
  - $min|z|=2\sqrt{2}$. Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases}x+y=4\\x=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\y=2\end{cases}\Rightarrow\mathrm{w}=2\sqrt{2}-4i\Rightarrow|\mathrm{w}|=2\sqrt{6}$

Bài 5: Cho số phức $z=x+yi\ \ (x,y\in R)$ thỏa mãn $|z+i+1|=|\bar{z}-2i|$. Tìm môđun nhỏ nhất của z.

A. $min|z|=\sqrt{2}$ B. $min|z|=1$ C. $min|z|=0$ D. $min|z|=\frac{1}{\sqrt{2}}$

- Cách 1:
- $|z+i+1|=|\bar{z}-2i|\Leftrightarrow x-y=1$

- $x^2+y^2\geq\dfrac{(x-y)^2}{2}=\dfrac{1}{2}$
- $|z|=\sqrt{x^2+y^2}\geq\sqrt{\dfrac{1}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Chú ý: Với mọi x, y là số thực ta có: $x^2+y^2\geq\dfrac{(x-y)^2}{2}$

Dấu "=" xảy ra khi $x=-y$

- Cách 2:
- $|z+i+1|=|\bar{z}-2i|\Leftrightarrow y=x-1$
- $|z|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{x^2+(x-1)^2}=\sqrt{2\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{2}}\geq\sqrt{\dfrac{1}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$
- Vậy $min|z|=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Bài 6: Cho số phức z thỏa mãn $|z|=1$. Gọi M và m là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $P=|z^3+3z+\bar{z}|-|z+\bar{z}|$. Tính $M+m$

A. $\dfrac{7}{4}$ B. $\dfrac{13}{4}$ C. $\dfrac{3}{4}$ D. $\dfrac{15}{4}$

Sáng tác: Phạm Minh Tuấn

- Cách 1:
- Ta có $|z|^2=1\Leftrightarrow z.\bar{z}=1$
- Đặt $t=|z+\bar{z}|\in[0;2]\Rightarrow t^2=(z+\bar{z})(\bar{z}+z)=z^2+2z.\bar{z}+\bar{z}^2=2+z^2+\bar{z}^2$
- $|z^3+3z+\bar{z}|=|z||z^2+3+\bar{z}^2|=|t^2+1|=t^2+1$
- $P=t^2-t+1\geq\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}\geq\dfrac{3}{4}$
- Vậy $minP=\dfrac{3}{4}$; $maxP=3$ khi $t=2$
- $M+n=\dfrac{15}{4}$
- Cách 2: Cách này của bạn Trịnh Văn Thoại

❖ $P=\left|z^3+3z+\overline{z}\right|-\left|z+\overline{z}\right|=\dfrac{\left|z^3+3z+\overline{z}\right|}{|z|}-\left|z+\overline{z}\right|=\left|z^2+3+\overline{z}^2\right|-\left|z+\overline{z}\right|=\left|\left(z+\overline{z}\right)^2+1\right|-\left|z+\overline{z}\right|$

❖ $P=\left|z+\overline{z}\right|^2+1-\left|z+\overline{z}\right|\geq\dfrac{3}{4}$. Đến đây các bạn tự tìm max nhé

Bài 7: Cho các số phức a,b,c,z thỏa $az^2+bz+c=0\ \ (a\neq 0)$. Gọi z_1 và z_2 lần lượt là hai nghiệm của phương trình bậc hai đã cho. Tính giá trị của biểu thức
$P=\left|z_1+z_2\right|^2+\left|z_1-z_2\right|^2-2\left(\left|z_1\right|-\left|z_1\right|\right)^2$

A. $P=2\left|\dfrac{c}{a}\right|$

B. $P=\left|\dfrac{c}{a}\right|$

C. $P=4\left|\dfrac{c}{a}\right|$

D. $P=\dfrac{1}{2}.\left|\dfrac{c}{a}\right|$

❖ Ta có : $\left|z_1+z_2\right|^2+\left|z_1-z_2\right|^2=\left(z_1+z_2\right)\left(\overline{z_1}+\overline{z_2}\right)+\left(z_1-z_2\right)\left(\overline{z_1}-\overline{z_2}\right)=2\left|z_1\right|^2+2\left|z_2\right|^2$

❖ Khi đó $P=4\left|z_1z_2\right|$

❖ Ta lại có: $z_1z_2=\dfrac{c}{a}\Rightarrow P=4\left|z_1z_2\right|=4\left|\dfrac{c}{a}\right|$

Bài 8: Cho 3 số phức z_1,z_2,z_3 thỏa mãn $z_1+z_2+z_3=0$ và $\left|z_1\right|=\left|z_2\right|=\left|z_3\right|=1$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\left|z_1+z_2\right|^2+\left|z_2+z_3\right|^2+\left|z_3+z_1\right|^2$ là số thuần ảo

B. $\left|z_1+z_2\right|^2+\left|z_2+z_3\right|^2+\left|z_3+z_1\right|^2$ là số nguyên tố

C. $\left|z_1+z_2\right|^2+\left|z_2+z_3\right|^2+\left|z_3+z_1\right|^2$ là số thực âm

D. $\left|z_1+z_2\right|^2+\left|z_2+z_3\right|^2+\left|z_3+z_1\right|^2$ là số 1

❖ Chứng minh công thức:

✓ $\left|z_1+z_2\right|^2+\left|z_2+z_3\right|^2+\left|z_3+z_1\right|^2=\left|z_1\right|^2+\left|z_2\right|^2+\left|z_3\right|^2+\left|z_1+z_2+z_3\right|^2$

❖ Ta có: $|z|^2=z.\overline{z}$ và $\overline{z_1+z_2+...+z_n}=\overline{z_1}+\overline{z_2}+...+\overline{z_n}$. Áp dụng tính chất này ta có vế trái:

$$=\left(z_1+z_2\right)\left(\overline{z_1}+\overline{z_2}\right)+\left(z_2+z_3\right)\left(\overline{z_2}+\overline{z_3}\right)+\left(z_3+z_1\right)\left(\overline{z_3}+\overline{z_1}\right)$$

$$=z_1\overline{z_1}+z_2\overline{z_2}+z_3\overline{z_3}+z_1\overline{z_1}+z_2\overline{z_2}+z_3\overline{z_3}+z_1\overline{z_2}+z_2\overline{z_1}+z_2\overline{z_3}+z_3\overline{z_2}+z_3\overline{z_1}+z_1\overline{z_3}$$

$$=\left|z_1\right|^2+\left|z_2\right|^2+\left|z_3\right|^2+z_1\left(\overline{z_1}+\overline{z_2}+\overline{z_3}\right)+z_2\left(\overline{z_1}+\overline{z_2}+\overline{z_3}\right)+z_3\left(\overline{z_1}+\overline{z_2}+\overline{z_3}\right)$$

$$=\left|z_1\right|^2+\left|z_2\right|^2+\left|z_3\right|^2+\left(z_1+z_2+z_3\right)\left(\overline{z_1}+\overline{z_2}+\overline{z_3}\right)$$

$$=\left|z_1\right|^2+\left|z_2\right|^2+\left|z_3\right|^2+\left|z_1+z_2+z_3\right|^2$$

- Áp dụng công thức đã chứng minh suy ra: $\left|z_1+z_2\right|^2+\left|z_2+z_3\right|^2+\left|z_3+z_1\right|^2=3$ là số nguyến số

Bài 9: Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn hai điều kiện $|z|=1$ và $\left|\frac{z}{\overline{z}}+\frac{\overline{z}}{z}\right|=1$?

A . 5 B. 6 C. 7 D. 8

Phạm Minh Tuấn

- Ta có: $|z|^2=1=z.\overline{z}$
- Đặt $z=\cos x+i\sin x, x\in[0;2\pi]\Rightarrow z^2=\cos 2x+i\sin 2x$
- $\left|\frac{z}{\overline{z}}+\frac{\overline{z}}{z}\right|=1\Leftrightarrow\left|\frac{z^2+\overline{z}^2}{z.\overline{z}}\right|=1\Leftrightarrow 2\left|\cos 2x\right|=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos 2x=\frac{1}{2}\\ \cos 2x=-\frac{1}{2}\end{array}\right.$
- Giải 2 phương trình lượng giác trên với $x\in[0;2\pi]$ nên ta chọn được các giá trị $x=\left\{\frac{\pi}{6};\frac{5\pi}{6};\frac{7\pi}{6};\frac{11\pi}{6};\frac{\pi}{3};\frac{2\pi}{3};\frac{4\pi}{3};\frac{5\pi}{3}\right\}$
- Vậy có 8 số phức thỏa 2 điều kiện đề cho

Bài 10: Cho các số phức z_1,z_2,z_3 thỏa mãn đồng thời hai điều kiện $\left|z_1\right|=\left|z_2\right|=\left|z_3\right|=1999$ và $z_1+z_2+z_3\neq 0$. Tính $P=\left|\frac{z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1}{z_1+z_2+z_3}\right|$

A. $P=1999$ $P=999,5$

B. $P = 1999^2$ $P = 5997$

Giải:

❖ $P^2 = \left(\dfrac{z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1}{z_1 + z_2 + z_3}\right)\left(\dfrac{\overline{z_1}.\overline{z_2} + \overline{z_2}.\overline{z_3} + \overline{z_3}.\overline{z_1}}{\overline{z_1} + \overline{z_2} + \overline{z_3}}\right)$

❖ Mặc khác: $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1999 \Leftrightarrow z_1\overline{z_1} = z_2\overline{z_2} = z_3\overline{z_3} = 1999^2 \Rightarrow \begin{cases} \overline{z_1} = \dfrac{1999^2}{z_1} \\ \overline{z_2} = \dfrac{1999^2}{z_2} \\ \overline{z_3} = \dfrac{1999^2}{z_3} \end{cases}$

❖ Suy ra $P^2 = \left(\dfrac{z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1}{z_1 + z_2 + z_3}\right)\left(\dfrac{\dfrac{1999^2}{z_1}.\dfrac{1999^2}{z_2} + \dfrac{1999^2}{z_2}.\dfrac{1999^2}{z_3} + \dfrac{1999^2}{z_3}.\dfrac{1999^2}{z_1}}{\dfrac{1999^2}{z_1} + \dfrac{1999^2}{z_2} + \dfrac{1999^2}{z_3}}\right) = 1999^2$

⇨ $P = 1999$

Bài 11: Dạng tổng quát: Cho số phức z thỏa mãn $|z_1z - z_2| = r$. Tính Min, Max của $|z - z_3|$.

$$Max = \left|\frac{z_2}{z_1} - z_3\right| + \frac{r}{|z_1|}; Min = \left|\frac{r}{|z_1|} - \left|\frac{z_2}{z_1} - z_3\right|\right|$$

Áp dụng: Cho số phức z thỏa mãn $\left|\dfrac{3-3\sqrt{2}i}{1+2\sqrt{2}i}z - 1 - \sqrt{2}i\right| = \sqrt{3}$. Gọi M và n lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z - 3 - 3i|$. Tính $M.m$

A) $M.n = 25$ B) $M.n = 20$ C) $M.n = 24$ D) $M.n = 30$

Áp dụng Công thức trên với $z_1 = \frac{3-3\sqrt{2}i}{1+2\sqrt{2}i}; z_2 = 1+\sqrt{2}i, z_3 = 3+3i; r = \sqrt{3}$ ta được

$Max = 6; Min = 4$

Bài 12: Dạng Tổng quát: Dạng: $\left|z_1 z + z_2\right| + \left|z_1 z - z_2\right| = k$ với $z_1 = a+bi; z_2 = c+di; z = x+yi$

Ta có: $Min\left|z\right| = \frac{\sqrt{k^2 - 4\left|z_2\right|^2}}{2\left|z_1\right|}$ và $Max\left|z\right| = \frac{k}{2\left|z_1\right|}$

Chứng minh công thức:

Ta có: $k = \left|z_1 z + z_2\right| + \left|z_1 z - z_2\right| \ge \left|z_1 z + z_2 + z_1 z - z_2\right| = \left|2z_1 z\right| \Leftrightarrow \left|z\right| \le \frac{k}{2\left|z_1\right|}$. Suy ra

$Max\left|z\right| = \frac{k}{2\left|z_1\right|}$

Mặc khác:

$\left|z_1 z + z_2\right| + \left|z_1 z - z_2\right| = k \Leftrightarrow \sqrt{\left(ax - by + c\right)^2 + \left(ay + bx + d\right)^2} + \sqrt{\left(ax - by - c\right)^2 + \left(ay + bx - d\right)^2} =$

Áp dụng BĐT Bunhiacopxki ta có:

$$k = 1.\sqrt{\left(ax - by + c\right)^2 + \left(ay + bx + d\right)^2} + 1.\sqrt{\left(ax - by - c\right)^2 + \left(ay + bx - d\right)^2}$$
$$\le \sqrt{\left(1^2 + 1^2\right)\left[\left(ax - by + c\right)^2 + \left(ay + bx + d\right)^2 + \left(ax - by - c\right)^2 + \left(ay + bx - d\right)^2\right]}$$
$$= \sqrt{4\left(a^2 + b^2\right)\left(x^2 + y^2\right) + 4\left(c^2 + d^2\right)}$$

Suy ra $\left|z\right| = \sqrt{x^2 + y^2} \ge \sqrt{\frac{k^2 - 4\left(c^2 + d^2\right)}{4\left(a^2 + b^2\right)}} = \frac{\sqrt{k^2 - 4\left|z_2\right|^2}}{2\left|z_1\right|}$

Áp dụng:

Cho số phức z thỏa mãn $\left|z+1\right|+\left|z-1\right|=4$. Gọi $m=min\left|z\right|$ và $M=max\left|z\right|$, khi đó $M.n$ bằng:

A. 2 B. $2\sqrt{3}$ C. $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ $\sqrt{3}$

Cho số phức z thỏa mãn $\left|iz+\dfrac{2}{1-i}\right|+\left|iz+\dfrac{2}{i-1}\right|=4$. Gọi $m=min\left|z\right|$ và $M=max\left|z\right|$, khi đó $M.n$ bằng:

A. 2 B. $2\sqrt{2}$ C. $2\sqrt{3}$ D. 1

Bài 13: Cho các số phức z_1, z_2, z_3 thỏa mãn $z_1z_2z_3=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$. Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\left|z_1\right|^2+\left|z_2\right|^2+\left|z_3\right|^2$.

A. $P_{\min}=1$ C. $P_{\min}=3$

B. $P_{\min}=\dfrac{1}{3}$ D. $P_{\min}=2$

Giải: Áp dụng BĐT AM-GM ta có: $P\geq 3\sqrt[3]{\left|z_1\right|^2.\left|z_2\right|^2.\left|z_3\right|^2}$

Mặc Khác: $z_1z_2z_3=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\Leftrightarrow\left|z_1z_2z_3\right|=1\Leftrightarrow\left|z_1\right|\left|z_2\right|\left|z_3\right|=1$

Suy ra $P\geq 3$. Dấu "=" xảy ra khi $\left|z_1\right|=\left|z_2\right|=\left|z_3\right|=1$

Bài 14: Cho số phức $z=x+yi$ với x, y là các số thực không âm thỏa mãn $\left|\dfrac{z-3}{z-1+2i}\right|=1$ và biểu thức $P=\left|z^2-\bar{z}^2\right|+i\left(z^2-\bar{z}^2\right)\left[z\left(1-i\right)+\bar{z}\left(1+i\right)\right]$. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của P lần lượt là:

A. 0 và -1 C. 3 và 0

B. 3 và -1 D. 2 và 0

$$\left|\frac{z-3}{z-1+2i}\right|=1\Leftrightarrow|z-3|=|z-1+2i|\Leftrightarrow x+y=1$$

$P=16x^2y^2-8xy$, Đặt $t=xy\Rightarrow 0\le t\le\left(\frac{x+y}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$

$$\Rightarrow P=16t^2-8t,t\in\left[0;\frac{1}{4}\right]\Rightarrow MaxP=0;MinP=-1$$

Bài 15: Cho các số phức z thỏa mãn $|z|=1$. Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|1+z|+|1+z^2|+|1+z^3|$.

A. $P_{\min}=1$ C. $P_{\min}=3$

B. $P_{\min}=4$ D. $P_{\min}=2$

Ta có: $|z|=1\Rightarrow|-z|=1$

$$P=|1+z|+|1+z^2|+|1+z^3|=|1+z|+|-z||1+z^2|+|1+z^3|\ge\left|1+z-z\left(1+z^2\right)+1+z^3\right|=2$$

Bài 16: Cho số phức z thỏa mãn $\left|\frac{6z-i}{2+3iz}\right|\le 1$. Gọi $M=max|z|$

A. $max|z|=\frac{1}{2}$ C. $max|z|=\frac{1}{3}$

B. $max|z|=\frac{3}{4}$ D. $max|z|=1$

$$\left|\frac{6z-i}{2+3iz}\right|\le 1\Leftrightarrow|6z-i|\le|2+3iz|\Leftrightarrow|6z-i|^2\le|2+3iz|^2$$

$$(6z-i)\left(\overline{6z-i}\right)\le(2+3iz)\left(\overline{2+3iz}\right)\Leftrightarrow(6z-i)\left(6\bar{z}+i\right)\le(2+3iz)\left(2-3i\bar{z}\right)$$

$$\Leftrightarrow z.\bar{z}\le\frac{1}{9}\Leftrightarrow|z|^2\le\frac{1}{9}\Leftrightarrow|z|\le\frac{1}{3}$$

Bài 17: Cho $z=a+bi,\left(a,b\in\mathbb{R}\right)$ thỏa $\left|z^2+4\right|=2\left|z\right|$ và $P=8\left(b^2-a^2\right)-12$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $P=\left(\left|z\right|^2-2\right)^2$

B. $P=\left(\left|z\right|^2-4\right)^2$

C. $P=\left(\left|z\right|-2\right)^2$

D. $P=\left(\left|z\right|-4\right)^2$

Đề Đặng Thúc Hứa

Giải: $\left|z^2+4\right|=2\left|z\right|\Leftrightarrow\left(a^2-b^2+4\right)^2+\left(2ab\right)^2-4\left(a^2+b^2\right)=0$

Chọn $b=0\Rightarrow a^4+4a^2+16=0\Rightarrow a=-1-i\sqrt{3}\Rightarrow z=-1-i\sqrt{3}$

Suy ra $P=4$

Thử đáp án: - ĐÁP ÁN A: $P=\left(\left|-1-i\sqrt{3}\right|^2-2\right)^2=4\Rightarrow$ Nhận

Bài 18: Cho số phức z thỏa mãn $\left|z-2-3i\right|=1$. Gọi $M=max\left|\overline{z}+1+i\right|$, $m=min\left|\overline{z}+1+i\right|$. Tính giá trị của biểu thức $\left(M^2+n^2\right)$.

A. $M^2+m^2=28$

B. $M^2+m^2=24$

C. $M^2+m^2=26$

D. $M^2+m^2=20$

$\left|z-2-3i\right|=1\Leftrightarrow\left(x-2\right)^2+\left(y-3\right)^2=1$ (1)

Đặt $P=\left|\overline{z}+1+i\right|\Rightarrow\left(x+1\right)^2+\left(y-1\right)^2=P^2$ (2) với $P>0$

Lấy (1)-(2) ta được: $y=\dfrac{P^2+10-6x}{4}$. Thay vào (1) :

$$\left(x-2\right)^2+\left(\frac{P^2+10-6x}{4}-3\right)^2=1\Leftrightarrow 52x^2-\left(40+12P^2\right)x+\left(P^4-4P^2+52\right)=0 \text{ (*)}$$

Để PT (*) có nghiệm thì:

$$\Delta=\left(40+12P^2\right)^2-4.52.\left(P^4-4P^2+52\right)\geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{14-2\sqrt{13}}\leq P\leq \sqrt{14+2\sqrt{13}}$$

Vậy $M=\sqrt{14+2\sqrt{13}}, m=\sqrt{14-2\sqrt{13}} \Rightarrow M^2+m^2=28$

Bài 19**:** Cho số thức $z\in\mathbb{C}^*$ thỏa mãn $\left|z^3+\dfrac{1}{z^3}\right|\leq 2$ và $M=max\left|z+\dfrac{1}{z}\right|$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $-1<M<2$

B. $1<M<\dfrac{5}{2}$

C. $2<M<\dfrac{7}{2}$

D. $M^3+M^2+M<3$

Giải:

$$\left(z+\frac{1}{z}\right)^3=z^3+\frac{1}{z^3}+3\left(z+\frac{1}{z}\right)\Leftrightarrow z^3+\frac{1}{z^3}=\left(z+\frac{1}{z}\right)^3-3\left(z+\frac{1}{z}\right)$$

$$\Leftrightarrow\left|z^3+\frac{1}{z^3}\right|=\left|\left(z+\frac{1}{z}\right)^3-3\left(z+\frac{1}{z}\right)\right|\Leftrightarrow\left|\left(z+\frac{1}{z}\right)^3-3\left(z+\frac{1}{z}\right)\right|\leq 2$$

Mặt khác: $\left|\left(z+\dfrac{1}{z}\right)^3-3\left(z+\dfrac{1}{z}\right)\right|\geq\left|z+\dfrac{1}{z}\right|^3-3\left|z+\dfrac{1}{z}\right|$

Suy ra: $\left|z+\dfrac{1}{z}\right|^3-3\left|z+\dfrac{1}{z}\right|\leq 2$, đặt $t=\left|z+\dfrac{1}{z}\right|\geq 0$, ta được:

$$t^3-3t-2\leq 0\Leftrightarrow(t-2)(t+1)^2\leq 0\Rightarrow t\leq 2\Rightarrow\left|z+\frac{1}{z}\right|\leq 2$$

Bài 20**:** Cho số phức z thỏa mãn $(z-3+i)(1-i)=(1+i)^{2017}$. Khi đó số thức $\mathrm{w}=z+1-i$ có phần ảo bằng:

A. $\Im(z)=2^{1008}-1$

B. $\Im(z)=2^{1008}-3$

C. $\Im(z)=2^{1008}$

D. $\Im(z)=2^{1008}-2$

Giải: Chọn D

$$\left(z-3+i\right)\left(1-i\right)=\left(1+i\right)^{2017}\Leftrightarrow\left(z-3+i\right)\left(1-i\right)\left(1+i\right)=\left(1+i\right)^{2018}$$

$$\Leftrightarrow z=\frac{\left[\left(1+i\right)^{2}\right]^{1009}}{\left(1-i\right)\left(1+i\right)}+3-i=\frac{\left[2i\right]^{1009}}{2}+3-i=2^{1008}i+3-i$$

$$w=2^{1008}i+3-i+1-i=4+\left(2^{1008}-2\right)i$$

Bài 21: Cho số phức z thỏa mãn $\left(1-\sqrt{5}i\right)\left|z\right|=\dfrac{2\sqrt{42}}{z}+\sqrt{3}i+\sqrt{15}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng:

A. $\dfrac{1}{2}<\left|z\right|<2$

B. $\dfrac{3}{2}<\left|z\right|<3$

C. $\dfrac{5}{2}<\left|z\right|<4$

D. $3<\left|z\right|<5$

Giải: Chọn B

$$\left(1-\sqrt{5}i\right)\left|z\right|=\frac{2\sqrt{42}}{z}+\sqrt{3}i+\sqrt{15}$$

$$\Leftrightarrow\left(1-\sqrt{5}i\right)\left|z\right|-\sqrt{3}i\left(1-\sqrt{5}i\right)=\frac{2\sqrt{42}}{z}$$

$$\Leftrightarrow\left(1-\sqrt{5}i\right)\left(\left|z\right|-\sqrt{3}i\right)=\frac{2\sqrt{42}}{z}\Leftrightarrow\left|1-\sqrt{5}i\right|\left|\left|z\right|-\sqrt{3}i\right|=\frac{2\sqrt{42}}{\left|z\right|}$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{6}.\sqrt{\left|z\right|^{2}+3}=\frac{2\sqrt{42}}{\left|z\right|}\Leftrightarrow 6\left(\left|z\right|^{2}+3\right).\left|z\right|^{2}-4.42=0\Leftrightarrow\left|z\right|=2$$