

### III. BÀI TOÁN MAX – MIN CỦA MỘT BIỂU THỨC MŨ VÀ LOGARIT HAI BIẾN

#### 1. Một số phương pháp giải bài toán

Thực chất, đây cũng chính là bài toán tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của một biểu thức, hay một hàm số mà tôi đã đề cập tới tại chủ đề 1. Thông thường với những bài toán dạng này, ta thường có thể giải bằng một trong các cách sau (sử dụng MTCT):

\* **Cách 1:** Bài toán được xử lý hoàn toàn bằng MTCT, hai lệnh thường gặp là **SOLVE** và **TABLE**.

\* **Cách 2:** Kết hợp giữa MTCT và tư duy tự luận để giải quyết bài toán.

#### 2. Một số ví dụ minh họa

**Ví dụ 1:** Cho các số thực dương  $a, b$  thỏa mãn điều kiện  $a + b + ab = 1$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P = a^4 + b^4$

- A.  $(\sqrt{2} + 1)^4$ .      B.  $2(\sqrt{2} - 1)^4$ .      C.  $(\sqrt{2} - 1)^4$ .      D.  $2(\sqrt{2} + 1)^4$ .

##### Lời giải

Gán  $b = 100$ , giải phương trình bậc nhất ẩn  $a$  theo  $b$  bằng lệnh **SOLVE**:

<b>1</b> <b>0</b> <b>0</b> <b>SHIFT</b> <b>RCL</b> <b>→</b> <b>ALPHA</b> <b>(←)</b> <b>+</b> <b>ALPHA</b> <b>→</b> <b>+</b> <b>ALPHA</b> <b>(←)</b> <b>ALPHA</b> <b>→</b> <b>=</b> <b>1</b> <b>SHIFT</b> <b>)</b> <b>ALPHA</b> <b>(←)</b> <b>SHIFT</b> <b>CALC</b> <b>=</b> <b>=</b> <b>ALPHA</b> <b>(←)</b> <b>=</b>	
100→B	100
A+B+AB-1, A	A
A+B+AB-1, A	A
A=-0.980198019	
L-R=	0
	-99
	101

Phân tích  $a$  theo  $b = 100$ :  $a = -\frac{99}{101} = \frac{1-100}{1+100} = \frac{1-b}{1+b} \rightarrow P = \left(\frac{1-b}{1+b}\right)^4 + b^4$

Do  $a > 0$  nên  $\frac{1-b}{1+b} > 0 \rightarrow 0 < b < 1$ .

Dùng lệnh **TABLE** nhập hàm số  $f(X) = \left(\frac{1-X}{1+X}\right)^4 + X^4$  với Start = 0, End = 1,

Step =  $\frac{1}{19}$ .

**MODE** **7** **(←)** **1** **=** **ALPHA** **)** **↓** **1** **+** **ALPHA** **)** **▶** **)** **x<sup>2</sup>** **4** **▶** **+** **ALPHA** **)** **x<sup>2</sup>** **4** **=** **=** **0** **=** **1** **=** **1** **÷** **1** **9** **=**

Quan sát bảng giá trị, ta thấy giá trị nhỏ nhất của  $F(X)$  xấp xỉ bằng 0,05898.

Kết hợp với đáp án, ta kết luận ngay  $\min P = 2(\sqrt{2} - 1)^4$ .

**Đáp án B.**

**Ví dụ 2:** Cho hai số thực dương  $x, y$  thỏa mãn  $\log_2 x + \log_2 y \geq \log_2 (x + y)$ . Giá trị nhỏ nhất  $P_{\min}$  của biểu thức  $P = x^2 + y^2$  là

- A.  $P_{\min} = 8$ .      B.  $P_{\min} = 4$ .      C.  $P_{\min} = 4\sqrt{2}$ .      D.  $P_{\min} = 16$ .

##### Lời giải

Ta có dự đoán  $P_{\min}$  khi  $\log_2 x + \log_2 y = \log_2 (x + y)$

Gán  $y = 100$ , giải phương trình ẩn  $x$  theo  $y$  bằng lệnh **SOLVE**:

**1** **0** **0** **SHIFT** **RCL** **S↔D** **log** **2** **▶** **ALPHA** **)** **▶** **+** **log** **2** **▶** **ALPHA** **S↔D** **▶** **=** **log** **2** **▶** **ALPHA** **)** **+** **ALPHA** **S↔D** **SHIFT** **CALC** **=** **=**

Phân tích  $x$  theo  $y = 100$ , ta có  $x = \frac{100}{99} = \frac{100}{100-1} = \frac{y}{y-1}$ , do  $x > 0$  nên  $y > 1$ .

#### MỨC ĐỘ 4

#### VẬN DỤNG CAO

##### STUDY TIPS

Phân tích bước đầu tiên giải phương trình ẩn  $a$ : Do trong MTCT, biến mặc định để tìm nghiệm của phương trình là  $X$ , nên nếu muốn giải một phương trình với biến khác  $X$ , ta phải chú thích sau khi nhập biểu thức về trái vào màn hình bằng lệnh **SHIFT** **)**. Ví dụ muốn giải phương trình theo ẩn  $A$ , sau khi nhập biểu thức về trái của phương trình vào máy, ta dùng lệnh **SHIFT** **)** sau đó nhập biến  $A$  vào máy.

<b>f(X)</b> <b>=</b> <b>(1-X)</b> <b>4</b> <b>+</b> <b>X</b> <b>4</b>	
<b>X</b> <b>0.3684</b> <b>F(X)</b> <b>0.05898</b>	
<b>0.421</b> <b>F(X)</b> <b>0.05898</b>	
<b>0.4736</b> <b>F(X)</b> <b>0.05898</b>	
<b>0.5264</b> <b>F(X)</b> <b>0.05898</b>	
<b>0.5791</b> <b>F(X)</b> <b>0.05898</b>	
<b>0.6318</b> <b>F(X)</b> <b>0.05898</b>	
<b>0.6845</b> <b>F(X)</b> <b>0.05898</b>	
<b>0.7372</b> <b>F(X)</b> <b>0.05898</b>	
<b>0.7899</b> <b>F(X)</b> <b>0.05898</b>	
<b>0.8426</b> <b>F(X)</b> <b>0.05898</b>	
<b>0.8953</b> <b>F(X)</b> <b>0.05898</b>	
<b>0.9480</b> <b>F(X)</b> <b>0.05898</b>	
<b>1.0007</b> <b>F(X)</b> <b>0.05898</b>	

100→Y	
100	
log <sub>2</sub> (X)+log <sub>2</sub> (Y)	
X=	1.01010101
L-R=	0
X	
	100
	99

Ta có  $P = x^2 + y^2 = \left(\frac{y}{y-1}\right)^2 + y^2$ .

Math	
$f(X) = \left(\frac{X}{X-1}\right)^2 + X^2$	
X	F(X)
1.4736	8.0175
1.9473	8.0175
2.421	8.0175
8.017552409	

Dùng lệnh **TABLE** nhập hàm số  $f(X) = \left(\frac{X}{X-1}\right)^2 + X^2$  với Start = 1, End = 10 và Step =  $\frac{9}{19}$ .

**MODE** **7** **(ALPHA)** **(X)** **(=)** **(ALPHA)** **(X)** **(-)** **1** **(=)** **(X^2)** **(+)** **(ALPHA)** **(X)** **(^2)** **(=)** **(=)** **1** **(=)** **1**

Quan sát bảng giá trị, ta thấy giá trị nhỏ nhất của  $F(X)$  xấp xỉ bằng 8,0175.

Kết hợp với đáp án suy ra  $P_{\min} = 8$ .

**Đáp án A.**

**Ví dụ 3:** Cho  $x, y$  là các số thực dương thỏa mãn  $\ln x + \ln y \geq \ln(x^2 + y)$ . Tìm giá trị nhỏ nhất  $P_{\min}$  của biểu thức  $P = x + y$

A.  $P_{\min} = 6$ .

B.  $P_{\min} = 2\sqrt{2} + 3$ .

C.  $P_{\min} = 2 + 3\sqrt{2}$ .

D.  $P_{\min} = \sqrt{17} + \sqrt{3}$ .

**Lời giải**

Dự đoán  $P_{\min}$  khi  $\ln x + \ln y = \ln(x^2 + y)$  (1). Gán  $x = 100$  và giải phương trình ẩn  $y$  theo  $x$  bằng lệnh **SOLVE**:

**1** **0** **0** **(SHIFT)** **(RCL)** **(X)** **(=)** **(ALPHA)** **(X)** **(+)** **(ALPHA)** **(S-D)** **(X)** **(-)** **(ALPHA)** **(X)** **(^2)** **(+)** **(ALPHA)** **(S-D)** **(X)** **(=)** **(=)**

Math	
$100 \div X$	
100	$\ln(X) + \ln(Y) - \ln(X^2 + Y)$
	$Y = 101.010101$
	$L-R = 0$
	$\frac{10000}{99}$

Phân tích  $y$  theo  $x = 100$ :  $y = \frac{10000}{99} = \frac{100^2}{100-1} = \frac{x^2}{x-1}$ . Do  $y > 0$  nên  $x > 1$ .

Khi đó  $P = x + y = x + \frac{x^2}{x-1}$ .

Dùng lệnh **TABLE** nhập hàm số  $f(X) = X + \frac{X^2}{X-1}$  với Start = 1, End = 10 và

Step =  $\frac{9}{19}$ .

**MODE** **7** **(ALPHA)** **(X)** **(+)** **(ALPHA)** **(X)** **(^2)** **(=)** **(ALPHA)** **(X)** **(-)** **1** **(=)** **(=)** **1** **(=)** **1** **0** **(=)** **9** **(=)** **9**

Quan sát bảng giá trị, ta thấy giá trị nhỏ nhất của  $F(X)$  xấp xỉ bằng 5,9503.

Đến đây, ta thấy hai đáp án B và D có giá trị xấp xỉ bằng 5,9503. Để chọn được đáp án chính xác hơn, ta tiếp tục sử dụng lệnh **TABLE** với hàm số  $f(X)$  ở trên.

Vấn đề tiếp theo là việc chọn Start, End và Step.

Từ bảng, nhận xét thấy  $F(X)$  đạt giá trị nhỏ nhất 5,9503 khi  $X \approx 1,9473$  thuộc khoảng  $(1,4736; 2,421)$ . Vậy tại lần nhập thứ hai này, chọn Start = 1,5; End = 2,4

và Step =  $\frac{2,4-1,5}{19}$ .

**AC** **(=)** **(=)** **1** **(.)** **5** **(=)** **2** **(.)** **4** **(=)** **( $\leftarrow$ )** **2** **(.)** **4** **(-)** **1** **(.)** **5** **(=)** **( $\rightarrow$ )** **( $\div$ )** **1** **9**

Vậy  $\min P \approx 5,8293 \approx 2\sqrt{2} + 3$ .

**Đáp án B.**

**STUDY TIPS**

Do phương trình (1) có ẩn  $x$  bậc 2, ẩn  $y$  bậc 1 nên ta sẽ giải phương trình theo ẩn  $y$  và gán  $x = 100$ .

Math	
$f(X) = X + \frac{X^2}{X-1}$	
X	F(X)
1.4736	5.9504
1.9473	5.9503
2.421	5.9503
5.950292398	

Math	
$f(X) = X + \frac{X^2}{X-1}$	
X	F(X)
1.6421	5.8415
1.6894	5.8415
1.7368	5.8415
5.829329048	

**Ví dụ 4:** Cho hai số thực dương  $x, y$  thỏa mãn  $\log_2 x + \log_2 y = \log_4 (x + y)$ . Tìm giá trị nhỏ nhất  $P_{\min}$  của biểu thức  $P = x^2 + y^2$

- A.  $P_{\min} = 2\sqrt[3]{4}$ . B.  $P_{\min} = 2\sqrt{2}$ . C.  $P_{\min} = 4$ . D.  $P_{\min} = 4\sqrt[3]{2}$ .

#### STUDY TIPS

Ta thấy sau khi gán  $y = 100$  thì nghiệm  $x$  tìm được không “đẹp” như các nghiệm ở ví dụ 1, 2, 3. Vậy ta không sử dụng lệnh **SOLVE** ở ví dụ này và phải tìm phương án làm khác. Và để xử lý bài toán này, ta cùng đọc lại **Ví dụ 12**, tại phần “**V. Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất**” của chủ đề 1. Hai ví dụ này có cách thực hiện tương tự nhau.

#### Lời giải

Gán  $y = 100$  và giải phương trình theo ẩn  $x$  bằng lệnh **SOLVE**:

**1 0 0 SHIFT RCL S+D log 2 2 ALPHA ) + log 2 2 ALPHA S+D = log 4**

100→Y	Math	log <sub>2</sub> (X)+log <sub>2</sub> (Y)	X
100		X= 0.1000500125	0.1000500125
		L-R= 0	

Ta có  $\log_2 x + \log_2 y = \log_4 (x + y) \Leftrightarrow \log_2 x + \log_2 y = \log_2 \sqrt{x + y} \Leftrightarrow xy = \sqrt{x + y}$   
 $\Leftrightarrow x^2 y^2 - x - y = 0 \Leftrightarrow y^2 \cdot x - x - y = 0 \quad (1)$

Gán  $y = 100$  và giải phương trình (1) ẩn  $x$ , ta sử dụng lệnh **EQN**. Sau đó hai nghiệm  $x_1, x_2$  tìm được gán vào các biến nhớ A, B.

**1 0 0 SHIFT RCL S+D MODE 5 3 ALPHA S+D x^2 = - 1 = (-) ALPHA S+D = = SHIFT RCL (-) = SHIFT RCL =**

100→Y	Math	X <sub>1</sub> =	X <sub>2</sub> =
100		0.1000500125	-0.0999500125

Tính  $\Delta = [a(x_1 - x_2)]^2 = (Y^2(A - B))^2 = 4000001 = 4Y^3 + 1 > 0, \forall Y > 0$

**MODE 1 ( ALPHA S+D x^2 ( ALPHA (-) = ALPHA = ) ) x^2 =**

Khi đó phương trình (1) luôn có hai nghiệm  $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{4y^3 + 1}}{2y^2}$ . Do  $x > 0$  nên ta

chỉ chọn  $x_1 = \frac{1 + \sqrt{4y^3 + 1}}{2y^2}$ , còn  $x_2 = \frac{1 - \sqrt{4y^3 + 1}}{2y^2} < 0$  nên loại.

Suy ra  $P = \left( \frac{1 + \sqrt{4y^3 + 1}}{2y^2} \right)^2 + y^2$ .

Dùng lệnh **TABLE** nhập hàm số  $f(X) = \left( \frac{1 + \sqrt{4X^3 + 1}}{2X^2} \right)^2 + X^2$

Chọn Start = 0, End = 10, Step =  $\frac{10}{19}$ .

**MODE 7 ( 1 + √ 4 ALPHA ) SHIFT x^2 + 1 ) 2 ALPHA ) x^2 ) x^2 = = 0 = 1 0 = 1 0 ÷ 1 9 =**

Quan sát cả hai cột giá trị  $F(X)$  và  $G(X)$ , ta xác định được giá trị nhỏ nhất xấp xỉ 0,3,4346. Kết hợp với đáp án ta kết luận  $P_{\min} = 2\sqrt[3]{4}$ .

**Đáp án A.**

**Ví dụ 5:** Cho hai số thực khác 0, thay đổi và thỏa mãn điều kiện  $(x + y)xy = x^2 + y^2 - xy$ . Giá trị lớn nhất  $P_{\max}$  của biểu thức  $P = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3}$  là

- A.  $P_{\max} = 16$ . B.  $P_{\max} = 8$ . C.  $P_{\max} = 12$ . D.  $P_{\max} = 15$ .

(Y <sup>2</sup> (A-B)) <sup>2</sup>	Math
4000001	

#### STUDY TIPS

Nếu phương trình bậc hai  $ax^2 + bx + c = 0, (a \neq 0)$  có hai nghiệm  $x_1, x_2$  thì ta chứng minh được rằng:  
 $\Delta = [a(x_1 - x_2)]^2$  (xem lại phần chứng minh ở chủ đề 1).

X	F(X)	Math
0.5263	16.891	
1.0526	9.4001	
1.5789	3.536	
	3.434634624	

Lời giải

Giả thiết  $(x+y)xy = x^2 + y^2 - xy \Leftrightarrow (y-1)x^2 + (y^2+y)x - y^2 = 0$  (1)

Gán  $y=100$  và dùng lệnh **EQN** để giải phương trình bậc hai ẩn  $x$ , các nghiệm tìm được gán vào hai biến nhớ A, B:

**1 0 0 SHIFT RCL S↔D MODE 5 3 ALPHA S↔D = 1 = ALPHA S↔D x<sup>2</sup> + ALPHA S↔D = (←)**  
**ALPHA S↔D x<sup>2</sup> = = SHIFT RCL (←) = SHIFT RCL (→)**

100→Y	$\begin{bmatrix} a & b & c \\ 1 & 100 & -10000 \end{bmatrix}$	X1=	X2=
100	-10000	0.9806722682	-103.0008743

$(Y-1)^2 \times (A-B)^2$   
105970000

Tính  $\Delta = [a(x_1 - x_2)]^2 = (Y-1)^2 \times (A-B)^2 = 105970000 = Y^4 + 6Y^3 - 3Y^2$

**MODE 1 ( ALPHA S↔D = 1 ) x<sup>2</sup> X ( ALPHA (←) = ALPHA (→) ) x<sup>2</sup> =**

$\begin{bmatrix} a & b & c \\ 1 & 6 & -3 \end{bmatrix}$   
 $ax^2 + bx + c \geq 0$   
 $-3$   
 $X \leq A, B \leq X$   
 $A = -6.464101615$   
 $B = 0.4641016151$

Phương trình (1) có nghiệm khi  $\Delta = y^2(y^2 + 6y - 3) \geq 0 \Leftrightarrow y^2 + 6y - 3 \geq 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y \leq -3 - 2\sqrt{3} \approx -6,46 \\ y \geq -3 + 2\sqrt{3} \approx 0,46 \end{cases}$  **MODE (▼) 1 1 3 1 = 6 = - 3 = = (▶) S↔D**

Phương trình (1) có hai nghiệm là  $x_{1,2} = \frac{-y^2 - y \pm \sqrt{y^4 + 6y^3 - 3y^2}}{2y - 2}$ .

Dùng lệnh **TABLE** nhập hai hàm số  $f(X) = \left( \frac{2X-2}{-X^2-X+\sqrt{X^4+6X^3-3X^2}} \right)^3 + \frac{1}{X^3}$

và  $g(X) = \left( \frac{2X-2}{-X^2-X-\sqrt{X^4+6X^3-3X^2}} \right)^3 + \frac{1}{X^3}$

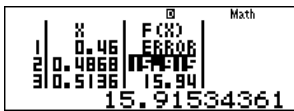
**MODE 7 ( ( 2 ALPHA ) = 2 (▼) = ALPHA ) x<sup>2</sup> = ALPHA ) + √ ALPHA ) x<sup>3</sup>**  
**4 (▶) + 6 ALPHA ) SHIFT x<sup>2</sup> (▶) = 3 ALPHA ) x<sup>2</sup> (▶) ) SHIFT x<sup>2</sup> + 1 ( = ALPHA**  
**) SHIFT x<sup>2</sup> = ( ( 2 ALPHA ) = 2 (▼) = ALPHA ) x<sup>2</sup> = ALPHA ) = √ ALPHA**  
**) x<sup>3</sup> 4 (▶) + 6 ALPHA ) SHIFT x<sup>2</sup> = 3 ALPHA ) x<sup>2</sup> (▶) ) SHIFT x<sup>2</sup> + 1**  
**( = ALPHA ) x<sup>3</sup> 3 =**

\* Chọn Start = -10; End = -6,46; Step =  $\frac{-6,46 + 10}{19}$

**(←) 1 0 = - 6 . 4 6 = (←) - 6 . 4 6 + 1 0 ) ÷ 1 9**  
**=**

$\begin{bmatrix} X & F(X) & G(X) \\ 1 & -9.813 & 0.4174 & 2.3163 \\ 2 & -9.621 & 0.4055 & 2.3163 \\ 3 & -9.441 & 0.3952 & 2.3163 \\ 4 & -9.254 & 0.3855 & 2.3163 \\ 5 & -9.068 & 0.3712 & 2.3163 \\ 6 & -8.882 & 0.3584 & 4.1163 \\ 7 & -8.695 & 0.3451 & 4.5163 \\ 8 & -8.509 & 0.3311 & 4.9163 \\ 9 & -8.323 & 0.3165 & 5.3163 \\ 10 & -8.136 & 0.3011 & 5.7163 \\ 11 & -7.95 & 0.2848 & 6.1163 \\ 12 & -7.764 & 0.2677 & 6.5163 \\ 13 & -7.577 & 0.2495 & 6.9163 \\ 14 & -7.391 & 0.2303 & 7.3163 \\ 15 & -7.205 & 0.2109 & 7.7163 \\ 16 & -7.018 & 0.1915 & 8.1163 \\ 17 & -6.832 & 0.1719 & 8.5163 \\ 18 & -6.646 & 0.1525 & 8.9163 \\ 19 & -6.46 & 0.1331 & 9.3163 \\ 20 & -6.274 & 0.1137 & 9.7163 \\ 21 & -6.088 & 0.0943 & 10.1163 \\ 22 & -5.902 & 0.0749 & 10.5163 \\ 23 & -5.716 & 0.0555 & 10.9163 \\ 24 & -5.53 & 0.0361 & 11.3163 \\ 25 & -5.344 & 0.0167 & 11.7163 \\ 26 & -5.158 & 0.0073 & 12.1163 \\ 27 & -4.972 & 0.0079 & 12.5163 \\ 28 & -4.786 & 0.0085 & 12.9163 \\ 29 & -4.6 & 0.0091 & 13.3163 \\ 30 & -4.414 & 0.0097 & 13.7163 \\ 31 & -4.228 & 0.0103 & 14.1163 \\ 32 & -4.042 & 0.0109 & 14.5163 \\ 33 & -3.856 & 0.0115 & 14.9163 \\ 34 & -3.67 & 0.0121 & 15.3163 \\ 35 & -3.484 & 0.0127 & 15.7163 \\ 36 & -3.298 & 0.0133 & 16.1163 \\ 37 & -3.112 & 0.0139 & 16.5163 \\ 38 & -2.926 & 0.0145 & 16.9163 \\ 39 & -2.74 & 0.0151 & 17.3163 \\ 40 & -2.554 & 0.0157 & 17.7163 \\ 41 & -2.368 & 0.0163 & 18.1163 \\ 42 & -2.182 & 0.0169 & 18.5163 \\ 43 & -1.996 & 0.0175 & 18.9163 \\ 44 & -1.81 & 0.0181 & 19.3163 \\ 45 & -1.624 & 0.0187 & 19.7163 \\ 46 & -1.438 & 0.0193 & 20.1163 \\ 47 & -1.252 & 0.0199 & 20.5163 \\ 48 & -1.066 & 0.0205 & 20.9163 \\ 49 & -0.88 & 0.0211 & 21.3163 \\ 50 & -0.694 & 0.0217 & 21.7163 \\ 51 & -0.508 & 0.0223 & 22.1163 \\ 52 & -0.322 & 0.0229 & 22.5163 \\ 53 & -0.136 & 0.0235 & 22.9163 \\ 54 & 0.05 & 0.0241 & 23.3163 \\ 55 & 0.234 & 0.0247 & 23.7163 \\ 56 & 0.418 & 0.0253 & 24.1163 \\ 57 & 0.602 & 0.0259 & 24.5163 \\ 58 & 0.786 & 0.0265 & 24.9163 \\ 59 & 0.97 & 0.0271 & 25.3163 \\ 60 & 1.154 & 0.0277 & 25.7163 \\ 61 & 1.338 & 0.0283 & 26.1163 \\ 62 & 1.522 & 0.0289 & 26.5163 \\ 63 & 1.706 & 0.0295 & 26.9163 \\ 64 & 1.89 & 0.0301 & 27.3163 \\ 65 & 2.074 & 0.0307 & 27.7163 \\ 66 & 2.258 & 0.0313 & 28.1163 \\ 67 & 2.442 & 0.0319 & 28.5163 \\ 68 & 2.626 & 0.0325 & 28.9163 \\ 69 & 2.81 & 0.0331 & 29.3163 \\ 70 & 2.994 & 0.0337 & 29.7163 \\ 71 & 3.178 & 0.0343 & 30.1163 \\ 72 & 3.362 & 0.0349 & 30.5163 \\ 73 & 3.546 & 0.0355 & 30.9163 \\ 74 & 3.73 & 0.0361 & 31.3163 \\ 75 & 3.914 & 0.0367 & 31.7163 \\ 76 & 4.098 & 0.0373 & 32.1163 \\ 77 & 4.282 & 0.0379 & 32.5163 \\ 78 & 4.466 & 0.0385 & 32.9163 \\ 79 & 4.65 & 0.0391 & 33.3163 \\ 80 & 4.834 & 0.0397 & 33.7163 \\ 81 & 5.018 & 0.0403 & 34.1163 \\ 82 & 5.202 & 0.0409 & 34.5163 \\ 83 & 5.386 & 0.0415 & 34.9163 \\ 84 & 5.57 & 0.0421 & 35.3163 \\ 85 & 5.754 & 0.0427 & 35.7163 \\ 86 & 5.938 & 0.0433 & 36.1163 \\ 87 & 6.122 & 0.0439 & 36.5163 \\ 88 & 6.306 & 0.0445 & 36.9163 \\ 89 & 6.49 & 0.0451 & 37.3163 \\ 90 & 6.674 & 0.0457 & 37.7163 \\ 91 & 6.858 & 0.0463 & 38.1163 \\ 92 & 7.042 & 0.0469 & 38.5163 \\ 93 & 7.226 & 0.0475 & 38.9163 \\ 94 & 7.41 & 0.0481 & 39.3163 \\ 95 & 7.594 & 0.0487 & 39.7163 \\ 96 & 7.778 & 0.0493 & 40.1163 \\ 97 & 7.962 & 0.0499 & 40.5163 \\ 98 & 8.146 & 0.0505 & 40.9163 \\ 99 & 8.33 & 0.0511 & 41.3163 \\ 100 & 8.514 & 0.0517 & 41.7163 \\ 101 & 8.698 & 0.0523 & 42.1163 \\ 102 & 8.882 & 0.0529 & 42.5163 \\ 103 & 9.066 & 0.0535 & 42.9163 \\ 104 & 9.25 & 0.0541 & 43.3163 \\ 105 & 9.434 & 0.0547 & 43.7163 \\ 106 & 9.618 & 0.0553 & 44.1163 \\ 107 & 9.802 & 0.0559 & 44.5163 \\ 108 & 9.986 & 0.0565 & 44.9163 \\ 109 & 10.17 & 0.0571 & 45.3163 \\ 110 & 10.354 & 0.0577 & 45.7163 \\ 111 & 10.538 & 0.0583 & 46.1163 \\ 112 & 10.722 & 0.0589 & 46.5163 \\ 113 & 10.906 & 0.0595 & 46.9163 \\ 114 & 11.09 & 0.0601 & 47.3163 \\ 115 & 11.274 & 0.0607 & 47.7163 \\ 116 & 11.458 & 0.0613 & 48.1163 \\ 117 & 11.642 & 0.0619 & 48.5163 \\ 118 & 11.826 & 0.0625 & 48.9163 \\ 119 & 12.01 & 0.0631 & 49.3163 \\ 120 & 12.194 & 0.0637 & 49.7163 \\ 121 & 12.378 & 0.0643 & 50.1163 \\ 122 & 12.562 & 0.0649 & 50.5163 \\ 123 & 12.746 & 0.0655 & 50.9163 \\ 124 & 12.93 & 0.0661 & 51.3163 \\ 125 & 13.114 & 0.0667 & 51.7163 \\ 126 & 13.298 & 0.0673 & 52.1163 \\ 127 & 13.482 & 0.0679 & 52.5163 \\ 128 & 13.666 & 0.0685 & 52.9163 \\ 129 & 13.85 & 0.0691 & 53.3163 \\ 130 & 14.034 & 0.0697 & 53.7163 \\ 131 & 14.218 & 0.0703 & 54.1163 \\ 132 & 14.402 & 0.0709 & 54.5163 \\ 133 & 14.586 & 0.0715 & 54.9163 \\ 134 & 14.77 & 0.0721 & 55.3163 \\ 135 & 14.954 & 0.0727 & 55.7163 \\ 136 & 15.138 & 0.0733 & 56.1163 \\ 137 & 15.322 & 0.0739 & 56.5163 \\ 138 & 15.506 & 0.0745 & 56.9163 \\ 139 & 15.69 & 0.0751 & 57.3163 \\ 140 & 15.874 & 0.0757 & 57.7163 \\ 141 & 16.058 & 0.0763 & 58.1163 \\ 142 & 16.242 & 0.0769 & 58.5163 \\ 143 & 16.426 & 0.0775 & 58.9163 \\ 144 & 16.61 & 0.0781 & 59.3163 \\ 145 & 16.794 & 0.0787 & 59.7163 \\ 146 & 16.978 & 0.0793 & 60.1163 \\ 147 & 17.162 & 0.0799 & 60.5163 \\ 148 & 17.346 & 0.0805 & 60.9163 \\ 149 & 17.53 & 0.0811 & 61.3163 \\ 150 & 17.714 & 0.0817 & 61.7163 \\ 151 & 17.898 & 0.0823 & 62.1163 \\ 152 & 18.082 & 0.0829 & 62.5163 \\ 153 & 18.266 & 0.0835 & 62.9163 \\ 154 & 18.45 & 0.0841 & 63.3163 \\ 155 & 18.634 & 0.0847 & 63.7163 \\ 156 & 18.818 & 0.0853 & 64.1163 \\ 157 & 19.002 & 0.0859 & 64.5163 \\ 158 & 19.186 & 0.0865 & 64.9163 \\ 159 & 19.37 & 0.0871 & 65.3163 \\ 160 & 19.554 & 0.0877 & 65.7163 \\ 161 & 19.738 & 0.0883 & 66.1163 \\ 162 & 19.922 & 0.0889 & 66.5163 \\ 163 & 20.106 & 0.0895 & 66.9163 \\ 164 & 20.29 & 0.0901 & 67.3163 \\ 165 & 20.474 & 0.0907 & 67.7163 \\ 166 & 20.658 & 0.0913 & 68.1163 \\ 167 & 20.842 & 0.0919 & 68.5163 \\ 168 & 21.026 & 0.0925 & 68.9163 \\ 169 & 21.21 & 0.0931 & 69.3163 \\ 170 & 21.394 & 0.0937 & 69.7163 \\ 171 & 21.578 & 0.0943 & 70.1163 \\ 172 & 21.762 & 0.0949 & 70.5163 \\ 173 & 21.946 & 0.0955 & 70.9163 \\ 174 & 22.13 & 0.0961 & 71.3163 \\ 175 & 22.314 & 0.0967 & 71.7163 \\ 176 & 22.498 & 0.0973 & 72.1163 \\ 177 & 22.682 & 0.0979 & 72.5163 \\ 178 & 22.866 & 0.0985 & 72.9163 \\ 179 & 23.05 & 0.0991 & 73.3163 \\ 180 & 23.234 & 0.0997 & 73.7163 \\ 181 & 23.418 & 0.1003 & 74.1163 \\ 182 & 23.602 & 0.1009 & 74.5163 \\ 183 & 23.786 & 0.1015 & 74.9163 \\ 184 & 23.97 & 0.1021 & 75.3163 \\ 185 & 24.154 & 0.1027 & 75.7163 \\ 186 & 24.338 & 0.1033 & 76.1163 \\ 187 & 24.522 & 0.1039 & 76.5163 \\ 188 & 24.706 & 0.1045 & 76.9163 \\ 189 & 24.89 & 0.1051 & 77.3163 \\ 190 & 25.074 & 0.1057 & 77.7163 \\ 191 & 25.258 & 0.1063 & 78.1163 \\ 192 & 25.442 & 0.1069 & 78.5163 \\ 193 & 25.626 & 0.1075 & 78.9163 \\ 194 & 25.81 & 0.1081 & 79.3163 \\ 195 & 25.994 & 0.1087 & 79.7163 \\ 196 & 26.178 & 0.1093 & 80.1163 \\ 197 & 26.362 & 0.1099 & 80.5163 \\ 198 & 26.546 & 0.1105 & 80.9163 \\ 199 & 26.73 & 0.1111 & 81.3163 \\ 200 & 26.914 & 0.1117 & 81.7163 \\ 201 & 27.098 & 0.1123 & 82.1163 \\ 202 & 27.282 & 0.1129 & 82.5163 \\ 203 & 27.466 & 0.1135 & 82.9163 \\ 204 & 27.65 & 0.1141 & 83.3163 \\ 205 & 27.834 & 0.1147 & 83.7163 \\ 206 & 28.018 & 0.1153 & 84.1163 \\ 207 & 28.202 & 0.1159 & 84.5163 \\ 208 & 28.386 & 0.1165 & 84.9163 \\ 209 & 28.57 & 0.1171 & 85.3163 \\ 210 & 28.754 & 0.1177 & 85.7163 \\ 211 & 28.938 & 0.1183 & 86.1163 \\ 212 & 29.122 & 0.1189 & 86.5163 \\ 213 & 29.306 & 0.1195 & 86.9163 \\ 214 & 29.49 & 0.1201 & 87.3163 \\ 215 & 29.674 & 0.1207 & 87.7163 \\ 216 & 29.858 & 0.1213 & 88.1163 \\ 217 & 30.042 & 0.1219 & 88.5163 \\ 218 & 30.226 & 0.1225 & 88.9163 \\ 219 & 30.41 & 0.1231 & 89.3163 \\ 220 & 30.594 & 0.1237 & 89.7163 \\ 221 & 30.778 & 0.1243 & 90.1163 \\ 222 & 30.962 & 0.1249 & 90.5163 \\ 223 & 31.146 & 0.1255 & 90.9163 \\ 224 & 31.33 & 0.1261 & 91.3163 \\ 225 & 31.514 & 0.1267 & 91.7163 \\ 226 & 31.698 & 0.1273 & 92.1163 \\ 227 & 31.882 & 0.1279 & 92.5163 \\ 228 & 32.066 & 0.1285 & 92.9163 \\ 229 & 32.25 & 0.1291 & 93.3163 \\ 230 & 32.434 & 0.1297 & 93.7163 \\ 231 & 32.618 & 0.1303 & 94.1163 \\ 232 & 32.802 & 0.1309 & 94.5163 \\ 233 & 32.986 & 0.1315 & 94.9163 \\ 234 & 33.17 & 0.1321 & 95.3163 \\ 235 & 33.354 & 0.1327 & 95.7163 \\ 236 & 33.538 & 0.1333 & 96.1163 \\ 237 & 33.722 & 0.1339 & 96.5163 \\ 238 & 33.906 & 0.1345 & 96.9163 \\ 239 & 34.09 & 0.1351 & 97.3163 \\ 240 & 34.274 & 0.1357 & 97.7163 \\ 241 & 34.458 & 0.1363 & 98.1163 \\ 242 & 34.642 & 0.1369 & 98.5163 \\ 243 & 34.826 & 0.1375 & 98.9163 \\ 244 & 35.01 & 0.1381 & 99.3163 \\ 245 & 35.194 & 0.1387 & 99.7163 \\ 246 & 35.378 & 0.1393 & 100.1163 \\ 247 & 35.562 & 0.1399 & 100.5163 \\ 248 & 35.746 & 0.1405 & 100.9163 \\ 249 & 35.93 & 0.1411 & 101.3163 \\ 250 & 36.114 & 0.1417 & 101.7163 \\ 251 & 36.298 & 0.1423 & 102.1163 \\ 252 & 36.482 & 0.1429 & 102.5163 \\ 253 & 36.666 & 0.1435 & 102.9163 \\ 254 & 36.85 & 0.1441 & 103.3163 \\ 255 & 37.034 & 0.1447 & 103.7163 \\ 256 & 37.218 & 0.1453 & 104.1163 \\ 257 & 37.402 & 0.1459 & 104.5163 \\ 258 & 37.586 & 0.1465 & 104.9163 \\ 259 & 37.77 & 0.1471 & 105.3163 \\ 260 & 37.954 & 0.1477 & 105.7163 \\ 261 & 38.138 & 0.1483 & 106.1163 \\ 262 & 38.322 & 0.1489 & 106.5163 \\ 263 & 38.506 & 0.1495 & 106.9163 \\ 264 & 38.69 & 0.1501 & 107.3163 \\ 265 & 38.874 & 0.1507 & 107.7163 \\ 266 & 39.058 & 0.1513 & 108.1163 \\ 267 & 39.242 & 0.1519 & 108.5163 \\ 268 & 39.426 & 0.1525 & 108.9163 \\ 269 & 39.61 & 0.1531 & 109.3163 \\ 270 & 39.794 & 0.1537 & 109.7163 \\ 271 & 39.978 & 0.1543 & 110.1163 \\ 272 & 40.162 & 0.1549 & 110.5163 \\ 273 & 40.346 & 0.1555 & 110.9163 \\ 274 & 40.53 & 0.1561 & 111.3163 \\ 275 & 40.714 & 0.1567 & 111.7163 \\ 276 & 40.898 & 0.1573 & 112.1163 \\ 277 & 41.082 & 0.1579 & 112.5163 \\ 278 & 41.266 & 0.1585 & 112.9163 \\ 279 & 41.45 & 0.1591 & 113.3163 \\ 280 & 41.634 & 0.1597 & 113.7163 \\ 281 & 41.818 & 0.1603 & 114.1163 \\ 282 & 42.002 & 0.1609 & 114.5163 \\ 283 & 42.186 & 0.1615 & 114.9163 \\ 284 & 42.37 & 0.1621 & 115.3163 \\ 285 & 42.554 & 0.1627 & 115.7163 \\ 286 & 42.738 & 0.1633 & 116.1163 \\ 287 & 42.922 & 0.1639 & 116.5163 \\ 288 & 43.106 & 0.1645 & 116.9163 \\ 289 & 43.29 & 0.1651 & 117.3163 \\ 290 & 43.474 & 0.1657 & 117.7163 \\ 291 & 43.658 & 0.1663 & 118.1163 \\ 292 & 43.842 & 0.1669 & 118.5163 \\ 293 & 44.026 & 0.1675 & 118.9163 \\ 294 & 44.21 & 0.1681 & 119.3163 \\ 295 & 44.394 & 0.1687 & 119$
--

Mặt khác, từ bảng suy ra hàm số  $f(x), g(x)$  nghịch biến trên mỗi khoảng. Nên ta xét riêng hàm  $f(x)$  trên miền  $[0,46;0,9621]$  (miền của  $x$  chứa giá trị làm cho  $f(x)$  lớn nhất).


$$\frac{0.46}{0.97} = \frac{(0.97 - 0.46)}{1.97} =$$

Vậy  $P_{\max} = 16$ .

**Đáp án A.**

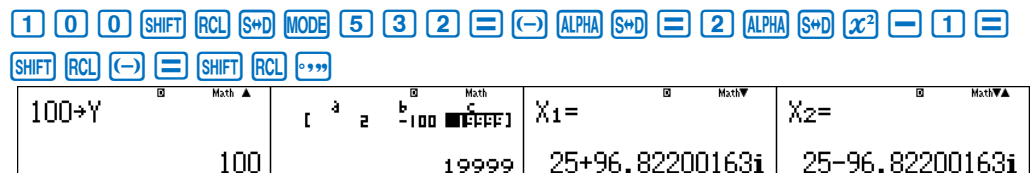
**Ví dụ 6:** Cho hai số thực  $x, y$  thay đổi thỏa mãn  $2(x^2 + y^2) = xy + 1$ . Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P = \frac{x^4 + y^4}{2xy + 1}$  theo thứ tự là:

- A.  $\frac{1}{3}; -\frac{1}{5}$ .      B.  $\frac{1}{3}; \frac{1}{5}$ .      C.  $\frac{1}{4}; \frac{2}{15}$ .      D.  $\frac{3}{4}; \frac{2}{15}$ .

### Lời giải

Giả thiết  $2(x^2 + y^2) = xy + 1 \Leftrightarrow 2x^2 - y.x + 2y^2 - 1 = 0 \quad (1)$

Gán  $y=100$  và giải phương trình (1) ẩn  $x$  bằng lệnh **EQN** và gán hai nghiệm vào biến nhớ A, B.


$$\text{Ta có } \Delta = [a(x_1 - x_2)]^2 = (2(A - B))^2 = -149992 = -15Y^2 + 8$$


Phương trình (1) có nghiệm khi  $\Delta = 8 - 15y^2 \geq 0 \Leftrightarrow -\frac{2\sqrt{30}}{15} \leq y \leq \frac{2\sqrt{30}}{15}$ .

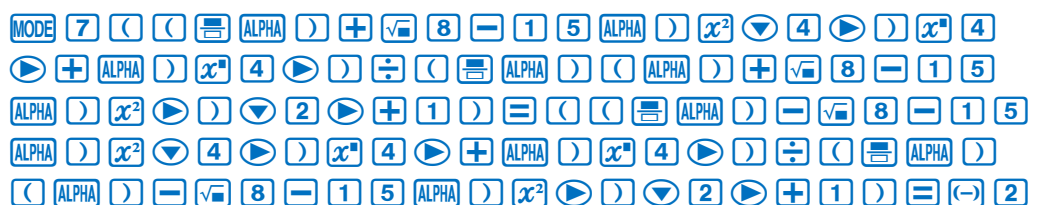


Phương trình (1) có hai nghiệm là  $x_{1,2} = \frac{y \pm \sqrt{8-15y^2}}{4}$ .

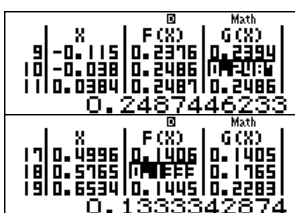
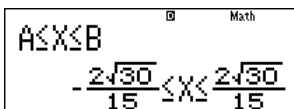
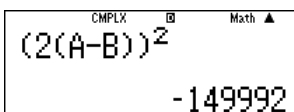
Dùng lệnh **TABLE** nhập hai hàm số

$$f(x) = \left( \left( \frac{x + \sqrt{8 - 15x^2}}{4} \right)^4 + x^4 \right) \div \left( \frac{x(x + \sqrt{8 - 15x^2})}{2} + 1 \right)$$

$$g(x) = \left( \left( \frac{x - \sqrt{8 - 15x^2}}{4} \right)^4 + x^4 \right) \div \left( \frac{x(x - \sqrt{8 - 15x^2})}{2} + 1 \right)$$

$$\text{Chọn Start} = -\frac{2\sqrt{30}}{15}; \text{End} = \frac{2\sqrt{30}}{15}; \text{Step} = \frac{4\sqrt{30}}{285}.$$


Chú ý khi phương trình  $ax^2 + bx + c = 0, (a \neq 0)$  có nghiệm phức (tức phương trình vô nghiệm trên tập  $\mathbb{R}$ ) thì công thức tính  $\Delta = [a(x_1 - x_2)]^2$  vẫn đúng. Tuy nhiên lúc này phép tính được thực hiện trên chế độ phức **CMPLX**:



$\sqrt{\square}$  3 0 )  $\div$  1 5 = 2  $\sqrt{\square}$  3 0 )  $\div$  1 5 = 4  $\sqrt{\square}$  3 0 )  $\div$  2 8 5 =

Quan sát bảng giá trị của cả hai hàm  $F(X)$  và  $G(X)$ , ta thấy giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất lần lượt xấp xỉ bằng 0,2487 và 0,1333. Chỉ có đáp án C thỏa mãn.

**Đáp án C.**

**Ví dụ 7:** Trong các nghiệm  $(x, y)$  thỏa mãn bất phương trình  $\log_{x^2+2y^2}(2x+y) \geq 1$  và  $x^2+2y^2 > 1$ . Giá trị lớn nhất của biểu thức  $P=2x+y$  là

A.  $P_{\max} = \frac{9}{4}$ .

B.  $P_{\max} = \frac{9}{2}$ .

C.  $P_{\max} = \frac{9}{8}$ .

D.  $P_{\max} = 9$ .

**Lời giải**

Dự đoán  $P$  đạt giá trị lớn nhất khi  $\log_{x^2+2y^2}(2x+y) = 1 \Leftrightarrow x^2+2y^2 = 2x+y$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 2y^2 - y = 0 \quad (1)$$

Gán  $y=100$ , dùng lệnh **EQN** để giải phương trình (1) ẩn  $x$  (theo  $y$ ) rồi gán hai nghiệm vào A, B:

1 0 0 SHIFT RCL S↔D MODE 5 3 1 = (-) 2 = 2 ALPHA S↔D  $x^2$  - ALPHA S↔D =  
= SHIFT RCL (-) = SHIFT RCL  $\square$

100→Y	$\left[ \begin{array}{c} a \\ b \end{array} \right] \begin{array}{c} -2 \\ 1 \end{array}$	X1=	X2=
100	19900	1+141.0638153i	1-141.0638153i

CMPLX Math ▲  
 $(A-B)^2$   
-79596

Ta có  $\Delta = [a(x_1 - x_2)]^2 = (A - B)^2 = -79596 = -8Y^2 + 4Y + 4$

MODE 2 ( ALPHA (-) - ALPHA  $\square$   $x^2$  =

Math ▲  
 $\left[ \begin{array}{c} a \\ b \end{array} \right] \begin{array}{c} -8 \\ 4 \end{array}$   
 $ax^2+bx+c \geq 0$   
4  
A≤X≤B  
Math  
 $-\frac{1}{2} \leq X \leq 1$

Phương trình (1) có nghiệm khi  $\Delta = -8y^2 + 4y + 4 \geq 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq y \leq 1$

MODE ▼ 1 1 3 (-) 8 = 4 = 4 = =

Khi đó phương trình (1) có hai nghiệm là

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+4y-8y^2}}{2} = 1 \pm \sqrt{1+y-2y^2}$$

Dùng lệnh **TABLE** nhập hai hàm số  $f(X) = 2 + 2\sqrt{1+X-2X^2} + X$  và  $g(X) = 2 - 2\sqrt{1+X-2X^2} + X$ . Chọn Start =  $-\frac{1}{2}$ , End = 1, Step =  $\frac{3}{38}$ .

MODE 7 2 + 2  $\sqrt{\square}$  1 + ALPHA ) - 2 ALPHA )  $x^2$  ► + ALPHA ) = 2 -  
2  $\sqrt{\square}$  1 + ALPHA ) - 2 ALPHA )  $x^2$  ► + ALPHA ) = - 1  $\div$  2 = 1 =  
3  $\div$  3 8 =

X	F(X)	G(X)
13 0.4473	4.4939	0.4008
14 0.5263	4.4980	0.5542
15 0.6052	4.4734	0.7371
	4.498420421	

Quan sát ta thấy giá trị lớn nhất trong bảng xấp xỉ bằng 4,4984. Vậy  $P_{\max} = \frac{9}{2}$ .

**Đáp án B.**

**Ví dụ 8:** Cho  $a, b$  là các số thực thỏa mãn  $a^2 + b^2 > 1$  và  $\log_{a^2+b^2}(a+b) \geq 1$ . Tìm giá trị lớn nhất  $P_{\max}$  của biểu thức  $P = 2a + 4b - 3$

A.  $P_{\max} = \sqrt{10}$ .

B.  $P_{\max} = \frac{1}{\sqrt{10}}$ .

C.  $P_{\max} = \frac{\sqrt{10}}{2}$ .

D.  $P_{\max} = 2\sqrt{10}$ .

**Lời giải**