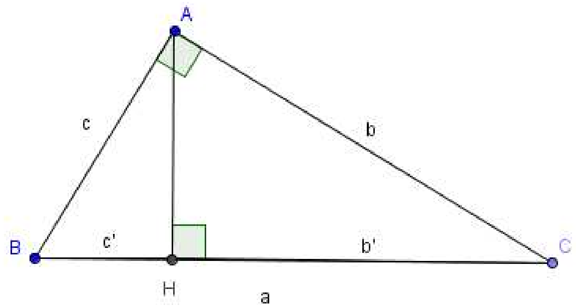
CHUYÊN ĐỀ THỂ TÍCH KHỐI ĐA DIỆN

ÔN TẬP KIẾN THỨC

LỚP 8-9-10

A. MỘT SỐ HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VUÔNG:

Cho tam giác ABC, BC=a: cạnh huyền, AB, AC là 2 cạnh góc vuông, AB=c, AC=b. Đường cao AH=h, BH=c′, CH=b′. Trung tuyến AM.



1. Định lí Py-ta-go: $BC^2 = AB^2 + AC^2$
2. $AB^2 = BH.BC = c'.a,\ \ AC^2 = CH.BC = b'.a$
3. $AB.AC = AH.BC$
4. $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2}$
5. $BC=2AM$
6. $\sin B = \dfrac{AC}{BC}, \cos B = \dfrac{AB}{BC}, \tan B = \dfrac{AC}{AB}, \cot B = \dfrac{AB}{AC}$
7. $b = a.\sin B, c = a.\sin C, \sin B = \cos C$

B. MỘT SỐ HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC THƯỜNG

1. Định lý hàm số sin: $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$
2. Định lý hàm số cosin: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A$

C. CÁC CÔNG THỨC TÍNH DIỆN TÍCH

1. Tam giác thường:

$$S = \frac{1}{2}a.h = \frac{1}{2}ab.\sin C = \frac{abc}{4R} = p.r = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},\ \ p = \frac{a+b+c}{2}$$

2. Tam giác vuông tại A: $S = \dfrac{1}{2}AB.AC$, tam giác đều cạnh a: $S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$
3. Hình vuông ABCD: S= AB.AD
4. Hình chữ nhật ABCD: S= AB.AD
5. Hình thoi ABCD: S= AC.BD/2

6. Hình thang ABCD(AB//CD): S= h(AB+CD)/2, h là chiều cao hình thang.

7. Hình bình hành: Đáy x chiều cao

8. Tứ giác thường ABCD: $S=\frac{1}{2}AC.BD.\sin(AC,BD)$ **9.** Hình tròn: $S=\pi.R^2$

D. CHÚ Ý:

1. Đường cao tam giác, đường trung tuyến tam giác, đường phân giác, đường trung trực

2. Trọng tâm, trực tâm, tâm đường tròn nội ngoại tiếp tam giác.

LỚP 11:

A. QUAN HỆ SONG SONG

1. Đường thẳng song song với mặt phẳng: $a//(P)\Leftrightarrow a\cap(P)=\varnothing$

a. $\begin{cases} d\not\subset(P) \\ d//a \\ a\subset(P)\end{cases}\Rightarrow d//(P)$, b. $\begin{cases} a//(P) \\ a\subset(Q) \\ (P)\cap(Q)=d\end{cases}\Rightarrow d//a$, c. $\begin{cases} (P)\cap(Q)=d \\ a//(P) \\ a//(Q)\end{cases}\Rightarrow a//d$

2. Hai mặt phẳng song song: $(P)//(Q)\Leftrightarrow(P)\cap(Q)=\varnothing$

a. $\begin{cases} a,b\subset(P) \\ a\cap b=I \\ a//(Q),b//(Q)\end{cases}\Rightarrow(Q)//(P)$, b. $\begin{cases} (P)//(Q) \\ a\subset(P)\end{cases}\Rightarrow a//(Q)$, c. $\begin{cases} (P)//(Q) \\ (R)\cap(P)=a \\ (R)\cap(Q)=b\end{cases}\Rightarrow a//b$

B. QUAN HỆ VUÔNG GÓC

1. Đường thẳng vuông góc mặt phẳng: $a\perp(P)\Leftrightarrow a\perp c,\forall c\subset(P)$

a. $\begin{cases} a,b\subset(P) \\ a\cap b=I \\ d\perp a,d\perp b\end{cases}\Rightarrow d\perp(P)$,

b. $\begin{cases} d\overline{\perp}(P) \\ a\subset(P)\end{cases}\Rightarrow d\perp a\Leftrightarrow d'\perp a$,**(ĐL 3 đường vuông góc- *d'* là hình chiếu của *d* trên *(P)*).**

2. Hai mặt phẳng vuông góc: $(P)\perp(Q)\Leftrightarrow\angle(P,Q)=90^\circ$

a. $\begin{cases} a\subset(P) \\ a\perp(Q)\end{cases}\Rightarrow(P)\perp(Q)$, b. $\begin{cases} (P)\perp(Q) \\ (P)\cap(Q)=d \\ a\subset(P),a\perp d\end{cases}\Rightarrow a\perp(Q)$,

c. $\begin{cases}(P)\perp(Q)\\ A\in(P)\\ A\in a\\ a\perp(Q)\end{cases}\Rightarrow a\subset(P)$, d. $\begin{cases}(P)\cap(Q)=a\\ (P),(Q)\perp(R)\end{cases}\Rightarrow a\perp(R)$

C. KHOẢNG CÁCH

1. Khoảng cách từ 1 điểm đến 1 đường thẳng, 1 mặt phẳng là khoảng cách từ điểm đó đến hình chiếu của nó trên đường thẳng, mặt phẳng.

2. Khoảng cách giữa đường thẳng và mặt phẳng song song là khoảng cách từ 1 điểm thuộc đường thẳng đến mặt phẳng.

3. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song là khoảng cách từ 1 điểm thuộc mặt phẳng này đến mặt phẳng kia.

4. Khoảng cách giữa hai đường chéo nhau là đoạn vuông góc chung.

D. GÓC

1. Góc giữa hai đường thẳng a và b là góc giữa hai đường thẳng a′ và b′ cùng đi qua 1 điểm, a′//a, b′//b.

2. Góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P), a không vuông góc với (P) là góc giữa a và hình chiếu a′ của a trên (P).

3. Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó.

4. Diện tích hình chiếu: Gọi *S* là diện tích hình (H) trên mp(P), *S′* là diện tích hình chiếu (H′) của hình (H) trên mp(P′) khi đó: $S'=S.\cos\varphi,\ \varphi=\angle(P,P')$.

LỚP 12:

A. THỂ TÍCH KHỐI ĐA DIỆN

1. Thể tích khối lăng trụ: $V=B.h$

2. Thể tích khối hộp chữ nhật: $V=abc$

3. Thể tích khối lập phương cạnh a: $V=a^3$

4. Thể tích khối chóp: $V=\frac{1}{3}B.h$

5. Tỉ số thể tích: Tứ diện SABC, A′, B′, C′ là các điểm tùy ý thuộc SA, SB, SC ta có:

$$\frac{V_{SABC}}{V_{SA'B'C'}}=\frac{SA}{SA'}\frac{SB}{SB'}\frac{SC}{SC'}$$

B. CHÚ Ý:

1. Đường chéo của hình vuông cạnh *a* là $a\sqrt{2}$
2. Đường chéo của hình lập phương cạnh *a* là $a\sqrt{3}$
3. Đường chéo của hình hộp chữ nhật có 3 kích thước a, b, c là $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$
4. Trong tam giác đều cạnh a đường cao, đường trung tuyến, đường phân giác có độ dài là $\frac{a\sqrt{3}}{2}$, các đường này xuất phát từ 1 đỉnh là trùng nhau. Nên trọng tâm, trực tâm, tâm đường tròn nội ngoại tiếp tam giác là trùng nhau, (chú ý đường trung trực).
5. Hình chóp đều là hình chóp có đáy là đa giác đều, các cạnh bên bằng nhau. Hình chiếu của đỉnh hình chóp chính là tâm của đáy, đối với đáy là tam giác thì tâm là trọng tâm, đáy là tứ giác thì tâm là giao 2 đường chéo.
6. Lăng trụ đều là lăng trụ đứng, đáy là đa giác đều.

CÁC LOẠI BÀI TẬP

A-BÀI TOÁN KHOẢNG CÁCH TRONG KHÔNG GIAN

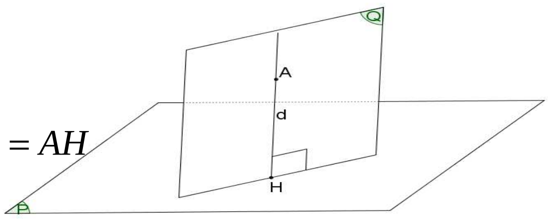
VẤN ĐỀ 1: KHOẢNG CÁCH TỪ 1 ĐIỂM ĐẾN 1 MẶT PHẲNG

Các bước xác định khoảng cách từ điểm A đến (P):

Bước 1: Xác định mp(Q) chứa A, $(Q)\perp(P)$, $(Q)\cap(P)=d$

Bước 2: Kẻ đường cao $AH\perp d$, $H\in d \Rightarrow AH\perp(P)\Rightarrow d_{(A,(P))}=AH$

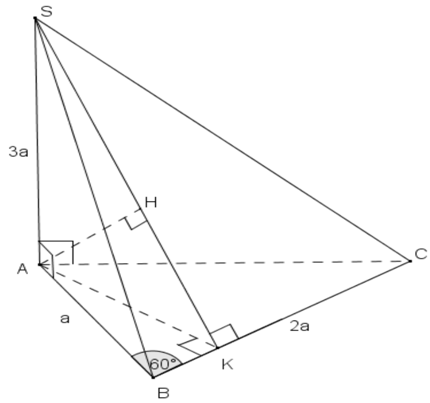
Bước 3: Tính AH.



Ví Dụ 1: Cho hình chóp S.ABC, SA vuông góc với đáy, SA=3*a*, AB=*a*, BC=2*a*, $\angle ABC=60^\circ$.

Tính khoảng cách từ A đến (SBC)

Giải:



Trong tam giác ABC ta dựng đường cao AK, nối SK

Do AK là hình chiếu vuông góc của SK lên (ABC) và AK$\perp$ BC

$\Rightarrow$ theo định lý 3 đường vuông góc SK $\perp$BC.

Trong tam giác SAK kẻ AH $\perp$SK, H thuộc SK

$\Rightarrow$ AH $\perp$(SBC) $\Rightarrow d(A,SBC)=AH$

Tính AH?

Nhận xét thấy tam giác SAK vuông tại A, AH là đường cao nên ta có: $\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{AS^2}+\frac{1}{AK^2}$

SA đã có nên ta chỉ cần tính AK.

Xét tam giác ABK vuông tại K, $\sin B=\frac{AK}{AB}\Rightarrow AK=AB.\sin B=a.\sin 60^\circ=\frac{a\sqrt{3}}{2}$

$$\Rightarrow \frac{1}{AH^2}=\frac{1}{9a^2}+\frac{4}{3a^2}\Leftrightarrow \frac{1}{AH^2}=\frac{13}{9a^2}\Leftrightarrow AH^2=\frac{9a^2}{13}\Rightarrow AH=\frac{3\sqrt{13}a}{13}$$

$$\Rightarrow d(A,SBC)=\frac{3\sqrt{13}a}{13}$$

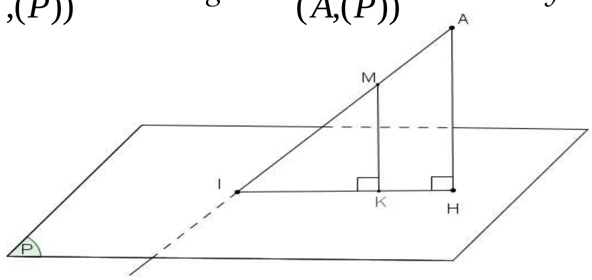
KỸ THUẬT RỜI ĐIỂM (♫♫♫♫♫☺)

1. Dời điểm song song: *Yêu cầu cần tính* $d_{(M,(P))}=?$ *Trong đó* $d_{(A,(P))}=k$ *. Ở đây MA//(P)*

$\Rightarrow d_{(M,(P))}=d_{(A,(P))}=k$

2. Dời điểm cắt nhau: *Yêu cầu cần tính* $d_{(M,(P))}=?$ *Trong đó* $d_{(A,(P))}=k$ *. Ở đây* $MA\cap(P)=I$

$\Rightarrow \frac{d_{(M,(P))}}{d_{(A,(P))}}=\frac{IM}{IA}$,

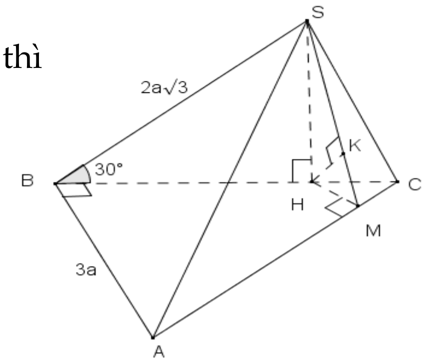


Ví Dụ 2: D-2011. Cho hình chóp S.ABC đáy là tam giác vuông tại B, AB=3a, BC=4a, (SBC) vuông góc mặt đáy.

Biết SB=$2a\sqrt{3},\angle SBC=30^\circ, d_{(B,(SAC))}=?$

Giải:

Nhận xét: Ta thấy (SBC) $\perp$(ABC)$\Rightarrow$ SH$\perp$(ABC), SH là đường cao trong tam giác SBC. Nếu ycbt là tính khoảng cách từ H đến (SAC) thì ta dễ dàng thực hiện tương tự VD trước. Vì vậy ta sẽ sử dụng kĩ thuật rời điểm mà ta nói ở trên. Rõ ràng BH cắt (SAC) tại C nên ta sử dụng kĩ thuật rời điểm cắt nhau.



Vậy ta có: $\dfrac{d_{(B,SAC)}}{d_{(H,SAC)}}=\dfrac{CB}{CH}$

Trong tam giác vuông SHB ta có: $\cos B=\dfrac{BH}{SB}\Rightarrow BH=SB.\cos B=2a\sqrt{3}.\cos 30^\circ=3a$

$\Rightarrow CH=BC-BH=4a-3a=a\ \Rightarrow\dfrac{CB}{CH}=4$

Ta tính khoảng cách từ H đến (SAC).

Kẻ HM$\perp$AC, do HM là hình chiếu vuông góc của SM lên (ABC) nên theo ĐL 3 đường vuông góc SM$\perp$AC. Trong tam giác SHM kẻ HK$\perp$SM$\Rightarrow d(H,SAC)=HK$

Lại có: $SH=\sqrt{SB^2-BH^2}=\sqrt{12a^2-9a^2}=a\sqrt{3},$ AC=$\sqrt{BA^2+BC^2}=\sqrt{16a^2+9a^2}=5a$

$\Delta CMH\sim\Delta CBA\Rightarrow\ \dfrac{CH}{CA}=\dfrac{MH}{BA}\Leftrightarrow MH=\dfrac{AB.CH}{AC}=\dfrac{3a.a}{5a}=\dfrac{3a}{5}$

$\dfrac{1}{HK^2}=\dfrac{1}{HS^2}+\dfrac{1}{HM^2}\Rightarrow\dfrac{1}{HK^2}=\dfrac{1}{3a^2}+\dfrac{25}{9a^2}=\dfrac{28}{9a^2}\Rightarrow HK=\dfrac{3a\sqrt{7}}{14}$

$\Rightarrow d(H,SAC)=\dfrac{3a\sqrt{7}}{14}$

$\Rightarrow d(B,SAC)=4.\dfrac{3a\sqrt{7}}{14}=\dfrac{6a\sqrt{7}}{7}$

VẤN ĐỀ 2: KHOẢNG CÁCH GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO

1. Đoạn vuông góc chung: *Cho hai đường thẳng a, b chéo nhau. M thuộc a, N thuộc b, MN vuông góc với cả a và b nên MN được gọi là đoạn vuông góc chung của a và b.*

2. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau: *là độ dài đoạn vuông góc chung.*

3. Cách xác định khoảng cách giữa hai đương thẳng chéo nhau a và b:

Bước 1: Xác định (P) chứa b và (P)//a.

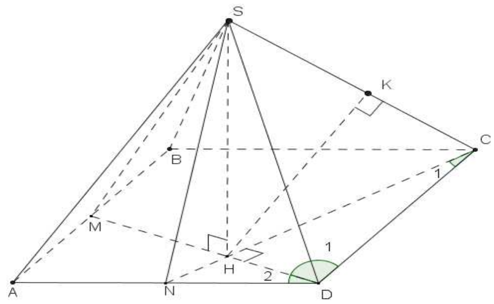
Bước 2: Lấy A thuộc a sao cho dễ tính khoảng cách từ A đến (P) nhất $\Rightarrow d_{(a,b)}=d_{(a,(P))}=d_{(A,(P))}$

Ví Dụ 1: A-2010. Cho hình chóp S.ABCD, đáy là hình vuông cạnh a, M, N lần lượt là trung điểm của AB, AD. H là giao điểm cuả MD và NC, biết SH vuông góc đáy, SH=$a\sqrt{3}$. $d_{(MD,SC)}=?$

Giải:

Trước tiên ta chứng minh MD$\perp$CN. Thật vậy, do $\Delta DAM = \Delta CDN$ nên $\angle C_1 = \angle D_2$ mà $\angle D_1 + \angle D_2 = 90^\circ \Rightarrow \angle D_1 + \angle C_1 = 90^\circ$

$\Rightarrow \angle CHD = 90^\circ \Rightarrow MD \perp CN \quad \perp$



Ta có MD$\perp$SH(gt), MD$\perp$CN suy ra MD$\perp$(SHC) tại H

Qua H kẻ đường thẳng HK$\perp$SC, vậy ta có:

HK$\perp$SC, HK$\perp$MD$\Rightarrow$ HK là đoạn vuông góc chung của MD và SC

Lại có tam giác SHC vuông tại H(gt) $\Rightarrow \dfrac{1}{HK^2} = \dfrac{1}{HS^2} + \dfrac{1}{HC^2}$ (1)

Trong tam giác vuông CDN có $CN = \sqrt{CD^2 + DN^2} = \sqrt{a^2 + \left(\dfrac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{5a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$

Mà $\Delta CHD \sim \Delta CDN \Rightarrow \dfrac{CH}{CD} = \dfrac{CD}{CN} \Leftrightarrow CH = \dfrac{CD^2}{CN} = \dfrac{2a^2}{a\sqrt{5}} = \dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$

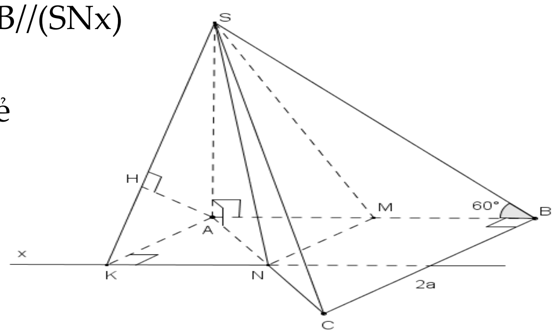
$(1) \Rightarrow \dfrac{1}{HK^2} = \dfrac{1}{3a^2} + \dfrac{5}{4a^2} = \dfrac{19}{12a^2} \Rightarrow HK = \dfrac{2a\sqrt{57}}{19}$

Ví Dụ 2: A-2011. Cho hình chóp S.ABC, đáy là tam giác vuông tại B, AB=BC=2a. (SAB), (SAC) cùng vuông góc với đáy, M là trung điểm AB. Mặt phẳng qua SM song song BC cắt AC tại N, $\angle(SBC, ABC) = 60^\circ$. $d_{(SN,AB)} = ?$

Giải:

Do (SAB), (SAC) cùng vuông góc với mặt đáy nên SA$\perp$(ABC), mặt phẳng qua SM, //BC cắt AC tại N mà M là trung điểm AB nên N là trung điểm AC.Qua N dựng đường thẳng Nx//AB$\Rightarrow$AB//(SNx)

$\Rightarrow d(AB, SN) = d(A, SNx)$



Qua A kẻ AK$\perp$Nx (K thuộc Nx), trong tam giác SAK kẻ đường cao AH.

Ta có Nx$\perp$AK, Nx$\perp$SA$\Rightarrow$ Nx$\perp$(SAK)$\Rightarrow$ Nx$\perp$AH

$\Rightarrow$AH$\perp$SK, AH$\perp$Nx$\Rightarrow$AH$\perp$(SNx)

$\Rightarrow AH = d(A, SNx)$

Ta có tam giác SAK vuông tại A nên: $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AS^2} + \dfrac{1}{AK^2}$ (1)

$AK = MN = \dfrac{BC}{2} = a$, Δ SAB vuông tại A nên ta có:

$\tan B = \dfrac{SA}{AB} \Rightarrow SA = AB.\tan B = 2a.\tan 60^\circ = 2a\sqrt{3}$

$(1) \Rightarrow \dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{12a^2} + \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{13}{12a^2} \Rightarrow AH = \dfrac{2a\sqrt{39}}{13} \Rightarrow d(AB, SN) = \dfrac{2a\sqrt{39}}{13}$

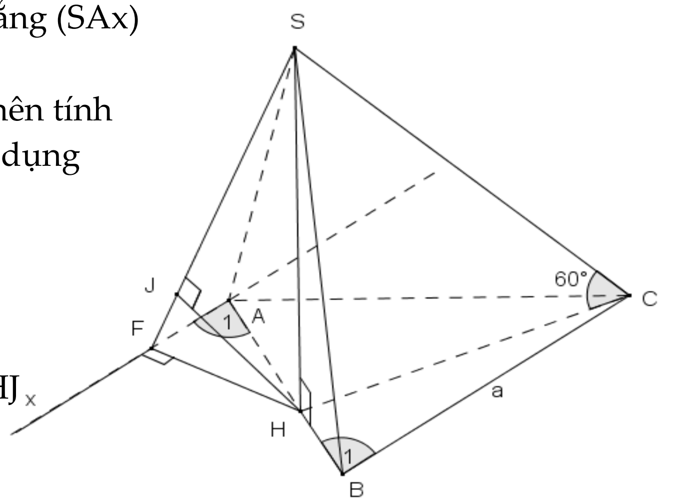
Ví Dụ 3: A-2012. Cho hình chóp S.ABC, đáy là tam giác đều cạnh a. H thuộc AB sao cho HA=2HB, hình chiếu của S lên (ABC) trùng với H, $\angle(SC,ABC)=60^\circ$. $d_{(SA,BC)}=?$

Giải:

Qua A dựng đường thẳng Ax//BC, ta có mặt phẳng (SAx)

$\Rightarrow d(SA,BC)=d(BC,SAx)=d(B,SAx)$

Mà ta thấy H là chân đường cao của hình chóp nên tính khoảng cách đến các mặt là dễ hơn, vì vậy ta sử dụng quy tắc rời điểm từ B sang H.



$BH\cap(SAx)=A\Rightarrow \dfrac{d(B,SAx)}{d(H,SAx)}=\dfrac{AB}{AH}=\dfrac{3}{2}$ (*)

Ta đi tính $d(H,SAx)$=?

Kẻ HF$\perp$Ax, trong tam giác SHF kẻ đường cao HJ

Ta có AF$\perp$HF, AF$\perp$SH (gt) $\Rightarrow$ AF$\perp$(SHF)

$\Rightarrow$ AF$\perp$HJ

$\Rightarrow$ HJ$\perp$AF, HJ$\perp$SF$\Rightarrow$HJ$\perp$(SAx). $d(H,SAx)$=HJ

Do SH$\perp$(ABC) nên tam giác SHF vuông tại H $\Rightarrow \dfrac{1}{HJ^2}=\dfrac{1}{HF^2}+\dfrac{1}{HS^2}$ (1)

Ta đi tính HF và HS.

Trong tam giác AHF có AF//BC nên $\angle A_1=\angle B_1=60^\circ$,

$AH=\dfrac{2a}{3}\Rightarrow \sin A_1=\dfrac{FH}{AH}\Rightarrow FH=AH.\sin A_1=\dfrac{2a}{3}\sin 60^\circ=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

Trong tam giác AHC có: $HC^2=AH^2+AC^2-2AH.AC.\cos A=(\dfrac{2a}{3})^2+a^2-2.\dfrac{2a}{3}.a.\cos 60^\circ=\dfrac{7a^2}{9}$

$\Rightarrow HC=\dfrac{a\sqrt{7}}{3}$ mà tam giác SHC vuông tại H nên ta có: $\tan C=\dfrac{SH}{HC}\Rightarrow SH=HC.\tan 60^\circ=\dfrac{a\sqrt{21}}{3}$

$(1)\Rightarrow \dfrac{1}{HJ^2}=\dfrac{3}{a^2}+\dfrac{3}{7a^2}=\dfrac{24}{7a^2}\Rightarrow HJ=\dfrac{a\sqrt{42}}{12}$

$(*)\Rightarrow d(B,SAx)=\dfrac{a\sqrt{42}}{8}\Rightarrow d(BC,SA)=\dfrac{a\sqrt{42}}{8}$

B-BÀI TOÁN THỂ TÍCH KHỐI ĐA DIỆN

VẤN ĐỀ 1: ĐƯỜNG CAO CỦA KHỐI ĐA DIỆN

1. Đường cao của khối chóp đều

a. Khối chóp đều S.ABC => SA=SB=SC=b, ABC là tam giác đều cạnh a.

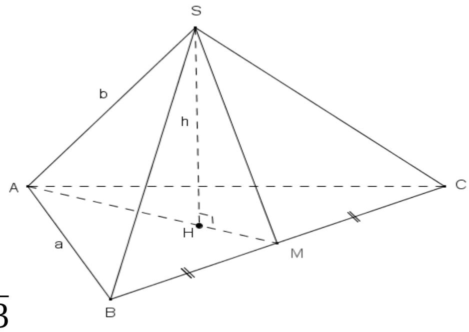
- $SH\perp(ABC)\Leftrightarrow$ H là tâm đáy.

- $SH = h = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \sqrt{b^2 - \left(\dfrac{a}{\sqrt{3}}\right)^2}$

- *Chú ý:* $-\ AH = \dfrac{2}{3}AM = \dfrac{2}{3}\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$,

$-\ AH = R = \dfrac{BC}{2\sin A} = \dfrac{a}{2\sin 60^\circ} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

$-$ If $a = b \Rightarrow SABC$ *là tứ diện đều*

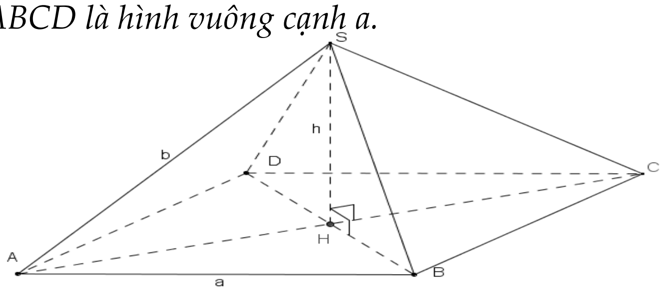


$\Rightarrow h = \sqrt{a^2 - \dfrac{a^2}{3}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}, \quad S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2}AB.AC.\sin A = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$

<u>b. Khối chóp đều S.ABCD</u> =>SA=SB=SC=SD=b, ABCD là hình vuông cạnh a.

- $SI \perp (ABCD) \Leftrightarrow I$ *là tâm đáy,* $I = AC \cap BD$

- $SI = h = \sqrt{b^2 - \left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}$



2. Đường cao của khối chóp không đều.

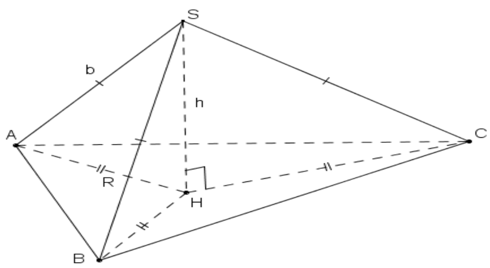
<u>a. Nếu khối chóp S.ABC… có 3 cạnh bên SA=SB=SC=b</u> thì $SH \perp (ABC...) \Leftrightarrow HA = HB = HC = R, R$ *là bán kính đường tròn (ABC).*

<u>Hệ quả:</u> Nếu 3 đường xiên của hình chóp bằng nhau thì hình chiếu của chúng bằng nhau.

$R = \dfrac{BC}{2\sin A}, \quad \cos A = \dfrac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB.AC}$

$\Rightarrow \sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A}$ do $\sin A > 0$

$h = SH = \sqrt{SA^2 - HA^2} = \sqrt{b^2 - R^2}$

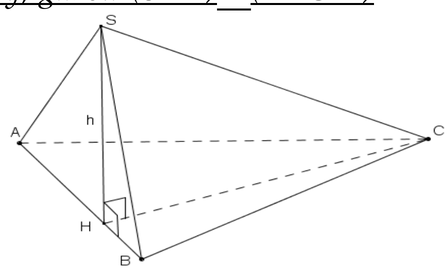


<u>b. Nếu khối chóp S.ABC… có mặt bên vuông góc với đáy, giả sử (SAB)⊥(ABC…)</u>

$-\ SH \perp AB \Rightarrow SH \perp (ABC...)$

$-SH = h = SA.\sin A, \cos A = \dfrac{AS^2 + AB^2 - SB^2}{2AS.AB}$

$\Rightarrow \sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A}$



<u>c. Nếu khối chóp S.ABC… có hai mặt bên cắt nhau vuông góc đáy, giả sử (SAB), (SAC)⊥(ABC…)</u>

=>SA⊥(ABC…) => SA=h

3. Đường cao của khối lăng trụ, khối hộp.

a. Nếu là hình lăng trụ đứng, hình hộp đứng, hình lăng trụ đều => đường cao bằng độ dài cạnh bên.

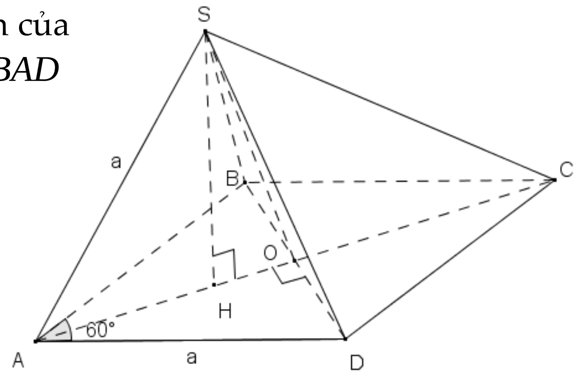
b. Nếu là hình lăng trụ, hình hộp không đứng ta tìm đường cao giống hình chóp không đều (các TH tương tự). Đó là, ta sẽ tính chiều cao từ 1 đỉnh của mặt đáy này đến mặt kia (chú ý chọn đỉnh nào cho tính dễ nhất).
=> Vậy, tính chiều cao hình chóp là cái cơ bản để ta tính chiều cao hình lăng trụ. ☺

Ví Dụ 1: Cho hình chóp S.ABCD, đáy là hình thoi cạnh a. SA=a,
$\angle SAB = \angle SAD = \angle BAD = 60^\circ$. $V_{S.ABCD} = ?$

Giải:

Do $\angle SAB = \angle SAD = 60^\circ \Rightarrow SA = SB = SD$

Vậy nên chân đường cao hạ từ đỉnh S sẽ nằm trên tâm của tam giác BAD. Mà ΔBAD đều cạnh a, nên tâm của ΔBAD sẽ chính là trọng tâm H của tam giác.



Ta có: $BD = a,\ AC = 2.AO = 2.\frac{a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$

$\Rightarrow S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC.BD = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$

Xét ΔBAD có $AH = \frac{2}{3}AO = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

Xét tam giác SHA có $SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \sqrt{a^2 - (\frac{a\sqrt{3}}{3})^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$

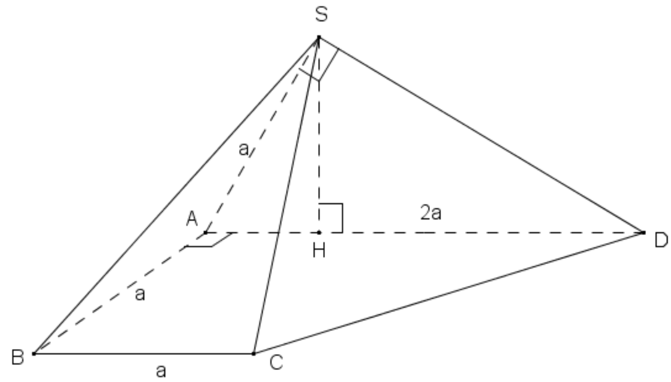
$\Rightarrow V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}.SH.S_{ABCD} = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{6}}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$

Ví Dụ 2: D-2008. Cho hình chóp S.ABCD, đáy là hình thang vuông tại A, B. AB=BC=a, AD=2a, (SAD) vuông góc với mặt đáy, tam giác SAD vuông tại S, SA=a. Tính $V_{S.ABCD} = ?$

Giải:

Do ABCD là hình thang vuông nên:

$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AD + BC).AB = \frac{3a^2}{2}$



Tam giác SAD vuông tại S mà $SA = \frac{1}{2}AD$,

suy ra $\angle SAD = 30^\circ$.

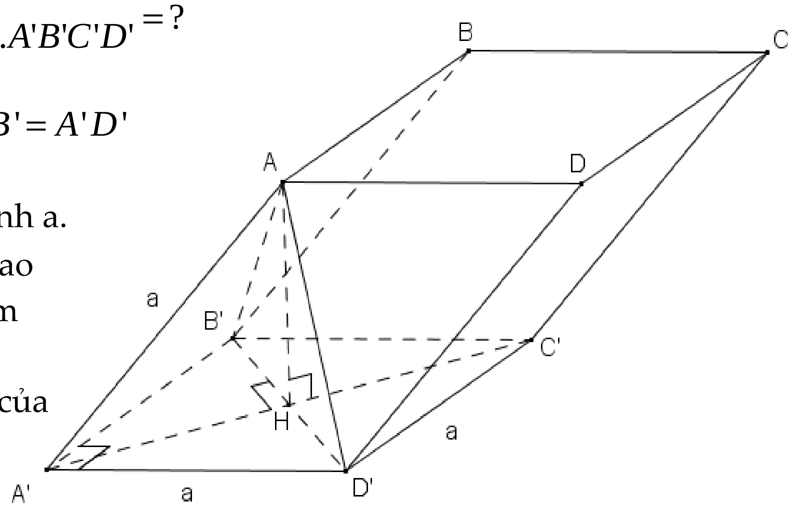
Ta có: $SD = \sqrt{AD^2 - SA^2} = \sqrt{4a^2 - a^2} = a\sqrt{3}$

Trong tam giác SAD kẻ đường cao SH

$\Rightarrow SH = \frac{1}{2}SD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}.SH.S_{ABCD} = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{3a^2}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$

Ví Dụ 3: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, đáy là hình vuông cạnh a. Các mặt bên là hình thoi, biết $\angle AA'B' = \angle AA'D = 60^\circ$. Tính $V_{ABCD.A'B'C'D'} = ?$



Giải:

Do các mặt bên là hình thoi nên $A'A = A'B' = A'D'$

Mà $\angle AA'B' = \angle AA'D = 60^\circ$.

$\Rightarrow \Delta A'AB', \Delta A'AD'$ là các tam giác đều cạnh a.

Vậy AA′=AB′=AD′=a suy ra chân đường cao hạ từ đỉnh A của hình lăng trụ chính là tâm của tam giác A′B′D′.

Mà tam giác A′B′D′ vuông tại A′ nên tâm của tam giác A′B′D′ chính là trung điểm H của B′D′.

Có:

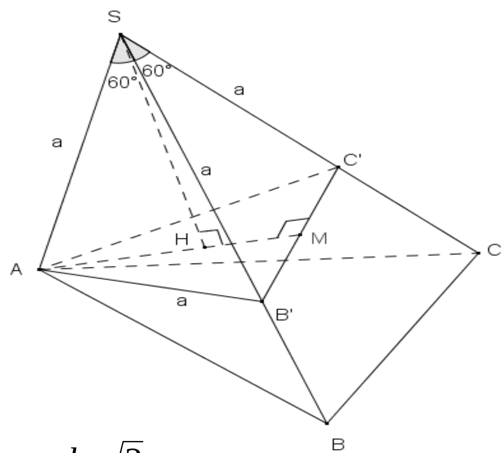
$$A'H = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow AH = \sqrt{AA'^2 - A'H^2} = \sqrt{a^2 - (\frac{a\sqrt{2}}{2})^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2},\ S_{A'B'C'D'} = a^2$$

$$\Rightarrow V_{ABCD.A'B'C'D'} = AH.S_{A'B'C'D'} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.a^2 = \frac{a^3\sqrt{2}}{2}$$

VẤN ĐỀ 2: TỈ SỐ THỂ TÍCH TỨ DIỆN

Cho tứ diện SABC, A′, B′, C′ là các điểm tùy ý thuộc SA, SB, SC ta có: $\frac{V_{SABC}}{V_{SA'B'C'}} = \frac{SA}{SA'}\frac{SB}{SB'}\frac{SC}{SC'}$

Ví Dụ 1: Olympic Toán 30-4. Cho hình chóp S.ABC, SA=a, SB=b, SC=c, $\angle BSA = \angle BSC = \angle CSA = 60^\circ$. Tính $V_{S.ABC} = ?$



Giải:

Giả sử a <b <c. Trên SB, SC lấy các điểm B′, C′ sao cho: SB′=SC′=SA=a, lại có $\angle BSA = \angle BSC = \angle CSA = 60^\circ$

$\Rightarrow$ S.AB′C′ là hình chóp đều cạnh a. Gọi H là trọng tâm tam giác AB′C′ nên SH chính là đường cao của hình chóp S.AB′C′ $\Rightarrow SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \sqrt{a^2 - (\frac{a\sqrt{3}}{3})^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$

$$\Rightarrow V_{S.AB'C'} = \frac{1}{3}SH.S_{AB'C'} = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{6}}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}.$$

Lại có: $\frac{V_{S.AB'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA.SB'.SC'}{SA.SB.SC} = \frac{a^2}{bc} \Rightarrow V_{S.ABC} = V_{S.AB'C'}.\frac{bc}{a^2} = \frac{abc\sqrt{2}}{12}$