CÔNG THỨC VÀ THỦ THUẬT TÍNH NHANH
BÀI TOÁN CỰC TRỊ SỐ PHỨC

Sưu tầm & biên soạn: **CAO VĂN TUẤN**

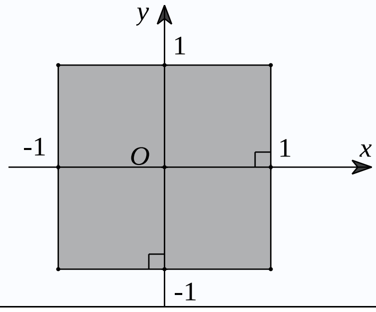
Bài toán cơ bản: Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $(*)$ cho trước. Tìm giá trị nhỏ nhất, lớn nhất của $|z|$.

Phương pháp chung:

+ ***Bước 1:*** Tìm tập hợp (H) các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn điều kiện $(*)$.
+ ***Bước 2:*** Tìm số phức z tương ứng với điểm biểu diễn $M \in (H)$ sao cho khoảng cách OM lớn nhất, nhỏ nhất.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1: Biết các số phức z có tập hợp điểm biểu diễn trên mặt phẳng tọa độ là hình vuông tô đậm như hình vẽ bên. Môđun lớn nhất của số phức z là



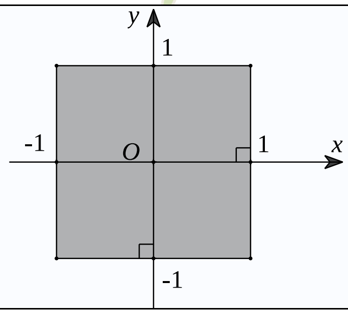
A. $|z|_{\max} = 1.$ **B** $|z|_{\max} = \dfrac{1}{2}.$

C. $|z|_{\max} = \sqrt{2}.$ **D.** $|z|_{\max} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}.$

Lời giải:

$|z|_{\max}$ bằng nửa độ dài đường chéo của hình vuông cạnh bằng $2 \Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Ví dụ 2: Biết các số phức z có tập hợp điểm biểu diễn trên mặt phẳng tọa độ là hình vuông tô đậm như hình vẽ bên. Môđun nhỏ nhất của số phức z là



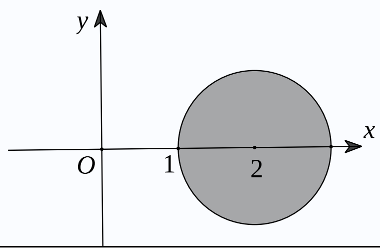
A. $|z|_{\min} = 0.$ **B.** $|z|_{\min} = 1.$

C. $|z|_{\min} = \sqrt{2}.$ **D.** $|z|_{\min} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}.$

Lời giải:

$|z|_{\min} = 0$, điểm biểu diễn là điểm $O \Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Ví dụ 3: Biết các số phức z có tập hợp điểm biểu diễn trên mặt phẳng tọa độ là hình tròn tô đậm như hình vẽ bên. Môđun lớn nhất của số phức z là



A. $|z|_{\max} = 1.$ **B** $|z|_{\max} = 2.$

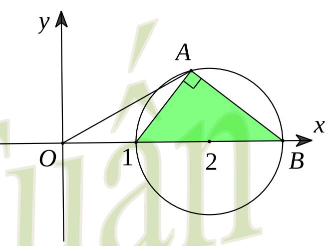
C. $|z|_{\max} = 3.$ **D.** $|z|_{\max} = \sqrt{3}.$

Lời giải:

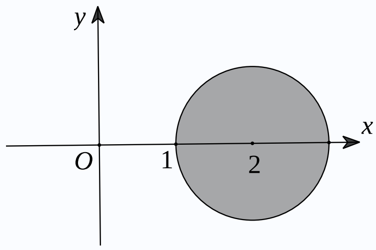
Tam giác OAB có góc OAB là góc tù nên

$$OA < OB \Rightarrow |z| \le OB = 3.$$

Vậy $|z|_{\max} = 3 \Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***



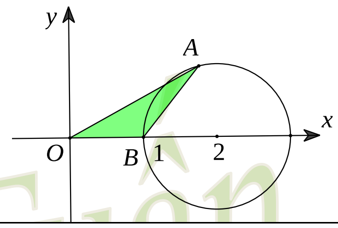
Ví dụ 4: Biết các số phức z có tập hợp điểm biểu diễn trên mặt phẳng tọa độ là phần tô đậm (kể cả đường viền). Môđun nhỏ nhất của số phức z là



A. $|z|_{\min}=1$. **B** $|z|_{\min}=\dfrac{1}{2}$.

C. $|z|_{\min}=\dfrac{2}{3}$. **D.** $|z|_{\min}=\sqrt{3}$.

Lời giải:

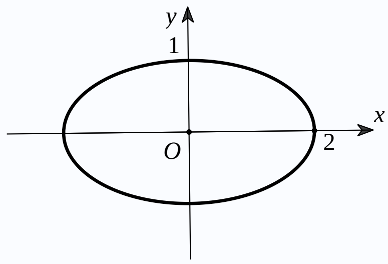


Tam giác OAB có góc OBA là góc tù nên

$$OA>OB\Rightarrow |z|\ge OB=1.$$

Vậy $|z|_{\min}=1\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Ví dụ 5: Biết các số phức z có tập hợp điểm biểu diễn trên mặt phẳng tọa độ là đường elip như hình vẽ bên. Môđun **nhỏ nhất** của số phức z là



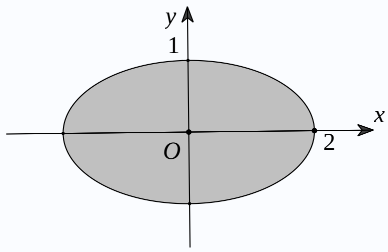
A. $|z|_{\min}=1$. **B** $|z|_{\min}=2$.

C. $|z|_{\min}=\dfrac{1}{2}$. **D.** $|z|_{\min}=\dfrac{3}{2}$.

Lời giải:

Elip có độ dài trục nhỏ bằng $2b=2\Rightarrow |z|_{\min}=1\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Ví dụ 6: Biết số phức z có tập hợp điểm biểu diễn trên mặt phẳng tọa độ là hình elip tô đậm như hình vẽ bên. Môđun lớn nhất của số phức z là



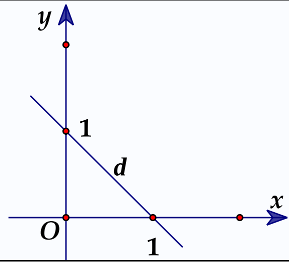
A. $|z|_{\max}=1$. **B** $|z|_{\max}=2$.

C. $|z|_{\max}=\dfrac{1}{2}$. **D.** $|z|_{\max}=\dfrac{3}{2}$.

Lời giải:

Elip có độ dài trục lớn bằng $2a=4\Rightarrow |z|_{\max}=2\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Ví dụ 7: Tập hợp các điểm biểu diễn hình học của số phức z là đường thẳng Δ như hình vẽ. Khi đó, $|z|$ có giá trị nhỏ nhất bằng



A. 2. **B.** 1.

C. $\sqrt{2}$. **D.** $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Lời giải:

Phương trình $d: x+y-1=0$.

Gọi M là điểm biểu diễn hình học của số phức $z\Rightarrow \begin{cases} M\in d \\ |z|=OM \end{cases}$.

Vì $M\in d: x+y-1=0\Rightarrow M(t;1-t)$.

Suy ra $|z|=\sqrt{t^2+(1-t)^2}=\sqrt{2t^2-2t+1}=\sqrt{2\left(t^2-t+\dfrac{1}{4}\right)+\dfrac{1}{2}}=\sqrt{2\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{2}}\ge \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

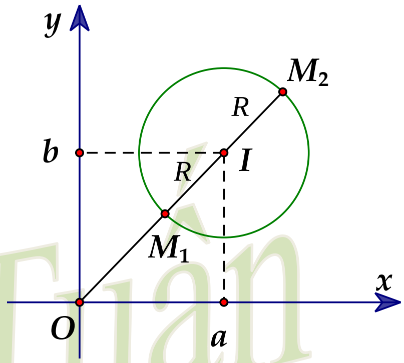
Vậy $|z|_{\min}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

MỘT SỐ BÀI TOÁN QUAN TRỌNG THƯỜNG GẶP

Bài toán 1: Cho số phức z thỏa mãn $|z-(a+bi)|=c,\ (c>0)$, tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của $|z|$.

Lời giải:

$|z-(a+bi)|=c,\ (c>0) \Rightarrow$ Tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z là đường tròn có tâm $I(a;b)$ và bán kính $R=c$.



Khi đó: $\xrightarrow{|z|=OM} \boxed{\begin{cases} \max|z| = OM_2 = OI+R=\sqrt{a^2+b^2}+c \\ \min|z|=OM_1=OI-R=\sqrt{a^2+b^2}-c \end{cases}}$.

Tìm tọa độ điểm M_1, M_2 (tức là, tìm số phức z có môđun nhỏ nhất, lớn nhất).

+ Phương trình đường tròn (C) quỹ tích của điểm M biểu diễn số phức z là:

$$(C):(x-a)^2+(y-b)^2=c^2$$

+ Phương trình đường thẳng d đi qua hai điểm O, I là: $d: Ax+By+C=0$.

Khi đó, M_1, M_2 là giao điểm của (C) và d.

Giải hệ phương trình: $\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2=c^2 \\ Ax+By+C=0\end{cases} \Rightarrow$ hai nghiệm $\Rightarrow$ tọa độ hai điểm.

So sánh khoảng cách từ hai điểm vừa tìm được tới O, khoảng cách nào nhỏ hơn thì điểm đó ứng với điểm M_1 và điểm còn lại là điểm M_2.

Tổng quát: Cho số phức z thỏa mãn $|z_1.z+z_2|=r,\ (r>0)$. Tìm giá trị nhỏ nhất, lớn nhất của $|z|$.

Giải: $\begin{cases}\max|z|=\left|\dfrac{z_2}{z_1}\right|+\dfrac{r}{|z_1|} \\ \min|z|=\left|\left|\dfrac{z_2}{z_1}\right|-\dfrac{r}{|z_1|}\right|\end{cases}$.

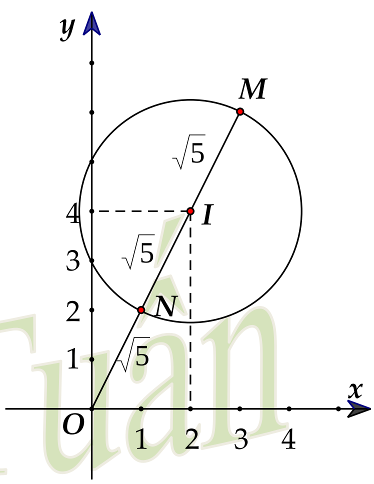
VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1: Nếu các số phức z thỏa mãn $|z-2-4i|=\sqrt{5}$ thì $|z|$ có giá trị lớn nhất bằng

A. $3\sqrt{5}$. **B.** 5. **C.** $\sqrt{5}$. **D.** $\sqrt{13}$.

Lời giải:

Tập hợp các điểm $M(z)$ là đường tròn có tâm $I(2;4)$ và bán kính $R=\sqrt{5}$.



Vậy $\max|z|=OM=OI+R=\sqrt{2^2+4^2}+\sqrt{5}=3\sqrt{5}$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Câu hỏi bổ sung 1: $|z|$ có giá trị nhỏ nhất bằng bao nhiêu?

Trả lời: $\min|z|=ON=OI-R=\sqrt{2^2+4^2}-\sqrt{5}=\sqrt{5}$.

Câu hỏi bổ sung 2: Tìm số phức z có môđun nhỏ nhất, lớn nhất.

Trả lời: Phương trình đường thẳng OI là $y=2x$.

Tọa độ hai điểm M, N là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} y=2x \\ (x-2)^2+(y-4)^2=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2x \\ (x-2)^2+(2x-4)^2=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2x \\ x^2-4x+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases} \Rightarrow N(1;2) \\ \begin{cases} x=3 \\ y=6 \end{cases} \Rightarrow M(3;6) \end{array}\right.$$

+ Số phức z có môđun lớn nhất là $z=3+6i$ ứng với điểm $M(3;6)$.
+ Số phức z có môđun nhỏ nhất là $z=1+2i$ ứng với điểm $N(1;2)$.

Ví dụ 2 [*Trích đề thi thử chuyên KHTN – Lần 1*]:

Nếu các số phức z thỏa mãn $|(1+i)z+1-7i|=\sqrt{2}$ thì $|z|$ có giá trị lớn nhất bằng

A. 4. **B.** 3. **C.** 7. **D.** 6.

Lời giải:

Ta có: $|(1+i)z+1-7i|=\sqrt{2} \Leftrightarrow \left|(1+i)\left(z+\dfrac{1-7i}{1+i}\right)\right|=\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow |1+i||z-(3+4i)|=\sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{2}|z-(3+4i)|=\sqrt{2} \Leftrightarrow |z-(3+4i)|=1$

Tập hợp các điểm $M(z)$ là đường tròn có tâm $I(3;4)$ và bán kính $R=1$.

Vậy $\max|z|=OI+R=\sqrt{3^2+4^2}+1=6 \Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Ví dụ 3: Nếu các số phức z thỏa mãn $\left|\dfrac{-2-3i}{3-2i}z+1\right|=1$ thì $|z|$ có giá trị nhỏ nhất bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** 3.

Lời giải:

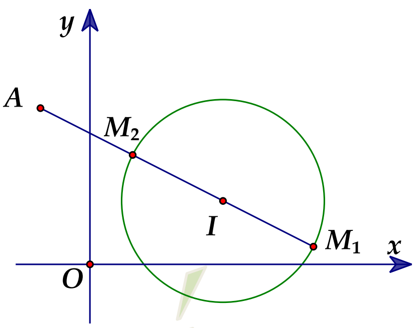
Ta có: $\left|\dfrac{-2-3i}{3-2i}z+1\right|=1 \Leftrightarrow |-iz+1|=1 \Leftrightarrow |-i|\left|z+\dfrac{1}{-i}\right|=1 \Leftrightarrow |z+i|=1 \Leftrightarrow |z-(-i)|=1.$

Tập hợp các điểm $M(z)$ là đường tròn có tâm $I(0;-1)$ và bán kính $R=1$.

Vậy $\max|z|=OI+R=\sqrt{0^2+(-1)^2}+1=2 \Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Bài toán 2: Trong các số phức z thỏa mãn $|z-z_1|=r_1, (r_1>0)$. Tìm giá trị nhỏ nhất, lớn nhất của $P=|z-z_2|$.

Lời giải:



Gọi $I(z_1), A(z_2), M(z)$.

Khi đó: $IA=|z_1-z_2|=r_2 \Rightarrow \boxed{\begin{cases} \max P=AM_1=r_1+r_2 \\ \min P=AM_2=|r_1-r_2| \end{cases}}.$

Muốn tìm các số phức sao cho P_{max}, P_{min} thì ta đi tìm hai giao điểm M_1, M_2 của đường tròn (I, r_1) với đường thẳng AI.

Tổng quát: Cho số phức z thỏa mãn $|z_1.z-z_2|=r_1, (r_1>0)$. Tìm giá trị nhỏ nhất, lớn nhất của $P=|z-z_3|$.

Giải: $\boxed{\max P=\left|\dfrac{z_2}{z_1}-z_3\right|+\dfrac{r_1}{|z_1|} \text{ và } \min P=\left|\left|\dfrac{z_2}{z_1}-z_3\right|-\dfrac{r_1}{|z_1|}\right|}$

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1: Cho số phức z thỏa mãn $|z-3+2i|=2$. Giá trị nhỏ nhất của $|z+1-i|$ lần lượt là

A. 7. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 5.

Lời giải:

Ta có: $|z-3+2i|=\left|z-\underbrace{(3-2i)}_{z_1}\right|=2=r_1$ và $|z+1-i|=\left|z-\underbrace{(-1+i)}_{z_2}\right|$

$\Rightarrow |z_1-z_2|=|(3-2i)-(-1+i)|=5=r_2 \Rightarrow \min|z+1-i|=5-2=3 \Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Ví dụ 2: Trong các số phức z thỏa mãn $|z-5i|\le 3$, số phức có $|z|$ nhỏ nhất thì có phần ảo bằng bao nhiêu?

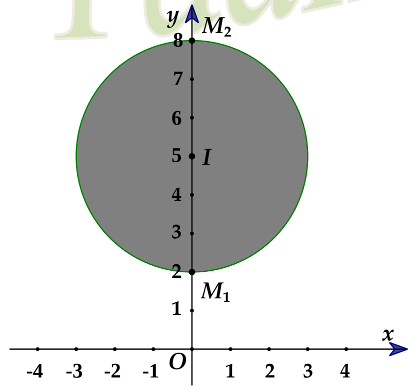
A. 4. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải:

Tập hợp các điểm $M(z)$ là đường tròn có tâm $I(0;5)$ và bán kính $R=3$.

Vì $|z|=OM$ nên số phức z có môđun nhỏ nhất là $z=2i$ ứng với điểm $M_1(0;2)$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***



Ví dụ 3 [*Trích đề thi HK 2 – THPT Phan Đình Phùng – HN*]: Trong tất cả các số phức z thỏa mãn $|z-2+2i|=1$, gọi $z=a+bi,\ (a,b\in\mathbb{R})$ là số phức có $|z+4i|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính giá trị biểu thức $P=a(b+2)$.

A. $P=\sqrt{2}-\frac{1}{2}$. **B.** $P=-\sqrt{2}-\frac{1}{2}$. **C.** $P=\frac{1}{2}+\sqrt{2}$. **D.** $P=\frac{1}{2}-\sqrt{2}$.

Lời giải:

Ta có: $|z-2+2i|=\left|z-\underbrace{(2-2i)}_{z_1}\right|=1\Rightarrow I(2;-2)$ và $|z+4i|=\left|z-\underbrace{(-4i)}_{z_2}\right|\Rightarrow A(0;-4)$.

Tập hợp các điểm $M(z)$ là đường tròn có tâm $I(2;-2)$ và bán kính $r_1=1$.

Phương trình đường thẳng IA là: $x-y-4=0$.

Tọa độ hai điểm M, N là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases}x-y-4=0\\(x-2)^2+(y+2)^2=5\end{cases}{}^{1}\Leftrightarrow\begin{cases}y=x-4\\(x-2)^2+(x-4+2)^2=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=x-4\\(x-2)^2=\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y=x-4\\x-2=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\\y=-2+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{cases}\vee\begin{cases}x=2-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\\y=-2-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{cases}\Rightarrow M_1\left(2+\dfrac{1}{\sqrt{2}};-2+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right);M_2\left(2-\dfrac{1}{\sqrt{2}};-2-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Khi đó: $\begin{cases} \overrightarrow{AM_1} = \left(2+\dfrac{1}{\sqrt{2}};2+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ \overrightarrow{AM_2} = \left(2-\dfrac{1}{\sqrt{2}};2-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) \end{cases} \Rightarrow AM_1 > AM_2 \Rightarrow M_2$ là điểm biểu diễn số phức cần tìm.

$$\Rightarrow z = 2-\frac{1}{\sqrt{2}}+\left(-2-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)i \xrightarrow{z=a+bi} \begin{cases} a = 2-\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ b = -2-\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow P = a(b+2) = \sqrt{2}-\frac{1}{2} \Rightarrow$$ ***Chọn đáp án A.***

Bài toán 3: Trong số phức z thỏa mãn $|z-z_1|+|z-z_2| = k,\ (k>0)$. Tìm giá trị nhỏ nhất, lớn nhất của $P = |z|$.

Lời giải:

Gọi $M(z),\ M_1(z_1),\ M_2(z_2)$.

Khi đó: $|z-z_1|+|z-z_2| = k \Leftrightarrow MM_1 + MM_2 = k \Leftrightarrow M \in elip\ (E)$ nhận $M_1,\ M_2$ làm tiêu điểm và có độ dài trục lớn bằng $k = 2a$.

Vì ở chương trình Toán 10, chỉ được học elip có hai tiêu điểm là $F_1(-c;0),\ F_1(c;0)$ nên thường đề bài sẽ cho dưới dạng: $|z-c|+|z-c| = k,\ (0<c, k\in\mathbb{R})$

$\Rightarrow M \in elip\ (E)$ nhận $F_1(-c;0),\ F_1(c;0)$ làm tiêu điểm và có độ dài trục lớn bằng $k = 2a$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} |z|_{max} = a = \dfrac{k}{2} \\ |z|_{min} = b = \dfrac{\sqrt{k^2-4c^2}}{2} \end{cases}}$$

Tổng quát: Cho số phức z thỏa mãn $|z_1.z+z_2|+|z_1.z-z_2| = k,\ (k>0)$. Tìm giá trị nhỏ nhất, lớn nhất của $P = |z|$.

Giải: $\boxed{\max|z| = \dfrac{k}{2|z_1|} \text{ và } \min|z| = \dfrac{\sqrt{k^2-4|z_2|^2}}{2|z_1|}}$

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ: Trong tất cả các số phức z thỏa mãn $|z+4|+|z-4| = 10$, gọi $M,\ m$ lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất $|z|$. Khi đó, giá trị biểu thức $P = M-m^2$ bằng

A. $P = -6.$ **B.** $P = -13.$ **C.** $P = -5.$ **D.** $P = -4.$

Lời giải:

Áp dụng công thức trên, ta có: $\begin{cases} M = |z|_{max} = \dfrac{10}{2} = 5 \\ m = |z|_{min} = \dfrac{\sqrt{10^2-4.4^2}}{2} = 3 \end{cases} \Rightarrow P = M-m^2 = 5-3^2 = -4.$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Bài toán 4: Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $z_1+z_2=m+ni$ và $|z_1-z_2|=p>0$. Tìm giá trị lớn nhất của $P=|z_1|+|z_2|$.

Lời giải:

Giả sử: $\begin{cases} z_1=a+bi \\ z_2=c+di \end{cases} \Rightarrow z_1+z_2=a+c+(b+d)i=m+ni \Rightarrow \begin{cases} a+c=m \\ c+d=n \end{cases}$.

Ta có: $z_1-z_2=a-c+(b-d)i \Rightarrow |z_1-z_2|^2=(a-c)^2+(b-d)^2=p$.

Khi đó: $P=|z_1|+|z_2|=\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2} \le \sqrt{(1^2+1^2)\left[(a^2+b^2)+(c^2+d^2)\right]}=\sqrt{2(a^2+b^2+c^2+d^2)}$.

Mà $a^2+b^2+c^2+d^2=\dfrac{(a+c)^2+(b+d)^2+(a-c)^2+(b-d)^2}{2}=\dfrac{m^2+n^2+p^2}{2}$

Suy ra: $2(a^2+b^2+c^2+d^2)=m^2+n^2+p^2 \Rightarrow P \le \sqrt{m^2+n^2+p^2} \Rightarrow \boxed{\max P=\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$.

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ [*Trích đề thi thử chuyên KHTN – Lần 4*]: Với hai số phức phức z_1, z_2 thỏa mãn $z_1+z_2=8+6i$ và $|z_1-z_2|=2$. Tìm giá trị lớn nhất của $P=|z_1|+|z_2|$.

A. $4\sqrt{6}$. **B.** $5+3\sqrt{5}$. **C.** $2\sqrt{26}$. **D.** $34+3\sqrt{2}$.

Lời giải:

Áp dụng công thức trên ta được: $P=|z_1|+|z_2| \le \sqrt{8^2+6^2+2^2}=2\sqrt{26} \Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM RÈN LUYỆN

Câu 1. Cho số phức z thỏa mãn $|z+2-2i|=1$. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$ lần lượt là

A. $2\sqrt{2}+1;\ 2\sqrt{2}-1$. **B.** $\sqrt{2}+1;\ \sqrt{2}-1$. **C.** $2;\ 1$. **D.** $\sqrt{3}+1;\ \sqrt{3}-1$.

Câu 2. Cho số phức z thỏa mãn $|z+1+2i|=4\sqrt{5}$. Giá trị nhỏ nhất của $|z|$ lần lượt là

A. $\sqrt{5}$. **B.** $3\sqrt{5}$. **C.** $5\sqrt{5}$. **D.** $5\sqrt{3}$.

Câu 3. Trong các số phức z thỏa mãn: $|z-3+4i|=|z|$ thì số phức z có modul nhỏ nhất là

A. $z=\dfrac{11}{2}+i$. **B.** $z=\dfrac{3}{2}-2i$. **C.** $z=-5-\dfrac{5}{2}i$. **D.** $z=-3+\dfrac{1}{6}i$.

Câu 4. Trong các số phức z thỏa mãn: $|z-2-4i|=|z-2i|$ thì số phức z có modul nhỏ nhất là

A. $z=-2+2i$. **B.** $z=-2-2i$. **C.** $z=2-2i$. **D.** $z=2+2i$.

Câu 5. Trong các số phức z thỏa mãn: $|\overline{z}-3+4i|=|z|$, biết rằng số phức $z=a+bi,\ (a,\ b\in\mathbb{R})$ có modul nhỏ nhất. Khi đó, giá trị của $P=a^2-b$ là

A. $P=\dfrac{1}{4}$. **B.** $P=\dfrac{1}{2}$. **C.** $P=-\dfrac{1}{4}$. **D.** $P=-\dfrac{1}{2}$.

Câu 6. Trong các số phức z thỏa mãn: $|z+1-5i|=|\overline{z}+3-i|$, biết rằng số phức $z=a+bi,\ (a,\ b\in\mathbb{R})$ có modul nhỏ nhất. Khi đó, tỉ số $\dfrac{a}{b}$ bằng

A. 3. **B.** $\dfrac{1}{3}$. **C.** $\dfrac{2}{3}$. **D.** $P=-\sqrt{2}$.

Câu 7. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-2-i|=1$. Giá trị lớn nhất của $|z-1|$ là

A. $\sqrt{2}+1$. **B.** $\sqrt{2}-1$. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** 1.

Câu 8. Cho số phức z thỏa mãn $|z+1-2i|=2$. Tích giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z-i|$ bằng

A. 5. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 9. Cho số phức z thỏa mãn $|(2+i)z+1|=1$. Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z-1|$ bằng

A. 3. **B.** $2\sqrt{2}$. **C.** $\frac{2}{\sqrt{5}}$. **D.** $2\sqrt{3}$.

Câu 10. Cho số phức z thỏa mãn $|\overline{z}-1+2i|=\sqrt{10}$. Giá trị lớn nhất của $|z+1-4i|$ bằng

A. $\sqrt{10}$. **B.** $10\sqrt{3}$. **C.** $3\sqrt{10}$. **D.** $4\sqrt{10}$.

Câu 11. Cho số phức z thỏa mãn $|z-1-2i|=4$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z+2+i|$. Giá trị của $T=M^2+m^2$ là

A. $T=50$. **B.** $T=64$. **C.** $T=68$. **D.** $T=16$.