Chủ đề II

Vấn đề cần nắm:

Hàm số lũy thừa, hàm số mũ – hàm số logarit

I. Lũy thừa – Hàm số lũy thừa

A. Khái niệm lũy thừa

1. Lũy thừa với số mũ nguyên

Cho n là một số nguyên dương.
Với a là số thực tùy ý, **lũy thừa** bậc n của a là tích của n thừa số a

$$a^n = a.a...a \text{ (có } n \text{ thừa số } a).$$

Với $a \neq 0$

$$a^0 = 1; a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Chú ý

0^0 và 0^{-n} không có nghĩa.
Lũy thừa với số mũ nguyên có tính chất tương tự như của lũy thừa với số mũ nguyên dương.

2. Căn bậc n

Cho số thực b và số nguyên dương n $(n \geq 2)$. Số a được gọi là căn bậc n của số b nếu $a^n = b$.

3. Phương trình $x^n = b$.

a. Kết quả biện luận số nghiệm của phương trình $x^n = b$.

- Trường hợp n lẻ và $b \in \mathbb{R}$: Với mọi số thực b, phương trình có nghiệm duy nhất là $x = \sqrt[n]{b}$.
- Trường hợp n chẵn:

+ Với $b < 0$, phương trình vô nghiệm;
+ Với $b = 0$, phương trình có một nghiệm $x = 0$;
+ Với $b > 0$, phương trình có hai nghiệm đối nhau là $x_1 = \sqrt[n]{b}$ và $x_2 = -\sqrt[n]{b}$.

b. Tính chất của căn bậc n

$$\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}; \quad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}};$$

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}; \quad \sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a, & \text{khi n lẻ} \\ |a|, & \text{khi n chẵn} \end{cases};$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}.$$

4. Lũy thừa với số mũ hữu tỷ.

Cho a là số thực dương và số hữu tỷ $r = \frac{m}{n}$, trong đó $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Lũy thừa của a với số mũ r là số a^r được xác định bởi

$$a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Chú ý

Từ định nghĩa ta có $1^\alpha = 1; (\alpha \in \mathbb{R})$

5. Lũy thừa với số mũ vô tỉ

Ta gọi giới hạn của dãy số $\left(a^{r_n}\right)$ là lũy thừa của a với số mũ α, kí hiệu là a^α.

$$a^\alpha = \lim_{n\to+\infty} a^{r_n} \text{ với } \alpha = \lim_{n\to+\infty} r_n.$$

6. Tính chất của lũy thừa với số mũ thực

Cho a, b là những số thực dương; m, n là những số thực tùy ý. Khi đó

$$a^m.a^n = a^{m+n} \; ; \; \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \; ; \; \left(a^m\right)^n = a^{mn} ; \; \left(ab\right)^m = a^m.b^m ; \; \left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m} ;$$

Nếu $a > 1$ thì $a^m > a^n \Leftrightarrow m > n$.

Nếu $a < 1$ thì $a^m > a^n \Leftrightarrow m < n$.

Ghi nhớ

1. Căn bậc 1 của a là a.
2. Căn bậc n của 0 là 0 với mọi n nguyên dương.
3. Số âm không có căn bậc chẵn.
4. Với n là số nguyên dương lẻ, ta có $\sqrt[n]{a} > 0 \Leftrightarrow a > 0$ và $\sqrt[n]{a} < 0 \Leftrightarrow a < 0$.
5. $\sqrt[n]{a^n} = a$ nếu n lẻ, $\sqrt[n]{a^n} = |a|$ nếu n chẵn.

B. Hàm số lũy thừa

1. Khái niệm

Hàm số $y = x^\alpha$ với $\alpha \in \mathbb{R}$ được gọi là **hàm số lũy thừa.**

Chú ý

Tập xác định của hàm số lũy thừa $y = x^\alpha$ tùy thuộc vào giá trị của α. Cụ thể,
+ Với α nguyên dương, tập xác định là $\mathbb{R}$.
+ Với α nguyên âm hoặc bằng 0, tập xác định là $\mathbb{R}\setminus\{0\}$;
+ Với α không nguyên, tập xác định là $(0;+\infty)$.

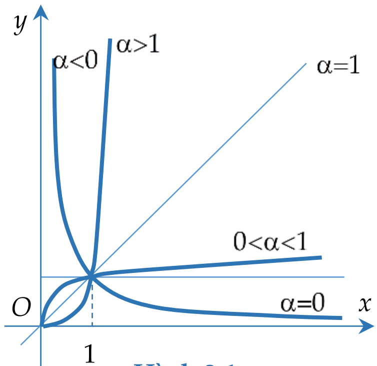
a. Đạo hàm: $\left(x^\alpha\right)' = \alpha.x^{\alpha-1}$

b. Dạng của đồ thị hàm số lũy thừa

Xét trên khoảng $(0;+\infty)$ thì

Đồ thị của hàm số lũy thừa $y = x^\alpha$ luôn đi qua điểm $(1;1)$.

Trong **hình 2.1** là đồ thị hàm số lũy thừa trên $(0;+\infty)$ ứng với các giá trị khác nhau của α.



Hình 2.1

Chú ý

Khi khảo sát hàm số lũy thừa với số mũ cụ thể, ta phải xét trên toàn bộ tập xác định của nó.

c. Bảng tóm tắt tính chất của hàm số lũy thừa $y = x^\alpha$ trên khoảng $(0;+\infty)$.

	$\alpha > 0$	$\alpha < 0$
Đạo hàm	$y' = \alpha.x^{\alpha-1}$	$y' = \alpha.x^{\alpha-1}$
Chiều biến thiên	Hàm số luôn đồng biến	Hàm số luôn nghịch biến
Tiệm cận	Không có	Tiệm cận ngang là trục Ox, tiệm cận đứng là trục Oy.
Đồ thị	Đồ thị hàm số luôn đi qua điểm $(1;1)$	Đồ thị hàm số luôn đi qua điểm $(1;1)$

II. Lôgarit – Hàm số lôgarit

A. Logarit

1. Định nghĩa

Cho hai số dương *a, b* với $a \neq 1$. Số α thỏa mãn đẳng thức $a^{\alpha} = b$ được gọi là logarit cơ số *a* của *b* và kí hiệu là $\log_a b$. $\alpha = \log_a b \Leftrightarrow a^{\alpha} = b$

2. Tính chất

Cho hai số dương *a, b* với $a \neq 1$, ta có các tính chất sau:

$$\log_a 1 = 0, \log_a a = 1,$$
$$a^{\log_a b} = b, \log_a \left(a^{\alpha}\right) = \alpha$$

3. Quy tắc tính logarit

Cho ba số dương a, b_1, b_2 với $a \neq 1$, ta có quy tắc sau:

$$\log_a b_1 b_2 = \log_a b_1 + \log_a b_2;\ \log_a \frac{b_1}{b_2} = \log_a b_1 - \log_a b_2;$$

$$\log_a b_1^{\alpha} = \alpha \log_a b_1;\ \log_a \sqrt[n]{b_1} = \frac{1}{n}\log_a b_1$$

4. Đổi cơ số

Cho ba số dương *a, b, c* với $a \neq 1, c \neq 1$, ta có $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$.

Từ điều trên ta rút ra các công thức đặc biệt:

$\boxed{\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a},\ b \neq 1}$; $\boxed{\log_{a^{\alpha}} b = \dfrac{1}{\alpha}\log_a b,\ \alpha \neq 0}$

5. Logarit thập phân, logarit tự nhiên

Logarit thập phân là logarit cơ số 10, $\log_{10} b$ thường được viết là $\log b$ hoặc $\lg b$.

Logarit tự nhiên (logarit Neper): Logarit cơ số *e* được gọi là logarit tự nhiên, $\log_e N \left(N > 0\right)$, được viết là $\ln N$.

B. Hàm số logarit

1. Định nghĩa

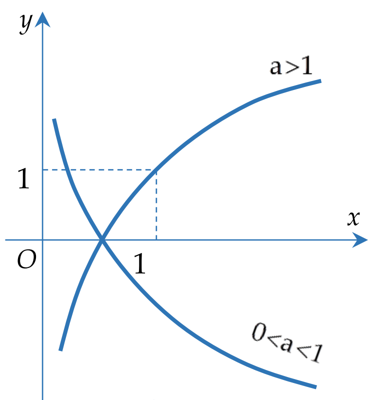
Cho số thực dương *a* khác 1. Hàm số $y = \log_a x$ được gọi là **hàm số logarit** cơ số *a*.

2. Đạo hàm

$$y = \log_a x \Rightarrow y' = \frac{1}{x\ln a};\ \ y = \ln x \Rightarrow y' = \frac{1}{x}; y = \log_a u(x) \Rightarrow y' = \frac{u'(x)}{u(x).\ln a}.$$

3. Bảng tóm tắt các tính chất của hàm số logarit $y = \log_a x \left(a > 0; a \neq 1\right)$

Tập xác định	$\left(0;+\infty\right)$
Đạo hàm	$y' = \dfrac{1}{x.\ln a}$
Chiều biến thiên	$a > 1$: hàm số luôn đồng biến. $0 < a < 1$: hàm số luôn nghịch biến.
Tiệm cận	Trục *Oy* là tiệm cận đứng.
Đồ thị	đi qua các điểm $\left(1;0\right)$ và $\left(a;1\right)$; nằm phía bên phải trục tung.



Hình 2.2

Đồ thị hàm số $y=\log_a x$ trong hai trường hợp $a>1$ hoặc $0<a<1$ được biểu diễn ở hình 2.2.

STUDY TIP

Đẳng thức $\sqrt[n]{x}=x^{\frac{1}{n}}$ chỉ xảy ra khi $x>0$. Do đó hàm số $y=\sqrt[n]{x}$ không đồng nhất với hàm số $y=x^{\frac{1}{n}}$ với $n\in\mathbb{N}^*$.

III. Hàm số mũ

1. Định nghĩa

Cho số thực dương a thỏa mãn $0<a\neq 1$. Hàm số $y=a^x$ được gọi là hàm số mũ cơ số a.

2. Đạo hàm

$$\left(a^x\right)'=a^x.\ln a$$

Đối với hàm hợp $y=a^{u(x)}$, ta có

$$\left(a^u\right)'=a^u.\ln a.u'$$

STUDY TIP

Đồ thị hàm số $y=a^x$ và $y=\log_a x,(0<a\neq 1)$ đối xứng nhau qua đường thẳng $y=x$.

3. Bảng tóm tắt các tính chất của hàm số mũ $y=a^x\ (a>0;a\neq 1)$.

Tập xác định	$(-\infty;+\infty)$
Đạo hàm	$y'=a^x.\ln a$
Chiều biến thiên	$a>1$ thì hàm số luôn đồng biến; $0<a<1$ thì hàm số luôn nghịch biến.
Tiệm cận	Trục Ox là tiệm cận ngang.
Đồ thị	Đi qua các điểm $(0;1)$ và $(1;a)$, nằm phía trên trục hoành $\left(y=a^x>0,\forall x\in\mathbb{R}\right)$

4. Bảng đạo hàm của các hàm số lũy thừa, mũ, lôgarit

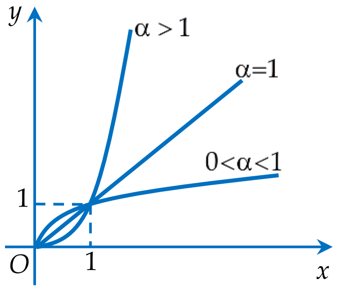
Hàm sơ cấp	Hàm hợp $(u=u(x))$
$\left(x^\alpha\right)'=\alpha.x^{\alpha-1}$ $\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$ $\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\left(u^\alpha\right)'=\alpha.u^{\alpha-1}.u'$ $\left(\frac{1}{u}\right)'=-\frac{u'}{u^2}$ $\left(\sqrt{u}\right)'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$\left(e^x\right)'=e^x$ $\left(a^x\right)'=a^x\ln a$	$\left(e^u\right)'=u'.e^u$ $\left(a^u\right)'=a^u.\ln a.u'$
$\left(\ln\lvert x\rvert\right)'=\frac{1}{x}$ $\left(\log_a\lvert x\rvert\right)'=\frac{1}{x\ln a}$	$\left(\ln\lvert u\rvert\right)'=\frac{u'}{u}$ $\left(\log_a\lvert u\rvert\right)'=\frac{u'}{u.\ln a}$

Một số bài toán liên quan đến đồ thị hàm số lũy thừa, hàm số mũ và hàm số logarit

a. Bài toán nhận biết đồ thị

Để xử lý bài toán này một cách nhanh chóng và dễ dàng, ta cần phải nắm vững các lý thuyết về hàm số lũy thừa, hàm số mũ và hàm số logarit dưới đây:

$y=x^{\alpha},(\alpha>0)$ — Khảo sát trên khoảng $(0;+\infty)$

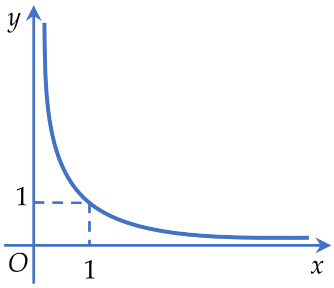


Bảng biến thiên:

x	0		$+\infty$
y'		$+$	
y	0	↗	$+\infty$

1. Đồ thị luôn đi qua điểm $(1;1)$ và không có tiệm cận.
2. Hàm số luôn đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

$y=x^{\alpha},(\alpha<0)$ — Khảo sát trên khoảng $(0;+\infty)$

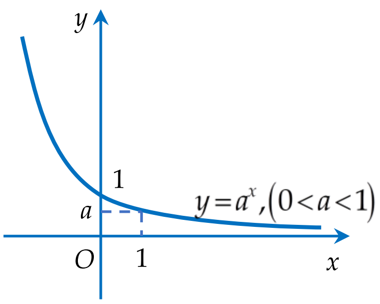


Bảng biến thiên:

x	0		$+\infty$
y'		$-$	
y	$+\infty$	↘	0

1. Đồ thị luôn đi qua điểm $(1;1)$ Tiệm cận đứng là trục $Oy: x=0$ và tiệm cận ngang là trục $Ox: y=0$.
2. Hàm số luôn nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

$y=a^x,(0<a<1)$

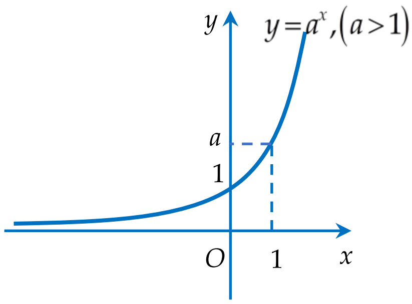


Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$-$		$-$		$-$	
y	$+\infty$	↘	1	↘	a	↘	0

1. Đồ thị: Luôn đi qua điểm $(0;1)$; nhận Ox là tiệm cận ngang.
2. Hàm số luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

$y=a^x,(a>1)$



Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$+$		$+$		$+$	
y	0	↗	1	↗	a	↗	$+\infty$

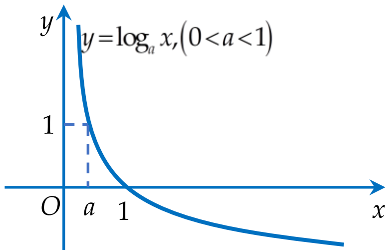
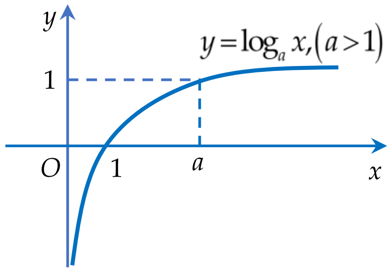
1. Đồ thị: Luôn đi qua điểm $(0;1)$; nhận Ox là tiệm cận ngang.
2. Hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

STUDY TIPS

Nếu $\alpha=0$ thì đồ thị của hàm số lũy thừa $y=x^{\alpha}$ có dạng một đường thẳng đi qua điểm $(0;1)$ và song song với trục hoành Ox.

STUDY TIPS

Đồ thị hàm số mũ $y=a^x,(0<a\neq1)$ luôn nằm phía trên trục hoành Ox do $a^x>0$, $\forall x\in\mathbb{R},(0<a\neq1)$.

$y=\log_a x,(0<a<1)$	$y=\log_a x,(a>1)$
	

$y=\log_a x,(0<a<1)$

Bảng biến thiên:

x	0		a		1		$+\infty$
y'		$-$		$-$		$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

1. Tập xác định: $(0;+\infty)$. Đồ thị luôn đi qua các điểm $(1;0),(a;1)$ và nhận Oy làm tiệm cận đứng.
2. Hàm số luôn nghịch biến trên $(0;+\infty)$.

$y=\log_a x,(a>1)$

Bảng biến thiên:

x	0		1		a		$+\infty$
y'		$+$		$+$		$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

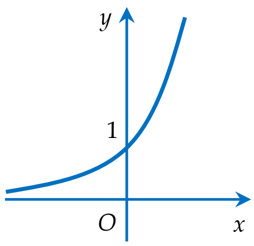
1. Tập xác định: $(0;+\infty)$. Đồ thị luôn đi qua các điểm $(1;0),(a;1)$ và nhận Oy làm tiệm cận đứng.
2. Hàm số luôn đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Ngoài ra, ta cũng cần lưu ý đến một số lí thuyết liên quan đến các phép biến đổi đồ thị (đã được nhắc đến tại ……)

STUDY TIPS

Đồ thị hàm số logarit $y=\log_a x,(0<a\neq 1)$ luôn nằm phía bên phải trục tung Oy do $x>0$.

Ví dụ minh họa



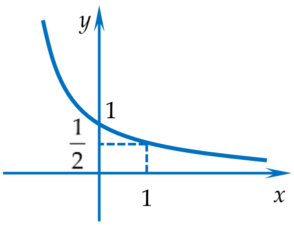
Ví dụ 1: Đường cong trong hình bên dưới là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

A. $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$. **B.** $y=x^2$. **C.** $y=\log_2 x$. **D.** $y=2^x$.

Đáp án D.

Lời giải

Quan sát hình dáng đồ thị, ta thấy hình vẽ bên là dạng đồ thị $y=a^x$ với cơ số $a>1$.



Ví dụ 2: Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

A. $y=\dfrac{1}{2^x}$. **B.** $y=2^x$. **C.** $y=\dfrac{1}{3^x}$. **D.** $y=\dfrac{3^x}{6}$.

Đáp án A.

Lời giải chi tiết:

Quan sát hình dáng đồ thị, ta thấy hình vẽ bên là dạng đồ thị $y=a^x$ với cơ số $0<a<1$. Loại ngay hai phương án B, D.

Lại thấy đồ thị đi qua điểm $\left(1;\dfrac{1}{2}\right)$ nên chọn phương án A.