IV. Bổ sung một số vấn đề về nguyên hàm

Nguyên hàm của các dạng hàm số đặc biệt

Phần này đưa ra cách tìm nguyên hàm bằng cách biến đổi hàm số đã cho thành đạo hàm của một hàm số, từ đó tìm được nguyên hàm của hàm số đó.

Dạng 1: Nguyên hàm của các hàm số dạng tích, thương.

Cho hai hàm số $u=u(x)$ và $v=v(x)$ có đạo hàm liên tục trên K.

Lúc này ta có bảng sau:

Dạng	Cấu trúc hàm số	Nguyên hàm
Tổng	$f(x)=u'+v'=(u+v)'$	$F(x)=u+v$
Hiệu	$f(x)=u'-v'=(u-v)'$	$F(x)=u-v$
Tích	$f(x)=u'v+uv'=(uv)'$	$F(x)=uv$
Thương	$f(x)=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}=\left(\dfrac{u}{v}\right)'$	$F(x)=\dfrac{u}{v}$

Ví dụ 1: Nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{1}{1+e^x}$ là

A. $\int f(x)dx=x-\ln(e^x+1)+C$ **B.** $\int f(x)dx=\ln(e^x+1)+C$

C. $\int f(x)dx=\dfrac{\ln(e^x+1)}{x}+C$ **D.** $\int f(x)dx=x\ln(e^x+1)+C$

Đáp án A.

Lời giải

Thay vì đi tìm nguyên hàm của hàm số theo cách truyền thống, ta có thể giải bài toán bằng bảng ở trên như sau:

$$f(x)=\frac{1}{1+e^x}=\frac{(1+e^x)-e^x}{1+e^x}=1-\frac{e^x}{1+e^x}=x'-\frac{(1+e^x)'}{1+e^x}=x'-\left(\ln(e^x+1)\right)'$$

$$=\left(x-\ln(e^x+1)\right)'\Rightarrow\int f(x)dx=x-\ln(e^x+1)+C$$

Ví dụ 2: Nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{1}{(\ln x)^2}-\dfrac{1}{\ln x}$ là

A. $\int f(x)dx=\dfrac{1}{\ln^3 x}+\dfrac{1}{\ln^2 x}+C.$ **B.** $\int f(x)dx=\dfrac{1}{\ln^3 x}-\dfrac{1}{\ln^2 x}+C.$

C. $\int f(x)dx=\dfrac{x}{\ln x}+C.$ **D.** $\int f(x)dx=\dfrac{-x}{\ln x}+C.$

Đáp án D.

Lời giải

Ta có $f(x)=\dfrac{1}{(\ln x)^2}-\dfrac{1}{\ln x}=\dfrac{1-\ln x}{(\ln x)^2}=\dfrac{(-x)'.\ln x-(-x).(\ln x)'}{(\ln x)^2}=\left(\dfrac{-x}{\ln x}\right)'$

$$\Rightarrow\int f(x)dx=\frac{-x}{\ln x}+C$$

Ví dụ 3: Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=x.\ln(ex^2)$ với $x>0.$

A. $F(x)=ex^2.\ln(ex)+C.$ **B.** $F(x)=x^2.\ln(ex)+C.$

C. $F(x)=x^2.\ln x+C.$ **D.** $F(x)=x\ln x+C.$

Đáp án C

Lời giải

Ta có

$f(x) = x.(\ln e + 2\ln x) = x(1 + 2\ln x) = x^2.\frac{1}{x} + (2x)\ln x = x^2.(\ln x)' + (x^2)'.\ln x$

$= (x^2 \ln x)' \Rightarrow F(x) = x^2.\ln x + C$

Dạng 2: Các dạng nguyên hàm đơn giản chứa hàm e^x.

Bảng nhận dạng nguyên hàm và đạo hàm của hàm số chứa e^x.

Đặc trưng	Nguyên hàm	Hàm số (đạo hàm)
e^x	$F(x) = u(x).e^x$	$F'(x) = [u'(x) + u(x)]e^x = f(x)$
e^{-x}	$F(x) = u(x).e^{-x}$	$F'(x) = [u'(x) - u(x)]e^{-x} = f(x)$
e^{ax+b}	$F(x) = u(x)e^{ax+b}$	$F'(x) = [u'(x) + au(x)]e^{ax+b} = f(x)$
$e^{v(x)}$	$F(x) = u(x)e^{v(x)}$	$F'(x) = [u'(x) + v'(x)u(x)]e^{v(x)} = f(x)$

Ví dụ 1: Nguyên hàm của hàm số $f(x) = (5x^2 + 13x + 9)e^x$ là

A. $F(x) = (5x^2 + 6)e^x + C.$ **B.** $F(x) = e^x(x^2 + 1) + 5x + C.$

C. $F(x) = (5x^2 + 3x)e^x + C.$ **D.** $F(x) = (5x^2 + 3x + 6)e^x + C.$

Đáp án D.

Lời giải

Ta có $f(x) = (10x + 3 + 5x^2 + 3x + 6)e^x = \left[(5x^2 + 3x + 6)' + 5x^2 + 3x + 6\right]e^x$

Từ bảng nhận dạng nguyên hàm phía trên $\Rightarrow F(x) = (5x^2 + 3x + 6)e^x + C$ là nguyên hàm của hàm số đã cho.

Ví dụ 2: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{e^x + x.e^x.\ln x}{x}$.

A. $F(x) = e^x.\ln 2x + C.$ **B.** $F(x) = e^x.\ln x + C.$

C. $F(x) = e^{-x}.\ln x + C.$ **D.** $F(x) = -e^x.\ln x + C.$

Đáp án B.

Lời giải

Ta có $f(x) = \frac{e^x + x.e^x.\ln x}{x} = \frac{(1 + x\ln x)e^x}{x} = \left(\frac{1}{x} + \ln x\right)e^x = \left[(\ln x)' + \ln x\right]e^x$

$\Rightarrow F(x) = e^x.\ln x + C$ là nguyên hàm của hàm số đã cho.

Ví dụ 3: Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \left(-\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}\right)e^{-x}$ là

A. $F(x) = \frac{e^{-x}}{x} + C.$ **B.** $F(x) = \frac{e^{-x}}{x^2} + C.$ **C.** $F(x) = \frac{e^{-x}}{-x} + C.$ **D.** $F(x) = \frac{e^{-x}}{-x^2} + C.$

Đáp án A.

Lời giải

Ta có $f(x) = \left(-\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}\right)e^{-x} = \left[\left(\frac{1}{x}\right)' - \frac{1}{x}\right]e^{-x} \Rightarrow F(x) = \frac{e^{-x}}{x} + C$ là nguyên hàm của hàm số đã cho.

Tương tự với hai nhận dạng còn lại, quý độc giả có thể áp dụng vào các bài toán phức tạp hơn.

Nguyên hàm một số hàm lượng giác

a. Dạng $\int \sin^m x.\cos^n x dx$ trong đó m,n là các số tự nhiên.

Trường hợp 1: Trong hai số m, n có ít nhất một số lẻ.

Lũy thừa của $\cos x$ là số lẻ, $n=2k+1$ thì đổi biến $u=\sin x$	Lũy thừa của $\sin x$ là số lẻ, $m=2k+1$ thì đổi biến $u=\cos x$
$\int \sin^m x.\cos^n x dx = \int \sin^m x\left(\cos^2 x\right)^k \cos x dx$ $= \int \sin^m x\left(1-\sin^2 x\right)^k.\left(\sin x\right)' dx$ $\boxed{= \int u^m\left(1-u^2\right)^k du}$	$\int \sin^m x.\cos^n x dx = \int \cos^n x\left(\sin^2 x\right)^k \sin x dx$ $= -\int \cos^n x.\left(1-\cos^2 x\right)^k\left(\cos x\right)' dx$ $\boxed{= -\int \left(1-u^2\right)^k.u^n du}$

Ví dụ 1: Tìm $\int \sin^5 x.\cos^2 x dx$.

Lời giải

Vì lũy thừa của $\sin x$ là số lẻ nên ta đổi biến $u=\cos x \Rightarrow du = \left(\cos x\right)' dx$.

$$\int \sin^5 x.\cos^2 x dx = -\int \left(1-\cos^2 x\right)^2.\cos^2 x.\left(\cos x\right)' dx$$

$$= -\int \left(1-u^2\right)^2.u^2 du = \int \left(2u^4-u^2-u^6\right) du = \frac{2u^5}{5}-\frac{u^3}{3}-\frac{u^7}{7}+C$$

$$= \frac{2\cos^5 x}{5}-\frac{\cos^3 x}{3}-\frac{\cos^7 x}{7}+C.$$

Trường hợp 2: Cả hai số m, n đều là số chẵn: Ta sử dụng công thức hạ bậc để giảm một nửa số mũ của $\sin x;\cos x$, để làm bài toán trở nên đơn giản hơn.

b. Dạng $\int \sin mx.\cos nx dx$, $\int \sin mx.\sin nx dx$, $\int \cos mx.\cos nx dx$.

Ta sử dụng công thức biến đổi tích thành tổng trong lượng giác.

c. Dạng $\int \frac{\tan^m x}{\cos^n x} dx$ trong đó m,n là các số nguyên.

Lũy thừa của $\cos x$ là số nguyên dương chẵn, $n=2k$ thì ta đổi biến $u=\tan x$	Lũy thừa của $\tan x$ là số nguyên dương lẻ, $m=2k+1$ thì ta đổi biến $u=\frac{1}{\cos x}$
$\int \frac{\tan^m x}{\cos^n x} dx = \int \frac{\tan^m x}{\cos^{2k-2} x}.\frac{1}{\cos^2 x} dx$ $= \int \frac{\tan^m x}{\left(\cos^2 x\right)^{k-1}}.\left(\tan x\right)' dx$ $= \int \tan^m x.\left(1+\tan^2 x\right)^{k-1}.d\left(\tan x\right)$ $\boxed{= \int u^m.\left(1+u^2\right)^{k-1} du}$	Khi đó $u' = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$, do đó $\int \frac{\tan^m x}{\cos^n x} dx = \int \frac{\tan^{2k} x}{\cos^{n-1} x}.\frac{\tan x}{\cos x} dx$ $= \int \frac{\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)^k}{\cos^{n-1} x}.\frac{\sin x}{\cos^2 x} dx$ $\boxed{= \int \left(u^2-1\right)^k u^{n-1}.du}$

Ví dụ 2: Tìm nguyên hàm

a. $\int \frac{\tan^6 x}{\cos^4 x}dx$ b. $\int \frac{\tan^5 x}{\cos^7 x}dx$.

Lời giải

a. Do lũy thừa của $\cos x$ là số nguyên dương chẵn nên đặt $u = \tan x$. Từ công thức tổng quát đã chứng minh ở trên ta có

$$\int \frac{\tan^6 x}{\cos^4 x}dx = \int u^6.\left(1+u^2\right)^1 du = \frac{u^9}{9} + \frac{u^7}{7} + C = \frac{\tan^9 x}{9} + \frac{\tan^7 x}{7} + C.$$

b. Do lũy thừa của $\tan x$ là một số lẻ nên ta đặt $u = \frac{1}{\cos x}$, do vậy, từ công thức tổng quát chứng minh ở trên ta có

$$\int \frac{\tan^5 x}{\cos^7 x}dx = \int \left(u^2 - 1\right)^2.u^6 du = \frac{u^{11}}{11} - \frac{2u^9}{9} + \frac{u^7}{7} + C$$

$$= \frac{1}{11\cos^{11} x} - \frac{2}{9\cos^9 x} + \frac{1}{7\cos^7 x} + C.$$

Đổi biến lượng giác

Khi nguyên hàm, tích phân của các hàm số mà biểu thức của nó có chứa các dạng $\sqrt{x^2 + a^2}, \sqrt{x^2 - a^2}, \sqrt{a^2 - x^2}$, thì ta có cách biến đổi lượng giác như sau:

Biểu thức có chứa	Đổi biến
$\sqrt{x^2 + a^2}$	$x = \lvert a\rvert \tan t,\ t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ Hoặc $x = \lvert a\rvert \cot t, t \in (0;\pi)$
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$x = \frac{\lvert a\rvert}{\sin t}, t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \setminus \{0\}$ Hoặc $x = \frac{\lvert a\rvert}{\cos t}, t \in [0;\pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$x = \lvert a\rvert \sin t,\ t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ Hoặc $x = \lvert a\rvert \cos t, t \in [0;\pi]$
$\sqrt{\frac{a+x}{a-x}} \vee \sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$	$x = a\cos 2t$
$\sqrt{(x-a)(b-x)}$	$x = a + (b-a)\sin^2 t, t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

Nguyên hàm của hàm phân thức hữu tỉ

STUDY TIP
Kí hiệu $\deg\left(P(x)\right)$ là bậc của đa thức $P(x)$.

Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có dạng $f\left(x\right)=\dfrac{P\left(x\right)}{Q\left(x\right)}$ trong đó P và Q là các đa thức, và P không chia hết cho Q.

Hàm $f\left(x\right)$ được gọi là hàm **phân thức hữu tỉ thực sự** nếu $\deg\left(P\right)<\deg\left(Q\right)$.

Trong các bài toán tìm nguyên hàm và tích phân của hàm phân thức hữu tỉ, nếu $f\left(x\right)$ chưa phải là hàm phân thức hữu tỉ thực sự thì ta thực hiện chia tử thức cho mẫu thức để được

$$f\left(x\right)=\frac{P\left(x\right)}{Q\left(x\right)}=S\left(x\right)+\frac{R\left(x\right)}{Q\left(x\right)}=S\left(x\right)+h\left(x\right),$$

Khi đó, $h\left(x\right)$ sẽ là hàm phân thức hữu tỉ thực sự.

Định lý: Một phân thức thực sự luôn phân tích được thành tổng các phân thức đơn giản hơn.

Đó là các biểu thức có dạng $\dfrac{1}{x-a};\dfrac{1}{\left(x-a\right)^k};\dfrac{ax+b}{x^2+px+q};\dfrac{ax+b}{\left(x^2+px+q\right)^k}$ là các hàm số có thể tìm nguyên hàm một cách dễ dàng. Để tách được phân thức ta dùng phương pháp hệ số bất định.

a. Trường hợp phương trình $Q\left(x\right)=0$ không có nghiệm phức và các nghiệm đều là nghiệm đơn.

$$Q\left(x\right)=\left(a_1x+b_1\right)\left(a_2x+b_2\right)...\left(a_kx+b_k\right)$$

(Số nhân tử chính bằng bậc của đa thức $Q\left(x\right)$).

Trong trường hợp này, g có thể biểu diễn dưới dạng

$$g\left(x\right)=\frac{R\left(x\right)}{Q\left(x\right)}=\frac{A_1}{a_1x+b_1}+\frac{A_2}{a_2x+b_2}+...+\frac{A_k}{a_kx+b_k}$$

Sau khi biểu diễn được $g\left(x\right)$ về dạng này, bài toán trở thành bài toán cơ bản.

Ví dụ 3: Họ nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{4x-3}{x^2-3x+2}$ là

A. $F\left(x\right)=4\ln\left|x-2\right|+\ln\left|\dfrac{x-1}{x-2}\right|+C$

B. $F\left(x\right)=4\ln\left|x-2\right|-\ln\left|\dfrac{x-1}{x-2}\right|+C$

C. $F\left(x\right)=-4\ln\left|x-2\right|-\ln\left|\dfrac{x-2}{x-1}\right|+C$

D. $F\left(x\right)=4\ln\left|x-2\right|-\ln\left|\dfrac{x-2}{x-1}\right|+C$

Đáp án B.

Phân tích: Ta có $\dfrac{4x-3}{x^2-3x+2}=\dfrac{4x-3}{\left(x-2\right)\left(x-1\right)}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x-2}=\dfrac{Ax-2A+Bx-B}{\left(x-1\right)\left(x-2\right)}$.

Khi đó $\left(A+B\right)x-2A-B=4x-3$, đồng nhất hệ số thì ta được

$$\begin{cases}A+B=4\\2A+B=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=-1\\B=5\end{cases}$$

Kiểm tra khả năng vận dụng từ ví dụ 3

Tìm $\displaystyle\int\frac{x^2+2x-1}{2x^3+3x^2-2x}dx$

Lời giải

Ta có $\displaystyle\int\frac{4x-3}{x^2-3x+2}dx=\int\left(\frac{-1}{x-1}+\frac{5}{x-2}\right)dx=-\ln\left|x-1\right|+5.\ln\left|x-2\right|+C$

$= 4.\ln|x-2| + \ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right| + C = 4.\ln|x-2| - \ln\left|\frac{x-1}{x-2}\right| + C$.

Đáp số bài tập kiểm tra khả năng vận dụng:

$$\int \frac{x^2+2x-1}{2x^3+3x^2-2x}dx = \frac{1}{2}.\ln|x| + \frac{1}{10}.\ln|2x-1| - \frac{1}{10}.\ln|x+2| + C$$

b. Trường hợp $Q(x)=0$ không có nghiệm phức, nhưng có nghiệm thực là nghiệm bội.

Nếu phương trình $Q(x)=0$ có các nghiệm thực $a_1; a_2; ...; a_n$ trong đó a_1 là nghiệm bội k thì ta phân tích $g(x) = \frac{R(x)}{Q(x)}$ về dạng

$$g(x) = \frac{A_1}{(x-a_1)} + \frac{A_2}{(x-a_1)^2} + ... + \frac{A_k}{(x-a_1)^k} + \frac{B_1}{x-a_2} + \frac{B_2}{x-a_3} + ... + \frac{B_{n+1}}{x-a_n}$$

Trên đây là phần lý thuyết khá phức tạp, ta đến với bài tập ví dụ đơn giản sau:

Ví dụ 4: Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2x}{(1-x)^3}$ là

A. $F(x) = \frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} + C$ **B.** $F(x) = \frac{2}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2} + C$

C. $F(x) = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{4(1-x)^4} + C$ **D.** $F(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{4(1-x)^4} + C$

Phân tích: Nhận thấy $x=1$ là nghiệm bội ba của phương trình $(x-1)^3 = 0$, do đó ta biến đổi $\frac{2x}{(1-x)^3} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{(1-x)^2} + \frac{C}{(1-x)^3} = \frac{A(x^2-2x+1) + B(1-x) + C}{(1-x)^3}$

$$= \frac{Ax^2 + (-2A-B)x + A + B + C}{(1-x)^3}$$

Từ đây ta có $\begin{cases} A = 0 \\ -2A - B = 2 \\ A + B + C = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = -2 \\ C = 2 \end{cases}$

Lời giải

Ta có $\int \frac{2x}{(1-x)^3}dx = \int \left(\frac{-2}{(1-x)^2} + \frac{2}{(1-x)^3}\right)dx = \frac{2}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2} + C$

Đáp số bài tập kiểm tra khả năng vận dụng ví dụ 4

$$\int \frac{x^4-2x^2+4x+1}{x^3-x^2-x+1}dx = \frac{x^2}{2} + x - \ln|x+1| + \ln|x-1| - \frac{2}{x-1} + C.$$

Kiểm tra khả năng vận dụng từ ví dụ 4

Tìm

$$\int \frac{x^4-2x^2+4x+1}{x^3-x^2-x+1}dx$$

TỔNG QUÁT: Việc tính nguyên hàm của hàm phân thức hữu tỉ thực sự được đưa về các dạng nguyên hàm sau:

1. $\int \frac{A}{x-a}dx = A.\ln|x-a| + C$, $k \neq 1$

2. $\int \frac{A}{(x-a)^k}dx = -\frac{A}{k-1}.\frac{1}{(x-a)^{k-1}} + C$.