Tích phân hàm lượng giác

A. MỘT SỐ CÔNG THỨC VÀ KĨ NĂNG BIẾN ĐỔI

Các công thức nguyên hàm của hàm lượng giác

$\int \cos(ax+b)\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\sin(ax+b)+C.$ $\int \sin(ax+b)\mathrm{d}x = -\frac{1}{a}\cos(ax+b)+C.$

$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x(ax+b)} = \frac{1}{a}\tan(ax+b)+C.$ $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2(ax+b)} = -\frac{1}{a}\cot(ax+b)+C.$

B. CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1: Tính tích phân: $I_1 = \int_{a_1}^{b_1} (\sin x)^n \mathrm{d}x; I_2 = \int_{a_2}^{b_2} (\cos x)^n \mathrm{d}x.$

Phương pháp chung

1. Nếu n chẵn thì ta sử dụng công thức hạ bậc.
2. Nếu $n=3$ thì ta sử dụng công thức hạ bậc hoặc biến đổi theo trường hợp 3.
3. Nếu $n\geq 3$ và n lẻ $(n=2p+1)$ thì ta thực hiện biến đổi.

$$I_1 = \int_{a_1}^{b_1} (\sin x)^n \mathrm{d}x = \int_{a_1}^{b_1} (\sin x)^{2p+1} \mathrm{d}x = \int_{a_1}^{b_1} (\sin x)^{2p}.\sin x\mathrm{d}x = -\int_{a_1}^{b_1} (1-\cos^2 x)^p \mathrm{d}(\cos x)$$

Sử dụng công thức khai triển nhị thức Newton để khai triển $(1-\cos^2 x)^p$.

Từ đây ta giải quyết được bài toán.

$$I_2 = \int_{a_2}^{b_2} (\cos x)^n \mathrm{d}x = \int_{a_2}^{b_2} (\cos x)^{2p+1} \mathrm{d}x = \int_{a_2}^{b_2} (\cos x)^{2p}.\cos x.\mathrm{d}x = \int_{a_2}^{b_2} (1-\sin^2 x)^p \mathrm{d}(\sin x).$$

Sử dụng công thức khai triển nhị thức Newton để khai triển $(1-\sin^2 x)^p$.

Từ đây ta giải quyết được bài toán.

Ví dụ 1: Cho $I = \int_0^{\frac{\pi}{10}} \cos^4 3x\mathrm{d}x.$ Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $I = \left[\frac{3}{8}x + \frac{1}{12}\sin 6x + \frac{1}{96}\sin 12x\right]\Big|_0^{\frac{\pi}{10}}.$

B. $I = \left[\frac{1}{12}\sin 6x + \frac{1}{96}\sin 12x\right]\Big|_0^{\frac{\pi}{10}}.$

C. $I = \left[-\frac{3}{8}x + \frac{1}{12}\sin 6x + \frac{1}{96}\sin 12x\right]\Big|_0^{\frac{\pi}{10}}.$

D. $I = \left[\frac{3}{8}x - \frac{1}{96}\sin 12x\right]\Big|_0^{\frac{\pi}{10}}.$

Đáp án A.

Ta thấy bậc của cos3x là 4 là một số chẵn. Từ 1 trong phần phương pháp chung ta sẽ sử dụng công thức hạ bậc như lời giải bên.

Lời giải

Ta có

$$\int_0^{\frac{\pi}{10}} \left(\frac{1+\cos 6x}{2}\right)^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{10}} (1+2\cos 6x+\cos^2 6x)\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{10}} \left(1+2\cos 6x+\frac{1+\cos 12x}{2}\right)\mathrm{d}x$$

$$= \left[\frac{3}{8}x + \frac{1}{12}\sin 6x + \frac{1}{96}\sin 12x\right]\Big|_0^{\frac{\pi}{10}}.$$

Ví dụ 2: Cho:

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}(\sin 5x)^9\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{5}\left(\cos 5x+a\cos^3 5x+b\cos^5 5x+c\cos^7 5x+\frac{1}{9}\cos^9 5x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{3}}.$$

Đặt $S=a+b+c$. Giá trị của S bằng

A. $S=3$. **B.** $S=-\dfrac{74}{105}$. **C.** $S=-\dfrac{5}{4}$. **D.** $S=\dfrac{1}{9}$.

Trong bài toán này, bậc của sin5x là bậc lẻ do đó ta làm theo hướng 3 trong phương pháp chung phía trên.

Đáp án B.

Lời giải

Ta có $I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}(\sin 5x)^8\sin 5x\mathrm{d}x=-\frac{1}{5}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(1-\cos^2 5x\right)^4\mathrm{d}(\cos 5x)$

$$=-\frac{1}{5}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left[1-4\cos^2 5x+6\cos^4 5x-4\cos^6 5x+\cos^8 5x\right]\mathrm{d}(\cos 5x)$$

$$=-\frac{1}{5}\left(\cos 5x-\frac{4}{3}\cos^3 5x+\frac{6}{5}\cos^5 5x-\frac{4}{7}\cos^7 5x+\frac{1}{9}\cos^9 5x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$\Rightarrow a=-\frac{4}{3};b=\frac{6}{5};c=-\frac{4}{7}\Rightarrow S=-\frac{74}{105}.$$

Dạng 2*: Tính tích phân $I=\int_a^b \sin^m x.\cos^n x\mathrm{d}x$.

Phương pháp chung

a. Trường hợp 1: *m; n* là các số nguyên

1. Nếu m chẵn, n chẵn thì sử dụng công thức hạ bậc, biến đổi tích thành tổng.

2. Nếu m chẵn, n lẻ $(n=2p+1)$ thì biến đổi

$$I=\int_a^b(\sin x)^m(\cos x)^{2p+1}\mathrm{d}x=\int_a^b(\sin x)^m(\cos x)^{2p}\cos x\mathrm{d}x$$

$$=\int_a^b(\sin x)^m\left(1-\sin^2 x\right)^p\mathrm{d}(\sin x).$$

Sử dụng công thức khai triển nhị thức Newton để khai triển và giải quyết bài toán.

3. Nếu m lẻ $(m=2p+1)$, n chẵn thì ta biến đổi

$$I=\int_a^b(\sin x)^{2p+1}.(\cos x)^n\mathrm{d}x=\int_a^b(\sin x)^{2p}.(\cos x)^n.\sin x\mathrm{d}x$$

$$=-\int_a^b\left(1-\cos^2 x\right)^p.(\cos x)^n\mathrm{d}(\cos x).$$

Sử dụng công thức khai triển nhị thức Newton để khai triển và giải quyết bài toán.

4. Nếu m lẻ, n lẻ thì sử dụng biến đổi 2 hoặc 3 cho số mũ lẻ bé hơn.

b. Trường hợp 2: *m; n* là các số hữu tỉ

$$I=\int_a^b\sin^m x.\cos^n x\mathrm{d}x=\int_a^b(\sin x)^m.\left(\cos^2 x\right)^{\frac{n-1}{2}}\cos x\mathrm{d}x=\int_{\sin a}^{\sin b}u^m\left(1-u^2\right)^{\frac{n-1}{2}}\mathrm{d}u\,(*)$$

Ví dụ 1: Cho $I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}(\sin 2x)^7.(\cos 2x)^{100}\,dx$. Đẳng thức nào sau đây là đúng?

A. $I=\left[\frac{(\cos 2x)^{101}}{101}-\frac{3(\cos 2x)^{103}}{103}+\frac{3(\cos 2x)^{105}}{105}-\frac{(\cos 2x)^{107}}{107}\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{3}}$.

B. $I=-2\left[\frac{(\cos 2x)^{101}}{101}+\frac{3(\cos 2x)^{103}}{103}+\frac{3(\cos 2x)^{105}}{105}+\frac{(\cos 2x)^{107}}{107}\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{3}}$.

C. $I=-\frac{1}{2}\left[\frac{(\cos 2x)^{101}}{101}-\frac{3(\cos 2x)^{103}}{103}+\frac{3(\cos 2x)^{105}}{105}-\frac{(\cos 2x)^{107}}{107}\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{3}}$.

D. $I=\frac{1}{2}\left[\frac{(\cos 2x)^{101}}{101}-\frac{3(\cos 2x)^{103}}{103}+\frac{3(\cos 2x)^{105}}{105}-\frac{(\cos 2x)^{107}}{107}\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{3}}$.

Đáp án C.

Lời giải

Trong bài toán này, ta thấy *m* lẻ, *n* chẵn nên ta áp dụng phương pháp 3 trong bài toán tổng quát phía trên.

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}(\cos 2x)^{100}.(\sin 2x)^6.\sin 2x\,dx=-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}(\cos 2x)^{100}\left(1-\cos^2 2x\right)^3 d(\cos 2x)$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}(\cos 2x)^{100}.\left(1-3\cos^2 2x+3\cos^4 2x-\cos^6 2x\right)d(\cos 2x)$$

$$=-\frac{1}{2}\left[\frac{(\cos 2x)^{101}}{101}-\frac{3(\cos 2x)^{103}}{103}+\frac{3(\cos 2x)^{105}}{105}-\frac{(\cos 2x)^{107}}{107}\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{3}}.$$

Dạng 3: Tính tích phân $I_1=\int_{a_1}^{b_1}(\tan x)^n\,dx;\ I_2=\int_{a_2}^{b_2}(\cot x)^n\,dx\ \left(n\in\mathbb{N}^*\right)$.

Phương pháp chung

Sử dụng các công thức sau:

$$\int\left(1+\tan^2 x\right)dx=\int\frac{dx}{\cos^2 x}=\int d(\tan x)=\tan x+C.$$

$$\int\left(1+\cot^2 x\right)dx=\int\frac{dx}{\sin^2 x}=-\int d(\cot x)=-\cot x+C.$$

$$\int\tan x\,dx=\int\frac{\sin x}{\cos x}dx=-\int\frac{d(\cos x)}{\cos x}=-\ln|\cos x|+C.$$

$$\int\cot x\,dx=\int\frac{\cos x}{\sin x}dx=\int\frac{d(\sin x)}{\sin x}=\ln|\sin x|+C.$$

Dạng 4*: Tích phân liên kết.

Phương pháp chung

Bài toán 1: Tính tích phân $I=\int_a^b\frac{\cos x\,dx}{\sin x+\cos x}$.

*$I_1=\int_a^b\frac{\cos x\,dx}{\sin x+\cos x}$. Xét tích phân liên kết $I_2=\int_a^b\frac{\sin x\,dx}{\sin x+\cos x}$.

Ta có $\begin{cases} I_1 + I_2 = \int\limits_a^b \mathrm{d}x = x\Big|_a^b \\ I_1 - I_2 = \int\limits_a^b \dfrac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x}\mathrm{d}x = \int\limits_a^b \dfrac{\mathrm{d}(\sin x + \cos x)}{\sin x + \cos x} = \ln|\sin x + \cos x|\Big|_a^b \end{cases}$

Giải hệ phương trình ta được $\boxed{\begin{cases} I_1 = \left[\dfrac{1}{2}\left(x + \ln|\sin x + \cos x|\right)\right]\Big|_a^b \\ I_2 = \left[\dfrac{1}{2}\left(x - \ln|\sin x + \cos x|\right)\right]\Big|_a^b \end{cases}}$

Bài toán 2: Tính tích phân $I_1 = \int\limits_\alpha^\beta \dfrac{\sin x\mathrm{d}x}{a\cos x + b\sin x}$.

Phương pháp chung

Xét tích phân liên kết với I_1 là $I_2 = \int\limits_\alpha^\beta \dfrac{\cos x\mathrm{d}x}{a\cos x + b\sin x}$.

Ta có $\begin{cases} bI_1 + aI_2 = \int\limits_\alpha^\beta \dfrac{a\cos x + b\sin x}{a\cos x + b\sin x}\mathrm{d}x = \int\limits_\alpha^\beta \mathrm{d}x = x\Big|_\alpha^\beta \\ bI_2 - aI_1 = \int\limits_\alpha^\beta \dfrac{b\cos x - a\sin x}{a\cos x + b\sin x}\mathrm{d}x = \int\limits_\alpha^\beta \dfrac{\mathrm{d}(a\cos x + b\sin x)}{a\cos x + b\sin x} = \ln|a\cos x + b\sin x|\Big|_\alpha^\beta \end{cases}$

Giải hệ phương trình ta được $I_1; I_2$.

Các trường hợp thường gặp:

* $I_1 = I_2$ khi đó tính $I_1 + I_2 = \alpha \Rightarrow I_1 = I_2 = \dfrac{\alpha}{2}$.

* I_2 là một tích phân đơn giản, thường thì các hàm số dưới dấu tích phân $f(x); g(x)$ (của hai tích phân liên kết) thường có tính cân xứng hoặc bổ sung cho nhau như ở bài toán 1 và bài toán 2.

Việc tìm được tích phân liên kết phụ thuộc vào kinh nghiệm giải toán của người đọc.

Từ hai bài toán trên ta đưa ra kết luận về tích phân liên kết như sau:

Trong một số bài toán tính tích phân $I_1 = \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$, ta sẽ sử dụng tích phân $I_2 = \int\limits_a^b g(x)\mathrm{d}x$ là tích phân liên kết của I_1 sao cho ta có thể xác lập được mối quan hệ ràng buộc giữa I_1 và I_2 thành hệ phương trình như sau:

$$\begin{cases} mI_1 + nI_2 = \alpha \\ pI_1 + qI_1 = \beta \end{cases}$$

Giải hệ phương trình ta dễ dàng tìm được $I_1; I_2$.