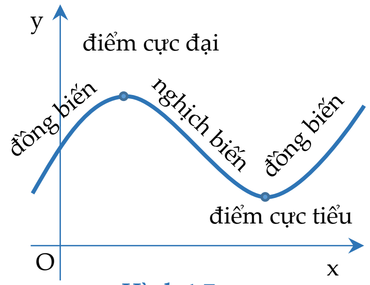
II. Cực trị của hàm số và giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số

A. Lý thuyết về cực trị của hàm số



Hình 1.7

Ở phần I ta vừa học cách sử dụng đạo hàm để tìm khoảng đơn điệu của hàm số của hàm số. Ở phần này ta sẽ xác định điểm nằm giữa khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số, và ngược lại. Những điểm này được gọi là **điểm cực trị** của đồ thị hàm số. Điểm cực trị bao gồm cả **điểm cực đại** và **điểm cực tiểu** của đồ thị hàm số. Đồ thị hàm số ở hình 1.7 có điểm cực đại là điểm phía bên trái và điểm cực tiểu ở phía bên phải (điểm được đánh dấu).

1. Định nghĩa

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên khoảng $(a;b)$ (có thể a là $-\infty$; b là $+\infty$) và điểm $x_o\in(a;b)$.

a, Nếu tồn tại số $h>0$ sao cho $f(x)<f(x_0)$ với mọi $x\in(x_0-h;x_0+h)$ và $x\neq x_0$ thì ta nói hàm số $f(x)$ đạt **cực đại** tại x_0.

b, Nếu tồn tại số $h>0$ sao cho $f(x)>f(x_0)$ với mọi $x\in(x_0-h;x_0+h)$ và $x\neq x_0$ thì ta nói hàm số $f(x)$ đạt **cực tiểu** tại x_0.

Với hàm liên tục thì hàm số sẽ đạt cực trị tại điểm làm cho $y'=0$ hoặc y' không xác định được thể hiện ở hình 1.8

STUDY TIP
Điểm cực trị của hàm số là $x=c$; còn điểm cực trị của đồ thị hàm số là điểm có tọa độ $M(c;f(c))$.

Hình 1.8

Nếu hàm số đạt cực đại hoặc cực tiểu tại $x=c$ thì $x=c$ là điểm làm cho y' bằng 0 hoặc y' không xác định.

2. Chú ý

1. Nếu hàm số $f(x)$ đạt cực đại (cực tiểu) tại x_0 thì x_0 được gọi là **điểm cực đại (điểm cực tiểu)** của hàm số ; $f(x_0)$ được gọi là **giá trị cực đại (giá trị cực tiểu)** của hàm số, kí hiệu f_{CD} (f_{CT}), còn điểm $M(x_0;f(x_0))$ được gọi là **điểm cực đại (điểm cực tiểu)** của đồ thị hàm số.
2. Các điểm cực đại và cực tiểu được gọi chung là **điểm cực trị.** Giá trị cực đại (giá trị cực tiểu) còn gọi là **cực đại (cực tiểu)** và được gọi chung là **cực trị** của hàm số.
3. Dễ dàng chứng minh được rằng, nếu hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên khoảng $(a;b)$ và đạt cực đại hoặc cực tiểu tại x_0 thì $f'(x_0)=0$ (điều kiện cần để hàm số đạt cực trị).

Chú ý

Trong các bài trắc nghiệm thường có các câu hỏi đưa ra để đánh lừa thí sinh khi phải phân biệt giữa **điểm cực trị của hàm số** và **điểm cực trị của đồ thị hàm số.**

3. Điều kiện đủ để hàm số có cực trị

Ta thừa nhận định lí sau đây

Định lý 1

Giả sử hàm số $y = f(x)$ liên tục trên khoảng $K = (x_0 - h; x_0 + h)$ và có đạo hàm trên K hoặc trên $K \setminus \{x_0\}$, với $h > 0$.

a. Nếu $f'(x) > 0$ trên khoảng $(x_0 - h; x_0)$ và $f'(x) < 0$ trên khoảng $(x_0; x_0 + h)$ thì x_0 là một điểm cực đại của hàm số $f(x)$.

b. Nếu $f'(x) < 0$ trên khoảng $(x_0 - h; x_0)$ và $f'(x) > 0$ trên khoảng $(x_0; x_0 + h)$ thì x_0 là một điểm cực tiểu của hàm số $f(x)$.

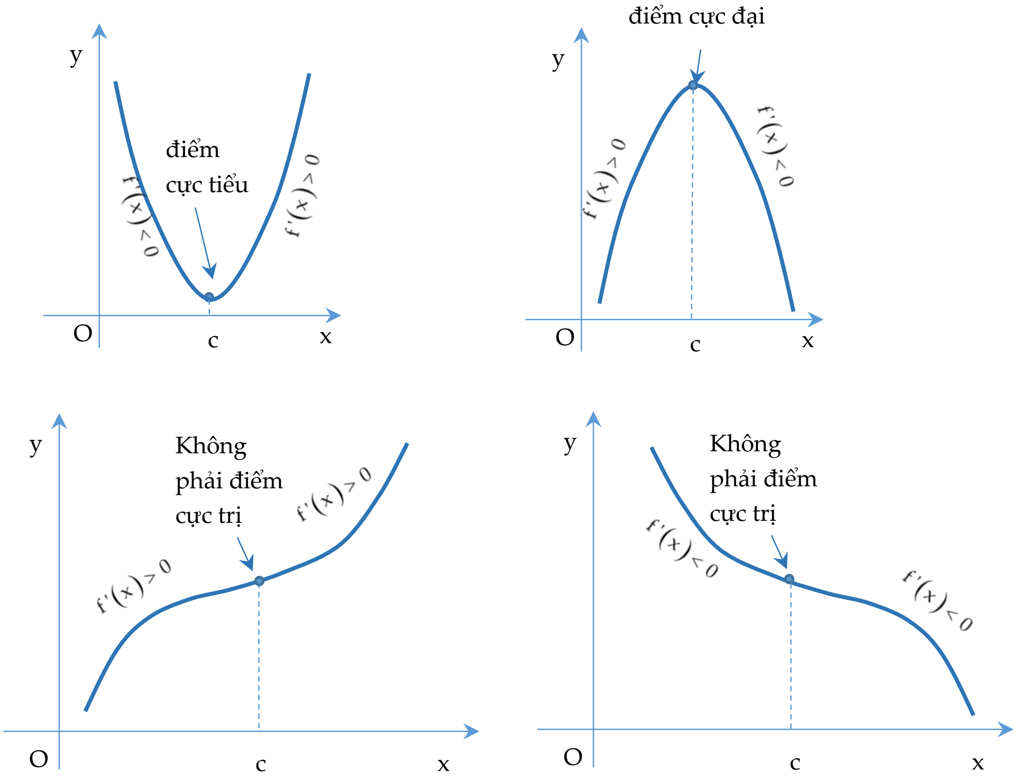
STUDY TIP

Ở định lý 1 ta có thể hiểu như sau:

* Khi $f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm qua $x = c$ thì $x = c$ được gọi là điểm cực đại của hàm số.

* Khi $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương qua $x = c$ thì $x = c$ được gọi là điểm cực tiểu của hàm số.

Hình 1.9 mô tả điều kiện đủ để hàm số có cực trị:



Hình 1.9

STUDY TIP

Nếu $x = c$ là điểm cực trị của hàm $y = f(x)$ thì $f'(c) = 0$ hoặc $f'(c)$ không xác định, nhưng nếu $f'(c) = 0$ thì chưa chắc $x = c$ đã là điểm cực trị của hàm số.

4. Quy tắc để tìm cực trị

Áp dụng định lý 1, ta có quy tắc tìm cực trị sau đây

Quy tắc 1

1. Tìm tập xác định.
2. Tính $f'(x)$. Tìm các điểm tại đó $f'(x) = 0$ hoặc không xác định (điểm tới hạn).
3. Lập bảng biến thiên.
4. Từ bảng biến thiên suy ra cực trị.

Quy tắc 2

1. Tìm tập xác định.
2. Tính $f'(x)$. Giải phương trình $f'(x) = 0$ và kí hiệu $x_i\ (i = 1, 2, 3, ..., n)$ là các nghiệm của nó.
3. Tính $f''(x)$ và $f''(x_i), (i = 1; 2; 3; ...n)$.
4. Dựa vào dấu của $f''(x_i)$ suy ra tính chất cực trị của điểm x_i.

Nếu $f''(x_i) > 0$ thì x_i là điểm cực tiểu.

Nếu $f''(x_i) < 0$ thì x_i là điểm cực đại.

B. Các dạng toán liên quan đến cực trị

Dạng 1 Xác định điểm cực trị của hàm số, điểm cực trị của đồ thị hàm số, tìm giá trị cực trị của hàm số

Phương pháp chung

Sử dụng hai quy tắc 1 và quy tắc 2 ở phần lý thuyết.

Ví dụ 1: Điểm cực trị của hàm số $f\left(x\right)=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+\frac{5}{3}$ là

A. $x=-1;x=3.$ **B.** $x=-\frac{22}{3};x=\frac{10}{3}.$

C. $x=-1;x=5.$ **D.** $x=4;x=3.$

Đáp án A.

Lời giải

Cách 1: Xét hàm số $f\left(x\right)=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+\frac{5}{3}$

Có TXĐ: $D=\mathbb{R}$. Ta có $f'\left(x\right)=x^2-2x-3;y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\x=-1\end{array}\right.$

Bảng biến thiên

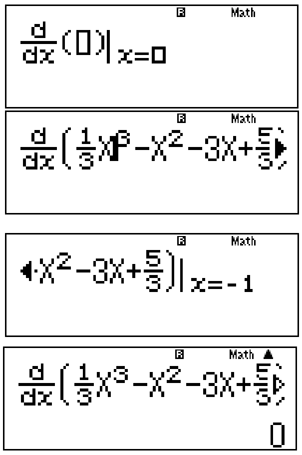
x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{10}{3}$	↘	$-\frac{22}{3}$	↗	$+\infty$

Từ BBT ta thấy hàm số có điểm cực đại $x=-1$ và điểm cực tiểu $x=3.$

Cách 2: Sử dụng MTCT.

Ta sẽ sử dụng chức năng tính đạo hàm tại một điểm của máy tính.

Ấn SHIFT $\int$ ($\frac{d}{dx}$■) thì máy hiện như hình bên.



Nhập hàm số $\frac{1}{3}X^3-X^2-3X+\frac{5}{3}$ tại giá trị $X=-1$ (Ta lần lượt thử các phương án).

Tại $x=-1$ thì $y'=0$ suy ra $x=-1$ là một điểm cực trị của hàm số.

Tương tự ta giữ nguyên màn hình và thay $x=-1$ thành $x=3$ thì được kết quả tương tự. Từ đó ta chọn A.

Chú ý

Trong STUDY TIP trang 35 có chú ý rằng $y'\left(c\right)=0$ thì $x=c$ chưa chắc đã là điểm cực trị của hàm số, do vậy ta cần thử xem y' có đổi dấu qua $x=c$ hay không.

Ví dụ 2: Điểm cực trị của hàm số $f\left(x\right)=x^3+3x^2+3x+5$ là

A. $x=-1;x=-3.$ **B.** $x=1;x=-3.$

C. $x=0;x=1.$ **D.** hàm số không có điểm cực trị.

Đáp án D.

Lời giải

TXĐ: $D=\mathbb{R}$. Ta có $y'=3\left(x+1\right)^2\ge0,\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow$ hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Ta có BBT:

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$

Từ BBT suy ra hàm số không có cực trị.

Nhận xét:

> Từ ví dụ 1 và ví dụ 2 ta nhận thấy với hàm số bậc ba có dạng $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d,\ a \neq 0$ thì khi tìm cực trị của hàm số ta nên giải bằng cách 1 (xét phương trình $y' = 0$) thay vì sử dụng máy tính bởi phương trình $y' = 0$ là phương trình bậc hai giải quyết nhanh chóng hơn việc bấm máy thử trường hợp, tham khảo STUDY TIP bên cạnh để suy luận nhanh trong bài toán này.

STUDY TIP

Xét hàm số bậc ba $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ với $(a \neq 0)$ có $\Delta_{y'} = b^2 - 3ac$

* Nếu $b^2 - 3ac > 0$ thì hàm số có hai cực trị.
* Nếu $b^2 - 3ac \leq 0$ thì hàm số không có cực trị.

Ví dụ 3: Xét hai hàm số $f(x) = -x^4 + 2x^2 + 1$ và hàm số $g(x) = -\frac{1}{4}x^4 - x^2 + \frac{5}{4}$.

Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

A. Hàm số $f(x)$ có hai điểm cực đại là $A(1;2)$ và $B(-1;2)$.

B. Hàm số $f(x)$ có điểm cực tiểu là $x = 0$ và hàm số $g(x)$ có giá trị cực đại là $y = \frac{5}{4}$.

C. Hàm số $f(x)$ có hai điểm cực tiểu và một điểm cực đại, hàm số $g(x)$ có một điểm cực đại.

D. Hàm số $f(x)$ và hàm số $g(x)$ cùng có điểm cực tiểu là $x = 0$.

Đáp án B.

Lời giải

Từ bài toán xét sự biến thiên tổng quát của hàm số bậc bốn trùng phương mà tôi đã giới thiệu ở phần trước thì ta có:

Hàm số $f(x) = -x^4 + 2x^2 + 1$ có $\frac{b}{a} = -2 < 0$ nên phương trình $f'(x) = 0$ có ba nghiệm phân biệt là $\left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -\sqrt{-\frac{b}{2a}} = -1. \\ x = \sqrt{-\frac{b}{2a}} = 1 \end{array}\right.$

Kết hợp với STUDY TIP trang 22 thì ta có $f(x)$ có hệ số $a = -1 < 0$ ta có nhanh bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	$+\infty$

* Từ đây ta loại C do hàm số $f(x)$ có hai điểm cực đại và một điểm cực tiểu.

* Ta loại A do hàm số $f(x)$ có hai điểm cực đại là $x=-1$ và $x=1$. Còn $A(-1;2)$ và $B(1;2)$ là hai điểm cực đại **của đồ thị hàm số**, chứ không phải của **hàm số** (xem lại chú ý đầu tiên (phần mở đầu chủ đề cực trị của hàm số) về phân biệt các khái niệm).

* Để loại một trong hai phương án B và D còn lại ta tiếp tục xét hàm số $g(x)$

TXĐ: $D=\mathbb{R}$. Ta có $y'=-x^3-2x; y'=0 \Leftrightarrow x=0$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$\frac{5}{4}$	↘ $+\infty$

Từ BBT ta loại D do $x=0$ là điểm cực đại của hàm số $g(x)$. Vậy ta chọn B.

Đối với hàm bậc bốn trùng phương dạng $y=ax^4+bx^2+c\ (a\neq 0)$

STUDY TIP
Đối với hàm bậc bốn trùng phương có dạng $y=ax^4+bx^2+c,(a\neq 0)$ thì nếu:
$ab\geq 0$ thì hàm số có một điểm cực trị là $x=0$.
$ab<0$ thì hàm số có ba điểm cực trị là $x=0; x=\pm\sqrt{-\frac{b}{2a}}$.

Ta có $y'=4ax^3+2bx=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ 2ax^2+b=0 \Leftrightarrow x^2=-\frac{b}{2a}\end{array}\right.$

Số điểm cực trị phụ thuộc vào nghiệm của phương trình $2ax^2+b=0$.

a. Nếu $\frac{b}{2a}<0$ (tức a; b trái dấu) thì hàm số có ba điểm cực trị là $x=0; x=\pm\sqrt{-\frac{b}{2a}}$

b. Nếu $\frac{b}{2a}\geq 0$ (tức a; b cùng dấu hoặc $b=0$ thì hàm số có duy nhất một điểm cực trị là $x=0$.

Tiếp tục là một bài toán áp dụng kết quả vừa thu được.

Ví dụ 4: Cho hàm số $y=-x^4+2x^2+1$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. Hàm số có một điểm cực đại và hai điểm cực tiểu.
B. Hàm số có hai điểm cực đại và một điểm cực tiểu.
C. Hàm số có một cực đại và không có cực tiểu.
D. Hàm số có một điểm cực đại và một điểm cực tiểu.

Đáp án B.

STUDY TIP
Đối với hàm bậc bốn trùng phương có dạng $y=ax^4+bx^2+c$, $(a\neq 0)$ có $ab<0$, khi đó nếu:
a. $a<0$ thì $x=0$ là điểm cực tiểu; $x=\pm\sqrt{-\frac{b}{2a}}$ là hai điểm cực đại của hàm số.
b. $a>0$ thì ngược lại $x=0$ là điểm cực đại; $x=\pm\sqrt{-\frac{b}{2a}}$ là hai điểm cực tiểu của hàm số.

Lời giải

Áp dụng kết quả vừa thu được ta có kết luận hàm số luôn có ba điểm cực trị do hai hệ số *a*, *b* trái dấu.

Mặt khác hệ số $a=-1<0$ nên đồ thị hàm số có dạng chữ **M** (mẹo nhỏ), do vậy hàm số có hai điểm cực đại và một cực tiểu.

Đến đây ta tiếp tục thu được kết luận ở phần STUDY TIP.

Chú ý: Cần phân biệt rõ các khái niệm về **"điểm cực trị của hàm số"** và **"cực trị của hàm số"** để tránh nhầm lẫn.

Ví dụ 5: Cho hàm số $y=-x^4+6x^2-8x+1$. Kết luận nào sau đây là đúng?

A. Hàm số đạt cực đại tại $x=-2$ và đạt cực tiểu tại $x=1$.
B. Hàm số có giá trị cực đại là $y=25$ và giá trị cực tiểu là $y=-2$.
C. Hàm số có duy nhất một điểm cực trị $x=-2$ là điểm cực đại.
D. Đồ thị hàm số đã cho có một điểm cực tiểu là $A(-2;25)$.

Đáp án C.

Lời giải

TXĐ: $D=\mathbb{R}$. Ta có $y'=-4x^3+12x-8; y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=1 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	25	↘		↘	$+\infty$

Hàm số đạt cực đại tại điểm $x=-2$. Từ đây ta chọn C.

Từ ví dụ 5 ta thấy đạo hàm bằng 0 tại $x=1$ nhưng qua điểm này y' không đổi dấu nên điểm $x=1$ không phải là điểm cực trị của hàm số.

Nhận xét: Đối với hàm bậc 4, vì đạo hàm là đa thức bậc 3 nên hàm chỉ có thể có một cực trị hoặc ba cực trị. Hàm số có một cực trị khi phương trình $y'=0$ có một nghiệm hoặc 2 nghiệm (1 nghiệm đơn và 1 nghiệm kép), hàm số có 3 cực trị khi phương trình $y'=0$ có 3 nghiệm phân biệt.

Ví dụ 6: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ và có bảng biến thiên phía dưới:

Khẳng định nào sau đây là khẳng định **đúng** ?

A. Hàm số đạt cực đại tại điểm $x=0$ và đạt cực tiểu tại điểm $x=4$.

B. Hàm số có đúng một cực trị.

C. Hàm số có giá trị cực tiểu bằng 1.

D. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 1 và giá trị nhỏ nhất bằng -15.

x	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	-15	↘	$-\infty$

Đáp án C

Lời giải

Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy có hai giá trị của x mà qua đó y' đổi dấu, đó là $x=0$ và $x=4$, do vậy đây là hai điểm cực trị của hàm số.

Ta thấy y' đổi dấu từ âm sang dương khi qua $x=0$, do vậy $x=0$ là điểm cực tiểu của hàm số, ngược lại $x=4$ lại là điểm cực đại của hàm số.

Từ đây ta loại được A, B.

D sai do đây là các giá trị cực trị, không phải giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số.

Ta chọn C bởi tại $x=0$ thì hàm số có giá trị cực tiểu là $y=1$.

Ví dụ 7: Hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây là **đúng**?

A. Hàm số đã cho có hai điểm cực trị.

B. Hàm số đã cho không có giá trị cực đại.

C. Hàm số đã cho có đúng một điểm cực trị.

D. Hàm số đã cho không có giá trị cực tiểu.

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
y'		+	0	–	||	+	
y	$-\infty$	↗	3	↘	0	↗	$+\infty$

Đáp án A.

Lời giải

STUDY TIP
Ở quy tắc 1 ta có hàm số đạt cực trị tại điểm khiến cho đạo hàm bằng 0 hoặc không xác định.

Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy có hai giá trị của x mà khi qua đó y' đổi dấu. Do vậy hàm số đã cho có hai điểm cực trị đó là $x=1; x=2$.

Chú ý: Nhiều độc giả nghĩ rằng tại $x=2$ không tồn tại y' thì $x=2$ không phải là điểm cực trị của hàm số, đây là một sai lầm rất lớn. Bởi hàm số vẫn đạt cực trị tại điểm khiến cho đạo hàm không xác định.

Ví dụ: Hàm số $y=|x|$ có đạo hàm không tồn tại khi $x=0$ nhưng đạt cực tiểu tại $x=0$.

Ví dụ 8. Hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-1)^2(x-3)$. Phát biểu nào sau đây là **đúng**?

A. Hàm số có một điểm cực đại. **B.** Hàm số có hai điểm cực trị.

C. Hàm số có đúng 1 điểm cực trị. **D.** Hàm số không có điểm cực trị.

Đáp án C.

Lời giải

STUDY TIP
Trong đa thức, dấu của đa thức chỉ đổi khi qua nghiệm đơn và nghiệm bội lẻ, còn nghiệm bội chẵn không khiến đa thức đổi dấu.

Ta thấy $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=3 \end{array}\right.$

Đến đây có nhiều độc giả kết luận luôn hàm số có hai điểm cực trị, tuy nhiên đó là kết luận sai lầm, bởi khi qua $x=1$ thì $f'(x)$ không đổi dấu, bởi $(x-1)^2 \geq 0$, $\forall x$. Do vậy hàm số chỉ có đúng một điểm cực trị là $x=3$.

Ví dụ 9 : Hàm số nào sau đây **không** có cực trị ?

A. $y=x^3-3x+1$. **B.** $y=\dfrac{2-x}{x+3}$.

C. $y=x^4-4x^3+3x+1$. **D.** $y=x^{2n}+2017x \ (n\in\mathbb{N}^*)$.

Đáp án B

Lời giải

STUDY TIP
1. Hàm phân thức bậc nhất trên bậc nhất không có cực trị.
2. Hàm bậc bốn luôn luôn có cực trị (có ba cực trị hoặc có duy nhất một cực trị).

Với A: Ta thấy đây là hàm bậc ba có $y'=3x^2-3$, phương trình $y'=0$ luôn có hai nghiệm phân biệt nên hàm số có hai điểm cực trị (loại).

Với B: Đây là hàm phân thức bậc nhất trên bậc nhất nên không có cực trị. Do đó ta chọn B.

Với C: Từ các kết quả về hàm số $y=ax^4+bx^2+c\,(a\neq 0)$ thì ta có kết luận rằng hàm số bậc bốn trùng phương luôn có điểm cực trị (do đồ thị hoặc dạng **M**; dạng **W** hoặc parabol).

Với D: Ta có $y'=2nx^{2n-1}+2017$ (phương trình luôn có nghiệm).

Ví dụ 10: Hàm số nào sau đây có ba điểm cực trị?

A. $y = x^4 + 2x^2 + 10$. **B.** $y = -x^4 + 2x^2 + 3$.

C. $y = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 5x + 2$. **D.** $y = 2x^4 - 4$.

Đáp án B

Lời giải

Ta có thể loại luôn C bởi hàm số bậc ba chỉ có nhiều nhất là hai cực trị.
Tiếp theo ta đến với các hàm bậc bốn. Ta có hàm bậc bốn trùng phương có hai trường hợp, hoặc là có một điểm cực trị, hoặc là có ba điểm cực trị.
Đến đây ta có thể suy ra, nếu hệ số a, b khác dấu thì hàm số bậc bốn trùng phương có ba cực trị, do vậy ta chọn luôn được B.

Dạng 2 Tìm điều kiện để hàm số đã cho có điểm cực trị thỏa mãn điều kiện cho trước

2.1. Xét hàm số bậc ba có dạng $y = ax^3 + bx^2 + cx + d, (a \neq 0)$

Chú ý:

Hàm số $y = f(x)$ xác định trên D có cực trị $\Leftrightarrow$ $\exists x_0 \in D$ thỏa mãn hai điều kiện sau:

i. Đạo hàm của hàm số tại x_0 phải bằng 0 hoặc hàm số không có đạo hàm tại x_0

ii. $f'(x)$ phải đổi dấu qua x_0 hoặc $f''(x_0) \neq 0$.

STUDY TIP

Qua đây ta rút ra kết quả, đồ thị hàm số bậc ba hoặc là có hai điểm cực trị, hoặc là không có điểm cực trị nào.

Một số lưu ý đối với cực trị của hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d, (a \neq 0)$

Ta có $y' = 3ax^2 + 2bx + c$

- Để hàm số bậc ba có cực trị thì phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt.

$\boxed{\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow b^2 - 3ac > 0}$

- Ngược lại, để hàm số không có cực trị thì phương trình $y' = 0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép $\boxed{\Leftrightarrow b^2 - 3ac \leq 0}$

- Hoành độ $x_1; x_2$ của các điểm cực trị là các nghiệm của phương trình $y' = 0$.

- Để viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số bậc ba, ta thường sử dụng phương pháp tách đạo hàm (xem bài toán tổng quát ở phía dưới).

Một số bài toán thường gặp:

Bài toán tổng quát 1: Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, (a \neq 0)$. Tìm điều kiện để:

a. Hàm số có hai điểm cực trị trái dấu (hay hai điểm cực trị của đồ thị hàm số có hoành độ trái dấu).

b. Hàm số có hai điểm cực trị cùng dấu (hay hai điểm cực trị của đồ thị hàm số có hoành độ cùng dấu).

c. Hàm số có hai điểm cực trị $x = x_1; x = x_2$ so sánh với số thực α.

d. Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị (điểm cực đại và điểm cực tiểu) nằm cùng phía, khác phía so với một đường thẳng.

Chú ý

Phương trình $y' = 0$ ta xét ở đây có các hệ số lần lượt là $3a; 2b; c$ do vậy trong tất cả các bài toán tổng quát về hàm số bậc ba trong sách ta đều xét các hệ số này.

Ví dụ $\Delta' = b^2 - 3ac$ (ở đây $2b; 3a; c$ lần lượt là các hệ số của $y' = 0$ khác với biệt số delta $b^2 - 4ac$ tổng quát mà ta vẫn ghi nhớ.

Lời giải tổng quát

Ta có $y' = 3ax^2 + 2bx + c$; phương trình $3ax^2 + 2bx + c = 0$ có $\Delta' = b^2 - 3ac$

a. Hàm số có hai điểm cực trị trái dấu $\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt trái dấu $\Leftrightarrow ac < 0$.

b. Hàm số có hai điểm cực trị cùng dấu $\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt cùng dấu $\Leftrightarrow \begin{cases} b^2 - 3ac > 0 \\ x_1 x_2 = \dfrac{c}{3a} > 0 \end{cases}$

c. Điều kiện để hàm số có 2 cực trị $x_1; x_2$ thỏa mãn:

* $x_1 < \alpha < x_2$ * $x_1 < x_2 < \alpha$ * $\alpha < x_1 < x_2$

(tham khảo bảng trang **28; 29**).

d. Điều kiện để đồ thị hàm số có điểm cực đại, cực tiểu nằm cùng phía, khác phía với một đường thẳng $\Delta: mx+ny+k=0$

Giả sử đồ thị hàm số có hai điểm cực trị là $A(x_1;y_1);B(x_2;y_2)$.

* Nếu $(mx_1+ny_1+k)(mx_2+ny_2+k)>0$ thì A, B nằm cùng phía so với Δ.

* Nếu $(mx_1+ny_1+k)(mx_2+ny_2+k)<0$ thì A, B nằm khác phía so với Δ.

Một số trường hợp đặc biệt

- Hai điểm cực trị của đồ thị hàm số bậc ba nằm cùng phía so với trục Oy $\Leftrightarrow$ phương trình $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt cùng dấu.
- Hai điểm cực trị của đồ thị hàm số bậc ba nằm về hai phía đối với trục Oy $\Leftrightarrow$ phương trình $y'=0$ có hai nghiệm trái dấu.
- Hai điểm cực trị của đồ thị hàm số nằm cùng phía với trục $Ox \Leftrightarrow y'=0$ có hai nghiệm phân biệt và $y_{CD}.y_{CT}>0$.
- Hai điểm cực trị của đồ thị hàm số nằm về hai phía với trục $Ox \Leftrightarrow y'=0$ có hai nghiệm phân biệt và $y_{CD}.y_{CT}<0$.
- Hai điểm cực trị của đồ thị hàm số cùng nằm về một phía trên đối với trục Ox $\Leftrightarrow y'=0$ có hai nghiệm phân biệt và $\begin{cases} y_{CD}.y_{CT}>0 \\ y_{CD}+y_{CT}>0 \end{cases}$
- Hai điểm cực trị của đồ thị hàm số nằm cùng phía dưới với trục $Ox \Leftrightarrow y'=0$ có hai nghiệm phân biệt và $\begin{cases} y_{CD}.y_{CT}>0 \\ y_{CD}+y_{CT}<0 \end{cases}$

Bài toán tổng quát 2: Viết phương trình đi qua hai điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d,\ (a\neq 0)$

Lời giải tổng quát

Giả sử hàm bậc ba $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d,(a\neq 0)$ có hai điểm cực trị là $x_1;x_2$. Khi đó thực hiện phép chia $f(x)$ cho $f'(x)$ ta được $f(x)=Q(x).f'(x)+Ax+B$.

Khi đó ta có $\begin{cases} f(x_1)=Ax_1+B \\ f(x_2)=Ax_2+B \end{cases}$ (Do $f'(x_1)=f'(x_2)=0$).

Vậy phương trình đi qua hai điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số $y=f(x)$ có dạng $y=Ax+B$.

STUDY TIP
Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số bậc ba biểu diễn theo y'; y''; y là
$\Rightarrow g(x)=y-\frac{y'.y''}{18a}$

Đến đây ta quay trở về với bài toán toán 1, vậy nhiệm vụ của chúng ta là đi tìm số dư đó một cách tổng quát.
Ta có $y'=3ax^2+2bx+c$; $y''=6ax+2b$.
Xét phép chia y cho y' thì ta được:
$y=y'.\left(\frac{1}{3}x+\frac{b}{9a}\right)+g(x)$ $(*)$, ở đây $g(x)$ là phương trình đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số bậc ba.
Tiếp tục ta có $(*)\Leftrightarrow y=y'.\frac{3ax+b}{9a}+g(x)\Leftrightarrow y=y'.\frac{6ax+2b}{18a}+g(x)$
$\Leftrightarrow y=y'.\frac{y''}{18a}+g(x)$ $\boxed{\Rightarrow g(x)=y-\frac{y'.y''}{18a}}$

Một công thức khác về phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm bậc ba là:

Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d, \left(a \neq 0\right)$. Sau khi thực hiện phép chia tổng quát thì ta rút ra được công thức phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số bậc ba theo *a, b, c, d* là $\boxed{y = \left(\frac{2c}{3} - \frac{2b^2}{9a}\right)x + d - \frac{bc}{9a}}$

Sau đây tôi xin giới thiệu một cách bấm máy tính để tìm nhanh phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số bậc ba như sau:

Trước tiên ta xét ví dụ đơn giản:

Ví dụ 1: Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 + 2x^2 - 3x + 1$ là:

A. $26x + 9y - 15 = 0.$ **B.** $-25x + 9y - 15 = 0.$

C. $26x - 9y + 15 = 0.$ **D.** $25x - 9y + 15 = 0.$

Đáp án A.

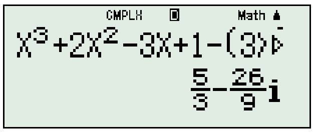
Lời giải

Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số xác định bởi:

$$g\left(x\right) = x^3 + 2x^2 - 3x + 1 - \left(3x^2 + 4x - 3\right).\frac{6x + 4}{18}$$

Chuyển máy tính sang chế độ tính toán với số phức bằng cách nhập:

MODE → 2:CMPLX



Nhập vào máy tính biểu thức $g\left(x\right)$ như sau:

$$X^3 + 2X^2 - 3X + 1 - \left(3X^2 + 4X - 3\right).\frac{6X + 4}{18}$$

Ấn CALC, gán X bằng *i* (ở máy tính *i* là nút ENG) khi đó máy hiện: $\frac{5}{3} - \frac{26}{9}i.$

Sử dụng máy tính

Sử dụng tính toán với số phức để giải quyết bài toán.

Vậy phương trình đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số đã cho là

$$y = \frac{5}{3} - \frac{26}{9}x \Leftrightarrow 26x + 9y - 15 = 0.$$

Tiếp theo ta có một bài tham số.

Ví dụ 2: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 3\left(1 - m\right)x + 1 + 3m$. Tìm *m* sao cho đồ thị hàm số có điểm cực đại, cực tiểu, đồng thời tìm đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số đã cho.

A. $m \geq 0;\ \ \Delta: 2mx + y - 2m - 2 = 0.$ **B.** $m > 0;\ \ \Delta: 2mx + y - 2m - 2 = 0.$

C. $.m < 0;\ \ \Delta: y = 202 - 200x.$ **D.** $m \geq 0;\ \ \Delta: y = 202 - 200x.$

Đáp án B

Lời giải

STUDY TIP

Với những dạng toán này, ta lưu ý rằng trước tiên, ta cần tìm điều kiện để hàm số có hai cực trị.

Ta có $y' = 3x^2 - 6x + 3\left(1 - m\right)$, $y'' = 6x - 6$.

Để đồ thị hàm số có điểm cực đại, cực tiểu thì $\Delta' = 3^2 - 9.\left(1 - m\right) > 0 \Leftrightarrow m > 0$.

Với $m > 0$ thì ta thực hiện:

Chuyển máy tính sang chế độ MODE 2:CMPLX

Nhập vào máy tính biểu thức $y-y'.\dfrac{y''}{18a}$ ta có

$$X^3-3X^2+3(1-M)X+1+3M-\left(3X^2-6X+3(1-M)\right)\frac{6X-6}{18}$$

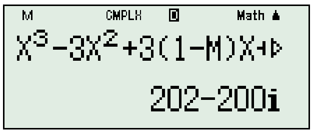
Ấn $\boxed{\text{CALC}}$

Máy hiện X? nhập i =

Máy hiện M? nhập 100 =

Khi đó máy hiện kết quả là $202-200i$

Ta thấy $202-200i=2.100+2-2.100.i \Rightarrow y=2m+2-2mx$



Vậy phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số đã cho có dạng $2mx+y-2m-2=0$.

Ta rút ra kết luận về cách làm dạng toán viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm bậc ba này như sau:

Bước 1: Xác định $y';y''$.

Bước 2: Chuyển máy tính sang chế độ tính toán với số phức:

$\boxed{\text{MODE}} \rightarrow \boxed{\text{2:CMPLX}}$

Nhập biểu thức $y-y'.\dfrac{y''}{18a}$.

Chú ý:

Nếu bài toán không chứa tham số thì ta chỉ sử dụng biến X trong máy, tuy nhiên nếu bài toán có thêm tham số, ta có thể sử dụng các biến bất kì trong máy để biểu thị cho tham số đã cho, ở trong sách này ta quy ước biến M để dễ định hình.

Bước 3: Gán giá trị.

Ấn $\boxed{\text{CALC}}$, gán X với *i*, gán M với 100

Lúc này máy hiện kết quả, từ đó tách hệ số và *i* để đưa ra kết quả cuối cùng, giống như trong hai ví dụ trên.

STUDY TIP

Với bước cuối cùng, ta cần có kĩ năng khai triển đa thức sử dụng máy tính cầm tay, do khuôn khổ của sách nên tôi không thể giới thiệu vào sách. Vậy tôi mong quý độc giả đọc thêm về phần này.

Bài toán tổng quát 3: Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d,(a\neq 0)$. Giả sử hàm số có hai điểm cực trị (một điểm cực đại, một điểm cực tiểu).Tìm khoảng cách giữa hai điểm cực trị của đồ thị hàm số.

Lời giải tổng quát

Hàm số có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow b^2-3ac>0$.

Xét phương trình $y'=0 \Leftrightarrow 3ax^2+2bx+c=0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1;x_2$.

Lúc này hai điểm cực trị của đồ thị hàm số lần lượt là $A(x_1;y_1),B(x_2;y_2)$

Ta có $d=AB=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$

Áp dụng **bài toán tổng quát 2** ta có phương trình đi qua 2 điểm *A; B* là

$$\Delta: y=\left(\frac{2c}{3}-\frac{2b^2}{9a}\right)x+d-\frac{bc}{9a}$$

Đặt $k=\dfrac{b^2-3ac}{9a} \Rightarrow \dfrac{2c}{3}-\dfrac{2b^2}{9a}=2.\dfrac{3ac-b^2}{9a}=-2k$ thì $\Delta: y=-2kx+d-\dfrac{bc}{9a}$.

Lúc này ta có $AB^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2+\left[-2k(x_1-x_2)\right]^2$

$$\Leftrightarrow AB^2=\left(\frac{-2b}{3a}\right)^2-4.\frac{c}{3a}+4k^2.\left[\left(\frac{-2b}{3a}\right)^2-4.\frac{c}{3a}\right]$$

STUDY TIP

Cho hàm số bậc ba dạng $y=ax^3+bx^2+cx+d$, với $a\neq 0$

- Nếu $b^2-3ac>0$ thì khoảng cách giữa hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là $\boxed{d=2\sqrt{\dfrac{4k^3+k}{a}}}$ với $k=\dfrac{b^2-3ac}{9a}$.

$\Leftrightarrow AB^2 = \dfrac{4b^2 - 12ac}{9a^2} + 4k^2.\dfrac{4b^2 - 12ac}{9a^2} \Leftrightarrow AB^2 = \dfrac{4\left(b^2 - 3ac\right)}{a.9a}\left(1 + 4k^2\right)$

$\Leftrightarrow AB^2 = \dfrac{4}{a}.k.\left(1 + 4k^2\right)$ $\boxed{\Rightarrow AB = 2\sqrt{\dfrac{4k^3 + k}{a}}}$ với $k = \dfrac{b^2 - 3ac}{9a}$.

Ví dụ 1: Giá trị của m để $\left(C_m\right): y = x^3 + x^2 + \left(m+1\right)x - m^3 + m$ để khoảng cách giữa hai điểm cực trị của đồ thị $\left(C_m\right)$ bằng $\dfrac{2\sqrt{85}}{27}$ là

A. $m = -2$. **B.** $m = -1$. **C.** $m = -4$. **D.** $m = -3$.

Đáp án B.

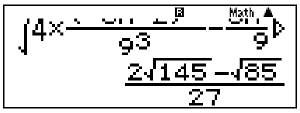
Lời giải

- Ta có $b^2 - 3ac = 1 - 3\left(m+1\right) = -3m - 2$. Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị

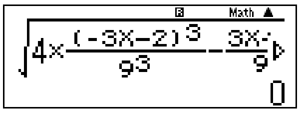
$\Leftrightarrow -3m - 2 > 0 \Leftrightarrow m < -\dfrac{2}{3}$

- Lúc này áp dụng công thức trong **bài toán tổng quát 3** thì ta có

$2\sqrt{\dfrac{4.\left(\dfrac{-3m-2}{9}\right)^3 - \dfrac{3m+2}{9}}{1}} = \dfrac{2\sqrt{85}}{27}$. Đến đây ta có thể nhập phương trình vào máy tính và thử các giá trị của m trong 4 phương án, từ đó ta chọn được B thỏa mãn.



Trường hợp m = −2



Trường hợp m = −1

Cách bấm máy tính: Nhập vào màn hình $\sqrt{4\left(\dfrac{-3X-2}{9}\right)^3 - \dfrac{3X+2}{9}} - \dfrac{\sqrt{85}}{27}$ (do có cùng thừa số chung là 2 nên ta bỏ 2 đi).

Thử với A: Ấn CALC − 2 = thì máy kết quả khác 0 nên ta loại A.

Thử với B: Tiếp tục ấn CALC − 1 = thì máy kết quả 0 nên ta chọn B.

STUDY TIP
Nếu đề yêu cầu hai điểm cực trị của đồ thị **cách đều đường thẳng d** thì chỉ cần một điều kiện là $I \in d$.

Bài toán tổng quát 4: Định m để điểm cực đại và điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $\left(a \ne 0\right)$ đối xứng nhau qua đường thẳng $d: y = kx + e$.

Lời giải tổng quát.

Do đồ thị hàm bậc ba nhận điểm uốn làm tâm đối xứng nên lúc này điểm uốn $I\left(x_1; y_1\right)$ sẽ thuộc d và đường thẳng nối hai điểm cực trị của đồ thị hàm số vuông góc với d. Tức là m thỏa mãn hệ sau: $\boxed{\begin{cases} y_I = kx_I + e \\ \dfrac{2}{3}.\left(c - \dfrac{b^2}{3a}\right).k = -1 \end{cases}}$

STUDY TIP
Điểm uốn của đồ thị hàm số bậc ba là điểm có hoành độ thỏa mãn $y'' = 0$ và nằm trên đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $\left(a \ne 0\right)$

Ví dụ 1: Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 4m^3$ (với m là tham số) có đồ thị $\left(C_m\right)$. Tập tất cả các giá trị của m để hai điểm cực trị của đồ thị $\left(C_m\right)$ đối xứng nhau qua đường thẳng $d: y = x$ là

A. $\left\{\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right\}$. **B.** $\left\{\dfrac{1}{\sqrt{2}}; -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right\}$. **C.** $\left\{\dfrac{1}{\sqrt{2}}; -\dfrac{1}{\sqrt{2}}; 0\right\}$. **D.** $\left\{-\dfrac{1}{\sqrt{2}}; 0\right\}$.

Đáp án B.

Lời giải

Ta có: $y' = 3x^2 - 6mx$; Để đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị $\Leftrightarrow$ PT $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' = (-3m)^2 > 0 \Leftrightarrow m \neq 0$.

$y'' = 6x - 6m$; $y'' = 0 \Leftrightarrow x = m$. Lúc này điểm uốn I là điểm có tọa độ $(m; 2m^3)$.

Từ bài toán tổng quát ở trên ta có:

$$\begin{cases} 2m^3 = m \\ \dfrac{2}{3}.\dfrac{-(3m)^2}{3}.1 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow m = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ (thỏa mãn đk).}$$

Ví dụ 2: Xác định tất cả các giá trị của m để hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx$ đối xứng nhau qua đường thẳng $x - 2y - 5 = 0$.

A. $m = 0$. **B.** $m = -2$. **C.** $m \in \varnothing$. **D.** $m = 2$.

Đáp án A.

Lời giải

Ta có $y' = 3x^2 - 6x + m$; $y'' = 6x - 6$; $y'' = 0 \Leftrightarrow x = 1$ Để ĐTHS có 2 điểm cực trị $\Leftrightarrow$ PT $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' = 9 - 3m > 0 \Leftrightarrow m < 3$.

Vậy điểm uốn $I(1; m-2)$.

Từ bài toán tổng quát ở trên ta có: $\begin{cases} 1 - 2.(m-2) - 5 = 0 \\ \dfrac{2}{3}.\left(m - \dfrac{3^2}{3}\right).\dfrac{1}{2} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow m = 0$ (thỏa mãn đk).

Trên đây là bốn bài toán tổng quát đưa ra phương hướng công thức cụ thể cho các dạng bài hay gặp. Sau đây tôi xin đưa ra một số ví dụ khác không nằm trong 4 bài toán tổng quát trên, nhưng tuy nhiên các ví dụ dưới đây có chung một điểm là phương trình $y' = 0$ có thể tìm được rõ nghiệm $x_1; x_2$ theo tham số m.

Một số ví dụ khác

Ví dụ 1: Giá trị của m để đồ thị $(C_m): y = 2x^3 + 3(m-3)x^2 + 11 - 3m$ có hai điểm cực trị A và B sao cho ba điểm $A; B; C(0; -1)$ thẳng hàng là

A. $m = 3$. **B.** $m = 4$. **C.** $m = 1$. **D.** $m = -1$.

Đáp án B.

Lời giải

Xét phương trình $y' = 0 \Leftrightarrow 6x^2 + 6(m-3)x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 3 - m \end{array}\right.$.

Đồ thị (C_m) có hai điểm cực trị A và B khi và chỉ khi $3 - m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 3$

Áp dụng bài toán tổng quát số 2 thì ta có phương trình đi qua hai điểm cực trị A; B là $AB: y = -(m-3)^2 x + 11 - 3m$.

Để A, B, C thẳng hàng thì $C(0; -1) \in AB: y = -(m-3)^2 x + 11 - 3m$

$\Leftrightarrow -1 = 11 - 3m \Leftrightarrow m = 4$ (thỏa mãn yêu cầu đề bài).

Ví dụ 2: Tất cả các giá trị của m để đồ thị $(C_m): y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x - m^3 + m$ có hai điểm cực trị trong đó A là điểm cực đại, B là điểm cực tiểu sao cho $OA = \sqrt{2}OB$ là

A. $m = 3 + 2\sqrt{2}$. **B.** $m = -2 - 3\sqrt{2}; m = -2 + 3\sqrt{2}$.

C. $m = -3 - 2\sqrt{3}$. **D.** $m = -3 + 2\sqrt{2}; m = -3 - 2\sqrt{2}$.

Đáp án D.

Lời giải

Ta có $b^2-3ac=9>0,\forall m\in\mathbb{R}$. Suy ra đồ thị hàm số luôn có hai điểm cực trị.

Ta có $\Delta_{y'}=9\Rightarrow$ phương trình $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt

$x_1=m-1;x_2=m+1\Rightarrow x_1<x_2$

Vì hệ số $a=1>0$ nên $x=x_1$ là điểm cực đại của hàm số và $x=x_2$ là điểm cực tiểu của hàm số.

$\Rightarrow A(m-1;2-2m)$ và $B(m+1;-2-2m)$.

Theo đề ta có $OA=\sqrt{2}OB\Leftrightarrow OA^2=2OB^2\Leftrightarrow m^2+6m+1=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-3+2\sqrt{2}\\m=-3-2\sqrt{2}\end{array}\right.$ (thỏa mãn yêu cầu đề bài).

STUDY TIP

Sở dĩ trong bài toán này ta kết luận được $x=x_1$ là điểm cực đại của hàm số và $x=x_2$ là điểm cực tiểu của hàm số bởi ta dựa vào cách nhận dạng đồ thị hàm bậc ba có phương trình $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt và hệ số $a=1>0$ thì đồ thị dạng chữ **N**.

Ví dụ 3: Giá trị của *m* để đồ thị hàm số $(C_m):y=x^3-3mx+1$ có hai điểm cực trị *B, C* sao cho tam giác *ABC* cân tại *A* với $A(2;3)$ là

A. $m=0;m=\frac{1}{2}$. **B.** $m=1;m=2$. **C.** $m=\frac{1}{2}$. **D.** $m=2$.

Đáp án C.

Lời giải

Để hàm số có hai cực trị thì $y'=0\Leftrightarrow 3x^2-3m=0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m>0$. Khi đó tọa độ hai điểm cực trị *B; C* lần lượt là $B\left(-\sqrt{m};2\sqrt{m^3}+1\right)$; $C\left(\sqrt{m};-2\sqrt{m^3}+1\right)\Rightarrow\overrightarrow{BC}=\left(2\sqrt{m};-4\sqrt{m^3}\right)$

Gọi *I* là trung điểm của *BC* $\Rightarrow I(0;1)$.

ΔABC cân tại $A\Leftrightarrow\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{BC}=0\Leftrightarrow -4\sqrt{m}+8\sqrt{m^3}=0\Leftrightarrow m=0;m=\frac{1}{2}$.

Đối chiếu với điều kiện ta có $m=\frac{1}{2}$ là giá trị cần tìm.

STUDY TIP

Khi giải các bài toán chứa tham số ta nên chú ý xem phương trình $y'=0$ có thể giải ra nghiệm được hay không. Ta có một số kết quả sau:

1. Tổng các hệ số của các số hạng trong phương trình bằng 0 thì phương trình có một nghiệm $x=1$.
2. Tổng các hệ số bậc chẵn và các hệ số bậc lẻ của các số hạng trong phương trình bằng nhau thì phương trình có một nghiệm $x=-1$.
3. Lưu ý xét b^2-3ac để giải nghiệm phương trình $y'=0$ nhanh hơn.

Ví dụ 4: Giá trị của *m* để đồ thị $(C_m):y=x^3-3mx^2+3(m^2-1)x-m^3+4m-1$ có hai điểm cực trị *A, B* sao cho ΔOAB vuông tại *O* là

A. $m=-1;m=2$. **B.** $m=1;m=-2$. **C.** $m=1;m=-1$. **D.** $m=-1;m=0$.

Đáp án A.

Lời giải

Ta có $y'=3x^2-6mx+3(m^2-1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=m+1\Rightarrow y=m-3\\x=m-1\Rightarrow y=m+1\end{array}\right.$

$\Rightarrow\begin{cases}A(m+1;m-3)\\B(m-1;m+1)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{OA}=(m+1;m-3)\\\overrightarrow{OB}=(m-1;m+1)\end{cases}$

Do tam giác *OAB* vuông tại *O* $\Leftrightarrow\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=0\Leftrightarrow 2m^2-2m-4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-1\\m=2\end{array}\right.$

Vậy $m=-1$ hoặc $m=2$ là các giá trị cần tìm.

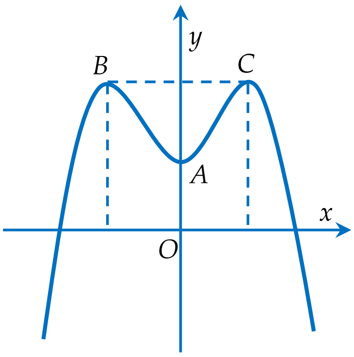
2.2. Xét hàm số bậc bốn trùng phương có dạng $y=ax^4+bx^2+c,(a\neq 0)$.

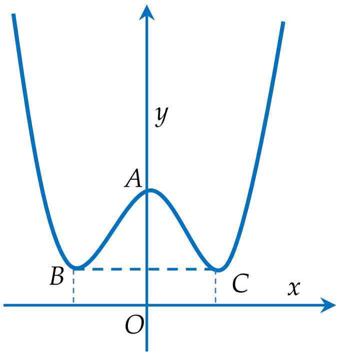
Ta có $y'=4ax^3+2bx=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ 2ax^2+b=0\end{array}\right.$

Đến đây ta có nhận xét hàm số **bậc bốn trùng phương luôn có điểm cực trị**. Số điểm cực trị phụ thuộc vào nghiệm của phương trình $2ax^2+b=0$.

a. Nếu $\frac{-b}{2a}\le 0$ tức là a, b cùng dấu hoặc $b=0$ thì phương trình vô nghiệm hoặc có nghiệm $x=0$. Khi đó hàm số chỉ có một điểm cực trị là $x=0$.

b. Nếu $\frac{-b}{2a}>0$ tức là a, b trái dấu thì phương trình có hai nghiệm phân biệt là $x=\pm\sqrt{-\frac{b}{2a}}$. Nghĩa là hàm số có ba điểm cực trị là $x=0; x=\pm\sqrt{-\frac{b}{2a}}$.





Ta vừa chứng minh ở trên, nếu $ab<0$ thì hàm số có ba điểm cực trị là $x=0; x=\pm\sqrt{-\frac{b}{2a}}$.

Khi đó đồ thị hàm số đã cho sẽ có ba điểm cực trị là:

$A(0;c); B\left(-\sqrt{-\frac{b}{2a}};-\frac{\Delta}{4a}\right); C\left(\sqrt{-\frac{b}{2a}};-\frac{\Delta}{4a}\right)$ với $\Delta=b^2-4ac$ (Hình minh họa)

(**Chứng minh**: ta có $f\left(\sqrt{-\frac{b}{2a}}\right)=a.\left(\sqrt{-\frac{b}{2a}}\right)^4+b.\left(\sqrt{-\frac{b}{2a}}\right)^2+c=\frac{ab^2}{4a^2}-\frac{b^2}{2a}+c$

$=\frac{ab^2-2ab^2+4a^2c}{4a^2}=\frac{-ab^2+4ac}{4a^2}=\frac{-b^2+4ac}{4a}$ (đpcm))

$$\boxed{\Rightarrow AB=AC=\sqrt{\frac{b^4}{16a^2}-\frac{b}{2a}}; BC=2\sqrt{-\frac{b}{2a}}}$$

Bài toán 1: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=ax^4+bx^2+c$, $(a\neq 0)$ có ba điểm cực trị tạo thành tam giác vuông.

Lời giải tổng quát

Với $ab<0$ thì hàm số có ba điểm cực trị.

Do điểm $A(0;c)$ luôn nằm trên Oy và cách đều hai điểm B, C. Nên tam giác ABC phải vuông cân tại A. Điều này tương đương với $AB\perp AC$ (do $AB=AC$ có sẵn rồi).

Mặt khác ta có $\overrightarrow{AB}=\left(-\sqrt{-\frac{b}{2a}};-\frac{b^2}{4a}\right); \overrightarrow{AC}=\left(\sqrt{-\frac{b}{2a}};-\frac{b^2}{4a}\right)$

Do $AB\perp AC$ nên $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0\Leftrightarrow \frac{b}{2a}+\frac{b^4}{16a^2}=0\Leftrightarrow \boxed{\frac{b^3}{a}=-8}$

STUDY TIP

Qua đây ta rút ra kết quả, để đồ thị hàm số $y=ax^4+bx^2+c$, $(a\neq 0)$ có ba điểm cực trị tạo thành tam giác vuông chỉ cần điều kiện là $\frac{b^3}{a}=-8$.

Ví dụ 1: Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^4-8m^2x^2+3$ có 3 điểm cực trị tạo thành ba đỉnh của một tam giác vuông cân.

A. $\{0\}$ **B.** $\left\{\frac{1}{2}\right\}$ **C.** $\left\{-\frac{1}{2}\right\}$ **D.** $\left\{-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right\}$

Đáp án D.

<table>
<tr><th>Cách 1: Lời giải thông thường.</th><th>Cách 2: Áp dụng công thức.</th></tr>
<tr><td>TXĐ: $D=\mathbb{R}$.
Ta có: $y'=4x\left(x^2-4m^2\right)$.
Hàm số có ba điểm cực trị khi và chỉ khi phương trình $y'=0$ có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m\neq 0$.
Lúc đó, ba điểm cực trị là:
$A\left(2m;-16m^4+3\right)$, $B\left(0;3\right)$, $C\left(-2m;-16m^4+3\right)$
Nên $BA=BC$. Do đó, tam giác ABC cân tại B Khi đó, tam giác ABC vuông cân khi và chỉ khi: $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=0\Leftrightarrow 4m^2-256m^8=0$
$\Leftrightarrow 1-64m^6=0\ \left(m\neq 0\right)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=\frac{1}{2} \\ m=-\frac{1}{2} \end{array}\right.$.</td><td>Để các điểm cực trị của đồ thị hàm số là ba đỉnh của một tam giác vuông cân thì
$\frac{b^3}{a}=-8\Leftrightarrow \frac{\left(-8m^2\right)^3}{1}=-8$
$\Leftrightarrow m=\pm\frac{1}{2}$</td></tr>
</table>

Nhận xét: Rõ ràng việc nhớ công thức và làm nhanh hơn rất nhiều so với việc suy ra từng trường hợp một.

Bài tập rèn luyện lại công thức:

STUDY TIP
Độc giả nên làm các bài tập rèn luyện này mà không nhìn lại công thức để có thể ghi nhớ công thức lâu hơn.

1. Cho hàm số $y=x^4-2mx^2+m^2-2$. Tìm m để hàm số có ba điểm cực trị và các điểm cực trị của đồ thị hàm số là ba đỉnh của một tam giác vuông?

A. $m=1$ **B.** $m=-1$ **C.** $m=2$ **D.** $m=-2$

2. Cho hàm số $y=f\left(x\right)=x^4+2\left(m-2\right)x^2+m^2-5m+5\ \left(C_m\right)$. Giá trị nào của m để đồ thị của hàm số đã cho có các điểm cực đại, cực tiểu tạo thành một tam giác vuông cân thuộc khoảng nào sau đây?

A. $\left(\frac{4}{7};\frac{3}{2}\right)$. **B.** $\left(\frac{3}{2};\frac{21}{10}\right)$. **C.** $\left(0;\frac{1}{2}\right)$. **D.** $\left(-1;0\right)$.

3. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=-x^4+\left(m-2015\right)x^2+2017$ có 3 điểm cực trị tạo thành tam giác vuông cân.

A. $m=2017$ **B.** $m=2014$ **C.** $m=2016$ **D.** $m=2015$

4. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^4+2\left(m+2016\right)x^2-2017m+2016$ có ba điểm cực trị tạo thành tam giác vuông cân.

A. $m=-2017$ **B.** $m=2017$ **C.** $m=-2018$ **D.** $m=2015$

5. Tìm m để đồ thị hàm số $f\left(x\right)=x^4-2\left(m+1\right)x^2+m^2$ có các điểm cực đại, cực tiểu tạo thành một tam giác vuông.

A. $m=2$. **B.** $m=-1$. **C.** $m=0$. **D.** $m=1$.

Đáp án

1.A	2.A	3.A	4.A	5.C

Bài toán 2: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=ax^4+bx^2+c,\ \left(a\neq 0\right)$ có ba điểm cực trị tạo thành tam giác đều.

STUDY TIP

Qua đây ta rút ra kết quả, để đồ thị hàm số $y=ax^4+bx^2+c$, $(a\neq 0)$ có ba điểm cực trị tạo thành tam giác đều thì $\frac{b^3}{a}=-24$.

Lời giải tổng quát

Với $ab<0$ thì hàm số có ba điểm cực trị.

Do $AB=AC$, nên ta chỉ cần tìm điều kiện để $AB=BC$.

Mặt khác ta có

$$\Rightarrow AB=AC=\sqrt{\frac{b^4}{16a^2}-\frac{b}{2a}};BC=2\sqrt{-\frac{b}{2a}}$$

Do vậy $AB=BC\Leftrightarrow -\frac{b}{2a}+\frac{b^4}{16a^2}=-\frac{2b}{a}\Leftrightarrow \boxed{\frac{b^3}{a}=-24}$

Ví dụ 1: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y=x^4-2mx^2+m-1$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác đều. Ta có kết quả:

A. $m=3$. **B.** $m=0$. **C.** $m>0$. **D.** $m=\sqrt[3]{3}$.

Đáp án D.

Lời giải

Áp dụng công thức vừa chứng minh ở trên ta có

$$\frac{b^3}{a}=-24\Leftrightarrow \frac{(-2m)^3}{1}=-24\Leftrightarrow m=\sqrt[3]{3}.$$

STUDY TIP

Qua đây ta rút ra kết quả, để đồ thị hàm số $y=ax^4+bx^2+c$, $(a\neq 0)$ có ba điểm cực trị tạo thành tam giác đều thì $\frac{b^3}{a}=-24$.

Mà tam giác vuông thì $\frac{b^3}{a}=-8$.

"Vuông -8, đều -24"

Bài tập rèn luyện lại công thức:

1. Cho hàm số $y=x^4+2(m-2)x^2+m^2-5m+5\left(C_m\right)$. Với những giá trị nào của m thì đồ thị $\left(C_m\right)$ có điểm cực đại và điểm cực tiểu, đồng thời các điểm cực đại và điểm cực tiểu lập thành một tam giác đều?

A. $m=2-\sqrt[3]{3}$ **B.** $m=2+\sqrt[3]{3}$ **C.** $m=5-2\sqrt[3]{3}$ **D.** $m=5+2\sqrt[3]{3}$

2. Cho hàm số $y=\frac{9}{8}x^4+3(m-2017)x^2-2016$ có đồ thị $\left(C_m\right)$. Tìm tất cả các giá trị của m sao cho đồ thị $\left(C_m\right)$ có ba điểm cực trị tạo thành tam giác đều?

A. $m=2015$ **B.** $m=2016$ **C.** $m=2017$ **D.** $m=-2017$

3. Cho hàm số $y=x^4-2mx^2+2$. Tìm tất cả các giá trị của m sao cho đồ thị hàm số có ba điểm cực trị tạo thành tam giác đều?

A. $m=\sqrt[3]{3}$ **B.** $m=-\sqrt[3]{3}$ **C.** $m=\sqrt{3}$ **D.** $m=-\sqrt{3}$

4. Cho hàm số $y=-mx^4+2mx^2-m$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho đồ thị hàm số có ba điểm cực trị tạo thành tam giác đều.

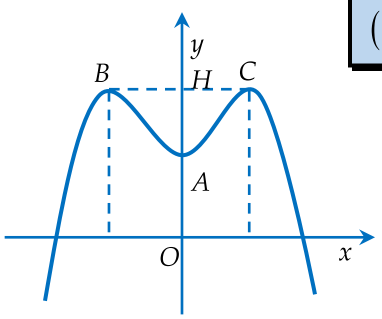
A. $m=\sqrt{3};m=-\sqrt{3};m=0$ **B.** $m=-\sqrt{3};m=\sqrt{3}$

C. $m=0$ **D.** $m=\sqrt{3}$

Đáp án

1A	2B	3A	4B

Bài toán 3: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=ax^4+bx^2+c$, $(a\neq 0)$ có ba điểm cực trị tạo thành tam giác có diện tích bằng S_0.



Lời giải tổng quát

Gọi H là trung điểm của BC thì lúc này H nằm trên đường thẳng chứa đoạn thẳng BC (hình vẽ).

Lúc này $H\left(0;-\frac{\Delta}{4a}\right) \Rightarrow \overrightarrow{AH}=\left(0;-\frac{b^2}{4a}\right)$. Diện tích tam giác ABC được tính bằng

công thức: $S_{ABC}=\frac{1}{2}.AH.BC \Rightarrow S_o^{\ 2}=\frac{1}{4}.\left(-\frac{b^2}{4a}\right)^2.\left(2.\sqrt{-\frac{b}{2a}}\right)^2$

$\Leftrightarrow S_0^{\ 2}=\frac{1}{4}.\frac{b^4}{16a^2}.\frac{-2b}{a} \Leftrightarrow \boxed{S_0^{\ 2}=\frac{-b^5}{32a^3}}$

STUDY TIP
Qua đây ta rút ra kết quả, để đồ thị hàm số $y=ax^4+bx^2+c$, $(a\neq 0)$ có ba điểm cực trị tạo thành tam giác có diện tích là S_0 thì có điều kiện là $S_0^{\ 2}=-\frac{b^5}{32a^3}$

Ví dụ 3: Cho hàm số $y=x^4-2mx^2+2m+m^4$. Với giá trị nào của m thì đồ thị (C_m) có 3 điểm cực trị, đồng thời 3 điểm cực trị đó tạo thành một tam giác có diện tích bằng 4

A. $m=\sqrt[5]{16}$ **B.** $m=16$ **C.** $m=\sqrt[3]{16}$ **D.** $m=-\sqrt[3]{16}$

Đáp án A.

Lời giải

Áp dụng công thức ở trên ta có, hàm số có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có diện tích bằng 4 $\Leftrightarrow 32.a^3S_0^{\ 2}+b^5=0 \Leftrightarrow 32.1^3.4^2+(-2m)^5=0 \Leftrightarrow m=\sqrt[5]{16}$.

Bài tập rèn luyện lại công thức:

1. Cho hàm số $y=x^4-2m^2x^2+1$. Với giá trị nào của m thì đồ thị hàm số đã cho có 3 điểm cực trị, đồng thời 3 điểm cực trị đó tạo thành một tam giác có diện tích bằng 32.

A. $m=2; m=-2$ **B.** $m=0; m=2$
C. $m=0; m=-2$ **D.** $m=2; m=-2; m=0$

2. Cho hàm số $y=f(x)=-x^4+2(m-2)x^2+m^2-5m+5$. Tìm tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số đã cho có 3 điểm cực trị tạo thành một tam giác có diện tích bằng 1.

A. $m=3$ **B.** $m=\pm 3$ **C.** $m=2$ **D.** $m=\pm 2$

3. Cho hàm số $y=3x^4-2mx^2+2m+m^4$. Tìm tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số đã cho có ba điểm cực trị tạo thành tam giác có diện tích bằng 3.

A. $m=3$ **B.** $m=-3$ **C.** $m=4$ **D.** $m=-4$

4. Cho hàm số $y=x^4+2mx^2-m-1$ (1), với m là tham số thực. Xác định m để hàm số (1) có ba điểm cực trị, đồng thời các điểm cực trị của đồ thị tạo thành một tam giác có diện tích bằng $4\sqrt{2}$.

A. $m=2$ **B.** $m=-2$ **C.** $m=4$ **D.** $m=-4$

Đáp án

1A	2A	3A	4B

Bài toán 4: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số để đồ thị hàm số $y=ax^4+bx^2+c$, $(a\neq 0)$ có ba điểm cực trị tạo thành tam giác có diện tích lớn nhất.

STUDY TIP
Để tìm max, ta thường sử dụng các BĐT thường gặp như: BĐT Cauchy, BĐT Bunyakovsky hay sử dụng phương pháp hàm số.

Lời giải tổng quát

Ở bài toán 3 ta có $S_0^{\ 2}=-\frac{b^5}{32a^3}$.

Do vậy ta chỉ đi tìm $\boxed{\max\left(\frac{-b^5}{32a^3}\right)}$

Bài toán 5: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c, (a \neq 0)$ có ba điểm cực trị A; B; C tạo thành tam giác ABC trong đó $B;C \in Ox$.

Lời giải tổng quát

Điều kiện để hàm số có 3 điểm cực trị là $ab < 0$.

Tam giác ABC có hai điểm cực trị $B;C \in Ox \Leftrightarrow \begin{cases} c \neq 0 \\ -\dfrac{\Delta}{4a} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c \neq 0 \\ b^2 - 4ac = 0 \end{cases}$

Bài toán 6: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c, (a \neq 0)$ có ba điểm cực trị A; B; C tạo thành tam giác ABC trong đó $BC = kAB = kAC;\ (k > 0)$.

Lời giải tổng quát

Điều kiện để hàm số có 3 điểm cực trị là $ab < 0$.

Từ bài toán tổng quát ban đầu ta có $A(0;c); B\left(-\sqrt{-\dfrac{b}{2a}}; -\dfrac{\Delta}{4a}\right); C\left(\sqrt{-\dfrac{b}{2a}}; -\dfrac{\Delta}{4a}\right)$

$\Rightarrow AB = AC = \sqrt{\dfrac{b^4}{16a^2} - \dfrac{b}{2a}}; BC = 2\sqrt{-\dfrac{b}{2a}}$.

Ta có $BC = kAB \Leftrightarrow 2\sqrt{-\dfrac{b}{2a}} = k\sqrt{\dfrac{b^4}{16a^2} - \dfrac{b}{2a}} \Leftrightarrow \boxed{b^3k^2 - 8a(k^2 - 4) = 0}$

Bài toán 7: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c,\ (a \neq 0)$ có ba điểm cực trị tạo thành tam giác có góc ở đỉnh cân bằng α.

STUDY TIP

Qua đây ta rút ra kết quả, để đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c, (a \neq 0)$ có ba điểm cực trị tạo thành tam giác có góc ở đỉnh là α thì có điều kiện là $\cos\alpha = \dfrac{b^3 + 8a}{b^3 - 8a}$

Hoặc $8a + b^3.\tan^2\dfrac{\alpha}{2} = 0$

Lời giải tổng quát

Điều kiện để hàm số có 3 điểm cực trị là $ab < 0$.

Cách 1:

Ta có $\cos\alpha = \dfrac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} - AB^2.\cos\alpha = 0 \Leftrightarrow \dfrac{b}{2a} + \dfrac{b^4}{16a^2} - \left(-\dfrac{b}{2a} + \dfrac{b^4}{16a^2}\right).\cos\alpha = 0$

$\Leftrightarrow 8a + b^3 + (8a - b^3).\cos\alpha = 0 \Rightarrow \boxed{\cos\alpha = \dfrac{b^3 + 8a}{b^3 - 8a}}$

Cách 2:

Gọi H là trung điểm của BC, tam giác AHC vuông tại H có:

$\tan\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{HC}{AH} = \dfrac{BC}{2AH} \Rightarrow BC^2 - 4.AH^2.\tan^2\dfrac{\alpha}{2} = 0 \Leftrightarrow \boxed{8a + b^3.\tan^2\dfrac{\alpha}{2} = 0}$

Bài toán 8: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c, (a \neq 0)$ có ba điểm cực trị tạo thành tam giác có ba góc nhọn.

STUDY TIP

Qua đây ta rút ra kết quả, để đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$, $(a \neq 0)$ có ba điểm cực trị tạo thành tam giác có ba góc nhọn thì $b.(b^3 + 8a) > 0$.

Lời giải tổng quát

Điều kiện để hàm số có 3 điểm cực trị là $ab < 0$.

Do tam giác ABC là tam giác cân nên hai góc ở đáy bằng nhau. Một tam giác không thể có hai góc tù, do vậy hai góc ở đáy của tam giác ABC luôn là góc nhọn. Vì thế cho nên để tam giác ABC là tam giác có ba góc nhọn thì góc ở đỉnh phải là góc nhọn. Tức là tìm điều kiện để $\widehat{BAC} = \alpha$ là góc nhọn.

Ở bài toán trên ta vừa tìm được $\cos\widehat{BAC} = \cos\alpha = \dfrac{b^3+8a}{b^3-8a}$.

Để góc $\widehat{BAC}$ nhọn thì $\boxed{\dfrac{b^3+8a}{b^3-8a}>0}$

Cách khác để rút gọn công thức:

Do $\cos\alpha = \dfrac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|}$ nên để α là góc nhọn thì $\dfrac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|}>0$.

Mà $\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{AC}\right|>0$ do đó $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}>0 \Leftrightarrow \dfrac{b}{2a}+\dfrac{b^4}{16a^2}>0 \Leftrightarrow \boxed{b.\left(b^3+8a\right)>0}$

Bài toán 9: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = ax^4+bx^2+c,\left(a\neq 0\right)$ có ba điểm cực trị tạo thành tam giác có bán kính đường tròn nội tiếp là r.

Lời giải tổng quát

Điều kiện để hàm số có 3 điểm cực trị là $ab<0$.

Ta có $S_0 = p.r$ (công thức tính diện tích tam giác theo bán kính đường tròn nội tiếp).

$$\Rightarrow r = \frac{2S_0}{AB+AC+BC} = \frac{2.\sqrt{-\dfrac{b^5}{32a^3}}}{2\sqrt{-\dfrac{b}{2a}+\dfrac{b^4}{16a^2}}+2\sqrt{-\dfrac{b}{2a}}} \boxed{\Leftrightarrow r = \dfrac{b^2}{4\left|a\right|.\left(1+\sqrt{1-\dfrac{b^3}{8a}}\right)}}$$

Bài toán 10: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = ax^4+bx^2+c,\left(a\neq 0\right)$ có ba điểm cực trị tạo thành tam giác có bán kính đường tròn ngoại tiếp là R.

Lời giải tổng quát

Điều kiện để hàm số có 3 điểm cực trị là $ab<0$.

Trước tiên ta có các công thức sau: $S_{ABC} = \dfrac{AB.BC.CA}{4R}$

Gọi H là trung điểm của BC, khi đó AH là đường cao của tam giác ABC, nên

$$\frac{1}{2}AH.BC = \frac{AB.BC.CA}{4R} \Leftrightarrow 4.R^2.AH^2 = AB^4$$

$$\Leftrightarrow 4.R^2.\frac{b^4}{16a^2} = \left(-\frac{b}{2a}+\frac{b^4}{16a^2}\right)^2 \Leftrightarrow \boxed{R = \frac{b^3-8a}{8.\left|a\right|.b}}$$

Bài toán 11: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = ax^4+bx^2+c,\left(a\neq 0\right)$ có ba điểm cực trị tạo thành tam giác có

a. Có độ dài $BC = m_0$.

b. Có $AB = AC = n_0$.

Lời giải tổng quát

Điều kiện để hàm số có 3 điểm cực trị là $ab<0$.

Ở ngay đầu **Dạng 3** ta đã có các công thức

$$A(0;c);B\left(-\sqrt{-\frac{b}{2a}};-\frac{\Delta}{4a}\right);C\left(\sqrt{-\frac{b}{2a}};-\frac{\Delta}{4a}\right) \text{ với } \Delta=b^2-4ac$$

$$\boxed{\Rightarrow AB=AC=\sqrt{\frac{b^4}{16a^2}-\frac{b}{2a}};BC=2\sqrt{-\frac{b}{2a}}}$$

Do vậy ở đây với các ý a, b ta chỉ cần sử dụng hai công thức này. Đây là hai công thức quan trọng, việc nhớ công thức để áp dụng là điều cần thiết!

Bài toán 12: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=ax^4+bx^2+c,(a\neq 0)$ có ba điểm cực trị tạo thành tam giác

a. nhận gốc tọa độ O là trọng tâm.

b. nhận gốc tọa độ O làm trực tâm.

c. nhận gốc tọa độ O làm tâm đường tròn ngoại tiếp.

d. Cùng với gốc tọa độ O tạo thành một hình bình hành (hình thoi).

e. Cùng với điểm $M(x_0;y_0)$ tạo thành một tứ giác nội tiếp đường tròn.

Lời giải tổng quát

a. Nhận gốc tọa độ *O* làm trọng tâm.

a. Ở công thức vừa nhắc lại ở bài toán 9, ta có tọa độ các điểm *A, B, C* thì chỉ cần áp dụng công thức $x_G=\frac{x_A+x_B+x_C}{3};y_G=\frac{y_A+y_B+y_C}{3}$ (với *G* là trọng tâm tam giác *ABC*).

Lúc này ta có $\begin{cases}0+\left(-\sqrt{-\frac{b}{2a}}\right)+\sqrt{-\frac{b}{2a}}=3.0\\ c+\left(-\frac{b^2}{4a}\right)+c+\left(-\frac{b^2}{4a}\right)+c=3.0\end{cases}\Rightarrow -\frac{b^2}{2a}+3c=0$

$\Leftrightarrow \boxed{b^2-6ac=0}$

STUDY TIP
Với những dạng toán này, ta lưu ý ta luôn có tam giác ABC cân tại A, nên ta chỉ cần tìm một điều kiện là có đáp án của bài toán.

b. Nhận gốc tọa độ O làm trực tâm.

Do tam giác *ABC* cân tại *A*, mà *A* nằm trên trục *Oy* nên *AO* luôn vuông góc với *BC*. Do vậy để *O* là trực tâm của tam giác *ABC* thì ta chỉ cần tìm điều kiện để $OB\perp AC$ hoặc $OC\perp AB$.

$OB\perp AC\Leftrightarrow \overrightarrow{OB}.\overrightarrow{AC}=0\Leftrightarrow \frac{b}{2a}+\frac{b^4}{16a^2}-\frac{b^2c}{4a}=0\Leftrightarrow b^4+8ab-4ab^2c=0$

$\Leftrightarrow\ b^3+8a-4abc=0$

c. Nhận O làm tâm đường tròn ngoại tiếp.

Để tam giác *ABC* nhận tâm *O* làm tâm đường tròn ngoại tiếp thì $OA=OB=OC$
Mà ta luôn có $OB=OC$, do vậy ta chỉ cần tìm điều kiện cho

$OA=OB\Leftrightarrow c^2=-\frac{b}{2a}+\frac{b^4}{16a^2}-\frac{2b^2c}{4a}+c^2\Leftrightarrow b^4-8ab^2c-8ab=0$

$\Leftrightarrow \boxed{b^3-8a-8abc=0}$

d. Cùng với gốc tọa độ *O* tạo thành một hình bình hành (hình thoi).

Để $ABOC$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CO}$, mà $\begin{cases}\overrightarrow{AB}=\left(-\sqrt{-\dfrac{b}{2a}};-\dfrac{b^2}{4a}\right)\\ \overrightarrow{CO}=\left(-\sqrt{-\dfrac{b}{2a}};\dfrac{\Delta}{4a}\right)\end{cases}$

Từ đó ta có $-\dfrac{b^2}{4a}=\dfrac{b^2-4ac}{4a}\Leftrightarrow\dfrac{b^2}{2a}=c\Leftrightarrow\boxed{b^2=2ac}$

e. Cùng với điểm $M\left(x_0;y_0\right)$ tạo thành một tứ giác nội tiếp đường tròn.

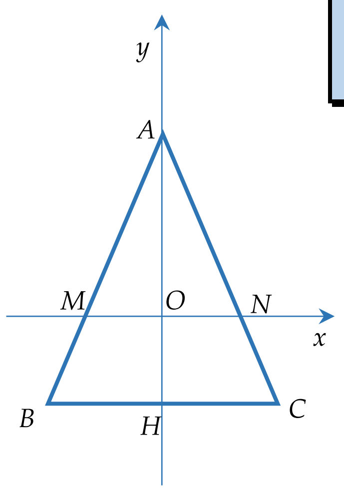
Ta viết được phương trình đường tròn ngoại tiếp ΔABC là:

$$\boxed{\left(C\right):x^2+y^2-\left(\frac{2}{b}-\frac{\Delta}{4a}+c\right)y+c\left(\frac{2}{b}-\frac{\Delta}{4a}\right)=0}$$

Khi đó yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ Điểm $M\left(x_0;y_0\right)$ nằm trên đường tròn $\left(C\right)$, tức là tọa độ của điểm m thỏa mãn đường tròn $\left(C\right)$ hay

$$x_0^2+y_0^2-\left(\frac{2}{b}-\frac{\Delta}{4a}+c\right)y_0+c\left(\frac{2}{b}-\frac{\Delta}{4a}\right)=0\,.$$

Bài toán 13: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=ax^4+bx^2+c,\left(a\neq 0\right)$ có ba điểm cực trị tạo thành tam giác sao cho trục hoành chia tam giác ABC thành hai phần có diện tích bằng nhau.



Lời giải tổng quát

Gọi M, N là giao điểm của AB, AC với trục hoành, kí hiệu như hình vẽ

Ta có $\Delta ANM\sim\Delta ACB\Rightarrow\dfrac{S_{AMN}}{S_{ABC}}=\left(\dfrac{OA}{AH}\right)^2=\dfrac{1}{2}$ (Do trục hoành chia tam giác ABC thành hai phần có diện tích bằng nhau).

$\Rightarrow AH=\sqrt{2}OA\Leftrightarrow\boxed{b^2=4\sqrt{2}\left|ac\right|}$

2.3. Xét hàm phân thức.

Trước tiên ta xét bài toán liên quan đến cực trị hàm phân thức nói chung. Ta có một kết quả khá quan trọng như sau:

Xét hàm số dạng $f(x)=\dfrac{u(x)}{v(x)}$ xác định trên D

thì ta có $f'(x)=\dfrac{u'(x).v(x)-u(x).v'(x)}{v^2(x)}$.

Điểm cực trị của hàm số này là nghiệm của phương trình

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{u'(x).v(x)-u(x).v'(x)}{v^2(x)}=0$$

$$\Leftrightarrow u'(x).v(x)-u(x).v'(x)=0 \Leftrightarrow \boxed{\frac{u(x)}{v(x)}=\frac{u'(x)}{v'(x)}}$$

STUDY TIP
Lưu ý công thức $\dfrac{u(x)}{v(x)}=\dfrac{u'(x)}{v'(x)}$ để giải quyết các bài toán một cách nhanh gọn hơn.

> **Nhận xét:** Biểu thức trên được thỏa mãn bởi các giá trị là cực trị của hàm số đã cho. Do đó, thay vì tính trực tiếp tung độ của các điểm cực trị, ta chỉ cần thay vào biểu thức đơn giản hơn sau khi đã lấy đạo hàm cả tử lẫn mẫu. Vận dụng tính chất này, ta giải quyết được nhiều bài toán liên quan đến điểm cực trị của hàm phân thức.

Ví dụ: Viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{a'x+b'}, a\neq 0, a'\neq 0.$

Theo công thức vừa nêu ở trên thì ta lần lượt tìm biểu thức đạo hàm của tử số và mẫu số.

Suy ra $\boxed{y=\dfrac{2ax+b}{a'}}$ là phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị (nếu có) của đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{a'x+b'}, a\neq 0, a'\neq 0$.

Dạng 3 Cực trị của hàm số tổng và hàm số hợp liên quan đến đồ thị của hàm đạo hàm

Bài toán: Thường là tìm các điểm cực trị của các hàm số tổng $h(x)=f(x)+g(x)$ hay hàm số hợp $g(x)=f(u(x))$, trong đó $u(x)$ là một hàm số theo biến x. Dữ kiện được cho trước thường là đồ thị hay bảng biến thiên của hàm số $y=f'(x)$.

Một số kết quả về cực trị:

Sau đây là một số kết quả được rút ra từ lý thuyết ở **trang 49.**

1. Nếu hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên khoảng $(a;b)$ và đạt cực đại (hoặc cực tiểu) tại x_0 thì $f'(x_0)=0$.

Từ đó suy ra: Nếu hàm số $y=f(x)$ đạt cực trị tại điểm x_0 thì đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ cắt trục hoành tại điểm có tọa độ $(x_0;0)$.

2. Ngược lại, nếu hàm số $y=f(x)$ liên tục, có đạo hàm tại x_0 và đồ thị hàm số $y=f'(x)$ cắt trục hoành tại điểm $(x_0;0)$ đồng thời $f'(x)$ đổi dấu khi qua x_0 thì x_0 là một điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$. Ngoài ra:

+ Nếu $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương khi x đi qua điểm x_0 thì x_0 là điểm cực tiểu của hàm số $y=f(x)$.

+ Nếu $f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm khi x đi qua điểm x_0 thì x_0 là điểm cực đại của hàm số $y=f(x)$.

STUDY TIPS

Từ đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ ta biết được: Nếu trên khoảng $(a;b)$ đồ thị hàm số $y=f'(x)$ nằm phía trên trục hoành thì $f'(x)>0,\forall x\in(a;b)$. Ngược lại, nếu trên khoảng $(c;d)$ đồ thị hàm số $y=f'(x)$ nằm phía dưới trục hoành thì $f'(x)<0,\forall x\in(c;d)$. Từ đây ta có bảng xét dấu của $f'(x)$ trên mỗi khoảng, từ đó xác định được điểm cực đại (cực tiểu) của hàm số $y=f(x)$.

Để xác định số điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$ ta thường thực hiện theo hai hướng sau:

Hướng 1: Xác định số giao điểm của đồ thị hàm số $f'(x)$ với trục Ox (không kể các tiếp điểm). Khi đó số giao điểm chính là số điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$.

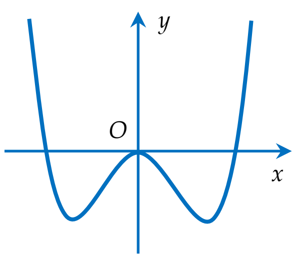
Hướng 2: (Dùng để xác định rõ đâu là điểm cực đại, điểm cực tiểu của hàm số): Nếu hàm số $y=f'(x)$ đổi dấu bao nhiêu lần thì hàm số có bấy nhiêu điểm cực trị (Quy tắc xác định cực đại, cực tiểu được nêu tại kết quả 2 ở trên).

Ví dụ minh họa

Dưới đây là một vài ví dụ về xác định số điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$ thông qua đồ thị của hàm số đạo hàm $y=f'(x)$:

Ví dụ 1: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên khoảng K. Biết đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ trên K như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$ trên K là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

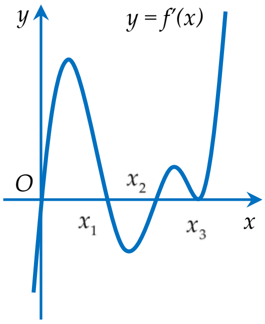


Đáp án B.

Lời giải

Đối với các bài toán dạng này, khi không yêu cầu xác định rõ đâu là điểm cực đại, đâu là điểm cực tiểu thì ta làm theo hướng 1: Xác định số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f'(x)$ với trục hoành Ox (không kể các tiếp điểm).

Quan sát đồ thị, ta thấy đồ thị hàm số $y=f'(x)$ cắt trục hoành tại 3 điểm có hoành độ lần lượt là $x=x_1<0; x=0; x=x_2>0$. Tuy nhiên, đồ thị $y=f'(x)$ lại tiếp xúc với trục hoành tại điểm $O(0;0)$ nên hàm số $y=f(x)$ chỉ có hai điểm cực trị là $x=x_1$ và $x=x_2$.



Ví dụ 2: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ bên. Hàm số $y=f(x)$ có mấy điểm cực trị?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Đáp án C.

Lời giải

Quan sát đồ thị, ta thấy đồ thị hàm số $y=f'(x)$ cắt trục hoành tại bốn điểm là $O(0;0),(x_1;0),(x_2;0)$ và $(x_3;0)$ $(0<x_1<x_2<x_3)$.

Tuy nhiên, đồ thị $y=f'(x)$ lại tiếp xúc với trục hoành tại điểm $(x_3;0)$ nên hàm số $y=f(x)$ chỉ có đúng 3 điểm cực trị là $x=x_1, x=x_2$ và $x=x_3$.

Nếu đề bài yêu cầu xác định rõ các điểm cực đại, cực tiểu của hàm số $y=f(x)$ thì ta làm theo hướng 2 và xét dấu $f'(x)$ trên từng khoảng (hoặc lập bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$):

* Trước hết, quan sát đồ thị ta thấy $\begin{cases} f'(x)=0, \forall x\in\{0;x_1;x_2;x_3\} \\ f'(x)<0, \forall x\in(-\infty;0)\cup(x_1;x_2) \\ f'(x)>0, \forall x\in(0;x_1)\cup(x_2;x_3)\cup(x_3;+\infty) \end{cases}$

* Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		x_1		x_2		x_3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	
$f(x)$		↘		↗		↘		↗		↗	

Quan sát bảng biến thiên, ta thấy hàm số đạt cực tiểu tại các điểm $x=0, x=x_2$ và hàm số đạt cực đại tại điểm $x=x_1$.

Đáp án C.

Tiếp theo là một ví dụ về xác định số điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$ thông qua công thức của đạo hàm $f'(x)$:

Ví dụ 3: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2(x+1)(2x-1)^3$. Số điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$ là

A. 4. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Đáp án D.

Lời giải

STUDY TIPS

Nếu bài toán yêu cầu xác định số điểm cực trị của hàm số $y=f(x+a)$ hay $y=f(x-a)$ thay vì hàm số $y=f(x)$ ở các ví dụ bên (với a là một số thực dương) thì kết quả vẫn không thay đổi. Ta có kết quả sau đây:

"Số điểm cực trị của các hàm số $y=f(x)$, $y=f(x-a), y=f(x+a)$ là bằng nhau nhưng mỗi hàm số lại đạt cực trị tại các điểm x_0 khác nhau".

Thực chất, việc xác định số điểm cực trị của hàm số $y=f(x-a), y=f(x+a)$ chính là xác định số điểm cực trị của hàm hợp có dạng $y=f(u(x))$.

Ta có $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ 2x-1=0 \\ x+1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\dfrac{1}{2} \\ x=-1 \end{array}\right.$

STUDY TIPS

Xét một đa thức có dạng $(ax+b)^n, (a \neq 0)$ thì ta có:

* Nếu n chẵn thì đa thức không đổi dấu qua điểm $x=-\dfrac{b}{a}$.

* Nếu n lẻ thì đa thức đổi dấu qua điểm $x=-\dfrac{b}{a}$.

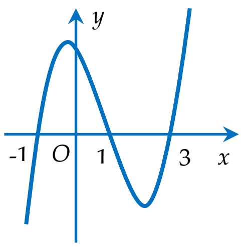
Qua điểm $x=0$ thì đạo hàm $f'(x)$ không đổi dấu; qua hai điểm $x=-1$ và $x=\dfrac{1}{2}$ thì đạo hàm $f'(x)$ đổi dấu. Vậy hàm số $y=f(x)$ có hai điểm cực trị.

Nhận xét: Nếu bài toán yêu cầu tìm điểm cực đại, điểm cực tiểu của hàm số $y=f(x)$ thì ta lập bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$ như dưới đây:

x	$-\infty$		-1		0		1/2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	−	0	+	
$f(x)$		↗		↘		↘		↗	

Quan sát bảng biến thiên ở trên suy ra: Hàm số $y=f(x)$ đạt cực đại tại điểm $x=-1$ và hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x=\dfrac{1}{2}$.

Ví dụ về bài toán xác định cực trị của hàm số hợp $g(x)=f(u(x))$ thông qua đồ thị của hàm số đạo hàm $y=f'(x)$:



Ví dụ 4: Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số điểm cực đại của hàm số $y=f\left(\sqrt{x^2+2x+2}\right)$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

Đáp án A.

Lời giải

Từ đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ ta suy ra $\begin{cases} f'(x)=0 \Leftrightarrow x\in\{-1;1;3\} \\ f'(x)>0, \forall x\in(-1;1)\cup(3;+\infty) \\ f'(x)<0, \forall x\in(-\infty;-1)\cup(1;3) \end{cases}$

Đặt $g(x)=f\left(\sqrt{x^2+2x+2}\right)$ thì $g'(x)=\left(\sqrt{x^2+2x+2}\right)'.f'\left(\sqrt{x^2+2x+2}\right)$

$\Rightarrow g'(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}.f'\left(\sqrt{x^2+2x+2}\right);$

Ta có $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+1=0 \\ f'\left(\sqrt{x^2+2x+2}\right)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ \sqrt{x^2+2x+2}=1 \\ \sqrt{x^2+2x+2}=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=-1\pm 2\sqrt{2} \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$-1-2\sqrt{2}$		-1		$-1+2\sqrt{2}$		$+\infty$
$x+1$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$f'\left(\sqrt{x^2+2x+2}\right)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		↘		↗		↘		↗	

Quan sát bảng biến thiên, ta thấy hàm số $g(x)=f\left(\sqrt{x^2+2x+2}\right)$ đạt cực đại tại điểm $x=-1$; hàm số $g(x)$ đạt cực tiểu tại hai điểm $x=-1-2\sqrt{2}$ và $x=-1+2\sqrt{2}$.

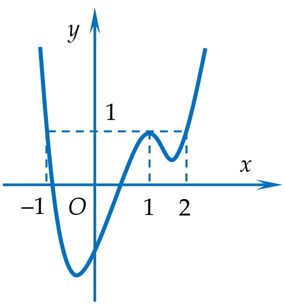
Dưới đây là một số ví dụ cho bài toán xác định cực trị của hàm số tổng $h(x)=f(x)+g(x)$ thông qua đồ thị của hàm đạo hàm $y=f'(x)$:

STUDY TIPS

Để xét dấu của $g'(x)$ trong từng khoảng như bảng biến thiên, ta xác định dấu của $g'(x)$ tại mỗi điểm bất kì thuộc khoảng đó. Chẳng hạn, trên $\left(-\infty;-1-2\sqrt{2}\right)$ ta chọn điểm $x=-4$ và khi đó: $x+1=-3<0$, $f'\left(\sqrt{x^2+2x+2}\right)=f'\left(\sqrt{10}\right)>0$ suy ra $g'(-4)=-3.f'\left(\sqrt{10}\right)<0.$ Xét tương tự trên những khoảng còn lại, ta được dấu của $g'(x)$ và bảng biến thiên ở bên.

Ví dụ 5: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên. Hàm số $g(x)=f(x)-x$ đạt cực đại tại điểm nào sau đây?

A. $x=-1.$ **B.** $x=0.$ **C.** $x=1.$ **D.** $x=2.$



Đáp án A.

Lời giải

Đạo hàm $g'(x)=f'(x)-1;$

Ta thấy trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(2;+\infty)$ thì đồ thị hàm số $y=f'(x)$ nằm trên đường thẳng $y=1$.

Suy ra $f'(x)>1,\forall x\in(-\infty;-1)\cup(2;+\infty)$ hay $g'(x)>0,\forall x\in(-\infty;-1)\cup(2;+\infty)$.

Trên các khoảng $(-1;1)$ và $(1;2)$ thì đồ thị hàm số $y=f'(x)$ nằm dưới đường thẳng $x=1$ nên $f'(x)<1,\forall x\in(-1;1)\cup(1;2)$.

Suy ra $g'(x)<0,\forall x\in(-1;1)\cup(1;2)$.

Đường thẳng $y=1$ cắt đồ thị hàm số $y=f'(x)$ tại các điểm $(-1;1),(1;1)$ và $(2;1)$ nên $f'(x)=1\Leftrightarrow x\in\{-1;1;2\}$ hay $g'(x)=0\Leftrightarrow x\in\{-1;1;2\}$.

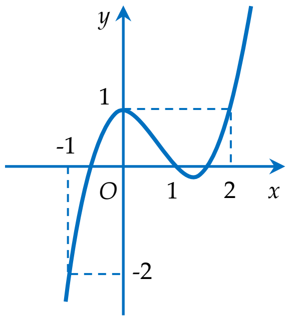
Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		↗		↘		↘		↗	

Quan sát bảng biến thiên, ta thấy hàm số $g(x)=f(x)-x$ đạt cực đại tại điểm $x=-1$; hàm số $g(x)$ đạt cực tiểu tại điểm $x=2$.

STUDY TIPS

Nếu trên khoảng $(a;b)$, đồ thị hàm số $y=f(x)$ nằm trên đường thẳng $y=a$ thì $f(x)>a,\forall x\in(a;b)$. Ngược lại, nếu trên khoảng $(c;d)$ đồ thị hàm số $y=f(x)$ nằm dưới đường thẳng $y=a$ thì $f(x)<a,\forall x\in(c;d)$.



Ví dụ 6: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $y=f'(x)$ như hình vẽ bên. Đặt $g(x)=f(x)-\frac{x^3}{3}+x^2-x+2.$ Hàm số $y=g(x)$ đạt cực đại tại điểm nào sau đây?

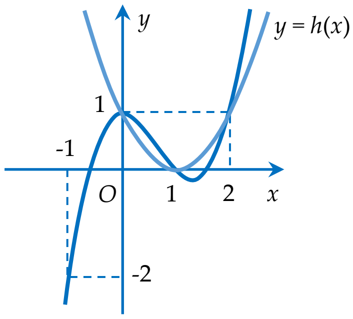
A. $x=-1.$ **B.** $x=1.$ **C.** $x=0.$ **D.** $x=2.$

Đáp án A.

Lời giải

Ta có $g'(x)=f'(x)-x^2+2x-1=f'(x)-(x^2-2x+1).$

Vẽ đồ thị hàm số $y=h(x)=x^2-2x+1$ (như hình vẽ bên). Ta thấy đồ thị $h(x)$ đi qua các điểm $(0;1),(1;0)$ và $(2;1).$



Quan sát hình vẽ, suy ra $\begin{cases} f'(x)=x^2-2x+1 \Leftrightarrow x\in\{0;1;2\} \\ f'(x)>x^2-2x+1 \Leftrightarrow x\in(0;1)\cup(2;+\infty) \\ f'(x)<x^2-2x+1 \Leftrightarrow x\in(-\infty;0)\cup(1;2) \end{cases}$

Từ đó ta có $\begin{cases} g'(x)=0 \Leftrightarrow x\in\{0;1;2\} \\ g'(x)>0, \forall x\in(0;1)\cup(2;+\infty) \\ g'(x)<0, \forall x\in(-\infty;0)\cup(1;2) \end{cases}$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Quan sát bảng biến thiên, ta thấy hàm số đạt cực đại tại điểm $x=1.$

Bài đọc thêm 1:
Giới thiệu một số phép tịnh tiến đồ thị và ứng dụng vào các bài toán đơn điệu, cực trị

Một số lý thuyết về phép tịnh tiến đồ thị:

Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị (C). Khi đó với số thực $a>0$ ta có:

1. Hàm số $y=f(x)+a$ có đồ thị (C') là tịnh tiến của đồ thị (C) lên trên a đơn vị theo phương của trục Oy. Qua phép tịnh tiến này, điểm $M(x_0;y_0)\in(C)$ sẽ biến thành điểm $M'(x_0;y_0+a)\in(C')$.

2. Hàm số $y=f(x)-a$ có đồ thị (C') là tịnh tiến của đồ thị (C) xuống dưới a đơn vị theo phương của trục Oy. Qua phép tịnh tiến này, điểm $M(x_0;y_0)\in(C)$ sẽ biến thành điểm $M'(x_0;y_0-a)\in(C')$.

3. Hàm số $y=f(x+a)$ có đồ thị (C') là tịnh tiến của đồ thị (C) qua trái a đơn vị theo phương của trục Ox. Qua phép tịnh tiến này, điểm $M(x_0;y_0)\in(C)$ sẽ biến thành điểm $M'(x_0-a;y_0)\in(C')$.

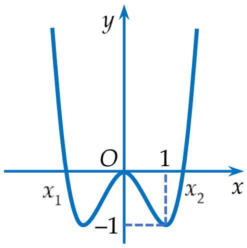
4. Hàm số $y=f(x-a)$ có đồ thị (C') là tịnh tiến của đồ thị (C) qua phải a đơn vị theo phương của trục Ox. Qua phép tịnh tiến này, điểm $M(x_0;y_0)\in(C)$ sẽ biến thành điểm $M(x_0+a;y_0)\in(C')$.

STUDY TIPS
Việc sử dụng phép tịnh tiến đồ thị được ứng dụng rất nhiều trong các bài toán vận dụng cao về tính đơn điệu, cực trị, GTLN–GTNN,…

Ví dụ minh họa

Ví dụ 1: Hàm số $y=f(x)$ liên tục trên khoảng K, biết đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ trên K như hình vẽ bên. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y=f(x+3)$ trên K

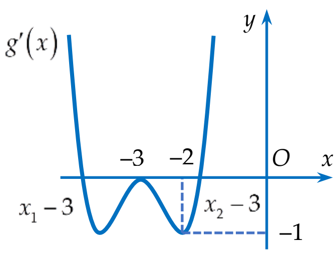
A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.



Đáp án B.

Lời giải

Đặt $g(x)=f(x+3)$ thì $g'(x)=(x+3)'.f'(x+3)=f'(x+3)$. Suy ra đồ thị hàm số $y=g'(x)=f'(x+3)$ thu được sau khi tịnh tiến đồ thị hàm số $y=f'(x)$ qua trái 3 đơn vị theo phương Ox (hình vẽ dưới).



Quan sát đồ thị hàm số $y=g'(x)$ như hình vẽ trên, ta thấy đồ thị cắt trục Ox tại các điểm có hoành độ $x=x_1-3; x=-3; x=x_2-3$.

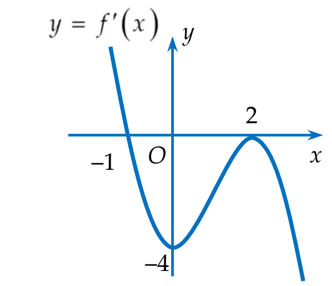
Tuy nhiên đồ thị $y=g'(x)$ tiếp xúc với trục hoành tại điểm $(-3;0)$ nên hàm số $y=g(x)=f(x+3)$ đã cho chỉ có hai điểm cực trị $x=x_1-3, x=x_2-3$.

Suy ra hàm số $y=f(x+3)$ có hai điểm cực trị là $x=x_1-3; x=x_2-3$.

STUDY TIPS
Vậy ta có kết luận sau: Với số thực a dương thì số điểm cực trị của hàm số $y=f(x+a)$ và hàm số $y=f(x-a)$ trên K cũng chính là số điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$ trên K; tức là số điểm cực trị của các hàm số $y=f(x), y=f(x+a)$ và $y=f(x-a)$ là bằng nhau. Tuy nhiên, mỗi hàm số này lại đạt cực trị tại các điểm $x=x_0$ khác nhau. Kết luận này đã được tác giả nêu ra tại phần trước.

Ví dụ 2: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ bên. Hàm số $y = g(x) = f(x) + 4x$ có bao nhiêu điểm cực trị?

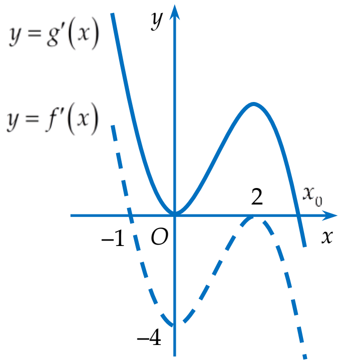
A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.



Đáp án A.

Lời giải

Ta có $g'(x) = f'(x) + 4$ nên $g'(x)$ có đồ thị thu được sau khi tịnh tiến đồ thị hàm số $f'(x)$ lên trên 4 đơn vị theo phương Oy.

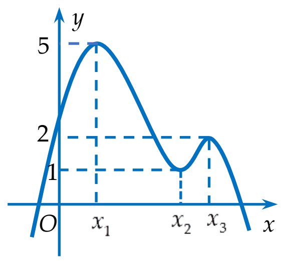


Ta có đồ thị hàm số $y = g'(x)$ như hình vẽ bên. Quan sát ta thấy đồ thị hàm số $y = g'(x)$ cắt trục hoành tại hai điểm có hoành độ là $x = 0$ và $x = x_0 > 0$, trong đó $x = 0$ là hoành độ của tiếp điểm $O(0;0)$.

Như vậy hàm số $y = g(x) = f(x) + 4x$ có 1 điểm cực trị là $x = x_0 > 0$.

Ví dụ 3: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Hỏi hàm số $y = g(x) = f(x) + \dfrac{2017 - 2018x}{2017}$ có bao nhiêu điểm cực trị?

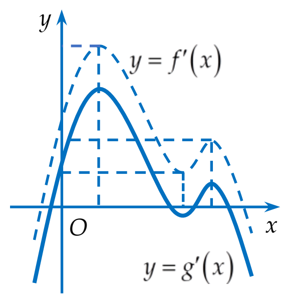
A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.



Đáp án D.

Lời giải

Ta có $g'(x) = f'(x) - \dfrac{2018}{2017}$ nên đồ thị của hàm số $y = g'(x)$ thu được sau khi tịnh tiến đồ thị hàm số $y = f'(x)$ xuống dưới $\dfrac{2018}{2017}$ đơn vị theo phương Oy.



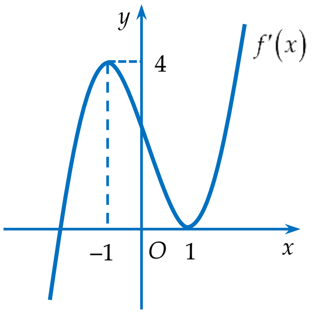
Lại có $1 < \dfrac{2018}{2017} < 2$ nên ta vẽ được đồ thị hàm số $y = g'(x)$ như hình vẽ bên. Quan sát thấy đồ thị hàm số $y = g'(x)$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt và không có điểm nào là tiếp điểm.

Vậy hàm số $y = g(x) = f(x) + \dfrac{2017 - 2018x}{2017}$ có 4 điểm cực trị.

Ví dụ 4: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của đạo hàm $y = f'(x)$ như hình bên. Tìm số điểm cực trị của hàm số:

$$g(x) = f(x - 2017) - 2018x + 2019$$

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.



Đáp án A.

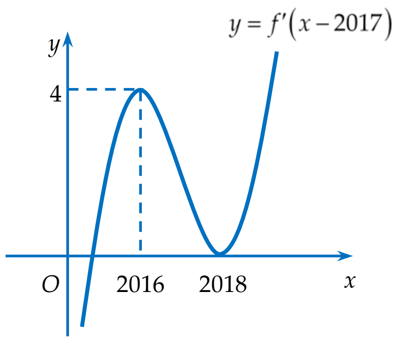
Lời giải

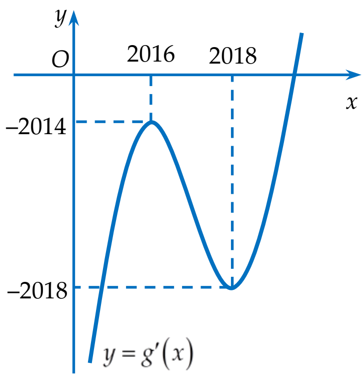
Ta có $g'(x) = (x - 2017)'.f'(x - 2017) - 2018 = f'(x - 2017) - 2018$. Thực hiện liên tiếp hai phép tịnh tiến sau đây, ta được đồ thị của hàm số $y = g'(x)$:

+ Tịnh tiến đồ thị hàm số $y = f'(x)$ sang phải 2017 đơn vị theo phương Ox. Ta được đồ thị của hàm số $y = f'(x - 2017)$.

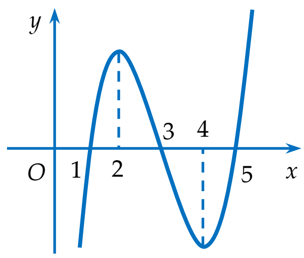
+ Tiếp tục tịnh tiến đồ thị hàm số $y = f'(x-2017)$ xuống dưới 2018 đơn vị theo phương Oy, ta được đồ thị hàm số $g'(x) = f'(x-2017) - 2018$.

Quan sát hình vẽ dưới là đồ thị của hàm số $y = f'(x-2017)$ và đồ thị hàm số $y = g'(x) = f'(x-2017) - 2017$:





Ta thấy đồ thị hàm số $y = g'(x)$ cắt trục Ox tại đúng một điểm (điểm này không phải là tiếp điểm) nên hàm số $g(x) = f(x-2017) - 2018x + 2019$ có đúng một điểm cực trị.



Ví dụ 5: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Đặt $g(x) = f(x+1)$. Kết luận nào sau đây **đúng**?

A. Hàm số $g(x)$ có hai điểm cực trị.

B. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;3)$.

C. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(2;4)$.

D. Hàm số $g(x)$ có hai điểm cực đại và một điểm cực tiểu.

Đáp án C.

Lời giải

Cách 1: Quan sát đồ thị hàm số $y = f'(x)$ trong hình vẽ, ta có các kết luận sau:

* $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=3 \\ x=5 \end{array}\right.$ và $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1<x<3 \\ x>5 \end{array}\right.$ và $f'(x) < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<1 \\ 3<x<5 \end{array}\right.$.

* Xét bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		3		5		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	$f(1)$	↗	$f(3)$	↘	$f(5)$	↗	

Quan sát bảng biến thiên ta thấy hàm số $y = f(x)$ có 3 điểm cực trị, trong đó có hai điểm cực tiểu là $x=1, x=5$ và một điểm cực đại là $x=3$.

Từ các kết luận trên ta có:

* $f'(x+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+1=1 \\ x+1=3 \\ x+1=5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \\ x=4 \end{array}\right.$ và $f'(x+1)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1<x+1<3 \\ x+1>5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0<x<2 \\ x>4 \end{array}\right.$

và $f'(x+1)<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+1<1 \\ 3<x+1<5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<0 \\ 2<x<4 \end{array}\right.$.

Suy ra hàm số $g(x)=f(x+1)$ đồng biến trên mỗi khoảng $(0;2)$ và $(4;+\infty)$; hàm số $g(x)$ nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty;0)$ và $(2;4)$. Phương án B sai, C đúng.

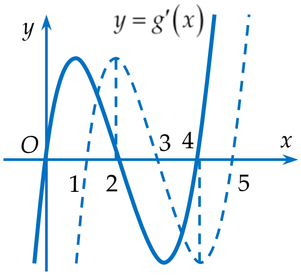
* Hàm số $f(x)=f(x+1)$ có 3 điểm cực trị, trong đó có hai điểm cực tiểu là $x=0, x=4$ và 1 điểm cực đại là $x=2$. Phương án A và D sai.

STUDY TIPS

Nếu hàm số $y=f(x)$ đạt cực trị tại điểm $x=x_0$ thì hàm số $y=f(x+a)$ đạt cực trị tại điểm $x=x_0-a$; hàm số $y=f(x-a)$ đạt cực trị tại điểm $x=x_0+a$; hai hàm số $y=f(x)+a$ và $y=f(x)-a$ đạt cực trị tại điểm $x=x_0$, trong đó $a>0$.

<u>**Cách 2:**</u> Sử dụng phép tịnh tiến đồ thị

Ta có $g'(x)=f'(x+1)$ nên đồ thị hàm số $y=g'(x)$ thu được sau khi tịnh tiến đồ thị hàm số $y=f'(x)$ sang trái 1 đơn vị theo phương Ox.



Ta có đồ thị hàm số $y=g'(x)$ như hình vẽ bên. Quan sát đồ thị hàm số này ta thấy:

* $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \\ x=4 \end{array}\right.$ và $g'(x)<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<0 \\ 2<x<4 \end{array}\right.$ và $g'(x)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0<x<2 \\ x>4 \end{array}\right.$.

Suy ra hàm số $g(x)$ đồng biến trên mỗi khoảng $(0;2)$ và $(4;+\infty)$; hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty;0)$ và $(2;4)$. Phương án B sai, C đúng.

* Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	↘		$g(0)$	↗	$g(2)$	↘	$g(4)$	↗	

Quan sát bảng biến thiên ta thấy hàm số $y=f(x)$ có 3 điểm cực trị, trong đó có hai điểm cực tiểu là $x=0, x=4$ và một điểm cực đại là $x=2$. Phương án A và D sai.

Bài đọc thêm 2:

Phương pháp sử dụng máy tính cầm tay để giải nhanh các bài tập định tham số m để hàm $f(x)$ đạt cực đại (cực tiểu) tại x_0

Cách 1: Sử dụng TABLE

> **Cách làm:** Ta sử dụng tính năng bảng giá trị TABLE của máy tính để nghiên cứu nhanh dáng điệu của đồ thị trên đoạn $(x_0-0,5;x_0+0,5)$ với 4 giá trị tham số mà đề cho.

Ta lần lượt gán 4 giá trị ở phần đáp án cho A, B, C, D bằng lệnh gán giá trị SHIFT STO.

Do chức năng TABLE của máy tính cầm tay Fx 570 VN Plus có thể chạy được 2 hàm số $f(x)$ và $g(x)$ nên một lần thử ta thử được 2 phương án. Do vậy, cả bài toán ta chỉ cần thử hai lần.

Ví dụ 1: Với giá trị nào của tham số thực m thì hàm số

$$y=\frac{x^3}{3}-2mx^2+3m^2x-3m$$

đạt cực tiểu tại $x=-1$.

A. $m=-1$. **B.** $m=1$. **C.** $m=\frac{1}{3}$. **D.** $m=-\frac{1}{3}$.

Đáp án A.

Lời giải

Lần lượt gán 4 giá trị của m ở 4 phương án A, B, C, D cho các biến A, B, C, D trên máy bằng lệnh SHIFT STO như sau:

Ấn -1 $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{RCL}}$ (STO) $\boxed{(-)}$ A.

Tương tự với các phương án còn lại.

Ấn MODE 7: TABLE

Nhập hàm $f(x)=\frac{X^3}{3}-2AX^2+3A^2X-3A$. (là hàm số đã cho khi $m=-1$ ở phương án A). Sau đó ấn = , máy hiện $g(x)=$ ta nhập

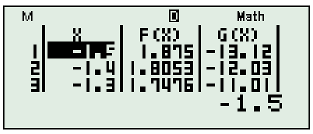
$g(x)=\frac{X^3}{3}-2BX^2+3B^2X-3B$ ấn =

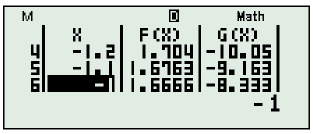
Start? Chọn $-1-0,5$

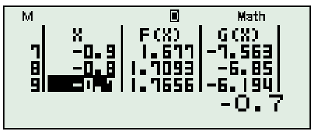
End? Chọn $-1+0,5$

STEP? Chọn 0,1.

Máy sẽ hiện bảng giá trị của hàm số đã cho trong hai trường hợp ở phương án A và B như sau:







STUDY TIP

Ở bài dạng này, ta chỉ cần để ý xem giá trị của hàm số thay đổi như thế nào khi qua $x=x_0$

Ta thấy ở trường hợp $F(x)$ tức là trường hợp phương án A. Ta thấy từ $x=-1,5$ chạy đến $x=-1$ thì giá trị của hàm số giảm, từ $x=-1$ đến $x=-0,7$ thì giá trị của hàm số tăng, tức là hàm số nghịch biến trên $(-1,5;-1)$ và đồng biến trên

$(-1;-0,7)$. Vậy $x=-1$ là điểm cực tiểu của hàm số, vậy A thỏa mãn. Ta chọn A mà không cần xét B, C, D.

Ví dụ áp dụng:

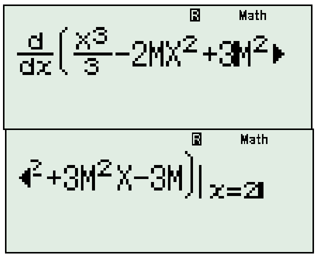
Với giá trị nào của *m* thì hàm số $y=x^3-3mx+2m$ đạt cực đại tại $x=2$?

A. $m=4$ **B.** $m=-4$ **C.** $m=0$ **D.** Không có giá trị của *m*.

Đáp án D.

Cách 2: Sử dụng chức năng $\frac{d}{dx}\square$.

> **Cách làm:** Thử các giá trị của tham số *m* ở các phương án, xem phương án nào làm đạo hàm bằng 0, nếu có nhiều phương án cùng làm đạo hàm bằng 0, thì ta xét đến y''.



Cũng xét ví dụ 1 ở trên thì ta có:

Sử dụng nút $\boxed{\text{SHIFT}}$ , nhập vào máy như sau:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{X^3}{3}-2MX^2+3M^2X-3M\right)_{X=-1}$$

Tiếp theo ấn CALC nhập X= -1 ; M=-1, máy hiện bằng 0, thỏa mãn. Chọn A.

> **Chú ý:** Ở cách làm này, ta cần lưu ý các trường hợp $f'(x_0)=0$ nhưng x_0 không phải là điểm cực trị của hàm số.

Bài tập rèn luyện kĩ năng
Xem đáp án chi tiết tại trang 197

I. Các dạng tính toán thông thường liên quan đến cực trị

Câu 1: Số điểm cực đại của đồ thị hàm số $y = x^4 + 100$ là:

A. 0. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 2: Hàm số $y = x^4 + 2x^2 + 2017$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 3.

Câu 3: Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + 4x^2 - 8x + 5$ có hai điểm cực trị là x_1, x_2. Hỏi tổng $x_1 + x_2$ là bao nhiêu?

A. $x_1 + x_2 = 8$. **B.** $x_1 + x_2 = -8$.

C. $x_1 + x_2 = 5$. **D.** $x_1 + x_2 = -5$.

Câu 4: Hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-1)^2(x-3)$. Phát biểu nào sau đây là đúng?

A. Hàm số có một điểm cực đại.

B. Hàm số có hai điểm cực trị.

C. Hàm số có đúng một điểm cực trị.

D. Hàm số không có điểm cực trị.

Câu 5: Đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$ có điểm cực đại là:

A. $I(2;-3)$ **B.** $I(0;1)$ **C.** $I(0;2)$ **D.** Đáp án khác

Câu 6: Hàm số $y = x^4 + 2x^2 + 2017$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 3.

Câu 7: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

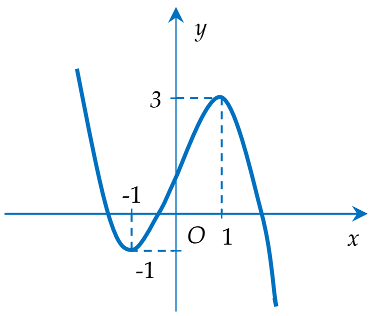
A. Hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = 1$.

B. Hàm số đồng biến trên $(1;+\infty)$ và nghịch biến trên $(-\infty;1)$.

C. Hàm số đạt cực đại tại điểm $x = 1$.

D. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 8: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên, các khẳng định sau khẳng định nào là đúng?



A. Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất bằng -1 và đạt giá trị lớn nhất bằng 3.

B. Đồ thị hàm số có điểm cực tiểu $A(-1;-1)$ và điểm cực đại $B(1;3)$.

C. Hàm số có giá trị cực đại bằng 1.

D. Hàm số đạt cực tiểu tại $A(-1;-1)$ và cực đại tại $B(1;3)$.

Câu 9: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-1;1\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		+	||	+	||	-	||	+	
y	3 ↗	$+\infty$	|| $-\infty$	↗	2	↘ $-\infty$	|| $-\infty$	↗	-3

Hỏi khẳng định nào dưới đây là khẳng định **sai**?

A. Hàm số không có đạo hàm tại $x = 0$ nhưng vẫn đạt cực trị tại $x = 0$.

B. Hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = 1$.

C. Đồ thị hàm số có hai tiệm cận đứng là các đường thẳng $x = -1$ và $x = 1$.

D. Đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $y = -3$ và $y = 3$.

Câu 10: Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Hàm số $y = 2x - \frac{1}{x+1}$ có hai điểm cực trị.

B. Hàm số $y = 3x^3 + 2016x + 2017$ có hai điểm cực trị.

C. Hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ có một điểm cực trị.

D. Hàm số $y = -x^4 - 3x^2 + 2$ có một điểm cực trị.

Câu 11: Số điểm cực trị của hàm số $y = |x|^3 - 4x^2 + 3$ bằng:

A. 2. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 12: Hàm số $y = x^4 + x^2 + 1$ đạt cực tiểu tại:

A. $x = -1$. **B.** $x = 0$.

C. $x = -2$. **D.** $x = 1$.

Câu 13: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	+	||	$-$	0	+	
y	$+\infty$	↘	-3	↗	0	↘	-3	↗	$+\infty$

Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng ?

A. Hàm số có đúng hai cực trị.

B. Hàm số có giá trị cực tiểu bằng -1 hoặc 1.

C. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 0 và giá trị nhỏ nhất bằng -3.

D. Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$.

Câu 14: Hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 1$ đạt cực trị tại các điểm nào sau đây?

A. $x = \pm 2$. **B.** $x = \pm 1$.

C. $x = 0; x = 2$. **D.** $x = 0; x = 1$.

Câu 15: Hệ thức liên hệ giữa giá trị cực đại y_{CD} và giá trị cực tiểu y_{CT} của hàm số $y = x^3 - 2x$ là:

A. $y_{CT}+y_{CĐ}=0.$ **B.** $2y_{CT}=3y_{CĐ}.$

C. $y_{CT}=2y_{CĐ}.$ **D.** $y_{CT}=y_{CĐ}.$

Câu 16: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	0	+	
y	$+\infty$	↘	1	↗	2	↘	1	↗	$+\infty$

Khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. $M(0;\ 2)$ được gọi là điểm cực đại của hàm số.

B. $f(-1)$ được gọi là giá trị cực tiểu của hàm số.

C. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-1;\ 0)$ và $(1;+\infty)$.

D. $x_0=1$ được gọi là điểm cực tiểu của hàm số.

Câu 17: Cho hàm số $y=x^3-6x^2+9x-2\,(C)$. Đường thẳng đi qua điểm $A(-1;\ 1)$ và vuông góc với đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của (C) là:

A. $y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}.$ **B.** $y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}.$

C. $y=x+3.$ **D.** $x-2y-3=0.$

Câu 18: Tính khoảng cách giữa các điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y=2x^4-\sqrt{3}x^2+1.$

A. $2\sqrt[4]{3}.$ **B.** $\sqrt{3}.$ **C.** $2\sqrt{3}.$ **D.** $\sqrt[4]{3}.$

Câu 19: Tìm tất cả các điểm cực đại của hàm số $y=-x^4+2x^2+1.$

A. $x=\pm1.$ **B.** $x=-1.$ **C.** $x=1.$ **D.** $x=0.$

Câu 20: Hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
y'		+	0	−	‖	+	
y	$-\infty$	↗	3	↘	0	↗	$+\infty$

A. Hàm số đã cho có hai điểm cực trị.

B. Hàm số đã cho không có giá trị cực đại.

C. Hàm số đã cho có đúng một điểm cực trị.

D. Hàm số đã cho không có giá trị cực tiểu.

Câu 21: Cho hàm số $y=x^4-\frac{2}{3}x^3-x^2$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Hàm số có giá trị cực tiểu là 0.

B. Hàm số có hai giá trị cực tiểu là $-\frac{2}{3}$ và $-\frac{5}{48}$.

C. Hàm số chỉ có một giá trị cực tiểu.

D. Hàm số có giá trị cực tiểu là $-\frac{2}{3}$ và giá trị cực đại là $-\frac{5}{48}$.

Câu 22: Cho hàm số $y=(x-1)(x+2)^2$. Trung điểm của đoạn thẳng nối hai điểm cực trị của đồ thị hàm số nằm trên đường thẳng nào dưới đây?

A. $2x+y+4=0.$ **B.** $2x+y-4=0.$

C. $2x-y-4=0.$ **D.** $2x-y+4=0.$

Câu 23: Cho hàm số f có đạo hàm là $f'(x)=x(x-1)^2(x+2)^3$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số f là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 24: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	
y	$-\infty$	↗	0	↘	-4	↗	$+\infty$

Khẳng định nào sau đây là khẳng định **SAI** ?

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

B. Hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$.

C. Hàm số đạt cực tiểu tại $x=-2$.

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2;0)$.

Câu 25: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-1)^2(x+2)$ xác định trên $\mathbb{R}$. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?

A. Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2;+\infty)$.

B. Hàm số $y=f(x)$ đạt cực đại tại $x=-2.$

C. Hàm số $y=f(x)$ đạt cực tiểu tại $x=1.$

D. Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-2;1)$.

Câu 26: Kết luận nào sau đây về cực trị của hàm số $y=x5^{-x}$ là đúng?

A. Hàm số có điểm cực đại là $x=\frac{1}{\ln 5}$.

B. Hàm số không có cực trị.

C. Hàm số có điểm cực tiểu là $x=\frac{1}{\ln 5}$.

D. Hàm số có điểm cực đại là $x=\ln 5.$

Câu 27: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		−	0	+	0	−	0	+	
y	$+\infty$	↘	0	↗	3	↘	0	↗	$+\infty$

Mệnh đề nào dưới đây là **sai?**

A. Hàm số có ba điểm cực trị.

B. Hàm số có giá trị cực đại bằng 3.

C. Hàm số có giá trị cực đại bằng 0.
D. Hàm số có hai điểm cực tiểu.

Câu 28: Đồ thị của hàm số $y=x^3-3x^2-9x+1$ có hai điểm cực trị A và B. Điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng AB?

A. $P(1;0)$. **B.** $M(0;-1)$.
C. $N(1;-10)$. **D.** $Q(-1;10)$.

II. Tìm điều kiện để hàm số có cực trị thỏa mãn điều kiện cho trước.

Câu 29: Với giá trị nào của m thì hàm số $y=x^3-m^2x^2-(4m-3)x-1$ đạt cực đại tại $x=1$?

A. $m=1$ và $m=-3$. **B.** $m=1$.
C. $m=-3$. **D.** $m=-1$.

Câu 30: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=x^3-3mx^2+3m+1$ có 2 điểm cực trị.

A. $m>0$. **B.** $m<0$.
C. $m\ge 0$. **D.** $m\ne 0$.

Câu 31: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=x^3-3x^2+mx-1$ có hai điểm cực trị x_1,x_2 thỏa mãn $x_1{}^2+x_2{}^2=3$.

A. -3. **B.** 3. **C.** $-\frac{3}{2}$. **D.** $\frac{3}{2}$.

Câu 32: Tìm m để hàm số: $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(m^2+m-1)x+1$ đạt cực trị tại 2 điểm x_1,x_2 thỏa mãn $|x_1+x_2|=4$.

A. $m=\pm 2$. **B.** $m=-2$.
C. Không tồn tại m. **D.** $m=2$.

Câu 33: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=x^3+(m-1)x^2-3mx+1$ đạt cực trị tại điểm $x_0=1$.

A. $m=-1$. **B.** $m=1$. **C.** $m=2$. **D.** $m=-2$.

Câu 34: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=x^4+2mx^2+m^2+m$ có đúng một điểm cực trị.

A. $m\ge 0$. **B.** $m>0$. **C.** $m\le 0$. **D.** $m<0$.

Câu 35: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số a sao cho hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+ax+1$ đạt cực trị tại x_1,x_2 thỏa mãn: $(x_1^2+x_2+2a)(x_2^2+x_1+2a)=9$.

A. $a=2$. **B.** $a=-4$. **C.** $a=-3$. **D.** $a=-1$.

Câu 36: Tìm tất cả các giá trị thực của m để hàm số $y=4x^3+mx^2-12x$ đạt cực tiểu tại điểm $x=-2$.

A. $m=-9$. **B.** $m=2$.
C. Không tồn tại m. **D.** $m=9$.

Câu 37: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=mx^4+(m^2-2)x^2+2$ có hai cực tiểu và một cực đại.

A. $m<-\sqrt{2}$ hoặc $0<m<\sqrt{2}$.
B. $-\sqrt{2}<m<0$.
C. $m>\sqrt{2}$.
D. $0<m<\sqrt{2}$.

Câu 38: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y=x^4-2mx^2+2m$ có ba điểm cực trị tạo thành tam giác có diện tích bằng 1.

A. $m=\frac{1}{\sqrt[5]{4}}$. **B.** $m=3$. **C.** $m=-1$. **D.** $m=1$.

Câu 39: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y=x^4-2mx^2+2m+m^4$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác đều.

A. $m=\sqrt[3]{3}$. **B.** $m=1-\sqrt[3]{3}$.
C. $m=1+\sqrt[3]{3}$. **D.** $m=-\sqrt[3]{3}$.

Câu 40: Tìm m để đồ thị hàm số $y=x^4+2(m-1)x^2+2m-5$ có ba điểm cực trị lập thành tam giác đều?

A. $m=1$. **B.** $m=1-\sqrt[3]{3}$.
C. $m=1+\sqrt[3]{3}$. **D.** $m=1-\sqrt{3}$.

Câu 41: Cho hàm số $y=x^4-2mx^2+m^2-2$. Tìm m để hàm số có 3 điểm cực trị và các điểm cực trị của đồ thị hàm số là ba đỉnh của một tam giác vuông cân?

A. $m=1$. **B.** $m=-1$. **C.** $m=2$. **D.** $m=-2$.

Câu 42: Cho hàm số $y=x^4-2mx^2+2m+m^4$. Với giá trị nào của m thì đồ thị (C_m) có 3 điểm cực trị, đồng thời 3 điểm cực trị đó tạo thành một tam giác có diện tích bằng 2.

A. $m=\sqrt[5]{4}$. **B.** $m=16$.
C. $m=\sqrt[5]{16}$. **D.** $m=-\sqrt[3]{16}$.

Câu 43: Đường thẳng đi qua điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số $y=x^3-3mx+2$ cắt đường tròn tâm $I(1;1)$, bán kính bằng 1 tại 2 điểm phân biệt A,B sao cho diện tích tam giác IAB đạt giá trị lớn nhất khi m có giá trị là:

A. $m=\frac{2\pm\sqrt{3}}{2}$. **B.** $m=\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}$.
C. $m=\frac{2\pm\sqrt{5}}{2}$. **D.** $m=\frac{2\pm\sqrt{3}}{3}$.

Câu 44: Cho hàm số

$$y=-2x^3+(2m-1)x^2-(m^2-1)x+2.$$

Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số đã cho có hai điểm cực trị.

A. 4. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 6.

Câu 45: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=x^3+x^2-(2m+1)x+4$ có đúng hai cực trị.

A. $m<\frac{4}{3}$. **B.** $m>-\frac{2}{3}$. **C.** $m<-\frac{2}{3}$. **D.** $m>-\frac{4}{3}$.

Câu 46: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}(m+5)x^2+mx$ có cực đại, cực tiểu và $|x_{CD}-x_{CT}|=5$.

A. $m=0$. **B.** $m=-6$. **C.** $m\in\{6;0\}$. **D.** $m\in\{0;-6\}$.

Câu 47: Biết đồ thị hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có 2 điểm cực trị là $(-1;18)$ và $(3;-16)$. Tính $a+b+c+d$.

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 48: Cho hàm số $f(x)=x^2+\ln(x-m)$. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để hàm số đã cho có đúng hai điểm cực trị.

A. $|m|>\sqrt{2}$. **B.** $m>\frac{9}{4}$.

C. $m<-\sqrt{2}$. **D.** $m>\sqrt{2}$.

Câu 49: Cho đồ thị hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+c$ có hai điểm cực trị là $A(0;1)$ và $B(-1;2)$. Tính giá trị của $a+b+c$.

A. 0. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 6.

Câu 50: Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số $y=(1-m)x^3-3x^2+3x-5$ có cực trị?

A. $m<1$ **B.** $m>-1$ **C.** $0<m\neq 1$ **D.** $m>0$

Câu 51: Cho hàm số $y=\frac{1}{3}x^3+mx^2+(2m-1)x-1$. Tìm mệnh đề **sai**.

A. $\forall m<1$ thì hàm số có hai điểm cực trị.

B. Hàm số luôn có cực đại và cực tiểu.

C. $\forall m\neq 1$ thì hàm số có cực đại và cực tiểu.

D. $\forall m>1$ thì hàm số có cực trị.

Câu 52: Tìm m để hàm số $y=mx^4+(m^2-9)x^2+1$ có hai điểm cực đại và một điểm cực tiểu.

A. $-3<m<0$. **B.** $0<m<3$.

C. $m<-3$. **D.** $3<m$.

Câu 53: Tìm giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y=(2m-1)x+3+m$ vuông góc với đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+1$

A. $m=\frac{3}{2}$. **B.** $m=\frac{3}{4}$. **C.** $m=-\frac{1}{2}$. **D.** $m=\frac{1}{4}$.

Câu 54: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị của hàm số $y=x^3-3mx^2+4m^3$ có hai điểm cực trị A và B sao cho tam giác OAB có diện tích bằng 4 với O là gốc tọa độ

A. $m=-\frac{1}{\sqrt[4]{2}};m=\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$. **B.** $m=-1;m=1$.

C. $m=1$. **D.** $m\neq 0$.

Câu 55: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị của hàm số $y=x^4-2mx^2$ có ba điểm cực trị tạo thành 1 tam giác có diện tích nhỏ hơn 1.

A. $m<1$. **B.** $0<m<1$.

C. $m>0$. **D.** $0<m<\sqrt[3]{4}$.

Câu 56: Tất cả giá trị của m để hàm số $(C_m): y=\frac{1}{3}x^3-(2m-1)x^2+(1-4m)x+1$ có hai điểm cực trị $x_1;x_2$ sao cho $3x_1+x_2=4$ là

A. $m=\frac{2}{3};m=2$. **B.** $m=0;m=\frac{1}{2}$.

C. $m=\frac{1}{2}$. **D.** $m=\frac{1}{4}$.

Câu 57: Điều kiện của m để hàm số (C_m): $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(m^2-m+1)x+1$ có cực trị trong khoảng $(1;+\infty)$ là

A. $m\geq 1$. **B.** $m>1$. **C.** $m>0$. **D.** $m\leq 0$.

Câu 58: Tìm m để đồ thị (C_m): $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2-x+m+1$ có hai điểm cực trị và khoảng cách giữa hai điểm cực trị là nhỏ nhất?

A. $m=0$. **B.** $m=-1$. **C.** $m=5$. **D.** $m=2$.

Câu 59: Tìm m để $(C_m): y=x^4-2mx^2+2m+m^4$ có cực đại, cực tiểu mà các cực đại, cực tiểu tạo thành tam giác có diện tích bằng 1.

A. $m=2$. **B.** $m=0$. **C.** $m=-1$. **D.** $m=1$.

Câu 60: Tìm m để $(C_m): y=x^4+2(m-2)x^2+m^2-5m+5$ có cực đại, cực tiểu tạo thành một tam giác đều?

A. $m=2;m=2-\sqrt[3]{3}$. **B.** $m=2$.

C. $m=2-\sqrt[3]{3};m=2+\sqrt[3]{3}$. **D.** $m=2-\sqrt[3]{3}$.

Câu 61: Tìm m để $(C_m): y=x^4-2mx^2+m$ có ba điểm cực trị $A;B;C$ sao cho đường tròn ngoại tiếp ΔABC có bán kính bằng 1?

A. $m=1;m=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

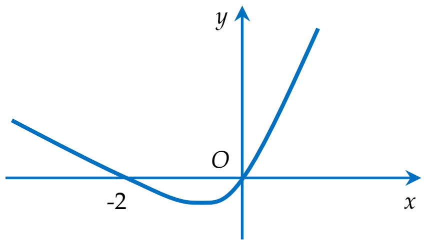
B. $m=1;m=\frac{-1+\sqrt{5}}{2};m=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$.

C. $m=0;m=1$.

D. $m=2;m=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

III. Cực trị của hàm số tổng và hàm số hợp có liên quan đến đồ thị của hàm số đạo hàm

Câu 1: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, đồ thị của hàm số đạo hàm $y=f'(x)$ như hình vẽ dưới



Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

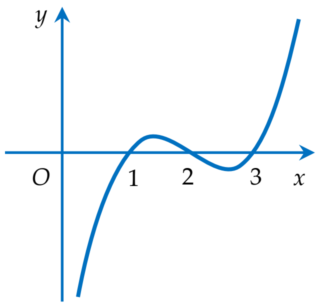
A. f đạt cực tiểu tại $x=0$.

B. f đạt cực tiểu tại $x=-2$.

C. f đạt cực đại tại $x=-2$.

D. Cực tiểu của f nhỏ hơn cực đại.

Câu 2: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ là đường cong ở hình dưới



Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

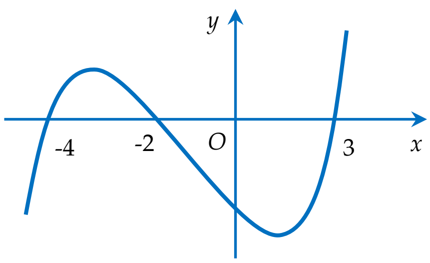
A. Hàm số $y=f(x)$ đạt cực đại tại $x=3$.

B. Hàm số $y=f(x)$ có một điểm cực tiểu thuộc khoảng $(2;3)$.

C. Hàm số $y=f(x)$ có đúng hai điểm cực trị.

D. Hàm số $y=f(x)$ đạt cực tiểu tại $x=3$.

Câu 3: Cho hàm số đa thức $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $y=f'(x)$ như hình vẽ dưới



Chọn phát biểu đúng khi nói về hàm số $y=f(x)$

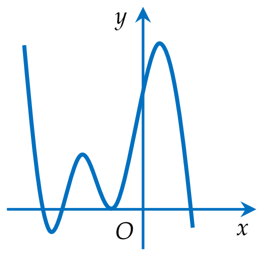
A. Hàm số $y=f(x)$ có hai điểm cực trị.

B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-3;0)$.

C. $f(0)>f(3)$.

D. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

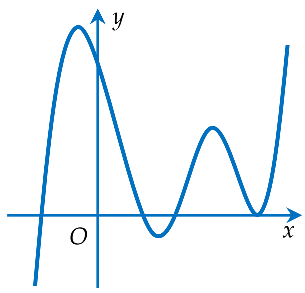
Câu 4: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ là đường cong ở hình vẽ bên dưới



Hỏi hàm số $y=f(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 3. B. 4. C. 5. D. 6.

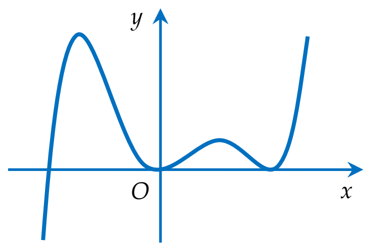
Câu 5: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ là đường cong ở hình vẽ bên dưới



Tìm số điểm cực tiểu của hàm số $y=f(x)$

A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

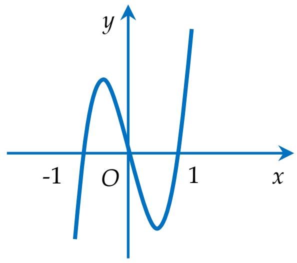
Câu 6: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên khoảng K. Hình vẽ dưới là đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ trên khoảng K.



Hỏi hàm số $y=f(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 1. B. 2. C. 4. D. 3.

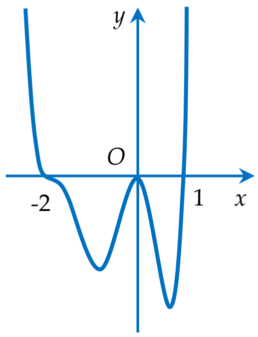
Câu 7: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, có đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình dưới.



Khi đó hàm số $y = f\left(x\right)$ có bao nhiêu cực trị?

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 0.

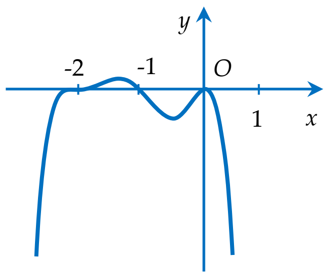
Câu 8: Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, có đồ thị của hàm số $y = f'\left(x\right)$ như hình dưới.



Khi đó hàm số $y = f\left(x\right)$ có bao nhiêu cực trị?

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 0.

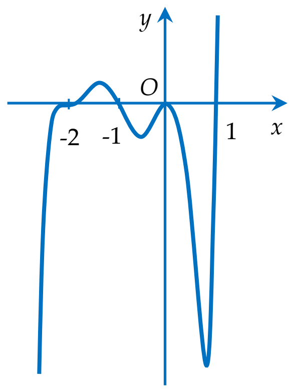
Câu 9: Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, có đồ thị của hàm số $y = f'\left(x\right)$ như hình dưới.



Khi đó hàm số có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 1. B. 3. **C.** 2. D. 0.

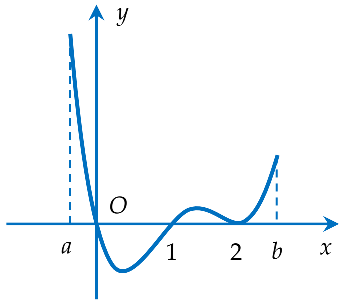
Câu 10: Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, có đồ thị của hàm số $y = f'\left(x\right)$ như hình dưới.



Khi đó hàm số có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 0.

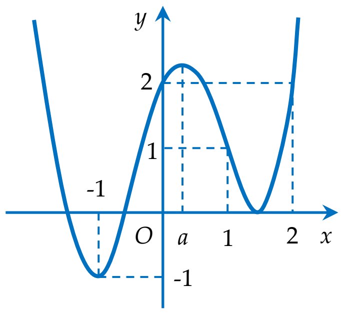
Câu 11: Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\left(a;b\right)$ và đồ thị hàm số $y = f'\left(x\right)$ được cho như hình dưới



Hỏi hàm số $y = f\left(x\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị trên khoảng $\left(a;b\right)$?

A. 2. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 1.

Câu 12: Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f'\left(x\right)$ như hình vẽ dưới



Đặt $g\left(x\right) = f\left(x\right) - \frac{x^2}{2}$. Hàm số $g\left(x\right)$ đạt cực đại tại điểm nào sau đây?

A. $x = 0$. **B.** $x = 1$. **C.** $x = a$. **D.** $x = 2$.

BÀI KIỂM TRA CHỦ ĐỀ SỐ 1

Xem đáp án chi tiết tại trang 223

Câu 1: Cho hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$. Giá trị $y'(0)$ bằng

A. 1. **B.** 0. **C.** -3. **D.** 2.

Câu 2: Đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+ax+b$ có điểm cực tiểu là $A(2;-2)$. Tính tổng $a+b$.

A. 2. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 3: Tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=x^3-3mx^2+6mx+m$ có 2 điểm cực trị là

A. $0<m<2$. **B.** $m<0$ hoặc $m>2$.

C. $-2<m<0$. **D.** $m<-2$ hoặc $m>0$.

Câu 4: Hàm số $y=x^3-5x^2+3x+1$ đạt cực trị tại các điểm nào sau đây?

A. $x=3,\ x=1$. **B.** $x=-3,\ x=-1$.

C. $x=3,\ x=-1$. **D.** $x=3,\ x=\dfrac{1}{3}$.

Câu 5: Tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $x^3-3x=m^2+m$ có 3 nghiệm phân biệt là

A. $1<m<2$. **B.** $-2<m<1$.

C. $m<1$ hoặc $m>2$. **D.** $m<-2.$ hoặc $m>1$.

Câu 6: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x)=\dfrac{mx+4}{x+m}$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)$.

A. $-2<m<-1$. **B.** $-2\le m<1$.

C. $-2\le m\le -1$. **D.** $-2<m\le -1$.

Câu 7: Cho đường cong: $(C_m): y=x^3-(2m+1)x^2+(3m+1)x-(m+1)$.

Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để (C_m) cắt Ox tại 2 điểm phân biệt.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 8: Đường thẳng $y=m$ **không** cắt đồ thị hàm số $y=-2x^4+4x^2+2$ khi m thỏa mãn

A. $0\le m\le 4$. **B.** $-4<m<0$.

C. $m>4$. **D.** $0<m<4$.

Câu 9: Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3-mx^2+(2+m)x+1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. $(1;2)$. **B.** $(-\infty;2)$.

C. $(-\infty;-1]\cup[2;+\infty)$. **D.** $[-1;2]$.

Câu 10: Hàm số nào dưới đây có tập xác định là $\mathbb{R}\setminus\{1\}$?

A. $y=\dfrac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}$. **B.** $y=\dfrac{x}{|x|-1}$.

C. $y=2x^3-x+2$. **D.** $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$.

Câu 11: Hàm số nào có bảng biến thiên dưới đây.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

A. $y=x^3-3x+1$. **B.** $y=-x^3-3x+1$.

C. $y=-x^3+3x-3$. **D.** $y=x^3-3x-1$.

Câu 12: Hàm số nào dưới đây có đồ thị nhận trục Oy làm trục đối xứng?

A. $y=x^2-x+1$. **B.** $y=x^4-x^2-2$.

C. $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$. **D.** $y=x^3-3x+2$.

Câu 13: Cho hàm số $y=\dfrac{1-2x}{x+1}$ có đồ thị là (C). Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. (C) có tiệm cận ngang là $y=-2$.

B. (C) có hai tiệm cận.

C. (C) có tiệm cận ngang là $y=1$.

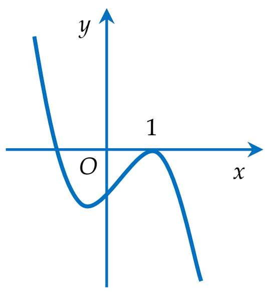
D. (C) có tiệm cận đứng.

Câu 14: Hàm số nào sau đây đồng biến trên $(-\infty;+\infty)$?

A. $y=x^4+x^2+2$. **B.** $y=x^3+x-2$.

C. $y=x^2+x+1$. **D.** $y=x^3-x+1$.

Câu 15: Hình vẽ dưới đây là đồ thị của một trong bốn hàm số được liệt kê ở các phương án A, B, C, D. Hàm số đó là hàm số nào?



A. $f(x)=x^3+x^2-x-1$.

B. $f(x)=-x^3+x^2+2x-1$.

C. $f(x)=x^3-x^2+x-1$.

D. $f(x)=-x^3+x^2+x-1$.

Câu 16: Cho hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x+1}$. Mệnh đề nào dưới đây là **đúng**?

A. Hàm số đã cho đồng biến trên tập $\mathbb{R}$.

B. Hàm số đã cho đồng biến trên $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$.

C. Hàm số đã cho đồng biến trên $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$, nghịch biến trên $(-1;1)$.

D. Hàm số đã cho nghịch biến trên $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$.

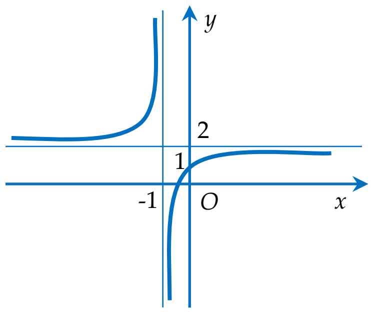
Câu 17: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên các khoảng $(-\infty;0),(0;+\infty)$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$+$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
y	-4	$\nearrow$		$+\infty$	$\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-7

Tìm tất cả các giá trị thực của m để đường thẳng $y=m$ cắt đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại 3 điểm phân biệt.

A. $-4\le m<0$. **B.** $-4<m<0$.
C. $-7<m<0$. **D.** $-4<m\le 0$.

Câu 18: Đồ thị dưới đây là đồ thị của hàm số nào?



A. $y=\dfrac{2x+1}{x+1}$. **B.** $y=\dfrac{x+2}{x+1}$.
C. $y=\dfrac{x+3}{1-x}$. **D.** $y=\dfrac{x-1}{x+1}$.

Câu 19: Đồ thị hàm số $y=-\dfrac{x^4}{2}+x^2+\dfrac{3}{2}$ cắt trục hoành tại mấy điểm phân biệt?

A. 4. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 20: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=x^3-2mx^2+m^2x+2$ đạt cực tiểu tại $x=1$.

A. $\left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=3 \end{array}\right.$. **B.** $m=3$. **C.** $m=1$. **D.** $m=-1$.

Câu 21: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=mx^4+2(m-1)x^2+2$ có 2 cực tiểu và 1 cực đại.

A. $m>2$. **B.** $m<0$.
C. $1<m<2$. **D.** $0<m<1$.

Câu 22: Cho hàm số $y=\dfrac{x^3}{3}-2x^2+3x+\dfrac{2}{3}$. Toạ độ điểm cực đại của đồ thị hàm số đã cho là

A. $(1;-2)$. **B.** $(-1;2)$. **C.** $\left(3;\dfrac{2}{3}\right)$. **D.** $(1;2)$.

Câu 23: Cho hàm số $f(x)=x^4-2x^2+2$, mệnh đề **sai** là

A. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1;0)$.

B. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0;1)$.

C. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-2;-1)$.

D. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;5)$.

Câu 24: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y=x+m-1$ cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $AB=2\sqrt{3}$

A. $m=4\pm\sqrt{3}$. **B.** $m=2\pm\sqrt{3}$.
C. $m=2\pm\sqrt{10}$. **D.** $m=4\pm\sqrt{10}$.

Câu 25: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=-\dfrac{x^3}{3}-mx^2-mx+1$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

A. $\left[\begin{array}{l} m\le 0 \\ m\ge 1 \end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m<0 \\ m>1 \end{array}\right.$.
C. $0\le m\le 1$. **D.** $0<m<1$.

Câu 26: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị của hàm số $y=\dfrac{2}{x^2-2mx+m^2-m+2}$ không có tiệm cận đứng.

A. $m>0$. **B.** $m>3$. **C.** $m<1$. **D.** $m<2$.

Câu 27: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^4-2m^2x^2+1$ có ba điểm cực trị lập thành một tam giác vuông cân.

A. $m=-1$. **B.** $m=1$. **C.** $m=\pm 1$. **D.** $m=\pm 2$.

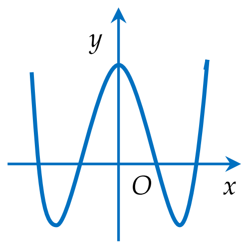
Câu 28: Số đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{3x+2+\sqrt{x^2-1}}{2x+2}$ là

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 0.

Câu 29: Giá trị lớn nhất của hàm số $y=2x^3+3x^2-12x+2$ trên đoạn $[-1;2]$ là

A. 6. **B.** 10. **C.** 15. **D.** 11.

Câu 30: Cho hàm số $y=ax^4-bx^2+c$ có đồ thị như hình vẽ sau



Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $a>0,b>0,c<0$. **B.** $a>0,b<0,c>0$.
C. $a<0,b>0,c>0$. **D.** $a>0,b>0,c>0$.

Câu 31: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$		-3		-1		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-5	$\nearrow$	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Tìm m để đồ thị hàm số $y=f(x)$ và $y=m$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt nằm ở hai phía trục tung?

A. $m=-5$. B. $m=-5$ và $m=3$.
C. $\mathbb{R}$. D. $m=3$.

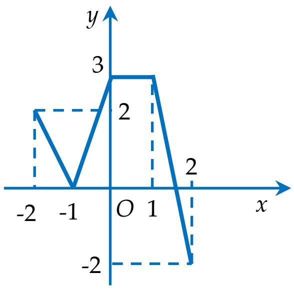
Câu 32: Tìm m để phương trình $|x|^3-3x^2+1=m$ có 4 nghiệm phân biệt

A. $(1;3)\cup\{0\}$. B. $(1;3)$.
C. $(-3;1)$. D. $(-3;1)\setminus\{0\}$.

Câu 33: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=x^3-3mx^2+3(2m-1)x+1$ nghịch biến trên đoạn có độ dài bằng 2.

A. $m=0; m=2$. B. $m=1$.
C. $m=0$. D. $m=2$.

Câu 34: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên đoạn $[-2;2]$, $f(x)=3\ \forall x\in[0;1]$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?



A. Nếu $x\in(0;1)$ thì $f'(x)=0$.

B. Nếu $x\in(-2;0)$ thì $f'(x)>0$.

C. Nếu $x\in(-2;0)$ thì $f'(x)<0$.

D. Nếu $x\in(0;2)$ thì $f'(x)<0$.

Câu 35: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên tập số thực $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $y'=x^4-6x^2+1$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. Hàm số có 3 điểm cực trị.
B. Hàm số có 1 điểm cực trị.
C. Hàm số có 2 điểm cực trị.
D. Hàm số có 4 điểm cực trị.

Câu 36: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị của hàm số $y=x^4-5x^2+2$ và đồ thị của hàm số $y=15x^2-(m^2+10m+10)$ cắt nhau tại bốn điểm phân biệt có hoành độ lập thành một cấp số cộng.

A. $m=-12$ và $m=2$. B. $m=8$ và $m=2$.
C. $m=1$ và $m=-12$. D. $m=-12$ và $m=\pm 2$.

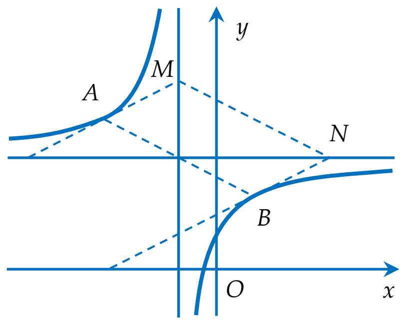
Câu 37: Biết đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=x^3+cx+d$ có phương trình $y=-6x+2017$. Tính giá trị của hàm số tại $x=2$.

A. 2007. B. 2029. C. 2005. D. 2027.

Câu 38: Cho hàm số $f(x)=|x^3-3x^2+m|$. Có bao nhiêu số nguyên m để $\min\limits_{[1;3]} f(x)\le 3$

A. 4. B. 10. C. 6. D. 11.

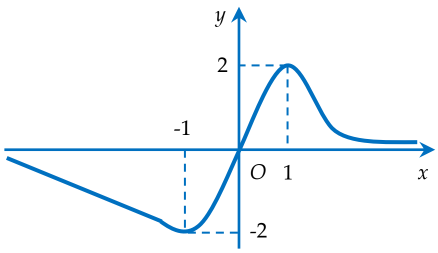
Câu 39: Cho hàm số $y=\dfrac{3x+1}{x+1}$ có đồ thị (C). Gọi A, B là hai điểm thuộc (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại A, B song song với nhau. Các tiếp tuyến này lần lượt cắt tiệm cận đứng, tiệm cận ngang của (C) lần lượt tại M, N (tham khảo hình vẽ dưới).



Tứ giác $MNPQ$ có chu vi nhỏ nhất bằng

A. 16. B. 8. C. 20. D. 12.

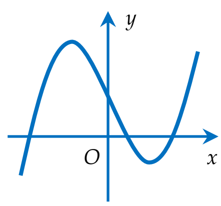
Câu 40: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên dưới.



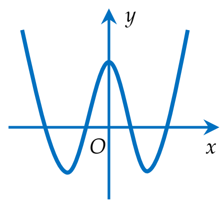
Biết rằng trục hoành là tiệm cận ngang của đồ thị. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(x)=4^{m+2\log_4\sqrt{2}}$ có hai nghiệm dương phân biệt.

A. $m>1$. B. $0<m<1$.
C. $m<0$. D. $0<m<2$.

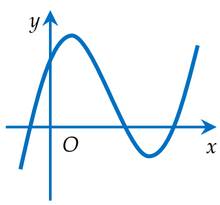
Câu 41: Cho hàm số $y=x^3+bx^2+cx+d\ (c<0)$ có đồ thị (T) là một trong bốn hình dưới đây



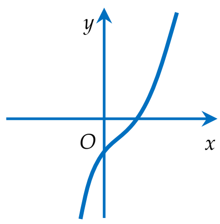
Hình 1



Hình 2



Hình 3



Hình 4

Hỏi đồ thị (T) là hình nào?

A. Hình 1 **B.** Hình 2 **C.** Hình 3 **D.** Hình 4

Câu 42: Trong tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-4}{\sqrt{mx^2+m^2-17}}$ có bốn đường tiệm cận, có bao nhiêu giá trị m nguyên dương?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 43: Cho hàm số

$$y=2x^3+3(m-1)x^2+6(m-2)x-1.$$

Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của m để hàm số có hai điểm cực trị đều thuộc $(-2;1)$. Khi đó tập S là

A. $S=(1;4)$. **B.** $S=\mathbb{R}\setminus\{3\}$.

C. $S=(-\infty;1)\cup(4;+\infty)$ **D.** $S=(1;4)\setminus\{3\}$.

Câu 44: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để sao cho đồ thị của hàm số $y=x^4+2mx^2+m^2+2m$ có ba điểm cực trị và khoảng cách giữa hai điểm cực tiểu bằng 4.

A. $m=-4$ **B.** $m=5$ **C.** $m=\dfrac{1}{2}$ **D.** $m=3$

Câu 45: Tính đạo hàm cấp n của hàm số $y=\dfrac{5x^2-3x-20}{x^2-2x-3}$

A. $y^{(n)}=(-1)^n.n!\left[3(x+1)^{-n-1}+4(x-3)^{-n-1}\right]$.

B. $y^{(n)}=n!\left[3(x+1)^{-n-1}+4(x-3)^{-n-1}\right]$.

C. $y^{(n)}=(-1)^n.n!\left[3(x+1)^{-n-1}-4(x-3)^{-n-1}\right]$.

D. $y^{(n)}=n!\left[3(x+1)^{-n-1}-4(x-3)^{-n-1}\right]$.

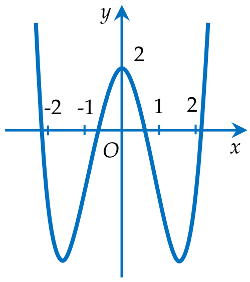
Câu 46: Biết rằng tất cả các giá trị của m để phương trình $4\sqrt{6+x-x^2}-3x=m\left(\sqrt{x+2}+2\sqrt{3-x}\right)$ có nghiệm là $[a;b]$ với $a,b\in\mathbb{R}$. Tính giá trị của $\dfrac{a\sqrt{5}}{5}+b$

A. $\dfrac{3}{5}$. **B.** $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\dfrac{2}{5}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

Câu 47: Cho đồ thị $(C): y=x^3-6x^2+9x-1$ .Từ 1 điểm bất kỳ trên đường thẳng $x=2$ kẻ được bao nhiêu tiếp tuyến đến (C)

A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 3.

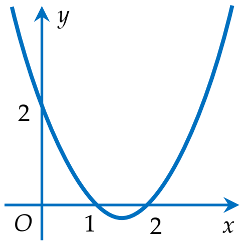
Câu 48: Cho hàm số $f(x)=ax^4+bx^2+c$ có đồ thị như hình vẽ dưới



Hỏi phương trình $a.f^4(x)+b.f^2(x)+c=0$ có bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?

A. 4. **B.** 15. **C.** 14. **D.** 16.

Câu 49: Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình bên dưới

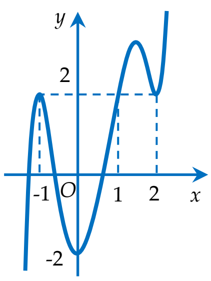


Hàm số $g(x)=f\left(\sqrt{x^2+2x+3}-\sqrt{x^2+2x+2}\right)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây ?

A. $(-\infty;-1)$. **B.** $\left(-\infty;\dfrac{1}{2}\right)$.

C. $\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$. **D.** $(-1;+\infty)$.

Câu 50: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị hàm số như hình dưới.



Đồ thị hàm số $h(x)=|2f(x)-3|$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

A. 4. **B.** 5. **C.** 7. **D.** 9.

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT CHỦ ĐỀ I

TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HS

Dạng 1: Bài tập không chứa tham số

Câu 1: Đáp án D.

Cách 1: Cách tư duy.

TXĐ: $D=(0;+\infty)\setminus\{1\}$.

Ta có: $y'=\left(\dfrac{x}{\ln x}\right)'=\dfrac{\ln x-1}{(\ln x)^2}$.

$y'=0\Leftrightarrow \ln x=1\Leftrightarrow x=e$;

y' không xác định tại $x=1$

+ $y'>0\ \forall x\in(e;+\infty)$ nên hàm số đồng biến trên $(e;+\infty)$.

+ $y'<0\ \forall x\in(0;1)$ nên hàm số nghịch biến trên $(0;1)$.

+ $y'<0\ \forall x\in(1;e)$ nên hàm số nghịch biến trên $(1;e)$.

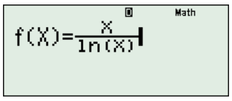
Cách 2: Sử dụng máy tính casio:

Nhận thấy ở các phương án có các khoảng sau:

$(0;+\infty);(0;1);(0;e);(1;e);(e;+\infty)$.

Lúc này ta sử dụng lệnh MODE 7 TABLE để xét tính đồng biến, nghịch biến của hàm số:

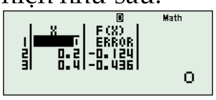
Nhập vào máy $Fx=\dfrac{x}{\ln x}$:

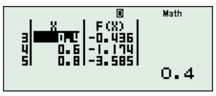


Ấn 2 lần = máy hiện Start? Ta chọn $x=0$, ấn 0 =

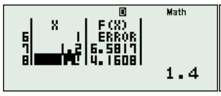
End? Ta nhập SHIFT  (chính là chọn end là e). Do ở đây ta cho chạy từ 0 đến e bởi ta cần xét tính đồng biến nghịch biến trên $(0;+\infty);(0;1);(0;e)$; $(1;e)$.

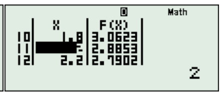
Ấn = máy hiện Step? Nhập 0,2, máy hiện như sau:





Từ đây ta nhận thấy giá trị của hàm số giảm khi cho x chạy từ 0 đến 1. Vậy hàm số nghịch biến trên $(0;1)$; từ đây ta loại A và B. Tiếp theo kéo xuống thì máy hiện:





Lúc này ta thấy các giá trị của hàm số tiếp tục giảm khi cho x chạy từ 1 đến e. Do vậy hàm số nghịch biến trên $(1;e)$, từ đây ta loại C, chọn D.

Câu 2: Đáp án D.

TXĐ: $D=(-1;+\infty)\Rightarrow$ loại A, C.

$y'=\left[x-\ln(x+1)\right]'=\dfrac{x}{x+1}$.

$y'=0\Leftrightarrow x=0$

$y'>0\Leftrightarrow x>0$

$\Rightarrow$ hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)$.

$y'<0\Leftrightarrow -1<x<0$

$\Rightarrow$ hàm số nghịch biến trên $(-1;0)$

Cách 2: Sử dụng máy tính casio bằng lệnh TABLE trong MODE 7 tương tự bài 1.

Câu 3: Đáp án A.

TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

$y'=\left(x^3+3x^2-4\right)'=3x^2+6x$

$y'=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\x=-2\end{array}\right.$

Ta có hệ số $a=1>0$ nên đồ thị hàm số có dạng **N**, tức hàm số nghịch biến trên $(-2;0)$.

Câu 4: Đáp án B.

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Ta có $ad-bc=1-2=-1<0$

Suy ra hàm số nghịch biến trên từng khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

Câu 5: Đáp án D.

TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

$y'=\left(-x^3+3x^2+9x\right)'=-3x^2+6x+9$

$y'=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=3\\x=-1\end{array}\right.$

Ta thấy hàm số có hệ số $a=-1<0$ nên hàm số đồng biến trên $(-1;3)$.

Câu 6: Đáp án D.

TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

$y'=\left(-x^3-6x^2+10\right)'=-3x^2-12x$

$y'=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\x=-4\end{array}\right.$

Do hệ số $a=-1<0$ nên hàm số đồng biến trên $(-4;0)$

Câu 7: Đáp án C

TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

$y'=\left(x^4-2x^2-1\right)'=4x^3-4x$

$y'=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\pm 1\\x=0\end{array}\right.$

Do hệ số $a=1>0$ nên đồ thị hàm số có dạng **W** từ đây suy ra hàm số nghịch biến trên $(-\infty;-1)$ và $(0;1)$; hàm số đồng biến trên $(-1;0)$ và $(1;+\infty)$.

Câu 8: Đáp án A.

Vì $f'(x)=x^2(x+2)\geq 0\ \forall x\in(-2;+\infty)$ nên hàm số đồng biến trên $(-2;+\infty)$.

Câu 9: Đáp án B.

Cách suy luận 1:

TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

$y'=\left(2x^4+1\right)'=8x^3$, $y'=0\Leftrightarrow x=0$

Vì $y'>0\ \forall x\in(0;+\infty)$ nên hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Cách suy luận 2:

Đồ thị hàm số có dạng Parabol có đỉnh là $I(0;1)$ và hệ số $a=2>0$ nên đồ thị hàm số là Parabol có bề lõm hướng lên, tức hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Câu 10: Đáp án D.

Ở phần sau ta sẽ học về đồ thị hàm số bậc 4 trùng phương, ở phần dạng đồ thị ta có sơ đồ về dạng đồ thị hàm bậc bốn trùng phương. Từ đó ta rút ra nhận xét:

Do hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)$ nên đồ thị hàm số không thể có ba điểm cực trị, vậy đồ thị hàm số có dạng parabol quay bề lõm lên trên và có đỉnh là $I(0;c)$.

Áp dụng sơ đồ tôi vừa giới thiệu ở bài sau để thỏa mãn điều kiện trên thì

$\begin{cases}a>0\\ab\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a>0\\b\geq 0\end{cases}$

Câu 11: Đáp án D.

Từ việc xem xét sơ đồ tôi giới thiệu ở câu 10 thì ta có:

Câu 4: Đáp án C.

Ta thấy $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=3 \end{array}\right.$

Đến đây có nhiều độc giả kết luận luôn là hàm số có hai điểm cực trị, tuy nhiên đó là kết luận sai lầm, bởi khi qua $x=1$ thì $f'(x)$ không đổi dấu, bởi $(x-1)^2 \geq 0, \forall x$.

Do vậy hàm số chỉ có một điểm cực trị là $x=3$.

Câu 5: Đáp án B.

TXĐ: $D=\mathbb{R}$

$y'=3x^2-6x$

$y'=0 \Leftrightarrow 3x(x-2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	1	↘	-3	↗	$+\infty$

Vậy điểm cực đại của đồ thị hàm số là $I(0;1)$.

Tư duy nhanh: Nhận thấy hàm số đã cho có hệ số $a=3>0$ và có hai điểm cực trị nên đồ thị hàm số có dạng **N** (mẹo). Lúc này ta suy ra được luôn $x=0$ là điểm cực đại của hàm số, suy ra điểm cực đại của đồ thị hàm số là $I(0;1)$.

Câu 6: Đáp án A.

Nhận thấy đây là hàm bậc bốn trùng phương có hệ số *a, b* cùng dấu nên có duy nhất một điểm cực trị.

Câu 7: Đáp án D.

TXĐ: $D=\mathbb{R}$

$y'=3x^2-6x+3$

$y'=0 \Leftrightarrow 3(x-1)^2=0 \Leftrightarrow x=1$

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	↗	2	↗	$+\infty$

Tuy rằng $y'=0$ tại $x=1$ nhưng $x=1$ không là cực trị của hàm số do $y' \geq 0\ \forall x \in D$.

Vậy hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Tư duy nhanh: Nhận thấy $y'=3(x-1)^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Nên hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 8: Đáp án B.

Chú ý: Phân biệt giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) và cực đại (cực tiểu) ở phần lý thuyết về GTLN –GTNN được tôi trình bày trong chuyên đề sau.

Phương án A. Sai: -1 là giá trị cực tiểu. 3 là giá trị cực đại.

Phương án B. Đúng.

Phương án C. Sai: Giá trị cực đại là 3.

Phương án D. Sai: Nếu nói hàm số đạt cực tiểu thì phải nói tại $x=-1$ còn $A(-1;-1)$ là điểm cực tiểu của đồ thị hàm số (tương tự với $B(1;3)$).

Câu 9: Đáp án B.

Ta có: $D=\mathbb{R}\backslash\{-1;1\}$.

Phương án A. Đúng. Do qua $x=0$ thì y' đổi dấu từ dương sang âm nên hàm số vẫn đạt cực trị tại $x=0$.

Phương án B. Nhận thấy hàm số không đạt cực tiểu tại $x=1$ do tại $x=1$ thì hàm số không xác định.

Phương án C. Đúng: Do

$\lim\limits_{x\to -1} y=+\infty \Rightarrow x=-1$ là tiệm cận đứng của đồ thị.

$\lim\limits_{x\to 1} y=-\infty \Rightarrow x=1$ là tiệm cận đứng của đồ thị.

Phương án D. Đúng: Do

$\lim\limits_{x\to +\infty} y=-3 \Rightarrow y=-3$ là tiệm cận ngang của đồ thị.

$\lim\limits_{x\to -\infty} y=3 \Rightarrow y=3$ là tiệm cận ngang của đồ thị.

Câu 10: Đáp án D.

A. Sai: TXĐ: $D=\mathbb{R}\backslash\{-1\}$.

$y'=2+\dfrac{1}{(x+1)^2}>0$ nên hàm số không có cực trị.

B. Sai: Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

$y'=9x^2+2016>0$ nên hàm số không có cực trị.

C. Sai: Hàm phân thức bậc nhất trên bậc nhất luôn không có cực trị.

D. Đúng: Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

$y'=-4x^3-6x$

$y'=0 \Leftrightarrow -2x(2x^2+3)=0 \Leftrightarrow x=0$

Vậy hàm số có một điểm cực trị.

(Hoặc dùng **STUDY TIP** cho hàm bậc bốn trùng phương ta thấy $-1<0;\ 3<0 \Rightarrow (-1).(-3)>0 \Rightarrow$ Hàm số có một điểm cực trị là $x=0$)

Câu 11: Đáp án C.

TXĐ: $D=\mathbb{R}$. Đặt $|x|=t\ \ (t\geq 0)$

Khi đó $y=t^3-4t^2+3$

$y'=3t^2-8t$

$y'=0 \Leftrightarrow t(3t-8)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0\ (t/m) \Rightarrow x=0 \\ t=\dfrac{8}{3}\ (t/m) \Rightarrow x=\pm\dfrac{8}{3} \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$-\frac{8}{3}$		0		$\frac{8}{3}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	$-\frac{175}{27}$	↗	3	↘	$-\frac{175}{27}$	↗	$+\infty$

Do vậy hàm số có 3 điểm cực trị.

Câu 12: Đáp án B.

TXĐ: $D=\mathbb{R}$

$y'=4x^3+2x$

$y'=0 \Leftrightarrow 2x(x^2+1)=0 \Leftrightarrow x=0$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

Vậy hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$.

Tư duy nhanh: Không dùng bảng biến thiên, ta có $a=1>0$ nên hàm số có duy nhất một điểm cực tiểu $x=0$. (Do đồ thị hàm số có dạng parabol có bề lõm hướng lên trên).

Câu 13: Đáp án D.

TXĐ: $D=\mathbb{R}$

Dựa vào bảng biến thiên ta có:

A. Sai: Do hàm số có 3 cực trị.

B. Sai: Hàm số đạt cực tiểu tại $x_1=-1$ và $x_2=2$ còn hàm số có giá trị cực tiểu tương ứng là -3.

C. Sai: Chú ý phân biệt giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) và cực đại (cực tiểu).

D. Đúng.

Câu 14: Đáp án C.

TXĐ: $D=\mathbb{R}$

$y'=3x^2-6x$

$y' = 0 \Leftrightarrow 3x(x-2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	-1	↘	-5	↗	$+\infty$

Vậy hàm số đạt cực trị tại $x = 0; x = 2$.

Tư duy nhanh: Kết luận luôn hàm số đạt cực trị tại $x = 0; x = 2$ do hàm bậc ba hoặc là không có cực trị, hoặc là có hai cực trị. (**STUDY TIP** đã nói).

Câu 15: Đáp án A.

TXĐ: $D = \mathbb{R}$

$y' = 3x^2 - 2 \Rightarrow x_{CD}$ và x_{CT} là nghiệm của phương trình $3x^2 - 2 = 0$.

Theo định lý Vi-ét ta có: $x_{CD} + x_{CT} = 0$

$\Rightarrow y_{CD} + y_{CT} = x_{CD}^3 - 2x_{CD} + x_{CT}^3 - 2x_{CT}$

$= (x_{CD} + x_{CT})(x_{CD}^2 - x_{CD}x_{CT} + x_{CT}^2)$

$- 2(x_{CD} + x_{CT}) = 0$

(do $x_{CD} + x_{CT} = 0$)

Câu 16: Đáp án A.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy:

+ y' đổi dấu từ dương sang âm khi đi qua $x = 0$, do vậy $M(0;2)$ là điểm cực đại của đồ thị hàm số chứ không phải hàm số.

+ y' đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua $x = -1$, do vậy $f(-1)$ là giá trị cực tiểu của hàm số.

Vậy B đúng.

+ y' mang dấu dương với $x \in (-1;0) \cup (1;+\infty)$

$\Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-1;0)$ và $(1;+\infty)$. Vậy C đúng.

+ y' đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua $x = 1$, do vậy $x_0 = 1$ được gọi là điểm cực tiểu của hàm số.

Câu 17: Đáp án B.

TXĐ: $D = \mathbb{R}$

$y' = 3x^2 - 12x + 9$

Sử dụng máy tính cầm tay bằng cách nhập biểu thức:

$y - \dfrac{y'.y''}{18a}$ như sau:

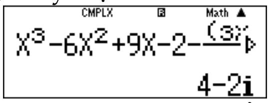
Chọn $\boxed{\text{MODE}}$ 2

Nhập vào màn hình:

$X^3 - 6X^2 + 9X - 2 - \dfrac{(3X^2 - 12X + 9)(6X - 12)}{18}$

Ấn $\boxed{\text{CALC}}$, nhập x= i (i là nút $\boxed{\text{ENG}}$ trên máy tính)

Lúc này máy hiện:



Vậy phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là $y = -2x + 4 \Leftrightarrow 2x + y - 4 = 0$.

d đi qua $A(-1;1)$ và có vtcp $(2;1)$ nên có phương trình: $x - 2y + 3 = 0$

hay $d: y = \dfrac{x}{2} + \dfrac{3}{2}$.

Câu 18: Đáp án D.

Áp dụng **STUDY TIP** cho hàm bậc bốn trùng phương.

Nhận thấy $2 > 0$; $-\sqrt{3} < 0$.

Vậy hàm số có hai điểm cực tiểu là:

$x_1 = \sqrt{\dfrac{-(-\sqrt{3})}{2.2}} = \sqrt[4]{\dfrac{3}{16}}$ và

$x_2 = -\sqrt{\dfrac{-(-\sqrt{3})}{2.2}} = -\sqrt[4]{\dfrac{3}{16}}$

Lúc này đồ thị có dạng chữ W, do vậy khoảng cách giữa 2 điểm cực tiểu chính là khoảng cách hoành độ của chúng: $d = |x_1 - x_2| = 2.\sqrt[4]{\dfrac{3}{16}} = \sqrt[4]{3}$

Câu 19: Đáp án A.

Áp dụng **STUDY TIP** cho hàm bậc bốn trùng phương.

Nhận thấy $-1 < 0$; $2 > 0$.

Vậy hàm số có 2 điểm cực đại là

$\begin{cases} x_1 = \sqrt{\dfrac{-2}{2.(-1)}} = 1 \\ x_2 = -\sqrt{\dfrac{-2}{2.(-1)}} = -1. \end{cases}$

Câu 20: Đáp án A.

Do y' đổi dấu từ dương sang âm khi đi qua $x = 1$.

$\Rightarrow$ Hàm số đạt cực đại tại $x = 1$, y' đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua $x = 2$.

Vậy hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$.

Câu 21: Đáp án B.

TXĐ: $D = \mathbb{R}$

$y' = 4x^3 - 2x^2 - 2x$

$y' = 0 \Leftrightarrow 2x(2x^2 - x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow 2x(x-1)(2x+1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	$-\frac{5}{48}$	↗	0	↘	$-\frac{2}{3}$	↗	$+\infty$

$\Rightarrow$ Hàm số có 2 giá trị cực tiểu là $-\dfrac{5}{48}$ và $-\dfrac{2}{3}$.

Vậy hàm số có giá trị cực đại là 0.

Câu 22: Đáp án A.

TXĐ: $D = \mathbb{R}$

$y' = (x+2)^2 + (x-1).2.(x+2)$

$y' = (x+2).3x$

$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -2 \end{array}\right.$

$\Rightarrow$ Hàm số có 2 điểm cực trị $A(0;-4)$ và $B(-2;0)$

$\Rightarrow$ Trung điểm của AB là $M(-1;-2)$.

Vậy M nằm trên đường thẳng $2x + y + 4 = 0$.

Câu 23: Đáp án C.

TXĐ: $D = \mathbb{R}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -2 \end{array}\right.$

Ta thấy $x = 1$ là nghiệm bội chẵn của phương trình $f'(x) = 0$ nên $x = 1$ không là điểm cực trị của hàm số (do không làm y' đổi dấu khi đi qua).

Vậy hàm số có hai điểm cực trị là $x = 0; x = -2$

Câu 24: Đáp án C.

TXĐ: $D = \mathbb{R}$

Dựa vào bảng biến thiên:

Phương án A. Đúng: Do y' mang dấu dương trên $(0;+\infty)$.

Phương án B. Đúng: Do y' đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua $x = 0$.

Phương án C. Sai: Do y' đổi dấu từ dương sang âm khi đi qua $x = -2$, do vậy hàm số đạt cực đại tại $x = -2$.

Phương án D. Đúng: Do y' mang dấu âm trên $(-2;0)$.

Câu 25: Đáp án A.

TXĐ: $D=\mathbb{R}$

Ta có: $f'(x)=0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2(x+2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\ x=-2\end{array}\right.$

Ta có bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$(x-1)^2$		+		+	0	+	
$(x+2)$		−	0	+		+	
$f'(x)$		−		+		+	

Phương án A. Đúng: Do $f'(x)$ mang dấu dương trên khoảng $(-2;+\infty)$.

Phương án B. Sai: Do $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua $x=-2$ nên $x=-2$ là điểm cực tiểu của hàm số.

Phương án C. Sai: Do $f'(x)$ không đổi dấu khi đi qua $x=-1$ $\Rightarrow x=-1$ không là cực trị của hàm số.

Phương án D. Sai: Do $f'(x)$ mang dấu dương với $x\in(-2;1)$.

Câu 26: Đáp án A.

TXĐ: $D=\mathbb{R}$

$y'=5^{-x}+x.5^{-x}.(-1).\ln 5$

$y'=5^{-x}(1-x.\ln 5)$

$y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}5^{-x}=0\ (VN)\\ 1-x.\ln 5=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{\ln 5}\end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$\dfrac{1}{\ln 5}$		$+\infty$
y'		+	0	−	
y	$-\infty$	↗	$\dfrac{1}{e.\ln 5}$	↘	0

A. Đúng: Do y' đổi dấu từ dương sang âm khi đi qua $x=\dfrac{1}{\ln 5}$.

B. Sai: Do y' có đổi dấu $\Rightarrow$ Hàm số có cực trị.

C. Sai: Do y' đổi dấu từ dương sang âm khi đi qua $x=\dfrac{1}{\ln 5}\Rightarrow x=\dfrac{1}{\ln 5}$ là điểm cực đại của hàm số (không phải là điểm cực tiểu).

D. Sai: Hàm số có một điểm cực trị duy nhất là $x=\dfrac{1}{\ln 5}$.

Câu 27: Đáp án C.

Quan sát bảng biến thiên, ta thấy:

– Hàm số đạt cực đại tại $x=0$, giá trị cực đại $y_{CD}=3$

– Hàm số đạt cực tiểu là $x=\pm 1$, giá trị cực tiểu là $y_{CT}=0$.

Vậy đáp án C sai.

Câu 28: Đáp án C.

Ta có $y'=3x^2-6x-9$ và

$y=\dfrac{1}{3}(x-1)(3x^2-6x-9)-8x-2$.

Suy ra phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là $d: y=-8x-2$. Đường thẳng d đi qua điểm $N(1;-10)$.

Dạng 2: Tìm điều kiện để hàm số có cực trị thỏa mãn điều kiện cho trước

Câu 29: Đáp án C.

Cách 1: TXĐ: $D=\mathbb{R}$

$y'=3x^2-2m^2x-(4m-3)$

Để hàm số đạt cực đại tại $x=1$ thì điều kiện cần là $x=1$ là nghiệm của phương trình $y'=0$.

Ta có: $3.1^2-2m^2.1-(4m-3)=0$

$\Leftrightarrow 2m^2+4m-6=0$

$\Leftrightarrow 2(m-1)(m+3)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=1\\ m=-3\end{array}\right.\ (1)$

Lại có $y''=6x-2m^2$

Điều kiện đủ để $x=1$ là điểm cực đại của hàm số là: $y''(1)<0$

$\Leftrightarrow 6.1-2m^2<0 \Leftrightarrow m^2>3\ (2)$

Từ (1) và $(2) \Rightarrow m=-3$.

Cách 2: Áp dụng phương pháp sử dụng máy tính cầm tay mà tôi đã nêu ra ở phần lý thuyết.

Câu 30: Đáp án D.

TXĐ: $D=\mathbb{R}$

$y'=3x^2-6mx$

Để hàm số có 2 điểm cực trị thì phương trình $y'=0$ phải có 2 nghiệm phân biệt. Ta có:

$3x^2-6mx=0 \Leftrightarrow 3x(x-2m)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\ x=2m\end{array}\right. \Rightarrow 2m\neq 0 \Leftrightarrow m\neq 0$

Câu 31: Đáp án D.

TXĐ: $D=\mathbb{R}$

$y'=3x^2-6x+m$

Hàm số có 2 điểm cực trị x_1, x_2 $\Rightarrow x_1$, x_2 là nghiệm của phương trình: $3x^2-6x+m=0$.

Theo định lý Vi-ét ta có: $\left\{\begin{array}{l}x_1+x_2=2\\ x_1.x_2=\dfrac{m}{3}\end{array}\right.$

Lại có: $x_1^2+x_2^2=3$

$(x_1+x_2)^2-(x_1^2+x_2^2)=2x_1x_2$

$\Leftrightarrow 2^2-3=2x_1x_2 \Leftrightarrow x_1x_2=\dfrac{1}{2}$

Mà $x_1x_2=\dfrac{m}{3}\Rightarrow \dfrac{m}{3}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow m=\dfrac{3}{2}$

Câu 32: Đáp án B.

TXĐ: $D=\mathbb{R}$

$y'=x^2-2mx+(m^2+m-1)$

Để hàm số có hai điểm cực trị thì $\Delta'>0$

$\Leftrightarrow m^2-(m^2+m-1)>0$

$\Leftrightarrow -m+1>0 \Leftrightarrow m<1\,(1)$

Hàm số đạt cực trị tại 2 điểm x_1, x_2 $\Rightarrow x_1$, x_2 là nghiệm của phương trình: $x^2-2mx+(m^2+m-1)=0$

Theo định lý Vi-ét ta có:

$\left\{\begin{array}{l}x_1+x_2=2m\\ x_1.x_2=m^2+m-1\end{array}\right.$

Lại có:

$|x_1+x_2|=4 \Leftrightarrow |2m|=4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=2\\ m=-2\end{array}\right.\ (2)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow m=-2$

Câu 33: Đáp án B.

TXĐ: $D=\mathbb{R}$

$y'=3x^2+2(m-1)x-3m$

$y'=0;\ \Delta'=m^2+7m+1>0\ \forall m$

Phương trình $y'=0$ luôn có hai nghiệm phân biệt.

Hàm số đạt cực trị tại điểm $x_0=1$ $\Rightarrow x_0=1$ là nghiệm của phương trình $y'=0$.

Ta có:

$3.1^2+2(m-1).1-3m=0 \Leftrightarrow m=1.$

Câu 34: Đáp án A.

TXĐ: $D=\mathbb{R}$

$y'=4x^3+4mx$

Để hàm số có đúng một điểm cực trị thì phương trình $y'=0$ có đúng 1 nghiệm.

$4x^3+4mx=0 \Leftrightarrow 4x\left(x^2+m\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2+m=0 \end{array}\right.$

Trường hợp 1: $x^2+m=0$ vô nghiệm $\Rightarrow m>0.$

Trường hợp 2: $x^2+m=0$ có 1 nghiệm $x=0 \Rightarrow m=0.$

Vậy $m\ge 0.$

Câu 35: Đáp án B.

TXĐ: $D=\mathbb{R}$

$y'=x^2-x+a$

Hàm số đạt cực trị tại $x_1,\ x_2 \Rightarrow x_1,\ x_2$ là nghiệm của phương trình

$$y'=0 \Leftrightarrow x^2-x+a=0.$$

Theo định lý Vi-ét ta có: $\left\{\begin{array}{l} x_1+x_2=1 \\ x_1.x_2=a \end{array}\right.$

Theo bài ra ta có:

$\left(x_1^2+x_2+2a\right)\left(x_2^2+x_1+2a\right)=9$

$\Leftrightarrow \left(x_1x_2\right)^2+x_1^3+2ax_1^2+x_2^3+x_1x_2$
$+2ax_2+2ax_2^2+2ax_1+4a^2=9$

$\Leftrightarrow \left(x_1x_2\right)^2+x_1x_2+\left(x_1+x_2\right).$
$.\left[\left(x_1+x_2\right)^2-3x_1x_2\right]+2a\left(x_1+x_2\right)$
$+2a\left[\left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2\right]=9-4a^2$

$\Leftrightarrow a^2+a+\left(1-3a\right)+2a+2a\left(1-2a\right)$
$=9-4a^2$

$\Leftrightarrow a^2+2a-8=0$

$\Leftrightarrow \left(a-2\right)\left(a+4\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=2 \\ a=-4 \end{array}\right.$

Lại có:

$\left(x_1+x_2\right)^2\ge 4x_1x_2 \Leftrightarrow 1\ge 4a \Leftrightarrow a\le \dfrac{1}{4}$

Do vậy $a=-4$

Câu 36: Đáp án C.

Cách 1: TXĐ: $D=\mathbb{R}$

$y'=12x^2+2mx-12$

Hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x=-2$ thì:

+ Điều kiện cần là $x=-2$ là nghiệm của phương trình $y'=0.$

$12.(-2)^2+2m(-2)-12=0 \Leftrightarrow m=9 \quad (1)$

+ Điều kiện đủ là $y''(-2)>0$

$\Leftrightarrow 12.2.(-2)+2m>0 \Leftrightarrow m>24 \quad (2)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ Không có giá trị nào của m thỏa mãn.

Cách 2: Sử dụng máy tính như phần lý thuyết tôi hướng dẫn.

Câu 37: Đáp án D.

Hàm số có 2 điểm cực tiểu và 1 điểm cực đại, áp dụng **STUDY TIP** cho hàm bậc bốn trùng phương

$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} m.\left(m^2-2\right)<0 \\ m>0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} m>0 \\ m^2<2 \end{array}\right. \Leftrightarrow 0<m<\sqrt{2}$

Câu 38: Đáp án D.

TXĐ: $D=\mathbb{R}$

$y'=4x^3-4mx$

Áp dụng **STUDY TIP** với hàm bậc bốn trùng phương ta có:

$$32.1^3.1^2+\left(-2m\right)^5=0 \Leftrightarrow m=1$$

Câu 39: Đáp án A.

TXĐ: $D=\mathbb{R}$

$y'=4x^3-4mx$

Áp dụng **STUDY TIP** cho hàm bậc bốn trùng phương ta có:

$$\left(-2m\right)^3+24.1=0 \Leftrightarrow m=\sqrt[3]{3}$$

Câu 40: Đáp án B.

TXĐ: $D=\mathbb{R}$

$y'=4x^3+4\left(m-1\right)x$

Áp dụng **STUDY TIP** cho hàm bậc bốn trùng phương ta có:

$$\left[2\left(m-1\right)\right]^3+24.1=0$$

$\Leftrightarrow \left(m-1\right)^3=-3 \Leftrightarrow m=\sqrt[3]{-3}+1$

Câu 41: Đáp án A.

TXĐ: $D=\mathbb{R}$

$y'=4x^3-4mx$

Áp dụng **STUDY TIP** cho hàm bậc bốn trùng phương ta có:

$$8.1+\left(-2m\right)^3=0 \Leftrightarrow m=1$$

Câu 42: Đáp án A.

TXĐ: $D=\mathbb{R}$

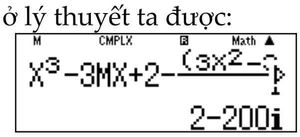
Để hàm số có 3 điểm cực trị tạo thành một tam giác có diện tích bằng 2, ta áp dụng **STUDY TIP** cho hàm bậc bốn trùng phương là:

$32.1^3.2^2+\left(-2m\right)^5=0 \Leftrightarrow m=\sqrt[5]{4}$

Câu 43: Đáp án A.

TXĐ: $D=\mathbb{R}$

Sử dụng máy tính theo cách tôi giới thiệu ở lý thuyết ta được:



Vậy phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số có dạng:

$y=-2mx+2 \Leftrightarrow 2mx+y-2=0$.

Ta có $S_{IAB}=\dfrac{1}{2}.IA.IB.\sin\widehat{AIB}\le\dfrac{1}{2}.IA.IB$

Dấu bằng xảy ra khi $IA\perp IB$.

Lúc này $d\left(I;AB\right)=\dfrac{R\sqrt{2}}{2}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\Leftrightarrow \dfrac{\left|2m-1\right|}{\sqrt{4m^2+1}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\Leftrightarrow 2\left(4m^2-4m+1\right)=4m^2+1$

$\Leftrightarrow 4m^2-8m+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{2+\sqrt{3}}{2} \\ x=\dfrac{2-\sqrt{3}}{2} \end{array}\right.$

Câu 44: Đáp án B.

TXĐ: $D=\mathbb{R}$

Để hàm số có hai điểm cực trị thì $b^2-3ac>0$

$\Leftrightarrow \left(2m-1\right)^2-6.\left(m^2-1\right)>0$

$\Leftrightarrow \dfrac{-2-3\sqrt{2}}{2}<m<\dfrac{-2+3\sqrt{2}}{2}$

$m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m\in\left\{-3;-2;-1;0;1\right\}$

Vậy có 5 giá trị của m.

Câu 45: Đáp án B.

TXĐ: $D=\mathbb{R}$

Để hàm số có đúng hai điểm cực trị thì phương trình $y'=0$ phải có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow b^2-3ac>0 \Leftrightarrow 4+6m>0 \Leftrightarrow m>-\dfrac{2}{3}$

Câu 46: Đáp án D.

TXĐ: $D=\mathbb{R}$

$y'=x^2-\left(m+5\right)x+m$

$b^2-3ac>0$

$\Leftrightarrow \left(m+5\right)^2-4m>0 \Leftrightarrow m^2+6m+25>0$

$\Leftrightarrow \left(m+3\right)^2+16>0$ luôn đúng $\forall m\in\mathbb{R}$

Do đó $x_{CĐ}$ và x_{CT} là nghiệm của phương trình (1).

Theo định lý Vi-ét ta có:

$\left\{\begin{array}{l} x_{CĐ}+x_{CT}=m+5 \\ x_{CĐ}.x_{CT}=m \end{array}\right.$

Ta có: $\left|x_{CĐ}-x_{CT}\right|=5$

Bình phương 2 vế ta có:

$x_{CĐ}^2-2x_{CĐ}x_{CT}+x_{CT}^2=25$

$\Leftrightarrow \left(x_{CĐ}+x_{CT}\right)^2-4x_{CĐ}x_{CT}=25$

$\Leftrightarrow \left(m+5\right)^2-4m=25$

$\Leftrightarrow m^2+6m=0 \Leftrightarrow m\left(m+6\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=-6 \end{array}\right.$

Câu 47: Đáp án B.

TXĐ: $D=\mathbb{R}$

$y'=3ax^2+2bx+c$

Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị là $\left(-1;18\right)$ và $\left(3;-16\right)$

$\Rightarrow -1;\ 3$ là hai nghiệm của phương trình $y'=0$.

$$\begin{cases}(-1)^2.3a+2b(-1)+c=0\\ 3a.3^2+2b.3+c=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}3a-2b+c=0\\ 27a+6b+c=0\end{cases}$$

Đồ thị hàm số đi qua hai điểm $(-1;18)$ và $(3;-16)$ nên ta có:

$$\begin{cases}-a+b-c+d=18\\ 27a+9b+3c+d=-16\\ \Leftrightarrow 28a+8b+4c=-34\ (2)\end{cases}$$

Từ (1) và $(2)\Rightarrow\begin{cases}3a-2b+c=0\\ 27a+6b+c=0\\ 28a+8b+4c=-34\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{17}{16}\\ b=-\dfrac{51}{16}\\ c=-\dfrac{153}{16}\end{cases}\Rightarrow d=\frac{203}{16}$$

$\Rightarrow a+b+c+d=1.$

Câu 48: Đáp án C.

Điều kiện: $x>m$

$$y'=2x+\frac{1}{x-m}$$

Để hàm số có đúng hai điểm cực trị thì phương trình $y'=0$ phải có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow x_1>x_2>m$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}m^2-2>0\\ x_2=\dfrac{m-\sqrt{m^2-2}}{2}>m\end{cases}$$

$\Leftrightarrow m<-\sqrt{2}$

Phương trình có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m<-\sqrt{2}$.

Câu 49: Đáp án D.

TXĐ: $D=\mathbb{R}$

$y'=3ax^2+2bx$

Hàm số có hai điểm cực trị là $A(0;1)$ và $B(-1;2)$

$$\Rightarrow\begin{cases}y'(0)=0\\ y'(-1)=0\end{cases}\text{ và }\begin{cases}y(0)=1\\ y(-1)=2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}0=0\\ 3a-2b=0\\ c=1\\ -a+b+c=2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}c=1\\ 3a-2b=0\\ a-b=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\ b=3\\ c=1\end{cases}$$

$\Rightarrow a+b+c=2+3+1=6.$

Câu 50: Đáp án D.

TXĐ: $D=\mathbb{R}$

$y'=3(1-m)x^2-6x+3$

+ Xét $m\neq 1$: Hàm số có cực trị

$\Leftrightarrow b^2-3ac>0$

$\Leftrightarrow (-3)^2-3.3.(1-m)>0\Leftrightarrow m>0$

+ Xét $m=1\Rightarrow y=-3x^2+3x-5$

$\Rightarrow$ Hàm số có cực trị.

Vậy $m>0$.

Câu 51: Đáp án B.

TXĐ: $D=\mathbb{R}$

Ta có

$b^2-3ac=m^2-(2m-1)=(m-1)^2$

+ Xét $m=1\Rightarrow y'=0$ có nghiệm kép

$\Rightarrow$ Hàm số không có cực trị.

+ Xét $m\neq 1\Rightarrow y'=0$ có hai nghiệm phân biệt

$\Rightarrow$ Hàm số có một cực đại và một cực tiểu.

Vậy mệnh đề sai là B.

Câu 52: Đáp án C.

+ Xét $m=0: y=-9x^2+1\ \Rightarrow$ loại vì đồ thị hàm bậc 2 không có 3 cực trị.

+ Xét $m\neq 0$: Áp dụng **STUDY TIP** cho hàm bậc bốn trùng phương có 2 điểm cực đại và 1 điểm cực tiểu

$$\Leftrightarrow\begin{cases}m<0\\ m(m^2-9)<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<0\\ m^2>9\end{cases}\Leftrightarrow m<-3.$$

Câu 53: Đáp án B.

Ta có $y'=3x^2-6x$ và

$$y=\left(\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}\right)(3x^2-6x)-2x+1$$

$$=\left(\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}\right).y'-2x+1$$

Suy ra phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm bậc ba là $\Delta: y=-2x+1$. Đường thẳng Δ có hệ số góc là $k_1=-2$.

Đường thẳng $d: y=(2m-1)x+3+m$ có hệ số góc là $k_2=2m-1$.

Để $d\perp\Delta\Leftrightarrow k_1.k_2=-1$

$\Leftrightarrow -2(2m-1)=-1$

$\Leftrightarrow 2m-1=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow m=\dfrac{3}{4}$.

Câu 54: Đáp án B.

Ta có $y'=3x^2-6mx=3x(x-2m)$;

$$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=2m\end{array}\right.$$

Hàm số có 2 cực trị

$\Leftrightarrow 0\neq 2m\Leftrightarrow m\neq 0$. Khi đó, hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là

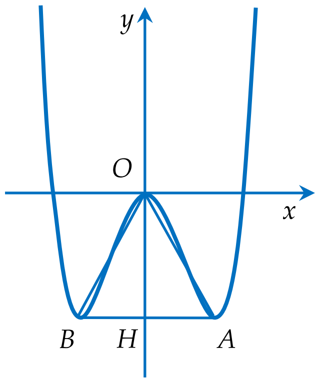
$A(0;4m^3)\in Oy$ và $B(2m;0)\in Ox$.

Như vậy, ΔOAB vuông tại O. Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow S_{OAB}=4\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}OA.OB=4$

$\Leftrightarrow |4m^3|.|2m|=8\Leftrightarrow m^4=1\Leftrightarrow m=\pm 1$

(thỏa mãn điều kiện).

Câu 55: Đáp án B.



$y'=4x^3-4mx=4x(x^2-m)$.

Đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị khi và chỉ khi y' có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m>0$

Ba điểm cực trị là:

$O(0;0)$, $A(\sqrt{m};-m^2)$, $B(-\sqrt{m};-m^2)$

tạo thành tam giác cân tại O.

Ta có:

$AB=2\sqrt{m}$, $OH=m^2$, với $H(0;-m^2)$ là trung điểm của đoạn AB.

$S_{\Delta OAB}<1\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}OH.AB<1$

$\Leftrightarrow m^2\sqrt{m}<1\Leftrightarrow m^5<1\Leftrightarrow m<1$

Vậy $0<m<1$.

Câu 56: Đáp án A.

* Để hàm số có hai cực trị

$\Leftrightarrow y'=x^2-2(2m-1)x+1-4m=0$ có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta'_y=4m^2>0\Leftrightarrow m\neq 0.$

* Gọi $x_1;x_2$ là hai nghiệm của $y'=0$.

Theo định lý Viet, ta có:

$$\begin{cases}x_1+x_2=4m-2\\ 3x_1+x_2=4\\ x_1x_2=1-4m\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=3-2m;\ x_2=6m-5\\ (3-2m)(6m-5)=1-4m\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=2\\ m=\dfrac{2}{3}\end{array}\right.$$

Kết hợp các điều kiện thì $m=2$ hoặc $m=\frac{2}{3}$ thỏa mãn.

Câu 57: Đáp án B.

Ta có $y'=x^2-2mx+m^2-m+1$.

Đặt $t=x-1\Rightarrow x=t+1$ thì

$y'=g(t)=t^2+2(1-m)t+m^2-3m+2$.

Do $x>1\Rightarrow x-1=t>0$.

Để hàm số đã cho ở đề bài có cực trị trong khoảng $(1;+\infty)$ $\Leftrightarrow y'=0$ có nghiệm trong khoảng $(1;+\infty)$

$\Leftrightarrow g(t)=0$ có nghiệm trong khoảng $(0;+\infty)$ $\Leftrightarrow P=m^2-3m+2<0$

hoặc $\begin{cases}\Delta'_g=m-1\geq 0\\ S=2m-2>0\\ P=m^2-3m+2\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow m>1.$

Câu 58: Đáp án A.

Từ bài toán tổng quát 3 trong phần lý thuyết ta có khoảng cách giữa hai điểm cực trị của đồ thị (C_m) được tính bằng công thức $d=2\sqrt{\frac{4k^3+k}{a}}$ với $k=\frac{b^2-3ac}{9a}$.

Ta có $k=\frac{(-m)^2-3.\frac{1}{3}.(-1)}{9.\frac{1}{3}}=\frac{m^2+1}{3}$

$$\Rightarrow d=2\sqrt{\frac{4.\left(\frac{m^2+1}{3}\right)^3+\frac{m^2+1}{3}}{\frac{1}{3}}}$$

$$=2\sqrt{\frac{4}{9}.(m^2+1)^3+(m^2+1)}$$

$$=2\sqrt{m^2+1}.\sqrt{\frac{4}{9}.(m^2+1)^2+1}$$

$$\geq 2.\sqrt{1}.\sqrt{\frac{4}{9}.1+1}=\frac{2\sqrt{13}}{3}.$$

Dấu bằng xảy ra khi $m=0$.

Câu 59: Đáp án D.

Từ bài toán số 3 trong phần hàm số bậc bốn trùng phương thì ta có công thức

$$S_0=\frac{-b^5}{32a^3}$$

$$\Leftrightarrow 1=\frac{-(-2m)^5}{32.1^3}\Leftrightarrow m^5=1\Leftrightarrow m=1.$$

Câu 60: Đáp án D.

Từ bài toán số 2 trong phần hàm số bậc bốn trùng phương thì ta có công thức

$\frac{b^3}{a}=-24$

$\Leftrightarrow \frac{\left[2(m-2)\right]^3}{1}=-24$

$\Leftrightarrow (m-2)^3=-3\Leftrightarrow m=2-\sqrt[3]{3}.$

Câu 61: Đáp án A.

Đồ thị hàm số có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow m>0$

Trong bài toán 10 phần cực trị hàm số trùng phương ta có công thức

$R=\frac{b^3-8a}{8.|a|b}\Leftrightarrow 1=\frac{(-2m)^3-8.1}{8.1.(-2m)}$

$\Leftrightarrow -16m=-8m^3-8$

$\Leftrightarrow m=m^3-2m+1=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1\\ m=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\\ m=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\end{array}\right.$

Kết hợp với điều kiện đầu tiên thì chỉ có $m=1; m=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ là thỏa mãn.

Dạng 3. Cực trị hàm số tổng và hàm số hợp

Câu 1: Đáp án B.

Quan sát đồ thị hàm số $f'(x)$ ta có bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$:

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
f'(x)		+	0	−	0	+	
f(x)		↗	f(-2)	↘	f(0)	↗	

Vậy *f* đạt cực đại tại $x=-2$ và *f* đạt cực tiểu tại $x=0$; cực đại của *f* là $f(-2)$ và cực tiểu của *f* là $f(0)$, ta có $f(0)<f(-2)$. Phương án B sai.

Câu 2: Đáp án D.

Quan sát đồ thị hàm số $f'(x)$ ta có bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$:

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
f'(x)		−	0	+	0	−	0	+	
f(x)		↘	f(1)	↗	f(2)	↘	f(3)	↗	

Vậy hàm số $y=f(x)$ có 3 điểm cực trị; hàm số đạt cực đại tại điểm $x=2$; hàm số đạt cực tiểu tại $x=1$ và $x=3$. Phương án D đúng.

Câu 3: Đáp án C.

Quan sát đồ thị hàm số $f'(x)$ ta có bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$:

x	$-\infty$		-4		-2		0		3		$+\infty$
f'(x)		−	0	+	0	−		−	0	+	
f(x)	$+\infty$	↘	f(-4)	↗	f(-2)	↘	f(0)	↘	f(3)	↗	$+\infty$

Vậy hàm số $y=f(x)$ có 3 điểm cực trị; hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty;-4)$ và $(-2;3)$; $f(0)>f(3)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$.

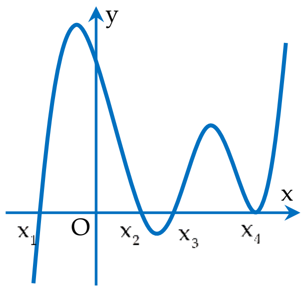
Phương án C đúng.

Câu 4: Đáp án A.

Quan sát hình vẽ, ta thấy đồ thị hàm số $y=f'(x)$ cắt trục hoành tại 4 điểm, trong đó có 1 điểm là điểm tiếp xúc. Vậy hàm số $y=f(x)$ có 3 điểm cực trị.

Câu 5: Đáp án B.

Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ cắt trục hoành tại 4 điểm có hoành độ lần lượt là x_1,x_2,x_3,x_4 như hình vẽ sau:



Quan sát thấy:

+ Qua mỗi điểm x_1,x_3 thì $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương. Suy ra $x=x_1,x=x_3$ là hai điểm cực tiểu của hàm số $y=f(x)$.

+ Qua điểm x_2 thì $f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm. Suy ra $x=x_2$ là một điểm cực đại của hàm số $y=f(x)$.

+ Qua điểm x_4 thì $f'(x)$ không đổi dấu nên $x=x_4$ không là điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$.

Quan sát nhanh: Ta thấy $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương 2 lần nên hàm số $y=f(x)$ có 2 điểm cực tiểu.

Câu 6: Đáp án A.

Quan sát hình vẽ, ta thấy đồ thị hàm số $y=f'(x)$ cắt trục hoành tại 3 điểm, trong đó có 2 điểm là điểm tiếp xúc. Vậy hàm số $y=f(x)$ có đúng 1 điểm cực trị.

Câu 7: Đáp án B.

Quan sát hình vẽ, ta thấy đồ thị hàm số $y=f'(x)$ cắt trục hoành tại 3 điểm và không có điểm nào là điểm tiếp xúc. Vậy hàm số $y=f(x)$ có 3 điểm cực trị.

Câu 8: Đáp án C.

Quan sát hình vẽ, ta thấy đồ thị hàm số $y=f'(x)$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt, trong đó có 1 điểm là điểm tiếp xúc. Vậy hàm số $y=f(x)$ có 2 điểm cực trị.

Câu 9: Đáp án C.

Tương tự như câu 8.

Câu 10: Đáp án B.

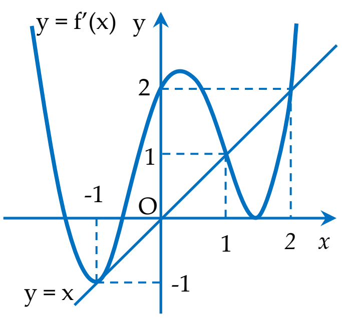
Quan sát hình vẽ, ta thấy đồ thị hàm số $y=f'(x)$ cắt trục hoành tại 4 điểm, trong đó có 1 điểm là điểm tiếp xúc. Vậy hàm số $y=f(x)$ có 3 điểm cực trị.

Câu 11: Đáp án A.

Quan sát hình vẽ, ta thấy trên khoảng $(a;b)$ thì đồ thị hàm số $y=f'(x)$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là $x=0, x=1, x=2$; trong đó $x=2$ là hoành độ của tiếp điểm. Vậy trên khoảng $(a;b)$ thì hàm số $y=f(x)$ có 2 điểm cực trị là $x=0$ và $x=1$.

Câu 12: Đáp án B.

Xét đạo hàm $g'(x)=f'(x)-x$; kẻ đường thẳng $y=x$ đi qua các điểm $(-1;-1),(0;0),(1;1),(2;2)$.



Quan sát hình vẽ trên, ta thấy

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm 1 \\ x=2 \end{array}\right.$$

(Nghiệm của phương trình $f'(x)=x$ là hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=f'(x)$ với đường thẳng $y=x$).

Ta lập bảng biến thiên của hàm số $g(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
f'(x)		+	0	+	0	−	0	+	
f(x)			f(-1) ↗		f(1)	↘	f(3)	↗	

Vậy hàm số $y=g(x)$ đạt cực đại tại điểm $x=1$; hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x=2$.

BÀI TOÁN MIN MAX

1. Lí thuyết Min, max

Câu 1: Đáp án C

Do $y=\dfrac{3x-2}{x+2}$ đồng biến trên $[-1;2]$ và $-2 \notin [-1;2]$ nên hàm số đạt giá trị min max tại hai đầu mút. Ta có: $\left\{\begin{array}{l} y(-1)=-5 \\ y(2)=1 \end{array}\right.$. Vậy $\min\limits_{[-1;2]} y=-5$.

Câu 2: Đáp án A

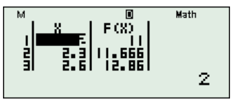
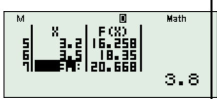
Cách 1: Ta có:

$$y'=\frac{3x^2(x-1)-x^3-3}{(x-1)^2}=\frac{2x^3-3x^2-3}{(x-1)^2}$$

Nhận xét: $y'>0, \forall x\in[2;4]$

Suy ra: $\min\limits_{[2;4]} y=f(2)=11$.

Cách 2: Sử dụng TABLE trong máy tính ta có:

Ta thấy hàm số đồng biến trên $[2;4]$ từ đây ta kết luận $\min\limits_{[2;4]} y=11$.

Câu 3: Đáp án A

Cách 1: TXĐ: $x\neq -1$.

Ta có:

$$y'=\frac{2x.(x+1)-(x^2+3)}{(x+1)^2}=\frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}$$

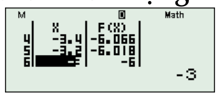
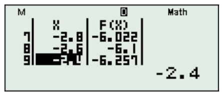
Nhận xét:

$y'=0 \Leftrightarrow x=-3(TM); x=1(l)$

Lại có: $\left\{\begin{array}{l} y(-4)=-\dfrac{19}{3} \\ y(-2)=-7 \\ y(-3)=-6 \end{array}\right.$

Vậy $\min\limits_{[-4;-2]} y=-7$.

Cách 2: Sử dụng TABLE

Vậy ta chọn A.

Câu 4: Đáp án C

Xét hàm số đã cho liên tục trên $[-4;4]$, ta có: $y'=3x^2-6x-9$

$$y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1\in[-4;4] \\ x=3\in[-4;4] \end{array}\right.$$

Xét: $\left\{\begin{array}{l} y(-4)=-41 \\ y(-1)=40 \\ y(3)=8 \\ y(4)=15 \end{array}\right.$

Vậy $M+m=-41+40=-1$

Câu 5: Đáp án C

Nhận xét: Hàm số đã cho có hệ số của các số mũ lẻ cùng dương nên đơn điệu trên $[-2;4]$. Suy ra, hàm số đạt GTLN,GTNN tại các đầu mút.

Tổng của GTLN, GTNN là:

$y(-2)+y(4)=64$

Câu 6: Đáp án C

Ta có:

$$y'=3x^2-2x-8=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{4}{3}\notin[1;3] \\ x=2\in[1;3] \end{array}\right.$$

Xét: $\left\{\begin{array}{l} y(1)=-8 \\ y(2)=-12 \\ y(3)=-6 \end{array}\right.$

Vậy $\max\limits_{[1;3]} y=-6$.

Câu 7: Đáp án C

Từ bài ra ta có: $y=2-x$

Do x, y là hai số không âm nên $x\in[0;2]$

Thay vào P có:

$$P=\frac{1}{3}x^3+x^2+(2-x)^2-x+1$$

$$=\frac{1}{3}x^3+2x^2-5x+5$$