Chú ý

Khi giải các phương trình, bất phương trình ở bên cần chú ý điều kiện gồm: điều kiện đại số và điều kiện logarit.

$\log_a b$: điều kiện $\begin{cases} 0<a\neq 1 \\ b>0 \end{cases}$

$\log_a\left[f(x)\right]^n$ với $n\in\mathbb{N}^*$

- Nếu n chẵn thì điều kiện là $\begin{cases} f(x)\neq 0 \\ 0<a\neq 1 \end{cases}$

- Nếu n lẻ thì điều kiện là $\begin{cases} f(x)>0 \\ 0<a\neq 1 \end{cases}$

STUDY TIP

Ta có thể đưa ra mẹo nhớ ngắn gọn như sau về bất phương trình mũ và bất phương trình lôgarit:

$a>1$ cùng

$0<a<1$ đảo

(**Lưu ý:** Đây chỉ là mẹo nhớ)

STUDY TIP

Chú ý: Với phương trình dạng $\boxed{a^x=m}$ với $0<a\neq 1$ chú ý xét dấu của m.

+ Nếu $m\leq 0$ thì phương trình vô nghiệm.

Nếu $m>0$ thì $a^x=m\Leftrightarrow x=\log_a m$

V. Phương trình mũ và phương trình lôgarit

1. Phương trình – bất phương trình mũ cơ bản

a. Phương trình mũ

* Nếu $a>0,\ a\neq 1$ thì $a^{f(x)}=a^{g(x)}\Leftrightarrow f(x)=g(x)$

* Nếu a chứa ẩn thì

$$a^{f(x)}=a^{g(x)}\Leftrightarrow (a-1)\left[f(x)-g(x)\right]=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=1 \\ \begin{cases} a>0;a\neq 1 \\ f(x)=g(x) \end{cases} \end{array}\right.$$

$$a^{f(x)}=b^{g(x)}\Leftrightarrow \log_a a^{f(x)}=\log_a b^{g(x)}\Leftrightarrow f(x)=\log_a b.g(x)\ \text{(lôgarit hóa)}$$

b. Bất phương trình mũ

* Nếu $a>1$ thì $a^{f(x)}>a^{g(x)}\Leftrightarrow f(x)>g(x)$ (cùng chiều)

* Nếu $0<a<1$ thì $a^{f(x)}>a^{g(x)}\Leftrightarrow f(x)<g(x)$ (ngược chiều)

* Nếu a chứa ẩn thì $a^{f(x)}>a^{g(x)}\Leftrightarrow (a-1)\left[f(x)-g(x)\right]>0$

2. Phương trình – bất phương trình lôgarit cơ bản

a. Phương trình lôgarit

* Nếu $a>0;a\neq 1$ thì $\log_a x=b\Leftrightarrow x=a^b$

* Nếu $a>0;a\neq 1$ thì $\log_a f(x)=\log_a g(x)\Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=g(x) \\ f(x)>0\ (\text{hoaë}\ g(x)>0) \end{cases}$

* Nếu $a>0;a\neq 1$ thì $\log_a f(x)=g(x)\Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=a^{g(x)} \\ f(x)>0 \end{cases}$ (mũ hóa)

b. Bất phương trình lôgarit

* Nếu $a>1$ thì $\log_a f(x)>\log_a g(x)\Leftrightarrow \begin{cases} f(x)>g(x) \\ g(x)>0 \end{cases}$ (cùng chiều)

* Nếu $0<a<1$ thì $\log_a f(x)>\log_a g(x)\Leftrightarrow \begin{cases} f(x)<g(x) \\ f(x)>0 \end{cases}$ (ngược chiều)

* Nếu a chứa ẩn thì $\left[\begin{array}{l} \log_a B>0\Leftrightarrow (a-1)(B-1)>0 \\ \dfrac{\log_a A}{\log_a B}>0\Leftrightarrow (A-1)(B-1)>0 \end{array}\right.$

Ví dụ mở đầu: Giải các phương trình sau:

a) $10^x=1$. b) $2^x=8$. c) $4^x=-4$. d) $e^x=5$.

e) $3^x=2$. f) $3^x=\dfrac{1}{27}$. g) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x=9$. h) $5^{x^2-5x+1}=1$.

Lời giải

a. $10^x=1\Leftrightarrow x=\log 1=0$.

b. $2^x=8\Leftrightarrow x=\log_2 8=3$.

c. $4^x=-4$ vô nghiệm, vì $4^x>0$ với $\forall x\in\mathbb{R}$.

d. $e^x=5\Leftrightarrow x=\ln 5$.

e. $3^x=2\Leftrightarrow x=\log_3 2$.

f. $3^x = \dfrac{1}{27} \Leftrightarrow x = \log_3\left(\dfrac{1}{27}\right) \Leftrightarrow x = \log_3 3^{-3} = -3.$

g. $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x = 9 \Leftrightarrow x = \log_{\frac{1}{2}} 9 \Leftrightarrow x = -\log_2 9 \Leftrightarrow x = -2\log_2 3.$

h. $5^{x^2-5x+1} = 1 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 1 = \log_5 1 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{5 \pm \sqrt{21}}{2}.$

A. Đưa về cùng cơ số hoặc lôgarit hóa – mũ hóa

Dạng 1: Giải phương trình mũ logarit bằng phương pháp đưa về cùng cơ số. Dùng các phép biến đổi về lũy thừa và logarit bằng phương pháp đưa về một trong các dạng sau:

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 1 \\ \begin{cases} 0 < a \neq 1 \\ f(x) = g(x) \end{cases} \end{array}\right. \quad \text{(Nếu cơ số } a \text{ không đổi)}$$

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ (a-1)\left[f(x) - g(x)\right] = 0 \end{cases} \quad \text{(Nếu cơ số } a \text{ thay đổi)}$$

$$\log_a\left[f(x)\right] = \log_a\left[g(x)\right] \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a \neq 1 \\ f(x) = g(x) \\ f(x) > 0 \vee g(x) > 0 \end{cases} \quad (\vee \text{ là kí hiệu hoặc})$$

Chú ý: Đây là phương pháp cơ bản để giải phương trình dạng này, nhưng chỉ giải được một số không nhiều các phương trình, đối với phương trình logarit, hoặc phương trình mũ có cơ số chứa ẩn thì nên đặt điều kiện để phương trình có nghĩa rồi mới biến đổi.

Độc giả hay nhầm khi áp dụng các nhóm công thức sau:

Nếu $0 < a \neq 1, b_1 b_2 > 0$ thì:

a. $\log_a(b_1 b_1) = \log_a|b_1| + \log_a|b_2|$.

b. $\log_a \dfrac{b_1}{b_2} = \log_a|b_1| - \log_a|b_2|$.

c. $\log_a b^{2k} = 2k.\log_a|b|, k \in \mathbb{Z}^+, b \neq 0$

Ví dụ 1: Giải phương trình $\log_4(x-1) = 3$

A. $x = 63$. **B.** $x = 65$. **C.** $x = 80$. **D.** $x = 82$.

Đáp án B.

Lời giải

Ta có $\log_4(x-1) = 3 \Leftrightarrow \log_4(x-1) = \log_4 4^3 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x = 4^3 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 65$.

Ngoài ra ta có thể nhập biểu thức $\log_4(X-1) - 3$ vào máy tính và CALC từng giá trị từ đó đưa ra kết quả, tuy nhiên đây là bài toán đơn giản, việc sử dụng máy tính làm cho bài toán trở nên lâu hơn.

Ví dụ 2: Tổng các nghiệm của phương trình $4^x + 3^{2x+1} = 3.18^x + 2^x$

A. 0. **B.** $\log_{\frac{9}{2}} \frac{1}{3}$. **C.** $\log_{\frac{9}{2}} \frac{1}{6}$. **D.** 3.

Đáp án B.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$. Khi đó $(1) \Leftrightarrow \left(2^x\right)^2 - 2^x + 3.9^x - 3.2^x.9^x = 0$

$\Leftrightarrow \left(2^x - 1\right)\left(2^x - 3.9^x\right) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^x - 1 = 0 \\ 2^x - 3.9^x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^x = 1 \\ 2^x = 3.9^x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ \left(\frac{9}{2}\right)^x = \frac{1}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \log_{\frac{9}{2}} \frac{1}{3} \end{array}\right.$$

$\Rightarrow$ tổng hai nghiệm của phương trình là $\log_{\frac{9}{2}} \frac{1}{3}$.

STUDY TIP

Chú ý: Nếu bài toán chỉ hỏi nghiệm thì ta có thể sử dụng lệnh CALC trong máy tính để thử, tuy nhiên bài toán hỏi nghiệm nằm trong khoảng nào nên buộc ta phải giải bài toán.

Ví dụ 3: Phương trình $\log_2(x-1) - 2\log_4(3x-2) + 2 = 0$ có nghiệm nằm trong khoảng

A. $(0;3)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $(3;5)$. **D.** $(2;3)$.

Đáp án A.

Lời giải

Điều kiện: $x > 1$. Khi đó $(1) \Leftrightarrow \log_2(x-1) - \log_2(3x-2) = -2$

$\Leftrightarrow \log_2 \frac{x-1}{3x-2} = -2 \Leftrightarrow \frac{x-1}{3x-2} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = 2$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 2$.

Ở ví dụ 3 này ta thấy cơ số 2 và cơ số 4 có mối quan hệ $2^2 = 4$ nên ta có thể áp dụng công thức

$\log_{a^m} b = \frac{1}{m}\log_a b$ với

$0 < a \neq 1;\ b > 0; m \in \mathbb{R}$

Trong bài toán này ta áp dụng $2\log_4(3x-2) = \frac{2}{2}\log_2(3x-2)$

Ví dụ 4: Phương trình $3^{x-1}.2^{x+1} = 24$ có nghiệm là

A. $x = 3$. **B.** $x = 2$. **C.** $x = 5$. **D.** $x = -2$.

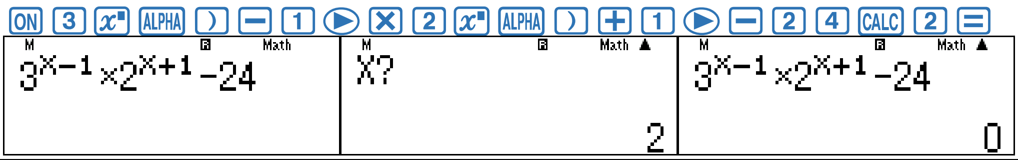
Đáp án B.

Lời giải

Cách 1: Ta có $3^{x-1}.2^{x+1} = 24 \Leftrightarrow 3^x.2^x.2.\frac{1}{3} = 24 \Leftrightarrow 2^x.3^x = 36 \Leftrightarrow 6^x = 6^2 \Leftrightarrow x = 2$.

Cách 2: Sử dụng máy tính cầm tay.

Nhập vào màn hình $3^{X-1} x 2^{X+1} - 24$ sau đó ấn CALC thử các giá trị của x trong 4 phương án đề cho, thì thấy khi $x = 2$ giá trị của biểu thức bằng 0 nên ta chọn B.



Ví dụ 4: Tích hai nghiệm của phương trình $\left(\sqrt{10}+3\right)^{\frac{x-3}{x-1}} = \left(\sqrt{10}-3\right)^{\frac{x+1}{x+3}}$ nằm trong khoảng

A. $(-6;-4)$. **B.** $(4;6)$. **C.** $(1;5)$. **D.** $(-3;-2)$.

Đáp án A.

Lời giải

Điều kiện $\begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq -3 \end{cases}$

STUDY TIP
Nhận thấy, các cơ số trong đề bài cho chính là cặp số nghịch đảo. Tức là $a.b=1 \Leftrightarrow b=\frac{1}{a}=a^{-1}$.
Do đó ta thay $b=a^{-1}$, đưa phương trình đã cho về dạng $a^{f(x)}=a^{g(x)} \Rightarrow f(x)=g(x)$.

Ta có phương trình $\Leftrightarrow \left(\sqrt{10}+3\right)^{\frac{x-3}{x-1}}=\left[\frac{\left(\sqrt{10}-3\right)\left(\sqrt{10}+3\right)}{\sqrt{10}+3}\right]^{\frac{x+1}{x+3}}$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{10}+3\right)^{\frac{x-3}{x-1}}=\left(\frac{1}{\sqrt{10}+3}\right)^{\frac{x+1}{x+3}} \Leftrightarrow \left(\sqrt{10}+3\right)^{\frac{x-3}{x-1}}=\left(\sqrt{10}+3\right)^{-\frac{x+1}{x+3}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-3}{x-1}=-\frac{x+1}{x+3} \Rightarrow x^2-9=-\left(x^2-1\right) \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{5}$$

Vậy tích hai nghiệm của phương trình là $\sqrt{5}.\left(-\sqrt{5}\right)=-5.$

Ví dụ 5: Số nghiệm của phương trình $\frac{1}{\sqrt{3x-5}}=(3x-5)^{\log_{\frac{1}{25}}\left(2+5x-x^2\right)}$ là

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.

Đáp án A.

Lời giải

Điều kiện $\frac{5}{3}<x<\frac{5+\sqrt{33}}{2}$

Khi đó phương trình đã cho trở thành

$$(3x-5)^{-\frac{1}{2}}=(3x-5)^{-\frac{1}{2}\log_5\left(2+5x-x^2\right)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x-5=1 \\ -\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}\log_5\left(2+5x-x^2\right) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ \log_5\left(2+5x-x^2\right)=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ 2+5x-x^2=5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=\frac{5\pm\sqrt{13}}{2} \end{array}\right.$$

Kết hợp với điều kiện ban đầu ta kết luận phương trình có hai nghiệm phân biệt là $x=2; x=\frac{5+\sqrt{13}}{2}$.

Ta thấy trong phương trình này hai vế đều xuất hiện $3x-5$, tuy nhiên ở vế trái $3x-5$ xuất hiện trong căn ở dưới mẫu số. Ta sẽ biến đổi để vế trái có dạng $(3x-5)^m$. Từ đó đưa phương trình về dạng $a^{f(x)}=a^{g(x)}$ với a chứa ẩn $a^{f(x)}=a^{g(x)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=1 \\ f(x)=g(x) \end{array}\right.$

Ví dụ 6: Số nghiệm của phương trình $x^{\log_3^2 x-5\log_3 x+7}=\frac{2}{\frac{1}{\sqrt{x+1}-1}-\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}}$ là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Đáp án D.

Lời giải

Điều kiện: $x>0$

Ta biến đổi vế phải của phương trình đã cho

$$VP=\frac{2}{\frac{\sqrt{x+1}+1-\left(\sqrt{x+1}-1\right)}{(x+1)-1}}=\frac{2x}{2}=x$$

Lúc này phương trình trở thành

$$x^{\log_3^2 x-5\log_3 x+7}=x\ (*) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ \log_3^2 x-5\log_3 x+7=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ \log_3 x=2 \Leftrightarrow x=9 \\ \log_3 x=3 \Leftrightarrow x=27 \end{array}\right.$$ (thỏa mãn điều kiện).

Chú ý
Rất nhiều độc giả biến đổi đến phương trình $(*)$ nhưng thiếu trường hợp $x=1$ nên đã chọn sai phương án, ta cần chú ý nhớ kĩ phương pháp.

Ví dụ 7: Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\sqrt{5}+2\right)^{\sqrt{x^2-4x+3}}-\left(\sqrt{5}-2\right)^{x-1-|x-2|}\ge 0$ là

A. $(2;5)$. **B.** $S=(1;3)$. **C.** $S=(-\infty;1]$. **D.** $S=[3;+\infty)$.

Đáp án D.

Lời giải

Dạng tổng quát của bài toán là $a^{f(x)}\ge b^{g(x)}\,(*)$ với $ab=1\Rightarrow b=\frac{1}{a^1}=a^{-1}$ thì bất phương trình $(*)\Leftrightarrow a^{f(x)}\ge a^{-g(x)}$
$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)\ge -g(x)\text{ khi } a>1\\ f(x)\le -g(x)\text{ khi } 0<a<1\end{array}\right.$

Điều kiện $x\le 1; x\ge 3$

Bất phương trình $\Leftrightarrow\left(\sqrt{5}+2\right)^{\sqrt{x^2-4x+3}}\ge\left(\sqrt{5}-2\right)^{x-1-|x-2|}$

$\Leftrightarrow\left(\sqrt{5}+2\right)^{\sqrt{x^2-4x+3}}\ge\left(\sqrt{5}+2\right)^{1-x+|x-2|}\Leftrightarrow\sqrt{x^2-4x+3}\ge 1-x+|x-2|\ (*)$

Với $x\le 1$ thì $(*)\Leftrightarrow\sqrt{x^2-4x+3}\ge 3-2x$: vô nghiệm.

Với $x\ge 3$ thì $(*)\Leftrightarrow\sqrt{x^2-4x+3}\ge -1$ luôn đúng với $\forall x\ge 3$.

Vậy bất phương trình có tập nghiệm $S=[3;+\infty)$.

Ví dụ 8: Tập nghiệm của bất phương trình

$\log_3\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}+4\right)+\log_{\frac{1}{3}}\left(2\sqrt{x}+1\right)\ge\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{2}$ là

A. $S=(-\infty;1]$. **B.** $S=[0;1]$. **C.** $[0;+\infty)$. **D.** $S=(0;1)$.

Đáp án B.

Lời giải

Điều kiện $x\ge 0$ thì bất phương trình $\Leftrightarrow\log_3\frac{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}+4}{2\sqrt{x}+1}\ge\log_3 2$

$\Leftrightarrow\frac{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}+4}{2\sqrt{x}+1}\ge 2\ \Leftrightarrow\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+4\ge 4\sqrt{x}+2\ (2)$ (do $2\sqrt{x}+1>0$)

Đặt $t=\sqrt[6]{x},(t\ge 0)$ thì $(2)\Leftrightarrow 3t^3-t^2-2\le 0\Leftrightarrow(t-1)\left(3t^2+2t+2\right)\le 0$

$\Leftrightarrow t\le 1\Leftrightarrow\sqrt[6]{x}\le 1\Leftrightarrow x\le 1$.

Kết hợp với điều kiện ta có tập nghiệm của bất phương trình là $S=[0;1]$.

Một số bài tự luyện đơn giản:

Câu 1 : Nghiệm của phương trình $x^{\log 4}+4^{\log x}=32$ là

A. $x=100$. **B.** $x=10;\ x=100$. **C.** $x=10$. **D.** $x=20;\ x=100$.

Câu 2: Nghiệm của phương trình $3^{x-4}=\left(\frac{1}{9}\right)^{3x-1}$ là

A. $x=\frac{1}{3}$. **B.** $x=1$. **C.** $x=\frac{6}{7}$. **D.** $x=\frac{7}{6}$.

Câu 3: Nghiệm của phương trình $5^{|4x-6|}=25^{3x-4}$ là

A. $x=1$. **B.** $x=2$. **C.** $x=\frac{14}{5}$. **D.** $x=\frac{7}{5}$.

Câu 4: Tập nghiệm của phương trình $\left(\frac{1}{25}\right)^{x+1}=125^{2x}$ bằng

A. $\{1\}$. **B.** $\{4\}$. **C.** $\left\{-\frac{1}{4}\right\}$. **D.** $\left\{-\frac{1}{8}\right\}$.