Bài đọc thêm 2: Các bài toán số phức vận dụng cao

1. Bài toán tìm số phức liên quan đến môđun

Tìm số phức z có môđun lớn nhất (hoặc nhỏ nhất) thỏa mãn một điều kiện cho trước.

A. MỘT SỐ KIẾN THỨC ÁP DỤNG

1. Bất đẳng thức: Bunyakovsky.
2. Định lý về dấu của tam thức bậc hai.
3. Sự đồng biến nghịch biến của hàm số, bảng biến thiên.
4.Giao điểm của đường thẳng và đường thẳng, đường thẳng và đường tròn.
5. Tính chất của hàm số lượng giác.

*** Một số công thức tính nhanh số phức vận dụng vào bài toán tìm min max số phức.**

1. $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2\left(|z_1|^2+|z_2|^2\right)$.

2. $z.\overline{z}=|z|^2$; $\overline{az_1+bz_2}=a\overline{z_1}+b\overline{z_2}$.

3. $\overline{z_1}+\overline{z_2}=\overline{z_1+z_2}$; $\overline{z_1}-\overline{z_2}=\overline{z_1-z_2}$; $\overline{z_1}.\overline{z_2}=\overline{z_1z_2}$; $\dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}=\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}$.

4. $|z_1|-|z_2|\le|z_1\pm z_2|\le|z_1|+|z_2|$.

5. $|z_1+z_2|+|z_2+z_3|+|z_3+z_1|\le|z_1|+|z_2|+|z_3|+|z_1+z_2+z_3|$.

6. $|z_1|+|z_2|+|z_3|\le|z_1+z_2-z_3|+|z_1-z_2+z_3|+|-z_1+z_2+z_3|$.

7. Cho $|z_1|=|z_2|=|z_3|=k$.

Ta có $|z_1-z_2||z_2-z_3|+|z_2-z_3||z_3-z_1|+|z_3-z_1||z_1-z_2|\le 9k^2$.

8. Cho số phức z thỏa mãn $\left|z+\dfrac{1}{z}\right|=k$ thì $\begin{cases}\max|z|=\dfrac{\sqrt{k^2+4}+k}{2}\\ \min|z|=\dfrac{\sqrt{k^2+4}-k}{2}\end{cases}$

9. Cho $|z+a|=1$. Khi đó $|z^2+a^2|\ge\dfrac{\left|1-2|a|\right|}{\sqrt{2}}$.

10. Cho số phức z thỏa mãn $|z-z_0|=R$. Lúc này tập hợp các điểm diễn số phức z là đường tròn có tâm là điểm I là điểm biểu diễn số phức z_0.

Lúc này $\begin{cases}\max|z|=|z_0|+R\\ \min|z|=\left||z_0|-R\right|\end{cases}$

11. Cho số phức z thỏa mãn $|z_1z-z_2|=r$. Khi đó giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|z-z_3|$ là $\begin{cases}\max P=\left|\dfrac{z_2}{z_1}-z_3\right|+\dfrac{r}{|z_1|}\\ \min P=\left|\dfrac{r}{|z_1|}-\left|\dfrac{z_2}{z_1}-z_3\right|\right|\end{cases}$

B. CÁCH GIẢI

Bước 1: Tìm tập hợp (G) các điểm biểu diễn của z thỏa mãn điều kiện.

Bước 2: Tìm số phức z tương ứng với điểm biểu diễn $M \in (G)$ sao cho khoảng cách OM có giá trị lớn nhất (hoặc nhỏ nhất). Chú ý áp dụng hình học.

Ví dụ 1: Cho số phức z thỏa mãn $\left|z+\frac{1}{z}\right|=2\sqrt{3}.$ Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$.

A. $\max|z|=2+\sqrt{3};\min|z|=2-\sqrt{3}.$ **B.** $\max|z|=1+\sqrt{3};\min|z|=2-\sqrt{3}.$

C. $\max|z|=3+\sqrt{3};\min|z|=4-\sqrt{3}.$ **D.** $\max|z|=2+\sqrt{3};\min|z|=4-\sqrt{3}.$

Đáp án A.

Lời giải

Cách 1: Ta có

$$\left|z+\frac{1}{z}\right|^2=12 \Leftrightarrow \left(z+\frac{1}{z}\right)\left(\overline{z}+\frac{1}{\overline{z}}\right)=12 \Leftrightarrow \frac{|z|^4+\left(z+\overline{z}\right)^2-2|z|^2+1}{|z|^2}=12 \ge \frac{|z|^4-2|z|^2+1}{|z|^2}.$$

Vậy $|z|^4-2|z|^2+1 \le 12|z|^2 \Leftrightarrow 7-4\sqrt{3} \le |z|^2 \le 7+4\sqrt{3} \Leftrightarrow 2-\sqrt{3} \le |z| \le 2+\sqrt{3}.$

Từ đây chọn **A.**

STUDY TIP

Cho số phức z thỏa mãn $\left|z+\frac{1}{z}\right|=k$ thì

$$\begin{cases}\max|z|=\dfrac{\sqrt{k^2+4}+k}{2}\\ \min|z|=\dfrac{\sqrt{k^2+4}-k}{2}\end{cases}$$

Lưu ý: Trong bài toán này, ta áp dụng công thức số 2 đã được nêu ra ở phần lý thuyết như sau: $|z|^2=z.\overline{z}.$

Cách 2: Sử dụng công thức số 8 phía trên ta có

$$\begin{cases}\min|z|=\dfrac{\sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2+4}-2\sqrt{3}}{2}=2-\sqrt{3}\\ \max|z|=\dfrac{\sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2+4}+2\sqrt{3}}{2}=2+\sqrt{3}\end{cases}$$

Từ đây ta chọn **A.**

Ví dụ 2: Cho các số phức $a;b;c;z$ thỏa mãn $az^2+bz+c=0,\ (a\ne 0)$. Gọi z_1 và z_2 lần lượt là hai nghiệm của phương trình đã cho. Tính giá trị của biểu thức $P=|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2-2\left(|z_1|-|z_2|\right)^2$

A. $P=2\left|\frac{c}{a}\right|.$ **B.** $P=4\left|\frac{c}{a}\right|.$ **C.** $P=\left|\frac{c}{a}\right|.$ **D.** $P=\frac{1}{2}.\left|\frac{c}{a}\right|.$

Đáp án B.

STUDY TIP

$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2$
$=2|z_1|^2+2|z_2|^2$

Lời giải

Ta có $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2|z_1|^2+2|z_2|^2$ (công thức 1).

$\Rightarrow P=2|z_1|^2+2|z_2|^2-2\left(|z_1|-|z_2|\right)^2=4|z_1z_2|.$

Theo định lý Viet ta có $z_1z_2=\frac{c}{a} \Rightarrow P=4|z_1z_2|=4\left|\frac{c}{a}\right|.$

STUDY TIP

Cho số phức z thỏa mãn $\left|z_1.z-z_2\right|=r$. Khi đó GTLN, GTNN của biểu thức $P=\left|z-z_3\right|$ là:

$\max P=\left|\frac{z_2}{z_1}-z_3\right|+\frac{r}{z_1}$

$\min P=\left|\frac{r}{z_1}-\left|\frac{z_2}{z_1}-z_3\right|\right|$

Ví dụ 3: Cho số phức z thỏa mãn $\left|\frac{3-3\sqrt{2}i}{1+2\sqrt{2}i}z-1-\sqrt{2}i\right|=\sqrt{3}$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá rị nhỏ nhất của biểu thức $P=\left|z-3-3i\right|$. Giá trị của $M.m$ bằng

A. 25. **B.** 24. **C.** 20. **D.** 30.

Đáp án B.

Lời giải

Áp dụng công thức số 11 với $z_1=\frac{3-3\sqrt{2}i}{1+2\sqrt{2}i};z_2=1+\sqrt{2}i;z_3=3+3i;r=\sqrt{3}$ ta được $\max P=6;\min P=4\Rightarrow M.n=6.4=24.$

STUDY TIP

Cho số phức z thỏa mãn $\left|z-z_0\right|=R$ thì

$\begin{cases}\max|z|=\left|z_0\right|+R\\ \min|z|=\left|\left|z_0\right|-R\right|\end{cases}$

Ví dụ 4: Cho số phức z thỏa mãn $|z-2+2i|=1$. Gọi $M;m$ lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$. Giá trị của $M.m$ bằng

A. 7. **B.** 5. **C.** 2. **D.** 4.

Đáp án A.

Lời giải

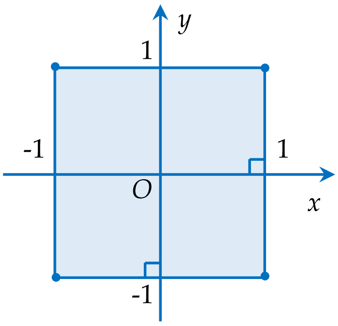
Áp dụng công thức số 10 ta có tập hợp biểu diễn số phức z là đường tròn có tâm $I(2;-2)$ và bán kính bằng 1.

Từ công thức số 10 ta có $\begin{cases}\max|z|=|2-2i|+1=2\sqrt{2}+1=M\\ \min|z|=\left||2-2i|-1\right|=2\sqrt{2}-1=m\end{cases}$

$\Rightarrow M.m=7.$

C. HỆ THỐNG BÀI TẬP ĐIỂN HÌNH

Ví dụ 1. Biết các số phức z có tập hợp điểm biểu diễn trên mặt phẳng tọa độ là hình vuông tô đậm như hình vẽ bên. Môđun lớn nhất của số phức z là



A. $|z|_{\max}=1.$ **B.** $|z|_{\max}=\frac{1}{2}.$

C. $|z|_{\max}=\sqrt{2}.$ **D.** $|z|_{\max}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$

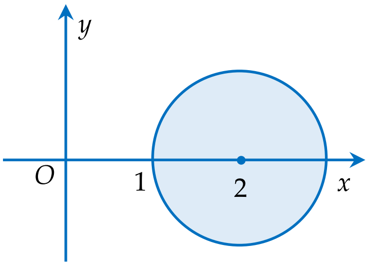
Đáp án C.

Lời giải

$|z|_{\max}$ bằng độ dài đường chéo của hình vuông cạnh bằng $\sqrt{2}$.

Tiếp theo, ví dụ 2 củng cố kiến thức về ý nghĩa hình học của mô đun số phức:

Ví dụ 2. Biết các số phức z có tập hợp điểm biểu diễn trên mặt phẳng tọa độ là phần tô đậm. Môđun **nhỏ nhất** của số phức z là

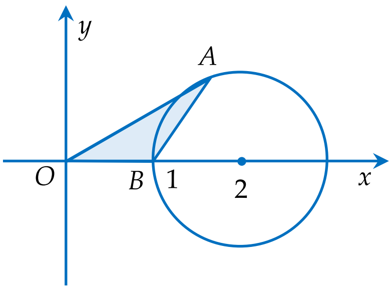


A. $|z|_{\min}=1.$ **B.** $|z|_{\min}=\frac{1}{2}.$

C. $|z|_{\min}=\frac{2}{3}.$ **D.** $|z|_{\min}=\sqrt{3}.$

Đáp án A

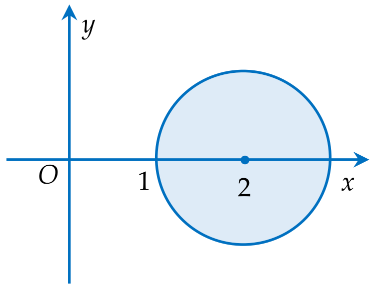
Lời giải



Tam giác OAB có góc $\widehat{OBA}$ là góc tù nên $OA>OB\Rightarrow |z|\geq OB=1.$

Vậy $|z|_{\min}=1.$

Ví dụ 3. Biết các số phức z có tập hợp điểm biểu diễn trên mặt phẳng tọa độ là hình tròn tô đậm như hình vẽ bên. Môđun lớn nhất của số phức z là

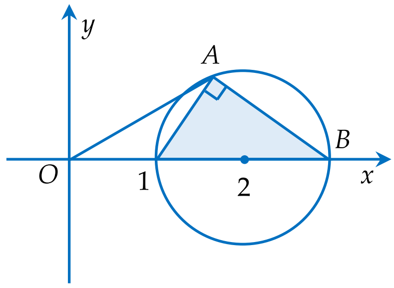


A. $|z|_{\max}=1.$ **B.** $|z|_{\max}=2.$

C. $|z|_{\max}=3.$ **D.** $|z|_{\max}=\sqrt{3}.$

Đáp án C

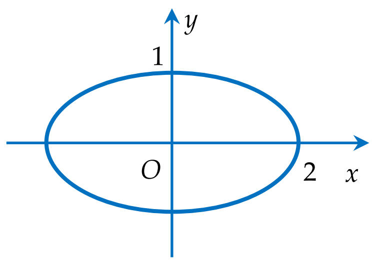
Lời giải



Tam giác OAB có góc $\widehat{OAB}$ là góc tù nên $OA<OB\Rightarrow |z|\leq OB=3.$

Vậy $|z|_{\max}=3.$

Ví dụ 4. Biết các số phức z có tập hợp điểm biểu diễn trên mặt phẳng tọa độ là đường elip như hình vẽ bên. Môđun **nhỏ nhất** của số phức z là



A. $|z|_{\min}=1.$ **B.** $|z|_{\min}=2.$

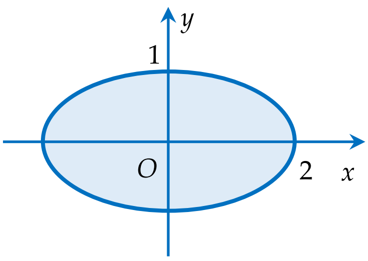
C. $|z|_{\min}=\frac{1}{2}.$ **D.** $|z|_{\min}=\frac{3}{2}.$

Đáp án A

Lời giải

Elip có độ dài trục nhỏ bằng $2b=2\Rightarrow |z|_{\min}=1.$

Ví dụ 5. Biết số phức z có tập hợp điểm biểu diễn trên mặt phẳng tọa độ là hình elip tô đậm như hình vẽ bên. Môđun lớn nhất của số phức z là



A. $|z|_{\max}=1.$ B. $|z|_{\max}=2.$

C. $|z|_{\max}=\frac{1}{2}.$ D. $|z|_{\max}=\frac{3}{2}.$

Đáp án B

Lời giải

Elip có độ dài trục lớn bằng $2a=4\Rightarrow |z|_{\max}=2.$

$\Rightarrow$ Chọn đáp án **B.**

Ví dụ 6: Biết rằng số phức z thỏa mãn $u=(z+3-i)(\overline{z}+1+3i)$ là một số thực. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z|$.

A. $2\sqrt{2}$. B. 2. C. 4. D. $\sqrt{2}$.

Đáp án A.

Lời giải

Giả sử $z=x+yi$, ta có:

$u=(x+3+(y-1)i)(x+1-(y-3)i)$

$=x^2+y^2+4x-4y+6+2(x-y+4)i$

Ta có: $u\in\mathbb{R}\Leftrightarrow x-y+4=0.$

Tập hợp các điểm biểu diễn của z là đường thẳng $(d): x-y+4=0.$ Giả sử $M(x;y)$ là điểm biểu diễn của z thì

$$|z|_{\min}\Leftrightarrow OM_{\min}\Leftrightarrow OM\perp(d).$$

Tìm được $M(-2;2)\Leftrightarrow z=-2+2i.$

Ví dụ 7: Biết rằng số phức z thỏa mãn $\left|\frac{z+2-i}{\overline{z}+1-i}\right|=\sqrt{2}.$ Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của $|z|$.

A. $\min|z|=-2+\sqrt{10},\ \max|z|=2+\sqrt{10}.$

B. $\min|z|=-3+\sqrt{10},\ \max|z|=3+\sqrt{10}.$

C. Không tồn tại GTLN, GTNN.

D. $\min|z|=-1+\sqrt{10},\ \max|z|=1+\sqrt{10}.$

Đáp án B.

Lời giải

Giả sử $z=x+yi$, ta có: $\left|\frac{z+2-i}{\overline{z}+1-i}\right|=\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow |x+2+(y-1)i|=\sqrt{2}|x+1-(y+1)i|$

$\Leftrightarrow (x+2)^2+(y-1)^2=2\left((x+1)^2+(y+1)^2\right)$

$\Leftrightarrow x^2+(y+3)^2=10.$

Tập hợp các điểm biểu diễn của z là đường tròn tâm $I(0;-3)$, bán kính $R=\sqrt{10}$. Giả sử M là điểm biểu diễn của z thì $|z|_{\min}\Leftrightarrow OM_{\min}$; $|z|_{\max}\Leftrightarrow OM_{\max}$. Tìm được:

$\min|z|=-3+\sqrt{10}$, khi $z=(-3+\sqrt{10})i$

$\max|z|=3+\sqrt{10}$, khi $z=-(3+\sqrt{10})i.$

Ví dụ 8: Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-2+3i|=\frac{3}{2}$. Điểm biểu diễn cho số phức z có môđun nhỏ nhất có tọa độ là:

A. $\left(\frac{26-3\sqrt{13}}{13};\frac{78+9\sqrt{13}}{26}\right).$

B. $\left(\frac{26+3\sqrt{13}}{13};\frac{78+9\sqrt{13}}{26}\right).$

C. $\left(\frac{26-3\sqrt{13}}{13};\frac{-78+9\sqrt{13}}{26}\right).$

D. $\left(\frac{26+3\sqrt{13}}{13};\frac{78-9\sqrt{13}}{26}\right).$

Đáp án C

Lời giải

Đặt $z=x+yi,(x,y\in\mathbb{R}).$

Ta có $|z-2+3i|=\frac{3}{2}\Leftrightarrow|x+yi-2+3i|=\frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow(x-2)^2+(y+3)^2=\frac{9}{4}$

Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I(2;-3)$ bán kính là $R=\frac{3}{2}$.

Lúc này nếu OI cắt đường tròn đã cho tại lần lượt hai điểm $A;B$ thì $OA \le |z| \le OB$

Mặt khác phương trình đường thẳng chứa OI là: $3x+2y=0$

Vậy tọa độ điểm A, B thỏa mãn hệ phương trình:

$$\begin{cases}(x-2)^2+(y+3)^2=\dfrac{9}{4}\\ y=-\dfrac{3}{2}x\end{cases}$$

$$\Rightarrow x^2-4x+4+\frac{9}{4}x^2-9x+9=\frac{9}{4}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{26+3\sqrt{13}}{13}\Rightarrow y=-\dfrac{78+9\sqrt{13}}{26}\\ x=\dfrac{26-3\sqrt{13}}{13}\Rightarrow y=\dfrac{-78+9\sqrt{13}}{26}\end{array}\right.$$

Ta chọn $\left(\dfrac{26-3\sqrt{13}}{3};\dfrac{-78+9\sqrt{13}}{26}\right)$ (do tìm min).

Ví dụ 9: Trong các số phức z thỏa điều kiện $|z-2-4i|=|z-2i|(*)$. Điểm biểu diễn cho số phức z có môđun nhỏ nhất có tọa độ là:

A. $(2\,;2)$. **B.** $(-2\,;-2)$.

C. $(2\,;-2)$. **D.** $(-2\,;2)$.

Đáp án A.

Lời giải

Cách 1: Đặt $z=x+yi,(x,y\in\mathbb{R})$. Lúc này ta có:

$|x+yi-2-4i|=|x+yi-2i|$

$\Leftrightarrow (x-2)^2+(y-4)^2=x^2+(y-2)^2$

$\Leftrightarrow -4x+4-8y+16=-4y+4$

$\Leftrightarrow 4x+4y-16=0$

$\Leftrightarrow x+y-4=0$

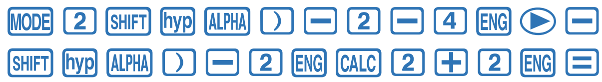
Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường thẳng $x+y-4=0$. Vậy OM min khi $OM\perp d \Leftrightarrow M(2;2)$.

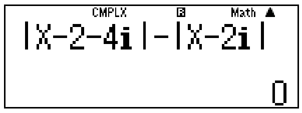
Cách 2: Sử dụng máy tính cầm tay.

1. Chuyển máy tính sang chế độ MODE 2:CMPLX

2. Nhập phương trình $(*)$ (chuyển vế đổi dấu) vào máy tính sau đó sử dụng lệnh CALC để gán giá trị của z tương ứng với từng phương án A; B; C; D. Nếu như có nhiều đáp án bằng 0 thì tính mô đun các đáp án đó và chọn đáp án có môđun nhỏ nhất.

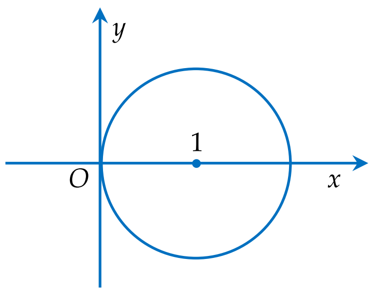
Với A:





Tiếp tục ấn CALC để thử các phương án còn lại nhưng chỉ có A thỏa mãn phương trình bằng 0 nên ta chọn A.

Ví dụ 10: Trong mặt phẳng tọa độ, hình vẽ bên là hình tròn tâm $(1;0)$, bán kính $R=1$ là hình biểu diễn tập hợp các điểm biểu diễn cho số phức z.



Khẳng định nào sau đây là **sai:**

A. $\max|z|=2$. **B.** $|z-1|\le 1$.

C. $z.\bar{z}\le 4$. **D.** $|\bar{z}+1|\le 1$.

Đáp án D

Lời giải

A đúng. $|z|$ đạt giá trị lớn nhất là 2, khi điểm biểu diễn của z cùng với O là hai đầu mút đường kính của hình tròn.

Phương trình đường tròn: $(x-1)^2+y^2=1$

Số phức $z=x+yi,(x,y\in\mathbb{R})$.

Ta có $|z-1|=|(x+yi)-1|=\sqrt{(x-1)^2+y^2}\le 1$. Vậy B đúng.

Do $|z|^2=z.\bar{z}$, mà $|z|\le 2 \Rightarrow z.\bar{z}\le 4$, C đúng.

Ta chọn D.