IV. Ứng dụng của hàm số mũ, hàm số logarit trong thực tế

Gửi lãi suất

a. Dạng toán gửi lãi suất ngân hàng

Dạng 1: Gửi vào ngân hàng một số tiền a đồng với lãi suất $r\%$ mỗi kỳ hạn (có thể là tháng, quý, năm,…) theo hình thức lãi kép. Gửi theo phương thức không kỳ hạn. Tính số tiền lãi thu được sau n kỳ hạn.

Lời giải tổng quát

Cuối kỳ hạn thứ nhất số tiền trong tài khoản là $A_1 = a + a.r\% = a(1+r\%)$

Cuối kỳ hạn thứ hai, số tiền trong tài khoản là

$A_2 = a(1+r\%) + a(1+r\%).r\% = a(1+r\%)^2$

…

Cuối kỳ hạn thứ n số tiền thu được là $A_n = a(1+r\%)^n$ đồng.

Số tiền lãi thu được sau n kỳ hạn là $\boxed{a(1+r\%)^n - a \text{ đồng}}$.

STUDY TIP
Hình thức "lãi kép": tiền lãi của kỳ hạn trước nếu người gửi không rút ra thì được tính vào vốn để tính lãi cho kỳ hạn sau.

Ví dụ 1: Ông A gửi 15 triệu đồng vào ngân hàng theo thể thức lãi kép kỳ hạn 1 năm với lãi suất $7,65\%$ / năm. Giả sử lãi suất không thay đổi. Hỏi sau 5 năm, ông A thu được cả vốn lẫn lãi là bao nhiêu triệu đồng?

A. $15.(0,0765)^5$ triệu đồng.
B. $15.[1+2.(0.0765)]^5$ triệu đồng.
C. $15.(1+0.765)^5$ triệu đồng.
D. $15.(1+0.0765)^5$ triệu đồng.

Đáp án D.

Lời giải

Áp dụng công thức tổng quát ở trên ta được

Số tiền ông A thu về sau 5 năm là $A = 15.\left(1+\dfrac{7,65}{100}\right)^5 = 15.(1+0,0765)^5$.

Dạng 2: Gửi vào ngân hàng một số tiền a đồng với lãi suất $x\% = r$ mỗi tháng theo hình thức lãi kép. Gửi theo phương thức có kỳ hạn m tháng. Tính số tiền cả gốc lẫn lãi A sau n kỳ hạn.

Từ "**STUDY TIP**" ở bên ta thấy đưa về một ghi nhớ quan trọng: Trong cùng một kỳ hạn, lãi suất sẽ giống nhau mà không được cộng vào vốn để tính lãi kép. Ví dụ kỳ hạn là 3 tháng thì lãi suất táng 1 là ar, tháng 2 , tháng 3 cũng là ar, sau hết kỳ hạn 3 tháng mà không rút ra thì số tiền lãi một kỳ hạn sẽ được cộng dồn vào tiền gốc.

STUDY TIP
Lãi suất sẽ không được cộng dồn từng tháng để tính lãi cho tháng tiếp theo trong một kỳ hạn. Chỉ được cộng dồn khi hết kỳ hạn gửi mà người gửi không lĩnh tiền thì ngân hàng sẽ tự động gia hạn với một kỳ hạn mới bằng với kỳ hạn mà người gửi gia hạn trước đó.

Lời giải tổng quát

Sau kỳ hạn thứ nhất, số tiền nhận được là: $A_1 = a + amr = a(1+mr)$

Sau kỳ hạn thứ hai, số tiền nhận được là: $A_2 = a(1+mr) + a(1+mr).mr = a(1+mr)^2$

…….

Sau kỳ hạn thứ n, số tiền nhận được là: $\boxed{A_n = a(1+mr)^n}$

Ví dụ 2: Một người có 10 triệu đồng gửi vào ngân hàng với kỳ hạn 3 tháng (1 quý là 3 tháng), lãi suất 6%/ 1 quý theo hình thức lãi kép (sau 3 tháng sẽ tính lãi cộng vào gốc). Sau đúng 3 tháng, người đó gửi thêm vào 20 triệu đồng cũng với hình thức lãi suất như vậy. Hỏi sau 1 năm, tính từ lần gửi đầu tiên, người đó nhận được số tiền gần nhất với kết quả nào?

A. 35 triệu. **B.** 37 triệu. **C.** 36 triệu. **D.** 38 triệu.

Đáp án C

Lời giải

Sau quý thứ nhất, số tiền trong tài khoản của người đó là:

$10.(1+6\%)+20=30,6$ triệu đồng (do người đó gửi thêm vào 20 triệu).

Sau quý thứ hai số tiền có trong tài khoản của người đó là

$30,6+30,6.6\%=30,6(1+6\%)$ triệu đồng.

Sau 1 năm số tiền người đó thu được là $30,6.(1+6\%)^3\approx 36,445$ triệu đồng.

Do ở đây số thập phân nhỏ hơn phẩy 5 do đó ta chọn 36 triệu đồng là gần nhất.

*Trên đây là bài toán có kỳ hạn mà người gửi rút ra đúng kỳ hạn, vậy nếu rút ra không kỳ hạn thì sẽ ra sao. Theo quy ước của ngân hàng thì **"Nếu người gửi rút tiền trước kỳ hạn trước ngày đến hạn) dù chỉ một ngày thì toàn bộ số tiền lãi của người gửi cũng sẽ quy về lãi suất không kỳ hạn với tiền lãi rất ít thường là $<1\%$".***

Ta đến với ví dụ tiếp theo:

Ví dụ 3: Một bác nông dân vừa bán một con trâu được số tiền là 20.000.000 đồng. Do chưa cần dùng đến tiền nên bác nông dân mang toàn bộ số tiền đó đi gửi tiết kiệm ngân hàng loại kỳ hạn 6 tháng với lãi suất kép là $8,5\%$ một năm. Hỏi sau 5 năm 8 tháng bác nông dân nhận được bao nhiêu tiền cả vốn lẫn lãi (làm tròn đến hàng đơn vị)? Biết rằng bác nông dân đó không rút vốn cũng như lãi trong tất cả các định kỳ trước và nếu rút trước thời hạn thì ngân hàng trả lãi suất theo không kỳ hạn $0,01\%$ một ngày (1 tháng tính 30 ngày).

A. 31803311. **B.** 32833110. **C.** 33083311. **D.** 30803311.

Đáp án A.

Lời giải

STUDY TIP
Nếu người gửi rút tiền trước kỳ hạn thì toàn bộ số tiền lãi của người gửi quy về lãi suất không kỳ hạn theo quy định của ngân hàng.

Một kỳ hạn có 6 tháng, mà một năm có 12 tháng với lãi suất là 8,5% một năm, do vậy lãi suất một kỳ hạn là $\frac{8,5}{2}\%=4,25\%.$.

5 năm 8 tháng = 5 năm 6 tháng + 2 tháng = 11 kỳ hạn + 2 tháng.

Vậy sau 11 kỳ hạn thì số tiền người đó nhận được là:

$A=20.000.000(1+4,25\%)^{11}$ đồng

Vì người đó rút khi chưa hết kỳ hạn thứ 12, do vậy 2 tháng không còn kỳ hạn sẽ được tính theo lãi suất không kỳ hạn $0,01\%$ một ngày, do vậy kết thúc kỳ hạn số tiền bác nông dân nhận được là

$B=A.(1+0,01\%)^{60}\approx 31803310,72$ đồng.

Dạng 3: Mỗi tháng đều gửi vào số tiền là a đồng theo thể thức lãi kép với lãi suất là x% = r mỗi tháng. Tính số tiền thu được sau *n* tháng.

Lời giải tổng quát

Cuối tháng thứ nhất, số tiền nhận được là $A_1 = a(1+r) = \frac{a}{r}\left[(1+r)^1 - 1\right].(1+r)$

Cuối tháng thứ hai số tiền nhận được là

$$A_2 = \left[a(1+r)+a\right](1+r) = a(1+r)^2 + a(1+r) = a(1+r)\left[(1+r)+1\right]$$

$$= a.(1+r).\frac{(1+r)^2-1}{(1+r)-1} = \frac{a}{r}\left[(1+r)^2-1\right].(1+r)$$

…

Cuối tháng thứ *n* số tiền nhận được là

$$A_n = a(1+r)^n + a(1+r)^{n-1} + a(1+r)^{n-2} + \ldots + a(1+r)$$

$$= a(1+r)\left[(1+r)^{n-1} + (1+r)^{n-2} + \ldots + 1\right] = a(1+r).\frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

"Giải thích bước rút gọn ở trên đó là:

$1 + x + x^2 + x^3 + .. + x^k = S$

Khi đó $S.x = x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{k+1}$ *. Từ đó suy ra* $S(x-1) = x^{k+1} - 1 \Rightarrow S = \frac{x^{k+1}-1}{x-1}$ *Với* $x = 1 + r$ *và*

$k = n-1$ *thì ta được rút gọn* $1 + (1+r) + \ldots + (1+r)^{n-1} = \frac{(1+r)^n - 1}{r}$ *"*

STUDY TIP

Từ công thức ở bên, ta có thể tính được:

$$n = \log_{(1+r)}\left(\frac{A_n.r}{a(1+r)} + 1\right)$$

$$a = \frac{A_n.r}{(1+r)\left[(1+r)^n - 1\right]}$$

Ví dụ 4: Một người gửi tiết kiệm theo thể thức lãi kép như sau: Mỗi tháng người này tiết kiệm một số tiền cố định là a đồng rồi gửi vào ngân hàng theo kì hạn một tháng với lãi suất 0,6%/tháng. Tìm a để sau ba năm kể từ ngày gửi lần đầu tiên người đó có được tổng số tiền là 400 triệu đồng. (Biết rằng lãi suất không thay đổi trong suốt thời gian gửi)

A. a = 9.799.882 đồng. **B.** a = 9.292.288 đồng.

C. a = 9.729.288 đồng. **D.** a = 9.927.882 đồng.

Đáp án D

Lời giải

Áp dụng công thức tổng quát phía trên thì ta có sau ba năm kể từ ngày gửi lần đầu tiên số tiền nhận được sẽ là: $A = a.(1+0,6\%).\frac{(1+0,6\%)^{36} - 1}{0,6\%} = 400.000.000$

$\Rightarrow a \approx 9.927.881,582$

Ví dụ 5: Ông An gửi gói tiết kiệm tích lũy cho con tại một ngân hàng với số tiền tiết kiệm ban đầu là 200.000.000 VNĐ, lãi suất 7%/năm. Từ năm thứ hai trở đi, mỗi năm ông gửi thêm vào tài khoản với số tiền 20.000.000 VNĐ. Ông không rút lãi định kỳ hàng năm. Biết rằng, lãi suất định kỳ hàng năm không thay đổi. Hỏi sau 18 năm, số tiền ông An nhận được cả gốc lẫn lãi là bao nhiêu?

A. 1.335.967.000 VNĐ. **B.** 1.686.898.000 VNĐ.

C. 743.585.000 VNĐ. **D.** 739.163.000 VNĐ.

STUDY TIP

Nếu người gửi rút tiền trước kỳ hạn thì toàn bộ số tiền lãi của người gửi quy về lãi suất không kỳ hạn theo quy định của ngân hàng.

Phân tích: Đây lại là bài toán khác với bài toán trên, bởi ban đầu ông đã có sẵn vốn ở trong tài khoản, do vậy ta thử làm bài toán này dưới dạng xây dựng mô hình công thức như dưới lời giải sau.

Đáp án A.

Lời giải

Sau năm thứ nhất số tiền mà ông An nhận được là $200.(1+7\%)=214$ triệu đồng.

Đầu năm thứ hai, ông An gửi vào 20 triệu, nên đến cuối năm 2 số tiền ông nhận được là $(214+20).(1+7\%)$ triệu đồng.

Đầu năm thứ 3, ông An gửi vào 20 triệu đồng, nên đến cuối năm thứ 3, số tiền ông nhận được là:

$$\left[(214+20).(1+7\%)+20\right].(1+7\%)=(214+20).(1+7\%)^2+20.(1+7\%)$$

Đầu năm thứ 4, ông An gửi vào 20 triệu đồng nên đến cuối năm thứ 4, số tiền ông nhận được là:

$$\left\{\left[(214+20).(1+7\%)^2+20.(1+7\%)\right]+20\right\}.(1+7\%)$$

$$=(214+20).(1+7\%)^3+20.(1+7\%)^2+20.(1+7\%) \text{ triệu đồng.}$$

…

Sau năm thứ 18, số tiền ông An nhận được là

$$A=(214+20).(1+7\%)^{17}+20.(1+7\%).\left(1+(1+7\%)+(1+7\%)^2+...+(1+7\%)^{15}\right)$$

$$=(214+20).(1+7\%)^{17}+20.(1+7\%).\frac{(1+7\%)^{16}-1}{7\%}\approx 1335.967105 \text{ triệu đồng.}$$

Đến đây ta có công thức tổng quát cho bài toán, vốn có A đồng, bắt đầu từ tháng thứ 1 mỗi tháng gửi thêm a đồng với lãi suất $r\%$ thì sau n tháng số tiền thu được sẽ là: $\boxed{S=(A+a).(1+r\%)^n+a.(1+r\%).\frac{(1+r\%)^{n-1}-1}{r\%}}$

Vay lãi suất

b. Dạng toán vay lãi suất ngân hàng và dạng toán mua trả góp

Dạng 4: Vay A đồng từ ngân hàng với lãi suất $x\%=r$ mỗi tháng. Sau đúng 1 tháng kể từ ngày vay, bắt đầu hoàn nợ; hai lần hoàn nợ cách nhau đúng 1 tháng, mỗi tháng hoàn nợ số tiền là a đồng. Hỏi hàng tháng phải trả bao nhiêu để sau n tháng hết nợ. (Trả tiền vào cuối tháng).

Lời giải tổng quát

Cuối tháng thứ nhất, số tiền người đó còn nợ là $N_1=A(1+r)-a$ đồng

Cuối tháng thứ hai, số tiền người đó còn nợ là

$N_2=N_1.(1+r)-a=A(1+r)^2-a(1+r)-a$

Cuối tháng thứ ba, số tiền người đó còn nợ là:

$N_3=N_2(1+r)-a=A(1+r)^3-a(1+r)^2-a.(1+r)-a$

…

Cuối tháng thứ n số tiền người đó còn nợ là:

$$N_n=A(1+r)^n-a\left(1+(1+r)+(1+r)^2+...+(1+r)^{n-1}\right)$$

$$\boxed{=A(1+r)^n-a.\frac{(1+r)^n-1}{r}} \quad (*)$$

Để hết nợ sau n tháng thì số tiền còn nợ sau n tháng là 0, tức là ta giải phương trình $\boxed{A(1+r)^n-a.\frac{(1+r)^n-1}{r}=0\Leftrightarrow a=\frac{A(1+r)^n.r}{(1+r)^n-1}}$ (số tiền phải trả mỗi tháng).

STUDY TIP
Công thức $(*)$ cũng đúng với bài toán "Gửi ngân hàng số tiền a đồng với lãi suất $x\%=r$ mỗi tháng. Mỗi tháng vào ngày ngân hàng tính lãi, rút ra số tiền a đồng. Tính số tiền còn lại sau n tháng.

Ví dụ 6: Chị Minh vay ngân hàng 300 triệu đồng theo phương thức trả góp để mua nhà. Nếu cuối mỗi tháng, bắt đầu từ tháng thứ nhất chị Minh trả 5,5 triệu đồng và chịu lãi số tiền chưa trả là 0,5% mỗi tháng (biết lãi suất không thay đổi) thì sau bao lâu, chị Minh trả hết số tiền trên?

A. 64 tháng. **B.** 54 tháng. **C.** 63 tháng. **D.** 55 tháng.

Đáp án A.

Lời giải

Áp dụng công thức vừa thiết lập ở bài toán tổng quát thì ta có phương trình

$$300.\left(1+0,5\%\right)^n-5,5.\frac{\left(1+0,5\%\right)^n-1}{0,5\%}=0\Leftrightarrow 300.1,005^n-1100.\left(1,005^n-1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow n=\log_{1,005}\frac{11}{8}\approx 63,84984073.$$

Ví dụ 7: Ông A vay ngắn hạn ngân hàng 100 triệu đồng, với lãi suất 12%/ năm. Ông muốn hoàn nợ cho ngân hàng theo cách: Sau đúng một tháng kể từ ngày vay, ông bắt đầu hoàn nợ; hai lần hoàn nợ liên tiếp cách nhau đúng một tháng, số tiền hoàn nợ ở mỗi lần là như nhau và trả hết tiền nợ sau đúng 3 tháng kể từ ngày vay. Hỏi theo cách đó, số tiền m mà ông A sẽ phải trả cho ngân hàng trong mỗi lần hoàn nợ là bao nhiêu? Biết rằng, lãi suất ngân hàng không thay đổi trong thời gian ông A hoàn nợ.

A. $m=\frac{100.(1,01)^3}{3}$ triệu đồng. **B.** $m=\frac{(1,01)^3}{(1,01)^3-1}$ triệu đồng.

C. $m=\frac{100.1,03}{3}$ triệu đồng. **D.** $m=\frac{120.(1,12)^3}{(1,12)^3-1}$ triệu đồng.

Đáp án B

Lời giải

Lãi suất 12%/ năm nên mỗi tháng lãi suất là 1% một tháng.

Áp dụng công thức đã chứng minh ở trên thì mỗi tháng số tiền ông A phải trả là: $\boxed{a=\frac{A(1+r)^n.r}{(1+r)^n-1}}$

$$\frac{100.(1+0,01)^3.0,01}{(1+0,01)^3-1}=\frac{(1,01)^3}{(1,01)^3-1}.$$

Ứng dụng

c. Ứng dụng trong đời sống xã hội

Theo nghiên cứu thì hằng năm dân số thế giới tăng theo hàm mũ theo thời gian có dạng như sau: $P(t)=P(0).(1+k)^t$ trong đó $P(0)$ là dân số tại thời điểm chọn làm mốc, $P(t)$ là dân số thế giới sau *t* năm, và *k* là hệ số được xác định theo từng khoảng thời gian.

Ta có ví dụ về hàm tăng trưởng dân số ở bài toán sau:

Ví dụ 8: Dân số thế giới được ước tính theo công thức $S=A.e^{r.N}$ trong đó: A là dân số của năm lấy mốc tính, S là dân số sau N năm, *r* là tỷ lệ tăng dân số hằng năm. Cho biết năm 2001, dân số Việt Nam có khoảng 78.685.000 người và tỷ lệ tăng dân số hằng năm là 1,7% một năm. Như vậy, nếu tỉ lệ tăng dân số hằng năm không đổi thì đến năm nào dân số nước ta ở mức khoảng 120 triệu người?

A. 2020. **B.** 2024. **C.** 2026. **D.** 2022.

Đáp án C.

Lời giải

Áp dụng công thức đã cho thì ta có $120000000=78685000.(1+1,7\%)^N$

$$\Leftrightarrow (1+1,7\%)^N=\frac{120000000}{78685000}\Leftrightarrow N.\ln(1,017)=\ln\left(\frac{120000000}{78685000}\right)$$

$$\Leftrightarrow N=\frac{\ln\left(\frac{120000000}{78685000}\right)}{\ln(1,017)}\approx 25,036\approx 25$$

Như vậy sau 25 năm, tức là năm 2026 thì dân số nước ta ở mức khoảng 120 triệu người.

Đọc thêm: *Hàm số tính độ gia tăng dân số thế giới trên càng về sau có độ chính xác không nhiều nên để dự đoán các năm tiếp theo, ta cập nhật lại mốc thời gian và tính toán. Các hàm số mũ và logarit thể hiện một cách rất rõ ràng mức độ biến thiên của các đại lượng đặc trưng tương ứng trong từng dạng.*

d. Ứng dụng trong khoa học kĩ thuật

Trong vật lý, khái niệm nghiên cứu phóng xạ rất quen thuộc và trở thành ngành đóng vai trò quan trọng trong sự phát triển của thế giới các năm trở lại đây. Trong chương trình Vật lý lớp 12, chúng ta cũng đã làm quen với dạng toán về phóng xạ, bài toán xác định tuổi của gỗ, xác định thời gian tồn tại,…

Bài toán thường gặp như sau:

Giả sử tại thời điểm đầu, một loại chất phóng xạ có khối lượng m_0 thì công thức để tính khối lượng chất phóng xạ còn lại sau thời gian t là $m(t)=m_0.e^{-kt}$ với k gọi là hằng số phóng xạ phụ thuộc vào từng loại chất.

Chu kì bán rã là khoảng thời gian mà chất phóng xạ chỉ còn lại một nửa lượng chất ban đầu được tính bằng công thức: $T=\frac{\ln 2}{k}$.

Ví dụ 9: Bom nguyên tử là loại bom chứa Uranium-235 được phát nổ khi ghép các khối Uranium-235 thành một khối chứa 50 kg tinh khiết. Uranium-235 có chu kỳ bán rã là 704 triệu năm. Nếu quả bom ban đầu chứa 64 kg Uranium-235 tinh khiết và sau t triệu năm thì quả bom không thể phát nổ. Khi đó t thỏa mãn phương trình:

A. $\frac{50}{64}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{704}}$.   **B.** $\frac{64}{50}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{704}}$.

C. $\frac{64}{50}=(2)^{\frac{t}{704}}$.   **D.** $\frac{50}{64}=(2)^{\frac{t}{704}}$.

Đáp án A.

Lời giải

Ở đây, sau t triệu năm quả bom không thể phát nổ, tức là trong khoảng thời gian t triệu năm đó thì quả bom không nổ, quả bom nổ vào năm thứ t triệu tính từ thời điểm ban đầu.

Do chu kì bán rã của Uranium – 235 là 704 triệu năm nên ta có

$$704=\frac{\ln 2}{k}\Rightarrow k=\frac{\ln 2}{704}$$

Sau t triệu năm quả bom không phát nổ nên $64.e^{-\frac{\ln 2}{704}.t}=50\Leftrightarrow e^{-\frac{\ln 2}{704}.t}=\frac{50}{64}$

$$\Leftrightarrow \frac{50}{64}=\left(e^{-\ln 2}\right)^{\frac{t}{704}}\Leftrightarrow \frac{50}{64}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{704}}.$$

Ví dụ 10: Người ta tìm được trong một mẫu đồ cổ một lượng Cacbon và xác định được nó mất 25% lượng Cacbon ban đầu của nó. Hỏi mẫu đồ cổ đó bao nhiêu tuổi, biết chu kì bán rã của ^{14}C là 5730 năm.

A. 2378 năm. **B.** 11460 năm. **C.** 2371 năm. **D.** 11461 năm.

Đáp án A

Lời giải

Giả sử tại thời điểm ban đầu thì mẫu đồ cổ có chứa lượng Cacbon là m_0 và tại thời điểm t (tính từ thời điểm ban đầu), khối lượng đó là $m(t)$ thì ta có

$$m(t)=m_0.e^{\frac{-\ln 2}{5730}t}\Leftrightarrow 75\%m_0=m_0e^{\frac{-\ln 2}{5730}t}\Leftrightarrow \frac{3}{4}=e^{\frac{-\ln 2}{5730}t}\Leftrightarrow t=\frac{\ln\left(\frac{3}{4}\right).5730}{-\ln 2}\approx 2378 \text{ năm.}$$

e. Ứng dụng khác [Đọc thêm]

a. Trong đời sống, một loại logarit được ứng dụng rất nhiều đó là logarit nhị phân (logarit với cơ số 2). Trong tin học, hệ nhị phân được dùng xuyên suốt trong tất cả các nội dung lí thuyết và ứng dụng. Những bài toán có độ phức tạp được đánh giá theo đại lượng là Big – O thường có giá trị là $\log_2 n$.

b. Bài toán vật lý về chu kì bán rã cũng có xuất hiện dạng logarit này.

Ví dụ 11: Trong tin học, độ hiệu quả của một thuật toán tỉ lệ thuận với thời gian thực thi chương trình tương ứng và được tính theo công thức $E(n)=\frac{n}{P(n)}$ với n là số lượng dữ liệu đưa vào và $P(n)$ là độ phức tạp của thuật toán ứng với giá trị n. Biết rằng một thuật toán có độ phức tạp là $P(n)=\log_2 n$ và khi $n=300$ thì để chạy nó, máy tính mất 0,02 giây. Hỏi khi $n=90000$ thì phải mất bao lâu để thực thi chương trình tương ứng?

A. 3 giây. **B.** 2 giây. **C.** 1 giây. **D.** 0,06 giây.

Đáp án A.

Phân tích

1. Thời gian tỉ lệ thuận với độ hiệu quả.
2. Cho thời gian khi $n=300$, , tính thời gian khi $n=90000$. Vậy ta dùng biểu thức tỉ lệ, từ đó tìm ra thời gian chạy khi $n=90000$.

Lời giải

Với $n=300$ thì độ hiệu quả của thuật toán là $E(300)=\frac{300}{\log_2 300}$.

Với $n=90000$ thì độ hiệu quả của thuật toán là

$$E(90000)=\frac{90000}{\log_2 90000}=\frac{300^2}{\log_2 300^2}=\frac{300}{2}.\frac{300}{\log_2 300}=150.E(300).$$

Vì tốc độ chạy của chương trình tỉ lệ thuận với độ hiệu quả của thuật toán nên

$$\frac{t}{0{,}02}=\frac{E(300).150}{E(300)}\Rightarrow t=3 \text{ giây}.$$

Ví dụ 12: Cường độ một trận động đất được cho bởi công thức $M=\log A-\log A_0$, với A là biên độ rung chấn tối đa và A_0 là một biên độ chuẩn (hằng số). Đầu thế kỷ 20, một trận động đất ở San Francisco có cường độ đo được 8 độ Richter. Trong cùng năm đó, trận động đất khác ở Nhật Bản có cường độ đo được 6 độ Richer. Hỏi trận động đất ở San Francisco có biên độ gấp bao nhiêu lần biên độ trận động đất ở Nhật Bản?

A. 1000 lần. **B.** 10 lần. **C.** 2 lần. **D.** 100 lần.

Đáp án D.

Lời giải

Nhận thấy ở San Francisco trận động đất có cường độ là:

$$M_1=\log A_1-\log A_0=\log\frac{A_1}{A_0}=8$$

Ở Nhật Bản, trận động đất có cường độ là: $M_2=\log\frac{A_2}{A_0}=6$

Khi đó $8-6=\log\frac{A_1}{A_0}-\log\frac{A_2}{A_0}\Leftrightarrow 2=\log\frac{A_1}{A_2}\Leftrightarrow\frac{A_1}{A_2}=10^2=100.$

Ví dụ 13: Cường độ của ánh sáng đi qua một môi trường không khí, chẳng hạn như nước, sương mù,... sẽ giảm dần tùy theo mức độ dày của môi trường và một hằng số μ gọi là khả năng hấp thu tùy thuộc môi trường theo công thức như sau: $I = I_0.e^{-\mu x}$ với x là độ dày của môi trường đó, với x tính bằng mét. Biết rằng môi trường nước biển có $\mu = 1,4$. Hãy tính xem cường độ ánh sáng giảm đi bao nhiêu lần từ độ sâu 2 m xuống đến độ sâu 20 m?

A. $e^{-25,2}$. **B.** $e^{25,2}$. **C.** $e^{12,6}$. **D.** $e^{-12,6}$.

Đáp án B

Phân tích: Đây là bài toán yêu cầu tìm tỉ lệ giữa cường độ ánh sáng giữa hai độ sâu. Sau đó kiểm tra cách rút gọn biểu thức lũy thừa.

Lời giải

- Ở độ sâu 2m thì cường độ ánh sáng là $I_1 = I_0.e^{-\mu.2}$
- Ở độ sâu 20m thì cường độ ánh sáng là $I_2 = I_0.e^{-\mu.20}$.

Khi đó ta có tỉ số $\frac{I_1}{I_2} = \frac{e^{-2\mu}}{e^{-20\mu}} = \frac{e^{-2\mu}}{\left(e^{-2\mu}\right)^{10}} = \frac{1}{e^{-18\mu}} = e^{18\mu} = e^{25,2}$

Cũng với bài toán như ở ví dụ 3, thì ta có bài toán ngược như sau để kiểm tra cách giải phương trình mũ.

Ví dụ 14: Cường độ của ánh sáng đi qua một môi trường không khí, chẳng hạn như nước, sương mù,... sẽ giảm dần tùy theo mức độ dày của môi trường và một hằng số μ gọi là khả năng hấp thu tùy thuộc môi trường theo công thức như sau: $I = I_0.e^{-\mu x}$ với x là độ dày của môi trường đó, với x tính bằng mét. Biết rằng môi trường nước biển cường độ ánh sáng giảm đi $e^{25,2}$ lần từ độ sâu 2 m xuống đến độ sâu 20 m, tìm hằng số μ là khả năng hấp thu ánh sáng trong môi trường nước biển?

Lời giải

Từ ví dụ 3, ta có phương trình sau: $e^{18\mu} = e^{25,2} \Rightarrow \mu = 1,4$

Ngoài các bài toán trên, ta có một số bài toán đơn giản ứng dụng khác của hàm số mũ và hàm số logarit như sau:

Ví dụ 15: Chi phí tổng cộng của một công ty được tính như sau $C(t) = 90 - 50e^{-t}$ (tỉ VNĐ) với t là thời gian tính bằng số năm kể từ khi công ty thành lập. Chi phí công ty đã chi ra sau 10 năm xấp xỉ:

A. 89 tỉ VNĐ. **B.** 90 tỉ VNĐ.
C. 1101233 tỉ VNĐ. **D.**1101232 tỉ VNĐ.

Đáp án B.

Lời giải

Đây là bài toán khá đơn giản khi ta chỉ cần thay số vào.
Chi phí công ty phải chi ra trong 10 năm là $C(10) = 90 - 50.e^{-10} \approx 90$

Ví dụ 16: Một nghiên cứu đã cho thấy một nhóm học sinh được cho xem cùng một danh sách các loài động vật và được kiểm tra lại xem họ nhớ bao nhiêu % mỗi tháng. Sau t tháng, khả năng nhớ trung bình của nhóm học sinh được tính theo công thức $M(t) = 75 - 20.\ln(t+1), t \geq 0$ (%). Hỏi sau khoảng bao lâu thì nhóm học sinh nhớ danh sách đó là dưới 10%?

A. 24 tháng. **B.** 25 tháng. **C.**23 tháng. **D.** 22 tháng.

Đáp án B

Phân tích: Bài toán là ứng dụng của giải phương trình logarit .

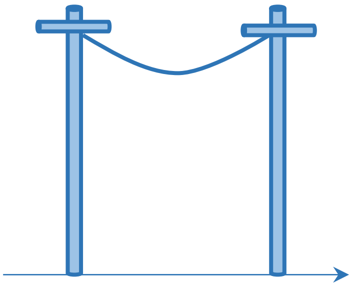
Lời giải

Ta có $75-20.\ln(t+1)<10 \Leftrightarrow 20.\ln(t+1)>65 \Leftrightarrow \ln(t+1)>\frac{13}{4}$

$\Leftrightarrow t>e^{\frac{13}{4}}-1\approx 24,79$ tháng.

Bài toán tiếp theo đưa ra hàm số trong đó chứa các hàm số mũ tự nhiên. Trong ví dụ này, ta cần chú ý cách giải phương trình mũ, chú ý tính chất

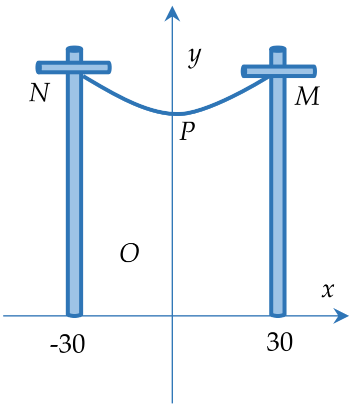
$e^a=e^b \Leftrightarrow a=b$.



Ví dụ 17 (đọc thêm): Một thành phố có các đường dây điện được treo giữa các cột điện liên tiếp cách nhau 60 (đơn vị) ở bên đường, đoạn dây giữa hai cột điện tạo nên một đường cong thường được gọi là các mắt xích tiếp nối nhau. Khi đó, giả sử đồ thị hàm số $y=30\left(e^{\frac{x}{60}}+e^{-\frac{x}{60}}\right)$, $(-30\le x\le 30)$ là đồ thị của đường cong dây điện (mắt xích) giữa hai cột điện. Biết rằng khoảng cách giữa điểm thấp nhất trên đường mắt xích và trung điểm của đoạn thẳng nối hai đỉnh của cột điện được gọi là độ trùng của dây điện (nếu độ trùng dây vượt quá 8 đơn vị thì sẽ vượt ra khỏi ngưỡng an toàn). Hỏi ở thành phố này độ trùng của dây là bao nhiêu đơn vị độ dài?

A. 7,7 đơn vị. **B.** 7 đơn vị. **C.** 8 đơn vị. **D.** 8,7 đơn vị.

Đáp án A.



Lời giải

Bài toán là sự kết hợp kiểm tra giữa khảo sát hàm số, tìm GTNN của hàm số, kiểm tra các tính chất của hàm mũ. Để tính được độ trùng của dây thì ta tìm tọa độ điểm thấp nhất trên đồ thị hàm số trong đoạn $[-30;30]$.

Gắn hệ trục tọa độ như hình vẽ bên.

Ta có $y'=30\left[\frac{1}{60}e^{\frac{x}{60}}-\frac{1}{60}.e^{-\frac{x}{60}}\right]=\frac{1}{2}.\left(e^{\frac{x}{60}}-e^{\frac{-x}{60}}\right)$

$y'=0\Leftrightarrow e^{\frac{x}{60}}-e^{-\frac{x}{60}}=0\Leftrightarrow \frac{x}{60}=-\frac{x}{60}\Leftrightarrow x=0$

Nhận xét, khi $x=0$ thì $y=30.\left(e^0+e^0\right)=60$ (đơn vị).

Kí hiệu như hình vẽ ta có:

Tung độ của điểm M và N là bằng nhau. Do vậy ta chỉ cần tìm tung độ của N.

Mặt khác N nằm trên đồ thị hàm số $y=30\left(e^{\frac{x}{60}}+e^{-\frac{x}{60}}\right)$, $(-30\le x\le 30)$, do vậy

$y_N=y(30)=30.\left(e^{\frac{30}{60}}+e^{-\frac{30}{60}}\right)\approx 67,7$ (đơn vị)

Vậy độ trùng dây điện là $67,7-60=7,7$ (đơn vị).