Tổng hợp các dạng nguyên hàm tích phân

BẢNG NGUYÊN HÀM CÁC HÀM CƠ BẢN

Với $\alpha \neq -1$: $\int (ax+b)^{\alpha} dx = \frac{1}{a}.\frac{(ax+b)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$	**Với** $\alpha = -1 : \int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{\ln\|ax+b\|}{a} + C$
$\int a^{\alpha x+\beta} dx = \frac{a^{\alpha x+\beta}}{a.\ln a} + C$	$\int e^{\alpha x+\beta} dx = \frac{e^{\alpha x+\beta}}{a} + C$
$\int \sin(ax+b) dx = -\frac{\cos(ax+b)}{a} + C$	$\int \cos(ax+b) dx = \frac{\sin(ax+b)}{a} + C$
$\int \frac{1}{\cos^2(ax+b)} dx = \frac{\tan(ax+b)}{a} + C$	$\int \frac{1}{\sin^2(ax+b)} dx = -\frac{\cot(ax+b)}{a} + C$

TÓM TẮT CÁC DẠNG TÍCH PHÂN CƠ BẢN

1. Tích phân phân thức

<table>
<tr>
<td rowspan="3">$\int_a^b \frac{f(x)}{g(x)} dx$</td>
<td>+ Bậc $f(x) \geq$ bậc $g(x)$: Chia f cho g
$$\frac{f(x)}{g(x)} = \text{thương} + \frac{\text{dư}}{g(x)}$$</td>
</tr>
<tr>
<td>+ Bậc $f(x) <$ bậc $g(x)$:
• Nếu $f(x) = k.g'(x)$: Đặt $g(x) = t \Rightarrow dt = g'(x)dx = f(x)dx$
• Phân tích $g(x)$ thành nhân tử
$$g(x) = (\text{nhân tử 1})(\text{nhân tử 2})\ldots$$
$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{\text{nhân tử 1}} + \frac{b}{\text{nhân tử 2}} + \ldots$$</td>
</tr>
<tr>
<td>+ Với mẫu là bậc 2 vô nghiệm:
$$\int_a^b \frac{cx+d}{ax^2+bx+c} dx = \int_a^b \frac{cX+d}{X^2+a^2} dX$$
(đặt $X = a\tan t$)</td>
</tr>
</table>

$\int\limits_a^b \frac{x^2 \pm 1}{ax^4 + bx^2 + a} dx$	+ Chia cảtử và mẫu cho x^2, sau đó biến đổi mẫu $x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x \mp \frac{1}{x}\right)^2 \pm 2$ $$\int\limits_a^b \frac{1 \pm \frac{1}{x^2}}{a\left(x \mp \frac{1}{x}\right)^2 \pm 2a + b} dx$$ Đặt $t = x \pm \frac{1}{x} \Rightarrow dt = \left(1 \mp \frac{1}{x^2}\right) dx$

2. Tích phân chứa căn (khử căn)

$\int\limits_a^b f\left(x, \sqrt{u(x)}\right) dx$	+ Nếu $u(x) = ax + b$: Đặt $\sqrt{u(x)} = t$
	+ Nếu có sẵn (hoặc làm xuất hiện) $u'(x)\, dx$ • Đặt: $\sqrt{(u(x))} = t \to t^2 = u(x) \to 2tdt = u'(x)dx$ • Còn lại biểu diễn theo
	+ Nếu mẫu thức chứa căn với tổng, hiệu: Nhân liên hợp $$\frac{1}{\sqrt{u(x)} \pm v(x)} = \frac{\sqrt{u(x)} \mp v(x)}{u(x) - v^2(x)}$$
	+ Nếu không đặt được $\sqrt{u(x)}$ làm ẩn phụ $\Rightarrow$ lượng giác hóa $\sqrt{a^2 - x^2}$: Đặt $x = a.\cos t$ hoặc $a \sin t$ $\sqrt{x^2 - a^2}$: Đặt $x = \frac{a}{\sin t}$ hoặc $\frac{a}{\cos t}$ $\sqrt{a^2 + x^2}$: Đặt $x = a \tan t$

3. Tích phân chứa e^x, $e^{u(x)}$

Dạng chứa toàn e^x $$\int\limits_a^b f(e^x)\, dx$$	Đặt $e^x = t \Rightarrow x = \ln t \Rightarrow dx = \frac{1}{t} dt$
Chứa hàm hợp trên mũ $$\int\limits_a^b f\left(e^{u(x)}\right) u'(x)\, dx$$ với $u(x)$ là một hàm, sẽ có $u'(x)\, dx$ ở phần còn lại.	Đặt $u(x) = t \to dt = u'(x)\, dx$

4. Tích phân chứa $\ln$

Toàn $\ln x$, còn lại là $\frac{1}{x}dx$ $$\int\limits_a^b f\left(\ln x\right)\frac{1}{x}dx$$	Đặt $\ln x = t \to dt = \frac{1}{x}dx$
Không đặt được $\ln u\left(x\right)$ làm ẩn phụ $$\int\limits_a^b p\left(x\right)\ln u\left(x\right)dx$$	Từng phần $$\begin{cases} u = \ln u\left(x\right) \to du = \frac{u'(x)}{u(x)}dx \\ dv = p\left(x\right)dx \to v = \int p\left(x\right)dx \end{cases}$$

5. Tích phân chứa hàm số lượng giác

Toàn $\sin x$ thừa lại $\cos x dx$ $$\int\limits_a^b f\left(\sin x\right)\cos x dx$$	Đặt $t = \sin x \to dt = \cos x dx$
Toàn $\cos x$ thừa lại $\sin x dx$ $$\int\limits_a^b f\left(\cos x\right)\sin x dx$$	Đặt $t = \cos x \to dt = -\sin x dx$
Toàn $\tan x$ $$\int\limits_a^b f\left(\tan x\right)dx$$	Đặt $t = \tan x \to dt = \left(1 + \tan^2 x\right)dx$ $\to dx = \frac{1}{1+t^2}dt$
Toàn $\tan x$ thừa $\frac{1}{\cos^2 x}dx$ $$\int\limits_a^b f\left(\tan x\right)\frac{1}{\cos^2 x}dx$$	Đặt $t = \tan x \to dt = \frac{1}{\cos^2 x}dx$

Toàn $\cot x$ thừa $\frac{1}{\sin^2 x}dx$ $$\int_a^b f\left(\cot x\right)\frac{1}{\sin^2 x}dx$$	Đặt $t=\cot x \to dt=\frac{-1}{\sin^2 x}dx$
Toàn tổng $\sin x+\cos x$, thừa hiệu $$\int_a^b f\left(\sin x+\cos x\right)\left(\sin x-\cos x\right)dx$$	Đặt $t=\sin x+\cos x=t\to dt=\left(\cos x-\sin x\right)dt$
Toàn hiệu $\sin x-\cos x$, thừa tổng $$\int_a^b f\left(\sin x-\cos x\right)\left(\sin x+\cos x\right)dx$$	Đặt $t=\sin x-\cos x=t\to dt=\left(\cos x+\sin x\right)dt$
Bậc 2 trên bậc 2 đối với sin, cos $$\int_a^b \frac{a\sin^2 x+b\sin x\cos x+c\cos^2 x}{a'\sin^2 x+b'\sin x\cos x+c'\cos^2 x}dx$$	Chia tử và mẫu cho $\cos^2 x$ để đưa về $\tan x$
Bậc 0 trên bậc 2 $$\int_a^b \frac{a}{a'\sin^3 x+b'\sin x\cos x+c'\cos^2 x}dx$$	Thay $a=a\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)$ đưa về bậc 2 trên bậc 2
Bậc 1 trên bậc 3 tách được $\cos^2 x$ hoặc $\sin^2 x$ ở mẫu: $$\int_a^b \frac{a\sin x+b\cos x}{\left(a'\sin x+b'\cos x\right)\cos^2 x}dx$$	Tách riêng $\frac{1}{\cos^2 x}dx$. Còn lại chia cả tử và mẫu cho $\cos x$ để đưa về $\tan x$.

Bậc 1 trên bậc 2 dạng $$\int_a^b \frac{a\sin x + b\cos x}{a'\sin^2 x + b'\cos^2 x}dx$$	Tách thành 2 tích phân rồi đưa về dạng toàn cosx thừa sinxdx và toàn sinx thừa cosxdx.
Bậc 1 trên bậc 1 $$\int_a^b \frac{a\sin x + b\cos x}{a'\sin x + b'\cos x}dx$$	Tách $$\text{Tử} = \alpha\text{Mẫu} + \beta(\text{Mẫu})\text{'}$$
Lũy thừa của $\sin x$ **hoặc** $\cos x$ $$\int_a^b \sin^n x dx;\ \int_a^b \cos^n x dx$$	+ n chẵn: Hạ bậc + n lẻ: $\sin^n x = \sin^{2k} x.\sin x dx = \left(1-\cos^2 x\right)^k.\sin x dx$
Lũy thừa dưới mẫu của $\sin x$ **hoặc** $\cos x$ $$\int_a^b \frac{1}{\sin^n x}dx;\ \int_a^b \frac{1}{\cos^n x}dx$$	+ n chẵn: $$\frac{1}{\sin^n x}dx = \frac{1}{\sin^{2k} x}.\frac{1}{\sin^2 x}dx = \left(1+\cot^2 x\right)^k.\frac{1}{\sin^2 x}dx$$ $$\frac{1}{\cos^n x}dx = \frac{1}{\cos^{2k} x}.\frac{1}{\cos^2 x}dx = \left(1+\tan^2 x\right)^k.\frac{1}{\cos^2 x}dx$$ + n lẻ: nhân cả tử và mẫu với sinx hoặc cosx
Lũy thừa của $\tan x$ $$\int_a^b \tan^n x dx$$	+ $n \geq 2$: Giảm dần bậc theo tích phân $$\tan^n x = \tan^{n-2} x.\tan^2 x = \tan^{n-2} x\left(1+\tan^2 x - 1\right) = \tan^{n-2} x.\frac{1}{\cos^2 x} - \tan^{n-2} x$$ + $n = 1$: $$\int \tan x dx = -\ln\lvert\cos x\rvert$$

6. Tích phân từng phần

$\int\limits_a^b e^x.p(x)\,dx$	$\begin{cases} u=p(x)\to du=p'(x)\,dx \\ dv=e^x dx\to v=e^x \end{cases}$
$\int\limits_a^b \mathrm{p}(\mathrm{x}).\sin kxdx$	$\begin{cases} u=p(x)\to du=p'(x)\,dx \\ dv=\sin kxdx\to v=-\frac{\cos kx}{k} \end{cases}$
$\int\limits_a^b p(x)\ln u(x)\,dx$	$\begin{cases} u=\ln u(x)\to du=\frac{u'(x)}{u(x)}dx \\ dv=p(x)\,dx\to v=\int p(x)\,dx \end{cases}$
$I=\int\limits_a^b e^x\sin xdx$	Tưng phần 2 lần, được phương trình ẩn I: $I=\sin x.\ e^x\vert-\int e^x\cos xdx$ $=\sin x.\ e^x\vert-\left(\cos x.e^x\vert+\int e^x\sin xdx\right)$ $=(\sin x-\cos x)\,e^x\vert-I$ $\to 2I=(\sin x-\cos x)\,e^x$ $\to I=\frac{1}{2}(\sin x-\cos x)\,e^x$

7. Tích phân chứa dấu giá trị tuyệt đối

$$\int\limits_a^b|f(x)|dx=\left|\int\limits_a^{x_1}f(x)\,dx\right|+\left|\int\limits_{x_1}^{x_2}f(x)\,dx\right|+\ldots+\left|\int\limits_{x_n}^{b}f(x)\,dx\right|$$

Với $x_1,x_2,\ldots,x_n\in(a;b)$ là các nghiệm thuộc $(a;b)$ của phương trình $f(x)=0$

8. Công thức diện tích, thể tích qua tích phân

Hình phẳng giới hạn bởi $\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \\ x = a \\ x = b \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = f(y) \\ x = g(y) \\ y = a \\ y = b \end{cases}$ *Chú ý: Nếu khuyết cận, giải* $f(x) = g(x)$	Có diện tích $$S = \int_a^b \lvert f(x) - g(x) \rvert dx$$ $$S = \int_a^b \lvert f(y) - g(y) \rvert dy$$
Hình phẳng gió hạn bởi $\begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \\ x = a \\ x = b \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = f(y) \\ x = 0 \\ y = a \\ y = b \end{cases}$ Xoay quanh Ox **hoặc** Oy	Có thể tích $$V = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx$$ $$V = \pi \int_a^b f^2(y)\, dy$$

9. Tích phân đặc biệt

$f(x)$ là hàm lẻ, nghĩa là $f(-x) = -f(x)$	$$\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 0$$
Với hàm $f(x)$ bất kỳ	$$I = \int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b f(a + b - x)\, dx$$
$f(x)$ là hàm chẵn, nghĩa là $f(-x) = f(x)$	$$\int_{-a}^{a} \frac{f(x)}{a^x + 1} dx = \int_{-a}^{a} f(x)\, dx$$

$$\int_a^b \frac{\text{Tử}}{\text{Mẫu}} dx$$ Với: + Tử = $f\left(e^x, p\left(x\right), \sin x, \cos x, \ln x\right)$ + Mẫu = $g\left(e^x, p\left(x\right), \sin x, \cos x, \ln x\right)$	Phân tích $$\text{Tử} = \alpha(x)\text{Mẫu} + \beta(\text{Mẫu})'$$ $$\int_a^b \frac{\text{Tử}}{\text{Mẫu}} dx = \int_a^b \left(\alpha(x) + \beta \frac{(\text{Mẫu})'}{\text{Mẫu}}\right)$$ $$= \int_a^b \alpha(x) dx + \beta \ln \lvert\text{Mẫu}\rvert$$