Chủ đề III

Vấn đề cần nắm:
I. Nguyên hàm và các tính chất cơ bản
II. Hai phương pháp cơ bản tìm nguyên hàm
III. Khái niệm và tính chất cơ bản tích phân
IV. Hai phương pháp cơ bản tính tích phân
V. Ứng dụng hình học của tích phân

NGUYÊN HÀM – TÍCH PHÂN VÀ ỨNG DỤNG

I. Nguyên hàm và các tính chất cơ bản

Kí hiệu K là một khoảng, một đoạn hay một nửa khoảng

1. Định nghĩa

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên K. Hàm số $F(x)$ được gọi là **nguyên hàm** của hàm số $f(x)$ trên K nếu $F'(x)=f(x)$ với mọi x thuộc K.

Định lý 1

1. Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K thì với mỗi hằng số C, hàm $G(x)=F(x)+C$ cũng là một nguyên hàm của hàm $f(x)$ trên K.

2. Đảo lại nếu $F(x)$ và $G(x)$ là hai nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K thì tồn tại hằng số C sao cho $F(x)=G(x)+C$.

Định lý 2

Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K thì mọi nguyên hàm của $f(x)$ trên K đều có dạng $F(x)+C,$ với C là một hằng số.

Người ta chứng minh được rằng: "Mọi hàm số liên tục trên K đều có nguyên hàm trên K."

Từ hai định lý trên ta có

- Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K thì $F(x)+C, C\in\mathbb{R}$ là họ tất cả các nguyên hàm của $f(x)$ trên K. Kí hiệu

$$\boxed{\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C.}$$

STUDY TIP
Từ định nghĩa nguyên hàm ta có được:
$$\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)'=f(x)$$

Chú ý
Biểu thức $f(x)\mathrm{d}x$ chính là vi phân của nguyên hàm $F(x)$ của $f(x)$, vì $\mathrm{d}F(x)=F'(x)\mathrm{d}x=f(x)\mathrm{d}x$

2. Tính chất của nguyên hàm

Tính chất 1

$$\boxed{\int f'(x)\mathrm{d}x=f(x)+C.}$$

Tính chất 2

$$\boxed{\int kf(x)\mathrm{d}x=k\int f(x)\mathrm{d}x}$$

Tính chất 3

$$\boxed{\int\left[f(x)\pm g(x)\right]\mathrm{d}x=\int f(x)\mathrm{d}x\pm\int g(x)\mathrm{d}x}$$

3. Bảng nguyên hàm của một số hàm số sơ cấp

$\int 0\mathrm{d}x=C$	$\int a^x\mathrm{d}x=\dfrac{a^x}{\ln a}+C,(a>0,a\neq 1)$
$\int \mathrm{d}x=x+C$	$\int \cos x\mathrm{d}x=\sin x+C$
$\int x^\alpha\mathrm{d}x=\dfrac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+C,(\alpha\neq -1)$	$\int \sin x\mathrm{d}x=-\cos x+C$
$\int \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln\lvert x\rvert+C$	$\int \dfrac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x=\tan x+C$
$\int e^x\mathrm{d}x=e^x+C$	$\int \dfrac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x=-\cot x+C$

II. Hai phương pháp cơ bản để tìm nguyên hàm

1. Phương pháp đổi biến số

Định lí 3

Cho hàm số $u=u(x)$ có đạo hàm liên tục trên K và hàm số $y=f(u)$ liên tục sao cho hàm hợp $f[u(x)]$ xác định trên K. Khi đó nếu F là một nguyên hàm của f thì $\int f[u(x)]u'(x)dx=F[u(x)]+C$

Từ đây ta suy ra hệ quả
Với $u=ax+b,(a\neq 0)$ ta có
$\int f(ax+b)dx=\frac{1}{a}F(ax+b)+C$

Ví dụ 1: Tìm nguyên hàm $\int(x-1)^{10}dx$.

Lời giải

Theo định lý trên thì ta cần viết về dạng $\int f(u)du$.

Mà $u'=(x-1)'=1$, do vậy

$$\int(x-1)^{10}dx=\int(x-1)^{10}.(x-1)'dx=\int(x-1)^{10}d(x-1)=\frac{(x-1)^{11}}{11}+C.$$

Từ ví dụ trên ta có các bước gợi ý để xử lý bài toán tìm nguyên hàm theo phương pháp đổi biến

STUDY TIP
Với phương pháp đổi biến ta cần chú trọng công thức mà suy ra từ định lý như sau:
Nếu $u=f(x)$, khi đó
$du=f'(x)dx$

1. Đặt $u=g(x)$.
2. Biến đổi x và dx về u và du.
3. Giải bài toán dưới dạng nguyên hàm hàm hợp $\int f(u)du$, sau đó thay biến x vào nguyên hàm tìm được và kiểm tra lại kết quả.

Ta đến với ví dụ 2

Chú ý
Nếu tính nguyên hàm theo biến mới $u(u=u(x))$ thì sau khi tính nguyên hàm xong, ta phải trở lại biến x ban đầu bằng cách thay u bởi $u(x)$.

Ví dụ 2: Tìm $\int x^2(1-x)^7dx$.

Ở bài toán này, ta thấy số mũ 7 khá cao mà lại có biểu thức trong ngoặc phức tạp hơn là x^2. Do vậy ta sẽ đặt $(1-x)^7$ để đổi biến, dưới đây là lời giải áp dụng gợi ý các bước trên.

Lời giải

Đặt $u=1-x\Leftrightarrow du=(1-x)'dx\Leftrightarrow du=-dx$

ta có $\int x^2(1-x)^7dx=\int(1-u)^2.u^7(-1)du=-\int(u^7-2u^8+u^9)du$

$$=-\frac{u^8}{8}+\frac{2u^9}{9}-\frac{u^{10}}{10}+C=-\frac{(1-x)^8}{8}+\frac{2(1-x)^9}{9}-\frac{(1-x)^{10}}{10}+C.$$

2. Phương pháp lấy nguyên hàm từng phần.

Định lý 4

Nếu u và v là hai hàm số có đạo hàm liên tục trên K thì $\int u(x)v'(x)dx=u(x).v(x)-\int v(x)u'(x)dx$.

Chú ý
Đẳng thức trong định lý 4 còn được viết dưới dạng $\int udv=uv-\int vdu$.

Nếu nguyên hàm có dạng $\int p(x).q(x)dx$ thì ta có thể nghĩ đến phương pháp nguyên hàm từng phần. Bảng sau gợi ý cách đặt ẩn phụ để tính nguyên hàm $\int p(x).q(x)dx$.

Hàm dưới dấu tích phân	Cách đặt
$p(x)$ là đa thức, $q(x)$ là hàm lượng giác	$\begin{cases} u = p(x) \\ dv = q(x)dx \end{cases}$
$p(x)$ là đa thức, $q(x) = f'(e^x).e^x$	$\begin{cases} u = p(x) \\ dv = q(x)dx \end{cases}$
$p(x)$ là đa thức, $q(x) = f(\ln x)$	$\begin{cases} u = q(x) \\ dv = p(x)dx \end{cases}$
$p(x)$ là hàm lượng giác, $q(x) = f(e^x)$	$\begin{cases} u = q(x) \\ dv = p(x)dx \end{cases}$
$p(x)$ là đa thức, $q(x) = f'(\ln x)\dfrac{1}{x}$	$\begin{cases} u = p(x) \\ dv = q(x)dx \end{cases}$
$p(x)$ là đa thức, $q(x) = f'(u(x)).(u(x))'$, $u(x)$ là các hàm lượng giác $(\sin x, \cos x, \tan x, \cot x)$	$\begin{cases} u = p(x) \\ dv = q(x)dx \end{cases}$

STUDY TIP

"Loga – Đa – Lượng – Mũ" (Logarit – Đa thức – Lượng giác – Mũ) hay **"Loga – Đa – Mũ – Lượng"** là thứ tự ưu tiên đặt u và dv trong bài toán tính nguyên hàm từng phần.

Ví dụ 3: Thầy **Điệp Châu** cho bài toán " Tìm $\int \sin x \cos x dx$" thì ba bạn Huyền, Lê và Hằng có ba cách giải khác nhau như sau

Bạn Huyền giải bằng phương pháp đổi biến số như sau: "Đặt $u = \sin x$, ta có: $du = \cos x dx$ Vậy $\int \sin x.\cos x dx = \int u du$ $= \dfrac{u^2}{2} + C = \dfrac{\sin^2 x}{2} + C$"	*Bạn Lê giải bằng phương pháp lấy nguyên hàm từng phần như sau:* "Đặt $u = \cos x, v' = \sin x$. Ta có $u' = -\sin x, v = -\cos x$. Công thức nguyên hàm từng phần cho ta $\int \sin x \cos x dx = -\cos^2 x - \int \sin x \cos x dx$ Giả sử F là một nguyên hàm của $\sin x.\cos x$. Theo đẳng thức trên ta có $F(x) = -\cos^2 x - F(x) + C$. Suy ra $F(x) = -\dfrac{\cos^2 x}{2} + \dfrac{C}{2}$. Điều này chứng tỏ $-\dfrac{\cos^2 x}{2}$ là một nguyên hàm của $\sin x.\cos x$. Vậy $\int \sin x.\cos x dx = -\dfrac{\cos^2 x}{2} + C$."	*Bạn Minh Hằng chưa học đến hai phương pháp trên nên làm như sau:* "$\int \sin x.\cos x dx$ $= \int \dfrac{\sin 2x}{2} dx = -\dfrac{\cos 2x}{4} + C$."

Kết luận nào sau đây là **đúng**?

A. Bạn Hằng giải đúng, bạn Lê và Huyền giải sai.

B. Bạn Lê sai, Huyền và Hằng đúng.

C. Ba bạn đều giải sai.

D. Ba bạn đều giải đúng.

STUDY TIP

Bài toán củng cố về định lý 1 đã nêu ở trên, và củng cố các cách giải nguyên hàm cơ bản.

Đáp án D.

Nhận xét: Sau khi soát kĩ cả ba lời giải, ta thấy ba lời giải trên đều không sai ở bước nào cả, tuy nhiên, tại sao đến cuối cùng đáp án lại khác nhau? Ta xem giải thích ở lời giải sau

Lời giải

Cả ba đáp số đều đúng, tức là cả ba hàm số $\frac{\sin^2 x}{2}; -\frac{\cos^2 x}{2}$ và $-\frac{\cos 2x}{4}$ đều là nguyên hàm của $\sin x.\cos x$ do chúng chỉ khác nhau về một hằng số. Thật vậy

$$\frac{\sin^2 x}{2} - \left(-\frac{\cos^2 x}{2}\right) = \frac{1}{2};$$

$$\frac{\sin^2 x}{2} - \left(-\frac{\cos 2x}{4}\right) = \frac{2\sin^2 x + \left(1 - 2\sin^2 x\right)}{4} = \frac{1}{4}.$$

3. Bảng một số nguyên hàm mở rộng

$\int (ax+b)^\alpha \, dx = \frac{(ax+b)^{\alpha+1}}{a(\alpha+1)} + C,\ \alpha \neq -1$	$\int \cos(ax+b)dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + C$
$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln\lvert ax+b\rvert + C$	$\int \sin(ax+b)dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + C$
$\int e^{ax+b}dx = \frac{1}{a}e^{ax+b} + C$	$\int \tan(ax+b)dx = -\frac{1}{a}\ln\lvert\cos(ax+b)\rvert + C$
$\int m^{ax+b}dx = \frac{1}{a\ln m}m^{ax+b} + C, (m>0)$	$\int \cot(ax+b)dx = \frac{1}{a}\ln\lvert\sin(ax+b)\rvert + C$
$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$	$\int \frac{dx}{\sin^2(ax+b)} = -\frac{1}{a}\cot(ax+b) + C$
$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{a+x}{a-x}\right\rvert + C$	$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert + C$
$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right) + C$	$\int \frac{dx}{\cos^2(ax+b)} = \frac{1}{a}\tan(ax+b) + C$
$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+a^2}} = -\frac{1}{a}\ln\left\lvert\frac{a+\sqrt{x^2+a^2}}{x}\right\rvert + C$	$\int \sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C$
$\int \ln(ax+b)dx = \left(x+\frac{b}{a}\right)\ln(ax+b) - x + C$	$\int \frac{dx}{\sin(ax+b)} = \frac{1}{a}\ln\left\lvert\tan\frac{ax+b}{2}\right\rvert + C$
$\int e^{ax}\sin bx dx = \frac{e^{ax}(a\sin bx - b\cos bx)}{a^2+b^2} + C$	$\int e^{ax}\cos bx dx = \frac{e^{ax}(a\cos bx + b\sin bx)}{a^2+b^2} + C$