TỨ DIỆN

CÁC BÀI TOÁN CHỌN LỌC VỀ CHÓP TAM GIÁC

Ví dụ 1: Cho tứ diện $ABCD$ có $AD \perp (ABC)$, $AC = AD = 4cm$, $AB = 3cm$, $BC = 5cm$. Tính khoảng cách từ A đến (BCD).

Giải:

ΔABC vuông tại A

Chọn hệ trục tọa độ $Axyz$ sao cho:

$A(0;0;0)$, $B(3;0;0)$, $C(0;4;0)$,

$D(0;0;4)$

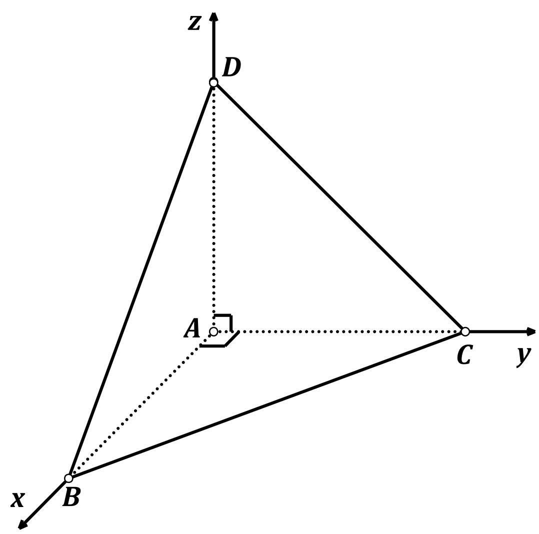
Phương trình mặt phẳng (BCD):

$\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{4}=1$

$\Leftrightarrow 4x+3y+3z-12=0$

Khoảng cách từ A đến (BCD).

$d\left[A,(BCD)\right]=\frac{\left|-12\right|}{\sqrt{4^2+3^2+3^2}}=\frac{12}{\sqrt{34}}$



Ví dụ 2: Cho hình chóp tam giác đều $SABC$ cạnh đáy là a. Gọi M, N là trung điểm SB, SC. Tính theo a diện tích ΔAMN biết $(AMN) \perp (SBC)$.

Giải:

Gọi O là hình chiếu của S trên (ABC) $\Rightarrow O$ là trọng tâm ΔABC

Gọi I là trung điểm BC

Ta có $AI = BC\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow OA=\frac{a\sqrt{3}}{3}$, $OI=\frac{a\sqrt{3}}{6}$

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$: $O(0;0;0)$, $A\left(\frac{a\sqrt{3}}{3};0;0\right)$, $S(0;0;h)$ $\quad(h, a>0)$

$\Rightarrow I\left(-\frac{a\sqrt{3}}{6};0;0\right)$, $B\left(-\frac{a\sqrt{3}}{6};\frac{a}{2};0\right)$, $C\left(-\frac{a\sqrt{3}}{6}\right.$

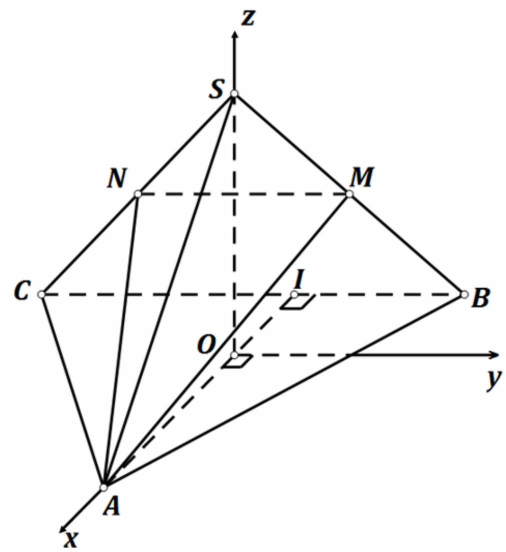
$\Rightarrow \vec{n}_{(AMN)} = \left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AN}\right] = \left(\frac{ah}{4};0;\frac{5a^2\sqrt{3}}{24}\right)$

$\Rightarrow \vec{n}_{(SBC)} = \left[\overrightarrow{SB},\overrightarrow{SC}\right] = \left(-ah;0;\frac{a^2\sqrt{3}}{6}\right)$

$(AMN)\perp(SBC) \Rightarrow \vec{n}_{(AMN)}.\vec{n}_{(SBC)} = 0$

$\Rightarrow h = \frac{a\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}$

$\Rightarrow S_{\Delta AMN} = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AN}\right]\right| = \frac{a^3\sqrt{10}}{16}$



Ví dụ 3: Cho hình chóp $SABC$ có đáy là ΔABC vuông tại C, $SA\perp(ABC)$, $CA=a$, $CB=b$, $SA=h$ .Gọi D là trung điểm AB.

1. Tính cosin góc φ giữa AC và SD.

2. Tính $d(AC,SD)$, $d(BC,SD)$.

Giải:

Trong (ABC) vẽ tia $Ax\perp AC$.

Chọn hệ trục tọa độ $Axyz$ sao cho: $A(0;0;0)$, $C(0;a;0)$, $S(0;0;h)$

$\Rightarrow B(b;a;0)$, $D\left(\frac{b}{2};\frac{a}{2};0\right)$

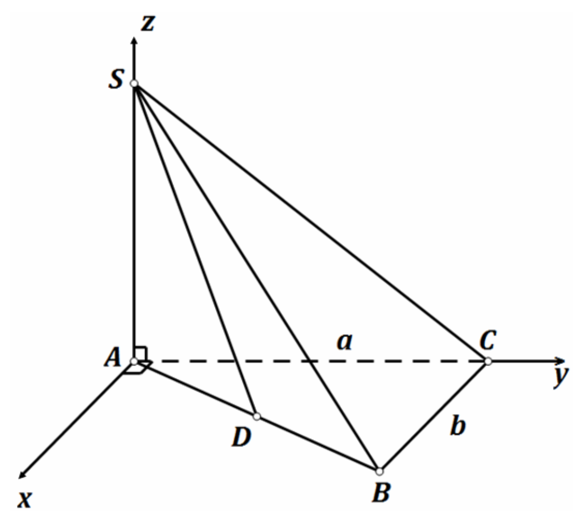
1. Tính cosin góc φ giữa AC và SD.

Ta có: $\begin{cases} \overrightarrow{AC} = (0;a;0) \\ \overrightarrow{SD} = \left(\dfrac{b}{2};\dfrac{a}{2};-h\right) \end{cases}$

$$\Rightarrow \cos\varphi = \frac{\left|\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{SD}\right|}{AC.SD} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+4h^2}}$$

2. Tính $d(AC,SD)$, $d(BC,SD)$.

$$d(BC,SD) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{SD}\right]\overrightarrow{BS}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{SD}\right]\right|} = \frac{ha}{\sqrt{a^2+4h^2}}$$



$$d(AC,SD) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{AC},\overrightarrow{SD}\right]\overrightarrow{AS}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{AC},\overrightarrow{SD}\right]\right|} = \frac{hb}{\sqrt{b^2+4h^2}}$$

Ví dụ 4: Cho ΔABC đều cạnh a. Trên đường thẳng $d \perp (ABC)$ tại A lấy điểm M. Gọi I là hình chiếu của trọng tâm G của ΔABC trên (BCM).

1. Chứng minh I là trực tâm ΔBCM.

2. GI cắt d tại N. Chứng minh tứ diện BCMN có các cặp cạnh đối vuông góc.

3. Chứng minh AM.AN không đổi khi M di động trên d.

Giải:

Trong mặt phẳng (ABC) vẽ $Ay \perp AB$. Chọn hệ trục tọa độ Axyz sao cho:

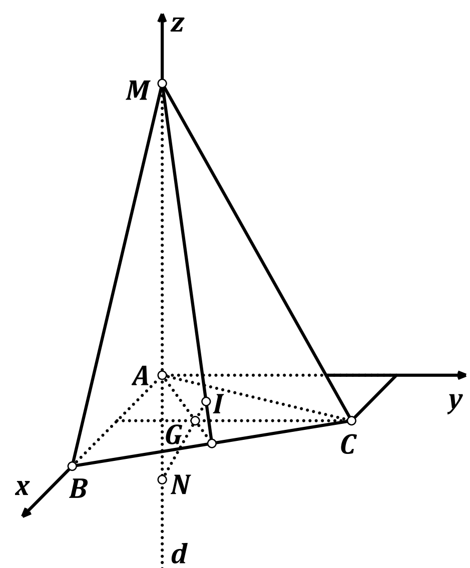
$$A(0;0;0),\ B(a;0;0),\ M(0;0;m),\ C\left(\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right) \Rightarrow G\left(\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{6};0\right)$$

1. Chứng minh I là trực tâm ΔBCM.

Ta có: $\begin{cases} BC \perp MA \\ BC \perp GI \end{cases} \Rightarrow BC \perp (GIA)$

$\Rightarrow BC \perp AI$

Tương tự $MC \perp BI \Rightarrow I$ là trực tâm ΔBCM



2. Chứng minh tứ diện $BCMN$ có các cặp cạnh đối vuông góc.

Ta có: $\overrightarrow{BC} = -\frac{a}{2}\left(1;-\sqrt{3};0\right)$

$\Rightarrow (AMI): x - \sqrt{3}y = 0$

$\overrightarrow{MC} = \frac{1}{2}\left(a;a\sqrt{3};-2m\right)$

$\Rightarrow (BGI): ax + a\sqrt{3}y - 2mz - a^2 = 0$

$GI = (AMI) \cap (BGI) = \begin{cases} x - \sqrt{3}y = 0 \\ ax + a\sqrt{3}y - 2mz - a^2 = 0 \end{cases}$

$N \in d \Rightarrow N(0;0;n)$ và $N \in GI \Rightarrow n = -\frac{a^2}{2m} \Rightarrow N\left(0;0;-\frac{a^2}{2m}\right)$

$\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{MN} = 0,\ \overrightarrow{BM}.\overrightarrow{CN} = 0,\ \overrightarrow{BN}.\overrightarrow{BM} = 0$

Vậy $BC \perp MN,\ BM \perp CN,\ BN \perp CM$.

Ví dụ 5: Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc. $AC = 2OB$, $BC = 2OA$. Vẽ $OM \perp AC$ tại M, $ON \perp BC$ tại N.

1. Chứng minh $MN \perp OC$.

2. Tính $\cos\widehat{MON}$.

3. D là trung điểm AB. Chứng minh $\frac{\tan^4\widehat{OCD}}{\tan^4\widehat{OCA}} + \frac{MN}{AB} = 1$.

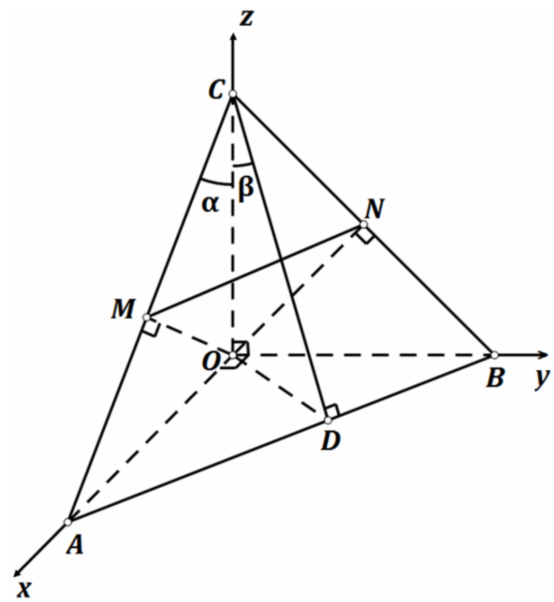
Giải:

Ta có: $\begin{cases} OA^2 + OC^2 = AC^2 \\ OB^2 + OC^2 = BC^2 \end{cases} \Rightarrow 4OB^2 - OA^2 = 4OA^2 - OB^2 \Rightarrow OA = OB$

Đặt $OA = a = OB \Rightarrow OC = a\sqrt{3}$

Chọn trục hệ tọa độ $Oxyz$ sao cho: $O(0;0;0)$, $A(a;0;0)$, $B(0;a;0)$, $C\left(0;0;a\sqrt{3}\right)$

1. Chứng minh $MN \perp OC$.



$\overrightarrow{AC} = -a\left(1;0;-\sqrt{3}\right)$

Phương trình tham số của AC:

$\begin{cases} x = a + t \\ y = 0 \\ z = -\sqrt{3}t \end{cases} \left(t \in \mathbb{R}\right) \Rightarrow M\left(a + t;0;-\sqrt{3}t\right)$

$OM \perp AC \Rightarrow \overrightarrow{OM}.\overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow t = -\dfrac{a}{4}$

$\Rightarrow M\left(\dfrac{3a}{4};0;\dfrac{a\sqrt{3}}{4}\right), \overrightarrow{BC} = -a\left(0;1;-\sqrt{3}\right)$

Phương trình tham số của

$BC: \begin{cases} x = 0 \\ y = a + t \\ z = -\sqrt{3}t \end{cases} \left(t \in \mathbb{R}\right)$

$\Rightarrow N\left(0;a + t;-\sqrt{3}t\right)$

$ON \perp BC = \overrightarrow{ON}.\overrightarrow{BC} = 0 \Rightarrow t = -\dfrac{a}{4} \Rightarrow N\left(0;\dfrac{3a}{4};\dfrac{a\sqrt{3}}{4}\right) \Rightarrow \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{OC} = 0 \Rightarrow MN \perp OC$

2. Tính $\cos\widehat{MON}$: $\cos\widehat{MON} = \dfrac{\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON}}{OM.ON} = \dfrac{1}{4}$

3. D là trung điểm AB. Chứng minh $\dfrac{\tan^4\widehat{OCD}}{\tan^4\widehat{OCA}} + \dfrac{MN}{AB} = 1.$

Đặt $\beta = \widehat{OCD}$, $\alpha = \widehat{OCA}, OC \perp \left(OAB\right) \Rightarrow OC \perp OD$

$OD = \dfrac{1}{2}AB = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}, \Rightarrow \begin{cases} \tan\beta = \dfrac{OD}{OC'} \\ \tan\alpha = \dfrac{OA}{OC} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{\tan^4\beta}{\tan^4\alpha} = \left(\dfrac{OD}{OA}\right)^4 = \dfrac{1}{4}$

$\dfrac{MN}{AB} = \dfrac{\dfrac{3a\sqrt{2}}{4}}{a\sqrt{2}} = \dfrac{3}{4} \Rightarrow \dfrac{\tan^4\beta}{\tan^4\alpha} + \dfrac{MN}{AB} = 1$

Ví dụ 6: Cho hình chóp $SABC$ có cạnh đáy là a đường cao $SH = h$. Mặt phẳng $\left(\alpha\right)$ qua AB và $\left(\alpha\right) \perp SC$.

1. Tìm điều kiện của h để $\left(\alpha\right)$ cắt cạnh SC tại K. Tính diện tích ΔABK.

2. Tính h theo a để $\left(\alpha\right)$ chia hình chóp thành hai phần có thể tích bằng nhau.

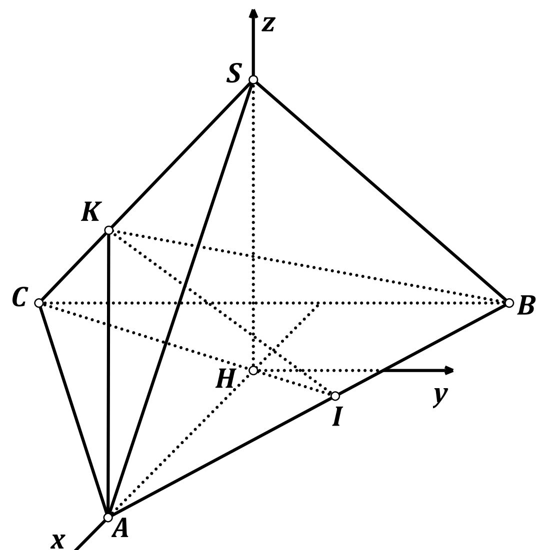
Chứng tỏ khi đó tâm mặt cầu nội tiếp và ngoại tiếp trùng nhau.

Giải:

Trong mặt phẳng (ABC) vẽ $Hy \perp HA$.

Chọn hệ trục tọa độ $Hxyz$ sao cho: $H(0;0;0)$, $A\left(\frac{a\sqrt{3}}{3};0;0\right)$, $S(0;0;h)$

$\Rightarrow B\left(-\frac{a\sqrt{3}}{6};\frac{a}{2};0\right)$, $C\left(-\frac{a\sqrt{3}}{6};\frac{-a}{2};0\right)$



1. Tìm điều kiện của h để (α) cắt cạnh SC tại K. Tính diện tích ΔABK.

Ta có: $\overrightarrow{SC} = -\frac{1}{6}\left(a\sqrt{3};3a;6h\right)$

$\Rightarrow (\alpha): a\sqrt{3}x + 3ay + 6hz - a^2 = 0$

Phương trình tham số của

$$SC: \begin{cases} x = a\sqrt{3}t \\ y = 3at \\ z = h + 6ht \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

$$SC \cap (\alpha) \Rightarrow t = \frac{-6h^2 + a^2}{12a^2 + 36h^2}$$

$$\Rightarrow K\left(\frac{a^3\sqrt{3} - 6\sqrt{3}ah^2}{12a^2 + 36h^2};\frac{3a^3 - 18ah^2}{12a^2 + 36h^2};\frac{18a^2h}{12a^2 + 36h^2}\right)$$

$$K \in SC \Leftrightarrow z_C < z_K < z_S \Leftrightarrow 0 < \frac{18a^2h}{12a^2 + 36h^2} < h \Leftrightarrow h > \frac{a}{\sqrt{6}}$$

Cách 1:

$$S_{\Delta ABK} = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AK}\right]\right| = \frac{3a^2h}{4\sqrt{a^2 + 3h^2}}$$

Cách 2:

Gọi I là trung điểm $AB \Rightarrow I\left(\frac{a\sqrt{3}}{12};\frac{a}{4};0\right) \Rightarrow IK \perp SC,\ IK \perp AB$

$$IK = \frac{\left|\left[\overrightarrow{SC},\overrightarrow{SI}\right]\right|}{SC} = \frac{3ah}{2\sqrt{a^2 + 3h^2}} \Rightarrow S_{\Delta ABK} = \frac{1}{2}IK.AB = \frac{3a^2h}{4\sqrt{a^2 + 3h^2}}$$

2. Tính h

(α) chia hình chóp thành hai phần có thể tích bằng nhau khi K là trung điểm của SC.

$\Rightarrow IC = IS \Leftrightarrow \dfrac{3a^2}{4} = \dfrac{a^2 + 12h^2}{12} \Leftrightarrow h = a\sqrt{\dfrac{2}{3}}$

Khi đó: $\Delta CAB = \Delta SAB \Rightarrow SA = SB = a$

$SC^2 = SH^2 + CH^2 = \dfrac{2a^2}{3} + \dfrac{a^2}{3} \Rightarrow SC = a$

$\Rightarrow$ Chóp $SABC$ đều.

Vậy, tâm mặt cầu ngoại tiếp và tâm mặt cầu nội tiếp của $SABC$ trùng nhau.

Ví dụ 7: Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau, có giao tuyến là đường thẳng Δ. Trên Δ lấy hai điểm A và B với $AB = a$. Trong (P) lấy điểm C, trong (Q) lấy điểm D sao cho AC, BD cùng vuông góc với Δ và $AC = BD = AB$. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp $ABCD$ và $d\left[A,(BCD)\right]$ theo a.

Giải:

Chọn hệ trục tọa độ $Axyz$ sao cho: $A(0;0;0)$, $B(0;a;0)$, $C(0;0;a)$, $D(a;a;0)$

Phương trình mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2\alpha x - 2\beta y - 2\gamma z = 0$

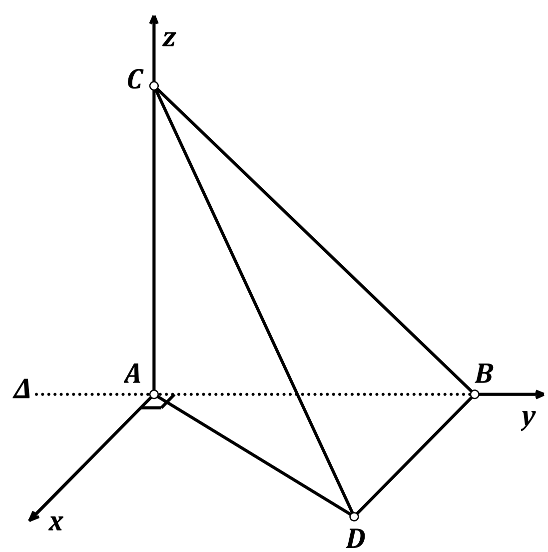
$B, C, D \in S \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 2\beta a \\ a^2 = 2\gamma a \\ 2a^2 = 2\alpha a + 2\beta a \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = \dfrac{a}{2} \\ \beta = \dfrac{a}{2} \\ \gamma = \dfrac{a}{2} \end{cases} \Rightarrow R = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

$\vec{n}_{(BCD)} = \left[\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}\right] = a^2(0;1;1)$

$\Rightarrow (BCD): y + z - a = 0$

$\Rightarrow d\left[A,(BCD)\right] = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$



BÀI TẬP TỰ LUYỆN.

Bài tập 1: Cho ΔABC vuông tại A có $AB = a,\ AC = 2a.$ Trên đường thẳng vuông góc (ABC) tại A lấy điểm S sao cho $SA = 3a.$ AD là đường cao tam giác $\Delta ABC.$ E, F là trung điểm của $SB, SC.$ H là hình chiếu của A trên $EF.$

1. Chứng minh H là trung điểm của $SD.$

2. Tính cosin góc CP giữa hai mặt phẳng $(ABC), (ACF).$

3. Tính thể tích hình chóp $A.BCFE.$

Bài tập 2: Cho tứ diện $SABC.$ ΔABC vuông tại A có $AC = a,\ BC = a\sqrt{3},\ SB = a\sqrt{2},$ $SB \perp (ABC).$ Qua B vẽ $BH \perp SA,\ BK \perp SC\ (H \in SA,\ K \in SC).$

1. Chứng minh $SC \perp (BHK).$

2. Tính diện tích $\Delta BHK.$

3. Tính góc giữa (ASC) và (SCB)

Bài tập 3: Cho tứ diện $OABC$ có các cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau. H là hình chiếu của O trên $(ABC).$

1. Chứng minh ΔABC có ba góc nhọn.

2. Chứng minh H là trực tâm $\Delta ABC.$

3. Chứng minh $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{OC^2}.$

4. Gọi $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ lần lượt là góc giữa các mặt phẳng $(OAB),\ (OBC),\ (OAC)$ với mặt phẳng (ABC). Chứng minh rằng $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$

Bài tập 4: Cho tứ diện $OABC$ có $OA = OB = OC = a$ và đôi một vuông góc. $OH \perp (ABC)$ tại $H.$ Gọi $A_1,\ B_1,\ C_1$ lần lượt là hình chiếu của H lên các mặt $(OBC), (OAC), (OAB).$

1. Tính thể tích tứ diện $HA_1B_1C_1.$

2. Gọi S là điểm đối xứng H qua $O.$ Chứng minh tứ diện $SABC$ đều.

3. Chứng minh OH không vuông góc $(A_1B_1C_1).$

Bài tập 5: Cho tứ diện $OABC$ và OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OA = a,$ $OB = a\sqrt{2},$ $OC = c\ (a, c > 0).$ Gọi D là đỉnh đối diện O của hình chữ nhật $OADB,$ M là trung điểm BC mặt phẳng (α) qua A và M cắt (OCD) theo đường thẳng vuông góc $AM.$

1. Gọi E là giao điểm (α) với $OC.$ Tính $OE.$

2. Tính khoảng cách từ C tới mặt phẳng $(\alpha).$

3. Tính diện tích thiết diện tạo bởi (α) và chóp $C.OADB.$

Bài tập 6: Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc. $OA = a, OB = b, OC = c.$

1. Gọi I là tâm mặt cầu nội tiếp (S) của $OABC.$ Tính bán kính r của $(S).$

2. Gọi M, N, P là trung điểm $BC, CA, AB.$ Chứng minh rằng góc giữa (NOM) của (OMP) là vuông khi và chỉ khi $\frac{1}{a^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$

Bài tập 7: Trên 3 tia Ox, Oy, Oz vuông góc từng đôi một lấy các điểm A, B, C sao cho $OA = a, OB = b, OC = c.$ Gọi H, G là trực tâm, trọng tâm $\Delta ABC.$

1. Tính OH, OG và $S_{\Delta ABC}$ theo $a, b, c.$

2. Chứng minh ΔABC có ba góc nhọn và $a^2 \tan A = b^2 \tan B = c^2 \tan C.$

Bài tập 8: Cho ΔABC đều cạnh $a.$ Trên đường thẳng $d \perp (ABC)$ tại A lấy điểm $S, SA = h.$

1. Tính $d\left[A, (SBC)\right]$ theo a và $h.$

2. Đường thẳng $\Delta \perp (SBC)$ tại trực tâm H của $\Delta SBC,$ chứng tỏ Δ luôn đi qua điểm cố định khi S di động trên $d.$

3. Δ cắt d tại $S'.$ Tính h theo a để SS' nhỏ nhất.

Bài tập 11: Cho tứ diện $SABC$ có ΔABC vuông cân tại $B, AB = a, SA \perp (ABC)$ và $SA = a\sqrt{2}.$ Gọi D là trung điểm của $AC.$

1. Chứng minh khoảng cách từ A đến (SBC) gấp đôi khoảng cách từ D đến $(SBC).$

2. Mặt phẳng (α) qua A và vuông góc $SC, (\alpha)$ cắt SC và SB tại M và $N.$

- Chứng minh ΔAMN là thiết diện giữa (α) và tứ diện $SABC.$

- Tính thể tích hình chóp $SAMN.$

3. Tính cosin góc φ giữa mặt phẳng (ASC) và (SCB)

Bài tập 15: Cho ΔABC đều có đường cao $AH = 2a.$ Gọi O là trung điểm của $AH.$ Trên đường thẳng vuông góc với (ABC) tại O lấy điểm S sao cho $OS = 2a.$

1. Tính góc cosin φ góc giữa (BSA) và (SAC)

2. Trên đoạn OH lấy điểm $I.$ Đặt $OI = m$ $(0 < m < a).$ Mặt phẳng (α) qua I vuông góc với AH cắt các cạnh AB, AC, SC, SB tại $M, N, P, Q.$

- Tính diện tích thiết diện $MNPQ$ theo a và $x.$

- Tìm m để diện tích $MNPQ$ là lớn nhất.

Bài tập 20: Cho tứ diện $SABC$ có ΔABC vuông cân tại $B, AB = a, SA \perp (ABC)$ và $SA = a.$ $AH \perp SB$ tại $H,$ $AK \perp SC$ tại $K.$

1. Chứng minh rằng $HK \perp SC.$

2. Gọi $I = HK \cap BC$. Chứng minh rằng B là trung điểm của CI.

3. Tính sin góc φ giữa SB và (AHK).

4 Xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp $SABC$.

Bài tập 21: Trong mặt phẳng (α) có góc vuông $\widehat{xOy}$. M, N lần lượt di động trên cạnh Ox, Oy sao cho $OM + ON = a$. Trên đường thẳng vuông góc với (α) tại O lấy điểm S sao cho $OS=a$.

1. Tìm vị trí M, N để thể tích $SOMN$ lớn nhất.

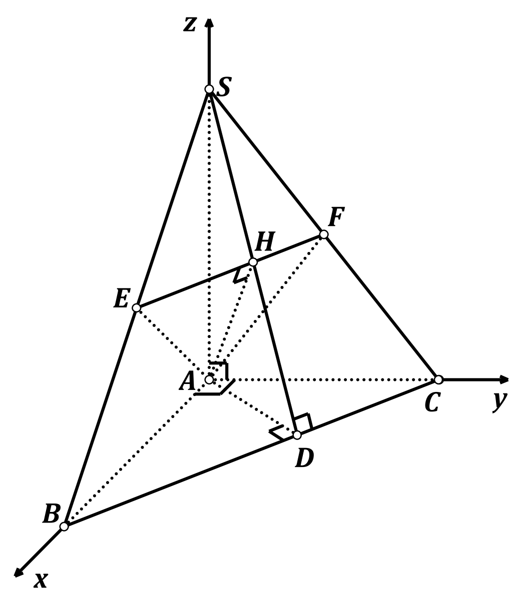
2. Khi thể tích $SOMN$ lớn nhất, hãy tính:

- $d\left[O,(SMN)\right]$.
- Bán kính mặt cầu ngoại tiếp $SOMN$.

3. Khi M, N dị động sao cho $OM + ON = a$ chứng minh $\widehat{OSM} + \widehat{OSN} + \widehat{MSN} = 90°$.

CÁC BÀI TOÁN CHỌN LỌC VỀ CHÓP TAM GIÁC

Bài tập 1: Chọn hệ trục tọa độ $Axyz$ sao cho: $A(0;0;0)$, $B(a;0;0)$, $C(0;2a;0)$, $S(0;0;3a)$, $E\left(\frac{a}{2};0;\frac{3a}{2}\right)$, $F\left(0;a;\frac{3a}{2}\right)$



1. Chứng minh H là trung điểm của SD.

Ta có: $\overrightarrow{FE} = \left(\frac{a}{2};-a;0\right) = \frac{a}{2}(1;-2;0)$

Phương trình tham số của

$$FE: \begin{cases} x = t \\ y = a - 2t \; (t \in \mathbb{R}). \\ z = \frac{3a}{2} \end{cases}$$

$H \in FE \Rightarrow \overrightarrow{AH} = \left(t; a - 2t; \frac{3a}{2}\right)$

$\overrightarrow{FE} \perp \overrightarrow{AH} \Rightarrow t = \frac{2a}{5} \Rightarrow H\left(\frac{2a}{5};\frac{a}{5};\frac{3a}{2}\right)$,

$\overrightarrow{SH}.\overrightarrow{BC} = 0 \Rightarrow SH \perp BC$

Mà $\begin{cases} SD \perp BC \; (BC \perp AD,\, BC \perp SA) \\ SH \perp BC \end{cases} \Rightarrow H \in SD \Rightarrow H$ là trung điểm của SD do EF là đường trung bình trong ΔSBC $\Rightarrow D\left(\frac{4a}{5};\frac{2a}{5};0\right)$.

2. Tính cosin góc CP giữa hai mặt phẳng $(ABC), (ACF)$.

Ta có $BC \perp (SAD) \Rightarrow FE \perp (SAD)$ do FE song song với BC

$$\begin{cases}(SAD)\cap(ABC)=AD\\(SAD)\cap(AEF)=AH\end{cases} \Rightarrow \cos\varphi = \left|\cos\left(\widehat{\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AH}}\right)\right| \Leftrightarrow \cos\varphi = \frac{\left|(4;2;15)(2;1;0)\right|}{\sqrt{16+4+224}\sqrt{4+1+0}} = \frac{2}{7}$$

3. Tính thể tích hình chóp $A.BCFE$.

Ta có $V_{ASEF} = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AS},\overrightarrow{AE}\right].\overrightarrow{AF}\right| = \frac{a^3}{4}, V_{ASBC} = \frac{1}{6}AS.AB.AC = a^3$

Vậy $V_{A.BCEF} = V_{ASBC} - V_{ASEF} = \frac{3a^3}{4}$

Chú ý: $S_{\Delta SEF} = \frac{1}{4}S_{\Delta SBC} \Rightarrow V_{ASEF} = \frac{1}{4}V_{ASBC} = \frac{a^3}{4}$

Bài tập 2: Trong (ABC), vẽ $Bx \perp BA$. Ta có: $AB = \sqrt{BC^2 - AC^2} = a\sqrt{2} \Rightarrow \Delta BAS$ vuông cân tại B $\Rightarrow H$ là trung điểm của SA.

Chọn hệ trục tọa độ

$Bxyz$: $B(0;0;0)$, $A(0;a\sqrt{2};0)$, $S(0;0;a\sqrt{2})$, $C(a;a\sqrt{2};0)$, $H\left(0;\frac{a\sqrt{2}}{2};\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)$

1. Chứng minh $SC \perp (BHK)$.

Ta có: $\overrightarrow{SC} = a\left(1;\sqrt{2};-\sqrt{2}\right)$

Phương trình tham số của

$$SC:\begin{cases}x=t\\y=\sqrt{2}t\\z=a\sqrt{2}-\sqrt{2}t\end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$$

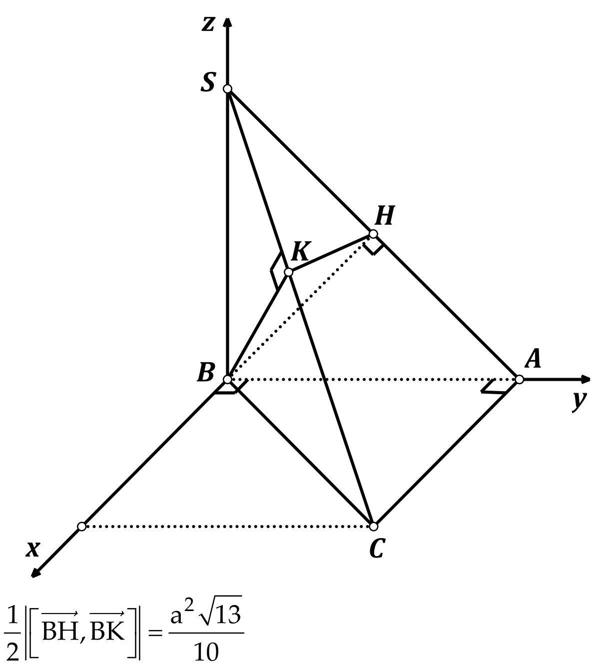
$\Rightarrow K\left(t;\sqrt{2}t;a\sqrt{2}-\sqrt{2}t\right)$

$BK \perp SC \Leftrightarrow \overrightarrow{BK}.\overrightarrow{SC} = 0 \Leftrightarrow t = \frac{2}{5}$

$\Rightarrow K\left(\frac{2a}{5};\frac{2\sqrt{2}a}{5};\frac{3a\sqrt{2}}{5}\right)$

$\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{SC} = 0 \Rightarrow BH \perp SC$

$\Rightarrow SC \perp (BHK)$



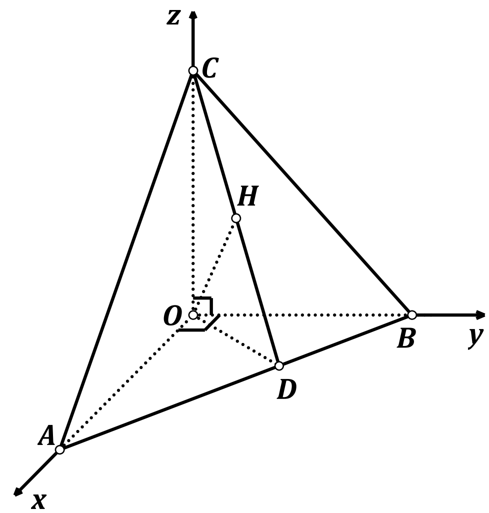
2. Tính diện tích ΔBHK: $S_{\Delta BHK} = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{BH},\overrightarrow{BK}\right]\right| = \frac{a^2\sqrt{13}}{10}$

3. Ta có $SC \perp (BHK) \Rightarrow \begin{cases} SC \perp HK \\ SC \perp KB \end{cases} \Rightarrow \widehat{BKH} = \left(\widehat{\overrightarrow{KB}, \overrightarrow{KH}}\right)$

$\Rightarrow \cos\left(\widehat{\overrightarrow{KB}, \overrightarrow{KH}}\right) = \dfrac{\overrightarrow{KB}.\overrightarrow{KH}}{KB.KH} = \dfrac{3}{5\sqrt{6}}$

Bài tập 3: Chọn hệ trục Oxyz sao cho: $O(0;0;0)$, $A(a;0;0), B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$.

1. Chứng minh ΔABC có ba góc nhọn.



Ta có $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = a^2 > 0 \Rightarrow \widehat{BAC}$ là góc nhọn

Tương tự $\widehat{ABC}$, $\widehat{ACB}$ là góc nhọn

Vậy ΔABC có ba góc nhọn.

2. Chứng minh H là trực tâm ΔABC.

Ta có phương trình mặt phẳng (ABC) là

$\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1 \Leftrightarrow bcx + acy + abz - abc = 0$

$OH \perp (ABC) \Rightarrow \vec{u}_{OH} = \vec{n}_{(ABC)} = (bc; ac; ab)$

Phương trình tham số của

$OH: \begin{cases} x = bct \\ y = act \\ z = abt \end{cases} (t \in \mathbb{R}).$

Thay x, y, z vào phương trình (ABC) ta được:

$\left(b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2\right)t = abc \Rightarrow t = \dfrac{abc}{b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2}$

$$\Rightarrow H\left(\frac{ab^2c^2}{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}; \frac{a^2bc^2}{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}; \frac{a^2b^2c}{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AH} = \dfrac{a^2}{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}\left(-ab^2 - ac^2; bc^2; b^2c\right) \\ \overrightarrow{BH} = \dfrac{b^2}{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}\left(ac^2; -a^2b - bc^2; a^2c\right) \end{cases}$$

$\Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AH \perp BC \\ BH \perp AC \end{cases} \Rightarrow$ H là trực tâm ΔABC.

3. Chứng minh $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{OC^2}$.

$$OH = d\left[O, (ABC)\right] = \frac{|-abc|}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}} \Rightarrow \frac{1}{OH^2} = \frac{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}{a^2b^2c^2}$$

Mà $\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}+\frac{1}{OC^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2}{a^2b^2c^2}$

$\Rightarrow \frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}+\frac{1}{OC^2}$

4. Chứng minh rằng $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.

Nhận xét: $\left|\cos\alpha\right|=\left|\cos\left[\widehat{(OAB),(ABC)}\right]\right|=\left|\cos\left[\widehat{\vec{n}_{(OAB)},\vec{n}_{(ABC)}}\right]\right|$

Gọi Gọi $\vec{n}=\vec{n}_{(ABC)}=(bc;ac;ab),\vec{n}_1=\vec{n}_{(OAB)}=\vec{k}=(0;0;1)$,

$\vec{n}_2=\vec{n}_{(OBC)}=\vec{i}=(1;0;0),\vec{n}_3=\vec{n}_{(OAC)}=\vec{j}=(0;1;0)$

$\Rightarrow \cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=\cos^2\left(\widehat{\vec{n}_1,\vec{n}}\right)+\cos^2\left(\widehat{\vec{n}_2,\vec{n}}\right)+\cos^2\left(\widehat{\vec{n}_3,\vec{n}}\right)$

$=\frac{a^2b^2}{b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2}+\frac{b^2c^2}{b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2}+\frac{a^2c^2}{b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2}=1$

Vậy $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.

Bài tập 4: Chọn hệ trục tọa độ Oxyz: $O(0;0;0)$, $A(a;0;0)$, $B(0;a;0)$, $C(0;0;a)$

1. Tính thể tích tứ diện $HA_1B_1C_1$.

Do $OA=OB=OC$ nên $OABC$ là hình chóp tam giác đều đỉnh O. $OH\perp(ABC)$ tại H $\Rightarrow H$ là trọng tâm $\Delta ABC \Rightarrow H\left(\frac{a}{3};\frac{a}{3};\frac{a}{3}\right)$

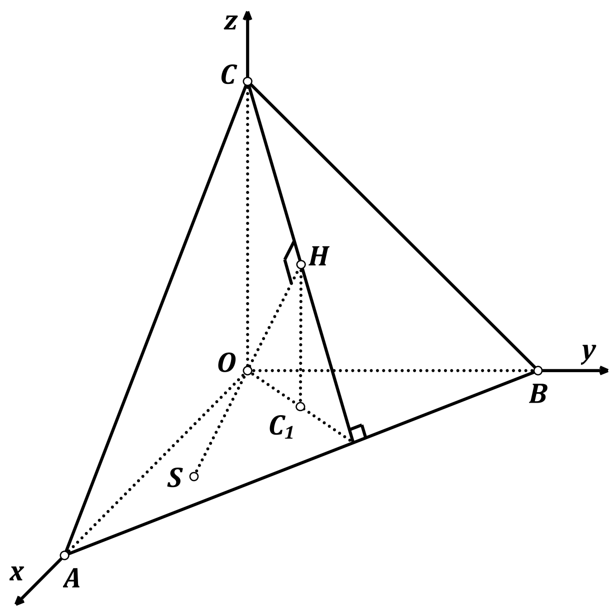
$HC_1\perp(AOB)\Rightarrow C_1\left(\frac{a}{3};\frac{a}{3};0\right)$

$A_1=\left(0;\frac{a}{3};\frac{a}{3}\right)$, $B_1\left(\frac{a}{3};0;\frac{a}{3}\right)$

$\Rightarrow \overrightarrow{HA_1}=\left(-\frac{a}{3};0;0\right)$,

$\overrightarrow{HB_1}=\left(0;-\frac{a}{3};0\right)$, $\overrightarrow{HC_1}=\left(0;0;-\frac{a}{3}\right)$

$\Rightarrow V_{HA_1B_1C_1}=\frac{a^3}{162}$



2. Chứng minh tứ diện SABC đều.

Ta có $AB=AC=BC=a\sqrt{2}$

O là trung điểm $SH \Rightarrow S\left(-\frac{a}{3};-\frac{a}{3};-\frac{a}{3}\right) \Rightarrow SA = \sqrt{\left(\frac{4a}{3}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^2} = a\sqrt{2}$

Tương tự $SB = SC = a\sqrt{2} \Rightarrow SA = SB = SC = AB = AC = BC = a\sqrt{2}$

Vậy tứ diện $SABC$ đều.

3. Chứng minh OH không vuông góc $(A_1B_1C_1)$.

$\overrightarrow{A_1B_1} = \left(\frac{a}{3};-\frac{a}{3};0\right)$, $\overrightarrow{A_1C_1} = \left(\frac{a}{3};0;-\frac{a}{3}\right) \Rightarrow \left[\overrightarrow{A_1B_1}, \overrightarrow{A_1C_1}\right] = \left(\frac{a^2}{9};\frac{a^2}{9};0\right)$

Mà $\overrightarrow{OH} = \left(\frac{a}{3};\frac{a}{3};\frac{a}{3}\right) \Rightarrow \left[\overrightarrow{A_1B_1}, \overrightarrow{A_1C_1}\right] \not\parallel \overrightarrow{OH}$

Vậy $OH \not\perp (A_1B_1C_1)$

Bài tập 5: Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho:

$O(0;0;0)$, $A(a;0;0)$, $B(0;a\sqrt{2};0)$, $C(0;0;c) \Rightarrow M\left(0;\frac{a\sqrt{2}}{2};\frac{c}{2}\right)$

1. Tính OE.

Gọi I là tâm $OADB$, $G = CI \cap AM \Rightarrow G$ là trọng tâm ΔABC

$\Rightarrow G\left(\frac{a}{3};\frac{a\sqrt{2}}{3};\frac{c}{3}\right)$

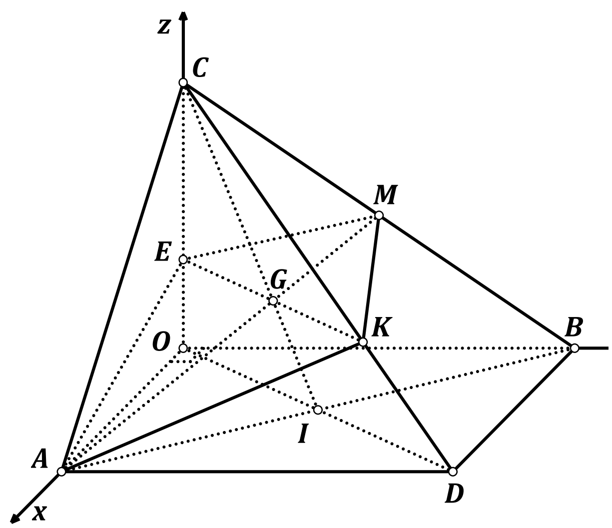
$E \in OC \Rightarrow E(0;0;e)$

Ta có: $(\alpha) \cap (OCD) = EG$

$\Rightarrow \overrightarrow{EG}.\overrightarrow{AM} = 0$

$\Rightarrow e = \frac{c}{3} \Rightarrow E\left(0;0;\frac{c}{3}\right)$

$\Rightarrow OE = \frac{c}{3}$



2. Tính khoảng cách từ C tới mặt phẳng (α).

$\vec{n}_{(\alpha)} = \left[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{EG}\right] = -\frac{a}{6}\left(c\sqrt{2};-c;3a\sqrt{2}\right) \Rightarrow (\alpha): c\sqrt{2}x - cy + 3a\sqrt{2}z - ac\sqrt{2} = 0$

$\Rightarrow d\left[C,(\alpha)\right] = \frac{2ac\sqrt{2}}{\sqrt{18a^2 + 3c^2}}$

3. Tính diện tích thiết diện tạo bởi (α) và chóp $C.OADB$.

Trong (OCD) gọi $K = EG \cap CD \Rightarrow$ Thiết diện là tứ giác $AKME$

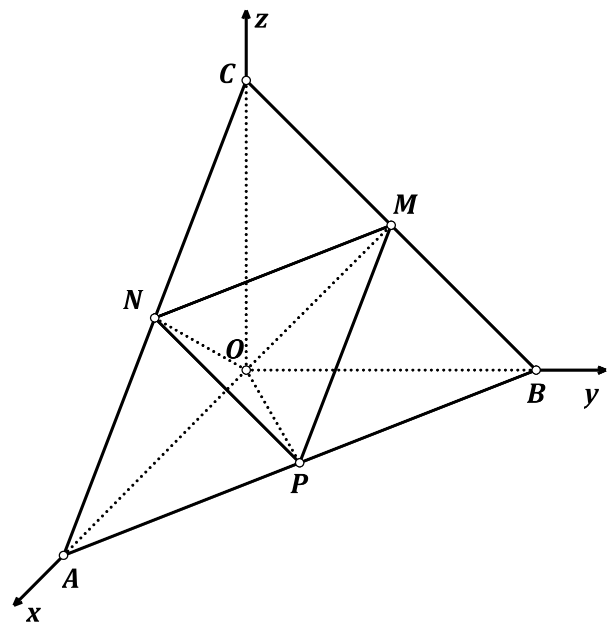
Do $\frac{CE}{CO}=\frac{CG}{CI}=\frac{2}{3}$ nên: $EG//OD \Rightarrow EK//OD \Rightarrow G$ là trung điểm EK

$\Rightarrow S_{AKME}=2S_{\Delta AEM}=EG.AM=\frac{a\sqrt{3}}{3}.\frac{\sqrt{6a^2+c^2}}{2}$

Bài tập 6:

Trọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho: $O(0;0;0)$, $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$

1. Tính bán kính r của (S).



$V_{IOAB}+V_{IOBC}+V_{IOCA}+V_{IABC}=V_{OABC}$

$\frac{r}{3}\left(S_{\Delta OAB}+S_{\Delta OBC}+S_{\Delta OCA}+S_{\Delta ABC}\right)=\frac{abc}{6}$

$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2}$

$\frac{r}{6}\left(ab+bc+ca+\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2}\right)=\frac{abc}{6}$

$r=\frac{abc}{ab+bc+ca+\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2}}$

2.

Ta có: $M\left(0;\frac{b}{2};\frac{c}{2}\right)$, $N\left(\frac{a}{2};0;\frac{c}{2}\right)$, $P\left(\frac{a}{2};\frac{b}{2};0\right)$

$\vec{n}_{(OMN)}=\left[\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON}\right]=\left(\frac{bc}{4};\frac{ac}{4};-\frac{ab}{4}\right)$,

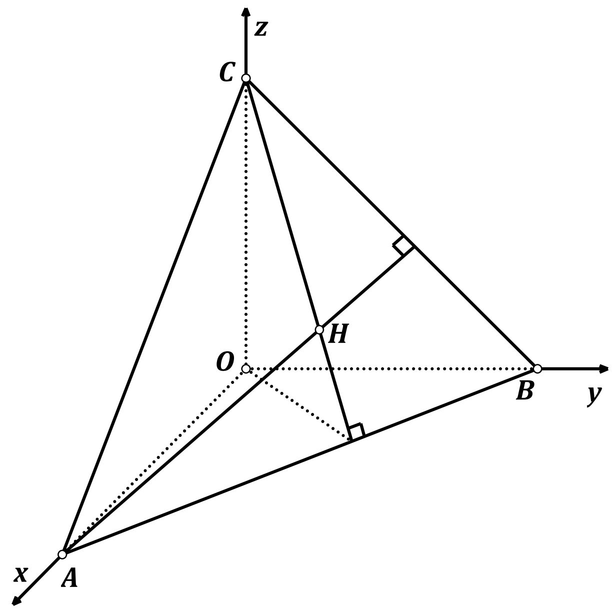
$\vec{n}_{(OMP)}=\left[\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OP}\right]=\left(-\frac{bc}{4};\frac{ac}{4};-\frac{ab}{4}\right)$

Giả thiết, suy ra $\vec{n}_{(OMN)}.\vec{n}_{(OMP)}=0 \Leftrightarrow -\frac{b^2c^2}{16}+\frac{a^2c^2}{16}+\frac{a^2b^2}{16}=0 \Leftrightarrow \frac{1}{a^2}=\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$

Bài tập 7:

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho: $O(0;0;0)$, $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$

1. Tính OH, OG và $S_{\Delta ABC}$ theo a, b, c.



$G\left(\frac{a}{3};\frac{b}{3};\frac{c}{3}\right) \Rightarrow OG = \frac{1}{3}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

$S = \frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}$

Ta có: $\begin{cases} AB \perp CH \\ AB \perp OC \end{cases}$

$\Rightarrow AB \perp (OCH) \Rightarrow AB \perp OH$

Tương tự: $AC \perp OH$

$\Rightarrow OH \perp (ABC) \Rightarrow OH = d\left[O,(ABC)\right]$

$(ABC): bcx + acy + abz - abc = 0$

$\Rightarrow OH = \frac{abc}{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2}}$

2. Chứng minh ΔABC có ba góc nhọn và $a^2\tan A = b^2\tan B = c^2\tan C$.

Ta có: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = (-a;b;0)(-a;0;c) = a^2 > 0 \Rightarrow \cos A = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{AB.AC} > 0 \Rightarrow A$ nhọn.

Tương tự B, C nhọn.

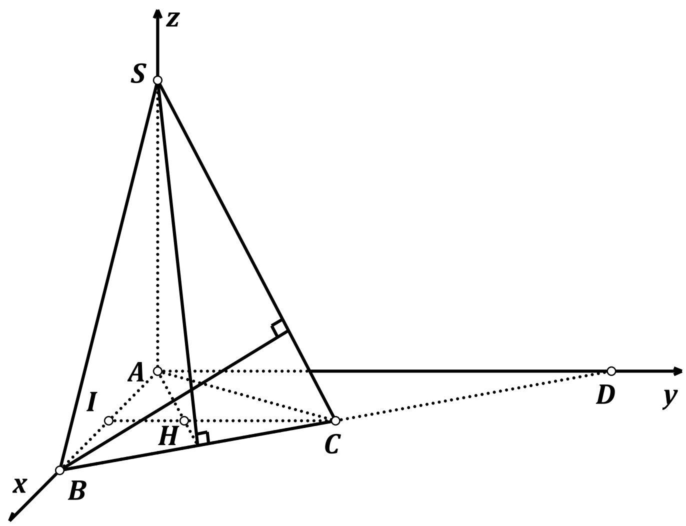
Ta có: $\begin{cases} \sin A = \frac{2S_{\Delta ABC}}{AB.AC} \\ \cos A = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{AB.AC} \end{cases} \Rightarrow \tan A = \frac{2S_{\Delta ABC}}{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}} \Rightarrow a^2\tan A = 2S_{\Delta ABC}$

Tương tự cho $b^2\tan B = c^2\tan C$.

Bài tập 8: Gọi I là trung điểm AB. Trong (ABC) vẽ $Ay \perp AB$

Ta có: $CI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Chọn hệ trục tọa độ Axyz sao cho: $A(0;0;0)$, $B(a;0;0)$, $S(0;0;h) \Rightarrow C\left(\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right)$



1. Tính $d\left[A,(SBC)\right]$ theo a và h.

Gọi $D = BC \cap Ay \Rightarrow D\left(0;a\sqrt{3};0\right) \Rightarrow (SBC) \equiv (SBD)$

$$\Rightarrow (SBC): h\sqrt{3}x + hy + a\sqrt{3}z - ah\sqrt{3} = 0 \Rightarrow d\left[A,(SBC)\right] = \frac{ah\sqrt{3}}{\sqrt{3a^2 + 4h}}$$

2. Chứng tỏ Δ luôn đi qua điểm cố định khi S di động trên d.

Gọi $(\alpha) \equiv (S,\Delta)$, $(\beta) \equiv (B,\Delta)$

Ta có: $(\alpha) \perp BC$, $(\beta) \perp SC$ $(SH \perp BC,\ \Delta \perp BC,\ BH \perp SC,\ \Delta \perp SC)$

$$\overrightarrow{BC} = -\frac{a}{2}\left(1;-\sqrt{3};0\right),\ \overrightarrow{SC} = \frac{1}{2}\left(a;a\sqrt{3};-2h\right) \Rightarrow (\alpha): x - \sqrt{3}y = 0,\ (\beta): a(x-a) + a\sqrt{3}y - 2hz = 0$$

$$\Rightarrow (\Delta): \begin{cases} x - \sqrt{3}y = 0 \\ a(x-a) + a\sqrt{3}y - 2hz = 0 \end{cases}$$

Δ qua điểm cố định khi h thay đổi.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - \sqrt{3}y = 0 \\ z = 0 \\ x - \sqrt{3}y = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{a}{2} \\ y = \dfrac{a}{2\sqrt{3}} \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \Delta \text{ qua } G\left(\frac{a}{2};\frac{a}{2\sqrt{3}};0\right) \text{ cố định}$$

3. Tính h theo a để SS' nhỏ nhất.

Ta có: $S' \in d \Rightarrow S'(0;0;s'), S' \in \Delta \Rightarrow -2hs' - a^2 = 0 \Rightarrow s' = -\dfrac{a^2}{2h}$

$\Rightarrow S'\left(0;0;-\dfrac{a^2}{2h}\right)\Rightarrow SS'=h+\dfrac{a^2}{2h}\le 2\sqrt{h\dfrac{a^2}{2h}}=a\sqrt{2}$

$\Rightarrow SS'_{min}=a\sqrt{2}\Leftrightarrow h=\dfrac{a^2}{2h}\Leftrightarrow h=\dfrac{a}{\sqrt{2}}$

Bài tập 11: Trong mặt phẳng (ABC), vẽ $Ay\perp AB.$

Chọn hệ trục tọa độ $Axyz$ sao cho $A(0;0;0)$, $B(a;0;0)$, $C(a;a;0)$, $S\left(0;0;a\sqrt{2}\right)$

$\Rightarrow D\left(\dfrac{a}{2};\dfrac{a}{2};0\right)$

1. Chứng minh khoảng cách từ A đến (SBC) gấp đôi khoảng cách từ D đến (SBC).

Ta có: $\begin{cases}\overrightarrow{BS}=-a\left(1;0;-\sqrt{2}\right)\\ \overrightarrow{BC}=a(0;1;0)\end{cases}\Rightarrow \vec{n}_{(SBC)}=\left(\sqrt{2};0;1\right)\Rightarrow (SBC):\sqrt{2}x+z-a\sqrt{2}=0$

$d\left[A,(SBC)\right]=\dfrac{\left|-a\sqrt{2}\right|}{3}=\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$, $d\left[D,(SBC)\right]=\dfrac{\left|\dfrac{a\sqrt{2}}{2}-a\sqrt{2}\right|}{\sqrt{3}}=\dfrac{a\sqrt{6}}{6}$

Vậy, khoảng cách từ A đến (SBC) gấp đôi khoảng cách từ D đến (SBC).

2.

Ta có: $\overrightarrow{SC}=a\left(1;1;-\sqrt{2}\right)\Rightarrow \vec{n}_\alpha=\left(1;1;-\sqrt{2}\right)\Rightarrow(\alpha):x+y-\sqrt{2}z=0$

Phương trình tham số của SB: $\begin{cases}x=a+t\\ y=0\\ z=-\sqrt{2}t\end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$ qua B và $\vec{u}=\overrightarrow{BS}.$

$\Rightarrow a+t+2t=0\Rightarrow t=-\dfrac{a}{3}\Rightarrow N\left(\dfrac{2a}{3};0;\dfrac{a\sqrt{2}}{3}\right)\Rightarrow M$ là trung điểm $SC\Rightarrow M\left(\dfrac{a}{2};\dfrac{a}{2};\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)$

- Chứng minh ΔAMN là thiết diện giữa (α) và tứ diện $SABC$.

Ta có $\overrightarrow{NS}.\overrightarrow{NB}=\left(-\dfrac{2a}{3};0;\dfrac{2a\sqrt{2}}{3}\right)\left(\dfrac{a}{3};0;-\dfrac{a\sqrt{2}}{3}\right)=-\dfrac{2a^2}{3}<0\Rightarrow N$ thuộc cạnh SB và M trung điểm cạnh SC

Vậy ΔAMN là thiết diện giữa (α) và tứ diện $SABC$.

- Tính thể tích hình chóp $SAMN$.

$V_{SAMN}=\dfrac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AS},\overrightarrow{AM}\right].\overrightarrow{AN}\right|=\dfrac{1}{6}\left|\left[\left(0;0;a\sqrt{2}\right),\left(\dfrac{a}{2};\dfrac{a}{2};\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)\right]\left(\dfrac{2a}{3};0;\dfrac{a\sqrt{2}}{3}\right)\right|=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{18}$

3. Tính cosin góc φ giữa mặt phẳng (ASC) và (SCB)

Ta có $(AMN) \perp SC \Rightarrow \begin{cases} AM \perp SC \\ MN \perp SC \end{cases} \Rightarrow \varphi = \left(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MN}}\right) \Rightarrow \cos\varphi = \frac{\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MN}}{MA.MN} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

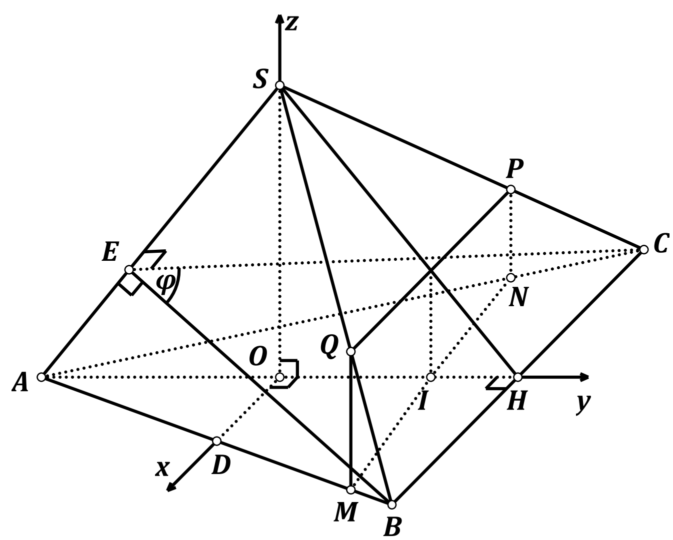
Bài tập 15: Gọi D là trung điểm $AB \Rightarrow OD \perp OH$

$AH = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow BC = \frac{4a}{\sqrt{3}} \Rightarrow OD = \frac{1}{4}BC = \frac{a}{\sqrt{3}}$

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho: $O(0;0;0)$, $D\left(\frac{a}{\sqrt{3}};0;0\right)$, $H(0;a;0)$, $S(0;0;2a)$

$\Rightarrow A(0;-a;0)$, $B\left(\frac{2a}{\sqrt{3}};a;0\right)$, $C\left(-\frac{2a}{\sqrt{3}};a;0\right)$

1. Tính góc cosin φ góc giữa (BSA) và (SAC)



Vẽ $BE \perp SA$ tại $E \Rightarrow CE \perp SA \Rightarrow \varphi = \widehat{BEC}$

$\overrightarrow{SA} = (0;a;2a) = a(0;1;2)$

Phương trình tham số của $SA: \begin{cases} x = 0 \\ y = -a + t \ (t \in \mathbb{R}). \\ z = 2t \end{cases}$

Phương trình mặt phẳng $(BCE): y - a + 2z = 0$

$\Rightarrow -2a + t + 4t = 0 \Rightarrow t = \frac{2a}{5}$

$\Rightarrow E\left(0;-\frac{3a}{5};\frac{4a}{5}\right) \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{EB} = \left(\frac{2a}{\sqrt{3}};\frac{8a}{5};-\frac{4a}{5}\right) \\ \overrightarrow{EC} = \left(-\frac{2a}{\sqrt{3}};\frac{8a}{5};-\frac{4a}{5}\right) \end{cases} \Rightarrow \cos\varphi = \cos\left(\overrightarrow{EB}, \overrightarrow{EC}\right) = \frac{7}{17}$

2.

- Tính diện tích thiết diện $MNPQ$ theo a và x.

Ta có $I(0;m;0)$, $\overrightarrow{OH} = a(0;1;0) \Rightarrow (MNPQ): y - m = 0$

$\overrightarrow{AB} = \frac{2a}{\sqrt{3}}\left(1;\sqrt{3};0\right)$, $\overrightarrow{AC} = -\frac{2a}{\sqrt{3}}\left(1;-\sqrt{3};0\right)$, $\overrightarrow{SB} = \frac{a}{\sqrt{3}}\left(2;\sqrt{3};-2\sqrt{3}\right)$, $\overrightarrow{SC} = -\frac{a}{\sqrt{3}}\left(2;-\sqrt{3};2\sqrt{3}\right)$

Phương trình tham số của $AB:\begin{cases} x = t \\ y = -a + \sqrt{3}t \\ z = 0 \end{cases} \left(t \in \mathbb{R}\right) \Rightarrow M\left(\frac{a+m}{\sqrt{3}}; m; 0\right)$

Phương trình tham số của $AC:\begin{cases} x = t \\ y = -a - \sqrt{3}t \\ z = 0 \end{cases} \left(t \in \mathbb{R}\right) \Rightarrow N\left(\frac{-a-m}{\sqrt{3}}; m; 0\right)$

Phương trình tham số của $SB:\begin{cases} x = 2t \\ y = \sqrt{3}t \\ z = 2a - 2\sqrt{3}t \end{cases} \left(t \in \mathbb{R}\right) \Rightarrow Q\left(\frac{2m}{\sqrt{3}}; m; 2a-2m\right)$

Phương trình tham số của $SC:\begin{cases} x = 2t \\ y = -\sqrt{3}t \\ z = 2a + 2\sqrt{3}t \end{cases} \left(t \in \mathbb{R}\right) \Rightarrow P\left(-\frac{2m}{\sqrt{3}}; m; 2a-2m\right)$

$S_{MNPQ} = \frac{1}{2}\left[\left|\left(\overrightarrow{MQ}, \overrightarrow{MP}\right)\right| + \left|\left(\overrightarrow{MQ}, \overrightarrow{MN}\right)\right|\right] = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(-3m^2 + 2am + a^2\right)$

- Tìm m để diện tích $MNPQ$ là lớn nhất.

Cách 1:

Bảng xét dấu:

m	$-\infty$	$\frac{a}{3}$	$+\infty$
$-3m^2 + 2am + a^2$		$-\frac{4a^2}{3}$	
	$-\infty$ ↗		↘ $-\infty$

$\Rightarrow S_{MNPQ} \le \frac{8a^2}{3\sqrt{3}}$

Vậy $\left(S_{MNPQ}\right)_{max} = \frac{8a^2}{3\sqrt{3}}$ khi $m = \frac{a}{3}$

Cách 2:

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy:

$$S_{MNPQ} = 2\sqrt{3}\left(a-m\right)\left(m + \frac{a}{3}\right) \le 2\sqrt{3}\left[\frac{\left(a-m\right) + \left(m + \frac{a}{3}\right)}{2}\right]^2 = \frac{8a^2}{3\sqrt{3}}$$

$\Rightarrow \left(S_{MNPQ}\right)_{max} = \frac{8a^2}{3\sqrt{3}} \Leftrightarrow a - m = m + \frac{a}{3} \Leftrightarrow m = \frac{a}{3}$

Bài tập 20: Chọn hệ trục tọa độ $Axyz$ sao cho: $A(0;0;0)$, $B(a;0;0)$, $C(a;a;0)$, $S(0;0;a)$

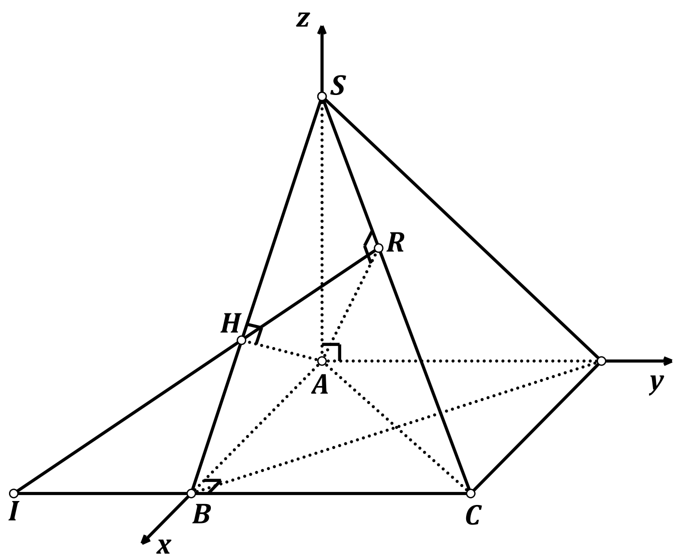
1. Chứng minh rằng $HK \perp SC$.

$\overrightarrow{SB} = (-a;0;a) = -a(1;0;-1)$

$\overrightarrow{SC} = (-a;-a;a) = -a(1;1;-1)$

Phương trình tham số của

$SB:\begin{cases} x = a + t \\ y = 0 \\ z = -t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$



$H \in SB \Rightarrow H(a+t;0;-t)$

$AH \perp SB \Leftrightarrow \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{SB} = 0$

$\Rightarrow t = -\dfrac{a}{2} \Rightarrow H\left(\dfrac{a}{2};0;\dfrac{a}{2}\right)$

Phương trình tham số của

$SC:\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = a - t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$

$\Rightarrow K(t;t;a-t)$ và $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{SC} = 0 \Rightarrow K\left(\dfrac{a}{3};\dfrac{a}{3};\dfrac{2a}{3}\right)$

$\Rightarrow \overrightarrow{HK} = \left(-\dfrac{a}{6};\dfrac{a}{3};\dfrac{a}{6}\right) = -\dfrac{a}{6}(1;-2;-1) \Rightarrow \overrightarrow{HK}.\overrightarrow{SC} = 0$

Chú ý: ΔSAB vuông cân tại $A \Rightarrow H$ là trung điểm của $SB \Rightarrow H\left(\dfrac{a}{2};0;\dfrac{a}{2}\right)$

2. Chứng minh rằng B là trung điểm của CI.

Phương trình tham số của $HK:\begin{cases} x = \dfrac{a}{2} + t \\ y = -2t \\ z = \dfrac{a}{2} - t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$

Ta có: $I = HK \cap (ABC) \Rightarrow \dfrac{a}{2} - t = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{a}{2} \Rightarrow I(a;-a;0) \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_C = 2a = 2x_B \\ y_1 + y_C = 0 = 2y_B \\ z_1 + z_C = 0 = 2z_B \end{cases}$

Vậy B là trung điểm của CI.

3. Tính sin góc φ giữa SB và (AHK).

Ta có: $\begin{cases} SC \perp AK\ (gt) \\ SC \perp HK\ (cmt) \end{cases} \Rightarrow SC \perp (AHK)$

$\Rightarrow \vec{n}_{(AHK)} = (1;1;-1) \Rightarrow \sin\varphi = \left|\cos\left(\widehat{\overrightarrow{SB},\overrightarrow{SC}}\right)\right| = \left|\cos\left(\widehat{\vec{n}_{SB},\vec{n}_{(AHK)}}\right)\right| = \dfrac{2}{\sqrt{6}}$

4 Xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp SABC.

Gọi $J(x_0;y_0;z_0)$ suy ra phương trình mặt cầu (S) có dạng:

$x^2+y^2+z^2-2x_0x-2y_0y-2z_0z+d=0$

$A, B, C, S \in (S) \Rightarrow \begin{cases} d=0 \\ J\left(\dfrac{a}{2};\dfrac{a}{2};\dfrac{a}{2}\right) \end{cases} \Rightarrow R = \sqrt{\dfrac{a^2}{4}+\dfrac{a^2}{4}+\dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Vậy J là trung điểm của SC và $R = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Bài tập 21: Chọn hệ trục tọa độ Oxyz: $O(0;0;0)$, $M(m;0;0)$, $N(0;n;0)$, $S(0;0;a)$, $(m, n>0;\ m+n=a)$

1. Tìm vị trí M, N để thể tích SOMN lớn nhất.

$V_{SOMN} = \dfrac{1}{6}amn \le \dfrac{a}{6}\left(\dfrac{m+n}{2}\right)^2 = \dfrac{a^3}{24}$

$\Rightarrow (V_{SOMN})_{max} = \dfrac{a^3}{24} \Leftrightarrow m = n = \dfrac{a}{2}$

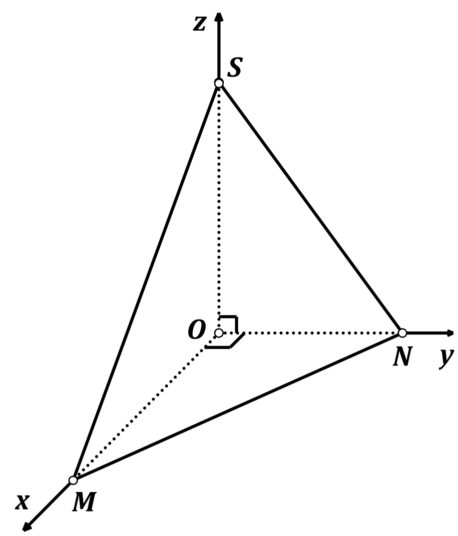
2. Khi thể tích SOMN lớn nhất thì

$M\left(\dfrac{a}{2};0;0\right)$, $N\left(0;\dfrac{a}{2};0\right)$

- $d\left[O,(SMN)\right]$.

$(SMN): 2x+2y+z-a=0$

$\Rightarrow d\left[O,(SMN)\right] = \dfrac{a}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}} = \dfrac{a}{3}$



- Bán kính mặt cầu ngoại tiếp SOMN.

Phương trình mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2\alpha x-2\beta y-2\gamma z=0$

$$M,\ N,\ S\in(S)\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{a^2}{4}-\alpha a=0\\ \dfrac{a^2}{4}-\beta a=0\\ a^2-2\gamma a=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=\dfrac{a}{4}\\ \beta=\dfrac{a}{4}\\ \gamma=\dfrac{a}{2}\end{cases}\Rightarrow R=\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}=\frac{a\sqrt{6}}{4}$$

3. Chứng minh $\widehat{OSM}+\widehat{OSN}+\widehat{MSN}=90^\circ$. Đặt $\alpha=\widehat{OSM},\ \beta=\widehat{OSN},\ \gamma=\widehat{MSN}$

$$\sin\gamma=\frac{2S_{\Delta SMN}}{SM.SN}=\frac{\left|\left[\overrightarrow{SM},\overrightarrow{SN}\right]\right|}{SM.SN}=\frac{\sqrt{m^2a^2+n^2a^2+m^2n^2}}{\sqrt{\left(m^2+a^2\right)\left(n^2+a^2\right)}}$$

$$\sin\alpha=\frac{OM}{SM}=\frac{m}{\sqrt{m^2+a^2}},\ \cos\alpha=\frac{OS}{SM}=\frac{a}{\sqrt{m^2+a^2}}$$

$$\sin\beta=\frac{ON}{SN}=\frac{n}{\sqrt{n^2+a^2}},\ \cos\beta=\frac{OS}{SN}=\frac{a}{\sqrt{n^2+a^2}}$$

$$\Rightarrow\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\frac{a^2-mn}{\sqrt{\left(m^2+a^2\right)\left(n^2+a^2\right)}}$$

Mặt khác: $m^2a^2+n^2a^2+m^2n^2=a^2\left(m^2+n^2\right)+m^2n^2$

$$=a^2\left[(m+n)^2-2mn\right]+m^2n^2=a^4-2a^2mn+m^2n^2=\left(a^2-mn\right)^2$$

$$\Rightarrow\sin\gamma=\cos(\alpha+\beta)=\frac{a^2-mn}{\sqrt{\left(m^2+a^2\right)\left(n^2+a^2\right)}}\Rightarrow\gamma+\alpha+\beta=90^\circ$$