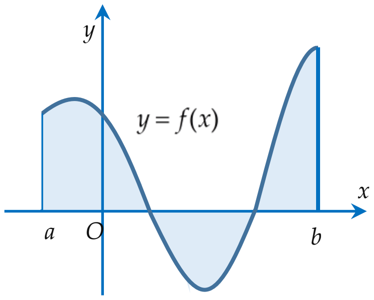
VII. Ứng dụng hình học của tích phân

1. Tính diện tích hình phẳng

a. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi một đường cong và trục hoành



Hình 3.3

Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = f(x)$ liên tục, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$ được tính theo công thức

$$\boxed{S = \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.}$$

Chú ý: Trong trường hợp dấu của $f(x)$ thay đổi trên đoạn $[a;b]$ thì ta phải chia đoạn $[a;b]$ thành một số đoạn con để trên đó dấu của $f(x)$ không đổi, do đó ta có thể bỏ dấu giá trị tuyệt đối trên đoạn đó.

STUDY TIP

Tương tự, diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường $x = g(y)$, $x = h(y)$ với $g(y), h(y)$ liên tục trên $[a;b]$; hai đường thẳng $y = a, y = b$ là:

$$S = \int_a^b |g(y) - h(y)|\,\mathrm{d}y$$

b. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường cong

Cho hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Khi đó diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x), y = g(x)$ và hai đường thẳng $x = a, x = b$ là $\boxed{S = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x.}$

Tương tự như chú ý ở trên thì ở bài toán này ta cũng phải xét đoạn mà dấu của $f(x) - g(x)$ không đổi.

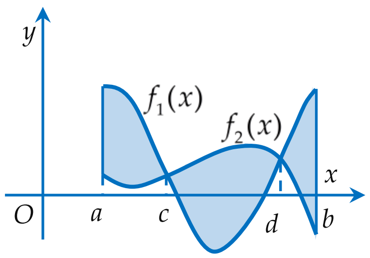
Chú ý:

Khi áp dụng công thức này cần khử dấu giá trị tuyệt đối của hàm số dưới dấu tích phân. Muốn vậy ta phải giải phương trình $f(x) - g(x) = 0$ trên đoạn $[a;b]$.

Giả sử phương trình có hai nghiệm $c; d\ (c < d)$. Khi đó $f(x) - g(x)$ không đổi dấu trên các đoạn $[a;c], [c;d], [d;b]$. Trên mỗi đoạn đó, chẳng hạn trên đoạn $[a;c]$ thì ta có

$$\int_a^c |f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x = \left|\int_a^c [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x\right|$$

Ví dụ 4: Tính diện tích hình phẳng (hình được tô màu) ở biểu diễn ở hình 3.4.



Hình 3.4

Lời giải

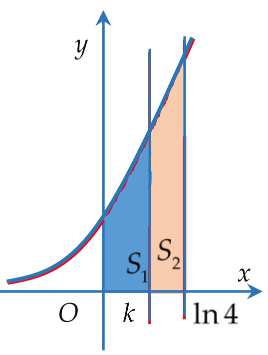
Nhận thấy trên $[a;c]$ và $[d;b]$ thì $f_1(x) \ge f_2(x)$; trên $[c;d]$ thì $f_1(x) \le f_2(x)$

Do vậy

$$S = \int_a^b |f_1(x) - f_2(x)| = \int_a^c (f_1(x) - f_2(x))\,\mathrm{d}x + \int_c^d (f_2(x) - f_1(x))\,\mathrm{d}x + \int_d^b (f_1(x) - f_2(x))\,\mathrm{d}x$$

(Trên đây là cách bỏ dấu giá trị tuyệt đối)

Ví dụ 5: Cho hình thang cong (H) giới hạn bởi các đường $y = e^x$, $y = 0$, $x = 0$ và $x = ln4$. Đường thẳng $x = k (0 < k < \ln 4)$ chia (H) thành hai phần có diện tích là S_1 và S_2 như hình vẽ bên. Tìm k để $S_1 = 2S_2$.



A. $k = \frac{2}{3}\ln 4.$ **B.** $k = \ln 2.$ **C.** $k = \ln\frac{8}{3}.$ **D.** $k = \ln 3.$

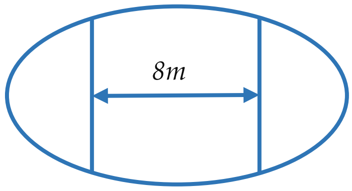
Lời giải

Đáp án D.

Nhìn vào hình vẽ ta có được các công thức sau:

$$\int_0^k e^x \mathrm{d}x = 2.\int_k^{\ln 4} e^x \mathrm{d}x \Leftrightarrow e^x\Big|_0^k = 2.e^x\Big|_k^{\ln 4} \Leftrightarrow e^k - e^0 = 2.e^{\ln 4} - 2.e^k \Leftrightarrow 3e^k = 9$$

$\Leftrightarrow e^k = 3 \Leftrightarrow k = \ln 3$.



Ví dụ 6: Ông An có một mảnh vườn hình elip có độ dài trục lớn bằng 16m và độ dài trục bé bằng 10 m. Ông muốn trồng hoa trên một dải đất rộng 8m và nhận trục bé của elip làm trục đối xứng (như hình vẽ). Biết kinh phí để trồng hoa là 100.000 đồng/1 m^2. Hỏi ông An cần bao nhiêu tiền để trồng hoa trên dải đất đó ? (Số tiền được làm tròn đến hàng nghìn.)

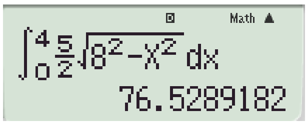
A. 7.862.000 đồng. **B.** 7.653.000 đồng.
C. 7.128.000 đồng. **D.** 7.826.000 đồng.

Lời giải

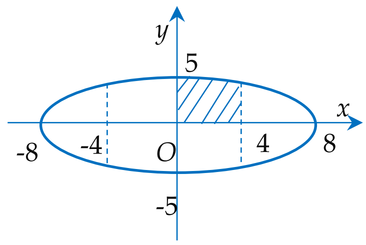
Đáp án B.

Nhận thấy đây là bài toán áp dụng ứng dụng của tích phân vào tính diện tích hình phẳng. Ta có hình vẽ bên:

Ta thấy, diện tích hình phẳng cần tìm gấp 4 lần diện tích phần gạch chéo, do đó ta chỉ cần đi tìm diện tích phần gạch chéo.



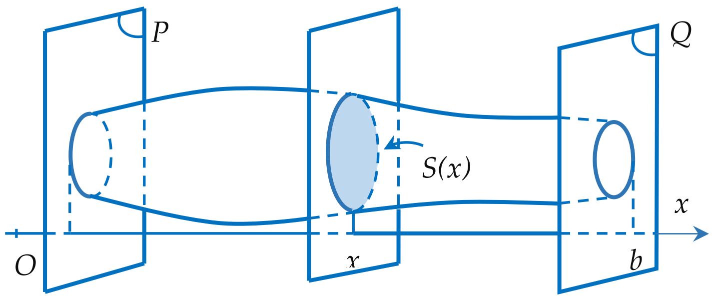
Ta có phương trình đường elip đã cho là $\frac{x^2}{8^2} + \frac{y^2}{5^2} = 1$. Xét trên $[0;4]$ nên $y > 0$ thì $y = \frac{5}{8}\sqrt{8^2 - x^2}$. Khi đó $S_{cheo} = \int_0^4 \frac{5}{8}\sqrt{8^2 - x^2}\mathrm{d}x$, vậy diện tích trồng hoa của ông An trên mảnh đất là $S = 4.\int_0^4 \frac{5}{8}\sqrt{8^2 - x^2}\mathrm{d}x \approx 76,5289182$



Khi đó số kinh phí phải trả của ông An là $76,5289182.100000 \approx 7.653.000$ đồng.

c. Tính thể tích vật thể

Cho H là một vật thể nằm giới hạn giữa hai mặt phẳng $x = a$ và $x = b$. Gọi $S(x)$ là diện tích thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục hoành tại điểm có hoành độ x $(a \le x \le b)$. Giả sử $S(x)$ là một hàm liên tục. Khi đó thể tích V của H là $\boxed{V = \int_a^b S(x)\mathrm{d}x.}$ (hình 3.5)



Hình 3.5

Ví dụ 7: Tính thể tích vật thể tạo được khi lấy giao vuông góc hai ống nước hình trụ có cùng bán kính đáy bằng a. (hình 3.6)

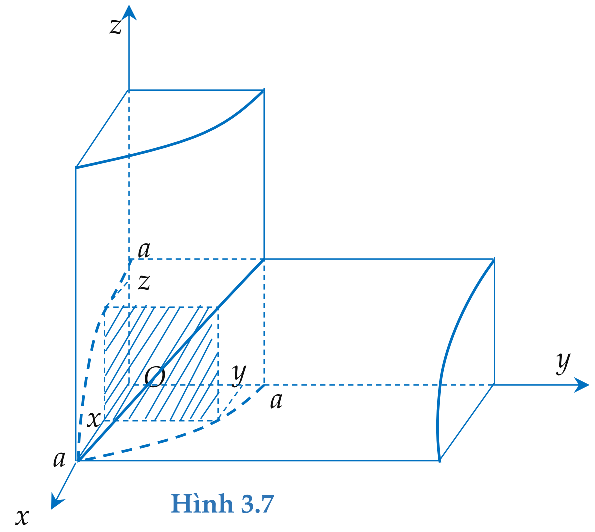
A. $V = \dfrac{16a^3}{3}$. **B.** $V = \dfrac{2a^3}{3}$. **C.** $V = \dfrac{4a^3}{3}$. **D.** $V = a^3$.

Hình 3.6

Đáp án A.

Lời giải

Ta sẽ gắn hệ trục tọa độ $Oxyz$ vào vật thể này, tức là ta sẽ đi tính thể tích vật thể V giới hạn bởi hai mặt trụ: $x^2 + y^2 = a^2$ và $x^2 + z^2 = a^2$ $(a > 0)$.



Hình 3.7

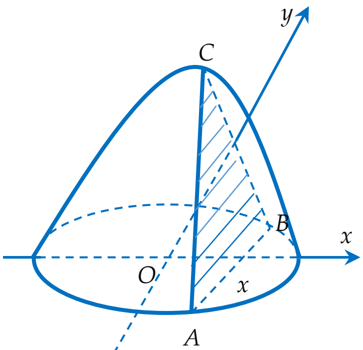
Hình vẽ trên mô tả một phần tám thứ nhất của vật thể này, với mỗi $x \in [0;a]$, thiết diện của vật thể (vuông góc với trục Ox) tại x là một hình vuông có cạnh $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ (chính là phần gạch chéo trong hình 3.7). Do đó diện tích thiết diện sẽ là:

$$S(x) = \sqrt{a^2 - x^2}.\sqrt{a^2 - x^2} = a^2 - x^2 \quad x \in [0;a].$$

Khi đó áp dụng công thức $(*)$ thì thể tích vật thể cần tìm sẽ bằng:

$$V = 8\int_0^a S(x)\mathrm{d}x = 8\int_0^a (a^2 - x^2)\mathrm{d}x = 8\left(a^2x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^a = \frac{16a^3}{3}.$$

Ví dụ 8: Tính thể tích của vật thể H biết rằng đáy của H là hình tròn $x^2 + y^2 \le 1$ và thiết diện cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục hoành luôn là tam giác đều.



Hình 3.8

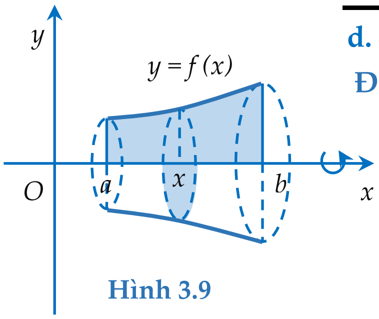
Lời giải

Giả sử mặt phẳng vuông góc với trục hoành tại điểm có hoành độ là $x(-1 \le x \le 1)$ cắt vật thể (H) theo thiết diện là tam giác ABC đều, với AB chứa trong mặt phẳng xOy (hình 3.8).

Ta có $AB = 2\sqrt{1 - x^2}$. Do đó $S(x) = \dfrac{AB^2\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}(1 - x^2)$.

Vậy

$$V = \int_{-1}^{1} S(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \sqrt{3}(1 - x^2)\mathrm{d}x = \sqrt{3}\left(x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{4\sqrt{3}}{3} \text{ (đvtt).}$$

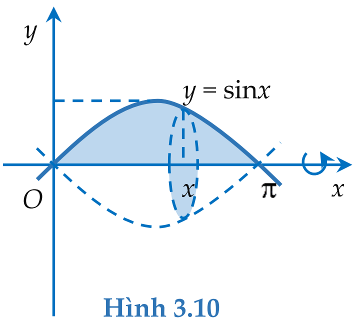


Hình 3.9

d. Tính thể tích khối tròn xoay

Định lý

Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục, không âm trên đoạn $\left[a,b\right]$. Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a,x=b$ quay quanh trục hoành tạo nên một khối tròn xoay. Thể tích V của khối tròn xoay đó là $\boxed{V=\pi\int\limits_a^b f^2\left(x\right)\mathrm{d}x.}$



Hình 3.10

Ví dụ 9: Thể tích của khối tròn xoay thu được khi quay hình phẳng được giới hạn bởi đường cong $y=\sin x$, trục hoành và hai đường thẳng $x=0,x=\pi$ (hình 3.10) quanh trục Ox là

A. $\frac{\pi}{2}$ (đvtt). B. $\frac{\pi^2}{2}$ (đvtt). C. π (đvtt). D. π^2 (đvtt).

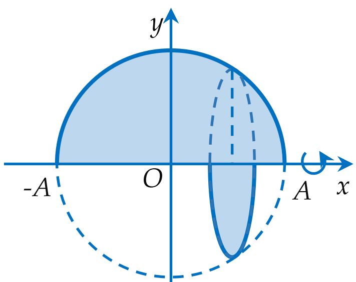
Lời giải

Đáp án B.

Áp dụng công thức ở định lý trên ta có

$$V=\pi\int\limits_0^\pi \sin^2 x\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int\limits_0^\pi\left(1-\cos 2x\right)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\left(x-\frac{1}{2}\sin 2x\right)\Bigg|_0^\pi=\frac{\pi^2}{2}.$$

Tiếp theo dưới đây là một bài toán thường xuất hiện trong các đề thi thử, bài toán có thể đưa về dạng quen thuộc và tính toán rất nhanh



Hình 3.11

Ví dụ 10: Tính thể tích khối tròn xoay thu được khi quay hình phẳng được giới hạn bởi đường cong $y=\sqrt{A^2-x^2}$ và trục hoành quanh trục hoành.

Lời giải tổng quát

Ta thấy $y=\sqrt{A^2-x^2}\Leftrightarrow y^2=A^2-x^2\Leftrightarrow x^2+y^2=A^2$

Do $\sqrt{A^2-x^2}\ge 0$ với mọi x, do vậy đây là phương trình nửa đường tròn tâm O, bán kính $R=A$ nằm phía trên trục Ox. Khi quay quanh trục Ox thì hình phẳng sẽ tạo nên một khối cầu tâm O, bán kính $R=A$ (hình 3.11). Do vậy ta có luôn

$$\boxed{V=\frac{4}{3}.\pi.A^3}$$

Vậy với bài toán dạng này, ta không cần viết công thức tích phân mà kết luận luôn theo công thức tính thể tích khối cầu.

Đọc thêm

Định lý

Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục, không âm trên đoạn $\left[a,b\right]\left(a\ge 0\right)$. Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a,x=b$ quay quanh trục tung tạo nên một khối tròn xoay. Thể tích V của khối tròn xoay đó là $\boxed{V=2\pi\int\limits_a^b xf\left(x\right)\mathrm{d}x.}$