

VIII (ĐỌC THÊM). ỨNG DỤNG SỐ PHỨC GIẢI CÁC PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

Xét các phương trình lượng giác cơ bản:

$$\cos u = \cos v \Leftrightarrow u = \pm v + k2\pi \quad \sin u = \sin v \Leftrightarrow \begin{cases} u = v + k2\pi \\ u = \pi - v + k2\pi \end{cases}$$

$$\tan u = \tan v \Leftrightarrow u = v + k\pi \quad \cot u = \cot v \Leftrightarrow u = v + k\pi$$

Trong đó: $k \in \mathbb{Z}$.

Nhận thấy, các phương trình trên đều là bậc nhất theo k . Do vậy nếu gán $k = i$ trong phương thức **CMPLX**: **MODE** **2** ta sẽ có được họ nghiệm tương ứng.

Dạng 1: Phương trình dạng $\cos(ax + b) = m$ với $|m| \leq 1$ và $a \neq 0$.

Phân tích:

$$\cos(ax + b) = m \Leftrightarrow ax + b = \pm \cos^{-1}(m) + k2\pi \Leftrightarrow \frac{ax + b \mp (\cos^{-1}(m) + k2\pi)}{a} = 0.$$

Quy trình bấm máy:

* **Bước 1:** Đưa máy về phương thức **CMPLX**: **MODE** **2** và chế độ **SHIFT** **MODE** **4**.

* **Bước 2:** Nhập vào màn hình $(aX + b - (\cos^{-1}(m) + Y \times 2\pi)) \div a$.

* **Bước 3:** Ấn **CALC**, nhập $X = 0$ và $Y = i$. Ấn **=** máy hiện kết quả là số phức dạng $\alpha + \beta i$. Ta kết luận họ nghiệm thứ nhất của phương trình là $x = -\alpha - k\beta, (k \in \mathbb{Z})$ (đổi dấu kết quả của máy và thay chữ i bởi chữ k).

* **Bước 4:** Sửa màn hình thành $(aX + b - (-\cos^{-1}(m) + Y \times 2\pi)) \div a$.

* **Bước 5:** Ấn **CALC**, nhập $X = 0$ và $Y = i$. Ấn **=** máy hiện kết quả là số phức dạng $\gamma + \delta i$. Ta kết luận họ nghiệm thứ hai của phương trình là $x = -\gamma - k\delta, (k \in \mathbb{Z})$.

CHÚ Ý

Ta cũng có thể thực hiện tương tự nếu đơn vị góc của bài toán là độ. Tuy nhiên, trước khi nhập vào máy cần đưa về chế độ **SHIFT** **MODE** **3** (Deg).

Chú ý: $\pi(\text{rad}) = 180^\circ$.

Ví dụ: Giải phương trình lượng giác $\cos\left(\pi x + \frac{3\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

* **Bước 1:** Đưa máy về phương thức **CMPLX**: **MODE** **2** và chế độ **SHIFT** **MODE** **4**.

* **Bước 2:** Nhập vào màn hình $\left(\pi X + \frac{3\pi}{5} - \left(\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + Y \times 2\pi\right)\right) \div \pi$

(**SHIFT** **x10⁻¹** **ALPHA** **)** **+** **3** **SHIFT** **x10⁻¹** **=** **5** **▶** **=** **(** **SHIFT** **COS** **√** **2** **▶** **=** **2** **▶** **=** **2** **▶** **)** **+** **ALPHA** **S=D** **x** **2** **SHIFT** **x10⁻¹** **)** **)** **÷** **SHIFT** **x10⁻¹**.

* **Bước 3:** Ấn **CALC**, máy hỏi X ? Nhập **0** ($X = 0$). Ấn **=** máy hỏi Y ? Nhập **ENG** ($Y = i$). Ấn **=** máy hiện kết quả bằng $\frac{7}{20} - 2i$.

Vậy một họ nghiệm là $-\frac{7}{20} + 2k, (k \in \mathbb{Z})$.

* **Bước 4:** Sửa màn hình thành $\left(\pi X + \frac{3\pi}{5} - \left(-\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + Y \times 2\pi\right)\right) \div \pi$.

* **Bước 5:** Ấn **CALC**, máy hỏi X ? Nhập **0** ($X = 0$). Ấn **=** máy hỏi Y ? Nhập **ENG** ($Y = i$). Ấn **=** máy hiện kết quả bằng $\frac{17}{20} - 2i$.

Vậy họ nghiệm khác là $\frac{-17}{20} + 2k, (k \in \mathbb{Z})$.

$$\text{Vậy } \cos\left(\pi x + \frac{3\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{7}{20} + 2k \\ x = \frac{-17}{20} + 2k \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

Dạng 2: Phương trình dạng $\sin(ax + b) = m$ với $|m| \leq 1$ và $a \neq 0$.

Phân tích:

$$\sin(ax + b) = m \Leftrightarrow \begin{cases} ax + b = \sin^{-1}(m) + k2\pi \\ ax + b = \pi - \sin^{-1}(m) + k2\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{ax + b - (\sin^{-1}(m) + k2\pi)}{a} = 0 \\ \frac{ax + b - (\pi - \sin^{-1}(m) + k2\pi)}{a} = 0 \end{cases}$$

Quy trình bấm máy:

* **Bước 1:** Đưa máy về phương thức **CMPLX**: **MODE** **2** và chế độ **SHIFT** **MODE** **4**.

* **Bước 2:** Nhập vào màn hình $(aX + b - (\sin^{-1}(m) + Y \times 2\pi)) \div a$.

* **Bước 3:** Ấn **CALC**, nhập $X = 0$ và $Y = i$. Ấn **=** máy hiện kết quả là số phức dạng $\alpha + \beta i$. Ta kết luận họ nghiệm thứ nhất của phương trình là $x = -\alpha - k\beta, (k \in \mathbb{Z})$.

* **Bước 4:** Sửa màn hình thành $(aX + b - (\pi - \sin^{-1}(m) + Y \times 2\pi)) \div a$.

* **Bước 5:** Ấn **CALC**, nhập $X = 0$ và $Y = i$. Ấn **=** máy hiện kết quả là số phức dạng $\gamma + \delta i$. Ta kết luận họ nghiệm thứ hai của phương trình là $x = -\gamma - k\delta, (k \in \mathbb{Z})$.

Ví dụ: Giải phương trình lượng giác $\sin\left(2x + \frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Lời giải

* **Bước 1:** Đưa máy về phương thức **CMPLX**: **MODE** **2** và chế độ **SHIFT** **MODE** **4**.

* **Bước 2:** Nhập vào màn hình $\left(2X + \frac{7\pi}{12} - \left(\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + Y \times 2\pi\right)\right) \div 2$, ấn

(**2** **ALPHA** **)** **+** **7** **SHIFT** **x10⁻¹** **=** **1** **2** **▶** **-** **(** **SHIFT** **sin** **√** **3** **▶** **=** **2** **▶** **)** **+** **ALPHA** **S=D** **x** **2** **SHIFT** **x10⁻¹** **)** **)** **÷** **2**.

* **Bước 3:** Ấn **CALC**, máy hỏi X? Nhập **0** ($X = 0$). Ấn **=** máy hỏi Y? Nhập **ENG** ($Y = i$). Ấn **=** máy hiện kết quả bằng $\frac{\pi}{8} - \pi i$.

Vậy một họ nghiệm là $-\frac{\pi}{8} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

* **Bước 4:** Sửa màn hình thành $\left(2X + \frac{7\pi}{12} - \left(\pi - \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + Y \times 2\pi\right)\right) \div 2$.

* **Bước 5:** Ấn **CALC**, máy hỏi X? Nhập **0** ($X = 0$). Ấn **=** máy hỏi Y? Nhập **ENG** ($Y = i$). Ấn **=** máy hiện kết quả bằng $-\frac{\pi}{24} - \pi i$.

Vậy họ nghiệm khác là $\frac{\pi}{24} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

$$\text{Vậy } \sin\left(2x + \frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{8} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{24} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

Dạng 3: Phương trình dạng $\tan(ax + b) = m$ với $a \neq 0$.

Phân tích:

$$\tan(ax + b) = m \Rightarrow ax + b = \tan^{-1}(m) + k\pi \Leftrightarrow \frac{ax + b - (\tan^{-1}(m) + k\pi)}{a} = 0$$

Quy trình bấm máy:

* **Bước 1:** Đưa máy về phương thức **CMPLX**: **MODE** **2** và chế độ **SHIFT** **MODE** **4**.

* **Bước 2:** Nhập vào màn hình $(aX + b - (\tan^{-1}(m) + Y \times \pi)) \div a$.

* **Bước 3:** Ấn **CALC**, nhập $X = 0$ và $Y = i$. Ấn **=** máy hiện kết quả là số phức dạng $\alpha + \beta i$. Ta kết luận họ nghiệm của phương trình là $x = -\alpha - k\beta, (k \in \mathbb{Z})$.

Ví dụ: Giải phương trình lượng giác $\tan\left(5x + \frac{\pi}{10}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Lời giải

* **Bước 1:** Đưa máy về phương thức **CMPLX**: **MODE** **2** và chế độ **SHIFT** **MODE** **4**.

* **Bước 2:** Nhập vào màn hình $\left(5X + \frac{\pi}{10} - \left(\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + Y \times \pi\right)\right) \div 5$

(< 5 ALPHA) + SHIFT x10⁻¹ = 1 0 > - (< SHIFT tan √ 3 > = 3 > = 3 >)
+ ALPHA S-D X SHIFT x10⁻¹)) ÷ 5 .

* **Bước 3:** Ấn **CALC**, máy hỏi X? Nhập **0** ($X = 0$). Ấn **=** máy hỏi Y? Nhập **ENG**

($Y = i$). Ấn **=** máy hiện kết quả bằng $-\frac{\pi}{75} - \frac{\pi}{5}i$.

Vậy một họ nghiệm là $\frac{\pi}{75} + k\frac{\pi}{5}, (k \in \mathbb{Z})$.

Như vậy $\tan\left(5x + \frac{\pi}{10}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{75} + k\frac{\pi}{5}, (k \in \mathbb{Z})$.

Dạng 4: Phương trình dạng $\cot(ax + b) = m$ với $m \neq 0$ và $a \neq 0$

Phân tích:

$$\cot(ax + b) = m \Leftrightarrow \tan(ax + b) = \frac{1}{m} \Rightarrow ax + b = \tan^{-1}\left(\frac{1}{m}\right) + k\pi$$

$$\Leftrightarrow \frac{ax + b - \left(\tan^{-1}\left(\frac{1}{m}\right) + k\pi\right)}{a} = 0$$

Quy trình bấm máy:

* **Bước 1:** Đưa máy về phương thức **CMPLX**: **MODE** **2** và chế độ **SHIFT** **MODE** **4**.

* **Bước 2:** Nhập vào màn hình $\left(aX + b - \left(\tan^{-1}\left(\frac{1}{m}\right) + Y \times \pi\right)\right) \div a$.

* **Bước 3:** Ấn **CALC**, nhập $X=0$ và $Y=i$. Ấn **=** máy hiện kết quả là số phức dạng $\alpha + \beta i$. Ta kết luận họ nghiệm của phương trình là $x = -\alpha - k\beta, (k \in \mathbb{Z})$.

Ví dụ: Giải phương trình lượng giác $\cot\left(2x + \frac{\pi}{7}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Lời giải

* **Bước 1:** Đưa máy về phương thức **CMPLX**: **MODE** **2** và chế độ **SHIFT** **MODE** **4**.

* **Bước 2:** Nhập vào màn hình $\left(2X + \frac{\pi}{7} - \left(\tan^{-1}(\sqrt{3}) + Y \times \pi\right)\right) \div 2$, ấn **(** **2** **ALPHA**

) **+** **SHIFT** **x10^x** **=** **7** **▶** **=** **(** **SHIFT** **tan** **√** **3** **▶** **)** **+** **ALPHA** **S↔D** **×** **SHIFT** **x10^x** **)** **÷** **2**.

* **Bước 3:** Ấn **CALC**, máy hỏi X? Nhập **0** ($X=0$). Ấn **=** máy hỏi Y? Nhập **ENG** ($Y=i$). Ấn **=** máy hiện kết quả bằng $-\frac{2\pi}{21} - \frac{\pi}{2}i$.

Vậy một họ nghiệm là $\frac{2\pi}{21} + k\frac{\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z})$.

Như vậy $\cot\left(2x + \frac{\pi}{7}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{21} + k\frac{\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z})$.

Dạng 5: Phương trình dạng $\cos(ax + b) = \cos(cx + d)$ với $a \neq \pm c$.

Phân tích:

$$\begin{aligned} \cos(ax + b) &= \cos(cx + d) \Leftrightarrow \begin{cases} ax + b = cx + d + k2\pi \\ ax + b = -(cx + d) + k2\pi \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{ax + b - (cx + d + k2\pi)}{a - c} = 0 \\ \frac{ax + b - (-cx - d + k2\pi)}{a + c} = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Quy trình bấm máy:

* **Bước 1:** Đưa máy về phương thức **CMPLX**: **MODE** **2** và chế độ **SHIFT** **MODE** **4**.

* **Bước 2:** Nhập vào màn hình $(aX + b - (cX + d + Y \times 2\pi)) \div (a - c)$.

* **Bước 3:** Ấn **CALC**, nhập $X=0$ và $Y=i$. Ấn **=** máy hiện kết quả là số phức dạng $\alpha + \beta i$. Ta kết luận họ nghiệm thứ nhất của phương trình là $x = -\alpha - k\beta, (k \in \mathbb{Z})$.

* **Bước 4:** Sửa màn hình thành $(aX + b - (-cX - d + Y \times 2\pi)) \div (a + c)$.

* **Bước 5:** Ấn **CALC**, nhập $X=0$ và $Y=i$. Ấn **=** máy hiện kết quả là số phức dạng $\gamma + \delta i$. Ta kết luận họ nghiệm thứ hai của phương trình là $x = -\gamma - k\delta, (k \in \mathbb{Z})$.

Ví dụ: Giải phương trình lượng giác $\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(5x + \frac{2\pi}{5}\right)$

Lời giải

* **Bước 1:** Đưa máy về phương thức **CMPLX**: **MODE** **2** và chế độ **SHIFT** **MODE** **4**.

* **Bước 2:** Nhập vào màn hình $\left(2X + \frac{\pi}{3} - \left(5X + \frac{2\pi}{5} + Y \times 2\pi\right)\right) \div (-3)$,

() 2 ALPHA) + SHIFT $\times 10^x$ = 3 > - () 5 ALPHA) + 2 SHIFT $\times 10^x$ = 5 >
 + ALPHA S-D \times 2 SHIFT $\times 10^x$)) \div () 3) .

$$\left(2X + \frac{\pi}{3} - \left(5X + \frac{2\pi}{5} + Y \times 2\pi \right) \right) \div \frac{1}{45}\pi + \frac{2}{3}\pi i$$

* Bước 3: Ấn **CALC** , máy hỏi X? Nhập **0** (X = 0). Ấn **=** máy hỏi Y? Nhập **ENG**

(Y = i). Ấn **=** máy hiện kết quả bằng $\frac{\pi}{45} + \frac{2\pi}{3}i$.

Vậy một họ nghiệm là $-\frac{\pi}{45} - k\frac{2\pi}{3}, (k \in \mathbb{Z})$ hay $-\frac{\pi}{45} + k\frac{2\pi}{3}, (k \in \mathbb{Z})$.

* Bước 4: Sửa màn hình thành $\left(2X + \frac{\pi}{3} - \left(-5X - \frac{2\pi}{5} + Y \times 2\pi \right) \right) \div 7$.

$$\left(2X + \frac{\pi}{3} - \left(-5X - \frac{2\pi}{5} + Y \times 2\pi \right) \right) \div \frac{11}{105}\pi - \frac{2}{7}\pi i$$

* Bước 5: Ấn **CALC** , máy hỏi X? Nhập **0** (X = 0). Ấn **=** máy hỏi Y? Nhập **ENG**

(Y = i). Ấn **=** máy hiện kết quả bằng $\frac{11\pi}{105} - \frac{2\pi}{7}i$.

Vậy họ nghiệm khác là $-\frac{11\pi}{105} + k\frac{2\pi}{7}, (k \in \mathbb{Z})$.

$$\text{Vậy } \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(5x + \frac{2\pi}{5}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{45} + k\frac{2\pi}{3} \\ x = -\frac{11\pi}{105} + k\frac{2\pi}{7} \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

Dạng 6: Phương trình dạng $\sin(ax + b) = \sin(cx + d)$ với $a \neq \pm c$.

Phân tích:

$$\begin{aligned} \sin(ax + b) &= \sin(cx + d) \Leftrightarrow \begin{cases} ax + b = cx + d + k2\pi \\ ax + b = \pi - (cx + d) + k2\pi \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{ax + b - (cx + d + k2\pi)}{a - c} = 0 \\ \frac{ax + b - (\pi - cx - d + k2\pi)}{a + c} = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Quy trình bấm máy:

* **Bước 1:** Đưa máy về phương thức **CMPLX**: **MODE** **2** và chế độ **SHIFT** **MODE** **4**.

* **Bước 2:** Nhập vào màn hình $(aX + b - (cX + d + Y \times 2\pi)) \div (a - c)$.

* **Bước 3:** Ấn **CALC** , nhập X = 0 và Y = i. Ấn **=** máy hiện kết quả là số phức dạng $\alpha + \beta i$. Ta kết luận họ nghiệm thứ nhất của phương trình là $x = -\alpha - k\beta, (k \in \mathbb{Z})$.

* **Bước 4:** Sửa màn hình thành $(aX + b - (\pi - cX - d + Y \times 2\pi)) \div (a + c)$.

* **Bước 5:** Ấn **CALC** , nhập X = 0 và Y = i. Ấn **=** máy hiện kết quả là số phức dạng $\gamma + \delta i$. Ta kết luận họ nghiệm thứ hai của phương trình là $x = -\gamma - k\delta, (k \in \mathbb{Z})$.

CHÚ Ý

Nếu phương trình có dạng $\sin u = \cos v$, thì ta biến đổi về $\cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \cos v$ (dạng 5) hoặc biến đổi về $\sin u = \sin\left(\frac{\pi}{2} - v\right)$ (dạng 6).

Ví dụ: Giải phương trình lượng giác $\sin\left(3x - \frac{\pi}{5}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{10}\right)$

Lời giải

* Bước 1: Đưa máy về phương thức **CMPLX**: **MODE** **2** và chế độ **SHIFT** **MODE** **4**.

* Bước 2: Nhập vào màn hình $\left(3X - \frac{\pi}{5} - \left(X + \frac{\pi}{10} + Y \times 2\pi \right) \right) \div 2$,

(3 ALPHA) = SHIFT $\times 10^x$ 5 = (ALPHA) + SHIFT $\times 10^x$ 1 0 = + ALPHA S/D \times 2 SHIFT $\times 10^x$)) \div 2 .

* Bước 3: Ấn **CALC**, máy hỏi X? Nhập **0** ($X=0$). Ấn **=** máy hỏi Y? Nhập **ENG** ($Y=i$). Ấn **=** máy hiện kết quả bằng $-\frac{3\pi}{20} - \pi i$.

Vậy một họ nghiệm là $\frac{3\pi}{20} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

* Bước 4: Sửa màn hình thành $\left(3X - \frac{\pi}{5} - \left(\pi - X - \frac{\pi}{10} + Y \times 2\pi\right)\right) \div 4$.

* Bước 5: Ấn **CALC**, máy hỏi X? Nhập **0** ($X=0$). Ấn **=** máy hỏi Y? Nhập **ENG** ($Y=i$). Ấn **=** máy hiện kết quả bằng $-\frac{11\pi}{40} - \frac{\pi}{2}i$.

Vậy họ nghiệm khác là $\frac{11\pi}{40} + k\frac{\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z})$.

$$\text{Vậy } \sin\left(3x - \frac{\pi}{5}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{10}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3\pi}{20} + k\pi \\ x = \frac{11\pi}{40} + k\frac{\pi}{2} \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

Dạng 7: Phương trình dạng $\tan(ax+b) = \tan(cx+d)$ với $a \neq c$

Phân tích:

$$\tan(ax+b) = \tan(cx+d) \Rightarrow ax+b = cx+d+k\pi \Leftrightarrow \frac{ax+b-(cx+d+k\pi)}{a-c} = 0$$

Quy trình bấm máy:

* **Bước 1:** Đưa máy về phương thức **CMPLX**: **MODE** **2** và chế độ **SHIFT** **MODE** **4**.

* **Bước 2:** Nhập vào màn hình $(aX+b-(cX+d+Y \times \pi)) \div (a-c)$.

* **Bước 3:** Ấn **CALC**, nhập $X=0$ và $Y=i$. Ấn **=** máy hiện kết quả là số phức dạng $\alpha + \beta i$. Ta kết luận họ nghiệm thứ nhất của phương trình là $x = -\alpha - k\beta, (k \in \mathbb{Z})$.

Ví dụ: Giải phương trình lượng giác $\tan\left(7x - \frac{\pi}{5}\right) = \tan\left(-x + \frac{\pi}{10}\right)$

Lời giải

* Bước 1: Đưa máy về phương thức **CMPLX**: **MODE** **2** và chế độ **SHIFT** **MODE** **4**.

* Bước 2: Nhập vào màn hình $\left(7X - \frac{\pi}{5} - \left(-X + \frac{\pi}{10} + Y \times \pi\right)\right) \div 8$, ấn (**7** ALPHA)

= SHIFT $\times 10^x$ 5 = ((ALPHA) + SHIFT $\times 10^x$ 1 0 = + ALPHA S/D \times SHIFT $\times 10^x$)) \div 8 .

* Bước 3: Ấn **CALC**, máy hỏi X? Nhập **0** ($X=0$). Ấn **=** máy hỏi Y? Nhập **ENG** ($Y=i$). Ấn **=** máy hiện kết quả bằng $-\frac{3\pi}{80} - \frac{\pi}{8}i$.

Vậy một họ nghiệm là $\frac{3\pi}{80} + k\frac{\pi}{8}, (k \in \mathbb{Z})$.

$$\text{Vậy } \tan\left(7x - \frac{\pi}{5}\right) = \tan\left(-x + \frac{\pi}{10}\right) \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{80} + k\frac{\pi}{8}, (k \in \mathbb{Z}).$$