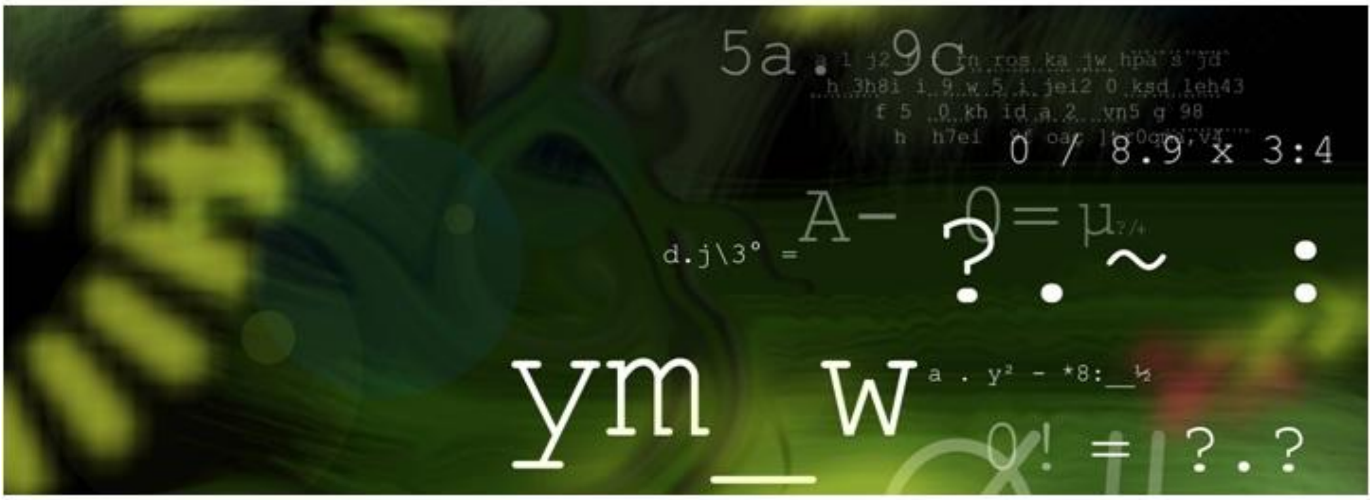

**ĐOÀN TRÍ DŨNG**

# Kỹ thuật tham số hóa Module số phức

***Giải toán max min module***

# GIỚI THIỆU VỀ KỸ THUẬT
# “THAM SỐ HÓA MODULE”

Hiện nay trong kỳ thi THPT Quốc Gia, dạng toán max min của module số phức là một dạng toán rất hay được sử dụng khi ra đề các câu hỏi Vận dụng cao. Trong khuôn khổ bài viết này, tác giả xin được giới thiệu với bạn đọc một kỹ thuật **“tham số hóa module”** số phức nhằm giải quyết một lớp bài toán của dạng toán này.

Dạng toán đề cập đến ở đây thông thường bao gồm 2 yếu tố:

- Cho trước một điều kiện module của số phức $z$.
- Tìm giá trị lớn nhất/nhỏ nhất của $|z|$.

Phương pháp giải bằng Kỹ thuật **“tham số hóa module”**:

- **Bước 1:** Tham số hóa, đặt $|z|=m\in\mathbb{R}\ (m\geq 0)$ trong đó $z=x+yi\ (x,y\in\mathbb{R})$.
- **Bước 2:** Đưa điều kiện của bài toán về phương trình ẩn $x$ tham số $m$ (hoặc ẩn $y$ tham số $m$).
- **Bước 3:** Tìm điều kiện của $m$ để phương trình có nghiệm $x\in\left[-\sqrt{m},\sqrt{m}\right]$ hoặc $y\in\left[-\sqrt{m},\sqrt{m}\right]$.
- **Bước 4:** Từ điều kiện tìm được, kết luận về giá trị lớn nhất/nhỏ nhất của $|z|$.

Để nắm rõ về kỹ thuật này hơn, bạn đọc hãy tham khảo các bài toán ví dụ dưới đây. Trong quá trình biên soạn tài liệu không tránh được sai sót, mong quý bạn đọc có đôi điều thắc mắc xin chân thành góp ý tới tác giả **Đoàn Trí Dũng**. Trân trọng!

# BÀI TẬP VÍ DỤ VỀ KỸ THUẬT
# “THAM SỐ HÓA MODULE”

**Câu 1:** Cho số phức z thỏa mãn $\left|z+\frac{1}{z}\right|=3$. Tính $P=\max|z|+\min|z|$.

**A.** $P=3$. **B.** $P=\sqrt{13}$. **C.** $P=3\sqrt{13}$. **D.** $P=3+\sqrt{13}$.

**Lời giải:** Đặt $|z|=m$ khi đó: $\left|z+\frac{1}{z}\right|=3\Leftrightarrow\left|z^2+1\right|=3m\Leftrightarrow 9m^2=\left(z^2+1\right)\left(\bar{z}^2+1\right)=m^4+z^2+\bar{z}^2+1$

$\Leftrightarrow 4x^2=-m^4+11m^2-1\geq 0\Leftrightarrow\frac{11-3\sqrt{13}}{2}\leq m^2\leq\frac{11+3\sqrt{13}}{2}\Rightarrow\boxed{P=\max|z|+\min|z|=\sqrt{13}}$

**Câu 2:** Cho số phức z thỏa mãn $\left|z^3+\frac{1}{z}\right|=4$. Biết rằng $\max|z|+\min|z|=\sqrt{\sqrt{a}-b}$ với $a,b\in\mathbb{Z}^+$. Tính $a+b=?$

**A.** $a+b=36$. **B.** $a+b=20$. **C.** $a+b=34$. **D.** $a+b=18$.

**Lời giải:** Đặt $\left|z^2\right|=m$ khi đó: $\left|z^3+\frac{1}{z}\right|=4\Leftrightarrow\left|z^4+1\right|=4\sqrt{m}\Leftrightarrow 16m=\left(z^4+1\right)\left(\bar{z}^4+1\right)=m^4+z^4+\bar{z}^4+1$

$\Leftrightarrow 16m=m^4+\left(z^2+\bar{z}^2\right)^2-2m^2+1\Leftrightarrow 4\left(\text{Re}\left(z^2\right)\right)^2=-m^4+2m^2+16m-1\geq 0\Leftrightarrow\left(m^2+3\right)^2\leq 8(m+1)^2$

$\Leftrightarrow m^2-2\sqrt{2}m+3-2\sqrt{2}\leq 0\Leftrightarrow\boxed{\frac{\sqrt{4\sqrt{2}-2}}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\leq|z|=m\leq\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{4\sqrt{2}-2}}{2}}$.

**Câu 3:** Cho số phức z thỏa mãn $\left|2\left(z+i|z|\right)+1\right|=|z|$. Giá trị nhỏ nhất của $|z|$ có thể là?

**A.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\frac{\sqrt{5}}{5}$. **C.** 1. **D.** $\frac{1}{2}$.

**Lời giải:** Ta có: $|z|=m$ do đó: $|2z+2mi+1|=m \Leftrightarrow (2z+2mi+1)(2\bar{z}-2mi+1)=m^2$

$\Leftrightarrow 7m^2+1=-4x-8my \Rightarrow 7m^2+1=(4x+8my)^2 \le \sqrt{(16+64m^2)m^2}$ (Chú ý: $x^2+y^2=m^2$).

Do đó giải bất phương trình ta thu được: $|z|=m \ge \frac{\sqrt{5}}{5}$.

**Câu 4:** Cho số phức $z$ thỏa mãn điều kiện $4|z-2i|+7|z+i|=20$. Tích của giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$ bằng bao nhiêu?

**A.** $\frac{\sqrt{942}}{27}$ **B.** $\frac{\sqrt{57}}{3}$ **C.** $\frac{\sqrt{5966}}{27}$ **D.** $\frac{\sqrt{5966}}{81}$

**Lời giải:** Ta đặt $|z|=m$ khi đó: $4|z-2i|+7|z+i|=20 \Leftrightarrow f(y)=4\sqrt{m^2+4-4y}+7\sqrt{m^2+1+2y}=20$.

Ta sẽ tìm tham số thực $m$ sao cho phương trình có nghiệm $y \in \left[-\sqrt{m};\sqrt{m}\right]$.

Vì $f'(y)=\frac{-8}{\sqrt{m^2+4-4y}}+\frac{7}{\sqrt{m^2+1+2y}}=0 \Leftrightarrow \boxed{y=\frac{44-5m^2}{108}=y_0}$.

Mặt khác lập BBT ta có: $\max f(y)=f(y_0)=\frac{9\sqrt{6}}{2}\sqrt{m^2+2}$, $\min f(y)=f\left(\frac{-m^2-1}{2}\right)=4\sqrt{3}\sqrt{m^2+2}$.

Do vậy điều kiện để phương trình có nghiệm là:

- $20 \le \frac{9\sqrt{6}}{2}\sqrt{m^2+2} \Leftrightarrow \boxed{m \ge \frac{\sqrt{942}}{27}}$ (thỏa mãn điều kiện $y \in \left[-\sqrt{m};\sqrt{m}\right]$).
- $20 \ge 4\sqrt{3}\sqrt{m^2+2} \Leftrightarrow \boxed{m \le \frac{\sqrt{57}}{3}}$ (thỏa mãn điều kiện $y \in \left[-\sqrt{m};\sqrt{m}\right]$).

**Kết luận:** $\max|z|=\frac{\sqrt{942}}{27}, \min|z|=\frac{\sqrt{57}}{3} \Rightarrow \boxed{\max|z|\min|z|=\frac{\sqrt{5966}}{27}}$. **Chọn C.**

**Câu 5:** Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z^2+1|=2|z+1|$. Tìm giá trị lớn nhất của $|z|$?

**A.** $\max|z|=\sqrt{6}$ **B.** $\max|z|=\sqrt{5}$ **C.** $\max|z|=2\sqrt{2}$ **D.** $\max|z|=\sqrt{7}$

**Lời giải:** Ta đặt $|z|=k$, khi đó: $|z^2+1|^2=4|z+1|^2 \Leftrightarrow (z^2+1)(\bar{z}^2+1)=4(z+1)(\bar{z}+1)$

$\Leftrightarrow k^4+(z+\bar{z})^2-2k^2+1=4k^2+8x+4 \Leftrightarrow 4x^2-8x+k^4-6k^2-3=0$ với $z=x+yi$.

Để tồn tại nghiệm thực $x$ thì $\Delta'=16-4(k^4-6k^2-3)\ge 0 \Leftrightarrow |z|=k\le\sqrt{7}$.

**Câu 6:** Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z^4+z^2+1|=|z^3+1|$. Tìm giá trị lớn nhất của $|z|$?

**A.** $\max|z|=1$ **B.** $\max|z|=\frac{2\sqrt{6}}{3}$ **C.** $\max|z|=\frac{2\sqrt{2}}{3}$ **D.** $\max|z|=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

**Lời giải:** Ta có $|z^4+z^2+1|=|z^3+1| \Leftrightarrow |z^2+z+1||z^2-z+1|=|z+1||z^2-z+1|$.

**Trường hợp 1:** $z^2-z+1=0\Rightarrow \boxed{|z|=1}$.

**Trường hợp 2:** $\left|z^2+z+1\right|=|z+1|$. Ta đặt $|z|=k$, khi đó: $\left|z^2+z+1\right|^2=|z+1|^2$

$\Leftrightarrow \left(z^2+z+1\right)\left(\bar{z}^2+\bar{z}+1\right)=(z+1)\left(\bar{z}+1\right)\Leftrightarrow k^4+k^2+1+\left(k^2+1\right)\left(z+\bar{z}\right)+\left(z^2+\bar{z}^2\right)=k^2+z+\bar{z}+1$

$\Leftrightarrow k^4+k^2\left(z+\bar{z}\right)+\left(z+\bar{z}\right)^2-2k^2=0\Leftrightarrow 4x^2+2k^2x+k^4-2k^2=0$ với $z=x+yi$.

Để tồn tại nghiệm thực $x$ thì $\Delta'=k^4-4\left(k^4-2k^2\right)\geq 0\Leftrightarrow 8k^2\geq 3k^4\Leftrightarrow \boxed{|z|=k\leq \dfrac{2\sqrt{6}}{3}}$.