VIII. Một số dạng tích phân thường gặp

Tích phân hàm phân thức hữu tỉ

Trong bài toán này, ta sẽ tham khảo lại phần "Nguyên hàm phân thức hữu tỉ" phía trên để hiểu được các định nghĩa phân thức hữu tỉ, phân thức hữu tỉ thực sự và phân thức đơn giản, cùng các định lý đã được nêu ở phần nguyên hàm ở phần trước.

Dưới đây là một số bài toán thường gặp về dạng này.

A. MỘT SỐ CÔNG THỨC VÀ KĨ NĂNG BIẾN ĐỔI

1. $\int \frac{du}{u^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right|+C$

2. $\int \frac{du}{a^2-u^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+u}{a-u}\right|+C.$

Kỹ năng biến đổi tam thức bậc hai

1. $ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$

2. $ax^2+bx+c=\pm(mx+n)^2\pm p^2$

B. CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1: Tích phân dạng $I_1=\int_\alpha^\beta \frac{dx}{ax^2+bx+c}$.

STUDY TIP
Khi mẫu thức có dạng tam thức bậc hai thì thường đưa về dạng $ax^2+bx+c=(mx+n)^2-p^2$.

Phương pháp chung

Biến đổi $\boxed{I_1=\int_\alpha^\beta \frac{dx}{(mx+n)^2-p^2}=\left[\frac{1}{2mp}\ln\left|\frac{mx+n-p}{mx+n+p}\right|\right]\Bigg|_\alpha^\beta}$

Ví dụ 1: Cho $I=\int_0^1 \frac{dx}{4x^2+8x+1}=\frac{\ln\left(\frac{a+b\sqrt3}{13}\right)}{c\sqrt3}$, với $a;b;c\in\mathbb{R};c\neq 0$. Đặt $S=a+b+c$, lúc này S có giá trị bằng

A. $S=20+37\sqrt3$. B. $S=37+24\sqrt3$. C. $S=57$. D. $S=61$.

Đáp án D.

Lời giải

Áp dụng bài toán tổng quát trên ta có

$$I=\int_0^1\frac{dx}{(2x+2)^2-3}=\left[\frac{1}{4\sqrt3}\ln\left|\frac{2x+2-\sqrt3}{2x+2+\sqrt3}\right|\right]\Bigg|_0^1$$

$$=\frac{1}{4\sqrt3}\left(\ln\left|\frac{2.1+2-\sqrt3}{2.1+2+\sqrt3}\right|-\ln\left|\frac{2.0+2-\sqrt3}{2.0+2+\sqrt3}\right|\right)=\frac{\ln\left(\frac{37+20\sqrt3}{13}\right)}{4\sqrt3}.$$

$\Rightarrow S=a+b+c=37+20+4=61.$

STUDY TIP

$I_1=\int_a^b\frac{dx}{(mx+n)^2-p^2}=\left[\frac{1}{2mp}\ln\left|\frac{mx+n-p}{mx+n+p}\right|\right]\Bigg|_a^b$

Ví dụ 2: Cho $I=\int_{-1}^0\frac{dx}{7-10x-4x^2}=\frac{1}{a\sqrt{53}}.\ln\frac{b-\sqrt{53}}{b+\sqrt{53}}$ với $a;b\in\mathbb{R};a\neq0$. Tích ab có giá trị bằng

A. -24. B. 24. C. -48. D. 48.

Đáp án A.

Lời giải

Áp dụng bài toán tổng quát ta có

$$I=\int_{-1}^{0}\frac{dx}{\left(\frac{\sqrt{53}}{2}\right)^2-\left(2x+\frac{5}{2}\right)^2}=-\int_{-1}^{0}\frac{dx}{\left(2x+\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{53}}{2}\right)^2}$$

$$=\left[-\frac{1}{2\sqrt{53}}.\ln\left|\frac{4x+5-\sqrt{53}}{4x+5+\sqrt{53}}\right|\right]\Bigg|_{-1}^{0}=-\frac{1}{2\sqrt{53}}.\left[\ln\left|\frac{4.0+5-\sqrt{53}}{4.0+5+\sqrt{53}}\right|-\ln\left|\frac{4.(-1)+5-\sqrt{53}}{4.(-1)+5+\sqrt{53}}\right|\right]$$

$$=-\frac{1}{2\sqrt{53}}.\ln\frac{12-\sqrt{53}}{12+\sqrt{53}}.$$

$\Rightarrow a=-2;b=12\Rightarrow ab=-24.$

Dạng 2: Tính tích phân $I_2=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{mx+n}{ax^2+bx+c}dx.$

Phương pháp chung

Cách 1:

$$I_2=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{\frac{m}{2a}(2ax+b)+\left(n-\frac{mb}{2a}\right)}{ax^2+bx+c}dx=\frac{m}{2a}\int_{\alpha}^{\beta}\frac{(2ax+b)dx}{ax^2+bx+c}+\left(n-\frac{mb}{2a}\right)\int_{\alpha}^{\beta}\frac{dx}{ax^2+bx+c}$$

$$=\frac{m}{2a}\int_{\alpha}^{\beta}\frac{d\left(ax^2+bx+c\right)}{ax^2+bx+c}+\left(n-\frac{mb}{2a}\right)I_1\ \boxed{=\left(\frac{m}{2a}\ln\left|ax^2+bx+c\right|\right)\Bigg|_{\alpha}^{\beta}+\left(n-\frac{mb}{2a}\right)I_1}$$

Cách 2: Phương pháp hệ số bất định (sử dụng khi mẫu có nghiệm)

* Nếu mẫu số có nghiệm kép $x=x_0$ tức là $ax^2+bx+c=a(x-x_0)^2$ ta giả sử

$$\frac{mx+n}{ax^2+bx+c}=\frac{A}{x-x_0}+\frac{B}{(x-x_0)^2}$$

Quy đồng vế phải và đồng nhất hệ số hai vế để tìm $A;B.$

Sau khi tìm được $A;B$ thì ta có $\boxed{I_2=\left[A.\ln|x-x_0|-\frac{B}{x-x_0}\right]\Bigg|_{\alpha}^{\beta}}.$

* Nếu mẫu số có 2 nghiệm phân biệt $x_1;x_2:ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$ thì ta giả sử:

$$\frac{mx+n}{ax^2+bx+c}=\frac{A}{x-x_1}+\frac{B}{x-x_2}$$

Quy đồng và đồng nhất hệ số để tìm $A;B.$

Sau khi tìm được $A;B$ ta có $\boxed{I_2=\left[A\ln|x-x_1|+B\ln|x-x_2|\right]\Big|_{\alpha}^{\beta}}.$

Ví dụ 1: Cho $I=\int_{-2}^{0}\frac{2x-9}{x^2-3x+2}dx=a\ln 3+b\ln 2$ với $a;b\in\mathbb{Z}$ thì $a+2b$ có giá trị bằng

A. $-35.$ **B.** $-2.$ **C.** $2.$ **D.** $3.$

Đáp án D

Lời giải

Cách 1: Ta có $I=\int_{-2}^{0}\frac{(2x-3)-6}{x^2-3x+2}dx=\int_{-2}^{0}\frac{2x-3}{x^2-3x+2}dx-\int_{-2}^{0}\frac{6dx}{x^2-3x+2}$

$$=\int_{-2}^{0}\frac{d\left(x^2-3x+2\right)}{x^2-3x+2}-6\int_{-2}^{0}\frac{dx}{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\left[\ln\left|x^2-3x+2\right|-6\ln\left|\frac{x-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}}{x-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}}\right|\right]\Bigg|_{-2}^{0}$$

$$=\left[\ln\left|(x-1)(x-2)\right|-6\ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right|\right]\Bigg|_{-2}^{0}=\left(7\ln|x-1|-5\ln|x-2|\right)\Big|_{-2}^{0}$$

$$=7\ln 1-5\ln 2-(7\ln 3-5\ln 4)=-7\ln 3+10\ln 2-5\ln 2=-7\ln 3+5\ln 2.$$

$\Rightarrow a+2b=3.$

Cách 2: Ta thấy $x^2-3x+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=2\end{array}\right.$.

Giả sử $\frac{2x-9}{x^2-3x+2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}\Leftrightarrow\frac{2x-9}{x^2-3x+2}=\frac{(A+B)x-(2A+B)}{x^2-3x+2}$

Đồng nhất hệ số ta có $\begin{cases}A+B=2\\2A+B=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=7\\B=-5\end{cases}$

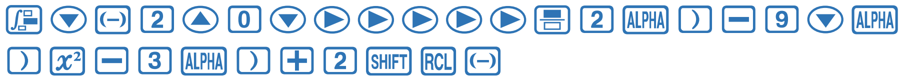
Áp dụng công thức ta có $I=\left[7\ln|x-1|-5\ln|x-2|\right]\Big|_{-2}^{0}=-7\ln 3+5\ln 2.$

Cách 3: Sử dụng máy tính cầm tay.

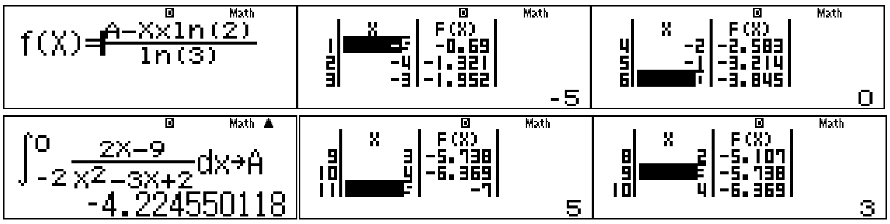
Trong bài toán này ta có thể sử dụng chức năng TABLE để giải quyết, tuy nhiên cách làm này chỉ mang tính chất "mò" (tức dự đoán khảng của a; b).

Ta thấy $I=a.\ln 3+b.\ln 2\Rightarrow a=\frac{I-b.\ln 2}{\ln 3}$.

1. Lúc này ta nhập biểu thức tích phân vào máy tính và gán giá trị này cho biến A.



2. Tiếp tục sử dụng MODE 7 TABLE để chạy biến giá trị của b từ đó tìm ra bảng giá trị tương ứng của a.



Ta thấy chỉ có trường hợp $X=5;F(X)=-7$ là thỏa mãn 2 số nguyên, do đó ta kết luận $a=-7;b=5\Rightarrow a+2b=3.$

Giải thích cách sử dụng MTCT

Ta thấy khi nhập vào màn hình $f(X)=\frac{A-X.\ln 2}{\ln 3}$ thì ta đã coi b (biến X) chạy trong khoảng từ $[-5;5]$ và step là 1. Ở đây ta chọn STEP 1 vì đề cho a; b nguyên. Lúc này màn hình sẽ hiện bảng giá trị của b (chính là X) và giá trị tương ứng của a (chính là cột $f(X)$). Do a; b nguyên nên ta sẽ chọn $(a;b)=(-7;5)$.

Đọc thêm: Tích phân hàm phân thức chứa căn ở mẫu thức

Dạng 1: Tính tích phân $I_3 = \int_\alpha^\beta \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$.

Chú ý

Phương pháp này chỉ áp dụng được khi hệ số $a > 0$.

Phương pháp chung

Ta có $\left(\ln\left|u+\sqrt{u^2+k}\right|\right)' = \dfrac{1+\dfrac{u}{\sqrt{u^2+k}}}{u+\sqrt{u^2+k}} = \dfrac{1}{\sqrt{u^2+k}}$

$$\Rightarrow \boxed{\int \frac{du}{\sqrt{u^2+k}} = \ln\left|u+\sqrt{u^2+k}\right| + C}$$

Áp dung bài toán vừa chứng minh ở trên ta áp dụng vào bài toán biến đổi sau:

$$I_3 = \int_\alpha^\beta \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \int_\alpha^\beta \frac{dx}{\sqrt{(mx+n)^2+k}} = \left[\frac{1}{m}.\ln\left|(mx+n)+\sqrt{(mx+n)^2+k}\right|\right]\Bigg|_\alpha^\beta$$

Dạng 2: Tính tích phân $I_4 = \int_\alpha^\beta \frac{(mx+n)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$.

Phương pháp chung

Ta có $I_4 = \displaystyle\int_\alpha^\beta \frac{(mx+n)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{m}{2a}\int_\alpha^\beta \frac{(2ax+b)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} - \frac{mb-2na}{2a}\int_\alpha^\beta \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$

$$= \frac{m}{2a}\int_\alpha^\beta \frac{d(ax^2+bx+c)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} - \frac{mb-2na}{2a}.I_3$$

Dạng 3: Tính tích phân $I_5 = \int_\alpha^\beta \frac{dx}{(px+q)\sqrt{ax^2+bx+c}}$.

Phương pháp chung

Đặt $px+q = \dfrac{1}{t} \Rightarrow pdx = -\dfrac{dt}{t^2}; x = \dfrac{1}{p}\left(\dfrac{1}{t}-q\right)$. Khi đó

$$I_5 = \int_\alpha^\beta \frac{dx}{(px+q)\sqrt{ax^2+bx+c}} = \int_{\frac{1}{p\alpha+q}}^{\frac{1}{p\beta+q}} \frac{-dt}{pt^2.\frac{1}{t}\sqrt{\frac{a}{p^2}\left(\frac{1}{t}-q\right)^2+\frac{b}{p}\left(\frac{1}{t}-q\right)+c}}$$

$$= \pm\int_{\frac{1}{p\alpha+q}}^{\frac{1}{p\beta+q}} \frac{dt}{\sqrt{At^2+Bt+\gamma}}$$ (quay trở về bài toán dạng 1).