

### Nền tảng kiến thức:

- Nếu  $f(z)$  là một hàm đa thức thì:  $|f(z)|^2 = f(z)f(\bar{z})$ .
- Nếu  $z = x + yi$  thì  $0 \leq x^2, y^2 \leq |z|$  hay  $-\sqrt{|z|} \leq x, y \leq \sqrt{|z|}$ .
- Hằng thức quen thuộc:  $z\bar{z} = |z|^2$ .

**Mục tiêu dạng toán:** Biến đổi các biểu thức module số phức về hàm một biến.

**Ví dụ 1:** Cho  $|z| = 1$ . Tìm giá trị lớn nhất của  $T = |z+1| + 2|z-1|$ .

**Đề thi thử THPT Quốc Gia 2017 – Chuyên Ngữ Hà Nội**

Ta có:  $|z+1|^2 = (z+1)(\bar{z}+1) = |z|^2 + z + \bar{z} + 1 = 2 + 2x$  (Trong đó  $z = x + yi$ )  $\Rightarrow |z+1| = \sqrt{2+2x}$ .

Lại có:  $|z-1|^2 = (z-1)(\bar{z}-1) = |z|^2 - (z + \bar{z}) + 1 = 2 - 2x \Rightarrow |z-1| = \sqrt{2-2x}$ .

Vậy  $T = |z+1| + 2|z-1| = \sqrt{2+2x} + 2\sqrt{2-2x}$  trong đó  $-1 \leq x \leq 1$ .

Sử dụng các công cụ quen thuộc ta có  $\text{Max} = 2\sqrt{5}$ .

**Ví dụ 2:** Cho các số phức  $z_1, z_2$  thỏa mãn điều kiện  $|z_1| = |z_2| = 1$ . Tích của giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P = |z_1 + z_2| + |z_1 - z_2|$  là bao nhiêu?

**Đề luyện tập số 10 THPT Quốc Gia 2017 – Lớp toán Offline thầy Đoàn Trí Dũng**

Ta có:  $z_1 = a + b, z_2 = c + di$ . Ta có:

$$\begin{cases} |z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) = |z_1|^2 + |z_2|^2 + z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1 = 2 + 2(ac + bd) \Rightarrow |z_1 + z_2| = \sqrt{2 + 2(ac + bd)} \\ |z_1 - z_2|^2 = (z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2) = |z_1|^2 + |z_2|^2 - (z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1) = 2 - 2(ac + bd) \Rightarrow |z_1 - z_2| = \sqrt{2 - 2(ac + bd)} \end{cases}$$

Vậy:  $P = |z_1 + z_2| + |z_1 - z_2| = \sqrt{2 + 2(ac + bd)} + \sqrt{2 - 2(ac + bd)} = \sqrt{2 + 2t} + \sqrt{2 - 2t}$  với  $-1 \leq t \leq 1$ .

Sử dụng các công cụ quen thuộc ta có  $\text{Max} = 2\sqrt{2}$  và  $\text{Min} = 2$ .

### Bài tập áp dụng:

1. Cho số phức  $z$  thỏa mãn  $|z| = 1$ . Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của  $|1+z| + 3|1-z|$ .
2. Cho số phức  $z$  thỏa mãn  $|z| = 1$ . Giá trị lớn nhất của  $|1+z| + |1-z+z^2|$ .
3. Cho số phức  $z$  thỏa mãn  $|z| = 1$ . Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của  $|z^3 - z + 2|$ .
4. Cho các số phức  $z_1, z_2$  thỏa mãn điều kiện  $|z_1| = |z_2| = 1$ . Tích của giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P = |z_1^2 + z_2| + |z_1 + z_2^2|$ .