Bài giảng số 1

THỂ TÍCH KHỐI ĐA DIỆN

Các bài toán thuộc chủ đề này có trong các đề thi tuyển sinh Đại học, Cao đẳng ở câu số 4. Hai nội dung chính được hỏi đến là:

- Tính thể tích của một khối đa diện (hình chóp hoặc hình lăng trụ) cho trước nào đó.

- Sử dụng phương pháp thể tích để tìm khoảng cách giữa một điểm đến một mặt phẳng hoặc khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau.

Các nội dung sau đây tuy chưa được đề cập đến trong các đề thi Tuyển sinh Đại học, Cao đẳng từ năm 2002 đến năm 2009, nhưng rất cơ bản và đều nằm trong hạn chế kiến thức về môn Toán áp dụng cho các kì thi tuyển sinh do Bộ Giáo dục và Đào tạo quy định.

- Các bài toán về thể tích khối đa diện có kết hợp với việc tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất.

- Các bài toán về so sánh thể tích.

Bài giảng này sẽ đề cập đến các nội dung đó.

§ 1. TÍNH THỂ TÍCH CỦA MỘT KHỐI ĐA DIỆN

1. Các kiến thức cơ bản cần biết

(Xem sách giáo khoa Hình học 12).

2. Các dạng toán thường gặp về tính thể tích

Ta thường gặp hai loại toán chính sau đây:

Loại 1: Tính thể tích bằng các sử dụng trực tiếp các công thức toán.

Phương pháp giải các bài toán thuộc loại này được tiến hành như sau:

- Xác định chiều cao của khối đa diện cần tính thể tích.

Trong nhiều trường hợp chiều cao này được xác định ngay từ đầu bài, nhưng cũng có trường hợp việc xác định này phải dựa vào các định lí về quan hệ vuông góc đã học ở lớp 11 (hay dùng nhất là các định lí về ba đường vuông góc, các định lí về điều kiện để một đường thẳng vuông góc với một mặt phẳng...). Việc tính các chiều cao thông thường nhờ vào việc sử dụng định lí Pitago, hoặc nhờ đến phép tính lượng giác.

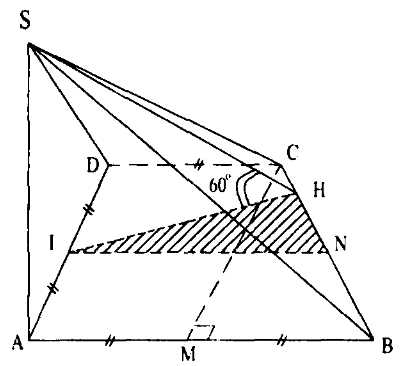
- Tìm diện tích đáy bằng các công thức quen biết.

Nhìn chung các bài toán thuộc loại này rất cơ bản, chỉ đòi hỏi việc tính toán cẩn thận và chính xác.

Thí dụ 1: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối A – 2009)

Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang vuông tại A và D; AB = AD = 2a; CD = a, góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABCD) bằng 60°. Gọi I là trung điểm của cạnh AD. Biết mặt phẳng (SBI) và (SCI) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABCD).

Tính thể tích khối chóp S.ABCD.



Giải

Vì (SBI) và (SCI) cùng vuông góc với đáy (ABCD), nên giao tuyến $SI \perp (ABCD)$.

Kẻ $IH \perp BC \Rightarrow SH \perp BC$ (định lí ba đường vuông góc).

Ta có: $\widehat{SHI} = 60^0$ là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABCD). Trong tam giác vuông SIH, ta có $SI = IH\ \tan 60^0 = IH.\sqrt{3}$.

Gọi M, N tương ứng là trung điểm của AB, BC. Vì IN là đường trung bình của hình thang ABCD, nên ta có:

$$IN = \frac{AB + CD}{2} = \frac{2a + a}{2} = \frac{3a}{2}.$$

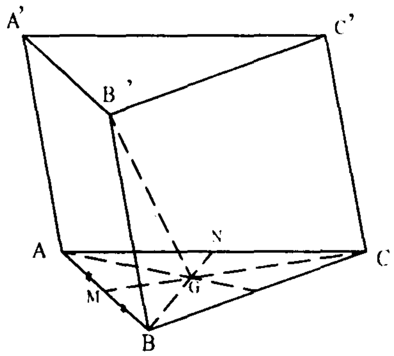
Ta có: $IH = IN\cos\widehat{HIN} = IN\cos\widehat{MCB}$ (do $\widehat{HIN}$ và $\widehat{MCB}$ là các góc có cạnh tương ứng vuông góc)

$$= \frac{3a}{2}\frac{MC}{BC} = \frac{3a}{2}\frac{2a}{\sqrt{4a^2 + a^2}} = \frac{3a\sqrt{5}}{5}.$$

Vậy $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD}.SI = \frac{1}{3}\frac{(2a + a)2a}{2}.SH.\sqrt{3} = \frac{3a^3\sqrt{15}}{5}$ (đvtt).

Thí dụ 2: (Đề tuyển sinh Đại học khối B – 2009)

Cho hình lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có cạnh bên BB' = a và BB' tạo với mặt phẳng ABC góc 60^0. Giả sử ABC là tam giác vuông tại C và $\widehat{BAC} = 60^0$. Hình chiếu vuông góc B' lên (ABC) trùng với trọng tâm tam giác ABC. Tính thể tích tứ diện A'ABC



Giải

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC ta có $B'G \perp (ABC)$. Từ đó $\widehat{B'BG} = 60^0$ là góc mà BB' tạo với mặt phẳng (ABC). Trong tam giác vuông BB'G ta có ngay:

$$BG = \frac{a}{2};\ B'G = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Đặt AB = 2x, trong tam giác vuông ABC ta có:

$AC = x;\ BC = x\sqrt{3}$ (do $\widehat{ABC} = 60^o$)

Giả sử $BG \cap AC$ thì $BN = \frac{3}{2}BG = \frac{3a}{4}$.

Áp dụng định lí Pitago trong tam giác vuông BNC ta có:

$$BN^2 = NC^2 + BC^2 \Rightarrow \frac{9a^2}{16} = \frac{x^2}{4} + 3x^2 \Rightarrow x^2 = \frac{9a^2}{52}. \quad (1)$$

Ta có: $V_{A'.ABC} = \frac{1}{3}S_{ABC}.B'G = \frac{1}{3}\frac{1}{2}AB.BC.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{12}x.x\sqrt{3} = \frac{ax^2}{4}$. (2)

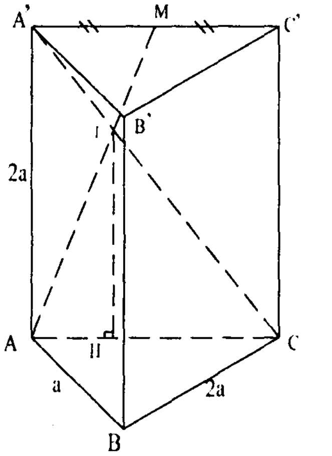
Thay (1) vào (2), ta có: $V_{A'.ABC} = \frac{9a^3}{208}$ (đvtt).

Thí dụ 3: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối D – 2009)

Cho hình lăng trụ đứng A'B'C'ABC có đáy là tam giác vuông ABC tại B. Giả sử AB = a, AA' = 2a; AC' = 3a. Gọi M là trung điểm của A'C' và I là giao điểm của AM và A'C.

Tính thể tích tứ diện IABC.

<u>Giải</u>



Trong tam giác vuông A'AC ta có:

$$AC = \sqrt{9a^2 - 4a^2} = a\sqrt{5}.$$

Từ đó trong tam giác vuông ABC, thì:

$$BC = \sqrt{5a^2 - a^2} = 2a.$$

Do (AA'C'C) $\perp$ (ABC) nên trong (AA'C'C) kẻ IH $\perp$ AC $(H \in AC) \Rightarrow IH \perp (ABC)$.

Theo định lí Talet ta có: $\frac{IH}{AA'} = \frac{CI}{CA'}$.

$$\text{Vì } \frac{CI}{IA'} = \frac{AC}{A'M} = 2 \Rightarrow \frac{CI}{IA' + CI} = \frac{2}{3}$$

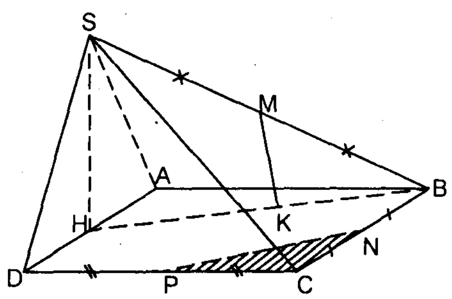
$$\Rightarrow \frac{IH}{AA'} = \frac{CI}{CA'} = \frac{2}{3} \Rightarrow IH = \frac{2}{3}AA' = \frac{4a}{3}.$$

Ta có: $V_{IABC} = \frac{1}{3}S_{ABC}.IH = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}AB.BC.IH = \frac{1}{6}a.2a.\frac{4a}{3} = \frac{4a^3}{9}$ (đvtt).

Thí dụ 4: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối A - 2007)

Cho hình chóp S.ABCD đáy là hình vuông ABCD cạnh a, mặt bên SAD là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy ABCD. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của SB, SC, SD. Tính thể tích tứ diện CMNP.

<u>Giải</u>



Gọi H là trung điểm của AD, thì SH $\perp$ AD. Do (SAD) $\perp$ (ABCD) nên suy ra: SH $\perp$ (ABCD) và $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ (vì ABC là tam giác đều cạnh a).

Kẻ MK//SM $(K \in HB) \Rightarrow K \perp (ABCD)$ và

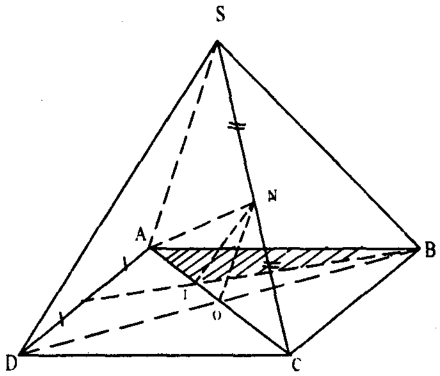
$$MK = \frac{SH}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

Vậy: $V_{MCNP} = \frac{1}{3}S_{CNP}.MK = \frac{1}{3}\frac{a^2}{8}.\frac{a\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{96}$ (đvtt).

Thí dụ 5: Đề thi tuyển sinh Đại học khối B – 2006)

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật với AB = a, AD = $a\sqrt{2}$, SA = a và SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Giả sử I là giao điểm của BM và AC. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và SC. Tìm thể tích tứ diện ANIB.

<u>Giải</u>



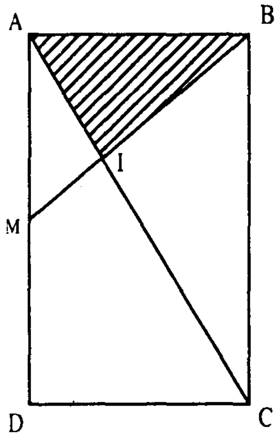
Gọi O là tâm của đáy ABCD. Trong tam giác SAC, ta có NO là đường trung bình nên NO//SA, tức NO $\perp$ (ABCD) và $NO = \frac{a}{2}$.

Ta có $V_{ANIB} = V_{N.AIB} = \frac{1}{3}S_{AIB}.NO$

$$= \frac{a}{6}S_{AIB}. \quad (1)$$

Ta tính diện tích tam giác AIB:

Xét hình chữ nhật ABCD. Do MA = MD



$$\Rightarrow MA = \frac{1}{2}BD \Rightarrow AI = \frac{1}{2}IC$$

$$\Rightarrow AI = \frac{1}{3}AC \Rightarrow AI^2 = \frac{AC^2}{9} = \frac{2^2 + a^2}{9} = \frac{a^2}{3}.$$

Lại có: $BI = \frac{2}{3}BM$

$$\Rightarrow BI^2 = \frac{4}{9}BM^2 = \frac{4}{9}\left(a^2 + \frac{a^2}{2}\right) = \frac{2a^2}{3}.$$

Do đó $AI^2 + BI^2 = a^2 = AB^2$, nên AIB là tam giác vuông đỉnh I.

$$\text{Vậy } S_{AIB} = \frac{1}{2}IA.IB = \frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{3}}{3}.\frac{a\sqrt{6}}{3}.\frac{a^2\sqrt{2}}{6}.(2)$$

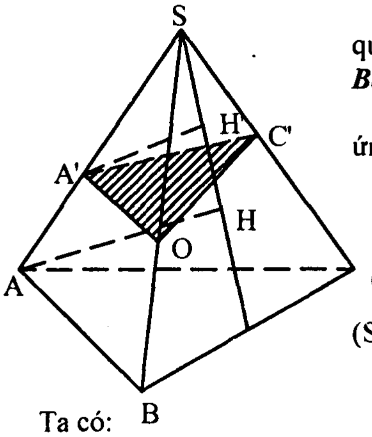
Thay (2) vào (1) ta có: $V_{ANIB} = \frac{a^3\sqrt{2}}{36}$ (đvtt)

Loại 2: *Các bài toán tính thể tích khối đa diện dựa vào phân tích khối cần tính thành tổng hoặc hiệu của các khối cơ bản hoặc bằng cách so sánh thể tích với một khối đa diện cơ bản khác.*

Trong nhiều bài toán, việc tính trực tiếp thể tích khối đa diện như trong loại 1 có thể gặp khó khăn vì hai lí do: Hoặc là khó xác định và tính được chiều cao, hoặc tính được diện tích đáy nhưng cũng không dễ dàng. Khi đó trong nhiều trường hợp ta có thể làm như sau:

- Phân chia khối cần tính thể tích thành tổng hoặc hiệu các khối cơ bản (hình chóp hoặc hình lăng trụ) mà các khối này dễ tính hơn.

- Hoặc là so sánh thể tích khối cần tính với một khối đa diện khác đã biết trước thể tích.



- Với loại toán này người ta rất hay sử dụng kết quả sau đây.

Bài toán cơ bản:

Cho hình chóp S.ABC. Lấy A', B', C' tương ứng trên cạnh SA, SB, SC. Khi đó

$$\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'}{SA}.\frac{SB'}{SB}.\frac{SC'}{SC}.$$

Chứng minh

Kẻ A'H' và AH cùng vuông góc mặt phẳng (SBC). Khi đó A'H'//AH và S, H', H thẳng hàng.

Ta có:

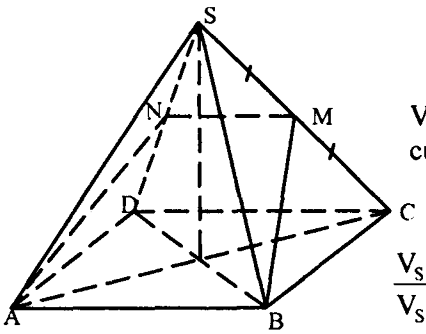
$$\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{V_{A'.SB'C'}}{V_{A.SBC}} = \frac{\frac{1}{3}S_{SB'C'}.A'H'}{\frac{1}{3}S_{SBC}.AH} = \frac{\frac{1}{2}SB'.SC'\sin\alpha.A'H'}{\frac{1}{2}SB.SC.\sin\alpha.AH} = \frac{SB'}{SB}.\frac{SC'}{SC}.\frac{SA'}{SA} \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Ở đây $\alpha = \widehat{B'SC'} = \widehat{BSC}$

Chú ý : Kết quả trên vẫn đúng nếu như trong các điểm A', B', C' có thể có điểm A≡A'; B≡B'; C≡C'.

Thí dụ 1: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối A – 2004)

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi cạnh bằng $\sqrt{5}$ cm, đường chéo AC = 4cm. Đoạn thẳng SO = $2\sqrt{2}$ cm và vuông góc với đáy, ở đây O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Gọi M là trung điểm của cạnh SC. Giả sử mặt phẳng (ABM) cắt SD tại N. Tìm thể tích hình chóp.



Giải

Ta có AB//DC $\Rightarrow$ AB // (SDC)

$\Rightarrow (SAB)\cap(SDC) = MN // AB\ (N \in SD)$.

Vì M là trung điểm của SC nên N là trung điểm của SD.

Ta có: $V_{S.ABMN} = V_{S.ABN} + V_{S.BMN}$ (1)

Theo bài toán cơ bản ta có:

$$\frac{V_{S.ABN}}{V_{S.ABD}} = \frac{SN}{SD} = \frac{1}{2} \Rightarrow V_{S.ABN} = \frac{1}{2}V_{S.ABD} = \frac{1}{4}V_{S.ABCD}$$

$$\frac{V_{S.BMN}}{V_{S.BCD}} = \frac{SN}{SD}.\frac{SM}{SC} = \frac{1}{4} \Rightarrow V_{S.BMN} = \frac{1}{8}V_{S.ABCD}.$$

Từ (1) suy ra: $V_{S.ABMN} = \frac{3}{8}V_{S.ABCD}$ (2)

Dễ thấy: $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD}.SO = \frac{1}{2}.\frac{1}{3}.AC.BD.SO = \frac{1}{6}.4.2.2\sqrt{2} = \frac{8\sqrt{2}}{3}$ (3)

Từ (2) và (3) suy ra: $V_{S.ABCD} = \sqrt{2}$ (đvtt).

Nhận xét:

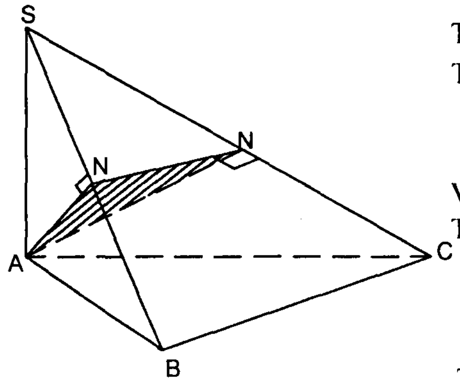
- Hình thang ABMN có thể tính được diện tích (tuy không dễ dàng).
- Việc xác định chiều cao từ S xuống ABMN và tính nó còn phức tạp hơn.

(Bạn có thể tính toán xem nó để kiểm tra tính phức tạp).

- Cách giải như trên là hợp lí!

Thí dụ 2: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối D – 2006)

Cho hình chóp tam giác S.ABC có đáy là tam giác đều cạnh bằng a. SA = 2a và SA vuông góc với mặt phẳng (ABC). Gọi M, N tương ứng là hình chiếu vuông góc của A trên SB, SC. Tìm thể tích khối chóp A.BMNC.



Giải

Ta có: $V_{A.BMNC} = V_{S.ABC} - V_{S.AMN}$ (1)

Theo bài toán cơ bản thì:

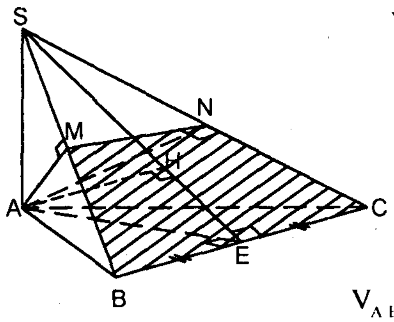
$$\frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}} = \frac{SM}{SB}.\frac{SN}{SC}.$$

Vì AB = AC $\Rightarrow$ SB = SC.

Ta có: $SA^2 = SM.SB = SN.SC \Rightarrow SM = SN$.

Vậy: $\dfrac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}} = \dfrac{SM^2}{SB^2}$. (2)

Ta có $SA^2 = SM.SB \Rightarrow SM = \dfrac{SA^2}{SB}$.



Vậy từ (2) có

$$\frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABN}} = \frac{SA^4}{SB^4} = \left(\frac{SA^2}{SB^2}\right)^2 = \left(\frac{4a^2}{4a^2 + a^2}\right)^2 = \frac{16}{25}$$

$$\Rightarrow V_{S.AMN} = \frac{16}{25}V_{S.ABC}. \qquad (3)$$

Từ (1) và (3) có:

$$V_{A.BCNM} = \frac{9}{25}V_{S.ABC} = \frac{9}{25}.\frac{1}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.2a = \frac{3a^3\sqrt{3}}{50} \text{ (đvtt)}$$

Nhận xét: Các bạn hãy so sánh cách giải trên với cách giải bằng "tính toán trực tiếp" (theo phương pháp của loại 1) với thí dụ này.

Gọi E là trung điểm của BC. Ta có AE $\perp$ BC, SA $\perp$ BC $\Rightarrow$ BC $\perp$ (SEA)

$\Rightarrow$ (SBC) $\perp$ (SEA)

Kẻ AH $\perp$ SE (H $\in$ SE) $\Rightarrow$ AH $\perp$ (SBC).

Vậy AH là chiều cao của hình chóp A.BMNC.

Trong tam giác vuông SAE, ta có: $\dfrac{1}{AH^2} - \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AE^2} = \dfrac{1}{4a^2} + \dfrac{4}{3a^2}$

$$\Rightarrow AH = 2a\sqrt{\frac{3}{19}}$$

Ta có $\frac{S_{SMN}}{S_{SBC}} = \frac{SM}{SB}.\frac{SN}{SC} = \left(\frac{SM}{SB}\right)^2 = \frac{SA^4}{SB^4} = \frac{16}{25}$ (xem ở trên)

$$\Rightarrow S_{BMNC} = \frac{9}{25}S_{SBC} = \frac{9}{25}.\frac{1}{2}BC.SE = \frac{9a}{50}\sqrt{4a^2 + \frac{3a^2}{4}} = \frac{9a^2}{100}\sqrt{19}.$$

Vậy $V_{A.MNCB} = \frac{1}{3}S_{BMNC}.AH = \frac{1}{3}.\frac{9a^2\sqrt{19}}{100}.2a\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{19}} = \frac{3a^3\sqrt{3}}{50}$ (đvtt)

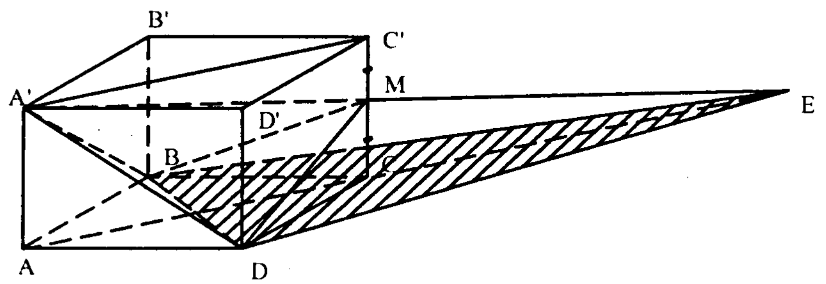
Ta thu lại kết quả trên.

Theo bạn cách giải nào là hợp lí?

Thí dụ 3: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối A – 2003)

Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' đáy là hình vuông cạnh bằng a, chiều cao AA'= b. Gọi M là trung điểm của cạnh CC'. Tìm thể tích tứ diện BDA'M.

Giải



Trong (ACC'A'): $A'M \cap AC = E$.

Gọi O là tâm của đáy ABCD vì M là trung điểm của CC', nên ta có $CE = AC = a\sqrt{2}$.

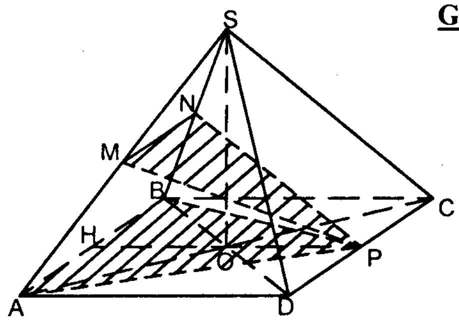
Ta có: $V_{A'BDM} = V_{A'BDE} - V_{M.BDE} = \frac{1}{3}S_{BDE}.AA' - \frac{1}{3}S_{BDE}.MC = \frac{1}{3}S_{BDE}(AA' - MC)$

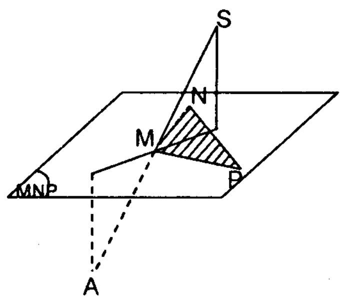
$$= \frac{1}{3}.\frac{1}{2}BD.EO\left(b - \frac{b}{2}\right) = \frac{1}{6}.a\sqrt{2}.\frac{3}{2}a\sqrt{2}.\frac{b}{2} = \frac{a^2b}{4} \text{ (đvtt).}$$

Thí dụ 4: (Đề thi tuyển sinh Cao đẳng khối A – 2009)

Cho hình chóp tứ giác S.ABCD có cạnh đáy AB = a, cạnh bên $SA = a\sqrt{2}$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của SA, SB, CD. Tìm thể tích tứ diện AMNP.

Giải





Do MS = MA $\Rightarrow d(A,(MNP)) = d(S,(MNP))$ (*)

$$\Rightarrow V_{A.MNP} = V_{S.MNP}$$

Theo bài toán cơ bản, ta có:

$$\frac{V_{S.MNP}}{V_{S.ABP}} = \frac{SM}{SA}.\frac{SN}{SB} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow V_{S.MNP} = \frac{1}{4}.\frac{1}{3}S_{ABP}.SO = \frac{1}{4}.\frac{1}{3}.\frac{1}{2}AB.HP.SO$$

(O và H tương ứng là tâm của đáy ABCD và trung điểm của AB)

$$= \frac{1}{24}.a.a.\sqrt{a^2 - \frac{a^2}{2}} = \frac{a^3\sqrt{6}}{48}. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $V_{A.MNP} = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{48}$ (đvtt).

§2. SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP THỂ TÍCH ĐỂ TÌM KHOẢNG CÁCH

Các bài toán tìm khoảng cách:

Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng, khoảng cách giữa hai đường thẳng, trong nhiều trường hợp có thể quy về bài toán thể tích khối đa diện. Việc tính các khoảng cách này dựa vào công thức hiển nhiên sau:

$$h = \frac{3V}{S}$$

ở đây V, S, h lần lượt là thể tích, diện tích đáy và chiều cao của một hình chóp nào đó (hoặc $h = \dfrac{V}{S}$ đối với hình lăng trụ).

Phương pháp này áp dụng được trong trường hợp sau:

Giả sử ta có thể quy bài toán tìm khoảng cách về bài toán tìm chiều cao của một hình chóp (hoặc một lăng trụ) nào đó. Dĩ nhiên các chiều cao này thường là không tính trực tiếp được bằng cách sử dụng các phương pháp thông thường như dùng định lí Pitago, dùng các công thức lượng giác... Tuy nhiên các khối đa diện này lại dễ dàng tính được thể tích và diện tích đáy. Như vậy chiều cao của nó sẽ được xác định bởi các công thức đơn giản trên.

- Lược đồ sử dụng phương pháp thể tích để tìm khoảng cách như sau:

1/ Sử dụng các định lí của hình học không gian sau đây:

+ Nếu AB//(P) trong đó mặt phẳng (P) chứa CD thì

$$d(AB,CD) = d(AB,(P)).$$

+ Nếu (P)//(Q), trong đó các mặt phẳng (P), (Q) lần lượt chứa AB, CD thì

$$d(AB,CD) = d((P),(Q)).$$

Ta quy bài toán tìm khoảng cách theo yêu cầu đầu bài ra về việc tìm chiều cao của một khối chóp (hoặc một khối lăng trụ nào đó).

2/ Giả sử bài toán quy về tìm chiều cao kẻ từ S của một hình chóp (hoặc một lăng trụ) nào đó. Ta tìm thể tích của hình chóp (hoặc lăng trụ) này theo một con đường khác mà không dựa vào đỉnh S này (thí dụ tính thể tích hình chóp ấy với quan niệm nó là hình chóp với đỉnh S'≠ S).

Tính diện tích đáy đối diện với đỉnh S. Từ đó ta có chiều cao kẻ từ S cần tìm.

Xét một vài ví dụ minh họa sau đây.

Thí dụ 1: Đề thi tuyển sinh Đại học khối A – 2004

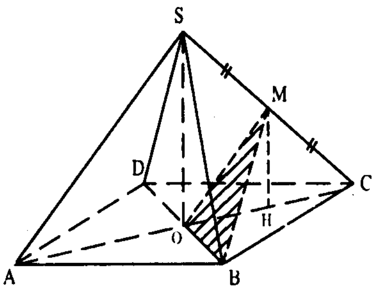
Cho hình chóp S.ABCD đáy là hình thoi ABCD có SO vuông góc với đáy và O là giao điểm của AC và BD. Giả sử $SO = 2\sqrt{2}$, đường chéo AC=4, cạnh đáy AB= $\sqrt{5}$. Gọi M là trung điểm của SC. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BM.

Giải

Gọi M là trung điểm của SC. Khi đó ta có OM//SA ⇒ SA// (OMB)

$$\Rightarrow d(SA,MB) = d(SA,(MOB))$$
$$= d(S,(MOB)) = d(C,(MOB)) \quad (1)$$

(do MS = MC)



Ta có: $OB^2 = AB^2 - OA^2 = 1 \Rightarrow OB = 1$

Kẻ $MH \perp (ABCD) \Rightarrow MH = \frac{1}{2}SO = \sqrt{2}$.

Vậy $V_{M.OBC} = \frac{1}{3}S_{OBC}.MH = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}OB.OC.MH$

$$= \frac{1}{6}1.2.\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{3}. \quad (2)$$

Ta có: $OM = \frac{1}{2}SA = \frac{1}{2}\sqrt{8+4} = \sqrt{3}$.

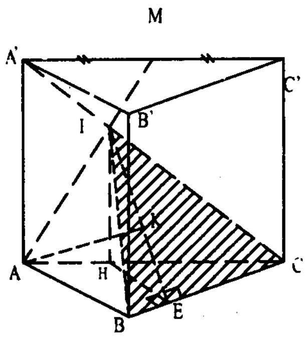
Gọi h là khoảng cách từ C tới (MOB), ta có:

$$V_{C.MOB} = \frac{1}{3}S_{MOB}.h = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}OB.OM.h = \frac{h\sqrt{3}}{6} \quad (3)$$

Từ (2) và (3) suy ra $\frac{\sqrt{3}h}{6} = \frac{\sqrt{2}}{3} \Rightarrow h = \frac{2\sqrt{6}}{3}$. (4)

Từ (1) và (4) đi đến: d(SA, MB) = $\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

Thí dụ 2: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối D – 2009)



Cho hình lăng trụ đứng ABC.A'B'C' đáy là tam giác ABC vuông tại B. Giả sử AB = a, AA' = 2a; AC = 3a. Gọi M là trung điểm của A'C' và I là giao điểm của AM và A'C.

1. Tìm thể tích tứ diện IABC.
2. Tìm khoảng cách từ A tới mặt phẳng IBC.

Giải

1. Theo thí dụ 3, loại 1, §1, ta có

$$V_{IABC} = \frac{4a^3}{9}.$$

2. Kẻ IH $\perp$ AC $\Rightarrow$ IH $\perp$ (ABC)

Kẻ HE $\perp$ BC $\Rightarrow$ IE $\perp$ BC (định lý ba đường vuông góc)

Ta có: $\dfrac{HE}{AB} = \dfrac{CH}{CA} = \dfrac{CB'}{CA'} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow HE = \dfrac{2}{3}AB = \dfrac{2a}{3}$.

Do vậy $IE = \sqrt{IH^2 + HE^2} = \sqrt{\dfrac{16a^2}{9} + \dfrac{4a^2}{9}} = \dfrac{2a\sqrt{5}}{3}$;

Kẻ AK $\perp$ (IBC), ta có $V_{I.ABC} = V_{A.IBC} = \dfrac{1}{3}S_{IBC}AK$

Từ câu 1 suy ra:

$$\frac{4a^2}{9} = \frac{1}{3}\frac{1}{2}a.\frac{2a\sqrt{5}}{3}.AK \Rightarrow AK = d\big(A,(IBC)\big) = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$$

Thí dụ 2: (Đề thi tuyển sinh đại học khối D – 2007)

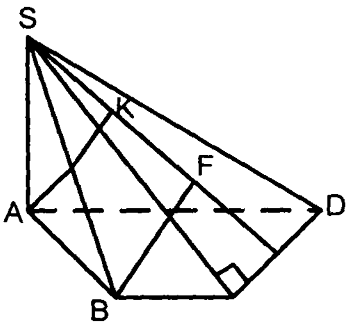
Cho hình chóp tứ giác S.ABCD có đáy ABCD là hình thang vuông trong đó $\widehat{ABC} = \widehat{BAD} = 90^o$; BA = BC = a; AD = 2a. Giả sử SA vuông góc với đáy ABCD và SA= $a\sqrt{2}$. Gọi H là hình chiếu của A trên SB.

1. Chứng minh SCD là tam giác vuông
2. Tính khoảng cách từ A tới mặt phẳng (SCD).

Giải

1. Do AB $\perp$ BD $\Rightarrow$ SB $\perp$ BC (định lí ba đường vuông góc)

Dựa vào định lí Pitago trong các tam giác vuông SAB, ABC, SAD dễ dàng tính được:



$SB^2 = 3a^2$; $SC^2 = 4a^2$; $SD^2 = 6a^2$.

Từ đó có: $DC^2 = 2a^2$.

Vậy suy ra: $SD^2 = SC^2 + SD^2 \Rightarrow$ SCD là tam giác vuông tại C $\Rightarrow$ đpcm.

2. Kẻ HK và BF cùng vuông góc với mặt phẳng (SCD) $\Rightarrow$HK//BF và S, K, F thẳng hàng. Ta có: $\dfrac{HK}{BF} = \dfrac{SH}{SB}$ (1)

Trong tam giác vuông SAB có:

$SA^2 = SH.SB \Rightarrow SH = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$

Vậy từ (1) có $\dfrac{HK}{BF} = \dfrac{\frac{2a\sqrt{3}}{3}}{a\sqrt{3}} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow HK = \dfrac{2}{3}BF$ (2)

Ta có:

$$V_{S.BCD} = \frac{1}{3}S_{BCD}.SA = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}BC.CD\sin 135^0.SA = \frac{1}{6}a.a\sqrt{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}a\sqrt{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}.$$

Mặt khác: $V_{S.BCD} = \dfrac{1}{3}S_{SCD}.BF = \dfrac{1}{6}SC.CD.BF$.

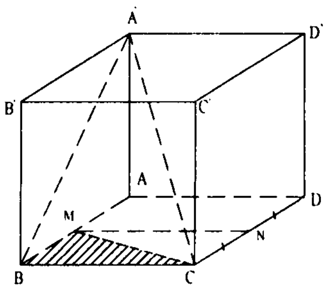
Từ đó ta có: $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{6} = \dfrac{1}{6}2a.a\sqrt{2}.BF \Rightarrow BF = \dfrac{a}{2}$. (3)

Từ (2) và (3) suy ra: $HK = d\big(H,(SCD)\big) = \dfrac{a}{3}$.

Thí dụ 4: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối A – 2006)

Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có cạnh bằng 1. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng A'C và MN

Giải



Ta có MN//BC $\Rightarrow$ MN//(A'BC)

$\Rightarrow$ d(MN.A'C) = d(MN.(A'BC)) = d (M,(A'BC)) (1)

Dễ thấy $V_{A'MBC} = \dfrac{1}{3}S_{MBC}.A'A = \dfrac{1}{3}.\dfrac{1}{2}.1.1.1 = \dfrac{1}{12}$ (1)

Vì CB $\perp$ (BAA'B) $\Rightarrow$ CB $\perp$ BA' $\Rightarrow$ A'BC là tam giác vuông tại B.

Từ đó: $V_{A'MBC} = V_{M.A'BC} = \dfrac{1}{3}S_{A'BC}.h$ (2)

Từ (1), (2) ta có

$$\frac{1}{12} = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}A'B.BC.h = \frac{1}{6}\sqrt{2}h \Rightarrow h = \frac{\sqrt{2}}{4} \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) suy ra: $d\big(MN, A'C\big) = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

§3. CÁC BÀI TOÁN VỀ THỂ TÍCH KHỐI ĐA DIỆN CÓ KẾT HỢP VỚI VIỆC TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ NHỎ NHẤT

Đây có thể xem như một bài toán rất cơ bản mặc dù nó chưa một lần xuất hiện trong các bài thi tuyển sinh vào Đại học, Cao đẳng từ năm 2002 đến nay (cho dù bài toán về giá trị lớn nhất, nhỏ nhất với hàm số hầu như năm nào cũng có mặt trong các đề thi tuyển sinh).

Các bài toán này có nội dung rất cơ bản như sau: Thể tích khối đa diện trong các dạng toán này phụ thuộc một tham số nào đó (tham số có thể là góc, hoặc là độ dài cạnh), bài toán đòi hỏi xác định giá trị của tham số để thể tích nhận giá trị lớn nhất hoặc nhỏ nhất.

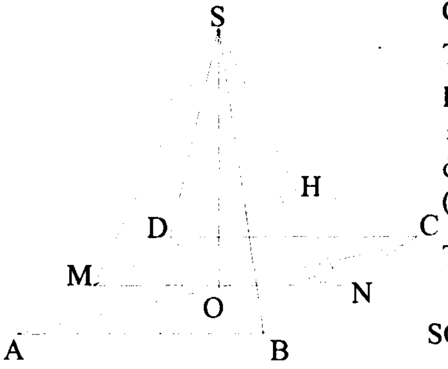
Với các bài toán này được giải theo các bước sau:

- Bước 1: Chọn tham số, thực chất là chọn ẩn. Ẩn này có thể là góc α thích hợp trong khối đa diện, hoặc là một yếu tố độ dài nào đấy.
- Bước 2: Với ẩn số được chọn ở bước 1, ta coi đó như là các yếu tố đã cho để tính thể tích V của khối đa diện theo các phương pháp đã biết.
- Bước 3: Đến đây nhiệm vụ của bài toán hình học xem như đã "kết thúc". Ta có một hàm số f(x) với x $\in$ D mà cần tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của nó. Dùng bất đẳng thức hoặc sử dụng tính đồng biến và nghịch biến của hàm số thông qua việc khảo sát đạo hàm số.

Thí dụ 1:

Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD mà khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) bằng 2a. Với giá trị nào của α, với α là góc giữa mặt phẳng bên và đáy của hình chóp, thì thể tích của khối chóp là nhỏ nhất? Tìm giá trị nhỏ nhất đó.

<u>Giải</u>



Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD, BC.

Ta có $\widehat{SNM} = \alpha$.

Do DA//BC $\Rightarrow$ AD//(SBC)

$\Rightarrow$ d(A, (SBC)) = d(M,(SBC)) = MH = 2a.

ở đây: MH $\perp$ SN (H$\in$SN)

(Chú ý vì (MNS) $\perp$(SBC) nên MH$\perp$(SBC)).

Ta có $MN = \dfrac{MH}{\sin\alpha} = \dfrac{2a}{\sin\alpha}$, từ đó

$SO = ON\tan\alpha = \dfrac{a}{\sin\alpha}\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{a}{\cos\alpha}$.

Do đó $$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}\left(\frac{2a}{\sin\alpha}\right)^2\frac{a}{\cos\alpha} = \frac{4a^3}{3\sin^2\alpha\cos\alpha} \qquad (1)$$

Từ (1) suy ra $V_{S.ABCD}$ bé nhất khi và chỉ khi $\sin^2\alpha\cos\alpha$ lớn nhất.

Xét biểu thức $P = \sin^2\alpha\cos\alpha = \cos(1-\cos^2\alpha) = \cos\alpha - \cos^3\alpha$ (2)

Từ (2) dẫn đến xét hàm số $y = x - x^3$ với $0 < x < 1$.

Ta có $y' = 1 - 3x^2$ và ta có bảng biến thiên sau:

x	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		1
y'	0		+	0	−	
y			$\nearrow$		$\searrow$	

Từ đó $y_{max} = y\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) = \dfrac{2\sqrt{3}}{9} \Leftrightarrow x = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Vậy: $V_{S.ABCD}$ nhận giá trị bé nhất bằng $\dfrac{4a^3}{3.\dfrac{2\sqrt{3}}{9}} = 2\sqrt{3}a^3$ khi và chỉ khi $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Thí dụ 2:

Hình chóp S.ABC có đáy là tam giác vuông cân đỉnh C và SA vuông góc với đáy (ABC). Giả sử SC = a. Hãy tìm góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABD) sao cho thể tích khối chóp là lớn nhất.

<u>Giải</u>

Ta thấy ngay $\widehat{SCA} = \alpha$, SA = sinα và AC = cosα.

Suy ra: $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}\dfrac{a^2\cos^2\alpha}{2}a\sin\alpha = \dfrac{a^3}{6}\cos^2\alpha\sin\alpha$ (1)

Từ (1) suy ra: $V_{S.ABC}$ nhận giá trị lớn nhất khi và chỉ khi biểu thức

$P = \cos^2\alpha\sin\alpha$ nhận giá trị lớn nhất. Vì $\sin\alpha > 0$, nên $P_{max} \Leftrightarrow P^2_{max}$

$\Leftrightarrow (1-\sin^2\alpha)^2\sin^2\alpha$ đạt giá trị lớn nhất.

Ta có $\left(1-\sin^2\alpha\right)^2\sin^2\alpha = \dfrac{\left(1-\sin^2\alpha\right)\left(1-\sin^2\alpha\right)\left(2\sin^2\alpha\right)}{2}$.

Theo bất đẳng thức Côsi, thì

$$\left(1-\sin^2\alpha\right)\left(1-\sin^2\alpha\right)\left(2\sin^2\alpha\right) \le \left[\frac{\left(1-\sin^2\alpha\right)+\left(1-\sin^2\alpha\right)+2\sin^2\alpha}{3}\right] = \frac{8}{27}.$$

Từ đó: $P_{max} = \dfrac{2\sqrt{3}}{9} \Leftrightarrow 1-\sin^2\alpha = 2\sin^2\alpha \Leftrightarrow \sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Vậy $V_{S.ABC}$ nhận giá trị lớn nhất bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{27} \Leftrightarrow \sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

§4. CÁC BÀI TOÁN VỀ SO SÁNH THỂ TÍCH

Các bài toán thuộc loại này thường có dạng sau đây: Cho một khối đa diện và một mặt phẳng (P). Mặt phẳng này cắt khối đa diện theo một thiết diện (α) nào đó. Thiết diện (α) sẽ chia khối đa diện thành hai phần có thể tích lần lượt là V_1 và V_2. Bài toán đòi hỏi tìm tỉ số $\dfrac{V_1}{V_2}$ tức là so sánh thể tích hai phần bị chia ra. Nói riêng nếu $\dfrac{V_1}{V_2} = 1$, ta nói thiết diện (α) chia khối đa diện thành hai phần tương đương, tức là có thể tích bằng nhau.

Cần lưu ý rằng mặc dù các bài toán trong kỳ thi tuyển sinh Đại học, Cao đẳng không có dạng trực tiếp như thế, nhưng thực chất nhiều bài toán đều sử dụng đến việc so sánh thể tích này. Thật vậy, trong các thí dụ 1, 2, 4 loại 2 §1, để tính thể tích khối đa diện theo yêu cầu, ta không trực tiếp tính nó mà thông qua một khối trung gian, sau đó tìm tỉ số giữa thể tích khối đa diện cần tính với thể tính khối trung gian này. Từ thể tích khối trung gian (mà việc tính dễ dàng hơn) ta suy ra kết quả cần tính. Như thế *thực chất của các thí dụ này là giải một bài toán về so sánh thể tích.*

Các bài toán về so sánh thể tích có lược đồ chung để giải như sau:

- Xác định thiết diện.
- Chọn một trong hai phần để tìm thể tích.

- Với phần được chọn ra để so sánh thể tích của nó với V là thể tích của khối đa diện ban đầu. Giả sử ta tính được:

$$V_1 = kV \ (0 < k < 1)$$

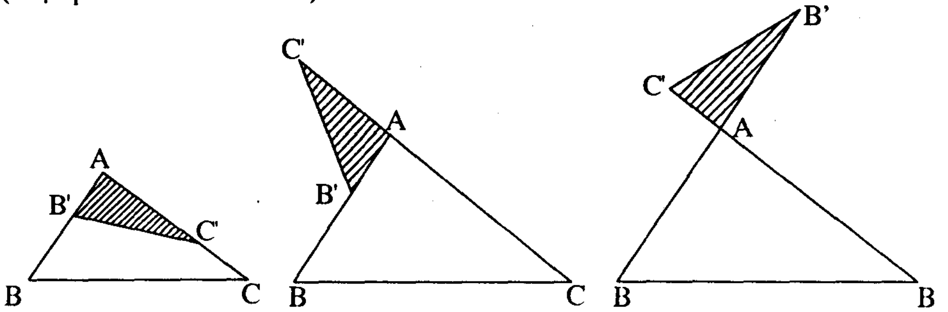
Khi đó tỉ số cần tìm là $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{k}{1-k}$.

Trong mục này ta luôn sử dụng hai kết quả cơ bản hiển nhiên như sau:

1/ Bài toán cơ bản trình bày trong phần mở đầu của loại 2 §1.

2/ Kết quả quen biết sau đây của hình học phẳng.

Cho tam giác ABC, B' và C' lần lượt là các điểm trên các cạnh AB và AC (hoặc phần kéo dài của nó). Khi đó ta có:



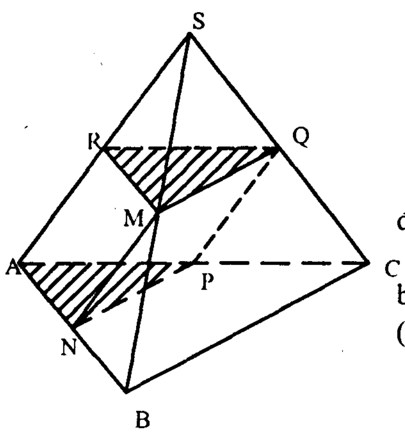
$$\frac{S_{AB'C'}}{S_{ABC}} = \frac{AB'}{AB} \cdot \frac{AC'}{AC}.$$

Để lấy làm ví dụ minh họa cho mục này, có thể sử dụng các thí dụ 1, 2, 4 loại 2 §1. Ở đây xét thêm các ví dụ có dạng "trực tiếp" đòi hỏi so sánh thể tích của hai phần khối đa diện bị chia bởi một thiết diện (α) cho trước.

Thí dụ 1:

Cho hình chóp S.ABC. Gọi M là trung điểm của SB. Dựng thiết diện với hình chóp qua M, song song với SA và song song với BC. Chứng minh thiết diện chia khối chóp thành hai phần tương đương.

Giải



Kẻ MN//SA ($N \in AB$), MQ//BC ($Q \in SC$)

Kẻ NP//BC ($P \in AC$) $\Rightarrow$ QP//SA.

Thiết diện là hình bình hành MNQP.

Dễ thấy M, N, Q, P lần lượt là trung điểm của SB, AB, AC và SC.

Gọi V_1 là thể tích phần hình chóp nằm bên trái thiết diện MNPQ. Từ M kẻ MR//AB ($R \in SA$ và có RS = RA).

Ta có RMQ.ANP là hình lăng trụ và có:

$$V_1 = V_{S.RMQ} + V_{RMQ.ANP} \ (1)$$

(P) qua AC' và song song với BD cắt các cạnh SB, SD của hình chóp lần lượt tại B' D'. Tìm thể tích hình chóp S.AB'C'D.

Đáp số: $\frac{a^3\sqrt{3}}{18}$.

Bài 7: Cho hình vuông ABCD có cạnh bằng a. Qua trung điểm I của cạnh AB dựng đường thẳng (d) vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Trên (d) lấy điểm S sao cho $SI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Tìm khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SAD).

Đáp số: $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Bài 8:

Cho hình chóp S.ABC có SA = 3a và SA vuông góc với mặt phẳng (ABC). Tam giác ABC có AB = BC = 2a; $\widehat{ABC} = 120^0$. Tìm khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC).

Đáp số: $\frac{3a\sqrt{13}}{13}$.

Bài 9:

Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có cạnh bằng a. Gọi K là trung điểm của DD'. Tìm khoảng cách giữa CK và A'D.

Đáp số: $\frac{a}{3}$.

Giải các bài toán và so sánh thể tích

Bài 10:

Cho lăng trụ đứng ABC.A'B'C'. Gọi M là trung điểm của AA'. Chứng minh rằng thiết diện C'MB chia lăng trụ thành hai phần tương đương.

Bài 11:

Cho hình chóp tam giác S.ABC. Giả sử M, N, P là ba điểm lần lượt trên SA, BC, AB sao cho M, N tương ứng là trung điểm của SA, BC còn $\frac{AP}{AB} = \frac{1}{3}$. Thiết diện với hình chóp S.ABC tạo bởi mặt phẳng (MNP) cắt SC tại Q.

1. Chứng minh: $\frac{SQ}{SC} = \frac{1}{3}$.

2. Chứng minh thiết diện chia hình chóp thành hai phần tương đương.

Bài 12: Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có các mặt bên tạo với mặt phẳng đáy góc 60^0.

1. Vẽ thiết diện qua AC và vuông góc với mặt phẳng (SAD).

2. Thiết diện chia khối chóp thành hai phần có thể tích tương ứng là V_1, V_2.

Tìm tỉ số: $\frac{V_1}{V_2}$

Đáp số: $\frac{1}{4}$.