NGUYỄN HỮU BẮC
Chủ biên

PHÁT HUY KỸ THUẬT ĐẶT TRỤC GIẢI NHANH HÌNH HỌC KHÔNG GIAN TỪ A ĐẾN Z

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

PHẦN I

KIẾN THỨC CƠ BẢN VỀ HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

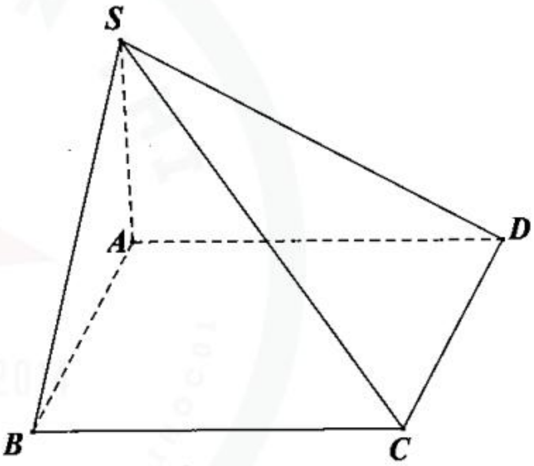
1. KIẾN THỨC CƠ BẢN VỀ CÁC HÌNH

a. Hình chóp

- *Định nghĩa:* Hình chóp là khối đa diện có 1 đỉnh và 1 đáy là đa giác lồi, các mặt bên là các hình tam giác. Chiều cao của hình chóp là khoảng cách từ đỉnh đến mặt đáy của hình chóp.

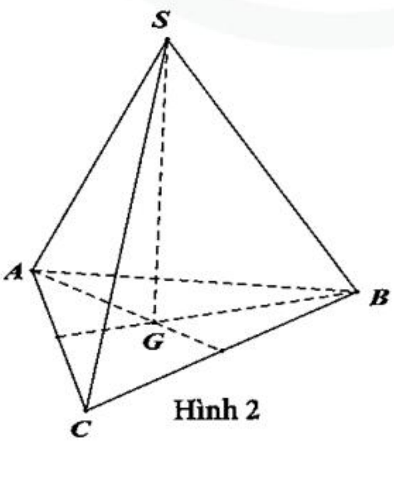
- Các loại hình chóp thường gặp:

+ Hình chóp đa giác đều là hình chóp có đáy là đa giác đều và hình chiếu của đỉnh xuống đáy trùng với tâm của đáy. Cần phân biệt nó với hình chóp có đáy là đa giác đều, vốn chỉ có đáy là đa giác đều chứ hình chiếu của đỉnh xuống đáy chưa chắc trùng với tâm của đáy.

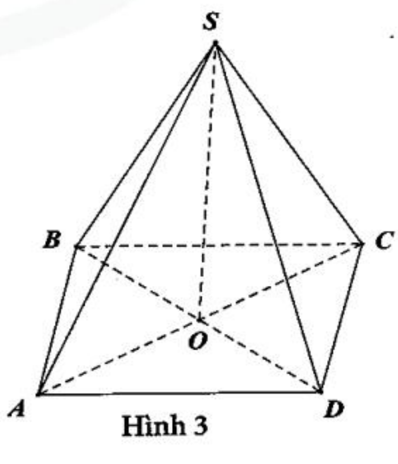


Hình 1

+ Hình chóp đều là hình chóp có đáy là đa giác đều; các cạnh bên bằng nhau. hình chiếu của đỉnh xuống đáy là tâm của đáy.



Hình 2



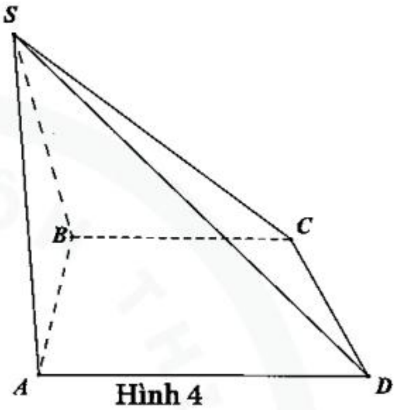
Hình 3

Ở hình 2 có $\begin{cases} SA = SB = SC \\ AB = AC = BC \\ SG \perp (ABC) \end{cases}$ với G là trọng tâm tam giác ABC

Ở hình 3 có $\begin{cases} SA = SB = SC = SD \\ AB = AD = BC = CD \text{ (ABCD là hình vuông)} \\ SO \perp (ABCD) \end{cases}$

+ Hình chóp có mặt đáy là hình thang

Ở hình 4, ABCD là hình thang có BC // AD

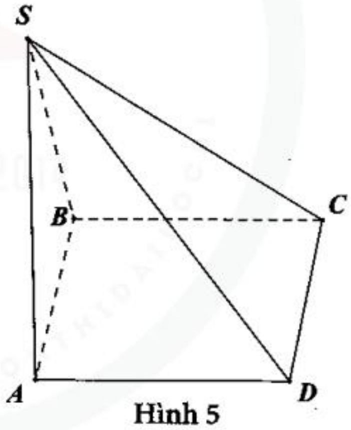


Hình 4

+ Hình chóp có mặt đáy là hình bình hành

Ở hình 5, ABCD là hình bình hành có:

$\begin{cases} AD // BC \\ AB // CD \end{cases}$ và $\begin{cases} AD = BC \\ AB = CD \end{cases}$



Hình 5

- Công thức tính thể tích hình chóp:

$V_{chóp} = \frac{1}{3} S.h$

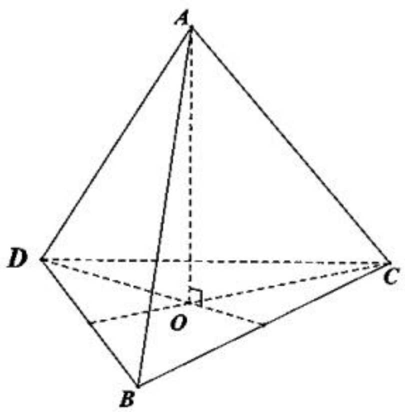
Trong đó S là diện tích mặt đáy, h là chiều cao của hình chóp.

Khối tứ diện đều:

+ Tất cả các cạnh đều bằng nhau

+ Tất cả các mặt đều là các tam giác đều

+ O là trọng tâm của tam giác đáy và AO $\perp$ (BCD)

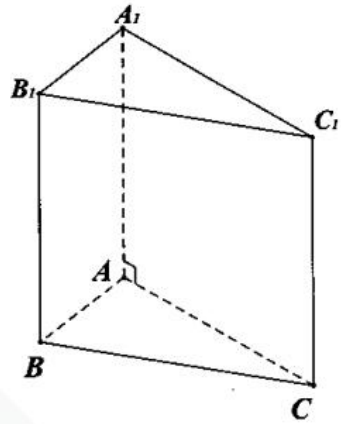


b. Lăng trụ.

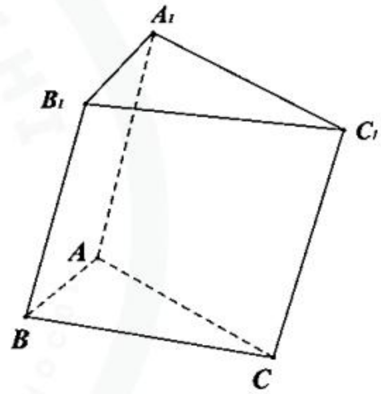
- *Định nghĩa:* Lăng trụ là đa giác có hai mặt (đáy) song song với nhau, còn các mặt khác (các mặt bên) đều là những hình bình hành.

- Các loại lăng trụ thường gặp: lăng trụ được chia làm 2 loại:

+ Lăng trụ đứng là lăng trụ có các mặt bên vuông góc với đáy.

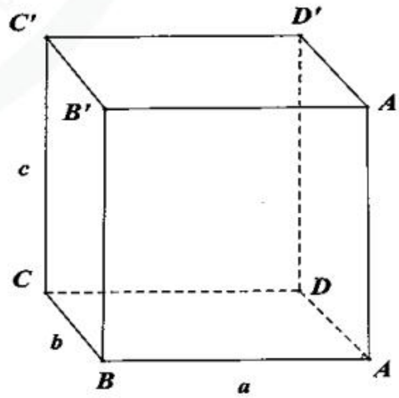


+ Lăng trụ xiên là lăng trụ có mặt bên không vuông góc với đáy.



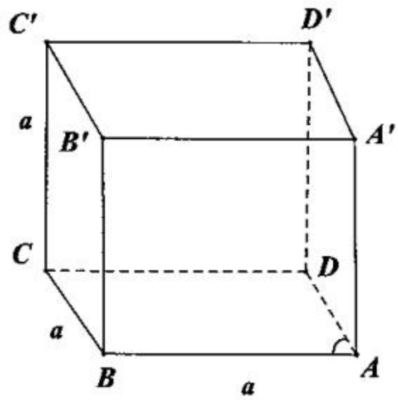
c. Hình hộp chữ nhật

- *Định nghĩa:* Hình hộp chữ nhật là hình hộp có 6 mặt đều là hình chữ nhật.



d. Hình lập phương

- *Định nghĩa:* Hình lập phương là hình hộp có 6 mặt là hình vuông.



2. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

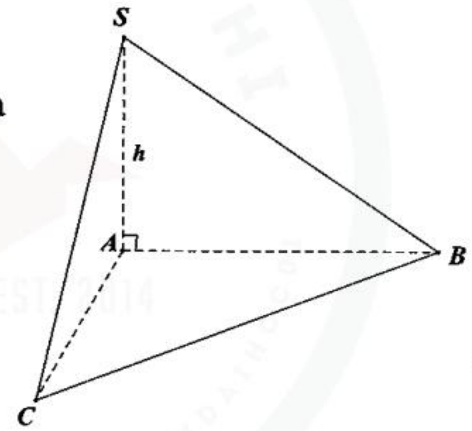
2.1. Phương pháp giải thuần túy

a. Phương pháp tính thể tích

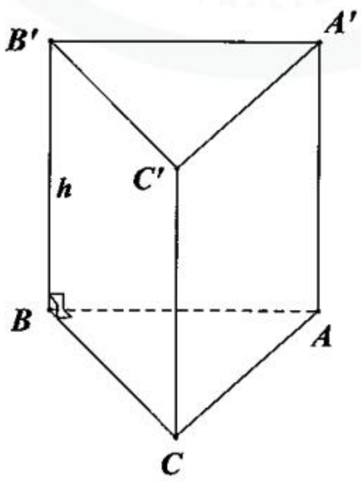
- Công thức tính thể tích:

+ Hình chóp: $V = \frac{1}{3}S.h$

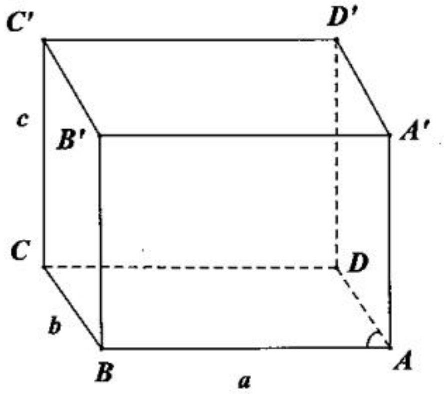
Trong đó: S là diện tích đa giác đáy; h: là đường cao của hình chóp.



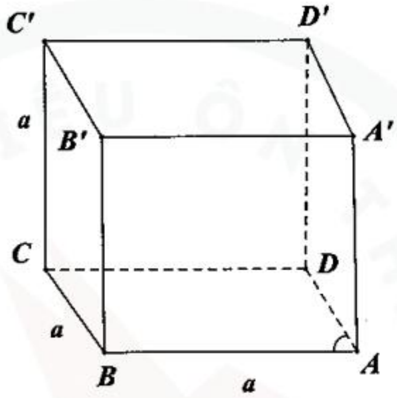
+ Hình lăng trụ: $V = S.h$



+ Hình hộp chữ nhật: $V = abc$

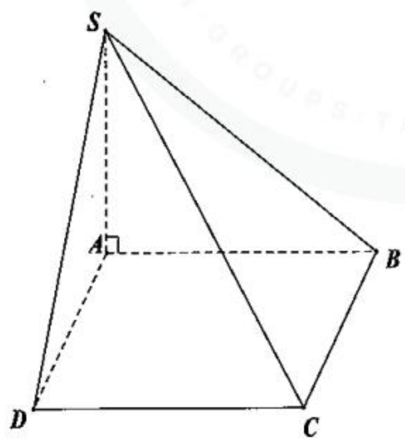


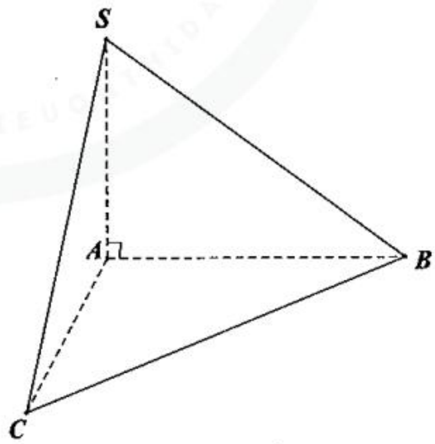
+ Hình lập phương: $V = a^3$



Một số cách xác định chiều cao quen thuộc của khối chóp và lăng trụ:

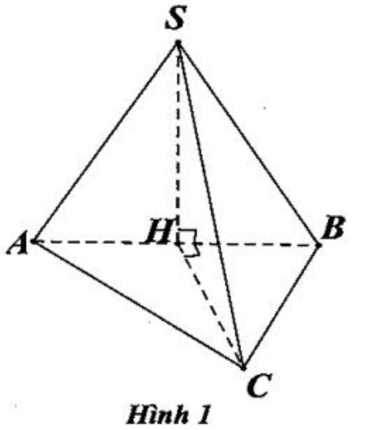
Loại 1: Khối chóp có một cạnh vuông góc với mặt đáy đó chính là chiều cao của khối chóp.



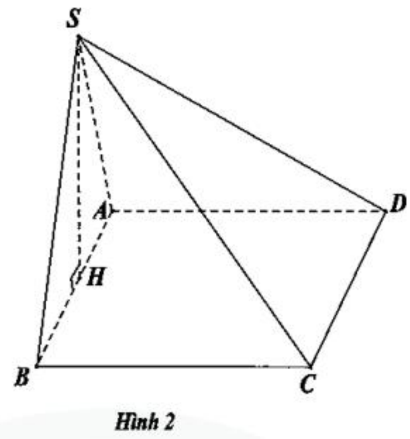


Ở hai hình trên $SA \perp$ mặt đáy

Loại 2: Khối chóp có một mặt bên vuông góc với đáy thì đường cao chính là đường kẻ từ đỉnh khối chóp đến giao tuyến của mặt bên đó với đáy khối chóp.



Hình 6



Hình 7

Ở hình 6:

(SAB) ⊥ (ABC) nên giao tuyến $(SAB)\cap(ABC)=AB$.

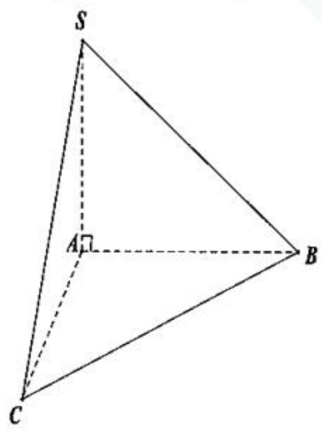
Từ S kẻ $SH\perp AB\Rightarrow SH\perp(ABC)\Rightarrow SH$ là chiều cao từ đỉnh S của hình chóp SABC.

Ở hình 7:

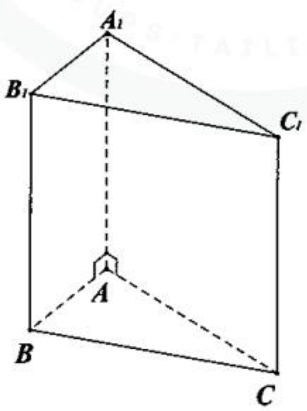
$(SAB)\perp(ABCD)$ nên giao tuyến $(SAB)\cap(ABCD)=AB$.

Từ S kẻ $SH\perp AB\Rightarrow SH\perp(ABCD)\Rightarrow SH$ là chiều cao từ đỉnh S của hình chóp SABCD.

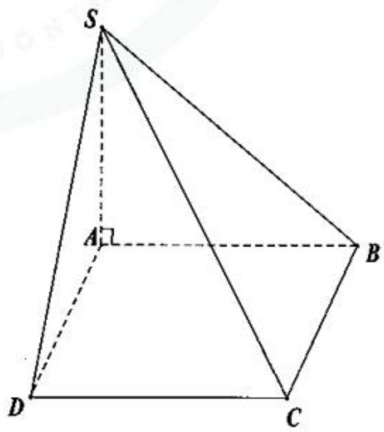
Loại 3: Khối chóp có hai mặt bên kề nhau cùng vuông góc với đáy thì đường cao chính giao tuyến của hai mặt bên đó.



Hình 8



Hình 9



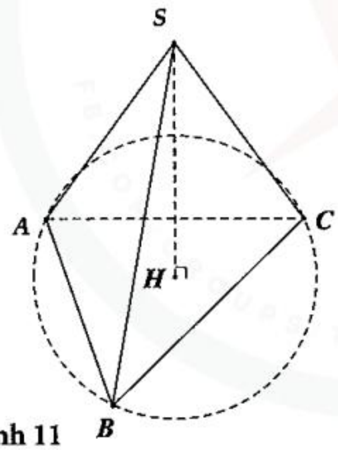
Hình 10

Ở hình 8 có $\begin{cases}(SAB)\perp(ABC)\\(SAC)\perp(ABC)\\(SAB)\cap(SAC)=SA\end{cases}\Rightarrow SA\perp(ABC)$

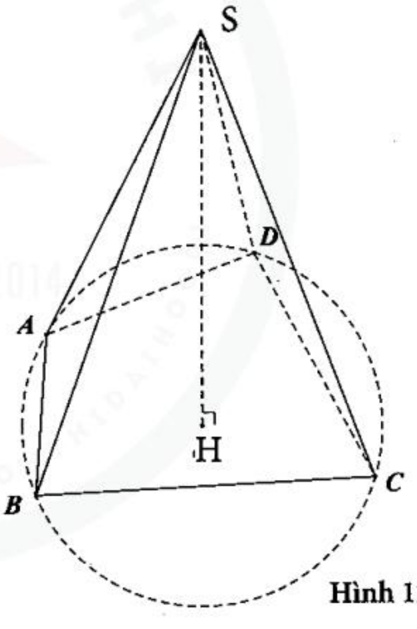
Ở hình 9, có $\begin{cases}(ABB_1A_1)\perp(ABC)\\(ACC_1A_1)\perp(ABC)\\(ABB_1A_1)\cap(ACC_1A_1)=AA_1\end{cases}\Rightarrow AA_1\perp(ABC)$

Ở hình 10, có $\begin{cases}(SAB)\perp(ABCD)\\(SAD)\perp(ABCD)\\(SAB)\cap(SAD)=SA\end{cases}\Rightarrow SA\perp(ABCD)$

Loại 4: Khối chóp có các cạnh bên bằng nhau hoặc cùng tạo với đáy một góc bằng nhau thì đường thẳng kẻ từ đỉnh khối chóp đến tâm vòng tròn ngoại tiếp đáy chính là chiều cao.



Hình 11

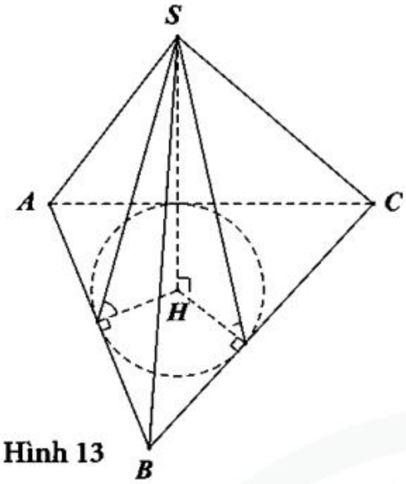


Hình 12

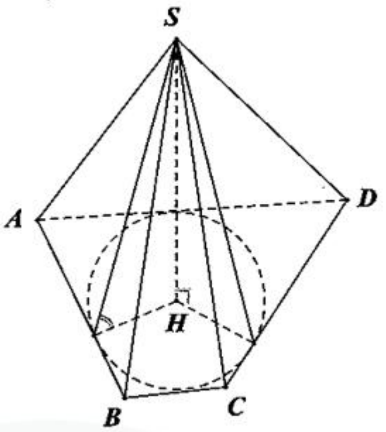
Ở hình 11: Hình chóp S.ABC có các cạnh bên bằng nhau nên $SH\perp(ABC)$ trong đó H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Ở hình 12: Hình chóp S.ABCD có các cạnh bên đều hợp với mặt đáy (ABCD) một góc 60° nên $SH\perp(ABCD)$ trong đó H là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác ABCD.

Loại 5: Khối chóp có các mặt bên cùng tạo với đáy một góc bằng nhau thì đường kẻ từ đỉnh tâm vòng tròn nội tiếp đáy.



Hình 13

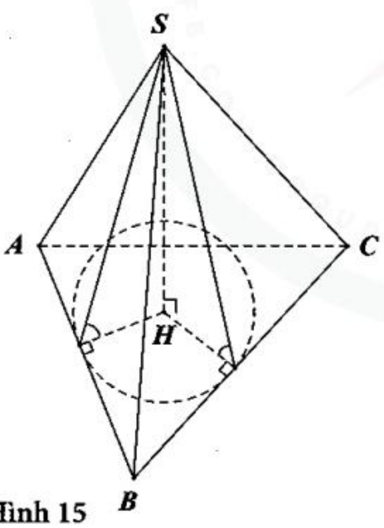


Hình 14

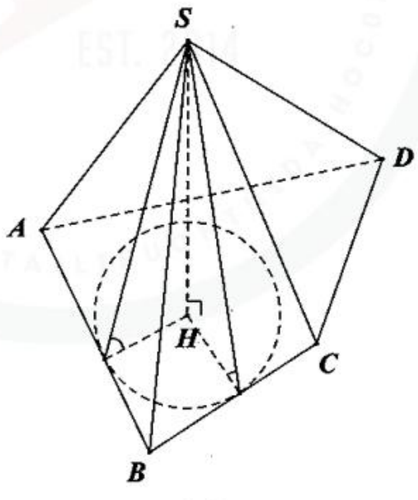
Ở hình 13: Hình chóp S.ABC có các mặt bên cùng tạo với đáy một góc bằng nhau nên $SH \perp (ABC)$ trong đó H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Ở hình 2: Hình chóp S.ABCD có các mặt bên cùng tạo với đáy một góc bằng nhau nên $SH \perp (ABCD)$ trong đó H là tâm đường tròn nội tiếp tứ giác ABCD.

Loại 6: Khối chóp có hai mặt bên cùng tạo với đáy một góc bằng nhau thì đỉnh sẽ nằm trên đường phân giác của góc tạo bởi hai cạnh nằm trên mặt đáy của mặt bên.



Hình 15

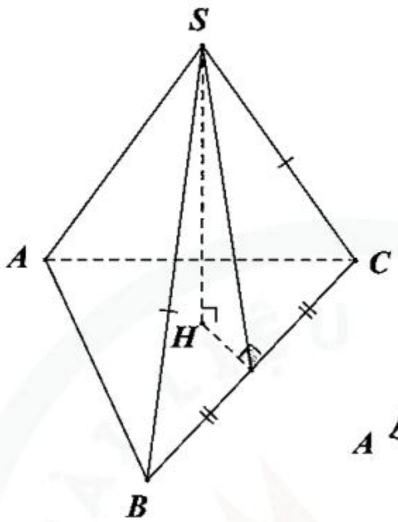


Hình 16

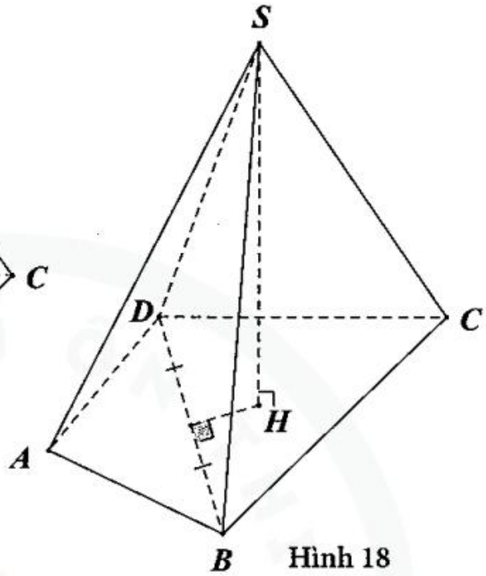
Ở hình 15: Khối chóp $S.ABC$ có hai mặt bên (SAB) và (SAB) cùng tạo với đáy góc khi đó chân đường cao của khối chóp từ đỉnh S nằm trên đường phân giác của góc $\widehat{ABC}$.

Ở hình 16: Khối chóp $S.ABCD$ có hai mặt bên (SAC) và (SAB) cùng tạo với đáy góc khi đó chân đường cao của khối chóp từ đỉnh S nằm trên đường phân giác của góc $\widehat{BAC}$.

Loại 7: Khối chóp có hai cạnh bên bằng nhau hoặc cùng tạo với đáy một góc bằng nhau thì chân đường cao hạ từ đỉnh khối chóp nằm trên đường trực nối giữa hai giao điểm của hai cạnh bên với đáy.



Hình 17



Hình 18

Ở hình 17: Khối chóp $S.ABC$ có cạnh $SB = SC$ khi đó chân đường cao của khối chóp hạ từ đỉnh S nằm trên đường trung trực của BC.

Ở hình 18: Khối chóp $S.ABCD$ có cạnh $SB = SD$ khi đó chân đường cao của khối chóp hạ từ đỉnh S nằm trên đường trung trực của BD.

b. Phương pháp xác định góc.

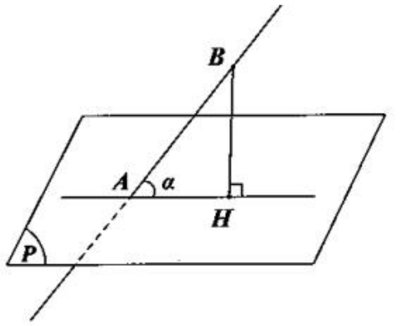
+ Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

Cho AB cắt mặt phẳng (P) tại A, để tìm góc tạo bởi thẳng AB và mặt phẳng (P) ta làm như sau:

- *Bước 1:* Xác định giao điểm của đường thẳng AB và mặt phẳng (P) chính là điểm A.

- *Bước 2:* Từ B hạ BH vuông góc với mặt phẳng (P) (H thuộc mặt phẳng (P)).

- *Bước 3:* Nối HA khi đó góc $\widehat{HAB}$ là góc tạo bởi đường thẳng AB và mặt phẳng (P).

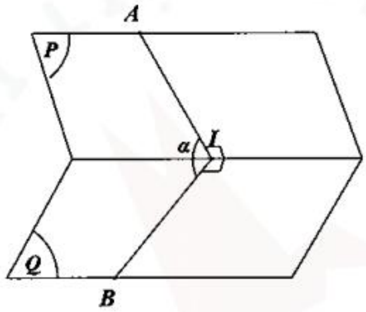


+ Góc giữa mặt phẳng với mặt phẳng:

- *Bước 1:* Xác định giao tuyến Δ của hai mặt phẳng (P) và (Q).

- *Bước 2:* Trên mặt phẳng (P) tìm $AI \perp \Delta$, trên mặt phẳng (Q) tìm $BI \perp \Delta$

- *Bước 3:* Góc $\widehat{AIB}$ là góc cần tìm giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) (hay $\widehat{AIB}$ còn gọi là góc phẳng nhị diện của ((P),(Q))).



c. Phương pháp xác định khoảng cách.

c.1. Khoảng cách từ một điểm đến mặt phẳng (P)

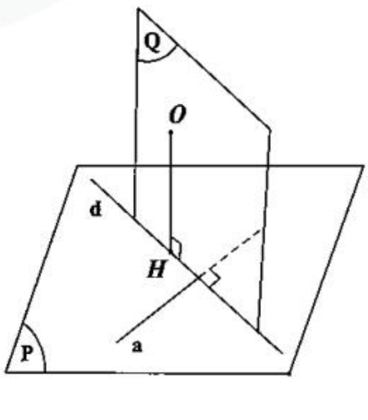
Trong không gian cho mặt phẳng (P) và một điểm O không nằm trên mặt phẳng (P), để xác định khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (P) ta làm như sau:

- *Bước 1:* Dựng mặt phẳng (Q) đi qua O và vuông góc với mặt phẳng (P).

- *Bước 2:* Xác định giao tuyến d của mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Q).

- *Bước 3:* Kẻ OH vuông góc với d tại H:

$\Rightarrow OH \perp (P) \Rightarrow d\left(O;(P)\right) = OH$



Chú ý: Trong bài toán tính khoảng cách này ta có một tính chất rất quan trọng đó là:

+ ***Tính chất 1:*** Khoảng cách từ d(A, (α)) = AC; d(H, (α)) = HD; tam giác ACE đồng dạng tam giác HDE nên ta có:

$$\frac{AC}{HD}=\frac{CE}{HE}=\frac{AE}{HE}\Rightarrow\frac{AC}{HD}=\frac{AE}{HE}\Rightarrow\frac{d\left(A;(\alpha)\right)}{d\left(H;(\alpha)\right)}=\frac{AE}{HE}$$

+ ***Tính chất 2:*** (tính chất của trục đường tròn):

+ *Định nghĩa:* Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng chứa đường tròn tại tâm của đường tròn gọi là trục của đường tròn đó

+ Nếu O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và M là một điểm cách đều 3 điểm A, B, C thì đường thẳng MO là trục của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Khi đó $\begin{cases} MO\perp(ABC) \\ MO=d\left(M;(ABC)\right) \end{cases}$

+ Nếu MA=MB=MC và NA=NB=NC trong đó A, B, C là 3 điểm không thẳng hàng thì đường thẳng MN là trục của đường tròn qua 3 điểm A, B, C. Khi đó MN vuông góc với (ABC) tại tâm O của đường tròn đi qua 3 điểm A, B, C.

$+\,d\left(O;(P)\right)=3\dfrac{V_{(O,P)}}{S_P}$ với $V_{(O,P)}$ là thể tích khối chóp và S_P là diện tích mặt đáy P. Với P có thể là tam giác, tứ giác,...

c.2. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

Giả sử ta cần tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau $d_1;d_2$.

Cách 1: Dựa vào khoảng cách giữa đường thẳng và mặt phẳng song song. Ta có thể tiến hành như sau:

+ *Bước 1:* Lấy mặt phẳng P, chứa đường thẳng d_1 và song song với đường thẳng d_2.

Khi đó d($d_1;d_2$) = d(d_2,(P))

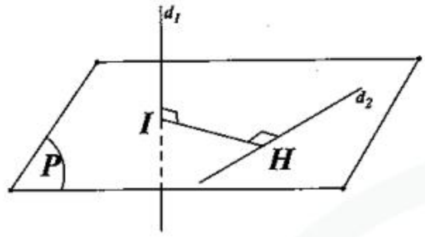
+ *Bước 2:* Tính khoảng cách giữa đường thẳng d_2 và mặt phẳng (P)

Cách 2: Tính độ dài đoạn vuông góc chung. Cách này thường được tiến hành khi ta biết được hai đường thẳng $d_1;d_2$ vuông góc với nhau. Khi đó ta làm như sau:

+ *Bước 1:* Xác định một mặt phẳng (P) chứa d_1 vuông góc với đường thẳng d_2. Tức là đường thẳng d_2 vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau nằm trong mặt phẳng (P), trong đó có đường thẳng d_1.

- Bước 2: Tìm giao điểm I của đường thẳng d_2 với mặt phẳng (P). Từ I kẻ IH vuông góc với d_1, với $H \in d_1$. Khi đó IH là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng $d_1; d_2$.

+ Bước 3: Tính độ dài đoạn thẳng IH. Ta thường vận dụng hệ thức lượng tam giác và tam giác đồng dạng; định lý Pi-ta-go để tính độ dài đoạn IH.



d. Chứng minh vuông góc

Kiến thức cơ bản thường sử dụng:

Định lý 1: $\left.\begin{matrix} a \cap b \\ a, b \subset (P) \\ d \perp a, d \perp b \end{matrix}\right\} \Rightarrow d \perp (P)$

Định lý 2: $\left.\begin{matrix} a \subset (P) \\ d \perp (P) \end{matrix}\right\} \Rightarrow d \perp a$

Định lý 3: $\forall a \subset (P)$

$+ \left.\begin{matrix} d \perp (P) \\ d' // d \end{matrix}\right\} \Rightarrow d' \perp (P)$

$+ \left.\begin{matrix} (P) // (Q) \\ d \perp (P) \end{matrix}\right\} \Rightarrow d \perp (Q)$

$+ \left.\begin{matrix} d // (P) \\ d' \perp (P) \end{matrix}\right\} \Rightarrow d' \perp d$

Định lý 4: $\left.\begin{matrix} d \perp (P) \\ d \subset (Q) \end{matrix}\right\} \Rightarrow (P) \perp (Q)$

Định lý 5: $\left.\begin{matrix} (P) \perp (Q) \\ (P) \cap (Q) = \Delta \\ d \subset (P) \\ d \perp \Delta \end{matrix}\right\} \Rightarrow d \perp (Q)$

$$\text{Định lý 6: }\left.\begin{matrix}(P)\cap(Q)=\Delta\\(P)\perp(R)\\(Q)\perp(R)\end{matrix}\right\}\Rightarrow\Delta\perp(R)$$

e. Chứng minh song song

+ *Định lý 1:* $\begin{cases}a\not\subset(P)\\a\parallel b,b\subset(P)\end{cases}\Rightarrow a\parallel(P)$

+ *Định lý 2:* $a\parallel(P)\Rightarrow a\parallel b,b\subset(P)$

+ *Hệ quả 1:* $\begin{cases}a\parallel(P),a\subset(Q)\\(P)\cap(Q)=d\end{cases}\Rightarrow a\parallel d$

+ *Hệ quả 2:* $\begin{cases}a\parallel(P),a\parallel(Q)\\(P)\cap(Q)=d\end{cases}\Rightarrow a\parallel d$

+ *Định lý 3:* $\begin{cases}a\cap b\ trong\ (P)\\a\parallel(Q),b\parallel(Q)\end{cases}\Rightarrow(P)\parallel(Q)$

+ *Định lý 4:* $\begin{cases}(P)\parallel(Q)\\(P)\cap(R)=a\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(Q)\cap(R)=b\\a\parallel b\end{cases}$

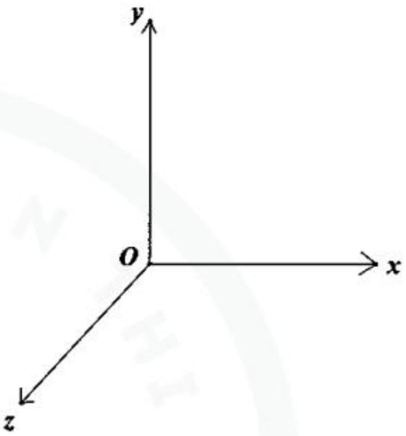
+ ***Định lý*** **5** (Định lý Ta- lét)

$$\begin{cases}(P)\parallel(Q)\parallel(R)\\a\cap(P)=A,b\cap(Q)=B,c\cap(R)=C\\a'\cap(P)=A',b'\cap(Q)=B',c'\cap(R)=C'\end{cases}\Rightarrow\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{AC}{A'C'}$$

2.2. Phương pháp tọa độ hóa trong không gian

Hình học không gian là môn hình học khá trừu tượng nên đa số học sinh e ngại khi học về phần này. Trong các đề thi tuyển sinh Đại học - Cao đẳng gần đây, phần hình học không gian được ra dưới dạng mà học sinh có thể giải bằng hai phương pháp: Phương pháp hình học thuần túy và phương pháp tọa độ. Việc giải bài toán hình học không gian bằng phương pháp hình học thuần túy gặp nhiều khó khăn đối với học sinh vừa học xong lớp 12 vì việc tìm khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau của bài toán 2 gặp nhiều khó khăn đối với một số học sinh chưa nắm vững phương pháp tìm khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau. Việc giải bài toán hình học không gian bằng phương pháp tọa độ có rất nhiều ưu việt, tuy nhiên học sinh cũng gặp không ít khó khăn. Bởi vì, phương pháp này chưa được đề cập nhiều trong các sách giáo khoa, học sinh phổ thông ít được tiếp cận, và phương pháp này chỉ tối ưu với một lớp bài toán nào đó chứ không phải lúc nào nó cũng tỏ ra hiệu quả.

a. Hệ trục tọa độ



Hệ trục tọa độ vuông góc trong không gian là hệ gồm ba trục đôi một vuông góc.

Để giải được các bài toán hình không gian bằng phương pháp tọa độ ta cần phải chọn hệ trục tọa độ thích hợp. Lập tọa độ các đỉnh, điểm liên quan dựa vào hệ trục tọa độ đã chọn và độ dài cạnh của hình.

b. Nguyên tắc đặt trục

Xem mặt đáy vuông ở đâu (nhiều khi không vuông ta cũng tạo ra vuông) thì đặt trục ở đấy, hai cạnh góc vuông là hai trục Ox, Oy. Từ đỉnh góc vuông kẻ song song hoặc trùng với chiều cao là trục Oz. Từ đó tìm mối liên hệ giữa các cạnh song song, vuông góc, tạo góc, độ dài hoặc theo dữ kiện đầu bài để tìm tọa độ các đỉnh còn lại.

c. Các bước giải bài toán hình học không gian bằng phương pháp tọa độ

Vấn đề quan trọng nhất trong việc giải bài toán hình không gian bằng phương pháp tọa độ là thiết lập hệ tọa độ cho phù hợp. Một hệ trục toạ độ được xác định khi ta xác định điểm gốc và ba điểm lần lượt trên ba trục. Còn về đơn vị, nếu trong đề bài có độ dài a thì ta thường chọn độ dài a làm đơn vị trên các trục. Ưu điểm của phương pháp toạ độ là ta chỉ có một cách giải duy nhất về một loại toán nào đó. Các bước giải như sau:

+ *Bước 1:* Chọn hệ trục tọa độ thích hợp và tìm tọa độ các điểm có liên quan đến yêu cầu bài toán.

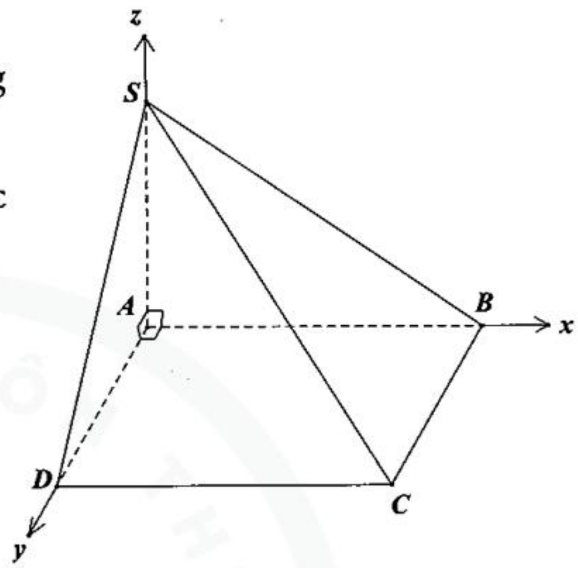
+ *Bước 2:* Chuyển bài toán đã cho về bài toán hình học giải tích và giải.

+ Bước 3: Giải bài toán hình học giải tích trên.

+ Bước 4: Chuyển kết luận của bài toán hình học giải tích sang tính chất hình học tương ứng.

Ví dụ 1

Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với đáy ABCD và $SA = a\sqrt{2}$.



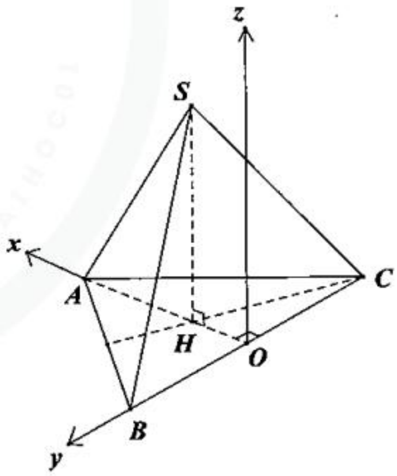
Do $SA \perp (ABCD)$ nên ta đặt trục như hình vẽ với:

$$\begin{cases} O \equiv A \\ \text{Ox} \equiv AB \\ Oy \equiv AD \\ Oz \equiv SA \end{cases}$$

Khi đó:

$$A(0;0;0); B(a;0;0); C(a;a;0); D(0;a;0); S\left(0;0;a\sqrt{2}\right)$$

Ví dụ 2 Cho hình chóp đều SABC cạnh a. Gọi H là trọng tâm tam giác ABC, SH = 2a.



Do H là trọng tâm tam giác ABC, O là trung điểm BC. Do S.ABC đều $\Rightarrow SH \perp (ABC)$

Kẻ $Oz \parallel SH \Rightarrow Oz \perp (ABC)$.

Đặt trục như hình vẽ với $\begin{cases} \text{Ox} \equiv OA \\ Oy \equiv OB \\ Oz \parallel SH \end{cases}$

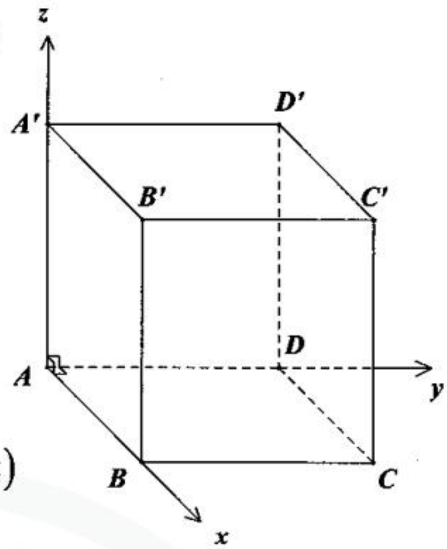
Khi đó:

$$O(0;0;0); A\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};0;0\right); B\left(0;\frac{a}{2};0\right);$$

$$C\left(0;-\frac{a}{2};0\right); S\left(\frac{a\sqrt{3}}{6};0;2a\right)$$

Ví dụ 3

Cho hình lập phương ABCDA'B'C'D' có cạnh là a.



Ta đặt trục như hình vẽ với $\begin{cases} O \equiv A \\ \text{Ox} \equiv \text{AB} \\ Oy \equiv AB \\ Oz \equiv \text{AA'} \end{cases}$

Khi đó

$A(0;0;0); B(a;0;0); C(a;a;0); D(0;a;0);$

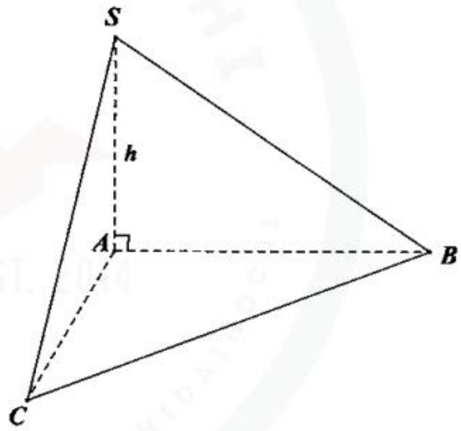
$A'(0;0;a); B'(a;0;a); C'(a;a;a); D'(0;a;a)$

2.3. Các công thức thường sử dụng

a. Công thức tính thể tích

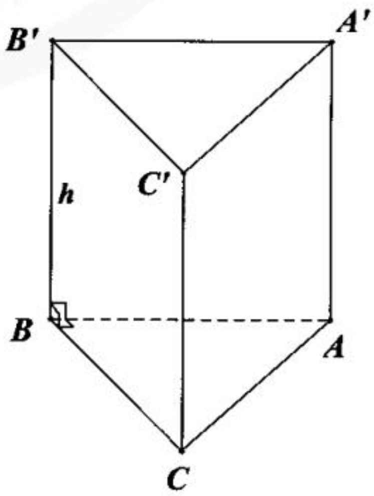
- Công thức tính thể tích:

+ Hình chóp: $V = \frac{1}{3} S.h$

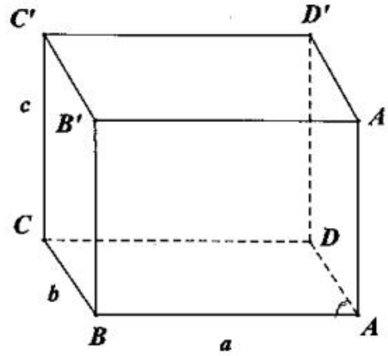


Trong đó: S là diện tích đa giác đáy; h: là đường cao của hình chóp.

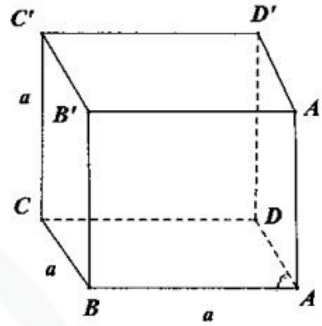
+ Hình lăng trụ: $V = S.h$



+ *Hình hộp chữ nhật:* $V = abc$



+ *Hình lập phương:* $V = a^3$

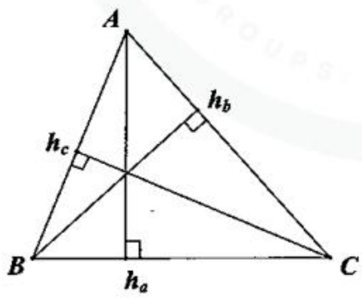


Thể tích được cấu tạo bởi hai yếu tố chính đó là diện tích đáy và chiều cao. Khi đầu bài cho dữ kiện ta cần quan sát mặt đáy trước xem nó thuộc hình nào để áp dụng công thức tính diện tích của hình đó dựa vào các dữ kiện bài cho một số diện tích hình và hệ thức lượng trong tam giác quen thuộc:

- Công thức tính diện tích:

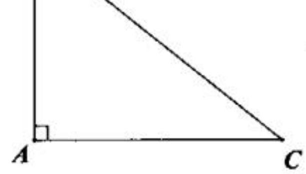
+ *Tam giác thường:*

$$S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}ac\sin B = \frac{1}{2}bc\sin A$$



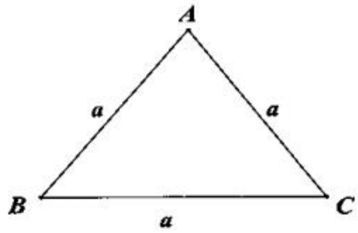
+ *Diện tích tam giác vuông tại A:*

$$S = \frac{1}{2}AB.AC$$



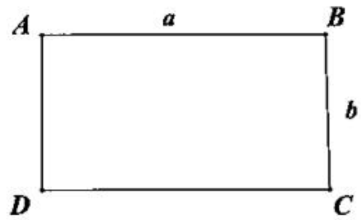
+ Diện tích tam giác đều:

$S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$ (a: cạnh tam giác)



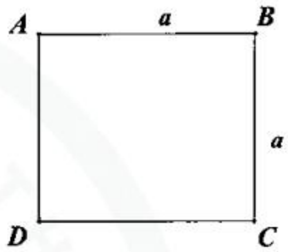
+ Diện tích hình chữ nhật:

$S = ab$ (a, b cạnh hình chữ nhật)



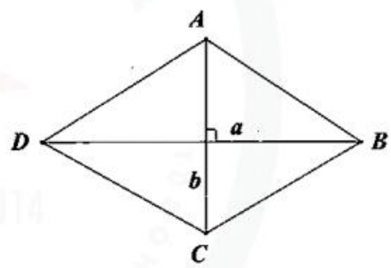
+ Diện tích hình vuông cạnh a:

$S = a^2$ (a: cạnh hình vuông)



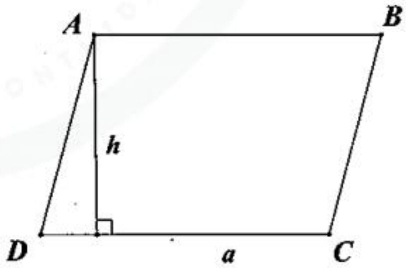
+ Diện tích hình thoi:

$S = \dfrac{1}{2}ab$ (a, b: hai đường chéo hình thoi)



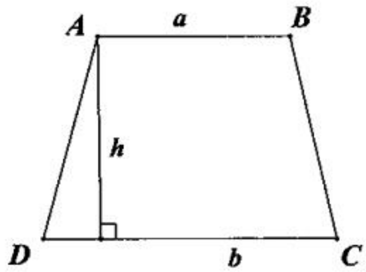
+ Diện tích hình bình hành:

$S =$ a.h (a: cạnh đáy, h: chiều cao)



+ Diện tích hình thang:

$S = \dfrac{1}{2}$(a+b)h (a, b: hai cạnh đáy, h: chiều cao)



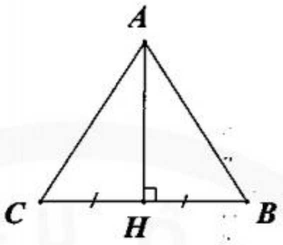
Ngoài các công thức tính diện tích chúng ta còn sử dụng thêm các hệ thức lượng trong tam giác và các cách tính chiều cao như sau:

- ***Hệ thức lượng trong tam giác thường:***

+ *Định lý hàm số côsin:* $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A$

+ *Định lý hàm cô sin:* $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$

- *Tam giác cân:* Đường cao AH cũng là đường trung tuyến

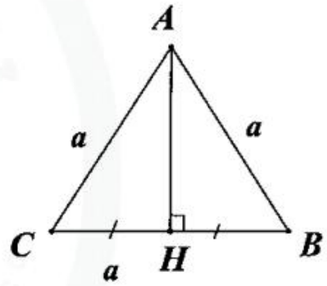


Tính đường cao $AH = BH.\tan\widehat{B} = BH.\tan\widehat{C}$

- *Tam giác đều:*

Tính đường cao:

$$h = AM = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = \frac{AC\sqrt{3}}{2} = \frac{BC\sqrt{3}}{2}$$

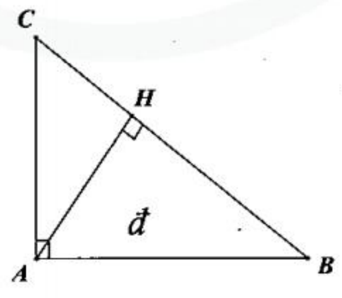


- *Tam giác vuông:*

+ Định lý pitago:

$BC^2 = AB^2 + AC^2 \quad BA^2 = BH.BC \quad AC^2 = CH.CB$

+ Tính đường cao: $AH^2 = HB.HC$; $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2}$



Ngoài ra để giải các bài hình không gian bằng phương pháp tọa độ hóa thì chúng ta cần phải sử dụng các kiến thức sau:

1. Các phần chuyển đổi giữa ngôn ngữ hình học thuần túy sang hình học giải tích:

Đường thẳng MN//mp(P) $\Leftrightarrow \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{n_P}=0$ và $M\notin(P)$

Đường thẳng $MN\perp EF \Leftrightarrow \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{EF}=0$

Đường thẳng $MN\perp mp(P)\Leftrightarrow$

$$\begin{cases}\overrightarrow{MN}\perp\vec{a}\\ \overrightarrow{MN}\perp\vec{b}\\ M\notin(P)\ \text{v}\ \ N\notin(P)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{MN}.\vec{a}=0\\ \overrightarrow{MN}.\vec{b}=0\\ M\notin(P)\ \text{v}\ \ N\notin(P)\end{cases}\Leftrightarrow\left[\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{n_P}\right]=\vec{0}$$

Với $\vec{a},\vec{b}$ là véc tơ chỉ phương của hai đường thẳng a,b (a,b là hai đường thẳng nằm trong mp(P) hoặc song song với mp (P)).

Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng khi và chỉ là $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ hai véc tơ cùng phương hay $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=0$.

Bốn điểm phân biệt không thẳng hàng A, B, C, D đồng phẳng khi và chỉ khi là ba véc tơ đồng phẳng hay $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}=0$

2. Công thức trong không gian

Mặt phẳng (P) ≡ mp (ABC) : $\begin{cases}\text{đi qua } A(x_A;y_A;z_A)\\ vtpt\ \vec{n}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(a;b;c)\end{cases}$

Có phương trình: $a(x\text{-}x_A)+b(y\text{-}y_A)+c(z\text{-}z_A)=0\Leftrightarrow ax+by+cz+d=0$

+ Khoảng cách từ điểm $M(x_M;y_M;z_M)$ đến mặt phẳng (P):

$$d(M;(P))=\frac{|ax_M+by_M+cz_M+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

+ Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau AB và M:

$$d(AB;MN)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{MN}\right].\overrightarrow{AM}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{MN}\right]\right|}=\frac{\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{MN}\right].\overrightarrow{BN}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{MN}\right]\right|}$$

+ Góc giữa hai mặt phẳng có:

$(P): A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ và $(Q): A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$

$$\cos((P),(Q)) = \cos\alpha = \frac{\left|\overrightarrow{n_Q}.\overrightarrow{n_Q}\right|}{\left|\overrightarrow{n_P}\right|.\left|\overrightarrow{n_Q}\right|} = \frac{|A_1.A_2 + B_1.B_2 + C_1.C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}.\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

+ Góc giữa hai đường thẳng d và (Δ) có:

$d: \frac{x - x_1}{a_1} = \frac{y - y_1}{b_1} = \frac{z - z_1}{c_1}$ và $\Delta: \frac{x - x_2}{a_2} = \frac{y - y_2}{b_2} = \frac{z - z_2}{c_2}$

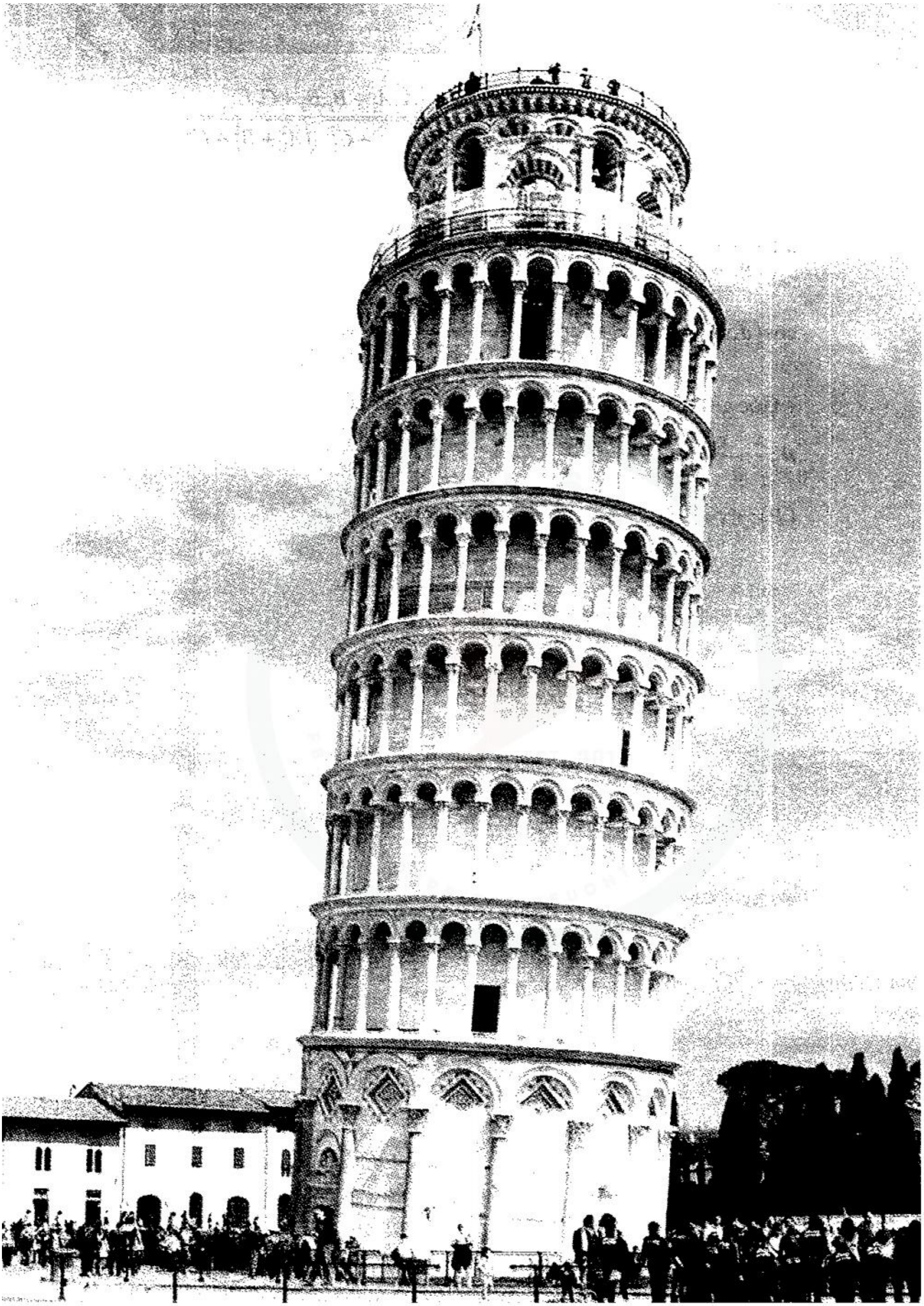
$$\cos(d,\Delta) = \cos\alpha = \frac{\left|\overrightarrow{u_d}.\overrightarrow{u_\Delta}\right|}{\left|\overrightarrow{u_d}\right|.\left|\overrightarrow{u_\Delta}\right|} = \frac{|a_1.a_2 + b_1.b_2 + c_1.c_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}.\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$

+ Góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P) có:

$d: \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$

$(P): Ax + By + Cz + D = 0 \Rightarrow \sin(d,(P))$

$$= \sin\alpha = \frac{\left|\overrightarrow{u_d}.\overrightarrow{n_P}\right|}{\left|\overrightarrow{u_d}\right|.\left|\overrightarrow{n_P}\right|} = \frac{|a.A + b.B + c.C|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$



PHẦN II

GIẢI THEO HAI PHƯƠNG PHÁP

HÌNH CHÓP

DẠNG 1. THỂ TÍCH HÌNH CHÓP ĐỀU

Đặc điểm:

- *Chân đường cao trùng với tâm đáy.*

Đáy là đa giác đều (hình vuông và tam giác đều là chính)

- *Các cạnh bên bằng nhau.*

Nhận xét: Đáy cho đầy đủ:

- Tam giác: đều, vuông, thường, đặc biệt
- Tứ giác: vuông, chữ nhật, bình hành, thang, thoi và đặc .

Bài 1

Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA=a$. Gọi là điểm đối xứng của D qua trung điểm của cạnh SA, M là trung điểm của cạnh AE, N là trung điểm của cạnh BC. Chứng minh BD vuông góc với MN và tính khoảng cách giữa hai đường thẳng MN và AC.

➤ **Lời giải:**

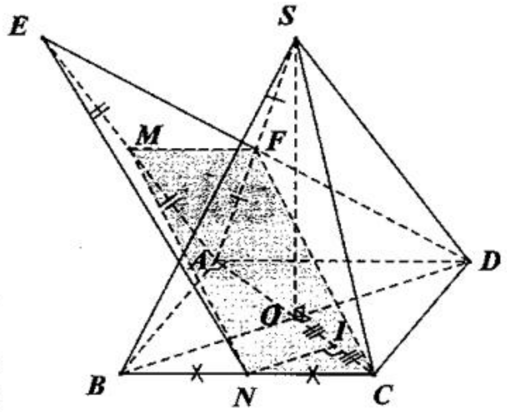
Cách 1: Phương pháp thuần túy

Gọi F là trung điểm của SA.

Theo giả thiết ta có $MF \parallel AD \parallel NC$ và $MF=NC$, suy ra $MFCN$ là hình bình hành, nên $MN \parallel CF$.

Ta có $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SO \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC)$

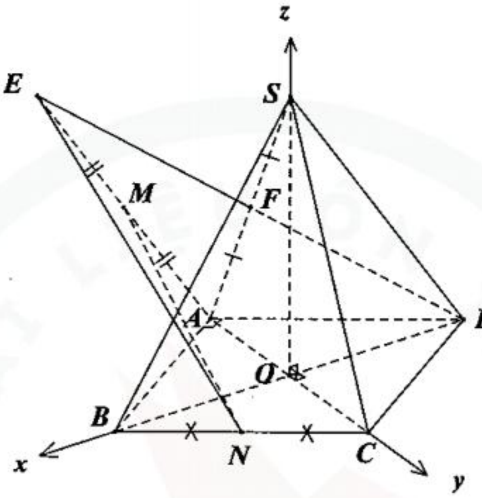
$\Rightarrow BD \perp CF \Rightarrow BD \perp MN.$



Cách 2: Phương pháp tọa độ không gian

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ.

$O \equiv O(0;\,0;\,0)$, $Ox \equiv OB$, $Oy \equiv OC$, $Oz \equiv SO$



Chọn $a = 1$, khi đó:

$A\left(0;\,-\dfrac{\sqrt{2}}{2};\,0\right)$, $B\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2};\,0;\,0\right)$, $C\left(0;\,\dfrac{\sqrt{2}}{2};\,0\right)$, $D\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2};\,0;\,0\right)$, $N\left(\dfrac{\sqrt{2}}{4};\,\dfrac{\sqrt{2}}{4};\,0\right)$,

$S(0;\,0;\,1)$ suy ra $F\left(0;\,\dfrac{-\sqrt{2}}{4};\,\dfrac{1}{2}\right)$, $E\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2};\,\dfrac{-\sqrt{2}}{2};\,1\right)$, $M\left(\dfrac{\sqrt{2}}{4};\,-\dfrac{\sqrt{2}}{2};\,\dfrac{1}{2}\right)$.

Ta có $\overrightarrow{MN} = \left(0;\,\dfrac{3\sqrt{2}}{4};\,\dfrac{-1}{2}\right)$, $\overrightarrow{BD} = \left(-\sqrt{2};\,0;\,0\right)$, $\overrightarrow{AC} = \left(0;\,\sqrt{2};\,0\right)$,

$\overrightarrow{NC} = \left(-\dfrac{\sqrt{2}}{4};\,\dfrac{\sqrt{2}}{4};\,0\right)$.

Do đó $\overrightarrow{MN}.\,\overrightarrow{BD} = 0.\left(-\sqrt{2}\right) + \dfrac{3\sqrt{2}}{4}.0 + \dfrac{-1}{2}.0 = 0 \Rightarrow MN \perp BD$.

Ta có

$\left[\overrightarrow{MN},\,\overrightarrow{AC}\right] = \left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2};\,0;\,0\right) \Rightarrow \left[\overrightarrow{MN},\,\overrightarrow{AC}\right].\,\overrightarrow{NC} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}.\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right) + 0.\dfrac{\sqrt{2}}{4} + 0.0 = \dfrac{1}{4}$

$\Rightarrow \left|\left[\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{NC}\right| = \dfrac{1}{4}$.

Khoảng cách giữa hai đường thẳng MN và AC là:

$$d(MN, AC) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{NC}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{AC}\right]\right|} = \frac{\frac{1}{4}}{\sqrt{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 0^2 + 0^2}} = \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4}a$$

(do ta chọn $a = 1$).

Nhận xét: Đối với bài tập này nếu giải bằng phương pháp bình thường thì học sinh phải làm rất phức tạp như: phải xác định đoạn vuông góc chung của MN và AC, rồi tính độ dài đoạn đó rất khó đối với học sinh, nhưng khi giải như trên thì dễ dàng cho học sinh vì chỉ vận dụng công thức và tính toán.

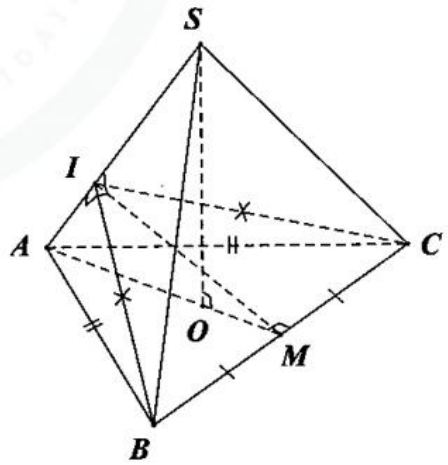
Bài 2

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, $SA = SB = SC$; biết hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) vuông góc với nhau. Tính theo a khoảng cách từ điểm S đến mặt phẳng (ABC).

➤ **Lời giải:**

Cách 1: Phương pháp thuần túy

Gọi O là tâm của tam giác ABC



Ta có $\begin{cases} SA = SB = SC \\ OA = OB = OC \end{cases}$

$\Rightarrow SO$ là trục của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC

$\Rightarrow SO \perp (ABC)$.

Mà $AO \perp BC$;

$SO \perp BC \Rightarrow BC \perp (SOA) \Rightarrow BC \perp SA$.

Kẻ $BI \perp SA$, suy ra $SA \perp (IBC) \Rightarrow SA \perp IC$.

$\Rightarrow \widehat{BIC}$ là góc phẳng nhị diện (B, SA, C).

Giả sử $h = d\left(S,(ABC)\right)$.

Tam giác SOA vuông, nên ta có

$$SA^2 = SO^2 + OA^2 = h^2 + \frac{a^2}{3} = \frac{3h^2 + a^2}{3} \Rightarrow SA = \frac{\sqrt{3h^2 + a^2}}{\sqrt{3}}.$$

Gọi M là trung điểm của BC

Ta có $BM \perp (SOA)$, $BI \perp SA$

$\Rightarrow IM \perp SA$ (định lý 3 đường vuông góc)

$$\Rightarrow \Delta MIA \backsim \Delta SOA \Rightarrow MI = SO.\frac{AM}{SA} = h.\frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3h^2+a^2}} = \frac{3ah}{2\sqrt{3h^2+a^2}}.$$

$\Delta SAB = \Delta SAC$ (c – c – c), suy ra $IB = IC \Rightarrow \Delta IBC$ cân tại I.

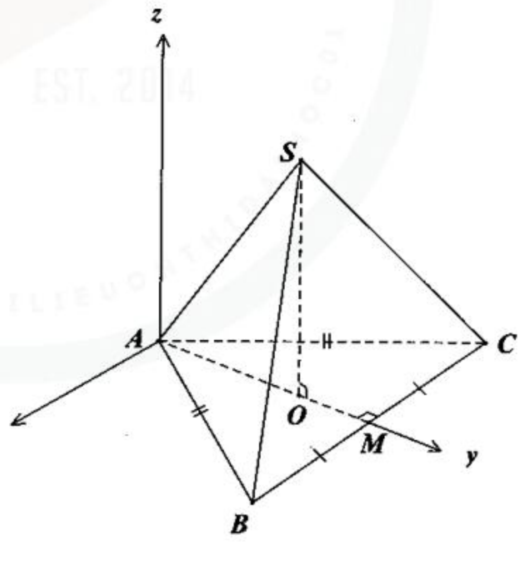
$(SAB) \perp (SAC) \Leftrightarrow \Delta IBC$ vuông cân tại $I \Leftrightarrow IM = \frac{1}{2}BC$

$$\Leftrightarrow \frac{3ah}{2\sqrt{3h^2+a^2}} = \frac{1}{2}a \Leftrightarrow 3h = \sqrt{3h^2+a^2} \Leftrightarrow 9h^2 = 3h^2 + a^2 \Leftrightarrow h = \frac{a\sqrt{6}}{6}.$$

Vậy $d\left(S,(ABC)\right) = \frac{a\sqrt{6}}{6}$.

Cách 2: Phương pháp tọa độ không gian

Chọn hệ trục tọa độ O'xyz như hình vẽ.



$A \equiv O'(0;0;0)$, $O'y \equiv OM$, $O'y \equiv OM$, $O'z \equiv OS$.

Chọn $a = 1$, khi đó $B\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$,

$C\left(-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$, $O\left(0;\frac{\sqrt{3}}{3};0\right)$, $S\left(0;\frac{\sqrt{3}}{3};h\right)$

Ta có $\overrightarrow{SA} = \left(0;-\frac{\sqrt{3}}{3};-h\right)$,

$\overrightarrow{SB} = \left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{6};-h\right)$, $\overrightarrow{SC} = \left(-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{6};-h\right)$.

Lại có $\left[\overrightarrow{SA},\overrightarrow{SB}\right] = \left(\frac{h\sqrt{3}}{2};\frac{-h}{2};\frac{\sqrt{3}}{6}\right) = \overrightarrow{n_1}$.

$$\left[\overrightarrow{SA},\overrightarrow{SC}\right]=\left(\frac{h\sqrt{3}}{2};-\frac{h}{2};-\frac{\sqrt{3}}{6}\right)=\overrightarrow{n_2}$$

Mặt phẳng (SAB) có cặp véctơ chỉ phương $\overrightarrow{SA};\overrightarrow{SB}$ nên có vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_1}$.

Mặt phẳng (SAC) có cặp véctơ chỉ phương $\overrightarrow{SA};\overrightarrow{SC}$ nên có vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_2}$.

Do $(SAB)\perp(SAC)\Leftrightarrow\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}=0$

$$\Leftrightarrow\frac{h\sqrt{3}}{2}.\frac{h\sqrt{3}}{2}+\left(\frac{-h}{2}\right).\left(\frac{-h}{2}\right)+\frac{\sqrt{3}}{6}.\left(\frac{-\sqrt{3}}{6}\right)=0,\ h^2=\frac{1}{12}\Rightarrow h=\frac{1}{\sqrt{12}}a$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{2}h^2=\frac{1}{12}\Leftrightarrow h^2=\frac{1}{6}\Leftrightarrow h=\frac{\sqrt{6}}{6}=\frac{a\sqrt{6}}{6}\text{ (do ta chọn } a=1).$$

Vậy $d\left(S,(ABC)\right)=\dfrac{a\sqrt{6}}{6}$.

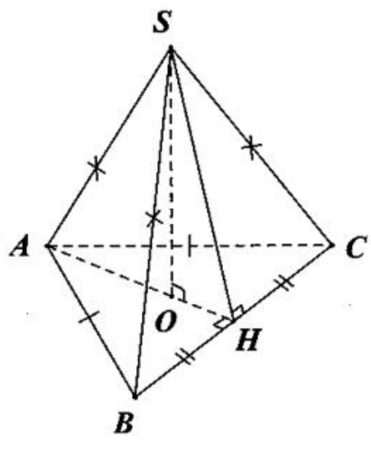
Nhận xét: Hình chóp tam giác đều, các cạnh bên bằng nhau dẫn đến hình chiếu của đỉnh lên mặt phẳng đáy chính là tâm của đa giác đáy.

Ở đây ta có thể chọn gốc tọa độ là tâm của đa giác đáy hoặc chọn tại điểm M hay A.

Bài 3

Cho hình chóp đều $S.ABC$, đáy ABC có cạnh bằng a, mặt bên tạo với đáy một góc bằng φ $(0^\circ<\varphi<90^\circ)$. Tính theo a thể tích khối $S.ABC$ và khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC).

➢ **Lời giải:**



Cách 1: Phương pháp thuần túy

Gọi H là trung điểm của BC.

Do $S.ABC$ đều và tam giác ABC đều nên chân đường cao đỉnh S trùng với giao điểm ba đường cao là trực tâm O của tam giác ABC và có tam giác SBC cân tại S; suy ra $BC\perp SH$, $BC\perp AH$ nên $\widehat{SHA}=\varphi$.

Ta có $\overrightarrow{SA}=\left(0;-\frac{\sqrt{3}}{3};-\frac{\sqrt{3}}{6}\tan\varphi\right)$, $\overrightarrow{SB}=\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{6};-\frac{\sqrt{3}}{6}\tan\varphi\right)$,

$\overrightarrow{SC}=\left(-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{6};-\frac{\sqrt{3}}{6}\tan\varphi\right)$.

$\Rightarrow\left[\overrightarrow{SA},\overrightarrow{SB}\right]=\left(\frac{1}{4}\tan\varphi;-\frac{\sqrt{3}}{12}\tan\varphi;\frac{\sqrt{3}}{6}\right)$

$\Rightarrow\left[\overrightarrow{SA},\overrightarrow{SB}\right].\overrightarrow{SC}=\frac{1}{4}\tan\varphi.\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{\sqrt{3}}{12}\right)\tan\varphi.\frac{\sqrt{3}}{6}+\frac{\sqrt{3}}{6}.\left(-\frac{\sqrt{3}}{6}\tan\varphi\right)$

$=-\frac{1}{4}\tan\varphi$

$\Rightarrow\left|\left[\overrightarrow{SA},\overrightarrow{SB}\right].\overrightarrow{SC}\right|=\left|-\frac{1}{4}\tan\varphi\right|=\frac{1}{4}\tan\varphi.$

Thể tích khối chóp $S.ABC$:

$V_{S.ABC}=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{SA},\overrightarrow{SB}\right].\overrightarrow{SC}\right|=\frac{\tan\varphi}{24}=\frac{\tan\varphi}{24}a^3$ (đvtt) (do ta chọn $a=1$).

Ta có $\overrightarrow{BS}=\left(-\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{6};\frac{\sqrt{3}}{6}\tan\varphi\right)$, $\overrightarrow{BC}=(-1;0;0)$.

$\left[\overrightarrow{BS},\overrightarrow{BC}\right]=\left(0;-\frac{\sqrt{3}}{6}\tan\varphi;-\frac{\sqrt{3}}{6}\right)=\vec{n}.$

Phương trình mặt phẳng (SBC) qua B với véctơ pháp tuyến $\vec{n}$ là:

$0\left(x-\frac{1}{2}\right)-\frac{\sqrt{3}}{6}\tan\varphi\left(y-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\frac{\sqrt{3}}{6}(z-0)=0\Leftrightarrow\tan\varphi y+z-\frac{\sqrt{3}}{2}\tan\varphi=0.$

Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) là:

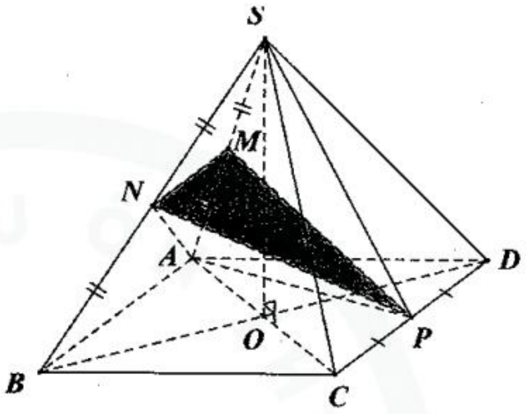
$$d\left(A,(SBC)\right)=\frac{\left|0.\tan\varphi+0-\frac{\sqrt{3}}{2}\tan\varphi\right|}{\sqrt{\tan^2\varphi+1}}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\tan\varphi}{\frac{1}{\cos\varphi}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\varphi.$$

Bài 4

Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có $AB = a$, $SA = a\sqrt{2}$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, SB và CD. Chứng minh rằng đường thẳng MN vuông góc với đường thẳng SP. Tính theo a thể tích của khối tứ diện $AMNP$.

➤ **Lời giải:**

Cách 1: **Phương pháp thuần túy**



Ta có $MN \parallel CD$ và $SP \perp CD$, suy ra $MN \perp SP$.

Gọi O là tâm của đáy $ABCD$.

Ta có $SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Thể tích khối tứ diện $AMNP$ là:

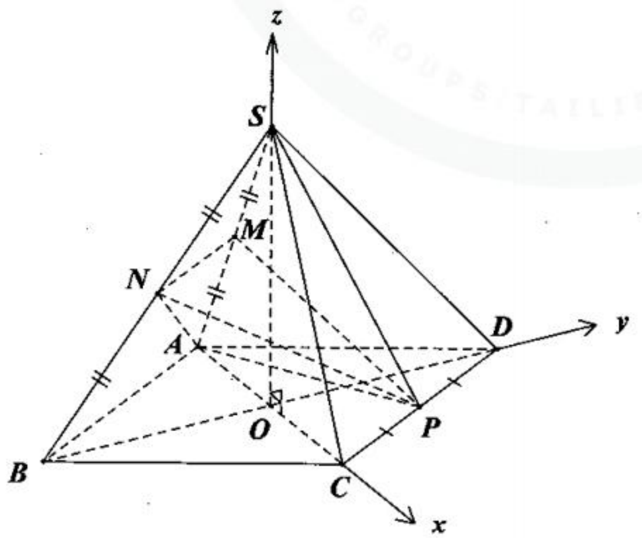
$V_{A.MNP} = \dfrac{1}{4}V_{ABSP} = \dfrac{1}{8}V_{S.ABCD}$

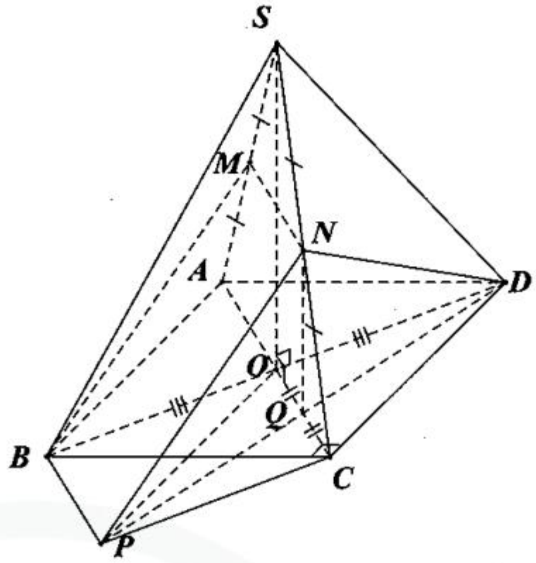
$= \dfrac{1}{8}.\dfrac{1}{3}SO.AB^2 = \dfrac{\sqrt{6}}{48}a^3$ (đvtt).

Cách 2: **Phương pháp tọa độ không gian**

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ.

$O \equiv O(0; 0; 0)$, $Ox \equiv OC$, $Oy \equiv OD$, $Oz \equiv OS$.





Qua B kẻ đường thẳng d song song với AC. Qua O kẻ đường thẳng d' song song với AB. 2 đường thẳng này cắt nhau tại P. Suy ra $AOPB$ là hình bình hành PD cắt AC tại Q.

Theo cách dựng ta có:

$$\begin{cases} BP // AC // MN \\ BP = AO = MN \end{cases} \Rightarrow MB // = NP$$

Lại có, theo tính chất đối xứng trục của hình chóp đều. Suy ra $ND = BM$.

Suy ra $\begin{cases} DN = NP \\ DN \perp NP \end{cases} \Rightarrow NQ = DQ$.

Ta có $\begin{cases} PO // = AB \\ AB // = CD \end{cases} \Rightarrow PO // = CD = a$

Suy ra $PODC$ là hình bình hành $\Rightarrow OQ = QC$.

Lại có $NC = NS \Rightarrow NQ = \frac{1}{2}SO$ (tính chất đường trung bình).

Ta có $OD = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{\sqrt{2}}a$, $\widehat{BDC} = 45°$. Áp dụng định lý hàm số cos.

$$DP = \sqrt{DC^2 + DO^2 + 2.DC.DO.\cos(\widehat{BDC})} = \sqrt{\frac{5}{2}}a.$$

$$\Rightarrow SO = DP = \sqrt{\frac{5}{2}}a.$$

Vậy thể tích khối chóp $S.ABCD$ là:

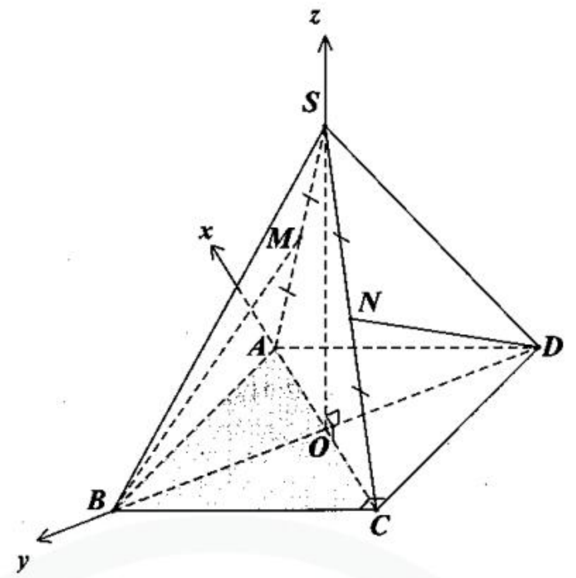
$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}.S_{ABCD}.SO = \frac{1}{3}.\frac{\sqrt{10}}{2}.a^3 = \frac{\sqrt{10}}{6}a^3 \text{ (đvdt)}$$

Cách 2: ***Phương pháp tọa độ không gian***

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ.

$O \equiv O(0; 0; 0)$, $Ox \equiv OA$, $Oy \equiv OB$, $Oz \equiv OS$.

Giả sử $SO = h$.



Chọn $a=1$, khi đó $A\left(\frac{\sqrt{2}}{2};0;0\right)$, $B\left(0;\frac{\sqrt{2}}{2};0\right)$, $C\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};0;0\right)$,

$D\left(0;-\frac{\sqrt{2}}{2};0\right)$, $S(0;0;h)$ suy ra $M\left(\frac{1}{2\sqrt{2}};0;\frac{h}{2}\right)$, $N\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}};0;\frac{h}{2}\right)$.

Ta có $\overrightarrow{BM}=\left(\frac{1}{2\sqrt{2}};-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{h}{2}\right)$, $\overrightarrow{DN}=\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}};\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{h}{2}\right)$.

$\overrightarrow{BM}.\,\overrightarrow{DN}=0\Leftrightarrow -\frac{1}{8}-\frac{1}{2}+\frac{h^2}{4}=0\Leftrightarrow h=\frac{\sqrt{10}}{2}=\frac{\sqrt{10}}{2}a$ (do ta chọn $a=1$).

Do đó $S\left(0;0;\frac{\sqrt{10}}{2}\right)$.

Ta có $\overrightarrow{SA}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2};0;-\frac{\sqrt{10}}{2}\right)$, $\overrightarrow{SB}=\left(0;\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{10}}{2}\right)$, $\overrightarrow{SC}=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};0;-\frac{\sqrt{10}}{2}\right)$.

$\Rightarrow\left[\overrightarrow{SA},\overrightarrow{SB}\right]=\left(\frac{\sqrt{5}}{2};\frac{\sqrt{5}}{2};\frac{1}{2}\right)$

$\Rightarrow\left[\overrightarrow{SA},\overrightarrow{SB}\right].\overrightarrow{SC}=\frac{\sqrt{5}}{2}.\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\frac{\sqrt{5}}{2}.0+\frac{1}{2}.\left(-\frac{\sqrt{10}}{2}\right)=-\frac{\sqrt{10}}{2}$

$\Rightarrow\left|\left[\overrightarrow{SA},\overrightarrow{SB}\right].\overrightarrow{SC}\right|=\frac{\sqrt{10}}{2}$.

Vậy thể tích khối chóp $S.ABCD$ là:

$V_{S.ABCD} = 2.V_{S.ABC} = 2.\frac{1}{6}.\left|\left[\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SB}\right].\overrightarrow{SC}\right| = 2.\frac{1}{6}.\frac{\sqrt{10}}{2} = \frac{\sqrt{10}}{6} = \frac{\sqrt{10}}{6}a^3$ (đvdt)

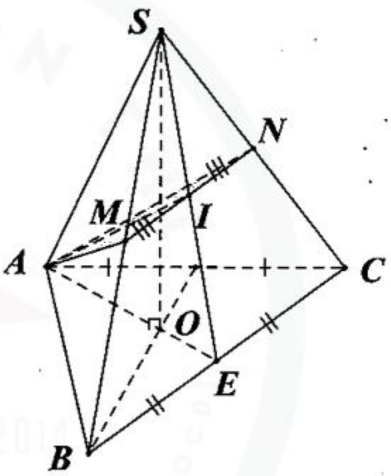
(do ta chọn $a = 1$).

Bài 6

Cho hình chóp đều $S.ABC$ có cạnh bằng a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB, SC. Biết rằng mặt phẳng (AMN) vuông góc với mặt phẳng (SBC). Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABC$.

➤ **Lời giải:**

Cách 1: ***Phương pháp thuần túy***



Gọi O là tâm tam giác đều ABC và vì $S.ABC$ là chóp đều, suy ra $SO \perp (ABC)$.

Ta tính được $AE = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; $OE = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Gọi I là trung điểm của MN

E là trung điểm của BC

$\widehat{AIS} = 90^\circ$ do $(AMN) \perp (SBC)$.

Đặt $SO = x \Rightarrow SA = \sqrt{\frac{a^2}{3} + x^2}$; $SI = \frac{1}{2}SE$

với $SE = \sqrt{\frac{a^2}{12} + x^2}$.

Tam giác SAI vuông tại I nên ta có $AS^2 = SI^2 + AI^2$ (1).

Sử dụng các hệ thức trong tam giác và tam giác vuông ta lần lượt tính được độ dài của:

$$AM = \sqrt{\frac{2\left(SA^2 + AB^2\right) - SB^2}{4}} = \sqrt{\frac{7a^2}{12} + \frac{x^2}{4}};$$

$$AI = \sqrt{AM^2 - IM^2} = \sqrt{\frac{25a^2}{48} + \frac{x^2}{4}}.$$

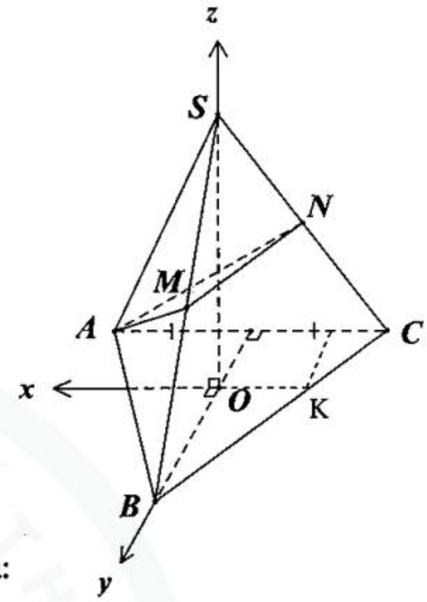
Thay vào công thức (1) ta được:

$$\frac{a^2}{3} + x^2 = \frac{a^2}{48} + \frac{x^2}{4} + \frac{25a^2}{48} + \frac{x^2}{4} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{15}}{6}a.$$

Thể tích khối chóp $S.ABC$ là:

$$V_{S.ABC}=\frac{1}{3}SO.S_{ABC}=\frac{1}{3}.\frac{\sqrt{15}}{6}a\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{2}a^2=\frac{\sqrt{5}}{24}a^3 \text{ (đvdt).}$$

Cách 2: ***Phương pháp tọa độ không gian***



Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ.

$O\equiv O(0;0;0)$, $Ox\parallel CA$, $Oy\equiv OB$, $Oz\equiv OS$.

Giả sử $SO=h$.

Chọn $a=1$, khi đó $A\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2\sqrt{3}};0\right)$,

$B\left(0;\frac{1}{\sqrt{3}};0\right)$, $C\left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{2\sqrt{3}};0\right)$, $S(0;0;h)$

Suy ra $M\left(0;\frac{1}{2\sqrt{3}};\frac{h}{2}\right)$, $N\left(-\frac{1}{4};-\frac{1}{4\sqrt{3}};\frac{h}{2}\right)$.

Mặt phẳng (AMN) có cặp véctơ chỉ phương là:

$\overrightarrow{AM}=\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{h}{2}\right)$ và $\overrightarrow{AN}=\left(-\frac{3}{4};\frac{1}{4\sqrt{3}};\frac{h}{2}\right)$.

Vậy mặt phẳng (AMN) có véctơ pháp tuyến là

$\left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AN}\right]=\left(\frac{3h}{8\sqrt{3}};\frac{-h}{8};\frac{5}{8\sqrt{3}}\right)\parallel\vec{\alpha}\left(\frac{3h}{\sqrt{3}};-h;\frac{5}{\sqrt{3}}\right)$.

Mặt phẳng (SBC) cắt trục Ox tại $K\left(-\frac{1}{3};0;0\right)$ và đi qua $B\left(0;\frac{1}{\sqrt{3}};0\right)$, $S(0;0;h)$ nên có phương trình đoạn chắn là:

$(SBC):-\frac{3x}{1}+\frac{\sqrt{3}y}{1}+\frac{z}{h}-1=0$.

Vậy mặt phẳng (SBC) có véctơ pháp tuyến là $\vec{\beta}\left(-3;\sqrt{3};\frac{1}{h}\right)$.

Ta có $(AMN)\perp(SBC)\Leftrightarrow\vec{\alpha}.\vec{\beta}=0\Leftrightarrow-\frac{9h}{\sqrt{3}}-h\sqrt{3}+\frac{5}{h\sqrt{3}}=0\Leftrightarrow h=\sqrt{\frac{5}{12}}$.

Do đó $S\left(0;0;\sqrt{\frac{5}{12}}\right)$.

Ta có $\overrightarrow{SA}=\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2\sqrt{3}};-\sqrt{\frac{5}{12}}\right)$, $\overrightarrow{SB}=\left(0;\frac{1}{\sqrt{3}};-\sqrt{\frac{5}{12}}\right)$,

Áp dụng Pytago trong tam giác BME

$$BE^2 = BM^2 + ME^2 = \frac{5}{4}BM^2 \Leftrightarrow \frac{9x^2}{16} + \frac{a^2}{4} = \frac{5}{4}\left(\frac{a^2}{2} + \frac{x^2}{4}\right) \Leftrightarrow x = \frac{a\sqrt{6}}{2}$$

Ta có $BH = \frac{2}{3}BK = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, suy ra $SH = \sqrt{SB^2 - BH^2} = \frac{a\sqrt{42}}{6}$.

Diện tích tam giác ABC là:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \text{ (đvdt)}.$$

Thể tích khối chóp $S.ABC$ là:

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3}SH.S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{42}}{6}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{126}}{72} \text{ (đvtt)}.$$

Trong (SHC), vẽ đường thẳng qua N vuông góc với SC, cắt SH tại I.

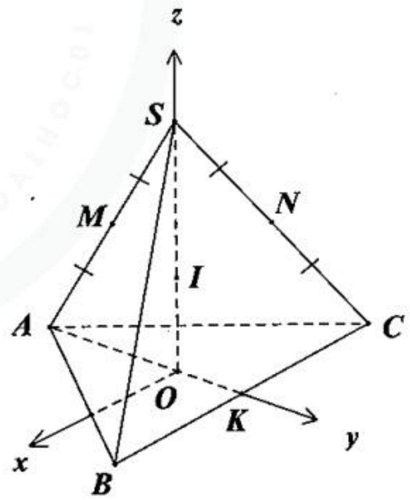
Suy ra I là tâm đường tròn ngoại tiếp khối chóp.

Vì $NIHC$ là tứ giác nội tiếp, nên

$$SI.SH = SN.SC \Rightarrow R = SI = \frac{SC^2}{2.SH} = \frac{3a^2}{4.\frac{a\sqrt{42}}{6}} = \frac{9}{2\sqrt{42}}a.$$

Cách 2: ***Phương pháp tọa độ không gian:***

Gọi O là tâm của tam giác đều ABC và K là trung điểm của BC, khi đó $OK = \frac{1}{3}AK = \frac{a\sqrt{3}}{6}$, $AO = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, $KB = KC = \frac{a}{2}$.



Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ.

$O \equiv O(0;0;0)$, $Ox \parallel BC$, $Oy \equiv OK$, $Oz \equiv OS$.

Giả sử $SO = h$ $(h > 0)$.

Chọn $a = 1$, khi đó $A\left(0; -\frac{\sqrt{3}}{3}; 0\right)$,

$B\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{6}; 0\right)$, $C\left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{6}; 0\right)$, $S(0;0;h)$

Suy ra $M\left(0; -\frac{\sqrt{3}}{6}; \frac{h}{2}\right)$, $N\left(-\frac{1}{4}; \frac{\sqrt{3}}{12}; \frac{h}{2}\right)$.

Ta có $\overrightarrow{BM}=\left(-\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{3};\frac{h}{2}\right)$, $\overrightarrow{AN}=\left(-\frac{1}{4};\frac{5\sqrt{3}}{12};\frac{h}{2}\right)$.

Do $BM\perp AN$ nên $\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{AN}=0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{8}-\frac{15}{36}+\frac{h^2}{4}=0 \Leftrightarrow h=\frac{\sqrt{42}}{6}=\frac{\sqrt{42}}{6}a$ (do ta chọn $a=1$).

Thể tích khối chóp $S.ABC$ là:

$V_{S.ABC}=\frac{1}{3}SO.S_{\Delta ABC}=\frac{1}{3}.\frac{\sqrt{42}}{6}.\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{14}}{24}=\frac{\sqrt{14}}{24}a^3$ (do ta chọn $a=1$).

Gọi I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp, dễ thấy $I\in SO$ nên $I(0;0;m)$.

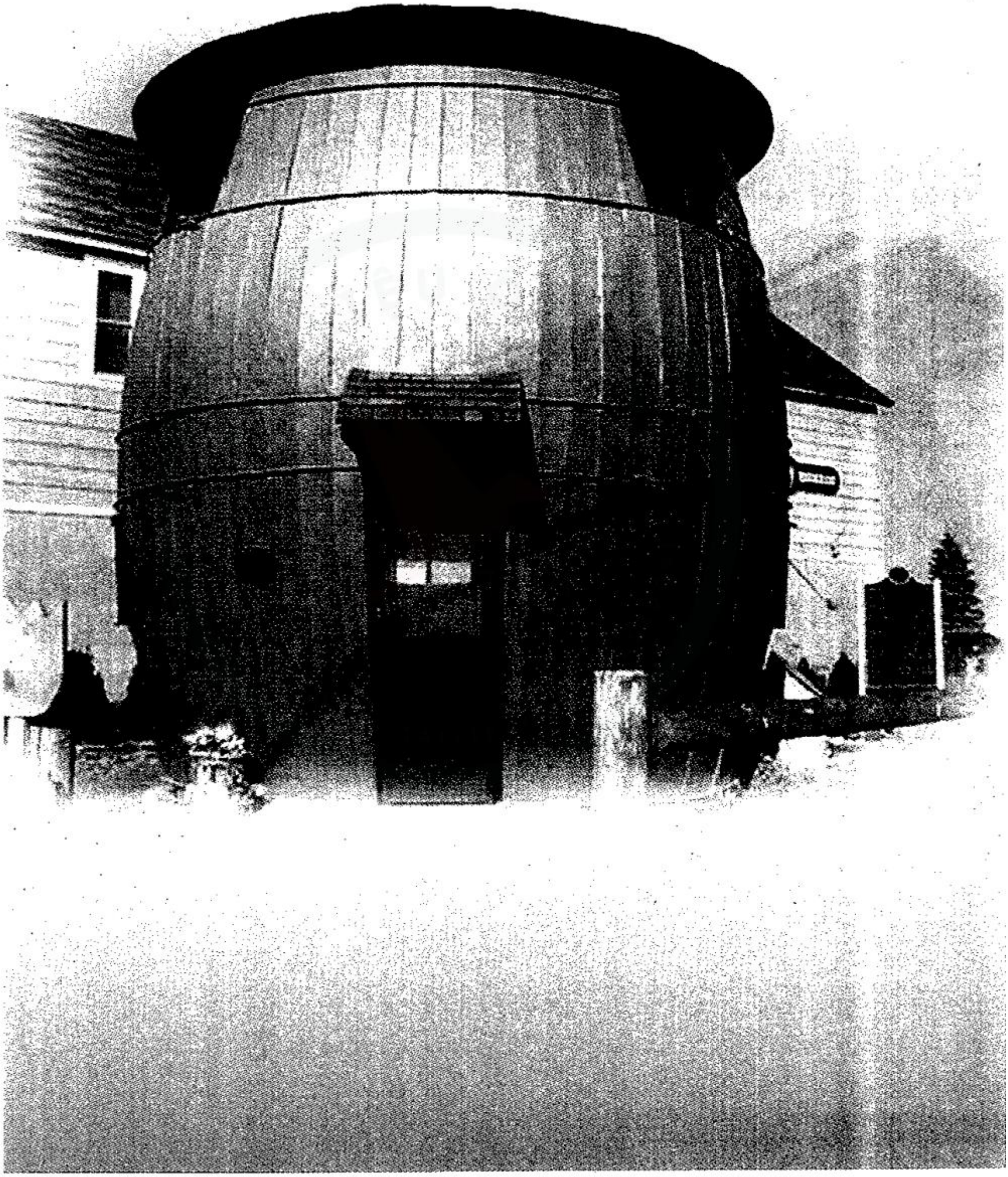
Ta có $IA^2=IS^2 \Leftrightarrow \frac{1}{3}+m^2=\left(\frac{\sqrt{42}}{6}-m\right)^2$

$\overrightarrow{IA}\left(0;\frac{-\sqrt{3}}{3};-m^2\right),\overrightarrow{IS}\left(0;0;\frac{\sqrt{42}}{6}-m\right)$

$\overrightarrow{IA}=\left(0;\frac{-\sqrt{3}}{3};-m^2\right);\overrightarrow{IS}=\left(0,0,\frac{\sqrt{42}}{6}-m\right)$

$\Leftrightarrow \frac{1}{3}+m^2=\frac{7}{6}-\frac{\sqrt{42}}{3}m+m^2 \Leftrightarrow m=\frac{5}{2\sqrt{42}}$.

Vậy $R=IA=\sqrt{\frac{1}{3}+\frac{25}{168}}=\frac{9}{2\sqrt{42}}=\frac{9}{2\sqrt{42}}a$ (do ta chọn $a=1$).



DẠNG 2. THỂ TÍCH HÌNH CHÓP CÓ CẠNH BÊN VUÔNG GÓC VỚI MẶT ĐÁY

Đặc điểm:

- Cạnh bên vuông góc với đáy là đường cao của hình chóp lớn.
- Hai mặt phẳng cùng vuông góc với đáy thì giao tuyến của chúng vuông góc với đáy.

Bài 1

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, góc $\widehat{ABC} = 60°$. Cạnh bên $SA \perp (ABCD)$ vuông góc đáy và $SA = a\sqrt{3}$.

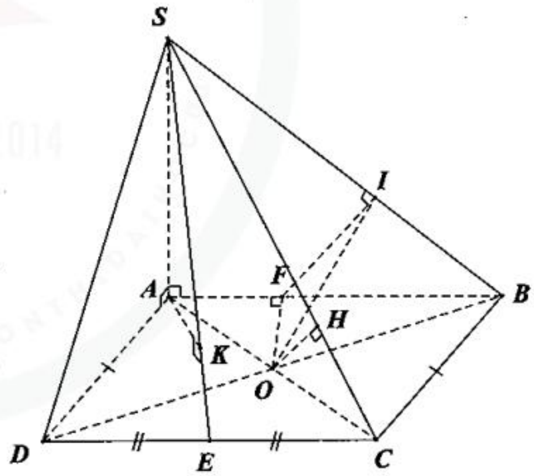
a) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SC và BD.

b) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SC và AB.

c) Tính số đo của góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SBD).

➢ **Lời giải:**

Cách 1: Phương pháp thuần túy



a) Gọi O là giao điểm của AC và BD.

Ta có $SA \perp (ABCD)$ suy ra $SA \perp BD$, mà $BD \perp AC$ nên $BD \perp (SAC)$.

Kẻ $OH \perp SC$ $(H \in SC)$ suy ra OH là đoạn vuông góc chung của SC và BD.

Tam giác ABC đều nên $AC = a$, tam giác SAC vuông tại A nên

$\tan\widehat{SCA} = \dfrac{SA}{AC} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SCA} = 60°$.

Tam giác OHC vuông tại H nên $\sin\widehat{OCH} = \dfrac{OH}{OC} \Rightarrow OH = \dfrac{a}{2}.\sin 60° = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

Vậy $d(SC, BD) = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

b) Gọi E là trung điểm của CD, vì tam giác ACD đều nên

$AE \perp CD \Rightarrow SE \perp CD$.

Suy ra $CD \perp (SAE) \Rightarrow (SCD) \perp (SAE)$ mà $(SCD) \cap (SAE) = SE$.

Kẻ $AK \perp SE$ ($K \in SE$) suy ra $AK \perp (SCD)$.

Do đó $d(A, (SCD)) = AK$, mà $AB \parallel (SCD) \Rightarrow d(SC, AB) = AK$.

Tam giác SAE vuông tại A, có $AE = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ nên

$\dfrac{1}{AK^2} = \dfrac{1}{AS^2} + \dfrac{1}{AE^2} \Rightarrow AK = \dfrac{\sqrt{15}}{5}a$.

Khoảng cách giữa hai đường thẳng SC và AB là:

$d(SC, AB) = AK = \dfrac{\sqrt{15}}{5}a$.

c) Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SBD).

Kẻ $OF \perp AB$ $(F \in AB)$.

Vì $(SAB) \perp (ABCD) \Rightarrow OF \perp (SAB)$.

Kẻ $FI \perp SB$ ($I \in SB$) suy ra $OI \perp SB$ (định lý 3 đường vuông góc)

Do đó góc $\widehat{OIF}$ là góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SBD).

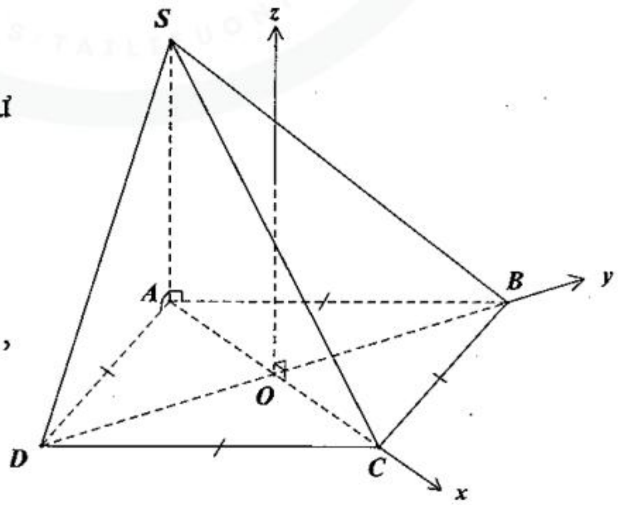
Tam giác OBF vuông tại F có $\widehat{OBF} = 30° \Rightarrow OF = OB.\sin 30° = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$ và $BF = OB.\cos 30° = \dfrac{3a}{2}$.

Tam giác SAB vuông tại A nên $\tan\widehat{SBA} = \dfrac{SA}{AB} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SBA} = 60°$.

Tam giác BIF vuông tại I nên $IF = BF.\sin 60° = \dfrac{3a\sqrt{3}}{8}$.

Tam giác OIF vuông tại F nên $\tan\alpha = \dfrac{OF}{IF} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow \alpha = \arctan\dfrac{2}{3}$.

Cách 2: **Phương pháp tọa độ không gian**



Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ.

$O \equiv O(0; 0; 0)$, $Ox \equiv OC$,

$Oy \equiv OB$, $Oz \parallel SA$.

Chọn $a = 1$, khi đó $A\left(-\dfrac{1}{2}; 0; 0\right)$,

$B\left(0; \dfrac{\sqrt{3}}{2}; 0\right)$, $C\left(\dfrac{1}{2}; 0; 0\right)$,

$D\left(0; -\frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right)$, $S\left(-\frac{1}{2}; 0; \sqrt{3}\right)$.

a) Ta có $\overrightarrow{SC} = \left(1; 0; -\sqrt{3}\right)$, $\overrightarrow{BD} = \left(0; -\sqrt{3}; 0\right)$, $\overrightarrow{BC} = \left(\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right)$.

Suy ra $\left[\overrightarrow{SC}, \overrightarrow{BD}\right] = \left(-3; 0; -\sqrt{3}\right)$.

$\Rightarrow \left[\overrightarrow{SC}, \overrightarrow{BD}\right].\overrightarrow{BC} = -3.\frac{1}{2} + 0.\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(-\sqrt{3}\right).0 = -\frac{3}{2}$

$\Rightarrow \left|\left[\overrightarrow{SC}, \overrightarrow{BD}\right].\overrightarrow{BC}\right| = \left|-\frac{3}{2}\right| = \frac{3}{2}$.

Khoảng cách giữa hai đường thẳng SC và BD là:

$$d\left(SC, BD\right) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{SC}, \overrightarrow{BD}\right].\overrightarrow{BC}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{SC}, \overrightarrow{BD}\right]\right|} = \frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{\left(-3\right)^2 + 0^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2}} = \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4}a$$

(do ta chọn $a = 1$).

b) Ta có $\overrightarrow{AB} = \left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right)$, $\left[\overrightarrow{SC}; \overrightarrow{AB}\right] = \left(\frac{3}{2}; \frac{-\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

$\left|\left[\overrightarrow{SC}; \overrightarrow{AB}\right]\right| = \frac{\sqrt{15}}{2}$.

Khoảng cách giữa hai đường thẳng SC và AB là:

$$d\left(SC, AB\right) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{SC}, \overrightarrow{AB}\right].\overrightarrow{BC}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{SC}, \overrightarrow{AB}\right]\right|} = \frac{\sqrt{15}}{5} = \frac{a\sqrt{15}}{5}$$ (do ta chọn $a = 1$).

c) Ta có $\overrightarrow{SA} = \left(0; 0; \sqrt{3}\right)$ suy ra $\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{SA}\right] = \left(\frac{3}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right)$.

Vậy ta chọn $\overrightarrow{n_1} = \left(3; -\sqrt{3}; 0\right)$ làm véctơ pháp tuyến của mặt phẳng (SAB).

Ta lại có $\left[\overrightarrow{SB}; \overrightarrow{SD}\right] = \left(-3; 0; \frac{-\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow n_2\left(= +6; 0; +\sqrt{3}\right)$.

Vậy ta chọn $\overrightarrow{n_2} = \left(6; 0; \sqrt{3}\right)$ làm véctơ pháp tuyến của mặt phẳng (SBD).

Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SBD).

Ta có $\cos\alpha = \frac{\left|\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|.\left|\overrightarrow{n_2}\right|} = \frac{18}{\sqrt{468}} \Rightarrow \alpha \approx 33°69'$.

Nhận xét:

- Việc tọa độ hoá tam diện vuông được thực hiện dễ dàng, hệ trục toạ độ được chọn ngay trên đó: gốc toạ độ là đỉnh tam diện, các trục trùng với các cạnh tam diện.

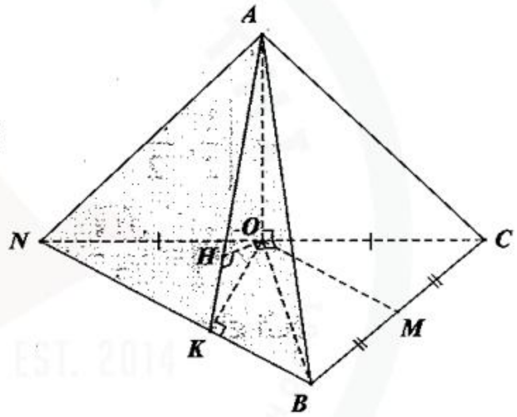
- *Chú ý:* Với tam diện có một góc phẳng vuông, khi đó ta thiết lập hệ toạ độ sao cho một mặt của hệ toạ độ chứa góc phẳng đó.

Bài 2

Cho tứ diện $OABC$ có đáy OBC là tam giác vuông tại O, $OB = a$, $OC = a\sqrt{3}$ và đường cao $OA = a\sqrt{3}$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và OM.

➤ **Lời giải:**

Cách 1: Phương pháp thuần túy



Gọi N là điểm đối xứng với C qua O.

Ta có $OM \parallel BN$ (tính chất đường trung bình), nên $OM \parallel (ABN)$.

Suy ra $d(OM, AB)$

$= d(OM, (ABN)) = d(O, (ABN))$.

Dựng $OK \perp BN$, $OH \perp AK$

$(K \in BN, H \in AK)$.

Ta có $OA \perp (OBC)$; $OK \perp BN$ nên $AK \perp BN$.

$BN \perp OK$; $BN \perp AK$ nên $BN \perp (AOK) \Rightarrow BN \perp OH$.

$OH \perp AK$; $OH \perp BN$ nên $OH \perp (ABN) \Rightarrow d(O, (ABN)) = OH$.

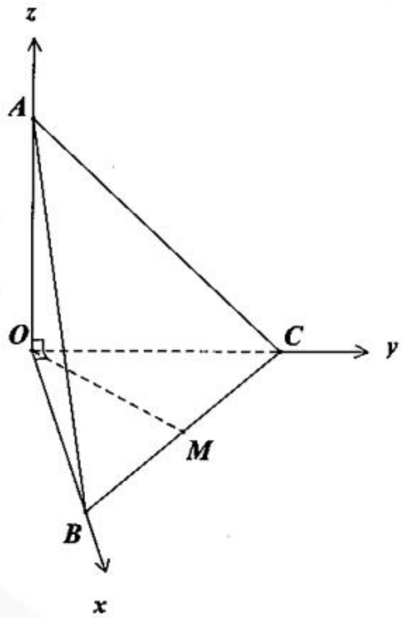
Từ các tam giác vuông OAK và ONB có:

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OK^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{ON^2}$$

$$= \frac{1}{3a^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{3a^2} = \frac{5}{3a^2} \Rightarrow OH = \frac{a\sqrt{15}}{5}.$$

Khoảng cách giữa hai đường thẳng OM và AB là:

$$d(OM, AB) = OH = \frac{a\sqrt{15}}{5}.$$



Cách 2: Phương pháp tọa độ không gian

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ.

$O \equiv O(0;0;0)$, $Ox \equiv OB$, $Oy \equiv OC$, $Oz \equiv OA$.

Chọn $a=1$, khi đó $A(0;0;\sqrt{3})$, $B(1;0;0)$, $C(0;\sqrt{3};0)$ và trung điểm của BC là $M\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$.

Ta có $\overrightarrow{OM}=\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)=\overrightarrow{u_1}$,

$\overrightarrow{AB}=\left(1;0;-\sqrt{3}\right)=\overrightarrow{u_2}$.

$\left[\overrightarrow{OM},\overrightarrow{AB}\right]=\left(-\frac{3}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

và $\overrightarrow{OA}=\left(0;0;\sqrt{3}\right)$ suy ra $\left|\left[\overrightarrow{OM},\overrightarrow{AB}\right].\overrightarrow{OA}\right|=\frac{3}{2}$.

Khoảng cách giữa hai đường thẳng OM và AB là:

$$d(OM,AB)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{OM},\overrightarrow{AB}\right].\overrightarrow{OA}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{OM},\overrightarrow{AB}\right]\right|}=\frac{\sqrt{15}}{5}=\frac{\sqrt{15}}{5}a \text{ (do ta chọn } a=1\text{)}.$$

Nhận xét: Với hình chóp việc toạ độ hoá thường được thực hiện dựa trên đặc tính hình học của chúng:

Hình chóp $O.ABC$ có OA vuông góc với đáy và đáy là hình vuông (hoặc hình chữ nhật). Ta chọn hệ trục tọa độ như dạng tam diện vuông.

Ta có thể thấy, việc sử dụng phương pháp tọa độ làm cho bài toán ngắn gọn và dễ dàng hơn rất nhiều so với phương pháp thuần túy.

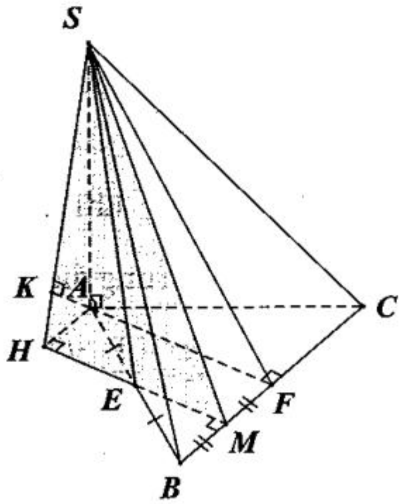
Bài 3

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều có cạnh bằng $2a\sqrt{2}$, SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và $SA=a$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của cạnh AB, BC. Tính góc và khoảng cách giữa hai đường thẳng SE và AF.

➢ **Lời giải:**

Cách 1: Phương pháp thuần túy

Gọi M là trung điểm của BF, suy ra $EM \parallel AF$



$\left(\widehat{SA, AF}\right)=\left(\widehat{EM, AF}\right)=\widehat{SEM}$.

Tam giác SAE vuông tại A, ta có:

$SE^2=SA^2+AE^2=a^2+2a^2=3a^2 \Rightarrow SE=a\sqrt{3}$.

$AF=\dfrac{2a\sqrt{2}.\sqrt{3}}{2}=a\sqrt{6}$

$\Rightarrow EM=BM=MF=\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$; $BF=a\sqrt{2}$.

Tam giác SAB vuông tại A, nên ta có:

$SB^2=SA^2+AB^2=a^2+8a^2=9a^2$

$\Rightarrow SB=3a$.

Tam giác SAF vuông tại A nên ta có

$SF^2=SA^2+AF^2=a^2+6a^2=7a^2 \Rightarrow SF=a\sqrt{7}$.

Áp dụng định lý đường trung tuyến SM trong tam giác SBF, ta có:

$$SB^2+SF^2=2.SM^2+\frac{1}{2}BF^2 \Leftrightarrow 9a^2+7a^2=2SM^2+\frac{1}{2}.2a^2 \Leftrightarrow SM^2=\frac{15a^2}{2}.$$

Có α là góc nhọn tạo bởi SE và AF.

Áp dụng định lý hàm cosin vào tam giác SEM có:

$$\cos\alpha=\left|\cos\widehat{SEM}\right|=\left|\frac{ES^2+EM^2-SM^2}{2ES.EM}\right|=\left|\frac{3a^2+\frac{3a^2}{2}-\frac{15a^2}{2}}{2.\frac{a\sqrt{6}}{2}.a\sqrt{3}}\right|=\left|-\frac{\sqrt{2}}{2}\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\Rightarrow \alpha=45^\circ$.

Kẻ $AK\perp ME$ và $AH\perp SK$.

Ta có $AK=MF=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ và $AH\perp(SME)$.

Vì $AF\parallel ME \Rightarrow d(SE, AF)=d(AF,(SME))=AH$.

Tam giác SAK vuông tại K, nên ta có

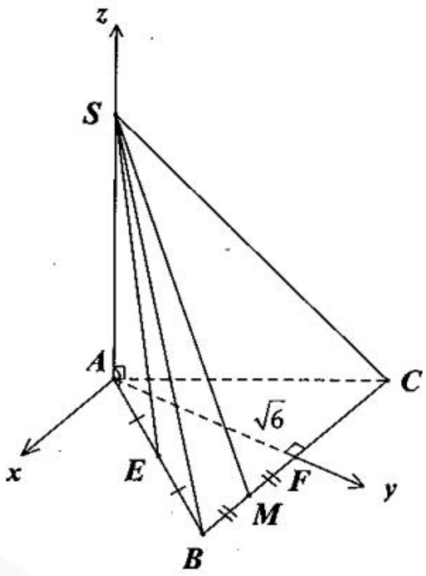
$$\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{SA^2}+\frac{1}{AK^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{2}{a^2}=\frac{3}{a^2}\Rightarrow AH=\frac{\sqrt{3}}{3}a.$$

Khoảng cách giữa hai đường thẳng SE và AF là:

$d(SE, AF)=\dfrac{\sqrt{3}}{3}a$.

Cách 2: Phương pháp tọa độ không gian

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ.



$A \equiv O(0;0;0)$, $Ox \parallel BC$, $Oy \equiv AF$, $Oz \equiv AS$.

Chọn $a=1$, khi đó $B\left(\sqrt{2};\sqrt{6};0\right)$,

$C\left(-\sqrt{2};\sqrt{6};0\right)$, $S(0;0;1)$, $E\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2};\dfrac{\sqrt{6}}{2};0\right)$,

$F\left(0;\sqrt{6};0\right)$ và $M\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2};\sqrt{6};0\right)$.

Ta có $\overrightarrow{SE}=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2};\dfrac{\sqrt{6}}{2};-1\right)$, $\overrightarrow{AF}=\left(0;\sqrt{6};0\right)$,

$\overrightarrow{SM}=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2};\sqrt{6};-1\right)$.

Có α là góc nhọn tạo bởi SE và AF, ta có

$$\cos\alpha=\cos\left(\overrightarrow{SE},\overrightarrow{AF}\right)=\left|\frac{0.\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\sqrt{6}.\dfrac{\sqrt{6}}{2}+0.(-1)}{\sqrt{0+6+0}.\sqrt{\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}+1}}\right|=\frac{3}{\sqrt{6}.\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\alpha=45^\circ.$$

Ta có $\left[\overrightarrow{SE},\overrightarrow{SM}\right]=\left(\dfrac{\sqrt{6}}{2};0;\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt{2};0;1\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\vec{n}$ với $\vec{n}=\left(\sqrt{2};0;1\right)$.

Phương trình mặt phẳng (SEM) qua S với véctơ pháp tuyến $\vec{n}$ là:
$\sqrt{2}x+z-1=0$.

Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SEM) là:

$d\left(A,(SEM)\right)=\dfrac{|0+0-1|}{\sqrt{2+1}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}a$ (do ta chọn $a=1$).

Vì $AF \parallel EM \Rightarrow AF \parallel (SEM) \Rightarrow d(SE,AF)=d\left(A,(SEM)\right)$.

Khoảng cách giữa hai đường thẳng SE và AF là:

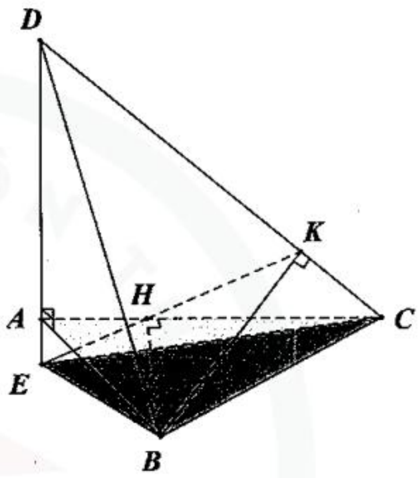
$d(SE,AF)=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Bài 4

Cho tứ diện $ABCD$ có AD vuông góc với mặt phẳng (ABC), $AD = 3a$, $AB = 2a$, $AC = 4a$, $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của B trên AC và CD. Đường thẳng HK cắt đường thẳng AD tại E. Chứng minh rằng BE vuông góc với CD và tính theo a thể tích khối tứ diện $BCDE$.

➤ **Lời giải:**

Cách 1: Phương pháp thuần túy



Vì $BH \perp AC$, $BH \perp AD$ suy ra $BH \perp (ACD)$ nên $BH \perp CD$.

Mà $BK \perp CD \Rightarrow CD \perp (BHK) \Rightarrow CD \perp BE$.

Từ giả thiết có $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2} AB.AC.\sin 60^\circ$

$= \dfrac{1}{2}.8a^2.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 2a^2\sqrt{3}$ (đvdt).

$AH = AB\sin 60^\circ = 2a.\dfrac{1}{2} = a$.

Vì $CD \perp (BHK) \Rightarrow CD \perp KE$

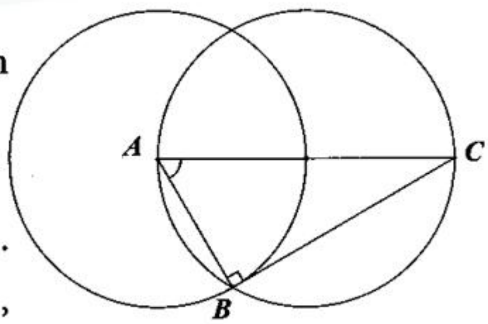
$\Rightarrow \Delta AEH \backsim \Delta ACD$.

Do đó $\dfrac{AE}{AC} = \dfrac{AH}{AD} \Rightarrow AE = \dfrac{4a.a}{3a} = \dfrac{4a}{3} \Rightarrow DE = \dfrac{4a}{3} + 3a = \dfrac{13a}{3}$.

Thể tích khối chóp $BCDE$ là:

$$V_{BCDE} = V_{D.ABC} + V_{E.ABC} = \frac{1}{3} DE.S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3}.\frac{13a}{3}.2a^2\sqrt{3} = \frac{26\sqrt{3}}{9}a^3 \text{ (đvdt).}$$

Cách 2: Phương pháp tọa độ không gian

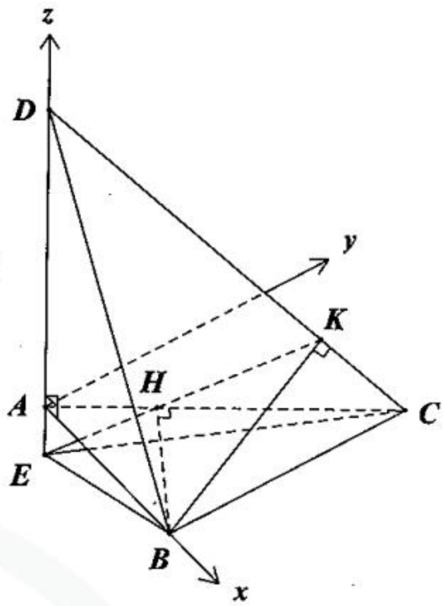


Do $AB = 2a$, $AC = 4a$, $\widehat{BAC} = 60^\circ$ nên tam giác ABC vuông tại B.

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ.

$A \equiv O(0; 0; 0)$, $Ox \parallel BC$, $Oy \parallel BC$, $Oz \equiv AD$.

Chọn $a = 1$, khi đó $B(2; 0; 0)$, $C(2; 2\sqrt{3}; 0)$, $D(0; 0; 3)$.



Ta có $AH = AB.\sin 60^\circ = a$,

suy ra $H = \left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right)$.

$\overrightarrow{DC} = \left(2; 2\sqrt{3}; -3\right)$ suy ra $\vec{u} = \left(2; 2\sqrt{3}; -3\right)$ là một véctơ chỉ phương của DC nên phương trình đường thẳng DC là:

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = 2\sqrt{3}t \\ z = 3 - 3t \end{cases}.$$

Vì K thuộc DC nên $K\left(2t; 2\sqrt{3}t; 3-3t\right)$.

Ta có $\overrightarrow{BK} = \left(2t-2; 2\sqrt{3}t; 3-3t\right)$.

$\overrightarrow{BK}.\overrightarrow{DC} = 0 \Leftrightarrow t = \frac{13}{25} \Rightarrow K\left(\frac{26}{25}; \frac{26\sqrt{3}}{25}; \frac{36}{25}\right)$.

Vì E thuộc Oz nên $E(0; 0; z)$.

Ta có $\overrightarrow{EH} = \left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; -z\right)$, $\overrightarrow{HK} = \left(\frac{27}{50}; \frac{27\sqrt{3}}{50}; \frac{36}{25}\right)$.

Vì E, H, K thẳng hàng nên $\overrightarrow{EH}$ và $\overrightarrow{HK}$ cùng phương, do đó :

$z = -\frac{4}{3} \Rightarrow E\left(0; 0; -\frac{4}{3}\right)$.

Ta có $\overrightarrow{EB} = \left(2; 0; \frac{4}{3}\right)$ và $\overrightarrow{DC} = \left(2; 2\sqrt{3}; -3\right)$ nên:

$\overrightarrow{EB}.\,\overrightarrow{DC} = 2.2 + 0.2\sqrt{3} + \frac{4}{3}.(-3) = 0$.

Vậy BE vuông góc với CD.

Tính thể tích khối tứ diện $BCDE$ với $B(2; 0; 0)$, $C\left(2; 2\sqrt{3}; 0\right)$, $D(0; 0; 3)$, $E\left(0; 0; -\frac{4}{3}\right)$.

Thể tích khối tứ diện $B.CDE$ là:

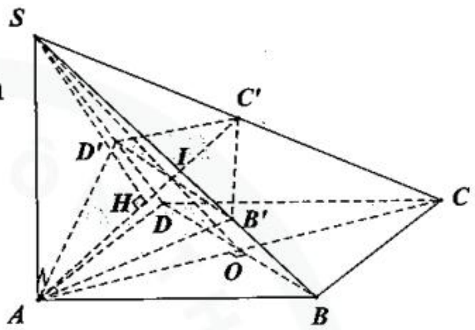
$V_{B.CDE} = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}\right].\overrightarrow{BE}\right| = \frac{26\sqrt{3}}{9} = \frac{26\sqrt{3}}{9}a^3$ (đvtt) (do ta chọn $a = 1$).

Bài 5

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, góc $\widehat{BAD}=60^\circ$, SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SA=a$. Gọi C' là trung điểm của SC. Mặt phẳng (P) đi qua AC' và song song với BD cắt SB, SD lần lượt tại B', D'. Tính thể tích khối chóp $S.A'B'C'D'$.

➤ **Lời giải:**

Cách 1: Phương pháp thuần túy



Hình thoi $ABCD$ có $\widehat{BAD}=60^\circ$ nên tam giác ABD đều có cạnh là a.

Do đó

$$AO=\frac{a\sqrt{3}}{2}\Rightarrow AC=2AO=a\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow SC^2=SA^2+AC^2=a^2+3a^2=4a^2$$

$$\Rightarrow SC=2a.$$

Trong tam giác SAC vuông tại A, trung tuyến $AC'=\frac{SC}{2}=a$ nên $\Delta SAC'$ đều cạnh a.

Gọi O là giao điểm của AC với BD, I là giao điểm của AC' với $B'D'$.

Ta có I là trọng tâm tam giác SAC (vì là giao điểm của 2 đường trung tuyến SO và AC').

Suy ra $\frac{SI}{SO}=\frac{2}{3}\Rightarrow B'D'=\frac{2}{3}BD=\frac{2}{3}a$.

Ta có $B'D'\perp AC'$ (vì $B'D'\parallel BD$) nên $S_{AB'C'D'}=\frac{1}{2}AC'.B'D'=\frac{a^2}{3}$ (đvdt).

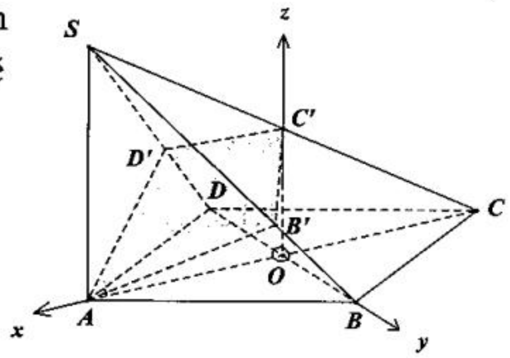
Đường cao h của khối chóp $S.AB'C'D'$ chính là đường cao SH của tam giác SAC' vì $SH\perp AC'$, $SH\perp B'D'$.

Tam giác SAC' đều cạnh a nên $h=SH=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Vậy thể tích khối chóp $S.AB'C'D'$ là:

$$V_{S.AB'C'D'}=\frac{1}{3}S_{AB'C'D'}.SH=\frac{\sqrt{3}}{18}a^3 \text{ (đvtt)}.$$

Cách 2: Phương pháp tọa độ không gian



Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ

$O \equiv O(0;\,0;\,0)$, $Ox \equiv OA$,

$Oy \equiv OB$, $Oz \parallel OS$.

Chọn $a = 1$, khi đó $A\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2};\,0;\,0\right)$,

$B\left(0;\,\dfrac{1}{2};\,0\right)$, $C\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2};\,0;\,0\right)$, $D\left(0;\,-\dfrac{1}{2};\,0\right)$

$C'\left(0;\,0;\,\dfrac{1}{2}\right)$ và $S\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2};\,0;\,1\right)$ suy ra $B'\left(\dfrac{\sqrt{3}}{6};\,\dfrac{1}{3};\,\dfrac{1}{3}\right)$, $D'\left(\dfrac{\sqrt{3}}{6};\,-\dfrac{1}{3};\,\dfrac{1}{3}\right)$.

Thể tích khối chóp $S.AB'C'D'$ là:

$V_{S.AB'C'D'} = V_{S.AB'C'} + V_{S.AC'D'}$

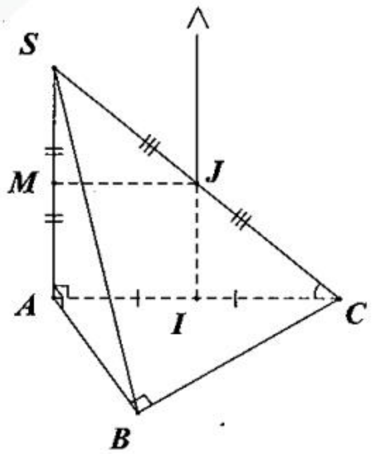
$$= \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{SA},\,\overrightarrow{SC'}\right].\overrightarrow{SB'}\right| + \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{SA},\,\overrightarrow{SC'}\right].\overrightarrow{SD'}\right| = \frac{1}{6}.\frac{\sqrt{3}}{6}a^3 + \frac{1}{6}.\frac{\sqrt{3}}{6}a^3 = \frac{\sqrt{3}}{18}a^3 \text{ (đvtt).}$$

Bài 6

Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt đáy (ABC). Tam giác ABC vuông tại B, $AB = a$, $BC = b$. Đường thẳng SC tạo với mặt phẳng (ABC) một góc $60°$. Tính theo a thể tích hình chóp và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

➤ **Lời giải:**

Cách 1: Phương pháp thuần túy



SA vuông với mặt phẳng (ABC) nên SA là chiều cao của chóp $S.ABC$.

SC tạo với đáy (ABC) một góc $60°$ chính là góc $\widehat{SCA} = 60°$.

Tam giác SAC vuông tại A nên ta có:

$\tan 60° = \dfrac{SA}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ suy ra $SA = \sqrt{3(a^2 + b^2)}$.

Diện tích tam giác vuông ABC là:

$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}BA.BC=\frac{1}{2}ab$ (đvdt).

Thể tích khối chóp $S.ABC$ là:

$V_{S.ABC}=\frac{1}{3}.SA.S_{\Delta ABC}=\frac{1}{6}ab\sqrt{3\left(a^2+b^2\right)}$.

Gọi I là trung điểm AC, suy ra I làm tâm đường tròn đáy tam giác ABC.

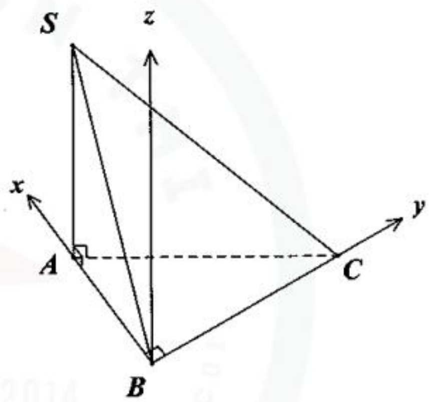
Từ I dựng trục Δ song song với SA, suy ra Δ là trục của đường tròn đáy, và cắt SC tại J.

Dựng mặt phẳng trung trực qua SA và cắt trục của đường tròn đáy tại J

Suy ra J là tâm của chóp S.ABC.

Khi đó $R=JS=\sqrt{a^2+b^2}$

Cách 2: Phương pháp tọa độ không gian



Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ.

$B\equiv O(0;0;0)$, $Ox\equiv BA$, $Oy\equiv BC$, $Oz\parallel SA$.

Ta có $A(a;0;0)$, $C(0;b;0)$ và $S(a;0;h)$.

Suy ra $\overrightarrow{SC}=(-a;b;-h)$.

Mặt phẳng (ABC) có phương trình: $z=0$.

$\vec{n}=(0;0;1)$ là véctơ pháp tuyến của mặt phẳng (ABC).

Do SC tạo với đáy (ABC) một góc 60° nên

$$\sin 60^\circ=\frac{\left|\vec{n}.\overrightarrow{SC}\right|}{\left|\vec{n}\right|.\left|\overrightarrow{SC}\right|}\Rightarrow\frac{h}{\sqrt{a^2+b^2+h^2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow h=\sqrt{3\left(a^2+b^2\right)}.$$

Giả sử $I(x_0;y_0;z_0)$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp, ta có:

$IA^2=IB^2=IC^2=IS^2$

$$\Rightarrow x_0^2+y_0^2+z_0^2=\left(x_0-a\right)^2+y_0^2+z_0^2=x_0^2+\left(y_0-b\right)^2+z_0^2$$

$$=x_0^2+y_0^2+\left[z_0-\sqrt{3\left(a^2+b^2\right)}\right]^2$$

$$\Rightarrow x_0=\frac{a}{2};\ y_0=\frac{b}{2};\ z_0=\frac{\sqrt{3\left(a^2+b^2\right)}}{2}.$$

Gọi R là bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp, ta có

$R = IB = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Thể tích khối chóp là $S.ABC$ là:

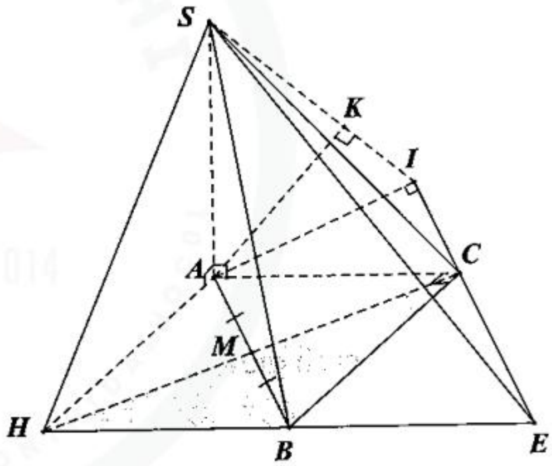
$V_{S.ABC} = \frac{1}{3}.SA.S_{\Delta ABC} = \frac{1}{6}SA.BA.BC = \frac{1}{6}ab\sqrt{3\left(a^2 + b^2\right)}$ (đvtt).

Bài 7

Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với đáy và tam giác ABC vuông tại C. Độ dài các cạnh là $SA = 4a$, $AC = 3a$, $BC = a$. Gọi M là trung điểm AB, H là điểm đối xứng của C qua M. Tính theo a thể tích khối chóp $S.AHBC$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SC.

➢ **Lời giải:**

Cách 1: Phương pháp thuần túy



Từ giả thiết cho ta $AHBC$ là hình chữ nhật $S_{A.HBC} = 3a^2$ (đvdt).

Suy ra $V_{S.AHBC} = \frac{1}{3}.3a^2.4a = 4a^3$.

Dựng hình bình hành $ACEB$.

Ta có:

$AB \parallel CE \Rightarrow AB \parallel (SEC)$

$\Rightarrow d(AB;SC) = d\left(A;(SEC)\right)$.

Kẻ $AI \perp CE$, mà $SA \perp CE$

$\Rightarrow CE \perp (SAI) \Rightarrow (SCE) \perp (SAI) = SI$. Kẻ $AK \perp SI \Rightarrow AK \perp (SCE)$

$\Rightarrow AK = d\left(A;(SCE)\right) = d(AB;SC)$.

Ta có:

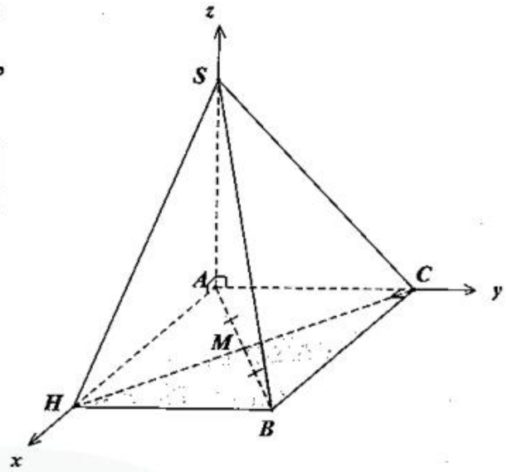
$\tan\widehat{IAC} = \tan\widehat{ABC} = \frac{CA}{CB} = 3 \Rightarrow \cos\widehat{AIC} = \frac{1}{\sqrt{10}} \Rightarrow AI = AC.\cos\widehat{AIC} = \frac{3a}{\sqrt{10}}$.

Trong tam giác vuông SAI, ta có $\frac{1}{AK^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AI^2} \Rightarrow AK = \frac{12}{13}a$.

Suy ra $d(AB;SC) = \frac{12a}{13}$.

Cách 2: Phương pháp tọa độ không gian

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ.



$A \equiv O(0;0;0)$, $Ox \equiv AH$, $Oy \equiv AC$, $Oz \equiv AS$.

Chọn $a=1$, khi đó $B(1;3;0)$, $M\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2};0\right)$

$C(0;3;0)$, $S(0;0;4)$ suy ra $H(1;0;0)$.

Ta có $\overrightarrow{SB}=(1;3;-4)$, $\overrightarrow{SC}=(0;3;-4)$, $\overrightarrow{SH}=(1;0;-4)$.

$\Rightarrow \left[\overrightarrow{SB},\overrightarrow{SC}\right]=(0;4;3)$

$\Rightarrow \left[\overrightarrow{SB},\overrightarrow{SC}\right].\overrightarrow{SH}=0.1+4.0+(-4).3=-12$

$\Rightarrow \left|\left[\overrightarrow{SB},\overrightarrow{SC}\right].\overrightarrow{SH}\right|=12$.

Thể tích khối chóp $S.AHBC$ là:

$V_{S.ABC}=2V_{S.HBC}=2.\frac{1}{6}.\left|\left[\overrightarrow{SB},\overrightarrow{SC}\right].\overrightarrow{SH}\right|=4=4a^3$ (đvtt) (do ta chọn $a=1$).

Ta có $\overrightarrow{AB}=(1;3;0)$, $\overrightarrow{AC}=(0;3;0)$.

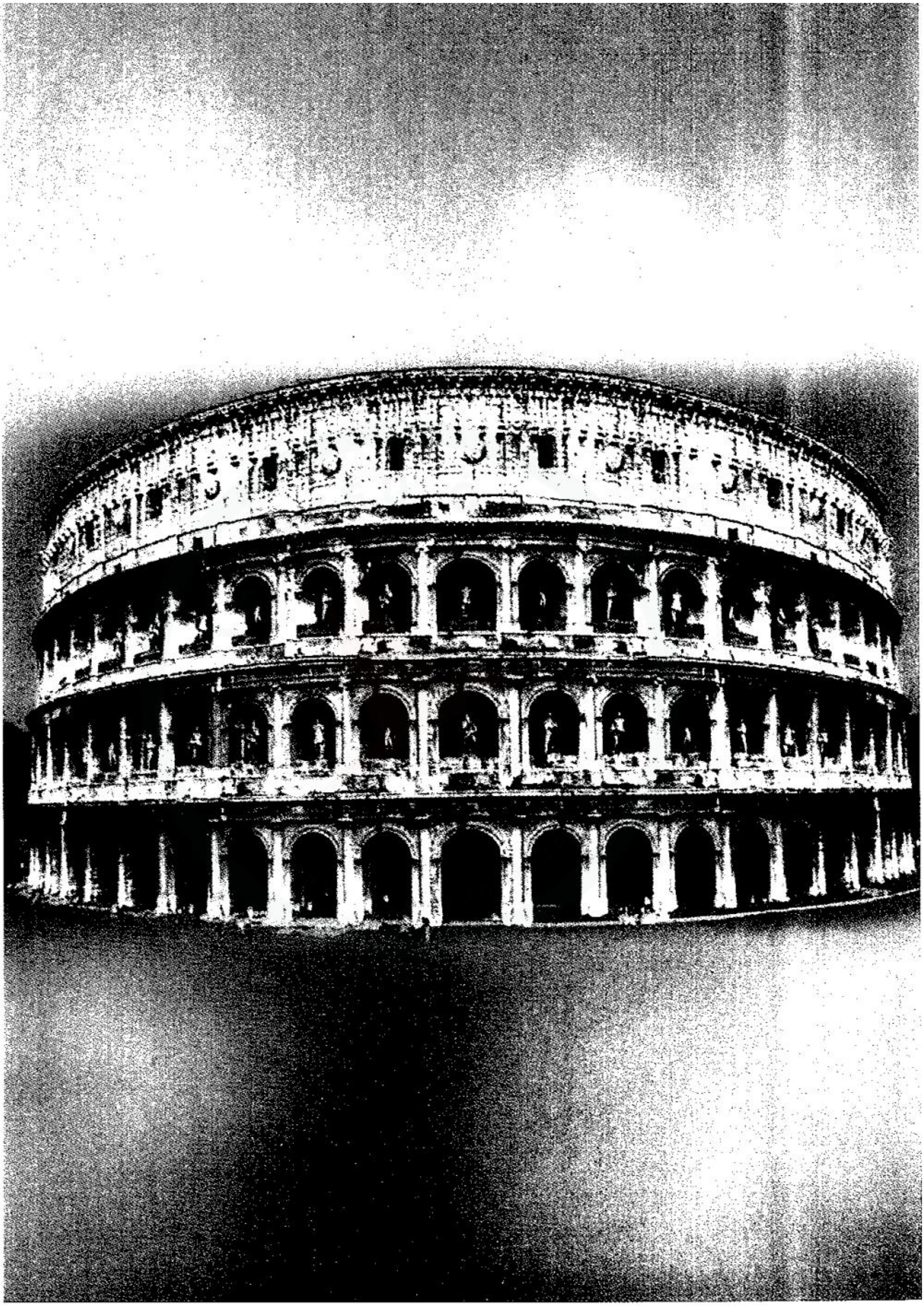
$\Rightarrow \left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{SC}\right]=(-12;4;3) \Rightarrow \left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{SC}\right].\overrightarrow{AC}=-12.0+4.3+3.0=12$

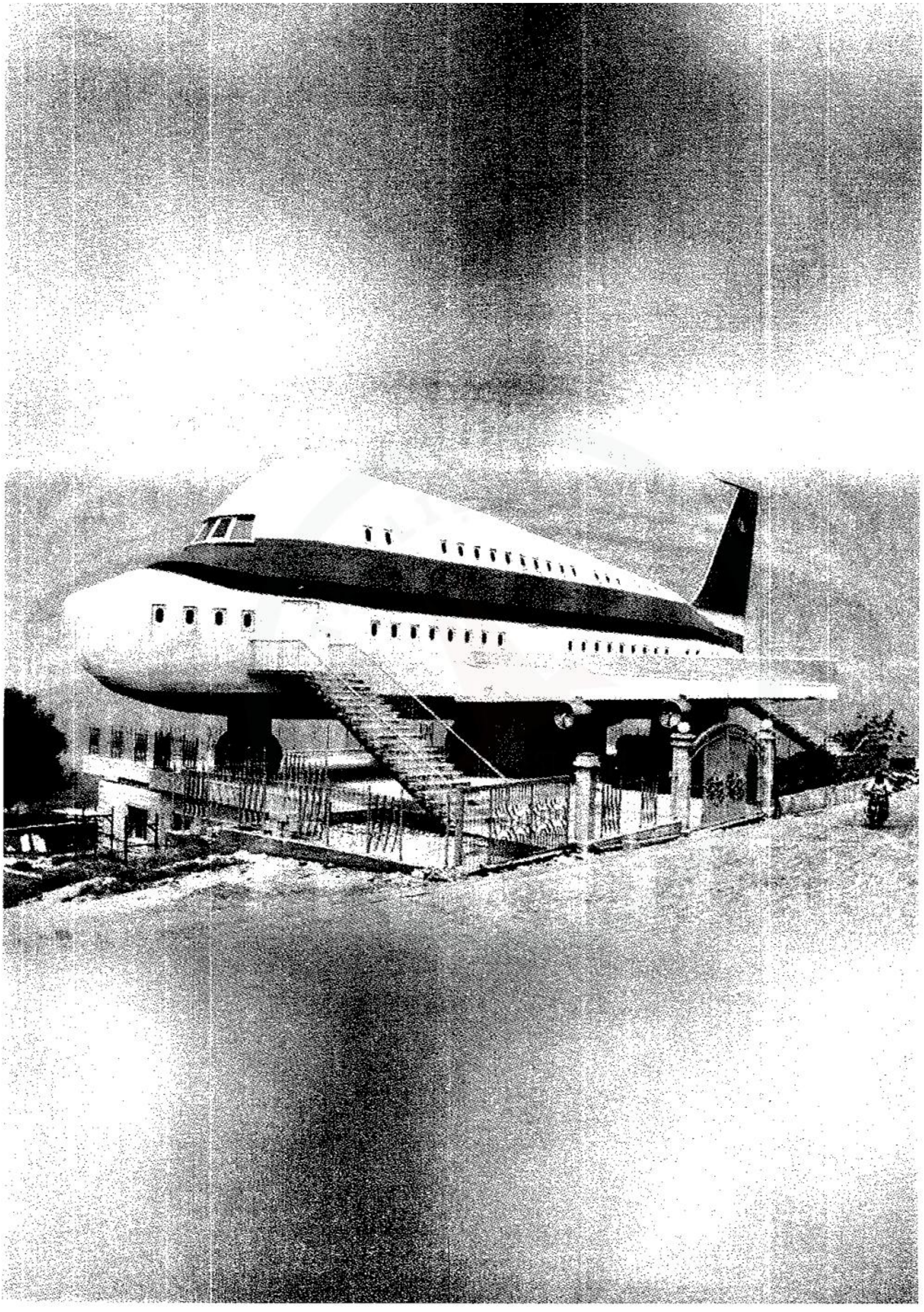
$\Rightarrow \left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{SC}\right].\overrightarrow{AC}\right|=12$.

Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SC là:

$$d(AB,SC)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{SC}\right].\overrightarrow{AC}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{SC}\right]\right|}=\frac{12}{\sqrt{(-12)^2+4^2+3^2}}=\frac{12}{13}=\frac{12}{13}a$$

(do ta chọn $a=1$).





DẠNG 3:

THỂ TÍCH HÌNH CHÓP MẶT BÊN VUÔNG GÓC ĐÁY

Đặc điểm:

- Đường cao của mặt bên vuông góc đáy là đường cao của hình chóp.
- Tìm ra chân đường cao trước đỉnh của hình chóp.

Nhận định: Khi bài toán cho biết độ dài 3 cạnh của tam giác ngay từ đầu thì tam giác đó...

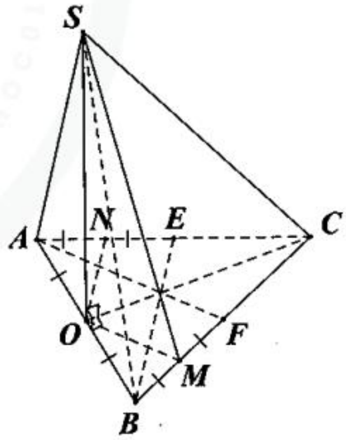
Mở rộng: Nếu có một mặt phẳng vuông góc với đáy thì đường cao của mặt phẳng (vuông góc giáo tuyến) là đường cao của hình chóp.

Bài 1

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, mặt bên (SAB) vuông góc với mặt phẳng đáy (ABC), hai mặt bên còn lại cùng tạo với đáy góc α. Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABC$.

➤ **Lời giải:**

Cách 1: ***Phương pháp thuần túy:***



Gọi O là hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABC), suy ra $O \in AB$.

Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AC, BC.

Kẻ $ON \parallel BE$ ($N \in AC$), suy ra $ON \perp AC$.

Do đó:

$AC \perp (SON) \Rightarrow \left(\widehat{(SAC),(ABC)}\right) = \widehat{SNO} = \alpha$.

Kẻ $OM \parallel AF$ ($M \in BC$), suy ra $OM \perp BC$.

Do đó $\left(\widehat{(SBC),(ABC)}\right) = \widehat{SMO} = \alpha$.

Suy ra $ON = OM = \dfrac{SO}{\tan\alpha}$ hay O là trung điểm của AB; tức là M, N lần lượt là trung điểm của BF, AE.

Ta có $OM=\frac{1}{2}AF=\frac{\sqrt{3}}{4}a \Rightarrow SO=\frac{\sqrt{3}}{4}a.\tan\alpha$.

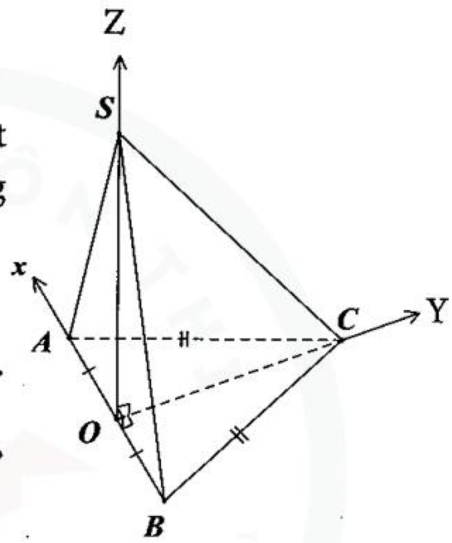
Diện tích tam giác ABC là:

$S_{\Delta ABC}=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ (đvdt).

Thể tích khối chóp $S.ABC$ là:

$V_{S.ABC}=\frac{1}{3}S_{\Delta ABC}.SO=\frac{1}{3}.\frac{\sqrt{3}}{4}a^2.\frac{\sqrt{3}}{4}a.\tan\alpha=\frac{\tan\alpha}{16}a^3$ (đvtt).

Cách 2: ***Phương pháp tọa độ không gian:***



Dựng $SO\perp AB \Rightarrow SO\perp(ABC)$.

Vì (SBC) và (SAC) cùng tạo với đáy một góc α và tam giác ABC đều, suy ra O là trung điểm của AB.

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ.

$O\equiv O(0;0;0)$, $Ox\equiv OA$, $Oy\equiv OC$, $Oz\equiv OS$.

Chọn $a=1$, khi đó $A\left(\frac{1}{2};0;0\right)$, $B\left(-\frac{1}{2};0;0\right)$, $C\left(0;\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$ và $S(0;0;h)$.

Mặt phẳng (ABC) đi qua 3 điểm $A\left(\frac{1}{2};0;0\right)$, $B\left(-\frac{1}{2};0;0\right)$, $C\left(0;\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$ nên có phương trình $z=0\Rightarrow \overrightarrow{n_1}=(0;0;1)$.

Mặt phẳng (SAC) đi qua 3 điểm $A\left(\frac{1}{2};0;0\right)$, $C\left(0;\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$, $S(0;0;h)$ nên có phương trình:

$2h\sqrt{3}x+2hy+\sqrt{3}z=0\Rightarrow \overrightarrow{n_2}=\left(2h\sqrt{3};2h;\sqrt{3}\right)$.

Ta có $\left(\widehat{(SAC),(ABC)}\right)=\alpha$

$$\Leftrightarrow \cos\alpha=\frac{\left|\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_2}\right|.\left|\overrightarrow{n_2}\right|}=\frac{\left|0+0+\sqrt{3}\right|}{\sqrt{0^2+0^2+1^2}.\sqrt{12h^2+4h^2+3}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{16h^2+3}}.$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\cos^2\alpha} = \tan^2\alpha + 1 = \frac{16h^2+3}{3} \Leftrightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{4}\tan\alpha.$$

Thể tích khối chóp $S.ABC$ là

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3}S_{\Delta ABC}.h = \frac{1}{3}.\frac{\sqrt{3}}{4}.\frac{\sqrt{3}}{4}.\tan\alpha = \frac{\tan\alpha}{16} = \frac{a^3\tan\alpha}{16} \text{ (đvtt)}$$

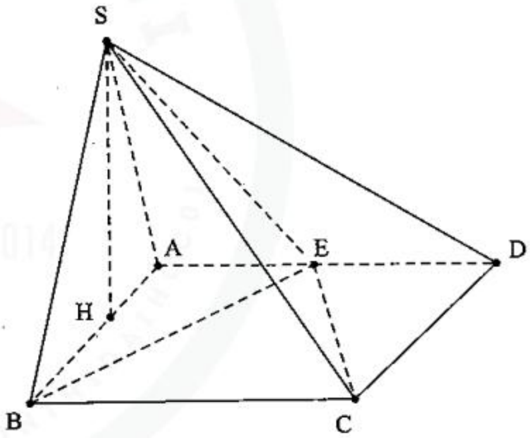
(do ta chọn $a = 1$).

Bài 2

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AD = 2a\sqrt{2}$, tam giác SAB nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, $SA = a, SB = 2a, \widehat{ASB} = 120^0$. Gọi E là trung điểm AD. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ và bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $S.BCE$ theo a.

➤ **Lời giải:**

Cách 1: Phương pháp thuần túy



Từ giả thiết suy ra

$$AB^2 = SA^2 + SB^2 - 2SA.SB.\cos 120^0$$

$$\Rightarrow AB = a\sqrt{7}.$$

$$S_{\Delta SAB} = \frac{1}{2}SH.AB = \frac{1}{2}SA.SB.\sin 120^0$$

$$\Rightarrow SH = \frac{a\sqrt{21}}{7}.$$

Diện tích đáy $ABCD$ là:

$$S_{ABCD} = AB.AD = 2a^2\sqrt{14} \text{ (đvdt)}.$$

Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là: $S_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SH.S_{ABCD} = \frac{2a^3\sqrt{6}}{3}$ (đvtt).

$$AH = \sqrt{SA^2 - SH^2} = \frac{2a}{\sqrt{7}} \Rightarrow BH = \frac{5a}{\sqrt{7}} \Rightarrow HC = \sqrt{BH^2 + BC^2} = \frac{9a}{\sqrt{7}}$$

$$\Rightarrow SC = \sqrt{HC^2 + SH^2} = 2a\sqrt{3}; SE = \sqrt{SA^2 + AE^2} = a\sqrt{3};$$

$CE = \sqrt{ED^2 + CD^2} = 3a$.

Do $SC^2 = 12a^2 = SE^2 + CE^2$, suy ra tam giác SCE vuông tại E; tam giác SBC vuông tại B.

Suy ra tâm mặt cầu ngoại tiếp $S.BCE$ là trung điểm của SC, có $R = \frac{SC}{2} = a\sqrt{3}$.

Cách 2: Phương pháp tọa độ không gian

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ.

$H \equiv O(0; 0; 0)$, $Ox \parallel BC$, $Oy \equiv HB$, $Oz \equiv HS$.

Chọn $a = 1$, khi đó $A\left(0; -\frac{\sqrt{7}}{2}; 0\right)$, $C\left(2\sqrt{2}; \frac{\sqrt{7}}{2}; 0\right)$, $B\left(0; \frac{\sqrt{7}}{2}; 0\right)$,

$D\left(2\sqrt{2}; -\frac{\sqrt{7}}{2}; 0\right)$ và $S\left(0; 0; \frac{\sqrt{21}}{7}\right)$.

Ta có $\overrightarrow{AS} = \left(0; \frac{\sqrt{7}}{2}; \frac{\sqrt{21}}{7}\right)$, $\overrightarrow{AB} = \left(0; \sqrt{7}; 0\right)$, $\overrightarrow{AD} = \left(2\sqrt{2}; 0; 0\right)$.

Suy ra $\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right] = \left(0; 0; 2\sqrt{14}\right)$

$\Rightarrow \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right].\overrightarrow{AS} = 0.0 + 0.\frac{\sqrt{7}}{2} + 2\sqrt{14}.\frac{\sqrt{21}}{7} = 2\sqrt{6}$

$\Rightarrow \left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right].\overrightarrow{AS}\right| = 2\sqrt{6}$.

Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là:

$V_{S.ABCD} = 2V_{S.ABD} = 2.\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right].\overrightarrow{AS}\right| = \frac{2\sqrt{6}}{3} = \frac{2\sqrt{6}}{3}a^3$ (đvtt)

(do ta chọn $a = 1$).

Trung điểm E của đoạn AD có tọa độ $E\left(\sqrt{2}; -\frac{\sqrt{7}}{2}; 0\right)$.

Gọi phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $S.BCE$ là:

$(S): (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$.

Mặt cầu (S) đi qua 4 điểm S, B, C, E nên ta có hệ phương trình

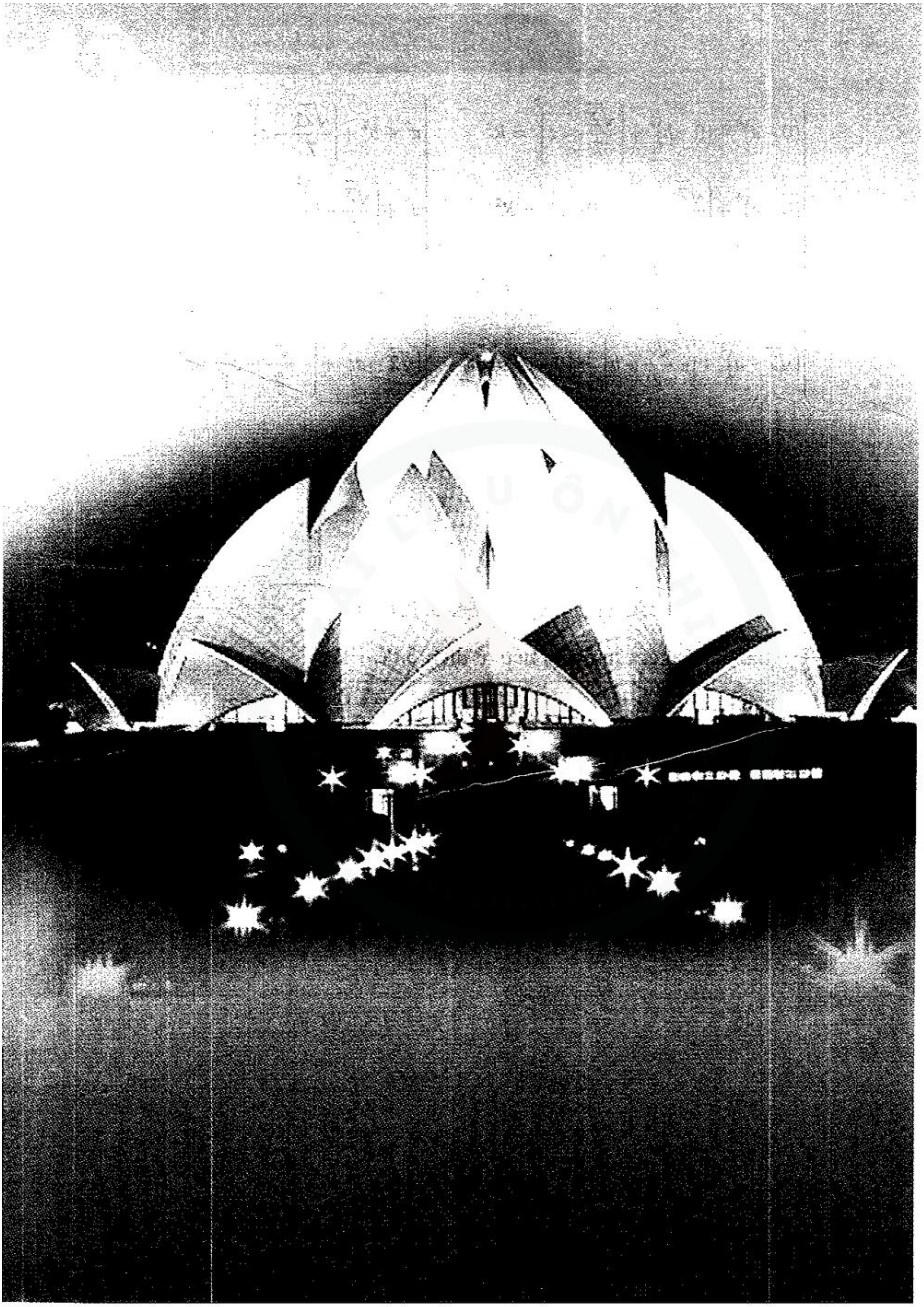
$$\begin{cases}(0-a)^2+(0-b)^2+\left(\dfrac{\sqrt{21}}{7}-c\right)^2=R^2\\(0-a)^2+\left(\dfrac{\sqrt{7}}{2}-b\right)^2+(0-c)^2=R^2\\\left(2\sqrt{2}-a\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{7}}{2}-b\right)^2+(0-c)^2=R^2\\\left(\sqrt{2}-a\right)^2+\left(-\dfrac{\sqrt{7}}{2}-b\right)^2+(0-c)^2=R^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2+b^2+\left(\dfrac{\sqrt{21}}{7}-c\right)^2=R^2\\a^2+\left(\dfrac{\sqrt{7}}{2}-b\right)^2+c^2=R^2\\\left(2\sqrt{2}-a\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{7}}{2}-b\right)^2+c^2=R^2\\\left(\sqrt{2}-a\right)^2+\left(-\dfrac{\sqrt{7}}{2}-b\right)^2+c^2=R^2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a=\sqrt{2}\\b=\dfrac{\sqrt{7}}{7}\\c=-\dfrac{3\sqrt{21}}{56}\end{cases}.$$

Suy ra tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $S.BCE$ là: $I\left(\sqrt{2};\dfrac{\sqrt{7}}{7};-\dfrac{3\sqrt{21}}{56}\right)$.

Vậy bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $S.BCE$ là:

$$R=IA=\sqrt{\left(\sqrt{2}-0\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{7}}{7}+\dfrac{\sqrt{7}}{2}\right)^2+\left(-\dfrac{3\sqrt{21}}{56}-0\right)^2}$$



Si ves este mensaje, probablemente estás intentando descargar un libro que ha sido borrado de Issuu.

Nhận xét: Bài toán có thể chọn gốc tọa độ là tâm H, tuy nhiên để tránh việc tính toán dài dòng thì ta chọn gốc tọa độ tại điểm M.

Khi đó tọa độ các điểm sẽ dễ dàng tính toán hơn.

Phương pháp đã được đơn giản hơn khi ta chỉ việc áp dụng công thức tính.

Bài 2

Cho tứ diện $ABCD$, biết tam giác ABC vuông tại A có $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$. Ngoài ra $DA = DB = DC$ và tam giác DBC vuông. Tính thể tích khối tứ diện $ABCD$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và CD, với M là trung điểm của BC.

➢ **Lời giải:**

Cách 1: Phương pháp thuần túy

Vì $DA = DB = DC$ và $MA = MB = MC$ (do tam giác ABC vuông tại A, M là trung điểm cạnh BC) suy ra D, M thuộc trục của tam giác ABC.

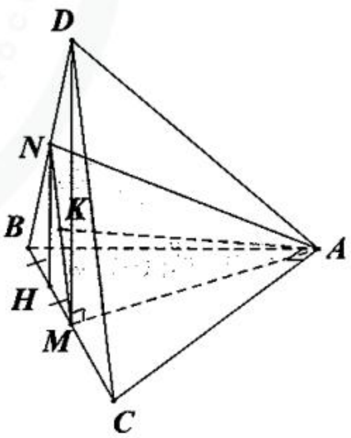
Do đó $DM \perp (ABC)$.

Ta tính được $BC = 2a$.

Tam giác DBC vuông cân tại D nên $DM = \frac{1}{2}BC = a$.

Thể tích tứ diện $ABCD$ là:

$V_{ABCD} = \frac{1}{3}S_{\Delta ABC}.DM = \frac{\sqrt{3}}{6}a^3$ (đvtt).



Gọi N là trung điểm của BD. Chứng minh được $CD \parallel (AMN)$.

Do đó $d(CD, AM)$

$= d(CD, (AMN)) = d(C, (AMN))$.

Xét tứ diện $ACMN$, ta có

$$V_{ACMN} = \frac{1}{3}S_{\Delta AMN}.d(C, (AMN)) = \frac{1}{3}S_{\Delta ACM}.d(N, (ACM))$$

Suy ra $d(C, (AMN)) = \dfrac{S_{\Delta ACM}.d(N, (ACM))}{S_{\Delta AMN}}$ (1).

Gọi H là trung điểm của BM. Khi đó $NH \parallel DM$ suy ra $NH \perp (ACM)$ nên $NH = d(N,(ACM)) = \frac{1}{2}DM = \frac{1}{2}a$ (2).

$S_{\Delta ACM} = \frac{1}{2}S_{\Delta ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ (đvdt) (3).

Áp dụng công thức trung tuyến:

$AN^2 = \frac{1}{2}\left(AB^2 + AD^2 - \frac{1}{2}DB^2\right) = a \Rightarrow AN = a$.

Lại có $AM = \frac{1}{2}BC = a$ nên tam giác AMN cân tại A.

Gọi K là trung điểm của MN thì $AK \perp MN$.

Ta có $MN = \frac{CD}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

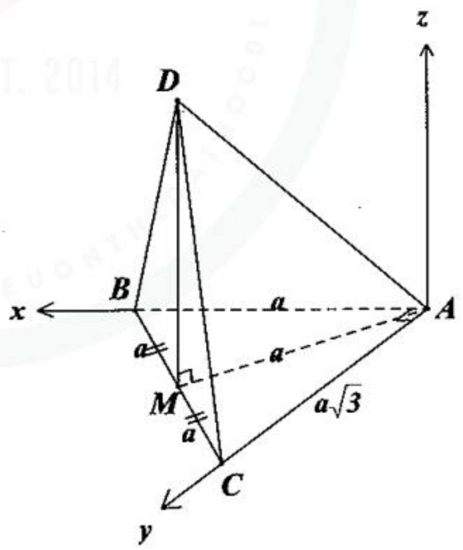
Từ tam giác vuông AKM tính được $AK = \frac{a\sqrt{14}}{4}$.

Suy ra $S_{\Delta AMN} = \frac{1}{2}AK.MN = \frac{\sqrt{7}}{8}a^2$ (đvdt) (4).

Từ (1), (2), (3) và (4), suy ra $d(C,(AMN)) = d(CD, AM) = \frac{\sqrt{21}}{7}a$.

Cách 2: Phương pháp tọa độ không gian

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ.



$A \equiv O(0;0;0)$, $Ox \equiv AB$, $Oy \equiv AC$, $Oz \parallel MD$.

Chọn $a = 1$, khi đó $B(1;0;0)$, $C(0;\sqrt{3};0)$, $M\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$ và $D\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};1\right)$

Ta có $\overrightarrow{AB} = (1;0;0)$, $\overrightarrow{AC} = (0;\sqrt{3};0)$, $\overrightarrow{AD} = \left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};1\right)$.

Suy ra $\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = (0;0;\sqrt{3})$

$\Rightarrow \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD} = 0.\frac{1}{2} + 0.\frac{\sqrt{3}}{2} + 1.\sqrt{3} = \sqrt{3}$

$\Rightarrow \left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}\right| = \sqrt{3}$.

Thể tích khối tứ diện $ABCD$ là:

$V_{A.BCD} = \frac{1}{6}.\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}\right| = \frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{6}a^3$ (đvtt) (do ta chọn $a = 1$).

Nhận xét: Ta thấy ưu điểm của phương pháp tọa độ đối với bài toán này là rất tốt, giúp giải quyết nhanh bài toán mà ta không nhìn ra được hướng kẻ thêm đường phụ hay là các phép tính phức tạp.

Nhận thấy tam giác ABC vuông tại A nên ta chọn gốc tọa độ ngay tại điểm A, dó đó hình vẽ và tọa độ các điểm đều trở nên dễ dàng hơn.

Bài 3

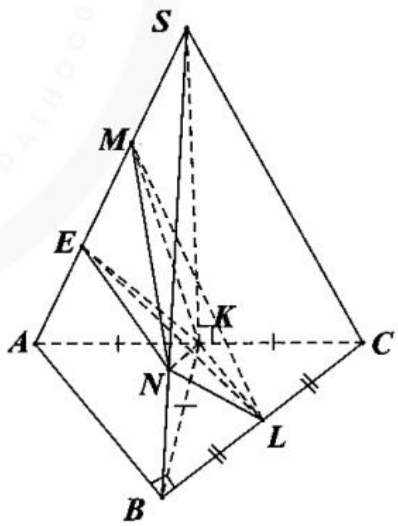
Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân ($AB = BC = a$) và các cạnh bên $SA = SB = SC = 3a$. Gọi K, L lần lượt là trung điểm của AC và BC. Trên cạnh SA, SB lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $SM = BN = a$. Tính theo a thể tích khối tứ diện $LMNK$.

➢ **Lời giải:**

Cách 1: Phương pháp thuần túy

Gọi L là trung điểm của BC.

Lấy điểm E trên SA sao cho $AE = a \Rightarrow NE \parallel AB \parallel KL$.



Ta có $S_{\Delta NKL} = S_{\Delta EKL} \Rightarrow V_{M.NKL} = V_{M.EKL}$.

Do $SM = \frac{1}{3}SA \Rightarrow S_{\Delta SMK} = \frac{1}{3}S_{\Delta SAK}$ (1).

Do $EA = \frac{1}{3}SA \Rightarrow S_{\Delta EAK} = \frac{1}{3}S_{\Delta SAK}$ (2).

Từ (1) và (2), suy ra $S_{\Delta EMK} = \frac{1}{3}S_{\Delta SAK} = \frac{1}{6}S_{\Delta SAC}$.

Ta có khoảng cách từ L đến mặt phẳng (EMK) là:

$d\left(L,(MKE)\right)=\frac{BK}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}a$.

Diện tích tam giác SAC là:

$S_{\Delta SAC}=\frac{1}{2}.SK.AC=\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{34}}{2}a.\sqrt{2}a=\frac{\sqrt{17}}{2}a^2$ (đvdt).

Nên diện tích tam giác EMK là:

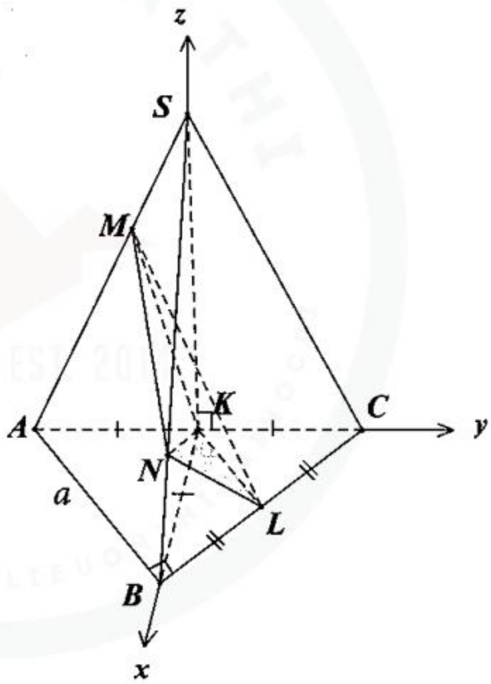
$S_{\Delta EMK}=\frac{1}{6}S_{\Delta SAC}=\frac{1}{6}.\frac{\sqrt{17}}{2}a^2=\frac{\sqrt{17}}{12}a^2$ (đvdt).

Thể tích khối tứ diện $L.MNK$ là:

$V_{L.MNK}=V_{L.EMK}=\frac{1}{3}S_{\Delta EMK}.d\left(L,(SAC)\right)=\frac{1}{3}.\frac{\sqrt{17}}{12}a^2.\frac{\sqrt{2}}{4}a=\frac{\sqrt{34}}{144}a^3$ (đvtt).

Cách 2: Phương pháp tọa độ không gian

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ.



$K\equiv O(0;0;0)$, $Ox\equiv KB$, $Oy\equiv KC$, $Oz\equiv KS$.

Chọn $a=1$, khi đó $A\left(0;-\frac{\sqrt{2}}{2};0\right)$, $B\left(\frac{\sqrt{2}}{2};0;0\right)$, $C\left(0;\frac{\sqrt{2}}{2};0\right)$, $L\left(\frac{\sqrt{2}}{4};\frac{\sqrt{2}}{4};0\right)$.

Tam giác SKA vuông tại K nên ta có:

$SK=\sqrt{SA^2-KA^2}$

$=\sqrt{(3a)^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2}=\frac{\sqrt{34}}{2}a$,

do đó $S\left(0;0;\frac{\sqrt{34}}{2}\right)$.

Từ giả thiết, ta có $\overrightarrow{SM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{SA}$.

Gọi $M(x_M;y_M;z_M)$,

Ta có $\overrightarrow{SM}=\left(x_M;y_M;z_M-\frac{\sqrt{34}}{2}\right)$, $\overrightarrow{SA}=\left(0;-\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{34}}{2}\right)$.

Do đó

$$\overrightarrow{SM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{SA}\Leftrightarrow\begin{cases}x_M=\frac{1}{3}.0\\ y_M=\frac{1}{3}.\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\\ z_M-\frac{\sqrt{34}}{2}=\frac{1}{3}.\left(-\frac{\sqrt{34}}{2}\right)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_M=0\\ y_M=-\frac{\sqrt{2}}{6}\\ z_M=\frac{\sqrt{34}}{3}\end{cases}\Rightarrow M\left(0;-\frac{\sqrt{2}}{6};\frac{\sqrt{34}}{3}\right).$$

Từ giả thiết, ta có $\overrightarrow{SN}=\frac{2}{3}\overrightarrow{SB}$.

Gọi $N\left(x_N;y_N;z_N\right)$, ta có $\overrightarrow{SN}=\left(x_N;y_N;z_N-\frac{\sqrt{34}}{2}\right)$, $\overrightarrow{SB}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2};0;-\frac{\sqrt{34}}{2}\right)$.

Do đó

$$\overrightarrow{SN}=\frac{2}{3}\overrightarrow{SB}\Leftrightarrow\begin{cases}x_N=\frac{2}{3}.\frac{\sqrt{2}}{2}\\ y_N=\frac{2}{3}.0\\ z_N-\frac{\sqrt{34}}{2}=\frac{2}{3}.\left(-\frac{\sqrt{34}}{2}\right)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_N=\frac{\sqrt{2}}{3}\\ y_N=0\\ z_N=\frac{\sqrt{34}}{6}\end{cases}\Rightarrow N\left(\frac{\sqrt{2}}{3};0;\frac{\sqrt{34}}{6}\right).$$

Ta có $\overrightarrow{KL}=\left(\frac{\sqrt{2}}{4};\frac{\sqrt{2}}{4};0\right)$, $\overrightarrow{KM}=\left(0;-\frac{\sqrt{2}}{6};\frac{\sqrt{34}}{3}\right)$, $\overrightarrow{KN}=\left(\frac{\sqrt{2}}{3};0;\frac{\sqrt{34}}{6}\right)$.

Suy ra $\left[\overrightarrow{KL},\overrightarrow{KM}\right]=\left(\frac{\sqrt{17}}{6};-\frac{\sqrt{17}}{6};-\frac{1}{12}\right)$

$$\Rightarrow\left[\overrightarrow{KL},\overrightarrow{KM}\right].\overrightarrow{KN}=\frac{\sqrt{17}}{6}.\frac{\sqrt{2}}{3}+\left(-\frac{\sqrt{17}}{6}\right).0+\left(-\frac{1}{12}\right).\frac{\sqrt{34}}{6}=\frac{\sqrt{34}}{24}$$

$$\Rightarrow\left|\left[\overrightarrow{KL},\overrightarrow{KM}\right].\overrightarrow{KN}\right|=\frac{\sqrt{34}}{24}.$$

Thể tích khối tứ diện $LMNK$ là:

$V_{LMNK}=\frac{1}{6}.\left|\left[\overrightarrow{KL},\overrightarrow{KM}\right].\overrightarrow{KN}\right|=\frac{\sqrt{34}}{144}=\frac{\sqrt{34}}{144}a^3$ (đvtt) (do ta chọn $a=1$).

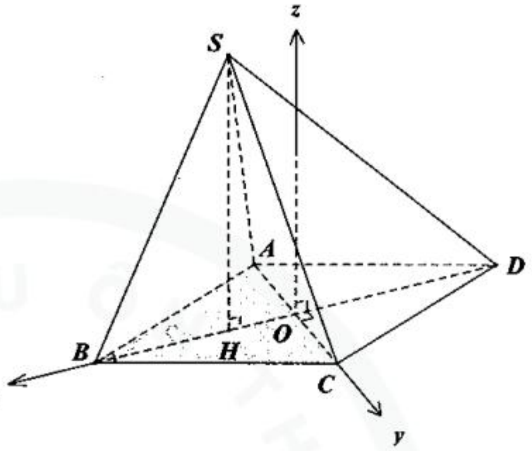
Nhận xét: Ở đây, phương pháp tọa độ không gian lại không thực sự mạnh hơn phương pháp thuần túy, vì chúng ta phải tính toán quá nhiều điểm ở các vị trí khó khăn.

Bài 4

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, $\widehat{ABC}=60^\circ$; $SB=2a$. Đỉnh S cách đều các đỉnh A, B, C. Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABCD$.

➢ **Lời giải:**

Gọi $O=AC\cap BD$.



Tam giác ABC là tam giác đều (do $AB=BC$ và $\widehat{ABC}=60^\circ$)

Gọi H là tâm tam giác đều ABC.

Vì S và H cùng cách đều các điểm A, B, C nên SH vuông góc với mặt phẳng (ABC) do đó SH là đường cao hình chóp $S.ABCD$.

Ta có $OA=OC=\dfrac{AC}{2}=\dfrac{a}{2}$

Do H là tâm tam giác đều ABC nên $BH=\dfrac{2}{3}BO=\dfrac{2}{3}.\dfrac{\sqrt{3}}{2}a=\dfrac{\sqrt{3}}{3}a$

và $OH=\dfrac{1}{3}BO=\dfrac{1}{3}.\dfrac{\sqrt{3}}{2}a=\dfrac{\sqrt{3}}{6}a$.

Tam giác SHB vuông tại H nên ta có

$$SH=\sqrt{SB^2-BH^2}=\sqrt{(2a)^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2}=\frac{\sqrt{33}}{3}a.$$

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ.

$O\equiv O(0;0;0)$, $Ox\equiv OB$, $Oy\equiv OC$, $Oz\parallel HS$, $H\left(\dfrac{\sqrt{3}}{6};0;0\right)$.

Chọn $a=1$, khi đó $A\left(0;-\dfrac{1}{2};0\right)$, $B\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2};0;0\right)$, $C\left(0;\dfrac{1}{2};0\right)$, $S\left(\dfrac{\sqrt{3}}{6};0;\dfrac{\sqrt{33}}{3}\right)$.

Ta có $\overrightarrow{SA}=\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{6};-\dfrac{1}{2};-\dfrac{\sqrt{33}}{3}\right)$, $\overrightarrow{SB}=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3};0;-\dfrac{\sqrt{33}}{3}\right)$,

$\overrightarrow{SC}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{6};\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{33}}{3}\right)$.

Suy ra $\left[\overrightarrow{SA},\overrightarrow{SB}\right]=\left(\frac{\sqrt{33}}{6};-\frac{\sqrt{11}}{2};\frac{\sqrt{3}}{6}\right)$

$\Rightarrow\left[\overrightarrow{SA},\overrightarrow{SB}\right].\overrightarrow{SC}=\frac{\sqrt{33}}{6}.\left(-\frac{\sqrt{3}}{6}\right)+\left(-\frac{\sqrt{11}}{2}\right).\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6}.\left(-\frac{\sqrt{33}}{3}\right)=-\frac{\sqrt{11}}{2}$

$\Rightarrow\left|\left[\overrightarrow{SA},\overrightarrow{SB}\right].\overrightarrow{SC}\right|=\left|-\frac{\sqrt{11}}{2}\right|=\frac{\sqrt{11}}{2}$.

Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là:

$V_{S.ABCD}=2V_{S.ABC}=2.\frac{1}{6}.\left|\left[\overrightarrow{SA},\overrightarrow{SB}\right].\overrightarrow{SC}\right|=\frac{\sqrt{11}}{6}=\frac{\sqrt{11}}{6}a^3$ (đvtt)

(do ta chọn $a=1$).

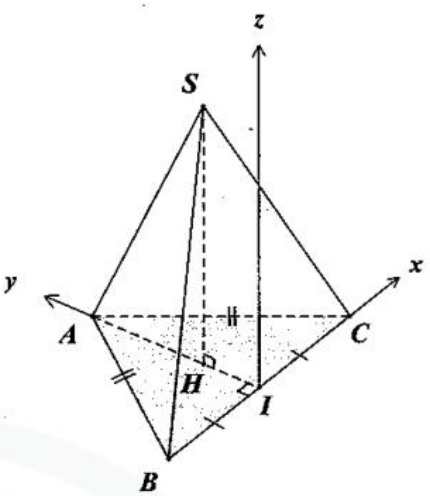
Nhận xét: Hình chóp có đáy là hình thoi, các cạnh bên bằng nhau thì ta dễ dàng gắn trục cho hình. Đó là chọn gốc tọa độ chính là giao điểm của hai đường chéo, các trục còn lại gắn vào hai đường chéo.

Si ves este mensaje, probablemente estás intentando descargar un libro que ha sido borrado de Issuu.

Cách 2: Phương pháp tọa độ không gian

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ.

$I \equiv O(0;0;0)$, $Ox \equiv IC$, $Oy \equiv IA$, $Oz \parallel HS$.



Chọn $a=1$, khiđó $A\left(0;\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$, $B\left(-\frac{1}{2};0;0\right)$,

$C\left(\frac{1}{2};0;0\right)$ và $S\left(0;\frac{\sqrt{3}}{6};1\right)$.$H\left(0;\frac{\sqrt{3}}{6};0\right)$.

Ta có $\overrightarrow{SA}=\left(0;-\frac{\sqrt{3}}{2};1\right)$, $\overrightarrow{SB}=\left(\frac{1}{2};0;1\right)$, $\overrightarrow{SC}=\left(-\frac{1}{2};0;1\right)$.

Suy ra $\left[\overrightarrow{SA},\overrightarrow{SB}\right]=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$

$\Rightarrow \left[\overrightarrow{SA},\overrightarrow{SB}\right].\overrightarrow{SC}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right).\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}.0+\frac{\sqrt{3}}{4}.1=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow \left|\left[\overrightarrow{SA},\overrightarrow{SB}\right].\overrightarrow{SC}\right|=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Thể tích khối chóp $S.ABC$ là:

$V_{S.ABC}=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{SA},\overrightarrow{SB}\right].\overrightarrow{SC}\right|=\frac{\sqrt{3}}{12}=\frac{\sqrt{3}}{12}a^3$ (đvtt) (do ta chọn $a=1$).

Bài 2

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, $AB=a$, góc giữa các cạnh bên với mặt đáy bằng $60°$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SC theo a.

➢ **Lời giải:**

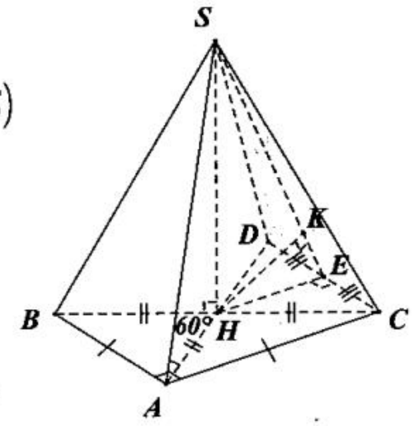
Cách 1: Phương pháp thuần túy

Gọi H là hình chiếu của S trên mặt phẳng (ABC).

Ta có $\widehat{SAH}=\widehat{SBH}=\widehat{SCH}=60°$, suy ra $AH=BH=CH$ nên H là trung điểm của cạnh BC.

Gọi D là điểm đối xứng với A qua H, suy ra $AB \parallel CD$ nên $AH \parallel (SCD)$.

Vậy $d\left(AB, SC\right)=d\left(AB,\left(SCD\right)\right)=d\left(A,\left(SCD\right)\right)$.



Gọi E là trung điểm của CD.

Khi đó $\left(SHE\right)\perp\left(SCD\right)=SE$, nên trong $\left(SHE\right)$ kẻ $HK\perp SE$ ($K\in SE$).

Suy ra $HK\perp\left(SCD\right)\Rightarrow HK=d\left(H,\left(SCD\right)\right)$.

Ta có $\dfrac{1}{HK^2}=\dfrac{1}{HS^2}+\dfrac{1}{HE^2}$.

Xét tam giác vuông SHA, ta có $\tan 60^\circ=\dfrac{SH}{AH}$

$\Rightarrow SH=AH.\tan 60^\circ=\dfrac{1}{2}.a\sqrt{2}.\tan 60^\circ=\dfrac{1}{2}.a\sqrt{2}.\sqrt{3}=\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Xét tam giác vuông HEC (vuông tại E), ta có $HE^2=HC^2-EC^2$

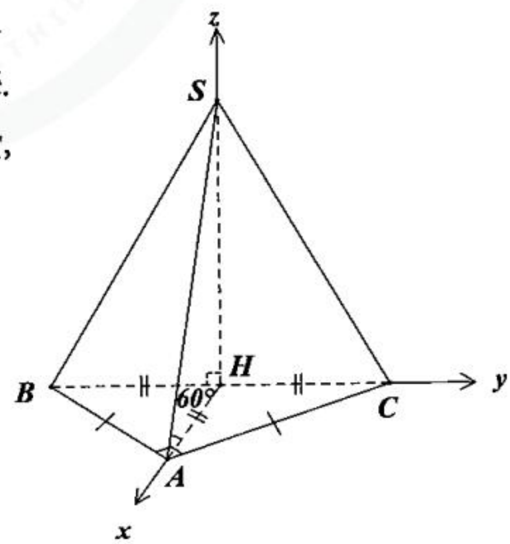
$=\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2-\left(\dfrac{a}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}a^2$.

Do đó $\dfrac{1}{HK^2}=\dfrac{1}{\left(\dfrac{a\sqrt{6}}{2}\right)^2}+\dfrac{1}{\dfrac{1}{4}a^2}=\dfrac{14}{3a^2}$

$\Rightarrow HK^2=\dfrac{3a^2}{14}\Rightarrow HK=\dfrac{\sqrt{42}}{14}a$.

Ta có $\dfrac{HK}{d\left(A,\left(SCD\right)\right)}=\dfrac{DH}{DA}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow d\left(A,\left(SCD\right)\right)=2HK=2.\dfrac{\sqrt{42}}{14}a=\dfrac{\sqrt{42}}{7}a$.

Cách 2: Phương pháp tọa độ không gian



Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ.

$H\equiv O\left(0;0;0\right)$, $Ox\equiv HA$, $Oy\equiv HC$, $Oz\equiv HS$.

Gọi H là hình chiếu của S trên mặt phẳng $\left(ABC\right)$.

Ta có $\widehat{SAH}=\widehat{SBH}=\widehat{SCH}=60^\circ$, suy ra $AH=BH=CH$ nên H là trung điểm của cạnh BC.

Xét tam giác vuông SHA, ta có

$\tan 60^\circ = \dfrac{SH}{AH}$

$\Rightarrow SH = AH.\tan 60^\circ = \dfrac{1}{2}.a\sqrt{2}.\tan 60^\circ = \dfrac{1}{2}.a\sqrt{2}.\sqrt{3} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Chọn $a = 1$, khi đó $A\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}; 0; 0\right)$, $B\left(0; -\dfrac{\sqrt{2}}{2}; 0\right)$, $C\left(0; \dfrac{\sqrt{2}}{2}; 0\right)$ và $S\left(0; 0; \dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)$.

Ta có $\overrightarrow{AB} = \left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}; -\dfrac{\sqrt{2}}{2}; 0\right)$, $\overrightarrow{SC} = \left(0; \dfrac{\sqrt{2}}{2}; -\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)$ và $\overrightarrow{BC} = \left(0; \sqrt{2}; 0\right)$.

Suy ra $\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{SC}\right] = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}; -\dfrac{\sqrt{3}}{2}; -\dfrac{1}{2}\right)$

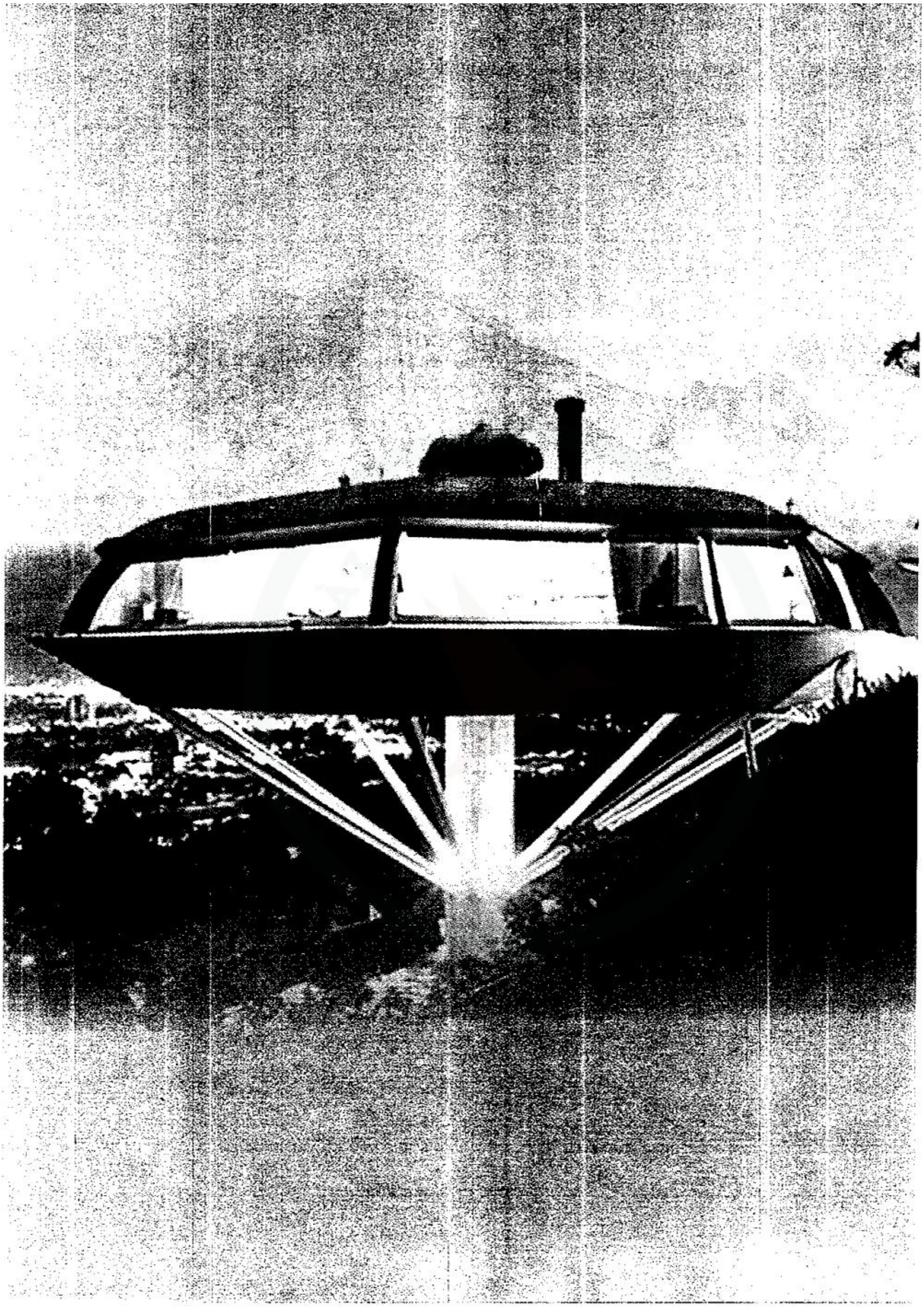
$\Rightarrow \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{SC}\right].\overrightarrow{BC} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}.0 + \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right).\sqrt{2} + \left(-\dfrac{1}{2}\right).0 = -\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

$\Rightarrow \left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{SC}\right].\overrightarrow{BC}\right| = \left|-\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right| = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SC là:

$$d(AB, SC) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{SC}\right].\overrightarrow{BC}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{SC}\right]\right|} = \frac{\left|-\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right|}{\sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2}} = \frac{\sqrt{42}}{7} = \frac{\sqrt{42}}{7}a$$

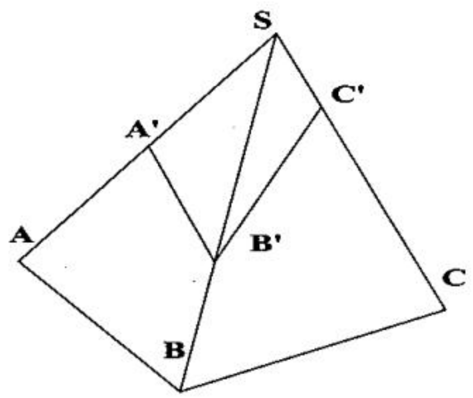
(do ta chọn $a = 1$).



DẠNG 6. TỈ SỐ THỂ TÍCH (SIMSON)

Đặc điểm:

- Khó có thể xác định và tính được đường cao cho khối hình cần tính V.
- Việc tính diện tích đáy là vô cùng khó khăn.



Chứng minh bổ đề:

$$\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{SABC}} = \frac{SA'.SB'.SC'}{SA.SB.SC}.$$

Nhận xét:

- Bổ đề trên đúng khi các điểm $A'B'C'$ trùng với không quá 3 điểm ở đáy.
- Nếu gặp đáy là tứ giác ta phải chia thành các tam giác trước khi áp dụng bổ đề.

Khi áp dụng phải chứng minh.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật với $AB = a$, $AD = 2a$, cạnh SA vuông góc với đáy, còn cạnh bên SB tạo với mặt phẳng đáy một góc $60°$. Trên cạnh SA lấy điểm M sao cho $AM = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Mặt phẳng (BCM) cắt cạnh SD tại N. Tính thể tích khối chóp $S.BCMN$.

➤ **Lời giải:**

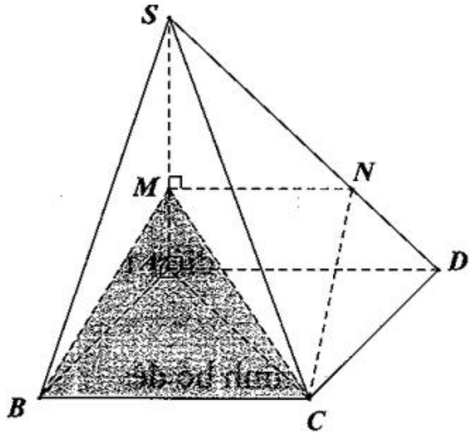
Cách 1: Phương pháp thuần túy

Theo giả thiết ta có $SA \perp (ABCD)$, suy ra $\left(\widehat{SB, (ABCD)}\right) = \widehat{SBA} = 60°$

$\Rightarrow SA = AB.\tan 60° = a\sqrt{3}$.

Trong mặt phẳng (SAD) kẻ $MN \parallel AD$ (N thuộc cạnh SD), nên $SD \cap (BCM) = N$.

Theo công thức tỉ số thể tích, ta có



$$\frac{V_{S.MBC}}{V_{S.ABC}}=\frac{SM}{SA}=\frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow V_{S.MBC}=\frac{2}{3}.V_{S.ABC}=\frac{1}{3}V_{S.ABCD};$$

$$\frac{V_{S.MNC}}{V_{S.ADC}}=\frac{SM}{SA}.\frac{SN}{SD}=\left(\frac{SM}{SA}\right)^2=\frac{4}{9}$$

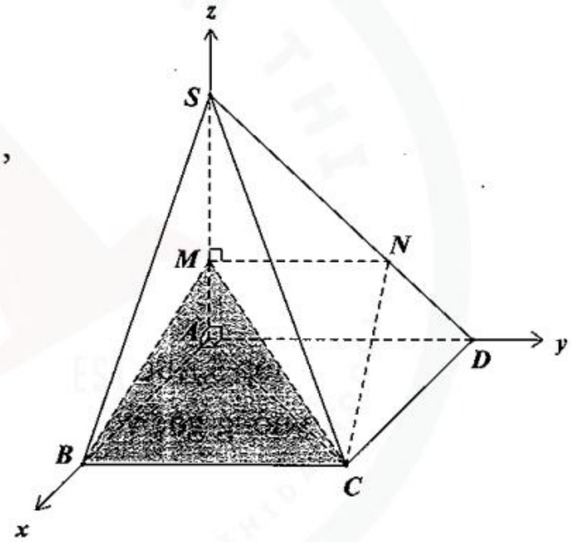
$$\Rightarrow V_{S.MNC}=\frac{4}{9}V_{S.ADC}=\frac{2}{9}V_{S.ABCD}.$$

Vậy

$$V_{S.BCMN}=V_{S.MBC}+V_{S.MNC}=\frac{5}{9}V_{S.ABCD}=\frac{5}{9}.\frac{1}{3}.SA.S_{ABCD}=\frac{10\sqrt{3}}{27}a^3.$$

Cách 2: Phương pháp tọa độ không gian

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ.



$A\equiv O(0;0;0)$, $Ox\equiv AB$, $Oy\equiv AD$, $Oz\equiv AS$.

Chọn $a=1$, khi đó $B(1;0;0)$, $C(1;2;0)$, $M\left(0;0;\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, $N\left(0;\frac{2}{3};\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ và $S\left(0;0;\sqrt{3}\right)$.

Ta có $\overrightarrow{SB}=\left(-1;0;\sqrt{3}\right)$, $\overrightarrow{SC}=\left(-1;-2;\sqrt{3}\right)$, $\overrightarrow{SM}=\left(0;0;\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$, $\overrightarrow{SN}=\left(0;-\frac{2}{3};\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$.

$$\Rightarrow\left[\overrightarrow{SB},\overrightarrow{SC}\right]=\left(2\sqrt{3};0;2\right) \text{ và } \left[\overrightarrow{SC},\overrightarrow{SN}\right]=\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3};\frac{2\sqrt{3}}{3};\frac{1}{3}\right).$$

Thể tích khối chóp $S.BCMN$ là:

$$V_{S.BCMN}=V_{S.BCM}+V_{S.CNM}=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{SB},\overrightarrow{SC}\right].\overrightarrow{SM}\right|+\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{SC},\overrightarrow{SN}\right].\overrightarrow{SM}\right|=\frac{10\sqrt{3}}{27}=\frac{10\sqrt{3}}{27}a^3$$

(đvtt) (do ta chọn $a=1$).

Bài 2

Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$. Mặt phẳng (P) qua A và vuông góc với SC cắt SB, SC, SD tại B', C', D'. Biết rằng $AB = a$, $\frac{SB'}{SB} = \frac{2}{3}$. Tính tỉ số thể tích của hai khối chóp $S.AB'C'D'$ với $S.ABCD$ và tính theo a thể tích khối chóp $S.AB'C'D'$.

➤ **Lời giải:**

Cách 1: Phương pháp thuần túy

Gọi SH là đường cao của hình chóp $S.ABCD$.

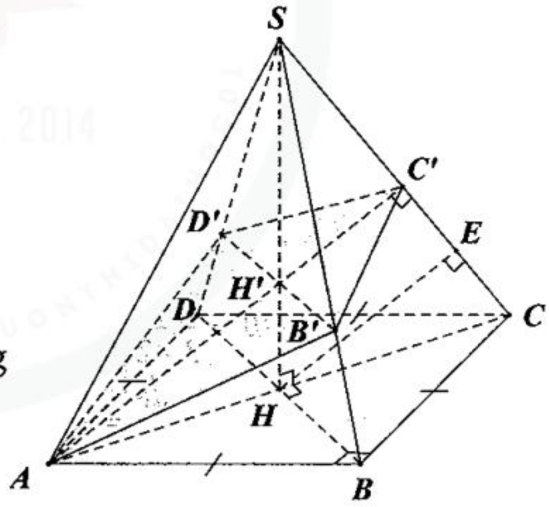
Gọi H' là giao điểm của SH và mặt phẳng (P).

Do $S.ABCD$ là hình chóp đều nên H là giao điểm của AC và BD.

$$\begin{cases} BD \perp SH \\ BD \perp AC \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SC.$$

Do $(P) \perp SC \Rightarrow BD \parallel (P)$

$$\text{Do} \begin{cases} BD \parallel (P) \\ BD \subset (SBD) \\ (P) \cap (SBD) = B'D' \end{cases} \Rightarrow BD \parallel B'D'$$



$$\Rightarrow \frac{SD'}{SD} = \frac{SH'}{SH} = \frac{SB'}{SB} = \frac{2}{3},$$

$H'D' = H'B'$ và $B'D' \perp AC'$.

Qua H kẻ đường thẳng song song với AC' cắt SC tại E.

Khi đó $EC' = EC$, $\frac{SC'}{SE} = \frac{2}{3}$

Suy ra $\frac{SE - SC'}{SE} = \frac{1}{3} = \frac{EC'}{SE}$

$\Rightarrow SC' = 2EC' = CC'$.

Ta có $\frac{V_{S.AB'D'}}{V_{S.ABD}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$, $\frac{V_{S.B'C'D'}}{V_{S.BCD}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{9}$

Ta có $V_{S.ABD} = V_{S.BCD} = \dfrac{V_{S.ABCD}}{2}$

Nên $V_{S.AB'C'D'} = V_{S.AB'D'} + V_{S.B'C'D'} = \left(\dfrac{4}{9} + \dfrac{2}{9}\right)\dfrac{V_{S.ABCD}}{2} = \dfrac{1}{3}V_{S.ABCD}$.

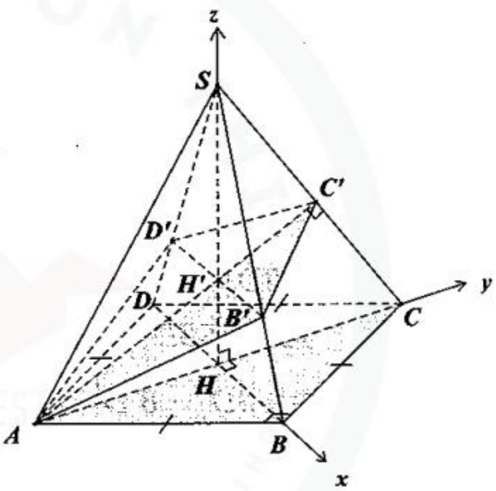
Theo chứng minh trên: AC' vừa là đường cao vừa là đường trung tuyến của tam giác SAC nên $SA = AC$, suy ra tam giác SAC đều, nên

$$SH = \frac{\sqrt{3}}{2}AC = \frac{\sqrt{3}}{2}a\sqrt{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}a.$$

Thể tích khối chóp $S.AB'C'D'$ là:

$$V_{S.AB'C'D'} = \frac{1}{3}V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}.\frac{1}{3}.\frac{\sqrt{6}}{2}a^3 = \frac{\sqrt{6}}{18}a^3 \text{ (đvtt).}$$

Cách 2: Phương pháp tọa độ không gian



Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ.

$H \equiv O(0; 0; 0)$, $Ox \equiv HB$, $Oy \equiv HC$, $Oz \equiv HS$.

Chọn $a = 1$, khi đó $A\left(0; -\dfrac{\sqrt{2}}{2}; 0\right)$,

$B\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}; 0; 0\right)$, $C\left(0; \dfrac{\sqrt{2}}{2}; 0\right)$.

Do $\dfrac{SH'}{SH} = \dfrac{SB'}{SB} = \dfrac{2}{3}$

$$\Rightarrow \begin{cases} H'B' = \dfrac{2}{3}HB = \dfrac{2}{3}.\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{3} \\ H'H = \dfrac{1}{3}SH = \dfrac{1}{3}.\dfrac{\sqrt{6}}{2} = \dfrac{\sqrt{6}}{6} \end{cases}$$

$$\Rightarrow B'\left(\frac{\sqrt{2}}{3}; 0; \frac{\sqrt{6}}{6}\right), S\left(0; 0; \frac{\sqrt{6}}{2}\right).$$

Tam giác AHH' vuông tại H, nên ta có

$$AH' = \sqrt{AH^2 + HH'^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{6}}{6}a\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}a.$$

Tam giác CHS vuông tại H, nên ta có

$$\tan\widehat{SCH}=\frac{SH}{HC}=\frac{\frac{\sqrt{6}}{6}a}{\frac{\sqrt{2}}{2}a}=\frac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow\widehat{SCH}=30^\circ.$$

Tam giác ACC' vuông tại C', nên ta có:

$$AC'=AC.\sin\widehat{C'CA}=a\sqrt{2}.\sin30^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}a.$$

Do đó $H'C'=AC'-AH'=\frac{\sqrt{2}}{2}a-\frac{\sqrt{6}}{3}a=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)a$.

$$\Rightarrow C'\left(0;\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{6}}{3}\right).\sin30^\circ;\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{6}}{3}\right).\cos30^\circ\right)=C'\left(0;\frac{\sqrt{2}}{4}-\frac{\sqrt{6}}{6};\frac{\sqrt{6}}{4}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Ta có $\overrightarrow{SA}=\left(0;\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$, $\overrightarrow{SB}=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};0;\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$, $\overrightarrow{SC}=\left(0;-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$,

$\overrightarrow{SB'}=\left(-\frac{\sqrt{2}}{3};0;0\right)$, $\overrightarrow{SC'}=\left(0;\frac{\sqrt{6}}{6}-\frac{\sqrt{2}}{4};\frac{\sqrt{6}+2\sqrt{2}}{4}\right)$.

Thể tích khối chóp $S.AB'C'D'$ là:

$$V_{S.AB'C'D'}=2V_{S.AB'C'}=2.\frac{1}{6}.\left|\left[\overrightarrow{SA},\overrightarrow{SB'}\right].\overrightarrow{SC'}\right|=\frac{\sqrt{6}}{18}=\frac{\sqrt{6}}{18}a^3\text{ (đvtt)}$$

(do ta chọn $a=1$).

Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là:

$$V_{S.ABCD}=2V_{S.ABC}=2.\frac{1}{6}.\left|\left[\overrightarrow{SA},\overrightarrow{SB}\right].\overrightarrow{SC}\right|=\frac{\sqrt{6}}{6}=\frac{\sqrt{6}}{6}a^3\text{ (đvtt) (do ta chọn } a=1\text{)}.$$

Bài 3

Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA=2a$. Gọi B', D' lần lượt là hình chiếu của A trên SB và SD. Mặt phẳng $(AB'D')$ cắt SC tại C'. Tính thể tích khối chóp $S.AB'C'D'$.

➤ **Lời giải:**

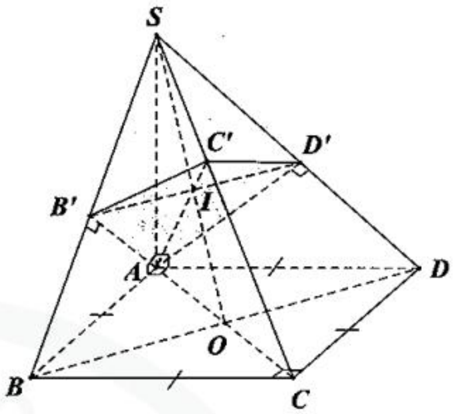
Cách 1: Phương pháp thuần túy

Trong mặt phẳng (SBD) gọi I là giao điểm của $B'D'$ và SO.

Trong mặt phẳng (SAC), gọi C' là giao điểm của AI với SC thì C' là giao điểm của mặt phẳng $(AB'D')$ với SC.

Ta có

$\Delta SAB = \Delta SAD \Rightarrow SB = SD$



$SB' = \dfrac{SA^2}{SB} = \dfrac{SA^2}{SD} = SD' \Rightarrow \dfrac{SB'}{SB} = \dfrac{SD'}{SD}$ (*).

$V_{S.AB'C'} + V_{S.AC'D'} = V_{S.AB'C'D'}$.

$V_{S.ABC} = V_{S.ACD} = \dfrac{1}{2}V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{2}V$

(đặt $V_{S.ABCD} = V$)

$\dfrac{V_{S.AB'C'}}{V_{S.ABC}} = \dfrac{SB'}{SB}.\dfrac{SC'}{SC}$ hay $\dfrac{2V_{S.AB'C'}}{V} = \dfrac{SB'}{SB}.\dfrac{SC'}{SC}$

Tương tự $\dfrac{2V_{S.AC'D'}}{V} = \dfrac{SD'}{SD}.\dfrac{SC'}{SC} = \dfrac{SB'}{SB}.\dfrac{SC'}{SC}$ (do $SD = SB$)

$\Rightarrow 2V_{S.AB'C'D'} = 2\dfrac{SB'.SC'}{SB.SC}.V = 2.\dfrac{SB'.SC'}{SB.SC}.\dfrac{2a^3}{3}$

$\Rightarrow V_{S.AB'C'D'} = \dfrac{SB'.SC'}{SB.SC}.\dfrac{2a^3}{3}$.

Vì $SB' = \dfrac{SA^2}{SB} \Rightarrow \dfrac{SB'}{SB} = \dfrac{SA^2}{SB^2} = \dfrac{4a^2}{SA^2 + AB^2} = \dfrac{4a^2}{4a^2 + a^2} = \dfrac{4}{5}$.

Ta có $BC \perp AB; BC \perp SA \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AB'$.

Mặt khác $SB \perp AB'$.

Vậy $AB' \perp (SBC) \Rightarrow AB' \perp SC$;

Tương tự $AD' \perp SC \Rightarrow SC \perp (AB'D') \Rightarrow SC \perp AC'$.

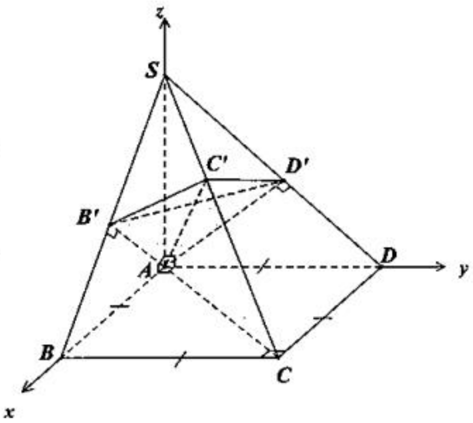
Tam giác SAC vuông tại A và AC' là đường cao nên $SC'.SC = SA^2$

$\Rightarrow \dfrac{SC'}{SC} = \dfrac{SA^2}{SC^2} = \dfrac{4a^2}{SA^2 + AC^2} = \dfrac{4a^2}{4a^2 + 2a^2} = \dfrac{2}{3}$

Thể tích khối chóp $S.AB'C'D'$ là:

$V_{S.AB'C'D'} = \dfrac{4}{5}.\dfrac{2}{3}.\dfrac{2a^3}{3} = \dfrac{16}{45}a^3$ (đvtt).

Cách 2: Phương pháp tọa độ không gian



Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ.

$A \equiv O(0;0;0)$, $Ox \equiv AB$, $Oy \equiv AD$, $Oz \equiv AS$.

Chọn $a=1$, khi đó $B(1;0;0)$, $C(1;1;0)$, $D(0;1;0)$ và $S(0;0;2)$.

Ta có $\overrightarrow{SB}=(1;0;-2)$, $\overrightarrow{SC}=(1;1;-2)$;

$SB=\sqrt{1^2+0^2+(-2)^2}=\sqrt{5}$

$\Rightarrow AB'=\dfrac{SA.AB}{SB}=\dfrac{2.1}{\sqrt{5}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

Tam giác SAB vuông tại A nên $\sin\widehat{ABS}=\dfrac{SA}{SB}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

Do đó $AB'.\sin\widehat{ABS}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}.\dfrac{2}{\sqrt{5}}=\dfrac{4}{5}$.

Tam giác SAB vuông tại A nên $\cos\widehat{ABS}=\dfrac{AB}{SB}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

Do đó $AB'.\cos\widehat{ABS}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}.\dfrac{1}{\sqrt{5}}=\dfrac{2}{5}$.

Vậy $B'\left(\dfrac{4}{5};0;\dfrac{2}{5}\right)$.

$SC=\sqrt{1^2+1^2+(-2)^2}=\sqrt{6}$.

$\Rightarrow AC'=\dfrac{SA.AC}{SC}=\dfrac{2.\sqrt{2}}{\sqrt{6}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

Tam giác SAC vuông tại A nên $\sin\widehat{ACS}=\dfrac{SA}{SC}=\dfrac{2}{\sqrt{6}}$.

Do đó $AC'.\sin\widehat{ACS}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}.\dfrac{2}{\sqrt{6}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

Tam giác SAB vuông tại A nên $\cos\widehat{ACS}=\dfrac{AC}{SC}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Do đó $AC'.\cos\widehat{ACS}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}.\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\dfrac{2}{3}$.

Vậy $C'\left(\dfrac{2}{3};\dfrac{2}{3};\dfrac{2}{3}\right)$.

Ta có $\overrightarrow{SB'}=\left(\dfrac{4}{5};0;-\dfrac{8}{5}\right)$, $\overrightarrow{SC'}=\left(\dfrac{2}{3};\dfrac{2}{3};-\dfrac{4}{3}\right)$, $\overrightarrow{SA}=(0;0;2)$.

$\Rightarrow \left[\overrightarrow{SB'}, \overrightarrow{SC'}\right] = \left(\frac{16}{15}; 0; \frac{8}{15}\right) \Rightarrow \left|\left[\overrightarrow{SB'}, \overrightarrow{SC'}\right].\overrightarrow{SA}\right| = \frac{16}{15}$.

Thể tích khối chóp $S.AB'C'D'$ là:

$V_{S.AB'C'D'} = 2V_{S.AB'C'} = 2.\frac{1}{6}.\left|\left[\overrightarrow{SB'}, \overrightarrow{SC'}\right].\overrightarrow{SA}\right| = \frac{16}{45} = \frac{16}{45}a^3$ (đvtt)

(do ta chọn $a = 1$).

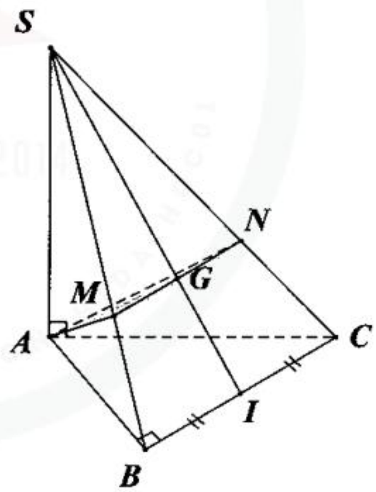
Bài 4

Cho hình chóp $S.ABC$ có tam giác ABC vuông cân ở B, $AC = a\sqrt{2}$, $SA = a$ và vuông góc với đáy (ABC).

a) Tính thể tích của khối chóp $S.ABC$.

b) Gọi G là trọng tâm tam giác ABC, mặt phẳng (α) qua AG và song song với BC cắt SC, SB lần lượt tại M, N. Tính thể tích của khối chóp $S.AMN$.

➤ **Lời giải:**



Cách 1: Phương pháp thuần túy

Gọi I là trung điểm của BC.

Tam giác ABC vuông cân tại B có $AC = a\sqrt{2} \Rightarrow BA = BC = a$.

Diện tích tam giác ABC là:

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}BC.BA = \frac{a^2}{2}$ (đvdt).

Thể tích khối chóp $S.ABC$ là:

$V_{S.ABC} = \frac{1}{3}.SA.S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3}.a.\frac{a^2}{2} = \frac{a^3}{6}$ (đvtt).

Do $MN \parallel BC \Rightarrow \frac{SM}{SB} = \frac{SN}{SC} = \frac{SG}{SI} = \frac{2}{3}$.

Ta có

$\frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}} = \frac{SM}{SB}.\frac{SN}{SC} = \frac{2}{3}.\frac{2}{3} = \frac{4}{9} \Rightarrow V_{S.AMN} = \frac{4}{9}V_{S.ABC}$.

Do đó thể tích khối chóp $S.AMN$ là:

$$V_{S.AMN}=\frac{4}{9}V_{S.ABC}=\frac{4}{9}.\frac{a^3}{6}=\frac{2}{27}a^3 \text{ (đvtt)}.$$

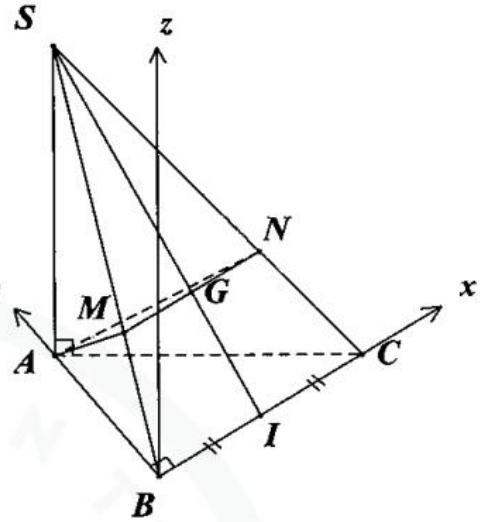
Cách 2: Phương pháp tọa độ không gian

Gọi I là trung điểm của BC.

Tam giác ABC vuông cân tại B có $AC=a\sqrt{2}\Rightarrow BA=BC=a$.

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ.

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ.



$B\equiv O(0;0;0)$, $Ox\equiv BC$, $Oy\equiv BA$, $Oz \parallel AS$.

Chọn $a=1$, khi đó $A(0;1;0)$, $C(1;0;0)$, $S(0;1;1)$.

Ta có $\overrightarrow{SA}=(0;0;-1)$, $\overrightarrow{SB}=(0;-1;-1)$, $\overrightarrow{SC}=(1;-1;-1)$.

Suy ra $\left[\overrightarrow{SA},\overrightarrow{SB}\right]=(-1;0;0)\Rightarrow\left[\overrightarrow{SA},\overrightarrow{SB}\right].\overrightarrow{SC}=-1.1+0.(-1)+0.(-1)=-1$

$$\Rightarrow\left|\left[\overrightarrow{SA},\overrightarrow{SB}\right].\overrightarrow{SC}\right|=|-1|=1.$$

Thể tích khối chóp $S.ABC$ là:

$$V_{S.ABC}=\frac{1}{6}.\left|\left[\overrightarrow{SA},\overrightarrow{SB}\right].\overrightarrow{SC}\right|=\frac{1}{6}=\frac{a^3}{6} \text{ (đvtt) (do ta chọn } a=1\text{)}.$$

Do $MN \parallel BC$

$$\Rightarrow\frac{SM}{SB}=\frac{SG}{SI}=\frac{2}{3}\Rightarrow SM=\frac{2}{3}SB\Rightarrow\overrightarrow{SM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{SB}.$$

Gọi $M(x_M;y_M;z_M)$, ta có $\overrightarrow{SM}=(x_M;y_M-1;z_M-1)$, $\overrightarrow{SB}=(0;1;1)$.

$$\text{Do đó } \overrightarrow{SM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{SB}\Leftrightarrow\begin{cases}x_M=\frac{2}{3}.0\\ y_M-1=\frac{2}{3}.1\\ z_M-1=\frac{2}{3}.1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_M=0\\ y_M=\frac{5}{3}\\ z_M=\frac{5}{3}\end{cases}\Rightarrow M\left(0;\frac{5}{3};\frac{5}{3}\right).$$

Do $MN \parallel BC$

$$\Rightarrow \frac{SN}{SC}=\frac{SG}{SI}=\frac{2}{3}\Rightarrow SN=\frac{2}{3}SC\Rightarrow \overrightarrow{SN}=\frac{2}{3}\overrightarrow{SC}.$$

Gọi $N\left(x_N;\, y_N;\, z_N\right)$, ta có $\overrightarrow{SN}=\left(x_N;\, y_N-1;\, z_N-1\right)$, $\overrightarrow{SC}=\left(1;\,0;\,0\right)$.

Do đó $\overrightarrow{SN}=\frac{2}{3}\overrightarrow{SC}\Leftrightarrow \begin{cases} x_N=\frac{2}{3}.1 \\ y_N-1=\frac{2}{3}.0 \\ z_N-1=\frac{2}{3}.0 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x_N=\frac{2}{3} \\ y_N=1 \\ z_N=1 \end{cases}\Rightarrow N\left(\frac{2}{3};\,1;\,1\right)$.

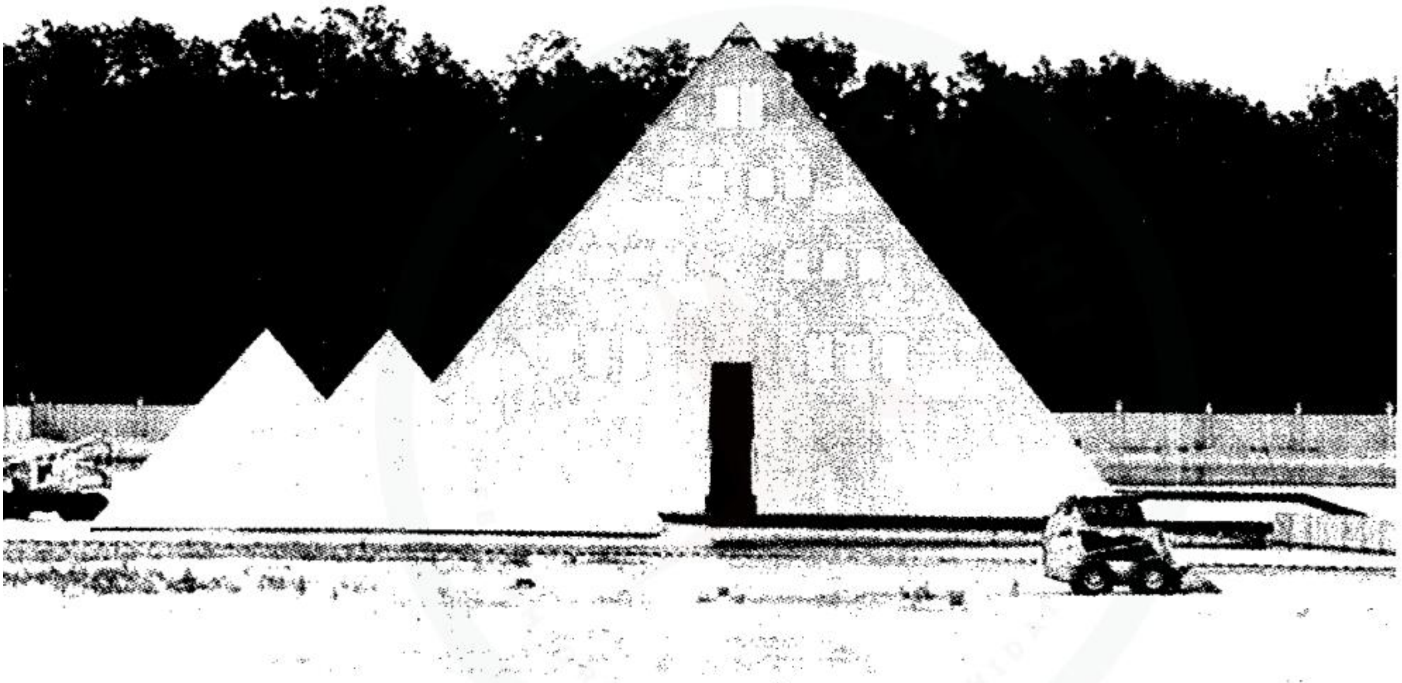
Ta có $\overrightarrow{SA}=\left(0;\,0;\,-1\right)$, $\overrightarrow{SM}=\left(0;\,\frac{2}{3};\,\frac{2}{3}\right)$, $\overrightarrow{SN}=\left(\frac{2}{3};\,0;\,0\right)$.

Suy ra $\left[\overrightarrow{SM},\overrightarrow{SN}\right]=\left(0;\,\frac{4}{9};\,-\frac{4}{9}\right)\Rightarrow \left[\overrightarrow{SM},\overrightarrow{SN}\right].\overrightarrow{SA}=0.0+\frac{4}{9}.0+\left(-\frac{4}{9}\right).(-1)=\frac{4}{9}$

$$\Rightarrow \left|\left[\overrightarrow{SM},\overrightarrow{SN}\right].\overrightarrow{SA}\right|=\frac{4}{9}.$$

Thể tích khối chóp $S.AMN$ là:

$V_{S.AMN}=\frac{1}{6}.\left|\left[\overrightarrow{SM},\overrightarrow{SN}\right].\overrightarrow{SA}\right|=\frac{2}{27}=\frac{a^3}{27}$ (đvtt) (do ta chọn $a=1$).



DẠNG 7. THỂ TÍCH "NƠTRINO"

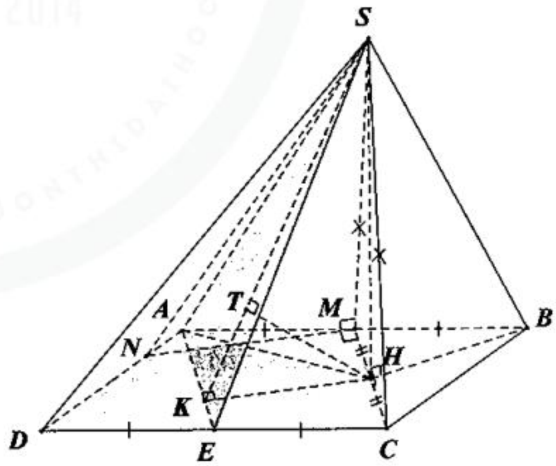
Notrino là gì? Không mang điện tích và khối lượng gần như bằng không, **neutrino** (phiên âm notrino, nơ tri nô) là những hạt cơ bản mờ ám nhất, hiếm khi tương tác với vật chất thông thường và lướt êm qua cơ thể, nhà cửa của chúng ta và Trái đất với số lượng hàng nghìn tỉ hạt đi qua mỗi giây. Có thể đây là hạt có vận tốc lớn hơn vận tốc ánh sáng.

Đặc điểm: Thể tích của hình chóp có chân đường cao không thuộc cạnh của đáy.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Các điểm M, N lần lượt nằm trên các cạnh AB, AD sao cho $MB = MA$, $AD = 4NA$. Biết $SA = a$, MN vuông góc với SM và tam giác SMC cân tại S. Tính theo a thể tích khối chóp $S.MNCD$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và MC.

➤ **Lời giải:**

Cách 1: Phương pháp thuần túy



Ta có $ABCD$ là hình vuông, suy ra $NM \perp MC$.

$NM \perp SM \Rightarrow NM \perp (SMC)$.

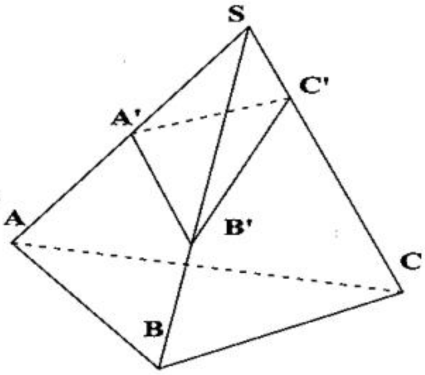
Gọi H là trung điểm của MC $\Rightarrow SH \perp MC$, suy ra $SH \perp (ABCD)$.

Ta có $MC = \sqrt{MB^2 + BC^2} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$

$\Rightarrow MH = BH = \dfrac{a\sqrt{5}}{4}$;

$\cos\widehat{MBH} = \cos\widehat{HMB} = \dfrac{MB}{MC} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$, suy ra $AH^2 = AB^2 + BH^2 - 2AB.BH.\cos\widehat{MBH} = \dfrac{13a^2}{16}$

$\Rightarrow SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.



Diện tích tứ giác $MNDC$ là:

$S_{MNDC} = S_{ABCD} - S_{\Delta AMN} - S_{\Delta MBC} = \dfrac{11}{16}a^2$ (đvdt).

Thể tích khối chóp $S.MNCD$ là:

$V_{S.MNDC} = \dfrac{1}{3}SH.S_{MNDC} = \dfrac{11\sqrt{3}}{192}a^3$ (đvtt).

Gọi E là trung điểm của CD, suy ra $AE \parallel CM$

$\Rightarrow d(SA, MC) = d(H, (SEA))$.

Kẻ $HK \perp AE \Rightarrow AE \perp (SHK)$.

Kẻ $HT \perp SK \Rightarrow HT = d(H, (SEA))$.

Ta có $S_{AMEC} = \dfrac{1}{2}S_{ABCD} = \dfrac{a^2}{2} = \dfrac{1}{2}HK(MC + AE) = HK.MC \Rightarrow HK = \dfrac{\sqrt{5}a}{5}$.

Suy ra $HT = \dfrac{HK.SH}{\sqrt{HK^2 + SH^2}} = \dfrac{\sqrt{93}}{31}a$.

Cách 2: Phương pháp tọa độ không gian

Ta có $ABCD$ là hình vuông, suy ra $NM \perp MC$.

$NM \perp SM \Rightarrow NM \perp (SMC)$.

Gọi H là trung điểm của $MC \Rightarrow SH \perp MC$, suy ra $SH \perp (ABCD)$.

Ta có $MC = \sqrt{MB^2 + BC^2} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2} \Rightarrow MH = BH = \dfrac{a\sqrt{5}}{4}$;

$\cos\widehat{MBH} = \cos\widehat{HMB} = \dfrac{MB}{MC} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

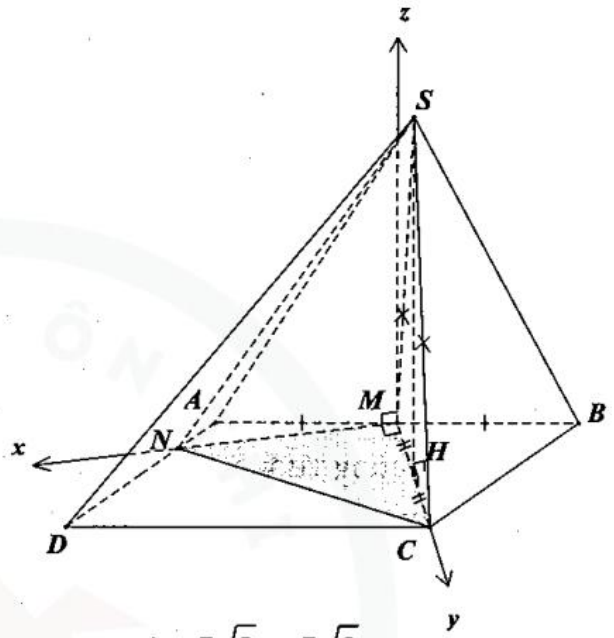
Suy ra $AH^2 = AB^2 + BH^2 - 2AB.BH.\cos\widehat{MBH} = \dfrac{13a^2}{16}$

$\Rightarrow SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ.

$M \equiv O(0;0;0)$, $Ox \equiv MN$, $Oy \equiv MC$, $Oz \parallel HS$.

Chọn $a=1$, khi đó $A\left(\frac{\sqrt{5}}{5};-\frac{\sqrt{5}}{10};0\right)$, $N\left(\frac{\sqrt{5}}{4};0;0\right)$, $C\left(0;\frac{\sqrt{5}}{2};0\right)$, $D\left(\frac{2\sqrt{5}}{5};\frac{3\sqrt{5}}{10};0\right)$ và $S\left(0;\frac{\sqrt{5}}{4};\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$.



Ta có $V_{S.MNDC} = V_{S.MNC} + V_{S.NDC}$.

$\overrightarrow{SM} = \left(0;-\frac{\sqrt{5}}{4};-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$,

$\overrightarrow{SN} = \left(\frac{\sqrt{5}}{4};-\frac{\sqrt{5}}{4};-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$,

$\overrightarrow{SD} = \left(\frac{2\sqrt{5}}{5};\frac{\sqrt{5}}{20};-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$,

$\overrightarrow{SC} = \left(0;\frac{\sqrt{5}}{4};-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$.

Ta lại có

$\left[\overrightarrow{SM},\overrightarrow{SN}\right] = \left(0;-\frac{\sqrt{15}}{16};\frac{5}{16}\right) \Rightarrow \left|\left[\overrightarrow{SM},\overrightarrow{SN}\right].\overrightarrow{SC}\right| = \frac{5\sqrt{3}}{32} = \frac{5\sqrt{3}}{32}a^3$

(đvtt) (do ta chọn $a=1$).

Ta lại có

$\left[\overrightarrow{SN},\overrightarrow{SD}\right] = \left(\frac{3\sqrt{15}}{40};-\frac{3\sqrt{15}}{80};\frac{9}{16}\right) \Rightarrow \left|\left[\overrightarrow{SN},\overrightarrow{SD}\right].\overrightarrow{SC}\right| = \frac{3\sqrt{3}}{16} = \frac{3\sqrt{3}}{16}a^3$ (đvtt)

(do ta chọn $a=1$).

Do đó $V_{S.MNDC} = V_{S.MNC} + V_{S.NDC} = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{SM},\overrightarrow{SN}\right].\overrightarrow{SC}\right| + \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{SN},\overrightarrow{SD}\right].\overrightarrow{SC}\right|$

$= \frac{1}{6}.\frac{5\sqrt{3}}{32}a^3 + \frac{1}{6}.\frac{3\sqrt{3}}{16}a^3 = \frac{11\sqrt{3}}{192}a^3$ (đvtt).

Đường thẳng SA có véctơ chỉ phương là: $\overrightarrow{u_{SA}} = \left(-\frac{\sqrt{5}}{5};-\frac{7\sqrt{5}}{20};\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$.

Đường thẳng MC có véctơ chỉ phương là: $\overrightarrow{u_{MC}} = \left(0;\frac{\sqrt{5}}{2};0\right)$.

Khoảng cách giữa đường thẳng SA và MC là:

$$d(SA,\,MC)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{u_{SA}},\,\overrightarrow{u_{MC}}\right].\overrightarrow{MA}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{u_{SA}},\,\overrightarrow{u_{MC}}\right]\right|}=\frac{\left|\left(-\frac{\sqrt{15}}{8}\right).\frac{\sqrt{5}}{5}+0.\left(-\frac{7\sqrt{5}}{20}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right).0\right|}{\sqrt{\left(-\frac{\sqrt{15}}{8}\right)^2+0^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2}}$$

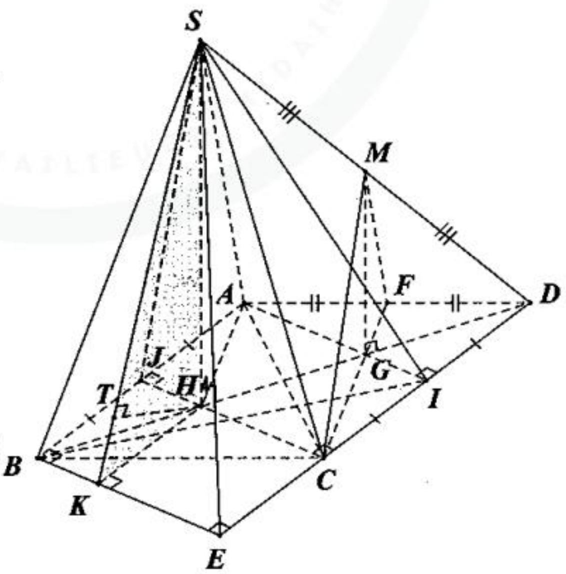
$=\frac{\sqrt{93}}{31}=\frac{\sqrt{93}}{31}a$ (do chọn $a=1$).

Bài 2

Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình bình hành, $AD=\frac{\sqrt{10}}{2}AB$ và M là trung điểm của SD. Tam giác ACD cân tại A có G là trọng tâm. Gọi $I,\,J$ lần lượt là trung điểm của CD và AB. Gọi (P) là mặt phẳng qua SA và song song với CG. Biết rằng (P) và (SCJ) cùng vuông góc với mặt phẳng đáy. Khoảng cách giữa AI và SB bằng $a\sqrt{3}$. Góc giữa mặt phẳng (SAB) và mặt phẳng đáy bằng 60^0. Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABI$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng CM và SA.

➢ **Lời giải:**

Cách 1: **Phương pháp thuần túy**



Do tam giác ACD cân tại A, suy ra $SI\perp CD$ hay $SI\perp AB$.

Gọi H là trọng tâm tam giác ABC.

Ta có $(P)\cap(ABCD)=AH\parallel GC$,

$(P)\cap(SCJ)=SH$.

Từ giả thiết suy ra $SH\perp(ABCD)$.

Qua B vẽ đường thẳng song song với AI cắt CD tại E.

Suy ra $AI\parallel(SBE)$,

do đó $d(SB,\,AI)=d(G,\,(SBE))$.

Nhận thấy $BG = 2BH$ suy ra $d(G,(SBE)) = 2d(H,(SBE))$.

Hạ $HK \parallel AB$, $AB \perp BE \Rightarrow HK \perp BE$.

Ta có $BE \perp SH \Rightarrow BE \perp (SHK)$.

Hạ $HT \perp SK \Rightarrow HT = d(H,(SBE)) = \frac{1}{2}d(G,(SBE)) = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Áp dụng hệ thức lượng vào tam giác vuông SHK ta có:

$\frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HK^2} = \frac{1}{HT^2} = \frac{4}{3a^2}$ (1).

Ta có $\begin{cases} AB \perp HJ \\ AB \perp SH \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SHJ) \Rightarrow \left(\widehat{(SAB),(ABCD)}\right) = \widehat{SJH} = 60^0$.

$\tan\widehat{SJH} = \frac{SH}{HJ} \Rightarrow SH = \sqrt{3}HJ$.

Ta có $HK = \frac{1}{2}AB$,

$HJ = \frac{1}{3}JC = \frac{1}{3}\sqrt{CB^2 - BJ^2} = \frac{1}{3}\sqrt{AD^2 - \frac{AB^2}{4}} = \frac{AB}{2} \Rightarrow HJ = HK$

$\Rightarrow SH = \sqrt{3}HK \Rightarrow HK = \frac{SH}{\sqrt{3}}$ (2).

Từ (1) và (2) ta suy ra $\frac{1}{SH^2} + \frac{3}{SH^2} = \frac{4}{SH^2} = \frac{4}{3a^2} \Rightarrow SH = a\sqrt{3}$

$\Rightarrow HK = a \Rightarrow AB = 2a \Rightarrow CJ = AI = \frac{3}{2}AB = 3a$.

Diện tích tam giác ABI là: $S_{\Delta ABI} = \frac{1}{2}AB.AI = 3a^2$ (đvdt).

Thể tích khối chóp $S.ABI$ là: $V_{S.ABI} = \frac{1}{3}SH.S_{\Delta ABI} = a^3\sqrt{3}$ (đvtt).

Gọi F là trung điểm của AD suy ra $MF \parallel AB \Rightarrow A \parallel (MFC)$.

Ta có $AH \parallel CF$, do đó $d(SA, MC) = d(A,(MFC)) = d(H,(MFC))$.

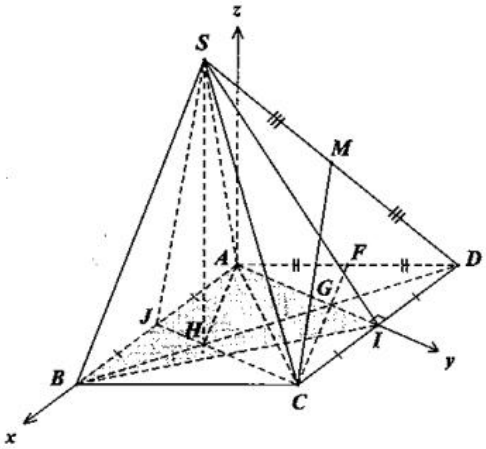
Theo trên ta có $HJ = HK \Rightarrow AB = AG \Rightarrow AH \perp BD \Rightarrow HG \perp FC$.

Lại có $GM \parallel SH \Rightarrow MG \perp HG \Rightarrow HG \perp (MFC) \Rightarrow HG = d(H,(MFC))$.

Ta có $GH = \frac{1}{2}BG = \frac{1}{2}\sqrt{2}AB = a\sqrt{2}$.

Vậy khoảng cách cần tìm là $a\sqrt{2}$.

Cách 2: Phương pháp tọa độ không gian



Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ.

$A \equiv O(0;0;0)$, $Ox \equiv AB$, $Oy \equiv AI$, $Oz \parallel SH$.

Chọn $a = 1$, khi đó $B(2;0;0)$, $I(0;3;0)$, $S(0;0;\sqrt{3})$.

Ta có $\overrightarrow{SA} = (0;0;-\sqrt{3})$,

$\overrightarrow{SB} = (2;0;-\sqrt{3})$, $\overrightarrow{SI} = (0;3;-\sqrt{3})$

Suy ra $\left[\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SB}\right] = (0;-2\sqrt{3};0)$

$\Rightarrow \left[\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SB}\right].\overrightarrow{SI} = 0.0 + (-2\sqrt{3}).3 + 0.(-\sqrt{3}) = -6\sqrt{3}$

$\Rightarrow \left|\left[\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SB}\right].\overrightarrow{SI}\right| = 6\sqrt{3}$.

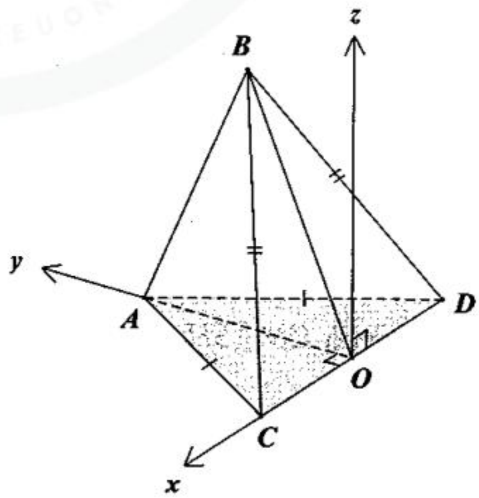
Vậy thể tích khối chóp $S.ABI$ là:

$V_{S.ABI} = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SB}\right].\overrightarrow{SI}\right| = \sqrt{3} = \sqrt{3}a^3$ (đvtt) (do ta chọn $a = 1$).

Bài 3

Cho tứ diện $ABCD$ có $AC = AD = a\sqrt{2}$, $BC = BD = a$, khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (ACD) bằng $\frac{a\sqrt{3}}{3}$; biết thể tích tứ diện $ABCD$ bằng $\frac{\sqrt{15}}{27}a^3$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (ACD) và (BCD).

➤ **Lời giải:**



Thể tích khối tứ diện $ABCD$ là:

$V_{ABCD} = \frac{1}{3}S_{ACD}.d(B,(ACD))$;

suy ra $S_{ACD} = \frac{\sqrt{5}}{3}a^2 \Rightarrow CD = \frac{2\sqrt{3}}{3}a$.

Gọi O là trung điểm của CD.

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ.

$O \equiv O(0;0;0)$, $Ox \equiv OC$, $Oy \equiv OA$, $Oz \perp (ACD)$.

Chọn $a=1$, khi đó $A\left(0;\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}};0\right)$, $C\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3};0;0\right)$, $D\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3};0;0\right)$,

do $BC=BD=a$ nên $B\left(0;\dfrac{\sqrt{3}}{3};\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

Ta có $\left[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}\right]=\left(0;\dfrac{2}{3};-\dfrac{2}{3}\right)$.

Mặt phẳng (ACD) có véctơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_{(ACD)}}=(0;0;1)$.

Mặt phẳng (BCD) có véctơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_{(BCD)}}=(0;1;-1)$.

Ta có $\cos\alpha=\dfrac{\left|0.0+0.1+1(-1)\right|}{\sqrt{0^2+0^2+1^2}.\sqrt{0^2+1^2+1^2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\alpha=45^\circ$.

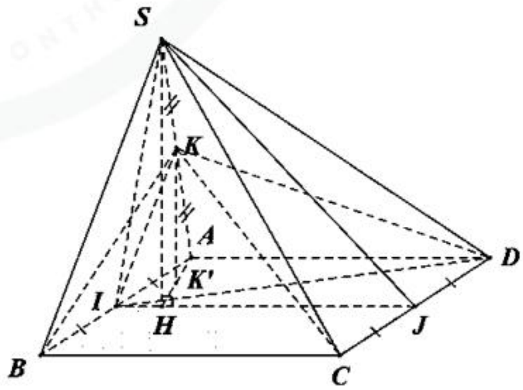
Vậy góc giữa hai mặt phẳng (ACD) và (BCD) bằng 45°.

Bài 4

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, tam giác SAB đều, tam giác SCD vuông cân tại S. Gọi I, J, K lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, CD, SA. Chứng minh rằng mặt phẳng (SIJ) vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Tính theo a thể tích khối chóp $K.IBCD$.

➢ **Lời giải:**

Cách 1: Phương pháp thuần túy



Từ giả thiết ta có:

$\begin{cases}AB\perp SI\\ AB\perp IJ\end{cases}\Rightarrow AB\perp(SIJ)$.

Do $AB\subset(ABCD)\Rightarrow(SIJ)\perp(ABCD)$.

Kẻ $SH\perp IJ$ do $(SIJ)\perp(ABCD)$ và $(SIJ)\cap(ABCD)=IJ$ nên $SH\perp(ABCD)$.

Gọi K' là hình chiếu vuông góc của K lên $(ABCD)$.

Khi đó $KK' \parallel SH$, do K là trung điểm của SA nên K' là trung điểm của AH và $KK' = \frac{1}{2}SH$.

Ta có $SI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $SJ = \frac{1}{2}CD = \frac{a}{2}$, $IJ = a$ nên tam giác SIJ vuông tại S (vì $SI^2 + SJ^2 = IJ^2$.

Từ hệ thức $SI.SJ = SH.IJ \Rightarrow SH = \frac{SI.SJ}{IJ} = \frac{a\sqrt{3}}{4} \Rightarrow KK' = \frac{a\sqrt{3}}{8}$.

Tứ giác $IBCD$ là hình thang vuông tại B và C nên, ta có

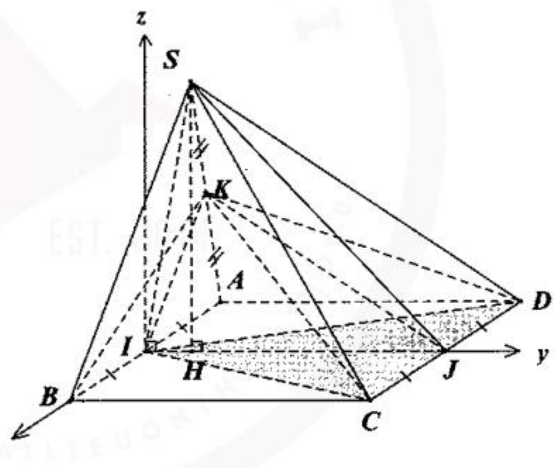
$S_{IBCD} = \frac{(IB + CD).BC}{2} = \frac{3}{4}a^2$ (đvdt).

Thể tích khối chóp $K.IBCD$ là:

$V_{K.IBCD} = \frac{1}{3}KK'.S_{IBCD} = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{8}.\frac{3}{4}a^2 = \frac{\sqrt{3}}{32}a^3$ (đvtt).

Cách 2: Phương pháp tọa độ không gian

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ.



$I \equiv O(0; 0; 0)$, $Ox \equiv IB$, $Oy \equiv IJ$, $Oz \parallel IS$.

Chọn $a = 1$, khi đó $A\left(-\frac{1}{2}; 0; 0\right)$, $B\left(\frac{1}{2}; 0; 0\right)$, $C\left(\frac{1}{2}; 1; 0\right)$, $D\left(-\frac{1}{2}; 1; 0\right)$.

Ta có $SH = \frac{\sqrt{3}}{4}a$ (tính toán ở cách 1), tam giác SAB đều cạnh a nên trung tuyến $SI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Tam giác SHI vuông tại H nên ta có

$$IH = \sqrt{SI^2 - SH^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{4}\right)^2} = \frac{3}{4}a.$$

Tọa độ điểm S là $S\left(0; \frac{3}{4}; \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ và trung điểm K của SA là $K\left(-\frac{1}{4}; \frac{3}{8}; \frac{\sqrt{3}}{8}\right)$.

Ta có $\overrightarrow{KI}=\left(\frac{1}{4};-\frac{3}{8};-\frac{\sqrt{3}}{8}\right)$, $\overrightarrow{KB}=\left(\frac{3}{4};-\frac{3}{8};-\frac{\sqrt{3}}{8}\right)$, $\overrightarrow{KC}=\left(\frac{3}{4};\frac{5}{8};-\frac{\sqrt{3}}{8}\right)$,

$\overrightarrow{KD}=\left(-\frac{1}{4};\frac{5}{8};-\frac{\sqrt{3}}{8}\right)$.

$$\left[\overrightarrow{KB},\overrightarrow{KC}\right]=\left(\frac{\sqrt{3}}{8};0;\frac{3}{4}\right)\Rightarrow\begin{cases}\left[\overrightarrow{KB},\overrightarrow{KC}\right].\overrightarrow{KI}=\frac{\sqrt{3}}{8}.\frac{1}{4}+0.\left(-\frac{3}{8}\right)+\frac{3}{4}.\left(-\frac{\sqrt{3}}{8}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{16}\\ \left[\overrightarrow{KB},\overrightarrow{KC}\right].\overrightarrow{KD}=\frac{\sqrt{3}}{8}.\left(-\frac{1}{4}\right)+0.\frac{5}{8}+\frac{3}{4}.\left(-\frac{\sqrt{3}}{8}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{8}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\left|\left[\overrightarrow{KB},\overrightarrow{KC}\right].\overrightarrow{KI}\right|=\left|-\frac{\sqrt{3}}{16}\right|=\frac{\sqrt{3}}{16}\\ \left|\left[\overrightarrow{KB},\overrightarrow{KC}\right].\overrightarrow{KD}\right|=\left|-\frac{\sqrt{3}}{8}\right|=\frac{\sqrt{3}}{8}\end{cases}.$$

Thể tích khối chóp $K.IBCD$ là:

$V_{K.IBCD}=V_{K.IBC}+V_{K.ICD}$

$=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{KB},\overrightarrow{KC}\right].\overrightarrow{KI}\right|+\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{KB},\overrightarrow{KC}\right].\overrightarrow{KD}\right|=\frac{1}{6}.\frac{\sqrt{3}}{16}+\frac{1}{6}.\frac{\sqrt{3}}{8}=\frac{\sqrt{3}}{32}=\frac{\sqrt{3}}{32}a^3$ (đvtt)

(do ta chọn $a=1$).

Bài 5

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O và $AB=4a$, hình chiếu vuông góc của đỉnh S lên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với trung điểm I của đoạn thẳng OA. Biết khoảng cách từ I đến mặt phẳng (SAB) bằng $\frac{\sqrt{2}}{2}SI$. Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABCD$.

➤ **Lời giải:**

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ.

$O\equiv O(0;0;0)$, $Ox\equiv OA$, $Oy\equiv OB$, $Oz\parallel IS$.

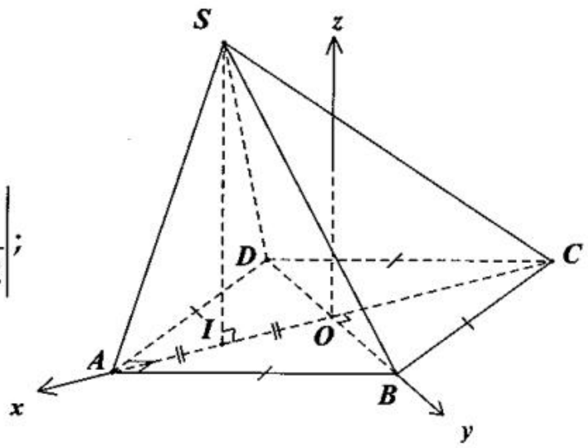
Chọn $a=1$, khi đó $A\left(2\sqrt{2};0;0\right)$, $B\left(0;2\sqrt{2};0\right)$, $C\left(-2\sqrt{2};0;0\right)$, $I\left(\sqrt{2};0;0\right)$.

Gọi $S\left(\sqrt{2};0;z_S\right)$ với $z_S>0$.

Ta có $\overrightarrow{SA}=\left(\sqrt{2};0;-z_S\right)$,

$\overrightarrow{SB}=\left(-\sqrt{2};2\sqrt{2};-z_S\right)$, $SI=\left|z_S\right|$.

$$\left[\overrightarrow{SA},\overrightarrow{SB}\right]=\left(\begin{vmatrix}0 & -z_S\\ 2\sqrt{2} & -z_S\end{vmatrix};\begin{vmatrix}-z_S & \sqrt{2}\\ -z_S & -\sqrt{2}\end{vmatrix};\begin{vmatrix}\sqrt{2} & 0\\ -\sqrt{2} & 2\sqrt{2}\end{vmatrix}\right)=\left(2\sqrt{2}z_S;2\sqrt{2}z_S;4\right)$$



Mặt phẳng (SAB) có một véctơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_{(SAB)}}=\left(z_S;z_S;\sqrt{2}\right)$.

Phương trình mặt phẳng (SAB) là:

$z_S\left(x-2\sqrt{2}\right)+z_S\left(y-0\right)+\sqrt{2}\left(z-0\right)=0$ hay $z_Sx+z_Sy+\sqrt{2}z-2\sqrt{2}z_S=0$.

Theo bài ra ta có

$$d\left(I,(SAB)\right)=\frac{\left|z_S.\sqrt{2}+z_S.0+\sqrt{2}.0-2\sqrt{2}z_S\right|}{\sqrt{z_S^2+z_S^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.\left|z_S\right|$$

$$\Leftrightarrow\frac{\left|z_S\right|}{\sqrt{2z_S^2+2}}=\frac{\left|z_S\right|}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z_S=0\ (l)\\ z_S=-1\ (l)\\ z_S=1\end{array}\right.$$

Vậy $S\left(\sqrt{2};0;1\right)$.

Ta có $\overrightarrow{SA}=\left(\sqrt{2};0;-1\right)$, $\overrightarrow{SB}=\left(-\sqrt{2};2\sqrt{2};-1\right)$, $\overrightarrow{SC}=\left(-3\sqrt{2};0;-1\right)$.

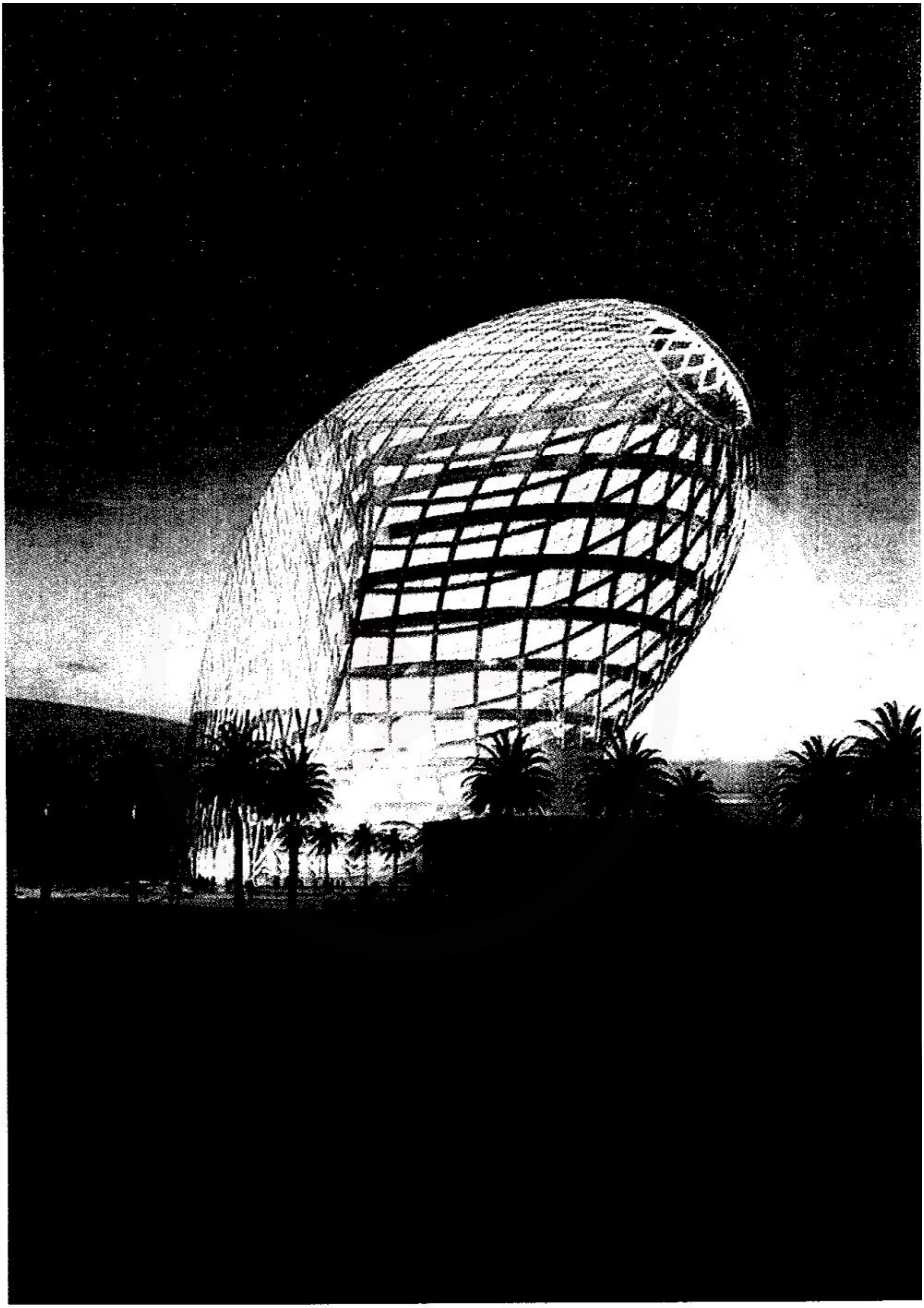
Suy ra $\left[\overrightarrow{SA},\overrightarrow{SB}\right]=\left(2\sqrt{2};2\sqrt{2};4\right)$

$\Rightarrow\left[\overrightarrow{SA},\overrightarrow{SB}\right].\overrightarrow{SC}=2\sqrt{2}.\left(-3\sqrt{2}\right)+2\sqrt{2}.0+4.(-1)=-16$

$\Rightarrow\left|\left[\overrightarrow{SA},\overrightarrow{SB}\right].\overrightarrow{SC}\right|=\left|-16\right|=16$.

Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là:

$V_{S.ABCD}=2V_{S.ABC}=2.\frac{1}{6}.\left|\left[\overrightarrow{SA},\overrightarrow{SB}\right].\overrightarrow{SC}\right|=\frac{16}{3}=\frac{16}{3}a^3$ (đvtt) (do ta chọn $a=1$).



LĂNG TRỤ

DẠNG 1: THỂ TÍCH LĂNG TRỤ ĐỀU - ĐỨNG

Đặc điểm: Lăng trụ đều

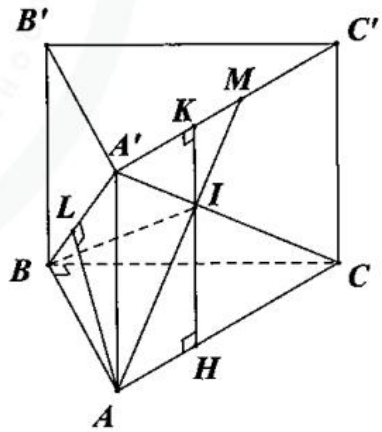
- Các cạnh bên vuông góc với hai đáy.
- Hai đáy là đa giác đều bằng nhau (tam giác đều là chính)
- Hai mặt đáy song song.

Bài 1

Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B với $AB = a$, $A'A = 2a$, $A'C = 3a$. Gọi M là trung điểm của $A'C'$; I là giao điểm của các đường thẳng AM và $A'C$. Tính theo a thể tích khối chóp $I.ABC$ và khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (IBC).

➤ **Lời giải:**

Cách 1: Phương pháp thuần túy



Gọi H, K theo thứ tự là hình chiếu của I lên AC và $A'C'$.

Do $(ABC) \perp (ACC'A')$ nên $IH \perp (ABC)$.

Từ đó $V_{I.ABC} = \dfrac{1}{3} S_{\Delta ABC}.IH$.

Do $ACC'A'$ là hình chữ nhật nên:

$AC = \sqrt{A'C^2 - AA'^2} = a\sqrt{5}$.

Do tam giác ABC vuông tại B nên:

$BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = 2a$.

Diện tích tam giác ABC là: $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2} AB.AC = a^2$ (đvdt).

Theo định lý Ta-let, ta có $\frac{IH}{IK}=\frac{AC}{A'M}=\frac{2}{1}$, suy ra $IH=\frac{2}{3}HK=\frac{2}{3}AA'=\frac{4}{3}a$.

Thể tích khối chóp $I.ABC$ là: $V_{I.ABC}=\frac{1}{3}S_{\Delta ABC}.IH=\frac{4}{9}a^3$ (đvtt).

Ta có $d\left(A,(IBC)\right)=d\left(A,\left(A'BC\right)\right)$.

Gọi L là hình chiếu của A lên $A'B$. Ta có $AL\perp A'B$.

Ta có $BC\perp\left(ABA'\right)$ nên $BC\perp AL$.

Do đó $AL\perp\left(A'BC\right)$ nên $d\left(A,\left(A'BC\right)\right)=AL$.

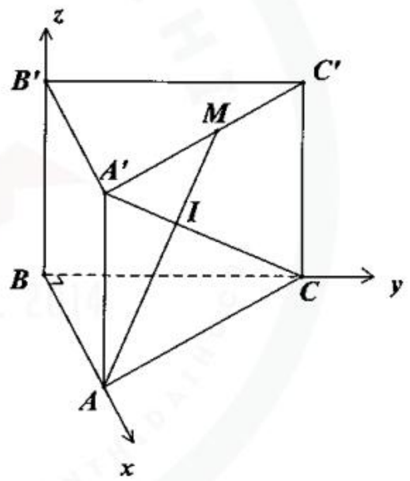
Ta có $\frac{1}{AL^2}=\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{AA'^2}=\frac{5}{4a^2}\Rightarrow AL=\frac{2a\sqrt{5}}{5}$.

Vậy $d\left(A,(IBC)\right)=AL=\frac{2a\sqrt{5}}{5}$.

Cách 2: Phương pháp tọa độ không gian

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ.

$B\equiv O(0;0;0)$, $Ox\equiv AB$, $Oy\equiv BC$, $Oz\equiv BB'$.



Chọn $a=1$, khi đó $A(1;0;0)$, $C(0;2;0)$, $B'(0;0;2)$, suy ra $A'(1;0;2)$, $C'(0;2;2)$ và trung điểm của CC' là M(0;2;1).

Đường thẳng AM và $A'C$ lần lượt có phương trình $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{-2}=\frac{z}{-4}$ và $\frac{x}{1}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z}{2}$.

Do $I=AM\cap A'C$ nên tọa độ điểm I là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases}\frac{x-1}{1}=\frac{y}{-2}=\frac{z}{-4}\\ \frac{x}{1}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z}{2}\end{cases}\Rightarrow I\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3};\frac{4}{3}\right).$$

Ta có $\overrightarrow{BA}=(1;0;0)$, $\overrightarrow{BC}=(0;2;0)$, $\overrightarrow{BI}=\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3};\frac{4}{3}\right)$.

Suy ra $\left[\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right] = (0;\ 0;\ 2)$ và $\left[\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right].\overrightarrow{BI} = \dfrac{8}{3}$.

Do đó $V_{I.ABC} = \dfrac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right].\overrightarrow{BI}\right| = \dfrac{4}{9} = \dfrac{4}{9}a^3$ (đvtt) (do ta chọn $a = 1$).

Mặt phẳng (IBC) đi qua 3 điểm $I\left(\dfrac{2}{3}; \dfrac{2}{3}; \dfrac{4}{3}\right)$, $B \equiv O(0;\ 0;\ 0)$, $C(0;\ 2;\ 0)$ nên có phương trình $2x + z = 0$.

Ta có $d\left(A, (IBC)\right) = \dfrac{|2|}{\sqrt{4+0+1}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}} = \dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$ (do ta chọn $a = 1$).

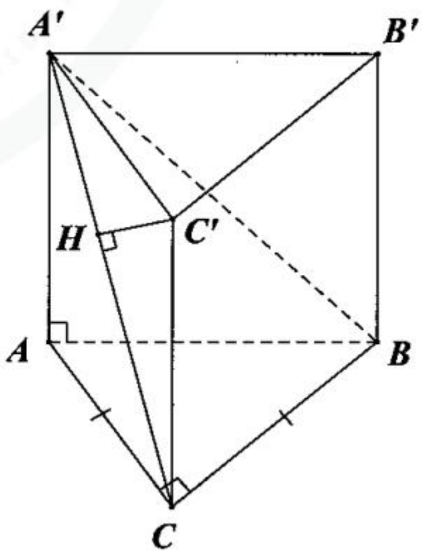
Vậy khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (IBC) là $\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$.

Nhận xét: Lăng trụ đứng nên trục Oz được chọn sẽ là một trong các cạnh bên. Để ý thấy tam giác đáy ABC vuông ở B nên gốc tọa độ được chọn chính là tại điểm B, các trục tọa độ còn lại là $Ox \equiv BA$ và $Oy \equiv BC$.

Bài 2

Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông, $AC = BC = a$, góc giữa $A'B$ và mặt phẳng $(ACC'A')$ bằng $30°$. Gọi M là trung điểm của $A'B'$. Tính theo a thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ và khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng $(A'BC)$.

➢ **Lời giải:**



Cách 1: **Phương pháp thuần túy**

Theo giả thiết tam giác ABC vuông và $AC = BC$ nên $\triangle ABC$ vuông cân tại C.

Vì $BC \perp CA$, $BC \perp CC'$ suy ra $BC \perp (ACC'A')$.

Do đó:

$\left(\widehat{A'B, (ACC'A')}\right) = \left(\widehat{A'B, A'C}\right) = \widehat{BA'C}$.

Ta có $A'C = BC.\cot 30° = a\sqrt{3}$, suy ra $AA' = \sqrt{A'C^2 - AC^2} = a\sqrt{2}$.

Diện tích tam giác ABC là: $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AC.CB=\frac{a^2}{2}$ (đvdt).

Do M là trung điểm của $A'B'$ và $B'C' \parallel \left(A'BC\right)$, nên $d\left(M,\left(A'BC\right)\right)=\frac{1}{2}d\left(B',\left(A'BC\right)\right)=\frac{1}{2}d\left(C',\left(A'BC\right)\right)$.

Gọi H là hình chiếu của C' trên $A'C$, suy ra $C'H \perp A'C$ (1).

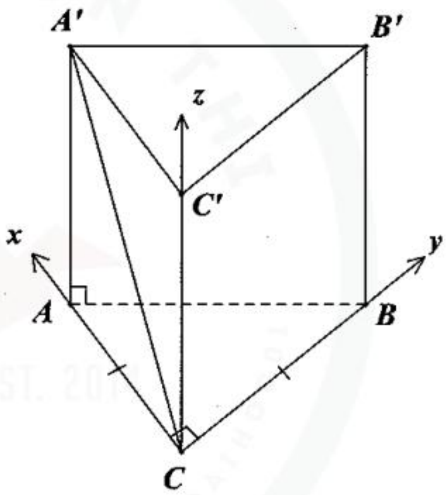
Ta có $BC \perp \left(ACC'A'\right)$ nên $BC \perp C'H$ (2).

Từ (1) và (2), suy ra $C'H \perp \left(A'BC\right)$ nên $d\left(C',\left(A'BC\right)\right)=C'H$.

Ta có $\frac{1}{C'H^2}=\frac{1}{C'A'^2}+\frac{1}{C'C^2}=\frac{3}{2a^2}\Rightarrow C'H=\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Vậy $d\left(M,\left(A'BC\right)\right)=\frac{1}{2}C'H=\frac{a\sqrt{6}}{6}$.

Cách 2: Phương pháp tọa độ không gian



Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ.

$C\equiv O(0;0;0)$, $Ox\equiv CA$, $Oy\equiv CB$, $Oz\equiv CC'$.

Chọn $a=1$, khi đó $A(1;0;0)$, $B(0;1;0)$, $C'\left(0;0;\sqrt{2}\right)$, suy ra $A'\left(1;0;\sqrt{2}\right)$, $B'\left(0;1;\sqrt{2}\right)$ và trung điểm của $A'B'$ là $M\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\sqrt{2}\right)$.

Mặt phẳng $\left(A'BC\right)$ đi qua 3 điểm $C\equiv O(0;0;0)$, $B(0;1;0)$, $A'\left(1;0;\sqrt{2}\right)$ nên có phương trình: $\sqrt{2}x-z=0$.

Khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng $\left(A'BC\right)$ là:

$$d\left(M,\left(A'BC\right)\right)=\frac{\left|\frac{\sqrt{2}}{2}-\sqrt{2}\right|}{\sqrt{2+1}}=\frac{1}{\sqrt{6}}=\frac{a\sqrt{6}}{6}\text{ (do ta chọn } a=1).$$

Vậy khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng $\left(A'BC\right)$ là $\frac{a\sqrt{6}}{6}$.

Nhận xét: Phương pháp tọa độ không gian đã cho thấy sự ưu việt của nó thông qua bài toán này, phương pháp giúp rút ngắn lời giải và tránh tối thiểu các sai sót trong tính toán.

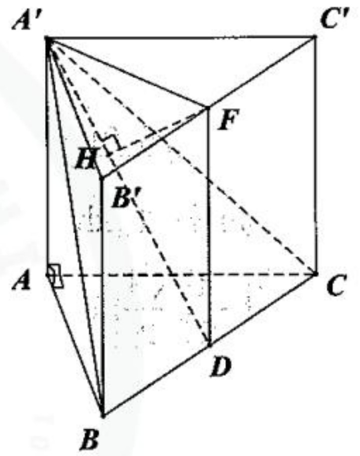
Lăng trụ đứng nên trục Oz được chọn sẽ là một trong các cạnh bên. Để ý thấy tam giác đáy ABC vuông ở C nên gốc tọa độ được chọn chính là tại điểm C, các trục tọa độ còn lại là $Ox \equiv CA$ và $Oy \equiv CB$.

Bài 3

Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có các mặt bên đều là hình vuông cạnh a. Gọi D, F lần lượt là trung điểm của các cạnh $BC, C'B'$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng $A'B$ và $B'C'$.

➢ **Lời giải:**

Cách 1: Phương pháp thuần túy



Vì các các mặt bên của lăng trụ đều là hình vuông nên

$AB = BC = CA = A'B' = B'C' = C'A' = a$.

Nên các tam giác ABC, $A'B'C'$ là các tam giác đều.

Ta có

$B'C' \parallel BC \Rightarrow B'C' \parallel (A'BC)$.

$\Rightarrow d(A'B, B'C') = d(B'C', (A'BC)) = d(F, (A'BC))$

Ta có

$$\begin{cases} BC \perp FD \\ BC \perp A'D \ (A'B \perp A'C) \end{cases} \Rightarrow BC \perp (A'BC).$$

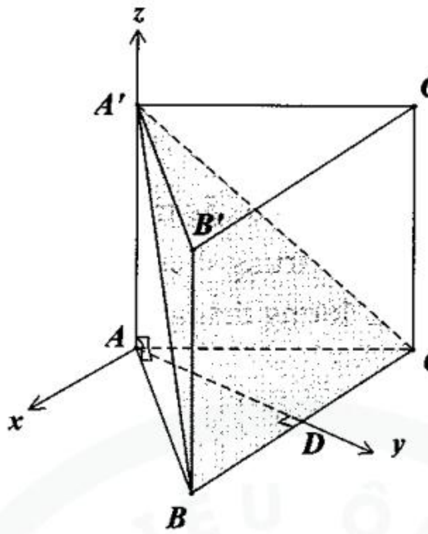
Kẻ $FH \perp A'D$, vì tam giác $A'FD$ vuông, nên ta có

$$\frac{1}{FH^2} = \frac{1}{A'F^2} + \frac{1}{FD^2} = \frac{4}{3a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{7}{3a^2} \Rightarrow FH = \frac{a\sqrt{21}}{7}.$$

Vậy $d(A'B, B'C') = FH = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

Cách 2: Phương pháp tọa độ không gian

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ.



$A \equiv O(0;0;0)$, $Ox \parallel BC$, $Oy \equiv AD$, $Oz \equiv AA'$.

Chọn $a=1$, khi đó $B\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$, $C\left(-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$, $A'(0;0;1)$, $B'\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};1\right)$, $C'\left(-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};1\right)$.

Ta có

$B'C' \parallel BC \Rightarrow B'C' \parallel (A'BC) \Rightarrow d(B'C', A'B) = d(B'C', (A'BC)) = d(B', (A'BC))$

$\overrightarrow{A'B} = \left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};-1\right)$, $\overrightarrow{A'C} = \left(-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};-1\right)$.

$\left[\overrightarrow{A'B}, \overrightarrow{A'C}\right] = \left(0;1;\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \vec{n}$.

Phương trình mặt phẳng $(A'BC)$ đi qua điểm A' và có véctơ pháp tuyến $\vec{n}$ là: $y + \frac{\sqrt{3}}{2}z - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$.

Ta có $d(B', (A'BC)) = \dfrac{\left|\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right|}{\sqrt{1+\frac{3}{4}}} = \frac{\sqrt{21}}{7} = \frac{a\sqrt{21}}{7}$ (do ta chọn $a=1$).

Vậy $d(A'B, B'C') = \frac{a\sqrt{21}}{7}$.

Nhận xét: Ở đây, việc ta chọn gốc tọa độ có thể thay đổi lại là tại điểm D.

Tam giác ở đáy là tam giác đều, nên ta xây dựng tam diện thuận ở trung điểm D thì sẽ dễ dàng hơn so với điểm A.

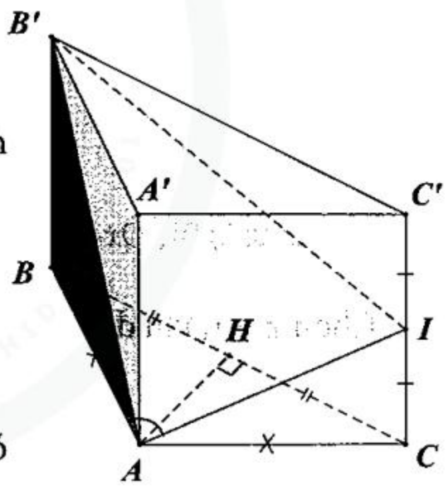
Tuy nhiên, nó cũng cho thấy rằng việc xây dựng cách giải theo phương pháp tọa độ không gian là đa dạng, chúng ta chọn gốc tọa độ được tự do hơn. Tất nhiên là chúng ta cũng nên chọn gốc tọa độ sao cho tọa độ các điểm còn lại dễ dàng tính toán hơn.

Bài 4

Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân với $AB = AC = a$, góc $\widehat{BAC} = 120°$, cạnh bên $BB' = a$. Gọi I là trung điểm của CC'. Chứng minh tam giác $AB'I$ vuông tại A và tính cosin góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và $(AB'I)$.

➢ **Lời giải:**

Cách 1: Phương pháp thuần túy



Gọi H là trung điểm $BC \Rightarrow AH \perp BC$.

Tam giác ABH là nửa tam giác đều cạnh $AB = a \Rightarrow AH = \dfrac{a}{2}$ và $BH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow BC = a\sqrt{3}$.

Tam giác $IB'C'$ vuông tại C', nên ta có

$$IB'^2 = IC'^2 + B'C'^2 = \frac{a^2}{4} + 3a^2 = \frac{13a^2}{4}.$$

Tam giác AIC vuông tại C, nên ta có $AI^2 = IC^2 + AC^2 = \dfrac{a^2}{4} + a^2 = \dfrac{5a^2}{4}$.

Ta có $AI^2 + AB'^2 = \dfrac{5a^2}{4} + 2a^2 = \dfrac{13a^2}{4} = IB'^2$.

(AB' là đường chéo của hình vuông $AA'B'B$ cạnh a)

Vậy tam giác $AB'I$ vuông tại A.

Ta có $S_{\Delta AB'I} = \dfrac{1}{2}.AI.AB' = \dfrac{1}{2}.\dfrac{a\sqrt{5}}{2}.a\sqrt{2} = \dfrac{a^2\sqrt{10}}{4}$ (đvdt).

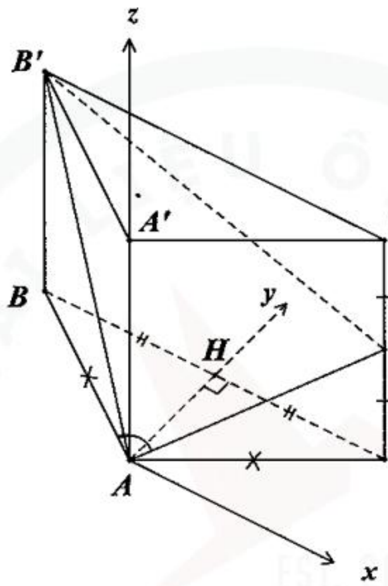
$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}.AH.BC=\frac{1}{2}.\frac{a}{2}.a\sqrt{3}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ (đvdt).

Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và $\left(AB'I\right)$.

Theo công thức chiếu, ta có $\cos\alpha=\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta AB'I}}=\frac{\frac{a^2\sqrt{3}}{4}}{\frac{a^2\sqrt{10}}{4}}=\frac{\sqrt{30}}{10}$.

Cách 2: Phương pháp tọa độ không gian

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ.



$A\equiv O(0;0;0)$, $Ox\parallel BC$, $Oy\equiv AH$, $Oz\equiv AA'$

Chọn $a=1$, khi đó $A(0,0,0);B\left(\frac{-\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},0\right);C\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},0\right);A'(0,0,1);$

$$B'\left(\frac{-\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},1\right);C'\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},1\right);I\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right).$$

Ta có $\overrightarrow{AB'}=\left(\frac{-\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2};1\right),\overrightarrow{AI}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$

Ta lại có $\overrightarrow{AB'}.\overrightarrow{AI}=\frac{\sqrt{3}}{2}.\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\frac{1}{2}.\frac{1}{2}+1.\frac{1}{2}=-\frac{3}{4}+\frac{1}{4}+\frac{2}{4}=0\Rightarrow\overrightarrow{AB'}\perp\overrightarrow{AI}$.

Vậy tam giác $AB'I$ vuông tại A.

Phương trình mặt phẳng (ABC) là: $z=0$ có véctơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_1}=(0;0;1)$

Mặt phẳng $\left(AB'I\right)$ có cặp véctơ chỉ phương $\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{AI}$, nên có véctơ pháp tuyến $\left[\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{AI}\right] = -\frac{1}{4}\left(1; 3\sqrt{3}; -2\sqrt{3}\right) = -\frac{1}{4}.\overrightarrow{n_2}$

$$\Rightarrow \left[\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AI}\right] = \left(\frac{-1}{4}; \frac{3\sqrt{3}}{4}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\Rightarrow n_2\left(1; -3\sqrt{3}; 2\sqrt{3}\right)$$

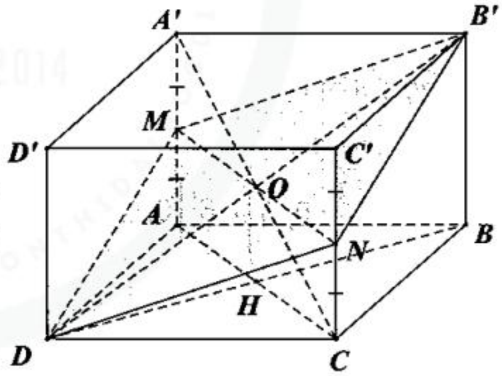
$$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{\left|0+0+2\sqrt{3}\right|}{\sqrt{0+0+1}.\sqrt{1+27+12}} = \frac{\sqrt{30}}{10}$$

Bài 5

Cho lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, góc $\widehat{BAD} = 120°$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AA', CC'. Chứng minh bốn điểm B', M, D, N đồng phẳng và tính AA' theo a để $BMDN$ là hình vuông.

➤ **Lời giải:**

Cách 1: Phương pháp thuần túy



Ta có $A'M \parallel CN$, $A'M \parallel CN$, suy ra $A'MCN$ là hình bình hành.

Nên $A'C \cap MN = O$ là trung điểm của mỗi đường nên $B'MDN$ là hình bình hành.

Do đó B', M, D, N đồng phẳng.

Ta có $DM^2 = AD^2 + AM^2$ (1).

$DN^2 = CD^2 + CN^2$.

Vì $\widehat{BAD} = 120°$ suy ra tam giác BAD đều, nên $AD = CD$ (2).

Từ (1) và (2), suy ra $DM^2 = DN^2 \Rightarrow DM = DN$ nên $B'MDN$ là hình thoi.

Để $B'MDN$ là hình vuông thì $MN = B'D \Rightarrow AC^2 = B'D^2$ (1').

Gọi $H = AC \cap BD$ suy ra H là trung điểm của AC và BD.

Tam giác BAD đều nên H là đường cao, suy ra $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AC = a\sqrt{3}$ (2').

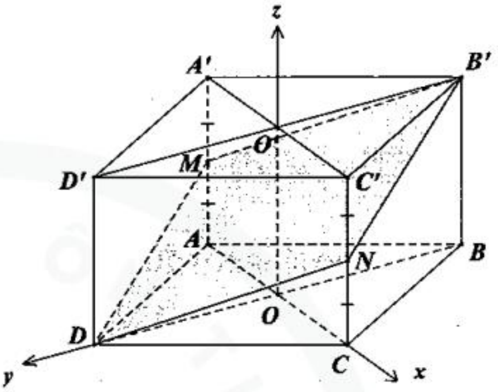
Trong tam giác $BB'D$ ta có $B'D^2 = BB'^2 + BD^2$ (3').

Từ (1'), (2') và (3') ta có $3a^2 = BB'^2 + BD^2 \Rightarrow BB'^2 = 3a^2 - a^2 = 2a^2$.

Suy ra $BB' = a\sqrt{2} \Rightarrow AA' = a\sqrt{2}$.

Vậy nếu $AA' = a\sqrt{2}$ thì $B'MDN$ là hình vuông.

Cách 2: Phương pháp tọa độ không gian



Tam giác BAD có $\widehat{BAD} = 60^\circ$ nên tam giác BAD đều.

Gọi O, O' lần lượt là tâm của hình bình hành $ABCD$ và $A'B'C'D'$.

Ta có $OA = OC = \frac{a\sqrt{3}}{3}$;

$OB = OD = \frac{BD}{2} = \frac{a}{2}$.

Giả sử $AA' = h$.

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ.

$O \equiv O(0;\,0;\,0)$, $Ox \equiv OC$, $Oy \equiv OD$, $Oz \equiv OO'$.

Chọn $a = 1$, khi đó $A\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};\,0;\,0\right)$, $B\left(0;\,-\frac{1}{2};\,0\right)$, $C\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\,0;\,0\right)$, $D\left(0;\,\frac{1}{2};\,0\right)$,

$A'\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};\,0;\,h\right)$, $B'\left(0;\,-\frac{1}{2};\,h\right)$, $C'\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\,0;\,h\right)$, $D'\left(0;\,\frac{1}{2};\,h\right)$, $M\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};\,0;\,\frac{h}{2}\right)$,

$N\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\,0;\,\frac{h}{2}\right)$.

Ta có $\overrightarrow{DM} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2};\,-\frac{1}{2};\,\frac{h}{2}\right)$, $\overrightarrow{NB'} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2};\,-\frac{1}{2};\,\frac{h}{2}\right)$.

Nên $\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{NB'} \Rightarrow DM = NB' \Rightarrow DM \parallel NB' \Rightarrow B'DMN$ là hình bình hành.

Vậy 4 điểm M, N, B', D đồng phẳng.

Ta có $\overrightarrow{MB'} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2};\,-\frac{1}{2};\,\frac{h}{2}\right) \Rightarrow \left|\overrightarrow{MD'}\right| = \left|\overrightarrow{NB'}\right| = \left|\overrightarrow{MB'}\right|$.

Hay $B'DMN$ là hình thoi.

Để $B'DMN$ là hình vuông thì $\overrightarrow{MB'}.\overrightarrow{MN}=\vec{0} \Leftrightarrow \frac{-3}{4}+\frac{1}{4}+\frac{h^2}{4}=0 \Rightarrow h=\sqrt{2}$.

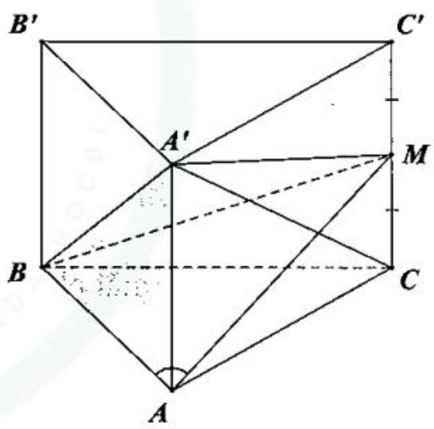
Vậy $AA'=a\sqrt{2}$ thì $B'DMN$ là hình vuông.

Nhận xét: Lăng trụ đứng, có đáy là hình thoi nên ta chọn gốc tọa độ ngay tại giao điểm hai đường chéo của hình thoi.

Vì tính chất đối xứng của hình nên dễ dàng tính toán tọa độ của các điểm.

Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AB=a$, $AC=2a$, $AA'=2a\sqrt{5}$ và $\widehat{BAC}=120$. Gọi M là trung điểm của cạnh CC'. Chứng minh $MB\perp MA'$ và tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $\left(A'BM\right)$.

➢ Lời giải:



Cách 1: Phương pháp thuần túy

Ta có $A'M^2=A'C'^2+C'M^2=9a^2$;

$BC^2=AB^2+AC^2-2AB.AC.\cos 120^0=7a^2$;

$BM^2=BC^2+CM^2=12a^2$;

$A'B^2=A'A^2+AB^2=21a^2=A'M^2+MB^2$

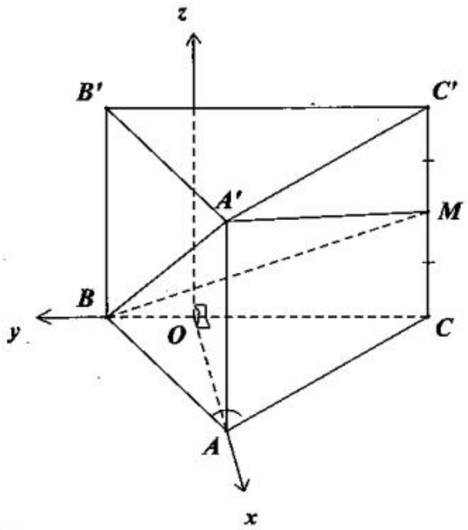
$\Rightarrow MB\perp MA'$.

Hình chóp $MABA'$ và $CABA'$ có chung đáy là tam giác ABA' và đường cao bằng nhau nên thể tích bằng nhau.

$$\Rightarrow V_{MABA'}=V_{CABA'}=\frac{1}{3}AA'.S_{ABC}=\frac{\sqrt{15}}{3}a^3 \text{ (đvdt)}.$$

$$\Rightarrow d\left(a,\left(MBA'\right)\right)=\frac{3V}{S_{MBA'}}=\frac{6V}{MB.MA'}=\frac{a\sqrt{5}}{3}.$$

Cách 2: Phương pháp tọa độ không gian



Kẻ $AO \perp BC$, ta có:

$BC = \sqrt{a^2 + 4a^2 - 2.a.2a.\cos 120^\circ} = a\sqrt{7}$.

$AO.BC = AB.AC.\sin 120^\circ$

$\Rightarrow AO = \dfrac{AB.AC.\sin 120^\circ}{BC} = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

$OB = \sqrt{AB^2 - AO^2} = \sqrt{a^2 - \dfrac{21}{49}a^2} = \dfrac{2a\sqrt{7}}{7}$

$OC = BC - OB = \dfrac{5a\sqrt{7}}{7}$.

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ.

$O \equiv O(0;0;0)$, $Ox \equiv OA$, $Oy \equiv OB$, $Oz \parallel AA'$.

Chọn $a = 1$, khi đó $A\left(\dfrac{\sqrt{21}}{7}; 0; 0\right)$, $B\left(0; \dfrac{2\sqrt{7}}{7}; 0\right)$, $M\left(0; -\dfrac{5\sqrt{7}}{7}; \sqrt{5}\right)$

và $A'\left(\dfrac{\sqrt{21}}{7}; 0; 2\sqrt{5}\right)$.

Ta có $\overrightarrow{MA'} = \left(\dfrac{\sqrt{21}}{7}; \dfrac{5\sqrt{7}}{7}; \sqrt{5}\right)$, $\overrightarrow{MB} = \left(0; \sqrt{7}; -\sqrt{5}\right)$.

Lại có $\overrightarrow{MA'}.\overrightarrow{MB} = 5^2 - 5^2 = 0 \Rightarrow \overrightarrow{MA'} \perp \overrightarrow{MB} \Rightarrow MA' \perp MB$.

Phương trình mặt phẳng đi qua 3 điểm $B\left(0; \dfrac{2\sqrt{21}}{7}; 0\right)$, $M\left(0; -\dfrac{5\sqrt{7}}{7}; \sqrt{5}\right)$,

$A'\left(\dfrac{\sqrt{21}}{7}; 0; 2\sqrt{5}\right)$ là: $12\sqrt{5}x - \sqrt{15}y - \sqrt{21}z + \dfrac{2\sqrt{105}}{7} = 0$.

Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $(A'BM)$ là:

$$d\left(A, (MBA')\right) = \frac{\left|12\sqrt{5}.\dfrac{\sqrt{21}}{7} - \sqrt{15}.0 - \sqrt{21}.0 + \dfrac{2\sqrt{105}}{7}\right|}{\sqrt{\left(12\sqrt{5}\right)^2 + \left(-\sqrt{15}\right)^2 + \left(-\sqrt{21}\right)^2}} = \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{a\sqrt{5}}{3}$$

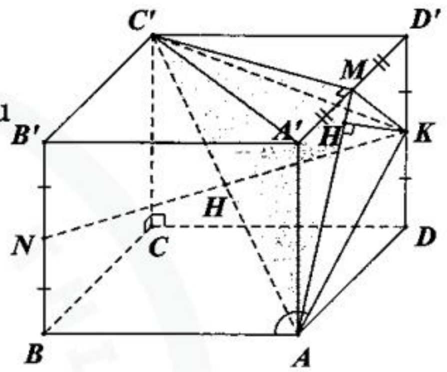
(do ta chọn $a = 1$).

Bài 7.

Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi, $AB = a\sqrt{3}$, $\widehat{BAD} = 120^0$. Biết góc giữa đường thẳng AC' và mặt phẳng $\left(ADD'A'\right)$ bằng 60°; biết M là trung điểm của $A'D'$. Tính thể tích khối lăng trụ trên theo a và khoảng cách từ trung điểm N của BB' đến mặt phẳng $\left(C'MA\right)$.

➤ **Lời giải:**

Cách 1: **Phương pháp thuần túy**



Đáy $ABCD$ là hình thoi gồm 2 tam giác đều ABC, ACD nên

$$S_{ABCD} = 2S_{\Delta ABC} = 2\frac{\left(a\sqrt{3}\right)^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$$

(đvdt).

Gọi $C'M$ là đường cao của tam giác đều $C'A'D'$ thì $C'M \perp \left(ADD'A'\right)$ nên $\widehat{C'AM} = 30^0$

Ta có $C'M = \frac{3a}{2} \Rightarrow AM = C'M.\cot 30^0 = \frac{3a\sqrt{3}}{2}$

$$\Rightarrow A'A = \sqrt{AM^2 - A'M^2} = \sqrt{\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}a\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2} = a\sqrt{6}.$$

Thể tích khối lăng trụ:

$$V_{ABCD.A'B'C'D'} = A'A.S_{ABCD} = a\sqrt{6}.\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2 = \frac{9\sqrt{2}}{2}a^3 \text{ (đvtt).}$$

Ta có $d\left(N,\left(C'MA\right)\right) = d\left(K,\left(C'MA\right)\right)$ với K là trung điểm của DD' (vì K và N đối xứng nhau qua trung điểm H của AC').

Từ K hạ KH vuông góc với AM thì $KH \perp \left(AC'M\right) \Rightarrow d\left(K,\left(AC'M\right)\right) = KH$

Ta có $\frac{1}{2}KH.AM = S_{A'D'DA} - S_{\Delta A'AM} - S_{\Delta MD'K} - S_{\Delta AKD}$.

$\Rightarrow KH.\dfrac{3a\sqrt{3}}{4}=a\sqrt{6}.a\sqrt{3}-\dfrac{1}{2}a\sqrt{6}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}.\dfrac{a\sqrt{6}}{2}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}.\dfrac{a\sqrt{6}}{2}.a\sqrt{3}$

$\Rightarrow KH=\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

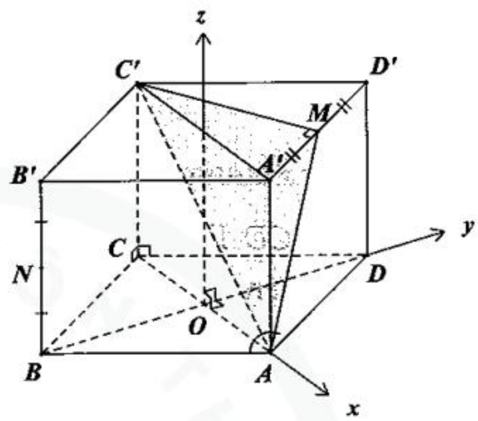
Vậy $d\left(N,\left(C'MA\right)\right)=\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Cách 2: Phương pháp tọa độ không gian

Gọi O là giao điểm của AC với BD.

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ.

$O\equiv O(0;0;0)$, $Ox\equiv OA$, $Oy\equiv OD$, $Oz \parallel AA'$.



Chọn $a=1$, khi đó $A\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2};0;0\right)$,

$M\left(\dfrac{\sqrt{3}}{4};\dfrac{3}{4};\sqrt{6}\right)$, $C'\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2};0;\sqrt{6}\right)$

và $N\left(0;-\dfrac{3}{2};\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)$.

Ta có $\overrightarrow{AM}=\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{4};\dfrac{3}{4};\sqrt{6}\right)$, $\overrightarrow{AC'}=\left(-\sqrt{3};0;\sqrt{6}\right)$

$\Rightarrow\left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AC'}\right]=\left(\dfrac{3\sqrt{6}}{4};-\dfrac{9}{2\sqrt{2}};\dfrac{3\sqrt{3}}{4}\right)$

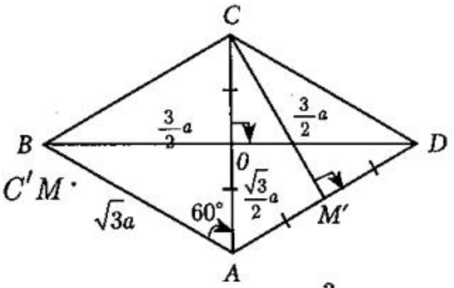
Mặt phẳng đi qua 3 điểm $A\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2};0;0\right)$, $M\left(\dfrac{\sqrt{3}}{4};\dfrac{3}{4};\sqrt{6}\right)$, $C'\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2};0;\sqrt{6}\right)$

là: $\dfrac{3\sqrt{6}}{4}\left(x-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)-\dfrac{9}{2\sqrt{2}}(y-0)+\dfrac{3\sqrt{3}}{4}(z-0)=0$

$\Leftrightarrow\dfrac{3\sqrt{6}}{4}x-\dfrac{9}{2\sqrt{2}}y+\dfrac{3\sqrt{3}}{4}z-\dfrac{9\sqrt{2}}{8}=0$.

$$d\left(N,\left(C'MA\right)\right)=\frac{\left|\dfrac{3\sqrt{6}}{4}.0-\dfrac{9}{2\sqrt{2}}\left(-\dfrac{3}{2}\right)+\dfrac{3\sqrt{3}}{4}.\dfrac{\sqrt{6}}{2}-\dfrac{9\sqrt{2}}{8}\right|}{\sqrt{\left(\dfrac{3\sqrt{6}}{4}\right)^2+\left(-\dfrac{9}{2\sqrt{2}}\right)^2+\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{4}\right)^2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{2}a.$$

➤ **Giải thích**

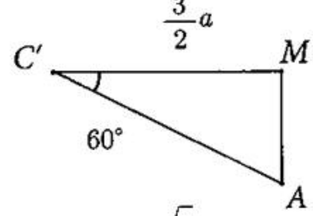


Ta có $\sin 60^\circ = \dfrac{OB}{AB}$

$\Rightarrow OB = AB.\sin 60^\circ = \sqrt{3}a.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{3}{2}a = CM' = C'M$.

$\cos 60^\circ = \dfrac{OA}{AB}$

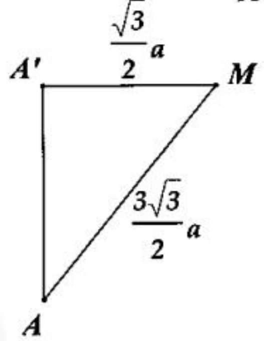
$\Rightarrow OA = AB.\cos 60^\circ = \sqrt{3}a.\dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}a$



$\Rightarrow AC = A'C' = \sqrt{3}a.$

$\tan 60^\circ = \dfrac{MA}{MC'}$

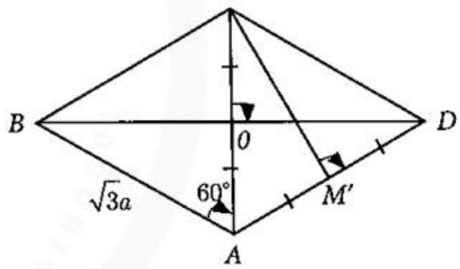
$\Rightarrow MA = MC'.\tan 60^\circ = \dfrac{3}{2}a.\sqrt{3} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}a$.



$A'M = \dfrac{\sqrt{3}}{2}a.$

$\Rightarrow A'A = \sqrt{AM^2 - A'M^2} = \sqrt{\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{2}a\right)^2 - \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2} = a\sqrt{6}$

$O \equiv O(0;\,0;\,0)$, $Ox \equiv OA$, $Oy \equiv OD$, $Oz \parallel AA'$.



Chọn $a = 1$, khi đó $A\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2};0;\,0\right)$,

$B\left(0;-\dfrac{3}{2};\,0\right)$, $C\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2};0;\,0\right)$, $D\left(0;\dfrac{3}{2};\,0\right)$,

$A'\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2};0;\,\sqrt{6}\right)$, $B'\left(0;-\dfrac{3}{2};\,\sqrt{6}\right)$, $D'\left(0;\dfrac{3}{2};\,\sqrt{6}\right)$.

$$M\left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}+0}{2};\,\frac{0+\frac{3}{2}}{2};\,\frac{\sqrt{6}+\sqrt{6}}{2}\right) = M\left(\frac{\sqrt{3}}{4};\,\frac{3}{4};\,\sqrt{6}\right),$$

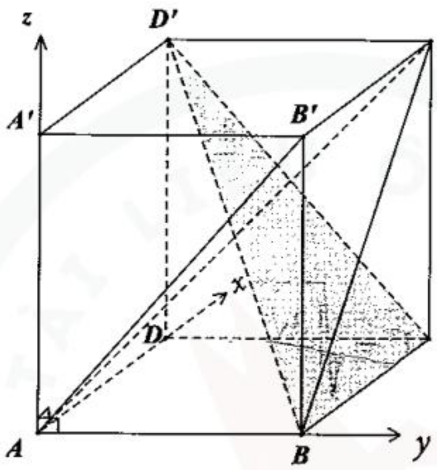
$$N\left(\frac{0+0}{2};\,\frac{\left(-\frac{3}{2}\right)+\left(-\frac{3}{2}\right)}{2};\,\frac{0+\sqrt{6}}{2}\right) = N\left(0;\,-\frac{3}{2};\,\frac{\sqrt{6}}{2}\right).$$

Bài 8

Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông, tam giác $A'AC$ vuông cân, $A'C=a$. Tính thể tích của khối tứ diện $ABB'C'$ và khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $\left(BCD'\right)$ theo a.

➢ **Lời giải:**

Từ giả thiết ta tính được $AC=AA'=\frac{a}{\sqrt{2}}$ và $AB=\frac{a}{2}$.



Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ.

$A\equiv O(0;0;0)$, $Ox\equiv AD$, $Oy\equiv AB$, $Oz\equiv AA'$.

Chọn $a=1$, khi đó $B\left(0;\frac{1}{2};0\right)$, $C\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};0\right)$, $D\left(\frac{1}{2};0;0\right)$, $B'\left(0;\frac{1}{2};\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $C'\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $D'\left(\frac{1}{2};0;\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Ta có $\overrightarrow{AB}=\left(0;\frac{1}{2};0\right)$, $\overrightarrow{AB'}=\left(0;\frac{1}{2};\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; $\overrightarrow{AC'}=\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Nên $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AB'}\right]=\left(\frac{1}{2\sqrt{2}};0;0\right)\Rightarrow\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AB'}\right].\overrightarrow{AC'}\right|=\frac{1}{4\sqrt{2}}$.

Thể tích khối chóp $ABB'C'$ là:

$V_{ABB'C'}=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AB'}\right].\overrightarrow{AC'}\right|=\frac{\sqrt{2}}{48}=\frac{\sqrt{2}}{48}a^3$ (đvtt) (do ta chọn $a=1$).

Ta có $\overrightarrow{CB}=\left(-\frac{1}{2};\,0;\,0\right)$, $\overrightarrow{CD'}=\left(0;\,-\frac{1}{2};\,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

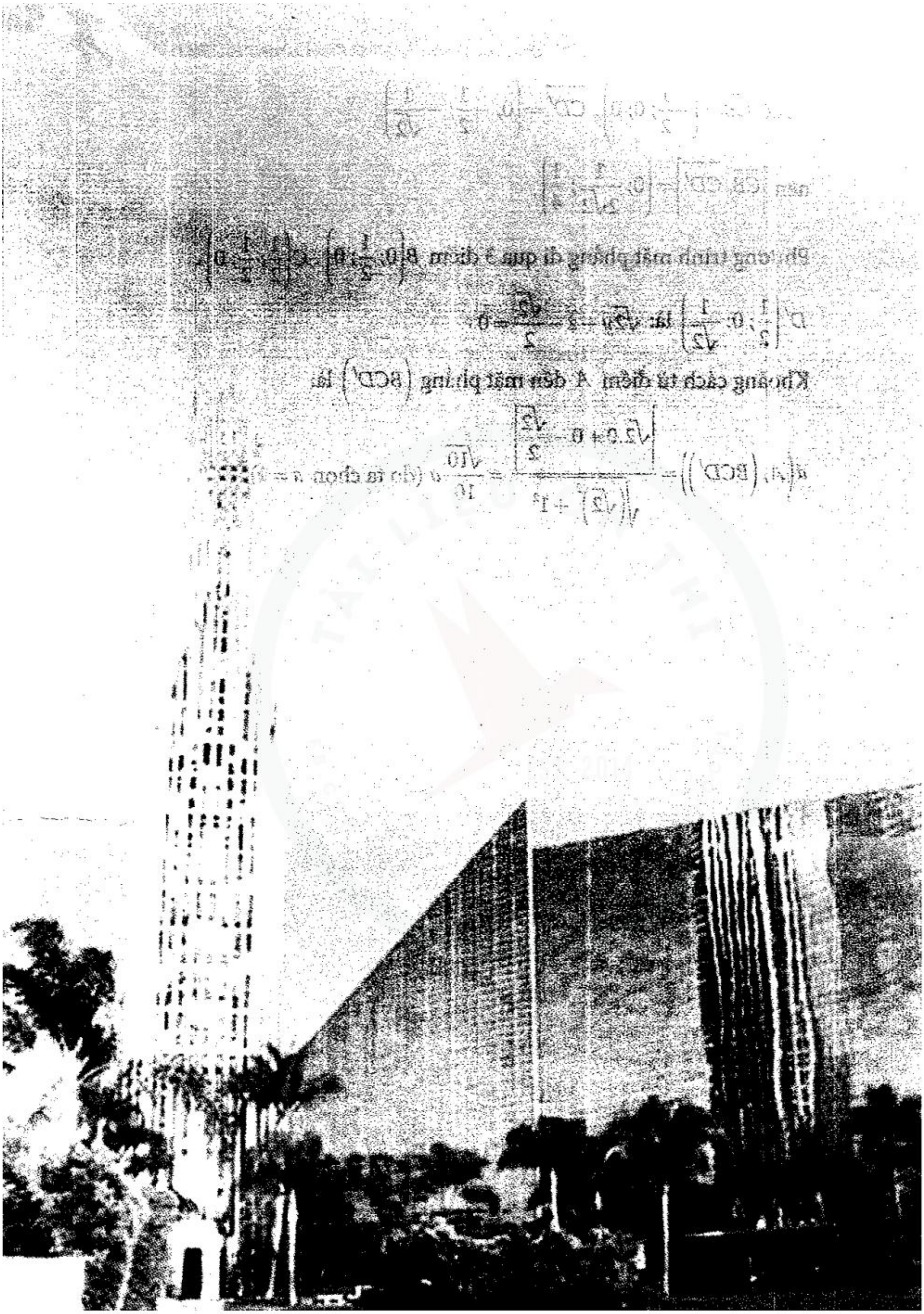
nên $\left[\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD'}\right]=\left(0;\,\frac{1}{2\sqrt{2}};\,\frac{1}{4}\right)$.

Phương trình mặt phẳng đi qua 3 điểm $B\left(0;\,\frac{1}{2};\,0\right)$, $C\left(\frac{1}{2};\,\frac{1}{2};\,0\right)$,

$D'\left(\frac{1}{2};\,0;\,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ là: $\sqrt{2}y+z-\frac{\sqrt{2}}{2}=0$.

Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (BCD') là:

$$d\left(A,(BCD')\right)=\frac{\left|\sqrt{2}.0+0-\frac{\sqrt{2}}{2}\right|}{\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2+1^2}}=\frac{\sqrt{10}}{10}a \text{ (do ta chọn } a=1).$$



DẠNG 2: THỂ TÍCH LĂNG TRỤ XIÊN

Đặc điểm: Lăng trụ xiên.

- Các cạnh bên không vuông góc với hai đáy. (khi vẽ hình không vẽ vuông góc với đáy)
- Hai đáy song song và bằng nhau.
- Vẽ hình xong phải có đường cao.

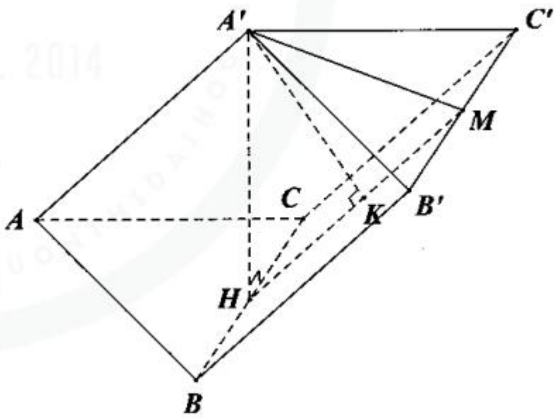
Nhận xét: Tìm *chân đường cao* của hình lăng trụ trước khi hoàn thành hình.

Bài 1

Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có mặt phẳng $\left(A'BC\right)$ vuông góc với mặt phẳng $\left(ABC\right)$. Hai tam giác $A'BC$ và tam giác ABC là những tam giác đều có cạnh bằng $2a$. Tính theo a thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ và khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $\left(BCC'B'\right)$

➤ **Lời giải:**

Cách 1: Phương pháp thuần túy



Gọi H là trung điểm BC.

Do tam giác $A'BC$ đều, suy ra $A'H \perp BC$.

Mà mặt phẳng $\left(A'BC\right)$ vuông góc với mặt phẳng $\left(ABC\right)$ theo giao tuyến BC nên $A'H \perp \left(ABC\right)$.

Ta có diện tích tam giác ABC là: $S_{\Delta ABC} = a^2\sqrt{3}$ (đvdt).

$$A'H = \frac{A'B.\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}.$$

Do đó thể tích khối chóp $ABC.A'B'C'$ là:

$V_{ABC.A'B'C'} = S_{\Delta ABC}.A'H = 3a^3$ (đvtt).

Do AA' song song với mặt phẳng $\left(BCC'B'\right)$,

nên $d\left(A,\left(BCC'B'\right)\right)=d\left(A',\left(BCC'B'\right)\right)$.

Gọi M là trung điểm $B'C'$, do tam giác $A'B'C'$ đều nên $A'M\perp B'C'$.

Gọi K là hình chiếu của A' lên HM, suy ra $A'K\perp HM$.

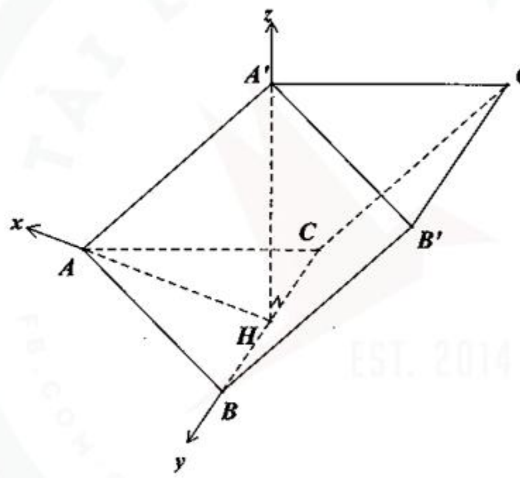
Ta có $\dfrac{1}{A'K^2}=\dfrac{1}{A'H^2}+\dfrac{1}{A'M^2}=\dfrac{2}{3a^2}\Rightarrow A'K=\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Vậy $d\left(A,\left(BCC'D'\right)\right)=A'K=\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Cách 2: Phương pháp tọa độ không gian

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ.

$H\equiv O(0;0;0)$, $Ox\equiv HA$, $Oy\equiv HB$, $Oz\equiv HA'$.



Chọn $a=1$, khi đó $A\left(\sqrt{3};0;0\right)$, $B(0;1;0)$, $A'\left(0;0;\sqrt{3}\right)$, suy ra $C(0;-1;0)$ và $B'\left(-\sqrt{3};1;\sqrt{3}\right)$.

Mặt phẳng $\left(BCC'B'\right)$ đi qua 3 điểm $B(0;1;0)$, $C(0;-1;0)$, $B'\left(-\sqrt{3};1;\sqrt{3}\right)$ nên có phương trình: $x+z=0$.

Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $\left(BCC'B'\right)$ là:

$$d=\frac{\left|\sqrt{3}+0\right|}{\sqrt{1+1}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}=\frac{a\sqrt{6}}{2}\text{ (do ta chọn } a=1\text{)}.$$

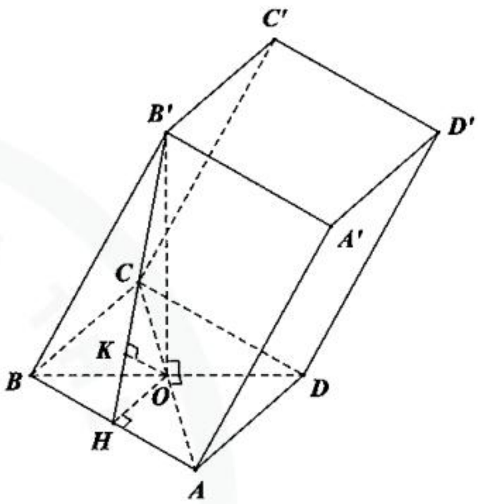
Vậy khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $\left(BCC'B'\right)$ là $\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Bài 2

Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh bằng $a\sqrt{3}$, $BD=3a$. Hình chiếu vuông góc của B' lên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm cạnh AC; mặt phẳng $(CDD'C')$ hợp với đáy một góc bằng $60°$. Tính theo a thể tích khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ và khoảng cách từ điểm D đến mặt phẳng $(ABB'A')$.

➤ **Lời giải:**

Cách 1: Phương pháp thuần túy



Gọi O là giao điểm của AC và BD.

Ta có $AO=\sqrt{AB^2-\dfrac{BD^2}{4}}=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$,

suy ra $AC=2AO=a\sqrt{3}$.

Do đó, tam giác ABC đều cạnh bằng $a\sqrt{3}$.

Diện tích hình thoi $ABCD$ là:

$S_{ABCD}=2S_{\Delta ABC}=2.\dfrac{3a^2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{3a^2\sqrt{3}}{2}$ (đvdt).

Kẻ $OH\perp AB$, suy ra $AB\perp(B'OH)$ nên $AB\perp B'H$.

Do đó $\left(\widehat{(CDD'C),(ABCD)}\right)=\left(\widehat{(ABB'A'),(ABCD)}\right)=\left(\widehat{B'H,OH}\right)=\widehat{B'HO}$.

Ta có $\dfrac{1}{OH^2}=\dfrac{1}{OA^2}+\dfrac{1}{OB^2}=\dfrac{16}{9a^2}\Rightarrow OH=\dfrac{3}{4}a$; $B'O=OH.\tan\widehat{B'HO}=\dfrac{3a\sqrt{3}}{4}$.

Do đó $V_{ABCD.A'B'C'D'}=S_{ABCD}.B'O=\dfrac{27}{8}a^3$ (đvtt).

Ta có $d(D,(ABB'A'))=2d(O,(ABB'A'))$.

Gọi K là hình chiếu của O lên $B'H$, suy ra $OK\perp B'H$.

Ta có $AB\perp(B'OH)$ nên $AB\perp OK$.

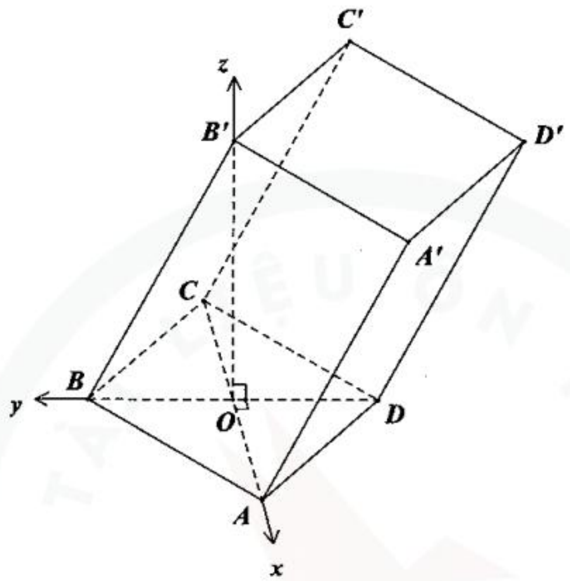
Do đó $OK\perp(ABB'A')$ nên $d(O,(ABB'A'))=OK$.

Ta có $\frac{1}{OK^2}=\frac{1}{OH^2}+\frac{1}{B'O^2}=\frac{64}{27a^2}\Rightarrow OK=\frac{3a\sqrt{3}}{8}$.

Vậy $d\left(D,\left(ABB'A'\right)\right)=2OK=\frac{3a\sqrt{3}}{4}$.

Cách 2: Phương pháp tọa độ không gian

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ.



$O\equiv O(0;0;0)$, $Ox\equiv OA$, $Oy\equiv OB$, $Oz\equiv OB'$.

Chọn $a=1$, khi đó $A\left(\frac{\sqrt{3}}{2};0;0\right)$, $B\left(0;\frac{3}{2};0\right)$, $B'\left(0;0;\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$,

Suy ra $D\left(0;-\frac{3}{2};0\right)$.

Mặt phẳng $\left(ABB'A'\right)$ đi qua 3 điểm $A\left(\frac{\sqrt{3}}{2};0;0\right)$, $B\left(0;\frac{3}{2};0\right)$, $B'\left(0;0;\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$ nên có phương trình:

$6x+2\sqrt{3}y+4z-3\sqrt{3}=0$.

Khoảng cách từ điểm D đến mặt phẳng $\left(ABB'A'\right)$ là:

$$d=\frac{\left|-3\sqrt{3}-3\sqrt{3}\right|}{\sqrt{36+12+16}}=\frac{3\sqrt{3}}{4}=\frac{3a\sqrt{3}}{4}$$ (do ta chọn $a=1$).

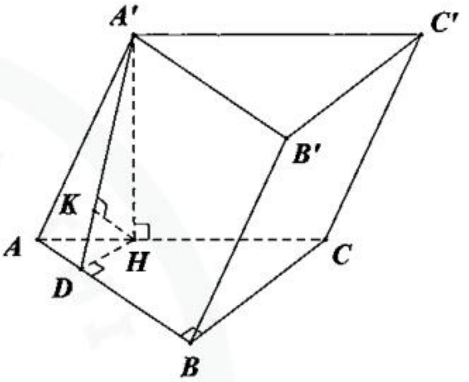
Vậy khoảng cách từ điểm D đến mặt phẳng $\left(ABB'A'\right)$ là $\frac{3a\sqrt{3}}{4}$.

Bài 3

Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $AB = a$. Hình chiếu vuông góc của điểm A' lên mặt phẳng (ABC) là điểm H thuộc cạnh AC sao cho $HC = 2HA$. Mặt bên $(ABB'A')$ hợp với đáy một góc bằng $60°$. Tính theo a thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CC'.

➢ **Lời giải:**

Cách 1: Phương pháp thuần túy



Gọi D là hình chiếu vuông góc của H lên cạnh AB.

Ta có

$$\begin{cases} AB \perp DH \\ AB \perp A'H \end{cases} \Rightarrow AB \perp (A'HD) \Rightarrow AB \perp A'D$$

Do đó

$$(\widehat{(ABB'A'), (ABC)}) = (\widehat{A'D, HD}) = \widehat{A'DH}.$$

Ta có $DH = \dfrac{1}{3}BC = \dfrac{a}{3}$, suy ra $A'H = DH.\tan 60° = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Diện tích tam giác ABC là: $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}BA.BC = \dfrac{a^2}{2}$ (đvdt).

Do đó $V_{ABC.A'B'C'} = S_{\Delta ABC}.A'H = \dfrac{\sqrt{3}}{6}a^3$ (đvtt).

Vì CC' song song với mặt phẳng $(ABB'A')$ nên ta có

$$d(CC', AB) = d(CC', (ABB'A')) = d(C, (ABB'A')) = 3d(H, (ABB'A')).$$

Gọi K là hình chiếu vuông góc của H lên $A'D$, suy ra $HK \perp A'D$.

Ta có $AB \perp (A'HD)$ nên $AB \perp HK$.

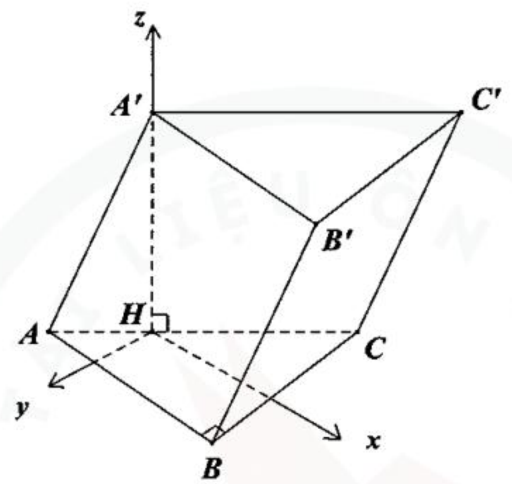
Do đó $HK \perp (ABB'A')$ nên $d\left(H,(ABB'A')\right) = HK$.

Ta có $HK = HD.\sin 60° = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

Vậy $d(CC', AB) = 3HK = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Cách 2: **Phương pháp tọa độ không gian**

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ.



$H \equiv O(0; 0; 0)$, $Ox \parallel AB$, $Oy \parallel BC$, $Oz \equiv HA'$.

Chọn $a = 1$, khi đó $A\left(-\dfrac{1}{3}; \dfrac{1}{3}; 0\right)$, $B\left(\dfrac{2}{3}; \dfrac{1}{3}; 0\right)$, $A'\left(0; 0; \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$, suy ra $C\left(\dfrac{2}{3}; -\dfrac{2}{3}; 0\right)$.

Mặt phẳng $(ABB'A')$ đi qua 3 điểm $A\left(-\dfrac{1}{3}; \dfrac{1}{3}; 0\right)$, $B\left(\dfrac{2}{3}; \dfrac{1}{3}; 0\right)$, $A'\left(0; 0; \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$ nên có phương trình: $\sqrt{3}y + z - \dfrac{\sqrt{3}}{3} = 0$.

Ta có $d(CC', AB) = d\left(CC', (ABB'A')\right) = d\left(C, (ABB'A')\right)$

$$= \frac{\left|\sqrt{3}.\left(-\frac{2}{3}\right) + 0 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right|}{\sqrt{3+1}} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \text{ (do ta chọn } a = 1\text{)}.$$

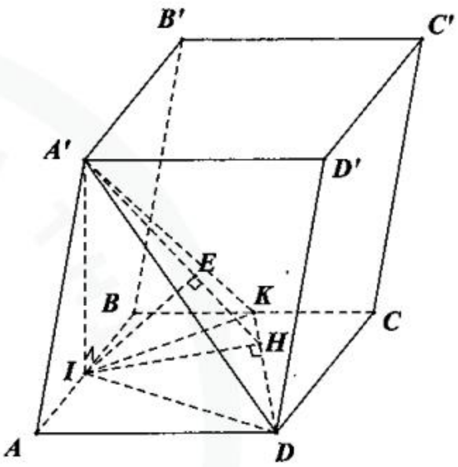
Vậy khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CC' là $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Bài 4

Cho hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình bình vuông cạnh bằng a, cạnh bên $AA'=a$, hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với trung điểm I của AB. Gọi K là trung điểm của BC. Tính theo a thể tích khối chóp $A'.IKD$ và khoảng cách từ điểm I đến mặt phẳng $(A'KD)$.

➢ **Lời giải:**

Cách 1: Phương pháp thuần túy



Thể tích khối chóp $A'.IKD$ là:

$V_{A'.IKD}=\frac{1}{3}S_{\Delta IKD}.A'I$.

Ta có $A'I=\sqrt{AA'^2-AI^2}=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Diện tích tam giác IKD là:

$S_{\Delta IKD}=S_{ABCD}-S_{\Delta AID}-S_{\Delta CDK}-S_{\Delta BKI}=\frac{3}{8}a^2$ (đvdt).

Do đó $V_{A'.IKD}=\frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{3}{8}a^2=\frac{a^3\sqrt{3}}{16}$ (đvtt).

Gọi H là hình chiếu của I trên KD.

Ta có $IH\perp KD$ và $IH=\frac{2S_{\Delta IKD}}{KD}=\frac{3a}{2\sqrt{5}}$.

Gọi E là hình chiếu của I trên $A'H$, suy ra $IE\perp A'H$.

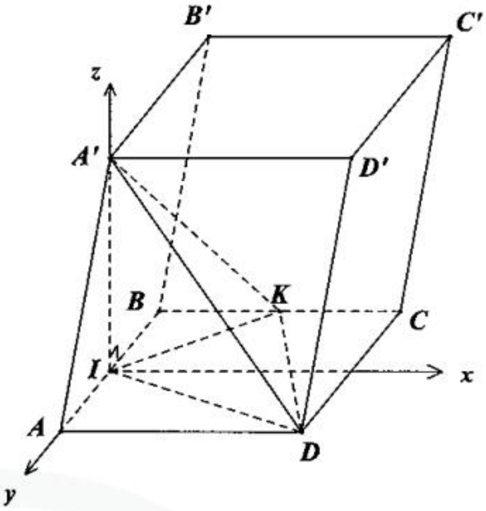
Ta có $KD\perp(A'IH)$ nên $KD\perp IE$.

Do đó $IE\perp(A'KD)$ nên $d(I,(A'KD))=IE$.

Ta có $\frac{1}{IE^2}=\frac{1}{A'I^2}+\frac{1}{IH^2}=\frac{4}{3a^2}+\frac{20}{9a^2}=\frac{32}{9a^2}\Rightarrow IE=\frac{3a\sqrt{2}}{8}$.

Vậy $d(I,(A'KD))=\frac{3a\sqrt{2}}{8}$.

Cách 2: Phương pháp tọa độ không gian



Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ.

$I \equiv O(0;0;0)$, $Ox \parallel AD$, $Oy \parallel AB$, $Oz \equiv IA'$.

Chọn $a=1$, khi đó $A\left(0;\frac{1}{2};0\right)$, $D\left(1;\frac{1}{2};0\right)$, $A'\left(0;0;\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Suy ra $B\left(0;-\frac{1}{2};0\right)$, $C\left(1;-\frac{1}{2};0\right)$ và trung điểm của BC là $K\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2};0\right)$.

Mặt phẳng $(A'KD)$ đi qua 3 điểm $A'\left(0;0;\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $D\left(1;\frac{1}{2};0\right)$, $K\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2};0\right)$ nên có phương trình: $2x-y+\sqrt{3}z-\frac{3}{2}=0$.

Ta có $d\left(I,(A'KD)\right)=\dfrac{\left|-\frac{3}{2}\right|}{\sqrt{4+1+3}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{8}=\dfrac{3a\sqrt{2}}{8}$ (do ta chọn $a=1$).

Vậy khoảng cách từ điểm I đến mặt phẳng $(A'KD)$ là $\dfrac{3a\sqrt{2}}{8}$.

Bài 5

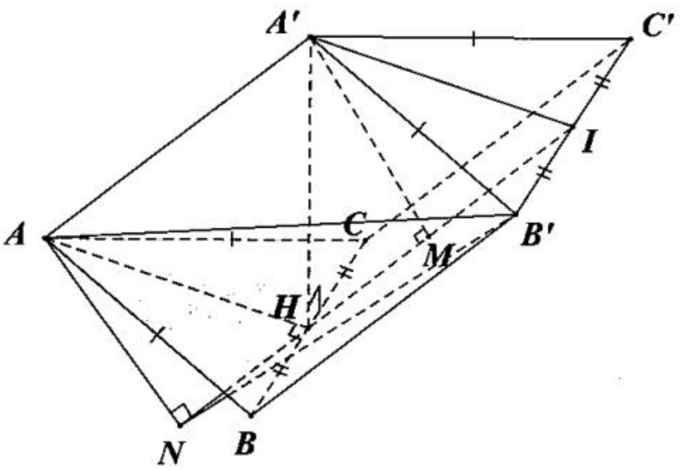
Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, hình chiếu vuông góc của A' lên mặt đáy (ABC) là trung điểm của BC và $AA'=a\sqrt{3}$. Tính theo a thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ và tan của góc tạo bởi đường thẳng AB' và mặt phẳng $(BCC'B')$.

➤ **Lời giải:**

Cách 1: Phương pháp thuần túy

Gọi H là trung điểm BC, theo giả thiết suy ra $A'H \perp (ABC)$.

Ta có $AH=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$; $A'H=\sqrt{AA'^2-AH^2}=\dfrac{3a}{2}$.



Diện tích tam giác ABC là: $S_{\Delta ABC} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2$ (đvdt).

Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là:

$V_{ABC.A'B'C'} = S_{\Delta ABC}.A'H = \dfrac{3\sqrt{3}}{8}a^3$ (đvtt).

Gọi M là hình chiếu của A' lên HI.

Ta có $\dfrac{1}{A'M^2} = \dfrac{1}{A'I^2} + \dfrac{1}{A'H^2} = \dfrac{16}{9a^2} \Rightarrow A'M = \dfrac{3a}{4}$.

Kẻ $AN \perp HI$ suy ra $AA'MN$ là hình chữ nhật, nên $AN = A'M = \dfrac{3a}{4}$.

Ta có $BC \perp (AA'H)$ suy ra $BC \perp AN$.

Từ đó suy ra $AN \perp (BCC'B')$.

Khi đó $\left(\widehat{AB', (BCC'B')}\right) = \left(\widehat{AB', B'N}\right) = \widehat{AB'N}$.

Ta có $MN = AA' = a\sqrt{3}$; $MI = \dfrac{A'I^2}{HI} = \dfrac{A'I^2}{AA'} = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

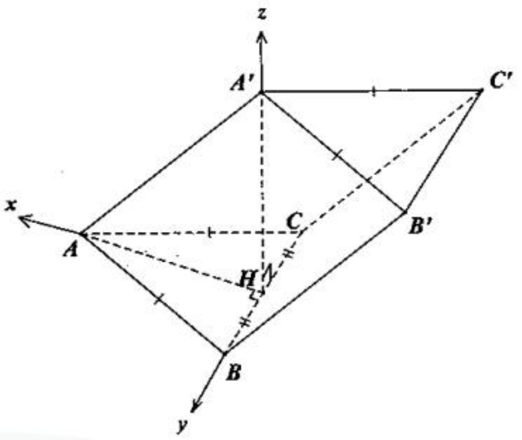
Suy ra $NI = MN + MI = \dfrac{5a\sqrt{3}}{4}$; $B'N = \sqrt{NI^2 + IB'^2} = \dfrac{a\sqrt{79}}{4}$.

Trong tam giác $AB'N$, ta có $\tan\widehat{AB'N} = \dfrac{AN}{B'N} = \dfrac{3}{\sqrt{79}}$.

Vậy đường thẳng AB' hợp với mặt phẳng $(BCC'B')$ một góc α với $\tan\alpha = \dfrac{3}{\sqrt{79}}$.

Cách 2: Phương pháp tọa độ không gian

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ.



$H \equiv O(0;0;0)$, $Ox \equiv HA$, $Oy \equiv HB$, $Oz \equiv HA'$.

Chọn $a=1$, khi đó $A\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2};0;0\right)$, $B\left(0;\dfrac{1}{2};0\right)$, $A'\left(0;0;\dfrac{3}{2}\right)$, suy ra $C\left(0;-\dfrac{1}{2};0\right)$

$B'\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2};\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right)$ và $\overrightarrow{AB'}=\left(-\sqrt{3};\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right)$

Mặt phẳng $(BCC'B')$ có véctơ pháp tuyến $\vec{n}=\left[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BB'}\right]=\left(-\dfrac{3}{2};0;-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Ta có $\sin\widehat{AB',(BCC'B')}=\dfrac{\left|\overrightarrow{AB'}.\vec{n}\right|}{\left|\overrightarrow{AB'}\right|.\left|\vec{n}\right|}=\dfrac{3}{\sqrt{88}}$.

Suy ra là $\tan\widehat{AB',(BCC'B')}=\dfrac{3}{\sqrt{79}}$.

Bài 6

Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, tâm O và $\widehat{ABC}=120^\circ$. Góc giữa cạnh bên AA' và mặt phẳng đáy bằng 60°. Đỉnh A' cách đều các điểm A, B, D. Gọi M là trung điểm cạnh CD. Tính theo a thể tích khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ và khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng $(A'BD)$.

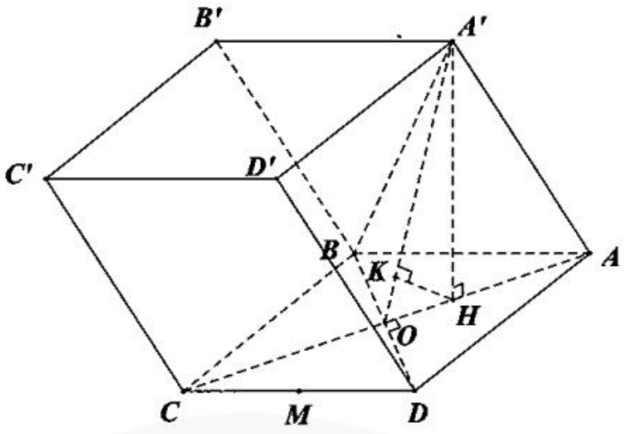
➢ **Lời giải:**

Cách 1: Phương pháp thuần túy

Góc $\widehat{ABC}=120^\circ$ suy ra $\widehat{BAD}=120^\circ$ nên tam giác ABD là tam giác đều cạnh a.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A' xuống mặt đáy $(ABCD)$.

Do đỉnh A' cách đều các điểm A, B, D nên H trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD.



Suy ra H thuộc AO sao cho $AH = \frac{2}{3}AO = \frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Khi đó hình chiếu của AA' lên mặt đáy $(ABCD)$ là HA nên:

$\left(\widehat{AA', (ABCD)}\right) = \left(\widehat{AA', HA}\right) = \widehat{A'AH}$.

Trong tam giác vuông $A'AH$, ta có $A'H = AH.\tan\widehat{A'AH} = AH.\tan 60° = a$

Diện tích hình thoi $ABCD$ là: $S_{ABCD} = 2S_{\Delta ABD} = \frac{\sqrt{3}}{2}a^2$ (đvdt).

Thể tích khối chóp $ABCD.A'B'C'D'$ là:

$V_{ABC.A'B'C'D'} = S_{ABCD}.A'H = \frac{\sqrt{3}}{2}a^3$ (đvtt).

Ta có $d\left(M, \left(A'BD\right)\right) = \frac{1}{2}d\left(C, \left(A'BD\right)\right) = \frac{1}{2}d\left(A, \left(A'BD\right)\right) = \frac{3}{2}d\left(H, \left(A'BD\right)\right)$.

Gọi K là hình chiếu của H lên $A'O$ suy ra $HK \perp A'O$.

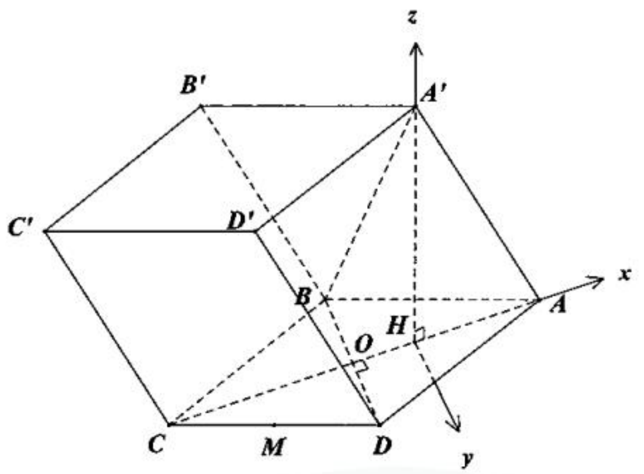
Ta có $BD \perp \left(A'HO\right)$ nên $BD \perp HK$.

Do đó $HK \perp \left(A'BD\right)$ nên $d\left(H, \left(A'BD\right)\right) = HK$.

Ta có $\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{HO^2} + \frac{1}{A'H^2} = \frac{13}{a^2} \Rightarrow HK = \frac{a\sqrt{13}}{13}$.

Vậy $d\left(M, \left(A'BD\right)\right) = \frac{3}{2}HK = \frac{3a\sqrt{13}}{26}$.

Cách 2: Phương pháp tọa độ không gian



Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ.

$H \equiv O(0;0;0)$, $Ox \equiv AC$, $Oy \parallel BD$, $Oz \equiv HA'$.

Chọn $a=1$, khi đó $A\left(\frac{\sqrt{3}}{3};0;0\right)$, $O\left(-\frac{\sqrt{3}}{6};0;0\right)$, $A'(0;0;1)$, suy ra:

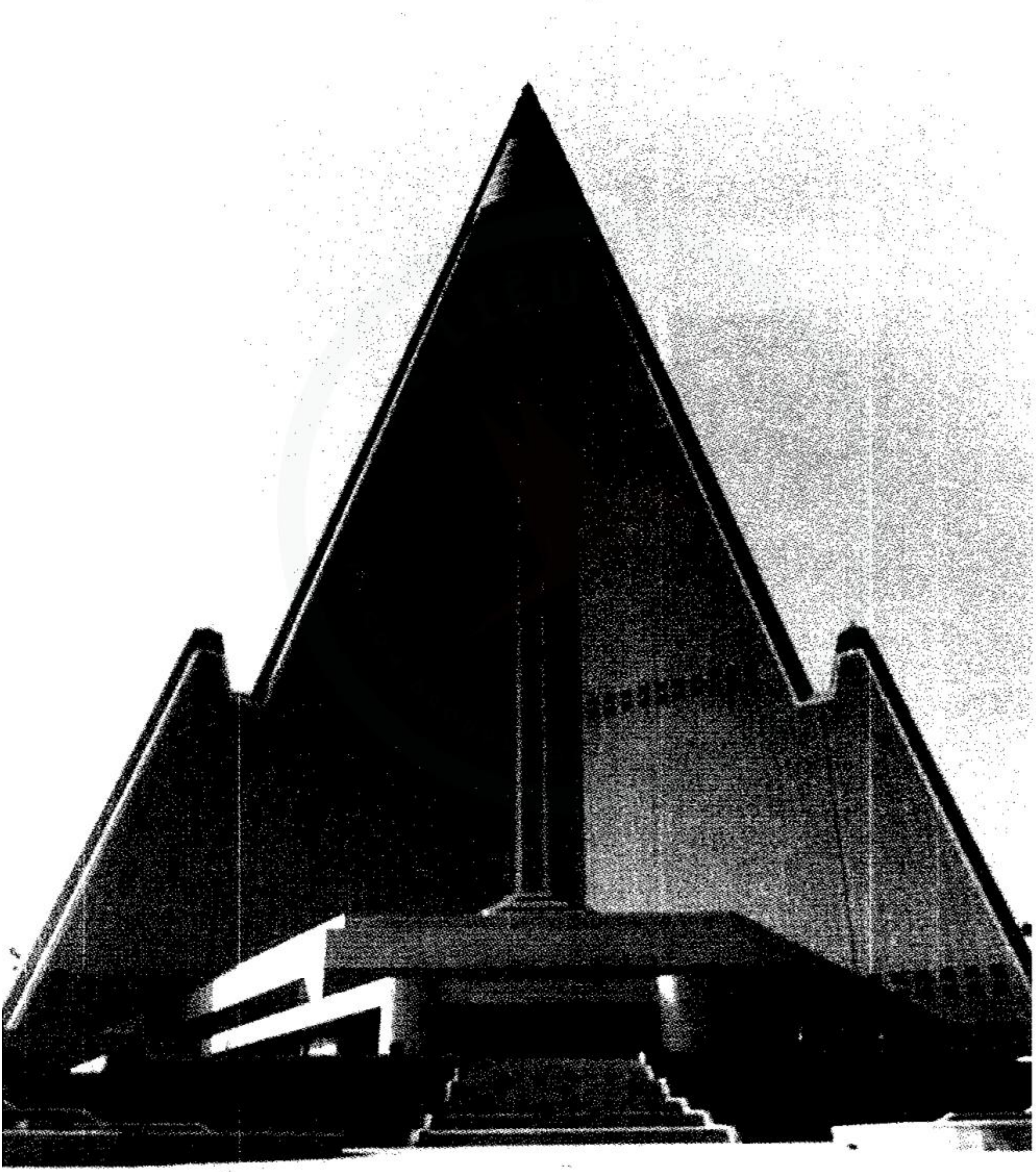
$C\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3};0;0\right)$, $D\left(-\frac{\sqrt{3}}{6};\frac{1}{2};0\right)$ và trung điểm của CD là $M\left(-\frac{5\sqrt{3}}{12};\frac{1}{4};0\right)$.

Mặt phẳng $(A'BD)$ đi qua 3 điểm $A'(0;0;1)$, $D\left(-\frac{\sqrt{3}}{6};\frac{1}{2};0\right)$, $O\left(-\frac{\sqrt{3}}{6};0;0\right)$ nên có phương trình: $2\sqrt{3}x - z + 1 = 0$.

Ta có $d(M,(A'BD)) = \frac{\left|2\sqrt{3}.\left(-\frac{5\sqrt{3}}{12}\right) - 0 + 1\right|}{\sqrt{12+0+1}} = \frac{3\sqrt{13}}{26} = \frac{3a\sqrt{13}}{26}$

(do ta chọn $a=1$).

Vậy khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng $(A'BD)$ là $\frac{3a\sqrt{13}}{26}$.



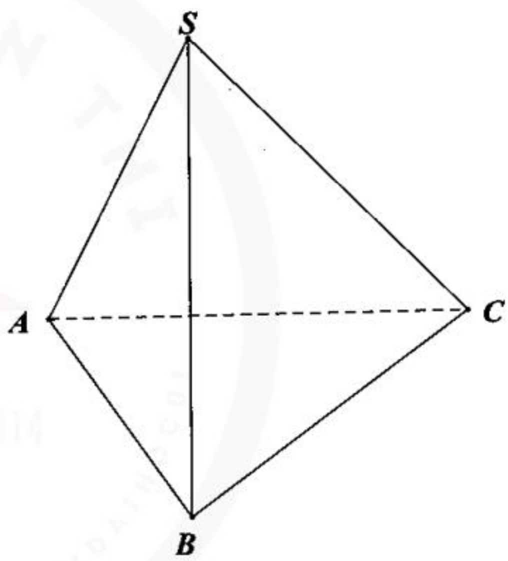
PHẦN III

PHƯƠNG PHÁP ĐẶT TRỤC TỌA ĐỘ

TỨ DIỆN

A LÝ THUYẾT

1. KIẾN THỨC CƠ BẢN VỀ HÌNH CHÓP TAM GIÁC



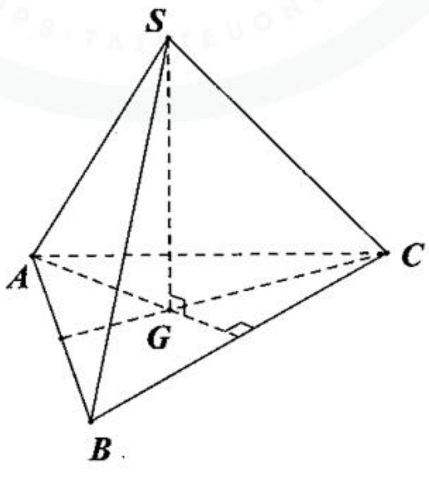
- *Định nghĩa:* Hình chóp tam giác là khối đa diện có đáy và các mặt bên đều là các hình tam giác

- Tứ diện SABC đều (đáy ABC có tâm G) là hình chóp tam giác có tất cả các cạnh bằng nhau hay nói cách khác là hình chóp có các mặt bên là các tam giác đều.

- Các tính chất của chóp tam giác đều:

+ SG vuông góc với mặt phẳng (ABC)

+ SA=SB=SC=AB=AC=BC.



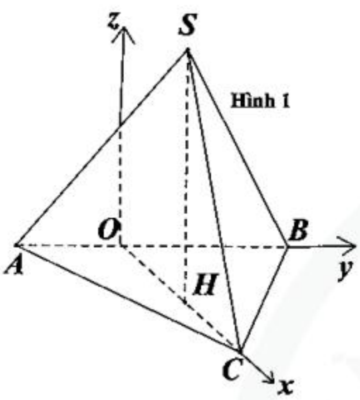
2. THIẾT LẬP HỆ TRỤC TỌA ĐỘ CHO HÌNH CHÓP TAM GIÁC:

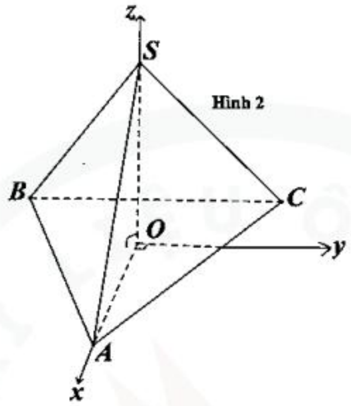
Với hình chóp tam giác việc thiết lập hệ trục tọa độ thường được thực hiện khá đơn giản, ta thường gặp các trường hợp sau:

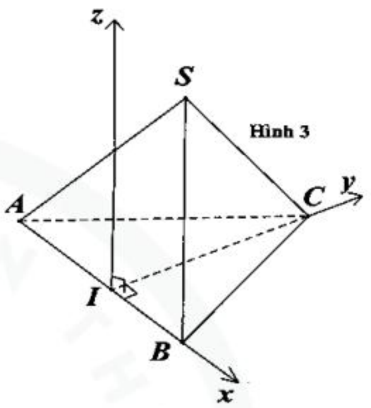
a) Hình chóp tam giác đều S.ABC

Cho hình chóp tam giác đều S.ABC cạnh a, SH=h

Có thể chọn hệ trục tọa độ theo các cách như sau:







Hình 1:

O là trung điểm AB, H là trọng tâm tam giác ABC, khi đó, chọn hệ tọa độ Oxyz sao cho Oz//SH(vì S.ABC là hình chóp tam giác đều nên SH ⊥ (ABC)). Khi đó:

$$O(0;0;0),\ S\left(\frac{a\sqrt{3}}{6};0;h\right),\ A\left(0;-\frac{a}{2};0\right),\ B\left(0;\frac{a}{2};0\right),\ C\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};0;0\right).$$

Hình 2:

O là trọng tâm tam giác ABC, do đó SO ⊥ (ABC) (do S.ABC là hình chóp tam giác đều), khi đó, chọn hệ tọa độ Oxyz như hình vẽ:

$$O(0;0;0),\ S(0;0;h), A\left(\frac{a\sqrt{3}}{3};0;0\right),\ B\left(-\frac{a\sqrt{3}}{6};-\frac{a}{2};0\right);C\left(-\frac{a\sqrt{3}}{6};\frac{a}{2};0\right)$$

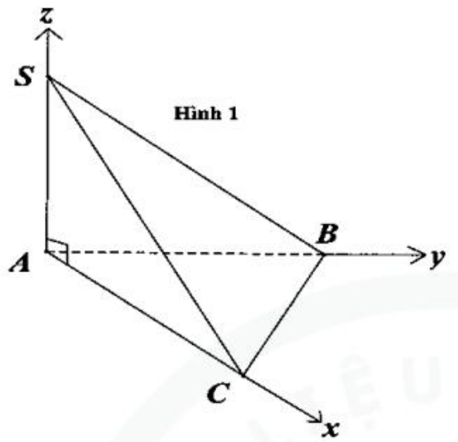
Hình 3:

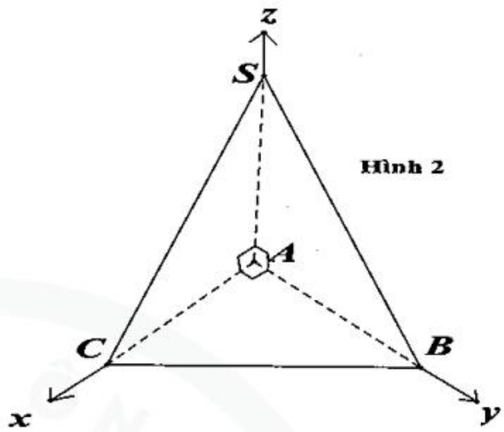
I là trung điểm của AB, chọn hệ tọa độ như hình vẽ: $I(0;0;0)$, $S\left(\frac{a\sqrt{3}}{6};0;h\right)$, $A\left(-\frac{a}{2};0;0\right)$, $B\left(\frac{a}{2};0;0\right)$, $C\left(0;\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right)$

b) Hình chóp S.ABC có $SA \perp (ABC)$ và tam giác ABC vuông tại A.

Cho hình chóp S.ABC có $SA \perp (ABC)$, tam giác ABC vuông tại A ,SA =h, AB = a, AC = b.

Chọn hệ trục tọa độ như sau:





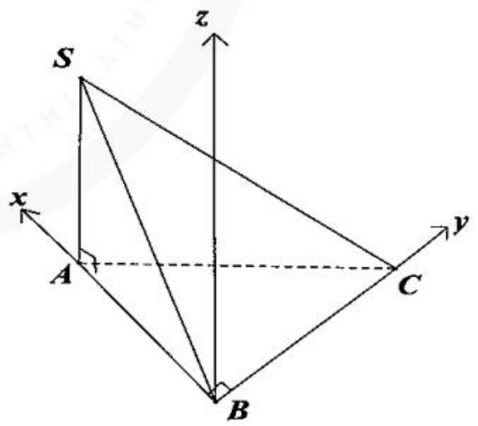
Vì $SA \perp (ABC)$ và đáy ABC là tam giác vuông tại A, nên $SA \perp AB$, $SA \perp AC$, $AB \perp AC$ do đó ta chọn A làm gốc tọa độ: $A(0;0;0)$, $B(0;a;0)$, C $(b;0;0)$, $S(0;0;h)$.

c) Hình chóp S.ABC có $SA \perp (ABC)$ và tam giác ABC vuông tại B.

Cho hình chóp S.ABC có $SA \perp (ABC)$ và tam giác ABC vuông tại B, SA $= a$, AB $= b$, BC $= c$

Chọn hệ trục tọa độ như sau:

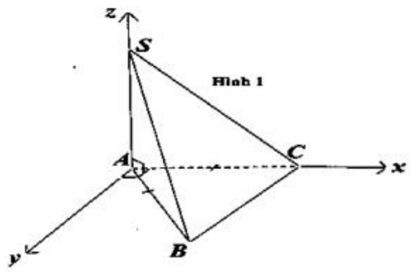
Vì $SA \perp (ABC)$ và đáy ABC là tam giác vuông tại B, nên SA, AB, BC đôi một vuông góc do đó ta chọn B làm gốc tọa độ, và kẻ Bz//SA. Khi đó: $A(b;0;0), B(0;0;0), C(0;c;0), S(b;0;a)$

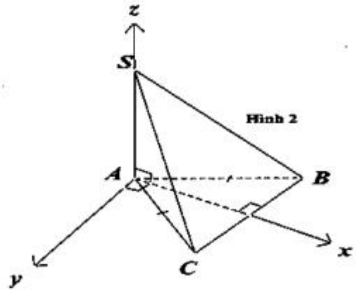


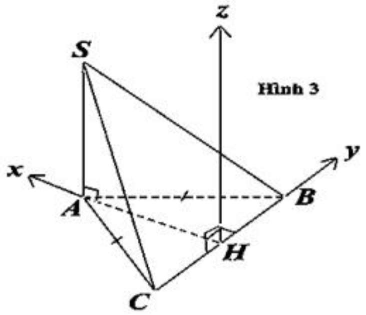
d) Hình chóp S.ABC có $SA \perp (ABC)$ và tam giác ABC đều.

Hình chóp S.ABC có $SA \perp (ABC)$ và tam giác ABC đều, $AB = AC = BC = a$; SA= b

Chọn hệ trục tọa độ theo một trong ba cách sau:







Hình 1:

Vì $SA \perp (ABC)$ nên chọn $Az \equiv SA$ (A là gốc tọa độ). Mặt khác, tam giác ABC cân tạo A nên có thể chọn $Ox \equiv AC$ sau đó kẻ $Ay \perp Ax$. Dễ thấy Az, Ay,AC đôi một vuông góc nên ta được hệ tọa độ Axyz như hình vẽ. Khi đó:

$$A(0;0;0), B\left(\frac{a\sqrt{6}}{2};\frac{a\sqrt{2}}{4};0\right), C\left(a\sqrt{2};0;0\right), S(0;0;b)$$

Hình 2:

Kẻ tia Ax $\perp BC$ sau đó kẻ $Ay \perp Ax$ và chọn $Az \equiv SA$. Kẻ Ay//BC. Ta thấy Az, Ax, Ay đôi một vuông góc nên ta được hệ tọa độ Axyz ta được hệ tọa độ như hình vẽ. Khi đó:

$$A(0;0;0);B\left(\frac{-a\sqrt{3}}{2};0;0\right);C\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};\frac{a}{2};0\right);S(0;0;b)$$

Hình 3:

Gọi AH là đường cao tam giác ABC, khi đó $AH \perp BC$, kẻ Hz//SA khi đó Hz, HA, HB đôi một vuông góc nên ta chọn được hệ tọa độ như hình vẽ. Khi đó:

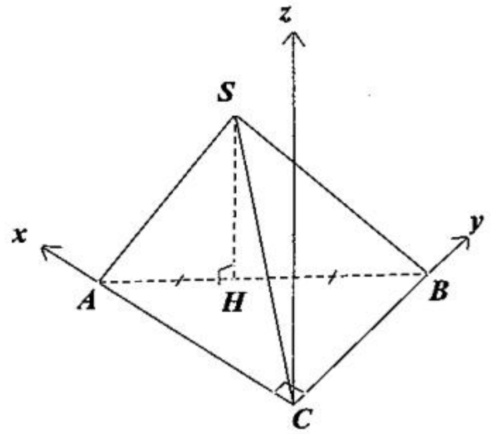
$$H(0;0;0);A\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};0;0\right);B\left(0;\frac{a}{2};0\right);C\left(0;-\frac{a}{2};0\right);S\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};0;b\right)$$

Nhận xét: Ở dạng bài này ta phải kẻ thêm để tạo ra góc vuông.

e) Hình chóp S.ABC có $(SAB) \perp (ABC)$, tam giác SAB cân tại S.

Hình chóp S.ABC có $(SAB) \perp (ABC)$, tam giác SAB cân tại S, có SA=SB= a, $\widehat{BSA} = 60°$ và tam giác ABC vuông tại C

Chọn hệ trục tọa độ như sau:



Vì $SH \perp (ABC)$ nên $SH \perp (ABC)$ (với SH là đường cao tam giác SAB), mặt khác, vì ABC vuông tại C, nên AC$\perp$ BC, từ C kẻ tia Cz//SH . Dễ thấy Cz, AC, BC đôi một vuông góc, nên ta chọn được hệ tọa độ như hình vẽ.

Nhận xét:

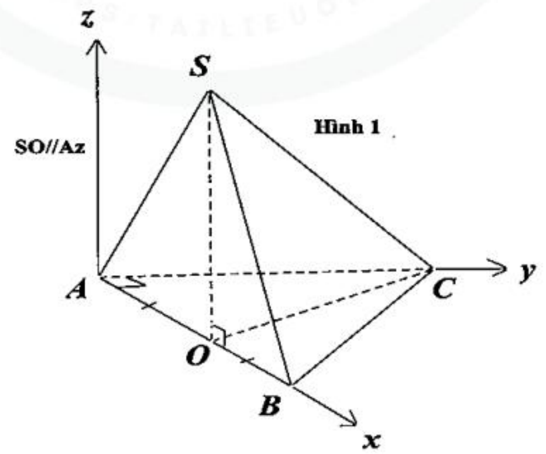
- Ở dạng bài này ta sẽ chọn gốc tọa độ là góc vuông, sau đó kẻ trục cao song song với đường cao của hình chóp.

- Cũng có thể chọn SH là trục cao bằng việc kẻ Hx//CA và Hy//CB tuy nhiên việc xác định tọa độ điểm sẽ phức tạp hơn.

f) Hình chóp S.ABC có $(SAB) \perp (ABC)$, tam giác SAB cân tại S và tam giác ABC vuông tại A.

Hình chóp S.ABC có $(SAB) \perp (ABC)$, tam giác SAB cân tại S có $SA = SB = a$ và $\widehat{BSA} = 120°$. Tam giác ABC vuông tại A, có AB= a , AC= $a\sqrt{2}$.

Chọn hệ trục tọa độ như sau:



Vì (ABC) và tam giác SAB cân tại S, nên SO $\perp (ABC)$

Mặt khác ta thấy tam giác ABC vuông tại A, từ A kẻ tia Az//SO , dễ thấy Az, AC, AB đôi một vuông góc, do đó ta chọn được hệ tọa độ như hình vẽ.

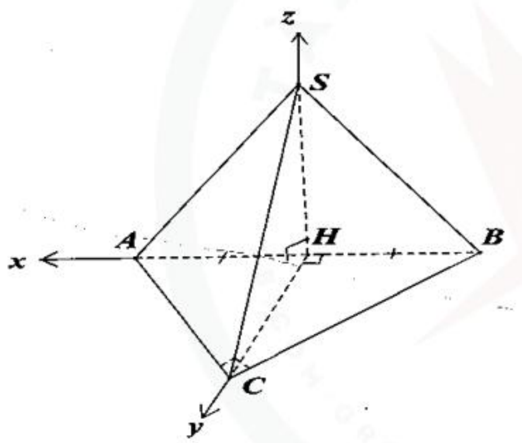
$$A(0;0;0);B(a;0;0);C\left(0;a\sqrt{2};0\right);O\left(\frac{a}{2};0;0\right);S\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};0;0\right)$$

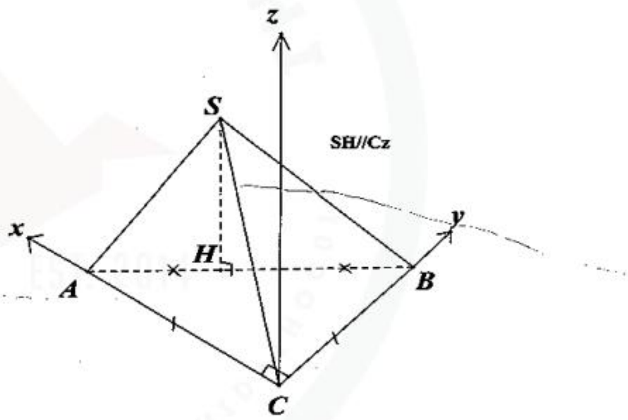
Dạng bài này việc đặt trục khá đơn giản do đáy là tam giác vuông, chỉ cần xác định đường cao của hình chóp sau đó từ đỉnh tam giác vuông kẻ song song với đường cao là ta sẽ được hệ tọa độ.

h) Hình chóp S.ABC có $(SAB)\perp(ABC)$, tam giác ABC vuông cân tại C và tam giác SAB cân tại S.

Hình chóp S.ABC có $(SAB)\perp(ABC)$, tam giác ABC vuông cân tại C có cạnh $AC = CB = a$ và tam giác SAB cân tại S có $SA = SB = 2a$.

Chọn hệ trục tọa độ như sau:





Hình 1:

Vì $(SAB)\perp(ABC)$ và SH là đường cao tam giác SAB nên $SH\perp(ABC)$. Mặt khác tam giác ABC vuông cân tại C, nên $CH\perp AB$. Dễ nhận thấy, SH, AB, CH đôi một vuông góc, nên ta chọn được hệ tọa độ như hình vẽ.

$$H(0;0;0);A\left(\frac{a\sqrt{2}}{2};0;0\right);B\left(-\frac{a\sqrt{2}}{2};0;0\right);C\left(0;\frac{a\sqrt{2}}{2};0\right);S\left(0;0;\frac{a\sqrt{14}}{2}\right)$$

Hình 2:

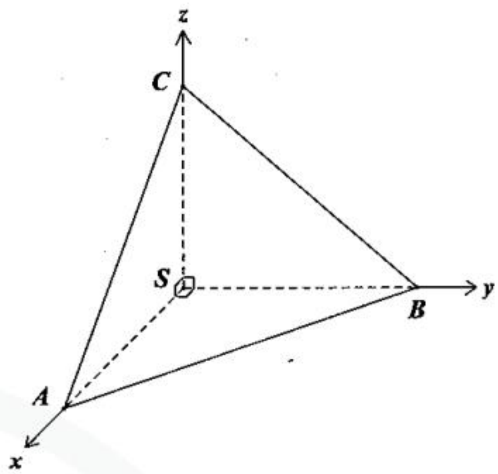
Từ C kẻ tia Cz//SH, dễ thấy Cz, AC, BC đôi một vuông góc, nên ta chọn hệ tọa độ như hình vẽ. Khi đó:

$$C(0;0;0);B(0;a;0);A(a;0;0);H\left(\frac{a}{2};\frac{a}{2};0\right);S\left(\frac{a}{2};\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{14}}{2}\right)$$

i) Hình chóp S.ABC có SA, SB, SC vuông góc nhau đôi một vuông góc.

Vì SA, SB, SC đôi một vuông góc với nhau, nên chọn hệ tọa độ như hình vẽ:

S $(0;0;0)$, A$(a;0;0)$, B$(0;b;0)$, C $(0;0;c)$



B BÀI TẬP VÍ DỤ

Ví dụ 1

Cho hình chóp tam giác đều S.ABC có độ dài cạnh đáy bằng a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm cạnh bên SB,SC. Tính theo a diện tích tam giác AMN, biết rằng mặt phẳng (AMN) vuông góc với mặt phẳng (SBC)

➢ **Lời giải:**

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC,

I và J lần lượt là trung điểm AB và BC.

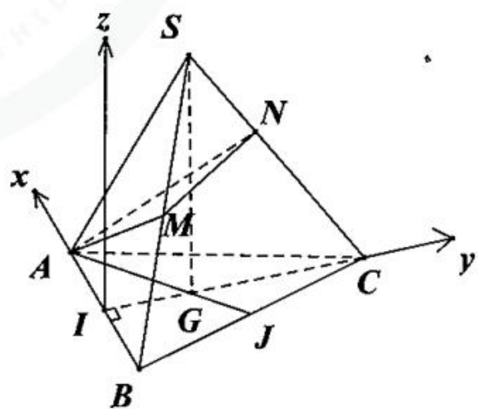
Do S.ABC đều $\Rightarrow SG \perp (ABC)$,

do tam giác ABC đều $\Rightarrow IC \perp AB$.

Kẻ Iz//SG$\Rightarrow$ Iz $\perp (ABCD)$.

Đặt trục Ixyz như hình vẽ.

Ta có:



$$I(0;0;0);A\left(\frac{a}{2};0;0\right);B\left(-\frac{a}{2};0;0\right);C\left(0;\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right)$$

Do G là trọng tâm tam giác ABC $\Rightarrow G\left(0;\dfrac{\sqrt{3}}{6}a;0\right)$.

Gọi $S\left(0;\dfrac{a\sqrt{3}}{6};h\right)$.

Do M, N là trung điểm SB, SC$\Rightarrow M\left(-\dfrac{a}{4};\dfrac{a\sqrt{3}}{12};\dfrac{h}{2}\right);N\left(0;\dfrac{\sqrt{3}}{3}a;\dfrac{h}{2}\right)$

$$\overrightarrow{AM}=\left(\frac{-3a}{4};\frac{a\sqrt{3}}{12};\frac{h}{2}\right);\overrightarrow{AN}=\left(-\frac{a}{2};\frac{\sqrt{3}}{3}a;\frac{h}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \vec{n}_{AMN}=\left[\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AN}\right]=\left(\frac{-\sqrt{3}}{8}ah;\frac{ah}{8};\frac{-5\sqrt{3}}{24}a^2\right)$$

$$\begin{cases}\overrightarrow{SB}=\left(-\dfrac{a}{2};-\dfrac{a\sqrt{3}}{6};-h\right)\\ \overrightarrow{SC}=\left(0;\dfrac{\sqrt{3}}{3}a;-h\right)\end{cases}\Rightarrow \vec{n}_{SBC}=\left[\overrightarrow{SB},\overrightarrow{SC}\right]=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}ah;\frac{-ah}{2};\frac{-\sqrt{3}a}{6}\right);$$

$$\Rightarrow\left(\frac{-\sqrt{3}}{8}.\frac{\sqrt{3}}{2}\right)ah+\left(\frac{1}{8}.\frac{-1}{2}\right)ah+\left(\frac{5\sqrt{3}}{24}.\frac{\sqrt{3}}{6}\right)a^2\Rightarrow -\frac{-1}{4}ah+\frac{5}{48}a$$

$$a\left(\frac{5}{48}a+\frac{h}{4}\right)=0\Leftrightarrow\frac{5}{48}a+\frac{h}{4}=0\Rightarrow h=\frac{5}{72}a$$

$$\Rightarrow\left\|\left[\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AN}\right]\right\|=\frac{5\sqrt{23}}{48}a^2\Rightarrow S_{AMN}=\frac{5\sqrt{3}}{96}a^2$$

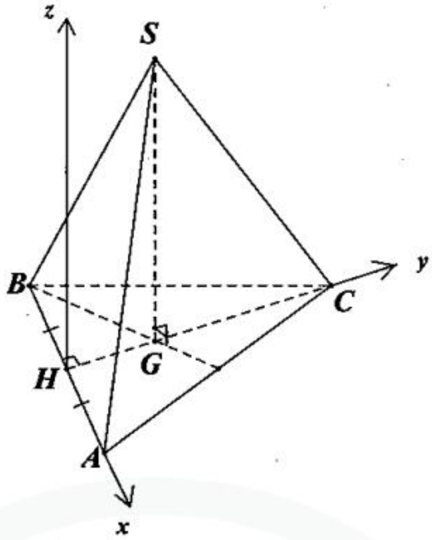
Ví dụ 2

Cho hình chóp tam giác đều SABC có $SC=a\sqrt{7}$. Góc tạo bởi mặt phẳng (SAB) và mặt phẳng (ABC) bằng 60^0. Tính thể tích khối chóp S.ABC theo a.

➢ **Lời giải:**

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC và H là trung điểm AB $\Rightarrow SG\perp(ABC)$. Gọi H là trung điểm AB. Kẻ Hz//SG$\Rightarrow Hz\perp(ABC)$. Đặt trục Hxyz như hình vẽ.

Gọi độ dài các cạnh của tam giác ABC là b độ dài SG=h.



Ta có: $HC=\sqrt{b^2-\frac{b^2}{4}}=\frac{b\sqrt{3}}{2}\Rightarrow HG=\frac{b\sqrt{3}}{6}$.

Ta có: $H(0;0;0);A\left(\frac{b}{2};0;0\right);B\left(-\frac{b}{2};0;0\right);C\left(0;\frac{b\sqrt{3}}{2};0\right)$

$S\left(0;\frac{b\sqrt{3}}{6};h\right)\Rightarrow\overrightarrow{SC}=\left(0;\frac{\sqrt{3}}{3}b;-h\right)$

$\Rightarrow\left|\overrightarrow{SC}\right|=\sqrt{\frac{3}{9}b^2+h^2}-a\sqrt{7}\Rightarrow h^2=7a^2-\frac{3}{9}b^2$

Ta có: $\vec{n}_{ABC}=(0;0;1)$.

$\overrightarrow{SA}=\left(\frac{b}{2};-\frac{\sqrt{3}b}{6};-h\right);\overrightarrow{SB}=\left(-\frac{b}{2};-\frac{b\sqrt{3}}{6};-h\right)$.

$\vec{n}_{SAB}=\left[\overrightarrow{SA},\overrightarrow{SB}\right]=\left(0;bh;\frac{-\sqrt{3}}{6}b^2\right)$.

Ta có: $\cos 60^0=\cos\left[(ABC)(SAB)\right]=\frac{\left|\vec{n}_{ABC}.\vec{n}_{SAB}\right|}{\left|\vec{n}_{ABC}\right|\left|\vec{n}_{SAB}\right|}=\frac{\left|-\frac{\sqrt{3}}{6}b^2\right|}{\sqrt{b^2h^2+\frac{3}{36}b^4}}=\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow\left(\frac{2\sqrt{3}}{6}b^2\right)^2=b^2.\left(7a^2-\frac{3}{9}b^2\right)+\frac{3}{36}b^4\Leftrightarrow b=2\sqrt{3}a\Rightarrow h=\sqrt{3}a$

$\Rightarrow V_{SABC}=\frac{1}{3}.\sqrt{3}a.2\sqrt{3}.\frac{1}{2}.3a=3a^3$ (đvtt).

Vậy $V_{SABC} = 3a^3$ (đvtt).

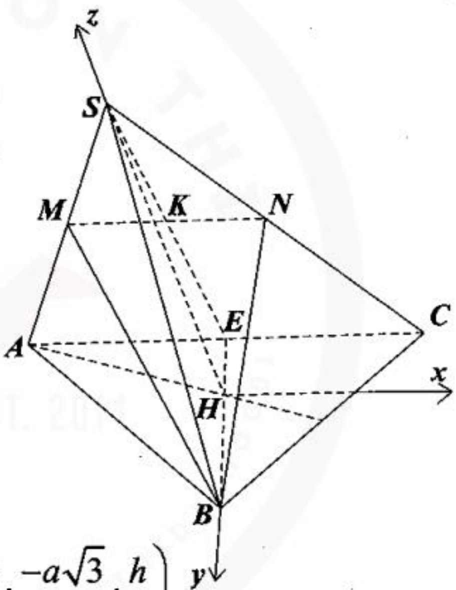
Ví dụ 3

Cho hình chóp đều S.ABC có cạnh bên bằng a. Cho M, N lần lượt là trung điểm các cạnh SA và SC và mặt phẳng (BMN) vuông góc với mặt phẳng (SAC)

a) Tính thể tích hình chóp S.BMN.

b) Gọi H là trọng tâm tam giác đều ABC. Tính khoảng cách từ H đến mp(BMN)

➤ **Lời giải:**



Gọi SH=h (h>0)

Trong mp(ABC), kẻ tia Hx∥AC, ta được SH, HB, Hx đôi một vuông góc, chọn hệ trục tọa độ Oxyz như hình vẽ.

- Gốc tọa độ O trùng với H.

- Các tia Oy, Oz lần lượt đi qua B và S

Khi đó: H(0;0;0), S(0;0;h),

$A\left(\frac{-a}{2};\frac{-a\sqrt{3}}{6};0\right), B\left(0;\frac{a\sqrt{3}}{3};0\right)$

$C\left(\frac{a}{2};\frac{-a\sqrt{3}}{6};0\right), M\left(\frac{-a}{4};\frac{-a\sqrt{3}}{12};\frac{h}{2}\right), N\left(\frac{a}{4};\frac{-a\sqrt{3}}{12};\frac{h}{2}\right)$

mp(SAH) có: $\overrightarrow{SA}\left(\frac{-a}{2};\frac{-a\sqrt{3}}{6};-h\right), \overrightarrow{SC}\left(\frac{a}{2};\frac{-a\sqrt{3}}{6};-h\right)$

$\Rightarrow \left[\overrightarrow{SA};\overrightarrow{SC}\right] = \left(0;-ah;\frac{\sqrt{3}a^2}{6}\right) \Rightarrow \overrightarrow{n_{(SAC)}}(0;-h;\frac{a\sqrt{3}}{6})$

mp(BMN) có: $\overrightarrow{BM}\left(\frac{-a}{4};\frac{-5a\sqrt{3}}{12};\frac{h}{2}\right), \overrightarrow{BN}\left(\frac{a}{4};\frac{-a\sqrt{3}}{4};\frac{h}{2}\right)$

$\Rightarrow \left[\overrightarrow{BM};\overrightarrow{BN}\right] = \left(\frac{-\sqrt{3}a^2}{12};\frac{ah}{4};\frac{\sqrt{3}a^2}{16}\right) \Rightarrow \overrightarrow{n_{BMN}}\left(\frac{-a}{2};\frac{h\sqrt{3}}{2};a\right)$

Ta có: mp(SAC) $\perp$ mp(BMN) $\Leftrightarrow \overrightarrow{n_{(SAC)}}.\overrightarrow{n_{BMN}} = 0 \Leftrightarrow \frac{-\sqrt{3}}{2}h^2 + \frac{\sqrt{3}}{6}a^2 = 0$

$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}h^2 = \frac{\sqrt{3}}{6}a^2 \Leftrightarrow h = \frac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow SH = \frac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \left[\overrightarrow{BM};\overrightarrow{BN}\right] = \left(\frac{-a^2}{2};\frac{a^2}{2};a^2\right)$

Diện tích ΔBMN là: $S_{\Delta BMN} = \frac{1}{2}\left\|\left[\overrightarrow{BM};\overrightarrow{BN}\right]\right\| = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^4}{4}+\frac{a^4}{4}+a^4} = \frac{\sqrt{6}a^2}{4}$

Trong ΔSMN cân tại S, kẻ SK $\perp$ MN cắt AC tại E:

$\Rightarrow SK = \frac{1}{2}\sqrt{SH^2+EH^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3a^2}{9}+\frac{3a^2}{36}} = \frac{a\sqrt{15}}{12}$

Mặt khác: $\left.\begin{matrix}(SAC)\cap(BMN) = MN \\ SK \perp MN\end{matrix}\right\} \Rightarrow SK \perp (BMN)$

Vậy thể tích hình chóp S.BMN là:

$V_{S.BMN} = \frac{1}{3}.SK.S_{\Delta BMN} = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{15}}{12}.\frac{\sqrt{6}a^2}{4} = \frac{\sqrt{10}a^3}{48}$

b) mp(BMN) qua B và có vtpt $\vec{n}(-1;1;2) \parallel \left[\overrightarrow{BM};\overrightarrow{BN}\right]$ có phương trình:

$-x + (y - \frac{a\sqrt{3}}{3}) + 2z = 0$

Hay $-x + y + 2z - \frac{a\sqrt{3}}{3} = 0$

Vậy khoảng cách từ H đến mp(BMN) là: d(H;(BMN))$= \frac{\left|\frac{-a\sqrt{3}}{3}\right|}{\sqrt{1+1+4}} = \frac{a\sqrt{2}}{6}$

Ví dụ 4

Cho tứ diện đều S.ABC cạnh bằng a. Trên SA lấy điểm A' sao cho SA' = 2AA'. Gọi B', C' lần lượt là trung điểm của SB và SC. Mặt bên (SBC) tạo với đáy góc 600.

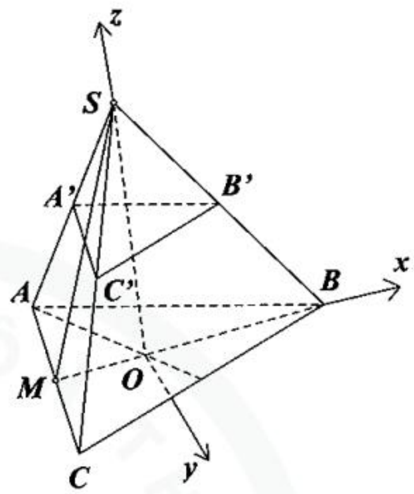
a) Tính $V_{S.A'B'C'}$ = ? $V_{S.AB'C'}$ = ?

b) Tìm tỉ lệ $\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}}$?

➢ **Lời giải:**

a) Gọi O là trọng tâm tam giác đều ABC $\Rightarrow SO \perp mp(ABC)$

Tính: $SM = \frac{a\sqrt{3}}{2}; OM = \frac{a\sqrt{3}}{6}; OB = \frac{a\sqrt{3}}{3}; SO = \frac{a\sqrt{6}}{3}$



Trong mp(ABC), kẻ tia Oy || AC, ta được SO, OB, Oy đôi một vuông góc nên chọn hệ trục tọa độ Oxyz như hình vẽ.

- Các tia Ox, Oz lần lượt đi qua B và S

Khi đó: S $(0;0;\frac{a\sqrt{6}}{3})$,

$A(\frac{-a\sqrt{3}}{6};\frac{-a}{2};0), B(\frac{a\sqrt{3}}{3};0;0), C(\frac{-a\sqrt{3}}{6};\frac{a}{2};0)$

$A'(\frac{-a\sqrt{3}}{9};\frac{-a}{3};\frac{a\sqrt{6}}{9}), B'(\frac{a\sqrt{3}}{6};0;\frac{a\sqrt{6}}{6})$,

$,C'(\frac{-a\sqrt{3}}{12};\frac{a}{4};\frac{a\sqrt{6}}{6})$

Tính thể tích S.A'B'C'

$\overrightarrow{SA'}(\frac{-a\sqrt{3}}{9};\frac{-a}{3};\frac{-2a\sqrt{6}}{9}), \overrightarrow{SB'}(\frac{a\sqrt{3}}{6};0;\frac{-a\sqrt{6}}{6}), \overrightarrow{SC'}(\frac{-a\sqrt{3}}{12};\frac{a}{4};\frac{-a\sqrt{6}}{6})$

$\left[\overrightarrow{SA'};\overrightarrow{SB'}\right] = (\frac{\sqrt{6}a^2}{18};\frac{-\sqrt{2}a^2}{6};\frac{\sqrt{3}a^2}{18}) \Rightarrow V_{S.A'B'C'} = \frac{1}{6}\left|\overrightarrow{SC'}\left[\overrightarrow{SA'};\overrightarrow{SB'}\right]\right| = \frac{\sqrt{2}a^3}{72}$

Tính thể tích S.ABC

$\overrightarrow{SA}(\frac{-a\sqrt{3}}{6};\frac{-a}{2};\frac{-a\sqrt{6}}{3}), \overrightarrow{SB}(\frac{a\sqrt{3}}{3};0;\frac{-a\sqrt{6}}{3}), \overrightarrow{SC}(\frac{-a\sqrt{3}}{6};\frac{a}{2};\frac{-a\sqrt{6}}{3})$

$\left[\overrightarrow{SA};\overrightarrow{SB}\right] = (\frac{\sqrt{6}a^2}{6};\frac{-\sqrt{2}a^2}{2};\frac{\sqrt{3}a^2}{6}) \Rightarrow V_{S.ABC} = \frac{1}{6}\left|\overrightarrow{SC}\left[\overrightarrow{SA};\overrightarrow{SB}\right]\right| = \frac{\sqrt{2}a^3}{12}$

b) Tỉ lệ $\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{1}{6}$

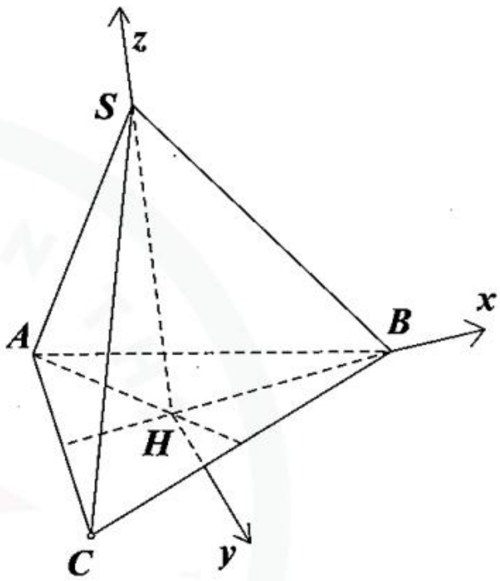
Ví dụ 5

Cho hình chóp đều SABC có cạnh bên bằng x, mặt bên tạo với đáy góc 45°.

a) Tính độ dài chiều cao h của chóp SABC .

b) Tính thể tích hình chóp SABC

➤ **Lời giải:**



Trong hình chóp đều S.ABC, gọi H là trọng tâm Δ ABC $\Rightarrow SH \perp (ABC)$

Giả sử Δ ABC đều có cạnh a (với a>0)

$$\Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

Δ SAH vuông tại H:

$$SH^2 = SA^2 - AH^2$$

$$\Leftrightarrow h^2 = x^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 \Leftrightarrow h^2 + \frac{1}{3}a^2 = x^2 \quad (1)$$

Trong mp(ABC), kẻ tia Hy$\parallel$AC, ta được SH, HB, Hy đôi một vuông góc nên chọn hệ trục tọa độ Oxyz như hình vẽ.

+ Gốc tọa độ O trùng với H

+ Các tia Ox, Oz lần lượt đi qua B và S

Khi đó: S(0;0;h), $A\left(\frac{-a\sqrt{3}}{6};\frac{-a}{2};0\right)$, $B\left(\frac{a\sqrt{3}}{3};0;0\right)$, $C\left(\frac{-a\sqrt{3}}{6};\frac{a}{2};0\right)$

$$\begin{cases} \overrightarrow{SA}(\frac{-a\sqrt{3}}{6};\frac{-a}{2};-h) \\ \overrightarrow{SB}(\frac{-a\sqrt{3}}{6};a;-h \end{cases} \Rightarrow \left[\overrightarrow{SA};\overrightarrow{SB}\right] = (\frac{3}{2}ah;0;\frac{-\sqrt{3}a^2}{4})$$

$\Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ Mp(SAB) có vtpt $\overrightarrow{n_{(SAB)}}(\sqrt{3}h;0;\frac{-1}{2}a)\overrightarrow{SK}(-a;-a;-a\sqrt{2})$

Mp(ABC) $\subset$ mp(Oxy) nên có vtpt $\vec{n}(0;0;1)$

Ta có:

$$\text{Cos}\left(\widehat{(SAB),(ABC)}\right)=\cos 45^\circ \Leftrightarrow \frac{\left|\frac{-1}{2}a\right|}{\sqrt{3h^2+\frac{1}{4}a^2}.\sqrt{1^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow a^2=12h^2$$

Thay $a^2=12h^2$ vào (1) ta được: $h=\frac{\sqrt{5}}{5}x; a=\frac{2x\sqrt{15}}{5}$

Vậy độ dài chiều cao h của chóp SABC là $\frac{\sqrt{5}}{5}x$

b) Diện tích tam giác ABC: $S_{ABC}=\frac{1}{2}.\frac{2x\sqrt{15}}{5}.\frac{3\sqrt{5}.x}{5}=\frac{3\sqrt{3}.x^2}{5}$

Thể tích khối chóp S.ABC là: $V_{S.ABC}=\frac{1}{3}.h.S_{ABC}=\frac{1}{3}.\frac{\sqrt{5}.x}{5}.\frac{3\sqrt{3}.x^2}{5}=\frac{\sqrt{15}.x^3}{25}$

Ví dụ 6

Cho tứ diện đều SABC có cạnh bằng 1. Gọi O là tâm của ΔABC; I là trung điểm của SO. Mp(BIC) cắt SA tại M.

a) Tìm tỉ lệ thể tích của tứ diện SNCM và tứ diện SABC

b) Gọi H là chân đường vuông góc hạ từ I xuống SB. CMR: IH đi qua trọng tâm G của ΔSAC.

➤ **Lời giải:**

ΔABC đều cạnh a nên đường cao BN=$\frac{\sqrt{3}}{2}$

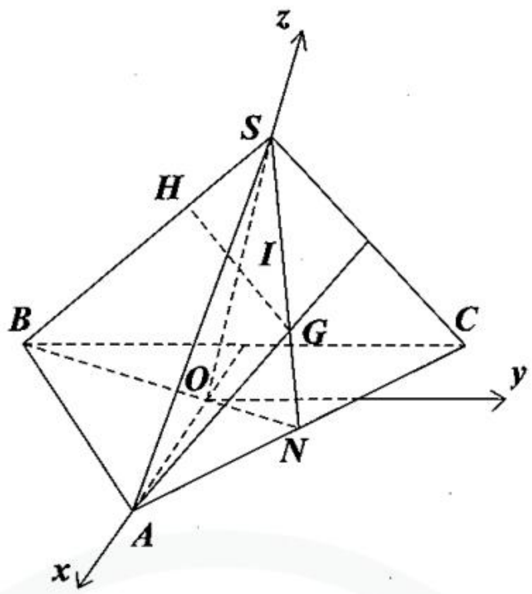
$\Rightarrow BO=\frac{2}{3}BN=\frac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow ON=\frac{\sqrt{3}}{6}$

ΔSBO vuông tại O nên $SO=\sqrt{SB^2-OB^2}=\frac{\sqrt{6}}{3}$

Trong mp(ABC), kẻ tia Oy∥BC, ta được SO, OA, Oy đôi một vuông góc nên chọn hệ trục Oxyz như hình vẽ.

- Các tia Ox, Oz lần lượt đi qua A, S

Khi đó $A(\frac{\sqrt{3}}{3};0;0), B(\frac{-\sqrt{3}}{6};\frac{-1}{2};0), C(\frac{-\sqrt{3}}{6};\frac{1}{2};0), S(0;0;\frac{\sqrt{6}}{3}), I(0;0;\frac{\sqrt{6}}{6})$



Ta có: $\overrightarrow{BC}(0;1;0), \overrightarrow{IC}(-\frac{\sqrt{3}}{6};\frac{1}{2};\frac{-\sqrt{6}}{6}) \Rightarrow \left[\overrightarrow{BC};\overrightarrow{IC}\right] = (\frac{-\sqrt{6}}{6};0;\frac{\sqrt{3}}{6})$

Phương trình mp(IBC) qua I là:

$$\frac{-\sqrt{6}}{6}x + \frac{\sqrt{3}}{6}(z - \frac{\sqrt{6}}{6}) = 0 \Leftrightarrow -\sqrt{2}x + z - \frac{\sqrt{6}}{6} = 0$$

Mà ta có: $\overrightarrow{SA}(\frac{\sqrt{3}}{3};0;\frac{\sqrt{6}}{3}) \Rightarrow \overrightarrow{SA} \parallel \overrightarrow{u_{SA}}(1;0;-\sqrt{2})$

Phương trình đường thẳng SA qua A là: $\begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{3} + t \\ y = 0 \\ z = -\sqrt{2}t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$,

Gọi $M(\frac{\sqrt{3}}{3} + t;0;-\sqrt{2}t) \in SA$. Ta có :

$$M \in mp(IBC) \Rightarrow -\sqrt{2}(\frac{\sqrt{3}}{3} + t) + 0 - \sqrt{2}t - \frac{\sqrt{6}}{6} = 0$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{-\sqrt{3}}{4} \Rightarrow M(\frac{\sqrt{3}}{12};0;\frac{\sqrt{6}}{4})$$

Do đó ta có: $\overrightarrow{SM}(\frac{\sqrt{3}}{12};0;\frac{\sqrt{6}}{12}) \Rightarrow \overrightarrow{SA} = 4\overrightarrow{SM}$

$\Rightarrow$ M nằm trên đoạn SA và $\frac{SM}{SA} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{V_{SBCM}}{V_{SABC}} = \frac{1}{4}$

b) Do G là trọng tâm $\Delta ASC \Rightarrow$ SG đi qua trung điểm N của AC

$\Rightarrow GI \subset (SNB) \Rightarrow$ GI và SB đồng phẳng.

Ta có: $G(\frac{\sqrt{3}}{18};\frac{1}{6};\frac{\sqrt{6}}{9}) \Rightarrow \overrightarrow{GI}(\frac{-\sqrt{3}}{18};\frac{-1}{6};\frac{\sqrt{6}}{18}) \Rightarrow \overrightarrow{GI}.\overrightarrow{SB}=0$

Từ đó chứng tỏ GI vuông góc với SB tại H

Hay IH đi qua trọng tâm G của ΔSAC

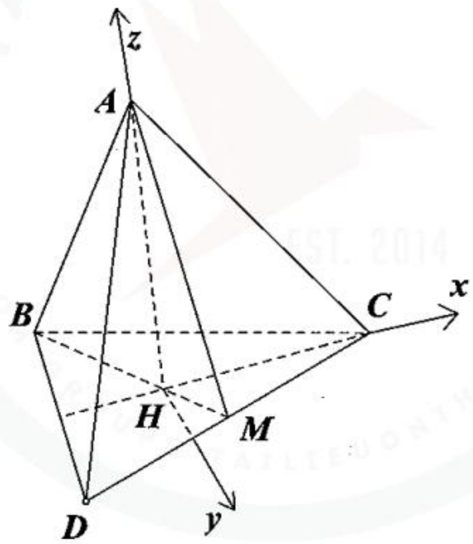
Ví dụ 7

Cho khối tứ diện đều ABCD cạnh bằng a, M là trung điểm DC.

a) Tính thể tích hình chóp MABC

b) Tính khoảng cách từ M đến mp(ABC)

➤ **Lời giải:**



Gọi H là trọng tâm tam giác đều BCD $\Rightarrow AH \perp (BCD)$

ΔBCD đều cạnh a nên đường cao BM$=\frac{a\sqrt{3}}{2}$

$BH=\frac{2}{3}BM=\frac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow HM=\frac{a\sqrt{3}}{6}$

ΔABH vuông tại H nên: $AH=\sqrt{AB^2-BH^2}=\frac{a\sqrt{6}}{3}$

Trong mp(ABC), kẻ tia Hy vuông góc với HC, ta được AH, HC, Hy đôi một vuông góc.

Chọn hệ tọa độ Oxyz như hình vẽ.

Gốc tọa độ O trùng với H. Các tia Ox, Oz lần lượt qua C và A

Khi đó:

$H(0;0;0), A(0;0;\frac{a\sqrt{6}}{3}), B(\frac{-a\sqrt{3}}{6};\frac{-a}{2};0); C(\frac{a\sqrt{3}}{3};0;0),$

$D(\frac{-\sqrt{3}a}{6};\frac{a}{2};0), M(\frac{a\sqrt{3}}{12};\frac{a}{4};0)$

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB}(\frac{-a\sqrt{3}}{6};\frac{-a}{2};\frac{-a\sqrt{6}}{3}), \\ \overrightarrow{AC}(\frac{a\sqrt{3}}{3};0;\frac{-a\sqrt{6}}{3}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right] = (\frac{\sqrt{6}a^2}{6};\frac{-\sqrt{2}a^2}{2};\frac{\sqrt{3}a^2}{6}); \overrightarrow{AM}(\frac{a\sqrt{3}}{12};\frac{a}{4};\frac{-a\sqrt{6}}{3})$$

Vậy thể tích hình chóp MABC là: $V_{MABC} = \frac{1}{6}\left|\overrightarrow{AM}\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right]\right| = \frac{\sqrt{2}a^3}{24}$

b) mp(ABC) $\begin{cases} qua\ A(0;0;\frac{a\sqrt{6}}{3}) \\ vtpt\ \overrightarrow{n_{ABC}}(\frac{\sqrt{6}}{3};-\sqrt{2};\frac{\sqrt{3}}{3}) \end{cases}$ có phương trình:

$$\frac{\sqrt{6}}{3}x - \sqrt{2}y + \frac{\sqrt{3}}{3}(z - \frac{a\sqrt{6}}{3}) = 0$$

Hay: $\frac{\sqrt{6}}{3}x - \sqrt{2}y + \frac{\sqrt{3}}{3}z - \frac{a\sqrt{2}}{3} = 0$

Vậy khoảng cách từ M đến mp(ABC) là:

$$d(M;(ABC)) = \frac{\left|\frac{\sqrt{6}}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{12} - \sqrt{2}.\frac{a}{4} - \frac{a\sqrt{2}}{3}\right|}{\sqrt{\frac{6}{9}+2+\frac{3}{9}}} = \frac{a\sqrt{6}}{6}$$

Ví dụ 8

Cho hình chóp B.OAC có đáy OAC là tam giác vuông tại O, OA=a, OC= $a\sqrt{3}$ (a>0), đường cao OB= $a\sqrt{3}$. Gọi M là trung điểm của cạnh AC.

a) Tính thể tích khối chóp B.OAC.

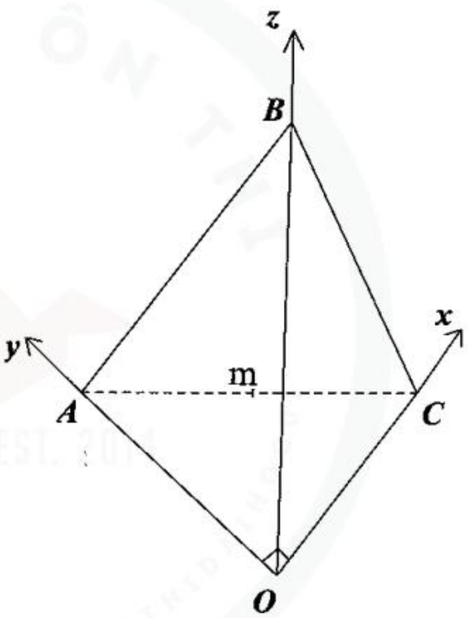
b) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và OM.

➢ **Lời giải:**

a) *Những phần tính thể tích khi đã dễ dàng xác định được chiều cao và diện tích đáy học sinh* nên tính theo cách thông thường theo CT:

Vậy thể tích khối chóp B.OAC là:

$$V=\frac{1}{3}.OB.S_{\Delta OAC}=\frac{1}{3}.a\sqrt{3}.\frac{1}{2}.a.a\sqrt{3}=\frac{a^3}{2}$$



b) Dễ dàng thấy, hình chóp B.OAC có OB, OA, OC đôi một vuông góc với nhau tại O.

Nên ta chọn hệ trục tọa độ Oxyz như hình vẽ

- Tia Ox, Oy, Oz lần lượt đi qua C, A, B
- Gốc tọa độ O(0;0;0)

Khi đó: A(0;a;0), B(0;0; $a\sqrt{3}$), M($\frac{a\sqrt{3}}{2}$; $\frac{a}{2}$;0), C(a$\sqrt{3}$;0;0)

$$\begin{cases}\overrightarrow{AB}=(0;-a;a\sqrt{3})\\ \overrightarrow{OM}=(\frac{a\sqrt{3}}{2};\frac{a}{2};0)\end{cases}\Rightarrow\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{OM}\right]=\left(\frac{-\sqrt{3}a^2}{2};\frac{3a^2}{2};\frac{\sqrt{3}a^2}{2}\right);\ \overrightarrow{OA}=(0;a;0)$$

Vậy khoảng cách giữa hai đường thẳng *AB* và OM là:

$$d(AB;OM)=\frac{\left|\overrightarrow{OA}.\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{OM}\right]\right|}{\left|\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{OM}\right]\right|}=\frac{\left|a.\frac{3a^2}{2}\right|}{\sqrt{\left(\frac{-\sqrt{3}a^2}{2}\right)^2+\left(\frac{3a^2}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}a^2}{2}\right)^2}}=\frac{a\sqrt{15}}{5}$$

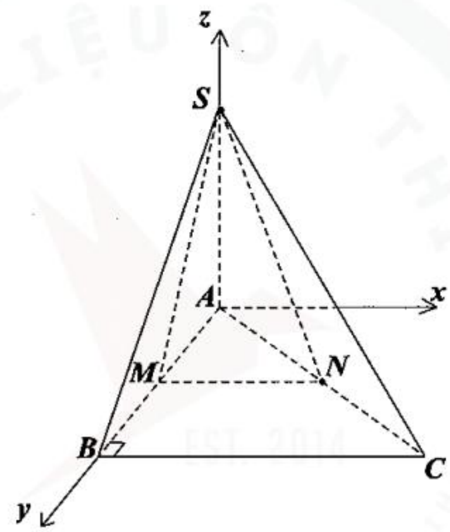
Ví dụ 9

Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, AB = BC = 2a; hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với (ABC) Gọi M là trung điểm của AB; mặt phẳng qua SM và song song với BC, cắt AC tại N. Biết góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng 600.

a) Tính thể tích khối chóp S. BCNM theo a.

b) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SC theo a.

➢ **Lời giải:**



- Hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với (ABC) nên $SA \perp mp(ABC)$

- Mặt phẳng qua SM và song song với BC, cắt AC tại N là mp(SMN) với N là trung điểm AC

- Trong mp(ABC), kẻ tia $Ax \parallel BC$. Khi đó, ta có AS, AB, Ax đôi một vuông góc tại A nên chọn hệ trục tọa độ Oxyz như hình vẽ:

+ gốc tọa độ O trùng với A

+ Tia Oy, Oz lần lượt qua B, S

Khi đó: A(0;0;0), B(0;2a;0),C(2a;2a;0), M(0;a;0),N(a;a;0)

Đặt SA=x (với x>0), S(0;0;x)

mp(ABC) thuộc mp Oxy nên có vtpt $\overrightarrow{n_1}$ (0;0;1)

$\overrightarrow{SB}(0;2a;-x), \overrightarrow{BC}(2a;0;0) \Rightarrow$ mp(SBC) có vtpt $\overrightarrow{n_2} = \left[\overrightarrow{SB};\overrightarrow{BC}\right] = (0;-2ax;-4a^2)$

Ta có:

$$\cos\left(\widehat{(SBC),(ABC)}\right) = \cos 60° \Leftrightarrow \frac{\left|0+0.(-2ax)+1.(-4a^2)\right|}{\sqrt{1}.\sqrt{4a^2x^2+16a^4}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 2\sqrt{3}a$$

$\Rightarrow SA = 2\sqrt{3}a$ và $S(0;0;2\sqrt{3}a)$

a) Tính thể tích khối chóp S. BCNM

Theo cách thông thường nhận thấy khối chóp S.BCNM có chiều cao SA và đáy BCNM là hình thang vuông tại M, B, nên:

$$V_{S.BCNM} = \frac{1}{3} \times SA \times S_{BCNM} = \frac{1}{3}.2\sqrt{3}a.\frac{(a+2a).a}{2} = \sqrt{3}a^3$$

b) Ta có: $\begin{cases} \overrightarrow{AB}(0;2a;0), \\ \overrightarrow{SC}(2a;2a;-2\sqrt{3}a) \end{cases} \Rightarrow \left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{SC}\right] = (-4\sqrt{3}a^2;0;-4a^2); \overrightarrow{AS}(0;0;2\sqrt{3}a)$

Vậy khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SC

$$d(AB;SN) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{SN}\right].\overrightarrow{AS}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{SN}\right]\right|} = \frac{\left|-4\sqrt{3}a^2.0+0+(-4a^2).2\sqrt{3}a\right|}{\sqrt{48a^2+0+16a^4}} = a\sqrt{3}$$

Ví dụ 10

Cho hình chóp O.ABC có OA, OB, OC từng đôi một vuông góc với nhau. Mặt phẳng (ABC) tạo với (OBC) một góc 60^0. Biết *OB=2OC=2a*. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AB và AC.

a) Tính thể tích tích khối chóp O. ABC

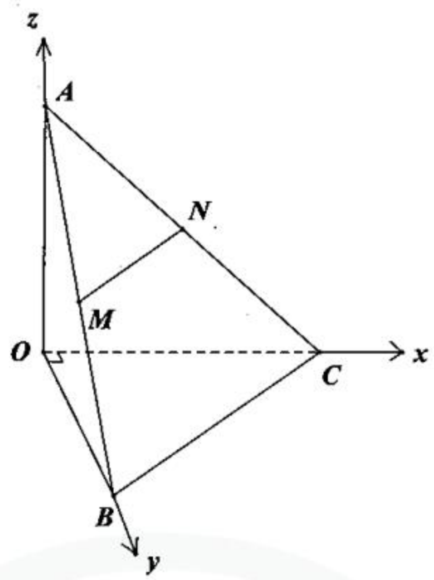
b) Tính khoảng cách giữa 2 đt chéo nhau MN và OB

➢ **Lời giải:**

Đặt OA=t (t>0)

- Do OA, OB, OC từng đôi một vuông góc với nhau nên chọn hệ tọa độ Oxyz như hình vẽ

- Các tia Ox, Oy, Oz lần lượt đi qua C, B, A



Ta có : O(0;0;0), A(0;0;t), B(0;2a;0), C(a,0,0)

$$\begin{cases}\overrightarrow{BA}(0;-2a;t)\\ \overrightarrow{BC}(a;-2a;0)\\ \overrightarrow{BO}(0;-2a;0)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\overrightarrow{n_{(ABC)}}=\left[\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}\right]=(2at;at;2a^2)\\ \overrightarrow{n_{(OBC)}}=\left[\overrightarrow{BO};\overrightarrow{BC}\right]=(0;0;2a^2)\end{cases}$$

Suy ra: $\operatorname{Cos}\left(\widehat{(ABC);(OBC)}\right)=\operatorname{Cos}60^\circ \Leftrightarrow \dfrac{\left|4a^4\right|}{\sqrt{4a^2t^2+a^2t^2+4a^4}.\sqrt{4a^4}}=\dfrac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow t=\frac{2\sqrt{15}}{5}a \Leftrightarrow OA=\frac{2\sqrt{15}}{5}a;\overrightarrow{BA}(0;-2a;\frac{2\sqrt{15}}{5}a)$$

Vậy thể tích tích khối chóp O.ABC:

$$V_{OABC}=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{BO};\overrightarrow{BC}\right]\overrightarrow{BA}\right|=\frac{1}{6}.\frac{4a^3\sqrt{15}}{5}=\frac{2\sqrt{15}}{15}a^3$$

b) $M(0;a;\frac{a\sqrt{15}}{5}),N(\frac{a}{2};0;\frac{a\sqrt{15}}{5});\overrightarrow{MO}(0;-a;\frac{-a\sqrt{15}}{5})$

Ta có $\begin{cases}\overrightarrow{MN}(\frac{a}{2};-a;0),\\ \overrightarrow{OB}(0;2a;0)\end{cases} \Rightarrow \left[\overrightarrow{MN};\overrightarrow{OB}\right]=(0;0;a^2)$

Vậy khoảng cách giữa 2 đt chéo nhau MN và OB:

$$d(MN;OB)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{MN};\overrightarrow{OB}\right]\overrightarrow{MO}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{MN};\overrightarrow{OB}\right]\right|}=\frac{\left|\frac{-\sqrt{15}a^3}{5}\right|}{\sqrt{a^4}}=\frac{\sqrt{15}a}{5}$$

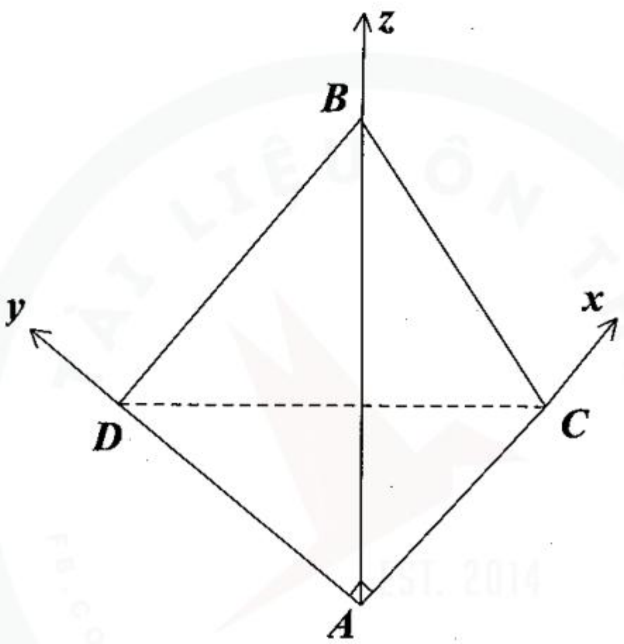
Ví dụ 11

Cho tứ diện ABCD có các cạnh AB, AC, AD đôi một vuông góc với nhau. Có AC=AB=3, AD=5.

a) Tính khoảng cách từ điểm A đến mp(BCD)

b) Tính sin của góc giữa mp(BCD) và mp(ABC)

➢ **Lời giải:**



Các cạnh AB, AC, AD đôi một vuông góc với nhau nên

- chọn hệ tọa độ Oxyz như hình vẽ

- Các tia Ox, Oy, Oz lần lượt đi qua C,D,B

Khi đó: $A(0;0;0), B(0;0;3), C(3;0;0), D(0;5;0)$

$$\begin{cases} \overrightarrow{BC}(3;0;-3), \\ \overrightarrow{BD}(0;5;-3) \end{cases} \Rightarrow \left[\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BD}\right] = (15;9;15)$$

Mp(BCD) qua $B(0;0;3), C(3;0;0), D(0;5;0)$ nên có phương trình đoạn chắn:

$$\frac{x}{3}+\frac{y}{5}+\frac{z}{3}=1$$

Hay 5x+3y+5z=0

a) Khoảng cách từ điểm A đến mp(BCD) là:

$$d(A;(BCD))=\frac{|-15|}{\sqrt{5^2+3^2+5^2}}=\frac{15\sqrt{59}}{59}$$

b) $\begin{cases}\overrightarrow{AB}(0;0;3)\\ \overrightarrow{AC}(3;0;0)\end{cases}\Rightarrow\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right]=(0;9;0)$

Do đó: $\cos\left(\widehat{(BCD);(ABC)}\right)=\frac{|15.0+9.9+15.0|}{\sqrt{15^2+9^2+15^2}.\sqrt{9^2}}=\frac{3\sqrt{59}}{59}$

Vậy sin của góc giữa mp(BCD)và mp(ABC):

$$\text{Sin}\left(\widehat{(BCD);(ABC)}\right)=\sqrt{1^2-\left(\frac{3\sqrt{59}}{59}\right)^2}=\frac{5\sqrt{118}}{59}$$

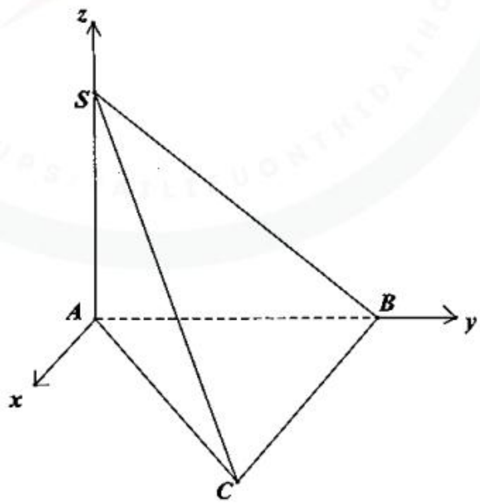
Ví dụ 12

Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác đều cạnh a, đường cao SA, SA= $a\sqrt{3}$.

a) Tính khoảng cách từ điểm A đến mp(SBC)

b) Tính khoảng cách giữa 2 đường thẳng AB và SC

➢ **Lời giải:**



Trong mp(ABC) kẻ tia Ax ⊥ AB, ta được Ax, SA, AB đôi một vuông góc

- Chọn hệ trục tọa độ Oxyz như hình vẽ

- A trùng với gốc tọa độ O
- Các tia Oy, Oz lần lượt đi qua B và S

Khi đó: $S(0;0;a\sqrt{3}), A(0;0;0), B(0;a;0), C(\frac{a\sqrt{3}}{2};\frac{a}{2};0)$

$$\begin{cases} \overrightarrow{SB}(0;0;-a\sqrt{3}) \\ \overrightarrow{SC}(\frac{a\sqrt{3}}{2};\frac{a}{2};-a\sqrt{3}) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{n_{(SBC)}} = \left[\overrightarrow{SB};\overrightarrow{SC}\right]$$

$$=\left(\frac{-\sqrt{3}a^2}{2};\frac{-3a^2}{2};\frac{\sqrt{3}a^2}{2}\right)=(-1;\sqrt{3};-1)$$

Phương trình mp(SBC) qua $S(0;0;a\sqrt{3})$ và có vtpt $\overrightarrow{n_{(SBC)}}$ là:

$x-\sqrt{3}y+z-a\sqrt{3}=0$

Vậy khoảng cách từ điểm A đến mp(SBC): d(A;(SBC))= $\frac{\left|-a\sqrt{3}\right|}{\sqrt{1+3+1}}=\frac{a\sqrt{15}}{5}$

b) $\begin{cases} \overrightarrow{AB}(0;a;0), \\ \overrightarrow{SC}(\frac{a\sqrt{3}}{2};\frac{a}{2};-a\sqrt{3}) \end{cases} \Rightarrow \left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{SC}\right]=(-\sqrt{3}a^2;0;\frac{-\sqrt{3}a^2}{2})$

Khoảng cách giữa 2 đường thẳng AB và SC là:

d(AB;SC)= $\frac{\left|\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{SC}\right]\overrightarrow{AS}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{SC}\right]\right|}=\frac{\left|\frac{-3}{2}a^3\right|}{\sqrt{3a^4+\frac{3}{4}a^4}}=\frac{a\sqrt{15}}{5}$

Ví dụ 13

Cho tam giác ABC vuông cân tại A, AB=a. Trên đường thẳng qua C và vuông góc với mp(ABC) lấy điểm D sao cho CD=a. Mặt phẳng qua C và vuông góc với BD cắt BD tại F.

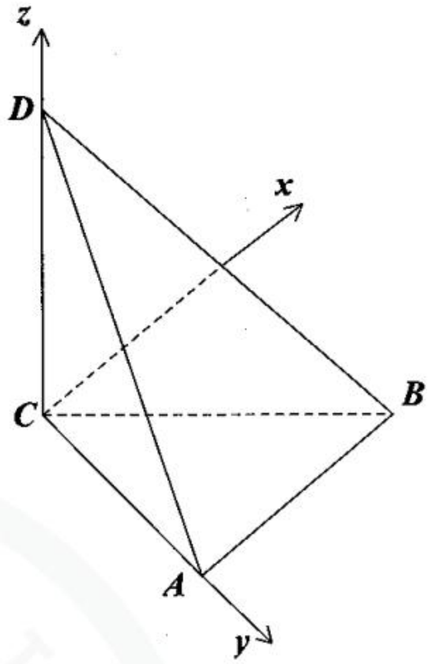
a) tính thể tích tứ diện ACDF

b) Tính khoảng cách giữa 2 đt AD và CF

➤ **Lời giải:**

Trong mp(ABC), kẻ tia Cx‖AB, ta được Cx, AC, CD đôi một vuông góc tại C

- Chọn hệ trục tọa độ Oxyz như hình vẽ
- Gốc tọa độ O trùng với điểm C
- Các tia Oy, Oz lần lượt đi qua A và D



Khi đó: C(0;0;0), A(0;a;0), B(a;a;0), D(0;0;a)

Với những điểm khó xác định tọa độ, nên dựa vào những điểm đã xác định được tọa độ kết hợp với dữ kiện của bài toán để xác định tọa độ điểm đó.

Xác định tọa độ điểm F:

Dựa vào yếu tố $F = BD \cap (ACF)$

$\overrightarrow{BD}(-a;-a;a) \Rightarrow \overrightarrow{u_{BD}}(1;1;-1)$

Phương trình đường thẳng BD $\begin{cases} x = a + t \\ y = a + t \, (t \in \mathbb{R}) \\ z = -t \end{cases}$

Gọi F(a+t;a+t;-t)

Mp(ACF) $\begin{cases} \text{đi qua } A(0;a;0) \\ vtpt\ \overrightarrow{n_{(ACF)}} = \overrightarrow{BD} = (1;1;-1) \end{cases}$ có phương trình: x+y-z-a=0

$$F \in mp(ACF) \Leftrightarrow a + t + a + t + t - a = 0 \Leftrightarrow t = \frac{-a}{3} \Rightarrow F\left(\frac{2a}{3};\frac{2a}{3};\frac{a}{3}\right)$$

a) Ta có: $\begin{cases} \overrightarrow{CA}(0;a;0) \\ \overrightarrow{CD}(0;0;a) \end{cases} \Rightarrow \left[\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CD}\right] = \left(a^2;0;0\right); \overrightarrow{CF}\left(\frac{2a}{3};\frac{2a}{3};\frac{a}{3}\right)$

Thể tích tứ diện ACDF: $V_{ACDF} = \frac{1}{6}.\left|\overrightarrow{CF}\left[\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CD}\right]\right| = \frac{1}{6}.\left|\frac{2a^3}{3}\right| = \frac{a^3}{9}$

b) $\overrightarrow{AD}(0;-a;a), \overrightarrow{AC}(0;-a;0), \left[\overrightarrow{AD};\overrightarrow{CF}\right] = \left(-a^2;\frac{2a^2}{3};\frac{2a^2}{3}\right)$

Khoảng cách giữa 2 đt AD và CF là:

$$d(AD;CF) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{AD};\overrightarrow{CF}\right]\overrightarrow{AC}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{AD};\overrightarrow{CF}\right]\right|} = \frac{\left|\frac{-2}{3}a^3\right|}{\sqrt{a^4 + \frac{4}{9}a^4 + \frac{4}{9}a^4}} = \frac{2a\sqrt{17}}{17}$$

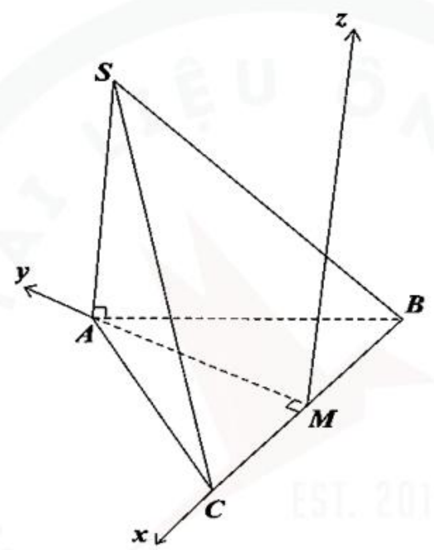
Ví dụ 14

Cho hình chóp S.ABC có 2 mặt bên (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với mp(ABC). Đáy ABC là tam giác cân tại A, đường trung tuyến AM=a. Góc giữa mp(SBC) và mp đáy bằng 45^0, góc SBA bằng 30^0.

a) Tính thể tích khối chóp S.ABC

b) Tính khoảng cách từ điểm M đến mp(SAB)

➢ **Lời giải:**



Kẻ tia Mz∥SA, ta được Mz, MA, MC đôi một vuông góc tại M

- Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ

- Gốc tọa độ O trùng với M

- Các tia Ox, Oy lần lượt đi qua C, A

Giả sử SA = m, MB = MC = n(m,n>0)

Khi đó: M(0;0;0), A(0;a;0), B(-n;0;0), C(n;0;0), S(0;a;m)

ΔSAB vuông tại A có AB=SA.

cotg $\widehat{SBA} \Leftrightarrow \sqrt{a^2+n^2} = m\sqrt{3} \Leftrightarrow n = \sqrt{3m^2-a^2}$ (1)

mp (SBC) có vtpt $\left[\overrightarrow{SB};\overrightarrow{SC}\right] = (0;-2mn;2an)$

mp(ABC) có vtpt $\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right]=(0;0;2an)$

$\cos\left(\widehat{(SBC);(ABC)}\right)=\cos 45° \Leftrightarrow \dfrac{\left|4a^2n^2\right|}{\sqrt{4m^2n^2+4a^2n^2}.\sqrt{4a^2n^2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\Leftrightarrow \sqrt{2}a=\sqrt{m^2+a^2} \Leftrightarrow m=a$

Thay m=a vào (1) ta có: n=a$\sqrt{2} \Rightarrow$ SA=a, MB=MC=a$\sqrt{2}$

a) $\begin{cases}\overrightarrow{SA}(0;0;-a)\\ \overrightarrow{SB}(-a\sqrt{2};-a;-a),\overrightarrow{SC}(a\sqrt{2};-a;-a)\end{cases} \Rightarrow \left[\overrightarrow{SA};\overrightarrow{SB}\right]=(-a^2;\sqrt{2}a^2;0)$

Thể tích khối chóp S.ABC:

$V_{S.ABC}=\dfrac{1}{6}.\left|\overrightarrow{SC}\left[\overrightarrow{SA};\overrightarrow{SB}\right]\right|=\dfrac{1}{6}.\left|-\sqrt{2}a^3-\sqrt{2}a^3\right|=\dfrac{-\sqrt{2}a^3}{3}$

b) $\left[\overrightarrow{SA};\overrightarrow{SB}\right]=(-a^2;\sqrt{2}a^2;0) \Leftrightarrow \overrightarrow{n_{(SAB)}}(-1;\sqrt{2};0)$

Mp(SAB) $\begin{cases}\text{đi qua } A(0;a;0)\\ vtpt\ \overrightarrow{n_{(SAB)}}(-1;\sqrt{2};0)\end{cases}$ có phương trình: $x+\sqrt{2}y-a\sqrt{2}=0$

Khoảng cách từ điểm M đến mp(SAB): d(M;(SAB))=$\dfrac{\left|-a\sqrt{2}\right|}{\sqrt{1+2}}=\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$

Ví dụ 15

Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AD. AB=a, AC=2a. Trên đường thẳng vuông góc với mp(ABC) tại A, lấy điểm S sao cho SA=3a. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của SB và SC. H là hình chiếu của A lên cạnh EF.

a) Chứng minh H là trung điểm cạnh SD

b) Tính cosin góc giữa mp(ABC) và mp(ACE)

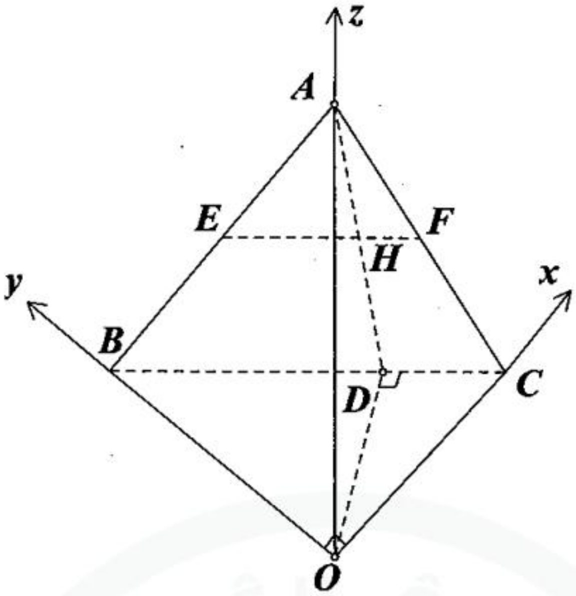
c) Tính khoảng cách từ điểm E đến BC.

➤ **Lời giải:**

Do SA, AB, AC đôi một vuông góc tại A, chọn hệ trục tọa độ Oxyz như hình vẽ.

- Gốc tọa độ O trùng với A

- Các tia Ox, Oy, Oz lần lượt đi qua C, B, S



a) Giả sử M là trung điểm SD

Ta có: A(0;0;0), $M(0;0;\frac{3a}{2}), E(0;\frac{a}{2};\frac{3a}{2}), F(a;0;\frac{3a}{2})$

$\overrightarrow{AM}(0;0;\frac{3a}{2}), \overrightarrow{EF}(a;\frac{-a}{2};0)$. Mà $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{EF}=0 \Leftrightarrow AM \perp EF$

Suy ra, H là hình chiếu của A lên EF và H chính là trung điểm của SD

b) B(0;a;0), C(2a;0;0), $\overrightarrow{AB}(0;a;0), \overrightarrow{AC}(2a;0;0), \overrightarrow{AE}(0;\frac{a}{2};\frac{3a}{2})$

$\overrightarrow{n_{(ABC)}}=\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right]=(0;0;-2a^2)$

$\overrightarrow{n_{(ACE)}}=\left[\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AE}\right]=(0;-3a^2;a^2)$

cosin góc giữa mp(ABC) và mp(ACE):

$$\cos\left(\widehat{(ABC);(ACE)}\right)=\frac{\left|-2a^4\right|}{\sqrt{4a^4}.\sqrt{9a^4+a^4}}=\frac{\sqrt{10}}{10}$$

c) $\overrightarrow{BC}(2a;-a;0), \overrightarrow{BE}(0;-\frac{a}{2};\frac{3a}{2}) \Rightarrow \left[\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BE}\right]=(\frac{-3}{2}a^2;3a^2;-a^2)$

mp(BCEF) $\begin{cases} qua\ B(0;a;0) \\ vtpt\ \overrightarrow{n_{(BCEF)}}(\frac{-3}{2};3;-1) \end{cases}$ có phương trình: $\frac{-3}{2}x+3(y-a)-z=0$

Ta có: $d(B;(BCEF))=\dfrac{|-3a|}{\sqrt{\dfrac{9}{4}+9+1}}=\dfrac{6a}{7}$

Đường thẳng BC có vtcp $\overrightarrow{u_{BC}}(2;-1;0)\parallel \overrightarrow{BC}(2a;-a;0)$

$$\begin{cases} E(0;\dfrac{a}{2};\dfrac{3a}{2}) \\ \overrightarrow{EB}(0;\dfrac{a}{2};\dfrac{-3a}{2}) \end{cases} \Rightarrow \left[\overrightarrow{EB};\overrightarrow{u_{BC}}\right]=\left(\dfrac{-3a}{2};-3a;-a\right)$$

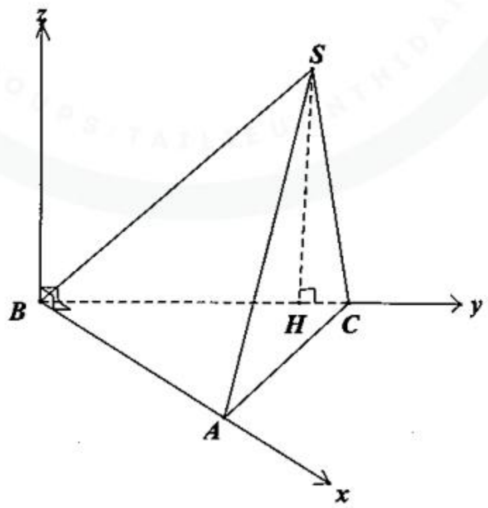
Vậy khoảng cách từ điểm E đến BC là:

$$d(E;BC)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{EB};\overrightarrow{u_{BC}}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{u_{BC}}\right|}=\frac{\sqrt{\dfrac{9a^2}{4}+9a^2+a^2}}{\sqrt{4+1}}=\frac{7a\sqrt{5}}{10}$$

Ví dụ 16

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại B, $BA=3a, BC=4a$; mặt phẳng (SBC) vuông góc với mặt phẳng (ABC) Biết $SB=2a\sqrt{3}$ và $\widehat{SBC}=30°$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ và khoảng cách giữa SB và AC.

➤ **Lời giải:**



Gọi H là chân đường cao hạ từ S xuống BC.

Ta có: $\begin{cases}(SBC)\perp(ABC)\\(SBC)\cap(ABC)=BC\\SH\perp BC\\SH\subset(SBC)\end{cases}\Rightarrow SH\perp(ABC)$

$SH=SB.\cos30^\circ=a\sqrt{3}; BH=SB.\cos30^\circ=3a$

$\Rightarrow V_{S.ABC}=\dfrac{1}{3}.SH.S_{ABC}=\dfrac{1}{3}.a\sqrt{3}.\dfrac{1}{2}.3a.4a=2\sqrt{3}a^3$

Chọn hệ trục tọa độ *Bxyz* như hình vẽ với *Bz // SH*, các trục *Bx, By* lần lượt đi qua các điểm A, C. Khi đó $B(0;0;0)$, $A(3a;0;0), C(0;4a;0)$, $S(0;3a;a\sqrt{3})$

Ta có: $\begin{cases}\overrightarrow{SB}=\left(0;-3a;-a\sqrt{3}\right)\\\overrightarrow{AC}=(-3a;4a;0)\\\overrightarrow{BC}=\left(0;4a;0\right)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\left[\overrightarrow{SB},\overrightarrow{AC}\right]=\left(4\sqrt{3}a^2;3\sqrt{3}a^2;-9a^2\right)\\\left[\overrightarrow{SB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{BC}=12\sqrt{3}a^3\end{cases}$

$$\Rightarrow d(SB,AC)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{SB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{BC}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{SB},\overrightarrow{AC}\right]\right|}=\frac{12\sqrt{3}a^3}{\sqrt{\left(4\sqrt{3}a^2\right)^2+\left(3\sqrt{3}a^2\right)^2+\left(-9a^2\right)^2}}=\frac{6\sqrt{13}a}{13}.$$

Vậy $d(SB,AC)=\dfrac{6\sqrt{13}a}{13}$.

Ví dụ 17

Cho hình chóp *S.ABC* có đáy là tam giác *ABC* vuông tại B $AB=a, BC=a\sqrt{3}$, mặt phẳng *(SAC)* nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, $SA=SC=a\sqrt{2}$. Gọi M, N lần lượt là trọng tâm tam giác *SAB* và *SAC*. Tính thể tích khối chóp *S.AMN* là khoảng cách giữa hai đường thẳng *SC* và *AB*.

➢ **Lời giải:**

Ta có: $AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=2a\Rightarrow SA^2+AC^2=AC^2\Rightarrow\Delta SAC$ vuông tại S.

Gọi H là trung điểm $AC\Rightarrow SH\perp AC$ và $SH=\dfrac{1}{2}AC=a$

$$\begin{cases}(SAC)\perp(ABC)\\(SAC)\cap(ABC)=AC\\SH\perp AC\\SH\subset(SAC)\end{cases}\Rightarrow SH\perp(ABC)$$

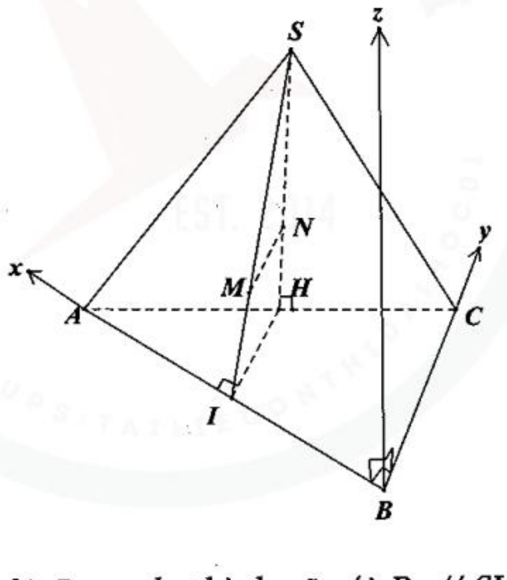
Gọi I là trung điểm AB. Khi đó: $\dfrac{V_{S.AMN}}{V_{S.AIH}}=\dfrac{SM}{SI}.\dfrac{SN}{SH}=\dfrac{2}{3}.\dfrac{2}{3}=\dfrac{4}{9}$

Ta có: $AI^2+HI^2=\dfrac{AB^2}{4}+\dfrac{BC^2}{4}=a^2=AH^2\Rightarrow\Delta AIH$ vuông tại I

$$\Rightarrow S_{AIH}=\frac{1}{2}.\frac{a}{2}.\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{a^2\sqrt{3}}{8}$$

$$\Rightarrow V_{S.AIH}=\frac{1}{3}.SH.S_{AIH}=\frac{1}{3}.a.\frac{a^2\sqrt{3}}{8}=\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$$

$$\Rightarrow V_{S.AMN}=\frac{4}{9}.V_{S.AIH}=\frac{a^3\sqrt{3}}{54}.$$



Chọn hệ trục tọa độ $Bxyz$ như hình vẽ với Bz // SH, các trục Bx, By lần lượt đi qua các điểm A, C.

Khi đó:

$B(0;0;0)$, $A(a;0;0)$, $C(0;a\sqrt{3};0)$, $S(\dfrac{a}{2};\dfrac{a\sqrt{3}}{2};a)$.

Ta có: $\begin{cases} \overrightarrow{SC} = (-\dfrac{a}{2}; \dfrac{a\sqrt{3}}{2}; -a) \\ \overrightarrow{AB} = (-a; 0; 0) \\ \overrightarrow{AC} = (-a; a\sqrt{3}; 0) \end{cases} \Rightarrow \left[\overrightarrow{SC}, \overrightarrow{AB}\right]$

$= \left(0; a^2; \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow \left[\overrightarrow{SC}, \overrightarrow{AB}\right].\overrightarrow{AC} = a^3\sqrt{3}$

$$\Rightarrow d(SC, AB) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{SC}, \overrightarrow{AB}\right].\overrightarrow{AC}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{SC}, \overrightarrow{AB}\right]\right|} = \frac{a^3\sqrt{3}}{\sqrt{(a^2)^2 + \left(\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}\right)^2}} = \frac{2\sqrt{21}a}{7}$$

Vậy $d(SC, AB) = \dfrac{2\sqrt{21}a}{7}$.

Ví dụ 18

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC) là điểm H thuộc cạnh AB sao cho $HA = 2HB$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng $60°$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ và khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SAC) theo a.

➢ **Lời giải:**

Ta có: $SH \perp (ABC) \Rightarrow SH \perp HC \Rightarrow HC$ là hình chiếu của SC trên (ABC)

$\Rightarrow \left(\widehat{SC, (ABC)}\right) = \widehat{SCH} = 60°$

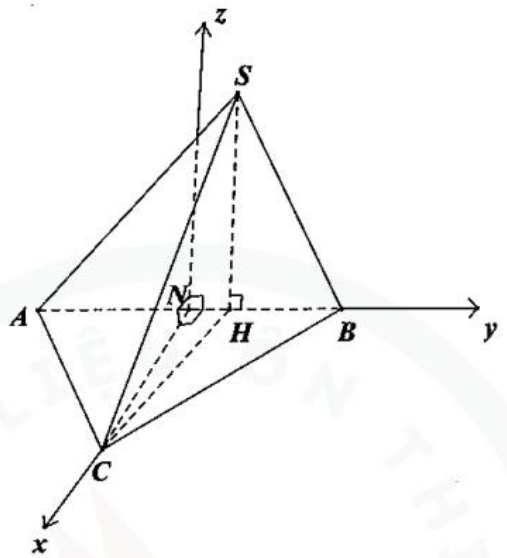
Gọi N là trung điểm $AB \Rightarrow HN = BN - BH = \dfrac{a}{2} - \dfrac{a}{3} = \dfrac{a}{6}$

CN là đường cao trong tam giác đều $ABC \Rightarrow CN = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

$$\Rightarrow CH = \sqrt{CN^2 + HN^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{6}\right)^2} = \frac{a\sqrt{7}}{3}$$

$$\Rightarrow SH = CH.\tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{21}}{3}$$

$$\Rightarrow V_{S.ABC} = \frac{1}{3}.SH.S_{ABC} = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{21}}{3}.\frac{1}{2}.a.a.\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{7}a^3}{12}$$



Chọn hệ trục tọa độ *Nxyz* như hình vẽ với *Nz // SH*, các trục *Nx, Ny* lần lượt đi qua các điểm C, B.

Khi đó:

$N(0;0;0), A(0;-\frac{a}{2};0), B(0;\frac{a}{2};0), C(\frac{a\sqrt{3}}{2};0;0), H(0;\frac{a}{6};0), S(0;\frac{a}{6};\frac{a\sqrt{21}}{3})$.

Ta có:

$$\begin{cases} \overrightarrow{SA} = (0;-\frac{2a}{3};-\frac{a\sqrt{21}}{3}) \\ \overrightarrow{SC} = (\frac{a\sqrt{3}}{2};-\frac{a}{6};-\frac{a\sqrt{21}}{3}) \end{cases} \Rightarrow \left[\overrightarrow{SA},\overrightarrow{SC}\right]$$

$$= \left(\frac{a^2\sqrt{21}}{6};-\frac{a^2\sqrt{7}}{2};\frac{a^2\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}a^2}{6}\left(\sqrt{7};-\sqrt{21};2\right) = \frac{\sqrt{3}a^2}{6}.\vec{n}$$

với $\vec{n} = \left(\sqrt{7};-\sqrt{21};2\right)$.

Mặt phẳng $(SAC)\begin{cases} qua\ A\left(0;-\dfrac{a}{2};0\right) \\ vtpt\ \vec{n}=\left(\sqrt{7};-\sqrt{21};2\right) \end{cases}$ nên có phương trình:

$\sqrt{7}x-\sqrt{21}y+2z-\dfrac{\sqrt{21}}{2}a=0.$

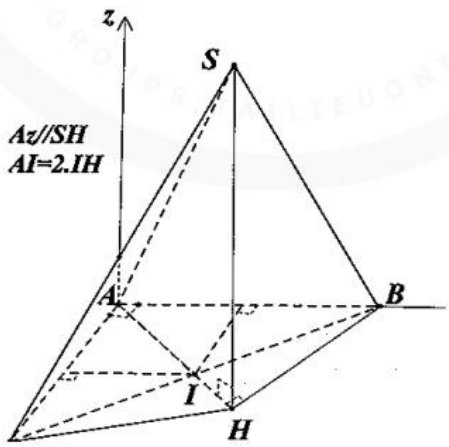
Ta có: $d\left(B,(SAC)\right)=\dfrac{\left|\dfrac{a}{2}.\left(-\sqrt{21}\right)-\dfrac{\sqrt{21}}{2}a\right|}{\sqrt{\left(\sqrt{7}\right)^2+\left(-\sqrt{21}\right)^2+2^2}}=\dfrac{a\sqrt{42}}{8}.$

Vậy $d\left(B,(SAC)\right)=\dfrac{a\sqrt{42}}{8}.$

Ví dụ 19

Cho hình chóp SABC có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, $AB=a\sqrt{2}$. Gọi I là trung điểm cạnh BC. Hình chiếu vuông góc H của S lên mặt phẳng (ABC) thỏa mãn $\overrightarrow{IA}=-2\overrightarrow{IH}$. Góc giữa SC và mặt phẳng đáy (ABC) bằng 60^0. Tính thể tích khối chóp SABC và khoảng cách từ trung điểm K của SB đến mặt phẳng (SAH).

➢ **Lời giải:**



Ta có: $SH\perp(ABCD)$.

Từ A kẻ Az//SH. Đặt trục Axyz như hình vẽ.

Ta có: $A(0;0;0);B(a\sqrt{2};0;0);C(0;a\sqrt{2};0)$.

Do I là trung điểm của $BC \Rightarrow I\left(\frac{a\sqrt{2}}{2};\frac{a\sqrt{2}}{2};0\right)$.

Do tam giác ABC vuông cân tại A

$\Rightarrow BC=\sqrt{2a^2+2a^2}=2a \Rightarrow IA=IB=IC=a$.

Do $\overrightarrow{IA}=-2\overrightarrow{IH} \Rightarrow \overrightarrow{HI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{IA}$.

Gọi $H(x;y;z) \Rightarrow \overrightarrow{HI}=\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}x;\frac{a\sqrt{2}}{2}-y;0-z\right),\overrightarrow{IA}=\left(\frac{-a\sqrt{2}}{2};\frac{-a\sqrt{2}}{2};0\right)$.

$$\text{Do } \overrightarrow{HI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{IA} \Rightarrow \begin{cases} \frac{a\sqrt{2}}{2}-x=\frac{1}{2}.-\frac{a\sqrt{2}}{2} \\ \frac{a\sqrt{2}}{2}-y=\frac{1}{2}.\frac{-a\sqrt{2}}{2} \\ 0-z=\frac{1}{2}.0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{3\sqrt{2}}{4}a \\ y=\frac{3\sqrt{2}}{4}a \\ z=0 \end{cases}$$

$\Rightarrow H\left(\frac{3\sqrt{2}}{4}a;\frac{3\sqrt{2}}{4}a;0\right)$.

Gọi $S\left(\frac{3\sqrt{2}}{4}a;\frac{3\sqrt{2}}{4}a;h\right) \Rightarrow \overrightarrow{SC}=\left(-\frac{3\sqrt{2}}{4}a;\frac{\sqrt{2}}{4}a;-h\right)$.

Do $(ABC)\in Oxy \Rightarrow \vec{n}_{ABC}=(0;0;1)$.

Ta có:

$$\sin 60^0=\sin(SC,(ABC))=\frac{\left|\vec{u}_{SC}.\vec{n}_{ABC}\right|}{\left|\vec{u}_{SC}\right|.\left|\vec{n}_{ABC}\right|}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow h=\frac{\sqrt{15}a}{2} \Rightarrow S\left(\frac{3\sqrt{2}}{4}a;\frac{3\sqrt{2}}{4}a;\frac{\sqrt{15}a}{2}\right)$$

$$\Rightarrow V_{SABC}=\frac{1}{3}.S_{\Delta ABC}.SH=\frac{1}{3}.\frac{\sqrt{15}a}{2}.\frac{2a^2}{2}=\frac{\sqrt{15}a^3}{6} \text{ (đvtt).}$$

Do K là trung điểm SB $\Rightarrow K\left(\frac{7\sqrt{2}}{8}a;\frac{3\sqrt{2}a}{8};\frac{\sqrt{15}a}{4}\right)$.

$$\begin{cases}\overrightarrow{SA}=\left(-\frac{3\sqrt{2}}{4}a;\frac{-3\sqrt{2}}{4}a;\frac{-\sqrt{15}}{2}a\right)\\ \overrightarrow{SH}=\left(0;0;-\frac{15}{2}a\right)\end{cases}.$$

$$\Rightarrow \vec{n}_{SAH}=\left[\overrightarrow{SA},\overrightarrow{SH}\right]=\left(\frac{3\sqrt{30}}{8}a^2;-\frac{3\sqrt{30}}{8}a^2;0\right)$$

Mặt phẳng (SAH) $\begin{cases}\textit{đi qua } A(0;0;0)\\ Vtpt\vec{n}=\left(\frac{3\sqrt{30}a^2}{8};\frac{-3a^2\sqrt{30}}{8};a\right)\end{cases}$ có phương trình:

$$\frac{3\sqrt{30}a^2}{8}x-\frac{3\sqrt{30}a^2}{8}y=0\cdot$$

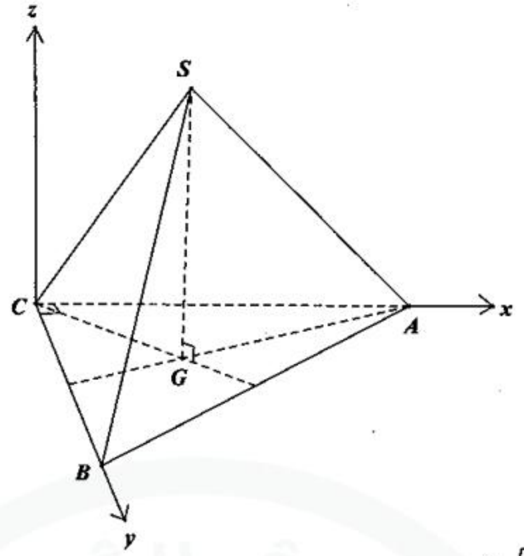
$$d\left[K,(SAH)\right]=\frac{\left|\frac{7\sqrt{2}}{8}a.\frac{3\sqrt{30}}{8}a^2+\frac{3\sqrt{2}}{8}a.\frac{-3\sqrt{30}}{8}a^2\right|}{\sqrt{\left(\frac{3\sqrt{30}}{8}a^2\right)^2+\left(\frac{3\sqrt{30}}{8}a^2\right)^2}}=\frac{\frac{3\sqrt{15}}{8}a^3}{\frac{3\sqrt{15}}{4}a^2}=\frac{a}{2}\cdot$$

Vậy $V_{SABC}=\frac{\sqrt{15}}{6}a^3;d\left(k;(SAH)\right)=\frac{a}{2}$.

Ví dụ 20

Cho hình chóp SABC có đáy ABC là tam giác vuông cân tại C, cạnh huyền bằng 3a, trọng tâm là G có $SG\perp(ABC), SB=\frac{a\sqrt{14}}{2}$.
Tính thể tích khối chóp SABC và khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SAC)

➤ **Lời giải:**



Do tam giác ABC vuông cân tại C $\Rightarrow CA = CB = \dfrac{3\sqrt{2}a}{2}$

Theo bài $SG \perp (ABC)$ kẻ Cz // SG

Đặt trục Cxyz như hình vẽ ta có:

$C(0;0;0); B\left(0;\dfrac{3\sqrt{2}}{2}a;0\right); A\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{2}a;0;0\right)$

Do G là trọng tâm tam giác ABC $\Rightarrow G\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}a;0;0\right)$.

Do G là hình chiếu của S nên (ABC) $\Rightarrow S\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}a;\dfrac{\sqrt{2}}{2}a;h\right)$.

Ta có:

$\overrightarrow{SB} = \left(\dfrac{-\sqrt{2}}{2}a;\sqrt{2}a;-h\right) \Leftrightarrow \left|\overrightarrow{SB}\right| = \sqrt{\dfrac{2}{4}a^2 + 2a^2 + h^2}$

$= \dfrac{a\sqrt{14}}{2} \Rightarrow h = a \Rightarrow S\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}a;\dfrac{\sqrt{2}}{2}a;a\right)$.

$\Rightarrow V_{SABC} = \dfrac{1}{3}.SG.S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{3}.a.\dfrac{\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{2}a\right)^2}{2} = \dfrac{3a^3}{4}$

$$\begin{cases}\overrightarrow{SA}=\left(\sqrt{2}a;-\dfrac{\sqrt{2}}{2}a;-a\right)\\ \overrightarrow{SC}=\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}a;-\dfrac{\sqrt{2}}{2}a;-a\right)\end{cases}\Rightarrow \vec{n}_{SAC}=\left[\overrightarrow{SA},\overrightarrow{SC}\right]=\left(0;2\sqrt{2}a^2;-2a^2\right).$$

Mặt phẳng (SAC) $\begin{cases}\textit{đi qua } C(0;0;0)\\ \textit{vtpt } \vec{n}=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}a^2;\sqrt{2}a^2;-2a^2\right)\end{cases}$ có phương trình:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}a^2x+2\sqrt{2}a^2y-2a^2z=0.$$

$$\Rightarrow d_{(B,(SAC))}=\frac{\left|0.\dfrac{\sqrt{2}}{2}a^2+2\sqrt{2}a^2.\dfrac{3\sqrt{2}}{2}a+0\right|}{\sqrt{O^2+4.2a^2+4a^2}}=\frac{6a^3}{\sqrt{12}a^2}=\sqrt{3}a$$

Vậy $V_{SABC}=\dfrac{3a^3}{4};d_{(B;(SAC))}=\sqrt{3}a$.

Ví dụ 21

Cho hình chóp SABC có góc tạo bởi hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng 60^0, ABC và SBC là các tam giác đều cạnh a. Tính khoảng cách từ đỉnh B đến mặt phẳng (SAC).

➤ **Lời giải:**

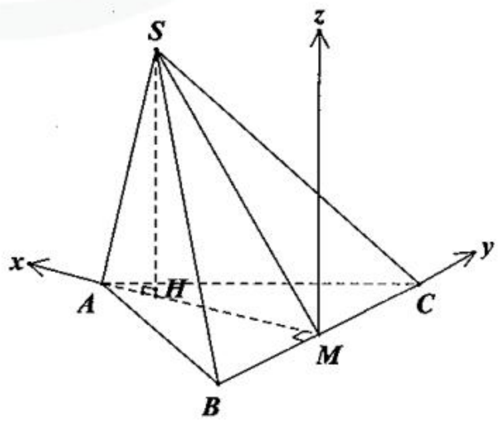
Gọi M là trung điểm của BC

$\Rightarrow \begin{cases}SM\perp BC\\ AM\perp BC\end{cases}$

$\Rightarrow BC\perp(SAM)\Rightarrow BC\perp SA$.

Kẻ Mz sao cho $\widehat{SMz}=30^0$.

Trong tam giác SAM kẻ đường cao SH.$\Rightarrow \widehat{SMH}=60^0$



Ta có: $SM = \sqrt{SB^2 - BM^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$;

$MH = SM.\cos 60^0 = \frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{1}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

$SH = \sqrt{\frac{3}{4}a^2 - \frac{3}{16}a^2} = \frac{3}{4}a \Rightarrow S\left(\frac{\sqrt{3}}{4}a; 0; \frac{3}{4}a\right)$.

$AH = AM - MH = \frac{a\sqrt{3}}{2} - \frac{a\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4}a \Rightarrow A\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a; 0; 0\right)$

Ta có: $C\left(0; \frac{a}{2}; 0\right); B\left(-0; -\frac{a}{2}; 0\right)$.

$$\begin{cases} \overrightarrow{SA} = \left(\frac{\sqrt{3}}{4}a; 0; -\frac{3}{4}a\right) \\ \overrightarrow{SC} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{4}a; \frac{a}{2}; -\frac{3}{4}a\right) \end{cases} \Rightarrow \vec{n}_{SAC} = \left[\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SC}\right] = \left(\frac{3}{8}a^2; \frac{3\sqrt{3}}{8}a^2; \frac{\sqrt{3}}{8}a^2\right)$$

Mặt phẳng (SAC) $\begin{cases} \textit{đi qua } C\left(0; \frac{a}{2}; 0\right) \\ \textit{vtpt } \vec{n} = \left(\frac{3}{8}a^2; \frac{3\sqrt{3}}{8}a^2; \frac{\sqrt{3}}{8}a^2\right) \end{cases}$

$\Rightarrow pt(SAC): \frac{3}{8}a^2x + \frac{3\sqrt{3}}{8}a^2y + \frac{\sqrt{3}}{8}a^2 - \frac{3\sqrt{3}}{16}a^3 = 0$.

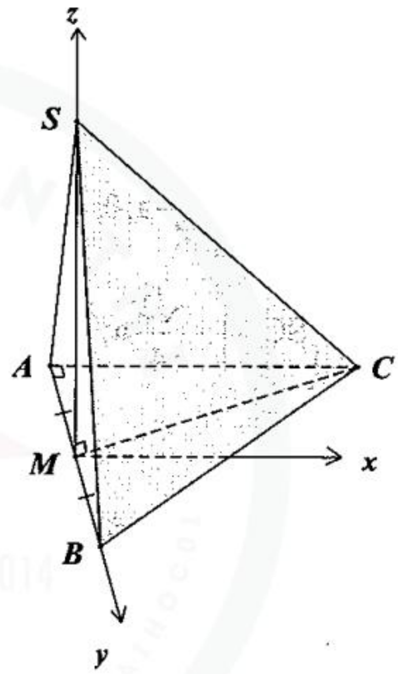
Ta có: $d_{(B;(SAC))} = \frac{\left|-\frac{a}{2}.\frac{3\sqrt{3}}{8}a^2 - \frac{3\sqrt{3}}{16}a^2\right|}{\sqrt{\frac{9}{64}a^4 + \frac{27}{64}a^4 + \frac{3}{64}a^4}} = \frac{3\sqrt{13}a}{13}$.

Vậy $d_{(B,(SAO))} = \frac{3\sqrt{13}}{13}a$.

Ví dụ 22

Cho hình chóp $S.ABC$ có mặt đáy ABC là tam giác vuông cân tại A và $SC = 2a\sqrt{5}$. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm M của cạnh AB. Góc giữa đường thẳng SC và (ABC) bằng 60^0. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ và khoảng cách từ *A đến mặt* phẳng (SBC) theo a.

➢ **Lời giải:**



Ta có $\widehat{(SC, (ABC))} = \widehat{SCM} = 60^0$

$\Rightarrow SM = SC.\sin 60^0 = a\sqrt{15}.$

$CM = SC\cos 60^0 = a\sqrt{5}.$

Tam giác vuông ACM có:

$AC^2 + \dfrac{AC^2}{4} = 5a^2 \Rightarrow AC = 2a.$

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ.

$M \equiv O(0; 0; 0)$, $Ox \parallel AC$, $Oy \equiv MB$,

$Oz \equiv MS$.

Chọn $a = 1$, khi đó $A(0; -1; 0)$, $B(0; 1; 0)$,

$C(2; -1; 0)$, $S(0; 0; \sqrt{15})$.

Ta có $\overrightarrow{AS} = (0; 1; \sqrt{15})$, $\overrightarrow{AB} = (0; 2; 0)$,

$\overrightarrow{AC} = (2; 0; 0)$. Suy ra $\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = (0; 0; -4)$

$\Rightarrow \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AS} = 0.0 + 0.1 + (-4).\sqrt{15} = -4\sqrt{15}$

$\Rightarrow \left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AS}\right| = \left|-4\sqrt{15}\right| = 4\sqrt{15}.$

Thể tích khối chóp $S.ABC$ là:

$V_{S.ABC} = \dfrac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{SA}\right| = \dfrac{1}{6}.4\sqrt{15} = \dfrac{2\sqrt{15}}{3} = \dfrac{2\sqrt{15}}{3}a^3$ (đvtt)

(do ta chọn $a = 1$).

Phương trình mặt phẳng đi qua 3 điểm:

$B(0;1;0)$, $C(2;-1;0)$, $S(0;0;\sqrt{15})$.

Là: $(SBC): x+y+\dfrac{1}{\sqrt{15}}z-1=0$.

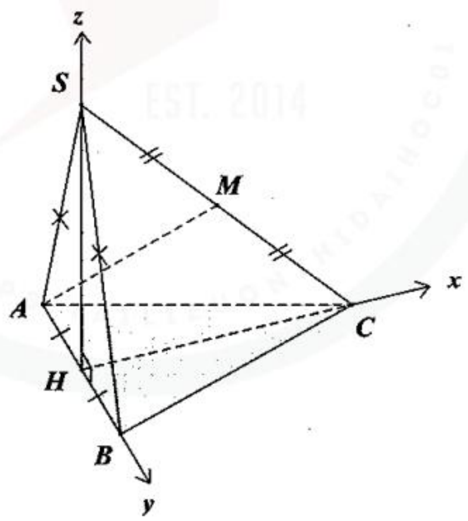
Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) là:

$$d(A,(BCS))=\frac{2}{\sqrt{1^2+1^2+\dfrac{1}{15}}}=\frac{2\sqrt{15}}{\sqrt{31}}=\frac{2\sqrt{15}}{\sqrt{31}}a \text{ (do ta chọn } a=1\text{)}.$$

Ví dụ 22

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều, mặt bên SAB là tam giác vuông cân với $SA=SB=a$ và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi H là trung điểm đoạn thẳng AB, M là trung điểm đoạn thẳng SC. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ và tính khoảng cách giữa 2 đường thẳng SH, AM theo a.

➢ **Lời giải:**



Từ giả thiết suy ra $SH\perp(ABC)$.

Ta có $AB=SA.\sqrt{2}=a\sqrt{2}\Rightarrow SH=\dfrac{SA.SB}{AB}=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, $HC=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$.

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ.

$H \equiv O(0;0;0)$, $Ox \parallel AC$, $Oy \equiv MB$, $Oz \equiv MS$.

Chọn $a=1$, khi đó $A\left(0; -\frac{\sqrt{2}}{2}; 0\right)$, $B\left(0; \frac{\sqrt{2}}{2}; 0\right)$, $C\left(\frac{\sqrt{6}}{2}; 0; 0\right)$, $S\left(0; 0; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $M\left(\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}; 0; \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$.

Ta có $\overrightarrow{AB}=\left(0; \sqrt{2}; 0\right)$, $\overrightarrow{AC}=\left(\frac{\sqrt{6}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}; 0\right)$, $\overrightarrow{AS}=\left(0; \frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Suy ra $\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]=\left(0; 0; -\sqrt{3}\right)$

$\Rightarrow \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AS}=0.0+0.\frac{\sqrt{2}}{2}+\left(-\sqrt{3}\right).\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{\sqrt{6}}{2}$

$\Rightarrow \left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AS}\right|=\left|-\frac{\sqrt{6}}{2}\right|=\frac{\sqrt{6}}{2}$.

Thể tích khối chóp $S.ABC$ là:

$$V_{S.ABC}=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AS}\right|=\frac{1}{6}.\frac{\sqrt{6}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{12}=\frac{\sqrt{6}}{12}a^3 \text{ (đvtt)}$$

(do ta chọn $a=1$).

Ta có $\overrightarrow{SH}=\left(0; 0; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $\overrightarrow{AM}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}; \frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$, $\overrightarrow{AH}=\left(0; \frac{\sqrt{2}}{2}; 0\right)$

$\Rightarrow \left[\overrightarrow{SH}, \overrightarrow{AM}\right]=\left(\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{4}; 0\right)$

$\Rightarrow \left[\overrightarrow{SH}, \overrightarrow{AM}\right].\overrightarrow{AH}=\frac{1}{2}.0+\left(-\frac{\sqrt{3}}{4}\right).\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+0.0=\frac{\sqrt{6}}{8}$

$\Rightarrow \left|\left[\overrightarrow{SH}, \overrightarrow{AM}\right].\overrightarrow{AH}\right|=\frac{\sqrt{6}}{8}$.

Khoảng cách giữa hai đường thẳng SH và AM là:

$$d(SH, AM)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{SH}, \overrightarrow{AM}\right].\overrightarrow{AH}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{SH}, \overrightarrow{AM}\right]\right|}=\frac{\frac{\sqrt{6}}{8}}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2+0^2}}=\frac{\sqrt{42}}{14}=\frac{\sqrt{42}}{14}a \text{ (đvđd)}$$

(do ta chọn $a=1$).

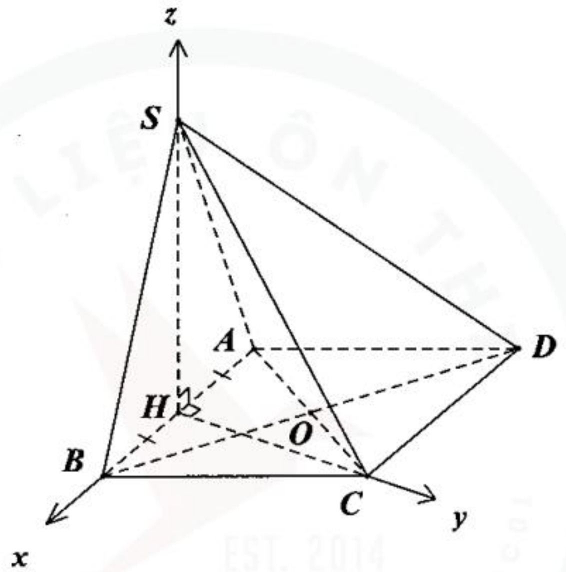
Ví dụ 24

Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình thoi tâm O, cạnh bằng a và $AC = a$. Từ trung điểm H của cạnh AB dựng SH vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SH = a$.

a) Tính khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SBC).

b) Tính góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng (SCD).

➢ **Lời giải:**



Vì tam giác ABC đều nên $HC \perp AB$.

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.

Chọn $a = 1$, khi đó $A\left(-\frac{1}{2}; 0; 0\right)$, $B\left(\frac{1}{2}; 0; 0\right)$, $C\left(0; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right)$, $S(0; 0; 1)$.

Ta có $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD} \Rightarrow D\left(-1; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right)$.

Do O là trung điểm AC, nên $O\left(-\frac{1}{4}; \frac{\sqrt{3}}{4}; 0\right)$.

a) Mặt phẳng (SBC) có phương trình là:

$$\frac{2x}{1} + \frac{2y}{\sqrt{3}} + \frac{z}{1} = 1 \Leftrightarrow 2\sqrt{3}x + 2y + \sqrt{3}z - \sqrt{3} = 0.$$

Khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (SBC) là:

$$d\left(O,(SBC)\right)=\frac{\left|2\sqrt{3}.\left(-\frac{1}{4}\right)+2.\frac{\sqrt{3}}{4}+\sqrt{3}.0-\sqrt{3}=0\right|}{\sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2+2^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}}=\frac{\sqrt{57}}{19}=\frac{\sqrt{57}}{19}a$$

(do ta chọn $a=1$).

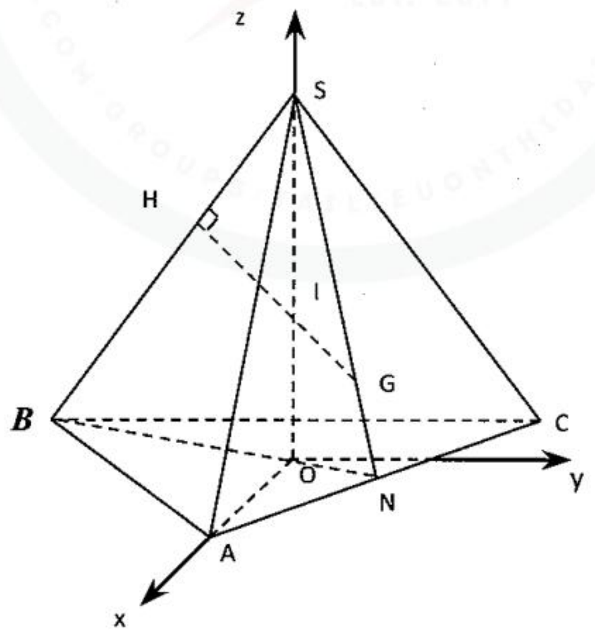
b) Theo câu trên thì $\overrightarrow{n_{(SBC)}}=\left(2\sqrt{3};\ 2;\ \sqrt{3}\right)$ và $\left[\overrightarrow{SC},\overrightarrow{SD}\right]=\left(0;\ 1;\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$\Rightarrow \overrightarrow{n_{(SCD)}}=\left(0;\ 2;\ \sqrt{3}\right)\Rightarrow \cos\left((SBC),(SCD)\right)=\sqrt{\frac{7}{19}}$.

Ví dụ 25

Cho hình chóp $S.ABC$ có độ dài các cạnh đều bằng a, O là trọng tâm của tam giác ABC. Gọi I là trung điểm của SO, H là chân đường vuông góc hạ từ I xuống cạnh SB. Mặt phẳng (BIC) cắt SA tại M. Tìm tỉ lệ thể tích của tứ diện $SBCM$ và tứ diện $SABC$ và chứng minh rằng IH qua trọng tâm G của tam giác SAC.

➢ **Lời giải:**



Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ.

$O \equiv O(0;\,0;\,0)$, $Ox \equiv OA$, $Oy \parallel BC$, $Oz \equiv OS$.

Chọn $a = 1$, khi đó:

$A\left(\frac{\sqrt{3}}{3};\,0;\,0\right)$, $B\left(-\frac{\sqrt{3}}{6};\,-\frac{1}{2};\,0\right)$, $C\left(-\frac{\sqrt{3}}{6};\,\frac{1}{2};\,0\right)$, $S\left(0;\,0;\,\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$ và $I\left(0;\,0;\,\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$

Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{BC} = (0;\,1;\,0) \\ \overrightarrow{IC} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{6};\,\frac{1}{2};\,-\frac{\sqrt{6}}{6}\right) \end{cases} \Rightarrow \left[\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{IC}\right] = \left(-\frac{\sqrt{6}}{6};\,0;\,\frac{\sqrt{3}}{6}\right)$,

$\overrightarrow{SB} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{6};\,-\frac{1}{2};\,-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$

Phương trình mặt phẳng đi qua 3 điểm:

$I\left(0;\,0;\,\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$, $B\left(-\frac{\sqrt{3}}{6};\,-\frac{1}{2};\,0\right)$, $C\left(-\frac{\sqrt{3}}{6};\,\frac{1}{2};\,0\right)$.

Là: $-\frac{\sqrt{6}}{6}(x-0) + 0(y-0) + \frac{\sqrt{3}}{6}\left(z - \frac{\sqrt{6}}{6}\right) = 0$ hay $-\sqrt{2}x + z - \frac{\sqrt{6}}{6} = 0$.

Mà ta lại có: $\overrightarrow{SA} = \left(\frac{\sqrt{3}}{3};\,0;\,-\frac{\sqrt{6}}{3}\right) \Rightarrow \overrightarrow{SA} // \overrightarrow{u_{SA}} = (1;\,0;\,-\sqrt{2})$.

Phương trình đường thẳng SA là: $\begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{3} + t \\ y = 0 \\ z = -\sqrt{2}t \end{cases}$.

Tọa độ điểm M là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{3} + t \\ y = 0 \\ y = -\sqrt{2}t \\ -\sqrt{2}x + z - \frac{\sqrt{6}}{6} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{12} \\ y = 0 \\ z = \frac{\sqrt{6}}{4} \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{\sqrt{3}}{12};\,0;\,\frac{\sqrt{6}}{4}\right).$$

$\Rightarrow \overrightarrow{SM} = \left(\frac{\sqrt{3}}{12}; 0; -\frac{\sqrt{6}}{12}\right) \Rightarrow \overrightarrow{SA} = 4\overrightarrow{SM}.$

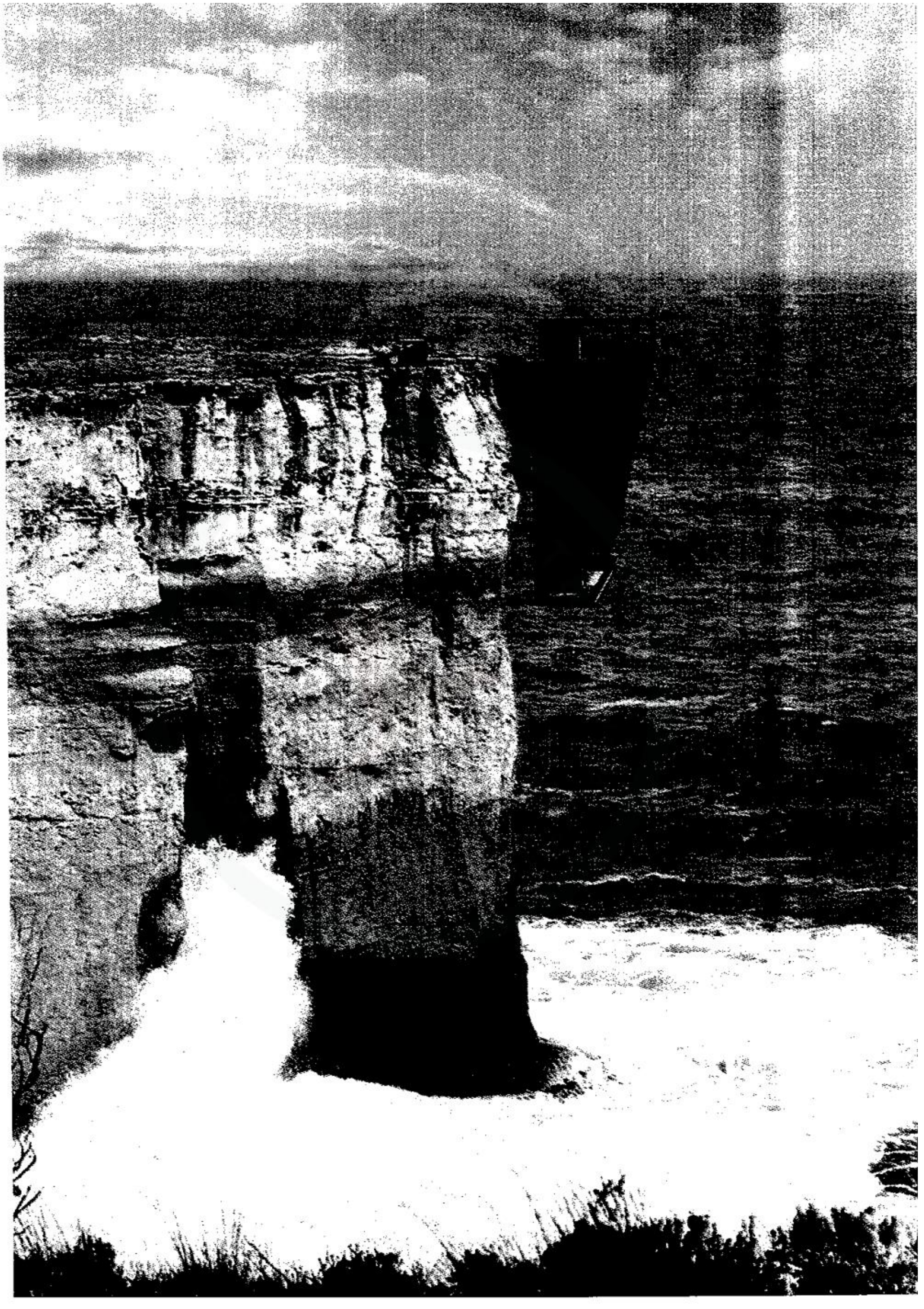
Nên M nằm trên đoạn SA và $\frac{SM}{SA} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{V_{S.BCM}}{V_{S.ABC}} = \frac{1}{4}$.

Do G là trọng tâm của tam giác tam giác ASC nên SG đi qua trung điểm N của AC, suy ra $GI \subset (SNB) \Rightarrow GI$ và SB đồng phẳng (1).

Ta lại có $G\left(\frac{\sqrt{3}}{18}; \frac{1}{6}; \frac{\sqrt{6}}{9}\right) \Rightarrow \overrightarrow{GI} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{18}; -\frac{1}{6}; \frac{\sqrt{6}}{18}\right)$

$\Rightarrow \overrightarrow{GI}.\overrightarrow{SB} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{18}\right).\left(-\frac{\sqrt{3}}{6}\right) + \left(-\frac{1}{6}\right).\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{\sqrt{6}}{18}.\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right) = 0 \Rightarrow GI \perp SB$ (2).

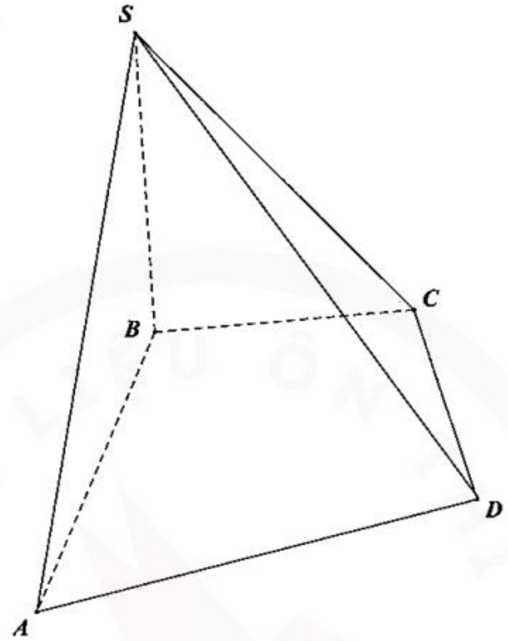
Từ (1) và (2), suy ra $GI \perp SB = H$.



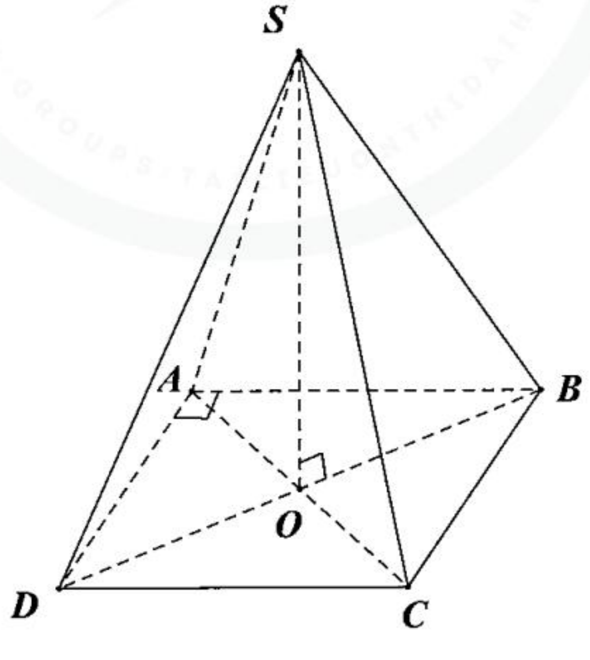
TỨ GIÁC

1. KIẾN THỨC CƠ BẢN

- **Định nghĩa:** Hình chóp tứ giác là hình chóp có đáy là tứ giác và mặt bên là các tam giác.



- **Định nghĩa:** Hình chóp tứ giác đều là hình chóp có đáy là hình vuông và có các cạnh bên bằng nhau, hình chiếu của đỉnh xuống đáy là tâm của đáy.



2. THIẾT LẬP HỆ TRỤC TỌA ĐỘ

Với hình chóp tứ giác, việc thiết lập hệ trục tọa độ thường được thực hiện dựa trên đặc tính hình học của chúng. Ta có các trường hợp thường gặp sau:

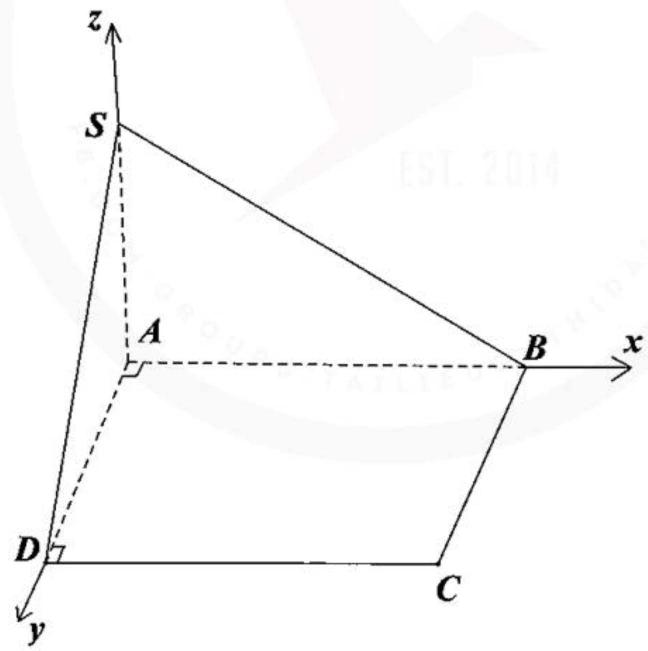
- Hình chóp đều thì hệ trục tọa độ được thiết lập dựa trên gốc O trùng với tâm của đáy và trục Oz trùng với đường cao của hình chóp.

- Hình chóp có một cạnh bên (chẳng hạn SA) vuông góc với đáy thì ta thường chọn trục Oz là cạnh bên vuông góc với đáy (SA), gốc tọa độ trùng với chân đường vuông góc (điểm A). Trong các trường hợp khác ta dựa vào đường cao của hình chóp và tính chất đa giác đáy để chọn hệ tọa độ phù hợp.

a) Hình chóp tứ giác S.ABCD, cạnh bên SA vuông góc với đáy, SA=h

Với đáy ***ABCD là hình vuông*** cạnh a:

- Do SA, AB, AD đôi một vuông góc tại A $\Rightarrow$ Chọn hệ trục tọa độ Oxyz như hình vẽ.



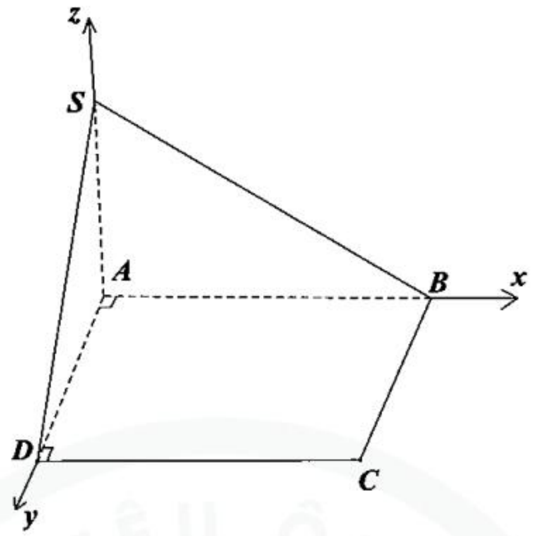
- Các tia Ox, Oy, Oz lần lượt đi qua B, D, S.

- Điểm A trùng với gốc tọa độ O.

- A(0;0;0), B(a;0;0), C(a;a;0), D(0;a;0), S(0;0;h).

✍ Với đáy ***ABCD là hình chữ nhật***, AB=a, AD=b

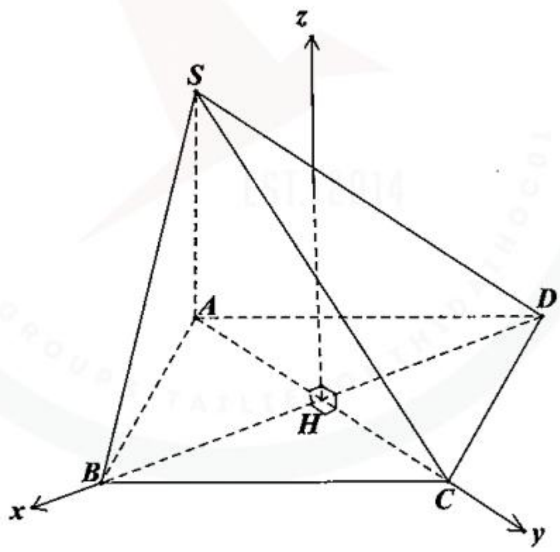
- Chọn hệ tọa độ giống với hình vuông



- A(0;0;0), B(a;0;0), C(a;b;0), D(0;b;0), S(0;0;h).

✍ Với đáy là ***hình thoi*** tâm H:

Kẻ tia Hz || SA $\Rightarrow$ Hz, AC, BD đôi một vuông góc tại H



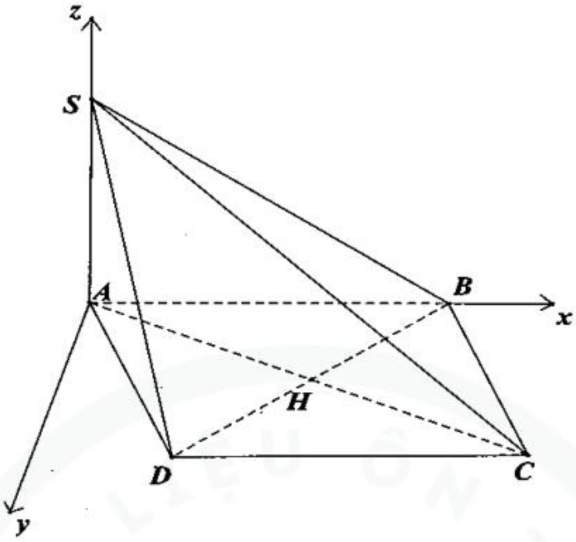
Chọn hệ Oxyz như hình vẽ

- Gốc tọa độ O trùng với H.
- Các tia Ox, Oy lần lượt đi qua B và C.
- Xác tọa độ các điểm dựa vào 1 dữ kiện nữa đề sẽ cho tùy vào từng bài.

✍ Với đáy ***ABCD là hình bình hành:***

- Trong mp(ABCD), kẻ tia $Ay \perp AB$

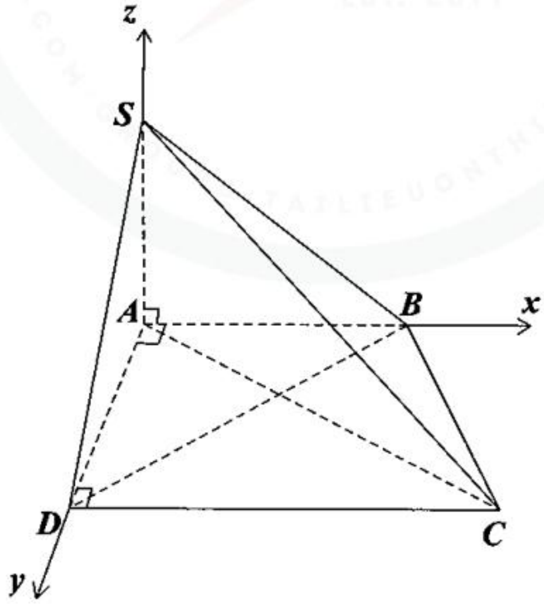
(nếu $\widehat{BAD} < 90°$) $\Rightarrow$ Ay, AB, AS đôi một vuông góc tại A



- Chọn hệ trục tọa độ Oxyz như hình vẽ.
- Gốc tọa độ O trùng với A.
- Các tia Ox, Oz lần lượt đi qua B và S.

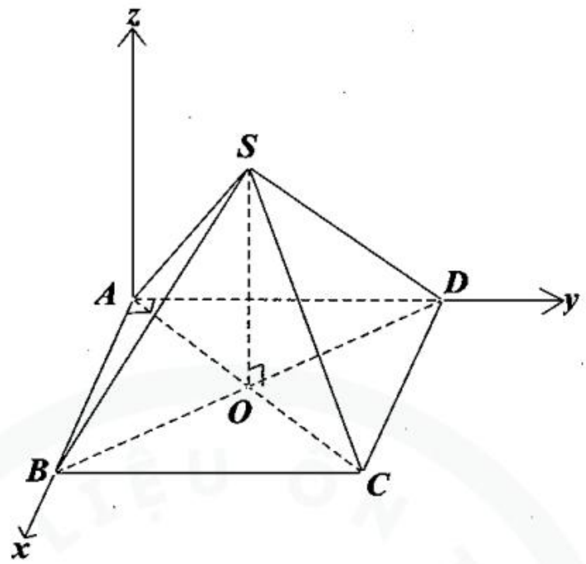
✍ Với đáy ***ABCD là hình thang vuông*** tại A và D

Do SA, AB, AD đôi một vuông góc tại A $\Rightarrow$ chọn hệ tọa độ Oxyz như hình vẽ.



- Gốc tọa độ O trùng với A.
- Các tia Ox, Oy, Oz lần lượt đi qua B, D, S.

b) Hình chóp tứ giác đều có các cạnh bên a:



Chọn hệ trục tọa độ như sau:

Vì SO $\perp$ (ABCD) nên SO $\perp$ AD, SO $\perp$ AB, dễ thấy SO, AB, AD đôi một vuông góc nên chọn hệ tọa độ như hình vẽ với Az//SO.

Khi đó:

$$A(0;0;0);B(a;0;0);C(a;a;0);D(0;a;0);O\left(\frac{a}{2};\frac{a}{2};0\right)S\left(\frac{a}{2};\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)$$

Bài tập minh họa

Ví dụ 1

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật, SA vuông góc với đáy, AB=a, AD=2a, SA= $a\sqrt{3}$.

a) Chứng minh: 2 mp (SAD) và (SDC) vuông góc với nhau

b) Tính khoảng cách từ SA đến BD

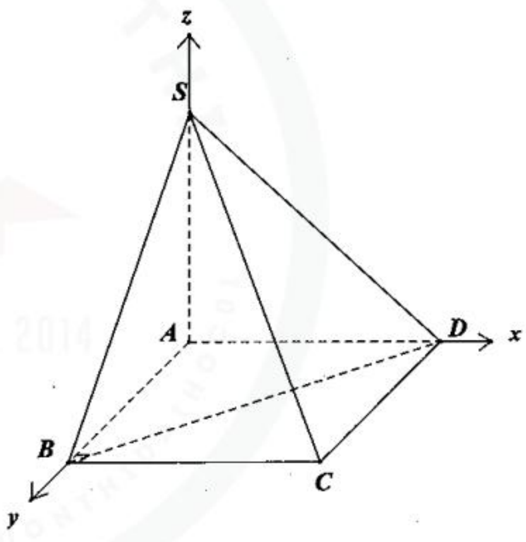
c) Tính cosin góc giữa 2 mp (SDB) và (ABCD)

➢ **Lời giải:**

Thấy: SA, AB, AC đôi một vuông góc tại A nên chọn hệ trục tọa độ Oxyz như hình vẽ:

- A trùng với gốc tọa độ O(0;0;0)

- Tia Ox, Oy, Oz lần lượt đi qua D, B, S.



Khi đó: A(0; 0; 0), S(0; 0; $a\sqrt{3}$),

B(0; a; 0), C(2a; a; 0), D(2a; 0; 0)

$\overrightarrow{SD}(2a;0;-a\sqrt{3}), \overrightarrow{SC}(2a;a;-a\sqrt{3})$;

$\overrightarrow{SB}(0;a;-a\sqrt{3})$

a) Mp(SAD) và mp(SDC) có véc tơ pháp tuyến lần lượt là:

$\overrightarrow{n_1} = \left[\overrightarrow{SA};\overrightarrow{SD}\right] = (0;-2a^2\sqrt{3};0)$;

$\overrightarrow{n_2} = \left[\overrightarrow{SD};\overrightarrow{SC}\right] = (a^2\sqrt{3};0;-2a^2)$

Ta có: $\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2} = 0 \Rightarrow$ 2 mp (SAD) và (SDC) vuông góc với nhau (ĐPCM)

b) $\begin{cases}\overrightarrow{BD}(2a;-a;0)\\ \overrightarrow{SA}(0;0;-a\sqrt{3})\end{cases} \Rightarrow \left[\overrightarrow{SA};\overrightarrow{BD}\right] = (\sqrt{3}a^2;2\sqrt{3}a^2;0)$

Vậy khoảng cách từ SA đến BD: d(SA;BD)= $\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{SA};\overrightarrow{BD}\right]\overrightarrow{SB}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{SA};\overrightarrow{BD}\right]\right|} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}a$

c) cosin góc giữa 2 mp (SDB) và (ABCD): $\cos((\alpha);(\beta)) = \dfrac{\left|\overrightarrow{n_\alpha}.\overrightarrow{n_\beta}\right|}{\left|\overrightarrow{n_\alpha}\right|.\left|\overrightarrow{n_\beta}\right|}$

$\left[\overrightarrow{SD};\overrightarrow{SB}\right] = (a^2\sqrt{3};2a^2\sqrt{3};2a^2) \Rightarrow \overrightarrow{n_{(SDB)}}(\sqrt{3};2\sqrt{3};2)$

$\overrightarrow{SA}(0;0;-a\sqrt{3}) \Rightarrow \overrightarrow{n_{(ABCD)}}(0;0;1)$

Vậy $\cos\left(\widehat{(SDB);(ABCD)}\right) = \dfrac{\left|\overrightarrow{n_{(SDB)}}.\overrightarrow{n_{(ABCD)}}\right|}{\left|\overrightarrow{n_{(SDB)}}\right|.\left|\overrightarrow{n_{(ABCD)}}\right|} = \dfrac{2}{\sqrt{19}}$

Ví dụ 2

Cho hình chóp S.ABCD có SA ⊥ (ABCD) và $SA = a$. Đáy ABCD là hình chữ nhật. Biết cạnh bên SB, SD lần lượt tạo với đáy các góc 60^0 và 30^0. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD và AD.

a. Tính thể tích S.MNPQ theo a.

b. Tính khoảng cách từ D đến mp(SAC).

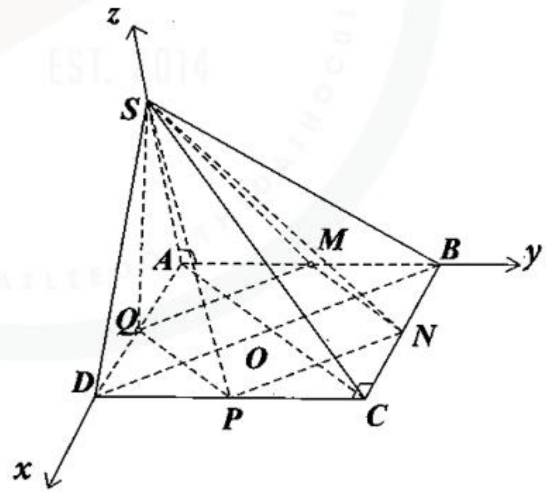
➢ **Lời giải:**

Gọi $\begin{cases} AD = BC = x \\ AB = CD = y \end{cases} (x, y > 0)$

Do SA, AB, AD đôi một vuông góc nên:

- Ta chọn hệ trục tọa độ Oxyz như hình vẽ

- Các tia Ox, Oy, Oz lần lượt đi qua D, B, S



Khi đó A(0;0;0), S(0;0;a), B(0;y;0), C(x;y;0), D(x;0;0)

$\overrightarrow{SB}(O;y;-a), \overrightarrow{SD}(x;0;-a); \overrightarrow{AB}(0;y;0), \overrightarrow{AD}(x;0;0)$

$\Rightarrow \overrightarrow{n_{(ABCD)}} = \left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}\right] = (0;0;-xy)$

$\cos\left(\widehat{SB;(ABCD)}\right)=\text{Cos}\,60° \Leftrightarrow \dfrac{|\text{-ax}y|}{\sqrt{y^2+a^2}.\sqrt{x^2y^2}}=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow y=a\sqrt{3}$

$\cos\left(\widehat{SD;(ABCD)}\right)=\text{Cos}30° \Leftrightarrow \dfrac{|\text{-ax}y|}{\sqrt{x^2+a^2}.\sqrt{x^2y^2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

Suy ra: AB=CD= $a\sqrt{3}$; AD=BC= $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

a) Ta có: $M(0;\dfrac{a\sqrt{3}}{2};0), N(\dfrac{a\sqrt{3}}{6};a\sqrt{3};0), Q(\dfrac{a\sqrt{3}}{6};0;0)$

$$\begin{cases}\overrightarrow{MN}(\dfrac{a\sqrt{3}}{6};\dfrac{a\sqrt{3}}{2};0)\\ \overrightarrow{MQ}(\dfrac{a\sqrt{3}}{6};\dfrac{-a\sqrt{3}}{2};0)\end{cases} \Rightarrow \left[\overrightarrow{MN};\overrightarrow{MQ}\right]=(0;0;\dfrac{-a^2}{2})$$

$\Leftrightarrow S_{MNPQ}=\left|\left[\overrightarrow{MN};\overrightarrow{MQ}\right]\right|=\dfrac{a^2}{2}$

Vậy thể tích khối chóp S.MNPQ:

$V_{S.MNPQ}=\dfrac{1}{3}.SA.S_{MNPQ}=\dfrac{1}{3}.a.\dfrac{a^2}{2}=\dfrac{a^3}{6}$ (đvtt)

b) Ta có: $D(\dfrac{a\sqrt{3}}{3};0;0), C(\dfrac{a\sqrt{3}}{3};a\sqrt{3};0)$

$$\begin{cases}\overrightarrow{SA}(0;0;-a)\\ \overrightarrow{SC}(\dfrac{a\sqrt{3}}{3};a\sqrt{3};-a)\end{cases} \Rightarrow \left[\overrightarrow{SA};\overrightarrow{SC}\right]=(\sqrt{3}a^2;\dfrac{-\sqrt{3}a^2}{3};0) \Leftrightarrow \overrightarrow{n_{(SAC)}}=(1;\dfrac{-1}{3};0)$$

$$\text{Mp(SAC)}\begin{cases}\textit{đi qua } A(0;0;0)\\ \textit{vtpt } \overrightarrow{n_{(SAC)}}=(1;\dfrac{-1}{3};0)\end{cases}.$$

Nên có phương trình: $x-\dfrac{1}{3}y=0$

Vậy khoảng cách từ D đến mp(SAC)

$$\text{d(D;(SAC))}=\dfrac{\left|\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\right|}{\sqrt{1+\left(\dfrac{-1}{3}\right)^2}}=\dfrac{\sqrt{30}a}{10}\text{ (đvđd)}$$

Ví dụ 3

Cho hình chóp S.ABCD, có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, A là hình chiếu của S trên mặt phẳng (ABCD). SA=$a\sqrt{2}$. Các điểm B′ và D′ lần lượt là hình chiếu của A lên các cạnh SB, SD. Mặt phẳng (AB′D′) cắt cạnh SC tại C′.

a) Chứng minh cạnh SC vuông góc với mp(AB′D′)

b) Tính thể tích khối chóp S.AB′C′D′.

➤ **Lời giải:**

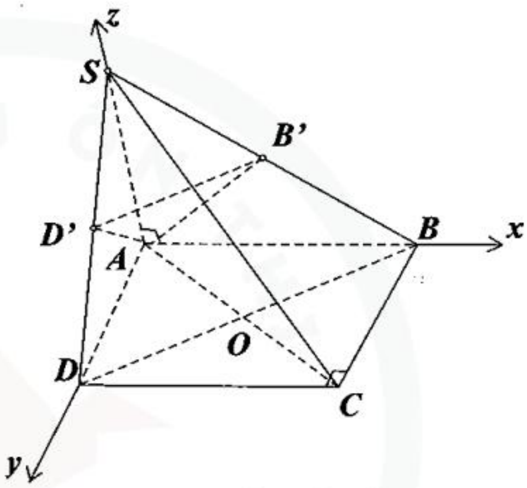
a) Do:

SA, AB, AD đôi một vuông góc nên

- Ta chọn hệ trục tọa độ Oxyz như hình vẽ

- Các tia Ox, Oy, Oz lần lượt đi qua B, D, S

Ta chứng minh được SC vuông góc với mp(AB′D′)



$S(0;0;a\sqrt{2}), A(0;0;0), B(a;0;0), C(a;a;0),$

$D(0;a;0), B'\left(\frac{2a}{3};0;\frac{\sqrt{2}a}{3}\right), D'\left(0;\frac{2a}{3};\frac{\sqrt{2}a}{3}\right)$

b) $\overrightarrow{SC}(a;a;-a\sqrt{2}) \Rightarrow \overrightarrow{u_{SC}} = (1;1;-\sqrt{2})$

Đường thẳng SC qua C(a;a;0) và có vtcp $\overrightarrow{u_{SC}}$ có phương trình là:

$$\begin{cases} x = a + t \\ y = a + t \ (t \in \mathbb{R}) \\ z = -\sqrt{2}t \end{cases}$$

Gọi C′(a+t; a+t; $-\sqrt{2}t$)

$$\left[\overrightarrow{AB'};\overrightarrow{AD'}\right] = \left(\frac{-2\sqrt{2}a^2}{9};\frac{-2\sqrt{2}a^2}{9};\frac{4a^2}{9}\right) \Rightarrow \overrightarrow{n_{(AB'D')}}(1;1;-\sqrt{2})$$

mp(AB'D') $\begin{cases} \text{đi qua } A(0;0;0) \\ vtpt\ \overrightarrow{n_{(AB'D')}}(1;1;-\sqrt{2}) \end{cases}$ nên có phương trình: $x+y-\sqrt{2}z=0$

Mà $C'\in mp(AB'D')$ nên a+t+a+t+2t=0 $\Leftrightarrow t=\frac{-a}{2}$ $\Rightarrow C'(\frac{a}{2};\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{2}}{2})$

Do đó: d(S;(AB'D'))= $\frac{|0+0-2a|}{\sqrt{1+1+2}}=a$ (đvđd)

Vậy thể tích khối chóp S.AB'C'D'

$$V_{S.AB'C'D'}=\frac{1}{3}d(S;(AB'D')).S_{AB'C'D'}=\frac{1}{3}.a.\frac{4\sqrt{2}a^2}{9}=\frac{4\sqrt{2}a}{27} \text{ (đvtt)}$$

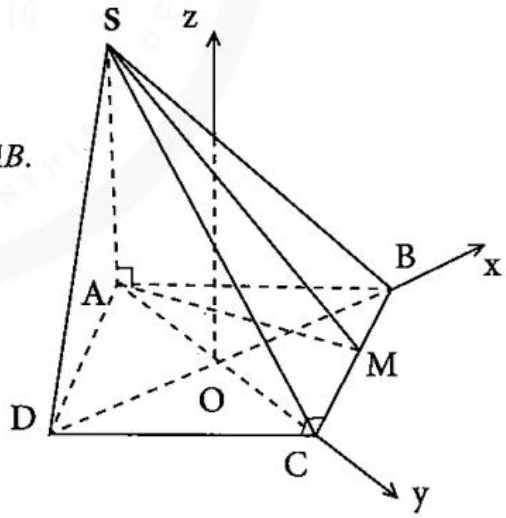
Ví dụ 4

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi cạnh a. Cạnh SA vuông góc với đáy, $\widehat{BAD}=120°$. M là trung điểm cạnh BC. $\widehat{SMA}=45°$.

a) Tính thể tích khối chóp S.ABCD

b) Tính khoảng cách từ điểm D đến mp(SBC)

➢ Lời giải:



Hình thoi ABCD có $\widehat{BAD}=120°$.

Nên $\widehat{BAM}=30°$, mà BM= $\frac{1}{2}BC=\frac{a}{2}=\frac{1}{2}AB$.

$\Rightarrow \Delta ABM$ vuông tại M

$\Rightarrow AM=AB.\sin 60°=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

ΔSAM vuông cân tại A.

Nên SA=AM= $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

a) Thể tích khối chóp S.ABCD

$$V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}.SA.S_{ABCD}=\frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{1}{2}.AC.BD=\frac{a^3}{4} \text{ (đvđd)}$$

b) Gọi O là tâm hình thoi ABCD $\Rightarrow AC \perp BD$

- Kẻ tia Oz|| SA, ta được Oz, AC, BD đôi một vuông góc tại O
- Chọn hệ trục tọa độ Oxyz như hình vẽ
- Các tia Ox, Oy lần lượt đi qua B và C

Khi đó: $S(0;\frac{-a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2}), A(0;\frac{-a}{2};0), B(\frac{a\sqrt{3}}{2};0;0); C(0;\frac{a}{2};0), D(\frac{-a\sqrt{3}}{2};0;0)$

$$\begin{cases} \overrightarrow{SB}(\frac{a\sqrt{3}}{2};\frac{a}{2};\frac{-a\sqrt{3}}{2}) \\ \overrightarrow{SC}(0;a;\frac{-a\sqrt{3}}{2}) \end{cases} \Rightarrow \left[\overrightarrow{SB};\overrightarrow{SC}\right] = \left(\frac{-3\sqrt{3}a^2}{4};\frac{3a^2}{4};\frac{\sqrt{3}a^2}{4}\right)$$

Mp(SBC) $\begin{cases} \text{đi qua } C(0;\frac{a}{2};0) \\ vtpt\ \overrightarrow{n_{(SBC)}}(1;\frac{\sqrt{3}}{2};1) \end{cases}$ có phương trình: $x+\frac{\sqrt{3}}{2}y+z-\frac{\sqrt{3}a}{4}=0$

Vậy khoảng cách từ điểm D đến mp(SBC):

$$d(D;(SBC)) = \frac{\left|\frac{-a\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}a}{4}\right|}{\sqrt{1+\frac{3}{4}+1}} = \frac{3a\sqrt{33}}{22} \text{ (đvđd)}$$

Ví dụ 5

Cho hình chóp S.ABCD có SA ⊥ (ABCD). Tứ giác ABCD là hình thang vuông tại A và D có *2AD = 2DC = AB=2a*. Cạnh bên SC tạo với đáy góc 30^0. Gọi M là trung điểm AB.

a) Tính thể tích khối chóp M.SCD

b) Tính sin góc giữa đường thẳng SM và mp(SCD)

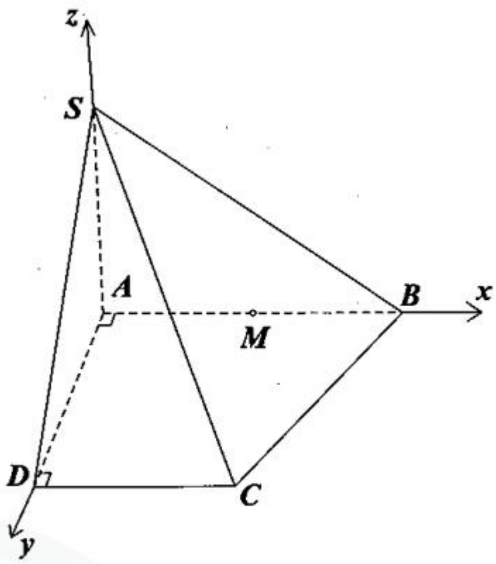
➢ **Lời giải:**

Gọi SA=x (x>0)

Do SA, AB, AD đôi một vuông góc nên:

- Chọn hệ tọa độ Oxyz như hình vẽ

- A trùng với gốc tọa độ O
- Các tia Ox, Oy, Oz lần lượt đi qua B, D, S



Khi đó:

A(0; 0; 0), S(0; 0; x), B(2a; 0; 0),

C(a; a; 0), D(0; a; 0), M(a; 0; 0)

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB}(2a;0;0) \\ \overrightarrow{SC}(a;a;-x) \\ \overrightarrow{AD}(0;a;0) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{n_{(ABCD)}} = \left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}\right] = (0;0;2a^2)$$

Ta có: $\cos\left(\widehat{SC;(ABCD)}\right) = \cos 30°$

$$\Leftrightarrow \frac{\left|-2a^2x\right|}{\sqrt{a^2+a^2+x^2}.\sqrt{4a^4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = a\sqrt{6}$$

Suy ra SA=a$\sqrt{6} \Rightarrow S(0;0;a\sqrt{6})\begin{cases} \overrightarrow{MS}(-a;0;a\sqrt{6}) \\ \overrightarrow{MC}(0;a;0) \\ \overrightarrow{MD}(-a;a;0) \end{cases} \Rightarrow \left[\overrightarrow{MC};\overrightarrow{MD}\right] = (0;0;a^2)$

a) Thể tích khối chóp M.SCD là:

$$V_{M.SCD} = \frac{1}{6}.\left|\overrightarrow{MS}\left[\overrightarrow{MC};\overrightarrow{MD}\right]\right| = \frac{1}{6}.\left|\sqrt{6}.a^3\right| = \frac{a^3}{\sqrt{6}}(\text{đvtt})$$

b) $\begin{cases} \overrightarrow{SC}(a;a;-a\sqrt{6}) \\ \overrightarrow{SD}(0;a;-a\sqrt{6}) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{n_{(SCD)}} = \left[\overrightarrow{SC};\overrightarrow{SD}\right] = (0;a^2\sqrt{6};a^2);$

$$\cos\left(\widehat{SM;(SCD)}\right) = \frac{\left|2a^3\sqrt{6}\right|}{\sqrt{a^2+6a^2}.\sqrt{6a^4+a^4}} = \frac{2\sqrt{6}}{7}$$

Vậy $\sin\left(\widehat{SM;(SCD)}\right) = 1-\left(\frac{2\sqrt{6}}{7}\right)^2 = \frac{25}{49}.$

Ví dụ 6

Cho hình chóp S.ABCD có SA ⊥ (ABCD). Tứ giác ABCD là hình thang vuông tại A và D có $2AD = 2DC = AB=4a$. Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của SB và AB. Khoảng cách từ Q tới mặt phẳng (PBC) bằng a. Trong mp(ABCD), kẻ đường thẳng BE song song với AD và cắt DC tại E.

a) Tính thể tích khối chóp S.ABED

b) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và PE

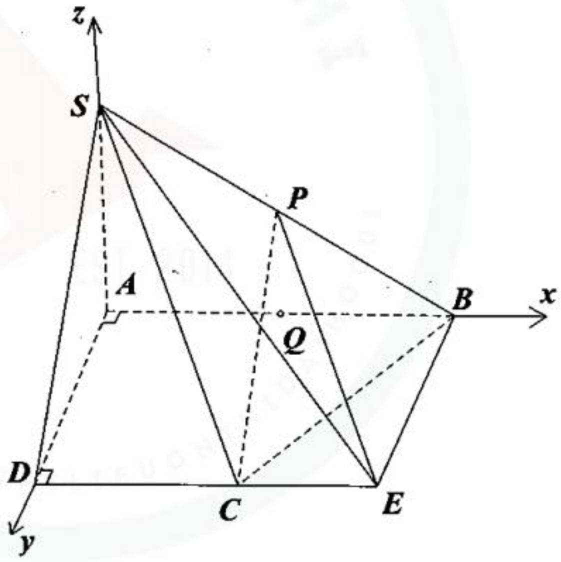
➤ **Lời giải:**

Gọi SA=t (t>0)

Do SA, AB, AD đôi một vuông góc tại A nên chọn hệ tọa độ Oxyz như hình vẽ.

- Điểm A trùng với gốc tọa độ O.

- Các tia Ox, Oy, Oz lần lượt đi qua B, D, S.



Ta có: A(0;0;0), S(0;0;t),

B(4a;0;0), D(0;2a;0),

Q(2a; 0;0), C(2a;2a;0), E(4a;2a;0)

$$\begin{cases}\overrightarrow{BP}(-2a;0;\frac{t}{2})\\ \overrightarrow{BC}(-2a;2a;0)\end{cases} \Rightarrow \left[\overrightarrow{BP};\overrightarrow{BC}\right] = \left(-at;-at;-4a^2\right)$$

$$\text{Mp(PBC)}\begin{cases}\text{đi qua } B\left(4a;0;0\right)\\ \text{vtpt } \overrightarrow{n_{(BPC)}} = (t;t;4a)\end{cases}.$$

Nên Mp(PBC) có phương trình: $tx + ty + 4az - 4at=0$

Lại có:

$$d(Q; (PBC))=a \Leftrightarrow \frac{|2at-4at|}{\sqrt{t^2+t^2+16a^2}} = a \Leftrightarrow t = 2\sqrt{2}a \Leftrightarrow SA = 2\sqrt{2}a.$$

a) Diện tích: $S_{ABED} = AB.AD = 8a^2$

Thể tích khối chóp S.ABCD

$$V_{S.ABED} = \frac{1}{3}.SA.S_{ABED} = \frac{1}{3}.2\sqrt{2}a.8a^2 = \frac{16\sqrt{2}a^3}{3} \text{ (đvtt)}$$

b) $\begin{cases} \overrightarrow{SA}(0;0;-2\sqrt{2}a) \\ \overrightarrow{PE}(2a;2a;-a\sqrt{2}) \Rightarrow \left[\overrightarrow{SA};\overrightarrow{PE}\right] = (4\sqrt{2}a^2;-4\sqrt{2}a^2;0) \\ \overrightarrow{AE}(4a;2a;0) \end{cases}$

Vậy khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và PE

$$d(SA;PE) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{SA};\overrightarrow{PE}\right]\overrightarrow{AE}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{SA};\overrightarrow{PE}\right]\right|} = \frac{\left|16\sqrt{2}a^3 - 8\sqrt{2}a^3\right|}{\sqrt{32a^4+16a^4}} = \frac{2a\sqrt{6}}{3} \text{ (đvđd)}$$

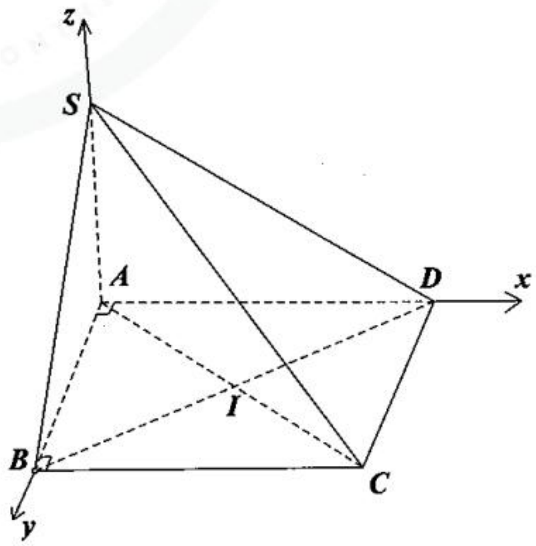
Ví dụ 7

Cho hình chóp S.ABCD có SA $\perp$ (ABCD) và đáy là hình chữ nhật. Góc BSC bằng 30^0, SC tạo với (ABC) góc 45^0 và cạnh $BC = a$.

a) Gọi I là tâm HCN ABCD. Tính khoảng cách từ I đến mp(SAB)

b) Tính cosin góc giữa mp(SAC)và mp(SCD)

➢ **Lời giải:**



Gọi SA=x, AB=CD=y (x,y >0)

SA, AB, AD đôi một vuông góc tại A nên

- Chọn hệ tọa độ Oxyz như hình vẽ

- Điểm A trùng với gốc tọa độ O.

- Các tia Ox, Oy, Oz lần lượt đi qua D, B, S.

Khi đó: A(0;0;0), S(0;0;x), B(0;y;0), C(a;y;0), D(a;0;0)

$$\begin{cases}\overrightarrow{SC}(a;y;-x)\\ \overrightarrow{AB}(0;y;0)\\ \overrightarrow{AC}(a;y;0)\\ \overrightarrow{SB}(0;x;-x)\end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{n_{(ABC)}}=\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right]=(0;0;-ay)$$

Lại có:

$$\cos\left(\widehat{SC;(ABC)}\right)=\cos 45° \Leftrightarrow \frac{|-axy|}{\sqrt{a^2+x^2+y^2}.\sqrt{a^2y^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\Leftrightarrow x^2-y^2=0 \Leftrightarrow x=y$ (vì x, y>0)

Ta có: $\cos\widehat{SBC}=\cos 30°$

$$\Leftrightarrow \frac{\left|x^2+x^2\right|}{\sqrt{x^2+x^2}.\sqrt{a^2+x^2+x^2}}=\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x=\frac{a\sqrt{6}}{2}$$

$$\Leftrightarrow SA=AB=CD=\frac{a\sqrt{6}}{2}$$

a) $S(0;0;\frac{a\sqrt{6}}{2}), I(\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{6}}{4};0), B(0;\frac{a\sqrt{6}}{2};0)$

$$\begin{cases}\overrightarrow{AS}(0;0;\frac{a\sqrt{6}}{2})\\ \overrightarrow{AB}(0;\frac{a\sqrt{6}}{2};0)\end{cases} \Rightarrow \left[\overrightarrow{AS};\overrightarrow{AB}\right]=\left(\frac{-3a^2}{2};0;0\right) \Rightarrow \overrightarrow{n_{(SAB)}}(1;0;0)$$

Mp(SAB)$\begin{cases}\text{đi qua } A(0;0;0)\\ vtpt\ \overrightarrow{n_{(SAB)}}=(1;0;0)\end{cases}$ nên có phương trình: x=0

Khoảng cách từ I đến mp(SAB) là: d(I;(SAB))=$\frac{\left|\frac{a}{2}\right|}{\sqrt{1^2}}=\frac{a}{2}$

b) $\begin{cases}\overrightarrow{SA}\left(0;0;\frac{-a\sqrt{6}}{2}\right)\\ \overrightarrow{SC}\left(a;\frac{a\sqrt{6}}{2};\frac{-a\sqrt{6}}{2}\right)\end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{n_{(SAC)}}=\left[\overrightarrow{SA};\overrightarrow{SC}\right]=\left(\frac{3}{2}a^2;\frac{-a^2\sqrt{6}}{2};0\right)$

$$\overrightarrow{SD}\left(a;0;\frac{-a\sqrt{6}}{2}\right) \Rightarrow \overrightarrow{n_{(SAC)}}=\left[\overrightarrow{SC};\overrightarrow{SD}\right]=\left(\frac{-3}{2}a^2;0;\frac{-a^2\sqrt{6}}{2}\right)$$

Cosin góc giữa mp(SAC)và mp(SCD)

$$\cos\left(\widehat{(SAC);(SCD)}\right) \Leftrightarrow \frac{\left|\frac{9}{4}a^4\right|}{\sqrt{\frac{9}{4}a^4+\frac{6}{4}a^4}.\sqrt{\frac{9}{4}a^4+\frac{6}{4}a^4}} = \frac{3}{5}.$$

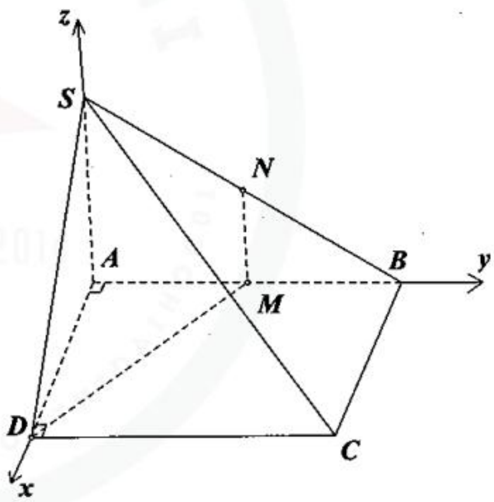
Ví dụ 8

Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh bằng a. Biết hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Góc giữa mặt bên (SBC) với đáy bằng 45^0. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và SB.

a. Tính thể tích N.MBCD theo a.

b. Tính khoảng cách từ M tới mặt phẳng (SBC).

➢ **Lời giải**



Ta thấy SA, AB, AD đôi một vuông góc với nhau tại A.

- Chọn hệ trục tọa độ Oxyz như hình vẽ

- Gốc tọa độ O trùng với A

- Các tia Ox, Oy, Oz lần lượt đi qua D, B, S.

Gọi SA = x(x>0)

Khi đó: A(0;0;0), S(0;0;x), B(0;a;0), C(a;a;0), D(a;0;0)

$$\begin{cases} \overrightarrow{SB}(0;a;-x) \\ \overrightarrow{SC}(a;a;-x) \\ \overrightarrow{AB}(0;a;0) \\ \overrightarrow{AD}(a;0;0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{n_{(SBC)}} = \left[\overrightarrow{SB};\overrightarrow{SC}\right] = (0;-ax;-a^2) \\ \overrightarrow{n_{(ABCD)}} = \left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}\right] = (0;0;-a^2) \end{cases}$$

$$\cos\left(\widehat{(SBC);(ABCD)}\right) = \cos 45° \Leftrightarrow \frac{\left|a^4\right|}{\sqrt{a^2x^2+a^4}.\sqrt{a^4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\Leftrightarrow \sqrt{2}a = \sqrt{x^2+a^2} \Leftrightarrow x = a$ (do x, a>0)

NM là đường trung bình ΔSAB nên MN=$\frac{1}{2}SA=\frac{a}{2}$.

Và MN $\perp$ (ABCD), hay MN $\perp$ (MBCD)

$$S_{MBCD}=\frac{(MB+CD).BC}{2}=\frac{\left(\frac{a}{2}+a\right).a}{2}=\frac{3a^2}{4} \text{ (đvdt)}$$

a) Thể tích khối chóp N.MBCD

$$V_{N.MBCD}=\frac{1}{3}.NM.S_{MBCD}=\frac{1}{3}.\frac{a}{2}.\frac{3a^2}{4}=\frac{a^3}{8} \text{ (đvdt)}$$

b) Ta có: $M(0;\frac{a}{2};0)$

Mp (SBC) $\begin{cases} đi\ qua\ S(0;0;a) \\ vtpt\ \overrightarrow{n_{(SBC)}}=(0;-a^2;-a^2) \end{cases}$ có phương trình: y+z-a=0

Vậy khoảng cách từ M tới mặt phẳng (SBC) là:

$$d(M;(SBC))=\frac{\left|\frac{a}{2}-a\right|}{\sqrt{2}}=\frac{a\sqrt{2}}{4} \text{ (đvđd)}$$

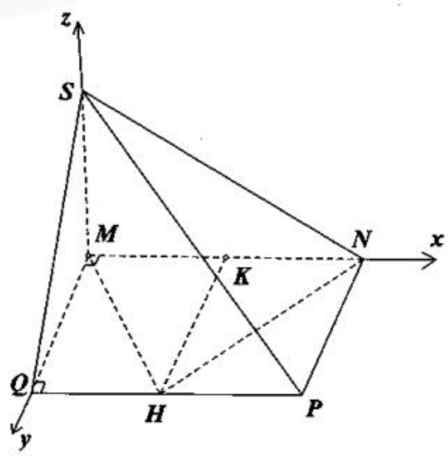
Ví dụ 9

Cho hình chóp S.MNPQ có đường cao SM. Góc giữa mp(SPQ) và mp(MNPQ) bằng 60°. Hình chữ nhật MNPQ có MN = 4MQ = 4a.

a) Tính thể tích khối chóp S.MNH.

b) Tính khoảng cách giữa 2 đường thẳng SN và MH.

➢ **Lời giải**



Ta thấy:

MS, MN, MQ đôi một vuông góc tại M nên

- Chọn hệ trục tọa độ Oxyz như hình vẽ.

- Gốc tọa độ O trùng với M.

- Các tia Ox, Oy, Oz lần lượt đi qua các điểm N, Q, S.

a) Giả sử SM=x(x>0), S(0;0;x), M(0;0;0), N(4a;0;0), P(4a;a;0), Q(0;a;0), H(2a;a;0)

$$\begin{cases}\overrightarrow{SP}(4a;a;-x)\\ \overrightarrow{SQ}(0;a;-x)\\ \overrightarrow{MN}(4a;0;0)\\ \overrightarrow{MQ}(0;a;0)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\left[\overrightarrow{SP};\overrightarrow{SQ}\right]=(0;4ax;4a^2)\Rightarrow \vec{n}_{(SPQ)}(0;x;a)\\ \left[\overrightarrow{MN};\overrightarrow{MQ}\right]=(0;0;4a^2)\Rightarrow \vec{n}_{(MNPQ)}(0;0;1)\end{cases}$$

Do đó: $\cos\left(\widehat{(SPQ);(MNPQ)}\right)=\cos 60^\circ \Leftrightarrow \dfrac{|a|}{\sqrt{x^2+a^2}.\sqrt{1^2}}=\dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x=a\sqrt{3}\Rightarrow SM=a\sqrt{3}$.

Vậy thể tích khối chóp S.MNH là:

$V_{S.MNH}=\dfrac{1}{3}.SM.S_{MNH}=\dfrac{1}{3}.a\sqrt{3}.\dfrac{1}{2}.a.4a=\dfrac{2\sqrt{3}a^3}{3}$ (đvdt)

b) $\begin{cases}\overrightarrow{SM}(0;0;-a\sqrt{3})\\ \overrightarrow{SN}(4a;0;-a\sqrt{3})\Rightarrow\left[\overrightarrow{SN};\overrightarrow{MH}\right]=(\sqrt{3}a^2;-2\sqrt{3}a^2;4a^2)\\ \overrightarrow{MH}(2a;a;0)\end{cases}$

Vậy khoảng cách giữa 2 đường thẳng SN và MH là:

$$d(SN;MH)=\frac{\left|\overrightarrow{SM}\left[\overrightarrow{SN};\overrightarrow{MH}\right]\right|}{\left|\left[\overrightarrow{SN};\overrightarrow{MH}\right]\right|}=\frac{\left|-4\sqrt{3}a^3\right|}{\sqrt{3a^4+12a^4+16a^4}}=\frac{4a\sqrt{93}}{31}\ \text{(đvđd)}$$

Ví dụ 10

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a. Cạnh bên SA vuông góc với đáy, SA=2a. Mặt phẳng (α) qua BC hợp với AC một góc 30°, cắt SA, SD lần lượt tại M và N.

a) Tính diện tích thiết diện BCNM

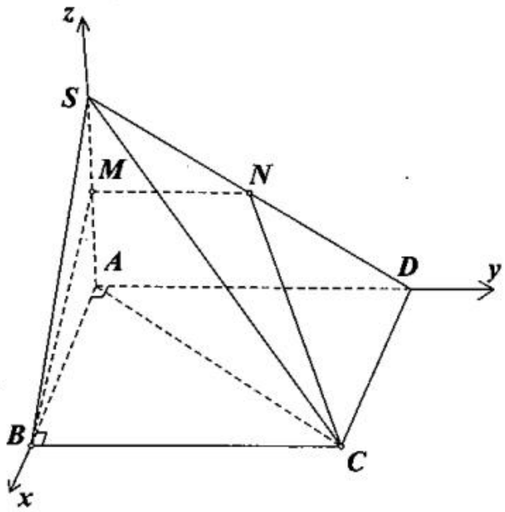
b) Tính khoảng cách giữa 2 đường thẳng AB và CN.

➤ **Lời giải:**

AS, AB, AD đôi một vuông góc nên chọn trục tọa độ Oxyz như hình vẽ.

- Gốc tọa độ O trùng với A.

- Các tia Ox, Oy, Oz lần lượt đi qua B, D, S.



Đặt AM=h (0<h<2a)

Khi đó: M(0; 0; h), A(0; 0; 0), B(a; 0; 0), C(a; a; 0), S(0; 0; 2a)

$$\begin{cases} \overrightarrow{BM}(-a;0;h) \\ \overrightarrow{BC}(0;a;0) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left[\overrightarrow{BM};\overrightarrow{BC}\right] = (-ah;0;-a^2)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{n_{(\alpha)}} = (h;0;a)$$

$$\overrightarrow{AC}(a;a;0) \Rightarrow \overrightarrow{u_{AC}} = (1;1;0)$$

mp(α) hợp với AC một góc $30°$ nên: $\dfrac{|h|}{\sqrt{h^2+a^2}.\sqrt{1^2+1^2}} = \sin 30° = \dfrac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \frac{h}{\sqrt{2}.\sqrt{h^2+a^2}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow h\sqrt{2} = \sqrt{h^2+a^2} \Leftrightarrow h = a.$$

$\Rightarrow$ M là trung điểm của SA.

Ta có: $\begin{cases} MN = (\alpha) \cap (SAD) \\ BC \parallel AD \end{cases} \Rightarrow MN \parallel BC \parallel AD$

$BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp BM \Leftrightarrow BCNM$ là hình thang vuông tại B và M.

ΔABM vuông cân tại A nên BM= $a\sqrt{2}$; ΔSAD có MN là đường trung bình nên MN= $\dfrac{a}{2}$.

a) Diện tích hình thang vuông BCNM là:

$$S_{BCNM} = \frac{(MN+BC)BM}{2} = \frac{3\sqrt{2}a^2}{4}.$$

b) $N(0;\dfrac{a}{2};a) \Rightarrow \overrightarrow{CN}(-a;\dfrac{-a}{2};a), \overrightarrow{AB}(a;0;0); \overrightarrow{AC}(a;a;0)$

$$\Rightarrow \left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CN}\right] = (0;-a^2;\frac{-a^2}{2})$$

Vậy khoảng cách giữa 2 đường thẳng AB và CN

$$d(AB;CN)=\frac{\left|\overrightarrow{AC}\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CN}\right]\right|}{\left|\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CN}\right]\right|}=\frac{\left|-a^3\right|}{\sqrt{a^4+\frac{a^4}{4}}}=\frac{2a\sqrt{5}}{5} \text{ (đvđd)}$$

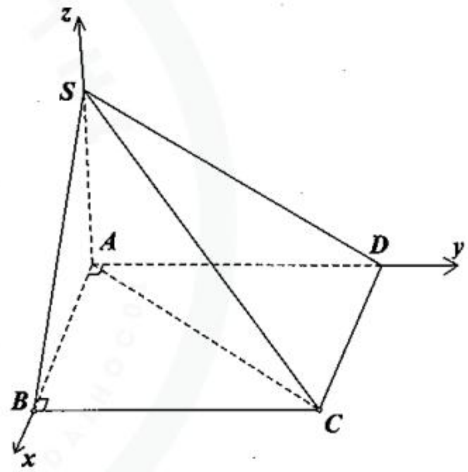
Ví dụ 11

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Cạnh SC tạo với mặt phẳng đáy 1 góc 45°.

a) Tính thể tích khối chóp S.ABCD

b) Tính khoảng cách giữa 2 đường thẳng SB và AC

➢ **Lời giải:**



AS, AB, AD đôi một vuông góc nên

- Chọn trục tọa độ Oxyz như hình vẽ
- Gốc tọa độ O trùng với A.
- Các tia Ox, Oy, Oz lần lượt đi qua B, D, S

Đặt SA=x (x>0)

Khi đó:

S(0;0;x), A(0;0;0), B(a;0;0), C(a;a;0), D(0;a;0).

$$\begin{cases}\overrightarrow{SC}(a;a;-x)\\ \overrightarrow{AC}(a;a;0) \Rightarrow \left[\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AD}\right]=(0;0;a^2)\\ \overrightarrow{AD}(0;a;0)\end{cases}$$

$$\cos\left(\widehat{SC;(ABCD)}\right)=\cos 45° \Leftrightarrow \frac{\left|a.0+a.0+(-x)a^2\right|}{\sqrt{a^2+a^2+x^2}.\sqrt{a^4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}xa^2=\sqrt{2a^2+x^2}.a^2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}x=\sqrt{2a^2+x^2} \Leftrightarrow x=a\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow S(0;0;a\sqrt{2}).$$

a) Thể tích khối chóp S.ABCD là:

$$V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}.SA.S_{ABCD}=\frac{1}{3}.a\sqrt{2}.a^2=\frac{\sqrt{2}a^3}{3}.$$

b) Ta có: $\begin{cases}\overrightarrow{SB}(a;0;-a\sqrt{2})\\ \overrightarrow{SA}(0;0;-a\sqrt{2})\\ \overrightarrow{AC}(a;a;0)\end{cases} \Rightarrow \left[\overrightarrow{SB};\overrightarrow{AC}\right]=(\sqrt{2}a^2;-\sqrt{2}a^2;a^2)$

Vậy khoảng cách giữa 2 đường thẳng SB và AC là:

$$d(SB;AC)=\frac{\left|\overrightarrow{SA}\left[\overrightarrow{SB};\overrightarrow{AC}\right]\right|}{\left|\left[\overrightarrow{SB};\overrightarrow{AC}\right]\right|}$$

$$=\frac{\left|\sqrt{2}a^2.0+(-\sqrt{2}a^2).0+a^2.(-a\sqrt{2})\right|}{\sqrt{2a^4+2a^4+a^4}}=\frac{a^3\sqrt{2}}{\sqrt{5}.a^2}=\frac{a\sqrt{10}}{5}\text{ (đvđd)}$$

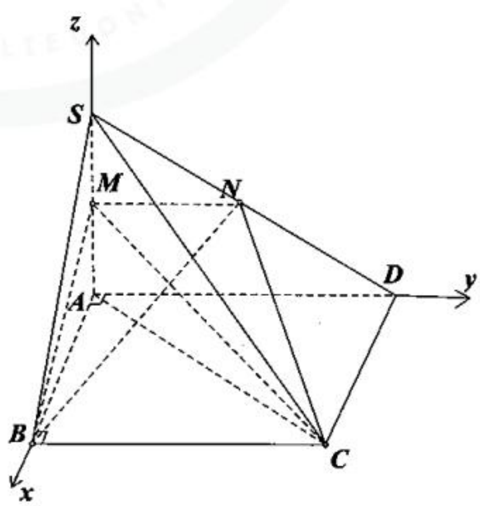
Ví dụ 12

Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình chữ nhật. Có AB=a, AD=b. Cạnh SA vuông góc với đáy, SA=2a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và SD.

a) Tính khoảng cách từ điểm A đến mp(BCN)

b) Tìm điều kiện của a và b để $\cos\widehat{CMN}=\frac{\sqrt{3}}{3}$. Khi đó, tính thể tích khối chóp S.BCNM theo a.

➤ **Lời giải**



Ta thấy:

AS, AB, AD đôi một vuông góc nên

- Chọn trục tọa độ Oxyz như hình vẽ

- Gốc tọa độ O trùng với A. Các tia Ox, Oy, Oz lần lượt đi qua B, D, S

Ta có: A(0;0;0), B(a;0;0), C(a;b;0), M(0;0;a), $N(0;\frac{b}{2};a)$, S(0;0;2a)

$\overrightarrow{BC}(0;b;0);\overrightarrow{BN}(-a;\frac{b}{2};a)$

$\Rightarrow \left[\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BN}\right]=\left(ab;0;ab\right)\Rightarrow \vec{n}_{(BCN)}=(1,0,1)$

a) Mp(BCN) $\begin{cases}\text{đi qua } B(a;0;0)\\ \text{vtpt } \vec{n}_{(BCN)}=(1;0;1)\end{cases}$ có phương trình: x+z-a=0

Vậy khoảng cách từ điểm A đến mp(BCN)

là: d(A;(BCN))=$\frac{|-a|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{a\sqrt{2}}{2}$ (đvđd)

b) $\overrightarrow{MC}(a;b;-a),\overrightarrow{MN}(0;\frac{b}{2};0)$

$$\cos\widehat{CMN}=\frac{\sqrt{3}}{3}\Leftrightarrow\frac{\left|\frac{b^2}{2}\right|}{\sqrt{a^2+b^2+a^2}.\sqrt{\frac{b^2}{4}}}=\frac{\sqrt{3}}{3}\Leftrightarrow b\sqrt{3}=\sqrt{2a^2+b^2}\Leftrightarrow a=b$$

(vì a, b>0)

Phương trình mp(BCN) là phương trình mp(BCNM) và có dạng: x+z-a=0

d(S;(BCNM))=$\frac{|2a-a|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{a\sqrt{2}}{2}$ (đvđd)

Tứ giác BCNM có MN∥BC (vì cùng song song với AD)

$\Rightarrow$ tứ giác BCNM là hình thang.

MN=$\frac{1}{2}AD=\frac{a}{2}$

ΔSAB có: $\left.\begin{array}{l}BC\perp AB, BC\perp SA\\ BM\subset(SAB)\end{array}\right\}\Rightarrow BC\perp BM$

Suy ra: BM là đường cao hình thang BCNM và BM=$a\sqrt{2}$

$$\Rightarrow S_{BCNM}=\frac{(MN+BC)BM}{2}=\frac{\left(\frac{a}{2}+a\right)a\sqrt{2}}{2}=\frac{3\sqrt{2}a^2}{4}$$

Vậy thể tích khối chóp S.BCNM là:

$$V_{S.BCNM}=\frac{1}{3}.d(S;(BCNM)).S_{BCNM}=\frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{2}}{2}.\frac{3\sqrt{2}a^2}{4}=\frac{a^3}{4}\text{ (đvtt)}$$

Ví dụ 13

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là nửa lục giác đều nội tiếp đường tròn đường kính AB=2a, cạnh bên SA vuông góc với đáy, SA=$a\sqrt{3}$.

a) Tính cosin góc giữa mp (SAD) và mp(SCD)

b) Tính khoảng cách giữa đường thẳng AB và mp(SCD)

➤ Lời giải

Trong mp(ABCD), kẻ tia Ay ⊥ AB),

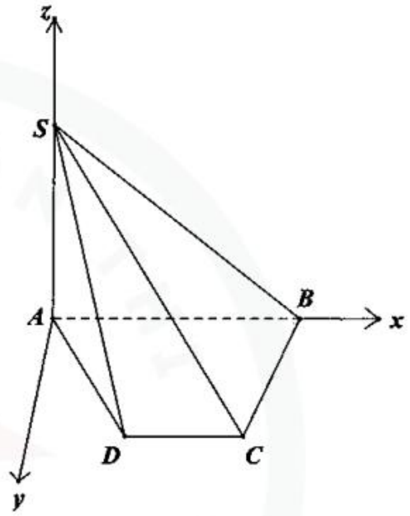
ta được Ay, AB, AS đôi một vuông góc

- Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.

- Gốc tọa độ O trùng với A

- Các tia Ox, Oz lần lượt đi qua B và S

Khi đó: A(0;0;0), B(2a;0;0),



$C(\frac{3a}{2};\frac{\sqrt{3}a}{2};0), D(\frac{a}{2};\frac{\sqrt{3}a}{2};0), S(0;0;a\sqrt{3})$

$$\begin{cases}\overrightarrow{AS}(0;0;a\sqrt{3})\\ \overrightarrow{AD}(\frac{a}{2};\frac{\sqrt{3}a}{2};0)\end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{n}_{(SAD)}=\left[\overrightarrow{AS};\overrightarrow{AD}\right]=\left(\frac{-3a^2}{2};\frac{\sqrt{3}a^2}{2};0\right)$$

$$\begin{cases}\overrightarrow{SB}(2a;0;-a\sqrt{3})\\ \overrightarrow{SC}(-\frac{a}{2};\frac{\sqrt{3}a}{2};0)\end{cases} \Rightarrow \vec{n}_{(SBC)}=\left[\overrightarrow{SB};\overrightarrow{SC}\right]=\left(\frac{3a^2}{2};\frac{\sqrt{3}a^2}{2};\sqrt{3}a^2\right)$$

$$\cos\left(\widehat{(SAD);(SBC)}\right)=\frac{\left|\frac{-9a^4}{4}+\frac{3a^4}{4}\right|}{\sqrt{\frac{9a^4}{4}+\frac{3a^4}{4}}.\sqrt{\frac{9a^4}{4}+\frac{3a^4}{4}+3a^4}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

b) AB // CD $\Rightarrow$ AB // mp(SCD) $\Rightarrow$ d(AB;(SCD))=d(A;(SCD))

Ta có: $\begin{cases} \overrightarrow{SC}(-\frac{3a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};-a\sqrt{3}) \\ \overrightarrow{SD}(\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};-a\sqrt{3}) \end{cases} \Rightarrow \left[\overrightarrow{SC};\overrightarrow{SD}\right]=(0;a\sqrt{3};\frac{a\sqrt{3}}{2}) \Rightarrow \vec{n}_{(SCD)}=(0;1;\frac{1}{2})$

$\Rightarrow$ Phương trình mp(SCD) qua S là: $y+\frac{1}{2}(z-a\sqrt{3})=0$.

Hay $y+\frac{1}{2}z-\frac{a\sqrt{3}}{2}=0$

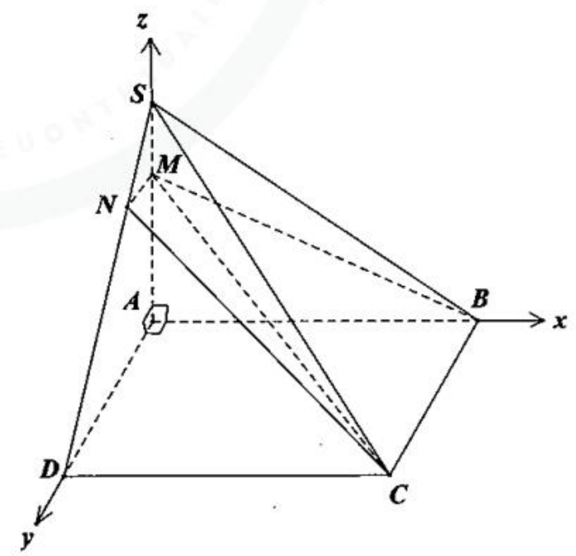
Vậy khoảng cách giữa đường thẳng AB và mp(SCD) là:

$$d(AB;(SCD))=d(A;(SCD))=\frac{\left|\frac{-a\sqrt{3}}{2}\right|}{\sqrt{1+\frac{1}{4}}}=\frac{a\sqrt{15}}{5} \text{ (đvdd)}$$

Ví dụ 14

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật AB=a, AD=2a. Cạnh SA vuông góc với đáy (ABCD), cạnh SB hợp với đáy một góc 60^0. Trên SA lấy điểm M sao cho $SM=\frac{a\sqrt{3}}{3}$. Mặt phẳng (BCM) cắt SD tại N. Tính thể tích khối chóp S.BCMN.

➤ Lời giải:



Do $SA\perp(ABCD)$.

Nên đặt trục Axyz như hình vẽ

Ta có: $A(0;0;0);B(a;0;0);$

$C(a;2a;0);D(0;2a;0)$

Mặt phẳng (ABCD)

$\in(Axy)\Rightarrow \vec{n}_{(ABCD)}=(0;0;1)$

Gọi $S(0;0;h)\Rightarrow \overrightarrow{SB}=(a;0;-h)$.

Ta có:

$\sin 60^0=\sin\left[SB,(ABCD)\right]$

$$= \frac{\left|\overrightarrow{SB}.\vec{n}_{(ABCD)}\right|}{\left|\overrightarrow{SB}\right|.\left|\vec{n}_{(ABCD)}\right|} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{h}{\sqrt{a^2+h^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow h = a\sqrt{3} \Rightarrow S\left(0;0;a\sqrt{3}\right)$$

Do $MA = \frac{2a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow M\left(0;0;\frac{2a\sqrt{3}}{3}\right) \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MB} = \left(a;0;\frac{-2a\sqrt{3}}{3}\right) \\ \overrightarrow{MC} = \left(a;2a;-\frac{2a\sqrt{3}}{3}\right) \end{cases}$

$$\Rightarrow \vec{n}_{(MNBC)} = \left[\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MC}\right] = \left(\frac{4\sqrt{3}}{3}a^2;0;2a^2\right).$$

Mp (MNBC) $\begin{cases} \text{đi qua } B\left(a;0;0\right) \\ \text{vtpt } \vec{n} = \left(\frac{4\sqrt{3}}{3}a^2;0;2a^2\right) \end{cases}$

có phương trình: $\frac{4\sqrt{3}}{3}a^2x + 2a^2z - \frac{4\sqrt{3}}{3}a^3 = 0$.

$$d_{((MNBC);S)} = \frac{\left|a\sqrt{3}.2a^2 - \frac{4\sqrt{3}}{3}a^3\right|}{\sqrt{\frac{48}{9}a^4 + 4a^4}} = \frac{1}{\sqrt{7}}a.$$

Ta có: $\overrightarrow{SD} = \left(0;2a;-a\sqrt{3}\right)$.

Do tam giác SMN đồng dạng tam giác SAD

$$\Rightarrow \frac{SN}{SD} = \frac{SM}{SA} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{3}}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{3} \Rightarrow \overrightarrow{SN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SD}.$$

Gọi $N\left(x;y;z\right) \Rightarrow \overrightarrow{SN}\left(x;y;z-a\sqrt{3}\right)$

$$\begin{cases} x = 0.\frac{1}{3} \\ y = 2a.\frac{1}{3} \\ z = -a\sqrt{3}.\frac{1}{3} + a\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{2}{3}a \\ z = \frac{2\sqrt{3}}{3}a \end{cases} \Rightarrow N\left(0;\frac{2}{3}a;\frac{2\sqrt{3}a}{3}\right).$$

$\Rightarrow \overrightarrow{MN} = \left(0; \frac{2}{3}a; 0\right) \Rightarrow \left|\overrightarrow{MN}\right| = \frac{2}{3}a$

$\overrightarrow{BC} = (0; 2a; 0)$.

Gọi I là trung điểm BC $\Rightarrow I(a; a; 0) \Rightarrow \overrightarrow{MI} = \left(a; a; \frac{-2a\sqrt{3}}{3}\right)$

Ta có: $\left[\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{MI}\right] = \left(\frac{4\sqrt{3}}{3}a^2; 0; 2a^2\right)$.

Thay vào (1) ta có:

$$d(M;BC) = \frac{\sqrt{\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}a^2\right)^2 + 4a^4}}{2a} = \frac{\frac{2\sqrt{21}}{3}a^2}{2a} = \frac{\sqrt{21}}{3}a$$

$$S_{MNBC} = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}a + 2a\right).\frac{\sqrt{21}}{3}a = \frac{4\sqrt{21}}{9}a^2$$

$$\Rightarrow V_{SMNBC} = \frac{1}{3}.\frac{4\sqrt{21}}{9}a^2.\frac{1}{\sqrt{7}}a = \frac{4\sqrt{3}a^3}{18} \text{ (đvtt).}$$

Vậy $V_{SMNBC} = \frac{4\sqrt{3}}{18}.a^3$ (đvtt).

Ví dụ 15

Khối chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a và SA vuông góc với mặt phẳng đáy (ABCD), SA=2a. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của A trên SB, SD; I là giao điểm của SC và mặt phẳng (AEF). Tính thể tích khối chóp S.AEIF và khoảng cách từ IE đến AF.

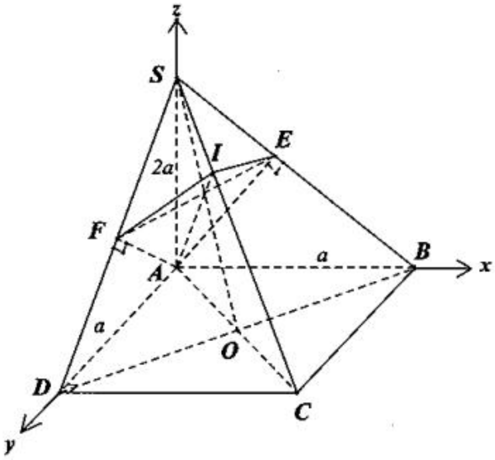
➢ **Lời giải:**

O là tâm hình vuông ABCD.

Ta có:

$SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp AD \Rightarrow \Delta SAD$ vuông tại A

$\Rightarrow SD = \sqrt{4a^2 + a^2} = a\sqrt{5}$.



$$\frac{1}{AF^2}=\frac{1}{AS^2}+\frac{1}{AD^2}=\frac{1}{4a^2}+\frac{1}{a^2}$$

$$\Rightarrow AF=\frac{2a\sqrt{5}}{5}\Rightarrow SF=\frac{4\sqrt{5}}{5}a$$

Tương tự: ΔSAB vuông tại A.

$\Rightarrow SB=\sqrt{4a^2+a^2}=a\sqrt{5}$.

$$\frac{1}{AE^2}=\frac{1}{4a^2}+\frac{1}{a^2}\Rightarrow AE=\frac{2a\sqrt{5}}{5}$$

$$\Rightarrow SE=\frac{4\sqrt{5}a}{5}\Rightarrow \frac{SE}{SB}=\frac{4}{5}\Rightarrow \overrightarrow{SE}=\frac{4}{5}\overrightarrow{SB}.$$

Đặt trục Axyz như hình vẽ ta có:

$A(0;0;0);B(a;0;0);C(a;a;0);D(0;a;0);$

$S(0;0;2a)\Rightarrow \overrightarrow{SD}=(0;a;-2a);\overrightarrow{SB}=(a;0;-2a).$

Gọi $F(x;y;z)\Rightarrow \overrightarrow{SF}=(x;y;z-2a)$.

Ta có: $\dfrac{SF}{SD}=\dfrac{4\sqrt{5}}{5}a.\sqrt{5}=\dfrac{4}{5}\Rightarrow \overrightarrow{SF}=\dfrac{4}{5}\overrightarrow{SD}\Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{4}{5}.0 \\ y=\dfrac{4}{5}a \\ z-2a=\dfrac{4}{5}.-2a \end{cases}$

Làm tương tự $E\left(\dfrac{4}{5}a;0;\dfrac{2}{5}a\right)$.

$SC\begin{cases} \text{đi qua } S(0;0;2a) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{SC}=(a;a;\text{-}2a) \end{cases}\Rightarrow$ phương trình $SC:\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{a}=\dfrac{z-2a}{-2a}$.

Do $I\in SC\Rightarrow I(at;at;-2at+2a)$.

$$\begin{cases} \overrightarrow{AE}=\left(\dfrac{4}{5}a;0;\dfrac{2}{5}a\right) \\ \overrightarrow{AF}=\left(0;\dfrac{4}{5}a;\dfrac{2}{5}a\right) \end{cases}\Rightarrow \vec{n}_{AEF}=\left[\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AF}\right]=\left(\frac{-8}{25}a^2;\frac{-8}{25}a^2;\frac{16}{25}a^2\right).$$

Mặt phẳng (AEF) đi qua A(0;0;0).

$$\vec{n}=\left(-\frac{8}{25}a^2;-\frac{8}{25}a^2;\frac{16}{26}a^2\right)\Rightarrow pt:-\frac{8}{25}a^2x-\frac{8}{25}a^2y+\frac{16}{25}a^2z=0.$$

$I=SC\cap(AEF)$ nên ta có:

$$-\frac{8}{25}a^2.at-\frac{8}{25}a^2.at+\frac{16}{25}a^2(2a-2at)=0\Leftrightarrow t=\frac{2}{3}\Rightarrow I\left(\frac{2}{3}a;\frac{2}{3}a;\frac{2}{3}a\right)$$

$$\overrightarrow{IE}=\left(\frac{2}{15}a;-\frac{2}{3}a;-\frac{4}{15}a\right);\overrightarrow{IF}=\left(-\frac{2}{3}a;\frac{2}{15}a;-\frac{4}{15}a\right).$$

$$S_{IEF}=\frac{1}{2}\left[\overrightarrow{IE};\overrightarrow{IF}\right]=\frac{1}{2}\left|\sqrt{\left(\frac{16}{75}a^2\right)^2+\left(\frac{16}{75}a^2\right)^2+\left(\frac{32}{75}a^2\right)^2}\right|=\frac{8\sqrt{6}}{75}a^2.$$

$$S_{AEF}=\frac{1}{2}\left[\overrightarrow{AE},\overrightarrow{IF}\right]=\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{8}{25}a^2\right)^2+\left(\frac{8a^2}{25}\right)+\left(\frac{16}{25}a^2\right)^2}=\frac{4\sqrt{6}}{25}a^2.$$

$$d_{(S;(AED))}=d_{(S;AEIF)}=\frac{\left|0.\frac{-8}{25}a^2+0.\frac{-8}{25}a^2+2a.\frac{16}{25}a^2\right|}{\sqrt{\left(\frac{8}{25}a^2\right)^2+\left(\frac{8}{25}a^2\right)^2+\left(\frac{16}{25}a^2\right)^2}}=\frac{2\sqrt{6}}{3}a.$$

Ta có: $\Rightarrow V_{SAEIF}=\frac{1}{3}.\frac{2\sqrt{6}}{3}a.\frac{4\sqrt{6}}{15}a^2=\frac{16}{45}a^3.$

$$S_{IEAF}=S_{IEF}=\frac{8\sqrt{6}}{75}a^2+\frac{4\sqrt{6}}{25}a^2=\frac{4\sqrt{6}}{15}a^2$$

Ta có:

$$d(IE;AF)=\frac{\left|0.\frac{2a}{15}-\frac{4a}{5}.\frac{2a}{3}-\frac{2a}{5}.\frac{4a}{15}\right|}{\sqrt{\left(\frac{4a}{5}\right)^2+\left(\frac{2a}{5}\right)^2}.\sqrt{\left(\frac{2a}{15}\right)^2+\left(\frac{2a}{3}\right)^2+\left(\frac{4a}{15}\right)^2}}=\frac{2\sqrt{6}}{5}a$$

Vậy $V_{SAEIF}=\frac{16}{45}a^3;d(IE;AF)=\frac{2\sqrt{6}}{5}a.$

Ví dụ 16

Cho hình chóp S.ABCD, có đáy ABCD là hình vuông tâm O cạnh a. Cạnh SO vuông góc với đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và BC. MN tạo với đáy 1 góc 60°.

a) Tính thể tích khối chóp S.ABCD

b) Tính cosin góc giữa đường thẳng MN và mp(SBD).

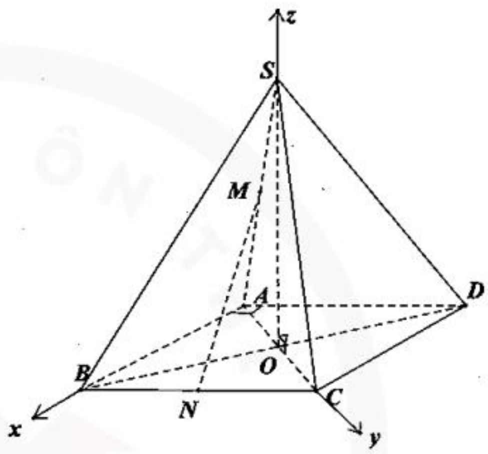
➢ **Lời giải**

Gọi SO=x (x>0)

Do SO, AC, BD đôi một vuông góc tại O nên

- Chọn hệ trục tọa độ Oxyz như hình vẽ.

- Các tia Ox, Oy, Oz lần lượt đi qua B, C, S.



Khi đó: $O(0;0;0), S(0;0;x)$,

$A(0;\frac{-a\sqrt{2}}{2};0), B(\frac{a\sqrt{2}}{2};0;0), C(0;\frac{a\sqrt{2}}{2};0)$,

$D(\frac{-a\sqrt{2}}{2};0;0), M(0;\frac{-a\sqrt{2}}{4};\frac{x}{2}), N(\frac{a\sqrt{2}}{4};\frac{a\sqrt{2}}{4};0)$

Ta có: $\overrightarrow{MN}(\frac{a\sqrt{2}}{4};\frac{a\sqrt{2}}{2};\frac{-x}{2}), \overrightarrow{AB}(\frac{a\sqrt{2}}{2};\frac{a\sqrt{2}}{2};0); \overrightarrow{AD}(\frac{-a\sqrt{2}}{2};\frac{a\sqrt{2}}{2};0)$

$\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}\right]=(0;0;\sqrt{2}a^2) \Rightarrow vtpt\vec{n}_{(ABCD)}(0;0;1)$

MN tạo với đáy 1 góc 60° nên: $\cos\left(\widehat{MN;(ABCD)}\right)=\cos 60°$

$$\Leftrightarrow \frac{\left|\frac{-x}{2}\right|}{\sqrt{\frac{2a^2}{16}+\frac{2a^2}{16}+\frac{x^2}{4}}}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=\frac{a\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow SO=\frac{a\sqrt{3}}{3}$$

a) Diện tích hình vuông ABCD: $S_{ABCD} = a^2$

Vậy thể tích khối chóp S.ABCD là:

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}.SO.S_{ABCD} = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{3}.a^2 = \frac{\sqrt{3}a^3}{9}$$

b) Ta có: $\overrightarrow{MN}(\frac{a\sqrt{2}}{4};\frac{a\sqrt{2}}{2};\frac{-a\sqrt{3}}{6})$

$$\begin{cases} \overrightarrow{SB}\left(\frac{a\sqrt{2}}{2};0;\frac{-a\sqrt{3}}{3}\right) \\ \overrightarrow{SD}\left(\frac{-a\sqrt{2}}{2};0;\frac{-a\sqrt{3}}{3}\right) \end{cases} \Rightarrow \left[\overrightarrow{SB};\overrightarrow{SD}\right] = \left(0;\frac{\sqrt{6}a^2}{3};0\right) \Rightarrow \vec{n}_{(SBD)}(0;1;0)$$

Mà: $mp(SBD) \subset mp(\text{Oxz})$ nên phương trình mp(SBD) có dạng: y=0

Vậy cosin góc giữa đường thẳng MN và mp(SBD) là:

$$\text{Cos}\left(\widehat{MN;(SBD)}\right) = \frac{\left|\frac{a\sqrt{2}}{2}\right|}{\sqrt{\frac{2a^2}{16}+\frac{2a^2}{16}+\frac{3a^2}{36}}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

Ví dụ 17

Cho hình chóp đều S.ABCD có tất cả các cạnh bằng nhau. Thể tích của nó $V = \frac{9a^3\sqrt{2}}{2}$.

a) Tính cạnh của hình chóp.

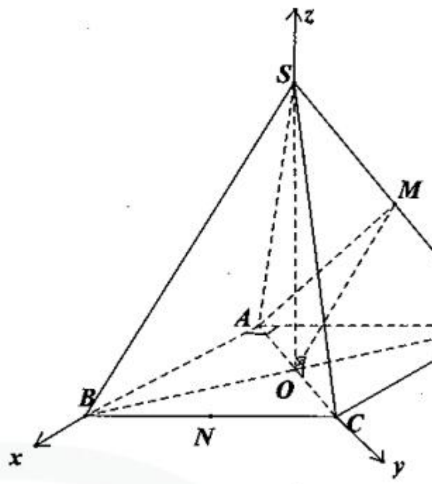
b) Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SD, SB. Tính khoảng cách từ N đến mp(OAM).

➢ **Lời giải:**

Giả sử cạnh của hình chóp đều bằng t (t>0) $\Rightarrow$ AC=BD=t$\sqrt{2}$

Gọi O là tâm hình vuông ABCD

$\Rightarrow$ SO $\perp$ mp(ABCD)



a) Tacó: $SO = \sqrt{SA^2 - OA^2}$

$= \sqrt{t^2 - \left(\frac{t\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{t\sqrt{2}}{2}$

Diện tích hình vuông ABCD là:

$S_{ABCD} = t^2$

Do vậy: $V_{S.ABCD} = \frac{9a^3\sqrt{2}}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{3}.\frac{t\sqrt{2}}{2}.t^2 = \frac{9a^3\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow t = 3a$

Vậy các cạnh của chóp S.ABCD bằng 3a

b) SO, AC, BD đôi một vuông góc tại O nên chọn hệ trục tọa độ Oxyz như hình vẽ.

- Các tia Ox, Oy, Oz lần lượt đi qua B, C, S.

Khi đó: $O(0;0;0), S(0;0;3a), A(0;\frac{-3a\sqrt{2}}{2};0),$

$N(\frac{3\sqrt{2}a}{4};0;\frac{3\sqrt{2}a}{4}), M(-\frac{3\sqrt{2}a}{4};0;\frac{3\sqrt{2}a}{4})$

$\overrightarrow{OA}(0;\frac{-3a\sqrt{2}}{2};0), \overrightarrow{OM}(-\frac{3\sqrt{2}a}{4};0;\frac{3\sqrt{2}a}{4})$

$\Rightarrow \left[\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OM}\right] = (\frac{-9a^2}{4};0;\frac{-9a^2}{4})$

Mp(OAM) $\begin{cases} \text{đi qua } O(0;0;0) \\ \text{vtpt } \vec{n}_{(OAM)} = (1;0;1) \end{cases}$ nên có phương trình: x+z=0

Vậy khoảng cách từ điểm N đến mp(SAM) là:

$$d(N;(SAM)) = \frac{\left|\frac{3a\sqrt{2}}{4} + \frac{3a\sqrt{2}}{4}\right|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{3a}{2}.$$

Ví dụ 18

Cho hình chóp đều S.MNPQ có mặt bên hợp với đáy một góc 45° và khoảng cách từ chân đường cao H của chóp đến mặt bên bằng a.

a) Tính thể tích hình chóp S.MNPQ

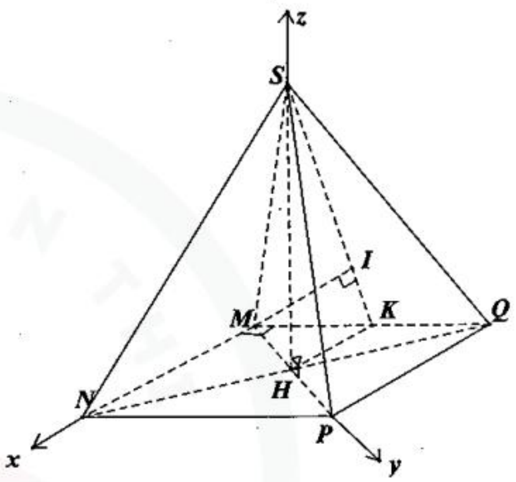
b) Tính góc giữa mp(SMH) và mp(SKH)

➤ **Lời giải:**

Trong ΔSHK có:

$$\left.\begin{array}{l} HK \perp MQ \\ SH \perp MQ \end{array}\right\} \Rightarrow MQ \perp IH$$

(do $IH \subset (SHK)$)



$$\left.\begin{array}{l} SK \perp MQ; HK \perp MQ \\ (SMQ) \cap (ABCD) = MQ \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow (\widehat{(SMQ),(ABCD)}) = \widehat{SKH} = 45°$$

Lại có mp(SMQ):

$$\left.\begin{array}{l} SK \perp IH; MQ \perp IH \\ SK \cap MQ = k \end{array}\right\} \Rightarrow IH \perp (SMQ)$$

Do đó: d(H;(SMQ))=IH=a

ΔIKH vuông tại I: KH=IH.sin$45°$=a$\sqrt{2}$

$\Rightarrow$ Cạnh của hình vuông MNPQ bằng 2a$\sqrt{2}$

Trong ΔSKH vuông tại H, có $\widehat{SKH} = 45° \Rightarrow \Delta$SKH vuông cân tại H

$\Rightarrow$SH=KH=a$\sqrt{2}$

a) Thể tích hình chóp S.MNPQ

$$V_{S.MNPQ} = \frac{1}{3}.SH.S_{MNPQ} = \frac{1}{3}.a\sqrt{2}.(2a\sqrt{2})^2 = \frac{8a^3\sqrt{2}}{3} \text{ (đvtt)}$$

b) Hình chóp đều S.MNPQ có SH, MP, NQ đôi một vuông góc tại H nên chọn hệ trục tọa độ Oxyz như hình vẽ.

- Gốc tọa độ O trùng với H

- Các tia Ox, Oy, Oz lần lượt đi qua N, P, S

Khi đó: H(0;0;0), K(-a;-a;0), M(0;-2a;0), S(0;0;a$\sqrt{2}$)

$\overrightarrow{SM}(0;-2a;-a\sqrt{2}), \overrightarrow{SH}(0;0-a\sqrt{2}), \overrightarrow{SK}(-a;-a;-a\sqrt{2})$

mp(SMH) có: $\vec{n}_{(SMH)} = \left[\overrightarrow{SM};\overrightarrow{SH}\right] = (2\sqrt{2}a^2;0;0)$

mp(SKH) có: $\vec{n}_{SKH} = \left[\overrightarrow{SK};\overrightarrow{SH}\right] = (\sqrt{2}a^2;-\sqrt{2}a^2;0)$

$$\text{Cos}\,(\widehat{(SMH),(SKH)}) = \frac{\left|4a^4\right|}{\sqrt{8a^4}.\sqrt{2a^4+2a^4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Vậy góc giữa mp(SMH) và mp(SKH) bằng 45°.

Ví dụ 19

Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy bằng a, góc giữa cạnh bên và đáy là 30°. Gọi M là trung điểm của cạnh SC, mặt phẳng (MAB) cắt SD tại N.

a) Xác định tọa độ điểm N.

b) Tính theo a thể tích hình chóp S.ABMN.

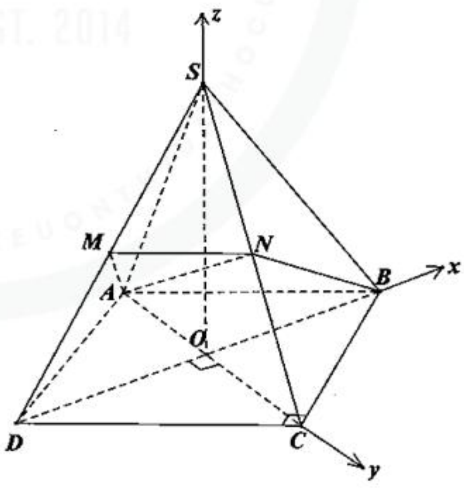
➤ **Lời giải:**

Gọi H là tâm hình vuông ABCD, ta được SO, AC, BD đôi một vuông góc tại O.

Chọn hệ trục tọa độ Oxyz như hình vẽ.

- Gốc tọa độ O.

- Các tia Ox, Oy, Oz lần lượt đi qua B, C, S.



Giả sử SO=h (h>0)

Ta có: O(0;0;0), S(0;0;h),

$A(0;\frac{-a\sqrt{2}}{2};0), B(\frac{a\sqrt{2}}{2};0;0), C(0;\frac{a\sqrt{2}}{2};0)$

$D(-\frac{a\sqrt{2}}{2};0;0), \overrightarrow{SA}(0;-\frac{a\sqrt{2}}{2};-h)$

mp(ABCD) $\subset$ mp(Oxy) nên có vtpt $\vec{n}_{(ABCD)}(0;0;1)$

Góc giữa cạnh bên và đáy là $30°$ nên:

$$\cos\left(\widehat{SA;(ABCD)}\right)=\cos 30° \Leftrightarrow \frac{|-h|}{\sqrt{\frac{2a^2}{4}+h^2}.\sqrt{1^2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow h=\frac{a\sqrt{6}}{2} \Rightarrow SH=\frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

a) Xác định tọa độ điểm N: N=SD$\cap$(ABM)

$$\overrightarrow{SD}(\frac{-a\sqrt{2}}{2};0;\frac{-a\sqrt{6}}{2}) \Rightarrow vtcp\overrightarrow{u_{SD}}(1;0;\sqrt{3})$$

Đường thẳng SD qua S có phương trình: $\begin{cases} x=t \\ y=0 \\ z=\frac{a\sqrt{6}}{2}+\sqrt{3}t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$

$$M(0;\frac{a\sqrt{2}}{4};\frac{a\sqrt{6}}{4}) \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AM}(0;\frac{3a\sqrt{2}}{4};\frac{a\sqrt{6}}{4}) \\ \overrightarrow{AB}(\frac{a\sqrt{2}}{2};\frac{a\sqrt{2}}{2};0) \end{cases}$$

$$\Rightarrow\left[\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AB}\right]=(\frac{-\sqrt{3}a^2}{4};\frac{\sqrt{3}a^2}{4};\frac{-3a^2}{4})$$

Mp(AMB)$\begin{cases} \text{đi qua A}\left(0;\frac{-a\sqrt{2}}{2};0\right) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{n_{(AMB)}}(1;-1;\sqrt{3}) \end{cases}$ có phương trình: $x-y+\sqrt{3}z-\frac{a\sqrt{2}}{2}=0$

Mà N$\in$ mp(AMB).

Nên: $t+\sqrt{3}(\frac{a\sqrt{6}}{2}+\sqrt{3}t)-\frac{a\sqrt{2}}{2}=0 \Leftrightarrow t=\frac{-\sqrt{2}}{4}a \Rightarrow N(\frac{-\sqrt{2}a}{4};0;\frac{a\sqrt{6}}{4})$

b) Dựa vào tọa độ đã biết của S, D, N chứng minh được N là trung điểm SD

$\Rightarrow$ MN là đường trung bình của ΔSCD

$$\left.\begin{matrix} MN \parallel CD \\ AB \parallel CD \end{matrix}\right\} \Rightarrow MN \parallel AB \Rightarrow \text{tứ giác ABMN là hình thang.}$$

Ta có: $d(S,(ABM))=\dfrac{\left|\sqrt{3}.\dfrac{a\sqrt{6}}{2}\right|}{\sqrt{1+1+3}}=\dfrac{3a\sqrt{10}}{10}$

Tính diện tích hình thang AMNB:

$\overrightarrow{MA}(0;\dfrac{-3a\sqrt{2}}{4};\dfrac{-a\sqrt{6}}{4}),\overrightarrow{AB}(\dfrac{a\sqrt{2}}{2};\dfrac{a\sqrt{2}}{2};0)$

$$\Rightarrow d(M;AB)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{MA};\overrightarrow{AB}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}=\frac{\left|\dfrac{-6a^2}{8}\right|}{\sqrt{\dfrac{2a^2}{4}+\dfrac{2a^2}{4}}}=\frac{3a}{4}$$

$$\Rightarrow S_{AMNB}=\frac{(MN+AB).d(M;AB)}{2}=\frac{(\dfrac{a}{2}+a).\dfrac{3a}{4}}{2}=\frac{9a^2}{16}.$$

Vậy thể tích hình chóp S.ABMN là:

$$V_{S.AMNB}=\frac{1}{3}.d(S;(ABM)).S_{AMNB}=\frac{1}{3}\frac{3a\sqrt{10}}{10}.\frac{9a^2}{16}=\frac{9\sqrt{10}a^3}{160}\text{ (đvtt)}$$

Ví dụ 20

Cho khối chóp đều S.ABCD có cạnh đáy a và đường cao bằng $\dfrac{a}{2}$.

a. Tính sin của góc hợp bởi cạnh bên SC và mặt bên (SAB).

b. Tính diện tích xung quanh của khối chóp đã cho. Gọi K là trung điểm của SM. Tính $V_{K.SAH}$?

➤ **Lời giải:**

Gọi $H=AC\cap BD;AC=BD=a\sqrt{2}$

Ta thấy SH, AC, BD đôi một vuông góc tại H, chọn hệ trục tọa độ Oxyz như hình vẽ.

- Gốc tọa độ O trùng với H.

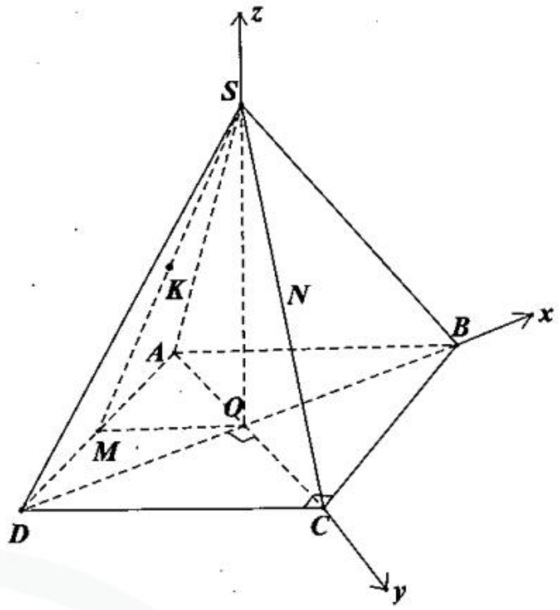
- Các tia Ox, Oy, Oz lần lượt đi qua B, C, S.

Khi đó: H(0;0;0),

$S(0;0;\frac{a}{2}), A(0;\frac{-a\sqrt{2}}{2};0),$

$B(\frac{a\sqrt{2}}{2};0;0); C(0;\frac{a\sqrt{2}}{2};0),$

$D(\frac{-a\sqrt{2}}{2};0;0)$



$$\begin{cases} \overrightarrow{SC}(0;\frac{a\sqrt{2}}{2};\frac{-a}{2}) \\ \overrightarrow{SA}(0;\frac{-a\sqrt{2}}{2};\frac{-a}{2}) \\ \overrightarrow{SB}(\frac{a\sqrt{2}}{2};0;\frac{-a}{2}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left[\overrightarrow{SA};\overrightarrow{SB}\right] = (\frac{\sqrt{2}a^2}{4};\frac{-\sqrt{2}a^2}{4};\frac{a^2}{2})$$

a) Cosin góc hợp bởi cạnh bên SC và mặt bên (SAB):

$$\cos\left(\widehat{SC;(SAB)}\right) = \frac{\left|\frac{-a^3}{4} - \frac{a^3}{4}\right|}{\sqrt{\frac{2a^2}{4}+\frac{a^2}{4}}.\sqrt{\frac{2a^4}{16}+\frac{2a^4}{16}+\frac{a^4}{4}}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

Vậy $\sin\left(\widehat{SC;(SAB)}\right) = \sqrt{1^2 - (\frac{\sqrt{6}}{3})^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

b) Chóp đều S.ABCD có $\Delta SAB = \Delta SBC = \Delta SCD = \Delta SAD \Rightarrow$ Diện tích xung quanh S.ABCD là:

$S_{xq} = 4.S_{\Delta SAD}$

Ta có: $SA = \sqrt{SO^2 + AO^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{2a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Trong mp(SAD), kẻ SM $\perp$ AD $\Rightarrow SM = \sqrt{SA^2 - AM^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Do đó: $S_{\Delta SAD} = \frac{1}{2}.SM.AD = \frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{2}}{2}.a = \frac{\sqrt{2}a^2}{4}$ (đvtt)

Vậy diện tích xung quanh S.ABCD là: $S_{xq} = 4.\frac{\sqrt{2}a^2}{4} = \sqrt{2}a^2$

$K(\frac{-a\sqrt{2}}{8};\frac{-a\sqrt{2}}{8};\frac{a}{4})$, $\overrightarrow{HK}(\frac{-a\sqrt{2}}{8};\frac{-a\sqrt{2}}{8};\frac{a}{4})$

$$\begin{cases}\overrightarrow{HS}(0;0;\frac{a}{2})\\ \overrightarrow{HA}(0;\frac{-a\sqrt{2}}{2};0)\end{cases} \Rightarrow \left[\overrightarrow{HS};\overrightarrow{HA}\right] = (\frac{\sqrt{2}a^2}{4};0;0)$$

Vậy $V_{K.SAH} = \frac{1}{6}\left|\overrightarrow{HK}\left[\overrightarrow{HS};\overrightarrow{HA}\right]\right| = \frac{1}{6}\left|\frac{-2a^3}{32}\right| = \frac{a^3}{96}$ (đvtt)

Ví dụ 21

Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh bên tạo với đáy một góc 60^0 và cạnh đáy bằng a. Tính thể tích khối chóp S.ABCD, qua A dựng mặt phẳng (P) vuông góc với SC. Tính diện tích thiết diện tạo bởi mặt phẳng (P) và hình chóp (ABCD).

➤ **Lời giải:**

Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AB và CD.

Do tam giác SAB, SCD cân tại S

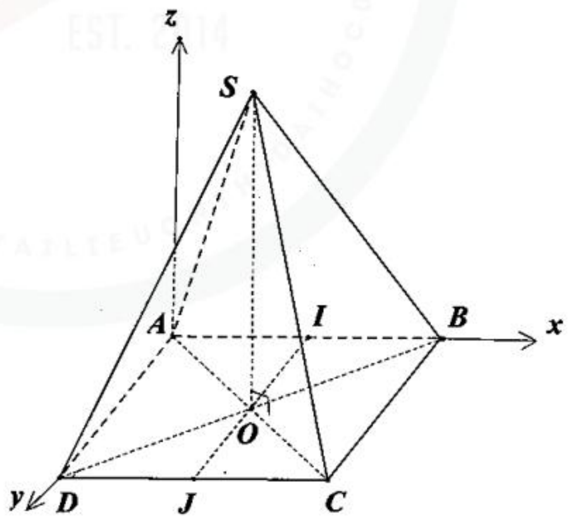
$\Rightarrow SI \perp AB, SJ \perp AB$

(Vì AB//CD) $\Rightarrow AB \perp (SIJ)$.

Gọi O là tâm hình vuông ABCD

$\Rightarrow AB \perp SO$

lại có $SO \perp IJ \Rightarrow SO \perp (ABCD)$.



Từ A kẻ Az//SO.

Đặt trục Axyz như hình vẽ ta có:

$A(0;0;0); B(a;0;0); C(a;a;0); D(0;a;0) \Rightarrow \overrightarrow{DA} = (0;-a;0)$.

Do I là trung điểm AB $\Rightarrow I\left(\frac{a}{2};0;0\right)$.

Do O là trung điểm AC $\Rightarrow O\left(\frac{a}{2};\frac{a}{2};0\right)$.

Gọi $S\left(\frac{a}{2};\frac{a}{2};h\right)$.

Ta có: $\begin{cases}\overrightarrow{AS}=\left(\frac{a}{2};\frac{a}{2};h\right)\\ \overrightarrow{AB}(a;0;0)\end{cases} \Rightarrow \vec{n}_{SAB}=\left[\overrightarrow{AS},\overrightarrow{AB}\right]=\left(0;ah;-\frac{a^2}{2}\right)$.

$$\Leftrightarrow \frac{\left|0.0+(-a).ah-\frac{a^2}{2}.0\right|}{\sqrt{(-a)^2}.\sqrt{a^2h^2+\frac{a^4}{4}}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow h=\frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 60^0=\sin\left[DA,(SAB)\right]=\frac{\left|\vec{n}_{SAB}.\vec{u}_{AD}\right|}{\left|\vec{u}_{AD}\right|\left|\vec{n}_{SAB}\right|}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\Rightarrow V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}SO.S_{ABCD}=\frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}.a^2=\frac{\sqrt{3}}{6}a^3 \text{ (đvtt)}.$$

Ví dụ 22

Cho hình chóp tứ giác đều SABCD có cạnh đáy bằng a. Gọi G là trọng tâm tam giác SAC, khoảng cách từ G đến mặt bên (SCD) bằng $\frac{a\sqrt{3}}{6}$. Tính theo a thể tích khối chóp S.ABCD và khoảng cách từ tâm mặt đáy đến mặt bên (SCD).

➢ **Lời giải:**

Ta có: $SO\perp ABCD$. Kẻ $Az//SO \Rightarrow Az\perp(ABCD)$.

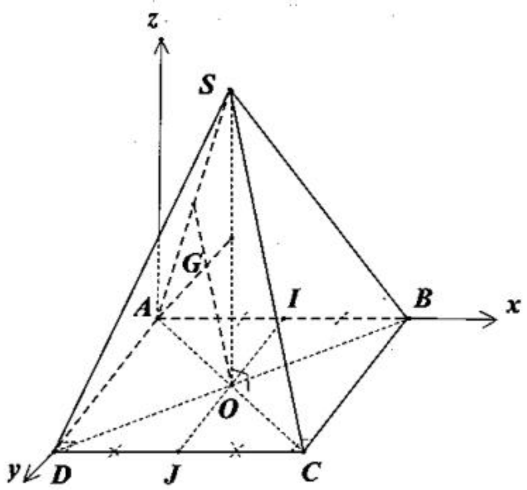
Đặt trục Axyz như hình vẽ.

Ta có: $A(0;0;0);B(a;0;0);C(a;a;0);D(0;a;0)$, $O\left(\frac{a}{2};\frac{a}{2};0\right)$.

Gọi $S\left(\frac{a}{2};\frac{a}{2};h\right)$.

Do G là trọng tâm tam giác SAC

$\Rightarrow G=\left(\frac{a}{2};\frac{a}{6};\frac{h}{3}\right)$.



Ta có: $\begin{cases}\overrightarrow{SC}=\left(\frac{a}{2};\frac{a}{2};-h\right)\\ \overrightarrow{SD}=\left(-\frac{a}{2};\frac{a}{2};-h\right)\end{cases}$

$\Rightarrow \vec{n}_{SCD}=\left[\overrightarrow{SC},\overrightarrow{SD}\right]=\left(0;ah;\frac{a^2}{2}\right)$

Mp (SCD) $\begin{cases}\text{đi qua } D(0;a;0)\\ \text{vtpt } \vec{n}=\left(0;ah;\frac{a^2}{2}\right)\end{cases}$ có phương trình: $ahy+\frac{a^2}{2}z-a^2h=0$.

$$d_{[G,(SCD)]}=\frac{\left|\frac{a}{2}.0+\frac{a}{6}.ah+\frac{h}{3}.\frac{a^2}{2}-a^2h\right|}{\sqrt{a^2h^2+\frac{a^4}{4}}}=\frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left|\frac{a^2h}{6}+\frac{a^2h}{6}-a^2h\right|}{\sqrt{a^2h^2+\frac{a^4}{4}}}=\frac{a\sqrt{3}}{6}\Rightarrow h=\frac{\sqrt{39}}{26}a$$

$V_{SABCD}=\frac{\sqrt{39}}{26}a.\frac{1}{3}.a^2=\frac{a^3\sqrt{39}}{78}$ (đvtt).

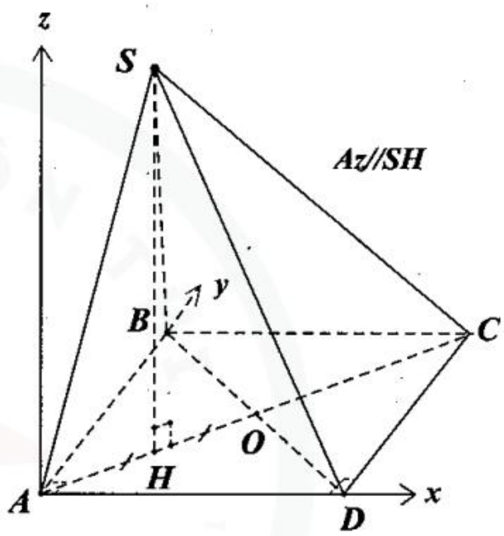
$\vec{n}_{SCD}=\left(0;\frac{\sqrt{39}}{26}a^2;\frac{a^2}{2}\right)\Rightarrow pt(SCD):\frac{\sqrt{39}}{26}a^2y+\frac{a^2}{2}z-\frac{\sqrt{39}}{26}a^3=0$

$$\Rightarrow d_{(O;(SCD))}=\frac{\left|\frac{a}{2}.0+\frac{a}{2}.\frac{\sqrt{39}}{26}a^2-\frac{\sqrt{39}}{26}a^3\right|}{\sqrt{\frac{39}{676}a^4+\frac{a^4}{4}}}=\frac{\frac{\sqrt{39}}{52}a^3}{\frac{2\sqrt{13}}{13a^2}}=\frac{\sqrt{3}}{8}a.$$

Ví dụ 23

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông tâm O. Hình chiếu S lên mặt đáy trùng với điểm H là trung điểm của đoạn AO. Mặt phẳng (SAD) tạo với đáy một góc 60^0 và AB=a. Tính theo a thể tích khối chóp S.ABCD và khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SC.

➢ **Lời giải:**



Trong (SAC) kẻ AZ//SH

Đặt trục Axyz như hình vẽ ta có:

$A(0;0;0);B(0;a;0);C(a;a;0);$

$D(a;0;0).$

Do O là trung điểm AC

$\Rightarrow O\left(\frac{a}{2};\frac{a}{2};0\right);$

H là trung điểm AO

$\Rightarrow H\left(\frac{a}{4};\frac{a}{4};0\right)\Rightarrow S\left(\frac{a}{4};\frac{a}{4};h\right)$

Do $(ABCD)\in Axy \Rightarrow \vec{n}_{ABCD}=(0;0;1)$

$$\begin{cases}\overrightarrow{AD}=(a;0;0)\\ \overrightarrow{AS}=\left(\frac{a}{4};\frac{a}{4};h\right)\end{cases}\Rightarrow \vec{n}_{SAD}=\left[\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AS}\right]=\left(0;-ah;\frac{a^2}{4}\right)$$

Ta có: $\cos 60^0=\cos\left[(SAD),(ABCD)\right]=\frac{\left|\vec{n}_{SAD}.\vec{n}_{ABCD}\right|}{\left|\vec{n}_{SAD}\right|.\left|\vec{n}_{ABCD}\right|}=\frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{a^2}{4}}{\sqrt{a^2h^2+\frac{a^4}{16}}}=\frac{1}{2}\Rightarrow h=\frac{a\sqrt{3}}{4}\Rightarrow S\left(\frac{a}{4};\frac{a}{4};\frac{a\sqrt{3}}{4}\right)$$

$$V_{SABCD}=\frac{1}{3}.S_{ABCD}.d_{(S;(ABCD))}=\frac{1}{3}.a^2.\frac{a\sqrt{3}}{4}=\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$$

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(0;a;0);\overrightarrow{SC}=\left(\frac{3a}{4};\frac{3a}{4};\frac{-a\sqrt{3}}{4}\right)$

$\begin{cases}A\in AB\\ S\in SC\end{cases}\Rightarrow\overrightarrow{AS}=\left(\frac{a}{4};\frac{a}{4};\frac{a\sqrt{3}}{4}\right);\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{SC}\right]=\left(\frac{-a^2\sqrt{3}}{4};0;\frac{3a^2}{4}\right)$

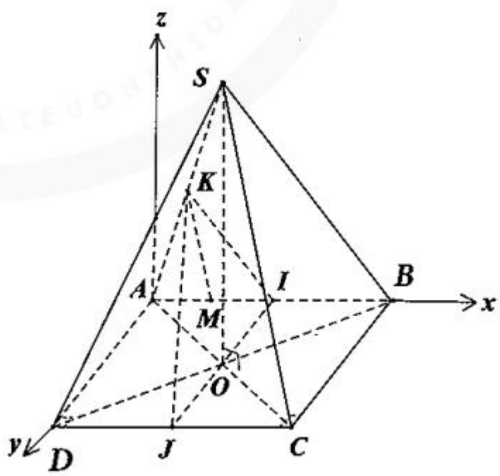
$$\Rightarrow d_{(AB;SC)}=\frac{\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{SC}\right].\overrightarrow{AS}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{SC}\right]\right|}=\frac{\left|\frac{-a^3\sqrt{3}}{4}+\frac{3a^3\sqrt{3}}{4}\right|}{\sqrt{\left(\frac{-a^2\sqrt{3}}{4}\right)^2+\left(\frac{3a^2}{4}\right)^2}}=a$$

Vậy $d(AB,SC)=a$.

Ví dụ 24

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, tam giác SAB đều, tam giác SCD vuông cân tại S. Gọi I, J, K lần lượt là trung điểm các cạnh AB, CD, SA. Chứng minh rằng $(SIJ)\perp(ABCD)$ và tính thể tích khối chóp K.IBCD.

➤ Lời giải:



Do ΔSAB đều $\Rightarrow AB\perp SI$ (1)

Do ΔSCD vuông cân $\Rightarrow SJ\perp CD$.

Mà $CD//AB\, SJ\perp AB$ (2).

Từ (1) và (2) $\Rightarrow AB\perp(SIJ)$

Mà $AB\subset(ABCD)$

$\Rightarrow(ABCD)\perp(SIJ)$ (đpcm)

Kẻ $SO\perp(ABCD)\Rightarrow SO\perp(ABCD)$.

Kẻ $AZ//SO\Rightarrow AZ\perp(ABCD)$.

Đặt trục Axyz như hình vẽ

Ta có: $A(0;0;0);B(a;0;0);C(a;a;0);D(0;a;0)$

Do I là trung điểm AB $\Rightarrow I\left(\frac{a}{2};0;0\right)$. Gọi M là trung điểm AI $\Rightarrow M\left(\frac{a}{4};0;0\right)$

Do ΔKAM đồng dạng $\Delta SAI \Rightarrow KM = \frac{1}{2}SI = \frac{\sqrt{3}a}{4} \Rightarrow k\left(\frac{a}{4};0;\frac{\sqrt{3}}{4}a\right)$

Mặt phẳng $(ABCD)$ $\begin{cases} \text{đi qua } A(0;0;0) \\ \text{vtpt } \vec{n}=(0;0;1) \end{cases}$

$\Rightarrow pt(ABCD): z=0 \Rightarrow d(k;(ABCD)) = \frac{a\sqrt{3}}{4} = d(k;(IBCD))$.

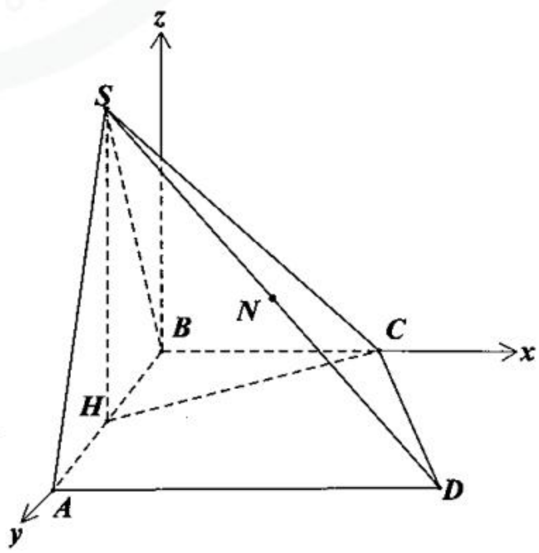
Ta có: $S_{IBCD} = \frac{1}{2}(IB+DC).BC = \frac{1}{2}.\left(\frac{a}{2}+a\right).a = \frac{3}{4}a^2$

$\Rightarrow V_{KIBCD} = \frac{1}{3}.\frac{3}{4}a^2.\frac{a\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{16}$ (đvtt).

Ví dụ 25

Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình thang vuông tại A, B có đáy nhỏ BC. Biết tam giác SAB đều độ dài cạnh 2a và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, độ dài $SC = a\sqrt{5}$ và khoảng cách từ D đến mặt phẳng (SHC) bằng $2a\sqrt{2}$, với H là trung điểm của AB. Tính thể tích của khối chóp S.ABCD

➤ **Lời giải:**



Do tam giác SAB đều nên $SH \perp AB$.

Mà:

$(SAB) \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp (ABCD)$

Kẻ Bz // SH.

Đặt trục Bxyz như hình vẽ

Ta có: $B(0;0;0); A(0;2a;0)$.

Do H là trung điểm AB

$\Rightarrow H(0;a;0) \Rightarrow SH = a\sqrt{3}$

Do: $SH \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp HC \Rightarrow \Delta SHC$ vuông tại H

$\Rightarrow HC = \sqrt{5a^2 - 3a^2} = a\sqrt{2}$.

Do ΔHBC vuông tại B $\Rightarrow BC = \sqrt{2a^2 - a^2} = a \Rightarrow C(a;0;0)$.

Gọi $D(h;2a;0); S\left(0;a;a\sqrt{3}\right); C(a;0;0)$

$$\begin{cases} \overrightarrow{SH} = \left(0;0;-a\sqrt{3}\right) \\ \overrightarrow{SC} = \left(a;-a;-a\sqrt{3}\right) \end{cases} \Rightarrow \vec{n}_{SHC} = \left[\overrightarrow{SH}, \overrightarrow{SC}\right] = \left(-a^2\sqrt{3}; -a^2\sqrt{3}; 0\right).$$

Mặt phẳng (SHC) $\begin{cases} \text{đi qua } C(a;0;0). \\ \text{vtpt } \vec{n} = \left(-a^2\sqrt{3}; -a^2\sqrt{3}; 0\right) \end{cases}$

có phương trình $-a^2\sqrt{3}x - a^2\sqrt{3}y + a^3\sqrt{3} = 0$.

$$d_{(D;(SHC))} = \frac{\left|-a^2\sqrt{3}.h + 2a - a^2\sqrt{3} + a^2\sqrt{3}\right|}{\sqrt{\left(-a^2\sqrt{3}\right)^2 + \left(-a^2\sqrt{3}\right)^2}} = 2a\sqrt{2}$$

$\Rightarrow h = 4a \Rightarrow D(4a;2a;0); AD = 4a$

$$\Rightarrow S_{ABCD} = \frac{1}{2}AB(BC + AD) = \frac{1}{2}.2a(4a + a) = 5a^2.$$

$$\Rightarrow V_{SABCD} = \frac{1}{3}.5a^2.a\sqrt{3} = \frac{5\sqrt{3}}{3}a^3 \text{ (đvtt).}$$

Do N là trung điểm SD $\Rightarrow N\left(2a; \frac{3a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$

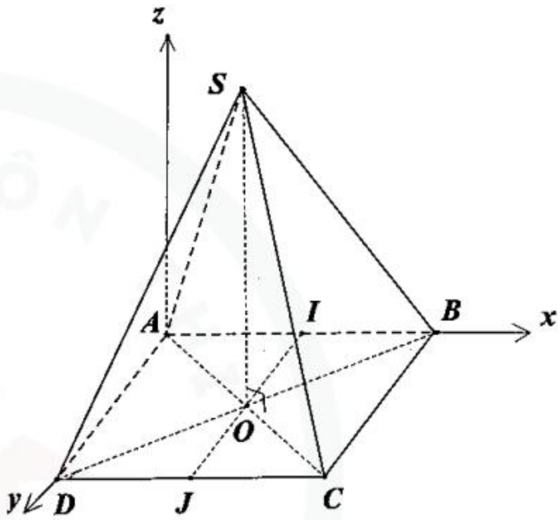
Ta có: $$d_{(N;(SHC))} = \frac{\left|-a^2\sqrt{3}.2a - \frac{3a}{2}.a^2\sqrt{3} + a^2\sqrt{3}\right|}{\sqrt{\left(-a^2\sqrt{3}\right)^2 + \left(-a^2\sqrt{3}\right)^2}} = \frac{5\sqrt{2}}{4}a$$

Vậy $V_{SABCD} = \frac{5\sqrt{3}}{3}a^3$ (đvtt); $d_{(N;(SHC))} = \frac{5\sqrt{2}}{4}a$

Ví dụ 26

Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh bên tạo với đáy một góc 60^0 và cạnh đáy bằng a. Tính thể tích khối chóp S.ABCD, qua A dựng mặt phẳng (P) vuông góc với SC. Tính diện tích thiết diện tạo bởi mặt phẳng (P) và hình chóp (ABCD).

➤ **Lời giải:**



Gọi: I và J lần lượt là trung điểm của AB và CD.

Do tam giác SAB)SCD cân tại S

$\Rightarrow SI \perp AB$, $SJ \perp AB$

(Vì AB//CD) $\Rightarrow AB \perp (SIJ)$.

Gọi O là tâm hình vuông ABCD

$\Rightarrow AB \perp SO$.

Lại có $SO \perp IJ \Rightarrow SO \perp (ABCD)$

Từ A kẻ Az//SO.

Đặt trục Axyz như hình vẽ ta có:

$A(0;0;0); B(a;0;0); C(a;a;0); D(0;a;0)$.

Do I là trung điểm AB $\Rightarrow I\left(\frac{a}{2};0;0\right)$.

Do O là trung điểm AC $\Rightarrow O\left(\frac{a}{2};\frac{a}{2};0\right)$.

Gọi $S\left(\frac{a}{2};\frac{a}{2};h\right)$. Ta có: $\begin{cases}\overrightarrow{AS}=\left(\frac{a}{2};\frac{a}{2};h\right)\\ \overrightarrow{AB}(a;0;0)\end{cases} \Rightarrow \vec{n}_{SAB}=\left[\overrightarrow{AS},\overrightarrow{AB}\right]=\left(0;ah;-\frac{a^2}{2}\right)$

Ta có $\sin 60^0 = \sin\left[DA,(SAB)\right] = \frac{\left|\vec{n}_{SAB}.\vec{u}_{AD}\right|}{\left|\vec{u}_{AD}\right|\left|\vec{n}_{SAB}\right|} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SO.S_{ABCD} = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}.a^2 = \frac{\sqrt{3}}{6}a^3$ (đvtt).

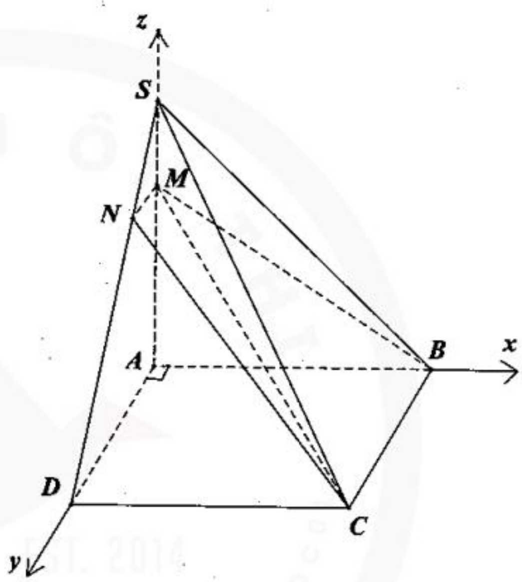
Ví dụ 27

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật, AB=a, AD=2a. Cạnh SA vuông góc với đáy (ABCD), cạnh SB hợp với đáy một góc 60^0. Trên SA lấy điểm M sao cho $SM=\frac{a\sqrt{3}}{3}$. Mặt phẳng (BCM) cắt SD tại N. Tính thể tích khối chóp S.BCMN.

➢ Lời giải:

Do $SA\perp(ABCD)$.

Nên đặt trục Axyz như hình vẽ



Ta có: $A(0;0;0);B(a;0;0);$

$C(a;2a;0);D(0;2a;0)$

Mặt phẳng (ABCD) $\in(Axy)$

$\Rightarrow \vec{n}_{ABCD}=(0;0;1)$

Gọi $S(0;0;h)\Rightarrow\overrightarrow{SB}=(a;0;-h)$.

Ta có:

$$\sin 60^0=\sin\left[SB,(ABCD)\right]$$

$$=\frac{\left|\overrightarrow{SB}.\vec{n}_{ABCD}\right|}{\left|\overrightarrow{SB}\right|.\left|\vec{n}_{ABCD}\right|}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow\frac{h}{\sqrt{a^2+h^2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow h=a\sqrt{3}\Rightarrow S\left(0;0;a\sqrt{3}\right)$$

$$\text{Do: } MA=\frac{a\sqrt{3}}{3}\Rightarrow M\left(a;0;\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)\Rightarrow\overrightarrow{MB}=\left(a;0;\frac{-a\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$\Rightarrow\overrightarrow{MC}=\left(a;2a;-\frac{a\sqrt{3}}{3}\right).$$

$$\vec{n}_{MNBC}=\left[\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MC}\right]=\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}a^2;0;2a^2\right).$$

Do mặt phẳng (MNBC) đi qua $B(a;0;0)$.

Vtpt $\vec{n}=\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}a^2;0;2a^2\right)\Rightarrow$ phương trình mặt phẳng (MNBC):

$$d_{((MNBC);S)}=\frac{\left|a\sqrt{3}.2a^2-\frac{2\sqrt{3}}{3}a^3\right|}{\sqrt{\frac{12}{9}a^4+4a^4}}=\frac{\sqrt{3}a^3}{\frac{4\sqrt{3}}{3}a^2}=\frac{3}{4}a$$

$$\frac{2\sqrt{3}}{3}a^2x+2a^2z-\frac{2\sqrt{3}}{3}a^3=0.$$

Ta có: $\overrightarrow{SD}=\left(0;2a;-a\sqrt{3}\right)$.

Do tam giác SMN đồng dạng tam giác SAD

$$\Rightarrow\frac{SN}{SD}=\frac{SM}{SA}=\frac{a\sqrt{3}-\frac{a\sqrt{3}}{3}}{a\sqrt{3}}=\frac{2}{3}\Rightarrow\overrightarrow{SN}=\frac{2}{3}\overrightarrow{SD}.$$

Gọi $N(x;y;z)\Rightarrow\overrightarrow{SN}\left(x;y;z-a\sqrt{3}\right)$

$$\begin{cases}x=0.\frac{2}{3}\\ y=2a.\frac{2}{3}\\ z=-a\sqrt{3}.\frac{2}{3}+a\sqrt{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\ y=\frac{4}{3}a\\ z=\frac{\sqrt{3}}{3}a\end{cases}\Rightarrow N\left(0;\frac{4}{3}a;\frac{\sqrt{3}a}{3}\right)$$

$$\Rightarrow\overrightarrow{MN}=\left(0;\frac{4}{3}a;0\right)\Rightarrow\left|\overrightarrow{MN}\right|=\frac{4}{3}a.$$

$\overrightarrow{BC}=(0;2a;0)$. Gọi I là trung điểm BC $\Rightarrow I(a;a;0)\Rightarrow\overrightarrow{MI}=\left(a;a;\frac{-a\sqrt{3}}{3}\right)$

Ta có: $\left[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{MI}\right]=\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}a^2;0;2a^2\right)$.

Thay vào (1) ta có:

$$d(M;BC)=\frac{\sqrt{\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}a^2\right)^2+4a^4}}{2a}=\frac{\frac{4\sqrt{3}}{3}a^2}{2a}=\frac{2\sqrt{3}}{3}a$$

$$S_{MNBC}=\frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}a+2a\right).\frac{2\sqrt{3}}{3}a=\frac{10\sqrt{3}}{9}a^2$$

$$\Rightarrow V_{SMNBC}=\frac{1}{3}.\frac{10\sqrt{3}}{9}a^2.\frac{3}{4}a=\frac{5\sqrt{3}}{18}a^3 \text{ (đvtt).}$$

Vậy $V_{SMNBC}=\frac{5\sqrt{3}}{18}.a^3$ (đvtt).

Ví dụ 28

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh 2a, $SA=a$ và $SB=a\sqrt{3}$. Mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt đáy (ABCD). Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và BC. Tính theo a thể tích khối chóp SBMDN và tính cô sin góc tạo bởi DN và SM.

➢ **Lời giải:**

Do $(SAB)\perp(ABCD)\Rightarrow$ kẻ $SH\perp AB$.

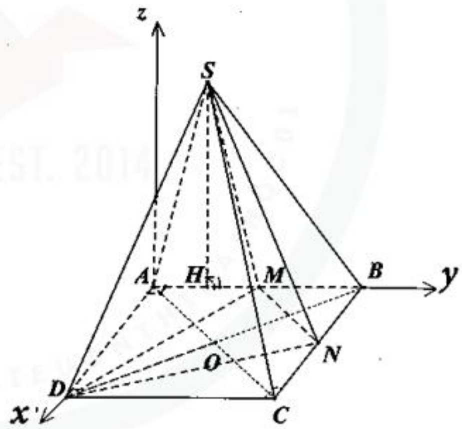
$\Rightarrow SH\perp(ABCD)$.

Kẻ $Az//SH\Rightarrow Az\perp(ABCD)$.

Đặt trục Axyz như hình vẽ ta có:

$A(0;0;0);B(0;2a;0);$

$C(2a;2a;0);D(2a;0;0)$



Ta có: $BD=\sqrt{4a^2+4a^2}=2\sqrt{2}a^2$.

Do N là trung điểm $BC\Rightarrow BN=NC=a$

$S_{\Delta BND}=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{BN};\overrightarrow{BD}\right]\right|;M(0;a;0)$

Ta có: $N(a;2a;0);\Rightarrow\overrightarrow{BN}=(a;0;0);\overrightarrow{BC}=(2a;0;0);\overrightarrow{BD}=(2a;-2a;0)$.

$\vec{n}_{BNDM}=\left[\overrightarrow{BN}.\overrightarrow{BC}\right]=(0;0;1)$.

$S_{\Delta BND}=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{BN},\overrightarrow{BD}\right]\right|=\frac{1}{2}.2a^2=a^2\Rightarrow S_{BNDM}=2S_{BND}=2a^2$.

Ta có: $SB^2+SA^2=3a^2+a^2=4a^2=AB^2\Rightarrow\Delta SAB$ vuông tại S.

$$\Rightarrow \frac{1}{SH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{SB^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{3a^2} \Rightarrow SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Ta có tam giác SHA vuông tại H $\Rightarrow AH = \sqrt{a^2 - \frac{3}{4}a^2} = \frac{a}{2} \Rightarrow S\left(0; \frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$.

Mặt phẳng (BNDM) $\begin{cases} \text{đi qua } B(0;2a;0). \\ \text{Vtpt } \vec{n} = (0;0;1) \end{cases}$

$\Rightarrow$ phương trình $mp(BNDM): z = 0$

$d(S, BNDM) = SH = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow V_{SBMDN} = \frac{1}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2}.2a^2 = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$ (đvtt).

Ta có:

$$\overrightarrow{DN} = (-a; 2a; 0); \overrightarrow{SM} = \left(0; \frac{a}{2}; -\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \cos\left[\overrightarrow{DN}, \overrightarrow{SM}\right] = \frac{\left|\overrightarrow{DN}.\overrightarrow{SM}\right|}{\left|\overrightarrow{DN}\right|.\left|\overrightarrow{SM}\right|} = \frac{a^2}{\sqrt{5a^2}.\sqrt{a^2}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

Vậy $V_{SBMDN} = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}, \cos(DN, SM) = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

Ví dụ 29

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi cạnh a, góc $\widehat{ABC} = 60^0, SO = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ và vuông góc với mặt phẳng đáy (O là tâm mặt đáy), M là trung điểm của AD. Gọi (P) là mặt phẳng qua BM và song song với SA) cắt SC tại K. Tính thể tích khối chóp K.ABCD

➤ **Lời giải:**

Gọi I là giao của BM và AC. Từ I kẻ IK//SA cắt SC tại K.

Do tam giác IMA đồng dạng tam giác IBC

$$\Rightarrow \frac{IA}{IC} = \frac{IM}{IB} = \frac{MA}{BC} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{IA}{AC} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{IC}{AC} = \frac{2}{3}.$$

Do tam giác IKC đồng dạng tam giác ASC

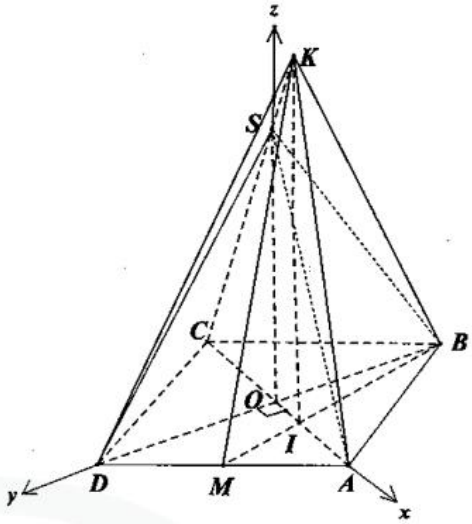
$\Rightarrow \frac{IC}{AC} = \frac{CK}{SC} = \frac{2}{3} \Rightarrow \overrightarrow{CK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CS}$.

Do $\widehat{ABC} = 60^0 \Rightarrow \widehat{ABO} = 30^0$.

Do tam giác AOB vuông tại O

$\Rightarrow OB = AB.\cos 30^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}a$

$\Rightarrow AO = OC = \sqrt{a^2 - \frac{3}{4}a^2} = \frac{a}{2}$



Đặt trục Oxyz như hình vẽ.

Ta có:

$O(0;0;0); A\left(\frac{a}{2};0;0\right); B\left(0;\frac{-\sqrt{3}}{2}a;0\right); C\left(-\frac{a}{2};0;0\right);$

$D\left(0;\frac{\sqrt{3}}{2};0\right); S\left(0;0;\frac{a\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow \overrightarrow{CS} = \left(\frac{a}{2};0;\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$

Gọi $K(x;y;z) \Rightarrow \overrightarrow{CK} = \left(x+\frac{a}{2};y;z\right)$.

Do $CK = \frac{2}{3}\overrightarrow{CS} \Rightarrow \begin{cases} x+\frac{a}{2} = \frac{2}{3}.\frac{a}{2} \\ y = 0 \\ z = \frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{a}{6} \\ y = 0 \\ z = \frac{a\sqrt{3}}{3} \end{cases} \Rightarrow K\left(-\frac{a}{6};0;\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)$.

Do $(ABCD) \in Oxy \Rightarrow \vec{n}_{ABCD} = (0;0;1)$.

Mặt phẳng $(ABCD)\begin{cases} \text{đi qua } A\left(\frac{a}{2};0;0\right) \\ \text{Vtpt } \vec{n} = (0;0;1) \end{cases}$

$\Rightarrow$ phương trình mặt phẳng $\Rightarrow$ pt : $(ABCD): z = 0$.

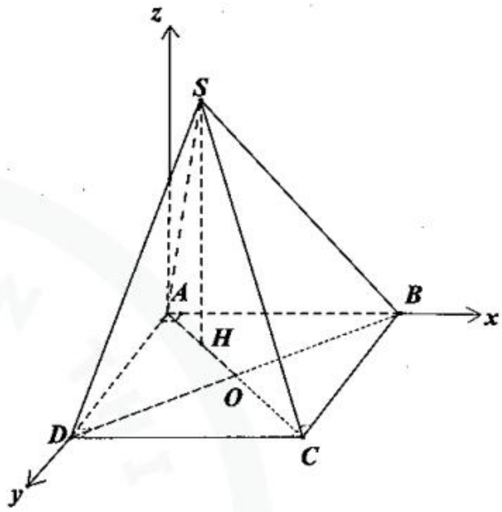
$d_{[K,(ABCD)]} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{3}}{\sqrt{1}} = \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC.BD = \frac{1}{2}a.a\sqrt{3} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$ (đvdt).

$\Rightarrow V_{K.ABCD} = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3}{6}$ (đvtt).

Ví dụ 30

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a. Mặt phẳng (SAC) vuông góc với đáy, góc $\widehat{ASC} = 90^0$ và SA tạo với đáy một góc 60^0. Tính thể tích khối chóp đã cho.

➢ Lời giải:



Kẻ $SH \perp AC \Rightarrow SH \perp (ABCD)$.

Hình chiếu của S lên (ABCD)

$\Rightarrow$ góc giữa SA và đáy là:

$\widehat{SAC} \Rightarrow \widehat{SAC} = 60^0 \Rightarrow \widehat{SCA} = 30^0$.

Do tam giác ASC vuông tại S

$$\Rightarrow SA = AC.\tan\widehat{SCA} = a\sqrt{2}.\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$= \frac{a\sqrt{6}}{3} \Rightarrow SC = \sqrt{2a^2 - \frac{6}{9}a^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}a$$

Ta có:

$$\frac{1}{SH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{SC^2} = \frac{1}{\frac{6a^2}{9}} + \frac{1}{\frac{12}{9}a^2} \Rightarrow SH = \frac{2}{3}.$$

$$\Rightarrow V_{SABCD} = \frac{1}{3}.\frac{2}{3}a.a^2 = \frac{2a^3}{9} \text{ (đvtt).}$$

Ví dụ 31

Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy là hình vuông cạnh a, mặt bên *SAD* là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi *M, N, P* lần lượt là trung điểm của các cạnh *SB, BC, CD*. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (*MNP*).

➢ **Lời giải:**

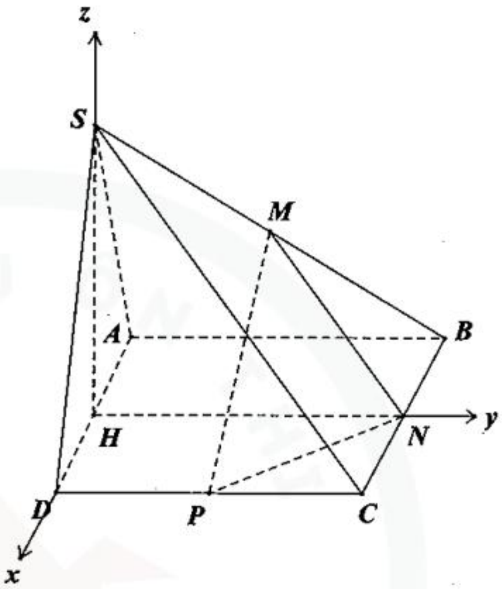
SAD là tam giác đều vuông góc với đáy nên gọi H là trung điểm AD thì $SH \perp (ABCD)$ và $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Nhận thấy SH, HN, DH đôi một vuông góc nên chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ, khi đó các trục tọa độ Ox, Oy, Oz lần lượt đi qua các điểm D, N, S.

Khi đó: $H \equiv O$ nên $H(0;0;0)$,

$A(-\frac{a}{2};0;0), D(\frac{a}{2};0;0)$, $B(-\frac{a}{2};a;0)$

$C(\frac{a}{2};0;0), S(0;0;\frac{a\sqrt{3}}{2})$.



M, N, P lần lượt là trung điểm của SB, BC, CD.

Nên $M(-\frac{a}{4};\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{4})$, $N(0;a;0)$,

$P(\frac{a}{2};\frac{a}{2};0)$

Ta có: $\begin{cases} \overrightarrow{NM} = (-\frac{a}{4};-\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{4}) \\ \overrightarrow{NP} = (\frac{a}{2};-\frac{a}{2};0) \end{cases}$

$$\Rightarrow \left[\overrightarrow{NM}, \overrightarrow{NP}\right] = \left(\frac{a^2\sqrt{3}}{8};\frac{a^2\sqrt{3}}{8};\frac{3a^2}{8}\right) = \frac{a^2\sqrt{3}}{8}\left(1;1;\sqrt{3}\right) = \frac{a^2\sqrt{3}}{8}.\vec{n}$$

với $\vec{n} = \left(1;1;\sqrt{3}\right)$.

Mặt phẳng (MNP) $\begin{cases} \text{qua } N(0;a;0) \\ \text{vtpt } \vec{n} = \left(1;1;\sqrt{3}\right) \end{cases}$ nên có phương trình:

$x + y + \sqrt{3}z - a = 0$.

$$\Rightarrow d(A;(MNP)) = \frac{\left|-\frac{a}{2}\right|}{\sqrt{1+1+3}} = \frac{\sqrt{5}a}{10}.$$

Vậy $d(A;(MNP)) = \frac{\sqrt{5}a}{10}$.

Ví dụ 32

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, $BD = 2a$; tam giác SAC vuông tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, $SC= a\sqrt{3}$. Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABCD$ và khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SAD).

➤ **Lời giải:**

Kẻ $SH\perp AC$ $(H\in AC)$

Ta có $(SAC) \perp (ABCD)$

$\Rightarrow SH \perp (ABCD)$

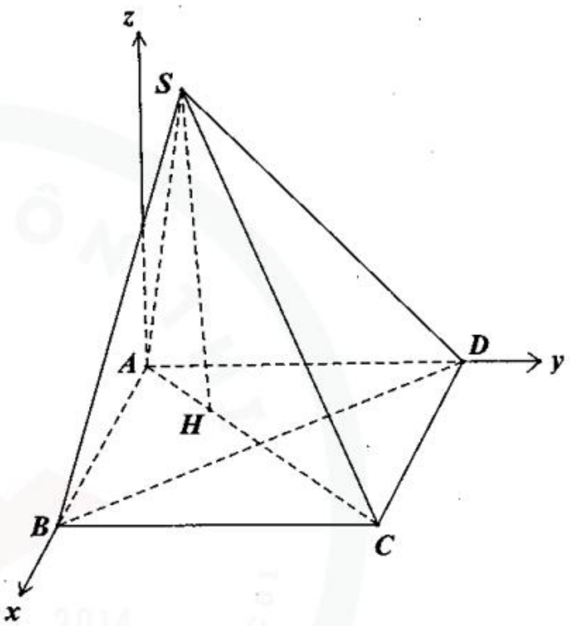
$SA = \sqrt{AC^2 - SC^2} = a;$

$SH = \dfrac{SA.SC}{AC} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

$AB = AD = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$

$V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}.SH.S_{ABCD}$

$= \dfrac{1}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}.a\sqrt{2}.a\sqrt{2} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$



Kẻ $Az//SH$. Chọn hệ trục tọa độ Axyz như hình vẽ, các trục Ax, Ay lần lượt đi qua các điểm B, D.

Khi đó:

$A \equiv O \Rightarrow A(0;0;0),\ B(a\sqrt{2};0;0),\ D(0;a\sqrt{2};0),\ S(\dfrac{a\sqrt{2}}{4};\dfrac{a\sqrt{2}}{4};\dfrac{a\sqrt{3}}{2})$

$$\begin{cases} \overrightarrow{SA} = (\dfrac{-a\sqrt{2}}{4};\dfrac{-a\sqrt{2}}{4};\dfrac{-a\sqrt{3}}{2}) \\ \overrightarrow{SD} = (\dfrac{-a\sqrt{2}}{4};\dfrac{3a\sqrt{2}}{4};\dfrac{-a\sqrt{3}}{2}) \end{cases} \Rightarrow \left[\overrightarrow{SA},\overrightarrow{SD}\right] = (\dfrac{-a^2\sqrt{6}}{2};0;\dfrac{a^2}{2})$$

$= \dfrac{a^2}{2}(-\sqrt{6};0;1) = \dfrac{a^2}{2}\vec{n}.$ Với $\vec{n} = (-\sqrt{6};0;1)$

Mặt phẳng *(SAD)* $\begin{cases} \text{qua } A(0;0;0) \\ \text{vtpt } \vec{n} = (-\sqrt{6};0;1) \end{cases}$ nên có phương trình $-\sqrt{6}x + z = 0$

Ta có $d(B;(SAD)) = \dfrac{\left|-\sqrt{6}.a\sqrt{2}\right|}{\sqrt{(-\sqrt{6})^2+1}} = \dfrac{2\sqrt{21}a}{7}$.

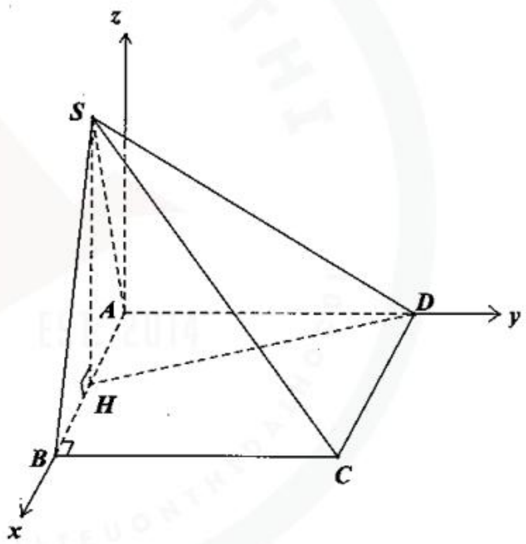
Ví dụ 32

Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình chữ nhật với $AB = a$, BC= $a\sqrt{3}$, H là trung điểm cạnh *AB*. Biết hai mặt phẳng *(SHC)* và *(SHD)* cùng vuông góc với mặt phẳng *(ABCD)*, đường thẳng *SD* tạo với mặt đáy góc $60°$. Tính thể tích khối chóp và khoảng cách giữa hai đường thẳng *AC* và *SB*.

➢ **Lời giải:**

Ta có: $\begin{cases} (SHC) \perp (ABCD) \\ (SHD) \perp (ABCD) \\ (SHC) \cap (SHD) = SH \end{cases}$

$\Rightarrow SH \perp (ABCD)$



Nhận thấy H là hình chiếu của S trên *(ABCD)* $\Rightarrow$ hình chiếu của *SD* trên *(ABCD)* là HD $\Rightarrow$ góc giữa *SD* và *(ABCD)* là $\widehat{SDH} = 60° \Rightarrow SH = HD.\tan 60°$

$= \sqrt{AH^2 + AD^2}.\sqrt{3} = \dfrac{a\sqrt{39}}{2}$

$V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}.SH.S_{ABCD} = \dfrac{1}{3}.AB.AD.SH = \dfrac{\sqrt{13}a^3}{2}$

Kẻ Az//SH. Chọn hệ trục tọa độ Axyz như hình vẽ, các trục Ax, Ay lần lượt đi qua các điểm B, D.

Khi đó: $A \equiv O \Rightarrow A(0;0;0)$, $B(a;0;0)$.

$C(a;a\sqrt{3};0)$, $S(\dfrac{a}{2};0;\dfrac{a\sqrt{39}}{2})$

Ta có:

$$\begin{cases} \overrightarrow{AC} = (a; a\sqrt{3}; 0) \\ \overrightarrow{SB} = (\dfrac{a}{2}; 0; -\dfrac{a\sqrt{39}}{2}) \Rightarrow \left[\overrightarrow{SB}; \overrightarrow{AC}\right] = (\dfrac{3\sqrt{13}a^2}{2}; -\dfrac{\sqrt{39}a^2}{2}; \dfrac{a\sqrt{3}}{2}) \\ \overrightarrow{AB} = (a; 0; 0) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left[\overrightarrow{SB}; \overrightarrow{AC}\right] = (\dfrac{3\sqrt{13}a^2}{2}; -\dfrac{\sqrt{39}a^2}{2}; \dfrac{a\sqrt{3}}{2})$$

$$\Rightarrow d(SB, AC) = \dfrac{\left|\left[\overrightarrow{SB}; \overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AB}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{SB}; \overrightarrow{AC}\right]\right|}$$

$$= \dfrac{\dfrac{3\sqrt{13}a^3}{2}}{\sqrt{(\dfrac{3\sqrt{13}a^2}{2})^2 + (-\dfrac{\sqrt{39}a^2}{2})^2 + (\dfrac{\sqrt{3}a^2}{2})^2}} = \dfrac{\sqrt{2067}a}{53}$$

Vậy $d(SB, AC) = \dfrac{\sqrt{2067}a}{53}$.

Ví dụ 33

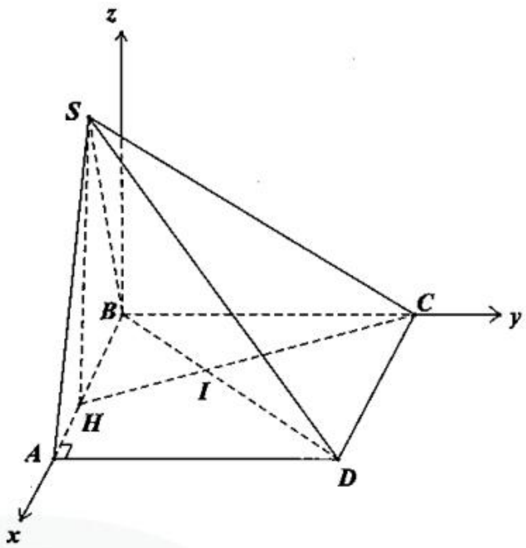
Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy là hình vuông cạnh a. Mặt bên *SAB* là tam giác vuông tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, hình chiếu vuông góc của S trên đường thẳng *AB* là điểm H thuộc đoạn *AB* sao cho *BH=2AH*. Gọi I là giao điểm của *HC* và *BD*. Tính thể tích khối chóp *S.ABCD* và khoảng cách từ I đến mặt phẳng *(SCD)*.

➢ **Lời giải:**

Ta có: $SH^2 = HA.HB = \dfrac{2a^2}{9} \Rightarrow SH = \dfrac{a\sqrt{2}}{3}$

$$V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}.SH.S_{ABCD} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{a\sqrt{2}}{3}.a^2 = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{9}$$

Chọn hệ trục tọa độ *Bx, yz.*



Như hình vẽ, các trục Bx, By lần lượt đi qua các điểm A, C, Bz//SH

Khi đó:

$B(0;0;0)$, $C(0;a;0)$, $D(a;a;0)$,

$H(\frac{2a}{3};0;0), S(\frac{2a}{3};0;\frac{a\sqrt{2}}{3})$

Đường thẳng BD:

$\begin{cases} \text{qua } B(0;0;0) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{BD}(a;a;0) \end{cases}$

nên có phương trình $\begin{cases} x = at \\ y = at \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 0 \end{cases}$

Đường thẳng *HC* $\begin{cases} \text{qua } C(0;a;0) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{CH}(\frac{2a}{3};-a;0) \end{cases}$.

Nên có phương trình $\begin{cases} x = \frac{2a}{3}t' \\ y = a - at' \quad (t' \in \mathbb{R}) \\ z = 0 \end{cases}$

Ta có: $I \in BD \Rightarrow I(at;at;0)$

Xét hệ phương trình: $\begin{cases} at = \frac{2a}{3}t' \\ at = a - at' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{2}{5} \\ t' = \frac{3}{5} \end{cases} \Rightarrow I(\frac{2a}{5};\frac{2a}{5};0)$

Ta có: $\begin{cases} \overrightarrow{CS} = (\frac{2a}{3};-a;\frac{\sqrt{2}a}{3} \\ \overrightarrow{CD} = (a;0;0) \end{cases} \Rightarrow \left[\overrightarrow{CS},\overrightarrow{CD}\right] = (0;\frac{\sqrt{2}a^2}{3};a^2)$

Mặt phẳng *(SCD)* $\begin{cases} \text{qua } C(0;a;0) \\ \text{vtpt } \left[\overrightarrow{CS},\overrightarrow{CD}\right]=(0;\dfrac{\sqrt{2}a^2}{3};a^2) \end{cases}$.

Nên có phương trình: $\dfrac{\sqrt{2}}{3}y+z-\dfrac{\sqrt{2}}{3}a=0.$

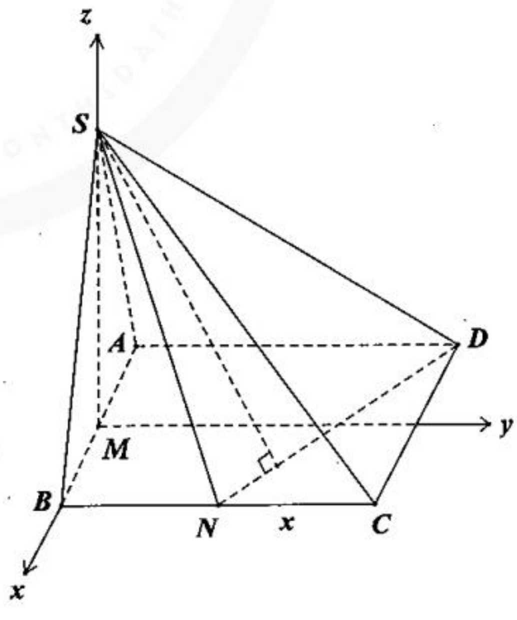
Ta có: $d\left(I;(SCD)\right)=\dfrac{\left|\dfrac{\sqrt{2}}{3}a^2.\dfrac{2}{5}a-\dfrac{\sqrt{2}}{3}a^3\right|}{\sqrt{(\dfrac{\sqrt{2}a^2}{3})^2+a^4}}=\dfrac{3a\sqrt{22}}{55}$

Vậy $d\left(I;(SCD)\right)=\dfrac{3a\sqrt{22}}{55}$.

Ví dụ 34

Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình vuông cạnh a. Mặt bên *SAB* là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M là trung điểm của *AB* và N là điểm di động trên cạnh *BC*. Đặt $x = CN$ với $0 \le x \le a$ (a >0). Tính khoảng cách từ S đến *DN*. Tìm x để khoảng cách này lớn nhất.

➢ **Lời giải:**



Ta có $\begin{cases} (SAB)\cap(ABCD)=AB \\ SM\perp AB \\ SM\in(SAB) \\ (SAB)\perp(ABCD) \end{cases}$

$\Rightarrow SM\perp(ABCD); SM=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Chọn hệ trục tọa độ *Mxyz* như hình vẽ, các trục Mx, Mz lần lượt đi qua các điểm B, S. $My//BC$.

Khi đó:

$M(0;0;0), A(\dfrac{-a}{2};0;0),$

$B(\frac{a}{2};0;0)$, $C(\frac{a}{2};a;0)$,

$D(-\frac{a}{2};a;0)$, $N(\frac{a}{2};a-x;0)$, $S(0;0;\frac{a\sqrt{3}}{2})$

Ta có: $\begin{cases} \overrightarrow{SD} = (\frac{-a}{2};a;\frac{-a\sqrt{3}}{2}) \\ \overrightarrow{DN} = (a;-x;0) \end{cases} \Rightarrow \left[\overrightarrow{SD},\overrightarrow{DN}\right] = (\frac{-\sqrt{3}ax}{2};\frac{-\sqrt{3}a^2}{2};\frac{ax}{2}-a^2)$

$$\begin{cases} \left|\left[\overrightarrow{SD},\overrightarrow{DN}\right]\right| = \sqrt{\frac{3a^2x^2}{4}+\frac{2a^4}{4}+\frac{a^2}{4}(x-2a)^2} = \frac{a}{2}\sqrt{4x^2-4ax+7a^2} \\ \left|\overrightarrow{DN}\right| = \sqrt{a^2+x^2} \end{cases}$$

Suy ra: $d(S,DN) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{SD},\overrightarrow{DN}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{DN}\right|} = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{4x^2-4ax+7a^2}{x^2+a^2}}$

Xét hàm số: $f(x) = \frac{4x^2-4ax+7a^2}{x^2+a^2}$ với $0 \le x \le a$ (a >0)

$f'(x) = \frac{2a(2x^2-3ax-2a^2)}{(x^2+a^2)^2}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2-3ax-2a^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-a}{2}$ hoặc $x = 2a$

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\frac{a}{2}$		0		a		2a	
f'(x)	+ 0	-		-		-	0	+
f(x)			7	↘	$\frac{7}{2}$			

Suy ra max $f(x) = 7$ tại $x = 0$

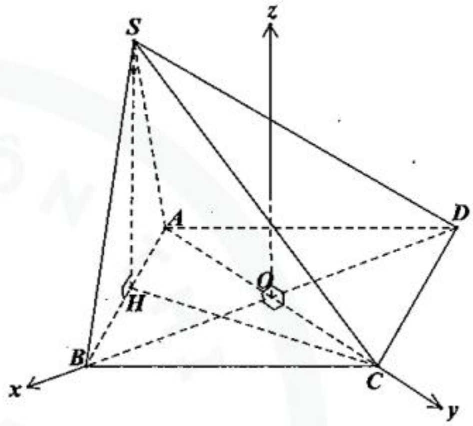
Vậy max $d(S,DN) = \frac{a\sqrt{7}}{2}$ khi $x = 0$.

Ví dụ 35

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh bằng a. SAB là tam giác vuông cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, góc giữa cạnh SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng $60°$, cạnh $AC = a$. Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABCD$ và khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC).

➢ **Lời giải:**

Gọi H là trung điểm AB.



$\Rightarrow SH \perp AB$

Ta có: $\begin{cases} (SAB) \perp (ABCD) \\ (SAB) \cap (ABCD) = AB \\ SH \perp AB \\ SH \subset (SAB) \end{cases}$

$\Rightarrow SH \perp (ABCD)$

HC là hình chiếu của SC trên mặt phẳng $(ABCD)$.

Nên $\left(\widehat{SC,(ABCD)}\right) = \widehat{SCH} = 60°$

Tam giác ABC đều

$$\Rightarrow CH = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow SH = CH.\tan 60° = \frac{3a}{2}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}.AB.AC.\sin 60° = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow S_{ABCD} = 2.S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}.SH.S_{ABCD} = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$$

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ: $Oz // SH$, các trục Ox, Oy lần lượt đi qua các điểm B, C.

Khi đó: $O(0;0;0), A(0;-\frac{a}{2};0), B\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};0;0\right); C(0;\frac{a}{2};0)$.

H là trung điểm AB nên $H(\frac{a\sqrt{3}}{4};-\frac{a}{4};0) \Rightarrow S(\frac{a\sqrt{3}}{4};-\frac{a}{4};\frac{3a}{2})$

Ta có: $\begin{cases} \overrightarrow{SB} = (\frac{a\sqrt{3}}{4}; \frac{a}{4}; -\frac{3a}{2}) \\ \overrightarrow{SC} = (-\frac{a\sqrt{3}}{4}; \frac{3a}{4}; -\frac{3a}{2}) \end{cases}$

$$\Rightarrow \left[\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SC}\right] = (\frac{3a^2}{4}; \frac{3\sqrt{3}a^2}{4}; \frac{\sqrt{3}a^2}{4}) = \frac{\sqrt{3}a^2}{4}(\sqrt{3}; 3; 1) = \frac{a^2}{4}\vec{n}$$

với $\vec{n} = (\sqrt{3}; 3; 1)$

Mặt phẳng *(SBC)* $\begin{cases} qua\ C\left(0; \frac{a}{2}; 0\right) \\ vtpt\ \vec{n} = (\sqrt{3}; 3; 1) \end{cases}$.

Nên có phương trình: $\sqrt{3}x + 3(y - \frac{a}{2}) + z = 0$ hay $\sqrt{3}x + 3y + z - \frac{3a}{2} = 0$

$$\Rightarrow d\left(A, (SBC)\right) = \frac{\left|3.\frac{-a}{2} - \frac{3a}{2}\right|}{\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 3^2 + 1}} = \frac{3\sqrt{13}a}{13}.$$

Vậy $d\left(A, (SBC)\right) = \dfrac{3\sqrt{13}a}{13}$.

Ví dụ 36

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B với BC là đáy nhỏ. Biết rằng tam giác SAB là tam giác đều có cạnh với độ dài bằng *2a* và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy, $SC = a\sqrt{5}$ và khoảng cách từ D tới mặt phẳng (SHC) bằng $2a\sqrt{2}$ (H là trung điểm AB). Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABCD$.

➤ **Lời giải:**

Từ giả thiết suy ra $SH \perp (ABCD)$.

Tam giác SAB đều cạnh bằng $2a$ nên đường trung tuyến

$SH = \dfrac{\sqrt{3}}{2}.2a = a\sqrt{3}$.

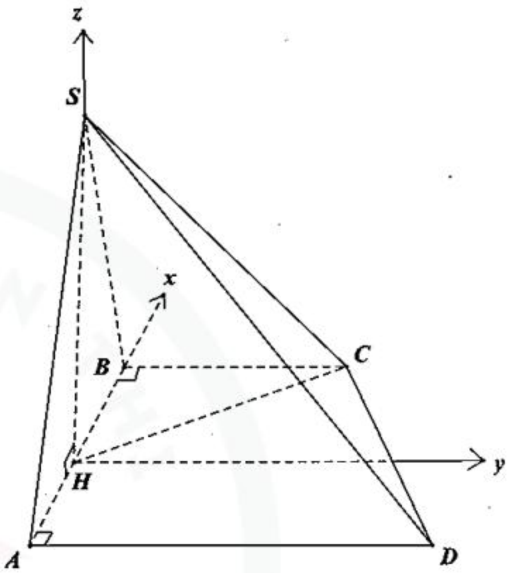
Tam giác SHC vuông tại H nên ta có $HC=\sqrt{SC^2-SH^2}$

$=\sqrt{\left(a\sqrt{5}\right)^2-\left(a\sqrt{3}\right)^2}=a\sqrt{2}$.

Tam giác HBC vuông tại B nên ta có $BC=\sqrt{HC^2-HB^2}$

$=\sqrt{\left(a\sqrt{2}\right)^2-a^2}=a$.

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.



Chọn $a=1$, khi đó $A\left(-\frac{1}{2};0;0\right)$, $B\left(\frac{1}{2};0;0\right)$, $C(1;1;0)$, $S\left(0;0;\sqrt{3}\right)$.

Do $AD \parallel Hy$ và thuộc mặt phẳng $(ABCD)$.

Nên $D\left(-\frac{1}{2};y_D;0\right)$ (với $y_D>0$).

Ta có:

$\overrightarrow{HS}=\left(0;0;\sqrt{3}\right)$ và $\overrightarrow{HC}=(1;1;0)$.

suy ra $\left[\overrightarrow{HS},\overrightarrow{HC}\right]=\left(-\sqrt{3};\sqrt{3};0\right)$.

Là một véctơ pháp tuyến của mặt phẳng (SHC).

Phương trình mặt phẳng (SHC) là: $x-y=0$.

Theo bài ra ta có $d\left(D,(SHC)\right)=2a\sqrt{2}=2\sqrt{2}$ (do ta chọn $a=1$)

$$\Leftrightarrow \frac{\left|-\frac{1}{2}-y_D\right|}{\sqrt{1^2+1^2}}=2\sqrt{2}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\frac{1}{2}+y_D=4\\ \frac{1}{2}+y_D=-4\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}y_D=\frac{7}{2}\\ y_D=-\frac{9}{2}\ (l)\end{array}\right.\Rightarrow D\left(-\frac{1}{2};\frac{7}{2};0\right).$$

Ta có:

$\overrightarrow{SA}=\left(-\frac{1}{2};0;-\sqrt{3}\right)$, $\overrightarrow{SB}=\left(\frac{1}{2};0;-\sqrt{3}\right)$,

$\overrightarrow{SC}=\left(1;1;-\sqrt{3}\right)$, $\overrightarrow{SD}=\left(-\frac{1}{2};\frac{7}{2};-\sqrt{3}\right)$.

Suy ra $\left[\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SC}\right] = \left(\sqrt{3};\ -\dfrac{3\sqrt{3}}{2};-\dfrac{1}{2}\right)$.

$$\Rightarrow \begin{cases} \left[\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SC}\right].\overrightarrow{SB} = \sqrt{3}.\dfrac{1}{2} + \left(-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right).0 + \left(-\dfrac{1}{2}\right).\left(-\sqrt{3}\right) = \sqrt{3} \\ \left[\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SC}\right].\overrightarrow{SD} = \sqrt{3}.\left(-\dfrac{1}{2}\right) + \left(-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right).\dfrac{7}{2} + \left(-\dfrac{1}{2}\right).\left(-\sqrt{3}\right) = -\dfrac{21\sqrt{3}}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left|\left[\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SC}\right].\overrightarrow{SB}\right| = \sqrt{3} \\ \left|\left[\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SC}\right].\overrightarrow{SD}\right| = \left|-\dfrac{21\sqrt{3}}{4}\right| = \dfrac{21\sqrt{3}}{4}. \end{cases}$$

Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là:

$$V_{S.ABCD} = V_{S.ACB} + V_{S.ACD} = \frac{1}{6}.\sqrt{3} + \frac{1}{6}.\frac{21\sqrt{3}}{4} = \frac{25\sqrt{3}}{24}$$

Vậy $V_{S.ABCD} = \dfrac{25\sqrt{3}}{24}a^3$ (đvtt)

Ví dụ 37

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M, N, P, K lần lượt là trung điểm của BC, CD, SD, SB. Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng MK với đường thẳng AP và chứng minh mặt phẳng (ANP) vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$.

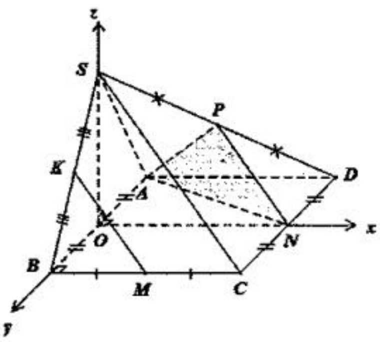
➢ **Lời giải:**

Gọi O là trung điểm của AB.

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ.

$O \equiv O(0;0;0)$, $Ox \equiv ON$, $Oy \equiv OB$, $Oz \equiv OS$.

Chọn $a = 1$, khi đó:



$A\left(0;-\dfrac{1}{2};0\right)$, $B\left(0;\dfrac{1}{2};0\right)$, $N(1;0;0)$, $S\left(0;0;\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$D\left(1;-\dfrac{1}{2};0\right)$, $P\left(\dfrac{1}{2};-\dfrac{1}{4};\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$, $M\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2};0\right)$, $K\left(0;\dfrac{1}{4};\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$.

Đường thẳng MK có véctơ chỉ phương là:

$$\overrightarrow{MK}=\left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{4};\frac{\sqrt{3}}{4}\right)//\vec{\alpha}\left(2;1;-\sqrt{3}\right).$$

Đường thẳng AP có véctơ chỉ phương là: $\overrightarrow{AP}=\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{4};\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)//\vec{\beta}\left(2;1;\sqrt{3}\right)$.

Ta có $\left[\vec{\alpha},\vec{\beta}\right]=\left(2\sqrt{3};-4\sqrt{3};0\right)$, $\overrightarrow{AK}=\left(0;\dfrac{3}{4};\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$.

$$\Rightarrow\left[\vec{\alpha},\vec{\beta}\right].\overrightarrow{AK}=2\sqrt{3}.0+\left(-4\sqrt{3}\right).\frac{3}{4}+0.\frac{\sqrt{3}}{4}=-3\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow\left|\left[\vec{\alpha},\vec{\beta}\right].\overrightarrow{AK}\right|=\left|-3\sqrt{3}\right|=3\sqrt{3}.$$

Vậy khoảng cách giữa hai đường thẳng MK và AP là:

$$d\left(MK,AP\right)=\frac{\left|\left[\vec{\alpha},\vec{\beta}\right].\overrightarrow{AK}\right|}{\left|\left[\vec{\alpha},\vec{\beta}\right]\right|}=\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2+\left(-4\sqrt{3}\right)^2+0^2}}=\frac{3\sqrt{5}}{10}=\frac{3\sqrt{5}}{10}a$$

(do ta chọn $a=1$).

Mặt phẳng (ANP) có cặp véctơ chỉ phương là

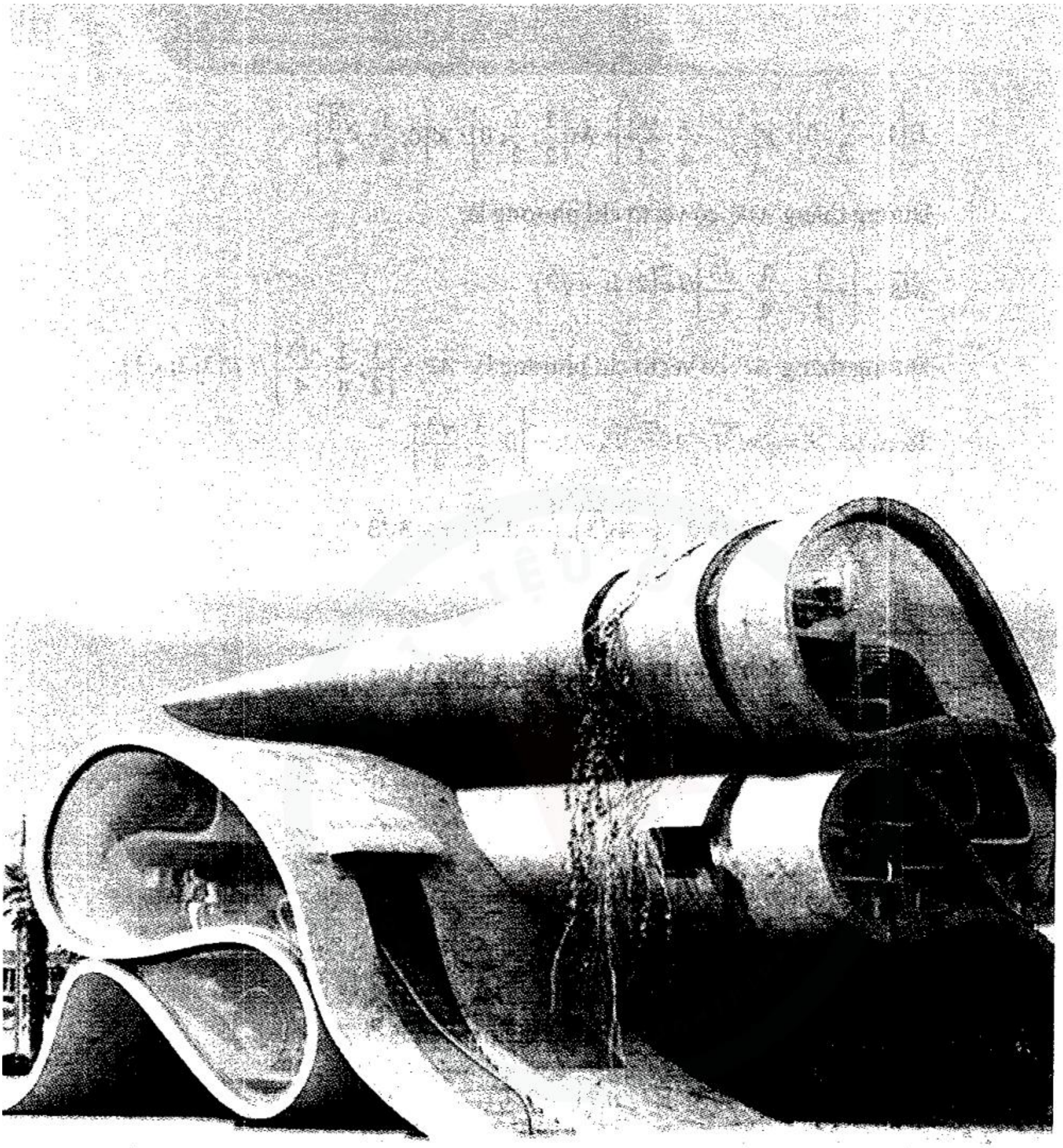
$$\overrightarrow{NP}=\left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{4};\frac{\sqrt{3}}{4}\right)//\vec{\alpha}\left(2;1;-\sqrt{3}\right)\text{ và }\overrightarrow{AP}=\left(\frac{1}{2};\frac{1}{4};\frac{\sqrt{3}}{4}\right)//\vec{\beta}\left(2;1;\sqrt{3}\right).$$

Do đó mặt phẳng (ANP) có véctơ pháp tuyến là

$$\left[\vec{\alpha},\vec{\beta}\right]=\left(2\sqrt{3};-4\sqrt{3};0\right)//\overrightarrow{n_1}\left(1;-2;0\right).$$

Mặt phẳng $(ABCD)$ có véctơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_2}=\left(0;0;1\right)$.

Do $\overrightarrow{n_n}.\overrightarrow{n_2}=0$ nên $(ANP)\perp(ABCD)$ (đpcm).



LĂNG TRỤ

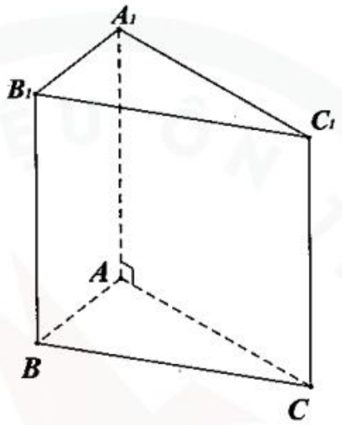
A. LÝ THUYẾT

1. KIẾN THỨC CƠ BẢN VỀ HÌNH LĂNG TRỤ

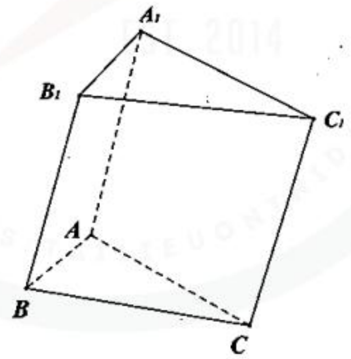
- ***Định nghĩa:*** Lăng trụ là đa giác có hai mặt (đáy) song song với nhau, còn các mặt khác (các mặt bên) đều là những hình bình hành.

- Các loại lăng trụ thường gặp:

+ *Lăng trụ đứng:* là lăng trụ có các mặt bên vuông góc với đáy.



+ *Lăng trụ xiên:* là lăng trụ có mặt bên không vuông góc với đáy.



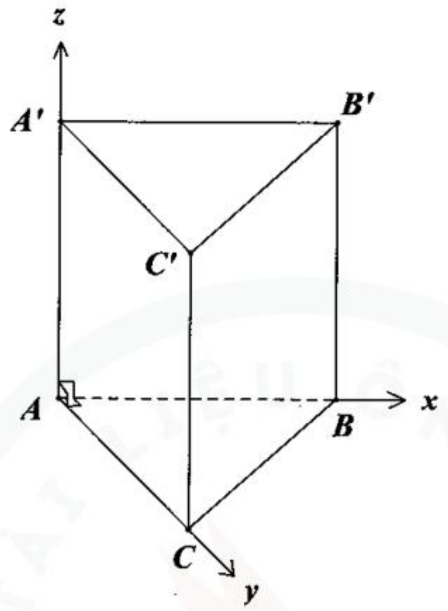
2. THIẾT LẬP HỆ TRỤC TỌA ĐỘ VỚI HÌNH LĂNG TRỤ

2.1. Thiết lập hệ tọa độ cho hình lăng trụ tam giác:

+ Với lăng trụ đứng thì ta chọn trục Oz thẳng đứng, gốc tọa độ là một đỉnh nào đó của đáy hoặc tâm của đáy. Các trục Ox, Oy thì dựa vào tính chất của đa giác đáy mà chọn cho phù hợp.

+ Với lăng trụ nghiêng, ta dựa trên đường cao và tính chất của đáy để chọn hệ trục tọa độ cho thích hợp.

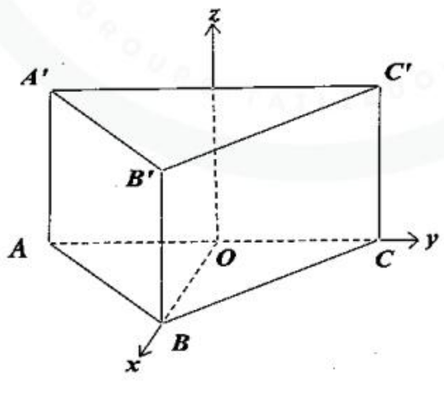
a) Hình lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy là tam giác vuông cân tại A, AB=AC=a, AA'=b



Vì ABC.A'B'C' là lăng trụ đứng có đáy là tam giác vuông cân tại A, nên dễ thấy AA', AC, AB đôi một vuông góc, nên chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ:

$A(0;0;0), B(a;0;0), C(0;a;0), A'(0;0;b), B'(a;0;b), C'(0;a;b)$

b) Hình lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy là tam giác đều cạnh A, AA'=2a

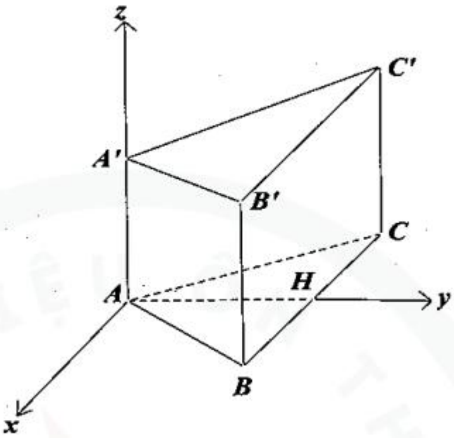


Vì ABC.A'B'C' là lăng trụ đứng có đáy là tam giác đều nên ta kẻ BO $\perp$ AC, từ đó dễ thấy BO, AC, AA' đôi một vuông góc. Từ O kẻ Oz // AA', ta chọn được hệ tọa độ như hình vẽ:

$A\left(0;-\frac{a}{2};0\right), A'\left(0;-\frac{a}{2};2a\right), B\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};0;0\right), B'\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};0;2a\right),$

$C\left(0;\frac{a}{2};0\right), C'\left(0;\frac{a}{2};2a\right)$

c) Hình lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy là tam giác cân tại A, AB=AC=a, $\widehat{ABC}=120°$, AA'$=a\sqrt{2}$



Vì đáy ABC là tam giác cân tại A, nên kẻ Ay ≡ AH (AH là đường cao đồng thời là đường trung tuyến tam giác ABC), kẻ Ax // BC, khi đó dễ thấy AA', Ay, Ax đôi một vuông góc nên ta chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ:

$A(0;0;0), A'(0;0;a\sqrt{2}), B\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};\frac{a}{2};0\right), B'\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};\frac{a}{2};a\sqrt{2}\right),$

$C\left(-\frac{a\sqrt{3}}{2};-\frac{a}{2};0\right), C'\left(-\frac{a\sqrt{3}}{2};-\frac{a}{2};a\sqrt{2}\right)$

2.2. Thiết lập hệ trục tọa độ cho hình lăng trụ tứ giác:

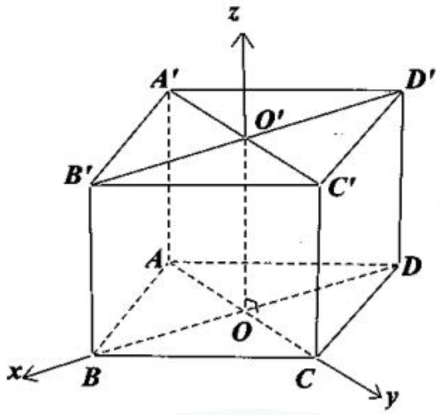
Với hình hộp chữ nhật thì việc thiết lập hệ tọa độ khá đơn giản, thường có hai cách:

+ Chọn một đỉnh làm gốc tọa độ và ba trục trùng với ba cạnh của hình hộp.

+ Chọn tâm của đáy làm gốc tọa độ và ba trục song song với ba cạnh của hình hộp.

Với hình lăng trụ đứng ABCD. A′B′C′D′ có đáy ABCD là hình thoi:

Chọn hệ trục tọa độ như sau:



Ngoài các trường hợp trên, trong các trường hợp khác ta dựa vào quan hệ song song, vuông góc và các tính chất của đường cao, đáy,... để thiết lập hệ tọa độ cho thích hợp.

B. BÀI TẬP VÍ DỤ

Ví dụ 1

Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông, $AB = BC = a$, cạnh bên $AA' = a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm của cạnh AA', N là trung điểm BC. Tính theo a thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ và khoảng cách giữa 2 đường thẳng MN, $B'C$.

➤ **Lời giải:**

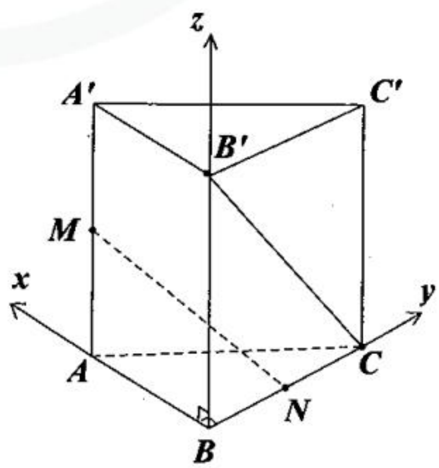
Chọn hệ trục tọa độ $Bxyz$ như hình vẽ, các trục Bx, By, Bz lần lượt đi qua các điểm A, C, B′.

Khi đó:

$A(a;0;0), B(0;0;0), C(0;a;0)$,

$A'(a;0;a\sqrt{2}), B'(0;0;a\sqrt{2})$,

$C'(0;a;a\sqrt{2})$.



M là trung điểm $AA' \Rightarrow M(a;0;\frac{a\sqrt{2}}{2})$

N là trung điểm $BC \Rightarrow N(0;\frac{a}{2};0)$.

+) Tính thể tích lăng trụ $ABC.A'B'C'$

Theo cách thông thường:

$$V_{ABC.A'B'C'} = AA'.S_{ABC} = a\sqrt{2}.\frac{1}{2}.a.a = \frac{a^3\sqrt{2}}{2}$$

Theo cách tọa độ:

$$V_{ABC.A'B'C'} = AA'.S_{ABC} = AA'.\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right]\right|$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} \overrightarrow{BA} = (a;0;0) \\ \overrightarrow{BC} = (0;a;0) \Rightarrow \left[\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right] = (0;0;-a^2) \\ AA' = a\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow V_{ABC.A'B'C'} = AA'.\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right]\right| = \frac{1}{2}.a\sqrt{2}.\left|a^2\right| = \frac{a^3\sqrt{2}}{2}$$

☞ *Tính theo phương pháp thông thường sẽ nhanh gọn hơn, vì vậy trong các bài toán thể tích có thể tính bằng hai cách ta ưu tiên dùng cách thông thường.*

Ta có:

$$\begin{cases} \overrightarrow{MN} = (-a;\frac{a}{2};-\frac{a\sqrt{2}}{2}) \\ \overrightarrow{B'C} = (0;a;-a\sqrt{2}) \quad \Rightarrow \left[\overrightarrow{MN},\overrightarrow{B'C}\right] = (0;-a^2\sqrt{2};-a^2) \\ \overrightarrow{NC} = (0;\frac{a}{2};0) \end{cases}$$

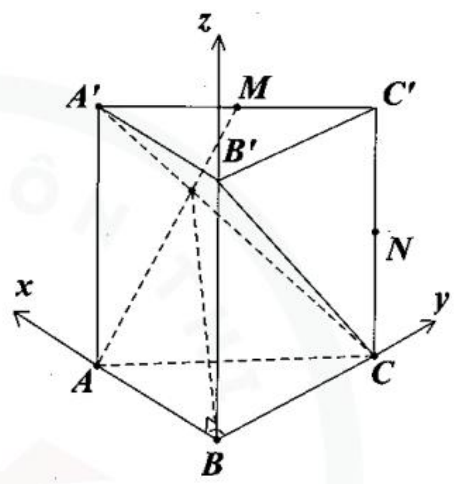
$$\Rightarrow \left[\overrightarrow{MN},\overrightarrow{B'C}\right].\overrightarrow{NC} = -\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow d(MN,B'C) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{MN},\overrightarrow{B'C}\right].\overrightarrow{NC}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{MN},\overrightarrow{B'C}\right]\right|} = \frac{\frac{a^3\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{0+(-a^2\sqrt{2})^2+(-a^2)^2}} = \frac{a\sqrt{6}}{6}$$

Ví dụ 2

Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là một tam giác vuông tại B, $AB=\frac{a}{2}, AA'=a, AC'=2a$. Gọi M là trung điểm của đoạn $A'C'$, N là trung điểm CC'. I là giao điểm của AM và $A'C$. Tính khoảng cách từ điểm N tới mặt phẳng (IBC).

➤ **Lời giải:**



Chọn hệ trục tọa độ $Bxyz$ như hình vẽ, các trục Bx, By, Bz lần lượt đi qua các điểm A, C, B'.

Khi đó: $A(a;0;0)$, $B(0;0;0)$, $C(0;2a;0)$, $A'(a;0;a\sqrt{2})$, $B'(0;0\ 2a)$, $C'(0;2a;2a)$.

M là trung điểm A'C' $\Rightarrow M(\frac{a}{2};a;2a)$

N là trung điểm CC' $\Rightarrow N(0;2a;a)$

Đường thẳng AM

$$\begin{cases}\text{qua } A(a;0;0)\\ \text{vtcp } \overrightarrow{AM}=(-\frac{a}{2};a;2a)=-\frac{a}{2}(1;-2;-4)\end{cases}$$

Nên có phương trình: $\begin{cases}x=a+t\\ y=-2t\\ z=-4t\end{cases}\ (t\in\mathbb{R})$

Đường thẳng A'C $\begin{cases}\text{qua } C(0;2a;0)\\ \text{vtcp } \overrightarrow{A'C}=(-a;2a;-2a)=-a(1;-2;2)\end{cases}$

nên có phương trình $\begin{cases}x=t'\\ y=2a-2t'(t'\in\mathbb{R})\\ z=2t'\end{cases}$

Ta có: $I\in AM \Rightarrow I(a+t;-2t;-4t)$.

Mặt khác $I = AM \cap A'C$

$\Rightarrow$ Tọa độ điểm I là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} a+t=t' \\ -2t=2a-2t' \\ -4t=2t' \end{cases} <=> \begin{cases} t=-\dfrac{a}{3} \\ t'=\dfrac{2a}{3} \end{cases} => I\left(\frac{2a}{3};\frac{4a}{3};\frac{4a}{3}\right)$$

Mặt phẳng (IBC) $\begin{cases} \text{qua } B(0;0;0) \\ \text{vtpt } \left[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BI}\right]=\left(\dfrac{8a^2}{3};0;\dfrac{4a^2}{3}\right)=\dfrac{4a^2}{3}(2;0;1) \end{cases}$

nên có phương trình $2x+z=0$.

$$\Rightarrow d\left(N,(IBC)\right)=\frac{|a|}{\sqrt{2^2+1}}=\frac{a\sqrt{5}}{5}.$$

Vậy $d\left(N,(IBC)\right)=\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$.

Ví dụ 3

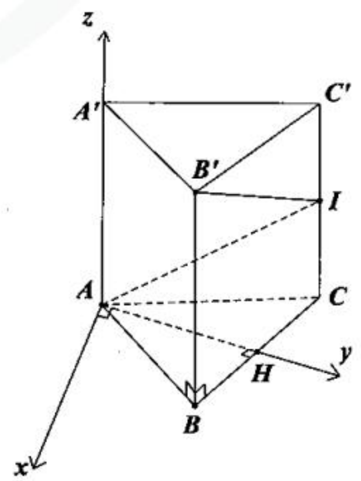
Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là một tam giác cân với $AB=AC=a$, góc $\widehat{BAC}=120°$, cạnh bên $BB'=a$. Gọi I là trung điểm CC'. Chứng minh tam giác $AB'I$ vuông tại A và tính cosin góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và $(AB'I)$.

➤ **Lời giải:**

Gọi H là trung điểm BC $\Rightarrow AH \perp BC$

Ta có: $\begin{cases} AH = AB.\sin 30° = \dfrac{a}{2} \\ BH = AB.\cos 30° = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

$\Rightarrow BC = a\sqrt{3}$.



Chọn hệ trục tọa độ $Axyz$ như hình vẽ, các trục Ay, Az lần lượt đi qua các điểm H, A'.

Khi đó: $A(0;0;0)$, $B(\frac{a\sqrt{3}}{2};\frac{a}{2};0)$, $C(-\frac{a\sqrt{3}}{2};\frac{a}{2};0)$,

$A'(0;0;a), B'(\frac{a\sqrt{3}}{2};\frac{a}{2};a), C'(-\frac{a\sqrt{3}}{2};\frac{a}{2};a)$.

I là trung điểm CC′ $\Rightarrow I(-\frac{a\sqrt{3}}{2};\frac{a}{2};\frac{a}{2})$.

Ta có: $\begin{cases} \overrightarrow{AB'} = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2};\frac{a}{2};a\right) \\ \overrightarrow{AI} = \left(-\frac{a\sqrt{3}}{2};\frac{a}{2};\frac{a}{2}\right) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AB'}.\overrightarrow{AI} = 0 \Rightarrow AB' \perp AI$

$\Rightarrow$ tam giác $AB'I$ vuông tại A.

Mặt phẳng (ABC) có phương trình $z = 0$ có vtpt $\overrightarrow{n_1} = (0;0;1)$

Mặt phẳng $(AB'I)$ có vtpt

$$\left[\overrightarrow{AB'},\overrightarrow{AI}\right] = \left(-\frac{a^2}{4};-\frac{3\sqrt{3}a^2}{4};\frac{2\sqrt{3}a^2}{4}\right)$$

$$= -\frac{a^2}{4}\left(1;3\sqrt{3};-2\sqrt{3}\right) = -\frac{a^2}{4}\vec{n}$$

$$\cos\left((ABC),(AB'I)\right) = \cos\left(\vec{n},\overrightarrow{n_1}\right) = \frac{\left|\vec{n}.\overrightarrow{n_1}\right|}{\left|\vec{n}\right|.\left|\overrightarrow{n_1}\right|}$$

$$= \frac{\left|-2\sqrt{3}\right|}{\sqrt{1}.\sqrt{1+\left(3\sqrt{3}\right)^2+\left(-2\sqrt{3}\right)^2}} = \frac{\sqrt{30}}{10}.$$

với $\vec{n} = \left(1;3\sqrt{3};-2\sqrt{3}\right)$.

Vậy $\cos\left((ABC),(AB'I)\right) = \frac{\sqrt{30}}{10}$.

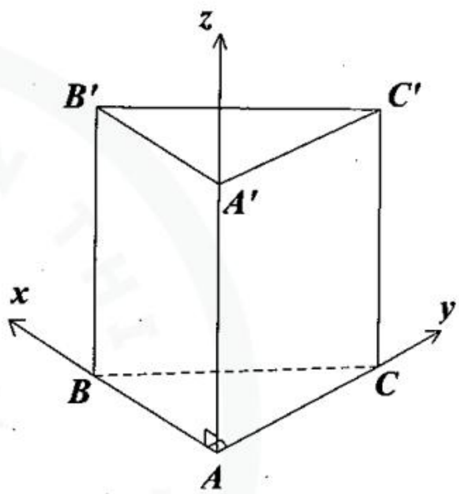
Ví dụ 4

Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là một tam giác vuông cân tại đỉnh A) $BC = 2a$. Biết góc giữa hai mặt phẳng $(AB'C)$ và $(BB'C)$ có số đo bằng α.

Chứng minh rằng $AA' = \dfrac{2a.\cos\alpha}{\sqrt{\cos(\pi - 2\alpha)}}$.

➢ **Lời giải:**

Chọn hệ trục tọa độ $Axyz$ như hình vẽ, các trục Ax, Ay, Az lần lượt đi qua các điểm B, C, A′.



Khi đó: $B(a\sqrt{2};0;0)$, $C(0;a\sqrt{2};0)$.

Giả sử: $AA' = h$, khi đó $A'(0;0;h)$, $B'(a\sqrt{2};0;h)$, $C'(0;a\sqrt{2};h)$.

Gọi $\vec{n_1}, \vec{n_2}$ theo thứ tự là véc tơ pháp tuyến của hai mặt phẳng $(AB'C)$ và $(BB'C)$.

Ta có:

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB'} = \left(a\sqrt{2};0;h\right) \\ \overrightarrow{AC} = \left(0;a\sqrt{2};0\right) \end{cases} \Rightarrow \left[\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB'}\right]$$

$$= \left(\sqrt{2}ah;0;-2a^2\right) = a\sqrt{2}\left(h;0;-a\sqrt{2}\right) = a\sqrt{2}.\vec{n_1} \text{ với } \vec{n_1} = \left(h;0;-a\sqrt{2}\right)$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{BB'} = (0;0;h) \\ \overrightarrow{BC} = \left(-a\sqrt{2};a\sqrt{2};0\right) \end{cases} \Rightarrow \left[\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BB'}\right] = \left(\sqrt{2}ah;\sqrt{2}ah;0\right)$$

$$= ah\sqrt{2}\left(1;1;0\right) = ah\sqrt{2}.\vec{n_2} \text{ với } \vec{n_2} = (1;1;0)$$

$$\cos\left((AB'C),(BB'C)\right) = \cos\left(\vec{n_1}, \vec{n_2}\right) = \frac{\left|\vec{n_1}.\vec{n_2}\right|}{\left|\vec{n_1}\right|.\left|\vec{n_2}\right|} = \frac{|h|}{\sqrt{1+1}.\sqrt{h^2 + \left(-a\sqrt{2}\right)^2}}$$

$$\Leftrightarrow h^2 = \frac{4a^2.\cos^2\alpha}{1-2\cos^2\alpha} \Rightarrow h = \frac{2a.\cos\alpha}{\sqrt{\cos(\pi-2\alpha)}} = AA'$$

Vậy $AA' = \dfrac{2a.\cos\alpha}{\sqrt{\cos(\pi-2\alpha)}}$.

Ví dụ 5

Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có các mặt bên đều là hình vuông cạnh a. Gọi M là trung điểm các cạnh BC. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và $B'C$.

➢ **Lời giải:**

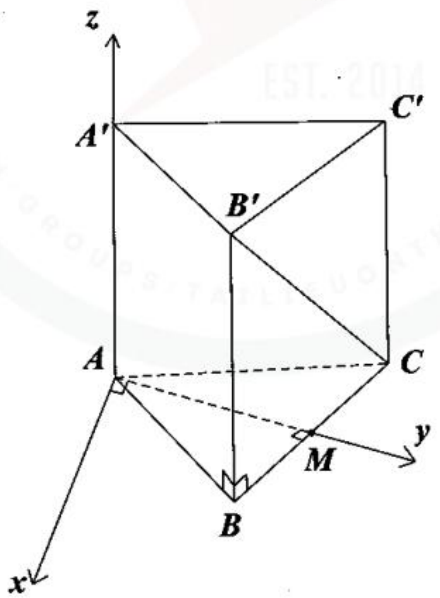
Ta có: Các mặt bên của hình lăng trụ là hình vuông

$\Rightarrow \Delta ABC, \Delta A'B'C'$ là các tam giác đều cạnh a.

$\Rightarrow ABC.A'B'C'$ là lăng trụ đều.

AM là đường cao trong tam giác đều $ABC \Rightarrow AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Chọn hệ trục tọa độ Axyz như hình vẽ, các trục Ay, Az lần lượt đi qua các điểm M, A′.



Khi đó:

$A(0;0;0), B\left(\dfrac{a}{2};\dfrac{a\sqrt{3}}{2};0\right), C\left(-\dfrac{a}{2};\dfrac{a\sqrt{3}}{2};0\right),$

$A'(0;0;a), B'\left(\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};a\right), C'\left(-\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};a\right)$.

Ta có:

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB}=\left(\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right) \\ \overrightarrow{B'C}=(-a;0;-a) \\ \overrightarrow{BB'}=(0;0;a) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{B'C}\right]=\left(\frac{-\sqrt{3}a^2}{2};\frac{a^2}{2};\frac{\sqrt{3}a^2}{2}\right) \\ \left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{B'C}\right].\overrightarrow{BB'}=\frac{\sqrt{3}a^3}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow d(AB,B'C)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{B'C}\right].\overrightarrow{BB'}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{B'C}\right]\right|}$$

$$=\frac{\frac{\sqrt{3}a^3}{2}}{\sqrt{\left(\frac{-\sqrt{3}a^2}{2}\right)^2+\left(\frac{a^2}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}a^2}{2}\right)^2}}=\frac{a\sqrt{21}}{7}.$$

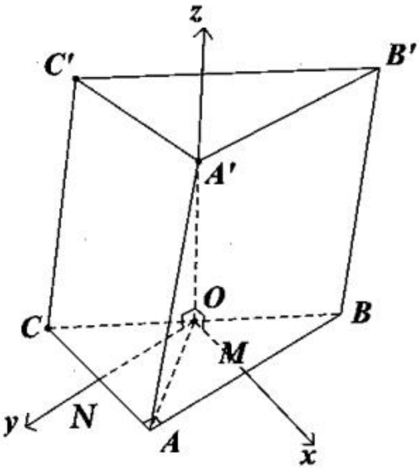
Vậy $d(AB,B'C)=\frac{a\sqrt{21}}{7}$ (đvtt)

Ví dụ 6

Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có độ dài cạnh bên bằng $a\sqrt{2}$, đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB=a, AC=a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của đỉnh A′ trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của cạnh BC. Tính theo a thể tích khối lăng trụ đã cho và khoảng cách giữa AB và NC′. (N là trung điểm của AC).

➤ **Lời giải:**

Gọi O, M, lần lượt là trung điểm của BC, AB$\Rightarrow$ $OMAN$ là hình chữ nhật.



Ta có:

$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 2a, OA = \dfrac{BC}{2} = a.$

$OM = \sqrt{OA^2 - AM^2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

$ON = \sqrt{OA^2 - AN^2} = \dfrac{a}{2},$

$OA' = \sqrt{AA'^2 - OA^2} = a.$

Ta có: $V_{ABC.A'B'C'} = OA'.S_{ABC} = a.\dfrac{1}{2}.a.a\sqrt{3} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}.$

Chọn hệ trục tọa độ Oxyz như hình vẽ, các trục Ox, Oy, Oz lần lượt đi qua các điểm M, N, A'.

Khi đó: $A\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2};\dfrac{a}{2};0\right)$, B$\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2};-\dfrac{a}{2};0\right), C'\left(-\dfrac{a\sqrt{3}}{2};\dfrac{a}{2};a\right).$

N là trung điểm AC$\Rightarrow N\left(0;\dfrac{a}{2};0\right).$

Ta có: $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (0;-a;0) \\ \overrightarrow{NC'} = \left(\dfrac{-a\sqrt{3}}{2};0;a\right) \\ \overrightarrow{AN} = \left(-\dfrac{a\sqrt{3}}{2};0;0\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{NC'}\right] = \left(-a^2;0;\dfrac{-\sqrt{3}a^2}{2}\right) \\ \left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{NC'}\right].\overrightarrow{AN} = \dfrac{\sqrt{3}a^3}{2} \end{cases}$

$$\Rightarrow d\left(AB,NC'\right)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{NC'}\right].\overrightarrow{AN}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{NC'}\right]\right|}=\frac{\frac{a^3\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{\left(-a^2\right)^2+\left(\frac{-\sqrt{3}a^2}{2}\right)^2}}=\frac{a\sqrt{21}}{7}.$$

Vậy $d\left(AB,NC'\right)=\frac{a\sqrt{21}}{7}$.

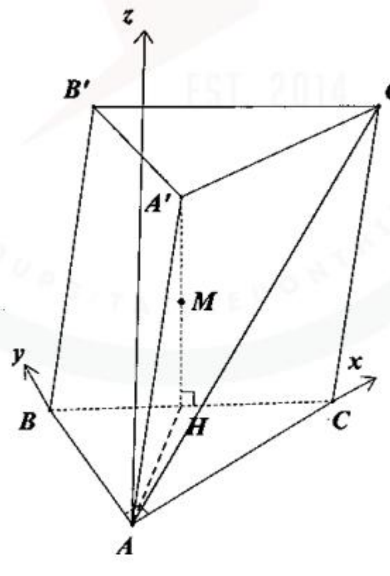
Ví dụ 7

Cho hình lăng trụ ABC.A′B′C′ có độ dài cạnh bên bằng 2a, đáy ABC là tam giác vuông tại A, AB=A, $a\sqrt{3}$ và hình chiếu vuông góc của đỉnh A′ trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của cạnh BC. Gọi M là trung điểm của $A'H$. Tính thể tích khối chóp A.BCC′B′ và khoảng cách từ M đến mặt phẳng $\left(ACC'\right)$.

➢ **Lời giải:**

Gọi H là trung điểm của BC $\Rightarrow A'H\perp\left(ABC\right)$

Kẻ AZ//A'H. Đặt trục Axyz như hình vẽ



Ta có: $A\left(0;0;0\right);B\left(a;0;0\right);C\left(0;a\sqrt{3};0\right)$.

Do H là trung điểm BC $\Rightarrow H\left(\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right)$

$A'\left(\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};h\right)$; $\overrightarrow{AA'}=\left(\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};h\right)$

$\Rightarrow \left|\overrightarrow{AA'}\right|=-\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{3a^2}{4}+h^2}$

$=2a\Rightarrow h=a\sqrt{3}$

* Tính thể tích khối chóp A.BCC'B'

Ta có: $S_{\Delta ABC}=\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow V_{ABCA'B'C'}=a\sqrt{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{2}=\frac{3a^2}{2}$

* Tính khoảng cách từ M đến mặt phẳng (ACC')

Do M là trung điểm $A'H \Rightarrow M\left(\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$.

Ta có:

$\overrightarrow{AC}=\left(0;a\sqrt{3};0\right)\Rightarrow\left[\overrightarrow{AA'};\overrightarrow{AC}\right]=\left(3a^2;0;\frac{a^2\sqrt{3}}{2}\right)\Rightarrow\overrightarrow{n_{(ACC')}}=\left(3;0;\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Mặt phẳng $(ACC')\begin{cases}\text{đi qua } A(0;0;0)\\ \text{vtpt } \overrightarrow{n_{(ACC')}}=\left(3;0;\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\end{cases}$

$\Rightarrow$ phương trình mặt phẳng (ACC'): $3x+\frac{\sqrt{3}}{2}z=0$

$$\Rightarrow d\left(M;(ACC')\right)=\frac{\left|3.\frac{a}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{a\sqrt{3}}{2}\right|}{\sqrt{9+\frac{3}{4}}}=\frac{3\sqrt{39}}{26}a$$

Vậy $d\left(M;(ACC')\right)=\frac{3\sqrt{39}}{26}$

Ví dụ 8

Cho hình lăng trụ đứng ABCD.A'B'C'D' có đáy ABCD là hình thoi, $AB = a\sqrt{3}, \widehat{BAD} = 120^0$. Biết góc giữa đường thẳng AC' và mặt phẳng (ADD'A') bằng 30^0. Tính thể tích khối lăng trụ trên theo a và khoảng cách từ trung điểm N của BB' đến mặt phẳng (C'MA) Biết M là trung điểm của A'D'.

➢ **Lời giải:**

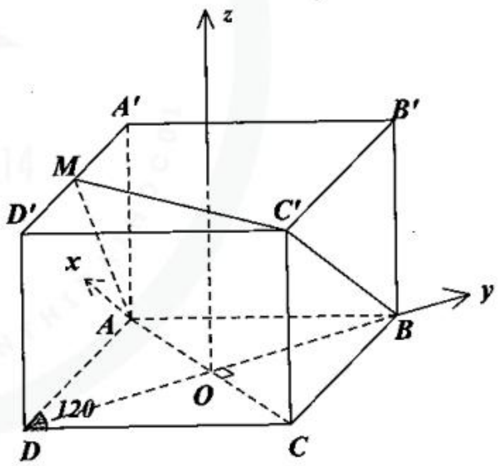
Do ABCD là hình thoi mà $\widehat{BAD} = 120^0 \Rightarrow \widehat{OAD} = 60^0$

Do ΔAOD vuông tại O:

$$\Rightarrow OD = AD.\sin 60^0 = a\sqrt{3}.\sin 60^0 = \frac{3}{2}a; AO = a\sqrt{3}.\cos 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

$$\Rightarrow O(0;0;0); A\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a;0;0\right); B\left(0;\frac{3}{2}a;0\right); C\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}a;0;0\right);$$

$$D\left(0;-\frac{3}{2}a;0\right) \Rightarrow D'\left(0;-\frac{3}{2}a;h\right)$$



Gọi:

$$C'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a;0;h\right) \Rightarrow \overrightarrow{AC'} = \left(\sqrt{3}a;0;h\right)$$

$$\overrightarrow{AD} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a;-\frac{3}{2}a;0\right); \overrightarrow{AD'}$$

$$\overrightarrow{AD'} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a;-\frac{3}{2}a;-h\right).$$

$$\vec{n}_{ADD'A'} = \left[\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AD'}\right] = \left(-\frac{3}{2}ah;-\frac{\sqrt{3}}{2}ah;0\right)$$

Ta có: $\sin\left(AC';(ADD'A')\right) = \dfrac{\left|\overrightarrow{AC'}.\vec{n}_{ADD'A'}\right|}{\left|\overrightarrow{AC}\right|.\left|\vec{n}_{ADD'A'}\right|}$

$$=\frac{\left|\sqrt{3}a.-\frac{3}{2}ah\right|}{\sqrt{3a^2+h^2}\sqrt{\frac{9}{4}a^2h^2+\frac{3}{4}a^2h^2}}=\frac{1}{2}\Rightarrow h=a\sqrt{6}\Rightarrow C'\left(\frac{\sqrt{3}a}{2};0;\sqrt{6}a\right)$$

$S_{ABCD}=\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right]\right|$ (1) $\overrightarrow{AB}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a;\frac{3}{2}a;0\right);\overrightarrow{AD}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a;-\frac{3}{2}a;0\right)$.

$\Rightarrow\left[\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}\right]=\left(0;0;-\frac{3\sqrt{3}a^2}{2}\right)$.

Thay vào (1) ta có:

$S_{ABCD}=\frac{3\sqrt{3}a^2}{2}\Rightarrow V_{ABCD.A'B'C'D'}=\frac{3\sqrt{3}a^2}{2}.a\sqrt{6}=\frac{9\sqrt{2}}{2}a^3$ (đvtt).

Ta có:

$A'\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}a;0;a\sqrt{6}\right);C'\left(\frac{\sqrt{3}}{2};0;a\sqrt{6}\right);D'\left(0;-\frac{3}{2}a;a\sqrt{6}\right);B'\left(0;\frac{3}{2}a;a\sqrt{6}\right)$.

Do M là trung điểm $A'D'\Rightarrow M\left(-\frac{\sqrt{3}}{4}a;-\frac{3}{4}a;a\sqrt{6}\right)$.

Do N là trung điểm của $BB'\Rightarrow N\left(0;\frac{3}{2}a;\frac{a\sqrt{6}}{2}\right)$.

$\overrightarrow{MC'}=\left(\frac{3\sqrt{3}}{4}a;\frac{3}{4}a;0\right);\overrightarrow{MA}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{4}a;\frac{3}{4}a;-a\sqrt{6}\right)$.

$\vec{n}_{MC'A}=\left[\overrightarrow{MC'};\overrightarrow{MA}\right]=\left(-\frac{3\sqrt{6}}{4}a^2;\frac{3\sqrt{18}}{4}a^2;\frac{3\sqrt{3}a^2}{4}\right)$.

Mặt phẳng $(MC'A)$ đi qua $A\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}a;0;0\right)$

Vtpt $\vec{n}=\left(-\frac{3\sqrt{6}a^2}{4};\frac{3\sqrt{18}a^2}{4};\frac{3\sqrt{3}a^2}{4}\right)$.

$\Rightarrow pt(MC'A):-\frac{3\sqrt{6}}{4}a^2x+\frac{3\sqrt{18}}{4}a^2y+\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2z-\frac{9\sqrt{2}}{8}a^3=0$.

$$d\left(N,(MC'A)\right)=\frac{\left|\frac{3}{2}a.\frac{3\sqrt{18}}{4}a^2+\frac{a\sqrt{6}}{4}.\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2-\frac{9\sqrt{2}}{8}a^3\right|}{\sqrt{\frac{27}{8}a^4+\frac{81}{8}a^4+\frac{27}{16}a^4}}=\frac{\frac{45\sqrt{2}}{16}a^3}{\frac{9\sqrt{3}}{4}a^2}=\frac{5\sqrt{6}}{12}a$$

Vậy $V_{ABCDA'B'C'D'}=\frac{9\sqrt{2}}{2}a^3; d_{(B;(MC'A))}=\frac{5\sqrt{16}}{12}a$.

Ví dụ 9

Cho lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$ có đáy là tam giác đều. Mặt phẳng (A_1BC) tạo với mặt phẳng (ABC) một góc 30^0 và tam giác A_1BC có diện tích bằng 8. Tính thể tích khối lăng trụ đã cho và khoảng cách giữa C_1 và mặt phẳng (A_1BC).

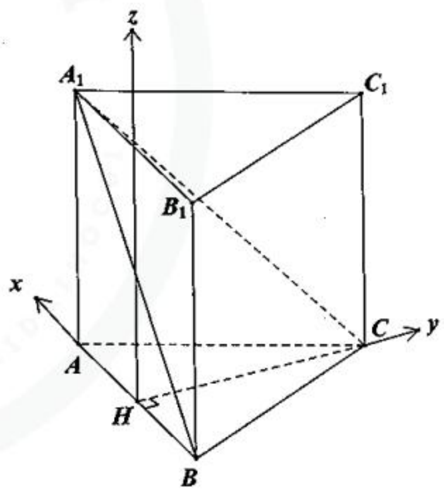
➢ **Lời giải:**

Gọi độ dài cạnh của ΔABC là a.

Gọi H là trung điểm AB.

$\Rightarrow CH\perp AB$. Ta có: $A'A\perp(ABC)$.

Kẻ Hz//A'A. Đặt trục Hxyz như hình vẽ



Ta có: $HC=\sqrt{a^2-\frac{a^2}{4}}=\frac{a\sqrt{3}}{2}$

Ta có: $H(0;0;0); A\left(\frac{a}{2};0;0\right);$

$B\left(-\frac{a}{2};0;0\right); C\left(0;\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right); C_1\left(0;\frac{a\sqrt{3}}{2};h\right)$

Gọi $A_1\left(\frac{a}{2};0;h\right)$. $\overrightarrow{A_1B}=(-a;0;-h); \overrightarrow{A_1C}=\left(-\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};h\right)$

$\vec{n}_{A_1BC}=\left[\overrightarrow{A_1B},\overrightarrow{A_1C}\right]=\left(\frac{ah\sqrt{3}}{2};\frac{3}{2}ah;-\frac{a^2\sqrt{3}}{2}\right); \vec{n}_{ABC}=(0;0;1).$

Ta có: $\cos 30^0 = \dfrac{\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{\dfrac{3}{4}a^2h^2 + \dfrac{9}{4}a^2h^2 + \dfrac{3}{4}a^4}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\Leftrightarrow a^2\sqrt{3} = \sqrt{3}\sqrt{3a^2h^2 + \dfrac{3}{4}a^4}$

$\Leftrightarrow 3a^4 = 9a^2h^2 + \dfrac{9}{4}a^4 \Leftrightarrow 9a^2h^2 = \dfrac{3}{4}a^4 \Leftrightarrow h^2 = \dfrac{a^2}{12}$ (1).

Ta có: $S_{A_1BC} = \dfrac{1}{2}\left\|\left[\overrightarrow{A_1B}, \overrightarrow{AC}\right]\right\| = \dfrac{1}{2}.\sqrt{\dfrac{3}{4}a^2h^2 + \dfrac{9}{4}a^2h^2 + \dfrac{3}{4}a^2}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\sqrt{3a^2h^2 + \dfrac{3}{4}a^4} = 8$ (2).

Thay (1) vào (2) ta có:

$\dfrac{1}{2}\sqrt{3a^2.\dfrac{a^2}{12} + \dfrac{3}{4}a^4} = 8 \Leftrightarrow \dfrac{3a^4}{12} + \dfrac{3}{4}a^4 = 16^2 \Rightarrow a = 4 \Rightarrow h = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

$\Rightarrow S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}.\dfrac{\sqrt{3}}{2}.4^2 = 4\sqrt{3}$ (đvdt).

$V_{ABCA_1B_1C_1} = 4\sqrt{3}.\dfrac{2\sqrt{3}}{3} = 8$ (đvtt).

Mặt phẳng $(A_1BC)\begin{cases} \text{đi qua } B(-2;0;0) \\ \text{vtpt } \vec{n} = (1;\sqrt{3};-2\sqrt{3}) \end{cases}$

Phương trình mặt phẳng (A_1BC): $x + \sqrt{3}y - 2\sqrt{3}z + 2 = 0$

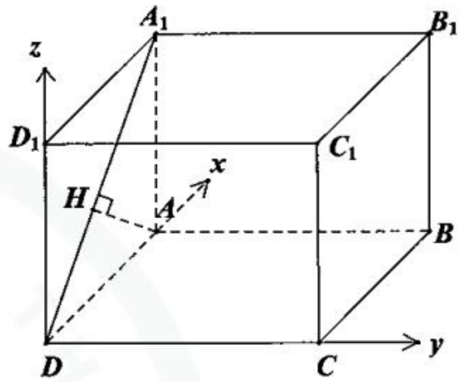
Ta có: $d(C_1;(A_1BC)) = \dfrac{\left|2 + 0.1 + \dfrac{4\sqrt{3}}{2}.\sqrt{3} - \dfrac{2\sqrt{3}}{3}.2\sqrt{3}\right|}{\sqrt{1+3+12}} = 1$

Vậy $V_{ABCA_1B_1C_1} = 8$ (đvtt); $d(C_1;(A_1BC)) = 1$

Ví dụ 10

Cho lăng trụ tứ giác đều $ABCDA_1B_1C_1D_1$ có khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và A_1D bằng 2, độ dài đường chéo mặt bên bằng 5. Hạ AK vuông góc với A_1D tại K. Chứng minh rằng AK=2 và tính thể tích khối lăng trụ đã cho.

➤ Lời giải:



Đặt trục Dxyz như hình vẽ

Ta có: D(0;0;0); A_1 (a;0;h); $DD_1 = h$;

D_1 (0;0;h; A (a;0;0); B(a;a;0); C(0;a;0).

Gọi độ dài AD=A;.

$\overrightarrow{A_1D} = (-a;0;-h)$;

$\overrightarrow{AB} = (0;0;0); \overrightarrow{DA} = (a;0;0)$.

Ta có: $\left[\overrightarrow{A_1D}, \overrightarrow{AB}\right] = -\left(ah, 0; -a^2\right)$.

$$d_{(A_1D,AB)} = \frac{\left|\left[\overrightarrow{A_1D}, \overrightarrow{AB}\right].\overrightarrow{DA}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{A_1D}, \overrightarrow{AB}\right]\right|} = \frac{\left|a.ah + 0.0 + 0.a^2\right|}{\sqrt{a^2h^2 + a^4}} = 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2h}{\sqrt{a^2h^2 + a^4}} = 2 \Leftrightarrow a^4h^2 = 4a^2h^2 + 4a^4 \Leftrightarrow \left(a^4 - 4a^2\right)h^2 = 4a^4$$

$$\Leftrightarrow h^2 = \frac{4a^4}{a^2\left(a^2 - 4\right)} \Leftrightarrow h^2 = \frac{4a^2}{a^2 - 4}$$

Ta lại có: $\sqrt{h^2 + a^2} = 5 \Leftrightarrow \frac{4a^2}{a^2 - 4} + a^2 = 25 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a^2 = 20 \\ a^2 = 5 \end{array}\right.$.

Với $a^2 = 20 \Rightarrow a = 2\sqrt{5} \Rightarrow h = \sqrt{5}$.

Với $a^2 = 5 \Rightarrow a = \sqrt{5} \Rightarrow h = 2\sqrt{5}$.

Với $a = 2\sqrt{5}; h = \sqrt{5}$ (loại vì a<h).

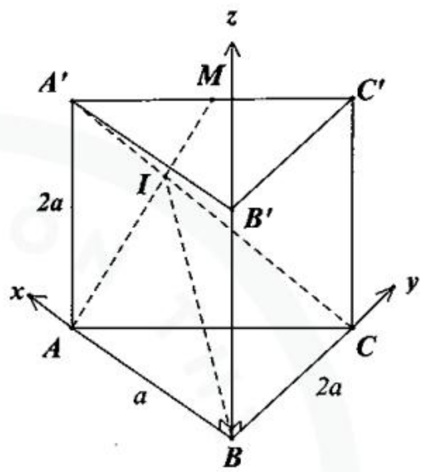
Với $a = \sqrt{5}, h = 2\sqrt{5} \Rightarrow V_{ABCDA_1D_1C_1B_1} = 2\sqrt{5}.\sqrt{5}.\sqrt{5} = 10\sqrt{5}$.

Ta có: $\frac{1}{AK^2} = \frac{1}{AA_1^2} + \frac{1}{AD^2} = \frac{1}{20} + \frac{1}{5} = \frac{1}{4} \Rightarrow AK = 2$ (đpcm).

Ví dụ 11

Cho hình lăng trụ đứng ABC.A′B′C′ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB = a, AA' = 2a, A'C = 3a$. Gọi M là trung điểm của đoạn A′C′ và I là giao điểm của AM và A′C′. Tính theo a thể tích khối tứ diện IABC và khoảng cách từ A đến mặt phẳng (IBC)

➢ Lời giải:



Đặt trục Bxyz như hình vẽ ta có:

$B(0;0;0); A(a;0;0); A'(a;0;2a)$.

Ta có: $AC = \sqrt{9a^2 - 4a^2} = a\sqrt{5}$

$\Rightarrow BC = \sqrt{5a^2 - a^2} = 2a$

$\Rightarrow C(0;2a;0) \Rightarrow C'(0;2a;2a)$

Do tam giác IMA′ đồng dạng tam giác IAC

$$\Rightarrow \frac{IM}{IA} = \frac{A'M}{AC} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{MI}{MA} = \frac{1}{3} \Rightarrow \overrightarrow{MI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{MA}$$

Do M là trung điểm A′C′ $\Rightarrow M\left(\frac{a}{2};a;0\right)$

Gọi $I(x;y;z) \Rightarrow \overrightarrow{MI} = \left(x - \frac{a}{2}; y - a; z - a\right); \overrightarrow{MA} = \left(\frac{a}{2}; -a; -a\right)$.

$$\begin{cases} x - \frac{a}{2} = \frac{1}{3}.\frac{a}{2} \\ y - a = -\frac{1}{3}a \\ z - a = -\frac{1}{3}a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3}a \\ y = \frac{2}{3}a \\ z = \frac{2}{3}a \end{cases} \Rightarrow I\left(\frac{2}{3}a; \frac{2}{3}a; \frac{2}{3}a\right).$$

Mặt phẳng (ABC) có $\vec{n} = (0;0;1)$.

$$\Rightarrow d_{(I;ABC)} = \frac{2}{3}a \Rightarrow V_{IABC} = \frac{1}{3}.\frac{2}{3}.\frac{a.2a}{2} = \frac{2a^3}{9} \text{ (đvtt)}.$$

Ta có: $\overrightarrow{IB} = \left(-\frac{2}{3}a; \frac{4}{3}a; -\frac{2}{3}a\right)$.

$\vec{n}_{IBC} = \left[\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IC}\right] = \left(\frac{4}{3}a^2; 0; -\frac{4}{9}a^2\right)$.

$$\Rightarrow d_{(A,(IBC))} = \frac{\left|a.\frac{4}{3}a^2 + 0.0 + 0.\frac{-4}{9}a^2\right|}{\sqrt{\frac{16}{9}a^4 + \frac{16}{81}a^4}} = \frac{\frac{4}{3}a^3}{\frac{4\sqrt{10}}{9}a^2} = \frac{3\sqrt{10}}{10}a.$$

Vậy $V_{IABC} = \frac{2}{9}a^3, d_{[A,(IBC)]} = \frac{3\sqrt{10}}{10}a$.

Ví dụ 12

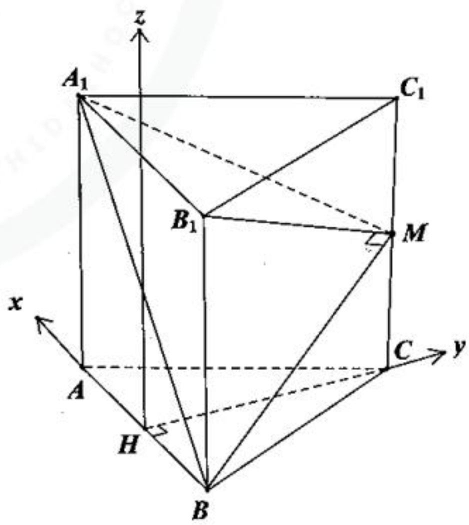
Cho lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$ có $AB=a$, $AC=2a$, $AA_1 = 2a\sqrt{5}$ và góc $\widehat{BAC} = 120^0$. Gọi M là trung điểm của cạnh CC_1. Chứng minh rằng MB vuông góc với MB_1 và tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (A_1MB).

➤ **Lời giải:**

Trong tam giác ABC kẻ $AH \perp BC$.

Kẻ $Hz // BB_1$.

Đặt trục Hxyz như hình vẽ ta có:



$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2\cos\widehat{CAB}.ABAC$

$\Leftrightarrow BC^2 = 7a^2 \Rightarrow BC = a\sqrt{7}$

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AC.AB.\sin\widehat{CAB}$

$= \frac{1}{2}.2a.a.\sin 120^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}a^2$

$$\Rightarrow AH = \frac{S_{\Delta ABC}}{\frac{1}{2}.BC} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a^2}{\frac{1}{2}.a\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{21}}{7}a.$$

$HC=\sqrt{4a^2-\frac{21}{49}a^2}=\frac{5\sqrt{7}}{7}a\Rightarrow BH=\frac{2\sqrt{7}}{7}a.$

Ta có: $H(0;0;0);A\left(\frac{\sqrt{21}}{7}a;0;0\right);B\left(-\frac{2\sqrt{7}}{7}a;0;0\right);C\left(0;\frac{5\sqrt{7}}{7}a;0\right);$

$B_1\left(-\frac{2\sqrt{7}}{7}a;0;2a\sqrt{7}\right);C_1\left(0;\frac{5\sqrt{7}}{7}a;2a\sqrt{7}\right);A_1\left(0;\frac{\sqrt{21}}{7}a;2a\sqrt{7}\right).$

Do M là trung điểm $CC_1\Rightarrow M\left(0;\frac{5\sqrt{7}}{7}a;\sqrt{7a}\right).$

$\overrightarrow{MB_1}=\left(-\sqrt{7}a;0;a\sqrt{7}\right);\overrightarrow{MB}=\left(-\sqrt{7a};0;-a\sqrt{7}\right).$

$\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MB_1}=\sqrt{7}a.\sqrt{7}a+0.0-a\sqrt{7}.a\sqrt{7}=0\Rightarrow MB\perp MB_1$ (đpcm).

$\overrightarrow{MA_1}=\left(-\frac{5\sqrt{7}}{7}a;\frac{\sqrt{21}}{7}a;a\sqrt{7}\right).$

$\vec{n}_{A_1MB}=\left[\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right]=\left(-a^2\sqrt{3};-12a^2;\sqrt{3}a^2\right).$

Mặt phẳng (A_1MB) đi qua $A_1\left(0;\frac{\sqrt{21}}{7}a;2a\sqrt{7}\right)$

Vtpt $\vec{n}=\left(-a^2\sqrt{3};-12a^2;\sqrt{3}a^2\right)$

$\Rightarrow pt(A_1MB):-a^2\sqrt{3}x-12a^2y+a^2\sqrt{3}z-\frac{2\sqrt{21}}{7}a^3=0.$

$$d_{[A,(A_1MB)]}=\frac{\left|\frac{\sqrt{21}}{7}a.-12a^2-\frac{2\sqrt{21}}{7}.a^3\right|}{\sqrt{3a^4+144a^4+3a^4}}=\frac{\left|-2\sqrt{21}a^3\right|}{5\sqrt{6}a^2}=\frac{\sqrt{14}}{5}a.$$

Vậy $d_{[A,(A_1MB)]}=\frac{\sqrt{14}}{5}a.$

Ví dụ 13

Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ đáy ABC là tam giác vuông, $AB = AC = a$, $AA' = a\sqrt{2}$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của đoạn AA' và BC'. Chứng minh MN là đường vuông góc chung của AA' và BC'. Tính thể tích khối chóp $MA'BC'$.

➤ **Lời giải:**

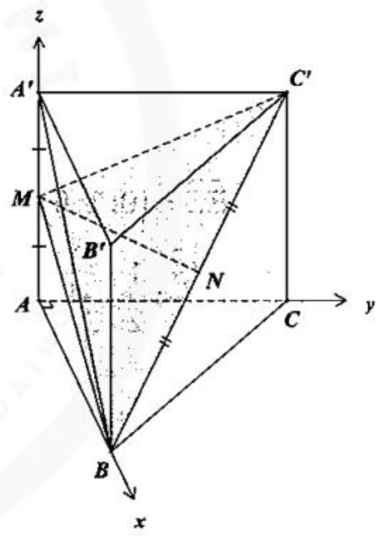
Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ.

$A \equiv O(0;0;0)$, $Ox \equiv AB$, $Oy \equiv AC$, $Oz \equiv AA'$.

Chọn $a = 1$, khi đó $B(1;0;0)$, $C(0;1;0)$, $A'\left(0;0;\sqrt{2}\right)$,

$B'\left(1;0;\sqrt{2}\right)$, $C'\left(0;1;\sqrt{2}\right)$, $M\left(0;0;\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $N\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Ta có $\overrightarrow{MN} = \left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};0\right)$,



$\overrightarrow{AA'} = \left(0;0;\sqrt{2}\right)$; $\overrightarrow{BC'} = \left(-1;1;\sqrt{2}\right)$.

$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{AA'}\\ \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{BC'}\end{array}\right\} \Rightarrow MN \perp AA'$ và $MN \perp BC'$.

Do đó MN là đường vuông góc chung của AA' và BC'.

Ta có $\overrightarrow{MA'} = \left(0;0;\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\overrightarrow{MB} = \left(1;0;-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$\overrightarrow{MC'} = \left(0;1;\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

$\left[\overrightarrow{MA'},\overrightarrow{MB}\right] = \left(0;\frac{\sqrt{2}}{2};0\right) \Rightarrow \left|\left[\overrightarrow{MA'},\overrightarrow{MB}\right].\overrightarrow{MC'}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Vậy thể tích khối chóp $MA'BC'$ là:

$V_{MA'BC'} = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{MA'},\overrightarrow{MB}\right].\overrightarrow{MC'}\right| = \frac{\sqrt{2}}{12} = \frac{\sqrt{2}}{12}a^3$ (đvtt) (do ta chọn $a = 1$).

Ví dụ 14

Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh đều bằng a, M là trung điểm của đoạn AA'. Chứng minh $BM \perp B'C$ và tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BM và $B'C$.

➤ **Lời giải:**

Gọi O là trung điểm của BC.

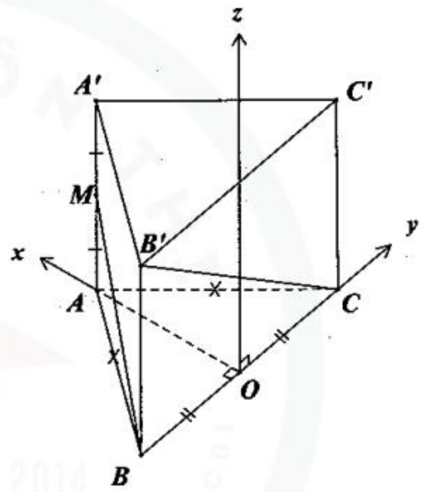
Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ.

$O \equiv O(0;\,0;\,0)$, $Ox \equiv OA$, $Oy \equiv OC$, $Oz \parallel AA'$.

Chọn $a=1$, khi đó $B\left(0;\,-\dfrac{1}{2};\,0\right)$,

$C\left(0;\,\dfrac{1}{2};\,0\right)$, $M\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2};\,0;\,\dfrac{1}{2}\right)$

và $B'\left(0;\,-\dfrac{1}{2};\,1\right)$.



Ta có $\overrightarrow{BC}=(0;\,1;\,0)$,

$\overrightarrow{BM}=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2};\,\dfrac{1}{2};\,\dfrac{1}{2}\right)$; $\overrightarrow{B'C}=(0;\,-1;\,0)$.

Do $\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{B'C}=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}=0 \Rightarrow BM \perp B'C$.

Ta có $\left[\overrightarrow{BM},\,\overrightarrow{B'C}\right]=\left(1;\,-\dfrac{\sqrt{3}}{2};\,-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow \left[\overrightarrow{BM},\,\overrightarrow{B'C}\right].\overrightarrow{BC}=\left(0;\,-\dfrac{\sqrt{3}}{2};\,0\right)$.

Khoảng cách giữa hai đường thẳng BM và $B'C$ là:

$$d\left(BM,\,B'C\right)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{BM},\,\overrightarrow{B'C}\right].\overrightarrow{BC}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{BM},\,\overrightarrow{B'C}\right]\right|}=\frac{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{\dfrac{\sqrt{10}}{2}}=\frac{\sqrt{30}}{10}=\frac{\sqrt{30}}{10}a^3 \text{ (đvtt)}$$

(do ta chọn $a=1$).

Ví dụ 15

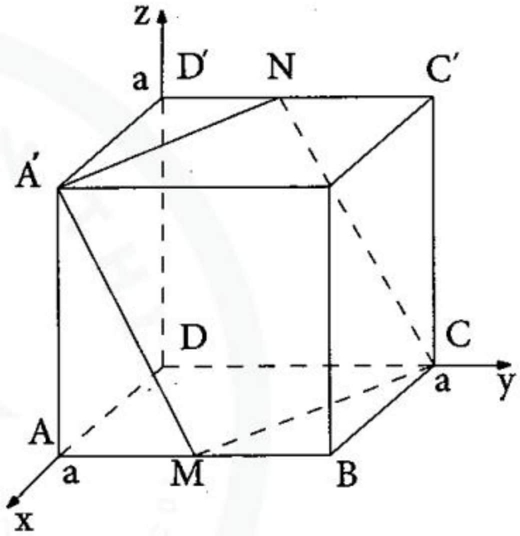
Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của AB và $C'D'$. Tính khoảng cách từ điểm B' đến mặt phẳng $(A'MCN)$.

➤ **Lời giải:**

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ.

$D \equiv O(0;0;0)$, $Ox \equiv DA$, $Oy \equiv DC$, $Oz \equiv DD'$.

Chọn $a=1$.



Khi đó: $A(1;0;0)$, $B(1;1;0)$,

$C(0;1;0)$, $A'(1;0;1)$, $B'(1;1;1)$,

$C'(0;1;1)$, $D'(0;0;1)$, $M\left(1;\dfrac{1}{2};0\right)$

và $N\left(0;\dfrac{1}{2};1\right)$.

Ta có $\overrightarrow{A'C}=(-1;1;-1)$,

$\overrightarrow{MN}=(-1;0;1)$

$\left[\overrightarrow{A'C},\overrightarrow{MN}\right]=(1;2;1)$.

Phương trình mặt phẳng $(A'MCN)$ qua $C(0;1;0)$.

Với véctơ pháp tuyến $\vec{n}=(1;2;1)$ là:

$1(x-0)+2(y-1)+1(z-0)=0 \Leftrightarrow x+2y+z-2=0.$

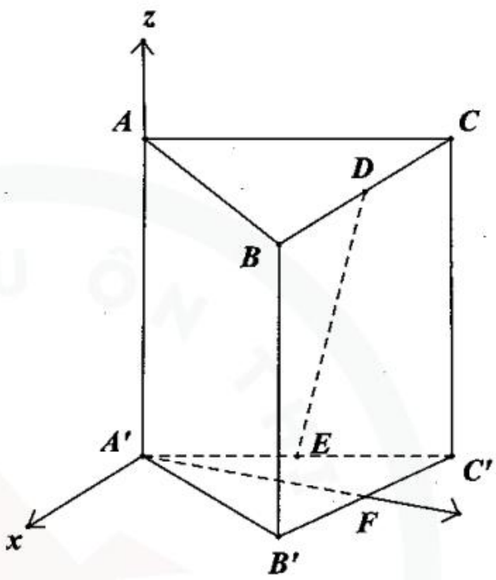
Khoảng cách từ điểm $B'(1;1;1)$ đến mặt phẳng $(A'MCN)$.

Là: $d=\dfrac{|1+2+1-2|}{\sqrt{1+4+1}}=\dfrac{2}{\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}a$ (do ta chọn $a=1$).

Ví dụ 16

Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có các mặt bên là hình vuông cạnh a. Gọi D, E, F lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng BC, A′C′, C′B′. Tính khoảng cách giữa DE và $A'F$.

➤ **Lời giải:**



Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$, như hình vẽ.

$A' \equiv O(0;0;0)$, $Ox \parallel B'C'$,

$Oy \equiv A'F$, $Oz \equiv A'A$.

Chọn $a=1$, khi đó $F\left(0;\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$,

$D\left(0;\frac{\sqrt{3}}{2};1\right)$, $E\left(\frac{1}{4};\frac{\sqrt{3}}{4};0\right)$

$\Rightarrow \overrightarrow{ED}=\left(-\frac{1}{4};\frac{\sqrt{3}}{4};1\right)$,

$\overrightarrow{A'F}=\left(0;\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$, $\overrightarrow{A'E}=\left(\frac{1}{4};\frac{\sqrt{3}}{4};0\right) \Rightarrow \left[\overrightarrow{ED},\overrightarrow{A'F}\right]=\left(\frac{\sqrt{3}}{2};0;-\frac{\sqrt{3}}{8}\right)$.

Ta có:

$$d\left(DE,A'F\right)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{ED},\overrightarrow{A'F}\right].\overrightarrow{A'E}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{ED},\overrightarrow{A'F}\right]\right|}=\frac{\left|\frac{\sqrt{3}}{8}\right|}{\sqrt{\frac{3}{4}+0+\frac{3}{64}}}=\frac{\sqrt{17}}{17}=\frac{\sqrt{17}}{17}a$$

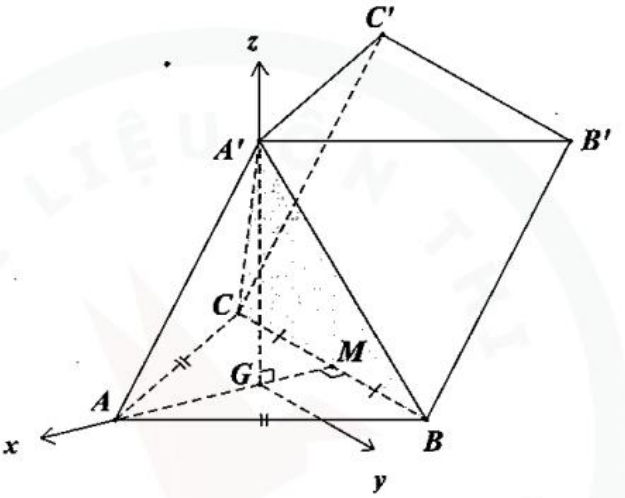
(do ta chọn $a=1$).

Vậy khoảng cách giữa hai đường thẳng DE và $A'F$ là: $\frac{\sqrt{17}}{17}a$.

Ví dụ 17

Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của A' xuông mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm G của tam giác ABC. Biết đường thẳng AA' hợp với đáy (ABC) một góc 60^0. Chứng minh $BB'C'C$ là hình chữ nhật và tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

➢ **Lời giải:**



Ta có $A'G \perp (ABC)$.

Nên $\Delta A'GA$ vuông tại G.

Suy ra $\widehat{A'AG}$ là góc nhọn.

Nên $\widehat{A'AG} = 60^0 \Rightarrow A'G = AG.\tan 60^0 = \sqrt{3}AG$.

Gọi AM cắt BC tại M thì M là trung điểm của BC và $AM \perp BC$

$A'G \perp BC \Rightarrow BC \perp (A'AG) \Rightarrow A'A \perp BC$.

Mà $A'A // B'B \Rightarrow B'B \perp BC$.

Lại có $B'B // C'C$; $B'B = C'C$ nên $B'BCC'$ là hình chữ nhật.

Ta có $AG = \dfrac{2}{3}AM = \dfrac{2}{3}AC.\cos 30^0 = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$.

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ.

$G\equiv O(0;0;0)$, $Ox\equiv GA$, $Oy\parallel BC$, $Oz\equiv GA'$.

Chọn $a=1$.

Khi đó $A\left(-\frac{\sqrt{3}}{3};0;0\right)$, $B\left(\frac{\sqrt{3}}{6};\frac{1}{2};0\right)$, $C\left(\frac{\sqrt{3}}{6};-\frac{1}{2};0\right)$, $A'(0;0;1)$.

Ta có $\overrightarrow{AB}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2};0\right)$, $\overrightarrow{AC}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2};0\right)$, $\overrightarrow{AA'}=\left(\sqrt{3};0;1\right)$.

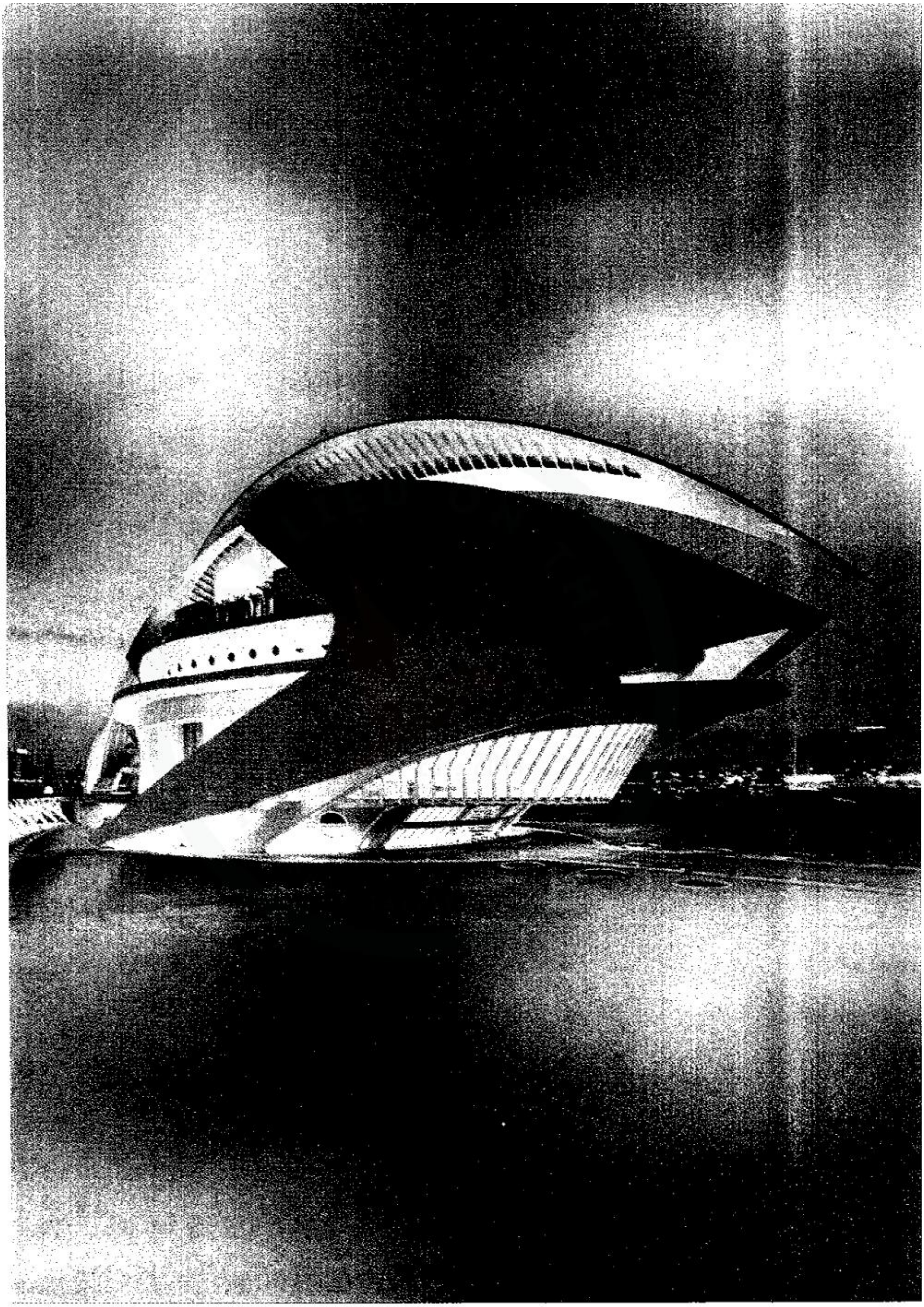
Diện tích tam giác ABC là:

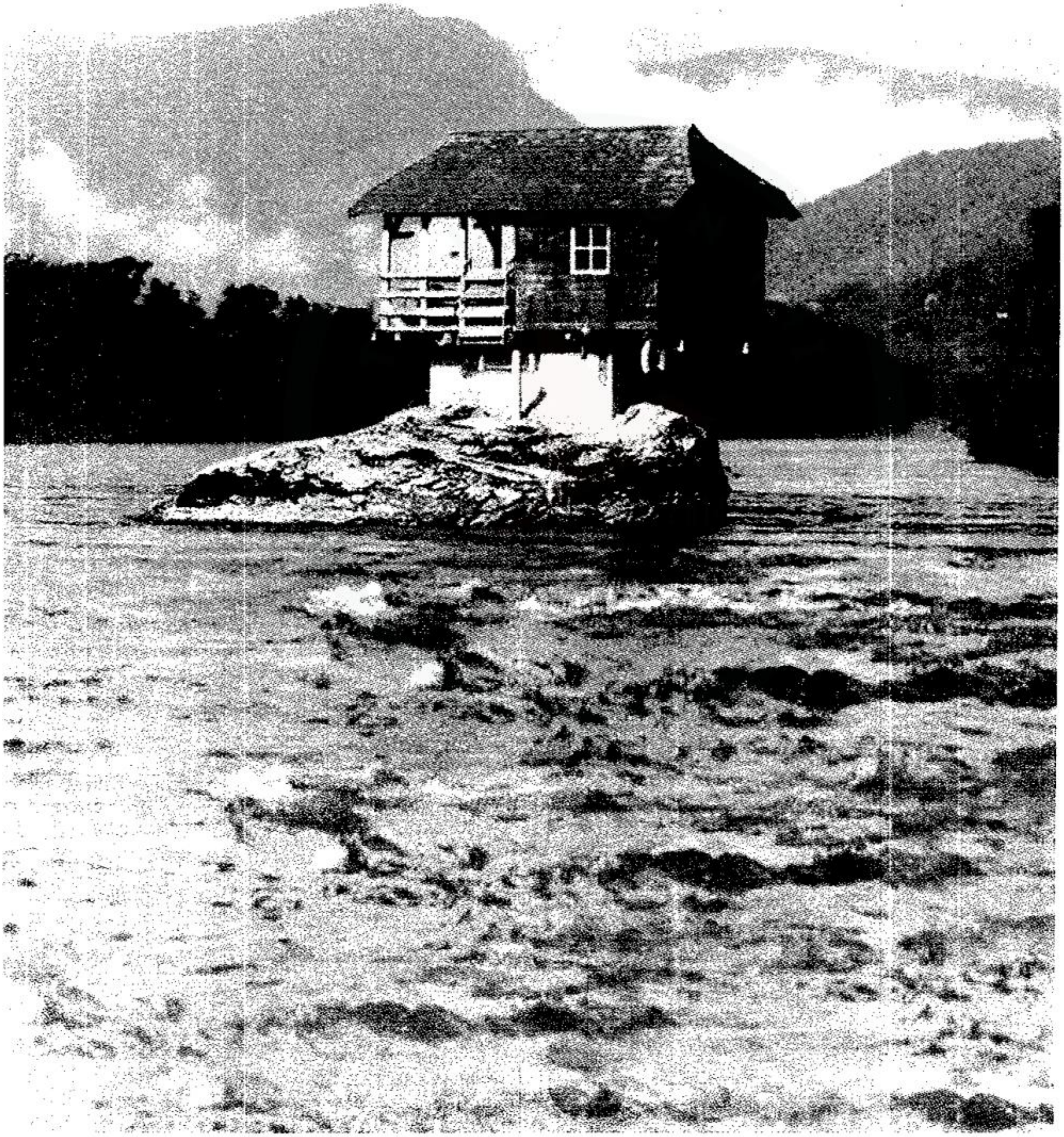
$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right|=\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ (đvdt) (do ta chọn $a=1$).

Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là:

$V_{ABC.A'B'C'}=2V_{A.BCA'}=2.\frac{1}{6}.\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AA'}\right|=\frac{1}{3}.\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{6}a^3$ (đvtt)

(do ta chọn $a=1$).

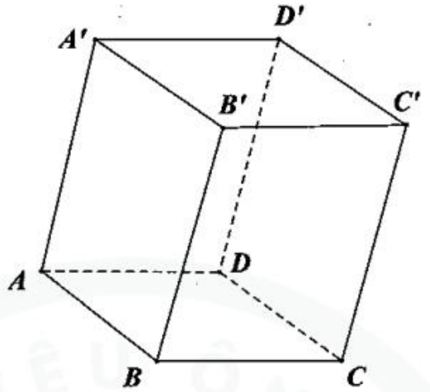




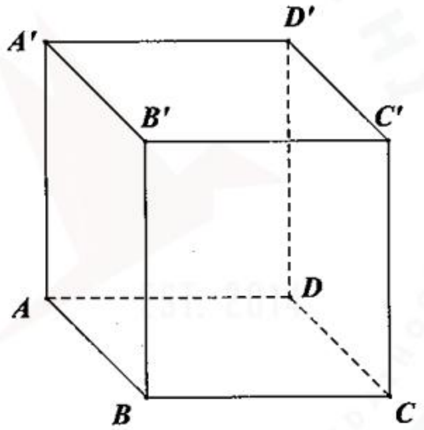
HÌNH HỘP, HÌNH LẬP PHƯƠNG

A LÝ THUYẾT

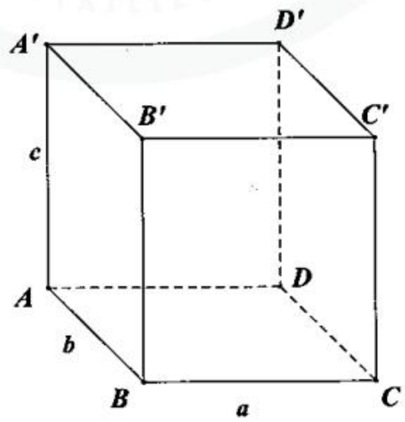
+) Hình hộp đứng là hình lăng trụ đứng có đáy là hình bình hành.



☞ Trong hình hộp đứng có 4 mặt bên là hình chữ nhật.

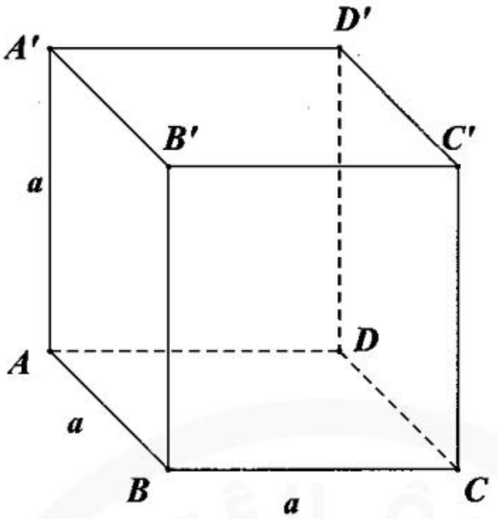


+) Hình hộp chữ nhật là hình hộp đứng có đáy là hình chữ nhật.



☞ Tất cả sáu mặt của hình hộp chữ nhật đều là hình chữ nhật.

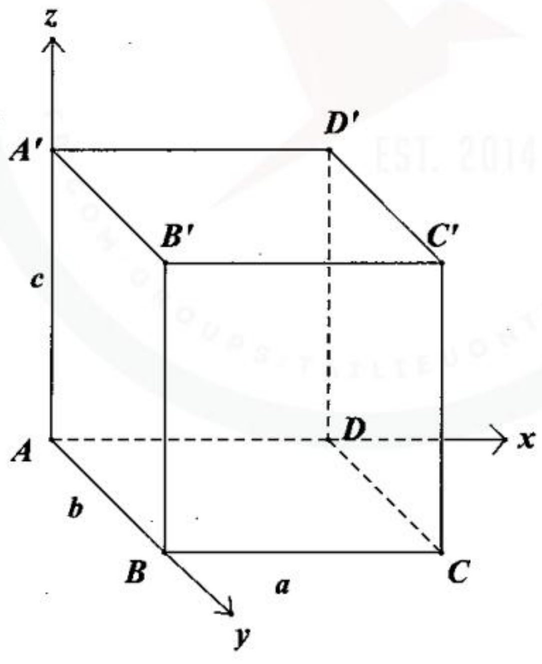
+) Hình lập phương là hình hộp chữ nhật có tất cả các cạnh bằng nhau.



☞ Tất cả sáu mặt của hình lập phương đều là hình vuông.

+ Cách đặt trục:

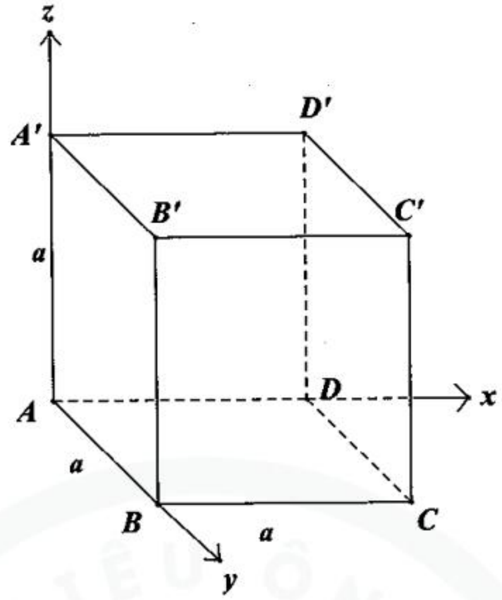
- Hình hộp chữ nhật:



Đặt trục như hình vẽ khi đó:

$A(0;0;0)$; $B(0;b;0)$; $C(a;b;0)$; $D(a;0;0)$; $A'(0;0;c)$; $B'(0;b;c)$; $C'(a;b;c)$; $D'(a;0;c)$

- Hình lập phương:



Đặt trục như hình vẽ khi đó:

A(0;0;0); B(0;a;0); C(a;a;0); D (a;0;0); A'(0;0;c); B'(0;a;a); C'(a;a;a); D'(a;0;a)

- Hình hộp thì tùy vào dữ kiện bài cho mà ta chọn cách đặt trục phù hợp.

B. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông, tam giác $A'AC$ vuông cân, $A'C = a$. Tính thể tích khối tứ diện $ABB'C'$ và khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng $(BC'D')$ theo a.

➤ **Lời giải:**

Ta có: $\Delta A'AC$ vuông cân tại A

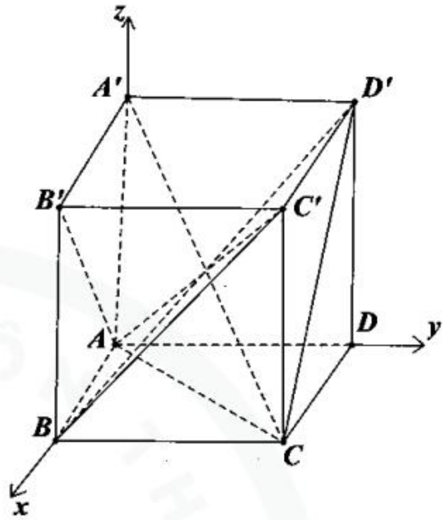
và $A'C = a \Rightarrow AC = A'A = \sqrt{\dfrac{a^2}{2}} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow AC^2 = 2AB^2 \Rightarrow AB = \dfrac{AC}{\sqrt{2}} = \dfrac{a}{2} = B'C' = AD$

$$V_{ABB'C'} = \frac{1}{3}.B'C'.S_{AB'B} = \frac{1}{3}.B'C'.\frac{1}{2}.BB'.AB = \frac{a^3\sqrt{2}}{48}$$

Chọn hệ trục tọa độ Axyz như hình vẽ, các trục Ox, Oy, Oz lần lượt đi qua các điểm B, D, A′.

Khi đó:



$A(0;0;0), B\left(\frac{a}{2};0;0\right), C\left(\frac{a}{2};\frac{a}{2};0\right),$

$B'\left(\frac{a}{2};0;\frac{a\sqrt{2}}{2}\right), C'\left(\frac{a}{2};\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{2}}{2}\right),$

$D'\left(0;\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{2}}{2}\right).$

Ta có: $\begin{cases} \overrightarrow{BC'} = \left(0;\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{2}}{2}\right) \\ \overrightarrow{BD'} = \left(-\frac{a}{2};\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{2}}{2}\right) \end{cases}$

$$\Rightarrow \left[\overrightarrow{BC'},\overrightarrow{BD'}\right] = \left(0;-\frac{a^2\sqrt{2}}{4};\frac{a^2}{4}\right) = \frac{a^2}{4}\left(0;-\sqrt{2};1\right) = \frac{a^2}{4}.\vec{n}$$

Mặt phẳng $(BC'D')$ $\begin{cases} qua\ B\left(\frac{a}{2};0;0\right) \\ vtpt\ \vec{n} = \left(0;-\sqrt{2};1\right) \end{cases}$

Nên có phương trình: $-\sqrt{2}y + z = 0$.

Ta có: $d\left(C,(BC'D')\right) = \dfrac{\left|-\frac{a\sqrt{2}}{2}\right|}{\sqrt{\left(-\sqrt{2}\right)^2 + 1}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{6}.$

Vậy $d\left(C,(BC'D')\right) = \dfrac{a\sqrt{6}}{6}.$

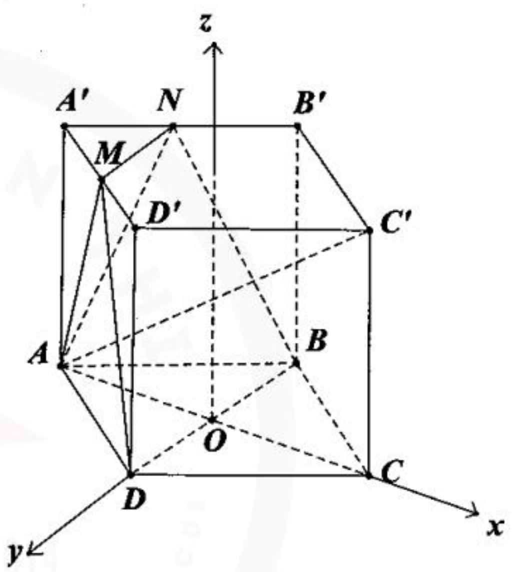
Ví dụ 2

Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$.

Có các cạnh $AB = AD = a, AA' = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ và góc $\widehat{BAD} = 60°$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh $A'D'$ và $A'B'$. Chứng minh $A'C$ vuông góc với mặt phẳng $(BDMN)$.

➢ **Lời giải:**

Ta có: $\begin{cases} AB = AD = a \\ \widehat{BAD} = 60° \end{cases} \Rightarrow \Delta ABD$ là tam giác đều cạnh a $\Rightarrow ABCD$ là hình thoi.



$OA = AB.cos30° = \frac{a\sqrt{3}}{2}$;

$OB = AB.\sin 30° = \frac{a}{2}$

Chọn hệ trục tọa độ Oxyz như hình vẽ, các trục Ox, Oy lần lượt đi qua các điểm C, D, $Oz // AA'$.

Khi đó:

$O(0;0;0), A\left(-\frac{a\sqrt{3}}{2};0;0\right), B\left(0;-\frac{a}{2};0\right)$,

$C\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};0;0\right), D\left(0;\frac{a}{2};0\right), A'\left(-\frac{a\sqrt{3}}{2};0;\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$,

$B'\left(0;-\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2}\right), C'\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};0;\frac{a\sqrt{3}}{2}\right), D'\left(0;\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$.

M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh $A'D'$ và $A'B'$

$\Rightarrow M\left(-\frac{a\sqrt{3}}{4};\frac{a}{4};\frac{a\sqrt{3}}{2}\right), N\left(-\frac{a\sqrt{3}}{4};-\frac{a}{4};\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$.

Ta có: $\begin{cases} \overrightarrow{BM} = \left(-\dfrac{a\sqrt{3}}{4}; \dfrac{3a}{4}; \dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right) \\ \overrightarrow{BD} = (0; a; 0) \end{cases}$

$$\Rightarrow \left[\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BD}\right] = \left(-\frac{\sqrt{3}a^2}{2}; 0; -\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\right) = -\frac{a^2\sqrt{3}}{2}\left(1; 0; \frac{1}{2}\right) = -\frac{a^2\sqrt{3}}{2}.\vec{n}$$

với $\vec{n} = \left(1; 0; \dfrac{1}{2}\right)$; $\overrightarrow{A'C} = \left(a\sqrt{3}; 0; \dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)$

Ta có $\overrightarrow{A'C} = a\sqrt{3}.\vec{n} \Rightarrow \overrightarrow{A'C} // \vec{n} \Rightarrow A'C \perp (BDMN)$.

Ví dụ 3

Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O cạnh bằng a, góc A bằng $60°$, $B'O$ vuông góc với đáy $(ABCD)$, cho $BB' = a$

a. Tính góc giữa cạnh bên và đáy

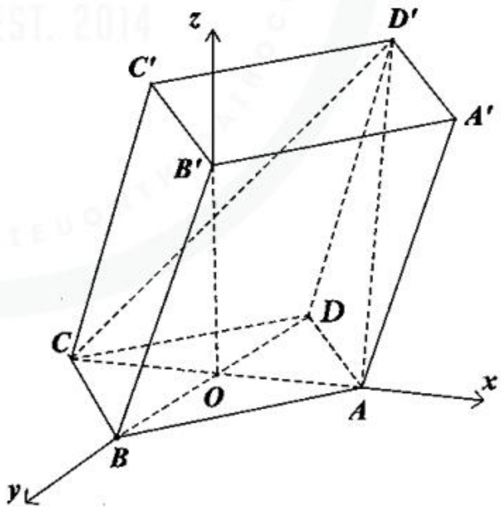
b. Tính khoảng cách từ B, B' đến mặt phẳng (ACD').

➤ **Lời giải:**

Ta có: $OA = AB.cos30° = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$;

$OB = AB.\sin 30° = \dfrac{a}{2}$.

Chọn hệ trục tọa độ Oxyz như hình vẽ, các trục Ox, Oy, Oz lần lượt đi qua các điểm A, B, B'.



Khi đó:

$O(0;0;0), A\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}; 0; 0\right)$,

$B\left(0; \dfrac{a}{2}; 0\right), C\left(-\dfrac{a\sqrt{3}}{2}; 0; 0\right), D\left(0; -\dfrac{a}{2}; 0\right)$

a) Gọi α là góc giữa cạnh bên và cạnh đáy.

Ta có: $cos\alpha = \cos\left(\widehat{BB',BD}\right) = \dfrac{BO}{BB'} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60°$

$B'O = BB'.\sin\alpha = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow B'\left(0;0;\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right), D'\left(0;-a;\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right).$

b) Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{AC} = \left(-a\sqrt{3};0;0\right) \\ \overrightarrow{AD'} = \left(-\dfrac{a\sqrt{3}}{2};-a;\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right) \end{cases}$

$\Rightarrow \left[\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD'}\right] = \left(0;\dfrac{3a^2}{2};a^2\sqrt{3}\right) = \sqrt{3}a^2\left(0;\dfrac{\sqrt{3}}{2};1\right) = \sqrt{3}a^2.\vec{n}$

với $\vec{n} = \left(0;\dfrac{\sqrt{3}}{2};1\right)$.

Mặt phẳng (ACD') $\begin{cases} qua \quad A\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2};0;0\right) \\ vtpt \quad \vec{n} = \left(0;\dfrac{\sqrt{3}}{2};1\right) \end{cases}$

Nên có phương trình $\dfrac{\sqrt{3}}{2}y + z = 0$.

Ta có: $d\left(B,(ACD')\right) = \dfrac{\left|\dfrac{\sqrt{3}}{2}.\dfrac{a}{2}\right|}{\sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+1}} = \dfrac{a\sqrt{21}}{14};$

$$d\left(B',(ACD')\right) = \dfrac{\left|\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right|}{\sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+1}} = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}.$$

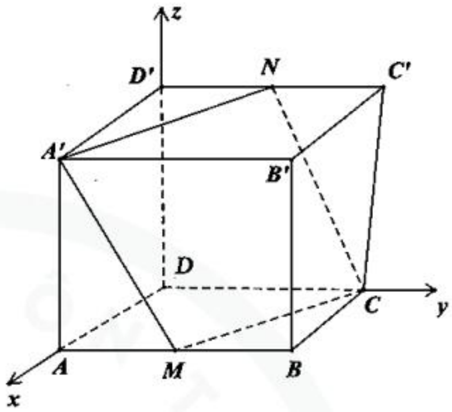
Vậy $d\left(B,(ACD')\right) = \dfrac{a\sqrt{21}}{14}; d\left(B',(ACD')\right) = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

Ví dụ 4

Cho hình lập phương ABCD.A′B′C′D′ cạnh a. M, N lần lượt là trung điểm của AB và C′D′. Tính khoảng cách từ B′ đến (A′MCN).

➢ Lời giải:

Chọn hệ trục Dxyz, với Dx, Dy, Dz đôi một vuông góc.



A(a;0;0) ;B(a;a;0); C(0;a;0); D(0;0;0); A′(a;0;a); B′(a;a;a); C′(0;a;a); D′(0;0;a)

$M\left(a;\frac{a}{2};0\right), N\left(0;\frac{a}{2};a\right)$.

Ta có: $\begin{cases}\overrightarrow{A'C}=(-a;a;-a)\\ \overrightarrow{MN}=(-a;0;a)\end{cases}$

$\Rightarrow\left[\overrightarrow{A'C};\overrightarrow{MN}\right]=\left(a^2;2a^2;a^2\right)=a^2(1;2;1)=a^2.\vec{n}$ với $\vec{n}=(1;2;1)$.

Phương trình mp (A'MCN) $\begin{cases}\text{đi qua } C(0;a;0)\\ \text{vtpt } \vec{n}=(1;2;1)\end{cases}$

$\Leftrightarrow$ pt $mp(A'MCN): x+2y+z-2a=0$

Khoảng cách d từ $B'(a;a;a)$ đến mặt phẳng (A′MCN):

$$d=\frac{|a+2a+a-2a|}{\sqrt{1+4+1}}=\frac{2a}{\sqrt{6}}=\frac{a\sqrt{6}}{3}$$

Ví dụ 5

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh bằng 2. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AB và DD'.

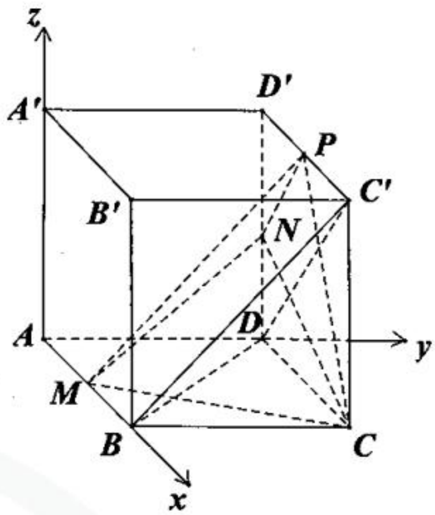
a) Chứng minh $MN//(BDC')$. Tính MN và khoảng cách từ MN đến mặt phẳng (BDC').

b) Gọi P là trung điểm của C′D′. Tính thể tích của V_{CMNP} và góc giữa MN và BD.

c) Tính bán kính R của đường tròn ngoại tiếp $\Delta A'BD$.

➤ **Lời giải:**

Khi đó:



A(0;0;0); B(2;0;0); C(2;2;0); D(0;2;0);

A′(0;0;2); B′(2;0;2); C′(2;2;2); D′(0;2;2)

M, N, P lần lượt là trung điểm AB, DD′, C′D′

$\Rightarrow M(1;0;0), N(0;2;1), P(1;2;2)$.

a) Ta có: $\begin{cases} \overrightarrow{MN} = (-1;2;1) \\ \overrightarrow{BD} = (-2;2;0) \\ \overrightarrow{BC'} = (0;2;2) \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} \vec{n}_{(BDC')} = \left[\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BC'}\right] = (4;4;-4) \\ \overrightarrow{MN}.\vec{n}_{(BDC')} = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow MN // (BDC')$ (do $M \notin (BDC')$)

Do $MN // (BDC') \Rightarrow d(MN,(BDC')) = d(M,(BDC'))$.

Mặt phẳng (BDC') $\begin{cases} qua\ B(2;0;0) \\ \vec{n}_{(BDC')} = (4;4;-4) = 4.(1;1;-1) \end{cases}$.

Nên có phương trình: $x + y - z - 2 = 0$

$\Rightarrow d(M,(BDC')) = \dfrac{|1-2|}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Vậy $d(MN,(BDC')) = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

b) Ta có:

$\begin{cases} \overrightarrow{MN} = (-1;2;1) \\ \overrightarrow{MP} = (0;2;2) \\ \overrightarrow{MC} = (1;2;0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left[\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}\right] = (2;2;-2) \\ \left[\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}\right].\overrightarrow{MC} = 6 \end{cases}$

$\Rightarrow V_{CMNP} = \dfrac{1}{6}.\left|\left[\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}\right].\overrightarrow{MC}\right| = 1$

Tính góc giữa MN và BD

Gọi $\alpha = \left(\widehat{MN, BD}\right)$.

Ta có: $\cos\alpha = \dfrac{\left|\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{BD}\right|}{\left|\overrightarrow{MN}\right|.\left|\overrightarrow{BD}\right|}$ với $\begin{cases} \overrightarrow{MN} = (-1;2;1) \\ \overrightarrow{BD} = (-2;2;0) \end{cases}$

$\Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{|2+4+0|}{\sqrt{(-1)^2+2^2+1^2}.\sqrt{(-2)^2+2^2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha = 30^\circ$.

Vậy $V_{CMNP} = 1$ và $\alpha = \left(\widehat{MN, BD}\right) = 30^\circ$.

c) Gọi I, R′ là tâm và bán kính mặt cầu (S) ngoại tiếp hình lập phương.

$\Rightarrow$ I là trung điểm AC′ và $R' = \dfrac{AC'}{2}$ hay $\begin{cases} I(1;1;1) \\ R' = \sqrt{3} \end{cases}$

Ta có: Phương trình mặt phẳng $(A'BD)$: $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{2} + \dfrac{z}{2} = 1$ *hay* $x + y + z - 2 = 0$.

$\Rightarrow d\left(I,(A'BD)\right) = \dfrac{|1+1+1-2|}{\sqrt{1+1+1}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Lại có $A', B, D \in (S) \Rightarrow$ Đường tròn ngoại tiếp $\Delta A'BD = (A'BD) \cap (S)$.

$\Rightarrow R = \sqrt{R'^2 - d^2\left(I,(A'BD)\right)} = \dfrac{2\sqrt{6}}{3}$.

Vậy $R = \dfrac{2\sqrt{6}}{3}$.

Ví dụ 6

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a.

1. Chứng minh $A'C \perp (AB'D')$. Tính góc φ là góc giữa $(DA'C)$ và $(ABB'A')$

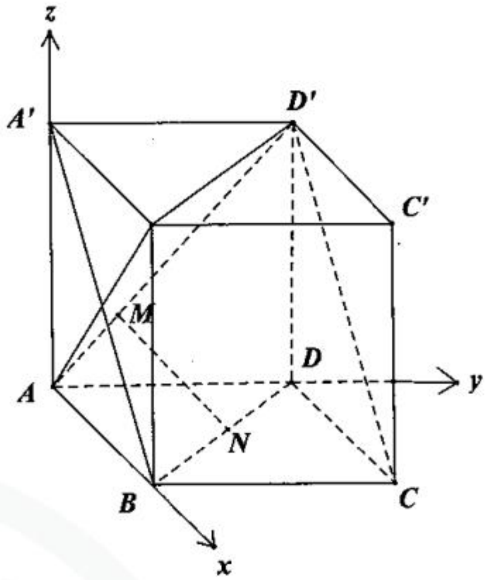
2. Trên cạnh AD', DB lấy điểm M, N sao cho $AM = DN = k$ $\left(0 < k < a\sqrt{2}\right)$

a) Chứng minh $MN // (A'D'BC)$

b) Tìm k để $MN_{\min}$. Chứng tỏ khi đó MN là đoạn vuông góc chung của AD′, DB.

➢ **Lời giải:**

Chọn hệ trục tọa độ Axyz như hình vẽ, các trục Ax, Ay, Az lần lượt đi qua các điểm B, D, A′.



Khi đó:

A(0;0;0); B(a;0;0); C(a;a;0); D(0;a;0);

A′(0;0;a); B′(a;0;a); C′(a;a;a); D′(0;a;a)

Ta có:

$$AM = DN = k \Rightarrow M\left(0;\frac{k\sqrt{2}}{2};\frac{k\sqrt{2}}{2}\right),$$

$$N\left(\frac{k\sqrt{2}}{2};a-\frac{k\sqrt{2}}{2};0\right)$$

1. Ta có:

$$\begin{cases}\overrightarrow{A'C}=(a;a;-a)\\ \overrightarrow{AB'}=(a;0;a)\\ \overrightarrow{AD'}=(0;a;a)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\overrightarrow{A'C}.\overrightarrow{AB'}=0\\ \overrightarrow{A'C}.\overrightarrow{AD'}=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}A'C\perp AB'\\ A'C\perp AD'\end{cases} \Rightarrow A'C\perp(AB'D')$$

$$\begin{cases}\overrightarrow{A'D}=(0;a;-a)\\ \overrightarrow{CD}=(-a;0;0)\end{cases} \Rightarrow \vec{n_1}=\vec{n}_{(DA'C)}=\left[\overrightarrow{A'D},\overrightarrow{CD}\right]=\left(0;a^2;a^2\right);$$

$$\overrightarrow{n_2}=\vec{n}_{(ABB'A')}=\vec{j}=(0;1;0) \Rightarrow \cos\varphi=\frac{\left|\vec{n_1}.\vec{n_2}\right|}{\left|\vec{n_1}\right|.\left|\vec{n_2}\right|}=\frac{a^2}{a^2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\varphi=45°.$$

Vậy $\varphi = 45°$.

2. a) Chứng minh $MN//(A'D'BC)$

$$\text{Ta có: }\begin{cases}\overrightarrow{MN}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(k;a\sqrt{2}-2k;-k\right)\\ \overrightarrow{BA'}=(-a;0;a)\\ \overrightarrow{BC}=(0;a;0)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\vec{n}_{(A'D'BC)}=\left[\overrightarrow{BA'},\overrightarrow{BC}\right]=-a^2(1;0;1)\\ \vec{n}_{(A'D'BC)}.\overrightarrow{MN}=-\frac{\sqrt{2}a^2}{2}(k-k)=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow MN//(A'D'BC)\ (\text{do } M\notin(A'D'BC))$$

b) Ta có: $MN^2 = \frac{1}{2}\left(6k^2 - 4\sqrt{2}k + 2a^2\right)$

k	$-\infty$	0		$\frac{a\sqrt{2}}{3}$		$a\sqrt{2}$	$+\infty$
MN^2			$\searrow$	$\frac{a^2}{3}$	$\nearrow$		

$\Rightarrow MN_{\min} = \frac{a\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow k = \frac{a\sqrt{2}}{3}$. Với $k = \frac{a\sqrt{2}}{3} \Rightarrow \overrightarrow{MN} = \frac{a}{3}(1;1;-1)$

Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{AD'} = (0;a;a) \\ \overrightarrow{BD} = (-a;a;0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{AD'} = 0 \\ \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{BD} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} MN \perp AD' \\ MN \perp BD \end{cases}$

$\Rightarrow$ MN là đoạn vuông góc chung của AD′ và BD.

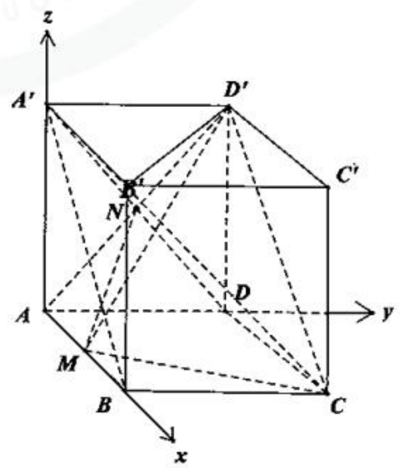
Ví dụ 7

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Gọi M là trung điểm AB, N là tâm của hình vuông ADD′A′.

a) Tính góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và $(A'CD)$.

b) Tính bán kính R của mặt cầu (S) đi qua 4 điểm C, D′, M, N.

➤ **Lời giải:**



Chọn hệ trục tọa độ Axyz như hình vẽ, các trục Ax, Ay, Az lần lượt đi qua các điểm B, D, A′.

Khi đó:

A(0;0;0); B(a;0;0); C(a;a;0); D(0;a;0);

A′(0;0;a); B′(a;0;a); C′(a;a;a); D′(0;a;a)

M là trung điểm AB $\Rightarrow M\left(\frac{a}{2};0;0\right)$

N là tâm hình vuông ADD'A' $\Rightarrow N\left(0;\dfrac{a}{2};\dfrac{a}{2}\right)$.

a) Ta có: $\begin{cases}\overrightarrow{A'C}=(a;a;-a)\\ \overrightarrow{A'B}=(a;0;-a)\end{cases}$

$\Rightarrow \vec{n}_{(A'BC)}=\left[\overrightarrow{A'C},\overrightarrow{A'B}\right]=\left(-a^2;0;-a^2\right)=-a^2(1;0;1)=-a^2.\vec{n}_1$

với $\vec{n}_1=(1;0;1)$. $\begin{cases}\overrightarrow{A'C}=(a;a;-a)\\ \overrightarrow{A'D}=(0;a;-a)\end{cases}$

$\Rightarrow \vec{n}_{(A'CD)}=\left[\overrightarrow{A'C},\overrightarrow{A'D}\right]=\left(0;a^2;a^2\right)=a^2.(0;1;1)=a^2.\vec{n}_2$

với $\vec{n}_2=(0;1;1)$.

Gọi $\alpha=\left(\widehat{(A'CD),(A'BC)}\right)\Rightarrow \alpha=\left(\widehat{\vec{n}_1,\vec{n}_2}\right)$

Ta có: $\cos\alpha=\dfrac{|-1.0+0.1-1.1|}{\sqrt{1+1}.\sqrt{1+1}}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow \alpha=60^\circ$.

Vậy $\alpha=\left(\widehat{(A'CD),(A'BC)}\right)=60^\circ$.

b) Phương trình mặt cầu (S) đi qua 4 điểm C, D',M, N có dạng:

$x^2+y^2+z^2-2\alpha x-2\beta y-2\gamma z+d=0$.

Bốn điểm C, D', M, $N\in(S)$

$$\Rightarrow\begin{cases}2a^2-2\alpha a-2\beta a+d=0\\ 2a^2-2\beta a-2\gamma a+d=0\\ \dfrac{a^2}{4}-\alpha a+d=0\\ \dfrac{a^2}{2}-\beta a-\gamma a+d=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=\gamma=\dfrac{5a}{4}\\ \beta=\dfrac{a}{4}\\ d=a^2\end{cases}$$

$\Rightarrow$ Phương trình mặt cầu (S): $x^2+y^2+z^2-\dfrac{5a}{2}x-\dfrac{a}{2}y-\dfrac{5a}{2}z+a^2=0$

Ta có: $R^2=\left(\dfrac{5a}{4}\right)^2+\left(\dfrac{a}{4}\right)^2+\left(\dfrac{5a}{4}\right)^2-a^2=\dfrac{35a^2}{16}\Rightarrow R=\dfrac{a\sqrt{35}}{4}$.

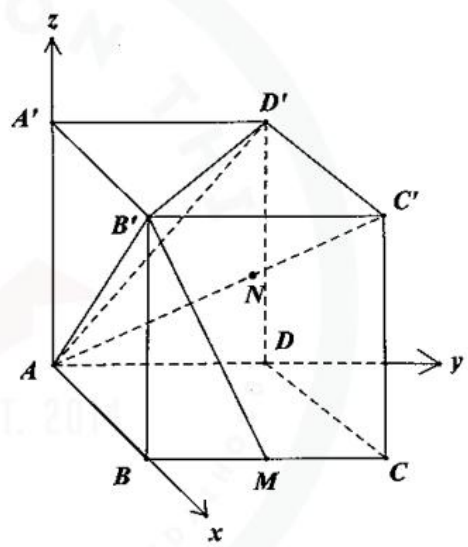
Ví dụ 8

Trong không gian Oxyz cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ với $A(0;0;0)$, $B(2;0;0)$, $D0;2;0)$

a) Xác định tọa độ các đỉnh còn lại của hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M là trung điểm BC. Chứng minh hai mặt phẳng $(AB'D')$ và (AMB') vuông góc với nhau.

b) Chứng minh rằng tỉ số khoảng cách từ điểm N thuộc đường thẳng $AC'(N \neq A)$ đến hai mặt phẳng $(AB'D')$ và (AMB') không phụ thuộc vào vị trí của điểm N.

➤ **Lời giải:**



Chọn hệ trục tọa độ Axyz như hình vẽ, các trục Ax, Ay, Az lần lượt đi qua các điểm B, D, A'.

Khi đó:

A(0;0;0); B(2;0;0); C(2;2;0); D(0;2;0);

A'(0;0;2); B'(2;0;2); C'(2;2;2); D'(0;2;2)

M là trung điểm BC $\Rightarrow$ M(2;1;0).

a) Ta có: $\begin{cases} \overrightarrow{AB'} = (2;0;2) \\ \overrightarrow{AD'} = (0;2;2) \end{cases}$

$\Rightarrow \vec{n}_{(AB'D')} = \left[\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{AD'}\right] = \left(-4a^2;-4a^2;4a^2\right)$

$= -4a^2(1;1;-1) = -4a^2.\vec{n}_1$

với $\vec{n}_1 = (1;1;-1)$.

$\begin{cases} \overrightarrow{AM} = (2;1;0) \\ \overrightarrow{AB'} = (2;0;2) \end{cases} \Rightarrow \vec{n}_{(AMB')} = \left[\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{AM}\right] = \left(2a^2;-4a^2;-2a^2\right)$

$= 2a^2(1;-2;-1) = 2a^2.\vec{n}_2$

Với $\vec{n}_2 = (1;-2;-1)$.

Ta có:

$\vec{n_1}.\vec{n_2} = 1.1 + 1.(-2) - 1.(-1) = 0 \Leftrightarrow \vec{n_1} \perp \vec{n_2} \Rightarrow (AB'D') \perp (AMB')$.

b) Đường thẳng $AC'\begin{cases} qua \quad A(0;0;0) \\ vtcp \quad \vec{u} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC'} = (1;1;1) \end{cases}$.

Nên có pt: $\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \left(t \in \mathbb{R},\ t \neq 0\ do\ N \neq A\right)$

Theo đề bài $N \in AC' \Rightarrow N(t;t;t)$

Mặt phẳng $(AB'D')\begin{cases} qua \quad A(0;0;0) \\ vtpt \quad \vec{n_1} = (1;1;-1) \end{cases}$

nên có pt: $x + y - z = 0$

$$\Rightarrow d(N,(AB'D')) = d_1 = \frac{|t + t - t|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{\sqrt{3}|t|}{3}.$$

Mặt phẳng $(AMB')\begin{cases} qua \quad A(0;0;0) \\ vtpt \quad \vec{n_2} = (1;-2;-1) \end{cases}$

nên có pt : $x - 2y - z = 0$

$$d(N,(AMB')) = d_2 = \frac{|t - 2t - t|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-1)^2}} = \frac{\sqrt{6}|t|}{3}.$$

Xét tỉ số $\dfrac{d_1}{d_2} = \dfrac{\frac{\sqrt{3}|t|}{3}}{\frac{\sqrt{6}|t|}{3}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Suy ra tỉ số khoảng cách từ điểm N thuộc đường thẳng $AC'(N \neq A)$ đến hai mặt phẳng $(AB'D')$ và (AMB') không phụ thuộc vào vị trí của điểm N.

Ví dụ 9

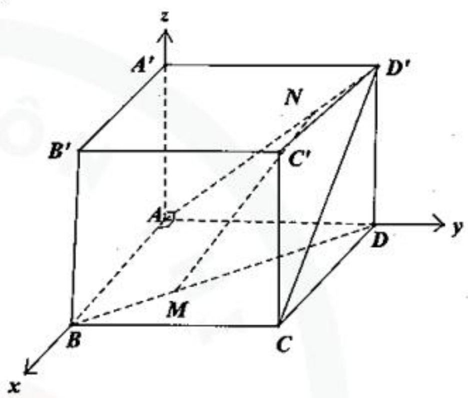
Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D'. Các điểm M, N lần lượt thay đổi trên các đoạn thẳng BD và AD' sao cho DM=AN.

a) Xác định vị trí của hai điểm M, N để MN nhỏ nhất. Chứng minh rằng khi đó MN vuông góc với BD và AD'.

b) Chứng minh rằng MN vuông góc với một đường thẳng cố định.

➤ Lời giải:

Chọn hệ trục tọa độ Oxyz có gốc O trùng điểm A, các tia Ox, Oy, Oz lần lượt trùng các tia AB, AD, AA'.



Giả sử cạnh hình lập phương có độ dài bằng a.

Đặt $AN = DM = t\left(0 \le t \le a\sqrt{2}\right)$.

Khi đó ta có:

$A(0;0;0), B(a;0;0), D(0;a;0),$

$D'(0;a;a), M\left(\frac{t}{\sqrt{2}}; a-\frac{1}{\sqrt{2}}; 0\right), N\left(0; \frac{t}{\sqrt{2}}; \frac{t}{\sqrt{2}}\right)$

Do đó: $\overrightarrow{MN} = \left(-\frac{t}{\sqrt{2}}; t\sqrt{2}-a; \frac{t}{\sqrt{2}}\right)$.

Ta có: $MN^2 = \left(-\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(t\sqrt{2}-a\right)^2 + \left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2 = 3t^2 - 2\sqrt{2}at + a^2$.

Xét hàm số $f(t) = 3t^2 - 2\sqrt{2}at + a^2$.

Hàm số này có đồ thị là một parabol quay bề lõm lên phía trên. Do đó f(t) nhỏ nhất khi và chỉ khi $t = \frac{a\sqrt{2}}{3}$.

Vì $\frac{a\sqrt{2}}{3} \in \left[0, a\sqrt{2}\right]$ nên MN nhỏ nhất khi $t = \frac{a\sqrt{2}}{3} \Leftrightarrow M, N$ thuộc đoạn BD.AD' tương ứng sao cho $DM = \frac{1}{3}BD, AN = \frac{1}{3}AD'$.

Khi MN nhỏ nhất ta có: $t=\frac{a\sqrt{2}}{3}$ nên $\overrightarrow{MN}\left(-\frac{a}{3};-\frac{a}{3};\frac{a}{3}\right)$.

Mặt khác $\overrightarrow{BD}=(-a;a;0),\overrightarrow{AD'}=(0;a;a)$

Nên $\begin{array}{l}\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{BD}=\left(-\frac{a}{3}\right).(-a)+\left(-\frac{a}{3}\right).a+\frac{a}{3}.0=0\\ \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{AD'}=\left(-\frac{a}{3}\right).0+\left(-\frac{a}{3}\right).a+\frac{a}{3}.a=0\end{array}$

Vậy MN vuông góc với BD và AD'.

b) Trước hết ta tìm phương $\vec{\alpha}=(x;y;z)\neq\vec{0}$ vuông góc với véc tơ $\overrightarrow{MN}$.

Điều đó tương đương với $\vec{\alpha}.\overrightarrow{MN}=0\forall t\in\left[0;a\sqrt{2}\right]$

$\Leftrightarrow x\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+y\left(t\sqrt{2}-a\right)+z\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)=0\forall t\in\left[0;a\sqrt{2}\right]$

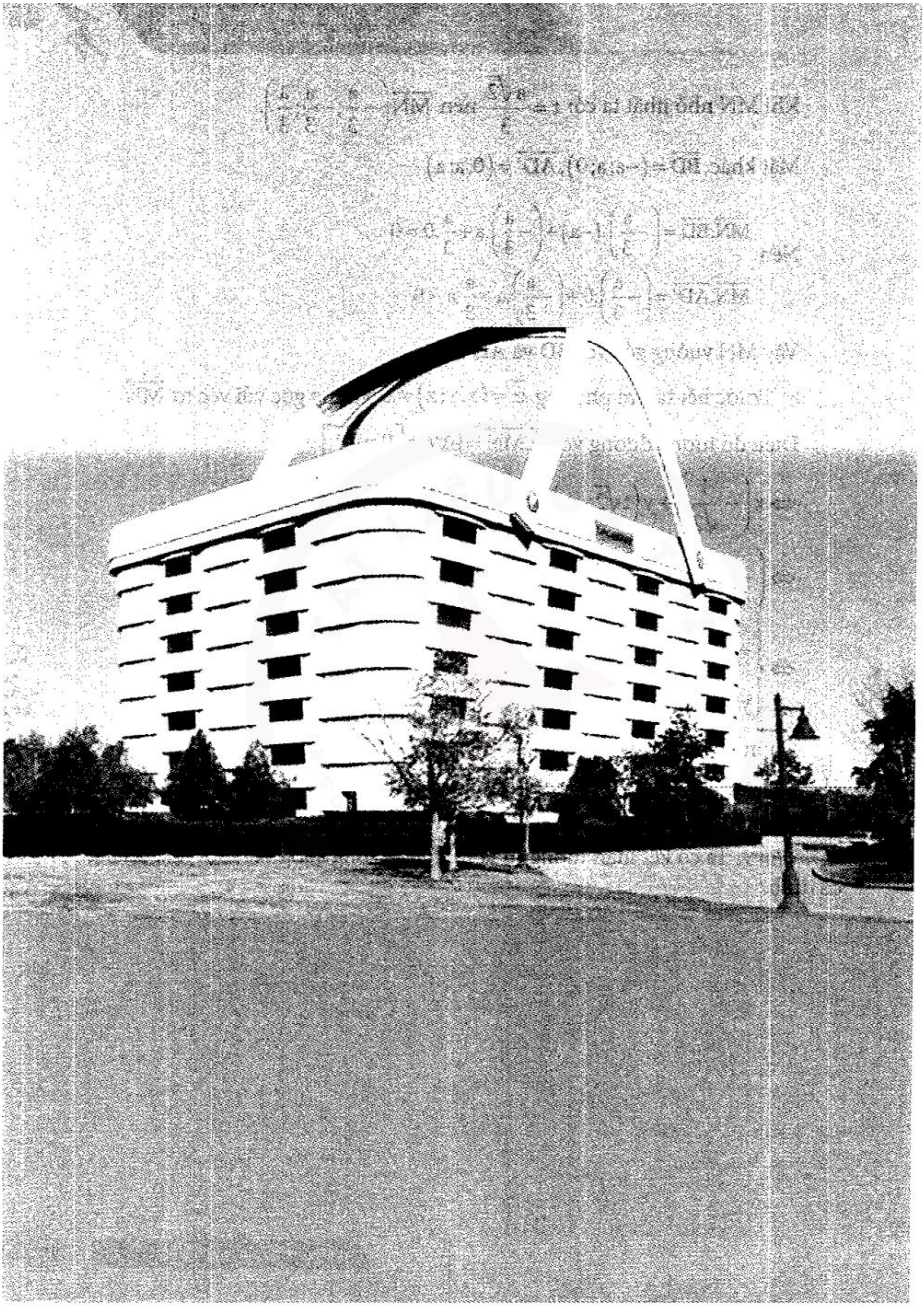
$\Leftrightarrow\left(-\frac{x}{\sqrt{2}}+y\sqrt{2}+\frac{z}{\sqrt{2}}\right)t-ya=0\forall t\in\left[0;a\sqrt{2}\right]$

$\Leftrightarrow\begin{cases}-\frac{x}{\sqrt{2}}+y\sqrt{2}+\frac{z}{\sqrt{2}}=0\\ ya=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=z\\ y=0\end{cases}$

Chọn $\vec{\alpha}=(1;0;1)$.

Vậy MN vuông góc với một đường thẳng cố định nhận $\vec{\alpha}=(1;0;1)$ làm véc tơ chỉ phương.

Chú ý: Ta có kết luận tương tự là MN luôn song song với một mặt phẳng cố định.



PHẦN IV

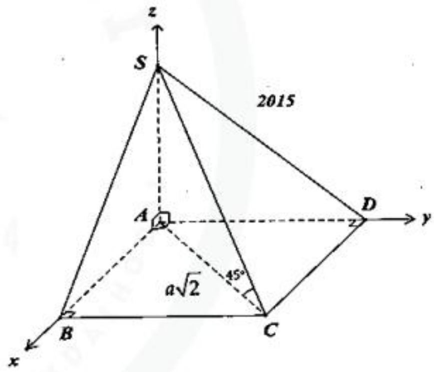
ĐỀ THI CÁC NĂM

A2015

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SA vuông góc mặt phẳng $(ABCD)$, góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng $45°$. Tính theo a thể tích của khối chóp $S.ABCD$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và AC.

➤ **Lời giải:**

Đặt trục như hình vẽ:



$AB \equiv Ox; AD \equiv Oy; SA \equiv Oz$,

$A(0;0;0)$, $B(a;0;0)$, $C(a;a;0)$,

$D(0;a;0)$, $S(0;0;a\sqrt{2})$.

Ta có:

$$\sin 45^0 = \sin\left(\overline{SC,(ABCD)}\right) = \frac{\left|\overrightarrow{SC}.\overrightarrow{n_{(ABCD)}}\right|}{\left|\overrightarrow{SC}\right|.\left|\overrightarrow{n_{(ABCD)}}\right|};$$

$\overrightarrow{SC}(a,a,-h), \vec{n}_{(ABCD)}(0,0,1)$

$$\Rightarrow \sin 45^0 = \frac{|-h|}{\sqrt{a^2+a^2+h^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow 2h = \sqrt{4a^2+2h^2}$$

$$\Leftrightarrow 4h^2 = 4a^2 + 2h^2 \Leftrightarrow h^2 = 2a^2 \Rightarrow h = a\sqrt{2}$$

$$+)\ V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}.SA.S_{ABCD} = \frac{1}{3}.a\sqrt{2}.a^2 = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$$

Có: $\overrightarrow{SB}(a,0,-a\sqrt{2}); \overrightarrow{AC}(a,a,0)$

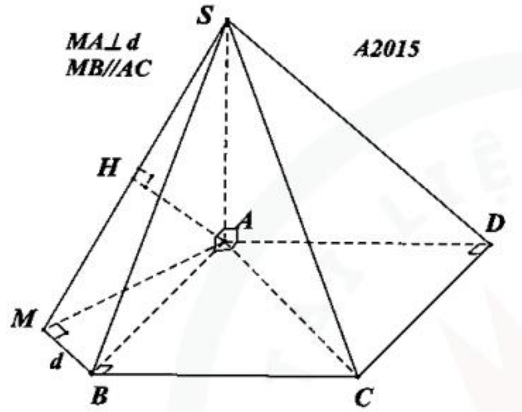
$\Rightarrow \left[\overrightarrow{SB},\overrightarrow{AC}\right]=(a^2\sqrt{2},-a^2\sqrt{2},a^2)$

$\left|\left[\overrightarrow{SB},\overrightarrow{AC}\right]\right|=\sqrt{\left(a^2\sqrt{2}\right)^2+\left(-a^2\sqrt{2}\right)^2+a^4}=\sqrt{5a^4}=a^2\sqrt{5}$

$\overrightarrow{AB}(a,0,0)\Rightarrow\left|\overrightarrow{AB}.\left[\overrightarrow{SB},\overrightarrow{AC}\right]\right|=a^2\sqrt{2}.a+\left(-a^2\sqrt{2}\right).0+0.0=-a^3\sqrt{2}$

$+)\ d_{(SB,AC)}=\dfrac{\left|\overrightarrow{AB}.\left[\overrightarrow{SB},\overrightarrow{AC}\right]\right|}{\left|\left[\overrightarrow{SB},\overrightarrow{AC}\right]\right|}=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{a^2\sqrt{5}}=\dfrac{a\sqrt{10}}{5}.$

- ***Lời giải bằng hình học thuần túy:***



Ta có: $SA\perp(ABCD)\Rightarrow\left(\widehat{SC,(ABCD)}\right)=\widehat{SCA}=45^0$

Xét tam giác vuông ΔABC vuông tại B:

$AC^2=AB^2+BC^2=a^2+a^2=2a^2\Rightarrow AC=a\sqrt{2}$

$SA\perp(ABCD)\Rightarrow SA\perp AC$

Xét tam giác ΔSAC vuông tại A: $\tan 45^0=\dfrac{SA}{AC}=1$

Suy ra : $SA=AC=a\sqrt{2}$

$V_{S.ABCD}=\dfrac{1}{3}.SA.S_{ABCD}=\dfrac{1}{3}.a\sqrt{2}.a^2=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$

Kẻ đường thẳng d qua B và song song với AC. Gọi M là hình chiếu vuông góc của A trên d; H là hình chiếu vuông góc của A trên SM

Xét tam giác ΔABM vuông tại M do $\widehat{BAC}=45^0$.

Mà $BM//AC, MA\perp MB\Rightarrow MA\perp AC\Rightarrow\widehat{MAB}=45^0$

$\cos\widehat{MAB}=\cos 45^0=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{MA}{AB}=\dfrac{MA}{a}\Leftrightarrow MA=\dfrac{a}{\sqrt{2}}$

Ta có ? nên $AH \perp BM$ suy ra $AH \perp (SBM)$.

Do đó $d(AC,SB) = d(A,(SBM)) = AH$

Tam giác SAM vuông góc tại A, có đường cao AH.

Nên $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AM^2} = \dfrac{1}{(\sqrt{2}.a)^2} + \dfrac{1}{\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \dfrac{5}{2a^2} \Rightarrow AH^2 = \dfrac{2a^2}{5} = \dfrac{10a^2}{25} \Rightarrow AH = \dfrac{a\sqrt{10}}{5}$

Vậy $d(AC,SB) = AH = \dfrac{a\sqrt{10}}{5}$

Chú ý : Ta thấy tính thể tích ta có thể giải theo thuần túy nhưng đến tính khoảng cách nhưng em học sinh yếu khó tiếp cận để tính khoảng cách. Khi đó đặt trục là biện pháp hữu hiệu để giải quyết .

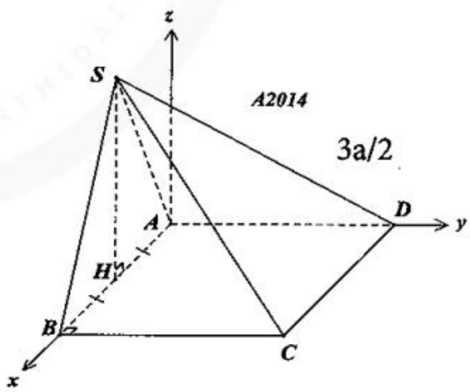
A2014

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy ABCD vuông cạnh a, SD=3a/2 ; hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng ABCD là trung điểm AB, tính theo a thể tích khối chóp SABCD và khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBD).

➢ Lời giải:

a) Gọi H là trung điểm của AB, $SH \perp (ABCD)$

Đặt trục như hình vẽ:



$AB \equiv ox; Ay \equiv oy; Az \equiv oz//SH$;

$A(0;0;0)$ $B(a;0;0)$ $C(a;a;0)$

$D(0;a;0)$ $H(\frac{a}{2};0;0)$ $S(\frac{a}{2};0;h)$.

Ta có:

$\overrightarrow{SD}\left(\dfrac{a}{2};-a;h\right) \Rightarrow SD^2 = \dfrac{9a^2}{4} = \dfrac{a^2}{4} + a^2 + h^2$

$\Rightarrow h^2 = \dfrac{9a^2}{4} - \dfrac{a^2}{4} - a^2 = a^2$ $\quad \dfrac{a}{2}$

$\Rightarrow h = a \Rightarrow S\left(\dfrac{a}{2};0;a\right)$

$V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}.SH.S_{ABCD}=\frac{1}{3}.a.a^2=\frac{a^3}{3}$ (đvtt).

b) Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBD): $d_{(A,(SBD))}=?$

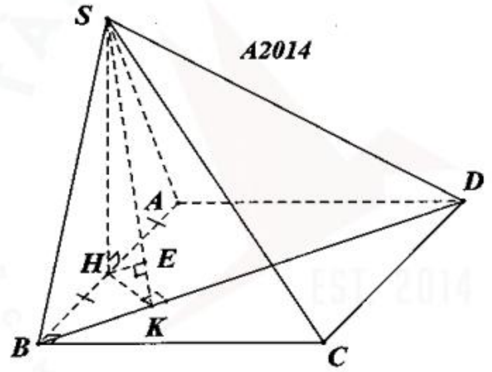
Viết phương trình mặt phẳng (SBD):

$$(SBD):\begin{cases} qua\ B(a;0;0) \\ \overrightarrow{BD}=(-a;a;0) \\ \overrightarrow{BS}=\left(-\frac{a}{2};0;a\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} qua\ B(a;0;0) \\ \overrightarrow{n_{SBD}}=\left[\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BS}\right]=\left(a^2;a^2;\frac{a^2}{2}\right)//(2;2;1) \end{cases}$$

$\Rightarrow (SBD): 2(x-a)+2y+z=0$.

$$d_{(A,(SBD))}=\frac{|2(0-a)+2.0+0|}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}}=\frac{2a}{3}.$$

❖ ***Lời giải bằng hình học thuần túy:***



Gọi H là trung điểm của AB, suy ra $SH\perp(ABCD)$.

Do đó $SH\perp HD$.

Ta có:

$$SH=\sqrt{SD^2-DH^2}=\sqrt{SD^2-\left(AH^2+AD^2\right)}=\sqrt{\frac{3a^2}{2}-(\frac{a^2}{2}+a^2)}=a$$

Suy ra $V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}.SH.S_{ABCD}=\frac{a^3}{3}$

Gọi K là hình chiếu vuông góc của H lên BD và E là hình chiếu vuông góc của H lên SK.

Ta có $\begin{cases} BD\perp HK \\ BD\perp SH \end{cases} \Rightarrow BH\perp(SHK)$ suy ra $BD\perp HE$.

Mà $HE \perp SK \Rightarrow HE \perp (SBD)$

Ta có: $HK = HB.\sin\widehat{KBH} = \frac{a}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{4}$

suy ra $HE = \frac{HS.HK}{\sqrt{HS^2 + HK^2}} = \frac{a.\frac{a\sqrt{2}}{4}}{\sqrt{a^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2}} = \frac{a}{3}$

Do đó: $d(A,(SBD)) = 2d(H,(SBD)) = 3.HE = \frac{2a}{3}$.

B2014

Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của cạnh AB, góc giữa đường thẳng A'C và mặt đáy bằng 60^0. Tính theo a thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ và khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng $(ACC'A')$.

➢ **Lời giải:**

Gọi H là trung điểm của AB, $A'H \perp (ABC)$

Do ΔABC đều nên $CH \perp AB$, $CH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, do đó ta đặt trục tại H.

Ta thấy: $A'H \perp (ABC) \Rightarrow \left(\widehat{A'C,(ABC)}\right) = \left(\widehat{A'C,CH}\right) = \widehat{A'CH} = 60^0$.

$\Rightarrow \tan 60^0 = \sqrt{3} = \frac{A'H}{CH} \Rightarrow A'H = \sqrt{3}.CH = \sqrt{3}.\frac{\sqrt{3}a}{2} = \frac{3a}{2}$.

Đặt trục như hình vẽ: $HB \equiv Ox; HC \equiv Oy; HA' \equiv Oz$;

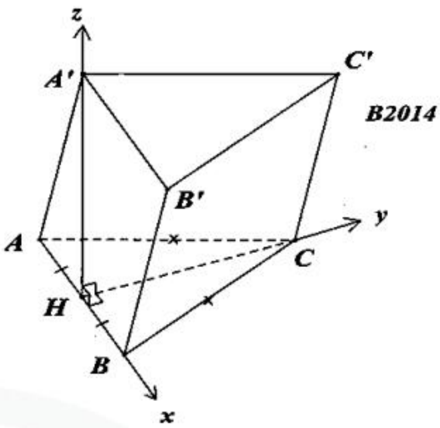
$H(0;0;0)$, $B(\frac{a}{2};0;0)$, $A(-\frac{a}{2};0;0)$, $C\left(0;\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right)$, $A'\left(0;0;\frac{3a}{2}\right)$.

Ta có: $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}.A'H.S_{\Delta ABC}$

$= \frac{1}{3}.\frac{3a}{2}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{8}$ (đvtt).

Khoảng cách từ B đến mặt phẳng $\left(ACC'A'\right)$ là: $d_{(B,(ACC'A'))}=?$.

Viết phương trình mặt phẳng $\left(AA'C\right)$ là:



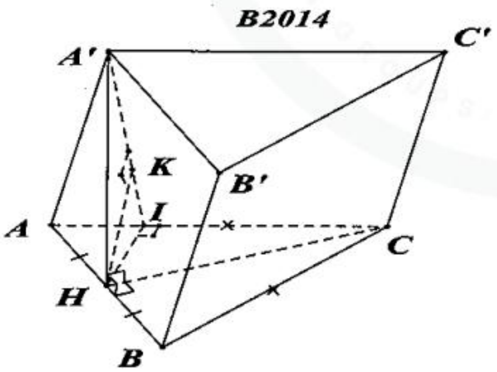
$$\begin{cases} qua\ A\left(-\dfrac{a}{2};0;0\right) \\ \overrightarrow{AC}=\left(\dfrac{a}{2};\dfrac{a\sqrt{3}}{2};0\right). \\ \overrightarrow{AA'}=\left(\dfrac{a}{2};0;\dfrac{3a}{2}\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} qua\ A\left(-\dfrac{a}{2};0;0\right) \\ \overrightarrow{n_{ACA'}}=\left[\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AA'}\right]=\left(\dfrac{3\sqrt{3}a^2}{4};\dfrac{-3a^2}{4};\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}\right) \parallel \left(3;-\sqrt{3};1\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left(ACA'\right):3\left(x+\frac{a}{2}\right)-\sqrt{3}y+z=0$$

$$d_{(B,(ACA'))}=\frac{\left|3(\frac{a}{2}+\frac{a}{2})-\sqrt{3}.0+0\right|}{\sqrt{3^2+\sqrt{3}^2+1^2}}=\frac{3a}{\sqrt{13}}=\frac{3\sqrt{13}a}{13}.$$

❖ ***Lời giải bằng hình học thuần túy:***



Gọi H là trung điểm của AB, $A'H\perp(ABC)$

Do ΔABC đều nên $CH\perp AB$, $CH=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Ta thấy $A'H \perp (ABC) \Rightarrow \left(\widehat{A'C,(ABC)}\right) = \left(\widehat{A'C,CH}\right) = \widehat{A'CH} = 60^0$.

$\Rightarrow \tan 60^0 = \sqrt{3} = \dfrac{A'H}{CH} \Rightarrow A'H = \sqrt{3}.CH = \sqrt{3}.\dfrac{\sqrt{3}a}{2} = \dfrac{3a}{2}$.

Do đó thể tích khối lăng trụ là $V_{ABC.A'B'C'} = A'H.S_{(ABC)} = \dfrac{3\sqrt{3}a^3}{8}$

Gọi I là hình chiếu vuông góc của H lên AC; K là hình chiếu vuông góc của H lên A'I.

Suy ra $HK = d\left(H,(ACC'A')\right)$.

Ta có: $HI = AH.\sin\widehat{IAH} = \dfrac{\sqrt{3}a}{4}$

$$\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{HI^2} + \frac{1}{HA'^2} = \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{3}a}{4}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{3a}{2}\right)^2} = \frac{52}{9a^2} \Rightarrow HK = \frac{3\sqrt{13}.a}{26}$$

Do đó $d\left(B;(ACC'A')\right) = 2d\left(H;(ACC'A')\right) = 2HK = \dfrac{3\sqrt{13}a}{13}$

D2014

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, $\triangle SBC$ là tam giác đều cạnh a và mặt phẳng (SBC) vuông góc với mặt đáy. Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABC$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng SA, BC.

➢ **Lời giải:**

Gọi H là trung điểm của BC mà ΔSBC đều $\begin{cases} SH \perp BC \\ SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

Mà ΔABC là tam giác vuông cân tại A

$\Rightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2 = 2AB^2 = a^2 \Rightarrow AB = AC = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

$$\begin{cases} (SBC) \perp (ABC) \\ (SBC) \cap (ABC) \\ SH \perp BC \end{cases} \Rightarrow SH \perp (ABC).$$

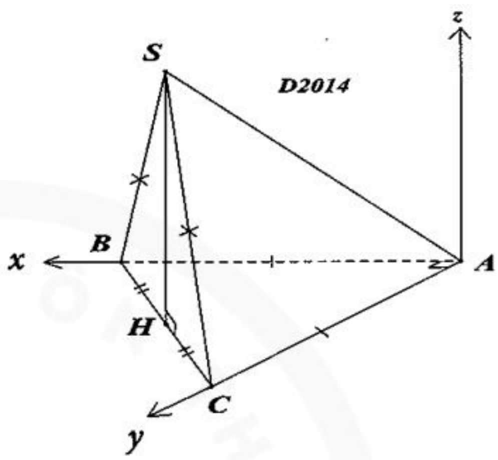
$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AB.AC=\frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{2}}{2}.\frac{a\sqrt{2}}{2}=\frac{a^2}{4}$

$V_{SABC}=\frac{1}{3}.SH.S_{\Delta ABC}=\frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{a^2}{4}=\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$.

Đặt trục như hình vẽ : $AB\equiv Ox; AC\equiv Oy; Az\equiv Oz\parallel SH$.

$A(0;0;0)$, $B\left(\frac{a\sqrt{2}}{2};0;0\right)$, $C\left(0;\frac{a\sqrt{2}}{2};0\right)$,

$H\left(\frac{a\sqrt{2}}{4};\frac{a\sqrt{2}}{4};0\right)$, $S\left(\frac{a\sqrt{2}}{4};\frac{a\sqrt{2}}{4};\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$.



Khoảng cách giữa hai đường thẳng SA, BC

$\begin{cases}\overrightarrow{SA}=\left(\frac{-a\sqrt{2}}{4};\frac{-a\sqrt{2}}{4};\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)\\ \overrightarrow{BC}\left(\frac{-a\sqrt{2}}{2};\frac{a\sqrt{2}}{2};0\right)\end{cases}$

$\Rightarrow\left[\overrightarrow{SA},\overrightarrow{BC}\right]=\left(-\frac{a^2\sqrt{6}}{4};-\frac{a^2\sqrt{6}}{4};\frac{a^2}{2}\right)$

$\overrightarrow{AB}\left(\frac{a\sqrt{2}}{2};0;0\right)\Rightarrow\left[\overrightarrow{SA},\overrightarrow{BC}\right].\overrightarrow{AB}=-\frac{a^3\sqrt{3}}{4};\left\|\left[\overrightarrow{SA},\overrightarrow{BC}\right]\right\|=\sqrt{\frac{6a^4}{16}+\frac{6a^4}{16}+\frac{a^4}{4}}=a^2$

$d(SA,BC)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{SA},\overrightarrow{BC}\right].\overrightarrow{AB}\right|}{\left\|\left[\overrightarrow{SA},\overrightarrow{BC}\right]\right\|}=\frac{\frac{a^3\sqrt{3}}{4}}{a^2}=\frac{a\sqrt{3}}{4}$

❖ ***Lời giải bằng hình học thuần túy :***

Gọi H là trung điểm của BC.

Suy ra $AH=\frac{BC}{2}=\frac{a}{2}$, $SH\perp(ABC)$, $SH=\frac{a\sqrt{3}}{2}$

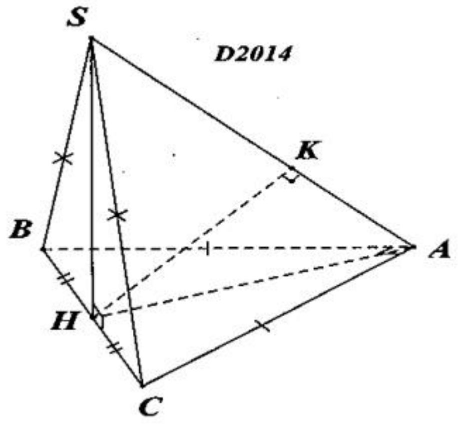
Và: $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}.BC.AH=\frac{1}{2}.a.\frac{a}{2}=\frac{a^2}{4}$.

Thể tích của khối chóp là $V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}.SH.S_{\Delta ABC}=\frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{a^2}{4}=\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$

Gọi K là hình chiếu vuông góc của H lên SA, suy ra $HK \perp SA$.

Ta có $BC \perp (SAH) \Rightarrow BC \perp HK$.

Do đó HK là đường vuông góc chung của BC và SA.



Ta có $\dfrac{1}{HK^2} = \dfrac{1}{SH^2} + \dfrac{1}{AH^2}$

$= \dfrac{1}{\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \dfrac{1}{\left(\dfrac{a}{2}\right)^2} = \dfrac{16}{3a^2} \Rightarrow HK = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$

Do đó $d(SA, BC) = HK = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

A2013

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại A, $\widehat{ABC} = 30^0$. SBC là tam giác đều cạnh a và mặt bên SBC vuông với đáy. Tính theo a thể tích của khối chóp S.ABC và khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SAB).

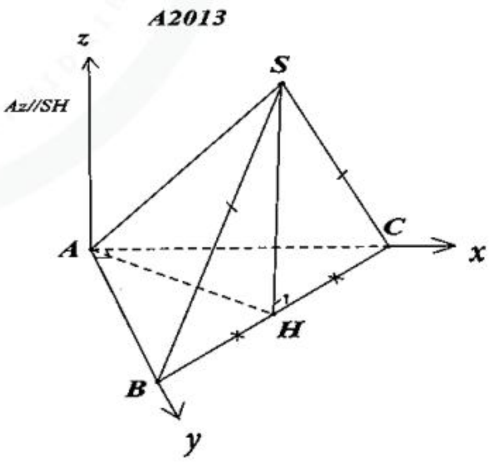
➤ **Lời giải:**

Ta có:

(SBC) $\perp (ABC)$

mà (SBC) $\cap (ABC) = BC$.

Gọi H là trung điểm BC mà tam giác SBC đều.



Suy ra $SH \perp (ABC)$ $SH \perp BC$

ta có: $SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}; BC = a;$

$AC = a\sin 30^0 = \dfrac{a}{2}$; $AB = a\cos 30^0 = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Chọn trục như sau là $A \equiv O(0;0;0)$.

Kẻ Az//SH gốc tọa độ $AB \equiv Oy; AC \equiv 0x; Az \equiv 0z$ khi đó tọa độ các đỉnh .

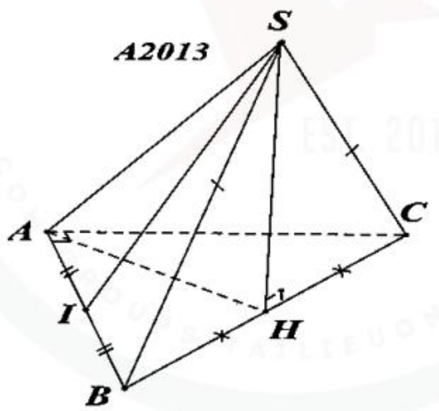
Là: $A(0;0;0), B\left(0;\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right), C\left(\frac{a}{2};0;0\right), H\left(\frac{a}{4};\frac{a\sqrt{3}}{4};0\right); S\left(\frac{a}{4};\frac{a\sqrt{3}}{4};\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$

Viết phương trình mặt phẳng (SAB): $\begin{cases} qua\ \ A(0;0;0) \\ \overrightarrow{AB} = \left(0;\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right) \\ \overrightarrow{AS} = \left(\frac{a}{4};\frac{a\sqrt{3}}{4};\frac{\sqrt{3}a}{2}\right) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} qua\ A(0;0;0) \\ \overrightarrow{n_{SAB}} = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AS}\right] = \left(\frac{3a^2}{4};0;\frac{-a^2\sqrt{3}}{8}\right) \parallel \left(2\sqrt{3};0;-1\right) \Rightarrow (SAB): 2\sqrt{3}x - z = 0 \end{cases}$$

$$d_{(C,(SAB))} = \frac{\left|2\sqrt{3}.\frac{a}{2} - 0\right|}{\sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2 + 1^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{13}} = \frac{\sqrt{39}a}{13}.$$

❖ ***Lời giải bằng hình học thuần túy:***



Gọi H là trung điểm của BC, suy ra $SH \perp BC$. Mà (SBC) vuông góc với (ABC) theo giao tuyến BC, nên $SH \perp (ABC)$.

Ta có: ΔSBC đều cạnh a nên SH là chiều cao của tam giác đều $\Rightarrow SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

ΔABC vuông tại A mà $\widehat{ABC} = 30^0$ nên

$AC = BC.\sin 30^0 = \frac{a}{2}; AB = BC.\cos 30^0 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Do đó: $V_{S.ABC}=\frac{1}{3}S_{\Delta ABC}.SH=\frac{1}{6}.SH.AB.AC=\frac{1}{6}.\frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{a}{2}.\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{a^3}{16}$

Tam giác ABC vuông tại A và H là trung điểm của BC nên HA=HB.

Mà $SH\perp(ABC)$ suy ra SA=SB=a. Gọi I là trung điểm của AB.

Suy ra $SI\perp AB$. Do đó: $SI=\sqrt{SB^2-\frac{AB^2}{4}}=\sqrt{a^2-\frac{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}{4}}=\frac{a\sqrt{13}}{4}$

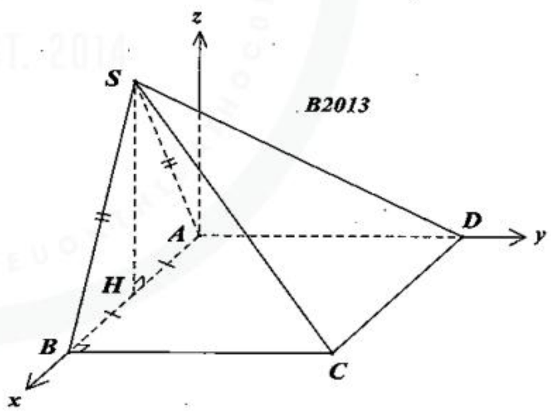
Suy ra: $d\left(C,(SAB)\right)=\frac{3V_{S.ABC}}{S_{\Delta SAB}}=\frac{6.V_{S.ABC}}{SI.\text{AB}}=\frac{a\sqrt{39}}{13}$.

B2013

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy. Tính theo a thể tích của khối chóp $S.ABCD$ và khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SCD).

➤ **Lời giải:**

Gọi H là trung điểm của AB.



Mà tam giác SAB đều suy ra SH vuông AB mà (SAB) vuông (ABCD) lại có (SAB) $\cap(ABCD)$ $=AB\Rightarrow SH\perp AB$

Ta có Do hình vuông nên AD vuông AB. Do ΔSAB là tam giác đều cạnh a nên $S_{SAB}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ mà SH là chiều cao của tam giác đều cạnh a nên $SH=\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Diện tích hình vuông ABCD cạnh a là $S_{hv\,ABCD}=a^2$;

Ta đặt trục tại A trùng gốc tọa độ O(0;0;0), từ A kẻ Az//SH, trục ox $Ox\equiv AB;Oy\equiv AD;Oz\equiv \text{Az}$ khi đó tọa độ các đỉnh như sau:

$A(0;0;0), B(a;0;0), C(a;a;0), D(0;a;0); H\left(\frac{a}{2};0;0\right); S\left(\frac{a}{2};0;\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$

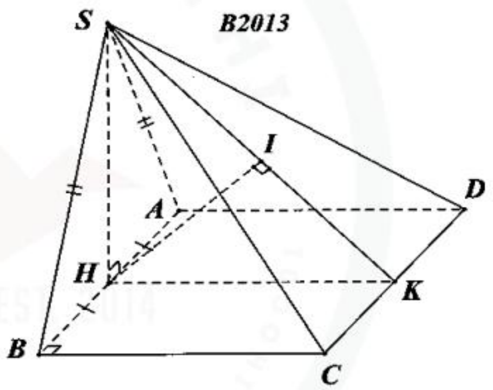
Viết phương trình mặt phẳng (SCD) qua D(0; a; 0).

$$\vec{n}_{(SCD)} = \left[\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CS}\right] = (0, \frac{a^2\sqrt{3}}{2}, a^2) // (0, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1)$$

Có: $\Rightarrow (SCD): 0(x-0) + \frac{\sqrt{3}}{2}(y-a) + 0(z_0) \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}(y-a)$

$$\Rightarrow d_{(A/(SCD)} = \frac{\left|\frac{\sqrt{3}}{2}(0-a)+0\right|}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+1}} = \frac{a\sqrt{21}}{7}$$

❖ ***Lời giải bằng hình học thuần túy:***



Gọi H là trung điểm của AB.

suy ra $SH \perp AB$ và $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$;

$S_{hvABCD} = a^2$

Mà (SAB) vuông góc với (ABCD) theo giao tuyến AB) nên $SH \perp (ABCD)$.

Do đó:

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}.SH.S_{ABCD} = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}.a^2 = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$$

Do AB//CD và H thuộc AB nên d(A)(SCD))=d(H,(SCD)).

Gọi K là trung điểm của CD và I là hình chiếu vuông góc của H lên SK.

Ta có $HK \perp CD$. Mà $SH \perp CD \Rightarrow CD \perp (SHK) \Rightarrow CD \perp HI$.

$CD)$

$$(SCD)) = HI = \frac{SH.HK}{\sqrt{SH^2+HK^2}} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}.a}{\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2+a^2}} = \frac{a\sqrt{21}}{7}$$

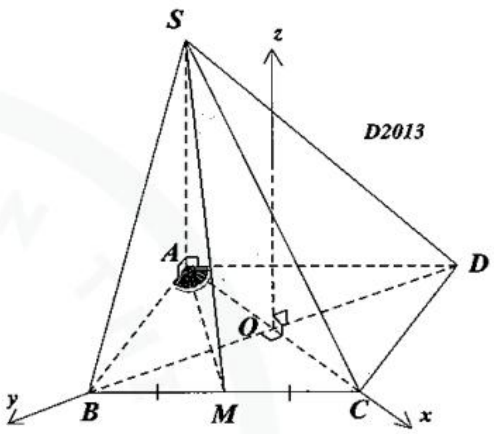
D2013

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi cạnh a, cạnh SA vuông góc với đáy, góc $\widehat{BAD}=120^0$. M là trung điểm của cạnh BC và góc $\widehat{SMA}=45^0$. Tính theo a thể tích của khối chóp S.ABCD và khoảng cách từ điểm D đến mặt phẳng (SBC).

➤ **Lời giải:**

Do AC là tia phân giác của BAD

Suy ra $\widehat{CAB}=60^0$, suy ra tam giác ABC đều.



M là trung điểm BC, suy ra AM vuông BC => $AM=\frac{a\sqrt{3}}{2}$, có SA vuông (ABCD), nên SA chính là chiều cao $\Rightarrow \Delta SMA$ vuông tại A, mà $\widehat{SMA}=45^\circ \Rightarrow \Delta SMA$ vuông cân tại A $\Rightarrow SA=AM=\frac{a\sqrt{3}}{2}$

Nếu làm theo phương pháp đặt trục thì ta chọn góc tọa độ tại O (O là giao điểm của 2 đường chéo, trong hình thoi thì 2 đường chéo vuông góc với nhau nên ta chon O làm gốc).

Kẻ Oz//SA, $Ox\equiv OC;Oy\equiv OB;Oz\equiv Oz//SA$ muốn vậy ta phải đi tính OA=OC, OB=OD theo a.

Ta có tọa đỉnh như sau

$$OA=a.\cos 60^0=\frac{a}{2}=OC;OB=OD=a.\sin 60^0=\frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$O(0;0;0),B\left(0;\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right),D\left(0;\frac{-a\sqrt{3}}{2};0\right).$$

$$C\left(\frac{a}{2};0;0\right),A\left(\frac{-a}{2};0;0\right);M\left(\frac{a}{4};\frac{a\sqrt{3}}{4};0\right);S\left(-\frac{a}{2};0;h\right).$$

Có 2 cách:

Cách 1: Tìm h một dựa vào hình vẽ và cho góc $\widehat{SMA} = 45^0$.

Do $SA \perp (ABCD) \Rightarrow$ hình chiếu của SM xuống (ABCD) là AM.

Suy ra $\tan\widehat{SMA} = \tan 45^0 = 1 = \dfrac{SA}{AM} \Leftrightarrow SA = AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow h = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Cách 2: Ta có thể vào hình học giải tích để tìm h do biết góc SMA =45^0 là góc tạo bởi 2 véc tơ MA, MS = tích vô hướng trên tích độ dài.

$$\overrightarrow{AM}\left(\frac{3a}{4};\frac{a\sqrt{3}}{4};0\right);\overrightarrow{SM}\left(\frac{3a}{4};\frac{a\sqrt{3}}{4};h\right) \Rightarrow \cos\left(\widehat{\overrightarrow{AM},\overrightarrow{MS}}\right) = \cos 45^0 = \frac{\left|\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{SM}\right|}{\left|\overrightarrow{AM}\right|.\left|\overrightarrow{SM}\right|}$$

$$= \frac{\left|\left(\frac{3a}{4}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{4}\right)^2\right|}{\sqrt{\left(\frac{3a}{4}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{4}\right)^2}.\sqrt{\left(\frac{3a}{4}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{4}\right)^2 + h^2}}$$

$$= \frac{\left|\frac{3}{4}a^2\right|}{\sqrt{\frac{3}{4}a^2}.\sqrt{\frac{3}{4}a^2 + h^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \frac{\frac{9}{16}a^4}{\frac{9}{16}a^4 + \frac{3}{4}a^2h^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{3}{2}a^4 = \frac{3}{4}a^4 + a^2h^2$$

$$\rightarrow h = \frac{\sqrt{3}a}{2}$$

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}.S_{hthoiABCD}.d_{(S,(ABCD):z=0)} = \frac{1}{3}.S_{hthoiABCD}.\left|z_S\right| = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}.a.a\sqrt{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3}{4}$$

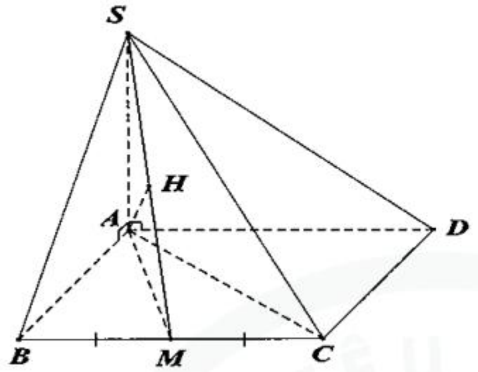
Viết phương trình mặt phẳng (SBC)

$$\begin{cases} C(\frac{a}{2},0,0) \\ \overrightarrow{BC}(\frac{a}{2},\frac{-a\sqrt{3}}{2},0) \\ \overrightarrow{BS}(\frac{-a}{2},\frac{-a\sqrt{3}}{2},\frac{a\sqrt{3}}{2}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C(\frac{a}{2},0,0) \\ \left[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BS}\right] = (\frac{-3a^2}{4},\frac{-a^2\sqrt{3}}{4},\frac{-2a^2\sqrt{3}}{4}) // (\sqrt{3},1,2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow (SCB): \sqrt{3}(x - \frac{a}{2}) + y + 2z = 0$$

$$\text{Vậy: } d_{(D/(SBC))} = \frac{\left|\sqrt{3}(0-\frac{a}{2})-\frac{a\sqrt{3}}{2}+0\right|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+1+2^2}} = \frac{a\sqrt{6}}{4}$$

❖ ***Lời giải bằng hình học thuần túy:***



Do hình thoi ABCD cạnh a mà trong hình thoi các đường chéo là các tia phân giác cho góc BAD =120⁰.

Do $\widehat{BAD} = 120^0 \Rightarrow \widehat{ABC} = 60^0 \Rightarrow \Delta ABC$ đều $\Rightarrow AM = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow S_{ABCD} = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$

ΔSAM vuông tại A có $\widehat{SMA} = 45^0 \Rightarrow \Delta SAM$ vuông tại A: $SA = AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

$S_{hthoiABCD} = 2S_{ABC} = 2.\frac{1}{2}.AB.AD.\sin 120^0 = a.a.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$

Do đó: $\Rightarrow V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}.S_{hthoiABCD}.SA = \frac{1}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{2}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3}{4}$

Do AD song song với BC nên d(D,(SBC))=d(A,(SBC)).

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên SM.

Ta có: $\begin{cases} AM \perp BC \\ SA \perp BC \end{cases}$

$\Rightarrow BC \perp (SAM) \Rightarrow BC \perp AH \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow d(A,(SBC)) = AH$

Ta có: $AH = \frac{AM\sqrt{2}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{4} \Rightarrow d(D,(SBC)) = \frac{a\sqrt{6}}{4}$

A2012

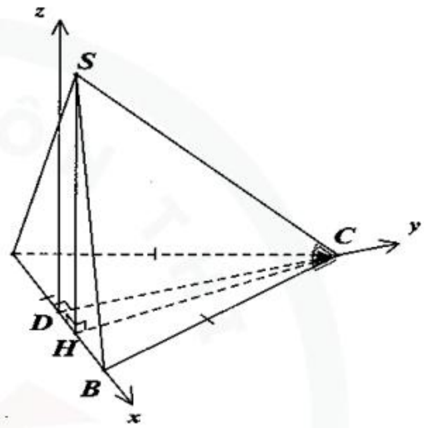
Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC) là điểm H thuộc cạnh AB sao cho HA= 2HB. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng 60^0. Tính thể tích của khối chóp S.ABC và tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC theo a.

➢ **Lời giải:**

Ta có:

$HA + HB = AB = 3HB = a$,

suy ra $HB = \frac{a}{3}$.



Gọi D là trung điểm của AB do tam giác ABC đều $S_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, nên $CD \perp AB$,

$HD = DB - HB = \frac{a}{2} - \frac{a}{3} = \frac{a}{6}$.

Do $SH \perp (ABCD)$ tại H.

Tam giác CDH vuông tại D

Suy ra $CD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$,

$CH = \sqrt{HD^2 + CD^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{6}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2}{36} + \frac{3a^2}{4}} = \frac{\sqrt{7}a}{3}$.

Cách 1: Do $SH \perp (ABCD)$, nên $\left(\widehat{SC,(ABCD)}\right) = \widehat{SCH} = 60°$.

Ta có $\tan\widehat{SCH} = \tan 60^0 = \sqrt{3} = \frac{SH}{HC} \Rightarrow SH = \frac{\sqrt{21}}{3}a$.

Thể tích khối chóp $S.ABC$ là: $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}.S_{\Delta ABC}.SH$.

Do tam giác ABC đều nên CD vuông AB ta đặt trục tại D là gốc tọa độ, $Ox \equiv DB; Oy \equiv DC; Oz \equiv Dz//SH$.

$D(0;0;0), B\left(\frac{a}{2};0;0\right), A\left(\frac{-a}{2};0;0\right), C\left(0;\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right), H\left(\frac{a}{6};0;0\right); S\left(\frac{a}{6};0;h\right)$

Cách 2: Theo hình học lời giải tích cho góc tạo bởi và (ABCD) = 60^0, mà đường SC và mặt (ABCD) khác tính chất nên dùng sin = tích vô hướng trên tích độ dài .

$$\overrightarrow{SC}\left(\frac{a}{6};\frac{-a\sqrt{3}}{2};h\right),\ (ABCD): z=0 \Rightarrow \vec{n}_{(ABCD)}=(0;0;1)$$

$$\sin 60^0=\sin\left(\widehat{SC,(ABCD)}\right)=\frac{|h|}{\sqrt{\left(\frac{a}{6}\right)^2+\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2+h^2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow h=\frac{\sqrt{21}}{3}a.$$

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(a;0;0)$

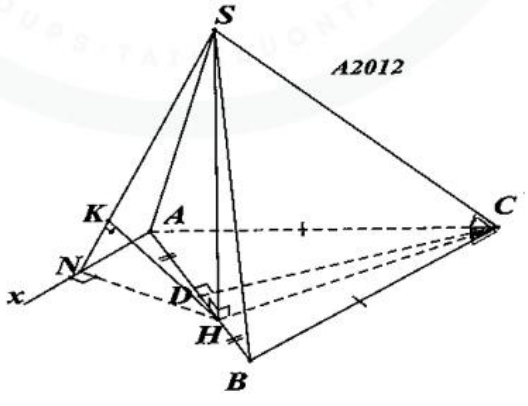
$$\begin{cases}\overrightarrow{SA}=\left(\frac{-2a}{3};0;-\frac{\sqrt{21}a}{3}\right)\\ \overrightarrow{BC}=\left(-\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right)\end{cases}\Rightarrow\left[\overrightarrow{SA},\overrightarrow{BC}\right]=\left(\frac{a^2\sqrt{7}}{2};\frac{\sqrt{21}a^2}{6};-\frac{a^2\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$\Rightarrow\left|\left[\overrightarrow{SA},\overrightarrow{BC}\right]\right|=\sqrt{\left(\frac{a^2\sqrt{7}}{2}\right)^2+\left(\frac{a^2\sqrt{21}}{6}\right)^2+\left(\frac{a^2\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{24}}{3}a^2$$

$$\left[\overrightarrow{SA},\overrightarrow{BC}\right].\overrightarrow{AB}=\frac{a^2\sqrt{7}}{2}.a+\left(\frac{\sqrt{21}a^2}{6}\right).0-\left(\frac{a^2\sqrt{3}}{3}\right).0=\frac{a^3\sqrt{7}}{2}$$

$$d(SA,BC)=\frac{\left|\overrightarrow{SB}.\left[\overrightarrow{SA},\overrightarrow{BC}\right]\right|}{\left|\left[\overrightarrow{SA},\overrightarrow{BC}\right]\right|}=\frac{a^3\sqrt{7}}{2}.\frac{3}{\sqrt{24}.a^2}=\frac{a\sqrt{42}}{8}.$$

❖ ***Lời giải bằng hình học thuần túy:***



Ta có $\widehat{SCH}$ là góc giữa SC và (ABC), suy ra $\widehat{SCH}=60^0$.

Gọi D là trung điểm của cạnh AB.

Ta có:

$$HD = \frac{a}{6}, CD = \frac{a\sqrt{3}}{2}, HC = \sqrt{HD^2 + CD^2} = \frac{a\sqrt{7}}{3}, SH = HC.\tan 60^0 = \frac{a\sqrt{21}}{3}$$

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3}.SH.S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{21}}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{7}}{12}$$

Kẻ Ax//BC. Gọi N và K lần lượt là hình chiếu vuông góc của H lên Ax và SN. Ta có BC//(SAN) và $BA = \frac{3}{2}HA$

$$d(SA, BC) = d(B,(SAN)) = \frac{3}{2}d(H,(SAN)).$$

Ta cũng có $Ax \perp (SHN)$ nên $Ax \perp HK$ Do đó $HK \perp (SAN)$.

Suy ra $d(H,(SAN)) = HK, AH = \frac{2a}{3}, HN = AH.\sin 60^0 = \frac{a\sqrt{3}}{3}$,

$$HK = \frac{SH.HN}{\sqrt{SH^2 + HN^2}} = \frac{\frac{a\sqrt{21}}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{3}}{\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{21}}{3}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2}} = \frac{a\sqrt{42}}{12} \Rightarrow d(SA, BC) = \frac{a\sqrt{42}}{8}$$

B2012

Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ với $SA = 2a$, $AB = a$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên cạnh SC. Chứng minh SC vuông góc với mặt phẳng (ABH). Tính thể tích của khối chóp $S.ABH$ theo a.

➢ **Lời giải:**

Gọi O là trọng tâm tam giác ABC.

Do hình chóp tam giác $S.ABC$ đều, suy ra $SO \perp (ABC)$.

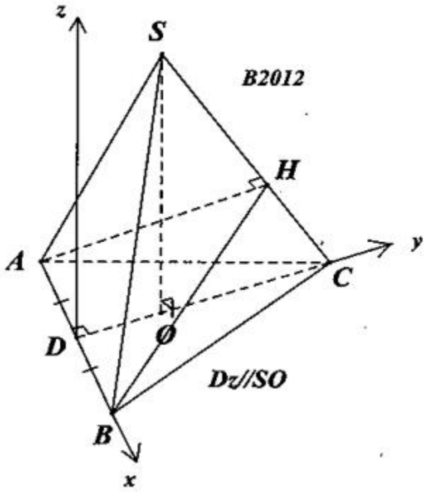
Gọi D là trung điểm AB mà tam giác ABC đều, suy $CD \perp AB$.

Chọn gốc tọa độ tại D.

$Ox \equiv DB; Oy \equiv DC; Oz \equiv Dz//SO$

$D(0;0;0), B\left(\frac{a}{2};0;0\right), A\left(\frac{-a}{2};0;0\right),$

$C\left(0;\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right), O\left(0;\frac{a\sqrt{3}}{6};0\right);$



$S\left(0;\frac{a\sqrt{3}}{6};h\right); SA = 2a$

$\overrightarrow{SA}(\frac{-a}{2},\frac{-a\sqrt{3}}{6},-h) \Rightarrow \left|\overrightarrow{SA}\right|$

$= \sqrt{\left(\frac{-a}{2}\right)^2 + \left(\frac{-a\sqrt{3}}{6}\right)^2 + (-h)^2}$

$= 2a \Rightarrow h = \frac{\sqrt{33}.a}{3} \Rightarrow S\left(0;\frac{a\sqrt{3}}{6};\frac{\sqrt{33}.a}{3}\right);$

Phương trình đường đường thẳng SC qua $C\left(0;\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right)$ và có véc tơ chỉ phương $\overrightarrow{SC} = \left(0;\frac{a\sqrt{3}}{3};-\frac{\sqrt{33}.a}{3}\right) // \left(0;1;-\sqrt{11}\right) : \Rightarrow SC : \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{a\sqrt{3}}{2} + t \\ z = -\sqrt{11}t \end{cases}$

H là hình chiếu của A xuống SC nên H thuộc SC.

Nên $H\left(0;\frac{a\sqrt{3}}{2}+t;-\sqrt{11}t\right)$

Do AH vuông góc SC.

Nên $\overrightarrow{AH}\left(\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2}+t;-\sqrt{11}t\right) \perp \overrightarrow{SC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{SC} = 0$

$$\Leftrightarrow 0.\frac{a}{2} + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}+t\right).1 - \sqrt{11}.\left(-\sqrt{11}.t\right) = 0 \Leftrightarrow 12t = -\frac{a\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow t = -\frac{a\sqrt{3}}{24}$$

$$\Rightarrow H\left(0;\frac{a\sqrt{3}}{2}-\frac{a\sqrt{3}}{24};-\sqrt{11}.\left(-\frac{a\sqrt{3}}{24}\right)\right) = \left(0;\frac{11a\sqrt{3}}{24};\frac{a\sqrt{33}}{24}\right)$$

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(-a;0;0)$ $\overrightarrow{AH}=\left(\frac{a}{2};\frac{11\sqrt{3}a}{24};\frac{a\sqrt{33}}{24}\right)$

$\vec{n}_{ABH}$ là véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng (ABH):

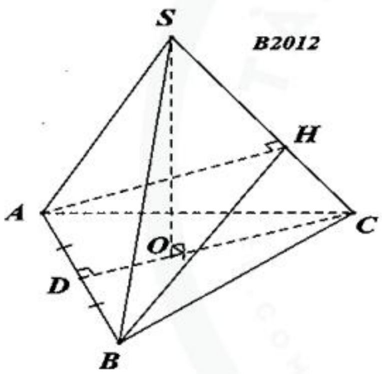
$\vec{n}_{ABH}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AH}\right]=\left(0;\frac{a^2\sqrt{33}}{24};-\frac{11\sqrt{3}.a^2}{24}\right)//\left(0;1;-\sqrt{11}\right)//\overrightarrow{SC}\Rightarrow SC\perp(ABH)$

$\overrightarrow{AS}\left(\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{6};\frac{a\sqrt{33}}{3}\right)$

$\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AH}\right].\overrightarrow{AS}=\frac{a}{2}.0+\left(\frac{a^2\sqrt{33}}{24}\right).\frac{a\sqrt{3}}{6}+\left(-\frac{11\sqrt{3}.a^2}{24}\right).\frac{a\sqrt{33}}{3}=\frac{7\sqrt{11}.a^3}{16}$

$V_{S.ABH}=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AH}\right].\overrightarrow{AS}\right|=\frac{1}{6}.\frac{7\sqrt{11}.a^3}{16}=\frac{7\sqrt{11}a^3}{96}$

❖ ***Lời giải bằng hình học thuần túy:***



Gọi D là trung điểm của cạnh AB và O là tâm của tam giác ABC.

Ta có $\begin{cases}AB\perp CD\\AB\perp SO\end{cases}\Rightarrow AB\perp(SCD)$. Do đó $AB\perp SC$. Suy ra $SC\perp(ABH)$

Suy ra $AB\perp SC$, ta có $CD=\frac{a\sqrt{3}}{2}, OC=\frac{a\sqrt{3}}{3}$ nên $SO=\sqrt{SC^2-OC^2}=\frac{a\sqrt{33}}{3}$

Ta có:

$DH=\frac{SO.CD}{SC}=\frac{a\sqrt{11}}{4}\Rightarrow S_{\Delta ABH}=\frac{1}{2}.AB.DH=\frac{\sqrt{11}a^2}{8}$

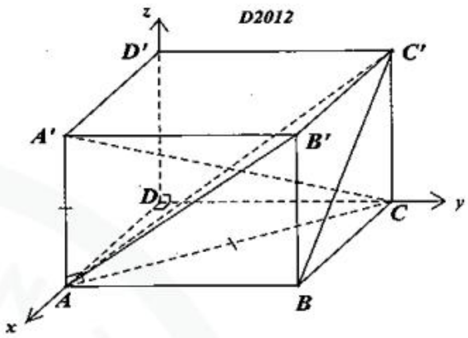
$SH=SC-HC=SC-\sqrt{CD^2-DH^2}=\frac{7a}{4}$

Do đó: $V_{S.ABH}=\frac{1}{3}.SH.S_{\Delta ABH}=\frac{7\sqrt{11}a^3}{96}$

D2012

Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông, tam giác A'AC vuông cân, AC' = a. Tính thể tích của khối tứ diện $ABB'C'$ và khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (BCD') theo a.

➤ **Lời giải:**



Tam giác $A'AC$ vuông cân tại A và A'C=a nên $A'A = AC = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$.

Do đó: $AB = B'C' = \dfrac{a}{2}$.

Ta đặt trục như hình vẽ:

$Ox \equiv DA; Oy \equiv DC; Oz \equiv DD'$

$$D(0;0;0), C\left(0;\frac{a}{2};0\right), A\left(\frac{a}{2};0;0\right), B\left(\frac{a}{2};\frac{a}{2};0\right), D'\left(0;0;\frac{a\sqrt{2}}{2}\right);$$

$$A'\left(\frac{a}{2};0;\frac{a}{\sqrt{2}}\right), B'\left(\frac{a}{2};\frac{a}{2};\frac{a}{\sqrt{2}}\right), C'\left(0;\frac{a}{2};\frac{a}{\sqrt{2}}\right)$$

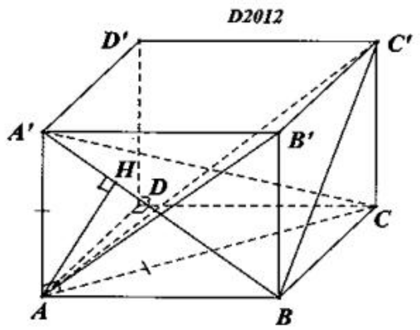
$$V_{S.ABC} = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB'}\right].\overrightarrow{AC'}\right| = \frac{1}{3}.B'C'.S_{\Delta ABB'} = \frac{a^3\sqrt{2}}{48};$$

$$(BCD')\begin{cases} \vec{n}_{ABS} = \left[\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{D'C}\right] = (0, \dfrac{-a^2\sqrt{2}}{4}, \dfrac{-a^2}{4}) // (0, \sqrt{2}, 1) \\ qua \;\; C \;\; (0, \dfrac{a}{2}, 0) \end{cases}$$

$$\Rightarrow (BCD'): \sqrt{2}(y - \frac{a}{2}) + z = 0$$

Suy ra: $d_{(A/(BCD'))} = \dfrac{\left|\sqrt{2}.(0 - \dfrac{a}{2})\right|}{\sqrt{(\sqrt{2})^2 + 1}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{6}$

❖ *Lời giải bằng hình học thuần túy:*



Tam giác A'AC vuông cân tại A và A'C=a nên $A'A = AC = \frac{a}{\sqrt{2}}$.

Do đó $AB = B'C' = \frac{a}{2}$.

$V_{ABB"C"} = \frac{1}{3}.B'C'.S_{\Delta ABB'}$

$= \frac{1}{6}.B'C'.AB.BB' = \frac{1}{6}.\frac{a}{2}.\frac{a}{2}.\frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{48}$

Gọi H là chân đường cao kẻ từ A của tam giác A'AB.

Ta có $\begin{cases} AH \perp A'B \\ AB \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (A'AB) \rightarrow \begin{cases} BC \perp AH \\ AH \perp A'B \end{cases} \Rightarrow AH \perp (A'BC)$

nghĩa là $AH = d(A,(BCD'))$

Ta có:

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AA'^2} = \frac{1}{\left(\frac{a}{2}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{6}{a^2} \Rightarrow AH^2 = \frac{a^2}{6} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{6}}{6}$$

Do đó $d(A,(BCD')) = AH = \frac{a\sqrt{6}}{6}$

A2011

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $AB = BC = 2a$; hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABC). Gọi M là trung điểm của AB; mặt phẳng qua SM và song song với BC) cắt AC tại N. Biết góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng $60°$. Tính thể tích khối chóp $S.BCNM$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SN theo a.

➤ **Lời giải:**

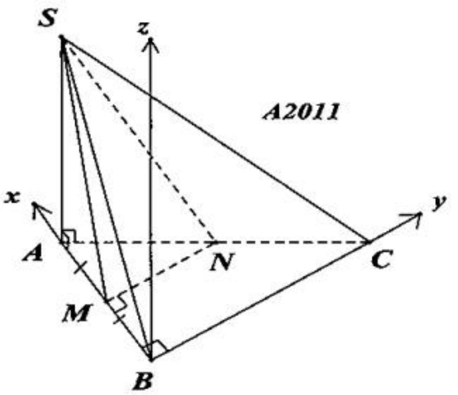
Mặt phẳng (SAB) và mặt phẳng (SAC) cùng vuông góc mặt phẳng (ABC). Mà $(SAB) \cap (SAC) = SA \Rightarrow SA \perp (ABC)$, $AB \perp BC \Rightarrow SB \perp BC \Rightarrow \widehat{SBA}$.

Là góc giữa (SBC) và (ABC), suy ra $\widehat{SBA} = 60^0 \Rightarrow SA = AB.\tan\widehat{SAB} = 2a\sqrt{3}$

Mặt phẳng qua SM và song song với BC, cắt AC tại N.

Suy ra MN//BC và N là trung điểm AC.

$MN = \dfrac{BC}{2} = a; BM = \dfrac{AB}{2} = a$.



Do tam giác ABC vuông cân tại B nên ta đặt ở B, từ B kẻ Bz//SA.

$Ox \equiv BA; Oy \equiv BC; Oz//SA$

$B(0;0;0), A(2a;0;0), C(0;2a;0)$,

$M(a;0;0), N(a;a;0); S(2a,0,2a\sqrt{3})$

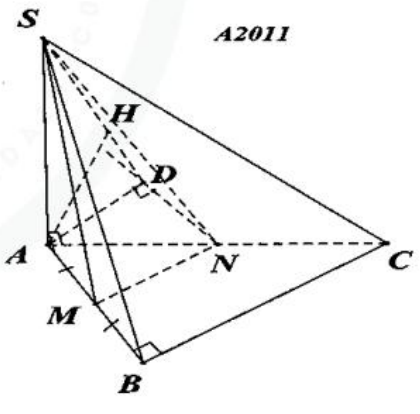
$V_{S.ABMN} = V_{S.ABC} - V_{S.AMN} = a^3\sqrt{3}$

Ta có:

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB}(2a,0,0) \\ \overrightarrow{SN}(-a,a,-2a\sqrt{3}) \Rightarrow \left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{SN}\right] = (0,4a^2\sqrt{3},2a^2) \\ \overrightarrow{BN}(a,a,0) \end{cases}$$

$$d_{(AB,\,SN)} = \frac{\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{SN}\right].\overrightarrow{AS}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{SN}\right]\right|} = \frac{\left|4a^3\sqrt{3}\right|}{\sqrt{(4a^2\sqrt{3})^2 + 4a^4}} = \frac{2a\sqrt{39}}{13}.$$

❖ ***Lời giải bằng hình học thuần túy:***



Hai mặt phẳng (SAB) và (SAC), cùng vuông góc với (ABC) suy ra SA vuông góc (ABC) $\Rightarrow SA \perp (ABC)$. $AB \perp BC \Rightarrow SB \perp BC \Rightarrow \widehat{SBA}$ là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng (ABC) $\Rightarrow \widehat{SBA} = 60^0 \Rightarrow SA = AB.\tan\widehat{SBA} = 2a\sqrt{3}$.

Mặt phẳng qua SM và song song với BC, cắt AC tại N $\Rightarrow MN//BC$ và N là trung điểm của AC $MN = \dfrac{BC}{2} = a; BM = \dfrac{AB}{2} = a$.

Diện tích: $S_{\Delta ABC} = \dfrac{(BC + MN).BM}{2} = \dfrac{(2a+a).a}{2} = \dfrac{3a^2}{2}$

Thể tích: $V_{S.BCNM} = \dfrac{1}{3}.S_{BCNM}.SA = a^3\sqrt{3}$

Kẻ đường thẳng D đi qua N, song với AB.

Hạ $AD \perp \Delta\ \left(D \in \Delta\right) \Rightarrow AB\,//\left(SND\right) \Rightarrow d\left(AB,SN\right) = d\left(AB,\left(SND\right)\right) = AH$ với H là hình chiếu của A trên SD.

Tam giác SAD vuông tại A: $\begin{cases} AH \perp SD \\ AD = MN = a \end{cases}$

$$\Rightarrow d\left(AB,SN\right) = \frac{SA.AD}{\sqrt{SA^2 + AD^2}} = \frac{2a\sqrt{3}.a}{\sqrt{\left(2a\sqrt{3}\right)^2 + a^2}} = AH = \frac{2a\sqrt{39}}{13}$$

Nhận xét: Đối với bài toán yêu cầu tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau thì ta nên giải theo cách đặt trục tọa độ và áp dụng công thức để tính vì cách này không phải tìm đoạn vuông góc chung giữa hai đường thẳng chéo nhau. Cách này đơn giản hơn cách giải theo hình học thuần túy rất nhiều.

B2011

Cho lăng trụ $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của điểm A_1 trên mặt phẳng (ABCD) trùng với giao điểm của AC và BD. Góc giữa hai mặt phẳng (ADD_1A_1) và (ABCD) bằng $60°$. Tính thể tích khối lăng trụ đã cho và khoảng cách từ điểm B_1 đến mặt phẳng (A_1BD) theo a.

➤ **Lời giải bằng trục tọa độ:**

Nên ta đặt gốc tọa độ ở A.

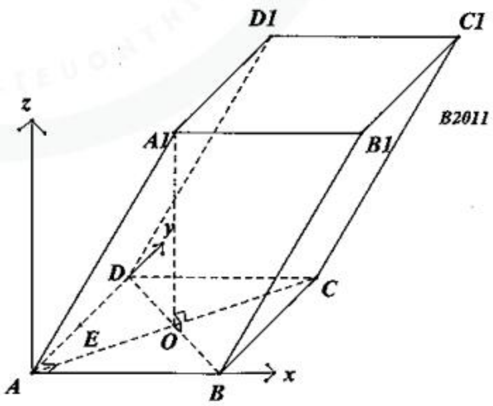
Từ A kẻ $Bz \parallel A_1O$.

$Ox \equiv AB;\ Oy \equiv AD;\ Az \parallel A_1O.$

$A\left(0;\,0;\,0\right), B\left(a;\,0;\,0\right), D\left(0; a\sqrt{3}\ ;\,0\right),$

$C\left(a; a\sqrt{3}; 0\right), O\left(\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{4}; 0\right),$

$A_1\left(\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{2}, h\right).$



Ta có : $\begin{cases}\overrightarrow{AD}\left(0;a\sqrt{3};0\right)\\ \overrightarrow{AA_1}\left(\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2},h\right)\end{cases}\Rightarrow\left[\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AA_1}\right]=\left(ah\sqrt{3};0;-\frac{\sqrt{3}a^2}{2}\right)//\left(2h;0;-a\right)$

Khi đó $\vec{n}_{ADD_1A_1}=\left[\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AA_1}\right]//\left(2h;0;-a\right)$ là véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng (ADD_1A_1)

Mặt phẳng (ABCD): z=0 có véc tơ pháp tuyến $\vec{n}_{ABCD}=\left(0;0;1\right)$

Do Góc giữa hai mặt phẳng (ADD_1A_1) và (ABCD) bằng $60°$ nên ta có phương trình:

$$\cos 60^0=\frac{\left|\vec{n}_{ADD_1A_1}.\vec{n}_{ABCD}\right|}{\left|\vec{n}_{ADD_1A_1}\right|.\left|\vec{n}_{ABCD}\right|}=\frac{\left|(2h).0-0.0-a.1\right|}{\sqrt{(2h)^2+0^2+(a)^2}.\sqrt{0^2+0^2+1^2}}=\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2a=\sqrt{4h^2+a^2}\Leftrightarrow 3a^2=4h^2\Leftrightarrow h=\frac{\sqrt{3}a}{2}$$

Diện tích đáy $S_{ABCD}=AB.AD=a.a\sqrt{3}=a^2\sqrt{3}$

Thể tích $V_{ABCD.A'B'C'D'}=S_{ABCD}.A_1O=a^2\sqrt{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{3a^2}{2}$

Do tứ giác ABA_1B_1 là hình bình hành nên

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A_1B_1}\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}\left(a;0;0\right)=\overrightarrow{A_1B_1}\left(x_{B_1}-\frac{a}{2};y_{B_1}-\frac{a\sqrt{3}}{2};z_{B_1}-h\right)$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a=x_{B_1}-\frac{a}{2}\\ 0=y_{B_1}-\frac{a\sqrt{3}}{2}\\ 0=z_{B_1}-\frac{a\sqrt{3}}{2}\end{cases}\Leftrightarrow B_1\left(\frac{3a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$$

Lại có:

$$\begin{cases}\overrightarrow{BD}\left(-a;a\sqrt{3};0\right)\\ \overrightarrow{BA_1}\left(-\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2},\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)\end{cases}\Rightarrow\vec{n}_{BDA_1}=\left[\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BA_1}\right]=\left(\frac{3a^2}{2};\frac{\sqrt{3}a^2}{2};0\right)//\left(\sqrt{3};1;0\right)$$

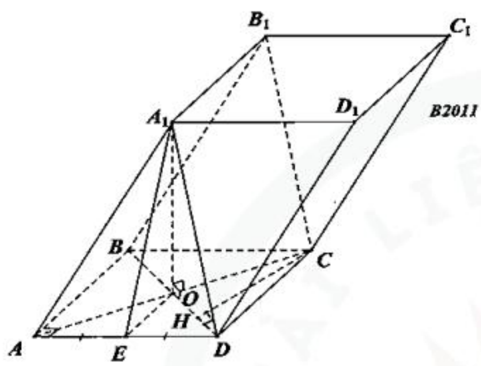
Phương trình mặt phẳng (A_1BD) qua B(a;0;0)

và có véc tơ pháp tuyến $\vec{n}=\left(\sqrt{3};1;0\right):\sqrt{3}\left(x-a\right)+y=0$.

Khoảng cách từ điểm B_1 đến mặt phẳng (A_1BD):

$$d\left(B_1,\left(A_1BD\right)\right)=\frac{\left|\sqrt{3}\left(\frac{3a}{2}-a\right)+\frac{a\sqrt{3}}{2}\right|}{\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+1^2}}=\frac{a\sqrt{3}}{2}$$

❖ ***Lời giải bằng hình học thuần túy:***



Gọi O là giao điểm của AC và BD $\Rightarrow A_1O\perp\left(ABCD\right)$

Gọi E là trung điểm của AD $\Rightarrow\begin{cases}OE\perp AD\\A_1E\perp AD\end{cases}$

Suy ra là góc giữa hai mặt phẳng$\left(ADD_1A_1\right)$ và $(ABCD)\Rightarrow\widehat{A_1EO}=60^0$

Suy ra $A_1O=OE.\tan\widehat{A_1EO}=\frac{AB}{2}.\tan\widehat{A_1EO}=\frac{a}{2}.\tan60^0=\frac{a\sqrt{3}}{2}$

Diện tích đáy $S_{ABCD}=AB.AD=a^2\sqrt{3}$

Thể tích $V_{ABCD.A'B'C'D'}=S_{ABCD}.A_1O=a^2\sqrt{3}.\frac{\sqrt{3}.a}{2}=\frac{3a^3}{2}$

Ta có: $B_1C//A_1D\Rightarrow B_1C//\left(A_1BD\right)\Rightarrow d\left(B_1,\left(A_1BD\right)\right)=d\left(C,\left(A_1BD\right)\right)=CH$

Suy ra $d\left(B_1,\left(A_1BD\right)\right)=CH=\frac{CD.CB}{\sqrt{CD^2+CB^2}}=\frac{a\sqrt{3}}{2}$

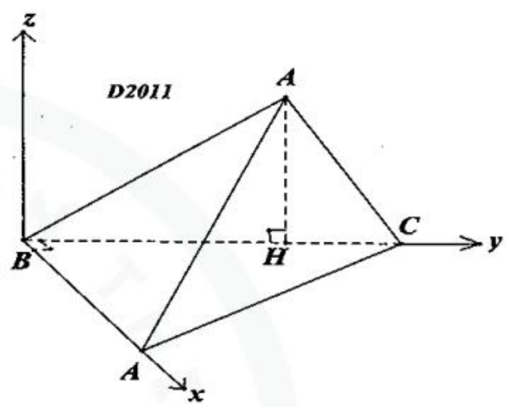
$EA=ED$, $OE=\frac{a}{2}\perp AD$, $\left(\widehat{\left(ADD_1A_1\right),\left(ABCD\right)}\right)=\widehat{A_1EO}=60^0$,

$h=A_1O=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

D2011

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $BA = 3a$, $BC = 4a$; mặt phẳng (SBC) vuông góc với mặt phẳng (ABC). Biết $SB = 2\sqrt{3}a$ và $\widehat{SBC} = 30^0$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ và khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SAC) theo a.

➢ **Lời giải:**



Nên ta đặt ở B, từ B kẻ $Bz \parallel SH$ vuông góc BC tại H;

$HB = 3a = 2\sqrt{3}a.\cos 30^0 = 3a$;

$SH = 2\sqrt{3}a.\sin 30^0 = \sqrt{3}a$.

$Ox \equiv AB; Oy \equiv BC; Oz \parallel Bz$.

$B(0;\,0;\,0)$, $A(3a;\,0;\,0)$,

$C(0;\,4a;\,0)$, $H(0;\,3a;\,0)$, $S(0;\,3a;\,a\sqrt{3})$

Ta có: $\overrightarrow{AB}(-3a,0,0); \overrightarrow{AC}(-3a,4a,0); \overrightarrow{AS}(-3a,3a,a\sqrt{3})$

$$\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right] = (0,0,12a^2) \Rightarrow \left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AS}$$

$$= (-3a).0 + 3a.0 + 12a^2.a\sqrt{3} = 12\sqrt{3}.a^3$$

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AS}\right| = \frac{1}{6}.12\sqrt{3}.a^3 = 2a^3\sqrt{3}$$

Viết phương trình (SAC): đi qua A(3a)0,0).

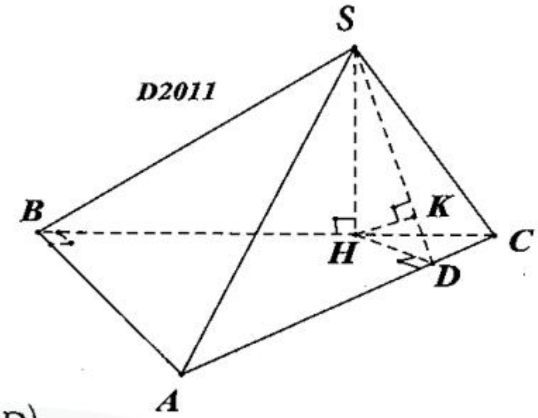
Và: $\vec{n}_{(SAC)} = \left[\overrightarrow{AC},\overrightarrow{SA}\right] = (4a^2\sqrt{3};3a^2\sqrt{3};3a) // \left(4;3;\sqrt{3}\right)$

(SAC): $4(x-3a) + 3y + \sqrt{3}z = 0$

Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SAC):

$$d\left(B,(SAC)\right) = \frac{\left|4(0-3a) + 3.0 + \sqrt{3}.0\right|}{\sqrt{4^2 + 3^2 + \sqrt{3}^2}} = \frac{12a}{\sqrt{28}} = \frac{12a}{2\sqrt{7}} = \frac{6a\sqrt{7}}{7}$$

❖ ***Lời giải bằng hình học thuần túy:***



Hạ $SH \perp BC \Rightarrow (SBC) \perp (ABC)$

$\Rightarrow SH \perp BC; SH = SB.\sin\widehat{SBC} = a\sqrt{3}$

Diện tích $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}.BA.BC = 6a^2$

Thể tích:

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{2}.S_{\Delta ABC}.SH = 2a^3\sqrt{3}$$

Hạ:

$HD \perp AC\ (D \in AC), HK \perp SD\ (K \in SD)$

$\Rightarrow HK \perp (SAC) \Rightarrow HK = d(H,(SAC))$.

$BH = SB.\cos\widehat{SBC} = 3a \Rightarrow BC = 4HC \Leftrightarrow d(B,(SAC)) = 4d(H,(SAC))$

Ta có: $AC = \sqrt{BA^2 + BC^2} = 5a, HC = BC - BH = a \Rightarrow HD = BA.\dfrac{HC}{AC} = \dfrac{3a}{5}$

$$HK = \frac{SH.HD}{\sqrt{SH^2 + HD^2}} = \frac{a\sqrt{3}.\frac{3a}{5}}{\sqrt{\left(a\sqrt{3}\right)^2 + \left(\frac{3a}{5}\right)^2}} = \frac{3a\sqrt{7}}{14}$$

Vậy: $d(B,(SAC)) = 4.HK = \dfrac{6a\sqrt{7}}{7}$

A2010

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và AD; H là giao điểm của CN với DM. Biết SH vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và SH $= a\sqrt{3}$. Tính thể tích khối chóp $S.CDNM$ và tính khoảng cách giữa hai đường thẳng DM và SC theo a.

➢ **Lời giải:**

Ta có: $CN \perp MD$, $CN = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}, HC = \dfrac{DC^2}{CN} = \dfrac{a^2}{\frac{a\sqrt{5}}{2}} = \dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$.

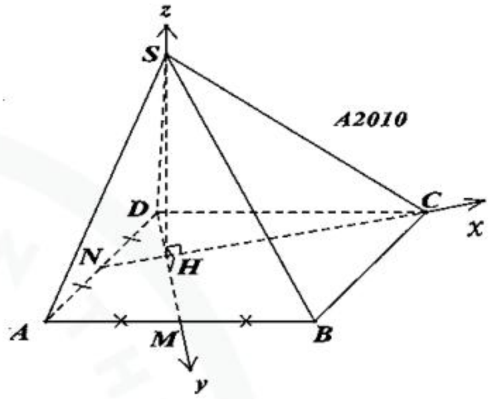
Ta có :

$$\frac{1}{HD^2}=\frac{1}{ND^2}+\frac{1}{DC^2}=\frac{1}{\frac{a^2}{4}}+\frac{1}{a^2}=\frac{5}{a^2}, DH=\frac{a\sqrt{5}}{5}.$$

$$NH=CN-CH=\frac{a\sqrt{5}}{2}-\frac{2\sqrt{5}a}{5}=\frac{a\sqrt{5}}{10};HM=\frac{a\sqrt{5}}{2}-\frac{a\sqrt{5}}{5}=\frac{3a\sqrt{5}}{10}.$$

Nên ta đặt ở H, đường cao SH vuông góc (ABCD) tại H;

$Ox\equiv HC;Oy\equiv HM;Oz\equiv HS$



$H(0;0;0),C\left(\frac{2a\sqrt{5}}{5};0;0\right),$

$D\left(0;-\frac{a\sqrt{5}}{5};0\right),N\left(\frac{-a\sqrt{5}}{10};0;0\right)$

$A\left(\frac{-a\sqrt{5}}{5};\frac{a\sqrt{5}}{5};0\right),\ M\left(0;\frac{3a\sqrt{5}}{10};0\right)$

,

$B\left(\frac{a\sqrt{5}}{5};\frac{2a\sqrt{5}}{5};0\right),\ S\left(0;0;a\sqrt{3}\right).$

$$V_{S.CDNM}=\frac{1}{3}.S_{CDMN}.SH=\frac{1}{3}\left(S_{ABCD}-S_{\Delta AMN}-S_{\Delta MBC}\right).$$

$$SH=\frac{1}{3}\left(a^2-\frac{a^2}{8}-\frac{a^2}{4}\right).a\sqrt{3}=\frac{5\sqrt{3}a^3}{24}$$

$$\overrightarrow{DM}=\left(0;\frac{a\sqrt{5}}{2};0\right)\ \overrightarrow{SC}=\left(\frac{2a\sqrt{5}}{5};0;-a\sqrt{3}\right)\overrightarrow{DS}=\left(0;\frac{a\sqrt{5}}{5};a\sqrt{3}\right)$$

$$\left[\overrightarrow{DM},\overrightarrow{SC}\right]=\left(-\frac{a^2\sqrt{15}}{2};0;-a^2\right)\Rightarrow\left|\left[\overrightarrow{DM},\overrightarrow{SC}\right]\right|$$

$$=\sqrt{\left(-\frac{a^2\sqrt{15}}{2}\right)^2+0^2+\left(-a^2\right)^2}=\frac{\sqrt{19}.a^2}{2}$$

$$\left[\overrightarrow{DM},\overrightarrow{SC}\right].\overrightarrow{DS}=\left(-\frac{a^2\sqrt{15}}{2}\right).0+0.\left(\frac{a\sqrt{5}}{5}\right)+\left(-a^2\right).a\sqrt{3}=-a^3\sqrt{3}$$

$$d_{(DM,SC)}=\frac{\left|\left[\overrightarrow{DM},\overrightarrow{SC}\right].\overrightarrow{DS}\right|}{\left\|\left[\overrightarrow{DM},\overrightarrow{SC}\right]\right\|}=\frac{\left|-a^3\sqrt{3}\right|}{\left(\frac{\sqrt{19}.a^2}{2}\right)}=\frac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{19}}=\frac{2a\sqrt{57}}{19}$$

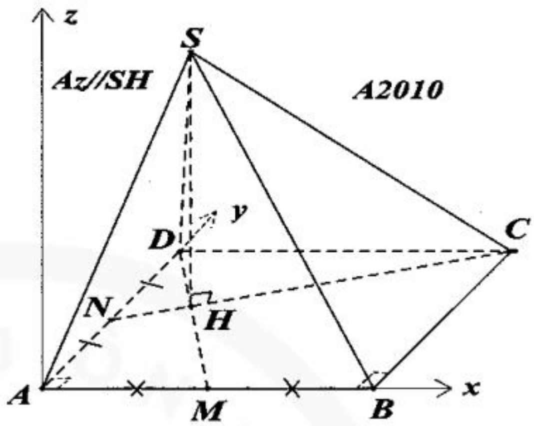
Cách 2:

Đặt trục tại A (tự vẽ hình).

$Ox\equiv AB;Oy\equiv AD;Oz\equiv Az\parallel SH$

$H(0;0;0),A(a;0;0),D(0;a;0);$

$N(0;\frac{a}{2},0);M\left(\frac{a}{2};0;0\right);C(a,a,0).$



Phương trình

$$DM:\begin{cases}qua\ D(0,a,0)\\ \overrightarrow{DM}\left(\frac{a}{2};-a;0\right)//(1;-2;0)\end{cases}\quad y\quad a\quad t$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=t\\ y=a-2t\\ z=0\end{cases}.$$

Phương trình $CN:\begin{cases}qua\ C(a,a,0)\\ \overrightarrow{NC}\left(a;\frac{a}{2};0\right)\parallel(2;1;0)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=a+2t'\\ y=a+t'\\ z=0\end{cases}.$

Tọa độ H là giao của hai đường thẳng CN và DM:

$$\begin{cases}x=t=a+2t'\\ y=a-2t=a+t'\\ z=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}t=a-4t\Rightarrow t=\frac{a}{5}\\ y=a-2t=\frac{3a}{5}\\ z=0\end{cases}\Rightarrow H\left(\frac{a}{5};\frac{3a}{5};0\right)\Rightarrow S\left(\frac{a}{5};\frac{3a}{5};a\sqrt{3}\right).$$

$$S_{ABCD}=a^2;S_{\Delta AMN}=\frac{1}{2}.AN.AM=\frac{1}{2}.\frac{a}{2}.\frac{a}{2}=\frac{a^2}{8};S_{\Delta BCM}=\frac{1}{2}.MB.BC=\frac{1}{2}.\frac{a}{2}.a=\frac{a^2}{4}$$

$$S_{\Delta AMN}=\frac{1}{2}.AN.AM=\frac{1}{2}.\frac{a}{2}.\frac{a}{2}=\frac{a^2}{8}$$

$$S_{MNDC}=S_{ABCD}-S_{\Delta AMN}-S_{\Delta MBC}=a^2-\frac{a^2}{8}-\frac{a^2}{4}=\frac{5a^2}{8}$$

$$V_{S.CDNM}=\frac{1}{3}.S_{CDMN}.SH=\frac{1}{3}.\frac{5a^2}{8}.a\sqrt{3}=\frac{5a^3\sqrt{3}}{24}$$

$$\overrightarrow{DM}=\left(\frac{a}{2};-a;0\right)\ \overrightarrow{SC}=\left(\frac{4a}{5};\frac{2a}{5};-a\sqrt{3}\right)\ \overrightarrow{DS}=\left(\frac{a}{5};-\frac{2a}{5};a\sqrt{3}\right)$$

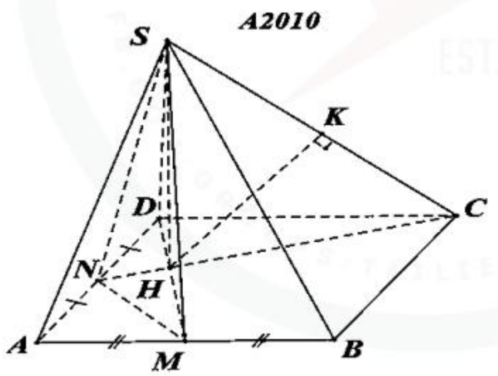
$$\left[\overrightarrow{DM},\overrightarrow{SC}\right]=\left(a^2\sqrt{3};\frac{a^2\sqrt{3}}{2};a^2\right)\Rightarrow\left\|\left[\overrightarrow{DM},\overrightarrow{SC}\right]\right\|$$

$$=\sqrt{\left(a^2\sqrt{3}\right)^2+\left(\frac{a^2\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(a^2\right)^2}=\frac{\sqrt{19}.a^2}{2}$$

$$\left[\overrightarrow{DM},\overrightarrow{SC}\right].\overrightarrow{DS}=\left(a^2\sqrt{3}\right).\frac{a}{5}-\frac{2a}{5}.\left(\frac{a^2\sqrt{3}}{2}\right)+\left(a^2\right).a\sqrt{3}=a^3\sqrt{3}$$

$$d_{(DM,SC)}=\frac{\left|\left[\overrightarrow{DM},\overrightarrow{SC}\right].\overrightarrow{DS}\right|}{\left\|\left[\overrightarrow{DM},\overrightarrow{SC}\right]\right\|}=\frac{\left|a^3\sqrt{3}\right|}{\left(\frac{\sqrt{19}.a^2}{2}\right)}=\frac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{19}}=\frac{2a\sqrt{57}}{19}$$

❖ ***Lời giải bằng hình học thuần túy:***



Thể tích của khối chóp S.CDNM:

$$S_{CDNM}=S_{ABCD}-S_{AMN}-S_{SBC}=AB^2-\frac{1}{2}.AM.AN-\frac{1}{2}.BC.BM$$

$$=a^2-\frac{a^2}{8}-\frac{a^2}{4}=\frac{5a^2}{8}$$

Vậy $V_{S.CDNM}=\frac{1}{3}.S_{CDNM}.SH=\frac{5\sqrt{3}a^3}{24}$

Khoảng cách giữa 2 đường thẳng DM và SC .

$\Delta ADM = \Delta DCN \Rightarrow \widehat{ADM} = \widehat{DCN} \Rightarrow DM \perp CN$

Kết hợp điều kiện $DM \perp SH \Rightarrow DM \perp (SHC)$

Hạ $HK \perp SH$ $(K \in SC) \Rightarrow$ HK là đoạn vuông góc chung của DM và SC .

$d(DM,SC) = HK$.

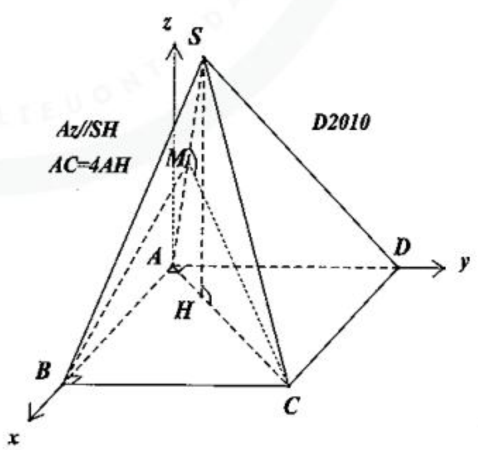
Ta có: $\begin{cases} HC = \dfrac{CD^2}{CN} = \dfrac{2a}{\sqrt{5}} \\ HK = \dfrac{SH.HC}{\sqrt{SH^2 + HC^2}} = \dfrac{2\sqrt{3}a}{\sqrt{19}} \end{cases} \Rightarrow d(DM,SC) = HK = \dfrac{2\sqrt{3}a}{\sqrt{19}} = \dfrac{2a\sqrt{57}}{19}$

Nhận xét: Đối với bài toán này ta có thể chọn hệ trục tọa độ khác nhau. Nên vận dụng linh hoạt các cách khác nhau để làm cho bài toán ngắn gọn và đơn giản hơn.

D2010

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên $SA = a$; hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là điểm H thuộc đoạn AC, $AH = \dfrac{AC}{4}$. Gọi CM là đường cao của tam giác SAC. Chứng minh M là trung điểm của SA và tính thể tích khối tứ diện $SMBC$ theo a.

➤ **Lời giải:** Do $ABCD$ là hình vuông.



Nên ta dễ dàng xác định diện tích đáy $ABCD$ là a^2, AB vuông AD nên ta đặt trục tại A, kẻ Az song song với SH vì $SH \perp (ABCD)$, $Ox \equiv AB$, $Oy \equiv AD$, $Az \equiv Oz \parallel SH$, $AH = \dfrac{a\sqrt{2}}{4}$, $CM \perp SA$,

$SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \dfrac{a\sqrt{14}}{4}$.

$HC = \dfrac{3a\sqrt{2}}{4}$,

$SC = \sqrt{SH^2 + HC^2} = a\sqrt{2} = AC \Rightarrow \Delta SAC$.

Là tam giác cân nên đường cao CM đồng thời là đường trung tuyến, trung trực nên M là trung điểm SA.

$A(0;0;0), B(a;0;0), D(0;a;0); C(a;a,0)$

$H\left(\frac{a}{4};\frac{a}{4};0\right); S\left(\frac{a}{4};\frac{a}{4};\frac{a\sqrt{14}}{4}\right);\ M\left(\frac{a}{8};\frac{a}{8};\frac{a\sqrt{14}}{8}\right).$

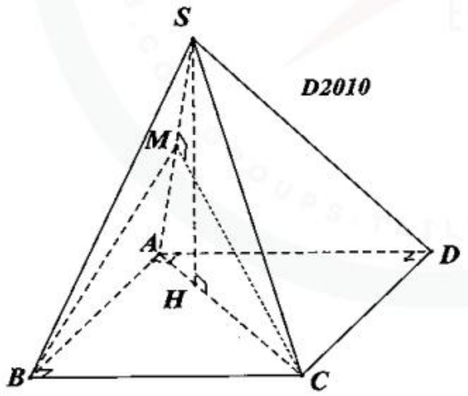
$\overrightarrow{MB} = \left(\frac{7a}{8};-\frac{a}{8};-\frac{a\sqrt{14}}{8}\right), \overrightarrow{MC} = \left(\frac{7a}{8};\frac{7a}{8};-\frac{a\sqrt{14}}{8}\right)\ \overrightarrow{MS}\left(\frac{a}{8};\frac{a}{8};\frac{a\sqrt{14}}{8}\right)$

$\left[\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MC}\right] = \left(\frac{a^2\sqrt{14}}{8};0;\frac{7a^2}{8}\right) \Rightarrow \left|\left[\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MC}\right]\right| = \sqrt{\left(\frac{a^2\sqrt{14}}{8}\right)^2 + \left(\frac{7a^2}{8}\right)^2} = \frac{3\sqrt{7}}{8}.a^2$

$\left[\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MC}\right].\overrightarrow{MS} = \frac{a^2\sqrt{14}}{8}.\frac{a}{8} + \frac{a}{8}.0 + \frac{7a^2}{8}.\frac{a\sqrt{14}}{8} = \frac{a^3\sqrt{14}}{8}$

$V_{S.MBC} = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MC}\right].\overrightarrow{MS}\right| = \frac{1}{6}.\frac{a^3\sqrt{14}}{8} = \frac{a^3\sqrt{14}}{48}$

❖ ***Lời giải bằng hình học thuần túy :***



Chứng minh M là trung điểm của SA

$AH = \frac{a\sqrt{2}}{4}; SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{8}} = \frac{a\sqrt{14}}{14}$

$HC = \frac{3a\sqrt{2}}{4}; SC = \sqrt{SH^2 + HC^2} = a\sqrt{2} \Rightarrow SC = AC$.

Do đó tam giác SAC cân tại C , suy ra M là trung điểm của SA .

Tính thể tích khối tứ diện SBCM .

M là trung điểm của SA suy ra:

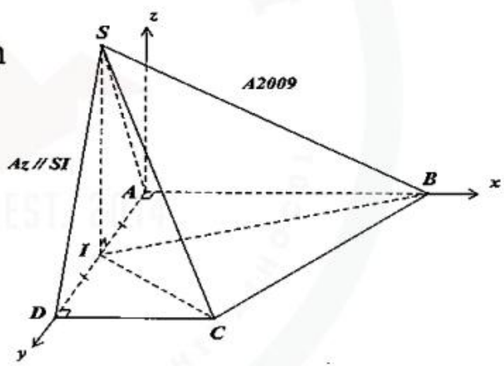
$$S_{SCM}=\frac{1}{2}.S_{SCA}\Rightarrow V_{SBCM}=V_{B.SCA}=\frac{1}{2}.V_{S.ABC}$$

$$\Rightarrow V_{SBCM}=\frac{1}{6}.S_{\Delta ABC}.SH=\frac{a^3\sqrt{14}}{48}$$

A2009

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D; $AB=AD=2a$, $CD=a$; góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng $60°$. Gọi I là trung điểm của cạnh AD. Biết hai mặt phẳng (SBI) và (SCI) cùng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ theo a.

➤ **Lời giải:** Do $ABCD$ là hình thang vuông nên $AD\perp AB; AD\perp DC$ ta dễ dàng xác định diện tích đáy $ABCD$ là $3a^2$.



AB vuông AD nên ta đặt trục tại A.

Kẻ $Az\parallel SI, (SCI)\cap(SIB)=SI,$

$\Rightarrow SI\perp(ABCD)$.

$Ox\equiv AB; Oy\equiv AD; Az\equiv Oz//SI$

$A(0;0;0), B(2a;0;0), D(0;2a;0);$

$C(a;2a;0), I(0;a;0), S(0;a;h)$

Phương trình mặt phẳng (ABCD): z=0 có véc tơ pháp tuyến $\vec{n}_{ABCD}=(0;0;1)$

Ta có: $\begin{cases}\overrightarrow{BC}=(-a;2a;0),\\ \overrightarrow{BS}=(-2a;a;h)\end{cases}\Rightarrow \vec{n}_{BCS}=\left[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BS}\right]=\left(2ah,ah,3a^2\right)//(2h;h;3a)$

Khi đó véc tơ pháp tuyến mặt phẳng (SBC): $\vec{n}=(2h;h;3a)$

Do góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng (ABCD) bằng $60°$

$$\cos\left(\widehat{(SBC),(ABCD)}\right)=\cos 60^0=\frac{\left|\overrightarrow{n_{BCS}}.\overrightarrow{n_{ABCD}}\right|}{\left|\overrightarrow{n_{BCS}}\right|.\left|\overrightarrow{n_{ABCD}}\right|}$$

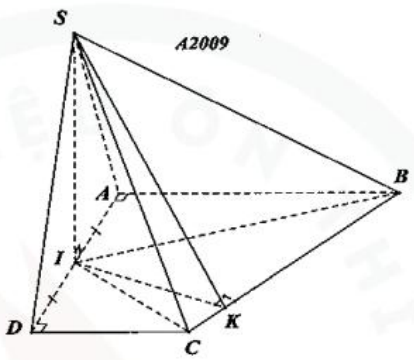
$$= \frac{|2h.0 + h.0 + 3a.1|}{\sqrt{4h^2 + h^2 + 9a^2}.\sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 6a = \sqrt{5h^2 + 9a^2} \Leftrightarrow 27a^2 = 5h^2 \Leftrightarrow h^2 = \frac{135a^2}{25} \Leftrightarrow h = \frac{3\sqrt{15}a}{5}$$

Diện tích hình thang ABCD: $S_{ABCD} = \left(\frac{a+2a}{2}\right).2a = 3a^2$

Thể tích của khối chóp S.ABCD: $V = \frac{1}{3}.S_{ABCD}.SI = \frac{1}{3}.3a^2.\frac{3\sqrt{15}a}{5} = \frac{3\sqrt{15}a^3}{5}$

❖ ***Lời giải bằng hình học thuần túy :***



$$\begin{cases}(SIB) \perp (ABCD) \\ (SIC) \perp (ABCD)\end{cases} \Rightarrow SI \perp (ABCD)$$

Kẻ: $IK \perp BC \ (K \in BC) \Rightarrow BC \perp (SIK) \Rightarrow \widehat{SKI} = 60^0$

Diện tích hình thang ABCD: $S_{ABCD} = \left(\frac{a+2a}{2}\right).2a = 3a^2$

Tổng diện tích các tam giác ABI và CDI bằng $\frac{3a^2}{2}$ suy ra $S_{\Delta IBC} = \frac{3a^2}{2}$

$$BC = \sqrt{(AB - CD)^2 + AD^2} = \sqrt{(2a-a)^2 + 4a^2} = a\sqrt{5} \Rightarrow IK = \frac{2S_{\Delta IBC}}{BC} = \frac{3\sqrt{5}a}{5}$$

$$\Rightarrow SI = IK.\tan\widehat{SKI} = \frac{3\sqrt{15}a}{5}$$

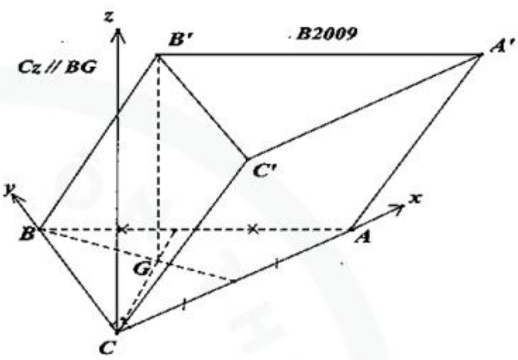
Thể tích của khối chóp S.ABCD: $V = \frac{1}{3}.S_{ABCD}.SI = \frac{3\sqrt{15}a^3}{5}$

B2009

Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có $BB' = a$, góc giữa đường thẳng BB' với mặt phẳng (ABC) bằng $60°$. Tam giác ABC vuông tại C và góc $\widehat{BAC} = 60^0$. Hình chiếu vuông góc của điểm B' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm của tam giác ABC. Tính thể tích khối tứ diện $A'ABC$ theo a.

➤ **Lời giải:**

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC và D là trung điểm của AB.



Ta có $B'G \perp BD$.

$BG = BB'.\cos 60^0 = \dfrac{a}{2}$,

$B'G = BB'.\sin 60^0 = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

$BD = \dfrac{3a}{4}$, $BC = \dfrac{AB\sqrt{3}}{2}$, $AC = \dfrac{AB}{2}$, $CD = \dfrac{AB}{4}$.

$BC^2 + CD^2 = BD^2 \Rightarrow AB = \dfrac{3a\sqrt{13}}{13}; AC = \dfrac{3a\sqrt{13}}{26}; BC = \dfrac{AB\sqrt{3}}{2} = \dfrac{3a\sqrt{13}}{13}.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{3a\sqrt{39}}{26}$

Do tam giác ABC vuông tại C.

Ta đặt trục tại C là gốc tọa độ, kẻ $Cz \parallel B'G$, $AC \equiv Ox$, $BC \equiv Oy$.

$C(0;0;0), B\left(0;\dfrac{3a\sqrt{13}}{13};0\right), A\left(\dfrac{3a\sqrt{13}}{26};0;0\right)$

$G\left(\dfrac{a\sqrt{13}}{26};\dfrac{a\sqrt{13}}{13},0\right), B'\left(\dfrac{a\sqrt{13}}{26};\dfrac{a\sqrt{13}}{13};\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)$

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{B'C'} = \left(0;\dfrac{3a\sqrt{13}}{13};0\right) = \left(x_{C'} - \dfrac{a\sqrt{13}}{26}; y_{C'} - \dfrac{a\sqrt{13}}{13}; z_{C'} - \dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)$

$\Rightarrow C'\left(\dfrac{a\sqrt{13}}{26};\dfrac{4a\sqrt{13}}{13};\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)$

$$\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{C'A'}=\left(\frac{3a\sqrt{13}}{26};0;0\right)=\left(x_{A'}-\frac{a\sqrt{13}}{26};y_{A'}-\frac{4a\sqrt{13}}{13};z_{A'}-\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\Rightarrow A'\left(\frac{2a\sqrt{13}}{13};\frac{4a\sqrt{13}}{13};\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$$

Diện tích tam giác ABC:

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}.CA.CB=\frac{1}{2}.\frac{3a\sqrt{13}}{26}.\frac{3a\sqrt{39}}{26}=\frac{9\sqrt{3}a^2}{104}$$

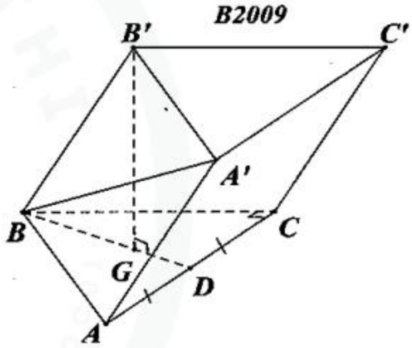
Thể tích của khối tứ diện A'ABC:

$$V_{A'ABC}=V_{B'ABC}=\frac{1}{3}.BG'.S_{\Delta ABC}=\frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{9\sqrt{3}a^2}{104}=\frac{9a^3}{208}$$

❖ ***Lời giải bằng hình học thuần túy:***

Gọi D là trung điểm của AC

và G là trọng tâm tam giác ABC ta có



Tam giác ABC có:

$$B'G\perp(ABC)\Rightarrow\widehat{B'BG}=60^0$$

$$\begin{cases}B'G=BB'.\sin\widehat{B'BG}=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\\ BG=\dfrac{a}{2}\end{cases}\Rightarrow BD=\frac{3a}{4}$$

Ta lại có:

$$BC^2+CD^2=BD^2\Leftrightarrow\frac{3AB^2}{4}+\frac{AB^2}{16}=\frac{9a^2}{16}$$

$$\Rightarrow AB=\frac{3a\sqrt{13}}{26};S_{\Delta ABC}=\frac{9a^2\sqrt{3}}{104}$$

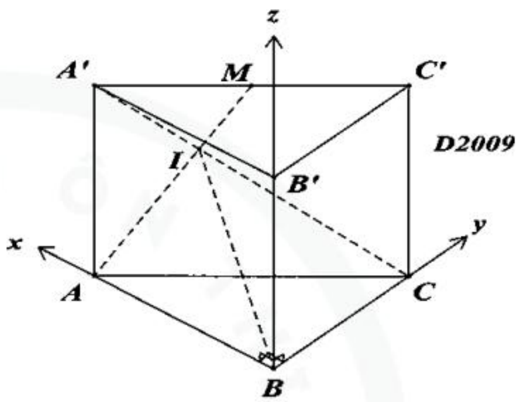
Thể tích của khối tứ diện A'ABC:

$$V_{A'ABC}=V_{B'ABC}=\frac{1}{3}.BG'.S_{\Delta ABC}=\frac{9a^3}{208}$$

D2009

Cho hình lăng trụ đứng ABC.A′B′C′ có đáy ABC là tam giác vuông tại B) AB=a) AA′=2a)A′C=3a . Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng A′C′, I là giao điểm của AM và A′C . Tính theo thể tích khối tứ diện IABC và khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (IBC).

➤ **Lời giải:**



Chọn hệ trục tọa độ *Bxyz*.

Như hình vẽ, các trục *Bx, By, Bz* lần lượt đi qua các điểm A, C, B′.

Khi đó:

$A(a;0;0)$, $B(0;0;0)$, $C(0;2a;0)$, $A'(a;0;a\sqrt{2})$, $B'(0;0;2a)$, $C'(0;2a;2a)$.

M là trung điểm $A'C' \Rightarrow M\left(\dfrac{a}{2};a;2a\right)$

Đường thẳng AM:

$$\begin{cases} qua\ A(a;0;0) \\ \overrightarrow{AM}=\left(-\dfrac{a}{2};a;2a\right)=-\dfrac{a}{2}(1;-2;-4) \end{cases}.$$

Nên có phương trình: $\begin{cases} x=a+t \\ y=-2t \\ z=-4t \end{cases} (t\in\mathbb{R})$.

Đường thẳng $A'C$: $\begin{cases} qua\ C(0;2a;0) \\ \overrightarrow{A'C}=(-a;2a;-2a)=-a(1;-2;2) \end{cases}$.

Phương trình: $\begin{cases} x=t' \\ y=2a-2t' \\ z=2t' \end{cases} (t'\in\mathbb{R})$.

Ta có $I\in AM \Rightarrow I(a+t;-2t;-4t)$.

Mặt khác $I = AM \cap A'C$, nên tọa độ điểm I là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} a+t=t' \\ -2t=2a-2t' \\ -4t=2t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=-\dfrac{a}{3} \\ t'=\dfrac{2a}{3} \end{cases} \Rightarrow I\left(\frac{2a}{3};\frac{4a}{3};\frac{4a}{3}\right).$$

Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{BC}=(0;2a;0) \\ \overrightarrow{BI}=\left(\dfrac{2a}{3};\dfrac{2a}{3};\dfrac{4a}{3}\right) \\ \overrightarrow{BA}=(a;0;0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BI}\right]=\left(\dfrac{8a^2}{3};0;\dfrac{4a^2}{3}\right) \\ \left[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BI}\right].\overrightarrow{BA}=\dfrac{8a^3}{3} \end{cases}$.

$$\Rightarrow V_{IABC}=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BI}\right].\overrightarrow{BA}\right|=\frac{4a^3}{9}$$

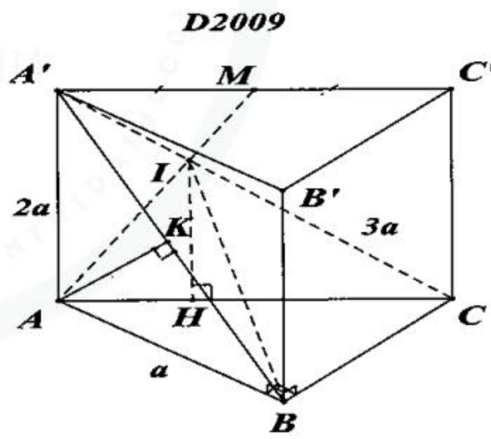
❖ ***Lời giải bằng hình học thuần túy:***

Hạ $IH \perp AC\ (H \in AC) \Rightarrow IH \perp (ABC)$; IH là đường cao của tứ diện IABC

Suy ra $IH // AA' \Rightarrow \dfrac{IH}{AA'}=\dfrac{CI}{CA'}=\dfrac{2}{3} \Rightarrow IH=\dfrac{2}{3}.AA'=\dfrac{4a}{3}$

$AC=\sqrt{A'C^2-AA'^2}=a\sqrt{5};$

$BC=\sqrt{AC^2-AB^2}=2a$



Diện tích tam giác ABC:

$S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}.AB.AC=a^2$

Thể tích của khối tứ diện IABC:

$V_{SABC}=\dfrac{1}{3}.S_{\Delta ABC}.IH=\dfrac{4a^3}{9}$

Hạ $AK \perp A'B\ (K \in A'B)$.

Vì $BC \perp (ABB'A')$ nên $AK \perp BC$,
suy ra $AK \perp (IBC)$

Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (IBC) là AK

$$AK=\frac{2S_{\Delta AA'B}}{A'B}=\frac{AA'.AB}{\sqrt{A'A^2+AB^2}}=\frac{2a.a}{\sqrt{4a^2+a^2}}=\frac{2a\sqrt{5}}{5}$$

A2008

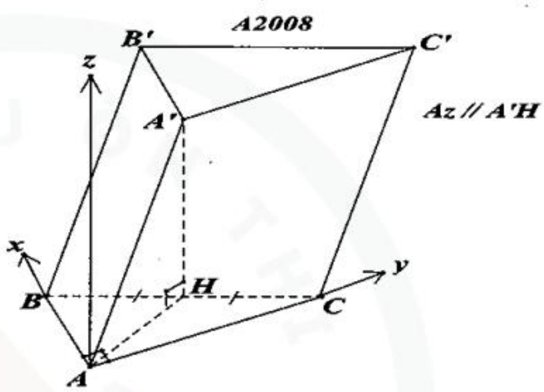
Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có độ dài cạnh bên bằng 2a, đáy ABC là tam giác vuông tại A, AB = a) AC = a$\sqrt{3}$ và hình chiếu vuông góc của đỉnh A′ trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của cạnh BC. Tính theo a thể tích khối chóp $A'.ABC$ và tính cosin của góc giữa hai đường thẳng AA' và $B'C'$.

➢ **Lời giải:**

Gọi H là trung điểm của BC.

Suy ra $A'H \perp (ABC)$

Chọn hệ trục tọa độ $Axyz$ như hình vẽ, các trục *Ax, Ay, Az* lần lượt đi qua các điểm B,C,A′



Khi đó:

$B(a;0;0)$, $A(0;0;0)$, $C(0;\sqrt{3}a;0)$

Do M là trung điểm $BC \Rightarrow H\left(\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right)$. Hình chiếu vuông góc của đỉnh A′ trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của cạnh BC nên $A'\left(\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};h\right)$.

Độ dài cạnh bên bằng 2a

Nên $AA'=2a \Rightarrow \overrightarrow{AA'}=\left(\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};h\right) \Leftrightarrow \left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2+h^2=4a^2$

$\Leftrightarrow h^2=3a^2 \Leftrightarrow h=a\sqrt{3}$

Vậy $V_{A'.ABC}=\frac{1}{2}.A'H.S_{\Delta ABC}=\frac{1}{3}.a\sqrt{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{2}=\frac{a^3}{2}$.

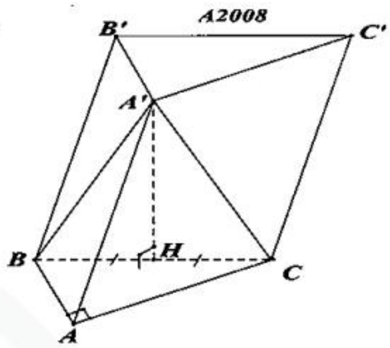
Góc giữa hai đường thẳng AA' và $B'C'//BC$.

Đặt φ là góc giữa hai đường thẳng AA′ và BC.

$\overrightarrow{AA'}=\left(\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};a\sqrt{3}\right)$, $\overrightarrow{BC}=\left(-a;a\sqrt{3};0\right)$

$$\cos\varphi = \cos\left(\widehat{AA', BC}\right) = \frac{\left|-\frac{a}{2}.a + \frac{a\sqrt{3}}{2}.\sqrt{3}a + \sqrt{3}a.0\right|}{\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(a\sqrt{3}\right)^2}\sqrt{\left(-a\right) + \left(a\sqrt{3}\right)^2}} = \frac{a^2}{4a^2} = \frac{1}{4}$$

❖ ***Lời giải bằng hình học thuần túy:***



Gọi H là trung điểm cạnh BC.

suy ra $\begin{cases} A'H \perp (ABC) \\ AH = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 3a^2} = a \end{cases}$

đường trung tuyến vuông góc với cạnh huyền trong tam giác vuông.

Do đó:

$A'H^2 = A'A^2 - AH^2 = 4a^2 - a^2 = 3a^2$ A H a

$\Rightarrow A'H = a\sqrt{3}$

Vậy $V_{A'.ABC} = \frac{1}{3}.A'H.S_{\Delta ABC} = \frac{a^3}{2}$ (đơn vị thể tích)

Trong tam giác vuông A'B'H có: $HB' = \sqrt{A'B^2 + A'H^2} = \sqrt{a^2 + 3a^2} = 2a$

Nên tam giác B'BH cân tại B'

Đặt φ là góc giữa hai đường thẳng AA' và B'C' thì $\widehat{B'BH} = \varphi$

Vậy $\cos\varphi = \frac{a}{2.2a} = \frac{1}{4}$

B2008

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh 2a, SA = a, SB=a$\sqrt{3}$ và mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC. Tính theo a thể tích của khối chóp S.BMDN và tính cosin của góc giữa hai đường thẳng SM, DN.

➤ **Lời giải:**

Gọi H là hình chiếu của S trên AB.

Suy ra $SH \perp (ABCD)$.

Do đó SH là đường cao của hình chóp S.BMDN.

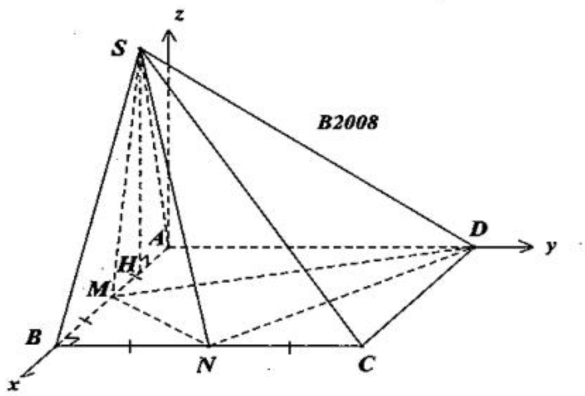
Ta có $SA^2 + SB^2 = a^2 + 3a^2 = AB^2$

Nên tam giác SAB vuông tại S.

Suy ra SM= $\frac{AB}{2} = \frac{2a}{2} = a$.

Do đó tam giác SAM đều.

Suy ra $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.



Diện tích tứ giác BMDN là:

$S_{BMDN} = \frac{1}{2}S_{ABCD} = 2a^2$.

Thể tích khối chóp S.BMDN là:

$V = \frac{1}{3}SH.S_{BMDN} = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}.2a^2 = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Đặt trục như hình vẽ:

Kẻ SH vuông AB) ta có: $SA^2 + SB^2 = a^2 + 3a^2 = AB^2$, nên tam giác SAB vuông tại A) suy ra $SM = \frac{AB}{2} = a$.

Do đó tam giác SAM đều, suy ra $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$,

$A(0;0;0), B(2a;0;0), C(2a;2a;0); D(0;2a,0)$

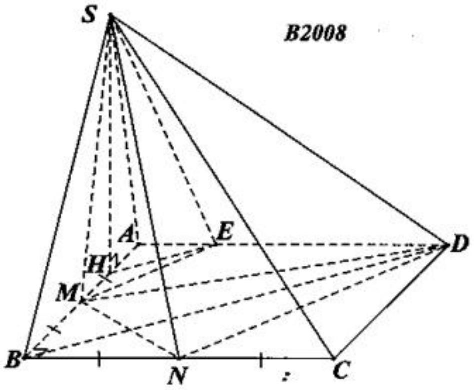
$M(a;0,0); N(2a;a;0); H\left(\frac{a}{2};0;0\right); S\left(\frac{a}{2};0;\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$.

Đặt φ là góc giữa hai đường SM và DN. Ta có $\left(\widehat{SM,DN}\right) = \varphi$.

$\overrightarrow{SM} = \left(\frac{a}{2};0;\frac{-a\sqrt{3}}{2}\right) \overrightarrow{DN} = (2a;-a;0)$

$$\cos\left(\widehat{SM,DN}\right) = \cos\varphi = \frac{\left|2a.\frac{a}{2} - a.0 + \frac{-a\sqrt{3}}{2}.0\right|}{\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}.\sqrt{(2a)^2 + a^2}} = \frac{a^2}{a^2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

❖ ***Lời giải bằng hình học thuần túy:***



Gọi H là hình chiếu vuông góc của S lên AB, suy ra $SH \perp (ABCD)$.

Do đó, SH là đường cao của hình chóp S.BMDN.

Ta có: $SA^2 + SB^2 = a^2 + 3a^2 = 4a^2 = AB^2$ nên tam giác SAB là tam giác vuông tại S.

Suy ra $SM = \dfrac{a}{2}$.

Do đó tam giác SAM là tam giác đều, suy ra $SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Diện tích của tứ giác BMDN là $S_{BMDN} = \dfrac{1}{2}.S_{ABCD} = 2a^2$

Thể tích của khối chóp S.BMDN là $V = \dfrac{1}{3}SH.S_{BMDN} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$

Kẻ ME song song DN ($E \in AD$) suy ra $AE = \dfrac{a}{2}$.

Đặt α là góc giữa hai đường thẳng SM và DN.ta có $\widehat{SM, ME} = \alpha$.

Theo định lý ba đường vuông góc ta có: $SA \perp AE$.

Suy ra: $SE = \sqrt{SA^2 + AE^2} = \sqrt{a^2 + \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$,

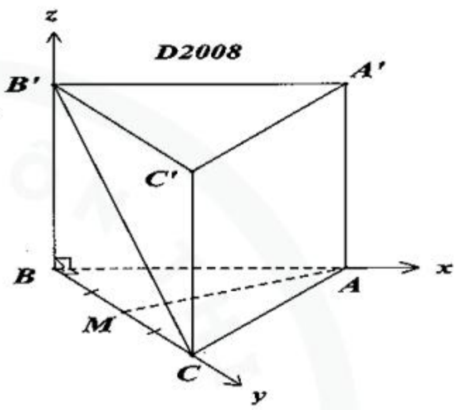
$$ME = \sqrt{AM^2 + AE^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

Tam giác SME là tam giác cân tại E nên $\begin{cases} \widehat{SME} = \alpha \\ \cos\alpha = \dfrac{AE}{ME} = \dfrac{a}{2} : \dfrac{a\sqrt{5}}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$

D2008

Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông, $AB = BC = a$, cạnh bên $AA' = a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Tính theo a thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và $B'C$.

➢ **Lời giải:**



Chọn hệ trục tọa độ $Bxyz$ như hình vẽ, các trục Bx, By, Bz lần lượt đi qua các điểm A, C, B'.

Khi đó:

$A(a;0;0), B(0;0;0), C(0;a;0),$

$A'(a;0;a\sqrt{2}), B'(0;0;a\sqrt{2}), C'(0;a;a\sqrt{2}).$

M là trung điểm $BC \Rightarrow M\left(0;\frac{a}{2};0\right)$.

Theo cách thông thường:

$$V_{ABC.A'B'C'} = AA'.S_{\Delta ABC} = a\sqrt{2}.\frac{1}{2}.a.a = \frac{a^3\sqrt{2}}{2}.$$

Theo cách tọa độ: $V_{ABC.A'B'C'} = AA'.S_{\Delta ABC} = AA'.\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right]\right|$.

$$\text{Ta có: }\begin{cases}\overrightarrow{BA} = (a;0;0)\\ \overrightarrow{BC} = (0;a;0) \Rightarrow \left[\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right] = (0;0;a^2)\\ AA' = a\sqrt{2}\end{cases}$$

$$\Rightarrow V_{ABC.A'B'C'} = AA'.\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right]\right| = \frac{1}{2}.a\sqrt{2}.\left|a^2\right| = \frac{a^3\sqrt{2}}{2}$$

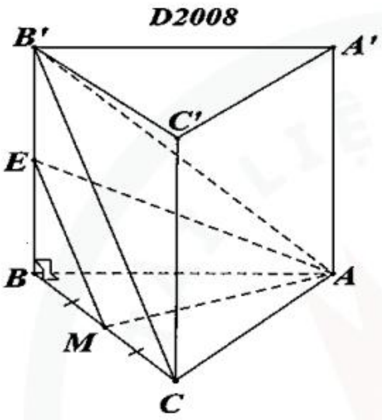
$$\text{Ta có: }\begin{cases}\overrightarrow{AM} = \left(-a;\frac{a}{2};0\right)\\ \overrightarrow{B'C} = \left(0;a;-a\sqrt{2}\right) \Rightarrow \left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{B'C}\right] = \left(-\frac{a^2\sqrt{2}}{2};a^2\sqrt{2};-a^2\right),\\ \overrightarrow{AB'} = \left(-a;0;a\sqrt{2}\right)\end{cases}$$

$$\Rightarrow \left[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{B'C}\right].\overrightarrow{AB'} = -\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow d\left(AM, B'C\right) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{B'C}\right].\overrightarrow{AB'}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{B'C}\right]\right|} = \frac{\frac{a^3\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{(-\frac{a^2\sqrt{2}}{2})^2 + (a^2\sqrt{2})^2 + (-a^2)^2}} = \frac{a\sqrt{7}}{7}.$$

Vậy $d\left(AM, B'C\right) = \frac{a\sqrt{7}}{7}$.

❖ ***Lời giải bằng hình học thuần túy:***



Từ giả thiết ta suy ra tam giác ABC là tam giác vuông cân tại B

Thể tích của khối lăng trụ là $V_{ABC.A'B'C'} = AA'.S_{\Delta ABC} = a\sqrt{2}.\frac{1}{2}.a^2 = \frac{a^3\sqrt{2}}{2}$

Gọi E là trung điểm của BB′. Khi đó mặt phẳng (AME) song song với B′C nên khoảng cách giữa hai đường AM,B′C bằng khoảng cánh giữa B′C và mặt phẳng (AME).

Nhận thấy, khoảng cách từ B đến mặt phẳng (AME) bằng khoảng cách từ C đến mặt phẳng (AME).

Gọi h là khoảng cách từ B đến mặt phẳng (AME).

Do đó tứ diện BAME có BA)BM, BE đôi một vuông góc với nhau nên

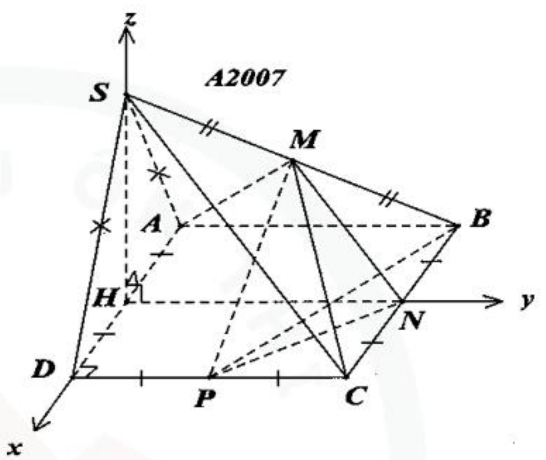
$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{BA^2} + \frac{1}{BM^2} + \frac{1}{BE^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{4}{a^2} + \frac{2}{a^2} = \frac{7}{a^2} \Rightarrow h = \frac{a\sqrt{7}}{7}$$

Vậy: khoảng cách giữa hai đường thẳng B′C và AM bằng $h = \frac{a\sqrt{7}}{7}$

A2007

Cho hình chóp SABCD có đáy là hình vuông cạnh a , mặt bên SAD là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh SB,BC,CD. Chứng minh AM vuông góc với BP và tính thể tích của khối tứ diện CMNP.

➢ **Lời giải:**



SAD là tam giác đều vuông góc với đáy nên gọi H là trung điểm AD thì $SH \perp (ABCD)$ và $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Nhận thấy SH, HN, DH đôi một vuông góc nên chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ, khi đó các trục tọa độ Ox, Oy, Oz lần lượt đi qua các điểm D, N, S.

Khi đó $H \equiv O$ nên $H(0;0;0)$,

$A\left(-\frac{a}{2};0;0\right)$, $D\left(\frac{a}{2};0;0\right)$, $B\left(\frac{-a}{2};a;0\right)$, $C\left(\frac{a}{2};a;0\right)$, $S\left(0;0;\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$.

M,N,P lần lượt là trung điểm của SB, BC, CD nên $M\left(-\frac{a}{4};\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{4}\right)$, $N(0;a;0)$, $P\left(\frac{a}{2};\frac{a}{2};0\right)$.

Ta có $\overrightarrow{AM}\left(\frac{a}{4};\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{4}\right)$, $\overrightarrow{BP}\left(a;-\frac{a}{2};0\right)$ và $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BP} = 0$, nên $AM \perp BP$.

$\overrightarrow{CM} = \left(-\frac{3a}{4};-\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{4}\right)$, $\overrightarrow{CN}\left(-\frac{a}{2};0;0\right)$, $\overrightarrow{CP} = \left(0;-\frac{a}{2};0\right)$

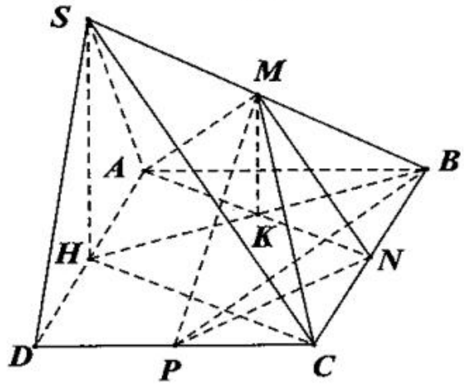
$\Rightarrow \left[\overrightarrow{CM},\overrightarrow{CN}\right].\overrightarrow{CP} = \frac{a^3\sqrt{3}}{16} \Rightarrow V_{CMNP} = \frac{1}{6}.\left[\overrightarrow{CM},\overrightarrow{CN}\right].\overrightarrow{CP} = \frac{1}{6}.\frac{a^3\sqrt{3}}{16} = \frac{a^3\sqrt{3}}{96}$ (đvtt).

Vậy $V_{CMNP} = \frac{a^3\sqrt{3}}{96}$ (đvtt).

❖ ***Lời giải bằng hình học thuần túy:***

Gọi H là trung điểm của AD.

A2007



Do tam giác SAD là tam giác đều nên SH vuông góc với AD. Do mặt phẳng (SAD) vuông góc với mặt phẳng (ABCD) nên SH vuông góc với BP (1)

Xét hình vuông ABCD ta có:

$\Delta CDH = \Delta BCP \Rightarrow CH \perp BP\ (2)$

Từ (1) và (2) ta suy ra $BP \perp (SHC)$

Vì $\begin{cases} MN // SC \\ AN // CH \end{cases} \Rightarrow (AMN) // (SHC) \Rightarrow BP \perp (AMN) \Rightarrow BP \perp AM$

Kẻ MK vuông góc với mặt phẳng (ABCD), (K thuộc vào mặt phẳng (ABCD)). Ta có $V_{CMNP} = \frac{1}{3}.MK.S_{CNP}$

Vì $MK = \frac{SH}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{4}; S_{CNP} = \frac{1}{2}CN.CP = \frac{a^2}{8} \Rightarrow V_{CMNP} = \frac{\sqrt{3}a^3}{96}$ (dvtt)

B2007

Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a. Gọi E là điểm đối xứng của D qua trung điểm của SA, M là trung điểm của AE, N là trung điểm của BC. Chứng minh MN vuông góc với BD và tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng MN và AC.

➢ **Lời giải:**

Gọi O là tâm của hình vuông ABCD, suy ra $SO \perp (ABCD)$.

Chọn hệ trục toạ độ Đêcac vuông góc $Oxyz$ như sau $O(0;0;0)$, $S(0;0;h)$, $A\left(\frac{a\sqrt{2}}{2};0;0\right)$, $C\left(-\frac{a\sqrt{2}}{2};0;0\right)$, $D\left(0;\frac{a\sqrt{2}}{2};0\right)$, $B\left(0;-\frac{a\sqrt{2}}{2};0\right)$.

Chứng minh MN vuông góc với BD

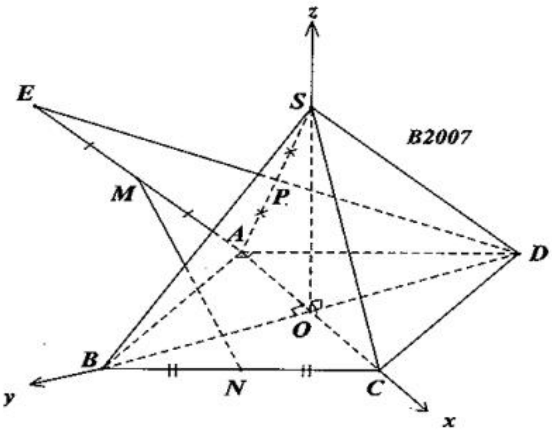
$\overrightarrow{MN} = \left(-\frac{3a\sqrt{2}}{4};0;\frac{h}{2}\right)$, $\overrightarrow{BD} = \left(0;-a\sqrt{2};0\right)$.

Vì $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{BD} = 0 \Rightarrow MN \perp BD$.

Tính (theo a) khoảng cách giữa hai đường thẳng MN và AC.

Chứng minh MN và AC chéo nhau.

Sử dụng công thức tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau



Toạ độ trung điểm P của SA:

$P\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{4}; 0; \dfrac{h}{2}\right)$, $E\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}; -\dfrac{a\sqrt{2}}{2}; h\right)$,

$M\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}; -\dfrac{a\sqrt{2}}{4}; \dfrac{h}{2}\right)$, $N\left(-\dfrac{a\sqrt{2}}{4}; -\dfrac{a\sqrt{2}}{4}; 0\right)$

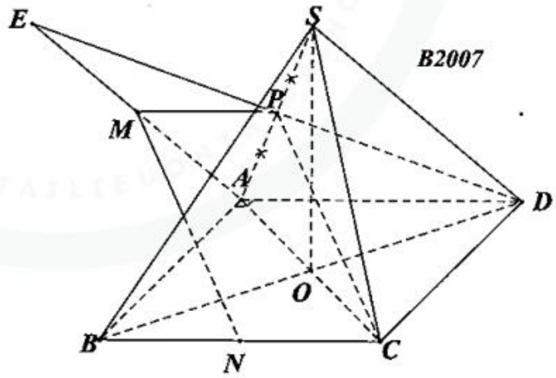
Vì $\left[\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AM} = \dfrac{a^2h}{4} \neq 0 \Rightarrow$ MN và AC chéo nhau

$$d(MN, AC) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AM}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{AC}\right]\right|} = \frac{\frac{a^2h}{4}}{\sqrt{\frac{a^2h^2}{2}}} = \frac{a\sqrt{2}}{4}.$$

❖ ***Lời giải bằng hình học thuần túy:***

Gọi P là trung điểm của SA.

Ta có MNCP là hình bình hành nên MN song song với mặt phẳng (SAC). Mặt khác, BD vuông góc với mặt phẳng (SAC) nên BD vuông góc với MN



Vì MN song song với mặt phẳng (SAC) nên

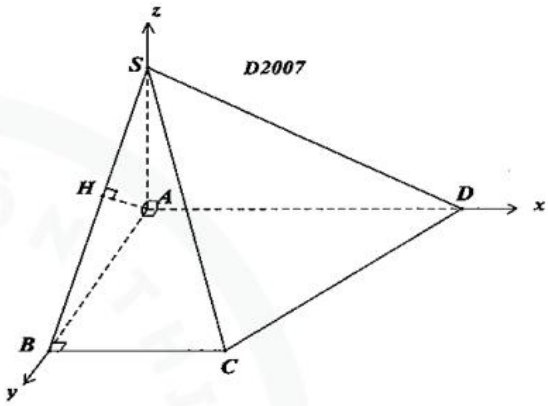
$$d(MN, AC) = d(N, (SAC)) = \frac{1}{2}d(B; (SAC)) = \frac{1}{4}BD = \frac{a\sqrt{2}}{4}$$

Vậy $d(MN, AC) = \dfrac{a\sqrt{2}}{4}$

D2007

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang, $\widehat{ABC} = \widehat{BAD} = 90^0$; $BA = BC = a$, $AD = 2a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và SA = $a\sqrt{2}$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên SB. Chứng minh tam giác SCD vuông và tính (theo a) khoảng cách từ H đến mặt phẳng (SCD).

➤ **Lời giải:**



Do SA,AD,AB đôi một vuông góc với nhau tại A nên ta chọn hệ trục tọa độ Oxyz như hình vẽ:

- A trùng với gốc tọa độ O

- Tia Ox,Oy,Oz lần lượt đi qua D,B,S

Khi đó : A(0;0;0), B(0;a;0), C(a;a;0), D(2a;0;0), S(0;0;$a\sqrt{2}$)

a) Ta có $\overrightarrow{SC}(a;a;-a\sqrt{2}),\overrightarrow{CD}(a;-a;0)$, $\overrightarrow{SC}.\overrightarrow{CD}=0 \Rightarrow SC \perp CD$.

Vậy tam giác SCD vuông tại C.

b) Mặt phẳng (SCD) có vctpt là: $\left[\overrightarrow{SC};\overrightarrow{CD}\right] = (-\sqrt{2}a^2;-\sqrt{2}a^2;-2a^2)$.

Phương trình mp(SCD) là:

$$\left(-\sqrt{2}a^2\right)(x-0)+\left(-\sqrt{2}a^2\right)(y-0)+\left(-2a^2\right)\left(z-a\sqrt{2}\right)=0.$$

Hay $x+y+\sqrt{2}z-2a=0$.

Ta có: $\overrightarrow{SB}\left(0;a;-a\sqrt{2}\right)=a\left(0;1;-\sqrt{2}\right)=a.\vec{u}$.

Phương trình đt SB qua S và có vtcp $\vec{u}$ là: $\begin{cases} x=0 \\ y=t \\ z=a\sqrt{2}-\sqrt{2}t \end{cases}$ với $t \in R$

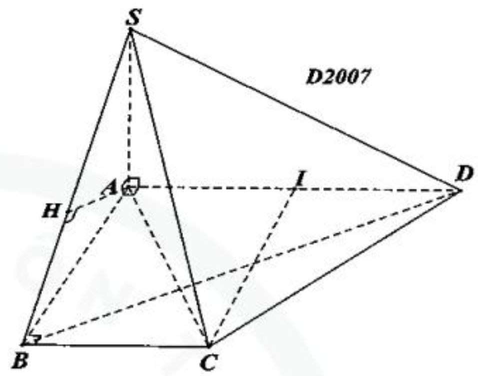
$H \in SB$ nên gọi $H(0;t;a\sqrt{2}-\sqrt{2}t) \Rightarrow \overrightarrow{AH}(0;t;a\sqrt{2}-\sqrt{2}t)$

$AH \perp SB \Leftrightarrow \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{SB} = 0 \Leftrightarrow t = \frac{2}{3}a \Rightarrow H(0;\frac{2}{3}a;\frac{a\sqrt{2}}{3})$

Vậy $d\left(H,(CSD)\right) = \frac{\left|0 + \frac{2}{3}a + \sqrt{2}.\frac{a\sqrt{2}}{3} - 2a\right|}{\sqrt{1+1+2}} = \frac{a}{3}$.

❖ ***Lời giải bằng hình học thuần túy:***

Gọi I là trung điểm của AD.



Ta có IA=IC=ID. Mặt khác, ΔACD vuông tại C $\Rightarrow CD \perp AC \Rightarrow CD \perp (SAC)$ suy ra CD vuông góc SC nên tam giác SCD là tam giác vuông tại C.

Trong tam giác SAB ta có:

$\frac{SH}{SB} = \frac{SA^2}{SB^2} = \frac{SA^2}{SA^2 + AB^2} = \frac{2a^2}{2a^2 + a^2} = \frac{2}{3}$

Gọi d_1, d_2 lần lượt là khoảng cách từ B và H đến mặt phẳng (SCD) thì

Ta có: $\frac{d_2}{d_1} = \frac{SH}{SB} = \frac{2}{3} \Rightarrow d_2 = \frac{2}{3}d_1 \quad d_1 = \frac{3V_{B.SCD}}{S_{SCD}} = \frac{SA \times S_{BCD}}{S_{SCD}}$

$S_{BCD} = \frac{1}{2}AB.BC = \frac{a^2}{2}$

$S_{SCD} = \frac{1}{2}SC.CD = \frac{1}{2}\sqrt{SA^2 + AB^2 + BC^2}.\sqrt{IC^2 + ID^2}$

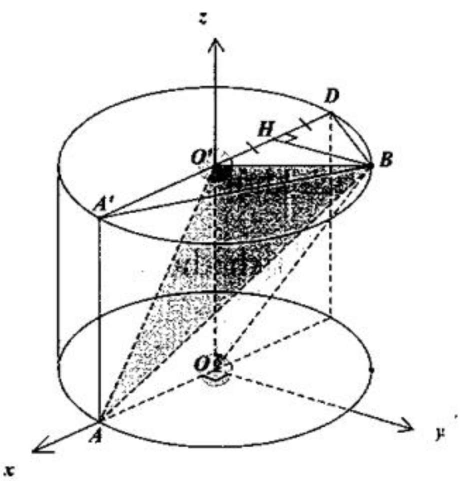
$= \sqrt{2a^2 + a^2 + a^2}.\sqrt{a^2 + a^2} = a^2\sqrt{2}$

Suy ra $d_1 = \frac{a}{2}$. Vậy khoảng cách từ H đến mặt phẳng (SCD) là: $d_2 = \frac{2}{3}d_1 = \frac{a}{3}$

A2006

Cho hình trụ có các đáy là hai hình tròn tâm O và O′, bán kính đáy bằng chiều cao và bằng a. Trên đường tròn đáy tâm O lấy điểm A, trên đường tròn đáy tâm O′ lấy điểm B, sao cho AB= 2a. Tính thể tích của khối tứ diện OO′AB.

➢ **Lời giải:**



Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ.

$O \equiv O(0;0;0)$, $Ox \equiv OA$, $Oy \parallel HB$,

$Oz \equiv OO'$.

Chọn $a=1$, khi đó $A(1;0;0)$,

$B\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};1\right)$, $O'(0;0;1)$.

Ta có $\overrightarrow{BA}=\left(-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};1\right)$,

$\overrightarrow{BO}=\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};1\right)$, $\overrightarrow{BO'}=\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$.

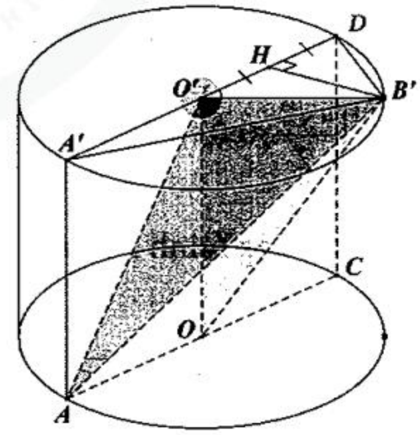
Ta lại có $\left[\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BO}\right]=\left(0;1;-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Nên $\left[\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BO}\right].\overrightarrow{BO'}=\left(0;\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)\Rightarrow\left|\left[\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BO}\right].\overrightarrow{BO'}\right|=\sqrt{0^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+0^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

Vậy thể tích khối tứ diện $OO'AB$ là:

$V_{OO'AB}=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BO}\right].\overrightarrow{BO'}\right|=\frac{\sqrt{3}}{12}=\frac{\sqrt{3}}{12}a^3$ (đvtt) (do ta chọn $a=1$).

❖ ***Lời giải bằng hình học thuần túy:***



Kẻ đường sinh AA'.

Gọi D là điểm đối xứng với A' qua O' và H là hình chiếu của B lên đường thẳng $A'D$.

Do BH⊥A'D và BH⊥AA'.

Nên $BH \perp (AOO'A')$.

Suy ra $V_{OO'AB}=\frac{1}{3}S_{AOO'}.BH$.

Ta có :

$A'B=\sqrt{AB^2-A'A^2}=\sqrt{3}a \Rightarrow BD=\sqrt{A'D^2-A'B^2}=a$.

Suy ra $\triangle BO'D$ đều nên $BH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Vì AOO' là tam giác vuông cân cạnh bên bằng a nên $S_{AOO'} = \frac{1}{2}a^2$ (đvdt).

Thể tích khối tứ diện $OO'AB$ là: $V_{OO'AB} = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{a^2}{2} = \frac{\sqrt{3}}{12}a^3$ (đvtt).

Tính thể tích khối tứ diện $OO'AB$.

B2006

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật với AB =a, AD= a$\sqrt{2}$, SA= a và SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AD và SC; I là giao điểm của BM và AC. Chứng minh rằng mặt phẳng (SAC) vuông góc với mặt phẳng (SMB). Tính thể tích của khối tứ diện ANIB.

➤ **Lời giải:**

SA, AB, AC đôi một vuông góc tại A nên chọn hệ trục tọa độ Oxyz như hình vẽ:

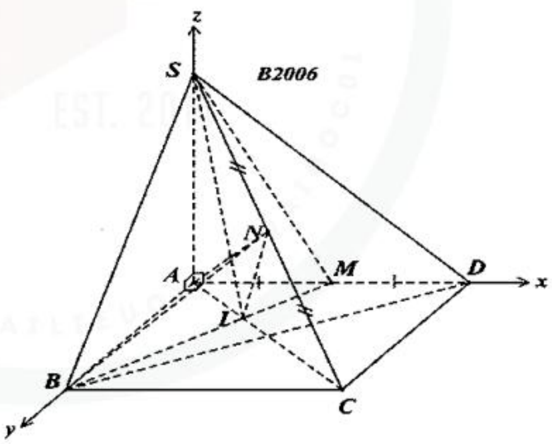
- A trùng với gốc tọa độ O(0;0;0).

Tia Ox, Oy, Oz lần lượt đi qua D, B, S

Khi đó: A(0;0;0), B(0;a;0),

$C\left(a\sqrt{2};a;0\right), D\left(a\sqrt{2};0;0\right), S\left(0;0;a\right)$

$M\left(\frac{a\sqrt{2}}{2};0;0\right), N\left(\frac{a\sqrt{2}}{2};\frac{a}{2};\frac{a}{2}\right)$.



a) Chứng minh 2 mp vuông góc với nhau ⇔ tích vô hướng vtpt của 2mp đó bằng 0.

Ta có: $\overrightarrow{AS}(0;0;a), \overrightarrow{AC}\left(a\sqrt{2};a;0\right), \overrightarrow{SM}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a;0;-a\right), \overrightarrow{SB}(0;a;-a)$.

Mặt phẳng (SAC) có vtpt $\overrightarrow{n_{(SAC)}} = \left[\overrightarrow{AS};\overrightarrow{AC}\right] = \left(-a^2;\sqrt{2}a^2;0\right)$.

Mặt phẳng (SMB) có vtpt $\overrightarrow{n_{(SMB)}} = \left[\overrightarrow{SM}, \overrightarrow{SB}\right] = \left(a^2; \frac{\sqrt{2}}{2}a^2; \frac{\sqrt{2}}{2}a^2\right)$.

Do $\overrightarrow{n_{SAC}}.\overrightarrow{n_{SMB}} = 0 \Leftrightarrow$ mp(SAC) vuông góc với mp(SMB) (đpcm).

Nhận xét: *Nếu làm theo cách thông thường học sinh sẽ mất nhiều thời gian vào việc xác định diện tích và chiều cao. Theo cách đặt hệ trục tọa độ học sinh không cần phải suy nghĩ nhiều, mà cần cẩn thận xác định tọa độ các điểm và tính thể tích theo công thức đã có.*

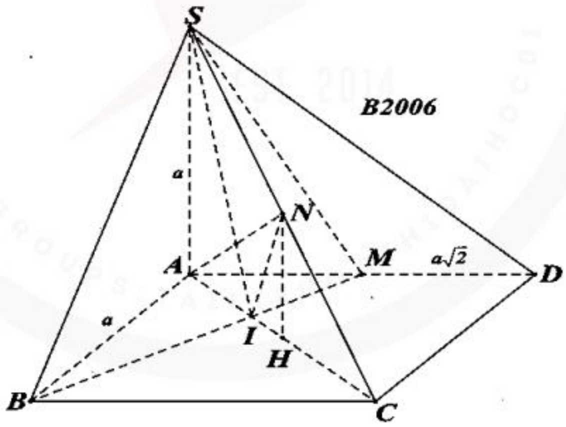
Tam giác ADB có I là trọng tâm nên: $\overrightarrow{BI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BM} \Leftrightarrow I\left(\frac{a\sqrt{2}}{3}; \frac{a}{3}; 0\right)$.

Ta có: $\overrightarrow{AB}(0;a;0)$, $\overrightarrow{AI}\left(\frac{a\sqrt{2}}{3}; \frac{a}{3}; 0\right)$, $\overrightarrow{AN}\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}; \frac{a}{2}; \frac{a}{2}\right)$, $\left[\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AI}\right] = \left(0; 0; \frac{-\sqrt{2}a^2}{3}\right)$.

$\left[\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AI}\right].\overrightarrow{AN} = 0.\frac{a\sqrt{2}}{2} + 0.\frac{a}{2} + \left(\frac{-\sqrt{2}a^2}{3}\right).\frac{a}{2} = \frac{-\sqrt{2}a^3}{6}$

Vậy $V_{ANIB} = \frac{1}{6}.\left|\left[\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AI}\right].\overrightarrow{AN}\right| = \frac{1}{6}.\frac{\sqrt{2}a^3}{6} = \frac{\sqrt{2}a^3}{36}$ (đvtt).

❖ ***Lời giải bằng hình học thuần túy :***



xét và ΔABM và ΔBCA vuông có $\frac{AM}{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{BA}{BC} \Rightarrow \Delta ABM$ đồng dạng ΔBCA

$\Rightarrow \widehat{ABM} = \widehat{BCA} \Rightarrow \widehat{ABM} + \widehat{BAC} = \widehat{BCA} + \widehat{BAC} = 90^0$

$\Rightarrow \widehat{AIB} = 90^0 \Rightarrow MB \perp AC$ (1)

$SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp MB$ (2)

$MB \perp (SAC) \Rightarrow (SMB) \perp (SAC)$

Gọi H là trung điểm AC suy ra NH là đường trung bình của ΔSAC

$\Rightarrow NH = \dfrac{SA}{2} = \dfrac{a}{2}$ và $NH // SA$ nên $NH \perp (ABI)$ do đó $V_{ANIB} = \dfrac{1}{3} NH.S_{\Delta ABI}$

$\dfrac{1}{AI^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AM^2} \Rightarrow AI = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}, BI^2 = AB^2 - AI^2 \Rightarrow BI = \dfrac{a\sqrt{6}}{3} \Rightarrow S \quad = \quad 2$

$\Rightarrow S_{\Delta ABI} = \dfrac{a^2\sqrt{2}}{6}$

$V_{ANIB} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{a}{2}.\dfrac{a^2\sqrt{2}}{6} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{36}$

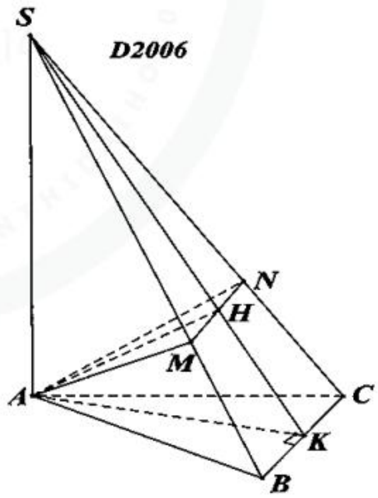
D2006

Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, $SA = 2a$ và SA vuông góc với mặt phẳng (ABC). Gọi M và N lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên các đường thẳng SB và SC. Tính thể tích của khối chóp $A.BCNM$.

➢ **Lời giải :**

Gọi K là trung điểm BC.

H là hình chiếu vuông góc của A xuống SK, do nên $BC \perp AK, BC \perp SA \Rightarrow BC \perp AH$.



Do $AH \perp SK, AH \perp BC \Rightarrow AH \perp (SBC)$.

Tam giác ABC đều: $AK = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Xét tam giác vuông SAK nên.

$\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AK^2} \Rightarrow AH = \dfrac{2\sqrt{3}a}{\sqrt{19}} = \dfrac{2\sqrt{57}a}{19}$

Xét tam giác vuông SAB:

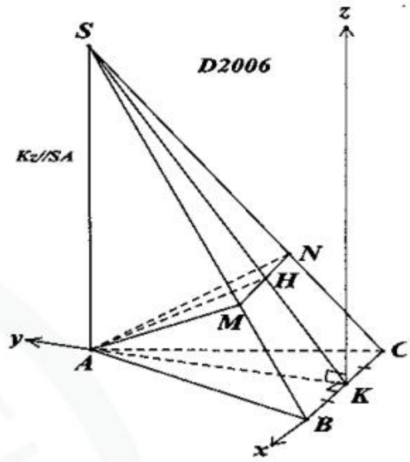
$SA^2 = SM.SB \Rightarrow \dfrac{SM}{SB} = \dfrac{SA^2}{SB^2} = \dfrac{4}{5}$.

Xét tam giác vuông SAC: $SA^2 = SN.SC \Rightarrow \dfrac{SN}{SC} = \dfrac{SA^2}{SC^2} = \dfrac{4}{5}$

Suy ra: $\frac{S_{\Delta SMN}}{S_{\Delta SBC}}=\frac{16}{25}\Rightarrow S_{BCMN}=\frac{9}{25}S_{\Delta SBC}=\frac{9\sqrt{19}}{100}a^2$ (đvdt).

Vậy thể tích khối chóp A.BCMN là

$$V_{S.BCNM}=\frac{1}{3}.AH.S_{BCNM}=\frac{1}{3}.AH.S_{BCNM}=\frac{1}{3}.\frac{2\sqrt{3}.a}{\sqrt{19}}.\frac{9\sqrt{19}}{100}=\frac{3\sqrt{3}a^3}{50}$$



KB, KA, Kz đôi một vuông góc tại K.

Nên chọn hệ trục tọa độ Oxyz như hình vẽ:

- K trùng với gốc tọa độ O(0;0;0)

Tia Ox, Oy, Oz lần lượt đi qua B, A,K

Khiđó: K(0;0;0), $B\left(\frac{a}{2};0;0\right), C\left(-\frac{a}{2};0;0\right)$

$A\left(0;\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right), S\left(0;\frac{a\sqrt{3}}{2};2a\right)$

Phương trình đường thẳng SB qua $B\left(\frac{a}{2};0;0\right)$ và có véc tơ chỉ phương:

$$\overrightarrow{SB}\left(\frac{a}{2};\frac{-a\sqrt{3}}{2};-2a\right)//\left(1;-\sqrt{3};-4\right)=\vec{u_1}\Rightarrow SB:\begin{cases}x=\frac{a}{2}+t\\ y=-\sqrt{3}t\\ z=-4t\end{cases}.$$

Mà M là hình chiếu của A xuống SB nên M thuộc SB: $M\left(\frac{a}{2}+t;-\sqrt{3}t;-4t\right)$

$$AM\perp SB\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\left(\frac{a}{2}+t;-\sqrt{3}t-\frac{a\sqrt{3}}{2};-4t\right).\overrightarrow{u_1}\left(1;-\sqrt{3};-4\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{a}{2}+t+3t+\frac{3a}{2}+16t=0\Leftrightarrow t=\frac{-a}{10}\Rightarrow M\left(\frac{2a}{5};\frac{a\sqrt{3}}{10};\frac{2a}{5}\right)$$

Phương trình đường thẳng SC qua $C\left(-\frac{a}{2};0;0\right)$ và có véc tơ chỉ phương:

$$\overrightarrow{SC}\left(-\frac{a}{2};\frac{-a\sqrt{3}}{2};-2a\right)//\left(1;\sqrt{3};4\right)\Rightarrow(SC)\begin{cases}x=-\frac{a}{2}+t'\\y=\sqrt{3}t'\\z=4t'\end{cases}.$$

Mà N là hình chiếu của A xuống SC nên N thuộc SC:

$$N\left(-\frac{a}{2}+t';\sqrt{3}t';4t'\right)$$

$$AN\perp SC\Leftrightarrow\overrightarrow{AN}\left(-\frac{a}{2}+t';\sqrt{3}t'-\frac{a\sqrt{3}}{2};4t\right).\overrightarrow{u_2}\left(1;\sqrt{3};4\right)=0$$

$$\Leftrightarrow-\frac{a}{2}+t'+3t'-\frac{3a}{2}+16t'=0\Leftrightarrow t'=\frac{a}{10}\Rightarrow N\left(\frac{-2a}{5};\frac{a\sqrt{3}}{10};\frac{2a}{5}\right)$$

$$\begin{cases}\overrightarrow{CB}=(a;0;0)\\\overrightarrow{CS}=\left(\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};2a\right)\end{cases}\Rightarrow\left[\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CS}\right]=\left(0;-2a^2;\frac{a^2\sqrt{3}}{2}\right)//\left(0;4;-\sqrt{3}\right)=\vec{n}_1$$

$$\Rightarrow S_{\Delta SBC}=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CS}\right]\right|=\frac{1}{2}\sqrt{\left(-2a^2\right)^2+\left(\frac{a^2\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{19}.a^2}{4}$$

Phương trình mặt phẳng (SBC) qua $B\left(\frac{a}{2};0;0\right)$ có véc tơ pháp tuyến $\vec{n}_1=\left(0;4;-\sqrt{3}\right)$ là $0.(x-\frac{a}{2})+4y+\sqrt{3}z=0\Leftrightarrow4y+\sqrt{3}y=0$ (SBC)

H là hình chiếu của A xuống mặt phẳng (SBC).

Suy ra AH là khoảng cách từ A đến (SBC):

$$AH=d\left(A,(SBC)\right)=\frac{\left|4.\frac{a\sqrt{3}}{2}+\sqrt{3}.0\right|}{\sqrt{4^2+\sqrt{3}^2}}=\frac{2\sqrt{3}a}{\sqrt{19}}=\frac{2\sqrt{57}}{19}a$$

$$\begin{cases}\overrightarrow{MS}=\left(\frac{-2a}{5};\frac{2a\sqrt{3}}{5};\frac{8a}{5}\right)\\\overrightarrow{NS}=\left(\frac{2a}{5};\frac{2a\sqrt{3}}{5};\frac{8a}{5}\right)\end{cases}\Rightarrow\left[\overrightarrow{MS},\overrightarrow{NS}\right]=\left(0;\frac{32a^2}{25};\frac{-8a^2\sqrt{3}}{25}\right)$$

$$\Rightarrow S_{\Delta SMN}=\frac{1}{2}\left\|\left[\overrightarrow{MS},\overrightarrow{NS}\right]\right\|=\frac{1}{2}\sqrt{0^2+\left(\frac{32a^2}{25}\right)^2+\left(\frac{-8a^2\sqrt{3}}{25}\right)^2}=\frac{8.a^2\sqrt{19}}{50}$$

Ta có: $M\left(\frac{2a}{5};\frac{a\sqrt{3}}{10};\frac{2a}{5}\right)$ $S\left(0;\frac{a\sqrt{3}}{2};2a\right)$

$$S_{MNCB}=S_{SBC}-S_{SMN}=\frac{\sqrt{19}.a^2}{4}-\frac{8.a^2\sqrt{19}}{50}=\frac{25\sqrt{19}.a^2}{100}-\frac{16.a^2\sqrt{19}}{100}=\frac{9\sqrt{19}}{100}.a^2$$

Vậy thể tích khối chóp A.BCMN là

$$V_{S.BCNM}=\frac{1}{3}.AH.S_{BCNM}=\frac{1}{3}.\frac{2\sqrt{3}.a}{\sqrt{19}}.\frac{9\sqrt{19}}{100}=\frac{3\sqrt{3}a^3}{50}$$

B2005

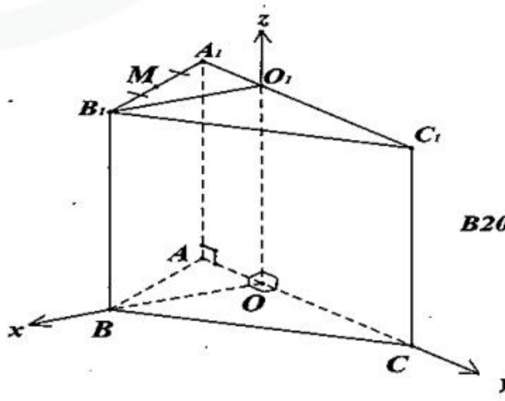
Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$ cho hình lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$ với $A(0;-3;0)$; $B(4;0;0)$; $C(0;3;0)$; $B_1(4;0;4)$. Tìm toạ độ các đỉnh $A_1;C_1$. Viết phương trình mặt cầu có tâm là A và tiếp xúc với mặt phẳng (BCC_1B_1). Gọi M là trung điểm của A_1B_1. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua hai điểm A, M và song song với BC_1.

➤ **Lời giải:**

Chọn hệ trục toạ độ Đêcac vuông góc $Oxyz$ như sau: $O(0;0;0)$;

Với $A(0;-3;0)$; $B(4;0;0)$; $C(0;3;0)$; $B_1(4;0;4)$

$$\Rightarrow \begin{cases} A_1(0;-3;4) \\ C_1(0;3;4) \end{cases}$$



B2005

Toạ độ trung điểm M của A_1B_1

$M\left(2;-\frac{3}{2};4\right)$

Toạ độ hai đỉnh $A_1;C_1$.

Ta có: $A_1(0;-3;4)\in mp(Oyz)$

$C_1(0;3;4)\in mp(Oyz)$

Phương trình mặt cầu có tâm là A và tiếp xúc với mặt phẳng (BCC_1B_1)

Viết phương trình mp (BCC_1B_1) .

Tìm bán kính của mặt cầu (S) $R=d\left(A,(BCC_1B_1)\right)$.

Vectơ pháp tuyến của mp (BCC_1B_1) $\vec{n}=[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BB_1}]=(12;\ 16;\ 0)$.

Phương trình tổng quát của mp $(BCC_1B_1):(BCC_1B_1):3x+4y-12=0$.

Bán kính của mặt cầu (S): $R=\dfrac{24}{5}$.

Phương trình mặt cầu (S) $:x^2+(y+3)^2+z^2=\dfrac{576}{25}$.

Phương trình mặt phẳng (P): ???

Tìm vectơ pháp tuyến của (P) $\begin{cases}AM\subset(P)\\BC_1\ //\ (P)\end{cases}\Rightarrow\overrightarrow{n_P}=[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{BC_1}]$.

$\overrightarrow{AM}=\left(2;\dfrac{3}{2};4\right)$; $\overrightarrow{BC_1}=(-4;3;4)$.

Vectơ pháp tuyến của (P): $\overrightarrow{n_P}=[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{BC_1}]=(-6;-24;12)$.

Phương trình mặt phẳng $(P):x+4y-2z+12=0$.

B2005

Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$ cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi. AC cắt BD tại gốc toạ độ O. Biết $A(2;0;0)$; $B(0;1;0)$; $S(0;0;2\sqrt{2})$. Gọi M là trung điểm của SC .

1. Tính góc và khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BM

2. Giả sử mặt phẳng (ABM) cắt đường thẳng SD tại N.

Tính thể tích khối chóp S.ABMN.

➢ **Lời giải:**

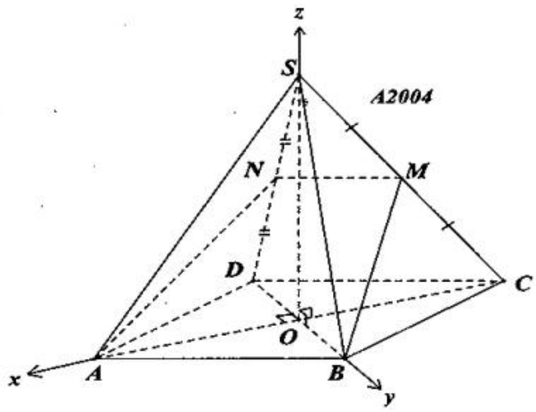
Chọn hệ trục toạ độ Đê cac vuông góc $Oxyz$ như sau:

$O(0;0;0)$, $A(2;0;0)$, $B(0;1;0)$, $S(0;0;2\sqrt{2})$.

Ta có:

$C(-2;0;0)$, $D(0;-1;0)$, $M(-1;0;\sqrt{2})$, $\overrightarrow{SA}=\left(2;0;-2\sqrt{2}\right)$, $\overrightarrow{BM}=\left(-1;-1;\sqrt{2}\right)$

1.a) Tính góc giữa SA và BM.



Gọi α là góc giữa SA và BM. Sử dụng công thức tính góc giữa hai đường thẳng.

Ta có: $\cos\alpha = \left|\cos\left(\overrightarrow{SA},\overrightarrow{BM}\right)\right|$

$$= \frac{\left|\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{BM}\right|}{\left|\overrightarrow{SA}\right|\left|\overrightarrow{BM}\right|} = \frac{6}{4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha = 30^o$$

1.b) Tính khoảng cách giữa SA và BM.

Chứng minh SA và BM chéo nhau Sử dụng công thức tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

$[\overrightarrow{SA},\overrightarrow{BM}] = \left(-2\sqrt{2};0;-2\right)$, $\overrightarrow{AB} = \left(-2;1;0\right)$, $\left[\overrightarrow{SA},\overrightarrow{BM}\right].\overrightarrow{AB} = 4\sqrt{2} \neq 0$.

$$d\left(SA,BM\right) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{SA},\overrightarrow{BM}\right].\overrightarrow{AB}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{SA},\overrightarrow{AB}\right]\right|} = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{8+4}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}.$$

2. Tính thể tích khối chóp S.ABMN.

Dễ dàng nhận thấy: $MN = \left(ABM\right)\cap\left(SCD\right)$.

$V_{S.ABMN} = V_{S.ABM} + V_{S.AMN}$

Trong đó: $V_{S.ABM} = \frac{1}{6}\left|[\overrightarrow{SA},\overrightarrow{SM}].\overrightarrow{SB}\right|$; $V_{S.AMN} = \frac{1}{6}\left|[\overrightarrow{SA},\overrightarrow{SM}].\overrightarrow{SN}\right|$.

$MN // AB // CD \Rightarrow$ N là trung điểm của SD. Toạ độ trung điểm $N\left(0;-\frac{1}{2};\sqrt{2}\right)$

$\overrightarrow{SA} = (2;0;-2\sqrt{2})$; $\overrightarrow{SM}(-1;0;-\sqrt{2})$, $\overrightarrow{SB} = (0;1;-2\sqrt{2})$, $\overrightarrow{SM}(-1;0;-\sqrt{2})$

$\Rightarrow \left[\overrightarrow{SA},\overrightarrow{SM}\right] = \left(0;4\sqrt{2};0\right)$.

$$V_{S.ABM} = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{SA},\overrightarrow{SM}\right].\overrightarrow{SB}\right| = \frac{4\sqrt{2}}{6} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \text{ (đvtt).}$$

$$V_{S.AMN} = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{SA},\overrightarrow{SM}\right].\overrightarrow{SN}\right| = \frac{2\sqrt{2}}{6} = \frac{\sqrt{2}}{3} \text{ (đvtt).}$$

Vậy $V_{S.ABMN} = V_{S.ABM} + V_{S.AMN} = \sqrt{2}$ (đvtt).

ĐH B2004

Cho hình tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy bằng a. Góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng φ $(0^0 < \varphi < 90^0)$. Tính tan của góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (ABCD) theo φ. Tính thể tích khối chóp S.ABCD theo a và φ.

➢ **Lời giải:**

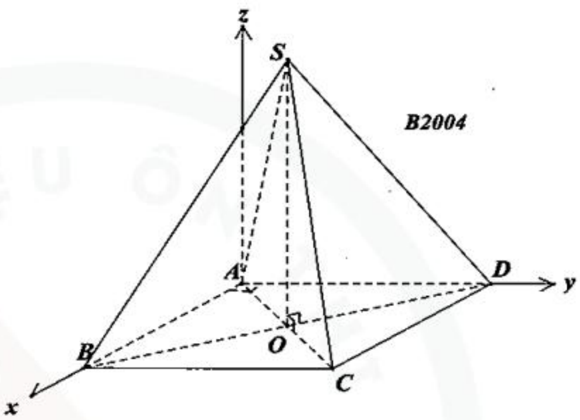
Gọi O là giao AC và BD.

Do hình chóp tứ giác đều nên $SO \perp (ABCD)$.

Kẻ Az//SO. Do AB,AD,Az đôi một vuông góc tại A nên chọn hệ trục tọa độ Axyz như hình vẽ:

- A trùng với gốc tọa độ.

Tia Ax, Ay, Az lần lượt đi qua B, D, z.



Khi đó: A(0;0;0), $B(a;0;0), D(0;a;0), C(a;a;0), O\left(\frac{a}{2};\frac{a}{2};0\right), S\left(\frac{a}{2};\frac{a}{2};h\right)$,

Ta có: $\overrightarrow{SA}\left(\frac{a}{2};\frac{a}{2};h\right)$

Phương trình mặt phẳng (ABCD): z=0 có véc tơ pháp tuyến $\vec{n}_{ABCD} = (0;0;1)$

Do góc giữa cạnh bên SA và mặt đáy (ABCD) bằng φ $(0^0 < \varphi < 90^0)$.
Nên ta có:

$$\sin\varphi = \frac{\left|\vec{n}_{ABCD}.\overrightarrow{SA}\right|}{\left|\vec{n}_{ABCD}\right|.\left|\overrightarrow{SA}\right|} = \frac{\left|0.\frac{a}{2}+0.\frac{a}{2}+h.1\right|}{\sqrt{0^2+0^2+1^2}.\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2+h^2}} = \frac{2h}{\sqrt{4h^2+2a^2}}$$

$$\Rightarrow \tan^2\varphi = \frac{1}{\cos^2\varphi} - 1 = \frac{1}{1-\sin^2\varphi} - 1 = \frac{1}{1-\frac{4h^2}{4h^2+2a^2}} - 1 = \frac{4h^2}{2a^2} \Leftrightarrow \tan\varphi = \frac{\sqrt{2}h}{a} \quad (1)$$

Gọi là α góc giữa mặt bên (SAB) và mặt đáy (ABCD) .

Ta có: $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (a;0;0) \\ \overrightarrow{AS} = \left(\dfrac{a}{2};\dfrac{a}{2};h\right) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{n_{SAB}} = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AS}\right] = \left(0;-ah;\dfrac{a^2}{2}\right) // (0;-2h;a)$

$$\cos\left((SAB),(ABCD)\right) = \cos\alpha = \frac{|0.0 - 2h.0 + a.1|}{\sqrt{4h^2+a^2}\sqrt{0^2+0^2+1^2}} = \frac{|a|}{\sqrt{4h^2+a^2}}$$

$$\Rightarrow \tan^2 \quad = \frac{1}{\cos^2\alpha} - 1 = \frac{4h^2+a^2}{a^2} - 1 = \left(\frac{2h}{a}\right)^2 \Rightarrow \tan \quad = \frac{2h}{a} \ (2)$$

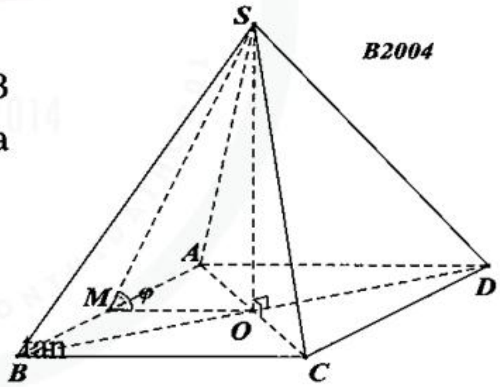
Từ (1) và (2): $\dfrac{\tan\alpha}{\tan\varphi} = \left(\dfrac{2h}{a}\right) : \left(\dfrac{\sqrt{2}h}{a}\right) = \sqrt{2} \Leftrightarrow \tan\alpha = \sqrt{2}\tan\varphi$

Khi đó $(1) \Rightarrow h = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}\tan\varphi$

Thể tích khối chóp tứ diện đều là

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}.S_{ABCD}.SO = \frac{1}{3}.a^2.\frac{a\sqrt{2}}{2}\tan\varphi = \frac{\sqrt{2}}{6}.a^3.\tan\varphi$$

❖ ***Phương pháp lời giải thuần túy :***



Gọi giao điểm của AC và BD là O thì

Suy ra $SA0 = \varphi$. Gọi trung điểm của AB là M thì $OM \perp AB$ và $SM \perp AB \Rightarrow$ Góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (ABCD) là $\widehat{SMO}$.

Tam giác OAB vuông cân tại O.

nên: $OM = \dfrac{a}{2}, OA = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ $\quad SO$

$\Rightarrow SO = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}\tan\varphi$

Do đó:

$\tan\widehat{SMO} = \dfrac{SO}{OM} = \sqrt{2}\tan\varphi.$

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}.S_{ABCD}.SO = \frac{1}{3}.a^2.\frac{a\sqrt{2}}{2}\tan\varphi = \frac{\sqrt{2}}{6}.a^3.\tan\varphi$$

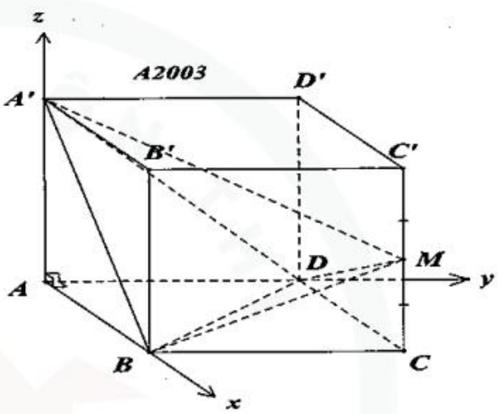
A2003

Trong không gian với hệ tọa độ Đề các vuông góc Oxyz, cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có A trùng với gốc của hệ trục tọa độ biết $B(a;0;0), D(0;a;0), A'(0;0;b), (a>0, b>0)$. Gọi M là trung điểm cạnh CC'.

a) Tính theo a thể tích khối tứ diện $BDA'M$ theo a và b

b) Xác định tỉ số $\frac{a}{b}$ để hai mặt phẳng $(A'BD)$ và (MBD) vuông góc với nhau.

➢ **LờLời giải:**



Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.

Khi đó: $C(a;a;0), C'(a;a;b)$.

M là trung điểm $CC' => M\left(a;a;\frac{b}{2}\right)$

a) Ta có: $\begin{cases} \overrightarrow{BD}=(-a;a;0) \\ \overrightarrow{BM}=\left(0;a;\frac{b}{2}\right) \\ \overrightarrow{BA'} \end{cases}$

$=> \begin{cases} \left[\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BM}\right]=\left(\frac{ab}{2};\frac{ab}{2};-a^2\right) \\ \left[\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BM}\right].\overrightarrow{BA'}=-\frac{3a^2b}{2} \end{cases}$

$=> V_{BDA'M}=\frac{1}{6}.\left|\left[\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BM}\right].\overrightarrow{BA'}\right|=\frac{a^2b}{6}.$

b) Ta có: $\begin{cases} \overrightarrow{BD}=(-a;a;0) \\ \overrightarrow{BA'}=(-a;0;b) \end{cases} => \left[\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BA'}\right]=(ab;ab;a^2)$

Mặt phẳng $(A'BD)$ có vtpt $\vec{n_1}=\left[\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BA'}\right]=(ab;ab;a^2)$

Mặt phẳng (MBD) có vtpt $\vec{n_2}=\left[\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BM}\right]=\left(\frac{ab}{2};\frac{ab}{2};-a^2\right)$

Mặt phẳng $(A'BD)$ và (MBD) vuông góc

$$\Rightarrow \vec{n_1}.\vec{n_2}=0 \Leftrightarrow \frac{a^2b^2}{2}+\frac{a^2b^2}{2}-a^4=0 \Leftrightarrow a^2b^2=a^4 \Leftrightarrow a=b \Leftrightarrow \frac{a}{b}=1.$$

A2003

Cho hình lập phương ABCD .
Tính số đo của góc nhị diện [B,A′C,D] .

> **Lời giải:**

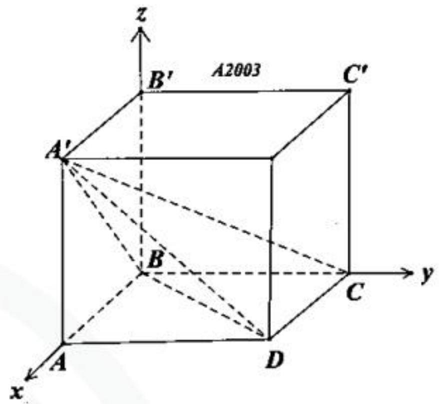
Do BB′,BC,BA đôi một vuông góc tại A

Nên chọn hệ trục tọa độ Bxyz như hình vẽ:

- B trùng với gốc tọa độ .

Tia Bx, By, Bz lần lượt đi qua A,C,B′

Khi đó:



B(0;0;0), $A(a;0;0), C(0;a;0)$,

$D(a;a;0), B'(0;0;a), A'(a;0;a)$,

Ta có:

$$\begin{cases}\overrightarrow{BA'}(a;0;a)\\ \overrightarrow{BC}(0;a;0)\end{cases} \Rightarrow \vec{n}_{A'BC} = \left(-a^2;0;a^2\right)//\left(1;0;-1\right) = \vec{n}_1 .$$

Là véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng (A′BC) .

Ta có: $\begin{cases}\overrightarrow{DA'}(0;-a;a)\\ \overrightarrow{DC}(-a;0;0)\end{cases} \Rightarrow \vec{n}_{A'DC} = \left(0;-a^2;-a^2\right)//\left(0;1;1\right) = \vec{n}_2$

là véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng (A′DC) .

Số đo góc nhị diện [B,A′C,D] là số đo góc tạo bởi 2 mặt phẳng (A′BC) và (A′CD) : $\cos\varphi = \dfrac{\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|.\left|\overrightarrow{n_2}\right|} = \dfrac{0.1+1.0-1.1}{\sqrt{1^2+0^2+(-1)^2}.\sqrt{0^2+1^2+1^2}} = \dfrac{-1}{2} \Rightarrow \varphi = 120^0$

Cách 1: Đặt AB = a .

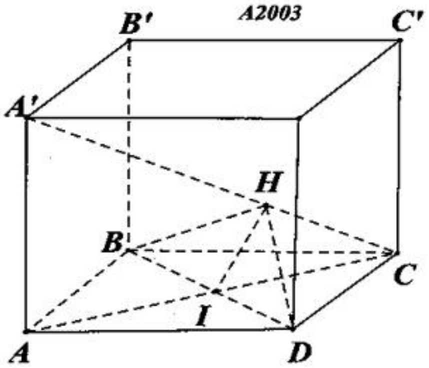
Gọi H là hình chiếu vuông góc của B trên A′C, suy ra mà $BH \perp A'C$ mà do đó. Vậy góc phẳng nhị diện $\left[B, A'C, D\right]$ là góc $\widehat{BHD}$.

Xét $\Delta A'DC$ vuông tại D.

Có DH là đường cao, ta có:

$DH.A'C = CD.A'D$

$\Rightarrow DH = \dfrac{CD.A'D}{A'C} = \dfrac{a.a\sqrt{2}}{a\sqrt{3}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$



Tương tự, vuông tại B có BH là đường cao $BH = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

Mặt khác:

$$2a^2 = BD^2 = BH^2 + DH^2 - 2BH.DH.\cos\widehat{BHD} = \frac{2a^2}{3} + \frac{2a^2}{3} - 2.\frac{2a^2}{3}\cos\widehat{BHD}$$

Do đó $\cos\widehat{BHD} = \dfrac{-1}{2} \Rightarrow \widehat{BHD} = 120^0$

Cách 2: Ta có $BD \perp AC \Rightarrow BD \perp A'C$ (Định lý ba đường vuông góc)

Tương tự: $BC' \perp A'C \Rightarrow (BC'D) \perp A'C$. Gọi H là giao điểm của A′C và (BC′D) suy ra $\widehat{BHD}$ là góc phẳng của $[B, A'C, D]$.

Các tam giác $HA'B, HA'C, HA'C'$ bằng nhau suy ra HB=HC′=HD suy ra H là tâm của tam giác đều BC′D nên $\widehat{BHD} = 120^0$.

B2003

Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, góc $\widehat{BAD} = 60°$. Gọi M là trung điểm cạnh AA' và N là trung điểm cạnh CC'. Chứng minh rằng bốn điểm B', M, D, N cùng thuộc một mặt phẳng. Hãy tính độ dài cạnh AA' theo a để tứ giác $B'MDN$ là hình vuông.

➢ **Lời giải:**

Ta có $AB = AD, \widehat{BAD} = 60°$.

Suy ra ΔABD đều $\Rightarrow OA = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow OB = \sqrt{AB^2 - OA^2} = \dfrac{a}{2}$

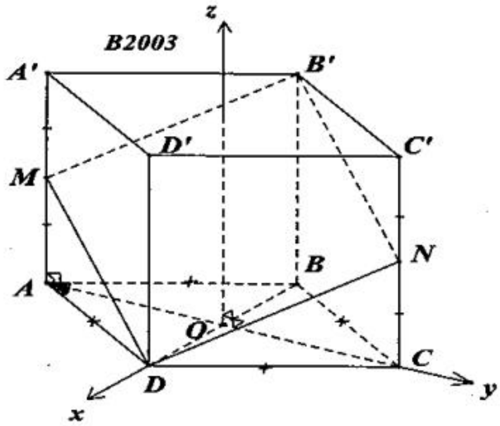
Giả sử $AA' = h$. Gọi O là giao điểm của AC và BD. Chọn hệ trục tọa độ Oxyz như hình vẽ, các trục Ox, Oy lần lượt đi qua các điểm D, C, $Oz // AA'$.

Khi đó: $O(0;0;0), A\left(0;-\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right)$,

$B\left(-\frac{a}{2};0;0\right), C\left(0;\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right), D\left(\frac{a}{2};0;0\right)$,

$A'\left(0;-\frac{a\sqrt{3}}{2};h\right)$, $B'\left(-\frac{a}{2};0;h\right)$,

$C'\left(0;\frac{a\sqrt{3}}{2};h\right), D'\left(\frac{a}{2};0;h\right)$



M,N lần lượt là trung điểm cạnh $AA', CC' \Rightarrow M\left(0;-\frac{a\sqrt{3}}{2};\frac{h}{2}\right), N\left(0;\frac{a\sqrt{3}}{2};\frac{h}{2}\right)$

Ta có:

$$\begin{cases} \overrightarrow{DM} = \left(-\frac{a}{2};-\frac{a\sqrt{3}}{2};\frac{h}{2}\right) \\ \overrightarrow{DN} = \left(-\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};\frac{h}{2}\right) \\ \overrightarrow{DB'} = (-a;0;h) \end{cases} \Rightarrow \left[\overrightarrow{DM},\overrightarrow{DN}\right] = \left(-\frac{ah\sqrt{3}}{2};0;\frac{a^2\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow \left[\overrightarrow{DM},\overrightarrow{DN}\right].\overrightarrow{DB'} = 0$$

Bốn điểm B', M, D, N cùng thuộc một mặt phẳng.

Ta có:

$B'N = DN = DM = MB' = \sqrt{a^2 + \frac{h^2}{4}} \Rightarrow$ tứ giác $B'MDN$ là hình thoi.

Để tứ giác $B'MDN$ là hình vuông thì:

$DM \perp DN \Leftrightarrow \overrightarrow{DM}.\overrightarrow{DN} = 0 \Leftrightarrow \frac{a}{2}.\frac{a}{2} - \frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{a\sqrt{3}}{2} + \frac{h}{2}.\frac{h}{2} = 0 \Leftrightarrow h = a\sqrt{2} = AA'$.

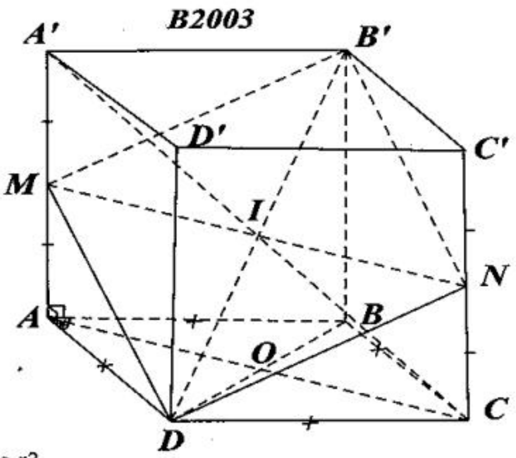
Vậy với $AA' = a\sqrt{2}$ thì tứ giác $B'MDN$ là hình vuông.

❖ ***Lời giải bằng hình học thuần túy:***

Ta có A′M//=NC

Suy ra A′MCN là hình bình hành.

Do đó A′C và MN cắt nhau tại trung điểm I của mỗi đường. Mặt khác A′DCB′ là hình bình hành nên I là trung điểm của A′C cũng chính là trung điểm của B′D. Vậy MN và B′D cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường nên B′MDN là hình bình hành. Do đó B′, M, D, N cùng thuộc một mặt phẳng.



Mặt khác:

$DM^2 = DA^2 + AM^2 = DC^2 + CN^2 = DN^2$
hay DM=DN.

Vậy hình bình B′MDN là hình thoi.

Do đó B′MDN là hình vuông.

$\Leftrightarrow MN = B'D \Leftrightarrow AC = B'D \Leftrightarrow AC^2 = B'D^2 = BB'^2 + BD^2$

$\Leftrightarrow 3a^2 = BB'^2 + a^2 \Leftrightarrow BB' = a\sqrt{2} \Leftrightarrow AA' = a\sqrt{2}$

ĐH2003

Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau, có giao tuyến là đường thẳng Δ. Trên Δ lấy hai điểm A, B với AB = a. Trong mặt phẳng (P) lấy điểm C, trong mặt phẳng (Q) lấy điểm D sao cho AC, BD cùng vuông góc với Δ và AB = AC = BD. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD và tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (BCD) theo a.

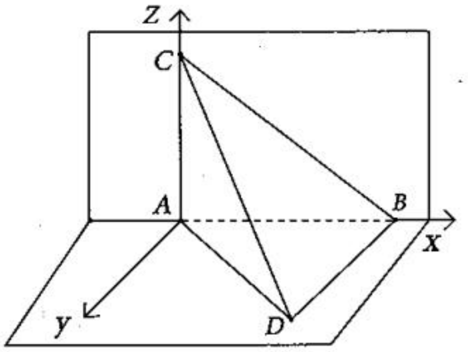
➢ **Lời giải:**

Chọn hệ trục tọa độ Axyz như hình vẽ với các trục Ax, Ay, Az lần lượt đi qua các điểm B, A, C. Khi đó: $A(0;0;0), B(a;0;0), C(0;0;a), D(a;a;0), (a > 0)$.

Gọi $I(x;y;z)$ và R lần lượt là tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD.

Ta có: $IA = IB = IC = ID \Leftrightarrow \begin{cases} IA^2 = IB^2 \\ IA^2 = IC^2 \\ IA^2 = ID^2 \end{cases}$

$$<=>\begin{cases}x^2+y^2+z^2=(a-x)^2+y^2+z^2\\x^2+y^2+z^2=x^2+y^2+(a-z)^2\\x^2+y^2+z^2=(a-x)^2+(a-y)^2+z^2\end{cases}$$



$$<=>\begin{cases}x=\dfrac{a}{2}\\y=\dfrac{a}{2}=>I(\dfrac{a}{2};\dfrac{a}{2};\dfrac{a}{2})=>R=IA=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\\z=\dfrac{a}{2}\end{cases}$$

Ta có: $\begin{cases}\overrightarrow{BC}=(-a;0;a)\\\overrightarrow{BD}=(0;a;0)\end{cases}=>\left[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}\right]=(-a^2;0;a^2)=-a^2(1;0;-1)=a^2.\vec{n}$

với $\vec{n}=(1;0;-1)$

Mặt phẳng $(BCD)\begin{cases}qua & B(a;0;0)\\vtpt & \vec{n}(1;0;-1)\end{cases}$.

Nên có phương trình $1(x-a)-1(z-0)=0$.

Hay $x-z-a=0=>d\left(A,(BCD)\right)=\dfrac{|-a|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

Vậy $d\left(A,(BCD)\right)=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

❖ **Lời giải thuần túy :**

Ta có $(P)\perp(Q)$ và $\Delta=(P)\cap(Q)$.

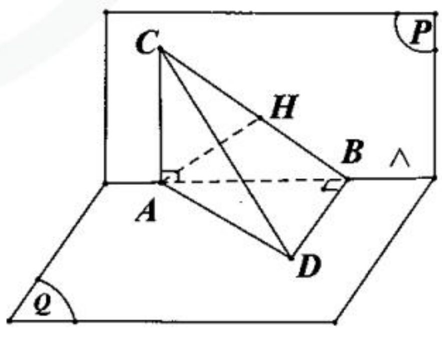
Mà:

$AC\perp\Delta\Rightarrow AC\perp(Q)\Rightarrow AC\perp AD,$

Hay : $\widehat{CAD}=90^0$ tương tự.

Ta có $BD\perp\Delta$ nên $BD\perp(P)$ do đó $\widehat{CBD}=90^0$. Vậy A và B nằm trên mặt cầu đường kính CD .

D2003



Và bán kính của mặt cầu là $R=CD=\dfrac{1}{2}\sqrt{BC^2+BD^2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{AB^2+AC^2+BD^2}=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Gọi H là trung điểm của BC suy ra $AH \perp BC$.

Do nên Vậy AH là khoảng cách từ A đến mặt phẳng (BCD) .

Và $AH = \frac{1}{2}BC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

A2002

Cho hình chóp tam giác đều S.ABC có độ dài cạnh đáy là a. Gọi M, N là trung điểm SB,SC. Tính theo a diện tích Δ AMN, biết (AMN) vuông góc với (SBC)

➤ **Lời giải:**

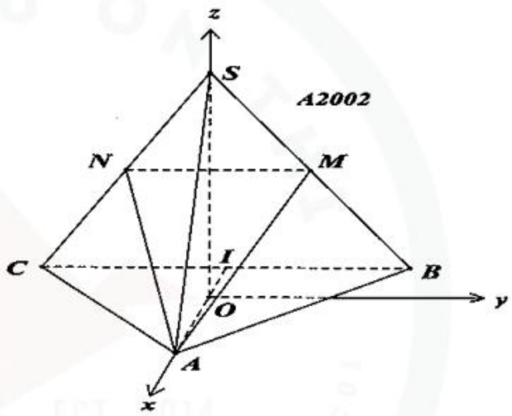
Gọi O là hình chiếu của S trên (ABC), ta suy ra O là trọng tâm ΔABC.

Gọi I là trung điểm của BC.

Ta có:

$AI = \frac{\sqrt{3}}{2}BC = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow OA = \frac{a\sqrt{3}}{3},\ OI = \frac{a\sqrt{3}}{6}$



Trong mp(ABC), ta vẽ tia Oy vuông góc với OA, đặt SO = h,

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ ta được: O(0; 0; 0), S(0; 0; h), $A\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}; 0; 0\right)$

$\Rightarrow I\left(-\frac{a\sqrt{3}}{6}; 0; 0\right), B\left(-\frac{a\sqrt{3}}{6}; \frac{a}{2}; 0\right)$, C$\left(-\frac{a\sqrt{3}}{6}; -\frac{a}{2}; 0\right)$, M$\left(-\frac{a\sqrt{3}}{12}; \frac{a}{4}; \frac{h}{2}\right)$

và $N\left(-\frac{a\sqrt{3}}{12}; -\frac{a}{4}; \frac{h}{2}\right)$.

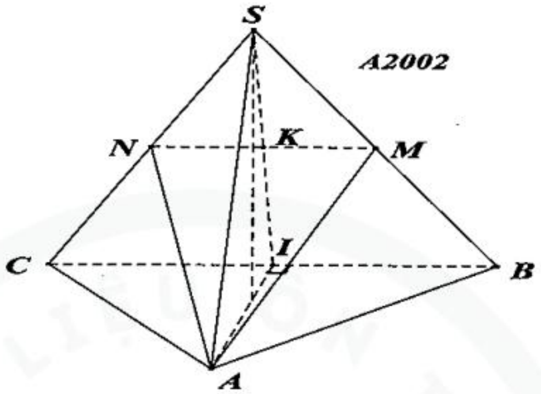
$\Rightarrow \vec{n}_{(AMN)} = \left[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN}\right] = \left(\frac{ah}{4}; 0; \frac{5a^2\sqrt{3}}{24}\right), \vec{n}_{(SBC)} = \left[\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SC}\right] = \left(-ah; 0; \frac{a^2\sqrt{3}}{6}\right)$

$(AMN) \perp (SBC) \Rightarrow \vec{n}_{(AMN)}.\vec{n}_{(SBC)} = 0$.

$$\Leftrightarrow \frac{ah}{4}.(-ah)+0.0+\frac{5a^2\sqrt{3}}{24}.\left(\frac{a^2\sqrt{3}}{6}\right):$$

$$\Rightarrow h^2=\frac{5a^2}{12}\Rightarrow S_{\Delta AMN}=\frac{1}{2}\left\|\left[\overrightarrow{AM},\ \overrightarrow{AN}\right]\right\|=\frac{a^2\sqrt{10}}{16}.$$

❖ ***Lời giải bằng hình học thuần túy :***



Gọi I là trung điểm của BC và $K=SI\cap MN$

Từ giả thiết $MN=\frac{1}{2}BC=\frac{a}{2}, MN//BC\Rightarrow K$ là trung điểm của SI và MN.

Ta có $\Delta SAB=\Delta SAC\Rightarrow$ hai đường trung tuyến tương ứng AM=AN

$\Rightarrow \Delta SAI$ cân tại A $\Rightarrow AK\perp MN$

Mặt khác $\begin{cases}(SBC)\perp(AMN)\\(SBC)\cap(AMN)=MN\\AK\subset(AMN)\\AK\perp MN\end{cases}\Rightarrow AK\perp(SBC)\Rightarrow AK\perp SI$

Suy ra cân tại A $\Rightarrow SA=AI=\frac{a\sqrt{3}}{2}; SI^2=SB^2-BI^2=\frac{3a^2}{4}-\frac{a^2}{4}=\frac{a^2}{2}$

$$\Rightarrow AK=\sqrt{SA^2-SK^2}=\sqrt{SA^2-\left(\frac{SI}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{3a^2}{4}-\frac{a^2}{8}}=\frac{a\sqrt{10}}{4}$$

Ta có $S_{\Delta AMN}=\frac{1}{2}MN.AK=\frac{a^2\sqrt{10}}{16}$;

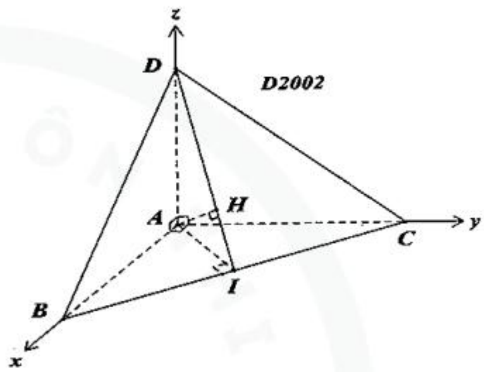
D2002

Cho hình tứ diện ABCD có cạnh AD vuông góc với mặt phẳng (ABC); $AC = AD = 4cm$; $AB = 3cm$; $BC = 5cm$. Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (BCD).

➢ **Lời giải:**

ΔABC có: $AB^2 + AC^2 = BC^2 = 25$ nên vuông tại A Chọn hệ trục toạ độ Đêcac vuông góc $Oxyz$ như sau $O \equiv A(0;0;0)$, $B(3;0;0)$, $C(0;4;0)$, $D(0;0;4)$.

Tính $AH = d\left(A,(BCD)\right)$.



Phương trình tổng quát của mặt phẳng:

$(BCD): \dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{4} + \dfrac{z}{4} = 1$.

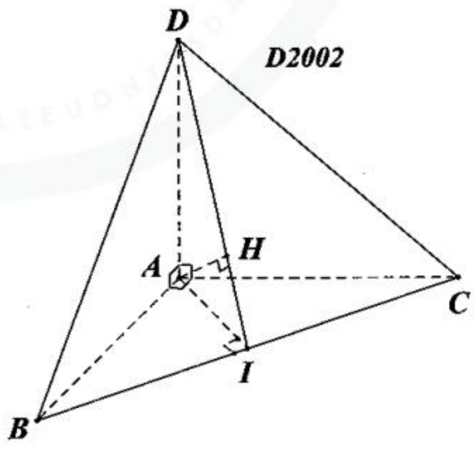
$\Leftrightarrow 4x + 3y + 3z - 12 = 0$

Sử dụng công thức tính khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng

$$d\left(A,(BCD)\right) = \frac{|-12|}{\sqrt{16+9+9}} = \frac{12}{\sqrt{34}} = \frac{6\sqrt{34}}{17}.$$

Cách 2:

Từ giải thiết suy ra tam giác ABC vuông tại A, do đó $AB \perp AC$ lại có $AD \perp mp(ABC) \Rightarrow AD \perp AB$ và $AD \perp AC$ nên AB,AC,AC đôi một vuông góc với nhau. Gọi AI là đường cao của tam giác ABC, AH là đường cao của tam giác ADI thì AH chính là khoảng cách cần tính.



Dễ dàng chứng minh được hệ thức: $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AD^2} + \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2}$

Thay AC=AD=4cm, AB=3cm vào hệ thức trên ta tính được:

$$\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{AD^2}+\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{AC^2}=\frac{1}{4^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}=\frac{17}{72}\Rightarrow AH=\frac{6\sqrt{34}}{17}$$

Cách 3: Từ giả thiết suy ra ABC vuông tại A, do đó $AB\perp AC$ lại có $AD\perp mp\left(ABC\right)\Rightarrow AD\perp AC$, và AB,AC,AD đôi một vuông góc với nhau .

Gọi V là thể tích tứ diện ABCD, ta có $V=\frac{1}{6}AB.AD.AC=\frac{1}{6}.4.4.3=8$

Áp dụng công thức: $AH=\frac{3V_{A.BCD}}{S_{\Delta BCD}}=\frac{3.8}{2\sqrt{34}}=\frac{12}{\sqrt{34}}=\frac{6\sqrt{34}}{17}$ với V=8 và ta tính được:

$$S_{BCD}=\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{5+5+4\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{5+5+4\sqrt{2}}{2}-5\right)\left(\frac{5+5+4\sqrt{2}}{2}-5\right)\left(\frac{5+5+4\sqrt{2}}{2}-4\sqrt{2}\right)}=2\sqrt{34}$$

Khi biết: $BC=\sqrt{AC^2+AB^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5;$

$BD=\sqrt{AD^2+AB^2}=\sqrt{4^2+3^2}=5;DC=\sqrt{4^2+4^2}=4\sqrt{2}$

MỤC LỤC

Thay AC=AD=4cm, AB=3cm vào hệ thức trên ta tính được:

$$\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{AD^2}+\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{AC^2}=\frac{1}{4^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}=\frac{17}{72}\Rightarrow AH=\frac{6\sqrt{34}}{17}$$

Cách 3: Từ giả thiết suy ra ABC vuông tại A, do đó $AB\perp AC$ lại có $AD\perp mp(ABC)\Rightarrow AD\perp AC$, và AB,AC,AD đôi một vuông góc với nhau .

Gọi V là thể tích tứ diện ABCD, ta có $V=\frac{1}{6}AB.AD.AC=\frac{1}{6}.4.4.3=8$

Áp dụng công thức: $AH=\frac{3V_{A.BCD}}{S_{\Delta BCD}}=\frac{3.8}{2\sqrt{34}}=\frac{12}{\sqrt{34}}=\frac{6\sqrt{34}}{17}$ với V=8 và ta tính được:

$$S_{BCD}=\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{5+5+4\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{5+5+4\sqrt{2}}{2}-5\right)\left(\frac{5+5+4\sqrt{2}}{2}-5\right)\left(\frac{5+5+4\sqrt{2}}{2}-4\sqrt{2}\right)}=2\sqrt{34}$$

Khi biết: $BC=\sqrt{AC^2+AB^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5;$

$BD=\sqrt{AD^2+AB^2}=\sqrt{4^2+3^2}=5; DC=\sqrt{4^2+4^2}=4\sqrt{2}$

MỤC LỤC

Thay AC=AD=4cm, AB=3cm vào hệ thức trên ta tính được:

$$\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{AD^2}+\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{AC^2}=\frac{1}{4^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}=\frac{17}{72}\Rightarrow AH=\frac{6\sqrt{34}}{17}$$

Cách 3: Từ giả thiết suy ra ABC vuông tại A, do đó $AB\perp AC$ lại có $AD\perp mp(ABC)\Rightarrow AD\perp AC$, và AB,AC,AD đôi một vuông góc với nhau .

Gọi V là thể tích tứ diện ABCD, ta có $V=\frac{1}{6}AB.AD.AC=\frac{1}{6}.4.4.3=8$

Áp dụng công thức: $AH=\frac{3V_{A.BCD}}{S_{\Delta BCD}}=\frac{3.8}{2\sqrt{34}}=\frac{12}{\sqrt{34}}=\frac{6\sqrt{34}}{17}$ với V=8 và ta tính được:

$$S_{BCD}=\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{5+5+4\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{5+5+4\sqrt{2}}{2}-5\right)\left(\frac{5+5+4\sqrt{2}}{2}-5\right)\left(\frac{5+5+4\sqrt{2}}{2}-4\sqrt{2}\right)}=2\sqrt{34}$$

Khi biết: $BC=\sqrt{AC^2+AB^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5;$

$$BD=\sqrt{AD^2+AB^2}=\sqrt{4^2+3^2}=5;\mathrm{DC}=\sqrt{4^2+4^2}=4\sqrt{2}$$

MỤC LỤC