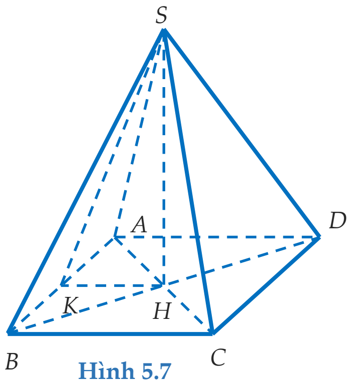
1. Các bài toán tổng quát tính thể tích hình chóp thường gặp

Bài toán 1: **Tính thể tích của một hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ (S là đỉnh, đáy là hình vuông $ABCD$) trong mỗi trường hợp được cho sau đây:**

1. $AB = a,\ \widehat{ASB} = \alpha.$
2. $AB = a,$ góc giữa một cạnh bên và đáy bằng $\beta.$
3. $AB = a,$ góc giữa một mặt bên và đáy bằng $\gamma.$
4. $AB = a$ và bán kính hình cầu ngoại tiếp hình chóp bằng $R.$
5. $AB = a$ và khoảng cách từ đường thẳng AC đến đường thẳng SB bằng $b.$



Hình 5.7

STUDY TIP
Thể tích của khối chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng a, góc giữa cạnh bên và đáy là β thì thể tích là

$$V = \frac{a^3.\tan\beta}{3\sqrt{2}} \text{ (đvtt)}$$

STUDY TIP
Thể tích của khối chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng a, góc giữa mặt bên và đáy là γ thì thể tích là

$$V = \frac{a^3.\tan\gamma}{6} \text{ (đvtt)}$$

1. (Hình 5.7)

Lời giải

Gọi $H = AC \cap BD.$

Kẻ $KH \perp AB\ (K \in AB).$

Ta có K là trung điểm của $AB.$

Khi đó: $SK = \frac{a}{2}.\frac{1}{\tan\frac{\alpha}{2}}$ mà $SH \perp (ABCD)$ nên $SH \perp KH.$

Áp dụng định lý Py-ta-go cho tam giác SKH ta có:

$$SH = \sqrt{SK^2 - KH^2} = \frac{a\sqrt{\cos\alpha}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Lúc này $\boxed{V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}.SH.S_{ABCD} = \frac{a^3\sqrt{\cos\alpha}}{6\sin\frac{\alpha}{2}}}$

2. (Sử dụng hình 5.7)

Lời giải

Giả sử $\widehat{SDH} = \beta.$ Do $ABCD$ là hình vuông cạnh $a,$ nên $HD = \frac{1}{2}BD = \frac{a}{\sqrt{2}}$

$$\Rightarrow SH = \frac{a}{\sqrt{2}}\tan\beta.$$

Vậy thể tích hình chóp là $\boxed{V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}.SH.S_{ABCD} = \frac{a^3.\tan\beta}{3\sqrt{2}}}$

3. Dựng hình tương tự ý 1.

Lời giải

Do $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều nên $SA = SB$ mà K là trung điểm của $AB,$ suy ra $SK \perp AB.$

Mặt khác $KH \perp AB$ nên góc giữa (SAB) và $(ABCD)$ là góc giữa hai tia KS và $KH,$ hay $\widehat{SKH} = \gamma \Rightarrow SH = \frac{a}{2}\tan\gamma.$ Vậy thể tích của khối chóp:

$$\boxed{V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}.SH.S_{ABCD} = \frac{1}{3}.\frac{a}{2}.\tan\gamma.a^2 = \frac{a^3.\tan\gamma}{6}}$$

4.

Lời giải

Gọi O là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ thì O nằm trên đường thẳng $SH.$ Xét hai trường hợp:

- Trường hợp 1: Hai điểm O và S nằm cùng phía so với mặt phẳng $(ABCD)$.

Khi đó: $SH = SO + OH = R + \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{2}}$

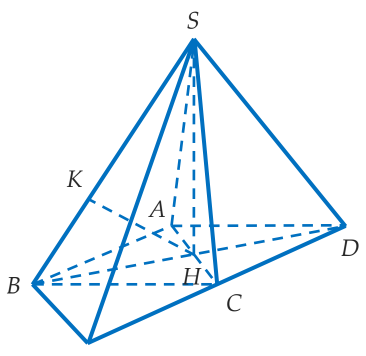
Lúc này $\boxed{V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}.SH.S_{ABCD} = \frac{1}{3}.\left(R + \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{2}}\right).a^2}$

- Trường hợp 2: Hai điểm O và S nằm khác phía so với mặt phẳng $(ABCD)$.

Khi đó: $SH = SO - OH = R - \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{2}}$

Lúc này $\boxed{V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}.SH.S_{ABCD} = \frac{1}{3}.\left(R - \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{2}}\right).a^2}$

5.



Hình 5.8

Lời giải

Kẻ $BD' \,//\, AC$ (D' thuộc tia DC);

$HK \perp SB$ $(K \in SB)$.

Ta thấy $BD' \perp BD$ mà $BD' \perp SH$ nên $BD' \perp (SHB)$

$\Rightarrow BD' \perp KH \Rightarrow HK \perp (SBD')$.

Do $AC \,//\, BD' \Rightarrow AC \,//\, (SBD')$.

Do đó khoảng cách giữa AC và SB là khoảng cách từ điểm H tới mặt phẳng (SBD').

Từ đó HK chính là khoảng cách giữa AC và SB hay $HK = b$.

Sử dụng hệ thức lượng cho tam giác SHB ta có:

$SH = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{b^2} - \frac{2}{a^2}}}$. Lúc này $\boxed{V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}.SH.S_{ABCD} = \frac{a^2}{3\sqrt{\frac{1}{b^2} - \frac{2}{a^2}}}}$

Bài toán 2: Tính thể tích của hình chóp $S.ABCD$, biết rằng cạnh bên $SA = a$ và các cạnh còn lại đều bằng 1.

Lời giải

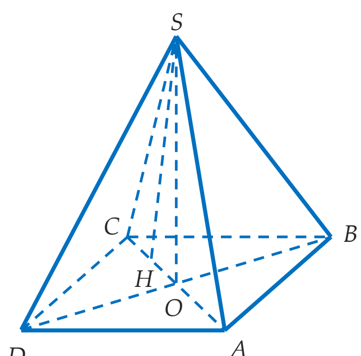
Đáy của hình chóp đã cho là hình thoi $ABCD$.

Vì $SC = SB = SD = 1$, nên chân đường cao H hạ từ S xuống $ABCD$ nằm trên đường trung trực của đoạn BD.

Vì $ABCD$ là hình thoi nên AC là đường trung trực của BD. Suy ra H thuộc đường thẳng AC.

Vậy đường cao của hình chóp cũng là đường cao của tam giác SAC.

Gọi O là giao điểm của các đường chéo AC và BD. Vì $\Delta SBD = \Delta CBD$ (c.c.c), nên $SO = CO = AO$. Từ đó tam giác SAC vuông tại S. Vậy:

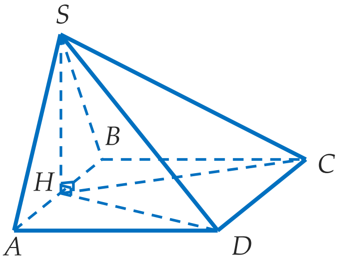


Hình 5.9

$SH.CA = SC.SA \Leftrightarrow \boxed{SH = \frac{a}{\sqrt{a^2 + 1}}}$

Lúc này từ AC đã được tính ở phía trên. BD được tính bằng việc áp dụng định lý Pytago cho các tam giác OCB; COD.

Bài toán 3: Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Giả sử H là trung điểm cạnh AB và hai mặt phẳng $(SHC),(SHD)$ cùng vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính thể tích khối chóp nếu hình chóp có ba mặt bên là tam giác vuông.



Hình 5.10

Lời giải

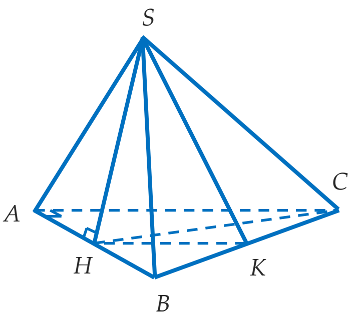
Vì (SHC) và (SHD) cùng vuông góc với đáy $(ABCD)$ nên SH là đường cao của hình chóp. Hai tam giác SAD và SBC lần lượt vuông tại A và B (theo định lí ba đường vuông góc). Tam giác SCD có $SC=SD$ (vì $HC=HD$) nên nó không thể vuông tại C hoặc D. Nếu ΔSCD vuông tại S thì $SC<CD=a$. Nhưng do ΔSBC vuông tại B nên $SC>BC=a$. Từ đó ΔSCD không phải tam giác vuông. Từ giả thiết suy ra ΔSAB phải là tam giác vuông. Do $SA=SB$ (vì $HA=HB$) nên ΔSAB vuông cân tại S, suy ra: $SH=\frac{1}{2}AB=\frac{a}{2}$.

Vậy $\boxed{V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}.S_{ABCD}.SH=\frac{1}{3}.a^2.\frac{a}{2}=\frac{a^3}{6}}$.

Bài toán 4: Cho khối chóp $S.ABC$ có $BC=2a, \widehat{BAC}=90°, \widehat{ACB}=\alpha$. Mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng (ABC), tam giác SAB cân tại S và tam giác SBC vuông. Tính thể tích của hình chóp $S.ABC$.

Lời giải

Tam giác ABC có $AB=2a\sin\alpha, AC=2a\cos\alpha$ nên $S_{ABC}=a^2\sin 2\alpha$.



Hình 5.11

Vì $(SAB)\perp(ABC)$ và $SA=SB$ nên $SH\perp(ABC)$ với H là trung điểm cạnh AB.

Tam giác SBC vuông ở đỉnh nào? Nếu ΔSBC vuông ở B thì $CB\perp BA$ (theo định lí ba đường vuông góc) điều này vô lí vì ΔABC vuông ở A. Tương tự nếu ΔSBC vuông ở C thì $\widehat{HCB}=90°$ (vô lí). Từ đó tam giác SBC vuông tại S.

Gọi K là trung điểm cạnh BC thì

$SK=\frac{1}{2}BC=a, HK // AC$ và $HK=\frac{1}{2}AC=a\cos\alpha$

$\Rightarrow SH^2=SK^2-HK^2=a^2\sin^2\alpha \Rightarrow SH=a\sin\alpha.$

Từ đó $V_{S.ABC}=\frac{1}{3}S_{ABC}.SH=\frac{1}{3}a^2\sin 2\alpha.a.\sin\alpha$

$$\boxed{V_{S.ABC}=\frac{1}{3}a^3\sin 2\alpha\sin\alpha.}$$

Bài toán 5 (đọc thêm): Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang $(ABCD)$ ($AB // CD$). Tính thể tích hình chóp trong mỗi trường hợp sau đây:

1. Biết $AB=AD=BC=a, CD=2a$ và $SA=SB=SC=SD=b$.

2. Biết $AB=AD=BC=a, CD=2a$ và các mặt bên tạo với mặt phẳng đáy những góc bằng γ.

1. (Hình 5.12)

Lời giải

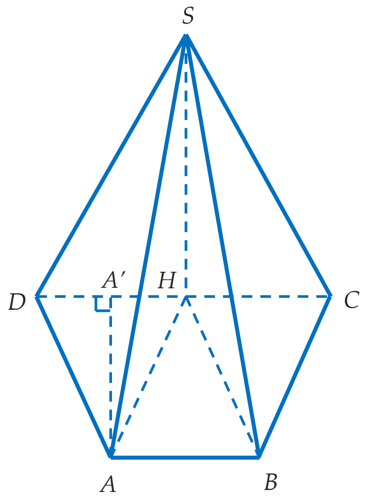
Gọi A' là hình chiếu của A trên CD; H là trung điểm của DC.

Dễ thấy $DA'=\frac{a}{2}\Leftrightarrow$ tam giác ADH là tam giác đều.

Ta có: $\cos\widehat{A'DA}=\dfrac{DA'}{DA}=\dfrac{1}{2}$

nên $\widehat{A'DA}=60°$.

Từ đó suy ra các tam giác HAD, HBC, HAB là các tam giác đều; nên H cách đều bốn đỉnh A,B,C,D. Vì $SA=SB=SC=SD$ nên chân đường cao hạ từ S xuống mặt phẳng $(ABCD)$ nằm trên các đường trung trực của các đoạn thẳng DA, AB, BC và CD. Vậy SH chính là đường cao của hình chóp $S.ABCD$. Ta có: $SH=\sqrt{SD^2-DH^2}=\sqrt{b^2-a^2}$.



Hình 5.12

Lúc này $V_{S.ABCD}=\dfrac{1}{3}.SH.S_{ABCD}=\dfrac{1}{3}.\sqrt{b^2-a^2}.3.S_{ADH}=\sqrt{b^2-a^2}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$

(Do diện tích hình thang là tổng diện tích của 3 tam giác đều bằng nhau).

$$\boxed{\Leftrightarrow V_{SABCD}=\dfrac{a^2\sqrt{3\left(b^2-a^2\right)}}{4}}$$

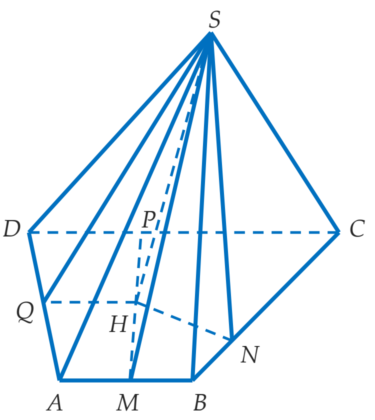
2.

Lời giải

Hạ $SH\perp(ABCD)$; H thuộc mặt phẳng $(ABCD)$.

Gọi M,N,P,Q lần lượt là hình chiếu của H trên AB,BC,CD và DA. Từ điều kiện đã cho ta có $\widehat{SQH}=\widehat{SNH}=\widehat{SPH}=\widehat{SMH}=\gamma$

$\Rightarrow HP=HN=HM=HQ(=r)$.



Hình 5.13

Ta có: $r=\dfrac{PM}{2}=\dfrac{\sqrt{3}a}{4}$.

Vậy $SH=\tan\gamma.\dfrac{\sqrt{3}a}{4}$.

Từ ý 1 ta suy ra $\boxed{V_{S.ABCD}=\dfrac{1}{3}.\tan\gamma.\dfrac{a\sqrt{3}}{4}.\dfrac{3a^2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{3a^3.\tan\gamma}{16}}$

Một số ghi nhớ để xác định đường cao của khối đa diện

TRƯỜNG HỢP 1: Xác định được mặt phẳng (P_1) qua đỉnh (S) và vuông góc với (P) trong đó (P) là mặt phẳng chứa đáy. Gọi Δ là giao tuyến của (P) và (P_1) và H là hình chiếu vuông góc của điểm S lên Δ. Khi đó SH chính là đường cao khối đa diện.

(Ví dụ chính là bài toán 4 ở phía trên).

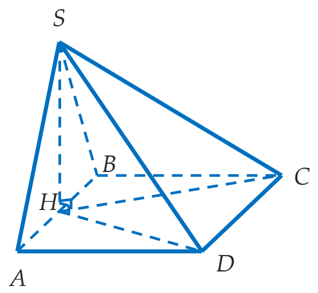
TRƯỜNG HỢP 2: Xác định được hai mặt phẳng $(P_1),(P_2)$ qua đỉnh S của khối đa diện và vuông góc với mặt phẳng đáy (P). Gọi Δ là giao tuyến của (P_1) và (P_2) thì Δ chứa đường cao của khối đa diện đó.

Ví dụ 1: Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Giả sử H là trung điểm cạnh AB và hai mặt phẳng $(SHC),(SHD)$ cùng vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính thể tích khối chóp nếu hình chóp có ba mặt bên là tam giác vuông.

A. $\frac{a^3}{2}$. **B.** $\frac{a^3}{6}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\frac{a^3}{3}$.

Đáp án B.

Lời giải



Vì (SHC) và (SHD) cùng vuông góc với đáy $(ABCD)$ nên SH là đường cao của hình chóp. Hai tam giác SAD và SBC lần lượt vuông tại A và B (theo định lí ba đường vuông góc). Tam giác SCD có $SC=SD$ (vì $HC=HD$) nên nó không thể vuông tại C hoặc D. Nếu ΔSCD vuông tại S thì $SC<CD=a$. Nhưng do ΔSBC vuông tại B nên $SC>BC=a$. Từ đó ΔSCD không phải tam giác vuông. Từ giả thiết suy ra ΔSAB phải là tam giác vuông. Do $SA=SB$ (vì $HA=HB$) nên ΔSAB vuông tại S, suy ra: $SH=\frac{1}{2}AB=\frac{a}{2}$.

Vậy $V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}.S_{ABCD}.SH=\frac{1}{3}.a^2.\frac{a}{2}=\frac{a^3}{6}$.

TRƯỜNG HỢP 3: Xét khối chóp $S.A_1A_2...A_n$ $(n\geq 3)$. Sử dụng mối liên hệ giữa đường xiên, hình chiếu và góc nghiêng, ta có ba mệnh đề sau tương đương:

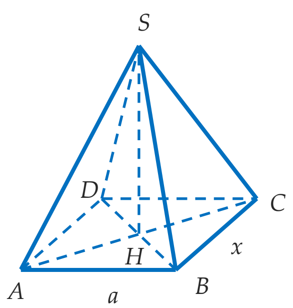
1) Các cạnh bên của hình chóp bằng nhau.

2) Các cạnh bên của hình chóp nghiêng đều trên đáy.

3) Đáy hình chóp nội tiếp được và chân đường cao của hình chóp trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp đáy.

Ví dụ 2: Xét các khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành với $AB=a$. $SA=SB=SC=SD=\frac{a\sqrt{5}}{2}$. Khối chóp nào có thể tích lớn nhất và tính giá trị lớn nhất đó.

Lời giải



Vì khối chóp $S.ABCD$ có các cạnh bên bằng nhau nên đáy phải là tứ giác nội tiếp. Suy ra $ABCD$ là hình chữ nhật. Gọi $H=AC\cap BD$ thì $SH\perp(ABCD)$.

Đặt $BC=x\,(x>0)$ thì $S_{ABCD}=ax$,

$SH^2=SA^2-AH^2=\frac{4a^2-x^2}{4}$ (ĐK $x<2a$)

Lúc này $V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}.a.x.\sqrt{\frac{4a^2-x^2}{4}}=\frac{1}{6}.a.x.\sqrt{4a^2-x^2}$

Ta có $x.\sqrt{4a^2-x^2}\leq\frac{x^2+4a^2-x^2}{2}=2a^2$

Dấu bằng xảy ra khi $x^2=4a^2-x^2\Leftrightarrow x^2=2a^2\Leftrightarrow x=a\sqrt{2}$.

Lúc này $V_{\max}=\frac{a^3}{3}$.