Bài giảng số 2

QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

Các bài toán về quan hệ vuông góc luôn luôn là một chủ đề quen thuộc và không thể thiếu trong mọi bài toán hình học không gian có mặt trong các kì thi nói chung và thi vào Đại học, Cao đẳng nói riêng.

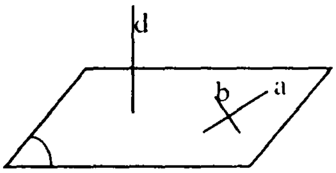
Các nội dung chính trong các bài thi tuyển sinh thuộc dạng toán này thường được đề cập đến là:

- Chứng minh tính vuông góc (bao gồm đường thẳng vuông góc mặt phẳng, hai đường thẳng vuông góc với nhau, hai mặt phẳng vuông góc với nhau).
- Các bài toán tìm khoảng cách: Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng, khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau...
- Các bài toán xác định góc: Góc giữa hai đường thẳng chéo nhau, góc giữa hai mặt phẳng, góc giữa đường thẳng và mặt phẳng.

Bài giảng này đề cập đến các nội dung đó và những vấn đề liên quan trực tiếp đến nó.

§1. CÁC BÀI TOÁN CHỨNG MINH TÍNH VUÔNG GÓC

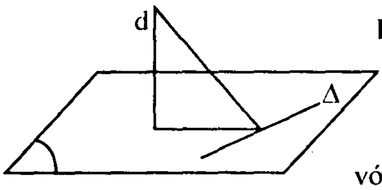
1. Các kiến thức cơ bản cần biết



a. ***Tiêu chuẩn vuông góc***

+ Đường thẳng (d) vuông góc với mặt phẳng (P) khi (d) vuông góc với hai đường thẳng giao nhau của (P).

+ Hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau khi góc tạo bởi hai mặt phẳng ấy bằng 90^0.

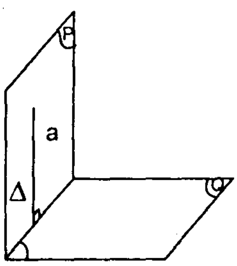


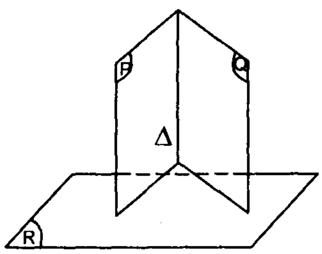
b. ***Các định lí về tính vuông góc***

+ Định lí ba đường vuông góc:

Giả sử $d \perp (P)$ cho $\Delta \in (P)$, đường thẳng .

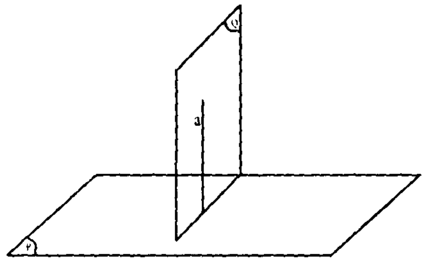
+ Giả sử (P) và (Q) là hai mặt phẳng vuông góc với nhau, $(P) \cap (Q) = \Delta$. Nếu $a \in (P)$, $a \perp \Delta$ thì $a \perp (Q)$





+ Giả sử (P) và (Q) cùng vuông góc với (R), trong đó (P)$\cap$(Q) = Δ

+ Nếu a $\perp$ (P), thì mặt phẳng (Q) chứa a đều vuông góc với (P).

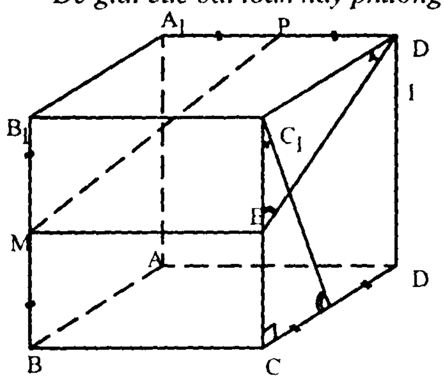


2. Các dạng toán thường gặp:

Loại 1: Chứng minh đường thẳng vuông góc với đường thẳng.

Đây là một trong những dạng toán hay gặp nhất trong chuyên mục các bài toán về "quan hệ vuông góc" (và có tần suất khá cao trong các bài toán gặp phải ở câu số 3, về hình không gian trong các đề thi tuyển sinh vào các trường Đại học, Cao đẳng các năm gần đây từ 2002 – 2009).

Để giải các bài toán này phương pháp chính được sử dụng là:



Để chứng minh đường thẳng d vuông góc với đường thẳng Δ ta thường chứng minh d vuông góc với mặt phẳng (Q), trong đó đường thẳng Δ nằm trong (Q).

Dĩ nhiên để làm được điều này người ta phải sử dụng điều kiện để một đường thẳng vuông góc với một mặt phẳng trình bày ở trên.

Nói cách khác *hai sự kiện chính rất đơn giản và cơ bản* sau đây chính là "linh hồn" để giải các bài toán thuộc loại này:

+ Nếu a $\perp$ (P) thì a vuông góc với mọi đường của (P).

+ Để a $\perp$ (P) chỉ cần a vuông góc với hai đường thẳng giao nhau của (P)

Thí dụ 1: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối B - 2002)

Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Gọi M, N, P lần lượt là các trung điểm của BB_1, CD, A_1D_1. Chứng minh MP $\perp$ C_1N.

<u>Giải</u>

Gọi E là trung điểm của CC_1. Ta có: ME//BC $\Rightarrow$ ME// A_1D_1.

Gọi (Q) là mặt phẳng MED_1A_1. $\Rightarrow$ MP $\in$(Q) (1)

Dễ thấy hai tam giác vuông C_1CN và D_1C_1E bằng nhau

$\Rightarrow \widehat{CNC_1} = \widehat{C_1ED_1} = \widehat{CC_1N} + \widehat{C_1NC} = 90^\circ \Rightarrow C_1N \perp ED_1$ (2)

Do ME//BC$\Rightarrow$ME$\perp$(CDD_1C_1) $\Rightarrow$ME$\perp$ C_1N (3)

Từ (2) và (3) suy ra: $C_1N \perp (Q) \Rightarrow C_1N \perp MP$

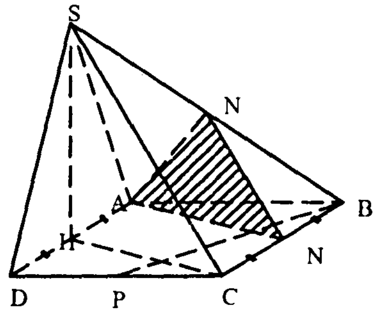
Thí dụ 2: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối A – 2007)

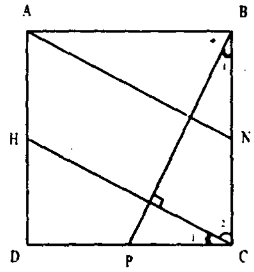
Cho hình chóp tứ giác S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh bằng a. Mặt bên SAD là tam giác đều và ở trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của SB, BC, CD. Chứng minh AM $\perp$ BP.

Giải

Gọi H là trung điểm của AD, do SAD là tam giác đều, nên SH $\perp$ AD.

Vì (SAD) $\perp$ (ABCD) $\Rightarrow$ SH $\perp$ (ABCD) $\Rightarrow$ SH $\perp$ BP (1)





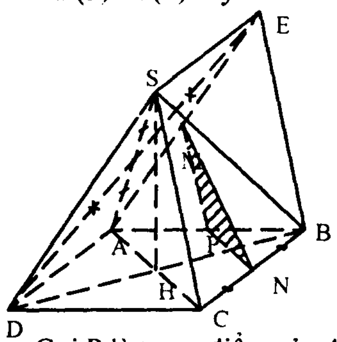
Dễ thấy hai tam giác vuông BPC và CHD là bằng nhau, nên ta có

$\Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{C}_1 \Rightarrow \hat{B}_1 + \hat{C}_2 = \hat{C}_1 + \hat{C}_2 = 90^\circ \Rightarrow$ BP $\perp$ CH (2)

Từ (1) và (2) suy ra: BP $\perp$ (SHC) (3)

Do HC// AN, MN//SC $\Rightarrow$ (SHC)//(MAN) (4)

Từ (3) và (4) suy ra: BP $\perp$ (MAN) $\Rightarrow$ AM $\perp$ BP (đpcm)



Thí dụ 3: Đề thi tuyển sinh Đại học khối B-2007

Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD cạnh đáy bằng a. Gọi E là điểm đối xứng của điểm D qua trung điểm của SA. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AE, BC. Chứng minh MN $\perp$ BD.

Giải

Ta có SEAD là hình bình thành $\Rightarrow$ SE//DA và SE = DA $\Rightarrow$ SEBC cũng là hình bình hành $\Rightarrow$ SC//EB.

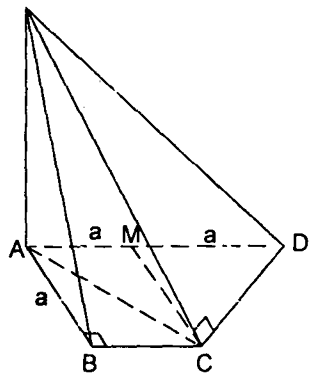
Gọi P là trung điểm của AB. Khi đó trong các tam giác EAB và ABC ta có MP//EB, PN//AC.

Từ đó suy ra: (MNP)//(SAC) (1)

Ta có DB $\perp$ AC và BD $\perp$ SH (vì SH $\perp$ (ABCD)) $\Rightarrow$ DB $\perp$ (SAC) (2).

Kết hợp (1) (2) đi đến: DB $\perp$ (MNP)

$\Rightarrow$ BD $\perp$ MN $\Rightarrow$ đpcm



Thí dụ 4: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối D- 2007)

Cho hình chóp tứ giác S.ABCD có đáy ABCD là hình thang, trong đó $\widehat{ABC} = \widehat{BAD} = 90^\circ$; BA = BC = a, AD = 2a. Giả sử SA = $a\sqrt{2}$ và SA vuông góc với đáy ABCD. Chứng minh SC $\perp$ CD.

Giải

Gọi M là trung điểm của AD ta có:

MA = MD = a

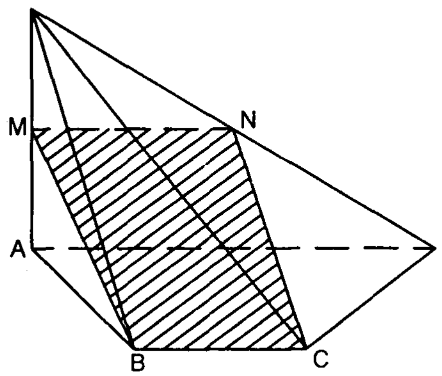
Do MA = BC = a; MA//BC $\Rightarrow$ MABC là hình vuông (kết hợp với AB = a và $\widehat{ABC} = \widehat{BAD} = 90^\circ$).

Từ đó ta có: MC = a.

Vì MA = MD = MC = a

$\Rightarrow$ ACD là tam giác vuông tại C, tức là CA $\perp$ CD.

Do đó SC $\perp$ CD (định lí ba đường vuông góc).



Chú ý: Xét một bài toán tương tự (đề thi tuyển sinh Cao đẳng khối A – 2008) :

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang, với $\widehat{ABC} = \widehat{BAD} = 90^o$, BA = BC = a, AD = 2a; SA $\perp$ (ABCD). Gọi M, N là trung điểm của SA, SD tương ứng. Chứng minh BCNM là hình chữ nhật.

<u>**Giải**</u>

Thật vậy, vì MN // AD vì MN//BC; và MN = BC = a $\Rightarrow$ BCNM là hình bình hành.

Do AB $\perp$ BC $\Rightarrow$ MB $\perp$ BC (định lí ba đường vuông góc)

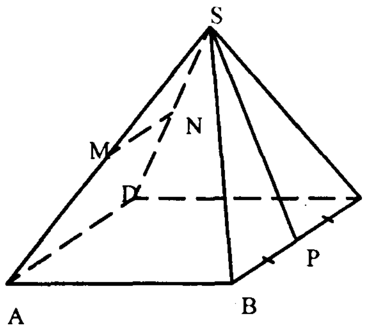
$\Rightarrow$ BCNM là hình chữ nhật.

Giả thiết SA = $a\sqrt{2}$ không dùng trong câu này (nó dùng trong câu hỏi thứ hai của bài thi - xem ở §3.

<u>Thí dụ 5</u>: (Đề thi tuyển sinh Cao đẳng khối A, B, D – 2009)

Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD, cạnh đáy bằng a. Cạnh bên bằng $a\sqrt{2}$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của SA, SD, DC. Chứng minh rằng MN $\perp$ SP.

<u>**Giải**</u>



Vì M, N lần lượt là trung điểm của SA, SD nên MN//AD $\Rightarrow$ MN // BC.

Do S.ABCD là chóp đều nên SB = SC.

Vì PB = PC $\Rightarrow$ SP $\perp$ BC $\Rightarrow$ MN $\perp$ SP $\Rightarrow$ đpcm.

Loại 2: Các bài toán về tính vuông góc của hai mặt phẳng.

Mặc dù các bài toán này trong các đề thi tuyển sinh vào Đại học, Cao đẳng những năm 2002 - 2009 là ít hơn nhiều so với các bài toán xét trong loại 1, nhưng nó vẫn là một bài toán cơ bản và không được xem nhẹ.

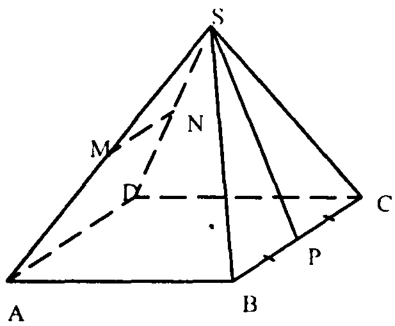
Phương pháp chính để giải các bài toán này là dựa vào định lí quan trọng sau đây:

Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) cắt nhau theo giao tuyến Δ. Khi đó một đường thẳng nằm trong một mặt phẳng mà vuông góc với Δ thì vuông góc với mặt phẳng còn lại.

Ngoài ra, người ta cũng dựa vào định nghĩa của hai mặt phẳng vuông góc để chứng minh tính vuông góc của hai mặt phẳng.

Thí dụ 1: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối B – 2006)

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật với AB = a, AD = $a\sqrt{2}$, SA = a và SA vuông góc với đáy (ABCD). Gọi M, N là trung điểm của AD và SC. Chứng minh mặt phẳng (SAC) vuông góc với mặt phẳng (SMB).



Giải

ả sử $AC \cap MB = I$.

$MA = MD$, và do AD//BC, nên theo định lí

let suy ra: $AI = \frac{1}{2}IC$.

$AC^2 = AD^2 + DC^2 = \left(a\sqrt{2}\right)^2 + a^2 = 3a^2$

$AI^2 = \frac{1}{9}AC^2 = \frac{a^2}{3}$.

$= \frac{1}{9}MB^2 = \frac{1}{9}\left(\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + a^2\right) = \frac{a^2}{6}$.

Từ đó suy ra: $AI^2 + MI^2 = \frac{a^2}{3} + \frac{a^2}{6} = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = AM^2$

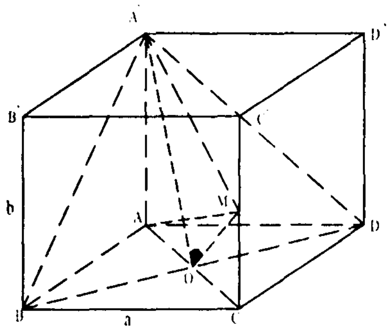
Vậy AIM là tam giác vuông tại I $\Rightarrow MB \perp AC$ (1)

Mặt khác $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp MB$ (2)

Từ (1), (2) suy ra: $MB \perp (SAC) \Rightarrow (SMB) \perp (SAC) \Rightarrow$ đpcm.

Thí dụ 2: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối A – 2003)

Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' đáy là hình vuông ABCD cạnh bằng a; AA' = b. Gọi M là trung điểm của CC'. Xác định tỉ số $\frac{a}{b}$ để hai mặt phẳng A'BD và MBD vuông góc với nhau.



Giải

Ta có $A'B = A'D \Rightarrow A'O \perp BD$.

Lại có $MB = MD \Rightarrow MO \perp BD$.

ở đây O là tâm của đáy ABCD.

Từ đó $\widehat{A'OM}$ là góc giữa hai mặt phẳng (A'BD) và (MBD).

Vì vậy: $(A'BD) \perp (MBD) \Leftrightarrow \widehat{A'OM} = 90^\circ$

$\Leftrightarrow A'O^2 + OM^2 = A'M^2$ (1)

Ta có: $A'O^2 = A'B^2 - BO^2$

$= a^2 + b^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = b^2 + \frac{a^2}{2}$ (2)

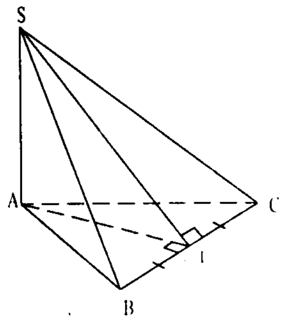
$OM^2 = MC^2 + CO^2 = \frac{b^2}{4} + \frac{a^2}{2}$ (3)

$A'M^2 = A'C'^2 + C'M^2 = 2a^2 + \frac{b^2}{4}$ (4)

Từ (2) (3) (4) suy ra: (1) $\Leftrightarrow \frac{5b^2}{4} + a^2 = 2a^2 + \frac{b^2}{4} \Leftrightarrow b = a$ (do a, b > 0).

Vậy với $\frac{a}{b} = 1$ thì (A'BD) ⊥ (MBD).

Thí dụ 3: (Đề thi tuyển sinh Đại học Hải Phòng – 2006)



Cho hình chóp tam giác S.ABC đáy là tam giác đều cạnh a, còn SA = 2a và SA vuông góc với mặt phẳng đáy (ABC). Gọi I là trung điểm của BC. Chứng minh mặt phẳng (SAI) vuông góc với mặt phẳng (SBC).

Giải

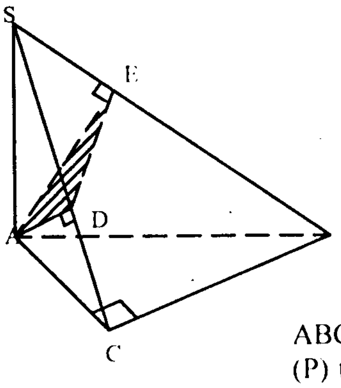
Do AB = AC ⇒ AI ⊥ BC (1)

Vì AB = AC ⇒ SB = SC ⇒ SI ⊥ BC (2)

Từ (1) (2) suy ra: BC ⊥ (SAI) ⇒ (SBC) ⊥ (SAI) ⇒ đpcm.

Thí dụ 4: Cho hình chóp S.ABC, trong đó đáy ABC là tam giác vuông tại C, hai mặt bên SAC và SAB cùng vuông góc với đáy ABC. Gọi D, E lần lượt là hình chiếu của A trên SC và SB. Chứng minh (SAB) ⊥ (ADE).

Giải



Vì (SAB) ⊥ (ABC); (SAC) ⊥ (ABC), mà (SAB) ∩ (SAC) = SA, nên SA ⊥ (ABC).

Vì BC ⊥ CA (giả thiết) ⇒ BC ⊥ (SAC).

⇒ (SBC) ⊥ (SAC). Do AD ⊥ SC, mà

SC = (SBC) ∩ (SAC) ⇒ AD ⊥ (SBC)

⇒ AD ⊥ SB (1).

Từ (1) kết hợp với AE ⊥ SB (giả thiết) suy ra:

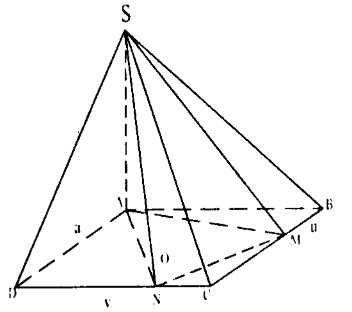
SB ⊥ (ADE) ⇒ (SAB) ⊥ (ADE) ⇒ đpcm.

Thí dụ 5: Trong mặt phẳng (P) cho hình vuông ABCD cạnh bằng a. Đoạn SA cố định vuông góc với (P) tại A; M và N là hai điểm tương ứng di động trên các cạnh BC và CD.

Đặt BM = u, DN = v. Chứng minh rằng $a(u+v) = a^2 + u^2$ là điều kiện cần và đủ để hai mặt phẳng (SAM) và (SMN) vuông góc với nhau.

Giải

Giả sử (SAM) ⊥ (SMN) (1)



Vì SA ⊥ (P) ⇒ (SAM) ⊥ (P) (2)

Do (SMN) ∩ (P) = MN,

nên từ (1) và (2) suy ra

MN ⊥ (SAM) ⇒ MN ⊥ MA

Đảo lại giả sử MN ⊥ MA (3)

Ta có MN ⊥ SA (do SA ⊥ (P))

⇒ MN ⊥ (SAM) ⇒ (SMN) ⊥ (SAM).

Vậy MN ⊥ MA là điều kiện cần và đủ để (SAM) ⊥ (SMN).

Ta có MN ⊥ MA ⇔ $AN^2 = MA^2 + MN^2$

$\Leftrightarrow a^2 + v^2 = a^2 + u^2 + (a-u)^2 + (a-v)^2 \Leftrightarrow a(u+v) = a^2 + u^2$ ⇒ đpcm.

Thí dụ 6:

Trong mặt phẳng (P) cho hình vuông ABCD cạnh bằng a. Hai nửa đường thẳng Bx và Dy vuông góc với (P) và ở về cùng một phía đối với (P). M và N là hai điểm di động tương ứng trên Bx, Dy. Đặt BM = u, DN = v.

1) Tìm mối liên hệ giữa u, v để (MAC) ⊥ (NAC).

2) Giả sử ta có điều kiện ở câu 1, chứng minh (AMN) ⊥ (CMN).

Giải

1) Do BA = BC ⇒ MA = MC. Tương tự có NA=NC.

Giả sử AC ∩ BD = O, thì từ trên suy ra MO ⊥ AC, NO ⊥ AC.

Vì (MAC) ∩ (NAC) = AC nên $\widehat{MON}$ là góc tạo bởi hai mặt phẳng (MAC) và (NAC).

Ta có (MAC) ⊥ (NAC) ⇔ $\widehat{MON} = 90^\circ \Leftrightarrow MN^2 = MO^2 + NO^2$

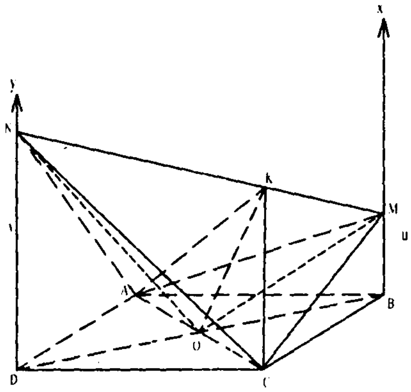
$$\Leftrightarrow \left(a\sqrt{2}\right)^2 + (v-u)^2 = u^2 + \frac{a^2}{2} + v^2 + \frac{a^2}{2} \Leftrightarrow 2uv = a^2 \ (1)$$

Vậy (1) là điều kiện cần và đủ để hai mặt phẳng (MAC) và (NAC) vuông góc với nhau.

2) Giả sử ta có (1)

Vì Bx, Dy cùng vuông góc với (P), nên (BDMN) ⊥ (P).

Do AC ⊥ DB ⇒ AC ⊥ (DBMN).



Kẻ OK ⊥ với MN. Theo định lí ba đường vuông góc suy ra AK ⊥ MN; CK ⊥ MN ⇒ $\widehat{AKC}$ là góc tạo bởi hai mặt phẳng (AMN) và (CMN).

Do có (1) nên trong tam giác vuông NOM tại O, ta có

$$\frac{1}{OK^2} = \frac{1}{OM^2} + \frac{1}{ON^2} = \frac{MO^2 + ON^2}{MO^2.ON^2}$$

$$\Rightarrow OK^2 = \frac{MO^2.ON^2}{OM^2 + ON^2} = \frac{\left(u^2 + \frac{a^2}{2}\right)\left(v^2 + \frac{a^2}{2}\right)}{u^2 + v^2 + a^2}$$

$$= \frac{u^2v^2 + \frac{a^2}{2}\left(u^2 + v^2\right) + \frac{a^4}{4}}{u^2 + v^2 + a^2}. \qquad (2)$$

Thay (1) vào (2) ta có:

$$OK^2 = \frac{\frac{a^2}{2}\left(u^2 + v^2\right) + \frac{a^4}{2}}{u^2 + v^2 + a^2} = \frac{a^2}{2} \Rightarrow OK = \frac{a\sqrt{2}}{2}. \qquad (3)$$

Như vậy từ (3) có OK = OA = OC ⇒ AKC là tam giác vuông tại K

⇒ $\widehat{AKC} = 90^0 \Rightarrow$ (AMN) ⊥ (CMN) ⇒ đpcm.

§2. CÁC BÀI TOÁN TÌM KHOẢNG CÁCH

Hai loại toán quan trọng nhất của mục này, cũng là hai dạng toán thường xuyên có mặt trong các kì thi tuyển sinh vào Đại học và Cao đẳng trong những năm gần đây là:

1/ Tìm khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng (hoặc một đường thẳng).

2/ Tìm khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau và bài toán về đường thẳng vuông góc chung.

Loại 1:

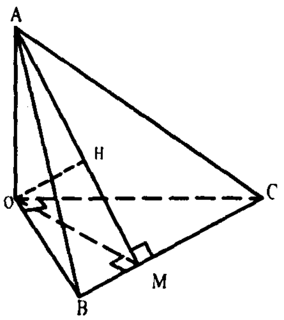
Bài toán tìm khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng (hoặc đến một đường thẳng):

Trong mục này chúng tôi trình bày phương pháp trực tiếp để tính các khoảng cách này, mà không dựa vào phương pháp sử dụng thể tích khối đa diện như đã đề cập đến trong bài giảng 1.

Phương pháp giải được tiến hành theo lược đồ chung:

- Xác định chân đường vuông góc trên mặt phẳng (hoặc đường thẳng) mà cần tính khoảng cách từ một điểm cho trước đến nó. Bước này quan trọng ở chỗ: Nhờ có việc xác định này mà cho phép ta có đủ dữ liệu để chuyển sang bước tiếp theo.
- Sử dụng các hệ thức lượng trong tam giác vuông (bao hàm cả định lí Pitago), hoặc lượng giác để tính các khoảng cách cần tìm.

Các bài toán này trong khá nhiều trường hợp dựa vào bài toán cơ bản sau đây:



Thí dụ 1 (Bài toán cơ bản)

Cho tứ diện OABC, trong đó OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau. Kẻ OH $\perp$ (ABC).

1) Chứng minh H là trực tâm tam giác ABC.

2) Chứng minh hệ thức:

$$\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}+\frac{1}{OC^2}.$$

<u>Giải</u>

1) Kẻ OH $\perp$ (ABC), $AH \cap BC = M$.

Ta có OH $\perp$ BC và BC $\perp$ OA

(do OA $\perp$(OBC) suy từ OA $\perp$ OB, OA $\perp$ OC) $\Rightarrow$ BC $\perp$ (AOH)

$\Rightarrow$ BC $\perp$ AH.

Lập luận tương tự ta có BH $\perp$ AC.

Vậy H là trực tâm của tam giác ABC $\Rightarrow$ đpcm.

2) Theo định lí ba đường vuông góc, suy ra MO $\perp$ BC

Theo hệ thức lượng trong tam giác vuông AOM ta có:

$$\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OM^2} \qquad (1)$$

Lại theo hệ thức lượng trong tam giác vuông OBC, ta có:

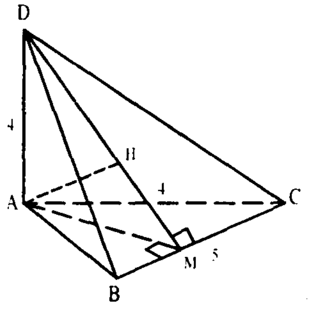
$$\frac{1}{OM^2}=\frac{1}{OB^2}+\frac{1}{OC^2} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}+\frac{1}{OC^2} \Rightarrow$ đpcm.

Nhận xét: Đây là một trong các kết quả cơ bản nhất, nhưng có một ứng dụng rất to lớn trong các bài toán về "quan hệ vuông góc" của hình học không gian. Các thí dụ 2, 3 dưới đây sẽ minh họa cho điều ấy.

Thí dụ 2: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối D – 2002)

Cho hình tứ diện ABCD có cạnh AD vuông góc với mặt phẳng (ABC), ngoài ra AC = AD = 4cm; AB = 3cm; BC = 5cm. Tìm khoảng cách từ A tới mặt phẳng (BCD).



Giải

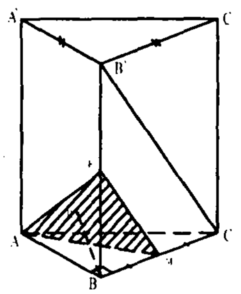
Vì AB = 3cm, AC = 4cm, BC = 5cm $\Rightarrow$ BAC là tam giác vuông tại A. Vậy AB, AC, AD đôi một vuông góc với nhau.

Theo thí dụ 1 ta có:

$$\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{AC^2}+\frac{1}{AD^2}=\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}$$

$$\Rightarrow AH=\frac{6\sqrt{34}}{17}.$$

Thí dụ 3: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối D- 2008)



Cho lăng trụ đứng đáy ABC.A'B'C' đáy là tam giác vuông có BA = BC = a, cạnh bên AA' = $a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm của BC. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và B'C.

Giải

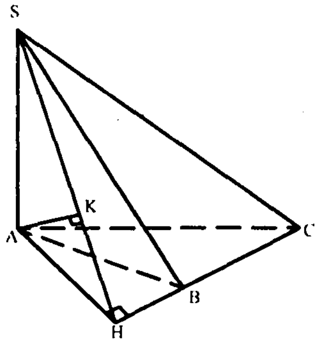
Gọi E là trung điểm BB'. Ta có EM//B'C $\Rightarrow$ B'C// (AEM)

$\Rightarrow$ d (B'C, AM) = d (B'C, (AEM)) = d(C, (AEM))

= d(B, (AEM)) (vì MB = MC).

Do ABC là tam giác vuông tại B, nên tứ diện BAEM có BA, BE, BM đôi một vuông góc với nhau. Theo thí dụ 1, nếu gọi BH là chiều cao kẻ từ B của tứ diện trên (H$\in$ (AEM)) thì,

$$\frac{1}{BH^2}=\frac{1}{BA^2}+\frac{1}{BE^2}+\frac{1}{BM^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{\frac{a^2}{2}}+\frac{1}{\frac{a^2}{4}}=\frac{7}{a^2}\Rightarrow BH=\frac{a\sqrt{7}}{7}\Rightarrow d(AM, B'C)=\frac{a\sqrt{7}}{7}.$$



Thí dụ 4:

Cho hình chóp S.ABCD có SA = 3a, và SA vuông góc với mặt phẳng ABC. Giả sử AB = BC = 2a; $\widehat{ABC}$ = 120^0 tìm khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC).

Giải:

Kẻ AH $\perp$ BC $\Rightarrow$ SH $\perp$ BC (định lí ba đường vuông). Lại có BC $\perp$ (SAH) $\Rightarrow$ (SBC) $\perp$ (SAH).

Do (SBC) $\cap$ (SAH) = AH,

nên nếu kẻ AK $\perp$ SH (K$\in$SH) thì AK $\perp$ (SBC).

Vậy d (A, (SBC)) = AK.

Ta có $AH = AB\sin 60^0 = 2a\frac{\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$.

Theo hệ thức lượng trong tam giác vuông SAH ta có:

$$\frac{1}{AK^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{SH^2} = \frac{1}{9a^2} + \frac{1}{3a^2} = \frac{4}{9a^2} \Rightarrow AK = \frac{3a}{2}.$$

Do vậy $d\left(A,(SBC)\right) = \frac{3a}{2}$.

Loại 2: Bài toán tìm khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau:

Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau chính là độ dài đường vuông góc chung của hai đường thẳng đó. Vì lẽ đó nếu xác định được đường vuông góc chung ấy thì việc tính độ dài ấy coi như đã được giải quyết. Tuy nhiên, việc xác định đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau không phải là một việc dễ làm. Hơn thế nữa trong rất nhiều bài toán người ta chỉ đòi hỏi tìm khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau mà không yêu cầu xác định cụ thể đường vuông góc chung của chúng. Vì vậy trong thực tế người ta thường chuyển bài toán xác định khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau về các bài toán dễ giải hơn sau đây:

1/ Nếu như d_1 song song với mặt phẳng (P), trong đó $d_2 \in (P)$ khi đó khoảng cách giữa d_1 và d_2 bằng khoảng cách giữa d_1 và (P).

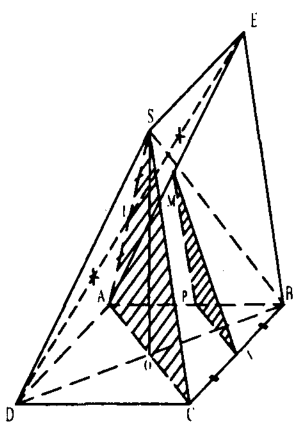
2/ Nếu như $d_1 \in (P)$; $d_2 \in (Q)$ mà hai mặt phẳng (P) và (Q) song song với nhau thì khoảng cách giữa d_1 và d_2 bằng khoảng cách giữa (P) và (Q). Lưu ý rằng nếu d_1// (P) thì khoảng cách giữa d_1 và mặt phẳng (P) bằng khoảng cách từ một điểm bất kì của d_1 đến (P). Tương tự, khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song (P) và (Q) bằng khoảng cách từ một điểm bất kì của mặt phẳng này đến mặt phẳng kia.

Như vậy cuối cùng ta lại *quy bài toán tìm khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau về bài toán tìm khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng.*

Thí dụ 1: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối D – 2008)

Đó chính là thí dụ 3, loại 1 vừa xét ở trên.

Thí dụ 2: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối B - 2007)



Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD cạnh đáy bằng a. Gọi E là điểm đối xứng của D qua trung điểm của SA. Gọi M, N tương ứng là trung điểm của AE và BC. Tìm khoảng cách theo a giữa hai đường thẳng MN, AC.

Giải

Gọi P là trung điểm của AB. Khi đó MP//EB (1)

Ta có SE//DA và SE = DA $\Rightarrow$ SE//BC và SE = BC $\Rightarrow$ SEBC là hình bình hành $\Rightarrow$ EB//SC (2).

Vậy từ (1) và (2) suy ra MP//SC.

Lại có PN//AC, nên (MPN)//(SAC) (3)

Từ (3) suy ra: $d\left(MN,AC\right) = d\left((MNP),(SAC)\right)$

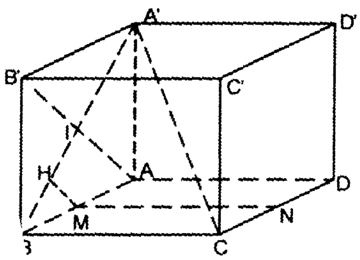
$= d\left(H,(SAC)\right)$ (4),

$\ldots = HO = \frac{1}{4}BD = \frac{a\sqrt{2}}{4}$,

ở đây O là giao điểm của AC và BD. Từ (4) suy ra: $d\left(MN, AC\right) = \frac{a\sqrt{2}}{4}$.

Thí dụ 3: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối A-2006)

Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh bằng 1. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Tìm khoảng cách giữa hai đường thẳng A'C và MN.



<u>Giải</u>

Ta có BC//MN

$\Rightarrow$ MN//(A'BC)

$\Rightarrow d(MN, A'C) = d\left(MN, (A'BC)\right)$

$= d(M, (A'BC))$ (1)

Ta có:

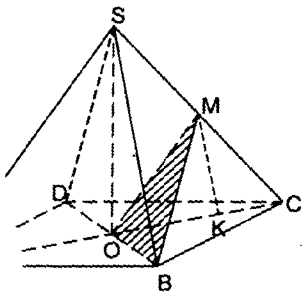
$AI \perp A'B$ ($AB' \cap A'B = I$).

Lại có $BC \perp (BAA'B') \Rightarrow BC \perp AI$.

Từ đó $AI \perp (A'BC)$. Vì thế nếu kẻ MH//AI ($H \in A'B$) thì $MH \perp (A'BC)$ và

$$d\left(M, (A'BC)\right) = MH = \frac{1}{2}AI = \frac{a\sqrt{2}}{4} \quad (2)$$

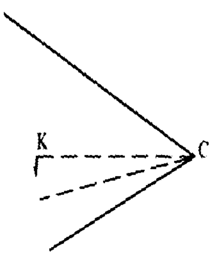
Từ (1) và (2) suy ra: $d\left(MN, A'C\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}$.



Nhận xét: Các bạn hãy so sánh bài giải trên với cách giải thí dụ này bằng phương pháp so sánh thể tích đã trình bày trong thí dụ 3, §2 (sử dụng phương pháp thể tích để tìm khoảng cách) của bài giảng 1: Thể tích khối đa diện.

Thí dụ 4: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối A - 2004)

Cho hình chóp tứ giác S.ABCD đáy là hình thoi cạnh AB = $\sqrt{5}$, đường chéo AC = 4, SO = $2\sqrt{2}$ và SO vuông góc với đáy ABCD, ở đây O là giao điểm của AC và BD. Gọi M là trung điểm của cạnh SC. Tìm khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BM.



<u>Giải:</u>

Ta có MO//SA $\Rightarrow$ SA//(OMB)

$\Rightarrow d(SA, BM) = d(SA, (MOB)) = d(S, (MOB))$

$= d(C, (MOB))$ (1)

(do MS = MC).

Ta có $BO \perp AC$; $BO \perp SO$ (do $SO \perp (ABCD)$)

$\Rightarrow BO \perp (SAC)$.

Kẻ $CH \perp OM$ ($H \in OM$) $\Rightarrow CH \perp (BOM)$.

(do $BO \perp (OMC) \Rightarrow (BOM) \perp (MOC)$).

Ta có $MO = \frac{SA}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\left(2\sqrt{2}\right)^2 + 2^2} = \sqrt{3}$.

Lại có: $MC = \frac{1}{2}SC = \frac{1}{2}SA = \sqrt{3}$.

Trong tam giác cân COM đỉnh M kẻ MK $\perp$ OC, ta có:

$$MK^2 = MO^2 - OK^2 = 3 - 1 = 2 \Rightarrow MK = \sqrt{2}.$$

Trong tam giác OBC, ta có:

$$MK.OC = MO.CH \Rightarrow CH = \frac{\sqrt{2}.2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{6}}{3} \qquad (2)$$

Vậy từ (1) và (2) suy ra d(SA,BM) = d(C,(MOB)).

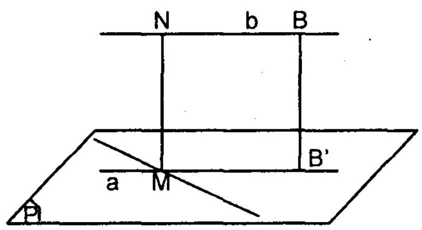
Nhận xét: Bạn hãy so sánh cách giải này, với cách giải cũng của thí dụ này nhưng dùng phương pháp "so sánh thể tích" đã được trình bày trong thí dụ 1, §2 của bài giảng số 1: Thể tích khối đa diện.

Loại 3: Bài toán xác định đường vuông góc chung:

Như đã nói ở mục trước, bài toán đòi hỏi tìm khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau nói chung không cần xác định đường vuông góc chung.

Tuy nhiên, trong một số bài toán lại đòi hỏi xác định đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau, đó là một yêu cầu cao hơn. Mục này để dành để trình bày cách tìm đường vuông góc chung.

Nguyên tắc chung để giải bài toán như sau: Xác định điểm $M \in a$, $N \in b$ sao cho MN $\perp$ a, MN $\perp$ b, khi đó MN là đường vuông góc của cả a và b. Vấn đề là ở chỗ làm thế nào để xác định được hai điểm M, N?



Phương pháp tổng quát (như đã biết) ta giải như sau:

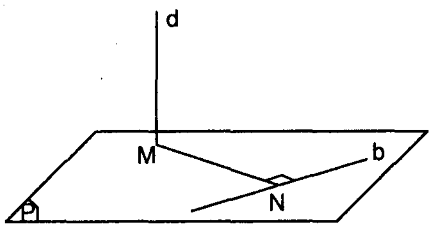
Dựng mặt phẳng (P) chứa a và song song với B. Lấy một điểm B trên b, kẻ $BB' \in (P)$ ($B' \in (P)$).

Trong (P) qua B' dựng b'//b.

Gọi $M = a \cap b'$.

Từ M kẻ MN//BB' ($N \in b$).

Khi đó MN là đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau a và b. Tuy nhiên, nếu như a và b có các cấu trúc đặc biệt (thí dụ như a, b vuông góc với nhau...) thì ta lại có cách xử lý riêng tương ứng và đơn giản hơn.



Thí dụ 1:

Trình bày cách dựng đường vuông góc chung với hai đường thẳng chéo nhau và vuông góc với nhau.

<u>**Giải**</u>

Dựng (P) qua b và vuông góc với a.

Giả sử $a \cap (P) = M$.

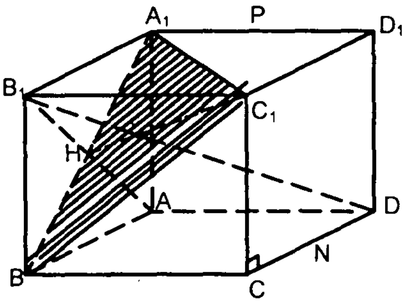
Trong (P) dựng MN vuông góc với b.

Khi đó MN là đường vuông góc của a và b.

Xem một ứng dụng của thí dụ 1 sau đây:

Thí dụ minh họa cho thí dụ 1: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối B – 2002)

Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ cạnh a. Tìm khoảng cách giữa hai đường thẳng A_1B và B_1D.



Giải

Ta có $AB_1 \perp A_1B$ (vì BAA_1B_1 là hình vuông);
$A_1B \perp AD$ (vì $AD \perp (BAA_1B_1)$)
$\Rightarrow A_1B \perp (B_1AD) \Rightarrow A_1B \perp B_1D$ (1)
Vì $DD_1 \perp (A_1B_1C_1D_1) \Rightarrow DD_1 \perp A_1C_1$.
Do $A_1B_1C_1D_1$ là hình vuông nên $A_1C_1 \perp B_1D_1$.
Từ đó $A_1C_1 \perp (B_1DD_1) \Rightarrow A_1C_1 \perp B_1D$ (2)
Từ (1) (2) suy ra: $B_1D \perp (A_1BC_1)$ (3).
Bây giờ ta tìm giao điểm của B_1D với (A_1BC_1).
Gọi H là giao điểm của AB_1 và BA_1. Trong mặt chéo (B_1A_1DA) rõ ràng
$HC_1 \cap B_1D = G$.

Do $B_1H = HA = \frac{1}{2}C_1D \Rightarrow GH = \frac{1}{2}GC_1 \Rightarrow$ G là trọng tâm của tam giác A_1BC_1.

Vì A_1BC_1 là tam giác đều nên $GH \perp A_1B$, còn $GH \perp B_1D$ vì $B_1D \perp (A_1B_1C_1)$.

Như thế GH là đường vuông góc chung của A_1B và B_1D nên nó chính là khoảng cách giữa A_1B và B_1D.

Ta có:

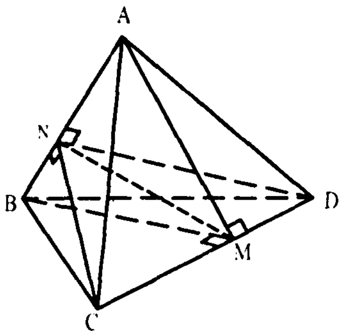
$$GH = \frac{1}{3}C_1H = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{2}.\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{6} \Rightarrow d(A_1B, B_1D) = \frac{a\sqrt{6}}{6}.$$

Nhận xét:

Trong thí dụ này A1B $\perp$ B1D nên cách làm trong thí dụ trên chính là sự thực hành các bước đã nêu trong thí dụ 1.

Thí dụ 2:

Cho hình tứ diện đều ABCD cạnh $a = 6\sqrt{2}$ cm. Hãy xác định và tính độ dài đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng AB và CD.



Giải

Gọi M và N tương ứng là các trung điểm của AB và CD. Do ABCD là tứ diện đều, nên ta có $CM \perp AB$ và $DM \perp AB \Rightarrow AB \perp (MCD) \Rightarrow AN \perp MN$
Lí luận tương tự có:
$CD \perp (ANB) \Rightarrow CD \perp MN$.
Vậy MN là đường vuông góc chung của AB và CD.

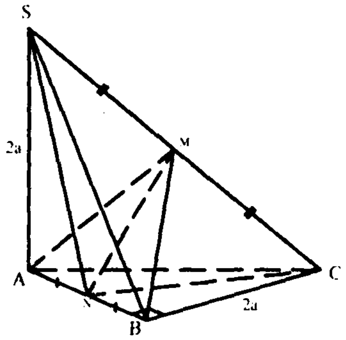
Ta có $MC = MD = \frac{6\sqrt{2}.\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{6}$.

Vậy $MN^2 = MC^2 - CN^2 = (3\sqrt{6})^2 - (3\sqrt{2})^2 = 36$

$\Rightarrow MN = 6cm$.

Thí dụ 3:

Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại B, AB = a, BC = 2a, cạnh SA vuông góc với đáy và SA = 2a. Xác định và tính độ dài đường vuông góc chung của hai đường thẳng AB và SC.



Giải:

Gọi M và N lần lượt là trung điểm của SC và AB. Ta có: $MA = MB = \frac{SC}{2} \Rightarrow MN \perp AB$.

Dễ thấy tam giác vuông SAN bằng tam giác vuông NBC $\Rightarrow NS = NC \Rightarrow NM \perp SC$.

Vậy MN là đường vuông góc chung của AB và SC.

Ta có:

$$SC^2 = SA^2 + Ac^2 = SA^2 + AB^2 + BC^2$$
$$= 4a^2 + a^2 + 4a^2$$
$$\Rightarrow SC = 3a \Rightarrow MA = \frac{3a}{2}.$$

Do đó $MN^2 = MA^2 - AN^2 = \frac{9a^2}{4} - \frac{a^2}{4} = 2a^2 \Rightarrow MN = a\sqrt{2}$.

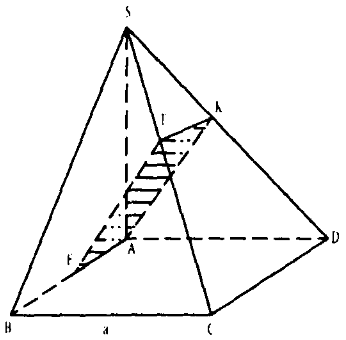
Thí dụ 4:

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, SA = h và SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Dựng và tính độ dài đường vuông góc chung của hai đường thẳng SC và AB.

Giải

Ta có $AB \perp AD$, $AB \perp SA \Rightarrow AB \perp (SAD)$

$\Rightarrow DC \perp (SAD)$ (do DC // AB).



Vậy SD là hình chiếu vuông góc của SC trên (SAD).

Trong mặt phẳng SAD, vẽ $AK \perp SD$ ($K \in SD$).

Trong mặt phẳng (SCD), kẻ KE//CD ($E \in SC$).

Trong mặt phẳng xác định bởi EK, AB (chú ý EK//AB) kẻ EF// AK ($K \in AB$).

Do $AB \perp (SAD) \Rightarrow AB \perp AK \Rightarrow AB \perp EF$ (1)

Ta có: $DC \perp (SAD) \Rightarrow (SDC) \perp (SAD)$.

Vì $(SDC) \cap (SAD) = SD$ và $AK \perp SD$

$\Rightarrow AK \perp (SCD)$.

$\Rightarrow AK \perp SC \Rightarrow EF \perp SC$ (2).

Từ (1) (2) suy ra: EF là đường vuông góc chung của SC và AB.

Dễ thấy: EF = AK mà:

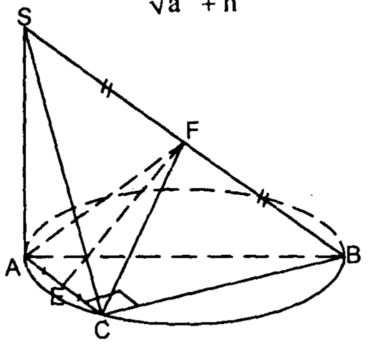
$$\frac{1}{AK^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{SD^2} = \frac{1}{h^2} + \frac{1}{a^2} \Rightarrow EF = \frac{ah}{\sqrt{a^2 + h^2}}$$

Nhận xét: Nếu bài toán chỉ đòi hỏi tìm khoảng cách giữa SC và AB thì ta có thể làm như sau:

Vì AB//CD $\Rightarrow$ AB // (SCD)

$\Rightarrow d(AB,SC) = d(AB,(SCD)) = d(A,(SCD))$ (do AK $\perp$ (SCD))

$\Rightarrow AK = \dfrac{ah}{\sqrt{a^2+h^2}}$



Thí dụ 5:

Cho đường tròn đường kính AB = 2R trong mặt phẳng (P). C là một điểm chạy trên đường tròn. Trên đường thẳng đi qua A và vuông góc với mặt phẳng (P) lấy điểm S sao cho SA = a < 2R. Gọi E và F lần lượt là trung điểm của AC và SB.

Xác định vị trí của C trên đường tròn sao cho EF là đường vuông góc chung của AC và SB.

<u>**Giải**</u>

Do AC $\perp$ BC $\Rightarrow$ SC $\perp$ BC (định lí ba đường vuông góc).

Từ đó suy ra FA = FC (1)

Như thế (1) đúng với mọi vị trí của C trên đường tròn.

Để EF là đường vuông góc chung của AC và SB vì thế chỉ cần EF $\perp$ SB.

Ta có EF $\perp$ SB $\Leftrightarrow$ ES = EB

$\Leftrightarrow \Delta SAE = \Delta BCE \Leftrightarrow BC = SA = a$.

Vậy C là đường giao của hai đường tròn: đường tròn đường kính AB = 2R đã cho và đường tròn tâm B bán kính a. Vì a < 2R nên tồn tại 2 giao điểm C như vậy.

§3. BÀI TOÁN XÁC ĐỊNH GÓC GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU, GÓC GIỮA HAI MẶT PHẲNG VÀ GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

Bài toán xác định góc giữa các yếu tố đường và mặt phẳng trong không gian cũng là một trong những dạng toán hay gặp trong các kì thi tuyển sinh vào Đại học và Cao đẳng trong những năm gần đây. Có hai loại toán chính sau đây:

1/ Xác định góc α (có thể là tìm α, hoặc tìm một hàm số lượng giác nào đó của α), ở đây α là góc giữa hai đường thẳng chéo nhau, giữa hai mặt phẳng, hoặc giữa đường thẳng và mặt phẳng.

2/ Tìm điều kiện để các góc α nói trên nhận một giá trị cho trước nào đó. (Chú ý nếu $\alpha = 90^\circ$ ta có các bài toán về quan hệ vuông góc xét trong §1).

Để giải bài toán loại này chỉ cần nắm vững các định nghĩa về các góc trong không gian đã được học kĩ trong sách giáo khoa ở nhà trường phổ thông.

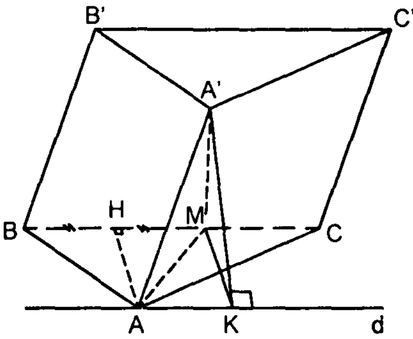
Loại 1: Các bài toán xác định góc trong hình học không gian:

Để giải bài toán loại này ta tiến hành theo hai bước sau đây:

- Giả sử cần xác định góc α (hoặc một hàm số lượng giác của góc α) giữa hai đường thẳng chéo nhau d và d'. Chọn một điểm A thích hợp trên d. Qua A vẽ đường thẳng d_1 // d'. Khi đó góc có đỉnh A tạo bởi d và d_1 chính là góc tạo bởi d và d'.

- Trong mặt phẳng xác định bởi d và d_1, hoàn toàn dựa vào các kiến thức của hình học phẳng để xác định độ lớn của góc α, hoặc tính hàm số lượng giác của góc α theo yêu cầu đề bài. Ở đây, thường là các bài toán đơn giản về hệ thức lượng giác trong tam giác, hoặc là các bài toán lượng giác rất cơ bản.

Thí dụ 1: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối A – 2008)



Cho lăng trụ ABC.A'B'C' có độ dài cạnh bên bằng 2a, đáy là tam giác vuông tại A có AB = a, AC = $a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của đỉnh A' trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của cạnh BC. Tính cosin của góc giữa hai đường thẳng AA' và B'C'.

<u>Giải</u>:

Gọi M là trung điểm của BC. Trong mặt phẳng (ABC), qua A kẻ d // BC (tức là d // B'C' do BC // B'C'),

khi đó : $\alpha = \widehat{(AA';B'C')} = \widehat{(AA',d)}$

Vì BAC là tam giác vuông tại A, nên ta có AM = MB = MC = $\dfrac{BC}{2}$ = a.

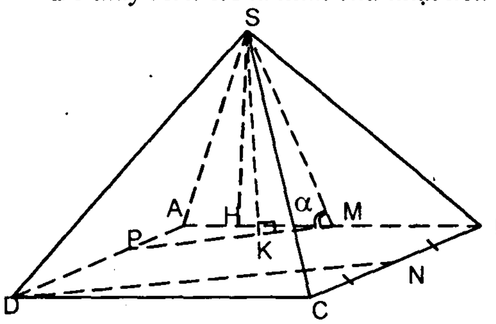
(vì $BC^2 = AB^2 + AC^2 = a^2 + 3a^2 = 4a^2$).

Do đó MAB là tam giác đều cạnh a.

Kẻ AH ⊥ BC, khi đó HM = HB = $\dfrac{a}{2}$.

Kẻ MK ⊥ d ⇒ A'K ⊥ d (định lí ba đường vuông góc).

Dễ thấy AHMK là hình chữ nhật nên AK = HM = $\dfrac{a}{2}$.



Trong tam giác vuông A'AK ta có

$$\cos\alpha = \cos\widehat{A'AK} = \frac{AK}{AA} = \frac{\frac{a}{2}}{2a} = \frac{1}{4}$$

Thí dụ 2: (Đề thi tuyển sinh Đại học, Cao đẳng khối B – 2008)

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh bằng 2a, SA = a, SB = $a\sqrt{3}$ và mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, BC. Tìm cosin của góc giữa hai đường thẳng SM, DN.

<u>Giải</u>

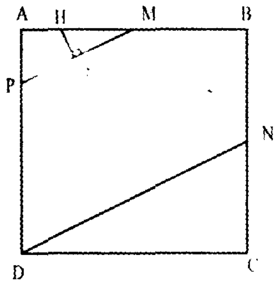
Ta có SA = a; SB = $a\sqrt{3}$ và AB = 2a nên ASB là tam giác vuông tại S và có $\widehat{SAB} = 60^0$

Vì (SAB) vuông góc với mặt phẳng đáy nên nếu kẻ SH ⊥ AB thì SH ⊥ (ABCD).

Vì $\widehat{SAB} = 60^0$ nên SAM là tam giác đều ⇒ HA = HM = $\dfrac{a}{2}$.

4 2

Trong mặt phẳng (ABCD) kẻ HK $\perp$ MP $\Rightarrow$ SK $\perp$ MP (định lí ba đường vuông góc) ta có: $\widehat{(SM, DN)} = \widehat{SMK} = \alpha$ (do (MP//DN))



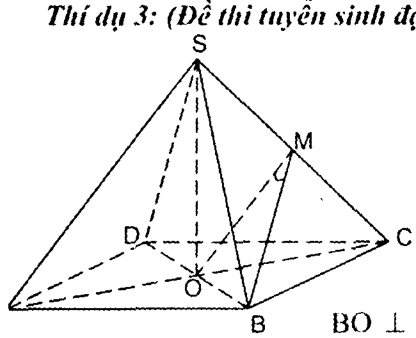
Vì thế $\cos\alpha = \dfrac{MK}{SM} = \dfrac{MK}{a}$ (1)

Ta có $MK = MH \cos \widehat{HMK}$

$$= \frac{a}{2}\cos\widehat{AMP} = \frac{a}{2}\frac{MA}{MP} = \frac{a}{2}\frac{a}{\sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}}} = \frac{a}{\sqrt{5}} (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

Thí dụ 3: (Đề thi tuyển sinh đại học khối A - 2004)



Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thoi cạnh bằng $\sqrt{5}$, AC = 4 và chiều cao của hình chóp là SO = $2\sqrt{2}$, ở đây O là giao điểm của AC và BD. Gọi H là trung điểm của SC. Tìm góc giữa hai đường thẳng SA và BM.

<u>Giải</u>

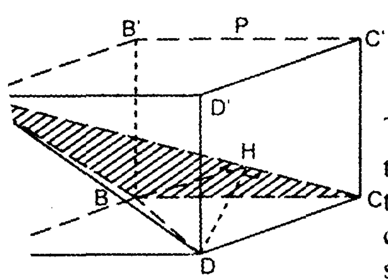
Vì MO//SA nên $\widehat{(SA, BM)} = \widehat{OMB}$ (1)

BO $\perp$ AC (đáy là hình thoi) và BO $\perp$ SO (do SO $\perp$ (ABCD)) $\Rightarrow$ BO $\perp$ (SAC) $\Rightarrow$ BO $\perp$ OM.

Dễ thấy: $SA = 2\sqrt{3} \Rightarrow MO = \sqrt{3}; BO = \sqrt{\left(\sqrt{5}\right)^2 - 2^2} = 1$.

Do đó : $\tan\widehat{OMB} = \dfrac{OB}{MO} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \widehat{OMB} = 30^0 \Rightarrow \widehat{(SA, BM)} = 30^0$

Thí dụ 4: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối A - 2003)



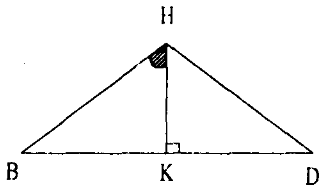
Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D'. Tìm số đo của góc tạo bởi hai mặt phẳng (BA'C) và (D'AC).

<u>Giải</u>

Ta có $(BA'C) \cap (DA'C) = A'C \Rightarrow$ A'DC là tam giác vuông tại D. Kẻ DH $\perp$ A'C. Hai tam giác vuông A'DC và A'BC bằng nhau vì có chung cạnh huyền A'C và A'B = AD, nên suy ra BH $\perp$ A'C. Vậy BHD chính là góc giữa hai mặt phẳng (BA'C) và (DA'C).

ng tam giác A'DC ta có: DA'.DC = A'C.DH.

$$DH = \frac{DA'.DC}{A'C} = \frac{a\sqrt{2}.a}{a\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$



Xét tam giác cân HBD đỉnh H với $HB = HD = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

và $BD = a\sqrt{2}$.

Kẻ $HK \perp BD \Rightarrow BK = KD = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Ta có $\widehat{BHK} = \frac{BK}{BH} = \frac{a\sqrt{2}}{2.\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \widehat{BHK} = 60^{o} \Rightarrow \widehat{HBC} = 120^{o}$.

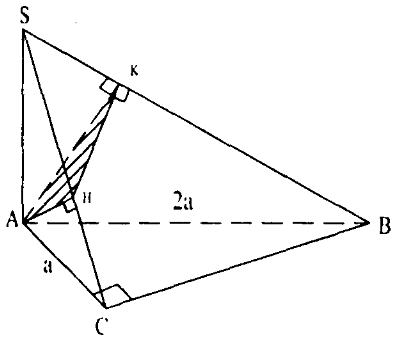
Vậy góc giữa hai mặt phẳng (BA'C) và (DA'C) bằng 60^{0}.

Chú ý:

Theo định nghĩa, góc giữa hai mặt phẳng $\leq 90^{o}$.

Thí dụ 5:

Trong mặt (P) cho tam giác ABC vuông tại C, AB = 2a, $\widehat{CAB} = 60^{o}$. Đoạn SA = a và vuông góc với (P). Tính sin (α), ở đây α là góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SBC)



Giải

Kẻ $AH \perp SC$, $AK \perp SB$ ($H \in SC$, $K \in SB$).

Do $BC \perp AC$, $BC \perp SA \Rightarrow BC \perp (SAC)$ $\Rightarrow (SBC) \perp (SAC)$. Do $AK \perp SB$ nên $HK \perp SB$ (định lí ba đường vuông góc)

Vậy $\widehat{AKH} = \alpha$ là góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SBC).

Ta có $\sin\alpha = \frac{AH}{AK}$ (1)

Ta có $AS.AC = AH.SC \Rightarrow AH = \frac{a.a}{a\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Lại có $AS.AB = AK.SB \Rightarrow AK = \frac{a.2a}{a\sqrt{5}} = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$.

Thay lại vào (1) ta có: $\sin\alpha = \frac{5a\sqrt{2}}{2.2a\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{10}}{4}$.

Loại 2: Các bài toán tìm điều kiện để góc cần tìm bằng một đại lượng cho trước:

Phương pháp để giải loại toán này như sau:

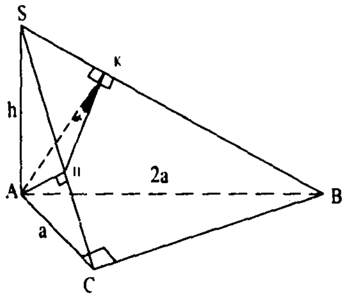
- Xác định góc α (coi như bài toán cố định – tức là bài toán thuộc loại 1).
- Từ điều kiện yêu cầu về α, ta có một phương trình đơn giản để xác định một ẩn số đã chọn từ trước. Việc tìm ẩn số này cho phép ta tìm được lời giải của bài toán.

Chú ý rằng nếu $\alpha = 90^{o}$, ta có bài toán: Tìm điều kiện để hai mặt phẳng vuông góc với nhau, hoặc hai đường thẳng vuông góc với nhau. Với dạng này bài toán đã được xét trong §1, và đã được đề cập đến trong các bài toán thi tuyển sinh vào Đại học, Cao đẳng (xem đề thi Đại học khối A – 2002).

Thí dụ 1:

Trong mặt phẳng (P) cho tam giác ABC vuông tại C, AB = 2a, $\widehat{CAB} = 60^\circ$, đoạn SA = h và SA vuông góc với (P). Tìm h sao cho góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) bằng 60°.

<u>**Giải**</u>



Kẻ $AH \perp SC$ và $AK \perp SB$ ($H \in SC$; $K \in SB$).

Theo thí dụ 6 loại 1, thì $\widehat{AKH} = \alpha$ là góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SBC). Từ đó:

$$\alpha = 60^\circ \Leftrightarrow \sin\alpha\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \frac{AK}{AH} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (1)$$

Ta có: $AH = \dfrac{AS.AC}{SC} = \dfrac{ah}{\sqrt{a^2 + h^2}}$,

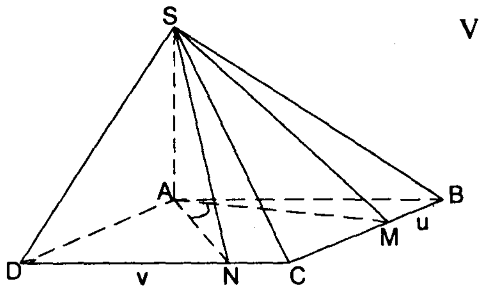
$$AK = \frac{AS.AB}{SB} = \frac{2ah}{\sqrt{2a^2 + h^2}}$$

Thay vào (1) suy ra: $\dfrac{\sqrt{4a^2 + h^2}}{2\sqrt{a^2 + h^2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow 4a^2 + h^2 = 3a^2 + 3h^2 \Leftrightarrow h = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Thí dụ 2:

Trong mặt phẳng (P) cho hình vuông ABCD cạnh bằng a. Đoạn SA cố định vuông góc với (P) tại A. M, N lần lượt là hai điểm di động trên cạnh BC và CD. Đặt BM = u; DN = v. Chứng minh rằng $a(u + v) + uv = a^2$ là điều kiện cần và đủ để hai mặt phẳng (SAM) và (SAN) tạo với nhau một góc 45°.

<u>**Giải**</u>



Ta có $(SAM) \cap (SAN) = SA$

Vì $SA \perp (ABCD) \Rightarrow AM \perp SA$, $AN \perp SA$

Do vậy $\widehat{MAN} = \alpha$ là góc giữa hai mặt phẳng (SAM) và (SAN). Từ đó:

$$\alpha = 45^\circ \Leftrightarrow \widehat{NAD} + \widehat{BAM} = 45^\circ$$

$$\Leftrightarrow \tan\left(\widehat{NAD} + \widehat{BAM}\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\tan\widehat{NAD} + \tan\widehat{BAM}}{1 - \tan\widehat{NAD}\tan\widehat{BAM}} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{v}{u} + \frac{u}{a}}{1 - \frac{uv}{a^2}} = 1$$

$$\Leftrightarrow a(u + a) + uv = a^2 \Rightarrow \text{đpcm}.$$

BÀI TẬP TỰ GIẢI

Bài 1:

Hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi cạnh a và SA = SB = SC = a.

1/ Chứng minh mặt phẳng (ABCD) vuông góc với mặt phẳng (SBD).

2/ Chứng minh SBD là tam giác vuông tại S.

Bài 2:

Tứ diện S.ABCD có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC). Gọi H và K lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC và SBC.

1/ Chứng minh SC vuông góc với mặt phẳng (BHK) và (SAC) $\perp$ (BHK).

2/ Chứng minh HK $\perp$ (SBC) và (SBC) $\perp$ (BHK).

Bài 3:

Trong mặt phẳng (P) cho hình chữ nhật ABCD. Qua A dựng nửa đường thẳng Ax vuông góc với (P). Lấy S là một điểm tùy ý trên Ax (S$\neq$ A). Qua A dựng mặt phẳng (Q) vuông góc với SC. Giả sử (Q) cắt SB, SC, SD lần lượt tại B', C', D'.

Chứng minh AB' $\perp$ SB; AD' $\perp$ SD và SB.SB' = SC'.SC'=SD.SD'

Bài 4:

Cho lăng trụ đứng ABC.A'B'C' đáy là tam giác ABC với AB=AC, $\widehat{BAC} = \alpha$. Gọi M là trung điểm của AA' và giả sử mặt phẳng (C'MB) tạo với đáy (ABC) một góc β.

1/ Chứng minh $\widehat{C'BC} = \beta$.

2/ Chứng minh $\tan\frac{\alpha}{2} = \cos\beta$ là điều kiện cần và đủ để BM $\perp$ MC'.

Bài 5:

Cho hình chóp S.ABCD là hình vuông cạnh a. có SA = h và vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Dựng và tính độ dài đoạn vuông góc chung của

1/ SB và CD.

2/ SC và BD.

Đáp số: 1/ Khoảng cách là BC = a.

2/ Khoảng cách là $OH = \dfrac{ah\sqrt{2}}{a\sqrt{h^2 + a^2}}$, ở đây O là tâm của đáy.

Bài 6:

Cho hình chóp tam giác S.ABC có đáy là tam giác đều cạnh 7a, cạnh SC vuông góc với mặt phẳng (ABC) và SC = 7a. Tìm khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC.

Đáp số: $a\sqrt{21}$.

Bài 7:

Trong mặt phẳng (P) cho hình thoi ABCD có tâm là O và cạnh a và $OB = a\frac{\sqrt{3}}{3}$. Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (ABCD) tại O, lấy điểm S sao cho SB = a.

Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BD.

Đáp số: $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Bài 8:

Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có cạnh là a. Gọi E, F và M lần lượt là trung điểm của AD, AB và CC'. Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (ABCD) và (EFM). Tính $\cos\varphi$.

Đáp số: $\frac{3\sqrt{11}}{11}$.

Bài 9:

Trong mặt phẳng (P) cho hình vuông ABCD cạnh a. Dựng đoạn SA vuông góc với (P) tại A. Gọi M và N lần lượt là các điểm trên BC và CD. Đặt BM = u, DN = v. Chứng minh rằng $a(u + v) + \sqrt{3}uv = a^2\sqrt{3}$ là điều kiện cần và đủ để hai mặt phẳng (SAM) và (SAN) tạo với nhau một góc 30^0.