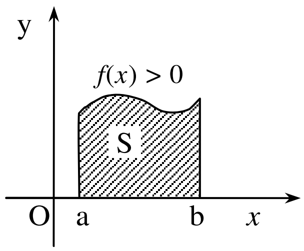
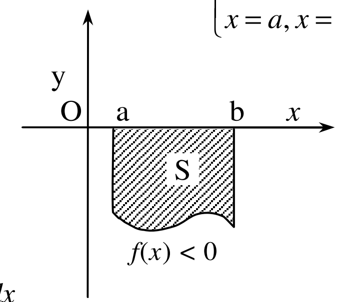
ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN TÍNH DIỆN TÍCH, THỂ TÍCH

I. DIỆN TÍCH HÌNH PHẲNG XÁC ĐỊNH BỞI ĐƯỜNG CONG *y=f(x)*

1. DIỆN TÍCH HÌNH PHẲNG GIỚI HẠN BỞI 1 ĐƯỜNG CONG:

1.1. Bài toán: Tìm diện tích hình phẳng S giới hạn bởi $\begin{cases} (\mathcal{C}): y = f(x) \\ Ox: y = 0 \\ x = a, x = b \end{cases}$





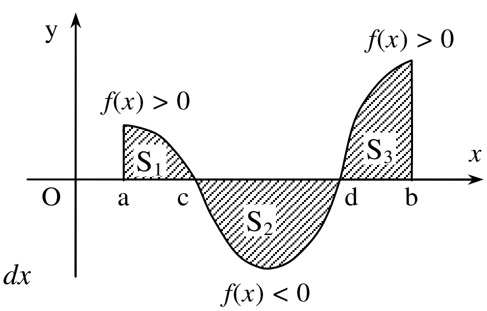
1.2. Công thức tổng quát: $S = \int_a^b \left|f(x)\right| dx$

1.3. Công thức khai triển:

a. $S = \int_a^b f(x)\,dx$ a nếu $f(x) \geq 0$

b. $S = -\int_a^b f(x)\,dx$ nếu $f(x) \leq 0$

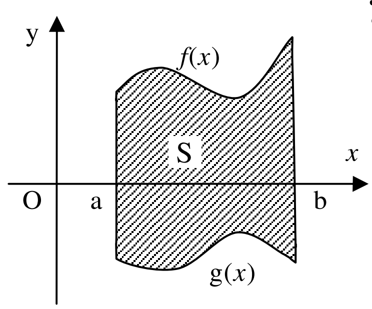
c. $S = \int_a^c f(x)\,dx - \int_c^d f(x)\,dx + \int_d^b f(x)\,dx$

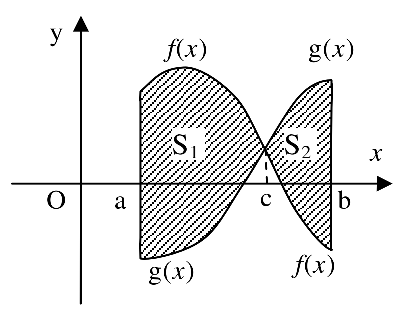


2. DIỆN TÍCH HÌNH PHẲNG GIỚI HẠN BỞI 2 ĐƯỜNG CONG:

2.1. Bài toán: Tìm diện tích hình phẳng S giới hạn bởi $\begin{cases} (\mathcal{C}_1): y = f(x) \\ (\mathcal{C}_2): y = g(x) \\ x = a, x = b \end{cases}$

2.2. Công thức tổng quát: $S = \int_a^b \left|f(x) - g(x)\right| dx$





2.3. Công thức khai triển:

a. $S=\int_a^b \left(f(x)-g(x)\right)dx$ nếu $f(x) \geq g(x)$ $\forall x \in [a, b]$

b. $S=\int_a^b \left(g(x)-f(x)\right)dx$ nếu $f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in [a, b]$

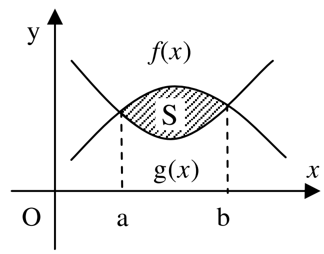
c. $S=\int_a^c \left(f(x)-g(x)\right)dx+\int_c^b \left(g(x)-f(x)\right)dx$

3. DIỆN TÍCH HÌNH PHẲNG GIỚI HẠN BỞI CÁC ĐƯỜNG CONG TỰ CẮT KHÉP KÍN

3.1. Bài toán 1: Tìm diện tích hình phẳng S giới hạn bởi $\begin{cases}(C_1): y=f(x)\\(C_2): y=g(x)\end{cases}$

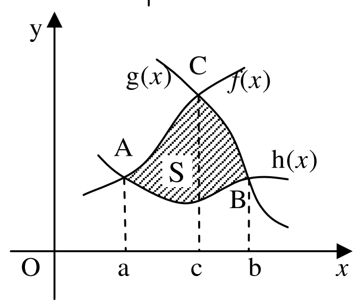
Bước 1: Giải phương trình: $f(x)=g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=a\\x=b\end{array}\right.$

Bước 2: Sử dụng $S=\int_a^b \left|f(x)-g(x)\right|dx$



3.2. Bài toán 2: Tìm diện tích hình phẳng

S giới hạn bởi $\begin{cases}(C_1): y=f(x)\\(C_2): y=g(x)\\(C_3): y=h(x)\end{cases}$



Bước 1: Giải phương trình tương giao $\to$ tìm hoành độ giao điểm

$$\begin{cases}C \equiv (C_1)\cap(C_2) & \text{giải phương trình } f(x)=g(x)\\ A \equiv (C_2)\cap(C_3) & \text{giải phương trình } g(x)=h(x)\\ B \equiv (C_3)\cap(C_1) & \text{giải phương trình } h(x)=f(x)\end{cases}$$

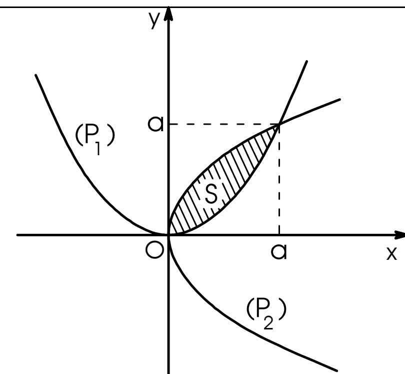
Bước 2: Sử dụng $S=\int_a^c \left(f(x)-h(x)\right)dx+\int_c^b \left(g(x)-h(x)\right)dx$

4. CHÚ Ý: Cần phải điền "đvdt" vào kết quả cuối cùng trong các bài toán tính diện tích hình phẳng

5. CÁC BÀI TẬP MẪU MINH HỌA

Bài 1. Tính S: $\left\{(P_1): x^2 = ay\ ;\ (P_2): y^2 = ax\right\}$ $\quad (a > 0)$

Giải



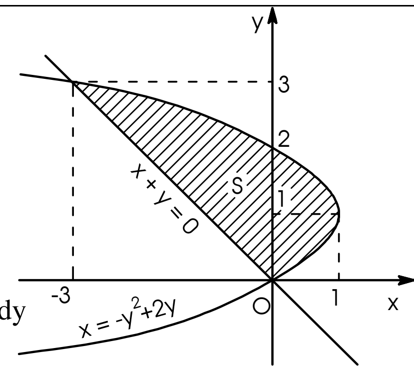
$$(P_1)\cap(P_2): \begin{cases} y = \dfrac{x^2}{a} \\ y^2 = ax \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = \dfrac{x^4}{a^2} \\ y^2 = ax \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^4}{a^2} = ax \\ y^2 = ax \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 = a^3 x \\ y^2 = ax \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0, y = 0 \\ x = a, y = a \end{array}\right.$$

$$S = \int_0^a \left(\sqrt{ax} - \frac{x^2}{a}\right)dx = \left(\frac{2\sqrt{a}}{3}x\sqrt{x} - \frac{x^3}{3a}\right)\Bigg|_0^a = \frac{2a^2}{3} - \frac{a^3}{3a} = \frac{a^2}{3} \text{ (đvdt)}$$

Bài 2. Tính S: $\left\{(\mathscr{C}): y^2 - 2y + x = 0\ ;\ (D): x + y = 0\right\}$

Giải



$$\begin{cases} (\mathscr{C}): y^2 - 2y + x = 0 \\ (D): x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\mathscr{C}): x = -y^2 + 2y \\ (D): x + y = 0 \end{cases}$$

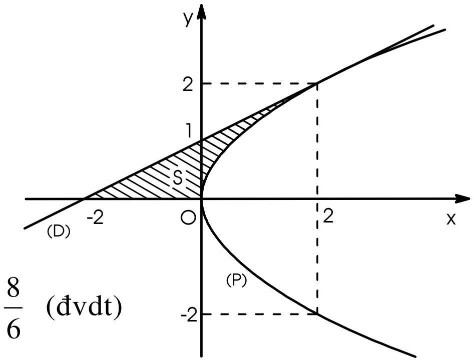
$$(\mathscr{C})\cap(D): -y^2 + 2y + y = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 0; x = 0 \\ y = 3; x = -3 \end{array}\right.$$

$$S = \int_0^3 \left[\left(-y^2 + 2y\right) - (-y)\right]dy = \int_0^3 \left(-y^2 + 2y + y\right)dy$$

$$= \int_0^3 \left(-y^2 + 3y\right)dy = \left(-\frac{y^3}{3} + \frac{3y^2}{2}\right)\Bigg|_0^3 = -\frac{1}{3}\cdot 27 + \frac{3}{2}\cdot 9 = \frac{9}{2} \text{ (đvdt)}$$

Bài 3. Tính S: $\left\{(P): y^2 = 2x\ ;\ (D): x - 2y + 2 = 0\ ;\ Ox: y = 0\right\}$

Giải



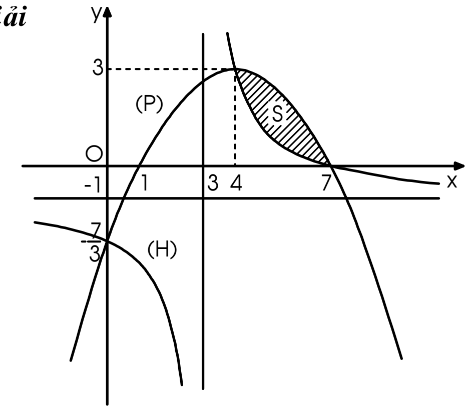
$$(P)\cap(D) \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 2x \\ x = 2y - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 2(2y - 2) \\ x = 2y - 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y^2 - 4y + 4 = 0 \\ x = 2y - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$S = \int_0^2 \left[\frac{y^2}{2} - (2y - 2)\right]dy = \left(\frac{y^3}{6} - y^2 + 2y\right)\Bigg|_0^2 = \frac{8}{6} \text{ (đvdt)}$$

Bài 4. Tính S: $\left\{(P): y = -\frac{1}{3}\left(x^2 - 8x + 7\right); (H): y = \frac{7-x}{x-3}\right\}$

Giải



$$(P) \cap (H): -\frac{1}{3}\left(x^2 - 8x + 7\right) = \frac{7-x}{x-3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x\left(x^2 - 11x + 28\right)}{3(3-x)} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 4 \\ x = 7 \end{array}\right.$$

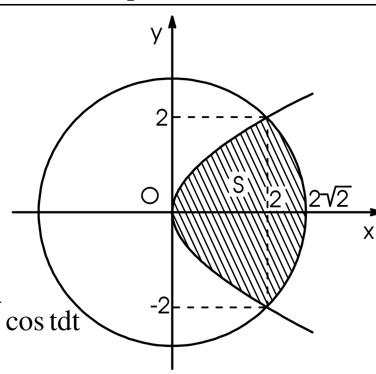
$$S = \int_4^7 \left[-\frac{1}{3}\left(x^2 - 8x + 7\right) - \frac{7-x}{x-3}\right] dx$$

$$= \int_4^7 \left[-\frac{x^2}{3} + \frac{8x}{3} - \frac{4}{3} - \frac{4}{x-3}\right] dx = \left(-\frac{x^3}{9} + \frac{4x^2}{3} - \frac{4}{3}x - 4\ln|x-3|\right)\Bigg|_4^7 = 9 + 8\ln 2 \quad \text{(đvdt)}$$

Bài 5. Cho: $\left\{(P): y^2 = 2x\,; (C): x^2 + y^2 = 8\right\}$.

(P) chia (C) thành 2 phần, tìm tỉ số diện tích của 2 phần đó.

Giải



Nhìn vào đồ thị ta có: $S_2 = 2\int_0^2 \left[\sqrt{8-y^2} - \frac{y^2}{2}\right] dy$

$$= 2\int_0^2 \sqrt{8-y^2}\,dy - \int_0^2 y^2 dy = 2I - \frac{y^3}{3}\Bigg|_0^2 = 2I - \frac{8}{3}$$

Xét $I = \int_0^2 \sqrt{8-y^2}\,dy$. Đặt $y = 2\sqrt{2}\sin t \Rightarrow dy = 2\sqrt{2}\cos t dt$

$$I = \int_0^2 \sqrt{8-y^2}\,dy = \int_0^{\pi/4} \sqrt{8 - 8\sin^2 t}.2\sqrt{2}\cos t dt = 8\int_0^{\pi/4} \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t dt$$

$$= 8\int_0^{\pi/4} \cos^2 t\, dt = 4\int_0^{\pi/4} (1 + \cos 2t)\, dt = 4\left[t + \frac{1}{2}\sin 2t\right]\Bigg|_0^{\pi/4} = 4\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right) = \pi + 2$$

Vậy $S_2 = 2I - \frac{8}{3} = 2\pi + 4 - \frac{8}{3} = 2\pi + \frac{4}{3}$ (đvdt). Ta có: $S_1 + S_2 = \pi\left(2\sqrt{2}\right)^2 = 8\pi$

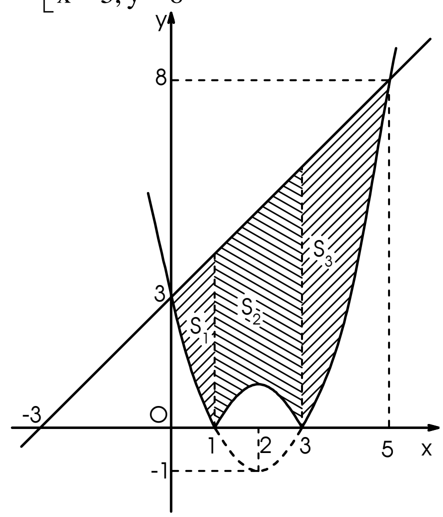
$$\Rightarrow S_1 = 8\pi - \left(2\pi + \frac{4}{3}\right) = 6\pi - \frac{4}{3} \text{ (đvdt)} \Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = \frac{6\pi - \frac{4}{3}}{2\pi + \frac{4}{3}} = \frac{18\pi - 4}{6\pi + 4} = \frac{9\pi - 2}{3\pi + 2}$$

Bài 6. Tính S: $\left\{(P): y = \left|x^2 - 4x + 3\right|; (D): y = x + 3\right\}$

Giải

$$(P)\cap(D): \left[\begin{array}{l} x+3 = x^2 - 4x + 3 \\ x + 3 = -x^2 + 4x - 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 5x = 0 \\ x^2 - 3x + 6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0, y = 3 \\ x = 5, y = 8 \end{array}\right.$$

$$(P)\cap Ox: y = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 3 \end{array}\right.$$



$$S = \int_0^1 \left[(x+3) - (x^2 - 4x + 3)\right]dx +$$

$$+ \int_1^3 \left[(x+3) + (x^2 - 4x + 3)\right]dx +$$

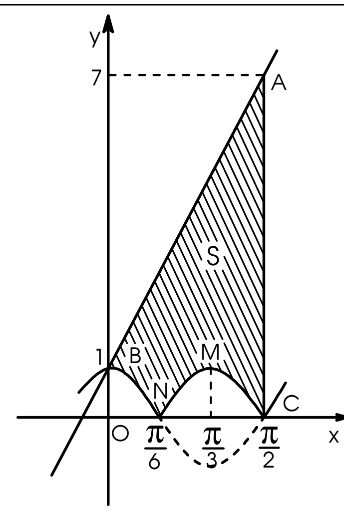
$$+ \int_3^5 \left[(x+3) - (x^2 - 4x + 3)\right]dx$$

$$= \int_0^1 (-x^2 + 5x)dx + \int_1^3 (x^2 - 3x + 6)dx + \int_3^5 (-x^2 + 5x)dx$$

$$= \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 + \left(\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 6x\right)\Bigg|_1^3 + \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2}\right)\Bigg|_3^5 = \frac{109}{6} \quad \text{(đvdt)}$$

Bài 7. Tính S: $\left\{(C_1): y = \left|1 - 2\sin^2\frac{3x}{2}\right|; (C_2): y = 1 + \frac{12x}{\pi}; (D): x = \frac{\pi}{2}\right\}$

Giải



$$(C_1): y = \left|1 - 2\sin^2\frac{3x}{2}\right| = \left|\cos 3x\right|$$

Nhìn vào đồ thị ta có: $S = S_{ANOI} - 3S_{OIK}$

$$= \frac{7+1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} - 3\int_0^{\pi/6}\cos 3x dx = 2\pi - \sin 3x\Big|_0^{\pi/6} = 2\pi - 1$$

Bài 8. Tìm diện tích hình phẳng S giới hạn bởi (P): $y = x^2 - 2x + 2$ và các tiếp tuyến của (P) đi qua A(2; −2).

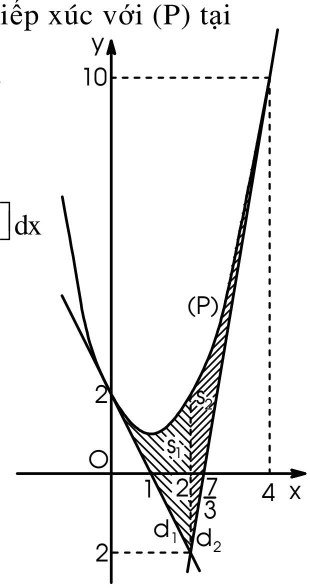
Giải

Đường thẳng qua A có dạng (d): $y = k(x-2) - 2$.

(d) là tiếp tuyến của (P) khi $\begin{cases} x^2 - 2x + 2 = k(x-2) - 2 \\ (x^2 - 2x + 2)' = [k(x-2) - 2]' \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2 = k \\ x^2 - 2x + 2 = (2x-2)(x-2) - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2 = k \\ x^2 - 4x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0; k = -2 \\ x = 4; k = 6 \end{array}\right.$$

Vậy 2 tiếp tuyến của (P) đi qua A là: (d_1): $y = -2x + 2$ tiếp xúc với (P) tại B(0, 2) và (d_2): $y = 6x - 14$ tiếp xúc với (P) tại C(4, 10).



Vậy $S:\{(P): y = x^2 - 2x + 2; (d_1): y = -2x + 2\ ;\ (d_2): y = 6x - 14\}$

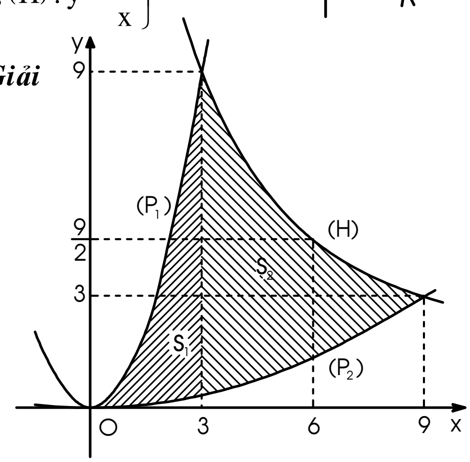
$$S = \int_0^2 \left[(x^2 - 2x + 2) - (-2x + 2)\right]dx + \int_2^4 \left[(x^2 - 2x + 2) - (6x - 14)\right]dx$$

$$= \int_0^2 x^2 dx + \int_2^4 (x^2 - 8x + 16)dx = \int_0^2 x^2 dx + \int_2^4 (x-4)^2 d(x-4)$$

$$= \frac{x^3}{3}\Bigg|_0^2 + \frac{(x-4)^3}{3}\Bigg|_2^4 = \left(\frac{8}{3} - 0\right) + \left(0 - \frac{-8}{3}\right) = \frac{8}{3} + \frac{8}{3} = \frac{16}{3}\ \text{(đvdt)}$$

Bài 9. Tính $S:\left\{(P_1): y = x^2\ ; (P_2): y = \frac{x^2}{27}; (H): y = \frac{27}{x}\right\}$

Giải



$(P_1) \cap (P_2): x^2 = \frac{x^2}{27} \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow y = 0$

$(P_1) \cap (H): x^2 = \frac{27}{x} \Leftrightarrow x^3 = 27 \Leftrightarrow x = 3$

$(P_2) \cap (H): \frac{x^2}{27} = \frac{27}{x} \Leftrightarrow x^3 = 27^2 \Leftrightarrow x = 9$

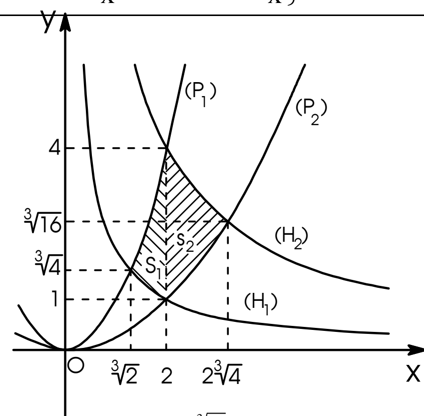
Nhìn vào đồ thị ta có:

$$S = \int_0^3 \left(x^2 - \frac{x^2}{27}\right)dx + \int_3^9 \left(\frac{27}{x} - \frac{x^2}{27}\right)dx = \frac{26x^3}{81}\Bigg|_0^3 + \left(27\ln x - \frac{x^3}{81}\right)\Bigg|_3^9$$

$$= \left(\frac{26}{3} - 0\right) + \left(27\ln 9 - 27\ln 3 - 9 + \frac{1}{3}\right) = 27\ln 3\ \text{(đvdt)}$$

Bài 10. Tính S: $\left\{(P_1): y = x^2 ; (P_2): y = \dfrac{x^2}{4} ; (H_1): y = \dfrac{2}{x} ; (H_2): y = \dfrac{8}{x}\right\}$

Giải



$(P_1)\cap(H_1): x^2 = \dfrac{2}{x} \Leftrightarrow x^3 = 2 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{2} \Rightarrow y = \sqrt[3]{4}$

$(P_1)\cap(H_2): x^2 = \dfrac{8}{x} \Leftrightarrow x^3 = 8 \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow y = 4$

$(P_2)\cap(H_1): \dfrac{x^2}{4} = \dfrac{2}{x} \Leftrightarrow x^3 = 8 \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow y = 1$

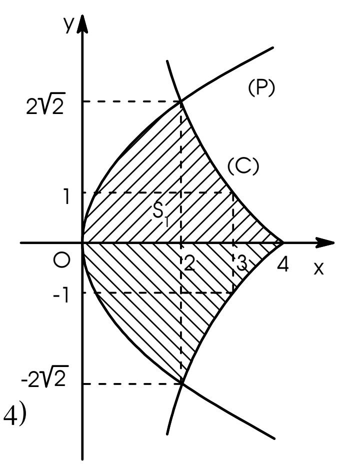
$(P_2)\cap(H_2): \dfrac{x^2}{4} = \dfrac{8}{x} \Leftrightarrow x^3 = 32 \Leftrightarrow x = 2\sqrt[3]{4} \Rightarrow y = 2\sqrt[3]{2}$

$$S = \int_{\sqrt[3]{2}}^{2}\left(x^2 - \frac{2}{x}\right)dx + \int_{2}^{\sqrt[3]{32}}\left(\frac{8}{x} - \frac{x^2}{4}\right)dx = \left(\frac{x^3}{3} - 2\ln x\right)\Bigg|_{\sqrt[3]{2}}^{2} + \left(8\ln x - \frac{x^3}{12}\right)\Bigg|_{2}^{\sqrt[3]{32}} = 4\ln 2 \text{ (đvdt)}$$

Bài 11. Tính S: $\left\{(P): y^2 = 4x; (C): y^2 = (4-x)^3\right\}$

Giải

Phương trình của (P) và (C) đều chẵn đối với y, vì thế S là miền nhận Ox làm trục đối xứng. Gọi S_1 là phần nằm trên trục Ox, khi đó $S = 2S_1$



$(P)\cap(C): 4x = (4-x)^3 \Leftrightarrow x^3 - 12x^2 + 52x + 64 = 0$

$\Leftrightarrow (x-2)(x^2 - 10x + 32) = 0 \Leftrightarrow (x-2)\left[(x-5)^2 + 7\right] = 0$

$\Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow y = 2\sqrt{2}$

$(P)\cap Ox: 4x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$(C)\cap Ox: (4-x)^3 = 0 \Leftrightarrow x = 4$

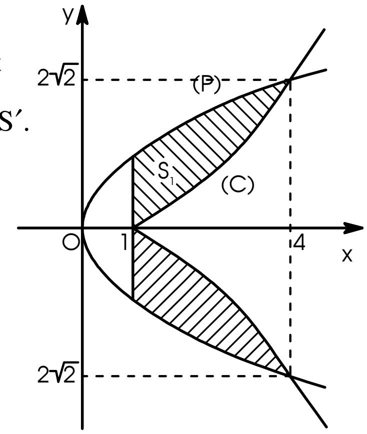
$$S_1 = \int_0^2 \sqrt{4x^2}\,dx + \int_2^4 \sqrt{(4-x)^3}\,dx = 2\int_0^2 x^{\frac{1}{2}}dx - \int_2^4 (x-4)^{\frac{3}{2}}\,d(x-4)$$

$$= \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^2 - \frac{2}{5}(x-4)^{\frac{5}{2}}\Bigg|_2^4 = \left(\frac{8\sqrt{2}}{3} - 0\right) - \left(0 + \frac{8\sqrt{2}}{5}\right) = \frac{64\sqrt{2}}{15}.\ \text{Vậy } S = 2S' = \frac{128\sqrt{2}}{15}$$

Cách 2: S: $\begin{cases}(P): x = \dfrac{1}{4}y^2 \\ (C): x = 4 - y^{2/3}\end{cases} \Rightarrow S_1 = \displaystyle\int_0^{2\sqrt{2}}\left[\left(4 - y^{\frac{2}{3}}\right) - \frac{1}{4}y^2\right]dy = \frac{128\sqrt{2}}{15}$ (đvdt)

Bài 12. Tính S: $\left\{(P): y^2 = 2x; (C): 27y^2 = 8(x-1)^3\right\}$

Giải



Gọi S′ là phần nằm phía trên trục Ox, từ tính chất của 2 hàm chẵn suy ra tính đối xứng khi đó S = 2S′.

Do $y^2 \ge 0 \Rightarrow (x-1)^3 \ge 0 \Rightarrow x \ge 1$

$(P)\cap(C): 2x = \dfrac{8}{27}(x-1)^3$

$\Leftrightarrow (x-4)(2x+1)^2 = 0 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow y = 2\sqrt{2}$

$(P)\cap Ox: 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0; (C)\cap Ox: (x-1)^3 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

$$S = 2S_1 = 2\int_1^4\left(\sqrt{2x} - \sqrt{\frac{8(x-1)^3}{27}}\right)dx = 2\sqrt{2}\int_1^4 x^{\frac{1}{2}}dx - \frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}\int_1^4 (x-1)^{\frac{3}{2}}\,d(x-1) = \frac{68\sqrt{2}}{15}$$

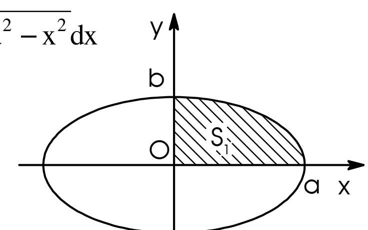
Bài 13. Tính diện tích hình elip giới hạn bởi (E): $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

Giải

Phương trình $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ chẵn đối với x và y nên elip nhận O là tâm đối xứng.

Gọi S_1 là diện tích của phần elip thuộc góc phần tư (I) trên mặt phẳng Oxy.

$\Rightarrow S_1: \left\{x = 0; y = 0; y = \dfrac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\right\}$ và $S = 4S_1 = 4\dfrac{b}{a}\displaystyle\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$



Đặt $x = a\cos\alpha$: $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow \alpha = \pi/2 \\ x = a \Rightarrow \alpha = 0 \end{cases}$; Khi đó

$$S = 4\frac{b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{4b}{a}\int_{\pi/2}^{0}\left(-a^2\sin^2\alpha\right)d\alpha = 4ab\int_0^{\pi/2}\frac{1-\cos 2\alpha}{2}\,d\alpha = \pi ab \text{ (đvdt)}$$

Bài 14. Tính S: $\left\{0 \le y \le 1; y = (x+1)^2; x = \sin \pi y\right\}$

Giải

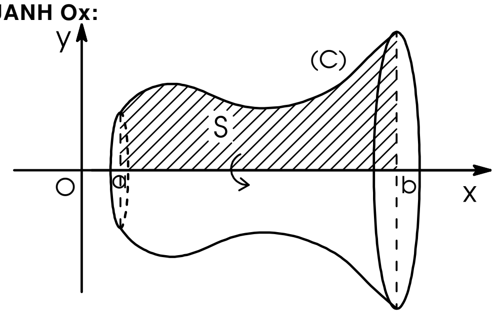
$x = \sin\pi y \in [-1,1] \Rightarrow x + 1 \ge 0$; mà $0 \le y \le 1$ nên $y = (x+1)^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{y} - 1$

$$S = \int_0^1 \left(\sin\pi y - \sqrt{y} + 1\right)dy = \left(-\frac{1}{\pi}\cos\pi y - \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} + y\right)\Bigg|_0^1 = \frac{2}{\pi} + \frac{1}{3} \quad \text{(đvdt)}$$

THỂ TÍCH KHỐI TRÒN XOAY

I. V_X SINH BỞI DIỆN TÍCH S QUAY XUNG QUANH Ox:

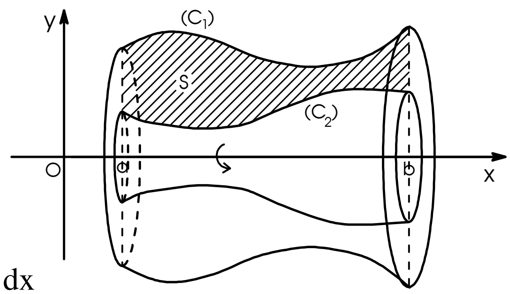
$$S: \begin{cases} (\mathcal{C}): y = f(x) \\ Ox: y = 0 \\ \Delta_1, \Delta_2: x = a, x = b \end{cases}$$



Công thức: $V_x = \pi\int_a^b f^2(x)dx$

II. V_X SINH BỞI DIỆN TÍCH S QUAY XUNG QUANH Ox:

$$S: \begin{cases} (\mathcal{C}_1): y = f(x) \\ (\mathcal{C}_2): y = g(x) \\ 0 \le g(x) \le f(x) \\ \Delta_1, \Delta_2: x = a, x = b \end{cases}$$



Công thức: $V_x = \pi\int_a^b \left[f^2(x) - g^2(x)\right]dx$

III. V_X SINH BỞI DIỆN TÍCH S QUAY XUNG QUANH Ox: $S: \begin{cases} (\mathcal{C}_1): y = f(x) \\ (\mathcal{C}_2): y = g(x) \end{cases}$

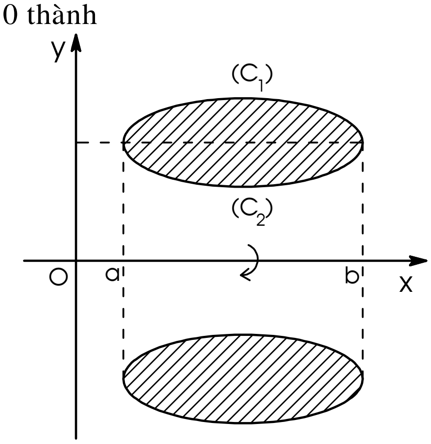
Bước 1: Giải phương trình: $f(x) = g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = a \\ x = b \end{array}\right.$

Bước 2: Giả sử $0 \le g(x) \le f(x), \forall x \in [a, b]$. Khi đó: $V_x = \pi\int_a^b \left[f^2(x) - g^2(x)\right]dx$

IV. V_X SINH BỞI DIỆN TÍCH: ĐƯỜNG CONG BẬC HAI f(x, y) = 0 QUAY XUNG QUANH Ox:

Bước 1: Tách đường cong bậc hai f(x, y) = 0 thành

$$\begin{cases} (\mathcal{C}_1): y = f_1(x) \\ (\mathcal{C}_2): y = f_2(x) \end{cases}$$

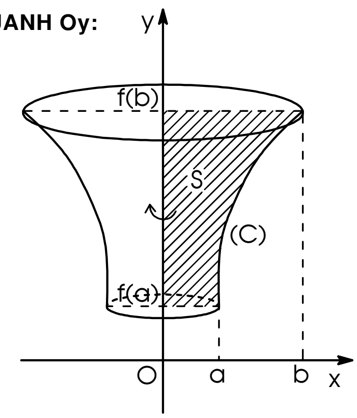


và giả sử $0 \le f_2(x) \le f_1(x)$

Bước 2: Xác định cận x = a, x = b.

Khi đó: $V_x = \pi\int_a^b \left[f_1^2(x) - f_2^2(x)\right]dx$

V. V_y SINH BỞI DIỆN TÍCH S CỦA 1 ĐỒ THỊ QUAY XUNG QUANH Oy:

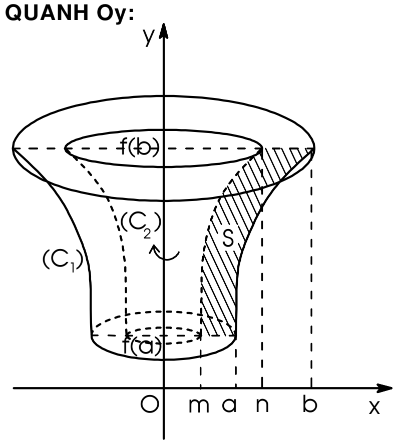


$$S:\begin{cases}(\mathcal{C}): y = f(x)\\ Oy: x = 0\\ \Delta_1: y = f(a)\\ \Delta_2: y = f(b)\end{cases}$$

Bước 1: $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$

Bước 2: $V_y = \pi\int\limits_{f(a)}^{f(b)}\left[f^{-1}(y)\right]^2 dy$

VI. V_y SINH BỞI DIỆN TÍCH S CỦA 2 ĐỒ THỊ QUAY XUNG QUANH Oy:



$$S:\begin{cases}(\mathcal{C}_1): y = f(x)\\ (\mathcal{C}_2): y = g(x)\\ \Delta_1: y = f(a) = g(m)\\ \Delta_2: y = f(b) = g(n)\end{cases}$$

Bước 1: $\begin{cases}(\mathcal{C}_1): y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)\\ (\mathcal{C}_2): y = g(x) \Leftrightarrow x = g^{-1}(y)\end{cases}$

Bước 2: Giả sử $0 \le g^{-1}(y) \le f^{-1}(y) \Rightarrow V_y = \pi\int\limits_{f(a)}^{f(b)}\left(\left[f^{-1}(y)\right]^2 - \left[g^{-1}(y)\right]^2\right)dy$

VII. V_y SINH BỞI DIỆN TÍCH: ĐƯỜNG CONG BẬC 2 f(x, y) = 0 QUAY XUNG QUANH Oy:

Bước 1: Tách đường cong bậc hai f(x, y) = 0 thành $\begin{cases}(\mathcal{C}_1): x = f_1(y)\\ (\mathcal{C}_2): x = f_2(y)\end{cases}$

và giả sử $0 \le f_2(y) \le f_1(y)$

Bước 2: Xác định cận x = a, x = b. Khi đó: $V_x = \pi\int\limits_a^b\left[f_1^2(y) - f_2^2(y)\right]dy$

VIII. PHƯƠNG PHÁP BAO TRỤ TÍNH V_y KHI DIỆN TÍCH S QUAY XUNG QUANH Oy:

Công thức: $V_y = 2\pi\int\limits_a^b xf(x)\,dx$

CHÚ Ý: Cần phải điền "đvtt" vào kết quả cuối cùng trong các bài toán tính thể tích khối tròn xoay

IX. CÁC BÀI TẬP MẪU MINH HỌA

Bài 1. Tìm V_x sinh bởi S: $\{(\mathcal{C}): y = \ln x\,; Ox: y = 0; (\Delta): x = 2\}$ quay quanh Ox

Giải

Xét $(\mathcal{C}) \cap Ox: \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow\ V_x = \pi\int_1^2 (\ln x)^2\,dx = \pi x(\ln x)^2\Big|_1^2 - \pi\int_1^2 x\,d(\ln x)^2$

$$= 2\pi(\ln 2)^2 - 2\pi\int_1^2 \ln x\,dx = 2\pi(\ln 2)^2 - 2\pi x\ln x\Big|_1^2 + 2\pi\int_1^2 x\,d(\ln x)$$

$$= 2\pi(\ln 2)^2 - 4\pi\ln 2 + 2\pi\int_1^2 dx = 2\pi(\ln 2)^2 - 4\pi\ln 2 + 2\pi = 2\pi(\ln 2 - 1)^2 \quad (\text{đvtt})$$

Bài 2. Tính V_x khi S: $\left\{(L): y = x\sqrt{\ln(1+x^3)}\,; y = 0\,; x = 1\right\}$ quay quanh Ox.

Giải

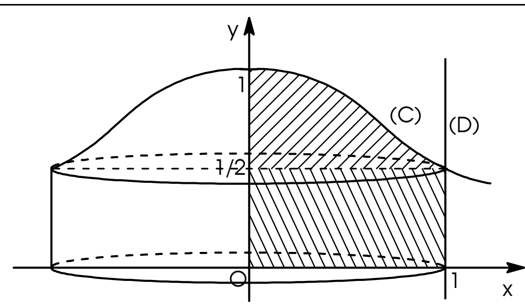
$$y = x\sqrt{\ln(1+x^3)} \Rightarrow \begin{cases} 1 + x^3 > 0 \\ \ln(1+x^3) \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -1 \\ 1 + x^3 \ge 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \ge 0 \Rightarrow y \ge 0$$

$$(L) \cap Ox: x\sqrt{\ln(1+x^3)} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \ \Rightarrow V_x = \pi\int_0^1 x^2\ln(1+x^3)\,dx = \frac{\pi}{3}\int_0^1 \ln(1+x^3)\,d(x^3+1)$$

$$= \frac{\pi}{3}(x^3+1)\ln(1+x^3)\Big|_0^1 - \frac{\pi}{3}\int_0^1 (x^3+1)\,d\left[\ln(1+x^3)\right] = \frac{2\pi\ln 2}{3} - \frac{\pi}{3}x^3\Big|_0^1 = \frac{\pi(2\ln 2 - 1)}{3}$$

Bài 3. Cho S: $\left\{(C): y = \dfrac{1}{1+x^2}; (D): x = 1; y = 0, x = 0\right\}$. Tính V_y khi S quay quanh Oy

Giải



$$y = \frac{1}{1+x^2} > 0 \Rightarrow (C): x^2 = \frac{1}{y} - 1$$

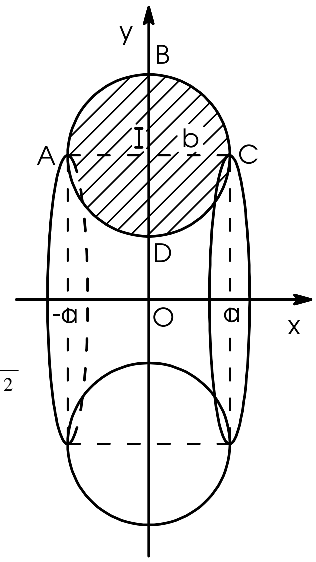
$$\begin{cases} (C) \cap Oy: x = 0 \Rightarrow y = 1 \\ (C) \cap (D): x = 1 \Rightarrow y = 1/2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow\ V_y = \pi\int_0^{1/2} dy + \pi\int_{1/2}^1 \left(\frac{1}{y} - 1\right)dy = \pi y\Big|_0^{1/2} + \pi(\ln y - y)\Big|_{1/2}^1 = \frac{\pi}{2} + \pi\left(-\ln\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) = \pi\ln 2$$

Bài 4. Cho S: $x^2+(y-b)^2\le a^2;0<a\le b$

a. Tìm V_x khi S quay quanh Ox

b. Tìm V_y khi S quay quanh Oy



Giải

a. Ta có: $x^2+(y-b)^2\le a^2 \Leftrightarrow (y-b)^2=a^2-x^2$

$\Rightarrow \widehat{A_1B_2A_2}: y=b+\sqrt{a^2-x^2}; \widehat{A_1B_1A_2}: y=b-\sqrt{a^2-x^2}$

$$V_x=\pi\int_{-a}^{a}\left[\left(b+\sqrt{a^2-x^2}\right)^2-\left(b-\sqrt{a^2-x^2}\right)^2\right]dx$$

$=4\pi b\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx=8\pi b\int_{0}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx$. Đặt x = asint $\Rightarrow$

x	0	a
t	0	π/2
dx	a cost dt	

$$V_x=8\pi b\int_0^{\pi/2}\sqrt{a^2\left(1-\sin^2 t\right)}\,a\cos t\,dt=4\pi a^2b\int_0^{\pi/2}2\cos^2 t\,dt$$

$$=4\pi a^2b\int_0^{\pi/2}(1+2\cos 2t)\,dt=4\pi a^2b(t+\sin 2t)\Big|_0^{\pi/2}=2\pi^2a^2b \quad (\text{đvtt})$$

b. Ta có: $x^2+(y-b)^2\le a^2 \Leftrightarrow x^2=a^2-(y-b)^2$

$\Leftrightarrow \widehat{B_1A_2B_2}: x=\sqrt{a^2-(y-b)^2}\ ; \widehat{B_1A_1B_2}: x=-\sqrt{a^2-(y-b)^2}$

Do các cung $\widehat{B_1A_2B_2},\widehat{B_1A_1B_2}$ đối xứng nhau qua Oy nên

$$V_y=\pi\int_{b-a}^{b+a}\left[a^2-(y-b)^2\right]dy=\pi\left[a^2y-\frac{1}{3}(y-b)^3\right]_{b-a}^{b+a}=\pi\left(2a^3-\frac{2a^3}{3}\right)=\frac{4\pi a^3}{3}\ (\text{đvtt})$$

Bài 5. Cho S là diện tích của (E): $\dfrac{(x-4)^2}{4}+\dfrac{y^2}{16}=1$

a. Tìm V_x khi S quay quanh Ox **b.** Tìm V_y khi S quay quanh Oy

Giải

a. (E): $\frac{(x-4)^2}{4}+\frac{y^2}{16}=1 \Leftrightarrow \frac{y^2}{16}=1-\frac{(x-4)^2}{4} \Leftrightarrow y^2=4\left[4-(x-4)^2\right]$

$(E)\cap Ox: 4-(x-4)^2=0 \Leftrightarrow x=2; x=6$

$\Leftrightarrow \overset{\frown}{ABC}: y=2\sqrt{4-(x-4)^2}$; $\overset{\frown}{ADC}: y=-2\sqrt{4-(x-4)^2}$

Do các cung $\overset{\frown}{ABC}, \overset{\frown}{ADC}$ đối xứng nhau qua Ox nên

$$V_x=\pi\int_2^6\left(2\sqrt{4-(x-4)^2}\right)^2 dx = 4\pi\int_2^6\left[4-(x-4)^2\right]d(x-4)$$

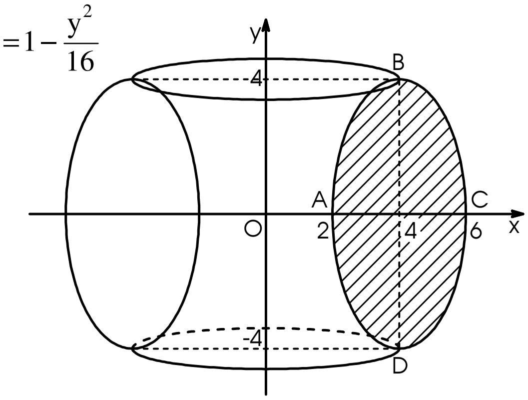
$$=4\pi\left[4(x-4)-\frac{(x-4)^3}{3}\right]\Bigg|_2^6 = 4\pi\left(8-\frac{8}{3}+8-\frac{8}{3}\right)=\frac{128\pi}{3} \quad (\text{đvtt})$$

b. (E): $\frac{(x-4)^2}{4}+\frac{y^2}{16}=1 \Leftrightarrow \frac{(x-4)^2}{4}=1-\frac{y^2}{16}$

$\Leftrightarrow (x-4)^2=\frac{1}{4}\left(16-y^2\right)$

$\Leftrightarrow \overset{\frown}{BAD}: x=4-\frac{1}{2}\sqrt{16-y^2}$

$\overset{\frown}{BCD}: x=4+\frac{1}{2}\sqrt{16-y^2}$



$$V_y=\pi\int_{-4}^{4}\left[\left(4+\frac{1}{2}\sqrt{16-y^2}\right)^2-\left(4-\frac{1}{2}\sqrt{16-y^2}\right)^2\right]dy = 8\pi\int_{-4}^{4}\sqrt{16-y^2}\,dy$$

Đặt $y=4\sin t \Rightarrow$

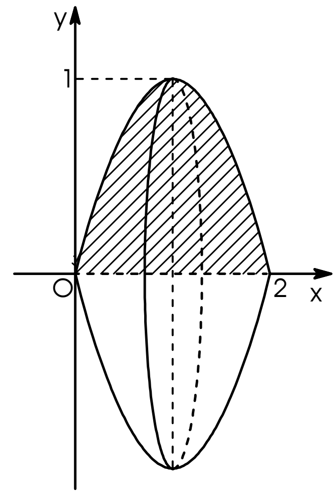
y	–4	4
t	–π/2	π/2
dy	4 cost dt	

$\Rightarrow V_y=8\pi\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{16\left(1-\sin^2 t\right)}\,4\cos t\,dt$

$$=64\pi\int_{-\pi/2}^{\pi/2}2\cos^2 t\,dt = 64\pi\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(1+2\cos 2t)\,dt = 64\pi(t+\sin 2t)\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}=64\pi^2 \quad (\text{đvtt})$$

Bài 6. Cho S: $\begin{cases}(P): y=2x-x^2\\ Ox: y=0\end{cases}$	**a.** Tìm V_x khi S quay quanh Ox **b.** Tìm V_y khi S quay quanh Oy

Giải



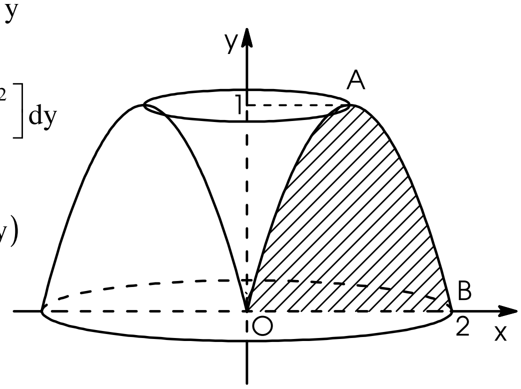
a. $(P)\cap Ox: 2x-x^2=0 \Leftrightarrow x=0; x=2$

$$\Rightarrow V_x=\pi\int_0^2\left(2x-x^2\right)^2dx=\pi\int_0^2\left(4x^2-4x^3+x^4\right)dx$$

$$=\pi\left(\frac{4}{3}x^3-x^4+\frac{1}{5}x^5\right)\Big|_0^2=\frac{16}{15}\pi \quad (\text{đvtt})$$

b. $(P): y=2x-x^2 \Leftrightarrow (x-1)^2=1-y$

$$\Rightarrow \overset{\frown}{OA}: x=1-\sqrt{1-y}\ ;\ \overset{\frown}{AB}: x=1+\sqrt{1-y}$$



$$\Rightarrow V_y=\pi\int_0^1\left[\left(1+\sqrt{1-y}\right)^2-\left(1-\sqrt{1-y}\right)^2\right]dy$$

$$=4\pi\int_0^1\sqrt{1-y}\,dy=-4\pi\int_0^1(1-y)^{1/2}\,d(1-y)$$

$$=-\frac{8\pi}{3}(1-y)^{3/2}\Big|_0^1=\frac{8\pi}{3} \quad (\text{đvtt})$$

Bài 7. Tìm V_x khi quay S: $\left\{y=\sqrt{\cos^6x+\sin^6x}; y=0; x=0; x=\frac{\pi}{2}\right\}$ quanh Ox.

Giải

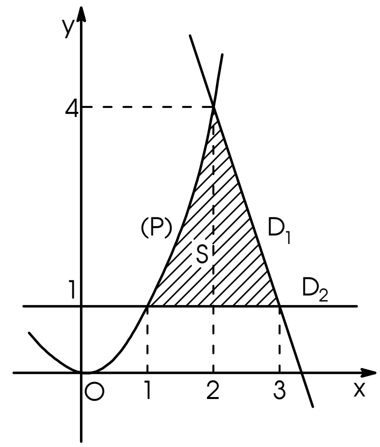
$$V_x=\pi\int_0^{\pi/2}\left(\sqrt{\cos^6x+\sin^6x}\right)^2dx=\pi\int_0^{\pi/2}\left(\cos^6x+\sin^6x\right)dx$$

$$=\pi\int_0^{\pi/2}\left(\cos^2x+\sin^2x\right)\left[\left(\cos^2x+\sin^2x\right)^2-3\sin^2x\cos^2x\right]dx=\pi\int_0^{\pi/2}\left(1-\frac{3}{4}\sin^2 2x\right)dx$$

$$=\pi\int_0^{\pi/2}\left[1-\frac{3}{8}(1-\cos 4x)\right]dx=\pi\left(\frac{5}{8}x+\frac{3}{32}\sin 4x\right)\Big|_0^{\pi/2}=\frac{5\pi^2}{16} \quad (\text{đvtt})$$

Bài 8. Cho S: $\begin{cases}(P): y=x^2\ (x>0)\\ (D_1): y=-3x+10\\ (D_2): y=1\end{cases}$	**a.** Tìm V_x khi S quay quanh Ox **b.** Tìm V_y khi S quay quanh Oy

Giải



a. $(D_1)\cap(D_2): -3x+10=1 \Leftrightarrow x=3$

$(P)\cap(D_2): x^2=1 \Rightarrow x=1>0$

$(P)\cap(D_1): x^2=-3x+10 \Rightarrow x=2>0\,; y=4$

$$V_x=\pi\int_1^2\left(x^4-1\right)dx+\pi\int_2^3\left[(-3x+10)^2-1\right]dx$$

$$=\pi\left(\frac{x^5}{5}-x\right)\Bigg|_1^2+\pi\left(\frac{1}{-3}\cdot\frac{(-3x+10)^3}{3}-x\right)\Bigg|_2^3=\frac{31\pi}{5}+6\pi=\frac{61\pi}{5}\quad(\text{đvtt})$$

b. $(P): y=x^2\ (x>0) \Leftrightarrow x=\sqrt{y}\ ;(D_1): y=-3x+10 \Leftrightarrow x=\dfrac{10-y}{3}$

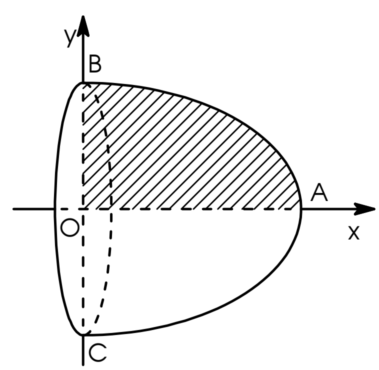
$$V_y=\pi\int_1^4\left[\frac{(10-y)^2}{9}-\left(\sqrt{y}\right)^2\right]dy=\frac{\pi}{9}\int_1^4(y-10)^2\,d(y-10)-\pi\int_1^4 y\,dy$$

$$=\left(\frac{\pi}{9}\cdot\frac{(y-10)^3}{3}-\frac{\pi}{2}y^2\right)\Bigg|_1^4=\frac{152\pi}{27}-\frac{15\pi}{2}=\frac{101\pi}{54}$$

Bài 9. Cho S là diện tích của (E): $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (0<b<a)$

a. Tìm V_x khi S quay quanh Ox **b.** Tìm V_y khi S quay quanh Oy

Giải



a. (E): $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \Leftrightarrow \dfrac{y^2}{b^2}=1-\dfrac{x^2}{a^2} \Leftrightarrow y^2=\dfrac{b^2}{a^2}\left(a^2-x^2\right)$

$\Leftrightarrow \overset{\frown}{BA}: y=\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\ ;\overset{\frown}{CA}: y=\dfrac{-b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$

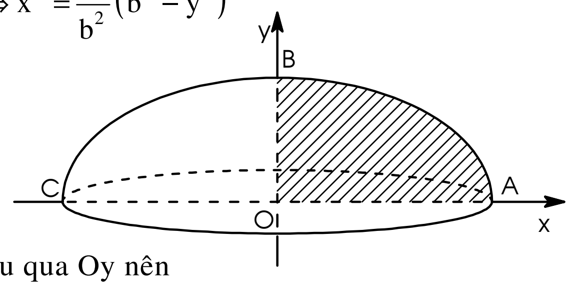
Do các cung $\overset{\frown}{BA},\overset{\frown}{AC}$ đối xứng nhau qua Ox nên

$$V_x=\pi\int_{-a}^{a}\left(\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\right)^2dx=\frac{\pi b^2}{a^2}\int_{-a}^{a}\left(a^2-x^2\right)dx=\frac{\pi b^2}{a^2}\left(a^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-a}^{a}=\frac{4\pi ab^2}{3}\ (\text{đvtt})$$

b. (E): $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2}=1-\frac{y^2}{b^2} \Leftrightarrow x^2=\frac{a^2}{b^2}\left(b^2-y^2\right)$

$\Leftrightarrow \overset{\frown}{AB}: x=\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}$

$\overset{\frown}{BC}: x=\frac{-a}{b}\sqrt{b^2-y^2}$



Do các cung $\overset{\frown}{AB}, \overset{\frown}{BC}$ đối xứng nhau qua Oy nên

$$V_y=2\pi\int_0^b\left(\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}\right)^2 dy=\frac{2\pi a^2}{b^2}\int_0^b\left(b^2-y^2\right)dy=\frac{2\pi a^2}{b^2}\left(b^2y-\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^b=\frac{4\pi a^2 b}{3} \text{ (đvtt)}$$

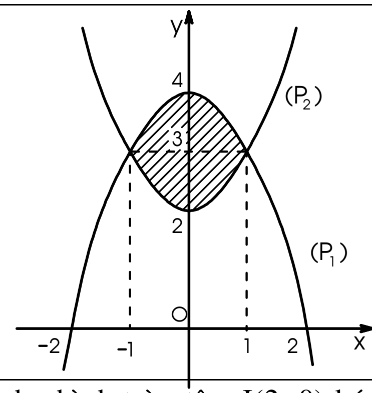
Bài 10. Cho S: $\left\{(P_1): y=4-x^2; (P_2): y=x^2+2\right\}$. Tính V_x khi S quay quanh Ox

Giải

$(P_1)\cap(P_2): 4-x^2=x^2+2 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x=\pm 1$

$$\Rightarrow V=2\pi\int_0^1\left[\left(4-x^2\right)^2-\left(x^2+2\right)^2\right]dx$$

$$=24\pi\int_0^1\left(1-x^2\right)dx=24\pi\left(x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1=16\pi \quad \text{(đvtt)}$$



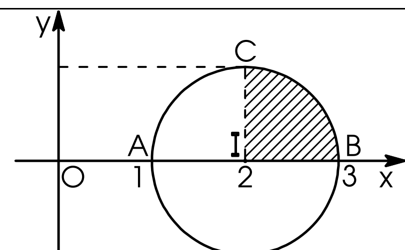
Bài 11. Tính thể tích khối tròn xoay tạo nên khi cho hình tròn tâm I(2, 0) bán kính R = 1 quay quanh trục Oy.

Giải

Phương trình (I, R): $(x-2)^2+y^2=1$

$\Leftrightarrow (x-2)^2=1-y^2 \Leftrightarrow x=2\pm\sqrt{1-y^2}$

$\Rightarrow \overset{\frown}{CA}: x=2-\sqrt{1-y^2}$; $\overset{\frown}{BC}: x=2+\sqrt{1-y^2}$



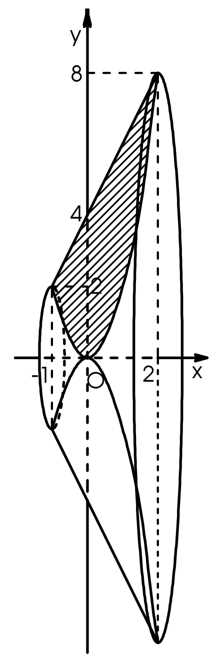
$$\Rightarrow V_y=2\pi\int_0^1\left[\left(2+\sqrt{1-y^2}\right)^2-\left(2-\sqrt{1-y^2}\right)^2\right]dy=16\pi\int_0^1\sqrt{1-y^2}\,dy$$

Đặt y = sint ⇒ dy = costdt ⇒ $V_y=16\pi\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,dt=16\pi\int_0^{\pi/2}\cos^2 t\,dt$

$$=8\pi\int_0^{\pi/2}(1+\cos 2t)\,dt=8\pi\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\pi/2}=4\pi^2 \quad \text{(đvtt)}$$

Bài 12. Cho S: $\left\{(P): y = 2x^2; (D): y = 2x + 4\right\}$.

Tính V_x khi S quay quanh Ox



Giải

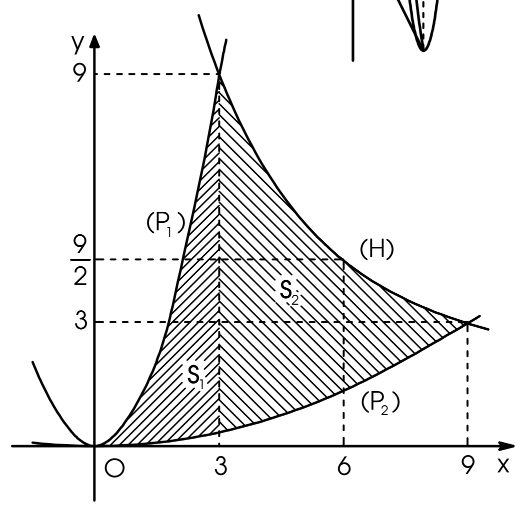
$(C) \cap (D): 2x^2 = 2x + 4 \Leftrightarrow x^2 - x + 2 = 0 \Rightarrow x = -1 \vee x = 2$

$$\Rightarrow V_x = \pi \int_{-1}^{2} \left[(2x+4)^2 - 4x^4\right] dx$$

$$= \left(\frac{3\pi(2x+4)^3}{2} - \frac{4\pi x^5}{5} \right) \Bigg|_{-1}^{2} = \frac{288}{5} \quad (\text{đvtt})$$

Bài 13. Cho S: $\left\{(P_1): y = x^2; (P_2): y = \frac{x^2}{27}; (H): y = \frac{27}{x}\right\}$

Giải



$(P_1) \cap (P_2): x^2 = \frac{x^2}{27} \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow y = 0$

$(P_1) \cap (H): x^2 = \frac{27}{x} \Leftrightarrow x^3 = 27 \Leftrightarrow x = 3$

$(P_2) \cap (H): \frac{x^2}{27} = \frac{27}{x} \Leftrightarrow x^3 = 27^2 \Leftrightarrow x = 9$

Nhìn vào đồ thị ta có:

$$V_x = \int_0^3 x^4 dx + \int_3^9 \frac{27^2}{x^2} dx - \int_0^9 \frac{x^4}{27^2} dx$$

$$= \frac{x^5}{5}\Bigg|_0^3 - \frac{27^2}{x}\Bigg|_3^9 - \frac{x^5}{27^2.5}\Bigg|_3^9 = \frac{243}{5} - (81 - 243) - \left(\frac{81}{5} - \frac{1}{15}\right) = \frac{583}{3} \quad (\text{đvtt})$$

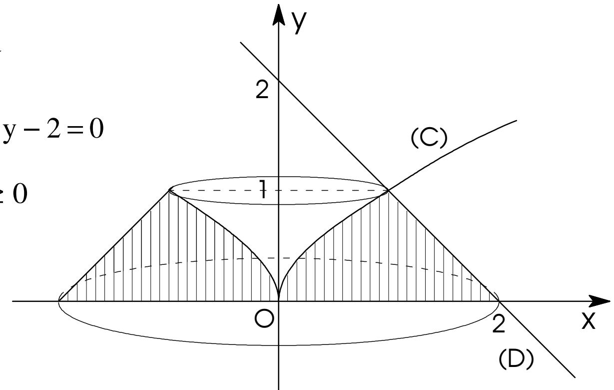
b. $(P_1): x = \sqrt{y}; (P_2): x = \sqrt{27y}; (H): x = \frac{27}{y} \quad (x, y \geq 0)$

$$\Rightarrow V_y = \int_0^3 \left[\left(\sqrt{27y}\right)^2 - \left(\sqrt{y}\right)^2\right] dy + \int_3^9 \left(\frac{27}{y} - \left(\sqrt{y}\right)^2\right) dy = \int_0^3 26y dy + \int_3^9 \left(\frac{27}{y} - y\right) dy$$

$$= 13y^2\Big|_0^3 + \left(27\ln y - \frac{1}{2}y^2\right)\Bigg|_3^9 = 117 + 27\ln 9 - 27\ln 3 - \frac{81}{2} + \frac{9}{2} = 81 + 27\ln 3 \quad (\text{đvtt})$$

Bài 14. Cho $S:\{(C): y=\sqrt{x}, (D): y=2-x, y=0\}$. Tính V_y khi S quay quanh Oy

Giải



$(C): x = y^2\ (y \ge 0); (D): x = 2-y$

$\Rightarrow (C)\cap(D): y^2 = 2-y \Leftrightarrow y^2+y-2=0$

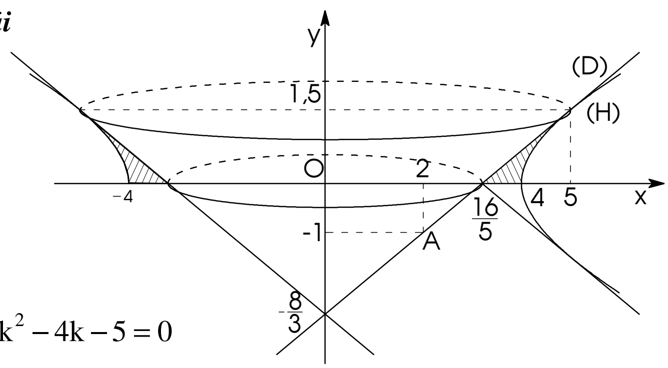
$\Leftrightarrow (x-1)(y+2)=0 \Leftrightarrow y = 1 \ge 0$

$$V_y = \pi\int_0^1\left[(2-y)^2 - y^4\right]dy$$

$$=\pi\left(\frac{1}{3}(y-2)^3 - \frac{y^5}{5}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{32\pi}{15}\quad (\text{đvtt})$$

Bài 15. Cho $(H): \frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}=1$ và (D) là tiếp tuyến của (H) đi qua A(2, −1) với hệ số góc dương. Tính thể tích khối tròn xoay tạo bởi miền phẳng giới hạn bởi (H), (D) và trục Ox khi quay quanh trục Oy.

Giải



(D) đi qua A(2, −1) nên

(D): $y = k(x-2) - 1$

$\Leftrightarrow$ (D): $kx - y - (2k+1) = 0$

Ta có: (D) tiếp xúc (H)

$\Leftrightarrow 16k^2 - 4 = (2k+1)^2 \Leftrightarrow 12k^2 - 4k - 5 = 0$

$\Leftrightarrow k = \frac{5}{6} \vee k = -\frac{1}{2}$ (loại) $\Rightarrow$ (D): $y = \frac{5}{6}x - \frac{8}{3} \Leftrightarrow x = \frac{6}{5}y + \frac{16}{5}$

$(D)\cap(H): 4y^2 + 16 = \left(\frac{6}{5}y + \frac{16}{5}\right)^2 \Leftrightarrow 4y^2 - 12y + 9 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{3}{2}; x = 5$

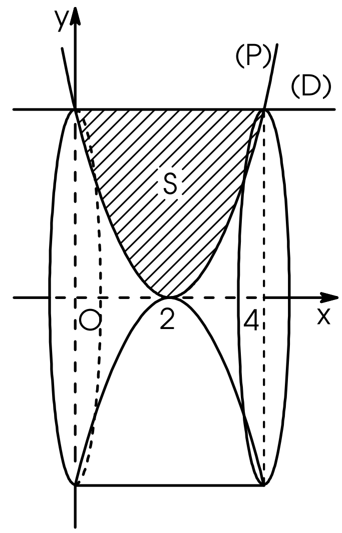
$$\Rightarrow V_y = \pi\int_0^{3/2}\left[(4y^2+16) - \left(\frac{6y+16}{5}\right)^2\right]dy = \pi\left(\frac{4y^3}{3}+16y\right)\Bigg|_0^{3/2} - \frac{36\pi}{25}\int_0^3\left(y+\frac{8}{3}\right)^2 d\left(y+\frac{8}{3}\right)$$

$$=\pi\left(\frac{9}{2}+24\right) - \frac{36\pi}{75}\left(y+\frac{8}{3}\right)^3\Bigg|_0^{3/2} = \frac{72\pi}{25}\quad (\text{đvtt})$$

Bài 16. Cho S: $\left\{(C): y=(x-2)^2, (D): y=4\right\}$.

a. Tính V_x khi S quay quanh Ox **b.** Tính V_y khi S quay quanh Oy

Giải



a. $(P)\cap(D): (x-2)^2 = 4 \Leftrightarrow x = 0, x = 4$

$$\Rightarrow V_x = \pi\int_0^4\left[16-(x-2)^4\right]dx$$

$$= \pi\left[16x - \frac{(x-2)^5}{5}\right]\Bigg|_0^4 = \frac{256\pi}{5} \quad (\text{đvtt})$$

b. $(P): x-2=\pm\sqrt{y} \Rightarrow \widehat{AI}: x = 2-\sqrt{y}\,; \widehat{IB}: x = 2+\sqrt{y}$

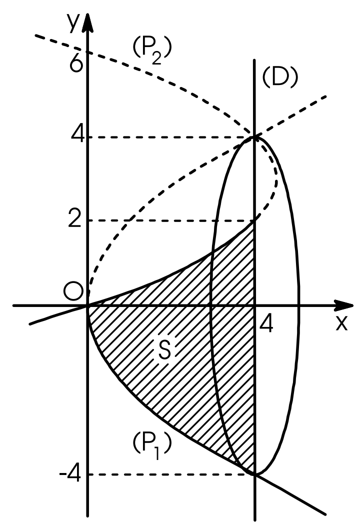
$$\Rightarrow V_y = \pi\int_0^4\left[\left(2+\sqrt{y}\right)^2-\left(2-\sqrt{y}\right)^2\right]dy$$

$$= 8\pi\int_0^4\sqrt{y}\,dy = \frac{16\pi}{3}y^{3/2}\Bigg|_0^4 = \frac{128\pi}{3} \quad (\text{đvtt})$$

Bài 17. Cho S: $\left\{(P_1): x=\frac{y^2}{4}(y\le 0); (P_2): x=-\frac{y^2}{2}+3y(y\le 2); (D): x=4\right\}$

a. Tính S **b.** Tính V_x khi S quay quanh Ox

Giải



a. $\frac{y^2}{4} = -\frac{y^2}{2}+3y \Leftrightarrow y^2-4y \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=0 \\ y=4 \end{array}\right.$

$(P_1)\cap(D): \frac{y^2}{4} = 4 \Rightarrow y = -4 < 0$

$(P_2)\cap(D): \frac{-y^2}{2}+3y = 4 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=2 \\ y=4>2 \end{array}\right.$

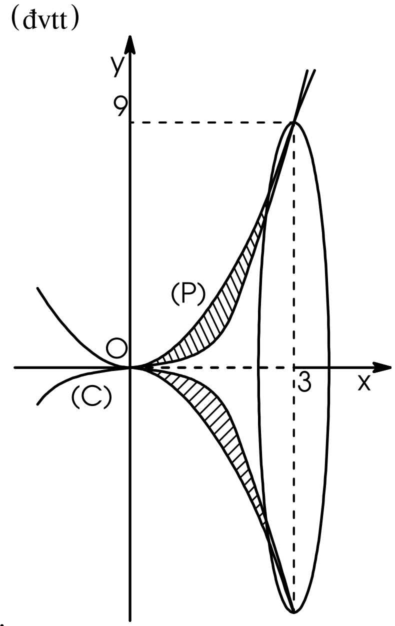
Nhìn vào đồ thị suy ra:

$$S = \int_{-4}^0\left(4-\frac{y^2}{4}\right)dy + \int_0^2\left(4+\frac{y^2}{2}-3y\right)dy$$

$$= \left(4y-\frac{y^3}{12}\right)\Bigg|_{-4}^0 + \left(4y+\frac{y^3}{6}-\frac{3y^2}{2}\right)\Bigg|_0^2 = \left(16-\frac{16}{3}\right)+\left(8+\frac{4}{3}-6\right) = 14 \quad (\text{đvdt})$$

b. $(P_1): x = \dfrac{y^2}{4}\,(y \le 0) \Leftrightarrow y = -2\sqrt{x}$

$$\Rightarrow\ V_x = \pi\int_0^4 \left(-2\sqrt{x}\right)^2 dx = 4\pi\int_0^4 x\,dx = 2\pi x^2\Big|_0^4 = 32\pi \quad \text{(đvtt)}$$



Bài 18. Cho S: $\left\{(C): y = \dfrac{x^3}{3}; (P): y = x^2\right\}$.

Tính V_x khi S quay quanh Ox.

Giải

$(C)\cap(P): \dfrac{x^3}{3} = x^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 3 \end{array}\right.$

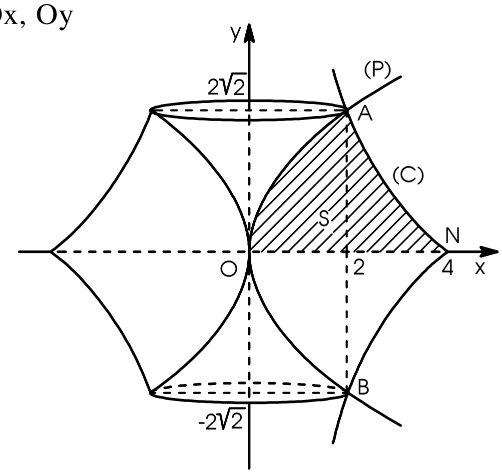
$$V_x = \pi\int_0^3 \left[\left(x^2\right)^2 - \left(\frac{x^3}{3}\right)^2\right] dx = \pi\int_0^3 \left(x^4 - \frac{x^6}{9}\right) dx$$

$$= \pi\left(\frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{63}\right)\Bigg|_0^3 = \frac{486}{35}\pi \quad \text{(đvtt)}$$

Bài 19. Cho S: $\left\{(C): y^2 = (4-x)^3; (P): y^2 = 4x\right\}$.

Tính V_x, V_y khi S quay quanh Ox, Oy

Giải



$(C)\cap(P): (4-x)^3 = 4x$

$\Leftrightarrow x^3 - 12x^2 + 52x - 64 = 0$

$\Leftrightarrow (x-2)\left[(x-5)^2 + 7\right] = 0$

$\Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow y = \pm 2\sqrt{2}$

$(C)\cap Ox: (4-x)^3 = 0 \Leftrightarrow x = 4$

$(P)\cap Ox: 4x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$\overparen{OA}: y = \sqrt{4x}\,;\ \overparen{AN}: y = \sqrt{(4-x)^3}\ ;\ \overparen{OB}: y = -\sqrt{4x}\,;\ \overparen{BN}: y = -\sqrt{(4-x)^3}$

Do (C), (P) nhận Ox làm trục đối xứng nên:

$$V_x = \pi\int_0^2 \left(\sqrt{4x}\right)^2 dx + \pi\int_2^4 \left(\sqrt{(4-x)^3}\right)^2 dx = 2\pi x^2\Big|_0^2 - \frac{\pi}{4}(4-x)^4\Big|_2^4 = 12\pi \quad \text{(đvtt)}$$

$$V_y = 2\pi\int_0^{2\sqrt{2}} \left[\left(4 - \sqrt[3]{y^2}\right)^2 - \frac{y^4}{16}\right] dy = 2\pi\int_0^{2\sqrt{2}} \left[16 + y^{4/3} - 8y^{2/3} - \frac{y^4}{16}\right] dy = \frac{1024\sqrt{2}}{35}\pi \quad \text{(đvtt)}$$