

## BÀI 6. TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

## 1) KIẾN THỨC NỀN TẢNG

**1. Tiệm cận đứng :** Đồ thị hàm số  $y = f(x)$  nhận đường thẳng  $x = x_0$  là tiệm cận đứng nếu  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \infty$  hoặc  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \infty$  (chỉ cần một trong hai thỏa mãn là đủ)

**2. Tiệm cận ngang :** Đồ thị hàm số  $y = f(x)$  nhận đường thẳng  $y = y_0$  là tiệm cận ngang nếu  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = y_0$  hoặc  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = y_0$

**3. Tiệm cận xiên :** Đồ thị hàm số  $y = f(x)$  nhận đường thẳng  $y = ax + b$  là tiệm cận xiên nếu  $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$

**4. Lệnh Casio :** Ứng dụng kỹ thuật dùng CALC tính giới hạn

## 2) VÍ DỤ MINH HỌA

**VD1-[Thi thử báo Toán học tuổi trẻ lần 3 năm 2017]**

Có bao nhiêu đường tiệm cận của đồ thị hàm số  $y = \frac{x+1}{\sqrt{4x^2+2x+1}}$

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

GIẢI

❖ **Cách 1 : CASIO**

➤ Giải phương trình : Mẫu số  $= 0 \Leftrightarrow \sqrt{4x^2+2x+1} = 0 \Leftrightarrow 4x^2+2x+1 = 0$  vô nghiệm

$\Rightarrow$  Đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng

➤ Tính  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{\sqrt{4x^2+2x+1}} = \frac{1}{2}$ . Vậy đường thẳng  $y = \frac{1}{2}$  là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số

➤ Tính  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{\sqrt{4x^2+2x+1}} = -\frac{1}{2}$ . Vậy đường thẳng  $y = -\frac{1}{2}$  là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số

$\Rightarrow$  Tóm lại đồ thị hàm số có 2 tiệm cận ngang và C là đáp án chính xác

❖ **Cách tham khảo : Tự luận**

- Tính  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{\sqrt{4x^2+2x+1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{4+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}} = \frac{1}{2} \Rightarrow$  đường thẳng  $y = \frac{1}{2}$  là tiệm cận ngang

- Tính  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{\sqrt{4x^2+2x+1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{4+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}} = \frac{1}{2} \Rightarrow$  đường thẳng  $y = \frac{1}{2}$  là tiệm cận ngang

❖ **Bình luận :**

- Việc ứng dụng Casio để tìm tiệm cận sử dụng nhiều kỹ thuật tính giới hạn của hàm số bằng Casio. Các bạn cần học kỹ bài giới hạn trước khi học bài này.
- Giới hạn của hàm số khi  $x$  tiến tới  $+\infty$  và khi  $x$  tiến tới  $-\infty$  là khác nhau. Ta cần hết sức chú ý tránh để sót tiệm cận ngang  $y = \frac{1}{2}$

**VD2-[Thi Học sinh giỏi tỉnh Ninh Bình năm 2017]**

Đồ thị hàm số  $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{1 - x^2}$  (C) có bao nhiêu đường tiệm cận ?

A. 4

B. 2

C. 1

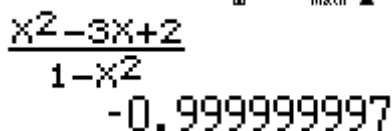
D. 3

GIẢI

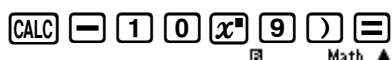
❖ **Cách 1 : CASIO**

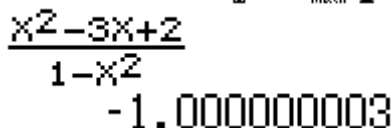
- Tính  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 3x + 2}{1 - x^2} = -1$





- Tính  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 3x + 2}{1 - x^2} = -1$





Vậy đường thẳng  $y = 1$  là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số

- Giải phương trình : Mẫu số  $= 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$

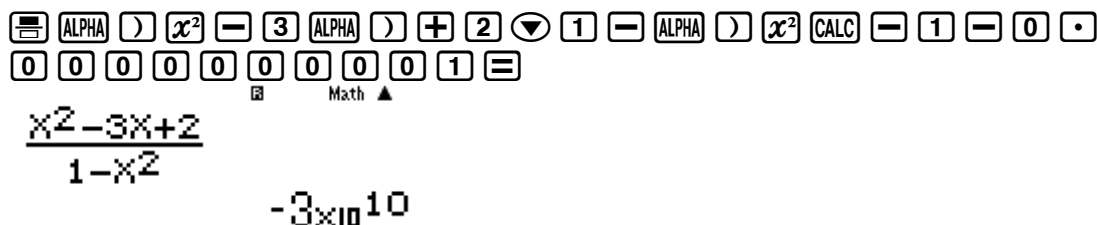
Đến đây nhiều học sinh đã ngộ nhận  $x = 1$  và  $x = -1$  là 2 tiệm cận đứng của (C)

Tuy nhiên  $x = \pm 1$  là nghiệm của phương trình Mẫu số  $= 0$  chỉ là điều kiện cần.

Điều kiện đủ phải là  $\lim_{x \rightarrow \pm 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{1 - x^2} = \infty$

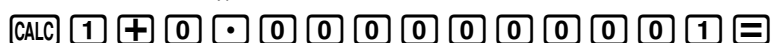
$\Rightarrow$  Ta đi kiểm tra điều kiện đủ

Tính  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{1 - x^2} = \infty$



Vậy đường thẳng  $x = 1$  là tiệm cận đứng của đồ thị (C)

Tính  $\lim_{x \rightarrow +1} \frac{x^2 - 3x + 2}{1 - x^2} = \frac{1}{2}$



Vậy đường thẳng  $x = 1$  không phải là tiệm cận đứng của đồ thị (C)

$\Rightarrow$  Tóm lại đồ thị hàm số có 1 tiệm cận ngang  $y = 1$  và 1 tiệm cận đứng  $x = 1$

$\Rightarrow$  Đáp số chính xác là B

### ❖ Cách tham khảo : Tự luận

▪ Rút gọn hàm số  $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{1 - x^2} = \frac{(x - 1)(x - 2)}{(x - 1)(x + 1)} = \frac{2 - x}{x + 1}$

▪ Tính  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - x}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{2}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = 1 \Rightarrow$  đường thẳng  $y = 1$  là tiệm cận ngang

▪ Tính  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2 - x}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \left( 1 + \frac{3}{x + 1} \right) = +\infty \Rightarrow$  đường thẳng  $y = 1$  là tiệm cận đứng

### ❖ Bình luận :

- Việc tử số và mẫu số đều có nhân tử chung dẫn tới hàm số bị suy biến như ví dụ 2 là thường xuyên xảy ra trong các đề thi. Chúng ta cần cảnh giá và kiểm tra lại bằng kỹ thuật tìm giới hạn bằng Casio

### VD3-[Thi thử chuyên KHTN –HN lần 2 năm 2017]

Đồ thị hàm số nào sau đây **không** có tiệm cận ngang ?

A.  $y = \frac{x - 1}{x + 2}$

B.  $y = \frac{x - 1}{x^2 + 1}$

C.  $y = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$

D.

$y = \frac{1}{x + 1}$

GIẢI

### ❖ Cách 1 : CASIO

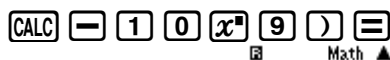
- Tính  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+1}{x-1} = +\infty$

 ALPHA )  $x^2$  + 1 )  $\frac{1}{x-1}$  =

$$\frac{x^2+1}{x-1}$$

1000000001

- Tính  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+1}{x-1} = \infty$

 CALC = 1 0  $x^2$  9 ) =

$$\frac{x^2+1}{x-1}$$

-9999999999

Vậy đồ thị hàm số  $y = \frac{x^2+1}{x-1}$  không có tiệm cận ngang

$\Rightarrow$  Tóm lại C là đáp án chính xác

❖ Cách tham khảo : Tự luận

- Tính  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}} = +\infty$

- Tính  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}} = \infty \Rightarrow$  Đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang

❖ Bình luận :

- Đồ thị hàm số  $y = f(x)$  không có tiệm cận ngang nếu  $\lim_{x \rightarrow \infty} y$  bằng  $\infty$

**VD4-[Khảo sát chất lượng chuyên Lam Sơn – Thanh Hóa năm 2017]**

Tìm tất các các giá trị của tham số  $m$  sao cho đồ thị hàm số  $y = \frac{5x-3}{x^2-2mx+1}$  không có tiệm cận đứng

A.  $m=1$

B.  $m=1$

C.  $\begin{cases} m < -1 \\ m > 1 \end{cases}$

D.

$1 < m < 1$

GIẢI

❖ Cách 1 : CASIO

- Để đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng thì phương trình mẫu số bằng 0 không có nghiệm hoặc có nghiệm nhưng giới hạn hàm số khi  $x$  tiến tới nghiệm không ra vô cùng.:

- Với  $m=1$  . Hàm số  $\Leftrightarrow y = \frac{5x-3}{x^2-2x+1}$  . Phương trình  $x^2-2x+1=0$  có nghiệm

$x=1$  Tính  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x-3}{x^2-2x+1} = +\infty$  .  $\Rightarrow$  Đáp số A sai

$$\frac{5x-3}{x^2-2x+1} = 2.000005 \times 10^{12}$$

- Với  $m = 0$  hàm số  $\Leftrightarrow y = \frac{5x-3}{x^2+1}$ . Phương trình  $x^2+1=0$  vô nghiệm  $\Rightarrow$  Đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng  $\Rightarrow m = 0$

$\Rightarrow$  **D** là đáp án chính xác

❖ **Cách tham khảo : Tự luận**

- Để đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng thì phương trình mẫu số bằng 0 vô nghiệm  $\Leftrightarrow \Delta < 0 \Leftrightarrow m^2 - 1 < 0 \Leftrightarrow -1 < m < 1$
- Trường hợp 2 phương trình mẫu số bằng 0 có nghiệm nhưng bị suy biến (rút gọn) với nghiệm ở tử số.  $\Rightarrow$  Không xảy ra vì bậc mẫu > bậc tử

❖ **Bình luận :**

- Việc giải thích được trường hợp 2 của tự luận là tương đối khó khăn. Do đó bài toán này chọn cách Casio là rất dễ làm.

**VD5-[Đề minh họa thi THPT Quốc Gian lần 1 năm 2017]**

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  sao cho đồ thị của hàm số  $y = \frac{x+1}{\sqrt{mx^2+1}}$  có hai tiệm cận ngang

A.  $m < 0$

B. Không có  $m$  thỏa

C.  $m = 0$

D.  $m > 0$

**GIẢI**

❖ **Cách 1 : CASIO**

- Thử đáp án A ta chọn 1 giá trị  $m < 0$ , ta chọn  $m = -2,15$ . Tính

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{\sqrt{2.15x^2+1}}$$

Math ERROR

[AC] : Cancel

[←][→]: Goto

Vậy  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{\sqrt{2.15x^2+1}}$  không tồn tại  $\Rightarrow$  hàm số  $y = \frac{x+1}{\sqrt{2.15x^2+1}}$  không thể có 2 tiệm cận ngang

- Thử đáp án B ta chọn giá trị  $m = 0$ . Tính  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{\sqrt{0x^2+1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1)$

$$x+1$$

$$1000000001$$

Vậy  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) = +\infty \Rightarrow$  hàm số  $y = (x+1)$  không thể có 2 tiệm cận ngang

- Thử đáp án D ta chọn gán giá trị  $m = 2.15$ . Tính  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{\sqrt{2.15x^2+1}} = 0.6819...$

$$\frac{x+1}{\sqrt{2.15x^2+1}} = 0.6819943402$$

Tính  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{\sqrt{2.15x^2+1}} = 0.6819...$

$$\frac{x+1}{\sqrt{2.15x^2+1}} = -0.6819943388$$

Vậy đồ thị hàm số có 2 tiệm cận ngang  $y = \pm 0.6819...$

$\Rightarrow$  Đáp số D là đáp số chính xác

#### ❖ Bình luận :

- Qua ví dụ 4 ta thấy sức mạnh của Casio so với cách làm tự luận. .

#### VD6-[Đề minh họa Bộ GD-ĐT lần 2 năm 2017]

Tìm tất cả các tiệm cận đứng của đồ thị hàm số  $y = \frac{2x-1}{x^2-5x+6} \sqrt{x^2+x+3}$

A.  $\begin{cases} x = 3 \\ x = 2 \end{cases}$

B.  $x = 3$

C.  $\begin{cases} x = 3 \\ x = 2 \end{cases}$

D.  $x = 3$

#### GIẢI

- Đường thẳng  $x = x_0$  là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số thì điều kiện cần :  $x_0$  là nghiệm của phương trình mẫu số bằng 0  
Nên ta chỉ quan tâm đến hai đường thẳng  $x = 3$  và  $x = 2$

- Với  $x = 3$  xét  $\lim_{x \rightarrow 3+} \frac{2x-1}{x^2-5x+6} \sqrt{x^2+x+3} = +\infty \Rightarrow x = 3$  là một tiệm cận đứng

$$\frac{2x-1-\sqrt{x^2+x+3}}{x^2-5x+6} = 1.127016654 \times 10^{10}$$

- Với  $x=2$  xét  $\lim_{x \rightarrow 2+} \frac{2x-1-\sqrt{x^2+x+3}}{x^2-5x+6} = +\infty$  Kết quả không ra vô cùng  $\Rightarrow x=2$  không là một tiệm cận đứng

$\Rightarrow$  Đáp số chính xác là B

## BÀI TẬP TỰ LUYỆN

### Bài 1-[Thi thử chuyên Lương Văn Tụy lần 1 năm 2017]

Số tiệm cận của đồ thị hàm số  $y = \frac{x}{x^2-1}$  là :

- A. 1                                      B. 2                                      C. 3                                      D. 4

### Bài 2-[Thi thử THPT Vũ Văn Hiếu –Nam Định lần 1 năm 2017]

Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số  $y = \frac{|x-1|}{\sqrt{x^2-4}}$  là :

- A. 4                                      B. 3                                      C. 2                                      D. 1

### Bài 3-[Thi thử chuyên Thái Bình lần 1 năm 2017]

Tìm các giá trị thực của  $m$  để đồ thị hàm số  $y = \frac{2x^2-3x+m}{x-m}$  không có tiệm cận đứng ?

- A.  $m=0$                                       B.  $\begin{cases} m=0 \\ m=1 \end{cases}$                                       C.  $m > 1$                                       D.  $m > 1$

### Bài 4-[Thi thử THPT Quảng Xương –Thanh Hóa lần 1 năm 2017]

Hàm số  $y = \frac{x+\sqrt{x^2+x+1}}{x^3+x}$  có bao nhiêu đường tiệm cận ?

- A. 1                                      B. 2                                      C. 3                                      D. 4

### Bài 5-[Thi HK1 chuyên Nguyễn Du – Đắc Lắc năm 2017]

Tìm tất cả các số thực  $m$  để đồ thị hàm số  $y = \frac{x}{x^2-m}$  có 3 đường tiệm cận

- A.  $m \neq 0$                                       B.  $m=0$                                       C.  $m > 0$                                       D.  $m < 0$

### Bài 6-[Thi thử chuyên Lương Văn Tụy lần 1 năm 2017]

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để đồ thị hàm số  $y = x+m\sqrt{x^2+x+1}$  có đường tiệm cận ngang

- A.  $m = 1$                                       B.  $m < 0$                                       C.  $m > 0$                                       D.  $m = \pm 1$

### Bài 7-[Thi Học sinh giỏi tỉnh Ninh Bình năm 2017]

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để đồ thị hàm số  $y = \frac{m\sqrt{x^2+1}}{x-1}$  có đường thẳng  $y = 2$  là một tiệm cận ngang.

A.  $m \in \{2; 2\}$

B.  $m \in \{1; 2\}$

C.  $m \in \{1; 2\}$

D.

$m \in \{1; 1\}$

**Bài 8-[Thi thử chuyên Vĩ Thanh – Hậu Giang lần 1 năm 2017]**

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  sao cho đồ thị hàm số  $y = \frac{x^2}{x^2 + mx + m}$  có đúng 1 tiệm cận.

A.  $\begin{cases} 0 \leq m \leq 4 \\ m = \frac{4}{3} \end{cases}$

B.  $m \in \left\{0; 4; \frac{4}{3}\right\}$

C.  $\begin{cases} m \leq 0 \\ m \geq 4 \end{cases}$

D. Không

có  $m$  thỏa

**Bài 8-[Thi thử chuyên Vĩ Thanh – Hậu Giang lần 1 năm 2017]**

Tìm tất cả các giá trị thực của  $m$  sao cho đồ thị hàm số  $y = \frac{2x \sqrt{mx^2 + 1}}{x - 1}$  có đúng 2 tiệm cận ngang.

A.  $m < 0$

B.  $\begin{cases} 0 < m < 3 \\ m > 3 \end{cases}$

C.  $m > 0$

D.  $m = 0$

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

**Bài 10-[Thi HK1 THPT Việt Đức – Hà Nội năm 2017]**

Hàm số  $y = \frac{2x}{x - 1}$  ( $H$ ),  $M$  là điểm bất kì và  $M \in (H)$ . Khi đó tích khoảng cách từ  $M$  đến 2 đường tiệm cận của ( $H$ ) bằng:

A. 4

B. 1

C. 2

D. 5

**Bài 11-[Thi thử Sở GD-ĐT Hà Tĩnh năm 2017]**

Cho hàm số  $y = \frac{2mx + m}{x - 1}$ . Với giá trị nào của  $m$  thì đường tiệm cận đứng, tiệm cận ngang của đồ thị hàm số cùng hai trục tọa độ tạo thành một hình chữ nhật có diện tích bằng 8

A.  $m = 2$

B.  $m = \pm \frac{1}{2}$

C.  $m = \pm 4$

D.  $m = \pm 2$

**LỜI GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN**

**Bài 1-[Thi thử chuyên Lương Văn Tụy lần 1 năm 2017]**

Số tiệm cận của đồ thị hàm số  $y = \frac{x}{x^2 - 1}$  là:

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

GIẢI

▪ Phương trình mẫu số bằng 0 có 2 nghiệm  $x = \pm 1$

▪ Tính  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{x^2 - 1} = +\infty \Rightarrow x = 1$  là tiệm cận đứng





$$\frac{x}{x^2-1}$$

Math ▲

500000.25

- Tính  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{x^2-1} = +\infty \Rightarrow x = 1$  là tiệm cận đứng

CALC [=] [1] [+] [1] [0] [x^n] [=] [6] [)] [=]

$$\frac{x}{x^2-1}$$

Math ▲

499999.75

$\Rightarrow$  Đáp số chính xác là B

**Bài 2-[Thi thử THPT Vũ Văn Hiếu –Nam Định lần 1 năm 2017]**

Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số  $y = \frac{|x-1|}{\sqrt{x^2-4}}$  là :

A. 4

B. 3

C. 2

D. 1

GIẢI

- Phương trình mẫu số bằng 0 có 2 nghiệm  $x = \pm 2$

- Tính  $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|x-1|}{\sqrt{x^2-4}} = +\infty \Rightarrow x = 2$  là tiệm cận đứng

ON [=] [SHIFT] [hyp] [ALPHA] [)] [=] [1] [v] [√] [ALPHA] [)] [x^2] [=] [4] CALC [2] [+] [1] [0] [x^n] [=] [6] [)] [=]

$$\frac{|x-1|}{\sqrt{x^2-4}}$$

Math ▲

500.0004375

- Tính  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x-1|}{\sqrt{x^2-4}} = +\infty \Rightarrow x = 1$  là tiệm cận đứng

CALC [=] [2] [=] [1] [0] [x^n] [=] [6] [)] [=]

$$\frac{|x-1|}{\sqrt{x^2-4}}$$

Math ▲

1500.000313

$\Rightarrow$  Đáp số chính xác là C

**Bài 3-[Thi thử chuyên Thái Bình lần 1 năm 2017]**

Tìm các giá trị thực của  $m$  để đồ thị hàm số  $y = \frac{2x^2-3x+m}{x-m}$  không có tiệm cận đứng ?

A.  $m = 0$

B.  $\begin{cases} m=0 \\ m=1 \end{cases}$

C.  $m > 1$

D.  $m > 1$

GIẢI

- Với  $m=0$  hàm số  $y = \frac{2x^2 - 3x}{x}$ , Tính  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x^2 - 3x}{x} = -3$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 - 3x}{x} = -3 \Rightarrow$  Không có tiệm cận đứng  $\Rightarrow m=0$  thỏa.

Calculator interface showing the calculation of  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x^2 - 3x}{x}$ . The display shows  $-2.999998$ .

- Tương tự  $m=1$  cũng thỏa  $\Rightarrow$  Đáp số chính xác là **B**

Chú ý: Nếu chúng ta chú ý một chút tự luận thì hàm số  $y = \frac{2x^2 - 3x}{x}$  sẽ rút gọn tử mẫu và thành  $y = 2x - 3$  là đường thẳng nên không có tiệm cận đứng.

#### Bài 4-[Thi thử THPT Quảng Xương –Thanh Hóa lần 1 năm 2017]

Hàm số  $y = \frac{x + \sqrt{x^2 + x + 1}}{x^3 + x}$  có bao nhiêu đường tiệm cận ?

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

GIẢI

- Phương trình mẫu số bằng 0 có 1 nghiệm duy nhất  $x=0$ . Tính

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x + \sqrt{x^2 + x + 1}}{x^3 + x} = +\infty$$

$\Rightarrow x=0$  là tiệm cận đứng

Calculator interface showing the calculation of  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x + \sqrt{x^2 + x + 1}}{x^3 + x}$ . The display shows  $1000001.5$ .

- Tính  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sqrt{x^2 + x + 1}}{x^3 + x} = 0 \Rightarrow y=0$  là tiệm cận ngang

Calculator interface showing the calculation of  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sqrt{x^2 + x + 1}}{x^3 + x}$ . The display shows  $2.0000000001 \times 10^{-18}$ .

- Tính  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + \sqrt{x^2 + x + 1}}{x^3 + x} = 0 \Rightarrow y=0$  là tiệm cận ngang

Calculator interface showing the calculation of  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + \sqrt{x^2 + x + 1}}{x^3 + x}$ . The display shows  $5 \times 10^{-28}$ .

Tóm lại đồ thị hàm số có 1 tiệm cận đứng và 1 tiệm cận ngang  $\Rightarrow$  **B** chính xác

Chú ý: Học sinh thường mắc định có 2 tiệm cận ngang  $\Rightarrow$  Chọn nhầm đáp án **C**

**Bài 5-[Thi HK1 chuyên Nguyễn Du – Đắc Lắc năm 2017]**

Tìm tất cả các số thực  $m$  để đồ thị hàm số  $y = \frac{x}{x^2 - m}$  có 3 đường tiệm cận

A.  $m \neq 0$

B.  $m = 0$

C.  $m > 0$

D.  $m < 0$

GIẢI

- Thử với  $m = 9$  Tính  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2 - 9} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2 - 9} = 0 \Rightarrow$  Đồ thị hàm số chỉ có 1 tiệm cận ngang

- Phương trình mẫu số bằng 0 có hai nghiệm  $x = 3; x = -3$ . Tính  $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x}{x^2 - 9} = +\infty; \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x}{x^2 - 9} = -\infty \Rightarrow$  có 2 tiệm cận đứng

Vậy  $m = 9$  thỏa  $\Rightarrow$  Đáp số chứa  $m = 9$  là C chính xác.

**Bài 6-[Thi thử chuyên Lương Văn Tụy lần 1 năm 2017]**

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để đồ thị hàm số  $y = x + m\sqrt{x^2 + x + 1}$  có đường tiệm cận ngang

A.  $m = 1$

B.  $m < 0$

C.  $m > 0$

D.  $m = \pm 1$

GIẢI

- Với  $m = 1$ . Tính  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x + \sqrt{x^2 + x + 1} \right) = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 1$  thỏa  $\Rightarrow$  Đáp số đúng là A hoặc D

- Với  $m = 1$ . Tính  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( x + \sqrt{x^2 + x + 1} \right) = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = 1$  thỏa  $\Rightarrow$  Đáp số chính xác là D