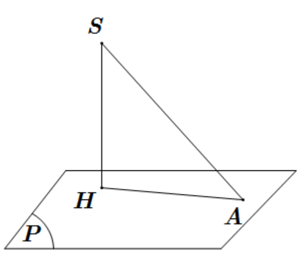
TUYỂN TẬP CÔNG THỨC GIẢI NHANH TRẮC NGHIỆM TOÁN

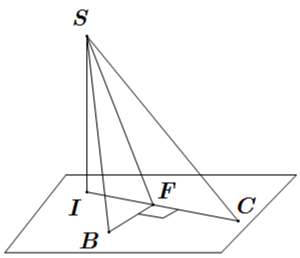
Biên soạn: Đoàn Trí Dũng

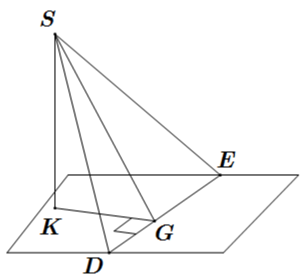
VẤN ĐỀ 1: CÁC CÔNG THỨC THỂ TÍCH TỨ DIỆN KHÓ:

- **Công thức 1:** $V_{S.ABC} = \dfrac{abc}{6}\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\varphi+2\cos\alpha\cos\beta\cos\varphi}$
- **Công thức 2:** $V_{ABCD} = \dfrac{1}{6}AB.CD.d\left(AB,CD\right)\sin\left(\widehat{AB,CD}\right)$
- **Công thức 3:** $V_{SABC} = \dfrac{2S_1S_2\sin\alpha}{3a}$ (Công thức thể tích góc nhị diện)
- **Công thức 4:** Thể tích tứ diện đều $V_{ABCD} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$
- **Công thức 5:** Thể tích tứ diện gần đều: $V_{ABCD} = \dfrac{\sqrt{2}}{12}\sqrt{\left(a^2+b^2-c^2\right)\left(b^2+c^2-a^2\right)\left(a^2+c^2-b^2\right)}$

VẤN ĐỀ 2: GÓC ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG:

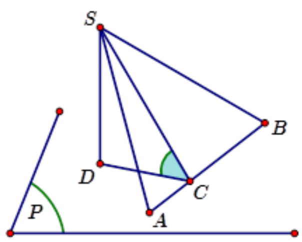


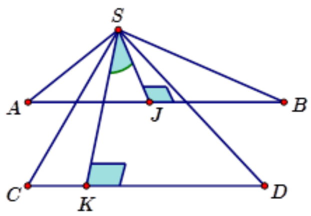


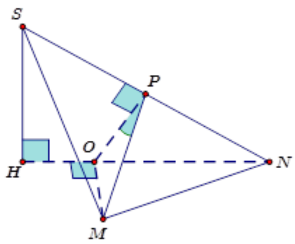


- **Góc loại 1:** $\left(\widehat{SA,(P)}\right) = \widehat{SAH}$ (Góc giữa cạnh bên và mặt phẳng đáy).
- **Góc loại 2:** $\left(\widehat{SB,(SIC)}\right) = \widehat{BSF}$ (Góc giữa cạnh bên và mặt phẳng đứng chứa đường cao SI).
- **Góc loại 3:** $\left(\widehat{SK,(SDE)}\right) = \widehat{KSG}$ (Góc giữa đường cao SK và mặt bên (SDE)).

VẤN ĐỀ 3: GÓC GIỮA HAI MẶT PHẲNG:



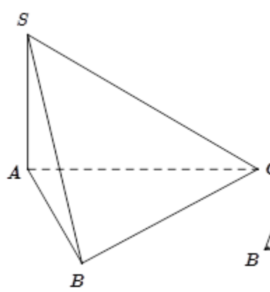


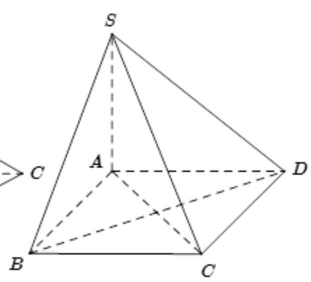


- **Góc loại 1:** $\left(\widehat{(SAB),(P)}\right) = \widehat{SCD}$ (Góc giữa mặt bên và mặt phẳng đáy).
- **Góc loại 2:** $\left(\widehat{(SAB),(SCD)}\right) = \widehat{KSJ}$ (Góc giữa hai mặt bên có hai cạnh song song AB và CD).
- **Góc loại 3:** $\left(\widehat{(SMN),(SHN)}\right) = \widehat{OPM}$ (Góc giữa mặt bên và mặt phẳng đứng chứa đường cao SH).

VẤN ĐỀ 4: CÁC VẤN ĐỀ VỀ MẶT CẦU:

Mặt cầu loại 1: Các đỉnh A, B, D cùng nhìn SC dưới một góc vuông thì bán kính mặt cầu $R = \dfrac{SC}{2}$.





Mặt cầu loại 2: Nếu SA vuông góc với đáy thì: $R^2 = R_D^2 + \dfrac{SA^2}{4}$. Các vấn đề cần chú ý về R_D:

+ Nếu đáy là tam giác vuông thì $R_D = \dfrac{1}{2}$ cạnh huyền và nếu đáy là tam giác đều thì $R_D = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

+ Nếu đáy là hình vuông thì $R_D = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

+ Nếu đáy là hình chữ nhật thì $R_D = \dfrac{1}{2}$ đường chéo.

+ Nếu đáy là tam giác cân có góc 120^0 cạnh bên bằng a thì cạnh đáy bằng $a\sqrt{3}$ còn $R_D = a$.

+ Nếu đáy là tam giác thường thì áp dụng công thức Heron: $R_D = \dfrac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$

• **Mặt cầu loại 3:** Nếu $O.ABC$ là tam diện vuông tại O thì $R^2 = \dfrac{1}{4}(OA^2 + OB^2 + OC^2)$.

• **Mặt cầu loại 4:** Nếu chóp có các cạnh bên bằng nhau thì: $R = \dfrac{SA^2}{2SO}$. Trong đó O là tâm của đáy và:

+ Nếu đáy là tam giác đều thì O là trọng tâm, trực tâm.
+ Nếu đáy là tam giác vuông thì O là trung điểm cạnh huyền.
+ Nếu đáy là hình vuông, hình O là giao điểm hai đường chéo và là trung điểm mỗi đường.

• **Mặt cầu loại 5:** Nếu hai mặt vuông góc với nhau thì $R^2 = R_1^2 + R_2^2 - \dfrac{AB^2}{4}$ trong đó AB là giao tuyến.

• **Mặt cầu loại 6:** Chóp $S.ABC$ tổng quát có chiều cao SH và tâm đáy là O thì ta giải phương trình: $(SH - x)^2 + OH^2 = x^2 + R_D^2$ để tìm x. Với x tìm được ta có $R^2 = x^2 + R_D^2$.

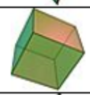
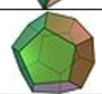
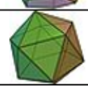
• **Mặt cầu loại 7:** Bán kính mặt cầu nội tiếp: $r = \dfrac{3V}{S_{tp}}$.

• **Một số vấn đề khác của mặt cầu:**

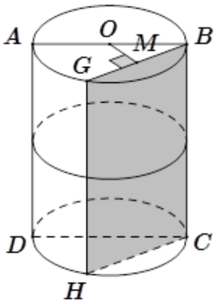
+ Mặt cầu ngoại tiếp tứ diện gần đều: $R = \dfrac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

+ Mặt cầu ngoại tiếp tứ diện đều: $R = \dfrac{a\sqrt{6}}{4}$ và mặt cầu nội tiếp tứ diện gần đều: $r = \dfrac{a\sqrt{6}}{12}$.

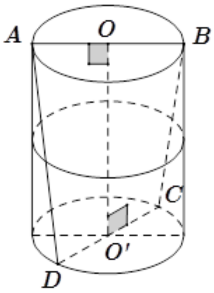
VẤN ĐỀ 5: NHỮNG ĐIỀU CẦN NHỚ VỀ ĐA DIỆN ĐỀU:

KHỐI ĐA DIỆN ĐỀU		SỐ ĐỈNH	SỐ CẠNH	SỐ MẶT	LOẠI	MPĐX
Tứ diện đều		4	6	4	{3;3}	6
Lập phương		8	12	6	{4;3}	9
8 mặt đều		6	12	8	{3;4}	9
12 mặt đều		20	30	12	{5;3}	15
20 mặt đều		12	30	20	{3;5}	15

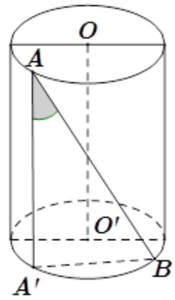
VẤN ĐỀ 6: CÁC VẤN ĐỀ VỀ MẶT TRỤ, HÌNH TRỤ VÀ KHỐI TRỤ:



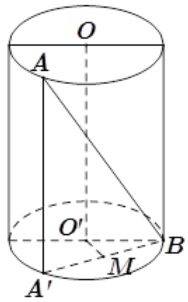
Hình 1



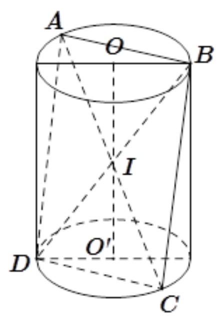
Hình 2



Hình 3



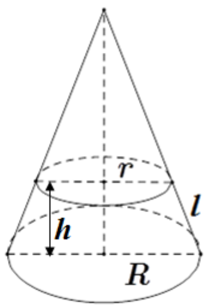
Hình 4



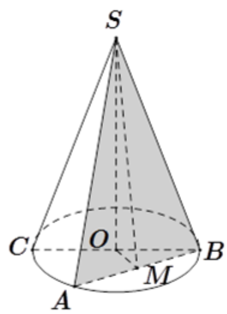
Hình 5

• **Hình 1:**
+ Thiết diện vuông góc trục là một đường tròn bán kính R.
+ Thiết diện chứa trục là một hình chữ nhật $ABCD$ trong đó $AB = 2R$ và $AD = h$. Nếu thiết diện qua trục là một hình vuông thì $h = 2R$.
+ Thiết diện song song với trục và không chứa trục là hình chữ nhật $BGHC$ có khoảng cách tới trục là: $d(OO', (BGHC)) = OM$.
• **Hình 2:**
+ Nếu AB, CD là hai đường kính bất kỳ trên hai đáy của hình trụ thì: $V_{ABCD} = \dfrac{1}{6}AB.CD.OO'.\sin(AB, CD)$.
+ Đặc biệt nếu AB và CD vuông góc nhau thì: $V_{ABCD} = \dfrac{1}{6}AB.CD.OO'$.
• **Hình 3:** $(\widehat{AB, OO'}) = \widehat{A'AB}$.
• **Hình 4:** $d(AB, OO') = O'M$.
• **Hình 5:** Nếu $ABCD$ là một hình vuông nội tiếp trong hình trụ thì đường chéo của hình vuông cũng bằng đường chéo của hình trụ. Nghĩa là: Đường chéo hình vuông $= \sqrt{4R^2 + h^2}$.

VẤN ĐỀ 7: CÁC VẤN ĐỀ VỀ HÌNH NÓN, KHỐI NÓN VÀ NÓN CỤT:



Hình 1

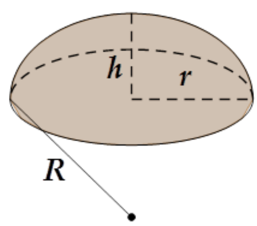


Hình 2

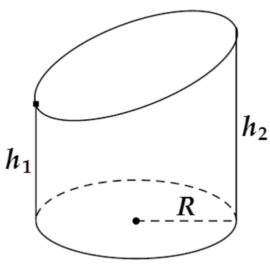
• **Hình 1:**
+ Các công thức nón cụt: $V = \dfrac{1}{3}\pi h\left(R^2 + Rr + r^2\right)$, $S_{xq} = \pi l\,(R + r)$, $S_{tp} = \pi\left(R^2 + r^2 + l\,(R + r)\right)$.
+ Thiết diện vuông góc trục cách đỉnh một khoảng x cắt hình nón theo một đường tròn có bán kính là r.
+ Nếu h là chiều cao của hình nón ban đầu thì ta có tỉ số: $\dfrac{r}{R} = \dfrac{x}{h}$.
+ Thiết diện chứa trục là một tam giác cân.
+ Nếu tam giác đó vuông cân thì $h = R$. Nếu tam giác đó là tam giác đều thì $h = R\sqrt{3}$.
• **Hình 2:**
+ Thiết diện đi qua đỉnh mà không chứa trục cắt hình nón theo một tam giác cân SAB:
+ $(\widehat{SO, (SAB)}) = \widehat{OSM}, (\widehat{(SAB), (ABC)}) = \widehat{SMO}$.
+ Nếu M là trung điểm của AB thì $AB \perp (SMO)$.

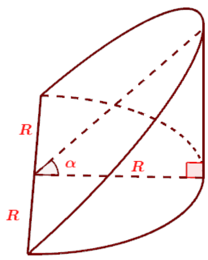
VẤN ĐỀ 8: CÁC VẬT THỂ TRÒN XOAY TRONG KHÔNG GIAN:

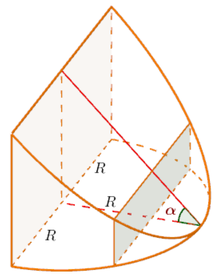
• **Các công thức chỏm cầu:** $S_{xq} = 2\pi Rh$ và $V = \pi h^2\left(R - \dfrac{h}{3}\right)$ (Áp dụng cho cả chỏm cầu to).



• **Các vật thể sinh ra từ khối trụ:**



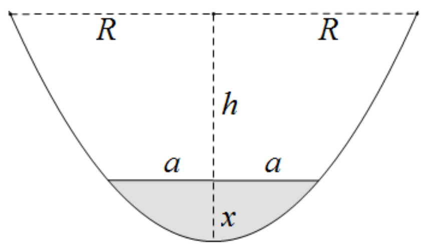


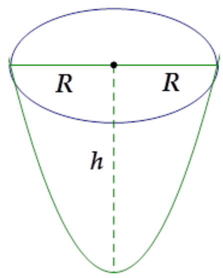


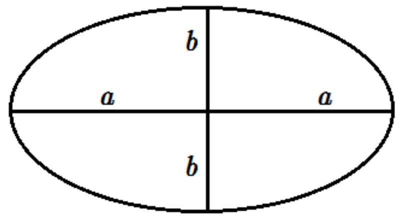
+ Khối trụ cụt: $S_{xq} = \pi R\left(h_1 + h_2\right); V = \pi R^2\left(\dfrac{h_1 + h_2}{2}\right)$.

+ Hình nêm loại 1: $V = \dfrac{2}{3}R^3 \tan\alpha$.   Hình nêm loại 2: $V = \left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{2}{3}\right)R^3 \tan\alpha$.

• **Các công thức liên quan đến parabol bậc hai và elip:**

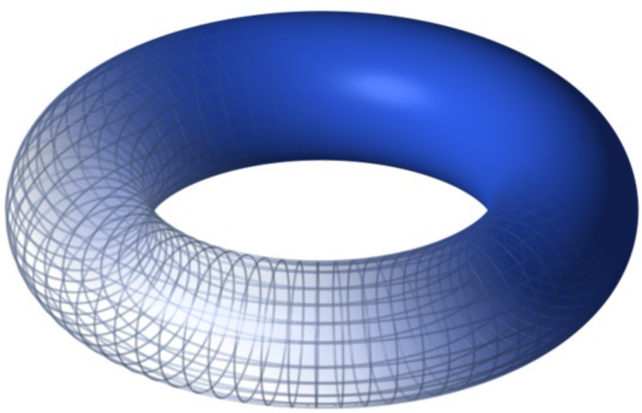
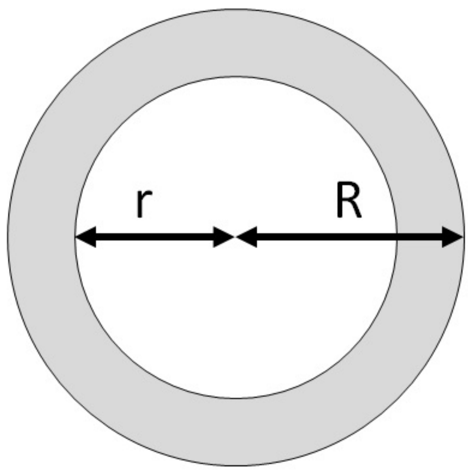






+ $S_{parabol} = \dfrac{4}{3}Rh$; $\dfrac{S'}{S} = \left(\sqrt{\dfrac{x}{h}}\right)^3 = \left(\dfrac{a}{R}\right)^3$. $V_{parabol} = \dfrac{1}{2}\pi R^2 h$ $S_{elip} = \pi ab$.

• **Thể tích cái phao:** $V = \dfrac{\pi^2}{4}(R+r)(R-r)^2$.

<u>VẤN ĐỀ 9: CÁC VẤN ĐỀ CƠ BẢN CỦA OXYZ:</u>

• **Xác định điểm thông qua hệ thức vector:**

+ Lý thuyết cơ bản: $2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{0}$ thì: $\begin{cases} 2\left(x_A - x_M\right) - 3\left(x_B - x_M\right) = 0 \\ 2\left(y_A - y_M\right) - 3\left(y_B - y_M\right) = 0 \\ 2\left(z_A - z_M\right) - 3\left(z_B - z_M\right) = 0 \end{cases}$.

+ Tuy nhiên để tìm tọa độ M đơn giản hơn, ta bấm máy: $\dfrac{2A - 3B}{2 - 3}$ và bấm CALC và nhập lần lượt x_A, x_B ta được x_M. Tương tự như vậy nếu nhập y_A, y_B ta được y_M và nhập z_A, z_B ta được z_M.

• **Xác định tọa độ các điểm đặc biệt trong tam giác:**

+ Tọa độ trực tâm H là nghiệm của hệ: $\begin{cases} \overrightarrow{HA}\overrightarrow{BC} = 0;\ \overrightarrow{HB}\overrightarrow{AC} = 0 \\ \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]\overrightarrow{AH} = 0 \end{cases}$.

+ Cho $BC = a, AC = b, AB = c$ ta có: Chân đường phân giác trong D của góc A: $b\overrightarrow{DB} + c\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{0}$.

+ Cho $BC = a, AC = b, AB = c$ ta có: Chân đường phân giác ngoài E: $b\overrightarrow{EB} - c\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{0}$.

+ Cho $BC = a, AC = b, AB = c$ ta có: Tâm nội tiếp: $a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{0}$.

• **Các ứng dụng của tích có hướng:**

+ Ba vector đồng phẳng: $\left[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right]\overrightarrow{c} = 0$ (Nếu $\neq 0$ là không đồng phẳng).
+ Bốn điểm đồng phẳng: $\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]\overrightarrow{AD} = 0$ (Nếu $\neq 0$ là không đồng phẳng).
+ Thể tích: $V_{ABCD} = \dfrac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]\overrightarrow{AD}\right|$, diện tích tam giác: $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]\right|$.
+ Thể tích hình hộp: $V_{ABCD.A'B'C'D'} = \left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right]\overrightarrow{AA'}\right|$. <u>**Chú ý:**</u> Nếu một hình hộp chữ nhật biết diện tích ba mặt bên thì thể tích của nó: $V = \sqrt{S_1S_2S_3}$.
+ Khoảng cách giữa hai đường thẳng: $d(d_1, d_2) = \dfrac{\left|[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}]\overrightarrow{AB}\right|}{|[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}]|}$ với $A \in d_1, B \in d_2$.
+ Khoảng cách 1 điểm tới đường thẳng: $d(A, d) = \dfrac{\left|\left[\overrightarrow{u_d}, \overrightarrow{AM}\right]\right|}{|\overrightarrow{u_d}|}$ $(M \in d)$.

• **Mối quan hệ song song và vuông góc:**
+ Mối quan hệ song song: $P//P' \Rightarrow \overrightarrow{n} = \overrightarrow{n'}$, $d//d' \Rightarrow \overrightarrow{u} = \overrightarrow{u'}$, $P//d \Rightarrow \overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{u}$.
+ Mối quan hệ vuông góc: $P \perp P' \Rightarrow \overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{n'}$, $d \perp d' \Rightarrow \overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{u'}$, $P \perp d \Rightarrow \overrightarrow{n} = \overrightarrow{u}$.
Nếu $d \subset P \Rightarrow \overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{u}$, $A, B \subset P \Rightarrow \overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{AB}$.
+ Mối quan hệ vuông góc của 2 cặp vector: $\overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{c} \Rightarrow \overrightarrow{a} = \left[\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right]$.

• **Tương giao mặt phẳng và mặt cầu:**
+ Cho mặt phẳng $(P): ax + by + cz + d = 0$ và mặt cầu $(S): (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$.
+**Trường hợp 1:** (P) tiếp xúc với (S) nếu $d(I; (P)) = R$ và khi đó tiếp điểm sẽ là hình chiếu vuông góc của tâm I trên mặt phẳng (P).
+**Trường hợp 2:** (P) cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn giao tuyến khi $d(I; (P)) < R$. Khi đó tâm đường tròn sẽ là hình chiếu vuông góc của tâm I trên mặt phẳng (P) đồng thời bán kính r của đường tròn thỏa mãn hệ thức: $R^2 = r^2 + [d(I; (P))]^2$.

• **Tương giao đường thẳng và mặt cầu:**
+ Đường thẳng d cắt mặt cầu tại 2 điểm phân biệt A và B khi và chỉ khi $d(I; (d)) < R$.
+ **Chú ý 1:** Hệ thức liên hệ $R^2 = \dfrac{1}{4}AB^2 + [d(I; (d))]^2$.
+ **Chú ý 2:** Nếu ΔABI vuông cân thì $R = \sqrt{2}d(I; (d))$.
+ **Chú ý 3:** Nếu ΔABI đều thì $R = \dfrac{2}{\sqrt{3}}d(I; (d))$.

• **Cách xác định hình chiếu vuông góc của A trên (P):**
+ **Bước 1:** Xác định giá trị $t = -\dfrac{ax_A + by_A + cz_A + d}{a^2 + b^2 + c^2}$.
+ **Bước 2:** Tọa độ hình chiếu H là: $H(at + x_A; bt + y_A; ct + z_A)$

• **Các dạng toán về phương trình mặt chắn:** Giả sử mặt phẳng (P) qua M và cắt các trục tọa độ tại $A(a, 0, 0), B(0, b, 0), C(0, 0, c)$. Khi đó:
+ **Bài toán 1:** Nếu M là trọng tâm tam giác ABC thì: $a = 3x_M, b = 3y_M, c = 3z_M$.
+ **Bài toán 2:** Nếu M là trực tâm của tam giác ABC thì $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{n_P}$.
+ **Bài toán 3:** Nếu $V_{O.ABC}$ min thì M là trọng tâm tam giác ABC.
+ **Bài toán 4:** Nếu $\dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{OC^2}$ min thì M là trực tâm tam giác ABC.
+ **Bài toán 5:** Tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$ là $I\left(\dfrac{a}{2}, \dfrac{b}{2}, \dfrac{c}{2}\right)$. Bán kính: $R = \dfrac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

<u>**Chú ý về tam diện vuông:**</u> Tổng bình phương diện tích các mặt bên bằng bình phương diện tích mặt còn lại: $S^2_{OAB} + S^2_{OBC} + S^2_{OCA} = S^2_{ABC}$.

<u>VẤN ĐỀ 10: CÁC BÀI TOÁN CỰC TRỊ TRONG OXYZ:</u>

• **Bài toán 1:** Viết <u>(P) chứa d</u> sao cho $(\widehat{d', (P)})$ lớn nhất: $\overrightarrow{n_P} = [\overrightarrow{u_d}, [\overrightarrow{u_d}, \overrightarrow{u_{d'}}]]$.
• **Bài toán 2:** Viết <u>d nằm trong (P)</u> sao cho $(\widehat{d, d'})$ nhỏ nhất: $\overrightarrow{u_d} = [\overrightarrow{n_P}, [\overrightarrow{n_P}, \overrightarrow{u_{d'}}]]$.
• **Bài toán 3:** Viết <u>(P) chứa d</u> sao cho $(\widehat{(P), (Q)})$ nhỏ nhất: $\overrightarrow{n_P} = [\overrightarrow{u_d}, [\overrightarrow{u_d}, \overrightarrow{n_Q}]]$.
• **Bài toán 4:** Viết <u>d nằm trong (P)</u> và qua A sao cho $d(M, d)$ nhỏ nhất: $\overrightarrow{u_d} = \left[\overrightarrow{n_P}, \left[\overrightarrow{n_P}, \overrightarrow{AM}\right]\right]$.
• **Bài toán 5:** Viết <u>(P) chứa d</u> sao cho $d(M, (P))$ lớn nhất: $\overrightarrow{n_P} = \left[\overrightarrow{u_d}, \left[\overrightarrow{u_d}, \overrightarrow{AM}\right]\right]$ với A bất kỳ trên d.

• **Bài toán 6:** Viết $\underline{d \text{ nằm trong } (P)}$ và qua A sao cho $d(M,d)$ lớn nhất: $\overrightarrow{u_d} = \left[\overrightarrow{n_P}, \overrightarrow{AM}\right]$.

VẤN ĐỀ 11: CÁC DẠNG TOÁN SỐ PHỨC HAY VÀ KHÓ:

• Nếu quỹ tích của $M(z)$ là đường tròn tâm $I(a,b)$ bán kính R đồng thời module của số phức cần tìm max min là JM thì: $\begin{cases} \max = IJ + R \\ \min = |IJ - R| \end{cases}$.

• Nếu $|z-c| + |z+c| = 2a$ thì quỹ tích $M(z)$ là elip $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ trong đó $b^2 = a^2 - c^2$.

• Nếu $|z| = k$ thì: $\begin{cases} |f(z)|^2 = f(z)\, f(\overline{z}) \\ |z-a|^2 = a^2 + k^2 - 2ax \\ |z+a|^2 = a^2 + k^2 + 2ax \end{cases}$

• z là một số thực nếu $z = \overline{z}$ và z là một số thuần ảo nếu $z = -\overline{z}$.

• Nếu $az^2 + bz + c = 0$ với $a, b, c \in \mathbb{R}$ có hai nghiệm phức thực sự z_1, z_2 thì đây là hai số phức liên hợp của nhau, đồng thời $|z_1|^2 = |z_2|^2 = z_1 z_2 = \dfrac{c}{a}$.

• $(1+i)^2 = 2i, \quad (1-i)^2 = -2i, \quad \left(\dfrac{1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{3}}{2} i\right)^3 = -1.$

• Một số tổng đặc biệt: $1 + i + i^2 + ... + i^n = \dfrac{i^{n+1} - 1}{i - 1}$ và $1 + 2i + 3i^2 + ... + (n+1)i^n = \dfrac{ni^{n+1} - (n+1)i^n + 1}{(i-1)^2}$.

• Một số đẳng thức đặc biệt: $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$ và $z\overline{z'} + \overline{z}z' = 2\overrightarrow{OM}\overrightarrow{OM'}$.

• Nếu $\dfrac{z}{z'}$ là số thuần ảo thì $\Delta OMM'$ là tam giác vuông tại O.

VẤN ĐỀ 12: MỘT SỐ VẤN ĐỀ VỀ TÍCH PHÂN:

• $\displaystyle\int \frac{1}{(ax+b)(cx+d)} dx = \frac{1}{ad - bc} \ln\left|\frac{ax+b}{cx+d}\right| + C$

• $\displaystyle\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \arctan\frac{x}{a} + C$ và $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin\frac{x}{a} + C$

• $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$ và $\displaystyle\int \frac{u'}{u} dx = \ln|u| + C$

• $\displaystyle\int xe^x dx = (x-1)e^x + C$ và $\displaystyle\int \ln x dx = (x-1)\ln x + C$.

• Nếu $f(x)$ là hàm lẻ thì $\displaystyle\int\limits_{-a}^{a} f(x)\, dx = 0$. Nếu $f(x)$ là hàm chẵn thì $\displaystyle\int\limits_{-a}^{a} f(x)\, dx = 2\int\limits_{0}^{a} f(x)\, dx$

• Dạng toán tìm hằng số C: $F(b) = \displaystyle\int\limits_{a}^{b} f(x)\, dx + F(a)$.

• $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx = \frac{1}{p+q}\int_a^b (pf(x) + qf(a+b-x))dx.$

• Nếu tích phân phân thức có bậc tử lớn hơn hoặc bằng bậc mẫu phải chia đa thức.

• Cách tách phân thức loại 1: $\dfrac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{B}{x-2} + \dfrac{C}{x-3}$.

• Cách tách phân thức loại 2: $\dfrac{x^2+1}{(x-1)^2(x-2)} = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{B}{x-2} + \dfrac{C}{(x-1)^2}$.

• $v = \displaystyle\int a(t)\, dt$: Vận tốc là nguyên hàm của gia tốc theo thời gian.

• $s = \displaystyle\int\limits_{a}^{b} v(t)\, dt$: Quãng đường là tích phân của vận tốc giữa hai thời điểm $t = a$ và $t = b$.

• Thể tích tròn xoay quanh trục hoành: $V = \pi \displaystyle\int\limits_{a}^{b} \left|f^2(x) - g^2(x)\right| dx$

• Thể tích tròn xoay quanh trục tung $V = 2\pi \displaystyle\int\limits_{a}^{b} |xf(x)|\, dx$

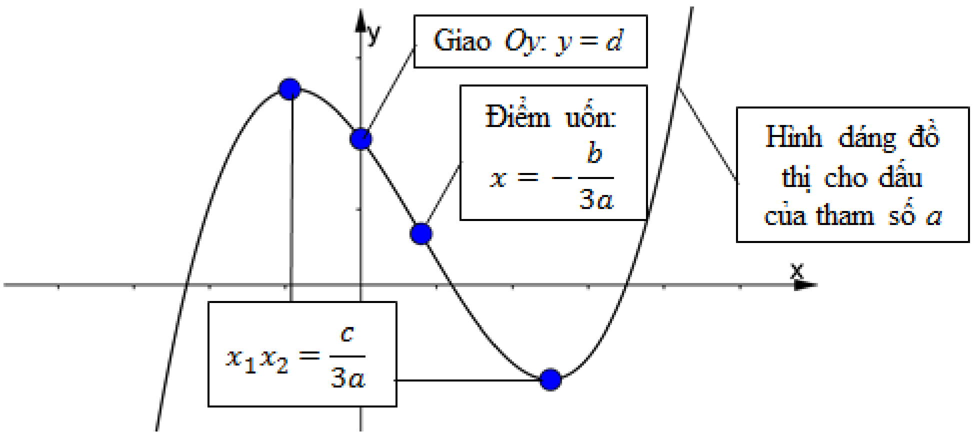
• Thể tích của vật thể có thiết diện với diện tích $S(x)$: $V = \int\limits_a^b S\left(x\right)dx$.

• Độ dài đường cong: $L = \int\limits_a^b \sqrt{1 + \left(f'\left(x\right)\right)^2}dx$

• Diện tích mặt cong vật thể tròn xoay quanh trục hoành: $S = 2\pi \int\limits_a^b \left|f\left(x\right)\right| \sqrt{1 + \left(f'\left(x\right)\right)^2}dx$

VẤN ĐỀ 13: HÀM SỐ BẬC 3 CÓ 2 CỰC TRỊ:

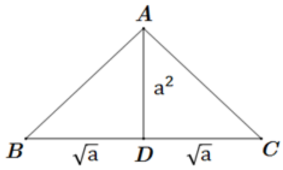
Cho hàm số bậc 3 $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có 2 cực trị là $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$. Khi đó ta có các chú ý sau:
• Điều kiện có 2 cực trị: $\Delta = b^2 - 3ac > 0$.
• Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi $\left[\begin{array}{l} b^2 - 3ac \le 0, a > 0 \\ a = b = 0, c > 0 \end{array}\right.$ và nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi $\left[\begin{array}{l} b^2 - 3ac \le 0, a < 0 \\ a = b = 0, c < 0 \end{array}\right.$.
• Đồng biến trên đoạn có độ dài δ:$\left\{\begin{array}{l} a < 0 \\ \left|x_2 - x_1\right| = \delta \end{array}\right.$ và nghịch biến trên đoạn có độ dài δ:$\left\{\begin{array}{l} a > 0 \\ \left|x_2 - x_1\right| = \delta \end{array}\right.$.
• Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực đại và cực tiểu của hàm số bậc ba $y = f\left(x\right) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ là $y = mx + n$ trong đó $mx + n$ là dư thức trong phép chia $f(x)$ cho $f'(x)$.
• Phương trình đường thẳng qua hai cực trị: $y = -\dfrac{2\left(b^2 - 3ac\right)}{9a}x + d - \dfrac{bc}{9a}$.
• Định lý Viet với cực trị: $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{3a} \quad x_1 x_2 = \dfrac{c}{3a}$.
• Phương trình bậc 3 có ba nghiệm lập thành cấp số cộng khi có 1 nghiệm là $x = -\dfrac{b}{3a}$, lập thành cấp số nhân nếu 1 nghiệm là $x = -\sqrt[3]{\dfrac{d}{a}}$.
• **Cách nhận diện đồ thị hàm số bậc 3:**



+ Để xác định dấu của a ta chú ý đến hình dáng của đồ thị hàm số. Đồ thị đi lên $+\infty$ ở bên phải thì $a > 0$. Đồ thị đi xuống $-\infty$ ở bên phải thì $a < 0$.
+ Để xác định dấu của b ta chú ý vào vị trí của điểm uốn và hoành độ tương ứng là $x = -\dfrac{b}{3a}$.
+ Để xác định dấu của c ta xét tích hai hoành độ cực trị $x_1 x_2 = \dfrac{c}{3a}$. Nếu hai cực trị có hoành độ cùng dấu thì a, c cùng dấu và ngược lại nếu hai cực trị có hoành độ trái dấu thì a, c trái dấu.
+ Để xác định dấu của d ta xét vị trí tương giao của đồ thị với trục tung Oy, tại đó tung độ giao điểm chính là $y = d$ để xét dấu.

VẤN ĐỀ 14: HÀM SỐ BẬC 4 TRÙNG PHƯƠNG CÓ 3 CỰC TRỊ:

Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có ba cực trị.
• Điều kiện có ba cực trị: $ab < 0$ (a, b trái dấu).
• Luôn có 1 cực trị là $A(0, c)$ và hai cực trị còn lại đối xứng qua trục tung.
• Trong trường hợp hàm trùng phương có dạng $y = x^4 - 2ax^2 + b$ và $y = -x^4 + 2ax^2 + b$ với $a > 0$, tam giác tạo thành ba cực trị có các tính chất như hình vẽ dưới đây:



+ Tam giác ABC vuông cân khi $\tan 45^0 = \dfrac{\sqrt{a}}{a^2} \Leftrightarrow a = 1$.

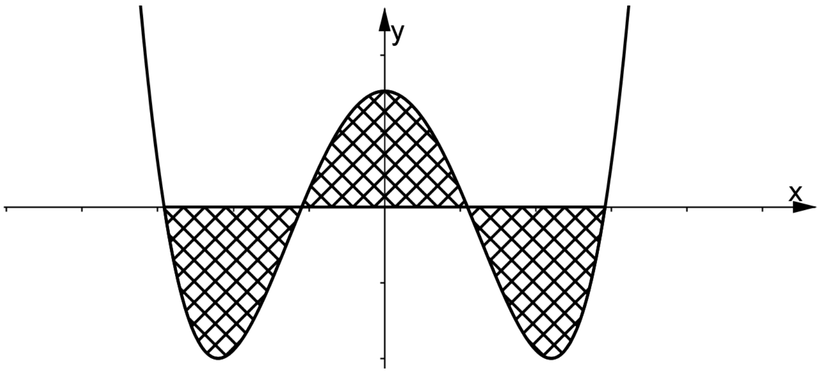
+ Tam giác ABC đều khi $\tan 30^0 = \dfrac{\sqrt{a}}{a^2} \Leftrightarrow a = \sqrt[3]{3}$.

+ Tam giác ABC có góc 120^0 khi $\tan 60^0 = \dfrac{\sqrt{a}}{a^2} \Leftrightarrow a = \dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}$.

+ Tam giác ABC có diện tích là S khi $S = a^2\sqrt{a} \Leftrightarrow a = \sqrt[5]{S^2}$.

+ Bán kính đường tròn ngoại tiếp $R = \dfrac{abc}{4S}$, bán kính đường tròn nội tiếp: $r = \dfrac{2S}{a+b+c}$.

• Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại bốn điểm có hoành độ lập thành cấp số cộng nếu $9b^2 = 100ac$.



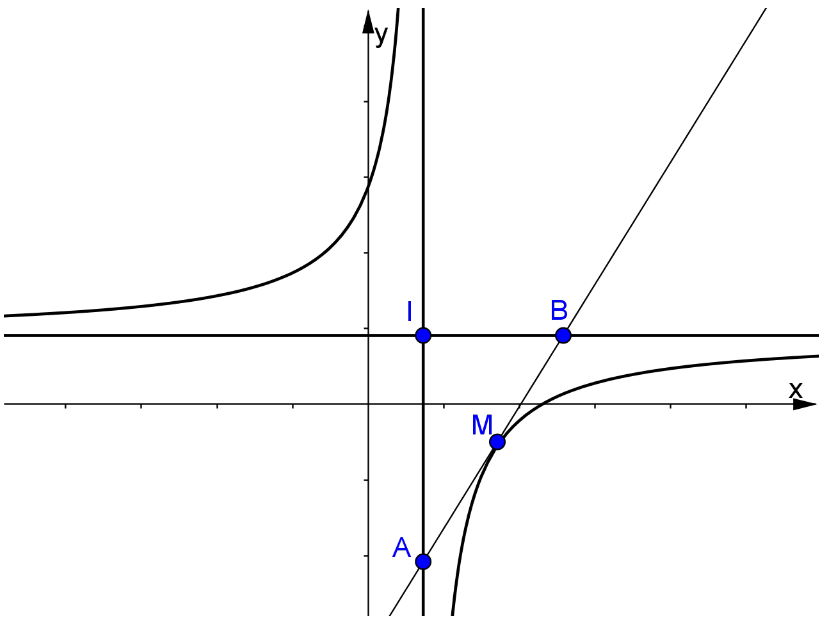
• Đồ thị hàm số cắt trục hoành tạo thành ba miền diện tích có diện tích phần trên và diện tích phần dưới bằng nhau khi và chỉ khi $5b^2 = 36ac$.

VẤN ĐỀ 15: HÀM SỐ PHÂN THỨC BẬC NHẤT TRÊN BẬC NHẤT:

Cho hàm số phân thức hữu tỷ bậc nhất trên bậc nhất $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$.

• Hàm số đồng biến trên D nếu $ad - bc > 0, -\dfrac{d}{c} \notin D$ và nghịch biến trên D nếu $ad - bc < 0, -\dfrac{d}{c} \notin D$.

• **Tiếp tuyến với tiệm cận:**



+ Tiếp tuyến tại M cắt các tiệm cận tại A và B thì M là trung điểm của AB.

+ Khoảng cách từ M tới TCĐ: $\dfrac{1}{|c|}|cx_M + d|$.

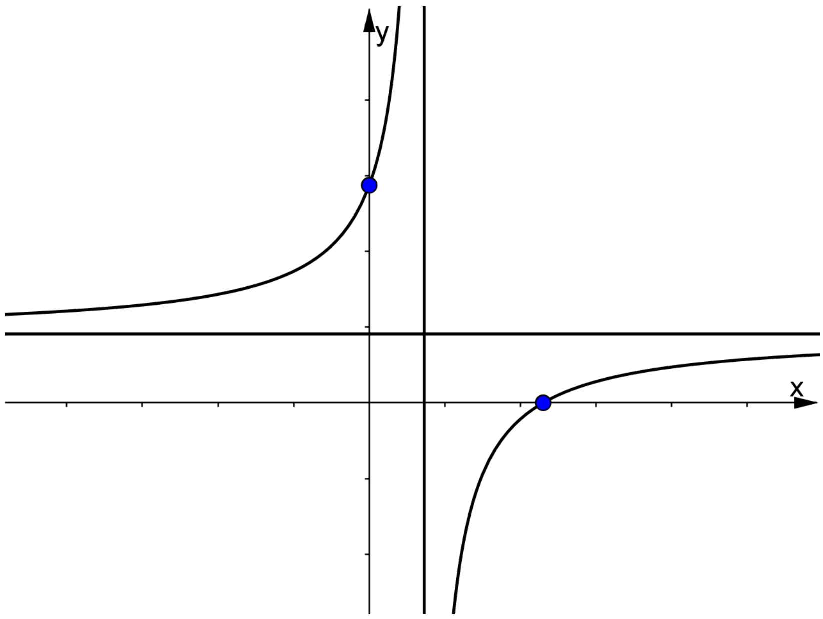
+ Khoảng cách từ M tới TCN: $\dfrac{|ad-bc|}{|c|}\dfrac{1}{|cx_M+d|}$.

+ $IA=\dfrac{|ad-bc|}{|c|}\dfrac{2}{|cx_M+d|}$ và $IB=\dfrac{2}{|c|}|cx_M+d|$ với I là giao 2 tiệm cận.

+ Diện tích tam giác IAB không đổi: $S_{IAB}=\dfrac{2}{c^2}|ad-bc|$.

Đặc biệt chú ý: Điểm M thỏa mãn một trong các yếu tố: Tổng khoảng cách đạt giá trị nhỏ nhất/Chu vi tam giác IAB nhỏ nhất/Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác IAB lớn nhất/Khoảng cách từ I tới tiếp tuyến đạt giá trị lớn nhất thì điểm M đó phải thỏa mãn tính chất: $IA=IB\Leftrightarrow |y'(x_M)|=1$.

• **Cách nhận diện đồ thị hàm phân thức bậc nhất trên bậc nhất:**



+ Tiệm cận ngang: $y=\dfrac{a}{c}$. Nếu tiệm cận ngang nằm trên Ox thì $ac>0$ còn nếu nằm dưới thì $ac<0$.

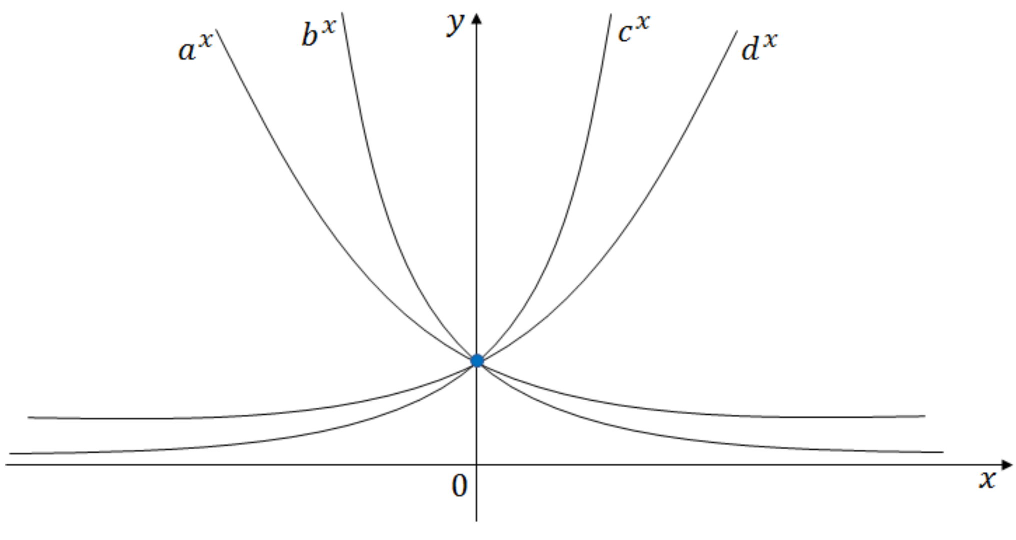
+ Tiệm cận đứng $x=-\dfrac{d}{c}$. Nếu tiệm cận đứng nằm bên trái Oy thì $cd>0$ còn nếu bên phải thì $cd<0$.

+ Giao Oy: $y=\dfrac{b}{d}$. Nếu giao điểm này nằm trên Ox thì $bd>0$ còn nếu nằm dưới thì $bd<0$.

+ Giao Ox: $x=-\dfrac{b}{a}$. Nếu giao điểm này nằm bên trái Oy thì $ab>0$ còn nếu bên phải thì $ab<0$.

VẤN ĐỀ 16: ĐỒ THỊ HÀM SỐ LŨY THỪA, MŨ VÀ LOGARIT:

• **Loại 1: Đồ thị hàm số mũ:**

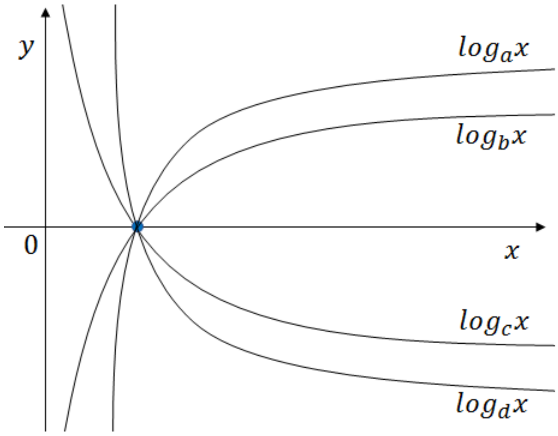


+ Thứ tự: $0<b<a<1<d<c$ (**Mẹo:** Giao 4 đồ thị với đường thẳng $x=1$ để đánh giá nhanh nhất!).

+ Hàm số $y=a^x$ có tập xác định $D=\mathbb{R}$, tập giá trị $E=(0,+\infty)$.

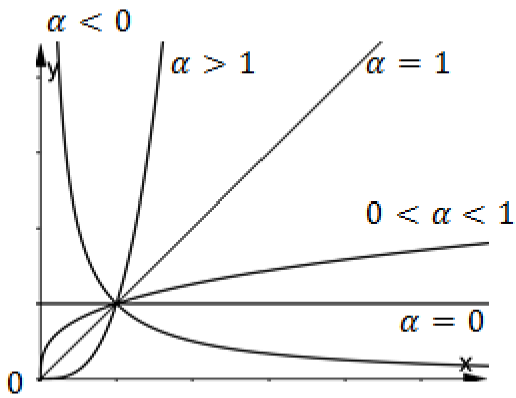
+ Đồ thị hàm số $y=a^x$ luôn đi qua điểm $I(0,1)$ và có tiệm cận ngang là trục hoành Ox.

• **Loại 2: Đồ thị hàm số logarit:**



+ Thứ tự: $b > a > 1 > d > c > 0$ (**Mẹo:** Giao 4 đồ thị với đường thẳng $y = 1$ để đánh giá nhanh nhất!).
+ Hàm số $y = log_a x$ có tập xác định $D = (0, +\infty)$ và tập giá trị $E = \mathbb{R}$.
+ Đồ thị hàm số $y = log_a x$ luôn đi qua điểm $I(1, 0)$ và có tiệm cận đứng là trục tung Oy.

• **Loại 3: Đồ thị hàm số lũy thừa:**



+ $y = x^\alpha$ có tập xác định $D = \mathbb{R}$ nếu $\alpha \in \mathbb{Z}^+$, $D = \mathbb{R}\setminus\{0\}$ nếu $\alpha \in \mathbb{Z}^-$ và $D = (0, +\infty)$ nếu $\alpha \notin \mathbb{Z}$.
+ Đồ thị hàm số $y = x^\alpha$ luôn đi qua điểm $I(1, 1)$.

VẤN ĐỀ 17: CÁC BÀI TOÁN LÃI SUẤT CƠ BẢN CẦN BIẾT:

• **Bài toán 1:** Đem số tiền a đi gửi ngân hàng thu được số tiền $P = a(1 + r\%)^n$.

• **Bài toán 2:** Đem số tiền a **hàng tháng** đi gửi ngân hàng thu được số tiền $P = a(1+r\%)\dfrac{(1 + r\%)^n - 1}{r\%}$.

• **Bài toán 3:** Vay số tiền P dưới hình thức **trả góp** và **hàng tháng** đi trả ngân hàng khoản tiền a thì:

+ Số tiền còn lại trong ngân hàng sau n tháng là: $Q = P(1 + r\%)^n - a\dfrac{(1 + r\%)^n - 1}{r\%}$.

+ Khi hoàn thành trả góp thì ta giải phương trình: $P(1 + r\%)^n = a\dfrac{(1 + r\%)^n - 1}{r\%}$.

VẤN ĐỀ 18: CÁC KIẾN THỨC CƠ BẢN VỀ PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH:

• $ax^2 + bx + c \geq 0 \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta \leq 0, a > 0$ và $ax^2 + bx + c \leq 0 \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta \leq 0, a < 0$.
• $ax^2 + bx + c \geq 0 \forall x > 0 \Leftrightarrow \Delta \leq 0, a > 0$ hoặc $a, b, c \geq 0$.
• $ax^2 + bx + c \leq 0 \forall x > 0 \Leftrightarrow \Delta \leq 0, a < 0$ hoặc $a, b, c \leq 0$.
• $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm phân biệt dương khi $\Delta > 0, S > 0, P > 0$.
• $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm phân biệt âm khi $\Delta > 0, S < 0, P > 0$.
• $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm trái dấu khi $P < 0$.
• $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1 < x_2 < \alpha$ khi $\Delta > 0, (x_1 - \alpha)(x_2 - \alpha) > 0, x_1 + x_2 < \alpha$.
• $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\alpha < x_1 < x_2$ khi $\Delta > 0, (x_1 - \alpha)(x_2 - \alpha) > 0, x_1 + x_2 > \alpha$.
• $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1 < \alpha < x_2$ khi $\Delta > 0, (x_1 - \alpha)(x_2 - \alpha) < 0$.
• $m = f(x)$ có nghiệm khi $m \in [\min, \max]$; $m \geq f(x)$ có nghiệm khi $m \geq \min$;$m \leq f(x)$ có nghiệm khi $m \leq \max$.
• $m \geq f(x) \forall x$ khi $m \geq \max$;$m \leq f(x) \forall x$ khi $m \leq \min$.