PHƯƠNG PHÁP CASIO – VINACAL

BÀI 32. CỰC TRỊ CỦA SỐ PHỨC

I) KIẾN THỨC NỀN TẢNG

1. Bất đẳng thức thường gặp

- **Bất đẳng thức Bunhiacopxki** :Cho các số thực a,b,x,y ta luôn có

  $(ax+by)^2 \le (a^2+b^2)(x^2+y^2)$. Dấu = xảy ra $\frac{a}{x} \quad \frac{b}{y}$

- **Bất đẳng thức Vectơ** : Cho 2 vecto $\vec{u}(x;y)$ và $\vec{v}(x';y')$ ta luôn có $|\vec{u}|+|\vec{v}| \ge |u+\vec{v}|$

  $\Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x'^2+y'^2} \ge \sqrt{(x \quad x')^2+(y \quad y')^2}$

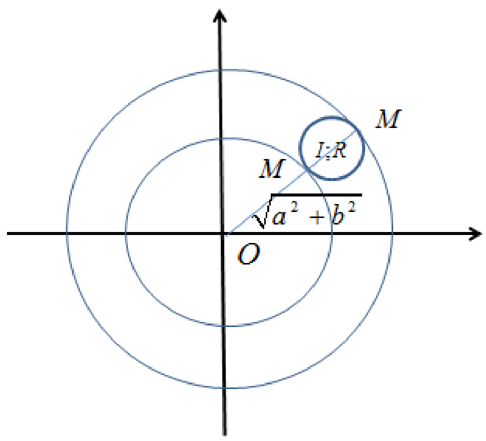
  Dấu = xảy ra $\Leftrightarrow \frac{x}{x'}=\frac{y}{y'}<0$

2. Phương pháp mẹo sử dụng sử tiếp xúc

- **Dạng 1**: Cho số phức z có tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường tròn (C) bán kính R. Với mỗi điểm M thuộc đường tròn (C) thì cũng thuộc đường tròn (C') tâm gốc tọa độ bán kính $OM=\sqrt{a^2+b^2}$.

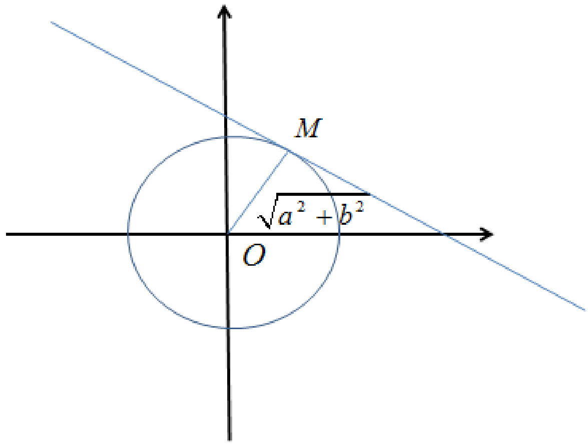
  +)Để $|z|$ lớn nhất thì OM lớn nhất đạt được khi đường tròn (C') tiếp xúc trong với đường tròn (C) và $OM=OI+R$

  +)Để $|z|$ nhỏ nhất thì OM nhỏ nhất đạt được khi đường tròn (C') tiếp xúc ngoài với đường tròn (C) và $OM=OI \quad R$



- **Dạng 2** : Cho số phức z có tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường thẳng (d) . Với mỗi điểm M thuộc (d) thì cũng thuộc đường tròn (C')

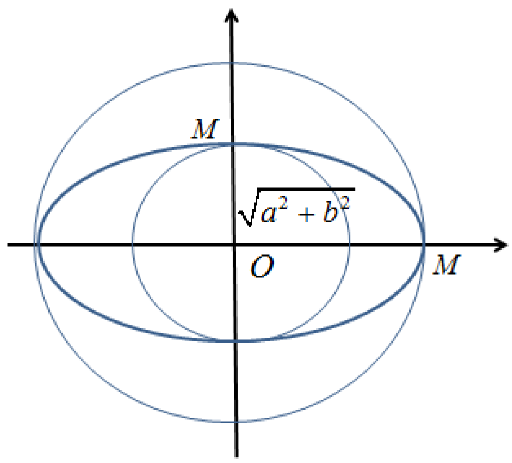
  +)Để $|z|$ nhỏ nhất thì OM nhỏ nhất khi đó OM vuông góc với (d) và $OM=d(O;(d))$



- **Dạng 3** : Cho số phức z có tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là Elip có đỉnh thuộc trục lớn $A(a;0)$ và đỉnh thuộc trục nhỏ $B(0;b)$. Với mỗi điểm M thuộc (d) thì cũng thuộc đường tròn (E)

  +)Để $|z|$ lớn nhất thì OM lớn nhất khi đó M trùng với đỉnh thuộc trục lớn và $\max|z| = OM = OA$

  +)Để $|z|$ nhỏ nhất thì OM nhỏ nhất khi đó M trùng với đỉnh thuộc trục nhỏ và $\max|z| = OM = OB$



- **Dạng 4** : Cho số phức z có tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là Hyperbol $(H): \dfrac{x^2}{a^2} \quad \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ có hai đỉnh thuộc trục thực $A'(\quad a;0), A(a;0)$ thì số phức z có môđun nhỏ nhất nếu điểm biểu diễn số phức z này trùng với các đỉnh trên. (môđun lớn nhất không tồn tại)

II) VÍ DỤ MINH HỌA

VD1-[Thi thử THPT Vĩnh Chân – Phú Thọ lần 1 năm 2017]

Trong các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z \quad 2 \quad 4i| = |z \quad 2i|$. Tìm số phức z có môđun nhỏ nhất.

A. $z = \quad 1 + i$ **B**. $z = \quad 2 + 2i$ **C**. $z = 2 + 2i$ **D**. $z = 3 + 2i$

GIẢI

❖ **Cách Casio**

➢ Trong các số phức ở đáp án, ta sẽ tiến hành xắp xếp các số phức theo thứ tự môđun tăng dần :

$\left|\ \ 1+i\right| < \left|\ \ 2+2i\right| = \left|2+2i\right| < \left|3+2i\right|$

➢ Tiếp theo sẽ tiến hành thử nghiệm từng số phức theo thứ tự môđun tăng dần, số phức nào thỏa mãn hệ thức điều kiện $\left|z\ \ \ 2\ \ \ 4i\right| = \left|z\ \ \ 2i\right|$ đầu tiên thì là đúng

Với $z = \ \ 1+i$ Xét hiệu : $\left|\left(\ \ 1+i\right)\ \ 2\ \ \ 4i\right|\ \ \ \left|\left(\ \ 1+i\right)\ \ \ 2i\right|$

SHIFT hyp (− 1 + ENG) − 2 − 4 ENG ▶ − SHIFT hyp − 1 + ENG − 2 ENG =

CMPLX Math ▲

|(-1+i)-2-4i|-|▶

2√2

Ra một giá trị khác 0 vậy $z = \ \ 1+i$ không thỏa mãn hệ thức. $\Rightarrow$ Đáp án **A** sai

➢ Tương tự như vậy với $z = 2+2i$

SHIFT hyp 2 + 2 ENG − 2 − 4 ENG ▶ − SHIFT hyp 2 + 2 ENG − 2 ENG =

CMPLX Math ▲

|2+2i-2-4i|-|2+▶

0

Vậy số phức $z = 2+2i$ thỏa mãn hệ thức $\Rightarrow$ Đáp số **C** là đáp số chính xác

❖ **Cách mẹo**

Gọi số phức z có dạng $z = a+bi$. z thỏa mãn $\left|z\ \ \ 2\ \ \ 4i\right| = \left|z\ \ \ 2i\right|$

$\Leftrightarrow \left|a\ \ \ 2+\left(b\ \ \ 4\right)i\right| = \left|a+\left(b\ \ \ 2\right)i\right|$

$\Leftrightarrow \left(a\ \ \ 2\right)^2 + \left(b\ \ \ 4\right)^2 = a^2 + \left(b\ \ \ 2\right)^2$

$\Leftrightarrow a^2\ \ \ 4a+4+b^2\ \ \ 8b+16 = a^2+b^2\ \ \ 4b+4$

$\Leftrightarrow 4a+4b = 16$

$\Leftrightarrow a+b\ \ \ 4 = 0$

Trong các đáp án chỉ có đáp án **C** thỏa mãn $a+b\ \ \ 4=0 \Rightarrow$ Đáp án chính xác là **C**

❖ **Cách tự luận**

Gọi số phức z có dạng $z = a+bi$. z thỏa mãn $\left|z\ \ \ 2\ \ \ 4i\right| = \left|z\ \ \ 2i\right|$

$\Leftrightarrow \left|a\ \ \ 2+\left(b\ \ \ 4\right)i\right| = \left|a+\left(b\ \ \ 2\right)i\right|$

$\Leftrightarrow \left(a\ \ \ 2\right)^2 + \left(b\ \ \ 4\right)^2 = a^2 + \left(b\ \ \ 2\right)^2$

$\Leftrightarrow a^2\ \ \ 4a+4+b^2\ \ \ 8b+16 = a^2+b^2\ \ \ 4b+4$

$\Leftrightarrow 4a+4b = 16$

$\Leftrightarrow a+b = 4$

Theo bất đẳng thức Bunhiacopxki :

$16 = \left(a+b\right)^2 \le \left(1^2+1^2\right)\left(a^2+b^2\right) \Rightarrow \left|z\right|^2 = a^2+b^2 \ge 8$

$\Rightarrow \left|z\right| \ge 2\sqrt{2}$

Dấu = xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{a}{1} = \dfrac{b}{1} \\ a+b=4 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=2 \Rightarrow z = 2+2i$

<u>VD2</u>-[Thi thử chuyên Khoa học tự nhiên lần 2 năm 2017]

Với các số phức z thỏa mãn $\left|(1+i)z+1-7i\right|=\sqrt{2}$. Tìm giá trị lớn nhất của $|z|$

A. $\max|z|=4$ **B.** $\max|z|=3$ **C.** $\max|z|=7$ **D.** $\max|z|=6$

GIẢI

❖ **Cách mẹo**

➢ Gọi số phức z có dạng $z=a+bi$. z thỏa mãn $\left|(1+i)z+1-7i\right|=\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \left|(a+bi)(1+i)+1-7i\right|=\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \left|a-b+1+(a+b-7)i\right|=\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow (a-b+1)^2+(a+b-7)^2=2$

$\Leftrightarrow 2a^2+2b^2+50-12a-16b=2$

$\Leftrightarrow a^2+b^2-6a-8b+25=1$

$\Leftrightarrow (a-3)^2+(b-4)^2=1$

Vậy quỹ tích điểm biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I(3;4)$ bán kính $R=1$. Ta gọi đây là đường tròn (C)

➢ Với mỗi điểm M biểu diễn số phức $z=a+bi$ thì M cũng thuộc đường tròn tâm $O(0;0)$ bán kính $\sqrt{a^2+b^2}$. Ta gọi đây là đường tròn (C') , Môđun của z cũng là bán kính đường tròn (C')

➢ Để bán kính (C') lớn nhất thì O,I,M thẳng hàng (như hình) và (C') tiếp xúc trong với (C)

Khi đó $OM=OI+R=5+1=6$

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **D**

❖ **Cách tự luận**

➢ Gọi số phức z có dạng $z=a+bi$. z thỏa mãn $\left|(1+i)z+1-7i\right|=\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \left|(a+bi)(1+i)+1-7i\right|=\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \left|a-b+1+(a+b-7)i\right|=\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow (a-b+1)^2+(a+b-7)^2=2$

$\Leftrightarrow 2a^2+2b^2+50-12a-16b=2$

$\Leftrightarrow a^2+b^2-6a-8b+25=1$

$\Leftrightarrow (a-3)^2+(b-4)^2=1$

➢ Ta có $|z|^2=a^2+b^2=6a+8b-24=6(a-3)+8(b-4)+26$

Theo bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có : $6(a-3)+8(b-4)\le\left|6(a-3)+8(b-4)\right|$

$\le\sqrt{(6^2+8^2)\left[(a-3)^2+(b-4)^2\right]}=10$

Vậy $|z|^2\le 36\Leftrightarrow |z|\le 6$

$\Rightarrow$ đáp án **D** là chính xác

❖ **Bình luận**

- Việc sử dụng bất đẳng thức để đánh giá $|z|$ là rất khó khăn, đòi hỏi học sinh phải nắm rất vững bất đẳng thức Bunhiacopxki và các biến dạng của nó
- Trong tình huống của bài toán này, khi so sánh 2 cách giải ta thấy dùng mẹo tiếp xúc tỏ ra đơn giản dễ hiểu và tiết kiệm thời gian hơn.

VD3-[Thi thử báo Toán học tuổi trẻ lần 5 năm 2017]

Cho số phức z thỏa mãn $|z-4|+|z+4|=10$, giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$ lần lượt là :

A.10 và 4 **B.** 5 và 4 **C.** 4 và 3**D.** 5 và 3

GIẢI

- **Cách mẹo**

- Gọi số phức z có dạng $z=a+bi$. z thỏa mãn $|z-4|+|z+4|=10$

$\Leftrightarrow |a-4+bi|+|a+4+bi|=10$

$\Leftrightarrow \sqrt{(a-4)^2+b^2}+\sqrt{(a+4)^2+b^2}=10$

$\Leftrightarrow \sqrt{(a+4)^2+b^2}=10-\sqrt{(a-4)^2+b^2}$

$\Leftrightarrow a^2+8a+16+b^2=100+a^2-8a+16+b^2-20\sqrt{(a-4)^2+b^2}$

$\Leftrightarrow 20\sqrt{(a-4)^2+b^2}=100-16a$

$\Leftrightarrow 5\sqrt{(a-4)^2+b^2}=25-4a$

$\Leftrightarrow 25\left(a^2-8a+16+b^2\right)=625-200a+16a^2$

$\Leftrightarrow 9a^2+25b^2=225$

$\Leftrightarrow \dfrac{a^2}{25}+\dfrac{b^2}{9}=1$

Vậy quỹ tích điểm biểu diễn số phức z là đường Elip đỉnh thuộc đáy lớn là $A(5;0)$, đỉnh thuộc đáy nhỏ là $B(0;3)$

- Với mỗi điểm M biểu diễn số phức $z=a+bi$ thì M cũng thuộc đường tròn tâm $O(0;0)$ bán kính $\sqrt{a^2+b^2}$. Ta gọi đây là đường tròn (C') , Môđun của z cũng là bán kính đường tròn (C')
- Để bán kính (C') lớn nhất thì M trùng với đỉnh thuộc trục lớn và

$M\equiv A(5;0)\Rightarrow OM=5$

$\Rightarrow \max|z|=5$

- Để bán kính (C') lớn nhất thì M trùng với đỉnh thuộc trục nhỏ và

$M\equiv B(0;3)\Rightarrow OM=3$

$\Rightarrow \min|z|=3$

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **D**

- **Cách tự luận**

- Gọi số phức z có dạng $z=a+bi$. z thỏa mãn $|z-4|+|z+4|=10$

$\Leftrightarrow |a-4+bi|+|a+4+bi|=10$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(a\quad 4)^2+b^2}+\sqrt{(a+4)^2+b^2}=10$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(a+4)^2+b^2}+\sqrt{(\quad a+4)^2+(\quad b)^2}=10$$

Theo bất đẳng thức vecto ta có :

$$\Leftrightarrow 10=\sqrt{(a+4)^2+b^2}+\sqrt{(\quad a+4)^2+(\quad b)^2}\geq \sqrt{\left[(a+4)\quad(\quad a+4)\right]^2+\left[b\quad(\quad b)\right]^2}$$

$$\Leftrightarrow 10\geq \sqrt{4a^2+4b^2}$$

$$\Leftrightarrow 10\geq 2|z|\Rightarrow |z|\leq 5$$

- Ta có $\Leftrightarrow \sqrt{(a\quad 4)^2+b^2}+\sqrt{(a+4)^2+b^2}=10$

Theo bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có :

$$100=\left(\sqrt{(a\quad 4)^2+b^2}+\sqrt{(a+4)^2+b^2}\right)^2\leq \left(1^2+1^2\right)\left[(a\quad 4)^2+b^2+(a+4)^2+b^2\right]$$

$$\Leftrightarrow 100\leq 2\left(2a^2+2b^2+32\right)$$

$$\Leftrightarrow 2a^2+2b^2+32\geq 50$$

$$\Leftrightarrow a^2+b^2\geq 9$$

Vậy $|z|^2\geq 9\Leftrightarrow |z|\leq 3$

$\Rightarrow 3\leq |z|\leq 5\Rightarrow$ đáp án **D** là chính xác

VD4-Trong các số phức z thỏa mãn $|z\quad 2|\quad |z+2|=2$, tìm số phức z có môđun nhỏ nhất.

A. $z=1-\sqrt{3}i$ **B.** $z=-1+\sqrt{3}i$ **C.** $z=1$ **D.** $=\sqrt{3}+$

GIẢI

❖ **Cách mẹo**

- Gọi số phức z có dạng $z=x+yi$. z thỏa mãn $|z\quad 2|\quad |z+2|=2$

$$\Leftrightarrow |x\quad 2+yi|\quad |x+2+yi|=2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x\quad 2)^2+y^2}\quad \sqrt{(x+2)^2+y^2}=2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x\quad 2)^2+y^2}=2+\sqrt{(x+2)^2+y^2}$$

$$\Leftrightarrow (x\quad 2)^2+y^2=4+4\sqrt{(x+2)^2+y^2}+(x+2)^2+y^2$$

$$\Leftrightarrow \quad 1\quad 2x=\sqrt{(x+2)^2+y^2}\left(\quad 1\quad 2x\geq 0\Leftrightarrow x\leq \quad\frac{1}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow 1+4x+4x^2=x^2+4x+4+y^2$$

$$\Leftrightarrow x^2\quad \frac{y^2}{3}=1$$

Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức z là Hypebol $(H):x^2\quad \frac{y^2}{3}=1$ có 2 đỉnh thuộc thực là $A'(\quad 1;0),B(1;0)$

- Số phức $z=x+yi$ có điểm biểu diễn $M(x;y)$ và có môđun là $OM=\sqrt{a^2+b^2}$. Để OM đạt giá trị nhỏ nhất thì M trùng với hai đỉnh của (H)

$M\equiv A\Rightarrow M(1;0)\Rightarrow z=1$

$\Rightarrow$ Đáp án chính xác là **C**

II) BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1-Cho các số phức z thỏa mãn $|2z \quad 2+2i|=1$. Môđun z nhỏ nhất có thể đạt được là bao nhiêu :

A. $\frac{1+2\sqrt{2}}{2}$ **B.** $\frac{1+2\sqrt{2}}{2}$ **C.** $\sqrt{2}+1$ **D.** $\sqrt{2} \quad 1$

Bài 2-Trong các số phức z thỏa mãn $|z \quad 3i|+|i\bar{z}+3|=10$. Hai số phức z_1 và z_2 có môđun nhỏ nhất. Hỏi tích z_1z_2 là bao nhiêu

A. 25 **B.** $\quad 25$ **C.** 16 **D.** $\quad 16$

Bài 3-Trong các số phức z thỏa mãn $|iz \quad 3|=|z \quad 2 \quad i|$. Tính giá trị nhỏ nhất của $|z|$.

A. $\frac{1}{2}$ **B.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$ **C.** $\frac{1}{5}$ **D.** $\frac{1}{\sqrt{5}}$

LỜI GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1-Cho các số phức z thỏa mãn $|2z \quad 2+2i|=1$. Môđun z nhỏ nhất có thể đạt được là bao nhiêu :

A. $\frac{1+2\sqrt{2}}{2}$ **B.** $\frac{1+2\sqrt{2}}{2}$ **C.** $\sqrt{2}+1$ **D.** $\sqrt{2} \quad 1$

GIẢI

❖ **Cách mẹo**

- Gọi số phức $z=x+yi$ thỏa mãn $|2z \quad 2+2i|=1 \Leftrightarrow |2x \quad 2+2yi+2i|=1$

  $\Leftrightarrow (2x \quad 2)^2+(2y+2)^2=1$

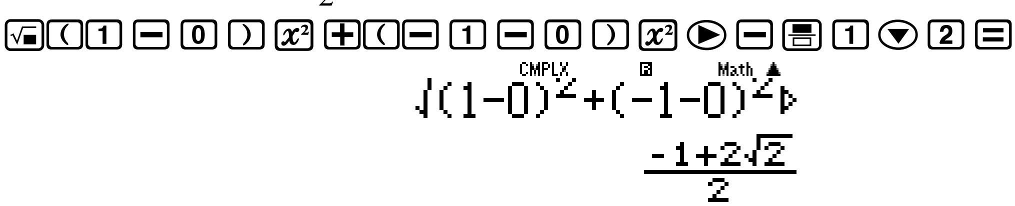
  $\Leftrightarrow (x \quad 1)^2+(y+1)^2=\frac{1}{4}$

  Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường tròn (C) có tâm $I(1; \quad 1)$ bán kính $R=\frac{1}{2}$

- Với mỗi điểm $M(x;y)$ biểu diễn số phức $z=x+yi$ sẽ thuộc đường tròn tâm O bán kính $R'=|z|=\sqrt{x^2+y^2}$. Vì vậy để $R=|z|$ nhỏ nhất thì đường tròn (C') phải tiếp xúc ngoài với đường (C')

  Khi đó điểm M sẽ là tiếp điểm của đường tròn (C) và (C') và

  $|z|=OM=OI \quad R=\frac{1+2\sqrt{2}}{2}$



$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **A**

Bài 2-Trong các số phức z thỏa mãn $\left|z\ \ 3i\right|+\left|i\overline{z}+3\right|=10$. Hai số phức z_1 và z_2 có môđun nhỏ nhất. Hỏi tích z_1z_2 là bao nhiêu

A. 25 **B.** 25 **C.** 16 **D.** 16

GIẢI

❖ **Cách mẹo**

- Gọi số phức $z=x+yi$ thỏa mãn $\left|z-3i\right|+\left|i\overline{z}+3\right|=10$

$\Leftrightarrow \left|x+\left(y\ \ 3\right)i\right|+\left|y+3+xi\right|=10$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+\left(y\ \ 3\right)^2}+\sqrt{\left(y+3\right)^2+x^2}=10$

$\Leftrightarrow \sqrt{\left(y+3\right)^2+x^2}=10\ \ \sqrt{x^2+\left(y\ \ 3\right)^2}$

$\Leftrightarrow \left(y+3\right)^2+x^2=100\ \ 20\sqrt{x^2+\left(y\ \ 3\right)^2}+x^2+\left(y\ \ 3\right)^2$

$\Leftrightarrow 20\sqrt{x^2+\left(y\ \ 3\right)^2}=100\ \ 12y$

$\Leftrightarrow 25x^2+16y^2=400$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{25}=1$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường Elip $\left(E\right):\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{25}=1$ có 2 đỉnh thuộc trục nhỏ là $A\left(\ \ 4;0\right),A'\left(4;0\right)$

- Với mỗi điểm $M\left(x;y\right)$ biểu diễn số phức $z=x+yi$ sẽ thuộc đường tròn tâm O bán kính $R'=\left|z\right|=\sqrt{x^2+y^2}$. Vì elip $\left(E\right)$ và đường tròn $\left(C\right)$ có cùng tâm O nên để OM nhỏ nhất thì M là đỉnh thuộc trục nhỏ

$\Rightarrow M\equiv A'\Rightarrow z_1=-4$, $M\equiv A\Rightarrow z_2=4$

Tổng hợp $z_1.z_2=\left(\ \ 4\right).4=\ \ 16$

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **D**

❖ **Mở rộng**

- Nếu đề bài hỏi tích z_1z_2 với $\left|z_1\right|,\left|z_2\right|$ có giá trị lớn nhất thì hai điểm M biểu diễn hai số phức trên là hai đỉnh thuộc trục lớn $B\left(0;\ \ 5\right),B'\left(0;5\right)$

$\Rightarrow M\equiv B'\Rightarrow z_1=\ \ 5i$, $M\equiv A\Rightarrow z_2=5i$

Tổng hợp $z_1z_2=5i.\left(\ \ 5i\right)=\ \ 25i^2=25$

Bài 3-Trong các số phức z thỏa mãn $\left|iz\ \ 3\right|=\left|z\ \ 2\ \ i\right|$. Tính giá trị nhỏ nhất của $\left|z\right|$.

A. $\dfrac{1}{2}$ **B.** $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ **C.** $\dfrac{1}{5}$ **D.** $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

GIẢI

❖ **Cách mẹo**

- Gọi số phức $z=x+yi$ thỏa mãn $\left|iz\ \ 3\right|=\left|z\ \ 2\ \ i\right|$

$\Leftrightarrow \left|\ \ y\ \ 3+xi\right|=\left|x\ \ 2+\left(y\ \ 1\right)i\right|$

$\Leftrightarrow \left(\ \ y\ \ 3\right)^2+x^2=\left(x\ \ 2\right)^2+\left(y\ \ 1\right)^2$

$\Leftrightarrow y^2+6y+9+x^2=x^2-4x+4+y^2-2y+1$

$\Leftrightarrow x+2y+1=0$

$\Leftrightarrow 20\sqrt{x^2+\left(y\quad 3\right)^2}=100\quad 12y$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường thẳng $(d): x+2y+1=0$

- Với mỗi điểm $M(x;y)$ biểu diễn số phức $z=x+yi$ thi $|z|=OM\geq OH$ với H là hình chiếu vuông góc của O lên đường thẳng (d) và OH là khoảng cách từ điểm O lên đường thẳng (d)

Tính $OH=d\left(O;(d)\right)=\dfrac{|1.0+2.0+1|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

Vậy $|z|\geq\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **D**

$$\left|x+yi+\frac{1}{x+yi}\right|=\left|\frac{x^2\quad y^2+1+2xyi}{x+yi}\right|=\left|\frac{x^3\quad xy^2+x+x^2yi+y^3i\quad yi+2xy^2}{x^2+y^2}\right|.$$