**Bài học 1:**

**BÀI TOÁN TÌM ĐIỀU KIỆN CỦA THAM SỐ ĐỂ PHƯƠNG TRÌNH CÓ NGHIỆM**

Chào mừng các bạn đến với blog **"bạn cũng làm được như tôi"**. Trong bài học đầu tiên mình xin trình bày một bài toán khá phổ biến nằm trong phần các bài toán về hàm số. Đó là dạng "bài toán tìm điều kiện của tham số để phương trình có nghiệm" và để giải quyết bài toán này tôi sẽ đưa ra hai mô hình để giải quyết như sau

*Cho hàm số* $f(x,m) = 0$ *(*) tìm điều kiện của* $m$ *để phương trình (*) có* $n$ *nghiệm (*$n \geq 1$*) thuộc khoảng* $[a,b]$ *nào đó*

- **Mô hình 1: Dùng phương pháp bảng biến thiên**

*Đưa (*) về dạng* $g(x) = h(m)$

*Đặt:* $y = g(x)$ $(C)$ *(đồ thị* $(C)$ *có thể là một đường thẳng hay đường cong)*

$y = h(m)$ $(\Delta)$ *(đồ thi* $(\Delta)$ *là một đường thẳng nằm ngang)*

*Như vậy ta đã đưa bài toán trên về bài toán " tìm m để* $(\Delta)$ *cắt (C) tại* $n$ *điểm phân biệt "*

*Lập bảng biến thiên của hàm* $y = g(x)$ *ta có kết quả sau khi biện luận*

*Sau đây là một vài ví dụ cho bạn :*

**Ví dụ 1:** Cho phương trình $t^2 - 4t + 3 + 4m = 0$ $\quad (1)$

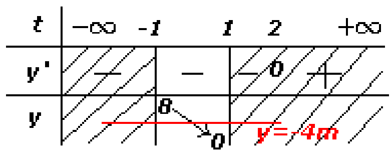
Tìm điều kiện $m$ để phương trình có nghiệm thuộc $[-1,1]$

*Giải:*

Biến đổi: $(1) \Leftrightarrow t^2 - 4t + 3 = -4m$

Đặt: $y = t^2 - 4t + 3$ $(C)$ và $y = -4m$ $(\Delta)$

Lập bảng biến thiên của hàm $y = t^2 - 4t + 3$




Để $(1)$ có nghiệm $t \in [-1,1]$ thì $(\Delta)$ cắt $(C)$ trong khoảng $[-1,1]$. Nhìn BBT suy ra $0 \leq -4m \leq 8 \Leftrightarrow -2 \leq m \leq 0$

Vậy với $\Leftrightarrow -2 \leq m \leq 0$ thì phương trình $(1)$ có nghiệm thuộc $[-1,1]$.

**Ví dụ 2:** Cho phương trình $3x^2 + 4mx - 4 = 0 \quad (2)$

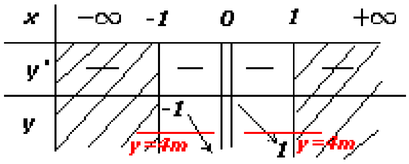
Tìm điều kiện $m$ để phương trình có nghiệm thuộc $[-1,1]$.

*Giải:*

Biến đổi $(2) \Leftrightarrow \frac{4-3x^2}{x} = 4m$

Đặt $y = \frac{4-3x^2}{x}$ $(C)$ và $y = 4m \quad (\Delta)$

Lập bảng biến thiên của hàm $y = \frac{4-3x^2}{x}$




Để $(2)$ có nghiệm trên $[-1,1]$ thì $(\Delta)$ cắt $(C)$trong khoảng $[-1,1]$

Nhìn BBT suy ra $\left[\begin{array}{l} 4m \leq -1 \\ 4m \geq 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \leq -\frac{1}{4} \\ m \geq \frac{1}{4} \end{array}\right.$

Nhược điểm của mô hình 1 đó chính là việc biến đổi về $g(x) = h(m)$ chỉ thực hiện được đối với phương trình mà trên đó mũ của tham số đồng bậc với nhau. Trường hợp ngược lại thì sao? Ta xét tiếp mô hình 2 như sau:

• **Mô hình 2: Dùng tam thức bậc 2**

*Xét phương trình $f(x,m)$ có 2 nghiệm: $x_1, x_2$ (trường hợp có một nghiệm tương tự). Kí hiệu $a_f$ là hệ số đi với mũ cao nhất của $f$. Khi đó để nghiệm của phương trình thuộc khảng $[a,b]$ khi và chỉ khi ta có các trường hợp sau:*

*1. Hai nghiệm đều thuộc $[a,b]$ tức là*

$$m \leq x_1 < x_2 \leq M \Leftrightarrow \begin{cases} a_f f(a) \geq 0 \\ a_f f(b) \geq 0 \\ a \leq \dfrac{S}{2} \leq b \end{cases}$$

*2. Một nghiệm thuộc $[a,b]$ tức là*

$$\left[\begin{array}{l} a \le x_1 \le b \le x_2 \\ x_1 \le a \le x_2 \le b \end{array}\right. \Leftrightarrow f(a)f(b) \le 0$$

*3. Cả hai nghiệm không thuộc* $[a,b]$

$$a < b \le x_1 < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a_f f(b) \ge 0 \\ b \le \dfrac{S}{2} \end{cases} \quad và \quad x_1 < x_2 \le a < b \Leftrightarrow \begin{cases} a_f f(a) \ge 0 \\ \dfrac{S}{2} \le a \end{cases}$$

**Ta xét lại ví dụ 1 :** Phương trình $t^2 - 4t + 3 + 4m = 0$ có $\Delta' = 1 - 4m$

+ Với $\Delta' = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{4}$ khi đó $(1)$ có một nghiệm $x = 2 \notin [-1,1]$

+ Với $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m < \frac{1}{4}$ khi đó $(1)$ có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2$

Để $(1)$ có nghiệm thuộc $[-1,1]$ khi một trong các trường hợp sau xảy ra:

- Trường hợp 2 nghiệm thuộc $[-1,1]$

$$-1 \le x_1 < x_2 \le 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 1.f(-1) \ge 0 \\ 1.f(1) \ge 0 \\ -1 \le \dfrac{S}{2} \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8 + 4m \ge 0 \\ 4m \ge 0 \\ -1 \le 2 \le 1 \end{cases} \quad (vô\ nghiệm)$$

- Trường hợp 1 nghiệm thuộc $[-1,1]$

$$\left[\begin{array}{l} -1 \le x_1 \le 1 \le x_2 \\ x_1 \le -1 \le x_2 \le 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow f(-1)f(1) \le 0 \Leftrightarrow (8 + 4m)4m \le 0 \Leftrightarrow -2 \le m \le 0$$

Vậy với $\Leftrightarrow -2 \le m \le 0$ thì phương trình $(1)$ có nghiệm thuộc $[-1,1]$.

**Xét lại ví dụ 2 :** Phương trình $3x^2 + 4mx - 4 = 0$ có $\Delta' = 4m^2 + 12 > 0$ nên $(2)$ luôn có 2 nghiệm phân biệt.

Để $(2)$ có nghiệm thuộc $[-1,1]$ khi một trong các trường hợp sau xảy ra:

- Trường hợp 2 nghiệm thuộc $[-1,1]$

$$-1 \le x_1 < x_2 \le 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 3.f(-1) \ge 0 \\ 3.f(1) \ge 0 \\ -1 \le \frac{S}{2} \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4m - 1 \ge 0 \\ 4m - 1 \ge 0 \\ -1 \le \frac{-4m}{6} \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \le -\frac{1}{4} \\ m \ge \frac{1}{4} \\ -\frac{3}{2} \le m \le \frac{3}{2} \end{cases} \quad (vô\ nghiệm)$$

- Trường hợp 1 nghiệm thuộc $[-1,1]$

$$\left[\begin{array}{l}-1 \leq x_1 \leq 1 \leq x_2 \\ x_1 \leq -1 \leq x_2 \leq 1\end{array}\right. \Leftrightarrow f(-1)f(1) \leq 0 \Leftrightarrow (-4m-1)(4m-1) \leq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m \leq -\dfrac{1}{4} \\ m \geq \dfrac{1}{4}\end{array}\right.$$

**Nhận xét:** Rõ ràng từ một bài toán nhưng vẫn có thể có nhiều cách làm…thật ra còn có cách làm nữa đó là viết ra nghiệm của phương trình sau đó tìm điều kiện để cho nghiệm đó thuộc hay không thuộc khoảng $[m, M]$. Tuy nhiên cách làm này hơi mất công mà lại không hay nếu nghiệm khi tính ra có dạng phức tạp, cồng kềnh. Hy vọng qua 2 mô hình bài toán trên các bạn đã có cho mình được một cách làm toán tốt nhất. Cuối cùng là một vài ví dụ cho bạn ôn tập

**Bài tập 1:** Tìm m để phương trình sau có nghiệm

$$\sin^2 2x + 2m.\sin 2x - 3 = 0.$$

**Bài tập 2:** Tìm m để phương trình sau có nghiệm trong khoảng $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$

$$3x^2 + mx - 4 = 0.$$

**Bài tập 3:** Tìm m để phương trình sau có nghiệm trong khoảng $[-1,1]$

$$3(m-1)^2x^2 + 2mx + 1 = 0$$

<u>Hướng dẫn</u>

Bài tập 1: Đặt $t = \sin x$ chuyển qua phương trình bậc 2 theo t…lưu ý với điều kiện của $t$.

Bài tập 2: Sử dụng mô hình 1 hoặc 2.

Bài tập 3: Sử dụng mô hình 2 (do $m$ không đồng bậc).

Chúc các bạn có được một kết quả tốt và nhớ là **"Bạn cũng làm được như tôi"**.