

PHƯƠNG PHÁP CASIO – VINACAL
BÀI 25. TÍNH NHANH KHOẢNG CÁCH TRONG KHÔNG GIAN

I) KIẾN THỨC NỀN TẢNG

1. Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng

- Cho điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ và mặt phẳng $(P): Ax + By + Cz + D = 0$ thì khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (P) được tính theo công thức

$$d(M; (P)) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

2. Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng

- Cho điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ và đường thẳng $d: \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$ thì khoảng cách

$$\text{từ điểm } M \text{ đến đường thẳng } d \text{ được tính theo công thức } d(M; d) = \frac{2 \left| [\vec{MN}; \vec{u}] \right|}{|\vec{u}|}$$

Trong đó $\vec{u}(a; b; c)$ là vectơ chỉ phương của d và $N(x_N; y_N; z_N)$ là một điểm thuộc d

3. Khoảng cách giữa 2 đường thẳng chéo nhau

- Cho hai đường thẳng chéo nhau $d: \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$ và

$$d': \frac{x}{a'} = \frac{y}{b'} = \frac{z}{c'}$$

thì khoảng cách giữa 2 đường chéo nhau này được tính

$$\text{theo công thức } d(d; d') = \frac{|\vec{MN} \cdot [\vec{u}_d; \vec{u}_{d'}]|}{|[\vec{u}_d; \vec{u}_{d'}]|}$$

Trong đó $\vec{u}(a; b; c)$ là vectơ chỉ phương của d và $M(x_M; y_M; z_M)$ là một điểm thuộc d

$\vec{u}(a'; b'; c')$ là vectơ chỉ phương của d' và $M'(x_{M'}; y_{M'}; z_{M'})$ là một điểm thuộc d'

4. Lệnh Caso

- Lệnh đăng nhập môi trường vecto MODE 8
- Nhập thông số vecto MODE 8 1 1
- Tính tích vô hướng của 2 vecto : vectoA SHIFT 5 7 vectoB
- Tính tích có hướng của hai vecto : vectoA x vectoB
- Lệnh giá trị tuyệt đối SHIFT HYP
- Lệnh tính độ lớn một vecto SHIFT HYP
- Lệnh dò nghiệm của bất phương trình MODE 7
- Lệnh dò nghiệm của phương trình SHIFT SOLVE

II) VÍ DỤ MINH HỌA

VD1-[Đề minh họa Bộ GD-ĐT lần 1 năm 2017]

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho mặt phẳng $(P): 3x + 4y + 2z + 4 = 0$ và điểm $A(1; 2; 3)$. Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (P)

A. $d = \frac{5}{9}$ B. $d = \frac{5}{29}$ C. $d = \frac{5}{\sqrt{29}}$ D. $d = \frac{\sqrt{5}}{3}$

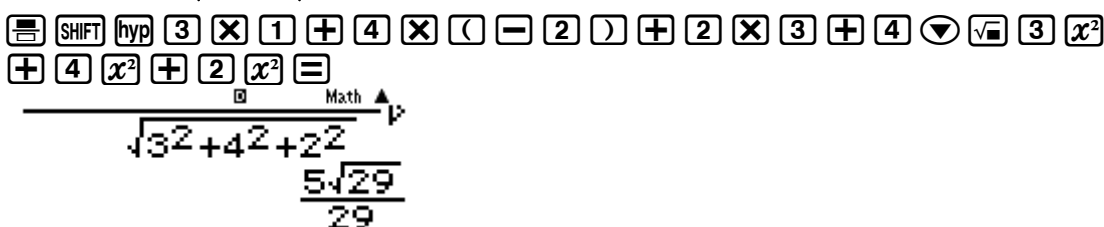
GIẢI

- Ta nhớ công thức tính khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (P) :

$$d(M; (P)) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

- Áp dụng cho điểm $A(1; 2; 3)$ và $(P): 3x + 4y + 2z + 4 = 0$ ta sử dụng máy tính để bấm luôn:

$$d(M; (P)) = \frac{5\sqrt{29}}{\sqrt{29}} = \frac{5}{\sqrt{29}}$$



⇒ Đáp số chính xác là C

VD2-[Thi Học sinh giỏi tỉnh Phú Thọ năm 2017]

Tìm m để khoảng cách từ $A(1; 2; 3)$ đến mặt phẳng $(P): x + 3y + 4z + m = 0$ bằng $\sqrt{26}$

A. $m = 7$ B. $m = 18$ C. $m = 20$ D. $m = 45$

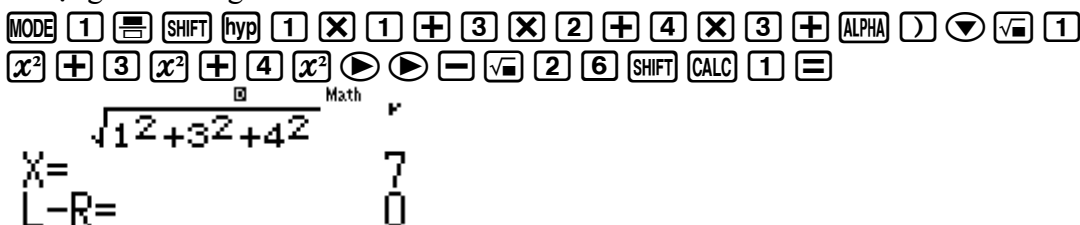
GIẢI

- Thiết lập phương trình khoảng cách: $d(A; (P)) = \frac{|1.1 + 3.2 + 4.4 + m|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2}} = \sqrt{26}$

$$\Leftrightarrow \frac{|1.1 + 3.2 + 4.4 + m|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2}} \cdot \sqrt{26} = 0$$

(việc này ta chỉ làm ở trong đầu)

- Để tính khoảng cách trên bằng Casio đầu tiên ta nhập vế trái của phương trình vào rồi sử dụng chức năng SHIFT SOLVE.



Ta thu được kết quả $m = 7$

⇒ Đáp số chính xác là A

VD3-[Thi thử Sở GD-ĐT tỉnh Hà Tĩnh năm 2017]

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+2}{3}$ và mặt phẳng

$(P): x + 2y - 2z + 3 = 0$. M là điểm có hoành độ âm thuộc d sao cho khoảng cách từ M đến (P) bằng 2. Tọa độ điểm M là:

A. $M(2; 3; 1)$ B. $M(-1; 5; 7)$ C. $M(2; 5; 8)$ D. $M(-1; 3; 5)$

GIẢI

- Ta biết điểm M thuộc (d) nên có tọa độ $M(1+t; 1+2t; 2+3t)$

$$\begin{cases} x = t \\ y = 1+2t \\ z = 2+3t \end{cases}$$

(biết được điều này sau khi chuyển d về dạng tham số $d: \begin{cases} y = 1+2t \\ z = 2+3t \end{cases}$)

- Thiết lập phương trình khoảng cách :

$$d(M; (P)) = 2 \Leftrightarrow \frac{|t+2(1+2t) - 2(2+3t)+3|}{\sqrt{1^2+2^2+(3)^2}} = 2$$

Nghĩ được tới đây thì ta có thể sử dụng Casio để tính rồi. Ta bấm ngắn gọn như sau

SHIFT **hyp** **ALPHA** **)** **+** **2** **(** **-** **1** **+** **2** **ALPHA** **)** **)** **-** **2** **(** **-** **2** **+** **3** **ALPHA** **)** **)** **+** **3** **▼** **3** **►** **-** **2** **SHIFT** **CALC** **-** **5** **=**

Math
3
X= -1
L-R= 0

Khi đó $t = -1 \Rightarrow x = -1; y = 3$

\Rightarrow Đáp số chính xác là **D**

VD4-[Đề minh họa Bộ GD-ĐT năm 2017]

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(2;1;1)$ và mặt phẳng $(P): 2x + y + 2z + 2 = 0$. Biết mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn bán kính bằng 1. Viết phương trình mặt cầu (S) .

A. $(x+2)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 8$

B. $(x+2)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 10$

C. $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 8$

D. $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 10$

GIẢI

- Mặt cầu $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$ sẽ có tâm $I(a;b;c)$. Vì mặt cầu (S) có tâm $I(2;1;1)$ nên nó chỉ có thể là đáp án **C** hoặc **D**
- Ta hiểu: Mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo một giao tuyến là đường tròn bán kính $r=1$ sẽ thỏa mãn tính chất $R^2 = h^2 + r^2$ với h là khoảng cách từ tâm I tới mặt phẳng.

Tính tâm R^2 bằng Casio.

(**=** **SHIFT** **hyp** **2** **×** **2** **+** **1** **×** **1** **+** **2** **×** **1** **+** **2** **▼** **√** **2** **x²** **+** **1** **x²** **+** **2** **x²** **►** **►** **)** **x²** **+** **1** **x²** **=**

Math
 $\left(\frac{12 \times 2 + 1 \times 1 + 2 \times 1 + 2}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} \right)^2$
10

$\Rightarrow R^2 = 10$

\Rightarrow Đáp số chính xác là **D**

VD5-[Thi thử chuyên Khoa học tự nhiên lần 3 năm 2017]

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+2}{2}$. Tính khoảng cách từ điểm $M(2; 1; 1)$ tới d

- A. $\frac{5}{3}$ B. $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{3}$ D. $\frac{5\sqrt{2}}{3}$

GIẢI

- Nhắc lại : Đường thẳng d có vectơ chỉ phương $\vec{u}_d(1; 2; 2)$ và đi qua điểm

$N(1; 2; 2)$ có khoảng cách từ M đến d tính theo công thức : $d(M; d) = \frac{|\overrightarrow{MN} \cdot \vec{u}|}{|\vec{u}|}$

- Để tính khoảng cách trên bằng Casio đầu tiên ta nhập hai vectơ $\overrightarrow{MN}, \vec{u}_d$ vào máy tính.

MODE **8** **1** **1** **1** **=** **(** **-** **2** **)** **=** **2** **-** **1** **=** **-** **2** **-** **-** **1** **=** **MODE** **8**
2 **1** **1** **=** **2** **=** **-** **2** **=**

VCT **A** **[** **3** **]** **VCT** **B** **[** **1** **2** **-** **2** **]**

- 1

- 2

- Tính $d(M; d) = 2.357022604 = \frac{5\sqrt{2}}{3}$

ON **SHIFT** **hyp** **SHIFT** **5** **3** **X** **SHIFT** **5** **4** **)** **÷** **SHIFT** **hyp** **SHIFT** **5** **4** **)** **=**

Abs(VctA×VctB)÷

2.357022604

⇒ Đáp số chính xác là **D**

VD6-[Thi thử báo Toán học tuổi trẻ lần 3 năm 2017]

Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + mt \\ z = 2t \end{cases}$ và mặt cầu

$(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y - 4z + 13 = 0$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để d cắt (S) tại hai điểm phân biệt?

- A. 5 B. 3 C. 2 D. 1

GIẢI

- Mặt cầu $(S): (x - 1)^2 + (y + 3)^2 + (z - 2)^2 = 1$ có tâm $I(1; -3; 2)$ bán kính $R = 1$

Đường thẳng d đi qua $M(2; 1; 0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}(1; m; 2)$

Ta hiểu : Đường thẳng d cắt mặt cầu (S) tại 2 điểm phân biệt nếu khoảng cách từ tâm I (của mặt cầu (S)) đến đường thẳng d nhỏ hơn bán kính R (của mặt cầu (S))

$$\Leftrightarrow \frac{|\overrightarrow{IM} \cdot \vec{u}|}{|\vec{u}|} < 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{(8-2m)^2 + 0^2 + (4-2m)^2}}{\sqrt{1^2 + m^2 + 2^2}} < 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{(8-2m)^2 + 0^2 + (4-2m)^2}}{\sqrt{1^2 + m^2 + (-2)^2}} - 1 < 0$$

- Để giải bài toán ta dùng máy tính Casio với tính năng MODE 7 dò nghiệm của bất phương trình :

MODE 7 $\frac{\square}{\square}$ $\sqrt{\square}$ (8 - 2 ALPHA)) x^2 + (4 - ALPHA)) x^2 ∇ $\sqrt{\square}$
 ALPHA) x^2 + 5 \rightarrow \rightarrow - 1 = = - 9 = 1 0 = 1 =
 Math Math
 12 13 4 16 17 18 F(X) 0.4907 -0.402 -1 0.301 -0.087 0.0767
 2 8

Ta dễ dàng tìm được tập nghiệm của m là $\{ 3; 4; 5; 6; 7 \}$

\Rightarrow Đáp án chính xác là A

VD7-[Thi thử báo Toán học tuổi trẻ lần 3 năm 2017]

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + mt \\ z = 2t \end{cases}$$

Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho đường thẳng $d : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + mt \\ z = 2t \end{cases}$ và mặt cầu

$$(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y - 4z + 13 = 0$$

Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để d cắt (S) tại hai điểm phân biệt?

A. 5 B. 3 C. 2 D. 1

GIẢI

- Mặt cầu $(S): (x - 1)^2 + (y + 3)^2 + (z - 2)^2 = 1$ có tâm $I(1; -3; 2)$ bán kính $R = 1$

Đường thẳng d đi qua $M(2; 1; 0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}(1; m; 2)$

Ta hiểu : Đường thẳng d cắt mặt cầu (S) tại 2 điểm phân biệt nếu khoảng cách từ tâm I (của mặt cầu (S)) đến đường thẳng d nhỏ hơn bán kính R (của mặt cầu (S))

$$\Leftrightarrow \frac{[IM; \vec{u}]}{|\vec{u}|} < 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{(8-2m)^2 + 0^2 + (4-2m)^2}}{\sqrt{1^2 + m^2 + (-2)^2}} < 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{(8-2m)^2 + 0^2 + (4-2m)^2}}{\sqrt{1^2 + m^2 + (-2)^2}} - 1 < 0$$

- Để giải bài toán ta dùng máy tính Casio với tính năng MODE 7 dò nghiệm của bất phương trình :

MODE 7 $\frac{\square}{\square}$ $\sqrt{\square}$ (8 - 2 ALPHA)) x^2 + (4 - ALPHA)) x^2 ∇ $\sqrt{\square}$
 ALPHA) x^2 + 5 \rightarrow \rightarrow - 1 = = - 9 = 1 0 = 1 =
 Math Math
 12 13 4 16 17 18 F(X) 0.4907 -0.402 -1 0.301 -0.087 0.0767
 2 8

Ta dễ dàng tìm được tập nghiệm của m là $\{ 3; 4; 5; 6; 7 \}$

\Rightarrow Đáp án chính xác là A

VD8-[Câu 68 Sách bài tập hình học nâng cao 12]

Cho đường thẳng d đi qua điểm $M(0;0;1)$, có vectơ chỉ phương $\vec{u}(1;1;3)$ và mặt phẳng (α) có phương trình $2x + y - z + 5 = 0$. Tính khoảng cách giữa d và (α)

- A. $\frac{2}{5}$ B. $\frac{4}{3}$ C. $\frac{3}{2}$ D. $\frac{6}{5}$

GIẢI

- Ta thấy: $\vec{u} \cdot \vec{n}_p = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) = 0 \Rightarrow d$ chỉ có thể song song hoặc trùng với (α)
- Khi đó khoảng cách giữa d và (α) là khoảng cách từ bất kì 1 điểm M thuộc d đến (α)

Ta bấm:

$$\frac{|2 \cdot 0 + 0 - 1 + 5|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{4}{3}$$

\Rightarrow Đáp án chính xác là B

VD9-[Câu 92 Sách bài tập hình học nâng cao 12]

$$\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = 4 \end{cases}$$

Trong không gian $Oxyz$ cho đường thẳng $\Delta: \begin{cases} y = 1 + 2t \\ z = 4 \end{cases}$. Gọi Δ' là giao tuyến của 2 mặt phẳng: $(P): x - 3y + z = 0$ và $(Q): x + y - z + 4 = 0$. Tính khoảng cách giữa Δ, Δ'

- A. $\frac{12}{\sqrt{15}}$ B. $\frac{25}{\sqrt{21}}$ C. $\frac{20}{\sqrt{21}}$ D. $\frac{16}{\sqrt{15}}$

GIẢI

- Đường thẳng Δ' có vectơ chỉ phương $\vec{u}' = [\vec{n}_P; \vec{n}_Q] = (2; 2; 4)$

$$|\vec{u}'| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 4^2} = 2\sqrt{6}$$

Và Δ' đi qua điểm $M'(0;2;6)$

Đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương $\vec{u}(1;2;0)$ và đi qua điểm $M(3; 1; 4)$

- Ta hiểu: khoảng cách giữa hai đường thẳng chỉ tồn tại khi chúng song song hoặc chéo nhau

Kiểm tra sự đồng phẳng của 2 đường thẳng trên bằng tích hỗn tạp $MM'[\vec{u}; \vec{u}']$

Nhập ba vectơ MM', \vec{u}, \vec{u}' vào máy tính Casio

$$MM'[\vec{u}; \vec{u}'] = 0$$

$$\vec{A} = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \vec{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{C} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Xét tích hỗn tạp $MM^T[\vec{u}; \vec{u}'] = -40 \neq 0 \Rightarrow \Delta, \Delta'$ chéo nhau

- Tính độ dài hai đường thẳng chéo nhau $\Rightarrow \Delta, \Delta'$ ta có công thức :

$$d = \frac{|MM^T[\vec{u}; \vec{u}']|}{|\vec{u}|} = 4.3640... = \frac{20}{\sqrt{21}}$$

ON SHIFT hyp $\frac{-40}{20} = -2$ $\frac{20}{\sqrt{21}} = 4.364357805$

\Rightarrow Đáp án chính xác là C

VD9-[Câu 25 Sách bài tập hình học nâng cao 12]

Cho hai đường thẳng $d: \frac{x}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+3}{2}$ và $d': \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{2}$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng d, d' là :

- A. $4\sqrt{2}$ B. $\frac{4\sqrt{2}}{3}$ C. $\frac{4}{3}$ D. $2\sqrt{3}$

GIẢI

- Đường thẳng d có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (1; 2; 2)$ và đi qua điểm $M(2; -1; -3)$

Đường thẳng d' đi qua điểm $M'(1; 1; -1)$

Dễ thấy hai đường thẳng d, d' song song với nhau nên khoảng cách từ d' đến d chính là khoảng cách từ điểm M' (thuộc d') đến d .

Gọi khoảng cách cần tìm là h ta có

$$h = \frac{|MM^T[\vec{u}; \vec{u}']|}{|\vec{u}|} = 1.8856... = \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

2 1 1 $\frac{2}{3} = 1.885618083$

\Rightarrow Đáp án chính xác là B

VD10-[Câu 26 Sách bài tập hình học nâng cao 12]

$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - t \\ z = 2t \end{cases}$ và $d': \begin{cases} x = 2 - 2t' \\ y = 3 \\ z = t' \end{cases}$. Mặt phẳng cách đều hai đường thẳng d và d' có phương trình :
A. $x + 5y + 2z + 12 = 0$ **B.** $x + 5y - 2z + 12 = 0$
C. $x - 5y + 2z - 12 = 0$ **D.** $x + 5y + 2z - 12 = 0$

GIẢI

- Đường thẳng d có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (1; -1; 2)$ và đi qua điểm $M(2; 1; 0)$
Đường thẳng d' có vectơ chỉ phương $\vec{u'} = (-2; 0; 1)$ và đi qua điểm $M'(2; 3; 0)$
Để thấy hai đường thẳng d, d' chéo nhau nên mặt phẳng (P) cách đều hai đường thẳng trên khi mặt phẳng đó đi qua trung điểm MM' và song song với cả 2 đường thẳng đó. .
- Mặt phẳng (P) song song với cả 2 đường thẳng nên nhận vectơ chỉ phương của 2 đường thẳng là cặp vectơ chỉ phương.

$$\Rightarrow \vec{n_p} = [\vec{u}; \vec{u'}] = (1; 5; 2)$$

MODE 8 1 1 1 = - 1 = 2 = MODE 8 2 1 - 2 = 0 = 1 = ON
 SHIFT 5 3 X SHIFT 5 4 =
 VCTD

Ans 1 -1 -5 -2]

- 1

(P) lại đi qua trung điểm $I(2; 2; 0)$ của MM' nên $(P): x + 5y + 2z - 12 = 0$

\Rightarrow Đáp án chính xác là **D**

Bài 1-[Đề minh họa Bộ GD-ĐT lần 1 năm 2017]

Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình của mặt cầu có tâm $I(1; 2; -1)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(P): x - 2y - 2z - 8 = 0$?

- A.** $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 3$ **B.** $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 3$
C. $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 9$ **D.** $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 9$

Bài 2-[Thi thử báo Toán học tuổi trẻ lần 5 năm 2017]

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \\ z = 2t \end{cases}$$

Tìm điểm M trên đường thẳng $d: \begin{cases} y = 1 - t \\ z = 2t \end{cases}$ sao cho $AM = \sqrt{6}$ với $A(0; 2; -2)$:

- A.** $\begin{cases} (1; 1; 0) \\ (2; 1; -1) \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} (1; 1; 0) \\ (1; 3; 4) \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} (1; 3; 4) \\ (2; 1; -1) \end{cases}$ **D.** Không có M thỏa

Bài 3-[Thi thử THPT Phan Chu Trinh – Phú Yên lần 1 năm 2017]

Cho $(P): 2x - y + z - m = 0$ và $A(1; 1; 3)$. Tìm m để $d(A; (P)) = \sqrt{6}$

- A.** $\begin{cases} m = 2 \\ m = 4 \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} m = 3 \\ m = 9 \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} m = 2 \\ m = 10 \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} m = 3 \\ m = 12 \end{cases}$

Bài 4-[Đề minh họa Bộ GD-ĐT lần 2 năm 2017]

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai điểm $A(2; 3; 1)$ và $B(5; 6; 2)$. Đường thẳng AB cắt mặt phẳng (Oxz) tại điểm M . Tính tỉ số $\frac{MA}{MB}$

- A. $\frac{MA}{MB} = \frac{1}{2}$ B. $\frac{MA}{MB} = 2$ C. $\frac{MA}{MB} = \frac{1}{3}$ D. $\frac{MA}{MB} = 3$

Bài 5-[Câu 67 Sách bài tập hình học nâng cao lớp 12]

Tính khoảng cách từ điểm $M(2; 3; 1)$ đến đường thẳng d là giao tuyến của hai mặt phẳng $(\alpha): x + y - 2z - 1 = 0$ và $(\alpha'): x + 3y + 2z + 2 = 0$.

- A. $\sqrt{\frac{215}{24}}$ B. $\sqrt{\frac{205}{15}}$ C. $\frac{205}{\sqrt{15}}$ D. $\frac{215}{\sqrt{24}}$

Bài 6-[Câu 9 Sách bài tập hình học nâng cao lớp 12]

Cho $A(1; 1; 3)$, $B(1; 3; 2)$, $C(1; 2; 3)$. Khoảng cách từ gốc tọa độ O đến mặt phẳng (ABC) là:

- A. $\sqrt{3}$ B. 3 C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{3}{2}$

Bài 7-[Câu 69b Sách bài tập hình học nâng cao lớp 12]

Tính khoảng cách giữa cặp đường thẳng $d: \frac{x}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-4}{2}$ và $d': \frac{x+2}{4} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{4}$

- A. $\sqrt{\frac{127}{4}}$ B. $\frac{\sqrt{127}}{4}$ C. $\sqrt{\frac{386}{3}}$ D. $\frac{\sqrt{386}}{3}$

Bài 8-[Câu 69c Sách bài tập hình học nâng cao lớp 12]

Tính khoảng cách giữa cặp đường thẳng $d: \frac{x}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{3}$ và $d': \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + t \\ z = t \end{cases}$

- A. $\frac{2\sqrt{7}}{7}$ B. $\frac{4\sqrt{2}}{3}$ C. $\frac{\sqrt{26}}{13}$ D. $\frac{\sqrt{24}}{11}$

LỜI GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1-[Đề minh họa Bộ GD-ĐT lần 1 năm 2017]

Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình của mặt cầu có tâm $I(1; 2; 1)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(P): x - 2y - 2z - 8 = 0$?

- A. $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 3$ B. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 3$
C. $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 9$ D. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 9$

GIẢI

- Mặt cầu tiếp xúc với mặt phẳng (P) khi $d(I; (P)) = R$



$$\frac{|1-4+2-8|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}$$

3

$d(I; (P)) = 3 \Rightarrow R^2 = 9 \Rightarrow$ Đáp số chỉ có thể là C hoặc D

- Mà ta lại có tâm mặt cầu là $I(1;2;1) \Rightarrow (S):(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 9$

Vậy đáp số chính xác là **D**

Bài 2-[Thi thử báo Toán học tuổi trẻ lần 5 năm 2017]

$$\begin{cases} x = 1+t \\ y = 1-t \\ z = 2t \end{cases}$$

Tìm điểm M trên đường thẳng $d: \begin{cases} y = 1-t \\ z = 2t \end{cases}$ sao cho $AM = \sqrt{6}$ với $A(0;2;-2)$:

$$z = 2t$$

- A. $\begin{cases} (1;1;0) \\ (2;1;-1) \end{cases}$ B. $\begin{cases} (1;1;0) \\ (-1;3;-4) \end{cases}$ C. $\begin{cases} (-1;3;-4) \\ (2;1;-1) \end{cases}$ D. Không có M thỏa

GIẢI

- Gọi điểm M thuộc d có tọa độ theo t là $M(1+t;1-t;2t)$

- Ta có $AM = \sqrt{6} \Leftrightarrow |AM| = \sqrt{6} \Leftrightarrow |AM|^2 - 6 = 0$

Sử dụng máy tính Casio tìm t

$$(1+t-0)^2 + (1-t-2)^2 + (2t-(-2))^2 - 6 = 0$$

$$\begin{aligned} (1+X-0)^2 + (1-X-2)^2 + (2X-(-2))^2 - 6 &= 0 \\ X = 0 & \quad X = -2 \\ L-R = 0 & \quad L-R = 0 \end{aligned}$$

- Ta tìm được hai giá trị của t

Với $t = 0 \Rightarrow M(1;1;0)$, với $t = -2 \Rightarrow M(-1;3;-4)$

\Rightarrow Đáp án chính xác là **B**

Bài 3-[Thi thử THPT Phan Chu Trinh – Phú Yên lần 1 năm 2017]

Cho $(P): 2x^2 + y + z - m = 0$ và $A(1;1;3)$. Tìm m để $d(A;(P)) = \sqrt{6}$

- A. $\begin{cases} m = 2 \\ m = 4 \end{cases}$ B. $\begin{cases} m = 3 \\ m = 9 \end{cases}$ C. $\begin{cases} m = 2 \\ m = 10 \end{cases}$ D. $\begin{cases} m = 3 \\ m = 12 \end{cases}$

GIẢI

- Thiết lập phương trình khoảng cách $d(A;(P)) = \sqrt{6} \Leftrightarrow \frac{|2 \cdot 1 - 1 + 3 - m|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2}} = \sqrt{6}$

- Đó là khi ta nhầm, nếu vừa nhầm vừa điền luôn vào máy tính thì làm như sau (để tiết kiệm thời gian)

$$\frac{|2-1+3-X|}{\sqrt{2^2+1^2+1^2}}$$

Tìm nghiệm ta sử dụng chức năng CALC xem giá trị nào của m làm về trái $= \sqrt{6}$ thì là đúng

$$\frac{|2-1+3-X|}{\sqrt{2^2+1^2+1^2}} = \sqrt{6}$$

\Rightarrow Chỉ có A hoặc C là đúng

$$\frac{|2-1+3-1|}{\sqrt{2^2+1^2+1^2}} = 0$$

Giá trị $m = 4$ không thỏa mãn vậy đáp án A sai \Rightarrow Đáp án chính xác là C

Bài 4-[Đề minh họa Bộ GD-ĐT lần 2 năm 2017]

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai điểm $A(2; 3; 1)$ và $B(5; 6; 2)$. Đường thẳng AB cắt mặt phẳng (Oxz) tại điểm M . Tính tỉ số $\frac{MA}{MB}$

- A. $\frac{MA}{MB} = \frac{1}{2}$ B. $\frac{MA}{MB} = 2$ C. $\frac{MA}{MB} = \frac{1}{3}$ D. $\frac{MA}{MB} = 3$

GIẢI

- Mặt phẳng (Oxz) có phương trình $y = 0$
- Để tính tỉ số $\frac{MA}{MB}$ ta sử dụng công thức tỉ số khoảng cách (đã gặp ở chuyên đề hình học không gian)

Ta có: $\frac{MA}{MB} = \frac{d(A; (Oxz))}{d(B; (Oxz))}$ bất kể hai điểm A, B cùng phía hay khác phía so với (Oxz)

Ta có thể dùng máy tính Casio tính ngay tỉ số này

$$\frac{|0+3+0|}{|0+-6+0|} = \frac{1}{2}$$

Ta hiểu cả hai mẫu số của hai phép tính khoảng cách đều như nhau nên ta triệt tiêu luôn mà không cần cho vào phép tính của Casio

\Rightarrow Đáp số chính xác là A

Bài 5-[Câu 67 Sách bài tập hình học nâng cao lớp 12]

Tính khoảng cách từ điểm $M(2; 3; 1)$ đến đường thẳng d là giao tuyến của hai mặt phẳng $(\alpha): x + y - 2z - 1 = 0$ và $(\alpha'): x + 3y + 2z + 2 = 0$.

- A. $\sqrt{\frac{215}{24}}$ B. $\sqrt{\frac{205}{15}}$ C. $\frac{205}{\sqrt{15}}$ D. $\frac{215}{\sqrt{24}}$

GIẢI

- d là giao tuyến của hai mặt phẳng (α) và (α') nên cùng thuộc 2 mặt phẳng này \Rightarrow vecto chỉ phương \vec{u} của đường thẳng d vuông góc với cả 2 vecto pháp tuyến của 2 mặt phẳng trên.

$$\Rightarrow \vec{u} = [\vec{n}_\alpha; \vec{n}_{\alpha'}] = (8; 4; 2)$$

$$\frac{|8 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 2 \cdot 1|}{\sqrt{8^2 + 4^2 + 2^2}} = 2$$

- Gọi điểm $N(x; y; 0)$ thuộc đường thẳng $d \Rightarrow N\left(\frac{5}{2}; \frac{3}{2}; 0\right)$
- Khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng d là: $h = \frac{[MN; \vec{u}]}{|\vec{u}|} = 3.8265... = \sqrt{\frac{205}{14}}$

MODE 8 1 1 5 ÷ 2 - 2 = - 3 ÷ 2 - 3 = 0 - - 1 = MODE 8 2
1 8 = - 4 = 2 = ON SHIFT hyp SHIFT 5 3 X SHIFT 5 4) ÷ SHIFT hyp SHIFT 5
4) =

$\text{Abs}(\text{VctA} \times \text{VctB}) \div$

3.826598639

\Rightarrow Đáp số chính xác là **B**

Bài 6-[Câu 9 Sách bài tập hình học nâng cao lớp 12]

Cho $A(1; 1; 3)$, $B(1; 3; 2)$, $C(1; 2; 3)$. Khoảng cách từ gốc tọa độ O đến mặt phẳng (ABC) là:

- A. $\sqrt{3}$ B. 3 C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{3}{2}$

GIẢI

- Vecto pháp tuyến của (ABC) là $\vec{n} = [\vec{AB}; \vec{AC}] = (1; 2; 2)$

MODE 8 1 1 - 2 = 2 = - 1 = MODE 8 2 1 - 2 = 1 = 0 = ON
SHIFT 5 3 X SHIFT 5 4 =

Ans 1 2 2

1

$$\Rightarrow (ABC): 1(x-1) + 2(y-1) + 2(z-3) = 0 \Leftrightarrow x + 2y + 3z - 9 = 0$$

- Khoảng cách từ O đến mặt phẳng (ABC) là $h = \frac{|0+0+0-9|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}} = 3$

\Rightarrow Đáp số chính xác là **B**

Bài 7-[Câu 69b Sách bài tập hình học nâng cao lớp 12]

Tính khoảng cách giữa cặp đường thẳng $d: \frac{x}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-4}{2}$ và $d': \frac{x+2}{4} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{4}$

- A. $\sqrt{\frac{127}{4}}$ B. $\frac{\sqrt{127}}{4}$ C. $\sqrt{\frac{386}{3}}$ D. $\frac{\sqrt{386}}{3}$

GIẢI

- Đường thẳng d đi qua điểm $M(1; -3; 4)$ và có vecto chỉ phương $(2; 1; 2)$

Đường thẳng d' đi qua điểm $M'(-2; 1; -1)$ và có vecto chỉ phương $(4; 2; 4)$

Dễ thấy 2 đường thẳng trên song song với nhau \Rightarrow Khoảng cách cần tìm là khoảng cách từ M' đến d

$$= \frac{[M'M; \vec{u}]}{|\vec{u}|} = 6.5489... = \frac{\sqrt{386}}{3}$$

MODE 8 1 1 = 3 = 4 = = 5 = MODE 8 2 1 2 = 1 = = 2 = ON
 SHIFT hyp SHIFT 5 3 X SHIFT 5 4) ÷ SHIFT hyp SHIFT 5 4) =

Abs(VctA×VctB)÷

6.548960901

⇒ Đáp số chính xác là **D**

Bài 7-[Câu 69b Sách bài tập hình học nâng cao lớp 12]

Tính khoảng cách giữa cặp đường thẳng $d: \frac{x}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z}{2}$ và $d': \frac{x+2}{4} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{4}$

A. $\sqrt{\frac{127}{4}}$ B. $\frac{\sqrt{127}}{4}$ C. $\sqrt{\frac{386}{3}}$ D. $\frac{\sqrt{386}}{3}$

GIẢI

- Đường thẳng d đi qua điểm $M(1; 3; 4)$ và có vecto chỉ phương $(2; 1; 2)$

Đường thẳng d' đi qua điểm $M'(2; 1; 1)$ và có vecto chỉ phương $(4; 2; 4)$

Dễ thấy 2 đường thẳng trên song song với nhau ⇒ Khoảng cách cần tìm là khoảng cách từ M' đến d

$$= \frac{\left| \overrightarrow{M'M} \cdot \vec{u} \right|}{\left| \vec{u} \right|} = 6.5489... = \frac{\sqrt{386}}{3}$$

MODE 8 1 1 = 3 = 4 = = 5 = MODE 8 2 1 2 = 1 = = 2 = ON
 SHIFT hyp SHIFT 5 3 X SHIFT 5 4) ÷ SHIFT hyp SHIFT 5 4) =

Abs(VctA×VctB)÷

6.548960901

⇒ Đáp số chính xác là **D**

Bài 8-[Câu 69c Sách bài tập hình học nâng cao lớp 12]

Tính khoảng cách giữa cặp đường thẳng $d: \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ và $d': \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + t \\ z = t \end{cases}$

A. $\frac{2\sqrt{7}}{7}$ B. $\frac{4\sqrt{2}}{3}$ C. $\frac{\sqrt{26}}{13}$ D. $\frac{\sqrt{24}}{11}$

GIẢI

- Đường thẳng d đi qua điểm $M(1; 2; 3)$ và có vecto chỉ phương $\vec{u}(1; 2; 3)$

Đường thẳng d' đi qua điểm $M'(2; 1; 0)$ và có vecto chỉ phương $\vec{u'}(1; 1; 1)$

Dễ thấy 2 đường thẳng trên chéo nhau ⇒ Khoảng cách cần tìm là

$$= \frac{\left| \overrightarrow{MM'} \cdot [\vec{u}; \vec{u'}] \right|}{\left| [\vec{u}; \vec{u'}] \right|} = 0.3922... = \frac{\sqrt{26}}{13}$$

MODE 8 1 1 1 = = 3 = = 3 = MODE 8 2 1 1 = 2 = 3 = MODE 8
 3 1 = 1 = 1 = 1 = ON SHIFT hyp SHIFT 5 3 SHIFT 5 7 (SHIFT 5 4 X SHIFT
 5 5)) ÷ SHIFT hyp SHIFT 5 4 X SHIFT 5 5) =

$\text{Abs}(\text{VctA} \cdot (\text{VctB} \times \text{VctC}))$

0.3922322703

⇒ Đáp số chính xác là C