CHUYÊN ĐỀ

CÁC DẠNG TOÁN VỀ HÀM ẨN LIÊN QUAN ĐẾN HÀM SỐ

ĐỀ MỤC

ÔN THI THPT QUỐC GIA

PHẦN A - CÁC DẠNG TOÁN VỀ HÀM ẨN LIÊN QUAN ĐẾN BÀI TOÁN XÉT TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ

PHẦN 1: Biết đặc điểm của hàm số $y=f(x)$

Dạng toán 1. Các bài toán về tính đơn điệu của hàm ẩn bậc 2 (dành cho khối 10)

Câu 1. Cho parabol (P): $y=f(x)=ax^2+bx+c$, $a\neq 0$ biết: (P) đi qua $M(4;3)$, (P) cắt Ox tại $N(3;0)$ và Q sao cho ΔINQ có diện tích bằng 1 đồng thời hoành độ điểm Q nhỏ hơn 3. Khi đó hàm số $f(2x-1)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây

A. $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$. **B.** $(0;2)$. **C.** $(5;7)$. **D.** $(-\infty;2)$.

Lời giải

Chọn C

Vì (P) đi qua $M(4;3)$ nên $3=16a+4b+c$ (1)

Mặt khác (P) cắt Ox tại $N(3;0)$ suy ra $0=9a+3b+c$ (2), (P) cắt Ox tại Q nên $Q(t;0)$, $t<3$

Theo định lý Viét ta có $\begin{cases} t+3=-\frac{b}{a} \\ 3t=\frac{c}{a} \end{cases}$

Ta có $S_{\Delta INQ}=\frac{1}{2}IH.NQ$ với H là hình chiếu của $I\left(-\frac{b}{2a};-\frac{\Delta}{4a}\right)$ lên trục hoành

Do $IH=\left|-\frac{\Delta}{4a}\right|$, $NQ=3-t$ nên $S_{\Delta INQ}=1\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left|-\frac{\Delta}{4a}\right|.(3-t)=1$

$\Leftrightarrow (3-t)\left|\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a}\right|=\left|\frac{2}{a}\right|\Leftrightarrow (3-t)\left|\frac{(t+3)^2}{4}-3t\right|=\left|\frac{2}{a}\right|\Leftrightarrow (3-t)^3=\frac{8}{|a|}$ (3)

Từ (1) và (2) ta có $7a+b=3\Leftrightarrow b=3-7a$ suy ra $t+3=-\frac{3-7a}{a}\Leftrightarrow \frac{1}{a}=\frac{4-t}{3}$

Thay vào (3) ta có $(3-t)^3=\frac{8(4-t)}{3}\Leftrightarrow 3t^3-27t^2+73t-49=0\Leftrightarrow t=1$

Suy ra $a=1\Rightarrow b=-4\Rightarrow c=3$.

Vậy (P) cần tìm là $y=f(x)=x^2-4x+3$.

Khi đó $f(2x-1)=(2x-1)^2-4(2x-1)+3=4x^2-12x+8$

Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(\frac{3}{2};+\infty\right)$.

Câu 2. Cho hai hàm số bậc hai $y=f(x), y=g(x)$ thỏa mãn $f(x)+3f(2-x)=4x^2-10x+10$; $g(0)=9; g(1)=10; g(-1)=4$. Biết rằng hai đồ thi hàm số $y=f(x), y=g(x)$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt là A,B. Đường thẳng d vuông góc với AB tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 36. Hỏi điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng d ?

A. $M(-2;1)$ **B.** $N(-1;9)$ **C.** $P(1;4)$ **D.** $Q(3;5)$

Lời giải

Chọn B

Gọi hàm số $f(x)=ax^2+bx+c$ ta có $f(x)+3f(2-x)=4x^2-10x+10$

$\Leftrightarrow ax^2+bx+c+3\left[a(2-x)^2+b(2-x)+c\right]=4x^2-10x+10$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\-2b-12a=-10\\12a+6b+4c=10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=-1\\c=1\end{cases}\Rightarrow f(x)=x^2-x+1.$$

Gọi hàm số $g(x)=mx^2+nx+p$ ta có $g(0)=9; g(1)=10; g(-1)=4$ ra hệ giải được $m=-2; n=3; p=9\Rightarrow g(x)=-2x^2+3x+9$.

Khi đó tọa độ hai điểm A, B thỏa mãn hệ phương trình

$$\begin{cases}y=x^2-x+1\\y=-2x^2+3x+9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2y=2x^2-2x+2\\y=-2x^2+3x+9\end{cases}\Rightarrow 3y=x+11$$

Do đó đường thẳng AB: $y=\frac{1}{3}x+\frac{11}{3}\Rightarrow d: y=-3x+k$. Đường thẳng d cắt hai trục tọa độ tại $E(0;k); F\left(\frac{k}{3};0\right)$. Diện tích tam giác OEF là $\frac{1}{2}|k|\left|\frac{k}{3}\right|=6\Leftrightarrow k=\pm 6$

Vậy phương trình đường thẳng d là: $d: y=-3x+6,\ y=-3x-6$. Chọn đáp án B

Câu 3. Biết đồ thị hàm số bậc hai $y=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$ có điểm chung duy nhất với $y=-2,5$ và cắt đường thẳng $y=2$ tại hai điểm có hoành độ lần lượt là -1 và 5. Tính $P=a+b+c$.

A. 1. **B.** 0. **C.** -1. **D.** -2.

Lời giải

Chọn D

Gọi (P): $y=ax^2+bx+c,(a\neq 0)$.

Ta có:

+) (P) đi qua hai điểm $(-1;2);(5;2)$ nên ta có $\begin{cases}a-b+c=2\\25a+5b+c=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=-4a\\c=2-5a\end{cases}$

+) (P) có một điểm chung với đường thẳng $y=-2,5$ nên

$$\frac{-\Delta}{4a}=-2,5\Leftrightarrow\frac{b^2-4ac}{4a}=2,5\Leftrightarrow 16a^2-4a(2-5a)=10a\Leftrightarrow 36a^2-18a=0\Leftrightarrow a=\frac{1}{2}.$$

Do đó: $b=-2; c=-\frac{1}{2}$.

Dạng toán 2. Dạng toán có thể tìm được biểu thức cụ thể của hàm số $y=f(x)$ **trong bài toán không chứa tham số.**

Câu 4. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(1)<0$ và $[f(x)-x]f(x)=x^6+3x^4+2x^2$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Hàm số $g(x)=f(x)+2x^2$ đồng biến trên khoảng

A. $(1;3)$. **B.** $\left(0;\frac{1}{3}\right)$. **C.** $\left(\frac{1}{3};1\right)$. **D.** $(1;+\infty)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $[f(x)-x]f(x)=x^6+3x^4+2x^2\Leftrightarrow (f(x))^2-x.f(x)-x^6-3x^4-2x^2=0$

Đặt $t=f(x)$ ta được phương trình $t^2-x.t-x^6-3x^4-2x^2=0$

Ta có $\Delta=x^2-4(-x^6-3x^4-2x^2)=4x^6+12x^4+9x^2=(2x^3+3x)^2$

Vậy $\left[\begin{array}{l}t=\frac{x+2x^3+3x}{2}=x^3+2x\\t=\frac{x-2x^3-3x}{2}=-x^3-x\end{array}\right.$. Suy ra $\left[\begin{array}{l}f(x)=x^3+2x\\f(x)=-x^3-x\end{array}\right.$

Do $f(1)<0$ nên $f(x)=-x^3-x$.

Ta có

$g(x)=-x^3+2x^2-x \Rightarrow g'(x)=-3x^2+4x-1>0 \Leftrightarrow \frac{1}{3}<x<1.$

Câu 5. Cho đa thức $f(x)$ hệ số thực và thỏa điều kiện $2f(x)+f(1-x)=x^2, \forall x\in R.$ Hàm số $y=3x.f(x)+x^2+4x+1$ đồng biến trên

A. $R\backslash\{-1\}$. **B.** $(0;+\infty)$. **C.** R. **D.** $(-\infty;0)$.

Lời giải

Chọn C

Từ giả thiết, thay x bởi $x-1$ ta được $2f(1-x)+f(x)=(x-1)^2$.

Khi đó ta có $\begin{cases}2f(x)+f(1-x)=x^2\\ 2f(1-x)+f(x)=x^2-2x+1\end{cases} \longrightarrow 3f(x)=x^2+2x-1.$

Suy ra $y=x^3+3x^2+3x+1 \Rightarrow y'=3x^2+6x+3\geq 0, \forall x\in R$. Nên hàm số đồng biến trên R.

Câu 6. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[-1;1]$ và thỏa $f(1)=0$, $(f'(x))^2+4f(x)=8x^2+16x-8$. Hàm số $g(x)=f(x)-\frac{1}{3}x^3-2x+3$ đồng biến trên khoảng nào?

A. $(-1;2)$. **B.** $(0;3)$. **C.** $(0;2)$. **D.** $(-2;2)$.

Lời giải

Chọn C

Chọn $f(x)=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$ (lý do: vế phải là hàm đa thức bậc hai).

$\Rightarrow f'(x)=2ax+b$.

Ta có:

$(f'(x))^2+4f(x)=8x^2+16x-8 \Leftrightarrow (2ax+b)^2+4(ax^2+bx+c)=8x^2+16x-8$

$\Leftrightarrow (4a^2+4a)x^2+(4ab+4b)x+b^2+4c=8x^2+16x-8$

Đồng nhất 2 vế ta được:

$$\begin{cases}4a^2+4a=8\\ 4ab+4b=16\\ b^2+4c=-8\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=1\\ b=2\\ c=-3\end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases}a=-2\\ b=-4\\ c=-6\end{cases}.$$

Do $f(1)=0 \Rightarrow a+b+c=0 \Rightarrow a=1,\ b=2$ và $c=-3$.

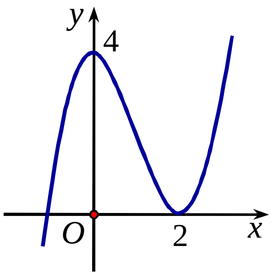
Vậy $f(x)=x^2+2x-3 \Rightarrow g(x)=-\frac{1}{3}x^3+x^2 \Rightarrow g'(x)=-x^2+2x \Rightarrow g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\ x=2\end{array}\right.$.

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(0;2)$.

Câu 7. Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình bên. Đặt $g(x)=f\left(\sqrt{x^2+x+2}\right)$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau



A. $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0;2)$. **B.** $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1;0)$.

C. $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{-1}{2};0\right)$. **D.** $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1)$.

Lời giải

Chọn C

Hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$; $f'(x)=3ax^2+2bx+c$, có đồ thị như hình vẽ.

Do đó $x=0\Rightarrow d=4$; $x=2\Rightarrow 8a+4b+2c+d=0$; $f'(2)=0\Rightarrow 12a+4b+c=0$; $f'(0)=0\Rightarrow c=0$.

Tìm được $a=1;b=-3;c=0;d=4$ và hàm số $y=x^3-3x^2+4$.

Ta có $g(x)=f\left(\sqrt{x^2+x+2}\right)=\left(\sqrt{x^2+x+2}\right)^3-3\left(x^2+x+2\right)+4$

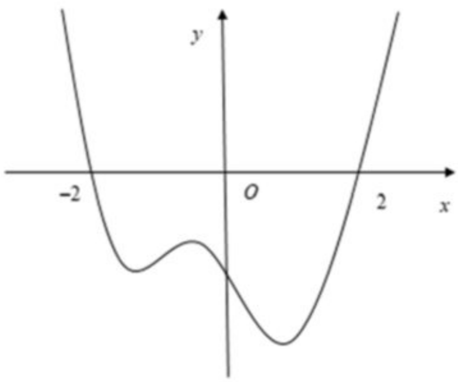
$$\Rightarrow g'(x)=\frac{3}{2}(2x+1)\sqrt{x^2+x+2}-3(2x+1)=3(2x+1)\left(\frac{1}{2}\sqrt{x^2+x+2}-1\right);\ g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\frac{1}{2}\\x=1\\x=-2\end{array}\right..$$

Bảng xét dấu của hàm $y=g(x)$:

x	$-\infty$		-2		$-1/2$		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$\frac{7\sqrt{7}-10}{8}$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy $y=g(x)$ nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{-1}{2};0\right)$.

Câu 8. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có $f(-2)<0$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ



Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Hàm số $y=\left|f\left(1-x^2\right)\right|$ nghịch biến trên $(-\infty;-2)$.

B. Hàm số $y=\left|f\left(1-x^2\right)\right|$ đồng biến trên $(-\infty;-2)$.

C. Hàm số $y=\left|f\left(1-x^2\right)\right|$ nghịch biến trên $\left(-1;0\right)$.

D. Giá trị nhỏ nhất của hàm số là $\left|f\left(-2\right)\right|$.

Lời giải

Chọn A

Ta có bảng biến thiên của hàm số $y=f\left(x\right)$

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$			$f\left(-2\right)$				$+\infty$
	$-\infty$				$f\left(2\right)$		

Ta có $f\left(-2\right)<0;1-x^2\le 1\Rightarrow f\left(1-x^2\right)<0.\forall x\in\mathbb{R}$

$t=1-x^2\Rightarrow f'\left(t\right)<0\Rightarrow t\in\left(-2;1\right)\Leftrightarrow x\in\left(-\sqrt{3};\sqrt{3}\right)$

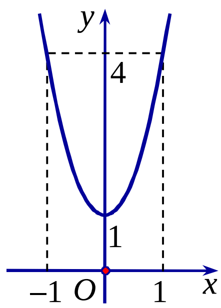
$0<f'\left(t\right)\Rightarrow t\in\left(-\infty;-2\right)\Leftrightarrow x\in\left(-\infty;-\sqrt{3}\right)\cup\left(\sqrt{3};+\infty\right)$

$g\left(x\right)=\left|f\left(1-x^2\right)\right|\Rightarrow g'\left(x\right)=\sqrt{f^2\left(1-x^2\right)}=\dfrac{-4xf\left(t\right)f'\left(t\right)}{\sqrt{f^2\left(t\right)}}$

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$			$g\left(-\sqrt{3}\right)$		$g\left(0\right)$		$g\left(\sqrt{3}\right)$		

Dạng toán 3. Dạng toán có thể tìm được biểu thức cụ thể của hàm số $y=f\left(x\right)$ **trong bài toán chứa tham số.**

Câu 9. Cho hàm số $y=f\left(x\right)=ax^3+bx^2+cx+d$, $\left(a,b,c,d\in\mathbb{R},a\ne 0\right)$ có đồ thị là $\left(C\right)$. Biết rằng đồ thị $\left(C\right)$ đi qua gốc tọa độ và có đồ thị hàm số $y=f'\left(x\right)$ cho bởi hình vẽ



Tính giá trị $H=f\left(4\right)-f\left(2\right)$.

A. $H=58$. **B.** $H=51$. **C.** $H=45$. **D.** $H=64$.

Lời giải

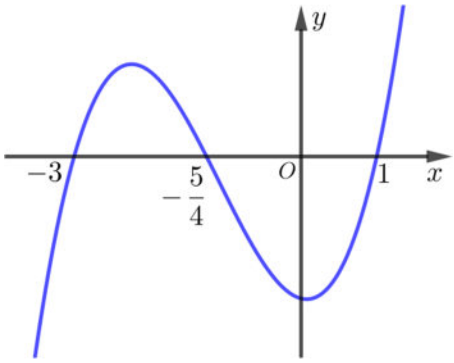
Chọn A

Do $f\left(x\right)$ là hàm số bậc ba nên $f'\left(x\right)$ là hàm số bậc hai.

Dựa vào đồ thị hàm số $f'\left(x\right)$ thì $f'\left(x\right)$ có dạng $f'\left(x\right)=ax^2+1$ với $a>0$. Đồ thị đi qua điểm $A\left(1;4\right)$ nên $a=3$ vậy $f'\left(x\right)=3x^2+1$.

Vậy $H=f\left(4\right)-f\left(2\right)=\int\limits_2^4 f'\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_2^4\left(3x^2+1\right)\mathrm{d}x=58$.

Câu 10. Cho hàm số $f\left(x\right)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+m$, (với $a,b,c,d,m\in\mathbb{R}$). Hàm số $y=f'\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Tập nghiệm của phương trình $f\left(x\right)=48ax+m$ có số phần tử là:

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f'\left(x\right)=4ax^3+3bx^2+2cx+d\ \left(1\right)$.

Dựa vào đồ thị ta có $f'\left(x\right)=a\left(x-1\right)\left(4x+5\right)\left(x+3\right)=4ax^3+13ax^2-2ax-15a\ \left(2\right)$ và $a\neq 0$.

Từ $\left(1\right)$ và $\left(2\right)$ suy ra $b=\frac{13}{3}a$, $c=-a$ và $d=-15a$.

Khi đó:

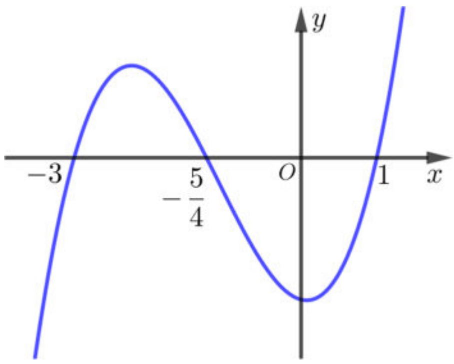
$f\left(x\right)=48ax+m\Leftrightarrow ax^4+bx^3+cx^2+dx=48ax$

$\Leftrightarrow a\left(x^4+\frac{13}{3}x^3-x^2-63x\right)=0$

$\Leftrightarrow 3x^4+13x^3-3x^2-189x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=3\end{array}\right.$.

Vậy tập nghiệm của phương trình $f\left(x\right)=48ax+m$ là $S=\left\{0;3\right\}$.

Câu 11. Cho hàm số $f\left(x\right)=x^4+bx^3+cx^2+dx+m$, (với $a,b,c,d,m\in\mathbb{R}$). Hàm số $y=f'\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Biết rằng phương trình $f\left(x\right)=nx+m$ có 4 nghiệm phân biệt. Tìm số các giá trị nguyên của n.

A. 15. **B.** 14. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f'\left(x\right)=4x^3+3bx^2+2cx+d\ \left(1\right)$.

Dựa vào đồ thị ta có $f'\left(x\right)=\left(x-1\right)\left(4x+5\right)\left(x+3\right)=4x^3+13x^2-2x-15$

Từ $\left(1\right)$ và $\left(2\right)$ suy ra $b=\frac{13}{3}$, $c=-1$ và $d=-15$.

Khi đó:

$f(x)=nx+m \Leftrightarrow x^4+bx^3+cx^2+dx=nx$

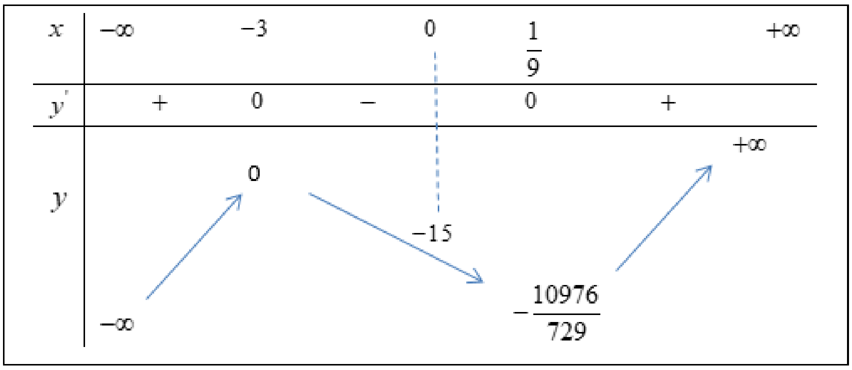
$$\Leftrightarrow x^4+\frac{13}{3}x^3-x^2-15x=nx \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^3+\dfrac{13}{3}x^2-x-15=n \qquad (*) \end{array}\right.$$

Phương trình $f(x)=nx+m$ có 4 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình $(*)$ có 3 nghiệm phân biệt khác 0

Xét hàm số $g(x)=x^3+\dfrac{13}{3}x^2-x-15$

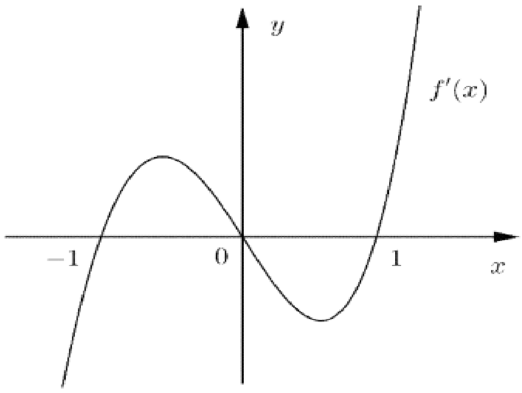
$$g'(x)=3x^2+\frac{26}{3}x-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=\dfrac{1}{9} \end{array}\right.$$

Ta có bảng biến thiên:



Từ bảng biến thiên ta có phương trình $(*)$ có 3 nghiệm phân biệt khác 0 biệt khi và chỉ khi $n\in\{-1;-2;...;-14\}$

Câu 12. Cho hàm số $y=f(x)$, hàm số $f'(x)=x^3+ax^2+bx+c\,(a,b,c\in\mathbb{R})$ có đồ thị như hình vẽ



Hàm số $g(x)=f(f'(x))$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(1;+\infty)$. **B.** $(-\infty;-2)$. **C.** $(-1;0)$. **D.** $\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3};\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

Lời giải

Chọn B

Vì các điểm $(-1;0),(0;0),(1;0)$ thuộc đồ thị hàm số $y=f'(x)$ nên ta có hệ:

$$\begin{cases} -1+a-b+c=0 \\ c=0 \\ 1+a+b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=-1 \Rightarrow f'(x)=x^3-x \Rightarrow f''(x)=3x^2-1 \\ c=0 \end{cases}$$

Ta có: $g(x)=f(f'(x)) \Rightarrow g'(x)=f'(f'(x)).f''(x)$

Xét $g'(x)=0 \Leftrightarrow g'(x)=f'(f'(x)).f''(x)=0 \Leftrightarrow f'(x^3-x)(3x^2-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^3-x=0 \\ x^3-x=1 \\ x^3-x=-1 \\ 3x^2-1=0 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm 1 \\ x=0 \\ x=1,325 \\ x=-1,325 \\ x=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3} \end{array}\right.$

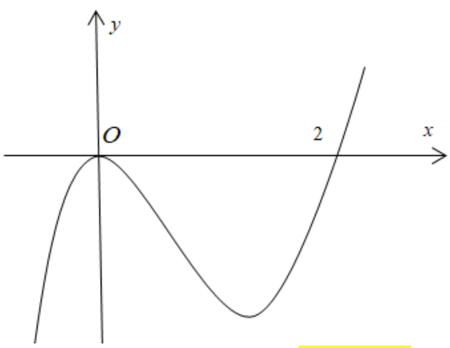
Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-1,325$		-1		$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		0		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		1		$1,325$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng biến thiên $\Rightarrow g(x)$ nghịch biến trên $(-\infty;-2)$

Dạng toán 4. Biết đặc điểm của hàm số hoặc đồ thị, hoặc BBT hoặc đạo hàm của hàm $f(x)$, xét sự biến thiên của hàm $y=f(\varphi(x));\ y=f(f(x)),...y=f(f(f...(x)))$ **trong bài toán không chứa tham số**

Câu 13. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm $f'(x)$ như hình vẽ dưới đây. Hàm số $g(x)=f(x^2-x)$ đồng biến trên khoảng nào?



A. $\left(\dfrac{1}{2};1\right)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $\left(-1;\dfrac{1}{2}\right)$. **D.** $(-\infty;-1)$.

Lời giải

Chọn C

$g(x)=f(x^2-x) \Rightarrow g'(x)=(2x-1)f'(x^2-x)$.

$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-1=0 \\ f'(x^2-x)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{2} \\ x^2-x=0 \\ x^2-x=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{2} \\ x=0 \\ x=1 \\ x=-1 \\ x=2 \end{array}\right.$.

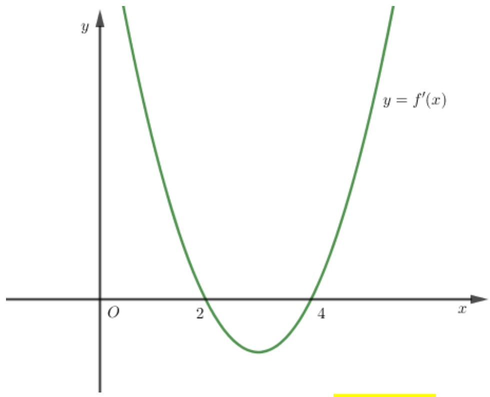
Từ đồ thị $f'(x)$ ta có $f'\left(x^2-x\right)>0 \Leftrightarrow x^2-x>2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>2 \\ x<-1 \end{array}\right.$,

Xét dấu $g'(x)$:

x	$-\infty$		-1		0		$\frac{1}{2}$		1		2		$+\infty$
$2x-1$		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$f'\left(x^2-x\right)$		$+$	0	$-$	0	$-$	|	$-$	0	$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

Từ bảng xét dấu ta có hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $\left(-1;\frac{1}{2}\right)$.

Câu 14. Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số $y=f\left(1+x^2\right)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?



A. $\left(\sqrt{3};+\infty\right)$. **B.** $\left(-\sqrt{3};-1\right)$. **C.** $\left(1;\sqrt{3}\right)$. **D.** $(0;1)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y'=\left[f\left(1+x^2\right)\right]'=2x.f'\left(1+x^2\right) \Rightarrow y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ 1+x^2=2 \\ 1+x^2=4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm 1 \\ x=\pm\sqrt{3} \end{array}\right.$.

Mặt khác ta có

$f'\left(1+x^2\right)<0 \Leftrightarrow 2<1+x^2<4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\sqrt{3}<x<-1 \\ 1<x<\sqrt{3} \end{array}\right.$.

Ta có bảng xét dấu:

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$2x$		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$f'(1+x^2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	|	$+$	0	$-$	0	$+$	
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Vậy hàm số $y=f\left(1+x^2\right)$ nghịch biến trên khoảng $\left(1;\sqrt{3}\right)$.

Câu 15. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm $f'\left(x\right)=x^2\left(x-2028\right)\left(x-2023\right)^2$. Khi đó hàm số $y=g(x)=f\left(x^2+2019\right)$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

A. $\left(-2;2\right)$. **B.** $\left(0;3\right)$. **C.** $\left(-3;0\right)$. **D.** $\left(2;+\infty\right)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y=g(x)=f\left(x^2+2019\right)\Rightarrow y'=g'(x)=\left(x^2+2019\right)'f'\left(x^2+2019\right)=2x.f'\left(x^2+2019\right)$.

Mặt khác $f'\left(x\right)=x^2\left(x-2028\right)\left(x-2023\right)^2$. Nên suy ra:

$$y'=g'(x)=2x.f'\left(x^2+2019\right)=2x.\left(x^2+2019\right)^2\left(x^2+2019-2038\right)\left(x^2+2019-2023\right)^2$$
$$=2x.\left(x^2+2019\right)^2\left(x^2-9\right)\left(x^2-4\right)^2=2x.\left(x^2+2019\right)^2\left(x-3\right)\left(x+3\right)\left(x-2\right)^2\left(x+2\right)^2.$$

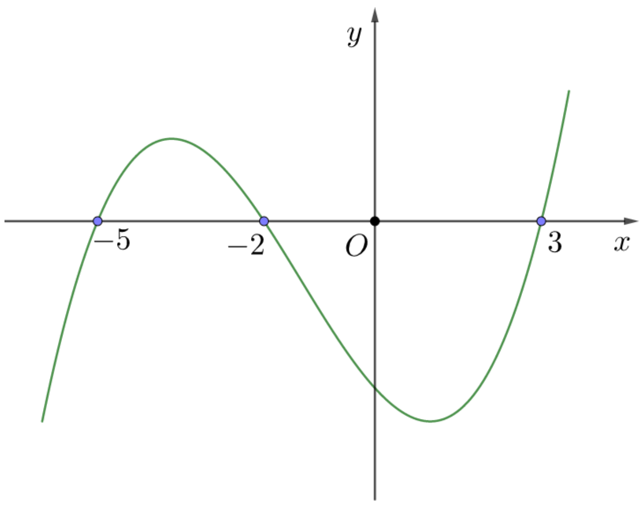
$$y'=2x.\left(x^2+2019\right)^2\left(x-3\right)\left(x+3\right)\left(x-2\right)^2\left(x+2\right)^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\ (nghiem\ don)\\x=3\ (nghiem\ don)\\x=-3\ (nghiem\ don)\\x=2\ (nghiem\ boi\ 2)\\x=-2\ (nghiem\ boi\ 2)\end{array}\right.$$

Ta có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$		-3		-2		0		2		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
y		$\searrow$			$\nearrow$				$\searrow$			$\nearrow$	

Từ bảng biến thiên suy ra hàm số $y=g(x)=f\left(x^2+2019\right)$ đồng biến trên khoảng $\left(-3;0\right)$ và $\left(3;+\infty\right)$.

Câu 16. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết rằng hàm số $y=f'\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Hàm số $y=f\left(x^2-5\right)$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau đây?

A. $\left(-\infty;-3\right)$. **B.** $\left(-5;-2\right)$. **C.** $\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$. **D.** $\left(2;+\infty\right)$.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $y=f\left(x^2-5\right)$

Ta có $y'=2x.f'\left(x^2-5\right)$

$$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2-5=-5\\x^2-5=-2\\x^2-5=3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2=0\\x^2=3\\x^2=8\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\quad (nghiem\ boi\ 3)\\x=\pm\sqrt{3}\\x=\pm 2\sqrt{2}\end{array}\right..$$

Ta lại có: khi $x>3\Rightarrow f'(x)>0$ suy ra: $x^2-5>3\Rightarrow x>2\sqrt{2}\Rightarrow f'(x^2-5)>0\Rightarrow 2x.f'(x^2-5)>0$

Từ đó ta có bảng biến thiên:

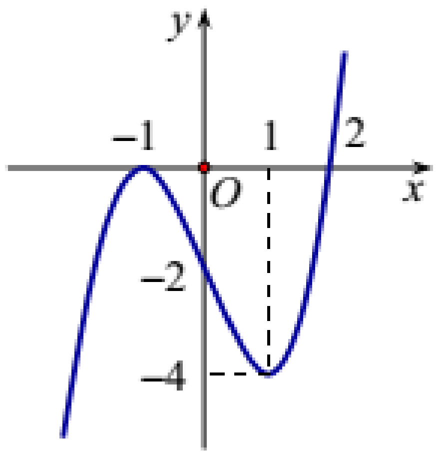
x	$-\infty$		$-2\sqrt{2}$		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		$2\sqrt{2}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y		↘		↗		↘		↗		↘		↗	

Từ bảng xét dấu ta có hàm số đồng biến trên các khoảng $\left(-2\sqrt{2};-\sqrt{3}\right);\left(0;\sqrt{3}\right);\left(2\sqrt{2};+\infty\right)$.

Mà $\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)\subset\left(0;\sqrt{3}\right)$.

Dạng toán 5. Biết đặc điểm của hàm số hoặc BBT, hoặc BBT hoặc đạo hàm của hàm $f(x)$, xét sự biến thiên của hàm $y=f(f(x)),...y=f(f(f...(x)))$ **trong bài toán chứa tham số.**

Câu 17. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Biết đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ.



Biết S là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số m thoả mãn $m\in(-2019;2019)$ sao cho hàm số $g(x)=f(x-m)$ đồng biến trên khoảng $(-2;0)$. Số phần tử của tập S là

A. 2017. **B.** 2019. **C.** 2015. **D.** 2021.

Lời giải

Chọn C

Ta có $g'(x)=f'(x-m)$.

Suy ra $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-m=-1\\x-m=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=m-1\\x=m+2\end{array}\right..$

Do đó từ đồ thị hàm số $y=f'(x)$ suy ra $g'(x)>0\Leftrightarrow f'(x-m)>0\Leftrightarrow x-m>2\Leftrightarrow x>m+2$.

Hàm số $g(x)=f(x-m)$ đồng biến trên khoảng $(-2;0)$ khi và chỉ khi $g'(x)\ge 0,\forall x\in(-2;0)$

$\Leftrightarrow m+2\le -2\Leftrightarrow m\le -4$.

Mà tham số $m\in(-2019;2019)$ và là gía trị nguyên thoả mãn $m\le -4$ nên $m\in\{-2018;-2017;...;-5;-4\}$.

Vậy tập S có 2015 phần tử.

Câu 18. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2(x+2)(x^2+mx+5)$ với $\forall x\in\mathbb{R}$. Số giá trị nguyên âm của m để hàm số $g(x)=f(x^2+x-2)$ đồng biến trên $(1;+\infty)$ là

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 7.

Lời giải

Chọn B

Ta có $g'(x)=(2x+1)f'(x^2+x-2)$.

Hàm số đồng biến trên $(1;+\infty)$ khi $(2x+1)f'(x^2+x-2)\ge 0$, $\forall x\in(1;+\infty)$

$\Leftrightarrow f'(x^2+x-2)\ge 0$, $\forall x\in(1;+\infty)\Leftrightarrow (x^2+x-2)^2(x^2+x)\left[(x^2+x-2)^2+m(x^2+x-2)+5\right]\ge 0$, $\forall x\in(1;+\infty)$ (1).

Đặt $t=x^2+x-2$ với $t>0$, do $x\in(1;+\infty)$.

$(1)\Rightarrow t^2(t+2)(t^2+mt+5)\ge 0$, $\forall t>0\Leftrightarrow t^2+mt+5\ge 0$, $\forall t>0\Leftrightarrow m\ge -\left(t+\dfrac{5}{t}\right)$, $\forall t>0$

$\Leftrightarrow m\ge -2\sqrt{5}\approx -4,47$.

Do m nguyên âm nên $m\in\{-4;-3;-2;-1\}$.

Câu 19. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ là $f'(x)=(x-1)(x+3)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-10;20]$ để hàm số $y=f(x^2+3x-m)$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$.

A. 18. **B.** 17. **C.** 16. **D.** 20.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y'=f'(x^2+3x-m)=(2x+3)f'(x^2+3x-m)$.

Theo đề bài ta có: $f'(x)=(x-1)(x+3)$

suy ra $f'(x)>0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x<-3\\x>1\end{array}\right.$ và $f'(x)<0\Leftrightarrow -3<x<1$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;2)$ khi $y'\ge 0,\forall x\in(0;2)$

$\Leftrightarrow (2x+3)f'(x^2+3x-m)\ge 0,\forall x\in(0;2)$.

Do $x\in(0;2)$ nên $2x+3>0,\forall x\in(0;2)$. Do đó, ta có:

$y'\ge 0,\forall x\in(0;2)\Leftrightarrow f'(x^2+3x-m)\ge 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x^2+3x-m\le -3\\x^2+3x-m\ge 1\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m\ge x^2+3x+3\\m\le x^2+3x-1\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m\ge \max\limits_{[0;2]}(x^2+3x+3)\\m\le \min\limits_{[0;2]}(x^2+3x-1)\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m\ge 13\\m\le -1\end{array}\right.$.

Do $m\in[-10;20]$, $m\in\mathbb{Z}$ nên có 18 giá trị nguyên của m thỏa yêu cầu đề bài.

Dạng toán 6. Biết đặc điểm của hàm số hoặc BBT, hoặc đồ thị, hoặc đạo hàm của hàm $f(x)$, xét sự biến thiên của hàm $y=\ln(f(x)), y=e^{f(x)}, \sin f(x), \cos f(x)$... **trong bài toán không chứa tham số**

Câu 20. Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$		-1		1		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y=e^{3f(2-x)+1}+3^{f(2-x)}$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(1;+\infty)$. **B.** $(-1;3)$. **C.** $(-\infty;-2)$. **D.** $(-2;1)$.

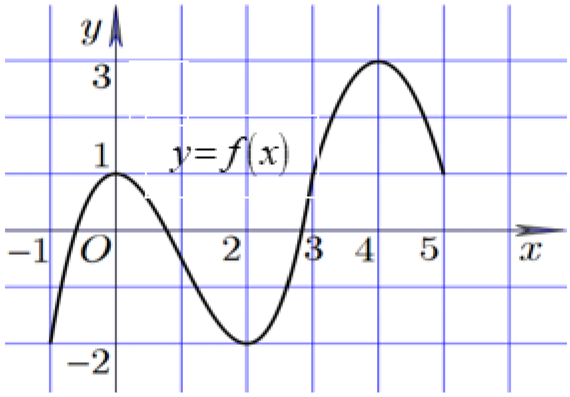
Lời giải

Chọn D

Ta có : $y'=-3f'(2-x).e^{3f(2-x)+1}-f'(2-x).3^{f(2-x)}.\ln 3=-f'(2-x).\left(3e^{3f(2-x)+1}+3^{f(2-x)}.\ln 3\right)$.

$y'>0\Leftrightarrow -f'(2-x)>0\Leftrightarrow f'(2-x)<0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2-x<-1\\1<2-x<4\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x>3\\-2<x<1\end{array}\right.$.

Câu 21. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên.



Hỏi hàm số $y=g(x)=e^{2017f(x-2020)+2018}+\pi^{2019f(x-2020)}$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(2016;\ 2018)$. **B.** $(2017;\ 2019)$. **C.** $(2018;\ 2020)$. **D.** $(2021;\ 2023)$.

Lời giải

Chọn C

+) Xét hàm số $y=g(x)=e^{2017f(x-2020)+2018}+\pi^{2019f(x-2020)}$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có

$g'(x)=2017f'(x-2020)e^{2017f(x-2020)+2018}+2019\ln\pi f'(x-2020)\pi^{2019f(x-2020)}$

$g'(x)=f'(x-2020)\left[2017e^{2017f(x-2020)+2018}+2019\pi^{2019f(x-2020)}\ln\pi\right]$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

+) Do $2017e^{2017f(x-2020)+2018}+2019\pi^{2019f(x-2020)}\ln\pi>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$ nên

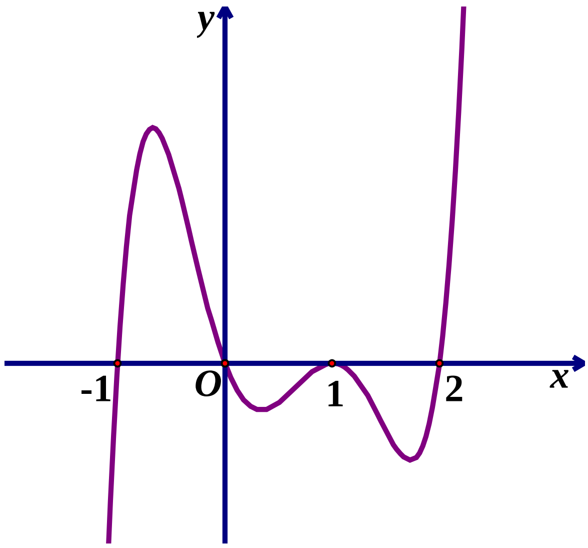
$g'(x)<0\Leftrightarrow f'(x-2020)<0$.

Hơn nữa từ đồ thị của hàm số $y=f(x)$, ta thấy hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên mỗi khoảng $(0;\ 2)$ và $(4;\ +\infty)$, suy ra $f'(x)<0,\ \forall x\in(0;\ 2)\cup(4;\ +\infty)$.

Khi đó bất phương trình $f'(x-2020)<0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}0<x-2018<2\\x-2018>4\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2018<x<2020\\x>2022\end{array}\right.$.

+) Vậy $g'(x)<0,\ \forall x\in(2018;\ 2020)\cup(2022;\ +\infty)$. Khi đó hàm số $y=g(x)$ nghịch biến trên mỗi khoảng $(2018;\ 2020)$ và $(2022;\ +\infty)$.

Câu 22. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và hàm $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Hàm số $g(x)=2018^{2019-2f(x)+2f^2(x)-f^3(x)}$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-2;0)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $(1;2)$. **D.** $(2;3)$.

Lời giải

Chọn D

Xét $g'(x)=-f'(x).\left[3f^2(x)-4f(x)+2\right].2018^{2019-2f(x)+2f^2(x)-f^3(x)}.\ln 2018$

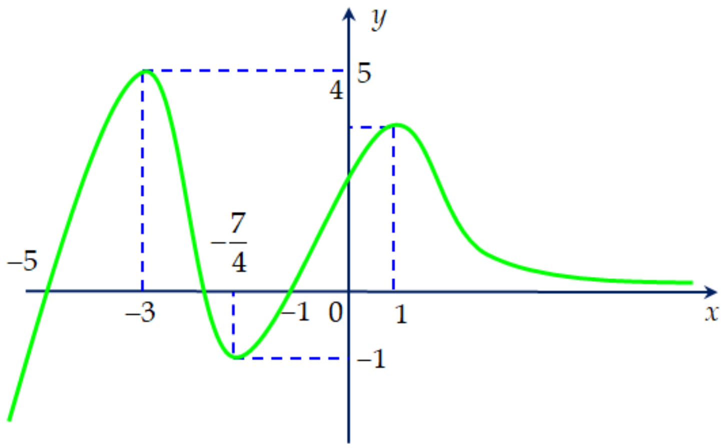
Có $g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=0 \\ x=1 \\ x=2 \end{array}\right.$, trong đó $x=1$ là nghiệm kép.

Bảng xét dấu của $g'(x)$:

x	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

Từ bảng, suy ra hàm số nghịch biến trên $(2;3)$, do $(2;3)\subset(2;+\infty)$.

Câu 23. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $y=f'(x)$ như hình vẽ sau



Hỏi đồ thị hàm số $g(x)=f\left(e^{3f(x)+1}+2^{f(x)}\right)$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(-\infty;-5)$. **B.** $\left(-3;\frac{-7}{4}\right)$. **C.** $(-1;+\infty)$. **D.** $(-3;-1)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có:

$$g'(x)=\left(3f'(x).e^{3f(x)+1}+2^{f(x)}.f'(x).\ln 2\right).f'\left(e^{3f(x)+1}+2^{f(x)}\right)$$
$$=f'(x).\left(3.e^{3f(x)+1}+2^{f(x)}.\ln 2\right).f'\left(e^{3f(x)+1}+2^{f(x)}\right)$$

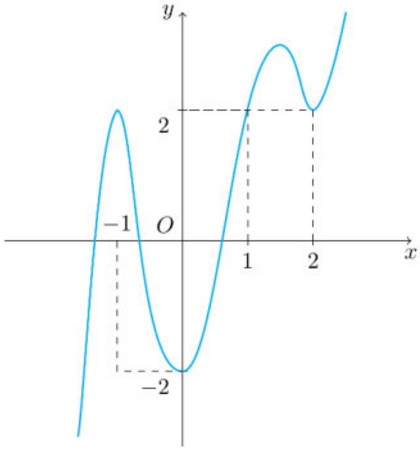
$ycbt \Leftrightarrow g'(x)<0$. Mà ta thấy rằng:

$$\begin{cases} 3.e^{3f(x)+1}+2^{f(x)}.\ln 2>0 \\ e^{3f(x)+1}+2^{f(x)}>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3.e^{3f(x)+1}+2^{f(x)}.\ln 2>0 \\ f'\left(e^{3f(x)+1}+2^{f(x)}\right)>0 \end{cases}$$

Suy ra $g'(x)<0 \Leftrightarrow f'(x)<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<-5 \\ x_0<x<-1\left(x_0\in\left(-3;\frac{-7}{4}\right)\right) \end{array}\right.$

Vậy hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(-\infty;-5)$.

Câu 24. Cho hàm số $y=f'(x-1)$ có đồ thị như hình vẽ.



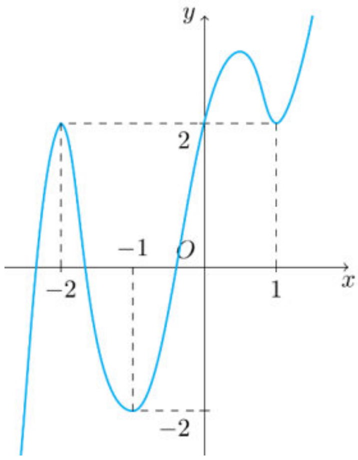
Hàm số $y=\pi^{2f(x)-4x}$ đồng biến trên khoảng

A. $(-\infty;0)$. **B.** $(-2;0)$. **C.** $(0;+\infty)$. **D.** $(-2;1)$.

Lời giải

Chọn C

Tịnh tiến đồ thị hàm số $y=f'(x-1)$ sang trái 1 đơn vị, ta được đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như sau



Xét hàm số $y=\pi^{2f(x)-4x}$. Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

$y'=\pi^{2f(x)-4x}\cdot(2f'(x)-4)\cdot\ln\pi$

$y'=0 \Leftrightarrow f'(x)=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=0 \\ x=1 \end{array}\right.$.

Ta có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-2		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	
y		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$	

Dựa vào bảng biến thiên, hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Dạng toán 7. Biết đặc điểm của hàm số hoặc BBT, hoặc đồ thị, hoặc đạo hàm của hàm $f(x)$, xét sự biến thiên của hàm $y=\ln\left(f(x)\right), y=e^{f(x)}, \sin f(x), \cos f(x)$... **trong bài toán chứa tham số**

Câu 25. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x(x-1)^2\left(x^2-mx+9\right)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên dương m để hàm số $g(x)=e^{f(x)}$ đồngbiến trên khoảng $(0;+\infty)$?

A. 5. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 8.

Lời giải

Chọn B

Ta có $g'(x)=f'(x).e^{f(x)}$.

Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$ khi và chỉ khi $g'(x)\ge 0,\ \forall x\in(0;+\infty)$

$\Leftrightarrow f'(x)\ge 0,\ \forall x\in(0;+\infty) \Leftrightarrow x(x-1)^2\left(x^2-mx+9\right)\ge 0,\ \forall x\in(0;+\infty)$

$\Leftrightarrow m\le \dfrac{x^2+9}{x},\ \forall x\in(0;+\infty)$

$\Leftrightarrow m\le \min\limits_{(0;+\infty)} h(x)$ với $h(x)=x+\dfrac{9}{x}, \forall x\in(0;+\infty)$.

Ta có: $h(x)=x+\dfrac{9}{x}\ge 2\sqrt{x.\dfrac{9}{x}}=6, \forall x\in(0;+\infty)$ nên $m\le 6\xrightarrow{m\in\mathbb{Z}^+} m\in\{1;2;3;4;5;6\}$.

Câu 26. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		4		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	-5	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số $y=e^{f(x)-m^2+2}$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(4;+\infty)$ **B.** $(-1;4)$. **C.** $(1;2)$. **D.** $\left(-\infty;\dfrac{1}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $y=g(x)=e^{f(x)-m^2+2}$.

Ta có $g'(x)=f'(x).e^{f(x)-m^2+2}$, $e^{f(x)-m^2+2}>0\forall x\in\mathbb{R}$.

$$g'(x)=0\Leftrightarrow f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=0\\x=4\end{array}\right..$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		0		4		$+\infty$
$g'(x)$		-	0	+	0	-	0	+	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	-5	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy hàm số $y=g\left(x\right)=e^{f(x)-m^2+2}$ nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty;-1\right)\cup\left(0;4\right)$.

Câu 27. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	5	$\searrow$	$-\infty$

Và hàm số $y=g(x)$ có bảng biến thiên

x	-2		-1		1
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	4

Hàm số $y=f(x).g\left(x\right)+\sqrt{2x+3}-\dfrac{1}{x+2}$ chắc chắn đồng biến trên khoảng nào?

A. $\left(-2;1\right)$. **B.** $\left(-1;1\right)$. **C.** $\left(-\dfrac{3}{2};1\right)$. **D.** $\left(1;4\right)$.

Lời giải

Chọn B

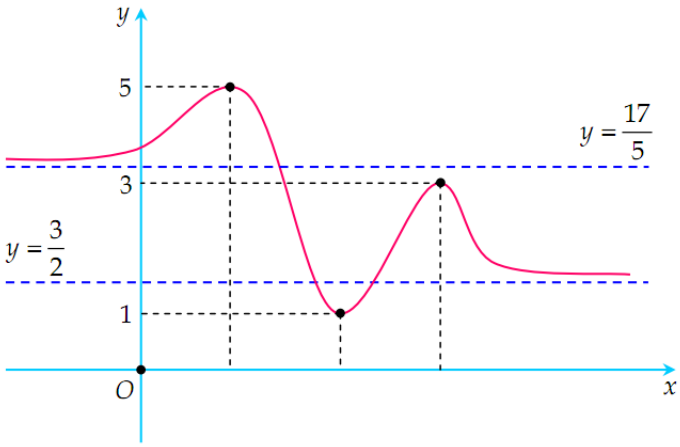
Xét $y=f(x).g\left(x\right)+\sqrt{2x+3}-\dfrac{1}{x+2}$.

Tập xác định: $D=\left[-\dfrac{3}{2};1\right]$. Từ tập xác định loại được phương án A, D

Ta có: $y'=f'(x).g\left(x\right)+f(x).g'\left(x\right)+\dfrac{2}{\sqrt{2x+3}}+\dfrac{1}{\left(x+2\right)^2}>0,\forall x\in\left(-1;1\right)$.

Với phương án C, có $g'\left(x\right)<0$ trên $\left(-\dfrac{3}{2};-1\right)$ nên chưa kết luận được về dấu của hàm số cần xét.

Câu 28. Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ



Giá trị nguyên nhỏ nhất của tham số m để phương trình $e^{f^3(x)+2f^2(x)-7f(x)+5}+\ln\left(f(x)+\frac{1}{f(x)}\right)=m$ có nghiệm là

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Chọn B

Quan sát đồ thị ta thấy $1\le f(x)\le 5,\forall x\in\mathbb{R}$, đặt $t=f(x)$ giả thiết trở thành $e^{t^3+2t^2-7t+5}+\ln\left(t+\frac{1}{t}\right)=m$.

Xét hàm: $g(t)=t^3+2t^2-7t+5,\ t\in[1;5]$

$g'(t)=3t^2+4t-7\ge 0\,\forall t\ge 1\Rightarrow g(1)\le g(t)\le g(5)\Leftrightarrow 1\le g(t)\le 145$.

Mặt khác $h(t)=t+\frac{1}{t},h'(t)=1-\frac{1}{t^2}\ge 0\,\forall t\in[1;5]\Rightarrow 2\le h(t)\le\frac{26}{5}$.

Do đó hàm $u(t)=e^{t^3+2t^2-7t+5}+\ln\left(t+\frac{1}{t}\right)$ đồng biến trên đoạn $[1;5]$.

Suy ra: Phương trình đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow e+\ln 2\le m\le e^{145}+\ln\frac{26}{5}$.

Vậy giá trị nguyên nhỏ nhất của m là 4.

Câu 29. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		4		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-1	↗	3	↘	-5	↗	$+\infty$

Hàm số $y=e^{f(x)-m^2+2}$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(4;+\infty)$ **B.** $(-1;4)$. **C.** $(1;2)$. **D.** $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $y=g(x)=e^{f(x)-m^2+2}$.

$g'(x)=f'(x).e^{f(x)-m^2+2}$, $e^{f(x)-m^2+2}>0\,\forall x\in\mathbb{R}$.

$$g'(x)=0\Leftrightarrow f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=0\\x=4\end{array}\right.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		0		4		$+\infty$
$g'(x)$		-	0	+	0	-	0	+	
$g(x)$	$+\infty$	↘	-1	↗	3	↘	-5	↗	$+\infty$

Vậy hàm số $y=g(x)=e^{f(x)-m^2+2}$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)\cup(0;4)$.

Dạng toán 8. Các dạng khác với các dạng đã đưa ra…

PHẦN 2: Biết biểu thức của hàm số $y=f'(x)$

Dạng toán 9. Biết biểu thức hàm số $y=f'(x)$ xét tính đơn điệu của hàm số $y=g(x)=f(x)+h(x)$ **trong bài toán không chứa tham số.**

Câu 30. Cho hàm số $y=f(x)$ có $f'(x)=(x-3)(x-4)(x-2)^2(x-1), \forall x\in\mathbb{R}$. Hàm số $y=g(x)=f(x)+\frac{x^4}{4}-\frac{5x^3}{3}+4x^2-4x$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;1)$ **B.** $(1;2)$. **C.** $(3;5)$. **D.** $\left(0;\frac{3}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $g'(x)=f'(x)+x^3-5x^2+8x-4=f'(x)+(x-1)(x-2)^2=(x-1)(x-2)^2(x^2-7x+13)$.

Khi đó $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=2\end{array}\right.$.

Bảng xét dấu của hàm số $g'(x)$ như sau

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	

Vậy hàm số $y=g(x)$ nghịch biến trên $(-\infty;1)$.

Câu 31. Cho hàm số $y=f(x)$ có $f'(x)=x^2(x-1)^2(x-3)$. Hàm số $g(x)=f(x)+\frac{1}{3}x^3-5$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

A. $(0;\,2)$. **B.** $\left(2;\,\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$. **C.** $\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2};\,2\right)$. **D.** $\left(0;\,\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $g'(x)=f'(x)+x^2$,

$$g'(x)=0\Leftrightarrow x^2(x-1)^2(x-3)=-x^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\(x-1)^2(x-3)=-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^3-5x^2+7x-2=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\\x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}\end{array}\right.$$

Ta có bảng xét dấu của $g'(x)$:

x	$-\infty$		0		$\frac{3-\sqrt{5}}{2}$		2		$\frac{3+\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu $g'(x)$ ta thấy trên khoảng $\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2};\,2\right)$ thì hàm số $y=g(x)$ đồng biến.

Câu 32. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-1)(x+2)^2, \forall x\in\mathbb{R}$. Hàm số $y=g(x)=f(x)-2x^2+4x$ đồng biến trên khoảng nào?

A. $(-4;0)$ **B.** $(-\infty;0)$. **C.** $(-4;1)$. **D.** $(0;+\infty)$.

Lời giải

Chọn A

$g'(x)=f'(x)-4x+4=(x-1)(x+2)^2-4(x-1)=(x-1)(x^2+4x), \forall x\in\mathbb{R}$

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-1=0\\x^2+4x=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=0\\x=-4\end{array}\right.$$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-4		0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Kết luận: Hàm số $y=g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-4;0)$

Câu 33. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f'(x)=x^2(x-1)(4-x)$

Hàm số $y=g(x)=f(x)+f(1-x)$ đồng biến trên khoảng

A. $\left(-2;-\frac{1}{2}\right)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$. **D.** $(1;2)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $g'(x)=f'(x)-f'(1-x)=x^2(x-1)(4-x)-(1-x)^2(-x)(x+3)$

$g'(x)=x(x-1)\left[x(4-x)+(x-1)(x+3)\right]=x(x-1)(6x-3)$

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\frac{1}{2}\\x=1\end{array}\right..$$

Ta có bảng biến thiên :

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Dạng toán 10. Biết biểu thức hàm số $y=f'(x)$ xét tính đơn điệu của hàm số $y=g(x)=f(x)+h(x)$ **trong bài toán chứa tham số.**

Câu 34. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x)=x(x-1)^2(x^2+mx+16)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-2019;2019]$ để hàm số $g(x)=f(x)+\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+2019$ đồng biến trên khoảng $(5;+\infty)$?

A. 2019. **B.** 2021. **C.** 2028. **D.** 4038.

Lời giải

Chọn C

Ta có $g'(x)=f'(x)+x^3-2x^2+x$

$=x(x-1)^2(x^2+mx+16)+x(x-1)^2$

$=x(x-1)^2(x^2+mx+17)$.

Để hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(5;+\infty)$ thì $g'(x)\ge 0\forall x\in(5;+\infty)$

$\Leftrightarrow x(x-1)^2(x^2+mx+17)\ge 0\forall x>5 \Leftrightarrow x^2+mx+17\ge 0\forall x>5$

$\Leftrightarrow m\ge \frac{-x^2-17}{x}\forall x>5$.

Xét hàm số $h(x)=\frac{-x^2-17}{x}=-x-\frac{17}{x}$ trên khoảng $(5;+\infty)$

$h'(x)=-1+\frac{17}{x^2}=0\Rightarrow x=\pm\sqrt{17}$.

x	$-\infty$		$-\sqrt{17}$		0		$\sqrt{17}$		5		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	$\|$	$+$	
$h(x)$					$\|\|$				$-\frac{42}{5}$	$\searrow$	$-\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra $m\ge -\frac{42}{5}$.

Vậy có 2028 giá trị của m thỏa mãn bài ra.

Câu 35. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-1)^2(x^2-2x)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên $m<100$ để hàm số $g(x)=f(x^2-8x+m)+m^2+1$. đồng biến trên khoảng $(4;+\infty)$?

A. 18. **B.** 82. **C.** 83. **D.** 84.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f'(x)=(x-1)^2(x^2-2x)>0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x<0\\x>2\end{array}\right.$.

Xét $g'(x)=(2x-8).f'(x^2-8x+m)$. Để hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(4;+\infty)$ khi và chỉ khi $g'(x)\ge 0,\ \forall x>4$

$\Leftrightarrow (2x-8).f'(x^2-8x+m)\ge 0,\ \forall x>4$

$\Leftrightarrow f'(x^2-8x+m)\ge 0,\ \forall x>4$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x^2-8x+m\le 0,\ \forall x\in(4;+\infty)\\x^2-8x+m\ge 2,\ \forall x\in(4;+\infty)\end{array}\right.\Leftrightarrow m\ge 18.$

Vậy $18\le m<100$..

Câu 36. (VD) Tìm tất cả các giá trị của m để bất phương trình $m\left(1+\sqrt{x^2-2x+2}\right)+x(2-x)\le 0$ có nghiệm thuộc đoạn $\left[0;1+\sqrt{3}\right]$.

A. $m\le\frac{1}{3}$. **B.** $m\le\frac{2}{3}$. **C.** $m\le\frac{4}{3}$. **D.** $m\le\frac{5}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $m\left(1+\sqrt{x^2-2x+2}\right)+x(2-x)\le 0\Leftrightarrow\dfrac{x^2-2x}{1+\sqrt{x^2-2x+2}}\ge m$

Đặt $t=\sqrt{x^2-2x+2}$, $x\in\left[0;1+\sqrt{3}\right]$. Khi đó:

$t'=\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+2}}$, $t'=0\Leftrightarrow x=1$

Bảng biến thiên:

	$0 \quad 1 \quad 1+\sqrt{3}$
t'	$-\quad 0\quad +$
t	2 $\sqrt{2}$ 1

Từ bảng biến thiên ta suy ra $t\in[1;2]$. Khi đó bất phương trình trở thành:

$\dfrac{t^2-2}{t+1}\ge m$ có nghiệm $t\in[1;2]\Leftrightarrow\max\limits_{[1;2]}\left(\dfrac{t^2-2}{t+1}\right)\ge m$

Đặt $f(t)=\dfrac{t^2-2}{t+1}$, $t\in[1;2]$. Khi đó:

$f'(t)=\dfrac{t^2+2t+2}{(t+1)^2}>0,\ \forall t\in[1;2]$

Bảng biến thiên:

t	$1 \quad 2$
$f'(t)$	$+$
$f(t)$	$\frac{2}{3}$ $-\frac{1}{2}$

Từ bảng biến thiên ta suy ra $\max\limits_{[1;2]}f(t)=\frac{2}{3}$. Vậy $\frac{2}{3}\ge m$ hay $m\le\frac{2}{3}$.

Câu 37. (VDC) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-10;10]$ để bất phương trình $\sqrt{(m+2)x-m}\ge|x+1|$ có nghiệm thuộc đoạn $[-2;2]$.

A. 14. **B.** 20. **C.** 16. **D.** 18.

Lời giải

Chọn C

Ta có:

$$\sqrt{(m+2)x-m} \geq |x+1| \Leftrightarrow (m+2)x-m \geq (x+1)^2$$
$$\Leftrightarrow x^2+1 \leq m(x-1)$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{x^2+1}{x-1} \leq m \text{ nÕu } m \in (1;2] \\ \dfrac{x^2+1}{x-1} \geq m \text{ nÕu } m \in [-2;1) \end{array}\right.$$

Do đó, bất phương trình đã cho có nghiệm thuộc đoạn $[-2;2] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \min\limits_{(1;2]}\left(\dfrac{x^2+1}{x-1}\right) \leq m \\ \max\limits_{[-2;1)}\left(\dfrac{x^2+1}{x-1}\right) \geq m \end{array}\right.$ $(*)$

Đặt $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x-1}$, $x \in [-2;2]$. Khi đó:

$f'(x)=\dfrac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}$, $f'(x)=0 \Leftrightarrow x^2-2x-1=0 \Leftrightarrow x=1\pm\sqrt{2}$

$\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=+\infty$

Bảng biến thiên:

t	$-\infty$ -2 $1-\sqrt{2}$ 1 2 $1+\sqrt{2}$ $+\infty$			
$f'(t)$	$+$	$+$ 0 $-$	$-$	$-$ 0 $+$
$f(t)$		$2-2\sqrt{2}$ $-\dfrac{5}{3}$ $-\infty$	$+\infty$ 5	

Từ bảng biến thiên ta có:

$(*) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5 \leq m \\ 2-2\sqrt{2} \geq m \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \geq 5 \\ m \leq 2-2\sqrt{2} \end{array}\right. \Rightarrow m \in \{-10;-9;-8;...;-1;5;6;7;8;9;10\}$.

Vậy Có 16 giá trị m thỏa đề.

Câu 38. Biết rằng bất phương trình $m\left(|x|+\sqrt{1-x^2}+1\right) \leq 2\sqrt{x^2-x^4}+\sqrt{x^2}+\sqrt{1-x^2}+2$ có nghiệm khi và chỉ khi $m \in \left(-\infty; a\sqrt{2}+b\right]$, với $a,b \in \mathbb{Z}$. Tính giá trị của $T=a+b$.

A. $T=3$. **B.** $T=2$. **C.** $T=0$. **D.** $T=1$.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện $-1 \leq x \leq 1$.

Xét hàm số $g(x)=\sqrt{x^2}+\sqrt{1-x^2}$ trên đoạn $[-1;1]$.

Ta có : $g'(x)=x\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2}}-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$, $g'(x)=0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2}=\sqrt{1-x^2} \Leftrightarrow x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

$g'(x)$ không xác định khi $x=0$, $x=\pm1$. Bảng biến thiên :

x	-1 $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 0 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 1

$g'(x)$	‖ + 0 − ‖ + 0 − ‖
$g(x)$	$\sqrt{2}$ $\sqrt{2}$ 1 1 1

Suy ra $1 \le g(x) \le \sqrt{2}$.

Đặt $t = \sqrt{x^2} + \sqrt{1-x^2}$, $1 \le t \le \sqrt{2}$. Bất phương trình trở thành :

$m(t+1) \le t^2 + t + 1 \Leftrightarrow m \le t + \dfrac{1}{t+1}$ (Do $1 \le t \le \sqrt{2}$ nên $t+1 > 0$).

Xét hàm số $f(t) = t + \dfrac{1}{t+1}$ trên đoạn $\left[1; \sqrt{2}\right]$.

Có $f'(t) = 1 - \dfrac{1}{(t+1)^2} > 0,\ \forall x \in \left[1; \sqrt{2}\right]$. Bảng biến thiên :

x	1 $\sqrt{2}$
$g'(x)$	+
$g(x)$	$2\sqrt{2}-1$ $\dfrac{3}{2}$

Do đó,

.

Suy ra bất phương trình đã cho có nghiệm khi $m \le \max\limits_{\left[1;\sqrt{2}\right]} f(t)$ hay $m \le 2\sqrt{2} - 1$.

Do đó, $a = 2$, $b = -1$.Vậy $T = 1$.

Câu 39. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = 3x^2 + 6x + 1, \forall x \in R$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên thuộc khoảng $(-50; 50)$ của tham số m để hàm số $g(x) = f(x) - (m+1)x - 2$ nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$?

A. 26. **B.** 25. **C.** 51. **D.** 50.

Lời giải

Chọn A

Ta có $g(x) = f(x) - (m+1)x - 2 \Rightarrow g'(x) = f'(x) - (m+1)$

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;\ 2)$ khi

$g'(x) \le 0, \forall x \in (0; 2)$ (dấu "$=$"chỉ xảy ra tại hữu hạn điểm trên khoảng $(0;\ 2)$).

$\Leftrightarrow f'(x) - (m+1) \le 0, \forall x \in (0; 2)$

$\Leftrightarrow 3x^2 + 6x \le m, \forall x \in (0; 2) \qquad (*)$

Xét hàm số $h(x) = 3x^2 + 6x,\ x \in (0; 2)$.

Ta có $h'(x) = 6x + 6 > 0, \forall x \in (0; 2)$.

Bảng biến thiên:

x	0 2
$h'(x)$	+
$h(x)$	0 ↗ 24

Nhìn bảng biến thiên suy ra điều kiện để $(*)$ xảy ra là: $m \ge 24$.

Do $m \in Z$, thuộc khoảng $(-50;50)$ nên $m \in [24;50)$ và $m \in Z$ hay $m \in \{24, 25, ..., 49\}$.

Vậy có 26 số nguyên m thỏa mãn.

Dạng toán 11. Biết biểu thức hàm số $y = f'(x)$ xét tính đơn điệu của hàm số $y = g(x) = f(u(x))$ **trong bài toán không chứa tham số.**

Câu 40. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x^2-1)(x^2-x-2)$. Hỏi hàm số $g(x) = f(x - x^2)$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

A. $(-1;1)$. **B.** $(0;2)$. **C.** $(-\infty;-1)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Lời giải

Chọn C

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x^2-1)(x^2-x-2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-1=0 \\ x^2-x-2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=1 \\ x=2 \end{array}\right. .$$

Bảng xét dấu $f'(x)$

x	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Ta có $g'(x) = (1-2x) f'(x-x^2)$.

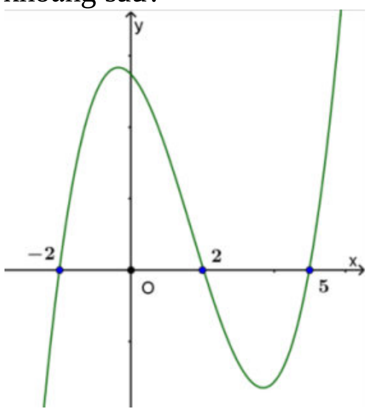
$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow (1-2x) f'(x-x^2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1-2x=0 \\ f'(x-x^2)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{2} \\ x-x^2=-1 \\ x-x^2=1 \\ x-x^2=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{2} \\ x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\ x=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right. .$$

Bảng xét dấu $g'(x)$

x	$-\infty$		$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	

Từ bảng xét dấu suy ra hàm số $g(x) = f(x - x^2)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1)$.

Câu 41. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số $y = g(x) = f(3-2x)$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?



A. $(-\infty;-1)$. **B.** $(-1;+\infty)$. **C.** $(0;2)$. **D.** $(1;3)$.

Lời giải

Chọn A

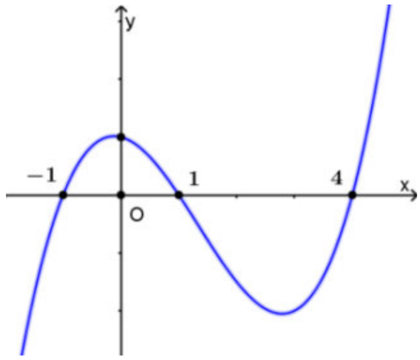
• Từ đồ thị $(C): y = f'(x)$; $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2 < x < 2 \\ x > 5 \end{array}\right.$ (1)

• Mà $g'(x) = -2.f'(3-2x)$ (2)

• (1), (2); $g'(x) < 0 \Leftrightarrow f'(3-2x) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2 < 3-2x < 2 \\ 3-2x > 5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{1}{2} < x < \dfrac{5}{2} \\ x < -1 \end{array}\right.$.

• Vậy hàm số $g(x)$ nghịch biến trên các khoảng $\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{5}{2}\right)$ và $(-\infty;-1)$.

Câu 42. Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Hàm số $y = g(x) = f(x^2)$ nghịch biến trên khoảng

A. $(-\infty;-1)$. **B.** $(-1;0)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(1;3)$.

Lời giải

Chọn B

• $g'(x) = 2x.f'(x^2)$.

• Nhận xét:

+ $f'(t) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1 < t < 1 \\ 4 < t \end{array}\right.$.

+ $f'(t) < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t < -1 \\ 1 < t < 4 \end{array}\right.$.

• Hàm số g nghịch biến $\Leftrightarrow g'(x) < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < 0 \\ f'(x^2) > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x > 0 \\ f'(x^2) < 0 \end{cases} \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < 0 \\ -1 < x^2 < 1 \vee 4 < x^2 \end{cases} \\ \begin{cases} x > 0 \\ x^2 < -1 \vee 1 < x^2 < 4 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < -2 \\ -1 < x < 0 \\ 1 < x < 2 \end{array}\right.$$.

• Vậy hàm số $y = g(x) = f(x^2)$ nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-2)$, $(-1;0)$ và $(1;2)$.

Dạng toán 12. Biết biểu thức hàm số $y = f'(x)$ xét tính đơn điệu của hàm số $y = g(x) = f(u(x))$ **trong bài toán chứa tham số**.

Câu 43. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x+2)(x^2+mx+5)$ với $\forall x \in \mathbb{R}$. Số giá trị nguyên âm của tham số m để hàm số $g(x) = f(x^2+x-2)$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$ là

A. 7. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Ta có $g'(x)=(2x+1)f'(x^2+x-2)$.

Hàm số $g(x)=f(x^2+x-2)$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$

$\Leftrightarrow g'(x)\ge 0,\forall x\in(1;+\infty)\Leftrightarrow(2x+1)f'(x^2+x-2)\ge 0,\forall x\in(1;+\infty)\Leftrightarrow f'(x^2+x-2)\ge 0,\forall x\in(1;+\infty)$ (vì $2x+1>0,\forall x\in(1;+\infty)$)

$\Leftrightarrow(x^2+x-2)^2(x^2+x)\left[(x^2+x-2)^2+m(x^2+x-2)+5\right]\ge 0,\forall x\in(1;+\infty)$

$\left[(x^2+x-2)^2+m(x^2+x-2)+5\right]\ge 0,\forall x\in(1;+\infty)$ (*)(vì $(x^2+x-2)^2(x^2+x)\ge 0,(1;+\infty)$).

Đặt $t=x^2+x-2$. Khi đó $x>1\Rightarrow t>0$.

(*) trở thành $t^2+mt+5\ge 0,\forall t>0\Leftrightarrow m\ge -t-\dfrac{5}{t},\forall t>0$.

Áp dụng bất đẳng thức Cô – si ta có $t+\dfrac{5}{t}\ge 2\sqrt{5}\Leftrightarrow -t-\dfrac{5}{t}\le -2\sqrt{5}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}t=\dfrac{5}{t}\\ t>0\end{cases}\Leftrightarrow t=\sqrt{5}$.

$\Rightarrow\max\limits_{(0;+\infty)}\left(-t-\dfrac{5}{t}\right)=-2\sqrt{5}\Rightarrow m\ge -2\sqrt{5}$.

Mà m nguyên âm nên $m\in\{-4;-3;-2;-1\}$. Vậy có 4 giá trị m thỏa mãn bài toán.

Câu 44. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x+1)(x-1)(x-4);\forall x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên $m<2019$ để hàm số $g(x)=f\left(\dfrac{2-x}{1+x}-m\right)$ đồng biến trên $(2;+\infty)$.

A. 2018. **B.** 2019. **C.** 2020. **D.** 2021

Lời giải

Chọn A

Ta có: $g'(x)=-\dfrac{3}{(x+1)^2}f'\left(\dfrac{2-x}{1+x}-m\right)$.

Hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(2;+\infty)$

$\Leftrightarrow g'(x)\ge 0;\forall x\in(2;+\infty)$

$\Leftrightarrow -\dfrac{3}{(x+1)^2}f'\left(\dfrac{2-x}{1+x}-m\right)\ge 0;\forall x\in(2;+\infty)$

$\Leftrightarrow f'\left(\dfrac{2-x}{1+x}-m\right)\le 0;\forall x\in(2;+\infty)$

Ta có: $f'(x)\le 0\Leftrightarrow(x+1)(x-1)(x-4)\le 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\le -1\\ 1\le x\le 4\end{array}\right.$

Do đó: $f'\left(\dfrac{2-x}{1+x}-m\right)\le 0;\forall x\in(2;+\infty)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}\dfrac{2-x}{1+x}-m\le -1;\forall x\in(2;+\infty) & (1)\\ 1\le\dfrac{2-x}{1+x}-m\le 4;\forall x\in(2;+\infty) & (2)\end{array}\right.$

Hàm số $h(x)=\dfrac{2-x}{1+x}-m$; $x\in(2;+\infty)$ có bảng biến thiên:

x	2		$+\infty$
$h'(x)$	|	$-$	
$h(x)$	| $-m$	$\searrow$	$-\infty$

Căn cứ bảng biến thiên suy ra: Điều kiện (2) không có nghiệm m thỏa mãn.

Điều kiện (1) $\Leftrightarrow -m\le -1$ $\Leftrightarrow m\ge 1$,kết hợp điều kiện $m<2019$ suy ra có 2018 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Nhận xét: Có thể mở rộng bài toán đã nêu như sau:

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x+1)(x-1)(x-4)$; $\forall x\in\mathbb{R}$.Có bao nhiêu số nguyên $m<2019$ để hàm số $g(x)=f\left(\dfrac{2-x}{1+x}+h(m)\right)$ đồng biến trên $(2;+\infty)$.

Câu 45. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-1)^2(x^2-2x)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên $m\le 20$ để hàm số $g(x)=f(x^2-8x+m)$ đồng biến trên $(4;+\infty)$.

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $g'(x)=(2x-8)f'(x^2-8x+m)$

Hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(4;+\infty)$

$\Leftrightarrow g'(x)\ge 0,\forall x\in(4;+\infty)$

$\Leftrightarrow f'(x^2-8x+m)\ge 0,\forall x\in(4;+\infty)$ (vì $2x-8>0,\forall x\in(4;+\infty)$).

Ta có $f'(x)\ge 0\Leftrightarrow (x-1)^2(x^2-2x)\ge 0\Leftrightarrow (x-1)^2x(x-2)\ge 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\ge 2\\x\le 0\end{array}\right.$.

Do đó $f'(x^2-8x+m)\ge 0,\forall x\in(4;+\infty)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x^2-8x+m\ge 2,\forall x\in(4;+\infty)(1)\\x^2-8x+m\le 0,\forall x\in(4;+\infty)(2)\end{array}\right.$.

Xét $h(x)=x^2-8x+m$

Ta có $h'(x)=2x-8$.

Lập bảng biến thiên của $h(x)=x^2-8x+m$, ta được

x	$-\infty$		4		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$m-16$	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên:

+ (2) vô nghiệm vì $x^2-8x+m\ge m-16,\forall x\in(4;+\infty)$.

+ $(1)\Leftrightarrow m-16\ge 2\Leftrightarrow m\ge 18$.

Theo giả thiết thì $m\le 20$ và m là số nguyên nên $m\in\{18;19;20\}$. **Chọn B**

Câu 46. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x(x-1)^2(x^2+mx+9)$ với mọi $\forall x\in R$. Có bao nhiêu số nguyên dương m để hàm số $g(x)=f(3-x)$ đồng biến trên khoảng $(3;+\infty)$?

A. 5 **B.** 6 **C.** 7 **D.** 8

Lời giải

Chọn B

Từ giả thiết suy ra $f'(3-x)=(3-x)(2-x)^2[(3-x)^2+m(3-x)+9].$

Ta có $g'(x)=-f'(3-x).$

Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(3;+\infty)$ khi và chỉ khi

$g'(x)\ge 0,\forall x\in(3;+\infty).$

$\Leftrightarrow -f'(3-x)\le 0,\forall x\in(3;+\infty).$

$\Leftrightarrow (3-x)(2-x)^2[(3-x)^2+m(3-x)+9]\le 0,\forall x\in(3;+\infty).$

$\forall x\in(3;+\infty)$ thì $(3-x)\le 0,(2-x)^2\ge 0,$ suy ra $(3-x)^2+m(3-x)+9\ge 0,\forall x\in(3;+\infty).$

$$\Leftrightarrow m\le\frac{(3-x)^2+9}{(x-3)},\forall x\in(3;+\infty)\Leftrightarrow m\le \underset{(3;+\infty)}{Min}\frac{(3-x)^2+9}{(x-3)}.$$

Ta có $\dfrac{(3-x)^2+9}{(x-3)}=(x-3)+\dfrac{9}{x-3}\ge 2\sqrt{(x-3).\dfrac{9}{x-3}}=6.$

Suy ra $m\le 6.$

Vì m nguyên dương suy ra $m\in\{1;2;3;4;5;6\}$. **Chọn B**

Câu 47. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ là $f'(x)=(x-1)(x+3)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-10;20]$ để hàm số $y=f(x^2+3x-m)$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$?

A. 18 **B.** 17. **C.** 16. **D.** 20.

Lời giải

Chọn A

Xét dấu $f'(x)$ ta được

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ta có: $y'=(2x+3)f'(x^2+3x-m)$.

Vì $2x+3>0,\forall x\in(0;2)$. Do đó, để hàm số $y=f(x^2+3x-m)$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$ thì $f'(x^2+3x-m)\ge 0,\forall x\in(0;2)$ (*).

Đặt $t=x^2+3x-m$. Vì $x\in(0;2)\Rightarrow t\in(-m;10-m)$.

(*) trở thành: $f'(t)\ge 0,\forall t\in(-m;10-m)$.

Dựa vào bảng xét dấu của $f'(x)$ ta có: $\left[\begin{array}{l}10-m\le -3\\1\le -m\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\ge 13\\m\le -1\end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}13\le m\le 20\\-10\le m\le -1\end{array}\right.\\m\in Z\end{array}\right.$

$\Rightarrow m\in\{-10;-9;..;-1;3;4;..;20\}$.

Dạng toán 13. Biết biểu thức hàm số $y=f'(x)$ xét tính đơn điệu của hàm số $y=g(x)=f(u(x))+h(x)$ **trong bài toán không chứa tham số.**

Câu 48. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x)$ thỏa mãn: $f'(x)=(1-x^2)(x-5)$

Hàm số $y=3f(x+3)-x^3+12x$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(1;5)$. **B.** $(2;+\infty)$. **C.** $(-1;0)$. **D.** $(-\infty;-1)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $f'(x)=(1-x^2)(x-5)$ suy ra $f'(x+3)=\left[1-(x+3)^2\right](x+3-5)=-(x+4)(x+2)(x-2)$.

Mặt khác: $y'=3.f'(x+3)-3x^2+12=-3\left[(x+4)(x+2)(x-2)+(x^2-4)\right]=-3(x-2)(x+2)(x+5)$.

Xét $y'<0\Leftrightarrow -3(x-2)(x+2)(x+5)<0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-5<x<-2\\ x>2\end{array}\right.$.

Vậy hàm số $y=3f(x+3)-x^3+12x$ nghịch biến trên các khoảng $(-5;-2)$ và $(2;+\infty)$.

Câu 49. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x)$ thỏa mãn $f'(x)=(1-x)(x+2)g(x)+1$ trong đó $g(x)<0,\forall x\in\mathbb{R}$. Hàm số $y=f(1-x)+x+2$ nghịch biến trên các khoảng nào?

A. $(1;+\infty)$. **B.** $(0;3)$. **C.** $(-\infty;3)$. **D.** $(3;+\infty)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $f'(x)=(1-x)(x+2)g(x)+1\Rightarrow f'(1-x)=x(3-x)g(1-x)+1$

Mặt khác: $y'=\left(f(1-x)\right)'+1=-f'(1-x)+1=-\left[x.(3-x).g(1-x)+1\right]+1=-x.(3-x).g(1-x)$

Ta có: $y'<0\Leftrightarrow -x.(3-x).g(1-x)<0\ (*)$

Do $g(x)<0,\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow g(1-x)<0,\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow(*)\Leftrightarrow x.(3-x)<0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>3\\ x<0\end{array}\right.$.

Vậy hàm số $y=f(1-x)+x+2$ nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;0)$ và $(3;+\infty)$.

Câu 50. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f'(x)=x(2x-1)\cdot(x^2+3)+2$. Hàm số $y=f(3-x)+2x+2019$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

A. $(3;5)$. **B.** $\left(2;\frac{5}{2}\right)$. **C.** $\left(\frac{5}{2};3\right)$. **D.** $(-\infty;3)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y'=-f'(3-x)+2$.

$y'>0\Leftrightarrow -f'(3-x)+2>0\Leftrightarrow f'(3-x)<2\Leftrightarrow(3-x)\left[2(3-x)-1\right]\left[(3-x)^2+3\right]+2<2$

$\Leftrightarrow(3-x)(5-2x)\left[(3-x)^2+3\right]<0$

Vì $\left[(3-x)^2+3\right]>0,\forall x\in\mathbb{R}$.

Suy ra $y'>0$ khi và chỉ khi $(3-x)(5-2x)<0\Leftrightarrow\frac{5}{2}<x<3$.

Vậy hàm số $y=f(3-x)+2x+2019$ đồng biến trên khoảng $\left(\frac{5}{2};3\right)$.

Câu 51. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x)$ thỏa mãn $f'(x)=(x+1)(x-1)(x-4)$. Xét hàm số $g(x)=12f(x^2)+2x^6-15x^4+24x^2+2019$. Khẳng định đúng là:

A. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-2;-1)$.

B. Hàm số $g(x)$ có hai điểm cực tiểu.

C. Hàm số $g(x)$ đạt cực đại tại $x=0$.

D. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(2\,;+\infty)$.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định của hàm số $g(x)$ là $D=\mathbb{R}$.

Ta có $g'(x)=24xf'(x^2)+12x^5-60x^3+48x=12x\left[2f'(x^2)+x^4-5x^2+4\right]$

$=12x\left[(x^2+1)(x^2-1)(x^2-4)+(x^2-1)(x^2-4)\right]=12x(x^2-1)(x^2-4)(x^2+2)$

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2=4\\x^2=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm2\\x=\pm1\end{array}\right..$$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $g(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		↘		↗		↘		↗		↘		↗	

Qua bảng biến thiên ta có phương án D là phương án đúng.

Câu 52. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)=(x-1)(x-2)^2(x-3)(x-4)$

Hàm số $y=3f(x+2)-x^3+3x$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(1;+\infty)$. **B.** $(-\infty;-1)$. **C.** $(-1;0)$. **D.** $(0;2)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$		1		2		3		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Xét $y=3f(x+2)-x^3+3x$.

Cách 1: $y'=3.\left[f'(x+2)+(1-x^2)\right]$

Ta có $f'(x+2)\ge0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}1\le x+2\le3\\x+2\ge4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-1\le x\le1\\x\ge2\end{array}\right..$

Ta có $\begin{cases}f'(x+2)\ge0,\forall x\in(-1;1)\\1-x^2>0,\forall x\in(-1;1)\end{cases}\Rightarrow y'>0,\forall x\in(-1;1)$.

Vậy ta chọn đáp án

C.

Cách 2:

Xét $y=3f(x+2)-x^3+3x$.

$y'=3.\left[f'(x+2)+(1-x^2)\right]$

Ta có $y'\left(\frac{3}{2}\right)=3.\left[f'\left(\frac{7}{2}\right)-\frac{5}{4}\right]<0$ nên loại đáp án A,

D.

$y'(-2)=3.\left[f'(0)-3\right]<0$ nên loại đáp án

B.

Vậy ta chọn đáp án

C.

Dạng toán 14. Biết biểu thức hàm số $y=f'(x)$ xét tính đơn điệu của hàm số $y=g(x)=f(u(x))+h(x)$ **trong bài toán chứa tham số**.

Câu 53. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2+2x-3, \forall x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-10;20]$ để hàm số $g(x)=f(x^2+3x-m)+m^2+1$ đồng biến trên $(0;2)$?

A. 16. **B.** 17. **C.** 18. **D.** 19.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f'(t)=t^2+2t-3\geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t\leq -3 \\ t\geq 1\end{array}\right. \ (*)$.

Có $g'(x)=(2x+3)f'(x^2+3x-m)$

Vì $2x+3>0, \forall x\in(0;2)$ nên $g(x)$ đồng biến trên $(0;2) \Leftrightarrow g'(x)\geq 0, \forall x\in(0;2)$

$\Leftrightarrow f'(x^2+3x-m)\geq 0, \forall x\in(0;2)$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+3x-m\leq -3, \forall x\in(0;2) \\ x^2+3x-m\geq 1, \forall x\in(0;2)\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+3x\leq m-3, \forall x\in(0;2) \\ x^2+3x\geq m+1, \forall x\in(0;2)\end{array}\right. \ (**)$

Có $h(x)=x^2+3x$ luôn đồng biến trên $(0;2)$ nên từ (**) $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} m-3\geq 10 \\ m+1\leq 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\geq 13 \\ m\leq -1\end{array}\right.$

Vì $\begin{cases} m\in[-10;20] \\ m\in\mathbb{Z}\end{cases} \Rightarrow$ Có 18 giá trị của tham số m.

Vậy có 18 giá trị của tham số m cần tìm.

Câu 54. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x+1)e^x$, có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m trong đoạn $[-2019;2019]$ để hàm số $y=g(x)=f(\ln x)-mx^2+mx-2$ nghịch biến trên $(1;e^2)$.

A. 2018. **B.** 2019. **C.** 2020. **D.** 2021.

Lời giải

Chọn B

Trên $(1;e^2)$ ta có $g'(x)=\frac{1}{x}.f'(\ln x)-2mx+m=\ln x+1-(2x-1)m$

Để hàm số $y=g(x)$ nghịch biến trên $(1;e^2)$ thì $g'(x)=\ln x+1-(2x-1)m\leq 0, \forall x\in(1;e^2)$

$\Leftrightarrow \ln x+1-(2x-1)m\leq 0, \forall x\in(1;e^2)$

$\Leftrightarrow \frac{\ln x+1}{2x-1}\leq m, \forall x\in(1;e^2)$

Xét hàm số $h(x)=\frac{\ln x+1}{2x-1}$ trên $(1;e^2)$, ta có $h'(x)=\frac{-\frac{1}{x}-2\ln x}{(2x-1)^2}<0, \forall x\in(1;e^2)$, từ đây suy ra $m\geq 1$.

Vậy có 2019 giá trị nguyên của m thỏa bài toán.

Câu 55. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên R và có $f'(x)=x.(x+1)^3.(x-1)^4.(x-4)^5$.

Giá trị của tham số m để hàm số $y = g(x) = f(1-x) + \dfrac{1}{x^2 + mx + m^2 + 1}$ chắc chắn luôn đồng biến trên $(-3;0)$.

A. $m \in (-2;-1)$. **B.** $m \in (-\infty;-2)$. **C.** $m \in [-1;0]$. **D.** $m \in [0;+\infty)$

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $x^2 + mx + m^2 + 1 \neq 0$ (luôn đúng vì $x^2 + mx + m^2 + 1 = \left(x + \dfrac{m}{2}\right)^2 + \dfrac{3m^2}{4} + 1 > 0$)

$$g'(x) = -f'(1-x) - \frac{2x+m}{\left(x^2 + mx + m^2 + 1\right)^2}$$

Đặt $t = 1 - x; x \in (-3;0) \Rightarrow t \in (1;4) \Rightarrow -f'(1-x), x \in (-3;0)$ chính là $-f'(t), t \in (1;4)$. Do đó $-f'(t) > 0, \forall t \in (1;4) \Leftrightarrow -f'(1-x) > 0, \forall x \in (-3;0)$

Ycbt $\Leftrightarrow -\dfrac{2x+m}{\left(x^2 + mx + m^2 + 1\right)^2} \geq 0, \forall x \in (-3;0) \Leftrightarrow 2x + m \leq 0, \forall x \in (-3;0)$

$\Leftrightarrow m \leq -2x, \forall x \in (-3;0) \Leftrightarrow m \leq \min\limits_{[-3;0]}(-2x) \Leftrightarrow m \leq 0$. Vậy $m \in [0;+\infty)$

Câu 56. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = \dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+1}}$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên m thuộc khoảng $(-20;20)$ để hàm số $g(x) = f(x+1) - mx + 1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. 20. **B.** 19. **C.** 17. **D.** 18.

Lời giải

Chọn C

Ta có $g'(x) = f'(x) - m$.

Hàm số $g(x) = f(x+1) - mx + 1$ đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow g'(x) \geq 0 \ \forall x$.

$\Leftrightarrow f'(x+1) \geq m \ \ \forall x \Leftrightarrow \dfrac{x+3}{\sqrt{x^2+2x+2}} \geq m \ \ \forall x \Leftrightarrow \min\limits_{\mathbb{R}}\left(\dfrac{x+3}{\sqrt{x^2+2x+2}}\right) \geq m$ (*).

Đặt $h(x) = \dfrac{x+3}{\sqrt{x^2+2x+2}}$.

Ta có $h'(x) = \dfrac{-1-2x}{\left(x^2+2x+2\right)\sqrt{x^2+2x+2}}$.

Cho $h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow h\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{5}$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$h'(x)$					
$h(x)$	-1	$\nearrow$	$\sqrt{5}$	$\searrow$	1

Từ bảng biến thiên ta thấy $(*) \Leftrightarrow m \leq -1$.

Vì $m \in \mathbb{Z}, m \in (-20;20)$ nên $m \in \{-19;-18;-1\}$.

Câu 57. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm $f'\left(x\right)=\left(x+1\right)\left(x-2\right)$. Tìm m để hàm số $y=g\left(x\right)=f\left(x+2\right)-mx$ đồng biến trên khoảng $\left(-1;2\right)$.

A. $m\le\frac{-9}{4}$. **B.** $-\frac{9}{4}\le m\le 10$. **C.** $m\ge\frac{-9}{4}$. **D.** $m\ge 10$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y=g\left(x\right)=f\left(x+2\right)-mx$. Suy ra $g'\left(x\right)=f'\left(x+2\right)-m$.

Để hàm số $y=g\left(x\right)$ đồng biến $\forall x\in\left(-1;2\right)$ thì $g'\left(x\right)\ge 0\ \ \forall x\in\left(-1;2\right)$.

Hay $f'\left(x+2\right)\ge m\ \ \forall x\in\left(-1;2\right)\Leftrightarrow m\le f'\left(x+2\right)\ \ \forall x\in\left(-1;2\right)\Leftrightarrow m\le x\left(x+3\right)\ \forall x\in\left(-1;2\right)$.

$m\le \underset{x\in\left(-1;2\right)}{Min}\left(x^2+3x\right)$. Đặt $h\left(x\right)=x^2+3x$, $h'\left(x\right)=2x+3, h'\left(x\right)=0\Leftrightarrow x=\frac{-3}{2}$.

Ta có bảng biến thiên như sau.

	$-\infty$ -1 $-\frac{3}{2}$ 2 $+\infty$
$h'\left(x\right)$	- 0 +
$h\left(x\right)$	-2 10 $-\frac{9}{4}$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $m\le-\frac{9}{4}$. Đáp án **A.**

Câu 58. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm $f'\left(x\right)=1-x^2$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để hàm số $y=g\left(x\right)=f\left(x^2+2x\right)+2m\left(\ln x-\frac{1}{x}\right)$ nghịch biến trên khoảng $\left(1;+\infty\right)$.

A. 8. **B.** 7. **C.** 9. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y=g\left(x\right)=f\left(x^2+2x\right)+2m\left(\ln x-\frac{1}{x}\right)$. Suy ra $g'\left(x\right)=\left(2x+2\right)f'\left(x^2+2x\right)+\frac{2m\left(x+1\right)}{x^2}$.

Để hàm số $y=g\left(x\right)$ nghịch biến $\forall x\in\left(1;+\infty\right)$ thì $g'\left(x\right)\le 0\ \ \forall x\in\left(1;+\infty\right)$.

Hay $\left(2x+2\right)\left[f'\left(x^2+2x\right)+\frac{m}{x^2}\right]\le 0\ \ \forall x\in\left(1;+\infty\right)\Leftrightarrow f'\left(x^2+2x\right)+\frac{m}{x^2}\le 0\ \ \forall x\in\left(1;+\infty\right)$. (vì $2x+2>0\ \ \forall x\in\left(1;+\infty\right)$).

Do đó $1-\left(x^2+2x\right)^2+\frac{m}{x^2}\le 0\ \ \forall x\in\left(1;+\infty\right)\Leftrightarrow m\le\left[x^2\left(x^2+2x\right)^2-x^2\right]\ \ \forall x\in\left(1;+\infty\right)$

Đặt $h\left(x\right)=x^2\left(x^2+2x\right)^2-x^2$, $h'\left(x\right)=2x\left(3x^5+4x^4+6x^3+8x^2-1\right)$, $h'\left(x\right)=0\Leftrightarrow x=0$

Phương trình $3x^5+4x^4+6x^3+8x^2-1=0$ không có nghiệm $x>1$.

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$ 0 1 $+\infty$
$h'\left(x\right)$	0 +
$h\left(x\right)$	8 0

Từ bảng biến thiên ta thấy $m\le 8$. Mà $m\in\mathbb{Z}_+$. Suy ra m có 8 giá trị.

Dạng toán 15. Biết biểu thức của hàm số $y=f'(x)$, xét tính đơn điệu của hàm số $y=g(x)=f(u(x))+f(v(x))+h(x)$ **trong bài toán không chứa tham số.**

Dạng toán 16. Biết biểu thức của hàm số $y=f'(x)$, xét tính đơn điệu của hàm số $y=g(x)=f(u(x))+f(v(x))+h(x)$ **trong bài toán chứa tham số**.

Dạng toán 17. Biết biểu thức hàm số $y=f'(x)$ xét tính đơn điệu của hàm số $y=g(x)=\left[f(u(x))\right]^k$ **trong bài toán không chứa tham số**.

Câu 1. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và có đạo hàm $f'(x)=(x+2)(x^2-9)(x^4-16)$ trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y=g(x)=\left[f(2x-x^2)\right]^{2019}$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau đây?

A. $\left(1-\sqrt{3};1+\sqrt{3}\right)$. **B.** $(3;+\infty)$. **C.** $(1;+\infty)$. **D.** $(-1;3)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f'(x)=(x+2)(x^2-9)(x^4-16)=(x-3)(x-2)(x+3)(x+2)^2(x^2+4)$.

$g'(x)=2019.\left[f(2x-x^2)\right]^{2018}\left[f(2x-x^2)\right]'=2019.\left[f(2x-x^2)\right]^{2018}(2-2x)f'(2x-x^2)$

$=2019\left[f(2x-x^2)\right]^{2018}(2-2x)(2x-x^2-3)(2x-x^2-2)(2x-x^2+3)(2x-x^2+2)^2\left[(2x-x^2)^2+4\right]$

$=(1-x)(2x-x^2+3)A$

Trong đó:

$A=2.2019\left[f(2x-x^2)\right]^{2018}(2x-x^2+2)^2(x^2-2x+3)(x^2-2x+2)\left[(x^2-2x)^2+4\right]\geq 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$

Khi đó $g'(x)\geq 0\Rightarrow(1-x)(2x-x^2+3)\geq 0\Leftrightarrow x\in[-1;1]\cup[3;+\infty)$

$\Rightarrow$ Hàm số $y=g(x)=\left[f(2x-x^2)\right]^{2019}$ đồng biến trên mỗi khoảng $(-1;1)$ và $(3;+\infty)$.

Câu 2. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ có $f'(x)=(x-2)(x+5)(x+1)$ và $f(-5)=f(2)=1$. Hàm số $g(x)=\left[f(x^2)\right]^2$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây ?

A. $(-\infty;0)\cup\left(\sqrt{2};+\infty\right)$. **B.** $\left(-\sqrt{2};\sqrt{2}\right)$.

C. $(0;+\infty)$. **D.** $\left(-\sqrt{2};0\right)\cup\left(\sqrt{2};+\infty\right)$.

Lời giải

Chọn D

Từ giả thiết ta có $f'(x)=(x-2)(x+5)(x+1)\Rightarrow f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=-5\\x=-1\end{array}\right.$

Bảng biến thiên của $y=f(x)$

x	$-\infty$		-5		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$f(-1)$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Từ BBT suy ra $f(x)>0\quad\forall x\in\mathbb{R}$.

Xét hàm số $g(x)=\left[f\left(x^2\right)\right]^2$

$g'(x)=\left(\left(f'\left(x^2\right)\right)^2\right)'=4x.f'\left(x^2\right)f\left(x^2\right)=4x\left(x^2-2\right)\left(x^2+5\right)\left(x^2+1\right)f\left(x^2\right)$

Do $f(x)>0\ \ \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow f\left(x^2\right)>0\ \forall x\in\mathbb{R}$

Xét $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=\pm\sqrt{2}\end{array}\right.$

BBT của $g(x)=\left[f\left(x^2\right)\right]^2$

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Từ BBT trên ta chọn đáp án
D.

Dạng toán 18. Biết biểu thức hàm số $y=f'(x)$ xét tính đơn điệu của hàm số $y=g(x)=\left[f\left(u(x)\right)\right]^k$ **trong bài toán chứa tham số**.

Dạng toán 19. Biết biểu thức hàm số $y=f'\left(u(x)\right)$ xét tính đơn điệu của hàm số $y=f(x)$ **trong bài toán không chứa tham số**.

Câu 3. Cho hàm số $y=f(x)$ có $f'\left(-2x+\frac{7}{2}\right)=3x^2-12x+9$. Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây.

A. $\left(\frac{1}{4};\frac{9}{4}\right)$. **B.** $\left(\frac{9}{4};+\infty\right)$. **C.** $\left(-\frac{5}{2};\frac{3}{2}\right)$. **D.** $\left(-\infty;-\frac{5}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn C

Ta cần giải bất phương trình $f'(x)<0$.

Từ $f'\left(-2x+\frac{7}{2}\right)=3x^2-12x+9\Rightarrow f'\left(-2x+\frac{7}{2}\right)<0\Leftrightarrow1<x<3$.

Đặt $t=-2x+\frac{7}{2}\Rightarrow x=\frac{7-2t}{4}$. Khi đó ta có $f'(t)<0\Leftrightarrow1<\frac{7-2t}{4}<3\Leftrightarrow-\frac{5}{2}<t<\frac{3}{2}$.

Vậy hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng $\left(-\frac{5}{2};\frac{3}{2}\right)$.

Câu 4. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên R và có đạo hàm $f'(x)$ thỏa mãn $f'(x)=(1-x)(x+2)g(x)+2018$ với $g(x)<0,\forall x\in R$.

Khi đó hàm số $y=f(1-x)+2018x+2019$ nghịch biến trên khoảng nào?

A. $(1;+\infty)$. **B.** $(0;3)$. **C.** $(-\infty;3)$. **D.** $(4;+\infty)$.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $y=h(x)=f(1-x)+2018x+2019$

Ta có $h'(x) = -f'(1-x) + 2018 = -x(3-x)g(1-x)$

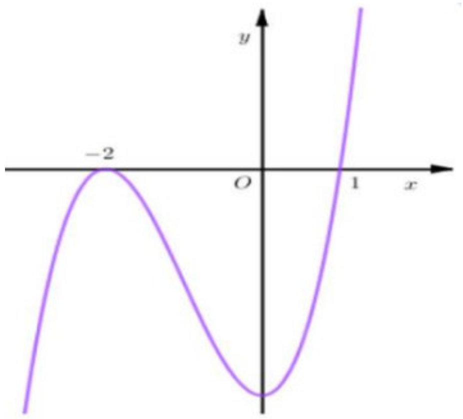
Vì $g(x) < 0, \forall x \in R$ nên $h'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 3 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

Vậy hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(4;+\infty)$.

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(3x+5)$ như hình vẽ. Hàm số $y = f(x)$ nghịch trên khoảng nào?



A. $(-\infty;8)$. **B.** $\left(-\frac{7}{3};+\infty\right)$. **C.** $\left(\frac{4}{3};+\infty\right)$. **D.** $(-\infty;10)$.

Lời giải

Chọn A

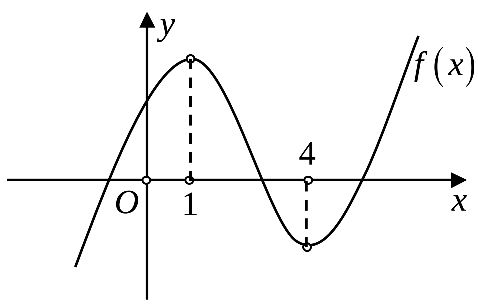
Đặt $x = 3t+5$. Khi đó $g(t) = f(3t+5) \Rightarrow g'(t) = 3f'(3t+5)$.

Ta có $g'(t) < 0 \Leftrightarrow f'(3t+5) < 0 \Leftrightarrow t < 1$.

Khi đó $f'(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{x-5}{3} < 1 \Leftrightarrow x < 8$.

Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;8)$.

Câu 6. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $f(3x-2)$ nghịch biến trên khoảng $(\alpha;\beta)$. Khi đó giá trị lớn nhất của $\beta - \alpha$ là:



A. 9. **B.** 3. **C.** 6. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

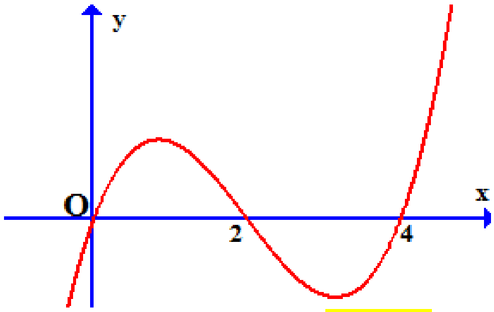
Ta có: $y = f(3x-2) \Rightarrow y' = 3.f'(3x-2)$.

Hàm số $y = f(3x-2)$ nghịch biến $\Leftrightarrow y' \le 0 \Leftrightarrow 3.f'(3x-2) \le 0 \Leftrightarrow f'(3x-2) \le 0$.

$\Leftrightarrow 1 \le 3x-2 \le 4 \Leftrightarrow 1 \le x \le 2$.

Vậy khoảng $(\alpha;\beta)$ lớn nhất là $(1;2)$.

Câu 7. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị hàm số $y=f'(2-x)$ như hình vẽ bên. Hỏi hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?



A. $(-2;4)$. **B.** $(-1;3)$. **C.** $(-2;0)$. **D.** $(0;1)$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $x=2-t$ ta có $y=f(2-t) \Rightarrow y'=-f'(2-t)$.

$y'>0 \Leftrightarrow f'(2-t)<0 \Leftrightarrow 2<t<4$ hay

Khi đó $f'(x)>0 \Leftrightarrow 2<2-x<4 \Leftrightarrow -2<x<0$.

Vậy hàm số đồng biến trong khoảng $(-2;0)$.

Dạng toán 20. Biết biểu thức hàm số $y=f'(u(x))$ xét tính đơn điệu của hàm số $y=f(x)$ **trong bài toán chứa tham số.**

Câu 8. Cho hàm số $g(x)=f(5-x)$ có đạo hàm $g'(x)=(5-x)(2-x)^2\left[x^2-(m+10)x+5m+41\right]$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên dương m để hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1)$.

A. 7. **B.** 8. **C.** 9. **D.** 10.

Lời giải

Chọn B

Ta có $g'(x)=-f'(5-x) \Rightarrow f'(5-x)=-g'(x)$. Suy ra

$f'(5-x)=-g'(x)=(x-5)(2-x)^2\left[x^2-(m+10)x+5m+41\right]$

$\Leftrightarrow f'(5-x)=(x-5)((5-x)-3)^2\left[(5-x)^2+m(5-x)+16\right]$

Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1)$ khi và chỉ khi $f'(x)\ge 0,\ \forall x\in(-\infty;-1)$

(Dấu "$=$" chỉ xảy ra tại hữu hạn điểm)

$\Leftrightarrow -x(x-3)^2(x^2+mx+16)\ge 0,\ \forall x\in(-\infty;-1)$

$\Leftrightarrow x^2+mx+16\ge 0,\ \forall x\in(-\infty;-1)$ (vì $x<0$ và $(x-3)^2>0, \forall x\in(-\infty;-1)$)

$\Leftrightarrow m\le \dfrac{-x^2-16}{x},\ \forall x\in(-\infty;-1) \Leftrightarrow m\le \min\limits_{(-\infty;-1)} h(x)$

Với $h(x)=\dfrac{-x^2-16}{x}=-x-\dfrac{16}{x}\ge 2.\sqrt{(-x).\left(\dfrac{-16}{x}\right)}=8$, dấu "=" xảy ra khi $x=-4$.

$\Rightarrow \min\limits_{(6;+\infty)} h(x)=8 \Rightarrow m\le 8$, kết hợp với điều kiện m nguyên dương ta suy ra $m\in\{1;2;3;4;5;6;7;8\}$.

Vậy có 8 giá trị của m thỏa mãn.

Dạng toán 21. Biết biểu thức của hàm số $y=f'(x)$, xét tính đơn điệu của hàm số $y=g(x).f(x)$ **trong bài toán không chứa tham số.**

Dạng toán 22. Biết biểu thức của hàm số $y=f'(x)$, xét tính đơn điệu của hàm số $y=g(x).f(x)$ **trong bài toán chứa tham số.**

Dạng toán 23. Biết biểu thức của hàm số $y=f'(x)$, xét tính đơn điệu của hàm số $y=g(x).f(x)$ **trong bài toán không chứa tham số.**

Dạng toán 24. Biết biểu thức của hàm số $y=f'(x)$, xét tính đơn điệu của hàm số $y=g(x).f(x)$ **trong bài toán chứa tham số.**

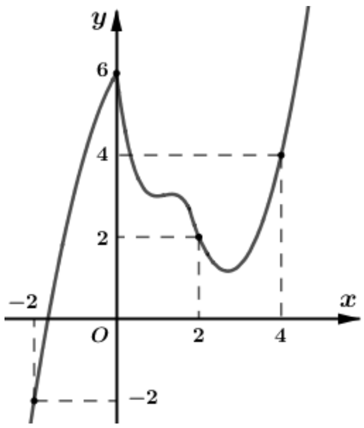
Dạng toán 25. Biết biểu thức của hàm số $y=f'(x)$, xét tính đơn điệu của hàm số $y=\dfrac{g(x)}{f(x)}$ hoặc $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ **trong bài toán không chứa tham số.**

Dạng toán 26. Biết biểu thức của hàm số $y=f'(x)$, xét tính đơn điệu của hàm số $y=\dfrac{g(x)}{f(x)}$ hoặc $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ **trong bài toán chứa tham số.**

PHẦN 3: Biết đồ thị của hàm số $y=f'(x)$

Dạng toán 27. Biết đồ thị hàm số $y=f'(x)$ xét tính đơn điệu của hàm số $y=g(x)=f(x)+h(x)$ **trong bài toán không chứa tham số.**

Câu 9. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình bên dưới.



Hàm số $g(x)=2f(x)-x^2$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau đây?

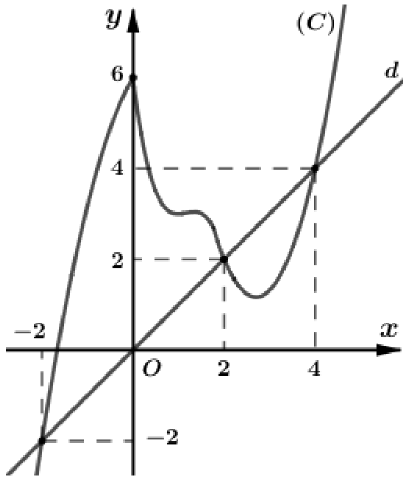
A. $(-\infty;-2)$. **B.** $(-2;2)$. **C.** $(2;4)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $g'(x)=2f'(x)-2x \Rightarrow g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=x.$

Số nghiệm của phương trình $g'(x)=0$ chính là số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f'(x)$ và đường thẳng $d: y=x$ (như hình vẽ bên dưới).



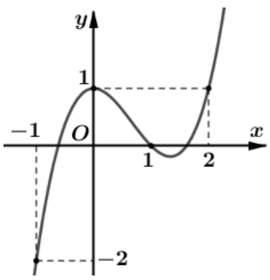
Dựa vào đồ thị, suy ra $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=2 \\ x=4 \end{array}\right.$.

Lập bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		2		4		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

$\Rightarrow$ hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(-2;2)$ và $(4;+\infty)$. So sánh 4 đáp án **Chọn B**

Câu 10. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên dưới.



Hàm số $g(x)=f(x)-\dfrac{x^3}{3}+x^2-x+2$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

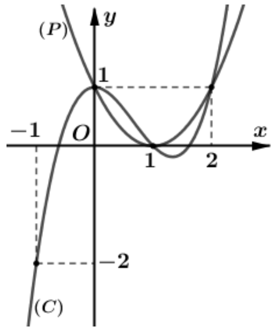
A. $(-1;0)$. **B.** $(0;2)$. **C.** $(1;2)$. **D.** $(0;1)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $g'(x)=f'(x)-x^2+2x-1$, $g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=(x-1)^2$.

Suy ra số nghiệm của phương trình $g'(x)=0$ chính là số giao điểm giữa đồ thị hàm số $f'(x)$ và parabol $(P): y=(x-1)^2$.



Dựa vào đồ thị ta suy ra $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=2 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

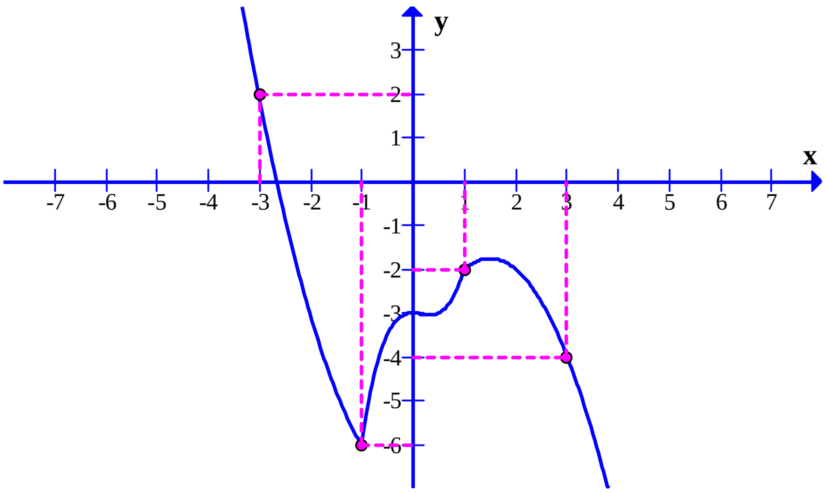
x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
g'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
g		↘		↗		↘		↗	

Dựa vào bảng biến thiên và đối chiếu với các đáp án, ta **Chọn D**

Lưu ý. Cách xét dấu bảng biến thiên như sau: Ví dụ trên khoảng $(-\infty;0)$ ta thấy đồ thị hàm $f'(x)$ nằm phía trên đường $y=(x-1)^2$ nên $g'(x)$ mang dấu $-$.

Nhận thấy các nghiệm $x=0, x=1, x=2$ là các nghiệm đơn nên qua $g'(x)$ đổi dấu.

Câu 11. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ.



Hỏi hàm số $g(x)=2f(x)+(x+1)^2$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

A. $(3;+\infty)$. **B.** $(1;3)$. **C.** $(-3;1)$. **D.** $(-\infty;3)$.

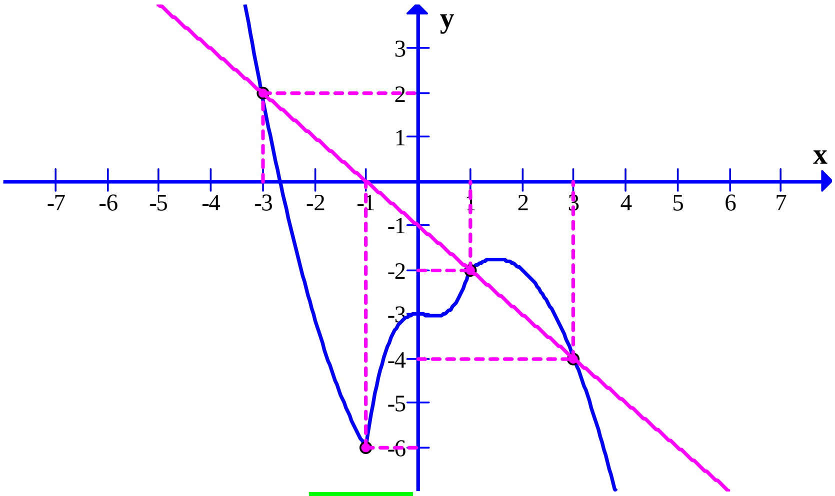
Lời giải

Chọn B

Tập xác định của $g(x)$ là $\mathbb{R}$. Ta có $g'(x)=2\left[f'(x)+x+1\right]$.

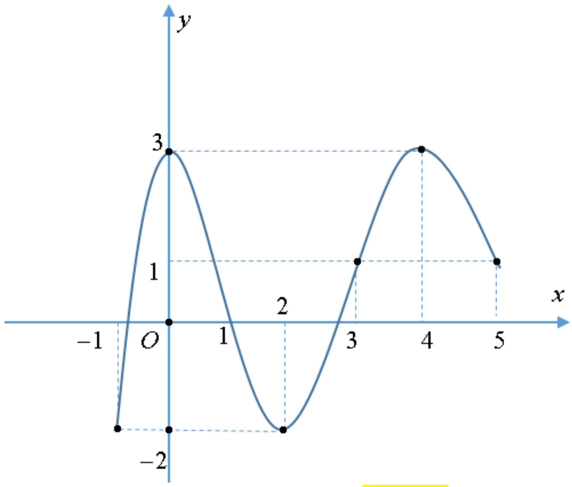
Hàm số đồng biến khi và chỉ khi $f'(x)\geq -x-1$, (dấu bằng chỉ xảy ra tại hữu hạn điểm).

Vẽ chung đồ thị $y=f'(x)$ và $y=-x-1$ trên cùng một hệ trục như sau:



Từ đồ thị ta có $f'(x) \ge -x-1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \le -3 \\ 1 \le x \le 3 \end{array}\right.$. **Chọn B**

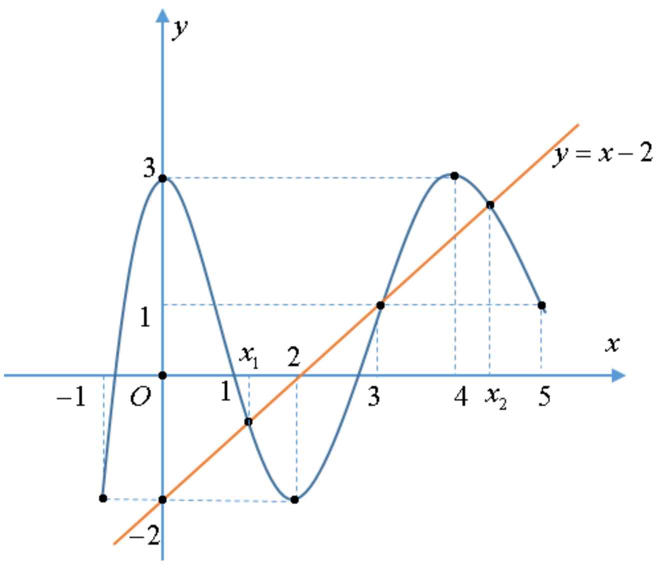
Câu 12. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $[-1;5]$ có đồ thị của hàm $y = f'(x)$ được cho như hình bên dưới. Hàm số $g(x) = -2f(x) + x^2 - 4x + 4$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau đây?



A. $(-1;0)$. **B.** $(0;2)$. **C.** $(2;3)$. **D.** $(-2;-1)$.

Lời giải

Chọn C



Xét hàm số $g(x) = -2f(x) + x^2 - 4x + 4$ trên $[-1;5]$ ta có:

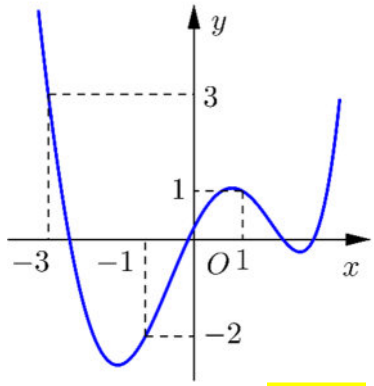
$$g'(x)=-2f'(x)+2x-4;\ g'(x)=0\Leftrightarrow f'(x)=x-2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=x_1\in(0;\,2)\\x=3\\x=x_2\in(4;\,5)\end{array}\right..$$

Bảng xét dấu $g'(x)$:

x	-1	0	x_1	2	3	4	x_2		5
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Từ bảng xét dấu suy ra hàm số đồng biến trên khoảng $(2;3)$.

Câu 13. Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ dưới đây. Xét hàm số $g(x)=f(x)-\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{4}x^2+\frac{3}{2}x+2018$. Hàm số $y=g(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



A. $(-\infty;-2)$ **B.** $(-3;-1)$. **C.** $(-1;1)$. **D.** $(1;+\infty)$.

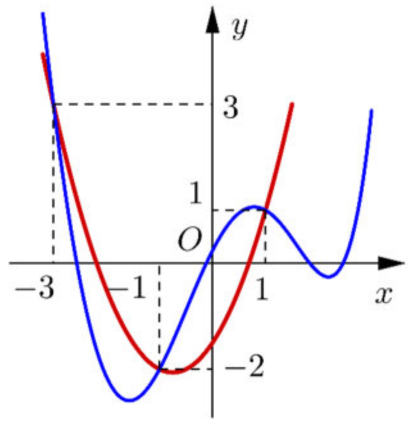
Lời giải

Chọn C

Ta có: $g'(x)=f'(x)-x^2-\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}=f'(x)-\left(x^2+\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}\right)$

$\Rightarrow g'(x)=0\Leftrightarrow f'(x)=x^2+\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}$

Ta vẽ đồ thị hàm số $y=x^2+\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}$



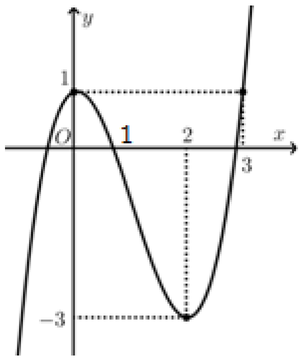
Dựa nào đồ thị $\Rightarrow g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-3\\x=-1\\x=1\end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

Dạng toán 28. Biết đồ thị hàm số $y=f'(x)$ xét tính đơn điệu của hàm số $y=g(x)=f(x)+h(x)$ **trong bài toán chứa tham số**.

Câu 14. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên. Các giá trị của m để hàm số $y=f(x)+(m-1)x$ đồng biến trên khoảng $(0;3)$ là



A. $m>4$. **B.** $m\le 4$. **C.** $m\ge 4$. **D.** $0>m>4$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y=f(x)+(m-1)x \Rightarrow y'=f'(x)+m-1$.

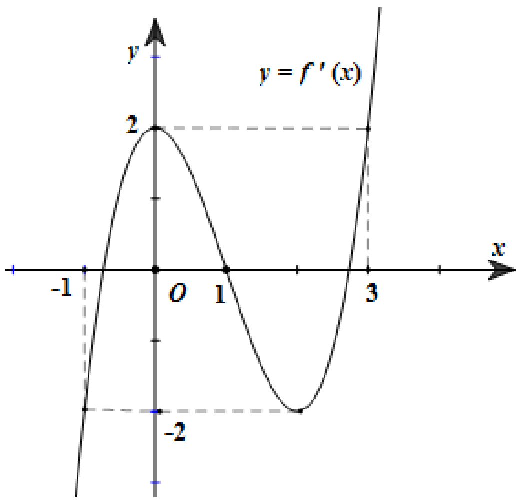
Hàm số $y=f(x)+(m-1)x$ đồng biến trên khoảng $(0;3)$

$\Leftrightarrow y'\ge 0,\ \forall x\in(0;3) \Leftrightarrow f'(x)+m-1\ge 0, \forall x\in(0;3)$

$\Leftrightarrow -m+1\le f'(x), \forall x\in(0;3)$

$\Leftrightarrow -m+1\le \min\limits_{x\in(0;3)} f'(x) \Leftrightarrow -m+1\le -3 \Leftrightarrow m\ge 4$.

Câu 15. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ.



Đặt $g(x)=f(x-m)-\frac{1}{2}(x-m-1)^2+2019$ với m là tham số thực. Gọi S là tập các giá trị nguyên dương của m để hàm số $y=g(x)$ đồng biến trên khoản $(5;6)$. Tổng các phần tử của S bằng:

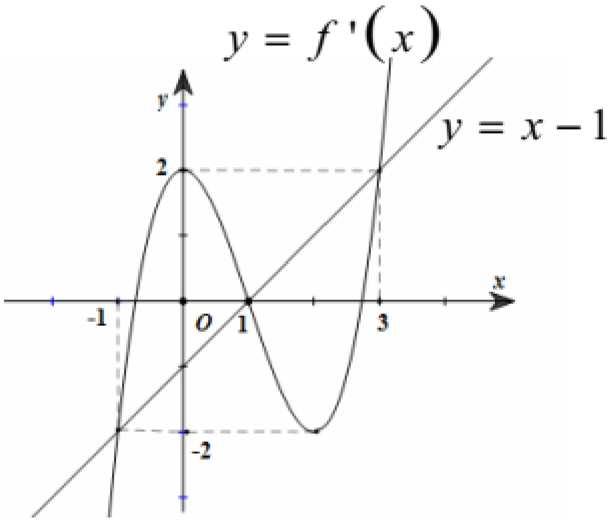
A. 4. **B.** 11. **C.** 14. **D.** 20.

Lời giải

Chọn C

Ta có $g'(x)=f'(x-m)-(x-m-1)$

Đặt $h(x)=f'(x)-(x-1)$. Từ đồ thị $y=f'(x)$ và đồ thị $y=x-1$ trên hình vẽ ta suy ra $h(x)\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1\le x\le 1 \\ x\ge 3 \end{array}\right.$



Ta có $g'(x)=h(x-m)\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1\le x-m\le 1 \\ x-m\ge 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m-1\le x\le m+1 \\ x\ge m+3 \end{array}\right.$

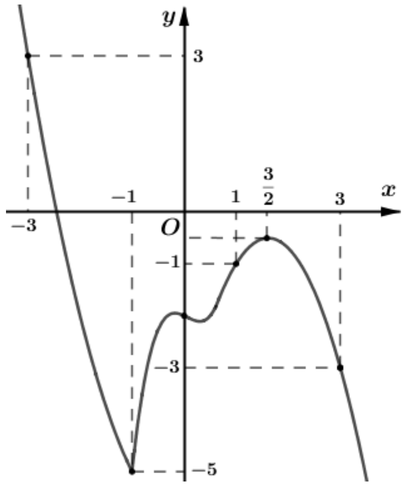
Do đó hàm số $y=g(x)$ đồng biến trên các khoảng $(m-1;m+1)$ và $(m+3;+\infty)$

Do vậy, hàm số $y=g(x)$ đồng biến trên khoảng $(5;6) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m-1\le 5 \\ m+1\ge 6 \end{cases} \\ m+3\le 5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5\le m\le 6 \\ m\le 2 \end{array}\right.$

Do m nguyên dương nên $m\in\{1;2;5;6\}$, tức $S=\{1;2;5;6\}$

Tổng các phần tử của S bằng 14.

Câu 16. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình bên dưới



Đặt hàm số $g(x)=f(1+m-x)+\frac{x^2}{2}-x-mx$, m là tham số. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc đoạn $[-2020;0]$ để hàm số $y=g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-2;0)$?

A. 2016. **B.** 2017. **C.** 2019. **D.** 2020.

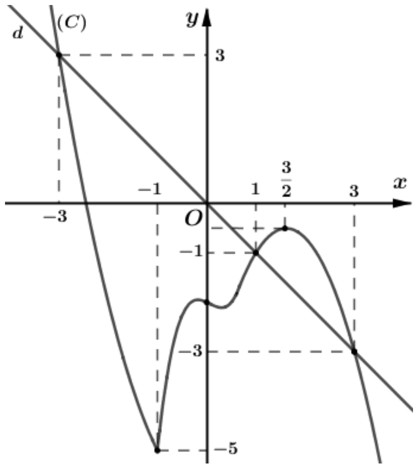
Lời giải.

Ta có $g'(x)=-f'(m+1-x)+x-1-m$.

Ta có $g'(x) < 0 \Leftrightarrow f'(m+1-x) > x-1-m$.

Đặt $t = m+1-x$, bất phương trình trở thành $f'(t) > -t$.

Từ đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ và đồ thị hàm số $y = -x$ (hình vẽ bên dưới) ta thấy đường thẳng $y = -x$ cắt đồ thị hàm số $f'(x)$ lần lượt tại ba điểm $x = -3;\ x = 1;\ x = 3$.



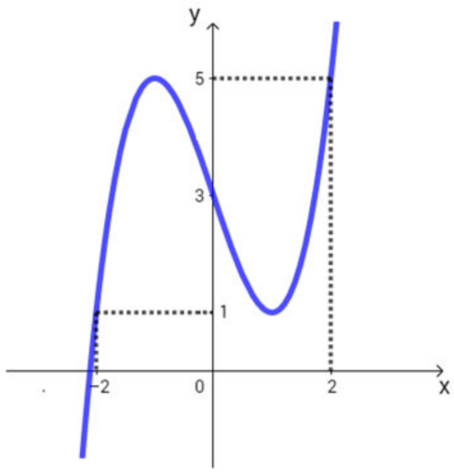
Quan sát đồ thị ta thấy $f'(t) > -t \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t < -3 \\ 1 < t < 3 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m+1-x < -3 \\ 1 < m+1-x < 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 4+m \\ -2+m < x < m \end{array}\right.$

Suy ra hàm số $y = g(x)$ nghịch biến trên các khoảng $(4+m;+\infty)$ và $(-2+m;m)$.

Để hàm số $y = g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-2;0)$ thì $\left[\begin{array}{l} 4+m \le -2 \\ \begin{cases} -2+m \le -2 \\ m \ge 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \le -6 \\ m = 0 \end{array}\right.$

Vậy trên đoạn $[-2020;0]$ có tất cả 2016 giá trị của m thỏa mãn đề bài.

Câu 17. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ.



Xét hàm số $g(x) = f(x) - \frac{1}{2}(x^2+m^2) - 3(x+m)$. Khi đó khẳng định nào sau đây **đúng** ?

A. Với mọi giá trị của tham số m thì $g(x)$ nghịch biến trên các khoảng $(-2;0)$ và $(2;+\infty)$, đồng biến trên $(-\infty;-2)$ và $(0;2)$.

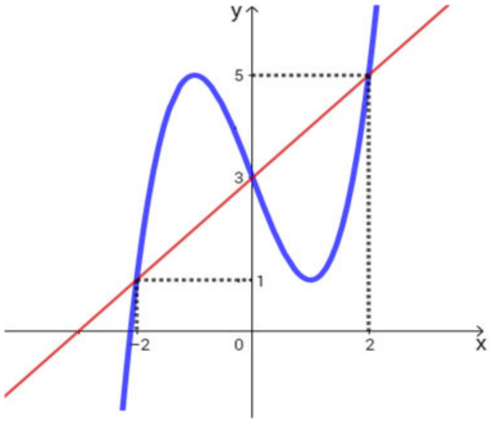
B. Chỉ có đúng 1 giá trị của tham số m để $g(x)$ nghịch biến trên các khoảng $(-2;0)$ và $(2;+\infty)$, đồng biến trên $(-\infty;-2)$ và $(0;2)$.

C. Với mọi giá trị của tham số m thì $g(x)$ đồng biến trên các khoảng $(-2;0)$ và $(2;+\infty)$, nghịch biến trên $(-\infty;-2)$ và $(0;2)$.

D. Chỉ có đúng 1 giá trị của tham số m để $g(x)$ đồng biến trên các khoảng $(-2;0)$ và $(2;+\infty)$, nghịch biến trên $(-\infty;-2)$ và $(0;2)$.

Lời giải

Chọn C



Với mọi giá trị của tham số m ta luôn có: $g'(x) = f'(x) - x - 3$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = x + 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên:

x		-2		0		2	
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\searrow$	$g(-2)$	$\nearrow$	$g(0)$	$\searrow$	$g(2)$	$\nearrow$

$\Rightarrow g(x)$ đồng biến trên các khoảng $(-2;0)$ và $(2;+\infty)$, nghịch biến trên $(-\infty;-2)$ và $(0;2)$.

Dạng toán 29. Biết đồ thị hàm số $y = f'(x)$ xét tính đơn điệu của hàm số $y = g(x) = f(u(x))$ **trong bài toán không chứa tham số.**

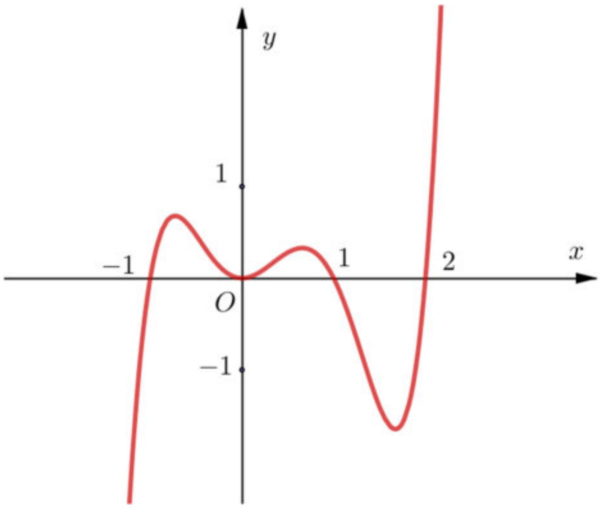
Câu 18. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $y = f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Tìm tất cả các khoảng đồng biến của hàm số $y = f\left(\sqrt{x^2+1}\right)$.

A. $\left(-\infty;-\sqrt{3}\right),\left(0;\sqrt{3}\right)$.

B. $\left(-\infty;-\sqrt{3}\right),\left(\sqrt{3};+\infty\right)$.

C. $\left(-\sqrt{3};0\right),\left(\sqrt{3};+\infty\right)$.

D. $\left(-\infty;-\sqrt{3}\right),(0;+\infty)$.



Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $y=f\left(\sqrt{x^2+1}\right)\Rightarrow y'=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}f'\left(\sqrt{x^2+1}\right)$.

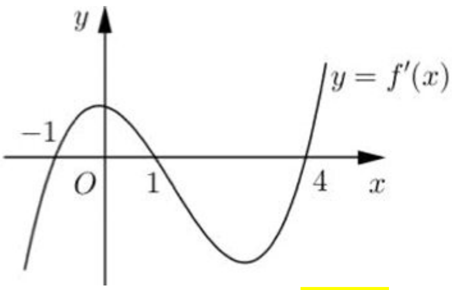
$$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ f'\left(\sqrt{x^2+1}\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ \sqrt{x^2+1}=-1\\ \sqrt{x^2+1}=0\\ \sqrt{x^2+1}=1\\ \sqrt{x^2+1}=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ \sqrt{x^2+1}=1\\ \sqrt{x^2+1}=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x^2+1=1\\ x^2+1=4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=-\sqrt{3}\\ x=\sqrt{3}\end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y		↘		↗		↘		↗	$+\infty$

Vậy hàm số $y=f\left(\sqrt{x^2+1}\right)$ đồng biến trên các khoảng $\left(-\sqrt{3};0\right),\left(\sqrt{3};+\infty\right)$.

Câu 19. Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $y=f(2-x)$ đồng biến trên khoảng:



A. $(1;3)$. **B.** $(2;+\infty)$. **C.** $(-2;1)$. **D.** $(-\infty;2)$.

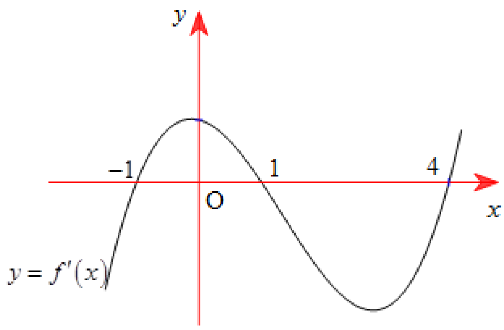
Lờigiải

Chọn C

Ta có: $\left(f(2-x)\right)'=(2-x)'.f'(2-x)=-f'(2-x)$

Hàm số đồng biến khi $\left(f(2-x)\right)'>0\Leftrightarrow f'(2-x)<0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2-x<-1\\ 1<2-x<4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>3\\ -2<x<1\end{array}\right.$.

Câu 20. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Hàm số $y=f\left(x^2\right)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?



A. $(1;2)$. **B.** $(-2;+\infty)$. **C.** $(-2;-1)$. **D.** $(-1;1)$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $g(x)=f(x^2)$.

$g'(x)=2x.f'(x^2)$.

Cách 1:Hàm số $g(x)=f(x^2)$ đồng biến khi và chỉ khi $g'(x)\ge 0$ (dấu bằng xảy ra tại hữu hạn điểm)

$$\Leftrightarrow x.f'(x^2)\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge 0\\ f'(x^2)\ge 0\end{cases}(1)\\ \begin{cases}x\le 0\\ f'(x^2)\le 0\end{cases}(2)\end{array}\right..$$

$$(1)\Leftrightarrow \begin{cases}x\ge 0\\ f'(x^2)\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x\ge 0\\ \left[\begin{array}{l}-1\le x^2\le 1\\ x^2\ge 4\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x\ge 0\\ \left[\begin{array}{l}-1\le x\le 1\\ x\le -2\\ x\ge 2\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}0\le x\le 1\\ x\ge 2\end{array}\right..$$

$$(2)\Leftrightarrow \begin{cases}x\le 0\\ f'(x^2)\le 0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x\le 0\\ \left[\begin{array}{l}x^2\le -1\ (\text{loại})\\ 1\le x\le 4\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x\le 0\\ \left[\begin{array}{l}x\le -1\\ x\ge 1\end{array}\right.\\ -2\le x\le 2\end{cases}\Leftrightarrow -2\le x\le -1.$$

Vậy hàm số đồng biến trên các khoảng $(-2;-1),(0;1),(2;+\infty)$.

Cách 2:

Dựa vào đồ thị có $f'(x)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-1\\ x=1\\ x=4\end{array}\right.$.

Chọn $f'(x)=(x+1)(x-1)(x-4)$.

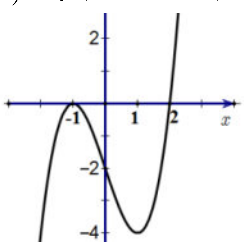
$$\Rightarrow g'(x)=2x(x^2+1)(x^2-1)(x^2-4)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\ x=\pm 1\\ x=\pm 2\end{array}\right..$$

Bảng xét dấu $g'(x)$

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Vậy hàm số đồng biến trên các khoảng $(-2;-1),(0;1),(2;+\infty)$.

Câu 21. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên R và đồ thị của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số $g(x)=f(x^2-2x-1)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



A. $(-\infty;1)$. **B.** $(1;+\infty)$. **C.** $(0;2)$. **D.** $(-1;0)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $g'(x)=(2x-2).f'(x^2-2x-1)$.

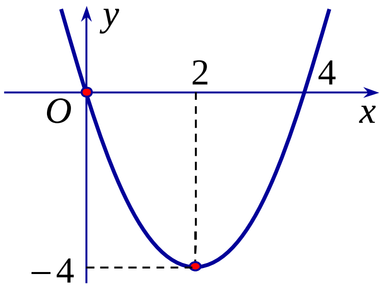
Lại có $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x^2-2x-1=-1\\x^2-2x-1=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm1\\x=2;x=3\end{array}\right.$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		1		2		3		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số đồng biến trên $(-1;0)$.

Câu 22. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số $g(x)=f\left(-x-x^2\right)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?



A. $(-\infty;-1)$. **B.** $\left(-1;\frac{-1}{2}\right)$. **C.** $\left(\frac{-1}{2};+\infty\right)$. **D.** $(-1;0)$.

Lời giải

Chọn B

Từ đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ ta có: $f'(x)<0\Leftrightarrow 0<x<4$ và $f'(x)>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<0\\x>4\end{array}\right.$

Xét hàm số $g(x)=f\left(-x-x^2\right)$ có $g'(x)=(-1-2x)f'\left(-x-x^2\right)$

Để hàm số $g(x)$ nghịch biến thì $g'(x)<0\Rightarrow(-1-2x)f'\left(-x-x^2\right)<0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}-1-2x<0\\f'\left(-x-x^2\right)>0\end{cases}\\\begin{cases}-1-2x>0\\f'\left(-x-x^2\right)<0\end{cases}\end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > \dfrac{-1}{2} \\ \left[\begin{array}{l} -x-x^2 < 0 \\ -x-x^2 > 4 \end{array}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} x < \dfrac{-1}{2} \\ -x-x^2 > 0 \\ -x-x^2 < 4 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > \dfrac{-1}{2} \\ \left[\begin{array}{l} x < -1, x > 0 \\ x \in \varnothing \end{array}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} x < \dfrac{-1}{2} \\ x \in \mathbb{R} \\ -1 < x < 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 0 \\ -1 < x < \dfrac{-1}{2} \end{array}\right.$$

Suy ra hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $\left(-1;\dfrac{-1}{2}\right)$ và $(0;+\infty)$.

Vậy B là đáp án đúng.

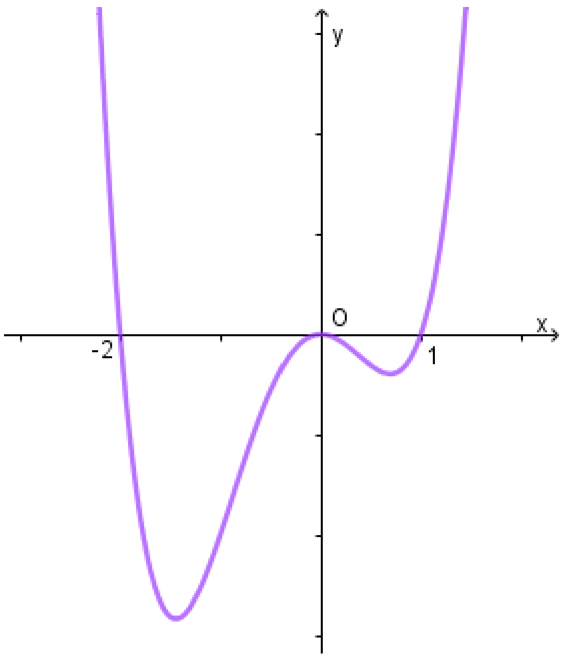
Dạng toán 30. Biết đồ thị hàm số $y = f'(x)$ xét tính đơn điệu của hàm số $y = g(x) = f(u(x))$ **trong bài toán chứa tham số**.

Dạng toán 31. Biết đồ thị hàm số $y = f'(x)$ xét tính đơn điệu của hàm số $y = g(x) = f(u(x)) + h(x)$ **trong bài toán không chứa tham số**.

Dạng toán 32. Biết đồ thị hàm số $y = f'(x)$ xét tính đơn điệu của hàm số $y = g(x) = f(u(x)) + h(x)$ **trong bài toán chứa tham số**.

Dạng toán 33. Biết đồ thị của hàm số $y = f'(x)$, xét tính đơn điệu của hàm số $y = g(x) = f(u(x)) + f(v(x)) + h(x)$ **trong bài toán không chứa tham số.**

Câu 23. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ



Hỏi hàm số $g(x) = f(x+1) + f(2-x) - x^2 + 6x - 3$ đồng biến trên khoảng nào cho dưới đây

A. $(-\infty;0)$ **B.** $(0;3)$ **C.** $(1;2)$ **D.** $(3;+\infty)$

Lời giải

Chọn C

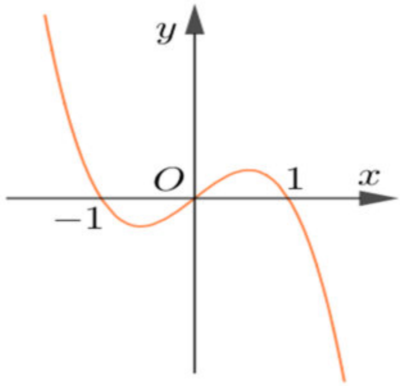
Ta có $g'(x) = f'(x+1) - f'(-2-x) + 6 - 2x \geq 0 \forall x \in K$ ta chỉ cần chọn x sao cho

$$\begin{cases} f'(x+1)\ge 0 \\ f'(2-x)\le 0 \\ 6-2x\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x+1\ge 1 \\ x+1\le -2 \end{array}\right. \\ -2\le 2-x\le 1 \Leftrightarrow 1\le x\le 3 \\ x\le 3 \end{cases}$$ đối chiếu đáp án ta tìm được đáp án C

Dạng toán 34. Biết đồ thị của hàm số $y=f'(x)$, xét tính đơn điệu của hàm số $y=g(x)=f(u(x))+f(v(x))+h(x)$ **trong bài toán chứa tham số.**

Dạng toán 35. Biết đồ thị hàm số $y=f'(x)$ xét tính đơn điệu của hàm số $y=g(x)=\left[f(u(x))\right]^k$ **trong bài toán không chứa tham số.**

Câu 24. Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị $y=f'(x)$ như hình bên dưới.



Hàm số $g(x)=\left[f(2x-1)\right]^3$ nghịch biến trên các khoảng nào trong các khoảng sau

A. $(-1;0)$ **B.** $(0;1)$ **C.** $\left(0;\frac{1}{2}\right)$ **D.** $\left(\frac{1}{2};1\right)$

Lời giải

Chọn C

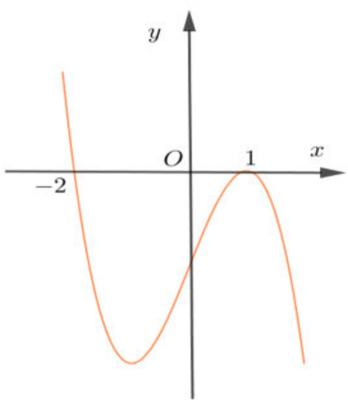
Ta có $g'(x)=6f^2(2x-1).f'(2x-1)$

Do $6f^2(2x-1)\ge 0$ với $\forall x\in\mathbb{R}$ nên để hàm số nghịch biến thì $f'(2x-1)\le 0$

Dựa vào đồ thị hàm số $y=f'(x)$ ta có

Để $f'(2x-1)\le 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-1\ge 1 \\ -1\le 2x-1\le 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\ge 1 \\ 0\le x\le \frac{1}{2} \end{array}\right.$

Câu 25. Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị $y=f'(x)$ như hình bên dưới.



Hàm số $g(x)=\left[f(1-x)\right]^{2019}$ nghịch biến trên các khoảng nào trong các khoảng sau

A. $(-1;5)$. **B.** $(-2;1)$. **C.** $(1;3)$. **D.** $(3;5)$.

Lời giải

Chọn D

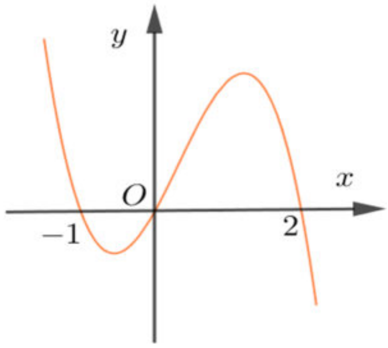
Ta có $g'(x)=-2019f^{2018}(1-x).f'(1-x)$

Do $-2019f^{2018}(1-x)\le 0$ với $\forall x\in\mathbb{R}$ nên để hàm số nghịch biến thì $f'(1-x)\ge 0$

Dựa vào đồ thị hàm số $y=f'(x)$ ta có

Để $f'(1-x)\ge 0\Rightarrow 1-x\le -2\Leftrightarrow x\ge 3$.

Câu 26. Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị $y=f'(x)$ như hình bên dưới và $f(-1)=f(2)=0$



Hàm số $g(x)=\left[f\left(x^2-3\right)\right]^2$ đồng biến trên các khoảng nào trong các khoảng sau

A. $(1;2)$ **B.** $(0;1)$ **C.** $(-1;0)$ **D.** $(-2;-1)$

Lời giải

Chọn C

Ta có $g'(x)=4xf\left(x^2-3\right).f'\left(x^2-3\right)$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(-1)$	$\searrow$	$f(0)$	$\nearrow$	$f(2)$	$\searrow$	$-\infty$

Do $f(-1)=f(2)=0$ nên $f\left(x^2-3\right)\le 0$ với $\forall x\in\mathbb{R}$ để hàm số đồng biến thì $x.f'\left(x^2-3\right)\le 0$

TH1: $x\ge 0$ thì $f'\left(x^3-3\right)\le 0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}-1\le x^2-3\le 0\\ x^2-3\ge 2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-\sqrt{3}\le x\le-\sqrt{2}\\ \sqrt{2}\le x\le\sqrt{3}\\ x\ge\sqrt{5}\\ x\le-\sqrt{5}\end{array}\right.$

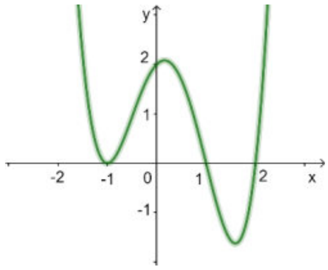
Vì $x\ge 0$ nên $\left[\begin{array}{l}\sqrt{2}\le x\le\sqrt{3}\\ x\ge\sqrt{5}\end{array}\right.$

TH2: $x\le 0$ thì $f'\left(x^3-3\right)\ge 0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}0\le x^2-3\le 2\\ x^2-3\le -1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-\sqrt{5}\le x\le-\sqrt{3}\\ \sqrt{3}\le x\le\sqrt{5}\\ -\sqrt{2}\le x\le\sqrt{2}\end{array}\right.$

Vì $x \le 0$ nên $\left[\begin{array}{l}-\sqrt{5} \le x \le -\sqrt{3} \\ -\sqrt{2} \le x \le 0\end{array}\right.$

Vậy hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $\left(-\sqrt{5};-\sqrt{3}\right)$, $\left(-\sqrt{2};0\right)$, $\left(\sqrt{2};\sqrt{3}\right)$, $\left(\sqrt{5};+\infty\right)$.

Câu 27. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ có dạng như hình vẽ. Hàm số $y = g(x) = \left[f(x-2)\right]^3$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây



A. $(1;2)$ **B.** $(3;4)$ **C.** $(-\infty;-1)$ **D.** $(4;+\infty)$

Lời giải

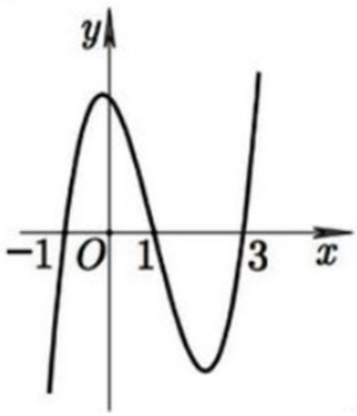
Chọn B

Ta có $g'(x) = 3\left[f(x-2)\right]^2 f'(x-2)$, hàm số $y = g(x) = \left[f(x-2)\right]^3$ nghịch biến khi và chỉ khi $g'(x) \le 0 \Leftrightarrow f'(x-2) \le 0 \Leftrightarrow 1 \le x-2 \le 2 \Leftrightarrow 3 \le x \le 4$

Dạng toán 36. Biết đồ thị hàm số $y = f'(x)$ xét tính đơn điệu của hàm số $y = g(x) = \left[f(u(x))\right]^k$ **trong bài toán chứa tham số**.

Dạng toán 37. Biết đồ thị hàm số $y = f'(u(x))$ xét tính đơn điệu của hàm số $y = f(x)$ **trong bài toán không chứa tham số**.

Câu 28. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f'\left(2x+\frac{3}{2}\right)$ như hình vẽ bên.



Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $\left(-\frac{1}{2};\frac{7}{2}\right)$. **B.** $\left(-\frac{5}{4};\frac{1}{4}\right)$. **C.** $\left(\frac{3}{4};+\infty\right)$. **D.** $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn A

Ta cần giải bất phương trình $y' = f'(x) > 0$.

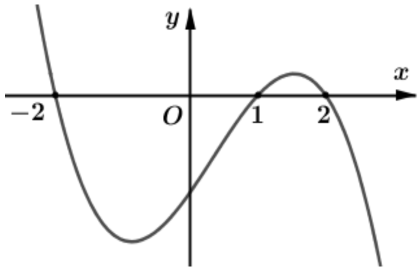
Dựa vào đồ thị $y = f'\left(2x+\frac{3}{2}\right)$. Ta có $f'\left(2x+\frac{3}{2}\right) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-1 < x < 1 \\ x > 3\end{array}\right.$ (*)

Đặt $t = 2x + \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}(2x-3)$.

Khi đó $(*) \Leftrightarrow f'(t) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1 < \dfrac{2t-3}{4} < 1 \\ \dfrac{2t-3}{4} > 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\dfrac{1}{2} < t < \dfrac{7}{2} \\ t > \dfrac{15}{2} \end{array}\right.$.

Do đó hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên các khoảng $\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{7}{2}\right)$ và $\left(\dfrac{15}{2};+\infty\right)$.

Câu 29. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là hàm số $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$. Biết rằng hàm số $y = f'(3x-1)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?



A. $(-\infty;-6)$. **B.** $(1;5)$. **C.** $(2;6)$. **D.** $(-\infty;-7)$.

Lời giải

Chọn D

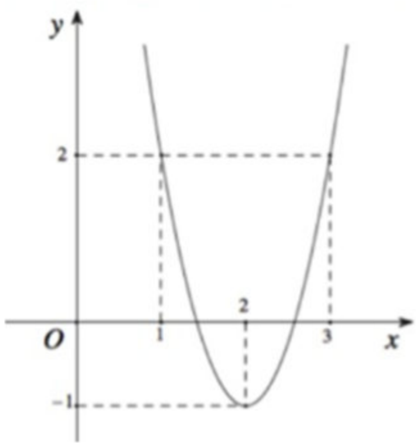
Dựa vào đồ thị hàm số $y = f'(3x-1)$ ta có: $f'(3x-1) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < -2 \\ 1 < x < 2 \end{array}\right.$

Đặt $t = 3x - 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{t+1}{3}$

Suy ra: $f'(t) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{t+1}{3} < -2 \\ 1 < \dfrac{t+1}{3} < 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t+1 < -6 \\ 3 < t+1 < 6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t < -7 \\ 2 < t < 5 \end{array}\right.$

Do đó: Hàm số $f(x)$ đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-7)$ và $(2;5)$

Câu 30. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f'\left(-2x+\dfrac{7}{2}\right)+2$ như hình bên



Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

A. $\left(\dfrac{1}{4};\dfrac{9}{4}\right)$. **B.** $\left(\dfrac{9}{4};+\infty\right)$. **C.** $\left(-\dfrac{5}{2};\dfrac{3}{2}\right)$. **D.** $\left(-\infty;-\dfrac{5}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn C

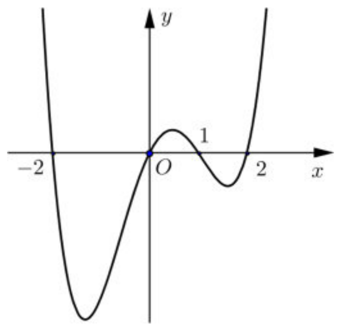
Quan sát đồ thị hàm số $y=f'\left(-2x+\frac{7}{2}\right)+2$ ta có

$f'\left(-2x+\frac{7}{2}\right)<0 \Leftrightarrow f'\left(-2x+\frac{7}{2}\right)+2<2 \Leftrightarrow 1<x<3(*)$ (đồ thị hàm số nằm dưới đường thẳng $y=2$ khi và chỉ khi $x\in(1;3)$)

Đặt $t=-2x+\frac{7}{2} \Leftrightarrow x=\frac{7-2t}{4}$ khi đó (*) $\Leftrightarrow f'(t)<0 \Leftrightarrow 1<\frac{7-2t}{4}<3 \Leftrightarrow -\frac{5}{2}<t<\frac{3}{2}$

điều đó chứng tỏ hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng $\left(-\frac{5}{2};\frac{3}{2}\right)$

Câu 31. Cho đồ thị hàm số $y=f'\left(x^3+1\right)$ như hình vẽ. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trong khoảng nào trong các khoảng sau?



A. $(-2;2)$. **B.** $(2;5)$. **C.** $(5;10)$. **D.** $(10;+\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Từ đồ thị suy ra $f'\left(x^3+1\right)<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-2<x<0\\ 1<x<2\end{array}\right.$.

Đặt $t=x^3+1 \Leftrightarrow x=\sqrt[3]{t-1}$.

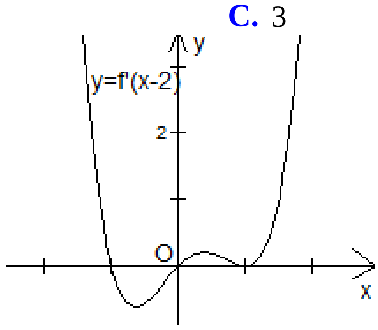
Suy ra $f'(t)<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-2<\sqrt[3]{t-1}<0\\ 1<\sqrt[3]{t-1}<2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-8<t-1<0\\ 1<t-1<8\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-7<t<1\\ 2<t<9\end{array}\right.$.

Vậy hàm số $f(x)$ nghịch biến trong các khoảng $(-7;1)$ và $(2;9)$.

Dạng toán 38. Biết đồ thị hàm số $y=f'(u(x))$ xét tính đơn điệu của hàm số $y=f(x)$ **trong bài toán chứa tham số**.

Câu 32. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, hàm số $y=f'(x-2)$ có đồ thị như hình dưới. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số để hàm số $g(x)=f\left(x^2-8x+m\right)$ nghịch biến trên khoảng $\left(4;\frac{9}{2}\right)$.

A. 1 **B.** 2. **C.** 3 **D.** 4.



Lời giải

Chọn A

Ta có: đồ thị hàm số $y = f'(x-2)$ là phép tịnh tiến của đồ thị hàm số $y = f'(x)$ sang phải hai đơn vị. Khi đó hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-3		-2		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	

Mặt khác: $g(x) = f(x^2 - 8x + m) \Rightarrow g'(x) = (2x-8) f'(x^2 - 8x + m)$

$g'(x) = (2x-8) f'(x^2 - 8x + m) < 0 \forall x \in (4; \frac{9}{2})$

$$-3 \le x^2 - 8x + m \le -2 \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2 + 8x - 3 \le m; \forall x \in (4; \frac{9}{2}) \\ -x^2 + 8x - 2 \ge m; \forall x \in (4; \frac{9}{2}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m \ge 13 \\ m \le 13,75 \end{cases} \Leftrightarrow m = 13.$$

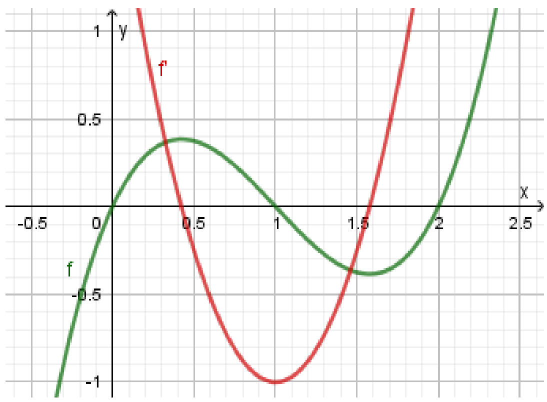
Do đó có 1 giá nguyên của m để $g(x) = f(x^2 - 8x + m)$ nghịch biến trên khoảng $\left(4; \frac{9}{2}\right)$.

Dạng toán 39. Biết đồ thị của hàm số $y = f'(x)$, xét tính đơn điệu của hàm số $y = g(x).f(x)$ **trong bài toán không chứa tham số.**

Dạng toán 40. Biết đồ thị của hàm số $y = f'(x)$, xét tính đơn điệu của hàm số $y = g(x).f(x)$ **trong bài toán chứa tham số.**

Dạng toán 41. Biết đồ thị của hàm số $y = f'(x)$, xét tính đơn điệu của hàm số $y = g(x).f(x)$ **trong bài toán không chứa tham số.**

Câu 33. Cho hàm số $y = f(x), y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Trên khoảng $(0;2)$, hàm số $y = e^{-x}.f(x)$ có bao nhiêu khoảng đồng biến?



A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

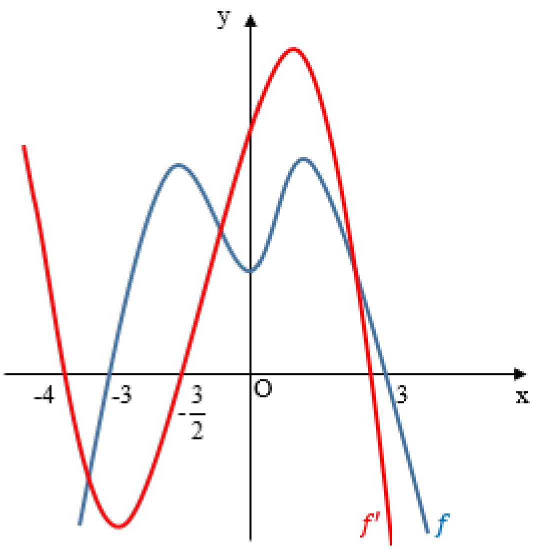
$y = e^{-x}.f(x) \to y' = e^{-x}\left(f'(x) - f(x)\right)$

Dựa vào đồ thị ta có:

$$y' = 0 \leftrightarrow f'(x) = f(x) \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = a, 0 < a < \frac{1}{2} \\ x = b, 1 < b < \frac{3}{2} \end{array}\right.$$

Suy ra hàm số đồng biến trên các khoảng $(0;a),(b;2)$.

Câu 34. Cho hàm số $y = f(x)$, $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Trên khoảng $(-4;3)$, hàm số $y = e^{-x+10} f(x)$ có bao nhiêu khoảng nghịch biến?



A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y'=-e^{-x+10}f(x)+f'(x).e^{-x+10}=e^{-x+10}\left[-f(x)+f'(x)\right]$

Dựa vào đồ thị, ta có: $y'=0\Leftrightarrow f'(x)=f(x)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=a,-4<a<-3\\ x=b,-\frac{3}{2}<b<0\\ x=c,0<c<3\end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	-4		a		-3		$\frac{-3}{2}$		b		0		c		3
y'		+	0	-		-		-	0	+		+	0	-	
y		↗		↘				↘		↗		↗		↘	

Dựa vào bảng biến thiên suy ra hàm số $y=e^{-x+10}f(x)$ có hai khoảng nghịch biến $(a,b);(c;3)$

Dạng toán 42. Biết đồ thị của hàm số $y=f'(x)$, xét tính đơn điệu của hàm số $y=g(x).f(x)$ **trong bài toán chứa tham số.**

Dạng toán 43. Biết đồ thị của hàm số $y=f'(x)$, xét tính đơn điệu của hàm số $y=\frac{g(x)}{f(x)}$ hoặc $y=\frac{f(x)}{g(x)}$ **trong bài toán không chứa tham số.**

Dạng toán 44. Biết đồ thị của hàm số $y=f'(x)$, xét tính đơn điệu của hàm số $y=\frac{g(x)}{f(x)}$ hoặc $y=\frac{f(x)}{g(x)}$ **trong bài toán chứa tham số.**

PHẦN 4: Biết BBT của hàm số $y=f'(x)$

Dạng toán 45. Biết BBT hàm số $y=f'(x)$ xét tính đơn điệu của hàm số $y=g(x)=f(x)+h(x)$ **trong bài toán không chứa tham số.**

Câu 35. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-2		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Đặt

. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. Hàm số $y = g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;1)$.

B. Hàm số $y = g(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;2)$.

C. Hàm số $y = g(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;1)$.

D. Hàm số $y = g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-2;1)$.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định của hàm số $y = g(x)$ là $\mathbb{R}$

Ta có:

$$y = g(x) = f(x) + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 \Rightarrow y' = g'(x) = f'(x) + x^2 - x$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right. \; ; \; x^2 - x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right.$$

Bảng xét dấu của $y' = g'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-2		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$x^2 - x$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$y' = g'(x)$		Chưa xác định dấu		$+$	0	$-$	0	$+$	

Từ bảng xét dấu của $y' = g'(x)$ suy ra:

Hàm số $y = g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0;1)$.

Hàm số $y = g(x)$ đồng biến trên các khoảng $(-2;0)$ và $(1;+\infty)$ mà $(1;2) \subset (1;+\infty)$

nên đáp án B đúng.

Câu 36. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên R và bảng xét dấu của $y = f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hỏi hàm số $g(x) = f(x) - \ln(x^2 + x + 1)$ nghịch biến trên khoảng nào?

A. $(-\infty;0)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $(-1;+\infty)$. **D.** $(-1;0)$.

Lời giải

Chọn B

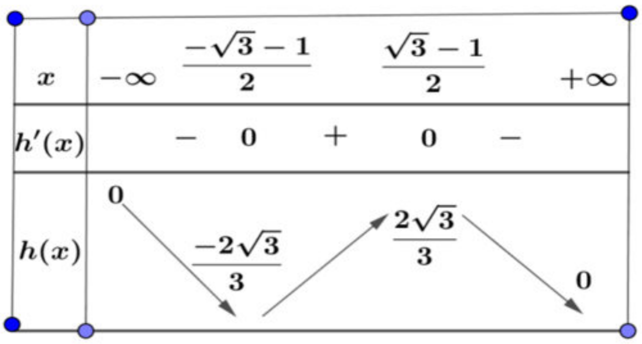
Tập xác định của hàm $g(x)$ là $D = R$

Ta có $g'(x) = f'(x) - \dfrac{2x+1}{x^2+x+1}$.

Đặt $h(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+x+1} \Rightarrow h'(x) = \dfrac{-2x^2-2x+1}{\left(x^2+x+1\right)^2}$.

Ta có $h'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2} \\ x = \dfrac{-\sqrt{3}-1}{2} \end{array}\right.$

Bảng biến thiên của hàm số $y = h(x)$ như sau:



Ta có $h(-1) = -1; h(0) = h(1) = 1; h\left(-\dfrac{1}{2}\right) = 0.$

Từ bảng biến thiên có $h(x) > 1, \forall x \in (0;1); f'(x) < 0, \forall x \in (-\infty;-1) \cup (0;1)$.

Nên suy ra $f'(x) - h(x) < 0, \forall x \in (0;1) \Leftrightarrow g'(x) < 0, \forall x \in (0;1)$.

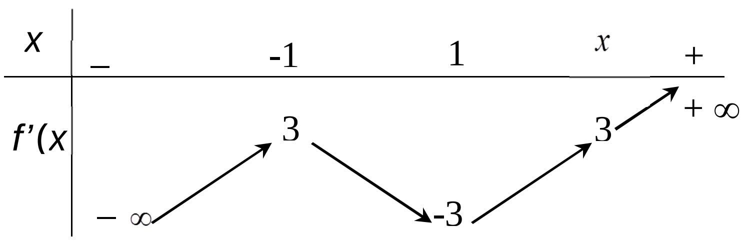
Vậy hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(0;1)$.

Từ bảng biến thiên có $h(x) \in (-1;0)$; $f'(x) > 0, \forall x \in \left(-1;\dfrac{-1}{2}\right)$.

$\Rightarrow f'(x) - h(x) > 0, \forall x \in \left(-1;\dfrac{-1}{2}\right)$. Do đó hàm số $y = g(x)$ đồng biến trên $\left(-1;\dfrac{-1}{2}\right)$.

Lại có trong các miền $(-\infty;0); (-1;+\infty); (-1;0)$ đều chứa miền $\left(-1;-\dfrac{1}{2}\right)$ nên loại A,C,**D.**

Câu 37. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và bảng biến thiên của $y = f'(x)$ như sau:



Hàm số $g(x) = f(x) - 3x$ đồng biến trên khoảng nào?

A. $(2;2019)$ **B.** $(-2019;-2)$ **C.** $(1;2)$ **D.** $(-1;1)$

Lời giải:

Chọn A

Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$

Ta có: $g'(x)=f'(x)-3$

Hàm số $y=g(x)$ đồng biến $\Leftrightarrow g'(x)\geq 0$

$\Leftrightarrow f'(x)-3\geq 0 \Leftrightarrow f'(x)\geq 3 \Leftrightarrow x\geq 2.$

Dạng toán 46. Biết BBT hàm số $y=f'(x)$ xét tính đơn điệu của hàm số $y=g(x)=f(x)+h(x)$ **trong bài toán chứa tham số.**

Câu 38. Cho f(x) có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và bảng biến thiên y = f'(x) được cho như sau:

x	$-\infty$		-5		-2		1		$+\infty$
f'(x)	$+\infty$	↘	5	↗	15	↘	5	↗	$+\infty$

Có bao nhiêu giá trị m nguyên dương để hàm số g(x) = f(x) - $\ln\left(x^2+1\right)$ - mx đồng biến trên $[-1;1]$.

A. 5 **B.** 6 **C.** 4 **D.** 7

Lời giải

Chọn C

Ta có: g(x) = f(x) - $\ln\left(x^2+1\right)$ - mx có txđ $D=\mathbb{R}$

$g'(x) = f'(x) - \dfrac{2x}{x^2+1} - m$

Hàm số g(x) đồng biến trên $[-1;1] \Leftrightarrow g'(x) \geq 0 \forall x\in[-1;1]$

$\Leftrightarrow f'(x)-\dfrac{2x}{x^2+1}-m\geq 0\ \forall x\in[-1;1]$

$\Leftrightarrow m\leq f'(x)-\dfrac{2x}{x^2+1}\forall x\in[-1;1](1)$

$do: f'(x)\geq 5(bbt)\forall x\in[-1;1];\dfrac{2x}{x^2+1}\leq 1\forall x\in[-1;1]$

$\Rightarrow f'(x)-\dfrac{2x}{x^2+1}\geq 4\forall x\in[-1;1]$ dấu “=” xảy ra khi “x=1”

Vậy (1) $\Leftrightarrow m\leq 4$.

Dạng toán 47. Biết BBT hàm số $y=f'(x)$ xét tính đơn điệu của hàm số $y=g(x)=f(u(x))$ **trong bài toán không chứa tham số.**

Câu 39. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm như hình vẽ sau

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Hỏi hàm số $y=g(x)=f\left(x^2+2x\right)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây

A. $(-\infty;0)$. **B.** $(-2;1)$. **C.** $(-\infty;-2)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Ta có $y'=g'(x)=\left[f\left(x^2+2x\right)\right]'=\left(x^2+2x\right)'.f'\left(x^2+2x\right)=(2x+2).f'\left(x^2+2x\right)$.

Ta có $x^2+2x=(x+1)^2-1\geq -1$ với $\forall x\in\mathbb{R}$ dựa vào bảng xét dấu trên ta có $f'\left(x^2+2x\right)\leq 0$ với $\forall x\in\mathbb{R}$ dấu $"="$ chỉ xảy ra tại $x=-1$.

Từ đó $y' \ge 0 \Leftrightarrow (2x+2).f'(x^2+2x) \ge 0 \Leftrightarrow 2x+2 \le 0 \Leftrightarrow x \le -1$ nên hàm số đồng biến trên $(-\infty;-1)$.

Mặt khác $(-\infty;-2) \subset (-\infty;-1)$ nên phương án **C** thỏa mãn bài toán.

Câu 40. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-1		1		4		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y = f(2-e^x)$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

A. $(-\infty;1)$. **B.** $(1;4)$. **C.** $(0;\ln 3)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $g(x) = f(2-e^x)$, hàm số xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $g'(x) = -e^x f'(2-e^x)$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2-e^x = -1 \\ 2-e^x = 1 \\ 2-e^x = 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \ln 3 \\ x = 0 \\ e^x = -2 \text{ (vô nghiệm)} \end{array}\right.$$

Bảng xét dấu đạo hàm của hàm số $y = g(x)$ như sau:

x	$-\infty$		0		$\ln 3$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Suy ra hàm số $y = g(x)$ đồng biến trên các khoảng $(-\infty;0)$; $(\ln 3;+\infty)$.

Vậy chọn phương án **D**.

Câu 41. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên R và có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây:

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số $g(x) = f(|x-2|)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây:.

A. $(3;+\infty)$. **B.** $(2;3)$. **C.** $(-1;2)$. **D.** $(-\infty;-1)$.

Lời giải

Chọn C

- Do $h(x) = f(|x|)$ là hàm chẵn, đồ thị hàm số $y = h(x)$ nhận trục tung làm trục đối xứng nên từ bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ suy ra bảng biến thiên của hàm số $h(x) = f(|x|)$ như sau:

x	$-\infty$		-3		0		3		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
$h(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$		$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$

- Tịnh tiến đồ thị hàm số $h(x)=f(|x|)$ sang phải (theo trục hoành) 2 đơn vị ta được đồ thị hàm số $g(x)=f(|x-2|)$. Suy ra bảng biến thiên của hàm số $g(x)=f(|x-2|)$:

x	$-\infty$ $+\infty$		-1		2		5		
$g'(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$		$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$

Từ bảng biến thiên của hàm số $g(x)=f(|x-2|)$ ta thấy hàm số $g(x)=f(|x-2|)$ nghịch biến trên $(-1;2)$ và $(5;+\infty)$ nên ta chọn đáp án

C.

Câu 42. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Hàm số $y=f(|f(x)|)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(-\infty;-2)$. **B.** $(-1;1)$. **C.** $(2;+\infty)$. **D.** $(0;2)$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $g(x)=f(|f(x)|)\Rightarrow g'(x)=f'(|f(x)|).\dfrac{f(x).f'(x)}{|f(x)|}$

Do đó $g'(x)$ không xác định khi $f(x)=0$ hay $x=0$.

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f'(x)=0\\ f'(|f(x)|)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pm1\\ |f(x)|=1\\ |f(x)|=-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pm1\\ f(x)=\pm1\end{array}\right.\Leftrightarrow x=\pm1.$$

Từ bảng biến thiên của $f(x)$ ta có $|f(x)|\in[0;1],\ \forall x\in\mathbb{R}$. Suy ra $f'(|f(x)|)\geq0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Ta có bảng xét dấu của $g'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$\|$	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$-$	$\|$	$-$	0	$+$	$\|$	$+$	
$g'(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	

Từ đó suy ra $g(x)$ đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty;-1)$ và $(0;1)$.

Câu 43. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $y=f'(x)$ có bảng xét dấu như sau

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $g(x)=f(2\cos x+1)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $\left(0;\frac{\pi}{6}\right)$. **B.** $\left(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{3}\right)$. **C.** $\left(\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}\right)$. **D.** $\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$.

Lời giải

Chọn C

Nhận thấy các tập hợp trong các đáp án đều là tập con của tập $(0;\pi)$ nên ở bài này ta xét trên khoảng $(0;\pi)$
.

Hàm số $g(x)$ đồng biến $\Leftrightarrow g'(x)\ge 0$ và $g'(x)=0$ tại hữu hạn điểm

$\Leftrightarrow -2\sin x.f'(2\cos x+1)\ge 0 \Leftrightarrow f'(2\cos x+1)\le 0$ (do $\sin x>0,\forall x\in(0;\pi)$)

$\Leftrightarrow 1\le 2\cos x+1\le 2 \Leftrightarrow 0\le \cos x\le \frac{1}{2}\Leftrightarrow \frac{\pi}{3}\le x\le\frac{\pi}{2}$.

Dạng toán 48. Biết BBT hàm số $y=f'(x)$ xét tính đơn điệu của hàm số $y=g(x)=f(u(x))$ **trong bài toán chứa tham số.**

Câu 44. Cho hàm số $y=f(x)$ cáo đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu như sau

x	-∞		-2		1		2		4		+∞
y'		+	0	+	0	-	0	-	0	+	

Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m\in(0;2020)$ để hàm số $g(x)=f(x^2-x+m)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;0)$?

A. 2017. **B.** 2018. **C.** 2016. **D.** 2015.

Lời giải

Chọn C

$g'(x)=(2x-1).f'(x^2-x+m)$

Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(-1;0)\Leftrightarrow g'(x)\le 0,\forall x\in(-1;0)$ $(*)$

Vì $2x-1<0,\forall x\in(-1;0)$ nên $(*)\Leftrightarrow f'(x^2-x+m)\ge 0,\forall x\in(-1;0)$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-x+m\le 1,\forall x\in(-1;0)\\ x^2-x+m\ge 4,\forall x\in(-1;0)\end{array}\right.$$

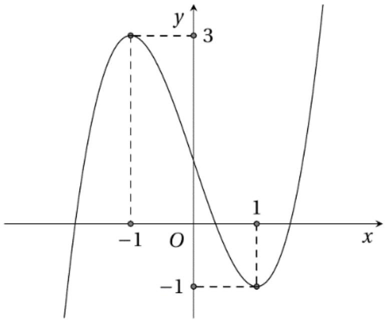
$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\le -x^2+x+1,\forall x\in(-1;0)\\ m\ge -x^2+x+4,\forall x\in(-1;0)\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-x^2+x+1\ge m,\forall x\in(-1;0)\\ -x^2+x+4\le m,\forall x\in(-1;0)\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-1\ge m\\ 4\le m\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\le -1\\ m\ge 4\end{array}\right.$$

Vậy $m\in\{4;5;6;...;2019\}$. Chọn đáp số
C.

Câu 45. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như bên.



Số giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=f\left(x^2+x+m\right)$ nghịch biến trên $(0;1)$ là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y'=(2x+1)f'\left(x^2+x+m\right)$.

Hàm số $y=f\left(x^2+x+m\right)$ nghịch biến trên $(0;1)$ khi và chỉ khi $y'\le 0,\forall x\in(0;1)$.

Vì $2x+1>0,\forall x\in(0,1)$ nên điều này tương đương với

$$f'\left(x^2+x+m\right)\le 0,\forall x\in(0;1)\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+x+m\ge -1,\forall x\in(0;1)\\x^2+x+m\le 1,\forall x\in(0;1).\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+x\ge -1-m,\forall x\in(0;1)\\x^2+x\le 1-m,\forall x\in(0;1).\end{cases}$$

Ta có hàm số $g(x)=x^2+x$ luôn đồng biến trên $[0;1]$; do đó, ràng buộc trên tương đương với

$$\begin{cases}-1-m\le g(0)=0\\1-m\ge g(1)=2\end{cases}\Leftrightarrow m=-1.$$

Vậy có duy nhất một giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 46. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-1)^2\left(x^2-2x\right)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên $m<100$ để hàm số $g(x)=f\left(x^2-8x+m\right)$ đồng biến trên khoảng $(4;+\infty)$?

A. 18. **B.** 82. **C.** 83. **D.** 84.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f'(x)=(x-1)^2\left(x^2-2x\right)>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<0\\x>2\end{array}\right.$.

Xét $g'(x)=(2x-8).f'\left(x^2-8x+m\right)$. Để hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(4;+\infty)$ khi và chỉ khi

$g'(x)\ge 0,\ \forall x>4$

$\Leftrightarrow(2x-8).f'\left(x^2-8x+m\right)\ge 0,\ \forall x>4$

$\Leftrightarrow f'\left(x^2-8x+m\right)\ge 0,\ \forall x>4$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-8x+m\le 0,\ \forall x\in(4;+\infty)\\x^2-8x+m\ge 2,\ \forall x\in(4;+\infty)\end{array}\right.\Leftrightarrow m\ge 18.$$

Vậy $18\le m<100$.

Câu 47. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x(x-1)^2\left(x^2+mx+9\right)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên dương m để hàm số $g(x)=f(3-x)$ đồng biến trên khoảng $(3;+\infty)$?

A. 5. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 8.

Lời giải

Chọn B

Từ giả thiết suy ra $f'(3-x)=(3-x)(2-x)^2\left[(3-x)^2+m(3-x)+9\right]$.

Ta có $g'(x)=-f'(3-x)$.

Để hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(3;+\infty)$ khi và chỉ khi $g'(x)\ge 0,\ \forall x\in(3;+\infty)$

$\Leftrightarrow f'(3-x)\le 0,\ \forall x\in(3;+\infty)$

$\Leftrightarrow (3-x)(2-x)^2\left[(3-x)^2+m(3-x)+9\right]\le 0,\ \forall x\in(3;+\infty)$

$\Leftrightarrow m\le \dfrac{(x-3)^2+9}{x-3},\ \forall x\in(3;+\infty)$

$\Leftrightarrow m\le \min\limits_{(3;+\infty)} h(x)$ với $h(x)=\dfrac{(x-3)^2+9}{x-3}$.

Ta có $h(x)=\dfrac{(x-3)^2+9}{x-3}=(x-3)+\dfrac{9}{x-3}\ge 2\sqrt{(x-3).\dfrac{9}{x-3}}=6$.

Vậy suy ra $m\le 6\xrightarrow{m\in\mathbb{Z}^+} m\in\{1;2;3;4;5;6\}$.

Câu 48. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2(x-1)(x^2+mx+5)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên âm m để hàm số $g(x)=f(x^2)$ đồng biến trên $(1;+\infty)$?

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 7.

Lời giải

Chọn B

Từ giả thiết suy ra $f'(x^2)=x^4(x^2-1)(x^4+mx^2+5)$.

Ta có $g'(x)=2xf'(x^2)$.

Để hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$ khi và chỉ khi $g'(x)\ge 0,\ \forall x\in(1;+\infty)$

$\Leftrightarrow 2xf'(x^2)\ge 0,\ \forall x>1$

$\Leftrightarrow 2x.x^4(x^2-1)(x^4+mx^2+5)\ge 0,\ \forall x>1$

$\Leftrightarrow x^4+mx^2+5\ge 0,\ \forall x>1$

$\Leftrightarrow m\ge -\dfrac{x^4+5}{x^2},\ \forall x>1$

$\Leftrightarrow m\ge \max\limits_{(1;+\infty)} h(x)$ với $h(x)=-\dfrac{x^4+5}{x^2}$.

Khảo sát hàm $h(x)=-\dfrac{x^4+5}{x^2}$ trên $(1;+\infty)$ ta được $\max\limits_{(1;+\infty)} h(x)=-2\sqrt{5}$.

Suy ra $m\ge -2\sqrt{5}\xrightarrow{m\in\mathbb{Z}^-} m\in\{-4;-3;-2;-1\}$.

Câu 49. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x(x-1)^2(3x^4+mx^3+1)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên âm m để hàm số $g(x)=f(x^2)$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$?

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Chọn B

Từ giả thiết suy ra $f'(x^2)=x^2(x^2-1)^2(3x^8+mx^6+1)$.

Ta có $g'(x)=2xf'(x^2)$. Để hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$ khi và chỉ khi

$g'(x)\ge 0,\ \forall x\in(0;+\infty)\Leftrightarrow 2xf'(x^2)\ge 0,\ \forall x\in(0;+\infty)$

$\Leftrightarrow 2x.x^2\left(x^2-1\right)^2\left(3x^8+mx^6+1\right)\geq 0,\ \forall x\in(0;+\infty)$

$\Leftrightarrow 3x^8+mx^6+1\geq 0,\ \forall x\in(0;+\infty)$

$\Leftrightarrow m\geq -\dfrac{3x^8+1}{x^6},\ \forall x\in(0;+\infty)$

$\Leftrightarrow m\geq \max\limits_{(0;+\infty)} h(x)$ với $h(x)=-\dfrac{3x^8+1}{x^6}$.

Khảo sát hàm $h(x)=-\dfrac{3x^8+1}{x^6}$ trên $(0;+\infty)$ ta được $\max\limits_{(0;+\infty)} h(x)=-4.$

Suy ra $m\geq -4\xrightarrow{m\in\mathbb{Z}^-} m\in\{-4;-3;-2;-1\}$.

Câu 50. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x)=f(x+m)$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$.

A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

Từ giả thiết suy ra hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên các khoảng $(-1;1)$, $(1;3)$ và liên tục tại $x=1$ nên đồng biến trên $(-1;3)$.

Ta có $g'(x)=f'(x+m)$ và $x\in(0;2)\Leftrightarrow x+m\in(m;m+2)$.

$g(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$ $\Leftrightarrow (m;2+m)\subset(-1;3)\Leftrightarrow \begin{cases} m\geq -1 \\ 2+m\leq 3\end{cases}\Leftrightarrow -1\leq m\leq 1$.

Vì $m\in\mathbb{Z}$ nên m có 3 giá trị là $m=-1; m=0; m=1$.

Câu 51. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x)=f(x+m)$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$.

A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

Từ giả thiết suy ra hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên các khoảng $(-1;1)$, $(1;3)$ và liên tục tại $x=1$ nên đồng biến trên $(-1;3)$.

Ta có $g'(x)=f'(x+m)$ và $x\in(0;2)\Leftrightarrow x+m\in(m;m+2)$.

$g(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$ $\Leftrightarrow (m;2+m)\subset(-1;3)\Leftrightarrow \begin{cases} m\geq -1 \\ 2+m\leq 3\end{cases}\Leftrightarrow -1\leq m\leq 1$.

Vì $m\in\mathbb{Z}$ nên m có 3 giá trị là $m=-1; m=0; m=1$.

Câu 52. Cho hàm số $y=f(x)$ là một hàm đa thức và có bảng xét dấu của $f'(x)$ như hình bên dưới:

x	$-\infty$		1		3		$-\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = f(\sqrt{x-2}+m)$ (1) nghịch biến trên khoảng $(11;25)$.

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t = \sqrt{x-2}+m$, với $x \in (11;25)$ thì $t \in (3+m;5+m)$, hàm số trở thành: $y = f(t)$ (2)

Dễ thấy x và t cùng chiều biến thiên nên hàm (1) nghịch biến trên $(11;25)$ thì hàm (2) nghịch biến trên $(3+m;5+m)$.

Dựa vào bảng xét dấu của hàm $f'(x)$ suy ra hàm $f(t)$ nghịch biến trên khoảng $(1;3)$. Do đó hàm $f(t)$ nghịch biến trên $(3+m;5+m)$ khi và chỉ khi $\begin{cases} m+3 \ge 1 \\ m+5 \le 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \ge -2 \\ m \le -2 \end{cases} \Leftrightarrow m=-2$

Vậy có duy nhất một giá trị nguyên của tham số thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Dạng toán 49. Biết BBT hàm số $y = f'(x)$ xét tính đơn điệu của hàm số $y = g(x) = f(u(x)) + h(x)$ **trong bài toán không chứa tham số.**

Câu 53. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên R. Bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số $g(x) = f(1-x^2+x^3)+x^3-x^2-5$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $\left(0;\frac{1}{3}\right)$. **B.** $(-\infty;0)$. **C.** $\left(0;\frac{2}{3}\right)$. **D.** $\left(\frac{2}{3};+\infty\right)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $g'(x) = (3x^2-2x).f'(1-x^2+x^3)+3x^2-2x.$

$\Leftrightarrow g'(x) = (3x^2-2x)\left[f'(1-x^2+x^3)+1\right].$

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $f'(x) \Rightarrow f'(x) \ge -1\ \forall x \in R$

$\Rightarrow f'(1-x^2+x^3)+1 \ge 0\ \forall x \in R$

Xét $g'(x) \le 0 \Rightarrow 3x^2-2x \le 0 \Leftrightarrow 0 \le x \le \frac{2}{3}.$

Câu 54. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		1		2		3		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $g(x) = f(3x+1)-x^3+3x$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $\left(\frac{1}{4};\frac{1}{3}\right)$. **B.** $\left(-2;\frac{2}{3}\right)$. **C.** $\left(\frac{2}{3};2\right)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Cách 1

Ta có $y' = 3f'(3x+1)-3x^2+3 = 3\left[f'(3x+1)-x^2+1\right].$

$y' \ge 0 \Leftrightarrow f'(3x+1) \ge x^2 - 1$

Ta có

$x^2 - 1 \le 0 \Leftrightarrow -1 \le x \le 1$

$$f'(3x+1) \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x+1 \ge 4 \\ 1 \le 3x+1 \le 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \ge 1 \\ 0 \le x \le \dfrac{2}{3} \end{array}\right.$$

Suy ra với $0 \le x \le \dfrac{2}{3}$ thì $f'(3x+1) \ge 0 \ge x^2 - 1$.

Suy ra hàm số $y = f(3x+1) - x^3 + 3x$ đồng biến trên khoảng $\left(0; \dfrac{2}{3}\right)$

Mà $\left(\dfrac{1}{4}; \dfrac{1}{3}\right) \subset \left(0; \dfrac{2}{3}\right)$ nên chọn đáp án **A.**

Cách 2

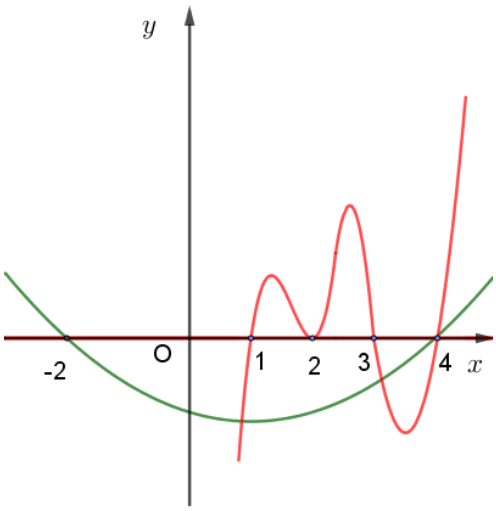
Ta có $y' = 3f'(3x+1) - 3x^2 + 3 = 3\left[f'(3x+1) - x^2 + 1\right]$.

Đặt $t = 3x+1 \Rightarrow x = \dfrac{t-1}{3}$

$y' \ge 0 \Leftrightarrow f'(3x+1) \ge x^2 - 1 \Leftrightarrow f'(t) \ge \dfrac{t^2 - 2t - 8}{9}$

Vẽ đồ thị hàm số $g(t) = \dfrac{t^2 - 2t - 8}{9}$

Từ bảng biến thiên ta có đồ thị $f'(t)$.



Từ đồ thị ta có $f'(t) \ge \dfrac{t^2 - 2t - 8}{9}$ khi $1 < t < 3 \Leftrightarrow 1 < 3x+1 < 3 \Leftrightarrow 0 < x < \dfrac{2}{3}$

Lời bình: Do hàm $f(x)$ chưa biết nên

+ Phương án B sai.

+ Phương án C có thể đúng

+ Phương án D có thể đúng.

Do đó, để chắc chắn chỉ có một phương án đúng thì nên điều chỉnh phương án C, D thành

C. $\left(\dfrac{1}{3}; 1\right)$.

D. $(-\infty; 0)$.

ĐỀ XUẤT SỬA LỜI GIẢI THÀNH

Ta có: $g'(x) = 3\left[f'(3x+1) + (1 - x^2)\right]$

Có: $f'(3x+1)=0 \Leftrightarrow x=0; x=\frac{1}{3}; x=\frac{2}{3}; x=1.$

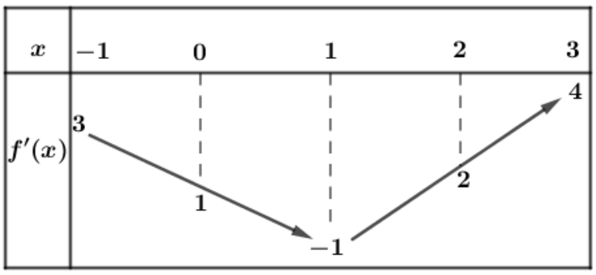
$1-x^2=0 \Leftrightarrow x=\pm 1.$

Bảng xét dấu của $g'(x)$

	$-\infty$		0		-1		$\frac{1}{3}$		$\frac{2}{3}$		1		$+\infty$
$f'(3x+1)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$1-x^2$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$g'(x)$		$-$		Không XĐ được dấu		$+$		$+$		Không XĐ được dấu		Không XĐ được dấu	

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-1;\frac{1}{3}\right)$ và $\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right) \Rightarrow$ Chọn A.

Câu 55. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ.



Hàm số $g(x)=f\left(1-\frac{x}{2}\right)+x$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

A. $(-4;-2)$. **B.** $(-2;0)$. **C.** $(0;2)$. **D.** $(2;4)$.

Lời giải

Chọn A

Xét $g(x)=f\left(1-\frac{x}{2}\right)+x$. Ta có $g'(x)=-\frac{1}{2}f'\left(1-\frac{x}{2}\right)+1$

Xét $g'(x)\le 0 \Leftrightarrow f'\left(1-\frac{x}{2}\right)\ge 2$

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ ta có:

+) TH1: $f'\left(1-\frac{x}{2}\right)>2 \Leftrightarrow 2<1-\frac{x}{2}<3 \Leftrightarrow -4<x<-2.$ Do đó hàm số nghịch biến trên $(-4;-2)$.

+) TH2: $f'\left(1-\frac{x}{2}\right)>2 \Leftrightarrow -1<1-\frac{x}{2}<a<0 \Leftrightarrow 2<2-2a<x<4$ nên hàm số chỉ nghịch biến trên khoảng $(2-2a;4)$ chứ không nghịch biến trên toàn khoảng $(2;4)$.

Vậy hàm số $g(x)=f\left(1-\frac{x}{2}\right)+x$ nghịch biến trên $(-4;-2)$.

Chú ý: Từ trường hợp 1 ta có thể chọn đáp án A nhưng cứ xét tiếp trường hợp 2 xem thử.

Dạng toán 50. Biết BBT hàm số $y=f'(x)$ xét tính đơn điệu của hàm số $y=g(x)=f(u(x))+h(x)$ **trong bài toán chứa tham số**.

Dạng toán 51. Biết BBT của hàm số $y = f'(x)$, xét tính đơn điệu của hàm số $y = g(x) = f(u(x)) + f(v(x)) + h(x)$ **trong bài toán không chứa tham số.**

Dạng toán 52. Biết BBT của hàm số $y = f'(x)$, xét tính đơn điệu của hàm số $y = g(x) = f(u(x)) + f(v(x)) + h(x)$ **trong bài toán chứa tham số**.

Dạng toán 53. Biết BBT hàm số $y = f'(x)$ xét tính đơn điệu của hàm số $y = g(x) = \left[f(u(x)) \right]^k$ **trong bài toán không chứa tham số**.

Câu 56. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu của hàm số $y = f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-2		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Biết $f(-2) = f(2) = 0$, hỏi hàm số $g(x) = [f(3-x)]^2$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

A. $(-2;-1)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $(2;5)$. **D.** $(5;+\infty)$.

Lời giải

Chọn C

Dựa vào bảng xét dấu của hàm số $y = f'(x)$ suy ra bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-2		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$f(1)$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Ta có $g'(x) = -2.f'(3-x).f(3-x)$. Xét $g'(x) \le 0 \Leftrightarrow f'(3-x).f(3-x) \ge 0$ (1)

Từ bảng biến thiên suy ra $f(3-x) \le 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Do đó (1) $\Leftrightarrow f'(3-x) \le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2 \le 3-x \le 1 \\ 3-x \ge 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2 \le x \le 5 \\ x \le 1 \end{array}\right.$.

Suy ra hàm số $g(x)$ nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;1)$, $(2;5)$.

Dạng toán 54. Biết BBT hàm số $y = f'(x)$ xét tính đơn điệu của hàm số $y = g(x) = \left[f(u(x)) \right]^k$ **trong bài toán chứa tham số**.

Câu 57. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $f'(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ, đồ thị $y = f'(x)$ cắt trục hoành tại hai điểm có hoành độ lần lượt là $-3;1$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-10;20]$ để hàm số $y = \left(f\left(x^2+3x-m\right)\right)^3$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
f''		$-$	0	$+$	
f'	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

A. 20. **B.** 17. **C.** 16. **D.** 18.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y' = 3(2x+3)\,f'(x^2+3x-m).\left[f(x^2+3x-m)\right]^2$.

Theo đề bài ta có: $f'(x) = (x-1)(x+3)$ suy ra $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < -3 \\ x > 1 \end{array}\right.$ và $f'(x) < 0 \Leftrightarrow -3 < x < 1$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;2)$ khi $y' \ge 0, \forall x \in (0;2)$

$\Leftrightarrow y' = 3(2x+3)\,f'(x^2+3x-m).\left[f(x^2+3x-m)\right]^2 \ge 0, \forall x \in (0;2)$.

Do $x \in (0;2)$ nên $2x+3 > 0, \forall x \in (0;2)$ và $\left[f(x^2+3x-m)\right]^2 \ge 0, \forall x \in \mathbb{R}$ Do đó, ta có:

$y' \ge 0 \Leftrightarrow f'(x^2+3x-m) \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+3x-m \le -3 \\ x^2+3x-m \ge 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \ge x^2+3x+3 \\ m \le x^2+3x-1 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \ge \max\limits_{(0;2)}(x^2+3x+3) \\ m \le \min\limits_{(0;2)}(x^2+3x-1) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \ge 13 \\ m \le -1 \end{array}\right.$.

Do $m \in [-10;20]$ nên có 18 giá trị nguyên của m thỏa yêu cầu đề bài.

Dạng toán 55. Biết BBT hàm số $y = f'(u(x))$ xét tính đơn điệu của hàm số $y = f(x)$ **trong bài toán không chứa tham số.**

Câu 58. Cho hàm số $y = f(x+2)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		-4		-2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗		↘		↗	$+\infty$

Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến tên khoảng nào sau đây

A. $(0;2)$. **B.** $(2;5)$. **C.** $(-2;0)$. **D.** $(-4;-2)$.

Lời giải

Chọn C

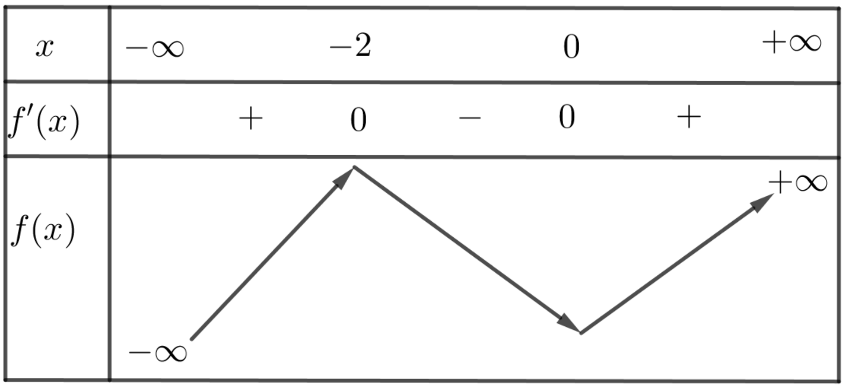
Ta có $\left[f(x+2)\right]' = (x+2)'.f'(x+2) = f'(x+2)$

Đặt $t = x+2$ khi đó $y = f(x+2) = f(t)$ và $y' = \left[f(x+2)\right]' = f'(t)$

Dựa vào bảng biến thiên của hàm $y = f(x+2)$ ta có $f'(x+2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -4 \\ x = -2 \end{array}\right.$

Suy ra $f'(t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -2 \\ t = 0 \end{array}\right.$

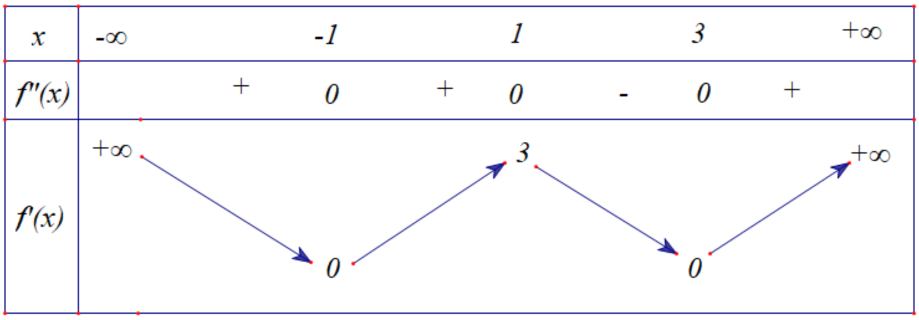
Vậy ta có bảng biến thiên của hàm $y = f(x)$ như sau



Suy ra hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên $(-2;0)$

Dạng toán 56. Biết BBT hàm số $y = f'(u(x))$ xét tính đơn điệu của hàm số $y = f(x)$ **trong bài toán chứa tham số.**

Câu 59. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(-1) = 2$. Biết $y = f'(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ



Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc đoạn $[-2019;2019]$ để hàm số

$y = \ln\left(f(x) + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + m\right)$ đồng biến trên $(-1;3)$

A. 2008. **B.** 2007. **C.** 2009. **D.** 2010.

Lời giải

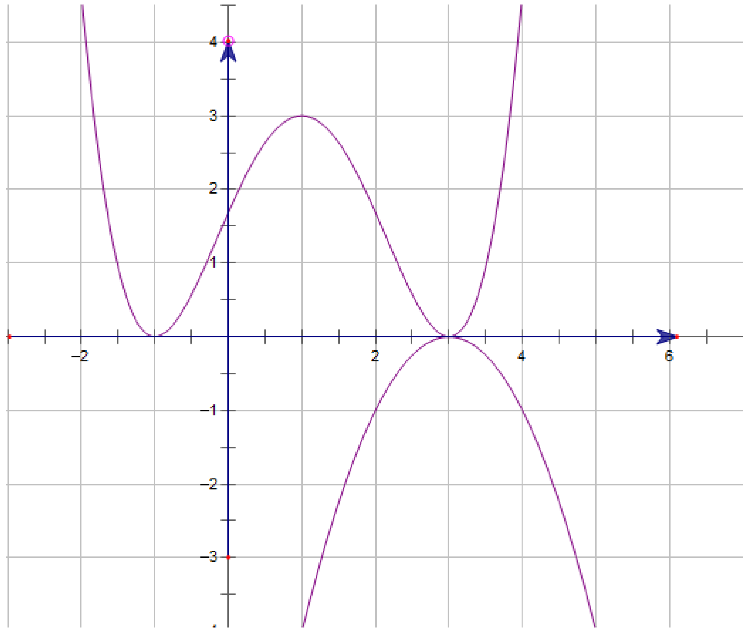
Chọn A

Hàm số $y = \ln\left(f(x) + \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 9x + m\right)$ xác định trên R

$\Leftrightarrow g(x) = f(x) + \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 9x + m > 0, \forall x \cup \in (-1;3)$

$\Rightarrow g'(x) = f'(x) + x^2 - 6x + 9 \Rightarrow g'(x) = 0 \Rightarrow f'(x) = -x^2 + 6x + 9$

Vẽ hai đồ thị $y = f'(x) \vee y = -x^2 + 6x - 9$ trên cùng hệ trục



Vậy $g'(x) \geq 0 \forall x \in (-1;3) \Rightarrow g(x) > g(-1) = -\frac{31}{3} + m \geq 0 \Rightarrow m \geq \frac{31}{3}$

$$y = \ln\left(f(x) + \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 9x + m\right) \Rightarrow y' = \frac{f'(x) + x^2 - 6x + 9}{f(x) + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + m} \geq 0, \forall x \in (-1;3)$$

Để hàm số đồng biến trên $(-1;3)$ thì $m \in \left(\frac{31}{3}; 2019\right) \Rightarrow m = 11; ...; 2018$ có 2008 số.

Câu 60. Cho hàm số $y = f(x+2)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $y = f'(x+2)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
y''		-	0	+	0	-	0	+	
y'	$+\infty$		-2		2		-2		$+\infty$

Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc đoạn $[-2019; 2019]$ để hàm số

$y = f(x) - \frac{1}{12}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - (2m-1)x + m$ đồng biến trên $(1;3)$

A. 2021. **B.** 2020. **C.** 2019. **D.** 2018.

Lời giải

Chọn A

$$y = f(x) - \frac{1}{12}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - (2m-1)x + m \Rightarrow y' = f'(x) - \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 3x - 2m + 1$$

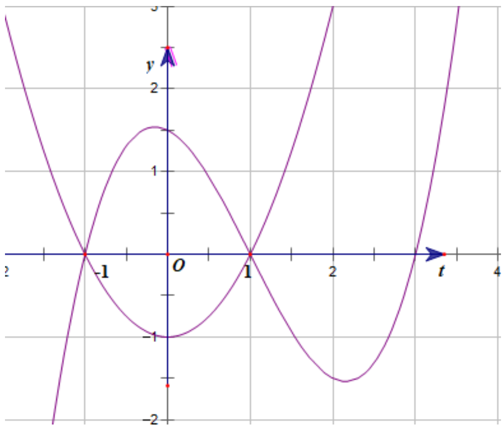
Để hàm số đồng biến trên $(1;3) \Rightarrow y' = f'(x) - \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 3x - 2m + 1 \geq 0, \forall x \in (1;3) (1)$

Đặt $x = t + 2 \Rightarrow t \in (-1;1) (1)$ trở thành

$$f'(t+2) - \frac{1}{3}(t+2)^3 + 2(t+2)^2 - 3(t+2) - 2m + 1 \geq 0, \forall t \in (-1;1)$$

$\Leftrightarrow g(t)=f'(t+2)-\frac{1}{3}t^3+t+\frac{1}{3}\ge 2m, \forall t\in(-1;1) \Rightarrow g'(t)=f''(t+2)-t^2+1$

Vẽ hai đồ thị $y=f''(t)$ và $y=t^2-1$ trên cùng hệ trục



Từ đồ thị ta thấy $g'(t)\ge 0 . \forall t\in(-1;1) \Rightarrow g(t)$ là hàm số đồng biến $\forall t\in(-1;1)$

$\Rightarrow 2m\le g(t), \forall t\in(-1;1) \Leftrightarrow 2m\le \min\limits_{[-1;1]} g(t)=g(-1)=f'(1)+1=3 \Rightarrow m\le \frac{3}{2}$

Kết hợp $m\in[-2019;2019] \Rightarrow m=-2019,...,0,1$ có 2021 số

Dạng toán 57. Biết BBT của hàm số $y=f'(x)$, xét tính đơn điệu của hàm số $y=g(x).f(x)$ **trong bài toán không chứa tham số**.

Câu 61. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $f(-1)=0$. Biết bảng biến thiên của hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ.

x	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số $g(x)=(x^2-x-2)f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào?

A. $(2;+\infty)$. **B.** $(-\infty;-1)$. **C.** $\left(-1;\frac{1}{2}\right)$. **D.** $(-1;1)$.

Lời giải

Chọn C

Từ bảng biến thiên của hàm số $y=f'(x)$ ta suy ra bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$ như sau

x	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	||	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	0	$\nearrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

Ta có $g'(x)=(2x-1)f(x)+(x^2-x-2)f'(x)$.

Ta lập bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		1		2		$+\infty$
$2x-1$		$-$		$-$	0		$+$			$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$			$+$		0	Chưa xác định	
$(2x-1)f(x)$		$+$	0	$-$			$+$		0	Chưa xác định	
x^2-x-2		$+$	0	$-$			$-$		0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$+$			$+$		0	$-$	
$(x^2-x-2)f'(x)$		$+$	0	$-$			$-$		0	$-$	
$g'(x)$		$+$		$-$			Chưa xác định			Chưa xác định	

Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-1;\frac{1}{2}\right)$.

Dạng toán 58. Biết BBT của hàm số $y=f'(x)$, xét tính đơn điệu của hàm số $y=g(x).f(x)$ **trong bài toán chứa tham số.**

Câu 62. Cho hàm số $y=f(x)$ và $f(x)>0,\forall x\in\mathbb{R}$. Biết hàm số $y=f'(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ và $f'(4)=0$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$

Có bao nhiêu số nguyên $m\in[-2019;2019]$ để hàm số $y=e^{-x^2+mx+1}f(x)$ đồng biến trên $(1;4)$

A. 2011 **B.** 2013 **C.** 2012 **D.** 2014

Lời giải

Chọn C

$y=e^{-x^2+mx+1}f(x)\Rightarrow y'=e^{-x^2+mx+1}\left[(-2x+m)f(x)+f'(x)\right]$

Hàm số đồng biến trên $(1;4)\Leftrightarrow y'\ge 0,\forall x\in(1;4)\Leftrightarrow(-2x+m)f(x)+f'(x)\ge 0,\forall x\in(1;4)(1)$

Vì $f(x)>0,\forall x\in\mathbb{R}$ $(1)\Leftrightarrow m\ge 2x-\dfrac{f'(x)}{f(x)}=g(x),\forall x\in(1;4)$

Xét hàm số g(x) ta có $g'(x)=2-\dfrac{f''(x).f(x)-\left[f'(x)\right]^2}{\left[f(x)\right]^2}$

Theo BBT của hàm số $f'(x)$ ta thấy $\forall x\in(1;4)$ thì $f''(x)<0$ nên

$f''(x)f(x)-\left[f'(x)\right]^2<0\left(f(x)>0,\forall x\in\mathbb{R}\right)$

$\Rightarrow -\dfrac{f''(x).f(x)-\left[f'(x)\right]^2}{\left[f(x)\right]^2}>0,\forall x\in(1;4)\Rightarrow g'(x)=2-\dfrac{f''(x).f(x)-\left[f'(x)\right]^2}{\left[f(x)\right]^2}>0,$

$\Rightarrow y=g(x)$ đồng biến trên $(1;4)$

Do đó để $m\ge g(x)$ $\forall x\in(1;4)$ thì $m\ge\max\limits_{[1;4]}g(x)=g(4)=8.$

Do $m\in[-2019;2019]$ nên $m\in[8;2019]$

Có 2012 số nguyên thỏa ycbt.

Dạng toán 59. Biết BBT của hàm số $y=f'(x)$, xét tính đơn điệu của hàm số $y=g(x).f(x)$ **trong bài toán không chứa tham số**.

Câu 63. Cho hàm số $y=f(x)$. Biết $f(0)=0$ và hàm số $y=f'(x)$ có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-3		0		$+\infty$
y'	$+\infty$	↘	-1	↗	0	↘	$-\infty$

Khi đó, hàm số $y=xf(x)$ đồng biến trên khoảng nào?

A. $(-\infty;0)$. **B.** $(-2;0)$. **C.** $(0;2)$. **D.** $(-2;2)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y=xf(x)\Rightarrow y'=f(x)+xf'(x)$

Từ bảng biến thiên của hàm số $y=f'(x)$ ta có $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=a\end{array}\right.$ với $a<-3$.

Khi đó ta có bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$.

x	$-\infty$		a		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(a)$	↘	0	↘	$-\infty$

Từ bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$ ta có $f(x)>0,\forall x\in(-2;0)$

Và $f'(x)<0,\forall x\in(-2;0)\Rightarrow xf'(x)>0,\forall x\in(-2;0)$

Từ đó suy ra $y'=f(x)+xf'(x)>0,\forall x\in(-2;0)$. Do đó hàm số $y=xf(x)$ đồng biến trên $(-2;0)$.

Trên khoảng $(-\infty;0)$ thì $f(x)$ và $xf'(x)$ có thể âm hoặc dương nên không thể kết luận hàm số đã cho đồng biến trên $(-\infty;0)\Rightarrow$ đáp án **A** sai.

Trên $(0;2)$ thì $f(x)<0$ và $f'(x)<0\Rightarrow xf'(x)<0\Rightarrow f(x)+xf(x)<0$ nên hàm số nghịch biến trên $(0;2)$ $\Rightarrow$ đáp án **C** sai.

Đáp án **C** sai nên đáp án **D** sai.

Câu 64. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		1		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	↗	0	↘	$y(1)$	↗	0	↘	$-\infty$

Hàm số $g(x)=[f(3-x)]^2$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

A. $(2;5)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $(-2;5)$. **D.** $(5;+\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Từ bảng biến thiên suy ra $f(x)\le 0,\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow f(3-x)\le 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Ta có $g'(x)=-2f'(3-x)f(3-x)$.

Xét $g'(x)<0\Leftrightarrow -2f'(3-x)f(3-x)<0\Leftrightarrow f'(3-x)<0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-2<3-x<1\\3-x>2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2<x<5\\x<1\end{array}\right.$.

Suy ra hàm số $g(x)$ nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(2;5)$.

Dạng toán 60. Biết BBT của hàm số $y=f'(x)$, xét tính đơn điệu của hàm số $y=g(x).f(x)$ **trong bài toán chứa tham số**.

Câu 65. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây

x	$-\infty$		-1		0		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	-	0	+	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	-1	↘	-3	↗	5	↗	$+\infty$

Với $m<0$, hàm số $y=\left(x^2-2x+m\right).f(x)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây

A. $(-1;0)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $(1;3)$. **D.** $(-\infty;-1)$.

Lời giải

Chọn B

$y'=(2x-2).f(x)+\left(x^2-2x+m\right).f'(x)$

+ Ta có $2x-2<0,\forall x\in(0;1)$ và $f(x)<0,\forall x\in(0;1)\,(1)$

Bảng biến thiên của hàm $y=g(x)=x^2-2x+m$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$g'(x)$		-			0	+	
$g(x)$	$+\infty$	↘	m	↘	$m-1$	↗	$+\infty$

Từ hai BBT suy ra $g(x)=x^2-2x+m<0,\forall x\in(0;1)$ (do $m<0$) và $f'(x)<0,\forall x\in(0;1)$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $y'=(2x-2).f(x)+\left(x^2-2x+m\right).f'(x)>0\quad\forall x\in(0;1)$.

Trong các khoảng $(-\infty;-1)$, $(-1;0)$, $(1;3)$ thì chưa thể xác định được dấu của $y'=(2x-2).f(x)+\left(x^2-2x+m\right).f'(x)$ nên dựa vào các đáp án ta **Chọn B**

Dạng toán 61. Biết BBT của hàm số $y=f'(x)$, xét tính đơn điệu của hàm số $y=\dfrac{g(x)}{f(x)}$ hoặc $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ **trong bài toán không chứa tham số**.

Câu 66. Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có $f(0)=-\dfrac{1}{3}$. Bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f''(x)$		$+$			0	$-$	
$f'(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số $g(x)=\dfrac{f(x)}{e^x}$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;1)$ **B.** $\left(2-\sqrt{3};2\right)$ **C.** $(4;+\infty)$ **D.** $(3;+\infty)$

Lời giải

Chọn C

Vì $y=f(x)$ là hàm số bậc ba nên $y=f'(x)$ là hàm số bậc hai.

Gọi $f'(x)=ax^2+bx+c$ suy ra $f''(x)=2ax+b$. Ta có hệ sau:

$$\begin{cases} f''(1)=0 \\ f'(1)=0 \\ f'(0)=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+b=0 \\ a+b+c=0 \\ c=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=2 \\ c=-1 \end{cases}.$$ Vậy $f'(x)=-x^2+2x-1$

Suy ra $f(x)=\int f'(x)\mathrm{d}x=\int\left(-x^2+2x-1\right)\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{3}x^3+x^2-x+m$, do $f(0)=-\dfrac{1}{3}\Rightarrow m=-\dfrac{1}{3}$.

Vậy $f(x)=-\dfrac{1}{3}x^3+x^2-x-\dfrac{1}{3}$.

Ta có $g'(x)=\dfrac{f'(x).e^x-e^x.f(x)}{e^{2x}}=\dfrac{f'(x)-f(x)}{e^x}$.

$$g'(x)=0\Leftrightarrow f'(x)-f(x)=0\Leftrightarrow \frac{1}{3}x^3-2x^2+3x-\frac{2}{3}=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=2-\sqrt{3} \\ x=2+\sqrt{3} \end{array}\right..$$

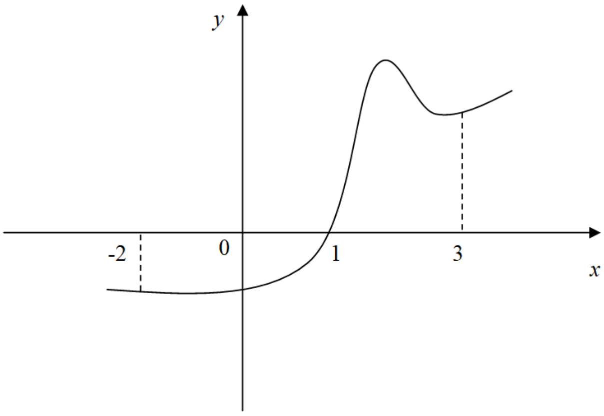
Lập bảng xét dấu $y=g'(x)$

x	$-\infty$		$2-\sqrt{3}$		2		$2+\sqrt{3}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu $g'(x)$ hàm số nghịch biến trên $(4;+\infty)$.

Dạng toán 62. Biết BBT của hàm số $y=f'(x)$, xét tính đơn điệu của hàm số $y=\dfrac{g(x)}{f(x)}$ hoặc $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ **trong bài toán chứa tham số.**

Câu 67. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ có như sau:



Đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ không có giao điểm với trục hoành và $\underset{\mathbb{R}}{Max}\,f\left(x\right)=-1$. Đồ thị hàm số $y=f'\left(x\right)$ có duy nhất 1 giao điểm với trục hoành.Có bao nhiêu giá trị của tham số m để hàm số $g\left(x\right)=\dfrac{\left(x-1\right)^2\left(\left(-2m^2+1\right)x+m\right)}{f\left(x\right)}$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 5.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\underset{\mathbb{R}}{Max}\,f\left(x\right)=-1\Rightarrow f\left(x\right)<0,\forall x\in\mathbb{R}$

$$g'\left(x\right)=\frac{\left(x-1\right)\left(\left(-2m^2+1\right)\left(3x-1\right)+2m\right)f\left(x\right)-\left(x-1\right)^2\left(\left(-2m^2+1\right)x+m\right)f'\left(x\right)}{\left(f\left(x\right)\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow g'\left(x\right)=\frac{\left(x-1\right)\left[\left(\left(-2m^2+1\right)\left(3x-1\right)+2m\right)f\left(x\right)-\left(x-1\right)\left(\left(-2m^2+1\right)x+m\right)f'\left(x\right)\right]}{\left(f\left(x\right)\right)^2}$$

Đặt $\left(\left(-2m^2+1\right)\left(3x-1\right)+2m\right)f\left(x\right)-\left(x-1\right)\left(\left(-2m^2+1\right)x+m\right)f'\left(x\right)=h\left(x\right)$

Vì $g'\left(x\right)$ có 1 nghiệm bội lẻ $x=1$ nên để $g'\left(x\right)\ge 0$ thì điều kiện cần là $h\left(x\right)$ cũng có nghiệm là $x=1$.

$$h\left(1\right)=2\left(-2m^2+m+1\right)f\left(1\right)=0\Leftrightarrow -2m^2+m+1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\ m=\dfrac{-1}{2}\end{array}\right.$$

Th1: Với $m=1$ ta có

$$g'\left(x\right)=\frac{-3\left(x-1\right)^2f\left(x\right)+\left(x-1\right)^3f'\left(x\right)}{\left(f\left(x\right)\right)^2}>0\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

TH2: Với $m=\dfrac{-1}{2}$ ta có

$$g'\left(x\right)=\frac{1}{2}.\frac{3\left(x-1\right)^2f\left(x\right)-\left(x-1\right)^3f'\left(x\right)}{\left(f\left(x\right)\right)^2}<0\ \forall x\in\mathbb{R}$$

Vậy có 1 giá trị m thỏa mãn đề bài yêu cầu.

CÁC DẠNG TOÁN VỀ HÀM ẨN LIÊN QUAN ĐẾN BÀI TOÁN CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

PHẦN 1: BIẾT ĐẶC ĐIỂM CỦA HÀM SỐ $y = f(x)$

Dạng toán 1. Các bài toán về cực trị của hàm ẩn bậc 2 (dành cho khối 10).

Dạng toán 2. Dạng toán có thể tìm được biểu thức cụ thể của hàm số $y = f(x)$ trong bài toán không chứa tham số.

Dạng toán 3. Dạng toán có thể tìm được biểu thức cụ thể của hàm số $y = f(x)$ trong bài toán chứa tham số.

Dạng toán 4. Biết đặc điểm của hàm số hoặc đồ thị, hoặc BBT hoặc đạo hàm của hàm $f(x)$, tìm cực trị của hàm $y = f(\varphi(x));\ y = f(f(x)),...y = f(f(f...(x)))$ trong bài toán không chứa tham số

Dạng toán 5. Biết đặc điểm của hàm số hoặc BBT, hoặc BBT hoặc đạo hàm của hàm $f(x)$, tìm cực trị của hàm $y = f(f(x)),...y = f(f(f...(x)))$ trong bài toán chứa tham số.

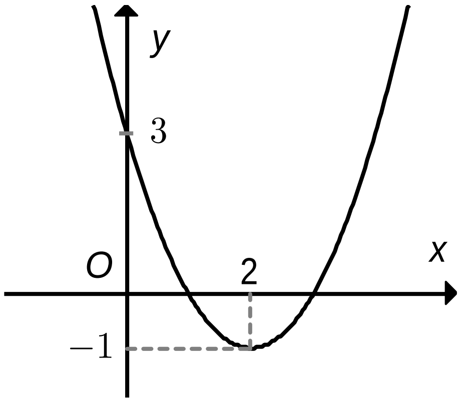
Dạng toán 6. Biết đặc điểm của hàm số hoặc BBT, hoặc đồ thị, hoặc đạo hàm của hàm $f(x)$, tìm cực trị của hàm $y = \ln(f(x)), y = e^{f(x)}, \sin f(x), \cos f(x)...$ trong bài toán không chứa tham số

Dạng toán 7. Biết đặc điểm của hàm số hoặc BBT, hoặc đồ thị, hoặc đạo hàm của hàm $f(x)$, tìm cực trị của hàm $y = \ln(f(x)), y = e^{f(x)}, \sin f(x), \cos f(x)...$ trong bài toán chứa tham số.

Dạng toán 8. Các dạng khác với các dạng đã đưa ra…

DẠNG 1. Các bài toán về cực trị của hàm ẩn bậc 2 (dành cho khối 10).

Câu 1: Cho hàm số $f\left(x\right) = ax^2 + bx + c$ đồ thị như hình bên. Hỏi hàm số $g = f\left(x^2\right)$ có mấy điểm cực trị?



A. 1 . **B.** 2.
C. 3. **D.** 4.

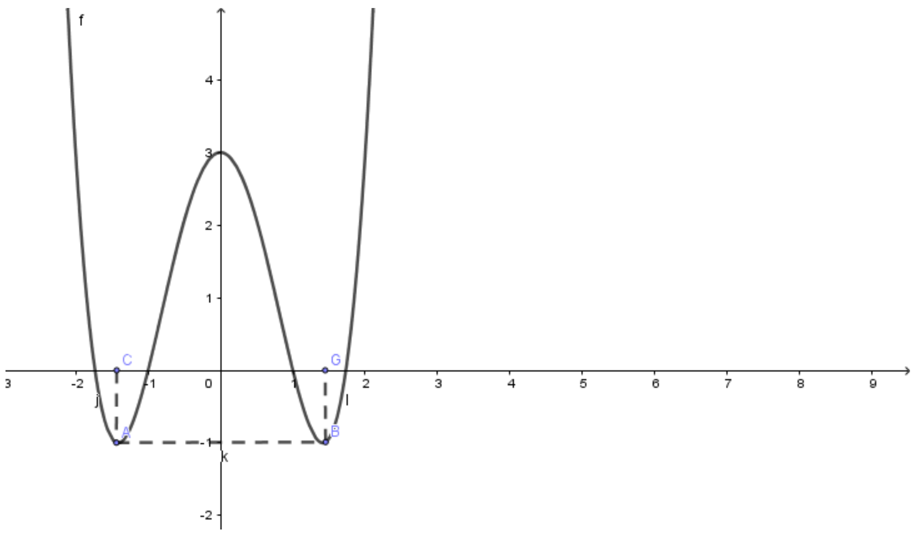
Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $g = f\left(x^2\right)$.

Đặt $t = x^2$. Khi đó với $t \geq 0$, hàm $g = f(t)$ có đồ thị là dạng của đồ thị hàm số $f(x)$ bên phải trục Oy. Hàm số $g = f\left(x^2\right)$ là hàm chẵn nên đồ thị hàm số nhận Oy làm trục đối xứng.

Từ đó ta có đồ thị hàm $g\left(t\right)$ như sau:



Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy hàm số có 3 điểm cực trị.

Câu 2: Cho parabol $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ cắt trục hoành tại hai điểm có hoành độ bằng 1 và 2, biết rằng hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(x_0; +\infty)$ và khoảng cách từ giao điểm của parabol với trục tung đến điểm O bằng 4. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = \left|f\left(\left|x+1\right|\right)\right|$.

A. 2. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 7.

Lời giải

Chọn D

Do hàm số $y = f\left(x\right)$ nghịch biến trên khoảng $\left(x_0; +\infty\right)$ nên $a < 0$.

Biết $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ cắt trục hoành tại hai điểm có hoành độ bằng 1 và 2 nên $f(x) = a(x-1)(x-2) = a(x^2 - 3x + 2) = ax^2 - 3ax + 2a$.

Parabol cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng $2a$, ta có $|2a| = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 2 \\ a = -2 \end{array}\right.$.

Do hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(x_0;+\infty)$ nên $a = -2$.

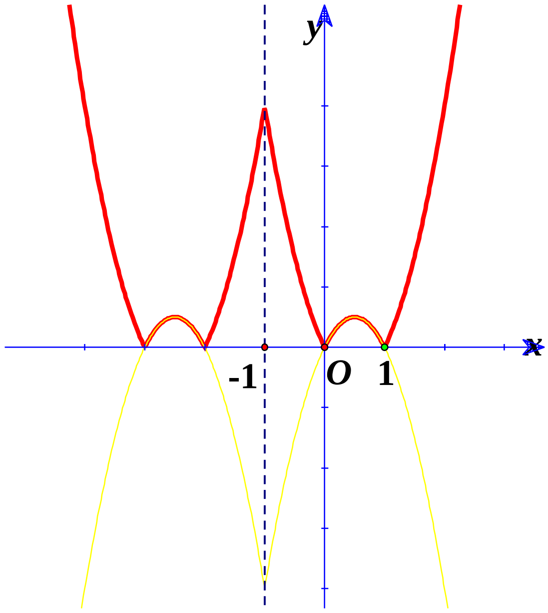
Vậy parabol là $y = f(x) = -2x^2 + 6x - 4$

Đồ thị hàm số $y = \left| f\left(|x+1|\right) \right|$ (hình vẽ phần tô đậm) có được bằng cách

+ Vẽ đồ thị $y = f\left(|x+1|\right)$ (C_1)

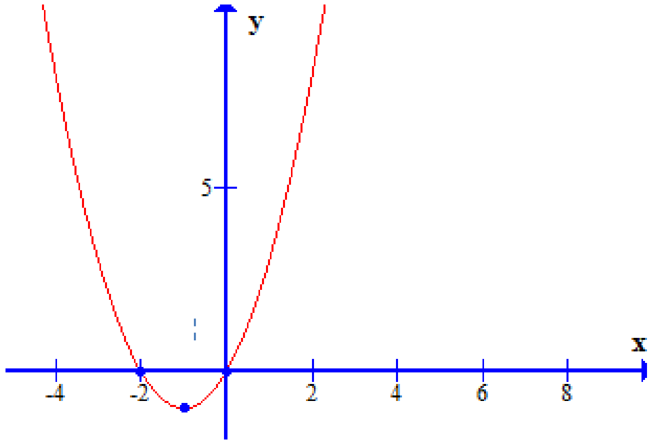
+ Giữ nguyên phần đồ thị (C_1) trên trục hoành và lấy đối xứng phần (C_1) dưới trục hoành.

Để vẽ (C_1) lấy đối xứng phần đồ thị $y = f(x) = -2x^2 + 6x - 4$ qua trục tung sau đó tịnh tiến sáng trái 1 đơn vị.



Từ đồ thị suy ra hàm số có 7 điểm cực trị.

Câu 3: Cho hàm số $f\left(x\right) = ax^2 + bx + c\left(a \neq 0\right)$ có đồ thị là parabol như hình vẽ. Tìm m để giá trị lớn nhất của hàm số $y = \left|f\left(x\right) + m - 4\right|$ trên $\left[-2;1\right]$ đạt giá trị nhỏ nhất.



A. $m = 5$.
B. $m = 4$.
C. $m = 3$.
D. $m = 1$.

Lời giải

Chọn C

Từ giả thiết suy ra $y = \left|\left(x+1\right)^2 + m - 5\right|$. Đặt $g\left(x\right) = \left(x+1\right)^2 + m - 5$.

Với $\forall x \in \left[-2;1\right]$ ta có $g\left(x\right) \in \left[m-5;m-1\right]$.

Giá trị lớn nhất của hàm số $y_{\max} = \max\{|m-5|,|m-1|\}$.

+ Trường hợp 1: $|m-5| \ge |m-1| \Leftrightarrow (m-5)^2 \ge (m-1)^2 \Leftrightarrow m \le 3$.

Khi đó $y_{\max} = |m-5| = 5-m \ge 2 \Rightarrow$ GTLN của hàm số đạt GTNN bằng 2, khi $m=3$.

+ Trường hợp 2: $|m-1| \ge |m-5| \Leftrightarrow m \ge 3$.

Khi đó $y_{\max} = |m-1| = m-1 \ge 2 \Rightarrow$ GTLN của hàm số đạt GTNN bằng 2, khi $m=3$.

Vậy $m=3$.

DẠNG 2. Dạng toán có thể tìm được biểu thức cụ thể của hàm số $y=f(x)$ trong bài toán không chứa tham số.

Câu 4: Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$. Biết rằng đồ thị hàm số có một điểm cực trị là $M(1;-1)$ và nhận $I(0;1)$ làm tâm đối xứng. Giá trị $y(2)$ là

A. $y(2)=2$. **B.** $y(2)=-2$. **C.** $y(2)=6$. **D.** $y(2)=3$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y'=3ax^2+2bx+c,\ y''=6ax+2b$.

Do đồ thị hàm số có một điểm cực trị là $M(1;-1)$ và nhận $I(0;1)$ làm tâm đối xứng nên:

$$\begin{cases} y(1)=-1 \\ y'(1)=0 \\ y''(0)=0 \\ y(0)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c+d=-1 \\ 3a+2b+c=0 \\ 2b=0 \\ d=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=0 \\ c=-3 \\ d=1 \end{cases}.$$

Vậy: $y=x^3-3x+1$. Suy ra $y(2)=2^3-3.2+1=3$.

Câu 5: Đồ thị của hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có hai điểm cực trị là $A(1;2)$ và $B(-1;6)$. Giá trị của $P=a^2+b^2+c^2+d^2$ bằng bao nhiêu?

A. $P=18$. **B.** $P=26$. **C.** $P=15$. **D.** $P=23$.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

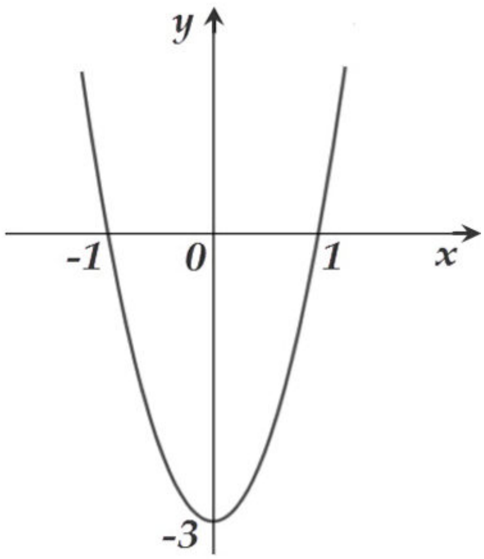
Ta có $y'=3ax^2+2bx+c$ và $y''=6ax+2b$.

Vì $A(1;2)$ và $B(-1;6)$ là điểm cực trị nên

$$\begin{cases} y'(1)=0 \\ y(1)=2 \\ y'(-1)=0 \\ y(-1)=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a+2b+c=0 \\ a+b+c+d=2 \\ 3a-2b+c=0 \\ -a+b-c+d=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6a+2c=0 \\ b+d=4 \\ 2a+2c=-4 \\ 4b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=0 \\ c=-3 \\ d=4 \end{cases}.$$

Vậy $P=a^2+b^2+c^2+d^2=26$.

Câu 6: Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\ (a\neq 0)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(2)=1$. Đồ thị hàm số $f'(x)$ được cho bởi hình bên dưới.



Tìm giá trị cực tiểu y_{CT} của hàm số $f(x)$.

A. $y_{CT} = -3$. **B.** $y_{CT} = 1$. **C.** $y_{CT} = -1$. **D.** $y_{CT} = -2$.

Lời giải

Chọn A

Vì đồ thị hàm $f'(x)$ cắt Ox tại hai điểm phân biệt có hoành độ $x = -1$ và $x = 1$ nên $f'(x) = k(x-1)(x+1)$ với k là số thực khác 0.

Vì đồ thị hàm $f'(x)$ đi qua điểm $(0;-3)$ nên ta có $-3 = -k \Leftrightarrow k = 3$. Suy ra $f'(x) = 3x^2 - 3$.

Mà $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ nên ta có được $a = 1, b = 0, c = -3$.

Từ đó $f(x) = x^3 - 3x + d$. Mặt khác $f(2) = 1$ nên $d = -1$.

Suy ra $f(x) = x^3 - 3x - 1$.

Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 1 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy $y_{CT} = -3$.

Câu 7: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $\begin{cases} (3x^2 - 15x) f'(x) + (10 - 5x) f(x) = 0 \\ [f'(x)]^2 + [f(x)]^2 > 0 \end{cases}$ với $\forall x \neq 0$ và $f(1) = -4$. Tổng cực đại và cực tiểu của hàm số $y = f(x)$ bằng

A. $-3\sqrt[3]{4}$. **B.** $3\sqrt[3]{4}$. **C.** $-2\sqrt[3]{4}$. **D.** $3\sqrt[4]{2}$.

Lời giải

Chọn A

Từ $[f'(x)]^2 + [f(x)]^2 > 0$ với $\forall x \neq 0$ ta suy ra: Với $x \neq 0$ ta có $f(x) = 0 \Rightarrow f'(x) \neq 0$.

Do đó từ $\left(3x^2-15x\right)f'(x)+\left(10-5x\right)f(x)=0$ với $\forall x\neq 0$, ta suy ra:

Với $x\neq 0$ ta có $f(x)=0\Leftrightarrow\left(3x^2-15x\right)f'(x)=0\Leftrightarrow x=5$.

Với các kết quả trên ta được $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{5}{3}\dfrac{x-2}{x(x-5)}\forall x\notin\{0;5\}$

Suy ra $\displaystyle\int\frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x=\frac{5}{3}\int\frac{x-2}{x(x-5)}\mathrm{d}x\Leftrightarrow\ln\left|f(x)\right|=\frac{2}{3}\ln|x|+\ln|x-5|+C$

$\Leftrightarrow\left|f(x)\right|=e^C\left|(x-5)\sqrt[3]{x^2}\right|$

Do $f(1)=-4$ nên $C=0$ và $f(x)=(x-5)\sqrt[3]{x^2}$ với $\forall x\notin\{0;5\}$

Vì $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên $f(x)$ liên tục tại $x=0,\ x=5$ suy ra $f(0)=f(5)=0$

Hay $f(x)=(x-5)\sqrt[3]{x^2}$ với $\forall x\in\mathbb{R}$.

Khi đó $f'(x)=\dfrac{5}{3}\dfrac{x-2}{\sqrt[3]{x}}$.

Ta có $f'(x)=0\Leftrightarrow x=2$, $f'(x)$ không xác định khi $x=0$.

Bảng biến thiên của $f(x)$:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-3\sqrt[3]{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ đó suy ra $y_{CD}=f(0)=0;\ y_{CT}=f(2)=-3\sqrt[3]{4}$. Vậy $y_{CD}+y_{CT}=-3\sqrt[3]{4}$.

DẠNG 3. Dạng toán có thể tìm được biểu thức cụ thể của hàm số $y=f(x)$ trong bài toán chứa tham số.

Câu 8: Tổng tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho đồ thị hàm số $y=x^3-3mx^2+4m^3$ có điểm cực đại và cực tiểu đối xứng với nhau qua đường phân giác của góc phần tư thứ nhất là

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** 0. **D.** $\dfrac{1}{4}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $y'=3x^2-6mx$, $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2m\end{array}\right.$.

Để hàm số có cực đại cực tiểu thì $m\neq 0$.

Khi đó các điểm cực trị của đồ thị hàm số là: $A\left(0;4m^3\right)$, $B(2m;0)$.

Ta có $I\left(m;2m^3\right)$ là trung điểm của đoạn thẳng AB.

Đường phân giác của góc phần tư thứ nhất là $d:x-y=0$.

Do đó để điểm cực đại và cực tiểu đối xứng với nhau qua d thì:

$\begin{cases}2m-4m^3=0\\m-2m^3=0\end{cases}\Leftrightarrow 1-2m^2=0\Leftrightarrow m=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Vậy tổng tất cả các giá trị của tham số thực m là 0.

Câu 9: Cho hàm số $y=x^4-2m^2x^2+m^2$ có đồ thị (C). Để đồ thị (C) có ba điểm cực trị A, B, C sao cho bốn điểm A, B, C, O là bốn đỉnh của hình thoi (O là gốc tọa độ) thì giá trị tham số m là

A. $m=-\sqrt{2}$. **B.** $m=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $m=\pm\sqrt{2}$. **D.** $m=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y'=4x^3-4m^2x$; $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=m^2\end{array}\right.$.

Điều kiện để hàm số có ba cực trị là $y'=0$ có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m\neq 0$.

Khi đó: $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm m\end{array}\right.$.

Tọa độ các điểm cực trị là $A\left(0;m^2\right)$, $B\left(m;-m^4+m^2\right)$, $C\left(m;-m^4+m^2\right)$.

Ta có $OA\perp BC$, nên bốn điểm A, B, C, O là bốn đỉnh của hình thoi điều kiện cần và đủ là OA và BC cắt nhau tại trung điểm mỗi đoạn

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_A+x_O=x_B+x_C\\y_A+y_O=y_B+y_C\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0=0\\m^2+0=\left(-m^4+m^2\right)+\left(-m^4+m^2\right)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 2m^4-m^2=0\Leftrightarrow m^2=\frac{1}{2}\Leftrightarrow m=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Vậy $m=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 10: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để điểm $M\left(2m^3;m\right)$ cùng với hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=2x^3-3(2m+1)x^2+6m(m+1)x+1$ tạo thành một tam giác có diện tích nhỏ nhất.

A. $m=-1$. **B.** $m=2$. **C.** $m=1$. **D.** $m=0$.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

$y'=6x^2-6(2m+1)x+6m(m+1)$

$$y'=0\Leftrightarrow 6x^2-6(2m+1)x+6m(m+1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}x=m & \Rightarrow y=2m^3+3m^2+1\\x=m+1 & \Rightarrow y=2m^3+3m^2\end{array}\right..$$

Hàm số có 2 cực trị: $\Delta'>0\Leftrightarrow 9(2m+1)^2-36m(m+1)>0\Leftrightarrow 9>0,\forall x\in\mathbb{R}$.

Gọi A,B là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số

$\Rightarrow A\left(m;2m^3+3m^2+1\right),B\left(m+1;2m^3+3m^2\right)\Rightarrow\overrightarrow{AB}=(1;-1)\Rightarrow AB=\sqrt{2}$

Phương trình đường thẳng Δ đi qua 2 điểm cực trị: $x+y-2m^3-3m^2-m-1=0$

$$d(M,\Delta)=\frac{\left|2m^3+m-2m^3-3m^2-m-1\right|}{\sqrt{2}}=\frac{3m^2+1}{\sqrt{2}}$$

$$S_{\Delta MAB}=\frac{1}{2}d(M,\Delta).AB=\frac{1}{2}.\frac{3m^2+1}{\sqrt{2}}.\sqrt{2}=\frac{3m^2+1}{2}.$$

$$S_{\min}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow m=0.$$

Câu 11: Cho hàm số $y=x^4-2mx^2+m$ (C). Tìm m để đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị đồng thời ba điểm cực trị của đồ thị hàm số tạo thành tam giác có bán kính đường tròn nội tiếp bằng 1.

A. $m=1$. **B.** $m=0$. **C.** $m=-2$. **D.** $m=2$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y'=4x^3-4mx$.

$$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2=m\end{array}\right..$$

Hàm số có 3 điểm cực trị $\Leftrightarrow$ $y'=0$ có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ $m>0$.

Các điểm cực trị của đồ thị là $A(0;m)$, $B\left(\sqrt{m};-m^2+m\right)$, $C\left(-\sqrt{m};-m^2+m\right)$

Ta có: $AB=AC=\sqrt{m^4+m}$, $BC=2\sqrt{m}$.

Gọi I là trung điểm BC. Suy ra $I\left(0;-m^2+m\right)$ và $AI=m^2$.

$$S=\frac{1}{2}AI.BC=\left(\frac{AB+BC+CA}{2}\right).r\Leftrightarrow m^2.2\sqrt{m}=\left(2\sqrt{m^4+m}+2\sqrt{m}\right).1$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{m}\left(m^2-\sqrt{m^3+1}-1\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=0\,(loai)\\\sqrt{m^3+1}=m^2-1\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}m^2-1\ge 0\\m^3+1=m^4-2m^2+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|m|\ge 1\\\left[\begin{array}{l}m=0\,(loai)\\m=-1\,(nhan)\\m=2\,(nhan)\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow m=2.$$

Câu 12: Cho (P) là đường Parabol qua ba điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=\frac{1}{4}x^4-mx^2+m^2$. Gọi m_a là giá trị để (P) đi qua $B\left(\sqrt{2};2\right)$. Hỏi m_a thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $\left(\sqrt{10};\sqrt{15}\right)$. **B.** $\left(-2;\sqrt{5}\right)$. **C.** $\left(-5;\sqrt{2}\right)$. **D.** $(-8;2)$.

Lời giải

Chọn B

$y'=x^3-2mx=x\left(x^2-2m\right)$.

Để hàm số có ba cực trị thì $ab<0\Leftrightarrow-\frac{m}{4}<0\Leftrightarrow m>0$.

$$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0,\ y=m^2\\x=\sqrt{2m},\ y=0\\x=-\sqrt{2m},\ y=0\end{array}\right..$$

Gọi parabol đi qua điểm $A\left(0;m^2\right)$, $B\left(\sqrt{2m};0\right)$, $C\left(-\sqrt{2m};0\right)$ có dạng: $y=ax^2+bx+c$

Ta có: $\begin{cases}2ma+\sqrt{2m}b+c=0\\2ma-\sqrt{2m}b+c=0\\c=m^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-\frac{m}{2}\\b=0\\c=m^2\end{cases}$ hay $y=-\frac{m}{2}x^2+m^2$.

Theo yêu cầu bài toán parabol đi qua $B\left(\sqrt{2};2\right)$ nên: $2=-\frac{m_a}{2}\left(\sqrt{2}\right)^2+m_a^2\Leftrightarrow m_a^2-m_a-2=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m_a=-1\\m_a=2\end{array}\right..$$

Vậy $m_a=2$.

Câu 13: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=x^8+(m-3)x^5-\left(m^2-9\right)x^4+1$ đạt cực tiểu tại $x=0$?

A. 4. **B.** 7. **C.** 6. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y = x^8 + (m-3)x^5 - (m^2-9)x^4 + 1 \Rightarrow y' = 8x^7 + 5(m-3)x^4 - 4(m^2-9)x^3$.

$y' = 0 \Leftrightarrow x^3\left(8x^4 + 5(m-3)x - 4(m^2-9)\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ g(x) = 8x^4 + 5(m-3)x - 4(m^2-9) = 0 \end{array}\right.$.

Xét hàm số $g(x) = 8x^4 + 5(m-3)x - 4(m^2-9)$ có $g'(x) = 32x^3 + 5(m-3)$.

Ta thấy $g'(x) = 0$ có một nghiệm nên $g(x) = 0$ có tối đa hai nghiệm.

+) TH1: Nếu $g(x) = 0$ có nghiệm $x = 0 \Rightarrow m = 3$ hoặc $m = -3$.

Với $m = 3$ thì $x = 0$ là nghiệm bội 4 của $g(x)$. Khi đó $x = 0$ là nghiệm bội 7 của y' và y' đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua điểm $x = 0$ nên $x = 0$ là điểm cực tiểu của hàm số.
Vậy $m = 3$ thỏa ycbt.

Với $m = -3$ thì $g(x) = 8x^4 - 30x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \sqrt[3]{\dfrac{15}{4}} \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		$\sqrt[3]{\frac{15}{4}}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào BBT $x = 0$ không là điểm cực tiểu của hàm số. Vậy $m = -3$ không thỏa ycbt.
+) TH2: $g(0) \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 3$.

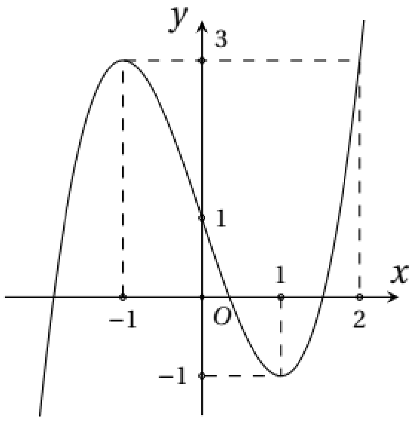
Để hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0 \Leftrightarrow g(0) > 0 \Leftrightarrow m^2 - 9 < 0 \Leftrightarrow -3 < m < 3$.

Do $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-2;-1;0;1;2\}$.

Vậy cả hai trường hợp ta được 6 giá trị nguyên của m thỏa ycbt.

DẠNG 4. Biết đặc điểm của hàm số hoặc đồ thị, hoặc BBT, hoặc đạo hàm của hàm $f(x)$, tìm cực trị của hàm $y = f(\varphi(x))$; $y = f(f(x)),...y = f(f(f...(x)))$ trong bài toán không chứa tham số.

Câu 14: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đúng hai điểm cực trị $x = -1, x = 1$, có đồ thị như hình vẽ sau:



Hỏi hàm số $y = f\left(x^2 - 2x + 1\right) + 2019$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 4.　　　　**B.** 3.　　　　**C.** 1.　　　　**D.** 2.

Lời giải

Chọn B

Do hàm số $y = f\left(x\right)$ có đúng hai điểm cực trị $x = -1, x = 1$ nên phương trình $f'\left(x\right) = 0$ có hai nghiệm bội lẻ phân biệt $x = -1, x = 1$.

Ta có $y' = \left(2x - 2\right) f'\left(x^2 - 2x + 1\right)$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x - 2 = 0 \\ x^2 - 2x + 1 = -1 \\ x^2 - 2x + 1 = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right..$$

Ta có

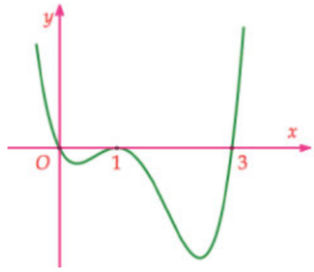
$$y' > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x - 2 > 0 \\ f'(x^2 - 2x + 1) > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x - 2 < 0 \\ f'(x^2 - 2x + 1) < 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 1 \\ \left[\begin{array}{l} x^2 - 2x + 1 > 1 \\ x^2 - 2x + 1 < -1 \end{array}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} x < 1 \\ -1 < x^2 - 2x + 1 < 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 1 \\ \left[\begin{array}{l} x > 2 \\ x < 0 \end{array}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} x < 1 \\ 0 < x < 2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 2 \\ 0 < x < 1 \end{array}\right.$$

Do đó ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Từ bảng biến thiên ta suy ra hàm số $y = f\left(x^2 - 2x + 1\right) + 2019$ có 3 cực trị. Chọn phương án B.

Câu 15: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$. Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ



Đồ thị hàm số $y = \left(f(x)\right)^2$ có bao nhiêu điểm cực đại, cực tiểu?

A. 2 điểm cực đại, 3 điểm cực tiểu.　　　　**B.** 2 điểm cực tiểu, 3 điểm cực đại.

C. 2 điểm cực đại, 2 điểm cực tiểu. **D.** 1 điểm cực đại, 3 điểm cực tiểu.

Lời giải

Chọn A

Từ đồ thị ta có: $f(x)=0$ có nghiệm đơn là $x=0; x=3$ và nghiệm kép $x=1$.

Và $f'(x)=0$ có 3 nghiệm đơn $x=x_1\in(0;1)$; $x=x_2\in(1;3)$ và $x=1$.

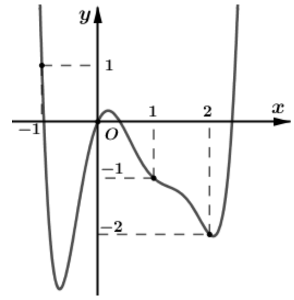
Ta có: $y=\left(f(x)\right)^2 \Rightarrow y'=2f'(x).f(x)$ có các nghiệm đơn là $x=0; x=3; x_1; x_2$ và nghiệm bội 3 là $x=1$.

Ta có bảng xét dấu sau:

x	$-\infty$		0		x_1		1		x_2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\|$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	$\|$	$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	$\|$	$-$	0	$-$	$\|$	$-$	0	$+$	
$y'=2f'(x).f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
			CT		CĐ		CT		CĐ		CT		

Vậy đồ thị hàm số có 2 điểm cực đại, 3 điểm cực tiểu.

Câu 16: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số như hình vẽ bên dưới.



Số điểm cực tiểu của hàm số $g\left(x\right)=2f\left(x+2\right)+\left(x+1\right)\left(x+3\right)$ là

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

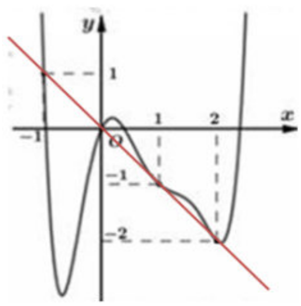
Chọn A

Ta có $g'\left(x\right)=2f'\left(x+2\right)+2x+4$.

$g'\left(x\right)=0 \Leftrightarrow f'\left(x+2\right)=-\left(x+2\right)$.

Đặt $t=x+2$ ta được $f'\left(t\right)=-t$. $\left(1\right)$

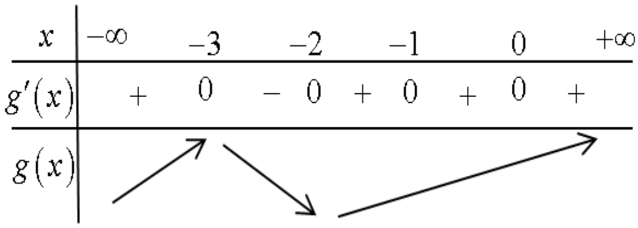
$\left(1\right)$ là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị $f'\left(t\right)$ và đường thẳng $d\ :\ y=-t$ (hình vẽ)



Dựa vào đồ thị của $f'\left(t\right)$ và đường thẳng $y=-t$ ta có

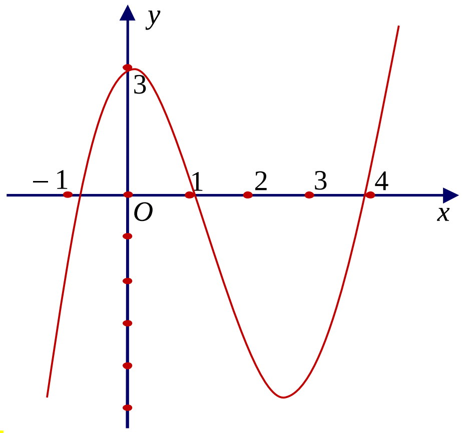
ta có $f'\left(t\right)=-t \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=0 \\ t=1 \\ t=2 \end{array}\right.$ hay $\left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=-2 \\ x=-1 \\ x=0 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên của hàm số $g\left(x\right)$.



Vậy đồ thị hàm số có một điểm cực tiểu.

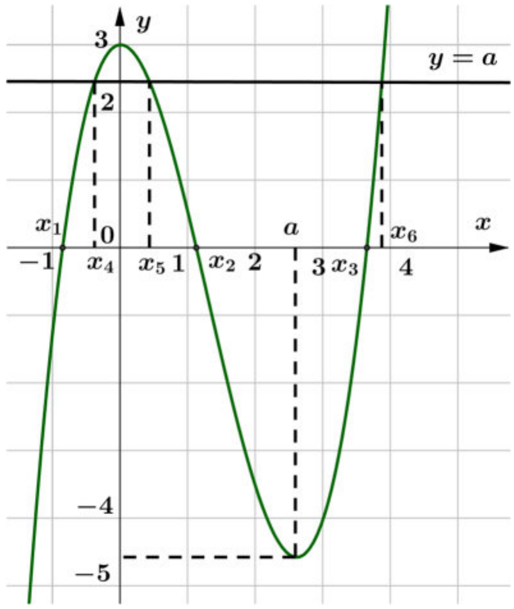
Câu 17: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong như hình vẽ. Đặt $g(x)=3f(f(x))+4$. Tìm số điểm cực trị của hàm số $g(x)$?



A. 2. **B.** 8. **C.** 10. **D.** 6.

Lời giải

Chọn B



$g'(x)=3f'(f(x)).f'(x)$.

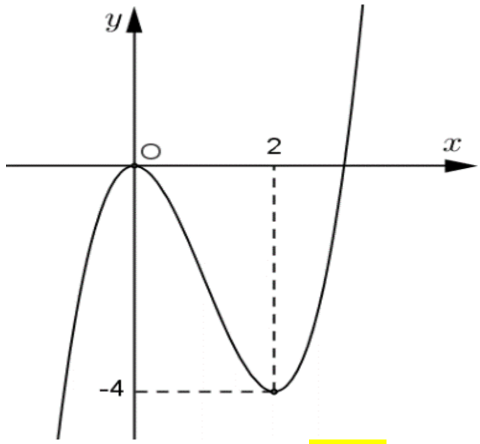
$$g'(x)=0 \Leftrightarrow 3f'(f(x)).f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(f(x))=0 \\ f'(x)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=0 \\ f(x)=a \\ x=0 \\ x=a \end{array}\right., (2<a<3).$$

$f(x)=0$ có 3 nghiệm đơn phân biệt x_1, x_2, x_3 khác 0 và a.

Vì $2<a<3$ nên $f(x)=a$ có 3 nghiệm đơn phân biệt x_4, x_5, x_6 khác x_1, x_2, x_3, 0, a.

Suy ra $g'(x)=0$ có 8 nghiệm đơn phân biệt. Do đó hàm số $g(x)=3f(f(x))+4$ có 8 điểm cực trị.

Câu 18: Biết rằng hàm số $f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị được cho như hình vẽ bên. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y=f\left[f(x)\right]$.



A. 5. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 6.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $y=f\left[f(x)\right]$, $y'=f'(x).f'\left[f(x)\right]$;

$$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} f'(x)=0\\ f'\left[f(x)\right]=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=0\\ x=2\\ f(x)=0\\ f(x)=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=0\\ x=2\\ x=a\in(2;+\infty)\\ x=b\in(a;+\infty)\end{array}\right..$$

Với $x\in(-\infty;0)$ $\Rightarrow\begin{cases} f'(x)>0\\ f(x)<0\Rightarrow f'\left[f(x)\right]>0\end{cases}\Rightarrow y'>0$.

Với $x\in(0;2)$ $\Rightarrow\begin{cases} f'(x)<0\\ f(x)<0\Rightarrow f'\left[f(x)\right]>0\end{cases}\Rightarrow y'<0$.

Với $x\in(2;a)$ $\Rightarrow\begin{cases} f'(x)>0\\ f(x)<0\Rightarrow f'\left[f(x)\right]>0\end{cases}\Rightarrow y'>0$.

Với $x\in(a;b)$ $\Rightarrow\begin{cases} f'(x)>0\\ 0<f(x)<2\Rightarrow f'\left[f(x)\right]<0\end{cases}\Rightarrow y'<0$.

Với $x\in(b;+\infty)$ $\Rightarrow\begin{cases} f'(x)>0\\ f(x)>2\Rightarrow f'\left[f(x)\right]>0\end{cases}\Rightarrow y'>0$.

Ta có bảng biến thiên

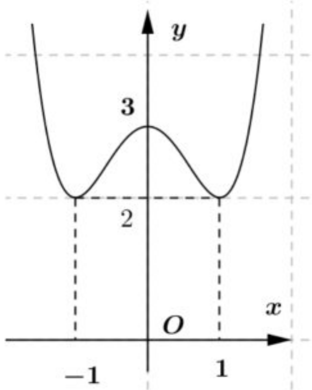
x	$-\infty$		0		2		a		b		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Dựa vào BBT suy ra hàm số $y=f\left[f(x)\right]$ có bốn điểm cực trị.

DẠNG 5. Biết đặc điểm của hàm số hoặc đồ thị, hoặc BBT, hoặc đạo hàm của hàm $f(x)$, tìm cực trị của hàm $y=f(\varphi(x))$; $y=f\left(f(x)\right),\ldots y=f\left(f\left(f\ldots(x)\right)\right)$ trong bài toán chứa tham số.

DẠNG 6. Biết đặc điểm của hàm số hoặc BBT, hoặc đồ thị, hoặc đạo hàm của hàm $f(x)$, tìm cực trị của hàm $y=\ln(f(x)), y=e^{f(x)}, \sin f(x), \cos f(x)...$ trong bài toán không chứa tham số.

Câu 19: Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình dưới đây



Hàm số $g(x)=\ln(f(x))$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

$g'(x)=\left[\ln(f(x))\right]'=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$.

Từ đồ thị hàm số $y=f(x)$ ta thấy $f(x)>0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Vì vậy dấu của $g'(x)$ là dấu của $f'(x)$. Ta có bảng biến thiên của hàm số $g(x)$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	↘		↗		↘		↗	$+\infty$

Vậy hàm số $g(x)=\ln(f(x))$ có 3 điểm cực trị.

Câu 20: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên sau

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$ || $-\infty$	↗	-2	↘	$-\infty$

Tìm số cực trị của hàm số $y=g(x)=\ln(f(x))$.

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 4

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $f(x)>0 \Leftrightarrow x<-1$

Ta có $g'(x)=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$; giải phương trình $y'=0 \Leftrightarrow f'(x)=0 \Leftrightarrow x=-3$ và y' đổi dấu khi qua $x=-3$.

Do đó hàm số $y=g(x)=\ln(f(x))$ có một cực trị.

Câu 21: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-2		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	0	-	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-1	↘	-3	↗	2	↘	-6

Hàm số $y=\ln\left(f(x)\right)$ có tất cả bao nhiêu điểm cực đại?

A. 0. **B.** 2 . **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện : $f(x)>0 \Leftrightarrow x\in(a;b):0<a<3<b$.

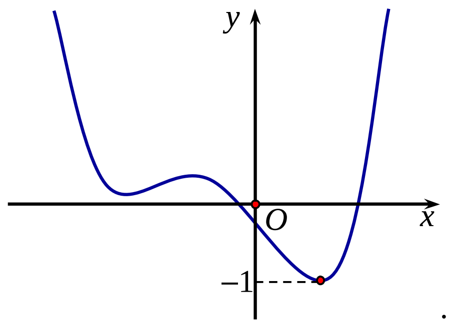
Ta có: $y=\ln\left(f(x)\right) \Rightarrow y'=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$.

Dấu của y' là dấu của $f'(x)$.

Dễ thấy trên $(a;b)$ hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại duy nhất 1 điểm $x=3$.

Do đó hàm số $y=\ln\left(f(x)\right)$ có đúng 1 điểm cực đại.

Câu 22: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên:



Tìm số điểm cực trị của hàm số $y=2^{f(x)}-3^{f(x)}$.

A. 6. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Dựa vào đồ thị hàm số $f(x)$ ta thấy $f(x)\ge -1,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Khi đó xét hàm số $g(x)=2^{f(x)}-3^{f(x)}$

Ta có $g'(x)=f'(x.)\left[2^{f(x)}.\ln 2-3^{f(x)}.\ln 3\right]$

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x)=0 \\ 2^{f(x)}.\ln 2-3^{f(x)}.\ln 3=0 \end{array}\right.$$

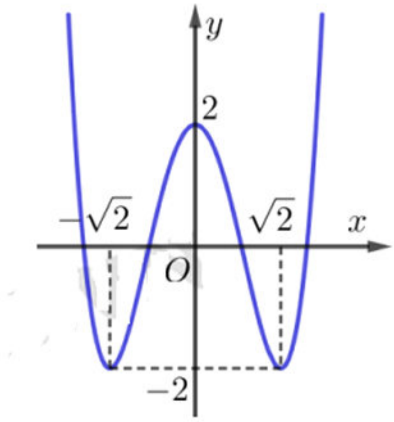
Xét phương trình $2^{f(x)}.\ln 2-3^{f(x)}.\ln 3=0$ trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{f(x)}=\log_2 3 \Leftrightarrow f(x)=\log_{\frac{2}{3}}\left(\log_2 3\right)\approx -1,4 \text{ (loại).}$$

Do đó số điểm cực trị của hàm $g(x)$ cũng bằng số điểm cực trị của hàm $f(x)$.

Tức là hàm $g(x)$ có 3 điểm cực trị.

Câu 23: Cho hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên:



Tìm số điểm cực trị của hàm số $y=3^{f(x)}+2^{f(x)}$.

A. 2. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 4.

Lời giải

Chọn D

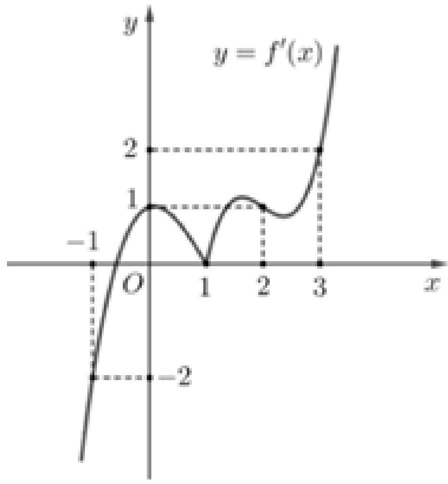
Ta thấy $f'(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ nên $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $y'=f'(x).3^{f(x)}+f'(x).2^{f(x)}=f'(x)\left[3^{f(x)}+2^{f(x)}\right]$.

Xét $y'=0 \Leftrightarrow f'(x)=0$ (do $3^{f(x)}+2^{f(x)}>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$).

Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy $f'(x)=0$ có 4 nghiệm phân biệt. Vậy $y'=0$ có 4 điểm cực trị.

Câu 24: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số $y=e^{f(x)-\frac{(x-1)^2}{2}}$ là



A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 5.

Lời giải

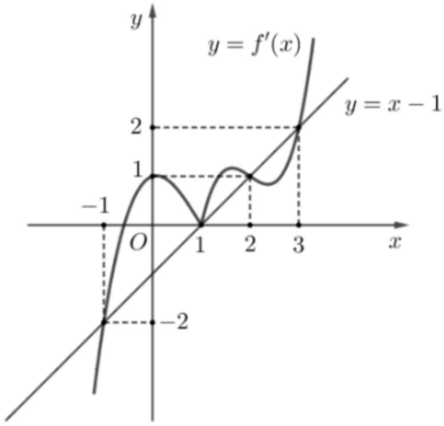
Chọn B

Xét $y=e^{g(x)}$, $g(x)=f(x)-\dfrac{(x-1)^2}{2}$

Hàm số xác định trên $\mathbb{R}$, có $y'=g'(x)e^{g(x)}=\left[f'(x)-(x-1)\right].e^{g(x)}$, trong đó $e^{g(x)}>0, \forall x\in\mathbb{R}$

nên $y'=0 \Leftrightarrow g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)-(x-1)=0 \Leftrightarrow f'(x)=x-1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=1 \\ x=2 \\ x=3 \end{array}\right.$

(Vì đường thẳng $y=x-1$ cắt đồ thị $f'(x)$ tại 4 điểm có hoành độ $x=-1; x=1; x=2; x=3$) và dấu của y' là dấu của $g'(x)$.

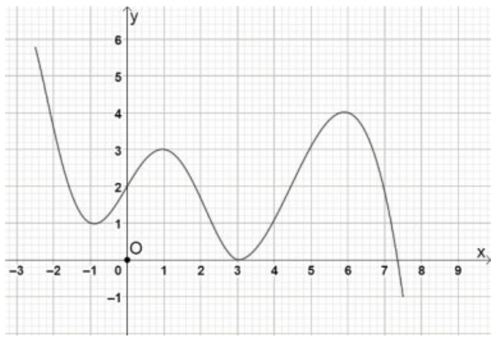


Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		1		2		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$y(-1)$	$\nearrow$		$\nearrow$	$y(2)$	$\searrow$	$y(3)$	$\nearrow$	$+\infty$

Suy ra hàm số $y=e^{g(x)}$ có ba điểm cực trị là $x=-1; x=2; x=3$.

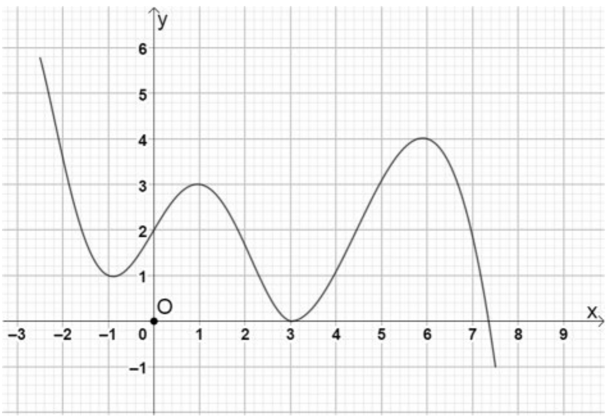
Câu 25: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ bên. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y=2019^{f(f(x)-1)}$.



A. 13. **B.** 11. **C.** 10. **D.** 12.

Lời giải

Chọn D



Ta có $y'=f'(x)f'(f(x)-1)2019^{f(f(x)-1)}\ln 2019$.

$$y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} f'(x)=0 & (1) \\ f'(f(x)-1)=0 & (2) \end{array}\right..$$

Giải (1) : $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=-1 \\ x_2=1 \\ x_3=3 \\ x_4=6 \end{array}\right..$

Giải (2) : $f'(f(x)-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)-1=-1 \\ f(x)-1=1 \\ f(x)-1=3 \\ f(x)-1=6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=0 \\ f(x)=2 \\ f(x)=4 \\ f(x)=7 \end{array}\right..$

Dựa vào đồ thị ta có:

+) $f(x)=0$ có 1 nghiệm $x_5>6$ là nghiệm bội l,

+) $f(x)=2$ có 5 nghiệm $x_6<-1;-1<x_7<1;1<x_8<3;3<x_9<6;6<x_{10}<x_5$ là các nghiệm bội 1,

+) $f(x)=4$ có 1 nghiệm $x_{11}<x_6$ là nghiệm bội 1.

+) $f(x)=7$ có 1 nghiệm $x_{12}<x_{11}$ là nghiệm bội 1.

Suy ra $y'=0$ có 12 nghiệm phân biệt mà qua đó y' đổi dấu.

Vậy hàm số $y=2019^{f(f(x)-1)}$ có 12 điểm cực trị.

DẠNG 7. Biết đặc điểm của hàm số hoặc BBT, hoặc đồ thị của hàm $f(x)$, hoặc đạo hàm của hàm $f(x)$, tìm cực trị của hàm $y=\ln(f(x)), y=e^{f(x)}, \sin f(x), \cos f(x)...$ trong bài toán chứa tham số.

DẠNG 8. Các dạng khác với các dạng đã đưa ra…

Câu 26: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm cấp ba liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x).f'''(x)=x(x-1)^2(x+4)^3, \forall x\in\mathbb{R}$. Hàm số $g(x)=(f'(x))^2-2f(x).f''(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 6.

Lời giải

Chọn C

.

$g'(x)=2f'(x)f''(x)-2[f'(x)f''(x)+f(x)f'''(x)]=-2f(x)f'''(x)=-2x(x-1)^2(x+4)^3$.

Suy ra $g'(x)$ đổi dấu khi qua hai điểm $x=0, x=-4$.

Câu 27: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm cấp hai liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $(f'(x))^2+f(x).f''(x)=15x^4+12x, \forall x\in\mathbb{R}$. Hàm số $g(x)=f(x).f'(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

$g'(x)=(f'(x))^2+f'(x)f''(x)=15x^4+12x$

$g'(x)=0 \Leftrightarrow x=0; x=\sqrt[3]{\frac{4}{5}}$.

Suy ra hàm số $g(x)=f(x).f'(x)$ có hai điểm cực trị.

CÁC DẠNG TOÁN VỀ HÀM ẨN LIÊN QUAN ĐẾN BÀI TOÁN CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

PHẦN 2: BIẾT BIỂU THỨC CỦA HÀM SỐ $y = f'(x)$.

Dạng toán 1. Biết biểu thức hàm số $y = f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y = g(x) = f(x) + h(x)$ **trong bài toán không chứa tham số**.

Dạng toán 2. Biết biểu thức hàm số $y = f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y = g(x) = f(x) + h(x)$ **trong bài toán chứa tham số**.

Dạng toán 3. Biết biểu thức hàm số $y = f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y = g(x) = f(u(x))$ **trong bài toán không chứa tham số** .

Dạng toán 4. Biết biểu thức hàm số $y = f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y = g(x) = f(u(x))$ **trong bài toán chứa tham số** .

Dạng toán 5. Biết biểu thức hàm số $y = f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y = g(x) = f(u(x)) + h(x)$ **trong bài toán không chứa tham số**.

Dạng toán 6. Biết biểu thức hàm số $y = f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y = g(x) = f(u(x)) + h(x)$ **trong bài toán chứa tham số**.

Dạng toán 7. Biết biểu thức hàm số $y = f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y = g(x) = [f(u(x))]^k$ **trong bài toán không chứa tham số**.

Dạng toán 8. Biết biểu thức hàm số $y = f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y = g(x) = [f(u(x))]^k$ **trong bài toán chứa tham số** .

Dạng toán 9. Biết biểu thức hàm số $y = f'(u(x))$ xét cực trị của hàm số $y = f(x)$ **trong bài toán không chứa tham số**.

Dạng toán 10. Biết biểu thức hàm số $y = f'(u(x))$ xét cực trị của hàm số $y = f(x)$ **trong bài toán chứa tham số**.

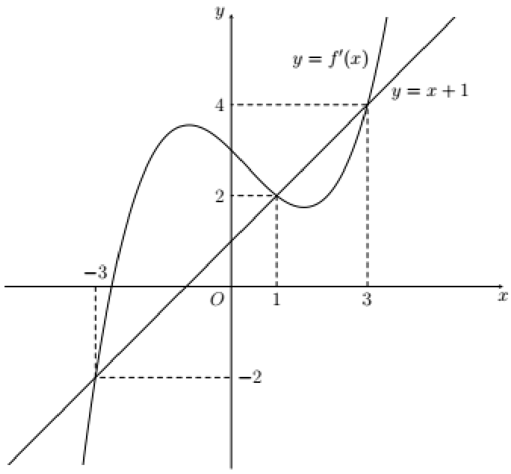
DẠNG 1. Biết biểu thức hàm số $y=f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y=g(x)=f(x)+h(x)$ trong bài toán không chứa tham số.

Câu 1: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=\frac{2}{9}x^3-\frac{2}{9}x^2-x+3$. Khi đó số điểm cực trị của hàm số $y=g(x)=2f(x)-(x+1)^2$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D



Ta có $y=g(x)=2f(x)-(x+1)^2 \Rightarrow g'(x)=2f'(x)-2(x+1)=2\left[f'(x)-(x+1)\right]$.

Vẽ hai hàm số $y=f'(x)$ và $y=x+1$ trên cùng một hệ trục tọa độ, ta có

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=1 \\ x=3 \end{array}\right..$$

Bảng xét dấu của hàm $g'(x)$:

x	$-\infty$		-3		1		3		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Từ bảng xét dấu ta có đáp án đúng là hàm số $y=g(x)$ có 3 điểm cực trị.

Câu 2: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(3-x)(x^2-1)+2x, \forall x\in\mathbb{R}$. Hỏi hàm số $g(x)=f(x)-x^2-1$ đạt cực tiểu tại điểm nào dưới đây?

A. $x=-1$. **B.** $x=1$. **C.** $x=3$. **D.** $x=0$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $g'(x)=f'(x)-2x=(3-x)(x^2-1)+2x-2x=(3-x)(x^2-1)$.

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow (3-x)(x^2-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=\pm 1 \end{array}\right..$$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

Dựa vào bảng biến thiên suy ra hàm số $g(x)$ đạt cực tiểu tại $x=1$.

Câu 3: Cho hàm số $f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $(0;+\infty)$ và $f'(x)=\ln x-x$. Hỏi hàm số $g(x)=f(x)+x+2019$ có bao nhiêu điểm cực trị trên khoảng $(0;+\infty)$?

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $g'(x)=f'(x)+1=\ln x-x+1$.

Xét hàm số $h(x)=\ln x-x+1$ trên $(0;+\infty)$. Ta có: $h'(x)=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}$.

Có $h'(x)=0\Leftrightarrow x=1$.

Bảng biến thiên của hàm $h(x)$ như sau:

x	0		1		$+\infty$
$h'(x)$		$+$		-	
$h(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Vậy $h(x)\le 0,\forall x\in(0;+\infty)\Leftrightarrow g'(x)\le 0,\forall x\in(0;+\infty)$

Do đó $g'(x)$ không đổi dấu trên $(0;+\infty)$ nên hàm số $g(x)$ không có cực trị trên khoảng đó.

Câu 4: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $f'(x)=(x+1)(2x^2-3x-9)$. Hỏi hàm số $g(x)=f(x)+x^3-3x^2-9x+6$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Vì hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên hàm số $g(x)=f(x)+x^3-3x^2-9x+6$ cũng liên tục trên $\mathbb{R}$.

Có $g'(x)=f'(x)+3x^2-6x-9=(x+1)(2x^2-3x-9)+3(x+1)(x-3)=(x+1)(x-3)(2x+6)$

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=3\\x=-3\end{array}\right.$$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-3		-1		3		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Từ bảng biến thiên suy ra hàm số $g(x)$ có 3 điểm cực trị.

Câu 5: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x)=x^2(x+1)^2(x-2)$.

Hỏi hàm số $g(x)=f(x)+\frac{2}{3}x^3+x^2-9$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?

A. 5. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C

Ta có:

$$g'(x)=f'(x)+2x(x+1)=x(x+1)\left(x^3-x^2-2x+2\right)$$

$$g'(x)=0\Leftrightarrow x(x+1)(x-1)\left(x^2-2\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-1\\x=1\\x=-\sqrt{2}\\x=\sqrt{2}\end{array}\right.$$

Lập bảng biến thiên của hàm số $y=g(x)$

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		-1		0		1		$\sqrt{2}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘		↗		↘		↗		↘		↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số $y=g(x)$ có 3 điểm cực tiểu.

Câu 6: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=3.\left(x^2-1\right)(x-2)$. Khi đó hàm số $g(x)=f(x)-x^3+3x$ đạt cực đại tại

A. $x=1$. **B.** $x=2$. **C.** $x=-1$. **D.** $x=3$.

Lời giải

Chọn A

Ta có:

$$g(x)=f'(x)-3x^2+3=3.\left(x^2-1\right).(x-2)-3\left(x^2-1\right)=3\left(x^2-1\right).(x-3)$$

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-1=0\\x-3=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-1\\x=3\end{array}\right.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		↘		↗		↘		↗	

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy hàm số $y=g(x)$ đạt cực đại tại $x=1$.

Câu 7: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x)$ thỏa mãn $f'(x)=(1-x)(x+2)g(x)+2019$ với $g(x)<0$ với $\forall x\in\mathbb{R}$.

Hàm số $y=f(1-x)+2019x+2020$ đạt cực đại tại

A. $x_0=1$. **B.** $x_0=2$. **C.** $x_0=0$. **D.** $x_0=3$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $h(x)=f(1-x)+2019x+2020$

Ta có: $h'(x)=-f'(1-x)+2019=-\left[1-(1-x)\right]\left[(1-x)+2\right]g(1-x)-2019+2019$

$=-x(3-x)g(1-x)$; $h'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=3\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên của hàm số $h(x)$.

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$h(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

Vậy hàm số đạt cực đại $x_0 = 3$.

Câu 8: Cho hàm số $y = f(x)$ có tập xác định $D = (0;+\infty)$ và có đạo hàm $f'(x) = 2x\ln x + x, \forall x > 0$.

Hàm số $y = g(x) = f(x) + \frac{1}{3}x^3 - x^2$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 1 **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $g'(x) = f'(x) + x^2 - 2x = 2x\ln x + x^2 - x = x(2\ln x + x - 1), \ \forall x > 0$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2\ln x + x - 1 = 0 \ (*)$

Xét hàm số $h(x) = 2\ln x + x - 1, \ \forall x > 0$

$h'(x) = \frac{2}{x} + 1 > 0, \forall x > 0 \Rightarrow$ Hàm số $y = h(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$

Mặt khác: $h(1) = 0 \Rightarrow$ Phương trình (*) có nghiệm duy nhất $x = 1$

Bảng xét dấu:

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	$\|$	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng biến thiên suy ra hàm số $y = g(x)$ có một điểm cực trị.

Câu 9: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x-2)^3$. Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(x) + (2-x)^3$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Ta có $g'(x) = f'(x) - 3(2-x)^2 = f'(x) - 3(x-2)^2 = (x-2)^2(x^2 - 2x - 3)$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -1. \\ x = 3 \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên của hàm số $g(x)$

x	$-\infty$		-1		2		3		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Từ BBT suy ra hàm số có 2 điểm cực trị.

DẠNG 2. Biết biểu thức hàm số $y = f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y = g(x) = f(x) + h(x)$ trong bài toán chứa tham số.

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x^2-3)(x^2+1)$ với $x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = f(x) - mx$ có 4 điểm cực trị?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Xét đạo hàm $y' = f'(x) - m = (x^2-3)(x^2+1) - m$; $y' = 0 \Leftrightarrow (x^2-3)(x^2+1) = m$

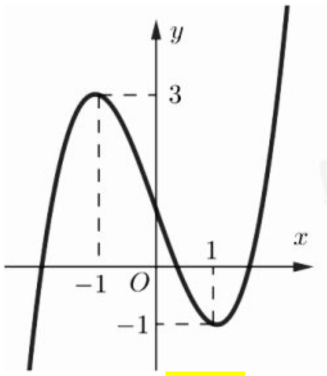
YCBT $\Leftrightarrow$ $y' = 0$ có 4 nghiệm phân biệt

Đặt $g(x) = (x^2-3)(x^2+1) = x^4 - 2x^2 - 3$; $g'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x^2-1)$; BBT

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	-3	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy $-4 < m < -3$, mà m nguyên nên không có m nào.

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị đạo hàm $y = f'(x)$ như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc khoảng $(-12\,;12)$ sao cho hàm số $y = f(x) + mx + 12$ có đúng một điểm cực trị?



A. 5. **B.** 18. **C.** 20. **D.** 12.

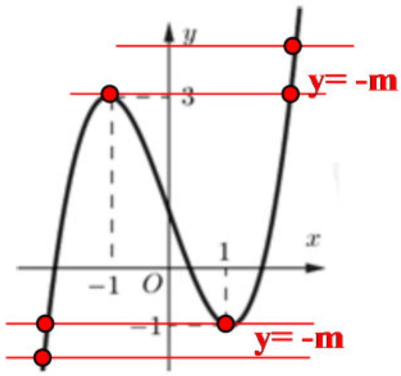
Lời giải

Chọn C

Đạo hàm $y' = f'(x) + m$; $y' = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -m$

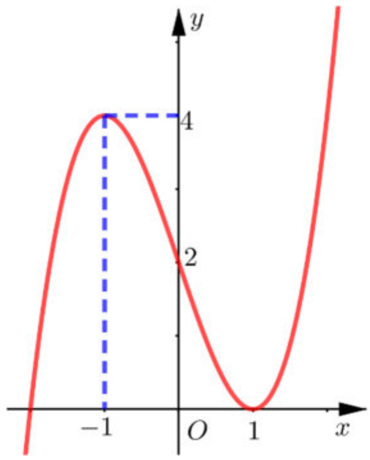
YCBT $\Leftrightarrow$ Phương trình $y' = 0$ (có 1 nghiệm đơn) hoặc (có 1 nghiện đơn và nghiệm kép)

$\Leftrightarrow$ đường thẳng $y = -m$ cắt đồ thị đạo hàm $y = f'(x)$ tại 1 điểm có có hoành độ là nghiệm đơn (bội lẻ) hoặc tại hai điểm trong đó có điểm có hoành độ bội chẵn $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -m \ge 3 \\ -m \le -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \ge 1 \\ m \le -3 \end{array}\right.$



Kết hợp với $m \in (-12\,;12)$ ta được $m \in (-12\,;-3] \cup [1\,;12)$ và m là số nguyên nên có tất cả $9 + 11 = 20$ giá trị nguyên.

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ sau:



Tìm m để hàm số $y = f(x) - mx$ có 3 điểm cực trị

A. $0 < m < 4$. **B.** $0 \le m \le 4$. **C.** $m > 4$. **D.** $m < 0$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $y' = f'(x) - m$; $y' = 0 \Leftrightarrow f'(x) = m$.

Dựa vào đồ thị $y = f'(x)$, suy ra phương trình $f'(x) = m$ có 3 nghiệm phân biệt và các đó là nghiệm đơn $\Leftrightarrow$ đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị đạo hàm $y = f'(x)$ tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow 0 < m < 4$.

Vậy để hàm số $y = f(x) - mx$ có 3 điểm cực trị thì $0 < m < 4$.

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = -x^3 - 2x^2, \forall x \in \mathbb{R}$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x) = f(x) + mx + 3$ có 3 điểm cực trị.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Hàm số $g(x) = f(x) + mx + 3$ xác định trên $\mathbb{R}$.

$g'(x) = f'(x) + m = -x^3 - 2x^2 + m$

Hàm số $g(x) = f(x) + mx + 3$ có 3 điểm cực trị $\Leftrightarrow$ $g'(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow -x^3 - 2x^2 + m = 0$ có 3 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow x^3 + 2x^2 = m$ có 3 nghiệm phân biệt

Đặt $g(x) = x^3 + 2x^2$; $g'(x) = 3x^2 + 4x$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -\dfrac{4}{3} \end{array}\right.$; BBT:

x	$-\infty$		$-\dfrac{4}{3}$		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$\dfrac{32}{27}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

y = m

Vậy $0 < m < \dfrac{32}{27}$, mà m nguyên dương nên $m = 1$.

Câu 5: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x\sqrt{4-x^2},\forall x\in[-2;2]$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x)=f(x)-m^2x+3m$ có 2 điểm cực trị.

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Hàm số $g(x)=f(x)-m^2x+3m$ xác định trên $[-2;2]$.

Đạo hàm $g'(x)=f'(x)-m^2=x\sqrt{4-x^2}-m^2$

YCBT: Hàm số $g(x)=f(x)-m^2x+3m$ có 2 điểm cực trị $\Leftrightarrow$ $g'(x)=0$ có 2 nghiệm phân biệt và $g'(x)$ đổi dấu qua các nghiệm đó

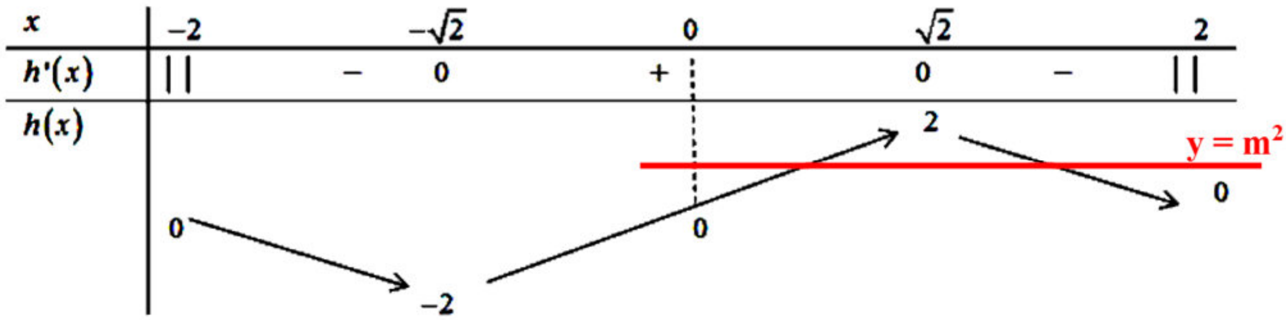
Xét phương trình $x\sqrt{4-x^2}-m^2=0$ $\quad(*)$

$\Leftrightarrow x\sqrt{4-x^2}=m^2$

Xét hàm số $h(x)=x\sqrt{4-x^2},x\in[-2;2]$

$h'(x)=\dfrac{4-2x^2}{\sqrt{4-x^2}}$, $h'(x)=0\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{2}$

Bảng biến thiên của hàm $h(x)$



Vậy $0<m^2<2\Leftrightarrow\begin{cases}-\sqrt{2}<m<\sqrt{2}\\ m\neq 0\end{cases}$, m nguyên dương nên $m\in\{-1;1\}$.

Câu 6: Cho hàm số $y=f(x)$ có biểu thức đạo hàm $f'(x)=(x+3)(x-1)(x-2)$ và hàm số $y=g(x)=6f(x)+2x^3+3(m+1)x^2-6(m+2)x+2019$. Gọi $S=(-\infty;a)\cup(b;c)$ là tập tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=g(x)$ có ba cực trị. Giá trị của $a+2b+3c$ bằng

A. 2. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 8.

Lời giải

Chọn D

Từ yêu cầu bài toán ta có: $g'(x)=6f'(x)+6x^2+6(m+1)x-6(m+2)$

$\Leftrightarrow g'(x)=6(x+3)(x-1)(x-2)+6x^2+6(m+1)x-6(m+2)$

$\Leftrightarrow g'(x)=6(x-1)(x^2+2x+m-4)$.

Suy ra $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x^2+2x+m-4=0\end{array}\right.$.

Để hàm số $y=g(x)$ có ba cực trị thì $g'(x)=0$ có ba nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ phương trình $x^2+2x+m-4=0$ có hai nghiệm phân biệt khác 1.

Hay $\begin{cases}\Delta'=5-m>0\\ m-1\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<5\\ m\neq 1\end{cases}$. Suy ra $S=(-\infty;1)\cup(1;5)$.

Như vậy $a=1$, $b=1$, $c=5$ và $a+2b+3c=8$.

Câu 7: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có biểu thức đạo hàm $f'\left(x\right)=x^3+3x^2-1$ và hàm số $y=g\left(x\right)=f\left(x\right)-mx+2020$. Gọi $S=\left(a;b\right)$ là tập tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=g\left(x\right)$ có ba cực trị. Giá trị của $2a+3b$ bằng

A. 1. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 7.

Lời giải

Chọn D

Từ yêu cầu bài toán ta có: $g'\left(x\right)=f'\left(x\right)-m \Leftrightarrow g'\left(x\right)=x^3+3x^2-1-m$.

Suy ra $g'\left(x\right)=0 \Leftrightarrow x^3+3x^2-1-m=0 \Leftrightarrow x^3+3x^2-1=m$.

Để hàm số $y=g\left(x\right)$ có ba cực trị thì $g'\left(x\right)=0$ có ba nghiệm phân biệt. Hay phương trình $x^3+3x^2-1=m$ có ba nghiệm phân biệt.

Xét hàm số $y=h\left(x\right)=x^3+3x^2-1$ có $h'\left(x\right)=3x^2+6x$ và $h'\left(x\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=0 \end{array}\right.$.

Do đó ta có bảng biến thiên của hàm số $y=h\left(x\right)$ như sau:

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Để phương trình $x^3+3x^2-1=m$ có ba nghiệm phân biệt thì đường thẳng $y=m$ cắt đồ thị hàm số $y=h\left(x\right)$ tại ba điểm phân biệt. Nghĩa là $-1<m<3$. Hay $S=\left(-1;3\right)$. Do đó $2a+3b=7$

DẠNG 3. Biết biểu thức hàm số $y=f'\left(x\right)$ xét cực trị của hàm số $y=g\left(x\right)=f\left(u\left(x\right)\right)$ trong bài toán không chứa tham số .

Câu 1: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm $f'\left(x\right)=\left(x^2-1\right)\left(x-4\right)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Hàm số $g\left(x\right)=f\left(3-x\right)$ có bao nhiêu điểm cực đại?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Từ giả thiết, ta có bảng biến thiên của hàm số $f\left(x\right)$

x	$-\infty$		-1		1		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Ta có $g\left(x\right)=f\left(3-x\right) \Rightarrow g'\left(x\right)=-f'\left(3-x\right)$.

Từ bảng biến thiên của hàm số $f\left(x\right)$ ta có

$$g'\left(x\right)\ge 0 \Leftrightarrow f'\left(3-x\right)\le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3-x\le -1 \\ 1\le 3-x\le 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\ge 4 \\ -1\le x\le 2 \end{array}\right..$$

Như thế ta có bảng biến thiên của hàm số $g\left(x\right)$

x	$-\infty$		-1		2		4		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Từ bảng biến thiên, ta nhận thấy hàm số $g\left(x\right)$ có một điểm cực đại.

Câu 2: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định, liên tục, có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $f'\left(x\right)=x^2\left(x-2028\right)\left(x-2023\right)^2$. Khi đó hàm số $y=g(x)=f\left(x^2+2019\right)$ có tất cả bao nhiêu điểm cực trị?

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y=g(x)=f\left(x^2+2019\right)\Rightarrow y'=g'(x)=\left(x^2+2019\right)'f'\left(x^2+2019\right)=2x.f'\left(x^2+2019\right)$.

Mặt khác $f'\left(x\right)=x^2\left(x-2028\right)\left(x-2023\right)^2$. Nên suy ra:

$$y'=g'(x)=2x.f'\left(x^2+2019\right)=2x.\left(x^2+2019\right)^2\left(x^2+2019-2028\right)\left(x^2+2019-2023\right)^2$$
$$=2x.\left(x^2+2019\right)^2\left(x^2-9\right)\left(x^2-4\right)^2=2x.\left(x^2+2019\right)^2\left(x-3\right)\left(x+3\right)\left(x-2\right)^2\left(x+2\right)^2.$$

$$y'=2x.\left(x^2+2019\right)^2\left(x-3\right)\left(x+3\right)\left(x-2\right)^2\left(x+2\right)^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\ (nghiem\ don)\\x=3\ (nghiem\ don)\\x=-3\ (nghiem\ don)\\x=2\ (nghiem\ boi\ 2)\\x=-2\ (nghiem\ boi\ 2)\end{array}\right.$$

Ta có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$		-3		-2		0		2		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
y		$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Từ bảng biến thiên suy ra hàm số $y=g(x)=f\left(x^2+2019\right)$ có tất cả 3 điểm cực trị.

Câu 3: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm $f'\left(x\right)=x^2-2x$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Hàm số $y=f\left(x^2-8x\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 6. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $f'\left(x\right)=x^2-2x=x\left(x-2\right)$

và $y'=\left(2x-8\right).f'\left(x^2-8x\right)=2\left(x-4\right)\left(x^2-8x\right)\left(x^2-8x-2\right)$

$$\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-4=0\\x^2-8x=0\\x^2-8x-2=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=4\\x=0\\x=8\\x=4+3\sqrt{2}\\x=4-3\sqrt{2}\end{array}\right..$$

Bảng xét dấu y' như sau:

x	$-\infty$		$4-3\sqrt{2}$		0		4		8		$4+3\sqrt{2}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Vậy hàm số $y=f\left(x^2-8x\right)$ có 5 điểm cực trị.

DẠNG 4. Biết biểu thức hàm số $y=f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y=g(x)=f\left(u(x)\right)$ trong bài toán chứa tham số.

Câu 1: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2\left(x^2-3x+2\right)\left(x^2-x\right)$, với mọi $x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y=f\left(x^2-16x+2m\right)$ có 5 điểm cực trị?

A. 30. **B.** 31. **C.** 32. **D.** 33.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y'=f'\left(x^2-16x+2m\right)(2x-16)$.

Cho $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=8\\ f'\left(x^2-16x+2m\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}x=8 & \\ x^2-16x+2m=1 & (1)\\ x^2-16x+2m=0 & (2)\\ x^2-16x+2m=2 & (3)\end{array}\right.$.

Do các nghiệm của (1) đều là nghiệm bội bậc chẵn còn (2) và (3) không thể có nghiệm trùng nhau nên hàm số đã cho có 5 điểm cực trị khi (2) và (3) có 2 nghiệm phân biệt khác 8.

$\begin{cases}\Delta_2'>0\\ \Delta_3'>0\\ 8^2-16.8+m\neq 0\\ 8^2-16.8+m\neq 2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}64-2m>0\\ 64-2m+2>0\\ -64+m\neq 0\\ -64+m\neq 2\end{cases}\Leftrightarrow m<32$ mà m nguyên dương nên m có 31 giá trị.

Câu 2: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2(x+1)\left(x^2+2mx+4\right)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m không vượt quá 2019 để hàm số $y=f\left(x^2\right)$ có đúng 1 điểm cực trị?

A. 2021. **B.** 2022. **C.** 5. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y'=\left(f(x^2)\right)'=2x.f'(x^2)=2x.x^4(x^2+1)(x^4+2mx^2+4)=2x^5(x^2+1)(x^4+2mx^2+4)$;

Khi đó: $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x^4+2mx^2+4=0\xrightarrow{t=x^2}t^2+2mt+4=0\ (1)\end{array}\right.$.

Ta thấy nghiệm của (1) nếu có sẽ khác 0. Nên $x=0$ là 1 cực trị của hàm số.

Do đó để hàm số có 1 điểm cực trị thì (1) hoặc vô nghiệm hoặc có nghiệm kép, hoặc có 2 nghiệm âm

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\Delta'=m^2-4\le 0\\ \begin{cases}\Delta'=m^2-4>0\\ S=-2m<0\\ P=4>0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-2\le m\le 2\\ \begin{cases}\left[\begin{array}{l}m<-2\\ m>2\end{array}\right.\\ m>0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-2\le m\le 2\\ m>2\end{array}\right.\Leftrightarrow m\ge -2.$$

Kết hợp với $\begin{cases}m\in\mathbb{Z}\\ m\le 2019\end{cases}\Rightarrow m\in\left\{-2;-1;0;1;2;...;2018;2019\right\}$: có 2022 giá trị nguyên của m.

Câu 3: Cho hàm số $f(x)$ có $f'(x)=x(x-1)(x^2-2mx+1)$. Hỏi có tất cả bao nhiêu số nguyên m không vượt quá 2018 sao cho hàm số $g(x)=f(x^2)$ có 7 điểm cực trị?

A. 2019. **B.** 2016. **C.** 2017. **D.** 2018.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $g'(x)=2x.f'(x^2)=2x.x^2(x^2-1)(x^4-2mx^2+1)=2x^3(x^2-1)(x^4-2mx^2+1)$.

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm 1 \\ x^4-2mx^2+1=0 \quad (*) \end{array}\right.$$

Do $x=0$ là nghiệm bội lẻ và $x=\pm 1$ là các nghiệm đơn nên để $g(x)$ có 7 điểm cực trị thì phương trình $(*)$ phải có 4 nghiệm phân biệt khác 0 và khác ± 1, hay phương trình $t^2-2mt+1=0$ phải có 2 nghiệm dương phân biệt khác 1.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'=m^2-1>0 \\ S=2m>0 \\ P=1>0 \\ 1^2-2m.1+1\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m>1 \\ m<-1 \end{array}\right. \\ m>0 \\ m\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m>1.$$

Kết hợp với điều kiện m nguyên, không vượt quá 2018 suy ra có 2017 giá trị của m.

Câu 4: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-1)^2(x^2-2x)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x)=f(x^2-8x+m)$ có 5 điểm cực trị ?

A. 15. **B.** 16. **C.** 17. **D.** 18.

Lời giải

Chọn A

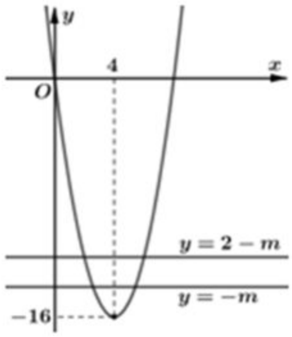
Xét $f'(x)=0 \Leftrightarrow (x-1)^2(x^2-2x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \text{ (nghiem boi 2)} \\ x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$.

Ta có $g'(x)=2(x-4)f'(x^2-8x+m)$;

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow 2(x-4)f'(x^2-8x+m)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x^2-8x+m=1 \text{ (nghiem boi 2)} \\ x^2-8x+m=0 \quad (1) \\ x^2-8x+m=2 \quad (2) \end{array}\right..$$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow g'(x)=0$ có 5 nghiệm bội lẻ $\Leftrightarrow$ mỗi phương trình (1), (2) đều có hai nghiệm phân biệt khác 4. $(*)$

Xét đồ thị (C) của hàm số $y=x^2-8x$ và hai đường thẳng $d_1: y=-m$, $d_2: y=-m+2$ (như hình vẽ).



Khi đó $(*)$ $\Leftrightarrow$ d_1, d_2 cắt (C) tại bốn điểm phân biệt $\Leftrightarrow -m > -16 \Leftrightarrow m < 16$.

Vậy có 15 giá trị m nguyên dương thỏa.

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x^2 - x)(x^2 - 4x + 3), \forall x \in \mathbb{R}$. Tính tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x) = f(x^2 + m)$ có 3 điểm cực trị.

A. 0. **B.** 6. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f'(x) = x(x-1)^2(x-3)$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 3 \end{array}\right.$ ($x = 0, x = 3$ là nghiệm đơn; $x = 1$ là nghiệm bội chẵn).

Lại có $g'(x) = 2x.f'(x^2 + m)$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ f'(x^2 + m) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 + m = 0 \\ x^2 + m = 1 \\ x^2 + m = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = 0 & \\ x^2 = -m & (1) \\ x^2 = 1 - m & (2) \\ x^2 = 3 - m & (3) \end{array}\right.$

Do (2) có nghiệm luôn là nghiệm bội chẵn; các phương trình $(1),(3)$ có nghiệm không chung nhau và $-m < 3 - m$.

Hàm số $g(x)$ có 3 điểm cực trị $\Leftrightarrow g'(x) = 0$ có ba nghiệm bội lẻ $\Leftrightarrow \begin{cases} -m \le 0 \\ 3 - m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \le m < 3$.

Vì $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{0;1;2\}$.

Vậy tổng các giá trị nguyên của tham số m bằng 3.

Câu 6: Cho hàm số $y = f(x)$ có $f'(x) = (x-2)^2(x^2 - 4x + 3)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = f(x^2 - 10x + m + 9)$ có 5 điểm cực trị?

A. 18. **B.** 17. **C.** 16. **D.** 15.

Lời giải

Chọn C

Theo đề bài $f'(x) = (x-2)^2(x^2 - 4x + 3) = (x-2)^2(x-1)(x-3)$

Ta có $y' = (2x - 10) f'(x^2 - 10x + m + 9)$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x - 10 = 0 \\ f'(x^2 - 10x + m + 9) = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 5 \\ (x^2 - 10x + m + 7)^2 (x^2 - 10x + m + 8)(x^2 - 10x + m + 6) = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=5\\ \left(x^2-10x+m+7\right)^2=0\\ x^2-10x+m+8=0\quad(1)\\ x^2-10x+m+6=0\quad(2)\end{array}\right..$$

Giả sử x_0 là một nghiệm của (1) $\Rightarrow x_0{}^2-10x_0+m+8=0$.

Do đó $x_0{}^2-10x_0+m+6=-2\neq 0,\forall m$, suy ra (1) và (2) không có nghiệm chung.

Hàm số $y=f\left(x^2-10x+m+9\right)$ có năm điểm cực trị khi mỗi phương trình $(1),(2)$ có hai nghiệm phân biệt khác 5

$$\Leftrightarrow\begin{cases}25-m-8>0\\ 25-m-6>0\\ m-17\neq 0\\ m-19\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<17\\ m<19\\ m\neq 17\\ m\neq 19\end{cases}\Leftrightarrow m<17\xrightarrow{m\in\mathbb{Z}^+}m\in\{1;2;3;...;15;16\}.$$

Vậy có 16 giá trị nguyên của m để hàm số $y=f\left(x^2-10x+m+9\right)$ có 5 điểm cực trị.

DẠNG 5. Biết biểu thức hàm số $y=f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y=g(x)=f\left(u(x)\right)+h(x)$ trong bài toán không chứa tham số.

Câu 1. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(2-x)\left(x^2-8\right)^{2019}$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Hàm số $y=f\left(x^2-2\right)+\frac{1}{2}x^4-4x^2+2020$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

A. 4. **B.** 2019. **C.** 5. **D.** 2020.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $g(x)=f\left(x^2-2\right)+\frac{1}{2}x^4-4x^2+2020$.

+ $g'(x)=2x.f'\left(x^2-2\right)+2x^3-8x$.

+ $g'(x)=0\Leftrightarrow 2x.f'\left(x^2-2\right)+2x^3-8x=0\Leftrightarrow 2x\left[f'\left(x^2-2\right)+x^2-4\right]=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ f'\left(x^2-2\right)+x^2-4=0\ (*)\end{array}\right..$$

Giải phương trình $(*)$: Đặt $t=x^2-2$.

$(*)\Leftrightarrow f'(t)+t-2=0\Leftrightarrow(2-t)\left(t^2-8\right)^{2019}+(t-2)=0\Leftrightarrow(2-t)\left[\left(t^2-8\right)^{2019}-1\right]=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2-t=0\\ \left(t^2-8\right)^{2019}-1=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=2\\ t^2-8=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=2\\ t=\pm 3\end{array}\right..$$

Suy ra $\left[\begin{array}{l}x^2-2=2\\ x^2-2=3\\ x^2-2=-3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2=4\\ x^2=5\\ x^2=-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pm 2\\ x=\pm\sqrt{5}\end{array}\right..$

$\Rightarrow g'(x)=0$ có 5 nghiệm (không có nghiệm bội chẵn).

Vậy hàm số có 5 cực trị.

Câu 2. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=\left(e^x-2\right)\left(e^x+x\right)$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Biết hàm số $y=g(x)=f(\ln x)-x+2\ln x$ đạt cực tiểu tại $x=x_0$. Chọn khẳng định **đúng**?

A. $x_0 \in \left(0;\dfrac{3}{2}\right)$. **B.** $x_0 \in \left(\dfrac{3}{2};3\right)$.

C. $x_0 \in \left(e^2;e^3\right)$. **D.** $x_0 \in \left(\ln 2;\ln 3\right)$.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $y = g\left(x\right) = f\left(\ln x\right) - x + 2\ln x$, $x > 0$.

Ta có $y' = g'\left(x\right) = \dfrac{1}{x}f'\left(\ln x\right) - 1 + \dfrac{2}{x} = \dfrac{1}{x}\left(e^{\ln x} - 2\right)\left(e^{\ln x} + \ln x\right) - \dfrac{x-2}{x} = \dfrac{1}{x}\left(x-2\right)\left(x + \ln x\right) - \dfrac{x-2}{x}$

$= \dfrac{x-2}{x}\left(x + \ln x - 1\right)$.

$$g'\left(x\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \left[\begin{array}{l} x - 2 = 0 \\ x + \ln x - 1 = 0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x + \ln x - 1 = 0 \quad (1) \end{array}\right. \end{cases}.$$

Hàm số $y = x + \ln x - 1$ đồng biến trên $\left(0;+\infty\right)$ nên phương trình (1) nếu có nghiệm thì nghiệm là duy nhất. Dễ thấy $x = 1$ là nghiệm duy nhất của (1).

Bảng biến thiên

x	0		1		2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		↗		↘		↗	

Từ bảng biến thiên suy ra hàm số $y = g\left(x\right)$ đạt cực tiểu tại $x = x_0 = 2$. Vậy $x_0 \in \left(\dfrac{3}{2};3\right)$.

Câu 3. Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ có đạo hàm $f'\left(x\right) = x^2 - 2x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Hàm số $y = f\left(1 - \dfrac{x}{2}\right) + 4x$ có mấy điểm cực trị?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $g\left(x\right) = f\left(1 - \dfrac{x}{2}\right) + 4x$.

$$g'\left(x\right) = -\dfrac{1}{2}f'\left(1 - \dfrac{x}{2}\right) + 4 = -\dfrac{1}{2}\left[\left(1 - \dfrac{x}{2}\right)^2 - 2\left(1 - \dfrac{x}{2}\right)\right] + 4 = -\dfrac{x^2}{8} + \dfrac{9}{2} = 0 \Leftrightarrow x = \pm 6.$$

Bảng xét dấu $g'\left(x\right)$

x	$-\infty$		-6		6		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số có 2 điểm cực trị.

Câu 4. Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ có đạo hàm $f'\left(x\right) = x^2 - 6x + 11$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Hàm số $y = f\left(e^x\right) - 6x$ có mấy điểm cực tiểu?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $g(x)=f\left(e^x\right)-6x$.

$$g'(x)=e^x f'\left(e^x\right)-6=e^{3x}-6e^{2x}+11e^x-6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} e^x=1 \\ e^x=2 \\ e^x=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\ln 2 \\ x=\ln 3 \end{array}\right..$$

Bảng xét dấu $g'(x)$

x	$-\infty$		0		$\ln 2$		$\ln 3$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số có 2 điểm cực tiểu.

DẠNG 6. Biết biểu thức hàm số $y=f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y=g(x)=f(u(x))+h(x)$ trong bài toán chứa tham số.

DẠNG 7. Biết biểu thức hàm số $y=f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y=g(x)=\left[f(u(x))\right]^k$ trong bài toán không chứa tham số.

Câu 1: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=4x^3+2x$ và $f(0)=1$. Số điểm cực tiểu của hàm số $g(x)=f^3\left(x^2-2x-3\right)$ là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f(x)=\int\left(4x^3+2x\right)dx=x^4+x^2+C$ và $f(0)=1\Rightarrow C=1$.

Do đó ta có $f(x)=x^4+x^2+1>0,\forall x$.

Ta có: $g'(x)=3(2x-2).f^2\left(x^2-2x-3\right).f'\left(x^2-2x-3\right)$

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} 2x-2=0 \\ 4\left(x^2-2x-3\right)^3+2\left(x^2-2x-3\right)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \\ x=3 \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		↘		↗		↘		↗	

Từ bảng biến thiên ta suy ra hàm số $y=g(x)$ có 2 cực tiểu.

Câu 2: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=3x^2-3$ và $f(2)=4$. Hàm số $g(x)=\left[f(1-2x)\right]^2$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Chọn A

+ Hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=3x^2-3$.

$\Rightarrow y=f(x)=\int f'(x)\mathrm{d}x=\int\left(3x^2-3\right)\mathrm{d}x=x^3-3x+C$.

Mà $f(2)=4\Rightarrow 2^3-3.2+C=4\Leftrightarrow C=2$.

$\Rightarrow f(x)=x^3-3x+2$.

+ $g(x)=\left[f(1-2x)\right]^2$

$\Rightarrow g'(x) = 2f(1-2x).\left[f(1-2x)\right]' = -4f(1-2x).f'(1-2x)$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(1-2x) = 0 \\ f'(1-2x) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (1-2x)^3 - 3(1-2x) + 2 = 0 \\ 1-2x = 1 \\ 1-2x = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1-2x = 1\,(nghiem\ kep) \\ 1-2x = -2 \\ 1-2x = 1 \\ 1-2x = -1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0\,(nghiem\ boi\ ba) \\ x = 1 \\ x = \dfrac{3}{2} \end{array}\right..$$

$\Rightarrow$ phương trình $g'(x) = 0$ có 2 nghiệm đơn là $x = 1,\ x = \dfrac{3}{2}$ và một nghiệm bội ba $x = 0$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		1		$3/2$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	16	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy hàm số $g(x) = \left[f(1-2x)\right]^2$ có 3 điểm cực trị.

Câu 3: Cho hàm số bậc bốn trùng phương $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = 4x^3 - 4x$ và $f(0) = -1,\ f(-1) = -2$. Hàm số $g(x) = 2f^3(x) + 4f^2(x) + 1$ có nhiều nhất bao nhiêu điểm cực tiểu?

A. 4. **B.** 5. **C.** 7. **D.** 9.

Lời giải

Chọn B

$+\ f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right..$

Bảng biến thiên của hàm số bậc bốn trùng phương $y = f(x)$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

$+\ g'(x) = 6f^2(x).f'(x) + 8f(x).f'(x) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = 0 \\ f'(x) = 0 \\ f(x) = -\dfrac{4}{3} \end{array}\right..$$

Dựa vào bảng biến thiên trên ta có:

$f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm 1 \end{array}\right.$, $f(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=x_1 \\ x=x_2 \end{array}\right.$,

$f(x)=-\dfrac{4}{3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=a \\ x=b \\ x=c \\ x=d \end{array}\right.$ thỏa mãn: $x_1<a<-1<b<0<c<1<d<x_2$.

Khi đó để có nhiều điểm cực tiểu nhất thì bảng xét dấu của $g'(x)$ có dạng:

x	$-\infty$		x_1		a		-1		b		0		c		1		d		x_2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Vậy hàm số $g(x)=2f^3(x)+4f^2(x)+1$ có nhiều nhất 5 điểm cực tiểu.

DẠNG 8. Biết biểu thức hàm số $y=f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y=g(x)=\left[f(u(x))\right]^k$ trong bài toán chứa tham số .

DẠNG 9. Biết biểu thức hàm số $y=f'(u(x))$ xét cực trị của hàm số $y=f(x)$ trong bài toán không chứa tham số.

DẠNG 10. Biết biểu thức hàm số $y=f'(u(x))$ xét cực trị của hàm số $y=f(x)$ trong bài toán chứa tham số.

CÁC DẠNG TOÁN VỀ HÀM ẨN LIÊN QUAN ĐẾN BÀI TOÁN CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

PHẦN 3: BIẾT ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ $y=f'(x)$

Dạng toán 1. Biết ĐỒ THỊ hàm số $y=f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y=g(x)=f(x)+h(x)$ **trong bài toán không chứa tham số**.

Dạng toán 2. Biết ĐỒ THỊ hàm số $y=f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y=g(x)=f(x)+h(x)$ **trong bài toán chứa tham số**.

Dạng toán 3. Biết ĐỒ THỊ hàm số $y=f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y=g(x)=f(u(x))$ **trong bài toán không chứa tham số** .

Dạng toán 4. Biết ĐỒ THỊ hàm số $y=f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y=g(x)=f(u(x))$ **trong bài toán chứa tham số** .

Dạng toán 5. Biết ĐỒ THỊ hàm số $y=f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y=g(x)=f(u(x))+h(x)$ **trong bài toán không chứa tham số**.

Dạng toán 6. Biết ĐỒ THỊ hàm số $y=f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y=g(x)=f(u(x))+h(x)$ **trong bài toán chứa tham số**.

Dạng toán 7. Biết ĐỒ THỊ hàm số $y=f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y=g(x)=\left[f(u(x))\right]^k$ **trong bài toán không chứa tham số**.

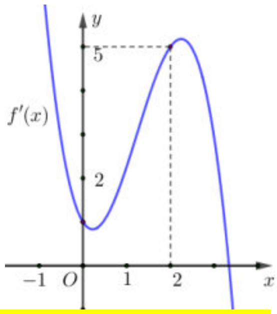
Dạng toán 8. Biết ĐỒ THỊ hàm số $y=f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y=g(x)=\left[f(u(x))\right]^k$ **trong bài toán chứa tham số** .

Dạng toán 9. Biết ĐỒ THỊ hàm số $y=f'(u(x))$ xét cực trị của hàm số $y=f(x)$ **trong bài toán không chứa tham số**.

Dạng toán 10. Biết ĐỒ THỊ hàm số $y=f'(u(x))$ xét cực trị của hàm số $y=f(x)$ **trong bài toán chứa tham số**.

DẠNG TOÁN 1. Biết ĐỒ THỊ hàm số $y=f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y=g(x)=f(x)+h(x)$ trong bài toán không chứa tham số.

Câu 1: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình bên. Khẳng định nào sau đây là đúng?



A. Hàm số $y=f(x)-x^2-x+2019$ đạt cực đại tại $x=0$.

B. Hàm số $y=f(x)-x^2-x+2019$ đạt cực tiểu tại $x=0$.

C. Hàm số $y=f(x)-x^2-x+2019$ không có cực trị.

D. Hàm số $y=f(x)-x^2-x+2019$ không đạt cực trị tại $x=0$.

Lời giải

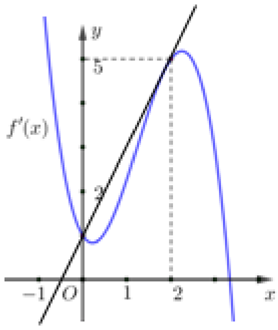
Chọn A

Ta có:

$y'=f'(x)-2x-1$

$y'=0 \Leftrightarrow f'(x)=2x+1$ (1)

Nghiệm của phương trình (1) là hoành độ giao điểm của 2 đồ thị $y=f'(x)$ và $y=2x+1$



Dựa vào đồ thị hàm số $y=f'(x)$ và đường thẳng $y=2x+1$ có $x\in\{0,2\}$ là các nghiệm của phương trình (1)

$y'(-1)=f'(-1)+2-1>0$

$y'(1)=f'(1)-2-1<0$

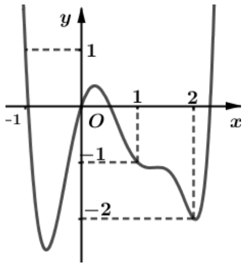
$y'(3)=f'(3)-6-1<0$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		+	0	-	0	-	

$\Rightarrow$ Hàm số $y=f(x)-x^2-x+2019$ đạt cực đại tại $x=0$.

Câu 2: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ.



Hàm số $g(x) = 2f(x) + x^2$ đạt cực đại tại điểm nào dưới đây?

A. $x = -1$. **B.** $x = 0$. **C.** $x = 1$. **D.** $x = 2$.

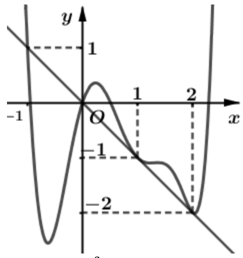
Lời giải

Chọn A

Có $g'(x) = 2f'(x) + 2x$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -x$ (1)

Nghiệm của phương trình (1) là hoành độ giao điểm của 2 đồ thị $y = f'(x)$ và $y = -x$



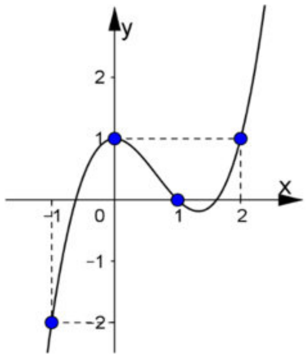
Dựa vào đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và đường thẳng $y = -x$ có $x \in \{-1, 0, 1, 2\}$ là các nghiệm của phương trình (1) (trong đó $x = 1$, $x = 2$ là các nghiệm bội chẵn).

Có bảng xét dấu

x	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$+$	

Từ đó suy ra hàm số $g(x)$ đạt cực đại tại điểm $x = -1$.

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên dưới.



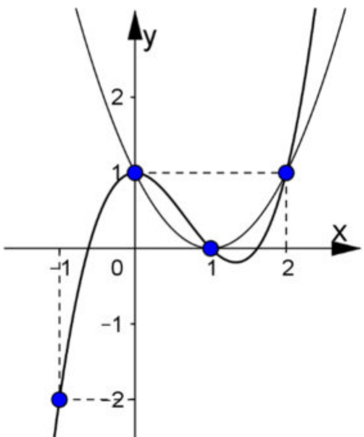
Hàm số $g(x) = f(x) - \dfrac{x^3}{3} + x^2 - x + 2$ đạt cực đại tại điểm nào?

A. $x = 1$. **B.** $x = -1$. **C.** $x = 0$. **D.** $x = 2$.

Lời giải

Chọn A

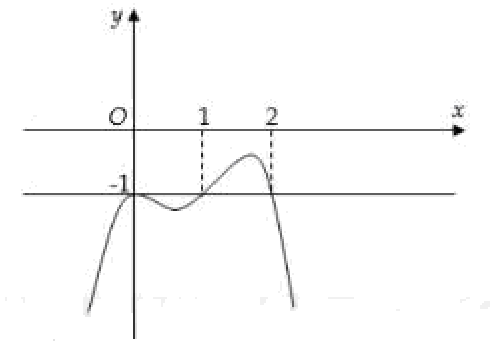
Ta có $g(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và $g'(x) = f'(x) - (x-1)^2$ do đó số nghiệm của phương trình $g'(x) = 0$ bằng số giao điểm của hai đồ thị $y = f'(x)$ và parabol $y = (x-1)^2$; $g'(x) > 0$ khi đồ thị $y = f'(x)$ nằm trên parabol $y = (x-1)^2$ và ngược lại.



Từ đồ thị suy ra $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \\ x=1 \end{array}\right.$ nhưng $g'(x)$ chỉ đổi dấu từ dương sang âm khi qua $x=1$.

Do đó hàm số đạt cực đại tại $x=1$.

Câu 4 : Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, có đạo hàm $f'(x)$. Biết đồ thị của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ.



Xác định điểm cực tiểu của hàm số $g(x)=f(x)+x$.

A. Không có cực tiểu. **B.** $x=0$.

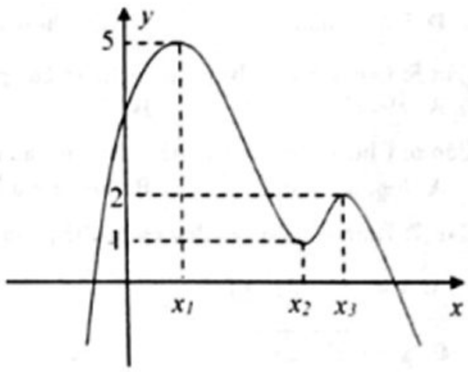
C. $x=1$. **D.** $x=2$.

Lời giải

Chọn C

$g'(x)=f'(x)+1$. Dựa vào đồ thị thấy $g'(x)$ đổi dấu từ "-" sang "+" qua điểm $x=1$ nên hàm số $g(x)$ đạt cực tiểu tại $x=1$.

Câu 5 : Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $y=f(x)+\dfrac{2017-2018x}{2017}$ có số điểm cực trị là



A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

Ta có:

$$y=f(x)+\frac{2017-2018x}{2017} \Rightarrow y'=f'(x)+\frac{-2018}{2017}$$

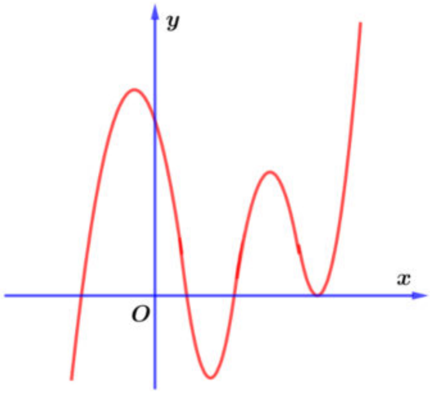
$$y'=0 \Leftrightarrow f'(x)=\frac{2018}{2017}$$

Dựa vào hình vẽ ta nhận thấy phương trình $f'(x)=\dfrac{2018}{2017}$ có 4 nghiệm phân biệt.

Vậy hàm số có 4 điểm cực trị.

Lưu ý: Do $1 < \dfrac{2018}{2017} < 2$ nên dựa vào đồ thị nhìn thấy đường thẳng nằm trong vùng từ 1 đến 2 từ đó quan sát thấy có 4 nghiệm.

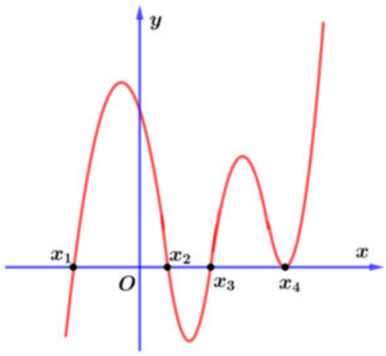
Câu 6 : Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của đạo hàm $y = f'(x)$ như hình vẽ bên dưới. Tìm số điểm cực đại của đồ thị hàm số $y = f(x)$.



A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

Lời giải

Chọn A



Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ giao với trục hoành tại 4 điểm. x_1, x_2, x_3, x_4.

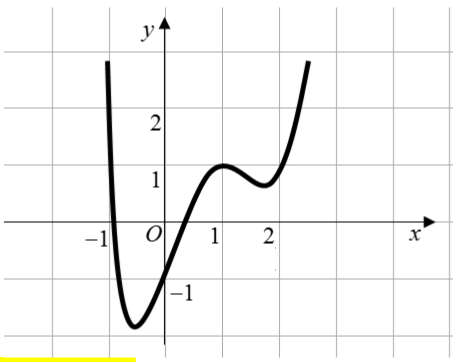
Nhận thấy $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua x_1 và x_3 nên hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại x_1 và x_3.

Và $f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm khi đi qua x_2 nên hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại x_2.

$f'(x)$ không đổi dấu khi đi qua x_4 nên x_4 không là điểm cực trị của hàm số.

Vậy hàm số $y = f(x)$ có một điểm cực đại.

Câu 7 : Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ bên. Đặt $g(x) = f(x) - x$. Hàm số $g(x)$ đạt cực đại tại điểm thuộc khoảng nào dưới đây?



A. $\left(\dfrac{3}{2};3\right)$. **B.** $(-2;0)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $\left(\dfrac{1}{2};2\right)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $g'(x)=f'(x)-1$.

$g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=1$. Từ đồ thị, ta được $x=-1$, $x=1$, $x=2$.

Từ đồ thị, ta cũng có bảng xét dấu của $g'(x)$:

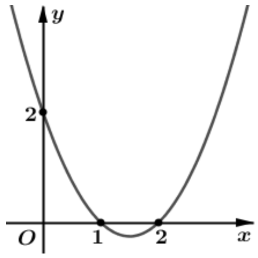
x		-1		1		2		$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

Ta được hàm số $g(x)$ đạt cực đại tại $x=-1$.

DẠNG TOÁN 2. Biết ĐỒ THỊ hàm số $y=f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y=g(x)=f(x)+h(x)$ trong bài toán chứa tham số.

DẠNG TOÁN 3. Biết ĐỒ THỊ hàm số $y=f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y=g(x)=f(u(x))$ trong bài toán không chứa tham số .

Câu 4: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị hàm $f'(x)=ax^2+bx+c$ như hình bên.



Hỏi hàm số $g(x)=f(x-x^2)$ có bao nhiêu cực trị ?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

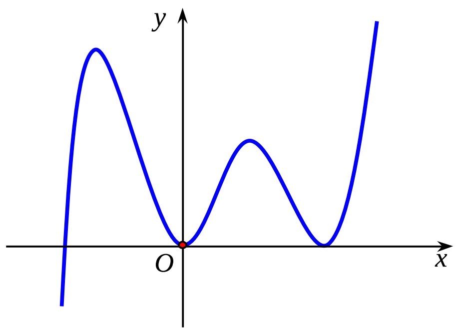
Xét $g(x)=f(x-x^2) \Rightarrow g'(x)=(1-2x)f'(x-x^2)$.

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}1-2x=0\\ f'(x-x^2)=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{1}{2}\\ x-x^2=1\ (*)\\ x-x^2=2\ (**)\end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$ (vì phương trình (*)(**) vô nghiệm).

Ta có: $g'(x)$ đổi dấu 1 lần khi qua nghiệm $x=\dfrac{1}{2}$.

Câu 5: Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị $f'(x)$ của nó trên khoảng K như hình vẽ. Khi đó trên K, hàm số $y=f(x-2020)$ có bao nhiêu điểm cực trị?



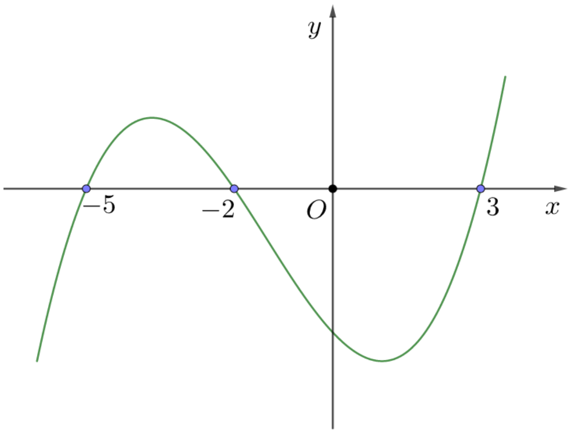
A. 1. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

Đồ thị hàm số $f'(x-2020)$ là phép tịnh tiến của đồ thị hàm số $f'(x)$ theo phương song song trục hoành nên đồ thị hàm số $f'(x-2020)$ vẫn cắt trục hoành tại 3 điểm và đổi dấu 1 lần do đó hàm số $y=f(x-2020)$ có một cực trị. Ta chọn đáp án A.

Câu 6: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết rằng hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Hàm số $y=g(x)=f\left(x^2-5\right)$ có tất cả bao nhiêu điểm cực trị?

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $y=g(x)=f\left(x^2-5\right)$

Ta có $y'=g'(x)=2x.f'\left(x^2-5\right)$

$$+\ y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2-5=-5 \\ x^2-5=-2 \\ x^2-5=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2=0 \\ x^2=3 \\ x^2=8 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \quad (nghiem\ boi\ 3) \\ x=\pm\sqrt{3}\ (nghiem\ don) \\ x=\pm 2\sqrt{2}\ (nghiem\ don) \end{array}\right. .$$

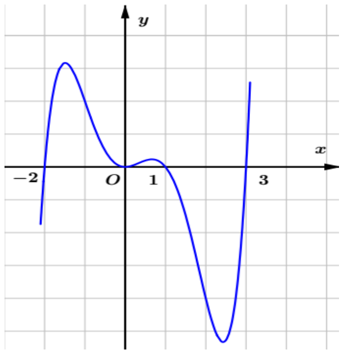
$$+\ g'(x)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>0 \\ \left[\begin{array}{l} x^2-5>3 \\ -5<x^2-5<-2 \end{array}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} x<0 \\ \left[\begin{array}{l} -2<x^2-5<3 \\ x^2-5<-5 \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right. . \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>0 \\ \left[\begin{array}{l} x>2\sqrt{2} \\ x<-2\sqrt{2} \\ -\sqrt{3}<x<\sqrt{3} \end{array}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} x<0 \\ -2\sqrt{2}<x<-2\sqrt{2} \\ \left[\begin{array}{l} x>\sqrt{3} \\ x<-\sqrt{3} \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>2\sqrt{2} \\ 0<x<\sqrt{3} \\ -2\sqrt{2}<x<-\sqrt{3} \end{array}\right.$$

Từ đó ta có bảng biến thiên của hàm số $y=g(x)=f\left(x^2-5\right)$ như sau:

x	$-\infty$		$-2\sqrt{2}$		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		$2\sqrt{2}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y		↘		↗		↘		↗		↘		↗	

Từ bảng biến thiên suy ra hàm số $y = f\left(x^2 - 5\right)$ có tất cả 5 điểm cực trị.

Câu 7: Cho hàm số $y = f\left(x\right)$. Đồ thị của hàm số $f'\left(x\right)$ như hình bên.



Hàm số $g\left(x\right) = f\left(x^2\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 4. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C

Từ đồ thị $y = f'\left(x\right)$ ta có $f'\left(x\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = 0 \\ x = 1 \\ x = 3 \end{array}\right.$;

$f'\left(x\right) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 3 \\ -2 < x < 1 \end{array}\right.$; $f'\left(x\right) < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < -2 \\ 1 < x < 3 \end{array}\right.$.

Ta có $g'\left(x\right) = 2xf'\left(x^2\right)$; $g'\left(x\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ f'\left(x^2\right) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = 1 \\ x^2 = 3 \\ x^2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 1 \\ x = \pm\sqrt{3} \end{array}\right.$.

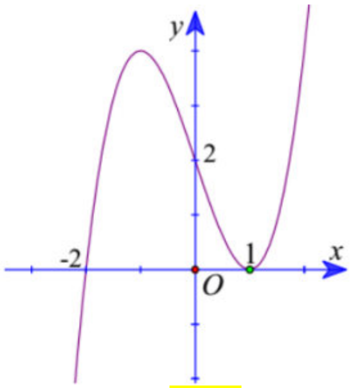
Ta có $f'\left(x^2\right) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < x^2 < 1 \\ x^2 > 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -1 < x < 1 \\ x \neq 0 \end{cases} \\ \left[\begin{array}{l} x > \sqrt{3} \\ x < -\sqrt{3} \end{array}\right. \end{array}\right.$.

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$2x$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$f'(x^2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		↘		↗		↘		↗		↘		↗	

Từ bảng biến thiên ta có hàm số $g(x)=f(x^2)$ có 5 điểm cực trị.

Câu 8: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y=g(x)=f(x^2-3)$.



A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 5.

Lời giải

Chọn C

- Dựa vào đồ thị ta thấy: $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2(nghiem\ don) \\ x=1(nghiem\ kep) \end{array}\right.$.

- Ta có $g'(x)=2x.f'(x^2-3)$.

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2-3=-2 \\ x^2-3=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0(nghiem\ don) \\ x=\pm1(nghiem\ don) \\ x=\pm2(nghiem\ kep) \end{array}\right..$$

(Đến đây có thể kết luận hàm số có 3 điểm cực trị. Nếu muốn tìm điểm cực đại, cực tiểu của hàm số thì ta cần lập bảng biến thiên)

$$g'(x)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>0 \\ f'(x^2-3)>0 \end{cases} \\ \begin{cases} x<0 \\ f'(x^2-3)<0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>0 \\ x^2-3>-2 \\ x^2-3\neq1 \end{cases} \\ \begin{cases} x<0 \\ x^2-3<-2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>1 \\ x\neq2 \end{cases} \\ -1<x<0 \end{array}\right..$$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $y=g(x)$.

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		2		$+\infty$
$g'(x)$		-	0	-	0	+	0	-	0	+	0	+	

$g(x)$		↘		↗		↘		↗

Suy ra hàm số có 3 điểm cực trị

Câu 9: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biên thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	4	↘	-2	↗	$+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=f\left(2x^2-\frac{5}{2}x-\frac{3}{2}\right)$ là

A. 3. **B.**4. **C.** 5. **D.**6.

Lời giải

Chọn C

Dựa vào bảng biến thiên, suy ra $f'(x)>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<-2\\x>3\end{array}\right.$ và $f'(x)<0\Leftrightarrow -2<x<3$.

Ta có $g'(x)=\left(4x-\frac{5}{2}\right)f'\left(2x^2-\frac{5}{2}x-\frac{3}{2}\right)$.

Xét $g'(x)<0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}4x-\frac{5}{2}>0\\f'\left(2x^2-\frac{5}{2}x-\frac{3}{2}\right)<0\end{cases}\\\begin{cases}4x-\frac{5}{2}<0\\f'\left(2x^2-\frac{5}{2}x-\frac{3}{2}\right)>0\end{cases}\end{array}\right.$.

- $\begin{cases}4x-\frac{5}{2}>0\\f'\left(2x^2-\frac{5}{2}x-\frac{3}{2}\right)<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>\frac{5}{8}\\-2<2x^2-\frac{5}{2}x-\frac{3}{2}<3\end{cases}\Leftrightarrow 1<x<\frac{9}{4}$.

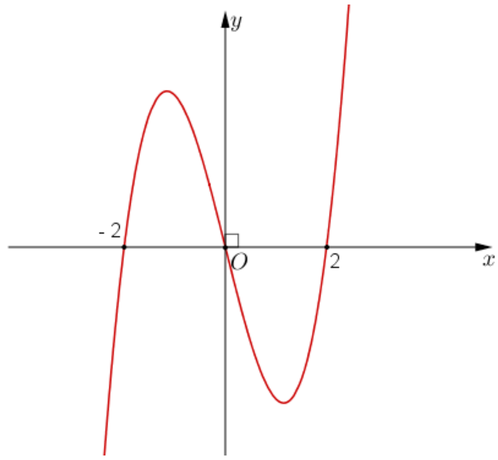
- $\begin{cases}4x-\frac{5}{2}<0\\f'\left(2x^2-\frac{5}{2}x-\frac{3}{2}\right)>0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<\frac{5}{8}\\2x^2-\frac{5}{2}x-\frac{3}{2}>3\end{cases}\\\begin{cases}x<\frac{5}{8}\\2x^2-\frac{5}{2}x-\frac{3}{2}<-2\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<-1\\\frac{1}{4}<x<\frac{5}{8}\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{4}$		$\frac{5}{8}$		1		$\frac{9}{4}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		↘		↗		↘		↗		↘		↗	

Từ bảng xét dấu của hàm số $g(x) = f\left(2x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{3}{2}\right)$ ta được hàm số có 5 cực trị.

Câu 10: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên tập $\mathbb{R}$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình sau:



Hàm số $y = f(x^2 - x)$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?

A. 1. **B.** 2 . **C.** 3. **D.** 4 .

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $y = f(x^2 - x)$. Ta có $y' = (2x-1)f'(x^2 - x)$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-1=0 \\ f'(x^2-x)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{1}{2} \\ x^2-x=-2 \\ x^2-x=0 \\ x^2-x=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{1}{2} \\ x=0 \\ x=1 \\ x=-1 \\ x=2 \end{array}\right. .$$

$$f'(x^2-x) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2 < x^2-x < 0 \\ x^2-x > 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < x < 1 \\ x > 2 \\ x < -1 \end{array}\right. .$$

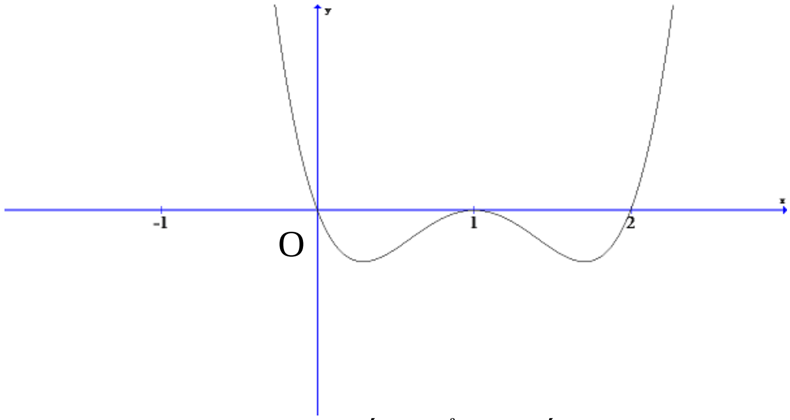
Ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f(x^2 - x)$ là:

x	$-\infty$		-1		0		$\frac{1}{2}$		1		2		$+\infty$
$2x-1$		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$f'(x^2-x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	|	$+$	0	$-$	0	$+$	
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y		↘		↗		↘		↗		↘		↗	

Vậy hàm số $y=f\left(x^2-x\right)$ có 3 điểm cực tiểu.

DẠNG TOÁN 4. **Biết ĐỒ THỊ hàm số $y=f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y=g(x)=f(u(x))$ trong bài toán chứa tham số .**

Câu 11: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm y = $f'(x)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. và có đồ thị như hình vẽ.



Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x)=f\left(x^2-8x+m\right)$ có 5 điểm cực trị?

A. 15. **B.** 16. **C.** 17. **D.** 18.

Lời giải

Chọn A

Ta có $g'(x)=2(x-4)f'\left(x^2-8x+m\right)$

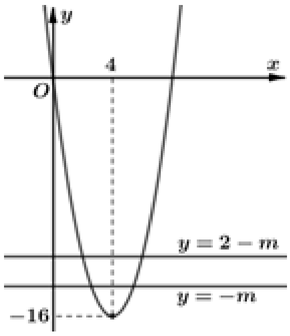
$$g'(x)=0\Leftrightarrow 2(x-4)f'\left(x^2-8x+m\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=4\\ x^2-8x+m=1\ (\text{nghiem boi } 2)\\ x^2-8x+m=0\quad(1)\\ x^2-8x+m=2\quad(2)\end{array}\right..$$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow g'(x)=0$ có 5 nghiệm bội lẻ $\Leftrightarrow$ mỗi phương trình (1), (2) đều có hai nghiệm phân biệt khác 4. $(*)$

Cách 1: $(*)\ \Leftrightarrow\begin{cases}16-m>0\\ 16-m+2>0\\ m\neq 16\\ m\neq 18\end{cases}\Leftrightarrow m<16$.

Vậy có 15 giá trị m nguyên dương thỏa mãn điều kiện.

Cách 2: Xét đồ thị (C) của hàm số $y=x^2-8x$ và hai đường thẳng $d_1: y=-m,\ d_2: y=-m+2$ (hình vẽ).

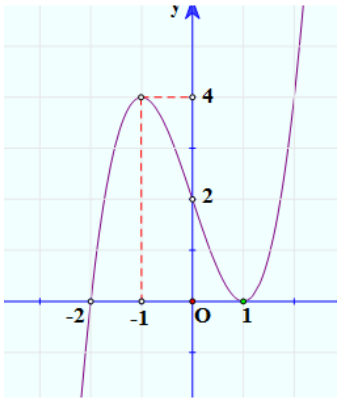


Khi đó $(*)$ $\Leftrightarrow d_1, d_2$ cắt (C) tại bốn điểm phân biệt $\Leftrightarrow -m > -16 \Leftrightarrow m < 16$.

Vậy có 15 giá trị m nguyên dương thỏa mãn điều kiện.

DẠNG TOÁN 5. Biết ĐỒ THỊ hàm số $y = f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y = g(x) = f\left(u(x)\right) + h(x)$ trong bài toán không chứa tham số.

Câu 12: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên R, có đồ thị hàm $y = f'(x)$ như hình vẽ sau:



Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = g(x) = f(x - 2019) + 2017x - 2018$.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

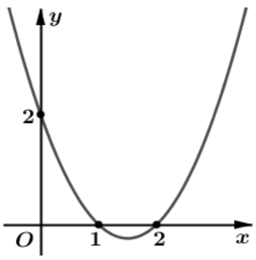
Chọn A

Ta có: $y' = g'(x) = f'(x - 2019) + 2017$

Tịnh tiến sang phải 2019 đơn vị rồi tịnh tiến lên trên 2017 đơn vị ta thấy đồ thị hàm số $y' = g'(x) = f'(x - 2019) + 2017$ cắt trục Ox tại 1 điểm.

Do đó hàm số có 1 cực trị.

Câu 13: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên dưới.



Hàm số $g(x) = 15f\left(-x^4 + 2x^2\right) - 10x^6 + 30x^2 - 20$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 0. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 5.

Lời giải

Chọn B

$g(x) = 15f\left(-x^4 + 2x^2\right) - 10x^6 + 30x^2 - 20$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Có $g'(x)=60(-x^3+x)f'(-x^4+2x^2)-60x^5+60x=60(-x^3+x)\left[f'(-x^4+2x^2)+x^2+1\right]$

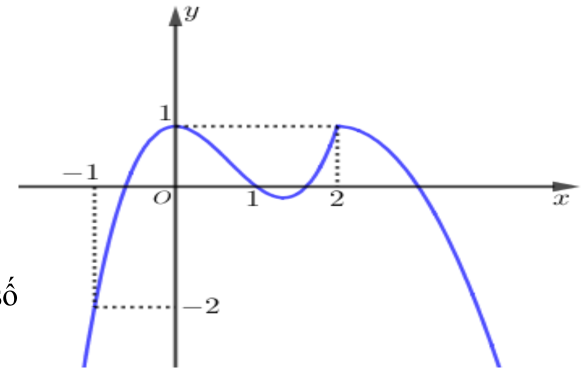
$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0,\ x=\pm 1 \\ f'(-x^4+2x^2)+x^2+1=0(*) \end{array}\right.$$

Ta thấy $-x^4+2x^2=-(x^2-1)^2+1\le 1\ \forall x$, kết hợp với đồ thị hàm số $y=f'(x)$,

suy ra $f'(-x^4+2x^2)\ge 0\ \forall x$. Hơn nữa, $x^2+1>0\ \forall x$ nên phương trình $(*)$ vô nghiệm.

mà $x=0$, $x=\pm 1$ là các nghiệm đơn của phương trình $g'(x)=0$ nên hàm số $y=g(x)$ có 3 điểm cực trị.

Câu 14: Cho hàm số $f'(x)$ như hình vẽ.



Hàm số $g(x)=f(x^2)-\dfrac{x^6}{3}+x^4-x^2$ đạt cực tiểu tại bao nhiêu điểm?

A. 3. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải

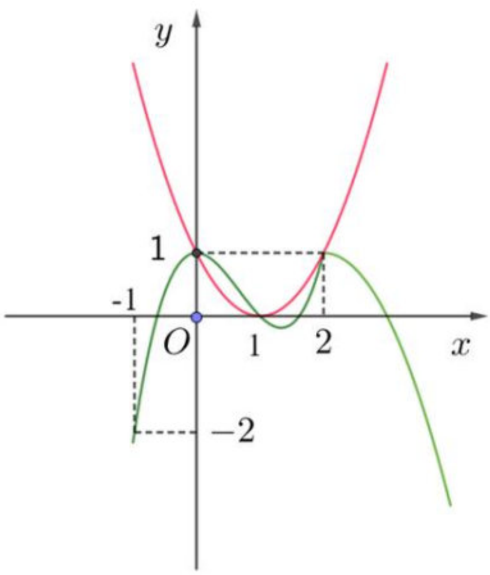
Chọn D

Ta có: $g(x)=f(x^2)-\dfrac{x^6}{3}+x^4-x^2 \Rightarrow g'(x)=2x\left[f'(x^2)-(x^4-2x^2+1)\right]$

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ \underbrace{f'(x^2)-(x^4-2x^2+1)}_{k(x)}=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ f'(x^2)=(x^2)^2-2x^2+1(*) \end{array}\right.$$

Đặt $t=x^2\,(t\ge 0)$,phương trình $(*)$ trở thành $f'(t)=t^2-2t^2+1(**)$.

Vẽ thêm đồ thị hàm số x^2-2x+1 (màu đỏ) trên đồ thị $f'(x)$ đề cho.



Dựa vào đồ thị, $(**) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=1 \\ t=2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=0 \\ x^2=1 \\ x^2=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \text{(boi chan)}. \\ x=\pm 1. \\ x=\pm\sqrt{2}. \end{array}\right.$

Theo đó ta lập bảng biến thiên như sau:

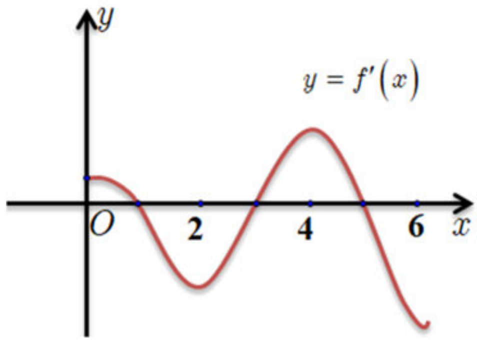
x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		-1		0		1		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$2x$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$k(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	
$g'(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	
$g(x)$		$\nearrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$	

Vậy $g(x)$ đạt cực tiểu tại 1 điểm $x=0$.

DẠNG TOÁN 6. Biết ĐỒ THỊ hàm số $y=f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y=g(x)=f(u(x))+h(x)$ trong bài toán chứa tham số.

DẠNG TOÁN 7. Biết ĐỒ THỊ hàm số $y=f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y=g(x)=\left[f(u(x))\right]^k$ trong bài toán không chứa tham số.

Câu 15: Cho hàm số $f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $[0;6]$. Đồ thị của hàm số $f'(x)$ trên đoạn $[0;6]$ được cho bởi hình bên dưới.



Hỏi hàm số $y=\left[f(x)\right]^2$ có tối đa bao nhiêu cực trị?

A. 3. **B.** 7. **C.** 6. **D.** 4

Lời giải

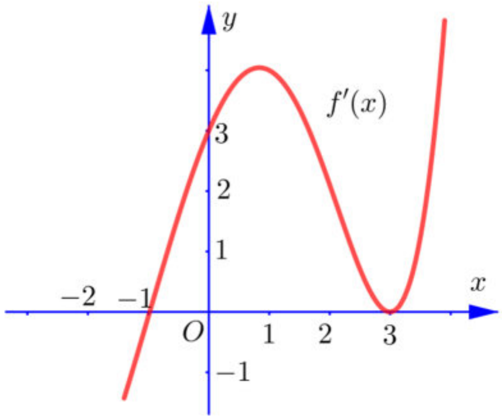
Chọn B

Ta có: $y'=2f(x).f'(x)$ nên $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=0 \\ f'(x)=0 \end{array}\right.$

Từ đồ thị ta suy ra $f(x)=0$ có tối đa 4 nghiệm, $f'(x)=0$ có tối đa 3 nghiệm.

Do đó, hàm số $y=\left[f(x)\right]^2$ có tối đa 7 điểm cực trị nên có tối đa 7 cực trị.

Câu 16: Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm đa thức bậc bốn có $f(-1)=0$, đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ



Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=\left[f(x)\right]^2$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Từ hình vẽ ta có bảng biến thiên hàm số $y=f(x)$

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(-1)$	$\nearrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Ta có $g'(x)=2f'(x)f(x)$.

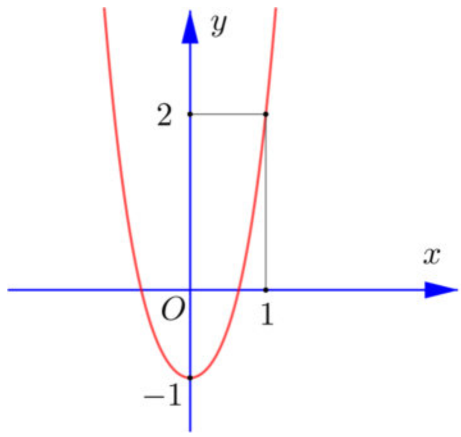
Xét $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x)=0 \\ f(x)=0 \end{array}\right.$.

Do $f(-1)=0$ nên $f(x)\ge 0, \forall x\in\mathbb{R}$

Dựa vào đồ thị, ta có $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=3 \text{ (nghiÖm kÐp)} \end{array}\right.$.

Do vậy hàm số $g(x)$ chỉ có 1 điểm cực trị.

Câu 17: Cho hàm số $y=f(x)=mx^5+nx^3+px$ có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ:



Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=\left[f(x+2)\right]^5$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Ta có $g(x)=\left[f(x+2)\right]^5 \Rightarrow g'(x)=5f'(x+2)\left[f(x+2)\right]^4$.

Do $\left[f\left(x+2\right)\right]^4 \geq 0$ nên dấu $g'\left(x\right)$ chỉ phụ thuộc dấu của $5f'\left(x+2\right)$.

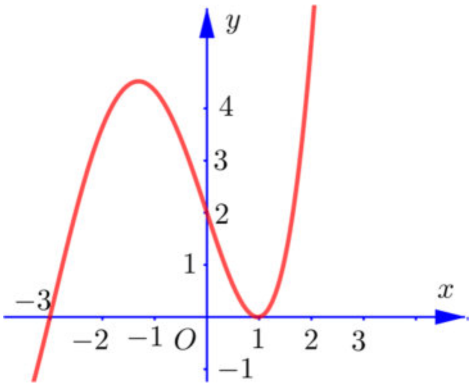
Dựa vào đồ thị ta thấy hàm số $y = f'\left(x\right)$ cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt nên

$f'\left(x\right)=a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)$, $a>0$ $f'\left(x\right)=a\left(x+2-x_1\right)\left(x+2-x_2\right)$,

Suy ra $g'\left(x\right)$ đổi dấu từ + sang - khi qua $x=x_1-2$, từ - sang + khi qua $x=x_2-2$.

Hàm số $g\left(x\right)$ có 2 điểm cực trị.

Câu 18: Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ là hàm đa thức bậc bốn có đồ thị hàm số $y = f'\left(x\right)$ như hình vẽ



Số điểm cực đại của hàm số $g\left(x\right)=\left[f\left(1-2x\right)\right]^3$ là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Ta có $g\left(x\right)=\left[f\left(1-2x\right)\right]^3 \Rightarrow g'\left(x\right)=-6f'\left(1-2x\right)\left[f\left(1-2x\right)\right]^2$.

Do $\left[f\left(1-2x\right)\right]^2 \geq 0$ nên dấu $g'\left(x\right)$ chỉ phụ thuộc dấu của $-6f'\left(1-2x\right)$.

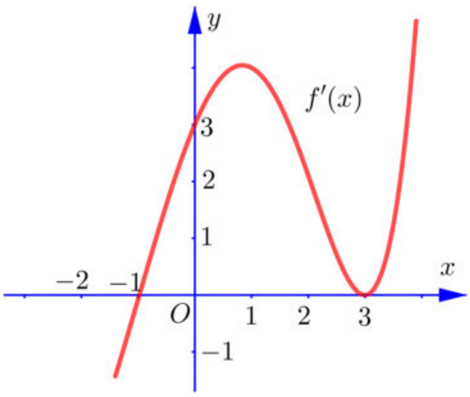
Dựa vào đồ thị ta có $f'\left(x\right)=a\left(x+3\right)\left(x-1\right)^2$, $a>0$

$\Rightarrow f'\left(1-2x\right)=a\left(4-2x\right)\left(-2x\right)^2$

Suy ra $g'\left(x\right)$ đổi dấu từ - sang + khi qua $x=2$ nên $x=2$ là điểm cực tiểu của hàm số $g\left(x\right)$.

Hàm số $g\left(x\right)$ không có điểm cực đại.

Câu 19: Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ là hàm đa thức bậc bốn có $f\left(3\right)<0$, đồ thị hàm số $y = f'\left(x\right)$ như hình vẽ



Số điểm cực trị của hàm số $g\left(x\right)=\left[f\left(x-1\right)\right]^{2020}$ là

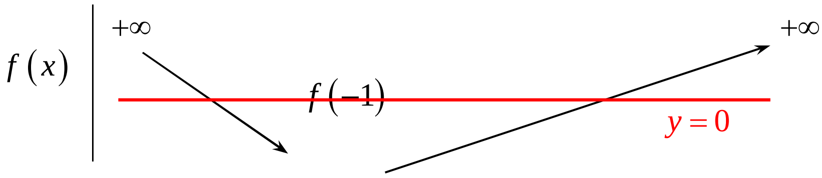
A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Từ hình vẽ ta có bảng biến thiên hàm số $y = f\left(x\right)$

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'\left(x\right)$		$-$	0	$+$	0	$+$	



Ta có $g'(x)=2020f'(x-1)f^{2019}(x-1)$.

Xét $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x-1)=0\ (1) \\ f(x-1)=0\ \ (2) \end{array}\right.$.

Xét (1). Dựa vào đồ thị, ta có $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=3\ (\text{nghiÖm kÐp}) \end{array}\right.$.

$\Rightarrow f'(x-1)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x-1=-1 \\ x-1=3 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=4\,(\text{nghiÖm kÐp}) \end{array}\right.$

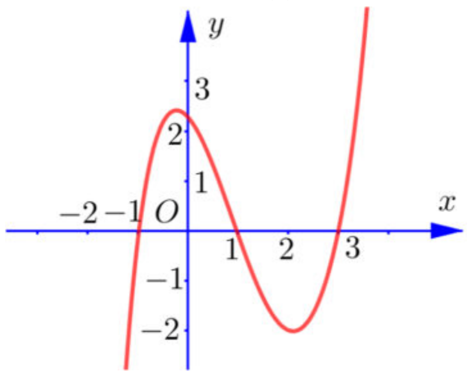
Xét (2). Do $f(3)<0$ nên $f(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt thuộc $(-\infty;-2)$ và $(3;+\infty)$

Suy ra $f(x-1)=0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1\in(-\infty;-1)$ và $x_2\in(4;+\infty)$

Ta có $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=4\ \ (\text{nghiÖm kÐp}) \\ x=x_1\in(-\infty;-1) \\ x=x_2\in(4;+\infty) \end{array}\right.$.

Do vậy hàm số $g(x)$ có 3 điểm cực trị.

Câu 20: Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm đa thức bậc bốn có $f(1)=0$ đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ



Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=\left[f\left(x^2-2x\right)\right]^4$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

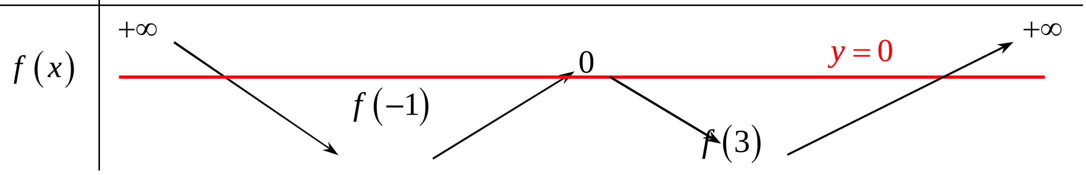
Lời giải

Chọn D

Ta có $g(x)=\left[f\left(x^2-2x\right)\right]^4 \Rightarrow g'(x)=-8f'\left(x^2-2x\right)\left[f\left(x^2-2x\right)\right]^3$.

Từ hình vẽ ta có bảng biến thiên hàm số $y=f(x)$

x	$-\infty$	x_1		-1		1		3		x_2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$ $-$		0	+	0		$-$		+	+	



Ta có $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x^2-2x)=0\ (1) \\ f(x^2-2x)=0\ \ (2) \end{array}\right.$.

Xét (1). Dựa vào đồ thị ta có $f'(x)=a(x-1)(x+1)(x+3),\ a>0$

$f'(x^2-2x)=0 \Rightarrow a(x^2-2x-1)(x^2-2x+1)(x^2-2x+3)=0$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1+\sqrt{2} \\ x=1-\sqrt{2} \\ x=1\ \text{(nghiÖm kÐp)} \end{array}\right.$.

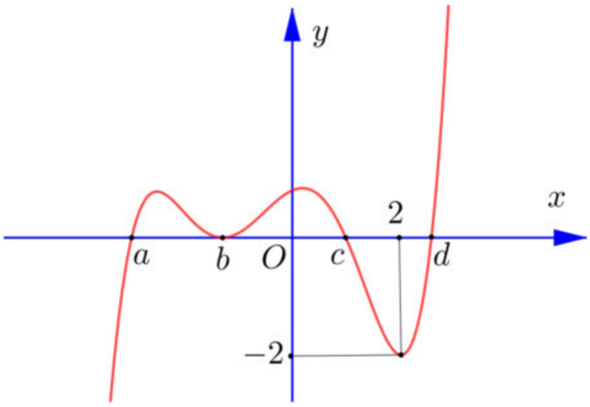
Xét (2): Do $f(1)=0$ nên $f(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt nghiệm phân biệt $x_1\in(-\infty;-1)$ và $x_2\in(3;+\infty)$

Với nghiệm $x_1\in(-\infty;-1)$ thì $f(x^2-2x)=0 \Rightarrow x^2-2x=x_1$ vô nghiệm do $x^2-2x\ge -1$

Với nghiệm $x_2\in(3;+\infty)$ thì $f(x^2-2x)=0 \Rightarrow x^2-2x=x_2$ có 2 nghiệm phân biệt.

Ta có $g'(x)=0$ có 4 nghiệm đơn phân biệt nên hàm số $g(x)$ có 4 điểm cực trị.

Câu 21: Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm đa thức có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ



Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=\left[f(x^2)\right]^{2021}$ là

A. 5. **B.** 6. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Ta có $g(x)=\left[f(x^2)\right]^{2021} \Rightarrow g'(x)=4042x.f'(x^2).\left[f(x^2)\right]^{2020}$

Dựa vào đồ thị ta có $f'(x)=k(x-a)(x-b)^{2m}(x-c)(x-d),\ k>0$

$f'(x^2)=0 \Rightarrow k(x^2-a)(x^2-b)^{2m}(x^2-c)(x^2-d)$

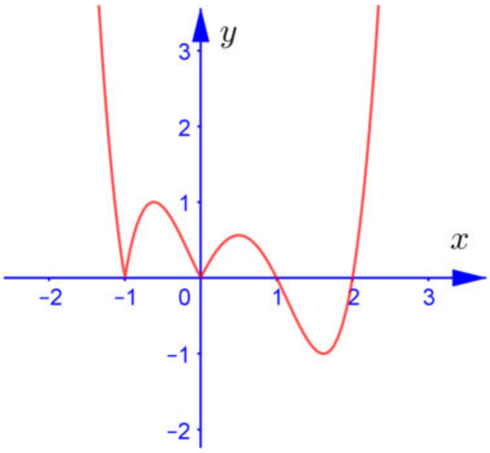
$\Rightarrow g'(x)=4042k.x.(x^2-a)(x^2-b)^{2m}(x^2-c)(x^2-d).\left[f(x^2)\right]^{2020}$

Do $\left[f(x^2)\right]^{2020}\ge 0;\ (x^2-b)^{2m}\ge 0 \Rightarrow g'(x)=0$ có 5 nghiệm $\pm\sqrt{c};\pm\sqrt{d};0$

Vậy hàm số $g(x)$ có 5 điểm cực trị.

DẠNG TOÁN 8. Biết ĐỒ THỊ hàm số $y=f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y=g(x)=\left[f(u(x))\right]^k$ trong bài toán chứa tham số .

Câu 22: Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm đa thức bậc 6 có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ:



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x)=\left[f(x+1)^3+m\right]^7$ có 2 điểm cực trị?

A. 2. **B.** 0. **C.** 1. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn D

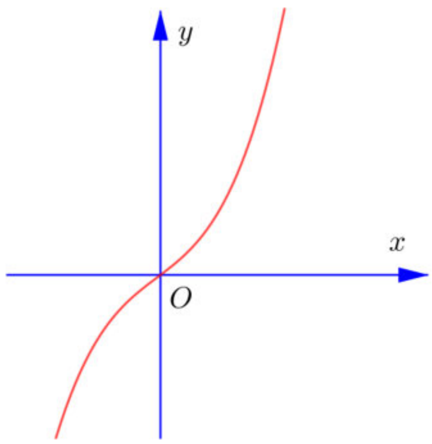
Ta có $g(x)=\left[f(x+1)^3+m\right]^7 \Rightarrow g'(x)=21.\left[f(x+1)^3+m\right]^6.f(x+1)^2.f'(x+1)$

Ta có $\left[f(x+1)^3+m\right]^6.f(x+1)^2$ nên dấu của $g'(x)$ phụ thuộc vào dấu $f'(x+1)$.

Hàm số $f'(x)$ cắt trục hoành tại 2 điểm phân biệt nên có 2 điểm cực trị, số điểm cực trị hàm $f(x+1)$ bằng số điểm cực trị hàm $f(x)$ nên $g(x)$ có 2 điểm cực trị với mọi m.

Vậy với mọi m hàm số $g(x)$ đều có 2 điểm cực trị.

Câu 23: Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm đa thức bậc 3 có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ:



Biết $f(x^2-4)=m$ để hàm số $g(x)=\left[f(x^2-4)\right]^2$ có 5 điểm cực trị. Khẳng định nào đúng?

A. $m\neq\{f(-2);f(0);f(2)\}$. **B.** $m\neq\{f(-4);f(-2);f(2)\}$.

C. $m\neq\{f(-4);f(0)\}$. **D.** $m\neq\{f(0);f(2)\}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $g(x)=\left[f(x^2-4)\right]^2 \Rightarrow g'(x)=2x.f(x^2-4).f'(x^2-4)$

$$\Rightarrow g'(x)=0 \Rightarrow 2x.f(x^2-4).f'(x^2-4)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ f'(x^2-4)=0\ (1) \\ f(x^2-4)=0\ (2) \end{array}\right.$$

Xét (1). Do đồ thị $y=f'(x)$ đổi dấu 1 lần khi qua $x=0$ nên $f'(x)=0 \Rightarrow x=0$

Do đó $f'\left(x^2-4\right)=0 \Rightarrow x^2-4=0 \Rightarrow x=\pm 2.$

Để hàm số $g(x)$ có 5 điểm cực trị thì (2) phải có 3 nghiệm phân biệt khác $-2;0;2.$

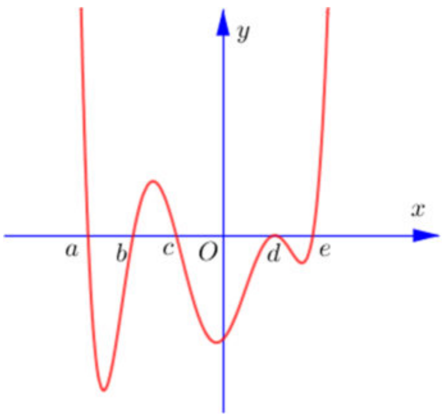
Từ hình vẽ ta có bảng biến thiên hàm số $y=f(x)$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(0)$	$\nearrow$	$+\infty$

Để $f\left(x^2-4\right)=m$ có 2 nghiệm thì $x^2-4 \neq 0 \Rightarrow x \neq \pm 2.$

Vậy $m \neq \left\{f(-4); f(0)\right\}.$

Câu 24: Cho hàm số $y=f(x;m)$ có đồ thị hàm số $y=f'(x;m)$ như hình vẽ:



Biết $f(a)>f(c)>0;\ f(b)<0<f(e)$. Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=\left[f(x+m)\right]^2$ là

A. 4. **B.** 7. **C.** 5. **D.** 9.

Lời giải

Chọn B

Từ đồ thị của hàm số $y=f'(x;m)$ ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		a		b		c		d		e		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$f(a)$	$\searrow$	$f(b)$	$\nearrow$	$f(c)$	$\searrow$	$f(d)$	$\searrow$	$f(e)$	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số $y=f(x;m)$ có 4 điểm cực trị.

Khi $f(a)>f(c)>0;\ f(b)<0<f(e)$ thì đồ thị hàm số $y=f(x;m)$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt $f(x+m)=0$ có 4 nghiệm phân biệt

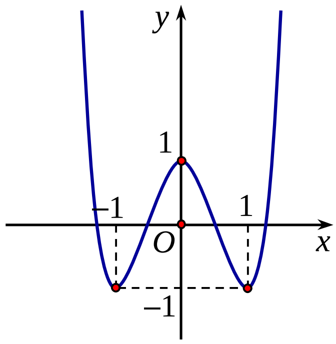
Ta có $g(x)=\left[f(x+m)\right]^2 \Rightarrow g'(x)=2f'(x+m).f(x+m).$

$$\Rightarrow g'(x)=0 \Leftrightarrow 2=.f(x+m) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x+m)=0 \rightarrow 3 \text{ nghiÖm} \\ f(x+m)=0 \rightarrow 4 \text{ nghiÖm} \end{array}\right.$$

Các nghiệm không trùng nhau nên hàm số $g(x)$ có 7 điểm cực trị.

DẠNG TOÁN 9. Biết ĐỒ THỊ hàm số $y=f'(u(x))$ xét cực trị của hàm số $y=f(x)$ trong bài toán không chứa tham số.

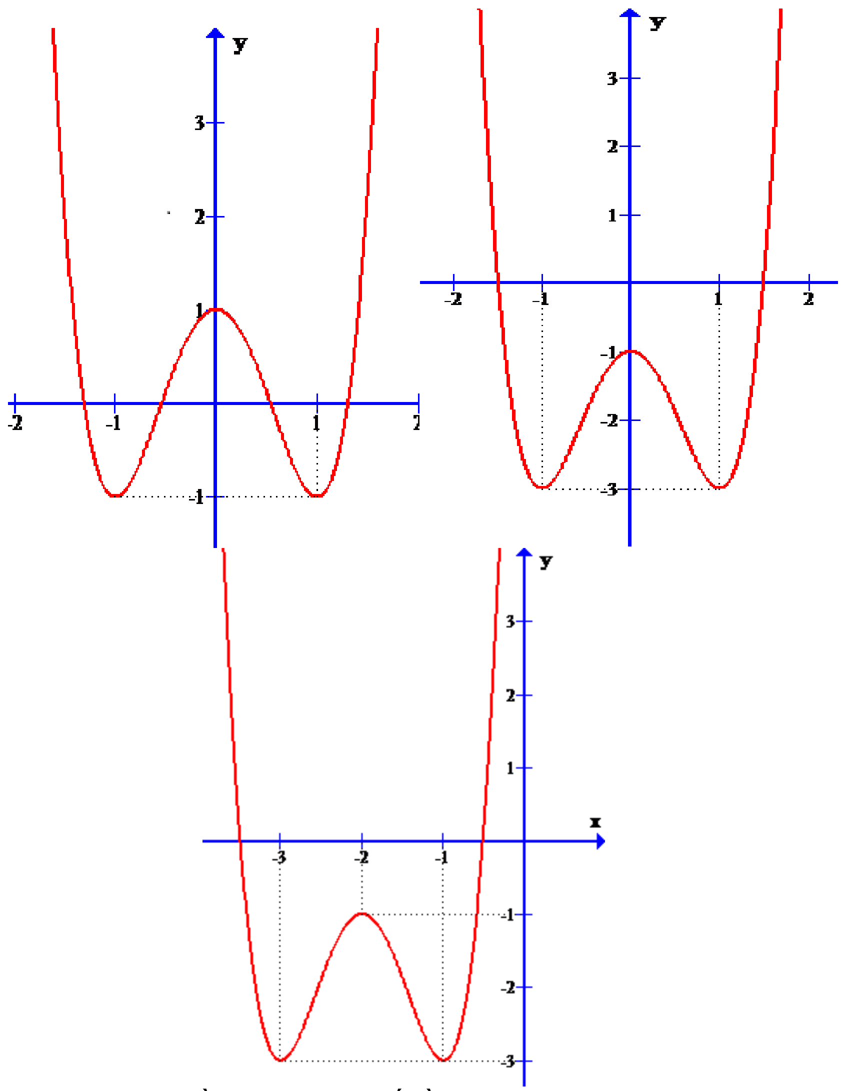
Câu 25: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên R, biết rằng hàm số $y=f'(x-2)+2$ có đồ thị như hình vẽ sau. Hỏi hàm số $y=f(x)$ có bao nhiêu cực trị?



A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B



Đồ thị các hàm số lần lượt theo thứ tự:

$y=f'(x-2)+2$, $y=f'(x-2)$, $y=f'(x)$

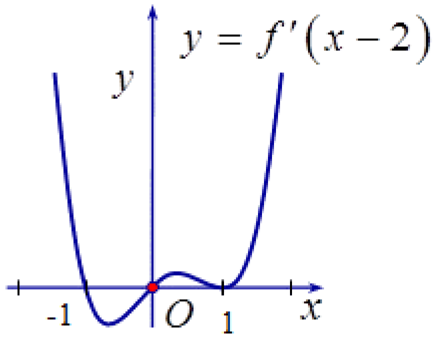
Từ đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ ta có bảng biến thiên sau: (với x_1, x_2 là hoành độ giao điểm của đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ với Ox)

BBT:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	y_{cd}	↘	y_{ct}	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có hàm số $y = f(x)$ có 2 cực trị. **Chọn đáp án B.**

Câu 26: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, hàm số $y = f'(x-2)$ có đồ thị như hình dưới. Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ là:



A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Ta có: đồ thị hàm số $y = f'(x-2)$ là phép tịnh tiến của đồ thị hàm số $y = f'(x)$ sang phải 2 đơn vị.

Khi đó hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-3		-2		-1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	–	0	+	0	+	
$f(x)$		↗	$f(-3)$	↘	$f(-2)$	↗	$f(-1)$	↗	

Dựa vào bảng biến thiên ta có số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ là 2.

DẠNG TOÁN 10. Biết ĐỒ THỊ hàm số $y = f'(u(x))$ xét cực trị của hàm số $y = f(x)$ trong bài toán chứa tham số.

CÁC DẠNG TOÁN VỀ HÀM ẨN LIÊN QUAN ĐẾN BÀI TOÁN CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

PHẦN 4: BIẾT BẢNG XÉT DẤU CỦA HÀM SỐ $y=f'(x)$

Dạng toán 1. Biết BẢNG XÉT DẤU hàm số $y=f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y=g(x)=f(x)+h(x)$ **trong bài toán không chứa tham số**.

Dạng toán 2. Biết BẢNG XÉT DẤU hàm số $y=f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y=g(x)=f(x)+h(x)$ **trong bài toán chứa tham số**.

Dạng toán 3. Biết BẢNG XÉT DẤU $y=f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y=g(x)=f(u(x))$ **trong bài toán không chứa tham số** .

Dạng toán 4. Biết BẢNG XÉT DẤU hàm số $y=f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y=g(x)=f(u(x))$ **trong bài toán chứa tham số** .

Dạng toán 5. Biết BẢNG XÉT DẤU hàm số $y=f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y=g(x)=f(u(x))+h(x)$ **trong bài toán không chứa tham số**.

Dạng toán 6. Biết BẢNG XÉT DẤU hàm số $y=f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y=g(x)=f(u(x))+h(x)$ **trong bài toán chứa tham số**.

Dạng toán 7. Biết BẢNG XÉT DẤU hàm số $y=f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y=g(x)=\left[f(u(x))\right]^k$ **trong bài toán không chứa tham số**.

Dạng toán 8. Biết BẢNG XÉT DẤU hàm số $y=f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y=g(x)=\left[f(u(x))\right]^k$ **trong bài toán chứa tham số** .

Dạng toán 9. Biết BẢNG XÉT DẤU hàm số $y=f'(u(x))$ xét cực trị của hàm số $y=f(x)$ **trong bài toán không chứa tham số**.

Dạng toán 10. Biết BẢNG XÉT DẤU hàm số $y=f'(u(x))$ xét cực trị của hàm số $y=f(x)$ **trong bài toán chứa tham số**.

DẠNG TOÁN 1. Biết BẢNG XÉT DẤU hàm số $y=f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y=g(x)=f(x)+h(x)$ trong bài toán không chứa tham số.

Câu 1: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	

Hỏi hàm số $g(x)=f(x)+x^3+3x^2-9x-5$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Từ bảng xét dấu của $f'(x)$ ta nhận thấy $f'(x)=A(x)(x+3)^{2n+1}(x-1)^{2m+1}$ với $m,n\in\mathbb{N}$ và $A(x)>0,\forall x\in\mathbb{R}$..

Ta có: $g'(x)=f'(x)+3x^2+6x-9=A(x)(x+3)^{2n+1}(x-1)^{2m+1}+3(x+3)(x-1)$

$g'(x)=(x+3)(x-1)\left[A(x)(x+3)^{2n}(x-1)^{2m}+3\right]$

Do $A(x)>0,\forall x\in\mathbb{R}$ nên $A(x)(x+3)^{2n}(x-1)^{2m}+3>0,\forall x\in\mathbb{R}$.

Từ đó ta có $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-3\\x=1\end{array}\right.$.

Do $g'(x)=0$ tại $x=-3$ và $x=1$, đồng thời $g'(x)$ đổi dấu khi đi qua hai điểm đó nên hàm số $y=g(x)$ có hai điểm cực trị.

Câu 2: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	+	0	$-$	

Hỏi hàm số $g(x)=f(x)-x^3+\dfrac{3}{2}x^2+6x+2020$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Từ bảng xét dấu của $f'(x)$ ta thấy $f'(x)=a(x+1)^{2m+1}(x-2)^{2n+1}$ với $m,n\in\mathbb{N}$ và $a<0$.

Ta có: $g'(x)=f'(x)-3x^2+3x+6=a(x+1)^{2m+1}(x-2)^{2n+1}-3(x-2)(x+1)$

$g'(x)=(x-2)(x+1)\left[a(x+1)^{2m}(x-1)^{2n}-3\right]$

Do $a<0$ nên $a(x+1)^{2m}(x-2)^{2n}-3<0,\ \forall x\in\mathbb{R}$

Từ đó ta có $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=2.\end{array}\right.$

Do $g'(x)=0$ tại $x=-1$ và $x=2$; đồng thời $g'(x)$ đổi dấu khi qua hai điểm này nên hàm số $g(x)$ có hai điểm cực trị.

DẠNG TOÁN 2. Biết BẢNG XÉT DẤU hàm số $y=f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y=g(x)=f(x)+h(x)$ trong bài toán chứa tham số.

DẠNG TOÁN 3. Biết BẢNG XÉT DẤU $y=f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y=g(x)=f(u(x))$ trong bài toán không chứa tham số .

Câu 1: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $y=f'\left(x\right)$ có bảng xét dấu sau

x	$-\infty$		-3		2		5		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Số điểm cực tiểu của hàm số $y=g\left(x\right)=f\left(6-x^2\right)$ là

A. 5. **B.** 7. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn D

Ta có $g'\left(x\right)=-2x.f'\left(6-x^2\right)$.

$$g'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ f'\left(6-x^2\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ 6-x^2=-3\\ 6-x^2=2\\ 6-x^2=5\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=\pm3\\ x=\pm2\\ x=\pm1\end{array}\right..$$

Ta có $g'\left(4\right)=-8.f'\left(-10\right)>0$ và bảng xét dấu $f'\left(x\right)$ không có nghiệm bội chẵn.

Bảng biến thiên $y=g\left(x\right)$.

	$-\infty$		-3		-2		-1		0		1		2		3		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Vậy số điểm cực tiểu của hàm số $y=g\left(x\right)=f\left(6-x^2\right)$ là 4.

Câu 2: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $y=f'\left(x\right)$ có bảng xét dấu sau

x	$-\infty$		1		3		5		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	

Số điểm cực trị của hàm số $y=g\left(x\right)=f\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ là

A. 0. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Ta có $g'\left(x\right)=\dfrac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}.f'\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$. Do $\dfrac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}>\dfrac{x+\left|x\right|}{\sqrt{x^2+1}}\ge0$

$$\text{nên } g'\left(x\right)=0\Leftrightarrow f'\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+\sqrt{x^2+1}=1\\ x+\sqrt{x^2+1}=3\\ x+\sqrt{x^2+1}=5\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=\dfrac{4}{3}\\ x=\dfrac{12}{5}\end{array}\right..$$

Bảng biến thiên $y=g\left(x\right)$.

x	$-\infty$		0		$\frac{4}{3}$		$\frac{12}{5}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	
$g(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$	

Vậy số điểm cực trị của hàm số $y = g(x) = f\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$ là 2.

Câu 3: Cho hàm số $f(x)$ xác đinh, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $f\left(2^x\right)$ đạt cực tiểu tại x bằng

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 0 và 2

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $g(x) = f\left(2^x\right)$

$g'(x) = 2^x \ln 2 . f'\left(2^x\right)$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^x = 1 \\ 2^x = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right.$

Nếu $x \in (-\infty;0)$ thì $2^x \in (0;1)$;

Suy $f'\left(2^x\right) > 0, \forall x \in (-\infty;0)$, hay $g'(x) = 2^x \ln 2 . f'\left(2^x\right) > 0$, $\forall x \in (-\infty;0)$

Nếu $x \in (0;1)$ thì $2^x \in (1;2)$;

Suy $f'\left(2^x\right) < 0, \forall x \in (0;1)$, hay $g'(x) = 2^x \ln 2 . f'\left(2^x\right) < 0$, $\forall x \in (0;1)$

Nếu $x \in (1;+\infty)$ thì $2^x \in (2;+\infty)$;

Suy $f'\left(2^x\right) > 0, \forall x \in (1;+\infty)$, hay $g'(x) = 2^x \ln 2 . f'\left(2^x\right) > 0$, $\forall x \in (1;+\infty)$

Bảng xét dấu $g'(x)$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Từ bảng xét dấu ta có $g'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương khi x qua 1.

Kết luận: Hàm số $g(x) = f\left(2^x\right)$ đạt cực tiểu tại $x = 1$

Câu 4: Cho hàm số $f(x)$ xác đinh, liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f'(x)$ có bảng xét dấu như sau

x	$-\infty$		-2		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Số điểm cực trị của hàm số $f\left(e^{x^2-|x|-2}\right)$ là

A. 2 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 5

Lời giải

Chọn D

Đặt $g(x)=f\left(e^{x^2-|x|-2}\right)$

$f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ suy ra $g(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$

Hơn nữa $g(-x)=f\left(e^{(-x)^2-|-x|-2}\right)=f\left(e^{x^2-|x|-2}\right)=g(x)$

Suy ra $g(x)$ là hàm số chẵn, đồ thị hàm số $g(x)$ đối xứng qua trục Oy.

Xét $x\ge 0$

$g(x)=f\left(e^{x^2-x-2}\right)$

$g'(x)=(2x-1).e^{x^2-x-2}.f'\left(e^{x^2-x-2}\right)$

$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x-1=0\\ f'\left(e^{x^2-x-2}\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x-1=0\\ e^{x^2-x-2}=1\left(vì\ \ e^{x^2-x-2}>0,\forall x\right)\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x-1=0\\ x^2-x-2=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{1}{2}\\ x=2\left(vì\ \ x\ge 0\right)\end{array}\right.$

Nếu $x>2$ thì $x^2-x-2>0$,

suy ra $e^{x^2-x-2}>1$

suy ra $f'\left(e^{x^2-x-2}\right)>0$

Nếu $0\le x<2$ thì $x^2-x-2<0$,

suy ra $0<e^{x^2-x-2}<1$

suy ra $f'\left(e^{x^2-x-2}\right)<0$

Từ đó ta có bảng xét dấu $g(x)$ trên $\left[0;+\infty\right)$

x	0		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Suy ra $g(x)$ có hai điểm cực trị dương.

Do $g(x)$ là hàm số chẵn, liên tục trên $\mathbb{R}$ suy ra $g(x)$ có 5 điểm cực trị trên $\mathbb{R}$

Câu 5: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Có bảng xét dấu của $y=f'(x)$ như hình vẽ.

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$.		$-$	0	$+$	0	$+$	

Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=f(\log_2 x)$. Chọn đáp án đúng

A. 1. **B.** 3. **C.** 2 . **D.** 5.

Lời giải

Chọn A

Đk: $x>0$

Ta có $g'(x)=\dfrac{1}{x\ln 2}f'(\log_2 x)$; $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_2 x=-2\\ \log_2 x=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{1}{4}\\ x=2\end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	0		$\frac{1}{4}$		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	
$g(x)$		↘		↗		↗	

Dựa vào bảng biến thiên và đối chiếu với các đáp án ta chọn **A.**

Câu 6: Cho hàm số $y=f(x)$. Xác định và có đạo hàm liên tục trên R. Bảng xét dấu hàm số $y=f'(x)$ như hình bên dưới

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Tìm số điểm cực trị của hàm số $y=g(x)=f\left[\log_3\left(x^2-2x+3\right)\right]$. Chọn đáp án đúng:

A. 5. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 7.

Lời giải

Chọn A

Đk: $x\in\mathbb{R}$

Ta có: $y'=g'(x)=\dfrac{2x-2}{(x^2-2x+3)\ln 3}f'\left[\log_3(x^2-2x+3)\right]$;

Khi đó $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x-2=0\\ f'(\log_3(x^2-2x+3))=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\ \log_3(x^2-2x+3)=1\\ \log_3(x^2-2x+3)=2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\ x=0\\ x=2\\ x=1+\sqrt{7}\\ x=1-\sqrt{7}\end{array}\right.$

Mặt khác: $f'\left[\log_3(x^2-2x+3)\right]<0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\log_3(x^2-2x+3)>1\\ \log_3(x^2-2x+3)<2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}1-\sqrt{7}<x<0\\ 2<x<1+\sqrt{7}\end{array}\right.$

Ta có bảng biến thiên.

x	$-\infty$		$1-\sqrt{7}$		0		1		2		$1+\sqrt{7}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		↘		↗		↘		↗		↘		↗	

Vậy hàm số có 5 điểm cực trị. Chọn đáp án A

Câu 7: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu của đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y=g(x)=f\left(x^2-2x-4\right)$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Ta có : $g'(x)=2(x-1)f'(x^2-2x-4)$.

$$g'(x)=0\Leftrightarrow (x-1)f'(x^2-2x-4)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\ f'(x^2-2x-4)=0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\ x^2-2x-4=-2\\ x^2-2x-4=0\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\ x=1+\sqrt{3}\\ x=1-\sqrt{3}\\ x=1+\sqrt{5}\\ x=1-\sqrt{5}\end{array}\right.$$ (Tất cả đều là nghiệm bội lẻ).

Ta chọn $x=-2$ để xét dấu của $g'(x)$: $g'(-2)=2.(-3).f'(4)$. Vì hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$ do đó: $f'(4)>0$.

Suy ra: $g'(-2)<0$.

Theo tính chất qua nghiệm bội lẻ $g'(x)$ đổi dấu, ta có bảng biên thiên của $g(x)$ như sau:

x	$-\infty$		$1-\sqrt{5}$		$1-\sqrt{3}$		1		$1+\sqrt{3}$		$1+\sqrt{5}$		$+\infty$
$g'(x)$		-	0	+	0	-	0	+	0	-	0	+	
$g(x)$		↘		↗		↘		↗		↘		↗	

Từ bảng biến thiên suy ra, hàm số $y=g(x)$ có 3 điểm cực tiểu.

Câu 8: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên của đạo hàm như hình vẽ.

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	↘	-1	↗	3	↘	$-\infty$

Đặt $g(x)=f\left(\dfrac{x^2+1}{x}\right)$. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y=g(x)$.

A. 4. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 8.

Lời giải

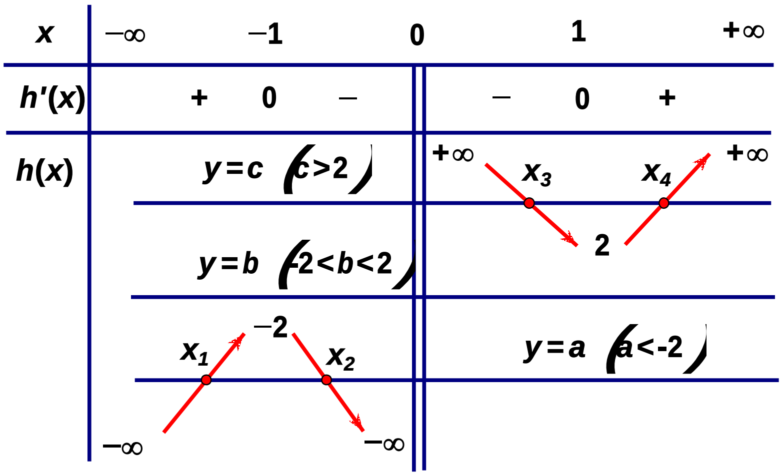
Chọn C

+ Đặt $g'(x)=\left(\dfrac{x^2-1}{x^2}\right)f'\left(\dfrac{x^2+1}{x}\right)$

$$+\ g'(x)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left(\dfrac{x^2-1}{x^2}\right)=0\\ f'\left(\dfrac{x^2+1}{x}\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\pm 1\\ \dfrac{x^2+1}{x}=a\ (a<-2)\\ \dfrac{x^2+1}{x}=b\ (-2<b<2)\\ \dfrac{x^2+1}{x}=c\ (c>2)\end{array}\right.$$

+ Xét hàm số $h(x)=\dfrac{x^2+1}{x}, h'(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2}, h'(x)=0 \Leftrightarrow x=\pm 1$

+ Bảng biến thiên của hàm số $h(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$

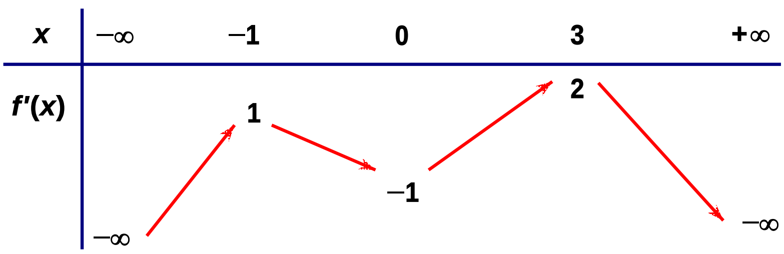


+ Dựa vào bảng biến thiên trên ta thấy phương trình $h(x)=a, h(x)=c$, mỗi phương trình có hai nghiệm phân biệt khác ± 1, mà $a \neq c \Rightarrow f'\left(\dfrac{x^2+1}{x}\right)=0$ có 4 nghiệm đơn phân biệt x_1, x_2, x_3, x_4 khác ± 1 và phương trình $h(x)=b$ vô nghiệm.

Do đó phương trình $g'(x)=0$ có 6 nghiệm đơn phân biệt lần lượt theo thứ tự từ nhỏ đến lớn là $x_1, -1, x_2, x_3, 1, x_4$.

Vậy hàm số $g(x)=f\left(\dfrac{x^2+1}{x}\right)$ có 6 cực trị.

Câu 9: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên của đạo hàm như hình vẽ.



Đặt $g(x)=f\left(\dfrac{x^2+2x}{x+1}\right)$. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y=g(x)$.

A. 4. **B.** 10. **C.** 6. **D.** 8.

Lời giải

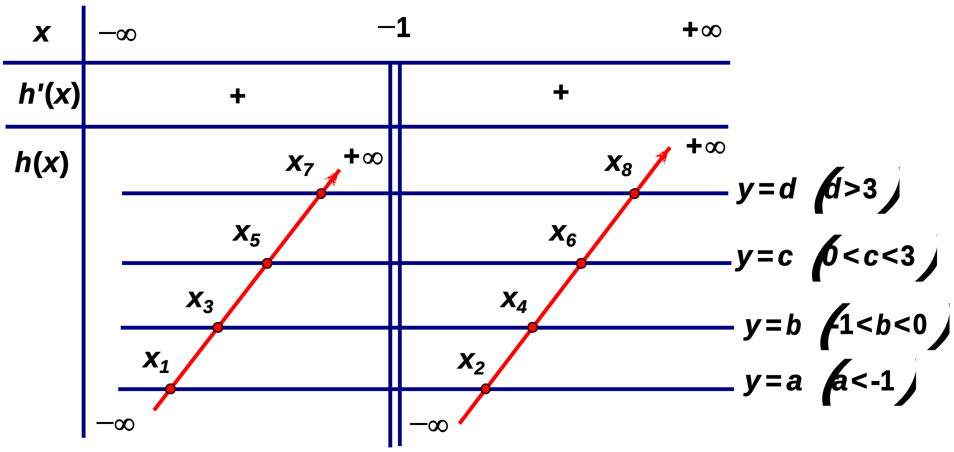
Chọn D

+ Đặt $g'(x)=\left(\dfrac{x^2+2x+2}{(x+1)^2}\right)f'\left(\dfrac{x^2+2x}{x+1}\right)$

$$+\ g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left(\dfrac{x^2+2x+2}{(x+1)^2}\right)=0\,(VN) \\ f'\left(\dfrac{x^2+2x}{x+1}\right)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{x^2+2x}{x+1}=a\ (a<-1) \\ \dfrac{x^2+2x}{x+1}=b\ (-1<b<0) \\ \dfrac{x^2+2x}{x+1}=c\ (0<c<3) \\ \dfrac{x^2+2x}{x+1}=d\ (d>3) \end{array}\right.$$

+ Xét hàm số $h(x)=\dfrac{x^2+2x}{x+1}, h'(x)=\dfrac{x^2+2x+2}{(x+1)^2}, h'(x)=0\ (VN)$

+ Bảng biến thiên của hàm số $h(x)=\dfrac{x^2+2x}{x+1}$



+ Dựa vào bảng biến thiên trên ta thấy phương trình $h(x)=a, h(x)=b, h(x)=c, h(x)=d$, mỗi phương trình có hai nghiệm phân biệt mà a,b,c,d đôi một khác nhau $\Rightarrow f'\left(\dfrac{x^2+2x}{x+1}\right)=0$ có 8 nghiệm đơn phân biệt $x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8$. Do đó phương trình $g'(x)=0$ có 8 nghiệm đơn phân biệt lần lượt theo thứ tự từ nhỏ đến lớn là $x_1,x_3,x_5,x_7,x_2,x_4,x_6,x_8$.

Vậy hàm số $g(x)=f\left(\dfrac{x^2+2x}{x+1}\right)$ có 8 cực trị.

DẠNG TOÁN 4. Biết BẢNG XÉT DẤU hàm số $y=f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y=g(x)=f(u(x))$ trong bài toán chứa tham số .

Câu 1: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu $f'(x)$ như sau

x	$-\infty$		-1		1		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-10;10]$ để $g(x)=f(x^2-2x-m)$ có 5 điểm cực trị?

A. 10. **B.** 15. **C.** 20. **D.** 21.

Lời giải

Chọn A

Ta có $g'(x)=2(x-1)f'(x^2-2x-m)$

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x^2-2x-m=-1 \\ x^2-2x-m=1 \\ x^2-2x-m=4 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{ll} x=1 & \\ x^2-2x-m+1=0 & (1) \\ x^2-2x-m-1=0 & (2) \\ x^2-2x-m-4=0 & (3) \end{array}\right.$$

Nhận xét: Phương trình (2) nếu có nghiệm là nghiệm bội chẵn; phương trình (1) và (3) nếu có nghiệm thì nghiệm không chung nhau.

Hàm số $g(x)$ có 5 điểm cực trị $\Leftrightarrow$ phương trình $g'(x)=0$ có 5 nghiệm bội lẻ

$\Leftrightarrow$ Phương trình (1) và (3) có hai nghiệm phân biệt, khác 1.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'_{(1)}>0 \\ \Delta'_{(3)}>0 \\ VT_{(1)}\neq 0 \\ VT_{(3)}\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>0 \\ m+5>0 \\ -m\neq 0 \\ -m-5\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m>0$$

Vì $\begin{cases} m\in\mathbb{Z} \\ m\in[-10;10] \end{cases} \Rightarrow m\in\{1;2;3;4;5;6;7;8;9;10\}$

Vậy có 10 giá trị của tham số m.

DẠNG TOÁN 5. Biết BẢNG XÉT DẤU hàm số $y=f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y=g(x)=f(u(x))+h(x)$ trong bài toán không chứa tham số.

Câu 1: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và bảng xét dấu đạo hàm

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Hàm số $y=3f(-x^4+4x^2-6)+2x^6-3x^4-12x^2$ có tất cả bao nhiêu điểm cực tiểu?

A. 3. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Có $y'=-(12x^3-24x).f'(-x^4+4x^2-6)+12x^5-12x^3-24x$

$=-12x(x^2-2).f'(-x^4+4x^2-6)+12x\left(x^4-x^2-2\right)$

$=-12x(x^2-2).\left(f'(-x^4+4x^2-6)-\left(x^2+1\right)\right)$.

Khi đó $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ f'(-x^4+4x^2-6)-(x^2+1)=0 \\ x^2-2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm\sqrt{2} \\ f'(-x^4+4x^2-6)=x^2+1 \end{array}\right.$.

Ta có $-x^4+4x^2-6=-(x^2-2)^2-2\leq -2,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Do đó $f'(-x^4+4x^2-6)\leq f'(-2)=0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Mà $x^2+1\geq 1,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Do đó phương trình $f'(-x^4+4x^2-6)=x^2+1$ vô nghiệm.

Hàm số $y=3f(-x^4+4x^2-6)+2x^6-3x^4-12x^2$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Vậy hàm số $y=3f(-x^4+4x^2-6)+2x^6-3x^4-12x^2$ có 2 điểm cực tiểu.

DẠNG TOÁN 6. Biết BẢNG XÉT DẤU hàm số $y=f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y=g(x)=f(u(x))+h(x)$ trong bài toán chứa tham số.

DẠNG TOÁN 7. Biết BẢNG XÉT DẤU hàm số $y=f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y=g(x)=\left[f(u(x))\right]^k$ trong bài toán không chứa tham số.

Lý thuyết:

Bước 1: Tính $y'=g'(x)=k.u'(x).[f(u(x))]^{k-1}.f'(u(x))$

+ Nếu: k chẵn: $y'=g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u'(x)=0\\ f(u(x))=0\\ f'(u(x))=0\end{array}\right.$.

+ Nếu k lẻ: $y'=g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u'(x)=0\\ f'(u(x))=0\end{array}\right.$

Bước 2: Giải tìm nghiệm:

$u'(x)=0$ ta giải bình thường.

$f'(u(x))=0$ thì ta cho $u(x)$ bằng các điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$

$f(u(x))=0$ thì ta cho $u(x)$ bằng các các nghiệm x_0 của phương trình $f(x)=0$ hoặc điều kiện của x_0 để chứng minh được phương trình có bao nhiêu nghiệm cụ thể.

Kiểm chứng các nghiệm trên có nghiệm nào bội chẵn không

Bước 3: Kết luận

2. Bài tập:

Câu 1: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
f'(x)		-	0	+	0	-	
f(x)	$-\infty$ ↘		2	↗	5	↘	$+\infty$

Số cực trị của hàm số $g(x)=f^2(2x^2+x)$ là

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $g'(x)=2(2x^2+x)'.f'(2x^2+x).f(2x^2+x)=2(4x+1).f'(2x^2+x).f(2x^2+x)=0$.

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}4x+1=0\\ f'(2x^2+x)=0\\ f(2x^2+x)=0\end{array}\right.$.

□ $4x+1=0\Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{4}$

□ Dựa vào bảng biến thiên ta có $f'(2x^2+x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x^2+x=-2(VN)\\ 2x^2+x=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\ x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$

□ Dựa vào bảng biến thiên phương trình $f(x)=0$ chỉ có 1 nghiệm $x_0>1$ (vì đồ thị $y=f(x)$ cắt trục Ox tại một điểm có hoành độ lớp hơn 1). Khi đó

$f(2x^2+x)=0 \Leftrightarrow 2x^2+x=x_0 \Leftrightarrow 2x^2+x-x_0=0$ (*) phương trình có hai nghiệm vì a,c trái dấu.

Mặt khác, thay các nghiệm $x=-\frac{1}{4};-1;\frac{1}{2}$ vào (*) ta được $x_0 \le 1$ không thỏa mãn điều kiện của x_0 nên $x=-\frac{1}{4};-1;\frac{1}{2}$ không là nghiệm của (*).

Vậy phương trình $g'(x)=0$ có 5 nghiệm đơn. Suy ra hàm số $y=g(x)$ có 5 cực trị

LỜI BÌNH: Yêu cầu đề bài có thể thay đổi số cực đại hoặc số cực tiểu của hàm số, khi đó ta cần phải xét dấu g'(x). Cụ thể:

Ta có 2 nghiệm của phương trình $f(2x^2+x)=0 \Leftrightarrow 2x^2+x=x_0 \Leftrightarrow 2x^2+x-x_0=0$ là

$$+\quad x_1=-\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{1+8x_0}}{4} \to x_1'=\frac{1}{\sqrt{1+8x_0}}>0;\forall x_0>1$$

$$\Rightarrow x_1>x_1(1)=\frac{1}{2}$$

$$+\quad x_1=-\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{1+8x_0}}{4} \to x_1'=-\frac{1}{\sqrt{1+8x_0}}<0;\forall x_0>1$$

$$\Rightarrow x_1<x_1(1)=-1$$

Mặt khác:

$$f'(2x^2+x)<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x^2+x<-2 (VN) \\ 2x^2+x>1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<-1 \\ x>\frac{1}{2} \end{array}\right.$$

$$f'(2x^2+x)>0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2+x>-2 \\ 2x^2+x<1 \end{cases} \Leftrightarrow -1<x<\frac{1}{2}$$

Bảng xét dấu:

x	-∞		x_1		-1		-1/4		½		x_2		+∞
4x + 1		-	|	-	|	-	0	+	|	+	|	+	
$f'(2x^2+x)$		+	|	+	0	-	|	-	0	+	|	+	
$f(2x^2+x)$		+	0	-	|	-	|	-	|	-	0	+	
g'(x)		-	0	+	0	-	0	+	0	-	0	+	

Dựa vào bảng biến thiên ta được**: 2 cực đại và 3 cực tiểu.**

Câu 2: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-2	↗	-1	↘	-2	↗	$+\infty$

Số điểm cực tiểu của hàm số $g(x)=f^3(x^3+3x)$ là

A. 5. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $g'(x)=3(3x^2+3)f'(x^3+3x).f^2(x^3+3x)$.

Ta thấy $g'(x)=3(3x^2+3)>0,\forall x\in\mathbb{R}$ và $f^2(x^3+3x)\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}$ nên dấu của $g'(x)$ chính là dấu của $f'(x^3+3x)$

$$f'(x^3+3x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^3+3x=-1\\x^3+3x=0\\x^3+3x=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=x_1\approx-0,32\\x=0\\x=x_2\approx 0,32\end{array}\right.$$

Từ bảng biến thiên của hàm $f(x)$ ta có $f'(x)>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-1<x<0\\x>1\end{array}\right.$

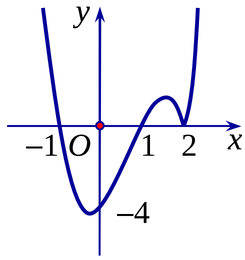
Do đó $f'(x^3+3x)>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-1<x^3+3x<0\\x^3+3x>1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_1<x<0\\x>x_2\end{array}\right.$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $g(x)$

x	$-\infty$		x_1		0		x_2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	↘		↗		↘		↗	$+\infty$

Vậy hàm số $g(x)$ có 2 điểm cực tiểu.

Câu 3: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên tập $\mathbb{R}$ và đồ thị hàm số $y=f'(x)$ được cho như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số $y=f^{2019}(x^3-1)$ là



A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 5.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y'=2019.f^{2018}(x^3-1).f'(x^3-1).3x^2$,

Ta có $y'=f^{2018}(x^3-1)\ge 0\ \ \forall x\in\mathbb{R}$ và $3x^2\ge 0\ \ \forall x\in\mathbb{R}$ nên dấu của y' cũng chính là dấu của biểu thức $f'(x^3-1)$.

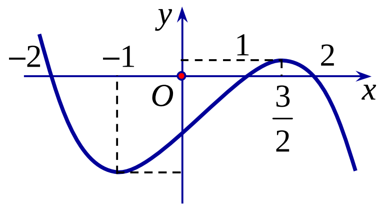
Ta có $f'(x^3-1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^3-1=-1\\x^3-1=1\\x^3-1=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\sqrt[3]{2}\\x=\sqrt[3]{3}\end{array}\right.$.

Dựa vào đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ ta thấy $f'(x^3-1)>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^3-1<-1\\\begin{cases}x^3-1>1\\x^3-1\ne 2\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<0\\\begin{cases}x>\sqrt[3]{2}\\x\ne\sqrt[3]{3}\end{cases}\end{array}\right.$.

Tương tự $f'(x^3-1)<0\Leftrightarrow -1<x^3-1<1\Leftrightarrow 0<x<\sqrt[3]{2}$.

Vì vậy suy ra hàm số $y = f^{2019}\left(x^3-1\right)$ có hai điểm cực trị.

Câu 4: Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa $f\left(2\right) = f\left(-2\right) = 0$ và đồ thị hàm số $y = f'\left(x\right)$ có dạng như hình vẽ bên dưới.



Số điểm cực trị của hàm số $y = \left(f\left(2x-1\right)\right)^{2018}$ là

A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 5.

Lời giải

Chọn A

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f'\left(x\right)$ ta lập được bảng biến thiên của $y = f\left(x\right)$ như sau:

x	$-\infty$		-2		1		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$		$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Xét hàm số $y = \left(f\left(2x-1\right)\right)^{2018}$, ta có $y' = 2018.f^{2017}\left(2x-1\right).2.f'\left(2x-1\right)$.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $f\left(2x-1\right) \le 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f^{2017}\left(2x-1\right) \le 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Nên dấu của y' cũng chính là dấu của biểu thức: $-f'\left(2x-1\right)$.

Ta có $y' \le 0 \Leftrightarrow f'\left(2x-1\right) \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-1 \le -2 \\ 1 \le 2x-1 \le 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \le -\dfrac{1}{2} \\ 1 \le x \le \dfrac{3}{2} \end{array}\right.$.

Tương tự $y' > 0 \Leftrightarrow f'\left(2x-1\right) < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2 < 2x-1 < 1 \\ 2x-1 > 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\dfrac{1}{2} < x < 1 \\ x > \dfrac{3}{2} \end{array}\right.$

Từ đó suy ra hàm số $y = \left(f\left(2x-1\right)\right)^{2018}$ có 3 điểm cực trị.

Câu 5: Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	2	$\nearrow$	7	$\searrow$	$-\infty$

Hỏi hàm số $y = \left[f\left(2-x\right)\right]^2$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 4. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 7.

Lời giải

Chọn C

$y' = -2.f\left(2-x\right).f'\left(2-x\right)$.

$$y'=0 \Leftrightarrow -2.f(2-x).f'(2-x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(2-x)=0 \\ f'(2-x)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2-x=a<-2 \\ 2-x=b>1 \\ 2-x=-2 \\ 2-x=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2-a>4 \\ x=2-b<1 \\ x=4 \\ x=1 \end{array}\right.$$

y' không xác định $\Leftrightarrow$ $f'(2-x)$ không xác định $\Leftrightarrow 2-x=0 \Leftrightarrow x=2$

Dựa vào đồ thị $f(x)$ ta thấy $f(2-x)>0 \Leftrightarrow a<2-x<b \Leftrightarrow 2-b<x<2-a$

$$f'(2-x)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2-x<-2 \\ 0<2-x<1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>4 \\ 1<x<2 \end{array}\right.$$

Ta có bảng xét dấu y'

x	$-\infty$		$2-b$		1		2		4		$2-a$		$+\infty$
$f'(2-x)$		$-$	|	$-$	0	$+$	||	$-$	0	$+$	|	$+$	
$f(2-x)$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	|	$+$	0	$-$	
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	||	$+$	0	$-$	0	$+$	

Vậy hàm số $y=\left[f(2-x)\right]^2$ có 5 điểm cực trị.

Câu 6: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu $f'(x)$ như sau

x	$-\infty$		-2		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

Biết rằng hàm số $y=f(x)$ là hàm đa thức có đồ thị cắt trục hoành tại một điểm duy nhất.

Hỏi hàm số $y=f^2\left(x^2-2x\right)$ có nhiều nhất bao nhiêu điểm cực tiểu?

A. 4. **B.** 2. **C.** 5. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

+) Ta có $y=f(x)$ là hàm đa thức có đồ thị cắt trục hoành tại một điểm duy nhất nên

$$f(x)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=a<-2 \\ x=b>3 \end{array}\right.$$

Đặt $g(x)=f^2\left(x^2-2x\right)$. Ta có $g'(x)=(2x-2)f'\left(x^2-2x\right)f\left(x^2-2x\right)$.

Để hàm số $y=f^2\left(x^2-2x\right)$ có nhiều điểm cực tiểu nhất thì phương trình $f\left(x^2-2x\right)=0$ có nhiều nghiệm nhất $\Rightarrow x^2-2x=b>3$ (vì $x^2-2x\geq -1, \forall x$)

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x^2-2x=-2 \\ x^2-2x=1 \\ x^2-2x=3 \\ x^2-2x=b \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x^2-2x+2=0 \\ x^2-2x-1=0 \\ x^2-2x-3=0 \\ x=x_1<-1 \\ x=x_2>3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=1\pm\sqrt{2} \\ x=-1 \\ x=3 \\ x=x_1<-1 \\ x=x_2>3 \end{array}\right..$$

Trong đó các nghiệm -1, 1, 3 $x_1;x_2$ là nghiệm bội lẻ và $1\pm\sqrt{2}$ là nghiệm bội chẵn. Vì vậy hàm số $g'(x)$ chỉ đổi dấu khi đi qua các nghiệm -1, 1, 3; $x_1;x_2$.

Ta có $g'(0) = -2f'(0) < 0$ (do $f'(0) > 0$).

Bảng xét dấu $g'(x)$

x	$-\infty$		x_1		-1		$1-\sqrt{2}$		1		$1+\sqrt{2}$		3		x_2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Vậy hàm số $y = f^2(x^2 - 2x)$ có đúng 3 điểm cực tiểu.

Câu 7: Cho hàm $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(1)f(2) < 0$ và bảng xét dấu của $f'(x)$

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Hỏi hàm số $g(x) = f^2(x-2019)$ có bao nhiêu cực trị?

A. 4. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 7.

Lời giải

Chọn C

$g'(x) = 2f(x-2019)f'(x-2019)$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x-2019) = 0(1) \\ f'(x-2019) = 0(2) \end{array}\right.$

+) Vì $f(1)f(2) < 0$ và từ BBT suy ra đồ thị $y = f(x)$ cắt Ox tại 3 điểm phân biệt có hoành độ $x_1 < 1, 1 < x_2 < 2, x_3 > 2$. Mà đồ thị hàm số $f(x-2019)$ có được bằng cách tịnh tiến theo phương trục hoành sang phải 2019 đơn vị, nên nó sẽ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ $x_1 < 2020, 2020 < x_2 < 2021, x_3 > 2021$

$(2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-2019 = 1 \\ x-2019 = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2020 \\ x = 2021 \end{array}\right.$

Do vậy pt $g'(x) = 0$ có 5 nghiệm đơn phân biệt +) KL hàm g(x) có 5 cực trị

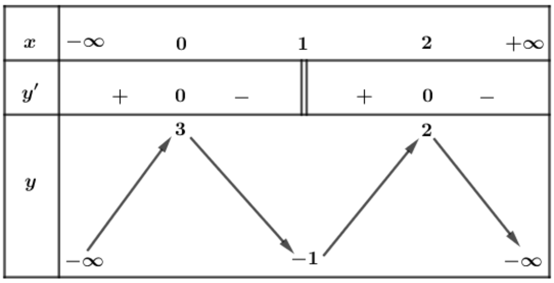
LỜI BÌNH: Chúng ta có thể tổng quát: Cho hàm $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(a_1)f(a_2) < 0$, $f(a_2)f(a_3) < 0$ …., $f(a_{n-1})f(a_n) < 0$ và bảng xét dấu của $f'(x)$

x	$-\infty$		a_1		a_2		………… a_n	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	

($f'(x)$ đổi dấu đan xen khi qua $a_1, \ldots a_n$)

Số cực trị của hàm số $g(x) = f^{2k}(x \pm c)$ là $2n+1$

Câu 8: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau?



Hàm số $g(x) = \left(f\left(\dfrac{x-1}{x+2}\right)\right)^{2018}$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 7 **B.** 3 **C.** 5 **D.** 6

Lời giải

Chọn D

Ta có $g'(x)=2018.\frac{3}{(x+2)^2}.\left(f\left(\frac{x-1}{x+2}\right)\right)^{2017}.f'\left(\frac{x-1}{x+2}\right)$

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll} f\left(\frac{x-1}{x+2}\right)=0 & (1)\\ f'\left(\frac{x-1}{x+2}\right)=0 & (2)\end{array}\right.$$

□ Dựa vào bảng biến thiên ta có: $f\left(\frac{x-1}{x+2}\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\frac{x-1}{x+2}=a;(a<0)\\ \frac{x-1}{x+2}=b;(0<b<1)\\ \frac{x-1}{x+2}=c;(1<c<2)\\ \frac{x-1}{x+2}=d;(d>2)\end{array}\right.$

□ $f'\left(\frac{x-1}{x+2}\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\frac{x-1}{x+2}=0\\ \frac{x-1}{x+2}=2\end{array}\right.$

Nhận xét: hàm số $y=\frac{x-1}{x+2}$ là hàm số đơn điệu trên tập xác định nên phương trình (1) có 4 nghiệm đơn, phương trình (2) có 2 nghiệm đơn và nghiệm của phương trình (1) và phương trình (2) không trùng nhau.

□ $g'(x)$ không xác định $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\frac{x-1}{x+2}=1\quad (VN)\\ x=-2\end{array}\right.$

Nhận xét: $x=-2$ không thuộc tập xác định của $y=g(x)$

Vậy $g'(x)=0$ có 6 nghiệm đơn khác -2 nên hàm số $y=g(x)$ có 6 điểm cực trị.

Câu 9: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	-2	↗	3	↘	$-\infty$

Hỏi hàm số $g(x)=\left[f(e^x-3)\right]^2$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 5.

Lời giải

Chọn B

$g'(x)=2.e^x.f(e^x-3).f'(e^x-3)$

$g'(x)=0\Leftrightarrow f(e^x-3)=0$

Hoặc $f'(e^x-3)=0$

Dựa vào BBT ta được:

- Giải $f(e^x-3)=0$
- $e^x-3=a(a<-3) \Leftrightarrow e^x=a+3<0$ (vô nghiệm)
- $e^x-3=b(-3<b<1)$

  $\Leftrightarrow x=b+3$ (*)

  $\Leftrightarrow x=\ln(b+3)$ (1 nghiệm)
- $e^x-3=c(c>1)$

  $\Leftrightarrow e^x=c+3$ (**)

  $\Leftrightarrow x=\ln(c+3)$ (1 nghiệm)
- Giải $f'(e^x-3)=0$

  $\Leftrightarrow e^x-3=-3 \Leftrightarrow e^x=0$ (vô nghiệm)

  Hoặc $e^x-3=1 \Leftrightarrow e^x=4 \Leftrightarrow x=\ln 4$ (1 nghiệm)

  Lấy $x=\ln 4$ thay vào (*) và (**) không thỏa mãn đều kiện của b và c nên 3 nghiệm trên không trùng nhau $\Rightarrow g'(x)=0$ có 3 nghiệm đơn

  Vậy $g(x)$ có 3 cực trị

Câu 10: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x		-5		0	
$f'(x)$	+	0	-	0	+

Biết rằng $f(-5)<0$ và $f(5)>0$. Số điểm cực trị của hàm số $y=\left[f\left(x^2-6x\right)\right]^2$ là

A. 7. **B.** 8. **C.** 9. **D.** 6.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $y'=2(2x-6).f'\left(x^2-6x\right).f\left(x^2-6x\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 2x-6=0 \Leftrightarrow x=3 & \\ f'\left(x^2-6x\right)=0 & (1) \\ f\left(x^2-6x\right)=0 & (2) \end{array}\right.$

+) Từ (1) kết hợp với bảng dấu $f'(x)$ ta có $f'\left(x^2-6x\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-6x=-5 \Leftrightarrow x=5, x=1 \\ x^2-6x=0 \Leftrightarrow x=0.x=6 \end{array}\right.$

+) Từ (2) kết hợp bảng dấu $f'(x)$ và đk $f(-5)<0$ và $f(5)>0$ ta có

$f\left(x^2-6x\right)=0 \Leftrightarrow x^2-6x=x_0 \in (0;5)$ nên pt $x^2-6x-x_0=0$ có 2 nghiệm phân biệt khác các nghiệm trên.

+) Các nghiệm đó là nghiệm bội lẻ (nghiệm đơn) => hàm số $y=\left[f\left(x^2-6x\right)\right]^2$ có 7 cực trị

Câu 11: Cho hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$, có bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	+	||	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-1	↗	1	↘	$-\infty$

Hàm số $y=\left[f\left(4-x^2\right)\right]^3$ có bao nhiêu cực trị?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Chọn D

TH1. Ta có $y'=-6x.\left[f\left(4-x^2\right)\right]^2.f'\left(4-x^2\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ \left[f\left(4-x^2\right)\right]^2=0 \quad (1)\\ f'\left(4-x^2\right)=0 \quad (2)\end{array}\right.$

+) Dựa vào bảng xét dấu y' ta có pt(1) có nghiệm nhưng đều là nghiệm bội chẵn nên tại đó không phải là điểm cực trị.

+) Từ (2) ta có $4-x^2=0\Rightarrow x=2, x=-2$

TH2. Điểm làm cho y' không xác định: $4-x^2=3\Rightarrow x=1, x=-1$

Vậy ta có 5 điểm cực trị

Câu 12: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-5		0		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	5	$\searrow$	-7	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số $y=\left[f\left(4-\sqrt{x}\right)+3\right]^4$ có bao nhiêu cực trị?

A. 1. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 7.

Lời giải

Chọn B

TXĐ $D=[0;+\infty)$

Ta có $y'=\frac{-2}{\sqrt{x}}.f'\left(4-\sqrt{x}\right).\left[f\left(4-\sqrt{x}\right)+3\right]^3, (x>0)$

$$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f'\left(4-\sqrt{x}\right)=0 \quad (1)\\ f\left(4-\sqrt{x}\right)+3=0 \quad (2)\end{array}\right.$$

+) Từ (1) ta có: $f'\left(4-\sqrt{x}\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}4-\sqrt{x}=-5\Leftrightarrow x=81\\ 4-\sqrt{x}=0\Leftrightarrow x=16\\ 4-\sqrt{x}=4\Leftrightarrow x=0\notin(0;+\infty)\end{array}\right.$

+) Từ (2) ta có $f\left(4-\sqrt{x}\right)+3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}4-\sqrt{x}=a\in(0;4)\Leftrightarrow x=x_1\\ 4-\sqrt{x}=b\in(4;+\infty)\Leftrightarrow x\in\varnothing\end{array}\right.$

Vậy có $y=\left[f\left(4-\sqrt{x}\right)+3\right]^4$ có 3 cực trị.

Câu 13: Cho hàm bậc ba $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu y' như sau.

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	

Gọi m và n lần lượt là số điểm cực trị nhiều nhất và ít nhất của hàm số $y=g(x)=\left[f(2x+1)\right]^2$, biết $f(3)<0$. Khi đó $2m-3n$ bằng

A. 4. **B.** 1. **C.** -3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

Ta có $g'(x)=4f(2x+1).f'(2x+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(2x+1)=0 \\ f'(2x+1)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(2x+1)=0 \\ 2x+1=1 \\ 2x+1=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(2x+1)=0 \\ x=0 \\ x=1 \end{array}\right.$.

Suy ra số điểm cực trị của hàm số $g(x)$ phụ thuộc số nghiệm của phương trình $f(2x+1)=0$.

☑ Trường hợp 1: $f(1)>0$. Suy ra phương trình

$$f(2x+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x+1=a<1 \\ 2x+1=b, b\in(1,3) \\ 2x+1=c>3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{a-1}{2}<0 \\ x=\dfrac{b-1}{2}\in(0;1) \\ x=\dfrac{c-1}{2}>1 \end{array}\right..$$

Vậy trường hợp này $g'(x)$ có 5 nghiệm đơn phân biệt nên hàm số $y=g(x)$ có năm điểm cực trị.

☑ Trường hợp 2: $f(1)=0$. Suy ra phương trình $f(2x+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x+1=1 \\ 2x+1=a>3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\dfrac{a-1}{2}>1 \end{array}\right.$.

Vậy trường hợp này $g'(x)$ có 2 nghiệm đơn phân biệt nên hàm số $y=g(x)$ có hai điểm cực trị.

☑ Trường hợp 3: $f(1)<0$. Suy ra phương trình $f(2x+1)=0 \Leftrightarrow 2x+1=a>3 \Leftrightarrow x=\dfrac{a-1}{2}>1$.

Vậy trường hợp này $g'(x)$ có 3 nghiệm đơn phân biệt nên hàm số $y=g(x)$ có ba điểm cực trị.

DẠNG TOÁN 8. Biết BẢNG XÉT DẤU hàm số $y=f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y=g(x)=\left[f(u(x))\right]^k$ trong bài toán chứa tham số .

DẠNG TOÁN 9. Biết BẢNG XÉT DẤU hàm số $y=f'(u(x))$ xét cực trị của hàm số $y=f(x)$ trong bài toán không chứa tham số.

Câu 1: Cho $y=f(x)$ là hàm số xác định và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$.

Biết bảng xác dấu của $y=f'(3-2x)$ như sau:

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{5}{2}$		3		4		$+\infty$
$f'(3-2x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

Hỏi hàm số $y=f(x)$ có bao nhiêu điểm cực đại

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Đặt $u=3-2x \Rightarrow x=\dfrac{3-u}{2}$

Ta có $f'(3-2x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{1}{2} \\ x=\dfrac{5}{2} \\ x=3 \\ x=4 \end{array}\right.$

$$\Rightarrow f'(u)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} u=4 \\ u=-2 \\ u=-3 \\ u=-5 \end{array}\right.$$

Hơn nữa $f'(u)>0 \Leftrightarrow f'(3-2x)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\frac{1}{2}<x<\frac{5}{2} \\ x>4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2<u<4 \\ u<-5 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-5		-3		-2		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

Câu 2: Cho $y=f(x)$ xác định và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$.

Biết bảng xét dấu của $y=f'(\sqrt[3]{x})$ như sau

x	$-\infty$		-1		8		27		$+\infty$
$f'(\sqrt[3]{x})$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Tìm số điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Đặt $u=\sqrt[3]{x} \Rightarrow x=u^3$

$$f'(\sqrt[3]{x})=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=8 \\ x=27 \end{array}\right.$$

Suy ra $f'(u)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} u=-1 \\ u=2 \\ u=3 \end{array}\right.$

$$f'(u)>0 \Rightarrow f'(\sqrt[3]{x})>0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} -1<x<8 \\ 27<x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1<u^3<8 \\ 27<u^3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1<u<2 \\ 3<u \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

DẠNG TOÁN 10. Biết BẢNG XÉT DẤU hàm số $y=f'(u(x))$ xét cực trị của hàm số $y=f(x)$ trong bài toán chứa tham số.

CÁC DẠNG TOÁN VỀ HÀM ẨN LIÊN QUAN ĐẾN BÀI TOÁN CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

PHẦN 5: CỰC TRỊ CỦA HÀM CHỨA GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

Dạng toán 1. Biết đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ xét cực trị của hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|$

Dạng toán 2. Biết đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ xét cực trị của hàm số $y=\left|f\left(ax+b\right)\right|$

Dạng toán 3. Biết đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ xét cực trị của hàm số $y=f\left(\left|x\right|\right)$

Dạng toán 4. Biết đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ xét cực trị của hàm số $y=f\left(\left|x+a\right|\right), y=f\left(\left|x+a\right|+b\right)$ …

Dạng toán 5. Biết bảng biến thiên hàm số $y=f\left(x\right)$ xét cực trị của hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|$

Dạng toán 6. Biết bảng biến thiên hàm số $y=f\left(x\right)$ xét cực trị của hàm số $y=\left|f\left(ax+b\right)\right|$

Dạng toán 7. Biết bảng biến thiên hàm số $y=f\left(x\right)$ xét cực trị của hàm số $y=f\left(\left|x\right|\right)$

Dạng toán 8. Biết bảng biến thiên hàm số $y=f\left(x\right)$ xét cực trị của hàm số $y=f\left(\left|x+a\right|\right), y=f\left(\left|x+a\right|+b\right)$ …

Dạng toán 9. Biết đồ thị hàm số $y=f'\left(x\right)$ xét cực trị của hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|$

Dạng toán 10. Biết đồ thị hàm số $y=f'\left(x\right)$ xét cực trị của hàm số $y=\left|f\left(ax+b\right)\right|$

Dạng toán 11. Biết đồ thị hàm số $y=f'\left(x\right)$ xét cực trị của hàm số $y=f\left(\left|x\right|\right)$

Dạng toán 12. Biết đồ thị hàm số $y=f'\left(x\right)$ xét cực trị của hàm số $y=f\left(\left|x+a\right|\right), y=f\left(\left|x+a\right|+b\right)$ …

Dạng toán 13. Biết bảng xét dấu hàm số $y=f'\left(x\right)$ xét cực trị của hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|$

Dạng toán 14. Biết bảng xét dấu hàm số $y=f'\left(x\right)$ xét cực trị của hàm số $y=\left|f\left(ax+b\right)\right|$

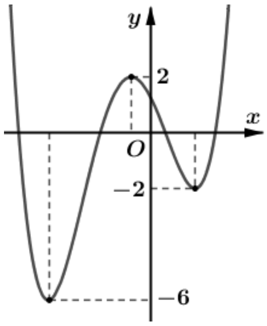
Dạng toán 15. Biết bảng xét dấu hàm số $y=f'\left(x\right)$ xét cực trị của hàm số $y=f\left(\left|x\right|\right)$

Dạng toán 16. Biết bảng xét dấu hàm số $y=f'\left(x\right)$ xét cực trị của hàm số $y=f\left(\left|x+a\right|\right), y=f\left(\left|x+a\right|+b\right)$ …

DẠNG TOÁN 1. Biết đồ thị hàm số $y=f(x)$ xét cực trị của hàm số $y=\left|f(x)\right|$.

DẠNG TOÁN 2. Biết đồ thị hàm số $y=f(x)$ xét cực trị của hàm số $y=\left|f(ax+b)\right|$.

Câu 1: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x)=\left|f(x+2019)+m^2\right|$ có 5 điểm cực trị ?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 5.

Lời giải

Chọn B

Vì hàm $f(x)$ đã cho có 3 điểm cực trị nên $f(x+2019)+m^2$ cũng luôn có 3 điểm cực trị (do phép tịnh tiến không làm ảnh hưởng đến số cực trị).

Do đó yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ số giao điểm của đồ thị $f(x+2019)+m^2$ với trục hoành là 2.

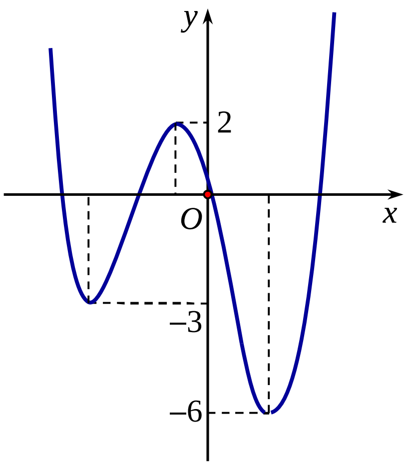
Để số giao điểm của đồ thị $f(x+2019)+m^2$ với trục hoành là 2, ta cần

+Tịnh tiến đồ thị $f(x)$ xuống dưới tối thiểu 2 đơn vị $\longrightarrow m^2\le -2$: vô lý

+ Hoặc tịnh tiến đồ thị $f(x)$ lên trên tối thiểu 2 đơn vị nhưng phải nhỏ hơn 6 đơn vị

$\longrightarrow 2\le m^2<6 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{2}\le m<\sqrt{6}\\ -\sqrt{6}<m\le -\sqrt{2}\end{array}\right. \xrightarrow{m\in\mathbb{Z}} m\in\{-2;2\}$.

Câu 2: Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y=f(x)$.



Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y=\left|f(x-1)+m\right|$ có 5 điểm cực trị. Tổng giá trị tất cả các phần tử của S bằng

A. 12. **B.** 15. **C.** 18. **D.** 9.

Lời giải

Chọn A

Phương pháp:

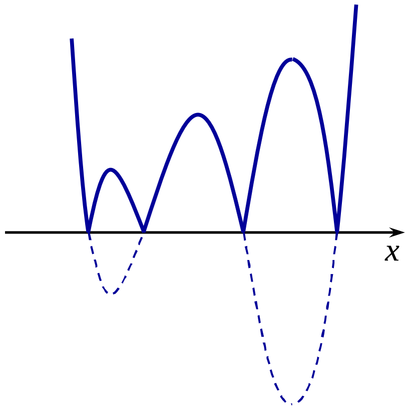
+ *Xác định đồ thị hàm số* $y=f(x-1)$

+ Áp dụng tính chất: Số cực trị của đồ thị hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|$ bằng tổng số cực trị của đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ và số giao điểm (không phải là cực trị) của đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ với Ox.

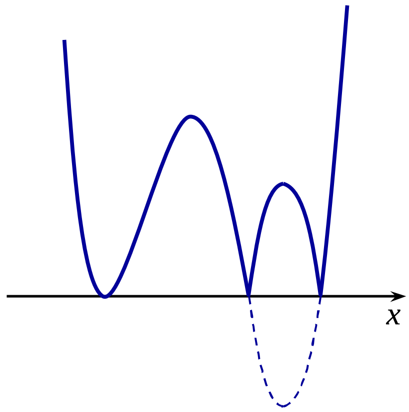
Cách 1:

Nhận xét: Số giao điểm của $\left(C\right): y=f\left(x\right)$ với Ox bằng số giao điểm của $\left(C'\right): y=f\left(x-1\right)$ với Ox.

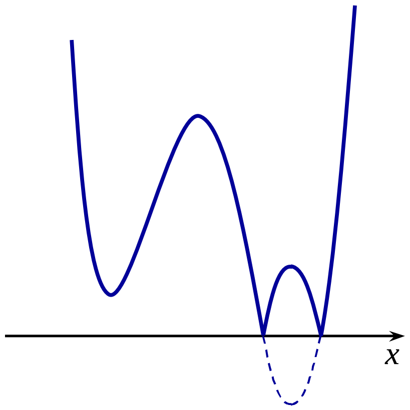
Vì $m>0$ nên $\left(C''\right): y=f\left(x-1\right)+m$ có được bằng cách tịnh tiến $\left(C'\right): y=f\left(x-1\right)$ lên trên m đơn vị.



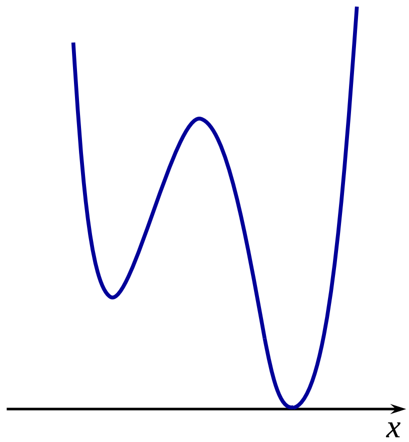
$\text{TH1}: 0<m<3$



$\text{TH2}: m=3$



$\text{TH3}: 3<m<6$



$\text{TH4}: m\geq 6$

TH1: $0<m<3$. Đồ thị hàm số có 7 điểm cực trị. Loại.
TH2: $m=3$. Đồ thị hàm số có 5 điểm cực trị. Nhận.
TH3: $3<m<6$. Đồ thị hàm số có 5 điểm cực trị. Nhận.
TH4: $m\geq 6$. Đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị. Loại.

Vậy $3\leq m<6$. Do $m\in\mathbb{Z}^*$ nên $m\in\left\{3;4;5\right\}$.

Vậy tổng giá trị tất cả các phần tử của S bằng 12.

Cách 2

Tịnh tiến đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ sang phải 1 đơn vị, ta được đồ thị hàm số $y=f\left(x-1\right)$.

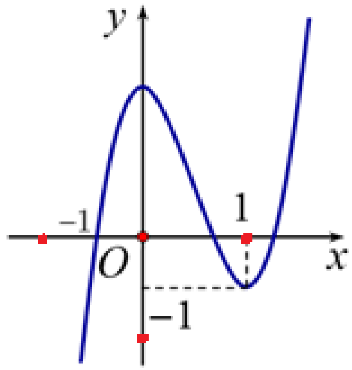
Do đó đồ thị hàm số $y=f\left(x-1\right)$ có 3 cực trị và có 4 giao điểm với Ox.

Để được đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)+m$ với m nguyên dương ta phải tịnh tiến đồ thị hàm số $y=f\left(x-1\right)$ lên trên m đơn vị

Để thỏa mãn điều kiện đề bài thì đồ thị hàm số $y=f\left(x-1\right)+m$ cắt Ox tại đúng 2 điểm (không phải là điểm cực trị của chính nó), do đó $3\leq m<6\Rightarrow S=\left\{3;4;5\right\}$.

Tổng giá trị các phần tử của S là 12.

Câu 3: Cho hàm số bậc ba $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ.



Hàm số $y=\left|f\left(|x+1|-1\right)\right|$ có bao nhiêu cực trị?

A. 11 **B.** 7. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $y=f\left(|x+1|-1\right)$

Ta có $y'=\dfrac{x+1}{|x+1|}f'\left(|x+1|-1\right)$

$$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}|x+1|-1=0\\|x+1|-1=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=0\\x=-2\\x=-3\end{array}\right.$$

y' không xác định tại $x=-1$.

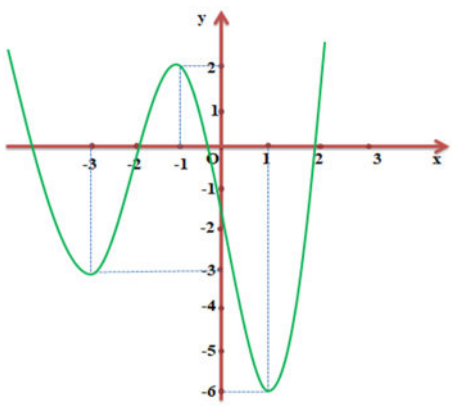
Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-3		-2		-1		0		1		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	||	+	0	-	0	+	
y	$+\infty$		-1		$f(0)$		$f(-1)<0$		$f(0)>0$		-1		$+\infty$

Dựa vào BBT của hàm số $y=f\left(|x+1|-1\right)$ suy ra BBT của hàm số $y=\left|f\left(|x+1|-1\right)\right|$.

Vậy hàm số $y=\left|f\left(|x+1|-1\right)\right|$ có 11 cực trị.

Câu 4: Hình vẽ là đồ thị hàm số $y=f(x)$. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y=|f(x-1)+m|$ có 5 điểm cực trị. Tổng giá trị tất cả các phần tử của S bằng



A. 9. **B.** 12. **C.** 18. **D.** 15.

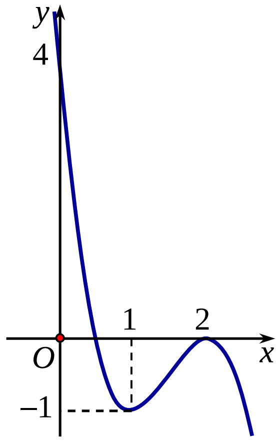
Lời giải

Chọn B

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x)$ ta thấy hàm số có 3 cực trị.
Số cực trị của hàm số $y = f(x-1)+m$ bằng với số cực trị của hàm số $y = f(x-1)$ và bằng số cực trị của hàm số $y = f(x)$.
Số cực trị của hàm số $y = \left|f(x-1)+m\right|$ bằng số cực trị của hàm số $y = f(x)$ cộng với số nghiệm đơn của phương trình $f(x-1)+m = 0$ (*).
Ta có $f(x-1)+m=0 \Leftrightarrow f(x-1) = -m \Leftrightarrow f(t) = -m$ với $t = x-1$.
Để hàm số $y = \left|f(x-1)+m\right|$ có có 5 điểm cực trị thì phương trinh (*) phải có 2 nghiệm đơn phân biệt.
Do đó $-6 < -m \le 3$ hoặc $2 \le -m \Rightarrow m \in \{3,4,5\} \Rightarrow S = 3+4+5 = 12$.

DẠNG TOÁN 3. Biết đồ thị hàm số $y = f(x)$ xét cực trị của hàm số $y = f(|x|)$

Câu 5: Đồ thị hàm số $y = f(x) = -2x^3+9x^2-12x+4$ như hình vẽ. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để phương trình $2|x|^3-9x^2+12|x|+m=0$ có 6 nghiệm phân biệt

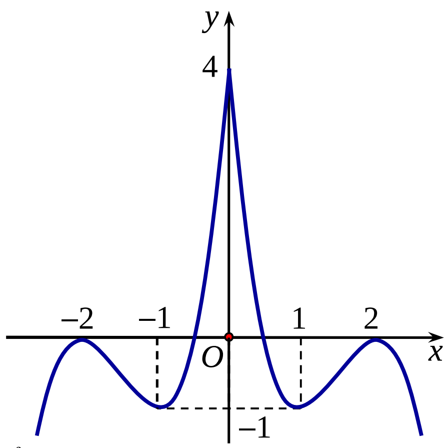


A. $(-1;0)$. **B.** $(-3;-2)$. **C.** $(-5;-4)$. **D.** $(-4;-3)$.

Lời giải

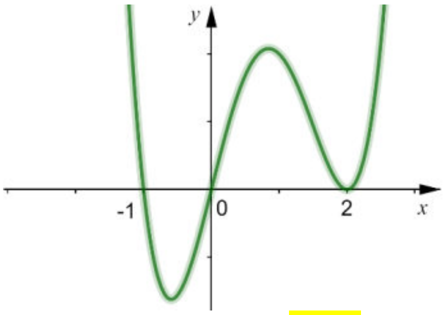
Chọn C

Xét phương trình: $2|x|^3-9x^2+12|x|+m=0 \Leftrightarrow -2|x|^3+9x^2-12|x|+4 = m+4\,(*)$
Số nghiệm của phương trình (*) là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ và đường thẳng $y = m+4$.
Ta có đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ như sau:



Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy để (*) có 6 nghiệm phân biệt thì $-1 < m+4 < 0 \Leftrightarrow -5 < m < -4$.

Câu 6: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C) như hình vẽ bên. Hàm số $y = f(|x|)$ có bao nhiêu điểm cực trị?



A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

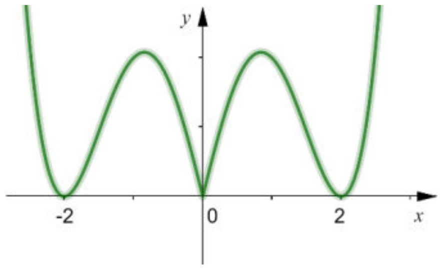
Chọn C

Đồ thị (C') của hàm số $y = f(|x|)$ được vẽ như sau:

+ Giữ nguyên phần đồ thị của (C) nằm bên phải trục tung ta được (C_1)

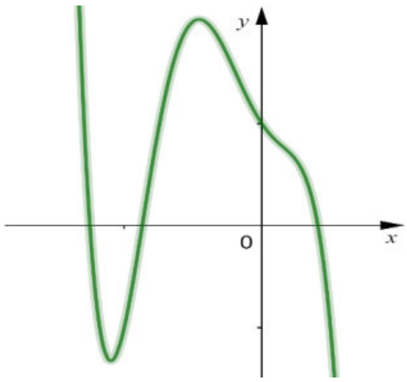
+ Lấy đối xứng qua trục tung phần đồ thị của (C_1) ta được (C_2)

+ Khi đó $(C') = (C_1) \cup (C_2)$ có đồ thị như hình vẽ dưới



Từ đồ thị (C') ta thấy hàm số $y = f(|x|)$ có 5 điểm cực trị

Câu 7: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C) như hình vẽ bên. Hàm số $y = f(|x|)$ có bao nhiêu điểm cực trị?



A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

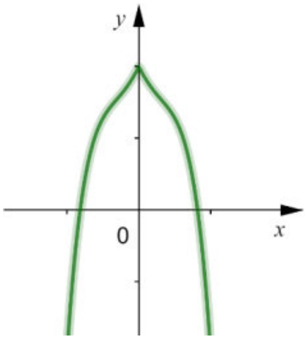
Chọn A

Đồ thị (C') của hàm số $y = f(|x|)$ được vẽ như sau:

+ Giữ nguyên phần đồ thị của (C) nằm bên phải trục tung ta được (C_1).

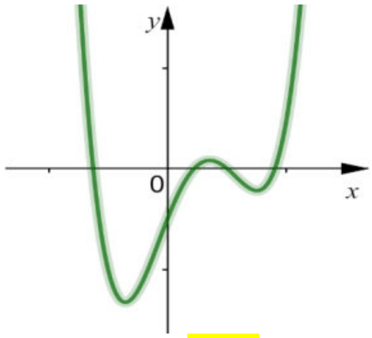
+ Lấy đối xứng qua trục tung phần đồ thị của (C_1) ta được (C_2).

+ Khi đó $(C') = (C_1) \cup (C_2)$ có đồ thị như hình vẽ dưới



Từ đồ thị (C') ta thấy hàm số $y = f(|x|)$ có 1 điểm cực trị.

Câu 8: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C) như hình vẽ bên. Hàm số $y = f(|x|)$ có bao nhiêu điểm cực trị?



A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

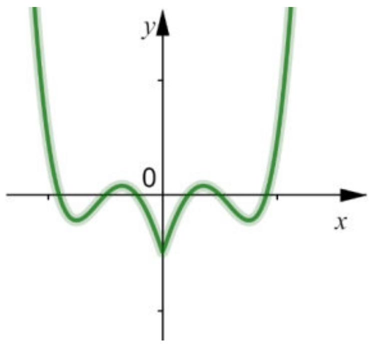
Chọn C

Đồ thị (C') của hàm số $y = f(|x|)$ được vẽ như sau:

+ Giữ nguyên phần đồ thị của (C) nằm bên phải trục tung ta được (C_1).

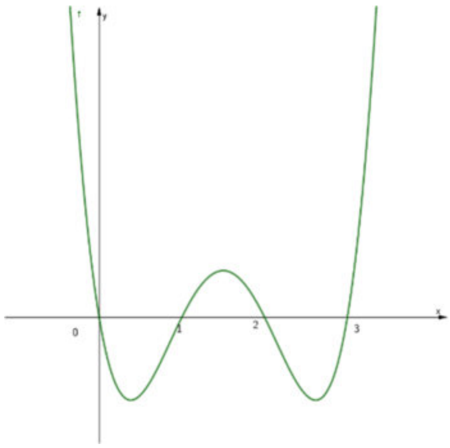
+ Lấy đối xứng qua trục tung phần đồ thị của (C_1) ta được (C_2).

+ Khi đó $(C') = (C_1) \cup (C_2)$ có đồ thị như hình vẽ dưới



Từ đồ thị (C') ta thấy hàm số $y = f(|x|)$ có 5 điểm cực trị.

Câu 9: Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số $y = f(|x|)$ là



A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 7.

Lời giải

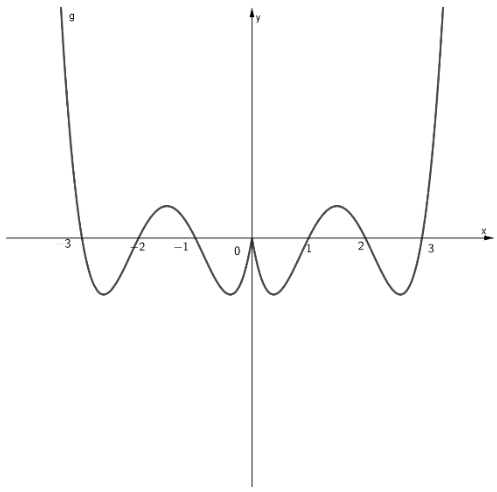
Chọn D

Đồ thị (C') của hàm số $y = f(|x|)$ được vẽ như sau:

+ Giữ nguyên phần đồ thị của (C) nằm bên phải trục tung ta được (C_1).

+ Lấy đối xứng qua trục tung phần đồ thị của (C_1) ta được (C_2).

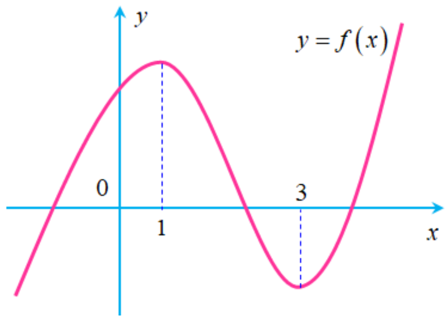
+ Khi đó $(C') = (C_1) \cup (C_2)$ có đồ thị như hình vẽ dưới



Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ có 7 cực trị.

DẠNG TOÁN 4. Biết đồ thị hàm số $y = f(x)$ xét cực trị của hàm số $y = f(|x+a|)$, $y = f(|x+a|+b)$ …

Câu 10: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x) = f(|x+m|)$ có 5 điểm cực trị ?

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn D

Từ đồ thị hàm số ta thấy:

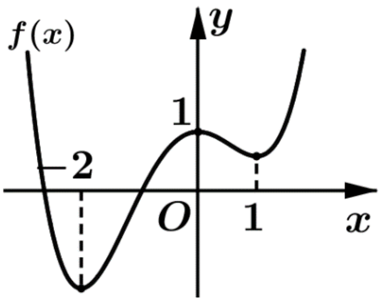
Hàm số $f(x)$ có 2 **điểm cực trị dương.**

$\longrightarrow f(|x|)$ có 5 **điểm cực trị.**

$\longrightarrow f(|x+m|)$ có 5 **điểm cực trị** với mọi m (vì tịnh tiến sang trái hay sang phải không ảnh hưởng đến **số điểm cực trị** của **hàm số**) .

Vậy có vô số giá trị m để hàm số $g(x)=f(|x+m|)$ có 5 điểm cực trị.

Câu 11: Cho hàm số $y=f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi hàm số $y=f(|x+1|-3)$ có bao nhiêu điểm cực trị?



A. 3. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 7.

Lời giải

Chọn D

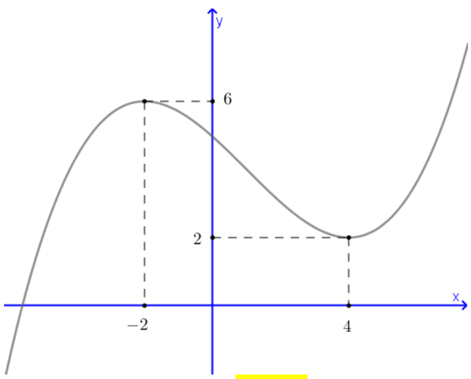
Đồ thị hàm số $y=f(|x+1|-3)$ được suy từ đồ thị hàm số $y=f(x)$ bằng cách

• Tịnh tiến sang phải 3 đơn vị;

• Xóa bỏ phần đồ thị phía bên trái trục tung, phần đồ thị phía bên phải trục tung thì lấy đối xứng qua trục tung;

• Cuối cùng tịnh tiến đồ thị sang trái 1 đơn vị.

Câu 12: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau. Hàm số $y=f(|x-3|)$ có bao nhiêu điểm cực trị?



A. 5. **B.** 6. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C

$y=f(|x-3|)(1)$, Đặt $t=|x-3|$, $t\geq 0$. Thì (1) trở thành: $y=f(t)$ $(t\geq 0)$.

Có $t=\sqrt{(x-3)^2}\Rightarrow t'_x=\dfrac{x-3}{\sqrt{(x-3)^2}}$

Có $y'_x=t'_x f'(t)$

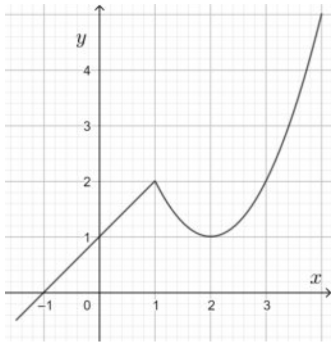
$y'_x=0\Leftrightarrow t'_x f'(t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t'_x=0\,(\text{VN})\\ f'(t)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-2\,(L)\\ t=4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=7\\ x=-1\end{array}\right.$

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		3		7		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	CT	$\nearrow$	CĐ	$\searrow$	CT	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào BBT thì hàm số $y = f\left(\left|x-3\right|\right)$ có 3 cực trị.

Câu 13: Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Tìm m để hàm số $g\left(x\right) = f\left(\left|x+m\right|\right) + 2019m$ có 5 điểm cực trị

A. $m > -\dfrac{1}{2}$.

B. $m > 1$.

C. $m \ge -\dfrac{1}{2}$.

D. $m \ge 1$.

Lời giải

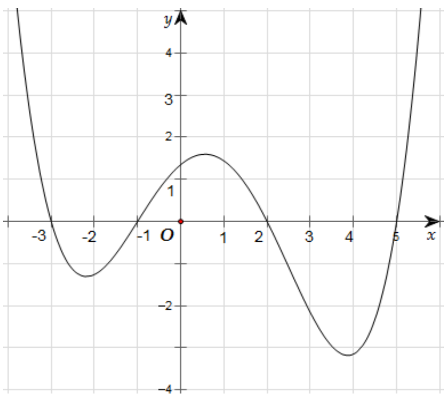
Chọn A

Tịnh tiến đồ thị $y = f\left(\left|x+m\right|\right)$ lên trên hoặc xuống dưới không làm ảnh hưởng đến số điểm cực trị của hàm số đã cho. Do đó số cực trị của hàm số $y = g\left(x\right)$ bằng số cực trị của hàm số $y = f\left(\left|x+m\right|\right)$.

Để $f\left(\left|x+m\right|\right)$ có 5 điểm cực trị thì $f\left(x+m\right)$ phải có 2 điểm cực trị dương với $x+m>0$.

Dựa vào đồ thị ta thấy $f\left(x\right)$ đạt cực trị tại $x=1, x=2$ nên $f\left(x+m\right)$ đạt cực trị tại $x = 2+m; x = 1+m$. Do đó $\begin{cases} 2+m+m>0 \\ 1+m+m>0 \end{cases} \Leftrightarrow m > -\dfrac{1}{2}$.

Câu 14: Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y = f'\left(x\right)$ có đồ thị như hình bên. Đặt $g\left(x\right) = f\left(\left|x\right|+m\right)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g\left(x\right)$ có đúng 7 điểm cực trị?



A. 2.

B. 3.

C. 1.

D. Vô số.

Lời giải

Chọn A

Ta có $g(x)=f(|x|+m)=\begin{cases} f(x+m)\;,khi\; x\ge 0 \\ f(-x+m), khi\; x<0\end{cases}$

Do hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ Hàm số $g(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$

Và ta lại có $g(-x)=f(|x|+m)=g(x)\Rightarrow$ Hàm số $g(x)$ là hàm số chẵn $\Rightarrow$ Đồ thị hàm số $y=g(x)$ đối xứng qua trục Oy.

Hàm số $y=g(x)$ có 7 điểm cực trị $\Leftrightarrow$ Hàm số $y=g(x)$ có 3 điểm cực trị dương, 3 điểm cực trị âm và một điểm cực trị bằng 0 (*)

Dựa vào đồ thị hàm số $y=f'(x)$, ta có: $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=-3\\ x=-1\\ x=2\\ x=5\end{array}\right.$

Xét trên khoảng $(0;+\infty)$, ta được $g(x)=f(x+m)$

+ Ta có $g'(x)=f'(x+m)$

+ $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x+m=-3\\ x+m=-1\\ x+m=2\\ x+m=5\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=-m-3\\ x=-m-1\\ x=-m+2\\ x=-m+5\end{array}\right.$

+ Nhận thấy $-m-3<-m-1<-m+2<-m+5$

Theo yêu cầu (*) bài toán $\Leftrightarrow\begin{cases}-m-1>0\\ -m-3\le 0\end{cases}\Leftrightarrow -3\le m<-1\Leftrightarrow\begin{cases} m\in\mathbb{Z}\\ m\in\{-3;-2\}\end{cases}$

DẠNG TOÁN 5. Biết bảng biến thiên hàm số $y=f(x)$ xét cực trị của hàm số $y=|f(x)|$

Câu 15: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau. Đồ thị hàm số $y=|f(x)|$ có bao nhiêu điểm cực trị .

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	0	-	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-4	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

A. 5. **B.** 6. **C.** 3. **D.** 7.

Lời giải

Chọn D

Đồ thị hàm $y=|f(x)|$ gồm 2 phần:

+ Phần đồ thị $y=f(x)$ nằm trên Ox (Kể cả giao điểm trên trục Ox)

+ Phần đồ thị lấy đối xứng qua Ox của đồ thị $y=f(x)$ nằm dưới Ox

Từ đó ta có bảng biến thiên của $y=|f(x)|$.

x	$-\infty$	x_1	-2	x_2	0	x_3	2	x_4	$+\infty$
$\lvert f(x)\rvert$	$+\infty$	0	2	0	4	0	2	0	$+\infty$

Từ bảng biến thiên này hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|$ có 7 cực trị.

Câu 16: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau. Đồ thị hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$		1		2		1		$+\infty$

A. 5. **B.** 6. **C.** 3. **D.** 7.

Lời giải

Chọn C

Đồ thị hàm $y=\left|f\left(x\right)\right|$ gồm 2 phần:

+ Phần đồ thị $y = f\left(x\right)$ nằm trên Ox (Kể cả giao điểm trên trục Ox)

+ Phần đồ thị lấy đối xứng qua Ox của đồ thị $y = f\left(x\right)$ nằm dưới Ox

Từ đó ta có bảng biến thiên của $y=\left|f\left(x\right)\right|$.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$\lvert f(x)\rvert$	$+\infty$	1	2	1	$+\infty$

Từ bảng biến thiên này hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|$ có 3 cực trị.

Câu 17: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau. Đồ thị hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị

x	$-\infty$		-3		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$		-76		5		-76		$+\infty$

A. 5. **B.** 6. **C.** 3. **D.** 7.

Lời giải

Chọn D

Đồ thị hàm $y=\left|f\left(x\right)\right|$ gồm 2 phần:

+ Phần đồ thị $y = f\left(x\right)$ nằm trên Ox (Kể cả giao điểm trên trục Ox)

+ Phần đồ thị lấy đối xứng qua Ox của đồ thị $y = f\left(x\right)$ nằm dưới Ox

Từ đó ta có bảng biến thiên của $y=\left|f\left(x\right)\right|$.

x	$-\infty$	x_1	-3	x_2	0	x_3	3	x_4	$+\infty$
$\left\|f(x)\right\|$	$+\infty$	0	76	0	5	0	76	0	$+\infty$

Từ bảng biến thiên này hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|$ có 7 cực trị.

Câu 18: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau. Đồ thị hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$		-17		-1		-17		$+\infty$

A. 5. **B.** 6. **C.** 3. **D.** 7.

Lời giải

Chọn A

Đồ thị hàm $y=\left|f\left(x\right)\right|$ gồm 2 phần:

+ Phần đồ thị $y = f\left(x\right)$ nằm trên Ox (Kể cả giao điểm trên trục Ox)

+ Phần đồ thị lấy đối xứng qua Ox của đồ thị $y = f\left(x\right)$ nằm dưới Ox

Từ đó ta có bảng biến thiên của $y=\left|f\left(x\right)\right|$.

x	$-\infty$	x_1	-2	0	2	x_2	$+\infty$
$\left\|f(x)\right\|$	$+\infty$	0	17	1	17	0	$+\infty$

Từ bảng biến thiên này hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|$ có 5 cực trị.

Câu 19: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	5	↘	$-\infty$

Hàm số $y=|f(x)|$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

A. 5 . **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C

Đồ thị hàm $y=|f(x)|$ gồm 2 phần:

+ Phần đồ thị $y = f(x)$ nằm trên Ox (Kể cả giao điểm trên trục Ox)

+ Phần đồ thị lấy đối xứng qua Ox của đồ thị $y = f(x)$ nằm dưới Ox

Từ đó ta có bảng biến thiên của $y=|f(x)|$.

x	$-\infty$		-1		1		x_1		$+\infty$
$\|f(x)\|$	$+\infty$	↘	0	↗	5	↘	0	↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, suy ra đồ thị hàm số $y=|f(x)|$ có 3 điểm cực trị.

Câu 20: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ:

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	
y	$-\infty$	↗	5	↘	1	↗	$+\infty$

Đồ thị hàm số $y=|f(x)|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 2 **B.** 4. **C.** 3. **D.** 5.

Lời giải

Chọn C

Vì đồ thị hàm số $y=|f(x)|$ gồm hai phần:

+) Phần đồ thị của hàm số $y=f(x)$ nằm trên Ox.

+) Phần đồ thị đối xứng qua Ox với phần đồ thị hàm số $y=f(x)$ nằm dưới Ox

Nên từ bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$ suy ra bảng biến của hàm số $y=|f(x)|$ như sau:

x	$-\infty$		x_o		-1		3		$+\infty$
y'		−	0	+	0	−	0	+	
y	$+\infty$	↘	0	↗	5	↘	1	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên trên suy ra hàm số $y=|f(x)|$ có 3 điểm cực trị.

Câu 21: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$

Đồ thị hàm số $y=|f(x)|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 4. **B.** 2. **C.** 5. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Từ bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$ suy ra phương trình $f(x)=0$ có ba nghiệm phân biệt là x_1, x_2, x_3. Khi đó ta có bảng biến thiên của hàm số $y=|f(x)|$:

x	$-\infty$		x_1		1		x_2		2		x_3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$\lvert f(x)\rvert$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Suy ra đồ thị hàm số $y=|f(x)|$ có 5 điểm cực trị.

Câu 22: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		-1			3		$+\infty$
y'		$+$	||	$-$		0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	2 || $+\infty$	$\searrow$		-4	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số $y=|f(x)|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 5.

Lời giải

Chọn A

Từ bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$, suy ra bảng biến thiên của hàm số $y=\left|f(x)\right|$ là

x	$-\infty$		x_1		-1		x_2		3		x_3		$+\infty$
y	$+\infty$	↘	0	↗	2 ‖ $+\infty$	↘	0	↗	4	↘	0	↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, ta suy ra hàm số có 4 điểm cực trị.

Câu 23: Tổng các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\left|x^3-3x^2-9x-5+\frac{m}{2}\right|$ có 5 điểm cực trị là

A. 2016. **B.** 1952. **C.** -2016. **D.** -496.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $f(x)=x^3-3x^2-9x-5+\frac{m}{2}$.

Ta có $f'(x)=3x^2-6x-9=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=3 \end{array}\right.$.

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{m}{2}$	↘	$\frac{m}{2}-32$	↗	$+\infty$

Để thỏa yêu cầu thì trục Ox phải cắt ngang đồ thị tại 3 điểm phân biệt, tức là:

$\begin{cases} \frac{m}{2}>0 \\ \frac{m}{2}-32<0 \end{cases} \Leftrightarrow 0<m<64$ thì $f(x)=x^3-3x^2-9x-5+\frac{m}{2}=0$ có ba nghiệm x_1; x_2; x_3 với $x_1<-1<x_2<3<x_3$, ta có bảng biến thiên của hàm số đã cho là

x	$-\infty$		x_1		-1		x_2		3		x_3		$+\infty$
y'		$-$	|	$+$	0	$-$	|	$+$	0	$-$	|	$+$	
y	$+\infty$	↘	0	↗	$\frac{m}{2}$	↘	0	↗	$32-\frac{m}{2}$	↘	0	↗	$+\infty$

Trường hợp này hàm số đã cho có 5 điểm cực trị.

Như vậy, các giá trị nguyên của m để hàm số đã cho có 5 điểm cực trị là $m\in\{1;2;3;...;63\}$.

Tổng các giá trị nguyên này là:

$S=1+2+3+...+63=\frac{63(1+63)}{2}=2016$.

DẠNG TOÁN 6. Biết bảng biến thiên hàm số $y=f(x)$ xét cực trị của hàm số $y=\left|f(ax+b)\right|$

Câu 24: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		1		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$			2019				$+\infty$
		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
	$-\infty$				-2020		

Hỏi đồ thị hàm số $g(x)=|f(x-2019)+2020|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 2 . **B.** 3. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Cách 1: Đồ thị hàm số $u(x)=f(x-2019)+2020$ có được từ đồ thị $f(x)$ bằng cách tịnh tiến đồ thị $f(x)$ sang phải 2019 đơn vị và lên trên 2020 đơn vị.

Suy ra bảng biến thiên của $u(x)$

x	$-\infty$				2020		2023		$+\infty$
$u'(x)$			$+$		0	$-$	0	$+$	
$u(x)$					4039				$+\infty$
			$\nearrow$			$\searrow$		$\nearrow$	
	$-\infty$						0		
$\|u(x)\|$	$+\infty$				4039				$+\infty$
		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
			0				0		

Dựa vào bảng biến thiên suy ra đồ thị hàm số $g(x)=|u(x)|$ có 3 điểm cực trị. Chọn B.

Cách 2:

Đặt $u(x)=f(x-2019)+2020$

$$\Rightarrow u'(x)=f'(x-2019)\Rightarrow u'(x)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2020 \\ x=2023 \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$				2020		2023		$+\infty$
$u'(x)$			$+$		0	$-$	0	$+$	
$u(x)$					4039				$+\infty$
			$\nearrow$			$\searrow$		$\nearrow$	
	$-\infty$						0		
$\|u(x)\|$	$+\infty$				4039				$+\infty$
		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
			0				0		

Dựa vào bảng biến thiên suy ra đồ thị hàm số $g(x)=|u(x)|$ có 3 điểm cực trị.

Chọn B.

Câu 25: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	5	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số $y=|f(1-3x)+1|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Chọn D

Đặt $g(x)=f(1-3x)+1$.

$\Rightarrow g'(x)=-3.f(1-3x)$.

$$\Rightarrow g'(x)=0 \Leftrightarrow f(1-3x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}1-3x=-1\\1-3x=3\end{array}\right. \Leftrightarrow\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{2}{3}\\x=-\dfrac{2}{3}\end{array}\right.$$

Suy ra bảng biến thiên:

x	$-\infty$				$-\frac{2}{3}$				$\frac{2}{3}$				$+\infty$
$g'(x)$			$-$		0		$+$		0		$-$		
$g(x)$	$+\infty$		$\searrow$		-3		$\nearrow$		5		$\searrow$		$-\infty$
$\lvert g(x)\rvert$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	3	$\searrow$	0	$\nearrow$	5	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy hàm số $y=|g(x)|$ có 5 điểm cực trị.

Câu 26: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	11	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

Biết đồ thị hàm số $g(x)=|f(x)-m|$ có 5 điểm cực trị. Khi đó số các giá trị nguyên của tham số của m là

A. 6. **B.** 7. **C.** 8. **D.** 9.

Lời giải

Chọn B

Do hàm $y=f(x)$ có hai điểm cực trị nên $y=f(x)-m$ có hai điểm cực trị.

Để thoả mãn yêu cầu bài thì số giao điểm của đồ thị $y = f(x) - m$ với trục hoành phải là 3 hay số giao điểm của $y = f(x)$ và $y = m$ phải là 3. $g(x) = f(1-3x) \Rightarrow g'(x) = -3.f'(1-3x)$

Suy ra $4 < m < 11$.

Do $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{4,5,6,7,8,9,10\}$ nên chọn đáp án B.

Câu 27: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	11	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$
	$-\infty$				4		

Đồ thị hàm số $y = |f(x) - 2m|$ có 5 điểm cực trị khi và chỉ khi

A. $m \in (4;11)$. **B.** $m \in \left(2;\frac{11}{2}\right)$. **C.** $m = 3$. **D.** $m \in \left[2;\frac{11}{2}\right]$.

Lời giải

Chọn B

Từ bảng biến thiên ta có đồ thị hàm số $y = f(x)$ có hai điểm cực trị.

Để đồ thị hàm số $y = |f(x) - 2m|$ có 5 điểm cực trị thì đồ thị $y = f(x)$ cắt đường thẳng $y = 2m$ tại $5 - 2 = 3$ điểm phân biệt $\Leftrightarrow 4 < 2m < 11 \Leftrightarrow 2 < m < \frac{11}{2}$.

DẠNG TOÁN 7. Biết bảng biến thiên hàm số $y = f(x)$ xét cực trị của hàm số $y = f(|x|)$

Lý thuyết:

❖ Ta có $y = f(|x|) = \begin{cases} f(x) \ khi \ x \geq 0 \\ f(-x) \ khi \ x < 0 \end{cases}$.

Do đó, đồ thị (C') của hàm số $y = f(|x|)$ có thể được suy từ đồ thị (C) của hàm số $y = f(x)$ như sau:

+ Giữ nguyên phần đồ thị (C) ở bên phải trục tung (kể cả giao điểm của (C) với trục tung – nếu có), bỏ phần bên trái trục tung.

+ Lấy đối xứng phần bên phải trục tung qua trục tung.

+ Đồ thị (C') là hợp của hai phần trên.

❖ Từ bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ ta suy ra số điểm cực trị, dấu của các điểm cực trị của hàm số và sự tồn tại giao điểm với trục tung (nếu có).

❖ **Phương pháp chung giải quyết Bài toán:** Biết bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = f(|x|)$:

- Bước 1: Từ bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$, suy ra số điểm cực trị dương của hàm số $y = f(x)$. Giả sử có n điểm.

- Bước 2: Xét sự tồn tại giao điểm của đồ thị (C) của hàm số $y = f(x)$ với trục tung.

- Bước 3: Xác định số điểm cực trị của hàm số $y = f(|x|)$

✓ Trường hợp 1: Đồ thị (C) của hàm số $y = f(x)$ cắt trục tung. Khi đó số điểm cực trị của hàm số $y = f(|x|)$ bằng $2n+1$

✓ Trường hợp 2: Đồ thị (C) của hàm số $y = f(x)$ không cắt trục tung. Khi đó số điểm cực trị của hàm số $y = f(|x|)$ bằng $2n$.

Câu 28: Bài tập:

Câu 29: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, có bảng biến thiên như hình vẽ. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = f(|x|)$.

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-2	↗	2	↘	$-\infty$

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Từ bảng biến thiên ta thấy đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt trục Oy tại điểm cực đại và hàm số không có điểm cực trị dương nên hàm số $y = f(|x|)$ có đúng 1 điểm cực trị $x = 0$.

Câu 30: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, có bảng biến thiên như hình vẽ. Tìm số điểm cực tiểu của hàm số $y = f(|x|)$.

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	3	↘	-1	↗	$+\infty$

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Từ bảng biến thiên ta thấy đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt trục Oy và có 1 điểm cực tiểu dương, mà đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ nhận Oy làm trục đối xứng nên hàm số $y = f(|x|)$ có 2 điểm cực tiểu là $x = \pm 1$.

Câu 31: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	3	↘	-1	↗	$+\infty$

Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Hàm số $y = f(|x|)$ có 3 điểm cực trị.

B. Hàm số $y = f(|x|)$ có một điểm cực đại.

C. Hàm số $y=f\left(|x|\right)$ có hai điểm cực tiểu.

D. Hàm số $y=f\left(|x|\right)$ có ba điểm cực tiểu.

Lời giải

Chọn D

Từ bảng biến thiên ta thấy đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ cắt trục Oy và có 2 điểm cực trị dương, mà đồ thị hàm số $y=f\left(|x|\right)$ nhận Oy làm trục đối xứng nên hàm số $y=f\left(|x|\right)$ có $2.2+1=5$ điểm cực trị trong đó có 3 điểm cực tiểu là các điểm $x=0, x=\pm3$.

Câu 32: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Mệnh đề nào sau đây sai?

A. Hàm số $y=f\left(|x|\right)$ không có điểm cực đại.

B. Hàm số $y=f\left(|x|\right)$ có một điểm cực trị.

C. Hàm số $y=f\left(|x|\right)$ có một cực trị dương.

D. Hàm số $y=f\left(|x|\right)$ không có điểm cực trị.

Lời giải

Chọn D

Từ bảng biến thiên ta thấy đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ cắt trục Oy và không có cực trị, mà đồ thị hàm số $y=f\left(|x|\right)$ nhận Oy làm trục đối xứng nên từ BBT suy ra hàm số $y=f\left(|x|\right)$ có đúng 1 điểm cực trị là điểm cực tiểu $x=0$.

Câu 33: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, có bảng biến thiên như hình vẽ. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y=f\left(|x|\right)$.

x	$-\infty$		-2		1		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	$-\infty$

A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 5.

Lời giải

Chọn D

Từ bảng biến thiên ta thấy đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ cắt trục Oy và có 2 điểm cực trị dương, mà đồ thị hàm số $y=f\left(|x|\right)$ nhận Oy làm trục đối xứng nên hàm số $y=f\left(|x|\right)$ có $2.2+1=5$ điểm cực trị.

Câu 34: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ và liên tục trên các khoảng xác định của nó, có bảng biến thiên như hình vẽ. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = f(|x|)$.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	||	$+$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	1

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải

Chọn B

Từ bảng biến thiên ta thấy đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt trục Oy và không có cực trị,
mà đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ nhận Oy làm trục đối xứng nên từ BBT suy ra hàm số $y = f(|x|)$ có đúng 1 điểm cực trị là điểm cực tiểu $x = 0$.

Câu 35: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ và liên tục trên các khoảng xác định của nó, có bảng biến thiên như hình vẽ. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = f(|x|)$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	||	$-$	
$f(x)$	2	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	2

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Từ bảng biến thiên ta thấy đồ thị hàm số $y = f(x)$ không cắt trục Oy và không có cực trị,
nên từ BBT suy ra hàm số $y = f(|x|)$ không có điểm cực trị.

Câu 36: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ và liên tục trên các khoảng xác định của nó, có bảng biến thiên như hình vẽ. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = f(|x|)$.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Hàm số $y = f(|x|)$ có một điểm cực đại, một điểm cực tiểu.

B. Hàm số $y = f(|x|)$ có hai điểm cực đại.

C. Hàm số $y = f(|x|)$ có hai điểm cực tiểu.

D. Hàm số $y=f\left(|x|\right)$ có ba điểm cực trị.

Lời giải

Chọn C

Từ bảng biến thiên ta thấy đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ không cắt trục Oy và có 1 điểm cực trị dương, mà đồ thị hàm số $y=f\left(|x|\right)$ nhận Oy làm trục đối xứng nên từ BBT suy ra hàm số $y=f\left(|x|\right)$ có đúng 2 điểm cực trị là 2 điểm cực tiểu $x=\pm 1$.

Câu 37: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định trên $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ và liên tục trên các khoảng xác định của nó, có bảng biến thiên như hình vẽ. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y=f\left(|x|\right)$.

x	$-\infty$		-3		1		5		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

Mệnh đề nào sau đây sai?

A. Hàm số $y=f\left(|x|\right)$ hai điểm cực trị không âm.

B. Hàm số $y=f\left(|x|\right)$ có hai điểm cực đại.

C. Hàm số $y=f\left(|x|\right)$ có hai điểm cực tiểu.

D. Hàm số $y=f\left(|x|\right)$ có ba điểm cực trị.

Lời giải

Chọn B

Từ bảng biến thiên ta thấy đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ cắt trục Oy và hàm số $y=f\left(x\right)$ có một cực trị dương, mà đồ thị hàm số $y=f\left(|x|\right)$ nhận Oy làm trục đối xứng nên từ BBT suy ra hàm số $y=f\left(|x|\right)$ có 3 điểm cực trị, trong đó có 2 điểm cực tiểu $x=\pm 5$ và một điểm cực đại $x=0$.

Câu 38: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định trên $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$, liên tục trên các khoảng xác định của nó và có bảng biến thiên như hình vẽ:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	‖	$+$	0	$-$	
y	1	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	2	↘	1

Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Đồ thị hàm số $y=f\left(|x|\right)$ có 1 điểm cực trị.

B. Đồ thị hàm số $y=f\left(|x|\right)$ có 1 điểm cực đại.

C. Đồ thị hàm số $y=f\left(|x|\right)$ có 1 điểm cực tiểu.

D. Đồ thị hàm số $y=f\left(|x|\right)$ không có điểm cực tiểu .

Lời giải

Chọn C

Từ bảng biến thiên ta thấy đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt trục Oy và hàm số $y = f(x)$ có một cực trị dương là điểm cực đại, mà đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ nhận Oy làm trục đối xứng nên từ BBT suy ra hàm số $y = f(|x|)$ có 3 điểm cực trị, trong đó có 2 điểm cực đại $x = \pm 1$ và một điểm cực tiểu $x = 0$.

Câu 39: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ và liên tục trên từng khoảng xác định, có bảng biến thiên như hình dưới.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	2	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

Khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. Hàm số $y = f(|x|)$ có một điểm cực trị.

B. Hàm số $y = f(|x|)$ có hai điểm cực trị.

C. Hàm số $y = f(|x|)$ có ba điểm cực trị.

D. Hàm số $y = f(|x|)$ có một điểm cực tiểu.

Lời giải

Chọn B

Từ bảng biến thiên ta thấy đồ thị hàm số $y = f(x)$ không cắt trục Oy và hàm số $y = f(x)$ có một cực trị dương là điểm cực tiểu, mà đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ nhận Oy làm trục đối xứng nên từ BBT suy ra hàm số $y = f(|x|)$ có 2 điểm cực trị là 2 điểm cực tiểu $x = \pm 2$.

Câu 40: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-2		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	6	↘	2	↗	$+\infty$

Đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 3. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 1

Lời giải

Chọn A

Đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ gồm 2 phần:

+ Phần bên phải trục Oy của đồ thị $y = f(x)$ (Kể cả giao điểm với trục Oy)

+ Đối xứng phần đồ thị trên qua trục Oy

• Hàm số $y = f(|x|)$ có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$		-4		0		4		$+\infty$
$(f(\|x\|))'$		-	0	+	0	-	0	+	

$f\left(\lvert x\rvert\right)$	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$f\left(0\right)$	$\searrow$	2	$\nearrow$ $+\infty$

Từ BBT ta thấy đồ thị hàm số $y=f\left(\lvert x\rvert\right)$ có 3 điểm cực trị.

Câu 41: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	5	$\nearrow$	$+\infty$

Số điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=f\left(\lvert x\rvert\right)$ là

A. 5. **B.** 4. **C.** 7. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Từ bảng biến thiên ta thấy đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ cắt trục Oy và có 2 điểm cực trị dương, mà đồ thị hàm số $y=f\left(\lvert x\rvert\right)$ nhận Oy làm trục đối xứng nên đồ thị hàm số $y=f\left(\lvert x\rvert\right)$ có $2.2+1=5$ điểm cực trị.

DẠNG TOÁN 8. Biết bảng biến thiên hàm số $y=f\left(x\right)$ xét cực trị của hàm số $y=f\left(\lvert x+a\rvert\right), y=f\left(\lvert x+a\rvert+b\right)$ …

Câu 42: Lý thuyết:

Nhận xét: đồ thị của hàm số $y=g\left(x\right)=f\left(\lvert ax+b\rvert+m\right)$ nhận đường thẳng $x=-\dfrac{b}{a}$ là trục đối xứng, do đó số điểm cực trị của hàm số $y=g\left(x\right)=f\left(\lvert ax+b\rvert+m\right)$ bằng $2t+1$, với t là số điểm cực trị lớn hơn $-\dfrac{b}{a}$ của hàm $y=f\left(ax+b+m\right)$.

Câu 43: Bài tập:

Câu 44: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	5	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $y=f\left(\lvert 2x+1\rvert+3\right)$ là

A. 1. **B.** 5. **C.** 0. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

+/ Ta có : Số điểm cực trị của hàm $y = f\left(|2x+1|+3\right)$ bằng $2\alpha+1$, với α bằng số điểm cực trị lớn hơn $-\frac{1}{2}$ của hàm $y = f\left(2x+1+3\right) = f\left(2x+4\right)$.

+/ Hàm $y = f\left(2x+4\right)$ có 2 điểm cực trị là: $\left[\begin{array}{l} 2x+4=-1 \\ 2x+4=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{5}{2} \\ x=-\frac{1}{2} \end{array}\right.$

Vậy: Số điểm cực trị của hàm $y = f\left(|2x+1|+3\right)$ bằng $2.0+1=1 \Rightarrow$ Chọn A.

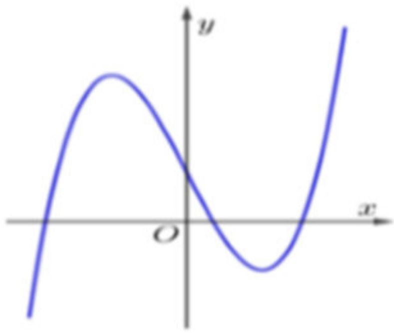
DẠNG TOÁN 9. Biết đồ thị hàm số $y = f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y = |f(x)|$

DẠNG TOÁN 10. Biết đồ thị hàm số $y = f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y = |f(ax+b)|$

DẠNG TOÁN 11. Biết đồ thị hàm số $y = f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y = f(|x|)$

DẠNG TOÁN 12. Biết đồ thị hàm số $y = f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y = f(|x+a|), y = f(|x+a|+b)$ …

Câu 45: Hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$. Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$.



Hỏi hàm số $y = f(|x|)+2018$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 5. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Phương pháp:

Tính đạo hàm của hàm hợp, giải phương trình đạo hàm để tìm số điểm cực trị

Cách giải:

Dựa vào hình vẽ, ta thấy $f'(x)=0$ có 3 nghiệm phân biệt $\left\{\begin{array}{l} x=x_1<0 \\ x=\{x_2;x_3\}>0 \end{array}\right.$.

Ta có: $g(x) = f(|x|)+2018 = \left[\begin{array}{l} f(x)+2018 \ khi \ x \geq 0 \\ f(-x)+2018 \ khi \ x<0 \end{array}\right.$.

$\Rightarrow g'(x) = \left[\begin{array}{l} f'(x) khi \, x \geq 0 \\ -f'(-x) khi \, x<0 \end{array}\right.$

$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x)=0 \ khi \ x \geq 0 \\ -f'(-x)=0 \ khi \, x<0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=x_2 \\ x=x_3 \\ x=-x_2 \\ x=-x_3 \end{array}\right.$

Do đó $g'(x)=0$ bị tiệt tiêu tại 4 điểm $x_2,-x_2,x_3,-x_3$ và không có đạo hàm tại $x=0$.

Vậy hàm số đã cho có 5 điểm cực trị.

DẠNG TOÁN 13. Biết bảng xét dấu hàm số $y=f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y=|f(x)|$

DẠNG TOÁN 14. Biết bảng xét dấu hàm số $y=f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y=|f(ax+b)|$

DẠNG TOÁN 15. Biết bảng xét dấu hàm số $y=f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y=f(|x|)$

Câu 46: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x+1)^2(x^2+m^2-3m-4)^3(x+3)^5$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $g(x)=f(|x|)$ có đúng 3 điểm cực trị?

A. 3. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 4.

Lời giải

Chọn D

Để $g(x)=f(|x|)$ có đúng 3 điểm cực trị $\Rightarrow y=f(x)$ có đúng 1 cực trị có hoành độ dương.

Mặt khác, $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=-3\\x^2=-m^2+3m+4\end{array}\right.$ (trong đó $x=-1$ là nghiệm kép).

$ycbt\Leftrightarrow -m^2+3m+4>0\Leftrightarrow -1<m<4$.

Do $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m\in\{0;1;2;3\}$.

DẠNG TOÁN 16. Biết bảng xét dấu hàm số $y=f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y=f(|x+a|), y=f(|x+a|+b)$ …

Câu 47: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ có bảng xét dấu của hàm $y=f'(x)$ như sau

x	$-\infty$		-2		-1		1		2		$+\infty$
y'		$+$	||	$-$	0	$+$	0	$-$	||	$+$	

Hàm số $y=f(|x-2|)+2020$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 5. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $y=f(|x|)=\begin{cases}f(x) & \text{khi } x\ge 0\\ f(-x) & \text{khi } x<0\end{cases}$

Khi đó ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		2		$+\infty$
y'		$-$	||	$+$	0	$-$	||	$+$	0	$-$	||	$+$	

Do đó hàm số $y=f(|x|)$ có 5 cực trị.

$\Rightarrow f(|x-2|)$ có năm cực trị (tịnh tiến đồ thị sang phải hai đơn vị thì số cực trị không thay đổi)

$\Rightarrow y=f(|x-2|)+2020$ có 5 cực trị (tịnh tiến đồ thị lên 2020 đơn vị không làm thay đổi số cực trị).

Câu 48: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $f'(x)$ có bảng xét dấu như sau:

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=f(x^2-|x|)$ là

A. 7. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 9.

Lời giải

Chọn B

$g(x)=f\left(|x|^2-|x|\right)$

Xét hàm số $h(x)=f\left(x^2-x\right) \Rightarrow g(x)=h(|x|)$

Ta có $h'(x)=\left(f\left(x^2-x\right)\right)'=(2x-1).f'\left(x^2-x\right)$

$$h'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-1=0 \\ f'\left(x^2-x\right)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{2} \\ x^2-x=-2 \\ x^2-x=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{2} \\ x=-1 \\ x=2 \end{array}\right.$$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $h(x)=f\left(x^2-x\right)$:

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$h(x)$		↗		↘		↗		↘	

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số $h(x)$ có 2 điểm cực trị dương nên hàm số $g(x)=h(|x|)$ có 5 điểm cực trị.

Câu 49: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu như sau:

x	$-\infty$		-2		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

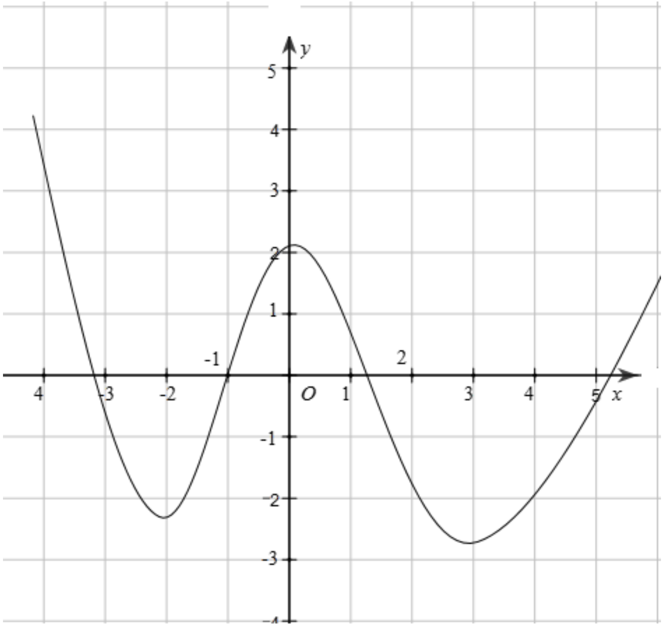
Tìm tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số $f(|x|+m)$ có 7 điểm cực trị.

A. $m<-2$. **B.** $m\geq -2$. **C.** $m<3$. **D.** $-2\leq m\leq 3$.

Lời giải

Chọn A

Từ bảng xét dấu của $f(x)$ ta có dạng đồ thị của $f(x)$:



Đồ thị hàm số $f(|x|+m)$ có được bằng cách tịnh tiến đồ thị hàm số $f(x)$ theo vectơ $\vec{v}=(-m;0)$, sau đó lấy đối xứng phần đồ thị của $f(x+m)$ với $x\geq 0$ qua trục Oy.

Vậy để đồ thị hàm số $f(|x|+m)$ có đúng 7 điểm cực trị thì $m<-2$.

Câu 50: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu như sau:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Số điểm cực trị của đồ thị hàm số $g(x)=f(|2x-3|-2)$ là

A. 5. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 7.

Lời giải

Chọn A

$$g'(x)=(|2x-3|-2)'.f'(|2x-3|-2)=\frac{2(2x-3)}{|2x-3|}.f'(|2x-3|-2)$$

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}|2x-3|-2=0\\|2x-3|-2=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=5/2\\x=1/2\\x=7/2\\x=-1/2\end{array}\right.$$

BBT:

x	$-\infty$		$-1/2$		$1/2$		$3/2$		$5/2$		$7/2$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		↘		↗		↘		↗		↘		↗	

Vậy đồ thị hàm số đã cho có 5 điểm cực trị .

Câu 51: Xét các số thực $c>b>a>0$. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu của đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		0		a		b		c		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

Đặt $g(x)=f\left(\left|x^3\right|\right)$. Số điểm cực trị của hàm số $y=g(x)$ là

A. 3 **B.** 7 **C.** 4 **D.** 5

Lời giải

Chọn D

Đặt $h(x)=f\left(x^3\right)$, $h'(x)=3x^2f'\left(x^3\right)$, $h'(x)=0\Leftrightarrow 3x^2f'\left(x^3\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2=0\\ f'\left(x^3\right)=0\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x^3=0\\ x^3=a\\ x^3=b\\ x^3=c\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=\sqrt[3]{a}\\ x=\sqrt[3]{b}\\ x=\sqrt[3]{c}\end{array}\right.$. Ta có $g(x)=f\left(\left|x^3\right|\right)=f\left(|x|^3\right)=h(|x|)$.

BBT của hàm số $g'(x)$

x	$-\infty$		$-\sqrt[3]{c}$		$-\sqrt[3]{b}$		$-\sqrt[3]{a}$		0		$\sqrt[3]{a}$		$\sqrt[3]{b}$		$\sqrt[3]{c}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

Số điểm cực trị của hàm số $y=g(x)$ là 5.

CÁC DẠNG TOÁN VỀ HÀM ẨN LIÊN QUAN ĐẾN BÀI TOÁN GTLN GTNN CỦA HÀM SỐ

PHẦN I: Xác định trực tiếp GTLN, NN hoặc thông qua phép biến đổi đồ thị

1. Cho đồ thị, BBT của hàm số $y=f\left(x\right)$, tìm GTLN, GTNN của hàm số $y=f\left(x\right), y=f\left(u\left(x\right)\right)$ trên khoảng, đoạn.
2. Cho đồ thị, BBT của hàm số $y=f\left(x\right)$, tìm GTLN, GTNN của hàm số $y=f\left(\left|x\right|\right), y=f\left(\left|u\left(x\right)\right|\right)$ trên khoảng, đoạn.
3. Cho đồ thị, BBT của hàm số $y=f\left(x\right)$, tìm GTLN, GTNN của hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|, y=\left|f\left(u\left(x\right)\right)\right|$ trên khoảng, đoạn.
4. Cho đồ thị, BBT của hàm số $y=f\left(x\right)$, tìm GTLN, GTNN của hàm số $y=f\left(\left|x\right|+b\right), y=f\left(\left|u\left(x\right)\right|+b\right), y=f\left(\left|x+a\right|+b\right), y=f\left(\left|u\left(x\right)+a\right|+b\right)$ trên khoảng, đoạn.
5. Cho đồ thị, BBT của hàm số $y=f\left(x\right)$, tìm GTLN, GTNN của hàm số $y=\left|f\left(x\right)+b\right|, y=\left|f\left(u\left(x\right)\right)+b\right|, y=\left|f\left(x+a\right)+b\right|, y=\left|f\left(u\left(x\right)+a\right)+b\right|$ trên khoảng, đoạn.
6. Cho đồ thị, BBT của hàm số $y=f\left(x\right)$, tìm GTLN, GTNN của hàm số $y=\left|f\left(\left|x\right|\right)+b\right|, y=\left|f\left(\left|u\left(x\right)\right|\right)+b\right|, y=\left|f\left(\left|x+a\right|\right)+b\right|, y=\left|f\left(\left|u\left(x\right)+a\right|\right)+b\right|$ trên khoảng, đoạn.

PHẦN II: Xác định GTLN, NN hoặc so sánh các giá trị của hàm số thông qua tích phân hoặc so sánh diện tích hình phẳng.

7. Cho đồ thị, BBT của hàm số $y=f'\left(x\right)$, tìm GTLN, GTNN của hàm số $y=f\left(x\right)$ trên khoảng, đoạn.
8. Cho đồ thị, BBT của hàm số $y=f'\left(x\right)$, tìm GTLN, GTNN của hàm số $y=f\left(\left|x\right|\right)$ trên khoảng, đoạn.
9. Cho đồ thị, BBT của hàm số $y=f'\left(x\right)$, tìm GTLN, GTNN của hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|$ trên khoảng, đoạn.
10. Cho đồ thị, BBT của hàm số $y=f'\left(x\right)$, tìm GTLN, GTNN của hàm số $y=f\left(\left|x+a\right|+b\right)$ trên khoảng, đoạn.
11. Cho đồ thị, BBT của hàm số $y=f'\left(x\right)$, tìm GTLN, GTNN của hàm số $y=\left|f\left(x\right)+b\right|$ trên khoảng, đoạn.
12. Các dạng khác.

PHẦN I: Xác định trực tiếp GTLN, NN hoặc thông qua phép biến đổi đồ thị

Dạng 1: Cho đồ thị, bảng biến thiên của hàm số $y=f\left(x\right)$, tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f\left(x\right),y=f\left(u\left(x\right)\right)$ trên khoảng, đoạn.

Câu 1. Biết hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có M và m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $\left[0;2\right]$. Hàm số $y=f\left(\dfrac{4x}{x^2+1}\right)$ có tổng giá trị lớn nhất và nhỏ nhất là

A. $M+m$. **B.** $2M+m$. **C.** $M+2m$. **D.** $2M+2m$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $g\left(x\right)=\dfrac{4x}{x^2+1}$, $x\in\left[0;2\right]$. Ta có: $g'\left(x\right)=\dfrac{-4x^2+4}{\left(x^2+1\right)^2}$.

$g'\left(x\right)=0\Leftrightarrow x=1\in\left[0;2\right]$.

Bảng biến thiên:

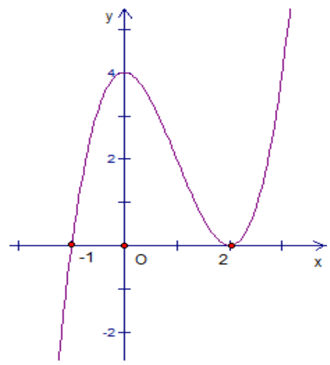
x	0		1		2
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	$\frac{8}{5}$

Dựa vào bảng biến thiên, ta có: $0\le g\left(x\right)\le 2$.

Do đó: Hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có M và m lần lượt là GTLN, GTNN của hàm số trên đoạn $\left[0;2\right]$ khi và chỉ khi hàm số $y=f\left[g\left(x\right)\right]$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có M và m lần lượt là GTLN, GTNN của hàm số trên đoạn $\left[0;2\right]$.

Vậy tổng giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y=f\left(\dfrac{4x}{x^2+1}\right)$ là $M+m$.

Câu 2. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ. Khi đó hàm số $y=f\left(2-x^2\right)$ đạt GTLN trên $\left[0;\sqrt{2}\right]$ bằng



A. $f\left(0\right)$. **B.** $f\left(1\right)$.

C. $f\left(\sqrt{2}\right)$. **D.** $f\left(2\right)$.

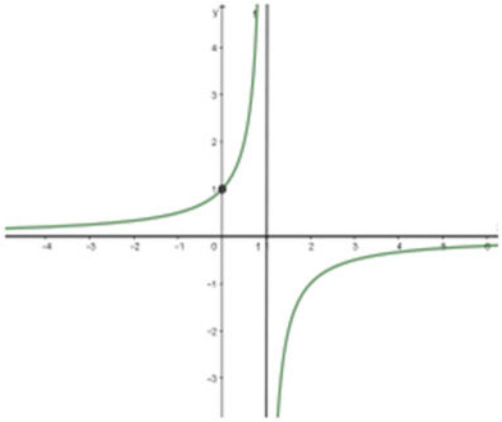
Lời giải

Chọn A

Đặt $t=2-x^2$, từ $x\in\left[0;\sqrt{2}\right]$, ta có $t\in\left[0;2\right]$.

Trên $\left[0;2\right]$ hàm số $y=f\left(t\right)$ nghịch biến. Do đó $\max\limits_{\left[0;2\right]} f\left(t\right)=f\left(0\right)$.

Câu 3. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Biết rằng $f\left(x\right)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ và $g\left(x\right)=f\left(f\left(x\right)\right)$. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $g\left(x\right)$ trên đoạn $\left[-3;-1\right]$.



A. -2. **B.** 2. **C.** 1. **D.** $-\frac{4}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Từ hình vẽ ta có: TCN là $y=\frac{a}{c}=0 \Leftrightarrow a=0$.

TCĐ là $x=-\frac{d}{c}=1 \Leftrightarrow c=-d$.

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 1 nên $\frac{b}{d}=1 \Leftrightarrow b=d\,(d\neq 0)$.

Khi đó $f(x)=\frac{d}{-dx+d}=\frac{1}{-x+1} \Rightarrow g(x)=f(f(x))=\frac{1}{-\frac{1}{-x+1}+1}=\frac{-x+1}{-x}$.

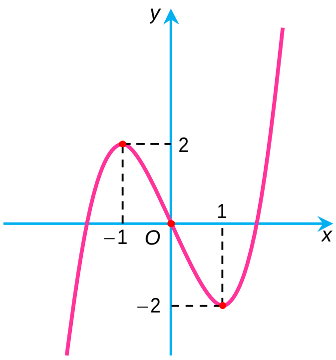
TXĐ hàm $g(x)$ là $D_g=\mathbb{R}\setminus\{0\} \Rightarrow$ hàm số $g(x)$ xác định trên $[-3;-1]$.

$g'(x)=\frac{1}{x^2}$, với $\forall x\in[-3;-1]$.

$g(-3)=\frac{4}{3}$, $g(-1)=2$.

Vậy $\max\limits_{[-3;-1]} g(x)=2$.

Câu 4. Cho x,y thoả mãn $5x^2+6xy+5y^2=16$ và hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $P=f\left(\frac{x^2+y^2-2}{x^2-y^2-2xy+4}\right)$. Tính M^2+m^2.



A. $M^2+m^2=4$. **B.** $M^2+m^2=1$. **C.** $M^2+m^2=25$. **D.** $M^2+m^2=2$.

Lời giải

Chọn A

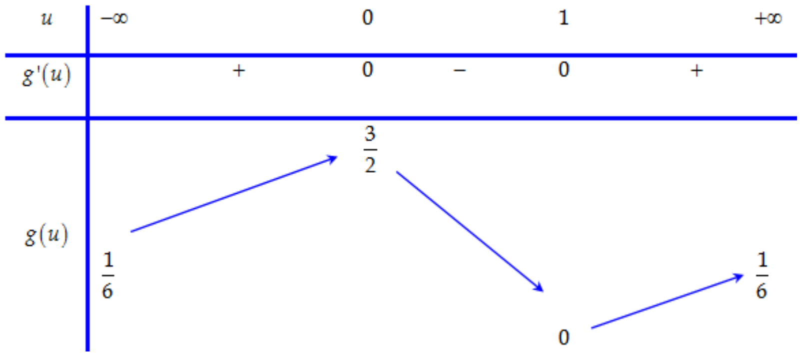
Ta có: $t=\frac{x^2+y^2-2}{x^2-y^2-2xy+4}=\frac{8x^2+8y^2-16}{8x^2-8y^2-16xy+2.16}=\frac{3x^2-6xy+3y^2}{18x^2-4xy+2y^2}$.

TH1: Xét $y=0 \Rightarrow t=\dfrac{1}{6} \Rightarrow f(t)=m\in(0;-2)$.

TH2: Xét $y\neq 0 \Rightarrow t=\dfrac{3\left(\dfrac{x}{y}\right)^2-6.\dfrac{x}{y}+3}{18\left(\dfrac{x}{y}\right)^2-4.\dfrac{x}{y}+2}$. Đặt $u=\dfrac{x}{y}$, ta có: $t=\dfrac{3u^2-6u+3}{18u^2-4u+2}$.

Xét $g(u)=\dfrac{3u^2-6u+3}{18u^2-4u+2}; g'(u)=\dfrac{96u^2-96u}{\left(18u^2-4u+2\right)^2}; g'(u)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=0 \\ u=1 \end{array}\right.$.

Ta lại có: $\lim\limits_{u\to+\infty} g(u)=\lim\limits_{u\to-\infty} g(u)=\dfrac{1}{6}$. Từ đó lập bảng biến thiên ta có

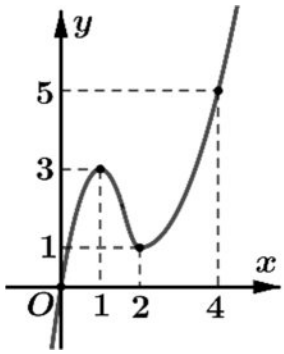


Từ bảng biến ta có $0\le g(u)\le \dfrac{3}{2} \Rightarrow 0\le t\le \dfrac{3}{2}$.

Quan sát đồ thị ta ta thấy rằng: $\max\limits_{\left[0;\frac{3}{2}\right]} P=0$; $\min\limits_{\left[0;\frac{3}{2}\right]} P=-2$.

Vậy $M^2+m^2=4$.

Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi M, m lần lượt là GTLN – GTNN của hàm số $g(x)=f\left[2\left(\sin^4 x+\cos^4 x\right)\right]$.



Tổng $M+m$ bằng

A. 3 . **B.** 5. **C.** 4. **D.** 6.

Lời giải

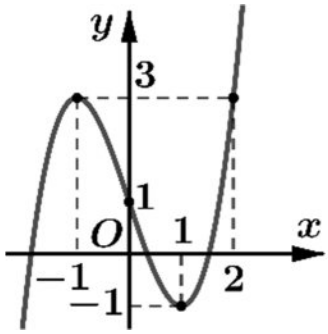
Chọn C

Ta có $\sin^4 x+\cos^4 x=1-\dfrac{1}{2}\sin^2 2x, \forall x\in\mathbb{R}$.

Vì $0\le \sin^2 2x\le 1, \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\le 1-\dfrac{1}{2}\sin^2 2x\le 1, \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow 1\le 2\left(\sin^4 x+\cos^4 x\right)\le 2$.

Dựa vào đồ thị suy ra $\begin{cases} M=\max g(x)=f(1)=3 \\ m=\min g(x)=f(2)=1 \end{cases} \Rightarrow M+m=4$.

Câu 6. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ .



Xét hàm số $g\left(x\right)=f\left(2x^3+x-1\right)+m.$ Tìm m để $\max\limits_{[0;1]} g\left(x\right)=-10.$

A. $m=3$. **B.** $m=-12$. **C.** $m=-13$. **D.** $m=6$.

Lời giải

Chọn C

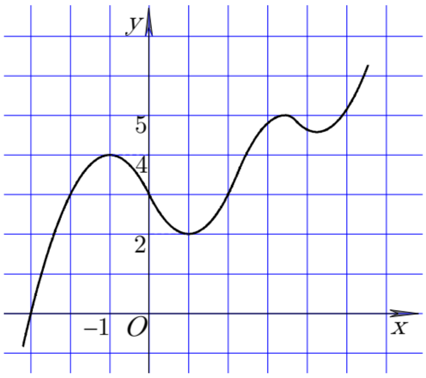
Đặt $t\left(x\right)=2x^3+x-1$ với $x\in\left[0;1\right]$. Ta có $t'\left(x\right)=6x^2+1>0,\ \forall x\in\left[0;1\right]$.

Suy ra hàm số $t\left(x\right)$ đồng biến nên $x\in\left[0;1\right]\Rightarrow t\in\left[-1;2\right]$.

Từ đồ thị hàm số ta có $\max\limits_{[-1;2]} f\left(t\right)=3\Rightarrow \max\limits_{[-1;2]}\left[f\left(t\right)+m\right]=3+m.$

Theo yêu cầu bài toán ta cần có: $3+m=-10\Leftrightarrow m=-13.$

Câu 7. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Giá trị lớn nhất của hàm số $y=f\left(2\sin x\right)$ trên $\left(0;\pi\right)$ là

A. 5. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t=2\sin x$. Với $x\in\left(0;\pi\right)$ thì $t\in\left(0;2\right]$.

Dựa vào đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ ta có $\max\limits_{(0;\pi)} f\left(2\sin x\right)=\max\limits_{(0;2]} f\left(t\right)=f\left(2\right)=3$.

Câu 8. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên dạng

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	-2	-	0	+	2	+	
$f(x)$	$-\infty$ ↗		2	↘	-4	↗	0	↗	$+\infty$

Hàm số $y=f(2\sin x)$ đạt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất lần lượt là M và m. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $m=-2M$. **B.** $M=2m$. **C.** $M+m=0$. **D.** $M+m=2$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $-1\le \sin x\le 1 \Leftrightarrow -2\le 2\sin x\le 2$.

Với $t=2\sin x \Rightarrow t\in[-2;2]$.

Khi đó:

$M=\max f\left(2\sin x\right)=\max\limits_{[-2;2]} f\left(t\right)=2.$

$m=\min f\left(2\sin x\right)=\min\limits_{[-2;2]} f\left(t\right)=-4.$

Câu 9. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên tập $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		1		$\frac{21}{4}$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	0	-	
$f(x)$	$-\infty$	↗	4	↘	2	↗	5	↘	$+\infty$

Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f\left(x^2-2x\right)$ trên đoạn $\left[-\frac{3}{2};\frac{7}{2}\right]$. Tìm khẳng định **sai** trong các khẳng định sau.

A. $M.m>10$. **B.** $\frac{M}{m}>2$. **C.** $M-m>3$. **D.** $M+m>7$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t=x^2-2x$. Ta có $x\in\left[-\frac{3}{2};\frac{7}{2}\right]\Leftrightarrow -\frac{5}{2}\le x-1\le\frac{5}{2}\Leftrightarrow 0\le\left(x-1\right)^2\le\frac{25}{4}$

$\Leftrightarrow -1\le\left(x-1\right)^2-1\le\frac{21}{4}$ nên $t\in\left[-1;\frac{21}{4}\right]$.

Xét hàm số $y=f\left(t\right), t\in\left[-1;\frac{21}{4}\right]$

Từ bảng biến thiên suy ra: $m=\min\limits_{t\in\left[-1;\frac{21}{4}\right]} f\left(t\right)=f\left(1\right)=2, M=\max\limits_{t\in\left[-1;\frac{21}{4}\right]} f\left(t\right)=f\left(\frac{21}{4}\right)=5\Rightarrow\frac{M}{m}>2$.

Câu 10. Cho hàm số $y=f\left(x\right)=ax^4+bx^2+c$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	+	0	$-$	0	+	
y	$+\infty$	↘	2	↗	3	↘	2	↗	$+\infty$

Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f\left(x+3\right)$ trên đoạn $[0;2]$ là

A. 64. **B.** 65. **C.** 66. **D.** 67.

Lời giải

Chọn C

Hàm số có dạng $f\left(x\right)=ax^4+bx^2+c$. Từ bảng biến thiên ta có:

$$\begin{cases} f(0)=3 \\ f(1)=2 \\ f'(1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=3 \\ a+b+c=2 \\ 4a+2b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=3 \\ b=-2 \\ a=1 \end{cases} \Rightarrow f(x)=x^4-2x^2+3.$$

$x\in[0;2] \Rightarrow x+3\in[3;5]$.

Trên đoạn $[3;5]$ hàm số tăng, do đó $\min\limits_{[0;2]} f(x+3)=f(3)=66$.

Câu 11. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[-2;4]$ và có bảng biến thiên như sau

x	-2		-1		1		4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1

Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x)=f(\cos 2x-4\sin^2 x+3)$. Giá trị của $M-m$ bằng

A. 4. **B.** -4. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\cos 2x-4\sin^2 x+3=3\cos 2x+1$.

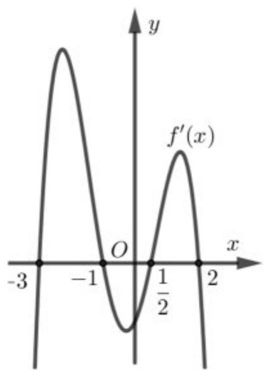
$\Rightarrow g(x)=f(3\cos 2x+1)$, đặt $t=3\cos 2x+1$, khi đó với mọi $x\in\mathbb{R}\Rightarrow t\in[-2;4]$.

Từ bảng biến thiên suy ra $\max\limits_{[-2;4]} f(t)=3; \min\limits_{[-2;4]} f(t)=-1$.

Suy ra $M=\max\limits_{\mathbb{R}} g(x)=\max\limits_{[-2;4]} f(t)=3; m=\min\limits_{\mathbb{R}} g(x)=\min\limits_{[-2;4]} f(t)=-1$.

Vậy $M-m=4$.

Câu 12. Cho hàm số $f(x)=ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex+n$ $(a,b,c,d,e,n\in\mathbb{R})$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên (đồ thị cắt Ox tại 4 điểm có hoành độ $-3;-1;\frac{1}{2}$ và 2). Đặt $M=\max\limits_{[-3;2]} f(|x|); m=\min\limits_{[-3;2]} f(|x|)$ và $T=M+m$. Khẳng định nào sau đây đúng?



A. $T=f(-3)+f(2)$. **B.** $T=f(-3)+f(0)$.

C. $T=f\left(\frac{1}{2}\right)+f(2)$. **D.** $T=f\left(\frac{1}{2}\right)+f(0)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f'(x)=5ax^4+4bx^3+3cx^2+2dx+e=5a(x+3)(x+1)\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-2)$ (Vì phương trình $f'(x)=0$ có 4 nghiệm $-3;-1;\frac{1}{2}$ và 2).

Từ đồ thị ta có bảng biến thiên của $f(x)$

x	$-\infty$		-3		-1		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(-3)$	$\nearrow$	$f(-1)$	$\searrow$	$f\left(\frac{1}{2}\right)$	$\nearrow$	$f(2)$	$\searrow$	$-\infty$

Từ bảng biến thiên $\Rightarrow a<0$.

Suy ra bảng biến thiên của $f\left(|x|\right)$:

x	-3		-2		$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	$\vert$	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$f(-3)$	$\nearrow$	$f(-2)$	$\searrow$	$f\left(-\frac{1}{2}\right)$	$\nearrow$	$f(0)$	$\searrow$	$f\left(\frac{1}{2}\right)$	$\nearrow$	$f(2)$	$\searrow$	$-\infty$

Vì hàm số $f\left(|x|\right)$ là hàm số chẵn $\Rightarrow \begin{cases} f(-2)=f(2);\, f(-3)=f(3) \\ f\left(-\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right) \end{cases}$

+) $f(3)-f\left(\frac{1}{2}\right)=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{3} f'(x)\,dx=5a\int\limits_{\frac{1}{2}}^{3}(x+3)(x+1)\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-2)\,dx=\frac{11125a}{128}<0$

$\Rightarrow f(-3)=f(3)<f\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(-\frac{1}{2}\right)$ (1)

+) $f(2)-f(0)=\int\limits_{0}^{2} f'(x)\,dx=5a\int\limits_{0}^{2}(x+3)(x+1)\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-2)\,dx=-23a>0$

$\Rightarrow f(-2)=f(2)>f(0)$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow M=\max\limits_{[-3;2]} f\left(|x|\right)=f(-2)=f(2); m=\min\limits_{[-3;2]} f\left(|x|\right)=f(-3)$.

Vậy $T=M+m=f(-3)+f(2)$.

Câu 13. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$

Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số $y=g(x)=f(3-x)$ trên $[0;3]$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $M=f(0)$. **B.** $M=f(3)$. **C.** $M=f(1)$. **D.** $M=f(2)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $g'(x) = -f'(3-x)$.

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow -f'(3-x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3-x=-1 \\ 3-x=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=1 \end{array}\right.$.

$g'(x) > 0 \Leftrightarrow f'(3-x) < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3-x<-1 \\ 3-x>2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>4 \\ x<1 \end{array}\right.$.

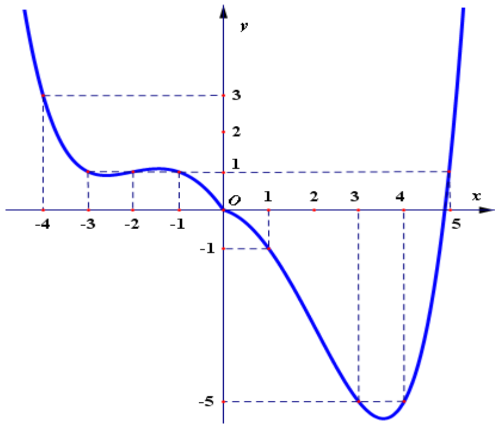
$g'(x) < 0 \Leftrightarrow f'(3-x) > 0 \Leftrightarrow -1 < 3-x < 2 \Leftrightarrow 1 < x < 4$.

Từ đó ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	1	2	3	4		$+\infty$
g'		$+$	0		$-$	0	$+$	
g	$-\infty$	$\nearrow$	4		$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy $M = f(1)$.

Câu 14. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Gọi GTLN, GTNN tương ứng là M và m của hàm số $y = f\left(3 - 4\sqrt{6x - 9x^2}\right)$. Khi đó $T = M + m$ bằng

A. -4. **B.** 2. **C.** -6. **D.** -2.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $6x - 9x^2 \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq \dfrac{2}{3}$.

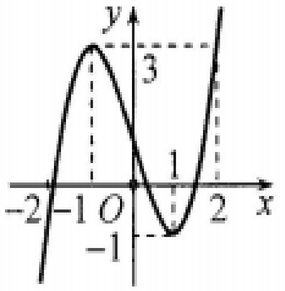
Với $x \in \left[0; \dfrac{2}{3}\right]$, ta có $0 \leq \sqrt{6x - 9x^2} = \sqrt{1 - (1-3x)^2} \leq 1 \Leftrightarrow 0 \geq -4\sqrt{6x - 9x^2} \geq -4$.

$\Leftrightarrow 3 \geq 3 - 4\sqrt{6x - 9x^2} \geq -1$.

Dựa vào đồ thị ta có: $-5 \leq f\left(3 - 4\sqrt{6x - 9x^2}\right) \leq 1$.

Do đó $T = M + m = -4$.

Câu 15. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây



Khi đó GTLN của hàm số $y = f\left(\sqrt{4-x^2}\right)$ trên nửa khoảng $\left[-\sqrt{2};\sqrt{3}\right)$ là

A. 3. **B.** -1. **C.** 0. **D.** Không tồn tại

Lời giải

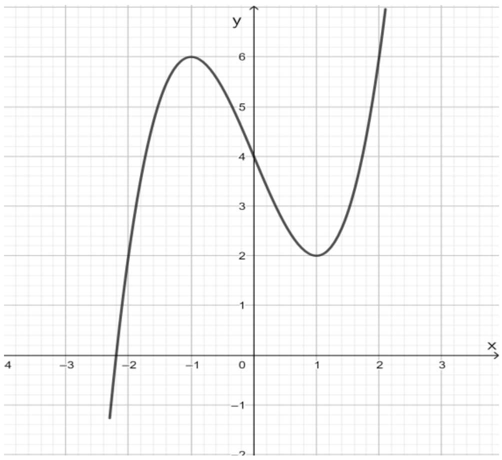
Chọn A

Đặt $t = \sqrt{4-x^2} \Rightarrow t' = -\dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}$.

Ta có: $t' = 0 \Leftrightarrow x = 0 \in \left[-\sqrt{2};\sqrt{3}\right)$ do $x \in \left[-\sqrt{2};\sqrt{3}\right)$ nên $t \in (1;2]$.

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x)$, $x \in (1;2]$ ta suy ra GTLN bằng 3.

Câu 16. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên.



Gọi M, m lần lượt là giá truh lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x) = f\left(\dfrac{2x}{x^2+1}\right)$

Trên $(-\infty;+\infty)$. Tổng của $M+m$ bằng

A. 4. **B.** 6. **C.** 8. **D.** 12.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t = \dfrac{2x}{x^2+1}$. Ta có: $t'(x) = \dfrac{1-x^2}{\left(x^2+1\right)^2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

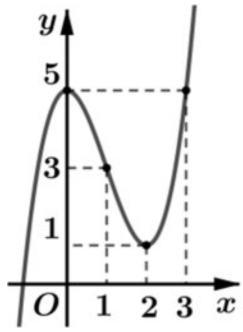
x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
t'		$-$	0	$+$	0	$-$	
t	0	↘	-1	↗	1	↘	0

Từ bảng biến thiên ta có $t \in [-1;1]$. Quan sát đồ thị hàm số trên $[-1;1]$, ta có

$$\begin{cases} M = \max\limits_{x \in R} g\left(x\right) = \max\limits_{\left[-1;1\right]} f\left(t\right) = 6 \\ m = \min\limits_{x \in R} g\left(x\right) = \min\limits_{\left[-1;1\right]} f\left(t\right) = 2 \end{cases} \Rightarrow M + m = 8.$$

Dạng 2: Cho đồ thị, BBT của hàm số $y=f(x)$, tìm GTLN, GTNN của hàm số $y=f(|x|), y=f(|u(x)|)$ trên khoảng, đoạn.

Câu 1. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục, có đạo hàm trên R và có đồ thị như hình vẽ như sau:



Hàm số $y=f(|x|)$ có giá trị nhỏ nhất trên $\mathbb{R}$ bằng

A. 0 . **B.** 2 . **C.** 1. **D.** Không tồn tại.

Lời giải

Chọn C

Do đồ thị hàm số $y=f(|x|)$ được suy ra từ đồ thị hàm số $y=f(x)$ bằng cách giữ nguyên phần bên phải trục Oy, bỏ phần bên trái Oy rồi lấy đối xứng phần bên phải qua trục Oy nên giá trị nhỏ nhất bằng 1.

Câu 2. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-2		0		4		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$f(-2)$	$\nearrow$	$f(0)$	$\searrow$	$f(4)$	$\nearrow$	$+\infty$

Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(|x|)$ trên đoạn $[-2;4]$ bằng

A. $f(2)$. **B.** $f(0)$.

C. $f(4)$. **D.** Không xác định được.

Lời giải

Chọn C

Từ yêu cầu bài toán ta có bảng biến thiên cho hàm số $y=f(|x|)$ như sau

x	$-\infty$		-4		0		4		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$f(4)$	$\nearrow$	$f(0)$	$\searrow$	$f(4)$	$\nearrow$	$+\infty$

Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy $\min\limits_{[-2;4]} f(|x|)=f(4)$.

Câu 3. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau.

x	$-\infty$		-2		1		$+$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+$	↘	-3	↗	4	↘	$-\infty$

Hàm số $y = f\left(\left|x-1\right|\right)$ có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $\left[0;2\right]$ bằng

A. $f\left(-2\right)$. **B.** $f\left(2\right)$. **C.** $f\left(1\right)$. **D.** $f\left(0\right)$.

Lời giải

Chọn C

$y = f\left(\left|x-1\right|\right)\left(1\right)$. Đặt $t = \left|x-1\right|$, $t \geq 0$ thì $\left(1\right)$ trở thành: $y = f\left(t\right)$ $\left(t \geq 0\right)$.

Có $t = \sqrt{\left(x-1\right)^2} \Rightarrow t'_x = \dfrac{x-1}{\sqrt{\left(x-1\right)^2}}$.

Có $y'_x = t'_x f'\left(t\right)$.

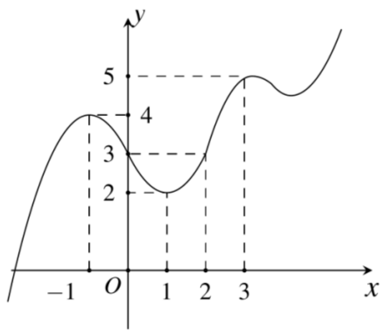
$$y'_x = 0 \Leftrightarrow t'_x f'\left(t\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t'_x = 0 \\ f'\left(t\right) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ t = -2\left(L\right) \\ t = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x-1 = 1 \\ x-1 = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2. \\ x = 0 \end{array}\right.$$

Lấy $x = 3$ có $t'\left(3\right)f'\left(2\right) < 0$, đạo hàm đổi dấu qua các nghiệm đơn nên ta có bảng biến thiên:

x	0		1		2
y'		$-$	‖	$+$	
y		↘	CT	↗	

Hàm số $y = f\left(\left|x-1\right|\right)$ có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $\left[0;2\right]$ bằng $f\left(1\right)$.

Câu 4. Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Gọi M, m theo thứ tự làGTLN, GTNN của hàm số $y = f\left(\left|x-2\right|\right)$ trên đoạn $\left[-1,5\right]$. Tổng $M+m$ bằng

A. 9. **B.** 8. **C.** 7. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C

Ta có $-1 \leq x \leq 5 \Rightarrow -3 \leq x-2 \leq 3 \Rightarrow 0 \leq \left|x-2\right| \leq 3$

Do đó $\forall x \in \left[-1;5\right]$, $0 \leq \left|x-2\right| \leq 3$.

Đặt $t = \left|x-2\right|$ với $t \in \left[0;3\right]$.

Xét hàm số $y = f(t)$ liên tục $\forall t \in [0;3]$.

Dựa vào đồ thị ta thấy $\max\limits_{[0;3]} f(t) = 5$, $\min\limits_{[0;3]} f(t) = 2$.

Suy ra $m = 2$, $M = 5$ nên $M + m = 7$.

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$		1		4		6		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	-2	$\nearrow$	9	$\searrow$	$-\infty$

Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f\left(\left|-x^2 + 2x + 5\right|\right)$ trên $[-1;3]$ lần lượt là M, m. Tính $M + m$.

A. 13. **B.** 7. **C.** $f(2) - 2$. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $g(x) = -x^2 + 2x + 5$ trên $[-1;3]$.

Hàm số $g(x) = -x^2 + 2x + 5$ xác định và liên tục trên $[-1;3]$ có

$g'(x) = -2x + 2, g'(x) = 0 \Leftrightarrow -2x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \in [-1;3]$.

$g(1) = 6, g(-1) = 2, g(3) = 2$.

$\forall x \in [-1;3] \Rightarrow g(x) \in [2;6] \Rightarrow |g(x)| \in [2;6]$.

Đặt $t = |g(x)| = \left|-x^2 + 2x + 5\right|$. Ta có: $y = f\left(\left|-x^2 + 2x + 5\right|\right) = f(t)$.

$\forall x \in [-1;3] \Rightarrow t \in [2;6]$.

Dựa vào bảng biến thiên ta có hàm số $y = f(t)$ trên $[2;6]$

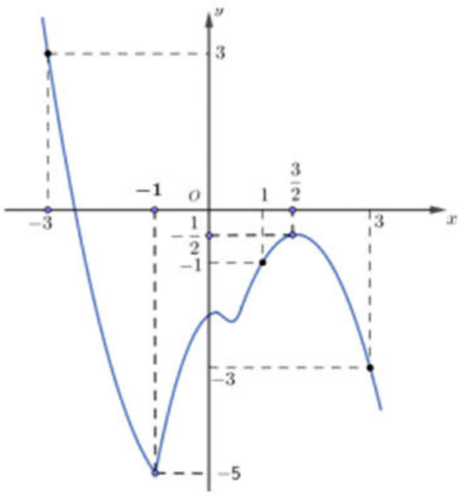
Ta có: $-2 = f(4) < f(2) < f(1) = 4$ nên

$M = \max\limits_{[2;6]} f(t) = \max\left\{f(2); f(4); f(6)\right\} = f(6) = 9$,

$m = \min\limits_{[2;6]} f(t) = \min\left\{f(2); f(4); f(6)\right\} = f(4) = -2$.

Vậy $M + m = 7$.

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $(-\infty; +\infty)$ và có đồ thị như hình vẽ



Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số $y=f\left(\left|x^3-3x+1\right|\right)$ trên đoạn $[-2;0]$. Tính $M+m$.

A. $M+m=-2$. **B.** $M+m=-\frac{7}{2}$. **C.** $M+m=-\frac{11}{2}$. **D.** $M+m=0$.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $g(x)=x^3-3x+1$ trên $[-2;0]$.

Hàm số xác định và liên tục trên đoạn $[-2;0]$.

$g'(x)=3x^2-3$; $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1\in(-2;0) \\ x=1\notin(-2;0) \end{array}\right.$

$g(-2)=-1$; $g(-1)=3$; $g(0)=1$.

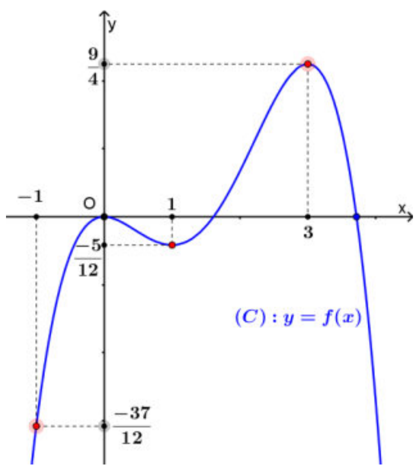
Vậy $\min\limits_{x\in[-2;0]} g(x)=-1$ và $\max\limits_{x\in[-2;0]} g(x)=3 \Rightarrow -1\le g(x)\le 3$, $\forall x\in[-2;0] \Rightarrow 0\le |g(x)|\le 3$, $\forall x\in[-2;0]$.

Xét hàm số $y=f(u)$ với $u=|g(x)|=\left|x^3-3x+1\right|$ trên $[0;3]$.

Dựa vào đồ thị hàm số ta có: $M=-\frac{1}{2}$ và $m=-3$.

Vậy $M+m=-\frac{7}{2}$.

Câu 7. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị (C) như hình vẽ.



Gọi M, m theo thứ tự là GTLN-GTNN của hàm số $y=f\left(\left|-x^3+3x^2-1\right|\right)$ trên đoạn $[-1;3]$. Tích $M.m$ bằng

A. 0. **B.** $\frac{-111}{16}$. **C.**

Lời giải

Chọn C

• Hàm số $y=g(x)=-x^3+3x^2-1$ liên tục trên đoạn $[-1;3]$;

+ $g'(x)=-3x^2+6x=-3x(x-2)$; $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$.

+ Vì $\begin{cases} g(-1)=3 \\ g(0)=-1 \\ g(2)=3 \\ g(3)=-1 \end{cases}$ nên $\begin{cases} \min\limits_{[-1;3]} g(x)=-1 \\ \max\limits_{[-1;3]} g(x)=3 \end{cases} \Rightarrow -1\le g(x)\le 3, \forall x\in[-1;3]$.

$\Rightarrow 0\le |g(x)|\le 3, \forall \in[-1;3]$.

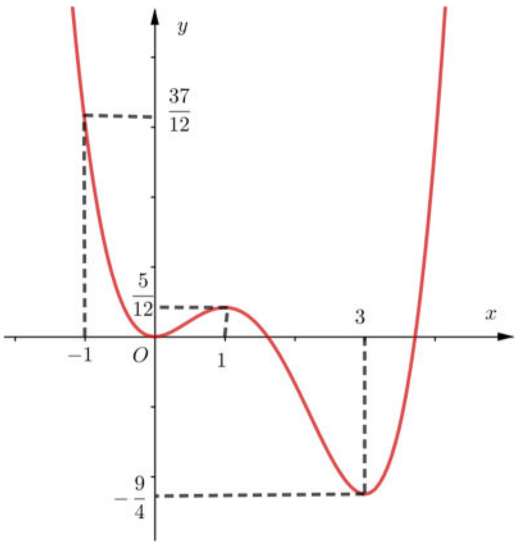
• Từ đồ thị $(C): y=f(x)$;

+ $m=\min\limits_{[-1;3]} f\left(\left|g\left(x\right)\right|\right)=\dfrac{-5}{12}$ khi $\left|g\left(x\right)\right|=1$ tại $x=0\vee x=1\vee x=3...$.

+ $M=\max\limits_{[-1;3]} f\left(\left|g\left(x\right)\right|\right)=\dfrac{9}{4}$ khi $\left|g\left(x\right)\right|=3$ tại $x=-1\vee x=2$.

• Vậy $m.M=\dfrac{-45}{48}$.

Câu 8. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Gọi m,M lần lượt là giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số $y=f\left(\left|x^3-3x^2+1\right|\right)$ trên $\left[-1;3\right]$. Tính $3m+M$.

A. $3m+M=\dfrac{7}{2}$.

B. $3m+M=\dfrac{-19}{3}$.

C. $3m+M=-1$.

D. $3m+M=\dfrac{-11}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $g\left(x\right)=x^3-3x^2+1$ trên $\left[-1;3\right]$.

$g'\left(x\right)=3x^2-6x$.

$g'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\in\left(-1;3\right)\\x=2\in\left(-1;3\right)\end{array}\right.$.

$g\left(-1\right)=-3$; $g\left(0\right)=1$; $g\left(2\right)=-3$; $g\left(3\right)=1$.

Suy ra $\max\limits_{[-1;3]} g\left(x\right)=1$; $\min\limits_{[-1;3]} g\left(x\right)=-3\Rightarrow -3\le g\left(x\right)\le 1,\forall x\in\left[-1;3\right]\Rightarrow 0\le\left|g\left(x\right)\right|\le 3,\forall x\in\left[-1;3\right]$.

Dựa vào đồ thị ta thấy :

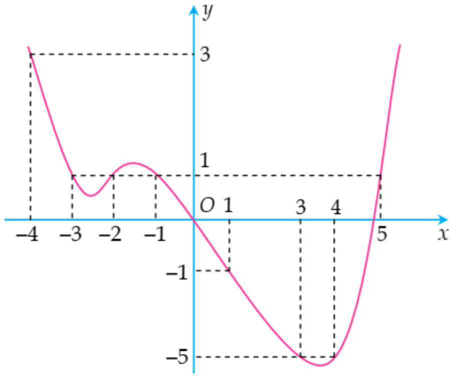
Hàm số $y=f\left(\left|x^3-3x^2+1\right|\right)=f\left(\left|g\left(x\right)\right|\right)$ đạt giá trị nhỏ nhất là $m=\dfrac{-9}{4}$ khi $\left|g\left(x\right)\right|=3\Leftrightarrow x=2$.

Hàm số $y=f\left(\left|x^3-3x^2+1\right|\right)=f\left(\left|g\left(x\right)\right|\right)$ đạt giá trị lớn nhất là $M=\dfrac{5}{12}$ khi $\left|g\left(x\right)\right|=1$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=3\end{array}\right.$.

Vậy $3m+M=\dfrac{-19}{3}$.

Câu 9. Cho hàm số $f\left(x\right)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ.



Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f\left(\left|3-2\sqrt{6x-9x^2}\right|\right)$.

Giá trị biểu thức $T = 3M - m$ bằng

A. $T = 2$. **B.** $T = 0$. **C.** $T = -8$. **D.** $T = 14$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $6x-9x^2 \ge 0 \Leftrightarrow 0 \le x \le \dfrac{2}{3}$.

Với $x \in \left[0; \dfrac{2}{3}\right]$ ta có: $0 \le \sqrt{6x-9x^2} = \sqrt{-9\left(x-\dfrac{1}{3}\right)^2+1} \le 1$.

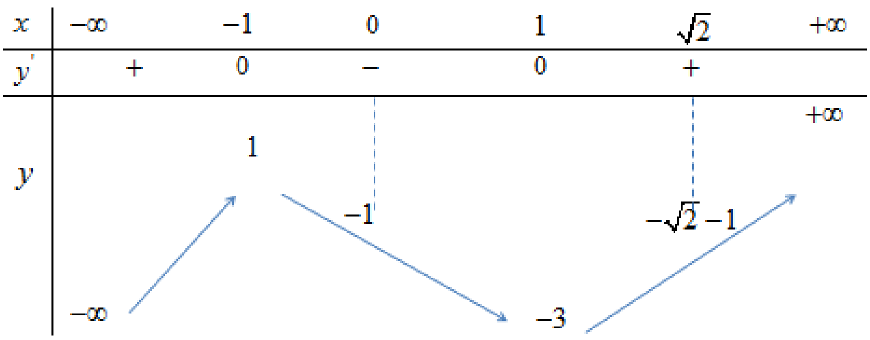
$\Rightarrow 0 \ge -2\sqrt{6x-9x^2} \ge -2 \Leftrightarrow 3 \ge 3-2\sqrt{6x-9x^2} \ge 1$.

Đặt $u = \left|3-2\sqrt{6x-9x^2}\right| \Rightarrow 1 \le u \le 3$.

Xét hàm số $y = f(u)$ với $u = \left|3-2\sqrt{6x-9x^2}\right|$ trên đoạn $[1; 3]$.

Dựa vào dồ thị hàm số ta có $M = -1; m = -5 \Rightarrow T = 3M - m = -3+5 = 2$.

Câu 10. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:



Xét hàm số $g(x) = x+\sqrt{1-x^2}$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f\left[\left|g(x)\right|\right]$. Có bao nhiêu số nguyên thuộc đoạn $[m; M]$?

A. 3. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

Hàm số $y = g(x) = x+\sqrt{1-x^2}$ xác định và liên tục trên đoạn $[-1; 1]$.

$g'(x) = 1-\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{\sqrt{1-x^2}-x}{\sqrt{1-x^2}}$;

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{1-x^2}-x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ 1-x^2 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

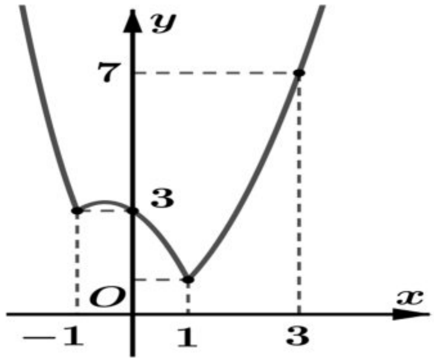
Ta có $g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}$; $g(-1)=-1$ và $g(1)=1$.

Suy ra $-1\le g(x)\le\sqrt{2}\Leftrightarrow 0\le|g(x)|\le\sqrt{2}$.

Từ bảng biến thiên của $y=f(x)$ ta được $M=-1$ và $m=-3$

Nên có 3 số nguyên thuộc khoảng $[m;M]$.

Câu 11. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên R và có đồ thị là hình bên và hàm số $y=g(t)=t^3-3t^2+5$. Gọi M, m theo thứ tự là GTLN – GTNN của $y=g(|f(x)-2|)$ trên đoạn $[-1;3]$. Tích $M.m$ bằng



A. 2. **B.** 3. **C.** 54. **D.** 12.

Lời giải

Chọn A

$y=g(|f(x)-2|)=|f(x)-2|^3-3(f(x)-2)^2+5$.

Trên $[-1;3]$, ta có $1\le f(x)\le 7\Leftrightarrow -1\le f(x)-2\le 5\longrightarrow 0\le|f(x)-2|\le 5.$

Đặt $t=|f(x)-2|$ với $t\in[0;5]$. Khi đó $y=t^3-3t^2+5\to y'=3t^2-6t=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\\t=2\end{array}\right.$.

Ta có $y(0)=5$; $y(2)=1$; $y(5)=55$. Suy ra $\begin{cases}M=55\\m=1\end{cases}\longrightarrow M.m=55.$

Câu 12. Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{\cos^2x+|\cos x|+1}{|\cos x|+1}$ là?

A. $\frac{3}{2}$. **B.** $\frac{5}{2}$. **C.** $\frac{7}{2}$. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Đặt $\cos x=t$, hàm số đã cho trở thành $y=f(t)=\dfrac{t^2+|t|+1}{|t|+1}$, với $|t|\le 1$.

Nếu $t\in[0;1]$ thì $f'(t)=\dfrac{t^2+2t}{(t+1)^2}>0$ với mọi $t\in[0;1]$.

Ta có: $\underset{t\in[0;1]}{\text{Min}}\,f(t)=f(0)=1$; $\underset{t\in[0;1]}{\text{Max}}\,f(t)=f(1)=\dfrac{3}{2}$

Nếu $t\in[-1;0]$ thì $f'(t)=\dfrac{-t^2+2t}{(-t+1)^2}<0$ với mọi $t\in[-1;0]$.

Ta có: $\underset{t\in[-1;0]}{\text{Min}}\,f(t)=f(0)=1$; $\underset{t\in[-1;0]}{\text{Max}}\,f(t)=f(-1)=\dfrac{3}{2}$.

Suy ra tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho bằng:

$$\underset{t\in[-1;1]}{\text{Min}}\, f(t)+\underset{t\in[-1;1]}{\text{Max}}\, f(t)=1+\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$$

Câu 13. Cho hàm số $f(x)=x^3-3x+a$. Gọi $M=\max\limits_{x\in[-3;2]} f(|x|)$, $m=\min\limits_{x\in[-3;2]} f(|x|)$ Có bao nhiêu giá trị nguyên của $a\in[-35;35]$ sao cho $M\le 3m$.

A. 23. **B.** 24. **C.** 25. **D.** 26.

Lời giải

Chọn B

Dễ thấy rằng $M=\max\limits_{x\in[-3;2]} f(|x|)=\max\limits_{x\in[0;3]} f(|x|)=\max\limits_{x\in[0;3]} f(x)$,

$m=\min\limits_{x\in[-3;2]} f(|x|)=\min\limits_{x\in[0;3]} f(|x|)=\min\limits_{x\in[0;3]} f(x)$.

Ta có $f'(x)=3x^2-3\Rightarrow f'(x)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1\notin[0;3] \\ x=1\in[0;3]. \end{array}\right.$

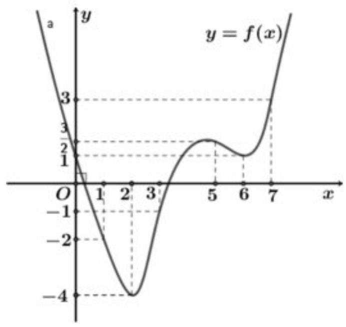
Mà $f(0)=a$, $f(1)=a-2$, $f(3)=a+18$.

Vậy $M=a+18$, $m=a-2$.

Yêu cầu bài toán tương đương với $a+18\le 3(a-2)\Leftrightarrow a\ge 12$. Kết hợp với điều kiện $a\in[-35;35]$ suy ra $a\in\{12;13;14;...;35\}$, do đó có 24 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Dạng 3: Cho đồ thị, BBT của hàm số $y=f(x)$, tìm GTLN, GTNN của hàm số $y=f(|x|), y=f(|u(x)|)$ trên khoảng, đoạn.

Câu 1. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



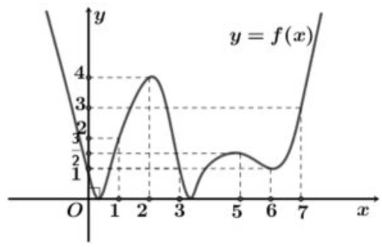
Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số $y=\left|f\left(\frac{3x^2+2x+3}{2x^2+2}\right)\right|$ trên $\mathbb{R}$. Tính $M+m$.

A. $M+m=4$. **B.** $M+m=7$. **C.** $M+m=5$. **D.** $M+m=6$.

Lời giải

Chọn D

Dựa vào đồ thị đã cho ta có đồ thi của hàm $y=|f(x)|$ là



Đặt $t=\frac{3x^2+2x+3}{2x^2+2}\Rightarrow t'=\frac{-4x^2+4}{(2x^2+2)^2}$; $t'=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=1 \end{array}\right.$.

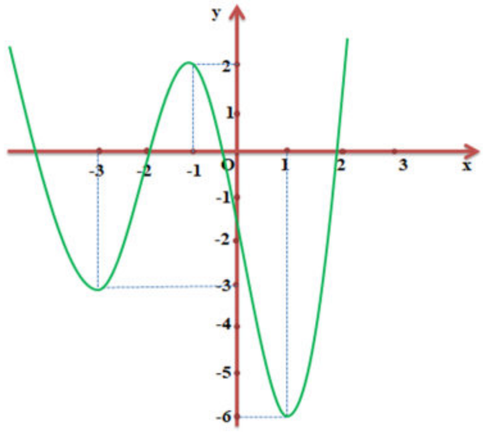
x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
t'		$-$	0	$+$	0	$-$	
t	$\frac{3}{2}$	$\searrow$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	$\frac{3}{2}$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $x \in \mathbb{R} \Rightarrow t \in [1;2]$.

$$M = \max_{\mathbb{R}} \left| f\left(\frac{3x^2+2x+3}{2x^2+2}\right) \right| = \max_{[1;2]} \left| f(t) \right| = 4;\ m = \min_{\mathbb{R}} \left| f\left(\frac{3x^2+2x+3}{2x^2+2}\right) \right| = \min_{[1;2]} \left| f(t) \right| = 2.$$

$\Rightarrow M + m = 6$.

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số $y = |f(x-1)|$ trên đoạn $[-3;3]$. Tìm M.

A. $M = 0$. **B.** $M = 6$. **C.** $M = 5$. **D.** $M = 2$.

Lời giải

Chọn B

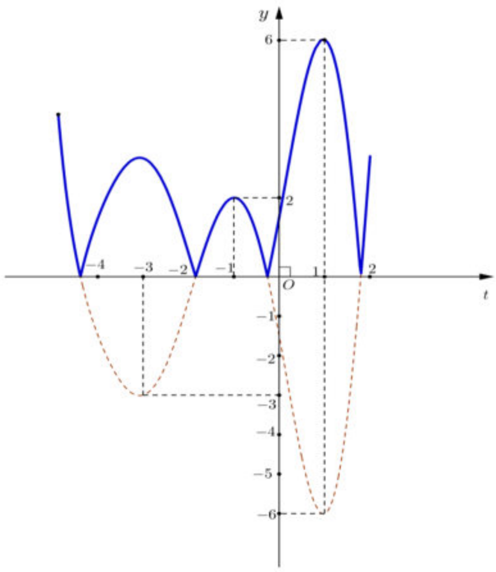
Đặt $t = x - 1$ Do $x \in [-3;3] \Rightarrow t \in [-4;2]$.

Xét hàm $y = |f(t)|$ trên $[-4;2]$.

Cách vẽ đồ thị hàm $y = |f(t)|$ trên $[-4;2]$

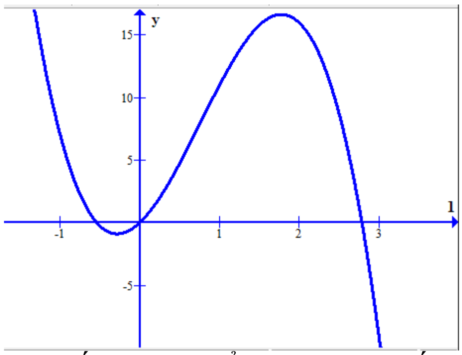
- Giữ nguyên đồ thị hàm số $y = f(x)$ ứng với phần phía trên trục hoành ta được nhánh (I).
- Lấy đối xứng phần đồ thị phía dưới trục hoành qua trục hoành ta được nhánh (II).

Hợp của hai nhánh (I) và (II) ta được đồ thị hàm số $y = |f(t)|$ trên $[-4;2]$ như hình vẽ.



Dựa vào đồ thị suy ra $M = 6$.

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[-1;3]$ đồng thời có đồ thị như hình vẽ .



Có bao nhiêu giá trị của tham số thực m để giá trị lớn nhất của hàm số $y = |f(x) + m|$ trên đoạn $[-1;3]$ bằng 2018?

A. 0. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 6.

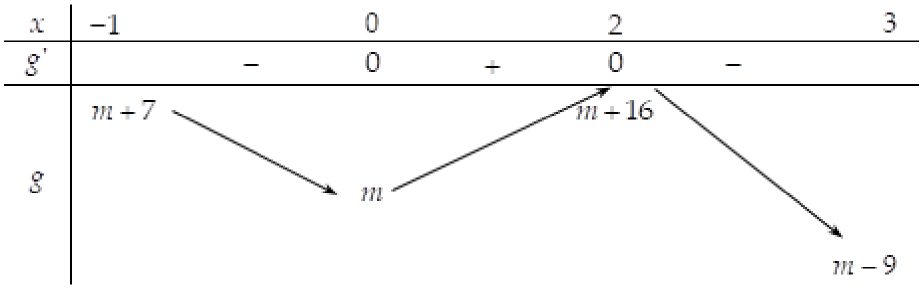
Lời giải

Chọn B

Đặt $g(x) = f(x) + m \Rightarrow g'(x) = f'(x)$.

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên :



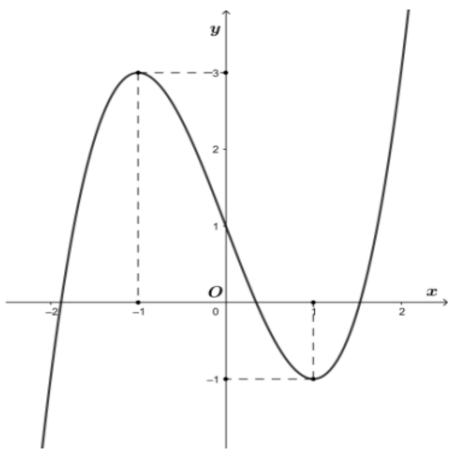
$\max\limits_{[-1;3]} g(x) = m + 16$; $\min\limits_{[-1;3]} = m - 9 \Rightarrow \max\limits_{[-1;3]} y = \max\{|m+16|;|m-9|\}$.

+ Nếu $|m+16| \ge |m-9| \Leftrightarrow m \ge -\dfrac{7}{2} \Rightarrow \max\limits_{[-1;3]} y = |m+16| = m + 16 = 2018$. Suy ra $m = 2002$.

+ Nếu $|m+16| \le |m-9| \Leftrightarrow m \le -\dfrac{7}{2} \Rightarrow \max\limits_{[-1;3]} y = |m-9| = m - 9 = 2018$. Suy ra $m = 2025$.

Vậy có hai giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán .

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên R và có đồ thị như hình vẽ dưới đây



Đặt $M = \max\limits_{R}\left|f\left(\sin^2 2x\right)\right|, m = \min\limits_{R}\left|f\left(\sin^2 2x\right)\right|$. Tổng $M + m$ bằng

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

$\forall x \in R, 0 \le X = \sin^2 2x \le 1$

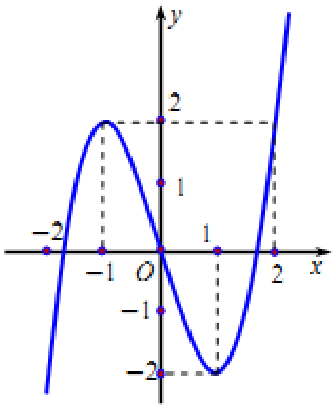
Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ trên R ta có $\max\limits_{[0;1]} f(X) = 1 = f(0), \min\limits_{[0;1]} f(X) = -1 = f(1)$.

Vì $\min\limits_{[0;1]} f(X) = -1 < 0 < \max\limits_{[0;1]} f(X) = 1$ nên

$M = \max\limits_{R} \left| f(\sin^2 2x) \right| = \left| \min\limits_{[0;1]} f(X) \right| = \max\limits_{[0;1]} f(X) = 1, m = \min\limits_{R} \left| f(\sin^2 2x) \right| = 0$

Vậy $M + m = 1$.

Câu 5. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Tính tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \left| f\left(\sqrt{2f(\cos x)}\right) \right|$ trên đoạn $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

A. 5. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Đặt $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \ (a \ne 0)$.

Đồ thị hàm số đi qua gốc tọa độ O nên $d = 0$.

Mặt khác đồ thị hàm số còn đi qua các điểm $A(-1;2), B(1;-2), C(2;2)$ nên ta có hệ phương trình: $\begin{cases} -a + b - c = 2 \\ a + b + c = -2 \\ 4a + 2b + c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = -3 \end{cases}$.

Do đó $f(x) = x^3 - 3x$.

Đặt $t = \cos x, \ x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right] \Rightarrow t \in [-1;0] \Rightarrow f(\cos x) = f(t) = t^3 - 3t$ với $t \in [-1;0]$.

Ta có $f'(t) = 3t^2 - 3 < 0, \forall t \in [-1;0] \Rightarrow f(t)$ nghịch biến trên $[-1;0]$

$\Rightarrow 2f(t) \in [2f(0); 2f(-1)]$ hay $2f(t) \in [0;4]$.

Đặt $u = \sqrt{2f(t)} \Rightarrow u \in [0;2] \Rightarrow y = |f(u)| = |u^3 - 3u|$ với $u \in [0;2]$.

Ta có $f'(u) = 3u^2 - 3 \Rightarrow f'(u) = 0 \Leftrightarrow u = 1 \in [0;2]$.

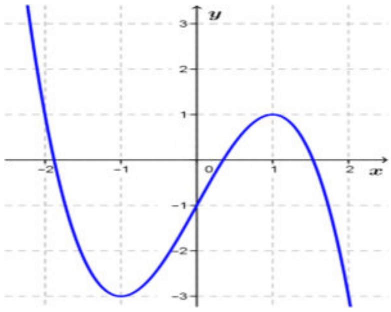
Bảng biến thiên của $f(u)$

u	0		1		2
$f'(u)$		$-$	0	$+$	
$f(u)$	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2

Từ bảng biến thiên suy ra $-2 \le f(u) \le 2 \Rightarrow 0 \le |f(u)| \le 2$

Vậy $\max y = 2, \min y = 0 \Rightarrow \max y + \min y = 2$.

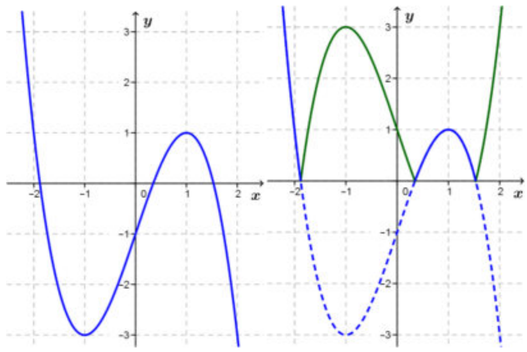
Câu 6. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $g(x) = \left| f\left(2\sin^4 x + 2\cos^4 x - 2\right) \right|$ trên $\mathbb{R}$. Tính $T = M - m$.



A. 2 . **B.** 0 . **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A



Xét hàm số: $g(x) = \left| f\left(2\sin^4 x + 2\cos^4 x - 2\right) \right|$.

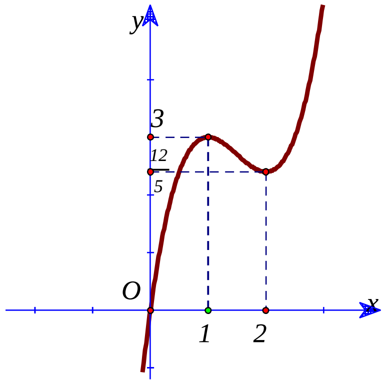
Đặt $t = 2\sin^4 x + 2\cos^4 x - 2 = 2\left[\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x\right] - 2 = -4\sin^2 x\cos^2 x$

$\Rightarrow t = -\sin^2 2x \ (-1 \le t \le 0)$. Suy ra hàm số $g(x)$ có dạng $|f(t)| \ (-1 \le t \le 0)$.

Dựa vào đồ thị hàm số $|f(x)|$, ta có:

$Max\, g(x) = \underset{t\in[-1;0]}{Max} |f(t)| = 3 \Rightarrow M = 3$; $Min\, g(x) = \underset{t\in[-1;0]}{Min} |f(t)| = 1 \Rightarrow m = 1$. Nên $M - m = 2$

Câu7. Cho đồ thị hàm số bậc ba $y = f(x)$ liên tục trên R và có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



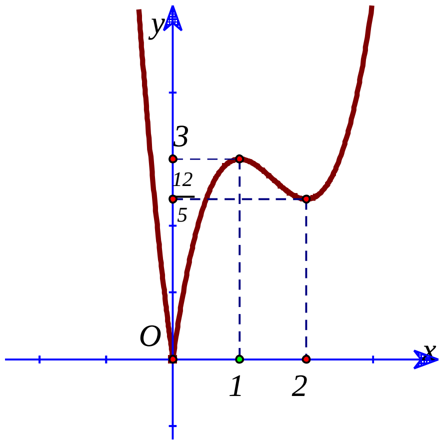
Đặt $M = \underset{\mathbb{R}}{Max}\left|f\left(2\left(\sin^4 x+\cos^4 x\right)\right)\right|$, $m = \underset{\mathbb{R}}{min}\left|f\left(2\left(\sin^4 x+\cos^4 x\right)\right)\right|$. Tính tổng $M+m$.

A. 3. **B.** $\frac{27}{5}$. **C.** $\frac{22}{5}$. **D.** 5.

Lời giải

Chọn B

* Đồ thị $y=\left|f\left(x\right)\right|$ được vẽ như sau:



Đặt $t = 2\left(\sin^4 x+\cos^4 x\right) = 2\left(1-2\sin^2 x\cos^2 x\right) = 2\left(1-\frac{1}{2}\sin^2 2x\right) = 2-\sin^2 2x$

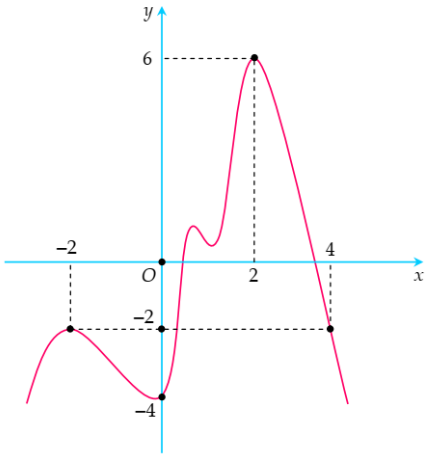
Ta có $0 \le \sin^2 2x \le 1 \Rightarrow 1 \le 2-\sin^2 2x \le 2 \Rightarrow 1 \le t \le 2$

Khi đó $\left|f\left(2\left(\sin^4 x+\cos^4 x\right)\right)\right| = \left|f\left(t\right)\right|$ với $t \in [1;2]$

Dựa vào đồ thị $M = \max\limits_{\mathbb{R}}\left|f\left(2\left(\sin^4 x+\cos^4 x\right)\right)\right| = \max\limits_{t\in[1;2]}\left|f\left(t\right)\right| = 3$;

$m = \min\limits_{\mathbb{R}}\left|f\left(2\left(\sin^4 x+\cos^4 x\right)\right)\right| = \min\limits_{t\in[1;2]}\left|f\left(t\right)\right| = \frac{12}{5} \Rightarrow M+m = \frac{27}{5}$.

Câu 8. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới:



Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của hàm số $y = \left|\frac{1}{3} f\left(\frac{4}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{\pi}{3}|\sin x|\right)\right)\right|$. Khi đó tổng $m+M$ là

A. $\frac{2}{3}$. **B.** 4. **C.** 2. **D.** $\frac{4}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Vì $0 \le |\sin x| \le 1 \Rightarrow 0 \le \frac{\pi}{3}|\sin x| \le \frac{\pi}{3}$.

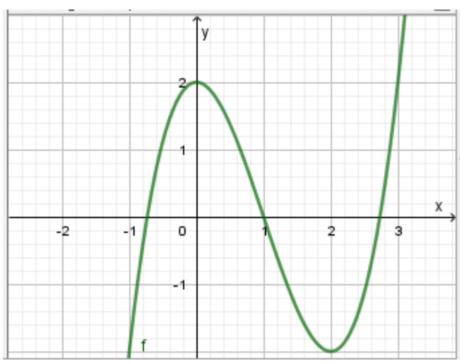
Trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$ hàm số $\sin$ luôn tăng nên suy ra $\sin 0 \le \sin\left(\frac{\pi}{3}|\sin x|\right) \le \sin\frac{\pi}{3}$.

Hay $0 \le \sin\left(\frac{\pi}{3}|\sin x|\right) \le \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{4}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{\pi}{3}|\sin x|\right) \in [0; 2]$

Quan sát đồ thị ta thấy: $\frac{1}{3} f\left(\frac{4}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{\pi}{3}|\sin x|\right)\right) \in \left[-\frac{4}{3}; 2\right]$

Từ đó $\max y = 2; \min y = 0$.

Câu 9. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Tổng giá trị lớn nhất nhỏ nhất của hàm số $y = h(x) = \left|f\left(x^2+1\right)\right|$ thuộc đoạn $[0;1]$ bằng

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

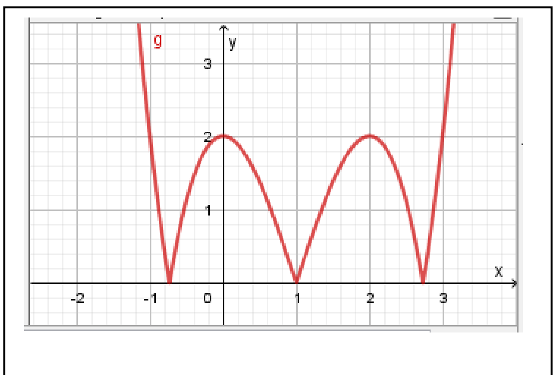
Lời giải

Chọn C

Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ ta suy đồ thị

$y = g(x) = |f(x)|$

Xét hàm số $h(x) = \left|f\left(x^2+1\right)\right|, x \in [0;1]$

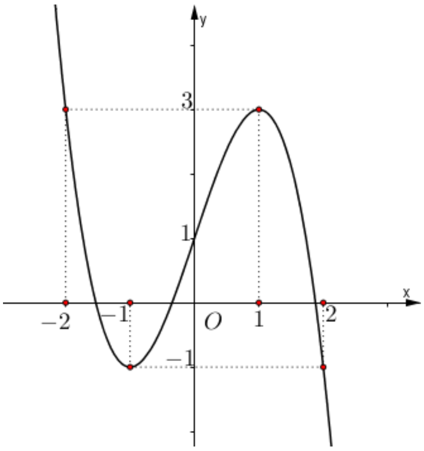


Đặt $t = x^2 + 1\left(t \in [1;2]\right)$, suy ra hàm số có dạng $y = g\left(t\right) = \left|f\left(t\right)\right|$

Dựa vào đồ thị của hàm số $y = g\left(x\right) = \left|f\left(x\right)\right|$, ta suy ra được:

$\max\limits_{[1;2]} g\left(t\right) = 2 \Rightarrow \max\limits_{[0;1]} h\left(x\right) = 2$, $\min\limits_{[1;2]} g\left(t\right) = 0 \Rightarrow \min\limits_{[0;1]} h\left(x\right) = 0$

Câu 10. Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ có đồ thị hàm số như hình vẽ



Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y = \left|f\left(2x-1\right)\right|$ trên đoạn $\left[0;\dfrac{1}{2}\right]$. Tính giá trị $M - m$.

A. 3 **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

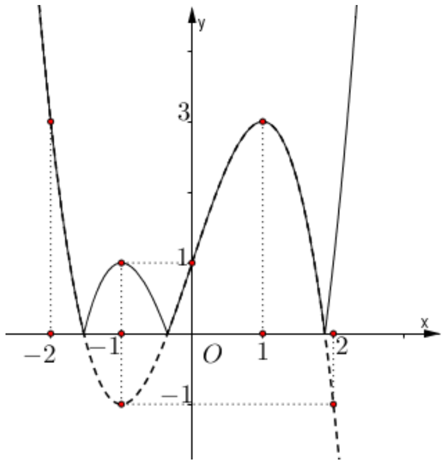
Lời giải

Chọn C

Đặt $t = 2x - 1$.

Với $x \in \left[0;\dfrac{1}{2}\right] \Rightarrow t \in \left[-1;0\right]$.

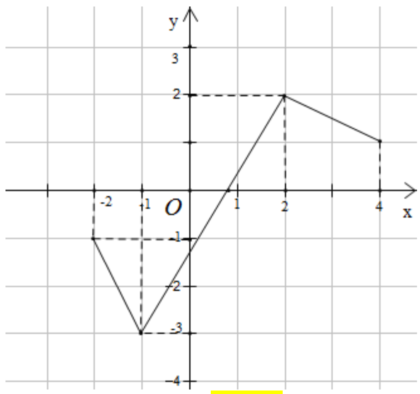
Đồ thị hàm số $y = \left|f\left(t\right)\right|$ có dạng



Suy ra với $t \in \left[-1;0\right]$ ta có $m = 0$, $M = 1$.

Vậy $M - m = 1$.

Câu 11. Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ có đồ thị trên $\left[-2;4\right]$ như hình vẽ. Tìm $\max\limits_{[-2;4]}\left|f\left(x\right)\right|$.



A. 2. **B.** $|f(0)|$. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

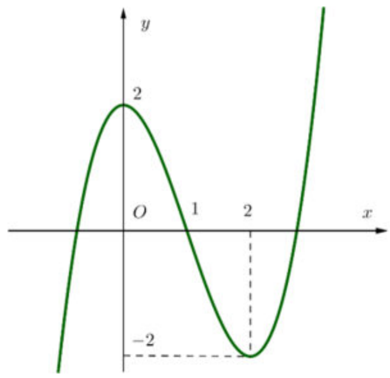
Chọn C

Từ đồ thị của hàm số $y=f(x)$ trên $[-2;4]$ ta có tập giá trị $y=f(x)$ là $[-3;2]$.

Suy ra tập giá trị của hàm số $|f(x)|$ trên $[-2;4]$ là $[0;3]$.

Do đó $\max\limits_{[-2;4]}|f(x)|=3$.

Câu 12. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ:



Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\left|\dfrac{3}{2}f\left(\dfrac{x}{2}\right)\right|$ trên đoạn $[2;4]$.

Khi đó $M+m$ bằng

A. 4. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số: $g(x)=\dfrac{3}{2}f\left(\dfrac{x}{2}\right)$

Ta có $g'(x)=\dfrac{3}{4}f'\left(\dfrac{x}{2}\right)$, $g'(x)=0 \Leftrightarrow f'\left(\dfrac{x}{2}\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=4 \end{array}\right.$.

Ta có bảng biến thiên của hàm số $g(x)$ trên $[2;4]$

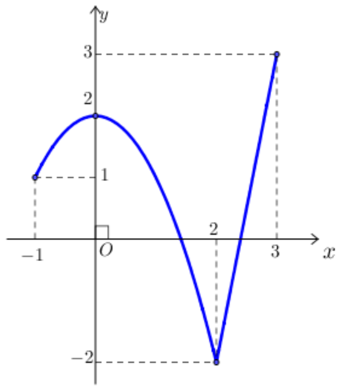
x	2		4
$g'(x)$		$-$	
$g(x)$	0	$\searrow$	-3

Từ BBT ta suy ra được GTLN và GTNN của hàm số $y=|g(x)|$ trên $[2;4]$ lần lượt là $3;0$

Vậy $M+m=3$.

Dạng 4: Cho đồ thị, BBT của hàm số $y=f(x)$, tìm GTLN, GTNN của hàm số $y=f(|x|+b), y=f(|u(x)|+b), y=f(|x+a|+b), y=f(|u(x)+a|+b)$ trên khoảng, đoạn.

Câu 1. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;3]$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=f(3|\cos x|-1)$ bằng



A. 0. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t=3|\cos x|-1$

$\forall x\in\mathbb{R}$ ta có: $0\le|\cos x|\le 1 \Leftrightarrow 0\le 3|\cos x|\le 3 \Leftrightarrow -1\le 3|\cos x|-1\le 2$.

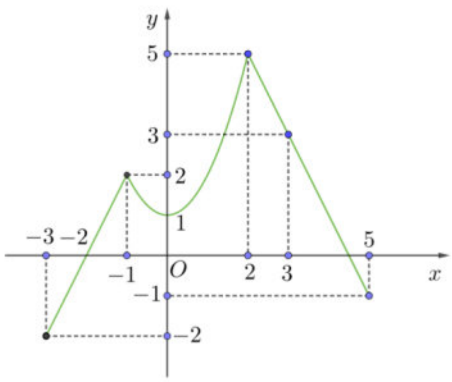
Vậy $t\in[-1;2]$

Khi đó hàm số $y=f(3|\cos x|-1)$ trở thành: $y=f(t)$ với $t\in[-1;2]$.

Do đó, giá trị lớn nhất của hàm số $y=f(3|\cos x|-1)$ bằnggiá trị lớn nhất của hàm số $y=f(t)$ trên đoạn $[-1;2]$.

Dựa vào đồ thị hàm số $f(x)$ ta có: $\max\limits_{\mathbb{R}} f(3|\cos x|-1)=\max\limits_{[-1;2]} f(t)=f(0)=2$.

Câu 2. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-3;5]$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(|3\cos x+4\sin x|-2)$ bằng

A. 0. **B.** 1. **C.** 3. **D.** -2.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t=|3\cos x+4\sin x|-2$.

$\forall x\in\mathbb{R}$ ta có: $(3\cos x+4\sin x)^2\le(3^2+4^2)(\cos^2 x+\sin^2 x)=25$.

Suy ra $0\le|3\cos x+4\sin x|\le 5 \Leftrightarrow -2\le|3\cos x+4\sin x|-2\le 3$.

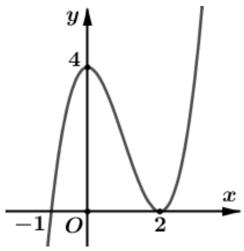
Vậy $t \in [-2;3]$

Khi đó hàm số $y = f\left(|3\cos x + 4\sin x| - 2\right)$ trở thành: $y = f(t)$ với $t \in [-2;3]$.

Do đó, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f\left(|3\cos x + 4\sin x| - 2\right)$ bằnggiá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(t)$ trên đoạn $[-2;3]$.

Dựa vào đồ thị hàm số $f(x)$ ta có: $\min\limits_{\mathbb{R}} f\left(|3\cos x + 4\sin x| - 2\right) = \min\limits_{[-2;3]} f(t) = f(-2) = 0$.

Câu 3. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = f(|x| - 2)$ trên $[-4;4]$ là

A. 0 **B.** 4. **C.** 2. **D.** 6.

Lời giải

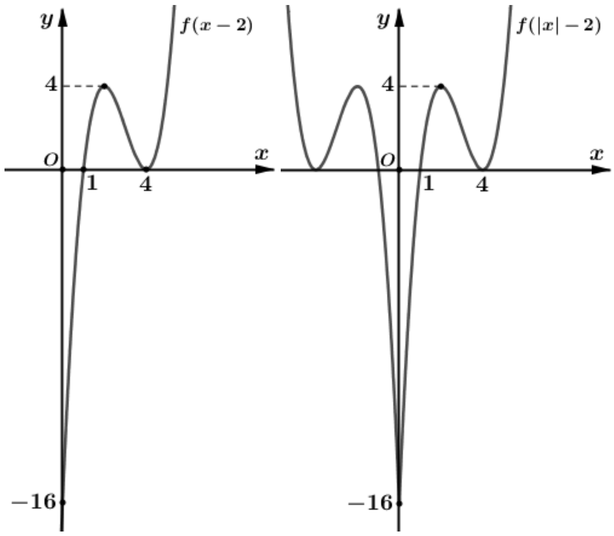
Chọn B

Xét hàm số $g(x) = f(|x| - 2)$. Ta thấy hàm số là hàm chẵn nên đồ thị hàm số nhận trục Oy làm trục đối xứng.

Ta lại có: khi $x \geq 0$ thì hàm số $g(x) = f(|x| - 2)$ trở thành: $g(x) = f(x - 2)$.

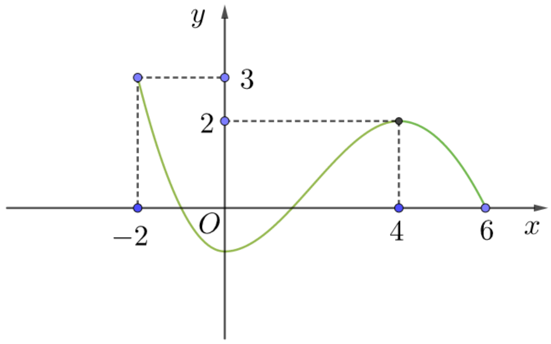
Từ đồ thị hàm số $f(x)$ ta suy ra đồ thị hàm số $f(x-2)$ bằng cách tịnh tiến đồ thị hàm số $f(x)$ sang phải (theo phương Ox) 2 đơn vị.

Từ đồ thị hàm số $f(x-2)$ ta suy ra đồ thị hàm số $g(x)$ bằng cách lấy đối xứng phần đồ thị hàm số $f(x-2)$ bên phải trục Oy qua trục Oy. Ta được đồ thị của hàm số $g(x) = f(|x| - 2)$ như sau:



Dựa vào đồ thị hàm số $g(x) = f(|x| - 2)$, suy ra hàm số $g(x)$ có giá trị lớn nhất bằng 4 trên $[-4;4]$

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[-2;6]$ và có đồ thị như hình vẽ dưới.



Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(|x|+1)$ trên đoạn $[-2;4]$. Giá trị của M bằng

A. 3 **B.** -1. **C.** 2. **D.** 0.

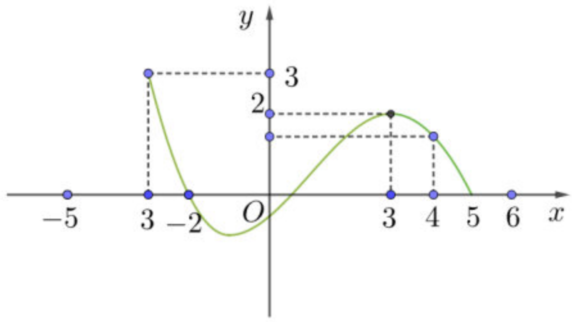
Lời giải

Chọn C

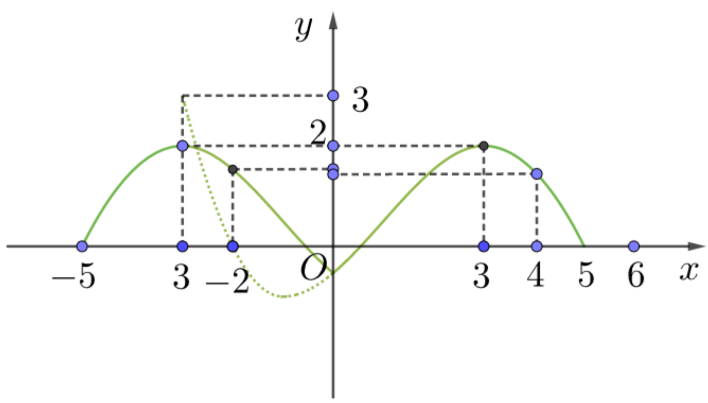
Xét hàm số $y = f(|x|+1)$. Ta thấy hàm số là hàm chẵn nên đồ thị hàm số nhận trục Oy làm trục đối xứng.

Khi $x \geq 0$ hàm số $y = f(|x|+1)$ trở thành $y = f(x+1)$.

Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ ta suy ra đồ thị hàm số $y = f(x+1)$ bằng cách tịnh tiến đồ thị hàm số $y = f(x)$ sang trái (theo phương Ox) 1 đơn vị, ta được đồ thị hàm số $y = f(x+1)$ như sau:



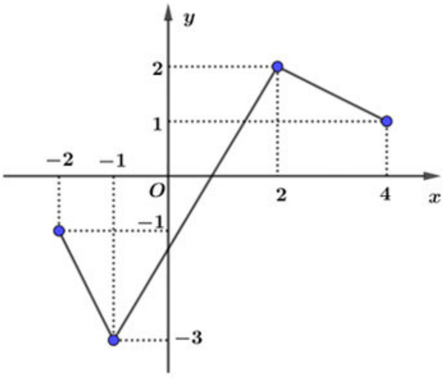
Từ đồ thị hàm số $y = f(x+1)$ ta suy ra đồ thị hàm số $y = f(|x|+1)$ bằng cách lấy đối xứng phần đồ thị hàm số $y = f(x+1)$ bên phải trục Oy qua trục Oy, ta được đồ thị hàm số $y = f(|x|+1)$ như sau:



Từ đồ thị hàm số $y = f(|x|+1)$ ta thấy giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(|x|+1)$ trên đoạn $[-2;4]$ bằng 2.

Dạng 5: Cho đồ thị, BBT của hàm số $y=f(x)$, tìm GTLN, GTNN của hàm số $y=\left|f(x)+b\right|, y=\left|f(u(x))+b\right|, y=\left|f(x+a)+b\right|, y=\left|f(u(x)+a)+b\right|$ trên khoảng, đoạn.

Câu 1: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị trên đoạn $[-2;\ 4]$ như hình vẽ bên. Tìm $\max\limits_{[-2;\ 4]}\left|f(x)\right|$.



A. $\left|f(0)\right|$. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C

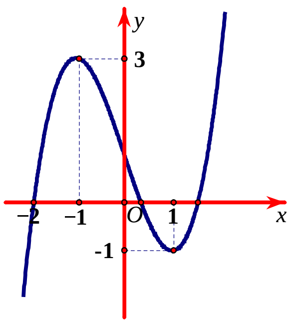
*** Phương pháp tìm GTLN của hàm trị tuyệt đối:**

$\max\limits_{[a;b]}\left|f(x)\right|=\max\left\{\left|\max\limits_{(a;b)} f(x)\right|;\left|\min\limits_{[a;b]} f(x)\right|\right\}$

Dựa vào đồ thị ta có: $\max\limits_{[-2;\ 4]} f(x)=2$ khi $x=2$ và $\min\limits_{[-2;\ 4]} f(x)=-3$ khi $x=-1$.

Vậy $\max\limits_{[-2;\ 4]}\left|f(x)\right|=3$ khi $x=-1$.

Câu 2: Cho đồ thị hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ.



Gọi giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\left|f(x)\right|$ trên đoạn $[-1;1]$ lần lượt là M,m. Tính giá trị của biểu thức $T=673M-2019m$.

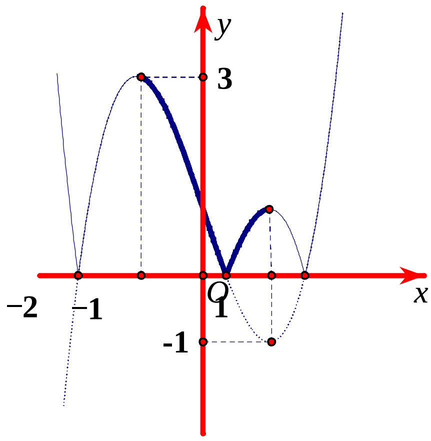
A. $T=2019$. **B.** $T=0$. **C.** $T=4038$. **D.** $T=2692$.

Lời giải

Chọn A

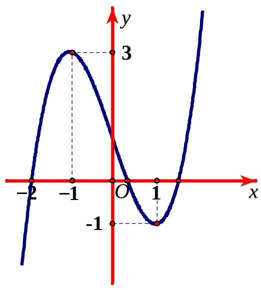
• Vẽ đồ thị của hàm số $y=\left|f(x)\right|$ bằng cách giữ nguyên phần đồ thị của hàm số $y=f(x)$ ở phía trên trục hoành, lấy đối xứng phần đồ thị của hàm số $y=f(x)$ ở phía dưới trục hoành qua trục hoành, xóa bỏ phần đồ thị phía dưới trục hoành.

• Từ đó suy ra phần đồ thị của hàm số $y=\left|f(x)\right|$ trên đoạn $[-1;1]$



Dựa vào phần đồ thị đó, ta được $M=3, m=0$ nên $T=2019$.

Câu 3: Cho đồ thị hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ.



Gọi giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=|f(x+2)|$ trên đoạn $[-1;0]$ lần lượt là M, m. Tính giá trị của biểu thức $T=M-3m$.

A. $T=3$. **B.** $T=0$. **C.** $T=6$. **D.** $T=4$.

Lời giải

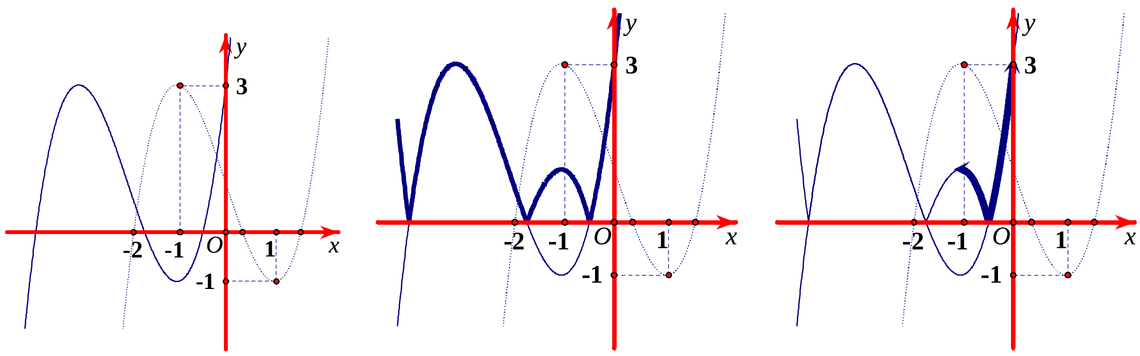
Chọn A

Cách 1:

+ Tịnh tiến đồ thị hàm số $y=f(x)$ sang trái 2 đơn vị ta được đồ thị hàm số $y=f(x+2)$

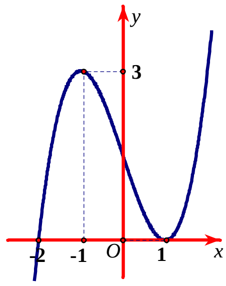
+ Vẽ đồ thị hàm số $y=|f(x+2)|$ bằng cách giữ nguyên phần đồ thị của hàm số $y=f(x+2)$ ở phía trên trục hoành, lấy đối xứng phần đồ thị của hàm số $y=f(x+2)$ ở phía dưới trục hoành qua trục hoành, xóa bỏ phần đồ thị phía dưới trục hoành.

Từ đó suy ra phần đồ thị của hàm số $y=|f(x+2)|$ trên đoạn $[-1;0]$



Dựa vào phần đồ thị đó, ta được $M=3, m=0$ nên $T=3$.

Câu 4: Cho đồ thị hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ.



Gọi giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\left|f(x^2+2x)\right|$ trên đoạn $\left[-2;0\right]$ lần lượt là M,m. Tính giá trị của biểu thức $T=M-3m$.

A. $T=3$. **B.** $T=0$. **C.** $T=6$. **D.** $T=4$.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $y=f\left(x^2+2x\right)$ trên đoạn $\left[-2;0\right]$

Ta có $y'=\left(2x+2\right)f'\left(x^2+2x\right)$

$$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x^2+2x=-1\\x^2+2x=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\in\left[-2;0\right]\\ \\x=-1\pm\sqrt{2}\notin\left[-2;0\right]\end{array}\right.$$

Cách 1: Tính $y\left(-2\right)=y\left(0\right)=f\left(0\right)=2;y\left(-1\right)=4$

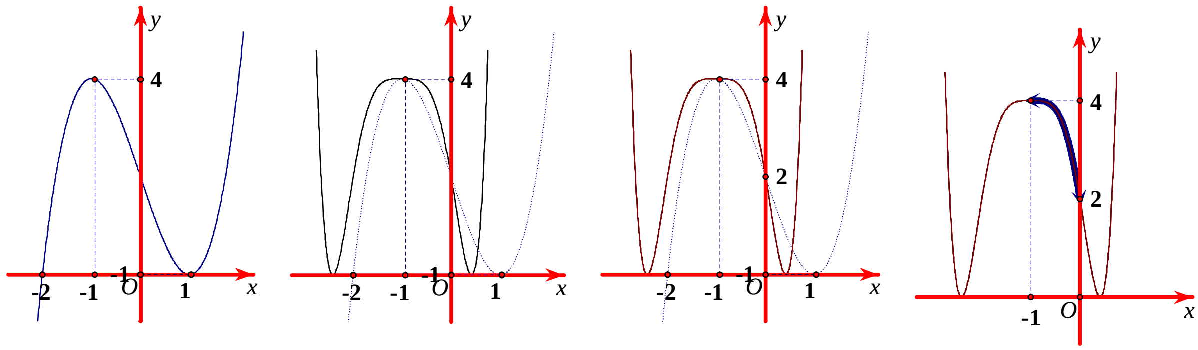
$y=f\left(x^2+2x\right)$	2	↗	4	↘	2
$y=\left|f(x^2+2x)\right|$	2	↗	4	↘	2

Suy ra giá trị $M=4,m=2$ hay $T=-2$.

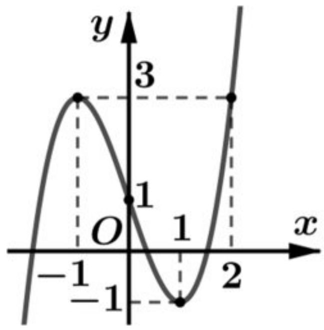
Cách 2: Lập bảng

x	-2		-1		0
x^2+2x	0	↘	-1	↗	0
$y=f'\left(x^2+2x\right)$		$-$	0	$-$	
$2x+2$		$-$	0	$+$	
$y'=\left(2x+2\right)f'\left(x^2+2x\right)$		$+$	0	$-$	
$y=f\left(x^2+2x\right)$	2	↗	4	↘	2
$y=\left|f(x^2+2x)\right|$	2	↗	4	↘	2

Vậy $M=4,m=2$ suy ra $T=-2$.



Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên.



Xét hàm số $g(x) = \left| f\left(2x^3 + x - 1\right) - 13 \right|$. Tìm $\max\limits_{[0;1]} g(x)$.

A. -10. **B.** 0. **C.** 10. **D.** 14.

Lời giải

Chọn D

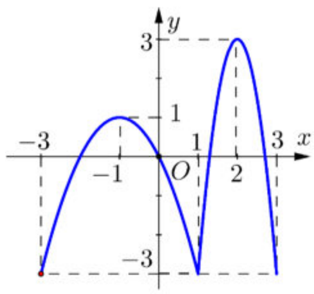
Đặt $t(x) = 2x^3 + x - 1$ với $x \in [0;1]$. Ta có $t'(x) = 6x^2 + 1 > 0,\ \forall x \in [0;1]$.

Suy ra hàm số $t(x)$ đồng biến nên $x \in [0;1] \longrightarrow t \in [-1;2]$.

Từ đồ thị hàm số ta có $\begin{cases} \max\limits_{[-1;2]} f(t) = 3 \longrightarrow \max\limits_{[-1;2]} \left[f(t) - 13 \right] = -10 \\ \min\limits_{[-1;2]} f(t) = -1 \longrightarrow \min\limits_{[-1;2]} \left[f(t) - 13 \right] = -14 \end{cases}$

Suy ra $\max\limits_{[0;1]} g(x) = 14$.

Câu 6: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \left| f\left(\sin 3x + \sin^3 x\right) \right|$ trên $\mathbb{R}$. Giá trị $e^{\ln M} + 2019^m$ bằng ?

A. e. **B.** 4. **C.** 2009^{-3}. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t = \sin 3x + \sin^3 x = 3\sin x$, Với $x \in \mathbb{R} \Rightarrow 3\sin x \in [-3;3] \Rightarrow t \in [-3;3]$

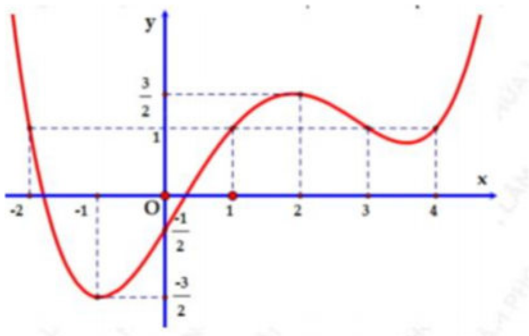
Hàm số trở thành $y = \left| f(t) \right|$

Từ đồ thị hàm $f\left(t\right)$ trên đoạn $\left[-3;3\right]$ ta suy ra

$\min\limits_{[-3;3]} f(t)=-3,\ \max\limits_{[-3;3]} f(x)=3 \Rightarrow \min\limits_{[-3;3]}\left|f(t)\right|=0,\ \max\limits_{[-3;3]}\left|f(x)\right|=3$

Vậy $e^{\ln M}+2019^{m}=e^{\ln 3}+2019^{0}=4.$

Câu 7: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây



Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y=\left|f\left(\sqrt{9-x^2}\right)\right|$. Có bao nhiêu số nguyên thuộc đoạn $\left[m;M\right]$?

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện xác định $x\in\left[-3;3\right]$. Đặt $t=\sqrt{9-x^2}\Rightarrow t\in\left[0;3\right]$ hàm số trở thành: $y=\left|f\left(t\right)\right|$

Dựa vào đồ thị hàm $f\left(t\right)$ ta có : $\min\limits_{[0;3]} f(t)=\dfrac{-1}{2},\ \max\limits_{[0;3]} f(x)=\dfrac{3}{2}\Rightarrow \min\limits_{[o;3]}\left|f(t)\right|=0,\ \max\limits_{[0;3]}\left|f(x)\right|=\dfrac{3}{2}$

Vậy có duy nhất một giá trị nguyên thuộc đoạn $\left[0;\dfrac{3}{2}\right]$.

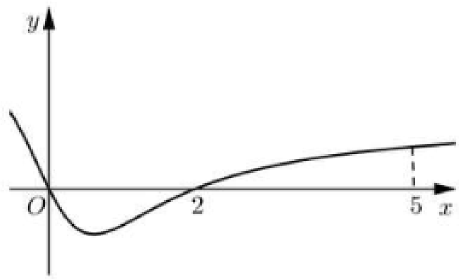
CÁC DẠNG TOÁN VỀ HÀM ẨN LIÊN QUAN ĐẾN BÀI TOÁN GTLN GTNN CỦA HÀM SỐ

PHẦN II: Xác định GTLN, NN hoặc so sánh các giá trị của hàm số thông qua tích phân hoặc so sánh diện tích hình phẳng.

1. Cho đồ thị, BBT của hàm số $y = f'(x)$, tìm GTLN, GTNN của hàm số $y = f(x)$ trên khoảng, đoạn.
2. Cho đồ thị, BBT của hàm số $y = f'(x)$, tìm GTLN, GTNN của hàm số $y = f(|x|)$ trên khoảng, đoạn.
3. Cho đồ thị, BBT của hàm số $y = f'(x)$, tìm GTLN, GTNN của hàm số $y = |f(x)|$ trên khoảng, đoạn.
4. Cho đồ thị, BBT của hàm số $y = f'(x)$, tìm GTLN, GTNN của hàm số $y = f(|x+a|+b)$ trên khoảng, đoạn.
5. Cho đồ thị, BBT của hàm số $y = f'(x)$, tìm GTLN, GTNN của hàm số $y = |f(x)+b|$ trên khoảng, đoạn.
6. Các dạng khác.

Dạng 7: Cho đồ thị, BBT của hàm số $y = f'(x)$, tìm GTLN, GTNN của hàm số $y = f(x)$ trên khoảng, đoạn.

Câu 1: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ được cho như hình vẽ bên. Biết rằng $f(0)+f(3)=f(2)+f(5)$. Giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của $f(x)$ trên đoạn $[0;5]$ lần lượt là



A. $f(0), f(5)$. **B.** $f(2), f(0)$. **C.** $f(1), f(5)$. **D.** $f(2), f(5)$.

Lời giải

Chọn D

Cách 1:

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0		2		5	$+\infty$
f'		0	$-$	0	$+$		
f		$f(0)$ $f(5)$	↘	$f(2)$	↗		

Dựa vào đồ bảng biến thiên, ta có $\min\limits_{[2;5]} f(x) = f(2)$

Và $\max\limits_{[0;5]} f(x) = \max\{f(0), f(5)\}$

Vì $f(x)$ đồng biến trên đoạn $[2;5]$ nên

$f(3) > f(2) \Rightarrow f(5)-f(2) > f(5)-f(3) = f(0)-f(2)$

Do đó $f(5) > f(0)$, vậy $\max\limits_{[0;5]} f(x) = \max\{f(0), f(5)\} = f(5)$

Cách 2:

Căn cứ đồ thị của $y = f'(x)$ và ứng dụng tích phân, ta có:

$S_1 = \int\limits_0^2 |f'(x)|dx = \int\limits_0^2 f'(x)dx = f(0)-f(2)$ và $S_2 = \int\limits_2^5 |f'(x)|dx = \int\limits_2^5 f'(x)dx = f(2)-f(5)$

Theo giả thiết, ta có:

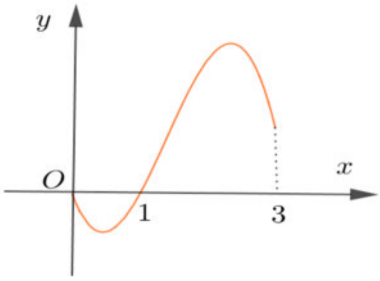
$f(0)+f(3) = f(2)+f(5) \Rightarrow f(5)-f(3) = f(0)-f(2)$

Suy ra $S_2 = \int\limits_2^5 |f'(x)|dx > \int\limits_3^5 |f'(x)|dx = f(5)-f(3) = S_1$.

Suy ra $S_2 > S_1 > 0 \Rightarrow f(5) > f(0) > f(2)$.

Vậy $\min\limits_{[0;5]} f(x) = f(2), \max\limits_{[0;5]} f(x) = f(5)$.

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị $y = f'(x)$ như hình bên dưới.



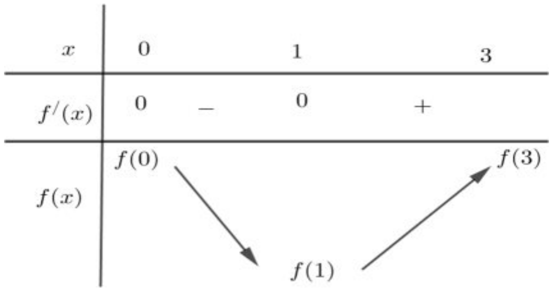
Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[0;3]$.

A. $f(1), f(0)$. **B.** $f(2), f(0)$. **C.** $f(1), f(3)$. **D.** $f(0), f(3)$

Lời giải

Chọn C

Ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$



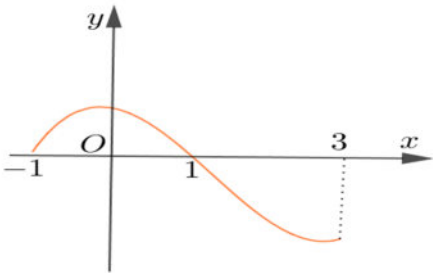
Khi đó: $\min\limits_{[0;3]} f(x) = f(1)$.

Dựa vào đồ thị $y = f'(x)$ ta có

$$-\int_0^1 f'(x)dx < \int_1^3 f'(x)dx \Leftrightarrow f(0) - f(1) < f(3) - f(1) \Leftrightarrow f(0) < f(3).$$

Vậy $\max\limits_{[0;3]} f(x) = f(3)$.

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị $y = f'(x)$ như hình bên dưới.



Biết $f(-1) + f(0) - 2f(1) = f(3) - f(2)$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-1;3]$.

A. $f(1), f(0)$. **B.** $f(2), f(1)$. **C.** $f(1), f(-1)$. **D.** $f(1), f(3)$

Lời giải

Chọn C

Ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$

Vậy $\max\limits_{[-1;3]} f(x) = f(1)$

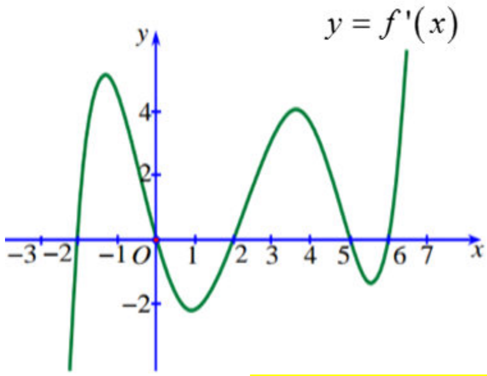
Từ bảng biến thiên ta có $f(0) < f(1), f(2) < f(1)$ vậy $f(0) + f(2) < 2f(1)$

Khi đó $f(-1) + f(0) - 2f(1) = f(3) - f(2) \Leftrightarrow f(0) + f(2) - 2f(1) = f(3) - f(-1)$

Vậy $f(3) - f(-1) > 0 \Rightarrow f(3) > f(-1)$

Khi đó $\min\limits_{[-1;3]} f(x) = f(-1)$.

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Đặt $M = \max\limits_{[-2;\,6]} f(x), m = \min\limits_{[-2;\,6]} f(x), T = M + m$. Hỏi mệnh đề nào dưới đây là đúng?



A. $T = f(0) + f(2)$

B. $T = f(5) + f(-2)$.

C. $T = f(5) + f(6)$

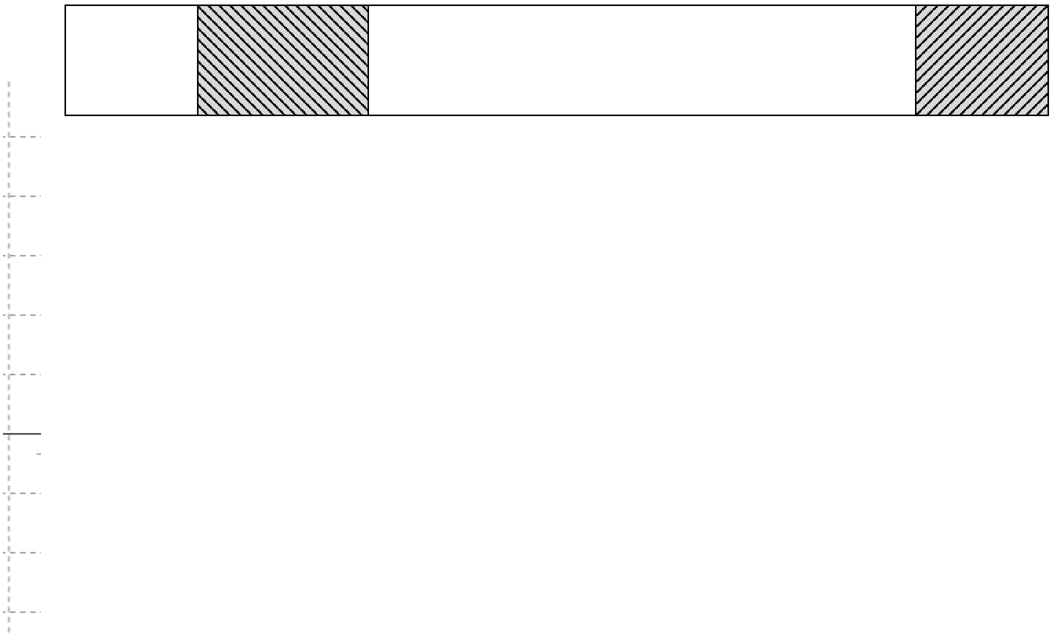
D. $T = f(0) + f(-2)$

Lời giải

Chọn B

+) Nhận xét: Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ cắt trục hoành tại 5 điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là $-2; 0; 2; 5; 6$ nên phương trình $f'(x) = 0$ có 5 nghiệm phân biệt là $x_1 = -2;\ x_2 = 0;\ x_3 = 2;\ x_4 = 5;\ x_5 = 6$. Hơn nữa $f'(x) > 0,\ \forall x \in (-2;\,0) \cup (2;\,5)$ và ngược lại $f'(x) < 0,\ \forall x \in (0;\,2) \cup (5;\,6)$. Ta lập bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$.

x	$-\infty$	-2		0		2		5		6	$+\infty$
$f'(x)$		0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	0	
$f(x)$		$f(-2)$	↗	$f(0)$	↘	$f(2)$	↗	$f(5)$	↘	$f(6)$	



+) Gọi S_1, S_2, S_3, S_4 lần lượt là diện tích của các hình phẳng $(H_1), (H_2), (H_3), (H_4)$,

(H_1) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f'(x),\ y = 0,\ x = -2,\ x = 0.$

(H_2) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f'(x),\ y = 0,\ x = 0,\ x = 2.$

(H_3) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f'(x),\ y = 0,\ x = 2,\ x = 5.$

(H_4) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f'(x),\ y = 0,\ x = 5,\ x = 6$

Ta có $S_1 > S_2 \Leftrightarrow \int\limits_{-2}^{0} f'(x)dx > \int\limits_{0}^{2} -f'(x)dx \Leftrightarrow f(0) - f(-2) > f(0) - f(2) \Leftrightarrow f(-2) < f(2)$ (1).

Ta có $S_2 < S_3 \Leftrightarrow \int\limits_{0}^{2} -f'(x)dx < \int\limits_{2}^{5} f'(x)dx \Leftrightarrow f(0) - f(2) < f(5) - f(2) \Leftrightarrow f(0) < f(5)$ (2).

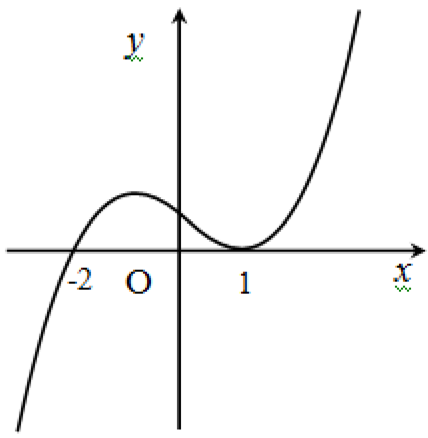
Ta có:

$S_3 > S_4 \Leftrightarrow \int\limits_{2}^{5} f'(x)dx > \int\limits_{5}^{6} -f'(x)dx \Leftrightarrow f(5) - f(2) > f(5) - f(6) \Leftrightarrow f(2) < f(6)$ (3).

+) Từ bảng biến thiên và $(1), (2), (3)$ ta có:

$M = \max\limits_{[-2;\,6]} f(x) = f(5),\ m = \min\limits_{[-2;\,6]} f(x) = f(-2)$ và $T = M + m = f(5) + f(-2)$..

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm đa thức bậc 4. Biết hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị (C) như hình vẽ và diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) và trục hoành bằng 27. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên $[-3;3]$. Tính $S = M - m$.



A. 75. **B.** 27 . **C.** 36 . **D.** 48

Lời giải

Chọn A

Do hàm số $y=f(x)$ là hàm đa thức bậc 4 $\Rightarrow$ hàm số $y=f'(x)$ là hàm đa thức bậc 3. Từ đồ thị (C) của hàm số $y=f'(x)\Rightarrow f'(x)=a(x+2)(x-1)^2;a>0$.

Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) và trục hoành là:

$$a\int_{-2}^{1}(x^3-3x+2)dx=27\Leftrightarrow\frac{27a}{4}=27\Leftrightarrow a=7\Rightarrow f(x)=x^4-6x^2+8x+c.$$

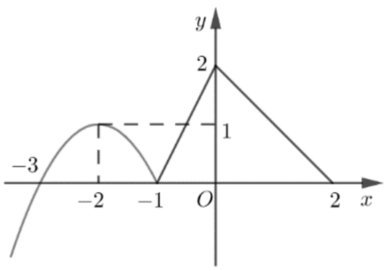
Xét hàm số $f(x)=x^4-6x^2+8x+c$ liên tục trên $[-3;3]$ ta có:

$$f'(x)=4(x+2)(x-1)^2;\ f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\\x=1\end{array}\right.$$

Ta có: $f(-3)=3+c; f(-2)=-24+c; f(1)=3+c; f(3)=51+c$

$\Rightarrow M=51+c; m=-24+c\Rightarrow M-m=75$.

Câu 6: Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị $y=f'(x)$ trên $[-3;2]$ như hình vẽ (phần cong của đồ thị là một phần của parabol $y=ax^2+bx+c$).



Biết $f(1)=0$. Gọi m,M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y=f(x)$ trên $[-3;2]$. Tính $m+M$.

A. $\frac{10}{3}$. **B.** $-\frac{10}{3}$. **C.** $-\frac{5}{3}$. **D.** $\frac{5}{3}$

Lời giải

Chọn B

Từ giả thiết có $f'(x)=\begin{cases}-x^2-4x-3 & khi\ -3\le x\le -1\\ 2x+2 & khi -1<x\le 0\\ -x+2 & khi\ 0<x\le 2\end{cases}$.

Suy ra $f(x)=\begin{cases}-\frac{1}{3}x^3-2x^2-3x+C_1 & khi\ -3\le x\le -1\\ x^2+2x+C_2 & khi -1<x\le 0\\ -\frac{1}{2}x^2+2x+C_3 & khi\ 0<x\le 2\end{cases}$.

Từ đồ thị của $y=f'(x)$, suy ra bảng biến thiên của $y=f(x)$

x	-3		-1		2
$f'(x)$	0	$+$	0	$+$	0
$f(x)$	$f(-3)$	$\nearrow$		$\nearrow$	$f(2)$

Vậy $\min\limits_{[-3;2]} f(x)=f(-3),\max\limits_{[-3;2]} f(x)=f(2)$. Do đó $m+M=f(-3)+f(2)=2+C_1+C_3$.

+ Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x=-1$ nên $\lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x)=\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x)\Leftrightarrow \frac{4}{3}+C_1=-1+C_2\ (1)$

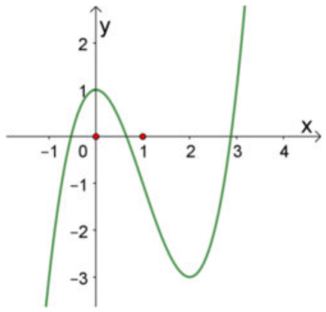
+ Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x=0$ nên $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)\Leftrightarrow C_2=C_3\ (2)$

+ Có $f(1)=0\Leftrightarrow C_3=-\frac{3}{2}\ (3)$

Từ $(1),(2),(3)$ suy ra $C_2=C_3=-\frac{3}{2}, C_1=-\frac{23}{6}$

Vậy nên $m+M=2+C_1+C_3=-\frac{10}{3}$.

Câu 7: Cho hàm số $f(x)$. Biết hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên .



Hỏi giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[-1;3]$ là

A. $f(-1)$. **B.** $f(3)$. **C.** $f(0)$. **D.** $f(2)$.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $f(x)$ trên đoạn $[-1;3]$, ta có: $x\in[-1;a]$.

Với $a\in(0;1)$ hàm số đồng biến và $x\in[a;3]$ hàm số nghịch biến.

Ta có bảng biến thiên như sau:

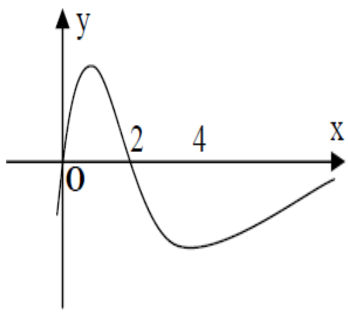
x	$-\infty$		-1		a		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$+$		$-$		$+$	
$f(x)$			$f(-1)$	$\nearrow$	$f(a)$	$\searrow$	$f(3)$		

Mặt khác ta có $\int\limits_{-1}^{3} f'(x)dx=\int\limits_{-1}^{a} f'(x)dx+\int\limits_{a}^{3} f'(x)dx<0$.

Suy ra $f(3)<f(-1)$.

Vậy hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $f(3)$.

Câu 8: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $y=f'(x)$. Hàm $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Biết rằng $f(0)+f(1)-2f(2)=f(4)-f(3)$. Tìm giá trị nhỏ nhất m và giá trị lớn nhất M của $f(x)$ trên đoạn $[0;4]$.

A. $m = f(4); M = f(2)$. **B.** $m = f(4); M = f(1)$.

C. $m = f(0); M = f(2)$. **D.** $m = f(1); M = f(2)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có bảng biến thiên trên [0;4]

x	0		1		2		3		4
y'	0		+		0		+		
y					$f(2)$				
	$f(0)$								$f(4)$

Dựa vào bảng biến thiên ta có $M = f(2); m = \min\{f(0); f(4)\}$.

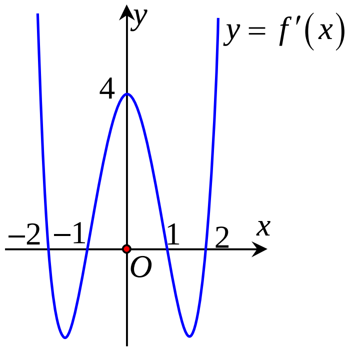
Mặt khác có $f(1) < f(2); f(3) < f(2) \Rightarrow f(1) + f(3) < 2f(2) \Leftrightarrow 2f(2) - f(1) - f(3) > 0$.

Mà

$f(0) + f(1) - 2f(2) = f(4) - f(3) \Leftrightarrow 2f(2) - f(1) - f(3) = f(0) - f(4) > 0 \Leftrightarrow f(0) > f(4)$

Do vậy $m = f(4)$.

Câu 9: Cho hàm số $f(x) = x^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex$ $(b, c, d, e \in \mathbb{R})$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[-1;3]$. Tính $M + m$.

A. $\dfrac{250}{3}$. **B.** $\dfrac{38}{3}$. **C.** $\dfrac{196}{3}$. **D.** $\dfrac{272}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Do $f'(x) = 0$ có 4 nghiệm phân biệt $-2; -1; 1; 2$ nên

Ta có $f'(x) = 5x^4 + 4bx^3 + 3cx^2 + 2dx + e = 5(x+2)(x+1)(x-1)(x-2) = 5(x^4 - 5x^2 + 4)$

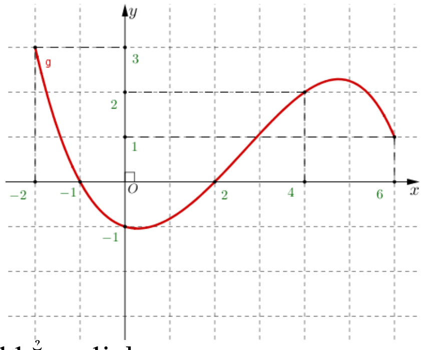
Suy ra $f(x) = x^5 - \dfrac{25}{3}x^3 + 20x$.

Xét hàm số $f(x) = x^5 - \dfrac{25}{3}x^3 + 20x$ trên $[-1;3]$. Ta có

$f(-1) = -\dfrac{38}{3}; f(1) = \dfrac{38}{3}; f(2) = \dfrac{16}{3}; f(3) = 78$.

Vậy $M = 78, m = -\dfrac{38}{3} \Rightarrow M + m = \dfrac{196}{3}$.

Câu 10: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị của hàm số $f'(x)$ trên đoạn $[-2;6]$ như hình vẽ bên.



Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

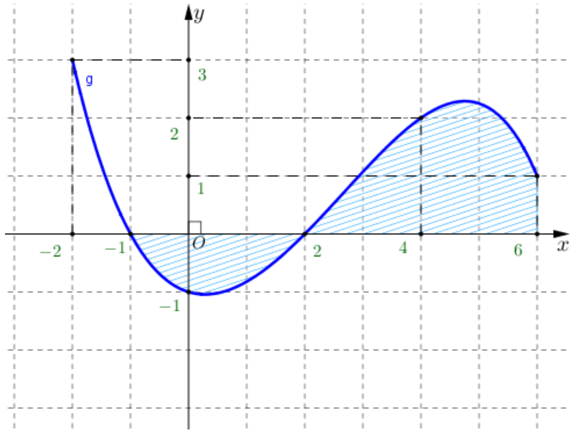
A. $\max\limits_{x\in[-2;6]} f(x)=f(-2)$. **B.** $\max\limits_{x\in[-2;6]} f(x)=f(2)$. **C.** $\max\limits_{x\in[-2;6]} f(x)=f(6)$. **D.** $\max\limits_{x\in[-2;6]} f(x)=f(-1)$.

Lời giải

Chọn C

Từ đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ ta có bảng biến thiên như sau:

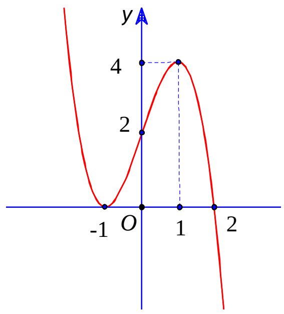
x	-2		-1		2		6
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y		↗	$f(-1)$	↘		↗	$f(6)$



Ta có

$$f(6)-f(-1)=\int_{-1}^{6} f'(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{2} f'(x)\mathrm{d}x+\int_{2}^{6} f'(x)\mathrm{d}x=S_2-S_1>0\Rightarrow f(6)>f(-1).$$

Câu 11: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ liên tục trên tập số thực $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Biết $f(-1)=\dfrac{13}{4}, f(2)=6$. Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x)=f^3(x)-3f(x)$ trên $[-1;2]$ bằng

A. $\dfrac{1573}{64}$. **B.** 198. **C.** $\dfrac{37}{4}$. **D.** $\dfrac{14245}{64}$.

Lời giải

Chọn A

Từ đồ thị hàm số $y=f'(x)$ và giả thiết $f(-1)=\dfrac{13}{4}, f(2)=6$ ta có bảng biến thiên hàm số $y=f(x)$ trên $[-1;2]$:

x	-1		2
$f'(x)$	0	$+$	0
$f(x)$	$\dfrac{13}{4}$	$\nearrow$	6

Ta có $g'(x)=3f^2(x).f'(x)-3f'(x)$.

Xét trên đoạn $[-1;2]$.

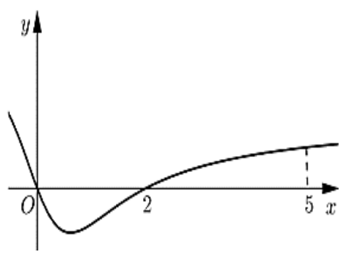
$g'(x)=0 \Leftrightarrow 3f'(x)\left[f^2(x)-1\right]=0 \Leftrightarrow f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=2 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	-1		2
$g'(x)$	0	$+$	0
$g(x)$		$\nearrow$	

$\Rightarrow \min\limits_{[-1;2]} g(x)=g(-1)=f^3(-1)-3f(-1)=\dfrac{1573}{64}$.

Câu 12: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)$. Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ được cho như hình vẽ bên. Biết rằng $f(0)+f(3)=f(2)+f(5)$. Tìm giá trị nhỏ nhất m và giá trị lớn nhất M của $f(x)$ trên đoạn $[0;5]$.



A. $m=f(0), M=f(5)$. **B.** $m=f(2), M=f(0)$.

C. $m=f(1), M=f(5)$. **D.** $m=f(2), M=f(5)$.

Lời giải

Chọn D

Dựa vào đồ thị ta có bảng biến thiên

x	0		2		3		5
y'	0	$-$	0	$+$		$+$	
y	$f(0)$	$\searrow$	$f(2)$	$\nearrow$	$f(3)$	$\nearrow$	$f(5)$

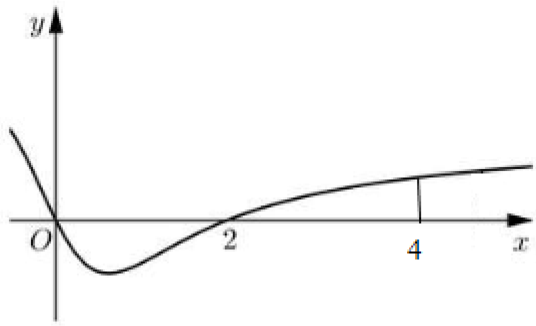
Ta có:

$\min\limits_{[0;5]} f(x) = f(2)$ và $f(3) > f(2)$.

Mà $f(0)+f(3)=f(2)+f(5) \Rightarrow f(0)-f(5)=f(2)-f(3)<0 \Rightarrow f(0) < f(5)$

$\Rightarrow \max\limits_{[0;5]} f(x) = f(5)$.

Câu 13 : Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ được cho như hình vẽ bên. Biết rằng $f(0)+f(3)=f(2)+f(4)$. Giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của $f(x)$ trên đoạn $[0;4]$ lần lượt là



A. $f(0), f(4)$. **B.** $f(2), f(0)$. **C.** $f(1), f(4)$. **D.** $f(2), f(4)$.

Lời giải

Chọn D

Cách 1:

Dựa vào đồ thị hàm số $y=f'(x)$ lập bảng biến thiên, ta có $\min\limits_{[2;4]} f(x) = f(2)$

Và $\max\limits_{[0;4]} f(x) = \max\{f(0), f(4)\}$.

Vì $f(x)$ đồng biến trên đoạn $[2;4]$ nên

$f(3) > f(2) \Rightarrow f(4)-f(2) > f(4)-f(3) = f(0)-f(2)$.

Do đó $f(4) > f(0)$, vậy $\max\limits_{[0;5]} f(x) = \max\{f(0), f(4)\} = f(4)$.

Cách 2:

Căn cứ đồ thị của $y=f'(x)$ và ứng dụng tích phân, ta có:

$S_1 = \int_0^2 |f'(x)|dx = \int_0^2 f'(x)dx = f(0)-f(2)$ và $S_2 = \int_2^4 |f'(x)|dx = \int_2^4 f'(x)dx = f(2)-f(4)$.

Theo giả thiết, ta có:

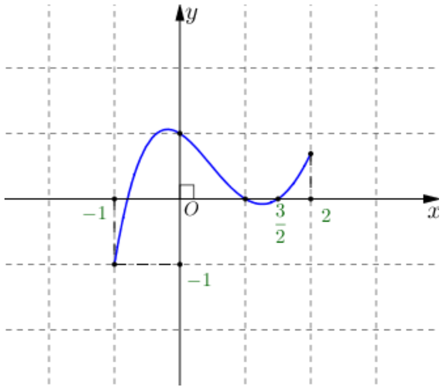
$f(0)+f(3)=f(2)+f(4) \Rightarrow f(4)-f(3)=f(0)-f(2)$.

Suy ra $S_2 = \int_2^4 |f'(x)|dx > \int_3^4 |f'(x)|dx = f(4)-f(3) = S_1$.

Suy ra $S_2 > S_1 > 0 \Rightarrow f(4) > f(0) > f(2)$.

Vậy $\min\limits_{[0;5]} f\left(x\right) = f\left(2\right), \max\limits_{[0;5]} f\left(x\right) = f\left(4\right)$.

Câu 14: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $\left[-1;2\right]$, có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ sau.



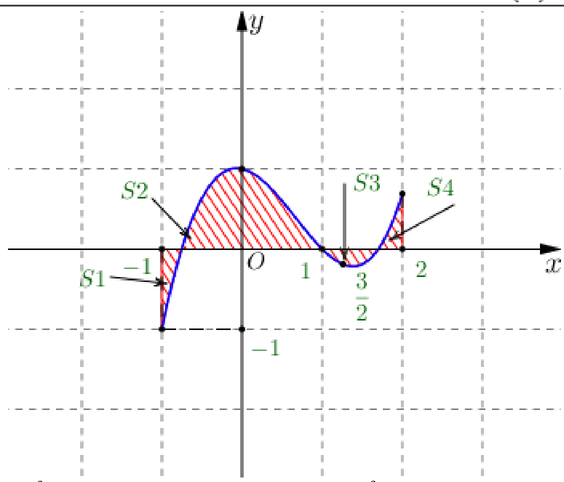
Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $\max\limits_{[-1;2]} f(x) = f(-1)$. **B.** $\max\limits_{[-1;2]} f(x) = f(2)$. **C.** $\max\limits_{[-1;2]} f(x) = f(1)$. **D.** $\max\limits_{[-1;2]} f(x) = f\left(\dfrac{3}{2}\right)$

Lời giải

Chọn B

x	-1		a		1		$\frac{3}{2}$		2
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$f(-1)$	↘	$f(a)$	↗	$f(1)$	↘	$f\left(\frac{3}{2}\right)$	↗	$f(2)$



Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường thẳng $x = -1; x = a, y = 0$ và đồ thị $y = f'(x)$.

S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường thẳng $x = a; x = 1; y = 0$ và đồ thị $y = f'(x)$.

S_3 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường thẳng $x = 1; x = \dfrac{3}{2}; y = 0$ và đồ thị $y = f'(x)$.

S_4 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường thẳng $x = \dfrac{3}{2}; x = 2; y = 0$ và đồ thị $y = f'(x)$.

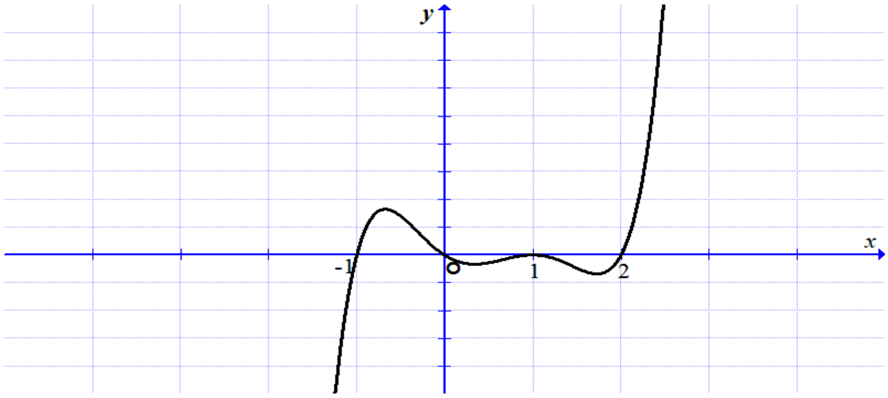
Ta có: $f(1) - f(-1) = \int\limits_{-1}^{1} f'(x)dx = \int\limits_{-1}^{a} f'(x)dx + \int\limits_{a}^{1} f'(x)dx = S_2 - S_1 > 0 \Rightarrow f(1) > f(-1)$

$f(2) - f(1) = \int\limits_{1}^{2} f'(x)dx = \int\limits_{1}^{\frac{3}{2}} f'(x)dx + \int\limits_{\frac{3}{2}}^{2} f'(x)dx = S_4 - S_3 > 0 \Rightarrow f(2) > f(1)$.

Suy ra $f(2) > f(1) > f(-1) > f\left(\frac{3}{2}\right)$.

Dạng 8: Cho đồ thị, BBT của hàm số $y = f'(x)$, tìm GTLN, GTNN của hàm số $y = f(|x|)$ trên khoảng, đoạn.

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như sau:



Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(|x|)$ trên đoạn $[-4;3]$. Tính giá trị của $M - m$.

A. $f(4) + f(2)$. **B.** $f(4) + f(0)$. **C.** $f(3) - f(0)$. **D.** $f(3) + f(2)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 0 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{array}\right.$.

Mặt khác hàm số $y = f(|x|)$ là hàm số chẵn.

Ta có bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ và $f(|x|)$.

x	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	0	-	0	+	
$y = f(x)$	$+\infty$	↘	$f(-1)$	↗	$f(0)$	↘		↘	$f(2)$	↗	$+\infty$

x	-4		-2		0		2		3
y'		-	0	+	0	-	0	+	
$y = f(\|x\|)$	$f(4)$	↘	$f(2)$	↗	$f(0)$	↘	$f(2)$	↗	$f(3)$

Từ hình vẽ của đồ thị $y = f'(x)$ ta có

$\int_0^2 |f'(x)| dx < \int_2^3 |f'(x)| dx$.

Suy ra:

$-[f(2) - f(0)] < f(3) - f(2) \Leftrightarrow f(3) - f(2) > 0 \Leftrightarrow f(0) < f(3)$.

$\int_2^3 |f'(x)| dx < \int_2^4 |f'(x)| dx$

Suy ra:

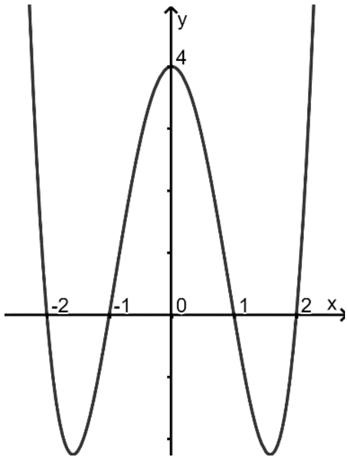
$f(3)-f(2)<f(4)-f(2)\Leftrightarrow f(3)-f(2)>0\Leftrightarrow f(3)<f(4)$

Vậy: $f(0)<f(3)<f(4)$.

Mặt khác từ bảng biến thiên hàm số $y=f(|x|)$ ta có: $\min\limits_{[-4;3]} f(|x|)=f(0)$.

$\Rightarrow \max\limits_{[-4;3]} f(|x|)=f(-4)=f(4)=M\Rightarrow M+m=f(4)+f(2)$.

Câu 2: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x)=f(|x|)$ trên đoạn $[-2;1]$. Tính $M+m$.

A. $f(1)+f(0)$ **B.** $f(1)+f(-2)$ **C.** $f(-2)+f(-1)$ **D.** $f(-1)+f(0)$

Lời giải

Chọn A

Từ đồ thị ta suy ra bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$ như sau:

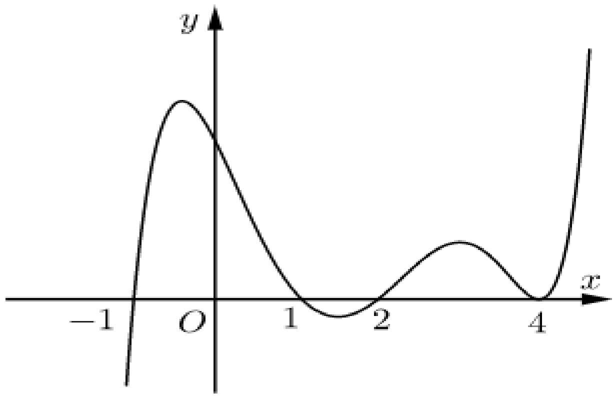
x	$-\infty$		-2		-1		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(-2)$	↘	$f(-1)$	↗	$f(1)$	↘	$f(2)$	↗	$+\infty$

Với $x\in[-2;1]$ thì $|x|\in[0;2]$, từ bảng biến thiên suy ra $M=f(1)$ và $m=\min\{f(0),f(2)\}$.

Do $\int\limits_0^1 f'(x)dx>-\int\limits_1^2 f'(x)dx\Leftrightarrow f(1)-f(0)>f(1)-f(2)\Leftrightarrow f(2)>f(0)$, nên $m=f(0)$.

Vậy $M+m=f(1)+f(0)$.

Câu 3: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y=f(|x|)$ trên đoạn $[-1;4]$?



A. $\max\limits_{[-1;4]} f\left(|x|\right)=f\left(1\right);\ \min\limits_{[-1;4]} f\left(|x|\right)=f\left(0\right)$.

B. $\max\limits_{[-1;4]} f\left(|x|\right)=f\left(4\right);\ \min\limits_{[-1;4]} f\left(|x|\right)=f\left(0\right)$.

C. $\max\limits_{[-1;4]} f\left(|x|\right)=f\left(4\right);\ \min\limits_{[-1;4]} f\left(|x|\right)=f\left(2\right)$.

D. $\max\limits_{[-1;4]} f\left(|x|\right)=f\left(1\right);\ \min\limits_{[-1;4]} f\left(|x|\right)=f\left(2\right)$.

Lời giải

Chọn B

Từ đồ thị của hàm số $y=f'\left(x\right)$ ta có bảng biến thiên của $y=f\left(x\right)$ trên $\left[-1;4\right]$:

x	-1		1		2		4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$f(-1)$	$\nearrow$	$f(1)$	$\searrow$	$f(2)$	$\nearrow$	$f(4)$

Từ bảng biến thiên $y=f\left(x\right)$ ta có bảng biến thiên của hàm số $y=f\left(|x|\right)$:

x	-4		-2		-1		0		1		2		4
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	||	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$f(4)$	$\searrow$	$f(2)$	$\nearrow$	$f(1)$	$\searrow$	$f(0)$	$\nearrow$	$f(1)$	$\searrow$	$f(2)$	$\nearrow$	$f(4)$

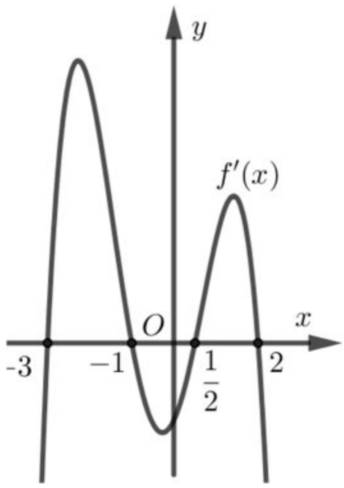
Từ hình vẽ ta có:

$$\int_0^1\left|f'\left(x\right)\right|dx>\int_1^2\left|f'\left(x\right)\right|dx \Leftrightarrow f\left(1\right)-f\left(0\right)>f\left(1\right)-f\left(2\right)\Rightarrow f\left(2\right)>f\left(0\right).$$

$$\int_2^4\left|f'\left(x\right)\right|dx>\int_1^2\left|f'\left(x\right)\right|dx \Leftrightarrow f\left(4\right)-f\left(2\right)>f\left(1\right)-f\left(2\right)\Rightarrow f\left(4\right)>f\left(1\right).$$

Vậy $\max\limits_{[-1;4]} f\left(|x|\right)=f\left(4\right);\ \min\limits_{[-1;4]} f\left(|x|\right)=f\left(0\right)$.

Câu 4: Cho hàm số $f\left(x\right)=ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex+n\ \left(a,b,c,d,e,n\in\mathbb{R}\right)$. Hàm số $y=f'\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên (đồ thị cắt Ox tại 4 điểm có hoành độ $-3;-1;\frac{1}{2}$ và 2). Đặt $M=\max\limits_{[-3;2]} f\left(|x|\right); m=\min\limits_{[-3;2]} f\left(|x|\right)$ và $T=M+m$. Khẳng định nào sau đây đúng?



A. $T = f(-3) + f(2)$. **B.** $T = f(-3) + f(0)$. **C.** $T = f\left(\frac{1}{2}\right) + f(2)$. **D.** $T = f\left(\frac{1}{2}\right) + f(0)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f'(x) = 5ax^4 + 4bx^3 + 3cx^2 + 2dx + e = 5a(x+3)(x+1)\left(x - \frac{1}{2}\right)(x-2)$ (Vì phương trình $f'(x) = 0$ có 4 nghiệm $-3; -1; \frac{1}{2}$ và 2).

Từ đồ thị ta có bảng biến thiên của $f(x)$

x	$-\infty$		-3		-1		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f(-3)$	↗	$f(-1)$	↘	$f\left(\frac{1}{2}\right)$	↗	$f(2)$	↘	$-\infty$

Từ bảng biến thiên $\Rightarrow a < 0$.

Suy ra bảng biến thiên của $f(|x|)$

x	-3		-2		$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	|	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$f(-3)$	↗	$f(-2)$	↘	$f\left(-\frac{1}{2}\right)$	↗	$f(0)$	↘	$f\left(\frac{1}{2}\right)$	↗	$f(2)$	↘	$-\infty$

Vì hàm số $f(|x|)$ là hàm số chẵn $\Rightarrow \begin{cases} f(-2) = f(2); f(-3) = f(3) \\ f\left(-\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) \end{cases}$.

+) $f(3) - f\left(\frac{1}{2}\right) = \int_{\frac{1}{2}}^{3} f'(x)\,dx = 5a\int_{\frac{1}{2}}^{3}(x+3)(x+1)\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-2)\,dx = \frac{11125a}{128} < 0$

$\Rightarrow f(-3) = f(3) < f\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(-\frac{1}{2}\right)$ (1)

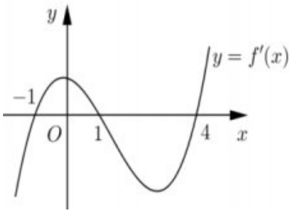
+) $f(2) - f(0) = \int_{0}^{2} f'(x)\,dx = 5a\int_{0}^{2}(x+3)(x+1)\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-2)\,dx = -23a > 0$

$\Rightarrow f(-2) = f(2) > f(0)$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow M = \max\limits_{[-3;2]} f(|x|) = f(-2) = f(2); m = \min\limits_{[-3;2]} f(|x|) = f(-3)$.

Vậy $T = M + m = f(-3) + f(2)$.

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình bên



Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(|x|)$ trên đoạn $[-1;4]$.

A. $f(-1)$. **B.** $f(1)$. **C.** $f(0)$. **D.** $f(4)$.

Lời giải

Chọn D

Từ đồ thị hàm số $y = f'(x)$ ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-1;4]$

x	-1		1		4
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	0
$f(x)$	$f(-1)$	$\nearrow$	$f(1)$	$\searrow$	$f(4)$

Suy ra bảng biến thiên của hàm số $y = f(|x|)$ trên đoạn $[-1;4]$

x	-1		0		1		4
$f'(x)$	0	$-$	|	$+$	0	$-$	0
$f(\lvert x\rvert)$	$f(1)$	$\searrow$	$f(0)$	$\nearrow$	$f(1)$	$\searrow$	$f(4)$

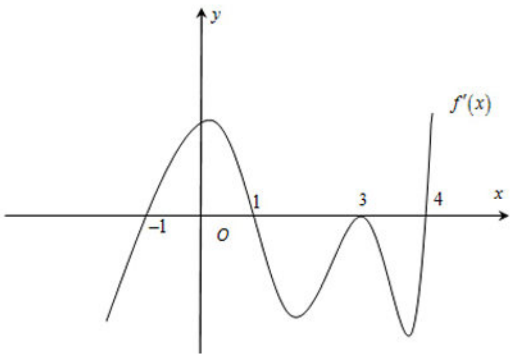
Từ đồ thị ta có $\int\limits_0^1 f'(x)dx < -\int\limits_1^4 f'(x)dx \Leftrightarrow f(x)\Big|_0^1 < -f(x)\Big|_1^4 \Leftrightarrow f(1) - f(0) < f(1) - f(4)$

$\Leftrightarrow f(0) > f(4)$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(|x|)$ trên đoạn $[-1;4]$ là $f(4)$.

Dạng 9: Cho đồ thị, BBT của hàm số $y = f'(x)$, tìm GTLN, GTNN của hàm số $y = |f(x)|$ trên khoảng, đoạn.

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Biết $f(1)<0$. Tìm giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số $g(x)=|f(x)|$ trên đoạn $[1;4]$.

A. $M=f(4), m=f(1)$. **B.** $M=f(3), m=f(1)$.

C. $M=|f(4)|, m=|f(1)|$. **D.** $M=|f(1)|, m=|f(4)|$.

Lời giải

Chọn C

Từ đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ ta có bảng biến thiên sau:

x	1		3		4
$f'(x)$	0	$-$	0	$-$	0
$f(x)$	$f(1)$	$\searrow$			$f(4)$

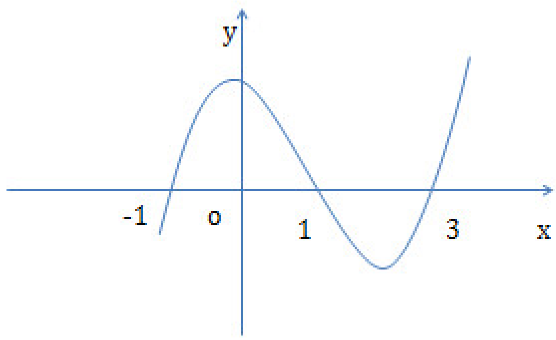
Do $f(1)<0$ nên ta có $f(4)<f(1)<0 \Rightarrow |f(4)|>|f(1)|$

Ta có bảng biến thiên:

$f'(x)$	0	$-$	0	$-$	0
$f(x)$	$f(1)$	$\searrow$			$f(4)$
$g(x)=\|f(x)\|$	$\|f(1)\|$	$\nearrow$			$\|f(4)\|$

Vậy $M=|f(4)|; m=|f(1)|$.

Câu 2: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(1)<0$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ .



Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x)=|f(x)|$ trên $[-1;1]$. Khi đó $M; m$ là

A. $M = f(-1), m = f(1)$.

B. $M = |f(1)|, m = |f(-1)|$.

C. $M = |f(-1)|, m = |f(1)|$.

D. $M = f(-1), m = |f(1)|$.

Lời giải

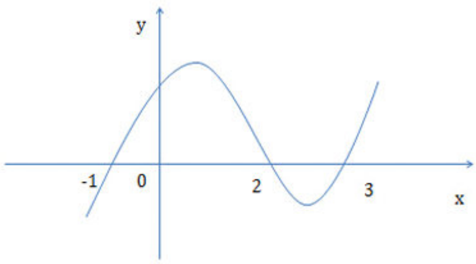
Chọn C

Từ đồ thị hàm số $y = f'(x)$ ta có $y = f(x)$ luôn đồng biến trên $[-1;1]$ nên $f(-1) < f(1) < 0, \forall x \in [-1;1]$.

Do đó $|f(-1)| > |f(1)|, \forall x \in [-1;1]$ nên

$\max\limits_{[-1;1]} g(x) = |f(-1)|; \min\limits_{[-1;1]} g(x) = |f(1)| \Rightarrow M = |f(-1)|, m = |f(1)|$.

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(2) < 0$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ .



Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x) = |f(x)|$ trên $[-1;3]$. Khi đó $M; m$ là

A. $M = f(-1), m = f(3)$.

B. $M = |f(3)|, m = |f(-1)|$.

C. $M = |f(-1)|, m = |f(2)|$.

D. $M = |f(-1)|, m = |f(3)|$.

Lời giải

Chọn C

Từ đồ thị hàm số $y = f'(x)$ ta có $y = f(x)$ luôn đồng biến trên $[-1;2]$ và nghịch biến trên $[2;3]$ nên $f(-1) < f(2) < 0, \forall x \in [-1;2]$ và $f(3) < f(2) < 0, \forall x \in [2;3]$.

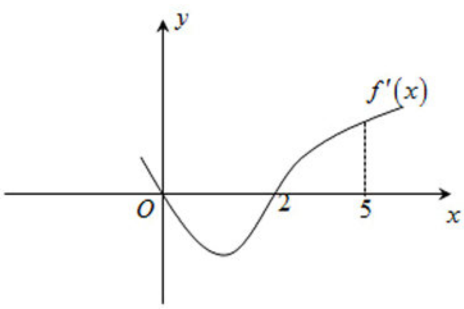
Mặt khác ta có

$$\int_{-1}^{2} f'(x)dx > \int_{2}^{3} -f'(x)dx \Leftrightarrow f(x)\Big|_{-1}^{2} > -f(x)\Big|_{2}^{3} \Rightarrow f(2) - f(-1) > -f(3) + f(2) \Rightarrow f(-1) < f(3)$$

Do đó ta có $f(-1) < f(3) < f(2) < 0, \forall \in [-1;3] \Rightarrow |f(-1)| > |f(3)| > |f(2)|$

$\max\limits_{[-1;3]} g(x) = |f(-1)|; \min\limits_{[-1;3]} g(x) = |f(2)| \Rightarrow M = |f(-1)|, m = |f(2)|$.

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $[0;5]$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ trên $[0;5]$ như hình vẽ.



Biết $f(0) + f(3) = f(2) + f(5)$ và $f(5) < 0$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $g\left(x\right)=\left|f\left(x\right)\right|$ trên đoạn $\left[0;5\right]$.

A. $\left|f\left(3\right)\right|,\left|f\left(5\right)\right|$. **B.** $\left|f\left(2\right)\right|,\left|f\left(0\right)\right|$. **C.** $\left|f\left(2\right)\right|,\left|f\left(5\right)\right|$. **D.** $\left|f\left(0\right)\right|,\left|f\left(5\right)\right|$.

Lời giải

Chọn C

Từ đồ thị của hàm số $y=f'\left(x\right)$ ta có bảng biến thiên sau

x	0		2		3		5
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$f(x)$	$f(0)$	$\searrow$	$f(2)$	$\nearrow$	$f(3)$	$\nearrow$	$f(5)$

Theo giả thiết ta có $f\left(0\right)+f\left(3\right)=f\left(2\right)+f\left(5\right)\Leftrightarrow f\left(5\right)-f\left(0\right)=f\left(3\right)-f\left(2\right)$ mà $f\left(3\right)>f\left(2\right)\Rightarrow f\left(5\right)>f\left(0\right)$

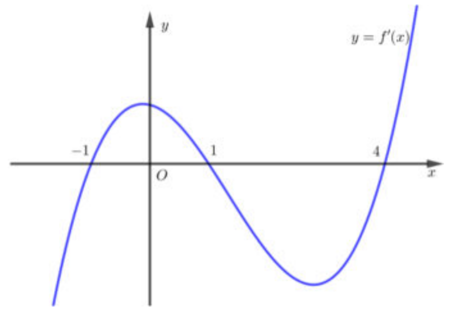
Cũng theo giả thiết ta có $f\left(5\right)<0$ nên $f\left(2\right)<f\left(0\right)<f\left(5\right)<0\Rightarrow\left|f\left(2\right)\right|>\left|f\left(0\right)\right|>\left|f\left(5\right)\right|$

Do đó ta suy ra bảng biến thiên sau

x	0		2		3		5
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$f(x)$	$f(0)$	$\searrow$	$f(2)$	$\nearrow$	$f(3)$	$\nearrow$	$f(5)$
$g(x)=\vert f(x)\vert$	$\vert f(0)\vert$	$\nearrow$	$\vert f(2)\vert$		$\searrow$		$\vert f(5)\vert$

Vậy $\max\limits_{[0;5]} g\left(x\right)=\left|f\left(2\right)\right|;\min\limits_{[0;5]} g\left(x\right)=\left|f\left(5\right)\right|$.

Câu 5: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị $y=f'\left(x\right)$ như hình vẽ dưới đây và $f\left(1\right)<0$.



Khi đó giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|$ trên đoạn $\left[-1;4\right]$ bằng

A. $\left|f\left(0\right)\right|$. **B.** $\left|f\left(1\right)\right|$. **C.** $\left|f\left(-1\right)\right|$. **D.** $\left|f\left(4\right)\right|$.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $y=f\left(x\right)$. Ta có $f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=1\\x=4\end{array}\right.$.

Ta có bảng biến thiên

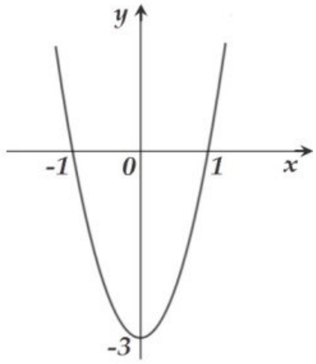
x	-1		1		4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$f(-1)$ $\nearrow$	$f(1)$	$\searrow$ $f(4)$	

Từ đồ thị hàm số, suy ra $\int_{-1}^{1}\left|f'(x)\right|dx < \int_{1}^{4}\left|f'(x)\right|dx \Rightarrow \int_{-1}^{1} f'(x)dx < -\int_{1}^{4} f'(x)dx$

$$\Rightarrow f(x)\Big|_{-1}^{1} < -f(x)\Big|_{1}^{4} \Rightarrow f(-1) > f(4).$$

Ta có $f(4) < f(-1) < f(1) < 0 \Rightarrow \left|f(4)\right| > \left|f(-1)\right| > \left|f(1)\right| \Rightarrow \max\limits_{[-1,4]}\left|f(x)\right| = \left|f(4)\right|$.

Câu 6: Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị (C). Biết đồ thị (C) tiếp xúc với đường thẳng $y = 4$ tại điểm có hoành độ âm và đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên dưới



Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \left|f(x)\right|$ trên $[0;3]$ bằng

A. 20. **B.** 60. **C.** 22. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Vì đồ thị hàm $f'(x)$ cắt Ox tại hai điểm phân biệt có hoành độ $x = -1$ và $x = 1$ nên $f'(x) = k(x-1)(x+1)$ với k là số thực khác 0.

Vì đồ thị hàm $f'(x)$ đi qua điểm $(0;-3)$ nên ta có $-3 = -k \Leftrightarrow k = 3$.

Suy ra $f'(x) = 3x^2 - 3$. Mà $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ nên ta có được $a = 1, b = 0, c = -3$.

Từ đó $f(x) = x^3 - 3x + d$.

Do đồ thị $f(x)$ tiếp xúc với đường thẳng $y = 4$ tại điểm có hoành độ âm nên ta có $\begin{cases} x^3 - 3x + d = 4 \\ 3x^2 - 3 = 0 \\ x < 0 \end{cases}$ có nghiệm. Suy ra $\begin{cases} x = -1 \\ d = 2 \end{cases}$.

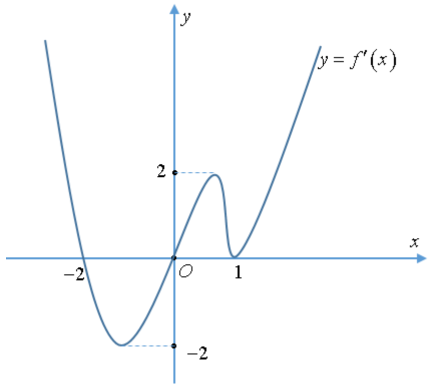
Do đó $f(x) = x^3 - 3x + 2$ và $y = \left|f(x)\right| = \left|x^3 - 3x + 2\right|$ với $x \in [0;3]$.

Ta có $f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 1 \end{array}\right.$ và $f(0) = 2; f(1) = 0; f(3) = 20$.

Suy ra $m = \min\limits_{[0;3]} f(x) = 0$ và $M = \max\limits_{[0;3]} f(x) = 20$.

Vậy $\max\limits_{[0;3]}\left|f(x)\right| = \max\left\{|m|;|M|\right\} = 20$.

Câu 7: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị của hàm $y = f'(x)$ được cho như hình bên dưới và $f(-2) = 3$, $f(0) = -5$, $f(1) = 0$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số $y = |f(x)| + 1$ trên $[-2;1]$. Khi đó $M^2 + m^2$ bằng



A. 8. **B.** 25. **C.** 37. **D.** 34.

Lời giải

Chọn C

Quan sát đồ thị $f'(x)$ ta có: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right.$.

Ta có bảng biến thiên:

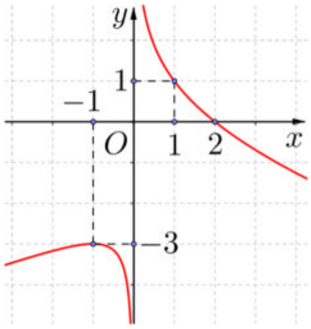
x	$-\infty$		-2		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-5	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Quan sát bảng biến thiên ta có: $x \in [-2;1]$ thì $f(x) \in [-5;3] \Rightarrow |f(x)| + 1 \in [1;6]$.

Suy ra $M = 6$ và $m = 1$.

Vậy $M^2 + m^2 = 37$.

Câu 8: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ nhận trục tung làm đường tiệm cận đứng về cả hai phía như hình vẽ.



Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = |f(x)|$ trên đoạn $[-1;3]$, biết rằng $f(1) = \frac{2}{5}$ và $f(-1) + f(0) + f(1) = 0$.

A. $|f(0)|$. **B.** $|f(-1)|$. **C.** $|f(2)|$. **D.** $|f(3)|$.

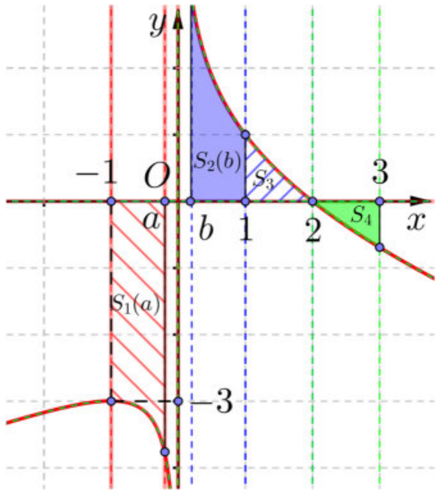
Lời giải

Chọn A

Từ đồ thị hàm $y=f'(x)$ ta có $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=2$ và $f'(x)$ không xác định tại $x=0$.

Do $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên bảng biến thiên của $y=f(x)$ trên đoạn $[-1;3]$ là:

x	-1		0		1		2		3
$f'(x)$		$-$	$\|\|$		$+$		0	$-$	
$f(x)$	$f(-1)$	$\searrow$	$f(0)$	$\nearrow$	$\frac{2}{5}$	$\nearrow$	$f(2)$	$\searrow$	$f(3)$



Vì $f(x)$ liên tục tại $x=0$ nên $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)$.

Gọi $S_1(a)$ là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f'(x),\ y=0,\ x=-1,\ x=a$ với $a\in(-1;0)$ (Hình vẽ).

Ta có $f(-1)-f(0)=\lim\limits_{a\to 0^-}\left[f(-1)-f(a)\right]=\lim\limits_{a\to 0^-}\left(\int\limits_a^{-1} f'(x)\mathrm{d}x\right)=\lim\limits_{a\to 0^-} S_1(a)>3$

Suy ra $f(0)<f(-1)-3$ (*)

Gọi $S_2(b)$ là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f'(x),\ y=0, x=b, x=1$ với $b\in(0;1)$.

Khi đó $f(1)-f(0)=\lim\limits_{b\to 0^+}\left[f(1)-f(b)\right]=\lim\limits_{b\to 0^+}\left(\int\limits_b^{1} f'(x)\mathrm{d}x\right)=\lim\limits_{b\to 0^+} S_2(b)>1$

Suy ra $f(0)<f(1)-1$ (**)

Từ (*) và (**) suy ra $2f(0)<f(-1)+f(1)-4$

$\Rightarrow 3f(0)<f(0)+f(-1)+f(1)-4=-4 \Rightarrow f(0)<-\frac{4}{3} \Rightarrow |f(0)|>\frac{4}{3}$ (1)

Từ bảng biến thiên ta có $f(-1)>f(0)$.

Lại có $f(0)=-\left[f(1)+f(-1)\right] \Rightarrow |f(0)|=f(1)+f(-1)=\frac{2}{5}+f(-1)>f(-1)$

Do đó ta có $f(0)<f(-1)<|f(0)| \Rightarrow |f(0)|>|f(-1)|$ (2)

Gọi S_3 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f'(x),\ y=0,\ x=1, x=2$.

Ta có $f(2)>f(1)=\frac{2}{5}>0$ và $f(2)-f(1)=\int\limits_1^2 f'(x)\mathrm{d}x=S_3<\frac{1}{2}$

$\Rightarrow 0 < f(2) < \frac{1}{2} + f(1) = \frac{1}{2} + \frac{2}{5} = \frac{9}{10}$

Do đó $|f(0)| > \frac{4}{3} > \frac{9}{10} > f(2) = |f(2)|$ (3)

Gọi S_4 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f'(x)$, $y = 0$, $x = 2, x = 3$.

Ta có $f(2) - f(3) = \int\limits_3^2 f'(x)\mathrm{d}x = S_4 < 1 \Rightarrow f(3) > f(2) - 1 > f(1) - 1 = \frac{2}{5} - 1 = -\frac{3}{5}$

Kết hợp với $f(3) < f(2) < \frac{9}{10}$ nên $|f(3)| < \frac{9}{10}$, suy ra $|f(3)| < |f(0)|$ (4)

Từ (1), (2), (3), (4) suy ra $\max\limits_{x\in[-1;3]} |f(x)| = |f(0)|$.

Chú thích của tác giả: Sáng tác dựa trên hàm số $f(x) = -\frac{3}{5}(x-5)\sqrt[3]{x^2} - 2$.

Dạng 10: Cho đồ thị, BBT của hàm số $y = f'(x)$, tìm GTLN, GTNN của hàm số $y = f(|x+a|+b)$ trên khoảng, đoạn.

1. Lý thuyết:

+) $g'(x) = \frac{x+a}{|x+a|}.f'(|x+a|+b)$.

+) *Dựa vào bảng biến thiên hoặc đồ thị của hàm số $f'(x)$ giải phương trình $g'(x) = 0$ và tìm các giá trị của x trên khoảng, đoạn đã cho mà tại đó $g'(x)$ không xác định. Từ đó lập bảng biến thiên của hàm số $g(x)$, dựa vào bảng biến thiên để kết luận về giá trị lớn nhất, nhỏ nhất.*

+) *Một số bài toán cần tìm ra công thức của hàm số $y = f(x)$. Khi đó, dựa vào bảng biến thiên hoặc đồ thị của hàm số $f'(x)$ và các giả thiết khác để thiết lập công thức của hàm số $f'(x)$, từ đó tìm công thức $y = f(x)$ bằng phép toán nguyên hàm.*

+) *Một số bài toán cho đồ thị của hàm số $f'(x)$, để tìm GTLN, NN của hàm số $f(|x+a|+b)$ cần dùng đến phép toán tích phân. Đặc biệt ý nghĩa của tích phân về diện tích hình phẳng.*

+) *Nếu biết đồ thị của hàm số $y = f(x)$, bằng phép biến đổi đồ thị thì chúng ta có thể suy ra được đồ thị $y = g(x) = f(|x+a|+b)$.*

+) *Một số bài toán tìm GTLN, NN của hàm số $y = g(x) = f(|x+a|+b)$ trên đoạn $[c;d]$, bằng cách đặt $t = |x+a|+b$, với $x \in [c;d]$ thì $t \in [m;n]$. Khi đó ta chuyển về tìm GTLN, NN của hàm số $f(t)$ trên $[m;n]$.*

2. Bài tập:

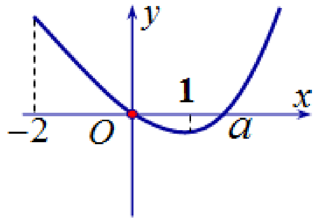
Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $f'(x)$ (như hình vẽ). Khi đó hàm số $g(x) = f(|x+1|-2)$ lần lượt đạt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất là M, m trên đoạn $[0;1]$. Khẳng định đúng là:

A. $M - m = f(-1) - f(0)$.

B. $M + 2m = f(0) + 2f(-1)$.

C. $2M - m = 2f(a) - f(0)$.

D. $m - M = f(-1) - f(0)$



Lời giải

Chọn B

Dựa vào đồ thị hàm số $f'(x)$, ta suy ra bảng biến thiên:

x	-2		0		a	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$y=f(x)$		$\nearrow$	$f(0)$	$\searrow$	$f(a)$	$\nearrow$

Xét hàm $h(x)=f(x+1)$ có đồ thị được suy ra bằng cách tịnh tiến đồ thị hàm $y=f(x)$ sang trái 1 đơn vị. Khi đó, ta được bảng biến thiên:

x		-1		$a-1$	
$h(x)=f(x+1)$	$\nearrow$	$f(0)$	$\searrow$	$f(a)$	$\nearrow$

Hàm $p(x)=f(\vert x+1\vert)$ có đồ thị được suy ra từ đồ thị hàm $h(x)$ bằng cách:

+ Giữ nguyên phần bên phải Oy (với $x\geq -1$).

+ Lấy đối xứng phần bên phải Oy qua trục tung.

Ta được bảng biến thiên:

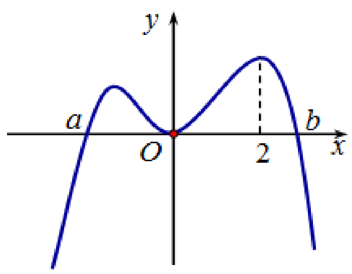
x		$-a-1$		-1		$a-1$	
$p(x)=f(\vert x+1\vert)$	$\searrow$	$f(a)$	$\nearrow$	$f(0)$	$\searrow$	$f(a)$	$\nearrow$

Hàm số $g(x)=f(\vert x+1\vert-2)$ có đồ thị được tạo thành bằng cách tịnh tiến đồ thị hàm $p(x)$ sang phải 2 đơn vị. Ta được bảng biến thiên:

x		$-a+1$		1		$a+1$	
$g(x)=f(\vert x+1\vert-2)$	$\searrow$	$f(a)$	$\nearrow$	$f(0)$	$\searrow$	$f(a)$	$\nearrow$

Vì $a>1$ nên $-a+1<0$ nên trên đoạn $[0;1]$ có $M=\max\limits_{[0;1]} g(x)=f(0)$, $m=\min\limits_{[0;1]} g(x)=f(-1)$.

Câu 2: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị $f'(x)$ (như hình vẽ). Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x)=f(\vert x+1\vert-3)$ trên đoạn $[1;4]$. Phát biểu nào sau đây đúng?



A. $M=g(4)$, $m=g(2)$.

B. $M=g(2)$, $m=g(4)$.

C. $M=g(a)$, $m=g(b)$.

C. $m=g(a)$, $M=g(b)$.

Lời giải

Chọn A

Dựa vào đồ thị hàm số $f'(x)$, ta suy ra bảng biến thiên:

x		a		0		b	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$
$y=f(x)$	↘	$f(a)$	↗	$f(0)$	↗	$f(b)$	↘

Xét hàm số $h(x)=f(x+1)$ có đồ thị được suy ra bằng cách tịnh tiến đồ thị hàm $y=f(x)$ sang trái 1 đơn vị. Khi đó, ta được bảng biến thiên:

x		$a-1$		-1		$b-1$	
$h'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$
$h(x)$	↘	$f(a)$	↗	$f(0)$	↗	$f(b)$	↘

Hàm $p(x)=f(|x+1|)$ có đồ thị được suy ra từ đồ thị hàm $h(x)$ bằng cách:

+ Giữ nguyên phần bên phải Oy (với $x\geq -1$).

+ Lấy đối xứng phần bên phải Oy qua trục tung.

Ta được bảng biến thiên:

x		$-b-1$		-1		$b-1$	
$p(x)$	↗	$f(b)$	↘	$f(0)$	↗	$f(b)$	↘

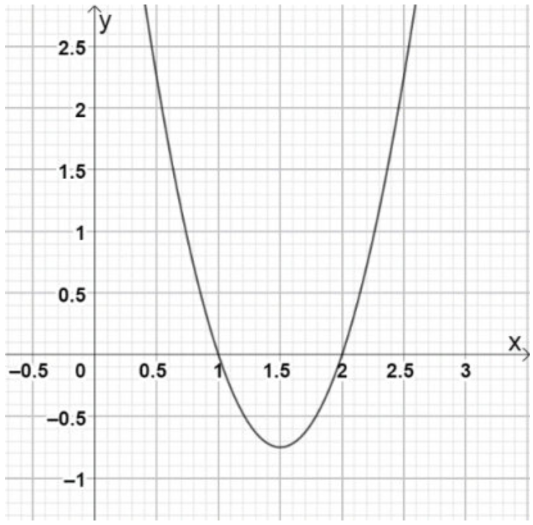
Hàm số $g(x)=f(|x+1|-3)$ có đồ thị được tạo thành bằng cách tịnh tiến đồ thị hàm $p(x)$ sang phải 3 đơn vị. Ta được bảng biến thiên:

x		$-b+2$		2		$b+2$	
$g(x)$	↗	$f(b)$	↘	$f(0)$	↗	$f(b)$	↘

Vì $b>2$ nên $b+2>4$. Đồ thị hàm $g(x)$ đối xứng qua đường thẳng $x=2$ nên ta có $g(1)=g(3)$ và $g(3)<g(4)<g(b+2)$.

Vậy $M=\max\limits_{[1;4]} g(x)=g(4)$, $m=\min\limits_{[1;4]} g(x)=g(2)$.

Câu 3: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ là hàm số bậc hai có đồ thị như hình vẽ.



Biết rằng $\min\limits_{\mathbb{R}} f'(x) = -\dfrac{3}{4}$, $f(0) = 0$. Giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = f(|x-2|+1)$ trên đoạn $[1;3]$ có dạng $\dfrac{m}{n}$ với $m, n \in \mathbb{Z}$, $n > 0$ và phân số đó tối giản. Tính $m^2 + n^2$.

A. 85. **B.** 74. **C.** 61. **D.** 58.

Lời giải

Chọn C

Vì $f'(x)$ là hàm số bậc hai nên nó có dạng: $f'(x) = ax^2 + bx + c \ (a \neq 0)$.

Từ đồ thị hàm số $f'(x)$ và giả thiết ta có

$$\begin{cases} f'(1) = 0 \\ f'\left(\dfrac{3}{2}\right) = -\dfrac{3}{4} \\ f'(2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c = 0 \\ \dfrac{9}{4}a + \dfrac{3}{2}b + c = -\dfrac{3}{4} \\ 4a + 2b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \\ c = 2 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = x^2 - 3x + 2$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + 2x + C.$$

Vì $f(0) = 0$ nên $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{3}{2}x^2 + 2x$.

Ta có $g'(x) = \dfrac{x-2}{|x-2|} f'(|x-2|+1)$ với $x \neq 2$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(|x-2|+1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |x-2|+1 = 1 \ (\text{VN do } x \neq 2) \\ |x-2|+1 = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 3 \end{array}\right..$$

Ta có bảng biến thiên

x	1		2		3
$g'(x)$	0	$+$	$\|$	$-$	0
$g(x)$	$g(1)$	$\nearrow$	$g(2)$	$\searrow$	$g(3)$

Dựa vào bảng biến thiên ta có $\max\limits_{[1;2]} g(x) = g(2) = f(1) = \dfrac{5}{6}$.

Do đó $m = 5,\ n = 6 \Rightarrow m^2 + n^2 = 61$.

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp hai trên $\mathbb{R}$. Biết $f'(0) = 3$, $f'(2) = f'(-2018) = 0$, và bảng xét dấu của $f''(x)$ như sau:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y=f\left(\left|x-1\right|-2018\right)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm x_0 thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(-1009;2)$. **B.** $(-2015;1)$. **C.** $(1;3)$. **D.** $(-\infty;-2015)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$\nearrow$	3	$\searrow$	0	$\nearrow$	

Từ đó ta có bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$

x	$-\infty$		-2018		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$f(-2018)$	$\nearrow$		$\nearrow$	

$$y=f\left(\left|x-1\right|-2018\right)\Rightarrow y'=\frac{x-1}{\left|x-1\right|}f'\left(\left|x-1\right|-2018\right) \text{ với } x\neq 1.$$

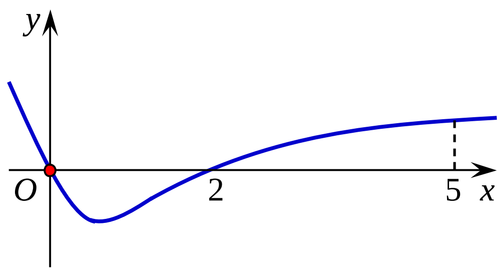
$$y'=0\Leftrightarrow f'\left(\left|x-1\right|-2018\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left|x-1\right|-2018=2\\ \left|x-1\right|-2018=-2018\,(\text{VN})\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2021\\ x=-2019\end{array}\right..$$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $y=g(x)=f\left(\left|x-1\right|-2018\right)$

x	$-\infty$		-2019		1		2021		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$-$	$\|$	$+$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$		$\searrow$	$g(1)$	$\nearrow$		$\nearrow$	

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $\min\limits_{\mathbb{R}} g(x)=g(1)$.

Câu 5: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ được cho như hình vẽ bên.



Biết $f(0)+f(3)=f(2)+f(5)$. Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của $y=f\left(\left|x+3\right|-2\right)$ trên đoạn $[-1;4]$ lần lượt là

A. $f(0), f(5)$. **B.** $f(2), f(5)$. **C.** $f(0), f(2)$. **D.** $f(-1), f(4)$.

Lời giải

Chọn B

Từ đồ thị $y=f'(x)$ trên đoạn $[0;5]$ ta có bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$:

x	0		2		5
f'(x)		–	0	+	
f(x)	↘		CT		↗

Suy ra $\min\limits_{[0;5]} f(x)=f(2)$.

Từ giả thiết, ta có: $f(0)+f(3)=f(2)+f(5) \Rightarrow f(5)-f(3)=f(0)-f(2)$

Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $[2;5]$.

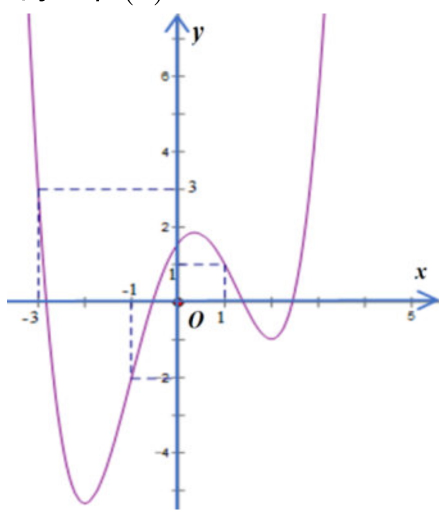
$\Rightarrow f(3)>f(2) \Rightarrow f(5)-f(2)>f(5)-f(3)=f(0)-f(2)$ nên $f(5)>f(0)$.

Suy ra, $\max\limits_{[0;5]} f(x)=f(5)$.

Đặt $t=|x+3|-2$, với $x\in[-1;4]$ thì $t\in[0;5]$. Khi đó giá trị nhỏ nhất, lớn nhất của hàm số $y=f(|x+3|-2)$ trên đoạn $[-1;4]$ cũng chính là giá trị nhỏ nhất, lớn nhất của hàm số $y=f(t)$ trên đoạn $[0;5]$.

Do đó $\min\limits_{[-1;4]} f(|x+3|-2)=\min\limits_{[0;5]} f(x)=f(2)$; $\max\limits_{[-1;4]} f(|x+3|-2)=\max\limits_{[0;5]} f(x)=f(5)$

Câu 6: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị $y=f'(x)$ như hình vẽ.



Xét hàm số $g(x)=f(x)-\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{4}x^2+\frac{3}{2}x+2018$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\min\limits_{[-2;2]} g(|x+3|-4)=\dfrac{g(-3)+g(1)}{2}$.

B. $\min\limits_{[-2;2]} g(|x+3|-4)=g(1)$.

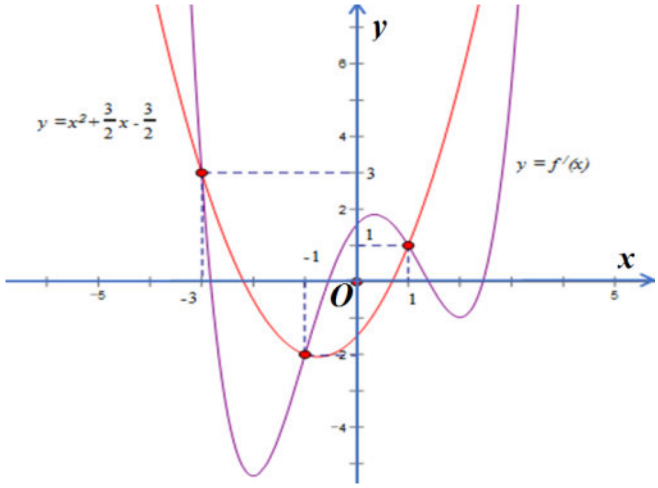
C. $\min\limits_{[-2;2]} g(|x+3|-4)=g(-3)$.

D. $\min\limits_{[-2;2]} g(|x+3|-4)=g(-1)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $g'(x)=f'(x)-x^2-\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}$



$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 1 \end{array}\right.$

Lập Bảng biến thiên

x	-3		-1		1
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0
$g(x)$	$g(-3)$ ↘		$g(-1)$	↗	$g(1)$

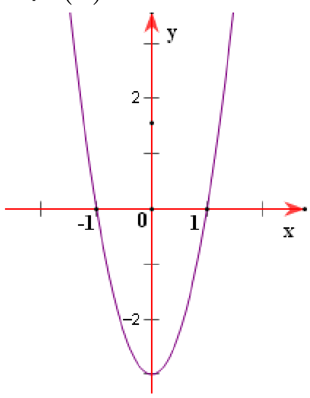
Dựa vào bảng biến thiên, ta có: $\min\limits_{[-3;1]} g(x) = g(-1)$.

Đặt $t = |x+3| - 4$ với $x \in [-2;2]$ thì $t \in [-3;1]$.

Khi đó $\min\limits_{[-2;2]} g(|x+3| - 4) = \min\limits_{[-3;1]} g(t) = g(-1)$.

Dạng 11. Cho đồ thị, BBT của hàm số $y = f'(x)$, tìm GTLN, GTNN của hàm số $y = |f(x) + b|$ trên khoảng, đoạn.

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $y = f'(x)$ như hình vẽ bên dưới và $f(1) = -5; f(3) = 15$.



Xét hàm số $g(x) = |f(x) + m|$. Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị nguyên của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x)$ trên đoạn $[1;3]$ bằng 3. Tổng tất cả các phần tử của tập S có giá trị bằng

A. -10. **B.** -8. **C.** 8. **D.** 10.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $h(x) = f(x) + m$ liên tục trên đoạn $[1;3]$.

Ta có: $h'(x)=f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=1 \end{array}\right.$.

Khi đó $h(1)=m-5$; $h(3)=m+15$.

Để hàm số $y=|h(x)|$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[1;3]$ bằng 3 thì đồ thị hàm số $y=h(x)$ phải nằm hoàn toàn phía dưới hoặc phía trên trục hoành (tức không cắt trục hoành) trên $[1;3]$.

Trường hợp 1: $m+15<0 \Leftrightarrow m<-15$ thì $\min\limits_{[1;3]}|f(x)+m|=|m+15|=3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-18 \quad (tm) \\ m=-12 \quad (l) \end{array}\right.$.

Trường hợp 2: $m-5>0 \Leftrightarrow m>5$ thì $\min\limits_{[1;3]}|f(x)+m|=m-5=3 \Leftrightarrow m=8 \quad (tm)$.

Vậy $S=\{-18;8\}$. Do đó chọn phương án A.

Câu2. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu của đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-4		-1		2		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Biết $f(-4)=f(4)=-7$. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=|f(x)+5|$ trên đoạn $[-4;4]$ đạt được tại điểm nào?

A. $x=-4$. **B.** $x=-1$. **C.** $x=2$. **D.** $x=4$.

Lời giải

Chọn C

Xét $g(x)=f(x)+5 \Rightarrow g'(x)=f'(x)$.

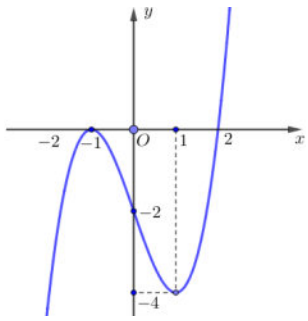
$g'(x)=0 \Leftrightarrow x=-4 \vee x=-1 \vee x=2 \vee x=4$.

Bảng biến thiên

x	-4		-1		2		4
$g'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	-2	$\searrow$		$\searrow$	$g(2)$	$\nearrow$	-2

Từ bảng biến thiên ta thấy $y=|f(x)+5|$ đạt GTLN tại $x=2$.

Câu 3. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ dưới.



Biết $f(2)=-4, f(-2)=-5, f(0)=-1$. Xét hàm số $y=g(x)=|f(x^2-2)+3|$. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

A. Giá trị lớn nhất của hàm số trên $[-2;2]$ bằng 2.

B. Giá trị lớn nhất của hàm số trên $[-2;2]$ đạt được tại $x=0$ hoặc $x=2$.

C. Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $[-2;2]$ bằng 1.

D. Có hai giá trị của x để hàm số đạt giá trị nhỏ nhất trên $[-2;2]$.

Lời giải

Chọn C

$g'(x)=2x.f'(x^2-2)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow 2x.f'(x^2-2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ f'(x^2-2)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2-2=-1 \\ x^2-2=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm 1 \\ x=\pm 2 \end{array}\right..$$

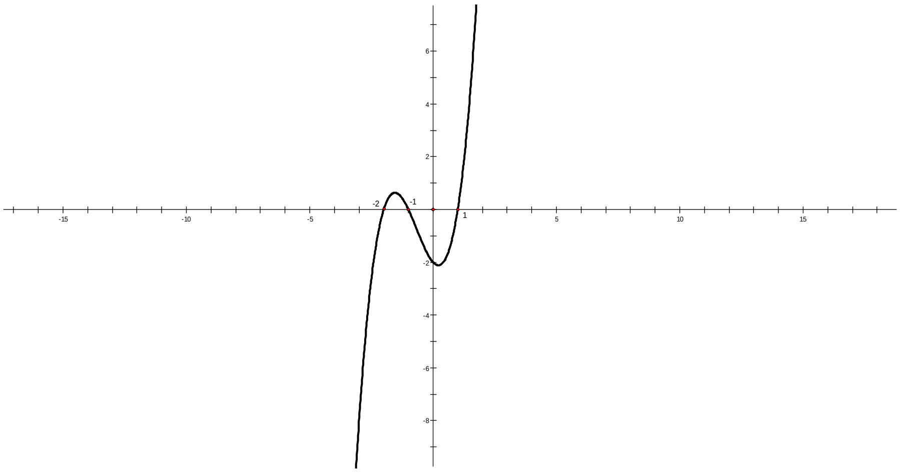
$$f'(x^2-2)>0 \Leftrightarrow x^2-2>2 \Leftrightarrow x^2>4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>2 \\ x<-2 \end{array}\right..$$

Bảng biến thiên của hàm số $g(x)$

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		2		$+\infty$
$2x$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$f'(x^2-2)$		$+$	0	$-$	0	$-$		$-$	0	$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		↘	-1		↗		2		↘		-2	↗	

Từ bảng biến thiên, ta thấy đáp án C là sai.

Câu 4. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên R. Đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ sau và $f(-1)<-2$



Khi đó gọi giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $g(x)=|f(x)+2|$ trên đoạn $[-2;1]$ lần lượt là M,m. Tổng $M+m$ bằng

A. $g(-2)+g(1)$.

B. $g(-2)+g(-1)$.

C. $|f(-1)+2|+|f(1)+2|$.

D. $|f(-1)+f(1)+4|$.

Lời giải

Chọn C

Dựa vào đồ thị của $f'(x)$ ta có BBT của hàm $y=f(x)$ như sau

x	$-\infty$		-2		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$y=f(x)$	$+\infty$	↘	$f(-2)$	↗	$f(-1)$	↘	$f(1)$	↗	$+\infty$

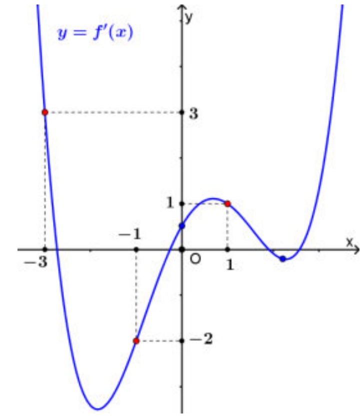
Ngoài ra ta có: $\int_{-2}^{-1}|f'(x)|dx < \int_{-1}^{1}|f'(x)|dx \Rightarrow f(-1)-f(-2) < f(-1)-f(1)$.

$\Rightarrow f(-2) > f(1) \Rightarrow -2 > f(-1) > f(-2) > f(1)$.

Từ đó $f(1)+2 < f(-2)+2 < f(-1)+2 < 0$ hay $g(1) > g(-2) > g(-1)$.

Dạng 12. Các dạng khác.

Câu 1: Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số đạo hàm $y = f'\left(x\right)$ như hình vẽ.



Xét hàm số $g\left(x\right) = f\left(x\right) - \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + 2019$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\min\limits_{[-3;1]} g\left(x\right) = g\left(-3\right)$.

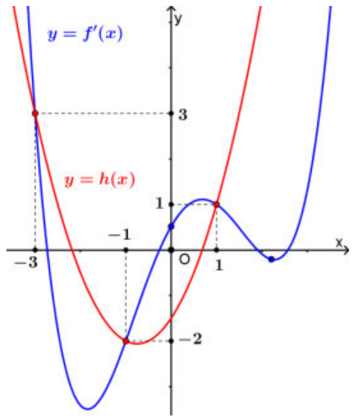
B. $\min\limits_{[-3;1]} g\left(x\right) = g\left(1\right)$.

C. $\min\limits_{[-3;1]} g\left(x\right) = g\left(-1\right)$.

D. $\min\limits_{[-3;1]} g\left(x\right) = \frac{g\left(-3\right)+g\left(1\right)}{2}$.

Lời giải

Chọn C



• Ta có: $g'\left(x\right) = f'\left(x\right) - x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}$;

$$g'\left(x\right) = 0 \Leftrightarrow f'\left(x\right) = h\left(x\right) = x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$$

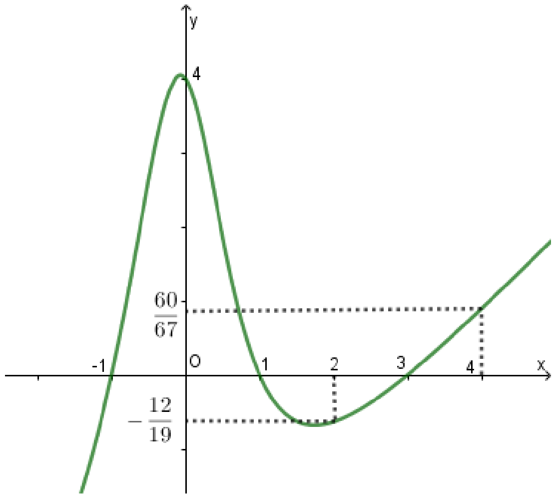
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -3 \\ x = -1 \\ x = 1 \end{array}\right..$$

• Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$		$\nearrow$	$g(-3)$	$\searrow$	$g(-1)$	$\nearrow$	$g(1)$	$\searrow$	

• Dựa vào bảng biến thiên ta có: $\min\limits_{[-3;1]} g\left(x\right) = g\left(-1\right)$.

Câu 2: Cho hàm số $y = f\left(x\right)$, hàm số $f'\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ



Giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x)=\frac{1}{2}f(2x-1)+\frac{11}{19}(2x-1)^2-4x$ trên khoảng $\left[0;\frac{5}{2}\right]$ bằng

A. $\frac{1}{2}f(1)+\frac{11}{19}$.

B. $\frac{1}{2}f(4)-\frac{14}{19}$.

C. $\frac{1}{2}f(0)-2$.

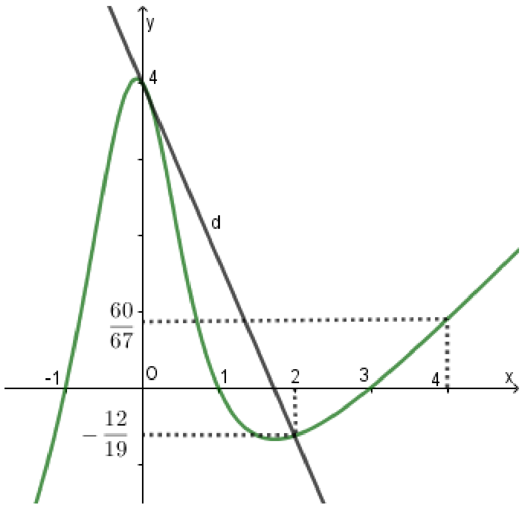
D. $\frac{1}{2}f(2)-\frac{70}{19}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $g'(x)=f'(2x-1)+\frac{44}{19}(2x-1)-4=0 \Leftrightarrow f'(2x-1)=-\frac{44}{19}(2x-1)+4$.

Đặt $t=2x-1 \Rightarrow f'(t)=-\frac{44}{19}t+4$ với $0\le x\le\frac{5}{2}\Rightarrow -1\le t\le 4$.

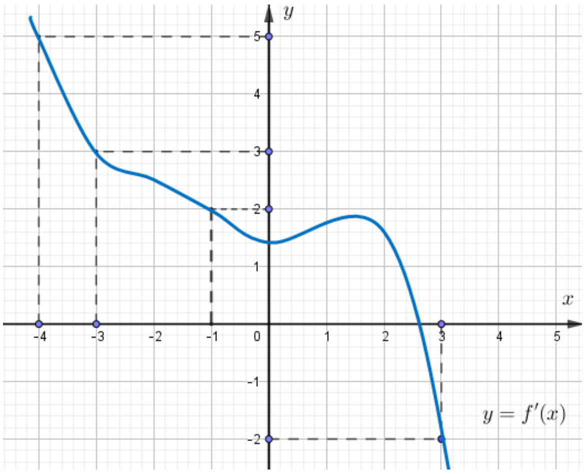


Từ đồ thị ta có $f'(t)=-\frac{44}{19}t+4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=2 \end{array}\right.$.

Lập bảng biến thiên hàm số $g(t)$ Giá trị nhỏ nhất hàm số đạt được khi $t=2 \Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$.

suy ra $(g(x))_{\min}=\frac{1}{2}f(2)-\frac{70}{19}$.

Câu 3: Cho hàm số $f(x)$. Biết hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình bên.

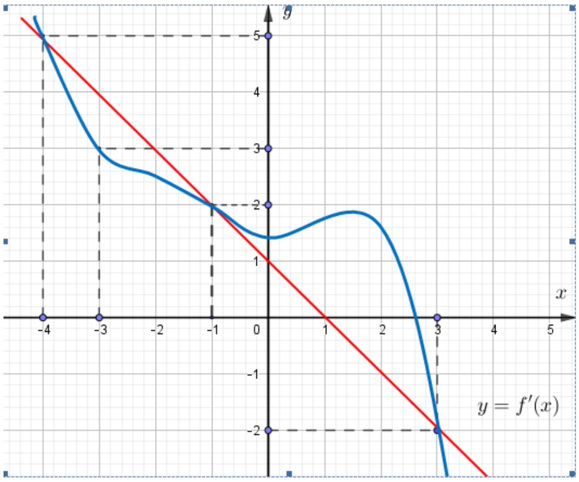


Trên đoạn $[-4;3]$, hàm số $g(x) = 2f(x) + (1-x)^2$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm

A. $x_0 = -3$. **B.** $x_0 = -4$. **C.** $x_0 = -1$. **D.** $x_0 = 3$.

Lời giải

Chọn C



Ta có

$g'(x) = 2f'(x) - 2(1-x)$.

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2f'(x) - 2(1-x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 1 - x$.

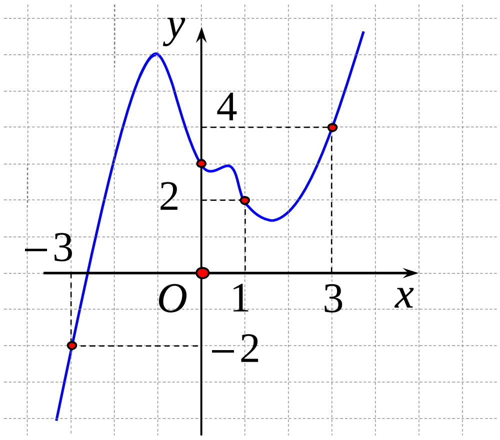
Dựa vào hình vẽ ta có: $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -4 \\ x = -1 \\ x = 3 \end{array}\right.$.

Và ta có bảng biến thiên

x	-4		-1		3
g'		$-$	0	$+$	
g		$\searrow$		$\nearrow$	

Suy ra hàm số $g(x) = 2f(x) + (1-x)^2$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm $x_0 = -1$.

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ dưới đây.



Xét hàm số $g\left(x\right)=2f\left(x\right)-\left(x+1\right)^2$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $\min\limits_{[-3;3]} g\left(x\right)=g\left(1\right)$.

B. $\max\limits_{[-3;3]} g\left(x\right)=g\left(1\right)$.

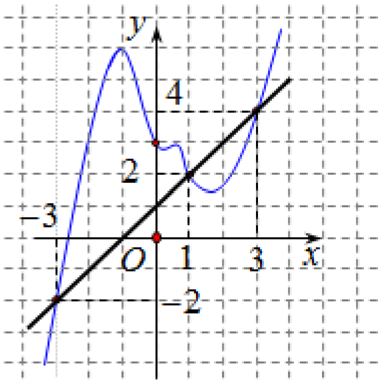
C. $\max\limits_{[-3;3]} g\left(x\right)=g\left(3\right)$.

D. Không tồn tại giá trị nhỏ nhất của hàm số $g\left(x\right)$ trên $\left[-3;3\right]$.

Lời giải

Chọn B

$g'\left(x\right)=2f'\left(x\right)-2\left(x+1\right)=0 \Leftrightarrow f'\left(x\right)=x+1\left(*\right)$.



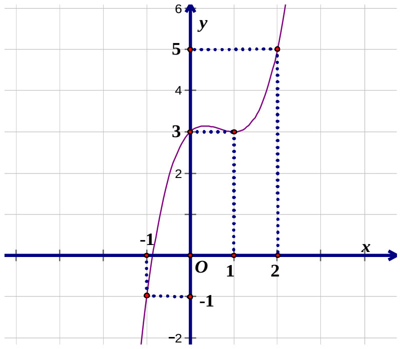
Dựa vào đồ thị hàm số $y=f'\left(x\right)$ ta thấy đường thẳng $y=x+1$ cắt đồ thị hàm số $y=f'\left(x\right)$ tại ba điểm lần lượt có hoành độ là: $-3;1;3$. Do đó phương trình $\left(*\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=1 \\ x=3 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên của hàm số $y=g\left(x\right)$

t	-3		1		3
$g'(x)$	0	$+$	0	$-$	0
$g(x)$	$g(-3)$	$\nearrow$	$g(1)$	$\searrow$	$g(3)$

Vậy $\max\limits_{[-3;3]} g\left(x\right)=g\left(1\right)$.

Câu 5: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm và liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết rằng đồ thị hàm số $y=f'\left(x\right)$ như dưới đây.



Xét hàm số $g(x)=f(x)-x^2-x$. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

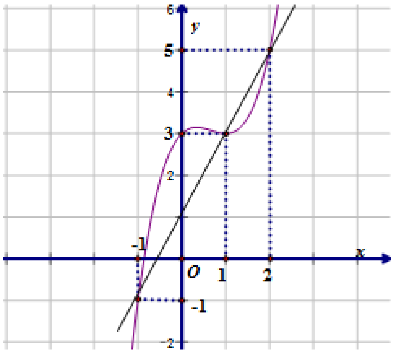
A. $g(-1)>g(1)>g(2)$. **B.** $g(-1)>g(2)>g(1)$.

C. $g(1)>g(2)>g(-1)$. **D.** $g(1)>g(2)>g(-1)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $g'(x)=f'(x)-2x-1=0\Leftrightarrow f'(x)=2x+1\,(*)$.



Dựa vào độ thị hàm số $y=f'(x)$, ta thấy đường thẳng $y=2x+1$ cắt đồ thị hàm số $y=f'(x)$ tại ba điểm lần lượt có hoành độ là $-1;1;2$. Do đó $(*)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=1\\x=2\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên của hàm số $g(x)$

t	-1		1		2
$g'(x)$	0	$+$	0	$-$	0
$g(x)$	$g(-1)$	↗	$g(1)$	↘	$g(2)$

Từ bảng biến thiên suy ra $\max\limits_{[-1;2]}=g(1)$.

Đồ thị hàm số $y=g'(x)$ cắt trục hoành tại điểm có hoành độ x_0 $(-1<x_0<0)$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=g'(x)$, $y=0$, $x=-1$, $x=x_0$

$$S_1=-\int_{-1}^{x_0}g'(x)\mathrm{d}x=g(-1)-g(x_0)\,.$$

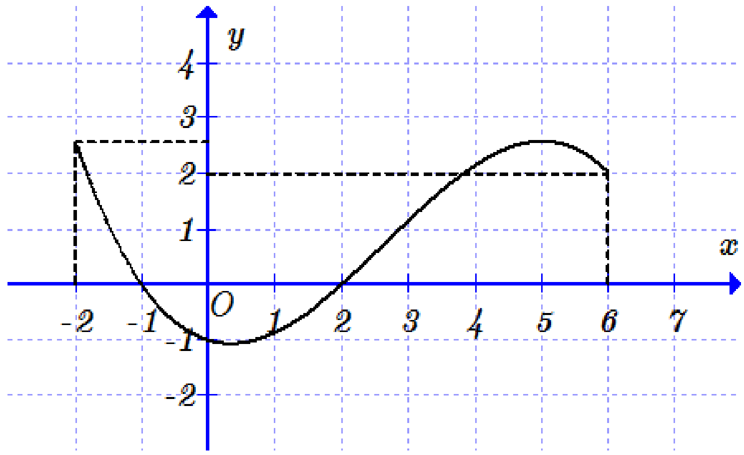
Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=g'(x)$, $y=0$, $x=x_0$, $x=2$

$$S_2=\int_{x_0}^{2}g'(x)dx=g(2)-g(x_0)\,.$$

$$S_1<S_2\Rightarrow g(-1)-g(x_0)<g(2)-g(x_0)\Leftrightarrow g(-1)<g(2)\,.$$

Vậy $g(1) > g(2) > g(-1)$.

Câu 6: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị của hàm số $f'(x)$ trên đoạn $[-2;6]$ như hình vẽ. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.



A. $\max\limits_{x\in[-2;6]} f(x) = f(-2)$.

B. $\max\limits_{x\in[-2;6]} f(x) = f(2)$.

C. $\max\limits_{x\in[-2;6]} f(x) = f(6)$.

D. $\max\limits_{x\in[-2;6]} f(x) = f(-1)$.

Lời giải

Chọn C

Từ đồ thị của hàm số $f'(x)$ ta có bảng biến thiên hàm số $y = f(x)$ trên $[-2;6]$

x	-2		-1		2		6
y'		$+$	0	$-$	0	$-$	
y		↗		↘		↗	

Do đó hàm số $y = f(x)$ đạt giá trị lớn nhất chỉ có thể tại $x = -1$ hoặc $x = 6$.

Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và trục Ox.

$$\Rightarrow S_1 = \int_{-1}^{2} [-f'(x)]dx = f(-1) - f(2).$$

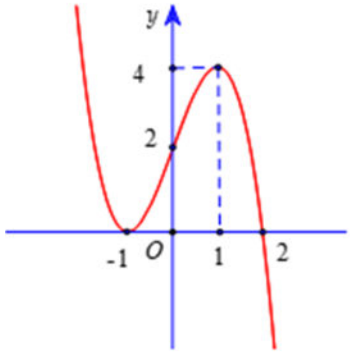
Gọi S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f'(x)$, trục Ox và hai đường thẳng $x = 2; x = 6$.

$$\Rightarrow S_2 = \int_{2}^{6} f'(x)dx = f(6) - f(2).$$

Ta có $S_2 > S_1 \Rightarrow f(6) - f(2) > f(-1) - f(2) \Leftrightarrow f(6) > f(-1)$.

Vậy $\max\limits_{x\in[-2;6]} f(x) = f(6)$.

Câu 7: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ liên tục trên tập số thực và có đồ thị như hình vẽ.



Biết $f(-1)=\dfrac{13}{4}, f(2)=6$. Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x)=f^3(x)-3f(x)$ trên $[-1;2]$ bằng

A. $\dfrac{1573}{64}$ **B.** 198. **C.** $\dfrac{37}{4}$. **D.** $\dfrac{14245}{64}$.

Lời giải

Chọn D

Từ đồ thị hàm số $y=f'(x)$ ta có bảng biến thiên

x	-1		2
$f'(x)$	0	$+$	0
$f(x)$	$\dfrac{13}{4}$	$\nearrow$	6

Ta có $g'(x)=3f^2(x).f'(x)-3f'(x)$.

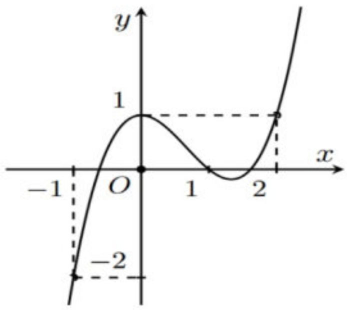
Xét trên đoạn $[-1;2]$ ta có $g'(x)=0 \Leftrightarrow 3f'(x)\left[f^2(x)-1\right]=0 \Leftrightarrow f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=2 \end{array}\right.$.

$g(-1)=\dfrac{1573}{64}$, $g(2)=198$.

Từ đó suy ra $\max\limits_{[-1;2]} g(x)=198, \min\limits_{[-1;2]} g(x)=\dfrac{1573}{64}$.

Vậy $\max\limits_{[-1;2]} g(x)+\min\limits_{[-1;2]} g(x)=\dfrac{14245}{64}$.

Câu 8: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết rằng hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Xét hàm số $y=g(x)$ thỏa mãn $g(x)=f(x)-\dfrac{x^3}{3}+x^2-x+2$.

Hỏi mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $\max\limits_{[0;\,2]} g(x) = g(1)$.

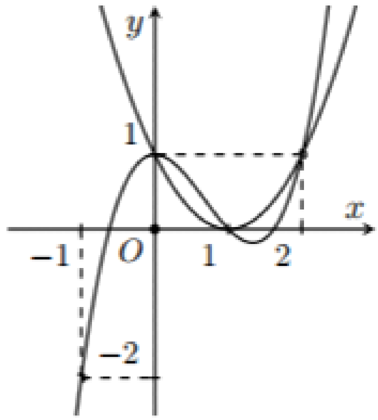
B. $\max\limits_{[0;\,2]} g(x) = g(2)$..

C. $\max\limits_{[0;\,2]} g(x) = g(0)$.

D. $\max\limits_{[0;\,2]} g(x) = \dfrac{g(0)+g(2)}{2}$..

Lời giải

Chọn A



+) Xét hàm số $g(x) = f(x) - \dfrac{x^3}{3} + x^2 - x + 2$ trên $\mathbb{R}$. Ta có

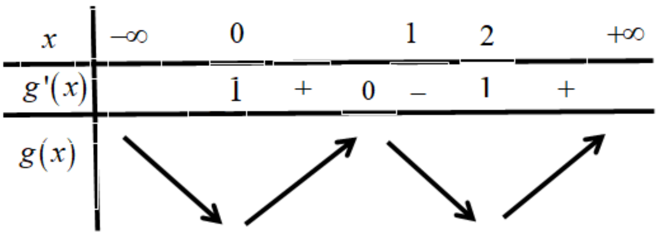
$g'(x) = f'(x) - x^2 + 2x - 1 = f'(x) - (x-1)^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Khi đó $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = (x-1)^2$, $x \in \mathbb{R}$.

+) Từ đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ và đồ thị của parabol $y = (x-1)^2$ ta thấy chúng cắt nhau tại các điểm có hoành độ lần lượt là $x = 0,\ x = 1,\ x = 2$.

Ngoài ra trên miền $x \in (-\infty; 0) \cup (1; 2)$ thì đồ thị hàm số $y = f'(x)$ nằm phía dưới đồ thị của parabol $y = (x-1)^2$ nên $f'(x) < (x-1)^2$, $\forall x \in (-\infty; 0) \cup (1; 2)$ và trên miền $x \in (0; 1) \cup (2; +\infty)$ thì đồ thị hàm số $y = f'(x)$ nằm phía trên đồ thị của parabol $y = (x-1)^2$ nên $f'(x) > (x-1)^2$, $\forall x \in (0; 1) \cup (2; +\infty)$.

Ta có bảng biến thiên của hàm số $y = g(x)$

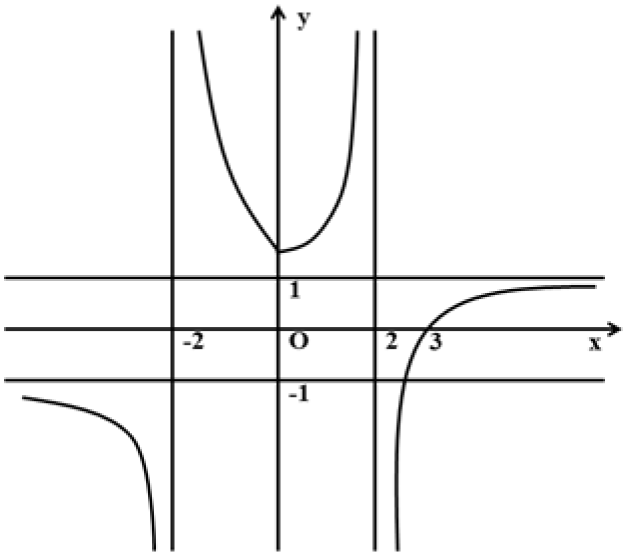


+) Từ bảng biến thiên, ta có $\max\limits_{[0;\,2]} g(x) = g(1)$.

Phần 1: Biết đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$

Dạng 1: Biết đồ thị của hàm số $y=f\left(x\right)$, tìm tiệm cận đứng, tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$, trong bài toán không chứa tham số.

Câu 1. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ. Đồ thị hàm số đã cho có bao nhiêu đường tiệm cận?



A. 4. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Từ đồ thị hàm số ta thấy:

$\lim\limits_{x\to-\infty} f\left(x\right)=-1$ nên đường thẳng $y=-1$ là một đường tiệm cận ngang.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right)=1$ nên đường thẳng $y=1$ là một đường tiệm cận ngang.

Đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang là $y=\pm1$.

Tương tự

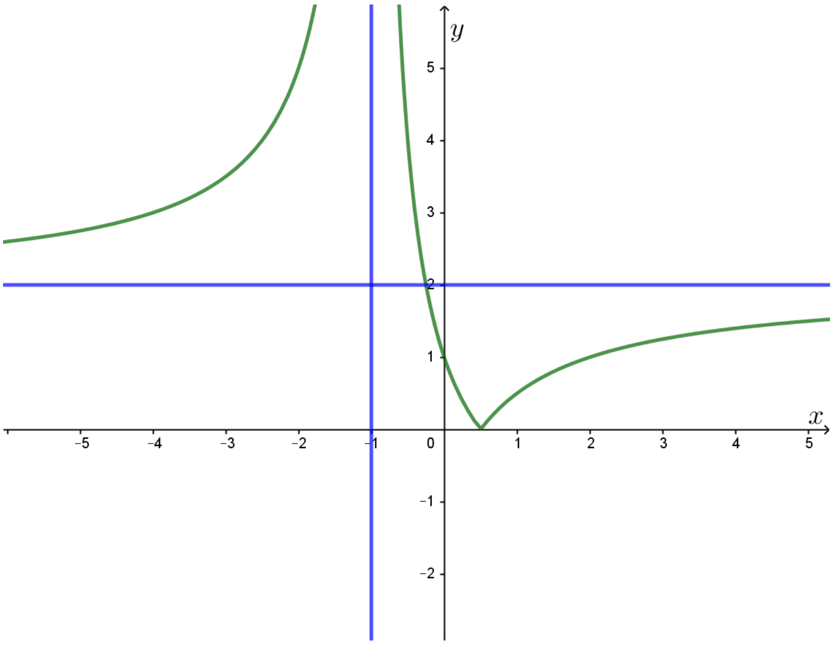
$\lim\limits_{x\to-2^+} f\left(x\right)=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to-2^-} f\left(x\right)=-\infty$ nên đường thẳng $x=-2$ là đường tiệm cận đứng.

$\lim\limits_{x\to2^-} f\left(x\right)=+\infty$ và và $\lim\limits_{x\to2^+} f\left(x\right)=-\infty$ nên đường thẳng $x=-2$ là đường tiệm cận đứng.

Đồ thị hàm số có hai tiệm cận đứng là $x=\pm2$.

Vậy đồ thị hàm số có 4 đường tiệm cận.

Câu 1. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ. Phương trình đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là



A. Tiệm cận đứng $x = 1$, tiệm cận ngang $y = 2$.

B. Tiệm cận đứng $x = -1$, tiệm cận ngang $y = 2$.

C. Tiệm cận đứng $x = 1$, tiệm cận ngang $y = -2$.

D. Tiệm cận đứng $x = -1$, tiệm cận ngang $y = -2$.

Lời giải

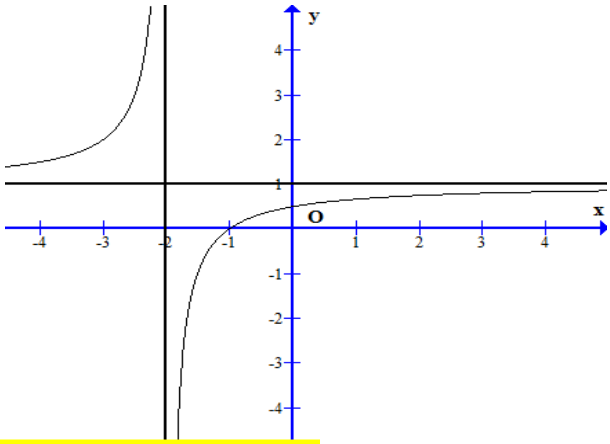
Chọn B

Dựa vào đồ thị ta có

$\lim\limits_{x \to (-1)^-} f(x) = +\infty$ và $\lim\limits_{x \to (-1)^+} f(x) = +\infty$ nên đường thẳng $x = -1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2$ và $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$ nên đường thẳng $y = 2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Phương trình đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là



A. Tiệm cận đứng $x = -2$, tiệm cận ngang $y = 1$.

B. Tiệm cận đứng $x = 2$, tiệm cận ngang $y = -1$.

C. Tiệm cận đứng $x = 1$, tiệm cận ngang $y = -2$.

D. Tiệm cận đứng $x = -1$, tiệm cận ngang $y = 2$.

Lời giải

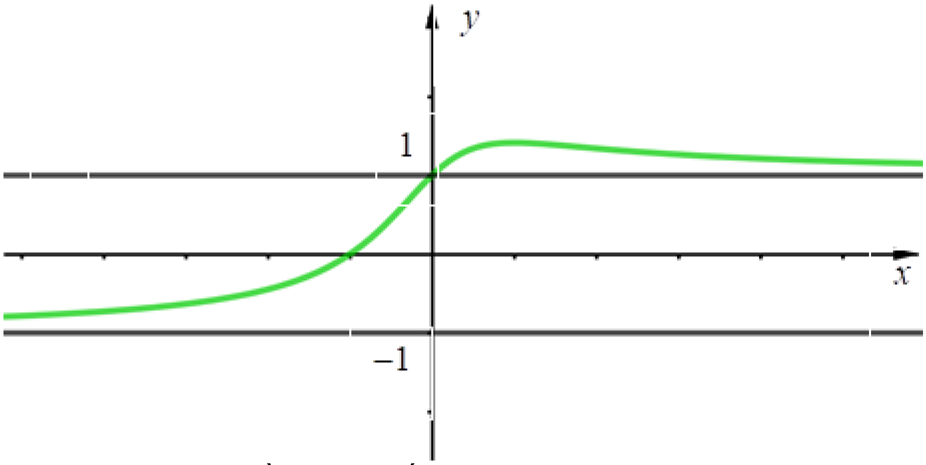
Chọn A

Dựa vào đồ thị ta có

$\lim\limits_{x\to(-2)^-} f(x)=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to(-2)^+} f(x)=-\infty$ nên đường thẳng $x=-2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=f(x)$.

+) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ nên đường thẳng $y=1$ là tiệm cận ngang đứng của đồ thị hàm số $y=f(x)$.

Câu 3. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Số đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải

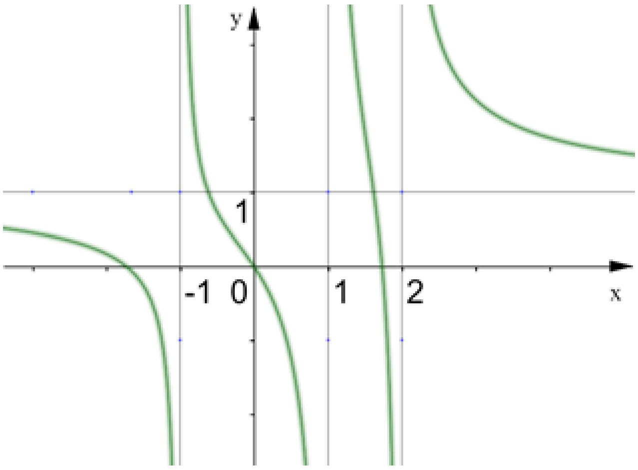
Chọn B

Từ đồ thị của hàm số $y=f(x)$ ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ nên đường thẳng $y=1$ là đường tiệm cận ngang.

Tương tự $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1$ nên đường thẳng $y=-1$ là đường tiệm cận ngang.

Vậy đồ thị hàm số $y=f(x)$ có 2 đường tiệm cận ngang.

Câu 4. Cho hàm số $y=f(x)$. Có đồ thị như hình vẽ.



Đồ thị hàm số có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn D

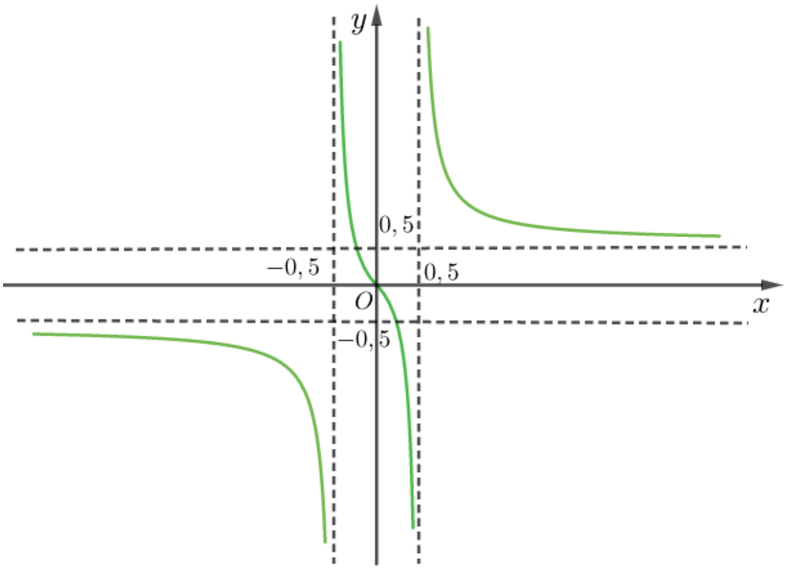
Dựa vào đồ thị ta thấy đồ thị của hàm số ta có

$\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x)=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x)=-\infty$ nên đường thẳng $x=-1$ là đường tiệm cận đứng.

$\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=-\infty$ nên đường thẳng $x=1$ là đường tiệm cận đứng.

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$ và và $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$ nên đường thẳng $x = -2$ là đường tiệm cận đứng.
Đồ thị hàm số có ba đường tiệm cận đứng là $x = \pm 1$ và $x = 2$.
Vậy đồ thị hàm số có 4 đường tiệm cận.
$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 1$ và $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 1$ nên đường thẳng $y = 1$ là một đường tiệm cận ngang.
Đồ thị hàm số có một đường tiệm cận ngang là $y = 1$.

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$ là

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 6.

Lời giải

Chọn A

Dựa vào đồ thị của hàm số $y = f(x)$ ta có:

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\frac{1}{2}$ nên đường thẳng $y = -\frac{1}{2}$ là một đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \frac{1}{2}$ nên đường thẳng $y = \frac{1}{2}$ là một đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

$\Rightarrow$ Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có hai đường tiệm cận ngang là $y = \pm\frac{1}{2}$.

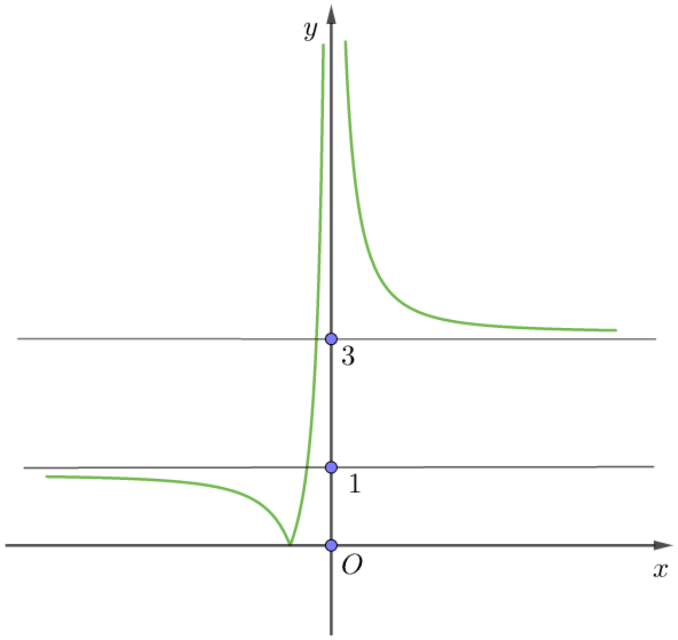
$\lim\limits_{x\to \left(-\frac{1}{2}\right)^-} f(x) = -\infty$ và $\lim\limits_{x\to \left(-\frac{1}{2}\right)^+} f(x) = +\infty$ nên đường thẳng $x = -\frac{1}{2}$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

$\lim\limits_{x\to \left(\frac{1}{2}\right)^-} f(x) = -\infty$ và $\lim\limits_{x\to \left(\frac{1}{2}\right)^+} f(x) = +\infty$ nên đường thẳng $x = \frac{1}{2}$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

$\Rightarrow$ Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có hai đường tiệm cận đứng là $x = \pm\frac{1}{2}$

Vậy đồ thị hàm số $y = f(x)$ có tất cả 4 đường tiệm cận.

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ là:

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B

Dựa vào đồ thị của hàm số $y=f\left(x\right)$ ta có:

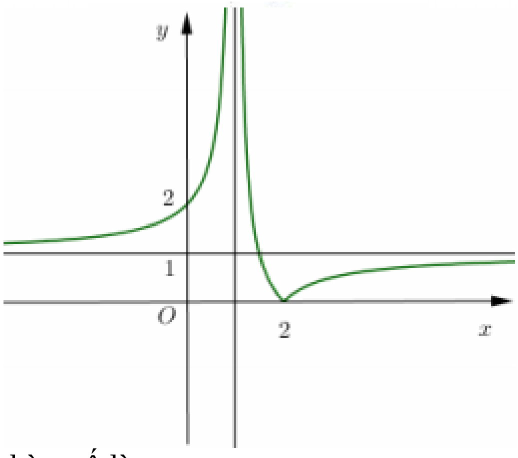
$\lim\limits_{x\to-\infty} f\left(x\right)=1$ nên đường thẳng $y=1$ là một đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right)=3$ nên đường thẳng $y=3$ là một đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$.

$\lim\limits_{x\to0^-} f\left(x\right)=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to0^+} f\left(x\right)=+\infty$ suy ra đường thẳng $x=0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$.

Vậy đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ có tất cả 3 đường tiệm cận.

Câu 7. Cho đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ như hình vẽ dưới đây:



Tổng số tiệm cận của đồ thị hàm số là:

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4

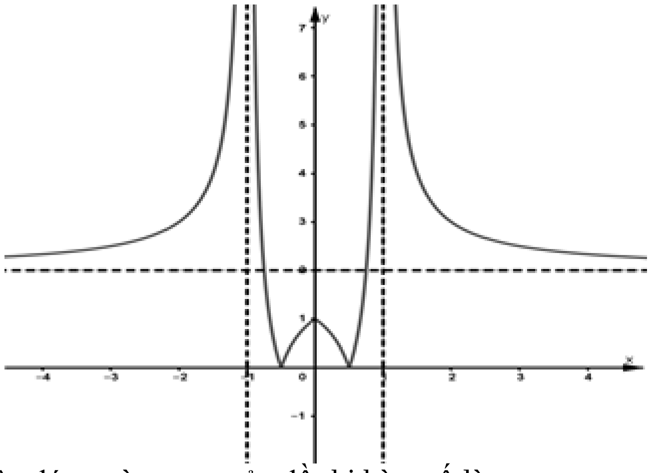
Lời giải

Chọn B

Dựa vào đồ thị hàm số ta có

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=1$ nên đồ thị hàm số có 1 tiệm cận ngang $y=1$ và $\lim\limits_{x\to 1^{\pm}} y=+\infty$ nên đồ thị hàm số có 1 tiệm cận đứng $x=1$. Vậy đồ thị hàm số có 2 tiệm cận.

Câu 8. Cho đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ có hình vẽ dưới đây.



Tổng số đường tiệm cận đứng và ngang của đồ thị hàm số là:

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

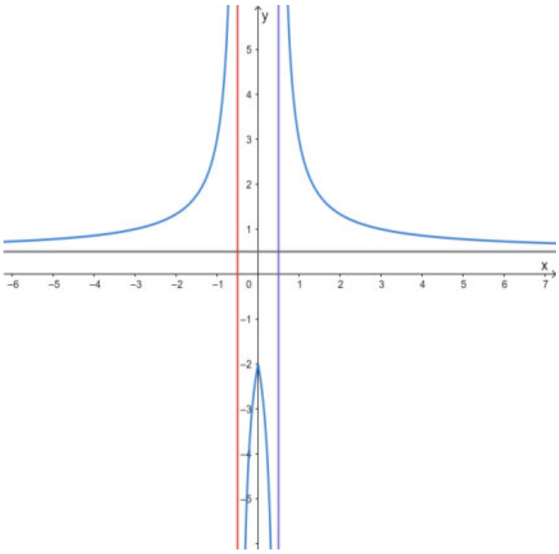
Chọn C

Ta có: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f\left(x\right)=2$ nên đồ thị hàm số có 1 đường tiệm cận ngang là $y=2$

Lại thấy: $\lim\limits_{x\to -1^{+}} f\left(x\right)=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to 1^{-}} f\left(x\right)=+\infty$ nên đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận ngang là $x=-1; x=1$

Vậy đồ thị hàm số có 3 đường tiệm cận

Câu 9. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ.



Gọi a là số đường tiệm cận của đồ thị hàm số. Giá trị của biểu thức a^2+a bằng

A. 6. **B.** 12. **C.** 20. **D.** 30.

Lời giải

Chọn B

Dựa vào đồ thị ta có

$\lim\limits_{x\to -\infty} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to +\infty} f\left(x\right)=\frac{1}{2}$. Suy ra đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y=\frac{1}{2}$.

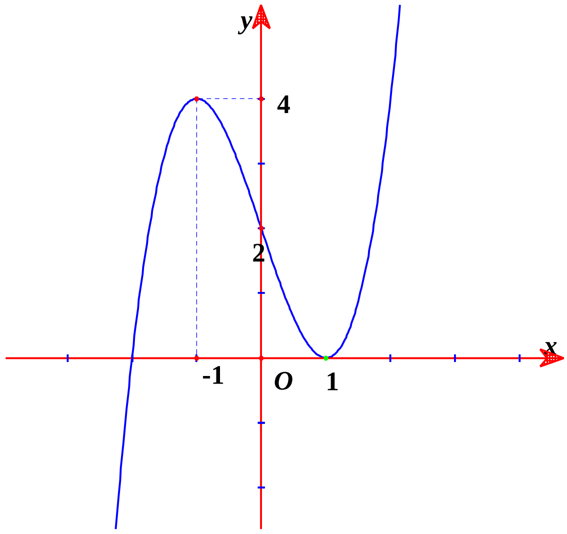
$\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}^{+}} f\left(x\right)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}^{-}} f\left(x\right)=-\infty$ Suy ra đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x=\frac{1}{2}$

$\lim\limits_{x \to -\frac{1}{2}^+} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to -\frac{1}{2}^-} f(x) = +\infty$ suy ra đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x = -\frac{1}{2}$

Đồ thị hàm số có 3 tiệm cận $\Rightarrow a = 3$.

Vậy $a^2 + a = 12$

Câu 10. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong hình bên dưới.



Đồ thị hàm số $g(x) = \dfrac{(x-1)(x^2-1)}{f^2(x) - 2f(x)}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

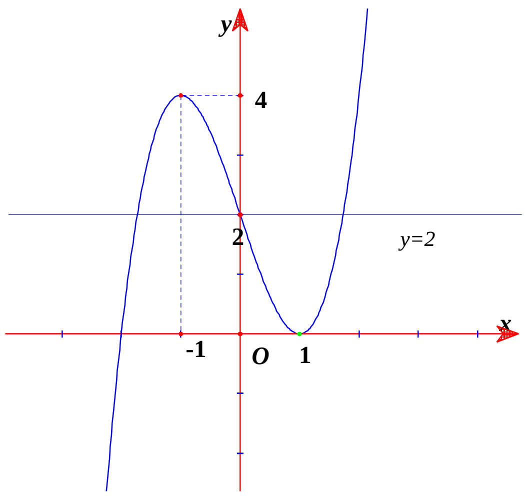
A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn D

Ta xét mẫu số: $f^2(x) - 2f(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} f(x) = 0 & (1) \\ f(x) = 2 & (2) \end{array}\right.$.

Dựa vào đồ thị hàm số, ta thấy:



+) Phương trình (1) có nghiệm $x_1 = a < -1$ (nghiệm đơn) và $x_2 = 1$ (nghiệm kép)

$\Rightarrow f(x) = (x-a)(x-1)^2$.

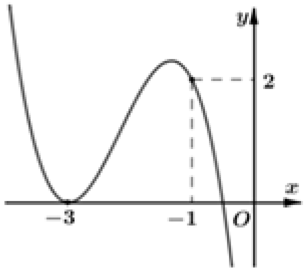
+) Phương trình (2) có nghiệm $x_3 = b \in (a;-1)$, $x_4 = 0$ và $x_5 = c > 1$

$\Rightarrow f(x) - 2 = (x-b)x(x-c)$.

Do đó $g(x)=\dfrac{(x-1)(x^2-1)}{f(x)[f(x)-2]}=\dfrac{(x-1)^2(x+1)}{(x-a)(x-1)^2.(x-b)x(x-c)}=\dfrac{x+1}{(x-a)(x-b)x(x-c)}$.

$\Rightarrow$ đồ thị hàm số $y=g(x)$ có 4 đường tiệm cận đứng.

Câu 11. Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.

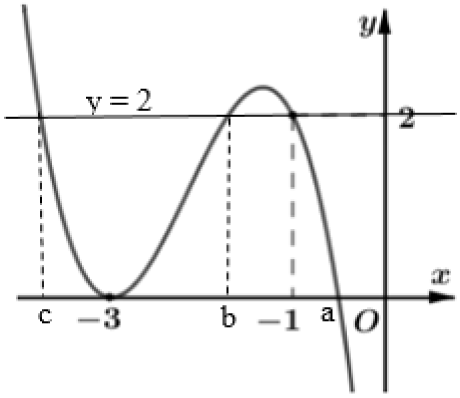


Đồ thị hàm $y=\dfrac{(x^2+4x+3)\sqrt{x^2+x}}{x\left[f^2(x)-2f(x)\right]}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 6.

Lời giải

Chọn C



Ta thấy phương trình bậc ba $f(x=2)$ có 3 nghiệm phân biệt là $x_1=c<-3$, $x_2=b$. với $-3<b<-1$ và $x_3=-1$.

Và phương trình bậc ba $f(x)=0$ có nghiệm kép $x=-3$ và nghiệm đơn $x=a$ với $-1<a<0$.

Do $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ nên không mất tính tổng quát, ta giả sử

$f(x)=0\Leftrightarrow -(x+3)^2(x-a)=0$ và $f(x)=2\Leftrightarrow -(x-c)(x-b)(x+1)=0$.

Ta có: $y=\dfrac{(x^2+4x+3)\sqrt{x^2+x}}{x\left[f^2(x)-2f(x)\right]}=\dfrac{(x+1)(x+3)\sqrt{x(x+1)}}{x.f(x).\left[f(x)-2\right]}$.

Khi đó: $\lim\limits_{x\to0^+} y=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{(x+1)(x+3)\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}.f(x).\left[f(x)-2\right]}=+\infty$.

$\lim\limits_{x\to-3^+} y=\lim\limits_{x\to-3^+}\dfrac{(x+1)\sqrt{x(x+1)}}{-x(x+3)(x-a).\left[f(x)-2\right]}=-\infty$.

$\lim\limits_{x\to c^+} y=\lim\limits_{x\to c^+}\dfrac{(x+1)(x+3)\sqrt{x(x+1)}}{-x.f(x)(x-c)(x-b)(x+1)}=+\infty$.

$$\lim_{x\to b^+} y = \lim_{x\to b^+} \frac{(x+1)(x+3)\sqrt{x(x+1)}}{-x.f(x)(x-c)(x-b)(x+1)} = +\infty.$$

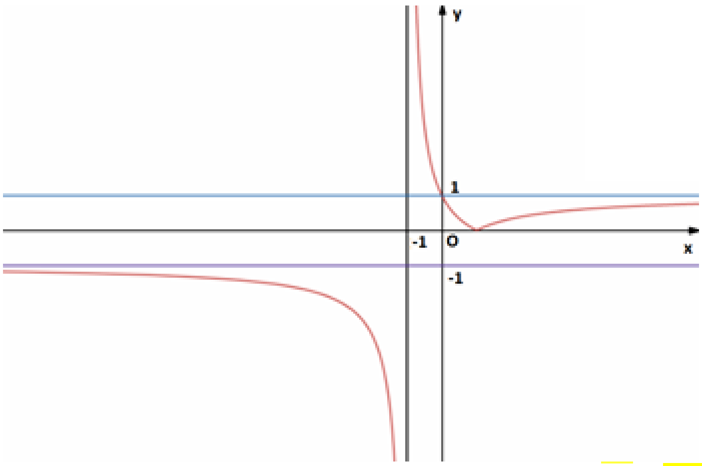
$$\lim_{x\to -1^-} y = \lim_{x\to -1^-} \frac{(x+3)\sqrt{x(x+1)}}{-x.f(x)(x-c)(x-b)} = 0.$$

$\lim\limits_{x\to -1^+} y$ không tồn tại.

Vậy đồ thị hàm số $y = \dfrac{(x^2+4x+3)\sqrt{x^2+x}}{x\left[f^2(x)-2f(x)\right]}$ có 4 đường tiệm cận đứng là $x=0$; $x=-3$; $x=c$; $x=b$.

Dạng 2: Biết đồ thị của hàm số $y = f(x)$, tìm tiệm cận đứng, tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$, trong bài toán chứa tham số.

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm m để đồ thị hàm số $y = f(x-m)$ có tiệm cận đứng là trục Oy?



A. 0. **B.** -1. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có tiệm cận đứng là đường thẳng $x=-1$.

Tịnh tiến theo véc tơ $\vec{v} = (m;0)$ thì:

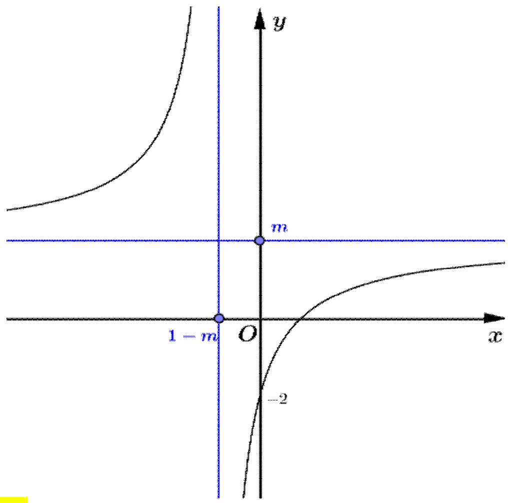
Đồ thị hàm số $y = f(x)$ biến thành đồ thị hàm số $y = f(x-m)$.

Tiệm cận $x=-1$ của đồ thị hàm số $y = f(x)$ biến thành tiệm cận $x=-1+m$ của đồ thị hàm số $y = f(x-m)$.

Đồ thị hàm số $y = f(x-m)$ có tiệm cận đứng là trục $Oy \Leftrightarrow -1+m=0 \Leftrightarrow m=1$

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x) = \dfrac{ax+b}{x+c}$, $a, b, c \in \mathbb{R}$ có đồ thị như hình bên.

Giá trị của $P = a+b+c$ bằng



A. 2.   **B.** 1.   **C.** 3.   **D.** -1.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $\begin{cases} x \neq -c \\ ac - b \neq 0 \end{cases}$

Hàm số $y = f(x)$ có tiệm cận đứng: $x = -c$; tiệm cận ngang: $y = a$

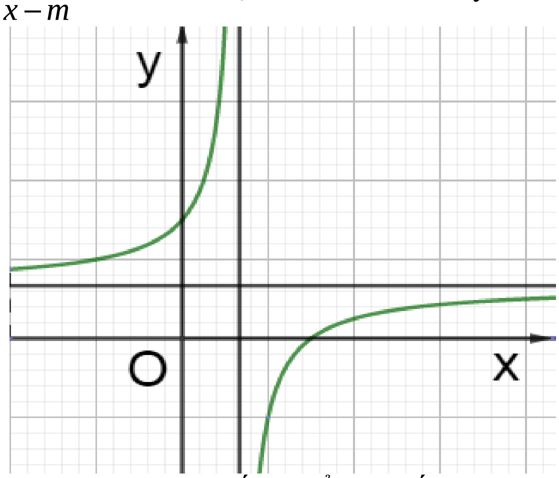
Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x)$ ta nhận xét được:

- $\begin{cases} m > 0 \\ 1 - m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 1$
- Khi $x = 0 \Rightarrow y = -2 \Rightarrow \dfrac{b}{c} = -2 \Rightarrow b = -2c$
- Tiệm cận đứng: $x = 1 - m$; tiệm cận ngang: $y = m$

Suy ra: $\begin{cases} -c = 1 - m \\ a = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = m - 1 \\ a = m \end{cases} \Rightarrow b = -2c = -2m + 2$ (thỏa điều kiện)

Nên: $P = a + b + c = m - 2m + 2 + m - 1 = 1$

Câu 3. Cho hàm số $y = \dfrac{(2m-1)x - 3}{x - m}$ có đồ thị như hình dưới đây



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để tâm đối xứng của đồ thị hàm số nằm trong đường tròn tâm gốc tọa độ O bán kính bằng $\sqrt{2019}$?

A. 40.   **B.** 0.   **C.** 1.   **D.** 38.

Lời giải

Chọn C

Từ dạng đồ thị của hàm số ta suy ra

$$y' = \frac{-m(2m-1)+3}{(x-m)^2} > 0 \Rightarrow -m(2m-1)+3 > 0 \Leftrightarrow -1 < m < \frac{3}{2}.$$

Khi đó dễ thấy đồ thị có hai đường tiệm cận là $x = m$, $y = 2m-1$.

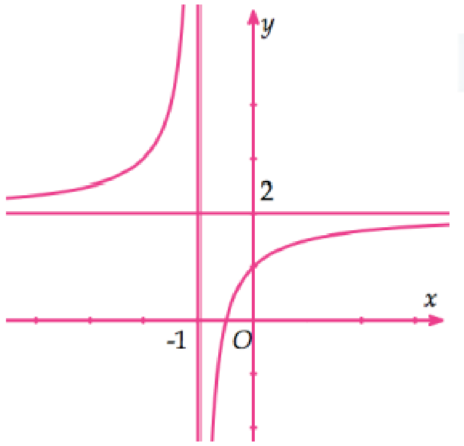
Vậy tâm đối xứng là điểm $I(m;2m-1)$.

Từ đồ thị và giả thiết kèm theo ta có :

$$\begin{cases} y = 2m-1 > 0 \\ x = m > 0 \\ OI < \sqrt{2019} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{1}{2} \\ m > 0 \\ -19 \le m \le 20 \ (m \in \mathbb{Z}) \end{cases}.$$

Kết hợp với điều kiện trên ta suy ra $m = 1$.

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{nx+1}{x+m}$; $(mn \ne 1)$ xác định trên $R\setminus\{-1\}$, liên tục trên từng khoảng xác định và có đồ thị như hình vẽ bên:



Tính tổng $m+n$?

A. $m+n=1$. **B.** $m+n=-1$. **C.** $m+n=3$. **D.** $m+n=-3$.

Lời giải

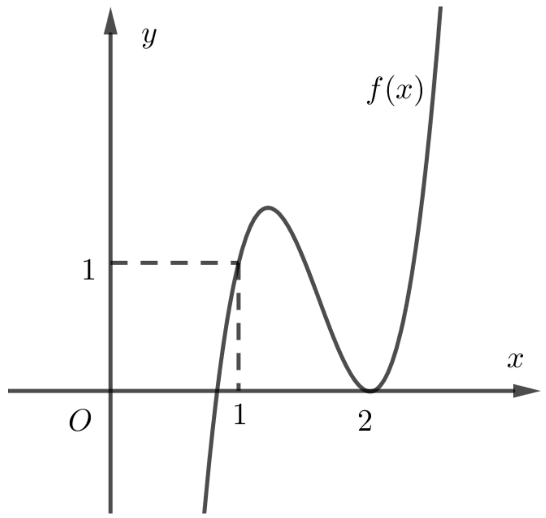
Chọn C

Đồ thị hàm số $y = f(x) = \frac{nx+1}{x+m}$; $(mn \ne 1)$ có hai đường tiệm cận $x = -m = -1$;

$y = n = 2 \Rightarrow m = 1$; $n = 2 \Rightarrow m+n = 3$

Dạng 3: Biết đồ thị của hàm số $y = f(x)$, tìm tiệm cận đứng, tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = g(x)$, trong bài toán không chứa tham số.

Câu 1. Cho hàm số bậc ba $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a,b,c,d \in \mathbb{R})$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Hỏi đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{(x^2-3x+2)\sqrt{x-1}}{x\left[f^2(x)-f(x)\right]}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Chọn A

Xét phương trình: $x\left[f^2(x)-f(x)\right]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ f(x)=0 \\ f(x)=1 \end{array}\right.$

+) Từ điều kiện $x\ge 1 \Rightarrow x=0$ không là tiệm cận đứng.

+) Từ đồ thị $\Rightarrow$ phương trình $f(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=a\,(a<1) \\ x=2 \end{array}\right.$

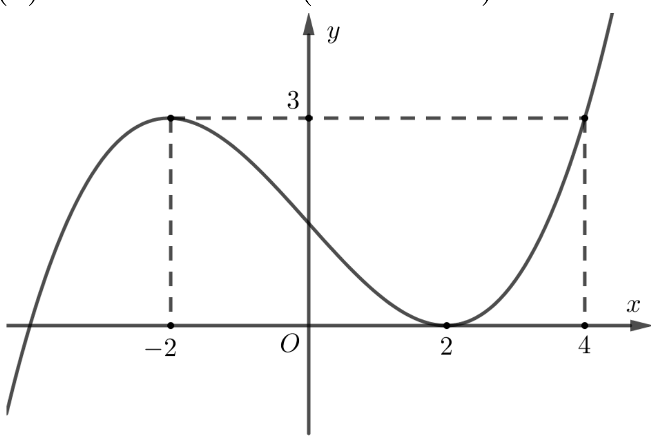
- $x=a$ không là tiệm cận đứng.
- $x=2$ là nghiệm kép và tử số có một nghiệm $x=2 \Rightarrow x=2$ là một đường tiệm cận đứng.

+) Từ đồ thị $\Rightarrow$ phương trình $f(x)=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=b\,(1<b<2) \\ x=c\,(c>2) \end{array}\right.$

- $x=1$ không là tiệm cận đứng (vì tử số có một nghiệm nghiệm $x=1$)
- $x=b$, $x=c$ là hai đường tiệm cận đứng.

Vậy đồ thị hàm số $g(x)$ có 3 đường tiệm cận đứng.

Câu 2. Cho hàm số bậc ba $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a,b,c,d\in\mathbb{R})$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Hỏi đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{1}{f(4-x^2)-3}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Chọn C

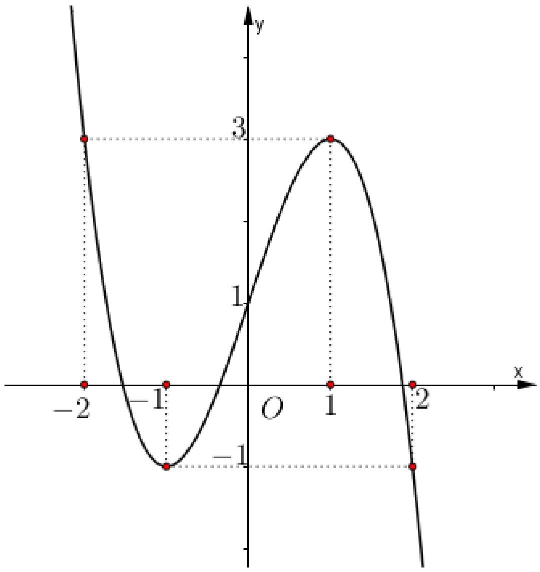
Từ đồ thị ta có $f(4-x^2)-3=0 \Leftrightarrow f(4-x^2)=3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4-x^2=-2 \\ 4-x^2=4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm\sqrt{6} \\ x=0 \end{array}\right.$

$\Rightarrow$ đồ thị hàm số $g(x)$ có ba đường tiệm cận đứng.

Lại có $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(4-x^2)=-\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x)=0 \Rightarrow y=0$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị.

Vậy đồ thị hàm số $g(x)$ có bốn đường tiệm cận.

Câu 3. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị hàm số như hình vẽ



Hỏi đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{(x+1)\left[f^2(x)-f(x)\right]}$ có bao nhiêu tiệm cận đứng ?

A. 3. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

Hàm số xác định $\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 & (1) \\ f^2(x)-f(x)\ne 0 \end{cases}$.

Xét $(x+1)\left[f^2(x)-f(x)\right]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ f^2(x)-f(x)=0 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow f^2(x)-f(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=0 \\ f(x)=1 \end{array}\right.$.

* Với $f(x)=0$:

Từ đồ thị hàm số ta thấy phương trình có 3 nghiệm phân biệt $x_3<x_2<0<x_1$.

Từ điều kiện (1) thì phương trình $f(x)=0$ có 1 nghiệm $x=x_1$.

* Với $f(1)=1$:

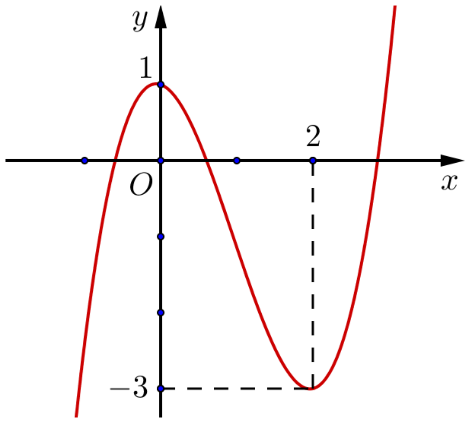
Từ đồ thị hàm số ta thấy phương trình có 3 nghiệm phân biệt $x_6<x_5=0<x_4$.

Từ điều kiện (1) thì phương trình $f(x)=1$ có 2 nghiệm $x=x_5$ và $x=x_4$ và cả 2 nghiệm này đều khác x_1.

Suy ra phương trình $(x+1)\left[f^2(x)-f(x)\right]=0$ có 3 nghiệm phân biệt.

Vậy đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{(x+1)\left[f^2(x)-f(x)\right]}$ có 3 tiệm cận đứng.

Câu 4. Cho hàm số bậc ba $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ



Hỏi đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{(x^2-2x)\sqrt{1-x}}{(x-3)\left[f^2(x)+3f(x)\right]}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

A. 5. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện hàm số có nghĩa $\begin{cases}1-x\ge 0\\(x-3)\left[f^2(x)+3f(x)\right]\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 1 \quad (*)\\(x-3)\left[f^2(x)+3f(x)\right]\ne 0\end{cases}$

Xét phương trình $(x-3)\left[f^2(x)+3f(x)\right]=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\f(x)=0\\f(x)=-3\end{array}\right.$

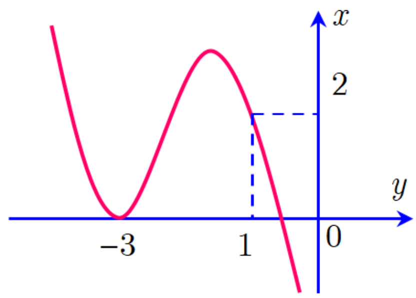
Từ đồ thị hàm số $y=f(x)$ suy ra $f(x)=0$ có 3 nghiệm $-1<x_1<x_2<1<x_3$

$f(x)=-3$ có hai nghiệm $x_4<1$ và $x_5=2$

Kết hợp với điều kiện $(*)$ phương trình $(x-3)\left[f^2(x)+3f(x)\right]=0$ có nghiệm x_1,x_2,x_5.

Và x_1, x_2, x_5 không là nghiệm của tử nên hàm số $g(x)$ có 3 đường tiệm cận đứng.

Câu 5. Cho hàm số bậc ba $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị là đường cong như hình bên. Đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{(x^2+4x+3)\sqrt{x^2+x}}{x\left[(f(x))^2-2f(x)\right]}$ có bao nhiêu đường tiệm cận



A. 4. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $\begin{cases}x\ne 0\\x^2+x\ge 0\\\left[f(x)\right]^2-2f(x)\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x>0\\x\le -1\end{array}\right.\\\left[\begin{array}{l}f(x)\ne 0\\f(x)\ne 2\end{array}\right.\end{cases}$

Từ đồ thị hàm số $y=f(x)$ ta thấy phương trình $f(x)=0$ có nghiệm $x=-3$ (bội 2), và nghiệm $x=x_0$; $x_0\in(-1;0)$ nên : $f(x)=a(x+3)^2(x-x_0)$

Đường thẳng $y=2$ cắt đồ thị $y=f(x)$ tại ba điểm phân biệt có hoành độ $x=-1$; $x=x_1$; $x_1\in(-3;-1)$; $x=x_2$; $(x_2<-3)$. Nên $f(x)-2=a(x+1)(x-x_1)(x-x_2)$.

Do đó: $g(x)=\dfrac{(x^2+4x+3)\sqrt{x^2+x}}{x\left[(f(x))^2-2f(x)\right]}=\dfrac{(x^2+4x+3)\sqrt{x^2+x}}{x.f(x)\left[f(x)-2\right]}$

$$=\frac{(x+1)(x+3)\sqrt{x^2+x}}{x.a(x+3)^2.(x-x_0).a(x+1)(x-x_1)(x-x_2)}=\frac{\sqrt{x^2+x}}{a^2x(x+3)(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}.$$

Ta có: $\lim\limits_{x\to0^+}g(x)=\lim\limits_{x\to0^+}=\dfrac{\sqrt{x+1}}{a^2\sqrt{x}(x+3)(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}=+\infty$ nên $x=0$ là một đường tiệm cận đứng của đồ thị $y=g(x)$

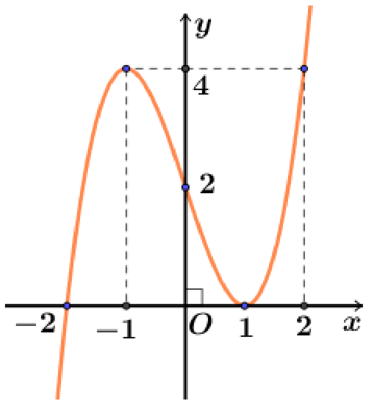
+)Các đường thẳng $x=-3$; $x=x_1$; $x=x_2$ đều là các đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=g(x)$

Do đó đồ thị $y=g(x)$ có 4 đường tiệm cận đứng.

+) Hàm số $y=g(x)$ xác định trên một khoảng vô hạn và bậc của tử nhỏ hơn bậc của mẫu nên đồ thị $y=f(x)$ có một đường tiệm cận ngang $y=0$.

Vậy đồ thị hàm số $y=g(x)$ có 5 đường tiệm cận.

Câu 6. Cho hàm bậc ba $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$. Đồ thị $y=f(x)$ như hình vẽ. Tìm số đường tiệm cận đứng và ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^4-4x^2+3}{(x-1)\left(f^2(x)-2f(x)\right)}$.



A. 4. **B.** 5. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$

Dựa vào đồ thị của $y=f(x)$, ta có

$$\begin{cases}f(-1)=4\\f(0)=2\\f(1)=0\\f(2)=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-a+b-c+d=4\\d=2\\a+b+c+d=0\\8a+4b+2c+d=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=0\\c=-3\\d=2\end{cases}$$

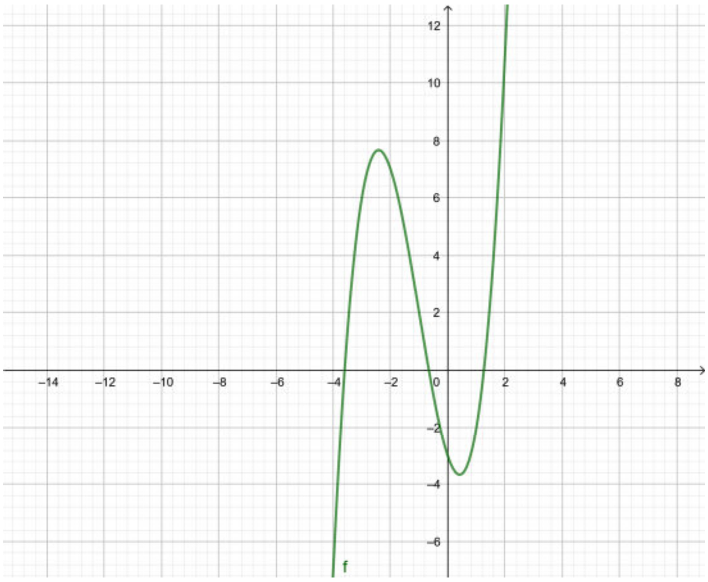
Do đó $f(x)=x^3-3x+2=(x-1)^2(x+2)$

Xét hàm số $y=\dfrac{x^4-4x^2+3}{(x-1)\left(f^2(x)-2f(x)\right)}=\dfrac{\left(x^2-1\right)\left(x^2-3\right)}{(x-1).f(x).\left(f(x)-2\right)}$

$$=\dfrac{\left(x^2-1\right)\left(x^2-3\right)}{(x-1).(x-1)^2.(x+2).x.\left(x^2-3\right)}=\dfrac{(x+1)}{(x-1)^2.(x+2).x}$$

Hàm số có các đường tiệm cận đứng là $x=0$; $x=1$; $x=-2$ và đường tiệm cận ngang $y=0$.

Câu 7. Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ.



Tìm số đường tiệm cận của đồ thị hàm số: $g(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{f(x)+2}$

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C

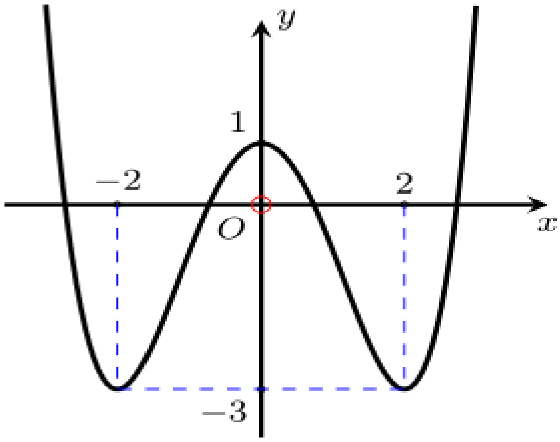
Từ đồ thị ta có: $f(x)+2=0 \Leftrightarrow f(x)=-2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x=a & (a<-2) \\ x=b & (-2<b<0) \\ x=c & (c>0) \end{array}\right.$

Kết hợp với điều kiện có nghĩa của $\sqrt{x}$ suy ra đồ thị hàm số $g(x)$ có 1 tiệm cận đứng $x=c(c>0)$.

Hàm số $g(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{f(x)+2}$ có bậc của tử bé hơn bậc của mẫu (Hàm số có bậc tử là $\dfrac{1}{2}$ còn bậc mẫu là 3) suy ra đồ thị hàm số $g(x)$ có 1 tiệm cận ngang là $y=0$.

Vậy đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{f(x)+2}$ có hai đường tiệm cận.

Câu 8. Cho hàm số bậc bốn $f(x)=ax^4+bx^2+c$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Hỏi đồ thị hàm số $y=\dfrac{\left(x^2-4\right)\left(x^2+2x\right)}{\left[f\left(x\right)\right]^2+2f\left(x\right)-3}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

A. 4. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

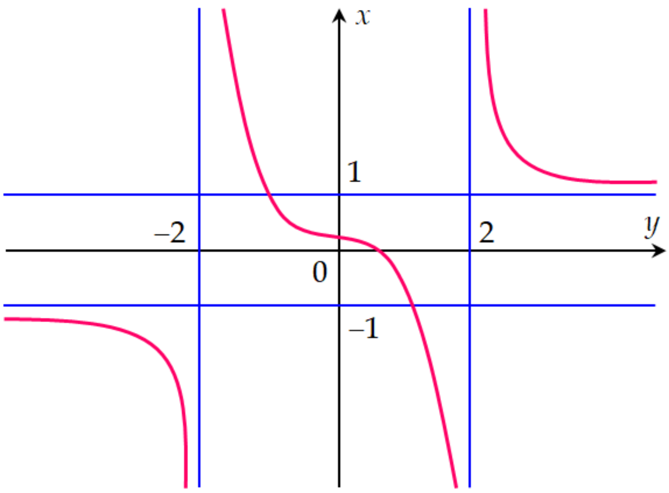
Chọn A

Xét phương trình $f^2\left(x\right)+2f\left(x\right)-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} f\left(x\right)=1\\ f\left(x\right)=-3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=0;x=x_1<-2;x=x_2>2\\ x=-2;x=2\end{array}\right.$

Trong đó nghiệm $x=0$, $x=-2$, $x=2$ đều có bội 2 và $x=x_1\left(x_1<-2\right)$; $x=x_2\left(x_2>2\right)$ là nghiệm đơn (bội 1).

So sánh bội nghiệm ở mẫu và bội nghiệm ở tử thì thấy đồ thị có các TCĐ là $x=0$; $x=2$; $x=x_1$; $x=x_2$

Câu 9. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ sau:



Tìm số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $g\left(x\right)=\dfrac{2}{3f\left(x\right)-2}$

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Chọn B

Dựa vào đồ thị hàm số ta có:

$\lim\limits_{x\to-\infty}g\left(x\right)=\dfrac{2}{3.(-1)-2}=-\dfrac{2}{5}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}g\left(x\right)=\dfrac{2}{3.1-2}=2$

Suy ra đồ thị hàm số đã cho có 2 đường tiệm cận ngang.

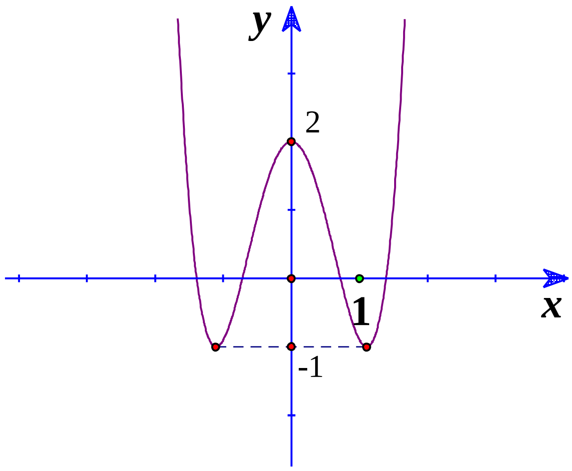
Xét phương trình $3f(x)-2=0 \Leftrightarrow f(x)=\frac{2}{3}$

Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy: phương trình $f(x)=\frac{2}{3}$ có duy nhất một nghiệm.

Vậy hàm số có 3 đường tiệm cận.

Dạng 4: Biết đồ thị của hàm số $y=f(x)$, tìm tiệm cận đứng, tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=g(x)$, trong bài toán chứa tham số.

Câu 1. Cho hàm số $f(x)=ax^4+bx^2+c$ có đồ thị như hình vẽ.



Số các giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $g(x)=\frac{2020x}{f(x)\left[f(x)-m\right]}$ có tổng số 9 đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng là

A. 2. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

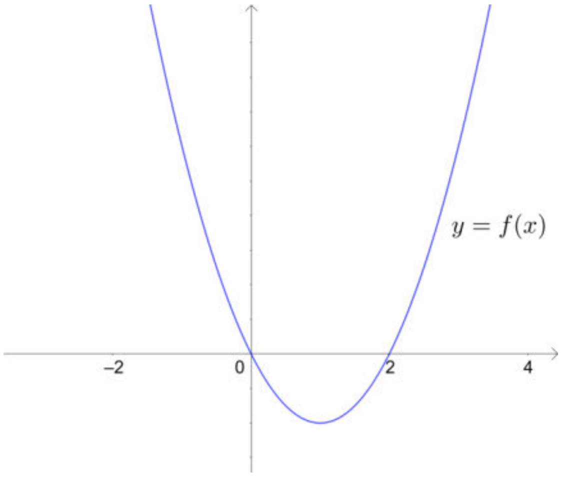
Ta có $g(x)$ là hàm phân thức hữu tỷ với bậc của tử nhỏ hơn bậc của mẫu nên $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x)=0$, do đó đồ thị hàm số $g(x)$ luôn có một tiệm cận ngang là $y=0$.

Phương trình $f(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=x_1;-2<x_1<-1 \\ x=x_2\in(-1;0) \\ x=x_3\in(0;1) \\ x=x_4\in(1;2) \end{array}\right.$.

Ta thấy phương trình $f(x)=0$ có 4 nghiệm phân biệt đều khác 0 nên $x=x_1$, $x=x_2$, $x=x_3$, $x=x_4$ là 4 tiệm cận đứng đồ thị hàm số $g(x)$.

Vậy để đồ thị hàm số $g(x)$ có đúng 9 đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng thì phương trình $f(x)=m$ phải có đúng 4 nghiệm phân biệt khác 0 và khác với 4 nghiệm $x_i\left(i=\overline{1,4}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} -1<m<2 \\ m\neq 0 \end{cases}$ mà $m\in\mathbb{Z}$ nên $m=1$.

Câu 2. Cho hàm số $f(x)=x^2-2x$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm tất cả các giá trị m để đồ thị hàm số $g(x)=\frac{f(x)}{f(x+m)}$ có số tiệm cận là số lẻ.



A. $m \neq 2$ và $m \neq 0$.
B. $m \neq -2$ và $m \neq 0$.
C. $m \neq 0$.
D. $m \neq \pm 2$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\dfrac{f(x)}{f(x+m)} = \dfrac{x^2-2x}{(x+m)^2-2(x+m)}$

$x^2-2x=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=2$.

$(x+m)^2-2(x+m)=0 \Leftrightarrow x=-m \vee x=2-m$.

Vì $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{f(x+m)}=1$, $\forall m\in\mathbb{R}^*$ nên hàm số $g(x)=\dfrac{f(x)}{f(x+m)}$ luôn có 1 tiệm cận ngang là $y=1$.

Với $m=0$, ta có $\dfrac{f(x)}{f(x+m)}=1$, $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0;2\}$. Suy ra đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{f(x)}{f(x+m)}$ không có tiệm cận đứng.

Do vậy với $m=0$, đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{f(x)}{f(x+m)}$ có 1 tiệm cận.

Với $m=2$, ta có $\dfrac{f(x)}{f(x+m)}=\dfrac{x^2-2x}{(x+2)^2-2(x+2)}=\dfrac{x(x-2)}{x(x+2)}$ có tập xác định là $D=\mathbb{R}\setminus\{-2;0\}$.

Có $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{f(x)}{f(x+m)}=\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x(x-2)}{x(x+2)}=\infty$,

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{f(x+m)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x(x-2)}{x(x+2)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-2}{x+2}=-1$.

Do đó đồ thị hàm số $\dfrac{f(x)}{f(x+m)}$ có 2 tiệm cận (1 tiệm cận đứng, 1 tiệm cận ngang).

Với $m=-2$, ta có $\dfrac{f(x)}{f(x+m)}=\dfrac{x^2-2x}{(x-2)^2-2(x-2)}=\dfrac{x(x-2)}{(x-2)(x-4)}$, có tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{2;4\}$.

Có $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x)}{f(x+m)}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x(x-2)}{(x-2)(x-4)}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x}{x-4}=-1$,

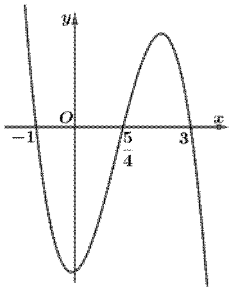
$\lim\limits_{x\to4}\dfrac{f(x)}{f(x+m)}=\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x(x-2)}{(x-2)(x-4)}=\infty$.

Do đó đồ thị hàm số $\dfrac{f(x)}{f(x+m)}$ có 2 tiệm cận (1 tiệm cận đứng, 1 tiệm cận ngang).

Với $m \neq 0$ và $m \neq \pm 2$, ta có $-m$ và $2-m$ không là nghiệm của x^2-2x. Suy ra đồ thị hàm số $\dfrac{f(x)}{f(x+m)}$ có 2 tiệm cận đứng là $x=-m$ và $x=2-m$. Do vậy đồ thị hàm số $\dfrac{f(x)}{f(x+m)}$ có 3 tiệm cận.

Vậy với $m \neq \pm 2$, đồ thị hàm số $\dfrac{f(x)}{f(x+m)}$ có số tiệm cận là số lẻ.

Câu 3. Cho hàm số $g(x)=\dfrac{2018}{h(x)-m^2-m}$ với $h(x)=mx^4+nx^3+px^2+qx$ $(m,n,p,q \in \mathbb{R})$. Hàm số $y=h'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới



Tìm các giá trị m nguyên để số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=g(x)$ là 2.

A. 11. **B.** 10. **C.** 9. **D.** 20.

Lời giải

Chọn B

Ta có $h'(x)=4mx^3+3nx^2+2px+q$. Từ đồ thị ta có $h'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=\dfrac{5}{4} \\ x=3 \end{array}\right.$ và $(m<0)$.

Suy ra $h'(x)=4m(x+1)\left(x-\dfrac{5}{4}\right)(x-3)=4mx^3-13mx^2-2mx+15m$.

Suy ra $h(x)=mx^4-\dfrac{13}{3}mx^3-mx^2+15mx+C$. Từ đề bài ta có $C=0$.

Vậy $h(x)=mx^4-\dfrac{13}{3}mx^3-mx^2+15mx$.

Xét $h(x)-m^2-m=0 \Leftrightarrow m=x^4-\dfrac{13}{3}x^3-x^2+15x-1$.

Xét hàm số $f(x)=x^4-\dfrac{13}{3}x^3-x^2+15x-1 \Rightarrow f'(x)=4x^3-13x^2-2x+15=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=\dfrac{5}{4} \\ x=3 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

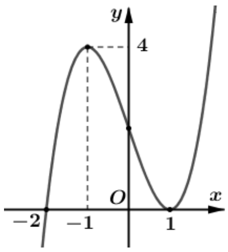
x	$-\infty$		-1		$\frac{5}{4}$		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{35}{3}$	$\nearrow$	$\frac{7807}{768}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Để đồ thị hàm số $g(x)$ có 2 đường tiệm cận đứng $\Leftrightarrow$ phương trình $h(x)-m^2-m=0$ có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình $m=x^4-\dfrac{13}{3}x^3-x^2+15x-1$ có 2 nghiệm phân biệt.

Từ bảng biến thiên kết hợp thêm điều kiện $m<0$ ta có $-\dfrac{35}{3}<m<-1$.

Do m nguyên nên $m\in\{-11;-10;...;-2\}$. Vậy có 10 số nguyên m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 4. Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\quad(a\neq 0)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới



Tìm m để đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{1}{f(x^2-3)-m}$ có đúng 6 tiệm cận đứng?

A. $m\leq 0$.
B. $-2\leq m\leq 0$.
C. $-3<m<-1$.
D. $0<m<4$.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $h(x)=f(x^2-3)\Rightarrow h'(x)=2x.f'(x^2-3)$

$$\Rightarrow h'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ f'(x^2-3)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x^2-3=-1\\ x^2-3=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=\pm\sqrt{2}\\ x=\pm 2\end{array}\right.$$

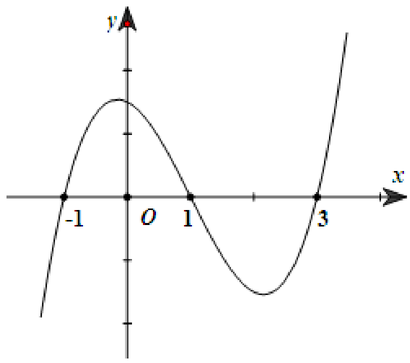
Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		2		$+\infty$
$2x$		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
x^2-3	$+\infty$		1		-1		-3		-1		1		$+\infty$
$f'(x^2-3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	|	$+$	0	$-$	0	$+$	
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$		0		4		$f(-3)<0$		4		0		$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{1}{f(x^2-3)-m}$ có đúng 6 tiệm cận đứng

$\Leftrightarrow h(x)=m$ có 6 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow 0<m<4$.

Câu 5. Cho hàm số $f(x)=mx^3+nx^2+px+q\quad(m,n,p,q\in\mathbb{R})$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới



Tìm số giá trị m nguyên để số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $g\left(x\right)=\dfrac{2019}{f\left(x\right)-8mx-m^2}$ là 3

A. 31. **B.** 8. **C.** 9. **D.** 30.

Lời giải

Chọn B

Từ đồ thị ta có $f\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=1\\x=3\end{array}\right.$ và $m>0$.

Suy ra $f\left(x\right)=m\left(x+1\right)\left(x-1\right)\left(x-3\right)=mx^3-3mx^2-mx+3m$.

Xét $f\left(x\right)-m^2-8mx=0\Leftrightarrow m=x^3-3x^2-9x+4$.

Xét hàm số $y=x^3-3x^2-9x+4\Rightarrow y'=3x^2-6x-9=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=3\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

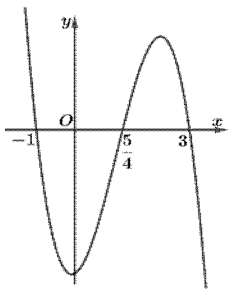
x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	9	$\searrow$	-23	$\nearrow$	$+\infty$

Để đồ thị hàm số $g\left(x\right)$ có 3 đường tiệm cận đứng $\Leftrightarrow$ phương trình $f\left(x\right)-m^2-8mx=0$ có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình $m=x^3-3x^2-9x+4$ có 3 nghiệm phân biệt.

Từ bảng biến thiên kết hợp thêm điều kiện $m>0$ ta có $0<m<9$.

Do m nguyên nên $m\in\{1;2;...;8\}$. Vậy có 8 số nguyên m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 6. Cho hàm số $g\left(x\right)=\dfrac{2018}{h\left(x\right)-m^2-m}$ với $h\left(x\right)=mx^4+nx^3+px^2+qx$ $\left(m,n,p,q\in\mathbb{R}\right)$. Hàm số $y=h'\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới



Tìm các giá trị m nguyên để số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $g(x)$ là 2

A. 11. **B.** 10. **C.** 9. **D.** 20.

Lời giải

Chọn B

Ta có $h'(x) = 4mx^3 + 3nx^2 + 2px + q$. Từ đồ thị ta có $h'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = \dfrac{5}{4} \\ x = 3 \end{array}\right.$ và $(m < 0)$.

Suy ra $h'(x) = 4m(x+1)\left(x - \dfrac{5}{4}\right)(x-3) = 4mx^3 - 13mx^2 - 2mx + 15m$.

Suy ra $h(x) = mx^4 - \dfrac{13}{3}mx^3 - mx^2 + 15mx + C$. Từ đề bài ta có $C = 0$.

Vậy $h(x) = mx^4 - \dfrac{13}{3}mx^3 - mx^2 + 15mx$.

Xét $h(x) - m^2 - m = 0 \Leftrightarrow m = x^4 - \dfrac{13}{3}x^3 - x^2 + 15x - 1$.

Xét hàm số $f(x) = x^4 - \dfrac{13}{3}x^3 - x^2 + 15x - 1 \Rightarrow f'(x) = 4x^3 - 13x^2 - 2x + 15 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = \dfrac{5}{4} \\ x = 3 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

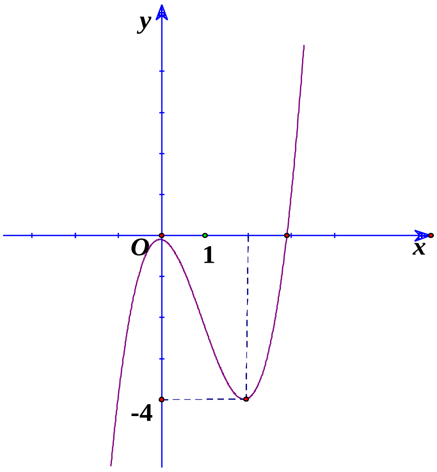
x	$-\infty$		-1		$\frac{5}{4}$		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{35}{3}$	$\nearrow$	$\frac{7807}{768}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Để đồ thị hàm số $g(x)$ có 2 đường tiệm cận đứng $\Leftrightarrow$ phương trình $h(x) - m^2 - m = 0$ có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình $m = x^4 - \dfrac{13}{3}x^3 - x^2 + 15x - 1$ có 2 nghiệm phân biệt.

Từ bảng biến thiên kết hợp thêm điều kiện $m < 0$ ta có $-\dfrac{35}{3} < m < -1$.

Do m nguyên nên $m \in \{-11; -10; ...; -2\}$. Vậy có 10 số nguyên m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 1. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị hàm số như sau:

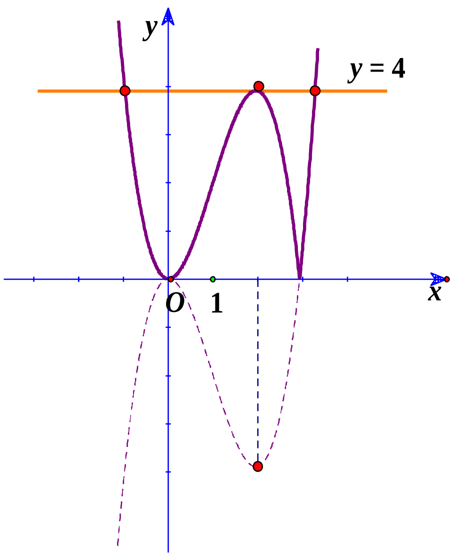


Tìm m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{2}{\left|f\left(x\right)\right|-m^2}$ có đúng ba đường tiệm cận đứng?

A. $m=1$ **B.** $m=2$ **C.** $m=0$ **D.** $m=\pm 2$

Lời giải

Chọn D

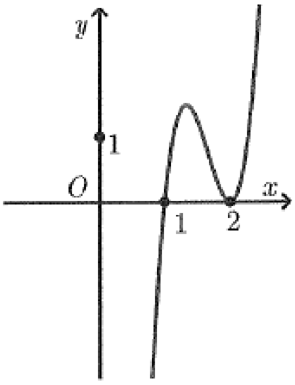


Đồ thị hàm số có ba đường tiệm cận đứng khi phương trình $\left|f\left(x\right)\right|-m^2=0$ có 3 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ Đồ thị hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|$ và đường thẳng $y=m^2$ có 3 giao điểm.

Dựa vào ĐTHS đã cho suy ra $m^2=4 \Leftrightarrow m=\pm 2$

Câu 2. Cho hàm số bậc ba $y=f\left(x\right)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ.



Số giá trị nguyên của $m\in[-10;1]$ để đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{[f(x)-m][f(x)-1]}$ có đúng bốn đường tiệm cận đứng là :

A. 9. **B.** 12. **C.**11. **D.** 10.

Lời giải

Chọn C

* $x^2-3x+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=2\end{array}\right.$

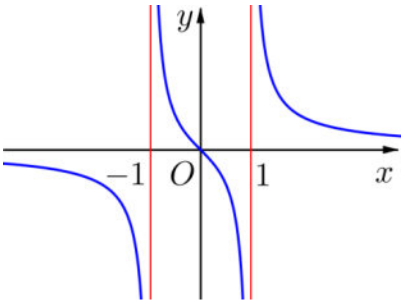
* $(f(x)-m)(f(x)-1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)=m\\f(x)=1\end{array}\right.$

Nhìn vào đồ thị hàm số ta có $f(x)=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=a\in(1;2)\\x=b\in(a;2)\\x=c\in(2;3)\end{array}\right.$.(có ba tiệm cận)

Suy ra đồ thị hàm số $y=g(x)$ có đúng 4 tiệm cận đứng với $m\in[-10;1]$ là $m\in[-10;0]$

Do đó số giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán là 11 số.

Câu 3. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2019;2020]$ để đồ thị hàm số $y=f(x^2-2x+m)-m$ có 5 đường tiệm cận?

A. 4038. **B.** 2019. **C.** 2020. **D.** 4040.

Lời giải

Chọn B

Từ đồ thị hàm số $y=f(x)$ ta suy ra $f(x)$ có tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{\pm1\}$ và các giới hạn: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=-\infty$.

Vì hàm số $t=x^2-2x+m$ xác định trên $\mathbb{R}$ nên hàm số $y=f(x^2-2x+m)-m$ xác định

$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-2x+m\neq1\\x^2-2x+m\neq-1\end{cases}$

Vì $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(x^2-2x+m)=+\infty$ nên $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[f(x^2-2x+m)-m\right]=\lim\limits_{t\to+\infty}\left[f(t)-m\right]=-m$.

Do đó đồ thị hàm số $y=f(x^2-2x+m)-m$ có đúng một đường tiệm cận ngang là đường thẳng $y=-m$ (về cả hai phía $x\to+\infty$ và $x\to-\infty$).

Để đồ thị hàm số $y=f(x^2-2x+m)-m$ có 5 đường tiệm cận thì nó phải có 4 đường tiệm cận đứng.

Điều kiện cần: $\left[\begin{array}{l}x^2-2x+m=1\\x^2-2x+m=-1\end{array}\right.$ phải có 4 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}(x-1)^2=-m+2\\(x-1)^2=-m\end{array}\right.$ có 4 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases}-m+2>0\\-m>0\end{cases} \Leftrightarrow m<0$.

Điều kiện đủ: Giả sử x_1, x_2 $(x_1<x_2)$ là hai nghiệm phân biệt của phương trình $x^2-2x+m=1$; x_3, x_4 là hai nghiệm phân biệt của phương trình $x^2-2x+m=-1$.

Xét đường thẳng $x=x_1$, ta có $\lim\limits_{x\to x_1^{\mp}}\left[f\left(x^2-2x+m\right)-m\right]=\lim\limits_{t\to 1^{\pm}}\left[f(t)-m\right]=\pm\infty$.

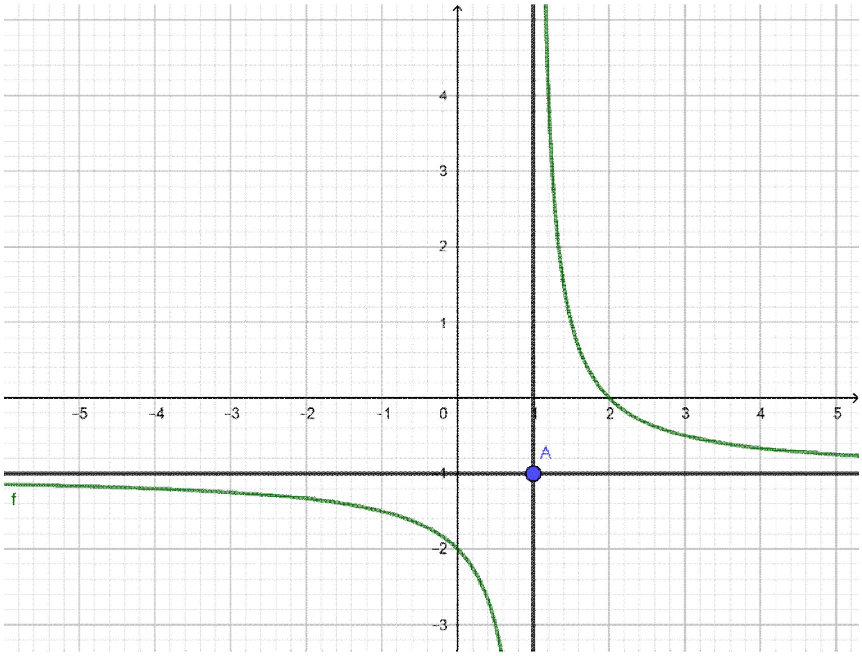
Suy ra đường thẳng $x=x_1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=f\left(x^2-2x+m\right)-m$.

Tương tự các đường thẳng $x=x_2$, $x=x_3$, $x=x_4$ cũng là các đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=f\left(x^2-2x+m\right)-m$.

Vậy để đồ thị hàm số $y=f\left(x^2-2x+m\right)-m$ có 5 đường tiệm cận thì $m<0$.

Do $m\in\mathbb{Z}$ và $m\in[-2019;2020]$ nên có tất cả 2019 giá trị của m .

Câu 4. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của m để đồ thị hàm số $y=\left|f(x-16)+10-m^2\right|$ có tiệm cận ngang nằm phía dưới đường thẳng $d: y=8$ (không trùng với d).

A. 8 **B.** 2 **C.** 6 **D.** 4

Lời giải

Chọn C

Đồ thị hàm số $g(x)=f(x-16)+10-m^2$ có được bằng cách thực hiện liên tiếp 2 phép tịnh tiến là tịnh tiến theo phương trục hoành sang phải 16 đơn vị và theo phương trục tung $\left(10-m^2\right)$ đơn vị.

Từ hình vẽ: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x-16)=\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=-1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x)=9-m^2$

Do vậy đồ thị hàm số $g(x)$ có một tiệm cận ngang là $y=9-m^2$, ta có 2 TH sau:

+) TH 1: Nếu $9-m^2<0$ thì tiệm cận ngang của đồ thị $y=|g(x)|$ là $y=m^2-9<8$

$\Rightarrow 9<m^2<17$

mà $m\in\mathbb{Z}$, nên $m=\pm 4$

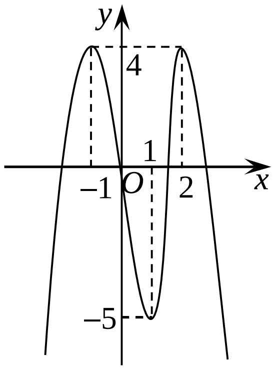
+) TH 2: Nếu $9-m^2\geq 0$ thì tiệm cận ngang của đồ thị $y=|g(x)|$ là $y=9-m^2<8$

$\Rightarrow 1<m^2\leq 9$

mà $m \in \mathbb{Z}$, nên $m = \pm 2$, $m = \pm 3$

+) KL: có 6 giá trị nguyên của m thỏa mãn bài ra.

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như sau



Tìm tất cả các số thực m để đồ thị hàm số $y = \dfrac{1}{f(x) - m}$ có hai tiệm cận đứng?

A. $m = 4$ hoặc $m < -5$. **B.** $m = 4$. **C.** $m = -5$. **D.** $-5 < m < 4$.

Lời giải

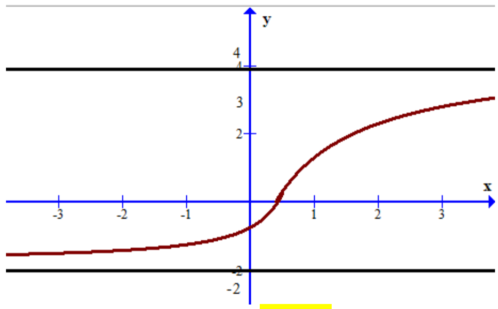
Chọn A

Ta có $f(x) - m = 0 \Leftrightarrow f(x) = m$.

Ta cần tìm m để phương trình trên có hai nghiệm thực.

Dựa vào bảng biến thiên suy ra $m = 4$ hoặc $m < -5$.

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới. Hỏi có bao nhiêu giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = \left| f(x) + \sqrt[3]{8 - m} + \sqrt{m + 1} - 4 \right|$ có đúng một tiệm cận ngang?



A. 0. **B.** 2. **C.** 3. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn C

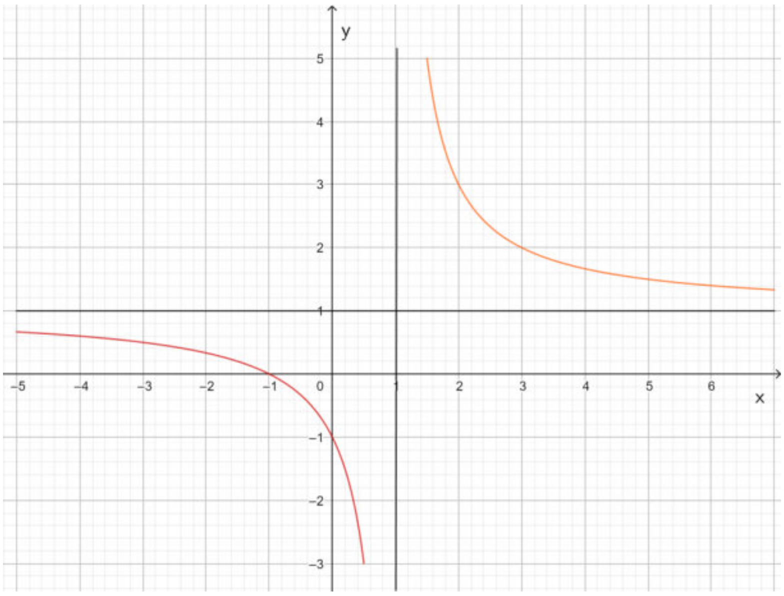
Để đồ thị hàm số $y = \left| f(x) + \sqrt[3]{8 - m} + \sqrt{m + 1} - 4 \right|$ có đúng một tiệm cận ngang thì đồ thị hàm số $y = f(x) + \sqrt[3]{8 - m} + \sqrt{m + 1} - 4$ có hai tiệm cận ngang đối xứng nhau qua trục hoành , khi đó từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ ta tịnh tiến xuống đúng 1 đơn vị. Vậy $\sqrt[3]{8 - m} + \sqrt{m + 1} - 4 = -1$.

Giải $\sqrt[3]{8 - m} + \sqrt{m + 1} = 3$ ta đặt $u = \sqrt[3]{8 - m}$; $v = \sqrt{m + 1}\ (v \ge 0)$

Khi đó ta có hệ: $\begin{cases} u + v = 3 \\ u^3 + v^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 3 - u \quad (u \le 3) \\ u^3 + u^2 - 6u = 0 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} u = 0 \\ u = 2 \\ u = -3 \end{array} \right.$

tìm được ba giá trị m là 0; 8; 35.

Câu 7. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Tìm m để đồ thị hàm số $y=g(x)=\left|f\left(\left|x+(m+1)^2\right|\right)-m^2+2m+2\right|$ có tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng là nhiều nhất?

A. $-2<m<0$ **B.** $\Leftrightarrow 1\le m\le 3$.

C. $-3<m<-2$. **D.** $-2<m<-1$.

Lời giải

Chọn B

Dựa vào đồ thị hàm số $f(x)$ thì đồ thị hàm số $h(x)=f\left(\left|x+(m+1)^2\right|\right)$ luôn có 1 tiệm cận ngang và có 2 tiệm cận đứng $\forall m$.

Vì đồ thị hàm số số $g(x)=\left|h(x)-m^2+2m+2\right|$ bảo toàn số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $h(x)$. Do đó dựa vào đồ thị hàm số $h(x)$ thì đồ thị hàm số $g(x)$ có 2 tiệm cận đứng và có số tiệm cận ngang $\le 1\ \ \forall m$

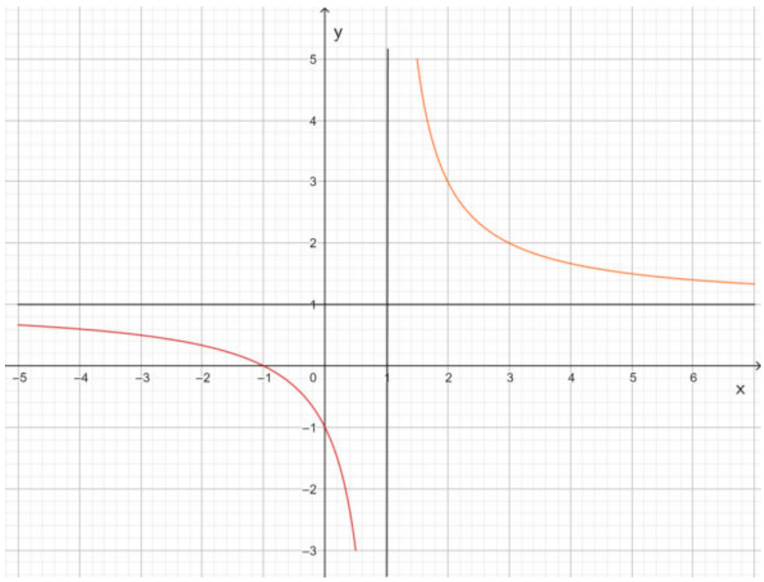
Vậy để đồ thị $y=g(x)=\left|f\left(\left|x+(m+1)^2\right|\right)-m^2+2m+2\right|$ có tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng nhiều nhất là 3

$\Leftrightarrow$ $g(x)$ có 2 tiệm cận đứng và 1 tiệm cận ngang

$\Leftrightarrow$ $h(x)$ tịnh tiến xuống dưới không quá 1 đơn vị.

$\Leftrightarrow -m^2+2m+2\ge -1 \Leftrightarrow 1\le m\le 3$

Câu 8. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Tìm m để đồ thị hàm số $g(x)=f\left(\left|x-m^2\right|\right)-2020$ nhận đường thẳng $x=5$ làm tiệm cận đứng?

A. $m=\pm2$

B. $\left[\begin{array}{l} m=\pm2 \\ m=\pm\sqrt{6} \end{array}\right.$.

C. $m=\pm\sqrt{6}$.

D. $\left[\begin{array}{l} m=2 \\ m=\sqrt{6} \end{array}\right.$.

Lời giải

Chọn B

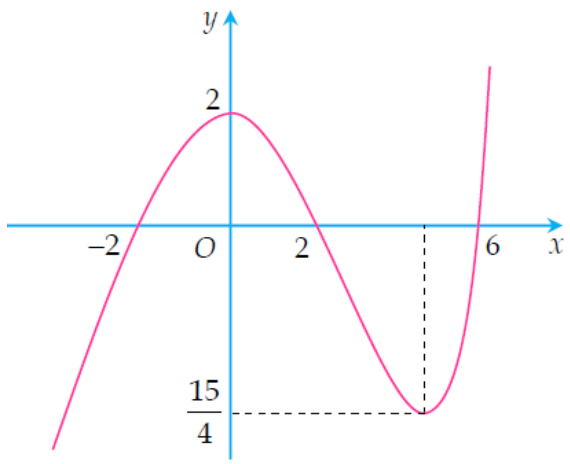
Xét hàm số $h(x)=f(|x|)$ có đồ thị hàm số nhận đường thẳng $y=1$ làm tiệm cận ngang, $x=1$, $x=-1$ làm tiệm cận đứng.

Suy ra đồ thị hàm số $u(x)=h\left(x-m^2\right)=f\left(\left|x-m^2\right|\right)$ nhận đường thẳng $x=m^2+1; x=m^2-1$ làm tiệm cận đứng, đường thẳng $y=1$ làm tiệm cận ngang.

Suy ra đồ thị hàm số $g(x)=u(x)-2020$ nhận đường thẳng $x=m^2+1; x=m^2-1$ làm tiệm cận đứng, đường thẳng $y=-2019$ làm tiệm cận ngang.

Theo đề bài, ta có $\left[\begin{array}{l} m^2+1=5 \\ m^2-1=5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=\pm2 \\ m=\pm\sqrt{6} \end{array}\right.$

Câu 9. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ



Với m, n là hai số nguyên dương, khi hàm số $g(x)=\dfrac{x^2+8x+\sqrt{n-m}}{f(f(x)+m)}$ có số tiệm cận lớn nhất là n hãy tính giá trị nhỏ nhất của $S=m^2+n^2$

A. 14 . **B.** 74 . **C.** 50 . **D.** 3 .

Lời giải

Chọn C

Để hàm số có tiệm cận đứng thì điều kiện:

$$f\left[f(x)+m\right]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)+m=-2 \\ f(x)+m=2 \\ f(x)+m=6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=-m-2 \\ f(x)=-m+2 \\ f(x)=-m+6 \end{array}\right.$$

Khi đó để hàm số có có nhiều tiệm cận đứng nhất thì:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 6-m<2 \\ 2-m>-\dfrac{15}{4} \end{cases} \\ \begin{cases} -2-m>-\dfrac{15}{4} \\ 2-m<2 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m=5 \\ m=1 \end{array}\right.$$

Xét $h(x)=x^2+8x+\sqrt{n-m}$ có $h'(x)=2x+8$

nên $h(x)$ đồng biến trên khoảng $(-4;+\infty)$

Khi $m=5$ thì đường thẳng $y=-7$ gặp $f(x)$ tại điểm có hoành độ lớn hơn -4 .

Nên $h(x)>0$, $\forall x\in(-4;+\infty)$. Do đó $\left[\begin{array}{l} S=74 \\ S=50 \end{array}\right. \Rightarrow \min S=50$

Phần 2: Biết BBT của hàm số $y=f(x)$

Dạng 5: Biết BBT của hàm số $y=f(x)$, tìm tiệm cận đứng, tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=f(x)$, trong bài toán không chứa tham số.

Câu 1. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
y'		$-$	||	$-$	||	$+$	
y	4 ↘		1 || $+\infty$	↘	2 || 2	↗	$+\infty$

Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là

A. Không tồn tại tiệm cận đứng. **B.** $x=-2$

C. $x=1$ **D.** $x=-2$ và $x=1$

Lời giải

Chọn B

Vì $\lim\limits_{x\to(-2)^+} y=+\infty$ nên $x=-2$ là tiệm cận đứng

Câu 2. Số tiệm cận đứng và số tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên sau là

x	-2		-1		1		4		$+\infty$
y'	||	$+$	||	$+$	0	$-$	||	$-$	
y	|| 0	↗	$+\infty$ || $-\infty$	↗	$0,325$	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	1

A. 2 TCĐ và 2 TCN . **B.** 3 TCĐ và 2 TCN .

C. 2 TCĐ và 1 TCN . **D.** 3 TCĐ và 1 TCN .

Lời giải

Chọn C

Dựa vào bảng biến thiên ta có

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ nên $y=1$ là TCN.

$\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)=+\infty$ nên $x=-1$ là TCĐ.

$\lim\limits_{x\to4^+} f(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to4^-} f(x)=-\infty$ nên $x=4$ là TCĐ.

Vậy có 2 TCĐ và 1 TCN .

Câu 3. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên từng khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$			$\|\|$		0		
$f(x)$	3	$\searrow$	-2 $\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	2

Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là:

A. 4. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

+) Ta có $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=-\infty \Rightarrow x=0$ là đường TCĐ của đồ thị hàm số

+) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=3 \Rightarrow y=3$ là đường TCN của đồ thị hàm số

+) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2 \Rightarrow y=2$ là đường TCN của đồ thị hàm số.

Câu 4. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y	2	$\nearrow$	$+\infty$ $\|\|$ 3	$\nearrow$	5

Tổng số đường tiệm cận ngang và đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là

A. 4. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C

Từ bảng biến thiên ta có:

$\lim\limits_{x\to1^-} y=+\infty$ nên đường thẳng $x=1$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$\lim\limits_{x\to-\infty} y=2$, $\lim\limits_{x\to+\infty} y=5$ nên đường thẳng $y=2$ và $y=5$ là các đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Tổng số đường tiệm cận ngang và đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là 3.

Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	1		2		$+\infty$
y'		$\|\|$	$-$	$\|\|$	$+$	
y		$\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	3 $\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Hỏi đồ thị hàm số $y = f(x)$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Từ bảng biến thiên, ta có:

$\lim\limits_{x\to+\infty} y = +\infty$. Vậy đồ thị hàm số $y = f(x)$ không có tiệm cận ngang.

$\lim\limits_{x\to 2^+} y = -\infty$. Vậy $x = 2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

$\lim\limits_{x\to 1^+} y = +\infty$. Vậy $x = 1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có đúng hai đường tiệm cận. **Chọn B.**

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên các khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình vẽ sau:

x	$-\infty$		-2		0		1		$+\infty$
y'		$+$	||	$+$	||	$+$	0	$-$	
y	2	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	1 || $+\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	3

Số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Dựa vào bảng biến thiên, ta có

$\lim\limits_{x\to -2^-} y = +\infty$, $\lim\limits_{x\to -2^+} y = -\infty$ suy ra $x = -2$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$\lim\limits_{x\to 0^+} y = +\infty$ suy ra $x = 0$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị của hàm số có 2 đường tiệm cận đứng.

Câu 7. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$-$	||	$+$	0	$-$	
y	2	$\searrow$	$-\infty$ || -2	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải

Chọn C

Từ bảng biến thiên ta có

+) $\lim\limits_{x\to+\infty} y = -\infty$;

+) $\lim\limits_{x\to-\infty} y = 2$;

+) $\lim\limits_{x\to 0^-} y = -\infty$;

+) $\lim\limits_{x \to 0^+} y = -2$.

Do đó đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng $x = 0$ và đường tiệm cận ngang $y = 2$.

Câu 8. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
y'		$+$	||	$+$	0	$-$	
y	-1	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có tổng số bao nhiêu tiệm cận (chỉ xét các tiệm cận đứng và ngang)?

A. 2. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Từ BBT ta có:

$\lim\limits_{x \to -\infty} y = -1$. Vậy đường thẳng $y = -1$ là đường TCN của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

$\lim\limits_{x \to 1^-} y = +\infty \left(\lim\limits_{x \to 1^+} y = -\infty \right)$. Vậy đường thẳng $x = 1$ là đường TCĐ của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có đúng 2 đường tiệm cận. **Chọn A**

Dạng 6: Biết BBT của hàm số $y = f(x)$, tìm tiệm cận đứng, tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$, trong bài toán chứa tham số.

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số có 1 đường tiệm cận ngang

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
y'		$+$	||	$+$	
y	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	m

A. Không có m. **B.** $m = 0$. **C.** $m = -\frac{1}{2}$. **D.** $m = \frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Từ BBT suy ra TCN của đồ thị hàm số là $y = \frac{1}{2}$ và $y = m$;

YCBT $\Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$.

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y		$\nearrow$	3	$\searrow$	
	$-\infty$				$-\infty$

Tính tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số m trên khoảng $(-20;20)$ để đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{f(x)-m}$ có tiệm cận ngang.

A. 187. **B.** -184. **C.** 186. **D.** -185.

Lời giải

Chọn B

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{f(x)-m}$ có tiệm cận ngang nếu phương trình $f(x)=m$ có nghiệm.

Từ BBT suy ra $m\le 3$.

Kết hợp điều kiện $m\in(-20;20)$, $m\in Z$ ta có $m\in\{-19;-18;...;3\}$

Vậy tổng các giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn đề bài là -184.

Câu 3. Cho đồ thị hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên xác định như hình. Biết rằng đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=x_0$, tiệm cận ngang là $y=y_0$ và $x_0y_0=16$. Hỏi m bằng?

x	$-\infty$		m		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$ $\searrow$	1	$\Vert$	$-\infty$ $\nearrow$	8

A. $m=8$. **B.** $m=-16$. **C.** $m=1$. **D.** $m=2$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\lim\limits_{x\to m^+} y=-\infty$ nên $x=m$ là tiệm cận đứng.

$\lim\limits_{x\to+\infty} y=8$ nên $y_o=8$ là tiệm cận ngang.

Suy ra $8m=16\Leftrightarrow m=2$.

Câu 4. Hàm số $y=f(x)$ liên tục trên các khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây

x	$-\infty$		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$ $\searrow$	5	$\Vert$	$-\infty$ $\nearrow$	$m+2$

Tìm m để đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = x_o$ và tiệm cận ngang $y = y_o$ sao cho $x_o y_o < 30$.

A. $m < 1$. **B.** $m < 10$. **C.** $m < 8$. **D.** $m > 8$.

Lời giải

Chọn C

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = m+2$ suy ra đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y = m+2$. Ta có $y_o = m+2$.

$\lim\limits_{x\to3^+} f(x) = -\infty$ suy ra đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x = 3$. Ta có $x_o = 3$.

$x_o y_o < 30 \Leftrightarrow 3(m+2) < 30 \Leftrightarrow m < 8$.

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	
$f(x)$	2	↗	-1	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	m

Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in [0;3]$ để đồ thị hàm số $y = f(x)$ có 3 đường tiệm cận?

A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Ta có

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2 \Rightarrow y = 2$ là một đường tiệm cận ngang.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = m \Rightarrow y = m$ là một đường tiệm cận ngang.
- $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = +\infty \Rightarrow x = 1$ là một đường tiệm cận đứng.

Để đồ thị hàm số $y = f(x)$ có 3 đường tiệm cận thì $m \neq 2$. Vì m nguyên và $m \in [0;3]$ nên $m \in \{0;1;3\}$.

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
f '(x)		-	‖	-	‖	+	
f(x)	4	↘	1 ‖ $+\infty$	↘	2 ‖ $-\infty$	↗	m^2

Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in [-4;4]$ để hàm số có 4 tiệm cận?

A. 5 . **B.** 6. **C.** 7. **D.** 8.

Lời giải

Chọn C

+ Ta có $\lim\limits_{x\to-2^+} f(x) = +\infty$ nên $x = -2$ là một tiệm cận đứng.

$\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = -\infty$ nên $x = 1$ là một tiệm cận đứng.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 4$ nên $y = 4$ là một tiệm cận ngang.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = m^2$ nên $y = m^2$ là một tiệm cận ngang.

+ Để hàm số có 4 tiệm cận thì $m^2 \neq 4 \Leftrightarrow m \neq \pm 2$ mà $m \in [-4;4]$ nên $m \in \{\pm 4; \pm 3; \pm 1; 0\}$

Vậy có 7 giá trị m cần tìm.

Câu 7. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$		-2		0		1		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$		$+$	‖	$-$	
y	-1 ↘		$-\infty$ ‖ 2	↘	-4	↗	3	↘	m^2

Số tiệm cận của đồ thị hàm số $y = f(x)$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

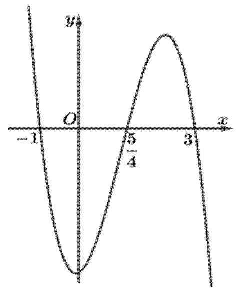
ChọnC

Qua bảng biến thiên ta có $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = m^2 \neq -1$ nên đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận ngang: $y = -1$ và $y = m^2$.

Lại có $\lim\limits_{x\to-2^-} f(x) = -\infty$ nên đồ thị hàm số có một tiệm cận đứng $x = -2$.

Vậy số tiệm cận của đồ thị hàm số $y = f(x)$ là 3.

Câu 8. Cho hàm số $g(x) = \dfrac{2018}{h(x) - m^2 - m}$ với $h(x) = mx^4 + nx^3 + px^2 + qx$ $(m, n, p, q \in \mathbb{R})$. Hàm số $y = h'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới



Tìm các giá trị m nguyên để số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $g(x)$ là 2

A. 11. **B.** 10. **C.** 9. **D.** 20.

Lời giải

Chọn B

Ta có $h'(x) = 4mx^3 + 3nx^2 + 2px + q$. Từ đồ thị ta có $h'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = \dfrac{5}{4} \\ x = 3 \end{array}\right.$ và $(m < 0)$.

Suy ra $h'(x) = 4m(x+1)\left(x - \dfrac{5}{4}\right)(x-3) = 4mx^3 - 13mx^2 - 2mx + 15m$.

Suy ra $h(x) = mx^4 - \dfrac{13}{3}mx^3 - mx^2 + 15mx + C$. Từ đề bài ta có $C = 0$.

Vậy $h(x) = mx^4 - \dfrac{13}{3}mx^3 - mx^2 + 15mx$.

Xét $h(x) - m^2 - m = 0 \Leftrightarrow m = x^4 - \dfrac{13}{3}x^3 - x^2 + 15x - 1$.

Xét hàm số $f\left(x\right)=x^4-\frac{13}{3}x^3-x^2+15x-1 \Rightarrow f'\left(x\right)=4x^3-13x^2-2x+15=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=\frac{5}{4} \\ x=3 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		$\frac{5}{4}$		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{35}{3}$	$\nearrow$	$\frac{7807}{768}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Để đồ thị hàm số $g\left(x\right)$ có 2 đường tiệm cận đứng $\Leftrightarrow$ phương trình $h\left(x\right)-m^2-m=0$ có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình $m=x^4-\frac{13}{3}x^3-x^2+15x-1$ có 2 nghiệm phân biệt.

Từ bảng biến thiên kết hợp thêm điều kiện $m<0$ ta có $-\frac{35}{3}<m<-1$.

Do m nguyên nên $m\in\left\{-11;-10;...;-2\right\}$. Vậy có 10 số nguyên m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 9. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$		-2		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	‖	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	$(m-1)(2-m)$

Tìm tổng số các giá trị nguyên dương của tham số $m\in\left(-10;10\right)$ để đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ có tổng số đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang là 4.

A. 42. **B.** 45. **C.** -3. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A

Từ bảng biến thiên ta có $\lim\limits_{x\to-\infty}f\left(x\right)=0$ và $\lim\limits_{x\to+\infty}f\left(x\right)=\left(m-1\right)\left(2-m\right)$. Suy ra tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ là $y=0$ và $y=\left(m-1\right)\left(2-m\right)$.

Lại có $\lim\limits_{x\to-2^-}f\left(x\right)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to-2^+}f\left(x\right)=+\infty$ suy ra tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ là $x=-2$.

Và $\lim\limits_{x\to2^-}f\left(x\right)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to2^+}f\left(x\right)=-\infty$ suy ra tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ là $x=2$.

Để đồ thị hàm số có tổng số đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang là 4 khi và chỉ khi $\left(m-1\right)\left(2-m\right)\neq0 \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq1 \\ m\neq2 \end{cases}$.

Vì $m\in\left(-10;10\right)$ và m là số nguyên dương nên $m\in\left\{3;4;5;6;7;8;9\right\}$.

Vậy $3+4+5+6+7+8+9=42$.

Câu 10. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	-15	$\nearrow$	$+\infty$

Tìm số các giá trị nguyên âm của tham số m để đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{2019}{f(x)-m}$ có tổng số đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang là 3.

A. 14. **B.** 17. **C.** 15. **D.** 16.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=+\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2019}{f(x)-m}=0$. Suy ra tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $g(x)$ là $y=0$.

Để đồ thị hàm số $g(x)$ có ba đường tiệm cận thì đồ thị hàm số $g(x)$ phải có hai đường tiệm cận đứng $\Leftrightarrow$ phương trình $f(x)-m=0$ có số nghiệm là 2 $\Leftrightarrow$ phương trình $f(x)=m$ có số nghiệm là 2.

Từ đồ thị hàm số $y=f(x)$ suy ra phương trình $f(x)=m$ có số nghiệm là 2 $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>2 \\ -15<m<1 \end{array}\right.$.

Mà tham số m là số nguyên âm. Vậy $m\in\{-14;-13;-12;-11;...;-2;-1\}$.

Câu 11. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới đây

x	$-\infty$		1		2		4		$+\infty$
y'		$-$	$\parallel$	$+$	0	$-$	$\parallel$	$+$	
y	$\dfrac{1}{m}$	$\searrow$	$-\infty \parallel -5$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	$-5 \parallel -\infty$	$\nearrow$	m

Có bao nhiêu giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=f(x)$ có tổng số đường tiệm cận ngang và đứng là 3 ?

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** vô số.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện $m\neq 0$

Ta có $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=-\infty$ và $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x)=-\infty$ nên đồ thị hàm số $y=f(x)$ có 2 đường tiệm cận đứng (là hai đường thẳng $x=1$ và $x=4$)

Cũng từ bảng biến thiên ta có $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\dfrac{1}{m}$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=m$ với điều kiện $m\neq 0$.

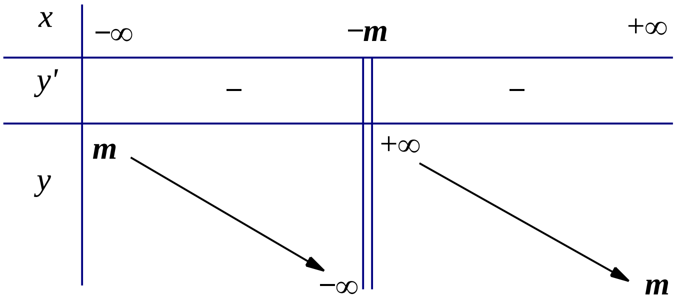
Để đồ thị hàm số $y = f\left(x\right)$ có tổng số đường tiệm cận ngang và đứng là 3

$\Leftrightarrow$ đồ thị hàm số $y = f\left(x\right)$ có số đường tiệm cận ngang là 1

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} f\left(x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right) \Leftrightarrow \dfrac{1}{m} = m \Leftrightarrow m^2 = 1 \Leftrightarrow m = \pm 1$.

Vậy có 2 giá trị của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 12. Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Định tham số m để giao điểm của đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang là điểm $I\left(-1;1\right)$.



A. Không có m. **B.** $m = 0$. **C.** $m = -1$. **D.** $m = 1$.

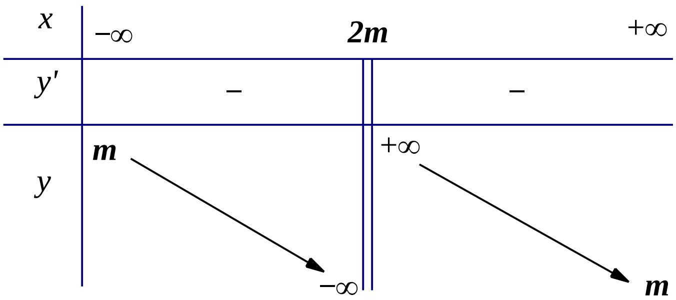
Lời giải

Chọn D

Từ BBT suy ra TCĐ là $x = -m$, TCN là $y = m$; nên giao điểm TCĐ và TCN là $I\left(-m;m\right)$.

YCBT $I\left(-m;m\right) \equiv I\left(-1;1\right) \Leftrightarrow \begin{cases} -m = -1 \\ m = 1 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1$.

Câu 13. Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Định tham số m để giao điểm của đường tiện cận đúng và tiệm cận ngang nằm trên đường thẳng $d: y = x + 5$.



A. $m = 5$. **B.** $m = -5$.

C. $m = 4$. **D.** $m = -4$.

Lời giải

Chọn B

Từ BBT suy ra TCĐ là $x = 2m$, TCN là $y = m$; nên giao điểm TCĐ và TCN là $I\left(2m;m\right)$.

Giao điểm $I\left(2m;m\right) \in d: y = x + 5 \Leftrightarrow m = 2m + 5 \Leftrightarrow m = -5$.

Câu 14. Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Định tham số m và n để đồ thị hàm số nhận đường thẳng $x = 2$, $y = 2$ lần lượt là TCĐ và TCN thì biểu thức $9m^2 + 6mn + 36n^2$ có giá trị là

x	$-\infty$		$\dfrac{2-2m}{n}$		$+\infty$
y'		$-$	||	$-$	
y	$\dfrac{m}{n}$	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	$\dfrac{m}{n}$

A. $\dfrac{28}{3}$. **B.** $\dfrac{2}{3}$. **C.** $\dfrac{1}{3}$. **D.** $\dfrac{7}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Từ BBT suy ra TCĐ là $x=\dfrac{2-2m}{n}$, TCN là $y=\dfrac{m}{n}$;

YCBT: đường thẳng $x=2, y=2$ lần lượt là TCĐ và TCN nên

$$\begin{cases}\dfrac{2-2m}{n}=2\\ \dfrac{m}{n}=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2-2m=2n\\ m=2n\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2m+2n=2\\ m-2n=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m=\dfrac{2}{3}\\ n=\dfrac{1}{3}\end{cases}$$

KL: vậy $9m^2+6mn+36n^2=\dfrac{28}{3}$.

Dạng 7: Biết BBT của hàm số $y=f(x)$, tìm tiệm cận đứng, tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=g(x)$, trong bài toán không chứa tham số.

Câu 1. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau :

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
y'		$+$	||	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	1 || $+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Tính tổng số đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{e^{f^2(x)}-3}$.

A. 4. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Từ bảng biến thiên của hàm số $f(x)$, ta suy ra:

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} f^2(x)=+\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} e^{f^2(x)}=+\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{e^{f^2(x)}-3}=0$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f^2(x)=+\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} e^{f^2(x)}=+\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^{f^2(x)}-3}=0$.

Do đó, đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{e^{f^2(x)}-3}$ có một đường tiệm cận ngang là đường thẳng $y=0$.

Xét phương trình: $e^{f^2(x)}-3=0\ (*)$. Ta có $(*)\Leftrightarrow f^2(x)=\ln 3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} f(x)=\sqrt{\ln 3}\ (1)\\ f(x)=-\sqrt{\ln 3}\ (2)\end{array}\right.$

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $f(x)$, ta có:

- Vì $\sqrt{\ln 3}>1$ nên phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt là $x_1\in(1;2)$ và $x_2\in(2;+\infty)$.
- Vì $-\sqrt{\ln 3}<1$ nên phương trình (2) có một nghiệm là $x_3\in(-\infty;1)$.

Suy ra phương trình $(*)$ có 3 nghiệm phân biệt là x_1,x_2,x_3. Khi đó:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to x_1^+}\left(e^{f^2(x)}-3\right)=0\\ x\to x_1^+\Rightarrow 1<f(x)<f(x_1)\Rightarrow e^{f^2(x)}-3<e^{f^2(x_1)}-3=0\end{cases}\Rightarrow\lim_{x\to x_1^+}\frac{1}{e^{f^2(x)}-3}=-\infty.$$

Suy ra đường thẳng $x=x_1$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{e^{f^2(x)}-3}$.

Tương tự, ta tính được: $\lim\limits_{x\to x_2^+}\dfrac{1}{e^{f^2(x)}-3}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to x_3^+}\dfrac{1}{e^{f^2(x)}-3}=+\infty$.

Suy ra các đường thẳng $x=x_2, x=x_3$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{e^{f^2(x)}-3}$.

Vậy đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{e^{f^2(x)}-3}$ có 1 đường tiệm cận ngang và 3 đường tiệm cận đứng.

Câu 2. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Hỏi đồ thị hàm số $y=g(x)=\dfrac{x^4-1}{f^2(x)-4f(x)}$ có bao nhiêu tiệm cận đứng?

A. 5. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn D

Xét phương trình $f^2(x)-4f(x)=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l} f(x)=0\\ f(x)=4\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l} x=a,\ a\in(-\infty;-1)\\ x=1\quad (ng\ kép)\\ x=-1\ \ (ng\ kép)\\ x=b,\ b\in(1;+\infty)\end{array}\right.$.

$\Rightarrow f^2(x)-4f(x)=h(x)(x-a)(x-1)^2(x-b)(x+1)^2;\ h(x)\neq 0$

Do đó

$$y=g(x)=\frac{x^4-1}{f^2(x)-4f(x)}=\frac{(x-1)(x+1)(x^2+1)}{h(x)(x-a)(x-1)^2(x-b)(x+1)^2}$$

$$=\frac{x^2+1}{h(x)(x-a)(x-1)(x-b)(x+1)}.$$

Vậy đồ thị hàm số $y=g(x)=\dfrac{x^4-1}{f^2(x)-4f(x)}$ có 4 tiệm cận đứng.

Câu 3. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$-$	||	$-$	
y	2	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	-1

Đặt $g\left(x\right)=\dfrac{2f\left(x\right)-3}{f\left(x\right)-1}$. Tìm số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=g\left(x\right)$

A. 4. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

$\lim\limits_{x\to+\infty}g\left(x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2f\left(x\right)-3}{f\left(x\right)-1}=\dfrac{2.\left(-1\right)-3}{\left(-1\right)-1}=\dfrac{5}{2}\Rightarrow$ đường thẳng $y=\dfrac{5}{2}$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=g\left(x\right)$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}g\left(x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2f\left(x\right)-3}{f\left(x\right)-1}=\dfrac{2.2-3}{2-1}=1\Rightarrow$ đường thẳng $y=1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=g\left(x\right)$.

Dựa vào bảng biến thiên ta có: $f\left(x\right)=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=a\ \left(a<1\right)\\ x=b\ \left(b>1\right)\end{array}\right.$.

$\lim\limits_{x\to a^-}\left[f\left(x\right)-1\right]=0$ và $f\left(x\right)-1>0,\forall x<a$

$\Rightarrow\lim\limits_{x\to a^-}f\left(x\right)=1\Rightarrow\lim\limits_{x\to a^-}\left[2f\left(x\right)-3\right]=2.1-3=-1<0$

$\Rightarrow\lim\limits_{x\to a^-}g\left(x\right)=\lim\limits_{x\to a^-}\dfrac{2f\left(x\right)-3}{f\left(x\right)-1}=-\infty\Rightarrow$ đường thẳng $x=a$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=g\left(x\right)$.

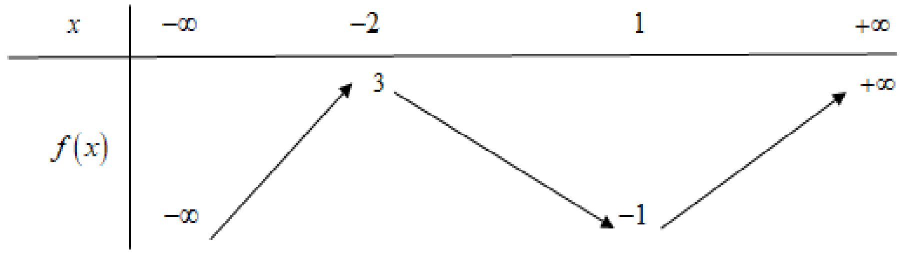
$\lim\limits_{x\to b^+}\left[f\left(x\right)-1\right]=0$ và $f\left(x\right)-1<0$, $\forall x>b$.

$\Rightarrow\lim\limits_{x\to b^+}f\left(x\right)=1\Rightarrow\lim\limits_{x\to b^+}\left[2f\left(x\right)-3\right]=2.1-3=-1<0$

$\Rightarrow\lim\limits_{x\to b^+}g\left(x\right)=\lim\limits_{x\to b^+}\dfrac{2f\left(x\right)-3}{f\left(x\right)-1}=+\infty\Rightarrow$ đường thẳng $x=b$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=g\left(x\right)$.

Vậy đồ thị hàm số $y=g\left(x\right)$ có 4 đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang .

Câu 4. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau :



Đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{e^{2f(x)-1}-1}$ có bao nhiêu tiệm cận ngang và tiệm cận đứng?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Chọn D

Xét phương trình:

$$e^{2f(x)-1}-1=0\Leftrightarrow e^{2f(x)-1}=1\Leftrightarrow 2f(x)-1=0\Leftrightarrow f(x)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=a\ (a\in(-\infty;-2))\\x=b\ (b\in(-2;1))\\x=c\ (c\in(1;+\infty))\end{array}\right..$$

$\Rightarrow$ Đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{e^{2f(x)-1}-1}$ có ba tiệm cận đứng là: $x=a;x=b;x=c$.

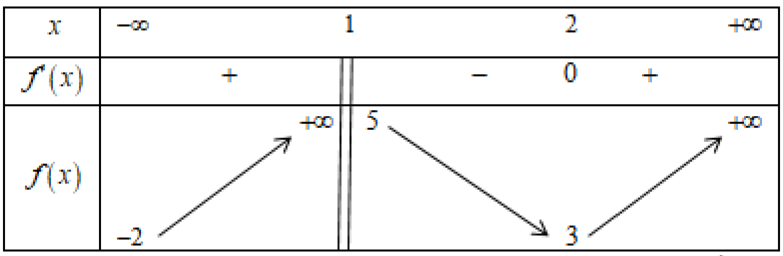
Từ bảng biến thiên ta có: $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty;\ \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

Ta có: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{e^{2f(x)-1}-1}=\dfrac{1}{e^{\lim\limits_{x\to-\infty}(2f(x)-1)}-1}=-1$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^{2f(x)-1}-1}=\dfrac{1}{e^{\lim\limits_{x\to+\infty}(2f(x)-1)}-1}=0$

$\Rightarrow$ Đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{e^{2f(x)-1}-1}$ có hai tiệm cận ngang là : $y=-1;y=0$.

Vậy đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{e^{2f(x)-1}-1}$ có 5 đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng .

Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên từng khoảng xác định và có bảng biến thiên sau:



Tổng số đường tiệm cận đứng và ngang của đồ thị hàm số $y=g(x)=\dfrac{1}{f(x)-5}$ là

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Chọn D

Hàm số $y=g(x)$ xác định khi $f(x)$ xác định và $f(x)\neq 5$ hay $\begin{cases}x\neq 1\\x\neq a\ (a<1)\\x\neq b\ (b>2)\end{cases}$.

Lại có: $\lim\limits_{x\to1^+}g(x)=-\infty$ vì $\begin{cases}\lim\limits_{x\to1^+}1=1\\\lim\limits_{x\to1^+}\left[f(x)-5\right]=0,\ f(x)<5\text{ khi }x\to1^+\end{cases}$

$$\lim_{x\to a^+} g(x)=+\infty \text{ vì } \begin{cases}\lim\limits_{x\to 1^+} 1=1\\ \lim\limits_{x\to 1^+}\left[f(x)-5\right]=0,\ f(x)>5 \text{ khi } x\to a^+\end{cases}$$

$$\lim_{x\to b^+} g(x)=+\infty \text{ vì } \begin{cases}\lim\limits_{x\to 1^+} 1=1\\ \lim\limits_{x\to 1^+}\left[f(x)-5\right]=0,\ f(x)>5 \text{ khi } x\to b^+\end{cases}$$

nên đồ thị hàm số $y=g(x)$ có 3 đường tiệm cận đứng : $x=1$, $x=a$, $x=b$.

Mặt khác: $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-\dfrac{1}{7}$ nên đồ thị hàm số $y=g(x)$ có 2 đường tiệm cận ngang: $y=0$, $y=-\dfrac{1}{7}$.

Vậy tổng số đường tiệm cận đứng và ngang của đồ thị hàm số $y=g(x)$ là 5.

Câu 6. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	$\|$	$+$	$\|$	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty \;\|\; 2$	$\searrow$	$-\infty \;\|\; 1$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1

Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2}{3f(x)-2}$ là

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Chọn D

Dựa vào bảng biến thiên ta suy ra: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

Do đó: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[3f(x)-2\right]=1$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[3f(x)-2\right]=+\infty$

Suy ra: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{3f(x)-2}=2$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2}{3f(x)-2}=0$

Hay: Đồ thị hàm số $y=\dfrac{2}{3f(x)-2}$ có 2 tiệm cận ngang là $y=0$, $y=2$.

Dựa vào bảng biến thiên suy ra : Phương trình $3f(x)-2=0$ có 4 nghiệm thực phân biệt.

Giả sử 4 nghiệm đó là $x_1\in(-\infty;-1)$, $x_2\in(-1;0)$, $x_3\in(0;1)$, $x_4\in(1;+\infty)$.

Dựa vào bảng biến thiên suy ra:

$\lim\limits_{x\to x_1^+} f(x)=0$, $f(x)<\dfrac{2}{3}\Rightarrow \lim\limits_{x\to x_1^+}\dfrac{2}{3f(x)-2}=-\infty$.

Hay: $x=x_1$ là 1 tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2}{3f(x)-2}$.

Tương tự, ta có: $\lim\limits_{x\to x_2^+}\dfrac{2}{3f(x)-2}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to x_3^+}\dfrac{2}{3f(x)-2}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to x_4^+}\dfrac{2}{3f(x)-2}=+\infty$

Suy ra đồ thị hàm số $y=\dfrac{2}{3f(x)-2}$ có 4 tiệm cận đứng là $x=x_1$, $x=x_2$, $x=x_3$, $x=x_4$

Vậy đồ thị hàm số $y=\dfrac{2}{3f(x)-2}$ có tất cả 6 tiệm cận đứng và tiệm cận ngang .

Câu 7. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x)$	2	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ 3	$\nearrow$	5

Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{f(x)}{f(x)-2}$ bằng

A. 4 . **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

Đặt $g(x)=\dfrac{f(x)}{f(x)-2}$.

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$ (với mọi)

Ta có:

+/ TCĐ : Do $f(x)>2\ \forall\ x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}\Rightarrow$ đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng.

+/ TCN : Xét

$$\lim_{x\to-\infty}g(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{f(x)-2}=+\infty;\ \lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{f(x)-2}=\frac{5}{3}$$

$\Rightarrow$ đồ thị hàm số có một tiệm cận ngang là đường thẳng $y=\dfrac{5}{3}$.

Vậy tổng số TCĐ và TCN của đồ thị hàm số bằng 1 .

Câu 8. Hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$, có đạo hàm trên $\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$ và có bảng biến thiên như sau :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	0

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{f(x)-1}$ có bao nhiêu tiệm cận (tiệm cận đứng và tiệm cận ngang)?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Chọn C

Nhìn vào bảng biến thiên ta có

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=0\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{f(x)-1}=-1;\ \lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty\Rightarrow\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{f(x)-1}=0.$$

$\Rightarrow$ đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{f(x)-1}$ có hai tiệm cận ngang là hai đường thẳng $y=-1;\ y=0$.

$$f(x)-1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=a;a<-1\\x=1\end{array}\right..$$

$\lim\limits_{x\to0}f(x)=1\Rightarrow\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{f(x)-1}=+\infty$. Vì $f(x)>1$ khi $x\to0$.

Tương tự , $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{1}{f(x)-1}=-\infty$ nên đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{f(x)-1}$ có hai tiệm cận đứng là hai đường thẳng $x=a;\ x=1$.

Vậy hàm số $y=\dfrac{1}{f(x)-1}$ có 4 đường tiệm cận .

Câu 9. Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau :

x	$-\infty$		0		$\frac{3}{5}$		1		$\frac{5}{3}$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0		$-$		0		$+$		
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Hỏi đồ thị $y=\dfrac{f^2(x)\sqrt{x^2+x}}{\left[f^2(x)-2f(x)\right]\left(2x^5+x^4-10x^3-5x^2+8x+4\right)}$ có bao nhiêu tiệm cận đứng và ngang?

A. 7. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Dựa vào bảng biến thiên, ta có: $f(x)=ax^2(x-1)(x-2)$

Đặt

$$g(x)=\frac{f^2(x)\sqrt{x^2+x}}{\left[f^2(x)-2f(x)\right]\left(2x^5+x^4-10x^3-5x^2+8x+4\right)}=\frac{f(x).\sqrt{x^2+x}}{\left[f(x)-2\right]\left(x^2-4\right)\left(x^2-1\right)(2x+1)}$$

$$==\frac{ax^2(x-1)(x-2)\sqrt{x^2+x}}{\left[f(x)-2\right]\left(x^2-4\right)\left(x^2-1\right)(2x+1)}=\frac{ax^2\sqrt{x^2+x}}{\left[f(x)-2\right](x+2)(x+1)(2x+1)}$$

Dựa vào bảng biến thiên suy ra phương trình $f(x)=2$ có 2 nghiệm $\left[\begin{array}{l}x=a\\x=b\end{array}\right.$ trong đó $\begin{cases}a<0\\b>2\end{cases}$

Với điều kiện $x^2+x\geq 0$ thì phương trình $\left[f(x)-2\right](x+2)(x+1)(2x+1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\\x=-1\\x=a\\x=b\end{array}\right.$

Lại có $\lim\limits_{x\to-2}g(x)=\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{ax^2\sqrt{x^2+x}}{\left[f(x)-2\right](x+2)(x+1)(2x+1)}=\infty$, suy ra có tiệm cận đứng $x=-2$

$\lim\limits_{x\to-1}g(x)=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{ax^2\sqrt{x^2+x}}{\left[f(x)-2\right](x+2)(x+1)(2x+1)}=\infty$, suy ra có tiệm cận đứng $x=-1$

$\lim\limits_{x\to a}g(x)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{ax^2\sqrt{x^2+x}}{\left[f(x)-2\right](x+2)(x+1)(2x+1)}=\infty$, suy ra có tiệm cận đứng $x=a$

$\lim\limits_{x\to b}g(x)=\lim\limits_{x\to b}\dfrac{ax^2\sqrt{x^2+x}}{\left[f(x)-2\right](x+2)(x+1)(2x+1)}=\infty$, suy ra có tiệm cận đứng $x=b$

$\Rightarrow$ Hàm số $g(x)$ có 4 tiệm cận đứng.

Mặc khác, bậc tử của $g(x)$ nhỏ hơn bậc mẫu:

Ta suy ra: $\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{ax^2\sqrt{x^2+x}}{\left[f(x)-2\right](x+2)(x+1)(2x+1)}=0$

$\Rightarrow$ Hàm số $g(x)$ có 1 tiệm cận ngang $y=0$

Câu 10. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau :

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	5	$\searrow$	$-\infty$

Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=g(x)=\dfrac{1}{f(x^3+2x)-5}$ là

A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C

+ Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{f(x^3+2x)-5}=0$; $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{f(x^3+2x)-5}=0$.

Đồ thị hàm số $y=g(x)$ có 1 tiệm cận ngang là đường thẳng $y=0$.

+ Đặt $u=x^3+2x$, khi đó $f(x^3+2x)-5=0$ trở thành:

$$f(u)-5=0 \Leftrightarrow f(u)=5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=a\ (a<-2) \\ u=1 \end{array}\right..$$

+ Với $u=a \Rightarrow x^3+2x=a$

Xét hàm số $h(x)=x^3+2x$ có $h'(x)=3x^2+2>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$ nên $h(x)$ đồng biến trên $(-\infty;+\infty)$, mà phương trình bậc ba có ít nhất 1 nghiệm nên phương trình $x^3+2x=a$ có nghiệm duy nhất giả sử là x_1.

+ Với $u=1 \Rightarrow x^3+2x=1$ do chứng minh trên nên phương trình cũng có 1 nghiệm duy nhất giả sử là $x_2\ (x_2\neq x_1)$.

+ Do x_1, x_2 không là nghiệm của tử số của $g(x)$ nên giới hạn của $g(x)$ khi x dần tới x_1 và giới hạn của $g(x)$ khi x dần tới x_2 đều là vô cực.

Suy ra đồ thị hàm số $y=g(x)$ có 2 tiệm cận đứng là $x=x_1$ và $x=x_2$.

+ Vậy, tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=g(x)$ là 3.

Câu 11. Cho hàm số đa thức bậc bốn $y=f(x)$ có BBT như sau:

x	$-\infty$		-3		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-3	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{(x-1)\sqrt{x+3}}{f^2(x)+3f(x)}$ là :

A. 4 **B.** 5 **C.** 6 **D.** 7

Lời giải

Chọn C

Xét PT $f^2(x)+3f(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=0 \\ f(x)=-3 \end{array}\right.$ trong đó:

$$f(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=x_1\in(1;2) \quad (ng\ kép) \\ x=x_2\in(2;+\infty) \end{array}\right.$$

$$f(x)=-3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \quad (ng\ kép) \\ x=x_3\in(-\infty;-3) \quad (ko\,t/m\ do\ x\geq -3) \\ x=x_4\in(2;+\infty) \end{array}\right.$$

Kiểm tra các giới hạn ta thấy đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{(x-1)\sqrt{x+3}}{f^2(x)+3f(x)}$ có 5 tiệm cận đứng là $x=0$; $x=1$; $x=x_1$; $x=x_2$; $x=x_4$

Câu 1. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		4		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	-5	$\nearrow$	$+\infty$

Đồ thị hàm số $y=g(x)=\dfrac{f^2(x)+2f(x)+1}{f^2(x)-9}$ có tổng số tất cả các đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang là

A. 4 **B.** 5 **C.** 6 **D.** 7

Lời giải

Chọn C

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1+\dfrac{2}{f(x)}+\dfrac{1}{f(x)}}{1-\dfrac{9}{f^2(x)}}=1$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1+\dfrac{2}{f(x)}+\dfrac{1}{f(x)}}{1-\dfrac{9}{f^2(x)}}=1$.

Suy ra đường thẳng $y=1$ là tiệm cận ngang của đồ thị $y=g(x)$.

$y=g(x)=\dfrac{(f(x)+1)^2}{(f(x)-3)(f(x)+3)}$.

Dựa vào BBT ta có $f(x)=3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=a<-1\\x=b>4\end{array}\right.$.

Với $x>0\Rightarrow f(x)<3$, $\lim\limits_{x\to0^+} g(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{(f(x)+1)^2}{(f(x)-3)(f(x)+3)}=-\infty$ suy ra đường thẳng $x=0$ là tiệm cận đứng.

Với $x>a\Rightarrow f(x)<3$, $\lim\limits_{x\to a^+} g(x)=\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{(f(x)+1)^2}{(f(x)-3)(f(x)+3)}=-\infty$ suy ra đường thẳng $x=a$ là tiệm cận đứng.

Với $x>b\Rightarrow f(x)>3$, $\lim\limits_{x\to b^+} g(x)=\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{(f(x)+1)^2}{(f(x)-3)(f(x)+3)}=+\infty$ suy ra đường thẳng $x=b$ là tiệm cận đứng.

Dựa vào BBT ta có $f(x)=-3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=c,0<c<4\\x=d,d>4\end{array}\right.$ khi đó

Với $x>c\Rightarrow f(x)<-3$, $\lim\limits_{x\to c^+} g(x)=\lim\limits_{x\to c^+}\dfrac{(f(x)+1)^2}{(f(x)-3)(f(x)+3)}=+\infty$ suy ra đường thẳng $x=c$ là tiệm cận đứng.

Với $x>d\Rightarrow f(x)>-3$, $\lim\limits_{x\to c^+} g(x)=\lim\limits_{x\to c^+}\dfrac{(f(x)+1)^2}{(f(x)-3)(f(x)+3)}=+\infty$ suy ra đường thẳng $x=d$ là tiệm cận đứng.

Vậy tổng số các đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị $y=g(x)$ là 6.

Dạng 8: Biết BBT của hàm số $y=f\left(x\right)$, tìm tiệm cận đứng, tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=g\left(x\right)$, trong bài toán tham số.

Câu 1. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	5	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	2

Số giá trị $m\in\mathbb{Z}$, $m\in\left[-10;10\right]$ để đồ thị hàm số $y=g\left(x\right)=\dfrac{f\left(x\right)}{f\left(x\right)-m+1}$ có 4 đường tiệm cận là:

A. 5. **B.** 4. **C.** 10. **D.** 21.

Lời giải

Chọn A

+ Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty}g\left(x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f\left(x\right)}{f\left(x\right)-m+1}=\dfrac{5}{6-m}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}g\left(x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f\left(x\right)}{f\left(x\right)-m+1}=\dfrac{2}{3-m}$

- Xét với $m=6$ thì đồ thị hàm số $y=g(x)$ nhận đường thẳng có phương trình $y=-\dfrac{2}{3}$ là TCN

Khi đó phương trình: $f\left(x\right)=m-1=5$ có 2 nghiệm phân biệt $\Rightarrow$ ĐTHS có 2 TCĐ $\Rightarrow$ ĐTHS có 3 đường tiệm cận $\Rightarrow m=6$ (không thỏa mãn).

- Xét $m=3\Rightarrow$ĐTHS $y=g\left(x\right)$ nhận đường thẳng có phương trình $y=\dfrac{5}{3}$ là TCN

Khi đó phương trình: $f\left(x\right)=m-1=2$ có 1 nghiệm $\Rightarrow$ĐTHS có 1 TCĐ $\Rightarrow$ ĐTHS có 2 đường tiệm cận $\Rightarrow m=3$ (không thỏa mãn).

- Với $m\neq3$ và $m\neq6$ thì đồ thị hàm số $y=g\left(x\right)$ nhận 2 đường thẳng có phương trình $y=\dfrac{5}{6-m}$; $y=\dfrac{2}{3-m}$ là TCN

Xét phương trình: $f\left(x\right)-m+1=0\Leftrightarrow f\left(x\right)=m-1$ $(*)$

Để ĐTHS $y=g\left(x\right)$ có 4 đường tiệm cận thì $(*)$ có 2 nghiệm phân biệt

$\Rightarrow m\in\left(2;3\right)\cup\left\{4\right\}\cup\left[6;+\infty\right)$

Do ĐK nên $m\in\left(2;3\right)\cup\left\{4\right\}\cup\left(6;+\infty\right)$

Vậy $m\in\left(2;3\right)\cup\left\{4\right\}\cup\left(6;+\infty\right)$ do $m\in\mathbb{Z}$, $m\in\left[-10;10\right]$ nên $m\in\left\{4;7;8;9;10\right\}$

Câu 2. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(x)$	1	$\nearrow$	$+\infty$ || 3	$\nearrow$	6

Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của m để đồ thị hàm số $y=g(x)=\dfrac{f^2(x)}{f(x)-m}$ có đúng 3 tiệm cận đứng.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Ta có:

$\lim\limits_{x\to 2^-} g(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{f^2(x)}{f(x)-m}=+\infty$ nên $\forall m$, đồ thị hàm số $y=g(x)$ luôn có một tiệm cận đứng $x=2$.

Mặt khác, từ bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$ thì phương trình $f(x)-m=0$ tối đa 2 nghiệm. Vậy để đồ thị hàm số $y=g(x)$ có đúng 3 tiệm cận đứng thì điều kiện cần là phương trình $f(x)=m$ có đúng 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 khác 2 $\Leftrightarrow 3<m<6$.

Khi đó $\lim\limits_{x\to x_1^+} g(x)=\lim\limits_{x\to x_1^+}\dfrac{f^2(x)}{f(x)-m}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to x_2^+} g(x)=\lim\limits_{x\to x_2^+}\dfrac{f^2(x)}{f(x)-m}=+\infty$ nên đồ thị hàm số $y=g(x)$ có 2 tiệm cận đứng là đường thẳng $x=x_1$ và $x=x_2$.

Vậy với $3<m<6$ thì đồ thị hàm số $y=g(x)$ có đúng 3 tiệm cận đứng. Do m nguyên nên có 2 giá trị của m thỏa mãn bài toán là $m=4$ và $m=5$.

Câu 3. Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{ax^2+bx+c}{dx+e}$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Có bao nhiêu số m nguyên thuộc khoảng $(-10;10)$ để đồ thị hàm số $y=g(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}}{f(x)-m}$ có đúng 3 đường tiệm cận?

A. 15. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 14.

Lời giải

Chọn C

- Ta có $\sqrt{x+1}$ có nghĩa khi $x\ge -1$.
- Từ bảng biến thiên suy ra $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0 \Rightarrow$ đồ thị hàm số $y=g(x)$ luôn có duy nhất 1 đường tiệm cận ngang là $y=0$, $\forall m\in\mathbb{R}$.
- $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=0$
- Khi đó, để đồ thị hàm số $y=g(x)$ có đúng 3 đường tiệm cận thì nó phải có 2 đường tiệm cận đứng

  $\Rightarrow$ phương trình $f(x)=m$ phải có 2 nghiệm phân biệt $\in[-1;+\infty)$

Từ bảng biến thiên suy ra $m\in(3;+\infty)\cup\{-1\}\xrightarrow{m\in\mathbb{Z},\, m\in[-10;10]} m\in\{-1;4;5;6;7;8;9\}$.

Vậy, có tất cả 7 giá trị của m thỏa mãn.

Câu 4. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ và có bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\Vert$	$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty \ \Vert \ -\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x^3+2x^2+2x}}{(x^2+1)\left[f(x)-m\right]}$ có đúng ba đường tiệm cận.

A. $m>2$.　　　　**B.** không tồn tại m.

C. $m\le 2$.　　　　**D.** $m<2$.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện xác định của hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x^3+2x^2+2x}}{(x^2+1)\left[f(x)-m\right]}$ là: $\begin{cases} x>0 \\ f(x)\ne m \end{cases}$.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} y=0 \Rightarrow$ đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x^3+2x^2+2x}}{(x^2+1)\left[f(x)-m\right]}$ luôn có tiệm cận ngang $y=0$.

Để đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x^3+2x^2+2x}}{(x^2+1)\left[f(x)-m\right]}$ có đúng ba đường tiệm cận thì đồ thị hàm số

$y=\dfrac{\sqrt{x^3+2x^2+2x}}{(x^2+1)\left[f(x)-m\right]}$ có đúng hai tiệm cận đứng.

Suy ra phương trình $f(x)-m=0$ có đúng hai nghiệm phân biệt trên $(0;+\infty)$.

Từ bảng biến thiên suy ra $m<2$.

Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$, liên tục trên từng khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-3		-2		-1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	$-\infty \ \Vert \ +\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

Có bao nhiêu giá trị m nguyên, khác 0 để đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{f(x)-m}{f(x)+m}$ có tiệm cận ngang mà không có tiệm cận đứng

A. 2.　　　　**B.** 3.　　　　**C.** 8.　　　　**D.** 4.

Lời giải

Chọn A

- TXĐ: $D=\{x\in\mathbb{R} \mid f(x)\ne -m\}$

- Với $m\ne 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=1$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y=1$, và nghiệm x_0 (nếu có) của phương trình $f(x)=-m$ không thể là nghiệm của phương trình $f(x)=m$.

- Do đó đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng khi phương trình $f(x)=-m$ vô nghiệm $\Leftrightarrow$ $-2<-m<2 \Leftrightarrow -2<m<2$. Ta có $m=\pm 1$.

Vậy có 2 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán

Câu 6. Hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định trên $\mathbb{R}$ có bảng biến thiên như hình vẽ sau

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Với giá trị nào của m thì đồ thị hàm số $y=g\left(x\right)=\dfrac{1}{\left(f\left(x\right)\right)^2-m}$ có đúng 2 tiệm cận đứng.

Chọn đáp án đúng

A. $0<m<1$. **B.** $0<m\le 1$. **C.** $m=0$. **D.** $m=1$.

Lời giải

Chọn A

Xét phương trình $\left(f\left(x\right)\right)^2-m=0\Leftrightarrow\left(f\left(x\right)\right)^2=m\quad(*)$

TH1: nếu $m<0$ thì phương trình $(*)$ vô nghiệm nên đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng.

TH2: nếu $m=0$ thì phương trình $(*)\Leftrightarrow f\left(x\right)=0$ vô nghiệm. Nên đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng.

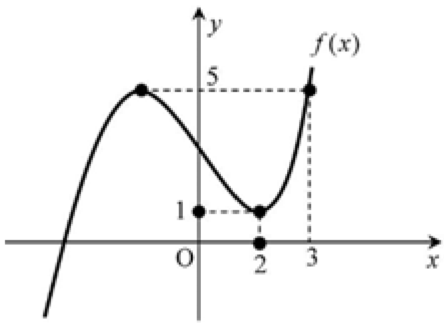
TH3: nếu m > 0 thì phương trình $(*)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll} f(x)=\sqrt{m} & (1)\\ f(x)=-\sqrt{m} & (2)\end{array}\right.$

Với (1) : khi $0<m<1$ thì (1) có 2 nghiệm; $m=1$ thì (1) có nghiệm duy nhất

Với (2) : do $m>0$ nên $-\sqrt{m}<0\Rightarrow f\left(x\right)=-\sqrt{m}$ vô nghiệm.

Vậy để đồ thị hàm số có 2 tiệm cận đứng thì $0<m<1$. **Chọn đáp án A**

Câu 7. Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Gọi S là tập hợp chứa tất cả các giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{m-x}}{f\left(x\right)-m}$ có tất cả 4 đường tiệm cận. Số phần tử của tập S là



A. 3. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D.

Với điều kiện $x\le m$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}y=0$ thì đồ thị hàm số có 1 tiệm cận ngang $y=0$.

Để đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{m-x}}{f\left(x\right)-m}$ có 4 đường tiệm cận thì đồ thị phải có 3 đường tiệm cận đứng, suy ra phương trình $f\left(x\right)-m=0$ có 3 nghiệm phân biệt x thỏa mãn $x\le m$.

Từ đồ thị, phương trình $f\left(x\right)=m$ có 3 nghiệm khi $1<m<5$. Do $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m\in\left\{2;3;4\right\}$.

+ Trường hợp 1: Với $m=2$: Từ đồ thị, phương trình $f(x)-2=0$ có 3 nghiệm $x_1<x_2<2<x_3$, suy ra $m=2$ không thỏa mãn.

+ Trường hợp 2: Với $m\in\{3;4\}$: Từ đồ thị, phương trình $f(x)-m=0$ có 3 nghiệm $x_1<x_2<x_3<3$, suy ra $m=3$, $m=4$ thỏa mãn.

Vậy tập S gồm 2 phần tử.

Câu 8. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên mỗi khoảng $(-\infty;1)$, $(1;+\infty)$ và có bảng biến thiên như hình vẽ dưới.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\|$	$+$	
$f(x)$	2 $\nearrow$		$+\infty$ $\|\|$ $-\infty$		$\nearrow$ 2

Tìm tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số $y=g(x)=\dfrac{f(x)+m}{f^2(x)-4m^2}$ có duy nhất một tiệm cận đứng và không có tiệm cận ngang.

A. $m=2$. **B.** $\left[\begin{array}{l}m=2\\m=-2\end{array}\right.$. **C.** $m=1$. **D.** $\left[\begin{array}{l}m=1\\m=-1\end{array}\right.$.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $y=g(x)=\dfrac{f(x)+m}{f^2(x)-4m^2}$.

Điều kiện cần:

Nếu $m\neq\pm1$ thì $\lim\limits_{x\to\pm\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)+m}{f^2(x)-4m^2}=\dfrac{2+m}{4-4m^2}$

$\Rightarrow$ đồ thị hàm số $y=g(x)=\dfrac{f(x)+m}{f^2(x)-4m^2}$ có tiệm cận ngang là đường thẳng $y=\dfrac{2+m}{4-4m^2}$.

Do đó, điều kiện cần để đồ thị hàm số $y=g(x)=\dfrac{f(x)+m}{f^2(x)-4m^2}$ không có tiệm cận ngang là $\left[\begin{array}{l}m=1\\m=-1\end{array}\right.$.

Điều kiện đủ: Phương trình $f^2(x)-4m^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}f(x)=2m & (1)\\f(x)=-2m & (2)\end{array}\right.$

+) Với $m=1$, phương trình (1) vô nghiệm, phương trình (2) có nghiệm duy nhất $x=x_0>1$.

$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)+m}{f^2(x)-4m^2}=+\infty(-\infty)$ (do $f(x_0)+m=-m=-1\neq0$)

$\Rightarrow$ đồ thị hàm số $y=g(x)=\dfrac{f(x)+m}{f^2(x)-4m^2}$ có đúng 1 tiệm cận đứng là đường thẳng $x=x_0$.

+) Với $m=-1$, phương trình (2) vô nghiệm, phương trình (1) có nghiệm duy nhất $x=x_0>1$.

$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)+m}{f^2(x)-4m^2}=+\infty(-\infty)$ (do $f(x_0)+m=-m=1\neq0$)

$\Rightarrow$ đồ thị hàm số $y=g\left(x\right)=\dfrac{f\left(x\right)+m}{f^{2}\left(x\right)-4m^{2}}$ có đúng 1 tiệm cận đứng là đường thẳng $x=x_0$.

Vậy $\left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-1 \end{array}\right.$ thỏa mãn bài toán.

Câu 9. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Có bao nhiêu giá trị nguyên thuộc $\left[-10;10\right]$ của m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{3}{f\left(x^2\right)-m}$ có 4 tiệm cận đứng.

A. 5. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{3}{f\left(x^2\right)-m}$ có 4 tiệm cận đứng khi phương trình $f\left(x^2\right)=m$ có 4 nghiệm x phân biệt.

Đặt $t=x^2$, $t\geq 0$. Từ bảng biến thiên của hàm số $y=f\left(x\right)$ ta thấy, phương trình $f\left(t\right)=m$ có 2 nghiệm dương t phân biệt khi $-1<m<3$.

Với mỗi giá trị $t>0$ cho ta 2 giá trị đối nhau của x, nên với điều kiện $-1<m<3$, phương trình $f\left(x^2\right)=m$ có 4 nghiệm x phân biệt.

Vậy đồ thị hàm số $y=\dfrac{3}{f\left(x^2\right)-m}$ có 4 tiệm cận đứng khi $-1<m<3$.

Vì $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\left\{0;1;2\right\}$.

Câu 10. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$+\infty$ $\|\|$	$\nearrow$	3	$\searrow$	

Số giá trị nguyên của m để đồ thị hàm số $y=g\left(x\right)=\dfrac{1}{f\left(x\right)-m}$ có đúng 5 tiệm cận là

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải

Chọn C

Xét PT $f\left(x\right)-m=0$ có nhiều nhất là 3 nghiệm khi $1<m<3$ và $y=g\left(x\right)$ có tử số bằng 1 luôn khác 0 với mọi giá trị của m nên đồ thị $y=g\left(x\right)$ có nhiều nhất là 3 TCĐ

Có $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\dfrac{1}{1-m}$ nên đồ thị $y=g(x)$ có 2 TCN nếu $m\neq 1$, 1 TCN nếu $m=1$.

Vậy đồ thị $y=g(x)$ có đúng 5 TC khi $1<m<3$. Kết hợp $m\in Z$ được $m=2$. Suy ra có 1 giá trị nguyên của m tmđb.

Phần 3: Biết giới hạn của hàm số $y=f(x)$ tại một điểm hoặc tại vô cực.

Dạng 9: Biết giới hạn của hàm số $y=f(x)$ tại một điểm hoặc tại vô cực, tìm tiệm cận đứng, tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=f(x)$, trong bài toán không chứa tham số.

Câu 1. Cho hàm số $y=f(x)$ có $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Đồ thị hàm số đã cho có đúng một tiệm cận ngang.

B. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang phân biệt.

C. Đồ thị hàm số đã cho có đúng một tiệm cận ngang là đường thẳng $x=2$.

D. Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận ngang

Lời giải

Chọn B

Áp dụng định nghĩa về tiệm cận ngang ta suy ra được A là đáp án đúng.

Câu 2. Cho hàm số $y=f(x)$ có tập xác định là $D=(0;+\infty)$ và $\lim\limits_{x\to 0^+} y=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} y=+\infty$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Đồ thị hàm số $y=f(x)$ không có tiệm cận đứng và có tiệm cận ngang.

B. Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có tiệm cận đứng và có tiệm cận ngang.

C. Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có tiệm cận đứng và không có tiệm cận ngang.

D. Đồ thị hàm số $y=f(x)$ không có tiệm cận đứng và không có tiệm cận ngang.

Lời giải

Chọn C

Do $x=0^+$ là một đầu mút của tập xác định và $\lim\limits_{x\to 0^+} y=-\infty$ nên đường thẳng $x=0$ (hay là trục Oy) là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Với $D=(0;+\infty)$, ta kiểm tra được giới hạn của hàm số tại $+\infty$ (không có giới hạn tại $-\infty$). Theo giả thiết, $\lim\limits_{x\to+\infty} y=+\infty$ nên đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

Câu 3. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong (C) và các giới hạn $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=1$; $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=1$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$. Hỏi mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Đường thẳng $y=2$ là tiệm cận ngang của (C).

B. Đường thẳng $y=1$ là tiệm cận ngang của (C).

C. Đường thẳng $x=2$ là tiệm cận ngang của (C).

D. Đường thẳng $x=2$ là tiệm cận đứng của (C).

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2\\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2\end{cases} \Rightarrow$ đường thẳng $y=2$ là tiệm cận ngang của (C).

Câu 4. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$. Tổng số đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A

Do hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên đồ thị hàm số không có đường tiệm cận đứng.

Do $\lim\limits_{x\to-\infty} f\left(x\right)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right)=1$ nên $y=0$, $y=1$ là các đường tiệm cận ngang.

Câu 5. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right)=1$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} f\left(x\right)=-1$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là $x=1$ và $x=-1$.
B. Đồ thị hàm số đã cho có đúng một tiệm cận ngang.
C. Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận ngang.
D. Đồ thị hàm số đã cho có hai đường tiệm cận ngang là $y=1$ và $y=-1$.

Lời giải

Chọn D

Hàm số $y=f\left(x\right)$ có $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right)=1$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} f\left(x\right)=-1$ suy ra đồ thị hàm số đã cho có hai đường tiệm cận ngang là $y=1$ và $y=-1$.

Câu 6. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục, không âm trên R và thỏa mãn $\lim\limits_{x\to-\infty} f\left(x\right)=1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right)=2$.

Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2\sqrt{x^2+1}.f\left(x\right)+1}{x+3}$ là:

A. 3. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 1

Lời giải

Chọn A

$$\lim_{x\to-\infty} y=\lim_{x\to-\infty}\frac{2\sqrt{x^2+1}.f\left(x\right)+1}{x+3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-2\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}.f\left(x\right)+\frac{1}{x}}{1+\frac{3}{x}}=-2\Rightarrow y=-2 \text{ là tiệm cận ngang}$$

$$\lim_{x\to+\infty} y=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\sqrt{x^2+1}.f\left(x\right)+1}{x+3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}.f\left(x\right)+\frac{1}{x}}{1+\frac{3}{x}}=4\Rightarrow y=4 \text{ là tiệm cận ngang}$$

$$\lim_{x\to(-3)^+} y=\lim_{x\to(-3)^+}\frac{2\sqrt{x^2+1}.f\left(x\right)+1}{x+3}=\lim_{x\to(-3)^+}\frac{2\sqrt{10}.f\left(-3\right)+1}{x+3}=\pm\infty$$

$$\lim_{x\to(-3)^-} y=\lim_{x\to(-3)^-}\frac{2\sqrt{x^2+1}.f\left(x\right)+1}{x+3}=\lim_{x\to(-3)^-}\frac{2\sqrt{10}.f\left(-3\right)+1}{x+3}=\pm\infty$$

$\Rightarrow x=-3$ là tiệm cận đứng.

Câu 7. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$; $f(x)>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} f\left(x\right)=2$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right)=+\infty$

Số tiệm cận của hàm số $g\left(x\right)=\dfrac{1}{f\left(x\right)}+\dfrac{2019}{x^2+1}$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Ta có: + $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f\left(x\right)>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$

+ $x^2+1>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$

→ Tập xác định của hàm số $g\left(x\right)$: $D=\mathbb{R}$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{f\left(x\right)}+\frac{2019}{x^2+1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{f\left(x\right)}+\lim_{x\to+\infty}\frac{2019}{x^2+1}=0\Rightarrow\quad y=0 \text{ là tiệm cận ngang}$$

. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{f(x)}+\dfrac{2019}{x^2+1}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{f(x)}+\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2019}{x^2+1}=\dfrac{1}{2}+0 \Rightarrow y=\dfrac{1}{2}$ là tiệm cận ngang

Vậy có 2 đường tiệm cận.

Câu 8. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2$, $\lim\limits_{x\to\left(\frac{3}{2}\right)^+} f(x)=1$ và hàm số $y=g(x)=\dfrac{5f(x)-1}{\left[f^2(x)+1\right](2x-3)}$. Trong các khẳng định sau về đồ thị hàm số $y=g(x)$, khẳng định nào đúng:

A. Đồ thị hàm số $y=g(x)$ không có tiệm cận ngang và tiệm cận đứng.

B. Đồ thị hàm số $y=g(x)$ có tiệm cận ngang $y=2$ và không có tiệm cận đứng.

C. Đồ thị hàm số $y=g(x)$ có tiệm cận ngang $y=0$ và tiệm cận đứng $x=\dfrac{3}{2}$.

D. Đồ thị hàm số $y=g(x)$ có tiệm cận ngang $y=2$ và tiệm cận đứng $x=\dfrac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có :

+) $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5f(x)-1}{\left[f^2(x)+1\right](2x-3)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\dfrac{5f(x)-1}{\left[f^2(x)+1\right]}}{2x-3}=0$ suy ra đường thẳng $y=0$ là tiệm cận ngang của đồ thị $y=g(x)$.

+) $\lim\limits_{x\to\left(\frac{3}{2}\right)^+} g(x)=\lim\limits_{x\to\left(\frac{3}{2}\right)^+}\dfrac{5f(x)-1}{\left[f^2(x)+1\right](2x-3)}=\lim\limits_{x\to\left(\frac{3}{2}\right)^+}\dfrac{\dfrac{5f(x)-1}{\left[f^2(x)+1\right]}}{2x-3}=+\infty$ suy ra đường thẳng $x=\dfrac{3}{2}$ là tiệm cận đứng của đồ thị $y=g(x)$.

Câu 9. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $(1;+\infty)$ và thỏa mãn $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$.

Xét hàm số $y=g(x)=\dfrac{\left[f(x)+1\right](2x+1)}{x-1}-3$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Đường thẳng $y=-1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=g(x)$.

B. Đường thẳng $y=5$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=g(x)$.

C. Đường thẳng $y=2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=g(x)$.

D. Đường thẳng $y=3$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=g(x)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left\{\frac{\left[f(x)+1\right](2x+1)}{x-1}-3\right\}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)+1}{\dfrac{x-1}{2x+1}}-3\right)$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)+1\right]}{\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-1}{2x+1}}-\lim_{x\to+\infty}3=\frac{2+1}{\dfrac{1}{2}}-3=3$$

Vậy đường thẳng $y=3$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=g(x)$.

Câu 10. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$. Phương trình $f(x)=\dfrac{1}{2}$ có ba nghiệm phân biệt. Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{2f(x)-1}$ là:

A. 4. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

Đặt $h(x)=\dfrac{1}{2f(x)-1}$.

*) Tiệm cận ngang:

Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{2f(x)-1}=0$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{2f(x)-1}=0$.

Suy ra đồ thị hàm số có một đường tiệm cận ngang $y=0$.

*) Tiệm cận đứng:

Xét phương trình: $2f(x)-1=0 \Leftrightarrow f(x)=\dfrac{1}{2}$.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trình $f(x)=\dfrac{1}{2}$ có ba nghiệm phân biệt a, b, c thỏa mãn $a<b<c$.

Đồng thời $\lim\limits_{x\to a^+} h(x)=\lim\limits_{x\to b^-} h(x)=\lim\limits_{x\to c^+} h(x)=+\infty$ nên đồ thị hàm số $y=h(x)$ có ba đường tiệm cận đứng là $x=a$, $x=b$ và $x=c$.

Vậy tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=h(x)$ là bốn.

Câu 11. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên khoảng $\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$ và có $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=3$. Xét hàm số $g(x)=\dfrac{3f(x)-1}{2f^2(x)-f(x)}$.

Khẳng định nào dưới đây là khẳng định đúng?

A. Đồ thị hàm số $y=g(x)$ có hai tiệm cận đứng là đường thẳng $x=0; x=\dfrac{1}{2}$.

B. Đồ thị hàm số $y=g(x)$ có tiệm cận ngang là đường thẳng $y=\dfrac{8}{15}$.

C. Đồ thị hàm số $y=g(x)$ có tiệm cận ngang là đường thẳng $y=3$.

D. Đồ thị hàm số $y=g(x)$ có đúng một tiệm cận đứng là đường thẳng $x=1$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $g(x)=\dfrac{3f(x)-1}{2f^2(x)-f(x)}=\dfrac{1}{f(x)}+\dfrac{1}{2f(x)-1}$

$\lim\limits_{x\to1^+} g(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\left(\dfrac{1}{f(x)}+\dfrac{1}{2f(x)-1}\right)=0$ nên đồ thị không nhận $x=1$ là tiệm cận đứng.

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \left(\frac{1}{f(x)} + \frac{1}{2f(x)-1}\right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{8}{15}$ nên đồ thị có tiệm cận ngang là đường thẳng $y = \frac{8}{15}$.

Câu 12. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$ và $f(x) < 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Xét hàm số $g(x) = \frac{2f^3(x) + f^2(x) - 2f(x) - 1}{f^3(x) - 4f^2(x) + 5f(x) - 2}$. Khẳng định nào dưới đây là khẳng định đúng?

A. Đồ thị hàm số hàm số $g(x)$ có các đường tiệm cận ngang là $y = 2$ và $y = 0$.

B. Đồ thị hàm số hàm số $g(x)$ có các đường tiệm cận ngang là $y = -2$ và $y = 0$.

C. Đồ thị hàm số hàm số $g(x)$ chỉ có một đường tiệm cận ngang là $y = 2$.

D. Đồ thị hàm số hàm số $g(x)$ chỉ có một đường tiệm cận ngang là $y = -2$.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định của hàm số $g(x)$ là $\mathbb{R}$.

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2f^3(x) + f^2(x) - 2f(x) - 1}{f^3(x) - 4f^2(x) + 5f(x) - 2}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{2 + \frac{1}{f(x)} - \frac{2}{f^2(x)} - \frac{1}{f^3(x)}}{1 - \frac{4}{f(x)} + \frac{5}{f^2(x)} - \frac{2}{f^3(x)}} = 2 \text{ vì } \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$$

$\Rightarrow$ đường thẳng $y = 2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số hàm số $g(x)$.

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2f^3(x) + f^2(x) - 2f(x) - 1}{f^3(x) - 4f^2(x) + 5f(x) - 2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{[2f(x)+1][f(x)+1][f(x)-1]}{[f(x)-1]^2[f(x)-2]}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{[2f(x)+1][f(x)+1]}{[f(x)-1][f(x)-2]} = +\infty \text{ vì } \lim_{x\to+\infty} f(x) = 1 \text{ và } f(x) < 1\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Vậy đồ thị hàm số hàm số $g(x)$ chỉ có một đường tiệm cận ngang là $y = 2$.

Câu 13. Cho $y = f(x)$ là hàm số bậc ba, liên tục trên $\mathbb{R}$.

Đồ thị hàm số $g(x) = \frac{1}{f(x^3+3x)-1}$ có nhiều nhất bao nhiêu đường tiệm cận.

A. 4. **B.** 2. **C.** 5. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t = x^3 + 3x \Rightarrow t' = 3x^2 + 3 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$+\infty$
t'		$+$	
t	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

- Xét $f\left(x^3+3x\right)-1=0$. Vì $y=f\left(x\right)$ là hàm số bậc ba nên phương trình $f\left(t\right)=1$ có nhiều nhất 3 nghiệm t.

  Từ bảng biến thiên ta suy ra với mỗi giá trị t có đúng một giá trị x.

  Khi đó phương trình $f\left(x^3+3x\right)=1$ có nhiều nhất 3 nghiệm x.

  Do đó đồ thị hàm số $y=g\left(x\right)$ có nhiều nhất 3 tiệm cận đứng.

- Xét $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g\left(x\right)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{f\left(x^3+3x\right)-1}=\lim\limits_{t\to\pm\infty}\dfrac{1}{f\left(t\right)-1}=0$ (vì $=\lim\limits_{t\to\pm\infty} f\left(t\right)=\pm\infty$).

  Suy ra đồ thị hàm số $y=g\left(x\right)$ có 1 tiệm cận ngang là $y=0$.

  Vậy đồ thị hàm số $y=g\left(x\right)$ có nhiều nhất 4 đường tiệm cận.

Câu 14. Cho hàm sô $y=f\left(x\right)=\sqrt{x^2+2x+3}$. Hàm số $y=g\left(x\right)=f\left(\dfrac{1}{f\left(x\right)}\right)$ có bao nhiêu tiệm cận?.

A. **0**. **B.** **1**. **C.** 2. **D.** **3**

Lời giải

Chọn B

+) Hàm số $y=f\left(x\right)$ có tập xác định $D=\mathbb{R}$

+) Ham số $y=g\left(x\right)=f\left(\dfrac{1}{f\left(x\right)}\right)=\sqrt{\dfrac{1}{x^2+2x+3}+\dfrac{2}{\sqrt{x^2+2x+3}}+3}$ có tập xác định: $D=\mathbb{R}$

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty} g\left(x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty} g\left(x\right)=\sqrt{3}$

Vậy có 1 tiệm cận ngang.

Câu 15. Cho hàm số $y=f\left(x\right)=x+1$. Tìm số tiệm cận của hàm số

$$y=g\left(x\right)=1+\frac{\sqrt{f^2\left(x\right)+2}}{f\left(x\right)+2}+\frac{\sqrt[3]{f^3\left(x\right)+3}}{f\left(x\right)+3}+...+\frac{\sqrt[2020]{f^{2020}\left(x\right)+2020}}{f\left(x\right)+2020}.$$

A. 0. **B.** 2. **C.** 2019. **D.** 2021

Lời giải

Chọn D

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-3;-4;-5;...;-2021\right\}$

+) Với $x_i\in\left\{-3;-4;-5;....;-2021\right\}$ ta có $\lim\limits_{x\to x_i^+} g\left(x\right)=+\infty;\ \lim\limits_{x\to x_i^-} g\left(x\right)=-\infty$. Ta có đồ thị hàm số $y=g\left(x\right)$ có 2019 tiệm cận đứng.

+) Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[k]{f^k(x)+k}}{f(x)+k}=1\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=2020$;

$$\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt[k]{f^k(x)+k}}{f(x)+k}=1, k\,chan\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt[k]{f^k(x)+k}}{f(x)+k}=-1, k\,le\end{array}\right.\Rightarrow\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=2$$

=> có 2 tiệm cận ngang

Vậy tổng số tiệm cận là 2021

Dạng 10: Biết giới hạn của hàm số $y=f(x)$ tại một điểm hoặc tại vô cực, tìm tiệm cận đứng, tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=f(x)$, trong bài toán chứa tham số.

Câu 1. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=1$; $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-2020;2020]$ để đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+3x}+x}{\sqrt{2f(x)-f^2(x)+m}}$ có tiệm cận ngang nằm bên dưới đường thẳng $y=-1$.

A. 4041. **B.** 2019. **C.** 1. **D.** 10.

Lời giải

Chọn C

Do $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ nên khi $x\to+\infty$ thì $2f(x)-f^2(x)\to-\infty$ vì vậy $\sqrt{2f(x)-f^2(x)}$ không có nghĩa nên không tồn tại $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$.

Xét $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)$

Trước hết $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=1$ nên $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{2f(x)-f^2(x)}=\sqrt{\lim\limits_{x\to-\infty}\left[2f(x)-f^2(x)\right]}=1$

$$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}+x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+3x}+x\right)\left(\sqrt{x^2+3x}-x\right)}{\sqrt{x^2+3x}-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x}{-x\left(\sqrt{1-\frac{3}{x}}+1\right)}=-\frac{3}{2}$$

Từ đó có $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=\dfrac{-3}{2m+2}$ nên đồ thị hàm số $g(x)$ có tiệm cận ngang là đường thẳng $y=\dfrac{-3}{2m+2}$.

Để tiệm cận ngang tìm được ở trên nằm dưới đường thẳng $y=-1$ thì điều kiện cần và đủ là

$\dfrac{-3}{2m+2}<-1\Leftrightarrow\dfrac{3}{2m+2}>1\Leftrightarrow\begin{cases}3>2m+2\\2m+2>0\end{cases}\Leftrightarrow-1<m<\dfrac{1}{2}$ Tức có duy nhất giá trị nguyên $m=0$ thỏa mãn bài toán.

Câu 2. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=2$. Gọi S là tập hợp các giá trị của tham số m để đồ thị của hàm số $g(x)=\dfrac{(x-1)\left[f^2(x)+3\right]}{x^2+2(m-1)x+m^2-2}$ có tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang bằng 2. Tính tổng các phần tử của S.

A. $-\dfrac{1}{2}$ **B.** -2. **C.** -3. **D.** $\dfrac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Do $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x-1)\left[f^2(x)+3\right]}{x^2+2(m-1)x+m^2-2}=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(x-1)\left[f^2(x)+3\right]}{x^2+2(m-1)x+m^2-2}=0$

nên đồ thị hàm số $g(x)$ có một tiệm cận ngang là đường thẳng $y=0$.

Đặt $h(x)=x^2+2(m-1)x+m^2-2$.

Yêu cầu của bài toán được thỏa mãn khi và chỉ khi đồ thị hàm số $g(x)$ có đúng một tiệm cận đứng, điều này xảy ra khi và chỉ khi $h(x)=0$ có 2 nghiệm phân biệt trong đó có 1 nghiệm $x=1$ hoặc $h(x)=0$ có nghiệm kép.

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\Delta'>0\\ h(1)=0\end{cases}\\ \Delta'=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}(m-1)^2-(m^2-2)>0\\ 1+2(m-1)+m^2-2=0\end{cases}\\ m=\dfrac{3}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}m<\dfrac{3}{2}\\ m=1;m=-3\end{cases}\\ m=\dfrac{3}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\ m=-3\\ m=\dfrac{3}{2}\end{array}\right..$$

Vậy, tổng các phần tử của S là $-\dfrac{1}{2}$.

Câu 3. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm $g(x)=\dfrac{f(x)+1}{\sqrt{m.f^2(x)+2}}$ có hai đường tiệm ngang là

A. $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ **B.** $(0;+\infty)$ **C.** $(-\infty;0)$ **D.** $\{0\}$

Lời giải

Chọn B

TH1: $m=0$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)+1}{\sqrt{2}}=\pm\infty$

Suy ra đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

TH2: $m<0$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f^2(x)=+\infty$

Suy ra $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(m.f^2(x)+2\right)=-\infty$

Suy ra $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x)$ không tồn tại.

TH3: $m>0$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)+1}{\sqrt{m.f^2(x)+2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)\left(1+\dfrac{1}{f(x)}\right)}{|f(x)|\sqrt{m+\dfrac{2}{f^2(x)}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1+\dfrac{1}{f(x)}\right)}{\sqrt{m+\dfrac{2}{f^2(x)}}}=\frac{1}{\sqrt{m}}$$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)+1}{\sqrt{m.f^2(x)+2}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)\left(1+\dfrac{1}{f(x)}\right)}{|f(x)|\sqrt{m+\dfrac{2}{f^2(x)}}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\left(1+\dfrac{1}{f(x)}\right)}{\sqrt{m+\dfrac{2}{f^2(x)}}}=-\frac{1}{\sqrt{m}}$$

Đồ thị hàm số $g(x)$ có hai tiệm cận ngang là hai đường thẳng $y=\dfrac{1}{\sqrt{m}}$, $y=-\dfrac{1}{\sqrt{m}}$.

Tóm lại, tập hợp cần tìm là $(0;+\infty)$.

Câu 4. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m trong $(-2019;2019)$ để đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{4036f(x)+2}{\sqrt{mf^2(x)+3}}$ có hai đường tiệm cận ngang.

A. 0. **B.** 2018. **C.** 4036. **D.** 25.

Lời giải

Chọn B

-Với $m<0$ ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[mf^2(x)+3\right]=-\infty$, tức $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x)$ không tồn tại. Đồ thị hàm số $g(x)$ không có tiệm cận ngang.

-Với $m=0$ thì $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(4036f(x)+2\right)=\pm\infty$. Đồ thị hàm số $g(x)$ không có tiệm cận ngang.

-Với $m>0$, tập xác định của hàm số $g(x)$ là $D=\mathbb{R}$.

Khi đó:

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)\left(4036+\dfrac{2}{f(x)}\right)}{f(x)\sqrt{m+\dfrac{3}{f^2(x)}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4036+\dfrac{2}{f(x)}}{\sqrt{m+\dfrac{3}{f^2(x)}}}=\frac{4036}{\sqrt{m}}.$$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)\left(4036+\dfrac{2}{f(x)}\right)}{-f(x)\sqrt{m+\dfrac{3}{f^2(x)}}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{4036+\dfrac{2}{f(x)}}{-\sqrt{m+\dfrac{3}{f^2(x)}}}=-\frac{4036}{\sqrt{m}}$$

Đồ thị hàm số $g(x)$ có 2 tiệm cận ngang là hai đường thẳng $y=\dfrac{4036}{\sqrt{m}}$, $y=-\dfrac{4036}{\sqrt{m}}$.

Từ tất cả ở trên ta có $\begin{cases} m>0 \\ m\in(-2019;2019) \\ m\in\mathbb{Z}\end{cases}\Leftrightarrow m\in\{1;2;3;...;2018\}$.

Vậy, có 2018 giá trị nguyên của m.

Câu 5. Cho hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$. Có bao nhiêu số nguyên dương m để đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{\left(\sqrt{3x+1}-2\right)f(x)}{\left(x^2-4x+m\right)\sqrt{f^2(x)+1}}$ có đúng 2 đường tiệm cận.

A. 0. **B.** 2. **C.** 3. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện xác định của hàm số $g(x)$: $x\ge-\dfrac{1}{3}; x^2-4x+m\ne0$.

Vì $x\ge-\dfrac{1}{3}$ nên không tồn tại giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$.

Vì hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1 \Rightarrow f(x)>1, \forall x\in\mathbb{R}$.

Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x).\left(\sqrt{3x+1}-2\right)}{\sqrt{f^2(x)+1}.\left(x^2-4x+m\right)}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{f^2(x)}}}.\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{\dfrac{3}{x^3}+\dfrac{1}{x^4}}-\dfrac{2}{x^2}}{1-\dfrac{4}{x}+\dfrac{m}{x^2}}=1.0=0$

$\Rightarrow$ Đường thẳng $y=0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $g(x)$.

Ta có $g(x)=\dfrac{\left(\sqrt{3x+1}-2\right)f(x)}{\left(x^2-4x+m\right)\sqrt{f^2(x)+1}}=\dfrac{(3x-3)f(x)}{\left(x^2-4x+m\right)\left(\sqrt{3x+1}+2\right)\sqrt{f^2(x)+1}}$.

Đồ thị hàm số $g(x)$ có đúng hai tiệm cận khi và chỉ khỉ nó có đúng một tiệm cận đứng, tức là phương trình $x^2-4x+m=0$ có nghiệm kép $x_0,\ x_0\geq-\dfrac{1}{3}$ hoặc có hai nghiệm phân biệt $x_1,\ x_2$ trong đó $x_1=1,\ x_2\neq1,\ x_2\geq-\dfrac{1}{3}$ hoặc có hai nghiệm phân biệt $x_3,\ x_4$ trong đó $x_3<-\dfrac{1}{3},\ x_4\geq-\dfrac{1}{3},\ x_4\neq1$.

Xét bảng biến thiên của hàm số $h(x)=-x^2+4x$:

x	$-\dfrac{1}{3}$		1		2		$+\infty$
$-x^2+4x$	$-\dfrac{13}{9}$	$\nearrow$	3	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$

Ta có $x^2-4x+m=0\Leftrightarrow m=-x^2+4x\qquad(1)$.

Từ bảng biến thiên suy ra $\left[\begin{array}{l} m=4\\ m=3\\ m<-\dfrac{13}{9}\end{array}\right.$. Do m là số nguyên dương nên $m\in\{3;4\}$.

Câu 6. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$. Trên đoạn $[-2020;\ 2020]$ có bao nhiêu số nguyên m để đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{f(x)+2}{\sqrt{(m+1).f^2(x)+2020}}$ có hai tiệm cận ngang.

A. 2020. **B.** 2021. **C.** 4041. **D.** 2000.

Lời giải

Chọn B

Nếu $m+1<0$ thì $-\sqrt{-\dfrac{2020}{m+1}}<f(x)<\sqrt{-\dfrac{2020}{m+1}}\ \forall x\in\mathbb{R}$, điều này mâu thuẫn với giả thiết.

Nếu $m+1=0$ thì $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)+2}{\sqrt{2020}}=\pm\infty$. Tức đồ thị hàm số $g(x)$ không có tiệm cận ngang.

Nếu $m+1>0 \Leftrightarrow m>-1$ thì $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)+2}{\sqrt{(m+1).f^2(x)+2020}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)\left(1+\dfrac{2}{f(x)}\right)}{f(x).\sqrt{m+1+\dfrac{2020}{f(x)}}}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\dfrac{2}{f(x)}}{\sqrt{m+1+\dfrac{2020}{f(x)}}}=\dfrac{1}{\sqrt{m+1}}$. Do đó đường thẳng $y=\dfrac{1}{\sqrt{m+1}}$ là tiệm cận ngang của ĐTHS.

Và $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)+2}{\sqrt{(m+1).f^2(x)+2020}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)\left(1+\dfrac{2}{f(x)}\right)}{-f(x).\sqrt{m+1+\dfrac{2020}{f(x)}}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1+\dfrac{2}{f(x)}}{-\sqrt{m+1+\dfrac{2020}{f(x)}}}=\dfrac{-1}{\sqrt{m+1}}$

Do đó đường thẳng $y=\dfrac{-1}{\sqrt{m+1}}$ là tiệm cận ngang của ĐTHS.

Vậy trên đoạn $[-2020;2020]$ có 2021 số nguyên m thỏa mãn.

Phần 4: Biết biểu thức hoặc đồ thị hoặc BBT của hàm số $y=f'(x)$, tìm tiệm cận của hàm số $y=g(x)$.

Dạng 11: Biết biểu thức hoặc đồ thị hoặc BBT của hàm số $y=f'(x)$, tìm tiệm cận của hàm số $y=g(x)$.

Câu 1. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $y=f'(x)$ có bảng biến thiên như sau.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	$\|$	$+$	0	$-$	
y	1	$\nearrow$	$3 \;\|\; -\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-1

Đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{2020}{f(x)-m}$ có nhiều nhất bao nhiêu đường tiệm cận đứng ?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

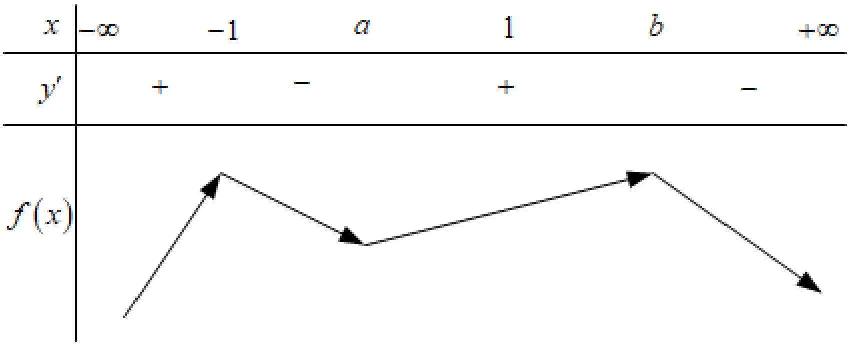
Lời giải

Chọn D

Để đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{2020}{f(x)-m}$ có đường tiệm cận đứng thì phương trình $f(x)-m=0$ phải có nghiệm.

Từ bbt của hàm số $y=f'(x)$ suy ra tồn tại a,b sao cho $\begin{cases}-1<a<1<b\\ f'(a)=f'(b)=0\end{cases}$

Từ đó ta có bbt của hàm số $y=f(x)$ như sau

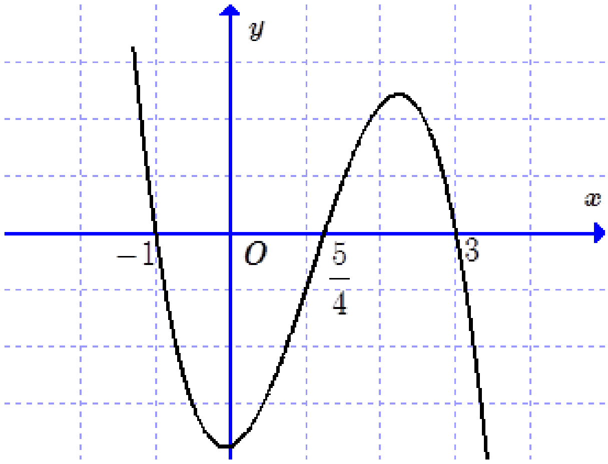


Suy ra phương trình $f\left(x\right)-m=0$ có nhiều nhất là 4 nghiệm phân biệt.

Vậy đồ thị hàm số $g\left(x\right)=\dfrac{2020}{f\left(x\right)-m}$ có nhiều nhất 4 đường tiệm cận đứng.

Câu 2. Cho hàm số $g(x)=\dfrac{2019}{h(x)-m^2-m}$ với $h(x)=mx^4+nx^3+px^2+qx\,(m,n,p,q\in\mathbb{R}),h(0)=0$.

Hàm số $y=h'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới :



Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để đồ thị hàm số $g(x)$ có 2 tiệm cận đứng ?

A. 2 . **B.** 10 . **C.** 71 . **D.** 2019 .

Lời giải

Chọn B

Từ đồ thị suy ra $h'(x)=m(x+1)(4x-5)(x-3)=m(4x^3-13x^2-2x+15)$ và $m<0$.

Ta được $h(x)=m\left(x^4-\dfrac{13}{3}x^3-x^2+15x\right)$.

Đồ thị $g(x)$ có 2 đường tiệm cận đứng khi và chỉ khi phương trình $h(x)=m^2-m$ có 2 nghiệm phân biệt .

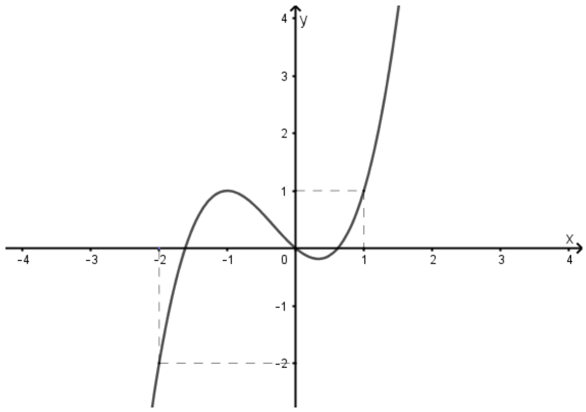
$\Leftrightarrow f(x)=x^4-\dfrac{13}{3}x^3-x^2+15x=m+1$ có 2 nghiệm phân biệt.

Ta có bảng biến thiên của $f(x)$.

x	$-\infty$		-1		$\frac{5}{4}$		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{-32}{3}$	$\nearrow$	$\frac{8575}{768}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Do đó $m+1 \in \left(\frac{-32}{3};0\right) \Leftrightarrow m \in \left(\frac{-35}{3};-1\right)$. Vậy có 10 số nguyên m.

Câu 3. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ sau:



Xét hàm số $y=\dfrac{1}{f(x)-\dfrac{x^2}{2}}$. Đặt $g(x)=f(x)-\dfrac{x^2}{2}$, tìm điều kiện để đồ thị hàm số

$y=\dfrac{1}{f(x)-\dfrac{x^2}{2}}$ có 4 đường tiệm cận đứng.

A. $\begin{cases} g(0)>0 \\ g(1)<0 \end{cases}$.

B. $\begin{cases} g(0)>0 \\ g(1)<0 \\ g(1).g(-2)>0 \end{cases}$.

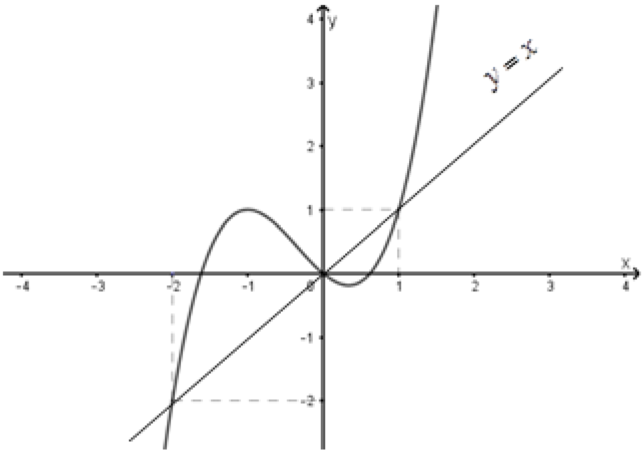
C. $\begin{cases} g(0)>0 \\ g(-2)>0 \end{cases}$.

D. $\begin{cases} g(0)>0 \\ g(-2)\le 0 \\ g(1)\le 0 \end{cases}$.

Lời giải

Chọn B

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{f(x)-\dfrac{x^2}{2}}$ có 4 đường tiệm cận đứng $\Rightarrow$ Phương trình $f(x)-\dfrac{x^2}{2}=0$ phải có 4 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ Đồ thị hàm số $g(x)=f(x)-\dfrac{x^2}{2}$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt.



Ta có: $g'(x) = f'(x) - x$.

$g'(0) = f'(0) - 0 = 0$, $g'(1) = f'(1) - 1 = 0$, $g'(-2) = f'(-2) + 2 = 0$.

Từ đồ thị hàm số $y = f'(x)$ suy ra

- $f'(x) < x, \forall x \in (0;1) \cup (-\infty;-2) \Rightarrow g'(x) < 0, \forall x \in (0;1) \cup (-\infty;-2)$.
- $f'(x) > x; \forall x \in (1;+\infty) \cup (-2;0) \Rightarrow g'(x) > 0, \forall x \in (1;+\infty) \cup (-2;0)$..

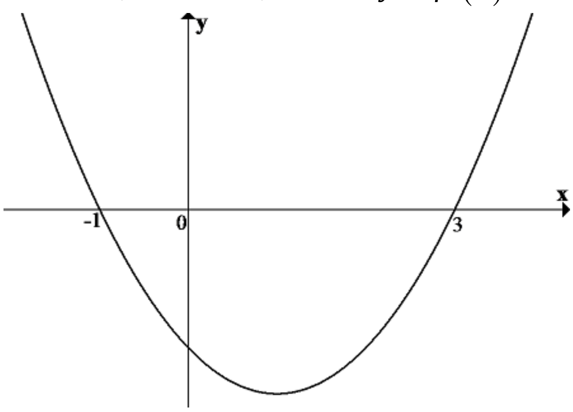
Bảng biến thiên của hàm số $y = g(x)$.

x	$-\infty$		-2		0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$g(-2)$	$\nearrow$	$g(0)$	$\searrow$	$g(1)$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra đồ thị hàm số $y = g(x)$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt

$\Leftrightarrow \begin{cases} g(0) > 0 \\ g(1) < 0 \\ g(-2) < 0 \end{cases}$. Vậy chọn B.

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm số bậc 3. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ và $f(-1) < 20$.



Giá trị của m để đồ thị hàm số $g(x) = \dfrac{f(x) - 20}{f(x) - m}$ có 4 tiệm cận là

A. $m < f(3)$. **B.** $f(3) < m < f(-1)$.

C. $m > f(-1)$. **D.** $f(3) \le m \le f(-1)$..

Lời giải

Chọn B

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(-1)$	$\searrow$	$f(3)$	$\nearrow$	$+\infty$

ĐK: $f(x) \neq m$

Nếu $m \neq 20$ thì đồ thị hàm số không có tiệm cận.

Nếu $m \neq 20$ thì

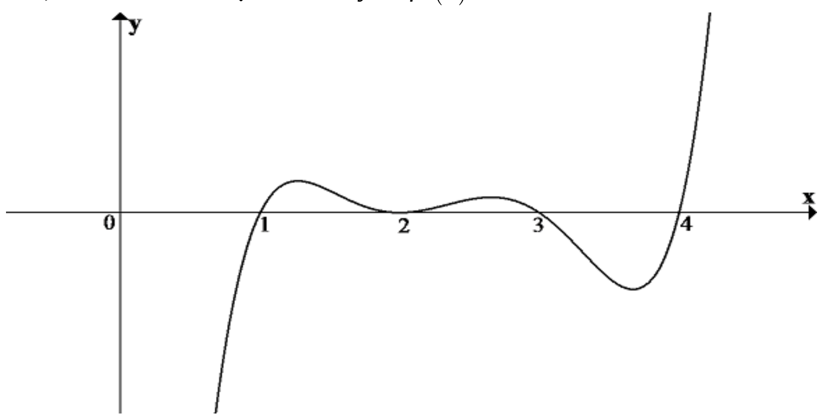
$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)-20}{f(x)-m} = 1 \Rightarrow$ Đường thẳng $y=1$ là TCN của đồ thị hàm số.

Phương trình $f(x)=20$ có một nghiệm $x=a>3$ vì $f(-1)<20$.

Suy ra đồ thị hàm số $g(x)$ có 4 tiệm cận khi phương trình $f(x)=m$ có 3 nghiệm phân biệt khác a.

Suy ra $f(3)<m<f(-1)$.

Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm đa thức liên tục trên R thỏa mãn $3f(1)-2<0$ và $3f(a)-a^3+3a>0, \forall a>2$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ.



Đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{x+1}{3f(x+2)-x^3+3x}$ có có số tiệm cận đứng là

A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Phương trình $f(x)=20$ có một nghiệm $x=a>3$ vì $f(-1)<20$.

Từ đồ thị $f'(x)$ suy ra $f(x)$ là đa thức bậc 6 và $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=+\infty$.

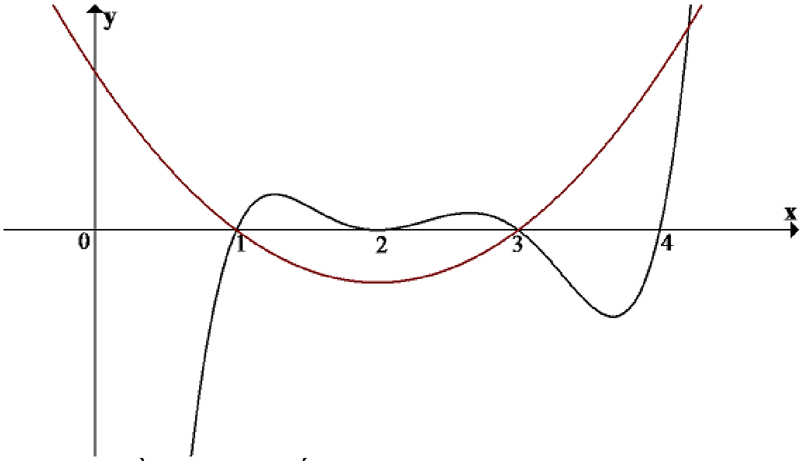
ĐK: $h(x)=3f(x+2)-x^3+3x \neq 0$.

Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm $g(x)$ bằng số nghiệm của $h(x)$ khác -1.

Ta đi tìm số nghiệm của phương trình $h(x)=0$.

$h'(x)=3f'(x+2)-3x^2+3$. Đặt $t=x+2 \Rightarrow h'(x)=k(t)=3(f'(t)-t^2+4t-3)$.

Khi đó $k(t)=3(f'(t)-t^2+4t-3)=0 \Leftrightarrow f'(t)=t^2-4t+3 (*)$



Sử dụng đồ thị nhận thấy (*) có 3 nghiệm là $t=1; t=3; t=a>4 \Rightarrow x=-1; x=1; x=a-2=b>2$.

Ta có bảng biến thiên của $h(x)$ như sau :

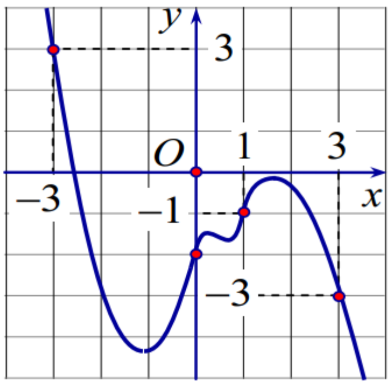
x	$-\infty$		-1		1		b		$+\infty$
h'(x)		-	0	+	0	-	0	+	
h(x)	$+\infty$	↘	h(-1)	↗	h(1)	↘	h(b)	↗	$+\infty$

Ta có: $h(-1)=3f(1)-2<0; h(b)=3f(a)-a^3+3a>0; a>2$.

Dựa vào bảng biến thiên của $h(x)$ ta thấy $h(x)=0$ có 2 nghiệm phân biệt khác -1.

Vậy $g(x)$ có 2 tiệm cận đứng.

Câu 6. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[-3;3]$ và đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ. Đặt $h(x)=\dfrac{3}{2f(x)+x^2+4}$. Biết rằng $f(1)=-24$. Hỏi trên đoạn $[-3;3]$ đồ thị hàm số $y=h(x)$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng ?



A. 1. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải

Chọn D.

Xét hàm số $g(x)=2f(x)+x^2+4 \Rightarrow g'(x)=2.\left(f'(x)+x\right)=0 \Leftrightarrow f'(x)=-x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=1 \\ x=3 \end{array}\right.$.

Lập bảng biến thiên của $g(x)$ ta được:

x	-3		1		3
$g'(x)$	0	$-$	0	$+$	0
$g(x)$	$g(-3)$	$\searrow$	-43	$\nearrow$	$g(3)$

Gọi a là nghiệm của phương trình $f'(x)=0$. Ta có:

$$\int_{-3}^{a}\left|f'(x)\right|dx<\int_{a}^{3}\left|f'(x)\right|dx \Leftrightarrow f(a)-f(-3)<-\left(f(3)-f(a)\right)\Leftrightarrow f(-3)>f(3)\Leftrightarrow g(-3)>g(3).$$

Lại có: $\int_{1}^{3} g'(x)dx<4 \Leftrightarrow g(3)-g(1)<4 \Leftrightarrow g(3)<g(1)+4 \Leftrightarrow g(3)<-39 \Rightarrow g(3)<0.$

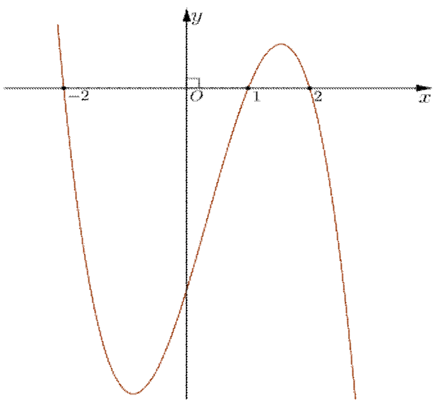
S_{ABCD} là diện tích hình chữ nhật giới hạn bởi 4 đường thẳng: $x=-3; x=1; y=-5; y=3$.

Mặt khác: $\int_{-3}^{1}\left(-g'(x)\right)dx<S_{ABCD}=32 \Leftrightarrow g(-3)-g(1)<32 \Leftrightarrow g(-3)<-11.$

Do đó phương trình $g(x)=0$ vô nghiệm, vậy đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cân đứng.

Câu 7. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên R, thỏa $f(1)=0$ và đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ có dạng như hình vẽ bên. Hỏi đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{2020x}{f^2(x)+f(x)}$ có bao nhiêu tiệm cận đứng?

A.3. **B.**2. **C.**5. **D.**4.



Lời giải

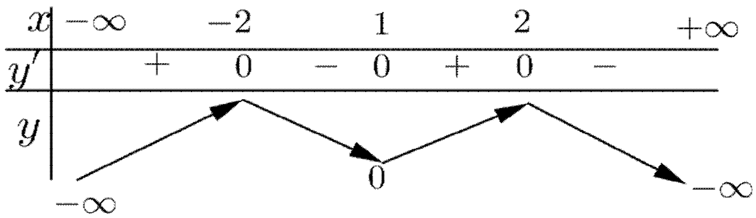
Chọn C

$$f^2(x)-f(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=0 \\ f(x)=-1 \end{array}\right.$$

Từ đồ thị hàm số $f'(x)$ ta có:

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=1 \\ x=2 \end{array}\right., \quad f'(x)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<-2 \\ 1<x<2 \end{array}\right.$$

Ta lập được bảng biến thiên của hàm số



Từ bảng biến thiên ta có:

Phương trình $f(x)=0$ có 3 nghiệm phân biệt khác 0

Phương trình $f(x)=-1$ có hai nghiệm phân biệt khác 0

Vậy đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{2020x}{f^2(x)+f(x)}$ có 5 tiệm cận đứng

CÁC DẠNG TOÁN VỀ HÀM ẨN LIÊN QUAN ĐẾN SỰ TƯƠNG GIAO CỦA ĐỒ THỊ CÁC HÀM SỐ

Dạng 1: Biết đồ thị hoặc BBT của hàm số $y=f(x)$, xét các bài toán liên quan đến phương trình có dạng $f(x)=a.$, $f(u(x))=a$.

Dạng 2: Biết đồ thị hoặc BBT của hàm số $y=f(x)$, xét các bài toán liên quan đến phương trình có dạng $f(x)=g(m)$, $f(u(x))=g(m)$.

Dạng 3: Biết đồ thị hoặc BBT của hàm số $y=f(x)$, xét các bài toán liên quan đến phương trình có dạng $f(x)=f(m)$, $f(u(x))=f(m)$.

Dạng 4: Biết đồ thị hoặc BBT của hàm số $y=f(x)$, xét các bài toán liên quan đến phương trình có dạng $f(|x|)=a; |f(x)|=a; f(|u(x)|)=a; |f(u(x))|=a...$.

Dạng 5: Biết đồ thị hoặc BBT của hàm số $y=f(x)$, xét các bài toán liên quan đến phương trình có dạng $f(|x|)=g(m); |f(x)|=g(m); f(|u(x)|)=g(m); |f(u(x))|=g(m)...$.

Dạng 6: Biết đồ thị hoặc BBT của hàm số $y=f(x)$, xét các bài toán liên quan đến phương trình có dạng $f(x)=g(x); f(u(x))=g(v(x))$.

Dạng 7: Biết đồ thị hoặc BBT của hàm số $y=f(x)$, xét các bài toán liên quan đến phương trình, bất phương trình chứa $f'(x); f''(x)...$.

Dạng 8: Biết đồ thị hoặc BBT của hàm số $y=f'(x)$, xét các bài toán liên quan đến phương trình có dạng $f(x)=0; f(u(x))=0; f(x)=g(x); f(u(x))=g(v(x))...$.

Dạng 9: Biết đồ thị hoặc BBT của hàm số $y=f'(x)$, xét các bài toán liên quan đến phương trình có dạng $f(x)=m; f(u(x))=m; f(x)=g(m); f(u(x))=g(m)...$

Dạng 10: Biết số nghiệm của phương trình $f(x)=0$, xét các bài toán liên quan đến phương trình có chứa $f'(x); f''(x)...$.

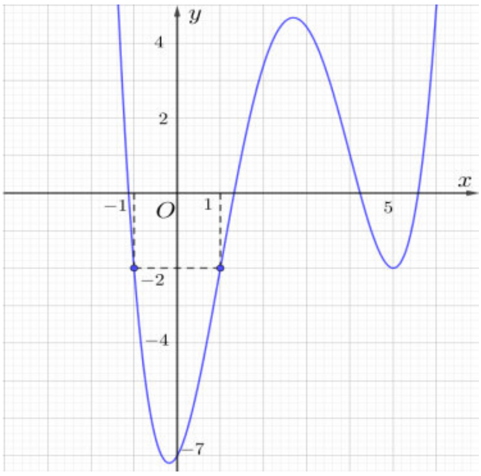
Dạng 11: Biết đồ thị hoặc BBT của hàm số $y=f(x)$, xét các bài toán liên quan đến BẤT PHƯƠNG TRÌNH có dạng $f(x)\ge g(x); f(u(x))\ge g(x)$ $(>,<,\le)...$ có thể có tham số.

Dạng 12: Biết đồ thị hoặc BBT của hàm số $y=f'(x)$, xét các bài toán liên quan đến BẤT PHƯƠNG TRÌNH có dạng $f(x)\ge g(x); f(u(x))\ge g(x)$ $(>,<,\le)...$ có thể có tham số.

CÁC DẠNG TOÁN VỀ HÀM ẨN LIÊN QUAN ĐẾN BÀI TOÁN XÉT SỰ TƯƠNG GIAO CỦA ĐỒ THỊ CÁC HÀM SỐ (PHẦN 1. Từ dạng 1 đến dạng 4)

Dạng 1: Biết đồ thị hoặc BBT của hàm số $y=f(x)$, xét các bài toán liên quan đến phương trình có dạng $f(x)=a$., $f(u(x))=a$.

Câu 1. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.

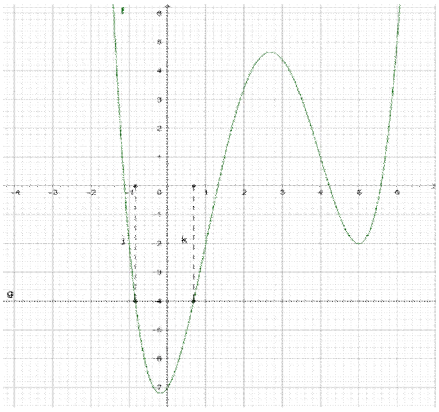


Số nghiệm thuộc khoảng $(0;\pi)$ của phương trình $f(\sin x)=-4$ là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C



Xét phương trình: $f(\sin x)=-4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=\alpha\in(-1;0)\\ \sin x=\beta\in(0;1)\end{array}\right.$

Vì $x\in(0;\pi) \Rightarrow \sin x\in(0;1]$. Suy ra với $x\in(0;\pi)$ thì $f(\sin x)=-4 \Leftrightarrow \sin x=\beta\in(0;1)$. Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm $x\in(0;\pi)$ (thỏa mãn).

Vậy chọn **C.**

Câu 2. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		1		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$			0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-8	$\nearrow$	5	$\nearrow$	13	$\searrow$	$-\infty$

Phương trình $f(\cos x)=\dfrac{13}{3}$ có bao nhiêu nghiệm thuộc khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t=\cos x$, $x\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow t\in(0;1]$.

Phương trình $f(\cos x)=\frac{13}{3}$ trở thành $f(t)=\frac{13}{3}$

Dựa vào bảng biến thiên trên ta có phương trình $f(t)=\frac{13}{3}$ có đúng một nghiệm $t\in(0;1)$

Với một nghiệm $t\in(0;1)$, thay vào phép đặt ta được phương trình $\cos x=t$ có hai nghiệm phân biệt thuộc thuộc khoảng $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.

Vậy phương trình $f(\cos x)=\frac{13}{3}$ có hai nghiệm phân biệt thuộc thuộc khoảng $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.

Câu 3. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$ ↘		$-\infty$ || $+\infty$	↘	-2	↗	$+\infty$

Số nghiệm của phương trình $2f(3x-5)-7=0$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

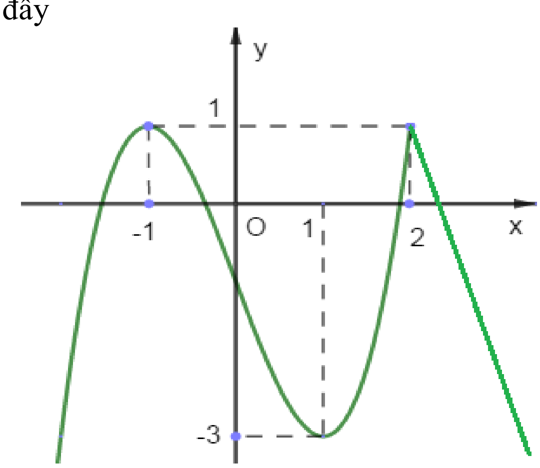
$2f(3x-5)-7=0\Leftrightarrow f(3x-5)=\frac{7}{2}$.

Đặt $t=3x-5$, phương trình trở thành $f(t)=\frac{7}{2}$.

Với mỗi nghiệm t thì có một nghiệm $x=\frac{t+5}{3}$ nên số nghiệm t của phương trình $f(t)=\frac{7}{2}$ bằng số nghiệm của phương trình $2f(3x-5)-7=0$.

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$ suy ra phương trình $f(t)=\frac{7}{2}$ có 3 nghiệm phân biệt nên phương trình $2f(3x-5)-7=0$ có 3 nghiệm phân biệt.

Câu 4. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$ và có đồ thị như hình dưới đây



Với giả thiết, phương trình $f\left(1-\sqrt{x^3+x}\right)=a$ có nghiệm. Giả sử khi tham số a thay đổi, phương trình đã cho có nhiều nhất m nghiệm và có ít nhất n nghiệm. Giá trị của $m+n$ bằng

A. 4. **B.** 6. **C.** 3. **D.** 5.

Lời giải

Chọn C

Dễ thấy điều kiện của phương trình đã cho là $x \geq 0$.

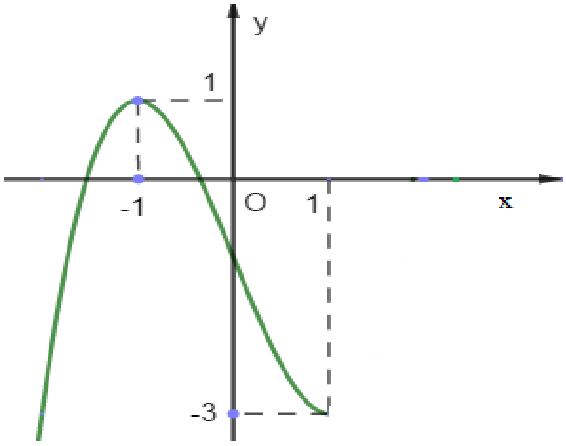
Đặt $t=1-\sqrt{x^3+x}\quad (1) \Rightarrow t \in (-\infty;1]$.

Dễ thấy phương trình (1) luôn có nghiệm duy nhất $\forall t \in (-\infty;1]$.

Phương trình đã cho có dạng: $f(t)=a \quad (2), t \leq 1$.

Số nghiệm của phương trình đã cho bằng số nghiệm của (2).

Đồ thị hàm số $y=f(t), t \leq 1$ có dạng:



Do đó:

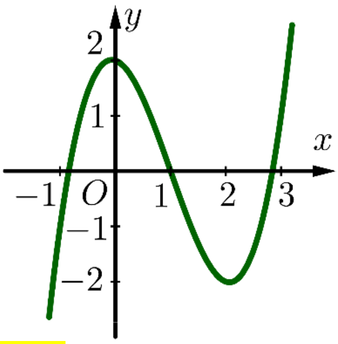
(2) vô nghiệm khi $a>1$.

(2) có hai nghiệm khi $-3 \leq a<1$.

(2) có nghiệm duy nhất khi $a=1$ hoặc $a<-3$.

Vậy $m=2, n=1 \Rightarrow m+n=3$.

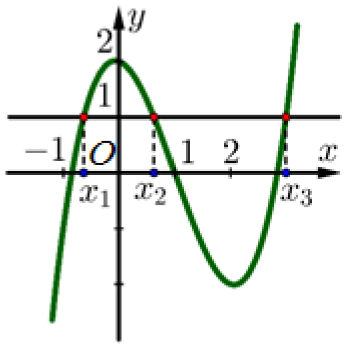
Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Gọi m là số nghiệm của phương trình $f\left(f(x)\right)=1$. Khẳng định nào sau đây là đúng?



A. $m=6$. **B.** $m=7$. **C.** $m=5$. **D.** $m=9$.

Lời giải

Chọn B



Ta có: $f(x)=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=x_1 \in (-1;0) \\ x=x_2 \in (0;1) \\ x=x_3>2 \end{array}\right.$.

Suy ra: $f(f(x))=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=x_1\,(1) \\ f(x)=x_2\,(2) \\ f(x)=x_3\,(3) \end{array}\right.$.

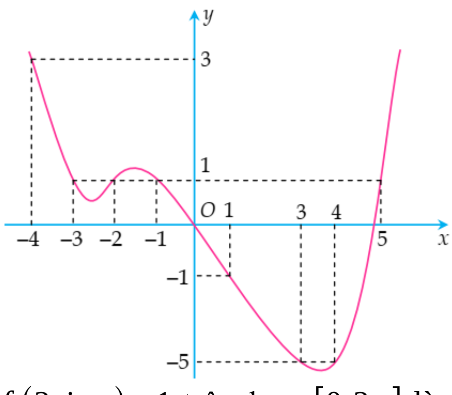
+) Xét (1): $f(x)=x_1 \in (-1;0)$, ta có đường thẳng $y=x_1$ cắt đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại 3 điểm phân biệt nên phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt.

+) Xét (2): $f(x)=x_2 \in (0;1)$, ta có đường thẳng $y=x_2$ cắt đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại 3 điểm phân biệt nên phương trình (2) có 3 nghiệm phân biệt.

+) Xét (3): $f(x)=x_3>2$, ta có đường thẳng $y=x_3$ cắt đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại 1 điểm nên phương trình (3) có 1 nghiệm.

Do các nghiệm không trùng nhau nên tổng số nghiệm là: $m=3+3+1=7$.

Câu 6. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau.



Số nghiệm của phương trình $f(2\sin x)=1$ trên đoạn $[0;2\pi]$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t=2\sin x$, $t \in [-2;2]$.

Xét phương trình $f(t)=1$, dựa vào đồ thị ta thấy

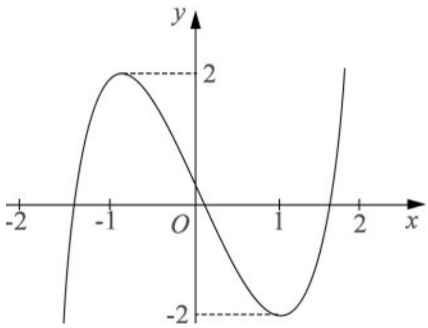
$$f\left(t\right)=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}t=-3 & (l)\\ t=-2 & (n)\\ t=-1 & (n)\\ t=5 & (l)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2\sin x=-2\\ 2\sin x=-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x=-1\\ \sin x=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right..$$

Với $\sin x=-1\Leftrightarrow x=-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi$, $x\in\left[0;2\pi\right]\Rightarrow x=\dfrac{3\pi}{2}$.

Với $\sin x=-\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{\pi}{3}+k2\pi\\ x=\dfrac{4\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right.$, $x\in\left[0;2\pi\right]\Rightarrow x=\dfrac{5\pi}{3},\ \dfrac{4\pi}{3}$.

Vậy phương trình có 3 nghiệm

Câu 7. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.

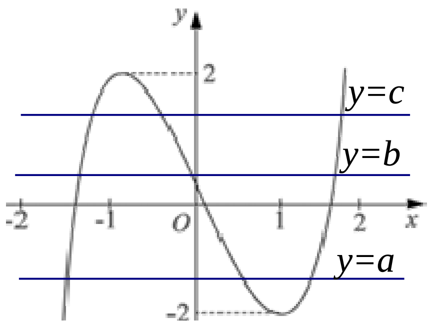


Phương trình $f\left(f\left(x\right)\right)=0$ có bao nhiêu nghiệm.

A. 6. **B.** 7. **C.** 8. **D.** 9.

Lời giải.

Chọn D

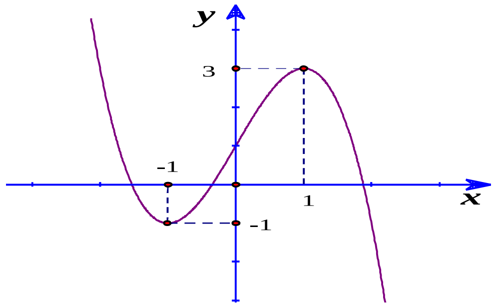


Phương trình $f\left(x\right)=0$ có ba nghiệm phân biệt là: $\left[\begin{array}{l}x=a\ \left(a\in\left(-2;-1\right)\right)\\ x=b\ \left(b\in\left(0;1\right)\right)\\ x=c\ \left(c\in\left(1;2\right)\right)\end{array}\right.$

Các phương trình $f\left(x\right)=a, f\left(x\right)=b, f\left(x\right)=c$ đều có 3 nghiệm phân biệt.

Vậy phương trình đã cho có 9 nghiệm phân biệt.

Câu 8. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ.



Số nghiệm của phương trình $3f(x)-4=0$ là

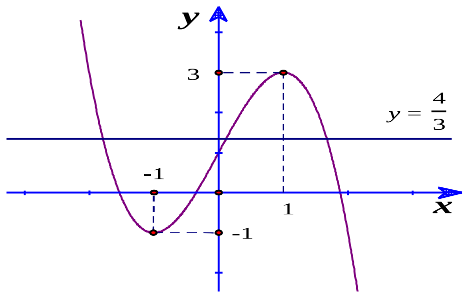
A. 1. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B

Ta có $3f\left(x\right)-4=0 \Leftrightarrow f\left(x\right)=\dfrac{4}{3} \quad \left(1\right)$.

Phương trình $\left(1\right)$ là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ và đường thẳng $y=\dfrac{4}{3}$. Số nghiệm của $\left(1\right)$ chính là số giao điểm của hai đồ thị hàm số.



Dựa vào đồ thị của hai hàm số $y=f\left(x\right), y=\dfrac{4}{3}$ ta thấy hai đồ thị cắt nhau tại 3 điểm phân biệt nên phương trình $\left(1\right)$ có 3 nghiệm phân biệt. Vậy phương trình ban đầu có 3 nghiệm phân biệt.

Câu 9. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm thực của phương trình $2f\left(x\right)-3=0$ là

A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 1.

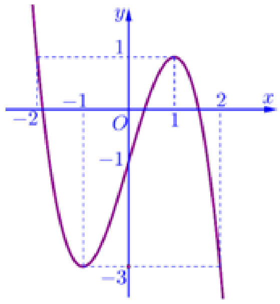
Lời giải

Phương trình $2f\left(x\right)-3=0 \Leftrightarrow f\left(x\right)=\dfrac{3}{2}$.

Số nghiệm của phương trình đã cho bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ với đường thẳng $y=\dfrac{3}{2}$.

Từ bảng biến thiên suy ra số nghiệm thực của phương trình $2f\left(x\right)-3=0$ là 2.

Câu 10. Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị $y=f\left(x\right)$ như hình vẽ bên. Phương trình $f\left(2-f\left(x\right)\right)=0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm phân biệt.



A. 4. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 7.

Lời giải

Chọn B

Theo đồ thị:

$$f(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=a\ \ (-2<a<-1) \\ x=b\ \ (0<b<1) \\ x=c\ \ (1<c<2) \end{array}\right. \Rightarrow f\left(2-f(x)\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2-f(x)=a \\ 2-f(x)=b \\ 2-f(x)=c \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=2-a\ (1) \\ f(x)=2-b\ (2) \\ f(x)=2-c\ (3) \end{array}\right.$$

Nghiệm của phương trình (1); (2); (3) là giao điểm của đường thẳng $y=2-a$; $y=2-b$; $y=2-c$ với đồ thị hàm số $f(x)$.

- $a\in(-2;1)\Rightarrow 2-a\in(3;4)$ suy ra phương trình (1) có đúng 1 nghiệm.
- $b\in(0;1)\Rightarrow 2-b\in(1;2)$ suy ra phương trình (2) có đúng 1 nghiệm.
- $c\in(1;2)\Rightarrow 2-c\in(0;1)$ suy ra phương trình (3) có 3 nghiệm phân biệt.

Kết luận: Có tất cả 5 nghiệm phân biệt.

Câu 11. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $2f(x)+m=0$ có 4 nghiệm phân biệt?

A. 4. **B.** 5. **C.** 2. **D.** 6.

Lời giải

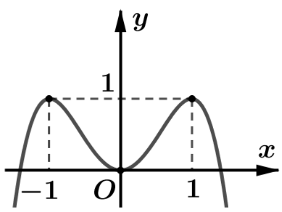
Chọn B

Ta có: $2f(x)+m=0 \Leftrightarrow f(x)=\dfrac{-m}{2}$ $(*)$.

Phương trình $(*)$ có 4 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ đường thẳng $(d): y=\dfrac{-m}{2}$ cắt đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại 4 điểm phân biệt $\Leftrightarrow -2<\dfrac{-m}{2}<1 \Leftrightarrow -2<m<4$.

Do $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{-1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3\}$. **Chọn** **B.**

Câu 12. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Hỏi có bao nhiêu điểm trên đường tròn lượng giác biểu diễn nghiệm của phương trình $f\left[f(\cos 2x)\right]=0$?

A. 1 điểm. **B.** 3 điểm. **C.** 4 điểm. **D.** Vô số.

Lời giải

ChọnC

Dựa vào đồ thị ta thấy khi $x\in[-1;1]$ thì $y\in[0;1]$.

Do đó nếu đặt $t=\cos 2x$ thì $t\in[-1;1]$, khi đó $f(\cos 2x)\in[0;1]$.

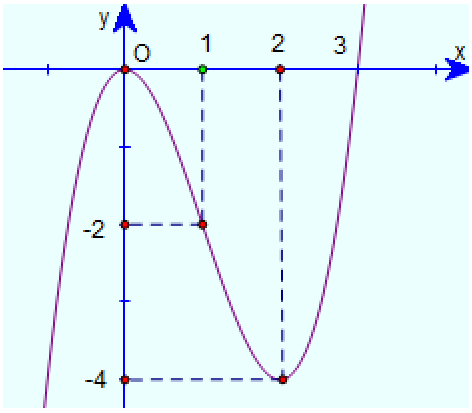
Dựa vào đồ thị, ta có $f\left[f(\cos 2x)\right]=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(\cos 2x)=0\\ f(\cos 2x)=a\ (a<-1)\ (\text{loại}).\\ f(\cos 2x)=b\ (b>1)\ (\text{loại})\end{array}\right.$

Phương trình $f(\cos 2x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos 2x=0\\ \cos 2x=a\ (a<-1)\ (\text{loại})\\ \cos 2x=b\ (b>1)\ (\text{loại})\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow\cos 2x=0\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}(k\in\mathbb{Z})$.

Vậy phương trình đã cho có 4 điểm biểu diễn nghiệm trên đường tròn lượng giác.

Câu 13. Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị hàm số như hình vẽ dưới đây



Tìm số nghiệm thực của phương trình $f\left(\sqrt{-x^2+4x-3}\right)=-2$.

A. 1 **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

ChọnA

Ta có $\sqrt{-x^2+4x-3}$ xác định khi $1\le x\le 3$.

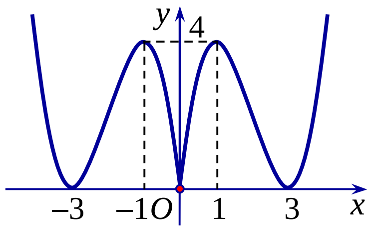
Từ đồ thị của hàm số, ta có

$f\left(\sqrt{-x^2+4x-3}\right)=-2\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\sqrt{-x^2+4x-3}=a<0(\text{loại})\\ \sqrt{-x^2+4x-3}=1\\ \sqrt{-x^2+4x-3}=b\in(2;3)\end{array}\right.$.

- $\sqrt{-x^2+4x-3}=1\Leftrightarrow x=2$.
- $\sqrt{-x^2+4x-3}=b\Leftrightarrow x^2-4x+3+b^2=0$ có $\Delta'=4-(3+b^2)=1-b^2<0,\forall b\in(2;3)$.

Vậy phương trình $f\left(\sqrt{-x^2+4x-3}\right)=-2$ có đúng 1 nghiệm.

Câu 14. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $2f\left(2|\sin x|+1\right)=m$ có nghiệm thuộc khoảng $(0;\pi)$ là



A. $[0;4)$. **B.** $(0;4)$. **C.** $(1;3)$. **D.** $[0;8)$.

Lời giải

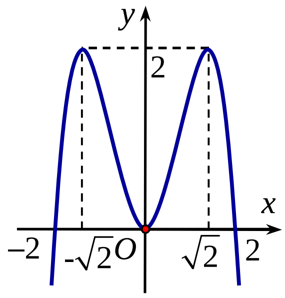
Chọn D

Đặt $t=2|\sin x|+1$. Với $x\in(0;\pi)$ thì $t\in(1;3]$.

Do đó phương trình $2f(2|\sin x|+1)=m$ có nghiệm thuộc khoảng $(0;\pi)$ khi và chỉ khi phương trình $f(t)=\frac{m}{2}$ có nghiệm thuộc nửa khoảng $(1;3]$.

Quan sát đồ thị ta suy ra điều kiện của tham số m là $\frac{m}{2}\in[0;4)\Leftrightarrow m\in[0;8)$.

Câu 15. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f\left(\sqrt{2-x^2}\right)=m$ có nghiệm là:



A. $\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$. **B.** $(0;2)$. **C.** $(-2;2)$. **D.** $[0;2]$.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện của phương trình: $x\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$.

Đặt $t=\sqrt{2-x^2}$. Với $x\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$ thì $t\in\left[0;\sqrt{2}\right]$.

Do đó phương trình $f\left(\sqrt{2-x^2}\right)=m$ có nghiệm khi và chỉ khi phương trình $f(t)=m$ có nghiệm thuộc đoạn $\left[0;\sqrt{2}\right]$.

Quan sát đồ thị ta suy ra điều kiện của tham số m là $m\in[0;2]$.

Câu 16. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	2	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm thực của phương trình $3f(x)-5=0$ là

A. 4. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

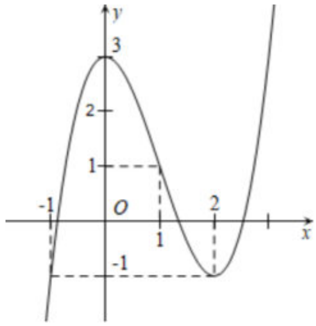
Ta có $3f(x)-5=0 \Leftrightarrow 3f(x)=5 \Leftrightarrow f(x)=\frac{5}{3}$.

Số nghiệm của phương trình là số giao điểm của hai đồ thị $y=f(x)$ và đường thẳng $y=\frac{5}{3}$.

Dựa vào BBT ta thấy đường thẳng $y=\frac{5}{3}$ cắt đồ thị $y=f(x)$ tại 4 điểm phân biệt.

Vậy phương trình có 4 nghiệm thực phân biệt.

Câu 17. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau.



Số nghiệm của phương trình $[f(x^2+1)]^2-f(x^2+1)-2=0$ là:

A. 1. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 5.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t=x^2+1 \Rightarrow t \geq 1$.

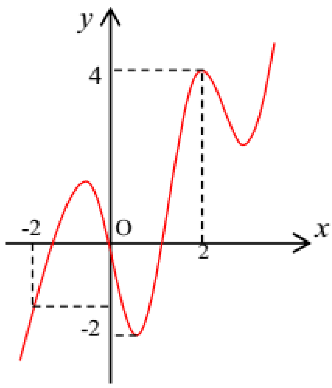
Ta thấy ứng với $t=1$ cho ta một giá trị của x và ứng với mỗi giá trị $t>1$ cho ta hai giá trị của x.

Phương trình đã cho trở thành: $\left[f(t)\right]^2-f(t)-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(t)=-1 \\ f(t)=2 \end{array}\right.$.

Từ đồ thị hàm số $y=f(t)$ trên $[1;+\infty)$ suy ra phương trình $f(t)=-1$ có 1 nghiệm $t=2$ và phương trình $f(t)=2$ có 1 nghiệm $t>2$ do đó phương trình đã cho có 4 nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm.

Câu 18. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m $[-10;\ 10]$ để phương trình $f\left(x^3-3x^2+2\right)=m^2-3m$ có nghiệm thuộc nửa khoảng $[1;3)$.



A. 21. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 4.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t=x^3-3x^2+2$.

Vì $1 \leq x < 3 \Rightarrow -2 \leq t < 2$.

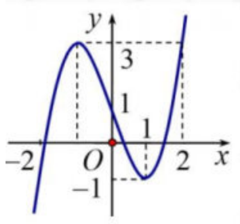
Phương trình $f\left(x^3-3x^2+2\right)=m^2-3m \Leftrightarrow f(t)=m^2-3m$ với $t \in [-2;2)$.

Phương trình có nghiệm thuộc nửa khoảng $[1;3) \Leftrightarrow -2 \le m^2 - 3m < 4 \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 3m + 2 \ge 0 \\ m^2 - 3m - 4 < 0 \end{cases}$.

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1 < m \le 1 \\ 2 \le m < 4 \end{array}\right.$

Vậy trên đoạn $[-10;\ 10]$ có 4 giá trị nguyên thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 19. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f(x) = 2$ là:

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

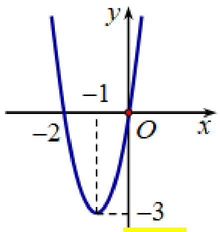
Lời giải

Chọn C

Số nghiệm của phương trình $f(x) = 2$ là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = 2$. Dựa vào đồ thị ta thấy số giao điểm là 3.

Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm phân biệt.

Câu 20. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ. Phương trình $f(f(x)) = -3$ có tất cả bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?



A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3

Lời giải

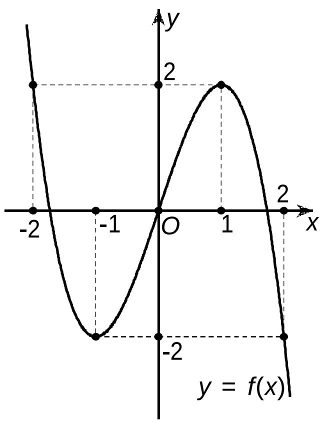
Chọn C

Từ đồ thị ta có $f(f(x)) = -3 \Leftrightarrow f(x) = -1$.

Cũng từ đồ thị ta thấy ta có đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt đường thẳng $y = -1$ tại hai điểm phân biệt nên phương trình $f(x) = -1$ có hai nghiệm phân biệt.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt.

Câu 21. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Phương trình $f\left(f\left(x\right)\right)=2$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 3 **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Chọn C

Dựa vào đồ thị của hàm số ta có:

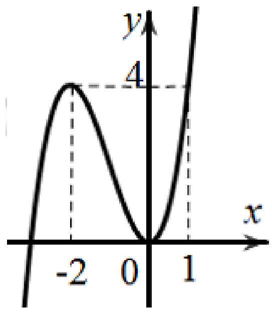
$$f\left(f\left(x\right)\right)=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f\left(x\right)=-2\\f\left(x\right)=1\end{array}\right..$$

Số nghiệm của các phương trình $f\left(x\right)=-2$ và $f\left(x\right)=1$ lần lượt là số giao điểm đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ và các đường thẳng $y=-2,y=1$.

Dựa vào đồ thị ta có $f\left(x\right)=-2$ có hai nghiệm phân biệt $x_1=-1;x_2=2$ và $f\left(x\right)=1$ có ba nghiệm $x_3=a;x_4=b;x_5=c$ sao cho -2 < a < -1 < b < 1 < c < 2.

Vậy phương trình $f\left(f\left(x\right)\right)=2$ có 5 nghiệm phân biệt.

Câu 22. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f\left(x^2+2x-2\right)=3m+1$ có nghiệm thuộc khoảng $\left[0;1\right]$..



A. $\left[0;4\right]$. **B.** $\left[-1;0\right]$. **C.** $\left[0;1\right]$. **D.** $\left[-\frac{1}{3};1\right]$

Lời giải

Chọn.D.

Đặt $t=x^2+2x-2$. Với $x\in\left[0;1\right]\Rightarrow t\in\left[-2;1\right]$.

Phương trình $f\left(x^2+2x-2\right)=3m+1$ có nghiệm thuộc đoạn $\left[0;1\right]$ khi và chỉ khi phương trình $f\left(t\right)=3m+1$ có nghiệm thuộc $\left[-2;1\right]\Leftrightarrow 0\le 3m+1\le 4\Leftrightarrow -\frac{1}{3}\le m\le 1$.

Câu 23. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm phương trình $f\left(x\right)-2020=0$ là

A. 2. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 3

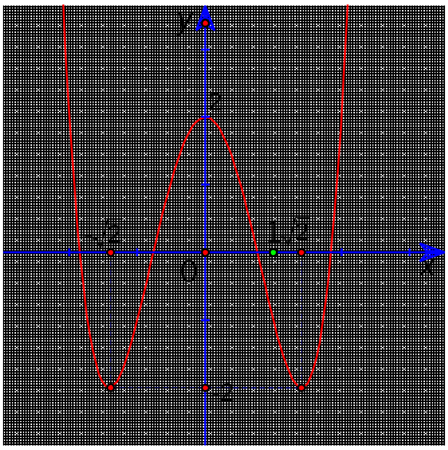
Lời giải

Chọn C

Ta có $f\left(x\right)-2020=0\Leftrightarrow f\left(x\right)=2020$.

Từ bảng biến thiên ta có đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ cắt đường thẳng $y=2020$ tại 1 điểm nên phương trình đã cho có 1 nghiệm.

Câu 24. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên dưới



Số nghiệm của phương trình $2f(x) - 7 = 0$ là:

A. 4. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

$2f(x) - 7 = 0 \Leftrightarrow f(x) = \dfrac{7}{2}$.

Dựa vào đồ thị ta thấy đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = \dfrac{7}{2}$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt.

Vậy phương trình $2f(x) - 7 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt.

Câu 25. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm của phương trình $f(x) + 1 = 0$ là?

A. 1. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 2.

Lời giải

Phương trình $f(x) + 1 = 0 \Leftrightarrow f(x) = -1$.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trình vô nghiệm

Chọn C

Câu 26. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	5	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Phương trình $f(1 - 3x) = 6$ có bao nhiêu nghiệm âm?

A. 1. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 2.

Lời giải

Xét $g(x)=f(1-3x)\Rightarrow g'(x)=-3f(1-3x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}1-3x=-1\\1-3x=3\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{2}{3}\\x=-\dfrac{2}{3}\end{array}\right.$.

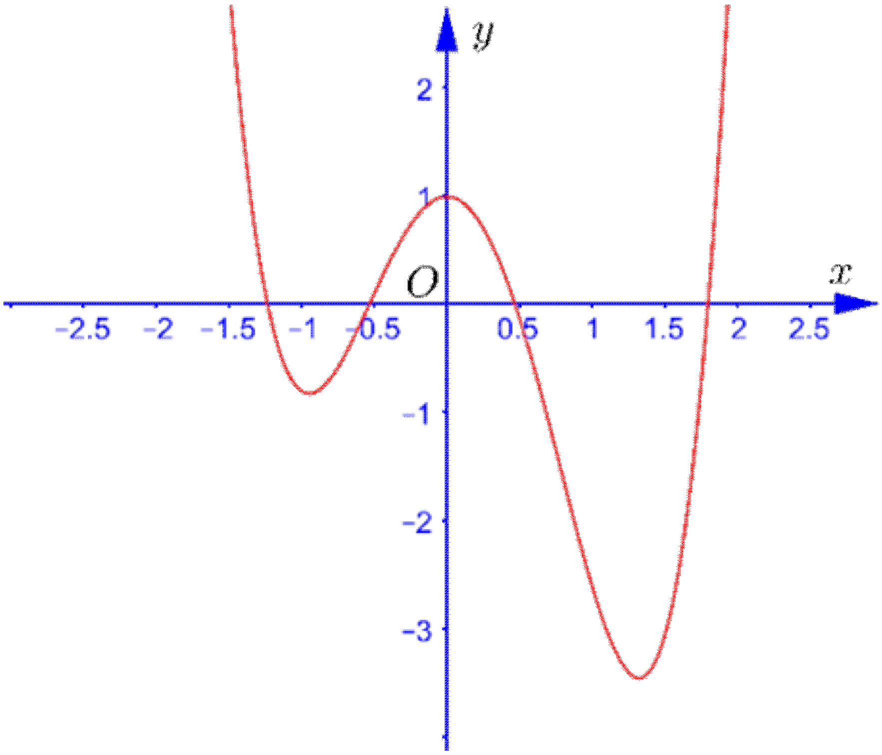
Bảng biến thiên

x	$+\infty$		$-\frac{2}{3}$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	5	$\searrow$	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trình $f(1-3x)=6$ có một nghiệm âm.

Chọn **A.**

Câu 27. Đồ thị hàm số $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ có dạng như hình vẽ sau.

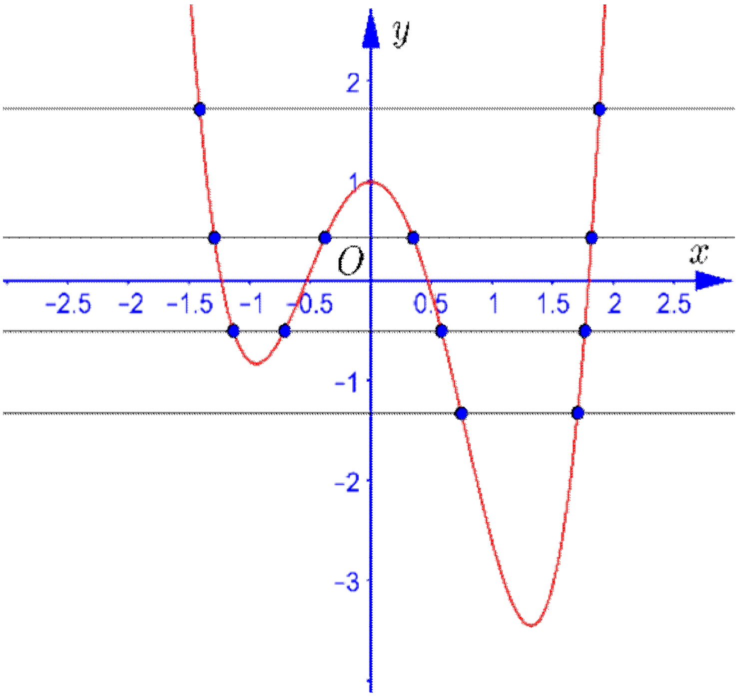


Phương trình $a(f(x))^4+b(f(x))^3+c(f(x))^2+df(x)+e=0$ (*) có số nghiệm là

A. 2. **B.** 6. **C.** 12. **D.** 16.

Hướng dẫn giải

Chọn C.



Ta thấy đồ thị $y = f(x)$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt nên phương trình $f(x) = 0$ có 4 nghiệm phân biệt: $x_1 \in (-1,5;-1)$, $x_2 \in (-1;-0,5)$, $x_3 \in (0;0,5)$, $x_4 \in (1,5;2)$.

Kẻ đường thẳng $y = m$.

Với $m = x_1 \in (-1,5;-1)$ có 2 giao điểm nên phương trình $f(x) = x_1$ có 2 nghiệm.

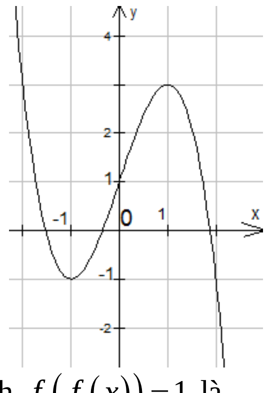
Với $m = x_2 \in (-1;-0,5)$ có 4 giao điểm nên phương trình $f(x) = x_2$ có 4 nghiệm.

Với $m = x_3 \in (0;0,5)$ có 4 giao điểm nên phương trình $f(x) = x_3$ có 4 nghiệm.

Với $m = x_4 \in (1,5;2)$ có 2 giao điểm nên phương trình $f(x) = x_4$ có 2 nghiệm.

Vậy phương trình (*) có 12 nghiệm.

Câu 28. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên.



Số nghiệm phân biệt của phương trình $f(f(x)) = 1$ là

A. 7 . **B.** 8 . **C.** 9 . **D.** 6 .

Lời giải

Chọn A.

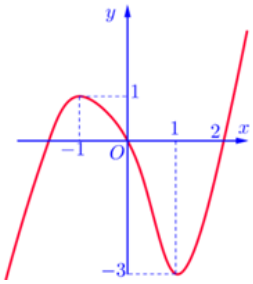
Đặt $f(x) = t$, khi đó $f(t) = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} t = a & (-2 < a < -1) \\ t = 0 & \\ t = b & (1 < b < 2) \end{array}\right.$.

Khi đó ta có $\left[\begin{array}{ll} f(x) = a & (-2 < a < -1) \\ f(x) = 0 & \\ f(x) = b & (1 < b < 2) \end{array}\right.$.

Dựa vào đồ thị ta có phương trình $f(x)=a$ có 1 nghiệm, phương trình $f(x)=0$ có 3 nghiệm, phương trình $f(x)=b$ có 3 nghiệm. Và các nghiệm này không trùng nhau.

Vậy phương trình $f(f(x))=1$ có 7 nghiệm.

Câu 29. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị $y=f(x)$ như hình vẽ bên. Số nghiệm thực của phương trình $f\left(2+f\left(e^x\right)\right)=1$ là

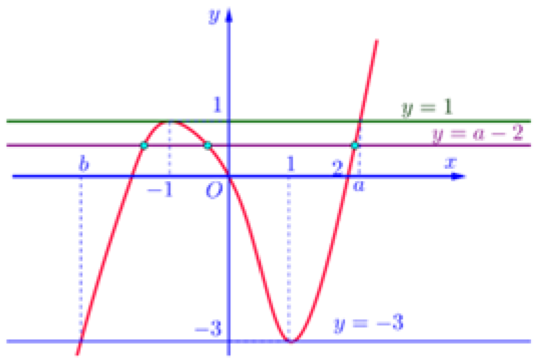


A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Ta có:



Theo đồ thị :

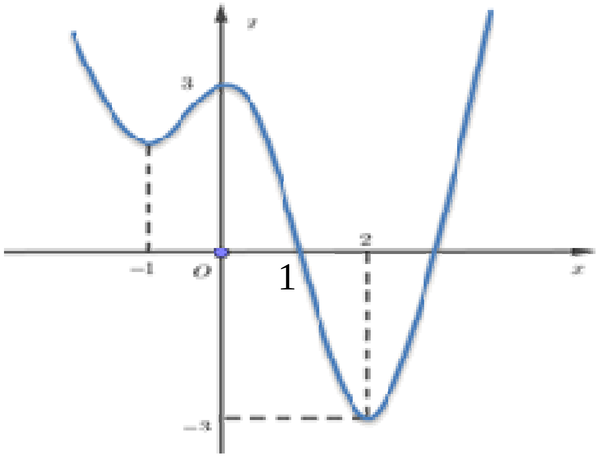
$$f\left(2+f\left(e^x\right)\right)=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2+f\left(e^x\right)=-1 \\ 2+f\left(e^x\right)=a,(2<a<3) \end{array}\right.$$

$$2+f\left(e^x\right)=-1 \Leftrightarrow f\left(e^x\right)=-3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} e^x=1 \\ e^x=b<-1(L) \end{array}\right. \Leftrightarrow x=0$$

$$2+f\left(e^x\right)=a \Leftrightarrow f\left(e^x\right)=a-2,(0<a-2<1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} e^x=c<-1(L) \\ e^x=d<0(L) \\ e^x=t>2 \end{array}\right. \Leftrightarrow x=\ln t$$

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt.

Câu 30. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f\left(e^x\right)=m$ có nghiệm thuộc khoảng $(0;\ln 2)$.



A. $(-3;0)$. **B.** $(-3;3)$. **C.** $(0;3)$. **D.** $[-3;0]$

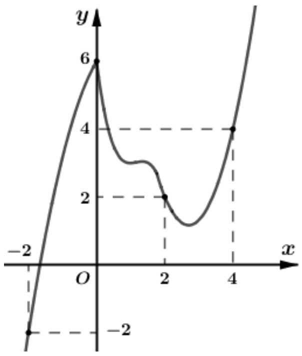
Lời giải

Chọn A

Đặt $t=\mathrm{e}^{x}$. Với $x\in(0;\ln 2)\Rightarrow t\in(1;2)$

Phương trình $f\left(\mathrm{e}^{x}\right)=m$ có nghiệm thuộc khoảng $(0;\ln 2)$ khi và chỉ khi phương trình $f(t)=m$ có nghiệm thuộc khoảng $(1;2)\Leftrightarrow -3<m<0$.

Câu 31. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $f(2\log_2 x)=m$ có nghiệm duy nhất trên $\left[\frac{1}{2};2\right)$.



A. 9. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 4

Lời giải

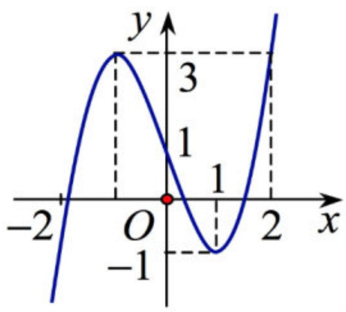
Chọn.B

Đặt $t=2\log_2 x$, $x\in\left[\frac{1}{2};2\right)\Rightarrow t\in[-2;2)$. Với mỗi $t\in[-2;2)$ thì phương trình $2\log_2 x=t$ có một nghiệm duy nhất trên $\left[\frac{1}{2};2\right)$.

Phương trình $f(2\log_2 x)=m$ có nghiệm duy nhất thuộc đoạn $\left[\frac{1}{2};2\right)$ khi và chỉ khi phương trình $f(t)=m$ có nghiệm duy nhất thuộc $[-2;2)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-2\le m\le 2\\ m=6\end{array}\right.$

$\Rightarrow$ có 6 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 32. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây



Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $8f\left(e^x\right)=m^2-1$ có hai nghiệm thực phân biệt là

A. 5. **B.** 4. **C.** 7. **D.** 6.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t=e^x\left(t>0\right)$ phương trình trở thành $8f\left(t\right)=m^2-1\Leftrightarrow f\left(t\right)=\frac{m^2-1}{8}\ \left(1\right)$.

với $t>0$ cho ta duy nhất một nghiệm $x=\ln t$. Vậy phương trình có đúng hai nghiệm thực phân biệt khi và chỉ khi (1) có đúng hai nghiệm $t>0$.

Từ đồ thị ta suy ra phương trình (1) có đúng hai nghiệm $t>0$ khi và chỉ khi:

$$-1<\frac{m^2-1}{8}<1\Leftrightarrow -3<m<3.$$

Vậy có 5 số nguyên thỏa mãn.

Dạng 2: Biết đồ thị hoặc BBT của hàm số $y=f\left(x\right)$, xét các bài toán liên quan đến phương trình có dạng $f\left(x\right)=g\left(m\right)$, $f\left(u\left(x\right)\right)=g\left(m\right)$.

Câu 1. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như hình vẽ sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	1	↗	2	↘	1	↗	$+\infty$

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f\left(x\right)-m=0$ có 4 nghiệm phân biệt

A. $m\in\left(1;2\right]$. **B.** $m\in\left[1;2\right)$. **C.** $m\in\left(1;2\right)$. **D.** $m\in\left[1;2\right]$.

Fece: Chính Nguyễn

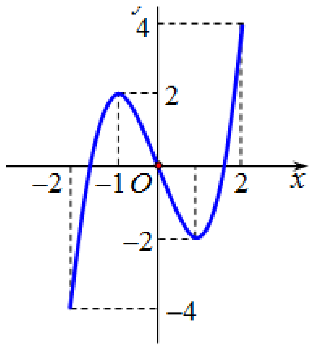
Lời giải

Chọn C.

Phương trình $f\left(x\right)-m=0\Leftrightarrow f\left(x\right)=m\ \left(*\right)$.

Dựa vào đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$, phương trình $\left(*\right)$ có 4 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow 1<m<2$.

Câu 2. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định và liên tục trên đoạn $\left[-2;2\right]$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ sau.



Tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f\left(x\right)=m$ có 3 nghiệm phân biệt trên đoạn $\left[-2;2\right]$ là

A. $m\in\left(2;+\infty\right)$. **B.** $m\in\left[-2;2\right]$. **C.** $m\in\left(-2;3\right)$. **D.** $m\in\left(-2;2\right)$.

Face: Hà Dũng

Lời giải

Chọn D.

Số nghiệm của phương trình $f\left(x\right)=m$ bằng số điểm chung của đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ (hình vẽ) và đường thẳng $y=m$.

Nhìn vào đồ thị ta thấy để phương trình có 3 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $m\in\left(-2;2\right)$.

Câu 3. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\left\{-1;1\right\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	‖	$+$	‖	$+$	‖	$+$	
y	-2	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	-1	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	2

Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của thàm số m sao cho phương trình $f\left(x\right)=m$ có ba nghiệm thực phân biệt.

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

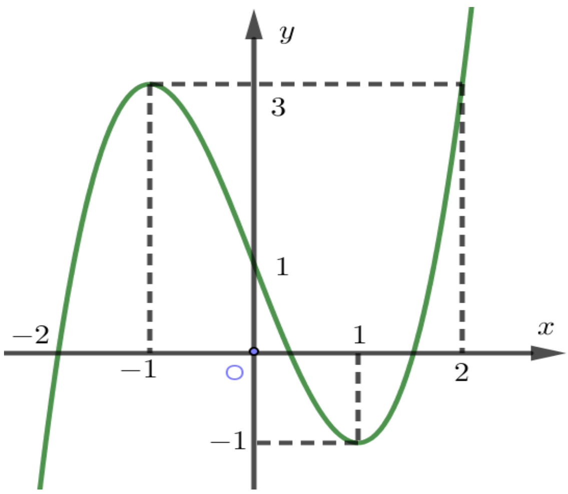
Chọn D

Căn cứ bảng biến thiên ta thấy:

Phương trình $f\left(x\right)=m$ có ba nghiệm phân biệt khi $-2<m<2$

Vậy có 3 giá trị nguyên của m thỏa mãn ycbt.

Câu 4. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây



Số các giá trị nguyên của tham số m không vượt quá 5 để phương trình $f\left(\pi^x\right)-\dfrac{m^2-1}{8}=0$ có hai nghiệm phân biệt là

A. 5. **B.** 4 . **C.** 7 . **D.** 6.

Fece: Chính Nguyễn

Lời giải

Chọn A

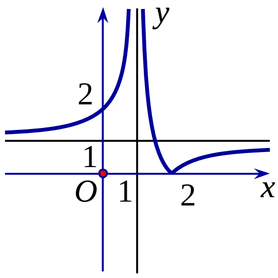
$f\left(\pi^x\right)-\dfrac{m^2-1}{8}=0 \quad (1)$.

Đặt $t=\pi^x$. Điều kiện $t>0$. (1) trở thành $f\left(t\right)=\dfrac{m^2-1}{8} \quad (2)$.

Vì với mỗi nghiệm $t>0$ của phương trình (2) cho đúng một nghiệm $x=\log_\pi t$ của phương trình (1) nên (1) có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi (2) có đúng hai nghiệm phân biệt trên $(0;+\infty)$. Dựa vào đồ thị ta thấy điều này xảy ra khi và chỉ khi $-1<\dfrac{m^2-1}{8}<1$.

$$\begin{cases} m\in\mathbb{Z} \\ m\le 5 \\ -1<\dfrac{m^2-1}{8}<1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\in\mathbb{Z} \\ m\le 5 \\ -3<m<3 \end{cases} \Leftrightarrow m\in\{-2;-1;0;1;2\}.$$

Câu 5. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f\left(\log_2 x\right)=m$ có nghiệm thuộc khoảng $(1;+\infty)$ là

A. $(1;+\infty)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $[0;+\infty)$. **D.** $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Face: Điểm Đàm

Lời giải

Chọn C

Đặt $t=\log_2 x$. Với $x\in(1;+\infty)$ thì $t\in(0;+\infty)$.

Do đó phương trình $f\left(\log_2 x\right)=m$ có nghiệm thuộc khoảng $(1;+\infty)$ khi và chỉ khi phương trình $f\left(t\right)=m$ có nghiệm thuộc khoảng $(0;+\infty)$.

Quan sát đồ thị ta suy ra điều kiện của tham số m là $m\in[0;+\infty)$.

Câu 6. Hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau.

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	-9	$\nearrow$	7	$\searrow$	-9	$\nearrow$	$+\infty$

Số các giá trị nguyên của m để phương trình $f(x^3+1)=m$ có 4 nghiệm phân biệt là

A. 15. **B.** 7 . **C.** 17 . **D.** 8 .

Face: Nguyễn Văn Sang

Lời giải

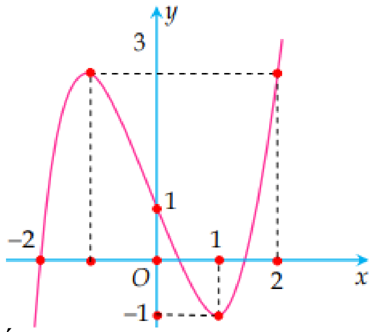
Chọn A

Đặt $t = x^3 + 1$, phương trình $f(x^3+1) = m$ trở thành $f(t) = m$. Do $y = x^3 + 1$ là hàm số đồng biến nên ta có bảng biến thiên hàm số $y = f(t)$ cũng là

t	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	-9	$\nearrow$	7	$\searrow$	-9	$\nearrow$	$+\infty$

Để phương trình $f(x^3+1) = m$ có 4 nghiệm phân biệt thì $-9 < m < 7$. Do đó có 15 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 7. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây:



Hỏi có tất cả bao nhiêu số nguyên dương m nhỏ hơn 100 để phương trình $f\left(x^2\right) - m^2 + 2020 = 0$ có đúng hai nghiệm phân biệt là

A. 55. **B.** 56. **C.** 54. **D.** 99.

Face : Hoàng Ngọc Hùng

Lời giải

Chọn A

Đặt $t = x^2, t \geq 0$. Phương trình đã cho trở thành $f(t) = m^2 - 2020$ (1)

Phương trình đã cho có đúng hai nghiệm phân biệt khi phương trình (1) có đúng 1 nghiệm dương.

Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ ta có $m^2 - 2020 \geq 1 \Leftrightarrow m^2 \geq 2021 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \geq \sqrt{2021} \\ m \leq -\sqrt{2021} \end{array}\right.$.

Do m nguyên dương và nhỏ hơn 100 nên $m \in \{45; 46; 47, ..., 99\}$. Vậy có 55 số thỏa mãn.

Câu 8. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên của y' như hình vẽ.

x	$-\infty$		-1		1		4		$+\infty$
y'	$-\infty$	$\nearrow$	7	$\searrow$	-5	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\infty$

Tìm m để phương trình $f(x+2) = m + x$ có nghiệm $x \in [-1; 2]$.

A. $f(4) - 2 < m < f(1) + 1$. **B.** $f(4) - 2 \leq m \leq f(1) + 1$.

C. $m \leq f(1) + 1$. **D.** $-5 \leq m \leq -1$.

Face : Hoàng Ngọc Hùng

Lời giải

Chọn B

Ta có $f(x+2)=m+x \Leftrightarrow m=f(x+2)-x$

Với $x\in[-1;2]$ thì $x+2\in[1;4]$

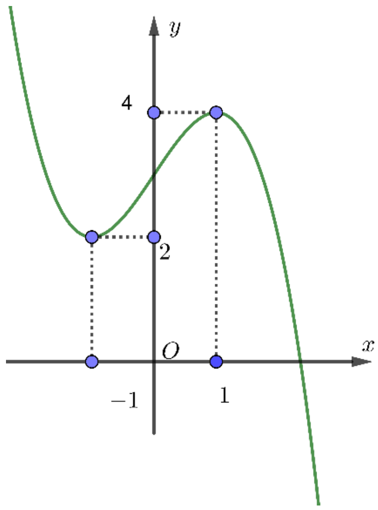
Từ bảng biến thiên ta thấy $f'(x+2)\in[-5;-1]$ nên $f'(x+2)<0\ \forall x\in[-1;2]$ suy ra hàm số $y=f(x+2)$ nghịch biến trên $(-1;2)$ $\Rightarrow f(4)\le f(x+2)\le f(1),\ \forall x\in[-1;2]$.

Mặt khác ta có $\Rightarrow -2\le -x\le 1,\ \forall x\in[-1;2]$.

Từ đó $f(4)-2\le f(x+2)-x\le f(1)+1\ \forall x\in[-1;2]$.

Để phương trình $f(x+2)=m+x$ có nghiệm $x\in[-1;2]$ điều kiện m là $f(4)-2\le m\le f(1)+1$.

Câu 9. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong như hình vẽ. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để phương trình $f\left(x^2-4x+5\right)+1=m$ có nghiệm ?



A. 5. **B.** 6. **C.** 4. **D.** Vô số.

Face: Trần Quốc Đại

Lời giải

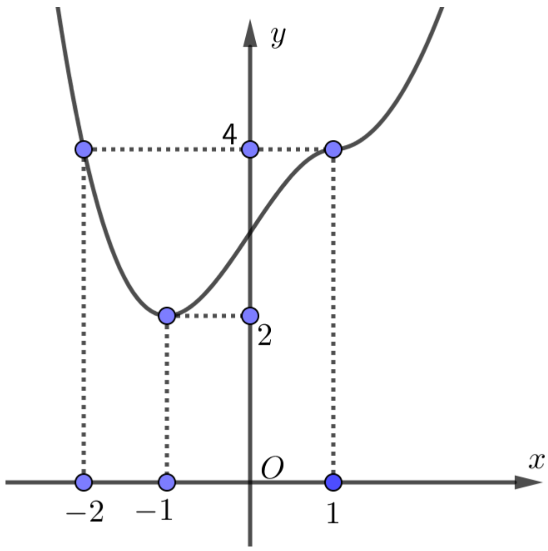
Chọn A

Đặt $t=x^2-4x+5$ suy ra $t\ge 1$, ta có phương trình $f(t)=m-1$

Dựa vào đồ thị phương trình $f(t)=m-1$ có nghiệm $t\ge 1$ khi và chỉ khi

$m-1\le 4\Leftrightarrow m\le 5$ Suy ra có 5 giá trị nguyên của m.

Câu 10. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong như hình vẽ. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của $m\in(-10;10)$ để phương trình $f\left(x^2-4x+5\right)=f(m)$ có nghiệm ?



A. 17 . **B.** 16 . **C.** 18 . **D.** Vô số.

Face: Trần Quốc Đại

Lời giải

Chọn A

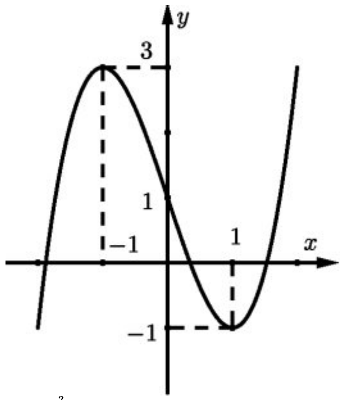
Đặt $t = x^2 - 4x + 5$ suy ra $t \geq 1$, ta có phương trình $f(t) = f(m)$

Dựa vào đồ thị phương trình $f(t) = f(m)$ có nghiệm $t \geq 1$ khi và chỉ khi

$f(m) \geq 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \leq -2 \\ m \geq 1 \end{array}\right.$. Suy ra các giá trị nguyên của $m \in (-10;10)$ là $-9 \leq m \leq -2 \vee 1 \leq m \leq 9$

Vậy có 17 số nguyên

Câu 11. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Tìm các giá trị thực của m để phương trình $f(\cos x) = m$ có nghiệm thuộc khoảng $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$:

A. $m \in [-1;3)$. **B.** $m \in (-1;1)$. **C.** $m \in [-1;1)$. **D.** $m \in (-1;3)$.

Face: Bích Nguyễn

Lời giải

Chọn C

Đặt $t = \cos x$, do $x \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow t \in (0;1]$. Phương trình trở thành $f(t) = m$

Phương trình $f(\cos x) = m$ có nghiệm thuộc khoảng $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ khi và chỉ khi phương trình $f(t) = m$ có nghiệm $t \in (0;1] \Leftrightarrow$ Đường thẳng $y = m$ có điểm chung với đồ thị hàm số $f(t)$ trên nửa khoảng $(0;1]$.

Dựa vào đồ thị hàm số đã cho ta có giá trị cần tìm của m là $m \in [-1;1)$.

Câu 12. Giả sử tồn tại hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	||	$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
y	0	↘	-2	↗	$+\infty$ || $-\infty$	↗	1	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	0	↗	1

Tìm tập hợp tất cả các giá trị của thàm số m sao cho phương trình $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = m$ có nghiệm.

A. $[-2;1]$. **B.** $[-2;1)$. **C.** $(-\infty;+\infty)$. **D.** $(-2;+\infty)$.

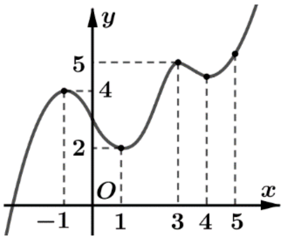
Lời giải

Chọn B

Đặt $t = x + \frac{1}{x}$ Khi đó: $\left[\begin{array}{l} t \geq 2 \\ t \leq -2 \end{array}\right.$. Căn cứ bảng biến thiên ta thấy:

Phương trình $f(t) = m$ có nghiệm khi $-2 \leq m < 1$.

Câu 13. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(x^2 - 2x) = m$ có đúng 4 nghiệm thực phân biệt thuộc đoạn $\left[-\frac{3}{2};\frac{7}{2}\right]$?



A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t = x^2 - 2x$, với $x \in \left[-\frac{3}{2};\frac{7}{2}\right]$ thì $t \in \left[-1;\frac{21}{4}\right]$.

x	$\frac{-3}{2}$		1		$\frac{7}{2}$
$t'(x)$		$-$	0	$+$	
$t(x)$	$\frac{21}{4}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$\frac{21}{4}$

Dựa vào BBT ta thấy: với mỗi $t \in \left(-1;\frac{21}{4}\right]$ sẽ cho hai nghiệm x và với $t = -1$ sẽ cho một nghiệm x.

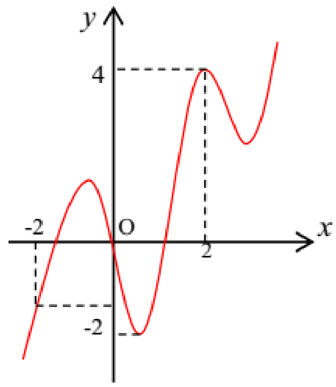
Do đó phương trình $f(x^2 - 2x) = m$ có đúng 4 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $\left[-\frac{3}{2};\frac{7}{2}\right]$

$\Leftrightarrow f(t) = m$ có đúng 2 nghiệm phân biệt thuộc $\left(-1;\frac{21}{4}\right]$.

Dựa vào đồ thị ta có $f(t) = m$ với $t \in \left(-1;\frac{21}{4}\right]$ có đúng 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2 < m < 4 \\ m = 5 \\ m = f(4) \end{array}\right.$.

Vì m nguyên nên $m = 3, m = 5$. Vậy chọn đáp án **B.**

Câu 14. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên R và có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(x^3 - 3x^2 + 2) = m^2 - 3m$ có nghiệm thuộc nửa khoảng $[1;3)$ là



A. $[-1;1)\cup(2;4]$. **B.** $(1;\ 2)\cup[4;\ +\infty)$. **C.** $(-\infty;-1]\cup(2;4)$. **D.** $(-1;1]\cup[2;4)$.

Lời giải

Chọn D

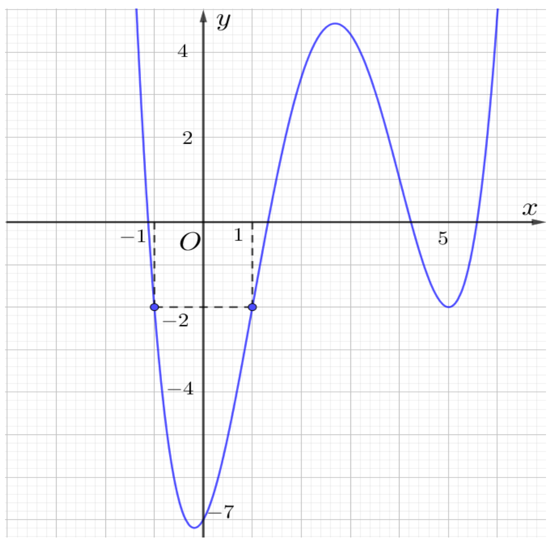
Đặt $t = x^3 - 3x^2 + 2$.

Vì $1 \le x < 3 \Rightarrow -2 \le t < 2$.

Phương trình $f\left(x^3 - 3x^2 + 2\right) = m^2 - 3m \Leftrightarrow f(t) = m^2 - 3m$ với $t \in [-2;2)$.

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow -2 \le m^2 - 3m < 4 \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 3m + 2 \ge 0 \\ m^2 - 3m - 4 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1 < m \le 1 \\ 2 \le m < 4 \end{array}\right.$.

Câu 15. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Tồn tại bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(\sin x) = m$ có đúng hai nghiệm thuộc khoảng $(0;\pi)$?

A. 7. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 4.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t = \sin x\left(x \in (0;\pi) \Rightarrow 0 < t \le 1\right)$.

Nhận xét: với mỗi giá trị t thỏa mãn $0 < t < 1$ cho tương ứng hai giá trị x_0 và $\left(\pi - x_0\right)$ thuộc khoảng $(0;\pi)$.

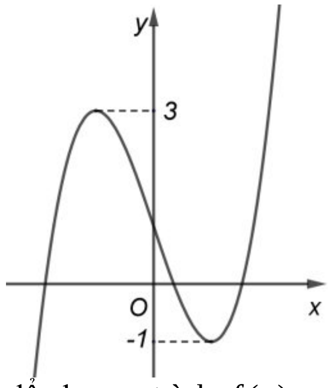
Phương trình $f(\sin x) = m$ có đúng hai nghiệm thuộc khoảng $(0;\pi)$

$\Leftrightarrow$ Phương trình $f(t) = m$ có đúng 1 nghiệm thuộc khoảng $(0;1)$

$\Leftrightarrow -7 < m < -2$. Mà: $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-3;-4;-5;-6\}$.

Vậy có 4 giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(\sin x) = m$ có đúng hai nghiệm thuộc khoảng $(0;\pi)$.

Câu 16. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong như hình vẽ dưới đây:



Có bao nhiêu giá trị của tham số m để phương trình $f(x) = f(m)$ có đúng 2 nghiệm?

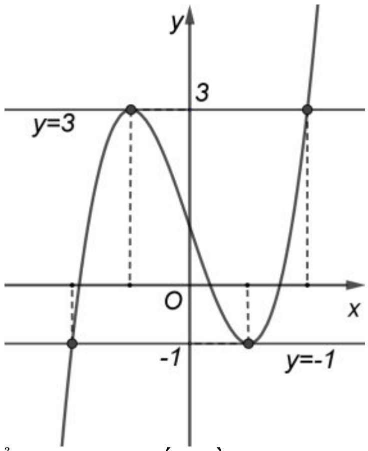
A. 4. **B.** 3. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

Dựa vào đồ thị hàm số thì phương trình $f(x) = f(m)$ có đúng 2 nghiệm $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(m) = -1 \\ f(m) = 3 \end{array}\right.$ (1).

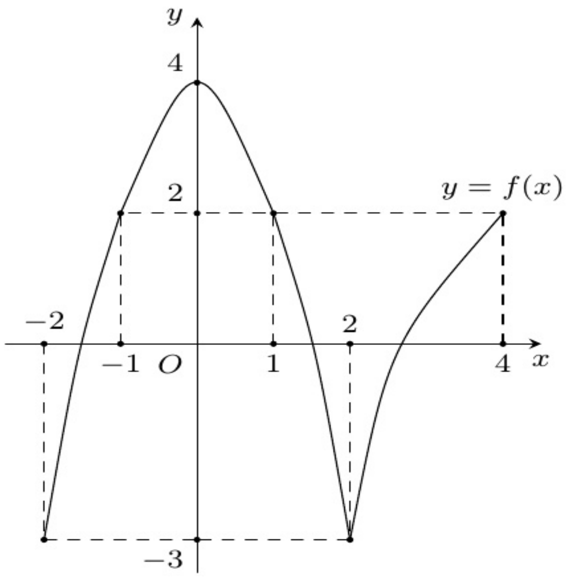
Số giá trị m thỏa mãn (1) chính là số nghiệm x của hệ $\left[\begin{array}{l} f(x) = -1 \\ f(x) = 3 \end{array}\right.$ (2).



Lại dựa vào đồ thị thì đường thẳng $y = 3$ cắt đồ thị hàm số đã cho tại hai điểm phân biệt, đường thẳng $y = -1$ cũng cắt đồ thị hàm số đã cho tại hai điểm phân biệt, 4 điểm này có hoành độ khác nhau nên hệ (2) có 4 giá trị x thỏa mãn. Vậy có 4 giá trị của tham số m thỏa mãn bài toán.

Dạng 3: Biết đồ thị hoặc BBT của hàm số $y = f(x)$, xét các bài toán liên quan đến phương trình có dạng $f(x) = f(m)$, $f(u(x)) = f(m)$.

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có liên tục trên đoạn $[-2;4]$ và có đồ thị như hình sau



Tìm tất cả các số nguyên m để phương trình $f\left(3-x\right)=f\left(m\right)$ có hai nghiệm thuộc đoạn $\left[-1;5\right]$.

A. 2. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t=3-x$. Với $x\in\left[-1;5\right]$ ta suy ra $t\in\left[-2;4\right]$.

Khi đó, mỗi $t\in\left[-2;4\right]$ cho ta một $x\in\left[-1;5\right]$.

Do đó phương trình $f\left(3-x\right)=f\left(m\right)$ có hai nghiệm thuộc đoạn $\left[-1;5\right]$ khi và chỉ khi phương trình $f\left(t\right)=f\left(m\right)$ (*) có hai nghiệm thuộc đoạn $\left[-2;4\right]$.

Từ đồ thị của hàm số $f\left(x\right)$, ta suy ra phương trình (*) có hai nghiệm khi và chỉ khi:

$$\left[\begin{array}{ll} f\left(m\right)=-3 & (1) \\ 2<f\left(m\right)<4 & (2) \end{array}\right..$$

Mặt khác, từ đồ thị của hàm số $f\left(x\right)$, ta suy ra $f\left(-1\right)=f\left(1\right)=f\left(4\right)=2$ và

$$f\left(x\right)=-3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=2 \end{array}\right..$$

Do đó $(1)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} m=-2 \\ m=2 \end{array}\right.$.

Trên khoảng $\left(-2;0\right)$ hàm số $f\left(x\right)$ đồng biến, suy ra

$$2<f\left(m\right)<4\Leftrightarrow f\left(-1\right)<f\left(m\right)<f\left(0\right)\Leftrightarrow -1<m<0.$$

Trên khoảng $\left(0;2\right)$ hàm số $f\left(x\right)$ nghịch biến, suy ra

$$2<f\left(m\right)<4\Leftrightarrow f\left(1\right)<f\left(m\right)<f\left(0\right)\Leftrightarrow 0<m<1.$$

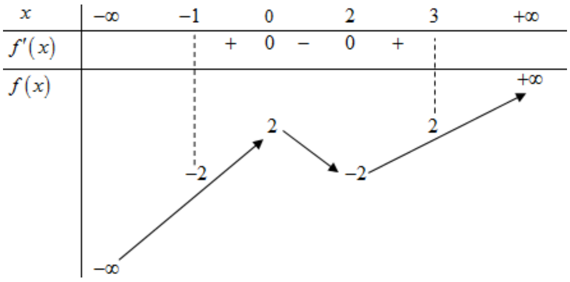
Do đó $(2)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} -1<m<0 \\ 0<m<1 \end{array}\right.$.

Suy ra tập hợp các giá trị m cần tìm là $\left(-1;0\right)\cup\left(0;1\right)\cup\left\{-2;2\right\}$.

Vì $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\left\{-2;2\right\}$.

Vậy có hai số nguyên thỏa mãn yêu cầu của bài toán.

Câu 2. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như hình vẽ



Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $f\left(1-2\sin x\right)=f\left(|m|\right)$ có nghiệm thực?

A. 6. **B.** 7. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Chọn B

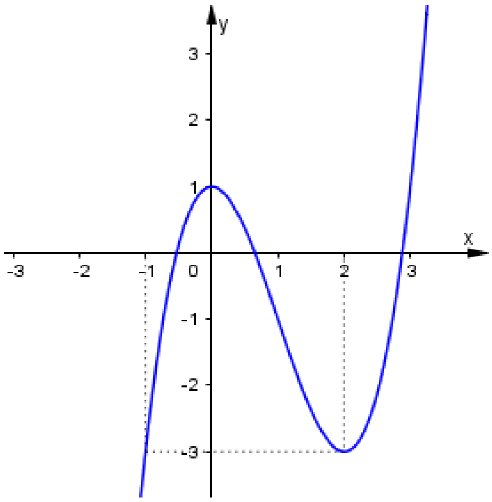
Ta có: $-1\le 1-2\sin x\le 3, \forall x\in\mathbb{R}$.

Do đó: $f\left(1-2\sin x\right)=f\left(|m|\right)$ có nghiệm $-2\le f\left(|m|\right)\le 2 \Leftrightarrow -1\le |m|\le 3 \Leftrightarrow |m|\le 3$

$\Leftrightarrow -3\le m\le 3$.

Mà $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m\in\{-3;-2;-1;0;1;2;3\}\Rightarrow$ có 7 giá trị nguyên của m thỏa mãn bài toán.

Câu 3. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới



Tìm tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(1+\sin x\right)=f\left(m\right)$ có nghiệm

A. $m\in\{-1;0;1;2\}$. **B.** $m\in\{0;1;2\}$. **C.** $m\in\varnothing$. **D.** $m\in\{0;1\}$.

Lời giải.

Chọn A.

Xét phương trình $f\left(1+\sin x\right)=f\left(m\right)$ (*).

* Với $m=-1$:

Từ đồ thị hàm số ta thấy $f\left(-1\right)=-3$.

Do đó $(*)\Leftrightarrow f\left(1+\sin x\right)=-3\Leftrightarrow 1+\sin x=2\Leftrightarrow \sin x=1\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi$.

Suy ra $m=-1$ thỏa yêu cầu bài toán.

* Với $m\ne -1$:

Đặt $t=1+\sin x$, $0\le t\le 2$.

$(*)\Leftrightarrow f\left(t\right)=f\left(m\right)$.

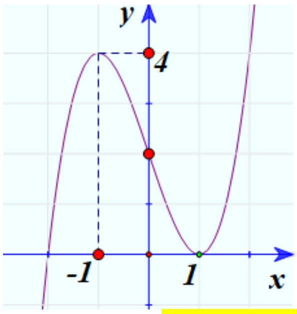
Dựa vào đồ thị hàm số thì hàm số $f\left(t\right)$ nghịch biến với $t\in[0;2]$.

Do đó $f\left(t\right)=f\left(m\right)\Leftrightarrow t=m\Leftrightarrow m\in[0;2]$.

Vì $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{0;1;2\}$.

Vậy $m\in\{-1;0;1;2\}$.

Câu 4. Cho đồ thị hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ. Để phương trình $f\left(\sqrt[6]{1-x^2}\right)=f(m)$ có nghiệm thì điều kiện của tham số m là $m\in[a;b]$. Hỏi điểm $A(a;b)$ thuộc đường tròn nào sau đây?



A. $(x-3)^2+(y-1)^2=2$. **B.** $(x-1)^2+(y-1)^2=1$.

C. $x^2+(y-1)^2=1$. **D.** $(x-3)^2+(y+1)^2=20$

Lời giải

Chọn B

Đặt $t=\sqrt[6]{1-x^2}$. Vì $x\in[-1;1]\Rightarrow t\in[0;1]$.

Khi đó $f\left(\sqrt[6]{1-x^2}\right)=f(m)\Rightarrow f(t)=f(m)(*)$

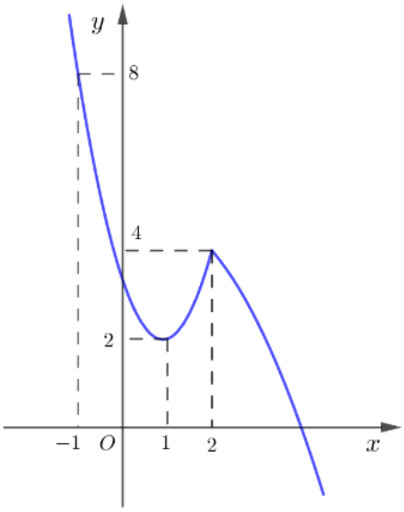
Dựa vào đồ thị thấy hàm số $f(t)$ nghịch biến với $t\in[0;1]$.

Do đó phương trình (*) $\Leftrightarrow t=m\Rightarrow 0\le m\le 1$ vì $t\in[0;1]$.

Để phương trình $f\left(\sqrt[6]{1-x^2}\right)=f(m)$ có nghiệm thì điều kiện của tham số m là $m\in[0;1]$.

Tọa độ điểm $A(0;1)$, ta có: $(0-1)^2+(1-1)^2=1\Rightarrow A\in(C):(x-1)^2+(y-1)^2=1$.

Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ:



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\sqrt{8+4x-4x^2}-1\right)=f(m)$ có nghiệm thuộc $(-1;1)$?

A. 5. **B.** 7. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn D.

Xét trên $(-1;1)$, hàm số $y=f(x)$ nghịch biến nên phương trình $f\left(\sqrt{8+4x-4x^2}-1\right)=f(m)\Leftrightarrow\sqrt{8+4x-4x^2}=m+1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m+1 \geq 0 \\ 8+4x-4x^2 = (m+1)^2 \end{cases}$$

Để yêu cầu bài toán được thỏa, ta tìm các giá trị thực $m \geq -1$ sao cho đồ thị hàm số $y = 8+4x-4x^2$ cắt đường thẳng $y = (m+1)^2$ tại ít nhất một điểm có hoành độ $-1 < x < 1$.

Lập bảng biến thiên của hàm số $y = 8+4x-4x^2$ trên $(-1;1)$

x	-1		$\frac{1}{2}$		1
y'		$+$	0	$-$	
$y = 8+4x-4x^2$	0	$\nearrow$	9	$\searrow$	8

Như vậy ta phải có $\begin{cases} m \geq -1 \\ 0 < (m+1)^2 \leq 9 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq m \leq 2$, $m \in \mathbb{Z}$ suy ra $m \in \{-1;0;1;2\}$.

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
y'		$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
y	5	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	-1

Tính tổng các giá trị nguyên dương của m để phương trình $f(|x-1|+2) = f\left(\sqrt{3-m}+2\right)$ có nghiệm.

A. -2. **B.** 6. **C.** 8. **D.** 4.

Lời giải

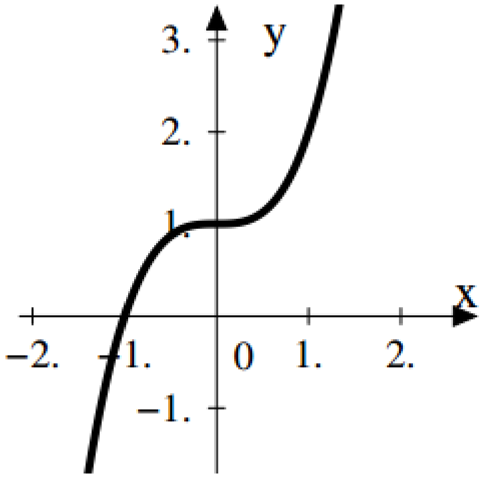
Chọn B

Đặt $t = |x-1|+2 \geq 2$ thì phương trình $f(|x-1|+2) = f\left(\sqrt{3-m}+2\right)$ (1) trở thành $f(t) = f\left(\sqrt{3-m}+2\right)$ (2) với $t \geq 2$.

Để phương trình (2) có nghiệm thì đường thẳng có phương trình $y = f\left(\sqrt{3-m}+2\right)$ phải cắt đồ thị hàm số $y = f(t)$ tại ít nhất một điểm với mọi $t \geq 2$ $\Leftrightarrow -1 < f\left(\sqrt{3-m}+2\right) \leq 2 \Leftrightarrow m \leq 3$.

Vì m nguyên dương nên $m \in \{1;\ 2;\ 3\} \Rightarrow$ tổng các giá trị nguyên dương của m thỏa mãn bài toán là $1+2+3 = 6$.

Câu 7. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $f\left(6\sin x+8\cos x\right)=f\left(m\left(m+1\right)\right)$ có nghiệm thực.

A. 5. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 6.

Lời giải

Chọn D

Nhận thấy hàm số $y=f\left(x\right)$ là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$

$f\left(6\sin x+8\cos x\right)=f\left(m\left(m+1\right)\right)\Leftrightarrow 6\sin x+8\cos x=m\left(m+1\right)$.

Đặt $y=6\sin x+8\cos x$.

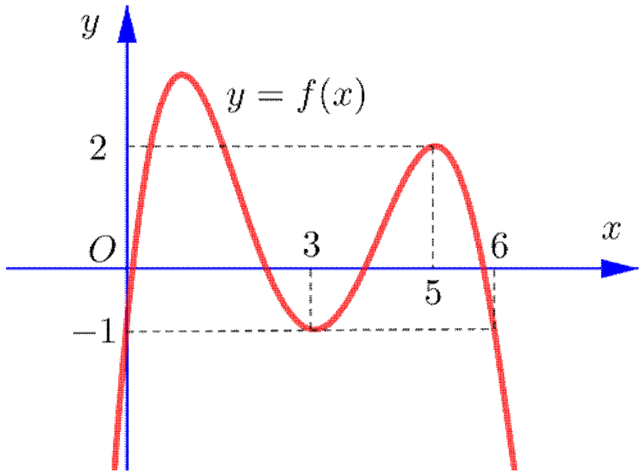
Có: $6^2+8^2\ge y^2\Leftrightarrow -10\le y\le 10$.

Vậy phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow -10\le m\left(m+1\right)\le 10$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2+m-10\le 0 \\ m^2+m+10\ge 0 \end{cases}\Leftrightarrow \dfrac{-1-\sqrt{41}}{2}\le m\le \dfrac{-1+\sqrt{41}}{2}$.

Vì $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m\in\left\{-3;-1;-1;0;1;2\right\}$. Vậy có 6 số nguyên thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 8. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ là hàm bậc 4 có đồ thị như hình vẽ



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in\left[-5;5\right]$ để phương trình

$f\left(\sqrt{x^2+2x+10}\right)=f\left(m^2+1\right)$ có hai nghiệm phân biệt?

A. 8. **B.** 6. **C.** 9. **D.** 7.

Lời giải

Chọn B.

Đặt $t=\sqrt{x^2+2x+10}\Rightarrow t=\sqrt{\left(x+1\right)^2+9}\Rightarrow t\ge 3$.

Với $t=3$ thì $x=-1$. Ta có $f\left(m^2+1\right)=f\left(3\right)\Rightarrow m^2+1=3\Leftrightarrow m=\pm\sqrt{2}$ (loại).

Với $t > 3$ mỗi giá trị t sẽ có 2 giá trị x tương ứng.

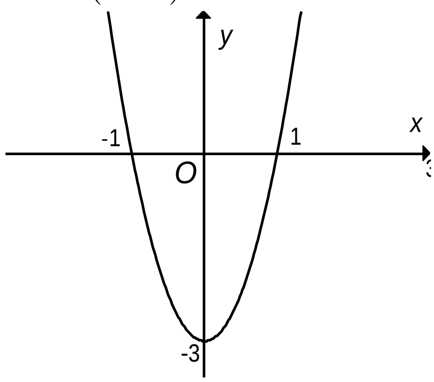
Do đó $f\left(\sqrt{x^2+2x+10}\right) = f\left(m^2+1\right) \Leftrightarrow f\left(t\right) = f\left(m^2+1\right)$ với $t \geq 3$

Để phương trình $f\left(\sqrt{x^2+2x+10}\right) = f\left(m^2+1\right)$ có 2 nghiệm phân biệt thì đường thẳng $f\left(m^2+1\right)$ cắt đồ thị $y = f\left(t\right)$ tại 1 điểm duy nhất có hoành độ $t > 3$.

Từ đồ thị $y = f\left(x\right)$ ta có $\left[\begin{array}{l} f\left(m^2+1\right) = 2 \\ f\left(m^2+1\right) < -1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m^2+1 = 5 \\ m^2+1 > 6 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m = \pm 2 \\ m > \sqrt{5} \\ m < -\sqrt{5} \end{array}\right.$.

Do $m \in \mathbb{Z}$ và $m \in \left[-5;5\right] \Rightarrow m = \left\{-5;-4;-3;3;4;5\right\}$. Có 6 giá trị m thỏa mãn.

Câu 9. Cho hàm số $y = f\left(x\right) = ax^4 + bx^2 + c$ $\left(a \neq 0\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình: $f\left(\sqrt{\left(4-x\right)\left(x-2\right)}\right) = f\left(m\right)$ có nghiệm?

A. $\left(-\infty;1\right)$. **B.** $\left[-1;1\right]$. **C.** $\left[0;1\right]$. **D.** $\left(-1;+\infty\right)$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t = \sqrt{\left(4-x\right)\left(x-2\right)} \Rightarrow t \geq 0$.

Với $\forall x \in [2;4]$ theo bất đẳng thức Côsi ta có: $\sqrt{\left(4-x\right)\left(x-2\right)} \leq \dfrac{\left(4-x\right)+\left(x-2\right)}{2} = 1$.

$\Rightarrow t \in [0;1],\ \forall x \in [2;4] \Rightarrow -3 \leq f\left(t\right) \leq 0 \Rightarrow -3 \leq f\left(\sqrt{\left(4-x\right)\left(x-2\right)}\right) \leq 0$

$\Rightarrow f\left(\sqrt{\left(4-x\right)\left(x-2\right)}\right) = f(m)$ có nghiệm khi và chỉ khi: $-3 \leq f(m) \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq m \leq 1$.

Câu 10. Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(2\sin x - \cos x\right) = f\left(m\right)$ có nghiệm $x \in \mathbb{R}$.

x	$-\infty$	$+\infty$
y’		+
y	$-\infty$	$+\infty$

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Chọn C

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số $y = f\left(x\right)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên $f\left(2\sin x - \cos x\right) = f\left(m\right) \Leftrightarrow 2\sin x - \cos x = m$

Phương trình $2\sin x - \cos x = m$ có nghiệm $\Leftrightarrow 2^2 + \left(-1\right)^2 \geq m^2 \Leftrightarrow m^2 \leq 5 \Leftrightarrow -\sqrt{5} \leq m \leq \sqrt{5}$.

Vậy $m \in \left\{\pm 2;\pm 1;0\right\}$.

Câu 11. Cho $f(x)$ là một hàm số liên tục trên đoạn $[-2;9]$, biết $f(-1)=f(2)=f(9)=3$ và $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	-2		0		6		9
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-4	$\nearrow$	6	$\searrow$	-4	$\nearrow$	3

Tìm m để phương trình $f(x)=f(m)$ có ba nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-2;9]$.

A. $m\in(-2;9]\setminus\left((-1;2)\cup\{6\}\right)$. **B.** $m\in[-2;9]\setminus\left((-1;2)\cup\{6\}\right)$.

C. $m\in(-2;9]\setminus\{6\}$. **D.** $m\in[-2;9]\setminus\{-2;6\}$.

Lời giải

Chọn A

Phương trình $f(x)=f(m)$ có ba nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-2;9]$ khi $-4<f(m)\le 3$.

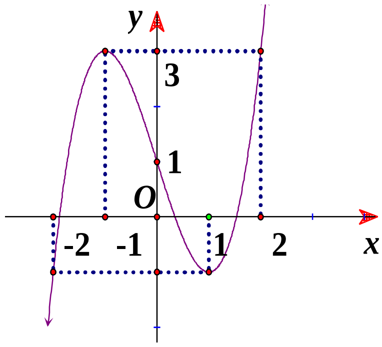
Trên $(-2;0)$, hàm số $f(x)$ đồng biến và $f(-1)=3$ nên $-4<f(m)\le 3 \Leftrightarrow -2<m\le -1$.

Trên $(0;6)$, hàm số $f(x)$ nghịch biến và $f(2)=3$ nên $-4<f(m)\le 3 \Leftrightarrow 6>m\ge 2$.

Trên $(6;9)$, hàm số $f(x)$ đồng biến và $f(9)=3$ nên $-4<f(m)\le 3 \Leftrightarrow 6<m\le 9$.

Vậy điều kiện của m là: $m\in(-2;-1]\cup[2;6)\cup(6;9] \Leftrightarrow m\in(-2;9]\setminus\left((-1;2)\cup\{6\}\right)$.

Câu 12. Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Số giá trị nguyên dương của m để phương trình $f\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)=f(m)$ có nghiệm là :

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $u(x)=x-\sqrt{x^2+1}$

Ta có $u'(x)=1-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\dfrac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}}>0,$

Bảng biến thiên

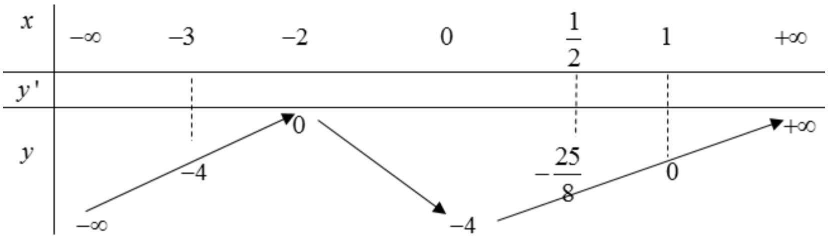
x	$-\infty$	$+\infty$
$u'(x)$	$+$	
$u(x)$	$-\infty$ $\nearrow$	0

Do đó $f\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)\le 3$ với mọi $x\in\mathbb{R}$.

YCBT $\Leftrightarrow f(m)\le 3 \Leftrightarrow m\le 2$.

Vì m nguyên dương nên $m\in\{1;2\}$

Câu 13. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ.



Tập hợp các giá trị dương của tham số m để phương trình $f\left(2f(x)+\frac{1}{2}\right)=f(m)$ có 9 nghiệm là:

A. $(0;1)$. **B.** $\left(\frac{1}{2};0\right)$. **C.** $\left(0;\frac{1}{2}\right)$. **D.** $(0;1]$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t=2f(x)+\frac{1}{2}$, suy ra $f(x)=\frac{t-\frac{1}{2}}{2}=\frac{2t-1}{4}$

Phương trình viết lại: $f(t)=f(m)$ (1)

Số nghiệm phương trình (1) bằng số giao điểm của đường đồ thị hàm số $f(t)$ và đường thẳng $y=f(m)$

Xét phương trình $f(x)=\frac{2t-1}{4}$

Nếu $\left[\begin{array}{l}\frac{2t-1}{4}<0\\ \frac{2t-1}{4}>-4\end{array}\right.$ thì phương trình $f(x)=\frac{2t-1}{4}$ có một nghiệm.

Nếu $\left[\begin{array}{l}\frac{2t-1}{4}=0\\ \frac{2t-1}{4}=-4\end{array}\right.$ thì phương trình $f(x)=\frac{2t-1}{4}$ có hai nghiệm

Nếu $-4<\frac{2t-1}{4}<0$ thì phương trình $f(x)=\frac{2t-1}{4}$ có ba nghiệm

Từ bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ ta suy ra phương trình $f(t)=f(m)$ có nhiều nhất ba nghiệm.

Suy ra phương trình $f\left(2f(x)+\frac{1}{2}\right)=f(m)$ có 9 nghiệm

$\Leftrightarrow f(t)=f(m)$ có ba nghiệm thỏa $-4<\frac{2t-1}{4}<0$

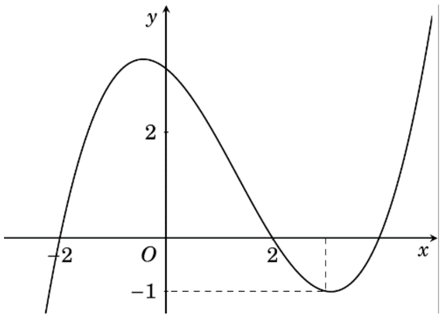
$\Leftrightarrow f(t)=f(m)$ có ba nghiệm thỏa $-\frac{15}{2}<t<\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow -4<f(m)<-\frac{25}{8}$

Do $m>0$ nên ta cho chọn $\Leftrightarrow 0<m<\frac{1}{2}$.

Dạng 4: Biết đồ thị hoặc BBT của hàm số $y=f\left(x\right)$, xét các bài toán liên quan đến phương trình có dạng $f\left(\left|x\right|\right)=a;\left|f\left(x\right)\right|=a;\ f\left(\left|u\left(x\right)\right|\right)=a;\left|f\left(u\left(x\right)\right)\right|=a\ldots$.

Câu 1. Cho hàm số bậc ba $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm thực của phương trình $\left|f\left(x^3-3x\right)\right|=\dfrac{3}{2}$ là

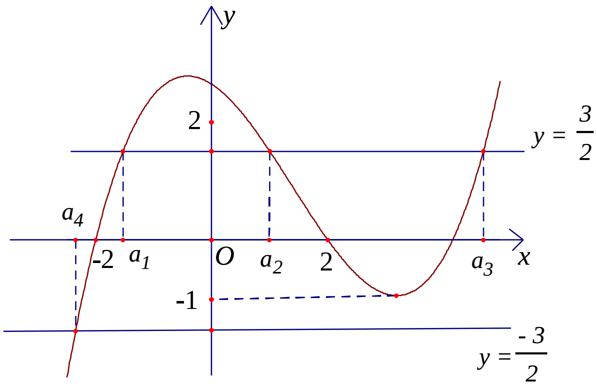


A. 8. **B.** 4. **C.** 7. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

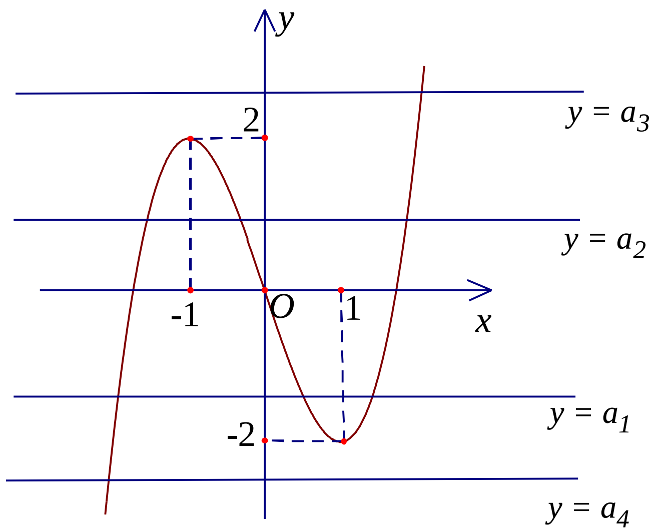
Phương trình $\left|f\left(x^3-3x\right)\right|=\dfrac{3}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f\left(x^3-3x\right)=\dfrac{3}{2}\\ f\left(x^3-3x\right)=-\dfrac{3}{2}\end{array}\right.$.



* Phương trình $f\left(x^3-3x\right)=\dfrac{3}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^3-3x=a_1,\left(-2<a_1<0\right)\\ x^3-3x=a_2,\left(0<a_2<2\right)\\ x^3-3x=a_3,\left(a_3>2\right)\end{array}\right.$.

* Phương trình $f\left(x^3-3x\right)=-\dfrac{3}{2}\Leftrightarrow x^3-3x=a_4,\left(a_4<-2\right)$.

Đồ thị hàm số $y=x^3-3x$ có dạng như hình vẽ sau:

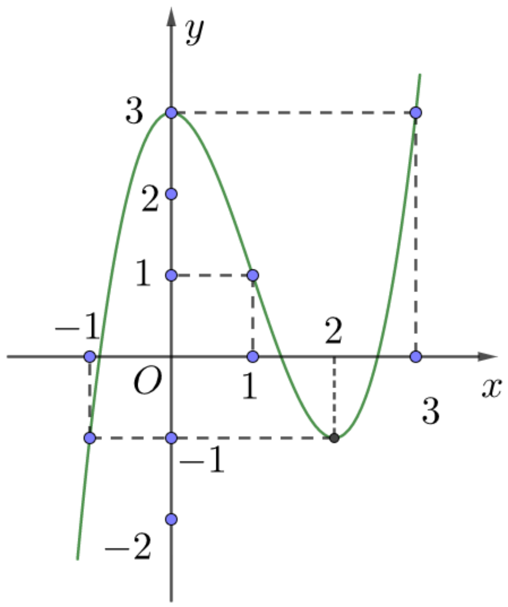


Dựa vào đồ thị trên ta có:

- Phương trình $x^3-3x=a_1$ có 3 nghiệm phân biệt.
- Phương trình $x^3-3x=a_2$ có 3 nghiệm phân biệt.
- Phương trình $x^3-3x=a_3$ có 1 nghiệm.
- Phương trình $x^3-3x=a_4$ có 1 nghiệm.

Vậy phương trình $\left|f\left(x^3-3x\right)\right|=\dfrac{3}{2}$ có 8 nghiệm phân biệt.

Câu 2. Cho hàm số bậc ba $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm thực của phương trình $\left|f\left(x^4-2x^2\right)\right|=2$ là

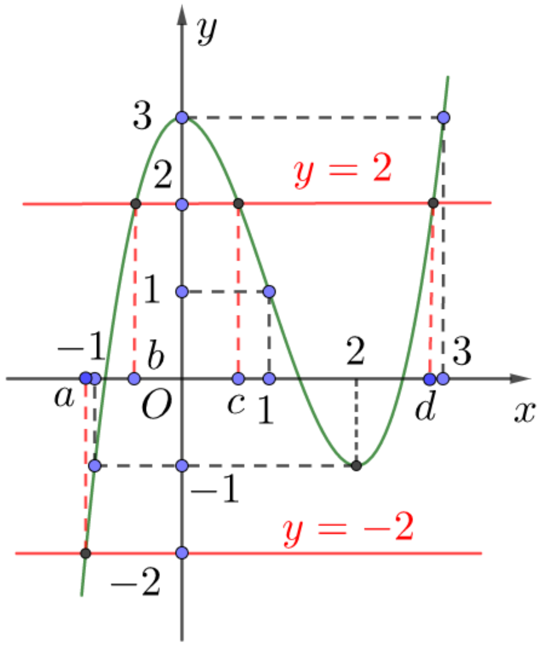


A. 8. **B.** 9. **C.** 7. **D.** 10.

Lời giải

Chọn A

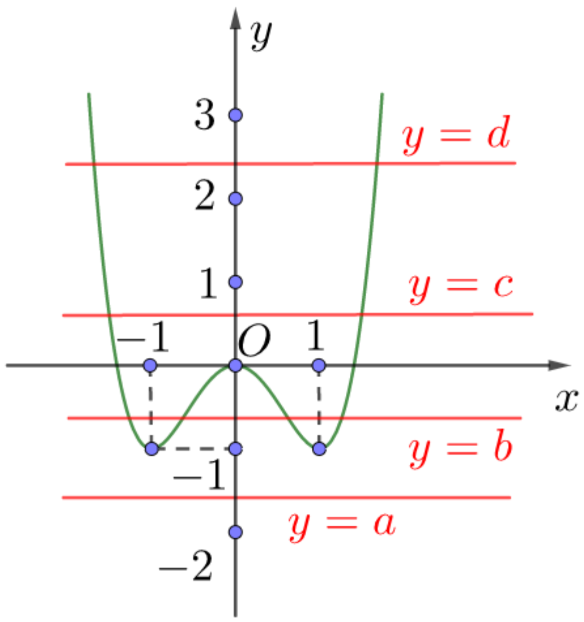
Phương trình $\left|f\left(x^4-2x^2\right)\right|=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f\left(x^4-2x^2\right)=2 \\ f\left(x^4-2x^2\right)=-2 \end{array}\right.$.



$$* \text{ Phương trình } f\left(x^4-2x^2\right)=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^4-2x^2=b,(-1<b<0) \\ x^4-2x^2=c,(0<c<1) \\ x^4-2x^2=d,(2<d<3) \end{array}\right. .$$

* Phương trình $f\left(x^4-2x^2\right)=-2 \Leftrightarrow x^4-2x^2=a,(-2<a<-1)$.

Đồ thị hàm số $y=x^4-2x^2$ như hình vẽ sau:



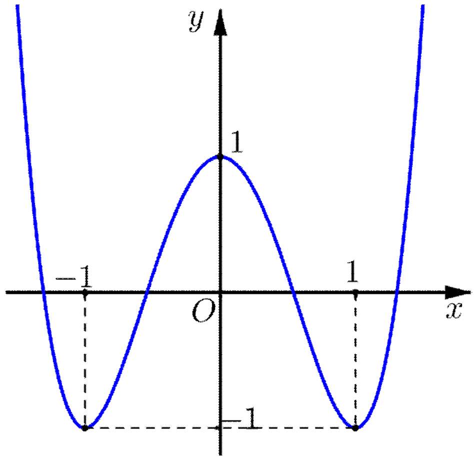
Dựa vào đồ thị trên ta có:

- Phương trình $x^4-2x^2=a,(-2<a<-1)$ không có nghiệm thực.
- Phương trình $x^4-2x^2=b,(-1<b<0)$ có 4 nghiệm thực phân biệt.
- Phương trình $x^4-2x^2=c,(0<c<1)$ có 2 nghiệm thực phân biệt.
- Phương trình $x^4-2x^2=d,(2<d<3)$ có 2 nghiệm thực phân biệt.

Vậy phương trình $\left|f\left(x^4-2x^2\right)\right|=2$ có 8 nghiệm thực phân biệt.

Câu 3. Cho hàm số trùng phương $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm thuộc $[0;2\pi)$ của phương trình $\left|f(\cos 2x)\right|=1$ bằng

A. 4. **B.** 6. **C.** 3. **D.** 8.



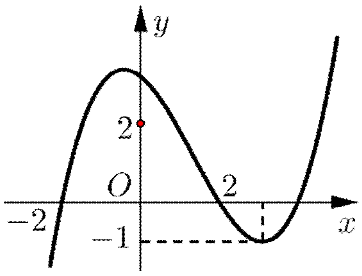
Lời giải

Chọn D

Ta có $\left|f(\cos 2x)\right|=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(\cos 2x)=1 \\ f(\cos 2x)=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x=0 \\ \cos 2x=a>1\ (VN) \\ \cos 2x=b<-1\ (VN) \\ \cos 2x=\pm 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x=0 \\ \sin 2x=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \sin 4x=0$

Phương trình $\sin 4x=0$ có 8 nghiệm thuộc $[0;2\pi)$.

Câu 4. Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Số nghiệm thực của phương trình $\left|f(x^3-3x)\right|=\dfrac{4}{3}$ là

A. 3. **B.** 8. **C.** 7. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Xét phương trình: $\left|f(x^3-3x)\right|=\dfrac{4}{3}$ (1).

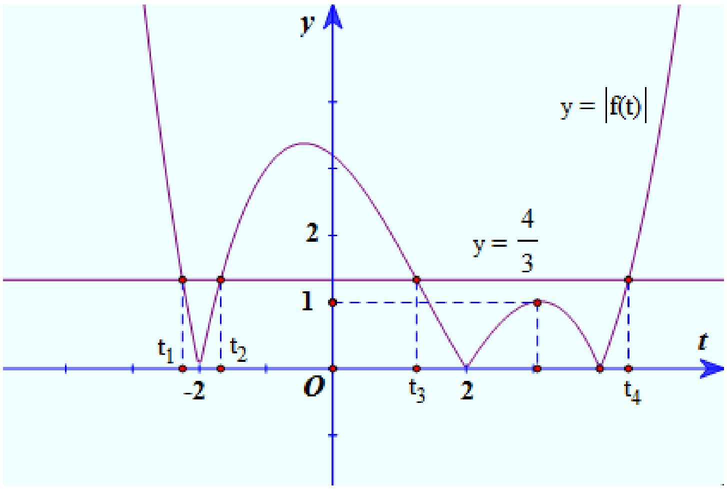
Đặt $t=x^3-3x$, ta có: $t'=3x^2-3$; $t'=0 \Leftrightarrow x=\pm 1$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
t'		$+$	0	$-$	0	$+$	
t	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Phương trình (1) trở thành $\left|f(t)\right|=\dfrac{4}{3}$ với $t\in\mathbb{R}$.

Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ ban đầu, ta suy ra đồ thị hàm số $y = |f(t)|$ như sau:



Suy ra phương trình $|f(t)| = \frac{4}{3}$ có các nghiệm $t_1 < -2 < t_2 < t_3 < 2 < t_4$.

Từ bảng biến thiên ban đầu ta có:

+) $x^3 - 3x = t_1$ có 1 nghiệm x_1.

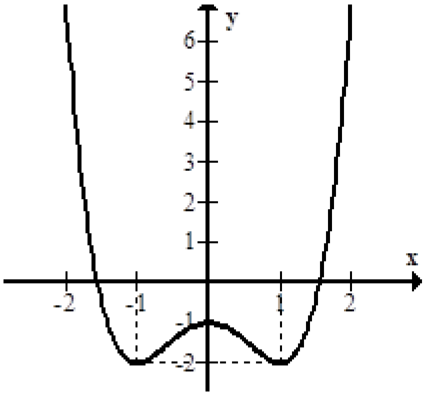
+) $x^3 - 3x = t_4$ có 1 nghiệm x_2.

+) $x^3 - 3x = t_2$ có 3 nghiệm x_3, x_3, x_5.

+) $x^3 - 3x = t_3$ có 3 nghiệm x_6, x_7, x_8.

Vậy phương trình $\left|f\left(x^3 - 3x\right)\right| = \frac{4}{3}$ có 8 nghiệm.

Câu 5. Cho đồ thị của hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ:



Tìm số nghiệm phương trình $|f(x)| = \frac{3}{2}$.

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Chọn D

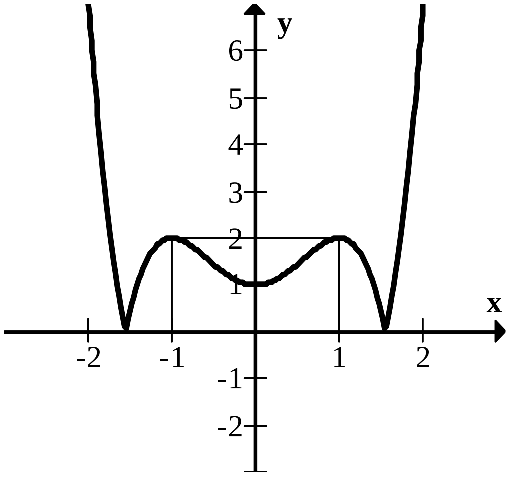
Cách 1:

Đồ thị hàm $y = |f(x)|$ gồm 2 phần:

+ Phần đồ thị $y = f(x)$ nằm trên Ox (Kể cả giao điểm trên trục Ox)

+ Phần đồ thị lấy đối xứng qua Ox của đồ thị $y = f(x)$ nằm dưới Ox

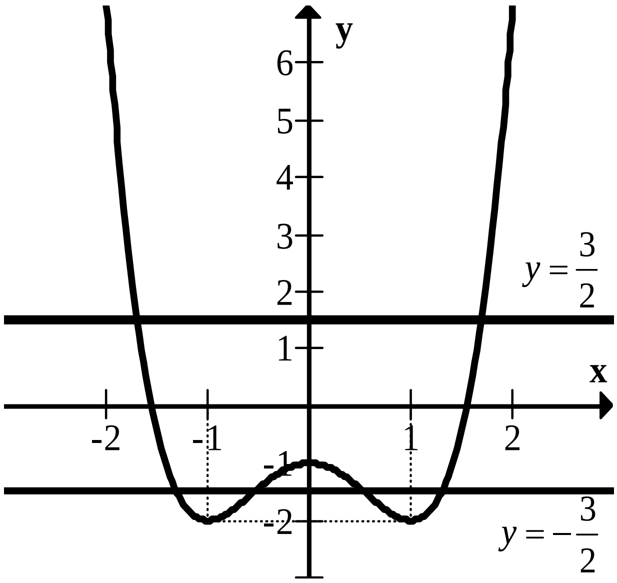
Từ đó ta có đồ thị của của hàm số $y = |f(x)|$.



Từ đồ thị của hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|$ nên $\left|f\left(x\right)\right|=\frac{3}{2}$ có 6 nghiệm.

Cách 2:

$$\left|f\left(x\right)\right|=\frac{3}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f\left(x\right)=-\frac{3}{2}(*)\\ f\left(x\right)=\frac{3}{2}(**)\end{array}\right.$$



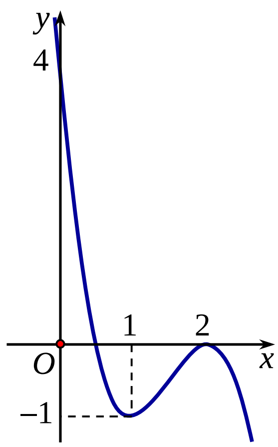
Dựa vào đồ thị trên:

-Phương trình $f\left(x\right)=-\frac{3}{2}$: có 4 nghiệm

-Phương trình $f\left(x\right)=\frac{3}{2}$: có 2 nghiệm

Vậy $\left|f\left(x\right)\right|=\frac{3}{2}$ có 6 nghiệm.

Câu 6. Đồ thị hàm số $y=-2x^3+9x^2-12x+4$ như hình vẽ. Phương trình $2\left|x\right|^3-9x^2+12\left|x\right|-\frac{9}{2}=0$ có bao nhiêu nghiệm phân biệt?



A. 3. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 8.

Lời giải

Chọn C

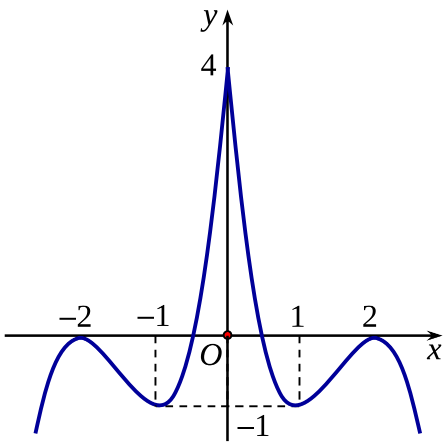
Xét phương trình

$2|x|^3 - 9x^2 + 12|x| - \frac{9}{2} = 0$

$\Leftrightarrow -2|x|^3 + 9x^2 - 12x + 4 = \frac{17}{2}$ (*)

Số nghiệm của phương trình (*) là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = -2|x|^3 + 9x^2 - 2x + 4$ và đường thẳng $y = \frac{17}{2}$

Hình vẽ dưới là đồ thị hàm số $y = -2|x|^3 + 9x^2 - 2x + 4$ (C). Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy đường thẳng $y = \frac{17}{2}$ cắt đồ thị (C) tại 6 nghiệm phân biệt.



Câu 7. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-5	$\nearrow$	3	$\searrow$	-5	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm của phương trình $\left|f\left(x^2 - 2x - 1\right)\right| = 4$ là

A. 2. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 8.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t = x^2 - 2x - 1$, $t \ge -2$. Khi đó, phương trình thành $\left|f(t)\right| = 4$.

Từ bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ suy ra phương trình $f(x) = 0$ có 4 nghiệm x_1, x_2, x_3, x_4 thỏa mãn $x_1 < -2 < x_2 < 0 < x_3 < 2 < x_4$. Ta có bảng biến thiên hàm số $y = \left|f(x)\right|$ là:

x	$-\infty$		x_1		-2		x_2		0		x_3		2		x_4		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	5	$\searrow$	0	$\nearrow$	3	$\searrow$	0	$\nearrow$	5	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra phương trình $f(t) = 4$ có 6 nghiệm phân biệt $t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6$ thỏa mãn $t_1 < x_1 < t_2 < -2 < t_3 < x_2 < 0 < x_3 < t_4 < 2 < t_5 < x_4 < t_6$.

Xét hàm số $y = x^2 - 2x - 1$ có $y' = 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Ta có bảng biến thiên

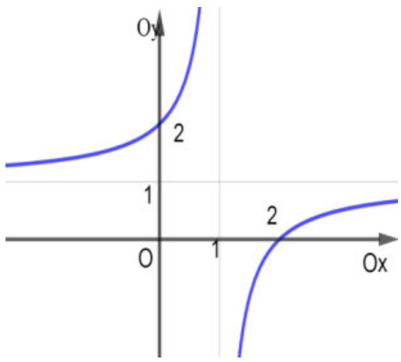
x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên trên có phương trình $x^2 - 2x - 1 = t_1$ và $x^2 - 2x - 1 = t_2$ vô nghiệm.

Mỗi phương trình $x^2 - 2x - 1 = t$ với $t \in \{t_3, t_4, t_5, t_6\}$ có hai nghiệm phân biệt và các nghiệm này đều phân biệt.

Vậy phương trình $\left|f\left(x^2 - 2x - 1\right)\right| = 4$ có 8 nghiệm phân biệt.

Câu 8. Cho hàm số $y = f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Tất cả các giá trị của m để phương trình $f(|x|) = m$ có hai nghiệm phân biệt là

A. $0 < m < 1$ và $m > 1$. **B.** $m \ge 2$ và $m \le 1$. **C.** $m > 2$ và $m < 1$. **D.** $0 < m < 1$.

Lời giải

Chọn C

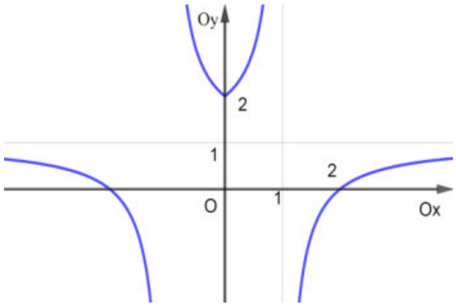
Số nghiệm của phương trình $f(|x|) = m\,(1)$ là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ và đường thẳng $y = m$.

Hàm số $y = f(|x|)$ là hàm số chẵn nên nhận Oy làm trục đối xứng.

Đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ gồm 2 phần:

+ Phần 1: Đồ thị hàm số $y = f(x)$ với $x \ge 0$.

+ Phần 2: Lấy đối xứng đồ thị hàm số $y = f(x)$ với $x \ge 0$ qua trục Oy.



Để phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt thì đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị $y = f(|x|)$ tại 2 điểm phân biệt. Từ đồ thị ta có $m > 2$; $m < 1$

Câu 9. Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $(a, b, c, d \in \mathbb{R},\ a \neq 0)$, có bảng biến thiên như hình sau

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	4	↘	0	↗	$+\infty$

Phương trình $|f(x)| = 3$ có bao nhiêu nghiệm dương phân biệt?

A. 1.　　**B.** 2.　　**C.** 3.　　**D.** 4.

Lời giải

Chọn D

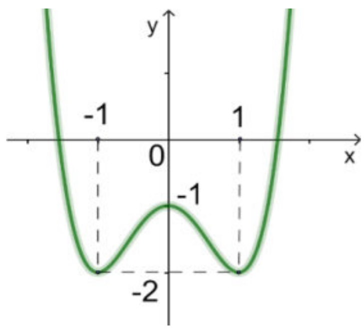
Ta có: $y(0) = \dfrac{y(-1) + y(1)}{2} = 2$.

Bảng biến thiên của hàm số $y = |f(x)|$ là:

x	$-\infty$		x_0		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	0	↗	4	↘	2	↘	0	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có: Phương trình $|f(x)| = 3$ có duy nhất 1 nghiệm dương.

Câu 10. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C) như hình vẽ bên. Phương trình $|f(x+1)| = \dfrac{3}{2}$ có bao nhiêu nghiệm âm phân biệt?

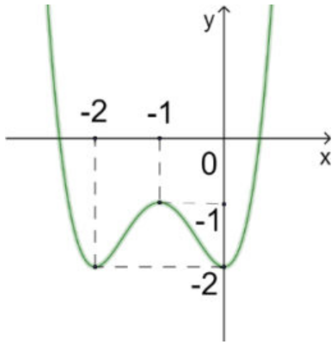


A. 3.　　**B.** 4.　　**C.** 5.　　**D.** 6.

Lời giải

Chọn D

Đồ thị (C_1) của hàm số $y=f(x+1)$ vẽ được bằng cách tịnh tuyến đồ thị (C) sang trái 1 đơn vị ta được đồ thị như hình vẽ bên dưới

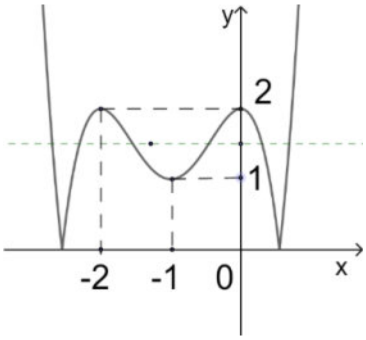


Đồ thị (C_2)của hàm số $y=|f(x+1)|$ vẽ được bằng cách

+ Giữ nguyên phần đồ thị (C_1) nằm phía trên trục hoành và những điểm trên trục hoành ta được đồ thị (C_3).

+ Lấy đối xứng qua trục hoành phần đồ thị (C_1) nằm phía dưới trục hoành ta được đồ thị (C_4).

+ Khi đó $(C_2)=(C_3)\cup(C_4)$ có đồ thị như hình vẽ dưới



Từ đồ thị (C_2) dễ thấy phương trình $|f(x+1)|=\dfrac{3}{2}$ có 4 nghiệm âm phân biệt.

Câu 11. Cho hàm số $y=f(x)$có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	5	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Phương trình $|f(1-3x)+1|=3$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 4. **B.** 3. **C.** 6. **D.** 5.

Lời giải

Chọn A

Cách 1: Dựa vào BBT của đồ thị hàm số $y=f(x)$ ta có số nghiệm của phương trình $f(x)=m$, m là tham số như sau:

+/ Nếu $\left[\begin{array}{l} m<-3 \\ m>5 \end{array}\right.$ phương trình có 1 nghiệm duy nhất.

+/ Nếu $\left[\begin{array}{l} m=-3 \\ m=5 \end{array}\right.$ phương trình có 2 nghiệm phân biệt.

+/ Nếu $-3 < m < 5$ phương trình có 3 nghiệm phân biệt.

Ta có phương trình $\left|f(1-3x)+1\right| = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(1-3x)+1=3 \\ f(1-3x)+1=-3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(1-3x)=2 \\ f(1-3x)=-4 \end{array}\right.$.

Từ kết quả trên ta suy ra $\left[\begin{array}{l} 1-3x=a_1 \\ 1-3x=a_2 \\ 1-3x=a_3 \\ 1-3x=a_4 \end{array}\right.$ $\quad (a_4 < f(\alpha) < a_1 < -1 < a_2 < 3 < a_3;\ f(\alpha) = f(3) = -3)$

Vậy phương trình $\left|f(1-3x)+1\right| = 3$ có 4 nghiệm phân biệt

Cách 2 : Dựa vào BBT ta có: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \Rightarrow f(-1)=5 \\ x=3 \Rightarrow f(3)=-3 \end{array}\right.$

Xét hàm số $g(x) = f(1-3x)+1$.Ta có:

$g'(x) = -3f'(1-3x)$. Suy ra $g'(x) = 0 \;\Leftrightarrow f'(1-3x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1-3x=-1 \\ 1-3x=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{2}{3} \\ x=-\dfrac{2}{3} \end{array}\right.$.

$g\left(\dfrac{2}{3}\right) = f(-1)+1 = 6$; $g\left(-\dfrac{2}{3}\right) = f(3)+1 = -2$.

Mặt khác $f'(x) < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 3$. Do đó

$f'(1-3x) < 0 \Leftrightarrow -1 < 1-3x < 3 \Leftrightarrow -2 < -3x < 2 \Leftrightarrow -\dfrac{2}{3} < x < \dfrac{2}{3}$

Suy ra: $g'(x) = -3f'(1-3x) > 0 \Leftrightarrow -\dfrac{2}{3} < x < \dfrac{2}{3}$ nên ta có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$				$-\frac{2}{3}$				$\frac{2}{3}$				$+\infty$
$g'(x)$			$-$		0		$+$		0		$-$		
$g(x)$	$+\infty$		$\searrow$		-2		$\nearrow$		6		$\searrow$		$-\infty$
$\lvert g(x)\rvert$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	6	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên suy ra phương trình $\left|f(1-3x)+1\right| = 3$ có 4 nghiệm.

Câu 12. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2018	$\nearrow$	2018	$\searrow$	$-\infty$

Hỏi phương trình $\left|f(x+2017)-2018\right|=2019$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 6. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Xét đồ thị hàm số $y=f(x+2017)-2018$ có được bằng cách tịnh tiến đồ thị hàm số $y=f(x)$ song song với trục Ox sang trái 2017 đơn vị, rồi sau đó tịnh tiến song song với trục Oy xuống dưới 2018 đơn vị.

Ta được bảng biến thiên của hàm số $y=g(x)=f(x+2017)-2018$ như sau

x	$-\infty$		-2017		-2016		$+\infty$
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-4036	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Khi đó đồ thị hàm số $y=\left|f(x+2017)-2018\right|$ gồm hai phần:

+ Phần đồ thị của hàm số $y=g(x)=f(x+2017)-2018$ nằm phía trên trục hoành.

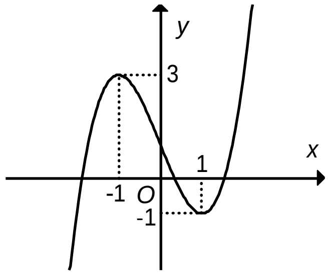
+ Và phần đối xứng của đồ thị $y=g(x)=f(x+2017)-2018$ nằm phía dưới trục hoành.

Do đó ta có được bảng biến thiên của hàm số $y=\left|g(x)\right|$ như sau

x	$-\infty$		x_0		-2017		-2016		$+\infty$
$\left\|g(x)\right\|$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	4036	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy, phương trình $\left|f(x+2017)-2018\right|=2019$ có 4 nghiệm.

Câu 13. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên. Hỏi phương trình $f\left(\left|x-2\right|\right)=-\dfrac{1}{2}$ có bao nhiêu nghiệm?



A. 4. **B.** 0. **C.** 6. **D.** 2.

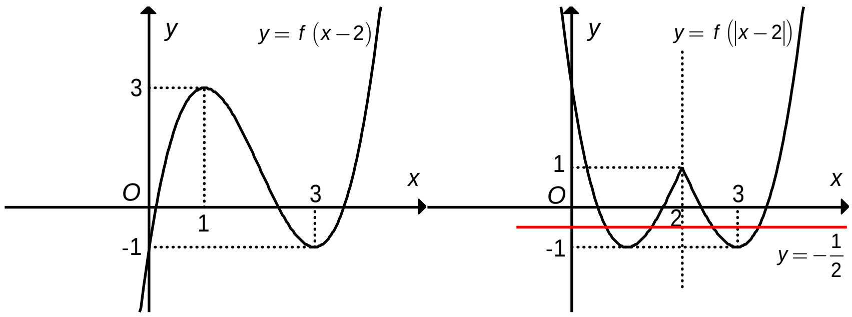
Lời giải

Chọn A

+ Trước tiên tịnh tiến đồ thị sang phải 2 đơn vị để được đồ thị hàm số $y = f(x-2)$. (C_1)

+ Tiếp theo xóa bỏ phần đồ thị phía bên trái đường thẳng $x = 2$.

+ Cuối cùng lấy đối xứng phần đồ thị còn lại ở trên qua đường thẳng $x = 2$. Ta được toàn bộ phần đồ thị của hàm số $y = f(|x-2|)$. (hình vẽ bên dưới) (C_2)



+ Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(|x-2|)$, ta thấy đường thẳng $y = -\frac{1}{2}$ cắt đồ thị hàm số $y = f(|x-2|)$ tại 4 điểm phân biệt $\longrightarrow$ phương trình $f(|x-2|) = -\frac{1}{2}$ có 4 nghiệm phân biệt.

Câu 14. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		1		$-\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm của phương trình $|f(x^2-2x)| = 3$ là

A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 5.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } |f(x^2-2x)| = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x^2-2x) = 3 \\ f(x^2-2x) = -3 \end{array}\right.$$

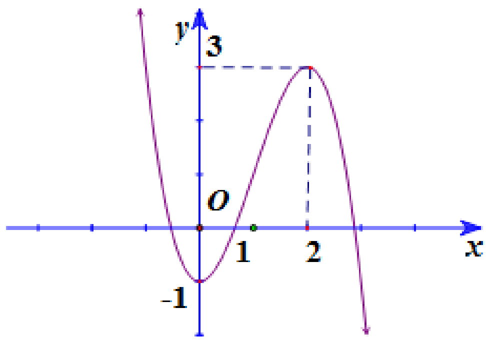
Dựa vào đồ thị ta thấy:

+ Phương trình $f(x^2-2x) = 3 \;(1) \Leftrightarrow x^2 - 2x = a\,(a > 1) \Leftrightarrow x^2 - 2x - a = 0$. Vì $\Delta = 1 + a > 0$ nên phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt.

+ Phương trình $f(x^2-2x) = -3\;(2) \Leftrightarrow x^2 - 2x = b\,(b < -1) \Leftrightarrow x^2 - 2x - b = 0$. Vì $\Delta = 1 + b < 0$ nên phương trình (2) vô nghiệm.

Vậy số nghiệm của phương trình $|f(x^2-2x)| = 3$ là 2.

Câu 15. Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\ (a,\ b,\ c,\ d\in\mathbb{R})$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $2f(|x|)+m=0$ có đúng 4 nghiệm thực phân biệt.



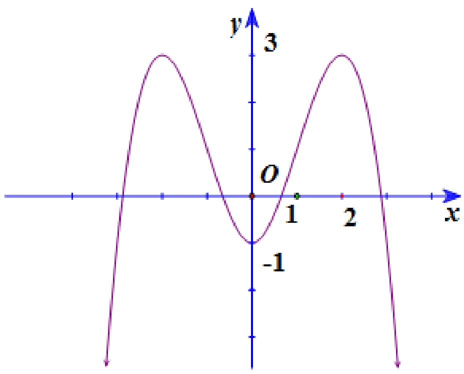
A. $-3<m<1$. **B.** $-1<m<3$. **C.** $-2<m<6$. **D.** $-6<m<2$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $2f(|x|)+m=0 \Leftrightarrow f(|x|)=\dfrac{-m}{2}$.

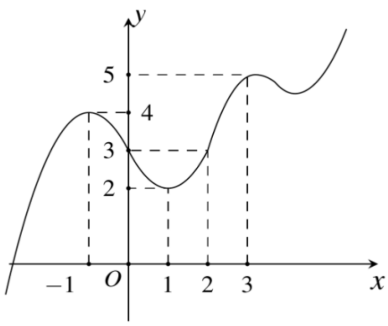
$f(|x|)$ là hàm chẵn nên đồ thị như hình bên:



Từ đồ thị ta có phương trình $2f(|x|)+m=0$ có 4 nghiệm thực phân biệt khi:

$-1<\dfrac{-m}{2}<3 \Leftrightarrow -6<m<2$.

Câu 16. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Số giá trị nguyên của m để phương trình $f(|x-2|)=m$ có nghiệm trên đoạn $[-1,5]$ là.

A. 3. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C

Ta có $-1\le x\le 5 \Rightarrow -3\le x-2\le 3 \Rightarrow 0\le |x-2|\le 3$

Do đó $\forall x\in[-1;5]$, $0\le |x-2|\le 3$.

Đặt $t=\left|x-2\right|$ với $t\in\left[0;3\right]$. Xét hàm số $y=f\left(t\right)$ liên tục trên $\left[0;3\right]$.

Dựa vào đồ thị ta thấy $\max\limits_{[0;3]} f(t)=5$, $\min\limits_{[0;3]} f(t)=2$ $\Rightarrow \max\limits_{[-1;5]} f(\left|x-2\right|)=5, \min\limits_{[-1;5]} f(\left|x-2\right|)=2$

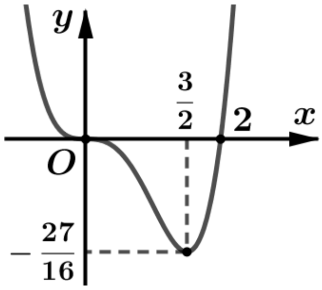
Suy ra pt $f\left(\left|x-2\right|\right)=m$ có nghiệm trên đoạn $\left[-1,5\right]$ khi $2\le m\le 5$.

(CÒN TIẾP PHẦN 2)

CÁC DẠNG TOÁN VỀ HÀM ẨN LIÊN QUAN ĐẾN BÀI TOÁN XÉT SỰ TƯƠNG GIAO CỦA ĐỒ THỊ CÁC HÀM SỐ (PHẦN 2: DẠNG 5-8)

Dạng 5: Biết đồ thị hoặc BBT của hàm số $y=f(x)$, xét các bài toán liên quan đến phương trình có dạng $f(|x|)=g(m);\ |f(x)|=g(m);\ f(|u(x)|)=g(m);\ |f(u(x))|=g(m)\ldots$.

Câu 1. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(2|\sin x|)=f\left(\frac{m}{2}\right)$ có đúng 12 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-\pi;2\pi]$?

A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 5.

Lời giải

Chọn C

Ta có bảng biến thiên của hàm số $y=g(x)=2|\sin x|$ trên đoạn $[-\pi;2\pi]$

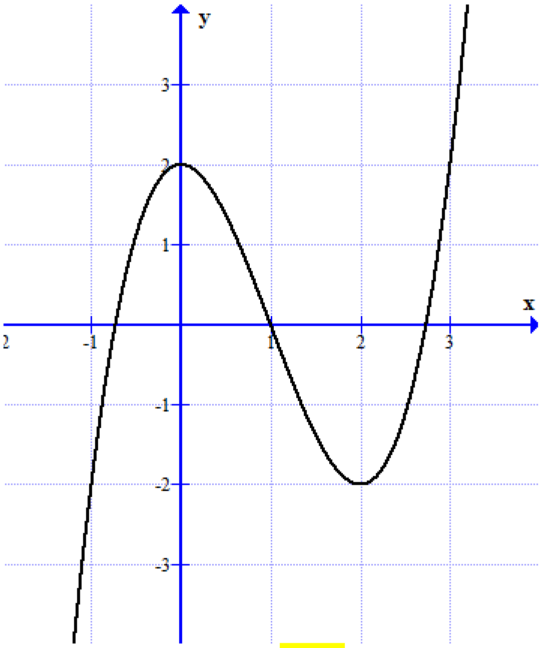
x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$g(x)$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	0

Phương trình $f(2|\sin x|)=f\left(\frac{m}{2}\right)$ có đúng 12 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-\pi;2\pi]$ khi và chỉ khi phương trình $f(t)=f\left(\frac{m}{2}\right)$ có 2 nghiệm phân biệt $t\in(0;2)$.

Dựa vào đồ thị hàm số $y=f(x)$ suy ra phương trình $f(t)=f\left(\frac{m}{2}\right)$ có 2 nghiệm phân biệt $t\in(0;2)$ khi và chỉ khi $-\frac{27}{16}<f\left(\frac{m}{2}\right)<0 \Leftrightarrow \begin{cases}0<\frac{m}{2}<2\\ \frac{m}{2}\neq\frac{3}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}0<m<4\\ m\neq 3\end{cases}$.

Do m nguyên nên $m\in\{1;2\}$. Vậy có 2 giá trị của m thoả mãn bài toán.

Câu 2. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như sau. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $|f(|x|)|=m$ có hai nghiệm dương phân biệt.

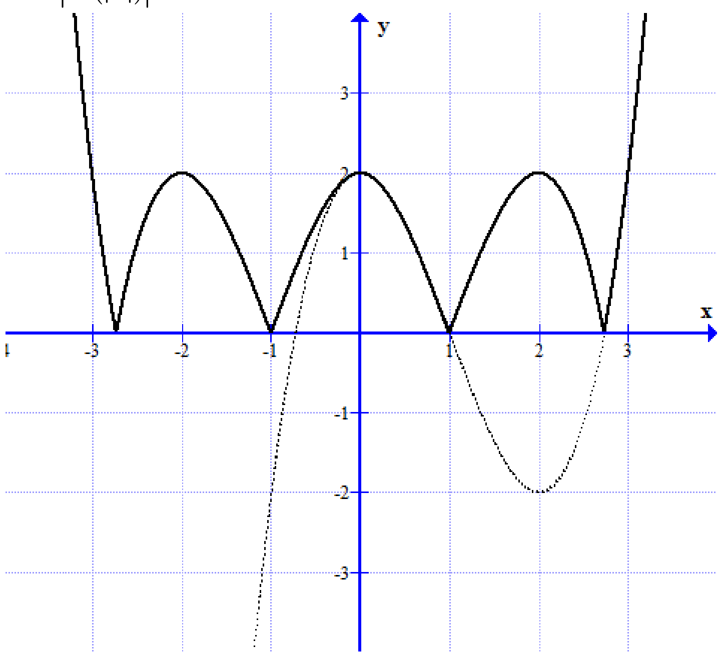


A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

ChọnC

Ta có đồ thị hàm số $y=\left|f\left(|x|\right)\right|$



Dựa vào đồ thị, phương trình $\left|f\left(|x|\right)\right|=m$ có hai nghiệm dương phân biệt khi và chỉ khi $\left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=2 \end{array}\right.$.

Câu 3. Cho hàm hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới

x	$-\infty$		1		5		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	10	$\searrow$	$-\infty$

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\left|f\left(x^2+1\right)\right|=m$ có 6 nghiệm phân biệt.

A. 12. **B.** 198. **C.** 6. **D.** 190.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t=x^2+1$, điều kiện $t\geq 1$, từ đó phương trình trở thành $\left|f\left(t\right)\right|=m$, $t\geq 1$.

Do $t\geq 1$nên ta xét bảng biến thiên của hàm $y=f\left(t\right)$ trên $\left[1;+\infty\right)$ như sau:

t	1		5		$+\infty$
$f'(t)$	0	$+$	0	$-$	
$f(t)$	-3	$\nearrow$	10	$\searrow$	$-\infty$

Bảng biến thiên của hàm số $y=\left|f\left(t\right)\right|$trên $\left[1;+\infty\right)$ là

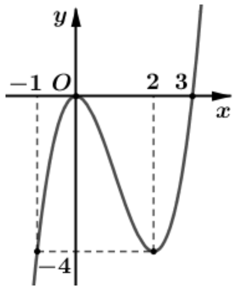
t	1				5				$+\infty$
$f'(t)$	0		$+$		0		$-$		
$\left\|f(t)\right\|$	3	$\searrow$	0	$\nearrow$	10	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

$y=m$

Cứ mỗi nghiệm $t>1$ cho được hai nghiệm x, do vậy để phương trình $\left|f\left(x^2+1\right)\right|=m$ có 6 nghiệm phân biệt thì phương trình $\left|f\left(t\right)\right|=m$ cần có 3 nghiệm $t>1$. Dựa bảng biến thiên của hàm $y=\left|f\left(t\right)\right|$ ở trên ta có điều kiện $3<m<10$, mặt khác m nguyên nên $m\in\left\{4;5;6;7;8;9\right\}$.

Vậy có 6 giá trị nguyên m thỏa mãn bài toán.

Câu 4. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.Phương trình$\left|f\left(x\right)+4\right|=m^2-3m+2$ có 4 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi tham số m thỏa mãn điều kiện nào dưới đây?



A. $0\leq m\leq 4$. **B.** $0<m<4$.

C. $m\in\left(\frac{3-\sqrt{17}}{2};1\right)\cup\left(2;\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)$. **D.** $m\in\left(\frac{3-\sqrt{17}}{2};\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)$.

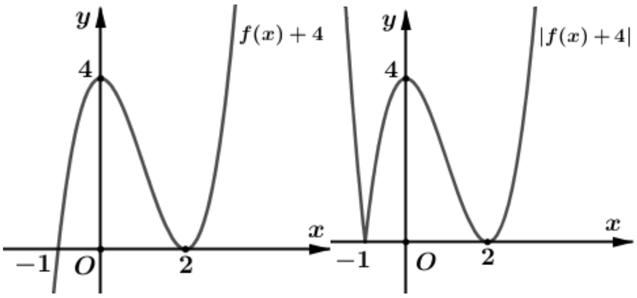
Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $g(x)=|f(x)+4|$.

Đồ thị hàm số $g(x)=|f(x)+4|$ có được bằng cách:

- Tịnh tiến đề thị hàm số $f(x)$ lên trên 4 đơn vị ta được $f(x)+4$.
- Lấy đối xứng phần phía dưới Ox của đồ thị hàm số $f(x)+4$ qua Ox, ta được đồ thị hàm số $g(x)=|f(x)+4|$.



Phương trình $|f(x)+4|=m^2-3m+2$ có 4 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi đường thẳng $y=m^2-3m+2$ cắt đồ thị hàm số $g(x)=|f(x)+4|$ tại 4 điểm phân biệt. Từ đồ thị hàm số $g(x)=|f(x)+4|$, ta suy ra phương trình $|f(x)+4|=m^2-3m+2$ có 4 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $0<m^2-3m+2<4$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2-3m+2>0 \\ m^2-3m+2<4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\in(-\infty;1)\cup(2;+\infty) \\ m\in\left(\dfrac{3-\sqrt{17}}{2};\dfrac{3+\sqrt{17}}{2}\right) \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow m\in\left(\frac{3-\sqrt{17}}{2};1\right)\cup\left(2;\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right).$$

Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	-2018 ↗	2018 ↘	$-\infty$

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $|f(x+2017)-2018|=m$ có đúng 4 nghiệm phân biệt?

A. 4034. **B.** 4035. **C.** 4036. **D.** 4037.

Chọn B

Xét hàm số $y=f(x+2017)-2018$ có đồ thị bằng cách tịnh tiến đồ thị hàm số $y=f(x)$ sang trái 2017 đơn vị, sau đó tịnh xuống dưới 2018 đơn vị. Ta được bảng biến thiên của hàm số $y=g(x)=f(x+2017)-2018$ như sau:

x	$-\infty$	-2017	-2016	$+\infty$
$g(x)$	$+\infty$ ↘	-4036 ↗	0 ↘	$-\infty$

Khi đó đồ thị hàm số $y=\left|f(x+2017)-2018\right|$ gồm hai phần:

+ Phần 1: Giữ nguyên toàn bộ phần đồ thị hàm số $y=g(x)$ nằm phía trên trục hoành.

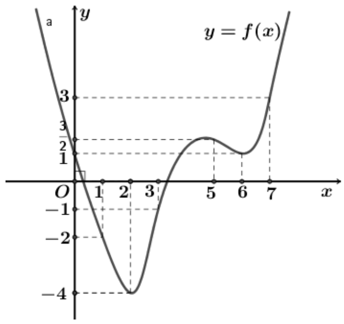
+ Phần 2: Lấy đối xứng phần phía dưới trục hoành của đồ thị hàm số $y=g(x)$ qua $0x$.

Vậy ta có bảng biến thiên của hàm số $y=\left|g(x)\right|$ như sau:

x	$-\infty$	x_0	-2017	-2016	$+\infty$
$\left|g(x)\right|$	$+\infty$	0	4036	0	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có để phương trình $\left|f(x+2017)-2018\right|=m$ có 4 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $0<m<4036$ mà $m\in Z$ nên có 4035 giá trị m cần tìm. Chọn đáp án **B**

Câu 6. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



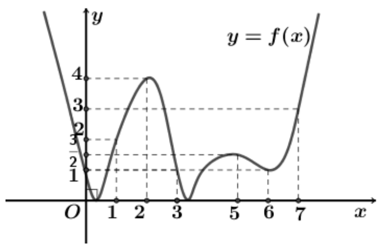
Tìm tất cả các giá trị m để phương trình $\left|f\left(\dfrac{3x^2+2x+3}{2x^2+2}\right)\right|=m$ có nghiệm.

A. $-4\le m\le -2$ **B.** $m>-4$ **C.** $2<m<4$ **D.** $2\le m\le 4$

Lời giải

Chọn D

Dựa vào đồ thị đã cho ta có đồ thi của hàm $y=\left|f\left(x\right)\right|$ là



Đặt $t=\dfrac{3x^2+2x+3}{2x^2+2}\Rightarrow t'=\dfrac{-4x^2+4}{\left(2x^2+2\right)^2}$; $t'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=1\end{array}\right.$.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
t'		$-$	0	$+$	0	$-$	
t	$\frac{3}{2}$		1		2		$\frac{3}{2}$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow t\in\left[1;2\right]$.

Vậy phương trhh $\left|f\left(\dfrac{3x^2+2x+3}{2x^2+2}\right)\right|=m$ có nghiệm khi và chỉ khi phương trình $\left|f\left(t\right)\right|=m$ có nghiệm $t\in\left[1;2\right]\Leftrightarrow 2\le m\le 4$.

Câu 7. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định trên $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$			0		2		$+\infty$
y'		$-$		$\|\|$	$-$	$\|\|$	$+$	
y	2	$\searrow$	$-\infty$	$\|\|$	3 $\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Tìm số giá trị nguyên của *m* để phương trình $f\left(\left|x\right|\right)=m$ có 4 nghiệm phân biệt.

A. 5. **B.** 2.
C. 4. **D.** 0.

Lời giải

Chọn C

Từ bảng biến thiên của hàm số $y=f\left(x\right)$ ta suy ra bảng biến thiên của hàm số $y=f\left(\left|x\right|\right)$ như sau:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$-$	$\|\|$	$+$	$\|\|$	$-$	$\|\|$	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	3 $\|\|$ 3	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Suy ra phương trình $f\left(\left|x\right|\right)=m$ có 4 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $-2<m<3$ mà $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m\in\{-1,0,1,2\}$. Vậy có 4 giá trị nguyên của *m* thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Câu 8. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ. Số giá trị nguyên của *m* để phương trình $\left|f\left(2x-3\right)\right|-m=0$ có đúng 2 nghiệm phân biệt là

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ $\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

A. 2. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 3.

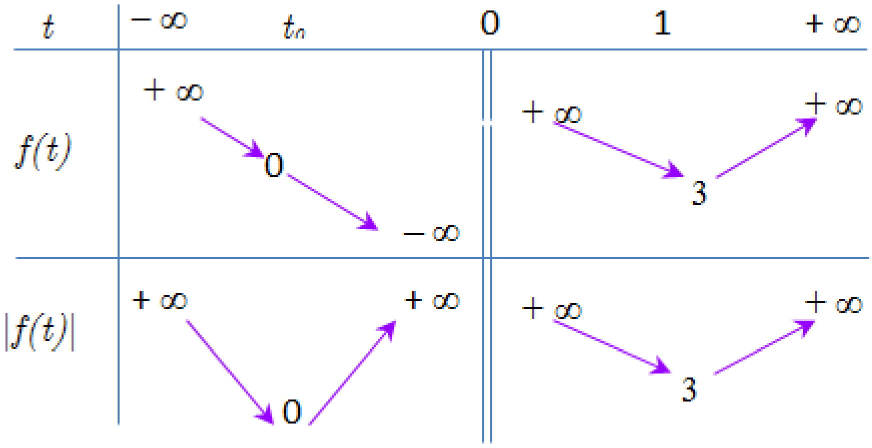
Lời giải

Chọn A

Đặt $2x-3=t$ phương trình đã cho trở thành $\left|f\left(t\right)\right|-m=0\Leftrightarrow\left|f(t)\right|=m$. (*)

Số nghiệm của phương trình (*) bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y=\left|f(t)\right|$ và đường thẳng $y=m$ song song hoặc trùng với trục hoành.

Từ bảng biến thiên đã cho ta vẽ được bảng biến thiên của hàm số $y=\left|f(t)\right|$.

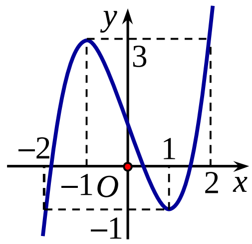


Do hàm số $t = 2x - 3$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên số nghiệm t của phương trình (*) bằng số nghiệm x của phương trình đã cho.

Dựa vào BBT ta thấy phương trình (*) có 2 nghiệm $\Leftrightarrow 0 < m < 3$.

Với $m \in \mathbb{Z}$ suy ra $m \in \{1;2\}$.

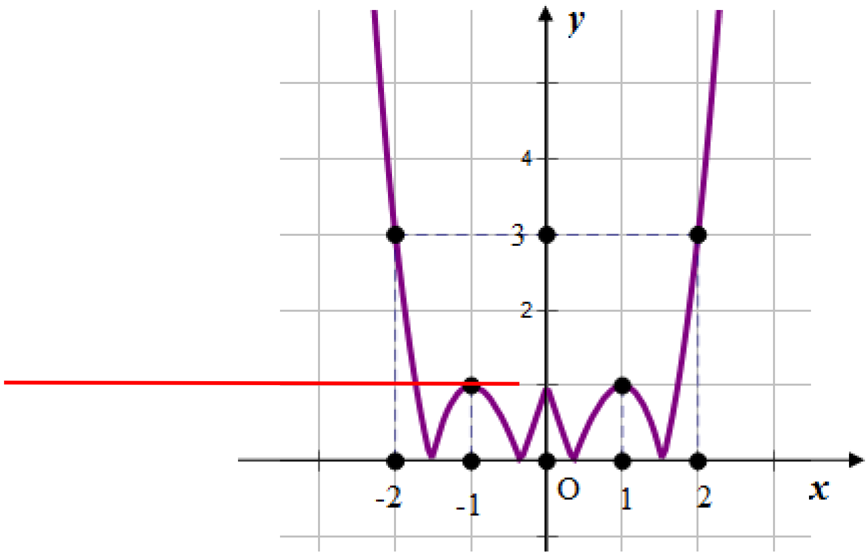
Câu 9. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Hỏi phương trình $\left| f\left(\left| x^2 - 2x \right| \right) \right| = 1$ có tất cả bao nhiêu nghiệm?



A. 9. **B.** 7. **C.** 6. **D.** 8.

Lời giải

Chọn B



+ Ta có đồ thị hàm số $y = \left| f\left(|x| \right) \right|$ có được bằng cách giữ nguyên phần đồ thị hàm $y = f(x)$ nằm bên phải trục Ox và đối xứng của chính phần đồ thị này qua Ox . Sau đó giữ nguyên phần đồ thị phía trên Ox và lấy đối xứng của phần đồ thị phía dưới Ox qua Ox . Như vậy đồ thị hàm số $y = \left| f\left(|x| \right) \right|$ như hình vẽ.

Từ phương trình $\left| f\left(\left| x^2 - 2x \right| \right) \right| = 1$Đặt $t = x^2 - 2x$ ta được $\left| f\left(|t| \right) \right| = 1$

Khi đó dựa vào đồ thị ta nhận thấy đồ thị hàm số $y=\left|f\left(|t|\right)\right|$ cắt đường thẳng $y=1$ tại 5 điểm là $t_1=a\in(-2;1),t_2=-1,t_3=0,t_4=1,t_5=b\in(1;2)$

Với $t=x^2-2x$

Ta có $t'=2x-2\Rightarrow t'=0\Leftrightarrow x=1$.

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

$t_1=a\in(-2;1),t_2=-1,t_3=0,t_4=1,t_5=b\in(1;2)$

Dựa vào bảng biến thiên ta có

$x^2-2x=a\in(-2;-1)$ vô nghiệm.

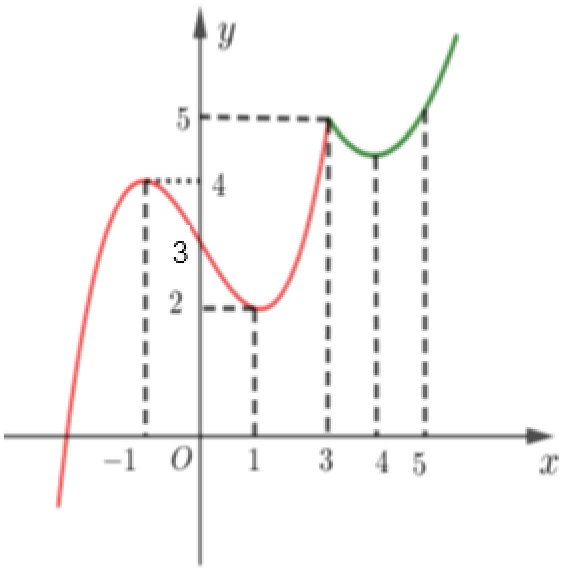
$x^2-2x=-1$ có đúng 1 nghiệm x.

$x^2-2x=0$ có đúng 2 nghiệm x.

$x^2-2x=1$ có đúng 2 nghiệm x.

$x^2-2x=b$ có đúng 2 nghiệm x.

Câu 10. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Tìm m để phương trình $f\left(\left|x^2-2x\right|\right)=m$ có đúng 6 nghiệm thực phân biệt thuộc đoạn $\left[-\frac{3}{2};\frac{7}{2}\right]$?

A. $2<m<3$ hoặc $f(4)<m<5$. **B.** $2<m\le 3$ hoặc $f(4)<m<5$.

C. $2\le m<3$ hoặc $f(4)<m<5$. **D.** $2<m<3$ hoặc $f(4)<m\le 5$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t=\left|x^2-2x\right|$, với $x\in\left[-\frac{3}{2};\frac{7}{2}\right]$.

Ta thấy hàm số $u(x)=x^2-2x$ liên tục trên đoạn $\left[-\frac{3}{2};\frac{7}{2}\right]$ và $u'=2x-2$; $u'(x)=0\Leftrightarrow x=1$.

Bảng biến thiên:

x	$-\frac{3}{2}$	0	1	2	$\frac{7}{2}$
$u'(x)$		$-$	0	$+$	
$u(x)$	$\frac{21}{4}$	0	-1	0	$\frac{21}{4}$
$t=\lvert u(x)\rvert$	$\frac{21}{4}$	0	1	0	$\frac{21}{4}$

Nhận xétrằng với $t=0$ hoặc $1<t\le\frac{21}{4}$ thì phương trình $t=\left|x^2-2x\right|$ có 2 nghiệm phân biệt; với $t=1$ thì phương trình $t=\left|x^2-2x\right|$ có 3 nghiệm phân biệt; với mỗi $t\in(0;1)$ thì phương trình $t=\left|x^2-2x\right|$ có 4 nghiệm phân biệt.

Với $t=\left|x^2-2x\right|$ phương trình $f\left(\left|x^2-2x\right|\right)=m$ thành $f(t)=m,\left(t\in\left[0;\frac{21}{4}\right]\right)$

Dựa vào đồ thị f ta biện luận số nghiệm của phương trình $f(t)=m,\left(t\in\left[0;\frac{21}{4}\right]\right)$ trong các trường hợp sau

TH1: $m=2$

$f(t)=2\Leftrightarrow t=1$. Khi đó phương trình $f\left(\left|x^2-2x\right|\right)=m$ có 3 nghiệm phân biệt.

TH2: $2<m<3$

$f(t)=m\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=a\in(0;1)\\t=b\in(1;3)\end{array}\right.$. Khi đó phương trình $f\left(\left|x^2-2x\right|\right)=m$ có 6 nghiệm phân biệt.

TH3: $m=3$

$f(t)=m\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\\t=b\in(1;3)\end{array}\right.$. Khi đó phương trình $f\left(\left|x^2-2x\right|\right)=m$ có 4 nghiệm phân biệt.

TH4: $3<m<f(4)$

$f(t)=m\Leftrightarrow t=a\in(1;4)$. Khi đó phương trình $f\left(\left|x^2-2x\right|\right)=m$ có 2 nghiệm phân biệt.

TH5: $m=f(4)$

$f(t)=m\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=4\\t=b\in(1;4)\end{array}\right.$. Khi đó phương trình $f\left(\left|x^2-2x\right|\right)=m$ có 4 nghiệm phân biệt.

TH6: $f(4)<m<5$

$f(t)=m$ có 3 nghiệm phân biệt thuộc $(1;5)$. Khi đó phương trình $f\left(\left|x^2-2x\right|\right)=m$ có 6 nghiệm phân biệt.

TH7: $m=5$

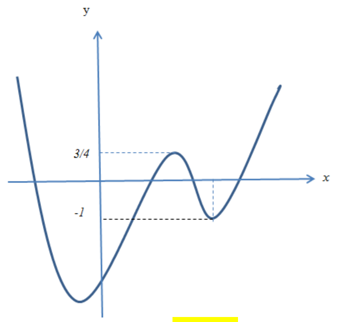
$f(t)=m$ có 2 nghiệm phân biệt thuộc $(1;5)$. Khi đó phương trình $f\left(\left|x^2-2x\right|\right)=m$ có 4 nghiệm phân biệt.

TH8: $5<m<f\left(\dfrac{21}{4}\right)$

$f(t)=m$ có 1 nghiệm thuộc $\left(1;\dfrac{21}{4}\right)$. Khi đó phương trình $f\left(\left|x^2-2x\right|\right)=m$ có 2 nghiệm phân biệt.

Vậy phương trình $f\left(\left|x^2-2x\right|\right)=m$ có đúng 6 nghiệm thực phân biệt thuộc đoạn $\left[-\dfrac{3}{2};\dfrac{7}{2}\right]$ khi và chỉ khi $2<m<3$ hoặc $f(4)<m<5$.

Câu 11. Cho đồ thị hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(|x+m|\right)=m$ có 4 nghiệm phân biệt là?

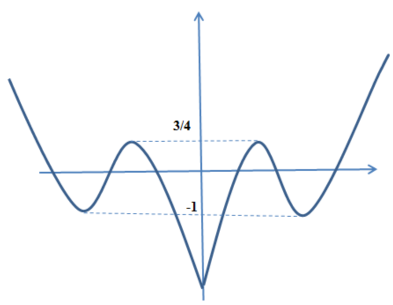


A. 0. **B.** Vô số. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C

Ta có đồ thị hàm số $y=f\left(|x|\right)$ như sau:

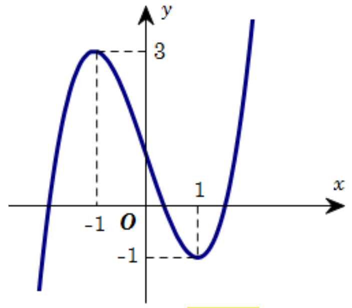


Đồ thị hàm số $y=f\left(|x+m|\right)$ có được bằng cách tịnh tiến đồ thị hàm số $y=f\left(|x|\right)$ dọc theo trục Ox nên số nghiệm của phương trình $f\left(|x+m|\right)=m$ bằng số nghiệm của phương trình $f\left(|x|\right)=m$.

Do đó, phương trình $f\left(|x+m|\right)=m$ có 4 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi đồ thị của hàm số $y=f\left(|x|\right)$ cắt đường thẳng $y=m$ tại 4 điểm phân biệt $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=\dfrac{3}{4} \\ m=-1 \end{array}\right.$.

Vì m nguyên nên $m=-1$.

Câu 12. Cho hàm số $y=x^3-3x+1$ có đồ thị hàm số như hình bên. Sử dụng đồ thị hàm số đã cho, tìm số-giá trị nguyên của tham số m để phương trình $8|x|^3-6|x|(x^2+1)^2=(m-1)(x^2+1)^3$ có nghiệm.



A. 2 **B.** 0 **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C

Phương trình $8\left|\frac{x}{x^2+1}\right|^3-6\left|\frac{x}{x^2+1}\right|=m-1\Leftrightarrow\left|\frac{2x}{x^2+1}\right|^3-3\left|\frac{2x}{x^2+1}\right|+1=m$.

Đặt $t=\left|\frac{2x}{x^2+1}\right|\geq 0$. Ta có $x^2+1\geq 2x$ suy ra $0\leq\left|\frac{2x}{x^2+1}\right|\leq 1$ Do đó $0\leq t\leq 1$.

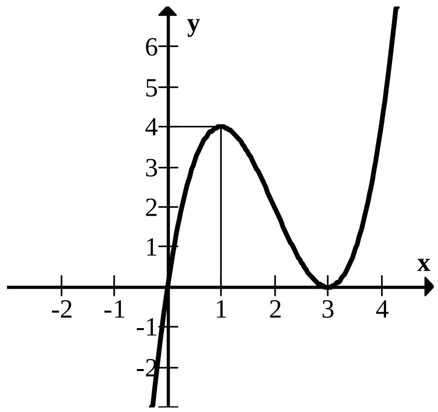
Phương trình trở thành $t^3-3t+1=m\quad(*)$.

Số nghiệm của phương trình $(*)$ là số giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^3-3x+1$ (chỉ xét với $x\in[0;1]$) và đường thẳng $y=m$.

Dựa vào đồ thị, ta thấy để phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi phương trình $(*)$ có nghiệm thuộc đoạn $[0;1]$ khi và chỉ khi $-1\leq m\leq 1$.

Như vậy có 3 giá trị nguyên của m thỏa mãn bài toán đã cho.

Câu 13. Cho đồ thị của hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ:



Tìm các giá trị của m để phương trình $f(|x|)=m$ có 6 nghiệm phân biệt.

A. $m\in\varnothing$. **B.** $0<m<1$ hoặc $m>4$. **C.** $m=0$. **D.** $0<m<4$.

Lời giải

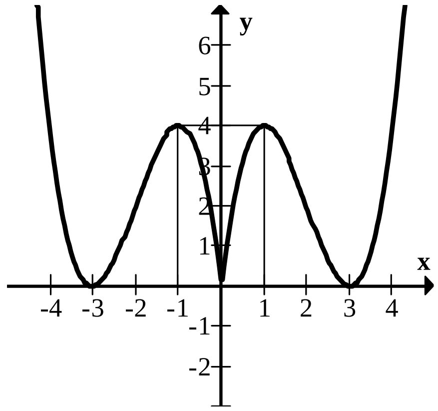
Chọn D

Đồ thị hàm $y=f(|x|)$ gồm 2 phần:

+ Phần đồ thị $y=f(x)$ nằm bên phảitung (Kể cả giao điểm trên trục tung), bỏ phần bên trái trục tung.

+ Lấy đối xứng phần bên phải trục tung qua trục tung.

Từ đó ta có đồ thị của của hàm số $y=f(|x|)$



Từ đồ thị của hàm số $y=f\left(|x|\right)$ nên $f\left(|x|\right)=m$ có 6 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $0<m<4$.

Câu 14. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như hình dưới. Phương trình $f\left(|x|-2\right)=m^2-4m$ có 4 nghiệm phân biệt khi nào?

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	5	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

A. $m>5$ hoặc $m<0$. **B.** $-1<m<0$ hoặc $4<m<5$.
C. $-2<m<1$. **D.** $m<-2$ hoặc $m>1$.

Lời giải

Chọn B

Đồ thị hàm số $f\left(|x|-2\right)$ được suy từ đồ thị hàm số $f\left(x\right)$ như sau:

- Tịnh tiến đồ thị hàm số $f\left(x\right)$ sang phải 2 đơn vị, ta được đồ thị hàm số $f\left(x-2\right)$.

- Giữ nguyên phần bên phải trục tung. Bỏ phần bên trái trục tung, lấy đối xứng phần bên phải trục tung qua trục tung.

Ta có bảng biến thiên hàm số $f\left(|x|-2\right)$:

x	$-\infty$		-3		0		3		$+\infty$
$f(\lvert x\rvert-2)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	5	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm của phương trình $f\left(|x|-2\right)=m^2-4m$ là số giao điểm của đồ thị hàm số $f\left(|x|-2\right)$ và đường thẳng $y=m^2-4m$. Do đó phương trình $f\left(|x|-2\right)=m^2-4m$ có 4 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $0<m^2-4m<5$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2-4m>0 \\ m^2-4m<5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m>4 \\ m<0 \end{array}\right. \\ -1<m<5 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1<m<0 \\ 4<m<5 \end{array}\right. .$$

Vậy $-1<m<0$ hoặc $4<m<5$ thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 15. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$			0			2		$+\infty$
y'		$-$		$\|$		$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\|$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $|f(x)|+m=0$ có 5 nghiệm phân biệt là

A. $\left(-2;-1\right]$. **B.** $\left[-1;2\right)$. **C.** $\left(-2;-1\right)$. **D.** $\left(-2;1\right)$.

Lời giải:

Chọn A

Gọi $x_1;x_2;x_3$ lần lượt là giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ và trục hoành. Từ bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$.Ta có bảng biến thiên của hàm số $y=|f(x)|$

x	$-\infty$		x_1		0		x_2		2		x_3		$+\infty$
$y'(x)$		$-$	0	$+$	$\|$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$y(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$1 \,\|\, +\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Khi đó phương trình $|f(x)|+m=0$ có 5 nghiệm khi phương trình $|f(x)|=-m$ có 5 nghiệm hay đồ thị hàm số $y=|f(x)|$ và $y=-m$ cắt nhau tại 5 điểm phân biệt

Do vậy $1\le -m<2 \Leftrightarrow -2<m\le -1$. **Chọn đáp án A**

Dạng 6: Biết đồ thị hoặc BBT của hàm số $y=f(x)$, xét các bài toán liên quan đến phương trình có dạng $f(x)=g(x)$; $f(u(x))=g(v(x))$.

Câu 1. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\left[0;+\infty\right)$ và có BBT như hình vẽ

x	0		$+\infty$
y'		$+$	
y	$2\sqrt{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

Hỏi phương trình $f(x)=f(3)\left(\sqrt{5-x}+\sqrt{4-x}\right)$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $0\le x\le 4$

Phương trình ban đầu $\Leftrightarrow \dfrac{f(x)}{\sqrt{5-x}+\sqrt{4-x}}=f(3)$. Đặt $g(x)=\dfrac{f(x)}{\sqrt{5-x}+\sqrt{4-x}}$

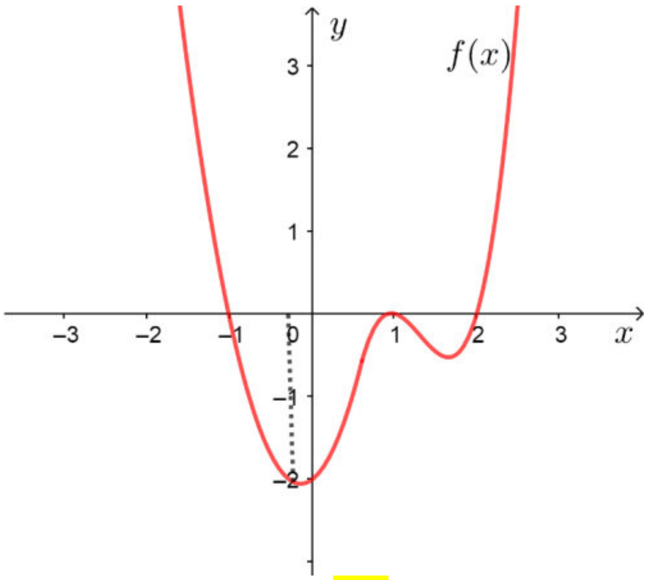
Ta có $g'(x)=\dfrac{f'(x)\left(\sqrt{5-x}+\sqrt{4-x}\right)+f(x).\left(\dfrac{1}{2\sqrt{5-x}}+\dfrac{1}{2\sqrt{4-x}}\right)}{\left(\sqrt{5-x}+\sqrt{4-x}\right)^2}>0, \forall x\in(0;4)$

Sau đây là BBT của hàm số $g(x)$ trên đoạn $[0;4]$

x	0		4
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	$2\left(\sqrt{15}-\sqrt{12}\right)$	$\nearrow$	$f(4)$

Vậy phương trình $g(x) = f(3)$ có đúng một nghiệm.

Câu 2. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Đặt $g(x) = f(f(x)-1)$. Tìm số nghiệm của $g'(x) = 0$.



A. 6 **B.** 8 **C.** 9 **D.** 10

Lời giải

Chọn C

Xét $g'(x) = f'(x).f'(f(x)-1)$

Ta có: $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} f'(x) = 0 & (1) \\ f'(f(x)-1) = 0 & (2) \end{array}\right.$

Từ (1): $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = a, \quad a \in (-1,0) \\ x = 1 \\ x = b, \quad b \in (1,2) \end{array}\right.$

Từ (2): $f'(f(x)-1) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{ll} f(x)-1 = a, & a \in (-1,0) \\ f(x)-1 = 1 & \\ f(x)-1 = b, & b \in (1,2) \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = a+1, \quad a+1 > 0 \\ f(x) = 2 \\ f(x) = b+1, \quad 1 < b+1 < 3 \end{array}\right.$

Dựa vào đồ thị suy ra: (1) có 3 nghiệm phân biệt

(2) Ta xét lần lượt đường thẳng: $y = a+1$ cắt đồ thị $f(x)$ tại 2 điểm phân biệt

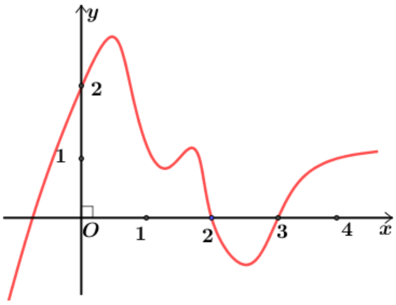
$y = 2$ cắt đồ thị $f(x)$ tại 2 điểm phân biệt

$y = b+1$ cắt đồ thị $f(x)$ tại 2 điểm phân biệt

Nên (2) có 6 nghiệm phân biệt

Vậy phương trình $g'(x) = 0$ có 9 nghiệm phân biệt

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Tìm số nghiệm của phương trình $f\left(x^3-3x\right)+3x^3-3x-13 = \left(x^2-2\right)^3-3\left(x-1\right)^2$.



A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

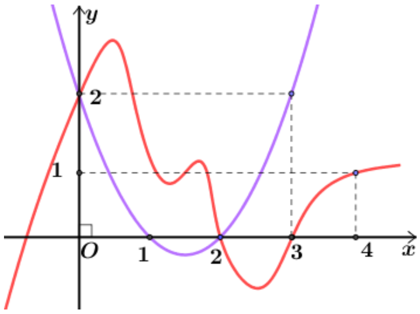
Chọn C

$f\left(x^3-3x\right)+3x^3-3x-13=\left(x^2-2\right)^3-3(x-1)^2$

$\Leftrightarrow f\left(x^3-3x\right)=x^6-6x^4+9x^2-3x^3+9x+2$

$\Leftrightarrow f\left(x^3-3x\right)=\left(x^3-3x\right)^2-3\left(x^3-3x\right)+2$

Đặt $t=x^3-3x$ ta có phương trình $f(t)=t^2-3t+2$



Dựa vào đồ thị thì $f(t)=t^2-3t+2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x^3-3x=0 \\ x^3-3x=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm\sqrt{3} \\ x=2 \\ x=-1 \end{array}\right.$

Vậy phương trình có 5 nghiệm.

Câu 4. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[1;3]$ và có bảng biến thiên như hình dưới

x	1		2		3
f'		$+$	0	$-$	
f	-5	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-2

Hỏi phương trình $f(x-1)=\dfrac{-5}{x^2-6x+12}$ có bao nhiêu nghiệma trên $[2;4]$?

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Do $x^2-6x+12>0, \forall x\in\mathbb{R}$ nên $f(x-1)=\dfrac{-5}{x^2-6x+12} \Leftrightarrow \left(x^2-6x+12\right)f(x-1)=-5$.

Đặt $g(x)=\left(x^2-6x+12\right)f(x-1) \Rightarrow g'(x)=(2x-6)f(x-1)+\left(x^2-6x+12\right)f'(x)$.

Xét trên $[2;4]$ ta có:

Với $x\in[2;3]$ thì $\begin{cases}1\le x-1\le 2\\ 2x-6\le 0\\ x^2-6x+12>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f(x-1)<0\\ 2x-6\le 0\\ f'(x-1)>0\\ x^2-6x+12>0\end{cases}\Rightarrow g'(x)>0,\forall x\in[2;3]$.

Với $x\in(3;4]$ thì $\begin{cases}2<x-1\le 3\\ 2x-6>0\\ x^2-6x+12>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f(x-1)<0\\ 2x-6>0\\ f'(x-1)<0\\ x^2-6x+12>0\end{cases}\Rightarrow g'(x)<0,\forall x\in(3;4]$.

Tính: $g(2)=(4-12+12)f(1)=-20$, $g(3)=(9-18+12)f(2)=-3$,

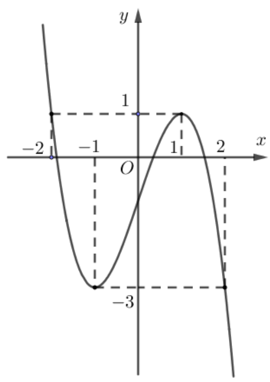
$g(4)=(16-24+12)f(3)=-8$.

Lập bảng biến thiên của $y=g(x)$ trên $[2;4]$:

x	2		3		4
g'		$+$	0	$-$	
g	-20	$\nearrow$	-3	$\searrow$	-8

Dựa vào BBT trên suy ra trên $[2;4]$ phương trình $(x^2-6x+12)f(x-1)=-5$ có 2 nghiệm phân biệt.

Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ. Phương trình $f(1-f(x))=0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?



A. 5. **B.** 4. **C.** 7. **D.** 6.

Lời giải

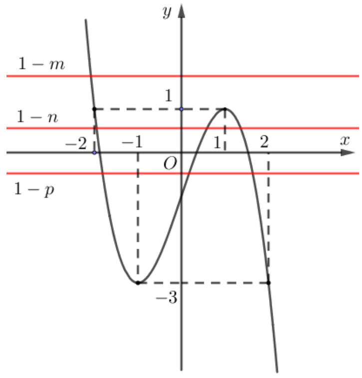
Chọn C

Từ đồ thị hàm số ta có $f(1-f(x))=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}1-f(x)=m & (-2<m<-1)\\ 1-f(x)=n & (0<n<1)\\ 1-f(x)=p & (1<p<2)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)=1-m\\ f(x)=1-n\\ f(x)=1-p\end{array}\right.$.

+) Do $-2<m<-1\Rightarrow 2<1-m<3\Rightarrow$ phương trình $f(x)=1-m$ có 1 nghiệm x_1.

+) Do $0<n<1\Rightarrow 0<1-n<1\Rightarrow$ phương trình $f(x)=1-n$ có 3 nghiệm x_2,x_3,x_4.

+) Do $1<p<2\Rightarrow -1<1-p<0\Rightarrow$ phương trình $f(x)=1-p$ có 3 nghiệm x_5,x_6,x_7.



Dễ thấy 7 nghiệm phân biệt.
Vậy phương trình đã cho có đúng 7 nghiệm phân biệt.

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$+$	||	$+$	
y	-1 ↗		$+\infty$ || $-\infty$		↗ -1

Số nghiệm của phương trình $f(x) - x^2 + 2x - 1 = 0$ là

A. vô số. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

$f(x) - x^2 + 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow f(x) = (x-1)^2$.

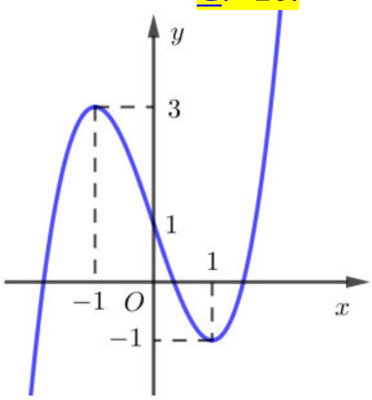
Với $x > 1$ thì $f(x) < 0$ nên phương trình vô nghiệm.

Với $x < 1$ ta có $g(x) = f(x) - x^2 + 2x - 1$. Ta có $g'(x) = f'(x) - 2x + 2 > 0$ nên hàm số $g(x)$ đồng biến và liên tục trên $(-\infty;1)$.

Lại có: $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -\infty; \lim\limits_{x \to 1^-} g(x) = +\infty$ nên phương trình có 1 nghiệm duy nhất trên $(-\infty;1)$.

Câu 7. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Gọi S là tập các giá trị nguyên của m để cho phương trình $f(\sin x) = 3\sin x + m$ có nghiệm thuộc khoảng $(0;\pi)$. Tổng các phần tử của S bằng :

A. - 5. B. - 8. C. -10. D. -6.



Lời giải

Chọn C

Đặt $t = \sin x$, do $x \in (0;\pi) \Rightarrow \sin x \in (0;1] \Rightarrow t \in (0;1]$. PT đã cho trở thành $f(t) = 3t + m$

$\Leftrightarrow f(t) - 3t = m$ (*)

Đặt $g(t) = f(t) - 3t.$ Ta có: $g'(t) = f'(t) - 3$ (1)

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x)$, ta có: $\forall t \in (0;1]: f'(t) < 0$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $\forall t \in (0;1]: g'(t) < 0$.

Do đó hàm số $g(t)$ nghịch biến trên khoảng $(0;1)$.

PT (*) có nghiệm $t \in (0;1] \Leftrightarrow \min\limits_{[0;1]} g(t) \le m < \max\limits_{[0;1]} g(t) \Leftrightarrow g(1) \le m < g(0)$

$\Leftrightarrow f(1) - 3 \le m < f(0) \Leftrightarrow -4 \le m < 1$.

Vậy m nguyên là: $m = -4; -3; -2; -1; 0 \Rightarrow S = -10$.

Câu 8. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm của phương trình $f(x^2) = 0$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t = x^2$ $(t \ge 0)$.

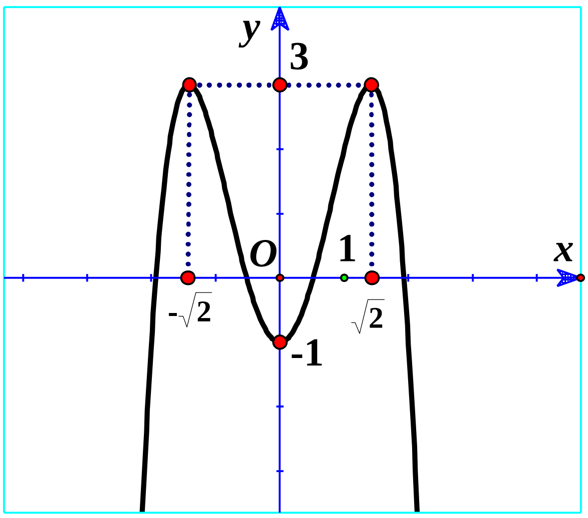
Phương trình $f(x^2) = 0$ trở thành $f(t) = 0\,(t \ge 0)$

Dựa vào đồ thị hàm số f ta thấy phương trình $f(t) = 0\,(t \ge 0) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = a > 1 \end{array}\right.$

Từ đó ta có $\left[\begin{array}{l} x^2 = 0 \\ x^2 = a > 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{a} \end{array}\right.$

Vậy phương trình $f(x^2) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.

Câu 9. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ



Tìm số nghiệm của phương trình $2f(x) - x^2 - 2x = 0$.

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 0.

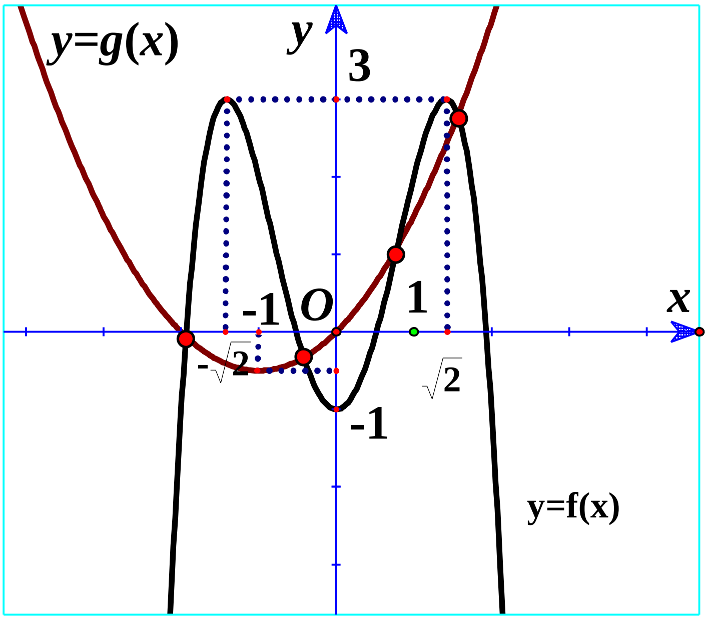
Lời giải

Chọn A

$+\ 2f(x) - x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow f(x) = \dfrac{x^2}{2} + x$.

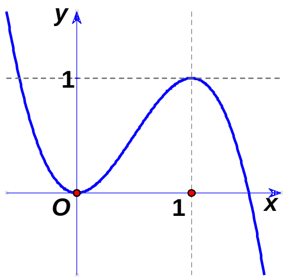
+ Xét hàm số $g(x)=\frac{x^2}{2}+x$.

+ Vẽ đồ thị hàm số $y=f(x), y=g(x)=\frac{x^2}{2}+x$ trên cùng hệ trục tọa độ ta có:



+ Dựa vào đồ thị ta có phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt.

Câu 10. Cho đồ thị hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm số nghiệm của phương trình $f(x)=x$.

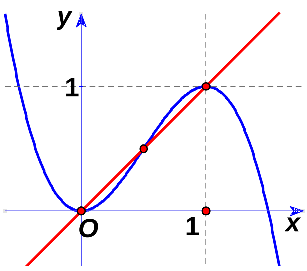


A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

Lời giải

Chọn D

Số nghiệm của phương trình $f(x)=x$ bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ và $y=x$.



Dựa và hình vẽ suy ra phương trình $f(x)=x$ có 3 nghiệm.

Câu 11. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[1;3]$ và có bảng biến thiên như sau

x	1		2		3
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	1	↗	4	↘	3

Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $f\left(x+1\right)=\dfrac{m}{x^2-4x+5}$ có nghiệm trên khoảng $\left(1;2\right)$.

A. 10. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 0.

Lời giải

Chọn B

Vì $x^2-4x+5=\left(x-2\right)^2+1>0\quad\forall x$ nên $f\left(x+1\right)=\dfrac{m}{x^2-4x+5}\Leftrightarrow\left(x^2-4x+5\right)f\left(x+1\right)=m$.

Đặt $h\left(x\right)=\left(x^2-4x+5\right)f\left(x+1\right)$, với $x\in\left(1;2\right)$.

Ta có $h'\left(x\right)=\left(x^2-4x+5\right)f'\left(x+1\right)+\left(2x-4\right)f\left(x+1\right)$.

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $y=f\left(x\right)$ ta có $\forall x\in\left(1;2\right)\Rightarrow x+1\in\left(2;3\right)\Rightarrow f'\left(x+1\right)\le 0$ và $2x-4<0,\forall x\in\left(1;2\right)$; $f\left(x+1\right)\ge 3>0, x+1\in\left(2;3\right)$. Do đó $h'\left(x\right)<0,\forall x\in\left(1;2\right)$.

Bảng biến thiên của hàm số $y=h\left(x\right)$ trên khoảng $\left(1;2\right)$.

x	1		2
$h'(x)$		$-$	
$h(x)$	$h(1)$	$\searrow$	$h(2)$

Khi đó phương trình $h\left(x\right)=m$ có nghiệm $x\in\left(1;2\right)$ khi và chỉ khi $h\left(2\right)<m<h\left(1\right)$ $\Leftrightarrow 1.f\left(3\right)<m<2f\left(2\right)\Leftrightarrow 3<m<8$. Do đó có 4 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Dạng 7: Biết đồ thị hoặc BBT của hàm số $y=f\left(x\right)$, xét các bài toán liên quan đến phương trình, bất phương trình chứa $f'\left(x\right); f''\left(x\right)$….

Câu 1. Biết rằng đồ thị hàm số $y=f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$, $\left(a,b,c,d,e\in\mathbb{R};\ a\ne 0,\ b\ne 0\right)$ cắt trục hoành Ox tại 4 điểm phân biệt. Khi đó đồ thị hàm số $g\left(x\right)=\left(f'\left(x\right)\right)^2-f''\left(x\right).f\left(x\right)$ cắt trục hoành Ox tại bao nhiêu giao điểm?

A. 6. **B.** 0. **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B

Ta có $g\left(x\right)=\left(f'\left(x\right)\right)^2-f''\left(x\right).f\left(x\right)$

Đồ thị hàm số $y=f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt nên phương trình $f\left(x\right)=a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)\left(x-x_3\right)\left(x-x_4\right)$, với $x_i, i=1,2,3,4$ là các nghiệm.

Suy ra

$$f'\left(x\right)=a[\left(x-x_2\right)\left(x-x_3\right)\left(x-x_4\right)+\left(x-x_1\right)\left(x-x_3\right)\left(x-x_4\right)$$
$$+\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)\left(x-x_4\right)+\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)\left(x-x_3\right)]$$

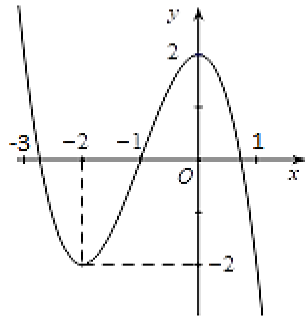
$$\Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{x-x_1}+\frac{1}{x-x_2}+\frac{1}{x-x_3}+\frac{1}{x-x_4} \Rightarrow \left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)'=\left(\frac{1}{x-x_1}+\frac{1}{x-x_2}+\frac{1}{x-x_3}+\frac{1}{x-x_4}\right)'$$

$$\Leftrightarrow \frac{f''(x)f(x)-\left(f'(x)\right)^2}{f^2(x)}=-\left(\left(\frac{1}{x-x_1}\right)^2+\left(\frac{1}{x-x_2}\right)^2+\left(\frac{1}{x-x_3}\right)^2+\left(\frac{1}{x-x_4}\right)^2\right)$$

Nếu $x=x_i$ với $i=1,2,3,4$ thì $f(x)=0$, $f'(x)\neq 0$ $\Rightarrow f''(x)f(x)<\left(f'(x)\right)^2$.

Nếu $x\neq x_i\ (\forall i=1,2,3,4)$ thì $\frac{1}{(x-x_i)^2}>0$, $f^2(x)>0$. Suy ra $f''(x).f(x)-\left(f'(x)\right)^2<0$ $\Leftrightarrow f''(x).f(x)<\left(f'(x)\right)^2$. Vậy phương trình $\left(f'(x)\right)^2-f''(x).f(x)=0$ vô nghiệm hay phương trình $g(x)=0$ vô nghiệm. Do đó, số giao điểm của đồ thị hàm số và trục hoành là 0.

Câu 2. Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị là hình vẽ dưới đây.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của m trong khoảng $(-2020;2020)$ để bất phương trình $f'(x)\sqrt{-2x-x^2}<m$ có nghiệm?

A. 2020. **B.** 2019. **C.** 2022. **D.** 2018.

Lời giải

Chọn B

Đặt $g(x)=f'(x)\sqrt{-2x-x^2}$ Ta có tập xác định của hàm số $y=g(x)$ là $D=[-2;0]$

Từ đồ thị ta thấy trên khoảng $(-2;0)$ hàm số $y=f(x)$ đồng biến và hàm số đạt cực đại tại $x=0$, đạt cực tiểu tại $x=-2$.

Suy ra $\begin{cases} f'(x)\geq 0\ \forall x\in[-2;0] \\ f'(-2)=f'(0)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g(x)\geq 0\ \forall x\in[-2;0] \\ g(-2)=g(0)=0 \end{cases} \Rightarrow \min\limits_{[-2;0]} g(x)=0$

Vậy bất phương trình $f'(x)\sqrt{-2x-x^2}<m$ có nghiệm $\Leftrightarrow m>\min\limits_{[-2;0]} g(x)\Leftrightarrow m>0$

Kết hợp $m\in(-2020;2020)$ suy ra có 2019 số nguyên thỏa mãn yêu cầu bài toán. Đáp án B

Câu 3. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-3	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

Đặt $g(x)=f\left(x+\frac{1}{x}\right)$. Bất phương trình $g'(x)<0$ có tập nghiệm là

A. $(-\infty;-1)\cup(0;1)$ **B.** $(-2;0)$. **C.** $(0;2)$. **D.** $(-1;0)\cup(1;+\infty)$

Lời giải

Chọn D

Ta có $g'(x)=\left(1-\frac{1}{x^2}\right)f'\left(x+\frac{1}{x}\right)$.

$$\Rightarrow g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}1-\frac{1}{x^2}=0\\ f'\left(x+\frac{1}{x}\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pm1\\ x+\frac{1}{x}\in\{-2;0;2\}\end{array}\right.$$

Với $x+\frac{1}{x}=-2\Rightarrow(x+1)^2=0\Leftrightarrow x=-1$ (nghiệm bội chẵn).

Với $x+\frac{1}{x}=2\Rightarrow(x-1)^2=0\Leftrightarrow x=1$ (nghiệm bội chẵn).

Với $x+\frac{1}{x}=0\Rightarrow$ phương trình vô nghiệm. $(-1;0)\cup(1;+\infty)$

Nhận xét với $x>0\Rightarrow x+\frac{1}{x}\geq2\Rightarrow f'\left(x+\frac{1}{x}\right)<0$.

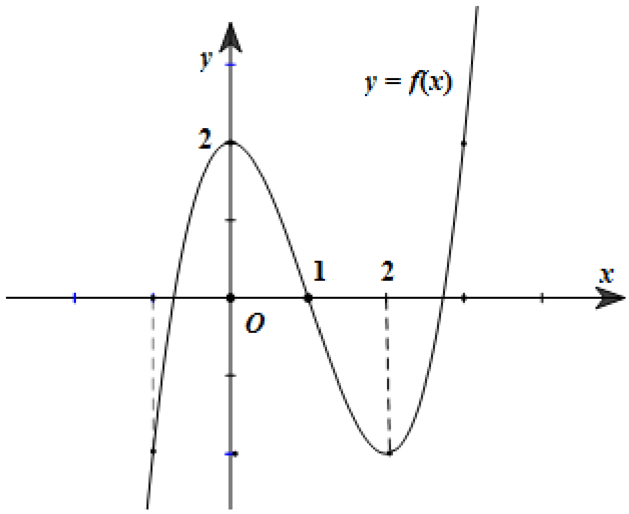
Với $x<0\Rightarrow x+\frac{1}{x}\leq-2\Rightarrow f'\left(x+\frac{1}{x}\right)>0.$

Ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	$\|$	$+$	0	$-$	

Từ bảng xét dấu suy ra bất phương trình $g'(x)<0$ có tập nghiệm là $(-1;0)\cup(1;+\infty)$.

Câu 4. Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Tìm số nghiệm tối đa của phương trình $|f'(x)|=m$ với m là tham số thực.

A. 2. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 7.

Lời giải

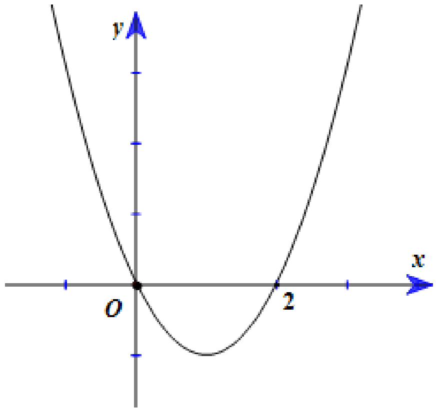
Chọn B

Từ đồ thị hàm số $y=f(x)$ ta suy ra:

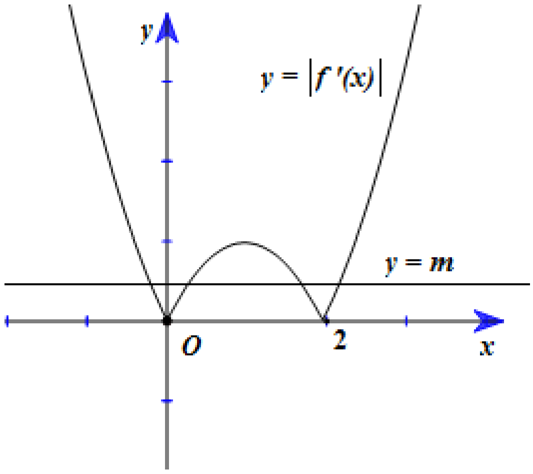
+ $f'(x)=0$ có hai nghiệm là $x=0;x=2$

+ Hệ số của x^3 trong biểu thức của hàm số $y=f(x)$ mang dấu dương

Do đó đồ thị hàm số $y=f'(x)$ phải có dạng:

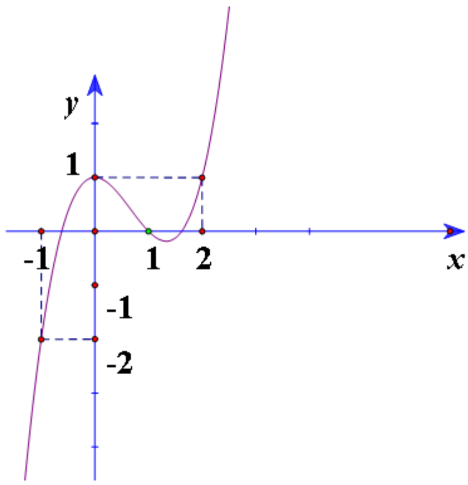


Suy ra đồ thị hàm số $y=\left|f'\left(x\right)\right|$ có dạng:



Từ đồ thị, ta thấy đường thẳng $y=m$ có tối đa 4 điểm chung với đồ thị hàm số $y=\left|f'\left(x\right)\right|$ nên phương trình có tối đa 4 nghiệm.

Câu 5. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



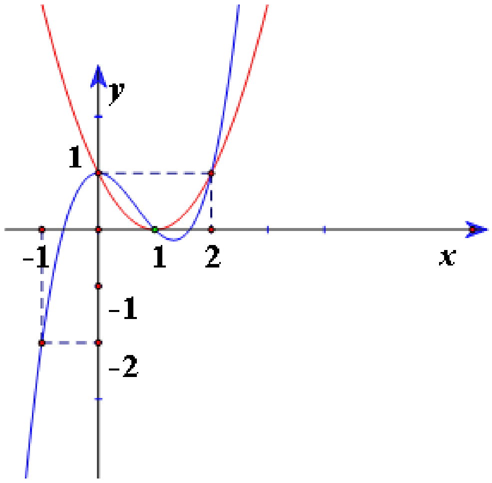
Cho hàm số $g(x)=f(x)-\dfrac{x^3}{3}+x^2-x+2$, phương trình $g'\left(x\right)=0$ có số nghiệm là?

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

Lời giải

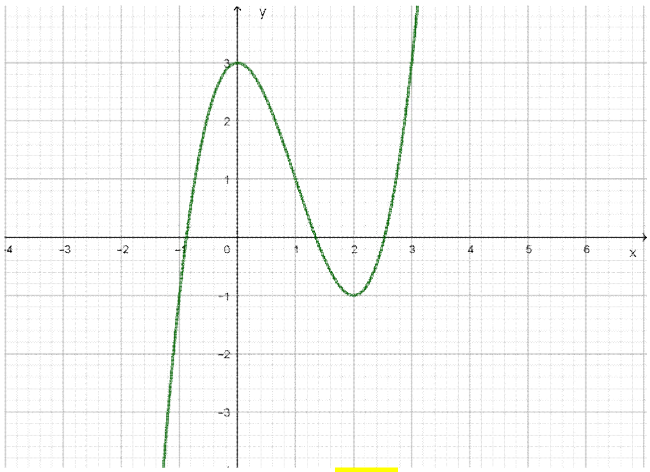
Chọn C

Ta có hàm số $g(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và $g'(x)=f'(x)-(x-1)^2$ do đó số nghiệm của phương trình $g'(x)=0$ bằng số giao điểm của hai đồ thị $y=f'(x)$ và $y=(x-1)^2$.



Từ đồ thị suy ra $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=2 \end{array}\right.$. Vậy phương trình $g'(x)=0$ có 3 nghiệm. Đáp án **C.**

Câu 6. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên tập R và có đồ thị như hình bên. Đặt $g(x)=f(f(x))$. Xác đinh số nghiệm của phương trình $g'(x)=0$.



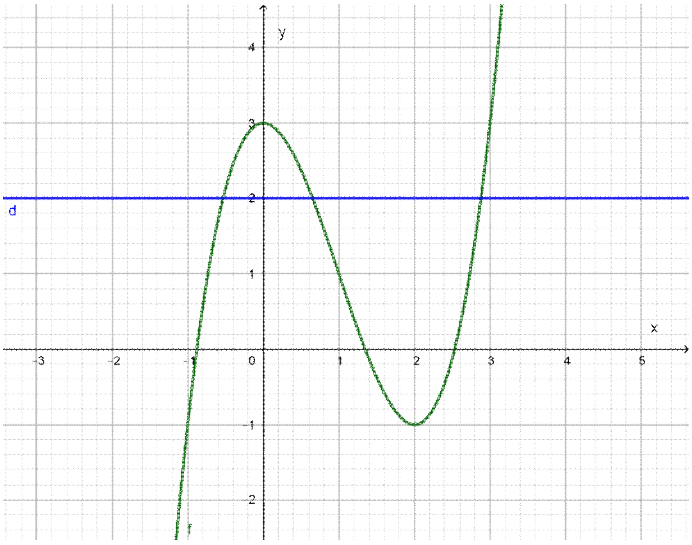
A. 5. **B.** 6. **C.** 8. **D.** 10.

Lời giải

Chọn C

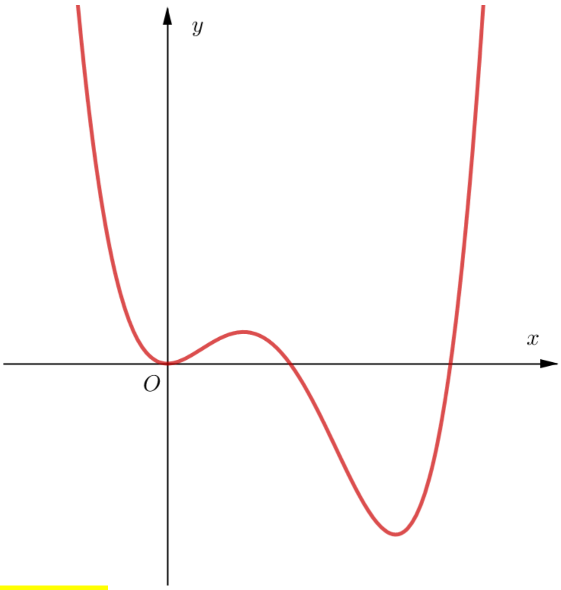
Ta có $g'(x)=\left(f\left(f(x)\right)\right)'=f'(x).f'\left(f(x)\right)$ nên:

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x).f'\left(f(x)\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x)=0 \\ f'\left(f(x)\right)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \\ f(x)=0\,(1) \\ f(x)=2\,(2) \end{array}\right.$$



PT (1) có ba nghiệm khác 0 và 2
PT (2) có ba nghiệm khác 0 và 2
Vậy số nghiệm của phương trình $g'(x)=0$ là 8 nghiệm.

Câu 7. Cho hàm số $y=f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e,(a\neq 0)$ có đồ thị như hình vẽ. Biết $-2<f''\left(-\dfrac{b}{4a}\right)<-1$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-8;2019]$ để phương trình $f''(x)\left[f''(x)-m\right]=0$ có bốn nghiệm phân biệt?



A. 2022. **B.** 2020. **C.** 2019. **D.** 2021.

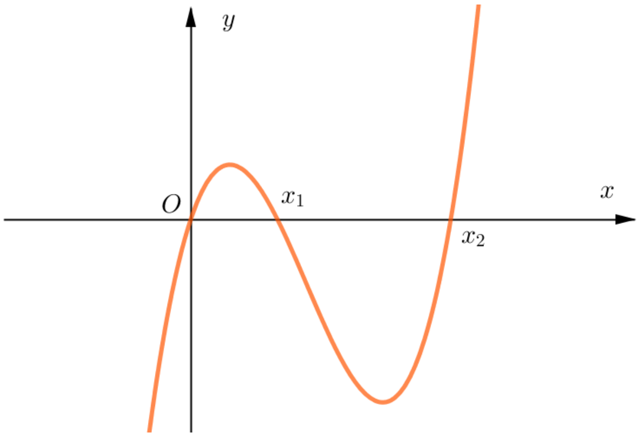
Lời giải

Chọn B

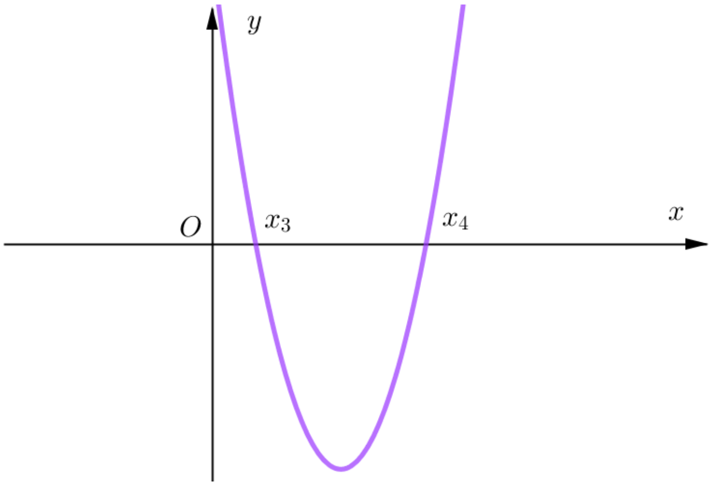
Từ đồ thị suy ra $a>0$ và hàm số $y=f(x)$ có 3 điểm cực trị là $0,x_1,x_2$. Do vậy, phương trình $y'=0$ có 3 nghiệm phân biệt là $0,x_1,x_2$.

Ta có $y'=f'(x)=4ax^3+3bx^2+2cx+d \Rightarrow y''=f''(x)=12ax^2+6bx+2c$.

Đồ thị hàm số $y'=f'(x)$ có dạng sau:



Từ đồ thị hàm số $y' = f'(x)$ suy ra phương trình $f''(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt x_3, x_4 nên đồ thị hàm số $y'' = f''(x)$ là một parabol có dạng sau:



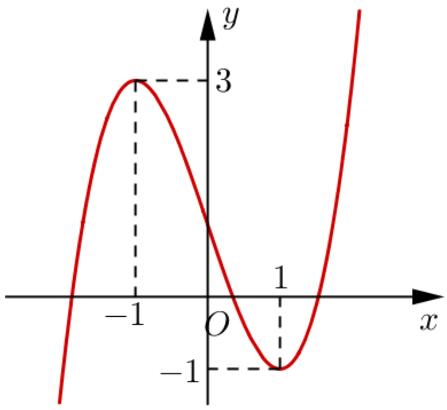
Ta có $f''(x)\left[f''(x) - m\right] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f''(x) = 0 \\ f''(x) = m \end{array}\right.$.

Phương trình $f''(x)\left[f''(x) - m\right] = 0$ có bốn nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình $f''(x) = m$ có hai nghiệm phân biệt khác x_3, x_4 $\Leftrightarrow$ parabol $y'' = f''(x)$ cắt đường thẳng $y = m$ tại hai điểm phân biệt có hoành độ khác x_3, x_4.

Tung độ đỉnh của parabol $y'' = f''(x)$ là $f''\left(-\frac{b}{4a}\right)$ nên phương trình $f''(x) = m$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m > f''\left(-\frac{b}{4a}\right), (m \neq 0)$ mà $-2 < f''\left(-\frac{b}{4a}\right) < -1$ và m nguyên thuộc $\left[-8; 2019\right]$ nên $-1 \le m \le 2019, (m \neq 0)$

Vậy có 2020 giá trị của m thỏa mãn bài toán.

Câu 8. Cho hàm đa thức bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên dưới. Hỏi phương trình $f'\left(f(x)\right) = 0$ có bao nhiêu nghiệm?



A. 4. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 6.

Lời giải

Chọn B

Đặt $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$.

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$.

Dựa vào đồ thị ta có:

$$\begin{cases} f(-1)=3 \\ f(1)=-1 \\ f'(-1)=0 \\ f'(1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a+b-c+d=3 \\ a+b+c+d=-1 \\ 3a-2b+c=0 \\ 3a+2b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=0 \\ c=-3 \\ d=1 \end{cases}.$$

Suy ra $f(x)=x^3-3x+1$.

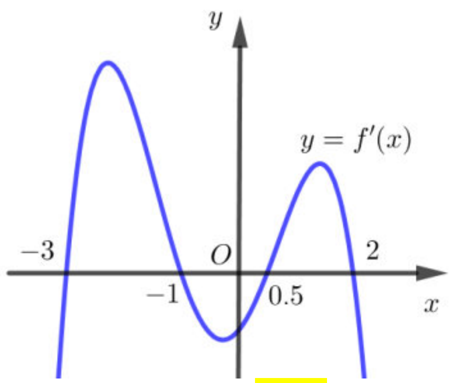
Ta có

$$f'(f(x))=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=-1 \\ f(x)=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x^3-3x+1=-1 & (1) \\ x^3-3x+1=1 & (2) \end{array}\right..$$

Dựa vào độ thị hàm số ta suy ra phương trình (1) có 2 nghiệm và phương trình (2) có 3 nghiệm. Các nghiệm của 2 phương trình này không trùng nhau. Do đó phương trình $f'(f(x))=0$ có 5 nghiệm.

Dạng 8: Biết đồ thị hoặc BBT của hàm số $y=f'(x)$, xét các bài toán liên quan đến phương trình có dạng $f(x)=0$; $f(u(x))=0$; $f(x)=g(x)$; $f(u(x))=g(v(x))$ ….

Câu 1. Cho hàm số $f(x)=ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex-m$ với $a,b,c,d,e,m\in\mathbb{R}$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ (đồ thị của $y=f'(x)$ cắt Ox tại 4 điểm có hoành độ -3; -1; $0{,}5$ và 2). Hỏi phương trình $f(x)=-m$ có mấy nghiệm phân biệt.



A. 3. **B.** 1. **C.** 5. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Từ đồ thị ta có

$f'(x)=a(x+3)(x+1)(2x-1)(x-2)=a\left(2x^4+3x^3-12x^2-7x+6\right)$.

$\Rightarrow f(x)=\int a\left(2x^4+3x^3-12x^2-7x+6\right)dx=a\left(\frac{2}{5}x^5+\frac{3}{4}x^4-4x^3-\frac{7}{2}x^2+6x\right)-m$.

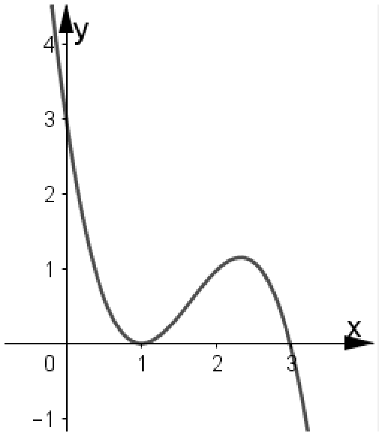
Giải phương trình :

$$f(x)=-m\Leftrightarrow \frac{2}{5}x^5+\frac{3}{4}x^4-4x^3-\frac{7}{2}x^2+6x=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\ \frac{2}{5}x^4+\frac{3}{4}x^3-4x^2-\frac{7}{2}x+6=0\ (1)\end{array}\right..$$

Ta thấy phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt khác 0.

Vậy phương trình đã cho có 5 nghiệm phân biệt.

Câu 2. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, $f(3)<0$ và đồ thị hàm số $y=f'(x)$ được cho như hình vẽ bên dưới



Phương trình $f(x)=0$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

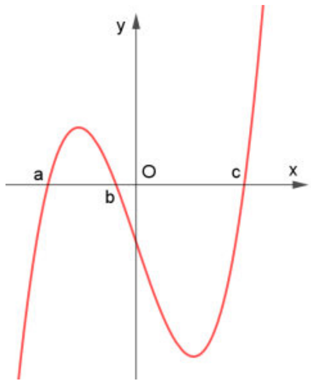
Chọn A

Từ đồ thị hàm số đã cho, ta có bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$:

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$			$y(3)$	$\searrow$	$-\infty$

Qua BBT và $f(3)<0$ ta thấy phương trình $f(x)=0$ vô nghiệm.

Câu 3. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ, biết $f(a)=0$. Phương trình $f(x)=0$ có bao nhiêu nghiệm?



A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B

Xét $S_1 = \int\limits_a^b f'(x)dx = f(x)\Big|_a^b = f(b) - f(a)$.

$S_2 = -\int\limits_b^c f'(x)dx = -f(x)\Big|_b^c = f(b) - f(c)$.

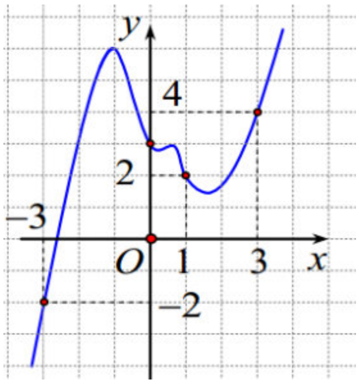
Vì $S_1 < S_2 \Rightarrow f(b) - f(a) < f(b) - f(c) \Rightarrow f(a) > f(c)$.

Dựa vào đồ thị của hàm số $f'(x)$, ta có bảng biến thiên của hàm $f(x)$ như sau:

x		a		b		c	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$f(a)$	$\nearrow$	$f(b)$	$\searrow$	$f(c)$	$\nearrow$

Vì $f(a) = 0$ do đó từ bảng biến thiên ta có phương trình $f(x) = 0$ có đúng 3 nghiệm.

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[-3;\ 3]$ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên. Biết $f(1) = 6$ và $g(x) = f(x) - \dfrac{(x+1)^2}{2}$. Kết luận nào sau đây là đúng?



A. Phương trình $g(x) = 0$ có đúng hai nghiệm thuộc $[-3;3]$.

B. Phương trình $g(x) = 0$ có đúng một nghiệm thuộc $[-3;3]$.

C. Phương trình $g(x) = 0$ không có nghiệm thuộc $[-3;3]$.

D. Phương trình $g(x) = 0$ có đúng ba nghiệm thuộc $[-3;3]$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $g'(x) = f'(x) - (x+1)$.

Ta thấy đường thẳng $y = x+1$ là đường thẳng đi qua các điểm $(-3;-2), (1;2), (3;4)$.

Do $f(1) = 6 \Rightarrow g(1) = 4$.

Từ hình vẽ ta thấy:

$\int\limits_{-3}^{1} f'(x)\mathrm{d}x > 6 \Rightarrow f(1) - f(-3) > 6 \Rightarrow f(-3) < 0 \Rightarrow g(-3) = f(-3) - 2 < 0$.

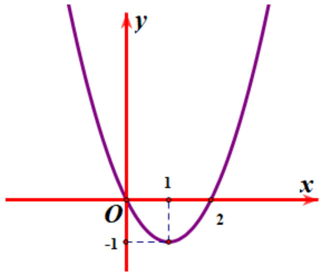
$\int\limits_{1}^{3} f'(x)\mathrm{d}x > 2 \Rightarrow f(3) - f(1) > 6 \Rightarrow f(3) > 8 \Rightarrow g(3) = f(3) - 8 > 0$.

Từ đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và đường thẳng $y = x+1$ cùng với các kết quả trên ta có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$	-3		1		3	$+\infty$
$g'(x)$		||	$+$	0	$-$	||	
$g(x)$		$g(-3)$	$\nearrow$	4	$\searrow$	$g(3)$	

Từ bảng biến thiên ta có phương trình $g(x) = 0$ có đúng một nghiệm thuộc $[-3;3]$.

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x) = a.x^3 + b.x^2 + c.x + d$ với $a,b,c,d \in \mathbb{R}$, có đồ thị $y = f'(x)$ như hình dưới đây



Biết $f(0) = 0$. Khi đó số nghiệm của phương trình $f(x^2 - x) = 0$ là:

A. 2. **B.** 4.
C. 3. **D.** 6.

Lời giải:

Chọn B

***Cách 1:** Từ đồ thị ta có BBT sau:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	-	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	**0**	$\searrow$	$f(2)$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ BBT ta có $f(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = a > 2 \end{array}\right.$

Do đó $f(x^2 - x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - x = 0\ (1) \\ x^2 - x = a\ (2) \end{array}\right.$

Ta có (1) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right.$

(2) $\Leftrightarrow x^2 - x - a = 0$, có $\Delta = 1 + 4a > 0, \forall a > 2$ nên (2) luôn có 2 nghiệm phân biệt khác 0 và 1

Vậy PT $f(x^2 - x) = 0$ có 4 nghiệm phân biệt.

***Cách 2:** Từ đồ thị ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$

Đặt $g(x) = f(x^2 - x)$

Ta có $g'(x) = \left[f(x^2 - x)\right]' = (2x-1)f'(x^2 - x)$

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-1=0 \\ f'\left(x^2-x\right)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in \left\{-1;0;\frac{1}{2};1;2\right\}$$

BBT:

x	$-\infty$		-1		0		$\frac{1}{2}$		1		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$g(-1)$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$g\left(\frac{1}{2}\right)$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$g(2)$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ BBT ta thấy phương trình $g(x)=f\left(x^2-x\right)=0$ có 4 nghiệm phân biệt.

***Cách 3:** Từ GT ta có $f'(x)=3ax^2+2bx+c$. Từ đồ thị ta có $f'(0)=0 \Rightarrow c=0$;

$f'(2)=0 \Rightarrow 12a+4b+c=0 \Rightarrow 3a+b=0$ (1)

Lại có $f'(1)=-1$ nên $3a+2b=-1$ (2) Từ (1), (2) ta có $a=\frac{1}{3}; b=-1$

Do đó $f'(x)=x^2-2x \Rightarrow f(x)=\int\left(x^2-2x\right)dx=\frac{x^3}{3}-x^2+C$

Lại có $f(0)=0 \Rightarrow C=0$ do đó $f(x)=\frac{x^3}{3}-x^2$

Ta có $f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{x^3}{3}-x^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=3 \end{array}\right.$

Khi đó $f\left(x^2-x\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-x=0 \\ x^2-x=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0; x=1 \\ x=\frac{1 \pm \sqrt{13}}{2} \end{array}\right.$ có 4 nghiệm.

Câu 6. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới đây.

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	5	$\searrow$	$-\infty$

Phương trình $f\left(4x-x^2\right)=-\frac{1}{3}x^3+3x^2-8x+3$ có bao nhiêu nghiệm thực trên khoảng $(0;4)$?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 6.

Lời giải

Chọn A

$g(x)=f\left(4x-x^2\right)+\frac{1}{3}x^3-3x^2+8x-3$

$g'(x)=(4-2x)f'\left(4x-x^2\right)+x^2-6x+8=(2-x)\left[2f'\left(4x-x^2\right)+4-x\right]$.

Với $x \in (0;4)$ thì $4-x>0$; $0<4x-x^2 \le 4$ nên $f'\left(4x-x^2\right) \ge 0$.

Suy ra $2f'\left(4x-x^2\right)+4-x>0$, $\forall x \in (0;4)$.

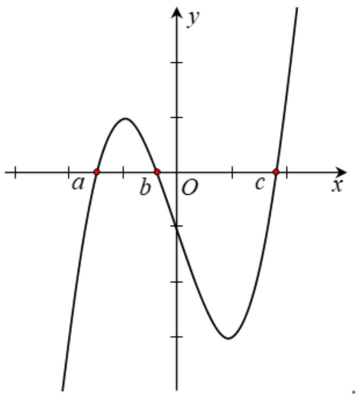
Bảng biến thiên

x	0		2		4
g'		$+$	0	$-$	
g	$g(0)$	↗	$g(2)$	↘	$g(4)$

$g(2)=f(4)+\dfrac{11}{3}=\dfrac{26}{3}$; $\quad g(0)=f(0)-3=-6$; $\quad g(4)=f(0)+\dfrac{7}{3}=-\dfrac{2}{3}$.

Suy ra phương trình $f\left(4x-x^2\right)=-\dfrac{1}{3}x^3+3x^2-8x+3$ có hai nghiệm thực trên khoảng $(0;4)$.

Câu 7. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình bên. Biết $f(a)>0$, hỏi đồ thị hàm số $y=f(x)$ có thể cắt trục hoành tại nhiều nhất bao nhiêu điểm?



A. 4 điểm. **B.** 2 điểm. **C.** 1 điểm. **D.** 3 điểm.

Lời giải

Chọn B

.

Theo hình vẽ ta có: $\int\limits_a^c f'(x)\mathrm{d}x=f(c)-f(a)<0 \Leftrightarrow f(c)<f(a)$.

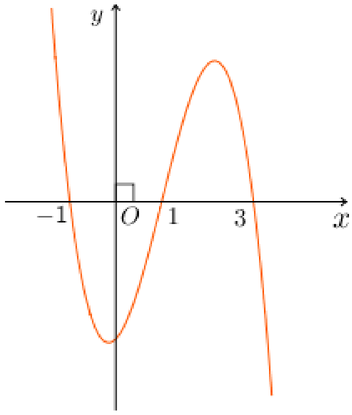
Từ đó, ta có thể lập được bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		a		b		c		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	0	+	
y	$+\infty$	↘	$f(a)>0$	↗	$f(b)>0$	↘	$f(c)$	↗	$+\infty$

.

Vậy đồ thị hàm số $y=f(x)$ có thể cắt trục hoành tại nhiều nhất 2 điểm.

Câu 8. Cho hàm số bậc $y=f(x)$ thỏa mãn $f(-1)=f(3)=0$, $f(1)=-1$ và đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ có dạng như hình dưới đây. Phương trình $\left(f(x)\right)^3=f(1)$ có bao nhiêu nghiệm thực



A. 1. **B.** 2 . **C.** 3 . **D.** 4 .

Lời giải

Chọn C

Từ đồ thị và giả thiết, ta có bảng biến thiên của $y = f\left(x\right)$:

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	0	↘	$f(1)$	↗	0	↘	

Xét hàm số $y = \left(f\left(x\right)\right)^3$ ta có $y' = \left(\left(f\left(x\right)\right)^3\right)' = 3\left[f\left(x\right)\right]^2.f'\left(x\right)$.

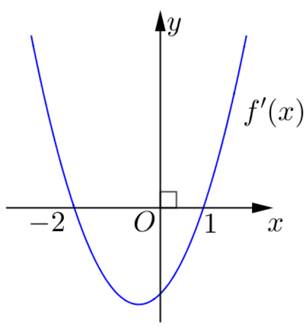
Ta có bảng biến thiên của hàm số $y = \left(f\left(x\right)\right)^3$:

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$-$		$-$		$-$		$-$	
$2.\left[f\left(x\right)\right]^2.f'\left(x\right)$		$+$		$-$		$+$		$-$	
$y = \left(f\left(x\right)\right)^3$		↗	0	↘	$\left(f\left(1\right)\right)^3$	↗	0	↘	

Do $\left(f\left(1\right)\right)^3 = f\left(1\right) = -1$

Vậy phương trình $\left(f\left(x\right)\right)^3 = f\left(1\right)$ có 3 nghiệm phân biệt

Câu 9. Cho hàm số $f\left(x\right) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $\left(a,b,c,d \in \mathbb{R}\right)$. Đồ thị hàm số $f'\left(x\right)$ như sau:



và $2018f(1)=2019f(0)$. Hỏi tập nghiệm của phương trình $f(x)=f'(x)$ có số phần tử là?

A. 4. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f'(x)=3ax^2+2bx+c$

Dựa vào đồ thị ta có $f'(x)=3a(x+2)(x-1)=3a\left(x^2+x-2\right)$ và $a\neq 0$

Suy ra $f(x)=a\left(x^3+\frac{3}{2}x^2-6x\right)+d$

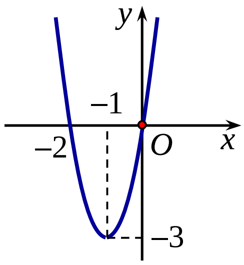
Theo đề bài $2018f(1)=2019f(0)\Leftrightarrow 2018\left(-\frac{7a}{2}+d\right)=2019d\Leftrightarrow d=-7063a$.

Vậy ta có $f(x)=f'(x)$

$\Leftrightarrow a\left(x^3+\frac{3}{2}x^2-6x\right)-7063a=3a\left(x^2+x-2\right)$

$\Leftrightarrow x^3-\frac{3}{2}x^2-9x-7057=0$. Vậy phương trình có 1 nghiệm.

Câu 10. Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đạo hàm là hàm số $y=f'(x)$ với đồ thị như hình vẽ sau đây:



Biết rằng đồ thị hàm số $y=f(x)$ tiếp xúc với trục hoành tại điểm có hoành độ âm. Hỏi phương trình $f(|x|-3)=0$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 4. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Dựa vào dữ kiện của bài toán ta có bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$f(0)$	$\nearrow$	$+\infty$

Suy ra phương trình $f(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt $x=-2$ và $x=x_0$ với $x_0\in(0;+\infty)$.

Do đó $f(|x|-3)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}|x|-3=-2\\|x|-3=x_0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}|x|=1\\|x|=3+x_0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pm1\\x=\pm(3+x_0)\end{array}\right.$.

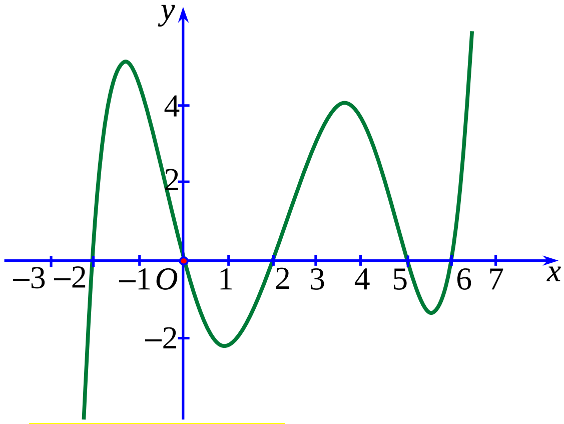
Vậy phương trình $f(|x|-3)=0$ có 4 nghiệm phân biệt.

(CÒN TIẾP PHẦN CUỐI)

CÁC DẠNG TOÁN VỀ HÀM ẨN LIÊN QUAN ĐẾN BÀI TOÁN XÉT SỰ TƯƠNG GIAO CỦA ĐỒ THỊ CÁC HÀM SỐ (PHẦN CUỐI: TỪ DẠNG 9-12)

Dạng 9: Biết đồ thị hoặc BBT của hàm số $y = f'(x)$, xét các bài toán liên quan đến phương trình có dạng $f(x) = m;\ f(u(x)) = m;\ f(x) = g(m);\ f(u(x)) = g(m)$ ...

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên. Tìm điều kiện của m để phương trình $f(x) = m$ có nghiệm $x \in [-2;6]$?

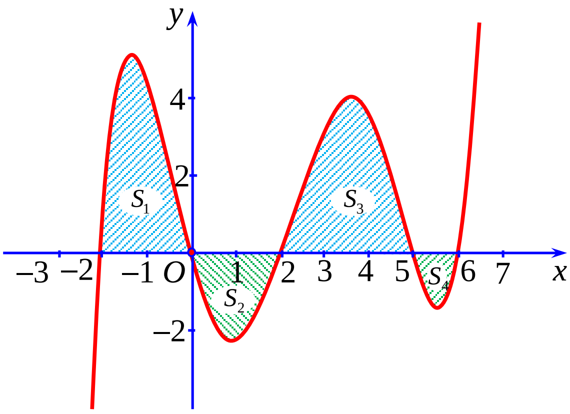


A. $f(-2) \le m \le f(0)$. **B.** $f(-2) \le m \le f(5)$.

C. $f(5) \le m \le f(6)$. **D.** $f(0) \le m \le f(2)$.

Lời giải

Chọn B.



Gọi S_1, S_2, S_3, S_4 lần lượt là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f'(x)$ với và trục hoành.

Quan sát hình vẽ, ta có

◈ $\int_{-2}^{0} f'(x)\mathrm{d}x > \int_{0}^{2} -f'(x)\mathrm{d}x \Leftrightarrow f(x)\Big|_{-2}^{0} > f(x)\Big|_{2}^{0}$

$\Leftrightarrow f(0) - f(-2) > f(0) - f(2) \Leftrightarrow f(-2) < f(2)$

◈ $\int_{0}^{2} -f'(x)\mathrm{d}x < \int_{2}^{5} f'(x)\mathrm{d}x \Leftrightarrow f(x)\Big|_{2}^{0} < f(x)\Big|_{2}^{5}$

$\Leftrightarrow f(0) - f(2) < f(5) - f(2) \Leftrightarrow f(0) < f(5)$

◈ $\int_{2}^{5} f'(x)\mathrm{d}x > \int_{5}^{6} -f'(x)\mathrm{d}x \Leftrightarrow f(x)\Big|_{2}^{5} > f(x)\Big|_{6}^{5}$

$\Leftrightarrow f(5) - f(2) > f(5) - f(6) \Leftrightarrow f(2) < f(6)$

Ta có bảng biến thiên

x	-2		0		2		5		6
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0
$f(x)$	$f(-2)$	$\nearrow$	$f(0)$	$\searrow$	$f(2)$	$\nearrow$	$f(5)$	$\searrow$	$f(6)$

Dựa vào bảng biến thiên, yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow f(-2) \le m \le f(5)$.

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		1		4		$-\infty$
$f'(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Phương trình $f(x) - \cos \pi x - 2m = 0$ có nghiệm $x_o \in (2;3)$ khi và chỉ khi

A. $\frac{1}{2} f(2) \le m \le \frac{1}{2} f(3)$. **B.** $\frac{1}{2} f(3) < m < \frac{1}{2} f(2)$.

C. $\frac{1}{2} f(2) < m < \frac{1}{2} f(3)$. **D.** $\frac{1}{2} f(3) \le m \le \frac{1}{2} f(2)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $2m = f(x) - \cos \pi x$

Xét hàm số $g(x) = f(x) - \cos \pi x, \forall x \in (2;3)$.

Ta có $g'(x) = f'(x) + \pi \sin \pi x$.

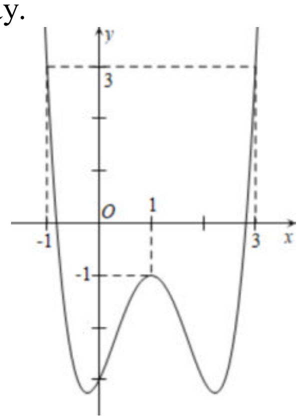
Do $(2;3) \subset (1;4)$ nên từ bảng biến thiên ta thấy $f'(x) > 0, \forall x \in (2;3)$.

Mặt khác $x \in (2;3) \Rightarrow \pi x \in (2\pi; 3\pi) \Rightarrow \sin \pi x > 0$.

Vậy $g'(x) = f'(x) + \pi \sin \pi x > 0, \forall x \in (2;3)$.

Bảng biến thiên của hàm số $g(x)$

Câu 3. Cho $f(x)$ là hàm số đa thức bậc 5, có $f(1) = 0$ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ đối xứng qua đường thẳng $x = 1$ như hình dưới đây.



Biết phương trình $f(x+1) = m$ có nghiệm $x \in [-1;1]$ khi và chỉ khi $m \in [a;b]$. Khi đó $a + b$ bằng

A. $-\frac{1}{5}$. **B.** $\frac{1}{5}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** 0.

Lời giải

Chọn D

Từ đồ thị (C) đã cho của hàm số $y=f'(x)$ ta suy ra được đồ thị (C’) của hàm số $y=f'(x+1)$ bằng cách tịnh tiến (C) sang trái 1 đơn vị. Khi đó (C’) đối xứng qua trục Oy và do nó là đồ thị hàm đa thức bậc 4, nên (C’) là đồ thị hàm số trùng phương dạng $y=ax^4+bx^2+c$. Ta có (C’) lần

lượt đi qua các điểm $(0;-1)$; $(2;\ 3)$; $(-1;\ -3)$ nên lập hệ giải ra ta được $y=x^4-3x^2-1$.

Suy ra $f'(x+1)=x^4-3x^2-1$ từ đó $f(x+1)=\dfrac{x^5}{5}-x^3-x+C$. Lại có $f(1)=0$ nên $C=0$.

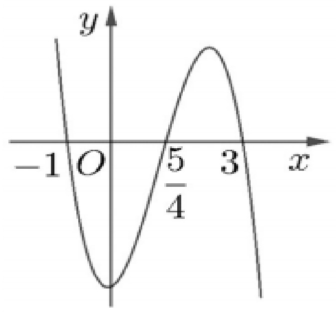
Vậy $f(x+1)=\dfrac{x^5}{5}-x^3-x$.

Ta thấy $f'(x+1)=x^4-3x^2-1<0\ \forall x\in[-1;1]$ nên hàm số $f(x+1)=g(x)=\dfrac{x^5}{5}-x^3-x$ nghịch biến trên đoạn $[-1;1]$. Do đó phương trình $f(x+1)=m$ có nghiệm $x\in[-1;1]$ khi và chỉ khi $m\in[\,g(1);\ g(-1)]$ hay $m\in\left[-\dfrac{9}{5};\dfrac{9}{5}\right]$ suy ra $a=-\dfrac{9}{5}$; $b=\dfrac{9}{5}\Rightarrow a+b=0$.

x	2	3
$g'(x)$	$+$	
$g(x)$	$g(2)$ $\nearrow$	$g(3)$

Vậy $g(2)<2m<g(3)\Leftrightarrow f(2)+\sin 2\pi<2m<f(3)+\sin 3\pi\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}f(2)<m<\dfrac{1}{2}f(3)$.

Câu 4. Cho hàm số $h(x)=mx^4+nx^3+px^2+qx\ \ (m,n,p,q\in\mathbb{R})$. Hàm số $y=h'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên



Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $h(x)=m^2+m$ có hai ngiệm phân biệt?

A. 2. **B.** 10. **C.** 71. **D.** 2022.

Lời giải

Chọn B

Dựa vào đồ thị có $h'(x)=0$ có 3 nghiệm phân biệt nên $m\neq 0$ và $m<0$

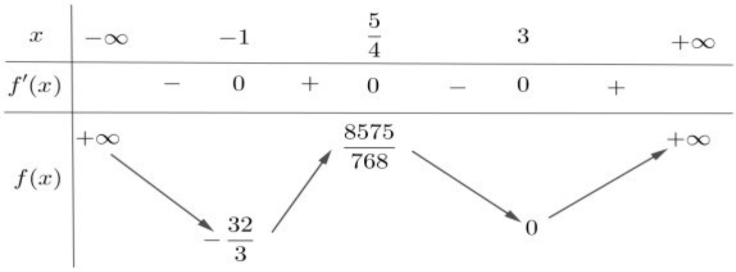
Ta có $h'(x)=4mx^3+3nx^2+2px+q$. Mặt khác dựa vào đồ thị $y=h'(x)$ suy ra $h'(x)=4m(x+1)\left(x-\dfrac{5}{4}\right)(x-3)=4m\left(x^3-\dfrac{13}{4}x^2-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{15}{4}\right)$.

Đồng nhất hệ số ta có: $n=-\dfrac{13m}{3}$, $p=-m$, $q=15m$.

Xét phương trình $h(x)=m^2+m\Leftrightarrow mx^4+nx^3+px^2+qx=m^2+m$

$\Leftrightarrow x^4-\dfrac{13}{3}x^3-x^2+15x=m+1$. Đặt $f(x)=x^4-\dfrac{13}{3}x^3-x^2+15x$.

Bảng biến thiên:

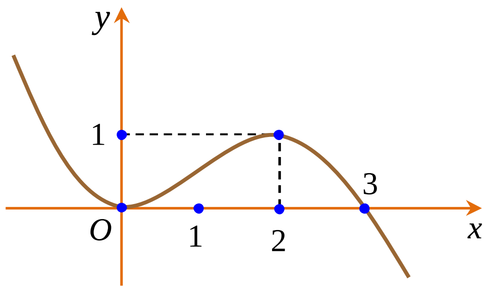


Dựa vào bảng biến thiên ta có để phương trình $h(x) = m^2 + m$ có 2 nghiệm phân biệt thì

TH 1: $\frac{-32}{3} < m+1 < 0 \Leftrightarrow \frac{-35}{3} < m < -1 \Rightarrow m \in \{-11;-10;-9;-8;-7;-6;-5;-4;-3;-2\}$.

TH 2: $m+1 > \frac{8575}{768} \Leftrightarrow m > \frac{7807}{768}$ (loại vì $m<0$). Vậy ta có 10 giá trị m thỏa mãn.

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ với $(a,b,c,d,e \in \mathbb{R})$. Biết hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ, đạt cực trị tại điểm $O(0;0)$ và cắt truc hoành tại $A(3;0)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m trên $[-5;5]$ để phương trình $f(-x^2+2x+m) = e$ có bốn nghiệm phân biệt.



A. 0. **B.** 2. **C.** 5. **D.** 7.

Lời giải

Chọn B

Quan sát đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ. Ta thấy rằng đây là hàm bậc 3 qua 0 không đổi dấu và qua 3 đổi dấu 1 lần. Nên suy ra

$$f'(x) = k.x^2(x-3)\ (k<0)\ (\text{vì } \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \text{ nên } k<0\ )$$

Do $f'(2) = 1 \Rightarrow -4k = 1 \Leftrightarrow k = \frac{-1}{4} \to f'(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{4}x^2$.

Suy ra $f(x) = \frac{-1}{16}x^4 + \frac{1}{4}x^3 + e = -\frac{1}{4}x^3\left(\frac{1}{4}x - 1\right) + e$.

Mà theo đề ta có phương trình

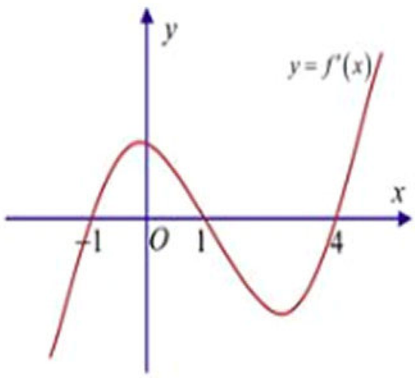
$$f(-x^2+2x+m) = e \Leftrightarrow (-x^2+2x+m)^3\left(\frac{-x^2+2x+m}{4} - 1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} -x^2+2x+m=0 & (1) \\ -x^2+2x+m-4=0 & (2) \end{array}\right.$$

Để phương trình $f(-x^2+2x+m) = e$ có 4 nghiệm phân biệt thì phương trình (1) và (2) lần lượt có 2 nghiệm phân biệt $\Rightarrow \begin{cases} \Delta_1 = 1+m > 0 \\ \Delta_2 = 1+m-4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 3.$

Mà $\begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ m \in [-5;5] \end{cases} \Rightarrow m \in \{4;5\}$. Vậy có 2 giá trị nguyên m thoả mãn bài toán.

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e, \left(a,b,c,d,e \in \mathbb{R}; a \neq 0\right)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(-1) = -2$, $f(1) = 3$, $f(4) = -3$ và có đồ thị $y = f'(x)$ như hình vẽ sau:



Phương trình $f(x) - m + 2019 = 0$ có 1 nghiệm khi

A. $m = 2016$. **B.** $m = 2017$. **C.** $m = 2018$. **D.** $m = 2019$

Lời giải

Chọn A.

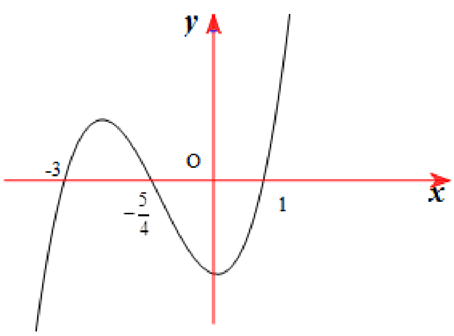
Từ đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và giả thiết ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		1		4		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	-2	↗	3	↘	-3	↗	$+\infty$

Ta có $f(x) - m + 2019 = 0 \Leftrightarrow f(x) = m - 2019 \ (*)$.

Qua bảng biến thiên ta thấy để phương trình (*) có 1 nghiệm thì $m - 2019 = -3 \Leftrightarrow m = 2016$.

Câu 7. Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + m \ \left(a,b,c,d,m \in \mathbb{R}, a \neq 0\right)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây



Phương trình $f(x) = m$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Từ đồ thị hàm số có $f'(x) == 4a(x+3)\left(x+\frac{5}{4}\right)(x-1) = 4ax^3 + 13ax^2 - 2ax - 15a$.

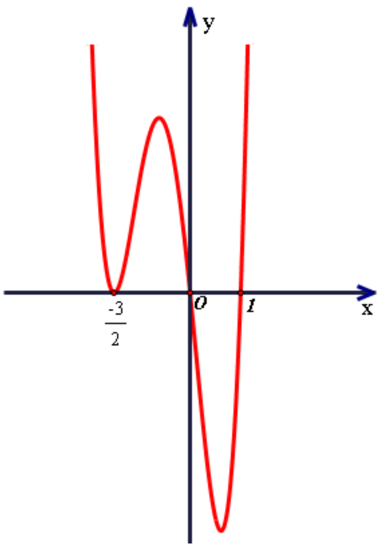
$\Rightarrow f(x) = ax^4 + \frac{13}{3}ax^3 - ax^2 - 15ax + m$.

$f(x) = m \Leftrightarrow ax^4 + \frac{13}{3}ax^3 - ax^2 - 15ax + m = m \Leftrightarrow ax^4 + \frac{13}{3}ax^3 - ax^2 - 15ax = 0$

$\Leftrightarrow x\left(x^3 + \frac{13}{3}x^2 - x - 15\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \frac{5}{3} \\ x = -3 \end{array}\right.$.

Vậy phương trình $f(x) = m$ có 3 nghiệm.

Câu 8. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f\left(-\frac{3}{2}\right) \le 0;$ $f(0) = 3;$ $f(1) = 0;$ $f(2) > 3$. Hàm số $y = f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như sau:



Với $m \in (0;3)$ số nghiệm thực của phương trình $f(x^2 - 3) = m$; (m là tham số thực), là

A. 3 **B.** 4
C. 6. **D.** 5.

Lời giải

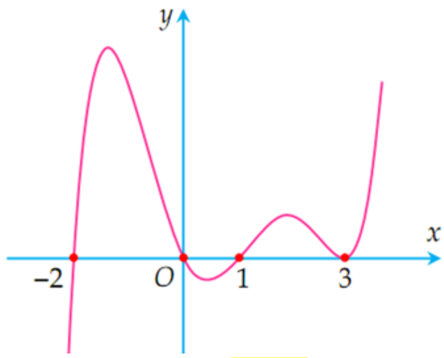
Chọn C

Từ đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ ta có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\nearrow$	3	$\searrow$	0	$\nearrow$	

Đặt $t = x^2 - 3 \Rightarrow t \ge -3$, ta có phương trình $\begin{cases} f(t) = m \\ m \in (0;3) \end{cases}$ $(*)$ có 3 nghiệm phân biệt, hơn nữa do $f\left(-\frac{3}{2}\right) \le 0; f(2) > 3$ nên phương trình $(*)$ có 3 nghiệm phân biệt $t_1, t_2, t_3 \in \left(-\frac{3}{2}; 2\right)$ (thỏa mãn điều kiện) suy ra mỗi phương trình $t_i = x^2 - 3$; $t_i \in \left(-\dfrac{3}{2}; 2\right); i = 1,2,3.$ đều có 2 nghiệm phân biệt. Vậy phương trình $f\left(x^2 - 3\right) = m$ có tất cả 6 nghiệm phân biệt với $m \in (0;3)$

Câu 9. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ xác định và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Số nghiệm nhiều nhất của phương trình $f\left(x^2\right) = m$ (m là tham số thực) là?



A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5

Lời giải

Chọn C

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f'(x)$ ta có bảng biến thiên của đồ thị hàm số $y = f(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-2		0		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	
$f(x)$		↘	$f(-2)$	↗	$f(0)$	↘	$f(1)$	↗	$f(3)$	↗	

Từ bảng biến thiên ta thấy phương trình $f(x) = m$ có tối đa hai nghiệm dương, do đó phương trình $f\left(x^2\right) = m$ có tối đa 4 nghiệm.

Câu 10. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, $f(0) + f(5) = 2f(3)$ và có bảng biến thiên của hàm số $y = f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-1	x_1	0	x_2	3	x_3	4	$+\infty$
$f'(x)$	↗	0	↘	0 ↗	↘	0	↗	0	↗

Tập nghiệm của phương trình $f\left(x^2 - 1\right) = f(3)$ có bao nhiêu phần tử?

A. 4. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 7.

Lời giải

Chọn A

Từ BBT của hàm số $y = f'(x)$ suy ra dấu của $f'(x)$ và có BBT của hàm số $y = f(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-1		0		3		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
	↘			↗		↗	$f(3)$	↘		↗	

$f(x)$	$f(-1)$ $\quad$ $f(0)$ $\quad$ $f(4)$

Lại có $f(0)+f(5)=2f(3)$, mà $f(0)<f(3)$ nên $f(5)>f(3)$.

Mặt khác với mọi $x\in\mathbb{R}$ ta có $x^2-1\ge -1$, do đó $f(x^2-1)=f(3)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-1=3 \\ x^2-1=a\ (4<a<5)\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm 2 \\ x=\pm\sqrt{a+1}\end{array}\right.$. Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm.

Dạng 10: Biết số nghiệm của phương trình $f(x)=0$, xét các bài toán liên quan đến phương trình có chứa $f'(x); f''(x)$....

Câu 1. Cho hàm số $y=f(x)=(x+1)(x^2-x)(x^2-4)(x^2-9)$. Hỏi phương trình $f'(x)=0$ có bao nhiêu nghiệm phân biệt?

A. 3 **B.** 4 **C.** 5 **D.** 6

Lời giải

Chọn D

Ta có:

$f(x)=(x+1)(x^2-x)(x^2-4)(x^2-9)=(x^3-x)(x^4-13x^2+36)=x^7-14x^5+49x^3-36x$

$f'(x)=7x^6-70x^4+147x^2-36$

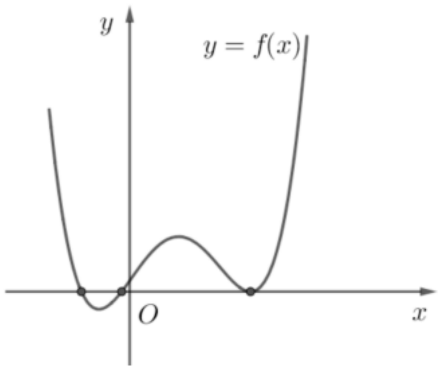
Đặt $t=x^2,(t\ge 0)$

Xét hàm $g(t)=7t^3-70t^2+147t-36$

Do phương trình $g'(t)=21t^2-140t+147=0$ có 2 nghiệm dương phân biệt và $g_{CD}.g_{CT}<0, g(0)=-36<0$ nên $g(t)=0$ có 3 nghiệm dương phân biệt.

Do đó $f'(x)=0$ có 6 nghiệm phân biệt.

Câu 2. Cho $f(x)$ là một hàm đa thức bậc bốn có đồ thị như hình dưới đây.



Tập nghiệm của phương trình $[f'(x)]^2=f(x).f''(x)$ có số phần tử là

A. 1. **B.** 2. **C.** 6. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A

Xét phương trình $[f'(x)]^2=f(x).f''(x)$ (1)

Do $f(x)=0$ có ba nghiệm $x_1, x_2, x_2 \left(x_1 < x_2 < x_3\right)$ và $f'\left(x_3\right)=0$ suy ra x_3 là một nghiệm của (1)

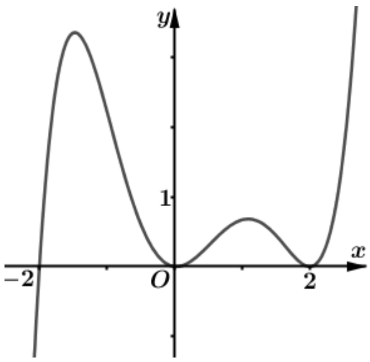
Ta có $f(x)=a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)\left(x-x_3\right)^2, (a \neq 0)$

Với $x \neq x_3 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow \left(\dfrac{f'(x)}{f(x)}\right)' = 0 \Leftrightarrow \left(\dfrac{1}{x-x_1}+\dfrac{1}{x-x_2}+\dfrac{2}{x-x_3}\right)'=0$

$\Leftrightarrow -\dfrac{1}{\left(x-x_1\right)^2}-\dfrac{1}{\left(x-x_2\right)^2}-\dfrac{2}{\left(x-x_3\right)^2}=0$ vô nghiệm.

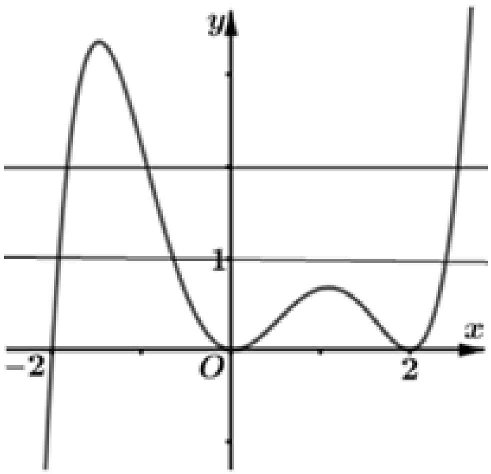
Vậy, phương trình (1) có đúng một nghiệm $x=x_3$.

Câu 3. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong trơn (không bị gãy khúc), hình vẽ bên. Gọi hàm $g(x)=f\left[f(x)\right]$. Hỏi phương trình $g'(x)=0$ có bao nhiêu nghiệm phân biệt?



A. 10. **B.** 12. **C.** 8. **D.** 14.

Lờigiải



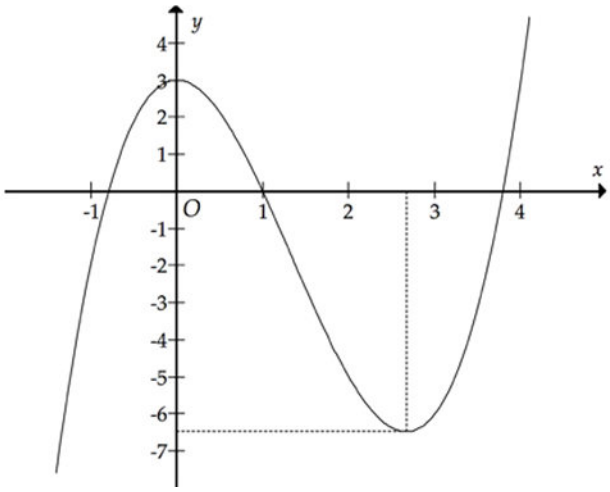
$g(x)=f\left[f(x)\right] \Rightarrow g'(x)=f'(x).f'\left[f(x)\right]$.

$g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x).f'\left[f(x)\right]=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x)=0 \\ f'\left[f(x)\right]=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=x_1\in(-2;-1) \\ x=0 \\ x=x_2\in(1;2) \\ x=2 \\ f(x)=x_1\in(-2;-1)\Leftrightarrow x=x_3<-2 \\ f(x)=0\Leftrightarrow x\in\{-2;0;2\} \\ f(x)=x_2\in(1;2)\Leftrightarrow x\in\{x_4;x_5;x_6\}, x_3<x_4<x_5<0<2<x_6 \\ f(x)=2\Leftrightarrow x\in\{x_7;x_8;x_9\}, x_4<x_7<x_8<x_5<x_6<x_9 \end{array}\right..$$

Kết luận phương trình $g'(x)=0$ có 12 nghiệm phân biệt.

Câu 4. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên.



Đặt $g(x)=f\left[f(x)\right]$. Tìm số nghiệm của phương trình $g'(x)=0$.

A. 8. **B.** 2 **C.** 4. **D.** 6.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $g'(x)=f'(x).f'\left[f(x)\right]$.

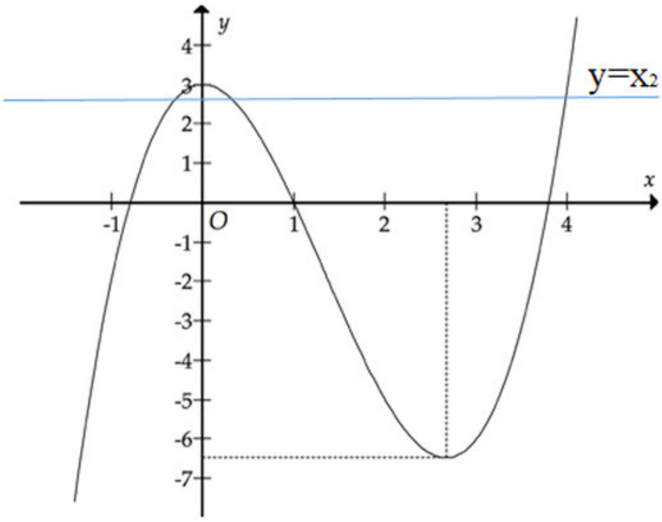
$$g'(x)=0\Leftrightarrow f'(x).f'\left[f(x)\right]=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} f'(x)=0 & (1) \\ f'\left[f(x)\right]=0 & (2) \end{array}\right..$$

❖Dựa vào đồ thị của hàm số $y=f(x)$ có hai điểm cực trị nên $f'(x)=0$ (1) có hai nghiệm phân biệt $x_1=0$; x_2 với $2<x_2<3$.

❖PT $(2): f'\left[f(x)\right]=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=x_1=0 \\ f(x)=x_2;\ 2<x_2<3 \end{array}\right..$

◆ Dựa vào đồ thị của hàm số $y=f(x)$ thì $f(x)=0$ có ba nghiệm phân biệt.

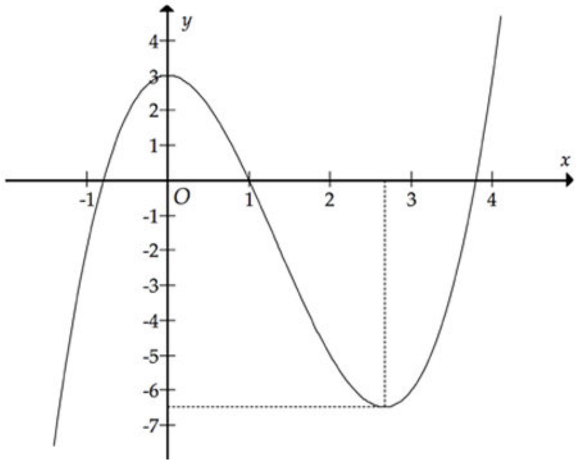
◆ Kẻ đường thẳng $y=x_2$ cắt đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại ba diểm phân biệt nên phương trình $f(x)=x_2$ có ba nghiệm phân biệt.



Nên phương trình (2) có 6 nghiệm phân biệt.

Vậy phương trình $g'(x)=0$ có tất cả 8 nghiệm phân biệt.

Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên.



Đặt $g(x)=2^{f(x)}-3^{f(x)}$. Tìm số nghiệm của phương trình $g'(x)=0$.

A. 5. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 6.

Lời giải

Chọn A

Ta có $g'(x)=f'(x)2^{f(x)}\ln 2-f'(x)3^{f(x)}\ln 3=f'(x)\left[2^{f(x)}\ln 2-3^{f(x)}\ln 3\right]$.

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f'(x)=0\\ 2^{f(x)}\ln 2=3^{f(x)}\ln 3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f'(x)=0\\ \left(\dfrac{2}{3}\right)^{f(x)}=\dfrac{\ln 3}{\ln 2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f'(x)=0\\ f(x)=\log_{\frac{2}{3}}\dfrac{\ln 3}{\ln 2}\approx -1{,}1358\end{array}\right..$$

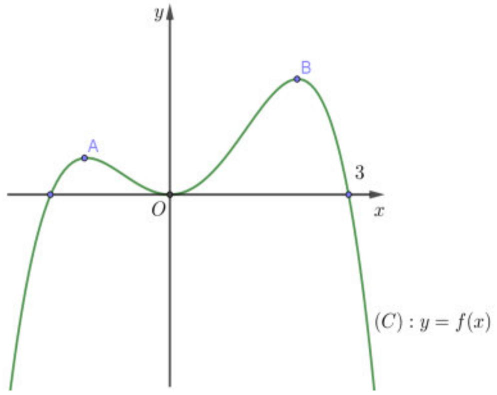
Dựa vào đồ thị hàm số $y=f(x)$ có hai điểm cực trị nên $f'(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt.

Kẻ đường thẳng $y=\log_{\frac{2}{3}}\dfrac{\ln 3}{\ln 2}\approx -1{,}1358$ cắt đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại ba điểm phân biệt nên phương trình $f(x)=\log_{\frac{2}{3}}\dfrac{\ln 3}{\ln 2}$ có ba nghiệm phân biệt.

Vậy phương trình $g'(x)=0$ có 5 nghiệm thực phân biệt.

Câu 6. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, $f(x)$ có đồ thị (C) như hình dưới đây, trong đó A, B là các điểm cực đại của (C), các tiếp tuyến của (C) tại các tiếp điểm thuộc cung AB đều không song song với hai đường thẳng đường thẳng $y=2x$, $y=-2x$,

$\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x)=+\infty,\ \lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=-\infty$. Xét phương trình $f\left(\left|f'(x)\right|+1\right)=0$ (*), khẳng định nào sau đây đúng?



A. (*) có đúng hai nghiệm. **B.** (*) có đúng ba nghiệm.

C. (*) có ít nhất hai nghiệm. **D.** (*) có đúng ba nghiệm.

Lời giải

Chọn C

Dựa vào đồ thị ta thấy $f(x)=0$ có ba nghiệm trong đó có một nghiệm dương là 3.

Do $\left|f'(x)\right|+1\geq 1$ nên $f\left(\left|f'(x)\right|+1\right)=0 \Leftrightarrow \left|f'(x)\right|+1=3$. Tức $\left[\begin{array}{l} f'(x)=2 \\ f'(x)=-2 \end{array}\right.$.

Gọi $x_A,\ x_B$ lần lượt là hoành độ của $A,\ B$. Do $f'(x)$ liên tục nên ta có:

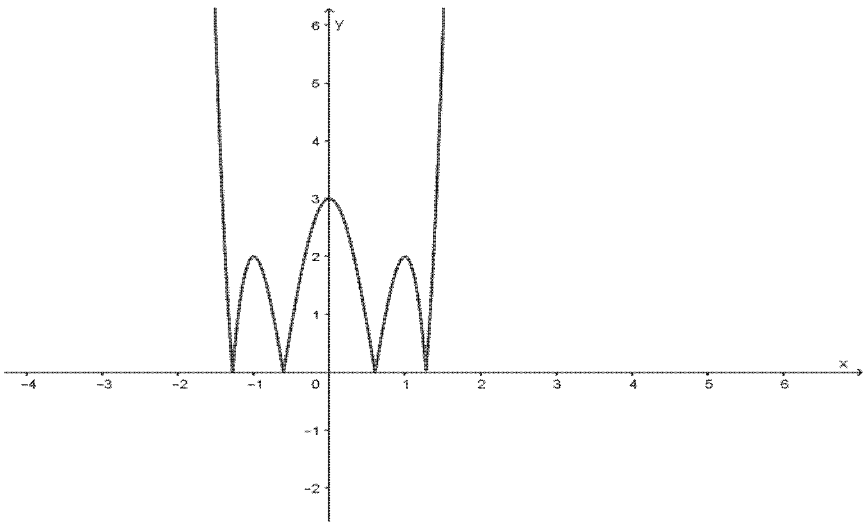
+ $\begin{cases} f'(x_A)=0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} f'(x)=+\infty \end{cases} \Rightarrow \exists x_1\in(-\infty;x_A)$ sao cho $f'(x_1)=2$.

+ $\begin{cases} f'(x_B)=0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=-\infty \end{cases} \Rightarrow \exists x_2\in(x_B;+\infty)$ sao cho $f'(x_2)=-2$.

+ Các tiếp tuyến của (C) tại các tiếp điểm thuộc cung AB đều không song song với hai đường thẳng đường thẳng $y=2x$, $y=-2x$ chứng tỏ $\begin{cases} f'(x)\neq 2 \\ f'(x)\neq -2 \end{cases}$ $\forall x\in[x_A;x_B]$.

Tóm lại, (*) có ít nhất hai nghiệm.

Câu 7. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ:



Tìm số nghiệm của phương trình $g'(x)=0$, biết $g(x)=f^3(x)-f^2(x)+8$.

A. 13. **B.** 15. **C.** 17. **D.** 19.

Lời giải

Chọn B

Ta có $g'(x)=3.f'(x).f^2(x)-2.f'(x).f(x)=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} f'(x)=0\\ f(x)=0\\ f(x)=\dfrac{2}{3}\end{array}\right.$$

Dựa vào đồ thị hàm số $y=f(x)$ ta được

+ Phương trình $f'(x)=0$ có 3 nghiệm phân biệt là $-1;0;1$

+ Phương trình $f(x)=0$ có 4 nghiệm phân biệt

+ Phương trình $f(x)=\dfrac{2}{3}$ có 8 nghiệm phân biệt (để tìm nghiệm phương trình $f(x)=\dfrac{2}{3}$ ta kẻ đường thẳng $y=\dfrac{2}{3}$, thấy đường thẳng $y=\dfrac{2}{3}$ cắt đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại 8 điểm phân biệt)

Vậy phương trình có tất cả 15 nghiệm phân biệt.

Câu 8. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d},(ac\neq 0;ad-bc\neq 0;a,b,c,d\in\mathbb{Q})$. Tìm số nghiệm của phương trình $g'(x)=0$, biết $g(x)=e^{f(x)}-e^{3f(x)}$.

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

Lời giải: Đáp án A.

Tập xác định $g(x)$: $D=\mathbb{R}\backslash\left\{\dfrac{-d}{c}\right\}$

Ta có: $g'(x)=f'(x)e^{f(x)}-3f'(x)e^{3f(x)}$ có TXĐ: $D=\mathbb{R}\backslash\left\{\dfrac{-d}{c}\right\}$

Phương trình $g'(x)=0\Leftrightarrow f'(x)e^{f(x)}-3f'(x)e^{3f(x)}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll} f'(x)=0 & (1)\\ e^{f(x)}-3e^{3f(x)}=0 & (2)\end{array}\right.$

+) Giải (1) vô nghiệm

+) Giải (2): $(2)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll} e^{f(x)}=0 & (3)\\ 1-3e^{2f(x)}=0 & (4)\end{array}\right.$

Ta có (3) vô nghiệm. PT(4) $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll} e^{f(x)}=\dfrac{1}{\sqrt{3}} & (5)\\ e^{f(x)}=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}(VN) & \end{array}\right.$

Từ (5) ta có $f(x)=\ln\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ Dựa vào dạng đồ thị của $f(x)$ ta có PT chỉ có 1 nghiệm

Câu 9. Cho hàm số $f(x)=x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)(x-7)$. Hỏi đồ thị hàm số $y=f'(x)$ cắt trục hoành tại tất cả bao nhiêu điểm phân biệt?

A. 1. **B.** 6. **C.** 0. **D.** 7.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f(x)=0$ có các nghiệm: $0;1;2;3;4;5;6;7$.

Áp dụng định lý Lagrange lần lượt trên các đoạn: $[0;1];[1;2];[2;3];[3;4];[4;5];[5;6];[6;7]$.

Chẳng hạn xét trên đoạn $[0;1]$ thì tồn tại x_1 sao cho:

$f'(x_1)=\dfrac{f(1)-f(0)}{1-0} \Leftrightarrow f'(x_1)=f(1)-f(0)=0$. Suy ra $x=x_1$ là một nghiệm của phương trình $f'(x)=0$.

Làm tương tự vậy các khoảng còn lại ta suy ra $f'(x)=0$ có 7 nghiệm phân biệt hay đồ thị hàm số $y=f'(x)$ cắt trục hoành tại 7 điểm phân biệt.

Câu 10. Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\ (a\neq 0)$. Biết phương trình $f(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1;x_2$. Số nào sau đây là nghiệm của phương trình $f'(x)=0$

A. x_1+x_2 **B.** $\dfrac{x_1-x_2}{2}$.

C. $\dfrac{x_1+x_2}{2}$. **D.** x_1-x_2.

Lời giải

Chọn C

Vì hàm số $y=f(x)$ là hàm bậc 3 và phương trình $f(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1;x_2$ nên đồ thị hàm số $y=f(x)$ tiếp xúc với trục hoành, tức là trong 2 nghiệm $x_1;x_2$ có 1 nghiệm kép. Không mất tính tổng quát giả sử nghiệm kép là x_2.

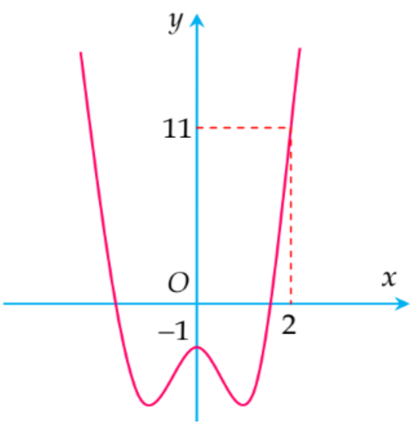
Khi đó ta có: $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)^2$

$\Rightarrow f'(x)=(x-x_2)(2x-x_1-x_2)$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=x_2 \\ x=\dfrac{x_1+x_2}{2} \end{array}\right.$$

.Vì $x_1;x_2$ phân biệt nên $x=\dfrac{x_1+x_2}{2}$ là nghiệm của phương trình $f'(x)=0$. Ta chọn **B.**

Câu 11. Cho hàm số $y=f(x)=ax^4+bx^2+c$ có đồ thị như hình vẽ và thỏa mãn đẳng thức sau: $f(x+1)-f(x)=2x(2x+1)(x+1)$. Cho hàm số $g(x)=mx^2+nx+p$ và $f(x)=g(x^2-1)$. Tìm nghiệm của phương trình $g'(x)=0$.



A. $-\dfrac{1}{2}$. **B.** -2. **C.** $-\dfrac{1}{4}$. **D.** -4.

Lời giải

Chọn C

Với $x=0$ thì $f(1)=f(0)$.

Vì $f(1)=f(0)$ và đồ thị hàm số $y=f(x)=ax^4+bx^2+c$ đi qua $(0;-1)$, $(2;11)$ nên ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} f(1)=f(0) \\ f(0)=-1 \\ f(2)=11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c=c \\ c=-1 \\ 16a+4b+c=11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \\ c=-1 \end{cases}.$$

Vậy $f(x)=x^4-x^2-1$.

Ta có $f(x)=g\left(x^2-1\right) \Leftrightarrow x^4-x^2-1=m\left(x^2-1\right)^2+n\left(x^2-1\right)+p$

$\Leftrightarrow x^4-x^2-1=mx^4+(-2m+n)x^2+(m-n+p)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m=1 \\ -2m+n=-1 \\ m-n+p=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=1 \\ n=1 \\ p=-1 \end{cases}$$

Do đó $g(x)=x^2+x-1$.

$g'(x)=0 \Leftrightarrow 2x+1=0 \Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{2}$.

Vậy $x=-\dfrac{1}{2}$.

Câu 12. Cho hàm số $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$. Nếu phương trình $f(x)=0$ có 3 nghiệm phân biệt thì phương trình $2f(x).f''(x)=\left[f'(x)\right]^2$ có nhiều nhất bao nhiêu nghiệm?

A. 1. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B

Giả sử $f(x)=0$ có 3 nghiệm phân biệt là x_1, x_2, x_3.

Xét $g(x)=2f(x).f''(x)-\left[f'(x)\right]^2$

$\Rightarrow g'(x)=2\left[f'(x).f''(x)+f(x).f'''(x)\right]-2f'(x)f''(x) \;=2f(x).f'''(x)=6f(x)$.

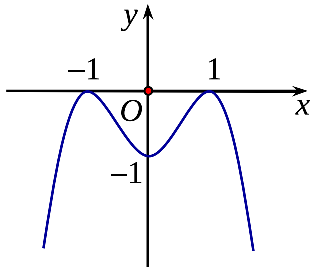
Khi đó $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=x_1 \\ x=x_2 \\ x=x_3 \end{array}\right.$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		x_1		x_2		x_3		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra phương trình $g(x)=0$ có nhiều nhất 4 nghiệm.

Câu 13. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên khoảng $(-\infty;+\infty)$. Đồ thị của hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ



Tìm số nghiệm của phương trình $\left(\left[f\left(x^2\right)\right]^2\right)' = 0$

A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 5.

Lời giải

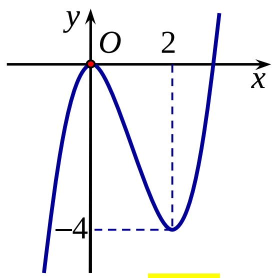
Chọn A.

Ta có

$$\left(\left[f\left(x^2\right)\right]^2\right)' = 0 \Leftrightarrow 4x.f\left(x^2\right).f'\left(x^2\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f\left(x^2\right) = 0 \\ f'\left(x^2\right) = 0 \\ x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = \pm 1 \\ x^2 = \pm 1, x^2 = 0 \\ x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{array}\right. .$$

Suy ra phương trình 3 nghiệm.

Câu 14. Biết rằng hàm số $f(x)$ có đồ thị được cho như hình vẽ bên. Tìm số nghiệm của phương trình $\left(f\left[f\left(x^2-1\right)\right]\right)' = 0$.



A. 5. **B.** 3. **C.** 9. **D.** 8.

Lời giải

Chọn C.

Ta có $\left(f\left[f\left(x^2-1\right)\right]\right)' = 0$, $\left(f\left[f\left(x^2-1\right)\right]\right)' = 0 \Leftrightarrow 2x.f'\left(x^2-1\right).f'\left[f\left(x^2-1\right)\right] = 0$;

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ f'\left(x^2-1\right) = 0 \\ f'\left[f\left(x^2-1\right)\right] = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2-1 = 0 \\ x^2-1 = 2 \\ f\left(x^2-1\right) = 0 \\ f\left(x^2-1\right) = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 1 \\ x = \pm\sqrt{3} \\ x^2-1 = 0 \\ x^2-1 = a \in (2;+\infty) \\ x^2-1 = b \in (a;+\infty) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 1 \\ x = \pm\sqrt{3} \\ x = \pm\sqrt{a+1}, a+1 \in (3;+\infty) \\ x = \pm\sqrt{b+1}, \mathrm{b}+1 \in (a+1;+\infty) \end{array}\right.$$

.

Vậy phương trình có 9 nghiệm.

Dạng 11: Biết đồ thị hoặc BBT của hàm số $y = f(x)$, xét các bài toán liên quan đến BẤT PHƯƠNG TRÌNH có dạng $f(x) \geq g(x); f(u(x)) \geq g(x)$ $(>,<,\leq)$... có thể có tham số.

1. Lý thuyết:

Loại 1: Không chứa tham số (đề thường yêu cầu về tập nghiệm của bất phương trình)

Phương pháp giải:

- Chuyển bất phương trình về $f(x) \geq g(x)$ 1 vế và lập bảng biến thiên

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $y = f'(x)$ và xét dấu của hàm số $y = g'(x)$

Lưu ý: 1) Hàm số $y = f(x); y = g(x)$ cùng đồng biến(nghịch biến) trên K thì hàm số $y = f(x) + g(x)$ đồng biến(nghịch biến) trên K

2) Nếu hàm số $y = f(x)$ đồng biến(nghịch biến) trên K thì:

+ Hàm số $y = \sqrt[n]{f(x)}$ đồng biến(nghịch biến) trên K

+ Hàm số $y = \dfrac{1}{f(x)}$ với $f(x) > 0$ nghịch biến(đồng biến) trên K

+ Hàm số $y = -f(x)$ nghịch biến(đồng biến) trên K

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x)$ và vẽ đồ thị của hàm số $y = g(x)$ để kết luận nghiệm.

- Đặt $t = u(x)$, xác định điều kiện của biến t. Biến đổi $f(\mathrm{u}(x)) \geq g(x)$ thành $f(t) \geq h(\mathrm{t})$ sau đó làm tương tự như trên.

Loại 2: Chứa tham số (đề thường yêu cầu tìm điều kiện của m để bất phương trình **có nghiệm** hoặc **có nghiệm** với $x \in \mathbb{R}$)

Cô lập tham số m biến đổi đưa về dạng

$$f(x,m) \geq 0, \forall x \in K \Leftrightarrow \mathrm{g(x)} \geq \mathrm{h(m)}, \forall x \in K \Leftrightarrow \underset{K}{Min}\, g(x) \geq \mathrm{h(m)}$$

$$f(x,m) \leq 0, \forall x \in K \Leftrightarrow \mathrm{g(x)} \leq \mathrm{h(m)}, \forall x \in K \Leftrightarrow \underset{K}{\mathrm{Max}}\, g(x) \leq \mathrm{h(m)}$$

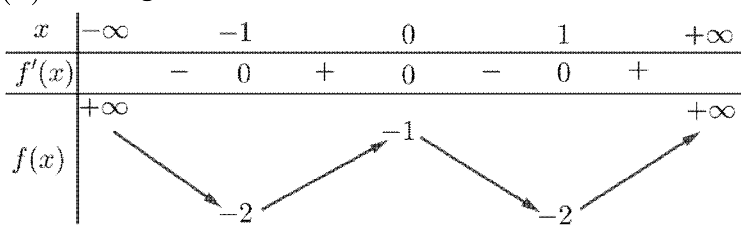
$$f(x,m) \geq 0 \text{ có nghiệm trên K } \Leftrightarrow f(x,m) \geq 0 \Leftrightarrow \mathrm{g(x)} \geq \mathrm{h(m)}, \forall x \in K \Leftrightarrow \underset{K}{Max}\, g(x) \geq \mathrm{h(m)}$$

$$f(x,m) \leq 0 \text{ có nghiệm trên K } \Leftrightarrow f(x,m) \leq 0 \Leftrightarrow \mathrm{g(x)} \leq \mathrm{h(m)}, \forall x \in K \Leftrightarrow \underset{K}{Min}\, g(x) \leq \mathrm{h(m)}$$

Chú ý: Đối với các bất phương trình $f(x,m) > 0, f(x,m) < 0$ làm tương tự tuy nhiên ở bước cuối nếu $\underset{K}{Max}\, g(x), \underset{K}{Min}\, g(x)$ đạt tại $x_0 \notin K$ thì ta kết luận dấu $\leq, \geq$. Nếu $\underset{K}{Max}\, g(x), \underset{K}{Min}\, g(x)$ đạt tại $x_0 \in K$ thì ta kết luận dấu $<,>$.

2. Bài tập:

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau



Tập nghiệm của phương trình là $3f(x) \geq 3e^{x^2} - 6$ là

A. $(-2019;0)$. **B.** $(-1;+\infty)$

C. $[-1;1]$ **D.** 1 đáp án khác

Lời giải

Chọn D

Ta có: $3f(x) \geq 3e^{x^2} - 6 \Leftrightarrow f(x) - e^{x^2} + 2 \geq 0$.

Đặt $g(x) = f(x) - e^{x^2} + 2$. Ta thấy $g'(x) = f'(x) - 2xe^{x^2}$

Dựa vào bản biến thiên của hàm số $y = f(x)$ và hàm số $y = -e^{x^2} + 2$ ta được, Bảng biến thiên hàm số $g(x) = f(x) - e^{x^2} + 2$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
f'(x)		-	0	+	0	-	0	+	
$-2x.e^{x^2}$		+	$\mid$	+	0	-	$\mid$	-	
g'(x)		chưa xác định dấu	$\mid$	+	0	-	$\mid$	chưa xác định dấu	
g(x)		...	$\mid$ $-e^4$	↗	0	↘	$-e^4$ $\mid$	...	

Dựa vào bảng biến thiên trên của hàm số $g(x)=f\left(x\right)-e^{x^2}+2$. Ta thấy $\forall x\in\left(-1;1\right)$. hàm số $g(x)=f\left(x\right)-e^{x^2}+2<0$.Vậy các đáp án A, B, C đều có các khoản tại đó hàm số âm nên không thể là nghiệm của phương trình $f\left(x\right)-e^{x^2}+2\geq 0$.

Vậy đáp án là **D.**

Câu 2. Cho hàm số y = f(x) có bảng biến thiên:

x	∞		1		3		+ ∞
y'		+	0	–	0	+	
y	+ ∞ -2	↗		↘		↗	

Tìm tất cả các giá trị của m để bất phương trình $f\left(\sqrt{x-1}+1\right)\leq m$ có nghiệm?

A. $m\geq 1$ **B.** $m\geq -2$.

C. $m\geq 4$. **D.** $m\geq 0$.

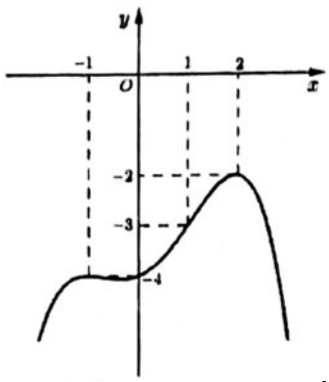
Lời giải

Chọn B

Đặt $t(x)=\sqrt{x-1}+1,$, $t\geq 1$.

Bất phương trình trở thành $f(t)\leq m$ $(t\geq 1)$ (*). Bất phương trình (*) có nghiệm với $t\geq 1$ thì $\min\limits_{[1;+\infty)} f(t)\leq m$. Dựa vào BBT ta thấy $\min\limits_{[1;+\infty)} f(t)=-2\Rightarrow m\geq -2$.

Câu 3. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ



Tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình $9.6^{f(x)}+\left(4-f^2\left(x\right)\right).9^{f(x)}\leq\left(-m^2+5m\right).4^{f(x)}$ đúng với $\forall x\in\mathbb{R}$ là

A. 10. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 9.

Lời giải

Chọn A

Ta có bất phương trình $9.6^{f(x)}+\left(4-f^2\left(x\right)\right).9^{f(x)}\leq\left(-m^2+5m\right).4^{f(x)}$

$\Leftrightarrow 9.\left(\frac{3}{2}\right)^{f(x)}+\left(4-f^2(x)\right)\left(\frac{3}{2}\right)^{2f(x)}\le -m^2+5m$ (1).

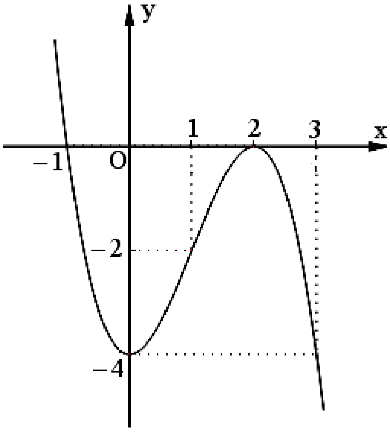
+Từ đồ thị suy ra $f(x)\le -2,\forall x \Rightarrow 9.\left(\frac{3}{2}\right)^{f(x)}\le 4,\forall x$ và $\left(4-f^2(x)\right)\left(\frac{3}{2}\right)^{2f(x)}\le 0,\forall x$

+Suy ra $9.\left(\frac{3}{2}\right)^{f(x)}+\left(4-f^2(x)\right)\left(\frac{3}{2}\right)^{2f(x)}\le 4,\forall x \Rightarrow Max g(x)=4$.

+ Bất phương trình (1) nghiệm đúng $\forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow -m^2+5m\ge 4 \Leftrightarrow 1\le m\le 4$. Vậy có 4 giá trị m nguyên $m\in\{1;2;3;4\}$. Vậy $1+2+3+4=10$.

Câu 4. Cho hàm số $y=f(x)=-x^3+3x^2-4$ có bảng biến thiên dưới đây. Biết rằng với $m>\alpha$ thì bất phương trình $\left(4-x^2\right)\left(3-\sqrt{4-x^2}\right)<m+6$ luôn đúng với mọi m. Hãy cho biết kết luận nào sau đây đúng?

A. α là số nguyên âm. **B.** α là số nguyên dương.
C. α là số hữu tỉ dương. **D.** α là số vô tỉ.



Lời giải.

Chọn A.

Đặt $t=\sqrt{4-x^2}$; $0\le t$

Khi đó bất phương trì ... $m+2$ (*)

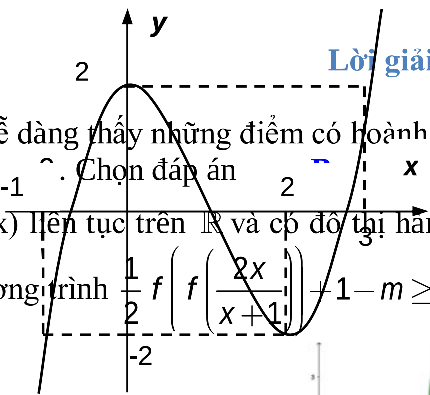
Để $\left(4-x^2\right)\left(3-\sqrt{4-}\right.$ ... n thì (*) luôn đúng với mọi $t\in[0;2]$

Tức là $f(t)<m+2$ lu

$\Leftrightarrow m+2>\max\limits_{t\in[0;2]} f(t)$ ...

Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)=x^3-3x^2+2$ có đồ thị như hình vẽ. Hãy cho biết tập nghiệm của bất phương trình $f(x)\ge -2$?

A. $S=(-1;+\infty)$. **B.** $S=[-1;+\infty)$. **C.** $S=(0;+\infty)$. **D.** $S=[-2;+\infty)$.

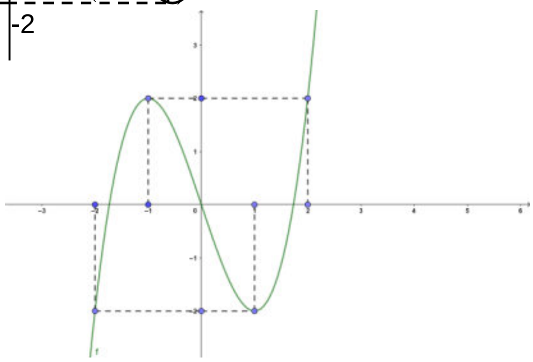


Lời giải.

Chọn B.

Nhìn vào đồ thị dễ dàng thấy những điểm có hoành độ lớn hơn hoặc bằng -1 đều có tung độ lớn hơn hoặc bằ... . Chọn đáp án ...

Câu 6. Cho hàm số y=f(x) liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số như hình vẽ. Tập hợp tất cả các giá trị của m để bất phương trình $\frac{1}{2}f\left(f\left(\frac{2x}{x+1}\right)\right)+1-m\ge 0$ có nghiệm là:



A. $m\le 2$ **B.** $1\le m\le 2$ **C.** $m\le 1$ **D.** $m\le -5$

Lời giải

Chọn A.

Nhìn vào đồ thị ta thấy:

$x\in[-1;1]\Rightarrow -2\le f(x)\le 2$

$x\in[-2;2]\Rightarrow -2\le f(x)\le 2$

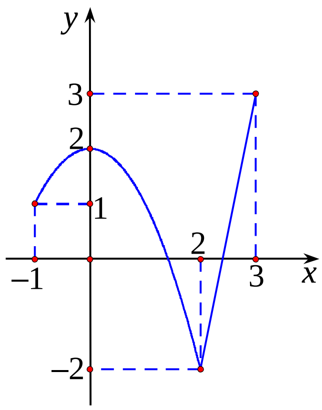
Ta có: $\dfrac{2|x|}{x^2+1}\le 1\Leftrightarrow -1\le \dfrac{2x}{x^2+1}\le 1$

$\Rightarrow f\left(f\left(\dfrac{2x}{x^2+1}\right)\right)\in[-2;2]\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}f\left(f\left(\dfrac{2x}{x+1}\right)\right)+1\in[0;2]$

$\dfrac{1}{2}f\left(f\left(\dfrac{2x}{x+1}\right)\right)+1-m\ge 0\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}f\left(f\left(\dfrac{2x}{x+1}\right)\right)+1\ge m$

Nên bpt có nghiệm khi và chỉ khi m≤2.

Câu 7. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[-1;3]$ và có đồ thị như hình vẽ.



Bất phương trình $f(x)+\sqrt{x+1}+\sqrt{7-x}\ge m$ có nghiệm thuộc $[-1;3]$ khi và chỉ khi

A. $m\le 7$. **B.** $m\ge 7$. **C.** $m\le 2\sqrt{2}-2$. **D.** $m\ge 2\sqrt{2}-2$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\sqrt{x+1}+\sqrt{7-x}\le\sqrt{(1^2+1^2)(x+1+7-x)}=4$.

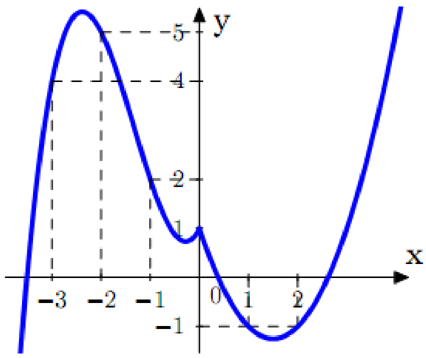
Dấu "=" xảy ra khi $1+x=7-x\Leftrightarrow x=3$.

Ta có : $\max\limits_{[-1;3]} f(x)=f(3)=3$.

Do đó bất phương trình $f(x)+\sqrt{x+1}+\sqrt{7-x}\ge m$ có nghiệm thuộc $[-1;3]$ khi và chỉ khi

$m\le \max\limits_{[-1;3]}\left(f(x)+\sqrt{x+1}+\sqrt{7-x}\right)=4+3=7$. Vậy $m\le 7$.

Câu 8. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ. Biết trên $(-\infty;-3)\cup(2;+\infty)$ thì $f'(x)>0$.

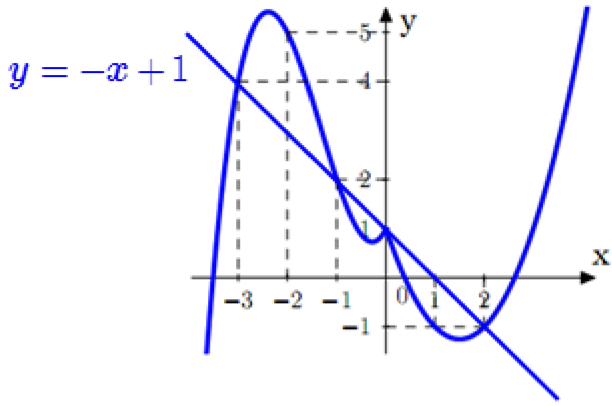


Số nghiệm nguyên thuộc $(-10;10)$ của bất phương trình $f(x)(x^2-x-6)>-x^3+2x^2+5x-6$ là

A. 9. **B.** 10. **C.** 8. **D.** 7.

Lời giải

Chọn C



Ta có $f(x)(x^2-x-6)>-x^3+2x^2+5x-6 \Leftrightarrow [f(x)+x-1](x^2-x-6)>0$

+ Trường hợp 1 :

$$\begin{cases} x^2-x-6>0 \\ f(x)+x-1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<-2 \vee x>3 \\ -3<x<-1 \vee x>2 \end{cases} \Leftrightarrow -3<x<-2 \vee x>3$$

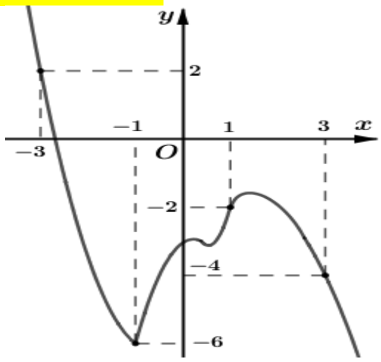
+ Trường hợp 2 :

$$\begin{cases} x^2-x-6<0 \\ f(x)+x-1<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2<x<3 \\ x<-3 \vee -1<x<2 \end{cases} \Leftrightarrow -1<x<2$$

+ Từ hai trường hợp trên ta được các nghiệm nguyên thuộc $(-10;10)$ là $\{0;1;4;5;6;7;8;9\}$.

Câu 9. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y=f(x)$ như hình dưới và $g(x)=-x-1$. Tập nào sau đây là nghiệm của bất phương trình $f(x)>g(x)$.

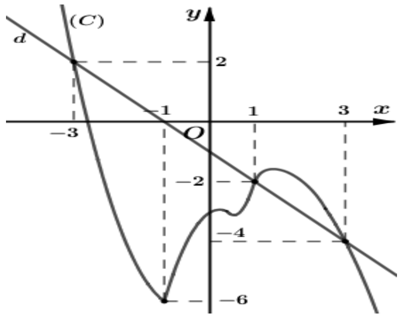
A. $(-3;1)$. **B.** $(-\infty;-3)\cup(1;3)$. **C.** $(-\infty;-3)$. **D.** $(1;3)$.



Lời giải

Chọn B

Ta có số nghiệm của phương trình $f\left(x\right)=g\left(x\right)$ chính là số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ và đường thẳng $d:y=-x-1$ (như hình vẽ bên dưới).



Dựa vào đồ thị suy ra phương trình $f\left(x\right)-g\left(x\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=1 \\ x=3 \end{array}\right.$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ tìm các giá trị của x để đồ thị của hàm số $f\left(x\right)$ nằm phía trên đường thẳng $y=-x-1$.

Đối chiếu các đáp án ta thấy đáp án **B** thỏa mãn.

Câu 10. Cho hàm số $y=f(x)$ có BBT như sau:

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	0	-	
$f(x)$	$-\infty$	↗	4	↘	2	↗	3	↘	$-\infty$

Bất phương trình $\left(x^2+1\right).f(x)\geq m$ nghiệm đúng với mọi x trên $\left(-1;2\right)$ là

$A.m>15$ $B.m\leq 15$ $C.m\leq 2$ $D.m>2$

Lời giải

Chọn C

Đặt: $g(x)=\left(x^2+1\right).f(x)\Rightarrow g'(x)=2x.f(x)+\left(x^2+1\right).f'(x)$

Với $-1<x<0\Rightarrow g'(x)<0$

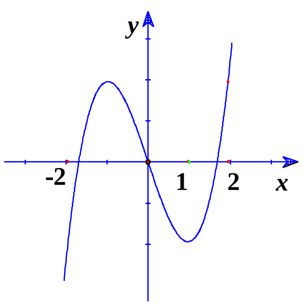
Với $0<x<2\Rightarrow g'(x)>0$

g(0)=2;g(-1)=8;g(2)=15

Suy ra $\forall x\in\left(-1;2\right)\Rightarrow 2\leq g(x)<15$

Yêu cầu bài toán ta được $\min\limits_{[-1;2]} g(x)\geq \text{m}\Leftrightarrow 2\geq \text{m}$

Câu 11. Cho hàm số $y=f\left(x\right)=x^3-3x$ có ĐTHS như hình vẽ



Bất phương trình $\dfrac{f(x)-x}{f(|x|)}\le 0$ có bao nhiêu nghiệm nguyên thuộc đoạn $[-6;8]$

A. 8. **B.** 10. **C.** 7. **D.** 9.

Lời giải

ChọnC

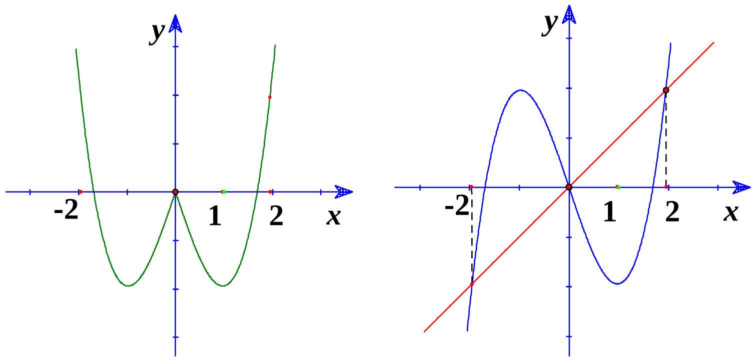
Ta giải các phương trình hoành độ giao điểm sau:

$$f(x)=0 \Leftrightarrow x^3-3x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm\sqrt{3} \end{array}\right.$$

$$f(x)-x=0 \Leftrightarrow x^3-4x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm 2 \end{array}\right.$$

$$f(|x|)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm 2 \end{array}\right.$$

Ta chia hai trường hợp và căn cứ vào đồ thị:



ĐTHS $f(|x|)$ Tương giao giữa đths $f(x)$ và đường thẳng $y=x$

Th1: $\begin{cases} f(x)-x\ge 0 \\ f(|x|)<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} -2\le x\le 0 \\ x\ge 2 \end{array}\right. \\ -\sqrt{3}<x<\sqrt{3}, x\ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\sqrt{3}<x<0 \Rightarrow x=-1$

Th2: $\begin{cases} f(x)-x\le 0 \\ f(|x|)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x\le -2 \\ 0\le x\le 2 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x<-\sqrt{3} \\ x>\sqrt{3} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\le -2 \Rightarrow x\in\{-6;-5;-4;-3;-2\} \\ \sqrt{3}<x\le 2 \Rightarrow x=2 \end{array}\right.$

Vậy bất phương trình trên có 7 nghiệm nguyên thuộc $[-6;8]$

Câu 12. Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

Tìm m để bất phương trình $m^2-f(x+4)-\dfrac{1}{3}x^3\ge 0$ có nghiệm trên đoạn $[-5;1]$

A. $m\le\dfrac{47}{64}$ **B.** $\dfrac{47}{64}<m<\dfrac{3}{2}$.

C. $m\le -5$ hoặc $m\ge 5$ **D.** $-1\le m\le 1$.

Lời giải

ChọnC

BPT $\Leftrightarrow\ m^2 \ge f(x+4)+\dfrac{1}{3}x^3$

Đặt $g(x)=f(x+4)+\dfrac{1}{3}x^3$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m^2 \ge \min g(x), \forall x\in[-5;-1]$

Ta có: $g'(x)=f'(x+4)+x^2$

Vì $-5\le x\le -1$ nên $-1\le x+4\le 3$

Từ đó và quan sát bảng xét dấu thấy: $f'(x+4)\ge 0$

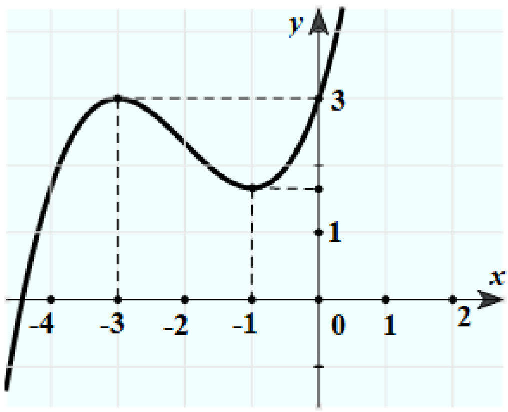
Suy ra $g'(x)=f'(x+4)+x^2\ge 0, \forall x\in[-5;-1]$

x	-5		-1
$g(x)$		$\nearrow$	$g(-1)$
	$g(-5)$		

$\Rightarrow \min\limits_{[-5;-1]} g(x)=g(-5)=25$

Vậy $m^2\ge 25 \Leftrightarrow m\ge 5$ hoặc $m\le -5$.

Câu 13. Cho hố số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-10;10]$ để bất phương trình $f(m)\ge f\left(\sqrt{4-x^2}\right)+\dfrac{1}{3}x^3-x^2+\dfrac{20}{3}$ có nghiệm.



A. 9 **B.** 10. **C.** 11. **D.** 12.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $h(x)=f\left(\sqrt{4-x^2}\right)+\dfrac{1}{3}x^3-x^2+\dfrac{20}{3}$.

* Tập xác định: $D=[-2;2]$.

* $h'(x)=-\dfrac{x.f'\left(\sqrt{4-x^2}\right)}{\sqrt{4-x^2}}+x^2-2x=-x\left(\dfrac{f'\left(\sqrt{4-x^2}\right)}{\sqrt{4-x^2}}+2-x\right)$

Nx: $\begin{cases}2-x\ge 0, \forall x\in[-2;2]\\ \sqrt{4-x^2}\ge 0, \forall x\in[-2;2]\end{cases}$ và $y=f(x)$ đồng biến trên $(-1;+\infty)$ nên

$\dfrac{f'\left(\sqrt{4-x^2}\right)}{\sqrt{4-x^2}}+2-x>0$

* Suy ra bảng biến thiên của hàm số $y=h(x)$ trên $D=[-2;2]$.

x	-2		0		2
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
$h(x)$	3	$\nearrow$	$f(2)+\dfrac{20}{3}$	$\searrow$	$\dfrac{16}{3}$

* Yêu cầu bài toán $f(m) \geq \min\limits_{[-2;2]} h(x) = 3$

* Từ đồ thị $y = f(x)$ suy ra $f(m) \geq \min\limits_{[-2;2]} h(x) = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -3 \\ m \geq 0 \end{array}\right.$ kết hợp $m \in [-10;10]$ và m nguyên nên có 12 giá trị của m.

Câu 14. Cho hố số $y = x^3 - 3x^2$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-10;10]$ để bất phương trình $\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{2-x}\right)^3 - 6\sqrt{2+x-x^2} - 9 \leq m$ có nghiệm.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

A. 12 **B.** 13. **C.** 14. **D.** 15.

Lời giải

Chọn D

* ĐKXĐ: $-1 \leq x \leq 2$

* Đặt $t = \sqrt{x+1}+\sqrt{2-x}$. Với $-1 \leq x \leq 2$ thì $\sqrt{3} \leq t \leq \sqrt{6}$

* Ta có $t^2 = 3 + 2\sqrt{2+x-x^2} \Rightarrow 2\sqrt{2+x-x^2} = t^2 - 3$

* Bất phương trình đã cho trở thành $m \geq t^3 - 3t^2 = f(t)$, $t \in \left[\sqrt{3};\sqrt{6}\right]$.

* Bảng biến thiên của hàm số $f(t)$ trên đoạn $\left[\sqrt{3};\sqrt{6}\right]$ là

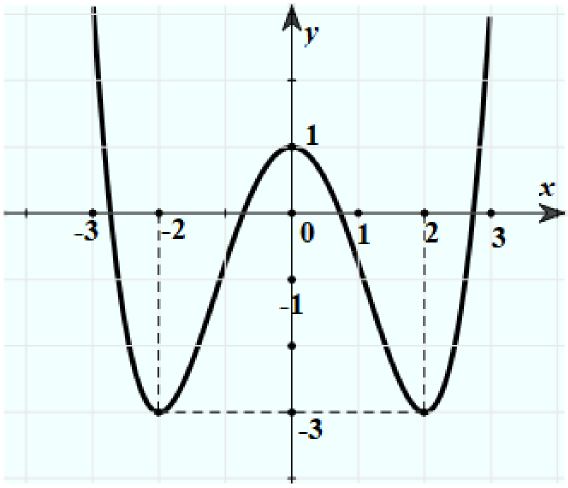
x	$-\infty$		0		$\sqrt{3}$		2		$\sqrt{6}$		$+\infty$
y'		$+$	0			$-$	0	$+$			
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$			-4	$\nearrow$			$+\infty$

* Yêu cầu bài toán $m \geq \min\limits_{\left[\sqrt{3};\sqrt{6}\right]} f(t) = -4$

* $m \geq -4$ kết hợp $m \in [-10;10]$ và m nguyên nên có 15 giá trị của m.

Câu 15. Cho hố số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Số các nghiệm nguyên của bất phương trình

$$\frac{\left(x^2-4\right)\left(x^2+2x\right)}{\left[f(x)\right]^3 + 3\left[f(x)\right]^2 + f(x) + 3} \leq 0 \text{ là.}$$



A. 1 **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

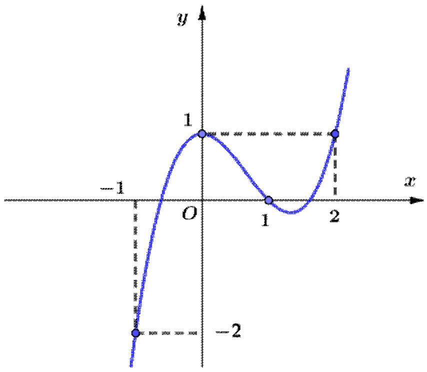
* Ta có $\left[f(x)\right]^3+3\left[f(x)\right]^2+f(x)+3=\left(f(x)+3\right)\left(\left[f(x)\right]^2+1\right)$ và

$f(x)+3=0 \Leftrightarrow a(x-2)^2(x+2)^2=0$, (với $a>0, a\in\mathbb{R}$)

* Do đó bất phương trình đã cho $\Leftrightarrow \dfrac{x(x-2)(x+2)^2}{(x-2)^2(x+2)^2}\le 0 \Leftrightarrow \dfrac{x}{x-2}\le 0 \Leftrightarrow 0\le x<2$

* Kết hợp điều kiện nghiệm nguyên nên có $x\in\{0;1\}$.

Câu 16. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Hãy tìm tập nghiệm S của bất phương trình $f(x)-x+1\ge 0$.

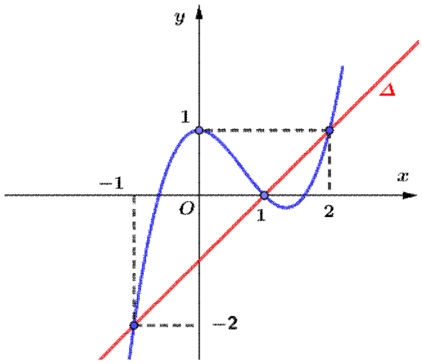
A. $S=[-1;1]\cup[2;+\infty)$. **B.** $S=(-\infty;-1]\cup[1;2]$.

C. $S=[0;1]\cup[2;+\infty)$. **D.** $S=(-\infty;0]\cup[1;2]$.

Lời giải

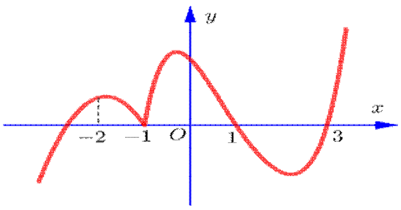
Chọn A

Ta có bất phương trình $f(x)-x+1\ge 0 \Leftrightarrow f(x)\ge x-1$ nên nếu vẽ đường thẳng $\Delta: y=x-1$ trên cùng hệ trục với đồ thị hàm số $y=f(x)$ thì tập nghiệm S của bất phương trình đã cho là tập hợp hoành độ các điểm sao cho đồ thị hàm số $y=f(x)$ nằm phía trên đường thẳng Δ.



Dựa vào đồ thị ta có tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S=[-1;1]\cup[2;+\infty)$.

Câu 17. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình bên.



Có bao nhiêu số nguyên m để bất phương trình $\left(mx+m^2\sqrt{5-x^2}+2m+1\right)f(x)\ge 0$ nghiệm đúng với mọi $x\in[-2;2]$?

A. 1. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 2.

Lời giải

Đặt $g(x)=mx+m^2\sqrt{5-x^2}+2m+1$.

Từ đồ thị của $y=f(x)$ ta thấy $f(x)$ đổi dấu khi qua $x=1$ nên suy ra $g(x)$ cũng phải đổi dấu khi qua $x=1$. Mặt khác $g(x)$ liên tục nên $g(x)=0$ có nghiệm $x=1$.

Kiểm tra: Với $m=-1$. Ta có

$$g(x).f(x)=\left(-x+\sqrt{5-x^2}-1\right)f(x)=(1-x)\left(\frac{1+x}{2+\sqrt{5-x^2}}+1\right)f(x)$$

Nhận xét: $\dfrac{1+x}{2+\sqrt{5-x^2}}+1=\dfrac{3+x+\sqrt{5-x^2}}{2+\sqrt{5-x^2}}>0,\ \forall x[-2;2]$.

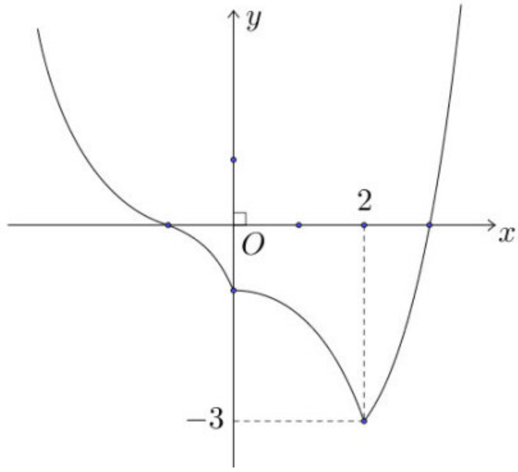
Khi đó quan sát đồ thị $f(x)$, ta thấy:

+ TH1: với $x\in[1;2]$ thì $f(x)\le 0$ nên $(1-x).f(x)\ge 0$.

+ TH2: với $x\in[-2;1]$ thì $f(x)\ge 0$ nên $(1-x)f(x)\ge 0$.

Do đó trong cả hai trường hợp ta luôn có $g(x).f(x)\ge 0$, $\forall x\in[-2;2]$.

Câu 18. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình dưới đây



Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $2f(x)+x^2>4x+m$ nghiệm đúng với mọi $x\in(-1;3)$.

A. $m<-3$ **B.** $m<-10$. **C.** $m<-2$. **D.** $m<5$.

Lời giải

Chọn B

BPT đã cho nghiệm đúng với với $x\in(-1;3) \Leftrightarrow f(x)>\dfrac{-x^2+4x+m}{2}$ đúng $\forall x\in(-1;3)$

$\Leftrightarrow \dfrac{-x^2+4x+m}{2}<-3, \forall x\in(-1;3) \Leftrightarrow -x^2+4x+m+6<0, \forall x\in(-1;3)$

$\Leftrightarrow m<x^2-4x-6, \forall x\in(-1;3)$

Xét hàm số $h(x)=x^2-4x-6$ với $x\in(-1;3)$

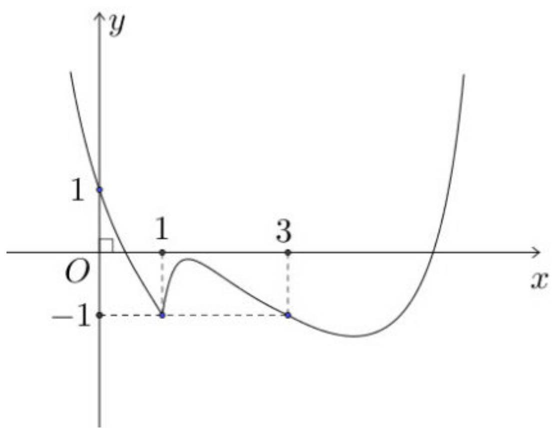
$h'(x)=2x-4 \Rightarrow h'(x)=0 \Leftrightarrow x=2$.

Ta có bảng biến thiên sau:

x	-1		2		3
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$	-1	$\searrow$	-10	$\nearrow$	-9

Từ BBT suy ra $m<\min\limits_{(-1;3)} h(x) \Leftrightarrow m<-10$.

Câu 19. Cho đồ thị (C) của hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ dưới đây



Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của m để bất phương trình $f\left(x\right)\le\dfrac{m}{x^2-2x+6}$ có nghiệm trên $\left[0;3\right]$?

A. 9 **B.** 10. **C.** 5. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

$f\left(x\right)\le\dfrac{m}{x^2-2x+6}$ có nghiệm trên $\left[0;3\right]$ $\Leftrightarrow m\ge\left(x^2-2x+6\right).f\left(x\right)$ có nghiệm $x\in\left[0;3\right]$

Xét hàm số $g\left(x\right)=\left(x^2-2x+6\right).f\left(x\right)$ với $x\in\left[0;3\right]$.

Ta có $\left|g\left(x\right)\right|=\left|x^2-2x+6\right|.\left|f\left(x\right)\right|\le 9.1=9,\forall x\in\left[0;3\right]$ (dấu bằng xảy ra khi $x=3$).

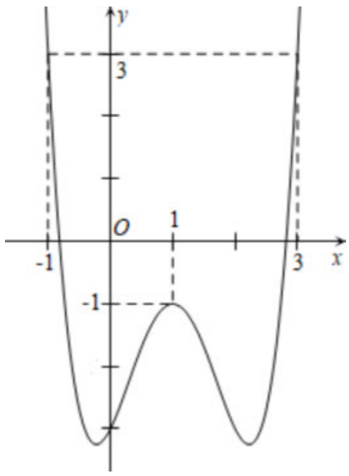
$\Rightarrow \min\limits_{[0;3]} g\left(x\right)=-9$.

Do đó bất phương trình đã cho có nghiệm trên $\left[0;3\right]$ $\Leftrightarrow m\ge-9$.

Vì m nguyên âm nên $-9\le m\le-1$ $\Rightarrow$ có 9 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Dạng 12: Biết đồ thị hoặc BBT của hàm số $y=f'\left(x\right)$, xét các bài toán liên quan đến BẤT PHƯƠNG TRÌNH có dạng $f\left(x\right)\ge g\left(x\right); f\left(u\left(x\right)\right)\ge g\left(x\right)\ (>,<,\le)$... có thể có tham số.

Câu 1. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y=f'\left(x\right)$ có đồ thị như hình dưới đây.



Bất phương trình $3f\left(x\right)\le x^3-3x^2+m$ đúng với mọi $x\in\left(-1;3\right)$ khi và chỉ khi

A. $m>3f\left(3\right)$. **B.** $m\ge 3f\left(3\right)$. **C.** $m>3f\left(-1\right)+4$. **D.** $m\ge 3f\left(-1\right)+4$.

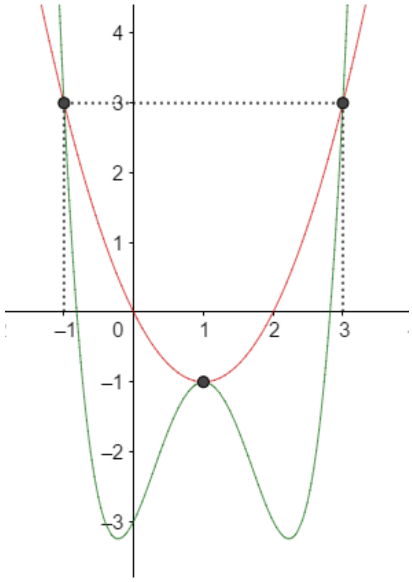
Chọn D

Ta có: $3f\left(x\right)\le x^3-3x^2+m \Leftrightarrow 3f(x)-x^3+3x^2\le m$ với mọi $x\in\left(-1;3\right)$.

Xét $g(x)=3f(x)-x^3+3x^2$ với $x\in\left(-1;3\right)$.

Khi đó: $g'(x)=3f'(x)-3x^2+6x=3\left[f'(x)-x^2+2x\right]$.

Nghiệm của phương trình $g'(x)=0$ là hoành độ giao điểm của đồ thị $y=f'(x)$ và parabol $y=x^2-2x$.



Phương trình $g'(x)=0$ có ba nghiệm $x=-1; x=3; x=1$ trên đoạn $[-1;3]$.

$\lim\limits_{x\to -1^+} g(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}\left[3f(x)-x^3+3x^2\right]=3f(-1)+4$;

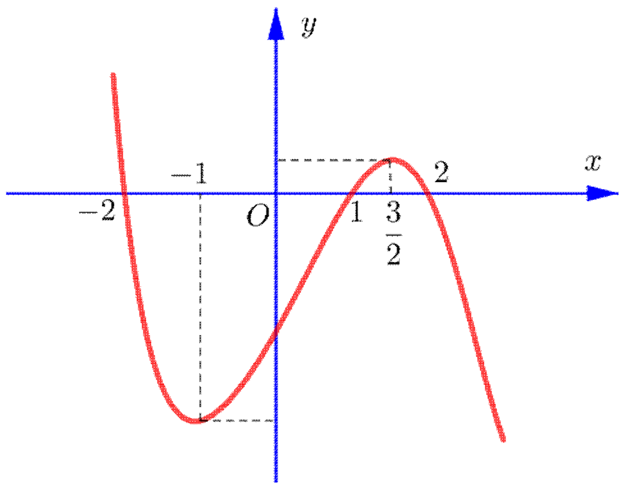
$\lim\limits_{x\to 3^-} g(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}\left[3f(x)-x^3+3x^2\right]=3f(3)$.

Ta có bảng biến thiên sau:

x	-1	1	3
$g'(x)$	0	-	0
$g(x)$	$3f(-1)+4$	$\searrow$	$3f(3)$

Bất phương trình $3f(x)\le x^3-3x^2+m$ đúng với mọi $x\in(-1;3)$ khi và chỉ khi $m\ge g(x), \forall x\in(-1;3) \Leftrightarrow m\ge 3f(-1)+4$.

Câu 2. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thoả mãn $f(2)=f(-2)=0$ và đồ thị hàm số $y=f'(x)$ có hình dạng như hình vẽ bên dưới.



Bất phương trình $f(x)+2m-1\le 0$ đúng với mọi số thực x khi và chỉ khi

A. $m < \frac{1}{2}$. **B.** $m \le \frac{1}{2}$. **C.** $m \ge \frac{1}{2}$. **D.** $m > \frac{1}{2}$.

Lời giải

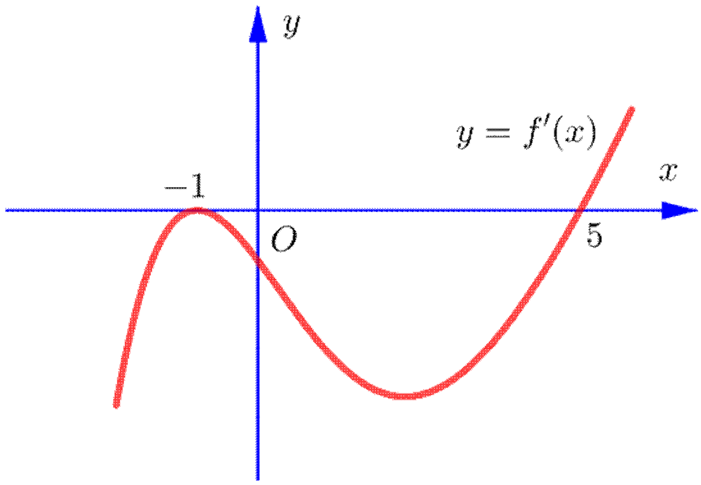
Từ đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và giả thiết ta có BBT của hàm số $y = f(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-2		1		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$f(1)$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Ta có $f(x) + 2m - 1 \le 0 \Leftrightarrow 1 - 2m \ge f(x)$ (*).

Bất phương trình [*] đúng với mọi số thực x $\Leftrightarrow 1 - 2m \ge \max\limits_{\mathbb{R}} f(x)$.

Câu 3. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên dưới



Để hàm số $y = f(2x^3 - 6x + 3)$ đồng biến với mọi $x > m$ $(m \in \mathbb{R})$ thì $m \ge \sin\frac{b\pi}{c}$, trong đó $a, b, c \in \mathbb{N}^*$. $c > 2b$. Tổng bằng $S = 2a + 3b - c$ bằng

A. -9. **B.** 7. **C.** 5. **D.** -2.

Lời giải

Đặt $g(x) = f(2x^3 - 6x + 3)$. Ta có $g'(x) = 6(x^2 - 1) f'(2x^3 - 6x + 3)$.

Hàm số $y = g(x)$ đồng biến khi $g'(x) \ge 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2 - 1 \ge 0 \\ f'(2x^3 - 6x + 3) \ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 - 1 < 0 \\ f'(2x^3 - 6x + 3) < 0 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2 - 1 \ge 0 \\ 2x^3 - 6x + 3 \ge 5 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 - 1 < 0 \\ 2x^3 - 6x + 3 < 5 \end{cases} \end{array}\right.$.

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2 - 1 \ge 0 \\ 2x^3 - 6x + 3 \ge 5 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 - 1 < 0 \\ 2x^3 - 6x + 3 < 5 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2 - 1 \ge 0 \\ 2x^3 - 6x - 2 \ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 - 1 > 0 \\ 2x^3 - 6x - 2 < 0 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow x \in (-\infty, -1{,}53) \cup (-1; -0{,}35) \cup (1; 1{,}88).$$

Ta thấy $x \approx 1{,}88$ là nghiệm lớn nhất. Để hàm số $y = f(2x^3 - 6x + 3)$ đồng biến với mọi $x > m$ $(m \in \mathbb{R})$ thì $m \ge x \approx 1{,}88$. Ta sẽ tìm cách giải cụ thể giá trị $x \approx 1{,}88$ là nghiệm của $2x^3 - 6x - 2 = 0$ bằng phương pháp đổi biến lượng giác.

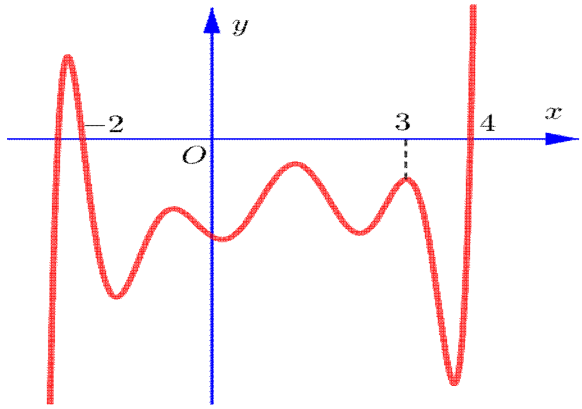
Đặt $x = 2\cos t \Rightarrow 8\cos^3 t - 6\cos t - 1 = 0 \Rightarrow \cos 3t = \dfrac{1}{2} \Rightarrow t = \pm\dfrac{\pi}{9} + k\dfrac{2\pi}{3}$, với $t \in [0;2\pi]$

ta được $t = \dfrac{\pi}{9}$ hoặc $t = \dfrac{17\pi}{9}$. Do đó $2\cos\dfrac{17\pi}{9} = a\sin\dfrac{b}{c}\pi = 2\sin\dfrac{-25}{18}\pi$ (không thỏa mãn đk)

hoặc $2\cos\dfrac{\pi}{9} = a\sin\dfrac{b}{c}\pi = 2\sin\dfrac{7}{18}\pi$ $a = 2, b = 7; c = 18 \Rightarrow S = 7$ (thỏa mãn).

$\Leftrightarrow 1 - 2m \ge 0 \Leftrightarrow m \le \dfrac{1}{2} \Rightarrow$ ***Chọn B.***

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Bất phương trình $f(x) \ge \dfrac{2^{f(x)-m} + 5^{f(x)-m} - 2 + 27m}{27}$ nghiệm đúng với $x \in (-2;3)$ mọi khi

A. $f(3) \le m \le f(3) + 1$. **B.** $f(-2) + 1 \le m \le f(3)$.

C. $f(-2) - 2 \le m \le f(3)$. **D.** $f(3) \le m \le f(-2) - 2$.

Lời giải

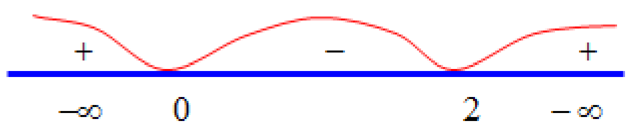
Ta có với $x \in (-2;3)$ thì $f'(x) < 0$ Ta có $f(3) < f(x) < f(-2)$, $\forall x \in (-2;3)$.

$f(3) - 2m < f(x) - m < f(-2) - m$ Đặt $t = f(x) - m \Rightarrow f(3) - m < t < f(-2) - m$

Ta có $f(x) \ge \dfrac{2^{f(x)-m} + 5^{f(x)-m} - 2 + 27m}{27}$ $2^{f(x)-m} + 5^{f(x)-m} - 2 - 27(f(x) - m) \le 0$

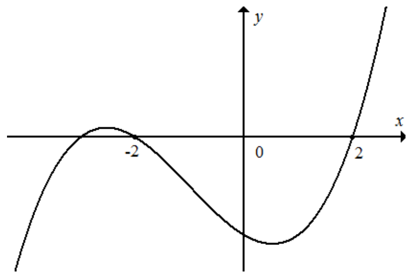
$2^t + 5^t - 27t - 2 \le 0$ .Vế trái chỉ có 2 nghiệm $t = 0; t = 2$

Xét dấu



Ta có $0 \le t \le 2 \Rightarrow \begin{cases} f(3) - m \ge 0 \\ f(-2) - m \le 2 \end{cases} \Rightarrow f(-2) - 2 \le m \le f(3) \Rightarrow$ ***Chọn C.***

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như sau:



Bất phương trình $f(x) > x^2 - 2x + m$ đúng với mọi $x \in (1;2)$ khi và chỉ khi

A. $m \le f(2)$. **B.** $m < f(1) - 1$. **C.** $m \ge f(2) - 1$. **D.** $m \ge f(1) + 1$.

Lời giải:

Chọn A

Ta có: $f(x) > x^2 - 2x + m$, $\forall x \in (1;2) \Rightarrow g(x) = f(x) - x^2 + 2x > m, \ \forall x \in (1;2)$

Ta có: $g'(x) = f'(x) - 2x + 2 < 0$, $\forall x \in (1;2)$ do $\forall x \in (1;2) \Rightarrow \begin{cases} f'(x) < 0 \\ 2x - 2 > 0 \end{cases}$

Vậy ta có: $\min\limits_{x \in (1;2)} g(x) = g(2) = f(2) \ge m$.

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Bất phương trình $f(x) < e^{x^2} + m$ đúng với mọi $x \in (-1;1)$ khi và chỉ khi

A. $m \ge f(0) - 1$. **B.** $m > f(-1) - \mathrm{e}$. **C.** $m > f(0) - 1$. **D.** $m \ge f(-1) - \mathrm{e}$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $g(x) = \mathrm{e}^{x^2}$

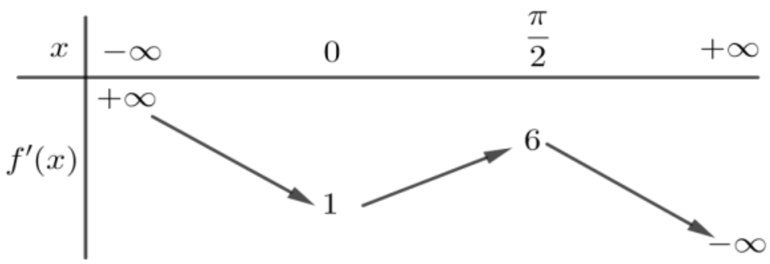
Do $x^2 \in [0;1)$ $\forall x \in (-1;1)$ nên $g(x) = \mathrm{e}^{x^2} \ge \mathrm{e}^0 = 1$

Ta có $\max\limits_{x \in (-1;1)} f(x) = f(0)$, $\min\limits_{x \in (-1;1)} g(x) = g(0) = 1$

Bất phong trình $f(x) < e^{x^2} + m$ đúng với mọi $x \in (-1;1) \Leftrightarrow f(x) - \mathrm{e}^{x^2} < m$,

$\forall x \in (-1;1) \Leftrightarrow m \ge \max\limits_{x \in (-1;1)} \left[f(x) - \mathrm{e}^{x^2} \right] = f(0) - 1$.

Câu 7. Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có bảng biến thiên như sau



Bất phương trình $f(x) > 2^{\cos x} + 3m$ đúng với mọi $x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$ khi và chỉ khi

A. $m \le \frac{1}{3}\left[f(0) - 2\right]$. **B.** $m < \frac{1}{3}\left[f(0) - 2\right]$.

C. $m \le \frac{1}{3}\left[f\left(\frac{\pi}{2} \right) - 1 \right]$. **D.** $m < \frac{1}{3}\left[f\left(\frac{\pi}{2} \right) - 1 \right]$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f(x) > 2^{\cos x} + 3m\ \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2} \right) \Leftrightarrow f(x) - 2^{\cos x} > 3m\ \ \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2} \right)$.

Xét hàm $g(x) = f(x) - 2^{\cos x}$ trên $\left(0; \frac{\pi}{2} \right)$.

Ta có $g'(x) = f'(x) + 2^{\cos x}\sin x.\ln 2$

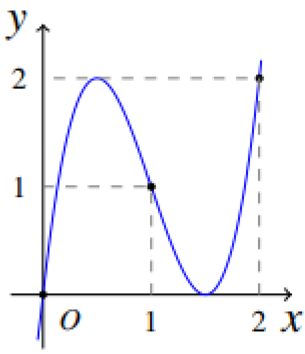
Vì $f'(x) \ge 1\ \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2} \right)$; $\sin x > 0\ \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2} \right) \Rightarrow 2^{\cos x}\sin x.\ln 2 > 0\ \ \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2} \right)$ nên ta suy ra $g'(x) = f'(x) + 2^{\cos x}\sin x.\ln 2 > 0\ \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2} \right)$.

Vậy ta có bảng biến thiên

x	0		$\frac{\pi}{2}$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	$g(0)$	$\nearrow$	$g\left(\frac{\pi}{2} \right)$

Từ bảng biến thiên ta có bất phương trình $f(x) > 2^{\cos x} + 3m$ đúng với mọi $x \in \left(0; \frac{\pi}{2} \right)$ khi và chỉ khi $g(0) \ge 3m \Leftrightarrow 3m \le f(0) - 2 \Leftrightarrow m \le \frac{1}{3}\left[f(0) - 2 \right]$.

Câu 8. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Bất phương trình $f(2\sin x) - 2\sin^2 x < m$ đúng với mọi $x \in (0;\pi)$ khi và chỉ khi

A. $m > f(1) - \frac{1}{2}$. **B.** $m \ge f(1) - \frac{1}{2}$. **C.** $m \ge f(0) - \frac{1}{2}$. **D.** $m > f(0) - \frac{1}{2}$.

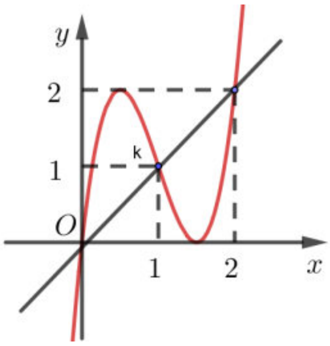
Lời giải

Chọn A

Ta có: $f(2\sin x) - 2\sin^2 x < m\quad (1)$

Đặt $2\sin x = t$, do $x \in (0;\pi)$ nên $t \in (0;2]$.

Với $t\in(0;2]$ thì (1) trở thành: $f(t)-\dfrac{t^2}{2}<m$, $\forall t\in(0;2]\Leftrightarrow m>\max\limits_{t\in(0;2]} g(t)$, với $g(t)=f(t)-\dfrac{t^2}{2}$.



Ta có $g'(t)=f'(t)-t$. Từ đồ thị ta có: $g'(t)=0\Leftrightarrow f'(t)=t\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0\\ t=1\\ t=2\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

t	0		1		2
$g'(t)$	0	+	0	−	0
$g(t)$	$g(0)$	↗	$g(1)$	↘	$g(2)$

Từ bảng biến thiên ta có khi $m>\max\limits_{t\in(0;2]} g(1)\Leftrightarrow m>f(1)-\dfrac{1}{2}$ thì bất phương trình $f(2\sin x)-2\sin^2 x<m$ đúng với mọi $x\in(0;\pi)$.

Cô Hương Bùi

Câu 9. Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	↘	-3	↗	0	↘	$-\infty$

Bất phương trình $f(x)<\ln x+m$ đúng với mọi $x\in\left(\dfrac{1}{3};1\right)$ khi và chỉ khi

A. $m>f\left(\dfrac{1}{3}\right)+\ln 3$. **B.** $m<f(1)$. **C.** $m\ge f\left(\dfrac{1}{3}\right)+\ln 3$. **D.** $m\ge f(1)$.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện $x>0$.

$f(x)<\ln x+m,\forall x\in\left(\dfrac{1}{3};1\right)\Leftrightarrow m>f(x)-\ln x,\forall x\in\left(\dfrac{1}{3};1\right)$.

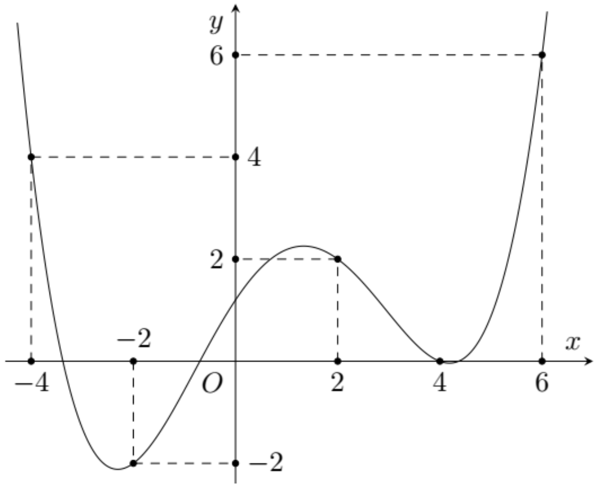
Đặt $g(x)=f(x)-\ln x \Rightarrow g'(x)=f'(x)-\dfrac{1}{x}$.

Xét trên đoạn $\left[\dfrac{1}{3};1\right]$ ta có: $f'(x)\le 0$ và $-\dfrac{1}{x}<0 \Rightarrow g'(x)<0$.

$\Rightarrow$ Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên đoạn $\left[\dfrac{1}{3};1\right] \Rightarrow g\left(\dfrac{1}{3}\right)>g(x), \forall x\in\left(\dfrac{1}{3};1\right)$.

Vậy $m>f(x)-\ln x, \forall x\in\left(\dfrac{1}{3};1\right) \Rightarrow m\ge g\left(\dfrac{1}{3}\right)=f\left(\dfrac{1}{3}\right)+\ln 3$.

Câu 10. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $-\dfrac{1}{3}f(-3x-8)\ge\dfrac{9}{2}x^2+16x-m$ đúng với mọi $x\in[-2;0]$:

A. $m\le\dfrac{1}{3}f(-2)-14$. **B.** $m\le\dfrac{1}{3}f(-4)-\dfrac{40}{3}$.

C. $m\ge\dfrac{1}{3}f(-2)-4$. **D.** $m\ge\dfrac{1}{3}f(-4)-\dfrac{40}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Bất phương trình đã cho tương đương với:

$$\frac{1}{3}f(-3x-8)+\frac{9}{2}x^2+16x\le m \text{ đúng với mọi } x\in[-2;0]$$

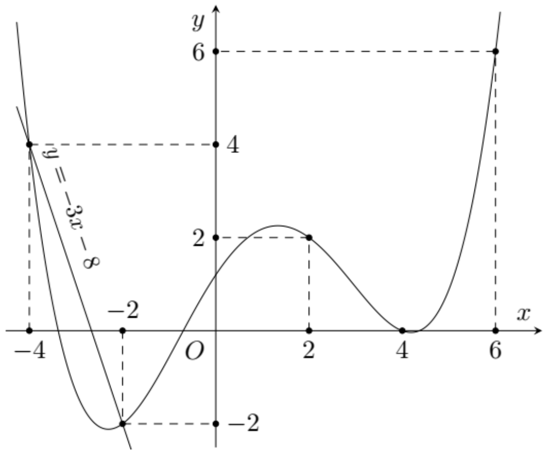
Xét hàm số $g(x)=\dfrac{1}{3}f(-3x-8)+\dfrac{9}{2}x^2+16x$ với $x\in[-2;0]$. Ta có:

$g'(x)=-f'(-3x-8)+9x+16$

$g'(x)=0 \Leftrightarrow -f'(-3x-8)+9x+16=0 \Leftrightarrow f'(-3x-8)=9x+16$ (1)

Đặt $t=-3x-8$ thì phương trình (1) trở thành: $f'(t)=-3t-8$ (2)

Số nghiệm của phương trình (2) là số giao điểm của ĐTHS $y=f'(t)$ và đường thẳng $y=-3t-8$.



Từ đồ thị ta được: $(2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-4 \\ t=-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -3x-8=-4 \\ -3x-8=-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{-4}{3} \\ x=-2 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

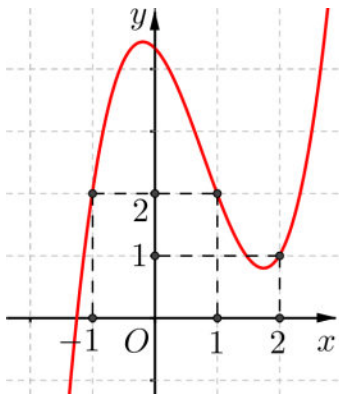
x	$-\infty$	-2		$-\dfrac{4}{3}$		0	$+\infty$
$g'(x)$			$+$	0	$-$		
$g(x)$		$\dfrac{1}{3}f(-2)-14$	$\nearrow$	$\dfrac{1}{3}f(-4)-\dfrac{40}{3}$	$\searrow$	$\dfrac{1}{3}f(-8)$	

Từ bảng biến thiên suy ra:

Bất phương trình $\dfrac{1}{3}f(-3x-8)+\dfrac{9}{2}x^2+16x \le m$ đúng với mọi $x \in [-2;0]$ khi và chỉ khi:

$$\max_{[-2;0]} g(x) \le m \Leftrightarrow m \ge \frac{1}{3}f(-4)-\frac{40}{3}.$$

Câu 11. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ.



Tìm m để bất phương trình $4f\left(\sqrt{5}\sin x\right) \ge 5\sin 2x+10x+m$ thỏa mãn $\forall x \in \left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$?

A. $m \le 4f(1) - 4 + 10\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$.

B. $m \le 4f(-1) + 4 - 10\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$.

C. $m \le 4f(2) - 4 + 10\arcsin\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$.

D. $m \le 4f(2) + 4 - 10\arcsin\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $4f\left(\sqrt{5}\sin x\right) \ge 5\sin 2x + 10x + m \Leftrightarrow m \le 4f\left(\sqrt{5}\sin x\right) - 5\sin 2x - 10x$

Xét hàm số $g(x) = 4f\left(\sqrt{5}\sin x\right) - 5\sin 2x - 10x$ trên $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ ta có

$g'(x) = 4\sqrt{5}\cos x.f'\left(\sqrt{5}\sin x\right) - 10\cos 2x - 10 = 4\sqrt{5}\cos x.f'\left(\sqrt{5}\sin x\right) - 20\cos^2 x$

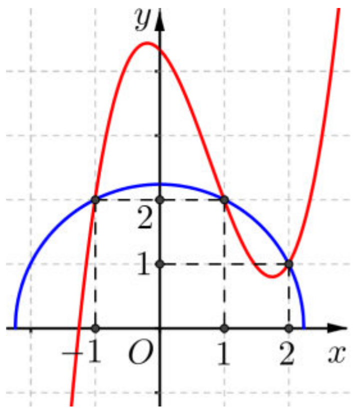
$= 4\sqrt{5}\cos x\left[f'\left(\sqrt{5}\sin x\right) - \sqrt{5}\cos x\right]$

Do $x \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ nên $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} > 0$

Khi đó $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'\left(\sqrt{5}\sin x\right) = \sqrt{5}\cos x \Leftrightarrow f'\left(\sqrt{5}\sin x\right) = \sqrt{5 - 5\sin^2 x}$.

Đặt $t = \sqrt{5}\sin x$ ta được $f'(t) = \sqrt{5 - t^2}$

Xét hàm số $y = \sqrt{5 - x^2}$ có đồ thị là nửa đường tròn tâm O bán kính $\sqrt{5}$ nằm phía trên trục hoành.



Dựa vào đồ thị suy ra $f'(t) = \sqrt{5 - t^2} \Leftrightarrow t \in \{-1; 1; 2\}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{5}\sin x = -1 \\ \sqrt{5}\sin x = 1 \\ \sqrt{5}\sin x = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = x_1 \\ x = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = x_2 \\ x = \arcsin\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = x_3 \end{array}\right.$$

Ta có bảng biến thiên của $g(x)$ trên $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ là:

x	$-\dfrac{\pi}{2}$		x_1		x_2		x_3		$\dfrac{\pi}{2}$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$g\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)$	↘	$g(x_1)$	↗	$g(x_2)$	↘	$g(x_3)$	↗	$g\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$

Ta có $g(x_1)=4f(-1)+4-10\arcsin\left(-\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$ và $g(x_3)=4f(2)-4+10\arcsin\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$.

Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y=f'(x)$ trục hoành và hai đường thẳng $x=-1,\ x=2$. Dựa vào đồ thị ta thấy diện tích hình (H) lớn hơn 4.

Vì $f(2)-f(-1)=\int\limits_{-1}^{2}f'(x)dx=S(H)$ nên $f(2)>f(-1)+4$

Do đó $g(x_3)=4f(2)-4+10\arcsin\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)>4f(-1)+12+10\arcsin\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)>g(x_1)$

Vậy để $m\le g(x)$ với $\forall x\in\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$ thì $m\le g(x_1)=4f(-1)+4-10\arcsin\left(-\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$.

Câu 12. Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		1		4		$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	↘	1	↗	4	↘	$-\infty$

Bất phương trình $f\left(e^x\right)<e^{2x}+m$ nghiệm đúng với mọi $x\in(\ln 2;\ln 4)$ khi và chỉ khi

A. $m\ge f(2)-4$. **B.** $m\ge f(2)-16$. **C.** $m>f(2)-4$. **D.** $m>f(2)-16$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f\left(e^x\right)<e^{2x}+m$ nghiệm đúng với mọi $x\in(\ln 2;\ln 4)$ khi và chỉ khi

$m>f\left(e^x\right)-e^{2x},\forall x\in(\ln 2;\ln 4)$. (*)

Đặt $t=e^x\Rightarrow t\in(2;4)$

Bất phương trình (*) trở thành : $m>f(t)-t^2,\forall t\in(2;4)$

Xét hàm số $g(t)=f(t)-t^2$ trên $(2;4)$

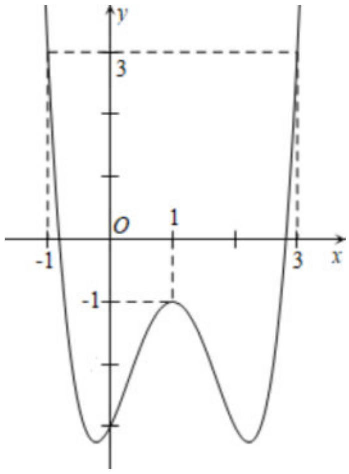
Ta có $g'(t)=f'(t)-2t<0$ (do $f'(t)<4,\forall t\in(2;4)$)

Vậy $g(t)=f(t)-t^2$ nghịch biến trên $(2;4)$

Suy ra : $g(t) < g(2) = f(2) - 4$

Do đó để thỏa mãn yêu cầu bài toán ta có $m \geq f(2) - 4$

Câu 13. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình dưới đây.



Bất phương trình $3f(x) \leq x^3 - 3x^2 + m$ đúng với mọi $x \in (-1;3)$ khi và chỉ khi

A. $m > 3f(3)$. **B.** $m \geq 3f(3)$. **C.** $m > 3f(-1) + 4$. **D.** $m \geq 3f(-1) + 4$.

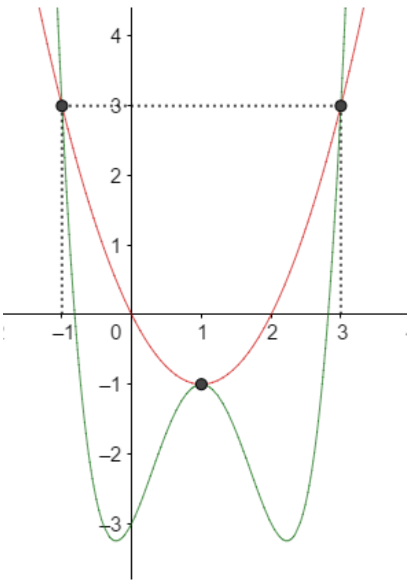
Chọn D

Ta có: $3f(x) \leq x^3 - 3x^2 + m \Leftrightarrow 3f(x) - x^3 + 3x^2 \leq m$ với mọi $x \in (-1;3)$.

Xét $g(x) = 3f(x) - x^3 + 3x^2$ với $x \in (-1;3)$.

Khi đó: $g'(x) = 3f'(x) - 3x^2 + 6x = 3\left[f'(x) - x^2 + 2x\right]$.

Nghiệm của phương trình $g'(x) = 0$ là hoành độ giao điểm của đồ thị $y = f'(x)$ và parabol $y = x^2 - 2x$.



Phương trình $g'(x) = 0$ có ba nghiệm $x = -1; x = 3; x = 1$ trên đoạn $[-1;3]$.

$\lim\limits_{x \to -1^+} g(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} \left[3f(x) - x^3 + 3x^2\right] = 3f(-1) + 4$;

$\lim\limits_{x \to 3^-} g(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} \left[3f(x) - x^3 + 3x^2\right] = 3f(3)$.

Ta có bảng biến thiên sau:

x	-1 $\quad$ 1 $\quad$ 3
$g'(x)$	0 $\quad$ - $\quad$ 0 $\quad$ - $\quad$ 0
$g(x)$	$3f\left(-1\right)+4$ $\searrow$ $3f\left(3\right)$

Bất phương trình $3f\left(x\right)\le x^3-3x^2+m$ đúng với mọi $x\in\left(-1;3\right)$ khi và chỉ khi $m\ge g\left(x\right),\forall x\in\left(-1;3\right)\Leftrightarrow m\ge 3f(-1)+4$.

CHUYÊN ĐỀ

CÁC DẠNG TOÁN VỀ HÀM ẨN LIÊN QUAN ĐẾN HÀM SỐ

ĐỀ MỤC

1. Các dạng toán về hàm ẩn liên quan đến bài toán xét tính đơn điệu của hàm số
2. Các dạng toán về hàm ẩn liên quan đến bài toán tìm cực trị của hàm số
3. Các dạng toán về hàm ẩn liên quan đến bài toán tìm GTLN, GTNN của hàm số
4. Các dạng toán về hàm ẩn liên quan đến bài toán tìm tiệm cận của hàm số
5. Các dạng toán về hàm ẩn liên quan đến bài toán tiếp tuyến của đồ thị hàm số
6. Các dạng toán về hàm ẩn liên quan đến bài toán giải phương trình, bất phương trình, hệ phương trình.
7. Các dạng toán về hàm ẩn liên quan đến bài toán xét sự tương giao của đồ thị hai hàm số.
8. Các dạng toán về hàm ẩn liên quan đến phép biến đổi đồ thị

ÔN THI THPT QUỐC GIA

Dạng toán 15. Biết biểu thức của hàm số $y=f'(x)$, xét tính đơn điệu của hàm số $y=g(x)=f(u(x))+f(v(x))+h(x)$ **trong bài toán không chứa tham số.**

Dạng toán 16. Biết biểu thức của hàm số $y=f'(x)$, xét tính đơn điệu của hàm số $y=g(x)=f(u(x))+f(v(x))+h(x)$ **trong bài toán chứa tham số**.

Dạng toán 17. Biết biểu thức hàm số $y=f'(x)$ xét tính đơn điệu của hàm số $y=g(x)=\left[f(u(x))\right]^k$ **trong bài toán không chứa tham số**.

Câu 1. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và có đạo hàm $f'(x)=(x+2)(x^2-9)(x^4-16)$ trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y=g(x)=\left[f(2x-x^2)\right]^{2019}$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau đây?

A. $\left(1-\sqrt{3};1+\sqrt{3}\right)$. **B.** $(3;+\infty)$. **C.** $(1;+\infty)$. **D.** $(-1;3)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f'(x)=(x+2)(x^2-9)(x^4-16)=(x-3)(x-2)(x+3)(x+2)^2(x^2+4)$.

$g'(x)=2019.\left[f(2x-x^2)\right]^{2018}\left[f(2x-x^2)\right]'=2019.\left[f(2x-x^2)\right]^{2018}(2-2x)f'(2x-x^2)$

$=2019\left[f(2x-x^2)\right]^{2018}(2-2x)(2x-x^2-3)(2x-x^2-2)(2x-x^2+3)(2x-x^2+2)^2\left[(2x-x^2)^2+4\right]$

$=(1-x)(2x-x^2+3)A$

Trong đó:

$A=2.2019\left[f(2x-x^2)\right]^{2018}(2x-x^2+2)^2(x^2-2x+3)(x^2-2x+2)\left[(x^2-2x)^2+4\right]\ge 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$

Khi đó $g'(x)\ge 0\Rightarrow(1-x)(2x-x^2+3)\ge 0\Leftrightarrow x\in[-1;1]\cup[3;+\infty)$

$\Rightarrow$ Hàm số $y=g(x)=\left[f(2x-x^2)\right]^{2019}$ đồng biến trên mỗi khoảng $(-1;1)$ và $(3;+\infty)$.

Câu 2. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ có $f'(x)=(x-2)(x+5)(x+1)$ và $f(-5)=f(2)=1$. Hàm số $g(x)=\left[f(x^2)\right]^2$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây ?

A. $(-\infty;0)\cup\left(\sqrt{2};+\infty\right)$. **B.** $\left(-\sqrt{2};\sqrt{2}\right)$.

C. $(0;+\infty)$. **D.** $\left(-\sqrt{2};0\right)\cup\left(\sqrt{2};+\infty\right)$.

Lời giải

Chọn D

Từ giả thiết ta có $f'(x)=(x-2)(x+5)(x+1)\Rightarrow f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=-5\\x=-1\end{array}\right.$

Bảng biến thiên của $y=f(x)$

x	$-\infty$		-5		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	1	↗	$f(-1)$	↘	1	↗	$+\infty$

Từ BBT suy ra $f(x)>0\ \ \forall x\in\mathbb{R}$.

Xét hàm số $g(x)=\left[f\left(x^2\right)\right]^2$

$g'(x)=\left(\left(f'\left(x^2\right)\right)^2\right)'=4x.f'\left(x^2\right)f\left(x^2\right)=4x\left(x^2-2\right)\left(x^2+5\right)\left(x^2+1\right)f\left(x^2\right)$

Do $f(x)>0\ \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow f\left(x^2\right)>0\ \forall x\in\mathbb{R}$

Xét $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm\sqrt{2}\end{array}\right.$

BBT của $g(x)=\left[f\left(x^2\right)\right]^2$

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Từ BBT trên ta chọn đáp án
D.

Dạng toán 18. Biết biểu thức hàm số $y=f'(x)$ xét tính đơn điệu của hàm số $y=g(x)=\left[f(u(x))\right]^k$ **trong bài toán chứa tham số**.

Dạng toán 19. Biết biểu thức hàm số $y=f'(u(x))$ xét tính đơn điệu của hàm số $y=f(x)$ **trong bài toán không chứa tham số**.

Câu 3. Cho hàm số $y=f(x)$ có $f'\left(-2x+\frac{7}{2}\right)=3x^2-12x+9$. Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây.

A. $\left(\frac{1}{4};\frac{9}{4}\right)$. **B.** $\left(\frac{9}{4};+\infty\right)$. **C.** $\left(-\frac{5}{2};\frac{3}{2}\right)$. **D.** $\left(-\infty;-\frac{5}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn C

Ta cần giải bất phương trình $f'(x)<0$.

Từ $f'\left(-2x+\frac{7}{2}\right)=3x^2-12x+9\Rightarrow f'\left(-2x+\frac{7}{2}\right)<0\Leftrightarrow 1<x<3$.

Đặt $t=-2x+\frac{7}{2}\Rightarrow x=\frac{7-2t}{4}$. Khi đó ta có $f'(t)<0\Leftrightarrow 1<\frac{7-2t}{4}<3\Leftrightarrow -\frac{5}{2}<t<\frac{3}{2}$.

Vậy hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng $\left(-\frac{5}{2};\frac{3}{2}\right)$.

Câu 4. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên R và có đạo hàm $f'(x)$ thỏa mãn $f'(x)=(1-x)(x+2)g(x)+2018$ với $g(x)<0,\forall x\in R$.

Khi đó hàm số $y=f(1-x)+2018x+2019$ nghịch biến trên khoảng nào?

A. $(1;+\infty)$. **B.** $(0;3)$. **C.** $(-\infty;3)$. **D.** $(4;+\infty)$.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $y=h(x)=f(1-x)+2018x+2019$

Ta có $h'(x) = -f'(1-x) + 2018 = -x(3-x)g(1-x)$

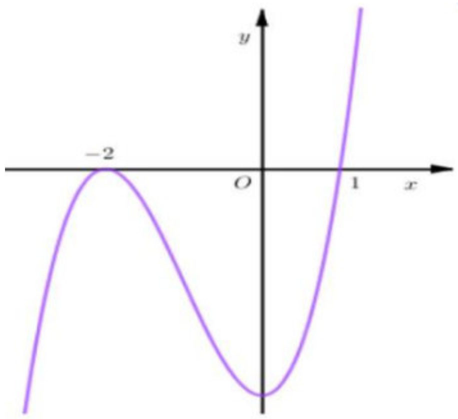
Vì $g(x) < 0, \forall x \in R$ nên $h'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 3 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

Vậy hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(4;+\infty)$.

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(3x+5)$ như hình vẽ. Hàm số $y = f(x)$ nghịch trên khoảng nào?



A. $(-\infty;8)$. **B.** $\left(-\frac{7}{3};+\infty\right)$. **C.** $\left(\frac{4}{3};+\infty\right)$. **D.** $(-\infty;10)$.

Lời giải

Chọn A

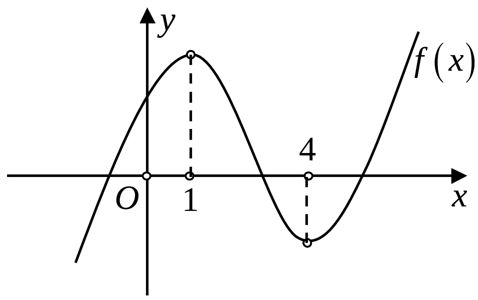
Đặt $x = 3t+5$. Khi đó $g(t) = f(3t+5) \Rightarrow g'(t) = 3f'(3t+5)$.

Ta có $g'(t) < 0 \Leftrightarrow f'(3t+5) < 0 \Leftrightarrow t < 1$.

Khi đó $f'(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{x-5}{3} < 1 \Leftrightarrow x < 8$.

Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;8)$.

Câu 6. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $f(3x-2)$ nghịch biến trên khoảng $(\alpha;\beta)$. Khi đó giá trị lớn nhất của $\beta - \alpha$ là:



A. 9. **B.** 3. **C.** 6. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

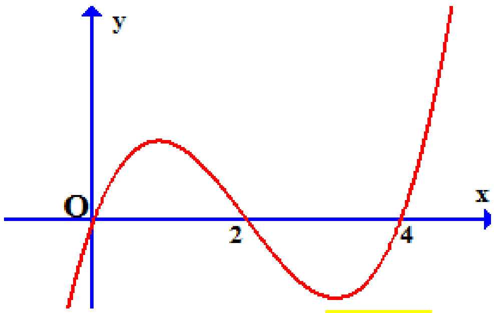
Ta có: $y = f(3x-2) \Rightarrow y' = 3.f'(3x-2)$.

Hàm số $y = f(3x-2)$ nghịch biến $\Leftrightarrow y' \le 0 \Leftrightarrow 3.f'(3x-2) \le 0 \Leftrightarrow f'(3x-2) \le 0$.

$\Leftrightarrow 1\le 3x-2\le 4 \Leftrightarrow 1\le x\le 2$.

Vậy khoảng $(\alpha;\beta)$ lớn nhất là $(1;2)$.

Câu 7. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị hàm số $y=f'(2-x)$ như hình vẽ bên. Hỏi hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?



A. $(-2;4)$. **B.** $(-1;3)$. **C.** $(-2;0)$. **D.** $(0;1)$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $x=2-t$ ta có $y=f(2-t)\Rightarrow y'=-f'(2-t)$.

$y'>0\Leftrightarrow f'(2-t)<0 \Leftrightarrow 2<t<4$ hay

Khi đó $f'(x)>0 \Leftrightarrow 2<2-x<4 \Leftrightarrow -2<x<0$.

Vậy hàm số đồng biến trong khoảng $(-2;0)$.

Dạng toán 20. Biết biểu thức hàm số $y=f'(u(x))$ xét tính đơn điệu của hàm số $y=f(x)$ **trong bài toán chứa tham số.**

Câu 8. Cho hàm số $g(x)=f(5-x)$ có đạo hàm $g'(x)=(5-x)(2-x)^2\left[x^2-(m+10)x+5m+41\right]$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên dương m để hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1)$.

A. 7. **B.** 8. **C.** 9. **D.** 10.

Lời giải

Chọn B

Ta có $g'(x)=-f'(5-x)\Rightarrow f'(5-x)=-g'(x)$. Suy ra

$f'(5-x)=-g'(x)=(x-5)(2-x)^2\left[x^2-(m+10)x+5m+41\right]$

$\Leftrightarrow f'(5-x)=(x-5)((5-x)-3)^2\left[(5-x)^2+m(5-x)+16\right]$

Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1)$ khi và chỉ khi $f'(x)\ge 0,\ \forall x\in(-\infty;-1)$

(Dấu "$=$" chỉ xảy ra tại hữu hạn điểm)

$\Leftrightarrow -x(x-3)^2(x^2+mx+16)\ge 0,\ \forall x\in(-\infty;-1)$

$\Leftrightarrow x^2+mx+16\ge 0,\ \forall x\in(-\infty;-1)$ (vì $x<0$ và $(x-3)^2>0, \forall x\in(-\infty;-1)$)

$\Leftrightarrow m\le \dfrac{-x^2-16}{x},\ \forall x\in(-\infty;-1) \Leftrightarrow m\le \min\limits_{(-\infty;-1)} h(x)$

Với $h(x)=\dfrac{-x^2-16}{x}=-x-\dfrac{16}{x}\ge 2.\sqrt{(-x).\left(\dfrac{-16}{x}\right)}=8$, dấu "=" xảy ra khi $x=-4$.

$\Rightarrow \min\limits_{(6;+\infty)} h(x)=8 \Rightarrow m\le 8$, kết hợp với điều kiện m nguyên dương ta suy ra $m\in\{1;2;3;4;5;6;7;8\}$.

Vậy có 8 giá trị của m thỏa mãn.

Dạng toán 21. Biết biểu thức của hàm số $y=f'(x)$, xét tính đơn điệu của hàm số $y=g(x).f(x)$ **trong bài toán không chứa tham số.**

Dạng toán 22. Biết biểu thức của hàm số $y=f'(x)$, xét tính đơn điệu của hàm số $y=g(x).f(x)$ **trong bài toán chứa tham số.**

Dạng toán 23. Biết biểu thức của hàm số $y=f'(x)$, xét tính đơn điệu của hàm số $y=g(x).f(x)$ **trong bài toán không chứa tham số.**

Dạng toán 24. Biết biểu thức của hàm số $y=f'(x)$, xét tính đơn điệu của hàm số $y=g(x).f(x)$ **trong bài toán chứa tham số.**

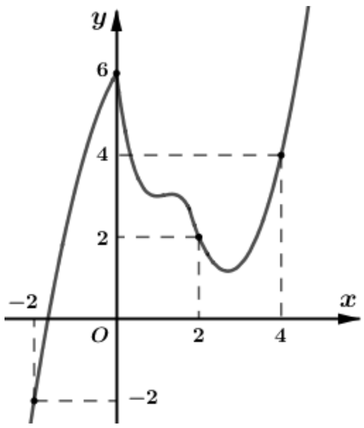
Dạng toán 25. Biết biểu thức của hàm số $y=f'(x)$, xét tính đơn điệu của hàm số $y=\dfrac{g(x)}{f(x)}$ hoặc $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ **trong bài toán không chứa tham số.**

Dạng toán 26. Biết biểu thức của hàm số $y=f'(x)$, xét tính đơn điệu của hàm số $y=\dfrac{g(x)}{f(x)}$ hoặc $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ **trong bài toán chứa tham số.**

PHẦN 3: Biết đồ thị của hàm số $y=f'(x)$

Dạng toán 27. Biết đồ thị hàm số $y=f'(x)$ xét tính đơn điệu của hàm số $y=g(x)=f(x)+h(x)$ **trong bài toán không chứa tham số.**

Câu 9. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình bên dưới.



Hàm số $g(x)=2f(x)-x^2$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau đây?

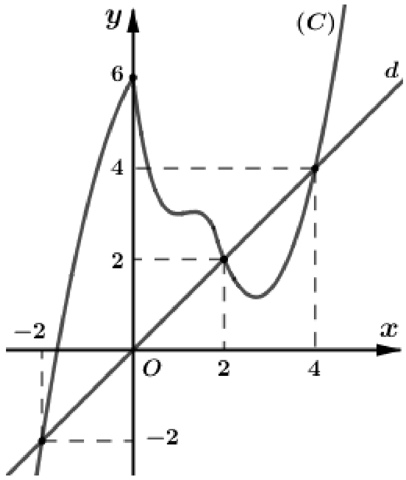
A. $(-\infty;-2)$. **B.** $(-2;2)$. **C.** $(2;4)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $g'(x)=2f'(x)-2x \Rightarrow g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=x.$

Số nghiệm của phương trình $g'(x)=0$ chính là số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f'(x)$ và đường thẳng $d: y=x$ (như hình vẽ bên dưới).



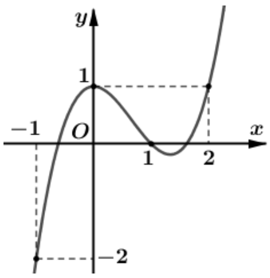
Dựa vào đồ thị, suy ra $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=2 \\ x=4 \end{array}\right.$.

Lập bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		2		4		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

$\Rightarrow$ hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(-2;2)$ và $(4;+\infty)$. So sánh 4 đáp án **Chọn B**

Câu 10. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên dưới.



Hàm số $g(x)=f(x)-\dfrac{x^3}{3}+x^2-x+2$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

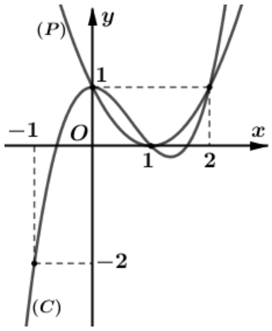
A. $(-1;0)$. **B.** $(0;2)$. **C.** $(1;2)$. **D.** $(0;1)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $g'(x)=f'(x)-x^2+2x-1$, $g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=(x-1)^2$.

Suy ra số nghiệm của phương trình $g'(x)=0$ chính là số giao điểm giữa đồ thị hàm số $f'(x)$ và parabol $(P): y=(x-1)^2$.



Dựa vào đồ thị ta suy ra $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=2 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

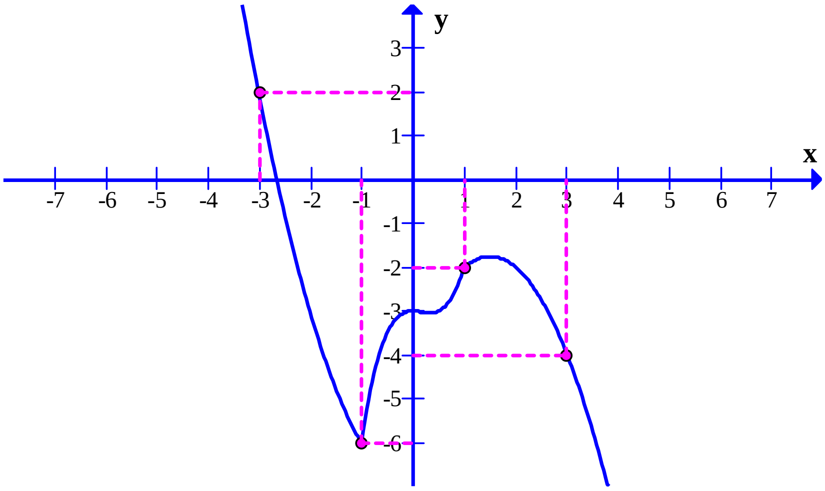
x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
g'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
g		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Dựa vào bảng biến thiên và đối chiếu với các đáp án, ta **Chọn D**

Lưu ý. Cách xét dấu bảng biến thiên như sau: Ví dụ trên khoảng $(-\infty;0)$ ta thấy đồ thị hàm $f'(x)$ nằm phía trên đường $y=(x-1)^2$ nên $g'(x)$ mang dấu $-$.

Nhận thấy các nghiệm $x=0, x=1, x=2$ là các nghiệm đơn nên qua $g'(x)$ đổi dấu.

Câu 11. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ.



Hỏi hàm số $g(x)=2f(x)+(x+1)^2$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

A. $(3;+\infty)$. **B.** $(1;3)$. **C.** $(-3;1)$. **D.** $(-\infty;3)$.

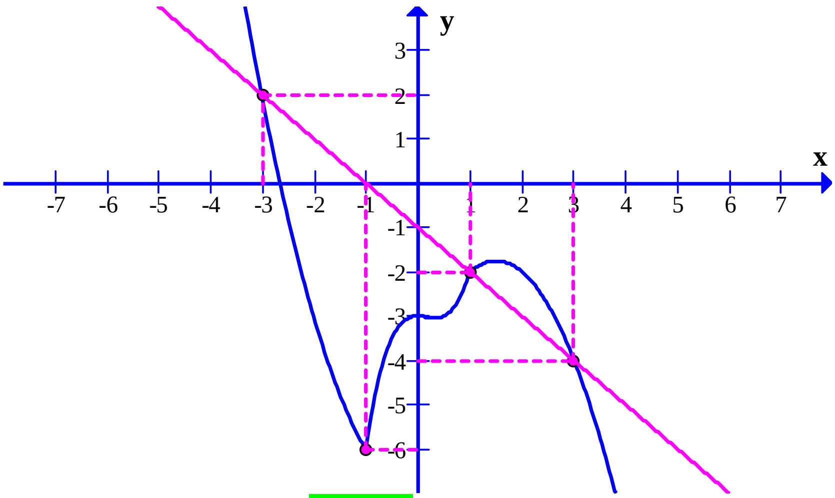
Lời giải

Chọn B

Tập xác định của $g(x)$ là $\mathbb{R}$. Ta có $g'(x)=2\left[f'(x)+x+1\right]$.

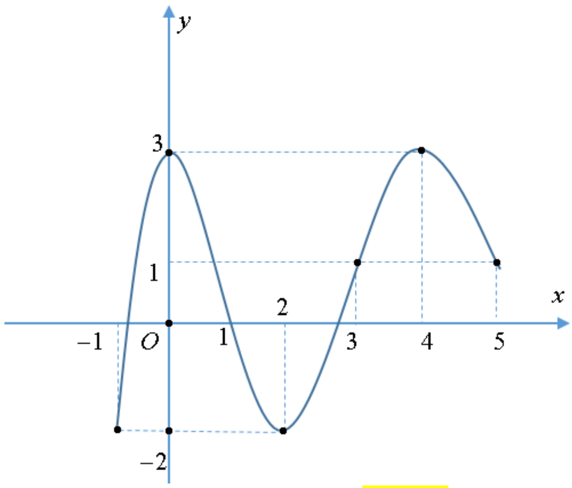
Hàm số đồng biến khi và chỉ khi $f'(x)\geq -x-1$, (dấu bằng chỉ xảy ra tại hữu hạn điểm).

Vẽ chung đồ thị $y=f'(x)$ và $y=-x-1$ trên cùng một hệ trục như sau:



Từ đồ thị ta có $f'(x) \geq -x-1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leq -3 \\ 1 \leq x \leq 3 \end{array}\right.$. **Chọn B**

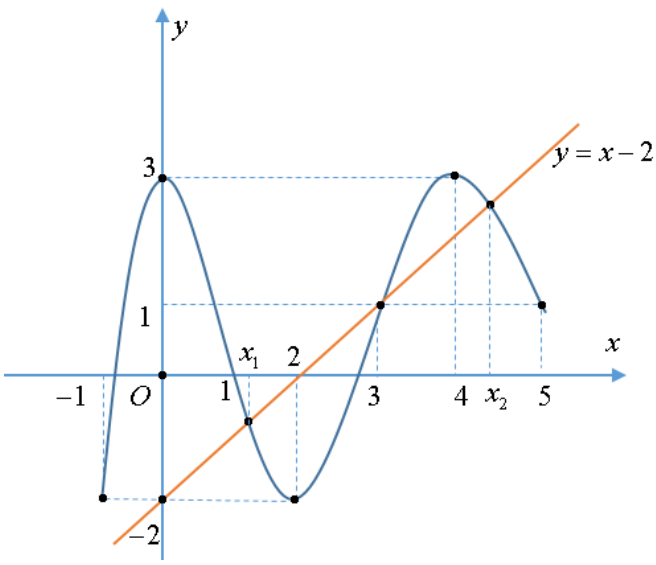
Câu 12. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $[-1;5]$ có đồ thị của hàm $y=f'(x)$ được cho như hình bên dưới. Hàm số $g(x)=-2f(x)+x^2-4x+4$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau đây?



A. $(-1;0)$. **B.** $(0;2)$. **C.** $(2;3)$. **D.** $(-2;-1)$.

Lời giải

Chọn C



Xét hàm số $g(x)=-2f(x)+x^2-4x+4$ trên $[-1;5]$ ta có:

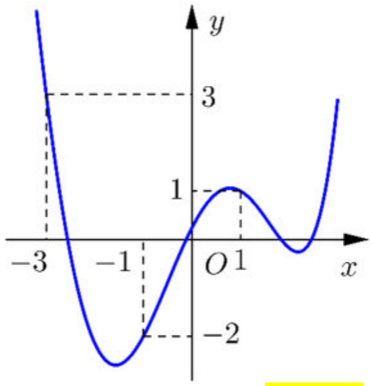
$$g'(x)=-2f'(x)+2x-4;\ g'(x)=0\Leftrightarrow f'(x)=x-2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=x_1\in(0;\,2)\\x=3\\x=x_2\in(4;\,5)\end{array}\right..$$

Bảng xét dấu $g'(x)$:

x	-1	0	x_1	2	3	4	x_2	5
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Từ bảng xét dấu suy ra hàm số đồng biến trên khoảng $(2;3)$.

Câu 13. Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ dưới đây. Xét hàm số $g(x)=f(x)-\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{4}x^2+\frac{3}{2}x+2018$. Hàm số $y=g(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



A. $(-\infty;-2)$ **B.** $(-3;-1)$. **C.** $(-1;1)$. **D.** $(1;+\infty)$.

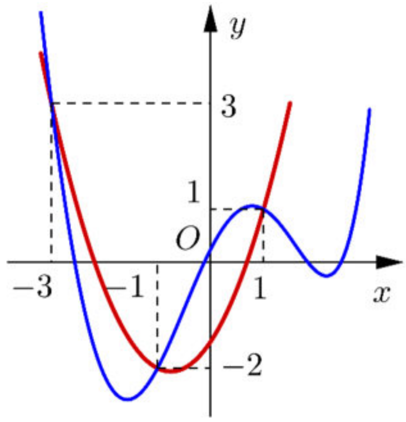
Lời giải

Chọn C

Ta có: $g'(x)=f'(x)-x^2-\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}=f'(x)-\left(x^2+\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}\right)$

$\Rightarrow g'(x)=0\Leftrightarrow f'(x)=x^2+\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}$

Ta vẽ đồ thị hàm số $y=x^2+\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}$



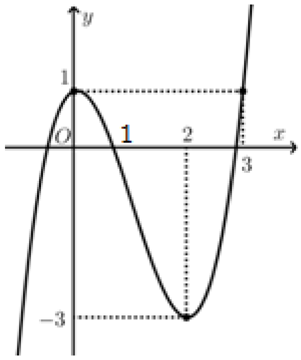
Dựa nào đồ thị $\Rightarrow g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-3\\x=-1\\x=1\end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

Dạng toán 28. Biết đồ thị hàm số $y=f'(x)$ xét tính đơn điệu của hàm số $y=g(x)=f(x)+h(x)$ **trong bài toán chứa tham số**.

Câu 14. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên. Các giá trị của m để hàm số $y=f(x)+(m-1)x$ đồng biến trên khoảng $(0;3)$ là



A. $m>4$.　　**B.** $m\le 4$.　　**C.** $m\ge 4$.　　**D.** $0>m>4$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y=f(x)+(m-1)x \Rightarrow y'=f'(x)+m-1$.

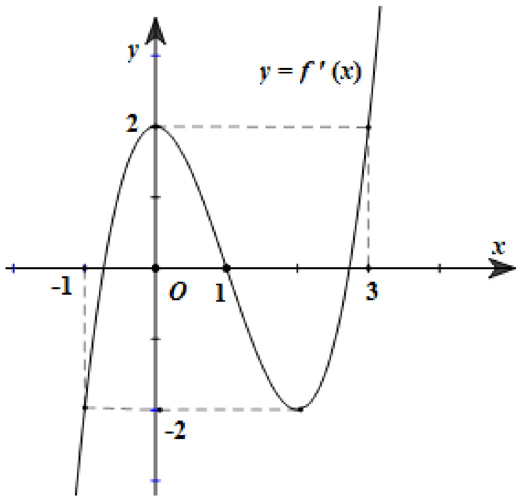
Hàm số $y=f(x)+(m-1)x$ đồng biến trên khoảng $(0;3)$

$\Leftrightarrow y'\ge 0,\ \forall x\in(0;3) \Leftrightarrow f'(x)+m-1\ge 0, \forall x\in(0;3)$

$\Leftrightarrow -m+1\le f'(x), \forall x\in(0;3)$

$\Leftrightarrow -m+1\le \min\limits_{x\in(0;3)} f'(x) \Leftrightarrow -m+1\le -3 \Leftrightarrow m\ge 4$.

Câu 15. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ.



Đặt $g(x)=f(x-m)-\dfrac{1}{2}(x-m-1)^2+2019$ với m là tham số thực. Gọi S là

tập các giá trị nguyên dương của m để hàm số $y=g(x)$ đồng biến trên khoản $(5;6)$.

Tổng các phần tử của S bằng:

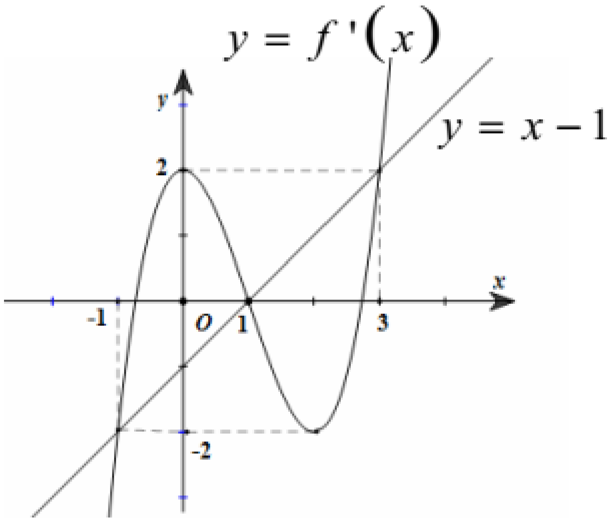
A. 4.　　**B.** 11.　　**C.** 14.　　**D.** 20.

Lời giải

Chọn C

Ta có $g'(x)=f'(x-m)-(x-m-1)$

Đặt $h(x)=f'(x)-(x-1)$. Từ đồ thị $y=f'(x)$ và đồ thị $y=x-1$ trên hình vẽ ta suy ra $h(x)\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-1\le x\le 1\\ x\ge 3\end{array}\right.$



Ta có $g'(x)=h(x-m)\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-1\le x-m\le 1\\ x-m\ge 3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m-1\le x\le m+1\\ x\ge m+3\end{array}\right.$

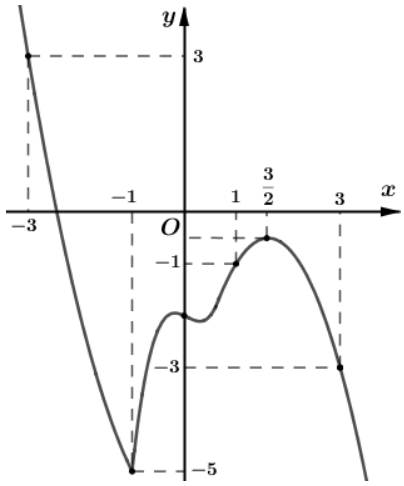
Do đó hàm số $y=g(x)$ đồng biến trên các khoảng $(m-1;m+1)$ và $(m+3;+\infty)$

Do vậy, hàm số $y=g(x)$ đồng biến trên khoảng $(5;6)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}m-1\le 5\\ m+1\ge 6\end{cases}\\ m+3\le 5\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}5\le m\le 6\\ m\le 2\end{array}\right.$

Do m nguyên dương nên $m\in\{1;2;5;6\}$, tức $S=\{1;2;5;6\}$

Tổng các phần tử của S bằng 14.

Câu 16. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình bên dưới



Đặt hàm số $g(x)=f(1+m-x)+\dfrac{x^2}{2}-x-mx$, m là tham số. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc đoạn $[-2020;0]$ để hàm số $y=g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-2;0)$?

A. 2016. **B.** 2017. **C.** 2019. **D.** 2020.

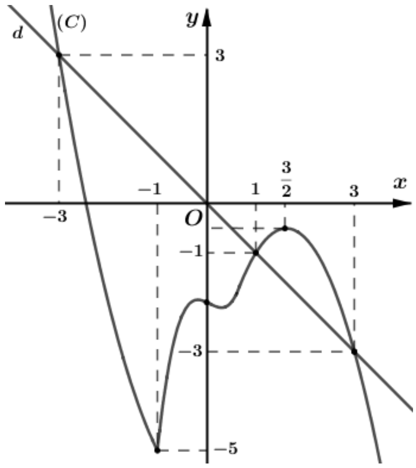
Lời giải.

Ta có $g'(x)=-f'(m+1-x)+x-1-m$.

Ta có $g'(x)<0 \Leftrightarrow f'(m+1-x)>x-1-m.$

Đặt $t=m+1-x$, bất phương trình trở thành $f'(t)>-t.$

Từ đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ và đồ thị hàm số $y=-x$ (hình vẽ bên dưới) ta thấy đường thẳng $y=-x$ cắt đồ thị hàm số $f'(x)$ lần lượt tại ba điểm $x=-3;\ x=1;\ x=3.$



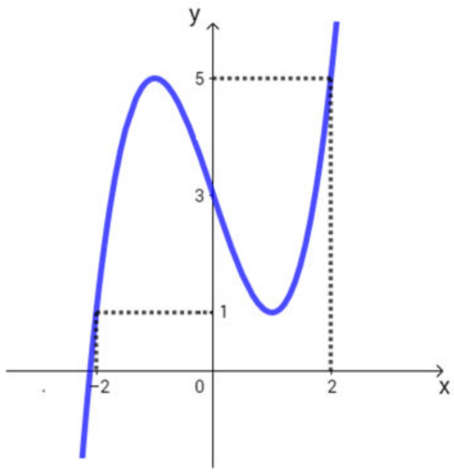
Quan sát đồ thị ta thấy $f'(t)>-t \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t<-3 \\ 1<t<3 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m+1-x<-3 \\ 1<m+1-x<3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>4+m \\ -2+m<x<m \end{array}\right.$

Suy ra hàm số $y=g(x)$ nghịch biến trên các khoảng $(4+m;+\infty)$ và $(-2+m;m)$.

Để hàm số $y=g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-2;0)$ thì $\left[\begin{array}{l} 4+m\le -2 \\ \begin{cases} -2+m\le -2 \\ m\ge 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\le -6 \\ m=0 \end{array}\right.$

Vậy trên đoạn $[-2020;0]$ có tất cả 2016 giá trị của m thỏa mãn đề bài.

Câu 17. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ.



Xét hàm số $g(x)=f(x)-\frac{1}{2}(x^2+m^2)-3(x+m)$. Khi đó khẳng định nào sau đây **đúng** ?

A. Với mọi giá trị của tham số m thì $g(x)$ nghịch biến trên các khoảng $(-2;0)$ và $(2;+\infty)$, đồng biến trên $(-\infty;-2)$ và $(0;2)$.

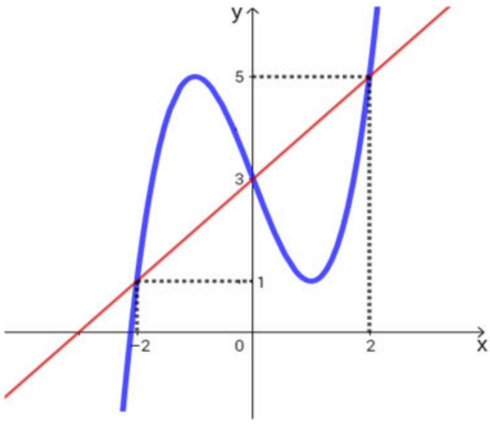
B. Chỉ có đúng 1 giá trị của tham số m để $g(x)$ nghịch biến trên các khoảng $(-2;0)$ và $(2;+\infty)$, đồng biến trên $(-\infty;-2)$ và $(0;2)$.

C. Với mọi giá trị của tham số m thì $g(x)$ đồng biến trên các khoảng $(-2;0)$ và $(2;+\infty)$, nghịch biến trên $(-\infty;-2)$ và $(0;2)$.

D. Chỉ có đúng 1 giá trị của tham số m để $g(x)$ đồng biến trên các khoảng $(-2;0)$ và $(2;+\infty)$, nghịch biến trên $(-\infty;-2)$ và $(0;2)$.

Chọn C

Lời giải



Với mọi giá trị của tham số m ta luôn có: $g'(x) = f'(x) - x - 3$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = x + 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right. .$$

Bảng biến thiên:

x		-2		0		2	
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\searrow$	$g(-2)$	$\nearrow$	$g(0)$	$\searrow$	$g(2)$	$\nearrow$

$\Rightarrow g(x)$ đồng biến trên các khoảng $(-2;0)$ và $(2;+\infty)$, nghịch biến trên $(-\infty;-2)$ và $(0;2)$.

Dạng toán 29. Biết đồ thị hàm số $y = f'(x)$ xét tính đơn điệu của hàm số $y = g(x) = f(u(x))$ **trong bài toán không chứa tham số**.

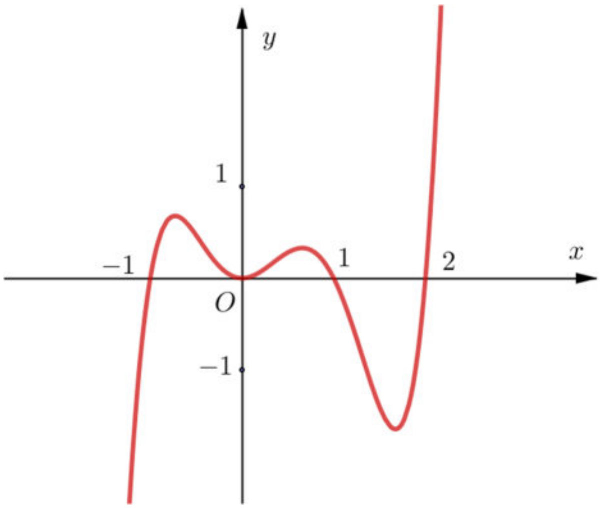
Câu 18. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $y = f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Tìm tất cả các khoảng đồng biến của hàm số $y = f\left(\sqrt{x^2+1}\right)$.

A. $\left(-\infty;-\sqrt{3}\right),\left(0;\sqrt{3}\right)$.

B. $\left(-\infty;-\sqrt{3}\right),\left(\sqrt{3};+\infty\right)$.

C. $\left(-\sqrt{3};0\right),\left(\sqrt{3};+\infty\right)$.

D. $\left(-\infty;-\sqrt{3}\right),(0;+\infty)$.



Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $y=f\left(\sqrt{x^2+1}\right)\Rightarrow y'=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}f'\left(\sqrt{x^2+1}\right)$.

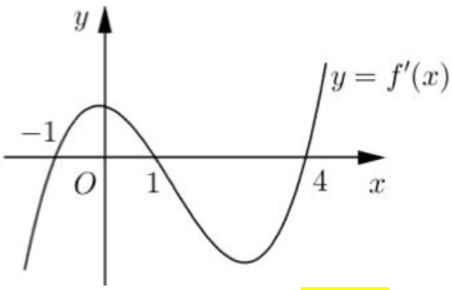
$$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ f'\left(\sqrt{x^2+1}\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ \sqrt{x^2+1}=-1\\ \sqrt{x^2+1}=0\\ \sqrt{x^2+1}=1\\ \sqrt{x^2+1}=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ \sqrt{x^2+1}=1\\ \sqrt{x^2+1}=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x^2+1=1\\ x^2+1=4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=-\sqrt{3}\\ x=\sqrt{3}\end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Vậy hàm số $y=f\left(\sqrt{x^2+1}\right)$ đồng biến trên các khoảng $\left(-\sqrt{3};0\right),\left(\sqrt{3};+\infty\right)$.

Câu 19. Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $y=f(2-x)$ đồng biến trên khoảng:



A. $(1;3)$. **B.** $(2;+\infty)$. **C.** $(-2;1)$. **D.** $(-\infty;2)$.

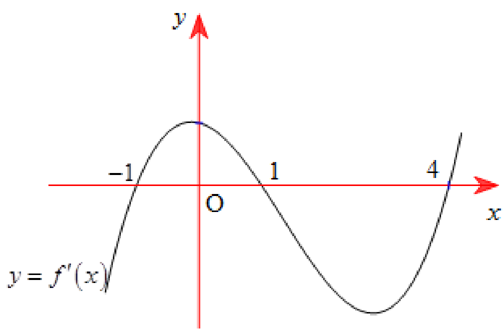
Lờigiải

Chọn C

Ta có: $\left(f(2-x)\right)'=(2-x)'.f'(2-x)=-f'(2-x)$

Hàm số đồng biến khi $\left(f(2-x)\right)'>0\Leftrightarrow f'(2-x)<0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2-x<-1\\ 1<2-x<4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>3\\ -2<x<1\end{array}\right.$.

Câu 20. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Hàm số $y=f\left(x^2\right)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?



A. $(1;2)$. **B.** $(-2;+\infty)$. **C.** $(-2;-1)$. **D.** $(-1;1)$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $g(x)=f\left(x^2\right)$.

$g'(x)=2x.f'\left(x^2\right)$.

Cách 1:Hàm số $g(x)=f\left(x^2\right)$đồng biến khi và chỉ khi $g'(x)\ge 0$(dấu bằng xảy ra tại hữu hạn điểm)

$$\Leftrightarrow x.f'\left(x^2\right)\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge 0\\ f'\left(x^2\right)\ge 0\end{cases}(1)\\ \begin{cases}x\le 0\\ f'\left(x^2\right)\le 0\end{cases}(2)\end{array}\right..$$

$$(1)\Leftrightarrow \begin{cases}x\ge 0\\ f'\left(x^2\right)\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x\ge 0\\ \left[\begin{array}{l}-1\le x^2\le 1\\ x^2\ge 4\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x\ge 0\\ \left[\begin{array}{l}-1\le x\le 1\\ x\le -2\\ x\ge 2\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}0\le x\le 1\\ x\ge 2\end{array}\right..$$

$$(2)\Leftrightarrow \begin{cases}x\le 0\\ f'\left(x^2\right)\le 0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x\le 0\\ \left[\begin{array}{l}x^2\le -1\left(\left(\text{lo}^1\text{i}\right)\right)\\ 1\le x\le 4\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x\le 0\\ \left[\begin{array}{l}x\le -1\\ x\ge 1\end{array}\right.\\ -2\le x\le 2\end{cases}\Leftrightarrow -2\le x\le -1.$$

Vậy hàm số đồng biến trên các khoảng $(-2;-1),(0;1),(2;+\infty)$.

Cách 2:

Dựa vào đồ thị có $f'(x)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-1\\ x=1\\ x=4\end{array}\right.$.

Chọn $f'(x)=(x+1)(x-1)(x-4)$.

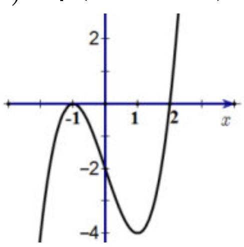
$$\Rightarrow g'(x)=2x\left(x^2+1\right)\left(x^2-1\right)\left(x^2-4\right)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\ x=\pm 1\\ x=\pm 2\end{array}\right..$$

Bảng xét dấu $g'(x)$

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Vậy hàm số đồng biến trên các khoảng $(-2;-1),(0;1),(2;+\infty)$.

Câu 21. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên R và đồ thị của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số $g(x)=f(x^2-2x-1)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



A. $(-\infty;1)$. **B.** $(1;+\infty)$. **C.** $(0;2)$. **D.** $(-1;0)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $g'(x)=(2x-2).f'(x^2-2x-1)$.

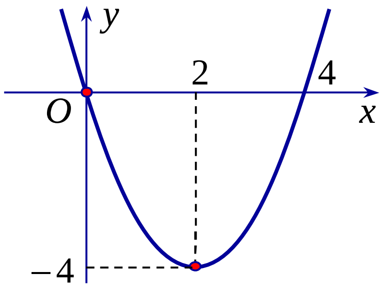
Lại có $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x^2-2x-1=-1 \\ x^2-2x-1=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm 1 \\ x=2; x=3 \end{array}\right.$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		1		2		3		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số đồng biến trên $(-1;0)$.

Câu 22. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số $g(x)=f(-x-x^2)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?



A. $(-\infty;-1)$. **B.** $\left(-1;\frac{-1}{2}\right)$. **C.** $\left(\frac{-1}{2};+\infty\right)$. **D.** $(-1;0)$.

Lời giải

Chọn B

Từ đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ ta có: $f'(x)<0 \Leftrightarrow 0<x<4$ và $f'(x)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<0 \\ x>4 \end{array}\right.$

Xét hàm số $g(x)=f(-x-x^2)$ có $g'(x)=(-1-2x)f'(-x-x^2)$

Để hàm số $g(x)$ nghịch biến thì $g'(x)<0 \Rightarrow (-1-2x)f'(-x-x^2)<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -1-2x<0 \\ f'(-x-x^2)>0 \end{cases} \\ \begin{cases} -1-2x>0 \\ f'(-x-x^2)<0 \end{cases} \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>\dfrac{-1}{2}\\ \left[\begin{array}{l}-x-x^2<0\\ -x-x^2>4\end{array}\right.\end{cases}\\ \begin{cases}x<\dfrac{-1}{2}\\ -x-x^2>0\\ -x-x^2<4\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>\dfrac{-1}{2}\\ \left[\begin{array}{l}x<-1,x>0\\ x\in\varnothing\end{array}\right.\end{cases}\\ \begin{cases}x<\dfrac{-1}{2}\\ x\in\mathbb{R}\\ -1<x<0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>0\\ -1<x<\dfrac{-1}{2}\end{array}\right.$$

Suy ra hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $\left(-1;\dfrac{-1}{2}\right)$ và $(0;+\infty)$.

Vậy B là đáp án đúng.

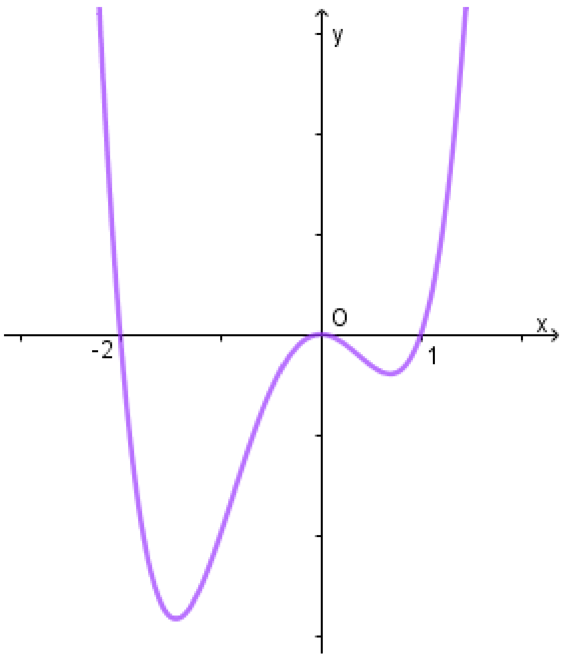
Dạng toán 30. Biết đồ thị hàm số $y=f'(x)$ xét tính đơn điệu của hàm số $y=g(x)=f(u(x))$ **trong bài toán chứa tham số**.

Dạng toán 31. Biết đồ thị hàm số $y=f'(x)$ xét tính đơn điệu của hàm số $y=g(x)=f(u(x))+h(x)$ **trong bài toán không chứa tham số**.

Dạng toán 32. Biết đồ thị hàm số $y=f'(x)$ xét tính đơn điệu của hàm số $y=g(x)=f(u(x))+h(x)$ **trong bài toán chứa tham số**.

Dạng toán 33. Biết đồ thị của hàm số $y=f'(x)$, xét tính đơn điệu của hàm số $y=g(x)=f(u(x))+f(v(x))+h(x)$ **trong bài toán không chứa tham số.**

Câu 23. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ



Hỏi hàm số $g(x)=f(x+1)+f(2-x)-x^2+6x-3$ đồng biến trên khoảng nào cho dưới đây

A. $(-\infty;0)$ **B.** $(0;3)$ **C.** $(1;2)$ **D.** $(3;+\infty)$

Lời giải

Chọn C

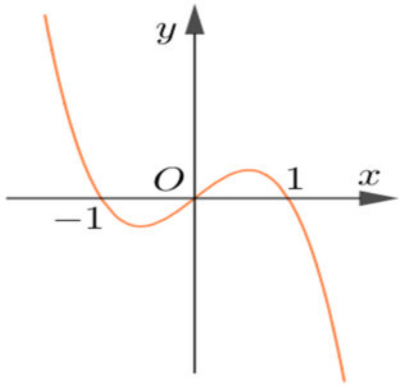
Ta có $g'(x)=f'(x+1)-f'(-2-x)+6-2x\geq 0\forall x\in K$ ta chỉ cần chọn x sao cho

$$\begin{cases} f'(x+1)\ge 0 \\ f'(2-x)\le 0 \\ 6-2x\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x+1\ge 1 \\ x+1\le -2 \end{array}\right. \\ -2\le 2-x\le 1 \Leftrightarrow 1\le x\le 3 \\ x\le 3 \end{cases}$$ đối chiếu đáp án ta tìm được đáp án C

Dạng toán 34. Biết đồ thị của hàm số $y=f'(x)$, xét tính đơn điệu của hàm số $y=g(x)=f(u(x))+f(v(x))+h(x)$ **trong bài toán chứa tham số.**

Dạng toán 35. Biết đồ thị hàm số $y=f'(x)$ xét tính đơn điệu của hàm số $y=g(x)=\left[f(u(x))\right]^k$ **trong bài toán không chứa tham số.**

Câu 24. Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị $y=f'(x)$ như hình bên dưới.



Hàm số $g(x)=\left[f(2x-1)\right]^3$ nghịch biến trên các khoảng nào trong các khoảng sau

A. $(-1;0)$ **B.** $(0;1)$ **C.** $\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$ **D.** $\left(\dfrac{1}{2};1\right)$

Lời giải

Chọn C

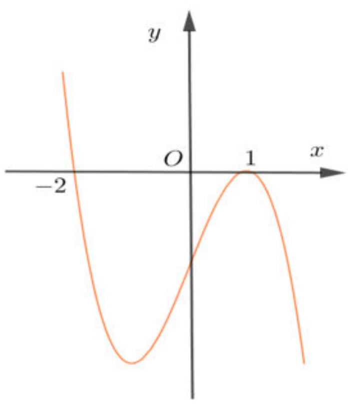
Ta có $g'(x)=6f^2(2x-1).f'(2x-1)$

Do $6f^2(2x-1)\ge 0$ với $\forall x\in\mathbb{R}$ nên để hàm số nghịch biến thì $f'(2x-1)\le 0$

Dựa vào đồ thị hàm số $y=f'(x)$ ta có

Để $f'(2x-1)\le 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-1\ge 1 \\ -1\le 2x-1\le 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\ge 1 \\ 0\le x\le \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$

Câu 25. Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị $y=f'(x)$ như hình bên dưới.



Hàm số $g(x)=\left[f(1-x)\right]^{2019}$ nghịch biến trên các khoảng nào trong các khoảng sau

A. $(-1;5)$. **B.** $(-2;1)$. **C.** $(1;3)$. **D.** $(3;5)$.

Lời giải

Chọn D

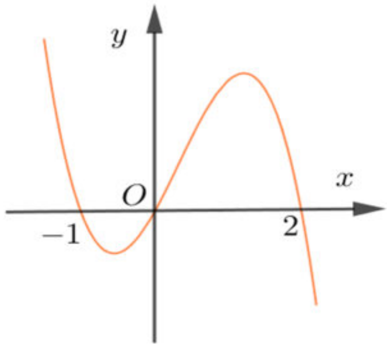
Ta có $g'(x)=-2019f^{2018}(1-x).f'(1-x)$

Do $-2019f^{2018}(1-x)\le 0$ với $\forall x\in\mathbb{R}$ nên để hàm số nghịch biến thì $f'(1-x)\ge 0$

Dựa vào đồ thị hàm số $y=f'(x)$ ta có

Để $f'(1-x)\ge 0\Rightarrow 1-x\le -2\Leftrightarrow x\ge 3$.

Câu 26. Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị $y=f'(x)$ như hình bên dưới và $f(-1)=f(2)=0$



Hàm số $g(x)=\left[f(x^2-3)\right]^2$ đồng biến trên các khoảng nào trong các khoảng sau

A. $(1;2)$ **B.** $(0;1)$ **C.** $(-1;0)$ **D.** $(-2;-1)$

Lời giải

Chọn C

Ta có $g'(x)=4xf(x^2-3).f'(x^2-3)$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(-1)$	$\searrow$	$f(0)$	$\nearrow$	$f(2)$	$\searrow$	$-\infty$

Do $f(-1)=f(2)=0$ nên $f(x^2-3)\le 0$ với $\forall x\in\mathbb{R}$ để hàm số đồng biến thì $x.f'(x^2-3)\le 0$

TH1: $x\ge 0$ thì $f'(x^3-3)\le 0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}-1\le x^2-3\le 0\\ x^2-3\ge 2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-\sqrt{3}\le x\le -\sqrt{2}\\ \sqrt{2}\le x\le\sqrt{3}\\ x\ge\sqrt{5}\\ x\le -\sqrt{5}\end{array}\right.$

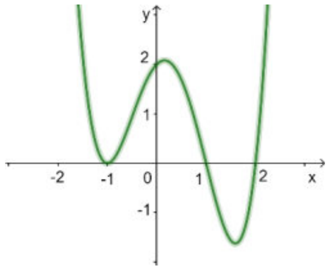
Vì $x\ge 0$ nên $\left[\begin{array}{l}\sqrt{2}\le x\le\sqrt{3}\\ x\ge\sqrt{5}\end{array}\right.$

TH2: $x\le 0$ thì $f'(x^3-3)\ge 0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}0\le x^2-3\le 2\\ x^2-3\le -1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-\sqrt{5}\le x\le -\sqrt{3}\\ \sqrt{3}\le x\le\sqrt{5}\\ -\sqrt{2}\le x\le\sqrt{2}\end{array}\right.$

Vì $x \le 0$ nên $\left[\begin{array}{l} -\sqrt{5} \le x \le -\sqrt{3} \\ -\sqrt{2} \le x \le 0 \end{array}\right.$

Vậy hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $\left(-\sqrt{5};-\sqrt{3}\right)$, $\left(-\sqrt{2};0\right)$, $\left(\sqrt{2};\sqrt{3}\right)$, $\left(\sqrt{5};+\infty\right)$.

Câu 27. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ có dạng như hình vẽ. Hàm số $y=g(x)=\left[f(x-2)\right]^3$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây



A. $(1;2)$ **B.** $(3;4)$ **C.** $(-\infty;-1)$ **D.** $(4;+\infty)$

Lời giải

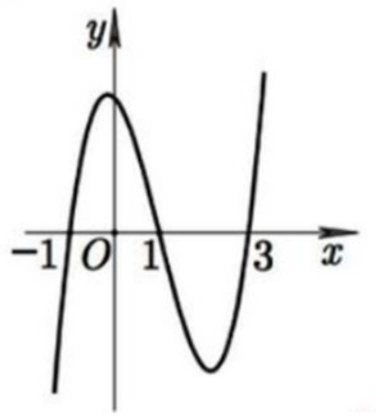
Chọn B

Ta có $g'(x)=3\left[f(x-2)\right]^2 f'(x-2)$, hàm số $y=g(x)=\left[f(x-2)\right]^3$ nghịch biến khi và chỉ khi $g'(x) \le 0 \Leftrightarrow f'(x-2) \le 0 \Leftrightarrow 1 \le x-2 \le 2 \Leftrightarrow 3 \le x \le 4$

Dạng toán 36. Biết đồ thị hàm số $y=f'(x)$ xét tính đơn điệu của hàm số $y=g(x)=\left[f(u(x))\right]^k$ **trong bài toán chứa tham số**.

Dạng toán 37. Biết đồ thị hàm số $y=f'(u(x))$ xét tính đơn điệu của hàm số $y=f(x)$ **trong bài toán không chứa tham số**.

Câu 28. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị hàm số $y=f'\left(2x+\dfrac{3}{2}\right)$ như hình vẽ bên.



Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{7}{2}\right)$. **B.** $\left(-\dfrac{5}{4};\dfrac{1}{4}\right)$. **C.** $\left(\dfrac{3}{4};+\infty\right)$. **D.** $\left(-\infty;-\dfrac{1}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn A

Ta cần giải bất phương trình $y'=f'(x)>0$.

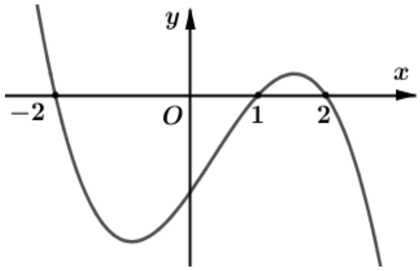
Dựa vào đồ thị $y=f'\left(2x+\dfrac{3}{2}\right)$. Ta có $f'\left(2x+\dfrac{3}{2}\right)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1<x<1 \\ x>3 \end{array}\right.$ $(*)$

Đặt $t=2x+\dfrac{3}{2} \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{4}(2x-3)$.

Khi đó $(*) \Leftrightarrow f'(t) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1 < \dfrac{2t-3}{4} < 1 \\ \dfrac{2t-3}{4} > 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\dfrac{1}{2} < t < \dfrac{7}{2} \\ t > \dfrac{15}{2} \end{array}\right.$.

Do đó hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên các khoảng $\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{7}{2}\right)$ và $\left(\dfrac{15}{2};+\infty\right)$.

Câu 29. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là hàm số $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$. Biết rằng hàm số $y = f'(3x-1)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?



A. $(-\infty;-6)$. **B.** $(1;5)$. **C.** $(2;6)$. **D.** $(-\infty;-7)$.

Lời giải

Chọn D

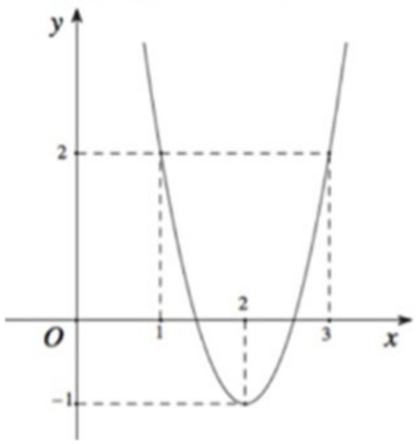
Dựa vào đồ thị hàm số $y = f'(3x-1)$ ta có: $f'(3x-1) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < -2 \\ 1 < x < 2 \end{array}\right.$

Đặt $t = 3x-1 \Leftrightarrow x = \dfrac{t+1}{3}$

Suy ra: $f'(t) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{t+1}{3} < -2 \\ 1 < \dfrac{t+1}{3} < 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t+1 < -6 \\ 3 < t+1 < 6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t < -7 \\ 2 < t < 5 \end{array}\right.$

Do đó: Hàm số $f(x)$ đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-7)$ và $(2;5)$

Câu 30. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f'\left(-2x+\dfrac{7}{2}\right)+2$ như hình bên



Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

A. $\left(\dfrac{1}{4};\dfrac{9}{4}\right)$. **B.** $\left(\dfrac{9}{4};+\infty\right)$. **C.** $\left(-\dfrac{5}{2};\dfrac{3}{2}\right)$. **D.** $\left(-\infty;-\dfrac{5}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn C

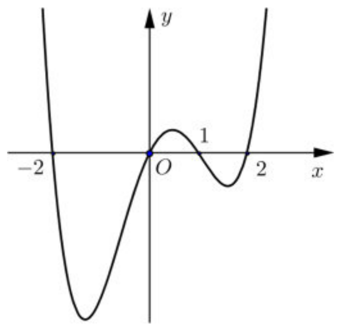
Quan sát đồ thị hàm số $y=f'\left(-2x+\frac{7}{2}\right)+2$ ta có

$f'\left(-2x+\frac{7}{2}\right)<0 \Leftrightarrow f'\left(-2x+\frac{7}{2}\right)+2<2 \Leftrightarrow 1<x<3(*)$ (đồ thị hàm số nằm dưới đường thẳng $y=2$ khi và chỉ khi $x\in(1;3)$)

Đặt $t=-2x+\frac{7}{2} \Leftrightarrow x=\frac{7-2t}{4}$ khi đó (*) $\Leftrightarrow f'(t)<0 \Leftrightarrow 1<\frac{7-2t}{4}<3 \Leftrightarrow -\frac{5}{2}<t<\frac{3}{2}$

điều đó chứng tỏ hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng $\left(-\frac{5}{2};\frac{3}{2}\right)$

Câu 31. Cho đồ thị hàm số $y=f'\left(x^3+1\right)$ như hình vẽ. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trong khoảng nào trong các khoảng sau?



A. $(-2;2)$. **B.** $(2;5)$. **C.** $(5;10)$. **D.** $(10;+\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Từ đồ thị suy ra $f'\left(x^3+1\right)<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-2<x<0\\1<x<2\end{array}\right.$.

Đặt $t=x^3+1 \Leftrightarrow x=\sqrt[3]{t-1}$.

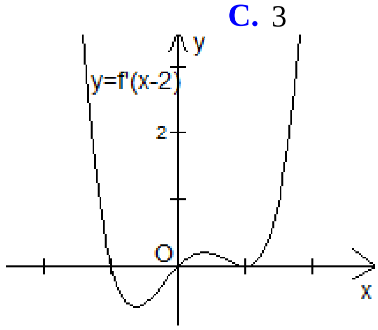
Suy ra $f'(t)<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-2<\sqrt[3]{t-1}<0\\1<\sqrt[3]{t-1}<2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-8<t-1<0\\1<t-1<8\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-7<t<1\\2<t<9\end{array}\right.$.

Vậy hàm số $f(x)$ nghịch biến trong các khoảng $(-7;1)$ và $(2;9)$.

Dạng toán 38. Biết đồ thị hàm số $y=f'(u(x))$ xét tính đơn điệu của hàm số $y=f(x)$ **trong bài toán chứa tham số**.

Câu 32. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, hàm số $y=f'(x-2)$ có đồ thị như hình dưới. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số để hàm số $g(x)=f\left(x^2-8x+m\right)$ nghịch biến trên khoảng $\left(4;\frac{9}{2}\right)$.

A. 1 **B.** 2. **C.** 3 **D.** 4.



Lời giải

Chọn A

Ta có: đồ thị hàm số $y = f'(x-2)$ là phép tịnh tiến của đồ thị hàm số $y = f'(x)$ sang phải hai đơn vị. Khi đó hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-3		-2		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	

Mặt khác: $g(x) = f(x^2 - 8x + m) \Rightarrow g'(x) = (2x-8)f'(x^2 - 8x + m)$

$g'(x) = (2x-8)f'(x^2 - 8x + m) < 0 \forall x \in (4;\frac{9}{2})$

$$-3 \le x^2 - 8x + m \le -2 \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2 + 8x - 3 \le m; \forall x \in (4;\frac{9}{2}) \\ -x^2 + 8x - 2 \ge m; \forall x \in (4;\frac{9}{2}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m \ge 13 \\ m \le 13,75 \end{cases} \Leftrightarrow m = 13.$$

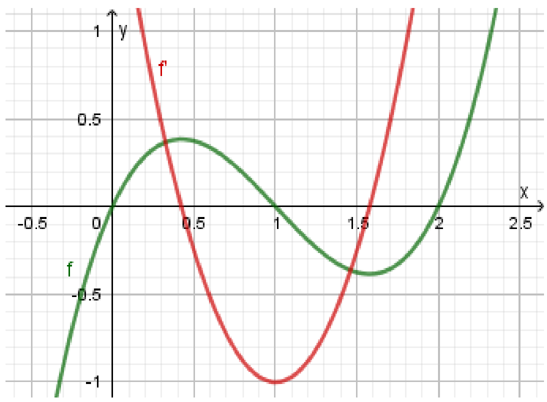
Do đó có 1 giá nguyên của m để $g(x) = f(x^2 - 8x + m)$ nghịch biến trên khoảng $\left(4;\frac{9}{2}\right)$.

Dạng toán 39. Biết đồ thị của hàm số $y = f'(x)$, xét tính đơn điệu của hàm số $y = g(x).f(x)$ **trong bài toán không chứa tham số.**

Dạng toán 40. Biết đồ thị của hàm số $y = f'(x)$, xét tính đơn điệu của hàm số $y = g(x).f(x)$ **trong bài toán chứa tham số.**

Dạng toán 41. Biết đồ thị của hàm số $y = f'(x)$, xét tính đơn điệu của hàm số $y = g(x).f(x)$ **trong bài toán không chứa tham số.**

Câu 33. Cho hàm số $y = f(x), y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Trên khoảng $(0;2)$, hàm số $y = e^{-x}.f(x)$ có bao nhiêu khoảng đồng biến?



A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

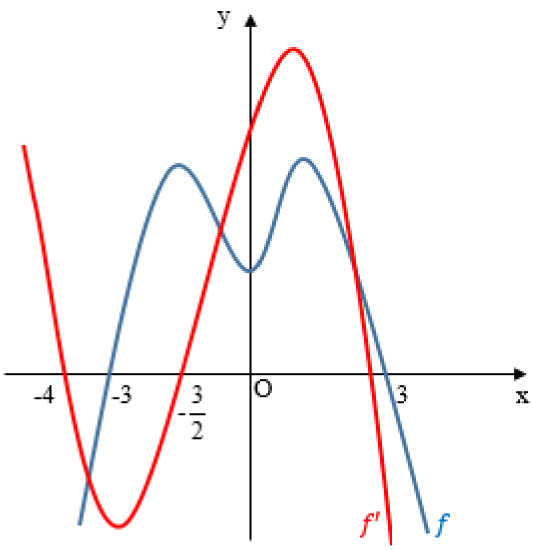
$y = e^{-x}.f(x) \to y' = e^{-x}(f'(x) - f(x))$

Dựa vào đồ thị ta có:

$$y' = 0 \leftrightarrow f'(x) = f(x) \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = a, 0 < a < \frac{1}{2} \\ x = b, 1 < b < \frac{3}{2} \end{array}\right.$$

Suy ra hàm số đồng biến trên các khoảng $(0;a),(b;2)$.

Câu 34. Cho hàm số $y = f(x)$, $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Trên khoảng $(-4;3)$, hàm số $y = e^{-x+10}f(x)$ có bao nhiêu khoảng nghịch biến?



A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y' = -e^{-x+10} f(x) + f'(x).e^{-x+10} = e^{-x+10}\left[-f(x) + f'(x)\right]$

Dựa vào đồ thị, ta có: $y' = 0 \Leftrightarrow f'(x) = f(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = a, -4 < a < -3 \\ x = b, -\frac{3}{2} < b < 0 \\ x = c, 0 < c < 3 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	-4		a		-3		$\frac{-3}{2}$		b		0		c		3
y'		+	0	-		-		-	0	+		+	0	-	
y		↗				↘					↗			↘	

Dựa vào bảng biến thiên suy ra hàm số $y = e^{-x+10} f(x)$ có hai khoảng nghịch biến $(a,b);(c;3)$

Dạng toán 42. Biết đồ thị của hàm số $y = f'(x)$, xét tính đơn điệu của hàm số $y = g(x).f(x)$ **trong bài toán chứa tham số.**

Dạng toán 43. Biết đồ thị của hàm số $y = f'(x)$, xét tính đơn điệu của hàm số $y = \frac{g(x)}{f(x)}$ hoặc $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ **trong bài toán không chứa tham số.**

Dạng toán 44. Biết đồ thị của hàm số $y = f'(x)$, xét tính đơn điệu của hàm số $y = \frac{g(x)}{f(x)}$ hoặc $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ **trong bài toán chứa tham số.**

PHẦN 4: Biết BBT của hàm số $y = f'(x)$

Dạng toán 45. Biết BBT hàm số $y = f'(x)$ xét tính đơn điệu của hàm số $y = g(x) = f(x) + h(x)$ **trong bài toán không chứa tham số.**

Câu 35. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-2		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Đặt
. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. Hàm số $y=g\left(x\right)$ đồng biến trên khoảng $\left(-\infty;1\right)$.

B. Hàm số $y=g\left(x\right)$ đồng biến trên khoảng $\left(1;2\right)$.

C. Hàm số $y=g\left(x\right)$ đồng biến trên khoảng $\left(0;1\right)$.

D. Hàm số $y=g\left(x\right)$ nghịch biến trên khoảng $\left(-2;1\right)$.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định của hàm số $y=g\left(x\right)$ là $\mathbb{R}$

Ta có:

$$y=g\left(x\right)=f\left(x\right)+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\Rightarrow y'=g'\left(x\right)=f'\left(x\right)+x^2-x$$

$$f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\\x=0\\x=1\end{array}\right.\;;\;x^2-x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\end{array}\right.$$

Bảng xét dấu của $y'=g'\left(x\right)$ như sau:

x	$-\infty$		-2		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
x^2-x		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$y'=g'(x)$		Chưa xác định dấu		$+$	0	$-$	0	$+$	

Từ bảng xét dấu của $y'=g'\left(x\right)$ suy ra:

Hàm số $y=g\left(x\right)$ nghịch biến trên khoảng $\left(0;1\right)$.

Hàm số $y=g\left(x\right)$ đồng biến trên các khoảng $\left(-2;0\right)$ và $\left(1;+\infty\right)$ mà $\left(1;2\right)\subset\left(1;+\infty\right)$

nên đáp án B đúng.

Câu 36. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên R và bảng xét dấu của $y=f'\left(x\right)$ như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hỏi hàm số $g(x)=f\left(x\right)-\ln\left(x^2+x+1\right)$ nghịch biến trên khoảng nào?

A. $\left(-\infty;0\right)$. **B.** $\left(0;1\right)$. **C.** $\left(-1;+\infty\right)$. **D.** $\left(-1;0\right)$.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định của hàm $g(x)$ là $D = R$

Ta có $g'(x) = f'(x) - \dfrac{2x+1}{x^2+x+1}$.

Đặt $h(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+x+1} \Rightarrow h'(x) = \dfrac{-2x^2-2x+1}{\left(x^2+x+1\right)^2}$.

Ta có $h'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2} \\ x = \dfrac{-\sqrt{3}-1}{2} \end{array}\right.$

Bảng biến thiên của hàm số $y = h(x)$ như sau:

x	$-\infty$		$\frac{-\sqrt{3}-1}{2}$		$\frac{\sqrt{3}-1}{2}$		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$h(x)$	0	$\searrow$	$\frac{-2\sqrt{3}}{3}$	$\nearrow$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\searrow$	0

Ta có $h(-1) = -1; h(0) = h(1) = 1; h\left(-\dfrac{1}{2}\right) = 0.$

Từ bảng biến thiên có $h(x) > 1, \forall x \in (0;1)$; $f'(x) < 0, \forall x \in (-\infty;-1) \cup (0;1)$.

Nên suy ra $f'(x) - h(x) < 0, \forall x \in (0;1) \Leftrightarrow g'(x) < 0, \forall x \in (0;1)$.

Vậy hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(0;1)$.

Từ bảng biến thiên có $h(x) \in (-1;0)$; $f'(x) > 0, \forall x \in \left(-1;\dfrac{-1}{2}\right)$.

$\Rightarrow f'(x) - h(x) > 0, \forall x \in \left(-1;\dfrac{-1}{2}\right)$. Do đó hàm số $y = g(x)$ đồng biến trên $\left(-1;\dfrac{-1}{2}\right)$.

Lại có trong các miền $(-\infty;0); (-1;+\infty); (-1;0)$ đều chứa miền $\left(-1;-\dfrac{1}{2}\right)$ nên loại A,C,**D.**

Câu 37. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và bảng biến thiên của $y = f'(x)$ như sau:

X	_		-1		1		x		+
f'(x	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-3	$\nearrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số $g(x) = f(x) - 3x$ đồng biến trên khoảng nào?

A. $(2;2019)$ **B.** $(-2019;-2)$ **C.** $(1;2)$ **D.** $(-1;1)$

Lời giải:

Chọn A

Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$

Ta có: $g'(x) = f'(x) - 3$

Hàm số $y = g(x)$ đồng biến $\Leftrightarrow g'(x) \geq 0$

$\Leftrightarrow f'(x) - 3 \geq 0 \Leftrightarrow f'(x) \geq 3 \Leftrightarrow x \geq 2.$

Dạng toán 46. Biết BBT hàm số $y = f'(x)$ xét tính đơn điệu của hàm số $y = g(x) = f(x) + h(x)$ **trong bài toán chứa tham số.**

Câu 38. Cho f(x) có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và bảng biến thiên y = f'(x) được cho như sau:

x	$-\infty$		-5		-2		1		$+\infty$
f'(x)	$+\infty$	$\searrow$	5	$\nearrow$	15	$\searrow$	5	$\nearrow$	$+\infty$

Có bao nhiêu giá trị m nguyên dương để hàm số g(x) = f(x) - $\ln(x^2+1)$ - mx đồng biến trên $[-1;1]$.

A. 5 **B.** 6 **C.** 4 **D.** 7

Lời giải

Chọn C

Ta có: g(x) = f(x) - $\ln(x^2+1)$ - mx có txđ $D = \mathbb{R}$

g'(x) = f'(x) - $\dfrac{2x}{x^2+1}$ - m

Hàm số g(x) đồng biến trên $[-1;1] \Leftrightarrow$ g'(x) $\geq 0 \forall x \in [-1;1]$

$\Leftrightarrow f'(x) - \dfrac{2x}{x^2+1} - m \geq 0 \ \forall x \in [-1;1]$

$\Leftrightarrow m \leq f'(x) - \dfrac{2x}{x^2+1} \forall x \in [-1;1] (1)$

$do: f'(x) \geq 5 (bbt) \forall x \in [-1;1]; \dfrac{2x}{x^2+1} \leq 1 \forall x \in [-1;1]$

$\Rightarrow f'(x) - \dfrac{2x}{x^2+1} \geq 4 \forall x \in [-1;1]$ dấu "=" xảy ra khi "x=1"

Vậy (1) $\Leftrightarrow m \leq 4$.

Dạng toán 47. Biết BBT hàm số $y = f'(x)$ xét tính đơn điệu của hàm số $y = g(x) = f(u(x))$ **trong bài toán không chứa tham số.**

Câu 39. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm như hình vẽ sau

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Hỏi hàm số $y = g(x) = f(x^2+2x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây

A. $(-\infty;0)$. **B.** $(-2;1)$. **C.** $(-\infty;-2)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = g'(x) = \left[f(x^2+2x)\right]' = (x^2+2x)'.f'(x^2+2x) = (2x+2).f'(x^2+2x)$.

Ta có $x^2+2x = (x+1)^2 - 1 \geq -1$ với $\forall x \in \mathbb{R}$ dựa vào bảng xét dấu trên ta có $f'(x^2+2x) \leq 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$ dấu "=" chỉ xảy ra tại $x = -1$.

Từ đó $y' \geq 0 \Leftrightarrow (2x+2).f'(x^2+2x) \geq 0 \Leftrightarrow 2x+2 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq -1$ nên hàm số đồng biến trên $(-\infty;-1)$.
Mặt khác $(-\infty;-2) \subset (-\infty;-1)$ nên phương án **C** thỏa mãn bài toán.

Câu 40. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-1		1		4		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y = f(2-e^x)$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

A. $(-\infty;1)$. **B.** $(1;4)$. **C.** $(0;\ln 3)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $g(x) = f(2-e^x)$, hàm số xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $g'(x) = -e^x f'(2-e^x)$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2-e^x = -1 \\ 2-e^x = 1 \\ 2-e^x = 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \ln 3 \\ x = 0 \\ e^x = -2 \text{ (vo nghiem)} \end{array}\right.$$

Bảng xét dấu đạo hàm của hàm số $y = g(x)$ như sau:

x	$-\infty$		0		$\ln 3$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Suy ra hàm số $y = g(x)$ đồng biến trên các khoảng $(-\infty;0)$; $(\ln 3;+\infty)$.
Vậy chọn phương án
D.

Câu 41. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên R và có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây:

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số $g(x) = f(|x-2|)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây:.

A. $(3;+\infty)$. **B.** $(2;3)$. **C.** $(-1;2)$. **D.** $(-\infty;-1)$.

Lời giải

Chọn C

- Do $h(x) = f(|x|)$ là hàm chẵn, đồ thị hàm số $y = h(x)$ nhận trục tung làm trục đối xứng
nên từ bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ suy ra bảng biến thiên của hàm số
$h(x) = f(|x|)$ như sau:

x	$-\infty$		-3		0		3		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
$h(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$		$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$

- Tịnh tiến đồ thị hàm số $h(x)=f(|x|)$ sang phải (theo trục hoành) 2 đơn vị ta được đồ thị hàm số $g(x)=f(|x-2|)$. Suy ra bảng biến thiên của hàm số $g(x)=f(|x-2|)$:

x	$-\infty$ $+\infty$		-1		2		5		
$g'(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$		$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$

Từ bảng biến thiên của hàm số $g(x)=f(|x-2|)$ ta thấy hàm số $g(x)=f(|x-2|)$ nghịch biến trên $(-1;2)$ và $(5;+\infty)$ nên ta chọn đáp án

C.

Câu 42. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Hàm số $y=f(|f(x)|)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(-\infty;-2)$. **B.** $(-1;1)$. **C.** $(2;+\infty)$. **D.** $(0;2)$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $g(x)=f(|f(x)|)\Rightarrow g'(x)=f'(|f(x)|).\dfrac{f(x).f'(x)}{|f(x)|}$

Do đó $g'(x)$ không xác định khi $f(x)=0$ hay $x=0$.

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f'(x)=0\\ f'(|f(x)|)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pm1\\ |f(x)|=1\\ |f(x)|=-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pm1\\ f(x)=\pm1\end{array}\right.\Leftrightarrow x=\pm1.$$

Từ bảng biến thiên của $f(x)$ ta có $|f(x)|\in[0;1],\ \forall x\in\mathbb{R}$. Suy ra $f'(|f(x)|)\geq 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Ta có bảng xét dấu của $g'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$\|$	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$-$	$\|$	$-$	0	$+$	$\|$	$+$	
$g'(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	

Từ đó suy ra $g(x)$ đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty;-1)$ và $(0;1)$.

Câu 43. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $y=f'(x)$ có bảng xét dấu như sau

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $g(x)=f(2\cos x+1)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $\left(0;\frac{\pi}{6}\right)$. **B.** $\left(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{3}\right)$. **C.** $\left(\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}\right)$. **D.** $\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$.

Lời giải

Chọn C

Nhận thấy các tập hợp trong các đáp án đều là tập con của tập $(0;\pi)$ nên ở bài này ta xét trên khoảng $(0;\pi)$.

Hàm số $g(x)$ đồng biến $\Leftrightarrow g'(x)\ge 0$ và $g'(x)=0$ tại hữu hạn điểm

$\Leftrightarrow -2\sin x.f'(2\cos x+1)\ge 0 \Leftrightarrow f'(2\cos x+1)\le 0$ (do $\sin x>0,\forall x\in(0;\pi)$)

$\Leftrightarrow 1\le 2\cos x+1\le 2 \Leftrightarrow 0\le \cos x\le \frac{1}{2}\Leftrightarrow \frac{\pi}{3}\le x\le \frac{\pi}{2}$.

Dạng toán 48. Biết BBT hàm số $y=f'(x)$ xét tính đơn điệu của hàm số $y=g(x)=f(u(x))$ **trong bài toán chứa tham số.**

Câu 44. Cho hàm số $y=f(x)$ cáo đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu như sau

x	-∞		-2		1		2		4		+∞
y'		+	0	+	0	-	0	-	0	+	

Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m\in(0;2020)$ để hàm số $g(x)=f(x^2-x+m)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;0)$?

A. 2017. **B.** 2018. **C.** 2016. **D.** 2015.

Lời giải

Chọn C

$g'(x)=(2x-1).f'(x^2-x+m)$

Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(-1;0)\Leftrightarrow g'(x)\le 0,\forall x\in(-1;0)$ $(*)$

Vì $2x-1<0,\forall x\in(-1;0)$ nên $(*)\Leftrightarrow f'(x^2-x+m)\ge 0,\forall x\in(-1;0)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-x+m\le 1,\forall x\in(-1;0) \\ x^2-x+m\ge 4,\forall x\in(-1;0)\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\le -x^2+x+1,\forall x\in(-1;0) \\ m\ge -x^2+x+4,\forall x\in(-1;0)\end{array}\right.$$

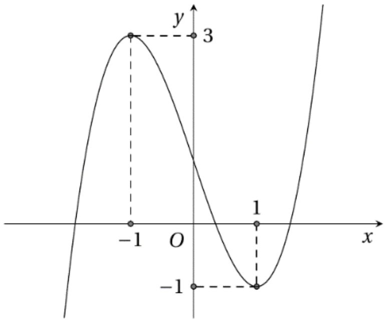
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -x^2+x+1\ge m,\forall x\in(-1;0) \\ -x^2+x+4\le m,\forall x\in(-1;0)\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1\ge m \\ 4\le m\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\le -1 \\ m\ge 4\end{array}\right.$$

Vậy $m\in\{4;5;6;...;2019\}$. Chọn đáp số

C.

Câu 45. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như bên.



Số giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=f\left(x^2+x+m\right)$ nghịch biến trên $(0;1)$ là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y'=(2x+1)f'\left(x^2+x+m\right)$.

Hàm số $y=f\left(x^2+x+m\right)$ nghịch biến trên $(0;1)$ khi và chỉ khi $y'\le 0,\forall x\in(0;1)$.

Vì $2x+1>0,\forall x\in(0,1)$ nên điều này tương đương với

$$f'\left(x^2+x+m\right)\le 0,\forall x\in(0;1)\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+x+m\ge -1,\forall x\in(0;1)\\x^2+x+m\le 1,\forall x\in(0;1).\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+x\ge -1-m,\forall x\in(0;1)\\x^2+x\le 1-m,\forall x\in(0;1).\end{cases}$$

Ta có hàm số $g(x)=x^2+x$ luôn đồng biến trên $[0;1]$; do đó, ràng buộc trên tương đương với

$$\begin{cases}-1-m\le g(0)=0\\1-m\ge g(1)=2\end{cases}\Leftrightarrow m=-1.$$

Vậy có duy nhất một giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 46. Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm $f'\left(x\right)=\left(x-1\right)^2\left(x^2-2x\right)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên $m<100$ để hàm số $g\left(x\right)=f\left(x^2-8x+m\right)$ đồng biến trên khoảng $\left(4;+\infty\right)$?

A. 18. **B.** 82. **C.** 83. **D.** 84.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f'\left(x\right)=\left(x-1\right)^2\left(x^2-2x\right)>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<0\\x>2\end{array}\right.$.

Xét $g'\left(x\right)=\left(2x-8\right).f'\left(x^2-8x+m\right)$. Để hàm số $g\left(x\right)$ đồng biến trên khoảng $\left(4;+\infty\right)$ khi và chỉ khi

$g'\left(x\right)\ge 0,\ \forall x>4$

$\Leftrightarrow\left(2x-8\right).f'\left(x^2-8x+m\right)\ge 0,\ \forall x>4$

$\Leftrightarrow f'\left(x^2-8x+m\right)\ge 0,\ \forall x>4$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-8x+m\le 0,\ \forall x\in\left(4;+\infty\right)\\x^2-8x+m\ge 2,\ \forall x\in\left(4;+\infty\right)\end{array}\right.\Leftrightarrow m\ge 18.$$

Vậy $18\le m<100$.

Câu 47. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm $f'\left(x\right)=x\left(x-1\right)^2\left(x^2+mx+9\right)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên dương m để hàm số $g\left(x\right)=f\left(3-x\right)$ đồng biến trên khoảng $\left(3;+\infty\right)$?

A. 5. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 8.

Lời giải

Chọn B

Từ giả thiết suy ra $f'\left(3-x\right)=\left(3-x\right)\left(2-x\right)^2\left[\left(3-x\right)^2+m\left(3-x\right)+9\right]$.

Ta có $g'(x) = -f'(3-x)$.

Để hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(3;+\infty)$ khi và chỉ khi $g'(x) \geq 0,\ \forall x \in (3;+\infty)$

$\Leftrightarrow f'(3-x) \leq 0,\ \forall x \in (3;+\infty)$

$\Leftrightarrow (3-x)(2-x)^2\left[(3-x)^2 + m(3-x) + 9\right] \leq 0,\ \forall x \in (3;+\infty)$

$\Leftrightarrow m \leq \dfrac{(x-3)^2+9}{x-3},\ \forall x \in (3;+\infty)$

$\Leftrightarrow m \leq \min\limits_{(3;+\infty)} h(x)$ với $h(x) = \dfrac{(x-3)^2+9}{x-3}$.

Ta có $h(x) = \dfrac{(x-3)^2+9}{x-3} = (x-3) + \dfrac{9}{x-3} \geq 2\sqrt{(x-3).\dfrac{9}{x-3}} = 6$.

Vậy suy ra $m \leq 6 \xrightarrow{m\in\mathbb{Z}^+} m \in \{1;2;3;4;5;6\}$.

Câu 48. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x-1)(x^2+mx+5)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên âm m để hàm số $g(x) = f(x^2)$ đồng biến trên $(1;+\infty)$?

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 7.

Lời giải

Chọn B

Từ giả thiết suy ra $f'(x^2) = x^4(x^2-1)(x^4+mx^2+5)$.

Ta có $g'(x) = 2xf'(x^2)$.

Để hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$ khi và chỉ khi $g'(x) \geq 0,\ \forall x \in (1;+\infty)$

$\Leftrightarrow 2xf'(x^2) \geq 0,\ \forall x > 1$

$\Leftrightarrow 2x.x^4(x^2-1)(x^4+mx^2+5) \geq 0,\ \forall x > 1$

$\Leftrightarrow x^4+mx^2+5 \geq 0,\ \forall x > 1$

$\Leftrightarrow m \geq -\dfrac{x^4+5}{x^2},\ \forall x > 1$

$\Leftrightarrow m \geq \max\limits_{(1;+\infty)} h(x)$ với $h(x) = -\dfrac{x^4+5}{x^2}$.

Khảo sát hàm $h(x) = -\dfrac{x^4+5}{x^2}$ trên $(1;+\infty)$ ta được $\max\limits_{(1;+\infty)} h(x) = -2\sqrt{5}$.

Suy ra $m \geq -2\sqrt{5} \xrightarrow{m\in\mathbb{Z}^-} m \in \{-4;-3;-2;-1\}$.

Câu 49. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x-1)^2(3x^4+mx^3+1)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên âm m để hàm số $g(x) = f(x^2)$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$?

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Chọn B

Từ giả thiết suy ra $f'(x^2) = x^2(x^2-1)^2(3x^8+mx^6+1)$.

Ta có $g'(x) = 2xf'(x^2)$. Để hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$ khi và chỉ khi

$g'(x) \geq 0,\ \forall x \in (0;+\infty) \Leftrightarrow 2xf'(x^2) \geq 0,\ \forall x \in (0;+\infty)$

$\Leftrightarrow 2x.x^2\left(x^2-1\right)^2\left(3x^8+mx^6+1\right)\ge 0,\ \forall x\in\left(0;+\infty\right)$

$\Leftrightarrow 3x^8+mx^6+1\ge 0,\ \forall x\in\left(0;+\infty\right)$

$\Leftrightarrow m\ge -\dfrac{3x^8+1}{x^6},\ \forall x\in\left(0;+\infty\right)$

$\Leftrightarrow m\ge \max\limits_{(0;+\infty)} h(x)$ với $h(x)=-\dfrac{3x^8+1}{x^6}$.

Khảo sát hàm $h(x)=-\dfrac{3x^8+1}{x^6}$ trên $\left(0;+\infty\right)$ ta được $\max\limits_{(0;+\infty)} h(x)=-4$.

Suy ra $m\ge -4 \xrightarrow{m\in\mathbb{Z}^-} m\in\left\{-4;-3;-2;-1\right\}$.

Câu 50. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	|	$+$	0	$-$	

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x)=f(x+m)$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$.

A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

Từ giả thiết suy ra hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên các khoảng $(-1;1)$, $(1;3)$ và liên tục tại $x=1$ nên đồng biến trên $(-1;3)$.

Ta có $g'(x)=f'(x+m)$ và $x\in(0;2)\Leftrightarrow x+m\in(m;m+2)$.

$g(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$ $\Leftrightarrow (m;2+m)\subset(-1;3)\Leftrightarrow \begin{cases} m\ge -1\\ 2+m\le 3\end{cases}\Leftrightarrow -1\le m\le 1$.

Vì $m\in\mathbb{Z}$ nên m có 3 giá trị là $m=-1;m=0;m=1$.

Câu 51. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	|	$+$	0	$-$	

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x)=f(x+m)$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$.

A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

Từ giả thiết suy ra hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên các khoảng $(-1;1)$, $(1;3)$ và liên tục tại $x=1$ nên đồng biến trên $(-1;3)$.

Ta có $g'(x)=f'(x+m)$ và $x\in(0;2)\Leftrightarrow x+m\in(m;m+2)$.

$g(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$ $\Leftrightarrow (m;2+m)\subset(-1;3)\Leftrightarrow \begin{cases} m\ge -1\\ 2+m\le 3\end{cases}\Leftrightarrow -1\le m\le 1$.

Vì $m\in\mathbb{Z}$ nên m có 3 giá trị là $m=-1;m=0;m=1$.

Câu 52. Cho hàm số $y=f(x)$ là một hàm đa thức và có bảng xét dấu của $f'(x)$ như hình bên dưới:

x	$-\infty$		1		3		$-\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=f(\sqrt{x-2}+m)$ (1) nghịch biến trên khoảng $(11;25)$.

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t=\sqrt{x-2}+m$, với $x\in(11;25)$ thì $t\in(3+m;5+m)$, hàm số trở thành: $y=f(t)$ (2)

Dễ thấy x và t cùng chiều biến thiên nên hàm (1) nghịch biến trên $(11;25)$ thì hàm (2) nghịch biến trên $(3+m;5+m)$.

Dựa vào bảng xét dấu của hàm $f'(x)$ suy ra hàm $f(t)$ nghịch biến trên khoảng $(1;3)$. Do đó hàm $f(t)$ nghịch biến trên $(3+m;5+m)$ khi và chỉ khi $\begin{cases} m+3\ge 1 \\ m+5\le 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\ge -2 \\ m\le -2 \end{cases} \Leftrightarrow m=-2$

Vậy có duy nhất một giá trị nguyên của tham số thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Dạng toán 49. Biết BBT hàm số $y=f'(x)$ xét tính đơn điệu của hàm số $y=g(x)=f(u(x))+h(x)$ **trong bài toán không chứa tham số.**

Câu 53. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên R. Bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số $g(x)=f\left(1-x^2+x^3\right)+x^3-x^2-5$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $\left(0;\frac{1}{3}\right)$. **B.** $(-\infty;0)$. **C.** $\left(0;\frac{2}{3}\right)$. **D.** $\left(\frac{2}{3};+\infty\right)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $g'(x)=(3x^2-2x).f'(1-x^2+x^3)+3x^2-2x.$

$\Leftrightarrow g'(x)=(3x^2-2x)\left[f'(1-x^2+x^3)+1\right].$

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $f'(x)\Rightarrow f'(x)\ge -1\ \forall x\in R$

$\Rightarrow f'(1-x^2+x^3)+1\ge 0\ \forall x\in R$

Xét $g'(x)\le 0\Rightarrow 3x^2-2x\le 0\Leftrightarrow 0\le x\le \frac{2}{3}.$

Câu 54. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		1		2		3		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $g(x)=f(3x+1)-x^3+3x$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $\left(\frac{1}{4};\frac{1}{3}\right)$. **B.** $\left(-2;\frac{2}{3}\right)$. **C.** $\left(\frac{2}{3};2\right)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Cách 1

Ta có $y'=3f'(3x+1)-3x^2+3=3\left[f'(3x+1)-x^2+1\right].$

$y' \geq 0 \Leftrightarrow f'(3x+1) \geq x^2 - 1$

Ta có

$x^2 - 1 \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$

$$f'(3x+1) \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x+1 \geq 4 \\ 1 \leq 3x+1 \leq 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq 1 \\ 0 \leq x \leq \dfrac{2}{3} \end{array}\right.$$

Suy ra với $0 \leq x \leq \dfrac{2}{3}$ thì $f'(3x+1) \geq 0 \geq x^2 - 1$.

Suy ra hàm số $y = f(3x+1) - x^3 + 3x$ đồng biến trên khoảng $\left(0; \dfrac{2}{3}\right)$

Mà $\left(\dfrac{1}{4}; \dfrac{1}{3}\right) \subset \left(0; \dfrac{2}{3}\right)$ nên chọn đáp án**A.**

Cách 2

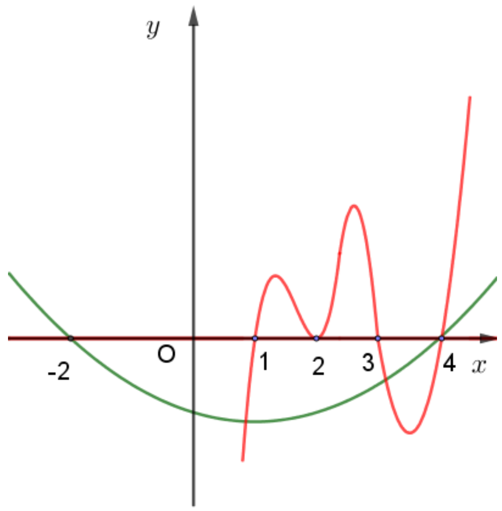
Ta có $y' = 3f'(3x+1) - 3x^2 + 3 = 3\left[f'(3x+1) - x^2 + 1\right]$.

Đặt $t = 3x+1 \Rightarrow x = \dfrac{t-1}{3}$

$y' \geq 0 \Leftrightarrow f'(3x+1) \geq x^2 - 1 \Leftrightarrow f'(t) \geq \dfrac{t^2 - 2t - 8}{9}$

Vẽ đồ thị hàm số $g(t) = \dfrac{t^2 - 2t - 8}{9}$

Từ bảng biến thiên ta có đồ thị $f'(t)$.



Từ đồ thị ta có $f'(t) \geq \dfrac{t^2 - 2t - 8}{9}$ khi $1 < t < 3 \Leftrightarrow 1 < 3x+1 < 3 \Leftrightarrow 0 < x < \dfrac{2}{3}$

Lời bình: Do hàm $f(x)$ chưa biết nên

+ Phương án B sai.
+ Phương án C có thể đúng
+ Phương án D có thể đúng.

Do đó, để chắc chắn chỉ có một phương án đúng thì nên điều chỉnh phương án C, D thành

C. $\left(\dfrac{1}{3}; 1\right)$.

D. $(-\infty; 0)$.

ĐỀ XUẤT SỬA LỜI GIẢI THÀNH

Ta có: $g'(x) = 3\left[f'(3x+1) + (1 - x^2)\right]$

Có: $f'(3x+1)=0 \Leftrightarrow x=0; x=\frac{1}{3}; x=\frac{2}{3}; x=1.$

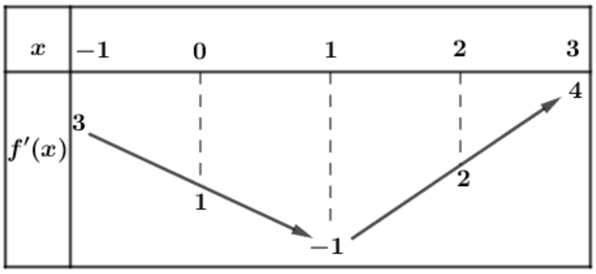
$1-x^2=0 \Leftrightarrow x=\pm 1.$

Bảng xét dấu của $g'(x)$

	$-\infty$		0		-1		$\frac{1}{3}$		$\frac{2}{3}$		1		$+\infty$
$f'(3x+1)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$1-x^2$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$g'(x)$		$-$		Không XĐ được dấu		$+$		$+$		Không XĐ được dấu		Không XĐ được dấu	

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-1;\frac{1}{3}\right)$ và $\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right) \Rightarrow$ Chọn A.

Câu 55. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ.



Hàm số $g(x)=f\left(1-\frac{x}{2}\right)+x$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

A. $(-4;-2)$. **B.** $(-2;0)$. **C.** $(0;2)$. **D.** $(2;4)$.

Lời giải

Chọn A

Xét $g(x)=f\left(1-\frac{x}{2}\right)+x$. Ta có $g'(x)=-\frac{1}{2}f'\left(1-\frac{x}{2}\right)+1$

Xét $g'(x)\le 0 \Leftrightarrow f'\left(1-\frac{x}{2}\right)\ge 2$

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ ta có:

+) TH1: $f'\left(1-\frac{x}{2}\right)>2 \Leftrightarrow 2<1-\frac{x}{2}<3 \Leftrightarrow -4<x<-2.$ Do đó hàm số nghịch biến trên $(-4;-2)$.

+) TH2: $f'\left(1-\frac{x}{2}\right)>2 \Leftrightarrow -1<1-\frac{x}{2}<a<0 \Leftrightarrow 2<2-2a<x<4$ nên hàm số chỉ nghịch biến trên khoảng $(2-2a;4)$ chứ không nghịch biến trên toàn khoảng $(2;4)$.

Vậy hàm số $g(x)=f\left(1-\frac{x}{2}\right)+x$ nghịch biến trên $(-4;-2)$.

Chú ý: Từ trường hợp 1 ta có thể chọn đáp án A nhưng cứ xét tiếp trường hợp 2 xem thử.

Dạng toán 50. Biết BBT hàm số $y=f'(x)$ xét tính đơn điệu của hàm số $y=g(x)=f(u(x))+h(x)$ **trong bài toán chứa tham số**.

Dạng toán 51. Biết BBT của hàm số $y = f'(x)$, xét tính đơn điệu của hàm số $y = g(x) = f(u(x)) + f(v(x)) + h(x)$ **trong bài toán không chứa tham số.**

Dạng toán 52. Biết BBT của hàm số $y = f'(x)$, xét tính đơn điệu của hàm số $y = g(x) = f(u(x)) + f(v(x)) + h(x)$ **trong bài toán chứa tham số.**

Dạng toán 53. Biết BBT hàm số $y = f'(x)$ xét tính đơn điệu của hàm số $y = g(x) = \left[f(u(x))\right]^k$ **trong bài toán không chứa tham số.**

Câu 56. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu của hàm số $y = f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-2		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Biết $f(-2) = f(2) = 0$, hỏi hàm số $g(x) = \left[f(3-x)\right]^2$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

A. $(-2;-1)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $(2;5)$. **D.** $(5;+\infty)$.

Lời giải

Chọn C

Dựa vào bảng xét dấu của hàm số $y = f'(x)$ suy ra bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-2		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$f(1)$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Ta có $g'(x) = -2.f'(3-x).f(3-x)$. Xét $g'(x) \le 0 \Leftrightarrow f'(3-x).f(3-x) \ge 0$ (1)

Từ bảng biến thiên suy ra $f(3-x) \le 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Do đó (1) $\Leftrightarrow f'(3-x) \le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2 \le 3-x \le 1 \\ 3-x \ge 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2 \le x \le 5 \\ x \le 1 \end{array}\right.$.

Suy ra hàm số $g(x)$ nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;1)$, $(2;5)$.

Dạng toán 54. Biết BBT hàm số $y = f'(x)$ xét tính đơn điệu của hàm số $y = g(x) = \left[f(u(x))\right]^k$ **trong bài toán chứa tham số.**

Câu 57. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $f'(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ, đồ thị $y = f'(x)$ cắt trục hoành tại hai điểm có hoành độ lần lượt là $-3;1$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-10;20]$ để hàm số $y = \left(f\left(x^2+3x-m\right)\right)^3$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
f''		$-$	0	$+$	
f'	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

A. 20. **B.** 17. **C.** 16. **D.** 18.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y' = 3(2x+3)f'(x^2+3x-m).\left[f(x^2+3x-m)\right]^2$.

Theo đề bài ta có: $f'(x) = (x-1)(x+3)$ suy ra $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < -3 \\ x > 1 \end{array}\right.$ và $f'(x) < 0 \Leftrightarrow -3 < x < 1$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;2)$ khi $y' \geq 0, \forall x \in (0;2)$

$\Leftrightarrow y' = 3(2x+3)f'(x^2+3x-m).\left[f(x^2+3x-m)\right]^2 \geq 0, \forall x \in (0;2)$.

Do $x \in (0;2)$ nên $2x+3 > 0, \forall x \in (0;2)$ và $\left[f(x^2+3x-m)\right]^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ Do đó, ta có:

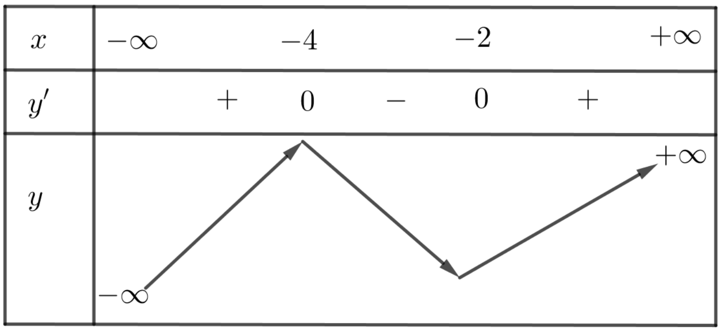
$y' \geq 0 \Leftrightarrow f'(x^2+3x-m) \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+3x-m \leq -3 \\ x^2+3x-m \geq 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \geq x^2+3x+3 \\ m \leq x^2+3x-1 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \geq \max\limits_{(0;2)}(x^2+3x+3) \\ m \leq \min\limits_{(0;2)}(x^2+3x-1) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \geq 13 \\ m \leq -1 \end{array}\right.$.

Do $m \in [-10;20]$ nên có 18 giá trị nguyên của m thỏa yêu cầu đề bài.

Dạng toán 55. Biết BBT hàm số $y = f'(u(x))$ xét tính đơn điệu của hàm số $y = f(x)$ **trong bài toán không chứa tham số.**

Câu 58. Cho hàm số $y = f(x+2)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ



Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến tên khoảng nào sau đây

A. $(0;2)$. **B.** $(2;5)$. **C.** $(-2;0)$. **D.** $(-4;-2)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\left[f(x+2)\right]' = (x+2)'.f'(x+2) = f'(x+2)$

Đặt $t = x+2$ khi đó $y = f(x+2) = f(t)$ và $y' = \left[f(x+2)\right]' = f'(t)$

Dựa vào bảng biến thiên của hàm $y = f(x+2)$ ta có $f'(x+2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -4 \\ x = -2 \end{array}\right.$

Suy ra $f'(t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -2 \\ t = 0 \end{array}\right.$

Vậy ta có bảng biến thiên của hàm $y = f(x)$ như sau

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗		↘		↗	$+\infty$

Suy ra hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên $(-2;0)$

Dạng toán 56. Biết BBT hàm số $y = f'(u(x))$ xét tính đơn điệu của hàm số $y = f(x)$ **trong bài toán chứa tham số.**

Câu 59. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(-1) = 2$. Biết $y = f'(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f'(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	3	↘	0	↗	$+\infty$

Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc đoạn $[-2019;2019]$ để hàm số

$y = \ln\left(f(x) + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + m\right)$ đồng biến trên $(-1;3)$

A. 2008. **B.** 2007. **C.** 2009. **D.** 2010.

Lời giải

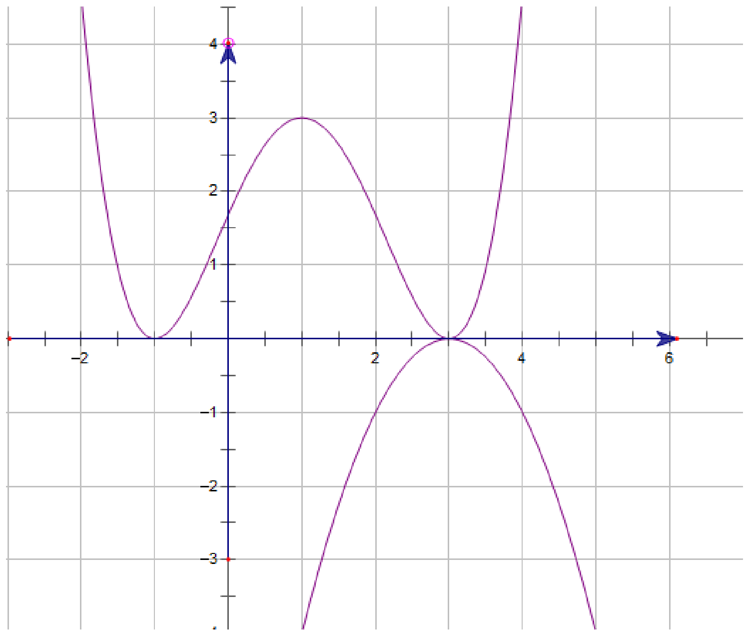
Chọn A

Hàm số $y = \ln\left(f(x) + \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 9x + m\right)$ xác định trên R

$\Leftrightarrow g(x) = f(x) + \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 9x + m > 0, \forall x \cup \in (-1;3)$

$\Rightarrow g'(x) = f'(x) + x^2 - 6x + 9 \Rightarrow g'(x) = 0 \Rightarrow f'(x) = -x^2 + 6x + 9$

Vẽ hai đồ thị $y = f'(x) \vee y = -x^2 + 6x - 9$ trên cùng hệ trục



Vậy $g'(x) \geq 0 \forall x \in (-1;3) \Rightarrow g(x) > g(-1) = -\dfrac{31}{3} + m \geq 0 \Rightarrow m \geq \dfrac{31}{3}$

$$y = \ln\left(f(x) + \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 9x + m \right) \Rightarrow y' = \frac{f'(x) + x^2 - 6x + 9}{f(x) + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + m} \geq 0, \forall x \in (-1;3)$$

Đề hàm số đồng biến trên $(-1;3)$ thì $m \in \left(\dfrac{31}{3}; 2019 \right) \Rightarrow m = 11;...;2018$ có 2008 số.

Câu 60. Cho hàm số $y = f(x+2)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $y = f'(x+2)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
y''		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y'	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc đoạn $[-2019; 2019]$ để hàm số

$y = f(x) - \dfrac{1}{12}x^4 + \dfrac{2}{3}x^3 - \dfrac{3}{2}x^2 - (2m-1)x + m$ đồng biến trên $(1;3)$

A. 2021. **B.** 2020. **C.** 2019. **D.** 2018.

Lời giải

Chọn A

$$y = f(x) - \frac{1}{12}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - (2m-1)x + m \Rightarrow y' = f'(x) - \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 3x - 2m + 1$$

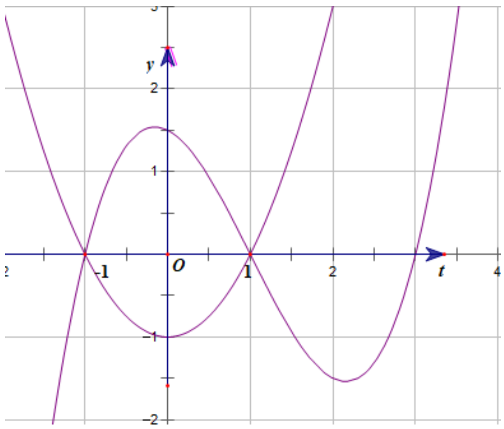
Để hàm số đồng biến trên $(1;3) \Rightarrow y' = f'(x) - \dfrac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 3x - 2m + 1 \geq 0, \forall x \in (1;3)(1)$

Đặt $x = t + 2 \Rightarrow t \in (-1;1)(1)$ trở thành

$$f'(t+2) - \frac{1}{3}(t+2)^3 + 2(t+2)^2 - 3(t+2) - 2m + 1 \geq 0, \forall t \in (-1;1)$$

$$\Leftrightarrow g(t)=f'(t+2)-\frac{1}{3}t^3+t+\frac{1}{3}\ge 2m,\forall t\in(-1;1)\Rightarrow g'(t)=f''(t+2)-t^2+1$$

Vẽ hai đồ thị $y=f''(t)$ và $y=t^2-1$ trên cùng hệ trục



Từ đồ thị ta thấy $g'(t)\ge 0.\forall t\in(-1;1)\Rightarrow g(t)$ là hàm số đồng biến $\forall t\in(-1;1)$

$$\Rightarrow 2m\le g(t),\forall t\in(-1;1)\Leftrightarrow 2m\le \min_{[-1;1]} g(t)=g(-1)=f'(1)+1=3\Rightarrow m\le\frac{3}{2}$$

Kết hợp $m\in[-2019;2019]\Rightarrow m=-2019,...,0,1$ có 2021 số

Dạng toán 57. Biết BBT của hàm số $y=f'(x)$, xét tính đơn điệu của hàm số $y=g(x).f(x)$ **trong bài toán không chứa tham số**.

Câu 61. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $f(-1)=0$. Biết bảng biến thiên của hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ.

x	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	↘	0	↗		↘	0	↘	$-\infty$

Hàm số $g(x)=(x^2-x-2)f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào?

A. $(2;+\infty)$. **B.** $(-\infty;-1)$. **C.** $\left(-1;\frac{1}{2}\right)$. **D.** $(-1;1)$.

Lời giải

Chọn C

Từ bảng biến thiên của hàm số $y=f'(x)$ ta suy ra bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$ như sau

x	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	|	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	0	↗		↗		↘	

Ta có $g'(x)=(2x-1)f(x)+(x^2-x-2)f'(x)$.

Ta lập bảng xét dấu:

x	$-\infty$	-1		$\frac{1}{2}$	1	2	$+\infty$
$2x-1$	$-$		$-$	0	$+$	$+$	
$f(x)$	$-$	0	$+$		$+$	0	Chưa xác định
$(2x-1)f(x)$	$+$	0	$-$		$+$	0	Chưa xác định
x^2-x-2	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$f'(x)$	$+$	0	$+$		$+$	0	$-$
$(x^2-x-2)f'(x)$	$+$	0	$-$		$-$	0	$-$
$g'(x)$	$+$		$-$		Chưa xác định		Chưa xác định

Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-1;\frac{1}{2}\right)$.

Dạng toán 58. Biết BBT của hàm số $y=f'(x)$, xét tính đơn điệu của hàm số $y=g(x).f(x)$ **trong bài toán chứa tham số.**

Câu 62. Cho hàm số $y=f(x)$ và $f(x)>0,\forall x\in\mathbb{R}$. Biết hàm số $y=f'(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ và $f'(4)=0$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$	$-\infty$	↗	4	↘	$-\infty$

Có bao nhiêu số nguyên $m\in[-2019;2019]$ để hàm số $y=e^{-x^2+mx+1}f(x)$ đồng biến trên $(1;4)$

A. 2011 **B.** 2013 **C.** 2012 **D.** 2014

Lời giải

Chọn C

$y=e^{-x^2+mx+1}f(x)\Rightarrow y'=e^{-x^2+mx+1}\left[(-2x+m)f(x)+f'(x)\right]$

Hàm số đồng biến trên $(1;4)\Leftrightarrow y'\ge 0,\forall x\in(1;4)\Leftrightarrow(-2x+m)f(x)+f'(x)\ge 0,\forall x\in(1;4)(1)$

Vì $f(x)>0,\forall x\in\mathbb{R}$ $(1)\Leftrightarrow m\ge 2x-\dfrac{f'(x)}{f(x)}=g(x),\forall x\in(1;4)$

Xét hàm số g(x) ta có $g'(x)=2-\dfrac{f''(x).f(x)-\left[f'(x)\right]^2}{\left[f(x)\right]^2}$

Theo BBT của hàm số $f'(x)$ ta thấy $\forall x\in(1;4)$ thì $f''(x)<0$ nên

$f''(x)f(x)-\left[f'(x)\right]^2<0\left(f(x)>0,\forall x\in\mathbb{R}\right)$

$\Rightarrow-\dfrac{f''(x).f(x)-\left[f'(x)\right]^2}{\left[f(x)\right]^2}>0,\forall x\in(1;4)\Rightarrow g'(x)=2-\dfrac{f''(x).f(x)-\left[f'(x)\right]^2}{\left[f(x)\right]^2}>0,$

$\Rightarrow y=g(x)$ đồng biến trên $(1;4)$

Do đó để $m\ge g(x)$ $\forall x\in(1;4)$ thì $m\ge\max\limits_{[1;4]}g(x)=g(4)=8.$

Do $m \in [-2019; 2019]$ nên $m \in [8; 2019]$

Có 2012 số nguyên thỏa ycbt.

Dạng toán 59. Biết BBT của hàm số $y = f'(x)$, xét tính đơn điệu của hàm số $y = g(x).f(x)$ **trong bài toán không chứa tham số**.

Câu 63. Cho hàm số $y = f(x)$. Biết $f(0) = 0$ và hàm số $y = f'(x)$ có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-3		0		$+\infty$
y'	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Khi đó, hàm số $y = xf(x)$ đồng biến trên khoảng nào?

A. $(-\infty; 0)$. **B.** $(-2; 0)$. **C.** $(0; 2)$. **D.** $(-2; 2)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y = xf(x) \Rightarrow y' = f(x) + xf'(x)$

Từ bảng biến thiên của hàm số $y = f'(x)$ ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = a \end{array}\right.$ với $a < -3$.

Khi đó ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$.

x	$-\infty$		a		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(a)$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Từ bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ ta có $f(x) > 0, \forall x \in (-2; 0)$

Và $f'(x) < 0, \forall x \in (-2; 0) \Rightarrow xf'(x) > 0, \forall x \in (-2; 0)$

Từ đó suy ra $y' = f(x) + xf'(x) > 0, \forall x \in (-2; 0)$. Do đó hàm số $y = xf(x)$ đồng biến trên $(-2; 0)$.

Trên khoảng $(-\infty; 0)$ thì $f(x)$ và $xf'(x)$ có thể âm hoặc dương nên không thể kết luận hàm số đã cho đồng biến trên $(-\infty; 0) \Rightarrow$ đáp án **A** sai.

Trên $(0; 2)$ thì $f(x) < 0$ và $f'(x) < 0 \Rightarrow xf'(x) < 0 \Rightarrow f(x) + xf(x) < 0$ nên hàm số nghịch biến trên $(0; 2)$ $\Rightarrow$ đáp án **C** sai.

Đáp án **C** sai nên đáp án **D** sai.

Câu 64. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		1		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$y(1)$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số $g(x) = [f(3-x)]^2$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

A. $(2; 5)$. **B.** $(1; 2)$. **C.** $(-2; 5)$. **D.** $(5; +\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Từ bảng biến thiên suy ra $f(x)\le 0, \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow f(3-x)\le 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Ta có $g'(x)=-2f'(3-x)f(3-x)$.

Xét $g'(x)<0 \Leftrightarrow -2f'(3-x)f(3-x)<0 \Leftrightarrow f'(3-x)<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-2<3-x<1\\ 3-x>2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2<x<5\\ x<1\end{array}\right.$.

Suy ra hàm số $g(x)$ nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(2;5)$.

Dạng toán 60. Biết BBT của hàm số $y=f'(x)$, xét tính đơn điệu của hàm số $y=g(x).f(x)$ **trong bài toán chứa tham số.**

Câu 65. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây

x	$-\infty$		-1		0		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-1	$\searrow$	-3	$\nearrow$	5	$\nearrow$	$+\infty$

Với $m<0$, hàm số $y=\left(x^2-2x+m\right).f(x)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây

A. $(-1;0)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $(1;3)$. **D.** $(-\infty;-1)$.

Lời giải

Chọn B

$y'=(2x-2).f(x)+\left(x^2-2x+m\right).f'(x)$

+ Ta có $2x-2<0, \forall x\in(0;1)$ và $f(x)<0, \forall x\in(0;1)$ (1)

Bảng biến thiên của hàm $y=g(x)=x^2-2x+m$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$g'(x)$			$-$		0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	m	$\searrow$	$m-1$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ hai BBT suy ra $g(x)=x^2-2x+m<0, \forall x\in(0;1)$ (do $m<0$) và $f'(x)<0, \forall x\in(0;1)$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $y'=(2x-2).f(x)+\left(x^2-2x+m\right).f'(x)>0\ \ \forall x\in(0;1)$.

Trong các khoảng $(-\infty;-1)$, $(-1;0)$, $(1;3)$ thì chưa thể xác định được dấu của $y'=(2x-2).f(x)+\left(x^2-2x+m\right).f'(x)$ nên dựa vào các đáp án ta **Chọn B**

Dạng toán 61. Biết BBT của hàm số $y=f'(x)$, xét tính đơn điệu của hàm số $y=\dfrac{g(x)}{f(x)}$ hoặc $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ **trong bài toán không chứa tham số.**

Câu 66. Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có $f(0)=-\dfrac{1}{3}$. Bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f''(x)$		$+$			0	$-$	
$f'(x)$	$-\infty$	↗	-1	↗	0	↘	$-\infty$

Hàm số $g(x)=\dfrac{f(x)}{e^x}$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;1)$ **B.** $\left(2-\sqrt{3};2\right)$ **C.** $(4;+\infty)$ **D.** $(3;+\infty)$

Lời giải

Chọn C

Vì $y=f(x)$ là hàm số bậc ba nên $y=f'(x)$ là hàm số bậc hai.

Gọi $f'(x)=ax^2+bx+c$ suy ra $f''(x)=2ax+b$. Ta có hệ sau:

$$\begin{cases} f''(1)=0 \\ f'(1)=0 \\ f'(0)=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+b=0 \\ a+b+c=0 \\ c=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=2 \\ c=-1 \end{cases}$$. Vậy $f'(x)=-x^2+2x-1$

Suy ra $f(x)=\int f'(x)\mathrm{d}x=\int\left(-x^2+2x-1\right)\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{3}x^3+x^2-x+m$, do $f(0)=-\dfrac{1}{3}\Rightarrow m=-\dfrac{1}{3}$.

Vậy $f(x)=-\dfrac{1}{3}x^3+x^2-x-\dfrac{1}{3}$.

Ta có $g'(x)=\dfrac{f'(x).e^x-e^x.f(x)}{e^{2x}}=\dfrac{f'(x)-f(x)}{e^x}$.

$$g'(x)=0\Leftrightarrow f'(x)-f(x)=0\Leftrightarrow \frac{1}{3}x^3-2x^2+3x-\frac{2}{3}=0\Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &x=2 \\ &x=2-\sqrt{3} \\ &x=2+\sqrt{3} \end{aligned}\right.$$.

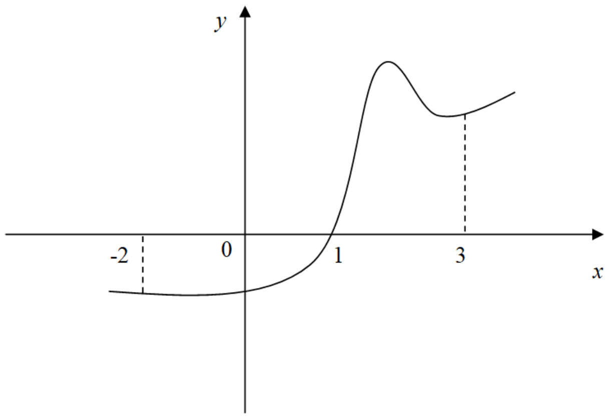
Lập bảng xét dấu $y=g'(x)$

x	$-\infty$		$2-\sqrt{3}$		2		$2+\sqrt{3}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu $g'(x)$ hàm số nghịch biến trên $(4;+\infty)$.

Dạng toán 62. Biết BBT của hàm số $y=f'(x)$, xét tính đơn điệu của hàm số $y=\dfrac{g(x)}{f(x)}$ hoặc $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ **trong bài toán chứa tham số.**

Câu 67. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ có như sau:



Đồ thị hàm số $y = f(x)$ không có giao điểm với trục hoành và $\underset{\mathbb{R}}{Max}\, f(x) = -1$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ có duy nhất 1 giao điểm với trục hoành.Có bao nhiêu giá trị của tham số m để hàm số $g(x) = \dfrac{(x-1)^2\left((-2m^2+1)x+m\right)}{f(x)}$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 5.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\underset{\mathbb{R}}{Max}\, f(x) = -1 \Rightarrow f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$g'(x) = \frac{(x-1)\left((-2m^2+1)(3x-1)+2m\right)f(x) - (x-1)^2\left((-2m^2+1)x+m\right)f'(x)}{\left(f(x)\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow g'(x) = \frac{(x-1)\left[\left((-2m^2+1)(3x-1)+2m\right)f(x) - (x-1)\left((-2m^2+1)x+m\right)f'(x)\right]}{\left(f(x)\right)^2}$$

Đặt $\left((-2m^2+1)(3x-1)+2m\right)f(x) - (x-1)\left((-2m^2+1)x+m\right)f'(x) = h(x)$

Vì $g'(x)$ có 1 nghiệm bội lẻ $x = 1$ nên để $g'(x) \geq 0$ thì điều kiện cần là $h(x)$ cũng có nghiệm là $x = 1$.

$$h(1) = 2(-2m^2+m+1)f(1) = 0 \Leftrightarrow -2m^2+m+1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = \dfrac{-1}{2} \end{array}\right.$$

Th1: Với $m = 1$ ta có

$$g'(x) = \frac{-3(x-1)^2 f(x) + (x-1)^3 f'(x)}{\left(f(x)\right)^2} > 0\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

TH2: Với $m = \dfrac{-1}{2}$ ta có

$$g'(x) = \frac{1}{2}.\frac{3(x-1)^2 f(x) - (x-1)^3 f'(x)}{\left(f(x)\right)^2} < 0\ \forall x \in \mathbb{R}$$

Vậy có 1 giá trị m thỏa mãn đề bài yêu cầu.

CÁC DẠNG TOÁN VỀ HÀM ẨN LIÊN QUAN ĐẾN BÀI TOÁN CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

PHẦN 1: BIẾT ĐẶC ĐIỂM CỦA HÀM SỐ $y=f\left(x\right)$

Dạng toán 1. Các bài toán về cực trị của hàm ẩn bậc 2 (dành cho khối 10).

Dạng toán 2. Dạng toán có thể tìm được biểu thức cụ thể của hàm số $y=f\left(x\right)$ trong bài toán không chứa tham số.

Dạng toán 3. Dạng toán có thể tìm được biểu thức cụ thể của hàm số $y=f\left(x\right)$ trong bài toán chứa tham số.

Dạng toán 4. Biết đặc điểm của hàm số hoặc đồ thị, hoặc BBT hoặc đạo hàm của hàm $f\left(x\right)$, tìm cực trị của hàm $y=f\left(\varphi\left(x\right)\right);\ y=f\left(f\left(x\right)\right),...y=f\left(f\left(f...\left(x\right)\right)\right)$ trong bài toán không chứa tham số

Dạng toán 5. Biết đặc điểm của hàm số hoặc BBT, hoặc BBT hoặc đạo hàm của hàm $f\left(x\right)$, tìm cực trị của hàm $y=f\left(f\left(x\right)\right),...y=f\left(f\left(f...\left(x\right)\right)\right)$ trong bài toán chứa tham số.

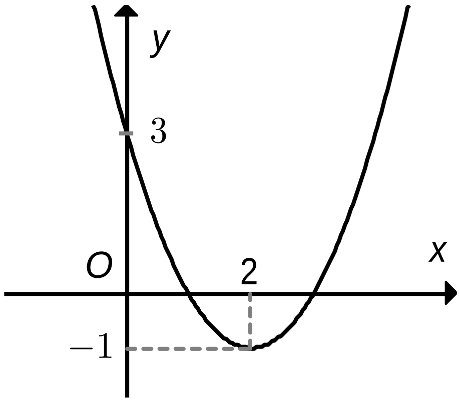
Dạng toán 6. Biết đặc điểm của hàm số hoặc BBT, hoặc đồ thị, hoặc đạo hàm của hàm $f\left(x\right)$, tìm cực trị của hàm $y=\ln\left(f\left(x\right)\right),y=e^{f\left(x\right)},\sin f\left(x\right),\cos f\left(x\right)...$ trong bài toán không chứa tham số

Dạng toán 7. Biết đặc điểm của hàm số hoặc BBT, hoặc đồ thị, hoặc đạo hàm của hàm $f\left(x\right)$, tìm cực trị của hàm $y=\ln\left(f\left(x\right)\right),y=e^{f\left(x\right)},\sin f\left(x\right),\cos f\left(x\right)...$ trong bài toán chứa tham số.

Dạng toán 8. Các dạng khác với các dạng đã đưa ra…

DẠNG 1. Các bài toán về cực trị của hàm ẩn bậc 2 (dành cho khối 10).

Câu 1: Cho hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$ đồ thị như hình bên. Hỏi hàm số $g = f(x^2)$ có mấy điểm cực trị?



A. 1. **B.** 2.
C. 3. **D.** 4.

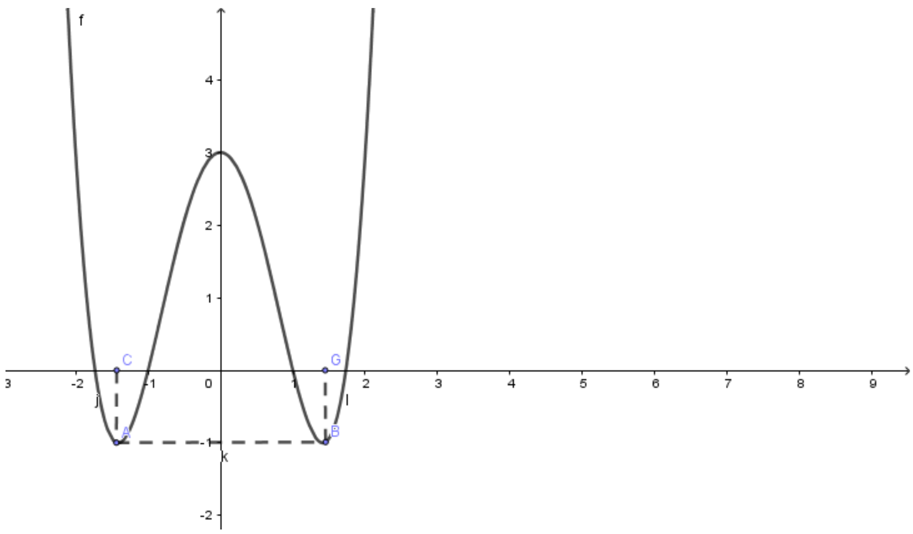
Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $g = f(x^2)$.

Đặt $t = x^2$. Khi đó với $t \geq 0$, hàm $g = f(t)$ có đồ thị là dạng của đồ thị hàm số $f(x)$ bên phải trục Oy. Hàm số $g = f(x^2)$ là hàm chẵn nên đồ thị hàm số nhận Oy làm trục đối xứng.

Từ đó ta có đồ thị hàm $g(t)$ như sau:



Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy hàm số có 3 điểm cực trị.

Câu 2: Cho parabol $y = f(x) = ax^2 + bx + c \ (a \neq 0)$ cắt trục hoành tại hai điểm có hoành độ bằng 1 và 2, biết rằng hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(x_0; +\infty)$ và khoảng cách từ giao điểm của parabol với trục tung đến điểm O bằng 4. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = \left| f\left(|x+1|\right) \right|$.

A. 2. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 7.

Lời giải

Chọn D

Do hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(x_0; +\infty)$ nên $a < 0$.

Biết $y = f(x) = ax^2 + bx + c \ (a \neq 0)$ cắt trục hoành tại hai điểm có hoành độ bằng 1 và 2 nên

$f(x) = a(x-1)(x-2) = a(x^2 - 3x + 2) = ax^2 - 3ax + 2a$.

Parabol cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng $2a$, ta có $|2a| = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 2 \\ a = -2 \end{array}\right.$.

Do hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(x_0;+\infty)$ nên $a = -2$.

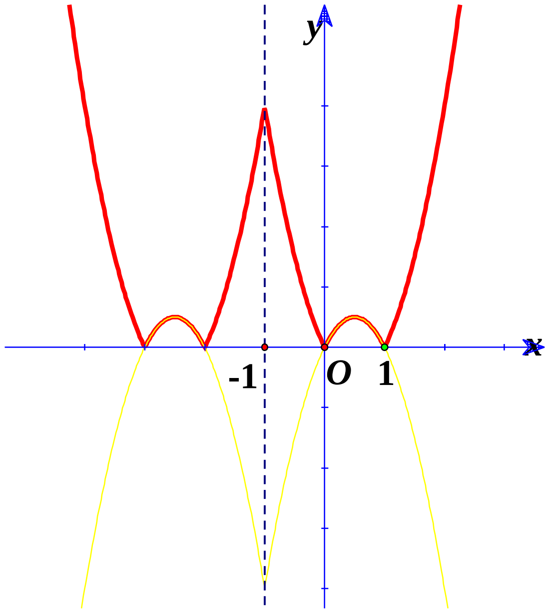
Vậy parabol là $y = f(x) = -2x^2 + 6x - 4$

Đồ thị hàm số $y = \left|f\left(|x+1|\right)\right|$ (hình vẽ phần tô đậm) có được bằng cách

+ Vẽ đồ thị $y = f\left(|x+1|\right)$ (C_1)

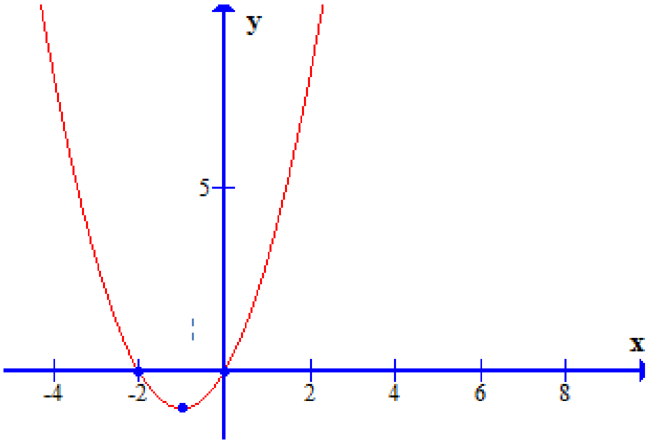
+ Giữ nguyên phần đồ thị (C_1) trên trục hoành và lấy đối xứng phần (C_1) dưới trục hoành.

Để vẽ (C_1) lấy đối xứng phần đồ thị $y = f(x) = -2x^2 + 6x - 4$ qua trục tung sau đó tịnh tiến sáng trái 1 đơn vị.



Từ đồ thị suy ra hàm số có 7 điểm cực trị.

Câu 3: Cho hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c\,(a \neq 0)$ có đồ thị là parabol như hình vẽ. Tìm m để giá trị lớn nhất của hàm số $y = |f(x) + m - 4|$ trên $[-2;1]$ đạt giá trị nhỏ nhất.



A. $m = 5$. **B.** $m = 4$.

C. $m = 3$. **D.** $m = 1$.

Lời giải

Chọn C

Từ giả thiết suy ra $y = \left|(x+1)^2 + m - 5\right|$. Đặt $g(x) = (x+1)^2 + m - 5$.

Với $\forall x \in [-2;1]$ ta có $g(x) \in [m-5; m-1]$.

Giá trị lớn nhất của hàm số $y_{\max} = \max\{|m-5|,|m-1|\}$.

+ Trường hợp 1: $|m-5| \ge |m-1| \Leftrightarrow (m-5)^2 \ge (m-1)^2 \Leftrightarrow m \le 3$.

Khi đó $y_{\max} = |m-5| = 5-m \ge 2 \Rightarrow$ GTLN của hàm số đạt GTNN bằng 2, khi $m=3$.

+ Trường hợp 2: $|m-1| \ge |m-5| \Leftrightarrow m \ge 3$.

Khi đó $y_{\max} = |m-1| = m-1 \ge 2 \Rightarrow$ GTLN của hàm số đạt GTNN bằng 2, khi $m=3$.

Vậy $m=3$.

DẠNG 2. Dạng toán có thể tìm được biểu thức cụ thể của hàm số $y=f(x)$ trong bài toán không chứa tham số.

Câu 4: Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$. Biết rằng đồ thị hàm số có một điểm cực trị là $M(1;-1)$ và nhận $I(0;1)$ làm tâm đối xứng. Giá trị $y(2)$ là

A. $y(2)=2$. **B.** $y(2)=-2$. **C.** $y(2)=6$. **D.** $y(2)=3$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y'=3ax^2+2bx+c,\ y''=6ax+2b$.

Do đồ thị hàm số có một điểm cực trị là $M(1;-1)$ và nhận $I(0;1)$ làm tâm đối xứng nên:

$$\begin{cases} y(1)=-1 \\ y'(1)=0 \\ y''(0)=0 \\ y(0)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c+d=-1 \\ 3a+2b+c=0 \\ 2b=0 \\ d=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=0 \\ c=-3 \\ d=1 \end{cases}.$$

Vậy: $y=x^3-3x+1$. Suy ra $y(2)=2^3-3.2+1=3$.

Câu 5: Đồ thị của hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có hai điểm cực trị là $A(1;2)$ và $B(-1;6)$. Giá trị của $P=a^2+b^2+c^2+d^2$ bằng bao nhiêu?

A. $P=18$. **B.** $P=26$. **C.** $P=15$. **D.** $P=23$.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

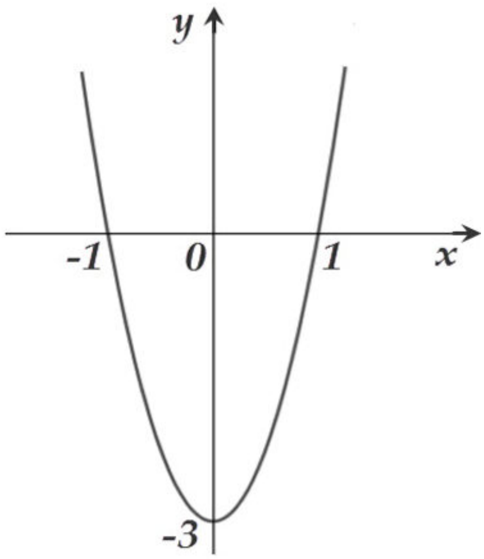
Ta có $y'=3ax^2+2bx+c$ và $y''=6ax+2b$.

Vì $A(1;2)$ và $B(-1;6)$ là điểm cực trị nên

$$\begin{cases} y'(1)=0 \\ y(1)=2 \\ y'(-1)=0 \\ y(-1)=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a+2b+c=0 \\ a+b+c+d=2 \\ 3a-2b+c=0 \\ -a+b-c+d=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6a+2c=0 \\ b+d=4 \\ 2a+2c=-4 \\ 4b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=0 \\ c=-3 \\ d=4 \end{cases}.$$

Vậy $P=a^2+b^2+c^2+d^2=26$.

Câu 6: Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\ (a\ne 0)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(2)=1$. Đồ thị hàm số $f'(x)$ được cho bởi hình bên dưới.



Tìm giá trị cực tiểu y_{CT} của hàm số $f(x)$.

A. $y_{CT} = -3$. **B.** $y_{CT} = 1$. **C.** $y_{CT} = -1$. **D.** $y_{CT} = -2$.

Lời giải

Chọn A

Vì đồ thị hàm $f'(x)$ cắt Ox tại hai điểm phân biệt có hoành độ $x=-1$ và $x=1$ nên $f'(x) = k(x-1)(x+1)$ với k là số thực khác 0.

Vì đồ thị hàm $f'(x)$ đi qua điểm $(0;-3)$ nên ta có $-3 = -k \Leftrightarrow k = 3$. Suy ra $f'(x) = 3x^2 - 3$.

Mà $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ nên ta có được $a = 1, b = 0, c = -3$.

Từ đó $f(x) = x^3 - 3x + d$. Mặt khác $f(2) = 1$ nên $d = -1$.

Suy ra $f(x) = x^3 - 3x - 1$.

Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=1 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy $y_{CT} = -3$.

Câu 7: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $\begin{cases} (3x^2 - 15x) f'(x) + (10 - 5x) f(x) = 0 \\ [f'(x)]^2 + [f(x)]^2 > 0 \end{cases}$ với $\forall x \neq 0$ và $f(1) = -4$. Tổng cực đại và cực tiểu của hàm số $y = f(x)$ bằng

A. $-3\sqrt[3]{4}$. **B.** $3\sqrt[3]{4}$. **C.** $-2\sqrt[3]{4}$. **D.** $3\sqrt[4]{2}$.

Lời giải

Chọn A

Từ $[f'(x)]^2 + [f(x)]^2 > 0$ với $\forall x \neq 0$ ta suy ra: Với $x \neq 0$ ta có $f(x) = 0 \Rightarrow f'(x) \neq 0$.

Do đó từ $\left(3x^2-15x\right)f'\left(x\right)+\left(10-5x\right)f\left(x\right)=0$ với $\forall x\neq 0$, ta suy ra:

Với $x\neq 0$ ta có $f\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left(3x^2-15x\right)f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow x=5$.

Với các kết quả trên ta được $\dfrac{f'(x)}{f\left(x\right)}=\dfrac{5}{3}\dfrac{x-2}{x\left(x-5\right)}\forall x\notin\left\{0;5\right\}$

Suy ra $\displaystyle\int\frac{f'(x)}{f\left(x\right)}\mathrm{d}x=\frac{5}{3}\int\frac{x-2}{x\left(x-5\right)}\mathrm{d}x\Leftrightarrow\ln\left|f\left(x\right)\right|=\frac{2}{3}\ln\left|x\right|+\ln\left|x-5\right|+C$

$\Leftrightarrow\left|f\left(x\right)\right|=e^C\left|\left(x-5\right)\sqrt[3]{x^2}\right|$

Do $f\left(1\right)=-4$ nên $C=0$ và $f\left(x\right)=\left(x-5\right)\sqrt[3]{x^2}$ với $\forall x\notin\left\{0;5\right\}$

Vì $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên $f\left(x\right)$ liên tục tại $x=0,\ x=5$ suy ra $f\left(0\right)=f\left(5\right)=0$

Hay $f\left(x\right)=\left(x-5\right)\sqrt[3]{x^2}$ với $\forall x\in\mathbb{R}$.

Khi đó $f'\left(x\right)=\dfrac{5}{3}\dfrac{x-2}{\sqrt[3]{x}}$.

Ta có $f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow x=2$, $f'\left(x\right)$ không xác định khi $x=0$.

Bảng biến thiên của $f\left(x\right)$:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-3\sqrt[3]{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ đó suy ra $y_{CD}=f\left(0\right)=0;\ y_{CT}=f\left(2\right)=-3\sqrt[3]{4}$. Vậy $y_{CD}+y_{CT}=-3\sqrt[3]{4}$.

DẠNG 3. Dạng toán có thể tìm được biểu thức cụ thể của hàm số $y=f\left(x\right)$ trong bài toán chứa tham số.

Câu 8: Tổng tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho đồ thị hàm số $y=x^3-3mx^2+4m^3$ có điểm cực đại và cực tiểu đối xứng với nhau qua đường phân giác của góc phần tư thứ nhất là

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** 0. **D.** $\dfrac{1}{4}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $y'=3x^2-6mx$, $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2m\end{array}\right.$.

Để hàm số có cực đại cực tiểu thì $m\neq 0$.

Khi đó các điểm cực trị của đồ thị hàm số là: $A\left(0;4m^3\right)$, $B\left(2m;0\right)$.

Ta có $I\left(m;2m^3\right)$ là trung điểm của đoạn thẳng AB.

Đường phân giác của góc phần tư thứ nhất là $d:x-y=0$.

Do đó để điểm cực đại và cực tiểu đối xứng với nhau qua d thì:

$\begin{cases}2m-4m^3=0\\m-2m^3=0\end{cases}\Leftrightarrow 1-2m^2=0\Leftrightarrow m=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Vậy tổng tất cả các giá trị của tham số thực m là 0.

Câu 9: Cho hàm số $y=x^4-2m^2x^2+m^2$ có đồ thị $\left(C\right)$. Để đồ thị $\left(C\right)$ có ba điểm cực trị A, B, C sao cho bốn điểm A, B, C, O là bốn đỉnh của hình thoi (O là gốc tọa độ) thì giá trị tham số m là

A. $m=-\sqrt{2}$. **B.** $m=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $m=\pm\sqrt{2}$. **D.** $m=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y'=4x^3-4m^2x$; $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=m^2\end{array}\right.$.

Điều kiện để hàm số có ba cực trị là $y'=0$ có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m\neq 0$.

Khi đó: $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm m\end{array}\right.$.

Tọa độ các điểm cực trị là $A(0;m^2)$, $B(m;-m^4+m^2)$, $C(m;-m^4+m^2)$.

Ta có $OA\perp BC$, nên bốn điểm A, B, C, O là bốn đỉnh của hình thoi điều kiện cần và đủ là OA và BC cắt nhau tại trung điểm mỗi đoạn

$\Leftrightarrow\begin{cases}x_A+x_O=x_B+x_C\\y_A+y_O=y_B+y_C\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0=0\\m^2+0=\left(-m^4+m^2\right)+\left(-m^4+m^2\right)\end{cases}$

$\Leftrightarrow 2m^4-m^2=0\Leftrightarrow m^2=\frac{1}{2}\Leftrightarrow m=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $m=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 10: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để điểm $M\left(2m^3;m\right)$ cùng với hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=2x^3-3(2m+1)x^2+6m(m+1)x+1$ tạo thành một tam giác có diện tích nhỏ nhất.

A. $m=-1$. **B.** $m=2$. **C.** $m=1$. **D.** $m=0$.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

$y'=6x^2-6(2m+1)x+6m(m+1)$

$y'=0\Leftrightarrow 6x^2-6(2m+1)x+6m(m+1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}x=m & \Rightarrow y=2m^3+3m^2+1\\x=m+1 & \Rightarrow y=2m^3+3m^2\end{array}\right.$.

Hàm số có 2 cực trị: $\Delta'>0\Leftrightarrow 9(2m+1)^2-36m(m+1)>0\Leftrightarrow 9>0,\forall x\in\mathbb{R}$.

Gọi A,B là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số

$\Rightarrow A\left(m;2m^3+3m^2+1\right),B\left(m+1;2m^3+3m^2\right)\Rightarrow\overrightarrow{AB}=(1;-1)\Rightarrow AB=\sqrt{2}$

Phương trình đường thẳng Δ đi qua 2 điểm cực trị: $x+y-2m^3-3m^2-m-1=0$

$d(M,\Delta)=\frac{\left|2m^3+m-2m^3-3m^2-m-1\right|}{\sqrt{2}}=\frac{3m^2+1}{\sqrt{2}}$

$S_{\Delta MAB}=\frac{1}{2}d(M,\Delta).AB=\frac{1}{2}.\frac{3m^2+1}{\sqrt{2}}.\sqrt{2}=\frac{3m^2+1}{2}$.

$S_{\min}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow m=0$.

Câu 11: Cho hàm số $y=x^4-2mx^2+m$ (C). Tìm m để đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị đồng thời ba điểm cực trị của đồ thị hàm số tạo thành tam giác có bán kính đường tròn nội tiếp bằng 1.

A. $m=1$. **B.** $m=0$. **C.** $m=-2$. **D.** $m=2$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y'=4x^3-4mx$.

$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = m \end{array} \right.$.

Hàm số có 3 điểm cực trị $\Leftrightarrow$ $y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ $m > 0$.

Các điểm cực trị của đồ thị là $A(0;m)$, $B\left(\sqrt{m};-m^2+m\right)$, $C\left(-\sqrt{m};-m^2+m\right)$

Ta có: $AB = AC = \sqrt{m^4+m}$, $BC = 2\sqrt{m}$.

Gọi I là trung điểm BC. Suy ra $I\left(0;-m^2+m\right)$ và $AI = m^2$.

$S = \frac{1}{2}AI.BC = \left(\frac{AB+BC+CA}{2}\right).r \Leftrightarrow m^2.2\sqrt{m} = \left(2\sqrt{m^4+m}+2\sqrt{m}\right).1$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{m}\left(m^2-\sqrt{m^3+1}-1\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0\,(loai) \\ \sqrt{m^3+1} = m^2-1 \end{array} \right.$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2-1 \ge 0 \\ m^3+1 = m^4-2m^2+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |m| \ge 1 \\ \left[\begin{array}{l} m = 0\,(loai) \\ m = -1\,(nhan) \\ m = 2\,(nhan) \end{array} \right. \end{cases} \Leftrightarrow m = 2$.

Câu 12: Cho (P) là đường Parabol qua ba điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{4}x^4 - mx^2 + m^2$. Gọi m_a là giá trị để (P) đi qua $B\left(\sqrt{2};2\right)$. Hỏi m_a thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $\left(\sqrt{10};\sqrt{15}\right)$. **B.** $\left(-2;\sqrt{5}\right)$. **C.** $\left(-5;\sqrt{2}\right)$. **D.** $\left(-8;2\right)$.

Lời giải

Chọn B

$y' = x^3 - 2mx = x\left(x^2-2m\right)$.

Để hàm số có ba cực trị thì $ab < 0 \Leftrightarrow -\frac{m}{4} < 0 \Leftrightarrow m > 0$.

$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0,\ y = m^2 \\ x = \sqrt{2m},\ y = 0 \\ x = -\sqrt{2m},\ y = 0 \end{array} \right.$.

Gọi parabol đi qua điểm $A\left(0;m^2\right)$, $B\left(\sqrt{2m};0\right)$, $C\left(-\sqrt{2m};0\right)$ có dạng: $y = ax^2+bx+c$

Ta có: $\begin{cases} 2ma+\sqrt{2m}b+c = 0 \\ 2ma-\sqrt{2m}b+c = 0 \\ c = m^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{m}{2} \\ b = 0 \\ c = m^2 \end{cases}$ hay $y = -\frac{m}{2}x^2+m^2$.

Theo yêu cầu bài toán parabol đi qua $B\left(\sqrt{2};2\right)$ nên: $2 = -\frac{m_a}{2}\left(\sqrt{2}\right)^2+m_a^2 \Leftrightarrow m_a^2-m_a-2 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m_a = -1 \\ m_a = 2 \end{array} \right.$.

Vậy $m_a = 2$.

Câu 13: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x^8+(m-3)x^5-\left(m^2-9\right)x^4+1$ đạt cực tiểu tại $x = 0$?

A. 4. **B.** 7. **C.** 6. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y=x^8+(m-3)x^5-(m^2-9)x^4+1 \Rightarrow y'=8x^7+5(m-3)x^4-4(m^2-9)x^3$.

$y'=0 \Leftrightarrow x^3\left(8x^4+5(m-3)x-4(m^2-9)\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ g(x)=8x^4+5(m-3)x-4(m^2-9)=0 \end{array}\right.$.

Xét hàm số $g(x)=8x^4+5(m-3)x-4(m^2-9)$ có $g'(x)=32x^3+5(m-3)$.

Ta thấy $g'(x)=0$ có một nghiệm nên $g(x)=0$ có tối đa hai nghiệm.

+) TH1: Nếu $g(x)=0$ có nghiệm $x=0 \Rightarrow m=3$ hoặc $m=-3$.

Với $m=3$ thì $x=0$ là nghiệm bội 4 của $g(x)$. Khi đó $x=0$ là nghiệm bội 7 của y' và y' đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua điểm $x=0$ nên $x=0$ là điểm cực tiểu của hàm số.

Vậy $m=3$ thỏa ycbt.

Với $m=-3$ thì $g(x)=8x^4-30x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\sqrt[3]{\dfrac{15}{4}} \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		$\sqrt[3]{\frac{15}{4}}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘		↘		↗	$+\infty$

Dựa vào BBT $x=0$ không là điểm cực tiểu của hàm số. Vậy $m=-3$ không thỏa ycbt.

+) TH2: $g(0)\neq 0 \Leftrightarrow m\neq \pm 3$.

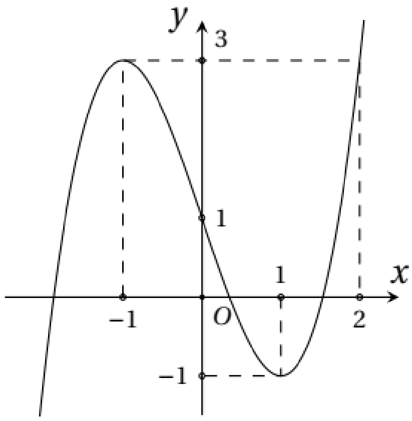
Để hàm số đạt cực tiểu tại $x=0 \Leftrightarrow g(0)>0 \Leftrightarrow m^2-9<0 \Leftrightarrow -3<m<3$.

Do $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{-2;-1;0;1;2\}$.

Vậy cả hai trường hợp ta được 6 giá trị nguyên của m thỏa ycbt.

DẠNG 4. Biết đặc điểm của hàm số hoặc đồ thị, hoặc BBT, hoặc đạo hàm của hàm $f(x)$, tìm cực trị của hàm $y=f(\varphi(x));\ y=f(f(x)),\dots y=f(f(f\dots(x)))$ trong bài toán không chứa tham số.

Câu 14: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đúng hai điểm cực trị $x=-1, x=1$, có đồ thị như hình vẽ sau:



Hỏi hàm số $y = f\left(x^2 - 2x + 1\right) + 2019$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 4. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B

Do hàm số $y = f(x)$ có đúng hai điểm cực trị $x = -1, x = 1$ nên phương trình $f'(x) = 0$ có hai nghiệm bội lẻ phân biệt $x = -1, x = 1$.

Ta có $y' = (2x-2)\,f'\left(x^2 - 2x + 1\right)$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x - 2 = 0 \\ x^2 - 2x + 1 = -1 \\ x^2 - 2x + 1 = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right..$$

Ta có

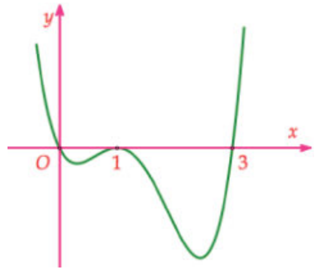
$$y' > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x - 2 > 0 \\ f'(x^2 - 2x + 1) > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x - 2 < 0 \\ f'(x^2 - 2x + 1) < 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 1 \\ \left[\begin{array}{l} x^2 - 2x + 1 > 1 \\ x^2 - 2x + 1 < -1 \end{array}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} x < 1 \\ -1 < x^2 - 2x + 1 < 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 1 \\ \left[\begin{array}{l} x > 2 \\ x < 0 \end{array}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} x < 1 \\ 0 < x < 2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 2 \\ 0 < x < 1 \end{array}\right.$$

Do đó ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y		↘		↗		↘		↗	

Từ bảng biến thiên ta suy ra hàm số $y = f\left(x^2 - 2x + 1\right) + 2019$ có 3 cực trị. Chọn phương án B.

Câu 15: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$. Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ



Đồ thị hàm số $y = \left(f(x)\right)^2$ có bao nhiêu điểm cực đại, cực tiểu?

A. 2 điểm cực đại, 3 điểm cực tiểu. **B.** 2 điểm cực tiểu, 3 điểm cực đại.

C. 2 điểm cực đại, 2 điểm cực tiểu. **D.** 1 điểm cực đại, 3 điểm cực tiểu.

Lời giải

Chọn A

Từ đồ thị ta có: $f(x)=0$ có nghiệm đơn là $x=0;x=3$ và nghiệm kép $x=1$.

Và $f'(x)=0$ có 3 nghiệm đơn $x=x_1\in(0;1)$; $x=x_2\in(1;3)$ và $x=1$.

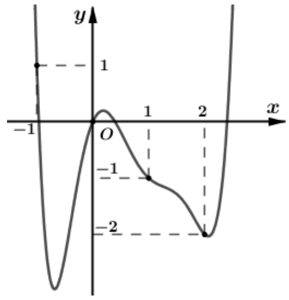
Ta có: $y=\left(f(x)\right)^2\Rightarrow y'=2f'(x).f(x)$ có các nghiệm đơn là $x=0;x=3;x_1;x_2$ và nghiệm bội 3 là $x=1$.

Ta có bảng xét dấu sau:

x	$-\infty$		0		x_1		1		x_2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	|	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	|	$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	|	$-$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	
$y'=2f'(x).f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
			CT		CĐ		CT		CĐ		CT		

Vậy đồ thị hàm số có 2 điểm cực đại, 3 điểm cực tiểu.

Câu 16: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số như hình vẽ bên dưới.



Số điểm cực tiểu của hàm số $g\left(x\right)=2f\left(x+2\right)+\left(x+1\right)\left(x+3\right)$ là

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

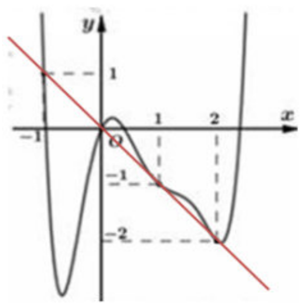
Chọn A

Ta có $g'\left(x\right)=2f'\left(x+2\right)+2x+4$.

$g'\left(x\right)=0\Leftrightarrow f'\left(x+2\right)=-\left(x+2\right)$.

Đặt $t=x+2$ ta được $f'\left(t\right)=-t$. (1)

(1) là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị $f'\left(t\right)$ và đường thẳng d : $y=-t$ (hình vẽ)



Dựa vào đồ thị của $f'\left(t\right)$ và đường thẳng $y=-t$ ta có

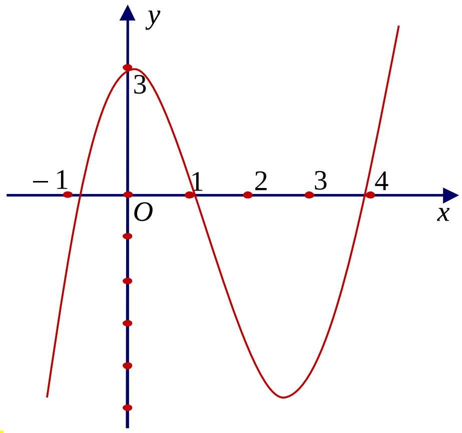
ta có $f'\left(t\right)=-t\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-1\\t=0\\t=1\\t=2\end{array}\right.$ hay $\left[\begin{array}{l}x=-3\\x=-2\\x=-1\\x=0\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên của hàm số $g\left(x\right)$.

x	$-\infty$		-3		-2		-1		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$+$	
$g(x)$		↗		↘		↗				↗	

Vậy đồ thị hàm số có một điểm cực tiểu.

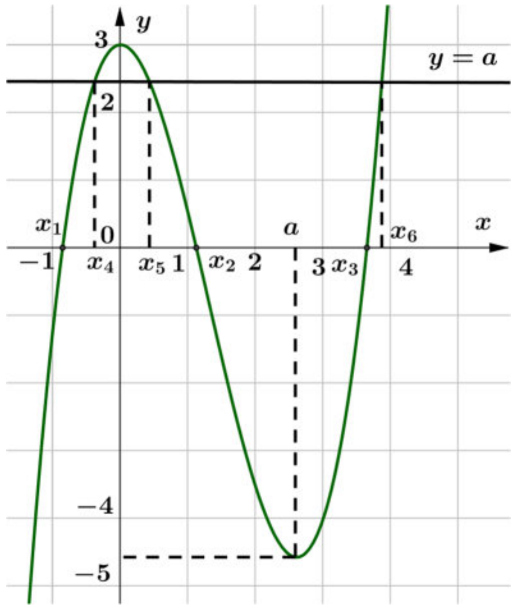
Câu 17: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong như hình vẽ. Đặt $g(x)=3f\left(f(x)\right)+4$. Tìm số điểm cực trị của hàm số $g(x)$?



A. 2. **B.** 8. **C.** 10. **D.** 6.

Lời giải

Chọn B



$g'(x)=3f'\left(f(x)\right).f'(x)$.

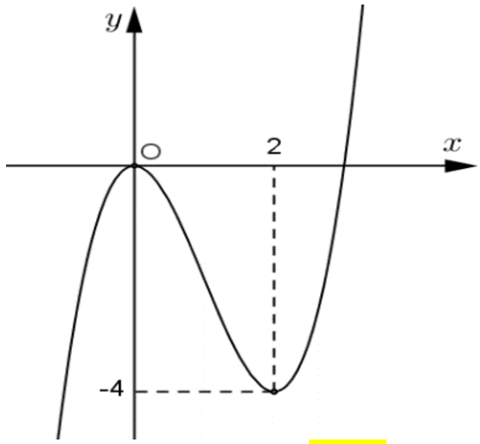
$$g'(x)=0\Leftrightarrow 3f'\left(f(x)\right).f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f'\left(f(x)\right)=0\\f'(x)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)=0\\f(x)=a\\x=0\\x=a\end{array}\right.,\ (2<a<3).$$

$f(x)=0$ có 3 nghiệm đơn phân biệt x_1, x_2, x_3 khác 0 và a.

Vì $2<a<3$ nên $f(x)=a$ có 3 nghiệm đơn phân biệt x_4, x_5, x_6 khác x_1, x_2, x_3, 0, a.

Suy ra $g'(x)=0$ có 8 nghiệm đơn phân biệt. Do đó hàm số $g(x)=3f\left(f(x)\right)+4$ có 8 điểm cực trị.

Câu 18: Biết rằng hàm số $f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị được cho như hình vẽ bên. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = f[f(x)]$.



A. 5. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 6.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $y = f[f(x)]$, $y' = f'(x).f'[f(x)]$;

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x) = 0 \\ f'[f(x)] = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \\ f(x) = 0 \\ f(x) = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \\ x = a \in (2;+\infty) \\ x = b \in (a;+\infty) \end{array}\right..$$

Với $x \in (-\infty;0) \Rightarrow \begin{cases} f'(x) > 0 \\ f(x) < 0 \Rightarrow f'[f(x)] > 0 \end{cases} \Rightarrow y' > 0$.

Với $x \in (0;2) \Rightarrow \begin{cases} f'(x) < 0 \\ f(x) < 0 \Rightarrow f'[f(x)] > 0 \end{cases} \Rightarrow y' < 0$.

Với $x \in (2;a) \Rightarrow \begin{cases} f'(x) > 0 \\ f(x) < 0 \Rightarrow f'[f(x)] > 0 \end{cases} \Rightarrow y' > 0$.

Với $x \in (a;b) \Rightarrow \begin{cases} f'(x) > 0 \\ 0 < f(x) < 2 \Rightarrow f'[f(x)] < 0 \end{cases} \Rightarrow y' < 0$.

Với $x \in (b;+\infty) \Rightarrow \begin{cases} f'(x) > 0 \\ f(x) > 2 \Rightarrow f'[f(x)] > 0 \end{cases} \Rightarrow y' > 0$.

Ta có bảng biến thiên

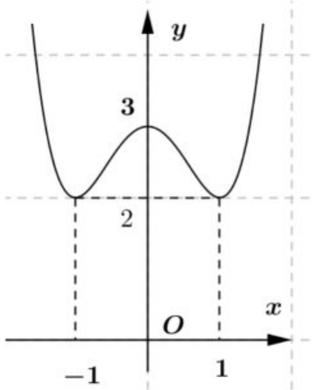
x	$-\infty$		0		2		a		b		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y		↗		↘		↗		↘		↗	

Dựa vào BBT suy ra hàm số $y = f[f(x)]$ có bốn điểm cực trị.

DẠNG 5. Biết đặc điểm của hàm số hoặc đồ thị, hoặc BBT, hoặc đạo hàm của hàm $f(x)$, tìm cực trị của hàm $y = f(\varphi(x))$; $y = f(f(x)),...y = f(f(f...(x)))$ trong bài toán chứa tham số.

DẠNG 6. Biết đặc điểm của hàm số hoặc BBT, hoặc đồ thị, hoặc đạo hàm của hàm $f(x)$, tìm cực trị của hàm $y=\ln\left(f(x)\right), y=e^{f(x)}, \sin f(x), \cos f(x)...$ trong bài toán không chứa tham số.

Câu 19: Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình dưới đây



Hàm số $g(x)=\ln\left(f(x)\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

A. 0.　　**B.** 1.　　**C.** 2.　　**D.** 3.

Lời giải

Chọn D

$g'(x)=\left[\ln\left(f(x)\right)\right]'=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$.

Từ đồ thị hàm số $y=f(x)$ ta thấy $f(x)>0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Vì vậy dấu của $g'(x)$ là dấu của $f'(x)$. Ta có bảng biến thiên của hàm số $g(x)$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Vậy hàm số $g(x)=\ln\left(f(x)\right)$ có 3 điểm cực trị.

Câu 20: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên sau

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	$-\infty$

Tìm số cực trị của hàm số $y=g(x)=\ln\left(f(x)\right)$.

A. 0.　　**B.** 1.　　**C.** 2.　　**D.** 4

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $f(x)>0 \Leftrightarrow x<-1$

Ta có $g'(x)=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$; giải phương trình $y'=0 \Leftrightarrow f'(x)=0 \Leftrightarrow x=-3$ và y' đổi dấu khi qua $x=-3$.

Do đó hàm số $y=g(x)=\ln\left(f(x)\right)$ có một cực trị.

Câu 21: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-2		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	0	-	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-1	↘	-3	↗	2	↘	-6

Hàm số $y=\ln\left(f(x)\right)$ có tất cả bao nhiêu điểm cực đại?

A. 0. **B.** 2 . **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện : $f(x)>0 \Leftrightarrow x\in(a;b):0<a<3<b$.

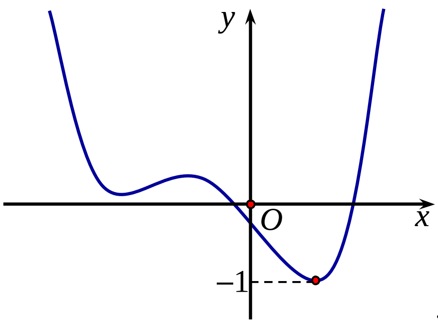
Ta có: $y=\ln\left(f(x)\right)\Rightarrow y'=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$.

Dấu của y' là dấu của $f'(x)$.

Dễ thấy trên $(a;b)$ hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại duy nhất 1 điểm $x=3$.

Do đó hàm số $y=\ln\left(f(x)\right)$ có đúng 1 điểm cực đại.

Câu 22: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên:



Tìm số điểm cực trị của hàm số $y=2^{f(x)}-3^{f(x)}$.

A. 6. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Dựa vào đồ thị hàm số $f(x)$ ta thấy $f(x)\ge -1,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Khi đó xét hàm số $g(x)=2^{f(x)}-3^{f(x)}$

Ta có $g'(x)=f'(x.)\left[2^{f(x)}.\ln 2-3^{f(x)}.\ln 3\right]$

$$g'(x)=0 \ \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x)=0 \\ 2^{f(x)}.\ln 2-3^{f(x)}.\ln 3=0 \end{array}\right.$$

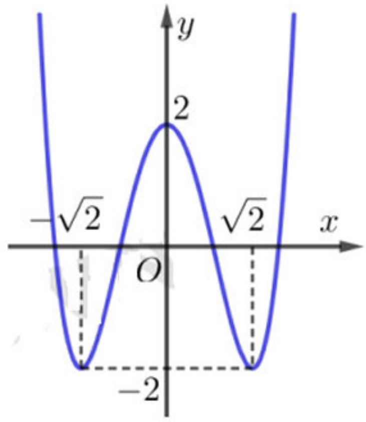
Xét phương trình $2^{f(x)}.\ln 2-3^{f(x)}.\ln 3=0$ trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{f(x)}=\log_2 3 \Leftrightarrow f(x)=\log_{\frac{2}{3}}\left(\log_2 3\right)\approx -1,4 \text{ (loại).}$$

Do đó số điểm cực trị của hàm $g(x)$ cũng bằng số điểm cực trị của hàm $f(x)$.

Tức là hàm $g(x)$ có 3 điểm cực trị.

Câu 23: Cho hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên:



Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = 3^{f(x)} + 2^{f(x)}$.

A. 2. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 4.

Lời giải

Chọn D

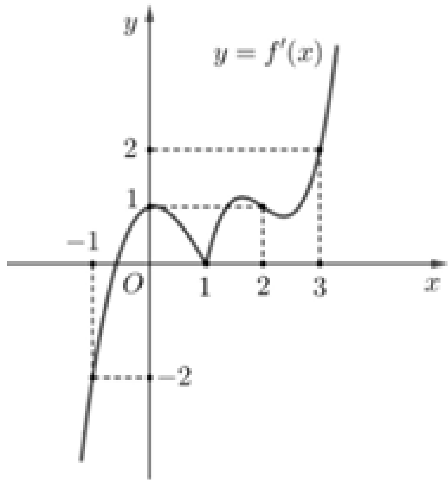
Ta thấy $f'(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ nên $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $y' = f'(x).3^{f(x)} + f'(x).2^{f(x)} = f'(x)\left[3^{f(x)} + 2^{f(x)}\right]$.

Xét $y' = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 0$ (do $3^{f(x)} + 2^{f(x)} > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$).

Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy $f'(x) = 0$ có 4 nghiệm phân biệt. Vậy $y' = 0$ có 4 điểm cực trị.

Câu 24: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số $y = e^{f(x) - \frac{(x-1)^2}{2}}$ là



A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 5.

Lời giải

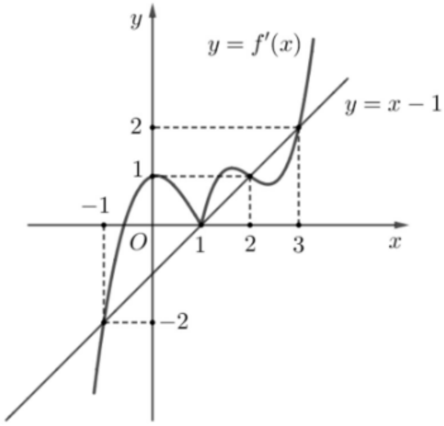
Chọn B

Xét $y = e^{g(x)}$, $g(x) = f(x) - \dfrac{(x-1)^2}{2}$

Hàm số xác định trên $\mathbb{R}$, có $y' = g'(x)e^{g(x)} = \left[f'(x) - (x-1)\right].e^{g(x)}$, trong đó $e^{g(x)} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

nên $y' = 0 \Leftrightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) - (x-1) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = x - 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 1 \\ x = 2 \\ x = 3 \end{array}\right.$

(Vì đường thẳng $y=x-1$ cắt đồ thị $f'(x)$ tại 4 điểm có hoành độ $x=-1; x=1; x=2; x=3$) và dấu của y' là dấu của $g'(x)$.

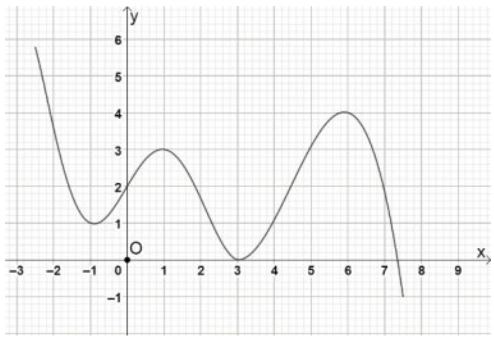


Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		1		2		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$y(-1)$		$\nearrow$		$y(2)$	$\searrow$	$y(3)$	$\nearrow$	$+\infty$

Suy ra hàm số $y=e^{g(x)}$ có ba điểm cực trị là $x=-1; x=2; x=3$.

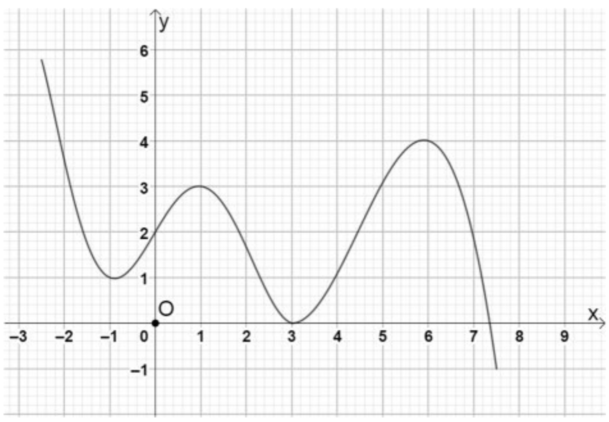
Câu 25: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ bên. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y=2019^{f(f(x)-1)}$.



A. 13. **B.** 11. **C.** 10. **D.** 12.

Lời giải

Chọn D



Ta có $y'=f'(x)f'(f(x)-1)2019^{f(f(x)-1)}\ln 2019$.

$$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}f'(x)=0 & (1)\\ f'(f(x)-1)=0 & (2)\end{array}\right..$$

Giải (1) : $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=-1\\x_2=1\\x_3=3\\x_4=6\end{array}\right.$.

Giải (2) : $f'(f(x)-1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)-1=-1\\f(x)-1=1\\f(x)-1=3\\f(x)-1=6\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)=0\\f(x)=2\\f(x)=4\\f(x)=7\end{array}\right.$.

Dựa vào đồ thị ta có:

+) $f(x)=0$ có 1 nghiệm $x_5>6$ là nghiệm bội l,

+) $f(x)=2$ có 5 nghiệm $x_6<-1;-1<x_7<1;1<x_8<3;3<x_9<6;6<x_{10}<x_5$ là các nghiệm bội 1,

+) $f(x)=4$ có 1 nghiệm $x_{11}<x_6$ là nghiệm bội 1.

+) $f(x)=7$ có 1 nghiệm $x_{12}<x_{11}$ là nghiệm bội 1.

Suy ra $y'=0$ có 12 nghiệm phân biệt mà qua đó y' đổi dấu.

Vậy hàm số $y=2019^{f(f(x)-1)}$ có 12 điểm cực trị.

DẠNG 7. Biết đặc điểm của hàm số hoặc BBT, hoặc đồ thị của hàm $f(x)$, hoặc đạo hàm của hàm $f(x)$, tìm cực trị của hàm $y=\ln(f(x)),y=e^{f(x)},\sin f(x),\cos f(x)...$ trong bài toán chứa tham số.

DẠNG 8. Các dạng khác với các dạng đã đưa ra…

Câu 26: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm cấp ba liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x).f'''(x)=x(x-1)^2(x+4)^3,\forall x\in\mathbb{R}$. Hàm số $g(x)=(f'(x))^2-2f(x).f''(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 6.

Lời giải

Chọn C

.

$g'(x)=2f'(x)f''(x)-2[f'(x)f''(x)+f(x)f'''(x)]=-2f(x)f'''(x)=-2x(x-1)^2(x+4)^3$.

Suy ra $g'(x)$ đổi dấu khi qua hai điểm $x=0,x=-4$.

Câu 27: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm cấp hai liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $(f'(x))^2+f(x).f''(x)=15x^4+12x,\forall x\in\mathbb{R}$. Hàm số $g(x)=f(x).f'(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

$g'(x)=(f'(x))^2+f'(x)f''(x)=15x^4+12x$

$g'(x)=0\Leftrightarrow x=0;x=\sqrt[3]{\frac{4}{5}}$.

Suy ra hàm số $g(x)=f(x).f'(x)$ có hai điểm cực trị.

CÁC DẠNG TOÁN VỀ HÀM ẨN LIÊN QUAN ĐẾN BÀI TOÁN CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

PHẦN 2: BIẾT BIỂU THỨC CỦA HÀM SỐ $y = f'(x)$.

Dạng toán 1. Biết biểu thức hàm số $y = f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y = g(x) = f(x) + h(x)$ **trong bài toán không chứa tham số**.

Dạng toán 2. Biết biểu thức hàm số $y = f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y = g(x) = f(x) + h(x)$ **trong bài toán chứa tham số**.

Dạng toán 3. Biết biểu thức hàm số $y = f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y = g(x) = f(u(x))$ **trong bài toán không chứa tham số** .

Dạng toán 4. Biết biểu thức hàm số $y = f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y = g(x) = f(u(x))$ **trong bài toán chứa tham số** .

Dạng toán 5. Biết biểu thức hàm số $y = f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y = g(x) = f(u(x)) + h(x)$ **trong bài toán không chứa tham số**.

Dạng toán 6. Biết biểu thức hàm số $y = f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y = g(x) = f(u(x)) + h(x)$ **trong bài toán chứa tham số**.

Dạng toán 7. Biết biểu thức hàm số $y = f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y = g(x) = \left[f(u(x))\right]^k$ **trong bài toán không chứa tham số**.

Dạng toán 8. Biết biểu thức hàm số $y = f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y = g(x) = \left[f(u(x))\right]^k$ **trong bài toán chứa tham số** .

Dạng toán 9. Biết biểu thức hàm số $y = f'(u(x))$ xét cực trị của hàm số $y = f(x)$ **trong bài toán không chứa tham số**.

Dạng toán 10. Biết biểu thức hàm số $y = f'(u(x))$ xét cực trị của hàm số $y = f(x)$ **trong bài toán chứa tham số**.

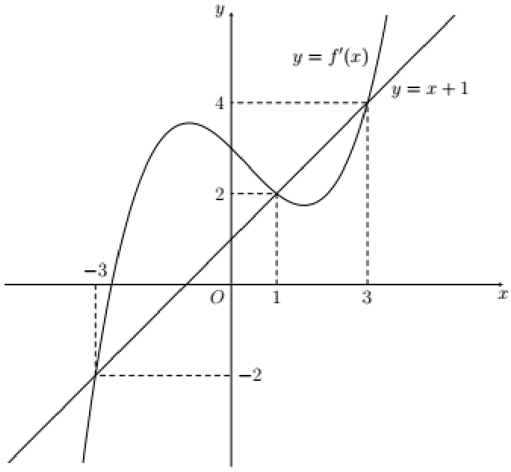
DẠNG 1. Biết biểu thức hàm số $y=f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y=g(x)=f(x)+h(x)$ trong bài toán không chứa tham số.

Câu 1: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=\frac{2}{9}x^3-\frac{2}{9}x^2-x+3$. Khi đó số điểm cực trị của hàm số $y=g(x)=2f(x)-(x+1)^2$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D



Ta có $y=g(x)=2f(x)-(x+1)^2 \Rightarrow g'(x)=2f'(x)-2(x+1)=2\left[f'(x)-(x+1)\right]$.

Vẽ hai hàm số $y=f'(x)$ và $y=x+1$ trên cùng một hệ trục tọa độ, ta có

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=1 \\ x=3 \end{array}\right. .$$

Bảng xét dấu của hàm $g'(x)$:

x	$-\infty$		-3		1		3		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Từ bảng xét dấu ta có đáp án đúng là hàm số $y=g(x)$ có 3 điểm cực trị.

Câu 2: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(3-x)(x^2-1)+2x, \forall x\in\mathbb{R}$. Hỏi hàm số $g(x)=f(x)-x^2-1$ đạt cực tiểu tại điểm nào dưới đây?

A. $x=-1$. **B.** $x=1$. **C.** $x=3$. **D.** $x=0$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $g'(x)=f'(x)-2x=(3-x)(x^2-1)+2x-2x=(3-x)(x^2-1)$.

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow (3-x)(x^2-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=\pm1 \end{array}\right. .$$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

Dựa vào bảng biến thiên suy ra hàm số $g(x)$ đạt cực tiểu tại $x=1$.

Câu 3: Cho hàm số $f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $(0;+\infty)$ và $f'(x)=\ln x-x$. Hỏi hàm số $g(x)=f(x)+x+2019$ có bao nhiêu điểm cực trị trên khoảng $(0;+\infty)$?

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $g'(x)=f'(x)+1=\ln x-x+1$.

Xét hàm số $h(x)=\ln x-x+1$ trên $(0;+\infty)$. Ta có: $h'(x)=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}$.

Có $h'(x)=0 \Leftrightarrow x=1$.

Bảng biến thiên của hàm $h(x)$ như sau:

x	0		1		$+\infty$
$h'(x)$		$+$		-	
$h(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Vậy $h(x)\le 0,\forall x\in(0;+\infty) \Leftrightarrow g'(x)\le 0,\forall x\in(0;+\infty)$

Do đó $g'(x)$ không đổi dấu trên $(0;+\infty)$ nên hàm số $g(x)$ không có cực trị trên khoảng đó.

Câu 4: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $f'(x)=(x+1)(2x^2-3x-9)$. Hỏi hàm số $g(x)=f(x)+x^3-3x^2-9x+6$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Vì hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên hàm số $g(x)=f(x)+x^3-3x^2-9x+6$ cũng liên tục trên $\mathbb{R}$.

Có $g'(x)=f'(x)+3x^2-6x-9=(x+1)(2x^2-3x-9)+3(x+1)(x-3)=(x+1)(x-3)(2x+6)$

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=3 \\ x=-3 \end{array}\right.$$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-3		-1		3		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Từ bảng biến thiên suy ra hàm số $g(x)$ có 3 điểm cực trị.

Câu 5: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x)=x^2(x+1)^2(x-2)$.

Hỏi hàm số $g(x)=f(x)+\frac{2}{3}x^3+x^2-9$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?

A. 5. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C

Ta có:

$$g'(x) = f'(x) + 2x(x+1) = x(x+1)(x^3 - x^2 - 2x + 2)$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x(x+1)(x-1)(x^2-2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-1 \\ x=1 \\ x=-\sqrt{2} \\ x=\sqrt{2} \end{array}\right.$$

Lập bảng biến thiên của hàm số $y = g(x)$

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		-1		0		1		$\sqrt{2}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘		↗		↘		↗		↘		↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số $y = g(x)$ có 3 điểm cực tiểu.

Câu 6: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = 3.(x^2-1)(x-2)$. Khi đó hàm số $g(x) = f(x) - x^3 + 3x$ đạt cực đại tại

A. $x = 1$. **B.** $x = 2$. **C.** $x = -1$. **D.** $x = 3$.

Lời giải

Chọn A

Ta có:

$g(x) = f'(x) - 3x^2 + 3 = 3.(x^2-1).(x-2) - 3(x^2-1) = 3(x^2-1).(x-3)$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-1=0 \\ x-3=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \\ x=3 \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		↘		↗		↘		↗	

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy hàm số $y = g(x)$ đạt cực đại tại $x = 1$.

Câu 7: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x)$ thỏa mãn $f'(x) = (1-x)(x+2)g(x) + 2019$ với $g(x) < 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$.

Hàm số $y = f(1-x) + 2019x + 2020$ đạt cực đại tại

A. $x_0 = 1$. **B.** $x_0 = 2$. **C.** $x_0 = 0$. **D.** $x_0 = 3$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $h(x) = f(1-x) + 2019x + 2020$

Ta có: $h'(x) = -f'(1-x) + 2019 = -[1-(1-x)][(1-x)+2]g(1-x) - 2019 + 2019$

$$= -x(3-x)g(1-x); \quad h'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=3 \end{array}\right..$$

Bảng biến thiên của hàm số $h(x)$.

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$h(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

Vậy hàm số đạt cực đại $x_0 = 3$.

Câu 8: Cho hàm số $y = f(x)$ có tập xác định $D = (0;+\infty)$ và có đạo hàm $f'(x) = 2x\ln x + x, \forall x > 0$. Hàm số $y = g(x) = f(x) + \frac{1}{3}x^3 - x^2$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 1 **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $g'(x) = f'(x) + x^2 - 2x = 2x\ln x + x^2 - x = x(2\ln x + x - 1),\ \forall x > 0$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2\ln x + x - 1 = 0\ (*)$

Xét hàm số $h(x) = 2\ln x + x - 1,\ \forall x > 0$

$h'(x) = \frac{2}{x} + 1 > 0, \forall x > 0 \Rightarrow$ Hàm số $y = h(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$

Mặt khác: $h(1) = 0 \Rightarrow$ Phương trình (*) có nghiệm duy nhất $x = 1$

Bảng xét dấu:

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	||	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng biến thiên suy ra hàm số $y = g(x)$ có một điểm cực trị.

Câu 9: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x-2)^3$. Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(x) + (2-x)^3$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Ta có $g'(x) = f'(x) - 3(2-x)^2 = f'(x) - 3(x-2)^2 = (x-2)^2(x^2 - 2x - 3)$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -1. \\ x = 3 \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên của hàm số $g(x)$

x	$-\infty$		-1		2		3		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Từ BBT suy ra hàm số có 2 điểm cực trị.

DẠNG 2. Biết biểu thức hàm số $y = f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y = g(x) = f(x) + h(x)$ trong bài toán chứa tham số.

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x^2 - 3)(x^2 + 1)$ với $x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = f(x) - mx$ có 4 điểm cực trị?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Xét đạo hàm $y' = f'(x) - m = (x^2 - 3)(x^2 + 1) - m$; $y' = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 3)(x^2 + 1) = m$

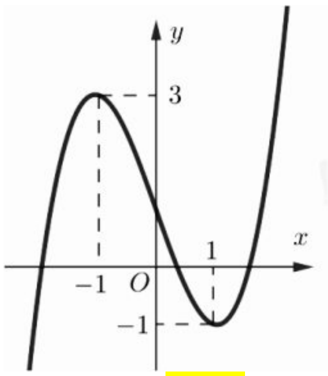
YCBT $\Leftrightarrow$ $y' = 0$ có 4 nghiệm phân biệt

Đặt $g(x) = (x^2 - 3)(x^2 + 1) = x^4 - 2x^2 - 3$; $g'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1)$; BBT

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	-3	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy $-4 < m < -3$, mà m nguyên nên không có m nào.

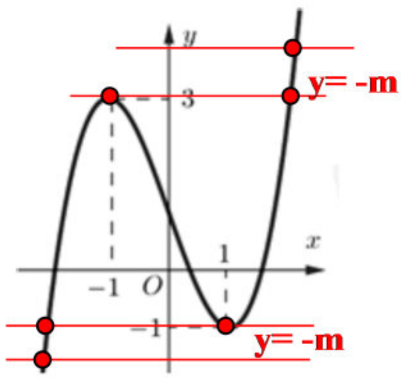
Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị đạo hàm $y = f'(x)$ như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc khoảng $(-12\,;12)$ sao cho hàm số $y = f(x) + mx + 12$ có đúng một điểm cực trị?



A. 5. **B.** 18. **C.** 20. **D.** 12.

Lời giải

Chọn C



Đạo hàm $y' = f'(x) + m$; $y' = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -m$

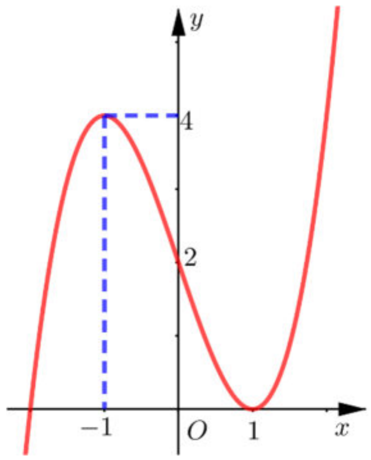
YCBT $\Leftrightarrow$ Phương trình $y' = 0$ (có 1 nghiệm đơn)

hoặc (có 1 nghiện đơn và nghiệm kép)

$\Leftrightarrow$ đường thẳng $y = -m$ cắt đồ thị đạo hàm $y = f'(x)$ tại 1 điểm có có hoành độ là nghiệm đơn (bội lẻ) hoặc tại hai điểm trong đó có điểm có hoành độ bội chẵn $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -m \ge 3 \\ -m \le -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \ge 1 \\ m \le -3 \end{array}\right.$

Kết hợp với $m \in (-12\,;12)$ ta được $m \in (-12\,;-3] \cup [1\,;12)$ và m là số nguyên nên có tất cả $9 + 11 = 20$ giá trị nguyên.

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ sau:



Tìm m để hàm số $y=f(x)-mx$ có 3 điểm cực trị

A. $0<m<4$. **B.** $0\le m\le 4$. **C.** $m>4$. **D.** $m<0$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $y'=f'(x)-m$; $y'=0\Leftrightarrow f'(x)=m$.

Dựa vào đồ thị $y=f'(x)$, suy ra phương trình $f'(x)=m$ có 3 nghiệm phân biệt và các đó là nghiệm đơn $\Leftrightarrow$ đường thẳng $y=m$ cắt đồ thị đạo hàm $y=f'(x)$ tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow 0<m<4$.

Vậy để hàm số $y=f(x)-mx$ có 3 điểm cực trị thì $0<m<4$.

Câu 4: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=-x^3-2x^2, \forall x\in\mathbb{R}$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x)=f(x)+mx+3$ có 3 điểm cực trị.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Hàm số $g(x)=f(x)+mx+3$ xác định trên $\mathbb{R}$.

$g'(x)=f'(x)+m=-x^3-2x^2+m$

Hàm số $g(x)=f(x)+mx+3$ có 3 điểm cực trị $\Leftrightarrow$ $g'(x)=0$ có 3 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow -x^3-2x^2+m=0$ có 3 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow x^3+2x^2=m$ có 3 nghiệm phân biệt

Đặt $g(x)=x^3+2x^2$; $g'(x)=3x^2+4x$; $g'(x)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-\dfrac{4}{3}\end{array}\right.$; BBT:

x	$-\infty$		$-\frac{4}{3}$		0		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	
y	$-\infty$	↗	$\frac{32}{27}$	↘	0	↗	$+\infty$
						y = m	

Vậy $0<m<\dfrac{32}{27}$, mà m nguyên dương nên $m=1$.

Câu 5: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm $f'\left(x\right)=x\sqrt{4-x^2},\forall x\in\left[-2;2\right]$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g\left(x\right)=f\left(x\right)-m^2x+3m$ có 2 điểm cực trị.

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Hàm số $g\left(x\right)=f\left(x\right)-m^2x+3m$ xác định trên $\left[-2;2\right]$.

Đạo hàm $g'\left(x\right)=f'\left(x\right)-m^2=x\sqrt{4-x^2}-m^2$

YCBT: Hàm số $g\left(x\right)=f\left(x\right)-m^2x+3m$ có 2 điểm cực trị $\Leftrightarrow$ $g'\left(x\right)=0$ có 2 nghiệm phân biệt và $g'\left(x\right)$ đổi dấu qua các nghiệm đó

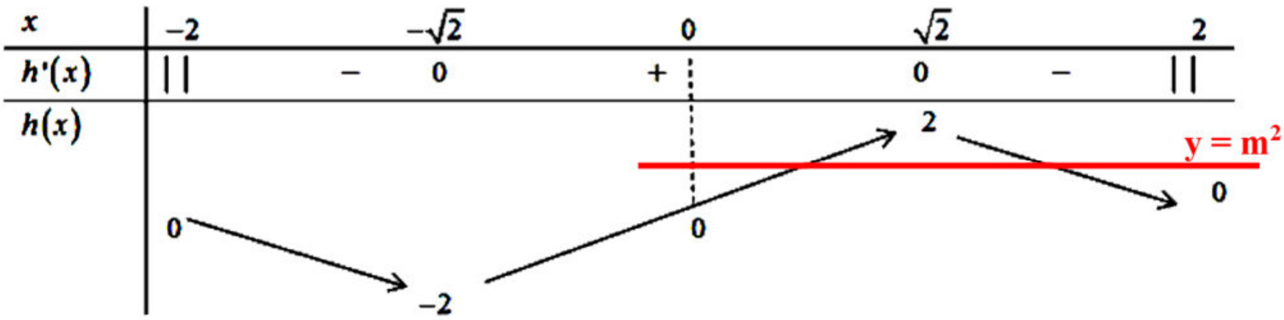
Xét phương trình $x\sqrt{4-x^2}-m^2=0$ $\quad(*)$

$\Leftrightarrow x\sqrt{4-x^2}=m^2$

Xét hàm số $h\left(x\right)=x\sqrt{4-x^2},x\in\left[-2;2\right]$

$h'\left(x\right)=\dfrac{4-2x^2}{\sqrt{4-x^2}}$, $h'\left(x\right)=0\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{2}$

Bảng biến thiên của hàm $h\left(x\right)$



Vậy $0<m^2<2\Leftrightarrow\begin{cases}-\sqrt{2}<m<\sqrt{2}\\ m\neq 0\end{cases}$, m nguyên dương nên $m\in\left\{-1;1\right\}$.

Câu 6: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có biểu thức đạo hàm $f'\left(x\right)=\left(x+3\right)\left(x-1\right)\left(x-2\right)$ và hàm số $y=g\left(x\right)=6f\left(x\right)+2x^3+3\left(m+1\right)x^2-6\left(m+2\right)x+2019$. Gọi $S=\left(-\infty;a\right)\cup\left(b;c\right)$ là tập tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=g\left(x\right)$ có ba cực trị. Giá trị của $a+2b+3c$ bằng

A. 2. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 8.

Lời giải

Chọn D

Từ yêu cầu bài toán ta có: $g'\left(x\right)=6f'\left(x\right)+6x^2+6\left(m+1\right)x-6\left(m+2\right)$

$\Leftrightarrow g'\left(x\right)=6\left(x+3\right)\left(x-1\right)\left(x-2\right)+6x^2+6\left(m+1\right)x-6\left(m+2\right)$

$\Leftrightarrow g'\left(x\right)=6\left(x-1\right)\left(x^2+2x+m-4\right)$.

Suy ra $g'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x^2+2x+m-4=0\end{array}\right.$.

Để hàm số $y=g\left(x\right)$ có ba cực trị thì $g'\left(x\right)=0$ có ba nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ phương trình $x^2+2x+m-4=0$ có hai nghiệm phân biệt khác 1.

Hay $\begin{cases}\Delta'=5-m>0\\ m-1\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<5\\ m\neq 1\end{cases}$. Suy ra $S=\left(-\infty;1\right)\cup\left(1;5\right)$.

Như vậy $a=1$, $b=1$, $c=5$ và $a+2b+3c=8$.

Câu 7: Cho hàm số $y=f(x)$ có biểu thức đạo hàm $f'(x)=x^3+3x^2-1$ và hàm số $y=g(x)=f(x)-mx+2020$. Gọi $S=(a;b)$ là tập tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=g(x)$ có ba cực trị. Giá trị của $2a+3b$ bằng

A. 1. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 7.

Lời giải

Chọn D

Từ yêu cầu bài toán ta có: $g'(x)=f'(x)-m \Leftrightarrow g'(x)=x^3+3x^2-1-m$.

Suy ra $g'(x)=0 \Leftrightarrow x^3+3x^2-1-m=0 \Leftrightarrow x^3+3x^2-1=m$.

Để hàm số $y=g(x)$ có ba cực trị thì $g'(x)=0$ có ba nghiệm phân biệt. Hay phương trình $x^3+3x^2-1=m$ có ba nghiệm phân biệt.

Xét hàm số $y=h(x)=x^3+3x^2-1$ có $h'(x)=3x^2+6x$ và $h'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=0 \end{array}\right.$.

Do đó ta có bảng biến thiên của hàm số $y=h(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Để phương trình $x^3+3x^2-1=m$ có ba nghiệm phân biệt thì đường thẳng $y=m$ cắt đồ thị hàm số $y=h(x)$ tại ba điểm phân biệt. Nghĩa là $-1<m<3$. Hay $S=(-1;3)$. Do đó $2a+3b=7$

DẠNG 3. Biết biểu thức hàm số $y=f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y=g(x)=f(u(x))$ trong bài toán không chứa tham số .

Câu 1: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x^2-1)(x-4)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Hàm số $g(x)=f(3-x)$ có bao nhiêu điểm cực đại?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Từ giả thiết, ta có bảng biến thiên của hàm số $f(x)$

x	$-\infty$		-1		1		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Ta có $g(x)=f(3-x) \Rightarrow g'(x)=-f'(3-x)$.

Từ bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ ta có

$$g'(x)\geq 0 \Leftrightarrow f'(3-x)\leq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3-x\leq -1 \\ 1\leq 3-x\leq 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\geq 4 \\ -1\leq x\leq 2 \end{array}\right..$$

Như thế ta có bảng biến thiên của hàm số $g(x)$

x	$-\infty$		-1		2		4		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Từ bảng biến thiên, ta nhận thấy hàm số $g(x)$ có một điểm cực đại.

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục, có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $f'(x) = x^2(x-2028)(x-2023)^2$. Khi đó hàm số $y = g(x) = f(x^2+2019)$ có tất cả bao nhiêu điểm cực trị?

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y = g(x) = f(x^2+2019) \Rightarrow y' = g'(x) = (x^2+2019)' f'(x^2+2019) = 2x.f'(x^2+2019)$.

Mặt khác $f'(x) = x^2(x-2028)(x-2023)^2$. Nên suy ra:

$$y' = g'(x) = 2x.f'(x^2+2019) = 2x.(x^2+2019)^2(x^2+2019-2028)(x^2+2019-2023)^2$$
$$= 2x.(x^2+2019)^2(x^2-9)(x^2-4)^2 = 2x.(x^2+2019)^2(x-3)(x+3)(x-2)^2(x+2)^2.$$

$$y' = 2x.(x^2+2019)^2(x-3)(x+3)(x-2)^2(x+2)^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\ (nghiem\ don) \\ x=3\ (nghiem\ don) \\ x=-3\ (nghiem\ don) \\ x=2\ (nghiem\ boi\ 2) \\ x=-2\ (nghiem\ boi\ 2) \end{array}\right.$$

Ta có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$		-3		-2		0		2		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
y		$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Từ bảng biến thiên suy ra hàm số $y = g(x) = f(x^2+2019)$ có tất cả 3 điểm cực trị.

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2 - 2x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Hàm số $y = f(x^2-8x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 6. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $f'(x) = x^2 - 2x = x(x-2)$

và $y' = (2x-8).f'(x^2-8x) = 2(x-4)(x^2-8x)(x^2-8x-2)$

$$\Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-4=0 \\ x^2-8x=0 \\ x^2-8x-2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=0 \\ x=8 \\ x=4+3\sqrt{2} \\ x=4-3\sqrt{2} \end{array}\right..$$

Bảng xét dấu y' như sau:

x	$-\infty$		$4-3\sqrt{2}$		0		4		8		$4+3\sqrt{2}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Vậy hàm số $y=f\left(x^2-8x\right)$ có 5 điểm cực trị.

DẠNG 4. Biết biểu thức hàm số $y=f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y=g(x)=f(u(x))$ trong bài toán chứa tham số.

Câu 1: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2\left(x^2-3x+2\right)\left(x^2-x\right)$, với mọi $x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y=f\left(x^2-16x+2m\right)$ có 5 điểm cực trị?

A. 30. **B.** 31. **C.** 32. **D.** 33.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y'=f'\left(x^2-16x+2m\right)(2x-16)$.

Cho $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=8\\ f'\left(x^2-16x+2m\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}x=8 & \\ x^2-16x+2m=1 & (1)\\ x^2-16x+2m=0 & (2)\\ x^2-16x+2m=2 & (3)\end{array}\right.$.

Do các nghiệm của (1) đều là nghiệm bội bậc chẵn còn (2) và (3) không thể có nghiệm trùng nhau nên hàm số đã cho có 5 điểm cực trị khi (2) và (3) có 2 nghiệm phân biệt khác 8.

$\left\{\begin{array}{l}\Delta_2'>0\\ \Delta_3'>0\\ 8^2-16.8+m\neq 0\\ 8^2-16.8+m\neq 2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}64-2m>0\\ 64-2m+2>0\\ -64+m\neq 0\\ -64+m\neq 2\end{array}\right.\Leftrightarrow m<32$ mà m nguyên dương nên m có 31 giá trị.

Câu 2: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2(x+1)\left(x^2+2mx+4\right)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m không vượt quá 2019 để hàm số $y=f\left(x^2\right)$ có đúng 1 điểm cực trị?

A. 2021. **B.** 2022. **C.** 5. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y'=\left(f(x^2)\right)'=2x.f'(x^2)=2x.x^4(x^2+1)(x^4+2mx^2+4)=2x^5(x^2+1)(x^4+2mx^2+4)$;

Khi đó: $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x^4+2mx^2+4=0\xrightarrow{t=x^2}t^2+2mt+4=0\ (1)\end{array}\right.$.

Ta thấy nghiệm của (1) nếu có sẽ khác 0. Nên $x=0$ là 1 cực trị của hàm số.

Do đó để hàm số có 1 điểm cực trị thì (1) hoặc vô nghiệm hoặc có nghiệm kép, hoặc có 2 nghiệm âm

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\Delta'=m^2-4\le 0\\ \left\{\begin{array}{l}\Delta'=m^2-4>0\\ S=-2m<0\\ P=4>0\end{array}\right.\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-2\le m\le 2\\ \left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}m<-2\\ m>2\end{array}\right.\\ m>0\end{array}\right.\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-2\le m\le 2\\ m>2\end{array}\right.\Leftrightarrow m\ge -2.$$

Kết hợp với $\left\{\begin{array}{l}m\in\mathbb{Z}\\ m\le 2019\end{array}\right.\Rightarrow m\in\left\{-2;-1;0;1;2;...;2018;2019\right\}$: có 2022 giá trị nguyên của m.

Câu 3: Cho hàm số $f(x)$ có $f'(x)=x(x-1)(x^2-2mx+1)$. Hỏi có tất cả bao nhiêu số nguyên m không vượt quá 2018 sao cho hàm số $g(x)=f(x^2)$ có 7 điểm cực trị?

A. 2019. **B.** 2016. **C.** 2017. **D.** 2018.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $g'(x)=2x.f'(x^2)=2x.x^2(x^2-1)(x^4-2mx^2+1)=2x^3(x^2-1)(x^4-2mx^2+1)$.

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm1\\x^4-2mx^2+1=0\ \ (*)\end{array}\right.$$

Do $x=0$ là nghiệm bội lẻ và $x=\pm1$ là các nghiệm đơn nên để $g(x)$ có 7 điểm cực trị thì phương trình $(*)$ phải có 4 nghiệm phân biệt khác 0 và khác ±1, hay phương trình $t^2-2mt+1=0$ phải có 2 nghiệm dương phân biệt khác 1.

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'=m^2-1>0\\S=2m>0\\P=1>0\\1^2-2m.1+1\neq0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}m>1\\m<-1\end{array}\right.\\m>0\\m\neq1\end{cases}\Leftrightarrow m>1.$$

Kết hợp với điều kiện m nguyên, không vượt quá 2018 suy ra có 2017 giá trị của m.

Câu 4: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-1)^2(x^2-2x)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x)=f(x^2-8x+m)$ có 5 điểm cực trị ?

A. 15. **B.** 16. **C.** 17. **D.** 18.

Lời giải

Chọn A

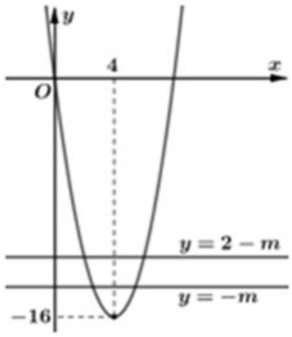
Xét $f'(x)=0\Leftrightarrow(x-1)^2(x^2-2x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\ (\text{nghiem boi }2)\\x=0\\x=2\end{array}\right.$.

Ta có $g'(x)=2(x-4)f'(x^2-8x+m)$;

$$g'(x)=0\Leftrightarrow2(x-4)f'(x^2-8x+m)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=4\\x^2-8x+m=1\ (\text{nghiem boi }2)\\x^2-8x+m=0\quad(1)\\x^2-8x+m=2\quad(2)\end{array}\right..$$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow g'(x)=0$ có 5 nghiệm bội lẻ $\Leftrightarrow$ mỗi phương trình (1), (2) đều có hai nghiệm phân biệt khác 4. $(*)$

Xét đồ thị (C) của hàm số $y=x^2-8x$ và hai đường thẳng $d_1:y=-m,\ d_2:y=-m+2$ (như hình vẽ).



Khi đó $(*)$ $\Leftrightarrow$ d_1, d_2 cắt (C) tại bốn điểm phân biệt $\Leftrightarrow -m > -16 \Leftrightarrow m < 16$.

Vậy có 15 giá trị m nguyên dương thỏa.

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x^2 - x)(x^2 - 4x + 3), \forall x \in \mathbb{R}$. Tính tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x) = f(x^2 + m)$ có 3 điểm cực trị.

A. 0. **B.** 6. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f'(x) = x(x-1)^2(x-3); f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 3 \end{array}\right.$ ($x = 0, x = 3$ là nghiệm đơn; $x = 1$ là nghiệm bội chẵn).

Lại có $g'(x) = 2x.f'(x^2 + m); g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ f'(x^2 + m) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 + m = 0 \\ x^2 + m = 1 \\ x^2 + m = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = 0 & \\ x^2 = -m & (1) \\ x^2 = 1 - m & (2) \\ x^2 = 3 - m & (3) \end{array}\right.$

Do (2) có nghiệm luôn là nghiệm bội chẵn; các phương trình $(1),(3)$ có nghiệm không chung nhau và $-m < 3 - m$.

Hàm số $g(x)$ có 3 điểm cực trị $\Leftrightarrow g'(x) = 0$ có ba nghiệm bội lẻ $\Leftrightarrow \begin{cases} -m \le 0 \\ 3 - m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \le m < 3$.

Vì $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{0;1;2\}$.

Vậy tổng các giá trị nguyên của tham số m bằng 3.

Câu 6: Cho hàm số $y = f(x)$ có $f'(x) = (x-2)^2(x^2 - 4x + 3)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = f(x^2 - 10x + m + 9)$ có 5 điểm cực trị?

A. 18. **B.** 17. **C.** 16. **D.** 15.

Lời giải

Chọn C

Theo đề bài $f'(x) = (x-2)^2(x^2 - 4x + 3) = (x-2)^2(x-1)(x-3)$

Ta có $y' = (2x - 10)f'(x^2 - 10x + m + 9)$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x - 10 = 0 \\ f'(x^2 - 10x + m + 9) = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 5 \\ (x^2 - 10x + m + 7)^2(x^2 - 10x + m + 8)(x^2 - 10x + m + 6) = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=5\\ \left(x^2-10x+m+7\right)^2=0\\ x^2-10x+m+8=0\quad(1)\\ x^2-10x+m+6=0\quad(2)\end{array}\right..$$

Giả sử x_0 là một nghiệm của (1) $\Rightarrow x_0{}^2-10x_0+m+8=0$.

Do đó $x_0{}^2-10x_0+m+6=-2\neq 0,\forall m$, suy ra (1) và (2) không có nghiệm chung.

Hàm số $y=f\left(x^2-10x+m+9\right)$ có năm điểm cực trị khi mỗi phương trình $(1),(2)$ có hai nghiệm phân biệt khác 5

$$\Leftrightarrow\begin{cases}25-m-8>0\\ 25-m-6>0\\ m-17\neq 0\\ m-19\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<17\\ m<19\\ m\neq 17\\ m\neq 19\end{cases}\Leftrightarrow m<17\xrightarrow{m\in\mathbb{Z}^+}m\in\{1;2;3;...;15;16\}.$$

Vậy có 16 giá trị nguyên của m để hàm số $y=f\left(x^2-10x+m+9\right)$ có 5 điểm cực trị.

DẠNG 5. Biết biểu thức hàm số $y=f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y=g(x)=f\left(u(x)\right)+h(x)$ trong bài toán không chứa tham số.

Câu 1. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(2-x)\left(x^2-8\right)^{2019}$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Hàm số $y=f\left(x^2-2\right)+\frac{1}{2}x^4-4x^2+2020$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

A. 4. **B.** 2019. **C.** 5. **D.** 2020.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $g(x)=f\left(x^2-2\right)+\frac{1}{2}x^4-4x^2+2020$.

+ $g'(x)=2x.f'\left(x^2-2\right)+2x^3-8x$.

+ $g'(x)=0\Leftrightarrow 2x.f'\left(x^2-2\right)+2x^3-8x=0\Leftrightarrow 2x\left[f'\left(x^2-2\right)+x^2-4\right]=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ f'\left(x^2-2\right)+x^2-4=0\ (*)\end{array}\right..$$

Giải phương trình $(*)$: Đặt $t=x^2-2$.

$(*)\Leftrightarrow f'(t)+t-2=0\Leftrightarrow(2-t)\left(t^2-8\right)^{2019}+(t-2)=0\Leftrightarrow(2-t)\left[\left(t^2-8\right)^{2019}-1\right]=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2-t=0\\ \left(t^2-8\right)^{2019}-1=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=2\\ t^2-8=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=2\\ t=\pm 3\end{array}\right..$$

Suy ra $\left[\begin{array}{l}x^2-2=2\\ x^2-2=3\\ x^2-2=-3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2=4\\ x^2=5\\ x^2=-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pm 2\\ x=\pm\sqrt{5}\end{array}\right..$

$\Rightarrow g'(x)=0$ có 5 nghiệm (không có nghiệm bội chẵn).

Vậy hàm số có 5 cực trị.

Câu 2. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=\left(e^x-2\right)\left(e^x+x\right)$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Biết hàm số $y=g(x)=f(\ln x)-x+2\ln x$ đạt cực tiểu tại $x=x_0$. Chọn khẳng định **đúng**?

A. $x_0 \in \left(0;\frac{3}{2}\right)$.

B. $x_0 \in \left(\frac{3}{2};3\right)$.

C. $x_0 \in \left(e^2;e^3\right)$.

D. $x_0 \in \left(\ln 2;\ln 3\right)$.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $y = g\left(x\right) = f\left(\ln x\right) - x + 2\ln x$, $x > 0$.

Ta có $y' = g'\left(x\right) = \frac{1}{x}f'\left(\ln x\right) - 1 + \frac{2}{x} = \frac{1}{x}\left(e^{\ln x} - 2\right)\left(e^{\ln x} + \ln x\right) - \frac{x-2}{x} = \frac{1}{x}\left(x-2\right)\left(x + \ln x\right) - \frac{x-2}{x}$

$= \frac{x-2}{x}\left(x + \ln x - 1\right)$.

$$g'\left(x\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \left[\begin{array}{l} x - 2 = 0 \\ x + \ln x - 1 = 0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x + \ln x - 1 = 0 \quad (1) \end{array}\right. \end{cases}.$$

Hàm số $y = x + \ln x - 1$ đồng biến trên $\left(0;+\infty\right)$ nên phương trình (1) nếu có nghiệm thì nghiệm là duy nhất. Dễ thấy $x = 1$ là nghiệm duy nhất của (1).

Bảng biến thiên

x	0		1		2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Từ bảng biến thiên suy ra hàm số $y = g\left(x\right)$ đạt cực tiểu tại $x = x_0 = 2$. Vậy $x_0 \in \left(\frac{3}{2};3\right)$.

Câu 3. Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ có đạo hàm $f'\left(x\right) = x^2 - 2x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Hàm số $y = f\left(1 - \frac{x}{2}\right) + 4x$ có mấy điểm cực trị?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $g\left(x\right) = f\left(1 - \frac{x}{2}\right) + 4x$.

$$g'\left(x\right) = -\frac{1}{2}f'\left(1 - \frac{x}{2}\right) + 4 = = -\frac{1}{2}\left[\left(1 - \frac{x}{2}\right)^2 - 2\left(1 - \frac{x}{2}\right)\right] + 4 = -\frac{x^2}{8} + \frac{9}{2} = 0 \Leftrightarrow x = \pm 6.$$

Bảng xét dấu $g'\left(x\right)$

x	$-\infty$		-6		6		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số có 2 điểm cực trị.

Câu 4. Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ có đạo hàm $f'\left(x\right) = x^2 - 6x + 11$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Hàm số $y = f\left(e^x\right) - 6x$ có mấy điểm cực tiểu?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $g(x)=f\left(\mathrm{e}^x\right)-6x$.

$$g'(x)=\mathrm{e}^x f'\left(\mathrm{e}^x\right)-6=\mathrm{e}^{3x}-6\mathrm{e}^{2x}+11\mathrm{e}^x-6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\mathrm{e}^x=1\\ \mathrm{e}^x=2\\ \mathrm{e}^x=3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=\ln 2\\ x=\ln 3\end{array}\right..$$

Bảng xét dấu $g'(x)$

x	$-\infty$		0		$\ln 2$		$\ln 3$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số có 2 điểm cực tiểu.

DẠNG 6. Biết biểu thức hàm số $y=f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y=g(x)=f\left(u(x)\right)+h(x)$ trong bài toán chứa tham số.

DẠNG 7. Biết biểu thức hàm số $y=f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y=g(x)=\left[f\left(u(x)\right)\right]^k$ trong bài toán không chứa tham số.

Câu 1: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=4x^3+2x$ và $f(0)=1$. Số điểm cực tiểu của hàm số $g(x)=f^3\left(x^2-2x-3\right)$ là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f(x)=\int\left(4x^3+2x\right)dx=x^4+x^2+C$ và $f(0)=1\Rightarrow C=1$.

Do đó ta có $f(x)=x^4+x^2+1>0,\forall x$.

Ta có: $g'(x)=3(2x-2).f^2\left(x^2-2x-3\right).f'\left(x^2-2x-3\right)$

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x-2=0\\ 4\left(x^2-2x-3\right)^3+2\left(x^2-2x-3\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=-1\\ x=3\end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		↘		↗		↘		↗	

Từ bảng biến thiên ta suy ra hàm số $y=g(x)$ có 2 cực tiểu.

Câu 2: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=3x^2-3$ và $f(2)=4$. Hàm số $g(x)=\left[f(1-2x)\right]^2$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Chọn A

+ Hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=3x^2-3$.

$\Rightarrow y=f(x)=\int f'(x)\mathrm{d}x=\int\left(3x^2-3\right)\mathrm{d}x=x^3-3x+C$.

Mà $f(2)=4\Rightarrow 2^3-3.2+C=4\Leftrightarrow C=2$.

$\Rightarrow f(x)=x^3-3x+2$.

+ $g(x)=\left[f(1-2x)\right]^2$

$\Rightarrow g'(x)=2f(1-2x).\left[f(1-2x)\right]'=-4f(1-2x).f'(1-2x)$.

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(1-2x)=0\\f'(1-2x)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}(1-2x)^3-3(1-2x)+2=0\\1-2x=1\\1-2x=-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}1-2x=1\,(nghiem\ kep)\\1-2x=-2\\1-2x=1\\1-2x=-1\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\,(nghiem\ boi\ ba)\\x=1\\x=\dfrac{3}{2}\end{array}\right..$$

$\Rightarrow$ phương trình $g'(x)=0$ có 2 nghiệm đơn là $x=1,\ x=\dfrac{3}{2}$ và một nghiệm bội ba $x=0$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		1		$3/2$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	16	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy hàm số $g(x)=\left[f(1-2x)\right]^2$ có 3 điểm cực trị.

Câu 3: Cho hàm số bậc bốn trùng phương $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=4x^3-4x$ và $f(0)=-1,\ f(-1)=-2$. Hàm số $g(x)=2f^3(x)+4f^2(x)+1$ có nhiều nhất bao nhiêu điểm cực tiểu?

A. 4. **B.** 5. **C.** 7. **D.** 9.

Lời giải

Chọn B

$+\ f'(x)=0\Leftrightarrow 4x^3-4x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=0\\x=1\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên của hàm số bậc bốn trùng phương $y=f(x)$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

$+\ g'(x)=6f^2(x).f'(x)+8f(x).f'(x)=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)=0\\f'(x)=0\\f(x)=-\dfrac{4}{3}\end{array}\right..$$

Dựa vào bảng biến thiên trên ta có:

$f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm 1 \end{array}\right.$, $f(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=x_1 \\ x=x_2 \end{array}\right.$,

$f(x)=-\dfrac{4}{3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=a \\ x=b \\ x=c \\ x=d \end{array}\right.$ thỏa mãn: $x_1<a<-1<b<0<c<1<d<x_2$.

Khi đó để có nhiều điểm cực tiểu nhất thì bảng xét dấu của $g'(x)$ có dạng:

x	$-\infty$	x_1		a		-1		b		0		c		1		d		x_2		$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Vậy hàm số $g(x)=2f^3(x)+4f^2(x)+1$ có nhiều nhất 5 điểm cực tiểu.

DẠNG 8. Biết biểu thức hàm số $y=f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y=g(x)=\left[f(u(x))\right]^k$ trong bài toán chứa tham số .

DẠNG 9. Biết biểu thức hàm số $y=f'(u(x))$ xét cực trị của hàm số $y=f(x)$ trong bài toán không chứa tham số.

DẠNG 10. Biết biểu thức hàm số $y=f'(u(x))$ xét cực trị của hàm số $y=f(x)$ trong bài toán chứa tham số.

CÁC DẠNG TOÁN VỀ HÀM ẨN LIÊN QUAN ĐẾN BÀI TOÁN CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

PHẦN 3: BIẾT ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ $y = f'(x)$

Dạng toán 1. Biết ĐỒ THỊ hàm số $y = f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y = g(x) = f(x) + h(x)$ **trong bài toán không chứa tham số**.

Dạng toán 2. Biết ĐỒ THỊ hàm số $y = f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y = g(x) = f(x) + h(x)$ **trong bài toán chứa tham số**.

Dạng toán 3. Biết ĐỒ THỊ hàm số $y = f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y = g(x) = f(u(x))$ **trong bài toán không chứa tham số** .

Dạng toán 4. Biết ĐỒ THỊ hàm số $y = f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y = g(x) = f(u(x))$ **trong bài toán chứa tham số** .

Dạng toán 5. Biết ĐỒ THỊ hàm số $y = f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y = g(x) = f(u(x)) + h(x)$ **trong bài toán không chứa tham số**.

Dạng toán 6. Biết ĐỒ THỊ hàm số $y = f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y = g(x) = f(u(x)) + h(x)$ **trong bài toán chứa tham số**.

Dạng toán 7. Biết ĐỒ THỊ hàm số $y = f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y = g(x) = \left[f(u(x))\right]^k$ **trong bài toán không chứa tham số**.

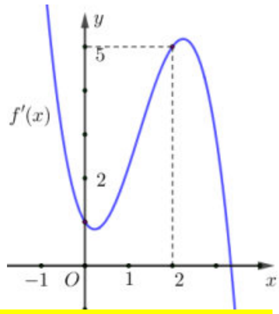
Dạng toán 8. Biết ĐỒ THỊ hàm số $y = f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y = g(x) = \left[f(u(x))\right]^k$ **trong bài toán chứa tham số** .

Dạng toán 9. Biết ĐỒ THỊ hàm số $y = f'(u(x))$ xét cực trị của hàm số $y = f(x)$ **trong bài toán không chứa tham số**.

Dạng toán 10. Biết ĐỒ THỊ hàm số $y = f'(u(x))$ xét cực trị của hàm số $y = f(x)$ **trong bài toán chứa tham số**.

DẠNG TOÁN 1. Biết ĐỒ THỊ hàm số $y=f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y=g(x)=f(x)+h(x)$ trong bài toán không chứa tham số.

Câu 1: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình bên. Khẳng định nào sau đây là đúng?



A. Hàm số $y=f(x)-x^2-x+2019$ đạt cực đại tại $x=0$.

B. Hàm số $y=f(x)-x^2-x+2019$ đạt cực tiểu tại $x=0$.

C. Hàm số $y=f(x)-x^2-x+2019$ không có cực trị.

D. Hàm số $y=f(x)-x^2-x+2019$ không đạt cực trị tại $x=0$.

Lời giải

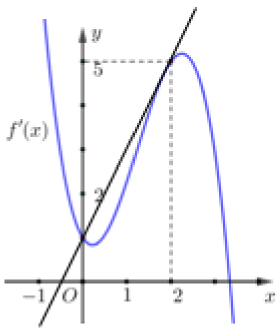
Chọn A

Ta có:

$y'=f'(x)-2x-1$

$y'=0\Leftrightarrow f'(x)=2x+1$ (1)

Nghiệm của phương trình (1) là hoành độ giao điểm của 2 đồ thị $y=f'(x)$ và $y=2x+1$



Dựa vào đồ thị hàm số $y=f'(x)$ và đường thẳng $y=2x+1$ có $x\in\{0,2\}$ là các nghiệm của phương trình (1)

$y'(-1)=f'(-1)+2-1>0$

$y'(1)=f'(1)-2-1<0$

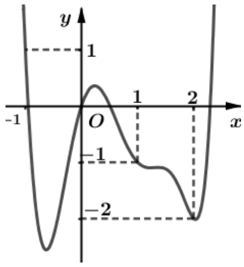
$y'(3)=f'(3)-6-1<0$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		+	0	-	0	-	

$\Rightarrow$ Hàm số $y=f(x)-x^2-x+2019$ đạt cực đại tại $x=0$.

Câu 2: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ.



Hàm số $g\left(x\right)=2f\left(x\right)+x^2$ đạt cực đại tại điểm nào dưới đây?

A. $x=-1$. **B.** $x=0$. **C.** $x=1$. **D.** $x=2$.

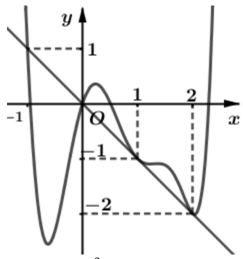
Lời giải

Chọn A

Có $g'\left(x\right)=2f'\left(x\right)+2x$

$g'\left(x\right)=0\Leftrightarrow f'\left(x\right)=-x$ (1)

Nghiệm của phương trình (1) là hoành độ giao điểm của 2 đồ thị $y=f'\left(x\right)$ và $y=-x$



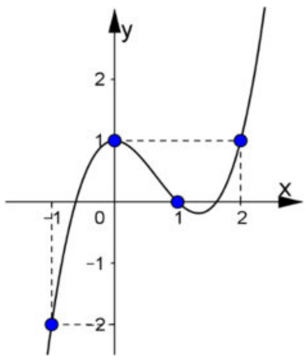
Dựa vào đồ thị hàm số $y=f'\left(x\right)$ và đường thẳng $y=-x$ có $x\in\left\{-1,0,1,2\right\}$ là các nghiệm của phương trình (1) (trong đó $x=1$, $x=2$ là các nghiệm bội chẵn).

Có bảng xét dấu

x	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
$g'\left(x\right)$		+	0	−	0	+	0	+	0	+	

Từ đó suy ra hàm số $g\left(x\right)$ đạt cực đại tại điểm $x=-1$.

Câu 3: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y=f'\left(x\right)$ như hình bên dưới.



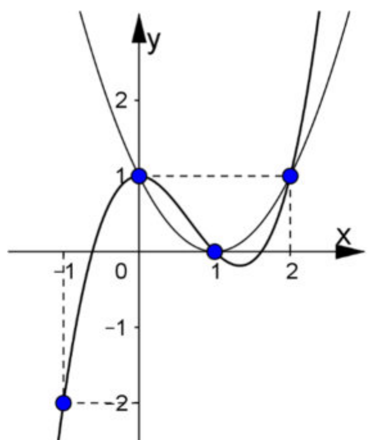
Hàm số $g(x)=f(x)-\dfrac{x^3}{3}+x^2-x+2$ đạt cực đại tại điểm nào?

A. $x=1$. **B.** $x=-1$. **C.** $x=0$. **D.** $x=2$.

Lời giải

Chọn A

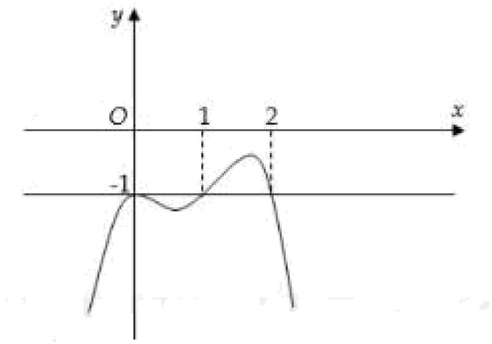
Ta có $g(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và $g'(x)=f'(x)-(x-1)^2$ do đó số nghiệm của phương trình $g'(x)=0$ bằng số giao điểm của hai đồ thị $y=f'(x)$ và parabol $y=(x-1)^2$; $g'(x)>0$ khi đồ thị $y=f'(x)$ nằm trên parabol $y=(x-1)^2$ và ngược lại.



Từ đồ thị suy ra $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \\ x=1 \end{array}\right.$ nhưng $g'(x)$ chỉ đổi dấu từ dương sang âm khi qua $x=1$.

Do đó hàm số đạt cực đại tại $x=1$.

Câu 4 : Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, có đạo hàm $f'(x)$. Biết đồ thị của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ.



Xác định điểm cực tiểu của hàm số $g(x)=f(x)+x$.

A. Không có cực tiểu. **B.** $x=0$.

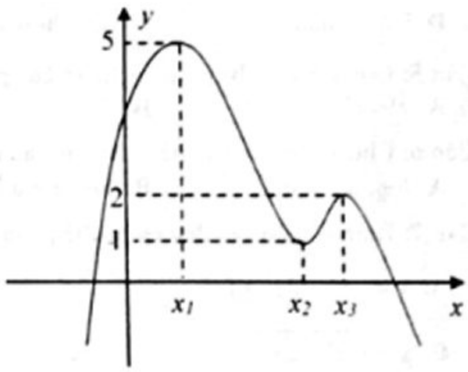
C. $x=1$. **D.** $x=2$.

Lời giải

Chọn C

$g'(x)=f'(x)+1$. Dựa vào đồ thị thấy $g'(x)$ đổi dấu từ "-" sang "+" qua điểm $x=1$ nên hàm số $g(x)$ đạt cực tiểu tại $x=1$.

Câu 5 : Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $y=f(x)+\dfrac{2017-2018x}{2017}$ có số điểm cực trị là



A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

Ta có:

$$y=f(x)+\frac{2017-2018x}{2017} \Rightarrow y'=f'(x)+\frac{-2018}{2017}$$

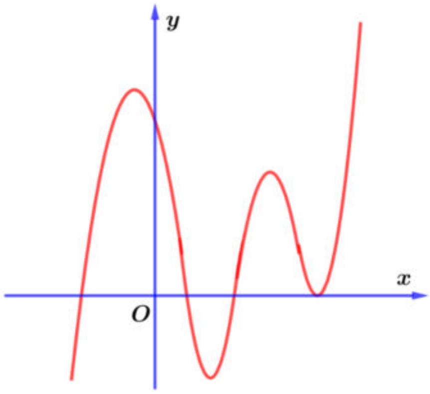
$$y'=0 \Leftrightarrow f'(x)=\frac{2018}{2017}$$

Dựa vào hình vẽ ta nhận thấy phương trình $f'(x)=\dfrac{2018}{2017}$ có 4 nghiệm phân biệt.

Vậy hàm số có 4 điểm cực trị.

Lưu ý: Do $1<\dfrac{2018}{2017}<2$ nên dựa vào đồ thị nhìn thấy đường thẳng nằm trong vùng từ 1 đến 2 từ đó quan sát thấy có 4 nghiệm.

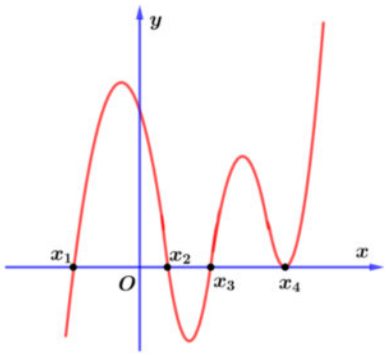
Câu 6 : Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của đạo hàm $y=f'\left(x\right)$ như hình vẽ bên dưới. Tìm số điểm cực đại của đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$.



A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

Lời giải

Chọn A



Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ giao với trục hoành tại 4 điểm. x_1,x_2,x_3,x_4.

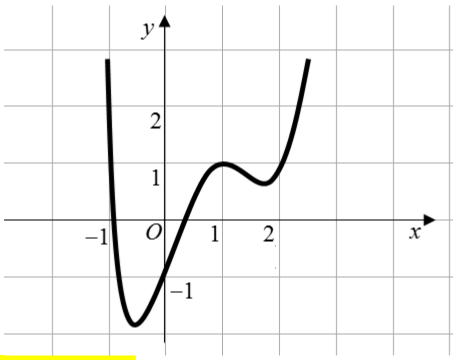
Nhận thấy $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua x_1 và x_3 nên hàm số $y=f\left(x\right)$ đạt cực tiểu tại x_1 và x_3.

Và $f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm khi đi qua x_2 nên hàm số $y=f\left(x\right)$ đạt cực đại tại x_2.

$f'(x)$ không đổi dấu khi đi qua x_4 nên x_4 không là điểm cực trị của hàm số.

Vậy hàm số $y=f\left(x\right)$ có một điểm cực đại.

Câu 7 : Cho hàm số $f\left(x\right)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $f'\left(x\right)$ như hình vẽ bên. Đặt $g\left(x\right)=f\left(x\right)-x$. Hàm số $g\left(x\right)$ đạt cực đại tại điểm thuộc khoảng nào dưới đây?



A. $\left(\dfrac{3}{2};3\right)$. **B.** $\left(-2;0\right)$. **C.** $\left(0;1\right)$. **D.** $\left(\dfrac{1}{2};2\right)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $g'(x)=f'(x)-1$.

$g'(x)=0\Leftrightarrow f'(x)=1$. Từ đồ thị, ta được $x=-1$, $x=1$, $x=2$.

Từ đồ thị, ta cũng có bảng xét dấu của $g'(x)$:

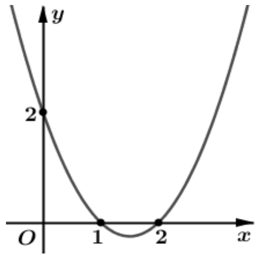
x		-1		1		2		$+\infty$
$g'(x)$	+	0	−	0	−	0	+	

Ta được hàm số $g(x)$ đạt cực đại tại $x=-1$.

DẠNG TOÁN 2. Biết ĐỒ THỊ hàm số $y=f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y=g(x)=f(x)+h(x)$ trong bài toán chứa tham số.

DẠNG TOÁN 3. Biết ĐỒ THỊ hàm số $y=f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y=g(x)=f(u(x))$ trong bài toán không chứa tham số .

Câu 4: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị hàm $f'(x)=ax^2+bx+c$ như hình bên.



Hỏi hàm số $g(x)=f(x-x^2)$ có bao nhiêu cực trị ?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

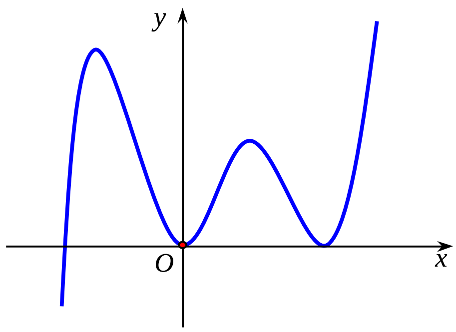
Xét $g(x)=f(x-x^2)\Rightarrow g'(x)=(1-2x)f'(x-x^2)$.

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}1-2x=0\\ f'(x-x^2)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{1}{2}\\ x-x^2=1\ (*)\\ x-x^2=2\ (**)\end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$ (vì phương trình (*)(**) vô nghiệm).

Ta có: $g'(x)$ đổi dấu 1 lần khi qua nghiệm $x=\dfrac{1}{2}$.

Câu 5: Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị $f'(x)$ của nó trên khoảng K như hình vẽ. Khi đó trên K, hàm số $y=f(x-2020)$ có bao nhiêu điểm cực trị?



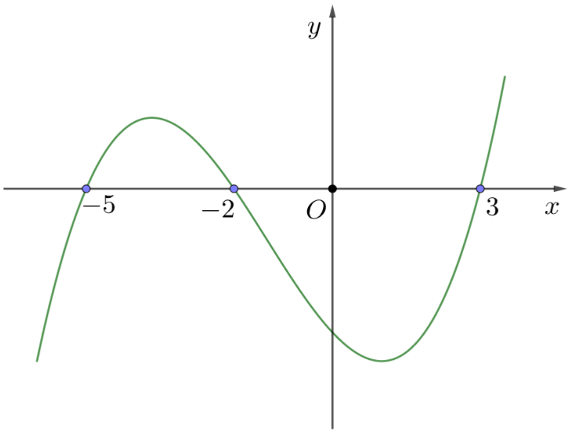
A. 1. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

Đồ thị hàm số $f'(x-2020)$ là phép tịnh tiến của đồ thị hàm số $f'(x)$ theo phương song song trục hoành nên đồ thị hàm số $f'(x-2020)$ vẫn cắt trục hoành tại 3 điểm và đổi dấu 1 lần do đó hàm số $y=f(x-2020)$ có một cực trị. Ta chọn đáp án A.

Câu 6: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết rằng hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Hàm số $y=g(x)=f\left(x^2-5\right)$ có tất cả bao nhiêu điểm cực trị?

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $y=g(x)=f\left(x^2-5\right)$

Ta có $y'=g'(x)=2x.f'\left(x^2-5\right)$

$$+\ y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\\ x^2-5=-5\\ x^2-5=-2\\ x^2-5=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\\ x^2=0\\ x^2=3\\ x^2=8 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\quad (nghiem\ boi\ 3)\\ x=\pm\sqrt{3}\ (nghiem\ don)\\ x=\pm 2\sqrt{2}\ (nghiem\ don) \end{array}\right. .$$

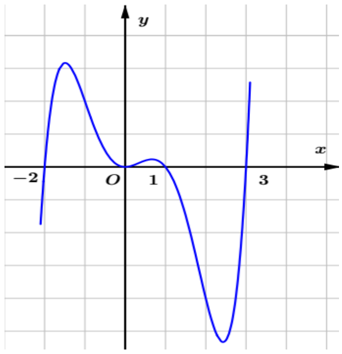
$$+\ g'(x)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x>0\\ \left[\begin{array}{l} x^2-5>3\\ -5<x^2-5<-2 \end{array}\right. \end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l} x<0\\ \left[\begin{array}{l} -2<x^2-5<3\\ x^2-5<-5 \end{array}\right. \end{array}\right. \end{array}\right. . \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x>0\\ \left[\begin{array}{l} x>2\sqrt{2}\\ x<-2\sqrt{2}\\ -\sqrt{3}<x<\sqrt{3} \end{array}\right. \end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l} x<0\\ -2\sqrt{2}<x<-2\sqrt{2}\\ \left[\begin{array}{l} x>\sqrt{3}\\ x<-\sqrt{3} \end{array}\right. \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>2\sqrt{2}\\ 0<x<\sqrt{3}\\ -2\sqrt{2}<x<-\sqrt{3} \end{array}\right.$$

Từ đó ta có bảng biến thiên của hàm số $y=g(x)=f\left(x^2-5\right)$ như sau:

x	$-\infty$		$-2\sqrt{2}$		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		$2\sqrt{2}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y		↘		↗		↘		↗		↘		↗	

Từ bảng biến thiên suy ra hàm số $y=f\left(x^2-5\right)$ có tất cả 5 điểm cực trị.

Câu 7: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$. Đồ thị của hàm số $f'\left(x\right)$ như hình bên.



Hàm số $g\left(x\right)=f\left(x^2\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 4. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C

Từ đồ thị $y=f'\left(x\right)$ ta có $f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\\x=0\\x=1\\x=3\end{array}\right.$;

$f'\left(x\right)>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>3\\-2<x<1\end{array}\right.$; $f'\left(x\right)<0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<-2\\1<x<3\end{array}\right.$.

Ta có $g'\left(x\right)=2xf'\left(x^2\right)$; $g'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\f'\left(x^2\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2=1\\x^2=3\\x^2=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm1\\x=\pm\sqrt{3}\end{array}\right.$.

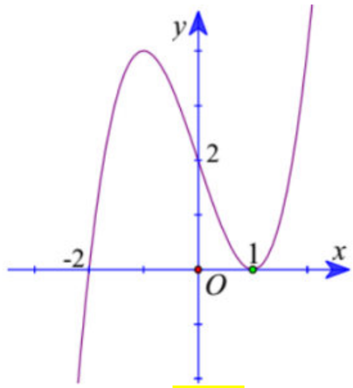
Ta có $f'\left(x^2\right)>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}0<x^2<1\\x^2>3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}-1<x<1\\x\neq0\end{array}\right.\\\left[\begin{array}{l}x>\sqrt{3}\\x<-\sqrt{3}\end{array}\right.\end{array}\right.$.

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$2x$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$f'(x^2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Từ bảng biến thiên ta có hàm số $g(x) = f(x^2)$ có 5 điểm cực trị.

Câu 8: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = g(x) = f(x^2 - 3)$.



A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 5.

Lời giải

Chọn C

- Dựa vào đồ thị ta thấy: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2\,(nghiem\ don) \\ x = 1\,(nghiem\ kep) \end{array}\right.$.

- Ta có $g'(x) = 2x.f'(x^2 - 3)$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 - 3 = -2 \\ x^2 - 3 = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0\,(nghiem\ don) \\ x = \pm 1\,(nghiem\ don) \\ x = \pm 2\,(nghiem\ kep) \end{array}\right..$$

(Đến đây có thể kết luận hàm số có 3 điểm cực trị. Nếu muốn tìm điểm cực đại, cực tiểu của hàm số thì ta cần lập bảng biến thiên)

$$g'(x) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 0 \\ f'(x^2 - 3) > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0 \\ f'(x^2 - 3) < 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 0 \\ x^2 - 3 > -2 \\ x^2 - 3 \neq 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0 \\ x^2 - 3 < -2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 1 \\ x \neq 2 \end{cases} \\ -1 < x < 0 \end{array}\right..$$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $y = g(x)$.

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		2		$+\infty$
$g'(x)$		-	0	-	0	+	0	-	0	+	0	+	

$g(x)$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Suy ra hàm số có 3 điểm cực trị

Câu 9: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biên thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f\left(2x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{3}{2}\right)$ là

A. 3. **B.**4. **C.** 5. **D.**6.

Lời giải

Chọn C

Dựa vào bảng biến thiên, suy ra $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < -2 \\ x > 3 \end{array}\right.$ và $f'(x) < 0 \Leftrightarrow -2 < x < 3$.

Ta có $g'(x) = \left(4x - \frac{5}{2}\right) f'\left(2x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{3}{2}\right)$.

Xét $g'(x) < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 4x - \frac{5}{2} > 0 \\ f'\left(2x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{3}{2}\right) < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 4x - \frac{5}{2} < 0 \\ f'\left(2x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{3}{2}\right) > 0 \end{cases} \end{array}\right.$.

- $\begin{cases} 4x - \frac{5}{2} > 0 \\ f'\left(2x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{3}{2}\right) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{5}{8} \\ -2 < 2x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{3}{2} < 3 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x < \frac{9}{4}$.

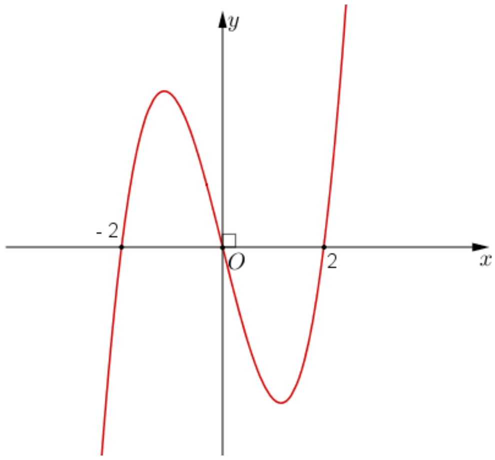
- $\begin{cases} 4x - \frac{5}{2} < 0 \\ f'\left(2x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{3}{2}\right) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < \frac{5}{8} \\ 2x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{3}{2} > 3 \end{cases} \\ \begin{cases} x < \frac{5}{8} \\ 2x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{3}{2} < -2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < -1 \\ \frac{1}{4} < x < \frac{5}{8} \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{4}$		$\frac{5}{8}$		1		$\frac{9}{4}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		↘		↗		↘		↗		↘		↗	

Từ bảng xét dấu của hàm số $g(x) = f\left(2x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{3}{2}\right)$ ta được hàm số có 5 cực trị.

Câu 10: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên tập $\mathbb{R}$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình sau:



Hàm số $y = f(x^2 - x)$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $y = f(x^2 - x)$. Ta có $y' = (2x-1)f'(x^2 - x)$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x - 1 = 0 \\ f'(x^2 - x) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{2} \\ x^2 - x = -2 \\ x^2 - x = 0 \\ x^2 - x = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{2} \\ x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \\ x = 2 \end{array}\right. .$$

$$f'(x^2 - x) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2 < x^2 - x < 0 \\ x^2 - x > 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < x < 1 \\ x > 2 \\ x < -1 \end{array}\right. .$$

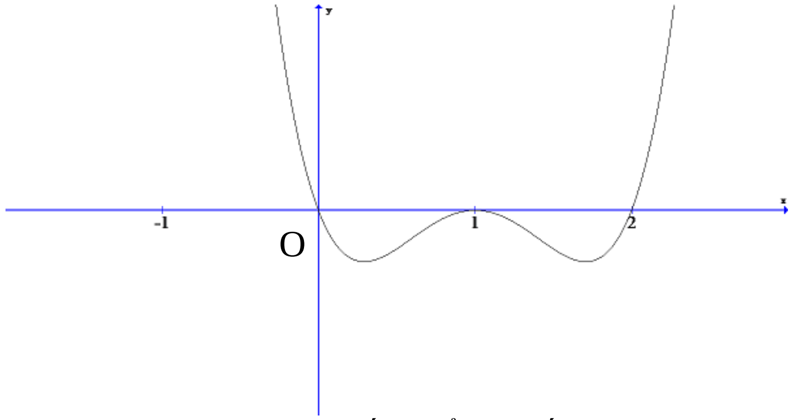
Ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f(x^2 - x)$ là:

x	$-\infty$		-1		0		$\frac{1}{2}$		1		2		$+\infty$
$2x-1$		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$f'(x^2-x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	|	$+$	0	$-$	0	$+$	
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Vậy hàm số $y = f\left(x^2 - x\right)$ có 3 điểm cực tiểu.

DẠNG TOÁN 4. Biết ĐỒ THỊ hàm số $y = f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y = g(x) = f(u(x))$ trong bài toán chứa tham số .

Câu 11: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm y = $f'(x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. và có đồ thị như hình vẽ.



Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x) = f\left(x^2 - 8x + m\right)$ có 5 điểm cực trị?

A. 15. **B.** 16. **C.** 17. **D.** 18.

Lời giải

Chọn A

Ta có $g'(x) = 2(x-4)\,f'\left(x^2 - 8x + m\right)$

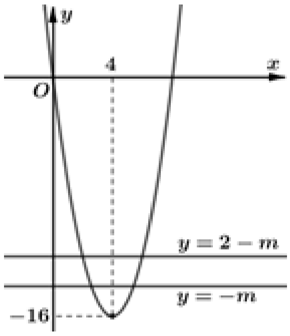
$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2(x-4)\,f'\left(x^2 - 8x + m\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 4 \\ x^2 - 8x + m = 1 \ (\text{nghiem boi } 2) \\ x^2 - 8x + m = 0 \quad (1) \\ x^2 - 8x + m = 2 \quad (2) \end{array}\right..$$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow g'(x) = 0$ có 5 nghiệm bội lẻ $\Leftrightarrow$ mỗi phương trình (1), (2) đều có hai nghiệm phân biệt khác 4. $(*)$

Cách 1: $(*)$ $\Leftrightarrow \begin{cases} 16 - m > 0 \\ 16 - m + 2 > 0 \\ m \neq 16 \\ m \neq 18 \end{cases} \Leftrightarrow m < 16$.

Vậy có 15 giá trị m nguyên dương thỏa mãn điều kiện.

Cách 2: Xét đồ thị (C) của hàm số $y = x^2 - 8x$ và hai đường thẳng $d_1 : y = -m,\ d_2 : y = -m + 2$ (hình vẽ).

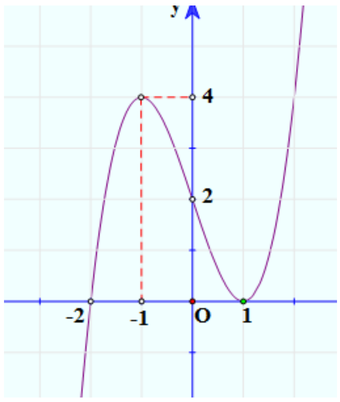


Khi đó $(*)$ $\Leftrightarrow d_1, d_2$ cắt (C) tại bốn điểm phân biệt $\Leftrightarrow -m > -16 \Leftrightarrow m < 16$.

Vậy có 15 giá trị m nguyên dương thỏa mãn điều kiện.

DẠNG TOÁN 5. Biết ĐỒ THỊ hàm số $y = f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y = g(x) = f(u(x)) + h(x)$ trong bài toán không chứa tham số.

Câu 12: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên R, có đồ thị hàm $y = f'(x)$ như hình vẽ sau:



Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = g(x) = f(x - 2019) + 2017x - 2018$.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

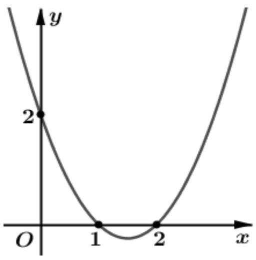
Chọn A

Ta có: $y' = g'(x) = f'(x - 2019) + 2017$

Tịnh tiến sang phải 2019 đơn vị rồi tịnh tiến lên trên 2017 đơn vị ta thấy đồ thị hàm số $y' = g'(x) = f'(x - 2019) + 2017$ cắt trục Ox tại 1 điểm.

Do đó hàm số có 1 cực trị.

Câu 13: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên dưới.



Hàm số $g(x) = 15f(-x^4 + 2x^2) - 10x^6 + 30x^2 - 20$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 0. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 5.

Lời giải

Chọn B

$g(x) = 15f(-x^4 + 2x^2) - 10x^6 + 30x^2 - 20$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Có $g'(x)=60(-x^3+x)f'(-x^4+2x^2)-60x^5+60x=60(-x^3+x)\left[f'(-x^4+2x^2)+x^2+1\right]$

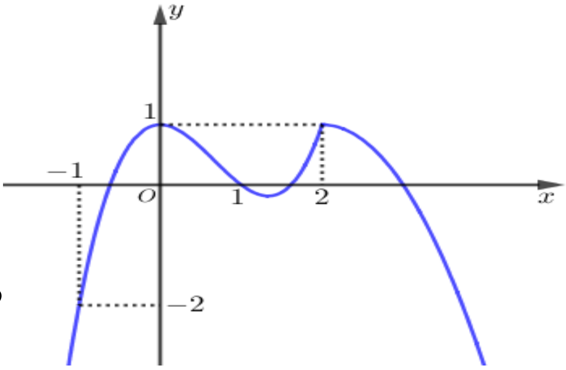
$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0,\ x=\pm1\\ f'(-x^4+2x^2)+x^2+1=0(*)\end{array}\right.$$

Ta thấy $-x^4+2x^2=-(x^2-1)^2+1\le1\ \forall x$, kết hợp với đồ thị hàm số $y=f'(x)$,

suy ra $f'(-x^4+2x^2)\ge0\ \forall x$. Hơn nữa, $x^2+1>0\ \forall x$ nên phương trình $(*)$ vô nghiệm.

mà $x=0$, $x=\pm1$ là các nghiệm đơn của phương trình $g'(x)=0$ nên hàm số $y=g(x)$ có 3 điểm cực trị.

Câu 14: Cho hàm số $f'(x)$ như hình vẽ.



Hàm số $g(x)=f(x^2)-\dfrac{x^6}{3}+x^4-x^2$ đạt cực tiểu tại bao nhiêu điểm?

A. 3. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải

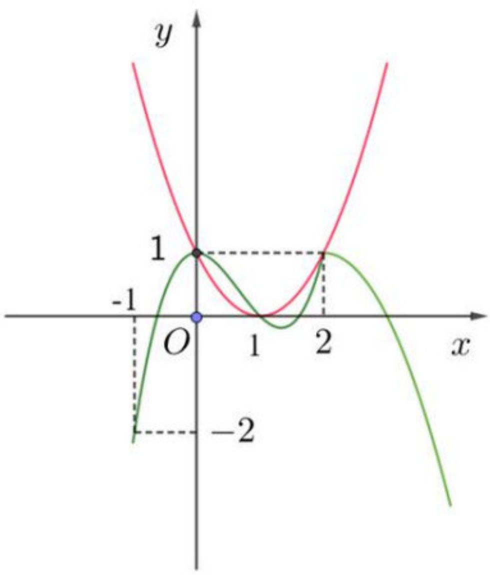
Chọn D

Ta có: $g(x)=f(x^2)-\dfrac{x^6}{3}+x^4-x^2\Rightarrow g'(x)=2x\left[f'(x^2)-(x^4-2x^2+1)\right]$

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ \underbrace{f'(x^2)-(x^4-2x^2+1)}_{k(x)}=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ f'(x^2)=(x^2)^2-2x^2+1(*)\end{array}\right.$$

Đặt $t=x^2\,(t\ge0)$,phương trình $(*)$ trở thành $f'(t)=t^2-2t^2+1(**)$.

Vẽ thêm đồ thị hàm số x^2-2x+1 (màu đỏ) trên đồ thị $f'(x)$ đề cho.



Dựa vào đồ thị, $(**) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=1 \\ t=2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=0 \\ x^2=1 \\ x^2=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \text{(boi chan).} \\ x=\pm 1. \\ x=\pm\sqrt{2}. \end{array}\right.$

Theo đó ta lập bảng biến thiên như sau:

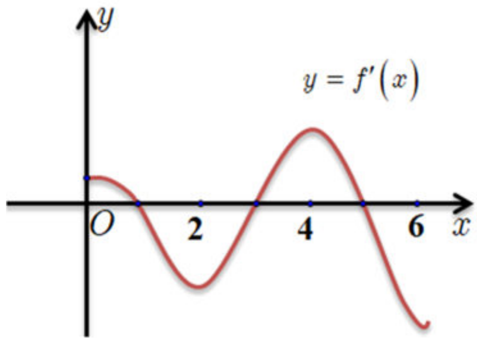
x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		-1		0		1		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$2x$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$k(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	
$g'(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	
$g(x)$		↗		↗		↘		↗		↘		↘	

Vậy $g(x)$ đạt cực tiểu tại 1 điểm $x=0$.

DẠNG TOÁN 6. Biết ĐỒ THỊ hàm số $y=f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y=g(x)=f(u(x))+h(x)$ trong bài toán chứa tham số.

DẠNG TOÁN 7. Biết ĐỒ THỊ hàm số $y=f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y=g(x)=\left[f(u(x))\right]^k$ trong bài toán không chứa tham số.

Câu 15: Cho hàm số $f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $[0;6]$. Đồ thị của hàm số $f'(x)$ trên đoạn $[0;6]$ được cho bởi hình bên dưới.



Hỏi hàm số $y=\left[f(x)\right]^2$ có tối đa bao nhiêu cực trị?

A. 3. **B.** 7. **C.** 6. **D.** 4

Lời giải

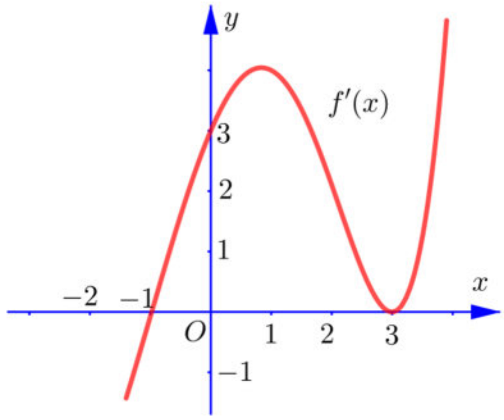
Chọn B

Ta có: $y'=2f(x).f'(x)$ nên $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=0 \\ f'(x)=0 \end{array}\right.$

Từ đồ thị ta suy ra $f(x)=0$ có tối đa 4 nghiệm, $f'(x)=0$ có tối đa 3 nghiệm.

Do đó, hàm số $y=\left[f(x)\right]^2$ có tối đa 7 điểm cực trị nên có tối đa 7 cực trị.

Câu 16: Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm đa thức bậc bốn có $f(-1)=0$, đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ



Số điểm cực trị của hàm số $g\left(x\right)=\left[f\left(x\right)\right]^2$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Từ hình vẽ ta có bảng biến thiên hàm số $y=f\left(x\right)$

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'\left(x\right)$		$-$	0	$+$	0	$+$	
$f\left(x\right)$	$+\infty$	$\searrow$	$f\left(-1\right)$	$\nearrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Ta có $g'\left(x\right)=2f'\left(x\right)f\left(x\right)$.

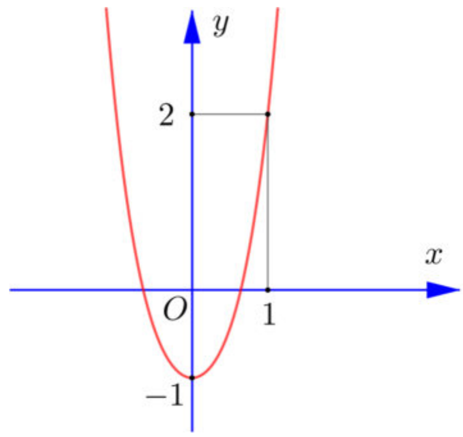
Xét $g'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f'\left(x\right)=0\\ f\left(x\right)=0\end{array}\right.$.

Do $f\left(-1\right)=0$ nên $f\left(x\right)\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}$

Dựa vào đồ thị, ta có $f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\ x=3\text{ (nghiÖm kÐp)}\end{array}\right.$.

Do vậy hàm số $g\left(x\right)$ chỉ có 1 điểm cực trị.

Câu 17: Cho hàm số $y=f\left(x\right)=mx^5+nx^3+px$ có đồ thị hàm số $y=f'\left(x\right)$ như hình vẽ:



Số điểm cực trị của hàm số $g\left(x\right)=\left[f\left(x+2\right)\right]^5$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Ta có $g\left(x\right)=\left[f\left(x+2\right)\right]^5\Rightarrow g'\left(x\right)=5f'\left(x+2\right)\left[f\left(x+2\right)\right]^4$.

Do $\left[f(x+2)\right]^4 \geq 0$ nên dấu $g'(x)$ chỉ phụ thuộc dấu của $5f'(x+2)$.

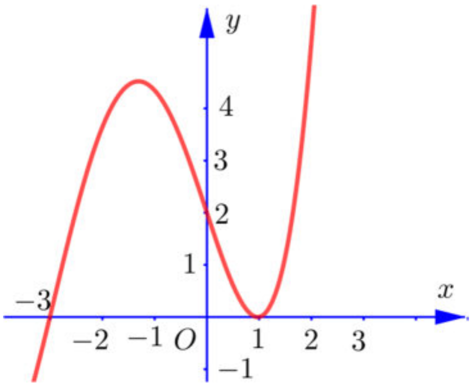
Dựa vào đồ thị ta thấy hàm số $y = f'(x)$ cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt nên

$f'(x) = a(x-x_1)(x-x_2),\ a>0\ f'(x) = a(x+2-x_1)(x+2-x_2)$,

Suy ra $g'(x)$ đổi dấu từ + sang - khi qua $x = x_1 - 2$, từ - sang + khi qua $x = x_2 - 2$.

Hàm số $g(x)$ có 2 điểm cực trị.

Câu 18: Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm đa thức bậc bốn có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ



Số điểm cực đại của hàm số $g(x) = \left[f(1-2x)\right]^3$ là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Ta có $g(x) = \left[f(1-2x)\right]^3 \Rightarrow g'(x) = -6f'(1-2x)\left[f(1-2x)\right]^2$.

Do $\left[f(1-2x)\right]^2 \geq 0$ nên dấu $g'(x)$ chỉ phụ thuộc dấu của $-6f'(1-2x)$.

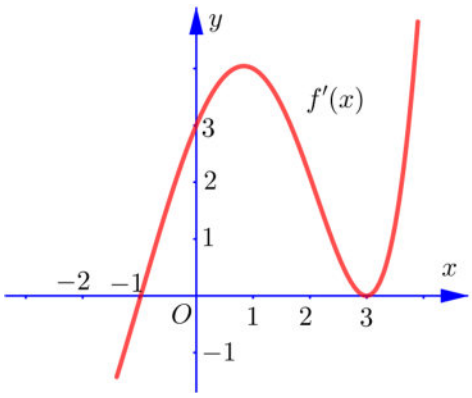
Dựa vào đồ thị ta có $f'(x) = a(x+3)(x-1)^2,\ a>0$

$\Rightarrow f'(1-2x) = a(4-2x)(-2x)^2$

Suy ra $g'(x)$ đổi dấu từ - sang + khi qua $x=2$ nên $x=2$ là điểm cực tiểu của hàm số $g(x)$.

Hàm số $g(x)$ không có điểm cực đại.

Câu 19: Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm đa thức bậc bốn có $f(3)<0$, đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ



Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = \left[f(x-1)\right]^{2020}$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Từ hình vẽ ta có bảng biến thiên hàm số $y = f(x)$

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	

$f(x)$	$+\infty$		$f(-1)$		$+\infty$
	$\searrow$			$\nearrow$	$y=0$

Ta có $g'(x)=2020f'(x-1)f^{2019}(x-1)$.

Xét $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x-1)=0\ (1) \\ f(x-1)=0\ \ (2) \end{array}\right.$.

Xét (1). Dựa vào đồ thị, ta có $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=3\ (\text{nghiÖm kÐp}) \end{array}\right.$.

$\Rightarrow f'(x-1)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x-1=-1 \\ x-1=3 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=4\,(\text{nghiÖm kÐp}) \end{array}\right.$

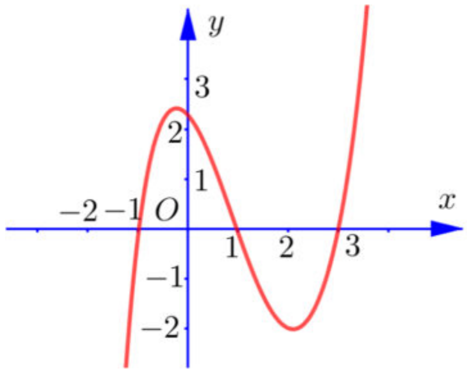
Xét (2). Do $f(3)<0$ nên $f(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt thuộc $(-\infty;-2)$ và $(3;+\infty)$

Suy ra $f(x-1)=0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1\in(-\infty;-1)$ và $x_2\in(4;+\infty)$

Ta có $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=4\ (\text{nghiÖm kÐp}) \\ x=x_1\in(-\infty;-1) \\ x=x_2\in(4;+\infty) \end{array}\right.$.

Do vậy hàm số $g(x)$ có 3 điểm cực trị.

Câu 20: Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm đa thức bậc bốn có $f(1)=0$ đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ



Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=\left[f(x^2-2x)\right]^4$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn D

Ta có $g(x)=\left[f(x^2-2x)\right]^4 \Rightarrow g'(x)=-8f'(x^2-2x)\left[f(x^2-2x)\right]^3$.

Từ hình vẽ ta có bảng biến thiên hàm số $y=f(x)$

x	$-\infty$	x_1		-1		1		3		x_2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$-$	0	$+$	0	$-$		$+$		$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$		$f(-1)$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$f(3)$	$\nearrow$	$y=0$		$+\infty$

Ta có $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x^2-2x)=0\ (1) \\ f(x^2-2x)=0\ \ (2) \end{array}\right.$.

Xét (1). Dựa vào đồ thị ta có $f'(x)=a(x-1)(x+1)(x+3),\ a>0$

$f'(x^2-2x)=0 \Rightarrow a(x^2-2x-1)(x^2-2x+1)(x^2-2x+3)=0$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1+\sqrt{2} \\ x=1-\sqrt{2} \\ x=1\ \text{(nghiÖm kÐp)} \end{array}\right. .$$

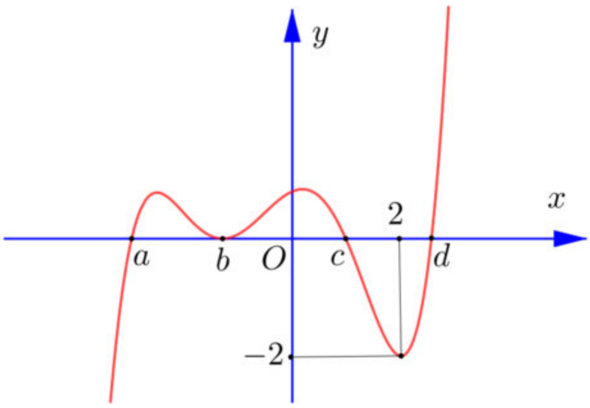
Xét (2): Do $f(1)=0$ nên $f(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt nghiệm phân biệt $x_1 \in (-\infty;-1)$ và $x_2 \in (3;+\infty)$

Với nghiệm $x_1 \in (-\infty;-1)$ thì $f(x^2-2x)=0 \Rightarrow x^2-2x=x_1$ vô nghiệm do $x^2-2x \geq -1$

Với nghiệm $x_2 \in (3;+\infty)$ thì $f(x^2-2x)=0 \Rightarrow x^2-2x=x_2$ có 2 nghiệm phân biệt.

Ta có $g'(x)=0$ có 4 nghiệm đơn phân biệt nên hàm số $g(x)$ có 4 điểm cực trị.

Câu 21: Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm đa thức có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ



Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=\left[f(x^2)\right]^{2021}$ là

A. 5. **B.** 6. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Ta có $g(x)=\left[f(x^2)\right]^{2021} \Rightarrow g'(x)=4042x.f'(x^2).\left[f(x^2)\right]^{2020}$

Dựa vào đồ thị ta có $f'(x)=k(x-a)(x-b)^{2m}(x-c)(x-d),\ k>0$

$f'(x^2)=0 \Rightarrow k(x^2-a)(x^2-b)^{2m}(x^2-c)(x^2-d)$

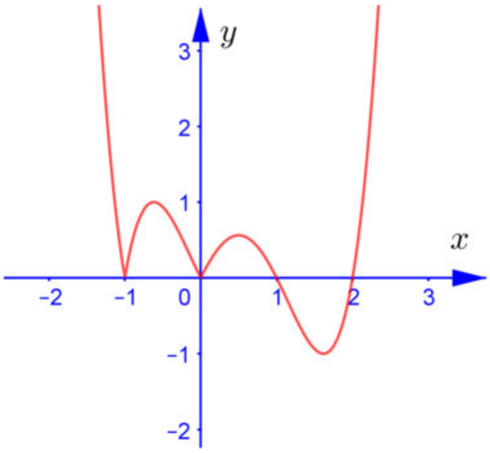
$\Rightarrow g'(x)=4042k.x.(x^2-a)(x^2-b)^{2m}(x^2-c)(x^2-d).\left[f(x^2)\right]^{2020}$

Do $\left[f(x^2)\right]^{2020} \geq 0;\ (x^2-b)^{2m} \geq 0 \Rightarrow g'(x)=0$ có 5 nghiệm $\pm\sqrt{c};\pm\sqrt{d};0$

Vậy hàm số $g(x)$ có 5 điểm cực trị.

DẠNG TOÁN 8. Biết ĐỒ THỊ hàm số $y=f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y=g(x)=\left[f(u(x))\right]^k$ trong bài toán chứa tham số .

Câu 22: Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm đa thức bậc 6 có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ:



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x)=\left[f(x+1)^3+m\right]^7$ có 2 điểm cực trị?

A. 2. **B.** 0. **C.** 1. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn D

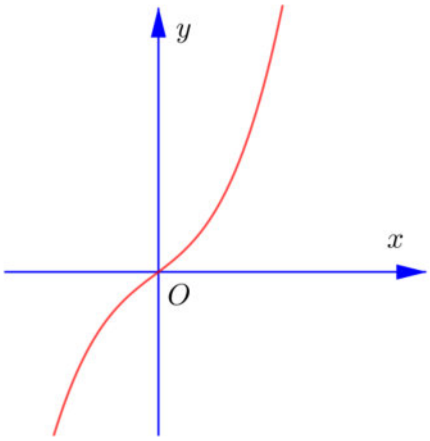
Ta có $g(x)=\left[f(x+1)^3+m\right]^7 \Rightarrow g'(x)=21.\left[f(x+1)^3+m\right]^6.f(x+1)^2.f'(x+1)$

Ta có $\left[f(x+1)^3+m\right]^6.f(x+1)^2$ nên dấu của $g'(x)$ phụ thuộc vào dấu $f'(x+1)$.

Hàm số $f'(x)$ cắt trục hoành tại 2 điểm phân biệt nên có 2 điểm cực trị, số điểm cực trị hàm $f(x+1)$ bằng số điểm cực trị hàm $f(x)$ nên $g(x)$ có 2 điểm cực trị với mọi m.

Vậy với mọi m hàm số $g(x)$ đều có 2 điểm cực trị.

Câu 23: Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm đa thức bậc 3 có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ:



Biết $f(x^2-4)=m$ để hàm số $g(x)=\left[f(x^2-4)\right]^2$ có 5 điểm cực trị. Khẳng định nào đúng?

A. $m \neq \{f(-2); f(0); f(2)\}$. **B.** $m \neq \{f(-4); f(-2); f(2)\}$.

C. $m \neq \{f(-4); f(0)\}$. **D.** $m \neq \{f(0); f(2)\}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $g(x)=\left[f(x^2-4)\right]^2 \Rightarrow g'(x)=2x.f(x^2-4).f'(x^2-4)$

$$\Rightarrow g'(x)=0 \Rightarrow 2x.f(x^2-4).f'(x^2-4)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ f'(x^2-4)=0\ (1) \\ f(x^2-4)=0\ (2) \end{array}\right..$$

Xét (1). Do đồ thị $y=f'(x)$ đổi dấu 1 lần khi qua $x=0$ nên $f'(x)=0\Rightarrow x=0$

Do đó $f'\left(x^2-4\right)=0\Rightarrow x^2-4=0\Rightarrow x=\pm 2.$

Để hàm số $g(x)$ có 5 điểm cực trị thì (2) phải có 3 nghiệm phân biệt khác $-2;0;2.$

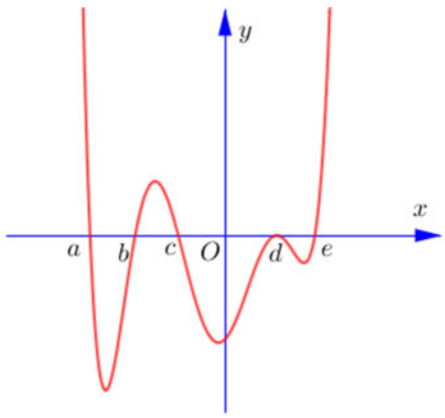
Từ hình vẽ ta có bảng biến thiên hàm số $y=f(x)$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f(0)$	↗	$+\infty$

Để $f\left(x^2-4\right)=m$ có 2 nghiệm thì $x^2-4\neq 0\Rightarrow x\neq \pm 2.$

Vậy $m\neq \left\{f(-4);f(0)\right\}.$

Câu 24: Cho hàm số $y=f(x;m)$ có đồ thị hàm số $y=f'(x;m)$ như hình vẽ:



Biết $f(a)>f(c)>0;\ f(b)<0<f(e)$. Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=\left[f(x+m)\right]^2$ là

A. 4. **B.** 7. **C.** 5. **D.** 9.

Lời giải

Chọn B

Từ đồ thị của hàm số $y=f'(x;m)$ ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		a		b		c		d		e		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	$f(a)$	↘	$f(b)$	↗	$f(c)$	↘	$f(d)$	↘	$f(e)$	↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số $y=f(x;m)$ có 4 điểm cực trị.

Khi $f(a)>f(c)>0;\ f(b)<0<f(e)$ thì đồ thị hàm số $y=f(x;m)$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt $f(x+m)=0$ có 4 nghiệm phân biệt

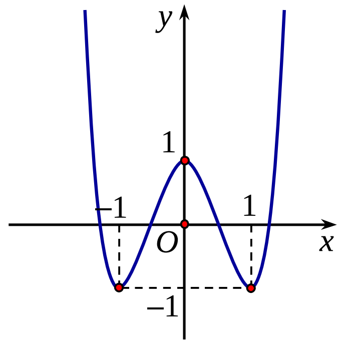
Ta có $g(x)=\left[f(x+m)\right]^2\Rightarrow g'(x)=2f'(x+m).f(x+m).$

$$\Rightarrow g'(x)=0 \Leftrightarrow 2=.f(x+m) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x+m)=0 \rightarrow 3 \text{ nghiÖm} \\ f(x+m)=0 \rightarrow 4 \text{ nghiÖm} \end{array}\right.$$

Các nghiệm không trùng nhau nên hàm số $g(x)$ có 7 điểm cực trị.

DẠNG TOÁN 9. Biết ĐỒ THỊ hàm số $y=f'(u(x))$ xét cực trị của hàm số $y=f(x)$ trong bài toán không chứa tham số.

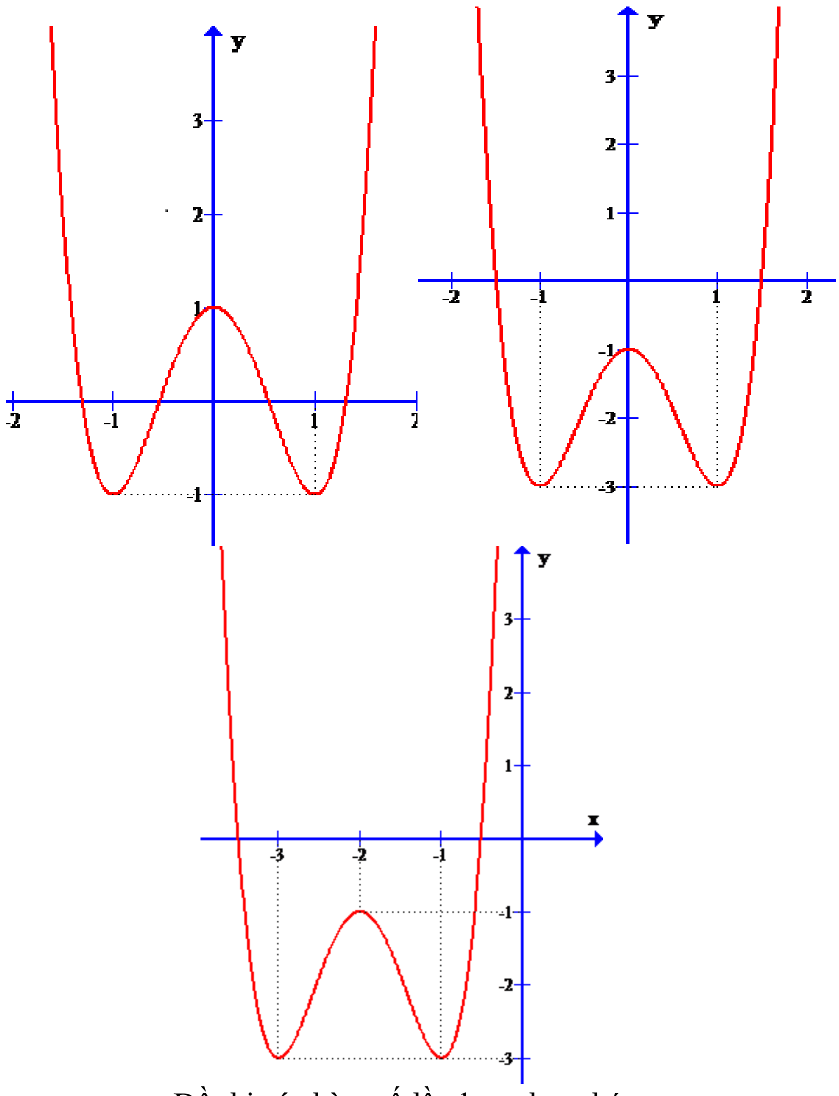
Câu 25: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên R, biết rằng hàm số $y=f'(x-2)+2$ có đồ thị như hình vẽ sau. Hỏi hàm số $y=f(x)$ có bao nhiêu cực trị?



A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B



Đồ thị các hàm số lần lượt theo thứ tự:
$y=f'(x-2)+2$, $y=f'(x-2)$, $y=f'(x)$

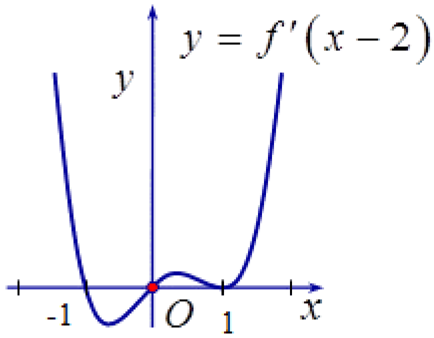
Từ đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ ta có bảng biến thiên sau: (với x_1,x_2 là hoành độ giao điểm của đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ với Ox)

BBT:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	y_{cd}	↘	y_{ct}	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có hàm số $y=f(x)$ có 2 cực trị. **Chọn đáp án B.**

Câu 26: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, hàm số $y=f'(x-2)$ có đồ thị như hình dưới. Số điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$ là:



A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Ta có: đồ thị hàm số $y=f'(x-2)$ là phép tịnh tiến của đồ thị hàm số $y=f'(x)$ sang phải 2 đơn vị.

Khi đó hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-3		-2		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	
$f(x)$		↗	$f(-3)$	↘	$f(-2)$	↗	$f(-1)$	↗	

Dựa vào bảng biến thiên ta có số điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$ là 2.

DẠNG TOÁN 10. Biết ĐỒ THỊ hàm số $y=f'(u(x))$ xét cực trị của hàm số $y=f(x)$ trong bài toán chứa tham số.

CÁC DẠNG TOÁN VỀ HÀM ẨN LIÊN QUAN ĐẾN BÀI TOÁN CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

PHẦN 4: BIẾT BẢNG XÉT DẤU CỦA HÀM SỐ $y=f'(x)$

Dạng toán 1. Biết BẢNG XÉT DẤU hàm số $y=f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y=g(x)=f(x)+h(x)$ **trong bài toán không chứa tham số**.

Dạng toán 2. Biết BẢNG XÉT DẤU hàm số $y=f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y=g(x)=f(x)+h(x)$ **trong bài toán chứa tham số**.

Dạng toán 3. Biết BẢNG XÉT DẤU $y=f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y=g(x)=f(u(x))$ **trong bài toán không chứa tham số** .

Dạng toán 4. Biết BẢNG XÉT DẤU hàm số $y=f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y=g(x)=f(u(x))$ **trong bài toán chứa tham số** .

Dạng toán 5. Biết BẢNG XÉT DẤU hàm số $y=f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y=g(x)=f(u(x))+h(x)$ **trong bài toán không chứa tham số**.

Dạng toán 6. Biết BẢNG XÉT DẤU hàm số $y=f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y=g(x)=f(u(x))+h(x)$ **trong bài toán chứa tham số**.

Dạng toán 7. Biết BẢNG XÉT DẤU hàm số $y=f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y=g(x)=\left[f(u(x))\right]^k$ **trong bài toán không chứa tham số**.

Dạng toán 8. Biết BẢNG XÉT DẤU hàm số $y=f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y=g(x)=\left[f(u(x))\right]^k$ **trong bài toán chứa tham số** .

Dạng toán 9. Biết BẢNG XÉT DẤU hàm số $y=f'(u(x))$ xét cực trị của hàm số $y=f(x)$ **trong bài toán không chứa tham số**.

Dạng toán 10. Biết BẢNG XÉT DẤU hàm số $y=f'(u(x))$ xét cực trị của hàm số $y=f(x)$ **trong bài toán chứa tham số**.

DẠNG TOÁN 1. Biết BẢNG XÉT DẤU hàm số $y = f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y = g(x) = f(x) + h(x)$ trong bài toán không chứa tham số.

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	

Hỏi hàm số $g(x) = f(x) + x^3 + 3x^2 - 9x - 5$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Từ bảng xét dấu của $f'(x)$ ta nhận thấy $f'(x) = A(x)(x+3)^{2n+1}(x-1)^{2m+1}$ với $m, n \in \mathbb{N}$ và $A(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$..

Ta có: $g'(x) = f'(x) + 3x^2 + 6x - 9 = A(x)(x+3)^{2n+1}(x-1)^{2m+1} + 3(x+3)(x-1)$

$g'(x) = (x+3)(x-1)\left[A(x)(x+3)^{2n}(x-1)^{2m} + 3\right]$

Do $A(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên $A(x)(x+3)^{2n}(x-1)^{2m} + 3 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Từ đó ta có $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -3 \\ x = 1 \end{array}\right.$.

Do $g'(x) = 0$ tại $x = -3$ và $x = 1$, đồng thời $g'(x)$ đổi dấu khi đi qua hai điểm đó nên hàm số $y = g(x)$ có hai điểm cực trị.

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	+	0	$-$	

Hỏi hàm số $g(x) = f(x) - x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 6x + 2020$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Từ bảng xét dấu của $f'(x)$ ta thấy $f'(x) = a(x+1)^{2m+1}(x-2)^{2n+1}$ với $m, n \in \mathbb{N}$ và $a < 0$.

Ta có: $g'(x) = f'(x) - 3x^2 + 3x + 6 = a(x+1)^{2m+1}(x-2)^{2n+1} - 3(x-2)(x+1)$

$g'(x) = (x-2)(x+1)\left[a(x+1)^{2m}(x-1)^{2n} - 3\right]$

Do $a < 0$ nên $a(x+1)^{2m}(x-2)^{2n} - 3 < 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$

Từ đó ta có $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 2. \end{array}\right.$

Do $g'(x) = 0$ tại $x = -1$ và $x = 2$; đồng thời $g'(x)$ đổi dấu khi qua hai điểm này nên hàm số $g(x)$ có hai điểm cực trị.

DẠNG TOÁN 2. Biết BẢNG XÉT DẤU hàm số $y = f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y = g(x) = f(x) + h(x)$ trong bài toán chứa tham số.

DẠNG TOÁN 3. Biết BẢNG XÉT DẤU $y = f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y = g(x) = f(u(x))$ trong bài toán không chứa tham số .

Câu 1: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $y=f'(x)$ có bảng xét dấu sau

x	$-\infty$		-3		2		5		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Số điểm cực tiểu của hàm số $y=g(x)=f(6-x^2)$ là

A. 5. **B.** 7. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn D

Ta có $g'(x)=-2x.f'(6-x^2)$.

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ f'(6-x^2)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ 6-x^2=-3 \\ 6-x^2=2 \\ 6-x^2=5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm 3 \\ x=\pm 2 \\ x=\pm 1 \end{array}\right..$$

Ta có $g'(4)=-8.f'(-10)>0$ và bảng xét dấu $f'(x)$ không có nghiệm bội chẵn.

Bảng biến thiên $y=g(x)$.

x	$-\infty$		-3		-2		-1		0		1		2		3		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		↘		↗		↘		↗		↘		↗		↘		↗	

Vậy số điểm cực tiểu của hàm số $y=g(x)=f(6-x^2)$ là 4.

Câu 2: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $y=f'(x)$ có bảng xét dấu sau

x	$-\infty$		1		3		5		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	

Số điểm cực trị của hàm số $y=g(x)=f\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ là

A. 0. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Ta có $g'(x)=\dfrac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}.f'\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$. Do $\dfrac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}>\dfrac{x+|x|}{\sqrt{x^2+1}}\ge 0$

nên $g'(x)=0 \Leftrightarrow f'\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+\sqrt{x^2+1}=1 \\ x+\sqrt{x^2+1}=3 \\ x+\sqrt{x^2+1}=5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\dfrac{4}{3} \\ x=\dfrac{12}{5} \end{array}\right..$

Bảng biến thiên $y=g(x)$.

x	$-\infty$		0		$\frac{4}{3}$		$\frac{12}{5}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	
$g(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$	

Vậy số điểm cực trị của hàm số $y=g(x)=f\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ là 2.

Câu 3: Cho hàm số $f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $f\left(2^x\right)$ đạt cực tiểu tại x bằng

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 0 và 2

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $g(x)=f\left(2^x\right)$

$g'(x)=2^x\ln 2.f'\left(2^x\right)$

$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2^x=1\\2^x=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\end{array}\right.$

Nếu $x\in(-\infty;0)$ thì $2^x\in(0;1)$;

Suy $f'\left(2^x\right)>0,\forall x\in(-\infty;0)$, hay $g'(x)=2^x\ln 2.f'\left(2^x\right)>0$, $\forall x\in(-\infty;0)$

Nếu $x\in(0;1)$ thì $2^x\in(1;2)$;

Suy $f'\left(2^x\right)<0,\forall x\in(0;1)$, hay $g'(x)=2^x\ln 2.f'\left(2^x\right)<0$, $\forall x\in(0;1)$

Nếu $x\in(1;+\infty)$ thì $2^x\in(2;+\infty)$;

Suy $f'\left(2^x\right)>0,\forall x\in(1;+\infty)$, hay $g'(x)=2^x\ln 2.f'\left(2^x\right)>0$, $\forall x\in(1;+\infty)$

Bảng xét dấu $g'(x)$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Từ bảng xét dấu ta có $g'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương khi x qua 1.

Kết luận: Hàm số $g(x)=f\left(2^x\right)$ đạt cực tiểu tại $x=1$

Câu 4: Cho hàm số $f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f'(x)$ có bảng xét dấu như sau

x	$-\infty$		-2		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Số điểm cực trị của hàm số $f\left(e^{x^2-|x|-2}\right)$ là

A. 2 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 5

Lời giải

Chọn D

Đặt $g(x)=f\left(e^{x^2-|x|-2}\right)$

$f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ suy ra $g(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$

Hơn nữa $g(-x)=f\left(e^{(-x)^2-|-x|-2}\right)=f\left(e^{x^2-|x|-2}\right)=g(x)$

Suy ra $g(x)$ là hàm số chẵn, đồ thị hàm số $g(x)$ đối xứng qua trục Oy.

Xét $x\geq 0$

$g(x)=f\left(e^{x^2-x-2}\right)$

$g'(x)=(2x-1).e^{x^2-x-2}.f'\left(e^{x^2-x-2}\right)$

$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x-1=0\\ f'\left(e^{x^2-x-2}\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x-1=0\\ e^{x^2-x-2}=1\left(vì\ e^{x^2-x-2}>0,\forall x\right)\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x-1=0\\ x^2-x-2=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{1}{2}\\ x=2(vì\ x\geq 0)\end{array}\right.$

Nếu $x>2$ thì $x^2-x-2>0$,

suy ra $e^{x^2-x-2}>1$

suy ra $f'\left(e^{x^2-x-2}\right)>0$

Nếu $0\leq x<2$ thì $x^2-x-2<0$,

suy ra $0<e^{x^2-x-2}<1$

suy ra $f'\left(e^{x^2-x-2}\right)<0$

Từ đó ta có bảng xét dấu $g(x)$ trên $\left[0;+\infty\right)$

x	0		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Suy ra $g(x)$ có hai điểm cực trị dương.

Do $g(x)$ là hàm số chẵn, liên tục trên $\mathbb{R}$ suy ra $g(x)$ có 5 điểm cực trị trên $\mathbb{R}$

Câu 5: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Có bảng xét dấu của $y=f'(x)$ như hình vẽ.

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$.		$-$	0	$+$	0	$+$	

Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=f(\log_2 x)$. Chọn đáp án đúng

A. 1. **B.** 3. **C.** 2 . **D.** 5.

Lời giải

Chọn A

Đk: $x>0$

Ta có $g'(x) = \dfrac{1}{x\ln 2} f'(\log_2 x)$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_2 x = -2\\ \log_2 x = 1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{1}{4}\\ x = 2\end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	0		$\frac{1}{4}$		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	
$g(x)$		↘		↗		↗	

Dựa vào bảng biến thiên và đối chiếu với các đáp án ta chọn **A.**

Câu 6: Cho hàm số $y = f(x)$. Xác định và có đạo hàm liên tục trên R. Bảng xét dấu hàm số $y = f'(x)$ như hình bên dưới

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = g(x) = f\left[\log_3\left(x^2 - 2x + 3\right)\right]$. Chọn đáp án đúng:

A. 5. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 7.

Lời giải

Chọn A

Đk: $x \in \mathbb{R}$

Ta có: $y' = g'(x) = \dfrac{2x-2}{(x^2-2x+3)ln3} f'\left[log_3(x^2-2x+3)\right]$;

Khi đó $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x-2=0\\ f'(log_3(x^2-2x+3)) = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = 1\\ log_3(x^2-2x+3) = 1\\ log_3(x^2-2x+3) = 2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\ x=0\\ x=2\\ x=1+\sqrt{7}\\ x=1-\sqrt{7}\end{array}\right.$

Mặt khác: $f'\left[log_3(x^2-2x+3)\right] < 0 \Leftrightarrow \begin{cases}log_3(x^2-2x+3) > 1\\ log_3(x^2-2x+3) < 2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}1-\sqrt{7} < x < 0\\ 2 < x < 1+\sqrt{7}\end{cases}$

Ta có bảng biến thiên.

x	$-\infty$		$1-\sqrt{7}$		0		1		2		$1+\sqrt{7}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		↘		↗		↘		↗		↘		↗	

Vậy hàm số có 5 điểm cực trị. Chọn đáp án A

Câu 7: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu của đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y = g(x) = f\left(x^2 - 2x - 4\right)$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Ta có : $g'(x)=2(x-1)f'(x^2-2x-4)$.

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow (x-1)f'(x^2-2x-4)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ f'(x^2-2x-4)=0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x^2-2x-4=-2 \\ x^2-2x-4=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=1+\sqrt{3} \\ x=1-\sqrt{3} \text{ (Tất cả đều là nghiệm bội lẻ).} \\ x=1+\sqrt{5} \\ x=1-\sqrt{5} \end{array}\right.$$

Ta chọn $x=-2$ để xét dấu của $g'(x)$: $g'(-2)=2.(-3).f'(4)$. Vì hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$ do đó: $f'(4)>0$.

Suy ra: $g'(-2)<0$.

Theo tính chất qua nghiệm bội lẻ $g'(x)$ đổi dấu, ta có bảng biên thiên của $g(x)$ như sau:

x	$-\infty$		$1-\sqrt{5}$		$1-\sqrt{3}$		1		$1+\sqrt{3}$		$1+\sqrt{5}$		$+\infty$
$g'(x)$		-	0	+	0	-	0	+	0	-	0	+	
$g(x)$		↘		↗		↘		↗		↘		↗	

Từ bảng biến thiên suy ra, hàm số $y=g(x)$ có 3 điểm cực tiểu.

Câu 8: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên của đạo hàm như hình vẽ.

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	↘	-1	↗	3	↘	$-\infty$

Đặt $g(x)=f\left(\dfrac{x^2+1}{x}\right)$. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y=g(x)$.

A. 4. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 8.

Lời giải

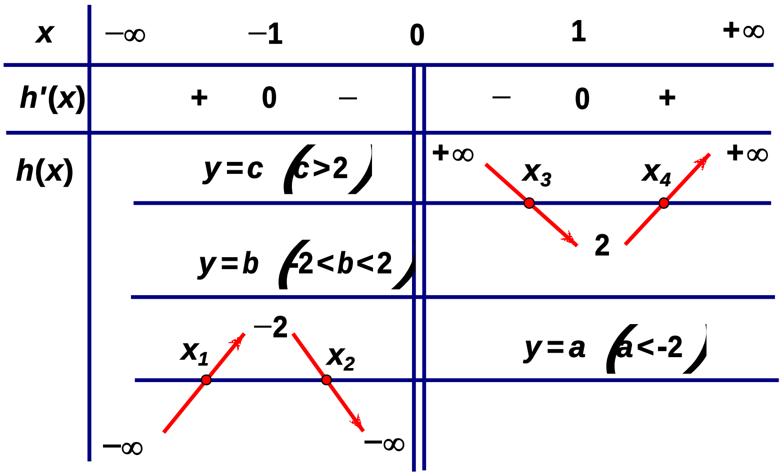
Chọn C

+ Đặt $g'(x)=\left(\dfrac{x^2-1}{x^2}\right)f'\left(\dfrac{x^2+1}{x}\right)$

$$+\ g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left(\dfrac{x^2-1}{x^2}\right)=0 \\ f'\left(\dfrac{x^2+1}{x}\right)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm 1 \\ \dfrac{x^2+1}{x}=a\ (a<-2) \\ \dfrac{x^2+1}{x}=b\ (-2<b<2) \\ \dfrac{x^2+1}{x}=c\ (c>2) \end{array}\right.$$

+ Xét hàm số $h(x)=\dfrac{x^2+1}{x}, h'(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2}, h'(x)=0 \Leftrightarrow x=\pm 1$

+ Bảng biến thiên của hàm số $h(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$

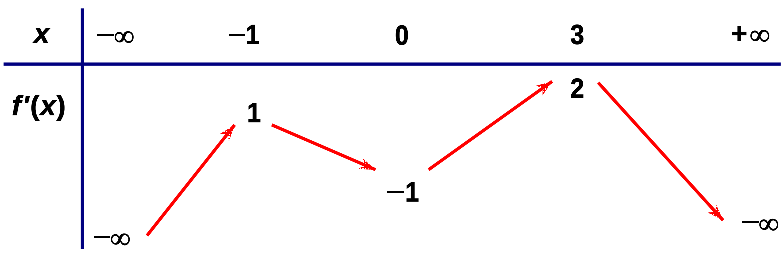


+ Dựa vào bảng biến thiên trên ta thấy phương trình $h(x)=a, h(x)=c$, mỗi phương trình có hai nghiệm phân biệt khác ± 1, mà $a \neq c \Rightarrow f'\left(\dfrac{x^2+1}{x}\right)=0$ có 4 nghiệm đơn phân biệt x_1, x_2, x_3, x_4 khác ± 1 và phương trình $h(x)=b$ vô nghiệm.

Do đó phương trình $g'(x)=0$ có 6 nghiệm đơn phân biệt lần lượt theo thứ tự từ nhỏ đến lớn là $x_1, -1, x_2, x_3, 1, x_4$.

Vậy hàm số $g(x)=f\left(\dfrac{x^2+1}{x}\right)$ có 6 cực trị.

Câu 9: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên của đạo hàm như hình vẽ.



Đặt $g(x)=f\left(\dfrac{x^2+2x}{x+1}\right)$. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y=g(x)$.

A. 4. **B.** 10. **C.** 6. **D.** 8.

Lời giải

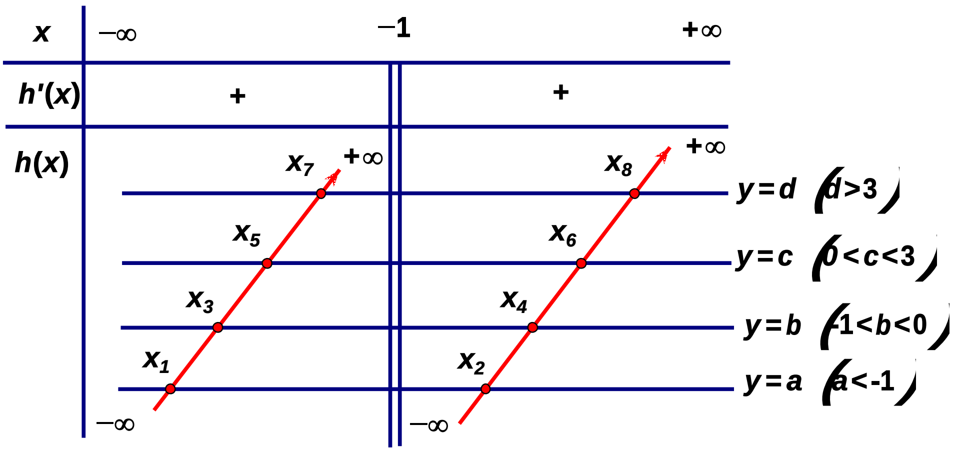
Chọn D

+ Đặt $g'(x)=\left(\dfrac{x^2+2x+2}{(x+1)^2}\right) f'\left(\dfrac{x^2+2x}{x+1}\right)$

$+\ g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left(\dfrac{x^2+2x+2}{(x+1)^2}\right)=0\,(VN) \\ f'\left(\dfrac{x^2+2x}{x+1}\right)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{x^2+2x}{x+1}=a\ (a<-1) \\ \dfrac{x^2+2x}{x+1}=b\ (-1<b<0) \\ \dfrac{x^2+2x}{x+1}=c\ (0<c<3) \\ \dfrac{x^2+2x}{x+1}=d\ (d>3) \end{array}\right.$

+ Xét hàm số $h(x)=\dfrac{x^2+2x}{x+1}, h'(x)=\dfrac{x^2+2x+2}{(x+1)^2}, h'(x)=0\ (VN)$

+ Bảng biến thiên của hàm số $h(x)=\dfrac{x^2+2x}{x+1}$



+ Dựa vào bảng biến thiên trên ta thấy phương trình $h(x)=a, h(x)=b, h(x)=c, h(x)=d$, mỗi phương trình có hai nghiệm phân biệt mà a,b,c,d đôi một khác nhau $\Rightarrow f'\left(\dfrac{x^2+2x}{x+1}\right)=0$ có 8 nghiệm đơn phân biệt $x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8$. Do đó phương trình $g'(x)=0$ có 8 nghiệm đơn phân biệt lần lượt theo thứ tự từ nhỏ đến lớn là $x_1,x_3,x_5,x_7,x_2,x_4,x_6,x_8$.

Vậy hàm số $g(x)=f\left(\dfrac{x^2+2x}{x+1}\right)$ có 8 cực trị.

DẠNG TOÁN 4. Biết BẢNG XÉT DẤU hàm số $y=f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y=g(x)=f(u(x))$ trong bài toán chứa tham số .

Câu 1: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu $f'(x)$ như sau

x	$-\infty$		-1		1		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-10;10]$ để $g(x)=f(x^2-2x-m)$ có 5 điểm cực trị?

A. 10. **B.** 15. **C.** 20. **D.** 21.

Lời giải

Chọn A

Ta có $g'(x)=2(x-1)f'(x^2-2x-m)$

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x^2-2x-m=-1 \\ x^2-2x-m=1 \\ x^2-2x-m=4 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{ll} x=1 & \\ x^2-2x-m+1=0 & (1) \\ x^2-2x-m-1=0 & (2) \\ x^2-2x-m-4=0 & (3) \end{array}\right.$$

Nhận xét: Phương trình (2) nếu có nghiệm là nghiệm bội chẵn; phương trình (1) và (3) nếu có nghiệm thì nghiệm không chung nhau.

Hàm số $g(x)$ có 5 điểm cực trị $\Leftrightarrow$ phương trình $g'(x)=0$ có 5 nghiệm bội lẻ

$\Leftrightarrow$ Phương trình (1) và (3) có hai nghiệm phân biệt, khác 1.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'_{(1)}>0 \\ \Delta'_{(3)}>0 \\ VT_{(1)}\neq 0 \\ VT_{(3)}\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>0 \\ m+5>0 \\ -m\neq 0 \\ -m-5\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m>0$$

Vì $\begin{cases} m\in\mathbb{Z} \\ m\in[-10;10] \end{cases} \Rightarrow m\in\{1;2;3;4;5;6;7;8;9;10\}$

Vậy có 10 giá trị của tham số m.

DẠNG TOÁN 5. Biết BẢNG XÉT DẤU hàm số $y=f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y=g(x)=f(u(x))+h(x)$ trong bài toán không chứa tham số.

Câu 1: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và bảng xét dấu đạo hàm

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Hàm số $y=3f(-x^4+4x^2-6)+2x^6-3x^4-12x^2$ có tất cả bao nhiêu điểm cực tiểu?

A. 3. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Có $y'=-(12x^3-24x).f'(-x^4+4x^2-6)+12x^5-12x^3-24x$

$=-12x(x^2-2).f'(-x^4+4x^2-6)+12x\left(x^4-x^2-2\right)$

$=-12x(x^2-2).\left(f'(-x^4+4x^2-6)-\left(x^2+1\right)\right)$.

Khi đó $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ f'(-x^4+4x^2-6)-(x^2+1)=0 \\ x^2-2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm\sqrt{2} \\ f'(-x^4+4x^2-6)=x^2+1 \end{array}\right.$.

Ta có $-x^4+4x^2-6=-(x^2-2)^2-2\leq -2,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Do đó $f'(-x^4+4x^2-6)\leq f'(-2)=0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Mà $x^2+1\geq 1,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Do đó phương trình $f'(-x^4+4x^2-6)=x^2+1$ vô nghiệm.

Hàm số $y=3f(-x^4+4x^2-6)+2x^6-3x^4-12x^2$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Vậy hàm số $y=3f(-x^4+4x^2-6)+2x^6-3x^4-12x^2$ có 2 điểm cực tiểu.

DẠNG TOÁN 6. Biết BẢNG XÉT DẤU hàm số $y=f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y=g(x)=f(u(x))+h(x)$ trong bài toán chứa tham số.

DẠNG TOÁN 7. Biết BẢNG XÉT DẤU hàm số $y=f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y=g(x)=\left[f(u(x))\right]^k$ trong bài toán không chứa tham số.

Lý thuyết:

Bước 1: Tính $y'=g'(x)=k.u'(x).[f(u(x))]^{k-1}.f'(u(x))$

+ Nếu: k chẵn: $y'=g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} u'(x)=0\\ f(u(x))=0\\ f'(u(x))=0\end{array}\right.$.

+ Nếu k lẻ: $y'=g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} u'(x)=0\\ f'(u(x))=0\end{array}\right.$

Bước 2: Giải tìm nghiệm:

$u'(x)=0$ ta giải bình thường.

$f'(u(x))=0$ thì ta cho $u(x)$ bằng các điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$

$f(u(x))=0$ thì ta cho $u(x)$ bằng các các nghiệm x_0 của phương trình $f(x)=0$ hoặc điều kiện của x_0 để chứng minh được phương trình có bao nhiêu nghiệm cụ thể.

Kiểm chứng các nghiệm trên có nghiệm nào bội chẵn không

Bước 3: Kết luận

2. Bài tập:

Câu 1: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
f'(x)		-	0	+	0	-	
f(x)	$-\infty$	↘	2	↗	5	↘	$+\infty$

Số cực trị của hàm số $g(x)=f^2(2x^2+x)$ là

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $g'(x)=2(2x^2+x)'.f'(2x^2+x).f(2x^2+x)=2(4x+1).f'(2x^2+x).f(2x^2+x)=0$.

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} 4x+1=0\\ f'(2x^2+x)=0\\ f(2x^2+x)=0\end{array}\right.$.

□ $4x+1=0\Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{4}$

□ Dựa vào bảng biến thiên ta có $f'(2x^2+x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} 2x^2+x=-2(VN)\\ 2x^2+x=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=-1\\ x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$

□ Dựa vào bảng biến thiên phương trình $f(x)=0$ chỉ có 1 nghiệm $x_0>1$ (vì đồ thị $y=f(x)$ cắt trục Ox tại một điểm có hoành độ lớn hơn 1). Khi đó

$f(2x^2+x)=0 \Leftrightarrow 2x^2+x=x_0 \Leftrightarrow 2x^2+x-x_0=0$ (*) phương trình có hai nghiệm vì a,c trái dấu.

Mặt khác, thay các nghiệm $x=-\frac{1}{4};-1;\frac{1}{2}$ vào (*) ta được $x_0 \le 1$ không thỏa mãn điều kiện của x_0 nên $x=-\frac{1}{4};-1;\frac{1}{2}$ không là nghiệm của (*).

Vậy phương trình $g'(x)=0$ có 5 nghiệm đơn. Suy ra hàm số $y=g(x)$ có 5 cực trị

LỜI BÌNH: Yêu cầu đề bài có thể thay đổi số cực đại hoặc số cực tiểu của hàm số, khi đó ta cần phải xét dấu g'(x). Cụ thể:

Ta có 2 nghiệm của phương trình $f(2x^2+x)=0 \Leftrightarrow 2x^2+x=x_0 \Leftrightarrow 2x^2+x-x_0=0$ là

$$+\quad x_1=-\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{1+8x_0}}{4} \to x_1'=\frac{1}{\sqrt{1+8x_0}}>0;\forall x_0>1$$

$$\Rightarrow x_1>x_1(1)=\frac{1}{2}$$

$$+\quad x_1=-\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{1+8x_0}}{4} \to x_1'=-\frac{1}{\sqrt{1+8x_0}}<0;\forall x_0>1$$

$$\Rightarrow x_1<x_1(1)=-1$$

Mặt khác:

$$f'(2x^2+x)<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x^2+x<-2(VN) \\ 2x^2+x>1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<-1 \\ x>\frac{1}{2} \end{array}\right.$$

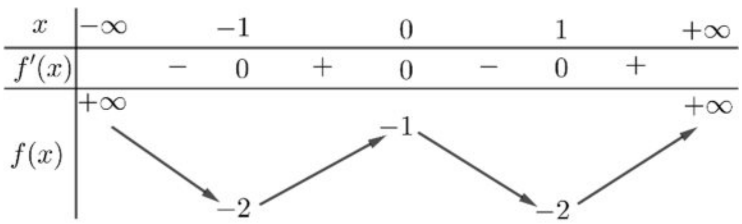
$$f'(2x^2+x)>0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2+x>-2 \\ 2x^2+x<1 \end{cases} \Leftrightarrow -1<x<\frac{1}{2}$$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		x_1		-1		-1/4		½		x_2		$+\infty$
$4x+1$		-	|	-	|	-	0	+	|	+	|	+	
$f'(2x^2+x)$		+	|	+	0	-	|	-	0	+	|	+	
$f(2x^2+x)$		+	0	-	|	-	|	-	|	-	0	+	
g'(x)		-	0	+	0	-	0	+	0	-	0	+	

Dựa vào bảng biến thiên ta được**: 2 cực đại và 3 cực tiểu.**

Câu 2: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau



Số điểm cực tiểu của hàm số $g(x)=f^3(x^3+3x)$ là

A. 5. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $g'(x)=3(3x^2+3)f'(x^3+3x).f^2(x^3+3x)$.

Ta thấy $g'(x)=3(3x^2+3)>0,\forall x\in\mathbb{R}$ và $f^2(x^3+3x)\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}$ nên dấu của $g'(x)$ chính là dấu của $f'(x^3+3x)$

$$f'(x^3+3x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^3+3x=-1\\x^3+3x=0\\x^3+3x=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=x_1\approx-0,32\\x=0\\x=x_2\approx0,32\end{array}\right.$$

Từ bảng biến thiên của hàm $f(x)$ ta có $f'(x)>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-1<x<0\\x>1\end{array}\right.$

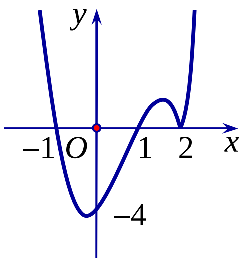
Do đó $f'(x^3+3x)>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-1<x^3+3x<0\\x^3+3x>1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_1<x<0\\x>x_2\end{array}\right.$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $g(x)$

x	$-\infty$		x_1		0		x_2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Vậy hàm số $g(x)$ có 2 điểm cực tiểu.

Câu 3: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên tập $\mathbb{R}$ và đồ thị hàm số $y=f'(x)$ được cho như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số $y=f^{2019}(x^3-1)$ là



A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 5.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y'=2019.f^{2018}(x^3-1).f'(x^3-1).3x^2$,

Ta có $y'=f^{2018}(x^3-1)\ge0\ \ \forall x\in\mathbb{R}$ và $3x^2\ge0\ \ \forall x\in\mathbb{R}$ nên dấu của y' cũng chính là dấu của biểu thức $f'(x^3-1)$.

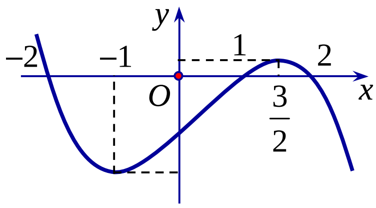
Ta có $f'(x^3-1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^3-1=-1\\x^3-1=1\\x^3-1=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\sqrt[3]{2}\\x=\sqrt[3]{3}\end{array}\right.$.

Dựa vào đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ ta thấy $f'(x^3-1)>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^3-1<-1\\\begin{cases}x^3-1>1\\x^3-1\ne2\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<0\\\begin{cases}x>\sqrt[3]{2}\\x\ne\sqrt[3]{3}\end{cases}\end{array}\right.$.

Tương tự $f'(x^3-1)<0\Leftrightarrow-1<x^3-1<1\Leftrightarrow0<x<\sqrt[3]{2}$.

Vì vậy suy ra hàm số $y = f^{2019}\left(x^3-1\right)$ có hai điểm cực trị.

Câu 4: Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa $f\left(2\right) = f\left(-2\right) = 0$ và đồ thị hàm số $y = f'\left(x\right)$ có dạng như hình vẽ bên dưới.



Số điểm cực trị của hàm số $y = \left(f\left(2x-1\right)\right)^{2018}$ là

A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 5.

Lời giải

Chọn A

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f'\left(x\right)$ ta lập được bảng biến thiên của $y = f\left(x\right)$ như sau:

x	$-\infty$		-2		1		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$		$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Xét hàm số $y = \left(f\left(2x-1\right)\right)^{2018}$, ta có $y' = 2018.f^{2017}\left(2x-1\right).2.f'\left(2x-1\right)$.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $f\left(2x-1\right) \le 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f^{2017}\left(2x-1\right) \le 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Nên dấu của y' cũng chính là dấu của biểu thức: $-f'\left(2x-1\right)$.

Ta có $y' \le 0 \Leftrightarrow f'\left(2x-1\right) \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-1 \le -2 \\ 1 \le 2x-1 \le 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \le -\dfrac{1}{2} \\ 1 \le x \le \dfrac{3}{2} \end{array}\right.$.

Tương tự $y' > 0 \Leftrightarrow f'\left(2x-1\right) < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2 < 2x-1 < 1 \\ 2x-1 > 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\dfrac{1}{2} < x < 1 \\ x > \dfrac{3}{2} \end{array}\right.$

Từ đó suy ra hàm số $y = \left(f\left(2x-1\right)\right)^{2018}$ có 3 điểm cực trị.

Câu 5: Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	2	$\nearrow$	7	$\searrow$	$-\infty$

Hỏi hàm số $y = \left[f\left(2-x\right)\right]^2$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 4. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 7.

Lời giải

Chọn C

$y' = -2.f\left(2-x\right).f'\left(2-x\right)$.

$$y'=0\Leftrightarrow -2.f\left(2-x\right).f'\left(2-x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f\left(2-x\right)=0\\ f'\left(2-x\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2-x=a<-2\\ 2-x=b>1\\ 2-x=-2\\ 2-x=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2-a>4\\ x=2-b<1\\ x=4\\ x=1\end{array}\right.$$

y' không xác định $\Leftrightarrow$ $f'\left(2-x\right)$ không xác định $\Leftrightarrow 2-x=0\Leftrightarrow x=2$

Dựa vào đồ thị $f\left(x\right)$ ta thấy $f\left(2-x\right)>0\Leftrightarrow a<2-x<b\Leftrightarrow 2-b<x<2-a$

$$f'\left(2-x\right)>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2-x<-2\\ 0<2-x<1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>4\\ 1<x<2\end{array}\right.$$

Ta có bảng xét dấu y'

x	$-\infty$		$2-b$		1		2		4		$2-a$		$+\infty$
$f'(2-x)$		$-$	|	$-$	0	$+$	||	$-$	0	$+$	|	$+$	
$f(2-x)$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	|	$+$	0	$-$	
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	||	$+$	0	$-$	0	$+$	

Vậy hàm số $y=\left[f\left(2-x\right)\right]^2$ có 5 điểm cực trị.

Câu 6: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu $f'\left(x\right)$ như sau

x	$-\infty$		-2		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

Biết rằng hàm số $y=f\left(x\right)$ là hàm đa thức có đồ thị cắt trục hoành tại một điểm duy nhất. Hỏi hàm số $y=f^2\left(x^2-2x\right)$ có nhiều nhất bao nhiêu điểm cực tiểu?

A. 4. **B.** 2. **C.** 5. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

+) Ta có $y=f\left(x\right)$ là hàm đa thức có đồ thị cắt trục hoành tại một điểm duy nhất nên

$$f\left(x\right)=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=a<-2\\ x=b>3\end{array}\right.$$

Đặt $g\left(x\right)=f^2\left(x^2-2x\right)$. Ta có $g'\left(x\right)=\left(2x-2\right)f'\left(x^2-2x\right)f\left(x^2-2x\right)$.

Để hàm số $y=f^2\left(x^2-2x\right)$ có nhiều điểm cực tiểu nhất thì phương trình $f\left(x^2-2x\right)=0$ có nhiều nghiệm nhất $\Rightarrow x^2-2x=b>3$ (vì $x^2-2x\geq -1,\forall x$)

$$g'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x^2-2x=-2\\ x^2-2x=1\\ x^2-2x=3\\ x^2-2x=b\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x^2-2x+2=0\\ x^2-2x-1=0\\ x^2-2x-3=0\\ x=x_1<-1\\ x=x_2>3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=1\pm\sqrt{2}\\ x=-1\\ x=3\\ x=x_1<-1\\ x=x_2>3\end{array}\right..$$

Trong đó các nghiệm $-1,\,1,\,3$ $x_1;x_2$ là nghiệm bội lẻ và $1\pm\sqrt{2}$ là nghiệm bội chẵn. Vì vậy hàm số $g'\left(x\right)$ chỉ đổi dấu khi đi qua các nghiệm $-1,\,1,\,3;x_1;x_2$.

Ta có $g'(0) = -2f'(0) < 0$ (do $f'(0) > 0$).

Bảng xét dấu $g'(x)$

x	$-\infty$		x_1		-1		$1-\sqrt{2}$		1		$1+\sqrt{2}$		3		x_2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Vậy hàm số $y = f^2(x^2 - 2x)$ có đúng 3 điểm cực tiểu.

Câu 7: Cho hàm $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(1)f(2) < 0$ và bảng xét dấu của $f'(x)$

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Hỏi hàm số $g(x) = f^2(x-2019)$ có bao nhiêu cực trị?

A. 4. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 7.

Lời giải

Chọn C

$g'(x) = 2f(x-2019)f'(x-2019)$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x-2019) = 0(1) \\ f'(x-2019) = 0(2) \end{array}\right.$$

+) Vì $f(1)f(2) < 0$ và từ BBT suy ra đồ thị $y = f(x)$ cắt Ox tại 3 điểm phân biệt có hoành độ $x_1 < 1, 1 < x_2 < 2, x_3 > 2$. Mà đồ thị hàm số $f(x-2019)$ có được bằng cách tịnh tiến theo phương trục hoành sang phải 2019 đơn vị, nên nó sẽ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ $x_1 < 2020, 2020 < x_2 < 2021, x_3 > 2021$

$$(2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-2019 = 1 \\ x-2019 = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2020 \\ x = 2021 \end{array}\right.$$

Do vậy pt $g'(x) = 0$ có 5 nghiệm đơn phân biệt +) KL hàm g(x) có 5 cực trị

LỜI BÌNH: Chúng ta có thể tổng quát: Cho hàm $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(a_1)f(a_2) < 0$, $f(a_2)f(a_3) < 0$ …., $f(a_{n-1})f(a_n) < 0$ và bảng xét dấu của $f'(x)$

x	$-\infty$		a_1		a_2	....	a_n		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0		

($f'(x)$ đổi dấu đan xen khi qua $a_1, \ldots a_n$)

Số cực trị của hàm số $g(x) = f^{2k}(x \pm c)$ là $2n+1$

Câu 8: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau?

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	||	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	↗	3	↘	-1	↗	2	↘	$-\infty$

Hàm số $g(x) = \left(f\left(\dfrac{x-1}{x+2}\right)\right)^{2018}$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 7 **B.** 3 **C.** 5 **D.** 6

Lời giải

Chọn D

Ta có $g'(x)=2018.\dfrac{3}{(x+2)^2}.\left(f\left(\dfrac{x-1}{x+2}\right)\right)^{2017}.f'\left(\dfrac{x-1}{x+2}\right)$

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll} f\left(\dfrac{x-1}{x+2}\right)=0 & (1)\\ f'\left(\dfrac{x-1}{x+2}\right)=0 & (2)\end{array}\right.$$

□ Dựa vào bảng biến thiên ta có: $f\left(\dfrac{x-1}{x+2}\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\dfrac{x-1}{x+2}=a;\,(a<0)\\ \dfrac{x-1}{x+2}=b;\,(0<b<1)\\ \dfrac{x-1}{x+2}=c;\,(1<c<2)\\ \dfrac{x-1}{x+2}=d;\,(d>2)\end{array}\right.$

□ $f'\left(\dfrac{x-1}{x+2}\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\dfrac{x-1}{x+2}=0\\ \dfrac{x-1}{x+2}=2\end{array}\right.$

Nhận xét: hàm số $y=\dfrac{x-1}{x+2}$ là hàm số đơn điệu trên tập xác định nên phương trình (1) có 4 nghiệm đơn, phương trình (2) có 2 nghiệm đơn và nghiệm của phương trình (1) và phương trình (2) không trùng nhau.

□ $g'(x)$ không xác định $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\dfrac{x-1}{x+2}=1\quad(VN)\\ x=-2\end{array}\right.$

Nhận xét: $x=-2$ không thuộc tập xác định của $y=g(x)$

Vậy $g'(x)=0$ có 6 nghiệm đơn khác -2 nên hàm số $y=g(x)$ có 6 điểm cực trị.

Câu 9: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	-2	↗	3	↘	$-\infty$

Hỏi hàm số $g(x)=\left[f(e^x-3)\right]^2$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 5.

Lời giải

Chọn B

$g'(x)=2.e^x.f(e^x-3).f'(e^x-3)$

$g'(x)=0\Leftrightarrow f(e^x-3)=0$

Hoặc $f'(e^x-3)=0$

Dựa vào BBT ta được:

□ Giải $f(e^x-3)=0$

□ $e^x-3=a(a<-3)$ $\Leftrightarrow e^x=a+3<0$ (vô nghiệm)

□ $e^x-3=b(-3<b<1)$

$\Leftrightarrow x=b+3$ (*)

$\Leftrightarrow x=\ln(b+3)$ (1 nghiệm)

□ $e^x-3=c(c>1)$

$\Leftrightarrow e^x=c+3$ (**)

$\Leftrightarrow x=\ln(c+3)$ (1 nghiệm)

□ Giải $f'(e^x-3)=0$

$\Leftrightarrow e^x-3=-3 \Leftrightarrow e^x=0$ (vô nghiệm)

Hoặc $e^x-3=1 \Leftrightarrow e^x=4 \Leftrightarrow x=\ln 4$ (1 nghiệm)

Lấy $x=\ln 4$ thay vào (*) và (**) không thỏa mãn đều kiện của b và c nên 3 nghiệm trên không trùng nhau $\Rightarrow g'(x)=0$ có 3 nghiệm đơn

Vậy $g(x)$ có 3 cực trị

Câu 10: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x		-5		0	
$f'(x)$	+	0	-	0	+

Biết rằng $f(-5)<0$ và $f(5)>0$. Số điểm cực trị của hàm số $y=\left[f\left(x^2-6x\right)\right]^2$ là

A. 7. **B.** 8. **C.** 9. **D.** 6.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $y'=2(2x-6).f'\left(x^2-6x\right).f\left(x^2-6x\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 2x-6=0 \Leftrightarrow x=3 & \\ f'\left(x^2-6x\right)=0 & (1) \\ f\left(x^2-6x\right)=0 & (2) \end{array}\right.$

+) Từ (1) kết hợp với bảng dấu $f'(x)$ ta có $f'\left(x^2-6x\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-6x=-5 \Leftrightarrow x=5, x=1 \\ x^2-6x=0 \Leftrightarrow x=0.x=6 \end{array}\right.$

+) Từ (2) kết hợp bảng dấu $f'(x)$ và đk $f(-5)<0$ và $f(5)>0$ ta có

$f\left(x^2-6x\right)=0 \Leftrightarrow x^2-6x=x_0 \in (0;5)$ nên pt $x^2-6x-x_0=0$ có 2 nghiệm phân biệt khác các nghiệm trên.

+) Các nghiệm đó là nghiệm bội lẻ (nghiệm đơn) => hàm số $y=\left[f\left(x^2-6x\right)\right]^2$ có 7 cực trị

Câu 11: Cho hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$, có bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	+	||	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số $y=\left[f\left(4-x^2\right)\right]^3$ có bao nhiêu cực trị?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Chọn D

TH1. Ta có $y'=-6x.\left[f\left(4-x^2\right)\right]^2.f'\left(4-x^2\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ \left[f\left(4-x^2\right)\right]^2=0 \quad (1) \\ f'\left(4-x^2\right)=0 \quad (2) \end{array}\right.$

+) Dựa vào bảng xét dấu y' ta có pt(1) có nghiệm nhưng đều là nghiệm bội chẵn nên tại đó không phải là điểm cực trị.

+) Từ (2) ta có $4-x^2=0 \Rightarrow x=2, x=-2$

TH2. Điểm làm cho y' không xác định: $4-x^2=3 \Rightarrow x=1, x=-1$

Vậy ta có 5 điểm cực trị

Câu 12: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-5		0		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-2	↗	5	↘	-7	↗	$+\infty$

Hàm số $y=\left[f\left(4-\sqrt{x}\right)+3\right]^4$ có bao nhiêu cực trị?

A. 1. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 7.

Lời giải

Chọn B

TXĐ $D=[0;+\infty)$

Ta có $y'=\dfrac{-2}{\sqrt{x}}.f'\left(4-\sqrt{x}\right).\left[f\left(4-\sqrt{x}\right)+3\right]^3,(x>0)$

$y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'\left(4-\sqrt{x}\right)=0 \quad (1) \\ f\left(4-\sqrt{x}\right)+3=0 \quad (2) \end{array}\right.$

+) Từ (1) ta có: $f'\left(4-\sqrt{x}\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4-\sqrt{x}=-5 \Leftrightarrow x=81 \\ 4-\sqrt{x}=0 \Leftrightarrow x=16 \\ 4-\sqrt{x}=4 \Leftrightarrow x=0 \notin (0;+\infty) \end{array}\right.$

+) Từ (2) ta có $f\left(4-\sqrt{x}\right)+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4-\sqrt{x}=a \in (0;4) \Leftrightarrow x=x_1 \\ 4-\sqrt{x}=b \in (4;+\infty) \Leftrightarrow x \in \varnothing \end{array}\right.$

Vậy có $y=\left[f\left(4-\sqrt{x}\right)+3\right]^4$ có 3 cực trị.

Câu 13: Cho hàm bậc ba $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu y' như sau.

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	

Gọi m và n lần lượt là số điểm cực trị nhiều nhất và ít nhất của hàm số $y=g(x)=\left[f(2x+1)\right]^2$, biết $f(3)<0$. Khi đó $2m-3n$ bằng

A. 4. **B.** 1. **C.** -3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

Ta có $g'(x)=4f(2x+1).f'(2x+1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(2x+1)=0\\ f'(2x+1)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(2x+1)=0\\ 2x+1=1\\ 2x+1=3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(2x+1)=0\\ x=0\\ x=1\end{array}\right.$.

Suy ra số điểm cực trị của hàm số $g(x)$ phụ thuộc số nghiệm của phương trình $f(2x+1)=0$.

☑ Trường hợp 1: $f(1)>0$. Suy ra phương trình

$$f(2x+1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x+1=a<1\\ 2x+1=b,b\in(1,3)\\ 2x+1=c>3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{a-1}{2}<0\\ x=\dfrac{b-1}{2}\in(0;1)\\ x=\dfrac{c-1}{2}>1\end{array}\right..$$

Vậy trường hợp này $g'(x)$ có 5 nghiệm đơn phân biệt nên hàm số $y=g(x)$ có năm điểm cực trị.

☑ Trường hợp 2: $f(1)=0$. Suy ra phương trình $f(2x+1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x+1=1\\ 2x+1=a>3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=\dfrac{a-1}{2}>1\end{array}\right..$

Vậy trường hợp này $g'(x)$ có 2 nghiệm đơn phân biệt nên hàm số $y=g(x)$ có hai điểm cực trị.

☑ Trường hợp 3: $f(1)<0$. Suy ra phương trình $f(2x+1)=0\Leftrightarrow 2x+1=a>3\Leftrightarrow x=\dfrac{a-1}{2}>1$.

Vậy trường hợp này $g'(x)$ có 3 nghiệm đơn phân biệt nên hàm số $y=g(x)$ có ba điểm cực trị.

DẠNG TOÁN 8. Biết BẢNG XÉT DẤU hàm số $y=f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y=g(x)=\left[f(u(x))\right]^k$ trong bài toán chứa tham số .

DẠNG TOÁN 9. Biết BẢNG XÉT DẤU hàm số $y=f'(u(x))$ xét cực trị của hàm số $y=f(x)$ trong bài toán không chứa tham số.

Câu 1: Cho $y=f(x)$ là hàm số xác định và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$.

Biết bảng xác dấu của $y=f'(3-2x)$ như sau:

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{5}{2}$		3		4		$+\infty$
$f'(3-2x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

Hỏi hàm số $y=f(x)$ có bao nhiêu điểm cực đại

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Đặt $u=3-2x\ \Rightarrow x=\dfrac{3-u}{2}$

Ta có $f'(3-2x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{1}{2}\\ x=\dfrac{5}{2}\\ x=3\\ x=4\end{array}\right.$

$$\Rightarrow f'(u)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} u=4 \\ u=-2 \\ u=-3 \\ u=-5 \end{array}\right.$$

Hơn nữa $f'(u)>0 \Leftrightarrow f'(3-2x)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{5}{2} \\ x>4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2<u<4 \\ u<-5 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-5		-3		-2		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗		↘		↘		↗		↘	

Câu 2: Cho $y=f(x)$ xác định và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$.

Biết bảng xét dấu của $y=f'(\sqrt[3]{x})$ như sau

x	$-\infty$		-1		8		27		$+\infty$
$f'(\sqrt[3]{x})$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Tìm số điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Đặt $u=\sqrt[3]{x} \Rightarrow x=u^3$

$$f'(\sqrt[3]{x})=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=8 \\ x=27 \end{array}\right.$$

Suy ra $f'(u)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} u=-1 \\ u=2 \\ u=3 \end{array}\right.$

$$f'(u)>0 \Rightarrow f'(\sqrt[3]{x})>0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} -1<x<8 \\ 27<x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1<u^3<8 \\ 27<u^3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1<u<2 \\ 3<u \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘		↗		↘		↗	

DẠNG TOÁN 10. Biết BẢNG XÉT DẤU hàm số $y=f'(u(x))$ xét cực trị của hàm số $y=f(x)$ trong bài toán chứa tham số.

CÁC DẠNG TOÁN VỀ HÀM ẨN LIÊN QUAN ĐẾN BÀI TOÁN CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

PHẦN 5: CỰC TRỊ CỦA HÀM CHỨA GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

Dạng toán 1. Biết đồ thị hàm số $y=f(x)$ xét cực trị của hàm số $y=\left|f(x)\right|$

Dạng toán 2. Biết đồ thị hàm số $y=f(x)$ xét cực trị của hàm số $y=\left|f(ax+b)\right|$

Dạng toán 3. Biết đồ thị hàm số $y=f(x)$ xét cực trị của hàm số $y=f(|x|)$

Dạng toán 4. Biết đồ thị hàm số $y=f(x)$ xét cực trị của hàm số $y=f(|x+a|), y=f(|x+a|+b)$ ...

Dạng toán 5. Biết bảng biến thiên hàm số $y=f(x)$ xét cực trị của hàm số $y=\left|f(x)\right|$

Dạng toán 6. Biết bảng biến thiên hàm số $y=f(x)$ xét cực trị của hàm số $y=\left|f(ax+b)\right|$

Dạng toán 7. Biết bảng biến thiên hàm số $y=f(x)$ xét cực trị của hàm số $y=f(|x|)$

Dạng toán 8. Biết bảng biến thiên hàm số $y=f(x)$ xét cực trị của hàm số $y=f(|x+a|), y=f(|x+a|+b)$ ...

Dạng toán 9. Biết đồ thị hàm số $y=f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y=\left|f(x)\right|$

Dạng toán 10. Biết đồ thị hàm số $y=f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y=\left|f(ax+b)\right|$

Dạng toán 11. Biết đồ thị hàm số $y=f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y=f(|x|)$

Dạng toán 12. Biết đồ thị hàm số $y=f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y=f(|x+a|), y=f(|x+a|+b)$ ...

Dạng toán 13. Biết bảng xét dấu hàm số $y=f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y=\left|f(x)\right|$

Dạng toán 14. Biết bảng xét dấu hàm số $y=f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y=\left|f(ax+b)\right|$

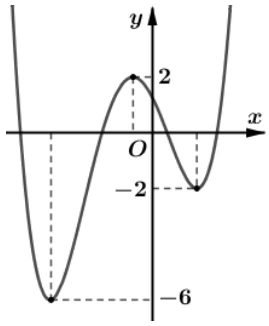
Dạng toán 15. Biết bảng xét dấu hàm số $y=f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y=f(|x|)$

Dạng toán 16. Biết bảng xét dấu hàm số $y=f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y=f(|x+a|), y=f(|x+a|+b)$ ...

DẠNG TOÁN 1. Biết đồ thị hàm số $y=f(x)$ xét cực trị của hàm số $y=|f(x)|$.

DẠNG TOÁN 2. Biết đồ thị hàm số $y=f(x)$ xét cực trị của hàm số $y=|f(ax+b)|$.

Câu 1: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x)=|f(x+2019)+m^2|$ có 5 điểm cực trị ?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 5.

Lời giải

Chọn B

Vì hàm $f(x)$ đã cho có 3 điểm cực trị nên $f(x+2019)+m^2$ cũng luôn có 3 điểm cực trị (do phép tịnh tiến không làm ảnh hưởng đến số cực trị).

Do đó yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ số giao điểm của đồ thị $f(x+2019)+m^2$ với trục hoành là 2.

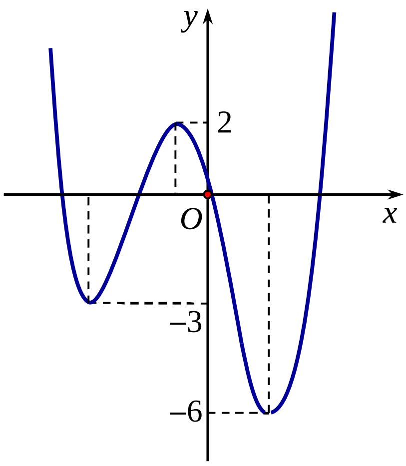
Để số giao điểm của đồ thị $f(x+2019)+m^2$ với trục hoành là 2, ta cần

+Tịnh tiến đồ thị $f(x)$ xuống dưới tối thiểu 2 đơn vị $\longrightarrow m^2 \le -2$: vô lý

+ Hoặc tịnh tiến đồ thị $f(x)$ lên trên tối thiểu 2 đơn vị nhưng phải nhỏ hơn 6 đơn vị

$$\longrightarrow 2\le m^2<6 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{2}\le m<\sqrt{6}\\ -\sqrt{6}<m\le -\sqrt{2}\end{array}\right. \xrightarrow{m\in\mathbb{Z}} m\in\{-2;2\}.$$

Câu 2: Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y=f(x)$.



Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y=|f(x-1)+m|$ có 5 điểm cực trị. Tổng giá trị tất cả các phần tử của S bằng

A. 12. **B.** 15. **C.** 18. **D.** 9.

Lời giải

Chọn A

Phương pháp:

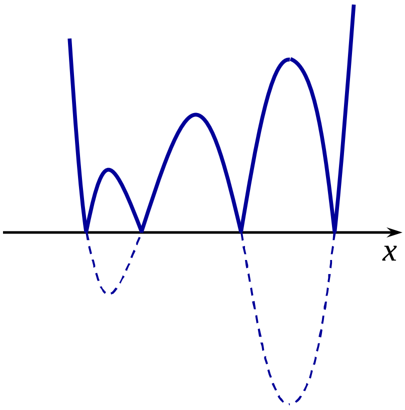
+ *Xác định đồ thị hàm số* $y=f(x-1)$

+ Áp dụng tính chất: Số cực trị của đồ thị hàm số $y = \left| f\left(x\right) \right|$ bằng tổng số cực trị của đồ thị hàm số $y = f\left(x\right)$ và số giao điểm (không phải là cực trị) của đồ thị hàm số $y = f\left(x\right)$ với Ox.

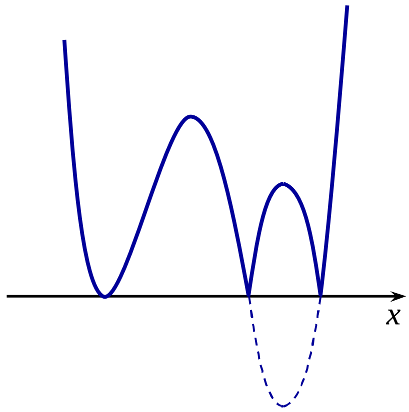
Cách 1:

Nhận xét: Số giao điểm của $\left(C\right): y = f\left(x\right)$ với Ox bằng số giao điểm của $\left(C'\right): y = f\left(x-1\right)$ với Ox.

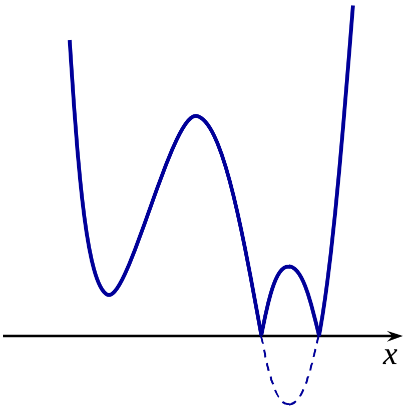
Vì $m > 0$ nên $\left(C''\right): y = f\left(x-1\right) + m$ có được bằng cách tịnh tiến $\left(C'\right): y = f\left(x-1\right)$ lên trên m đơn vị.



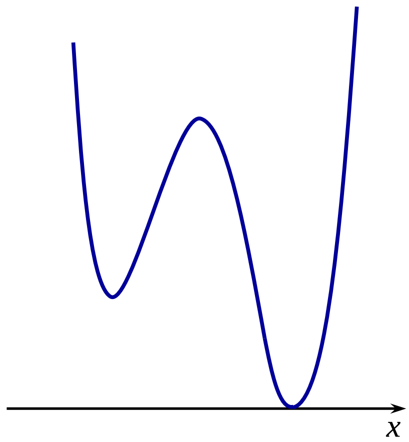
$\text{TH1}: 0 < m < 3$



$\text{TH2}: m = 3$



$\text{TH3}: 3 < m < 6$



$\text{TH4}: m \geq 6$

TH1: $0 < m < 3$. Đồ thị hàm số có 7 điểm cực trị. Loại.
TH2: $m = 3$. Đồ thị hàm số có 5 điểm cực trị. Nhận.
TH3: $3 < m < 6$. Đồ thị hàm số có 5 điểm cực trị. Nhận.
TH4: $m \geq 6$. Đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị. Loại.

Vậy $3 \leq m < 6$. Do $m \in \mathbb{Z}^*$ nên $m \in \left\{3; 4; 5\right\}$.

Vậy tổng giá trị tất cả các phần tử của S bằng 12.

Cách 2

Tịnh tiến đồ thị hàm số $y = f\left(x\right)$ sang phải 1 đơn vị, ta được đồ thị hàm số $y = f\left(x-1\right)$.

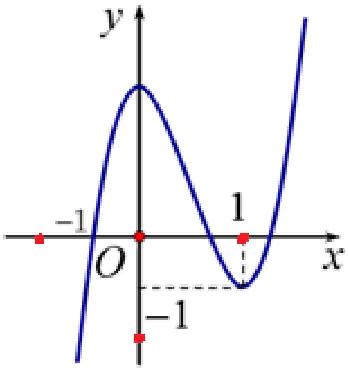
Do đó đồ thị hàm số $y = f\left(x-1\right)$ có 3 cực trị và có 4 giao điểm với Ox.

Để được đồ thị hàm số $y = f\left(x\right) + m$ với m nguyên dương ta phải tịnh tiến đồ thị hàm số $y = f\left(x-1\right)$ lên trên m đơn vị

Để thỏa mãn điều kiện đề bài thì đồ thị hàm số $y = f\left(x-1\right) + m$ cắt Ox tại đúng 2 điểm (không phải là điểm cực trị của chính nó), do đó $3 \leq m < 6 \Rightarrow S = \left\{3; 4; 5\right\}$.

Tổng giá trị các phần tử của S là 12.

Câu 3: Cho hàm số bậc ba $y = f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ.



Hàm số $y=\left|f\left(|x+1|-1\right)\right|$ có bao nhiêu cực trị?

A. 11 **B.** 7. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $y=f\left(|x+1|-1\right)$

Ta có $y'=\dfrac{x+1}{|x+1|}f'\left(|x+1|-1\right)$

$$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}|x+1|-1=0\\|x+1|-1=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=0\\x=-2\\x=-3\end{array}\right.$$

y' không xác định tại $x=-1$.

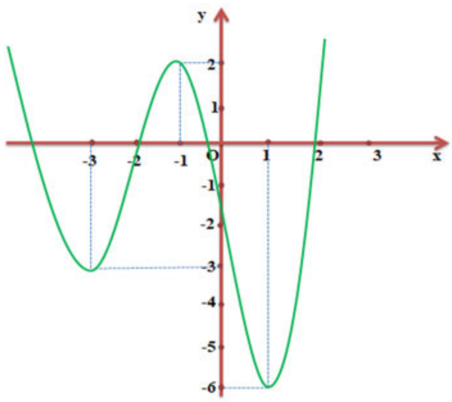
Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-3		-2		-1		0		1		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	||	+	0	-	0	+	
y	$+\infty$	↘	-1	↗	$f(0)$	↘	$f(-1)<0$	↗	$f(0)>0$	↘	-1	↗	$+\infty$

Dựa vào BBT của hàm số $y=f\left(|x+1|-1\right)$ suy ra BBT của hàm số $y=\left|f\left(|x+1|-1\right)\right|$.

Vậy hàm số $y=\left|f\left(|x+1|-1\right)\right|$ có 11 cực trị.

Câu 4: Hình vẽ là đồ thị hàm số $y=f(x)$. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y=|f(x-1)+m|$ có 5 điểm cực trị. Tổng giá trị tất cả các phần tử của S bằng



A. 9. **B.** 12. **C.** 18. **D.** 15.

Lời giải

Chọn B

Dựa vào đồ thị hàm số $y=f(x)$ ta thấy hàm số có 3 cực trị.

Số cực trị của hàm số $y=f(x-1)+m$ bằng với số cực trị của hàm số $y=f(x-1)$ và bằng số cực trị của hàm số $y=f(x)$.

Số cực trị của hàm số $y=\left|f(x-1)+m\right|$ bằng số cực trị của hàm số $y=f(x)$ cộng với số nghiệm đơn của phương trình $f(x-1)+m=0$ (*).

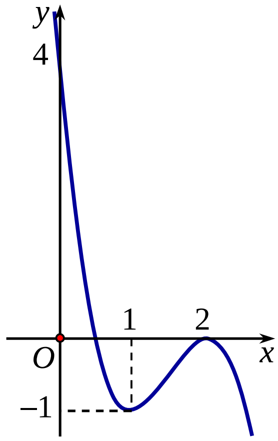
Ta có $f(x-1)+m=0 \Leftrightarrow f(x-1)=-m \Leftrightarrow f(t)=-m$ với $t=x-1$.

Để hàm số $y=\left|f(x-1)+m\right|$ có có 5 điểm cực trị thì phương trinh (*) phải có 2 nghiệm đơn phân biệt.

Do đó $-6<-m\le 3$ hoặc $2\le -m \Rightarrow m\in\{3,4,5\} \Rightarrow S=3+4+5=12$.

DẠNG TOÁN 3. Biết đồ thị hàm số $y=f(x)$ xét cực trị của hàm số $y=f(|x|)$

Câu 5: Đồ thị hàm số $y=f(x)=-2x^3+9x^2-12x+4$ như hình vẽ. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để phương trình $2|x|^3-9x^2+12|x|+m=0$ có 6 nghiệm phân biệt



A. $(-1;0)$. **B.** $(-3;-2)$. **C.** $(-5;-4)$. **D.** $(-4;-3)$.

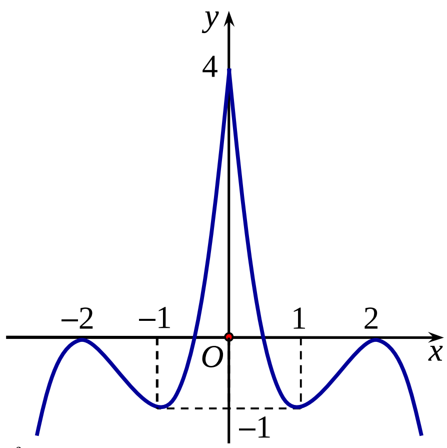
Lời giải

Chọn C

Xét phương trình: $2|x|^3-9x^2+12|x|+m=0 \Leftrightarrow -2|x|^3+9x^2-12|x|+4=m+4\,(*)$

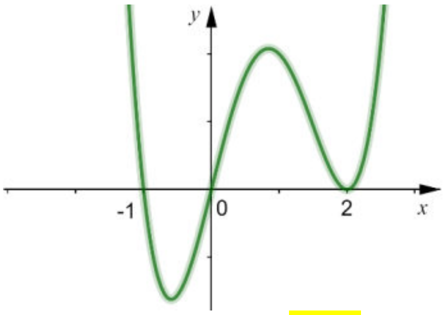
Số nghiệm của phương trình (*) là số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(|x|)$ và đường thẳng $y=m+4$.

Ta có đồ thị hàm số $y=f(|x|)$ như sau:



Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy để (*) có 6 nghiệm phân biệt thì $-1<m+4<0 \Leftrightarrow -5<m<-4$.

Câu 6: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị (C) như hình vẽ bên. Hàm số $y=f(|x|)$ có bao nhiêu điểm cực trị?



A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

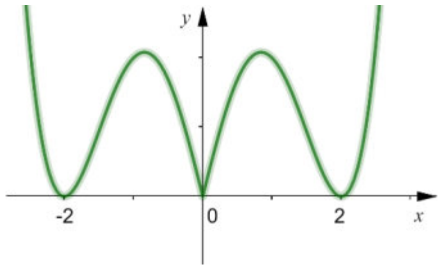
Chọn C

Đồ thị (C') của hàm số $y = f(|x|)$ được vẽ như sau:

+ Giữ nguyên phần đồ thị của (C) nằm bên phải trục tung ta được (C_1)

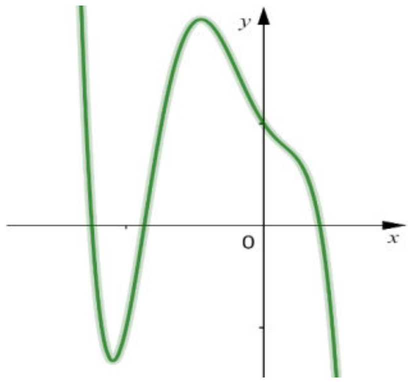
+ Lấy đối xứng qua trục tung phần đồ thị của (C_1) ta được (C_2)

+ Khi đó $(C') = (C_1) \cup (C_2)$ có đồ thị như hình vẽ dưới



Từ đồ thị (C') ta thấy hàm số $y = f(|x|)$ có 5 điểm cực trị

Câu 7: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C) như hình vẽ bên. Hàm số $y = f(|x|)$ có bao nhiêu điểm cực trị?



A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

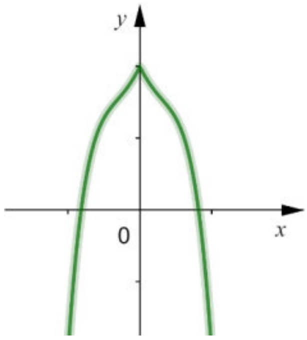
Chọn A

Đồ thị (C') của hàm số $y = f(|x|)$ được vẽ như sau:

+ Giữ nguyên phần đồ thị của (C) nằm bên phải trục tung ta được (C_1).

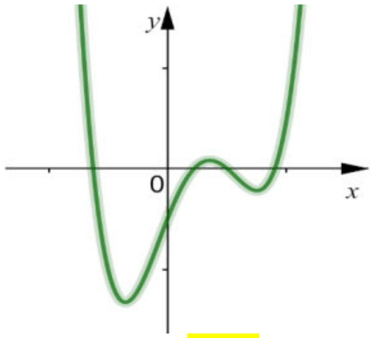
+ Lấy đối xứng qua trục tung phần đồ thị của (C_1) ta được (C_2).

+ Khi đó $(C') = (C_1) \cup (C_2)$ có đồ thị như hình vẽ dưới



Từ đồ thị (C') ta thấy hàm số $y = f(|x|)$ có 1 điểm cực trị.

Câu 8: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C) như hình vẽ bên. Hàm số $y = f(|x|)$ có bao nhiêu điểm cực trị?



A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

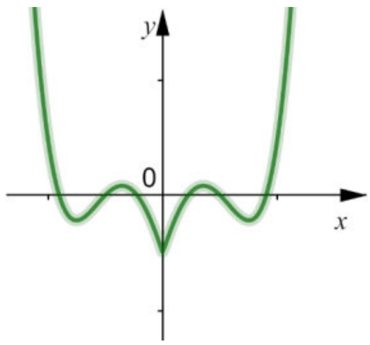
Chọn C

Đồ thị (C') của hàm số $y = f(|x|)$ được vẽ như sau:

+ Giữ nguyên phần đồ thị của (C) nằm bên phải trục tung ta được (C_1).

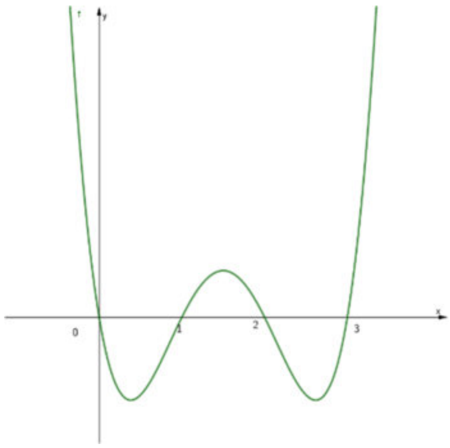
+ Lấy đối xứng qua trục tung phần đồ thị của (C_1) ta được (C_2).

+ Khi đó $(C') = (C_1) \cup (C_2)$ có đồ thị như hình vẽ dưới



Từ đồ thị (C') ta thấy hàm số $y = f(|x|)$ có 5 điểm cực trị.

Câu 9: Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số $y = f(|x|)$ là



A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 7.

Lời giải

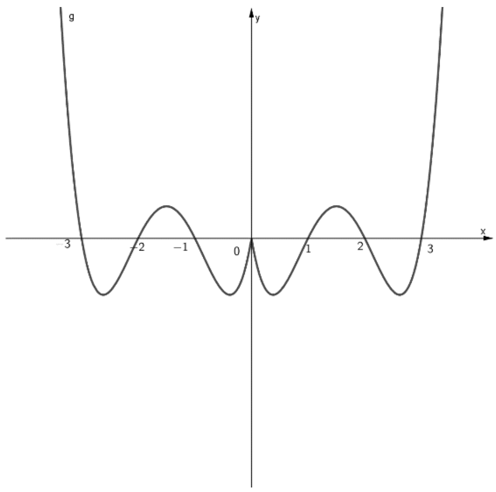
Chọn D

Đồ thị (C') của hàm số $y = f(|x|)$ được vẽ như sau:

+ Giữ nguyên phần đồ thị của (C) nằm bên phải trục tung ta được (C_1).

+ Lấy đối xứng qua trục tung phần đồ thị của (C_1) ta được (C_2).

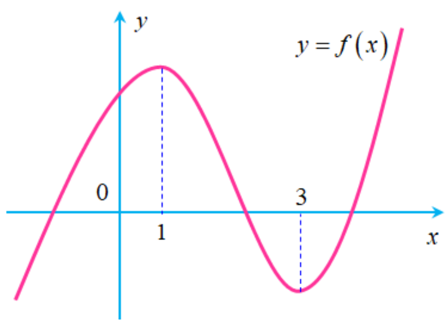
+ Khi đó $(C') = (C_1) \cup (C_2)$ có đồ thị như hình vẽ dưới



Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ có 7 cực trị.

DẠNG TOÁN 4. Biết đồ thị hàm số $y = f(x)$ xét cực trị của hàm số $y = f(|x+a|)$, $y = f(|x+a|+b)$ …

Câu 10: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x) = f(|x+m|)$ có 5 điểm cực trị ?

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn D

Từ đồ thị hàm số ta thấy:

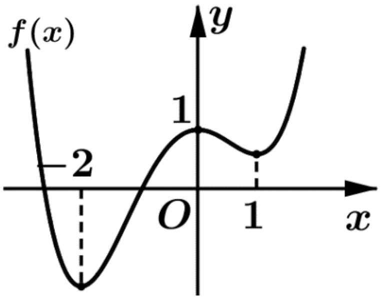
Hàm số $f(x)$ có 2 **điểm cực trị dương.**

$\longrightarrow f(|x|)$ có 5 **điểm cực trị.**

$\longrightarrow f(|x+m|)$ có 5 **điểm cực trị** với mọi m (vì tịnh tiến sang trái hay sang phải không ảnh hưởng đến **số điểm cực trị** của **hàm số**) .

Vậy có vô số giá trị m để hàm số $g(x)=f(|x+m|)$ có 5 điểm cực trị.

Câu 11: Cho hàm số $y=f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi hàm số $y=f(|x+1|-3)$ có bao nhiêu điểm cực trị?



A. 3. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 7.

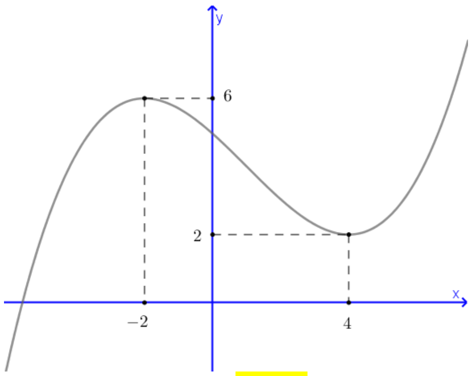
Lời giải

Chọn D

Đồ thị hàm số $y=f(|x+1|-3)$ được suy từ đồ thị hàm số $y=f(x)$ bằng cách

• Tịnh tiến sang phải 3 đơn vị;
• Xóa bỏ phần đồ thị phía bên trái trục tung, phần đồ thị phía bên phải trục tung thì lấy đối xứng qua trục tung;
• Cuối cùng tịnh tiến đồ thị sang trái 1 đơn vị.

Câu 12: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau. Hàm số $y=f(|x-3|)$ có bao nhiêu điểm cực trị?



A. 5. **B.** 6. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C

$y=f(|x-3|)(1)$, Đặt $t=|x-3|$, $t\geq 0$. Thì (1) trở thành: $y=f(t)\ \ (t\geq 0)$.

Có $t=\sqrt{(x-3)^2}\Rightarrow t'_x=\dfrac{x-3}{\sqrt{(x-3)^2}}$

Có $y'_x=t'_x f'(t)$

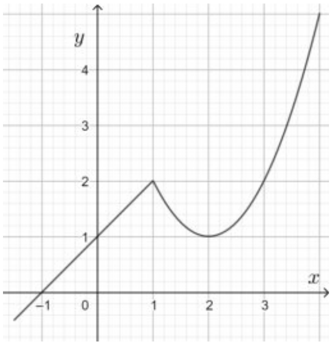
$y'_x=0\Leftrightarrow t'_x f'(t)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t'_x=0\,(\text{VN}) \\ f'(t)=0 \end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-2\,(L) \\ t=4 \end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=7 \\ x=-1 \end{array}\right.$

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		3		7		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	CT	$\nearrow$	CĐ	$\searrow$	CT	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào BBT thì hàm số $y=f\left(\left|x-3\right|\right)$ có 3 cực trị.

Câu 13: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Tìm m để hàm số $g\left(x\right)=f\left(\left|x+m\right|\right)+2019m$ có 5 điểm cực trị

A. $m>-\dfrac{1}{2}$.

B. $m>1$.

C. $m\geq -\dfrac{1}{2}$.

D. $m\geq 1$.

Lời giải

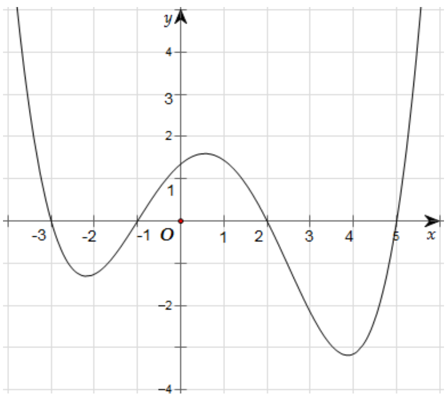
Chọn A

Tịnh tiến đồ thị $y=f\left(\left|x+m\right|\right)$ lên trên hoặc xuống dưới không làm ảnh hưởng đến số điểm cực trị của hàm số đã cho. Do đó số cực trị của hàm số $y=g\left(x\right)$ bằng số cực trị của hàm số $y=f\left(\left|x+m\right|\right)$.

Để $f\left(\left|x+m\right|\right)$ có 5 điểm cực trị thì $f\left(x+m\right)$ phải có 2 điểm cực trị dương với $x+m>0$.

Dựa vào đồ thị ta thấy $f\left(x\right)$ đạt cực trị tại $x=1, x=2$ nên $f\left(x+m\right)$ đạt cực trị tại $x=2+m; x=1+m$. Do đó $\begin{cases} 2+m+m>0 \\ 1+m+m>0 \end{cases} \Leftrightarrow m>-\dfrac{1}{2}$.

Câu 14: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y=f'\left(x\right)$ có đồ thị như hình bên. Đặt $g\left(x\right)=f\left(\left|x\right|+m\right)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g\left(x\right)$ có đúng 7 điểm cực trị?



A. 2.

B. 3.

C. 1.

D. Vô số.

Lời giải

Chọn A

Ta có $g(x)=f(|x|+m)=\begin{cases} f(x+m)\ , khi\ x\ge 0 \\ f(-x+m), khi\ x<0 \end{cases}$

Do hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ Hàm số $g(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$

Và ta lại có $g(-x)=f(|x|+m)=g(x)\Rightarrow$ Hàm số $g(x)$ là hàm số chẵn $\Rightarrow$ Đồ thị hàm số $y=g(x)$ đối xứng qua trục Oy.

Hàm số $y=g(x)$ có 7 điểm cực trị $\Leftrightarrow$ Hàm số $y=g(x)$ có 3 điểm cực trị dương, 3 điểm cực trị âm và một điểm cực trị bằng 0 (*)

Dựa vào đồ thị hàm số $y=f'(x)$, ta có: $f'(x)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=-1 \\ x=2 \\ x=5 \end{array}\right.$

Xét trên khoảng $(0;+\infty)$, ta được $g(x)=f(x+m)$

+ Ta có $g'(x)=f'(x+m)$

+ $g'(x)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+m=-3 \\ x+m=-1 \\ x+m=2 \\ x+m=5 \end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-m-3 \\ x=-m-1 \\ x=-m+2 \\ x=-m+5 \end{array}\right.$

+ Nhận thấy $-m-3<-m-1<-m+2<-m+5$

Theo yêu cầu (*) bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} -m-1>0 \\ -m-3\le 0 \end{cases}\Leftrightarrow -3\le m<-1\Leftrightarrow \begin{cases} m\in\mathbb{Z} \\ m\in\{-3;-2\} \end{cases}$

DẠNG TOÁN 5. Biết bảng biến thiên hàm số $y=f(x)$ xét cực trị của hàm số $y=|f(x)|$

Câu 15: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau. Đồ thị hàm số $y=|f(x)|$ có bao nhiêu điểm cực trị .

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	0	-	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	-4	↗	2	↘	$-\infty$

A. 5. **B.** 6. **C.** 3. **D.** 7.

Lời giải

Chọn D

Đồ thị hàm $y=|f(x)|$ gồm 2 phần:

+ Phần đồ thị $y = f(x)$ nằm trên Ox (Kể cả giao điểm trên trục Ox)

+ Phần đồ thị lấy đối xứng qua Ox của đồ thị $y = f(x)$ nằm dưới Ox

Từ đó ta có bảng biến thiên của $y=|f(x)|$.

x	$-\infty$	x_1	-2	x_2	0	x_3	2	x_4	$+\infty$
$\lvert f(x)\rvert$	$+\infty$	0	2	0	4	0	2	0	$+\infty$

Từ bảng biến thiên này hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|$ có 7 cực trị.

Câu 16: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau. Đồ thị hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$		1		2		1		$+\infty$

A. 5. **B.** 6. **C.** 3. **D.** 7.

Lời giải

Chọn C

Đồ thị hàm $y=\left|f\left(x\right)\right|$ gồm 2 phần:

+ Phần đồ thị $y = f\left(x\right)$ nằm trên Ox (Kể cả giao điểm trên trục Ox)

+ Phần đồ thị lấy đối xứng qua Ox của đồ thị $y = f\left(x\right)$ nằm dưới Ox

Từ đó ta có bảng biến thiên của $y=\left|f\left(x\right)\right|$.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$\lvert f(x)\rvert$	$+\infty$		1		2		1		$+\infty$

Từ bảng biến thiên này hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|$ có 3 cực trị.

Câu 17: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau. Đồ thị hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị

x	$-\infty$		-3		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$		-76		5		-76		$+\infty$

A. 5. **B.** 6. **C.** 3. **D.** 7.

Lời giải

Chọn D

Đồ thị hàm $y=|f(x)|$ gồm 2 phần:

+ Phần đồ thị $y = f(x)$ nằm trên Ox (Kể cả giao điểm trên trục Ox)

+ Phần đồ thị lấy đối xứng qua Ox của đồ thị $y = f(x)$ nằm dưới Ox

Từ đó ta có bảng biến thiên của $y=|f(x)|$.

x	$-\infty$	x_1	-3	x_2	0	x_3	3	x_4	$+\infty$
$\|f(x)\|$	$+\infty$	0	76	0	5	0	76	0	$+\infty$

Từ bảng biến thiên này hàm số $y=|f(x)|$ có 7 cực trị.

Câu 18: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau. Đồ thị hàm số $y=|f(x)|$ có bao nhiêu điểm cực trị

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$		-17		-1		-17		$+\infty$

A. 5. **B.** 6. **C.** 3. **D.** 7.

Lời giải

Chọn A

Đồ thị hàm $y=|f(x)|$ gồm 2 phần:

+ Phần đồ thị $y = f(x)$ nằm trên Ox (Kể cả giao điểm trên trục Ox)

+ Phần đồ thị lấy đối xứng qua Ox của đồ thị $y = f(x)$ nằm dưới Ox

Từ đó ta có bảng biến thiên của $y=|f(x)|$.

x	$-\infty$	x_1	-2	0	2	x_2	$+\infty$
$\|f(x)\|$	$+\infty$	0	17	1	17	0	$+\infty$

Từ bảng biến thiên này hàm số $y=|f(x)|$ có 5 cực trị.

Câu 19: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	5	↘	$-\infty$

Hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

A. 5 . **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C

Đồ thị hàm $y=\left|f\left(x\right)\right|$ gồm 2 phần:

+ Phần đồ thị $y=f\left(x\right)$ nằm trên Ox (Kể cả giao điểm trên trục Ox)

+ Phần đồ thị lấy đối xứng qua Ox của đồ thị $y=f\left(x\right)$ nằm dưới Ox

Từ đó ta có bảng biến thiên của $y=\left|f\left(x\right)\right|$.

x	$-\infty$		-1		1		x_1		$+\infty$
$\left\|f(x)\right\|$	$+\infty$	↘	0	↗	5	↘	0	↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, suy ra đồ thị hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|$ có 3 điểm cực trị.

Câu 20: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như hình vẽ:

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		+	0	$-$	0	+	
y	$-\infty$	↗	5	↘	1	↗	$+\infty$

Đồ thị hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 2 **B.** 4. **C.** 3. **D.** 5.

Lời giải

Chọn C

Vì đồ thị hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|$ gồm hai phần:

+) Phần đồ thị của hàm số $y=f\left(x\right)$ nằm trên Ox.

+) Phần đồ thị đối xứng qua Ox với phần đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ nằm dưới Ox

Nên từ bảng biến thiên của hàm số $y=f\left(x\right)$ suy ra bảng biến của hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|$ như sau:

x	$-\infty$		x_o		-1		3		$+\infty$
y'		$-$	0	+	0	$-$	0	+	
y	$+\infty$	↘	0	↗	5	↘	1	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên trên suy ra hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|$ có 3 điểm cực trị.

Câu 21: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$

Đồ thị hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 4. **B.** 2. **C.** 5. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Từ bảng biến thiên của hàm số $y=f\left(x\right)$ suy ra phương trình $f\left(x\right)=0$ có ba nghiệm phân biệt là x_1, x_2, x_3. Khi đó ta có bảng biến thiên của hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|$:

x	$-\infty$		x_1		1		x_2		2		x_3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$\|f(x)\|$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Suy ra đồ thị hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|$ có 5 điểm cực trị.

Câu 22: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\left\{1\right\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$2 \;\|\|\; +\infty$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 5.

Lời giải

Chọn A

Từ bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$, suy ra bảng biến thiên của hàm số $y=\left|f(x)\right|$ là

x	$-\infty$		x_1		-1		x_2		3		x_3		$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$2 \parallel +\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, ta suy ra hàm số có 4 điểm cực trị.

Câu 23: Tổng các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\left|x^3-3x^2-9x-5+\dfrac{m}{2}\right|$ có 5 điểm cực trị là

A. 2016. **B.** 1952. **C.** -2016. **D.** -496.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $f(x)=x^3-3x^2-9x-5+\dfrac{m}{2}$.

Ta có $f'(x)=3x^2-6x-9=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=3 \end{array}\right.$.

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\dfrac{m}{2}$	$\searrow$	$\dfrac{m}{2}-32$	$\nearrow$	$+\infty$

Để thỏa yêu cầu thì trục Ox phải cắt ngang đồ thị tại 3 điểm phân biệt, tức là:

$\begin{cases} \dfrac{m}{2}>0 \\ \dfrac{m}{2}-32<0 \end{cases} \Leftrightarrow 0<m<64$ thì $f(x)=x^3-3x^2-9x-5+\dfrac{m}{2}=0$ có ba nghiệm x_1; x_2; x_3 với $x_1<-1<x_2<3<x_3$, ta có bảng biến thiên của hàm số đã cho là

x	$-\infty$		x_1		-1		x_2		3		x_3		$+\infty$
y'		$-$	$\vert$	$+$	0	$-$	$\vert$	$+$	0	$-$	$\vert$	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\dfrac{m}{2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$32-\dfrac{m}{2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Trường hợp này hàm số đã cho có 5 điểm cực trị.

Như vậy, các giá trị nguyên của m để hàm số đã cho có 5 điểm cực trị là $m\in\{1;2;3;...;63\}$.

Tổng các giá trị nguyên này là:

$$S=1+2+3+...+63=\frac{63(1+63)}{2}=2016.$$

DẠNG TOÁN 6. Biết bảng biến thiên hàm số $y=f(x)$ xét cực trị của hàm số $y=\left|f(ax+b)\right|$

Câu 24: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		1		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2019	↘	-2020	↗	$+\infty$

Hỏi đồ thị hàm số $g(x)=\left|f(x-2019)+2020\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 2 . **B.** 3. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Cách 1: Đồ thị hàm số $u(x)=f(x-2019)+2020$ có được từ đồ thị $f(x)$ bằng cách tịnh tiến đồ thị $f(x)$ sang phải 2019 đơn vị và lên trên 2020 đơn vị.

Suy ra bảng biến thiên của $u(x)$

x	$-\infty$				2020		2023		$+\infty$
$u'(x)$			$+$		0	$-$	0	$+$	
$u(x)$	$-\infty$		↗		4039	↘	0	↗	$+\infty$
$\|u(x)\|$	$+\infty$	↘	0	↗	4039	↘	0	↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên suy ra đồ thị hàm số $g(x)=\left|u(x)\right|$ có 3 điểm cực trị. Chọn B.

Cách 2:

Đặt $u(x)=f(x-2019)+2020$

$$\Rightarrow u'(x)=f'(x-2019)\Rightarrow u'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2020\\x=2023\end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$				2020		2023		$+\infty$
$u'(x)$			$+$		0	$-$	0	$+$	
$u(x)$	$-\infty$		↗		4039	↘	0	↗	$+\infty$
$\|u(x)\|$	$+\infty$	↘	0	↗	4039	↘	0	↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên suy ra đồ thị hàm số $g(x)=|u(x)|$ có 3 điểm cực trị.

Chọn B.

Câu 25: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	5	↘	-3	↗	$+\infty$

Hàm số $y=|f(1-3x)+1|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Chọn D

Đặt $g(x)=f(1-3x)+1$.

$\Rightarrow g'(x)=-3.f(1-3x)$.

$$\Rightarrow g'(x)=0\Leftrightarrow f(1-3x)=0 \Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}1-3x=-1\\1-3x=3\end{array}\right.\Leftrightarrow\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{2}{3}\\x=-\dfrac{2}{3}\end{array}\right.$$

Suy ra bảng biến thiên:

x	$-\infty$				$-\frac{2}{3}$				$\frac{2}{3}$				$+\infty$
$g'(x)$			−		0		+		0		−		
$g(x)$	$+\infty$		↘		-3		↗		5		↘		$-\infty$
$\lvert g(x)\rvert$	$+\infty$	↘	0	↗	3	↘	0	↗	5	↘	0	↗	$+\infty$

Vậy hàm số $y=|g(x)|$ có 5 điểm cực trị.

Câu 26: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
f'		+	0	−	0	+	
f	$-\infty$	↗	11	↘	4	↗	$+\infty$

Biết đồ thị hàm số $g(x)=|f(x)-m|$ có 5 điểm cực trị. Khi đó số các giá trị nguyên của tham số của m là

A. 6. **B.** 7. **C.** 8. **D.** 9.

Lời giải

Chọn B

Do hàm $y=f(x)$ có hai điểm cực trị nên $y=f(x)-m$ có hai điểm cực trị.

Để thoả mãn yêu cầu bài thì số giao điểm của đồ thị $y = f(x) - m$ với trục hoành phải là 3 hay số giao điểm của $y = f(x)$ và $y = m$ phải là 3. $g(x) = f(1-3x) \Rightarrow g'(x) = -3.f'(1-3x)$

Suy ra $4 < m < 11$.

Do $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{4,5,6,7,8,9,10\}$ nên chọn đáp án B.

Câu 27: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	11	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

Đồ thị hàm số $y = |f(x) - 2m|$ có 5 điểm cực trị khi và chỉ khi

A. $m \in (4;11)$. **B.** $m \in \left(2;\frac{11}{2}\right)$. **C.** $m = 3$. **D.** $m \in \left[2;\frac{11}{2}\right]$.

Lời giải

Chọn B

Từ bảng biến thiên ta có đồ thị hàm số $y = f(x)$ có hai điểm cực trị.

Để đồ thị hàm số $y = |f(x) - 2m|$ có 5 điểm cực trị thì đồ thị $y = f(x)$ cắt đường thẳng $y = 2m$ tại $5 - 2 = 3$ điểm phân biệt $\Leftrightarrow 4 < 2m < 11 \Leftrightarrow 2 < m < \frac{11}{2}$.

DẠNG TOÁN 7. Biết bảng biến thiên hàm số $y = f(x)$ xét cực trị của hàm số $y = f(|x|)$

Lý thuyết:

❖ Ta có $y = f(|x|) = \begin{cases} f(x) \ khi\, x \ge 0 \\ f(-x) \ khi\, x < 0 \end{cases}$.

Do đó, đồ thị (C') của hàm số $y = f(|x|)$ có thể được suy từ đồ thị (C) của hàm số $y = f(x)$ như sau:

+ Giữ nguyên phần đồ thị (C) ở bên phải trục tung (kể cả giao điểm của (C) với trục tung – nếu có), bỏ phần bên trái trục tung.

+ Lấy đối xứng phần bên phải trục tung qua trục tung.

+ Đồ thị (C') là hợp của hai phần trên.

❖ Từ bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ ta suy ra số điểm cực trị, dấu của các điểm cực trị của hàm số và sự tồn tại giao điểm với trục tung (nếu có).

❖ **Phương pháp chung giải quyết Bài toán:** Biết bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = f(|x|)$:

- Bước 1: Từ bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$, suy ra số điểm cực trị dương của hàm số $y = f(x)$. Giải sử có n điểm.

- Bước 2: Xét sự tồn tại giao điểm của đồ thị (C) của hàm số $y = f(x)$ với trục tung.

- Bước 3: Xác định số điểm cực trị của hàm số $y = f(|x|)$

✓ Trường hợp 1: Đồ thị (C) của hàm số $y = f(x)$ cắt trục tung. Khi đó số điểm cực trị của hàm số $y = f(|x|)$ bằng $2n+1$

✓ Trường hợp 2: Đồ thị (C) của hàm số $y=f(x)$ không cắt trục tung. Khi đó số điểm cực trị của hàm số $y=f(|x|)$ bằng $2n$.

Câu 28: Bài tập:

Câu 29: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, có bảng biến thiên như hình vẽ. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y=f(|x|)$.

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Từ bảng biến thiên ta thấy đồ thị hàm số $y=f(x)$ cắt trục Oy tại điểm cực đại và hàm số không có điểm cực trị dương nên hàm số $y=f(|x|)$ có đúng 1 điểm cực trị $x=0$.

Câu 30: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, có bảng biến thiên như hình vẽ. Tìm số điểm cực tiểu của hàm số $y=f(|x|)$.

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Từ bảng biến thiên ta thấy đồ thị hàm số $y=f(x)$ cắt trục Oy và có 1 điểm cực tiểu dương, mà đồ thị hàm số $y=f(|x|)$ nhận Oy làm trục đối xứng nên hàm số $y=f(|x|)$ có 2 điểm cực tiểu là $x=\pm 1$.

Câu 31: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Hàm số $y=f(|x|)$ có 3 điểm cực trị.

B. Hàm số $y=f(|x|)$ có một điểm cực đại.

C. Hàm số $y = f(|x|)$ có hai điểm cực tiểu.

D. Hàm số $y = f(|x|)$ có ba điểm cực tiểu.

Lời giải

Chọn D

Từ bảng biến thiên ta thấy đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt trục Oy và có 2 điểm cực trị dương, mà đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ nhận Oy làm trục đối xứng nên hàm số $y = f(|x|)$ có $2.2+1=5$ điểm cực trị trong đó có 3 điểm cực tiểu là các diểm $x = 0, x = \pm 3$.

Câu 32: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Mệnh đề nào sau đây sai?

A. Hàm số $y = f(|x|)$ không có điểm cực đại.

B. Hàm số $y = f(|x|)$ có một điểm cực trị.

C. Hàm số $y = f(|x|)$ có một cực trị dương.

D. Hàm số $y = f(|x|)$ không có điểm cực trị.

Lời giải

Chọn D

Từ bảng biến thiên ta thấy đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt trục Oy và không có cực trị, mà đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ nhận Oy làm trục đối xứng nên từ BBT suy ra hàm số $y = f(|x|)$ có đúng 1 điểm cực trị là điểm cực tiểu $x = 0$.

Câu 33: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, có bảng biến thiên như hình vẽ. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = f(|x|)$.

x	$-\infty$		-2		1		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	$-\infty$

A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 5.

Lời giải

Chọn D

Từ bảng biến thiên ta thấy đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt trục Oy và có 2 điểm cực trị dương, mà đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ nhận Oy làm trục đối xứng nên hàm số $y = f(|x|)$ có $2.2+1=5$ điểm cực trị.

Câu 34: Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\left\{-1\right\}$ và liên tục trên các khoảng xác định của nó, có bảng biến thiên như hình vẽ. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = f\left(\left|x\right|\right)$.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	||	$+$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	1

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải

Chọn B

Từ bảng biến thiên ta thấy đồ thị hàm số $y = f\left(x\right)$ cắt trục Oy và không có cực trị, mà đồ thị hàm số $y = f\left(\left|x\right|\right)$ nhận Oy làm trục đối xứng nên từ BBT suy ra hàm số $y = f\left(\left|x\right|\right)$ có đúng 1 điểm cực trị là điểm cực tiểu $x = 0$.

Câu 35: Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\left\{0\right\}$ và liên tục trên các khoảng xác định của nó, có bảng biến thiên như hình vẽ. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = f\left(\left|x\right|\right)$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	||	$-$	
$f(x)$	2	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	2

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Từ bảng biến thiên ta thấy đồ thị hàm số $y = f\left(x\right)$ không cắt trục Oy và không có cực trị, nên từ BBT suy ra hàm số $y = f\left(\left|x\right|\right)$ không có điểm cực trị.

Câu 36: Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\left\{0\right\}$ và liên tục trên các khoảng xác định của nó, có bảng biến thiên như hình vẽ. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = f\left(\left|x\right|\right)$.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Hàm số $y = f\left(\left|x\right|\right)$ có một điểm cực đại, một điểm cực tiểu.

B. Hàm số $y = f\left(\left|x\right|\right)$ có hai điểm cực đại.

C. Hàm số $y = f\left(\left|x\right|\right)$ có hai điểm cực tiểu.

D. Hàm số $y=f\left(|x|\right)$ có ba điểm cực trị.

Lời giải

Chọn C

Từ bảng biến thiên ta thấy đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ không cắt trục Oy và có 1 điểm cực trị dương, mà đồ thị hàm số $y=f\left(|x|\right)$ nhận Oy làm trục đối xứng nên từ BBT suy ra hàm số $y=f\left(|x|\right)$ có đúng 2 điểm cực trị là 2 điểm cực tiểu $x=\pm 1$.

Câu 37: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định trên $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ và liên tục trên các khoảng xác định của nó, có bảng biến thiên như hình vẽ. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y=f\left(|x|\right)$.

x	$-\infty$		-3		1		5		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

Mệnh đề nào sau đây sai?

A. Hàm số $y=f\left(|x|\right)$ hai điểm cực trị không âm.

B. Hàm số $y=f\left(|x|\right)$ có hai điểm cực đại.

C. Hàm số $y=f\left(|x|\right)$ có hai điểm cực tiểu.

D. Hàm số $y=f\left(|x|\right)$ có ba điểm cực trị.

Lời giải

Chọn B

Từ bảng biến thiên ta thấy đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ cắt trục Oy và hàm số $y=f\left(x\right)$ có một cực trị dương, mà đồ thị hàm số $y=f\left(|x|\right)$ nhận Oy làm trục đối xứng nên từ BBT suy ra hàm số $y=f\left(|x|\right)$ có 3 điểm cực trị, trong đó có 2 điểm cực tiểu $x=\pm 5$ và một điểm cực đại $x=0$.

Câu 38: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định trên $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$, liên tục trên các khoảng xác định của nó và có bảng biến thiên như hình vẽ:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	||	$+$	0	$-$	
y	1	↗	$+\infty$ || $-\infty$	↗	2	↘	1

Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Đồ thị hàm số $y=f\left(|x|\right)$ có 1 điểm cực trị.

B. Đồ thị hàm số $y=f\left(|x|\right)$ có 1 điểm cực đại.

C. Đồ thị hàm số $y=f\left(|x|\right)$ có 1 điểm cực tiểu.

D. Đồ thị hàm số $y=f\left(|x|\right)$ không có điểm cực tiểu .

Lời giải

Chọn C

Từ bảng biến thiên ta thấy đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ cắt trục Oy và hàm số $y=f\left(x\right)$ có một cực trị dương là điểm cực đại, mà đồ thị hàm số $y=f\left(\left|x\right|\right)$ nhận Oy làm trục đối xứng nên từ BBT suy ra hàm số $y=f\left(\left|x\right|\right)$ có 3 điểm cực trị, trong đó có 2 điểm cực đại $x=\pm1$ và một điểm cực tiểu $x=0$.

Câu 39: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\left\{0\right\}$ và liên tục trên từng khoảng xác định, có bảng biến thiên như hình dưới.

x	$-\infty$		0			2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	||		$-$	0	$+$	
$f(x)$	2	↘	$-\infty$ || $+\infty$		↘	2	↗	$+\infty$

Khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. Hàm số $y=f\left(\left|x\right|\right)$ có một điểm cực trị.

B. Hàm số $y=f\left(\left|x\right|\right)$ có hai điểm cực trị.

C. Hàm số $y=f\left(\left|x\right|\right)$ có ba điểm cực trị.

D. Hàm số $y=f\left(\left|x\right|\right)$ có một điểm cực tiểu.

Lời giải

Chọn B

Từ bảng biến thiên ta thấy đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ không cắt trục Oy và hàm số $y=f\left(x\right)$ có một cực trị dương là điểm cực tiểu, mà đồ thị hàm số $y=f\left(\left|x\right|\right)$ nhận Oy làm trục đối xứng nên từ BBT suy ra hàm số $y=f\left(\left|x\right|\right)$ có 2 điểm cực trị là 2 điểm cực tiểu $x=\pm2$.

Câu 40: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-2		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	6	↘	2	↗	$+\infty$

Đồ thị hàm số $y=f\left(\left|x\right|\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 3. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 1

Lời giải

Chọn A

Đồ thị hàm số $y=f\left(\left|x\right|\right)$ gồm 2 phần:

+ Phần bên phải trục Oy của đồ thị $y=f\left(x\right)$ (Kể cả giao điểm với trục Oy)

+ Đối xứng phần đồ thị trên qua trục Oy

• Hàm số $y=f\left(\left|x\right|\right)$ có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$		-4		0		4		$+\infty$
$\left(f\left(\left|x\right|\right)\right)'$		-	0	+	0	-	0	+	

$f(\lvert x\rvert)$	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$f(0)$	$\searrow$	2	$\nearrow$ $+\infty$

Từ BBT ta thấy đồ thị hàm số $y=f\left(|x|\right)$ có 3 điểm cực trị.

Câu 41: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	5	$\nearrow$	$+\infty$

Số điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=f\left(|x|\right)$ là

A. 5. **B.** 4. **C.** 7. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Từ bảng biến thiên ta thấy đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ cắt trục Oy và có 2 điểm cực trị dương, mà đồ thị hàm số $y=f\left(|x|\right)$ nhận Oy làm trục đối xứng nên đồ thị hàm số $y=f\left(|x|\right)$ có $2.2+1=5$ điểm cực trị.

DẠNG TOÁN 8. Biết bảng biến thiên hàm số $y=f\left(x\right)$ xét cực trị của hàm số $y=f\left(|x+a|\right), y=f\left(|x+a|+b\right)$ …

Câu 42: Lý thuyết:

Nhận xét: đồ thị của hàm số $y=g\left(x\right)=f\left(|ax+b|+m\right)$ nhận đường thẳng $x=-\dfrac{b}{a}$ là trục đối xứng, do đó số điểm cực trị của hàm số $y=g\left(x\right)=f\left(|ax+b|+m\right)$ bằng $2t+1$, với t là số điểm cực trị lớn hơn $-\dfrac{b}{a}$ của hàm $y=f\left(ax+b+m\right)$.

Câu 43: Bài tập:

Câu 44: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	5	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $y=f\left(|2x+1|+3\right)$ là

A. 1. **B.** 5. **C.** 0. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

+/ Ta có : Số điểm cực trị của hàm $y=f\left(|2x+1|+3\right)$ bằng $2\alpha+1$, với α bằng số điểm cực trị lớn hơn $-\dfrac{1}{2}$ của hàm $y=f\left(2x+1+3\right)=f\left(2x+4\right)$.

+/ Hàm $y=f\left(2x+4\right)$ có 2 điểm cực trị là: $\left[\begin{array}{l}2x+4=-1\\2x+4=3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{5}{2}\\x=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$

Vậy: Số điểm cực trị của hàm $y=f\left(|2x+1|+3\right)$ bằng $2.0+1=1\Rightarrow$ Chọn A.

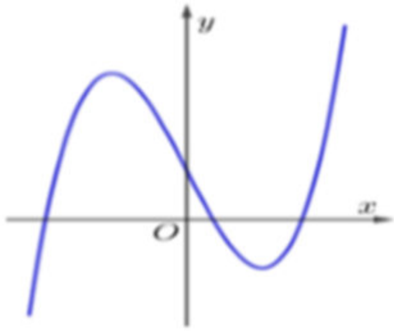
DẠNG TOÁN 9. Biết đồ thị hàm số $y=f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y=|f(x)|$

DẠNG TOÁN 10. Biết đồ thị hàm số $y=f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y=|f(ax+b)|$

DẠNG TOÁN 11. Biết đồ thị hàm số $y=f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y=f(|x|)$

DẠNG TOÁN 12. Biết đồ thị hàm số $y=f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y=f(|x+a|), y=f(|x+a|+b)$ …

Câu 45: Hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$. Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$.



Hỏi hàm số $y=f(|x|)+2018$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 5. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Phương pháp:

Tính đạo hàm của hàm hợp, giải phương trình đạo hàm để tìm số điểm cực trị

Cách giải:

Dựa vào hình vẽ, ta thấy $f'(x)=0$ có 3 nghiệm phân biệt $\left\{\begin{array}{l}x=x_1<0\\x=\{x_2;x_3\}>0\end{array}\right.$.

Ta có: $g(x)=f(|x|)+2018=\left[\begin{array}{l}f(x)+2018\ khi\ x\ge 0\\f(-x)+2018\ khi\ x<0\end{array}\right.$.

$\Rightarrow g'(x)=\left[\begin{array}{l}f'(x)\,khi\,x\ge 0\\-f'(-x)\,khi\,x<0\end{array}\right.$

$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f'(x)=0\ khi\ x\ge 0\\-f'(-x)=0\ khi\,x<0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=x_2\\x=x_3\\x=-x_2\\x=-x_3\end{array}\right.$

Do đó $g'(x)=0$ bị tiệt tiêu tại 4 điểm $x_2,-x_2,x_3,-x_3$ và không có đạo hàm tại $x=0$.

Vậy hàm số đã cho có 5 điểm cực trị.

DẠNG TOÁN 13. Biết bảng xét dấu hàm số $y=f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y=|f(x)|$

DẠNG TOÁN 14. Biết bảng xét dấu hàm số $y=f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y=|f(ax+b)|$

DẠNG TOÁN 15. Biết bảng xét dấu hàm số $y=f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y=f(|x|)$

Câu 46: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x+1)^2(x^2+m^2-3m-4)^3(x+3)^5$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $g(x)=f(|x|)$ có đúng 3 điểm cực trị?

A. 3. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 4.

Lời giải

Chọn D

Để $g(x)=f(|x|)$ có đúng 3 điểm cực trị $\Rightarrow y=f(x)$ có đúng 1 cực trị có hoành độ dương.

Mặt khác, $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=-3\\x^2=-m^2+3m+4\end{array}\right.$ (trong đó $x=-1$ là nghiệm kép).

$ycbt\Leftrightarrow -m^2+3m+4>0\Leftrightarrow -1<m<4$.

Do $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m\in\{0;1;2;3\}$.

DẠNG TOÁN 16. Biết bảng xét dấu hàm số $y=f'(x)$ xét cực trị của hàm số $y=f(|x+a|), y=f(|x+a|+b)$ …

Câu 47: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ có bảng xét dấu của hàm $y=f'(x)$ như sau

x	$-\infty$		-2		-1		1		2		$+\infty$
y'		$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	

Hàm số $y=f(|x-2|)+2020$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 5. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $y=f(|x|)=\begin{cases}f(x) & \text{khi } x\ge 0\\ f(-x) & \text{khi } x<0\end{cases}$

Khi đó ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		2		$+\infty$
y'		$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	

Do đó hàm số $y=f(|x|)$ có 5 cực trị.

$\Rightarrow f(|x-2|)$ có năm cực trị (tịnh tiến đồ thị sang phải hai đơn vị thì số cực trị không thay đổi)

$\Rightarrow y=f(|x-2|)+2020$ có 5 cực trị (tịnh tiến đồ thị lên 2020 đơn vị không làm thay đổi số cực trị).

Câu 48: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $f'(x)$ có bảng xét dấu như sau:

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=f(x^2-|x|)$ là

A. 7. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 9.

Lời giải

Chọn B

$g(x) = f\left(|x|^2 - |x|\right)$

Xét hàm số $h(x) = f\left(x^2 - x\right) \Rightarrow g(x) = h(|x|)$

Ta có $h'(x) = \left(f\left(x^2 - x\right)\right)' = (2x-1).f'\left(x^2 - x\right)$

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-1=0 \\ f'\left(x^2-x\right)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{1}{2} \\ x^2-x=-2 \\ x^2-x=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{1}{2} \\ x=-1 \\ x=2 \end{array}\right.$$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $h(x) = f\left(x^2 - x\right)$:

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$h(x)$		↗		↘		↗		↘	

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số $h(x)$ có 2 điểm cực trị dương nên hàm số $g(x) = h(|x|)$ có 5 điểm cực trị.

Câu 49: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu như sau:

x	$-\infty$		-2		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	0	+	

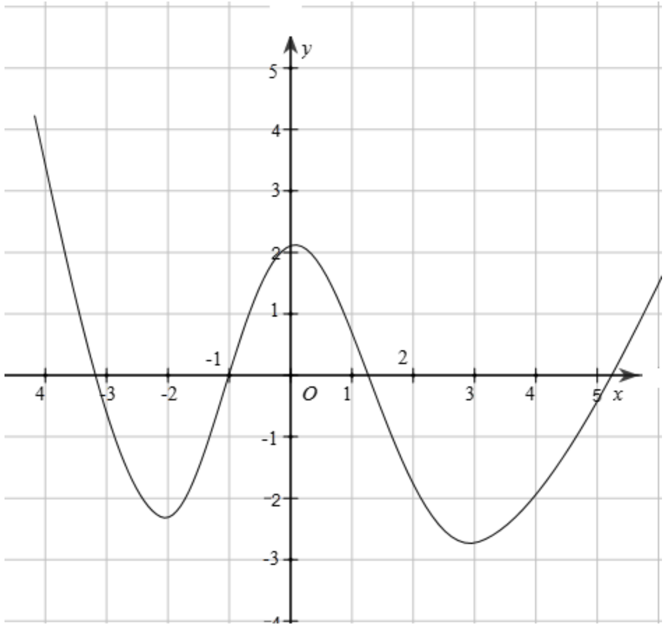
Tìm tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số $f(|x|+m)$ có 7 điểm cực trị.

A. $m < -2$. **B.** $m \geq -2$. **C.** $m < 3$. **D.** $-2 \leq m \leq 3$.

Lời giải

Chọn A

Từ bảng xét dấu của $f(x)$ ta có dạng đồ thị của $f(x)$:



Đồ thị hàm số $f(|x|+m)$ có được bằng cách tịnh tiến đồ thị hàm số $f(x)$ theo vectơ $\vec{v}=(-m;0)$, sau đó lấy đối xứng phần đồ thị của $f(x+m)$ với $x\ge 0$ qua trục Oy.

Vậy để đồ thị hàm số $f(|x|+m)$ có đúng 7 điểm cực trị thì $m<-2$.

Câu 50: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu như sau:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	

Số điểm cực trị của đồ thị hàm số $g(x)=f(|2x-3|-2)$ là

A. 5. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 7.

Lời giải

Chọn A

$$g'(x)=(|2x-3|-2)'.f'(|2x-3|-2)=\frac{2(2x-3)}{|2x-3|}.f'(|2x-3|-2)$$

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}|2x-3|-2=0\\|2x-3|-2=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=5/2\\x=1/2\\x=7/2\\x=-1/2\end{array}\right.$$

BBT:

x	$-\infty$		-1/2		1/2		3/2		5/2		7/2		$+\infty$
$g'(x)$		-	0	+	0	-	||	+	0	-	0	+	
$g(x)$		↘		↗		↘		↗		↘		↗	

Vậy đồ thị hàm số đã cho có 5 điểm cực trị .

Câu 51: Xét các số thực $c>b>a>0$. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu của đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		0		a		b		c		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

Đặt $g(x)=f\left(\left|x^3\right|\right)$. Số điểm cực trị của hàm số $y=g(x)$ là

A. 3 **B.** 7 **C.** 4 **D.** 5

Lời giải

Chọn D

Đặt $h(x)=f\left(x^3\right)$, $h'(x)=3x^2f'\left(x^3\right)$, $h'(x)=0\Leftrightarrow 3x^2f'\left(x^3\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2=0\\f'\left(x^3\right)=0\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^3=0\\x^3=a\\x^3=b\\x^3=c\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\sqrt[3]{a}\\x=\sqrt[3]{b}\\x=\sqrt[3]{c}\end{array}\right.$. Ta có $g(x)=f\left(\left|x^3\right|\right)=f\left(|x|^3\right)=h(|x|)$.

BBT của hàm số $g'(x)$

x	$-\infty$		$-\sqrt[3]{c}$		$-\sqrt[3]{b}$		$-\sqrt[3]{a}$		0		$\sqrt[3]{a}$		$\sqrt[3]{b}$		$\sqrt[3]{c}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

Số điểm cực trị của hàm số $y=g(x)$ là 5.

CÁC DẠNG TOÁN VỀ HÀM ẨN LIÊN QUAN ĐẾN BÀI TOÁN GTLN GTNN CỦA HÀM SỐ

PHẦN I: Xác định trực tiếp GTLN, NN hoặc thông qua phép biến đổi đồ thị

1. Cho đồ thị, BBT của hàm số $y=f\left(x\right)$, tìm GTLN, GTNN của hàm số $y=f\left(x\right), y=f\left(u\left(x\right)\right)$ trên khoảng, đoạn.
2. Cho đồ thị, BBT của hàm số $y=f\left(x\right)$, tìm GTLN, GTNN của hàm số $y=f\left(\left|x\right|\right), y=f\left(\left|u\left(x\right)\right|\right)$ trên khoảng, đoạn.
3. Cho đồ thị, BBT của hàm số $y=f\left(x\right)$, tìm GTLN, GTNN của hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|, y=\left|f\left(u\left(x\right)\right)\right|$ trên khoảng, đoạn.
4. Cho đồ thị, BBT của hàm số $y=f\left(x\right)$, tìm GTLN, GTNN của hàm số $y=f\left(\left|x\right|+b\right), y=f\left(\left|u\left(x\right)\right|+b\right), y=f\left(\left|x+a\right|+b\right), y=f\left(\left|u\left(x\right)+a\right|+b\right)$ trên khoảng, đoạn.
5. Cho đồ thị, BBT của hàm số $y=f\left(x\right)$, tìm GTLN, GTNN của hàm số $y=\left|f\left(x\right)+b\right|, y=\left|f\left(u\left(x\right)\right)+b\right|, y=\left|f\left(x+a\right)+b\right|, y=\left|f\left(u\left(x\right)+a\right)+b\right|$ trên khoảng, đoạn.
6. Cho đồ thị, BBT của hàm số $y=f\left(x\right)$, tìm GTLN, GTNN của hàm số $y=\left|f\left(\left|x\right|\right)+b\right|, y=\left|f\left(\left|u\left(x\right)\right|\right)+b\right|, y=\left|f\left(\left|x+a\right|\right)+b\right|, y=\left|f\left(\left|u\left(x\right)+a\right|\right)+b\right|$ trên khoảng, đoạn.

PHẦN II: Xác định GTLN, NN hoặc so sánh các giá trị của hàm số thông qua tích phân hoặc so sánh diện tích hình phẳng.

7. Cho đồ thị, BBT của hàm số $y=f'\left(x\right)$, tìm GTLN, GTNN của hàm số $y=f\left(x\right)$ trên khoảng, đoạn.
8. Cho đồ thị, BBT của hàm số $y=f'\left(x\right)$, tìm GTLN, GTNN của hàm số $y=f\left(\left|x\right|\right)$ trên khoảng, đoạn.
9. Cho đồ thị, BBT của hàm số $y=f'\left(x\right)$, tìm GTLN, GTNN của hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|$ trên khoảng, đoạn.
10. Cho đồ thị, BBT của hàm số $y=f'\left(x\right)$, tìm GTLN, GTNN của hàm số $y=f\left(\left|x+a\right|+b\right)$ trên khoảng, đoạn.
11. Cho đồ thị, BBT của hàm số $y=f'\left(x\right)$, tìm GTLN, GTNN của hàm số $y=\left|f\left(x\right)+b\right|$ trên khoảng, đoạn.
12. Các dạng khác.

PHẦN I: Xác định trực tiếp GTLN, NN hoặc thông qua phép biến đổi đồ thị

Dạng 1: Cho đồ thị, bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$, tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x), y = f(u(x))$ trên khoảng, đoạn.

Câu 1. Biết hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có M và m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[0;2]$. Hàm số $y = f\left(\frac{4x}{x^2+1}\right)$ có tổng giá trị lớn nhất và nhỏ nhất là

A. $M + m$. **B.** $2M + m$. **C.** $M + 2m$. **D.** $2M + 2m$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $g(x) = \frac{4x}{x^2+1}$, $x \in [0;2]$. Ta có: $g'(x) = \frac{-4x^2+4}{(x^2+1)^2}$.

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \in [0;2]$.

Bảng biến thiên:

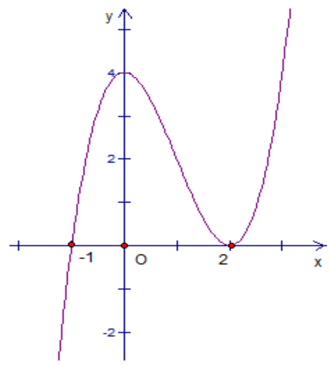
x	0		1		2
$g(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	$\frac{8}{5}$

Dựa vào bảng biến thiên, ta có: $0 \le g(x) \le 2$.

Do đó: Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có M và m lần lượt là GTLN, GTNN của hàm số trên đoạn $[0;2]$ khi và chỉ khi hàm số $y = f[g(x)]$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có M và m lần lượt là GTLN, GTNN của hàm số trên đoạn $[0;2]$.

Vậy tổng giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = f\left(\frac{4x}{x^2+1}\right)$ là $M + m$.

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Khi đó hàm số $y = f(2 - x^2)$ đạt GTLN trên $\left[0;\sqrt{2}\right]$ bằng



A. $f(0)$. **B.** $f(1)$.

C. $f(\sqrt{2})$. **D.** $f(2)$.

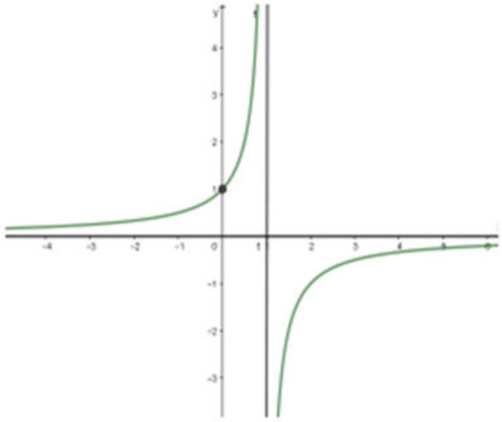
Lời giải

Chọn A

Đặt $t = 2 - x^2$, từ $x \in \left[0;\sqrt{2}\right]$, ta có $t \in [0;2]$.

Trên $[0;2]$ hàm số $y = f(t)$ nghịch biến. Do đó $\max\limits_{[0;2]} f(t) = f(0)$.

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Biết rằng $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ và $g(x) = f(f(x))$. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $g(x)$ trên đoạn $[-3;-1]$.



A. -2. **B.** 2. **C.** 1. **D.** $-\dfrac{4}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Từ hình vẽ ta có: TCN là $y=\dfrac{a}{c}=0 \Leftrightarrow a=0$.

TCĐ là $x=-\dfrac{d}{c}=1 \Leftrightarrow c=-d$.

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 1 nên $\dfrac{b}{d}=1 \Leftrightarrow b=d\left(d\neq 0\right)$.

Khi đó $f\left(x\right)=\dfrac{d}{-dx+d}=\dfrac{1}{-x+1} \Rightarrow g\left(x\right)=f\left(f\left(x\right)\right)=\dfrac{1}{-\dfrac{1}{-x+1}+1}=\dfrac{-x+1}{-x}$.

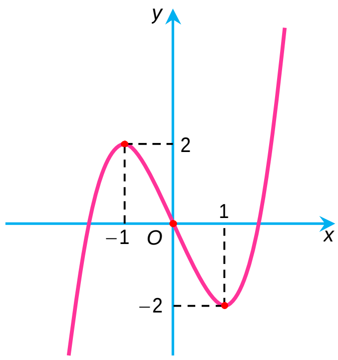
TXĐ hàm $g\left(x\right)$ là $D_g=\mathbb{R}\setminus\left\{0\right\} \Rightarrow$ hàm số $g\left(x\right)$ xác định trên $\left[-3;-1\right]$.

$g'\left(x\right)=\dfrac{1}{x^2}$, với $\forall x\in\left[-3;-1\right]$.

$g\left(-3\right)=\dfrac{4}{3}$, $g\left(-1\right)=2$.

Vậy $\max\limits_{\left[-3;-1\right]} g\left(x\right)=2$.

Câu 4. Cho x,y thoả mãn $5x^2+6xy+5y^2=16$ và hàm số bậc ba $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $P=f\left(\dfrac{x^2+y^2-2}{x^2-y^2-2xy+4}\right)$. Tính M^2+m^2.



A. $M^2+m^2=4$. **B.** $M^2+m^2=1$. **C.** $M^2+m^2=25$. **D.** $M^2+m^2=2$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $t=\dfrac{x^2+y^2-2}{x^2-y^2-2xy+4}=\dfrac{8x^2+8y^2-16}{8x^2-8y^2-16xy+2.16}=\dfrac{3x^2-6xy+3y^2}{18x^2-4xy+2y^2}$.

TH1: Xét $y=0\Rightarrow t=\dfrac{1}{6}\Rightarrow f(t)=m\in(0;-2)$.

TH2: Xét $y\neq 0\Rightarrow t=\dfrac{3\left(\dfrac{x}{y}\right)^2-6.\dfrac{x}{y}+3}{18\left(\dfrac{x}{y}\right)^2-4.\dfrac{x}{y}+2}$. Đặt $u=\dfrac{x}{y}$, ta có: $t=\dfrac{3u^2-6u+3}{18u^2-4u+2}$.

Xét $g(u)=\dfrac{3u^2-6u+3}{18u^2-4u+2}; g'(u)=\dfrac{96u^2-96u}{\left(18u^2-4u+2\right)^2}; g'(u)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u=0\\u=1\end{array}\right.$.

Ta lại có: $\lim\limits_{u\to+\infty}g(u)=\lim\limits_{u\to-\infty}g(u)=\dfrac{1}{6}$. Từ đó lập bảng biến thiên ta có

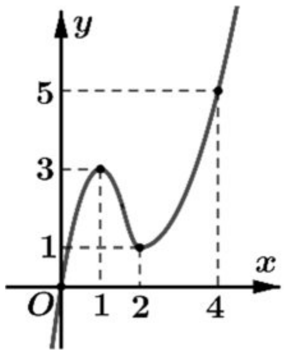
u	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$g'(u)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(u)$	$\frac{1}{6}$	$\nearrow$	$\frac{3}{2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{6}$

Từ bảng biến ta có $0\le g(u)\le\dfrac{3}{2}\Rightarrow 0\le t\le\dfrac{3}{2}$.

Quan sát đồ thị ta ta thấy rằng: $\max\limits_{\left[0;\frac{3}{2}\right]}P=0$; $\min\limits_{\left[0;\frac{3}{2}\right]}P=-2$.

Vậy $M^2+m^2=4$.

Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi M, m lần lượt là GTLN – GTNN của hàm số $g(x)=f\left[2\left(\sin^4x+\cos^4x\right)\right]$.



Tổng $M+m$ bằng

A. 3 . **B.** 5. **C.** 4. **D.** 6.

Lời giải

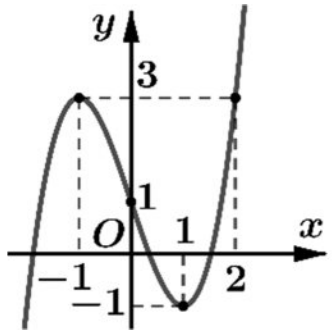
Chọn C

Ta có $\sin^4x+\cos^4x=1-\dfrac{1}{2}\sin^2 2x,\forall x\in\mathbb{R}$.

Vì $0\le\sin^2 2x\le 1,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}\le 1-\dfrac{1}{2}\sin^2 2x\le 1,\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow 1\le 2\left(\sin^4x+\cos^4x\right)\le 2$.

Dựa vào đồ thị suy ra $\begin{cases}M=\max g(x)=f(1)=3\\m=\min g(x)=f(2)=1\end{cases}\Rightarrow M+m=4$.

Câu 6. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ .



Xét hàm số $g\left(x\right)=f\left(2x^3+x-1\right)+m$. Tìm m để $\max\limits_{[0;1]} g\left(x\right)=-10$.

A. $m=3$. **B.** $m=-12$. **C.** $m=-13$. **D.** $m=6$.

Lời giải

Chọn C

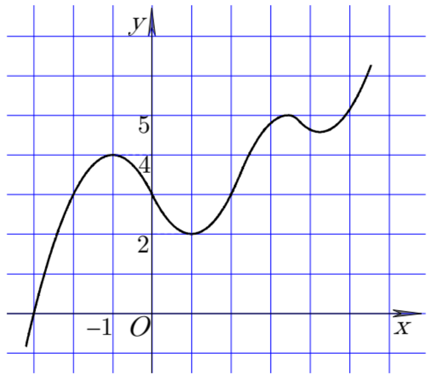
Đặt $t\left(x\right)=2x^3+x-1$ với $x\in\left[0;1\right]$. Ta có $t'\left(x\right)=6x^2+1>0,\ \forall x\in\left[0;1\right]$.

Suy ra hàm số $t\left(x\right)$ đồng biến nên $x\in\left[0;1\right]\Rightarrow t\in\left[-1;2\right]$.

Từ đồ thị hàm số ta có $\max\limits_{[-1;2]} f\left(t\right)=3\Rightarrow \max\limits_{[-1;2]}\left[f\left(t\right)+m\right]=3+m$.

Theo yêu cầu bài toán ta cần có: $3+m=-10\Leftrightarrow m=-13$.

Câu 7. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Giá trị lớn nhất của hàm số $y=f\left(2\sin x\right)$ trên $\left(0;\pi\right)$ là

A. 5. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t=2\sin x$. Với $x\in\left(0;\pi\right)$ thì $t\in\left(0;2\right]$.

Dựa vào đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ ta có $\max\limits_{(0;\pi)} f\left(2\sin x\right)=\max\limits_{(0;2]} f\left(t\right)=f\left(2\right)=3$.

Câu 8. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên dạng

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	-2	-	0	+	2	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	-4	↗	0	↗	$+\infty$

Hàm số $y=f(2\sin x)$ đạt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất lần lượt là M và m. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $m=-2M$. **B.** $M=2m$. **C.** $M+m=0$. **D.** $M+m=2$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $-1 \le \sin x \le 1 \Leftrightarrow -2 \le 2\sin x \le 2$.

Với $t = 2\sin x \Rightarrow t \in [-2;2]$.

Khi đó:

$M = \max f(2\sin x) = \max\limits_{[-2;2]} f(t) = 2.$

$m = \min f(2\sin x) = \min\limits_{[-2;2]} f(t) = -4.$

Câu 9. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên tập $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		1		$\frac{21}{4}$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	0	-	
$f(x)$	$-\infty$	↗	4	↘	2	↗	5	↘	$+\infty$

Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x^2 - 2x)$ trên đoạn $\left[-\frac{3}{2}; \frac{7}{2}\right]$. Tìm khẳng định **sai** trong các khẳng định sau.

A. $M.m > 10$. **B.** $\frac{M}{m} > 2$. **C.** $M - m > 3$. **D.** $M + m > 7$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t = x^2 - 2x$. Ta có $x \in \left[-\frac{3}{2}; \frac{7}{2}\right] \Leftrightarrow -\frac{5}{2} \le x - 1 \le \frac{5}{2} \Leftrightarrow 0 \le (x-1)^2 \le \frac{25}{4}$

$\Leftrightarrow -1 \le (x-1)^2 - 1 \le \frac{21}{4}$ nên $t \in \left[-1; \frac{21}{4}\right]$.

Xét hàm số $y = f(t), t \in \left[-1; \frac{21}{4}\right]$

Từ bảng biến thiên suy ra: $m = \min\limits_{t \in \left[-1; \frac{21}{4}\right]} f(t) = f(1) = 2, M = \max\limits_{t \in \left[-1; \frac{21}{4}\right]} f(t) = f\left(\frac{21}{4}\right) = 5 \Rightarrow \frac{M}{m} > 2$.

Câu 10. Cho hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	+	0	$-$	0	+	
y	$+\infty$	↘	2	↗	3	↘	2	↗	$+\infty$

Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x+3)$ trên đoạn $[0;2]$ là

A. 64. **B.** 65. **C.** 66. **D.** 67.

Lời giải

Chọn C

Hàm số có dạng $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$. Từ bảng biến thiên ta có:

$$\begin{cases} f(0)=3 \\ f(1)=2 \\ f'(1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=3 \\ a+b+c=2 \\ 4a+2b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=3 \\ b=-2 \\ a=1 \end{cases} \Rightarrow f(x)=x^4-2x^2+3.$$

$x\in[0;2] \Rightarrow x+3\in[3;5]$.

Trên đoạn $[3;5]$ hàm số tăng, do đó $\min\limits_{[0;2]} f(x+3)=f(3)=66$.

Câu 11. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[-2;4]$ và có bảng biến thiên như sau

x	-2		-1		1		4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1

Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x)=f\left(\cos 2x-4\sin^2 x+3\right)$. Giá trị của $M-m$ bằng

A. 4. **B.** -4. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\cos 2x-4\sin^2 x+3=3\cos 2x+1$.

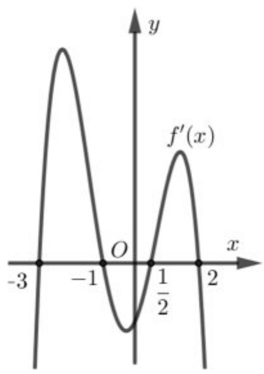
$\Rightarrow g(x)=f(3\cos 2x+1)$, đặt $t=3\cos 2x+1$, khi đó với mọi $x\in\mathbb{R}\Rightarrow t\in[-2;4]$.

Từ bảng biến thiên suy ra $\max\limits_{[-2;4]} f(t)=3; \min\limits_{[-2;4]} f(t)=-1$.

Suy ra $M=\max\limits_{\mathbb{R}} g(x)=\max\limits_{[-2;4]} f(t)=3; m=\min\limits_{\mathbb{R}} g(x)=\min\limits_{[-2;4]} f(t)=-1$.

Vậy $M-m=4$.

Câu 12. Cho hàm số $f(x)=ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex+n\ \ (a,b,c,d,e,n\in\mathbb{R})$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên (đồ thị cắt Ox tại 4 điểm có hoành độ $-3;-1;\frac{1}{2}$ và 2). Đặt $M=\max\limits_{[-3;2]} f(|x|); m=\min\limits_{[-3;2]} f(|x|)$ và $T=M+m$. Khẳng định nào sau đây đúng?



A. $T=f(-3)+f(2)$. **B.** $T=f(-3)+f(0)$.

C. $T=f\left(\frac{1}{2}\right)+f(2)$. **D.** $T=f\left(\frac{1}{2}\right)+f(0)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f'(x)=5ax^4+4bx^3+3cx^2+2dx+e=5a(x+3)(x+1)\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-2)$ (Vì phương trình $f'(x)=0$ có 4 nghiệm $-3;-1;\frac{1}{2}$ và 2).

Từ đồ thị ta có bảng biến thiên của $f(x)$

x	$-\infty$		-3		-1		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(-3)$	$\nearrow$	$f(-1)$	$\searrow$	$f\left(\frac{1}{2}\right)$	$\nearrow$	$f(2)$	$\searrow$	$-\infty$

Từ bảng biến thiên $\Rightarrow a<0$.

Suy ra bảng biến thiên của $f(|x|)$:

x	-3		-2		$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	||	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$f(-3)$	$\nearrow$	$f(-2)$	$\searrow$	$f\left(-\frac{1}{2}\right)$	$\nearrow$	$f(0)$	$\searrow$	$f\left(\frac{1}{2}\right)$	$\nearrow$	$f(2)$	$\searrow$	$-\infty$

Vì hàm số $f(|x|)$ là hàm số chẵn $\Rightarrow \begin{cases} f(-2)=f(2);\ f(-3)=f(3) \\ f\left(-\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right) \end{cases}$

+) $f(3)-f\left(\frac{1}{2}\right)=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{3} f'(x)\,dx=5a\int\limits_{\frac{1}{2}}^{3}(x+3)(x+1)\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-2)\,dx=\frac{11125a}{128}<0$

$\Rightarrow f(-3)=f(3)<f\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(-\frac{1}{2}\right)$ (1)

+) $f(2)-f(0)=\int\limits_{0}^{2} f'(x)\,dx=5a\int\limits_{0}^{2}(x+3)(x+1)\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-2)\,dx=-23a>0$

$\Rightarrow f(-2)=f(2)>f(0)$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow M=\max\limits_{[-3;2]} f(|x|)=f(-2)=f(2); m=\min\limits_{[-3;2]} f(|x|)=f(-3)$.

Vậy $T=M+m=f(-3)+f(2)$.

Câu 13. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$

Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số $y=g(x)=f(3-x)$ trên $[0;3]$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $M=f(0)$. **B.** $M=f(3)$. **C.** $M=f(1)$. **D.** $M=f(2)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $g'(x)=-f'(3-x)$.

$g'(x)=0\Leftrightarrow -f'(3-x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3-x=-1\\3-x=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=4\\x=1\end{array}\right.$.

$g'(x)>0\Leftrightarrow f'(3-x)<0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3-x<-1\\3-x>2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>4\\x<1\end{array}\right.$.

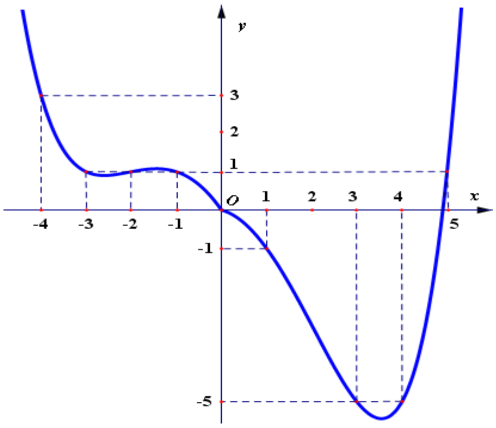
$g'(x)<0\Leftrightarrow f'(3-x)>0\Leftrightarrow -1<3-x<2\Leftrightarrow 1<x<4$.

Từ đó ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	1	2		3	4		$+\infty$
g'		$+$	0		$-$		0	$+$	
g	$-\infty$	$\nearrow$	4		$\searrow$		-2	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy $M=f(1)$.

Câu 14. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Gọi GTLN, GTNN tương ứng là M và m của hàm số $y=f\left(3-4\sqrt{6x-9x^2}\right)$. Khi đó $T=M+m$ bằng

A. -4. **B.** 2. **C.** -6. **D.** -2.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $6x-9x^2\ge 0\Leftrightarrow 0\le x\le\dfrac{2}{3}$.

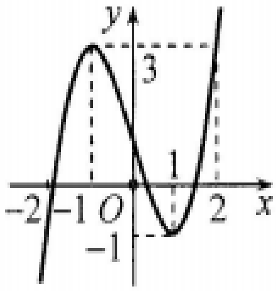
Với $x\in\left[0;\dfrac{2}{3}\right]$, ta có $0\le\sqrt{6x-9x^2}=\sqrt{1-(1-3x)^2}\le 1\Leftrightarrow 0\ge -4\sqrt{6x-9x^2}\ge -4$.

$\Leftrightarrow 3\ge 3-4\sqrt{6x-9x^2}\ge -1$.

Dựa vào đồ thị ta có: $-5\le f\left(3-4\sqrt{6x-9x^2}\right)\le 1$.

Do đó $T=M+m=-4$.

Câu 15. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây



Khi đó GTLN của hàm số $y=f\left(\sqrt{4-x^2}\right)$ trên nửa khoảng $\left[-\sqrt{2};\sqrt{3}\right)$ là

A. 3. **B.** -1. **C.** 0. **D.** Không tồn tại

Lời giải

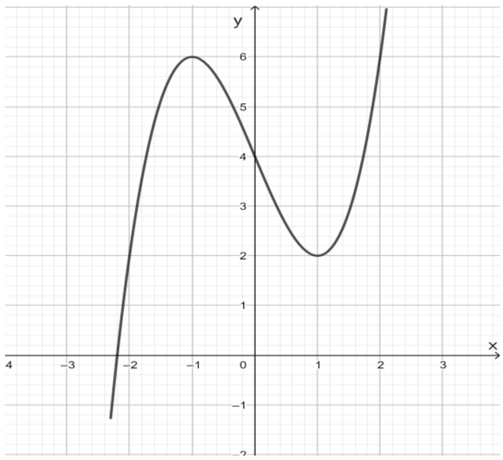
Chọn A

Đặt $t=\sqrt{4-x^2}\Rightarrow t'=-\dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}$.

Ta có: $t'=0\Leftrightarrow x=0\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{3}\right)$ do $x\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{3}\right)$ nên $t\in(1;2]$.

Dựa vào đồ thị hàm số $y=f(x)$, $x\in(1;2]$ ta suy ra GTLN bằng 3.

Câu 16. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên.



Gọi M , m lần lượt là giá truh lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x)=f\left(\dfrac{2x}{x^2+1}\right)$

Trên $(-\infty;+\infty)$. Tổng của $M+m$ bằng

A. 4. **B.** 6. **C.** 8. **D.** 12.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t=\dfrac{2x}{x^2+1}$. Ta có: $t'(x)=\dfrac{1-x^2}{\left(x^2+1\right)^2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-1\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

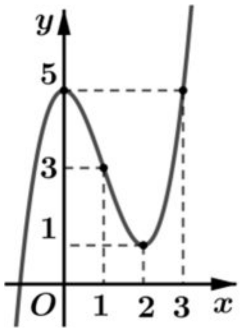
x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
t'		$-$	0	$+$	0	$-$	
t	0	↘	-1	↗	1	↘	0

Từ bảng biến thiên ta có $t\in[-1;1]$. Quan sát đồ thị hàm số trên $[-1;1]$, ta có

$$\begin{cases} M = \max\limits_{x \in R} g(x) = \max\limits_{[-1;1]} f(t) = 6 \\ m = \min\limits_{x \in R} g(x) = \min\limits_{[-1;1]} f(t) = 2 \end{cases} \Rightarrow M + m = 8.$$

Dạng 2: Cho đồ thị, BBT của hàm số $y=f(x)$, tìm GTLN, GTNN của hàm số $y=f(|x|), y=f(|u(x)|)$ trên khoảng, đoạn.

Câu 1. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục, có đạo hàm trên R và có đồ thị như hình vẽ như sau:



Hàm số $y=f(|x|)$ có giá trị nhỏ nhất trên $\mathbb{R}$ bằng

A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** Không tồn tại.

Lời giải

Chọn C

Do đồ thị hàm số $y=f(|x|)$ được suy ra từ đồ thị hàm số $y=f(x)$ bằng cách giữ nguyên phần bên phải trục Oy, bỏ phần bên trái Oy rồi lấy đối xứng phần bên phải qua trục Oy nên giá trị nhỏ nhất bằng 1.

Câu 2. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-2		0		4		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	$f(-2)$	↗	$f(0)$	↘	$f(4)$	↗	$+\infty$

Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(|x|)$ trên đoạn $[-2;4]$ bằng

A. $f(2)$. **B.** $f(0)$.

C. $f(4)$. **D.** Không xác định được.

Lời giải

Chọn C

Từ yêu cầu bài toán ta có bảng biến thiên cho hàm số $y=f(|x|)$ như sau

x	$-\infty$		-4		0		4		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	$f(4)$	↗	$f(0)$	↘	$f(4)$	↗	$+\infty$

Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy $\min\limits_{[-2;4]} f(|x|)=f(4)$.

Câu 3. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau.

x	$-\infty$		-2		1		$+$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+$	↘	-3	↗	4	↘	$-\infty$

Hàm số $y = f\left(\left|x-1\right|\right)$ có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $\left[0;2\right]$ bằng

A. $f\left(-2\right)$. **B.** $f\left(2\right)$. **C.** $f\left(1\right)$. **D.** $f\left(0\right)$.

Lời giải

Chọn C

$y = f\left(\left|x-1\right|\right)\left(1\right)$. Đặt $t = \left|x-1\right|$, $t \geq 0$ thì $\left(1\right)$ trở thành: $y = f\left(t\right)$ $\left(t \geq 0\right)$.

Có $t = \sqrt{\left(x-1\right)^2} \Rightarrow t'_x = \dfrac{x-1}{\sqrt{\left(x-1\right)^2}}$.

Có $y'_x = t'_x f'\left(t\right)$.

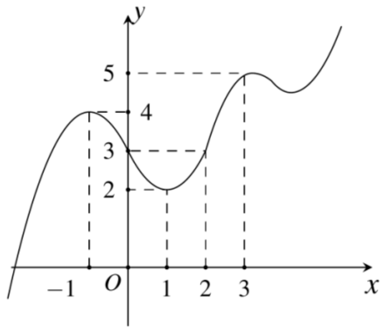
$$y'_x = 0 \Leftrightarrow t'_x f'\left(t\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t'_x = 0 \\ f'\left(t\right) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ t = -2\left(L\right) \\ t = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x-1 = 1 \\ x-1 = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2 \\ x = 0 \end{array}\right..$$

Lấy $x = 3$ có $t'\left(3\right) f'\left(2\right) < 0$, đạo hàm đổi dấu qua các nghiệm đơn nên ta có bảng biến thiên:

x	0		1		2
y'		$-$	‖	$+$	
y		↘	CT	↗	

Hàm số $y = f\left(\left|x-1\right|\right)$ có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $\left[0;2\right]$ bằng $f\left(1\right)$.

Câu 4. Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Gọi M, m theo thứ tự làGTLN, GTNN của hàm số $y = f\left(\left|x-2\right|\right)$ trên đoạn $\left[-1;5\right]$. Tổng $M+m$ bằng

A. 9. **B.** 8. **C.** 7. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C

Ta có $-1 \leq x \leq 5 \Rightarrow -3 \leq x-2 \leq 3 \Rightarrow 0 \leq \left|x-2\right| \leq 3$

Do đó $\forall x \in \left[-1;5\right]$, $0 \leq \left|x-2\right| \leq 3$.

Đặt $t = \left|x-2\right|$ với $t \in \left[0;3\right]$.

Xét hàm số $y = f\left(t\right)$ liên tục $\forall t \in \left[0;3\right]$.

Dựa vào đồ thị ta thấy $\max\limits_{[0;3]} f(t) = 5$, $\min\limits_{[0;3]} f(t) = 2$.

Suy ra $m = 2$, $M = 5$ nên $M + m = 7$.

Câu 5. Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$		1		4		6		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	-2	$\nearrow$	9	$\searrow$	$-\infty$

Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f\left(\left|-x^2 + 2x + 5\right|\right)$ trên $\left[-1;3\right]$ lần lượt là M, m. Tính $M + m$.

A. 13. **B.** 7. **C.** $f\left(2\right) - 2$. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $g\left(x\right) = -x^2 + 2x + 5$ trên $\left[-1;3\right]$.

Hàm số $g\left(x\right) = -x^2 + 2x + 5$ xác định và liên tục trên $\left[-1;3\right]$ có

$g'\left(x\right) = -2x + 2, g'\left(x\right) = 0 \Leftrightarrow -2x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \in \left[-1;3\right]$.

$g\left(1\right) = 6, g\left(-1\right) = 2, g\left(3\right) = 2$.

$\forall x \in \left[-1;3\right] \Rightarrow g\left(x\right) \in \left[2;6\right] \Rightarrow \left|g\left(x\right)\right| \in \left[2;6\right]$.

Đặt $t = \left|g\left(x\right)\right| = \left|-x^2 + 2x + 5\right|$. Ta có: $y = f\left(\left|-x^2 + 2x + 5\right|\right) = f\left(t\right)$.

$\forall x \in \left[-1;3\right] \Rightarrow t \in \left[2;6\right]$.

Dựa vào bảng biến thiên ta có hàm số $y = f\left(t\right)$ trên $\left[2;6\right]$

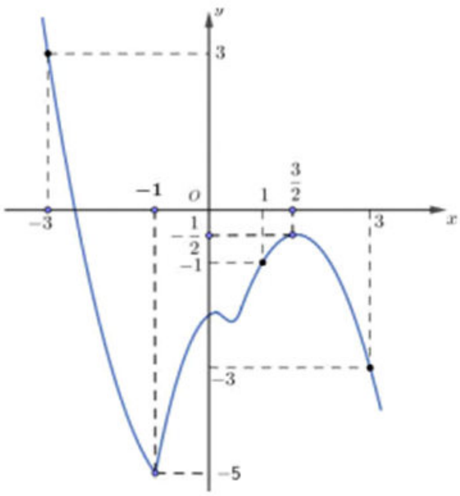
Ta có: $-2 = f\left(4\right) < f\left(2\right) < f\left(1\right) = 4$ nên

$M = \max\limits_{[2;6]} f\left(t\right) = \max\left\{f\left(2\right); f\left(4\right); f\left(6\right)\right\} = f\left(6\right) = 9$,

$m = \min\limits_{[2;6]} f\left(t\right) = \min\left\{f\left(2\right); f\left(4\right); f\left(6\right)\right\} = f\left(4\right) = -2$.

Vậy $M + m = 7$.

Câu 6. Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ liên tục trên $\left(-\infty;+\infty\right)$ và có đồ thị như hình vẽ



Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số $y=f\left(\left|x^3-3x+1\right|\right)$ trên đoạn $[-2;0]$. Tính $M+m$.

A. $M+m=-2$. **B.** $M+m=-\dfrac{7}{2}$. **C.** $M+m=-\dfrac{11}{2}$. **D.** $M+m=0$.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $g(x)=x^3-3x+1$ trên $[-2;0]$.

Hàm số xác định và liên tục trên đoạn $[-2;0]$.

$g'(x)=3x^2-3$; $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1\in(-2;0) \\ x=1\notin(-2;0) \end{array}\right.$

$g(-2)=-1$; $g(-1)=3$; $g(0)=1$.

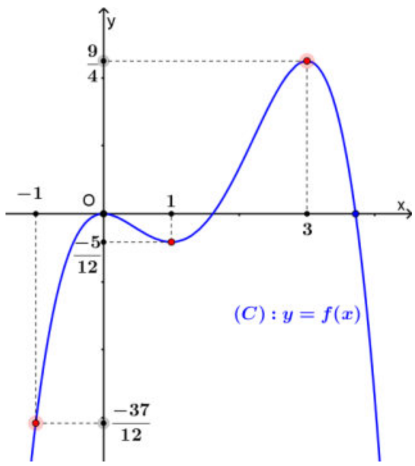
Vậy $\min\limits_{x\in[-2;0]} g(x)=-1$ và $\max\limits_{x\in[-2;0]} g(x)=3 \Rightarrow -1\le g(x)\le 3$, $\forall x\in[-2;0] \Rightarrow 0\le |g(x)|\le 3$, $\forall x\in[-2;0]$.

Xét hàm số $y=f(u)$ với $u=|g(x)|=\left|x^3-3x+1\right|$ trên $[0;3]$.

Dựa vào đồ thị hàm số ta có: $M=-\dfrac{1}{2}$ và $m=-3$.

Vậy $M+m=-\dfrac{7}{2}$.

Câu 7. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị (C) như hình vẽ.



Gọi M, m theo thứ tự là GTLN-GTNN của hàm số $y=f\left(\left|-x^3+3x^2-1\right|\right)$ trên đoạn $[-1;3]$. Tích $M.m$ bằng

A. 0. **B.** $\dfrac{-111}{16}$. **C.**

Lời giải

Chọn C

• Hàm số $y=g(x)=-x^3+3x^2-1$ liên tục trên đoạn $[-1;3]$;

+ $g'(x)=-3x^2+6x=-3x(x-2)$; $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$.

+ Vì $\begin{cases} g(-1)=3 \\ g(0)=-1 \\ g(2)=3 \\ g(3)=-1 \end{cases}$ nên $\begin{cases} \min\limits_{[-1;3]} g(x)=-1 \\ \max\limits_{[-1;3]} g(x)=3 \end{cases} \Rightarrow -1\le g(x)\le 3, \forall x\in[-1;3]$.

$\Rightarrow 0\le |g(x)|\le 3, \forall \in[-1;3]$.

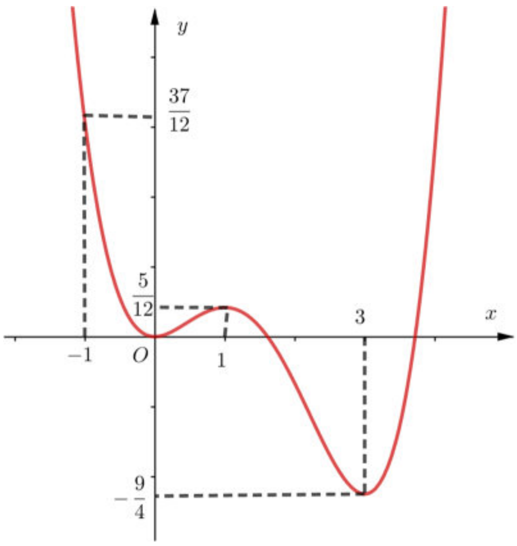
• Từ đồ thị $(C): y=f(x)$;

+ $m = \min\limits_{[-1;3]} f\left(\left|g\left(x\right)\right|\right) = \dfrac{-5}{12}$ khi $\left|g\left(x\right)\right| = 1$ tại $x = 0 \vee x = 1 \vee x = 3 \ldots$.

+ $M = \max\limits_{[-1;3]} f\left(\left|g\left(x\right)\right|\right) = \dfrac{9}{4}$ khi $\left|g\left(x\right)\right| = 3$ tại $x = -1 \vee x = 2$.

• Vậy $m.M = \dfrac{-45}{48}$.

Câu 8. Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số $y = f\left(\left|x^3 - 3x^2 + 1\right|\right)$ trên $\left[-1;3\right]$. Tính $3m + M$.

A. $3m + M = \dfrac{7}{2}$.

B. $3m + M = \dfrac{-19}{3}$.

C. $3m + M = -1$.

D. $3m + M = \dfrac{-11}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $g\left(x\right) = x^3 - 3x^2 + 1$ trên $\left[-1;3\right]$.

$g'\left(x\right) = 3x^2 - 6x$.

$g'\left(x\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \in \left(-1;3\right) \\ x = 2 \in \left(-1;3\right) \end{array}\right.$.

$g\left(-1\right) = -3$; $g\left(0\right) = 1$; $g\left(2\right) = -3$; $g\left(3\right) = 1$.

Suy ra $\max\limits_{[-1;3]} g\left(x\right) = 1$; $\min\limits_{[-1;3]} g\left(x\right) = -3 \Rightarrow -3 \le g\left(x\right) \le 1, \forall x \in \left[-1;3\right] \Rightarrow 0 \le \left|g\left(x\right)\right| \le 3, \forall x \in \left[-1;3\right]$.

Dựa vào đồ thị ta thấy :

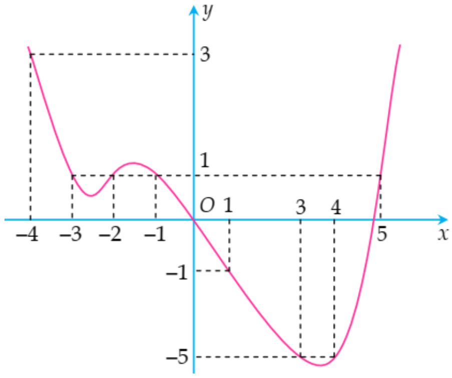
Hàm số $y = f\left(\left|x^3 - 3x^2 + 1\right|\right) = f\left(\left|g\left(x\right)\right|\right)$ đạt giá trị nhỏ nhất là $m = \dfrac{-9}{4}$ khi $\left|g\left(x\right)\right| = 3 \Leftrightarrow x = 2$.

Hàm số $y = f\left(\left|x^3 - 3x^2 + 1\right|\right) = f\left(\left|g\left(x\right)\right|\right)$ đạt giá trị lớn nhất là $M = \dfrac{5}{12}$ khi $\left|g\left(x\right)\right| = 1$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 3 \end{array}\right.$.

Vậy $3m + M = \dfrac{-19}{3}$.

Câu 9. Cho hàm số $f\left(x\right)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ.



Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f\left(\left|3-2\sqrt{6x-9x^2}\right|\right)$.

Giá trị biểu thức $T = 3M - m$ bằng

A. $T = 2$. **B.** $T = 0$. **C.** $T = -8$. **D.** $T = 14$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $6x - 9x^2 \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq \dfrac{2}{3}$.

Với $x \in \left[0; \dfrac{2}{3}\right]$ ta có: $0 \leq \sqrt{6x-9x^2} = \sqrt{-9\left(x-\dfrac{1}{3}\right)^2+1} \leq 1$.

$\Rightarrow 0 \geq -2\sqrt{6x-9x^2} \geq -2 \Leftrightarrow 3 \geq 3-2\sqrt{6x-9x^2} \geq 1$.

Đặt $u = \left|3-2\sqrt{6x-9x^2}\right| \Rightarrow 1 \leq u \leq 3$.

Xét hàm số $y = f(u)$ với $u = \left|3-2\sqrt{6x-9x^2}\right|$ trên đoạn $[1; 3]$.

Dựa vào dồ thị hàm số ta có $M = -1; m = -5 \Rightarrow T = 3M - m = -3 + 5 = 2$.

Câu 10. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$\sqrt{2}$		$+\infty$
y'		$+$	0		$-$		0		$+$		
y	$-\infty$	$\nearrow$	1		-1	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$-\sqrt{2}-1$		$+\infty$

Xét hàm số $g(x) = x + \sqrt{1-x^2}$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f\left[\left|g(x)\right|\right]$. Có bao nhiêu số nguyên thuộc đoạn $[m; M]$?

A. 3. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

Hàm số $y = g(x) = x + \sqrt{1-x^2}$ xác định và liên tục trên đoạn $[-1; 1]$.

$g'(x) = 1 - \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{\sqrt{1-x^2} - x}{\sqrt{1-x^2}}$;

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{1-x^2} - x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 1-x^2 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

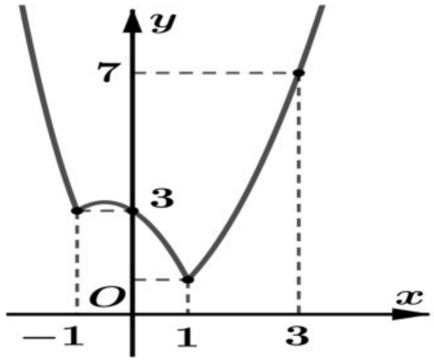
Ta có $g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}$; $g(-1)=-1$ và $g(1)=1$.

Suy ra $-1\le g(x)\le\sqrt{2}\Leftrightarrow 0\le|g(x)|\le\sqrt{2}$.

Từ bảng biến thiên của $y=f(x)$ ta được $M=-1$ và $m=-3$

Nên có 3 số nguyên thuộc khoảng $[m;M]$.

Câu 11. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên R và có đồ thị là hình bên và hàm số $y=g(t)=t^3-3t^2+5$. Gọi M, m theo thứ tự là GTLN – GTNN của $y=g(|f(x)-2|)$ trên đoạn $[-1;3]$. Tích $M.m$ bằng



A. 2. **B.** 3. **C.** 54. **D.** 12.

Lời giải

Chọn A

$y=g(|f(x)-2|)=|f(x)-2|^3-3(f(x)-2)^2+5$.

Trên $[-1;3]$, ta có $1\le f(x)\le 7\Leftrightarrow -1\le f(x)-2\le 5\longrightarrow 0\le|f(x)-2|\le 5.$

Đặt $t=|f(x)-2|$ với $t\in[0;5]$. Khi đó $y=t^3-3t^2+5\to y'=3t^2-6t=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\\t=2\end{array}\right.$.

Ta có $y(0)=5$; $y(2)=1$; $y(5)=55$. Suy ra $\begin{cases}M=55\\m=1\end{cases}\longrightarrow M.m=55.$

Câu 12. Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{\cos^2x+|\cos x|+1}{|\cos x|+1}$ là?

A. $\frac{3}{2}$. **B.** $\frac{5}{2}$. **C.** $\frac{7}{2}$. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Đặt $\cos x=t$, hàm số đã cho trở thành $y=f(t)=\dfrac{t^2+|t|+1}{|t|+1}$, với $|t|\le 1$.

Nếu $t\in[0;1]$ thì $f'(t)=\dfrac{t^2+2t}{(t+1)^2}>0$ với mọi $t\in[0;1]$.

Ta có: $\min\limits_{t\in[0;1]}f(t)=f(0)=1$; $\max\limits_{t\in[0;1]}f(t)=f(1)=\frac{3}{2}$

Nếu $t\in[-1;0]$ thì $f'(t)=\dfrac{-t^2+2t}{(-t+1)^2}<0$ với mọi $t\in[-1;0]$.

Ta có: $\min\limits_{t\in[-1;0]}f(t)=f(0)=1$; $\max\limits_{t\in[-1;0]}f(t)=f(-1)=\frac{3}{2}$.

Suy ra tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho bằng:

$$\underset{t\in[-1;1]}{\text{Min}} f(t)+\underset{t\in[-1;1]}{\text{Max}} f(t)=1+\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$$

Câu 13. Cho hàm số $f(x)=x^3-3x+a$. Gọi $M=\max\limits_{x\in[-3;2]} f(|x|)$, $m=\min\limits_{x\in[-3;2]} f(|x|)$ Có bao nhiêu giá trị nguyên của $a\in[-35;35]$ sao cho $M\le 3m$.

A. 23. **B.** 24. **C.** 25. **D.** 26.

Lời giải

Chọn B

Dễ thấy rằng $M=\max\limits_{x\in[-3;2]} f(|x|)=\max\limits_{x\in[0;3]} f(|x|)=\max\limits_{x\in[0;3]} f(x)$,

$m=\min\limits_{x\in[-3;2]} f(|x|)=\min\limits_{x\in[0;3]} f(|x|)=\min\limits_{x\in[0;3]} f(x)$.

Ta có $f'(x)=3x^2-3\Rightarrow f'(x)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1\notin[0;3] \\ x=1\in[0;3]. \end{array}\right.$

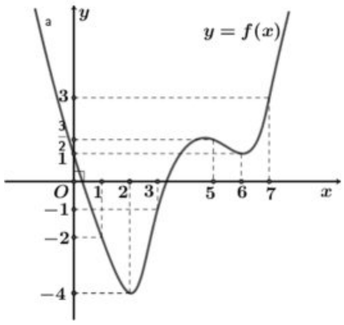
Mà $f(0)=a$, $f(1)=a-2$, $f(3)=a+18$.

Vậy $M=a+18$, $m=a-2$.

Yêu cầu bài toán tương đương với $a+18\le 3(a-2)\Leftrightarrow a\ge 12$. Kết hợp với điều kiện $a\in[-35;35]$ suy ra $a\in\{12;13;14;...;35\}$, do đó có 24 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Dạng 3: Cho đồ thị, BBT của hàm số $y=f(x)$, tìm GTLN, GTNN của hàm số $y=f(|x|), y=f(|u(x)|)$ trên khoảng, đoạn.

Câu 1. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



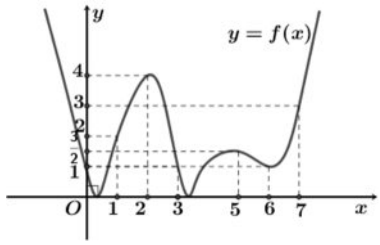
Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số $y=\left|f\left(\dfrac{3x^2+2x+3}{2x^2+2}\right)\right|$ trên $\mathbb{R}$. Tính $M+m$.

A. $M+m=4$. **B.** $M+m=7$. **C.** $M+m=5$. **D.** $M+m=6$.

Lời giải

Chọn D

Dựa vào đồ thị đã cho ta có đồ thi của hàm $y=|f(x)|$ là



Đặt $t=\dfrac{3x^2+2x+3}{2x^2+2}\Rightarrow t'=\dfrac{-4x^2+4}{(2x^2+2)^2}$; $t'=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=1 \end{array}\right.$.

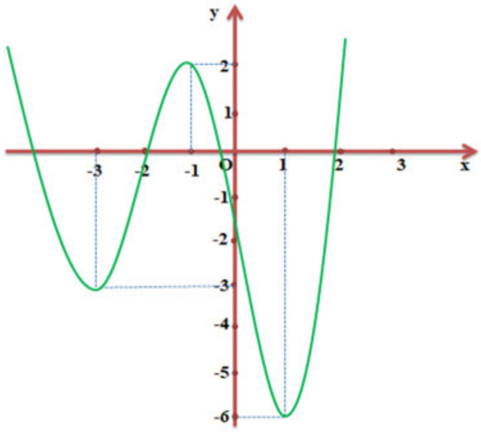
x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
t'		$-$	0	$+$	0	$-$	
t	$\frac{3}{2}$	$\searrow$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	$\frac{3}{2}$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $x \in \mathbb{R} \Rightarrow t \in [1;2]$.

$$M = \max_{\mathbb{R}} \left| f\left(\frac{3x^2+2x+3}{2x^2+2}\right) \right| = \max_{[1;2]} |f(t)| = 4;\ m = \min_{\mathbb{R}} \left| f\left(\frac{3x^2+2x+3}{2x^2+2}\right) \right| = \min_{[1;2]} |f(t)| = 2.$$

$\Rightarrow M + m = 6$.

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số $y = |f(x-1)|$ trên đoạn $[-3;3]$. Tìm M.

A. $M = 0$. **B.** $M = 6$. **C.** $M = 5$. **D.** $M = 2$.

Lời giải

Chọn B

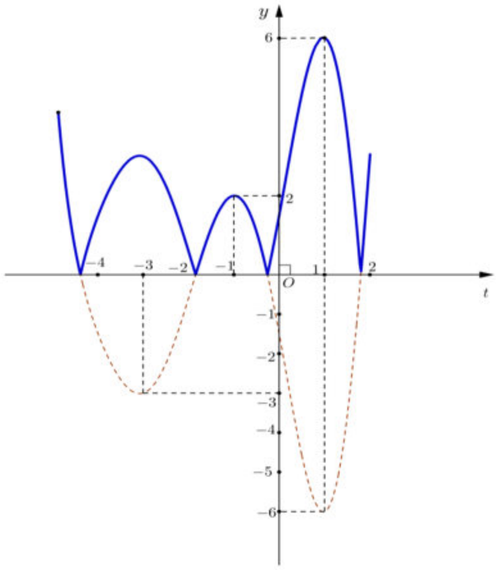
Đặt $t = x - 1$ Do $x \in [-3;3] \Rightarrow t \in [-4;2]$.

Xét hàm $y = |f(t)|$ trên $[-4;2]$.

Cách vẽ đồ thị hàm $y = |f(t)|$ trên $[-4;2]$

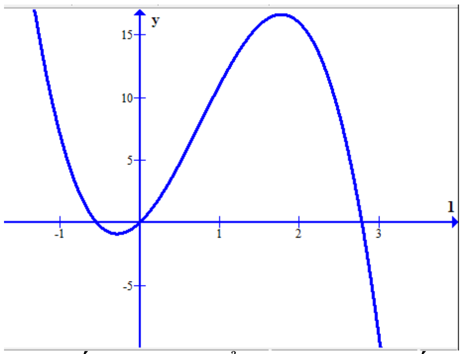
- Giữ nguyên đồ thị hàm số $y = f(x)$ ứng với phần phía trên trục hoành ta được nhánh (I).
- Lấy đối xứng phần đồ thị phía dưới trục hoành qua trục hoành ta được nhánh (II).

Hợp của hai nhánh (I) và (II) ta được đồ thị hàm số $y = |f(t)|$ trên $[-4;2]$ như hình vẽ.



Dựa vào đồ thị suy ra $M = 6$.

Câu 3. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[-1;3]$ đồng thời có đồ thị như hình vẽ .



Có bao nhiêu giá trị của tham số thực m để giá trị lớn nhất của hàm số $y=|f(x)+m|$ trên đoạn $[-1;3]$ bằng 2018?

A. 0. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 6.

Lời giải

Chọn B

Đặt $g(x)=f(x)+m \Rightarrow g'(x)=f'(x)$.

$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên :

x	-1		0		2		3
g'		$-$	0	$+$	0	$-$	
g	$m+7$	$\searrow$	m	$\nearrow$	$m+16$	$\searrow$	$m-9$

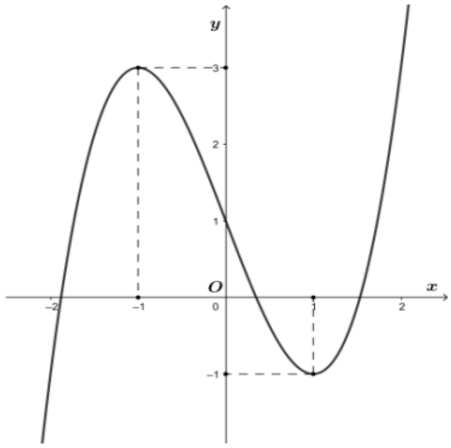
$\max\limits_{[-1;3]} g(x)=m+16$; $\min\limits_{[-1;3]}=m-9 \Rightarrow \max\limits_{[-1;3]} y=\max\left\{|m+16|;|m-9|\right\}$.

+ Nếu $|m+16|\ge|m-9| \Leftrightarrow m\ge-\dfrac{7}{2} \Rightarrow \max\limits_{[-1;3]} y=|m+16|=m+16=2018$. Suy ra $m=2002$.

+ Nếu $|m+16|\le|m-9| \Leftrightarrow m\le-\dfrac{7}{2} \Rightarrow \max\limits_{[-1;3]} y=|m-9|=m-9=2018$. Suy ra $m=2025$.

Vậy có hai giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán .

Câu 4. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên R và có đồ thị như hình vẽ dưới đây



Đặt $M=\max\limits_{R}\left|f\left(\sin^2 2x\right)\right|, m=\min\limits_{R}\left|f\left(\sin^2 2x\right)\right|$. Tổng $M+m$ bằng

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

$\forall x \in R, 0 \le X = \sin^2 2x \le 1$

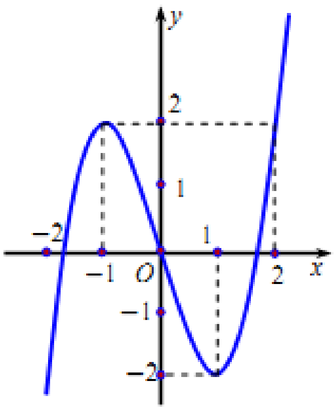
Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ trên R ta có $\max\limits_{[0;1]} f(X) = 1 = f(0), \min\limits_{[0;1]} f(X) = -1 = f(1)$.

Vì $\min\limits_{[0;1]} f(X) = -1 < 0 < \max\limits_{[0;1]} f(X) = 1$ nên

$M = \max\limits_{R}\left|f\left(\sin^2 2x\right)\right| = \left|\min\limits_{[0;1]} f(X)\right| = \max\limits_{[0;1]} f(X) = 1, m = \min\limits_{R}\left|f\left(\sin^2 2x\right)\right| = 0$

Vậy $M + m = 1$.

Câu 5. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Tính tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \left|f\left(\sqrt{2f(\cos x)}\right)\right|$ trên đoạn $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

A. 5. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Đặt $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d\ (a \ne 0)$.

Đồ thị hàm số đi qua gốc tọa độ O nên $d = 0$.

Mặt khác đồ thị hàm số còn đi qua các điểm $A(-1;2), B(1;-2), C(2;2)$ nên ta có hệ phương trình: $\begin{cases} -a + b - c = 2 \\ a + b + c = -2 \\ 4a + 2b + c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = -3 \end{cases}$.

Do đó $f(x) = x^3 - 3x$.

Đặt $t = \cos x,\ x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right] \Rightarrow t \in [-1;0] \Rightarrow f(\cos x) = f(t) = t^3 - 3t$ với $t \in [-1;0]$.

Ta có $f'(t) = 3t^2 - 3 < 0, \forall t \in [-1;0] \Rightarrow f(t)$ nghịch biến trên $[-1;0]$

$\Rightarrow 2f(t) \in [2f(0); 2f(-1)]$ hay $2f(t) \in [0;4]$.

Đặt $u = \sqrt{2f(t)} \Rightarrow u \in [0;2] \Rightarrow y = |f(u)| = |u^3 - 3u|$ với $u \in [0;2]$.

Ta có $f'(u) = 3u^2 - 3 \Rightarrow f'(u) = 0 \Leftrightarrow u = 1 \in [0;2]$.

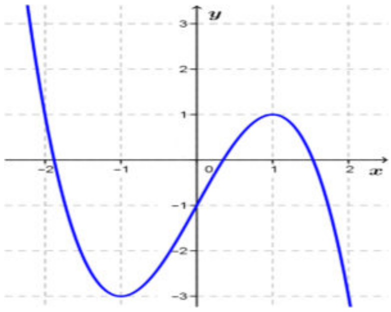
Bảng biến thiên của $f(u)$

u	0		1		2
$f'(u)$		$-$	0	$+$	
$f(u)$	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2

Từ bảng biến thiên suy ra $-2 \le f(u) \le 2 \Rightarrow 0 \le |f(u)| \le 2$

Vậy $\max y = 2, \min y = 0 \Rightarrow \max y + \min y = 2$.

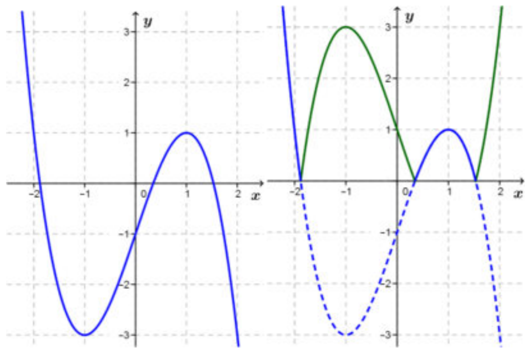
Câu 6. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $g(x) = \left|f\left(2\sin^4 x + 2\cos^4 x - 2\right)\right|$ trên $\mathbb{R}$. Tính $T = M - m$.



A. 2 . **B.** 0 . **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A



Xét hàm số: $g(x) = \left|f\left(2\sin^4 x + 2\cos^4 x - 2\right)\right|$.

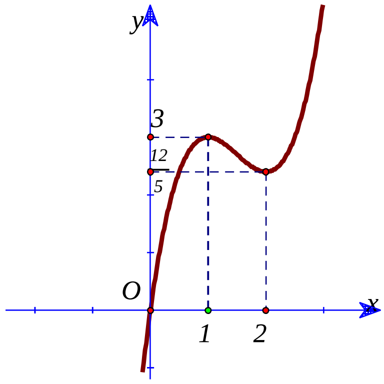
Đặt $t = 2\sin^4 x + 2\cos^4 x - 2 = 2\left[\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x\right] - 2 = -4\sin^2 x\cos^2 x$

$\Rightarrow t = -\sin^2 2x \ (-1 \le t \le 0)$. Suy ra hàm số $g(x)$ có dạng $|f(t)| \ (-1 \le t \le 0)$.

Dựa vào đồ thị hàm số $|f(x)|$, ta có:

$Max\, g(x) = \underset{t\in[-1;0]}{Max}|f(t)| = 3 \Rightarrow M = 3$; $Min\, g(x) = \underset{t\in[-1;0]}{Min}|f(t)| = 1 \Rightarrow m = 1$. Nên $M - m = 2$

Câu7. Cho đồ thị hàm số bậc ba $y = f(x)$ liên tục trên R và có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



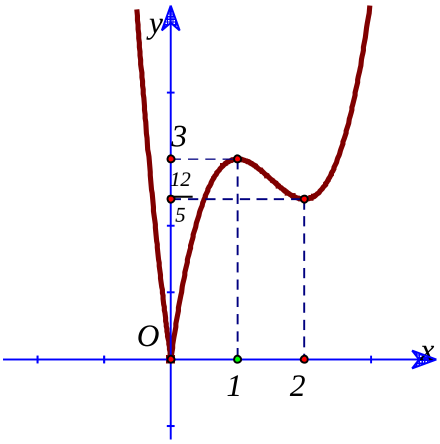
Đặt $M = \underset{\mathbb{R}}{Max}\left|f\left(2\left(\sin^4 x+\cos^4 x\right)\right)\right|$, $m = \underset{\mathbb{R}}{min}\left|f\left(2\left(\sin^4 x+\cos^4 x\right)\right)\right|$. Tính tổng $M+m$.

A. 3. **B.** $\frac{27}{5}$. **C.** $\frac{22}{5}$. **D.** 5.

Lời giải

Chọn B

* Đồ thị $y=\left|f\left(x\right)\right|$ được vẽ như sau:



Đặt $t = 2\left(\sin^4 x+\cos^4 x\right) = 2\left(1-2\sin^2 x\cos^2 x\right) = 2\left(1-\frac{1}{2}\sin^2 2x\right) = 2-\sin^2 2x$

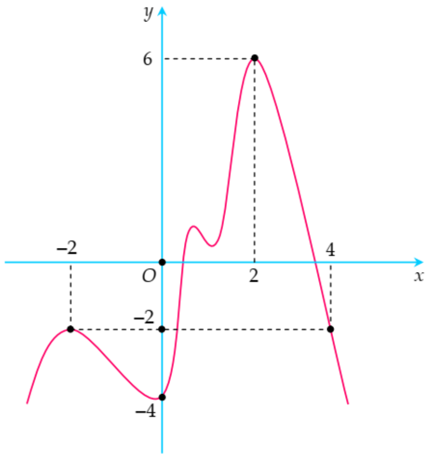
Ta có $0 \le \sin^2 2x \le 1 \Rightarrow 1 \le 2-\sin^2 2x \le 2 \Rightarrow 1 \le t \le 2$

Khi đó $\left|f\left(2\left(\sin^4 x+\cos^4 x\right)\right)\right| = \left|f\left(t\right)\right|$ với $t \in [1;2]$

Dựa vào đồ thị $M = \max\limits_{\mathbb{R}}\left|f\left(2\left(\sin^4 x+\cos^4 x\right)\right)\right| = \max\limits_{t\in[1;2]}\left|f\left(t\right)\right| = 3$;

$m = \min\limits_{\mathbb{R}}\left|f\left(2\left(\sin^4 x+\cos^4 x\right)\right)\right| = \min\limits_{t\in[1;2]}\left|f\left(t\right)\right| = \frac{12}{5} \Rightarrow M+m = \frac{27}{5}$.

Câu 8. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới:



Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của hàm số $y=\left|\frac{1}{3}f\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{\pi}{3}|\sin x|\right)\right)\right|$. Khi đó tổng $m+M$ là

A. $\frac{2}{3}$. **B.** 4. **C.** 2. **D.** $\frac{4}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Vì $0\le|\sin x|\le 1\Rightarrow 0\le\frac{\pi}{3}|\sin x|\le\frac{\pi}{3}$.

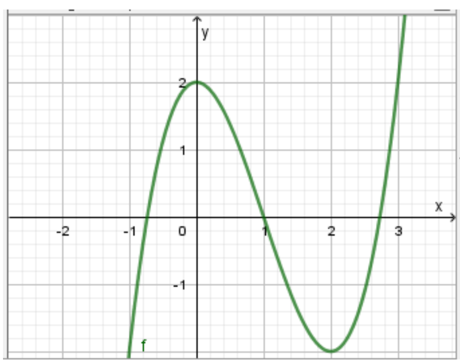
Trên đoạn $\left[0;\frac{\pi}{3}\right]$hàm số sin luôn tăng nên suy ra $\sin 0\le\sin\left(\frac{\pi}{3}|\sin x|\right)\le\sin\frac{\pi}{3}$.

Hay $0\le\sin\left(\frac{\pi}{3}|\sin x|\right)\le\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\frac{4}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{\pi}{3}|\sin x|\right)\in[0;2]$

Quan sát đồ thị ta thấy: $\frac{1}{3}f\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{\pi}{3}|\sin x|\right)\right)\in\left[-\frac{4}{3};2\right]$

Từ đó $\max y=2;\min y=0$.

Câu 9. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Tổng giá trị lớn nhất nhỏ nhất của hàm số $y=h(x)=\left|f\left(x^2+1\right)\right|$ thuộc đoạn $[0;1]$ bằng

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

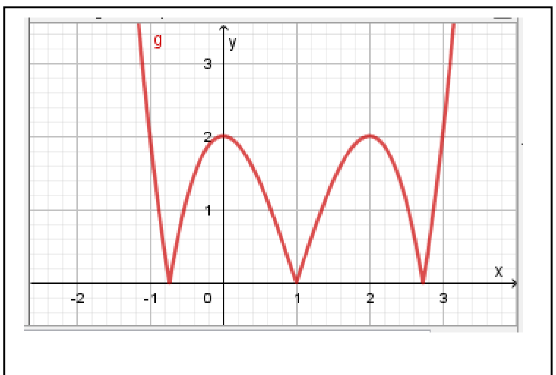
Lời giải

Chọn C

Từ đồ thị hàm số $y=f(x)$ ta suy đồ thị

$y=g(x)=|f(x)|$

Xét hàm số $h(x)=\left|f\left(x^2+1\right)\right|, x\in[0;1]$

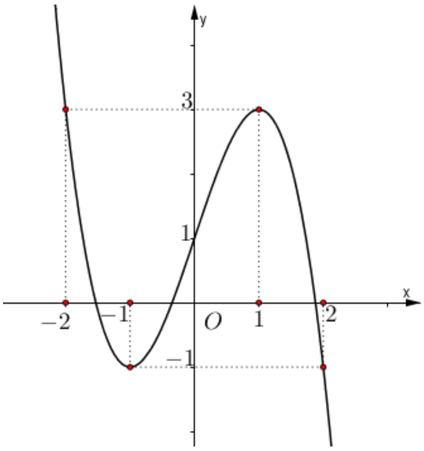


Đặt $t = x^2 + 1\left(t \in [1;2]\right)$, suy ra hàm số có dạng $y = g(t) = \left|f(t)\right|$

Dựa vào đồ thị của hàm số $y = g(x) = \left|f(x)\right|$, ta suy ra được:

$\max\limits_{[1;2]} g(t) = 2 \Rightarrow \max\limits_{[0;1]} h(x) = 2$, $\min\limits_{[1;2]} g(t) = 0 \Rightarrow \min\limits_{[0;1]} h(x) = 0$

Câu 10. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số như hình vẽ



Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y = \left|f(2x-1)\right|$ trên đoạn $\left[0;\frac{1}{2}\right]$. Tính giá trị $M - m$.

A. 3 **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

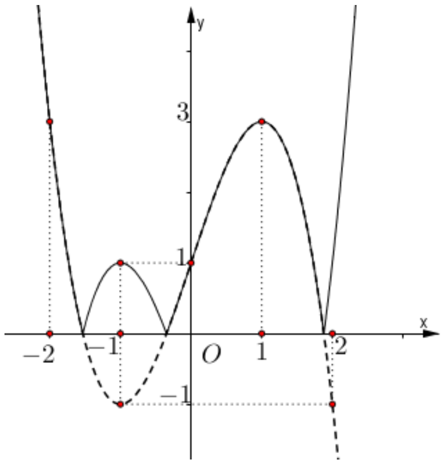
Lời giải

Chọn C

Đặt $t = 2x - 1$.

Với $x \in \left[0;\frac{1}{2}\right] \Rightarrow t \in [-1;0]$.

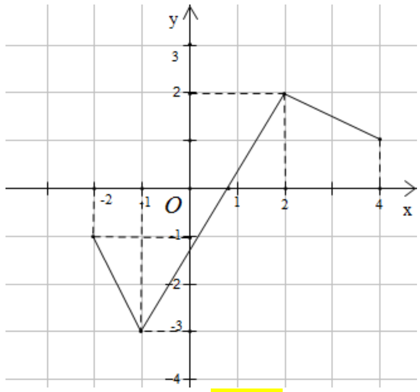
Đồ thị hàm số $y = \left|f(t)\right|$ có dạng



Suy ra với $t \in [-1;0]$ ta có $m = 0$, $M = 1$.

Vậy $M - m = 1$.

Câu 11. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị trên $[-2;4]$ như hình vẽ. Tìm $\max\limits_{[-2;4]} \left|f(x)\right|$.



A. 2.   **B.** $\left|f(0)\right|$.   **C.** 3.   **D.** 1.

Lời giải

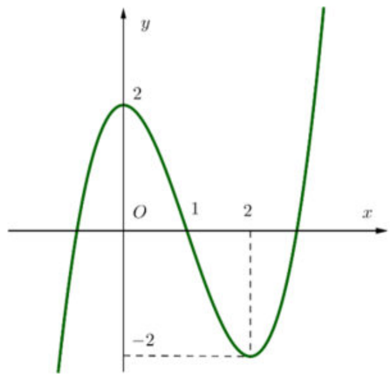
Chọn C

Từ đồ thị của hàm số $y=f(x)$ trên $[-2;4]$ ta có tập giá trị $y=f(x)$ là $[-3;2]$.

Suy ra tập giá trị của hàm số $\left|f(x)\right|$ trên $[-2;4]$ là $[0;3]$.

Do đó $\max\limits_{[-2;4]}\left|f(x)\right|=3$.

Câu 12. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ:



Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\left|\frac{3}{2}f\left(\frac{x}{2}\right)\right|$ trên đoạn $[2;4]$.

Khi đó $M+m$ bằng

A. 4.   **B.** 2.   **C.** 3.   **D.** 1.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số: $g(x)=\frac{3}{2}f\left(\frac{x}{2}\right)$

Ta có $g'(x)=\frac{3}{4}f'\left(\frac{x}{2}\right)$, $g'(x)=0\Leftrightarrow f'\left(\frac{x}{2}\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=4\end{array}\right.$.

Ta có bảng biến thiên của hàm số $g(x)$ trên $[2;4]$

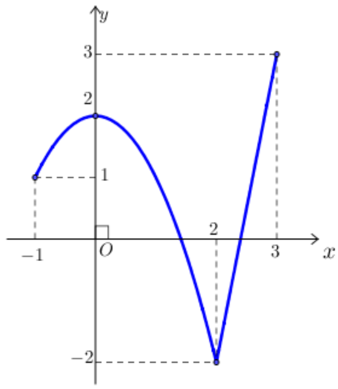
x	2		4
$g'(x)$		$-$	
$\lvert g(x)$	0	$\searrow$	-3

Từ BBT ta suy ra được GTLN và GTNN của hàm số $y=\left|g(x)\right|$ trên $[2;4]$ lần lượt là $3;0$

Vậy $M+m=3$.

Dạng 4: Cho đồ thị, BBT của hàm số $y=f(x)$, tìm GTLN, GTNN của hàm số $y=f(|x|+b), y=f(|u(x)|+b), y=f(|x+a|+b), y=f(|u(x)+a|+b)$ trên khoảng, đoạn.

Câu 1. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;3]$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=f(3|\cos x|-1)$ bằng



A. 0. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t=3|\cos x|-1$

$\forall x\in\mathbb{R}$ ta có: $0\le|\cos x|\le 1\Leftrightarrow 0\le 3|\cos x|\le 3\Leftrightarrow -1\le 3|\cos x|-1\le 2$.

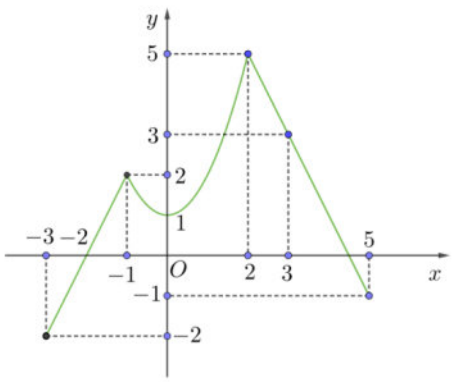
Vậy $t\in[-1;2]$

Khi đó hàm số $y=f(3|\cos x|-1)$ trở thành: $y=f(t)$ với $t\in[-1;2]$.

Do đó, giá trị lớn nhất của hàm số $y=f(3|\cos x|-1)$ bằnggiá trị lớn nhất của hàm số $y=f(t)$ trên đoạn $[-1;2]$.

Dựa vào đồ thị hàm số $f(x)$ ta có: $\max\limits_{\mathbb{R}} f(3|\cos x|-1)=\max\limits_{[-1;2]} f(t)=f(0)=2$.

Câu 2. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-3;5]$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(|3\cos x+4\sin x|-2)$ bằng

A. 0. **B.** 1. **C.** 3. **D.** -2.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t=|3\cos x+4\sin x|-2$.

$\forall x\in\mathbb{R}$ ta có: $(3\cos x+4\sin x)^2\le(3^2+4^2)(\cos^2 x+\sin^2 x)=25$.

Suy ra $0\le|3\cos x+4\sin x|\le 5\Leftrightarrow -2\le|3\cos x+4\sin x|-2\le 3$.

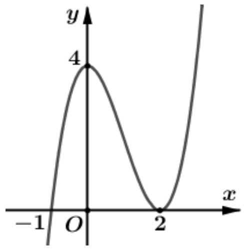
Vậy $t \in [-2;3]$

Khi đó hàm số $y = f\left(|3\cos x + 4\sin x| - 2\right)$ trở thành: $y = f(t)$ với $t \in [-2;3]$.

Do đó, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f\left(|3\cos x + 4\sin x| - 2\right)$ bằnggiá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(t)$ trên đoạn $[-2;3]$.

Dựa vào đồ thị hàm số $f(x)$ ta có: $\min\limits_{\mathbb{R}} f\left(|3\cos x + 4\sin x| - 2\right) = \min\limits_{[-2;3]} f(t) = f(-2) = 0$.

Câu 3. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = f(|x| - 2)$ trên $[-4;4]$ là

A. 0 **B.** 4. **C.** 2. **D.** 6.

Lời giải

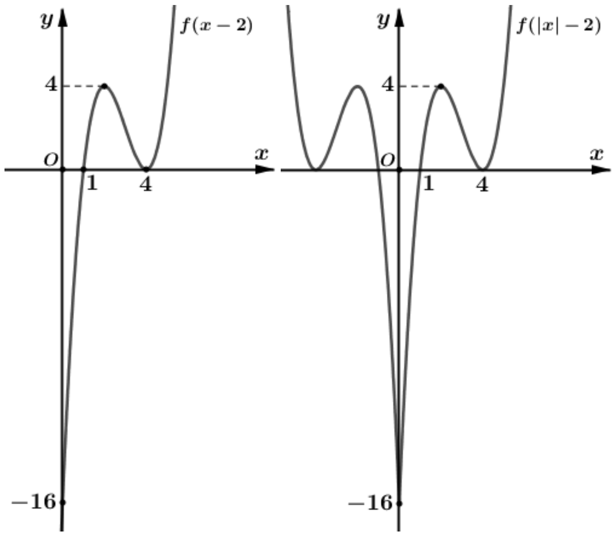
Chọn B

Xét hàm số $g(x) = f(|x| - 2)$. Ta thấy hàm số là hàm chẵn nên đồ thị hàm số nhận trục Oy làm trục đối xứng.

Ta lại có: khi $x \geq 0$ thì hàm số $g(x) = f(|x| - 2)$ trở thành: $g(x) = f(x - 2)$.

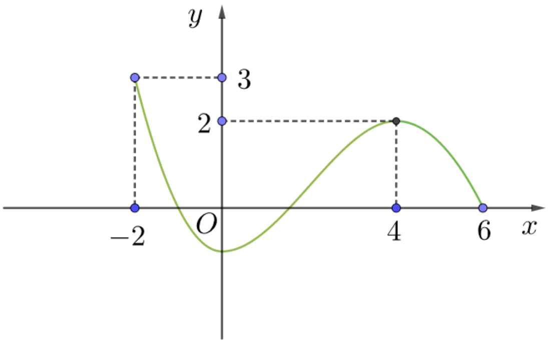
Từ đồ thị hàm số $f(x)$ ta suy ra đồ thị hàm số $f(x-2)$ bằng cách tịnh tiến đồ thị hàm số $f(x)$ sang phải (theo phương Ox) 2 đơn vị.

Từ đồ thị hàm số $f(x-2)$ ta suy ra đồ thị hàm số $g(x)$ bằng cách lấy đối xứng phần đồ thị hàm số $f(x-2)$ bên phải trục Oy qua trục Oy. Ta được đồ thị của hàm số $g(x) = f(|x| - 2)$ như sau:



Dựa vào đồ thị hàm số $g(x) = f(|x| - 2)$, suy ra hàm số $g(x)$ có giá trị lớn nhất bằng 4 trên $[-4;4]$

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[-2;6]$ và có đồ thị như hình vẽ dưới.



Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số $y=f\left(|x|+1\right)$ trên đoạn $[-2;4]$. Giá trị của M bằng

A. 3 **B.** -1. **C.** 2. **D.** 0.

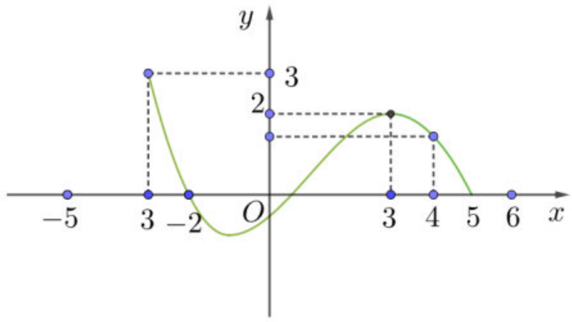
Lời giải

Chọn C

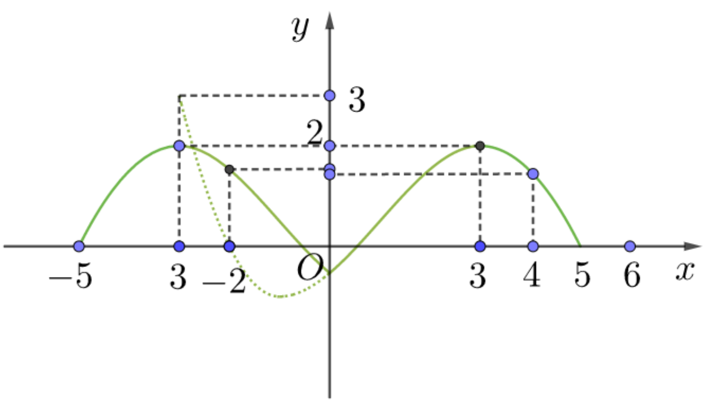
Xét hàm số $y=f\left(|x|+1\right)$. Ta thấy hàm số là hàm chẵn nên đồ thị hàm số nhận trục Oy làm trục đối xứng.

Khi $x\geq 0$ hàm số $y=f\left(|x|+1\right)$ trở thành $y=f\left(x+1\right)$.

Từ đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ ta suy ra đồ thị hàm số $y=f\left(x+1\right)$ bằng cách tịnh tiến đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ sang trái (theo phương Ox) 1 đơn vị, ta được đồ thị hàm số $y=f\left(x+1\right)$ như sau:



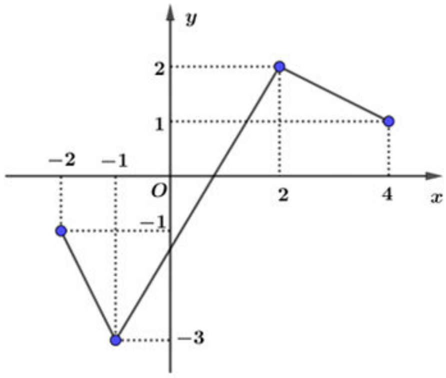
Từ đồ thị hàm số $y=f\left(x+1\right)$ ta suy ra đồ thị hàm số $y=f\left(|x|+1\right)$ bằng cách lấy đối xứng phần đồ thị hàm số $y=f\left(x+1\right)$ bên phải trục Oy qua trục Oy, ta được đồ thị hàm số $y=f\left(|x|+1\right)$ như sau:



Từ đồ thị hàm số $y=f\left(|x|+1\right)$ ta thấy giá trị lớn nhất của hàm số $y=f\left(|x|+1\right)$ trên đoạn $[-2;4]$ bằng 2.

Dạng 5: Cho đồ thị, BBT của hàm số $y = f(x)$, tìm GTLN, GTNN của hàm số $y=\left|f(x)+b\right|, y=\left|f(u(x))+b\right|, y=\left|f(x+a)+b\right|, y=\left|f(u(x)+a)+b\right|$ trên khoảng, đoạn.

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị trên đoạn $[-2;\ 4]$ như hình vẽ bên. Tìm $\max\limits_{[-2;\ 4]}\left|f(x)\right|$.



A. $\left|f(0)\right|$. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C

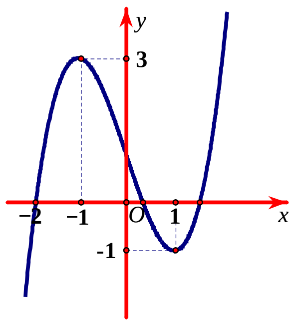
*** Phương pháp tìm GTLN của hàm trị tuyệt đối:**

$\max\limits_{[a;b]}\left|f(x)\right| = \max\left\{\left|\max\limits_{(a;b)} f(x)\right|; \left|\min\limits_{[a;b]} f(x)\right|\right\}$

Dựa vào đồ thị ta có: $\max\limits_{[-2;\ 4]} f(x) = 2$ khi $x = 2$ và $\min\limits_{[-2;\ 4]} f(x) = -3$ khi $x = -1$.

Vậy $\max\limits_{[-2;\ 4]}\left|f(x)\right| = 3$ khi $x = -1$.

Câu 2: Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ.



Gọi giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \left|f(x)\right|$ trên đoạn $[-1;1]$ lần lượt là M, m. Tính giá trị của biểu thức $T = 673M - 2019m$.

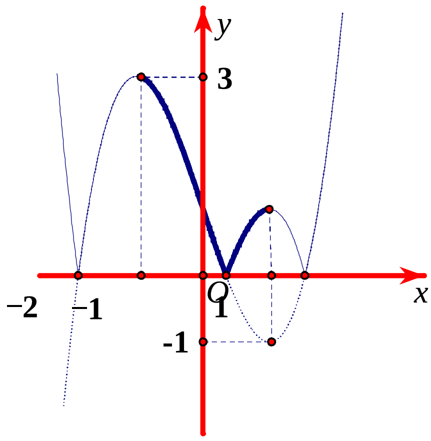
A. $T = 2019$. **B.** $T = 0$. **C.** $T = 4038$. **D.** $T = 2692$.

Lời giải

Chọn A

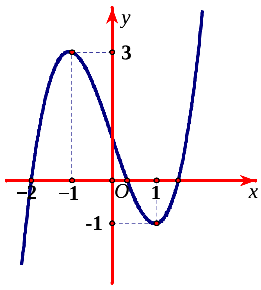
• Vẽ đồ thị của hàm số $y = \left|f(x)\right|$ bằng cách giữ nguyên phần đồ thị của hàm số $y = f(x)$ ở phía trên trục hoành, lấy đối xứng phần đồ thị của hàm số $y = f(x)$ ở phía dưới trục hoành qua trục hoành, xóa bỏ phần đồ thị phía dưới trục hoành.

• Từ đó suy ra phần đồ thị của hàm số $y = \left|f(x)\right|$ trên đoạn $[-1;1]$



Dựa vào phần đồ thị đó, ta được $M = 3, m = 0$ nên $T = 2019$.

Câu 3: Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ.



Gọi giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = |f(x+2)|$ trên đoạn $[-1;0]$ lần lượt là M, m. Tính giá trị của biểu thức $T = M - 3m$.

A. $T = 3$. **B.** $T = 0$. **C.** $T = 6$. **D.** $T = 4$.

Lời giải

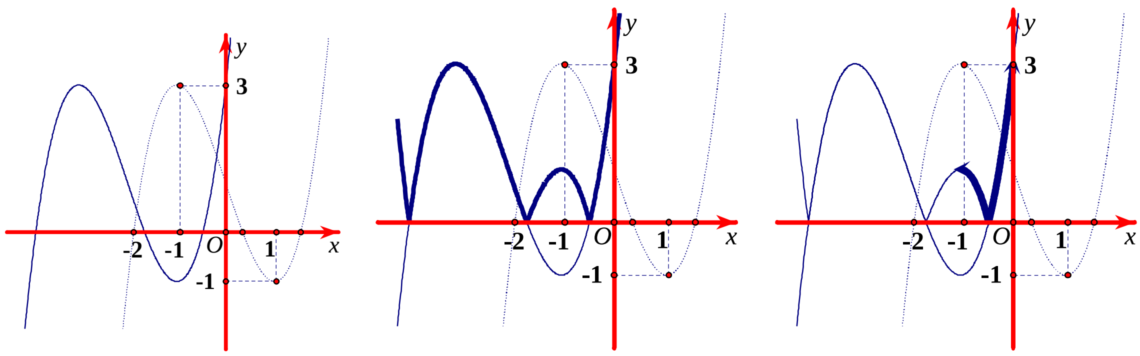
Chọn A

Cách 1:

+ Tịnh tiến đồ thị hàm số $y = f(x)$ sang trái 2 đơn vị ta được đồ thị hàm số $y = f(x+2)$

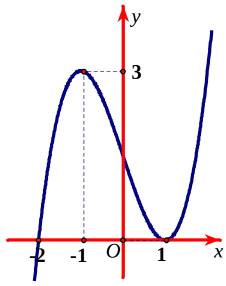
+ Vẽ đồ thị hàm số $y = |f(x+2)|$ bằng cách giữ nguyên phần đồ thị của hàm số $y = f(x+2)$ ở phía trên trục hoành, lấy đối xứng phần đồ thị của hàm số $y = f(x+2)$ ở phía dưới trục hoành qua trục hoành, xóa bỏ phần đồ thị phía dưới trục hoành.

Từ đó suy ra phần đồ thị của hàm số $y = |f(x+2)|$ trên đoạn $[-1;0]$



Dựa vào phần đồ thị đó, ta được $M = 3, m = 0$ nên $T = 3$.

Câu 4: Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ.



Gọi giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\left|f(x^2+2x)\right|$ trên đoạn $[-2;0]$ lần lượt là M, m. Tính giá trị của biểu thức $T=M-3m$.

A. $T=3$. **B.** $T=0$. **C.** $T=6$. **D.** $T=4$.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $y=f\left(x^2+2x\right)$ trên đoạn $[-2;0]$

Ta có $y'=(2x+2)f'\left(x^2+2x\right)$

$$y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x^2+2x=-1 \\ x^2+2x=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1\in[-2;0] \\ \\ x=-1\pm\sqrt{2}\notin[-2;0] \end{array}\right.$$

Cách 1: Tính $y(-2)=y(0)=f(0)=2; y(-1)=4$

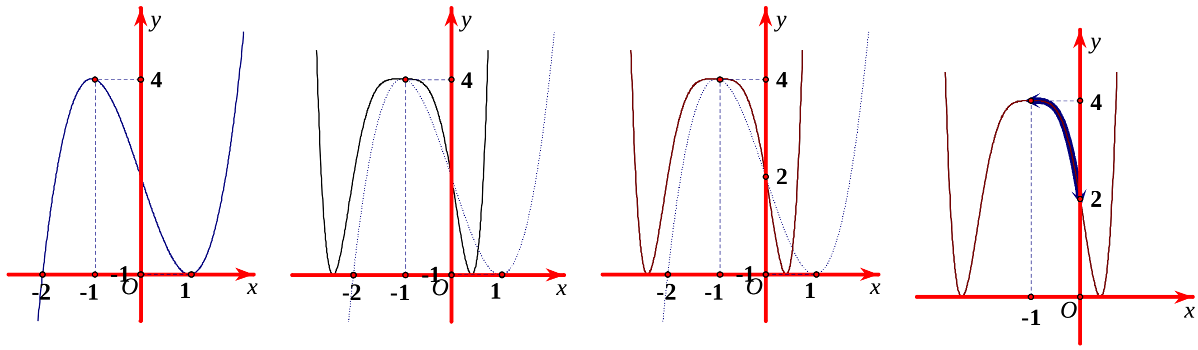
$y=f\left(x^2+2x\right)$	2	↗	4	↘	2
$y=\left\|f(x^2+2x)\right\|$	2	↗	4	↘	2

Suy ra giá trị $M=4, m=2$ hay $T=-2$.

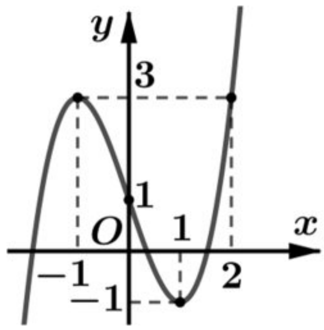
Cách 2: Lập bảng

x	-2		-1		0
x^2+2x	0	↘	-1	↗	0
$y=f'\left(x^2+2x\right)$		$-$	0	$-$	
$2x+2$		$-$	0	$+$	
$y'=(2x+2)f'\left(x^2+2x\right)$		$+$	0	$-$	
$y=f\left(x^2+2x\right)$	2	↗	4	↘	2
$y=\left\|f(x^2+2x)\right\|$	2	↗	4	↘	2

Vậy $M=4, m=2$ suy ra $T=-2$.



Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên.



Xét hàm số $g(x) = \left| f\left(2x^3 + x - 1\right) - 13 \right|$. Tìm $\max\limits_{[0;1]} g(x)$.

A. -10. **B.** 0. **C.** 10. **D.** 14.

Lời giải

Chọn D

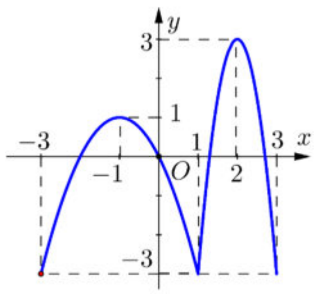
Đặt $t(x) = 2x^3 + x - 1$ với $x \in [0;1]$. Ta có $t'(x) = 6x^2 + 1 > 0,\ \forall x \in [0;1]$.

Suy ra hàm số $t(x)$ đồng biến nên $x \in [0;1] \longrightarrow t \in [-1;2]$.

Từ đồ thị hàm số ta có $\begin{cases} \max\limits_{[-1;2]} f(t) = 3 \longrightarrow \max\limits_{[-1;2]} \left[f(t) - 13 \right] = -10 \\ \min\limits_{[-1;2]} f(t) = -1 \longrightarrow \min\limits_{[-1;2]} \left[f(t) - 13 \right] = -14 \end{cases}$

Suy ra $\max\limits_{[0;1]} g(x) = 14$.

Câu 6: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \left| f\left(\sin 3x + \sin^3 x\right) \right|$ trên $\mathbb{R}$. Giá trị $e^{\ln M} + 2019^m$ bằng ?

A. e. **B.** 4. **C.** 2009^{-3}. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t = \sin 3x + \sin^3 x = 3\sin x$, Với $x \in \mathbb{R} \Rightarrow 3\sin x \in [-3;3] \Rightarrow t \in [-3;3]$

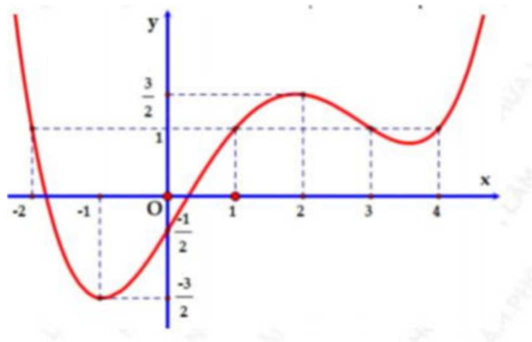
Hàm số trở thành $y = \left| f(t) \right|$

Từ đồ thị hàm $f\left(t\right)$ trên đoạn $\left[-3;3\right]$ ta suy ra

$\min\limits_{[-3;3]} f(t) = -3,\ \max\limits_{[-3;3]} f(x) = 3 \Rightarrow \min\limits_{[-3;3]} \left| f(t) \right| = 0,\ \max\limits_{[-3;3]} \left| f(x) \right| = 3$

Vậy $e^{\ln M} + 2019^{m} = e^{\ln 3} + 2019^{0} = 4.$

Câu 7: Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây



Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = \left| f\left(\sqrt{9 - x^2}\right) \right|$. Có bao nhiêu số nguyên thuộc đoạn $\left[m; M\right]$?

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện xác định $x \in \left[-3;3\right]$. Đặt $t = \sqrt{9 - x^2} \Rightarrow t \in \left[0;3\right]$ hàm số trở thành: $y = \left| f\left(t\right) \right|$

Dựa vào đồ thị hàm $f\left(t\right)$ ta có : $\min\limits_{[0;3]} f(t) = \dfrac{-1}{2},\ \max\limits_{[0;3]} f(x) = \dfrac{3}{2} \Rightarrow \min\limits_{[o;3]} \left| f(t) \right| = 0,\ \max\limits_{[0;3]} \left| f(x) \right| = \dfrac{3}{2}$

Vậy có duy nhất một giá trị nguyên thuộc đoạn $\left[0; \dfrac{3}{2}\right]$.

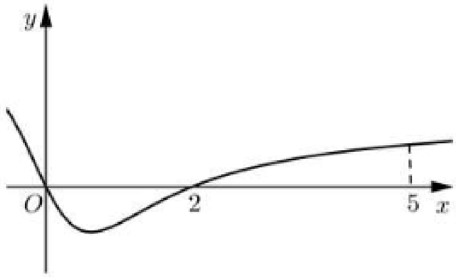
CÁC DẠNG TOÁN VỀ HÀM ẨN LIÊN QUAN ĐẾN BÀI TOÁN GTLN GTNN CỦA HÀM SỐ

PHẦN II: Xác định GTLN, NN hoặc so sánh các giá trị của hàm số thông qua tích phân hoặc so sánh diện tích hình phẳng.

1. Cho đồ thị, BBT của hàm số $y = f'(x)$, tìm GTLN, GTNN của hàm số $y = f(x)$ trên khoảng, đoạn.
2. Cho đồ thị, BBT của hàm số $y = f'(x)$, tìm GTLN, GTNN của hàm số $y = f(|x|)$ trên khoảng, đoạn.
3. Cho đồ thị, BBT của hàm số $y = f'(x)$, tìm GTLN, GTNN của hàm số $y = |f(x)|$ trên khoảng, đoạn.
4. Cho đồ thị, BBT của hàm số $y = f'(x)$, tìm GTLN, GTNN của hàm số $y = f(|x+a|+b)$ trên khoảng, đoạn.
5. Cho đồ thị, BBT của hàm số $y = f'(x)$, tìm GTLN, GTNN của hàm số $y = |f(x)+b|$ trên khoảng, đoạn.
6. Các dạng khác.

Dạng 7: Cho đồ thị, BBT của hàm số $y=f'(x)$, tìm GTLN, GTNN của hàm số $y=f(x)$ trên khoảng, đoạn.

Câu 1: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ được cho như hình vẽ bên. Biết rằng $f(0)+f(3)=f(2)+f(5)$. Giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của $f(x)$ trên đoạn $[0;5]$ lần lượt là



A. $f(0), f(5)$. **B.** $f(2), f(0)$. **C.** $f(1), f(5)$. **D.** $f(2), f(5)$.

Lời giải

Chọn D

Cách 1:

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0		2		5	$+\infty$
f'		0	$-$	0	$+$		
f		$f(0)$	$\searrow$	$f(2)$	$\nearrow$	$f(5)$	

Dựa vào đồ bảng biến thiên, ta có $\min\limits_{[2;5]} f(x)=f(2)$

Và $\max\limits_{[0;5]} f(x)=\max\{f(0), f(5)\}$

Vì $f(x)$ đồng biến trên đoạn $[2;5]$ nên

$f(3)>f(2)\Rightarrow f(5)-f(2)>f(5)-f(3)=f(0)-f(2)$

Do đó $f(5)>f(0)$, vậy $\max\limits_{[0;5]} f(x)=\max\{f(0), f(5)\}=f(5)$

Cách 2:

Căn cứ đồ thị của $y=f'(x)$ và ứng dụng tích phân, ta có:

$S_1=\int\limits_0^2 |f'(x)|dx=\int\limits_0^2 f'(x)dx=f(0)-f(2)$ và $S_2=\int\limits_2^5 |f'(x)|dx=\int\limits_2^5 f'(x)dx=f(2)-f(5)$

Theo giả thiết, ta có:

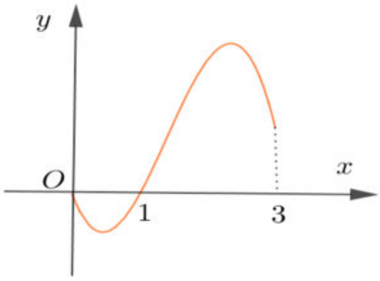
$f(0)+f(3)=f(2)+f(5)\Rightarrow f(5)-f(3)=f(0)-f(2)$

Suy ra $S_2=\int\limits_2^5 |f'(x)|dx>\int\limits_3^5 |f'(x)|dx=f(5)-f(3)=S_1$.

Suy ra $S_2>S_1>0\Rightarrow f(5)>f(0)>f(2)$.

Vậy $\min\limits_{[0;5]} f(x)=f(2), \max\limits_{[0;5]} f(x)=f(5)$.

Câu 2: Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị $y=f'(x)$ như hình bên dưới.



Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[0;3]$.

A. $f(1), f(0)$. **B.** $f(2), f(0)$. **C.** $f(1), f(3)$. **D.** $f(0), f(3)$

Lời giải

Chọn C

Ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$

x	0		1		3
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$f(0)$	$\searrow$	$f(1)$	$\nearrow$	$f(3)$

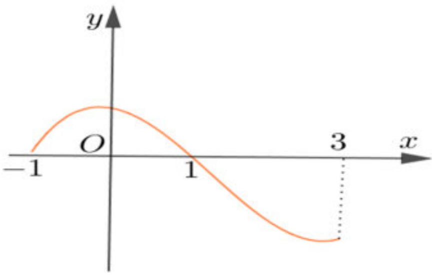
Khi đó: $\min\limits_{[0;3]} f(x) = f(1)$.

Dựa vào đồ thị $y = f'(x)$ ta có

$$-\int_0^1 f'(x)dx < \int_1^3 f'(x)dx \Leftrightarrow f(0) - f(1) < f(3) - f(1) \Leftrightarrow f(0) < f(3).$$

Vậy $\max\limits_{[0;3]} f(x) = f(3)$.

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị $y = f'(x)$ như hình bên dưới.



Biết $f(-1) + f(0) - 2f(1) = f(3) - f(2)$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-1;3]$.

A. $f(1), f(0)$. **B.** $f(2), f(1)$. **C.** $f(1), f(-1)$. **D.** $f(1), f(3)$

Lời giải

Chọn C

Ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$

Vậy $\max\limits_{[-1;3]} f(x) = f(1)$

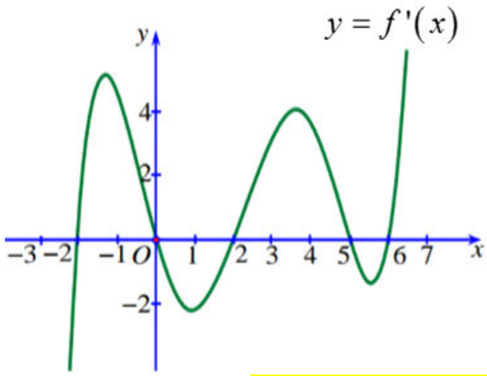
Từ bảng biến thiên ta có $f(0) < f(1), f(2) < f(1)$ vậy $f(0) + f(2) < 2f(1)$

Khi đó $f(-1) + f(0) - 2f(1) = f(3) - f(2) \Leftrightarrow f(0) + f(2) - 2f(1) = f(3) - f(-1)$

Vậy $f(3) - f(-1) > 0 \Rightarrow f(3) > f(-1)$

Khi đó $\min\limits_{[-1;3]} f(x) = f(-1)$.

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Đặt $M = \max\limits_{[-2;\,6]} f(x), m = \min\limits_{[-2;\,6]} f(x), T = M + m$. Hỏi mệnh đề nào dưới đây là đúng?



A. $T = f(0) + f(2)$

B. $T = f(5) + f(-2)$.

C. $T = f(5) + f(6)$

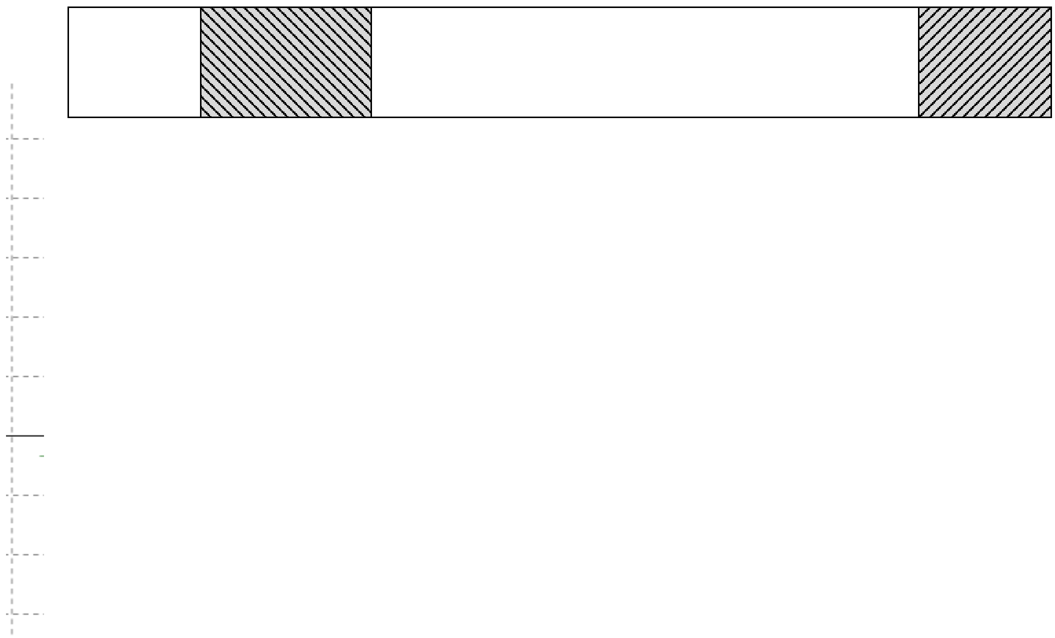
D. $T = f(0) + f(-2)$

Lời giải

Chọn B

+) Nhận xét: Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ cắt trục hoành tại 5 điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là $-2;\ 0;\ 2;\ 5;\ 6$ nên phương trình $f'(x) = 0$ có 5 nghiệm phân biệt là $x_1 = -2;\ x_2 = 0;\ x_3 = 2;\ x_4 = 5;\ x_5 = 6$. Hơn nữa $f'(x) > 0,\ \forall x \in (-2;\ 0) \cup (2;\ 5)$ và ngược lại $f'(x) < 0,\ \forall x \in (0;\ 2) \cup (5;\ 6)$. Ta lập bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$.

x	$-\infty$	-2		0		2		5		6	$+\infty$
$f'(x)$		0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	0	
$f(x)$		$f(-2)$		$f(0)$		$f(2)$		$f(5)$		$f(6)$	



+) Gọi S_1, S_2, S_3, S_4 lần lượt là diện tích của các hình phẳng $(H_1), (H_2), (H_3), (H_4)$,

(H_1) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f'(x),\ y = 0,\ x = -2,\ x = 0.$

(H_2) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f'(x),\ y = 0,\ x = 0,\ x = 2.$

(H_3) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f'(x),\ y = 0,\ x = 2,\ x = 5.$

(H_4) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f'(x),\ y = 0,\ x = 5,\ x = 6$

Ta có $S_1 > S_2 \Leftrightarrow \int_{-2}^{0} f'(x)dx > \int_{0}^{2} -f'(x)dx \Leftrightarrow f(0) - f(-2) > f(0) - f(2) \Leftrightarrow f(-2) < f(2)$ (1).

Ta có $S_2 < S_3 \Leftrightarrow \int_{0}^{2} -f'(x)dx < \int_{2}^{5} f'(x)dx \Leftrightarrow f(0) - f(2) < f(5) - f(2) \Leftrightarrow f(0) < f(5)$ (2).

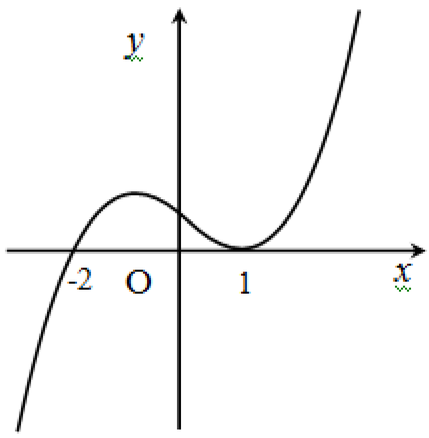
Ta có:

$S_3 > S_4 \Leftrightarrow \int_{2}^{5} f'(x)dx > \int_{5}^{6} -f'(x)dx \Leftrightarrow f(5) - f(2) > f(5) - f(6) \Leftrightarrow f(2) < f(6)$ (3).

+) Từ bảng biến thiên và $(1), (2), (3)$ ta có:

$M = \max\limits_{[-2;\,6]} f(x) = f(5),\ m = \min\limits_{[-2;\,6]} f(x) = f(-2)$ và $T = M + m = f(5) + f(-2)$..

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm đa thức bậc 4. Biết hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị (C) như hình vẽ và diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) và trục hoành bằng 27. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên $[-3;3]$. Tính $S = M - m$.



A. 75. **B.** 27. **C.** 36. **D.** 48

Lời giải

Chọn A

Do hàm số $y=f(x)$ là hàm đa thức bậc 4 $\Rightarrow$ hàm số $y=f'(x)$ là hàm đa thức bậc 3. Từ đồ thị (C) của hàm số $y=f'(x)\Rightarrow f'(x)=a(x+2)(x-1)^2; a>0$.

Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) và trục hoành là:

$$a\int_{-2}^{1}(x^3-3x+2)dx=27\Leftrightarrow\frac{27a}{4}=27\Leftrightarrow a=7\Rightarrow f(x)=x^4-6x^2+8x+c.$$

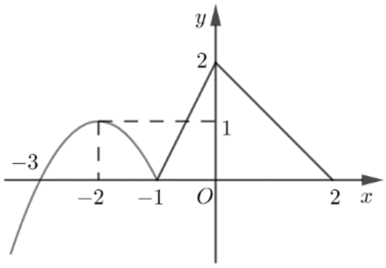
Xét hàm số $f(x)=x^4-6x^2+8x+c$ liên tục trên $[-3;3]$ ta có:

$$f'(x)=4(x+2)(x-1)^2;\ f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\\x=1\end{array}\right.$$

Ta có: $f(-3)=3+c; f(-2)=-24+c; f(1)=3+c; f(3)=51+c$

$\Rightarrow M=51+c; m=-24+c\Rightarrow M-m=75$.

Câu 6: Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị $y=f'(x)$ trên $[-3;2]$ như hình vẽ (phần cong của đồ thị là một phần của parabol $y=ax^2+bx+c$).



Biết $f(1)=0$. Gọi m,M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y=f(x)$ trên $[-3;2]$. Tính $m+M$.

A. $\frac{10}{3}$. **B.** $-\frac{10}{3}$. **C.** $-\frac{5}{3}$. **D.** $\frac{5}{3}$

Lời giải

Chọn B

Từ giả thiết có $f'(x)=\begin{cases}-x^2-4x-3 & khi\ -3\le x\le -1\\ 2x+2 & khi -1<x\le 0\\ -x+2 & khi\ 0<x\le 2\end{cases}$.

Suy ra $f(x)=\begin{cases}-\frac{1}{3}x^3-2x^2-3x+C_1 & khi\ -3\le x\le -1\\ x^2+2x+C_2 & khi -1<x\le 0\\ -\frac{1}{2}x^2+2x+C_3 & khi\ 0<x\le 2\end{cases}$.

Từ đồ thị của $y=f'(x)$, suy ra bảng biến thiên của $y=f(x)$

x	-3		-1		2
$f'(x)$	0	$+$	0	$+$	0
$f(x)$	$f(-3)$	$\nearrow$			$f(2)$

Vậy $\min_{[-3;2]} f(x)=f(-3), \max_{[-3;2]} f(x)=f(2)$. Do đó $m+M=f(-3)+f(2)=2+C_1+C_3$.

+ Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x=-1$ nên $\lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x)=\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x) \Leftrightarrow \frac{4}{3}+C_1=-1+C_2\ (1)$

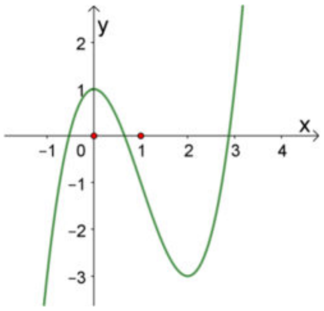
+ Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x=0$ nên $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) \Leftrightarrow C_2=C_3\ (2)$

+ Có $f(1)=0 \Leftrightarrow C_3=-\frac{3}{2}\ (3)$

Từ $(1),(2),(3)$ suy ra $C_2=C_3=-\frac{3}{2}, C_1=-\frac{23}{6}$

Vậy nên $m+M=2+C_1+C_3=-\frac{10}{3}$.

Câu 7: Cho hàm số $f(x)$. Biết hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên .



Hỏi giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[-1;3]$ là

A. $f(-1)$. **B.** $f(3)$. **C.** $f(0)$. **D.** $f(2)$.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $f(x)$ trên đoạn $[-1;3]$, ta có: $x\in[-1;a]$.

Với $a\in(0;1)$ hàm số đồng biến và $x\in[a;3]$ hàm số nghịch biến.

Ta có bảng biến thiên như sau:

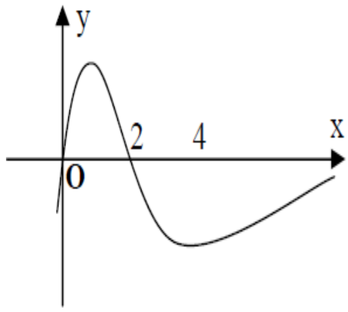
x	$-\infty$		-1		a		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$+$		$-$		$+$	
$f(x)$					$f(a)$				
			$f(-1)$	$\nearrow$		$\searrow$	$f(3)$		

Mặt khác ta có $\int_{-1}^{3} f'(x)dx=\int_{-1}^{a} f'(x)dx+\int_{a}^{3} f'(x)dx<0$.

Suy ra $f(3)<f(-1)$.

Vậy hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $f(3)$.

Câu 8: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $y=f'(x)$. Hàm $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Biết rằng $f(0)+f(1)-2f(2)=f(4)-f(3)$. Tìm giá trị nhỏ nhất m và giá trị lớn nhất M của $f(x)$ trên đoạn $[0;4]$.

A. $m = f(4); M = f(2)$. **B.** $m = f(4); M = f(1)$.

C. $m = f(0); M = f(2)$. **D.** $m = f(1); M = f(2)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có bảng biến thiên trên [0;4]

x	0	1	2	3	4
y'	0	+	0	+	
y	$f(0)$	$\nearrow$	$f(2)$	$\searrow$	$f(4)$

Dựa vào bảng biến thiên ta có $M = f(2); m = \min\{f(0); f(4)\}$.

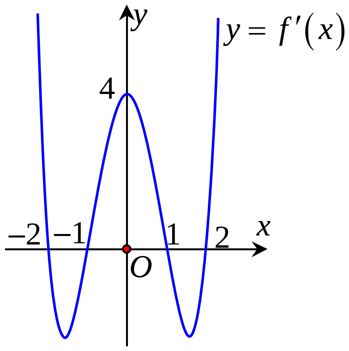
Mặt khác có $f(1) < f(2); f(3) < f(2) \Rightarrow f(1) + f(3) < 2f(2) \Leftrightarrow 2f(2) - f(1) - f(3) > 0$.

Mà

$f(0) + f(1) - 2f(2) = f(4) - f(3) \Leftrightarrow 2f(2) - f(1) - f(3) = f(0) - f(4) > 0 \Leftrightarrow f(0) > f(4)$

Do vậy $m = f(4)$.

Câu 9: Cho hàm số $f(x) = x^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex\ (b, c, d, e \in \mathbb{R})$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[-1;3]$. Tính $M + m$.

A. $\dfrac{250}{3}$. **B.** $\dfrac{38}{3}$. **C.** $\dfrac{196}{3}$. **D.** $\dfrac{272}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Do $f'(x) = 0$ có 4 nghiệm phân biệt $-2; -1; 1; 2$ nên

Ta có $f'(x) = 5x^4 + 4bx^3 + 3cx^2 + 2dx + e = 5(x+2)(x+1)(x-1)(x-2) = 5(x^4 - 5x^2 + 4)$

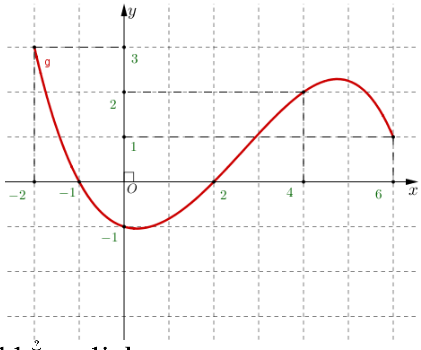
Suy ra $f(x) = x^5 - \dfrac{25}{3}x^3 + 20x$.

Xét hàm số $f(x) = x^5 - \dfrac{25}{3}x^3 + 20x$ trên $[-1;3]$. Ta có

$f(-1) = -\dfrac{38}{3}; f(1) = \dfrac{38}{3}; f(2) = \dfrac{16}{3}; f(3) = 78$.

Vậy $M = 78, m = -\dfrac{38}{3} \Rightarrow M + m = \dfrac{196}{3}$.

Câu 10: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị của hàm số $f'(x)$ trên đoạn $[-2;6]$ như hình vẽ bên.



Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

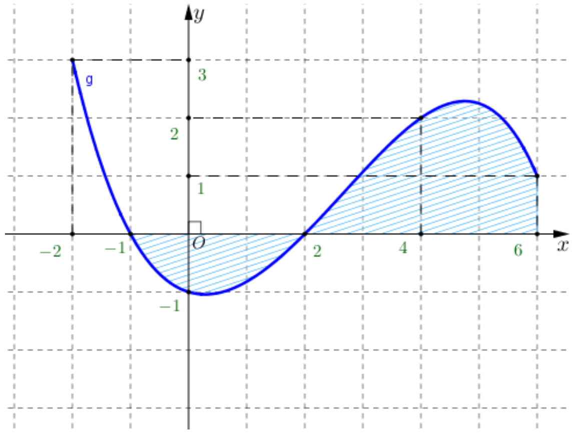
A. $\max\limits_{x\in[-2;6]} f(x)=f(-2)$. **B.** $\max\limits_{x\in[-2;6]} f(x)=f(2)$. **C.** $\max\limits_{x\in[-2;6]} f(x)=f(6)$. **D.** $\max\limits_{x\in[-2;6]} f(x)=f(-1)$.

Lời giải

Chọn C

Từ đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ ta có bảng biến thiên như sau:

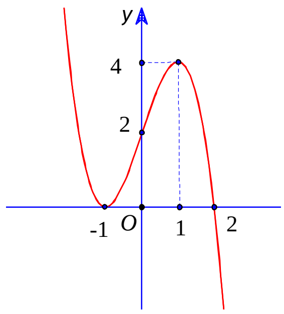
x	-2		-1		2		6
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y		$\nearrow$	$f(-1)$	$\searrow$		$\nearrow$	$f(6)$



Ta có

$$f(6)-f(-1)=\int_{-1}^{6} f'(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{2} f'(x)\mathrm{d}x+\int_{2}^{6} f'(x)\mathrm{d}x=S_2-S_1>0\Rightarrow f(6)>f(-1).$$

Câu 11: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ liên tục trên tập số thực $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Biết $f(-1)=\dfrac{13}{4}, f(2)=6$. Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x)=f^3(x)-3f(x)$ trên $[-1;2]$ bằng

A. $\dfrac{1573}{64}$. **B.** 198. **C.** $\dfrac{37}{4}$. **D.** $\dfrac{14245}{64}$.

Lời giải

Chọn A

Từ đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và giả thiết $f(-1) = \dfrac{13}{4}, f(2) = 6$ ta có bảng biến thiên hàm số $y = f(x)$ trên $[-1;2]$:

x	-1		2
$f'(x)$	0	$+$	0
$f(x)$	$\frac{13}{4}$	$\nearrow$	6

Ta có $g'(x) = 3f^2(x).f'(x) - 3f'(x)$.

Xét trên đoạn $[-1;2]$.

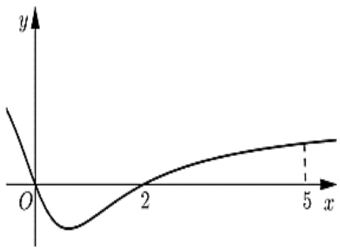
$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 3f'(x)\left[f^2(x) - 1\right] = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 2 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	-1		2
$g'(x)$	0	$+$	0
$g(x)$		$\nearrow$	

$\Rightarrow \min\limits_{[-1;2]} g(x) = g(-1) = f^3(-1) - 3f(-1) = \dfrac{1573}{64}$.

Câu 12: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ được cho như hình vẽ bên. Biết rằng $f(0) + f(3) = f(2) + f(5)$. Tìm giá trị nhỏ nhất m và giá trị lớn nhất M của $f(x)$ trên đoạn $[0;5]$.



A. $m = f(0), M = f(5)$. **B.** $m = f(2), M = f(0)$.

C. $m = f(1), M = f(5)$. **D.** $m = f(2), M = f(5)$.

Lời giải

Chọn D

Dựa vào đồ thị ta có bảng biến thiên

x	0		2		3		5
y'	0	$-$	0	$+$		$+$	
y	$f(0)$	$\searrow$	$f(2)$	$\nearrow$	$f(3)$	$\nearrow$	$f(5)$

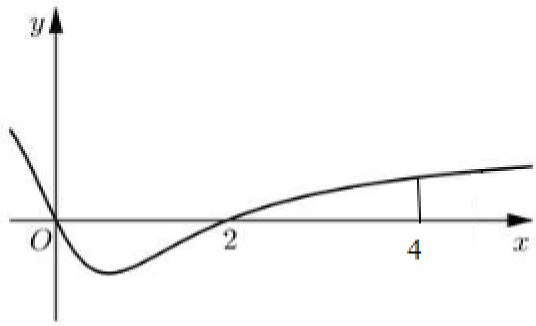
Ta có:

$\min\limits_{[0;5]} f(x) = f(2)$ và $f(3) > f(2)$.

Mà $f(0)+f(3)=f(2)+f(5) \Rightarrow f(0)-f(5)=f(2)-f(3)<0 \Rightarrow f(0) < f(5)$

$\Rightarrow \max\limits_{[0;5]} f(x) = f(5)$.

Câu 13 : Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ được cho như hình vẽ bên. Biết rằng $f(0)+f(3)=f(2)+f(4)$. Giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của $f(x)$ trên đoạn $[0;4]$ lần lượt là



A. $f(0), f(4)$. **B.** $f(2), f(0)$. **C.** $f(1), f(4)$. **D.** $f(2), f(4)$.

Lời giải

Chọn D

Cách 1:

Dựa vào đồ thị hàm số $y=f'(x)$ lập bảng biến thiên, ta có $\min\limits_{[2;4]} f(x) = f(2)$

Và $\max\limits_{[0;4]} f(x) = \max\{f(0), f(4)\}$.

Vì $f(x)$ đồng biến trên đoạn $[2;4]$ nên

$f(3) > f(2) \Rightarrow f(4)-f(2) > f(4)-f(3) = f(0)-f(2)$.

Do đó $f(4) > f(0)$, vậy $\max\limits_{[0;5]} f(x) = \max\{f(0), f(4)\} = f(4)$.

Cách 2:

Căn cứ đồ thị của $y=f'(x)$ và ứng dụng tích phân, ta có:

$S_1 = \int_0^2 |f'(x)|dx = \int_0^2 f'(x)dx = f(0)-f(2)$ và $S_2 = \int_2^4 |f'(x)|dx = \int_2^4 f'(x)dx = f(2)-f(4)$.

Theo giả thiết, ta có:

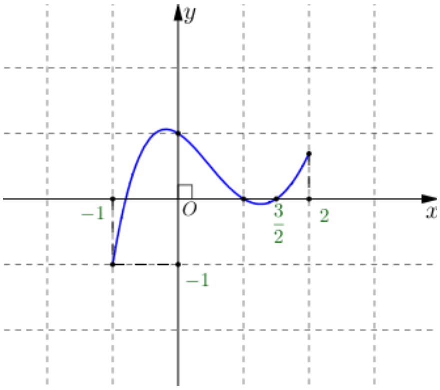
$f(0)+f(3)=f(2)+f(4) \Rightarrow f(4)-f(3)=f(0)-f(2)$.

Suy ra $S_2 = \int_2^4 |f'(x)|dx > \int_3^4 |f'(x)|dx = f(4)-f(3) = S_1$.

Suy ra $S_2 > S_1 > 0 \Rightarrow f(4) > f(0) > f(2)$.

Vậy $\min\limits_{[0;5]} f\left(x\right)=f\left(2\right), \max\limits_{[0;5]} f\left(x\right)=f\left(4\right)$.

Câu 14: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $\left[-1;2\right]$, có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ sau.



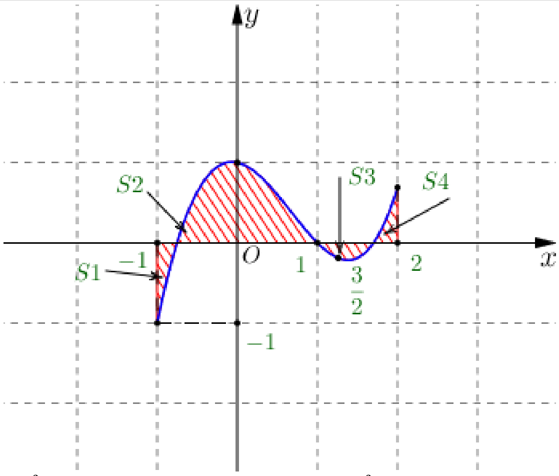
Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $\max\limits_{[-1;2]} f(x)=f(-1)$. **B.** $\max\limits_{[-1;2]} f(x)=f(2)$. **C.** $\max\limits_{[-1;2]} f(x)=f(1)$. **D.** $\max\limits_{[-1;2]} f(x)=f\left(\frac{3}{2}\right)$

Lời giải

Chọn B

x	-1		a		1		$\frac{3}{2}$		2
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$f(-1)$ ↘		$f(a)$	↗	$f(1)$	↘	$f\left(\frac{3}{2}\right)$	↗	$f(2)$



Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường thẳng $x=-1; x=a, y=0$ và đồ thị $y=f'(x)$.

S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường thẳng $x=a; x=1; y=0$ và đồ thị $y=f'(x)$.

S_3 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường thẳng $x=1; x=\frac{3}{2}; y=0$ và đồ thị $y=f'(x)$.

S_4 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường thẳng $x=\frac{3}{2}; x=2; y=0$ và đồ thị $y=f'(x)$.

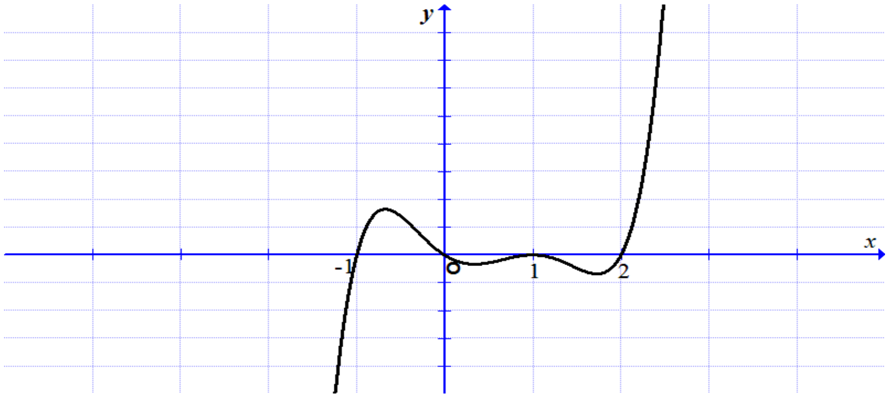
Ta có: $f(1)-f(-1)=\int\limits_{-1}^{1} f'(x)dx=\int\limits_{-1}^{a} f'(x)dx+\int\limits_{a}^{1} f'(x)dx=S_2-S_1>0 \Rightarrow f(1)>f(-1)$

$f(2)-f(1)=\int\limits_{1}^{2} f'(x)dx=\int\limits_{1}^{\frac{3}{2}} f'(x)dx+\int\limits_{\frac{3}{2}}^{2} f'(x)dx=S_4-S_3>0 \Rightarrow f(2)>f(1)$.

Suy ra $f\left(2\right) > f\left(1\right) > f\left(-1\right) > f\left(\frac{3}{2}\right)$.

Dạng 8: Cho đồ thị, BBT của hàm số $y=f'(x)$, tìm GTLN, GTNN của hàm số $y=f(|x|)$ trên khoảng, đoạn.

Câu 1: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như sau:



Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(|x|)$ trên đoạn $[-4;3]$. Tính giá trị của $M-m$.

A. $f(4)+f(2)$. **B.** $f(4)+f(0)$. **C.** $f(3)-f(0)$. **D.** $f(3)+f(2)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=0 \\ x=1 \\ x=2 \end{array}\right.$.

Mặt khác hàm số $y=f(|x|)$ là hàm số chẵn.

Ta có bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ và $f(|x|)$.

x	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	0	-	0	+	
$y=f(x)$	$+\infty$	↘	$f(-1)$	↗	$f(0)$	↘		↘	$f(2)$	↗	$+\infty$

x	-4		-2		0		2		3
y'		-	0	+	0	-	0	+	
$y=f(\|x\|)$	$f(4)$	↘	$f(2)$	↗	$f(0)$	↘	$f(2)$	↗	$f(3)$

Từ hình vẽ của đồ thị $y=f'(x)$ ta có

$\int_0^2 |f'(x)|dx < \int_2^3 |f'(x)|dx$.

Suy ra:

$-[f(2)-f(0)] < f(3)-f(2) \Leftrightarrow f(3)-f(2)>0 \Leftrightarrow f(0)<f(3)$.

$\int_2^3 |f'(x)|dx < \int_2^4 |f'(x)|dx$

Suy ra:

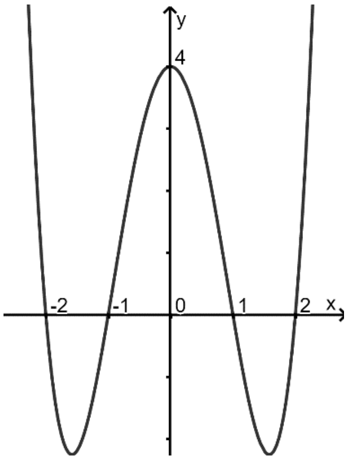
$f(3)-f(2)<f(4)-f(2)\Leftrightarrow f(3)-f(2)>0\Leftrightarrow f(3)<f(4)$

Vậy: $f(0)<f(3)<f(4)$.

Mặt khác từ bảng biến thiên hàm số $y=f(|x|)$ ta có: $\min\limits_{[-4;3]} f(|x|)=f(0)$.

$\Rightarrow \max\limits_{[-4;3]} f(|x|)=f(-4)=f(4)=M \Rightarrow M+m=f(4)+f(2)$.

Câu 2: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x)=f(|x|)$ trên đoạn $[-2;1]$. Tính $M+m$.

A. $f(1)+f(0)$ **B.** $f(1)+f(-2)$ **C.** $f(-2)+f(-1)$ **D.** $f(-1)+f(0)$

Lời giải

Chọn A

Từ đồ thị ta suy ra bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$ như sau:

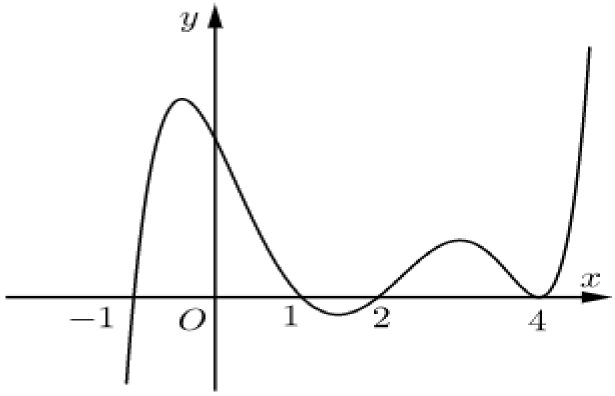
x	$-\infty$		-2		-1		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	0	−	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(-2)$	↘	$f(-1)$	↗	$f(1)$	↘	$f(2)$	↗	$+\infty$

Với $x\in[-2;1]$ thì $|x|\in[0;2]$, từ bảng biến thiên suy ra $M=f(1)$ và $m=\min\{f(0),f(2)\}$.

Do $\int\limits_0^1 f'(x)dx>-\int\limits_1^2 f'(x)dx \Leftrightarrow f(1)-f(0)>f(1)-f(2)\Leftrightarrow f(2)>f(0)$, nên $m=f(0)$.

Vậy $M+m=f(1)+f(0)$.

Câu 3: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y=f(|x|)$ trên đoạn $[-1;4]$?



A. $\max\limits_{[-1;4]} f(|x|) = f(1);\ \min\limits_{[-1;4]} f(|x|) = f(0)$.

B. $\max\limits_{[-1;4]} f(|x|) = f(4);\ \min\limits_{[-1;4]} f(|x|) = f(0)$.

C. $\max\limits_{[-1;4]} f(|x|) = f(4);\ \min\limits_{[-1;4]} f(|x|) = f(2)$.

D. $\max\limits_{[-1;4]} f(|x|) = f(1);\ \min\limits_{[-1;4]} f(|x|) = f(2)$.

Lời giải

Chọn B

Từ đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ ta có bảng biến thiên của $y = f(x)$ trên $[-1;4]$:

x	-1		1		2		4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$f(-1)$	↗	$f(1)$	↘	$f(2)$	↗	$f(4)$

Từ bảng biến thiên $y = f(x)$ ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f(|x|)$:

x	-4		-2		-1		0		1		2		4
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$f(4)$	↘	$f(2)$	↗	$f(1)$	↘	$f(0)$	↗	$f(1)$	↘	$f(2)$	↗	$f(4)$

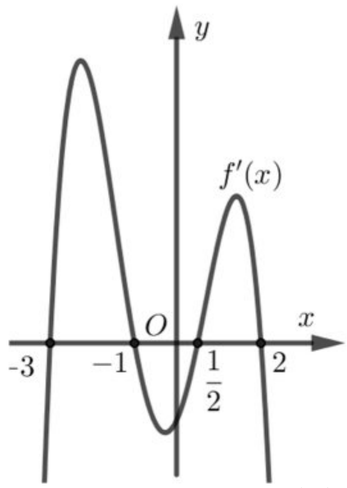
Từ hình vẽ ta có:

$$\int_0^1 |f'(x)|dx > \int_1^2 |f'(x)|dx \Leftrightarrow f(1) - f(0) > f(1) - f(2) \Rightarrow f(2) > f(0).$$

$$\int_2^4 |f'(x)|dx > \int_1^2 |f'(x)|dx \Leftrightarrow f(4) - f(2) > f(1) - f(2) \Rightarrow f(4) > f(1).$$

Vậy $\max\limits_{[-1;4]} f(|x|) = f(4);\ \min\limits_{[-1;4]} f(|x|) = f(0)$.

Câu 4: Cho hàm số $f(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + n\ (a,b,c,d,e,n \in \mathbb{R})$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên (đồ thị cắt Ox tại 4 điểm có hoành độ $-3; -1; \frac{1}{2}$ và 2). Đặt $M = \max\limits_{[-3;2]} f(|x|); m = \min\limits_{[-3;2]} f(|x|)$ và $T = M + m$. Khẳng định nào sau đây đúng?



A. $T = f(-3) + f(2)$. **B.** $T = f(-3) + f(0)$. **C.** $T = f\left(\frac{1}{2}\right) + f(2)$. **D.** $T = f\left(\frac{1}{2}\right) + f(0)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f'(x) = 5ax^4 + 4bx^3 + 3cx^2 + 2dx + e = 5a(x+3)(x+1)\left(x - \frac{1}{2}\right)(x-2)$ (Vì phương trình $f'(x) = 0$ có 4 nghiệm $-3; -1; \frac{1}{2}$ và 2).

Từ đồ thị ta có bảng biến thiên của $f(x)$

x	$-\infty$		-3		-1		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f(-3)$	↗	$f(-1)$	↘	$f\left(\frac{1}{2}\right)$	↗	$f(2)$	↘	$-\infty$

Từ bảng biến thiên $\Rightarrow a < 0$.

Suy ra bảng biến thiên của $f(|x|)$

x	-3		-2		$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$f(-3)$	↗	$f(-2)$	↘	$f\left(-\frac{1}{2}\right)$	↗	$f(0)$	↘	$f\left(\frac{1}{2}\right)$	↗	$f(2)$	↘	$-\infty$

Vì hàm số $f(|x|)$ là hàm số chẵn $\Rightarrow \begin{cases} f(-2) = f(2); f(-3) = f(3) \\ f\left(-\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) \end{cases}$.

+) $f(3) - f\left(\frac{1}{2}\right) = \int_{\frac{1}{2}}^{3} f'(x)\,dx = 5a\int_{\frac{1}{2}}^{3} (x+3)(x+1)\left(x - \frac{1}{2}\right)(x-2)\,dx = \frac{11125a}{128} < 0$

$\Rightarrow f(-3) = f(3) < f\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(-\frac{1}{2}\right)$ (1)

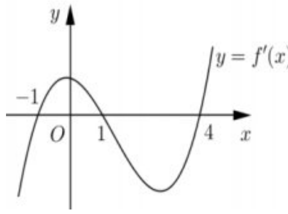
+) $f(2) - f(0) = \int_{0}^{2} f'(x)\,dx = 5a\int_{0}^{2} (x+3)(x+1)\left(x - \frac{1}{2}\right)(x-2)\,dx = -23a > 0$

$\Rightarrow f(-2) = f(2) > f(0)$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow M = \max\limits_{[-3;2]} f(|x|) = f(-2) = f(2); m = \min\limits_{[-3;2]} f(|x|) = f(-3)$.

Vậy $T = M + m = f(-3) + f(2)$.

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình bên



Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(|x|)$ trên đoạn $[-1;4]$.

A. $f(-1)$. **B.** $f(1)$. **C.** $f(0)$. **D.** $f(4)$.

Lời giải

Chọn D

Từ đồ thị hàm số $y = f'(x)$ ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-1;4]$

x	-1		1		4
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	0
$f(x)$	$f(-1)$	$\nearrow$	$f(1)$	$\searrow$	$f(4)$

Suy ra bảng biến thiên của hàm số $y = f(|x|)$ trên đoạn $[-1;4]$

x	-1		0		1		4
$f'(x)$	0	$-$		$+$	0	$-$	0
$f(\lvert x\rvert)$	$f(1)$	$\searrow$	$f(0)$	$\nearrow$	$f(1)$	$\searrow$	$f(4)$

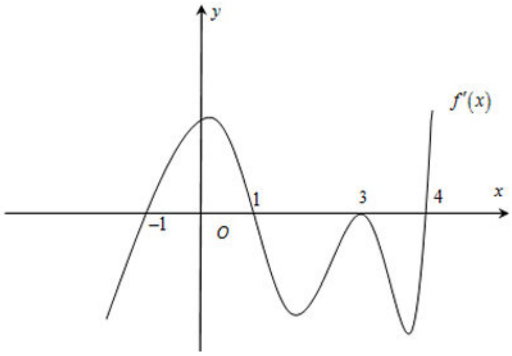
Từ đồ thị ta có $\int\limits_0^1 f'(x)dx < -\int\limits_1^4 f'(x)dx \Leftrightarrow f(x)\Big|_0^1 < -f(x)\Big|_1^4 \Leftrightarrow f(1) - f(0) < f(1) - f(4)$

$\Leftrightarrow f(0) > f(4)$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(|x|)$ trên đoạn $[-1;4]$ là $f(4)$.

Dạng 9: Cho đồ thị, BBT của hàm số $y = f'(x)$, tìm GTLN, GTNN của hàm số $y = |f(x)|$ trên khoảng, đoạn.

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Biết $f(1)<0$. Tìm giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số $g(x)=|f(x)|$ trên đoạn $[1;4]$.

A. $M=f(4), m=f(1)$. **B.** $M=f(3), m=f(1)$.

C. $M=|f(4)|, m=|f(1)|$. **D.** $M=|f(1)|, m=|f(4)|$.

Lời giải

Chọn C

Từ đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ ta có bảng biến thiên sau:

x	1		3		4
$f'(x)$	0	$-$	0	$-$	0
$f(x)$	$f(1)$	$\searrow$			$f(4)$

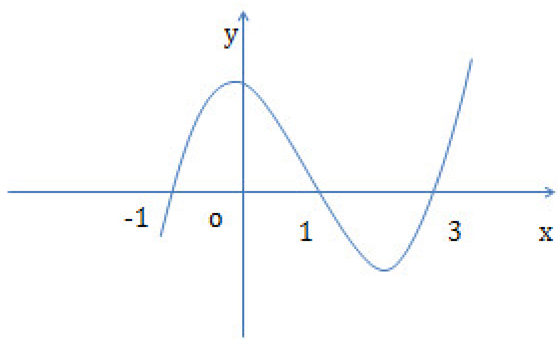
Do $f(1)<0$ nên ta có $f(4)<f(1)<0 \Rightarrow |f(4)|>|f(1)|$

Ta có bảng biến thiên:

$f'(x)$	0	$-$	0	$-$	0
$f(x)$	$f(1)$	$\searrow$			$f(4)$
$g(x)=\|f(x)\|$	$\|f(1)\|$	$\nearrow$			$\|f(4)\|$

Vậy $M=|f(4)|; m=|f(1)|$.

Câu 2: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(1)<0$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ .



Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x)=|f(x)|$ trên $[-1;1]$. Khi đó $M; m$ là

A. $M = f(-1), m = f(1)$.

B. $M = |f(1)|, m = |f(-1)|$.

C. $M = |f(-1)|, m = |f(1)|$.

D. $M = f(-1), m = |f(1)|$.

Lời giải

Chọn C

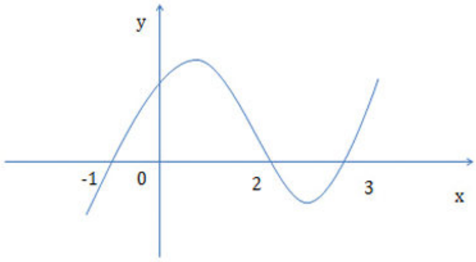
Từ đồ thị hàm số $y = f'(x)$ ta có $y = f(x)$ luôn đồng biến trên $[-1;1]$ nên

$f(-1) < f(1) < 0, \forall x \in [-1;1]$.

Do đó $|f(-1)| > |f(1)|, \forall x \in [-1;1]$ nên

$\max\limits_{[-1;1]} g(x) = |f(-1)|; \min\limits_{[-1;1]} g(x) = |f(1)| \Rightarrow M = |f(-1)|, m = |f(1)|$.

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(2) < 0$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ .



Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x) = |f(x)|$ trên $[-1;3]$. Khi đó $M; m$ là

A. $M = f(-1), m = f(3)$.

B. $M = |f(3)|, m = |f(-1)|$.

C. $M = |f(-1)|, m = |f(2)|$.

D. $M = |f(-1)|, m = |f(3)|$.

Lời giải

Chọn C

Từ đồ thị hàm số $y = f'(x)$ ta có $y = f(x)$ luôn đồng biến trên $[-1;2]$ và nghịch biến trên $[2;3]$ nên $f(-1) < f(2) < 0, \forall x \in [-1;2]$ và $f(3) < f(2) < 0, \forall x \in [2;3]$.

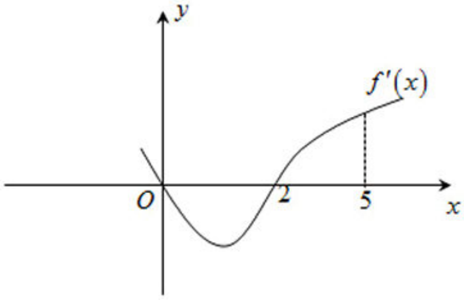
Mặt khác ta có

$$\int_{-1}^{2} f'(x)dx > \int_{2}^{3} -f'(x)dx \Leftrightarrow f(x)\Big|_{-1}^{2} > -f(x)\Big|_{2}^{3} \Rightarrow f(2) - f(-1) > -f(3) + f(2) \Rightarrow f(-1) < f(3)$$

Do đó ta có $f(-1) < f(3) < f(2) < 0, \forall \in [-1;3] \Rightarrow |f(-1)| > |f(3)| > |f(2)|$

$\max\limits_{[-1;3]} g(x) = |f(-1)|; \min\limits_{[-1;3]} g(x) = |f(2)| \Rightarrow M = |f(-1)|, m = |f(2)|$.

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $[0;5]$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ trên $[0;5]$ như hình vẽ.



Biết $f(0) + f(3) = f(2) + f(5)$ và $f(5) < 0$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x)=|f(x)|$ trên đoạn $[0;5]$.

A. $|f(3)|,|f(5)|$. **B.** $|f(2)|,|f(0)|$. **C.** $|f(2)|,|f(5)|$. **D.** $|f(0)|,|f(5)|$.

Lời giải

Chọn C

Từ đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ ta có bảng biến thiên sau

x	0		2		3		5
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	$\|$	$+$	
$f(x)$	$f(0)$	$\searrow$	$f(2)$	$\nearrow$	$f(3)$	$\nearrow$	$f(5)$

Theo giả thiết ta có $f(0)+f(3)=f(2)+f(5) \Leftrightarrow f(5)-f(0)=f(3)-f(2)$ mà $f(3)>f(2) \Rightarrow f(5)>f(0)$

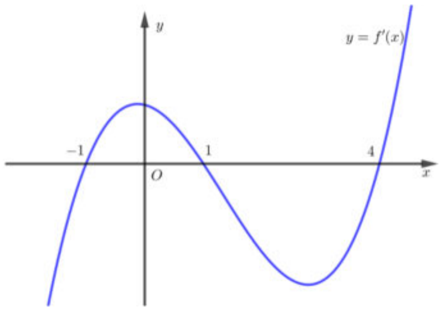
Cũng theo giả thiết ta có $f(5)<0$ nên $f(2)<f(0)<f(5)<0 \Rightarrow |f(2)|>|f(0)|>|f(5)|$

Do đó ta suy ra bảng biến thiên sau

x	0		2		3		5
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	$\|$	$+$	
$f(x)$	$f(0)$	$\searrow$	$f(2)$	$\nearrow$	$f(3)$	$\nearrow$	$f(5)$
$g(x)=\|f(x)\|$	$\|f(0)\|$	$\nearrow$	$\|f(2)\|$	$\searrow$		$\searrow$	$\|f(5)\|$

Vậy $\max\limits_{[0;5]} g(x)=|f(2)|; \min\limits_{[0;5]} g(x)=|f(5)|$.

Câu 5: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị $y=f'(x)$ như hình vẽ dưới đây và $f(1)<0$.



Khi đó giá trị lớn nhất của hàm số $y=|f(x)|$ trên đoạn $[-1;4]$ bằng

A. $|f(0)|$. **B.** $|f(1)|$. **C.** $|f(-1)|$. **D.** $|f(4)|$.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $y=f(x)$. Ta có $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=1 \\ x=4 \end{array}\right.$.

Ta có bảng biến thiên

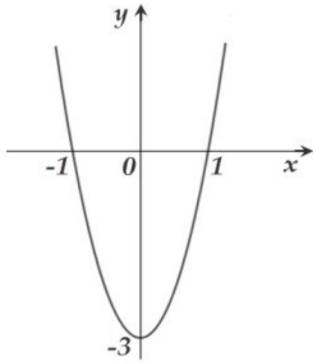
x	-1		1		4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$f(-1)$	$\nearrow$	$f(1)$	$\searrow$	$f(4)$

Từ đồ thị hàm số, suy ra $\int\limits_{-1}^{1}|f'(x)|\mathrm{d}x < \int\limits_{1}^{4}|f'(x)|\mathrm{d}x \Rightarrow \int\limits_{-1}^{1} f'(x)\mathrm{d}x < -\int\limits_{1}^{4} f'(x)\mathrm{d}x$

$\Rightarrow f(x)\big|_{-1}^{1} < -f(x)\big|_{1}^{4} \Rightarrow f(-1) > f(4)$.

Ta có $f(4) < f(-1) < f(1) < 0 \Rightarrow |f(4)| > |f(-1)| > |f(1)| \Rightarrow \max\limits_{[-1,4]}|f(x)| = |f(4)|$.

Câu 6: Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị (C). Biết đồ thị (C) tiếp xúc với đường thẳng $y = 4$ tại điểm có hoành độ âm và đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên dưới



Giá trị lớn nhất của hàm số $y = |f(x)|$ trên $[0;3]$ bằng

A. 20. **B.** 60. **C.** 22. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Vì đồ thị hàm $f'(x)$ cắt Ox tại hai điểm phân biệt có hoành độ $x = -1$ và $x = 1$ nên $f'(x) = k(x-1)(x+1)$ với k là số thực khác 0.

Vì đồ thị hàm $f'(x)$ đi qua điểm $(0;-3)$ nên ta có $-3 = -k \Leftrightarrow k = 3$.

Suy ra $f'(x) = 3x^2 - 3$. Mà $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ nên ta có được $a = 1, b = 0, c = -3$.

Từ đó $f(x) = x^3 - 3x + d$.

Do đồ thị $f(x)$ tiếp xúc với đường thẳng $y = 4$ tại điểm có hoành độ âm nên ta có $\begin{cases} x^3 - 3x + d = 4 \\ 3x^2 - 3 = 0 \\ x < 0 \end{cases}$ có nghiệm. Suy ra $\begin{cases} x = -1 \\ d = 2 \end{cases}$.

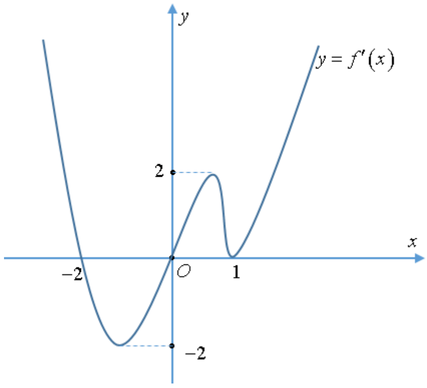
Do đó $f(x) = x^3 - 3x + 2$ và $y = |f(x)| = |x^3 - 3x + 2|$ với $x \in [0;3]$.

Ta có $f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 1 \end{array}\right.$ và $f(0) = 2$; $f(1) = 0$; $f(3) = 20$.

Suy ra $m = \min\limits_{[0;3]} f(x) = 0$ và $M = \max\limits_{[0;3]} f(x) = 20$.

Vậy $\max\limits_{[0;3]}|f(x)| = \max\{|m|;|M|\} = 20$.

Câu 7: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị của hàm $y = f'(x)$ được cho như hình bên dưới và $f(-2)=3$, $f(0)=-5$, $f(1)=0$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số $y=|f(x)|+1$ trên $[-2;1]$. Khi đó M^2+m^2 bằng



A. 8. **B.** 25. **C.** 37. **D.** 34.

Lời giải

Chọn C

Quan sát đồ thị $f'(x)$ ta có: $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=0 \\ x=1 \end{array}\right.$.

Ta có bảng biến thiên:

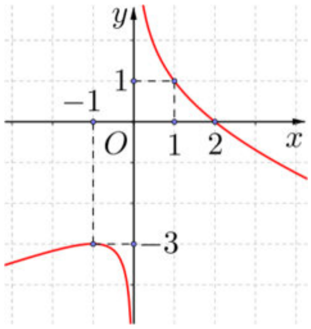
x	$-\infty$	-2	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0 $-$	0 $+$	0 $+$	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	3 ↘	-5 ↗	0 ↗	$+\infty$

Quan sát bảng biến thiên ta có: $x\in[-2;1]$ thì $f(x)\in[-5;3] \Rightarrow |f(x)|+1\in[1;6]$.

Suy ra $M=6$ và $m=1$.

Vậy $M^2+m^2=37$.

Câu 8: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ nhận trục tung làm đường tiệm cận đứng về cả hai phía như hình vẽ.



Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y=|f(x)|$ trên đoạn $[-1;3]$, biết rằng $f(1)=\frac{2}{5}$ và $f(-1)+f(0)+f(1)=0$.

A. $|f(0)|$. **B.** $|f(-1)|$. **C.** $|f(2)|$. **D.** $|f(3)|$.

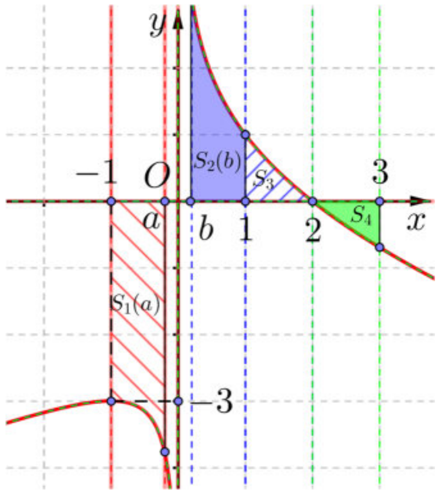
Lời giải

Chọn A

Từ đồ thị hàm $y = f'(x)$ ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$ và $f'(x)$ không xác định tại $x = 0$.

Do $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên bảng biến thiên của $y = f(x)$ trên đoạn $[-1;3]$ là:

x	-1		0		1		2		3
$f'(x)$		$-$	$\Vert$		$+$		0	$-$	
$f(x)$	$f(-1)$	$\searrow$	$f(0)$	$\nearrow$	$\frac{2}{5}$	$\nearrow$	$f(2)$	$\searrow$	$f(3)$



Vì $f(x)$ liên tục tại $x = 0$ nên $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$.

Gọi $S_1(a)$ là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f'(x)$, $y = 0$, $x = -1$, $x = a$ với $a \in (-1;0)$ (Hình vẽ).

Ta có $f(-1) - f(0) = \lim\limits_{a \to 0^-}\left[f(-1) - f(a)\right] = \lim\limits_{a \to 0^-}\left(\int_a^{-1} f'(x)\,\mathrm{d}x\right) = \lim\limits_{a \to 0^-} S_1(a) > 3$

Suy ra $f(0) < f(-1) - 3$ (*)

Gọi $S_2(b)$ là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f'(x)$, $y = 0, x = b, x = 1$ với $b \in (0;1)$.

Khi đó $f(1) - f(0) = \lim\limits_{b \to 0^+}\left[f(1) - f(b)\right] = \lim\limits_{b \to 0^+}\left(\int_b^{1} f'(x)\,\mathrm{d}x\right) = \lim\limits_{b \to 0^+} S_2(b) > 1$

Suy ra $f(0) < f(1) - 1$ (**)

Từ (*) và (**) suy ra $2f(0) < f(-1) + f(1) - 4$

$\Rightarrow 3f(0) < f(0) + f(-1) + f(1) - 4 = -4 \Rightarrow f(0) < -\frac{4}{3} \Rightarrow |f(0)| > \frac{4}{3}$ (1)

Từ bảng biến thiên ta có $f(-1) > f(0)$.

Lại có $f(0) = -\left[f(1) + f(-1)\right] \Rightarrow |f(0)| = f(1) + f(-1) = \frac{2}{5} + f(-1) > f(-1)$

Do đó ta có $f(0) < f(-1) < |f(0)| \Rightarrow |f(0)| > |f(-1)|$ (2)

Gọi S_3 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f'(x)$, $y = 0$, $x = 1, x = 2$.

Ta có $f(2) > f(1) = \frac{2}{5} > 0$ và $f(2) - f(1) = \int_1^2 f'(x)\,\mathrm{d}x = S_3 < \frac{1}{2}$

$\Rightarrow 0 < f(2) < \frac{1}{2} + f(1) = \frac{1}{2} + \frac{2}{5} = \frac{9}{10}$

Do đó $|f(0)| > \frac{4}{3} > \frac{9}{10} > f(2) = |f(2)|$ (3)

Gọi S_4 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f'(x)$, $y = 0$, $x = 2, x = 3$.

Ta có $f(2) - f(3) = \int_3^2 f'(x)\,dx = S_4 < 1 \Rightarrow f(3) > f(2) - 1 > f(1) - 1 = \frac{2}{5} - 1 = -\frac{3}{5}$

Kết hợp với $f(3) < f(2) < \frac{9}{10}$ nên $|f(3)| < \frac{9}{10}$, suy ra $|f(3)| < |f(0)|$ (4)

Từ (1), (2), (3), (4) suy ra $\max\limits_{x\in[-1;3]} |f(x)| = |f(0)|$.

Chú thích của tác giả: Sáng tác dựa trên hàm số $f(x) = -\frac{3}{5}(x-5)\sqrt[3]{x^2} - 2$.

Dạng 10: Cho đồ thị, BBT của hàm số $y = f'(x)$, tìm GTLN, GTNN của hàm số $y = f(|x+a|+b)$ trên khoảng, đoạn.

1. Lý thuyết:

+) $g'(x) = \frac{x+a}{|x+a|}.f'(|x+a|+b)$.

+) *Dựa vào bảng biến thiên hoặc đồ thị của hàm số $f'(x)$ giải phương trình $g'(x) = 0$ và tìm các giá trị của x trên khoảng, đoạn đã cho mà tại đó $g'(x)$ không xác định. Từ đó lập bảng biến thiên của hàm số $g(x)$, dựa vào bảng biến thiên để kết luận về giá trị lớn nhất, nhỏ nhất.*

+) *Một số bài toán cần tìm ra công thức của hàm số $y = f(x)$. Khi đó, dựa vào bảng biến thiên hoặc đồ thị của hàm số $f'(x)$ và các giả thiết khác để thiết lập công thức của hàm số $f'(x)$, từ đó tìm công thức $y = f(x)$ bằng phép toán nguyên hàm.*

+) *Một số bài toán cho đồ thị của hàm số $f'(x)$, để tìm GTLN, NN của hàm số $f(|x+a|+b)$ cần dùng đến phép toán tích phân. Đặc biệt ý nghĩa của tích phân về diện tích hình phẳng.*

+) *Nếu biết đồ thị của hàm số $y = f(x)$, bằng phép biến đổi đồ thị thì chúng ta có thể suy ra được đồ thị $y = g(x) = f(|x+a|+b)$.*

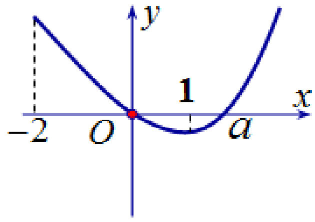
+) *Một số bài toán tìm GTLN, NN của hàm số $y = g(x) = f(|x+a|+b)$ trên đoạn $[c;d]$, bằng cách đặt $t = |x+a|+b$, với $x \in [c;d]$ thì $t \in [m;n]$. Khi đó ta chuyển về tìm GTLN, NN của hàm số $f(t)$ trên $[m;n]$.*

2. Bài tập:

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $f'(x)$ (như hình vẽ). Khi đó hàm số $g(x) = f(|x+1|-2)$ lần lượt đạt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất là M, m trên đoạn $[0;1]$. Khẳng định đúng là:

A. $M - m = f(-1) - f(0)$. **B.** $M + 2m = f(0) + 2f(-1)$.

C. $2M - m = 2f(a) - f(0)$. **D.** $m - M = f(-1) - f(0)$



Lời giải

Chọn B

Dựa vào đồ thị hàm số $f'(x)$, ta suy ra bảng biến thiên:

x	-2		0		a	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$y=f(x)$		↗	$f(0)$	↘	$f(a)$	↗

Xét hàm $h(x)=f(x+1)$ có đồ thị được suy ra bằng cách tịnh tiến đồ thị hàm $y=f(x)$ sang trái 1 đơn vị. Khi đó, ta được bảng biến thiên:

x		-1		$a-1$	
$h(x)=f(x+1)$	↗	$f(0)$	↘	$f(a)$	↗

Hàm $p(x)=f(\lvert x+1\rvert)$ có đồ thị được suy ra từ đồ thị hàm $h(x)$ bằng cách:

+ Giữ nguyên phần bên phải Oy (với $x\ge -1$).

+ Lấy đối xứng phần bên phải Oy qua trục tung.

Ta được bảng biến thiên:

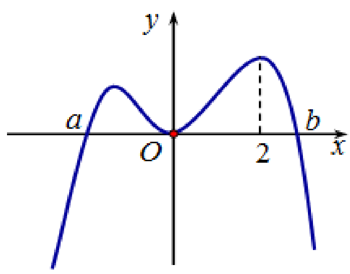
x		$-a-1$		-1		$a-1$	
$p(x)=f(\lvert x+1\rvert)$	↘	$f(a)$	↗	$f(0)$	↘	$f(a)$	↗

Hàm số $g(x)=f(\lvert x+1\rvert-2)$ có đồ thị được tạo thành bằng cách tịnh tiến đồ thị hàm $p(x)$ sang phải 2 đơn vị. Ta được bảng biến thiên:

x		$-a+1$		1		$a+1$	
$g(x)=f(\lvert x+1\rvert-2)$	↘	$f(a)$	↗	$f(0)$	↘	$f(a)$	↗

Vì $a>1$ nên $-a+1<0$ nên trên đoạn $[0;1]$ có $M=\max\limits_{[0;1]} g(x)=f(0)$, $m=\min\limits_{[0;1]} g(x)=f(-1)$.

Câu 2: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị $f'(x)$ (như hình vẽ). Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x)=f(\lvert x+1\rvert-3)$ trên đoạn $[1;4]$. Phát biểu nào sau đây đúng?



A. $M=g(4)$, $m=g(2)$.

B. $M=g(2)$, $m=g(4)$.

C. $M=g(a)$, $m=g(b)$.

C. $m=g(a)$, $M=g(b)$.

Lời giải

Chọn A

Dựa vào đồ thị hàm số $f'(x)$, ta suy ra bảng biến thiên:

x		a		0		b	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$
$y=f(x)$	$\searrow$	$f(a)$	$\nearrow$	$f(0)$	$\nearrow$	$f(b)$	$\searrow$

Xét hàm số $h(x)=f(x+1)$ có đồ thị được suy ra bằng cách tịnh tiến đồ thị hàm $y=f(x)$ sang trái 1 đơn vị. Khi đó, ta được bảng biến thiên:

x		$a-1$		-1		$b-1$	
$h'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$
$h(x)$	$\searrow$	$f(a)$	$\nearrow$	$f(0)$	$\nearrow$	$f(b)$	$\searrow$

Hàm $p(x)=f(|x+1|)$ có đồ thị được suy ra từ đồ thị hàm $h(x)$ bằng cách:

+ Giữ nguyên phần bên phải Oy (với $x\geq -1$).

+ Lấy đối xứng phần bên phải Oy qua trục tung.

Ta được bảng biến thiên:

x		$-b-1$		-1		$b-1$	
$p(x)$	$\nearrow$	$f(b)$	$\searrow$	$f(0)$	$\nearrow$	$f(b)$	$\searrow$

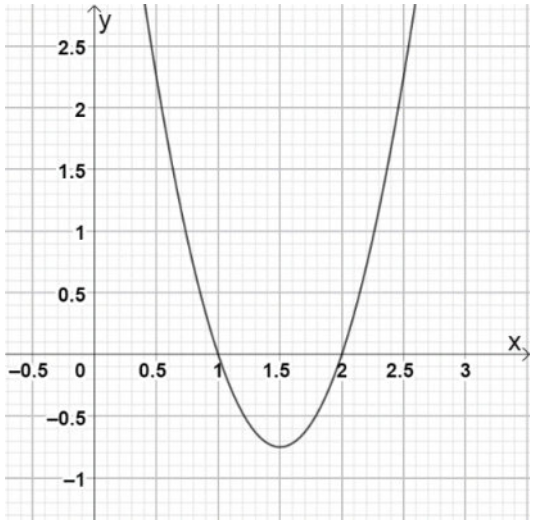
Hàm số $g(x)=f(|x+1|-3)$ có đồ thị được tạo thành bằng cách tịnh tiến đồ thị hàm $p(x)$ sang phải 3 đơn vị. Ta được bảng biến thiên:

x		$-b+2$		2		$b+2$	
$g(x)$	$\nearrow$	$f(b)$	$\searrow$	$f(0)$	$\nearrow$	$f(b)$	$\searrow$

Vì $b>2$ nên $b+2>4$. Đồ thị hàm $g(x)$ đối xứng qua đường thẳng $x=2$ nên ta có $g(1)=g(3)$ và $g(3)<g(4)<g(b+2)$.

Vậy $M=\max\limits_{[1;4]} g(x)=g(4)$, $m=\min\limits_{[1;4]} g(x)=g(2)$.

Câu 3: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ là hàm số bậc hai có đồ thị như hình vẽ.



Biết rằng $\min\limits_{\mathbb{R}} f'(x) = -\dfrac{3}{4}$, $f(0) = 0$. Giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = f(|x-2|+1)$ trên đoạn $[1;3]$ có dạng $\dfrac{m}{n}$ với $m, n \in \mathbb{Z}$, $n > 0$ và phân số đó tối giản. Tính $m^2 + n^2$.

A. 85. **B.** 74. **C.** 61. **D.** 58.

Lời giải

Chọn C

Vì $f'(x)$ là hàm số bậc hai nên nó có dạng: $f'(x) = ax^2 + bx + c \ (a \neq 0)$.

Từ đồ thị hàm số $f'(x)$ và giả thiết ta có

$$\begin{cases} f'(1) = 0 \\ f'\left(\dfrac{3}{2}\right) = -\dfrac{3}{4} \\ f'(2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c = 0 \\ \dfrac{9}{4}a + \dfrac{3}{2}b + c = -\dfrac{3}{4} \\ 4a + 2b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \\ c = 2 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = x^2 - 3x + 2$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + 2x + C.$$

Vì $f(0) = 0$ nên $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{3}{2}x^2 + 2x$.

Ta có $g'(x) = \dfrac{x-2}{|x-2|} f'(|x-2|+1)$ với $x \neq 2$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(|x-2|+1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |x-2|+1 = 1 \ (\text{VN do } x \neq 2) \\ |x-2|+1 = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 3 \end{array}\right..$$

Ta có bảng biến thiên

x	1		2		3
$g'(x)$	0	$+$	$\|$	$-$	0
$g(x)$	$g(1)$	$\nearrow$	$g(2)$	$\searrow$	$g(3)$

Dựa vào bảng biến thiên ta có $\max\limits_{[1;2]} g(x) = g(2) = f(1) = \dfrac{5}{6}$.

Do đó $m = 5, n = 6 \Rightarrow m^2 + n^2 = 61$.

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp hai trên $\mathbb{R}$. Biết $f'(0) = 3$, $f'(2) = f'(-2018) = 0$, và bảng xét dấu của $f''(x)$ như sau:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y = f\left(|x-1|-2018\right)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm x_0 thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(-1009;2)$. **B.** $(-2015;1)$. **C.** $(1;3)$. **D.** $(-\infty;-2015)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$\nearrow$	3	$\searrow$	0	$\nearrow$	

Từ đó ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$

x	$-\infty$		-2018		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$f(-2018)$	$\nearrow$		$\nearrow$	

$y = f\left(|x-1|-2018\right) \Rightarrow y' = \dfrac{x-1}{|x-1|} f'\left(|x-1|-2018\right)$ với $x \neq 1$.

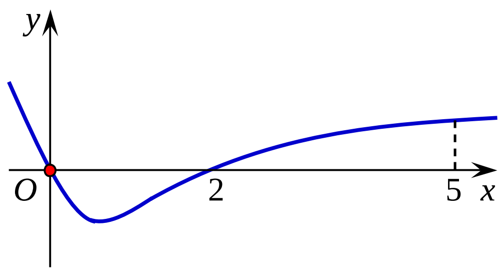
$y' = 0 \Leftrightarrow f'\left(|x-1|-2018\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |x-1|-2018 = 2 \\ |x-1|-2018 = -2018\,(\text{VN}) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2021 \\ x = -2019 \end{array}\right.$.

Ta có bảng biến thiên của hàm số $y = g(x) = f\left(|x-1|-2018\right)$

x	$-\infty$		-2019		1		2021		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$-$	$\|$	$+$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$		$\searrow$	$g(1)$	$\nearrow$		$\nearrow$	

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $\min\limits_{\mathbb{R}} g(x) = g(1)$.

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ được cho như hình vẽ bên.



Biết $f(0) + f(3) = f(2) + f(5)$. Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của $y = f\left(|x+3|-2\right)$ trên đoạn $[-1;4]$ lần lượt là

A. $f(0), f(5)$. **B.** $f(2), f(5)$. **C.** $f(0), f(2)$. **D.** $f(-1), f(4)$.

Lời giải

Chọn B

Từ đồ thị $y = f'(x)$ trên đoạn $[0;5]$ ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$:

x	0		2		5
f'(x)		–	0	+	
f(x)		↘	CT	↗	

Suy ra $\min\limits_{[0;5]} f(x) = f(2)$.

Từ giả thiết, ta có: $f(0) + f(3) = f(2) + f(5) \Rightarrow f(5) - f(3) = f(0) - f(2)$

Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $[2;5]$.

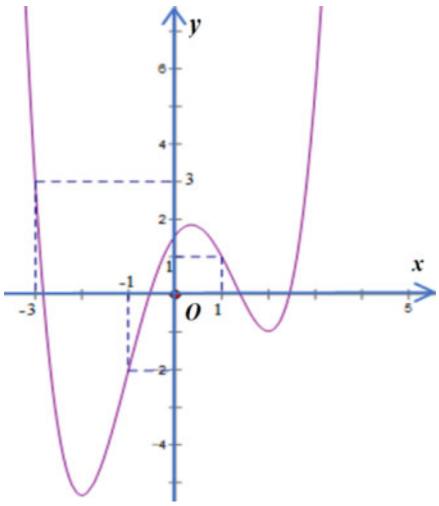
$\Rightarrow f(3) > f(2) \Rightarrow f(5) - f(2) > f(5) - f(3) = f(0) - f(2)$ nên $f(5) > f(0)$.

Suy ra, $\max\limits_{[0;5]} f(x) = f(5)$.

Đặt $t = |x+3| - 2$, với $x \in [-1;4]$ thì $t \in [0;5]$. Khi đó giá trị nhỏ nhất, lớn nhất của hàm số $y = f(|x+3|-2)$ trên đoạn $[-1;4]$ cũng chính là giá trị nhỏ nhất, lớn nhất của hàm số $y = f(t)$ trên đoạn $[0;5]$.

Do đó $\min\limits_{[-1;4]} f(|x+3|-2) = \min\limits_{[0;5]} f(x) = f(2)$; $\max\limits_{[-1;4]} f(|x+3|-2) = \max\limits_{[0;5]} f(x) = f(5)$

Câu 6: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $y = f'(x)$ như hình vẽ.



Xét hàm số $g(x) = f(x) - \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + 2018$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\min\limits_{[-2;2]} g(|x+3|-4) = \frac{g(-3)+g(1)}{2}$.

B. $\min\limits_{[-2;2]} g(|x+3|-4) = g(1)$.

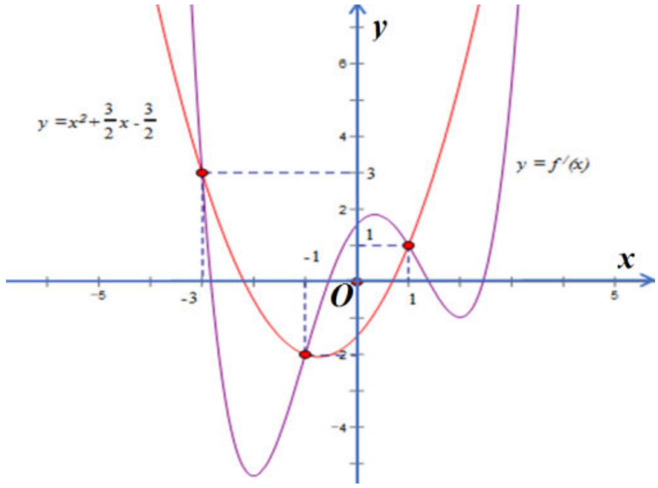
C. $\min\limits_{[-2;2]} g(|x+3|-4) = g(-3)$.

D. $\min\limits_{[-2;2]} g(|x+3|-4) = g(-1)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $g'(x) = f'(x) - x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}$



$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = x^2 + \dfrac{3}{2}x - \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 1 \end{array}\right.$

Lập Bảng biến thiên

x	-3		-1		1
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0
$g(x)$	$g(-3)$	$\searrow$	$g(-1)$	$\nearrow$	$g(1)$

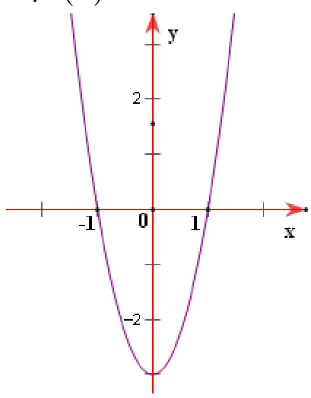
Dựa vào bảng biến thiên, ta có: $\min\limits_{[-3;1]} g(x) = g(-1)$.

Đặt $t = |x+3| - 4$ với $x \in [-2;2]$ thì $t \in [-3;1]$.

Khi đó $\min\limits_{[-2;2]} g(|x+3| - 4) = \min\limits_{[-3;1]} g(t) = g(-1)$.

Dạng 11. Cho đồ thị, BBT của hàm số $y = f'(x)$, tìm GTLN, GTNN của hàm số $y = |f(x) + b|$ trên khoảng, đoạn.

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $y = f'(x)$ như hình vẽ bên dưới và $f(1) = -5; f(3) = 15$.



Xét hàm số $g(x) = |f(x) + m|$. Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị nguyên của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x)$ trên đoạn $[1;3]$ bằng 3. Tổng tất cả các phần tử của tập S có giá trị bằng

A. -10. **B.** -8. **C.** 8. **D.** 10.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $h(x) = f(x) + m$ liên tục trên đoạn $[1;3]$.

Ta có: $h'(x) = f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 1 \end{array}\right.$.

Khi đó $h(1) = m - 5$; $h(3) = m + 15$.

Để hàm số $y = |h(x)|$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[1;3]$ bằng 3 thì đồ thị hàm số $y = h(x)$ phải nằm hoàn toàn phía dưới hoặc phía trên trục hoành (tức không cắt trục hoành) trên $[1;3]$.

Trường hợp 1: $m + 15 < 0 \Leftrightarrow m < -15$ thì $\min\limits_{[1;3]} |f(x) + m| = |m + 15| = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -18 \quad (tm) \\ m = -12 \quad (l) \end{array}\right.$.

Trường hợp 2: $m - 5 > 0 \Leftrightarrow m > 5$ thì $\min\limits_{[1;3]} |f(x) + m| = m - 5 = 3 \Leftrightarrow m = 8 \quad (tm)$.

Vậy $S = \{-18; 8\}$. Do đó chọn phương án A.

Câu2. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu của đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-4		-1		2		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Biết $f(-4) = f(4) = -7$. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = |f(x) + 5|$ trên đoạn $[-4; 4]$ đạt được tại điểm nào?

A. $x = -4$. **B.** $x = -1$. **C.** $x = 2$. **D.** $x = 4$.

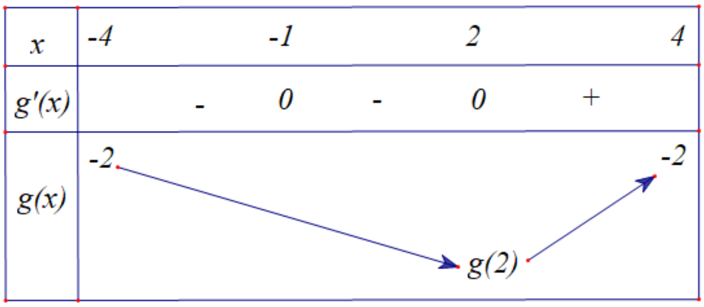
Lời giải

Chọn C

Xét $g(x) = f(x) + 5 \Rightarrow g'(x) = f'(x)$.

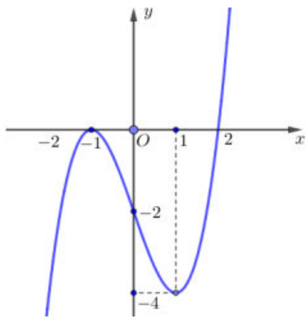
$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -4 \vee x = -1 \vee x = 2 \vee x = 4$.

Bảng biến thiên



Từ bảng biến thiên ta thấy $y = |f(x) + 5|$ đạt GTLN tại $x = 2$.

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ dưới.



Biết $f(2) = -4, f(-2) = -5, f(0) = -1$. Xét hàm số $y = g(x) = |f(x^2 - 2) + 3|$. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

A. Giá trị lớn nhất của hàm số trên $[-2; 2]$ bằng 2.

B. Giá trị lớn nhất của hàm số trên $[-2; 2]$ đạt được tại $x = 0$ hoặc $x = 2$.

C. Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $[-2; 2]$ bằng 1.

D. Có hai giá trị của x để hàm số đạt giá trị nhỏ nhất trên $\left[-2;2\right]$.

Lời giải

Chọn C

$g'(x) = 2x.f'\left(x^2 - 2\right)$là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x.f'\left(x^2-2\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ f'\left(x^2-2\right) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 - 2 = -1 \\ x^2 - 2 = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 1 \\ x = \pm 2 \end{array}\right..$$

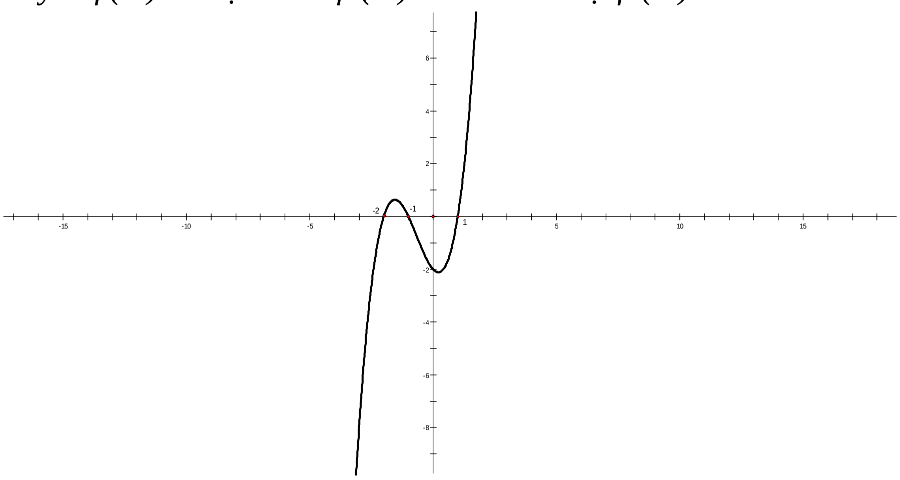
$$f'\left(x^2-2\right) > 0 \Leftrightarrow x^2 - 2 > 2 \Leftrightarrow x^2 > 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 2 \\ x < -2 \end{array}\right..$$

Bảng biến thiên của hàm số $g(x)$

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		2		$+\infty$
$2x$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$f'(x^2-2)$		$+$	0	$-$	0	$-$		$-$	0	$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		↘	-1	↗		↗	2	↘		↘	-2	↗	

Từ bảng biến thiên, ta thấy đáp án C là sai.

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên R. Đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ sau và $f(-1) < -2$



Khi đó gọi giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $g(x) = \left|f(x)+2\right|$ trên đoạn $\left[-2;1\right]$ lần lượt là M, m. Tổng $M + m$ bằng

A. $g(-2) + g(1)$. **B.** $g(-2) + g(-1)$.

C. $\left|f(-1)+2\right| + \left|f(1)+2\right|$. **D.** $\left|f(-1) + f(1) + 4\right|$.

Lời giải

Chọn C

Dựa vào đồ thị của $f'(x)$ ta có BBT của hàm $y = f(x)$ như sau

x	$-\infty$		-2		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$y = f(x)$	$+\infty$	↘	$f(-2)$	↗	$f(-1)$	↘	$f(1)$	↗	$+\infty$

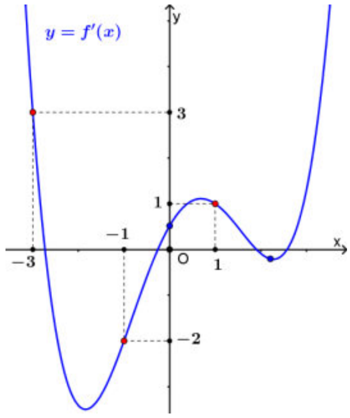
Ngoài ra ta có: $\int\limits_{-2}^{-1}|f'(x)|dx<\int\limits_{-1}^{1}|f'(x)|dx \Rightarrow f(-1)-f(-2)<f(-1)-f(1)$.

$\Rightarrow f(-2)>f(1) \Rightarrow -2>f(-1)>f(-2)>f(1)$.

Từ đó $f(1)+2<f(-2)+2<f(-1)+2<0$ hay $g(1)>g(-2)>g(-1)$.

Dạng 12. Các dạng khác.

Câu 1: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số đạo hàm $y=f'(x)$ như hình vẽ.



Xét hàm số $g(x)=f(x)-\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{4}x^2+\frac{3}{2}x+2019$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\min\limits_{[-3;1]} g(x)=g(-3)$. **B.** $\min\limits_{[-3;1]} g(x)=g(1)$.

C. $\min\limits_{[-3;1]} g(x)=g(-1)$. **D.** $\min\limits_{[-3;1]} g(x)=\frac{g(-3)+g(1)}{2}$.

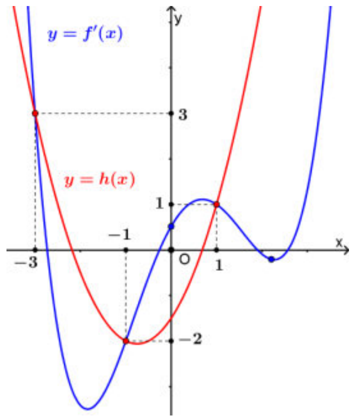
Lời giải

Chọn C

• Ta có: $g'(x)=f'(x)-x^2-\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}$;

$g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=h(x)=x^2+\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=-1 \\ x=1 \end{array}\right.$.

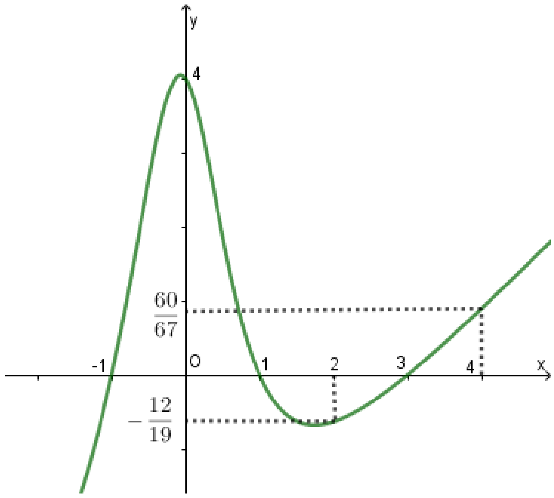


• Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$		$\nearrow$	$g(-3)$	$\searrow$	$g(-1)$	$\nearrow$	$g(1)$	$\searrow$	

• Dựa vào bảng biến thiên ta có: $\min\limits_{[-3;1]} g(x)=g(-1)$.

Câu 2: Cho hàm số $y=f(x)$, hàm số $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Giá trị nhỏ nhất của hàm số $g\left(x\right)=\frac{1}{2}f\left(2x-1\right)+\frac{11}{19}\left(2x-1\right)^{2}-4x$ trên khoảng $\left[0;\frac{5}{2}\right]$ bằng

A. $\frac{1}{2}f\left(1\right)+\frac{11}{19}$.

B. $\frac{1}{2}f\left(4\right)-\frac{14}{19}$.

C. $\frac{1}{2}f\left(0\right)-2$.

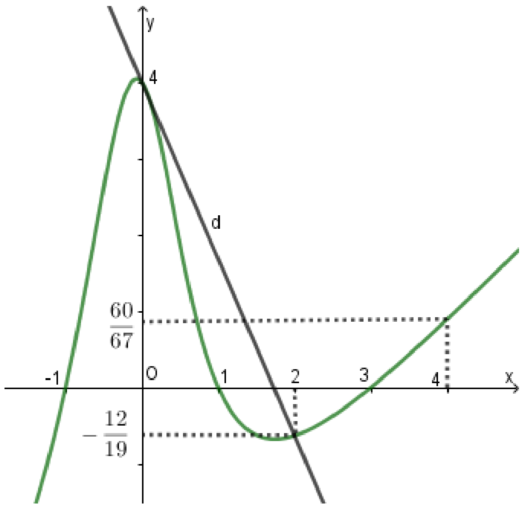
D. $\frac{1}{2}f\left(2\right)-\frac{70}{19}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $g'\left(x\right)=f'\left(2x-1\right)+\frac{44}{19}\left(2x-1\right)-4=0\Leftrightarrow f'\left(2x-1\right)=-\frac{44}{19}\left(2x-1\right)+4$.

Đặt $t=2x-1\Rightarrow f'\left(t\right)=-\frac{44}{19}t+4$ với $0\le x\le\frac{5}{2}\Rightarrow -1\le t\le 4$.

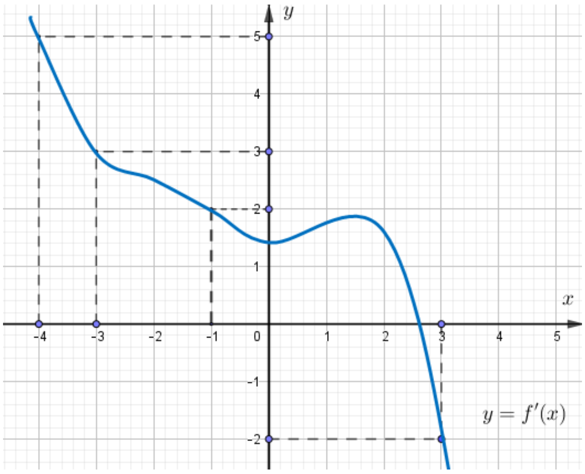


Từ đồ thị ta có $f'\left(t\right)=-\frac{44}{19}t+4\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\\t=2\end{array}\right.$.

Lập bảng biến thiên hàm số $g\left(t\right)$ Giá trị nhỏ nhất hàm số đạt được khi $t=2\Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$.

suy ra $\left(g\left(x\right)\right)_{\min}=\frac{1}{2}f\left(2\right)-\frac{70}{19}$.

Câu 3: Cho hàm số $f\left(x\right)$. Biết hàm số $y=f'\left(x\right)$ có đồ thị như hình bên.

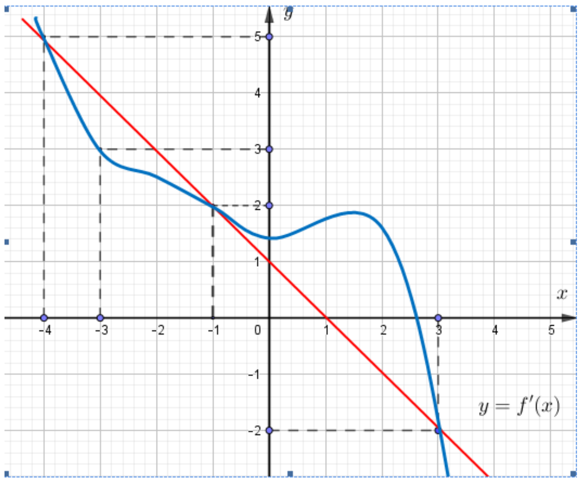


Trên đoạn $[-4;3]$, hàm số $g(x)=2f(x)+(1-x)^2$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm

A. $x_0=-3$. **B.** $x_0=-4$. **C.** $x_0=-1$. **D.** $x_0=3$.

Lời giải

Chọn C



Ta có

$g'(x)=2f'(x)-2(1-x)$.

$g'(x)=0 \Leftrightarrow 2f'(x)-2(1-x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=1-x$.

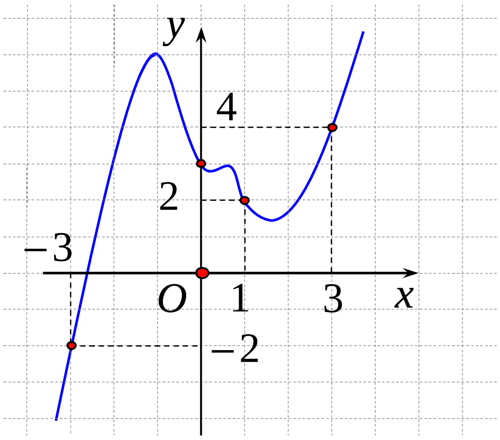
Dựa vào hình vẽ ta có: $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-4 \\ x=-1 \\ x=3 \end{array}\right.$.

Và ta có bảng biến thiên

x	-4		-1		3
g'		$-$	0	$+$	
g		$\searrow$		$\nearrow$	

Suy ra hàm số $g(x)=2f(x)+(1-x)^2$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm $x_0=-1$.

Câu 4: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ dưới đây.



Xét hàm số $g\left(x\right)=2f\left(x\right)-\left(x+1\right)^2$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $\min\limits_{[-3;3]} g\left(x\right)=g\left(1\right)$.

B. $\max\limits_{[-3;3]} g\left(x\right)=g\left(1\right)$.

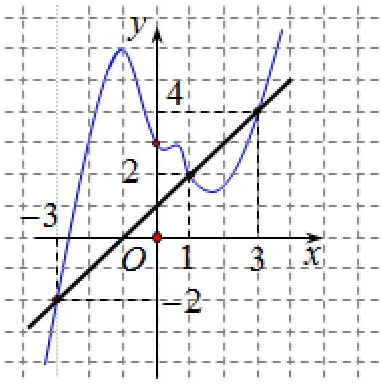
C. $\max\limits_{[-3;3]} g\left(x\right)=g\left(3\right)$.

D. Không tồn tại giá trị nhỏ nhất của hàm số $g\left(x\right)$ trên $\left[-3;3\right]$.

Lời giải

Chọn B

$g'\left(x\right)=2f'\left(x\right)-2\left(x+1\right)=0 \Leftrightarrow f'\left(x\right)=x+1\left(*\right)$.



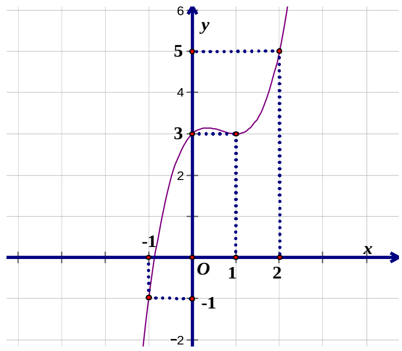
Dựa vào đồ thị hàm số $y=f'\left(x\right)$ ta thấy đường thẳng $y=x+1$ cắt đồ thị hàm số $y=f'\left(x\right)$ tại ba điểm lần lượt có hoành độ là: $-3;1;3$. Do đó phương trình $\left(*\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=1 \\ x=3 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên của hàm số $y=g\left(x\right)$

t	-3		1		3
$g'\left(x\right)$	0	$+$	0	$-$	0
$g\left(x\right)$	$g\left(-3\right)$	$\nearrow$	$g\left(1\right)$	$\searrow$	$g\left(3\right)$

Vậy $\max\limits_{[-3;3]} g\left(x\right)=g\left(1\right)$.

Câu 5: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm và liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết rằng đồ thị hàm số $y=f'\left(x\right)$ như dưới đây.



Xét hàm số $g(x)=f(x)-x^2-x$. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

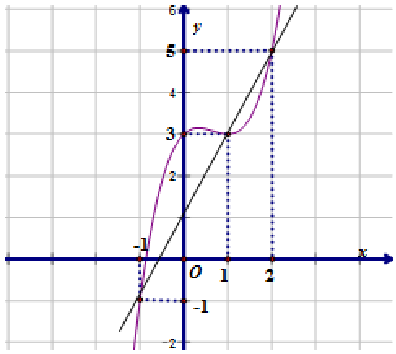
A. $g(-1)>g(1)>g(2)$. **B.** $g(-1)>g(2)>g(1)$.

C. $g(1)>g(2)>g(-1)$. **D.** $g(1)>g(2)>g(-1)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $g'(x)=f'(x)-2x-1=0 \Leftrightarrow f'(x)=2x+1\,(*)$.



Dựa vào độ thị hàm số $y=f'(x)$, ta thấy đường thẳng $y=2x+1$ cắt đồ thị hàm số $y=f'(x)$ tại ba điểm lần lượt có hoành độ là $-1;1;2$. Do đó $(*)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=1 \\ x=2 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên của hàm số $g(x)$

t	-1		1		2
$g'(x)$	0	$+$	0	$-$	0
$g(x)$	$g(-1)$	$\nearrow$	$g(1)$	$\searrow$	$g(2)$

Từ bảng biến thiên suy ra $\max\limits_{[-1;2]}=g(1)$.

Đồ thị hàm số $y=g'(x)$ cắt trục hoành tại điểm có hoành độ x_0 $(-1<x_0<0)$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=g'(x)$, $y=0$, $x=-1$, $x=x_0$

$$S_1=-\int_{-1}^{x_0} g'(x)\,\mathrm{d}x=g(-1)-g(x_0)\,.$$

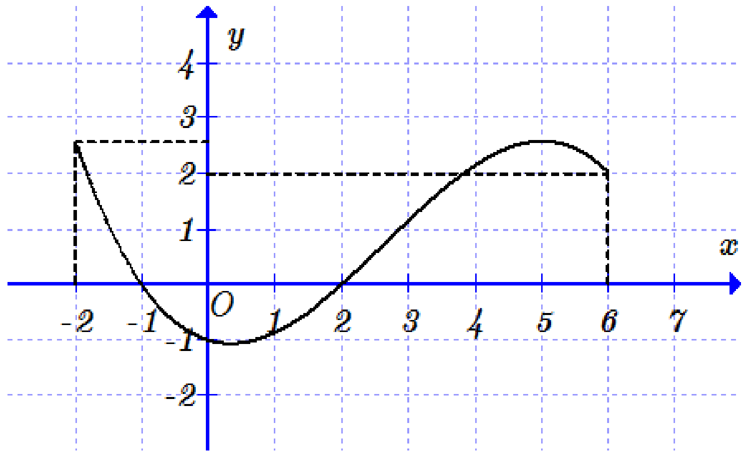
Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=g'(x)$, $y=0$, $x=x_0$, $x=2$

$$S_2=\int_{x_0}^{2} g'(x)\,dx=g(2)-g(x_0)\,.$$

$$S_1<S_2 \Rightarrow g(-1)-g(x_0)<g(2)-g(x_0) \Leftrightarrow g(-1)<g(2)\,.$$

Vậy $g(1) > g(2) > g(-1)$.

Câu 6: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị của hàm số $f'(x)$ trên đoạn $[-2;6]$ như hình vẽ. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.



A. $\max\limits_{x\in[-2;6]} f(x) = f(-2)$.

B. $\max\limits_{x\in[-2;6]} f(x) = f(2)$.

C. $\max\limits_{x\in[-2;6]} f(x) = f(6)$.

D. $\max\limits_{x\in[-2;6]} f(x) = f(-1)$.

Lời giải

Chọn C

Từ đồ thị của hàm số $f'(x)$ ta có bảng biến thiên hàm số $y = f(x)$ trên $[-2;6]$

x	-2		-1		2		6
y'		$+$	0	$-$	0	$-$	
y		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Do đó hàm số $y = f(x)$ đạt giá trị lớn nhất chỉ có thể tại $x = -1$ hoặc $x = 6$.

Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và trục Ox.

$$\Rightarrow S_1 = \int_{-1}^{2} [-f'(x)]dx = f(-1) - f(2).$$

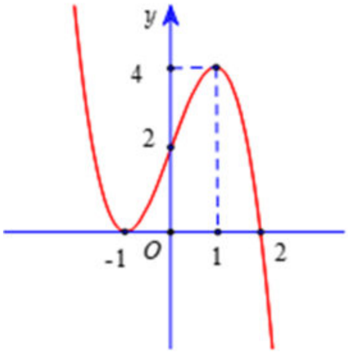
Gọi S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f'(x)$, trục Ox và hai đường thẳng $x = 2; x = 6$.

$$\Rightarrow S_2 = \int_{2}^{6} f'(x)dx = f(6) - f(2).$$

Ta có $S_2 > S_1 \Rightarrow f(6) - f(2) > f(-1) - f(2) \Leftrightarrow f(6) > f(-1)$.

Vậy $\max\limits_{x\in[-2;6]} f(x) = f(6)$.

Câu 7: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ liên tục trên tập số thực và có đồ thị như hình vẽ.



Biết $f(-1)=\dfrac{13}{4}, f(2)=6$. Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x)=f^3(x)-3f(x)$ trên $[-1;2]$ bằng

A. $\dfrac{1573}{64}$ **B.** 198. **C.** $\dfrac{37}{4}$. **D.** $\dfrac{14245}{64}$.

Lời giải

Chọn D

Từ đồ thị hàm số $y=f'(x)$ ta có bảng biến thiên

x	-1		2
$f'(x)$	0	$+$	0
$f(x)$	$\dfrac{13}{4}$	$\nearrow$	6

Ta có $g'(x)=3f^2(x).f'(x)-3f'(x)$.

Xét trên đoạn $[-1;2]$ ta có $g'(x)=0 \Leftrightarrow 3f'(x)\left[f^2(x)-1\right]=0 \Leftrightarrow f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=2 \end{array}\right.$.

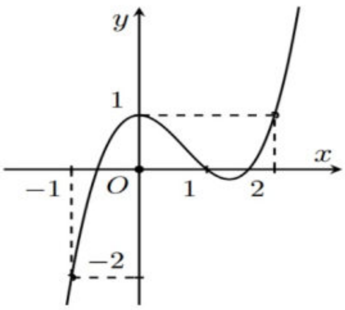
$g(-1)=\dfrac{1573}{64}$, $g(2)=198$.

Từ đó suy ra $\max\limits_{[-1;2]} g(x)=198, \min\limits_{[-1;2]} g(x)=\dfrac{1573}{64}$.

Vậy $\max\limits_{[-1;2]} g(x)+\min\limits_{[-1;2]} g(x)=\dfrac{14245}{64}$.

Câu 8: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết rằng hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.

Xét hàm số $y=g(x)$



thỏa mãn $g(x)=f(x)-\dfrac{x^3}{3}+x^2-x+2$.

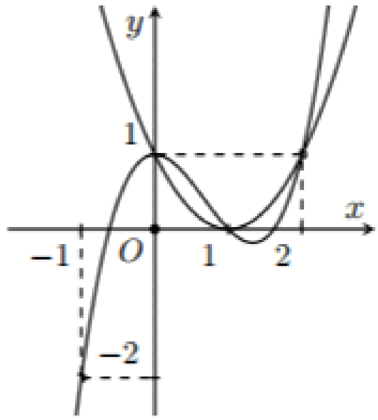
Hỏi mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $\max\limits_{[0;\,2]} g(x)=g(1).$ **B.** $\max\limits_{[0;\,2]} g(x)=g(2)..$

C. $\max\limits_{[0;\,2]} g(x)=g(0).$ **D.** $\max\limits_{[0;\,2]} g(x)=\dfrac{g(0)+g(2)}{2}..$

Lời giải

Chọn A



+) Xét hàm số $g(x)=f(x)-\dfrac{x^3}{3}+x^2-x+2$ trên $\mathbb{R}$. Ta có $g'(x)=f'(x)-x^2+2x-1=f'(x)-(x-1)^2,\ \forall x\in\mathbb{R}.$

Khi đó $g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=(x-1)^2,\ x\in\mathbb{R}.$

+) Từ đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ và đồ thị của parabol $y=(x-1)^2$ ta thấy chúng cắt nhau tại các điểm có hoành độ lần lượt là $x=0,\ x=1,\ x=2.$

Ngoài ra trên miền $x\in(-\infty;\,0)\cup(1;\,2)$ thì đồ thị hàm số $y=f'(x)$ nằm phía dưới đồ thị của parabol $y=(x-1)^2$ nên $f'(x)<(x-1)^2,\ \forall x\in(-\infty;\,0)\cup(1;\,2)$ và trên miền $x\in(0;\,1)\cup(2;\,+\infty)$ thì đồ thị hàm số $y=f'(x)$ nằm phía trên đồ thị của parabol $y=(x-1)^2$ nên $f'(x)>(x-1)^2,\ \forall x\in(0;\,1)\cup(2;\,+\infty).$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $y=g(x)$

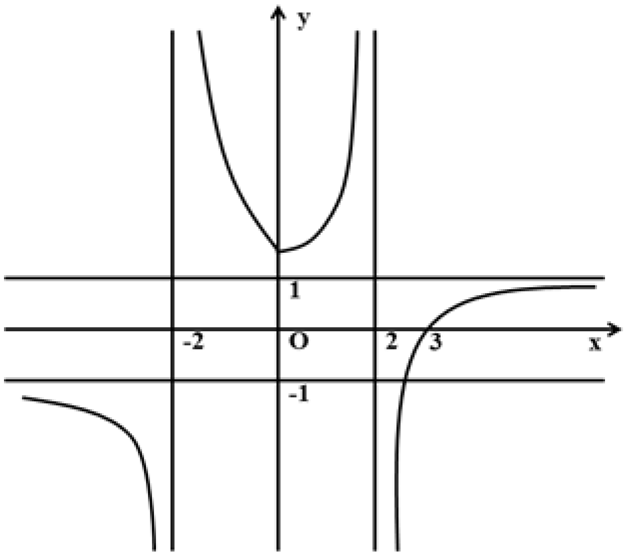
x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$g'(x)$			1	+	0	–	1	+	
$g(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

+) Từ bảng biến thiên, ta có $\max\limits_{[0;\,2]} g(x)=g(1).$

Phần 1: Biết đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$

Dạng 1: Biết đồ thị của hàm số $y=f\left(x\right)$, tìm tiệm cận đứng, tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$, trong bài toán không chứa tham số.

Câu 1. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ. Đồ thị hàm số đã cho có bao nhiêu đường tiệm cận?



A. 4. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Từ đồ thị hàm số ta thấy:

$\lim\limits_{x\to-\infty} f\left(x\right)=-1$ nên đường thẳng $y=-1$ là một đường tiệm cận ngang.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right)=1$ nên đường thẳng $y=1$ là một đường tiệm cận ngang.

Đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang là $y=\pm1$.

Tương tự

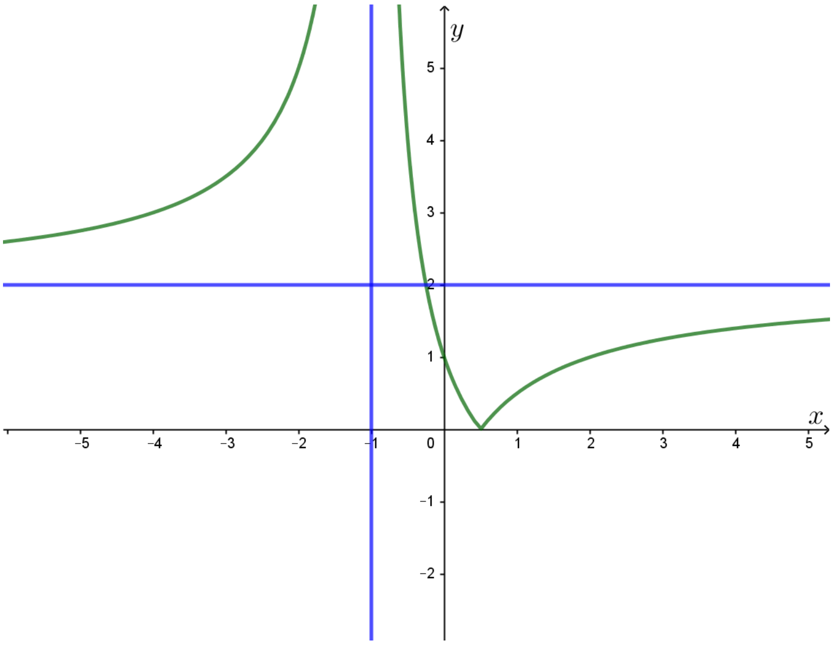
$\lim\limits_{x\to-2^+} f\left(x\right)=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to-2^-} f\left(x\right)=-\infty$ nên đường thẳng $x=-2$ là đường tiệm cận đứng.

$\lim\limits_{x\to2^-} f\left(x\right)=+\infty$ và và $\lim\limits_{x\to2^+} f\left(x\right)=-\infty$ nên đường thẳng $x=-2$ là đường tiệm cận đứng.

Đồ thị hàm số có hai tiệm cận đứng là $x=\pm2$.

Vậy đồ thị hàm số có 4 đường tiệm cận.

Câu 1. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ. Phương trình đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là



A. Tiệm cận đứng $x=1$, tiệm cận ngang $y=2$.
B. Tiệm cận đứng $x=-1$, tiệm cận ngang $y=2$.
C. Tiệm cận đứng $x=1$, tiệm cận ngang $y=-2$.
D. Tiệm cận đứng $x=-1$, tiệm cận ngang $y=-2$.

Lời giải

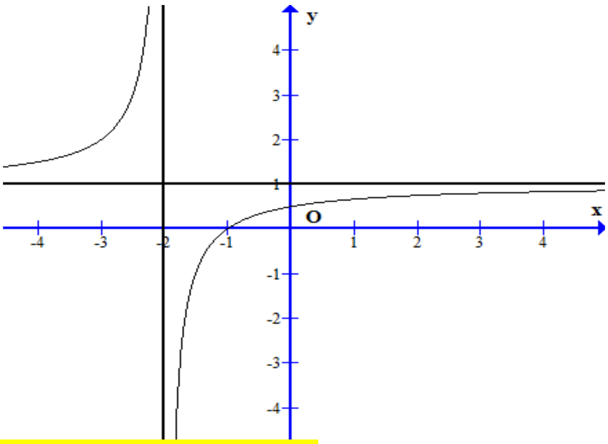
Chọn B

Dựa vào đồ thị ta có

$\lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x)=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x)=+\infty$ nên đường thẳng $x=-1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=f(x)$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$ nên đường thẳng $y=2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=f(x)$.

Câu 2. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Phương trình đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là



A. Tiệm cận đứng $x=-2$, tiệm cận ngang $y=1$.
B. Tiệm cận đứng $x=2$, tiệm cận ngang $y=-1$.
C. Tiệm cận đứng $x=1$, tiệm cận ngang $y=-2$.
D. Tiệm cận đứng $x=-1$, tiệm cận ngang $y=2$.

Lời giải

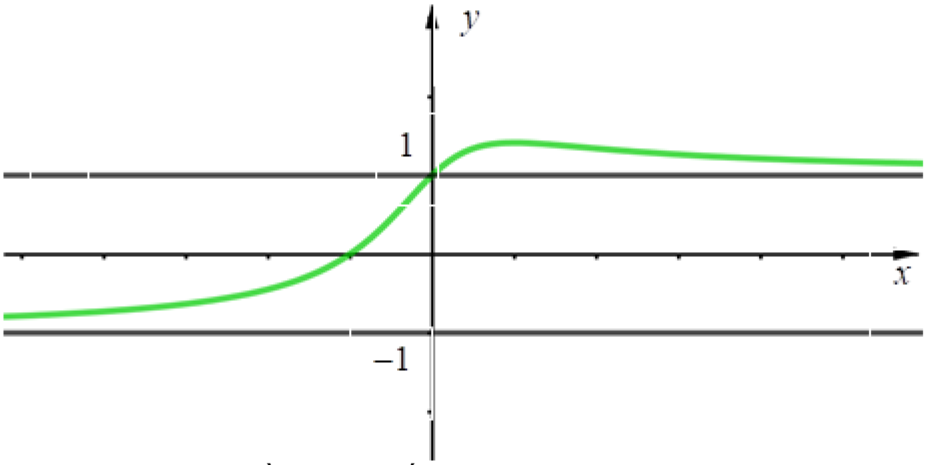
Chọn A

Dựa vào đồ thị ta có

$\lim\limits_{x\to(-2)^-} f(x)=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to(-2)^+} f(x)=-\infty$ nên đường thẳng $x=-2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=f(x)$.

+) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ nên đường thẳng $y=1$ là tiệm cận ngang đứng của đồ thị hàm số $y=f(x)$.

Câu 3. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Số đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải

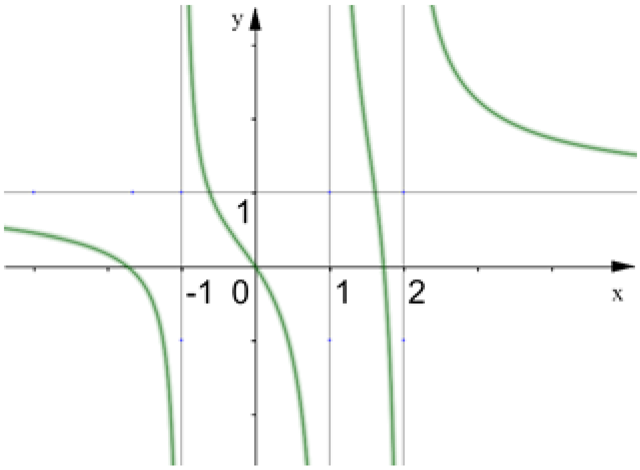
Chọn B

Từ đồ thị của hàm số $y=f(x)$ ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ nên đường thẳng $y=1$ là đường tiệm cận ngang.

Tương tự $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1$ nên đường thẳng $y=-1$ là đường tiệm cận ngang.

Vậy đồ thị hàm số $y=f(x)$ có 2 đường tiệm cận ngang.

Câu 4. Cho hàm số $y=f(x)$. Có đồ thị như hình vẽ.



Đồ thị hàm số có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn D

Dựa vào đồ thị ta thấy đồ thị của hàm số ta có

$\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x)=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x)=-\infty$ nên đường thẳng $x=-1$ là đường tiệm cận đứng.

$\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=-\infty$ nên đường thẳng $x=1$ là đường tiệm cận đứng.

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$ và và $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$ nên đường thẳng $x = -2$ là đường tiệm cận đứng.

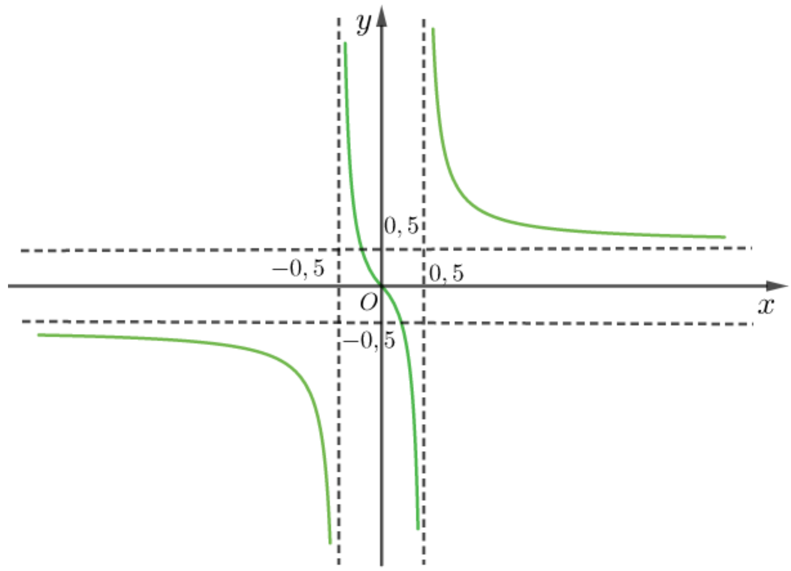
Đồ thị hàm số có ba đường tiệm cận đứng là $x = \pm 1$ và $x = 2$.

Vậy đồ thị hàm số có 4 đường tiệm cận.

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 1$ và $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 1$ nên đường thẳng $y = 1$ là một đường tiệm cận ngang.

Đồ thị hàm số có một đường tiệm cận ngang là $y = 1$.

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$ là

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 6.

Lời giải

Chọn A

Dựa vào đồ thị của hàm số $y = f(x)$ ta có:

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\dfrac{1}{2}$ nên đường thẳng $y = -\dfrac{1}{2}$ là một đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \dfrac{1}{2}$ nên đường thẳng $y = \dfrac{1}{2}$ là một đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

$\Rightarrow$ Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có hai đường tiệm cận ngang là $y = \pm\dfrac{1}{2}$.

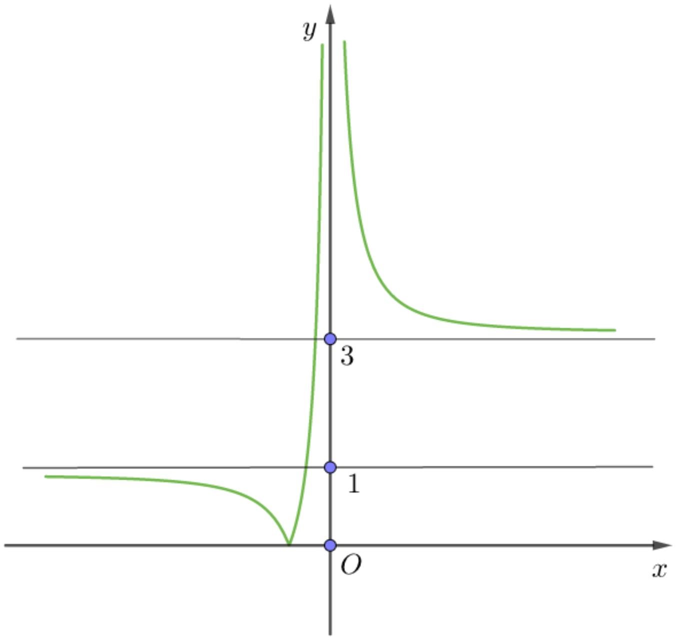
$\lim\limits_{x\to \left(-\frac{1}{2}\right)^-} f(x) = -\infty$ và $\lim\limits_{x\to \left(-\frac{1}{2}\right)^+} f(x) = +\infty$ nên đường thẳng $x = -\dfrac{1}{2}$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

$\lim\limits_{x\to \left(\frac{1}{2}\right)^-} f(x) = -\infty$ và $\lim\limits_{x\to \left(\frac{1}{2}\right)^+} f(x) = +\infty$ nên đường thẳng $x = \dfrac{1}{2}$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

$\Rightarrow$ Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có hai đường tiệm cận đứng là $x = \pm\dfrac{1}{2}$

Vậy đồ thị hàm số $y = f(x)$ có tất cả 4 đường tiệm cận.

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$ là:

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B

Dựa vào đồ thị của hàm số $y = f(x)$ ta có:

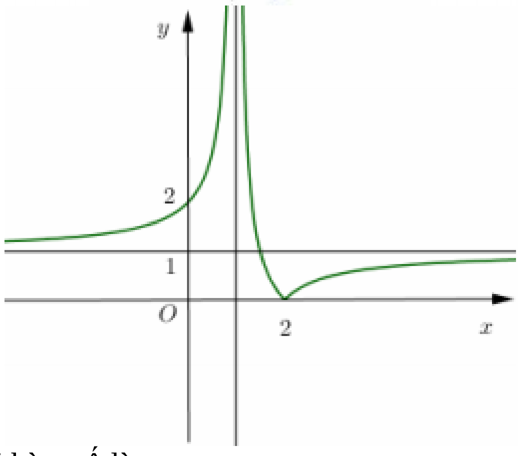
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$ nên đường thẳng $y = 1$ là một đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 3$ nên đường thẳng $y = 3$ là một đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = +\infty$ và $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ suy ra đường thẳng $x = 0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

Vậy đồ thị hàm số $y = f(x)$ có tất cả 3 đường tiệm cận.

Câu 7. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ dưới đây:



Tổng số tiệm cận của đồ thị hàm số là:

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4

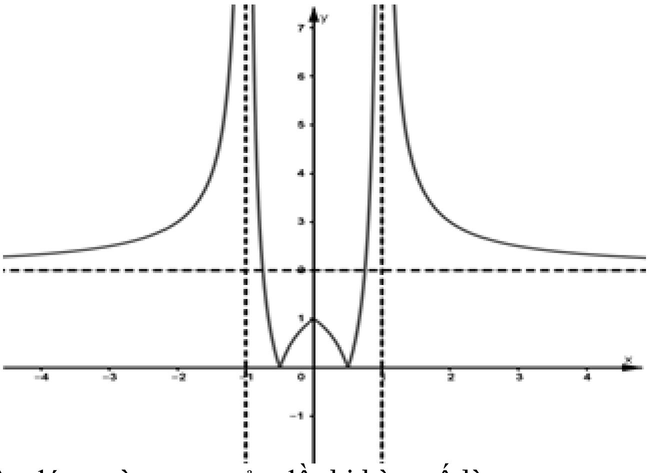
Lời giải

Chọn B

Dựa vào đồ thị hàm số ta có

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=1$ nên đồ thị hàm số có 1 tiệm cận ngang $y=1$ và $\lim\limits_{x\to 1^{\pm}} y=+\infty$ nên đồ thị hàm số có 1 tiệm cận đứng $x=1$. Vậy đồ thị hàm số có 2 tiệm cận.

Câu 8. Cho đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ có hình vẽ dưới đây.



Tổng số đường tiệm cận đứng và ngang của đồ thị hàm số là:

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

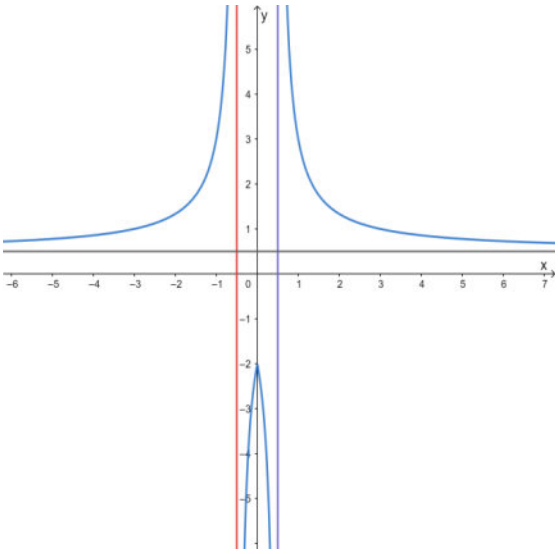
Chọn C

Ta có: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f\left(x\right)=2$ nên đồ thị hàm số có 1 đường tiệm cận ngang là $y=2$

Lại thấy: $\lim\limits_{x\to -1^{+}} f\left(x\right)=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to 1^{-}} f\left(x\right)=+\infty$ nên đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận ngang là $x=-1; x=1$

Vậy đồ thị hàm số có 3 đường tiệm cận

Câu 9. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ.



Gọi a là số đường tiệm cận của đồ thị hàm số. Giá trị của biểu thức a^2+a bằng

A. 6. **B.** 12. **C.** 20. **D.** 30.

Lời giải

Chọn B

Dựa vào đồ thị ta có

$\lim\limits_{x\to-\infty} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right)=\frac{1}{2}$. Suy ra đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y=\frac{1}{2}$.

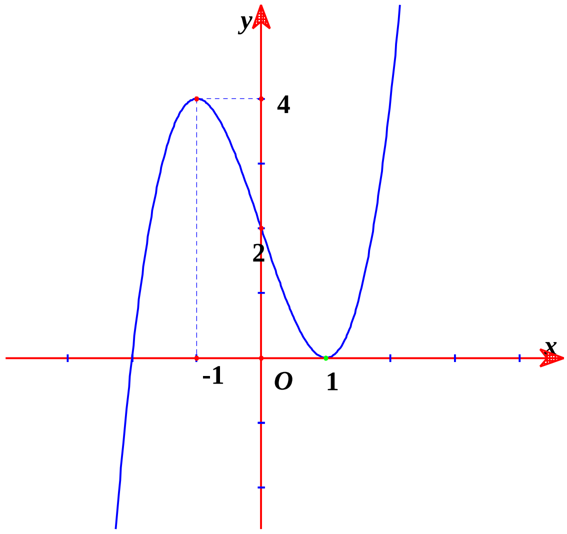
$\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^{+}} f\left(x\right)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^{-}} f\left(x\right)=-\infty$ Suy ra đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x=\frac{1}{2}$

$\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}^+} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}^-} f(x) = +\infty$ suy ra đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x = -\dfrac{1}{2}$

Đồ thị hàm số có 3 tiệm cận $\Rightarrow a = 3$.

Vậy $a^2 + a = 12$

Câu 10. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong hình bên dưới.



Đồ thị hàm số $g(x) = \dfrac{(x-1)(x^2-1)}{f^2(x) - 2f(x)}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

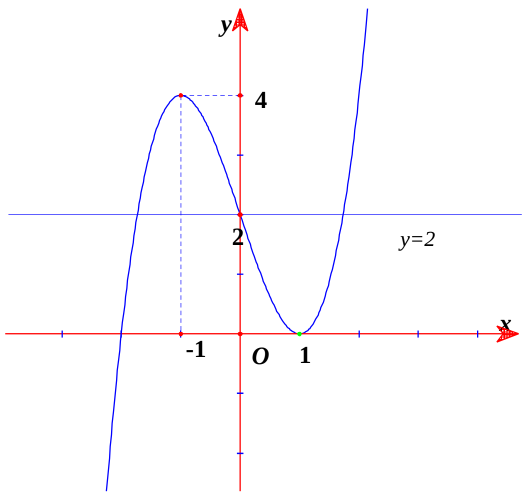
A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn D

Ta xét mẫu số: $f^2(x) - 2f(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} f(x) = 0 & (1) \\ f(x) = 2 & (2) \end{array}\right.$.

Dựa vào đồ thị hàm số, ta thấy:



+) Phương trình (1) có nghiệm $x_1 = a < -1$ (nghiệm đơn) và $x_2 = 1$ (nghiệm kép)

$\Rightarrow f(x) = (x-a)(x-1)^2$.

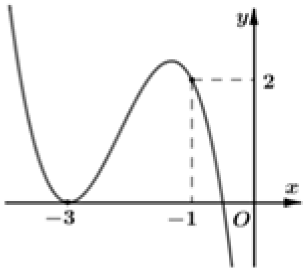
+) Phương trình (2) có nghiệm $x_3 = b \in (a;-1)$, $x_4 = 0$ và $x_5 = c > 1$

$\Rightarrow f(x) - 2 = (x-b)x(x-c)$.

Do đó $g(x)=\dfrac{(x-1)(x^2-1)}{f(x)\left[f(x)-2\right]}=\dfrac{(x-1)^2(x+1)}{(x-a)(x-1)^2.(x-b)x(x-c)}=\dfrac{x+1}{(x-a)(x-b)x(x-c)}$.

$\Rightarrow$ đồ thị hàm số $y=g(x)$ có 4 đường tiệm cận đứng.

Câu 11. Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.

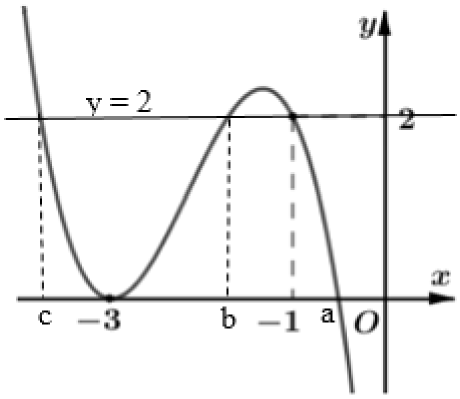


Đồ thị hàm $y=\dfrac{(x^2+4x+3)\sqrt{x^2+x}}{x\left[f^2(x)-2f(x)\right]}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 6.

Lời giải

Chọn C



Ta thấy phương trình bậc ba $f(x=2)$ có 3 nghiệm phân biệt là $x_1=c<-3,\ x_2=b$. với $-3<b<-1$ và $x_3=-1$.

Và phương trình bậc ba $f(x)=0$ có nghiệm kép $x=-3$ và nghiệm đơn $x=a$ với $-1<a<0$.

Do $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ nên không mất tính tổng quát, ta giả sử

$f(x)=0 \Leftrightarrow -(x+3)^2(x-a)=0$ và $f(x)=2 \Leftrightarrow -(x-c)(x-b)(x+1)=0$.

Ta có: $y=\dfrac{(x^2+4x+3)\sqrt{x^2+x}}{x\left[f^2(x)-2f(x)\right]}=\dfrac{(x+1)(x+3)\sqrt{x(x+1)}}{x.f(x).\left[f(x)-2\right]}$.

Khi đó: $\lim\limits_{x\to0^+} y=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{(x+1)(x+3)\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}.f(x).\left[f(x)-2\right]}=+\infty$.

$\lim\limits_{x\to-3^+} y=\lim\limits_{x\to-3^+}\dfrac{(x+1)\sqrt{x(x+1)}}{-x(x+3)(x-a).\left[f(x)-2\right]}=-\infty$.

$\lim\limits_{x\to c^+} y=\lim\limits_{x\to c^+}\dfrac{(x+1)(x+3)\sqrt{x(x+1)}}{-x.f(x)(x-c)(x-b)(x+1)}=+\infty$.

$\lim\limits_{x\to b^+} y = \lim\limits_{x\to b^+} \dfrac{(x+1)(x+3)\sqrt{x(x+1)}}{-x.f(x)(x-c)(x-b)(x+1)} = +\infty$.

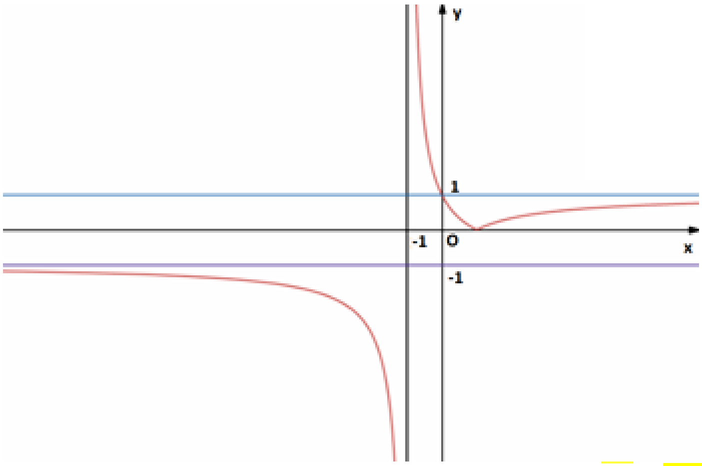
$\lim\limits_{x\to -1^-} y = \lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{(x+3)\sqrt{x(x+1)}}{-x.f(x)(x-c)(x-b)} = 0$.

$\lim\limits_{x\to -1^+} y$ không tồn tại.

Vậy đồ thị hàm số $y = \dfrac{(x^2+4x+3)\sqrt{x^2+x}}{x\left[f^2(x)-2f(x)\right]}$ có 4 đường tiệm cận đứng là $x=0$; $x=-3$; $x=c$; $x=b$.

Dạng 2: Biết đồ thị của hàm số $y = f(x)$, tìm tiệm cận đứng, tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$, trong bài toán chứa tham số.

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm m để đồ thị hàm số $y = f(x-m)$ có tiệm cận đứng là trục Oy?



A. 0. **B.** -1. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có tiệm cận đứng là đường thẳng $x=-1$.

Tịnh tiến theo véc tơ $\vec{v} = (m;0)$ thì:

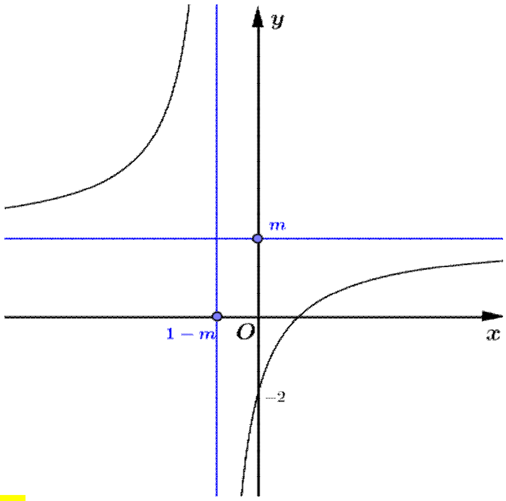
Đồ thị hàm số $y = f(x)$ biến thành đồ thị hàm số $y = f(x-m)$.

Tiệm cận $x=-1$ của đồ thị hàm số $y = f(x)$ biến thành tiệm cận $x=-1+m$ của đồ thị hàm số $y = f(x-m)$.

Đồ thị hàm số $y = f(x-m)$ có tiệm cận đứng là trục $Oy \Leftrightarrow -1+m=0 \Leftrightarrow m=1$

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x) = \dfrac{ax+b}{x+c}$, $a, b, c \in \mathbb{R}$ có đồ thị như hình bên.

Giá trị của $P = a+b+c$ bằng



A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** -1.

Lời giải

Chọn B

Điền kiện: $\begin{cases} x \neq -c \\ ac - b \neq 0 \end{cases}$

Hàm số $y = f(x)$ có tiệm cận đứng: $x = -c$; tiệm cận ngang: $y = a$

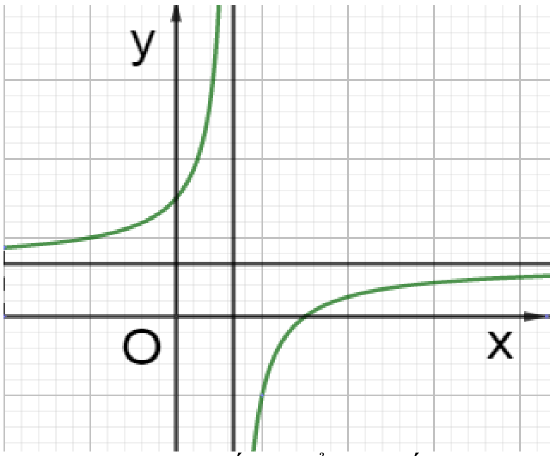
Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x)$ ta nhận xét được:

- $\begin{cases} m > 0 \\ 1 - m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 1$
- Khi $x = 0 \Rightarrow y = -2 \Rightarrow \dfrac{b}{c} = -2 \Rightarrow b = -2c$
- Tiệm cận đứng: $x = 1 - m$; tiệm cận ngang: $y = m$

Suy ra: $\begin{cases} -c = 1 - m \\ a = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = m - 1 \\ a = m \end{cases} \Rightarrow b = -2c = -2m + 2$ (thỏa điều kiện)

Nên: $P = a + b + c = m - 2m + 2 + m - 1 = 1$

Câu 3. Cho hàm số $y = \dfrac{(2m-1)x - 3}{x - m}$ có đồ thị như hình dưới đây



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để tâm đối xứng của đồ thị hàm số nằm trong đường tròn tâm gốc tọa độ O bán kính bằng $\sqrt{2019}$?

A. 40. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 38.

Lời giải

Chọn C

Từ dạng đồ thị của hàm số ta suy ra

$$y'=\frac{-m(2m-1)+3}{(x-m)^2}>0\Rightarrow -m(2m-1)+3>0\Leftrightarrow -1<m<\frac{3}{2}.$$

Khi đó dễ thấy đồ thị có hai đường tiệm cận là $x=m$, $y=2m-1$.

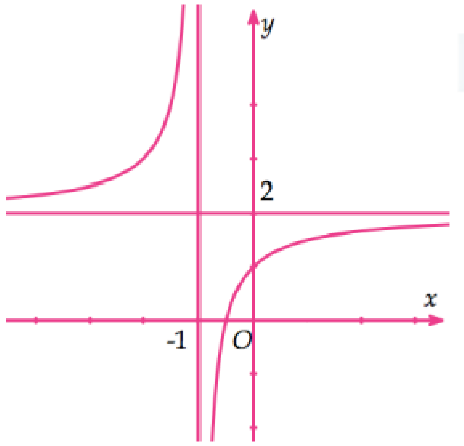
Vậy tâm đối xứng là điểm $I(m;2m-1)$.

Từ đồ thị và giả thiết kèm theo ta có :

$$\begin{cases} y=2m-1>0 \\ x=m>0 \\ OI<\sqrt{2019} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>\frac{1}{2} \\ m>0 \\ -19\le m\le 20 \ (m\in\mathbb{Z}) \end{cases}.$$

Kết hợp với điều kiện trên ta suy ra $m=1$.

Câu 4. Cho hàm số $y=f(x)=\frac{nx+1}{x+m}$; $(mn\neq 1)$ xác định trên $R\backslash\{-1\}$, liên tục trên từng khoảng xác định và có đồ thị như hình vẽ bên:



Tính tổng $m+n$?

A. $m+n=1$. **B.** $m+n=-1$. **C.** $m+n=3$. **D.** $m+n=-3$.

Lời giải

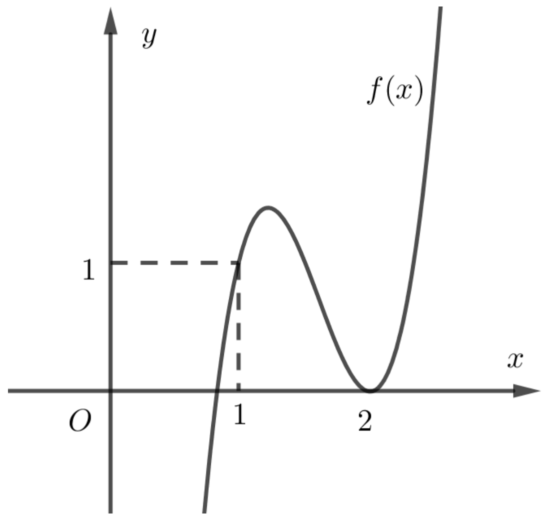
Chọn C

Đồ thị hàm số $y=f(x)=\frac{nx+1}{x+m}$; $(mn\neq 1)$ có hai đường tiệm cận $x=-m=-1$;

$y=n=2\Rightarrow m=1$; $n=2\Rightarrow m+n=3$

Dạng 3: Biết đồ thị của hàm số $y=f(x)$, tìm tiệm cận đứng, tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=g(x)$, trong bài toán không chứa tham số.

Câu 1. Cho hàm số bậc ba $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a,b,c,d\in\mathbb{R})$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Hỏi đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{(x^2-3x+2)\sqrt{x-1}}{x\left[f^2(x)-f(x)\right]}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Chọn A

Xét phương trình: $x\left[f^2(x)-f(x)\right]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ f(x)=0 \\ f(x)=1 \end{array}\right.$

+) Từ điều kiện $x\geq 1 \Rightarrow x=0$ không là tiệm cận đứng.

+) Từ đồ thị $\Rightarrow$ phương trình $f(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=a\,(a<1) \\ x=2 \end{array}\right.$

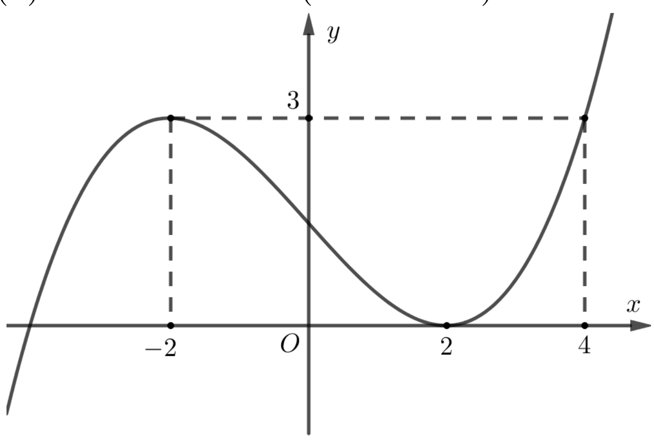
- $x=a$ không là tiệm cận đứng.
- $x=2$ là nghiệm kép và tử số có một nghiệm $x=2 \Rightarrow x=2$ là một đường tiệm cận đứng.

+) Từ đồ thị $\Rightarrow$ phương trình $f(x)=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=b\,(1<b<2) \\ x=c\,(c>2) \end{array}\right.$

- $x=1$ không là tiệm cận đứng (vì tử số có một nghiệm nghiệm $x=1$)
- $x=b$, $x=c$ là hai đường tiệm cận đứng.

Vậy đồ thị hàm số $g(x)$ có 3 đường tiệm cận đứng.

Câu 2. Cho hàm số bậc ba $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a,b,c,d\in\mathbb{R})$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Hỏi đồ thị hàm số $g\left(x\right)=\dfrac{1}{f\left(4-x^2\right)-3}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Chọn C

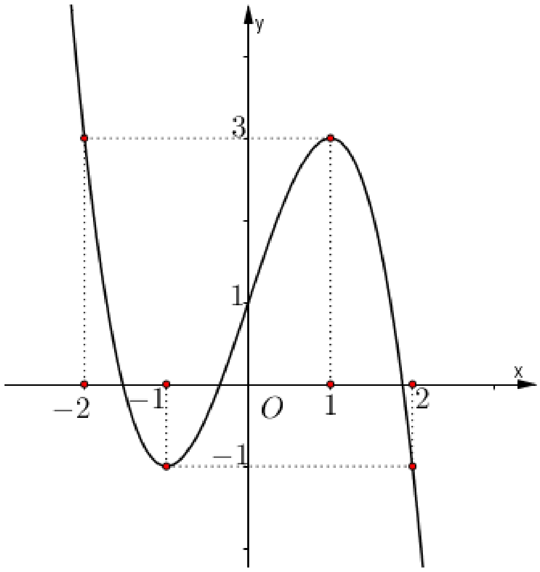
Từ đồ thị ta có $f\left(4-x^2\right)-3=0 \Leftrightarrow f\left(4-x^2\right)=3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}4-x^2=-2\\4-x^2=4\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\pm\sqrt{6}\\x=0\end{array}\right.$

$\Rightarrow$ đồ thị hàm số $g\left(x\right)$ có ba đường tiệm cận đứng.

Lại có $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f\left(4-x^2\right)=-\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to\pm\infty} g\left(x\right)=0 \Rightarrow y=0$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị.

Vậy đồ thị hàm số $g\left(x\right)$ có bốn đường tiệm cận.

Câu 3. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị hàm số như hình vẽ



Hỏi đồ thị hàm số $g\left(x\right)=\dfrac{\sqrt{x}}{\left(x+1\right)\left[f^2\left(x\right)-f\left(x\right)\right]}$ có bao nhiêu tiệm cận đứng ?

A. 3. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

Hàm số xác định $\Leftrightarrow \begin{cases}x\ge 0 & (1)\\ f^2\left(x\right)-f\left(x\right)\ne 0\end{cases}$.

Xét $\left(x+1\right)\left[f^2\left(x\right)-f\left(x\right)\right]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-1\\f^2\left(x\right)-f\left(x\right)=0\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow f^2\left(x\right)-f\left(x\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}f\left(x\right)=0\\f\left(x\right)=1\end{array}\right.$.

* Với $f\left(x\right)=0$:

Từ đồ thị hàm số ta thấy phương trình có 3 nghiệm phân biệt $x_3<x_2<0<x_1$.

Từ điều kiện (1) thì phương trình $f\left(x\right)=0$ có 1 nghiệm $x=x_1$.

* Với $f\left(1\right)=1$:

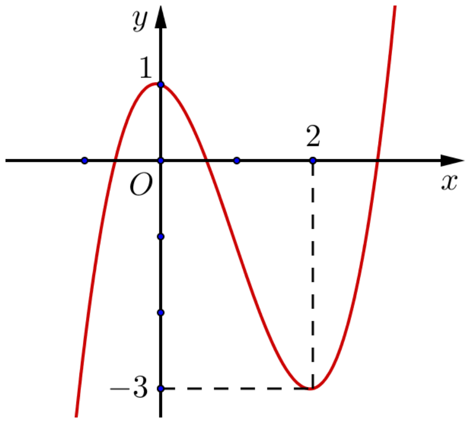
Từ đồ thị hàm số ta thấy phương trình có 3 nghiệm phân biệt $x_6<x_5=0<x_4$.

Từ điều kiện (1) thì phương trình $f\left(x\right)=1$ có 2 nghiệm $x=x_5$ và $x=x_4$ và cả 2 nghiệm này đều khác x_1.

Suy ra phương trình $(x+1)\left[f^2(x)-f(x)\right]=0$ có 3 nghiệm phân biệt.

Vậy đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{(x+1)\left[f^2(x)-f(x)\right]}$ có 3 tiệm cận đứng.

Câu 4. Cho hàm số bậc ba $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ



Hỏi đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{(x^2-2x)\sqrt{1-x}}{(x-3)\left[f^2(x)+3f(x)\right]}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

A. 5. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện hàm số có nghĩa $\begin{cases}1-x\ge 0\\(x-3)\left[f^2(x)+3f(x)\right]\ne 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\le 1 \quad (*)\\(x-3)\left[f^2(x)+3f(x)\right]\ne 0\end{cases}$

Xét phương trình $(x-3)\left[f^2(x)+3f(x)\right]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=3\\f(x)=0\\f(x)=-3\end{array}\right.$

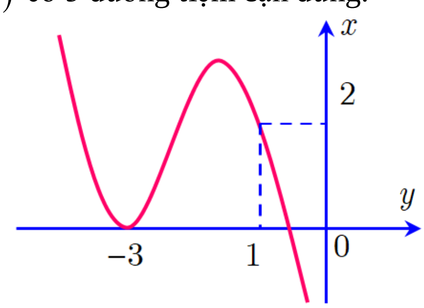
Từ đồ thị hàm số $y=f(x)$ suy ra $f(x)=0$ có 3 nghiệm $-1<x_1<x_2<1<x_3$

$f(x)=-3$ có hai nghiệm $x_4<1$ và $x_5=2$

Kết hợp với điều kiện $(*)$ phương trình $(x-3)\left[f^2(x)+3f(x)\right]=0$ có nghiệm x_1,x_2,x_5.

Và x_1, x_2, x_5 không là nghiệm của tử nên hàm số $g(x)$ có 3 đường tiệm cận đứng.

Câu 5. Cho hàm số bậc ba $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị là đường cong như hình bên. Đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{(x^2+4x+3)\sqrt{x^2+x}}{x\left[(f(x))^2-2f(x)\right]}$ có bao nhiêu đường tiệm cận



A. 4. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $\begin{cases}x\ne 0\\x^2+x\ge 0\\\left[f(x)\right]^2-2f(x)\ne 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x>0\\x\le -1\end{array}\right.\\\left[\begin{array}{l}f(x)\ne 0\\f(x)\ne 2\end{array}\right.\end{cases}$

Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ ta thấy phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm $x = -3$ (bội 2), và nghiệm $x = x_0$; $x_0 \in (-1;0)$ nên : $f(x) = a(x+3)^2(x - x_0)$

Đường thẳng $y = 2$ cắt đồ thị $y = f(x)$ tại ba điểm phân biệt có hoành độ $x = -1$; $x = x_1$; $x_1 \in (-3;-1)$; $x = x_2$; $(x_2 < -3)$. Nên $f(x) - 2 = a(x+1)(x - x_1)(x - x_2)$.

Do đó: $g(x) = \dfrac{(x^2+4x+3)\sqrt{x^2+x}}{x\left[(f(x))^2 - 2f(x)\right]} = \dfrac{(x^2+4x+3)\sqrt{x^2+x}}{x.f(x)\left[f(x)-2\right]}$

$= \dfrac{(x+1)(x+3)\sqrt{x^2+x}}{x.a(x+3)^2.(x-x_0).a(x+1)(x-x_1)(x-x_2)} = \dfrac{\sqrt{x^2+x}}{a^2x(x+3)(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}$.

Ta có: $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} = \dfrac{\sqrt{x+1}}{a^2\sqrt{x}(x+3)(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)} = +\infty$ nên $x = 0$ là một đường tiệm cận đứng của đồ thị $y = g(x)$

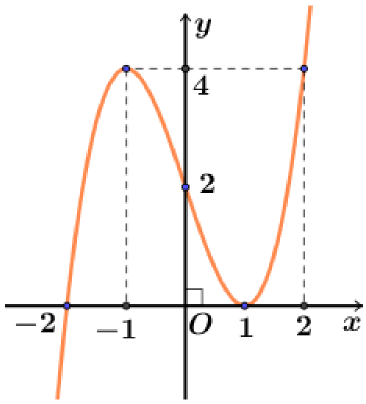
+)Các đường thẳng $x = -3$; $x = x_1$; $x = x_2$ đều là các đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = g(x)$

Do đó đồ thị $y = g(x)$ có 4 đường tiệm cận đứng.

+) Hàm số $y = g(x)$ xác định trên một khoảng vô hạn và bậc của tử nhỏ hơn bậc của mẫu nên đồ thị $y = f(x)$ có một đường tiệm cận ngang $y = 0$.

Vậy đồ thị hàm số $y = g(x)$ có 5 đường tiệm cận.

Câu 6. Cho hàm bậc ba $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Đồ thị $y = f(x)$ như hình vẽ. Tìm số đường tiệm cận đứng và ngang của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^4 - 4x^2 + 3}{(x-1)\left(f^2(x) - 2f(x)\right)}$.



A. 4. **B.** 5. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Dựa vào đồ thị của $y = f(x)$, ta có

$$\begin{cases} f(-1) = 4 \\ f(0) = 2 \\ f(1) = 0 \\ f(2) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a+b-c+d = 4 \\ d = 2 \\ a+b+c+d = 0 \\ 8a+4b+2c+d = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = -3 \\ d = 2 \end{cases}$$

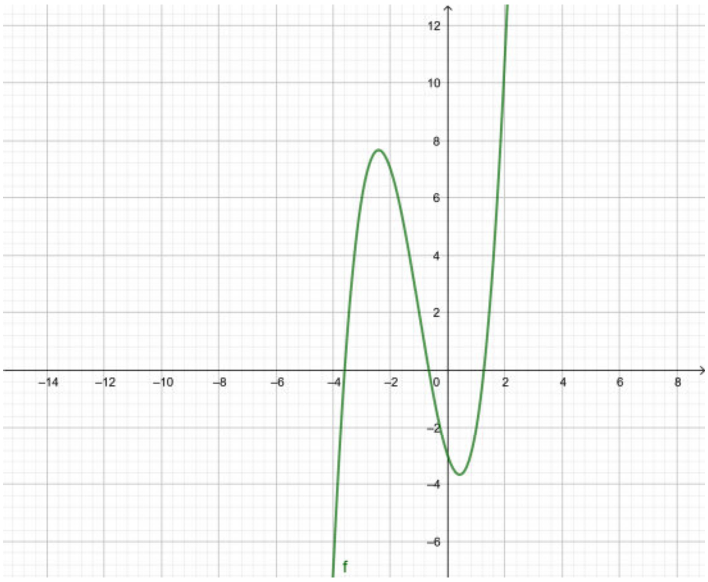
Do đó $f(x) = x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2(x+2)$

Xét hàm số $y=\dfrac{x^4-4x^2+3}{(x-1)\left(f^2(x)-2f(x)\right)}=\dfrac{\left(x^2-1\right)\left(x^2-3\right)}{(x-1).f(x).\left(f(x)-2\right)}$

$=\dfrac{\left(x^2-1\right)\left(x^2-3\right)}{(x-1).(x-1)^2.(x+2).x.\left(x^2-3\right)}=\dfrac{(x+1)}{(x-1)^2.(x+2).x}$

Hàm số có các đường tiệm cận đứng là $x=0$; $x=1$; $x=-2$ và đường tiệm cận ngang $y=0$.

Câu 7. Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ.



Tìm số đường tiệm cận của đồ thị hàm số: $g(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{f(x)+2}$

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C

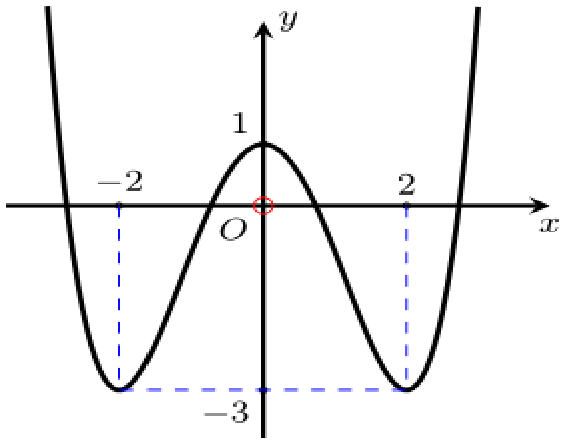
Từ đồ thị ta có: $f(x)+2=0 \Leftrightarrow f(x)=-2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x=a & (a<-2) \\ x=b & (-2<b<0) \\ x=c & (c>0) \end{array}\right.$

Kết hợp với điều kiện có nghĩa của $\sqrt{x}$ suy ra đồ thị hàm số $g(x)$ có 1 tiệm cận đứng $x=c\,(c>0)$.

Hàm số $g(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{f(x)+2}$ có bậc của tử bé hơn bậc của mẫu (Hàm số có bậc tử là $\dfrac{1}{2}$ còn bậc mẫu là 3) suy ra đồ thị hàm số $g(x)$ có 1 tiệm cận ngang là $y=0$.

Vậy đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{f(x)+2}$ có hai đường tiệm cận.

Câu 8. Cho hàm số bậc bốn $f(x)=ax^4+bx^2+c$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Hỏi đồ thị hàm số $y=\dfrac{(x^2-4)(x^2+2x)}{\left[f(x)\right]^2+2f(x)-3}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

A. 4. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

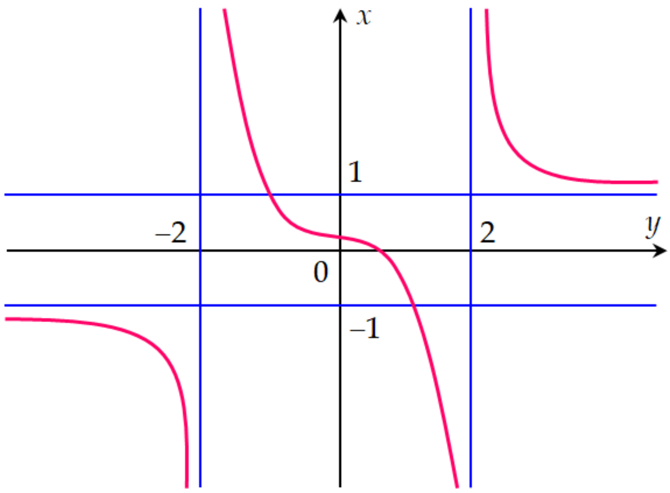
Chọn A

Xét phương trình $f^2(x)+2f(x)-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)=1\\f(x)=-3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0;x=x_1<-2;x=x_2>2\\x=-2;x=2\end{array}\right.$

Trong đó nghiệm $x=0$, $x=-2$, $x=2$ đều có bội 2 và $x=x_1\,(x_1<-2)$; $x=x_2\,(x_2>2)$ là nghiệm đơn (bội 1).

So sánh bội nghiệm ở mẫu và bội nghiệm ở tử thì thấy đồ thị có các TCĐ là $x=0$; $x=2$; $x=x_1$; $x=x_2$

Câu 9. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau:



Tìm số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{2}{3f(x)-2}$

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Chọn B

Dựa vào đồ thị hàm số ta có:

$\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=\dfrac{2}{3.(-1)-2}=-\dfrac{2}{5}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\dfrac{2}{3.1-2}=2$

Suy ra đồ thị hàm số đã cho có 2 đường tiệm cận ngang.

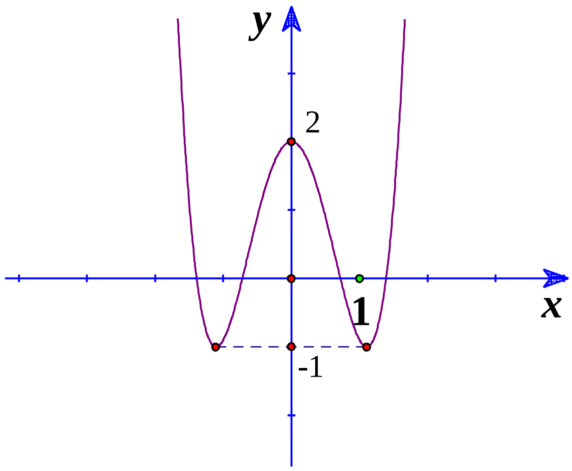
Xét phương trình $3f(x)-2=0 \Leftrightarrow f(x)=\dfrac{2}{3}$

Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy: phương trình $f(x)=\dfrac{2}{3}$ có duy nhất một nghiệm.

Vậy hàm số có 3 đường tiệm cận.

Dạng 4: Biết đồ thị của hàm số $y=f(x)$, tìm tiệm cận đứng, tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=g(x)$, trong bài toán chứa tham số.

Câu 1. Cho hàm số $f(x)=ax^4+bx^2+c$ có đồ thị như hình vẽ.



Số các giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{2020x}{f(x)\left[f(x)-m\right]}$ có tổng số 9 đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng là

A. 2. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

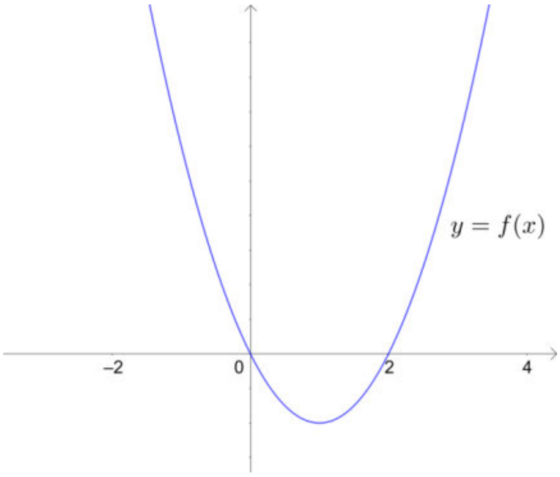
Ta có $g(x)$ là hàm phân thức hữu tỷ với bậc của tử nhỏ hơn bậc của mẫu nên $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x)=0$, do đó đồ thị hàm số $g(x)$ luôn có một tiệm cận ngang là $y=0$.

Phương trình $f(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=x_1;-2<x_1<-1 \\ x=x_2\in(-1;0) \\ x=x_3\in(0;1) \\ x=x_4\in(1;2) \end{array}\right.$.

Ta thấy phương trình $f(x)=0$ có 4 nghiệm phân biệt đều khác 0 nên $x=x_1$, $x=x_2$, $x=x_3$, $x=x_4$ là 4 tiệm cận đứng đồ thị hàm số $g(x)$.

Vậy để đồ thị hàm số $g(x)$ có đúng 9 đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng thì phương trình $f(x)=m$ phải có đúng 4 nghiệm phân biệt khác 0 và khác với 4 nghiệm $x_i\left(i=\overline{1,4}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} -1<m<2 \\ m\neq 0 \end{cases}$ mà $m\in\mathbb{Z}$ nên $m=1$.

Câu 2. Cho hàm số $f(x)=x^2-2x$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm tất cả các giá trị m để đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{f(x)}{f(x+m)}$ có số tiệm cận là số lẻ.



A. $m \ne 2$ và $m \ne 0$.
B. $m \ne -2$ và $m \ne 0$.
C. $m \ne 0$.
D. $m \ne \pm 2$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\dfrac{f(x)}{f(x+m)} = \dfrac{x^2-2x}{(x+m)^2-2(x+m)}$

$x^2-2x=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=2$.

$(x+m)^2-2(x+m)=0 \Leftrightarrow x=-m \vee x=2-m$.

Vì $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{f(x+m)}=1$, $\forall m\in\mathbb{R}^*$ nên hàm số $g(x)=\dfrac{f(x)}{f(x+m)}$ luôn có 1 tiệm cận ngang là $y=1$.

Với $m=0$, ta có $\dfrac{f(x)}{f(x+m)}=1$, $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0;2\}$. Suy ra đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{f(x)}{f(x+m)}$ không có tiệm cận đứng.

Do vậy với $m=0$, đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{f(x)}{f(x+m)}$ có 1 tiệm cận.

Với $m=2$, ta có $\dfrac{f(x)}{f(x+m)}=\dfrac{x^2-2x}{(x+2)^2-2(x+2)}=\dfrac{x(x-2)}{x(x+2)}$ có tập xác định là $D=\mathbb{R}\setminus\{-2;0\}$.

Có $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{f(x)}{f(x+m)}=\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x(x-2)}{x(x+2)}=\infty$,

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{f(x+m)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x(x-2)}{x(x+2)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-2}{x+2}=-1$.

Do đó đồ thị hàm số $\dfrac{f(x)}{f(x+m)}$ có 2 tiệm cận (1 tiệm cận đứng, 1 tiệm cận ngang).

Với $m=-2$, ta có $\dfrac{f(x)}{f(x+m)}=\dfrac{x^2-2x}{(x-2)^2-2(x-2)}=\dfrac{x(x-2)}{(x-2)(x-4)}$, có tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{2;4\}$.

Có $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x)}{f(x+m)}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x(x-2)}{(x-2)(x-4)}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x}{x-4}=-1$,

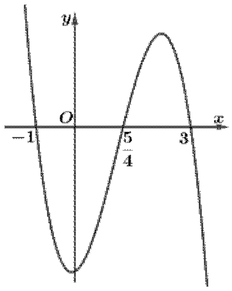
$\lim\limits_{x\to4}\dfrac{f(x)}{f(x+m)}=\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x(x-2)}{(x-2)(x-4)}=\infty$.

Do đó đồ thị hàm số $\dfrac{f(x)}{f(x+m)}$ có 2 tiệm cận (1 tiệm cận đứng, 1 tiệm cận ngang).

Với $m \neq 0$ và $m \neq \pm 2$, ta có $-m$ và $2-m$ không là nghiệm của x^2-2x. Suy ra đồ thị hàm số $\dfrac{f(x)}{f(x+m)}$ có 2 tiệm cận đứng là $x=-m$ và $x=2-m$. Do vậy đồ thị hàm số $\dfrac{f(x)}{f(x+m)}$ có 3 tiệm cận.

Vậy với $m \neq \pm 2$, đồ thị hàm số $\dfrac{f(x)}{f(x+m)}$ có số tiệm cận là số lẻ.

Câu 3. Cho hàm số $g(x)=\dfrac{2018}{h(x)-m^2-m}$ với $h(x)=mx^4+nx^3+px^2+qx$ $(m,n,p,q \in \mathbb{R})$. Hàm số $y=h'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới



Tìm các giá trị m nguyên để số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=g(x)$ là 2.

A. 11. **B.** 10. **C.** 9. **D.** 20.

Lời giải

Chọn B

Ta có $h'(x)=4mx^3+3nx^2+2px+q$. Từ đồ thị ta có $h'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=\dfrac{5}{4} \\ x=3 \end{array}\right.$ và $(m<0)$.

Suy ra $h'(x)=4m(x+1)\left(x-\dfrac{5}{4}\right)(x-3)=4mx^3-13mx^2-2mx+15m$.

Suy ra $h(x)=mx^4-\dfrac{13}{3}mx^3-mx^2+15mx+C$. Từ đề bài ta có $C=0$.

Vậy $h(x)=mx^4-\dfrac{13}{3}mx^3-mx^2+15mx$.

Xét $h(x)-m^2-m=0 \Leftrightarrow m=x^4-\dfrac{13}{3}x^3-x^2+15x-1$.

Xét hàm số $f(x)=x^4-\dfrac{13}{3}x^3-x^2+15x-1 \Rightarrow f'(x)=4x^3-13x^2-2x+15=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=\dfrac{5}{4} \\ x=3 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

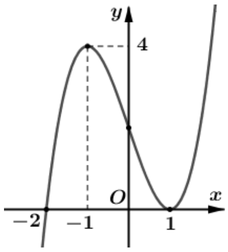
x	$-\infty$		-1		$\frac{5}{4}$		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{35}{3}$	$\nearrow$	$\frac{7807}{768}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Để đồ thị hàm số $g(x)$ có 2 đường tiệm cận đứng $\Leftrightarrow$ phương trình $h(x)-m^2-m=0$ có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình $m=x^4-\dfrac{13}{3}x^3-x^2+15x-1$ có 2 nghiệm phân biệt.

Từ bảng biến thiên kết hợp thêm điều kiện $m<0$ ta có $-\dfrac{35}{3}<m<-1$.

Do m nguyên nên $m\in\{-11;-10;...;-2\}$. Vậy có 10 số nguyên m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 4. Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d \quad (a\neq 0)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới



Tìm m để đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{1}{f(x^2-3)-m}$ có đúng 6 tiệm cận đứng?

A. $m\le 0$. **B.** $-2\le m\le 0$.
C. $-3<m<-1$. **D.** $0<m<4$.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $h(x)=f(x^2-3)\Rightarrow h'(x)=2x.f'(x^2-3)$

$$\Rightarrow h'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ f'(x^2-3)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x^2-3=-1\\ x^2-3=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=\pm\sqrt{2}\\ x=\pm 2\end{array}\right.$$

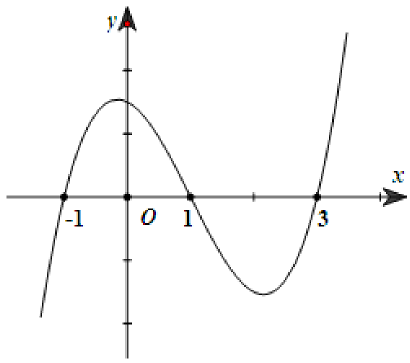
Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		2		$+\infty$
$2x$		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
x^2-3	$+\infty$		1		-1		-3		-1		1		$+\infty$
$f'(x^2-3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	|	$+$	0	$-$	0	$+$	
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	$f(-3)<0$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{1}{f(x^2-3)-m}$ có đúng 6 tiệm cận đứng

$\Leftrightarrow h(x)=m$ có 6 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow 0<m<4$.

Câu 5. Cho hàm số $f(x)=mx^3+nx^2+px+q \quad (m,n,p,q\in\mathbb{R})$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới



Tìm số giá trị m nguyên để số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{2019}{f(x)-8mx-m^2}$ là 3

A. 31. **B.** 8. **C.** 9. **D.** 30.

Lời giải

Chọn B

Từ đồ thị ta có $f(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=1 \\ x=3 \end{array}\right.$ và $m>0$.

Suy ra $f(x)=m(x+1)(x-1)(x-3)=mx^3-3mx^2-mx+3m$.

Xét $f(x)-m^2-8mx=0 \Leftrightarrow m=x^3-3x^2-9x+4$.

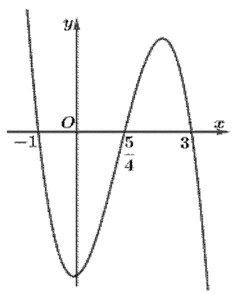
Xét hàm số $y=x^3-3x^2-9x+4 \Rightarrow y'=3x^2-6x-9=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=3 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	9	$\searrow$	-23	$\nearrow$	$+\infty$

Để đồ thị hàm số $g(x)$ có 3 đường tiệm cận đứng $\Leftrightarrow$ phương trình $f(x)-m^2-8mx=0$ có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình $m=x^3-3x^2-9x+4$ có 3 nghiệm phân biệt.
Từ bảng biến thiên kết hợp thêm điều kiện $m>0$ ta có $0<m<9$.
Do m nguyên nên $m\in\{1;2;...;8\}$. Vậy có 8 số nguyên m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 6. Cho hàm số $g(x)=\dfrac{2018}{h(x)-m^2-m}$ với $h(x)=mx^4+nx^3+px^2+qx$ $(m,n,p,q\in\mathbb{R})$. Hàm số $y=h'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới



Tìm các giá trị m nguyên để số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $g(x)$ là 2

A. 11. **B.** 10. **C.** 9. **D.** 20.

Lời giải

Chọn B

Ta có $h'(x)=4mx^3+3nx^2+2px+q$. Từ đồ thị ta có $h'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=\dfrac{5}{4} \\ x=3 \end{array}\right.$ và $(m<0)$.

Suy ra $h'(x)=4m(x+1)\left(x-\dfrac{5}{4}\right)(x-3)=4mx^3-13mx^2-2mx+15m$.

Suy ra $h(x)=mx^4-\dfrac{13}{3}mx^3-mx^2+15mx+C$. Từ đề bài ta có $C=0$.

Vậy $h(x)=mx^4-\dfrac{13}{3}mx^3-mx^2+15mx$.

Xét $h(x)-m^2-m=0 \Leftrightarrow m=x^4-\dfrac{13}{3}x^3-x^2+15x-1$.

Xét hàm số $f(x)=x^4-\dfrac{13}{3}x^3-x^2+15x-1 \Rightarrow f'(x)=4x^3-13x^2-2x+15=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=\dfrac{5}{4} \\ x=3 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

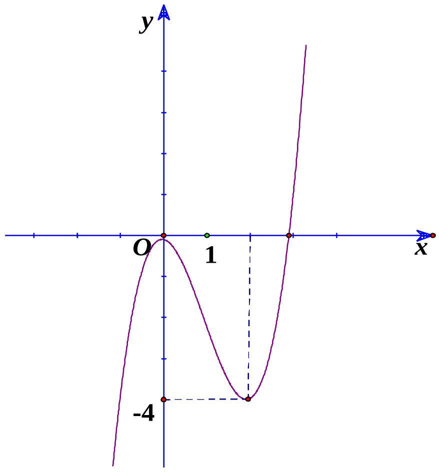
$$\begin{array}{c|ccccccccc}
x & -\infty & & -1 & & \frac{5}{4} & & 3 & & +\infty \\
\hline
f'(x) & & - & 0 & + & 0 & - & 0 & + & \\
\hline
f(x) & +\infty & \searrow & -\frac{35}{3} & \nearrow & \frac{7807}{768} & \searrow & -1 & \nearrow & +\infty
\end{array}$$

Để đồ thị hàm số $g(x)$ có 2 đường tiệm cận đứng $\Leftrightarrow$ phương trình $h(x)-m^2-m=0$ có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình $m=x^4-\dfrac{13}{3}x^3-x^2+15x-1$ có 2 nghiệm phân biệt.

Từ bảng biến thiên kết hợp thêm điều kiện $m<0$ ta có $-\dfrac{35}{3}<m<-1$.

Do m nguyên nên $m\in\{-11;-10;...;-2\}$. Vậy có 10 số nguyên m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 1. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị hàm số như sau:

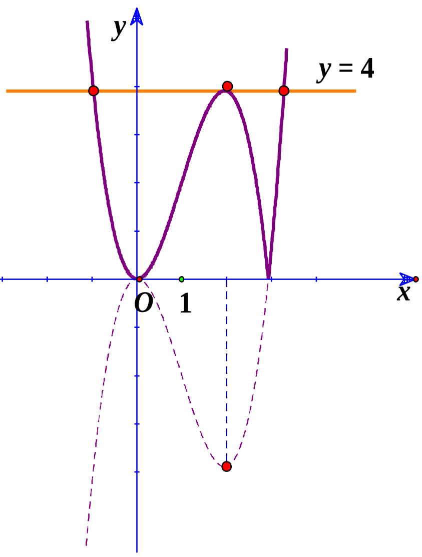


Tìm m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{2}{\left|f\left(x\right)\right|-m^2}$ có đúng ba đường tiệm cận đứng?

A. $m=1$ **B.** $m=2$ **C.** $m=0$ **D.** $m=\pm2$

Lời giải

Chọn D

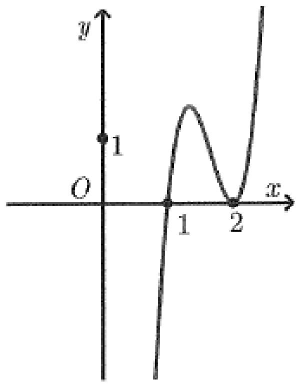


Đồ thị hàm số có ba đường tiệm cận đứng khi phương trình $\left|f\left(x\right)\right|-m^2=0$ có 3 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ Đồ thị hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|$ và đường thẳng $y=m^2$ có 3 giao điểm.

Dựa vào ĐTHS đã cho suy ra $m^2=4 \Leftrightarrow m=\pm2$

Câu 2. Cho hàm số bậc ba $y=f\left(x\right)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ.



Số giá trị nguyên của $m\in[-10;1]$ để đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{[f(x)-m][f(x)-1]}$ có đúng bốn đường tiệm cận đứng là :

A. 9. **B.** 12. **C.**11. **D.** 10.

Lời giải

Chọn C

* $x^2-3x+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=2\end{array}\right.$

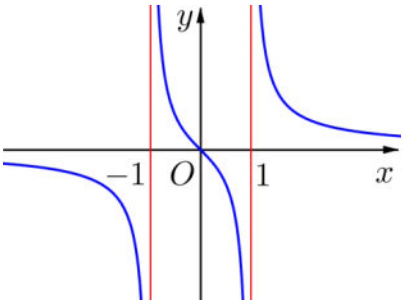
* $(f(x)-m)(f(x)-1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)=m\\f(x)=1\end{array}\right.$

Nhìn vào đồ thị hàm số ta có $f(x)=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=a\in(1;2)\\x=b\in(a;2)\\x=c\in(2;3)\end{array}\right.$.(có ba tiệm cận)

Suy ra đồ thị hàm số $y=g(x)$ có đúng 4 tiệm cận đứng với $m\in[-10;1]$ là $m\in[-10;0]$

Do đó số giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán là 11 số.

Câu 3. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2019;2020]$ để đồ thị hàm số $y=f(x^2-2x+m)-m$ có 5 đường tiệm cận?

A. 4038. **B.** 2019. **C.** 2020. **D.** 4040.

Lời giải

Chọn B

Từ đồ thị hàm số $y=f(x)$ ta suy ra $f(x)$ có tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{\pm1\}$ và các giới hạn: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=-\infty$.

Vì hàm số $t=x^2-2x+m$ xác định trên $\mathbb{R}$ nên hàm số $y=f(x^2-2x+m)-m$ xác định $\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-2x+m\neq1\\x^2-2x+m\neq-1\end{cases}$

Vì $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(x^2-2x+m)=+\infty$ nên $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[f(x^2-2x+m)-m\right]=\lim\limits_{t\to+\infty}\left[f(t)-m\right]=-m$.

Do đó đồ thị hàm số $y=f(x^2-2x+m)-m$ có đúng một đường tiệm cận ngang là đường thẳng $y=-m$ (về cả hai phía $x\to+\infty$ và $x\to-\infty$).

Để đồ thị hàm số $y=f(x^2-2x+m)-m$ có 5 đường tiệm cận thì nó phải có 4 đường tiệm cận đứng.

Điều kiện cần: $\left[\begin{array}{l}x^2-2x+m=1\\x^2-2x+m=-1\end{array}\right.$ phải có 4 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}(x-1)^2=-m+2\\(x-1)^2=-m\end{array}\right.$ có 4 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases}-m+2>0\\-m>0\end{cases} \Leftrightarrow m<0$.

Điều kiện đủ: Giả sử x_1, x_2 $(x_1<x_2)$ là hai nghiệm phân biệt của phương trình $x^2-2x+m=1$; x_3, x_4 là hai nghiệm phân biệt của phương trình $x^2-2x+m=-1$.

Xét đường thẳng $x=x_1$, ta có $\lim\limits_{x\to x_1^{\mp}}\left[f\left(x^2-2x+m\right)-m\right]=\lim\limits_{t\to 1^{\pm}}\left[f(t)-m\right]=\pm\infty$.

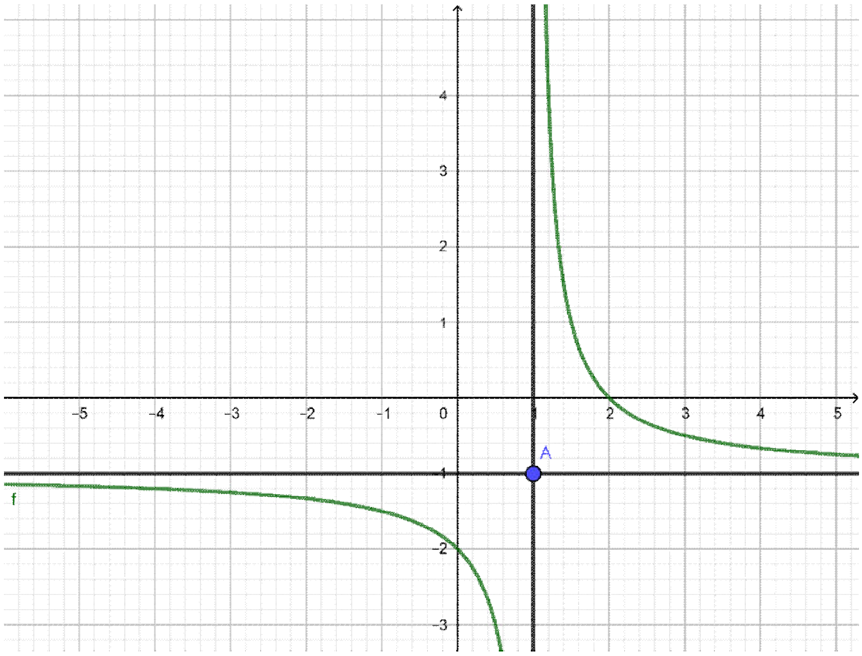
Suy ra đường thẳng $x=x_1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=f\left(x^2-2x+m\right)-m$.

Tương tự các đường thẳng $x=x_2$, $x=x_3$, $x=x_4$ cũng là các đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=f\left(x^2-2x+m\right)-m$.

Vậy để đồ thị hàm số $y=f\left(x^2-2x+m\right)-m$ có 5 đường tiệm cận thì $m<0$.

Do $m\in\mathbb{Z}$ và $m\in[-2019;2020]$ nên có tất cả 2019 giá trị của m .

Câu 4. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của m để đồ thị hàm số $y=\left|f(x-16)+10-m^2\right|$ có tiệm cận ngang nằm phía dưới đường thẳng $d: y=8$ (không trùng với d).

A. 8 **B.** 2 **C.** 6 **D.** 4

Lời giải

Chọn C

Đồ thị hàm số $g(x)=f(x-16)+10-m^2$ có được bằng cách thực hiện liên tiếp 2 phép tịnh tiến là tịnh tiến theo phương trục hoành sang phải 16 đơn vị và theo phương trục tung $\left(10-m^2\right)$ đơn vị.

Từ hình vẽ: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x-16)=\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=-1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x)=9-m^2$

Do vậy đồ thị hàm số $g(x)$ có một tiệm cận ngang là $y=9-m^2$, ta có 2 TH sau:

+) TH 1: Nếu $9-m^2<0$ thì tiệm cận ngang của đồ thị $y=|g(x)|$ là $y=m^2-9<8$

$\Rightarrow 9<m^2<17$

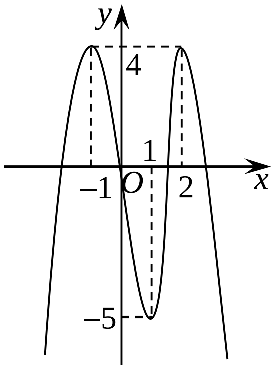
mà $m\in\mathbb{Z}$, nên $m=\pm4$

+) TH 2: Nếu $9-m^2\geq 0$ thì tiệm cận ngang của đồ thị $y=|g(x)|$ là $y=9-m^2<8$

$\Rightarrow 1<m^2\leq 9$

mà $m\in\mathbb{Z}$, nên $m=\pm 2$, $m=\pm 3$
+) KL: có 6 giá trị nguyên của m thỏa mãn bài ra.

Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như sau



Tìm tất cả các số thực m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{f(x)-m}$ có hai tiệm cận đứng?

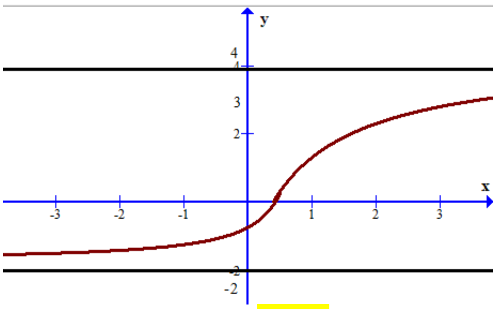
A. $m=4$ hoặc $m<-5$. **B.** $m=4$. **C.** $m=-5$. **D.** $-5<m<4$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f(x)-m=0\Leftrightarrow f(x)=m$.
Ta cần tìm m để phương trình trên có hai nghiệm thực.
Dựa vào bảng biến thiên suy ra $m=4$ hoặc $m<-5$.

Câu 6. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới. Hỏi có bao nhiêu giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=\left|f(x)+\sqrt[3]{8-m}+\sqrt{m+1}-4\right|$ có đúng một tiệm cận ngang?



A. 0. **B.** 2. **C.** 3. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn C

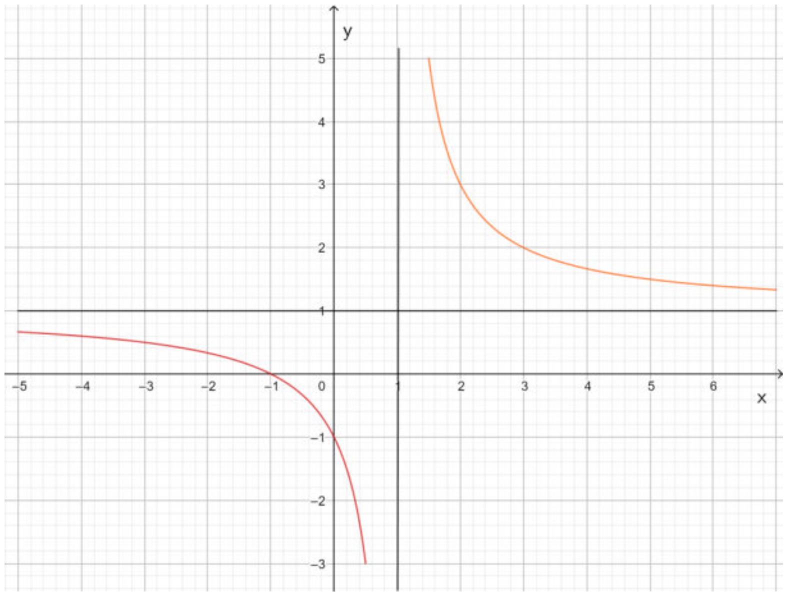
Để đồ thị hàm số $y=\left|f(x)+\sqrt[3]{8-m}+\sqrt{m+1}-4\right|$ có đúng một tiệm cận ngang thì đồ thị hàm số $y=f(x)+\sqrt[3]{8-m}+\sqrt{m+1}-4$ có hai tiệm cận ngang đối xứng nhau qua trục hoành , khi đó từ đồ thị hàm số $y=f(x)$ ta tịnh tiến xuống đúng 1 đơn vị. Vậy $\sqrt[3]{8-m}+\sqrt{m+1}-4=-1$.

Giải $\sqrt[3]{8-m}+\sqrt{m+1}=3$ ta đặt $u=\sqrt[3]{8-m}$; $v=\sqrt{m+1}\ (v\ge 0)$

Khi đó ta có hệ: $\begin{cases}u+v=3\\ u^3+v^2=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}v=3-u\quad (u\le 3)\\ u^3+u^2-6u=0\end{cases}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}u=0\\ u=2\\ u=-3\end{array}\right.$

tìm được ba giá trị m là 0; 8; 35.

Câu 7. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Tìm m để đồ thị hàm số $y = g(x) = \left| f\left(\left|x + (m+1)^2\right|\right) - m^2 + 2m + 2 \right|$ có tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng là nhiều nhất?

A. $-2 < m < 0$

B. $\Leftrightarrow 1 \le m \le 3$.

C. $-3 < m < -2$.

D. $-2 < m < -1$.

Lời giải

Chọn B

Dựa vào đồ thị hàm số $f(x)$ thì đồ thị hàm số $h(x) = f\left(\left|x + (m+1)^2\right|\right)$ luôn có 1 tiệm cận ngang và có 2 tiệm cận đứng $\forall m$.

Vì đồ thị hàm số số $g(x) = \left|h(x) - m^2 + 2m + 2\right|$ bảo toàn số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $h(x)$. Do đó dựa vào đồ thị hàm số $h(x)$ thì đồ thị hàm số $g(x)$ có 2 tiệm cận đứng và có số tiệm cận ngang ≤ 1 $\forall m$

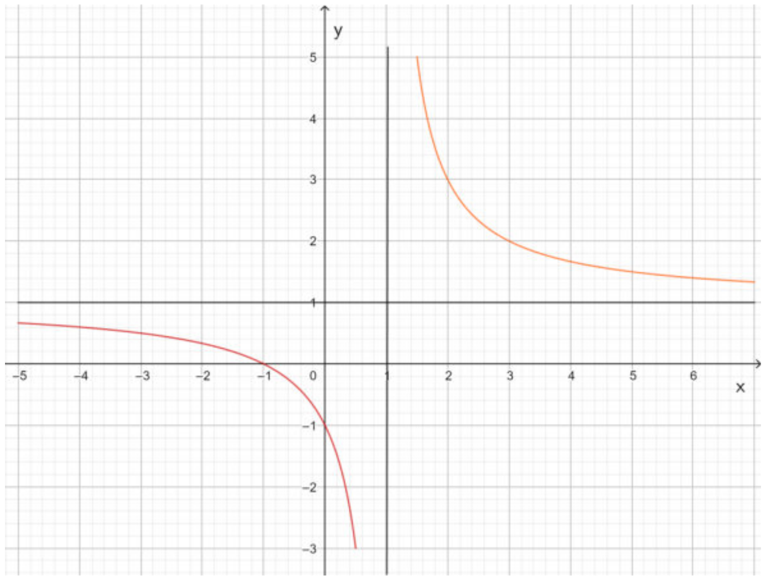
Vậy để đồ thị $y = g(x) = \left| f\left(\left|x + (m+1)^2\right|\right) - m^2 + 2m + 2 \right|$ có tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng nhiều nhất là 3

$\Leftrightarrow$ $g(x)$ có 2 tiệm cận đứng và 1 tiệm cận ngang

$\Leftrightarrow$ $h(x)$ tịnh tiến xuống dưới không quá 1 đơn vị.

$\Leftrightarrow -m^2 + 2m + 2 \ge -1 \Leftrightarrow 1 \le m \le 3$

Câu 8. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Tìm m để đồ thị hàm số $g(x)=f\left(\left|x-m^2\right|\right)-2020$ nhận đường thẳng $x=5$ làm tiệm cận đứng?

A. $m=\pm 2$

B. $\left[\begin{array}{l} m=\pm 2 \\ m=\pm\sqrt{6} \end{array}\right.$.

C. $m=\pm\sqrt{6}$.

D. $\left[\begin{array}{l} m=2 \\ m=\sqrt{6} \end{array}\right.$.

Lời giải

Chọn B

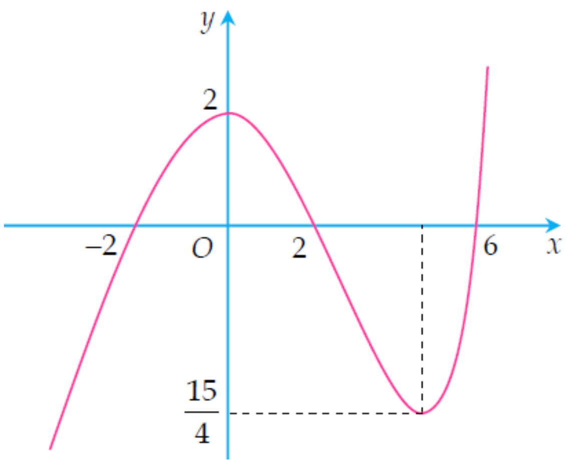
Xét hàm số $h(x)=f\left(|x|\right)$ có đồ thị hàm số nhận đường thẳng $y=1$ làm tiệm cận ngang, $x=1$, $x=-1$ làm tiệm cận đứng.

Suy ra đồ thị hàm số $u(x)=h\left(x-m^2\right)=f\left(\left|x-m^2\right|\right)$ nhận đường thẳng $x=m^2+1; x=m^2-1$ làm tiệm cận đứng, đường thẳng $y=1$ làm tiệm cận ngang.

Suy ra đồ thị hàm số $g(x)=u(x)-2020$ nhận đường thẳng $x=m^2+1; x=m^2-1$ làm tiệm cận đứng, đường thẳng $y=-2019$ làm tiệm cận ngang.

Theo đề bài, ta có $\left[\begin{array}{l} m^2+1=5 \\ m^2-1=5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=\pm 2 \\ m=\pm\sqrt{6} \end{array}\right.$

Câu 9. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ



Với m, n là hai số nguyên dương, khi hàm số $g(x)=\dfrac{x^2+8x+\sqrt{n-m}}{f\left(f(x)+m\right)}$ có số tiệm cận lớn nhất là n hãy tính giá trị nhỏ nhất của $S=m^2+n^2$

A. 14 . **B.** 74 . **C.** 50 . **D.** 3 .

Lời giải

Chọn C

Để hàm số có tiệm cận đứng thì điều kiện:

$$f\left[f(x)+m\right]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)+m=-2 \\ f(x)+m=2 \\ f(x)+m=6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=-m-2 \\ f(x)=-m+2 \\ f(x)=-m+6 \end{array}\right.$$

Khi đó để hàm số có có nhiều tiệm cận đứng nhất thì:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 6-m<2 \\ 2-m>-\dfrac{15}{4} \end{cases} \\ \begin{cases} -2-m>-\dfrac{15}{4} \\ 2-m<2 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m=5 \\ m=1 \end{array}\right.$$

Xét $h(x)=x^2+8x+\sqrt{n-m}$ có $h'(x)=2x+8$

nên $h(x)$ đồng biến trên khoảng $(-4;+\infty)$

Khi $m=5$ thì đường thẳng $y=-7$ gặp $f(x)$ tại điểm có hoành độ lớn hơn -4 .

Nên $h(x)>0$, $\forall x\in(-4;+\infty)$. Do đó $\left[\begin{array}{l} S=74 \\ S=50 \end{array}\right. \Rightarrow \min S=50$

Phần 2: Biết BBT của hàm số $y=f(x)$

Dạng 5: Biết BBT của hàm số $y=f(x)$, tìm tiệm cận đứng, tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=f(x)$, trong bài toán không chứa tham số.

Câu 1. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	‖	$+$	
y	4	↘	1 ‖ $+\infty$	↘	2 ‖ 2	↗	$+\infty$

Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là

A. Không tồn tại tiệm cận đứng.

B. $x=-2$

C. $x=1$

D. $x=-2$ và $x=1$

Lời giải

Chọn B

Vì $\lim\limits_{x\to(-2)^+} y=+\infty$ nên $x=-2$ là tiệm cận đứng

Câu 2. Số tiệm cận đứng và số tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên sau là

x	-2		-1		1		4		$+\infty$
y'	‖	$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	
y	‖ 0	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$0,325$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1

A. 2 TCĐ và 2 TCN .

B. 3 TCĐ và 2 TCN .

C. 2 TCĐ và 1 TCN .

D. 3 TCĐ và 1 TCN .

Lời giải

Chọn C

Dựa vào bảng biến thiên ta có

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ nên $y=1$ là TCN.

$\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)=+\infty$ nên $x=-1$ là TCĐ.

$\lim\limits_{x\to4^+} f(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to4^-} f(x)=-\infty$ nên $x=4$ là TCĐ.

Vậy có 2 TCĐ và 1 TCN .

Câu 3. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên từng khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0			2		$+\infty$
$f'(x)$			$\|\|$			0		
$f(x)$	3	$\searrow$	-2 $\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$		4	$\searrow$	2

Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là:

A. 4. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

+) Ta có $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=-\infty \Rightarrow x=0$ là đường TCĐ của đồ thị hàm số

+) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=3 \Rightarrow y=3$ là đường TCN của đồ thị hàm số

+) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2 \Rightarrow y=2$ là đường TCN của đồ thị hàm số.

Câu 4. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y	2	$\nearrow$	$+\infty$ $\|\|$ 3	$\nearrow$	5

Tổng số đường tiệm cận ngang và đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là

A. 4. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C

Từ bảng biến thiên ta có:

$\lim\limits_{x\to1^-} y=+\infty$ nên đường thẳng $x=1$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$\lim\limits_{x\to-\infty} y=2$, $\lim\limits_{x\to+\infty} y=5$ nên đường thẳng $y=2$ và $y=5$ là các đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Tổng số đường tiệm cận ngang và đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là 3.

Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	1		2		$+\infty$
y'		$\|\|$	$-$	$\|\|$	$+$	
y		$\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	3 $\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Hỏi đồ thị hàm số $y = f(x)$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Từ bảng biến thiên, ta có:

$\lim\limits_{x\to+\infty} y = +\infty$. Vậy đồ thị hàm số $y = f(x)$ không có tiệm cận ngang.

$\lim\limits_{x\to 2^+} y = -\infty$. Vậy $x = 2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

$\lim\limits_{x\to 1^+} y = +\infty$. Vậy $x = 1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có đúng hai đường tiệm cận. **Chọn B.**

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên các khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình vẽ sau:

x	$-\infty$		-2		0		1		$+\infty$
y'		$+$	‖	$+$	‖	$+$	0	$-$	
y	2	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	1 ‖ $+\infty$	↗	2	↘	3

Số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Dựa vào bảng biến thiên, ta có

$\lim\limits_{x\to -2^-} y = +\infty$, $\lim\limits_{x\to -2^+} y = -\infty$ suy ra $x = -2$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$\lim\limits_{x\to 0^+} y = +\infty$ suy ra $x = 0$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị của hàm số có 2 đường tiệm cận đứng.

Câu 7. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$-$	‖	$+$	0	$-$	
y	2	↘	$-\infty$ ‖ -2	↗	1	↘	$-\infty$

(Ctrl)

Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải

Chọn C

Từ bảng biến thiên ta có

+) $\lim\limits_{x\to+\infty} y = -\infty$;

+) $\lim\limits_{x\to-\infty} y = 2$;

+) $\lim\limits_{x\to 0^-} y = -\infty$;

+) $\lim\limits_{x\to 0^+} y = -2$.

Do đó đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng $x = 0$ và đường tiệm cận ngang $y = 2$.

Câu 8. Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
y'		$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
y	-1	$\nearrow$	$+\infty \Vert -\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

Đồ thị hàm số $y = f\left(x\right)$ có tổng số bao nhiêu tiệm cận (chỉ xét các tiệm cận đứng và ngang)?

A. 2. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Từ BBT ta có:

$\lim\limits_{x\to -\infty} y = -1$. Vậy đường thẳng $y = -1$ là đường TCN của đồ thị hàm số $y = f\left(x\right)$.

$\lim\limits_{x\to 1^-} y = +\infty \left(\lim\limits_{x\to 1^+} y = -\infty\right)$. Vậy đường thẳng $x = 1$ là đường TCĐ của đồ thị hàm số $y = f\left(x\right)$.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có đúng 2 đường tiệm cận. **Chọn A**

Dạng 6: Biết BBT của hàm số $y = f\left(x\right)$, tìm tiệm cận đứng, tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f\left(x\right)$, trong bài toán chứa tham số.

Câu 1. Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số có 1 đường tiệm cận ngang

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
y'		$+$	$\Vert$	$+$	
y	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$+\infty \Vert -\infty$	$\nearrow$	m

A. Không có m. **B.** $m = 0$. **C.** $m = -\frac{1}{2}$. **D.** $m = \frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Từ BBT suy ra TCN của đồ thị hàm số là $y = \frac{1}{2}$ và $y = m$;

YCBT $\Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$.

Câu 2. Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	↗	3	↘	$-\infty$

Tính tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số m trên khoảng $(-20;20)$ để đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{f(x)-m}$ có tiệm cận ngang.

A. 187. **B.** -184. **C.** 186. **D.** -185.

Lời giải

Chọn B

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{f(x)-m}$ có tiệm cận ngang nếu phương trình $f(x)=m$ có nghiệm.

Từ BBT suy ra $m \le 3$.

Kết hợp điều kiện $m \in (-20;20)$, $m \in Z$ ta có $m \in \{-19;-18;...;3\}$

Vậy tổng các giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn đề bài là -184.

Câu 3. Cho đồ thị hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên xác định như hình. Biết rằng đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=x_0$, tiệm cận ngang là $y=y_0$ và $x_0y_0=16$. Hỏi m bằng?

x	$-\infty$		m		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$ ↘	1	‖	$-\infty$ ↗	8

A. $m=8$. **B.** $m=-16$. **C.** $m=1$. **D.** $m=2$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\lim\limits_{x\to m^+} y=-\infty$ nên $x=m$ là tiệm cận đứng.

$\lim\limits_{x\to +\infty} y=8$ nên $y_o=8$ là tiệm cận ngang.

Suy ra $8m=16 \Leftrightarrow m=2$.

Câu 4. Hàm số $y=f(x)$ liên tục trên các khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây

x	$-\infty$		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$ ↘	5	‖	$-\infty$ ↗	$m+2$

Tìm m để đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = x_o$ và tiệm cận ngang $y = y_o$ sao cho $x_o y_o < 30$.

A. $m < 1$. **B.** $m < 10$. **C.** $m < 8$. **D.** $m > 8$.

Lời giải

Chọn C

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = m+2$ suy ra đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y = m+2$. Ta có $y_o = m+2$.

$\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = -\infty$ suy ra đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x = 3$. Ta có $x_o = 3$.

$x_o y_o < 30 \Leftrightarrow 3(m+2) < 30 \Leftrightarrow m < 8$.

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	||	$-$	
$f(x)$	2	$\nearrow$	-1	$\searrow$ $-\infty$	|| $+\infty$	$\searrow$	m

Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in [0;3]$ để đồ thị hàm số $y = f(x)$ có 3 đường tiệm cận?

A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Ta có

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2 \Rightarrow y = 2$ là một đường tiệm cận ngang.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = m \Rightarrow y = m$ là một đường tiệm cận ngang.
- $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty \Rightarrow x = 1$ là một đường tiệm cận đứng.

Để đồ thị hàm số $y = f(x)$ có 3 đường tiệm cận thì $m \neq 2$. Vì m nguyên và $m \in [0;3]$ nên $m \in \{0;1;3\}$.

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
f '(x)		-	||	-	||	+	
f(x)	4	$\searrow$	1 || $+\infty$	$\searrow$	2 || $-\infty$	$\nearrow$	m^2

Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in [-4;4]$ để hàm số có 4 tiệm cận?

A. 5. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 8.

Lời giải

Chọn C

+ Ta có $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = +\infty$ nên $x = -2$ là một tiệm cận đứng.

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$ nên $x = 1$ là một tiệm cận đứng.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 4$ nên $y = 4$ là một tiệm cận ngang.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = m^2$ nên $y = m^2$ là một tiệm cận ngang.

+ Để hàm số có 4 tiệm cận thì $m^2 \neq 4 \Leftrightarrow m \neq \pm 2$ mà $m \in [-4;4]$ nên $m \in \{\pm 4; \pm 3; \pm 1; 0\}$

Vậy có 7 giá trị m cần tìm.

Câu 7. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$		-2		0		1		$+\infty$
y'		$-$	||	$-$		$+$	||	$-$	
y	$-1 \searrow$		$-\infty$ || 2	$\searrow$	-4	$\nearrow$	3	$\searrow$	m^2

Số tiệm cận của đồ thị hàm số $y = f(x)$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

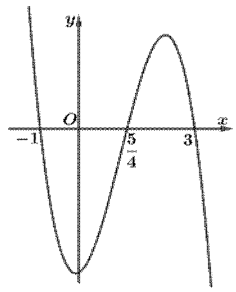
ChọnC

Qua bảng biến thiên ta có $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$ và $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = m^2 \neq -1$ nên đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận ngang: $y = -1$ và $y = m^2$.

Lại có $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = -\infty$ nên đồ thị hàm số có một tiệm cận đứng $x = -2$.

Vậy số tiệm cận của đồ thị hàm số $y = f(x)$ là 3.

Câu 8. Cho hàm số $g(x) = \dfrac{2018}{h(x) - m^2 - m}$ với $h(x) = mx^4 + nx^3 + px^2 + qx$ $(m, n, p, q \in \mathbb{R})$. Hàm số $y = h'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới



Tìm các giá trị m nguyên để số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $g(x)$ là 2

A. 11. **B.** 10. **C.** 9. **D.** 20.

Lời giải

Chọn B

Ta có $h'(x) = 4mx^3 + 3nx^2 + 2px + q$. Từ đồ thị ta có $h'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = \dfrac{5}{4} \\ x = 3 \end{array}\right.$ và $(m < 0)$.

Suy ra $h'(x) = 4m(x+1)\left(x - \dfrac{5}{4}\right)(x-3) = 4mx^3 - 13mx^2 - 2mx + 15m$.

Suy ra $h(x) = mx^4 - \dfrac{13}{3}mx^3 - mx^2 + 15mx + C$. Từ đề bài ta có $C = 0$.

Vậy $h(x) = mx^4 - \dfrac{13}{3}mx^3 - mx^2 + 15mx$.

Xét $h(x) - m^2 - m = 0 \Leftrightarrow m = x^4 - \dfrac{13}{3}x^3 - x^2 + 15x - 1$.

Xét hàm số $f(x)=x^4-\frac{13}{3}x^3-x^2+15x-1 \Rightarrow f'(x)=4x^3-13x^2-2x+15=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=\frac{5}{4} \\ x=3 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		$\frac{5}{4}$		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{35}{3}$	$\nearrow$	$\frac{7807}{768}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Để đồ thị hàm số $g(x)$ có 2 đường tiệm cận đứng $\Leftrightarrow$ phương trình $h(x)-m^2-m=0$ có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình $m=x^4-\frac{13}{3}x^3-x^2+15x-1$ có 2 nghiệm phân biệt.

Từ bảng biến thiên kết hợp thêm điều kiện $m<0$ ta có $-\frac{35}{3}<m<-1$.

Do m nguyên nên $m\in\{-11;-10;...;-2\}$. Vậy có 10 số nguyên m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 9. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$		-2		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	||	$-$	0	$+$	||	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	$(m-1)(2-m)$

Tìm tổng số các giá trị nguyên dương của tham số $m\in(-10;10)$ để đồ thị hàm số $y=f(x)$ có tổng số đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang là 4.

A. 42. **B.** 45. **C.** -3. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A

Từ bảng biến thiên ta có $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=(m-1)(2-m)$. Suy ra tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=f(x)$ là $y=0$ và $y=(m-1)(2-m)$.

Lại có $\lim\limits_{x\to-2^-} f(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to-2^+} f(x)=+\infty$ suy ra tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=f(x)$ là $x=-2$.

Và $\lim\limits_{x\to2^-} f(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to2^+} f(x)=-\infty$ suy ra tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=f(x)$ là $x=2$.

Để đồ thị hàm số có tổng số đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang là 4 khi và chỉ khi $(m-1)(2-m)\neq0 \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq1 \\ m\neq2 \end{cases}$.

Vì $m\in(-10;10)$ và m là số nguyên dương nên $m\in\{3;4;5;6;7;8;9\}$.

Vậy $3+4+5+6+7+8+9=42$.

Câu 10. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	-15	$\nearrow$	$+\infty$

Tìm số các giá trị nguyên âm của tham số m để đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{2019}{f(x)-m}$ có tổng số đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang là 3.

A. 14. **B.** 17. **C.** 15. **D.** 16.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=+\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2019}{f(x)-m}=0$. Suy ra tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $g(x)$ là $y=0$.

Để đồ thị hàm số $g(x)$ có ba đường tiệm cận thì đồ thị hàm số $g(x)$ phải có hai đường tiệm cận đứng $\Leftrightarrow$ phương trình $f(x)-m=0$ có số nghiệm là 2 $\Leftrightarrow$ phương trình $f(x)=m$ có số nghiệm là 2.

Từ đồ thị hàm số $y=f(x)$ suy ra phương trình $f(x)=m$ có số nghiệm là 2 $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>2 \\ -15<m<1 \end{array}\right.$.

Mà tham số m là số nguyên âm. Vậy $m\in\{-14;-13;-12;-11;...;-2;-1\}$.

Câu 11. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới đây

x	$-\infty$		1		2		4		$+\infty$
y'		$-$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$	
y	$\dfrac{1}{m}$	$\searrow$	$-\infty$ ‖ -5	$\nearrow$	-2	$\searrow$	-5 ‖ $-\infty$	$\nearrow$	m

Có bao nhiêu giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=f(x)$ có tổng số đường tiệm cận ngang và đứng là 3 ?

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** vô số.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện $m\neq 0$

Ta có $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=-\infty$ và $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x)=-\infty$ nên đồ thị hàm số $y=f(x)$ có 2 đường tiệm cận đứng (là hai đường thẳng $x=1$ và $x=4$)

Cũng từ bảng biến thiên ta có $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\dfrac{1}{m}$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=m$ với điều kiện $m\neq 0$.

Để đồ thị hàm số $y = f(x)$ có tổng số đường tiệm cận ngang và đứng là 3

$\Leftrightarrow$ đồ thị hàm số $y = f(x)$ có số đường tiệm cận ngang là 1

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \Leftrightarrow \dfrac{1}{m} = m \Leftrightarrow m^2 = 1 \Leftrightarrow m = \pm 1$.

Vậy có 2 giá trị của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 12. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Định tham số m để giao điểm của đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang là điểm $I(-1;1)$.

x	$-\infty$		$-m$		$+\infty$
y'		$-$	||	$-$	
y	m	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	m

A. Không có m. **B.** $m = 0$. **C.** $m = -1$. **D.** $m = 1$.

Lời giải

Chọn D

Từ BBT suy ra TCĐ là $x = -m$, TCN là $y = m$; nên giao điểm TCĐ và TCN là $I(-m;m)$.

YCBT $I(-m;m) \equiv I(-1;1) \Leftrightarrow \begin{cases} -m = -1 \\ m = 1 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1$.

Câu 13. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Định tham số m để giao điểm của đường tiện cận đúng và tiệm cận ngang nằm trên đường thẳng $d: y = x + 5$.

x	$-\infty$		$2m$		$+\infty$
y'		$-$	||	$-$	
y	m	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	m

A. $m = 5$. **B.** $m = -5$.
C. $m = 4$. **D.** $m = -4$.

Lời giải

Chọn B

Từ BBT suy ra TCĐ là $x = 2m$, TCN là $y = m$; nên giao điểm TCĐ và TCN là $I(2m;m)$.

Giao điểm $I(2m;m) \in d: y = x + 5 \Leftrightarrow m = 2m + 5 \Leftrightarrow m = -5$.

Câu 14. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Định tham số m và n để đồ thị hàm số nhận đường thẳng $x = 2$, $y = 2$ lần lượt là TCĐ và TCN thì biểu thức $9m^2 + 6mn + 36n^2$ có giá trị là

x	$-\infty$		$\dfrac{2-2m}{n}$		$+\infty$
y'		$-$	||	$-$	
y	$\dfrac{m}{n}$ ↘		$-\infty$ || $+\infty$	↘	$\dfrac{m}{n}$

A. $\dfrac{28}{3}$. **B.** $\dfrac{2}{3}$. **C.** $\dfrac{1}{3}$. **D.** $\dfrac{7}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Từ BBT suy ra TCĐ là $x=\dfrac{2-2m}{n}$, TCN là $y=\dfrac{m}{n}$;

YCBT: đường thẳng $x=2, y=2$ lần lượt là TCĐ và TCN nên

$$\begin{cases}\dfrac{2-2m}{n}=2\\ \dfrac{m}{n}=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2-2m=2n\\ m=2n\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2m+2n=2\\ m-2n=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=\dfrac{2}{3}\\ n=\dfrac{1}{3}\end{cases}$$

KL: vậy $9m^2+6mn+36n^2=\dfrac{28}{3}$.

Dạng 7: Biết BBT của hàm số $y=f(x)$, tìm tiệm cận đứng, tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=g(x)$, trong bài toán không chứa tham số.

Câu 1. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau :

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
y'		$+$	||	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	1 || $+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

Tính tổng số đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{e^{f^2(x)}-3}$.

A. 4. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Từ bảng biến thiên của hàm số $f(x)$, ta suy ra:

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} f^2(x)=+\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} e^{f^2(x)}=+\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{e^{f^2(x)}-3}=0$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f^2(x)=+\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} e^{f^2(x)}=+\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^{f^2(x)}-3}=0$.

Do đó, đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{e^{f^2(x)}-3}$ có một đường tiệm cận ngang là đường thẳng $y=0$.

Xét phương trình: $e^{f^2(x)}-3=0\ (*)$. Ta có $(*) \Leftrightarrow f^2(x)=\ln 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=\sqrt{\ln 3}\ (1) \\ f(x)=-\sqrt{\ln 3}\ (2) \end{array}\right.$

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $f(x)$, ta có:

- Vì $\sqrt{\ln 3}>1$ nên phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt là $x_1 \in (1;2)$ và $x_2 \in (2;+\infty)$.
- Vì $-\sqrt{\ln 3}<1$ nên phương trình (2) có một nghiệm là $x_3 \in (-\infty;1)$.

Suy ra phương trình $(*)$ có 3 nghiệm phân biệt là x_1, x_2, x_3. Khi đó:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to x_1^+}\left(e^{f^2(x)}-3\right)=0 \\ x \to x_1^+ \Rightarrow 1<f(x)<f(x_1) \Rightarrow e^{f^2(x)}-3<e^{f^2(x_1)}-3=0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \to x_1^+}\frac{1}{e^{f^2(x)}-3}=-\infty.$$

Suy ra đường thẳng $x=x_1$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{e^{f^2(x)}-3}$.

Tương tự, ta tính được: $\lim\limits_{x \to x_2^+}\dfrac{1}{e^{f^2(x)}-3}=+\infty$, $\lim\limits_{x \to x_3^+}\dfrac{1}{e^{f^2(x)}-3}=+\infty$.

Suy ra các đường thẳng $x=x_2, x=x_3$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{e^{f^2(x)}-3}$.

Vậy đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{e^{f^2(x)}-3}$ có 1 đường tiệm cận ngang và 3 đường tiệm cận đứng.

Câu 2. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Hỏi đồ thị hàm số $y=g(x)=\dfrac{x^4-1}{f^2(x)-4f(x)}$ có bao nhiêu tiệm cận đứng?

A. 5. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn D

Xét phương trình $f^2(x)-4f(x)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=0 \\ f(x)=4 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=a,\ a\in(-\infty;-1) \\ x=1\quad (ng\ kép) \\ x=-1\ (ng\ kép) \\ x=b,\ b\in(1;+\infty) \end{array}\right.$.

$\Rightarrow f^2(x)-4f(x)=h(x)(x-a)(x-1)^2(x-b)(x+1)^2;\ h(x)\neq 0$

Do đó

$$y=g(x)=\frac{x^4-1}{f^2(x)-4f(x)}=\frac{(x-1)(x+1)(x^2+1)}{h(x)(x-a)(x-1)^2(x-b)(x+1)^2}$$

$$=\frac{x^2+1}{h(x)(x-a)(x-1)(x-b)(x+1)}.$$

Vậy đồ thị hàm số $y=g(x)=\dfrac{x^4-1}{f^2(x)-4f(x)}$ có 4 tiệm cận đứng.

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$-$	||	$-$	
y	2	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	-1

Đặt $g(x) = \dfrac{2f(x)-3}{f(x)-1}$. Tìm số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = g(x)$

A. 4. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2f(x)-3}{f(x)-1} = \dfrac{2.(-1)-3}{(-1)-1} = \dfrac{5}{2} \Rightarrow$ đường thẳng $y = \dfrac{5}{2}$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = g(x)$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2f(x)-3}{f(x)-1} = \dfrac{2.2-3}{2-1} = 1 \Rightarrow$ đường thẳng $y = 1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = g(x)$.

Dựa vào bảng biến thiên ta có: $f(x) = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = a\ (a<1) \\ x = b\ (b>1)\end{array}\right.$.

$\lim\limits_{x\to a^-}\left[f(x)-1\right] = 0$ và $f(x)-1>0, \forall x<a$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = 1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to a^-}\left[2f(x)-3\right] = 2.1-3 = -1<0$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to a^-} g(x) = \lim\limits_{x\to a^-}\dfrac{2f(x)-3}{f(x)-1} = -\infty \Rightarrow$ đường thẳng $x = a$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = g(x)$.

$\lim\limits_{x\to b^+}\left[f(x)-1\right] = 0$ và $f(x)-1<0$, $\forall x>b$.

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to b^+} f(x) = 1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to b^+}\left[2f(x)-3\right] = 2.1-3 = -1<0$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to b^+} g(x) = \lim\limits_{x\to b^+}\dfrac{2f(x)-3}{f(x)-1} = +\infty \Rightarrow$ đường thẳng $x = b$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = g(x)$.

Vậy đồ thị hàm số $y = g(x)$ có 4 đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang .

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau :

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{e^{2f(x)-1}-1}$ có bao nhiêu tiệm cận ngang và tiệm cận đứng?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Chọn D

Xét phương trình:

$$e^{2f(x)-1}-1=0\Leftrightarrow e^{2f(x)-1}=1\Leftrightarrow 2f(x)-1=0\Leftrightarrow f(x)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=a\ \left(a\in(-\infty;-2)\right)\\ x=b\ \left(b\in(-2;1)\right)\\ x=c\ \left(c\in(1;+\infty)\right)\end{array}\right..$$

$\Rightarrow$ Đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{e^{2f(x)-1}-1}$ có ba tiệm cận đứng là: $x=a;x=b;x=c$.

Từ bảng biến thiên ta có: $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty;\ \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

Ta có: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{e^{2f(x)-1}-1}=\dfrac{1}{e^{\lim\limits_{x\to-\infty}(2f(x)-1)}-1}=-1$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^{2f(x)-1}-1}=\dfrac{1}{e^{\lim\limits_{x\to+\infty}(2f(x)-1)}-1}=0$

$\Rightarrow$ Đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{e^{2f(x)-1}-1}$ có hai tiệm cận ngang là : $y=-1;y=0$.

Vậy đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{e^{2f(x)-1}-1}$ có 5 đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng .

Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên từng khoảng xác định và có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$		1			2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\|$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	-2	$\nearrow$	$+\infty\ \|\ 5$		$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

Tổng số đường tiệm cận đứng và ngang của đồ thị hàm số $y=g(x)=\dfrac{1}{f(x)-5}$ là

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Chọn D

Hàm số $y=g(x)$ xác định khi $f(x)$ xác định và $f(x)\neq 5$ hay $\begin{cases}x\neq 1\\ x\neq a\ (a<1)\\ x\neq b\ (b>2)\end{cases}$.

Lại có: $\lim\limits_{x\to1^+}g(x)=-\infty$ vì $\begin{cases}\lim\limits_{x\to1^+}1=1\\ \lim\limits_{x\to1^+}\left[f(x)-5\right]=0,\ f(x)<5 \text{ khi } x\to1^+\end{cases}$

$$\lim_{x\to a^+} g(x) = +\infty \text{ vì } \begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^+} 1 = 1 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} \left[f(x)-5\right] = 0,\ f(x) > 5 \text{ khi } x \to a^+ \end{cases}$$

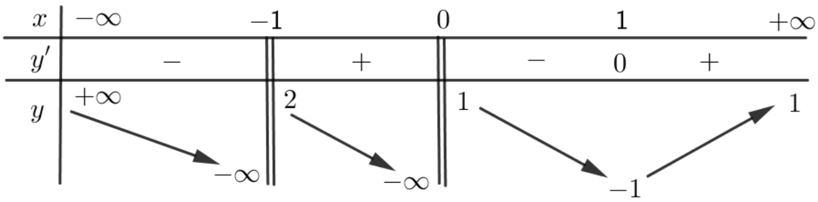
$$\lim_{x\to b^+} g(x) = +\infty \text{ vì } \begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^+} 1 = 1 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} \left[f(x)-5\right] = 0,\ f(x) > 5 \text{ khi } x \to b^+ \end{cases}$$

nên đồ thị hàm số $y = g(x)$ có 3 đường tiệm cận đứng : $x = 1$, $x = a$, $x = b$.

Mặt khác: $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\dfrac{1}{7}$ nên đồ thị hàm số $y = g(x)$ có 2 đường tiệm cận ngang: $y = 0$, $y = -\dfrac{1}{7}$.

Vậy tổng số đường tiệm cận đứng và ngang của đồ thị hàm số $y = g(x)$ là 5.

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau :



Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2}{3f(x)-2}$ là

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Chọn D

Dựa vào bảng biến thiên ta suy ra: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

Do đó: $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[3f(x)-2\right] = 1$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \left[3f(x)-2\right] = +\infty$

Suy ra: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{3f(x)-2} = 2$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2}{3f(x)-2} = 0$

Hay: Đồ thị hàm số $y = \dfrac{2}{3f(x)-2}$ có 2 tiệm cận ngang là $y = 0$, $y = 2$.

Dựa vào bảng biến thiên suy ra : Phương trình $3f(x) - 2 = 0$ có 4 nghiệm thực phân biệt.

Giả sử 4 nghiệm đó là $x_1 \in (-\infty;-1)$, $x_2 \in (-1;0)$, $x_3 \in (0;1)$, $x_4 \in (1;+\infty)$.

Dựa vào bảng biến thiên suy ra:

$\lim\limits_{x\to x_1^+} f(x) = 0$, $f(x) < \dfrac{2}{3} \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_1^+} \dfrac{2}{3f(x)-2} = -\infty$.

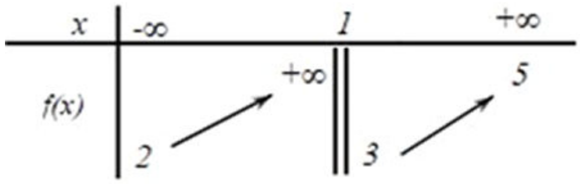
Hay: $x = x_1$ là 1 tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2}{3f(x)-2}$.

Tương tự, ta có: $\lim\limits_{x\to x_2^+} \dfrac{2}{3f(x)-2} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to x_3^+} \dfrac{2}{3f(x)-2} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to x_4^+} \dfrac{2}{3f(x)-2} = +\infty$

Suy ra đồ thị hàm số $y = \dfrac{2}{3f(x)-2}$ có 4 tiệm cận đứng là $x = x_1$, $x = x_2$, $x = x_3$, $x = x_4$

Vậy đồ thị hàm số $y = \dfrac{2}{3f(x)-2}$ có tất cả 6 tiệm cận đứng và tiệm cận ngang .

Câu 7. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên sau:



Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{f(x)}{f(x)-2}$ bằng

A. 4 . **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

Đặt $g(x)=\dfrac{f(x)}{f(x)-2}$.

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$ (với mọi)

Ta có:

+/ TCĐ : Do $f(x)>2\ \forall\ x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}\Rightarrow$ đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng.

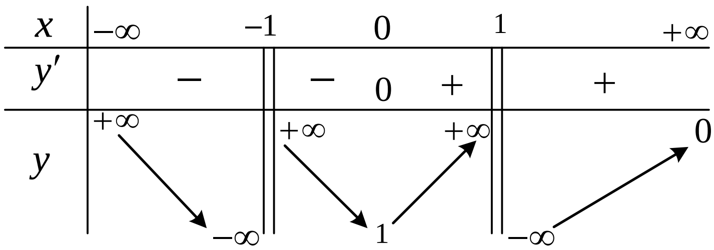
+/ TCN : Xét

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{f(x)-2}=+\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{f(x)-2}=\dfrac{5}{3}$

$\Rightarrow$ đồ thị hàm số có một tiệm cận ngang là đường thẳng $y=\dfrac{5}{3}$.

Vậy tổng số TCĐ và TCN của đồ thị hàm số bằng 1 .

Câu 8. Hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$, có đạo hàm trên $\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$ và có bảng biến thiên như sau :



Đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{f(x)-1}$ có bao nhiêu tiệm cận (tiệm cận đứng và tiệm cận ngang)?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Chọn C

Nhìn vào bảng biến thiên ta có

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{f(x)-1}=-1$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty\Rightarrow\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{f(x)-1}=0$.

$\Rightarrow$ đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{f(x)-1}$ có hai tiệm cận ngang là hai đường thẳng $y=-1$; $y=0$.

$f(x)-1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=a;a<-1\\x=1\end{array}\right.$.

$\lim\limits_{x\to0} f(x)=1\Rightarrow\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{f(x)-1}=+\infty$. Vì $f(x)>1$ khi $x\to0$.

Tương tự , $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{1}{f(x)-1}=-\infty$ nên đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{f(x)-1}$ có hai tiệm cận đứng là hai đường thẳng $x=a$; $x=1$.

Vậy hàm số $y=\dfrac{1}{f(x)-1}$ có 4 đường tiệm cận .

Câu 9. Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau :

x	$-\infty$		0		$\frac{3}{5}$		1		$\frac{5}{3}$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0		$-$		0		$+$		
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Hỏi đồ thị $y=\dfrac{f^2(x)\sqrt{x^2+x}}{\left[f^2(x)-2f(x)\right]\left(2x^5+x^4-10x^3-5x^2+8x+4\right)}$ có bao nhiêu tiệm cận đứng và ngang?

A. 7. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Dựa vào bảng biến thiên, ta có: $f(x)=ax^2(x-1)(x-2)$

Đặt

$$g(x)=\frac{f^2(x)\sqrt{x^2+x}}{\left[f^2(x)-2f(x)\right]\left(2x^5+x^4-10x^3-5x^2+8x+4\right)}=\frac{f(x).\sqrt{x^2+x}}{\left[f(x)-2\right]\left(x^2-4\right)\left(x^2-1\right)(2x+1)}$$

$$==\frac{ax^2(x-1)(x-2)\sqrt{x^2+x}}{\left[f(x)-2\right]\left(x^2-4\right)\left(x^2-1\right)(2x+1)}=\frac{ax^2\sqrt{x^2+x}}{\left[f(x)-2\right](x+2)(x+1)(2x+1)}$$

Dựa vào bảng biến thiên suy ra phương trình $f(x)=2$ có 2 nghiệm $\left[\begin{array}{l}x=a\\x=b\end{array}\right.$ trong đó $\begin{cases}a<0\\b>2\end{cases}$

Với điều kiện $x^2+x\geq 0$ thì phương trình $\left[f(x)-2\right](x+2)(x+1)(2x+1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\\x=-1\\x=a\\x=b\end{array}\right.$

Lại có $\lim\limits_{x\to-2}g(x)=\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{ax^2\sqrt{x^2+x}}{\left[f(x)-2\right](x+2)(x+1)(2x+1)}=\infty$, suy ra có tiệm cận đứng $x=-2$

$\lim\limits_{x\to-1}g(x)=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{ax^2\sqrt{x^2+x}}{\left[f(x)-2\right](x+2)(x+1)(2x+1)}=\infty$, suy ra có tiệm cận đứng $x=-1$

$\lim\limits_{x\to a}g(x)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{ax^2\sqrt{x^2+x}}{\left[f(x)-2\right](x+2)(x+1)(2x+1)}=\infty$, suy ra có tiệm cận đứng $x=a$

$\lim\limits_{x\to b}g(x)=\lim\limits_{x\to b}\dfrac{ax^2\sqrt{x^2+x}}{\left[f(x)-2\right](x+2)(x+1)(2x+1)}=\infty$, suy ra có tiệm cận đứng $x=b$

$\Rightarrow$ Hàm số $g(x)$ có 4 tiệm cận đứng.

Mặc khác, bậc tử của $g(x)$ nhỏ hơn bậc mẫu:

Ta suy ra: $\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{ax^2\sqrt{x^2+x}}{\left[f(x)-2\right](x+2)(x+1)(2x+1)}=0$

$\Rightarrow$ Hàm số $g(x)$ có 1 tiệm cận ngang $y=0$

Câu 10. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau :

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	5	$\searrow$	$-\infty$

Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=g(x)=\dfrac{1}{f\left(x^3+2x\right)-5}$ là

A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C

+ Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{f\left(x^3+2x\right)-5}=0$; $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{f\left(x^3+2x\right)-5}=0$.

Đồ thị hàm số $y=g(x)$ có 1 tiệm cận ngang là đường thẳng $y=0$.

+ Đặt $u=x^3+2x$, khi đó $f\left(x^3+2x\right)-5=0$ trở thành:

$$f(u)-5=0 \Leftrightarrow f(u)=5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=a\ (a<-2) \\ u=1 \end{array}\right..$$

+ Với $u=a \Rightarrow x^3+2x=a$

Xét hàm số $h(x)=x^3+2x$ có $h'(x)=3x^2+2>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$ nên $h(x)$ đồng biến trên $(-\infty;+\infty)$, mà phương trình bậc ba có ít nhất 1 nghiệm nên phương trình $x^3+2x=a$ có nghiệm duy nhất giả sử là x_1.

+ Với $u=1 \Rightarrow x^3+2x=1$ do chứng minh trên nên phương trình cũng có 1 nghiệm duy nhất giả sử là $x_2\ (x_2\neq x_1)$.

+ Do x_1, x_2 không là nghiệm của tử số của $g(x)$ nên giới hạn của $g(x)$ khi x dần tới x_1 và giới hạn của $g(x)$ khi x dần tới x_2 đều là vô cực.

Suy ra đồ thị hàm số $y=g(x)$ có 2 tiệm cận đứng là $x=x_1$ và $x=x_2$.

+ Vậy, tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=g(x)$ là 3.

Câu 11. Cho hàm số đa thức bậc bốn $y=f(x)$ có BBT như sau:

x	$-\infty$		-3		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-3	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{(x-1)\sqrt{x+3}}{f^2(x)+3f(x)}$ là :

A. 4 **B.** 5 **C.** 6 **D.** 7

Lời giải

Chọn C

Xét PT $f^2(x)+3f(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=0 \\ f(x)=-3 \end{array}\right.$ trong đó:

$$f(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=x_1 \in (1;2) \quad (ng\ kép) \\ x=x_2 \in (2;+\infty) \end{array}\right.$$

$$f(x)=-3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \quad (ng\ kép) \\ x=x_3 \in (-\infty;-3) \quad (ko\,t/m\ do\ x \geq -3) \\ x=x_4 \in (2;+\infty) \end{array}\right.$$

Kiểm tra các giới hạn ta thấy đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{(x-1)\sqrt{x+3}}{f^2(x)+3f(x)}$ có 5 tiệm cận đứng là $x=0$; $x=1$; $x=x_1$; $x=x_2$; $x=x_4$

Câu 1. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		4		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	-5	$\nearrow$	$+\infty$

Đồ thị hàm số $y=g(x)=\dfrac{f^2(x)+2f(x)+1}{f^2(x)-9}$ có tổng số tất cả các đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang là

A. 4 **B.** 5 **C.** 6 **D.** 7

Lời giải

Chọn C

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1+\dfrac{2}{f(x)}+\dfrac{1}{f(x)}}{1-\dfrac{9}{f^2(x)}}=1$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1+\dfrac{2}{f(x)}+\dfrac{1}{f(x)}}{1-\dfrac{9}{f^2(x)}}=1$.

Suy ra đường thẳng $y=1$ là tiệm cận ngang của đồ thị $y=g(x)$.

$y=g(x)=\dfrac{(f(x)+1)^2}{(f(x)-3)(f(x)+3)}$.

Dựa vào BBT ta có $f(x)=3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=a<-1\\x=b>4\end{array}\right.$.

Với $x>0\Rightarrow f(x)<3$, $\lim\limits_{x\to0^+} g(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{(f(x)+1)^2}{(f(x)-3)(f(x)+3)}=-\infty$ suy ra đường thẳng $x=0$ là tiệm cận đứng.

Với $x>a\Rightarrow f(x)<3$, $\lim\limits_{x\to a^+} g(x)=\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{(f(x)+1)^2}{(f(x)-3)(f(x)+3)}=-\infty$ suy ra đường thẳng $x=a$ là tiệm cận đứng.

Với $x>b\Rightarrow f(x)>3$, $\lim\limits_{x\to b^+} g(x)=\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{(f(x)+1)^2}{(f(x)-3)(f(x)+3)}=+\infty$ suy ra đường thẳng $x=b$ là tiệm cận đứng.

Dựa vào BBT ta có $f(x)=-3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=c,0<c<4\\x=d,d>4\end{array}\right.$ khi đó

Với $x>c\Rightarrow f(x)<-3$, $\lim\limits_{x\to c^+} g(x)=\lim\limits_{x\to c^+}\dfrac{(f(x)+1)^2}{(f(x)-3)(f(x)+3)}=+\infty$ suy ra đường thẳng $x=c$ là tiệm cận đứng.

Với $x>d\Rightarrow f(x)>-3$, $\lim\limits_{x\to c^+} g(x)=\lim\limits_{x\to c^+}\dfrac{(f(x)+1)^2}{(f(x)-3)(f(x)+3)}=+\infty$ suy ra đường thẳng $x=d$ là tiệm cận đứng.

Vậy tổng số các đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị $y=g(x)$ là 6.

Dạng 8: Biết BBT của hàm số $y=f\left(x\right)$, tìm tiệm cận đứng, tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=g\left(x\right)$, trong bài toán tham số.

Câu 1. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	5	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	2

Số giá trị $m\in\mathbb{Z}$, $m\in\left[-10;10\right]$ để đồ thị hàm số $y=g\left(x\right)=\dfrac{f\left(x\right)}{f\left(x\right)-m+1}$ có 4 đường tiệm cận là:

A. 5. **B.** 4. **C.** 10. **D.** 21.

Lời giải

Chọn A

+ Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty} g\left(x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f\left(x\right)}{f\left(x\right)-m+1}=\dfrac{5}{6-m}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g\left(x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f\left(x\right)}{f\left(x\right)-m+1}=\dfrac{2}{3-m}$

- Xét với $m=6$ thì đồ thị hàm số $y=g(x)$ nhận đường thẳng có phương trình $y=-\dfrac{2}{3}$ là TCN

Khi đó phương trình: $f\left(x\right)=m-1=5$ có 2 nghiệm phân biệt $\Rightarrow$ ĐTHS có 2 TCĐ $\Rightarrow$ ĐTHS có 3 đường tiệm cận $\Rightarrow m=6$ (không thỏa mãn).

- Xét $m=3\Rightarrow$ ĐTHS $y=g\left(x\right)$ nhận đường thẳng có phương trình $y=\dfrac{5}{3}$ là TCN

Khi đó phương trình: $f\left(x\right)=m-1=2$ có 1 nghiệm $\Rightarrow$ ĐTHS có 1 TCĐ $\Rightarrow$ ĐTHS có 2 đường tiệm cận $\Rightarrow m=3$ (không thỏa mãn).

- Với $m\neq3$ và $m\neq6$ thì đồ thị hàm số $y=g\left(x\right)$ nhận 2 đường thẳng có phương trình $y=\dfrac{5}{6-m}$; $y=\dfrac{2}{3-m}$ là TCN

Xét phương trình: $f\left(x\right)-m+1=0\Leftrightarrow f\left(x\right)=m-1$ $(*)$

Để ĐTHS $y=g\left(x\right)$ có 4 đường tiệm cận thì $(*)$ có 2 nghiệm phân biệt

$\Rightarrow m\in\left(2;3\right)\cup\left\{4\right\}\cup\left[6;+\infty\right)$

Do ĐK nên $m\in\left(2;3\right)\cup\left\{4\right\}\cup\left(6;+\infty\right)$

Vậy $m\in\left(2;3\right)\cup\left\{4\right\}\cup\left(6;+\infty\right)$ do $m\in\mathbb{Z}$, $m\in\left[-10;10\right]$ nên $m\in\left\{4;7;8;9;10\right\}$

Câu 2. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(x)$	1	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ 3	$\nearrow$	6

Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của m để đồ thị hàm số $y=g(x)=\dfrac{f^2(x)}{f(x)-m}$ có đúng 3 tiệm cận đứng.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Ta có:

$\lim\limits_{x\to 2^-} g(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{f^2(x)}{f(x)-m}=+\infty$ nên $\forall m$, đồ thị hàm số $y=g(x)$ luôn có một tiệm cận đứng $x=2$.

Mặt khác, từ bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$ thì phương trình $f(x)-m=0$ tối đa 2 nghiệm. Vậy để đồ thị hàm số $y=g(x)$ có đúng 3 tiệm cận đứng thì điều kiện cần là phương trình $f(x)=m$ có đúng 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 khác 2 $\Leftrightarrow 3<m<6$.

Khi đó $\lim\limits_{x\to x_1^+} g(x)=\lim\limits_{x\to x_1^+}\dfrac{f^2(x)}{f(x)-m}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to x_2^+} g(x)=\lim\limits_{x\to x_2^+}\dfrac{f^2(x)}{f(x)-m}=+\infty$ nên đồ thị hàm số $y=g(x)$ có 2 tiệm cận đứng là đường thẳng $x=x_1$ và $x=x_2$.

Vậy với $3<m<6$ thì đồ thị hàm số $y=g(x)$ có đúng 3 tiệm cận đứng. Do m nguyên nên có 2 giá trị của m thỏa mãn bài toán là $m=4$ và $m=5$.

Câu 3. Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{ax^2+bx+c}{dx+e}$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Có bao nhiêu số m nguyên thuộc khoảng $(-10;10)$ để đồ thị hàm số $y=g(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}}{f(x)-m}$ có đúng 3 đường tiệm cận?

A. 15. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 14.

Lời giải

Chọn C

- Ta có $\sqrt{x+1}$ có nghĩa khi $x\geq -1$.
- Từ bảng biến thiên suy ra $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0 \Rightarrow$ đồ thị hàm số $y=g(x)$ luôn có duy nhất 1 đường tiệm cận ngang là $y=0$, $\forall m\in\mathbb{R}$.
- $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=0$
- Khi đó, để đồ thị hàm số $y=g(x)$ có đúng 3 đường tiệm cận thì nó phải có 2 đường tiệm cận đứng

  $\Rightarrow$ phương trình $f(x)=m$ phải có 2 nghiệm phân biệt $\in[-1;+\infty)$

Từ bảng biến thiên suy ra $m\in(3;+\infty)\cup\{-1\}\xrightarrow{m\in\mathbb{Z},\, m\in[-10;10]} m\in\{-1;4;5;6;7;8;9\}$.

Vậy, có tất cả 7 giá trị của m thỏa mãn.

Câu 4. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ và có bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	||	$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x^3+2x^2+2x}}{\left(x^2+1\right)\left[f(x)-m\right]}$ có đúng ba đường tiệm cận.

A. $m>2$. **B.** không tồn tại m.

C. $m\le 2$. **D.** $m<2$.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện xác định của hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x^3+2x^2+2x}}{\left(x^2+1\right)\left[f(x)-m\right]}$ là: $\begin{cases} x>0 \\ f(x)\ne m \end{cases}$.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} y=0 \Rightarrow$ đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x^3+2x^2+2x}}{\left(x^2+1\right)\left[f(x)-m\right]}$ luôn có tiệm cận ngang $y=0$.

Để đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x^3+2x^2+2x}}{\left(x^2+1\right)\left[f(x)-m\right]}$ có đúng ba đường tiệm cận thì đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x^3+2x^2+2x}}{\left(x^2+1\right)\left[f(x)-m\right]}$ có đúng hai tiệm cận đứng.

Suy ra phương trình $f(x)-m=0$ có đúng hai nghiệm phân biệt trên $(0;+\infty)$.

Từ bảng biến thiên suy ra $m<2$.

Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$, liên tục trên từng khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-3		-2		-1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

Có bao nhiêu giá trị m nguyên, khác 0 để đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{f(x)-m}{f(x)+m}$ có tiệm cận ngang mà không có tiệm cận đứng

A. 2. **B.** 3. **C.** 8. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

- TXĐ: $D=\left\{x\in\mathbb{R}\mid f(x)\ne -m\right\}$

- Với $m\ne 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=1$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y=1$, và nghiệm x_0 (nếu có) của phương trình $f(x)=-m$ không thể là nghiệm của phương trình $f(x)=m$.

- Do đó đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng khi phương trình $f(x)=-m$ vô nghiệm $\Leftrightarrow$ $-2<-m<2 \Leftrightarrow -2<m<2$. Ta có $m=\pm 1$.

Vậy có 2 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán

Câu 6. Hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định trên $\mathbb{R}$ có bảng biến thiên như hình vẽ sau

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Với giá trị nào của m thì đồ thị hàm số $y=g\left(x\right)=\dfrac{1}{\left(f\left(x\right)\right)^2-m}$ có đúng 2 tiệm cận đứng.

Chọn đáp án đúng

A. $0<m<1$. **B.** $0<m\le 1$. **C.** $m=0$. **D.** $m=1$.

Lời giải

Chọn A

Xét phương trình $\left(f\left(x\right)\right)^2-m=0\Leftrightarrow\left(f\left(x\right)\right)^2=m\quad(*)$

TH1: nếu $m<0$ thì phương trình $(*)$ vô nghiệm nên đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng.

TH2: nếu $m=0$ thì phương trình $(*)\Leftrightarrow f\left(x\right)=0$ vô nghiệm. Nên đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng.

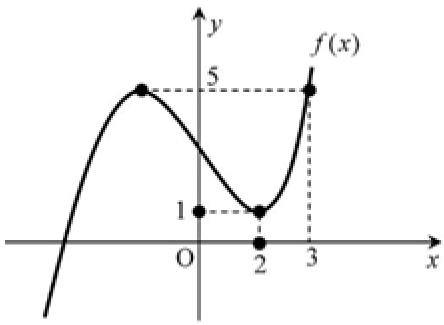
TH3: nếu m > 0 thì phương trình $(*)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll} f(x)=\sqrt{m} & (1)\\ f(x)=-\sqrt{m} & (2)\end{array}\right.$

Với (1) : khi $0<m<1$ thì (1) có 2 nghiệm; $m=1$ thì (1) có nghiệm duy nhất

Với (2) : do $m>0$ nên $-\sqrt{m}<0\Rightarrow f\left(x\right)=-\sqrt{m}$ vô nghiệm.

Vậy để đồ thị hàm số có 2 tiệm cận đứng thì $0<m<1$. **Chọn đáp án A**

Câu 7. Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Gọi S là tập hợp chứa tất cả các giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{m-x}}{f\left(x\right)-m}$ có tất cả 4 đường tiệm cận. Số phần tử của tập S là



A. 3. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D.

Với điều kiện $x\le m$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}y=0$ thì đồ thị hàm số có 1 tiệm cận ngang $y=0$.

Để đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{m-x}}{f\left(x\right)-m}$ có 4 đường tiệm cận thì đồ thị phải có 3 đường tiệm cận đứng, suy ra phương trình $f\left(x\right)-m=0$ có 3 nghiệm phân biệt x thỏa mãn $x\le m$.

Từ đồ thị, phương trình $f\left(x\right)=m$ có 3 nghiệm khi $1<m<5$. Do $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m\in\left\{2;3;4\right\}$.

+ Trường hợp 1: Với $m=2$: Từ đồ thị, phương trình $f\left(x\right)-2=0$ có 3 nghiệm $x_1<x_2<2<x_3$, suy ra $m=2$ không thỏa mãn.

+ Trường hợp 2: Với $m\in\left\{3;4\right\}$: Từ đồ thị, phương trình $f\left(x\right)-m=0$ có 3 nghiệm $x_1<x_2<x_3<3$, suy ra $m=3$, $m=4$ thỏa mãn.

Vậy tập S gồm 2 phần tử.

Câu 8. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên mỗi khoảng $\left(-\infty;1\right)$, $\left(1;+\infty\right)$ và có bảng biến thiên như hình vẽ dưới.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\|$	$+$	
$f(x)$	2	$\nearrow$	$+\infty \;\|\; -\infty$	$\nearrow$	2

Tìm tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số $y=g\left(x\right)=\dfrac{f\left(x\right)+m}{f^2\left(x\right)-4m^2}$ có duy nhất một tiệm cận đứng và không có tiệm cận ngang.

A. $m=2$. **B.** $\left[\begin{array}{l}m=2\\m=-2\end{array}\right.$. **C.** $m=1$. **D.** $\left[\begin{array}{l}m=1\\m=-1\end{array}\right.$.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $y=g\left(x\right)=\dfrac{f\left(x\right)+m}{f^2\left(x\right)-4m^2}$.

Điều kiện cần:

Nếu $m\ne\pm1$ thì $\lim\limits_{x\to\pm\infty}g\left(x\right)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f\left(x\right)+m}{f^2\left(x\right)-4m^2}=\dfrac{2+m}{4-4m^2}$

$\Rightarrow$ đồ thị hàm số $y=g\left(x\right)=\dfrac{f\left(x\right)+m}{f^2\left(x\right)-4m^2}$ có tiệm cận ngang là đường thẳng $y=\dfrac{2+m}{4-4m^2}$.

Do đó, điều kiện cần để đồ thị hàm số $y=g\left(x\right)=\dfrac{f\left(x\right)+m}{f^2\left(x\right)-4m^2}$ không có tiệm cận ngang là $\left[\begin{array}{l}m=1\\m=-1\end{array}\right.$.

Điều kiện đủ: Phương trình $f^2\left(x\right)-4m^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}f\left(x\right)=2m & \left(1\right)\\f\left(x\right)=-2m & \left(2\right)\end{array}\right.$

+) Với $m=1$, phương trình $\left(1\right)$ vô nghiệm, phương trình $\left(2\right)$ có nghiệm duy nhất $x=x_0>1$.

$\lim\limits_{x\to x_0}g\left(x\right)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f\left(x\right)+m}{f^2\left(x\right)-4m^2}=+\infty\left(-\infty\right)$ (do $f\left(x_0\right)+m=-m=-1\ne0$)

$\Rightarrow$ đồ thị hàm số $y=g\left(x\right)=\dfrac{f\left(x\right)+m}{f^2\left(x\right)-4m^2}$ có đúng 1 tiệm cận đứng là đường thẳng $x=x_0$.

+) Với $m=-1$, phương trình $\left(2\right)$ vô nghiệm, phương trình $\left(1\right)$ có nghiệm duy nhất $x=x_0>1$.

$\lim\limits_{x\to x_0}g\left(x\right)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f\left(x\right)+m}{f^2\left(x\right)-4m^2}=+\infty\left(-\infty\right)$ (do $f\left(x_0\right)+m=-m=1\ne0$)

$\Rightarrow$ đồ thị hàm số $y=g\left(x\right)=\dfrac{f\left(x\right)+m}{f^2\left(x\right)-4m^2}$ có đúng 1 tiệm cận đứng là đường thẳng $x=x_0$.

Vậy $\left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-1 \end{array}\right.$ thỏa mãn bài toán.

Câu 9. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Có bao nhiêu giá trị nguyên thuộc $\left[-10;10\right]$ của m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{3}{f\left(x^2\right)-m}$ có 4 tiệm cận đứng.

A. 5. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{3}{f\left(x^2\right)-m}$ có 4 tiệm cận đứng khi phương trình $f\left(x^2\right)=m$ có 4 nghiệm x phân biệt.

Đặt $t=x^2$, $t\ge 0$. Từ bảng biến thiên của hàm số $y=f\left(x\right)$ ta thấy, phương trình $f\left(t\right)=m$ có 2 nghiệm dương t phân biệt khi $-1<m<3$.

Với mỗi giá trị $t>0$ cho ta 2 giá trị đối nhau của x, nên với điều kiện $-1<m<3$, phương trình $f\left(x^2\right)=m$ có 4 nghiệm x phân biệt.

Vậy đồ thị hàm số $y=\dfrac{3}{f\left(x^2\right)-m}$ có 4 tiệm cận đứng khi $-1<m<3$.

Vì $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\left\{0;1;2\right\}$.

Câu 10. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$+\infty \Vert$	$\nearrow$	3	$\searrow$	

Số giá trị nguyên của m để đồ thị hàm số $y=g\left(x\right)=\dfrac{1}{f\left(x\right)-m}$ có đúng 5 tiệm cận là

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải

Chọn C

Xét PT $f\left(x\right)-m=0$ có nhiều nhất là 3 nghiệm khi $1<m<3$ và $y=g\left(x\right)$ có tử số bằng 1 luôn khác 0 với mọi giá trị của m nên đồ thị $y=g\left(x\right)$ có nhiều nhất là 3 TCĐ

Có $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\dfrac{1}{1-m}$ nên đồ thị $y=g(x)$ có 2 TCN nếu $m\neq 1$, 1 TCN nếu $m=1$.

Vậy đồ thị $y=g(x)$ có đúng 5 TC khi $1<m<3$. Kết hợp $m\in Z$ được $m=2$. Suy ra có 1 giá trị nguyên của m tmđb.

Phần 3: Biết giới hạn của hàm số $y=f(x)$ tại một điểm hoặc tại vô cực.

Dạng 9: Biết giới hạn của hàm số $y=f(x)$ tại một điểm hoặc tại vô cực, tìm tiệm cận đứng, tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=f(x)$, trong bài toán không chứa tham số.

Câu 1. Cho hàm số $y=f(x)$ có $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Đồ thị hàm số đã cho có đúng một tiệm cận ngang.

B. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang phân biệt.

C. Đồ thị hàm số đã cho có đúng một tiệm cận ngang là đường thẳng $x=2$.

D. Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận ngang

Lời giải

Chọn B

Áp dụng định nghĩa về tiệm cận ngang ta suy ra được A là đáp án đúng.

Câu 2. Cho hàm số $y=f(x)$ có tập xác định là $D=(0;+\infty)$ và $\lim\limits_{x\to0^+} y=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} y=+\infty$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Đồ thị hàm số $y=f(x)$ không có tiệm cận đứng và có tiệm cận ngang.

B. Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có tiệm cận đứng và có tiệm cận ngang.

C. Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có tiệm cận đứng và không có tiệm cận ngang.

D. Đồ thị hàm số $y=f(x)$ không có tiệm cận đứng và không có tiệm cận ngang.

Lời giải

Chọn C

Do $x=0^+$ là một đầu mút của tập xác định và $\lim\limits_{x\to0^+} y=-\infty$ nên đường thẳng $x=0$ (hay là trục Oy) là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Với $D=(0;+\infty)$, ta kiểm tra được giới hạn của hàm số tại $+\infty$ (không có giới hạn tại $-\infty$). Theo giả thiết, $\lim\limits_{x\to+\infty} y=+\infty$ nên đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

Câu 3. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong (C) và các giới hạn $\lim\limits_{x\to2^+} f(x)=1$; $\lim\limits_{x\to2^-} f(x)=1$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$. Hỏi mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Đường thẳng $y=2$ là tiệm cận ngang của (C).

B. Đường thẳng $y=1$ là tiệm cận ngang của (C).

C. Đường thẳng $x=2$ là tiệm cận ngang của (C).

D. Đường thẳng $x=2$ là tiệm cận đứng của (C).

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2\\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2\end{cases} \Rightarrow$ đường thẳng $y=2$ là tiệm cận ngang của (C).

Câu 4. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$. Tổng số đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A

Do hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên đồ thị hàm số không có đường tiệm cận đứng.

Do $\lim\limits_{x\to-\infty} f\left(x\right)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right)=1$ nên $y=0$, $y=1$ là các đường tiệm cận ngang.

Câu 5. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right)=1$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} f\left(x\right)=-1$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là $x=1$ và $x=-1$.
B. Đồ thị hàm số đã cho có đúng một tiệm cận ngang.
C. Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận ngang.
D. Đồ thị hàm số đã cho có hai đường tiệm cận ngang là $y=1$ và $y=-1$.

Lời giải

Chọn D

Hàm số $y=f\left(x\right)$ có $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right)=1$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} f\left(x\right)=-1$ suy ra đồ thị hàm số đã cho có hai đường tiệm cận ngang là $y=1$ và $y=-1$.

Câu 6. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục, không âm trên R và thỏa mãn $\lim\limits_{x\to-\infty} f\left(x\right)=1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right)=2$.

Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2\sqrt{x^2+1}.f\left(x\right)+1}{x+3}$ là:

A. 3. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 1

Lời giải

Chọn A

$$\lim_{x\to-\infty} y=\lim_{x\to-\infty}\frac{2\sqrt{x^2+1}.f\left(x\right)+1}{x+3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-2\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}.f\left(x\right)+\frac{1}{x}}{1+\frac{3}{x}}=-2\ \Rightarrow y=-2 \text{ là tiệm cận ngang}$$

$$\lim_{x\to+\infty} y=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\sqrt{x^2+1}.f\left(x\right)+1}{x+3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}.f\left(x\right)+\frac{1}{x}}{1+\frac{3}{x}}=4\ \Rightarrow y=4 \text{ là tiệm cận ngang}$$

$$\lim_{x\to(-3)^+} y=\lim_{x\to(-3)^+}\frac{2\sqrt{x^2+1}.f\left(x\right)+1}{x+3}=\lim_{x\to(-3)^+}\frac{2\sqrt{10}.f\left(-3\right)+1}{x+3}=\pm\infty$$

$$\lim_{x\to(-3)^-} y=\lim_{x\to(-3)^-}\frac{2\sqrt{x^2+1}.f\left(x\right)+1}{x+3}=\lim_{x\to(-3)^-}\frac{2\sqrt{10}.f\left(-3\right)+1}{x+3}=\pm\infty$$

$\Rightarrow x=-3$ là tiệm cận đứng.

Câu 7. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$; $f(x)>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} f\left(x\right)=2$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right)=+\infty$

Số tiệm cận của hàm số $g\left(x\right)=\dfrac{1}{f\left(x\right)}+\dfrac{2019}{x^2+1}$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Ta có: + $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f\left(x\right)>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$

+ $x^2+1>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$

→ Tập xác định của hàm số $g\left(x\right)$: $D=\mathbb{R}$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{f\left(x\right)}+\frac{2019}{x^2+1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{f\left(x\right)}+\lim_{x\to+\infty}\frac{2019}{x^2+1}=0\ \Rightarrow\ y=0 \text{ là tiệm cận ngang}$$

. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{f(x)}+\dfrac{2019}{x^2+1}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{f(x)}+\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2019}{x^2+1}=\dfrac{1}{2}+0 \Rightarrow y=\dfrac{1}{2}$ là tiệm cận ngang

Vậy có 2 đường tiệm cận.

Câu 8. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2$, $\lim\limits_{x\to\left(\frac{3}{2}\right)^+} f(x)=1$ và hàm số $y=g(x)=\dfrac{5f(x)-1}{\left[f^2(x)+1\right](2x-3)}$. Trong các khẳng định sau về đồ thị hàm số $y=g(x)$, khẳng định nào đúng:

A. Đồ thị hàm số $y=g(x)$ không có tiệm cận ngang và tiệm cận đứng.

B. Đồ thị hàm số $y=g(x)$ có tiệm cận ngang $y=2$ và không có tiệm cận đứng.

C. Đồ thị hàm số $y=g(x)$ có tiệm cận ngang $y=0$ và tiệm cận đứng $x=\dfrac{3}{2}$.

D. Đồ thị hàm số $y=g(x)$ có tiệm cận ngang $y=2$ và tiệm cận đứng $x=\dfrac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có :

+) $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5f(x)-1}{\left[f^2(x)+1\right](2x-3)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\dfrac{5f(x)-1}{\left[f^2(x)+1\right]}}{2x-3}=0$ suy ra đường thẳng $y=0$ là tiệm cận ngang của đồ thị $y=g(x)$.

+) $\lim\limits_{x\to\left(\frac{3}{2}\right)^+} g(x)=\lim\limits_{x\to\left(\frac{3}{2}\right)^+}\dfrac{5f(x)-1}{\left[f^2(x)+1\right](2x-3)}=\lim\limits_{x\to\left(\frac{3}{2}\right)^+}\dfrac{\dfrac{5f(x)-1}{\left[f^2(x)+1\right]}}{2x-3}=+\infty$ suy ra đường thẳng $x=\dfrac{3}{2}$ là tiệm cận đứng của đồ thị $y=g(x)$.

Câu 9. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $(1;+\infty)$ và thỏa mãn $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$.

Xét hàm số $y=g(x)=\dfrac{\left[f(x)+1\right](2x+1)}{x-1}-3$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Đường thẳng $y=-1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=g(x)$.

B. Đường thẳng $y=5$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=g(x)$.

C. Đường thẳng $y=2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=g(x)$.

D. Đường thẳng $y=3$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=g(x)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có

$$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left\{\dfrac{\left[f(x)+1\right](2x+1)}{x-1}-3\right\}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{f(x)+1}{\dfrac{x-1}{2x+1}}-3\right)$$

$$=\dfrac{\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)+1\right]}{\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-1}{2x+1}}-\lim\limits_{x\to+\infty}3=\dfrac{2+1}{\dfrac{1}{2}}-3=3$$

Vậy đường thẳng $y=3$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=g(x)$.

Câu 10. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$. Phương trình $f(x)=\frac{1}{2}$ có ba nghiệm phân biệt. Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\frac{1}{2f(x)-1}$ là:

A. 4. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

Đặt $h(x)=\frac{1}{2f(x)-1}$.

*) Tiệm cận ngang:

Ta có: $\lim_{x\to+\infty} h(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2f(x)-1}=0$.

$\lim_{x\to-\infty} h(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{2f(x)-1}=0$.

Suy ra đồ thị hàm số có một đường tiệm cận ngang $y=0$.

*) Tiệm cận đứng:

Xét phương trình: $2f(x)-1=0 \Leftrightarrow f(x)=\frac{1}{2}$.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trình $f(x)=\frac{1}{2}$ có ba nghiệm phân biệt a, b, c thỏa mãn $a<b<c$.

Đồng thời $\lim_{x\to a^+} h(x)=\lim_{x\to b^-} h(x)=\lim_{x\to c^+} h(x)=+\infty$ nên đồ thị hàm số $y=h(x)$ có ba đường tiệm cận đứng là $x=a$, $x=b$ và $x=c$.

Vậy tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=h(x)$ là bốn.

Câu 11. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên khoảng $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$ và có $\lim_{x\to1^+} f(x)=+\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)=3$. Xét hàm số $g(x)=\frac{3f(x)-1}{2f^2(x)-f(x)}$.

Khẳng định nào dưới đây là khẳng định đúng?

A. Đồ thị hàm số $y=g(x)$ có hai tiệm cận đứng là đường thẳng $x=0; x=\frac{1}{2}$.

B. Đồ thị hàm số $y=g(x)$ có tiệm cận ngang là đường thẳng $y=\frac{8}{15}$.

C. Đồ thị hàm số $y=g(x)$ có tiệm cận ngang là đường thẳng $y=3$.

D. Đồ thị hàm số $y=g(x)$ có đúng một tiệm cận đứng là đường thẳng $x=1$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $g(x)=\frac{3f(x)-1}{2f^2(x)-f(x)}=\frac{1}{f(x)}+\frac{1}{2f(x)-1}$

$\lim_{x\to1^+} g(x)=\lim_{x\to1^+}\left(\frac{1}{f(x)}+\frac{1}{2f(x)-1}\right)=0$ nên đồ thị không nhận $x=1$ là tiệm cận đứng.

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \left(\dfrac{1}{f(x)} + \dfrac{1}{2f(x)-1}\right) = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} = \dfrac{8}{15}$ nên đồ thị có tiệm cận ngang là đường thẳng $y = \dfrac{8}{15}$.

Câu 12. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$ và $f(x) < 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Xét hàm số $g(x) = \dfrac{2f^3(x) + f^2(x) - 2f(x) - 1}{f^3(x) - 4f^2(x) + 5f(x) - 2}$. Khẳng định nào dưới đây là khẳng định đúng?

A. Đồ thị hàm số hàm số $g(x)$ có các đường tiệm cận ngang là $y = 2$ và $y = 0$.

B. Đồ thị hàm số hàm số $g(x)$ có các đường tiệm cận ngang là $y = -2$ và $y = 0$.

C. Đồ thị hàm số hàm số $g(x)$ chỉ có một đường tiệm cận ngang là $y = 2$.

D. Đồ thị hàm số hàm số $g(x)$ chỉ có một đường tiệm cận ngang là $y = -2$.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định của hàm số $g(x)$ là $\mathbb{R}$.

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2f^3(x) + f^2(x) - 2f(x) - 1}{f^3(x) - 4f^2(x) + 5f(x) - 2}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{2 + \dfrac{1}{f(x)} - \dfrac{2}{f^2(x)} - \dfrac{1}{f^3(x)}}{1 - \dfrac{4}{f(x)} + \dfrac{5}{f^2(x)} - \dfrac{2}{f^3(x)}} = 2 \text{ vì } \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$$

$\Rightarrow$ đường thẳng $y = 2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số hàm số $g(x)$.

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2f^3(x) + f^2(x) - 2f(x) - 1}{f^3(x) - 4f^2(x) + 5f(x) - 2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{[2f(x)+1][f(x)+1][f(x)-1]}{[f(x)-1]^2[f(x)-2]}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{[2f(x)+1][f(x)+1]}{[f(x)-1][f(x)-2]} = +\infty \text{ vì } \lim_{x\to+\infty} f(x) = 1 \text{ và } f(x) < 1\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Vậy đồ thị hàm số hàm số $g(x)$ chỉ có một đường tiệm cận ngang là $y = 2$.

Câu 13. Cho $y = f(x)$ là hàm số bậc ba, liên tục trên $\mathbb{R}$.

Đồ thị hàm số $g(x) = \dfrac{1}{f(x^3 + 3x) - 1}$ có nhiều nhất bao nhiêu đường tiệm cận.

A. 4.   **B.** 2.   **C.** 5.   **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t = x^3 + 3x \Rightarrow t' = 3x^2 + 3 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$ $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
t'	$+$
t	$-\infty \nearrow +\infty$

□ Xét $f\left(x^3+3x\right)-1=0$. Vì $y=f\left(x\right)$ là hàm số bậc ba nên phương trình $f\left(t\right)=1$ có nhiều nhất 3 nghiệm t.

Từ bảng biến thiên ta suy ra với mỗi giá trị t có đúng một giá trị x.

Khi đó phương trình $f\left(x^3+3x\right)=1$ có nhiều nhất 3 nghiệm x.

Do đó đồ thị hàm số $y=g\left(x\right)$ có nhiều nhất 3 tiệm cận đứng.

□ Xét $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g\left(x\right)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{f\left(x^3+3x\right)-1}=\lim\limits_{t\to\pm\infty}\dfrac{1}{f\left(t\right)-1}=0$ (vì $=\lim\limits_{t\to\pm\infty} f\left(t\right)=\pm\infty$).

Suy ra đồ thị hàm số $y=g\left(x\right)$ có 1 tiệm cận ngang là $y=0$.

Vậy đồ thị hàm số $y=g\left(x\right)$ có nhiều nhất 4 đường tiệm cận.

Câu 14. Cho hàm sô $y=f\left(x\right)=\sqrt{x^2+2x+3}$. Hàm số $y=g\left(x\right)=f\left(\dfrac{1}{f\left(x\right)}\right)$ có bao nhiêu tiệm cận?.

A. **0**. **B.** **1**. **C.** **2**. **D.** **3**

Lời giải

Chọn B

+) Hàm số $y=f\left(x\right)$ có tập xác định $D=\mathbb{R}$

+) Ham số $y=g\left(x\right)=f\left(\dfrac{1}{f\left(x\right)}\right)=\sqrt{\dfrac{1}{x^2+2x+3}+\dfrac{2}{\sqrt{x^2+2x+3}}+3}$ có tập xác định: $D=\mathbb{R}$

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty} g\left(x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty} g\left(x\right)=\sqrt{3}$

Vậy có 1 tiệm cận ngang.

Câu 15. Cho hàm số $y=f\left(x\right)=x+1$. Tìm số tiệm cận của hàm số

$$y=g\left(x\right)=1+\frac{\sqrt{f^2\left(x\right)+2}}{f\left(x\right)+2}+\frac{\sqrt[3]{f^3\left(x\right)+3}}{f\left(x\right)+3}+...+\frac{\sqrt[2020]{f^{2020}\left(x\right)+2020}}{f\left(x\right)+2020}.$$

A. 0. **B.** 2. **C.** 2019. **D.** 2021

Lời giải

Chọn D

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-3;-4;-5;...;-2021\right\}$

+) Với $x_i\in\left\{-3;-4;-5;....;-2021\right\}$ ta có $\lim\limits_{x\to x_i^+} g\left(x\right)=+\infty;\ \lim\limits_{x\to x_i^-} g\left(x\right)=-\infty$. Ta có đồ thị hàm số $y=g\left(x\right)$ có 2019 tiệm cận đứng.

+) Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[k]{f^k(x)+k}}{f(x)+k}=1\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=2020$;

$\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt[k]{f^k(x)+k}}{f(x)+k}=1, k\,chan\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt[k]{f^k(x)+k}}{f(x)+k}=-1, k\,le\end{array}\right.\Rightarrow\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=2$

=> có 2 tiệm cận ngang

Vậy tổng số tiệm cận là 2021

Dạng 10: Biết giới hạn của hàm số $y=f(x)$ tại một điểm hoặc tại vô cực, tìm tiệm cận đứng, tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=f(x)$, trong bài toán chứa tham số.

Câu 1. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=1$; $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-2020;2020]$ để đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+3x}+x}{\sqrt{2f(x)-f^2(x)+m}}$ có tiệm cận ngang nằm bên dưới đường thẳng $y=-1$.

A. 4041. **B.** 2019. **C.** 1. **D.** 10.

Lời giải

Chọn C

Do $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ nên khi $x\to+\infty$ thì $2f(x)-f^2(x)\to-\infty$ vì vậy $\sqrt{2f(x)-f^2(x)}$ không có nghĩa nên không tồn tại $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$.

Xét $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)$

Trước hết $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=1$ nên $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{2f(x)-f^2(x)}=\sqrt{\lim\limits_{x\to-\infty}\left[2f(x)-f^2(x)\right]}=1$

$$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}+x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\left(\sqrt{x^2+3x}+x\right)\left(\sqrt{x^2+3x}-x\right)}{\sqrt{x^2+3x}-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x}{-x\left(\sqrt{1-\dfrac{3}{x}}+1\right)}=-\dfrac{3}{2}$$

Từ đó có $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=\dfrac{-3}{2m+2}$ nên đồ thị hàm số $g(x)$ có tiệm cận ngang là đường thẳng $y=\dfrac{-3}{2m+2}$.

Để tiệm cận ngang tìm được ở trên nằm dưới đường thẳng $y=-1$ thì điều kiện cần và đủ là $\dfrac{-3}{2m+2}<-1\Leftrightarrow\dfrac{3}{2m+2}>1\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}3>2m+2\\2m+2>0\end{array}\right.\Leftrightarrow-1<m<\dfrac{1}{2}$ Tức có duy nhất giá trị nguyên $m=0$ thỏa mãn bài toán.

Câu 2. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=2$. Gọi S là tập hợp các giá trị của tham số m để đồ thị của hàm số $g(x)=\dfrac{(x-1)\left[f^2(x)+3\right]}{x^2+2(m-1)x+m^2-2}$ có tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang bằng 2. Tính tổng các phần tử của S.

A. $-\dfrac{1}{2}$ **B.** -2. **C.** -3. **D.** $\dfrac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Do $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x-1)\left[f^2(x)+3\right]}{x^2+2(m-1)x+m^2-2}=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(x-1)\left[f^2(x)+3\right]}{x^2+2(m-1)x+m^2-2}=0$

nên đồ thị hàm số $g(x)$ có một tiệm cận ngang là đường thẳng $y=0$.

Đặt $h(x)=x^2+2(m-1)x+m^2-2$.

Yêu cầu của bài toán được thỏa mãn khi và chỉ khi đồ thị hàm số $g(x)$ có đúng một tiệm cận đứng, điều này xảy ra khi và chỉ khi $h(x)=0$ có 2 nghiệm phân biệt trong đó có 1 nghiệm $x=1$ hoặc $h(x)=0$ có nghiệm kép.

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\Delta'>0\\ h(1)=0\end{cases}\\ \Delta'=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}(m-1)^2-(m^2-2)>0\\ 1+2(m-1)+m^2-2=0\end{cases}\\ m=\dfrac{3}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}m<\dfrac{3}{2}\\ m=1;m=-3\end{cases}\\ m=\dfrac{3}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=1\\ m=-3\\ m=\dfrac{3}{2}\end{array}\right..$$

Vậy, tổng các phần tử của S là $-\dfrac{1}{2}$.

Câu 3. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm $g(x)=\dfrac{f(x)+1}{\sqrt{m.f^2(x)+2}}$ có hai đường tiệm ngang là

A. $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ **B.** $(0;+\infty)$ **C.** $(-\infty;0)$ **D.** $\{0\}$

Lời giải

Chọn B

TH1: $m=0$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)+1}{\sqrt{2}}=\pm\infty$

Suy ra đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

TH2: $m<0$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f^2(x)=+\infty$

Suy ra $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(m.f^2(x)+2\right)=-\infty$

Suy ra $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x)$ không tồn tại.

TH3: $m>0$

$$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)+1}{\sqrt{m.f^2(x)+2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)\left(1+\dfrac{1}{f(x)}\right)}{|f(x)|\sqrt{m+\dfrac{2}{f^2(x)}}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\left(1+\dfrac{1}{f(x)}\right)}{\sqrt{m+\dfrac{2}{f^2(x)}}}=\frac{1}{\sqrt{m}}$$

$$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)+1}{\sqrt{m.f^2(x)+2}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)\left(1+\dfrac{1}{f(x)}\right)}{|f(x)|\sqrt{m+\dfrac{2}{f^2(x)}}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-\left(1+\dfrac{1}{f(x)}\right)}{\sqrt{m+\dfrac{2}{f^2(x)}}}=-\frac{1}{\sqrt{m}}$$

Đồ thị hàm số $g(x)$ có hai tiệm cận ngang là hai đường thẳng $y=\dfrac{1}{\sqrt{m}}$, $y=-\dfrac{1}{\sqrt{m}}$.

Tóm lại, tập hợp cần tìm là $(0;+\infty)$.

Câu 4. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m trong $(-2019;2019)$ để đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{4036f(x)+2}{\sqrt{mf^2(x)+3}}$ có hai đường tiệm cận ngang.

A. 0. **B.** 2018. **C.** 4036. **D.** 25.

Lời giải

Chọn B

-Với $m<0$ ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[mf^2(x)+3\right]=-\infty$, tức $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x)$ không tồn tại. Đồ thị hàm số $g(x)$ không có tiệm cận ngang.

-Với $m=0$ thì $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(4036f(x)+2\right)=\pm\infty$. Đồ thị hàm số $g(x)$ không có tiệm cận ngang.

-Với $m>0$, tập xác định của hàm số $g(x)$ là $D=\mathbb{R}$.

Khi đó:

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)\left(4036+\dfrac{2}{f(x)}\right)}{f(x)\sqrt{m+\dfrac{3}{f^2(x)}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4036+\dfrac{2}{f(x)}}{\sqrt{m+\dfrac{3}{f^2(x)}}}=\frac{4036}{\sqrt{m}}.$$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)\left(4036+\dfrac{2}{f(x)}\right)}{-f(x)\sqrt{m+\dfrac{3}{f^2(x)}}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{4036+\dfrac{2}{f(x)}}{-\sqrt{m+\dfrac{3}{f^2(x)}}}=-\frac{4036}{\sqrt{m}}$$

Đồ thị hàm số $g(x)$ có 2 tiệm cận ngang là hai đường thẳng $y=\dfrac{4036}{\sqrt{m}}$, $y=-\dfrac{4036}{\sqrt{m}}$.

Từ tất cả ở trên ta có $\begin{cases} m>0 \\ m\in(-2019;2019) \\ m\in\mathbb{Z}\end{cases} \Leftrightarrow m\in\{1;2;3;...;2018\}$.

Vậy, có 2018 giá trị nguyên của m.

Câu 5. Cho hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$. Có bao nhiêu số nguyên dương m để đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{\left(\sqrt{3x+1}-2\right)f(x)}{\left(x^2-4x+m\right)\sqrt{f^2(x)+1}}$ có đúng 2 đường tiệm cận.

A. 0. **B.** 2. **C.** 3. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện xác định của hàm số $g(x)$: $x\ge-\dfrac{1}{3}; x^2-4x+m\ne0$.

Vì $x\ge-\dfrac{1}{3}$ nên không tồn tại giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$.

Vì hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1 \Rightarrow f(x)>1, \forall x\in\mathbb{R}$.

Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x).\left(\sqrt{3x+1}-2\right)}{\sqrt{f^2(x)+1}.\left(x^2-4x+m\right)}$

$$= \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{f^2(x)}}}.\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{\dfrac{3}{x^3}+\dfrac{1}{x^4}-\dfrac{2}{x^2}}}{1-\dfrac{4}{x}+\dfrac{m}{x^2}} = 1.0 = 0$$

$\Rightarrow$ Đường thẳng $y=0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $g(x)$.

Ta có $g(x) = \dfrac{\left(\sqrt{3x+1}-2\right)f(x)}{\left(x^2-4x+m\right)\sqrt{f^2(x)+1}} = \dfrac{(3x-3)f(x)}{\left(x^2-4x+m\right)\left(\sqrt{3x+1}+2\right)\sqrt{f^2(x)+1}}$.

Đồ thị hàm số $g(x)$ có đúng hai tiệm cận khi và chỉ khi nó có đúng một tiệm cận đứng, tức là phương trình $x^2-4x+m=0$ có nghiệm kép $x_0,\ x_0 \ge -\dfrac{1}{3}$ hoặc có hai nghiệm phân biệt $x_1,\ x_2$ trong đó $x_1=1,\ x_2\ne 1,\ x_2\ge -\dfrac{1}{3}$ hoặc có hai nghiệm phân biệt $x_3,\ x_4$ trong đó

$x_3 < -\dfrac{1}{3},\ x_4 \ge -\dfrac{1}{3},\ x_4 \ne 1$.

Xét bảng biến thiên của hàm số $h(x) = -x^2+4x$:

x	$-\frac{1}{3}$		1		2		$+\infty$
$-x^2+4x$					4		
		↗	3	↗		↘	
	$-\frac{13}{9}$						$-\infty$

Ta có $x^2-4x+m=0 \Leftrightarrow m=-x^2+4x \qquad (1)$.

Từ bảng biến thiên suy ra $\left[\begin{array}{l} m=4 \\ m=3 \\ m<-\dfrac{13}{9}\end{array}\right.$. Do m là số nguyên dương nên $m\in\{3;4\}$.

Câu 6. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$. Trên đoạn $[-2020;\ 2020]$ có bao nhiêu số nguyên m để đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{f(x)+2}{\sqrt{(m+1).f^2(x)+2020}}$ có hai tiệm cận ngang.

A. 2020. **B.** 2021. **C.** 4041. **D.** 2000.

Lời giải

Chọn B

Nếu $m+1<0$ thì $-\sqrt{-\dfrac{2020}{m+1}} < f(x) < \sqrt{-\dfrac{2020}{m+1}}\ \forall x\in\mathbb{R}$, điều này mâu thuẫn với giả thiết.

Nếu $m+1=0$ thì $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)+2}{\sqrt{2020}}=\pm\infty$. Tức đồ thị hàm số $g(x)$ không có tiệm cận ngang.

Nếu $m+1>0\Leftrightarrow m>-1$ thì $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)+2}{\sqrt{(m+1).f^2(x)+2020}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)\left(1+\dfrac{2}{f(x)}\right)}{f(x).\sqrt{m+1+\dfrac{2020}{f(x)}}}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\dfrac{2}{f(x)}}{\sqrt{m+1+\dfrac{2020}{f(x)}}}=\dfrac{1}{\sqrt{m+1}}$. Do đó đường thẳng $y=\dfrac{1}{\sqrt{m+1}}$ là tiệm cận ngang của ĐTHS.

Và $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)+2}{\sqrt{(m+1).f^2(x)+2020}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)\left(1+\dfrac{2}{f(x)}\right)}{-f(x).\sqrt{m+1+\dfrac{2020}{f(x)}}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1+\dfrac{2}{f(x)}}{-\sqrt{m+1+\dfrac{2020}{f(x)}}}=\dfrac{-1}{\sqrt{m+1}}$

Do đó đường thẳng $y=\dfrac{-1}{\sqrt{m+1}}$ là tiệm cận ngang của ĐTHS.

Vậy trên đoạn $[-2020;2020]$ có 2021 số nguyên m thỏa mãn.

Phần 4: Biết biểu thức hoặc đồ thị hoặc BBT của hàm số $y=f'(x)$, tìm tiệm cận của hàm số $y=g(x)$.

Dạng 11: Biết biểu thức hoặc đồ thị hoặc BBT của hàm số $y=f'(x)$, tìm tiệm cận của hàm số $y=g(x)$.

Câu 1. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $y=f'(x)$ có bảng biến thiên như sau.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	||	$+$	0	$-$	
y	1	$\nearrow$	3 || $-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-1

Đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{2020}{f(x)-m}$ có nhiều nhất bao nhiêu đường tiệm cận đứng ?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

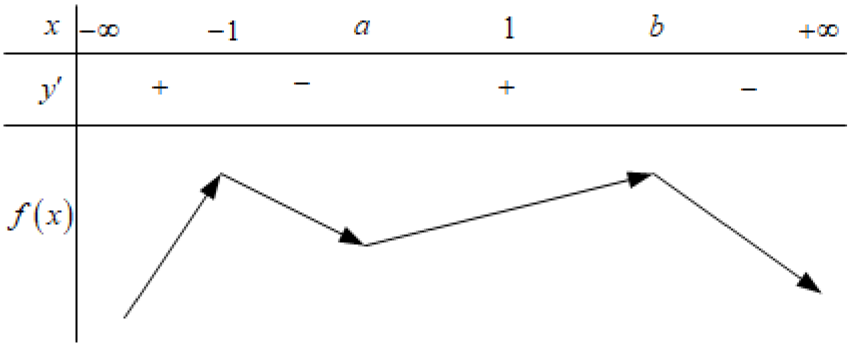
Lời giải

Chọn D

Để đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{2020}{f(x)-m}$ có đường tiệm cận đứng thì phương trình $f(x)-m=0$ phải có nghiệm.

Từ bbt của hàm số $y=f'(x)$ suy ra tồn tại a,b sao cho $\begin{cases}-1<a<1<b\\ f'(a)=f'(b)=0\end{cases}$

Từ đó ta có bbt của hàm số $y=f(x)$ như sau

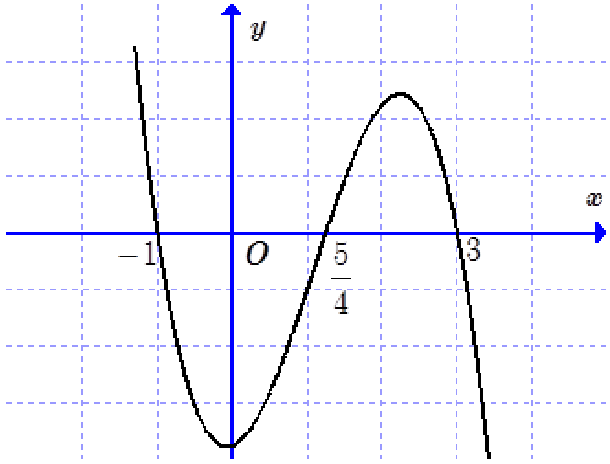


Suy ra phương trình $f(x)-m=0$ có nhiều nhất là 4 nghiệm phân biệt.

Vậy đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{2020}{f(x)-m}$ có nhiều nhất 4 đường tiệm cận đứng.

Câu 2. Cho hàm số $g(x)=\dfrac{2019}{h(x)-m^2-m}$ với $h(x)=mx^4+nx^3+px^2+qx\,(m,n,p,q\in\mathbb{R}), h(0)=0$.

Hàm số $y=h'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới :



Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để đồ thị hàm số $g(x)$ có 2 tiệm cận đứng ?

A. 2 . **B.** 10 . **C.** 71 . **D.** 2019 .

Lời giải

Chọn B

Từ đồ thị suy ra $h'(x)=m(x+1)(4x-5)(x-3)=m(4x^3-13x^2-2x+15)$ và $m<0$.

Ta được $h(x)=m\left(x^4-\dfrac{13}{3}x^3-x^2+15x\right)$.

Đồ thị $g(x)$ có 2 đường tiệm cận đứng khi và chỉ khi phương trình $h(x)=m^2-m$ có 2 nghiệm phân biệt .

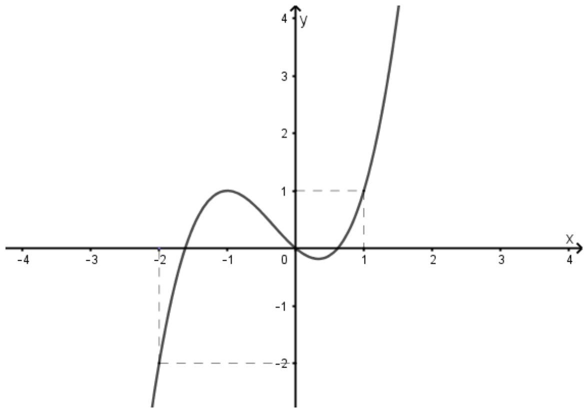
$\Leftrightarrow f(x)=x^4-\dfrac{13}{3}x^3-x^2+15x=m+1$ có 2 nghiệm phân biệt.

Ta có bảng biến thiên của $f(x)$.

x	$-\infty$		-1		$\frac{5}{4}$		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{-32}{3}$	$\nearrow$	$\frac{8575}{768}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Do đó $m+1\in\left(\frac{-32}{3};0\right)\Leftrightarrow m\in\left(\frac{-35}{3};-1\right)$. Vậy có 10 số nguyên m.

Câu 3. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị hàm số $y=f'\left(x\right)$ như hình vẽ sau:



Xét hàm số $y=\frac{1}{f(x)-\frac{x^2}{2}}$. Đặt $g\left(x\right)=f\left(x\right)-\frac{x^2}{2}$, tìm điều kiện để đồ thị hàm số $y=\frac{1}{f(x)-\frac{x^2}{2}}$ có 4 đường tiệm cận đứng.

A. $\begin{cases} g\left(0\right)>0 \\ g\left(1\right)<0 \end{cases}$.

B. $\begin{cases} g\left(0\right)>0 \\ g\left(1\right)<0 \\ g\left(1\right).g\left(-2\right)>0 \end{cases}$.

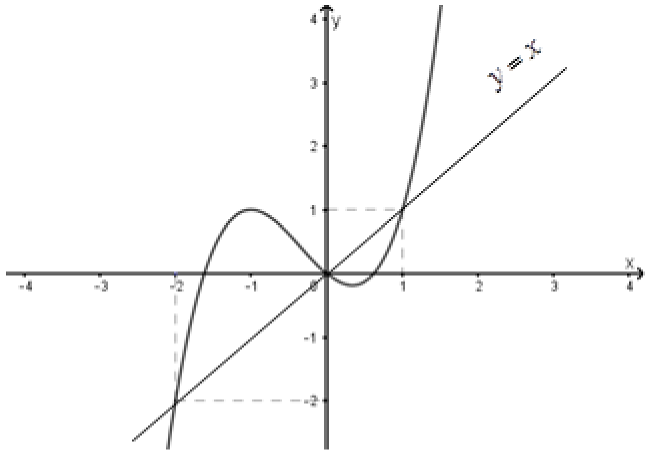
C. $\begin{cases} g\left(0\right)>0 \\ g\left(-2\right)>0 \end{cases}$.

D. $\begin{cases} g\left(0\right)>0 \\ g\left(-2\right)\le 0 \\ g\left(1\right)\le 0 \end{cases}$.

Lời giải

Chọn B

Đồ thị hàm số $y=\frac{1}{f(x)-\frac{x^2}{2}}$ có 4 đường tiệm cận đứng $\Rightarrow$ Phương trình $f(x)-\frac{x^2}{2}=0$ phải có 4 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ Đồ thị hàm số $g\left(x\right)=f(x)-\frac{x^2}{2}$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt.



Ta có: $g'(x) = f'(x) - x$.

$g'(0) = f'(0) - 0 = 0$, $g'(1) = f'(1) - 1 = 0$, $g'(-2) = f'(-2) + 2 = 0$.

Từ đồ thị hàm số $y = f'(x)$ suy ra

- $f'(x) < x, \forall x \in (0;1) \cup (-\infty;-2) \Rightarrow g'(x) < 0, \forall x \in (0;1) \cup (-\infty;-2)$.
- $f'(x) > x; \forall x \in (1;+\infty) \cup (-2;0) \Rightarrow g'(x) > 0, \forall x \in (1;+\infty) \cup (-2;0)$..

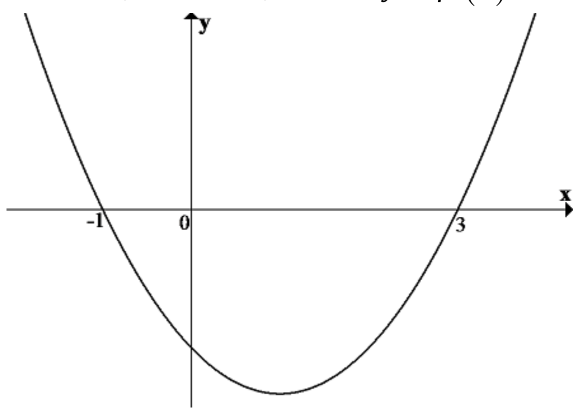
Bảng biến thiên của hàm số $y = g(x)$.

x	$-\infty$		-2		0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$g(-2)$	$\nearrow$	$g(0)$	$\searrow$	$g(1)$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra đồ thị hàm số $y = g(x)$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt

$\Leftrightarrow \begin{cases} g(0) > 0 \\ g(1) < 0 \\ g(-2) < 0 \end{cases}$. Vậy chọn B.

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm số bậc 3. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ và $f(-1) < 20$.



Giá trị của m để đồ thị hàm số $g(x) = \dfrac{f(x) - 20}{f(x) - m}$ có 4 tiệm cận là

A. $m < f(3)$.

B. $f(3) < m < f(-1)$.

C. $m > f(-1)$.

D. $f(3) \le m \le f(-1)$..

Lời giải

Chọn B

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(-1)$	$\searrow$	$f(3)$	$\nearrow$	$+\infty$

ĐK: $f(x) \neq m$

Nếu $m \neq 20$ thì đồ thị hàm số không có tiệm cận.

Nếu $m \neq 20$ thì

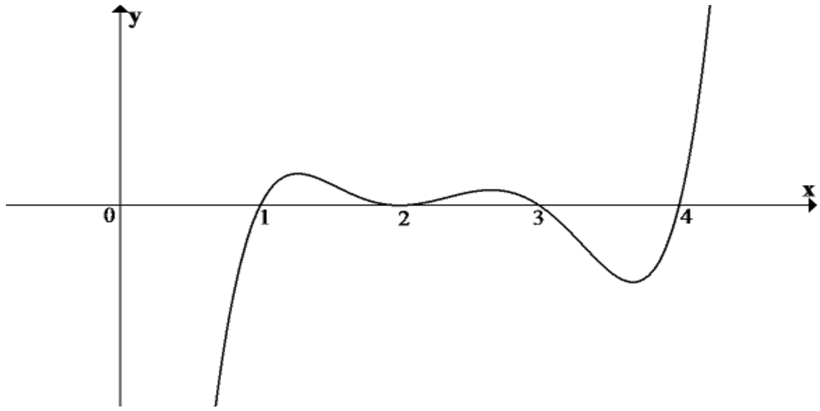
$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)-20}{f(x)-m} = 1 \Rightarrow$ Đường thẳng $y=1$ là TCN của đồ thị hàm số.

Phương trình $f(x)=20$ có một nghiệm $x=a>3$ vì $f(-1)<20$.

Suy ra đồ thị hàm số $g(x)$ có 4 tiệm cận khi phương trình $f(x)=m$ có 3 nghiệm phân biệt khác a.

Suy ra $f(3)<m<f(-1)$.

Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm đa thức liên tục trên R thỏa mãn $3f(1)-2<0$ và $3f(a)-a^3+3a>0, \forall a>2$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ.



Đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{x+1}{3f(x+2)-x^3+3x}$ có có số tiệm cận đứng là

A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Phương trình $f(x)=20$ có một nghiệm $x=a>3$ vì $f(-1)<20$.

Từ đồ thị $f'(x)$ suy ra $f(x)$ là đa thức bậc 6 và $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=+\infty$.

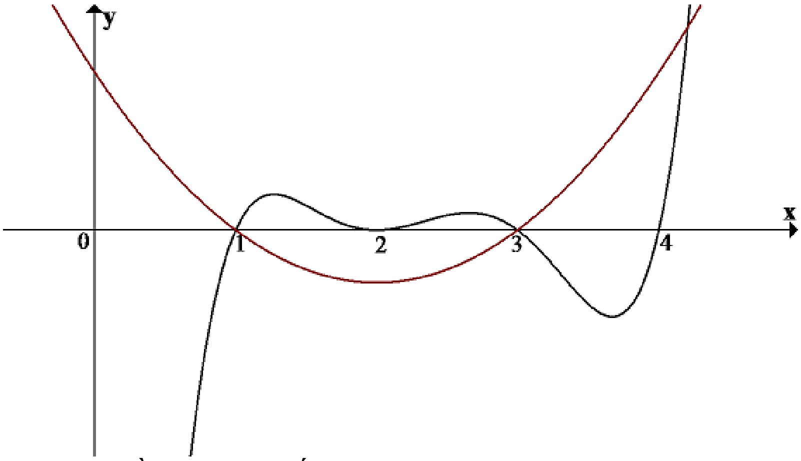
ĐK: $h(x)=3f(x+2)-x^3+3x \neq 0$.

Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm $g(x)$ bằng số nghiệm của $h(x)$ khác -1.

Ta đi tìm số nghiệm của phương trình $h(x)=0$.

$h'(x)=3f'(x+2)-3x^2+3$. Đặt $t=x+2 \Rightarrow h'(x)=k(t)=3(f'(t)-t^2+4t-3)$.

Khi đó $k(t)=3(f'(t)-t^2+4t-3)=0 \Leftrightarrow f'(t)=t^2-4t+3 (*)$



Sử dụng đồ thị nhận thấy (*) có 3 nghiệm là $t=1; t=3; t=a>4 \Rightarrow x=-1; x=1; x=a-2=b>2$.

Ta có bảng biến thiên của $h(x)$ như sau :

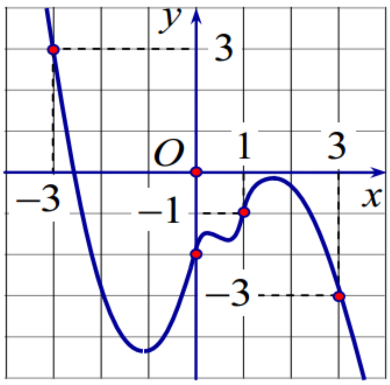
x	$-\infty$		-1		1		b		$+\infty$
h'(x)		-	0	+	0	-	0	+	
h(x)	$+\infty$ ↘		h(-1)	↗	h(1)	↘	h(b)	↗	$+\infty$

Ta có: $h(-1)=3f(1)-2<0; h(b)=3f(a)-a^3+3a>0; a>2$.

Dựa vào bảng biến thiên của $h(x)$ ta thấy $h(x)=0$ có 2 nghiệm phân biệt khác -1.

Vậy $g(x)$ có 2 tiệm cận đứng.

Câu 6. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[-3;3]$ và đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ. Đặt $h(x)=\dfrac{3}{2f(x)+x^2+4}$. Biết rằng $f(1)=-24$. Hỏi trên đoạn $[-3;3]$ đồ thị hàm số $y=h(x)$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng ?



A. 1. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải

Chọn D.

Xét hàm số $g(x)=2f(x)+x^2+4 \Rightarrow g'(x)=2.(f'(x)+x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=-x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=1 \\ x=3 \end{array}\right.$.

Lập bảng biến thiên của $g(x)$ ta được:

x	-3		1		3
$g'(x)$	0	$-$	0	$+$	0
$g(x)$	$g(-3)$	$\searrow$	-43	$\nearrow$	$g(3)$

Gọi a là nghiệm của phương trình $f'(x)=0$. Ta có:

$$\int_{-3}^{a}|f'(x)|dx<\int_{a}^{3}|f'(x)|dx \Leftrightarrow f(a)-f(-3)<-\left(f(3)-f(a)\right)\Leftrightarrow f(-3)>f(3)\Leftrightarrow g(-3)>g(3).$$

Lại có: $\int_{1}^{3}g'(x)dx<4 \Leftrightarrow g(3)-g(1)<4\Leftrightarrow g(3)<g(1)+4\Leftrightarrow g(3)<-39\Rightarrow g(3)<0.$

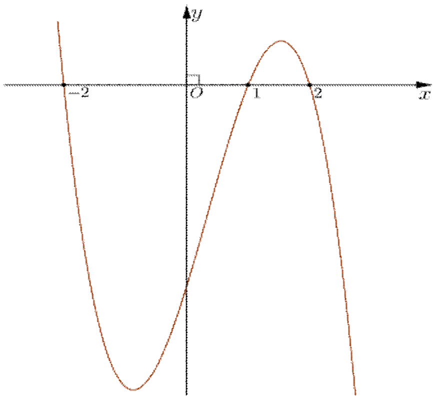
S_{ABCD} là diện tích hình chữ nhật giới hạn bởi 4 đường thẳng: $x=-3; x=1; y=-5; y=3$.

Mặt khác: $\int_{-3}^{1}\left(-g'(x)\right)dx<S_{ABCD}=32\Leftrightarrow g(-3)-g(1)<32\Leftrightarrow g(-3)<-11.$

Do đó phương trình $g(x)=0$ vô nghiệm, vậy đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cân đứng.

Câu 7. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên R, thỏa $f(1)=0$ và đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ có dạng như hình vẽ bên. Hỏi đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{2020x}{f^2(x)+f(x)}$ có bao nhiêu tiệm cận đứng?

A. 3. **B.** 2. **C.** 5. **D.** 4.



Lời giải

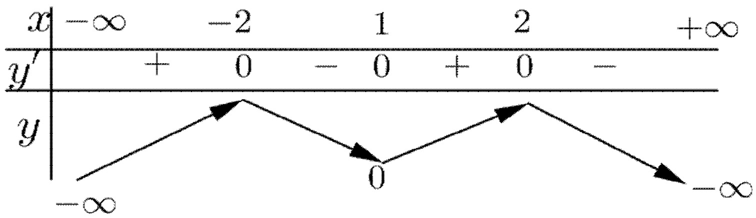
Chọn C

$$f^2(x)-f(x)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=0\\ f(x)=-1\end{array}\right.$$

Từ đồ thị hàm số $f'(x)$ ta có:

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\\x=1\\x=2\end{array}\right.,\ f'(x)>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<-2\\1<x<2\end{array}\right.$$

Ta lập được bảng biến thiên của hàm số



Từ bảng biến thiên ta có:

Phương trình $f(x)=0$ có 3 nghiệm phân biệt khác 0

Phương trình $f(x)=-1$ có hai nghiệm phân biệt khác 0

Vậy đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{2020x}{f^2(x)+f(x)}$ có 5 tiệm cận đứng

CÁC DẠNG TOÁN VỀ HÀM ẨN LIÊN QUAN ĐẾN SỰ TƯƠNG GIAO CỦA ĐỒ THỊ CÁC HÀM SỐ

Dạng 1: **Biết đồ thị hoặc BBT của hàm số $y = f(x)$, xét các bài toán liên quan đến phương trình có dạng $f(x) = a$., $f(u(x)) = a$.**

Dạng 2: **Biết đồ thị hoặc BBT của hàm số $y = f(x)$, xét các bài toán liên quan đến phương trình có dạng $f(x) = g(m)$, $f(u(x)) = g(m)$.**

Dạng 3: **Biết đồ thị hoặc BBT của hàm số $y = f(x)$, xét các bài toán liên quan đến phương trình có dạng $f(x) = f(m)$, $f(u(x)) = f(m)$.**

Dạng 4: **Biết đồ thị hoặc BBT của hàm số $y = f(x)$, xét các bài toán liên quan đến phương trình có dạng $f(|x|) = a; |f(x)| = a; f(|u(x)|) = a; |f(u(x))| = a...$.**

Dạng 5: **Biết đồ thị hoặc BBT của hàm số $y = f(x)$, xét các bài toán liên quan đến phương trình có dạng $f(|x|) = g(m); |f(x)| = g(m); f(|u(x)|) = g(m); |f(u(x))| = g(m)...$.**

Dạng 6: **Biết đồ thị hoặc BBT của hàm số $y = f(x)$, xét các bài toán liên quan đến phương trình có dạng $f(x) = g(x); f(u(x)) = g(v(x))$.**

Dạng 7: **Biết đồ thị hoặc BBT của hàm số $y = f(x)$, xét các bài toán liên quan đến phương trình, bất phương trình chứa $f'(x); f''(x)...$.**

Dạng 8: **Biết đồ thị hoặc BBT của hàm số $y = f'(x)$, xét các bài toán liên quan đến phương trình có dạng $f(x) = 0; f(u(x)) = 0; f(x) = g(x); f(u(x)) = g(v(x))$ ... .**

Dạng 9: **Biết đồ thị hoặc BBT của hàm số $y = f'(x)$, xét các bài toán liên quan đến phương trình có dạng $f(x) = m; f(u(x)) = m; f(x) = g(m); f(u(x)) = g(m)$ ...**

Dạng 10: **Biết số nghiệm của phương trình $f(x) = 0$, xét các bài toán liên quan đến phương trình có chứa $f'(x); f''(x)...$.**

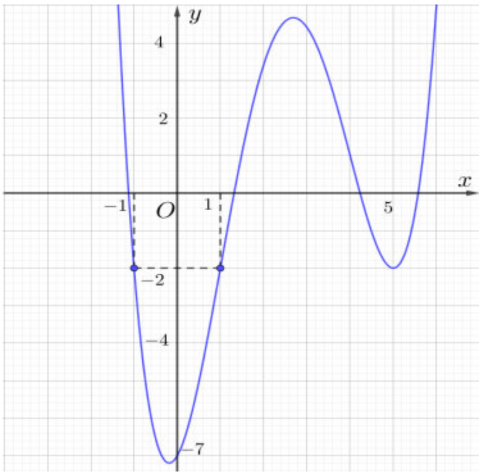
Dạng 11: **Biết đồ thị hoặc BBT của hàm số $y = f(x)$, xét các bài toán liên quan đến BẤT PHƯƠNG TRÌNH có dạng $f(x) \geq g(x); f(u(x)) \geq g(x)$ $(>, <, \leq)$... có thể có tham số.**

Dạng 12: **Biết đồ thị hoặc BBT của hàm số $y = f'(x)$, xét các bài toán liên quan đến BẤT PHƯƠNG TRÌNH có dạng $f(x) \geq g(x); f(u(x)) \geq g(x)$ $(>, <, \leq)$... có thể có tham số.**

CÁC DẠNG TOÁN VỀ HÀM ẨN LIÊN QUAN ĐẾN BÀI TOÁN XÉT SỰ TƯƠNG GIAO CỦA ĐỒ THỊ CÁC HÀM SỐ (PHẦN 1. Từ dạng 1 đến dạng 4)

Dạng 1: Biết đồ thị hoặc BBT của hàm số $y=f\left(x\right)$, xét các bài toán liên quan đến phương trình có dạng $f\left(x\right)=a$., $f\left(u\left(x\right)\right)=a$.

Câu 1. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ.

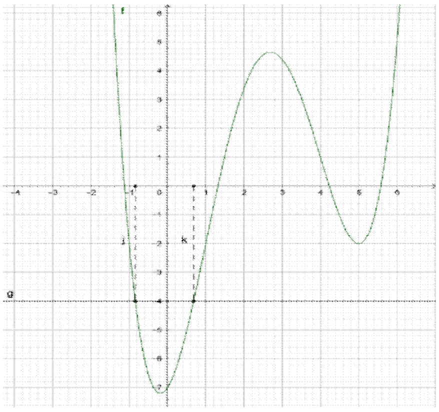


Số nghiệm thuộc khoảng $\left(0;\pi\right)$ của phương trình $f\left(\sin x\right)=-4$ là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C



Xét phương trình: $f\left(\sin x\right)=-4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=\alpha\in\left(-1;0\right)\\ \sin x=\beta\in\left(0;1\right)\end{array}\right.$

Vì $x\in\left(0;\pi\right) \Rightarrow \sin x\in\left(0;1\right]$. Suy ra với $x\in\left(0;\pi\right)$ thì $f\left(\sin x\right)=-4 \Leftrightarrow \sin x=\beta\in\left(0;1\right)$. Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm $x\in\left(0;\pi\right)$(thỏa mãn).

Vậy chọn **C.**

Câu 2. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		1		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$			0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-8	$\nearrow$	5	$\nearrow$	13	$\searrow$	$-\infty$

Phương trình $f\left(\cos x\right)=\dfrac{13}{3}$ có bao nhiêu nghiệm thuộc khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t=\cos x$, $x\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow t\in(0;1]$.

Phương trình $f(\cos x)=\frac{13}{3}$ trở thành $f(t)=\frac{13}{3}$

Dựa vào bảng biến thiên trên ta có phương trình $f(t)=\frac{13}{3}$ có đúng một nghiệm $t\in(0;1)$

Với một nghiệm $t\in(0;1)$, thay vào phép đặt ta được phương trình $\cos x=t$ có hai nghiệm phân biệt thuộc thuộc khoảng $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.

Vậy phương trình $f(\cos x)=\frac{13}{3}$ có hai nghiệm phân biệt thuộc thuộc khoảng $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.

Câu 3. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm của phương trình $2f(3x-5)-7=0$ là

A. 1. **B.** 2 . **C.** 3 . **D.** 4 .

Lời giải

Chọn C

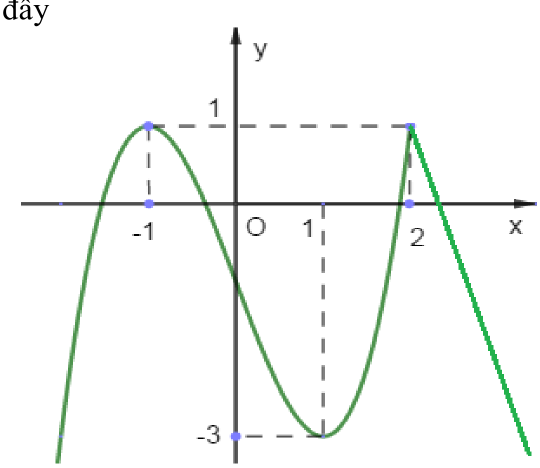
$2f(3x-5)-7=0\Leftrightarrow f(3x-5)=\frac{7}{2}$.

Đặt $t=3x-5$, phương trình trở thành $f(t)=\frac{7}{2}$.

Với mỗi nghiệm t thì có một nghiệm $x=\frac{t+5}{3}$ nên số nghiệm t của phương trình $f(t)=\frac{7}{2}$ bằng số nghiệm của phương trình $2f(3x-5)-7=0$.

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$ suy ra phương trình $f(t)=\frac{7}{2}$ có 3 nghiệm phân biệt nên phương trình $2f(3x-5)-7=0$ có 3 nghiệm phân biệt.

Câu 4. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$ và có đồ thị như hình dưới đây



Với giả thiết, phương trình $f\left(1-\sqrt{x^3+x}\right)=a$ có nghiệm. Giả sử khi tham số a thay đổi, phương trình đã cho có nhiều nhất m nghiệm và có ít nhất n nghiệm. Giá trị của $m+n$ bằng

A. 4. **B.** 6. **C.** 3. **D.** 5.

Lời giải

Chọn C

Dễ thấy điều kiện của phương trình đã cho là $x\ge 0$.

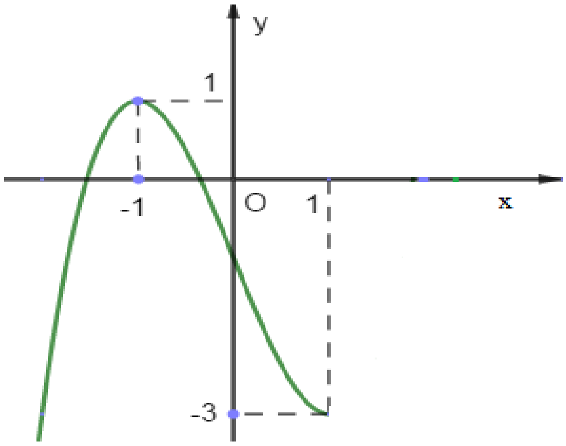
Đặt $t=1-\sqrt{x^3+x}\quad (1)\Rightarrow t\in(-\infty;1]$.

Dễ thấy phương trình (1) luôn có nghiệm duy nhất $\forall t\in(-\infty;1]$.

Phương trình đã cho có dạng: $f(t)=a\quad (2), t\le 1$.

Số nghiệm của phương trình đã cho bằng số nghiệm của (2).

Đồ thị hàm số $y=f(t), t\le 1$ có dạng:



Do đó:

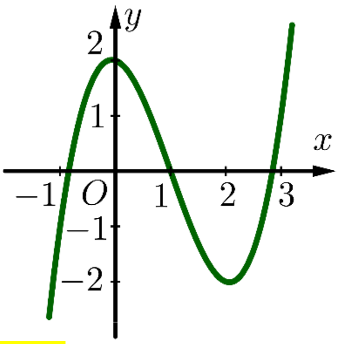
(2) vô nghiệm khi $a>1$.

(2) có hai nghiệm khi $-3\le a<1$.

(2) có nghiệm duy nhất khi $a=1$ hoặc $a<-3$.

Vậy $m=2, n=1\Rightarrow m+n=3$.

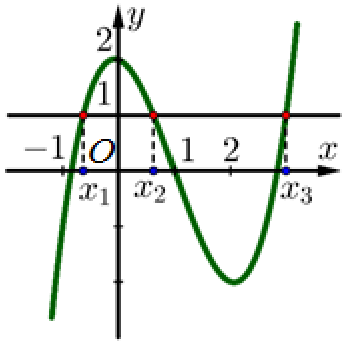
Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Gọi m là số nghiệm của phương trình $f\left(f(x)\right)=1$. Khẳng định nào sau đây là đúng?



A. $m=6$. **B.** $m=7$. **C.** $m=5$. **D.** $m=9$.

Lời giải

Chọn B



Ta có: $f(x)=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=x_1\in(-1;0) \\ x=x_2\in(0;1) \\ x=x_3>2 \end{array}\right.$.

Suy ra: $f(f(x))=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=x_1\,(1) \\ f(x)=x_2\,(2) \\ f(x)=x_3\,(3) \end{array}\right.$.

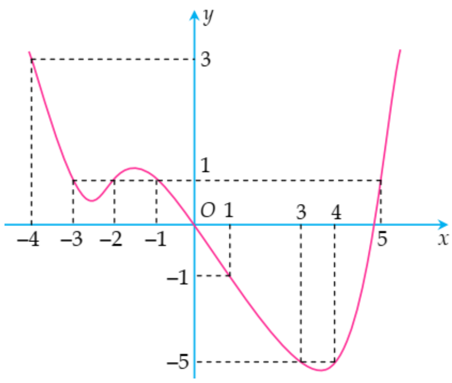
+) Xét (1): $f(x)=x_1\in(-1;0)$, ta có đường thẳng $y=x_1$ cắt đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại 3 điểm phân biệt nên phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt.

+) Xét (2): $f(x)=x_2\in(0;1)$, ta có đường thẳng $y=x_2$ cắt đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại 3 điểm phân biệt nên phương trình (2) có 3 nghiệm phân biệt.

+) Xét (3): $f(x)=x_3>2$, ta có đường thẳng $y=x_3$ cắt đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại 1 điểm nên phương trình (3) có 1 nghiệm.

Do các nghiệm không trùng nhau nên tổng số nghiệm là: $m=3+3+1=7$.

Câu 6. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau.



Số nghiệm của phương trình $f(2\sin x)=1$ trên đoạn $[0;2\pi]$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t=2\sin x$, $t\in[-2;2]$.

Xét phương trình $f(t)=1$, dựa vào đồ thị ta thấy

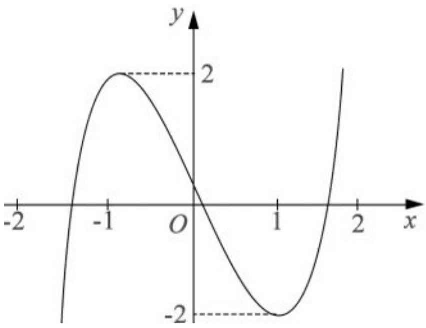
$$f(t)=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} t=-3 & (l) \\ t=-2 & (n) \\ t=-1 & (n) \\ t=5 & (l) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\sin x=-2 \\ 2\sin x=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x=-1 \\ \sin x=-\frac{1}{2} \end{array}\right. .$$

Với $\sin x=-1 \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi$, $x\in[0;2\pi] \Rightarrow x=\frac{3\pi}{2}$.

Với $\sin x=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{\pi}{3}+k2\pi \\ x=\frac{4\pi}{3}+k2\pi \end{array}\right.$, $x\in[0;2\pi] \Rightarrow x=\frac{5\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$.

Vậy phương trình có 3 nghiệm

Câu 7. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.

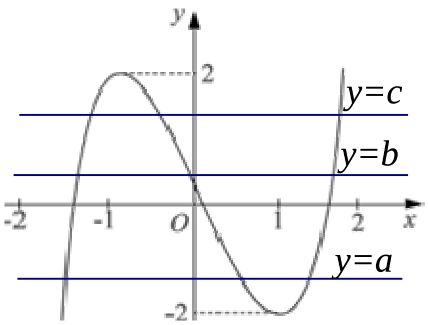


Phương trình $f(f(x))=0$ có bao nhiêu nghiệm.

A. 6. **B.** 7. **C.** 8. **D.** 9.

Lời giải.

Chọn D

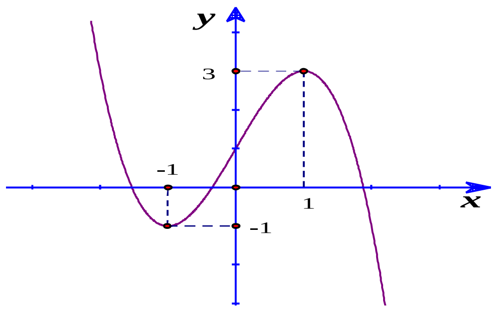


Phương trình $f(x)=0$ có ba nghiệm phân biệt là: $\left[\begin{array}{l} x=a\ (a\in(-2;-1)) \\ x=b\ (b\in(0;1)) \\ x=c\ (c\in(1;2)) \end{array}\right.$

Các phương trình $f(x)=a, f(x)=b, f(x)=c$ đều có 3 nghiệm phân biệt.

Vậy phương trình đã cho có 9 nghiệm phân biệt.

Câu 8. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Số nghiệm của phương trình $3f(x)-4=0$ là

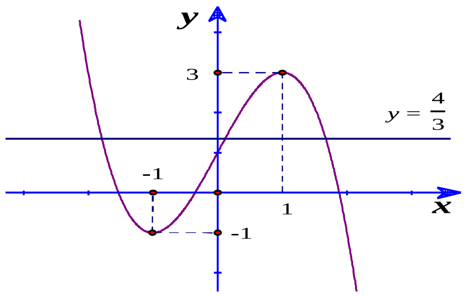
A. 1. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B

Ta có $3f(x)-4=0 \Leftrightarrow f(x)=\dfrac{4}{3}\quad (1)$.

Phương trình (1) là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ và đường thẳng $y=\dfrac{4}{3}$. Số nghiệm của (1) chính là số giao điểm của hai đồ thị hàm số.



Dựa vào đồ thị của hai hàm số $y=f(x), y=\dfrac{4}{3}$ ta thấy hai đồ thị cắt nhau tại 3 điểm phân biệt nên phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt. Vậy phương trình ban đầu có 3 nghiệm phân biệt.

Câu 9. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm thực của phương trình $2f(x)-3=0$ là

A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 1.

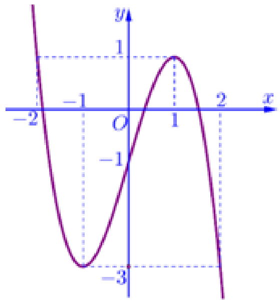
Lời giải

Phương trình $2f(x)-3=0 \Leftrightarrow f(x)=\dfrac{3}{2}$.

Số nghiệm của phương trình đã cho bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ với đường thẳng $y=\dfrac{3}{2}$.

Từ bảng biến thiên suy ra số nghiệm thực của phương trình $2f(x)-3=0$ là 2.

Câu 10. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị $y=f(x)$ như hình vẽ bên. Phương trình $f\left(2-f(x)\right)=0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm phân biệt.



A. 4. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 7.

Lời giải

Chọn B

Theo đồ thị:

$$f(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=a\ \ (-2<a<-1) \\ x=b\ \ (0<b<1) \\ x=c\ \ (1<c<2) \end{array}\right. \Rightarrow f\left(2-f(x)\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2-f(x)=a \\ 2-f(x)=b \\ 2-f(x)=c \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=2-a\ (1) \\ f(x)=2-b\ (2) \\ f(x)=2-c\ (3) \end{array}\right.$$

Nghiệm của phương trình (1); (2); (3) là giao điểm của đường thẳng $y=2-a$; $y=2-b$; $y=2-c$ với đồ thị hàm số $f(x)$.

- $a\in(-2;1)\Rightarrow 2-a\in(3;4)$ suy ra phương trình (1) có đúng 1 nghiệm.
- $b\in(0;1)\Rightarrow 2-b\in(1;2)$ suy ra phương trình (2) có đúng 1 nghiệm.
- $c\in(1;2)\Rightarrow 2-c\in(0;1)$ suy ra phương trình (3) có 3 nghiệm phân biệt.

Kết luận: Có tất cả 5 nghiệm phân biệt.

Câu 11. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $2f(x)+m=0$ có 4 nghiệm phân biệt?

A. 4. **B.** 5. **C.** 2. **D.** 6.

Lời giải

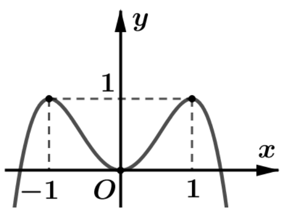
Chọn B

Ta có: $2f(x)+m=0 \Leftrightarrow f(x)=\dfrac{-m}{2}$ $(*)$.

Phương trình $(*)$ có 4 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ đường thẳng $(d): y=\dfrac{-m}{2}$ cắt đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại 4 điểm phân biệt $\Leftrightarrow -2<\dfrac{-m}{2}<1 \Leftrightarrow -2<m<4$.

Do $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{-1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3\}$. **Chọn B.**

Câu 12. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Hỏi có bao nhiêu điểm trên đường tròn lượng giác biểu diễn nghiệm của phương trình $f\left[f(\cos 2x)\right]=0$?

A. 1 điểm. **B.** 3 điểm. **C.** 4 điểm. **D.** Vô số.

Lời giải

ChọnC

Dựa vào đồ thị ta thấy khi $x \in [-1;1]$ thì $y \in [0;1]$.

Do đó nếu đặt $t = \cos 2x$ thì $t \in [-1;1]$, khi đó $f(\cos 2x) \in [0;1]$.

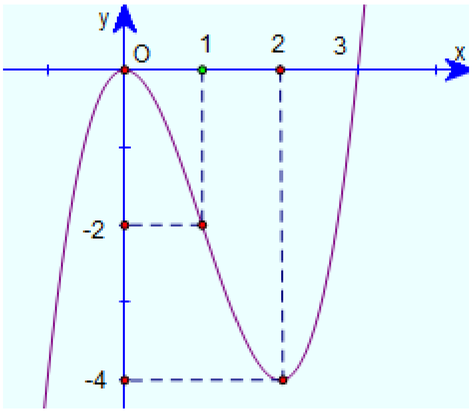
Dựa vào đồ thị, ta có $f\left[f(\cos 2x)\right] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(\cos 2x) = 0 \\ f(\cos 2x) = a\ (a < -1)\ (\text{loại}) \\ f(\cos 2x) = b\ (b > 1)\ (\text{loại}) \end{array}\right.$.

Phương trình $f(\cos 2x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x = 0 \\ \cos 2x = a\ (a < -1)\ (\text{loại}) \\ \cos 2x = b\ (b > 1)\ (\text{loại}) \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \cos 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$.

Vậy phương trình đã cho có 4 điểm biểu diễn nghiệm trên đường tròn lượng giác.

Câu 13. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị hàm số như hình vẽ dưới đây



Tìm số nghiệm thực của phương trình $f\left(\sqrt{-x^2 + 4x - 3}\right) = -2$.

A. 1 **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

ChọnA

Ta có $\sqrt{-x^2 + 4x - 3}$ xác định khi $1 \le x \le 3$.

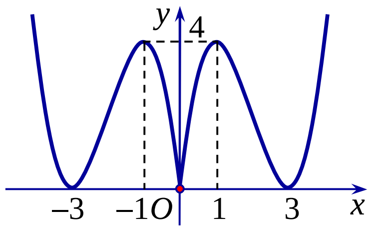
Từ đồ thị của hàm số, ta có

$$f\left(\sqrt{-x^2 + 4x - 3}\right) = -2 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \sqrt{-x^2 + 4x - 3} = a < 0\ (\text{loại}) \\ \sqrt{-x^2 + 4x - 3} = 1 \\ \sqrt{-x^2 + 4x - 3} = b \in (2;3) \end{array}\right..$$

- $\sqrt{-x^2 + 4x - 3} = 1 \Leftrightarrow x = 2$.
- $\sqrt{-x^2 + 4x - 3} = b \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 + b^2 = 0$ có $\Delta' = 4 - (3 + b^2) = 1 - b^2 < 0, \forall b \in (2;3)$.

Vậy phương trình $f\left(\sqrt{-x^2 + 4x - 3}\right) = -2$ có đúng 1 nghiệm.

Câu 14. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $2f(2|\sin x| + 1) = m$ có nghiệm thuộc khoảng $(0;\pi)$ là



A. $[0;4)$. **B.** $(0;4)$. **C.** $(1;3)$. **D.** $[0;8)$.

Lời giải

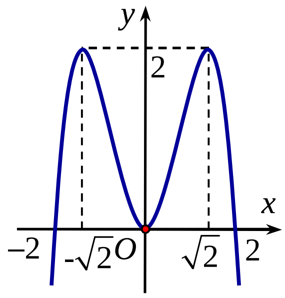
Chọn D

Đặt $t=2|\sin x|+1$. Với $x\in(0;\pi)$ thì $t\in(1;3]$.

Do đó phương trình $2f\left(2|\sin x|+1\right)=m$ có nghiệm thuộc khoảng $(0;\pi)$ khi và chỉ khi phương trình $f(t)=\dfrac{m}{2}$ có nghiệm thuộc nửa khoảng $(1;3]$.

Quan sát đồ thị ta suy ra điều kiện của tham số m là $\dfrac{m}{2}\in[0;4)\Leftrightarrow m\in[0;8)$.

Câu 15. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f\left(\sqrt{2-x^2}\right)=m$ có nghiệm là:



A. $\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$. **B.** $(0;2)$. **C.** $(-2;2)$. **D.** $[0;2]$.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện của phương trình: $x\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$.

Đặt $t=\sqrt{2-x^2}$. Với $x\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$ thì $t\in\left[0;\sqrt{2}\right]$.

Do đó phương trình $f\left(\sqrt{2-x^2}\right)=m$ có nghiệm khi và chỉ khi phương trình $f(t)=m$ có nghiệm thuộc đoạn $\left[0;\sqrt{2}\right]$.

Quan sát đồ thị ta suy ra điều kiện của tham số m là $m\in[0;2]$.

Câu 16. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	2	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm thực của phương trình $3f(x)-5=0$ là

A. 4. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

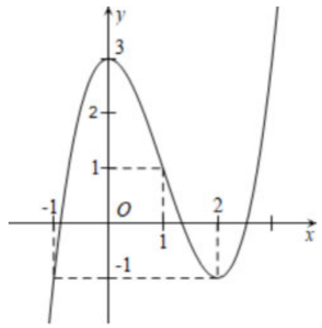
Ta có $3f(x)-5=0 \Leftrightarrow 3f(x)=5 \Leftrightarrow f(x)=\dfrac{5}{3}$.

Số nghiệm của phương trình là số giao điểm của hai đồ thị $y=f(x)$ và đường thẳng $y=\dfrac{5}{3}$.

Dựa vào BBT ta thấy đường thẳng $y=\dfrac{5}{3}$ cắt đồ thị $y=f(x)$ tại 4 điểm phân biệt.

Vậy phương trình có 4 nghiệm thực phân biệt.

Câu 17. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau.



Số nghiệm của phương trình $[f(x^2+1)]^2-f(x^2+1)-2=0$ là:

A. 1. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 5.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t=x^2+1 \Rightarrow t \geq 1$.

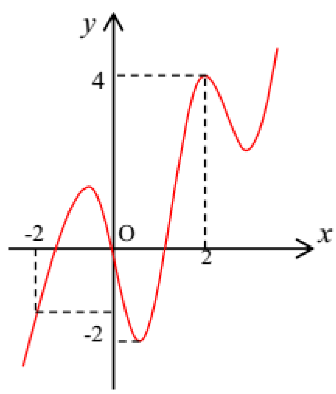
Ta thấy ứng với $t=1$ cho ta một giá trị của x và ứng với mỗi giá trị $t>1$ cho ta hai giá trị của x.

Phương trình đã cho trở thành: $\left[f(t)\right]^2-f(t)-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(t)=-1 \\ f(t)=2 \end{array}\right.$.

Từ đồ thị hàm số $y=f(t)$ trên $[1;+\infty)$ suy ra phương trình $f(t)=-1$ có 1 nghiệm $t=2$ và phương trình $f(t)=2$ có 1 nghiệm $t>2$ do đó phương trình đã cho có 4 nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm.

Câu 18. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m $[-10;\ 10]$ để phương trình $f\left(x^3-3x^2+2\right)=m^2-3m$ có nghiệm thuộc nửa khoảng $[1;3)$.



A. 21. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 4.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t=x^3-3x^2+2$.

Vì $1 \leq x < 3 \Rightarrow -2 \leq t < 2$.

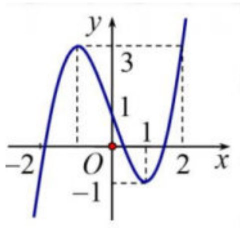
Phương trình $f\left(x^3-3x^2+2\right)=m^2-3m \Leftrightarrow f(t)=m^2-3m$ với $t \in [-2;2)$.

Phương trình có nghiệm thuộc nửa khoảng $[1;3) \Leftrightarrow -2 \le m^2 - 3m < 4 \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 3m + 2 \ge 0 \\ m^2 - 3m - 4 < 0 \end{cases}$.

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1 < m \le 1 \\ 2 \le m < 4 \end{array}\right.$

Vậy trên đoạn $[-10;\ 10]$ có 4 giá trị nguyên thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 19. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f(x) = 2$ là:

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

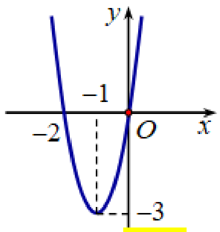
Lời giải

Chọn C

Số nghiệm của phương trình $f(x) = 2$ là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = 2$. Dựa vào đồ thị ta thấy số giao điểm là 3.

Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm phân biệt.

Câu 20. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ. Phương trình $f(f(x)) = -3$ có tất cả bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?



A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3

Lời giải

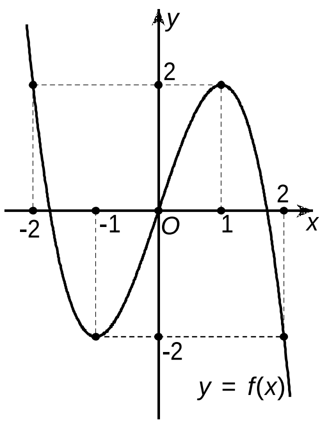
Chọn C

Từ đồ thị ta có $f(f(x)) = -3 \Leftrightarrow f(x) = -1$.

Cũng từ đồ thị ta thấy ta có đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt đường thẳng $y = -1$ tại hai điểm phân biệt nên phương trình $f(x) = -1$ có hai nghiệm phân biệt.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt.

Câu 21. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Phương trình $f\left(f\left(x\right)\right)=2$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 3 **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Chọn C

Dựa vào đồ thị của hàm số ta có:

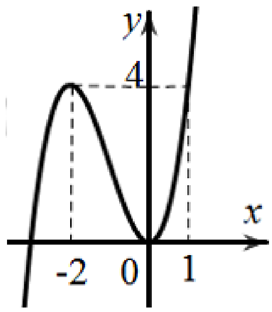
$$f\left(f\left(x\right)\right)=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f\left(x\right)=-2\\ f\left(x\right)=1\end{array}\right..$$

Số nghiệm của các phương trình $f\left(x\right)=-2$ và $f\left(x\right)=1$ lần lượt là số giao điểm đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ và các đường thẳng $y=-2,y=1$.

Dựa vào đồ thị ta có $f\left(x\right)=-2$ có hai nghiệm phân biệt $x_1=-1;x_2=2$ và $f\left(x\right)=1$ có ba nghiêm $x_3=a;x_4=b;x_5=c$ sao cho $-2<a<-1<b<1<c<2$.

Vậy phương trình $f\left(f\left(x\right)\right)=2$ có 5 nghiệm phân biệt.

Câu 22. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f\left(x^2+2x-2\right)=3m+1$ có nghiệm thuộc khoảng $\left[0;1\right]$..



A. $\left[0;4\right]$. **B.** $\left[-1;0\right]$. **C.** $\left[0;1\right]$. **D.** $\left[-\frac{1}{3};1\right]$

Lời giải

Chọn.D.

Đặt $t=x^2+2x-2$. Với $x\in\left[0;1\right]\Rightarrow t\in\left[-2;1\right]$.

Phương trình $f\left(x^2+2x-2\right)=3m+1$ có nghiệm thuộc đoạn $\left[0;1\right]$ khi và chỉ khi phương trình $f\left(t\right)=3m+1$ có nghiệm thuộc $\left[-2;1\right]\Leftrightarrow 0\le 3m+1\le 4\Leftrightarrow -\frac{1}{3}\le m\le 1$.

Câu 23. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm phương trình $f\left(x\right)-2020=0$ là

A. 2. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 3

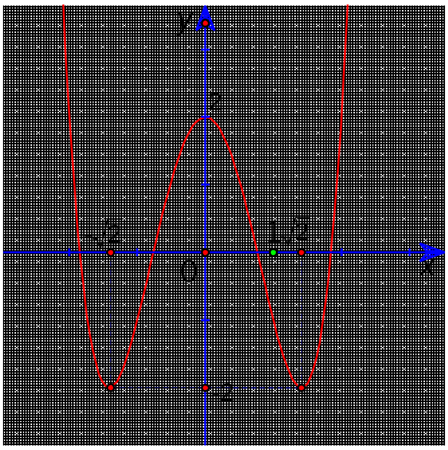
Lời giải

Chọn C

Ta có $f\left(x\right)-2020=0\Leftrightarrow f\left(x\right)=2020$.

Từ bảng biến thiên ta có đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ cắt đường thẳng $y=2020$ tại 1 điểm nên phương trình đã cho có 1 nghiệm.

Câu 24. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình bên dưới



Số nghiệm của phương trình $2f\left(x\right)-7=0$ là:

A. 4. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

$2f\left(x\right)-7=0\Leftrightarrow f\left(x\right)=\frac{7}{2}$.

Dựa vào đồ thị ta thấy đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ và đường thẳng $y=\frac{7}{2}$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt.

Vậy phương trình $2f\left(x\right)-7=0$ có 2 nghiệm phân biệt.

Câu 25. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm của phương trình $f\left(x\right)+1=0$ là?

A. 1. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 2.

Lời giải

Phương trình $f\left(x\right)+1=0\Leftrightarrow f\left(x\right)=-1$.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trình vô nghiệm

Chọn C

Câu 26. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	5	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Phương trình $f\left(1-3x\right)=6$ có bao nhiêu nghiệm âm?

A. 1. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 2.

Lời giải

Xét $g(x)=f(1-3x)\Rightarrow g'(x)=-3f(1-3x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}1-3x=-1\\1-3x=3\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{2}{3}\\x=-\dfrac{2}{3}\end{array}\right.$.

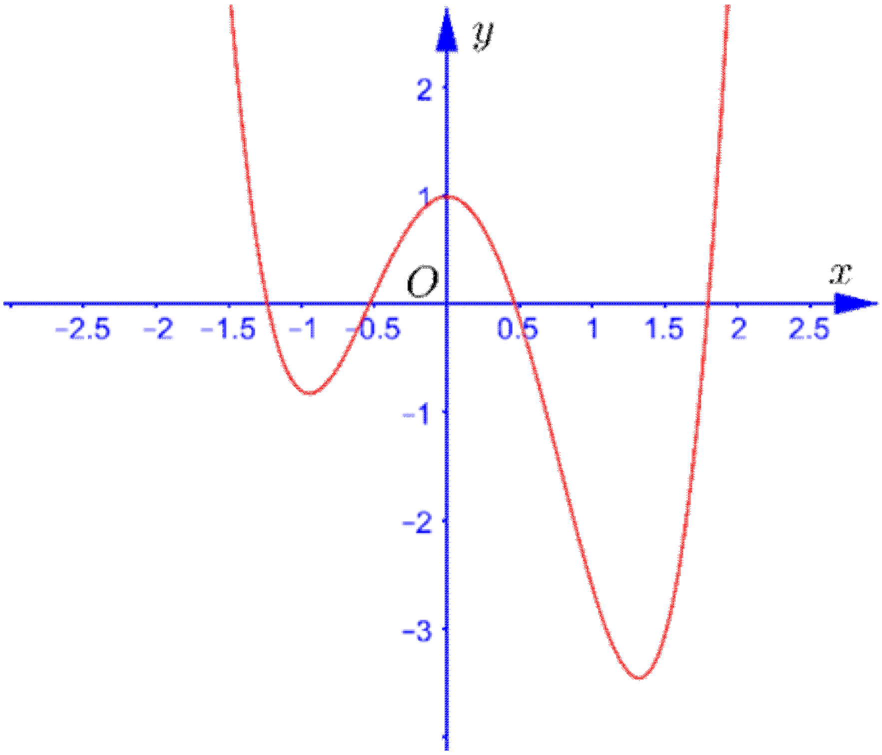
Bảng biến thiên

x	$+\infty$		$-\frac{2}{3}$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	-3	↗	5	↘	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trình $f(1-3x)=6$ có một nghiệm âm.

Chọn **A.**

Câu 27. Đồ thị hàm số $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ có dạng như hình vẽ sau.

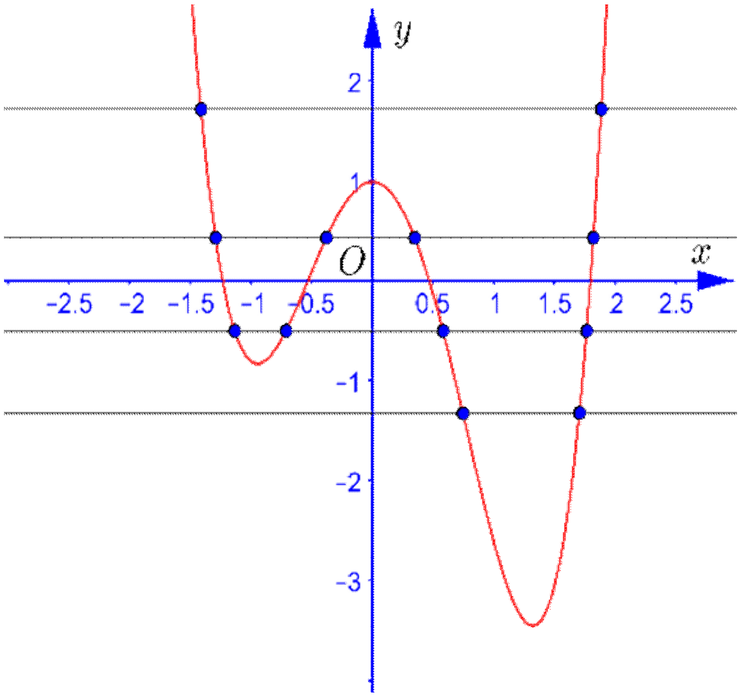


Phương trình $a(f(x))^4+b(f(x))^3+c(f(x))^2+df(x)+e=0$ (*) có số nghiệm là

A. 2. **B.** 6. **C.** 12. **D.** 16.

Hướng dẫn giải

Chọn C.



Ta thấy đồ thị $y = f(x)$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt nên phương trình $f(x) = 0$ có 4 nghiệm phân biệt: $x_1 \in (-1,5;-1)$, $x_2 \in (-1;-0,5)$, $x_3 \in (0;0,5)$, $x_4 \in (1,5;2)$.

Kẻ đường thẳng $y = m$.

Với $m = x_1 \in (-1,5;-1)$ có 2 giao điểm nên phương trình $f(x) = x_1$ có 2 nghiệm.

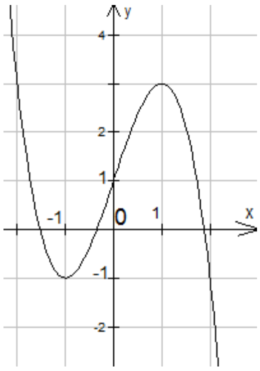
Với $m = x_2 \in (-1;-0,5)$ có 4 giao điểm nên phương trình $f(x) = x_2$ có 4 nghiệm.

Với $m = x_3 \in (0;0,5)$ có 4 giao điểm nên phương trình $f(x) = x_3$ có 4 nghiệm.

Với $m = x_4 \in (1,5;2)$ có 2 giao điểm nên phương trình $f(x) = x_4$ có 2 nghiệm.

Vậy phương trình (*) có 12 nghiệm.

Câu 28. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên.



Số nghiệm phân biệt của phương trình $f(f(x)) = 1$ là

A. 7 . **B.** 8 . **C.** 9 . **D.** 6 .

Lời giải

Chọn A.

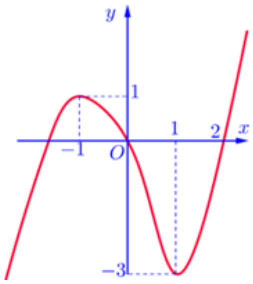
Đặt $f(x) = t$, khi đó $f(t) = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} t = a & (-2 < a < -1) \\ t = 0 & \\ t = b & (1 < b < 2) \end{array}\right.$.

Khi đó ta có $\left[\begin{array}{ll} f(x) = a & (-2 < a < -1) \\ f(x) = 0 & \\ f(x) = b & (1 < b < 2) \end{array}\right.$.

Dựa vào đồ thị ta có phương trình $f(x)=a$ có 1 nghiệm, phương trình $f(x)=0$ có 3 nghiệm, phương trình $f(x)=b$ có 3 nghiệm. Và các nghiệm này không trùng nhau.

Vậy phương trình $f(f(x))=1$ có 7 nghiệm.

Câu 29. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị $y=f(x)$ như hình vẽ bên. Số nghiệm thực của phương trình $f\left(2+f\left(\mathrm{e}^x\right)\right)=1$ là

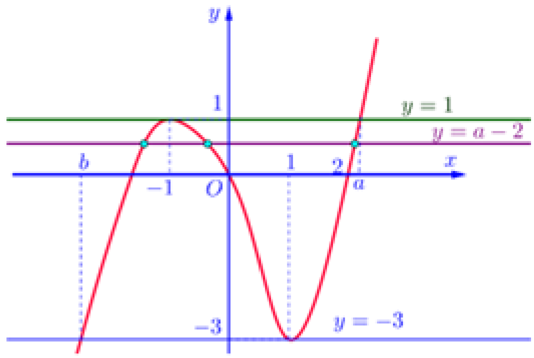


A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Ta có:



Theo đồ thị :

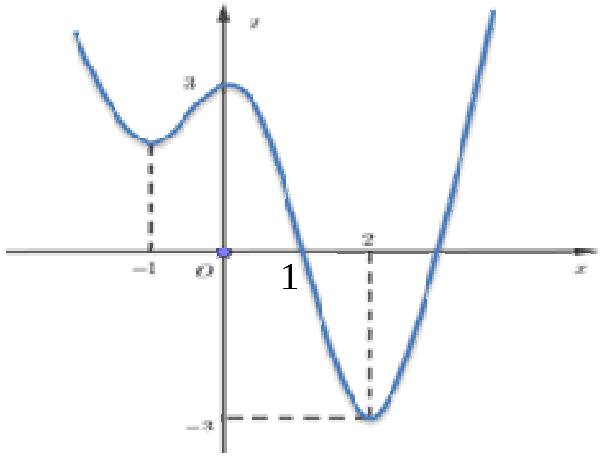
$$f\left(2+f\left(\mathrm{e}^x\right)\right)=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2+f\left(\mathrm{e}^x\right)=-1 \\ 2+f\left(\mathrm{e}^x\right)=a,(2<a<3) \end{array}\right.$$

$$2+f\left(\mathrm{e}^x\right)=-1 \Leftrightarrow f\left(\mathrm{e}^x\right)=-3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \mathrm{e}^x=1 \\ \mathrm{e}^x=b<-1(L) \end{array}\right. \Leftrightarrow x=0$$

$$2+f\left(\mathrm{e}^x\right)=a \Leftrightarrow f\left(\mathrm{e}^x\right)=a-2,(0<a-2<1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \mathrm{e}^x=c<-1(L) \\ \mathrm{e}^x=d<0(L) \\ \mathrm{e}^x=t>2 \end{array}\right. \Leftrightarrow x=\ln t$$

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt.

Câu 30. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f\left(\mathrm{e}^x\right)=m$ có nghiệm thuộc khoảng $(0;\ln 2)$.



A. $(-3;0)$. **B.** $(-3;3)$. **C.** $(0;3)$. **D.** $[-3;0]$

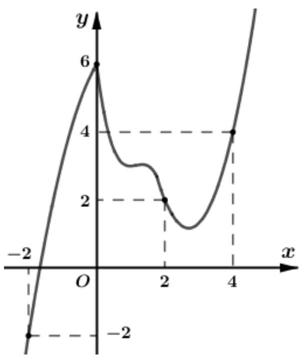
Lời giải

Chọn A

Đặt $t = e^x$. Với $x \in (0;\ln 2) \Rightarrow t \in (1;2)$

Phương trình $f(e^x) = m$ có nghiệm thuộc khoảng $(0;\ln 2)$ khi và chỉ khi phương trình $f(t) = m$ có nghiệm thuộc khoảng $(1;2) \Leftrightarrow -3 < m < 0$.

Câu 31. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $f(2\log_2 x) = m$ có nghiệm duy nhất trên $\left[\frac{1}{2};2\right)$.



A. 9. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 4

Lời giải

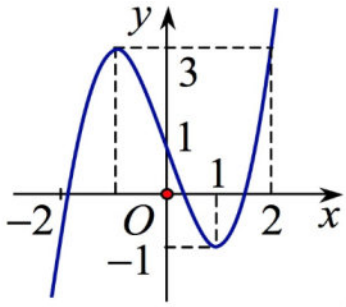
Chọn.B

Đặt $t = 2\log_2 x$, $x \in \left[\frac{1}{2};2\right) \Rightarrow t \in [-2;2)$. Với mỗi $t \in [-2;2)$ thì phương trình $2\log_2 x = t$ có một nghiệm duy nhất trên $\left[\frac{1}{2};2\right)$.

Phương trình $f(2\log_2 x) = m$ có nghiệm duy nhất thuộc đoạn $\left[\frac{1}{2};2\right)$ khi và chỉ khi phương trình $f(t) = m$ có nghiệm duy nhất thuộc $[-2;2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2 \le m \le 2 \\ m = 6 \end{array}\right.$

$\Rightarrow$ có 6 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 32. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây



Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $8f\left(e^x\right)=m^2-1$ có hai nghiệm thực phân biệt là

A. 5. **B.** 4. **C.** 7. **D.** 6.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t=e^x\,(t>0)$ phương trình trở thành $8f(t)=m^2-1 \Leftrightarrow f(t)=\dfrac{m^2-1}{8}$ (1).

với $t>0$ cho ta duy nhất một nghiệm $x=\ln t$. Vậy phương trình có đúng hai nghiệm thực phân biệt khi và chỉ khi (1) có đúng hai nghiệm $t>0$.

Từ đồ thị ta suy ra phương trình (1) có đúng hai nghiệm $t>0$ khi và chỉ khi:

$$-1<\frac{m^2-1}{8}<1 \Leftrightarrow -3<m<3.$$

Vậy có 5 số nguyên thỏa mãn.

Dạng 2: Biết đồ thị hoặc BBT của hàm số $y=f(x)$, xét các bài toán liên quan đến phương trình có dạng $f(x)=g(m)$, $f(u(x))=g(m)$.

Câu 1. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	1	↗	2	↘	1	↗	$+\infty$

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(x)-m=0$ có 4 nghiệm phân biệt

A. $m\in(1;2]$. **B.** $m\in[1;2)$. **C.** $m\in(1;2)$. **D.** $m\in[1;2]$.

Fece: Chính Nguyễn

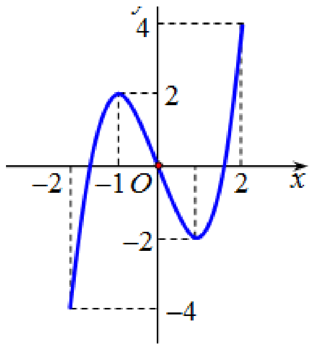
Lời giải

Chọn C.

Phương trình $f(x)-m=0 \Leftrightarrow f(x)=m\ (*)$.

Dựa vào đồ thị hàm số $y=f(x)$, phương trình $(*)$ có 4 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow 1<m<2$.

Câu 2. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[-2;2]$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ sau.



Tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(x)=m$ có 3 nghiệm phân biệt trên đoạn $[-2;2]$ là

A. $m\in(2;+\infty)$. **B.** $m\in[-2;2]$. **C.** $m\in(-2;3)$. **D.** $m\in(-2;2)$.

Face: Hà Dũng

Lời giải

Chọn D.

Số nghiệm của phương trình $f(x)=m$ bằng số điểm chung của đồ thị hàm số $y=f(x)$ (hình vẽ) và đường thẳng $y=m$.

Nhìn vào đồ thị ta thấy để phương trình có 3 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $m\in(-2;2)$.

Câu 3. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	‖	$+$	‖	$+$	‖	$+$	
y	-2	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	-1	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	2

Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của thàm số m sao cho phương trình $f(x)=m$ có ba nghiệm thực phân biệt.

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

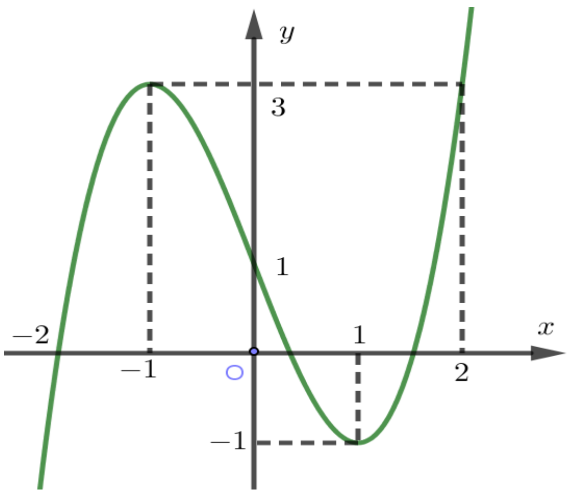
Chọn D

Căn cứ bảng biến thiên ta thấy:

Phương trình $f(x)=m$ có ba nghiệm phân biệt khi $-2<m<2$

Vậy có 3 giá trị nguyên của m thỏa mãn ycbt.

Câu 4. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây



Số các giá trị nguyên của tham số m không vượt quá 5 để phương trình $f\left(\pi^x\right)-\frac{m^2-1}{8}=0$ có hai nghiệm phân biệt là

A. 5. **B.** 4 . **C.** 7 . **D.** 6.

Fece: Chính Nguyễn

Lời giải

Chọn A

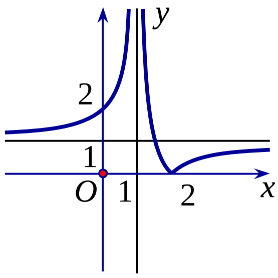
$f\left(\pi^x\right)-\frac{m^2-1}{8}=0 \quad (1)$.

Đặt $t=\pi^x$. Điều kiện $t>0$. (1) trở thành $f(t)=\frac{m^2-1}{8} \quad (2)$.

Vì với mỗi nghiệm $t>0$ của phương trình (2) cho đúng một nghiệm $x=\log_\pi t$ của phương trình (1) nên (1) có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi (2) có đúng hai nghiệm phân biệt trên $(0;+\infty)$. Dựa vào đồ thị ta thấy điều này xảy ra khi và chỉ khi $-1<\frac{m^2-1}{8}<1$.

$$\begin{cases} m\in\mathbb{Z} \\ m\le 5 \\ -1<\dfrac{m^2-1}{8}<1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\in\mathbb{Z} \\ m\le 5 \\ -3<m<3 \end{cases} \Leftrightarrow m\in\{-2;-1;0;1;2\}.$$

Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(\log_2 x)=m$ có nghiệm thuộc khoảng $(1;+\infty)$ là

A. $(1;+\infty)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $[0;+\infty)$. **D.** $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Face: Điểm Đàm

Lời giải

Chọn C

Đặt $t=\log_2 x$. Với $x\in(1;+\infty)$ thì $t\in(0;+\infty)$.

Do đó phương trình $f(\log_2 x)=m$ có nghiệm thuộc khoảng $(1;+\infty)$ khi và chỉ khi phương trình $f(t)=m$ có nghiệm thuộc khoảng $(0;+\infty)$.

Quan sát đồ thị ta suy ra điều kiện của tham số m là $m\in[0;+\infty)$.

Câu 6. Hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau.

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	-9	$\nearrow$	7	$\searrow$	-9	$\nearrow$	$+\infty$

Số các giá trị nguyên của m để phương trình $f(x^3+1)=m$ có 4 nghiệm phân biệt là

A. 15. **B.** 7 . **C.** 17 . **D.** 8 .

Face: Nguyễn Văn Sang

Lời giải

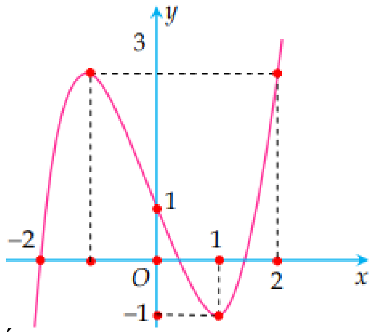
Chọn A

Đặt $t = x^3 + 1$, phương trình $f(x^3+1) = m$ trở thành $f(t) = m$. Do $y = x^3 + 1$ là hàm số đồng biến nên ta có bảng biến thiên hàm số $y = f(t)$ cũng là

t	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	-9	$\nearrow$	7	$\searrow$	-9	$\nearrow$	$+\infty$

Để phương trình $f(x^3+1) = m$ có 4 nghiệm phân biệt thì $-9 < m < 7$. Do đó có 15 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 7. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây:



Hỏi có tất cả bao nhiêu số nguyên dương m nhỏ hơn 100 để phương trình $f\left(x^2\right) - m^2 + 2020 = 0$ có đúng hai nghiệm phân biệt là

A. 55. **B.** 56. **C.** 54. **D.** 99.

Face : Hoàng Ngọc Hùng

Lời giải

Chọn A

Đặt $t = x^2, t \geq 0$. Phương trình đã cho trở thành $f(t) = m^2 - 2020 \ (1)$

Phương trình đã cho có đúng hai nghiệm phân biệt khi phương trình (1) có đúng 1 nghiệm dương.

Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ ta có $m^2 - 2020 \geq 1 \Leftrightarrow m^2 \geq 2021 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \geq \sqrt{2021} \\ m \leq -\sqrt{2021} \end{array}\right.$.

Do m nguyên dương và nhỏ hơn 100 nên $m \in \{45; 46; 47, ..., 99\}$. Vậy có 55 số thỏa mãn.

Câu 8. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên của y' như hình vẽ.

x	$-\infty$		-1		1		4		$+\infty$
y'	$-\infty$	$\nearrow$	7	$\searrow$	-5	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\infty$

Tìm m để phương trình $f(x+2) = m + x$ có nghiệm $x \in [-1; 2]$.

A. $f(4) - 2 < m < f(1) + 1$. **B.** $f(4) - 2 \leq m \leq f(1) + 1$.

C. $m \leq f(1) + 1$. **D.** $-5 \leq m \leq -1$.

Face : Hoàng Ngọc Hùng

Lời giải

Chọn B

Ta có $f(x+2)=m+x \Leftrightarrow m=f(x+2)-x$

Với $x\in[-1;2]$ thì $x+2\in[1;4]$

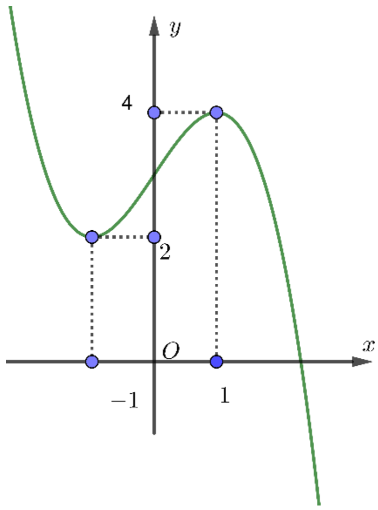
Từ bảng biến thiên ta thấy $f'(x+2)\in[-5;-1]$ nên $f'(x+2)<0\ \forall x\in[-1;2]$ suy ra hàm số $y=f(x+2)$ nghịch biến trên $(-1;2)$ $\Rightarrow f(4)\le f(x+2)\le f(1),\ \forall x\in[-1;2]$.

Mặt khác ta có $\Rightarrow -2\le -x\le 1,\ \forall x\in[-1;2]$.

Từ đó $f(4)-2\le f(x+2)-x\le f(1)+1\ \forall x\in[-1;2]$.

Để phương trình $f(x+2)=m+x$ có nghiệm $x\in[-1;2]$ điều kiện m là $f(4)-2\le m\le f(1)+1$.

Câu 9. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong như hình vẽ. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để phương trình $f(x^2-4x+5)+1=m$ có nghiệm ?



A. 5. **B.** 6. **C.** 4. **D.** Vô số.

Face: Trần Quốc Đại

Lời giải

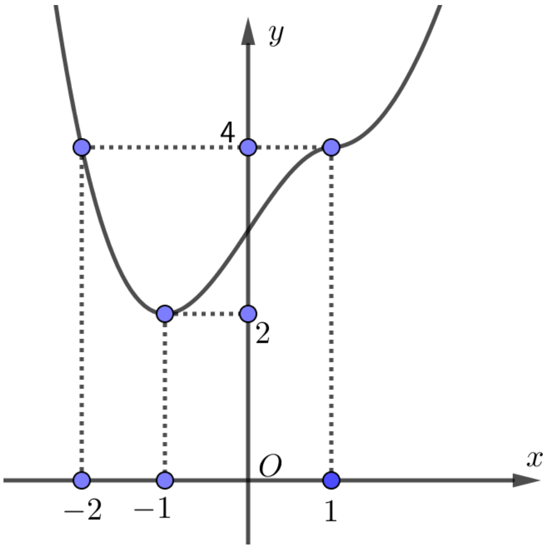
Chọn A

Đặt $t=x^2-4x+5$ suy ra $t\ge 1$, ta có phương trình $f(t)=m-1$

Dựa vào đồ thị phương trình $f(t)=m-1$ có nghiệm $t\ge 1$ khi và chỉ khi

$m-1\le 4 \Leftrightarrow m\le 5$ Suy ra có 5 giá trị nguyên của m.

Câu 10. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong như hình vẽ. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của $m\in(-10;10)$ để phương trình $f(x^2-4x+5)=f(m)$ có nghiệm ?



A. 17 . **B.** 16 . **C.** 18 . **D.** Vô số.

Face: Trần Quốc Đại

Lời giải

Chọn A

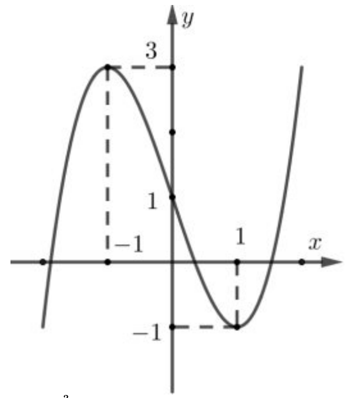
Đặt $t = x^2 - 4x + 5$ suy ra $t \ge 1$, ta có phương trình $f(t) = f(m)$

Dựa vào đồ thị phương trình $f(t) = f(m)$ có nghiệm $t \ge 1$ khi và chỉ khi

$f(m) \ge 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \le -2 \\ m \ge 1 \end{array}\right.$. Suy ra các giá trị nguyên của $m \in (-10;10)$ là $-9 \le m \le -2 \vee 1 \le m \le 9$

Vậy có 17 số nguyên

Câu 11. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Tìm các giá trị thực của m để phương trình $f(\cos x) = m$ có nghiệm thuộc khoảng $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$:

A. $m \in [-1;3)$. **B.** $m \in (-1;1)$. **C.** $m \in [-1;1)$. **D.** $m \in (-1;3)$.

Face: Bích Nguyễn

Lời giải

Chọn C

Đặt $t = \cos x$, do $x \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow t \in (0;1]$. Phương trình trở thành $f(t) = m$

Phương trình $f(\cos x) = m$ có nghiệm thuộc khoảng $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ khi và chỉ khi phương trình $f(t) = m$ có nghiệm $t \in (0;1] \Leftrightarrow$ Đường thẳng $y = m$ có điểm chung với đồ thị hàm số $f(t)$ trên nửa khoảng $(0;1]$.

Dựa vào đồ thị hàm số đã cho ta có giá trị cần tìm của m là $m \in [-1;1)$.

Câu 12. Giả sử tồn tại hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
y	0	↘	-2	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0	↗	1

Tìm tập hợp tất cả các giá trị của thàm số m sao cho phương trình $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = m$ có nghiệm.

A. $[-2;1]$. **B.** $[-2;1)$. **C.** $(-\infty;+\infty)$.
D. $(-2;+\infty)$.

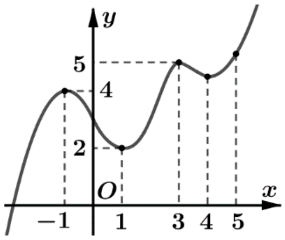
Lời giải

Chọn B

Đặt $t = x + \frac{1}{x}$ Khi đó: $\left[\begin{array}{l} t \geq 2 \\ t \leq -2 \end{array}\right.$. Căn cứ bảng biến thiên ta thấy:

Phương trình $f(t) = m$ có nghiệm khi $-2 \leq m < 1$.

Câu 13. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(x^2 - 2x) = m$ có đúng 4 nghiệm thực phân biệt thuộc đoạn $\left[-\frac{3}{2};\frac{7}{2}\right]$?



A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t = x^2 - 2x$, với $x \in \left[-\frac{3}{2};\frac{7}{2}\right]$ thì $t \in \left[-1;\frac{21}{4}\right]$.

x	$\frac{-3}{2}$		1		$\frac{7}{2}$
$t'(x)$		$-$	0	$+$	
$t(x)$	$\frac{21}{4}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$\frac{21}{4}$

Dựa vào BBT ta thấy: với mỗi $t \in \left(-1;\frac{21}{4}\right]$ sẽ cho hai nghiệm x và với $t = -1$ sẽ cho một nghiệm x.

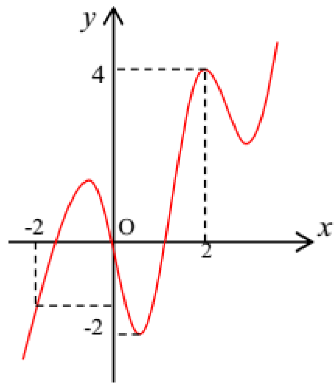
Do đó phương trình $f(x^2 - 2x) = m$ có đúng 4 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $\left[-\frac{3}{2};\frac{7}{2}\right]$

$\Leftrightarrow f(t) = m$ có đúng 2 nghiệm phân biệt thuộc $\left(-1;\frac{21}{4}\right]$.

Dựa vào đồ thị ta có $f(t) = m$ với $t \in \left(-1;\frac{21}{4}\right]$ có đúng 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2 < m < 4 \\ m = 5 \\ m = f(4) \end{array}\right.$.

Vì m nguyên nên $m = 3, m = 5$. Vậy chọn đáp án **B.**

Câu 14. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên R và có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(x^3 - 3x^2 + 2) = m^2 - 3m$ có nghiệm thuộc nửa khoảng $[1;3)$ là



A. $[-1;1)\cup(2;4]$. **B.** $(1;\ 2)\cup[4;\ +\infty)$. **C.** $(-\infty;-1]\cup(2;4)$. **D.** $(-1;1]\cup[2;4)$.

Lời giải

Chọn D

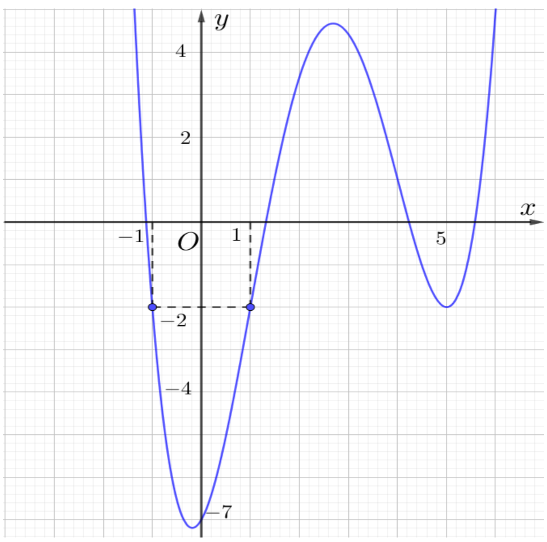
Đặt $t=x^3-3x^2+2$.

Vì $1\le x<3\Rightarrow -2\le t<2$.

Phương trình $f\left(x^3-3x^2+2\right)=m^2-3m \Leftrightarrow f\left(t\right)=m^2-3m$ với $t\in[-2;2)$.

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow -2\le m^2-3m<4 \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-3m+2\ge 0 \\ m^2-3m-4<0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1<m\le 1 \\ 2\le m<4 \end{array}\right.$.

Câu 15. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ.



Tồn tại bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\sin x\right)=m$ có đúng hai nghiệm thuộc khoảng $\left(0;\pi\right)$?

A. 7. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 4.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t=\sin x\left(x\in\left(0;\pi\right)\Rightarrow 0<t\le 1\right)$.

Nhận xét: với mỗi giá trị t thỏa mãn $0<t<1$ cho tương ứng hai giá trị x_0 và $\left(\pi-x_0\right)$ thuộc khoảng $\left(0;\pi\right)$.

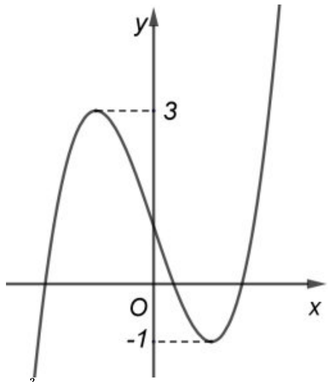
Phương trình $f\left(\sin x\right)=m$ có đúng hai nghiệm thuộc khoảng $\left(0;\pi\right)$

$\Leftrightarrow$ Phương trình $f\left(t\right)=m$ có đúng 1 nghiệm thuộc khoảng $\left(0;1\right)$

$\Leftrightarrow -7<m<-2$. Mà: $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m\in\left\{-3;-4;-5;-6\right\}$.

Vậy có 4 giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\sin x\right)=m$ có đúng hai nghiệm thuộc khoảng $\left(0;\pi\right)$.

Câu 16. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong như hình vẽ dưới đây:



Có bao nhiêu giá trị của tham số *m* để phương trình $f(x) = f(m)$ có đúng 2 nghiệm?

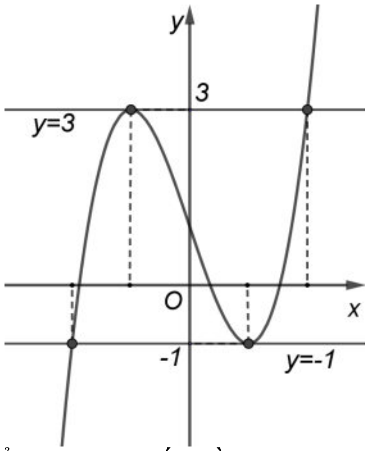
A. 4. **B.** 3. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

Dựa vào đồ thị hàm số thì phương trình $f(x) = f(m)$ có đúng 2 nghiệm $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(m) = -1 \\ f(m) = 3 \end{array}\right.$ (1).

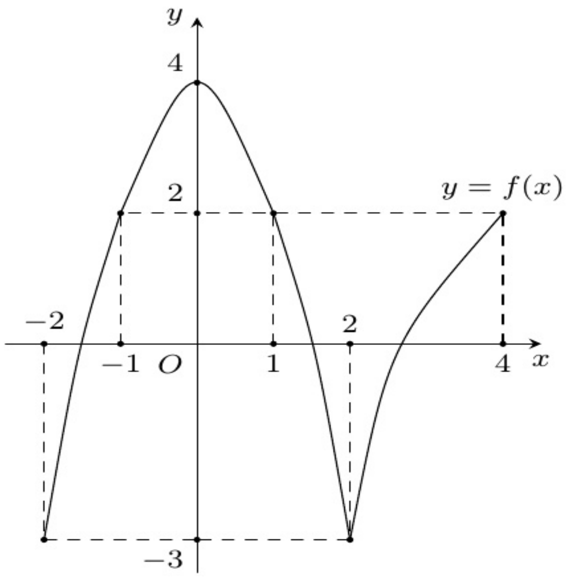
Số giá trị *m* thỏa mãn (1) chính là số nghiệm *x* của hệ $\left[\begin{array}{l} f(x) = -1 \\ f(x) = 3 \end{array}\right.$ (2).



Lại dựa vào đồ thị thì đường thẳng $y = 3$ cắt đồ thị hàm số đã cho tại hai điểm phân biệt, đường thẳng $y = -1$ cũng cắt đồ thị hàm số đã cho tại hai điểm phân biệt, 4 điểm này có hoành độ khác nhau nên hệ (2) có 4 giá trị *x* thỏa mãn. Vậy có 4 giá trị của tham số *m* thỏa mãn bài toán.

Dạng 3: Biết đồ thị hoặc BBT của hàm số $y = f(x)$, xét các bài toán liên quan đến phương trình có dạng $f(x) = f(m)$, $f(u(x)) = f(m)$.

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có liên tục trên đoạn $[-2;4]$ và có đồ thị như hình sau



Tìm tất cả các số nguyên m để phương trình $f\left(3-x\right)=f\left(m\right)$ có hai nghiệm thuộc đoạn $\left[-1;5\right]$.

A. 2. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t=3-x$. Với $x\in\left[-1;5\right]$ ta suy ra $t\in\left[-2;4\right]$.

Khi đó, mỗi $t\in\left[-2;4\right]$ cho ta một $x\in\left[-1;5\right]$.

Do đó phương trình $f\left(3-x\right)=f\left(m\right)$ có hai nghiệm thuộc đoạn $\left[-1;5\right]$ khi và chỉ khi phương trình $f\left(t\right)=f\left(m\right)$ (*) có hai nghiệm thuộc đoạn $\left[-2;4\right]$.

Từ đồ thị của hàm số $f\left(x\right)$, ta suy ra phương trình (*) có hai nghiệm khi và chỉ khi:

$$\left[\begin{array}{ll} f\left(m\right)=-3 & (1) \\ 2<f\left(m\right)<4 & (2) \end{array}\right..$$

Mặt khác, từ đồ thị của hàm số $f\left(x\right)$, ta suy ra $f\left(-1\right)=f\left(1\right)=f\left(4\right)=2$ và

$$f\left(x\right)=-3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=2 \end{array}\right..$$

Do đó $\left(1\right)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} m=-2 \\ m=2 \end{array}\right..$

Trên khoảng $\left(-2;0\right)$ hàm số $f\left(x\right)$ đồng biến, suy ra

$$2<f\left(m\right)<4\Leftrightarrow f\left(-1\right)<f\left(m\right)<f\left(0\right)\Leftrightarrow -1<m<0.$$

Trên khoảng $\left(0;2\right)$ hàm số $f\left(x\right)$ nghịch biến, suy ra

$$2<f\left(m\right)<4\Leftrightarrow f\left(1\right)<f\left(m\right)<f\left(0\right)\Leftrightarrow 0<m<1.$$

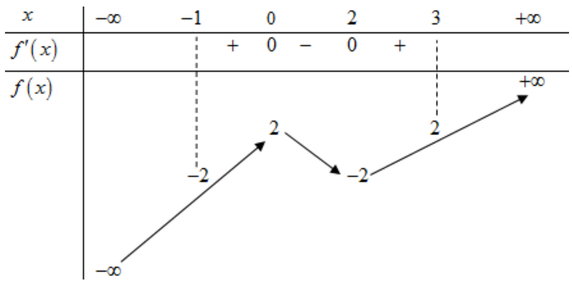
Do đó $\left(2\right)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} -1<m<0 \\ 0<m<1 \end{array}\right..$

Suy ra tập hợp các giá trị m cần tìm là $\left(-1;0\right)\cup\left(0;1\right)\cup\left\{-2;2\right\}$.

Vì $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\left\{-2;2\right\}$.

Vậy có hai số nguyên thỏa mãn yêu cầu của bài toán.

Câu 2. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như hình vẽ



Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $f\left(1-2\sin x\right)=f\left(|m|\right)$ có nghiệm thực?

A. 6. **B.** 7. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Chọn B

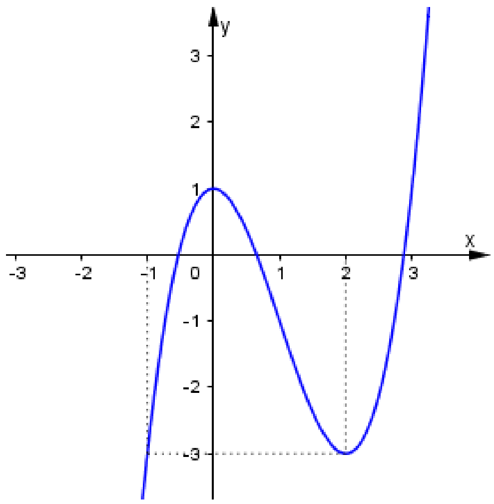
Ta có: $-1\le 1-2\sin x\le 3, \forall x\in\mathbb{R}$.

Do đó: $f\left(1-2\sin x\right)=f\left(|m|\right)$ có nghiệm $-2\le f\left(|m|\right)\le 2 \Leftrightarrow -1\le |m|\le 3 \Leftrightarrow |m|\le 3$

$\Leftrightarrow -3\le m\le 3$.

Mà $m\in\mathbb{Z} \Rightarrow m\in\{-3;-2;-1;0;1;2;3\} \Rightarrow$ có 7 giá trị nguyên của m thỏa mãn bài toán.

Câu 3. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới



Tìm tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(1+\sin x\right)=f\left(m\right)$ có nghiệm

A. $m\in\{-1;0;1;2\}$. **B.** $m\in\{0;1;2\}$. **C.** $m\in\varnothing$. **D.** $m\in\{0;1\}$.

Lời giải.

Chọn A.

Xét phương trình $f\left(1+\sin x\right)=f\left(m\right)$ (*).

* Với $m=-1$:

Từ đồ thị hàm số ta thấy $f\left(-1\right)=-3$.

Do đó (*) $\Leftrightarrow f\left(1+\sin x\right)=-3 \Leftrightarrow 1+\sin x=2 \Leftrightarrow \sin x=1 \Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi$.

Suy ra $m=-1$ thỏa yêu cầu bài toán.

* Với $m\ne -1$:

Đặt $t=1+\sin x$, $0\le t\le 2$.

(*) $\Leftrightarrow f\left(t\right)=f\left(m\right)$.

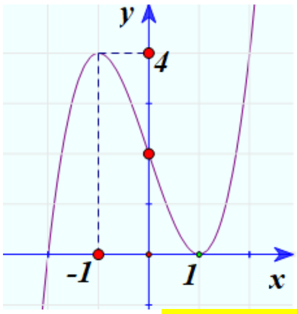
Dựa vào đồ thị hàm số thì hàm số $f\left(t\right)$ nghịch biến với $t\in[0;2]$.

Do đó $f\left(t\right)=f\left(m\right) \Leftrightarrow t=m \Leftrightarrow m\in[0;2]$.

Vì $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{0;1;2\}$.

Vậy $m\in\{-1;0;1;2\}$.

Câu 4. Cho đồ thị hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ. Để phương trình $f\left(\sqrt[6]{1-x^2}\right)=f(m)$ có nghiệm thì điều kiện của tham số m là $m\in[a;b]$. Hỏi điểm $A(a;b)$ thuộc đường tròn nào sau đây?



A. $(x-3)^2+(y-1)^2=2$. **B.** $(x-1)^2+(y-1)^2=1$.

C. $x^2+(y-1)^2=1$. **D.** $(x-3)^2+(y+1)^2=20$

Lời giải

Chọn B

Đặt $t=\sqrt[6]{1-x^2}$. Vì $x\in[-1;1]\Rightarrow t\in[0;1]$.

Khi đó $f\left(\sqrt[6]{1-x^2}\right)=f(m)\Rightarrow f(t)=f(m)(*)$

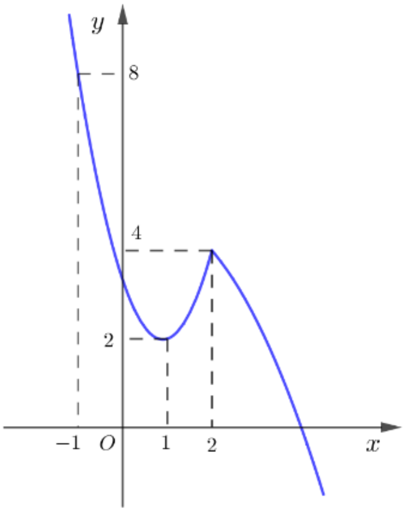
Dựa vào đồ thị thấy hàm số $f(t)$ nghịch biến với $t\in[0;1]$.

Do đó phương trình (*) $\Leftrightarrow t=m\Rightarrow 0\le m\le 1$ vì $t\in[0;1]$.

Để phương trình $f\left(\sqrt[6]{1-x^2}\right)=f(m)$ có nghiệm thì điều kiện của tham số m là $m\in[0;1]$.

Tọa độ điểm $A(0;1)$, ta có: $(0-1)^2+(1-1)^2=1\Rightarrow A\in(C):(x-1)^2+(y-1)^2=1$.

Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ:



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\sqrt{8+4x-4x^2}-1\right)=f(m)$ có nghiệm thuộc $(-1;1)$?

A. 5. **B.** 7. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn D.

Xét trên $(-1;1)$, hàm số $y=f(x)$ nghịch biến nên phương trình $f\left(\sqrt{8+4x-4x^2}-1\right)=f(m)\Leftrightarrow\sqrt{8+4x-4x^2}=m+1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m+1 \ge 0 \\ 8+4x-4x^2=(m+1)^2 \end{cases}$$

Để yêu cầu bài toán được thỏa, ta tìm các giá trị thực $m \ge -1$ sao cho đồ thị hàm số $y=8+4x-4x^2$ cắt đường thẳng $y=(m+1)^2$ tại ít nhất một điểm có hoành độ $-1<x<1$.

Lập bảng biến thiên của hàm số $y=8+4x-4x^2$ trên $(-1;1)$

x	-1		$\frac{1}{2}$		1
y'		$+$	0	$-$	
$y=8+4x-4x^2$	0	$\nearrow$	9	$\searrow$	8

Như vậy ta phải có $\begin{cases} m \ge -1 \\ 0<(m+1)^2 \le 9 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \le m \le 2$, $m \in \mathbb{Z}$ suy ra $m \in \{-1;0;1;2\}$.

Câu 6. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
y'		$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
y	5	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	-1

Tính tổng các giá trị nguyên dương của m để phương trình $f(|x-1|+2)=f\left(\sqrt{3-m}+2\right)$ có nghiệm.

A. -2. **B.** 6. **C.** 8. **D.** 4.

Lời giải

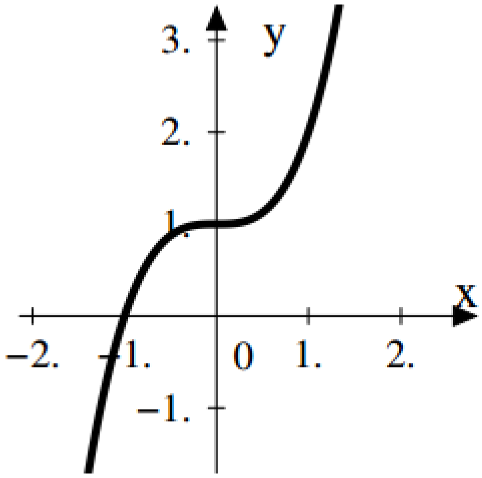
Chọn B

Đặt $t=|x-1|+2 \ge 2$ thì phương trình $f(|x-1|+2)=f\left(\sqrt{3-m}+2\right)$ (1) trở thành $f(t)=f\left(\sqrt{3-m}+2\right)$ (2) với $t \ge 2$.

Để phương trình (2) có nghiệm thì đường thẳng có phương trình $y=f\left(\sqrt{3-m}+2\right)$ phải cắt đồ thị hàm số $y=f(t)$ tại ít nhất một điểm với mọi $t \ge 2$ $\Leftrightarrow -1<f\left(\sqrt{3-m}+2\right) \le 2 \Leftrightarrow m \le 3$.

Vì m nguyên dương nên $m \in \{1;\ 2;\ 3\} \Rightarrow$ tổng các giá trị nguyên dương của m thỏa mãn bài toán là $1+2+3=6$.

Câu 7. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $f\left(6\sin x+8\cos x\right)=f\left(m\left(m+1\right)\right)$ có nghiệm thực.

A. 5. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 6.

Lời giải

Chọn D

Nhận thấy hàm số $y=f\left(x\right)$ là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$

$f\left(6\sin x+8\cos x\right)=f\left(m\left(m+1\right)\right)\Leftrightarrow 6\sin x+8\cos x=m\left(m+1\right)$.

Đặt $y=6\sin x+8\cos x$.

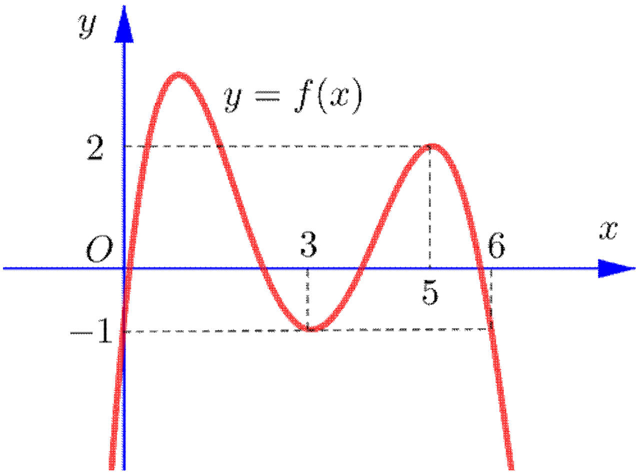
Có: $6^2+8^2\geq y^2\Leftrightarrow -10\leq y\leq 10$.

Vậy phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow -10\leq m\left(m+1\right)\leq 10$

$\Leftrightarrow\begin{cases}m^2+m-10\leq 0\\ m^2+m+10\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\dfrac{-1-\sqrt{41}}{2}\leq m\leq\dfrac{-1+\sqrt{41}}{2}$.

Vì $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m\in\left\{-3;-1;-1;0;1;2\right\}$. Vậy có 6 số nguyên thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 8. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ là hàm bậc 4 có đồ thị như hình vẽ



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in\left[-5;5\right]$ để phương trình

$f\left(\sqrt{x^2+2x+10}\right)=f\left(m^2+1\right)$ có hai nghiệm phân biệt?

A. 8. **B.** 6. **C.** 9. **D.** 7.

Lời giải

Chọn B.

Đặt $t=\sqrt{x^2+2x+10}\Rightarrow t=\sqrt{\left(x+1\right)^2+9}\Rightarrow t\geq 3$.

Với $t=3$ thì $x=-1$. Ta có $f\left(m^2+1\right)=f\left(3\right)\Rightarrow m^2+1=3\Leftrightarrow m=\pm\sqrt{2}$ (loại).

Với $t>3$ mỗi giá trị t sẽ có 2 giá trị x tương ứng.

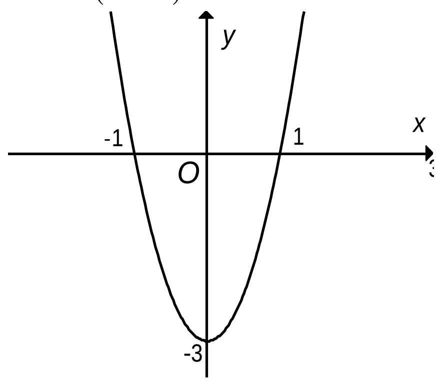
Do đó $f\left(\sqrt{x^2+2x+10}\right)=f\left(m^2+1\right)\Leftrightarrow f\left(t\right)=f\left(m^2+1\right)$ với $t\geq 3$

Để phương trình $f\left(\sqrt{x^2+2x+10}\right)=f\left(m^2+1\right)$ có 2 nghiệm phân biệt thì đường thẳng $f\left(m^2+1\right)$ cắt đồ thị $y=f\left(t\right)$ tại 1 điểm duy nhất có hoành độ $t>3$.

Từ đồ thị $y=f\left(x\right)$ ta có $\left[\begin{array}{l} f\left(m^2+1\right)=2 \\ f\left(m^2+1\right)<-1 \end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l} m^2+1=5 \\ m^2+1>6 \end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l} m=\pm 2 \\ m>\sqrt{5} \\ m<-\sqrt{5} \end{array}\right.$.

Do $m\in\mathbb{Z}$ và $m\in\left[-5;5\right]\Rightarrow m=\left\{-5;-4;-3;3;4;5\right\}$. Có 6 giá trị m thỏa mãn.

Câu 9. Cho hàm số $y=f\left(x\right)=ax^4+bx^2+c$ $\left(a\neq 0\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình: $f\left(\sqrt{\left(4-x\right)\left(x-2\right)}\right)=f\left(m\right)$ có nghiệm?

A. $\left(-\infty;1\right)$. **B.** $\left[-1;1\right]$. **C.** $\left[0;1\right]$. **D.** $\left(-1;+\infty\right)$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t=\sqrt{\left(4-x\right)\left(x-2\right)}\Rightarrow t\geq 0$.

Với $\forall x\in\left[2;4\right]$ theo bất đẳng thức Côsi ta có: $\sqrt{\left(4-x\right)\left(x-2\right)}\leq\dfrac{\left(4-x\right)+\left(x-2\right)}{2}=1$.

$\Rightarrow t\in\left[0;1\right],\ \forall x\in\left[2;4\right]\Rightarrow -3\leq f\left(t\right)\leq 0\Rightarrow -3\leq f\left(\sqrt{\left(4-x\right)\left(x-2\right)}\right)\leq 0$

$\Rightarrow f\left(\sqrt{\left(4-x\right)\left(x-2\right)}\right)=f(m)$ có nghiệm khi và chỉ khi: $-3\leq f(m)\leq 0\Leftrightarrow -1\leq m\leq 1$.

Câu 10. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(2\sin x-\cos x\right)=f\left(m\right)$ có nghiệm $x\in\mathbb{R}$.

x	$-\infty$ $+\infty$
y'	$+$
y	$+\infty$ $-\infty$ ↗

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Chọn C

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số $y=f\left(x\right)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên $f\left(2\sin x-\cos x\right)=f\left(m\right)\Leftrightarrow 2\sin x-\cos x=m$

Phương trình $2\text{sinx}-\text{cosx}=m$ có nghiệm $\Leftrightarrow 2^2+\left(-1\right)^2\geq m^2\Leftrightarrow m^2\leq 5\Leftrightarrow -\sqrt{5}\leq m\leq\sqrt{5}$.

Vậy $m\in\left\{\pm 2;\pm 1;0\right\}$.

Câu 11. Cho $f(x)$ là một hàm số liên tục trên đoạn $[-2;9]$, biết $f(-1)=f(2)=f(9)=3$ và $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	-2		0		6		9
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-4	↗	6	↘	-4	↗	3

Tìm m để phương trình $f(x)=f(m)$ có ba nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-2;9]$.

A. $m\in(-2;9]\setminus((-1;2)\cup\{6\})$. **B.** $m\in[-2;9]\setminus((-1;2)\cup\{6\})$.

C. $m\in(-2;9]\setminus\{6\}$. **D.** $m\in[-2;9]\setminus\{-2;6\}$.

Lời giải

Chọn A

Phương trình $f(x)=f(m)$ có ba nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-2;9]$ khi $-4<f(m)\le 3$.

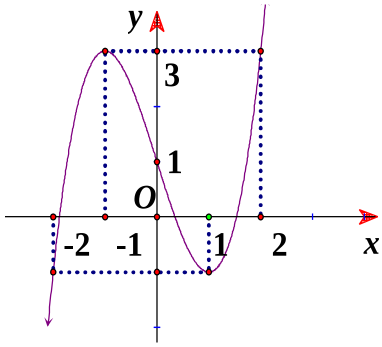
Trên $(-2;0)$, hàm số $f(x)$ đồng biến và $f(-1)=3$ nên $-4<f(m)\le 3 \Leftrightarrow -2<m\le -1$.

Trên $(0;6)$, hàm số $f(x)$ nghịch biến và $f(2)=3$ nên $-4<f(m)\le 3 \Leftrightarrow 6>m\ge 2$.

Trên $(6;9)$, hàm số $f(x)$ đồng biến và $f(9)=3$ nên $-4<f(m)\le 3 \Leftrightarrow 6<m\le 9$.

Vậy điều kiện của m là: $m\in(-2;-1]\cup[2;6)\cup(6;9] \Leftrightarrow m\in(-2;9]\setminus((-1;2)\cup\{6\})$.

Câu 12. Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Số giá trị nguyên dương của m để phương trình $f\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)=f(m)$ có nghiệm là :

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $u(x)=x-\sqrt{x^2+1}$

Ta có $u'(x)=1-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\dfrac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}}>0,$

Bảng biến thiên

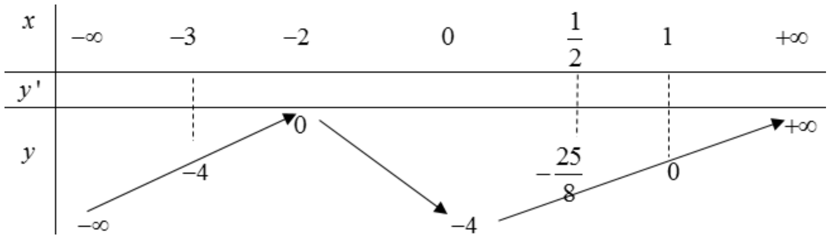
x	$-\infty$		$+\infty$
$u'(x)$		$+$	
$u(x)$	$-\infty$	↗	0

Do đó $f\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)\le 3$ với mọi $x\in\mathbb{R}$.

YCBT $\Leftrightarrow f(m)\le 3 \Leftrightarrow m\le 2$.

Vì m nguyên dương nên $m\in\{1;2\}$

Câu 13. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ.



Tập hợp các giá trị dương của tham số m để phương trình $f\left(2f(x)+\frac{1}{2}\right)=f(m)$ có 9 nghiệm là:

A. $(0;1)$. **B.** $\left(\frac{1}{2};0\right)$. **C.** $\left(0;\frac{1}{2}\right)$. **D.** $(0;1]$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t=2f(x)+\frac{1}{2}$, suy ra $f(x)=\frac{t-\frac{1}{2}}{2}=\frac{2t-1}{4}$

Phương trình viết lại: $f(t)=f(m)$ (1)

Số nghiệm phương trình (1) bằng số giao điểm của đường đồ thị hàm số $f(t)$ và đường thẳng $y=f(m)$

Xét phương trình $f(x)=\frac{2t-1}{4}$

Nếu $\left[\begin{array}{l}\frac{2t-1}{4}<0\\ \frac{2t-1}{4}>-4\end{array}\right.$ thì phương trình $f(x)=\frac{2t-1}{4}$ có một nghiệm.

Nếu $\left[\begin{array}{l}\frac{2t-1}{4}=0\\ \frac{2t-1}{4}=-4\end{array}\right.$ thì phương trình $f(x)=\frac{2t-1}{4}$ có hai nghiệm

Nếu $-4<\frac{2t-1}{4}<0$ thì phương trình $f(x)=\frac{2t-1}{4}$ có ba nghiệm

Từ bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ ta suy ra phương trình $f(t)=f(m)$ có nhiều nhất ba nghiệm.

Suy ra phương trình $f\left(2f(x)+\frac{1}{2}\right)=f(m)$ có 9 nghiệm

$\Leftrightarrow f(t)=f(m)$ có ba nghiệm thỏa $-4<\frac{2t-1}{4}<0$

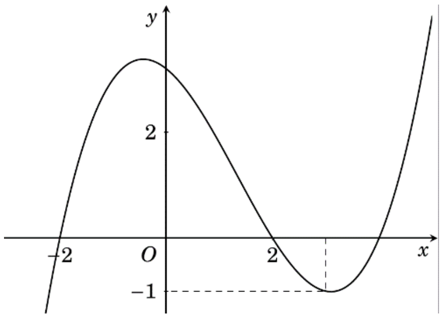
$\Leftrightarrow f(t)=f(m)$ có ba nghiệm thỏa $-\frac{15}{2}<t<\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow -4<f(m)<-\frac{25}{8}$

Do $m>0$ nên ta cho chọn $\Leftrightarrow 0<m<\frac{1}{2}$.

Dạng 4: Biết đồ thị hoặc BBT của hàm số $y=f(x)$, xét các bài toán liên quan đến phương trình có dạng $f(|x|)=a; |f(x)|=a; f(|u(x)|)=a; |f(u(x))|=a...$.

Câu 1. Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm thực của phương trình $\left|f(x^3-3x)\right|=\dfrac{3}{2}$ là

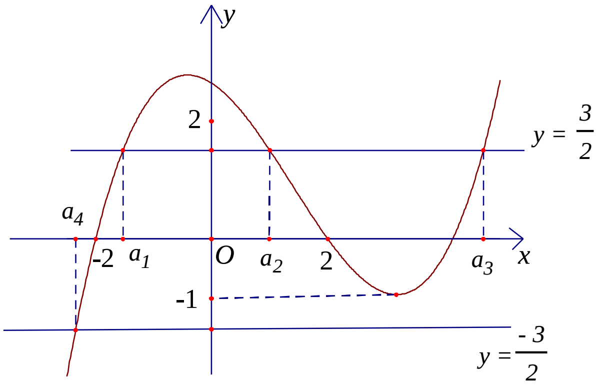


A. 8. **B.** 4. **C.** 7. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

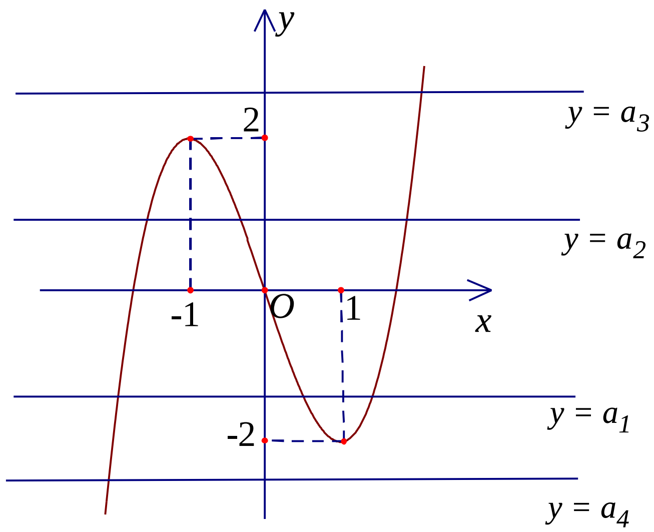
Phương trình $\left|f(x^3-3x)\right|=\dfrac{3}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x^3-3x)=\dfrac{3}{2} \\ f(x^3-3x)=-\dfrac{3}{2} \end{array}\right.$.



* Phương trình $f(x^3-3x)=\dfrac{3}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^3-3x=a_1,(-2<a_1<0) \\ x^3-3x=a_2,(0<a_2<2) \\ x^3-3x=a_3,(a_3>2) \end{array}\right.$.

* Phương trình $f(x^3-3x)=-\dfrac{3}{2} \Leftrightarrow x^3-3x=a_4,(a_4<-2)$.

Đồ thị hàm số $y=x^3-3x$ có dạng như hình vẽ sau:

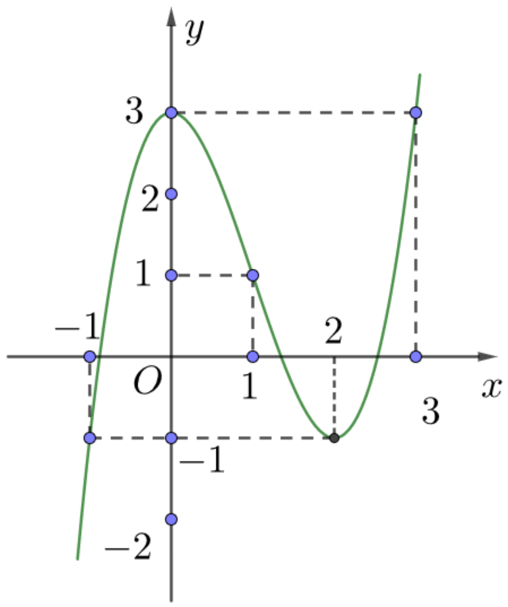


Dựa vào đồ thị trên ta có:

- Phương trình $x^3 - 3x = a_1$ có 3 nghiệm phân biệt.
- Phương trình $x^3 - 3x = a_2$ có 3 nghiệm phân biệt.
- Phương trình $x^3 - 3x = a_3$ có 1 nghiệm.
- Phương trình $x^3 - 3x = a_4$ có 1 nghiệm.

Vậy phương trình $\left|f\left(x^3 - 3x\right)\right| = \dfrac{3}{2}$ có 8 nghiệm phân biệt.

Câu 2. Cho hàm số bậc ba $y = f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm thực của phương trình $\left|f\left(x^4 - 2x^2\right)\right| = 2$ là

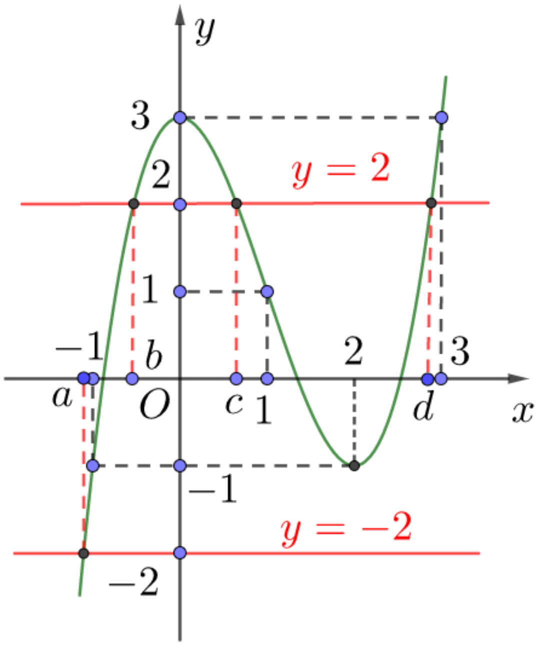


A. 8. **B.** 9. **C.** 7. **D.** 10.

Lời giải

Chọn A

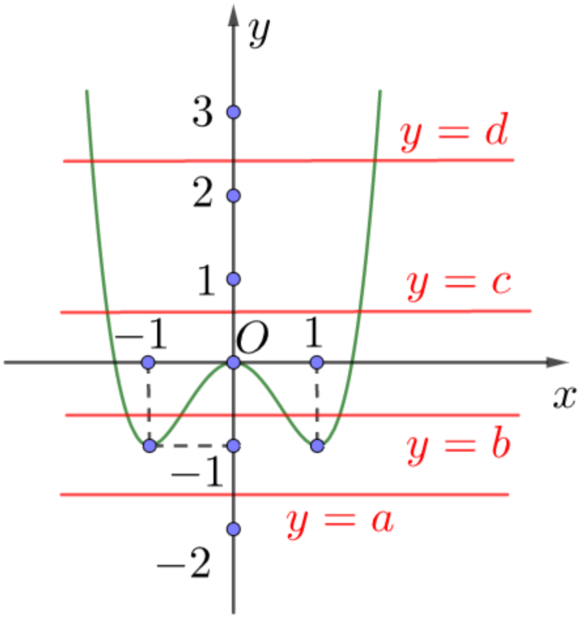
Phương trình $\left|f\left(x^4 - 2x^2\right)\right| = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f\left(x^4 - 2x^2\right) = 2 \\ f\left(x^4 - 2x^2\right) = -2 \end{array}\right.$.



* Phương trình $f\left(x^4-2x^2\right)=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^4-2x^2=b,(-1<b<0) \\ x^4-2x^2=c,(0<c<1) \\ x^4-2x^2=d,(2<d<3) \end{array}\right.$.

* Phương trình $f\left(x^4-2x^2\right)=-2 \Leftrightarrow x^4-2x^2=a,(-2<a<-1)$.

Đồ thị hàm số $y=x^4-2x^2$ như hình vẽ sau:



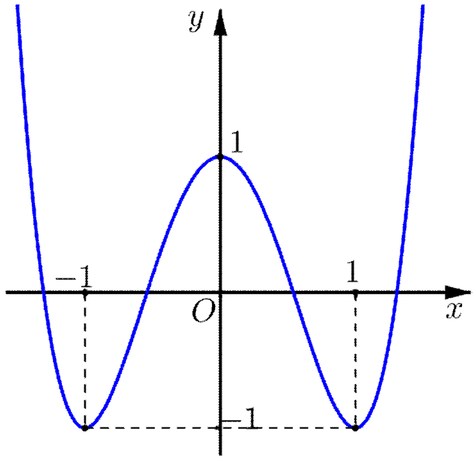
Dựa vào đồ thị trên ta có:

- Phương trình $x^4-2x^2=a,(-2<a<-1)$ không có nghiệm thực.
- Phương trình $x^4-2x^2=b,(-1<b<0)$ có 4 nghiệm thực phân biệt.
- Phương trình $x^4-2x^2=c,(0<c<1)$ có 2 nghiệm thực phân biệt.
- Phương trình $x^4-2x^2=d,(2<d<3)$ có 2 nghiệm thực phân biệt.

Vậy phương trình $\left|f\left(x^4-2x^2\right)\right|=2$ có 8 nghiệm thực phân biệt.

Câu 3. Cho hàm số trùng phương $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm thuộc $[0;2\pi)$ của phương trình $\left|f(\cos 2x)\right| = 1$ bằng

A. 4. **B.** 6. **C.** 3. **D.** 8.



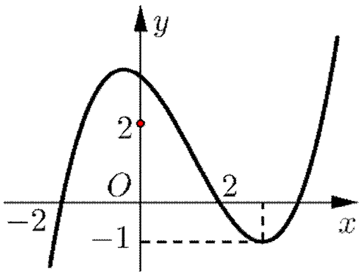
Lời giải

Chọn D

Ta có $\left|f(\cos 2x)\right| = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(\cos 2x) = 1 \\ f(\cos 2x) = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x = 0 \\ \cos 2x = a > 1\ (VN) \\ \cos 2x = b < -1\ (VN) \\ \cos 2x = \pm 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x = 0 \\ \sin 2x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \sin 4x = 0$

Phương trình $\sin 4x = 0$ có 8 nghiệm thuộc $[0;2\pi)$.

Câu 4. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Số nghiệm thực của phương trình $\left|f\left(x^3 - 3x\right)\right| = \dfrac{4}{3}$ là

A. 3. **B.** 8. **C.** 7. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Xét phương trình: $\left|f\left(x^3 - 3x\right)\right| = \dfrac{4}{3}$ (1).

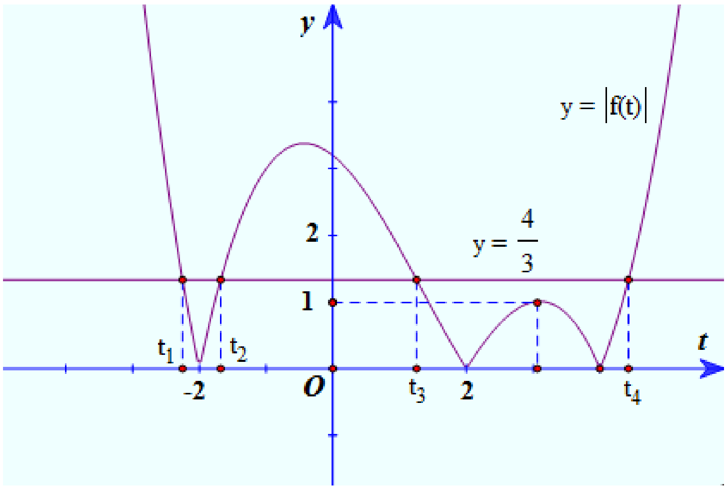
Đặt $t = x^3 - 3x$, ta có: $t' = 3x^2 - 3$; $t' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
t'		$+$	0	$-$	0	$+$	
t	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Phương trình (1) trở thành $\left|f(t)\right| = \dfrac{4}{3}$ với $t \in \mathbb{R}$.

Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ ban đầu, ta suy ra đồ thị hàm số $y = \left|f(t)\right|$ như sau:



Suy ra phương trình $\left|f(t)\right| = \dfrac{4}{3}$ có các nghiệm $t_1 < -2 < t_2 < t_3 < 2 < t_4$.

Từ bảng biến thiên ban đầu ta có:

+) $x^3 - 3x = t_1$ có 1 nghiệm x_1.

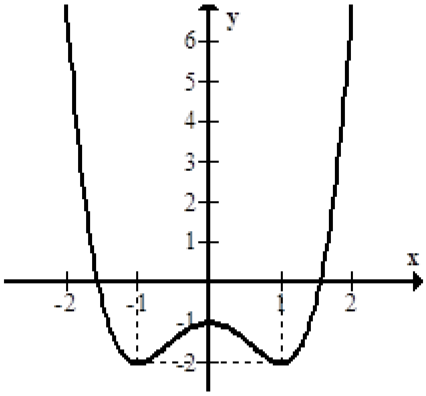
+) $x^3 - 3x = t_4$ có 1 nghiệm x_2.

+) $x^3 - 3x = t_2$ có 3 nghiệm x_3, x_3, x_5.

+) $x^3 - 3x = t_3$ có 3 nghiệm x_6, x_7, x_8.

Vậy phương trình $\left|f\left(x^3 - 3x\right)\right| = \dfrac{4}{3}$ có 8 nghiệm.

Câu 5. Cho đồ thị của hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ:



Tìm số nghiệm phương trình $\left|f(x)\right| = \dfrac{3}{2}$.

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Chọn D

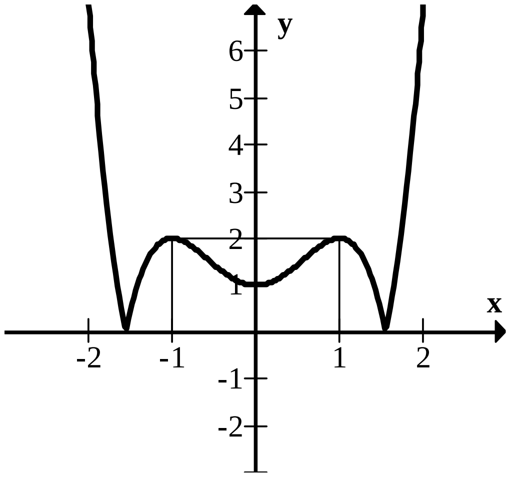
Cách 1:

Đồ thị hàm $y = \left|f(x)\right|$ gồm 2 phần:

+ Phần đồ thị $y = f(x)$ nằm trên Ox (Kể cả giao điểm trên trục Ox)

+ Phần đồ thị lấy đối xứng qua Ox của đồ thị $y = f(x)$ nằm dưới Ox

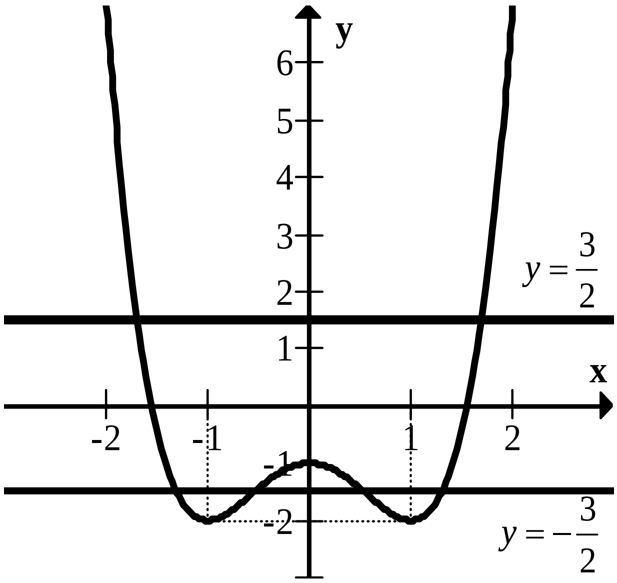
Từ đó ta có đồ thị của của hàm số $y = \left|f(x)\right|$.



Từ đồ thị của hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|$ nên $\left|f\left(x\right)\right|=\dfrac{3}{2}$ có 6 nghiệm.

Cách 2:

$$\left|f\left(x\right)\right|=\frac{3}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f\left(x\right)=-\dfrac{3}{2}(*)\\ f\left(x\right)=\dfrac{3}{2}(**)\end{array}\right.$$



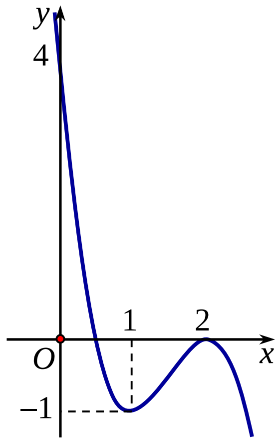
Dựa vào đồ thị trên:

-Phương trình $f\left(x\right)=-\dfrac{3}{2}$: có 4 nghiệm

-Phương trình $f\left(x\right)=\dfrac{3}{2}$: có 2 nghiệm

Vậy $\left|f\left(x\right)\right|=\dfrac{3}{2}$ có 6 nghiệm.

Câu 6. Đồ thị hàm số $y=-2x^3+9x^2-12x+4$ như hình vẽ. Phương trình $2\left|x\right|^3-9x^2+12\left|x\right|-\dfrac{9}{2}=0$ có bao nhiêu nghiệm phân biệt?



A. 3. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 8.

Lời giải

Chọn C

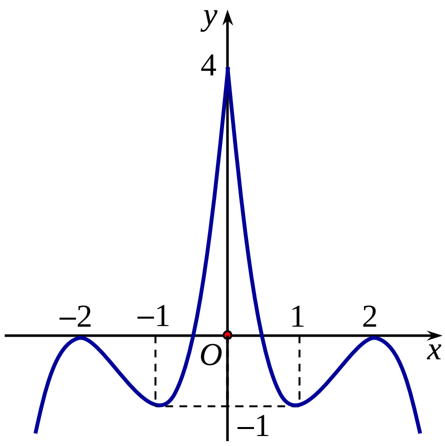
Xét phương trình

$$2|x|^3-9x^2+12|x|-\frac{9}{2}=0$$

$$\Leftrightarrow -2|x|^3+9x^2-12x+4=\frac{17}{2}\ (*)$$

Số nghiệm của phương trình (*) là số giao điểm của đồ thị hàm số $y=-2|x|^3+9x^2-2x+4$ và đường thẳng $y=\frac{17}{2}$

Hình vẽ dưới là đồ thị hàm số $y=-2|x|^3+9x^2-2x+4$ (C). Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy đường thẳng $y=\frac{17}{2}$ cắt đồ thị (C) tại 6 nghiệm phân biệt.



Câu 7. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-5	↗	3	↘	-5	↗	$+\infty$

Số nghiệm của phương trình $\left|f\left(x^2-2x-1\right)\right|=4$ là

A. 2. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 8.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t = x^2 - 2x - 1$, $t \ge -2$. Khi đó, phương trình thành $\left| f\left(t\right) \right| = 4$.

Từ bảng biến thiên của hàm số $y = f\left(x\right)$ suy ra phương trình $f\left(x\right) = 0$ có 4 nghiệm x_1, x_2, x_3, x_4 thỏa mãn $x_1 < -2 < x_2 < 0 < x_3 < 2 < x_4$. Ta có bảng biến thiên hàm số $y = \left| f\left(x\right) \right|$ là:

x	$-\infty$	x_1	-2	x_2	0	x_3	2	x_4	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	0 ↗	5 ↘	0 ↗	3 ↘	0 ↗	5 ↘	0 ↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra phương trình $f\left(t\right) = 4$ có 6 nghiệm phân biệt $t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6$ thỏa mãn $t_1 < x_1 < t_2 < -2 < t_3 < x_2 < 0 < x_3 < t_4 < 2 < t_5 < x_4 < t_6$.

Xét hàm số $y = x^2 - 2x - 1$ có $y' = 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Ta có bảng biến thiên

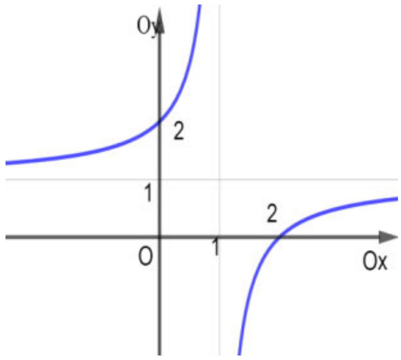
x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	-2	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên trên có phương trình $x^2 - 2x - 1 = t_1$ và $x^2 - 2x - 1 = t_2$ vô nghiệm.

Mỗi phương trình $x^2 - 2x - 1 = t$ với $t \in \left\{t_3, t_4, t_5, t_6\right\}$ có hai nghiệm phân biệt và các nghiệm này đều phân biệt.

Vậy phương trình $\left| f\left(x^2 - 2x - 1\right) \right| = 4$ có 8 nghiệm phân biệt.

Câu 8. Cho hàm số $y = f(x) = \dfrac{ax + b}{cx + d}$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Tất cả các giá trị của m để phương trình $f(|x|) = m$ có hai nghiệm phân biệt là

A. $0 < m < 1$ và $m > 1$. **B.** $m \ge 2$ và $m \le 1$. **C.** $m > 2$ và $m < 1$. **D.** $0 < m < 1$.

Lời giải

Chọn C

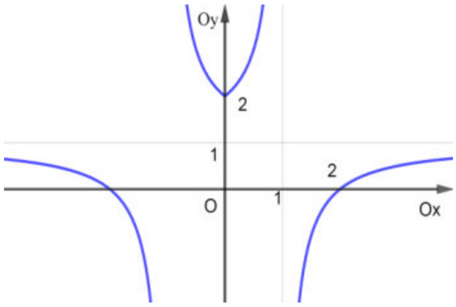
Số nghiệm của phương trình $f(|x|) = m(1)$ là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ và đường thẳng $y = m$.

Hàm số $y = f(|x|)$ là hàm số chẵn nên nhận Oy làm trục đối xứng.

Đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ gồm 2 phần:

+ Phần 1: Đồ thị hàm số $y = f(x)$ với $x \ge 0$.

+ Phần 2: Lấy đối xứng đồ thị hàm số $y = f(x)$ với $x \ge 0$ qua trục Oy.



Để phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt thì đường thẳng $y=m$ cắt đồ thị $y=f(|x|)$ tại 2 điểm phân biệt. Từ đồ thị ta có $m>2;\ m<1$

Câu 9. Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, $(a,b,c,d\in\mathbb{R},\ a\neq 0)$, có bảng biến thiên như hình sau

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	4	↘	0	↗	$+\infty$

Phương trình $|f(x)|=3$ có bao nhiêu nghiệm dương phân biệt?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn D

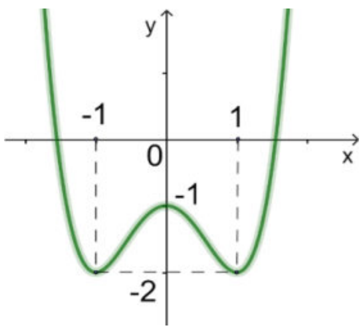
Ta có: $y(0)=\dfrac{y(-1)+y(1)}{2}=2$.

Bảng biến thiên của hàm số $y=|f(x)|$ là:

x	$-\infty$		x_0		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$		$+$	0		$-$		0	$+$	
y	$+\infty$	↘	0	↗	4	↘	2	↘	0	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có: Phương trình $|f(x)|=3$ có duy nhất 1 nghiệm dương.

Câu 10. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị (C) như hình vẽ bên. Phương trình $|f(x+1)|=\dfrac{3}{2}$ có bao nhiêu nghiệm âm phân biệt?

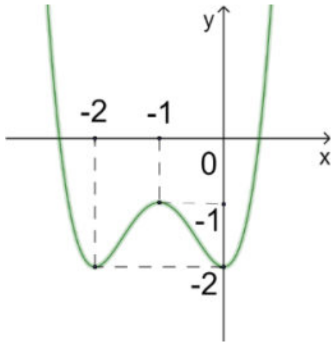


A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Chọn D

Đồ thị (C_1) của hàm số $y=f(x+1)$ vẽ được bằng cách tịnh tuyến đồ thị (C) sang trái 1 đơn vị ta được đồ thị như hình vẽ bên dưới

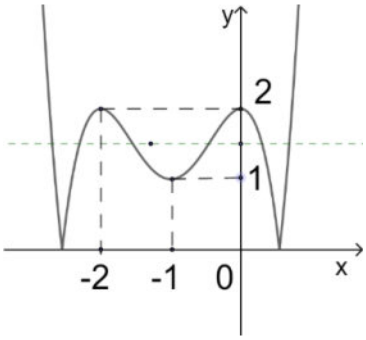


Đồ thị (C_2)của hàm số $y=|f(x+1)|$ vẽ được bằng cách

+ Giữ nguyên phần đồ thị (C_1) nằm phía trên trục hoành và những điểm trên trục hoành ta được đồ thị (C_3).

+ Lấy đối xứng qua trục hoành phần đồ thị (C_1) nằm phía dưới trục hoành ta được đồ thị (C_4).

+ Khi đó $(C_2)=(C_3)\cup(C_4)$ có đồ thị như hình vẽ dưới



Từ đồ thị (C_2) dễ thấy phương trình $|f(x+1)|=\dfrac{3}{2}$ có 4 nghiệm âm phân biệt.

Câu 11. Cho hàm số $y=f(x)$có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	5	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Phương trình $|f(1-3x)+1|=3$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 4. **B.** 3. **C.** 6. **D.** 5.

Lời giải

Chọn A

Cách 1: Dựa vào BBT của đồ thị hàm số $y=f(x)$ ta có số nghiệm của phương trình $f(x)=m$, m là tham số như sau:

+/ Nếu $\left[\begin{array}{l} m<-3 \\ m>5 \end{array}\right.$ phương trình có 1 nghiệm duy nhất.

+/ Nếu $\left[\begin{array}{l} m=-3 \\ m=5 \end{array}\right.$ phương trình có 2 nghiệm phân biệt.

+/ Nếu $-3 < m < 5$ phương trình có 3 nghiệm phân biệt.

Ta có phương trình $\left|f(1-3x)+1\right| = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(1-3x)+1=3 \\ f(1-3x)+1=-3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(1-3x)=2 \\ f(1-3x)=-4 \end{array}\right.$.

Từ kết quả trên ta suy ra $\left[\begin{array}{l} 1-3x=a_1 \\ 1-3x=a_2 \\ 1-3x=a_3 \\ 1-3x=a_4 \end{array}\right.$ $(a_4 < f(\alpha) < a_1 < -1 < a_2 < 3 < a_3;\ f(\alpha) = f(3) = -3)$

Vậy phương trình $\left|f(1-3x)+1\right| = 3$ có 4 nghiệm phân biệt

Cách 2 : Dựa vào BBT ta có: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \Rightarrow f(-1)=5 \\ x=3 \Rightarrow f(3)=-3 \end{array}\right.$

Xét hàm số $g(x) = f(1-3x)+1$.Ta có:

$g'(x) = -3f'(1-3x)$. Suy ra $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(1-3x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1-3x=-1 \\ 1-3x=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{2}{3} \\ x=-\frac{2}{3} \end{array}\right.$.

$g\left(\frac{2}{3}\right) = f(-1)+1 = 6$; $g\left(-\frac{2}{3}\right) = f(3)+1 = -2$.

Mặt khác $f'(x) < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 3$. Do đó

$f'(1-3x) < 0 \Leftrightarrow -1 < 1-3x < 3 \Leftrightarrow -2 < -3x < 2 \Leftrightarrow -\frac{2}{3} < x < \frac{2}{3}$

Suy ra: $g'(x) = -3f'(1-3x) > 0 \Leftrightarrow -\frac{2}{3} < x < \frac{2}{3}$ nên ta có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$+\infty$		-2		6		$-\infty$
$\left|g(x)\right|$	$+\infty$	0	2	0	6	0	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên suy ra phương trình $\left|f(1-3x)+1\right| = 3$ có 4 nghiệm.

Câu 12. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	↘	-2018	↗	2018	↘	$-\infty$

Hỏi phương trình $\left|f\left(x+2017\right)-2018\right|=2019$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 6. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Xét đồ thị hàm số $y=f\left(x+2017\right)-2018$ có được bằng cách tịnh tiến đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ song song với trục Ox sang trái 2017 đơn vị, rồi sau đó tịnh tiến song song với trục Oy xuống dưới 2018 đơn vị.

Ta được bảng biến thiên của hàm số $y=g\left(x\right)=f\left(x+2017\right)-2018$ như sau

x	$-\infty$		-2017		-2016		$+\infty$
$g(x)$	$+\infty$	↘	-4036	↗	0	↘	$-\infty$

Khi đó đồ thị hàm số $y=\left|f\left(x+2017\right)-2018\right|$ gồm hai phần:

+ Phần đồ thị của hàm số $y=g\left(x\right)=f\left(x+2017\right)-2018$ nằm phía trên trục hoành.

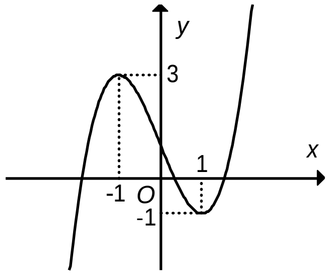
+ Và phần đối xứng của đồ thị $y=g\left(x\right)=f\left(x+2017\right)-2018$ nằm phía dưới trục hoành.

Do đó ta có được bảng biến thiên của hàm số $y=\left|g\left(x\right)\right|$ như sau

x	$-\infty$		x_0		-2017		-2016		$+\infty$
$\left|g(x)\right|$	$+\infty$	↘	0	↗	4036	↘	0	↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy, phương trình $\left|f\left(x+2017\right)-2018\right|=2019$ có 4 nghiệm.

Câu 13. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên. Hỏi phương trình $f\left(\left|x-2\right|\right)=-\dfrac{1}{2}$ có bao nhiêu nghiệm?



A. 4. **B.** 0. **C.** 6. **D.** 2.

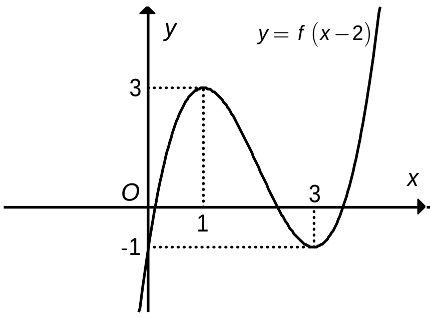
Lời giải

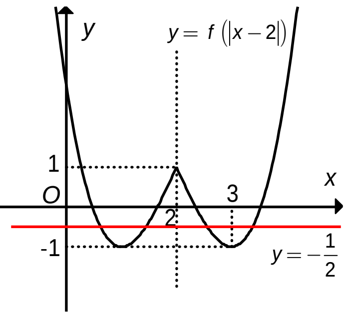
Chọn A

+ Trước tiên tịnh tiến đồ thị sang phải 2 đơn vị để được đồ thị hàm số $y=f\left(x-2\right)$. $\left(C_1\right)$

+ Tiếp theo xóa bỏ phần đồ thị phía bên trái đường thẳng $x=2$.

+ Cuối cùng lấy đối xứng phần đồ thị còn lại ở trên qua đường thẳng $x=2$. Ta được toàn bộ phần đồ thị của hàm số $y=f\left(\left|x-2\right|\right)$. (hình vẽ bên dưới) $\left(C_2\right)$





+ Dựa vào đồ thị hàm số $y=f\left(\left|x-2\right|\right)$, ta thấy đường thẳng $y=-\dfrac{1}{2}$ cắt đồ thị hàm số $y=f\left(\left|x-2\right|\right)$ tại 4 điểm phân biệt $\longrightarrow$ phương trình $f\left(\left|x-2\right|\right)=-\dfrac{1}{2}$ có 4 nghiệm phân biệt.

Câu 14. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		1		$-\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm của phương trình $\left|f\left(x^2-2x\right)\right|=3$ là

A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 5.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\left|f\left(x^2-2x\right)\right|=3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f\left(x^2-2x\right)=3 \\ f\left(x^2-2x\right)=-3 \end{array}\right.$

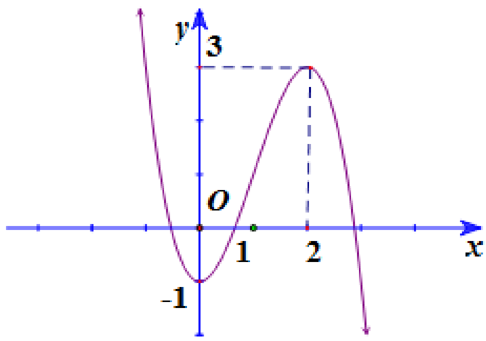
Dựa vào đồ thị ta thấy:

+ Phương trình $f\left(x^2-2x\right)=3$ $(1) \Leftrightarrow x^2-2x=a\left(a>1\right) \Leftrightarrow x^2-2x-a=0$. Vì $\Delta=1+a>0$ nên phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt.

+ Phương trình $f\left(x^2-2x\right)=-3$ $(2) \Leftrightarrow x^2-2x=b\left(b<-1\right) \Leftrightarrow x^2-2x-b=0$. Vì $\Delta=1+b<0$ nên phương trình (2) vô nghiệm.

Vậy số nghiệm của phương trình $\left|f\left(x^2-2x\right)\right|=3$ là 2.

Câu 15. Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a,\, b,\, c,\, d\in\mathbb{R})$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $2f(|x|)+m=0$ có đúng 4 nghiệm thực phân biệt.



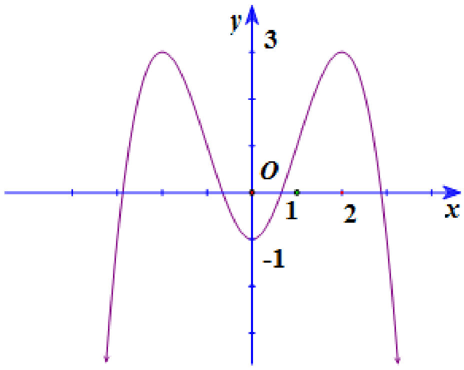
A. $-3<m<1$. **B.** $-1<m<3$. **C.** $-2<m<6$. **D.** $-6<m<2$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $2f(|x|)+m=0 \Leftrightarrow f(|x|)=\dfrac{-m}{2}$.

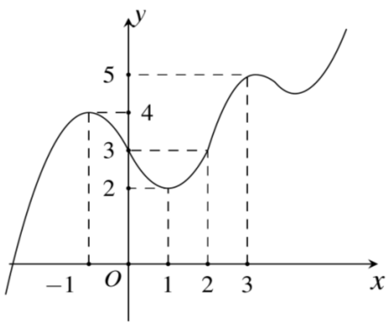
$f(|x|)$ là hàm chẵn nên đồ thị như hình bên:



Từ đồ thị ta có phương trình $2f(|x|)+m=0$ có 4 nghiệm thực phân biệt khi:

$-1<\dfrac{-m}{2}<3 \Leftrightarrow -6<m<2$.

Câu 16. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Số giá trị nguyên của m để phương trình $f(|x-2|)=m$ có nghiệm trên đoạn $[-1,5]$ là.

A. 3. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C

Ta có $-1\le x\le 5 \Rightarrow -3\le x-2\le 3 \Rightarrow 0\le |x-2|\le 3$

Do đó $\forall x\in[-1;5]$, $0\le|x-2|\le 3$.

Đặt $t=|x-2|$ với $t\in[0;3]$. Xét hàm số $y=f(t)$ liên tục trên $[0;3]$.

Dựa vào đồ thị ta thấy $\max\limits_{[0;3]} f(t)=5$, $\min\limits_{[0;3]} f(t)=2$ $\Rightarrow \max\limits_{[-1;5]} f(|x-2|)=5, \min\limits_{[-1;5]} f(|x-2|)=2$

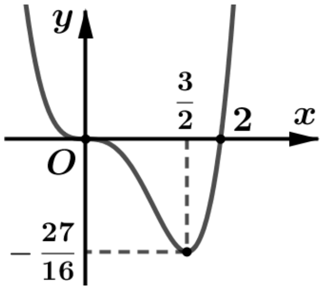
Suy ra pt $f(|x-2|)=m$ có nghiệm trên đoạn $[-1,5]$ khi $2\le m\le 5$.

(CÒN TIẾP PHẦN 2)

CÁC DẠNG TOÁN VỀ HÀM ẨN LIÊN QUAN ĐẾN BÀI TOÁN XÉT SỰ TƯƠNG GIAO CỦA ĐỒ THỊ CÁC HÀM SỐ (PHẦN 2: DẠNG 5-8)

Dạng 5: Biết đồ thị hoặc BBT của hàm số $y=f(x)$, xét các bài toán liên quan đến phương trình có dạng $f(|x|)=g(m);\ |f(x)|=g(m);\ f(|u(x)|)=g(m);\ |f(u(x))|=g(m)\ldots$.

Câu 1. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(2|\sin x|)=f\left(\frac{m}{2}\right)$ có đúng 12 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-\pi;2\pi]$?

A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 5.

Lời giải

Chọn C

Ta có bảng biến thiên của hàm số $y=g(x)=2|\sin x|$ trên đoạn $[-\pi;2\pi]$

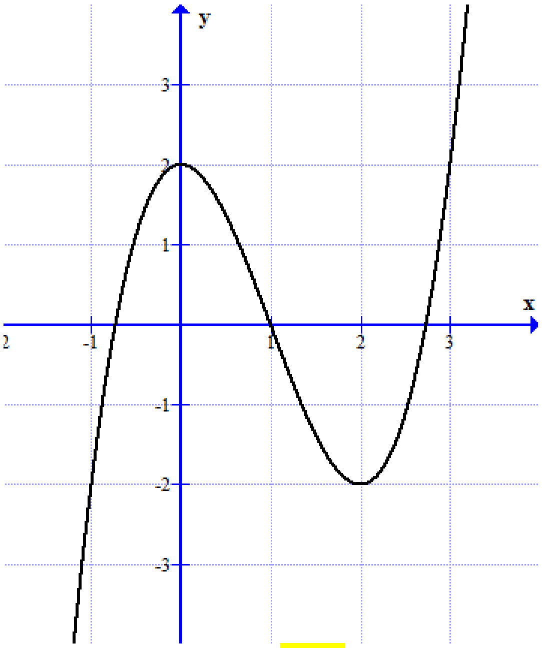
x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$g(x)$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	0

Phương trình $f(2|\sin x|)=f\left(\frac{m}{2}\right)$ có đúng 12 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-\pi;2\pi]$ khi và chỉ khi phương trình $f(t)=f\left(\frac{m}{2}\right)$ có 2 nghiệm phân biệt $t\in(0;2)$.

Dựa vào đồ thị hàm số $y=f(x)$ suy ra phương trình $f(t)=f\left(\frac{m}{2}\right)$ có 2 nghiệm phân biệt $t\in(0;2)$ khi và chỉ khi $-\frac{27}{16}<f\left(\frac{m}{2}\right)<0 \Leftrightarrow \begin{cases} 0<\frac{m}{2}<2 \\ \frac{m}{2}\neq\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0<m<4 \\ m\neq 3 \end{cases}$.

Do m nguyên nên $m\in\{1;2\}$. Vậy có 2 giá trị của m thoả mãn bài toán.

Câu 2. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như sau. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $|f(|x|)|=m$ có hai nghiệm dương phân biệt.

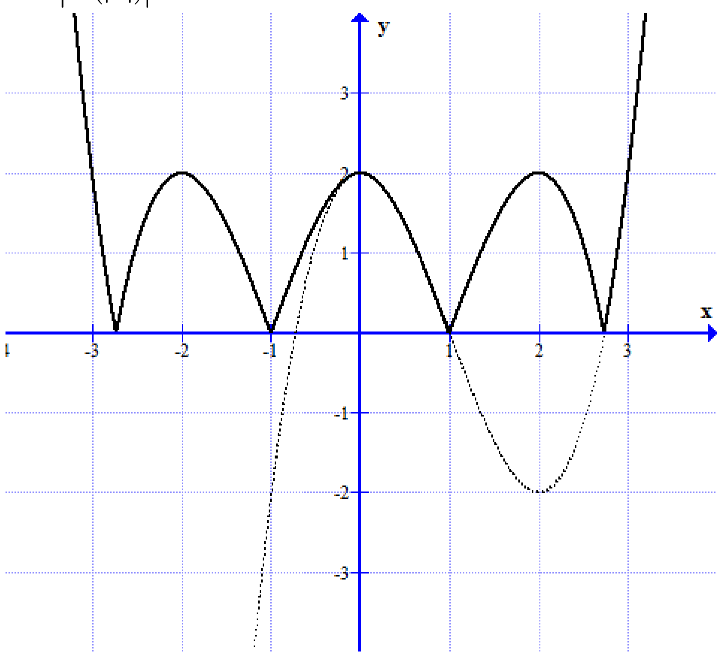


A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

ChọnC

Ta có đồ thị hàm số $y = \left| f\left(|x| \right) \right|$



Dựa vào đồ thị, phương trình $\left| f\left(|x| \right) \right| = m$ có hai nghiệm dương phân biệt khi và chỉ khi $\left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = 2 \end{array} \right.$.

Câu 3. Cho hàm hàm số $y = f\left(x \right)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới

x	$-\infty$		1		5		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	10	$\searrow$	$-\infty$

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\left|f\left(x^2+1\right)\right|=m$ có 6 nghiệm phân biệt.

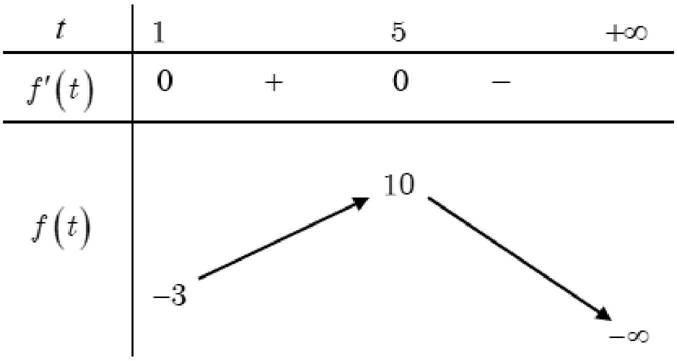
A. 12. **B.** 198. **C.** 6. **D.** 190.

Lời giải

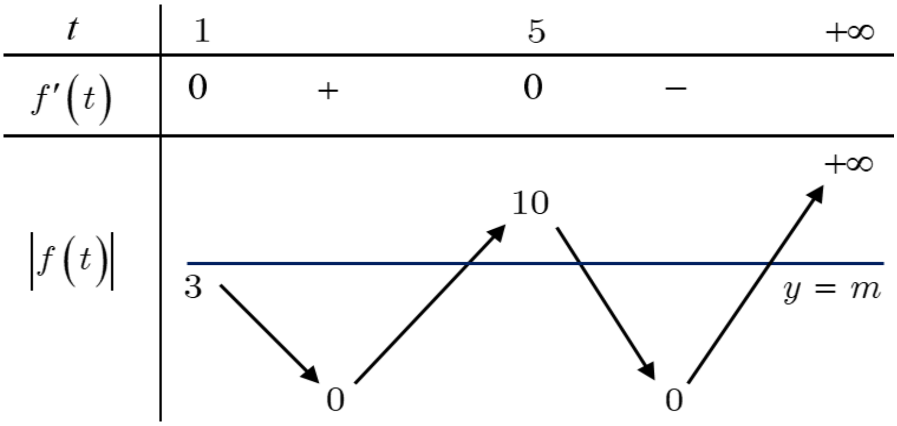
Chọn C

Đặt $t=x^2+1$, điều kiện $t\ge 1$, từ đó phương trình trở thành $\left|f(t)\right|=m$, $t\ge 1$.

Do $t\ge 1$nên ta xét bảng biến thiên của hàm $y=f(t)$ trên $[1;+\infty)$ như sau:



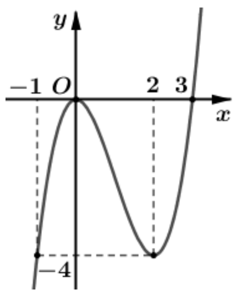
Bảng biến thiên của hàm số $y=\left|f(t)\right|$ trên $[1;+\infty)$ là



Cứ mỗi nghiệm $t>1$ cho được hai nghiệm x, do vậy để phương trình $\left|f\left(x^2+1\right)\right|=m$ có 6 nghiệm phân biệt thì phương trình $\left|f(t)\right|=m$ cần có 3 nghiệm $t>1$. Dựa bảng biến thiên của hàm $y=\left|f(t)\right|$ ở trên ta có điều kiện $3<m<10$, mặt khác m nguyên nên $m\in\{4;5;6;7;8;9\}$.

Vậy có 6 giá trị nguyên m thỏa mãn bài toán.

Câu 4. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.Phương trình $\left|f(x)+4\right|=m^2-3m+2$ có 4 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi tham số m thỏa mãn điều kiện nào dưới đây?



A. $0\le m\le 4$. **B.** $0<m<4$.

C. $m\in\left(\dfrac{3-\sqrt{17}}{2};1\right)\cup\left(2;\dfrac{3+\sqrt{17}}{2}\right)$. **D.** $m\in\left(\dfrac{3-\sqrt{17}}{2};\dfrac{3+\sqrt{17}}{2}\right)$.

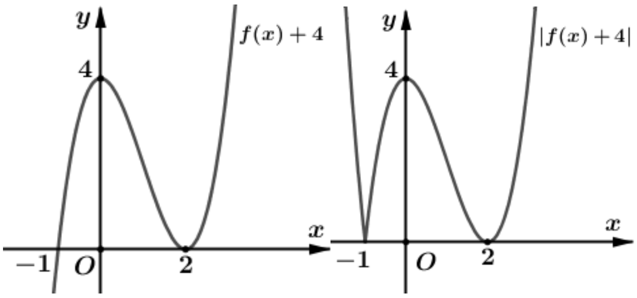
Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $g(x)=|f(x)+4|$.

Đồ thị hàm số $g(x)=|f(x)+4|$ có được bằng cách:

- Tịnh tiến đề thị hàm số $f(x)$ lên trên 4 đơn vị ta được $f(x)+4$.
- Lấy đối xứng phần phía dưới Ox của đồ thị hàm số $f(x)+4$ qua Ox, ta được đồ thị hàm số $g(x)=|f(x)+4|$.



Phương trình $|f(x)+4|=m^2-3m+2$ có 4 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi đường thẳng $y=m^2-3m+2$ cắt đồ thị hàm số $g(x)=|f(x)+4|$ tại 4 điểm phân biệt. Từ đồ thị hàm số $g(x)=|f(x)+4|$, ta suy ra phương trình $|f(x)+4|=m^2-3m+2$ có 4 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $0<m^2-3m+2<4$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2-3m+2>0 \\ m^2-3m+2<4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\in(-\infty;1)\cup(2;+\infty) \\ m\in\left(\dfrac{3-\sqrt{17}}{2};\dfrac{3+\sqrt{17}}{2}\right) \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow m\in\left(\dfrac{3-\sqrt{17}}{2};1\right)\cup\left(2;\dfrac{3+\sqrt{17}}{2}\right).$$

Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2018	$\nearrow$	2018	$\searrow$	$-\infty$

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $|f(x+2017)-2018|=m$ có đúng 4 nghiệm phân biệt?

A. 4034. **B.** 4035. **C.** 4036. **D.** 4037.

Chọn B

Xét hàm số $y=f(x+2017)-2018$ có đồ thị bằng cách tịnh tiến đồ thị hàm số $y=f(x)$ sang trái 2017 đơn vị, sau đó tịnh xuống dưới 2018 đơn vị. Ta được bảng biến thiên của hàm số $y=g(x)=f(x+2017)-2018$ như sau:

x	$-\infty$		-2017		-2016		$+\infty$
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-4036	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Khi đó đồ thị hàm số $y=\left|f(x+2017)-2018\right|$ gồm hai phần:

+ Phần 1: Giữ nguyên toàn bộ phần đồ thị hàm số $y=g(x)$ nằm phía trên trục hoành.

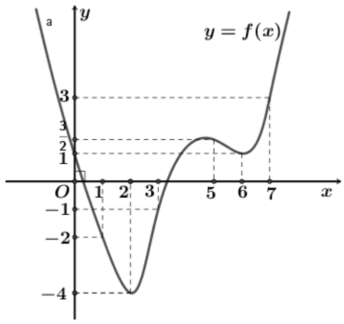
+ Phần 2: Lấy đối xứng phần phía dưới trục hoành của đồ thị hàm số $y=g(x)$ qua $0x$.

Vậy ta có bảng biến thiên của hàm số $y=\left|g(x)\right|$ như sau:

x	$-\infty$		x_0		-2017		-2016		$+\infty$
$\left\|g(x)\right\|$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	4036	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có để phương trình $\left|f(x+2017)-2018\right|=m$ có 4 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $0<m<4036$ mà $m\in Z$ nên có 4035 giá trị m cần tìm. Chọn đáp án **B**

Câu 6. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



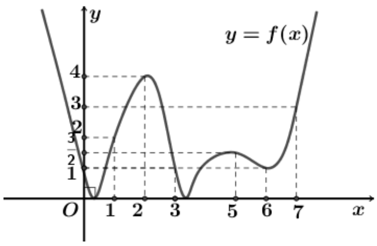
Tìm tất cả các giá trị m để phương trình $\left|f\left(\frac{3x^2+2x+3}{2x^2+2}\right)\right|=m$ có nghiệm.

A. $-4\le m\le -2$ **B.** $m>-4$ **C.** $2<m<4$ **D.** $2\le m\le 4$

Lời giải

Chọn D

Dựa vào đồ thị đã cho ta có đồ thi của hàm $y=\left|f\left(x\right)\right|$ là



Đặt $t=\frac{3x^2+2x+3}{2x^2+2}\Rightarrow t'=\frac{-4x^2+4}{\left(2x^2+2\right)^2}$; $t'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=1\end{array}\right.$.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
t'		$-$	0	$+$	0	$-$	
t	$\frac{3}{2}$	$\searrow$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	$\frac{3}{2}$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow t\in\left[1;2\right]$.

Vậy phương trhh $\left|f\left(\frac{3x^2+2x+3}{2x^2+2}\right)\right|=m$ có nghiệm khi và chỉ khi phương trình $\left|f\left(t\right)\right|=m$ có nghiệm $t\in\left[1;2\right]\Leftrightarrow 2\le m\le 4$.

Câu 7. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định trên $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	$\|$	$-$	$\|$	$+$	
y	2	$\searrow$	$-\infty \;\|\; 3$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Tìm số giá trị nguyên của *m* để phương trình $f\left(\left|x\right|\right)=m$ có 4 nghiệm phân biệt.

A. 5. **B.** 2.
C. 4. **D.** 0.

Lời giải

Chọn C

Từ bảng biến thiên của hàm số $y=f\left(x\right)$ ta suy ra bảng biến thiên của hàm số $y=f\left(\left|x\right|\right)$ như sau:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$-$	$\|$	$+$	$\|$	$-$	$\|$	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$3 \;\|\; 3$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Suy ra phương trình $f\left(\left|x\right|\right)=m$ có 4 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $-2<m<3$ mà $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m\in\{-1,0,1,2\}$. Vậy có 4 giá trị nguyên của *m* thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Câu 8. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ. Số giá trị nguyên của *m* để phương trình $\left|f\left(2x-3\right)\right|-m=0$ có đúng 2 nghiệm phân biệt là

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$-$	$\|$	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty \;\|\; +\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

A. 2. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 3.

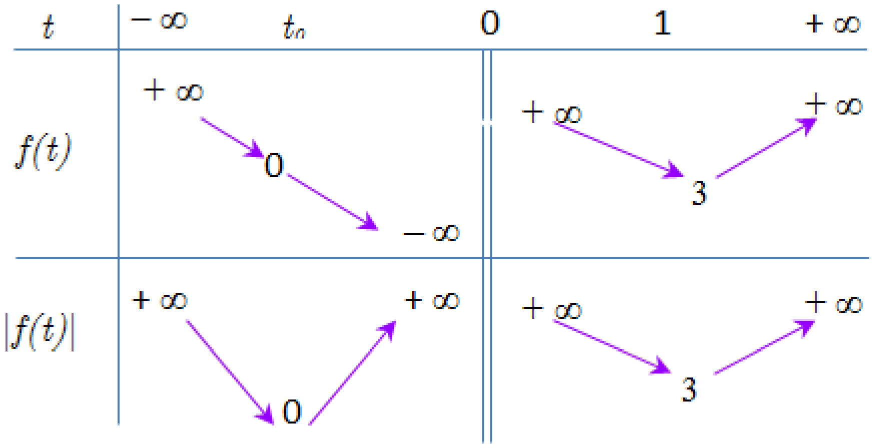
Lời giải

Chọn A

Đặt $2x-3=t$ phương trình đã cho trở thành $\left|f\left(t\right)\right|-m=0\Leftrightarrow\left|f(t)\right|=m$. (*)

Số nghiệm của phương trình (*) bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y=\left|f(t)\right|$ và đường thẳng $y=m$ song song hoặc trùng với trục hoành.

Từ bảng biến thiên đã cho ta vẽ được bảng biến thiên của hàm số $y=\left|f(t)\right|$.

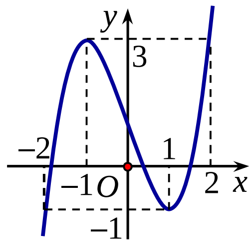


Do hàm số $t = 2x - 3$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên số nghiệm t của phương trình (*) bằng số nghiệm x của phương trình đã cho.

Dựa vào BBT ta thấy phương trình (*) có 2 nghiệm $\Leftrightarrow 0 < m < 3$.

Với $m \in \mathbb{Z}$ suy ra $m \in \{1; 2\}$.

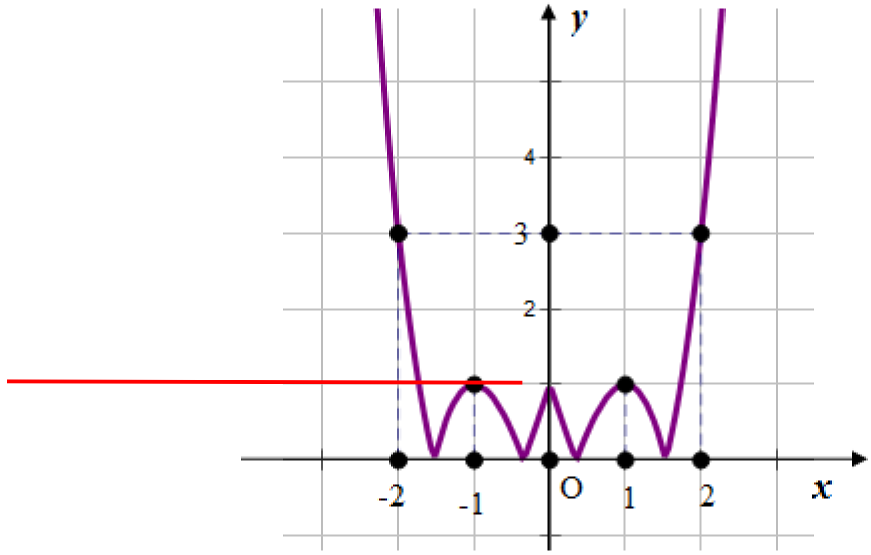
Câu 9. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Hỏi phương trình $\left| f\left(\left|x^2 - 2x\right|\right)\right| = 1$ có tất cả bao nhiêu nghiệm?



A. 9. **B.** 7. **C.** 6. **D.** 8.

Lời giải

Chọn B



+ Ta có đồ thị hàm số $y = \left| f\left(\left|x\right|\right)\right|$ có được bằng cách giữ nguyên phần đồ thị hàm $y = f(x)$ nằm bên phải trục Ox và đối xứng của chính phần đồ thị này qua Ox. Sau đó giữ nguyên phần đồ thị phía trên Ox và lấy đối xứng của phần đồ thị phía dưới Ox qua Ox. Như vậy đồ thị hàm số $y = \left| f\left(\left|x\right|\right)\right|$ như hình vẽ.

Từ phương trình $\left| f\left(\left|x^2 - 2x\right|\right)\right| = 1$Đặt $t = x^2 - 2x$ ta được $\left| f\left(\left|t\right|\right)\right| = 1$

Khi đó dựa vào đồ thị ta nhận thấy đồ thị hàm số $y=\left|f\left(|t|\right)\right|$ cắt đường thẳng $y=1$ tại 5 điểm là $t_1=a\in(-2;1), t_2=-1, t_3=0, t_4=1, t_5=b\in(1;2)$

Với $t=x^2-2x$

Ta có $t'=2x-2 \Rightarrow t'=0 \Leftrightarrow x=1$.

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

$t_1=a\in(-2;1), t_2=-1, t_3=0, t_4=1, t_5=b\in(1;2)$

Dựa vào bảng biến thiên ta có

$x^2-2x=a\in(-2;-1)$ vô nghiệm.

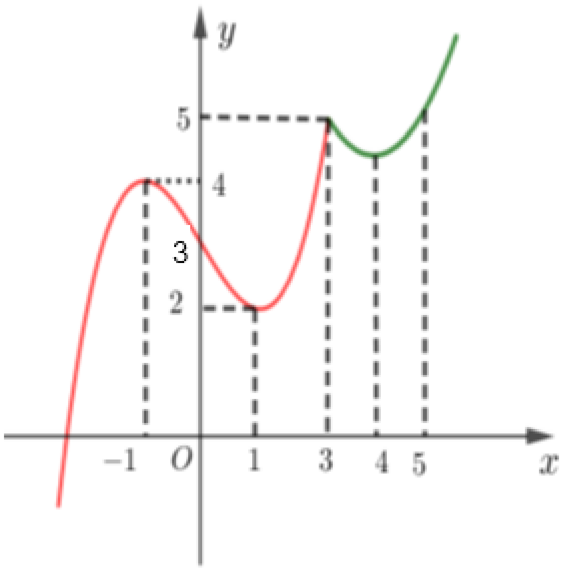
$x^2-2x=-1$ có đúng 1 nghiệm x.

$x^2-2x=0$ có đúng 2 nghiệm x.

$x^2-2x=1$ có đúng 2 nghiệm x.

$x^2-2x=b$ có đúng 2 nghiệm x.

Câu 10. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Tìm m để phương trình $f\left(\left|x^2-2x\right|\right)=m$ có đúng 6 nghiệm thực phân biệt thuộc đoạn $\left[-\frac{3}{2};\frac{7}{2}\right]$?

A. $2<m<3$ hoặc $f(4)<m<5$.

B. $2<m\le 3$ hoặc $f(4)<m<5$.

C. $2\le m<3$ hoặc $f(4)<m<5$.

D. $2<m<3$ hoặc $f(4)<m\le 5$.

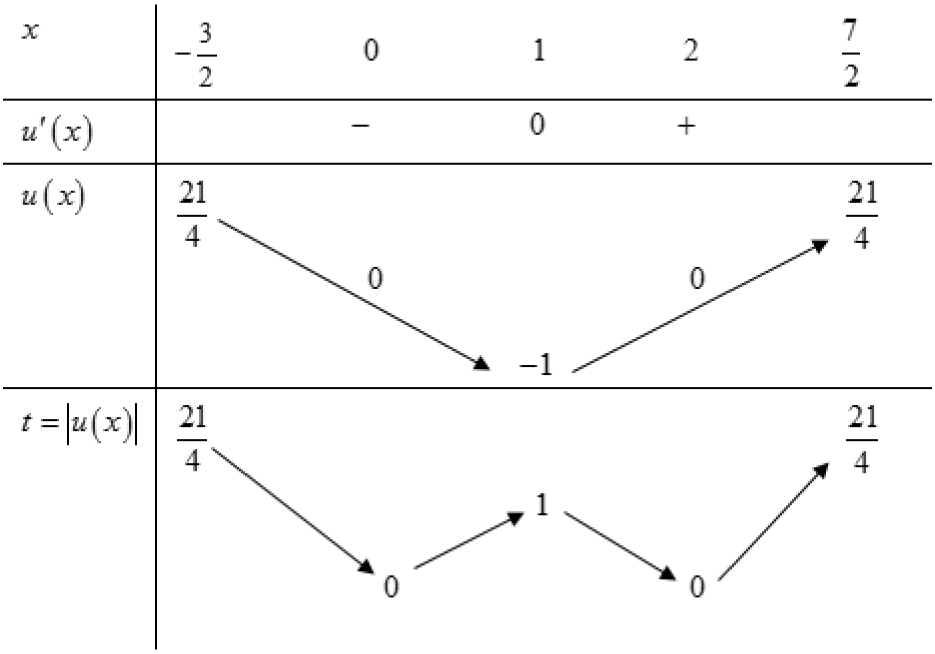
Lời giải

Chọn C

Đặt $t=\left|x^2-2x\right|$, với $x\in\left[-\frac{3}{2};\frac{7}{2}\right]$.

Ta thấy hàm số $u(x)=x^2-2x$ liên tục trên đoạn $\left[-\frac{3}{2};\frac{7}{2}\right]$ và $u'=2x-2$; $u'(x)=0 \Leftrightarrow x=1$.

Bảng biến thiên:



Nhận xét rằng với $t=0$ hoặc $1<t\le\frac{21}{4}$ thì phương trình $t=\left|x^2-2x\right|$ có 2 nghiệm phân biệt; với $t=1$ thì phương trình $t=\left|x^2-2x\right|$ có 3 nghiệm phân biệt; với mỗi $t\in(0;1)$ thì phương trình $t=\left|x^2-2x\right|$ có 4 nghiệm phân biệt.

Với $t=\left|x^2-2x\right|$ phương trình $f\left(\left|x^2-2x\right|\right)=m$ thành $f(t)=m,\left(t\in\left[0;\frac{21}{4}\right]\right)$

Dựa vào đồ thị f ta biện luận số nghiệm của phương trình $f(t)=m,\left(t\in\left[0;\frac{21}{4}\right]\right)$ trong các trường hợp sau

TH1: $m=2$

$f(t)=2\Leftrightarrow t=1$. Khi đó phương trình $f\left(\left|x^2-2x\right|\right)=m$ có 3 nghiệm phân biệt.

TH2: $2<m<3$

$f(t)=m\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=a\in(0;1)\\t=b\in(1;3)\end{array}\right.$. Khi đó phương trình $f\left(\left|x^2-2x\right|\right)=m$ có 6 nghiệm phân biệt.

TH3: $m=3$

$f(t)=m\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\\t=b\in(1;3)\end{array}\right.$. Khi đó phương trình $f\left(\left|x^2-2x\right|\right)=m$ có 4 nghiệm phân biệt.

TH4: $3<m<f(4)$

$f(t)=m\Leftrightarrow t=a\in(1;4)$. Khi đó phương trình $f\left(\left|x^2-2x\right|\right)=m$ có 2 nghiệm phân biệt.

TH5: $m=f(4)$

$f(t)=m\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=4\\t=b\in(1;4)\end{array}\right.$. Khi đó phương trình $f\left(\left|x^2-2x\right|\right)=m$ có 4 nghiệm phân biệt.

TH6: $f(4)<m<5$

$f(t)=m$ có 3 nghiệm phân biệt thuộc $(1;5)$. Khi đó phương trình $f\left(\left|x^2-2x\right|\right)=m$ có 6 nghiệm phân biệt.

TH7: $m=5$

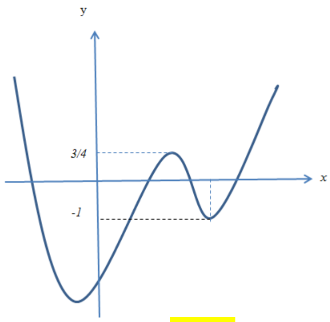
$f\left(t\right)=m$ có 2 nghiệm phân biệt thuộc $\left(1;5\right)$. Khi đó phương trình $f\left(\left|x^2-2x\right|\right)=m$ có 4 nghiệm phân biệt.

TH8: $5<m<f\left(\dfrac{21}{4}\right)$

$f\left(t\right)=m$ có 1 nghiệm thuộc $\left(1;\dfrac{21}{4}\right)$. Khi đó phương trình $f\left(\left|x^2-2x\right|\right)=m$ có 2 nghiệm phân biệt.

Vậy phương trình $f\left(\left|x^2-2x\right|\right)=m$ có đúng 6 nghiệm thực phân biệt thuộc đoạn $\left[-\dfrac{3}{2};\dfrac{7}{2}\right]$ khi và chỉ khi $2<m<3$ hoặc $f\left(4\right)<m<5$.

Câu 11. Cho đồ thị hàm số bậc bốn $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ. Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\left|x+m\right|\right)=m$ có 4 nghiệm phân biệt là?

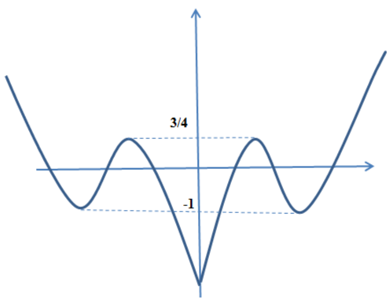


A. 0. **B.** Vô số. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C

Ta có đồ thị hàm số $y=f\left(\left|x\right|\right)$ như sau:

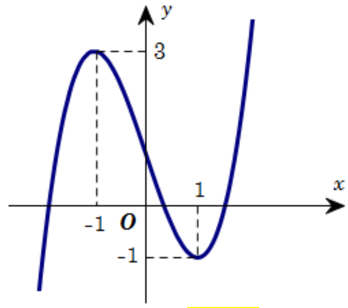


Đồ thị hàm số $y=f\left(\left|x+m\right|\right)$ có được bằng cách tịnh tiến đồ thị hàm số $y=f\left(\left|x\right|\right)$ dọc theo trục Ox nên số nghiệm của phương trình $f\left(\left|x+m\right|\right)=m$ bằng số nghiệm của phương trình $f\left(\left|x\right|\right)=m$.

Do đó, phương trình $f\left(\left|x+m\right|\right)=m$ có 4 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi đồ thị của hàm số $y=f\left(\left|x\right|\right)$ cắt đường thẳng $y=m$ tại 4 điểm phân biệt $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=\dfrac{3}{4} \\ m=-1 \end{array}\right.$.

Vì m nguyên nên $m=-1$.

Câu 12. Cho hàm số $y=x^3-3x+1$ có đồ thị hàm số như hình bên. Sử dụng đồ thị hàm số đã cho, tìm số-giá trị nguyên của tham số m để phương trình $8\left|x\right|^3-6\left|x\right|(x^2+1)^2=\left(m-1\right)(x^2+1)^3$ có nghiệm.



A. 2 **B.** 0 **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C

Phương trình $8\left|\frac{x}{x^2+1}\right|^3-6\left|\frac{x}{x^2+1}\right|=m-1 \Leftrightarrow \left|\frac{2x}{x^2+1}\right|^3-3\left|\frac{2x}{x^2+1}\right|+1=m$.

Đặt $t=\left|\frac{2x}{x^2+1}\right|\geq 0$. Ta có $x^2+1\geq 2x$ suy ra $0\leq\left|\frac{2x}{x^2+1}\right|\leq 1$ Do đó $0\leq t\leq 1$.

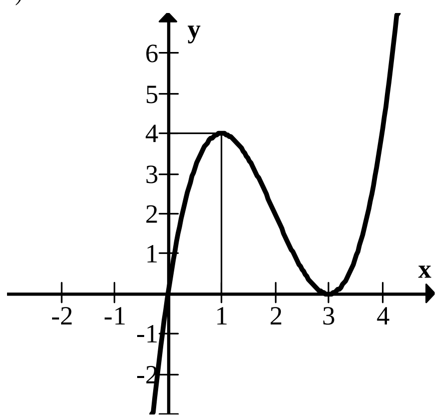
Phương trình trở thành $t^3-3t+1=m \quad (*)$.

Số nghiệm của phương trình $(*)$ là số giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^3-3x+1$ (chỉ xét với $x\in[0;1]$) và đường thẳng $y=m$.

Dựa vào đồ thị, ta thấy để phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi phương trình $(*)$ có nghiệm thuộc đoạn $[0;1]$ khi và chỉ khi $-1\leq m\leq 1$.

Như vậy có 3 giá trị nguyên của m thỏa mãn bài toán đã cho.

Câu 13. Cho đồ thị của hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ:



Tìm các giá trị của m để phương trình $f(|x|)=m$ có 6 nghiệm phân biệt.

A. $m\in\varnothing$. **B.** $0<m<1$ hoặc $m>4$. **C.** $m=0$. **D.** $0<m<4$.

Lời giải

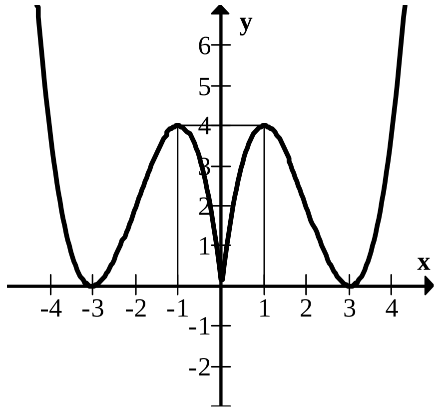
Chọn D

Đồ thị hàm $y=f(|x|)$ gồm 2 phần:

+ Phần đồ thị $y=f(x)$ nằm bên phảitung (Kể cả giao điểm trên trục tung), bỏ phần bên trái trục tung.

+ Lấy đối xứng phần bên phải trục tung qua trục tung.

Từ đó ta có đồ thị của của hàm số $y=f(|x|)$



Từ đồ thị của hàm số $y = f(|x|)$ nên $f(|x|) = m$ có 6 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $0 < m < 4$.

Câu 14. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới. Phương trình $f(|x|-2) = m^2 - 4m$ có 4 nghiệm phân biệt khi nào?

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	5	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

A. $m > 5$ hoặc $m < 0$. **B.** $-1 < m < 0$ hoặc $4 < m < 5$.

C. $-2 < m < 1$. **D.** $m < -2$ hoặc $m > 1$.

Lời giải

Chọn B

Đồ thị hàm số $f(|x|-2)$ được suy từ đồ thị hàm số $f(x)$ như sau:

- Tịnh tiến đồ thị hàm số $f(x)$ sang phải 2 đơn vị, ta được đồ thị hàm số $f(x-2)$.

- Giữ nguyên phần bên phải trục tung. Bỏ phần bên trái trục tung, lấy đối xứng phần bên phải trục tung qua trục tung.

Ta có bảng biến thiên hàm số $f(|x|-2)$:

x	$-\infty$		-3		0		3		$+\infty$
$f(\|x\|-2)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	5	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm của phương trình $f(|x|-2) = m^2 - 4m$ là số giao điểm của đồ thị hàm số $f(|x|-2)$ và đường thẳng $y = m^2 - 4m$. Do đó phương trình $f(|x|-2) = m^2 - 4m$ có 4 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $0 < m^2 - 4m < 5$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4m > 0 \\ m^2 - 4m < 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m > 4 \\ m < 0 \end{array}\right. \\ -1 < m < 5 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1 < m < 0 \\ 4 < m < 5 \end{array}\right..$$

Vậy $-1 < m < 0$ hoặc $4 < m < 5$ thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 15. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	||	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-1 || $-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $|f(x)|+m=0$ có 5 nghiệm phân biệt là

A. $(-2;-1]$. **B.** $[-1;2)$. **C.** $(-2;-1)$. **D.** $(-2;1)$.

Lời giải:

Chọn A

Gọi $x_1\,;x_2\,;x_3$ lần lượt là giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ và trục hoành. Từ bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$.Ta có bảng biến thiên của hàm số $y=|f(x)|$

x	$-\infty$		x_1		0		x_2		2		x_3		$+\infty$
$y'(x)$		$-$	0	$+$	||	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$y(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1 || $+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Khi đó phương trình $|f(x)|+m=0$ có 5 nghiệm khi phương trình $|f(x)|=-m$ có 5 nghiệm hay đồ thị hàm số $y=|f(x)|$ và $y=-m$ cắt nhau tại 5 điểm phân biệt

Do vậy $1\le -m<2 \Leftrightarrow -2<m\le -1$. **Chọn đáp án A**

Dạng 6: Biết đồ thị hoặc BBT của hàm số $y=f(x)$, xét các bài toán liên quan đến phương trình có dạng $f(x)=g(x);\, f(u(x))=g(v(x))$.

Câu 1. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $[0;+\infty)$ và có BBT như hình vẽ

x	0		$+\infty$
y'		$+$	
y	$2\sqrt{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

Hỏi phương trình $f(x)=f(3)\left(\sqrt{5-x}+\sqrt{4-x}\right)$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $0\le x\le 4$

Phương trình ban đầu $\Leftrightarrow \dfrac{f(x)}{\sqrt{5-x}+\sqrt{4-x}}=f(3)$. Đặt $g(x)=\dfrac{f(x)}{\sqrt{5-x}+\sqrt{4-x}}$

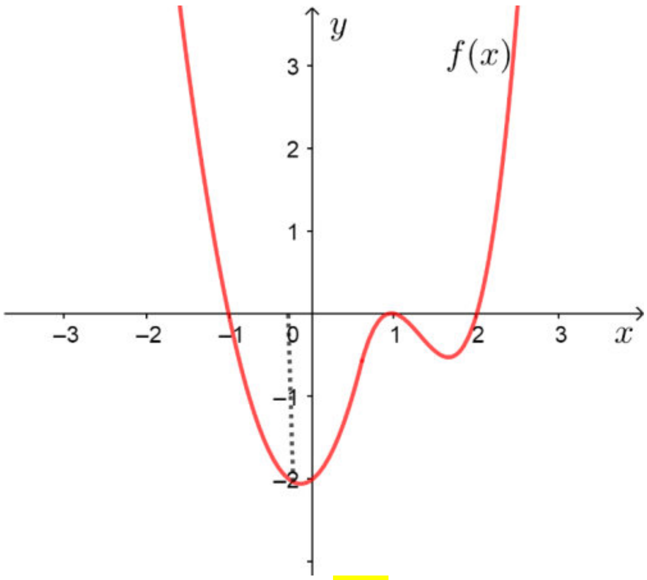
Ta có $g'(x)=\dfrac{f'(x)\left(\sqrt{5-x}+\sqrt{4-x}\right)+f(x).\left(\dfrac{1}{2\sqrt{5-x}}+\dfrac{1}{2\sqrt{4-x}}\right)}{\left(\sqrt{5-x}+\sqrt{4-x}\right)^2}>0, \forall x\in(0;4)$

Sau đây là BBT của hàm số $g(x)$ trên đoạn $[0;4]$

x	0		4
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	$2\left(\sqrt{15}-\sqrt{12}\right)$	$\nearrow$	$f(4)$

Vậy phương trình $g(x)=f(3)$ có đúng một nghiệm.

Câu 2. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Đặt $g(x)=f(f(x)-1)$. Tìm số nghiệm của $g'(x)=0$.



A. 6 **B.** 8 **C.** 9 **D.** 10

Lời giải

Chọn C

Xét $g'(x)=f'(x).f'(f(x)-1)$

Ta có: $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} f'(x)=0 & (1) \\ f'(f(x)-1)=0 & (2) \end{array}\right.$

Từ (1): $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=a,\quad a\in(-1,0) \\ x=1 \\ x=b,\quad b\in(1,2) \end{array}\right.$

Từ (2): $f'(f(x)-1)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{ll} f(x)-1=a, & a\in(-1,0) \\ f(x)-1=1 & \\ f(x)-1=b, & b\in(1,2) \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=a+1,\quad a+1>0 \\ f(x)=2 \\ f(x)=b+1,\quad 1<b+1<3 \end{array}\right.$

Dựa vào đồ thị suy ra: (1) có 3 nghiệm phân biệt

(2) Ta xét lần lượt đường thẳng: $y=a+1$ cắt đồ thị $f(x)$ tại 2 điểm phân biệt

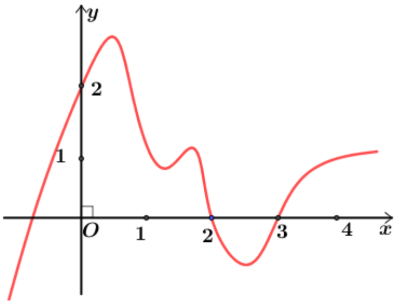
$y=2$ cắt đồ thị $f(x)$ tại 2 điểm phân biệt

$y=b+1$ cắt đồ thị $f(x)$ tại 2 điểm phân biệt

Nên (2) có 6 nghiệm phân biệt

Vậy phương trình $g'(x)=0$ có 9 nghiệm phân biệt

Câu 3. Cho hàm số $y=f(x)$ có liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Tìm số nghiệm của phương trình $f\left(x^3-3x\right)+3x^3-3x-13=\left(x^2-2\right)^3-3\left(x-1\right)^2$.



A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

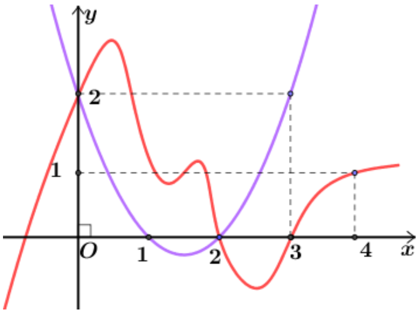
Chọn C

$f\left(x^3-3x\right)+3x^3-3x-13=\left(x^2-2\right)^3-3\left(x-1\right)^2$

$\Leftrightarrow f\left(x^3-3x\right)=x^6-6x^4+9x^2-3x^3+9x+2$

$\Leftrightarrow f\left(x^3-3x\right)=\left(x^3-3x\right)^2-3\left(x^3-3x\right)+2$

Đặt $t=x^3-3x$ ta có phương trình $f\left(t\right)=t^2-3t+2$



Dựa vào đồ thị thì $f\left(t\right)=t^2-3t+2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x^3-3x=0 \\ x^3-3x=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm\sqrt{3} \\ x=2 \\ x=-1 \end{array}\right.$

Vậy phương trình có 5 nghiệm.

Câu 4. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\left[1;3\right]$ và có bảng biến thiên như hình dưới

x	1		2		3
f'		$+$	0	$-$	
f	-5	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-2

Hỏi phương trình $f\left(x-1\right)=\dfrac{-5}{x^2-6x+12}$ có bao nhiêu nghiệma trên $\left[2;4\right]$?

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Do $x^2-6x+12>0, \forall x\in\mathbb{R}$ nên $f\left(x-1\right)=\dfrac{-5}{x^2-6x+12} \Leftrightarrow \left(x^2-6x+12\right)f\left(x-1\right)=-5$.

Đặt $g\left(x\right)=\left(x^2-6x+12\right)f\left(x-1\right) \Rightarrow g'\left(x\right)=\left(2x-6\right)f\left(x-1\right)+\left(x^2-6x+12\right)f'\left(x\right)$.

Xét trên $\left[2;4\right]$ ta có:

Với $x\in[2;3]$ thì $\begin{cases}1\le x-1\le 2\\ 2x-6\le 0\\ x^2-6x+12>0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}f(x-1)<0\\ 2x-6\le 0\\ f'(x-1)>0\\ x^2-6x+12>0\end{cases} \Rightarrow g'(x)>0,\forall x\in[2;3]$.

Với $x\in(3;4]$ thì $\begin{cases}2<x-1\le 3\\ 2x-6>0\\ x^2-6x+12>0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}f(x-1)<0\\ 2x-6>0\\ f'(x-1)<0\\ x^2-6x+12>0\end{cases} \Rightarrow g'(x)<0,\forall x\in(3;4]$.

Tính: $g(2)=(4-12+12)f(1)=-20$, $g(3)=(9-18+12)f(2)=-3$,

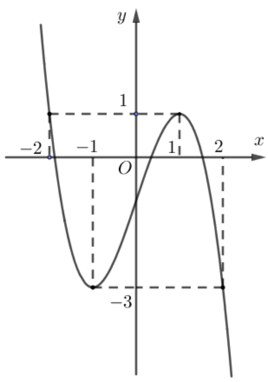
$g(4)=(16-24+12)f(3)=-8$.

Lập bảng biến thiên của $y=g(x)$ trên $[2;4]$:

x	2		3		4
g'		$+$	0	$-$	
g	-20	$\nearrow$	-3	$\searrow$	-8

Dựa vào BBT trên suy ra trên $[2;4]$ phương trình $(x^2-6x+12)f(x-1)=-5$ có 2 nghiệm phân biệt.

Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ. Phương trình $f(1-f(x))=0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?



A. 5. **B.** 4. **C.** 7. **D.** 6.

Lời giải

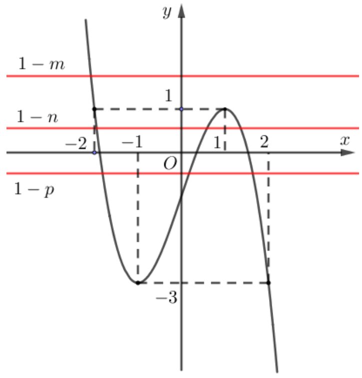
Chọn C

Từ đồ thị hàm số ta có $f(1-f(x))=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}1-f(x)=m & (-2<m<-1)\\ 1-f(x)=n & (0<n<1)\\ 1-f(x)=p & (1<p<2)\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}f(x)=1-m\\ f(x)=1-n\\ f(x)=1-p\end{array}\right.$.

+) Do $-2<m<-1 \Rightarrow 2<1-m<3 \Rightarrow$ phương trình $f(x)=1-m$ có 1 nghiệm x_1.

+) Do $0<n<1 \Rightarrow 0<1-n<1 \Rightarrow$ phương trình $f(x)=1-n$ có 3 nghiệm x_2,x_3,x_4.

+) Do $1<p<2 \Rightarrow -1<1-p<0 \Rightarrow$ phương trình $f(x)=1-p$ có 3 nghiệm x_5,x_6,x_7.



Dễ thấy 7 nghiệm phân biệt.
Vậy phương trình đã cho có đúng 7 nghiệm phân biệt.

Câu 6. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$+$	||	$+$	
y	-1 ↗		$+\infty$ || $-\infty$		↗ -1

Số nghiệm của phương trình $f\left(x\right)-x^2+2x-1=0$ là

A. vô số. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

$f\left(x\right)-x^2+2x-1=0\Leftrightarrow f\left(x\right)=\left(x-1\right)^2$.

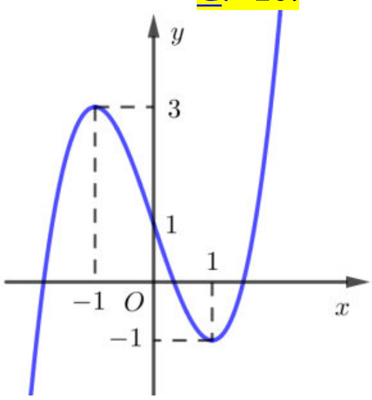
Với $x>1$ thì $f\left(x\right)<0$ nên phương trình vô nghiệm.

Với $x<1$ ta có $g\left(x\right)=f\left(x\right)-x^2+2x-1$. Ta có $g'\left(x\right)=f'\left(x\right)-2x+2>0$ nên hàm số $g\left(x\right)$ đồng biến và liên tục trên $\left(-\infty;1\right)$.

Lại có: $\lim\limits_{x\to-\infty}g\left(x\right)=-\infty;\lim\limits_{x\to1^-}g\left(x\right)=+\infty$ nên phương trình có 1 nghiệm duy nhất trên $\left(-\infty;1\right)$.

Câu 7. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Gọi S là tập các giá trị nguyên của m để cho phương trình $f\left(\sin x\right)=3\sin x+m$ có nghiệm thuộc khoảng $\left(0;\pi\right)$. Tổng các phần tử của S bằng :

A. - 5. B. - 8. C. -10. D. -6.



Lời giải

Chọn C

Đặt $t=\sin x$, do $x\in\left(0;\pi\right)\Rightarrow\sin x\in\left(0;1\right]\Rightarrow t\in\left(0;1\right]$. PT đã cho trở thành $f\left(t\right)=3t+m$

$\Leftrightarrow f(t)-3t=m$ (*)

Đặt $g(t)=f(t)-3t.$ Ta có: $g'(t)=f'(t)-3$ (1)

Dựa vào đồ thị hàm số $y=f(x),$ ta có: $\forall t\in\left(0;1\right]: f'(t)<0$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $\forall t \in (0;1] : g^{'}(t) < 0$.

Do đó hàm số $g(t)$ nghịch biến trên khoảng $(0;1)$.

PT (*) có nghiệm $t \in (0;1] \Leftrightarrow \min\limits_{[0;1]} g(t) \le m < \max\limits_{[0;1]} g(t) \Leftrightarrow g(1) \le m < g(0)$

$\Leftrightarrow f(1) - 3 \le m < f(0) \Leftrightarrow -4 \le m < 1$.

Vậy m nguyên là: $m = -4; -3; -2; -1; 0 \Rightarrow S = -10$.

Câu 8. Cho hàm số $f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như hình vẽ:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm của phương trình $f\left(x^2\right) = 0$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t = x^2$ $\left(t \ge 0\right)$.

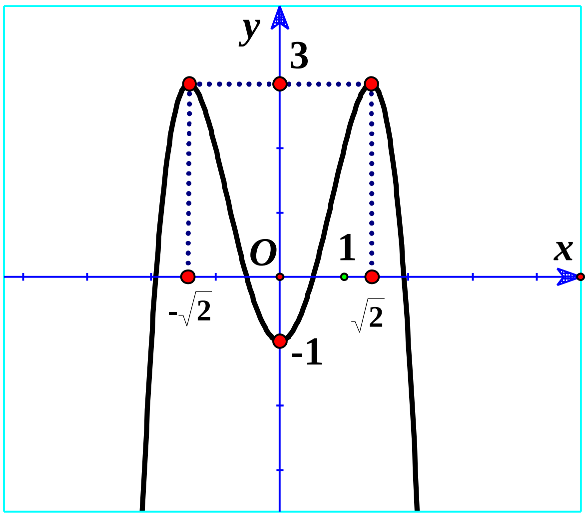
Phương trình $f\left(x^2\right) = 0$ trở thành $f\left(t\right) = 0 \left(t \ge 0\right)$

Dựa vào đồ thị hàm số f ta thấy phương trình $f\left(t\right) = 0 \left(t \ge 0\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = a > 1 \end{array}\right.$

Từ đó ta có $\left[\begin{array}{l} x^2 = 0 \\ x^2 = a > 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{a} \end{array}\right.$

Vậy phương trình $f\left(x^2\right) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.

Câu 9. Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ xác định trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ



Tìm số nghiệm của phương trình $2f\left(x\right) - x^2 - 2x = 0$.

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 0.

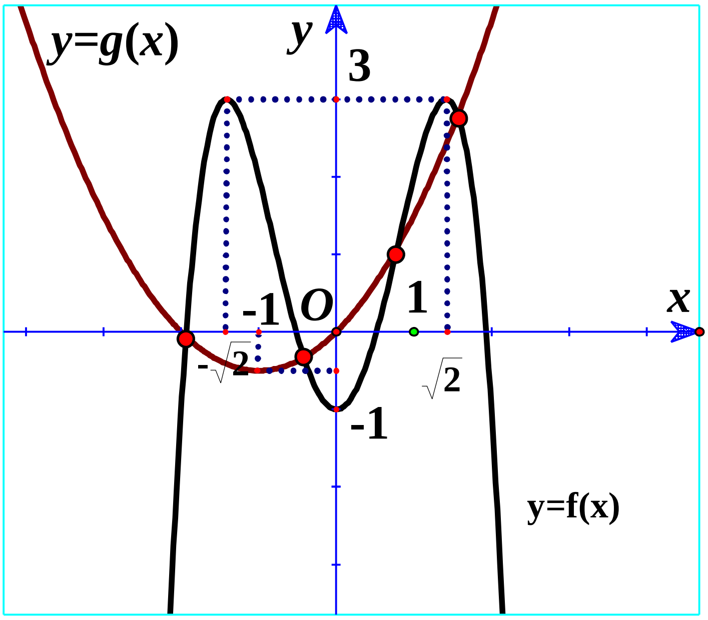
Lời giải

Chọn A

$+ \ 2f\left(x\right) - x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow f\left(x\right) = \dfrac{x^2}{2} + x.$

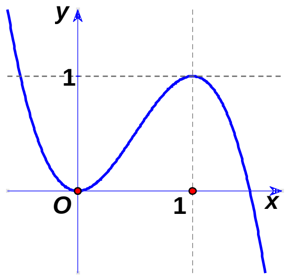
+ Xét hàm số $g(x)=\dfrac{x^2}{2}+x$.

+ Vẽ đồ thị hàm số $y=f(x), y=g(x)=\dfrac{x^2}{2}+x$ trên cùng hệ trục tọa độ ta có:



+ Dựa vào đồ thị ta có phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt.

Câu 10. Cho đồ thị hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm số nghiệm của phương trình $f(x)=x$.

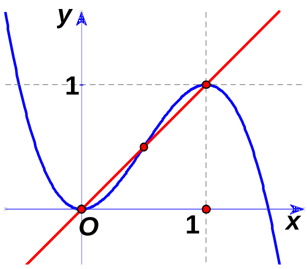


A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

Lời giải

Chọn D

Số nghiệm của phương trình $f(x)=x$ bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ và $y=x$.



Dựa và hình vẽ suy ra phương trình $f(x)=x$ có 3 nghiệm.

Câu 11. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[1;3]$ và có bảng biến thiên như sau

x	1		2		3
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	1	↗	4	↘	3

Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $f\left(x+1\right)=\dfrac{m}{x^2-4x+5}$ có nghiệm trên khoảng $\left(1;2\right)$.

A. 10. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 0.

Lời giải

Chọn B

Vì $x^2-4x+5=\left(x-2\right)^2+1>0\quad \forall x$ nên $f\left(x+1\right)=\dfrac{m}{x^2-4x+5}\Leftrightarrow\left(x^2-4x+5\right)f\left(x+1\right)=m$.

Đặt $h\left(x\right)=\left(x^2-4x+5\right)f\left(x+1\right)$, với $x\in\left(1;2\right)$.

Ta có $h'\left(x\right)=\left(x^2-4x+5\right)f'\left(x+1\right)+\left(2x-4\right)f\left(x+1\right)$.

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $y=f\left(x\right)$ ta có $\forall x\in\left(1;2\right)\Rightarrow x+1\in\left(2;3\right)\Rightarrow f'\left(x+1\right)\le 0$ và $2x-4<0,\forall x\in\left(1;2\right)$; $f\left(x+1\right)\ge 3>0, x+1\in\left(2;3\right)$. Do đó $h'\left(x\right)<0,\forall x\in\left(1;2\right)$.

Bảng biến thiên của hàm số $y=h\left(x\right)$ trên khoảng $\left(1;2\right)$.

x	1		2
$h'\left(x\right)$		$-$	
$h\left(x\right)$	$h\left(1\right)$	$\searrow$	$h\left(2\right)$

Khi đó phương trình $h\left(x\right)=m$ có nghiệm $x\in\left(1;2\right)$ khi và chỉ khi $h\left(2\right)<m<h\left(1\right)$ $\Leftrightarrow 1.f\left(3\right)<m<2f\left(2\right)\Leftrightarrow 3<m<8$. Do đó có 4 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Dạng 7: Biết đồ thị hoặc BBT của hàm số $y=f\left(x\right)$, xét các bài toán liên quan đến phương trình, bất phương trình chứa $f'\left(x\right); f''\left(x\right)$....

Câu 1. Biết rằng đồ thị hàm số $y=f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$, $\left(a,b,c,d,e\in\mathbb{R};\ a\ne 0,\ b\ne 0\right)$ cắt trục hoành Ox tại 4 điểm phân biệt. Khi đó đồ thị hàm số $g\left(x\right)=\left(f'\left(x\right)\right)^2-f''\left(x\right).f\left(x\right)$ cắt trục hoành Ox tại bao nhiêu giao điểm?

A. 6. **B.** 0. **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B

Ta có $g\left(x\right)=\left(f'\left(x\right)\right)^2-f''\left(x\right).f\left(x\right)$

Đồ thị hàm số $y=f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt nên phương trình $f\left(x\right)=a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)\left(x-x_3\right)\left(x-x_4\right)$, với $x_i, i=1,2,3,4$ là các nghiệm.

Suy ra

$$f'\left(x\right)=a[\left(x-x_2\right)\left(x-x_3\right)\left(x-x_4\right)+\left(x-x_1\right)\left(x-x_3\right)\left(x-x_4\right)$$
$$+\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)\left(x-x_4\right)+\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)\left(x-x_3\right)]$$

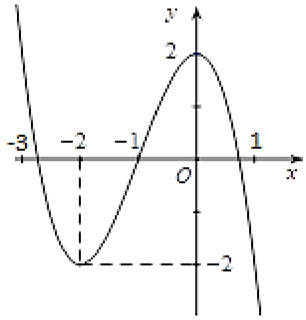
$$\Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{x-x_1}+\frac{1}{x-x_2}+\frac{1}{x-x_3}+\frac{1}{x-x_4} \Rightarrow \left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)'=\left(\frac{1}{x-x_1}+\frac{1}{x-x_2}+\frac{1}{x-x_3}+\frac{1}{x-x_4}\right)'$$

$$\Leftrightarrow \frac{f''(x)f(x)-\left(f'(x)\right)^2}{f^2(x)}=-\left(\left(\frac{1}{x-x_1}\right)^2+\left(\frac{1}{x-x_2}\right)^2+\left(\frac{1}{x-x_3}\right)^2+\left(\frac{1}{x-x_4}\right)^2\right)$$

Nếu $x=x_i$ với $i=1,2,3,4$ thì $f(x)=0$, $f'(x)\neq 0$ $\Rightarrow f''(x)f(x)<\left(f'(x)\right)^2$.

Nếu $x\neq x_i\left(\forall i=1,2,3,4\right)$ thì $\frac{1}{\left(x-x_i\right)^2}>0$, $f^2(x)>0$. Suy ra $f''(x).f(x)-\left(f'(x)\right)^2<0$ $\Leftrightarrow f''(x).f(x)<\left(f'(x)\right)^2$. Vậy phương trình $\left(f'(x)\right)^2-f''(x).f(x)=0$ vô nghiệm hay phương trình $g(x)=0$ vô nghiệm. Do đó, số giao điểm của đồ thị hàm số và trục hoành là 0.

Câu 2. Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị là hình vẽ dưới đây.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của m trong khoảng $(-2020;2020)$ để bất phương trình $f'(x)\sqrt{-2x-x^2}<m$ có nghiệm?

A. 2020. **B.** 2019. **C.** 2022. **D.** 2018.

Lời giải

Chọn B

Đặt $g(x)=f'(x)\sqrt{-2x-x^2}$ Ta có tập xác định của hàm số $y=g(x)$ là $D=[-2;0]$

Từ đồ thị ta thấy trên khoảng $(-2;0)$ hàm số $y=f(x)$ đồng biến và hàm số đạt cực đại tại $x=0$, đạt cực tiểu tại $x=-2$.

Suy ra $\begin{cases} f'(x)\geq 0\ \forall x\in[-2;0] \\ f'(-2)=f'(0)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g(x)\geq 0\ \forall x\in[-2;0] \\ g(-2)=g(0)=0 \end{cases} \Rightarrow \min\limits_{[-2;0]} g(x)=0$

Vậy bất phương trình $f'(x)\sqrt{-2x-x^2}<m$ có nghiệm $\Leftrightarrow m>\min\limits_{[-2;0]} g(x)\Leftrightarrow m>0$

Kết hợp $m\in(-2020;2020)$ suy ra có 2019 số nguyên thỏa mãn yêu cầu bài toán. Đáp án B

Câu 3. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-3	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

Đặt $g(x)=f\left(x+\frac{1}{x}\right)$. Bất phương trình $g'(x)<0$ có tập nghiệm là

A. $(-\infty;-1)\cup(0;1)$ **B.** $(-2;0)$. **C.** $(0;2)$. **D.** $(-1;0)\cup(1;+\infty)$

Lời giải

Chọn D

Ta có $g'(x)=\left(1-\frac{1}{x^2}\right)f'\left(x+\frac{1}{x}\right)$.

$\Rightarrow g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1-\frac{1}{x^2}=0 \\ f'\left(x+\frac{1}{x}\right)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm 1 \\ x+\frac{1}{x}\in\{-2;0;2\} \end{array}\right.$

Với $x+\frac{1}{x}=-2 \Rightarrow (x+1)^2=0 \Leftrightarrow x=-1$ (nghiệm bội chẵn).

Với $x+\frac{1}{x}=2 \Rightarrow (x-1)^2=0 \Leftrightarrow x=1$ (nghiệm bội chẵn).

Với $x+\frac{1}{x}=0 \Rightarrow$ phương trình vô nghiệm. $(-1;0)\cup(1;+\infty)$

Nhận xét với $x>0 \Rightarrow x+\frac{1}{x}\geq 2 \Rightarrow f'\left(x+\frac{1}{x}\right)<0$.

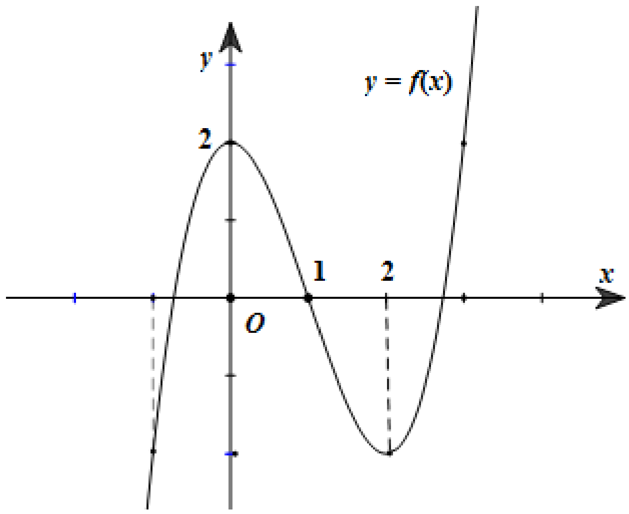
Với $x<0 \Rightarrow x+\frac{1}{x}\leq -2 \Rightarrow f'\left(x+\frac{1}{x}\right)>0.$

Ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

Từ bảng xét dấu suy ra bất phương trình $g'(x)<0$ có tập nghiệm là $(-1;0)\cup(1;+\infty)$.

Câu 4. Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Tìm số nghiệm tối đa của phương trình $|f'(x)|=m$ với m là tham số thực.

A. 2. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 7.

Lời giải

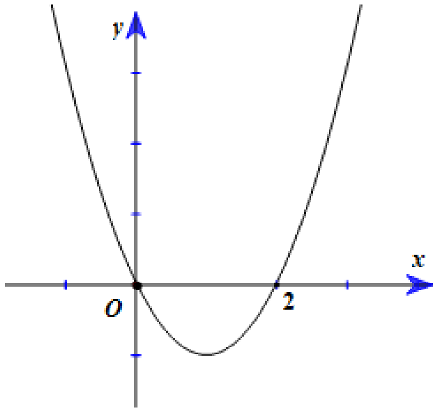
Chọn B

Từ đồ thị hàm số $y=f(x)$ ta suy ra:

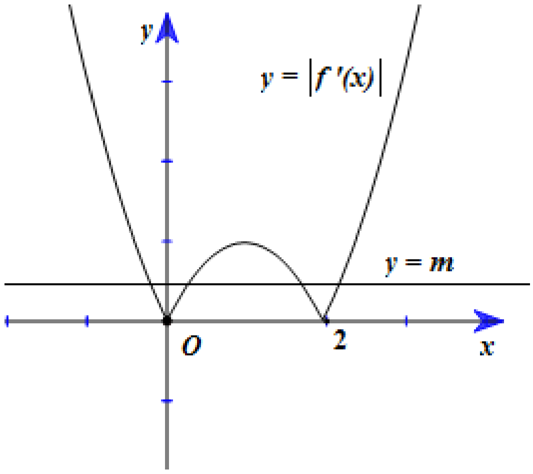
+ $f'(x)=0$ có hai nghiệm là $x=0; x=2$

+ Hệ số của x^3 trong biểu thức của hàm số $y=f(x)$ mang dấu dương

Do đó đồ thị hàm số $y=f'(x)$ phải có dạng:

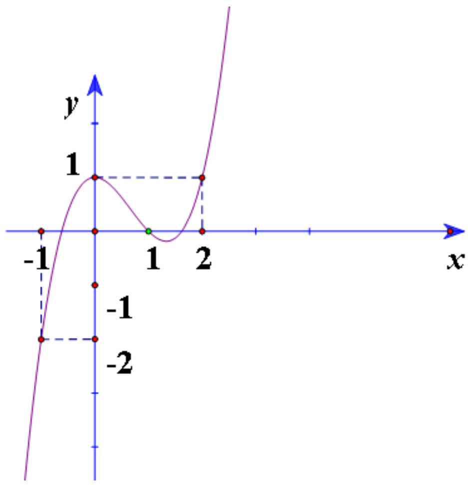


Suy ra đồ thị hàm số $y=\left|f'(x)\right|$ có dạng:



Từ đồ thị, ta thấy đường thẳng $y=m$ có tối đa 4 điểm chung với đồ thị hàm số $y=\left|f'(x)\right|$ nên phương trình có tối đa 4 nghiệm.

Câu 5. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



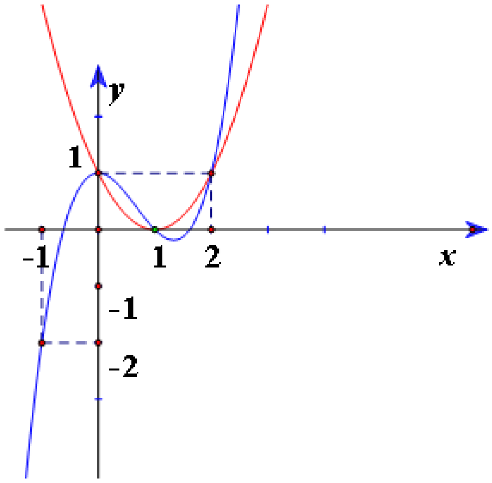
Cho hàm số $g(x)=f(x)-\dfrac{x^3}{3}+x^2-x+2$, phương trình $g'(x)=0$ có số nghiệm là?

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

Lời giải

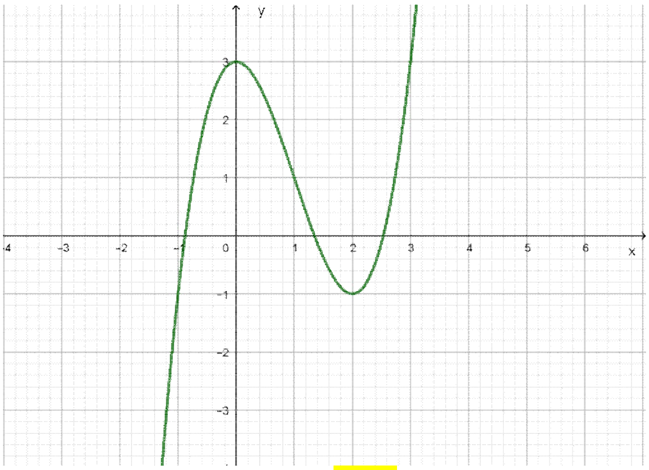
Chọn C

Ta có hàm số $g(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và $g'(x)=f'(x)-(x-1)^2$ do đó số nghiệm của phương trình $g'(x)=0$ bằng số giao điểm của hai đồ thị $y=f'(x)$ và $y=(x-1)^2$.



Từ đồ thị suy ra $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=2 \end{array}\right.$. Vậy phương trình $g'(x)=0$ có 3 nghiệm. Đáp án **C.**

Câu 6. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên tập R và có đồ thị như hình bên. Đặt $g(x)=f(f(x))$. Xác đinh số nghiệm của phương trình $g'(x)=0$.



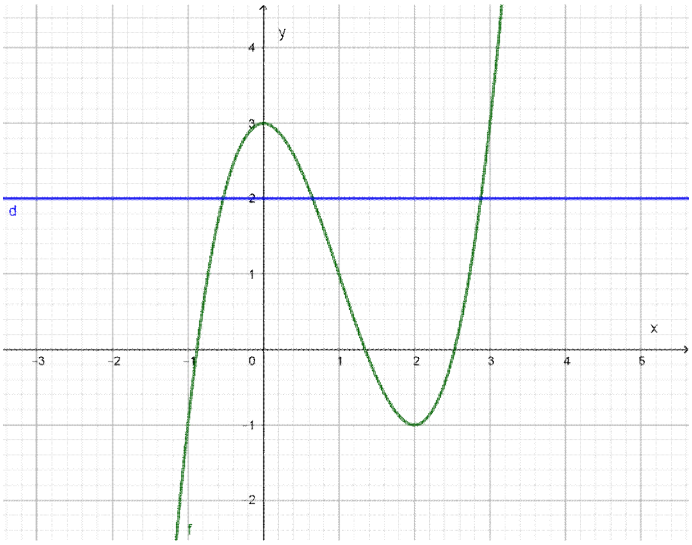
A. 5. **B.** 6. **C.** 8. **D.** 10.

Lời giải

Chọn C

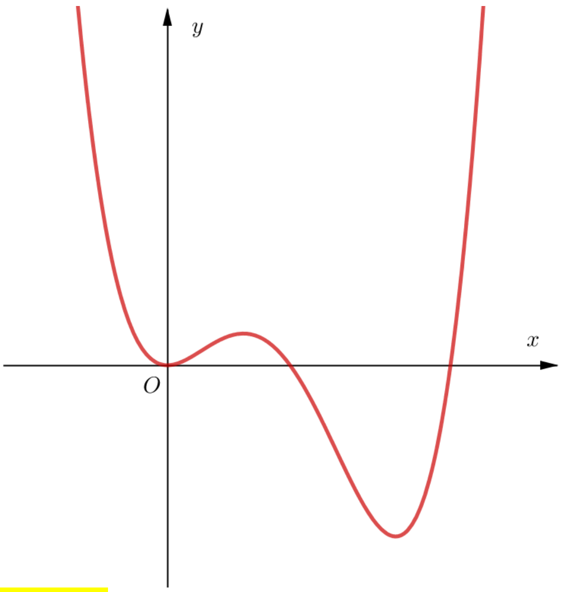
Ta có $g'(x)=(f(f(x)))'=f'(x).f'(f(x))$ nên:

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x).f'(f(x))=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x)=0 \\ f'(f(x))=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \\ f(x)=0\,(1) \\ f(x)=2\,(2) \end{array}\right.$$



PT (1) có ba nghiệm khác 0 và 2
PT (2) có ba nghiệm khác 0 và 2
Vậy số nghiệm của phương trình $g'(x)=0$ là 8 nghiệm.

Câu 7. Cho hàm số $y=f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e,(a\neq 0)$ có đồ thị như hình vẽ. Biết $-2<f''\left(-\frac{b}{4a}\right)<-1$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-8;2019]$ để phương trình $f''(x)\left[f''(x)-m\right]=0$ có bốn nghiệm phân biệt?



A. 2022. **B.** 2020. **C.** 2019. **D.** 2021.

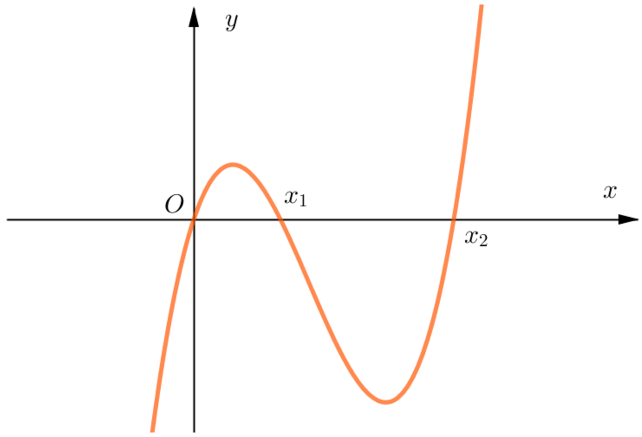
Lời giải

Chọn B

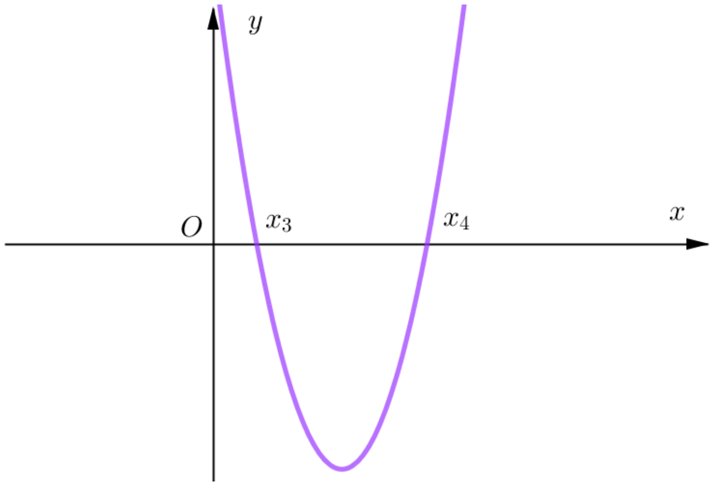
Từ đồ thị suy ra $a>0$ và hàm số $y=f(x)$ có 3 điểm cực trị là $0,x_1,x_2$. Do vậy, phương trình $y'=0$ có 3 nghiệm phân biệt là $0,x_1,x_2$.

Ta có $y'=f'(x)=4ax^3+3bx^2+2cx+d \Rightarrow y''=f''(x)=12ax^2+6bx+2c$.

Đồ thị hàm số $y'=f'(x)$ có dạng sau:



Từ đồ thị hàm số $y' = f'(x)$ suy ra phương trình $f''(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt x_3, x_4 nên đồ thị hàm số $y'' = f''(x)$ là một parabol có dạng sau:



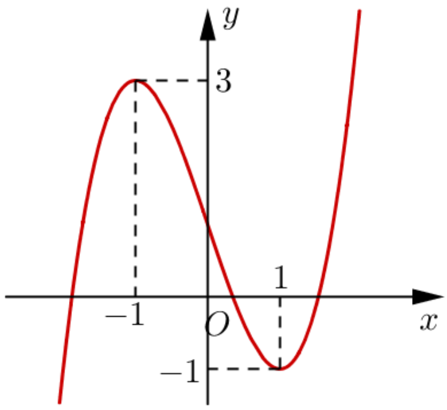
Ta có $f''(x)\left[f''(x) - m\right] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f''(x) = 0 \\ f''(x) = m \end{array}\right.$.

Phương trình $f''(x)\left[f''(x) - m\right] = 0$ có bốn nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình $f''(x) = m$ có hai nghiệm phân biệt khác $x_3, x_4 \Leftrightarrow$ parabol $y'' = f''(x)$ cắt đường thẳng $y = m$ tại hai điểm phân biệt có hoành độ khác x_3, x_4.

Tung độ đỉnh của parabol $y'' = f''(x)$ là $f''\left(-\frac{b}{4a}\right)$ nên phương trình $f''(x) = m$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m > f''\left(-\frac{b}{4a}\right), (m \neq 0)$ mà $-2 < f''\left(-\frac{b}{4a}\right) < -1$ và m nguyên thuộc $\left[-8; 2019\right]$ nên $-1 \leq m \leq 2019, (m \neq 0)$

Vậy có 2020 giá trị của m thỏa mãn bài toán.

Câu 8. Cho hàm đa thức bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên dưới. Hỏi phương trình $f'(f(x)) = 0$ có bao nhiêu nghiệm?



A. 4. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 6.

Lời giải

Chọn B

Đặt $f\left(x\right)=ax^3+bx^2+cx+d$.

$f'\left(x\right)=3ax^2+2bx+c$.

Dựa vào đồ thị ta có:

$$\begin{cases} f\left(-1\right)=3 \\ f\left(1\right)=-1 \\ f'\left(-1\right)=0 \\ f'\left(1\right)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a+b-c+d=3 \\ a+b+c+d=-1 \\ 3a-2b+c=0 \\ 3a+2b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=0 \\ c=-3 \\ d=1 \end{cases}.$$

Suy ra $f\left(x\right)=x^3-3x+1$.

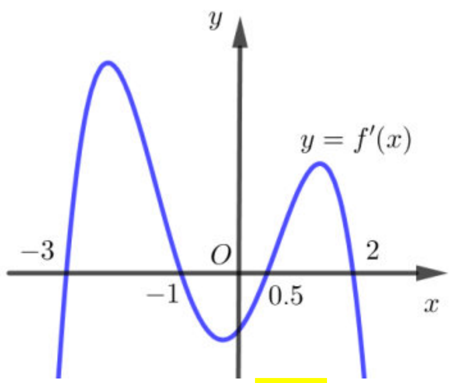
Ta có

$$f'\left(f\left(x\right)\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f\left(x\right)=-1 \\ f\left(x\right)=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x^3-3x+1=-1 & (1) \\ x^3-3x+1=1 & (2) \end{array}\right..$$

Dựa vào độ thị hàm số ta suy ra phương trình $\left(1\right)$ có 2 nghiệm và phương trình $\left(2\right)$ có 3 nghiệm. Các nghiệm của 2 phương trình này không trùng nhau. Do đó phương trình $f'\left(f\left(x\right)\right)=0$ có 5 nghiệm.

Dạng 8: Biết đồ thị hoặc BBT của hàm số $y=f'\left(x\right)$, xét các bài toán liên quan đến phương trình có dạng $f\left(x\right)=0;\ f\left(u\left(x\right)\right)=0;\ f\left(x\right)=g\left(x\right);\ f\left(u\left(x\right)\right)=g\left(v\left(x\right)\right)$ ....

Câu 1. Cho hàm số $f(x)=ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex-m$ với $a,b,c,d,e,m\in\mathbb{R}$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ (đồ thị của $y=f'(x)$ cắt Ox tại 4 điểm có hoành độ $-3;\ -1;\ 0,5$ và 2). Hỏi phương trình $f(x)=-m$ có mấy nghiệm phân biệt.



A. 3. **B.** 1. **C.** 5. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Từ đồ thị ta có

$$f'(x)=a(x+3)(x+1)(2x-1)(x-2)=a\left(2x^4+3x^3-12x^2-7x+6\right).$$

$$\Rightarrow f(x)=\int a\left(2x^4+3x^3-12x^2-7x+6\right)\mathrm{d}x=a\left(\frac{2}{5}x^5+\frac{3}{4}x^4-4x^3-\frac{7}{2}x^2+6x\right)-m.$$

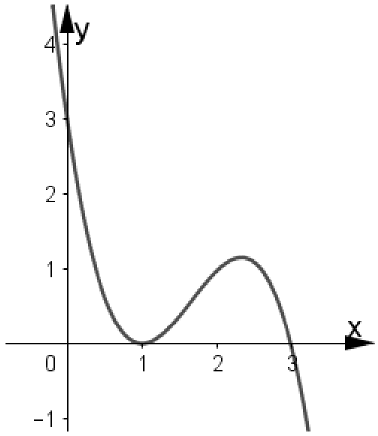
Giải phương trình :

$$f(x)=-m\Leftrightarrow \frac{2}{5}x^5+\frac{3}{4}x^4-4x^3-\frac{7}{2}x^2+6x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ \frac{2}{5}x^4+\frac{3}{4}x^3-4x^2-\frac{7}{2}x+6=0\ (1)\end{array}\right..$$

Ta thấy phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt khác 0.

Vậy phương trình đã cho có 5 nghiệm phân biệt.

Câu 2. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, $f(3)<0$ và đồ thị hàm số $y=f'(x)$ được cho như hình vẽ bên dưới



Phương trình $f(x)=0$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

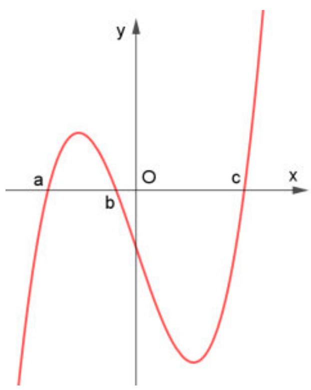
Chọn A

Từ đồ thị hàm số đã cho, ta có bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$:

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$			$y(3)$	$\searrow$	$-\infty$

Qua BBT và $f(3)<0$ ta thấy phương trình $f(x)=0$ vô nghiệm.

Câu 3. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ, biết $f(a)=0$. Phương trình $f(x)=0$ có bao nhiêu nghiệm?



A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B

Xét $S_1 = \int_a^b f'(x)dx = f(x)\Big|_a^b = f(b) - f(a)$.

$S_2 = -\int_b^c f'(x)dx = -f(x)\Big|_b^c = f(b) - f(c)$.

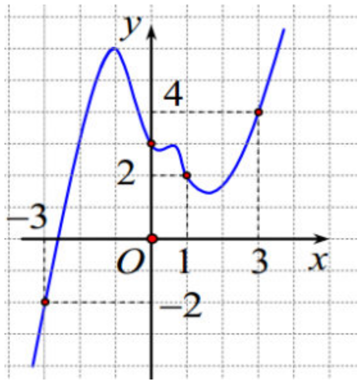
Vì $S_1 < S_2 \Rightarrow f(b) - f(a) < f(b) - f(c) \Rightarrow f(a) > f(c)$.

Dựa vào đồ thị của hàm số $f'(x)$, ta có bảng biến thiên của hàm $f(x)$ như sau:

x		a		b		c	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$f(a)$	↗	$f(b)$	↘	$f(c)$	↗

Vì $f(a) = 0$ do đó từ bảng biến thiên ta có phương trình $f(x) = 0$ có đúng 3 nghiệm.

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[-3;\ 3]$ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên. Biết $f(1) = 6$ và $g(x) = f(x) - \dfrac{(x+1)^2}{2}$. Kết luận nào sau đây là đúng?



A. Phương trình $g(x) = 0$ có đúng hai nghiệm thuộc $[-3;3]$.

B. Phương trình $g(x) = 0$ có đúng một nghiệm thuộc $[-3;3]$.

C. Phương trình $g(x) = 0$ không có nghiệm thuộc $[-3;3]$.

D. Phương trình $g(x) = 0$ có đúng ba nghiệm thuộc $[-3;3]$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $g'(x) = f'(x) - (x+1)$.

Ta thấy đường thẳng $y = x + 1$ là đường thẳng đi qua các điểm $(-3;-2), (1;2), (3;4)$.

Do $f(1) = 6 \Rightarrow g(1) = 4$.

Từ hình vẽ ta thấy:

$\int_{-3}^{1} f'(x)\mathrm{d}x > 6 \Rightarrow f(1) - f(-3) > 6 \Rightarrow f(-3) < 0 \Rightarrow g(-3) = f(-3) - 2 < 0$.

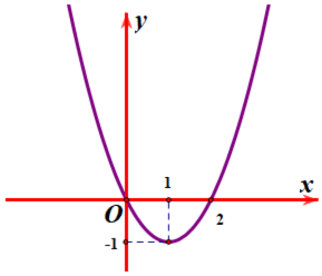
$\int_{1}^{3} f'(x)\mathrm{d}x > 2 \Rightarrow f(3) - f(1) > 6 \Rightarrow f(3) > 8 \Rightarrow g(3) = f(3) - 8 > 0$.

Từ đồ thị hàm số $y=f'(x)$ và đường thẳng $y=x+1$ cùng với các kết quả trên ta có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$		-3		1		3		$+\infty$
$g'(x)$			||	$+$	0	$-$	||		
$g(x)$			$g(-3)$	↗	4	↘	$g(3)$		

Từ bảng biến thiên ta có phương trình $g(x)=0$ có đúng một nghiệm thuộc $[-3;3]$.

Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)=a.x^3+b.x^2+c.x+d$ với $a,b,c,d\in\mathbb{R}$, có đồ thị $y=f'(x)$ như hình dưới đây



Biết $f(0)=0$. Khi đó số nghiệm của phương trình $f(x^2-x)=0$ là:

A. 2. **B.** 4.

C. 3. **D.** 6.

Lời giải:

Chọn B

***Cách 1:** Từ đồ thị ta có BBT sau:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	-	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	**0**	↘	$f(2)$	↗	$+\infty$

Từ BBT ta có $f(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=a>2\end{array}\right.$

Do đó $f(x^2-x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-x=0\ (1)\\x^2-x=a\ (2)\end{array}\right.$

Ta có (1) $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\end{array}\right.$

(2) $\Leftrightarrow x^2-x-a=0$, có $\Delta=1+4a>0,\forall a>2$ nên (2) luôn có 2 nghiệm phân biệt khác 0 và 1

Vậy PT $f(x^2-x)=0$ có 4 nghiệm phân biệt.

***Cách 2:** Từ đồ thị ta có $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$

Đặt $g(x)=f(x^2-x)$

Ta có $g'(x)=\left[f(x^2-x)\right]'=(2x-1)f'(x^2-x)$

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x-1=0\\ f'(x^2-x)=0\end{array}\right. \Leftrightarrow x\in\left\{-1;0;\frac{1}{2};1;2\right\}$$

BBT:

x	$-\infty$		-1		0		$\frac{1}{2}$		1		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$g(-1)$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$g\left(\frac{1}{2}\right)$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$g(2)$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ BBT ta thấy phương trình $g(x)=f(x^2-x)=0$ có 4 nghiệm phân biệt.

***Cách 3:** Từ GT ta có $f'(x)=3ax^2+2bx+c$. Từ đồ thị ta có $f'(0)=0\Rightarrow c=0$;
$f'(2)=0\Rightarrow 12a+4b+c=0\Rightarrow 3a+b=0$ (1)

Lại có $f'(1)=-1$ nên $3a+2b=-1$ (2) Từ (1), (2) ta có $a=\frac{1}{3}; b=-1$

Do đó $f'(x)=x^2-2x\Rightarrow f(x)=\int(x^2-2x)dx=\frac{x^3}{3}-x^2+C$

Lại có $f(0)=0\Rightarrow C=0$ do đó $f(x)=\frac{x^3}{3}-x^2$

Ta có $f(x)=0\Leftrightarrow\frac{x^3}{3}-x^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=3\end{array}\right.$

Khi đó $f(x^2-x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-x=0\\ x^2-x=3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0;x=1\\ x=\frac{1\pm\sqrt{13}}{2}\end{array}\right.$ có 4 nghiệm.

Câu 6. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới đây.

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	5	$\searrow$	$-\infty$

Phương trình $f(4x-x^2)=-\frac{1}{3}x^3+3x^2-8x+3$ có bao nhiêu nghiệm thực trên khoảng $(0;4)$?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 6.

Lời giải

Chọn A

$g(x)=f(4x-x^2)+\frac{1}{3}x^3-3x^2+8x-3$

$g'(x)=(4-2x)f'(4x-x^2)+x^2-6x+8=(2-x)\left[2f'(4x-x^2)+4-x\right]$.

Với $x\in(0;4)$ thì $4-x>0$; $0<4x-x^2\le 4$ nên $f'(4x-x^2)\ge 0$.

Suy ra $2f'(4x-x^2)+4-x>0$, $\forall x\in(0;4)$.

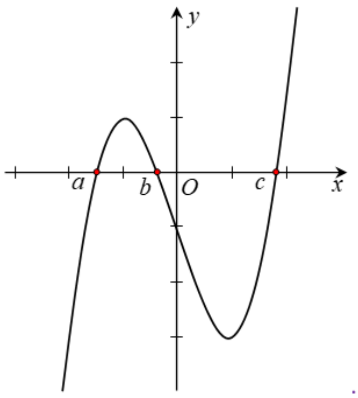
Bảng biến thiên

x	0		2		4
g'		$+$	0	$-$	
g	$g(0)$	$\nearrow$	$g(2)$	$\searrow$	$g(4)$

$g(2)=f(4)+\dfrac{11}{3}=\dfrac{26}{3}$; $\quad g(0)=f(0)-3=-6$; $\quad g(4)=f(0)+\dfrac{7}{3}=-\dfrac{2}{3}$.

Suy ra phương trình $f\left(4x-x^2\right)=-\dfrac{1}{3}x^3+3x^2-8x+3$ có hai nghiệm thực trên khoảng $(0;4)$.

Câu 7. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình bên. Biết $f(a)>0$, hỏi đồ thị hàm số $y=f(x)$ có thể cắt trục hoành tại nhiều nhất bao nhiêu điểm?



A. 4 điểm. **B.** 2 điểm. **C.** 1 điểm. **D.** 3 điểm.

Lời giải

Chọn B

.

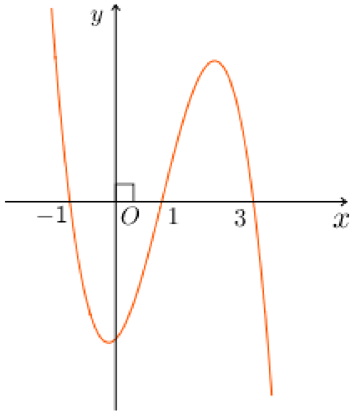
Theo hình vẽ ta có: $\int\limits_a^c f'(x)\mathrm{d}x=f(c)-f(a)<0 \Leftrightarrow f(c)<f(a)$.

Từ đó, ta có thể lập được bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		a		b		c		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	0	+	
y	$+\infty$	$\searrow$	$f(a)>0$	$\nearrow$	$f(b)>0$	$\searrow$	$f(c)$	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy đồ thị hàm số $y=f(x)$ có thể cắt trục hoành tại nhiều nhất 2 điểm.

Câu 8. Cho hàm số bậc $y=f(x)$ thỏa mãn $f(-1)=f(3)=0$, $f(1)=-1$ và đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ có dạng như hình dưới đây. Phương trình $\left(f(x)\right)^3=f(1)$ có bao nhiêu nghiệm thực



A. 1. **B.** 2 . **C.** 3 . **D.** 4 .

Lời giải

Chọn C

Từ đồ thị và giả thiết, ta có bảng biến thiên của $y=f\left(x\right)$:

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	0	$\searrow$	$f(1)$	$\nearrow$	0	$\searrow$	

Xét hàm số $y=\left(f\left(x\right)\right)^3$ ta có $y'=\left(\left(f\left(x\right)\right)^3\right)'=3\left[f\left(x\right)\right]^2.f'\left(x\right)$.

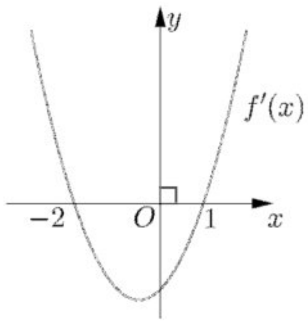
Ta có bảng biến thiên của hàm số $y=\left(f\left(x\right)\right)^3$:

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$-$		$-$		$-$		$-$	
$2.\left[f\left(x\right)\right]^2.f'\left(x\right)$		$+$		$-$		$+$		$-$	
$y=\left(f\left(x\right)\right)^3$		$\nearrow$	0	$\searrow$	$\left(f\left(1\right)\right)^3$	$\nearrow$	0	$\searrow$	

Do $\left(f\left(1\right)\right)^3=f\left(1\right)=-1$

Vậy phương trình $\left(f\left(x\right)\right)^3=f\left(1\right)$ có 3 nghiệm phân biệt

Câu 9. Cho hàm số $f\left(x\right)=ax^3+bx^2+cx+d$ $\left(a,b,c,d\in\mathbb{R}\right)$. Đồ thị hàm số $f'\left(x\right)$ như sau:



và $2018f(1)=2019f(0)$. Hỏi tập nghiệm của phương trình $f(x)=f'(x)$ có số phần tử là?

A. 4. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f'(x)=3ax^2+2bx+c$

Dựa vào đồ thị ta có $f'(x)=3a(x+2)(x-1)=3a(x^2+x-2)$ và $a\neq 0$

Suy ra $f(x)=a\left(x^3+\dfrac{3}{2}x^2-6x\right)+d$

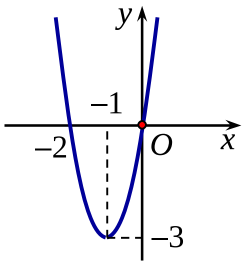
Theo đề bài $2018f(1)=2019f(0)\Leftrightarrow 2018\left(-\dfrac{7a}{2}+d\right)=2019d\Leftrightarrow d=-7063a$.

Vậy ta có $f(x)=f'(x)$

$\Leftrightarrow a\left(x^3+\dfrac{3}{2}x^2-6x\right)-7063a=3a(x^2+x-2)$

$\Leftrightarrow x^3-\dfrac{3}{2}x^2-9x-7057=0$. Vậy phương trình có 1 nghiệm.

Câu 10. Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đạo hàm là hàm số $y=f'(x)$ với đồ thị như hình vẽ sau đây:



Biết rằng đồ thị hàm số $y=f(x)$ tiếp xúc với trục hoành tại điểm có hoành độ âm. Hỏi phương trình $f(|x|-3)=0$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 4. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Dựa vào dữ kiện của bài toán ta có bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$f(0)$	$\nearrow$	$+\infty$

Suy ra phương trình $f(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt $x=-2$ và $x=x_0$ với $x_0\in(0;+\infty)$.

Do đó $f(|x|-3)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}|x|-3=-2\\ |x|-3=x_0\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}|x|=1\\ |x|=3+x_0\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\pm 1\\ x=\pm(3+x_0)\end{array}\right.$.

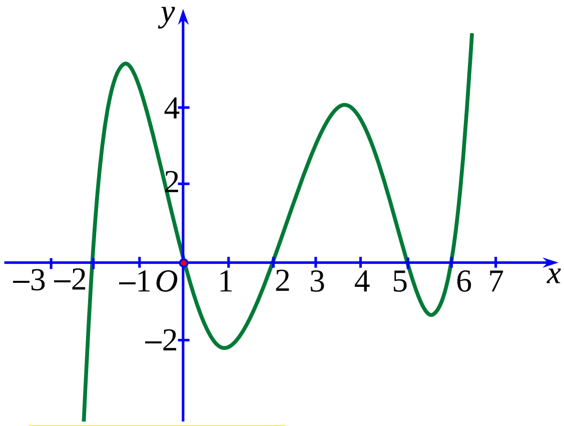
Vậy phương trình $f(|x|-3)=0$ có 4 nghiệm phân biệt.

(CÒN TIẾP PHẦN CUỐI)

CÁC DẠNG TOÁN VỀ HÀM ẨN LIÊN QUAN ĐẾN BÀI TOÁN XÉT SỰ TƯƠNG GIAO CỦA ĐỒ THỊ CÁC HÀM SỐ (PHẦN CUỐI: TỪ DẠNG 9-12)

Dạng 9: Biết đồ thị hoặc BBT của hàm số $y = f'(x)$, xét các bài toán liên quan đến phương trình có dạng $f(x) = m;\ f(u(x)) = m;\ f(x) = g(m);\ f(u(x)) = g(m)$ ...

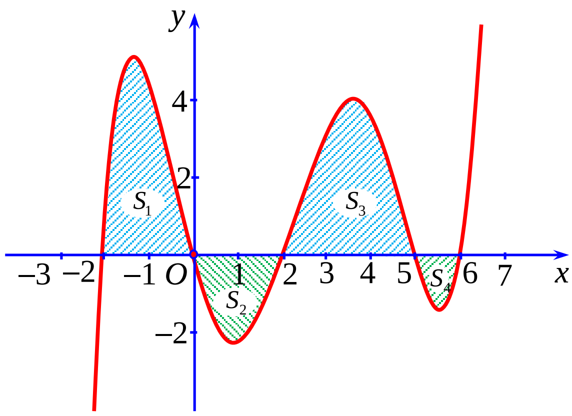
Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên. Tìm điều kiện của m để phương trình $f(x) = m$ có nghiệm $x \in [-2;6]$?



A. $f(-2) \le m \le f(0)$. **B.** $f(-2) \le m \le f(5)$.
C. $f(5) \le m \le f(6)$. **D.** $f(0) \le m \le f(2)$.

Lời giải

Chọn B.



Gọi S_1, S_2, S_3, S_4 lần lượt là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f'(x)$ với và trục hoành.

Quan sát hình vẽ, ta có

◈ $\int_{-2}^{0} f'(x)\mathrm{d}x > \int_{0}^{2} -f'(x)\mathrm{d}x \Leftrightarrow f(x)\big|_{-2}^{0} > f(x)\big|_{2}^{0}$

$\Leftrightarrow f(0) - f(-2) > f(0) - f(2) \Leftrightarrow f(-2) < f(2)$

◈ $\int_{0}^{2} -f'(x)\mathrm{d}x < \int_{2}^{5} f'(x)\mathrm{d}x \Leftrightarrow f(x)\big|_{2}^{0} < f(x)\big|_{2}^{5}$

$\Leftrightarrow f(0) - f(2) < f(5) - f(2) \Leftrightarrow f(0) < f(5)$

◈ $\int_{2}^{5} f'(x)\mathrm{d}x > \int_{5}^{6} -f'(x)\mathrm{d}x \Leftrightarrow f(x)\big|_{2}^{5} > f(x)\big|_{6}^{5}$

$\Leftrightarrow f(5) - f(2) > f(5) - f(6) \Leftrightarrow f(2) < f(6)$

Ta có bảng biến thiên

x	-2		0		2		5		6
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0
$f(x)$	$f(-2)$	$\nearrow$	$f(0)$	$\searrow$	$f(2)$	$\nearrow$	$f(5)$	$\searrow$	$f(6)$

Dựa vào bảng biến thiên, yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow f(-2) \le m \le f(5)$.

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		1		4		$-\infty$
$f'(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Phương trình $f(x) - \cos \pi x - 2m = 0$ có nghiệm $x_o \in (2;3)$ khi và chỉ khi

A. $\frac{1}{2} f(2) \le m \le \frac{1}{2} f(3)$.

B. $\frac{1}{2} f(3) < m < \frac{1}{2} f(2)$.

C. $\frac{1}{2} f(2) < m < \frac{1}{2} f(3)$.

D. $\frac{1}{2} f(3) \le m \le \frac{1}{2} f(2)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $2m = f(x) - \cos \pi x$

Xét hàm số $g(x) = f(x) - \cos \pi x, \forall x \in (2;3)$.

Ta có $g'(x) = f'(x) + \pi \sin \pi x$.

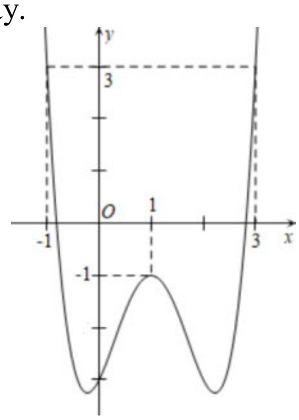
Do $(2;3) \subset (1;4)$ nên từ bảng biến thiên ta thấy $f'(x) > 0, \forall x \in (2;3)$.

Mặt khác $x \in (2;3) \Rightarrow \pi x \in (2\pi; 3\pi) \Rightarrow \sin \pi x > 0$.

Vậy $g'(x) = f'(x) + \pi \sin \pi x > 0, \forall x \in (2;3)$.

Bảng biến thiên của hàm số $g(x)$

Câu 3. Cho $f(x)$ là hàm số đa thức bậc 5, có $f(1) = 0$ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ đối xứng qua đường thẳng $x = 1$ như hình dưới đây.



Biết phương trình $f(x+1) = m$ có nghiệm $x \in [-1;1]$ khi và chỉ khi $m \in [a;b]$. Khi đó $a + b$ bằng

A. $-\frac{1}{5}$. **B.** $\frac{1}{5}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** 0.

Lời giải

Chọn D

Từ đồ thị (C) đã cho của hàm số $y=f'(x)$ ta suy ra được đồ thị (C') của hàm số $y=f'(x+1)$ bằng cách tịnh tiến (C) sang trái 1 đơn vị. Khi đó (C') đối xứng qua trục Oy và do nó là đồ thị hàm đa thức bậc 4, nên (C') là đồ thị hàm số trùng phương dạng $y=ax^4+bx^2+c$. Ta có (C') lần lượt đi qua các điểm $(0;-1)$; $(2;\ 3)$; $(-1;\ -3)$ nên lập hệ giải ra ta được $y=x^4-3x^2-1$.

Suy ra $f'(x+1)=x^4-3x^2-1$ từ đó $f(x+1)=\dfrac{x^5}{5}-x^3-x+C$. Lại có $f(1)=0$ nên $C=0$.

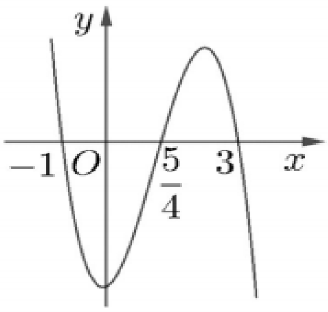
Vậy $f(x+1)=\dfrac{x^5}{5}-x^3-x$.

Ta thấy $f'(x+1)=x^4-3x^2-1<0\ \forall x\in[-1;1]$ nên hàm số $f(x+1)=g(x)=\dfrac{x^5}{5}-x^3-x$ nghịch biến trên đoạn $[-1;1]$. Do đó phương trình $f(x+1)=m$ có nghiệm $x\in[-1;1]$ khi và chỉ khi $m\in[\,g(1);\ g(-1)]$ hay $m\in\left[-\dfrac{9}{5};\dfrac{9}{5}\right]$ suy ra $a=-\dfrac{9}{5};\ b=\dfrac{9}{5}\Rightarrow a+b=0$.

x	2	3
$g'(x)$	$+$	
$g(x)$	$g(2)$ ↗	$g(3)$

Vậy $g(2)<2m<g(3)\Leftrightarrow f(2)+\sin 2\pi<2m<f(3)+\sin 3\pi\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}f(2)<m<\dfrac{1}{2}f(3)$.

Câu 4. Cho hàm số $h(x)=mx^4+nx^3+px^2+qx\ \ (m,n,p,q\in\mathbb{R})$. Hàm số $y=h'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên



Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $h(x)=m^2+m$ có hai ngiệm phân biệt?

A. 2. **B.** 10. **C.** 71. **D.** 2022.

Lời giải

Chọn B

Dựa vào đồ thị có $h'(x)=0$ có 3 nghiệm phân biệt nên $m\neq 0$ và $m<0$

Ta có $h'(x)=4mx^3+3nx^2+2px+q$. Mặt khác dựa vào đồ thị $y=h'(x)$ suy ra $h'(x)=4m(x+1)\left(x-\dfrac{5}{4}\right)(x-3)=4m\left(x^3-\dfrac{13}{4}x^2-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{15}{4}\right)$.

Đồng nhất hệ số ta có: $n=-\dfrac{13m}{3}$, $p=-m$, $q=15m$.

Xét phương trình $h(x)=m^2+m\Leftrightarrow mx^4+nx^3+px^2+qx=m^2+m$

$\Leftrightarrow x^4-\dfrac{13}{3}x^3-x^2+15x=m+1$. Đặt $f(x)=x^4-\dfrac{13}{3}x^3-x^2+15x$.

Bảng biến thiên:

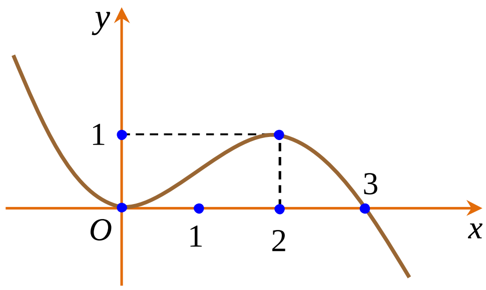
x	$-\infty$		-1		$\frac{5}{4}$		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{32}{3}$	$\nearrow$	$\frac{8575}{768}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có để phương trình $h(x)=m^2+m$ có 2 nghiệm phân biệt thì

TH 1: $\frac{-32}{3}<m+1<0 \Leftrightarrow \frac{-35}{3}<m<-1 \Rightarrow m\in\{-11;-10;-9;-8;-7;-6;-5;-4;-3;-2\}$.

TH 2: $m+1>\frac{8575}{768} \Leftrightarrow m>\frac{7807}{768}$ (loại vì $m<0$). Vậy ta có 10 giá trị m thỏa mãn.

Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ với $(a,b,c,d,e\in\mathbb{R})$. Biết hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ, đạt cực trị tại điểm $O(0;0)$ và cắt truc hoành tại $A(3;0)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m trên $[-5;5]$ để phương trình $f(-x^2+2x+m)=e$ có bốn nghiệm phân biệt.



A. 0. **B.** 2. **C.** 5. **D.** 7.

Lời giải

Chọn B

Quan sát đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ. Ta thấy rằng đây là hàm bậc 3 qua 0 không đổi dấu và qua 3 đổi dấu 1 lần. Nên suy ra

$$f'(x)=k.x^2(x-3)\ (k<0)\ (\text{vì } \lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty \text{ nên } k<0\ )$$

Do $f'(2)=1\Rightarrow -4k=1\Leftrightarrow k=\frac{-1}{4}\to f'(x)=-\frac{1}{4}x^3+\frac{3}{4}x^2.$

Suy ra $f(x)=\frac{-1}{16}x^4+\frac{1}{4}x^3+e=-\frac{1}{4}x^3\left(\frac{1}{4}x-1\right)+e.$

Mà theo đề ta có phương trình

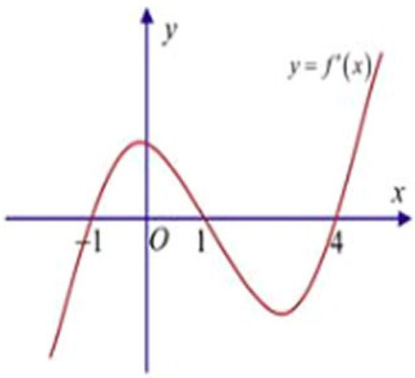
$$f(-x^2+2x+m)=e\Leftrightarrow(-x^2+2x+m)^3\left(\frac{-x^2+2x+m}{4}-1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}-x^2+2x+m=0 & (1)\\ -x^2+2x+m-4=0 & (2)\end{array}\right.$$

Để phương trình $f(-x^2+2x+m)=e$ có 4 nghiệm phân biệt thì phương trình (1) và (2) lần lượt có 2 nghiệm phân biệt $\Rightarrow\begin{cases}\Delta_1=1+m>0\\ \Delta_2=1+m-4>0\end{cases}\Leftrightarrow m>3.$

Mà $\begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ m \in [-5;5] \end{cases} \Rightarrow m \in \{4;5\}$. Vậy có 2 giá trị nguyên m thoả mãn bài toán.

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e,\ (a,b,c,d,e \in \mathbb{R}; a \neq 0)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(-1) = -2$, $f(1) = 3$, $f(4) = -3$ và có đồ thị $y = f'(x)$ như hình vẽ sau:



Phương trình $f(x) - m + 2019 = 0$ có 1 nghiệm khi

A. $m = 2016$. **B.** $m = 2017$. **C.** $m = 2018$. **D.** $m = 2019$

Lời giải

Chọn A.

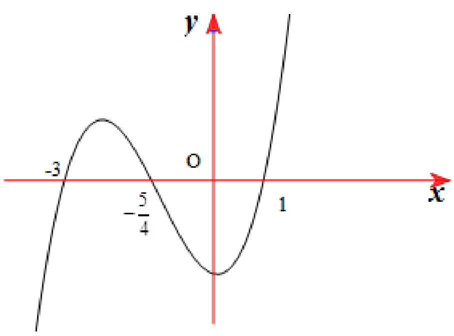
Từ đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và giả thiết ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		1		4		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	-2	↗	3	↘	-3	↗	$+\infty$

Ta có $f(x) - m + 2019 = 0 \Leftrightarrow f(x) = m - 2019\ (*)$.

Qua bảng biến thiên ta thấy để phương trình (*) có 1 nghiệm thì $m - 2019 = -3 \Leftrightarrow m = 2016$.

Câu 7. Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + m\ (a,b,c,d,m \in \mathbb{R}, a \neq 0)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây



Phương trình $f(x) = m$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Từ đồ thị hàm số có $f'(x) == 4a(x+3)\left(x+\frac{5}{4}\right)(x-1) = 4ax^3 + 13ax^2 - 2ax - 15a$.

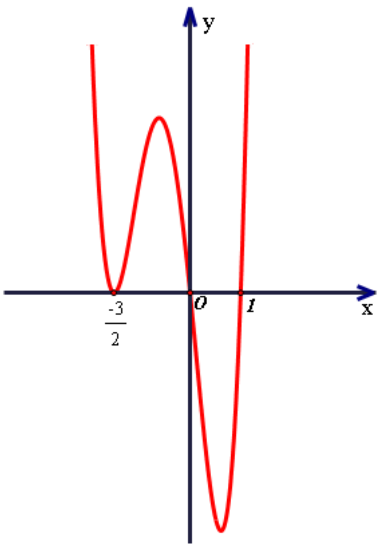
$\Rightarrow f(x) = ax^4 + \frac{13}{3}ax^3 - ax^2 - 15ax + m$.

$f(x) = m \Leftrightarrow ax^4 + \frac{13}{3}ax^3 - ax^2 - 15ax + m = m \Leftrightarrow ax^4 + \frac{13}{3}ax^3 - ax^2 - 15ax = 0$

$\Leftrightarrow x\left(x^3 + \frac{13}{3}x^2 - x - 15\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \frac{5}{3} \\ x = -3 \end{array}\right.$.

Vậy phương trình $f(x) = m$ có 3 nghiệm.

Câu 8. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f\left(-\frac{3}{2}\right) \le 0;\ f(0) = 3;\ f(1) = 0;\ f(2) > 3$. Hàm số $y = f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như sau:



Với $m \in (0;3)$ số nghiệm thực của phương trình $f(x^2 - 3) = m$; (m là tham số thực), là

A. 3 **B.** 4
C. 6. **D.** 5.

Lời giải

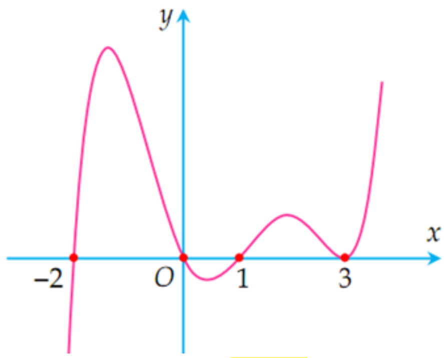
Chọn C

Từ đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ ta có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\nearrow$	3	$\searrow$	0	$\nearrow$	

Đặt $t = x^2 - 3 \Rightarrow t \ge -3$, ta có phương trình $\begin{cases} f(t) = m \\ m \in (0;3) \end{cases}$ $(*)$ có 3 nghiệm phân biệt, hơn nữa do $f\left(-\frac{3}{2}\right) \le 0; f(2) > 3$ nên phương trình $(*)$ có 3 nghiệm phân biệt $t_1, t_2, t_3 \in \left(-\frac{3}{2}; 2\right)$ (thỏa mãn điều kiện) suy ra mỗi phương trình $t_i = x^2 - 3$; $t_i \in \left(-\frac{3}{2};2\right); i = 1,2,3.$ đều có 2 nghiệm phân biệt. Vậy phương trình $f\left(x^2-3\right) = m$ có tất cả 6 nghiệm phân biệt với $m \in (0;3)$

Câu 9. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ xác định và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Số nghiệm nhiều nhất của phương trình $f\left(x^2\right) = m$ (m là tham số thực) là?



A. 2 . **B.** 3 . **C.** 4 . **D.** 5

Lời giải

Chọn C

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f'(x)$ ta có bảng biến thiên của đồ thị hàm số $y = f(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-2		0		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	
$f(x)$		↘	$f(-2)$	↗	$f(0)$	↘	$f(1)$	↗	$f(3)$	↗	

Từ bảng biến thiên ta thấy phương trình $f(x) = m$ có tối đa hai nghiệm dương, do đó phương trình $f\left(x^2\right) = m$ có tối đa 4 nghiệm.

Câu 10. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, $f(0) + f(5) = 2f(3)$ và có bảng biến thiên của hàm số $y = f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-1	x_1	0	x_2	3	x_3	4	$+\infty$
$f'(x)$	↗	0	↗ ↘	0 ↘ ↗	↘	0	↘ ↗	0	↗

Tập nghiệm của phương trình $f\left(x^2-1\right) = f(3)$ có bao nhiêu phần tử?

A. 4. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 7.

Lời giải

Chọn A

Từ BBT của hàm số $y = f'(x)$ suy ra dấu của $f'(x)$ và có BBT của hàm số $y = f(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-1		0		3		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
		↘		↗		↗	$f(3)$	↘		↗	

$f(x)$	$f(-1)$ $\quad$ $f(0)$ $\quad$ $f(4)$

Lại có $f(0)+f(5)=2f(3)$, mà $f(0)<f(3)$ nên $f(5)>f(3)$.

Mặt khác với mọi $x\in\mathbb{R}$ ta có $x^2-1\geq -1$, do đó $f(x^2-1)=f(3)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-1=3 \\ x^2-1=a\ (4<a<5) \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm 2 \\ x=\pm\sqrt{a+1} \end{array}\right.$. Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm.

Dạng 10: Biết số nghiệm của phương trình $f(x)=0$, xét các bài toán liên quan đến phương trình có chứa $f'(x); f''(x)$....

Câu 1. Cho hàm số $y=f(x)=(x+1)(x^2-x)(x^2-4)(x^2-9)$. Hỏi phương trình $f'(x)=0$ có bao nhiêu nghiệm phân biệt?

A. 3 **B.** 4 **C.** 5 **D.** 6

Lời giải

Chọn D

Ta có:

$f(x)=(x+1)(x^2-x)(x^2-4)(x^2-9)=(x^3-x)(x^4-13x^2+36)=x^7-14x^5+49x^3-36x$

$f'(x)=7x^6-70x^4+147x^2-36$

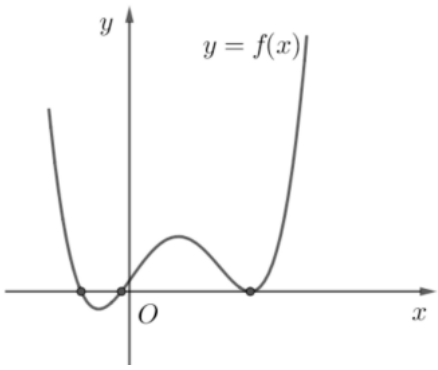
Đặt $t=x^2, (t\geq 0)$

Xét hàm $g(t)=7t^3-70t^2+147t-36$

Do phương trình $g'(t)=21t^2-140t+147=0$ có 2 nghiệm dương phân biệt và $g_{CD}.g_{CT}<0, g(0)=-36<0$ nên $g(t)=0$ có 3 nghiệm dương phân biệt.

Do đó $f'(x)=0$ có 6 nghiệm phân biệt.

Câu 2. Cho $f(x)$ là một hàm đa thức bậc bốn có đồ thị như hình dưới đây.



Tập nghiệm của phương trình $[f'(x)]^2=f(x).f''(x)$ có số phần tử là

A. 1. **B.** 2. **C.** 6. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A

Xét phương trình $[f'(x)]^2=f(x).f''(x)$ (1)

Do $f(x)=0$ có ba nghiệm $x_1, x_2, x_2\,(x_1<x_2<x_3)$ và $f'(x_3)=0$ suy ra x_3 là một nghiệm của (1)

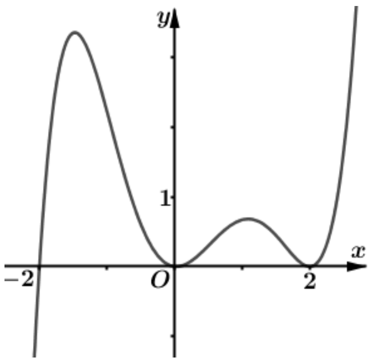
Ta có $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)^2, (a\neq 0)$

Với $x\neq x_3 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow \left(\dfrac{f'(x)}{f(x)}\right)'=0 \Leftrightarrow \left(\dfrac{1}{x-x_1}+\dfrac{1}{x-x_2}+\dfrac{2}{x-x_3}\right)'=0$

$\Leftrightarrow -\dfrac{1}{(x-x_1)^2}-\dfrac{1}{(x-x_2)^2}-\dfrac{2}{(x-x_3)^2}=0$ vô nghiệm.

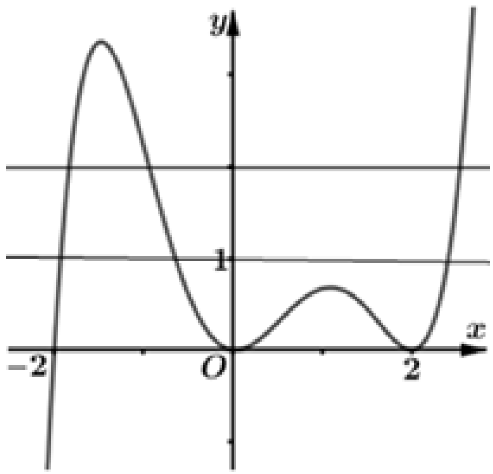
Vậy, phương trình (1) có đúng một nghiệm $x=x_3$.

Câu 3. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong trơn (không bị gãy khúc), hình vẽ bên. Gọi hàm $g(x)=f\left[f(x)\right]$. Hỏi phương trình $g'(x)=0$ có bao nhiêu nghiệm phân biệt?



A. 10. **B.** 12. **C.** 8. **D.** 14.

Lờigiải



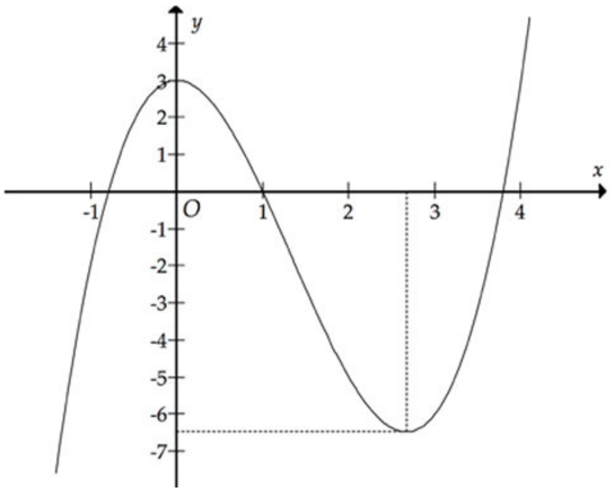
$g(x)=f\left[f(x)\right] \Rightarrow g'(x)=f'(x).f'\left[f(x)\right]$.

$g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x).f'\left[f(x)\right]=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x)=0 \\ f'\left[f(x)\right]=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=x_1\in(-2;-1) \\ x=0 \\ x=x_2\in(1;2) \\ x=2 \\ f(x)=x_1\in(-2;-1)\Leftrightarrow x=x_3<-2 \\ f(x)=0\Leftrightarrow x\in\{-2;0;2\} \\ f(x)=x_2\in(1;2)\Leftrightarrow x\in\{x_4;x_5;x_6\},x_3<x_4<x_5<0<2<x_6 \\ f(x)=2\Leftrightarrow x\in\{x_7;x_8;x_9\},x_4<x_7<x_8<x_5<x_6<x_9 \end{array}\right..$$

Kết luận phương trình $g'(x)=0$ có 12 nghiệm phân biệt.

Câu 4. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên.



Đặt $g(x)=f\left[f(x)\right]$. Tìm số nghiệm của phương trình $g'(x)=0$.

A. 8. **B.** 2 **C.** 4. **D.** 6.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $g'(x)=f'(x).f'\left[f(x)\right]$.

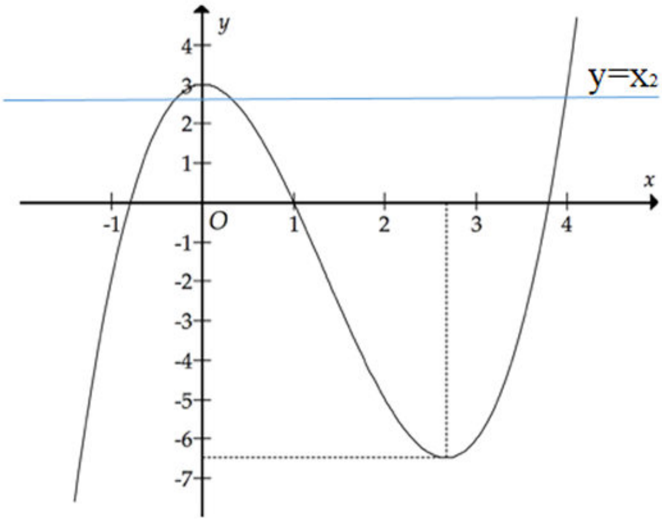
$$g'(x)=0\Leftrightarrow f'(x).f'\left[f(x)\right]=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} f'(x)=0 & (1) \\ f'\left[f(x)\right]=0 & (2) \end{array}\right..$$

❖Dựa vào đồ thị của hàm số $y=f(x)$ có hai điểm cực trị nên $f'(x)=0$ (1) có hai nghiệm phân biệt $x_1=0$; x_2 với $2<x_2<3$.

❖PT $(2): f'\left[f(x)\right]=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=x_1=0 \\ f(x)=x_2;\ 2<x_2<3 \end{array}\right..$

◆ Dựa vào đồ thị của hàm số $y=f(x)$ thì $f(x)=0$ có ba nghiệm phân biệt.

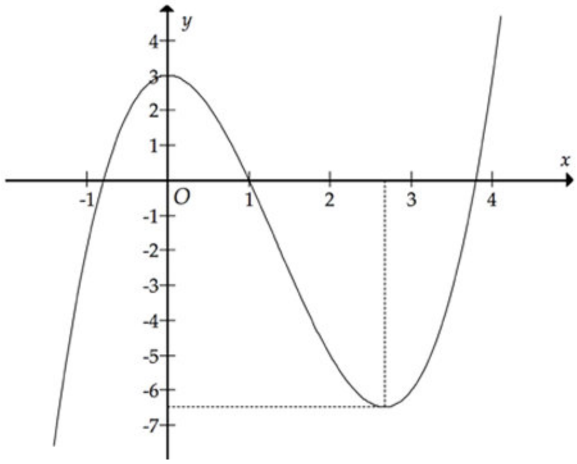
◆ Kẻ đường thẳng $y=x_2$ cắt đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại ba diểm phân biệt nên phương trình $f(x)=x_2$ có ba nghiệm phân biệt.



Nên phương trình (2) có 6 nghiệm phân biệt.

Vậy phương trình $g'(x)=0$ có tất cả 8 nghiệm phân biệt.

Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên.



Đặt $g(x)=2^{f(x)}-3^{f(x)}$. Tìm số nghiệm của phương trình $g'(x)=0$.

A. 5. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 6.

Lời giải

Chọn A

Ta có $g'(x)=f'(x)2^{f(x)}\ln 2-f'(x)3^{f(x)}\ln 3=f'(x)\left[2^{f(x)}\ln 2-3^{f(x)}\ln 3\right]$.

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f'(x)=0\\2^{f(x)}\ln 2=3^{f(x)}\ln 3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f'(x)=0\\\left(\dfrac{2}{3}\right)^{f(x)}=\dfrac{\ln 3}{\ln 2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f'(x)=0\\f(x)=\log_{\frac{2}{3}}\dfrac{\ln 3}{\ln 2}\approx-1{,}1358\end{array}\right..$$

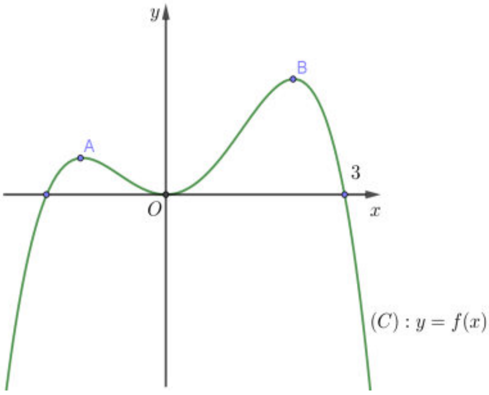
Dựa vào đồ thị hàm số $y=f(x)$ có hai điểm cực trị nên $f'(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt.

Kẻ đường thẳng $y=\log_{\frac{2}{3}}\dfrac{\ln 3}{\ln 2}\approx-1{,}1358$ cắt đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại ba điểm phân biệt nên phương trình $f(x)=\log_{\frac{2}{3}}\dfrac{\ln 3}{\ln 2}$ có ba nghiệm phân biệt.

Vậy phương trình $g'(x)=0$ có 5 nghiệm thực phân biệt.

Câu 6. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, $f(x)$ có đồ thị (C) như hình dưới đây, trong đó A, B là các điểm cực đại của (C), các tiếp tuyến của (C) tại các tiếp điểm thuộc cung AB đều không song song với hai đường thẳng đường thẳng $y=2x$, $y=-2x$,

$\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x)=+\infty,\ \lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=-\infty$. Xét phương trình $f\left(\left|f'(x)\right|+1\right)=0$ (*), khẳng định nào sau đây đúng?



A. (*) có đúng hai nghiệm.
B. (*) có đúng ba nghiệm.
C. (*) có ít nhất hai nghiệm.
D. (*) có đúng ba nghiệm.

Lời giải

Chọn C

Dựa vào đồ thị ta thấy $f(x)=0$ có ba nghiệm trong đó có một nghiệm dương là 3.

Do $\left|f'(x)\right|+1\geq 1$ nên $f\left(\left|f'(x)\right|+1\right)=0 \Leftrightarrow \left|f'(x)\right|+1=3$. Tức $\left[\begin{array}{l} f'(x)=2 \\ f'(x)=-2 \end{array}\right.$.

Gọi $x_A,\ x_B$ lần lượt là hoành độ của $A,\ B$. Do $f'(x)$ liên tục nên ta có:

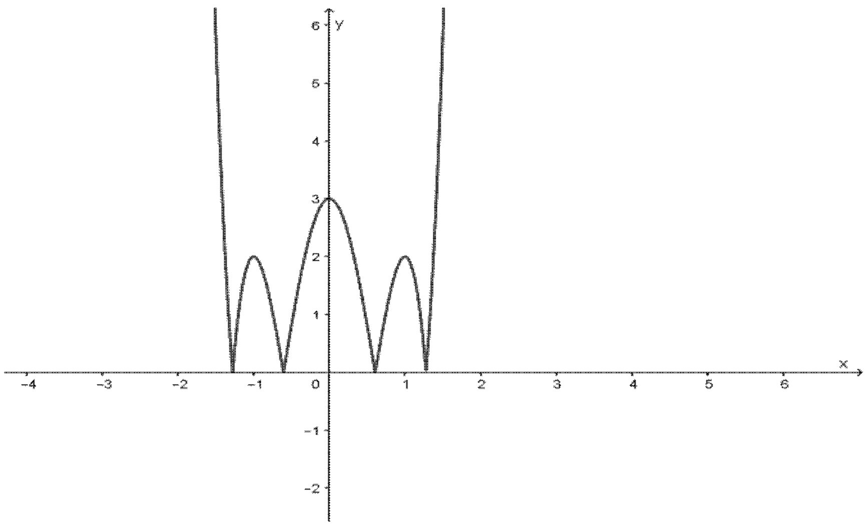
+ $\begin{cases} f'(x_A)=0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} f'(x)=+\infty \end{cases} \Rightarrow \exists x_1\in(-\infty;x_A)$ sao cho $f'(x_1)=2$.

+ $\begin{cases} f'(x_B)=0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=-\infty \end{cases} \Rightarrow \exists x_2\in(x_B;+\infty)$ sao cho $f'(x_2)=-2$.

+ Các tiếp tuyến của (C) tại các tiếp điểm thuộc cung AB đều không song song với hai đường thẳng đường thẳng $y=2x$, $y=-2x$ chứng tỏ $\begin{cases} f'(x)\neq 2 \\ f'(x)\neq -2 \end{cases}$ $\forall x\in[x_A;x_B]$.

Tóm lại, (*) có ít nhất hai nghiệm.

Câu 7. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ:



Tìm số nghiệm của phương trình $g'(x)=0$, biết $g(x)=f^3(x)-f^2(x)+8$.

A. 13. **B.** 15. **C.** 17. **D.** 19.

Lời giải

Chọn B

Ta có $g'(x)=3.f'(x).f^2(x)-2.f'(x).f(x)=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} f'(x)=0 \\ f(x)=0 \\ f(x)=\dfrac{2}{3} \end{array}\right.$$

Dựa vào đồ thị hàm số $y=f(x)$ ta được

+ Phương trình $f'(x)=0$ có 3 nghiệm phân biệt là $-1;0;1$

+ Phương trình $f(x)=0$ có 4 nghiệm phân biệt

+ Phương trình $f(x)=\dfrac{2}{3}$ có 8 nghiệm phân biệt (để tìm nghiệm phương trình $f(x)=\dfrac{2}{3}$ ta kẻ đường thẳng $y=\dfrac{2}{3}$, thấy đường thẳng $y=\dfrac{2}{3}$ cắt đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại 8 điểm phân biệt)

Vậy phương trình có tất cả 15 nghiệm phân biệt.

Câu 8. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d},(ac\neq 0;ad-bc\neq 0;a,b,c,d\in\mathbb{Q})$. Tìm số nghiệm của phương trình $g'(x)=0$, biết $g(x)=e^{f(x)}-e^{3f(x)}$.

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

Lời giải: Đáp án A.

Tập xác định $g(x)$: $D=\mathbb{R}\backslash\left\{\dfrac{-d}{c}\right\}$

Ta có: $g'(x)=f'(x)e^{f(x)}-3f'(x)e^{3f(x)}$ có TXĐ: $D=\mathbb{R}\backslash\left\{\dfrac{-d}{c}\right\}$

Phương trình $g'(x)=0\Leftrightarrow f'(x)e^{f(x)}-3f'(x)e^{3f(x)}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll} f'(x)=0 & (1) \\ e^{f(x)}-3e^{3f(x)}=0 & (2) \end{array}\right.$

+) Giải (1) vô nghiệm

+) Giải (2): $(2)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll} e^{f(x)}=0 & (3) \\ 1-3e^{2f(x)}=0 & (4) \end{array}\right.$

Ta có (3) vô nghiệm. PT(4) $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll} e^{f(x)}=\dfrac{1}{\sqrt{3}} & (5) \\ e^{f(x)}=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}(VN) & \end{array}\right.$

Từ (5) ta có $f(x)=\ln\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ Dựa vào dạng đồ thị của $f(x)$ ta có PT chỉ có 1 nghiệm

Câu 9. Cho hàm số $f(x)=x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)(x-7)$. Hỏi đồ thị hàm số $y=f'(x)$ cắt trục hoành tại tất cả bao nhiêu điểm phân biệt?

A. 1. **B.** 6. **C.** 0. **D.** 7.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f(x)=0$ có các nghiệm: $0;1;2;3;4;5;6;7$.

Áp dụng định lý Lagrange lần lượt trên các đoạn: $[0;1];[1;2];[2;3];[3;4];[4;5];[5;6];[6;7]$.

Chẳng hạn xét trên đoạn $[0;1]$ thì tồn tại x_1 sao cho:

$f'(x_1)=\dfrac{f(1)-f(0)}{1-0} \Leftrightarrow f'(x_1)=f(1)-f(0)=0$. Suy ra $x=x_1$ là một nghiệm của phương trình $f'(x)=0$.

Làm tương tự vậy các khoảng còn lại ta suy ra $f'(x)=0$ có 7 nghiệm phân biệt hay đồ thị hàm số $y=f'(x)$ cắt trục hoành tại 7 điểm phân biệt.

Câu 10. Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\ (a\neq 0)$. Biết phương trình $f(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1;x_2$. Số nào sau đây là nghiệm của phương trình $f^{'}(x)=0$

A. x_1+x_2

B. $\dfrac{x_1-x_2}{2}$.

C. $\dfrac{x_1+x_2}{2}$.

D. x_1-x_2.

Lời giải

Chọn C

Vì hàm số $y=f(x)$ là hàm bậc 3 và phương trình $f(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1;x_2$ nên đồ thị hàm số $y=f(x)$ tiếp xúc với trục hoành, tức là trong 2 nghiệm $x_1;x_2$ có 1 nghiệm kép. Không mất tính tổng quát giả sử nghiệm kép là x_2.

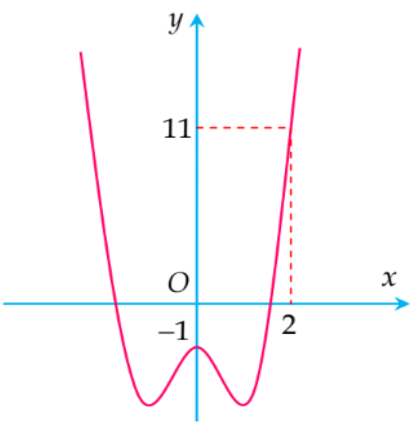
Khi đó ta có: $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)^2$

$\Rightarrow f'(x)=(x-x_2)(2x-x_1-x_2)$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=x_2 \\ x=\dfrac{x_1+x_2}{2} \end{array}\right.$$

.Vì $x_1;x_2$ phân biệt nên $x=\dfrac{x_1+x_2}{2}$ là nghiệm của phương trình $f^{'}(x)=0$. Ta chọn **B.**

Câu 11. Cho hàm số $y=f(x)=ax^4+bx^2+c$ có đồ thị như hình vẽ và thỏa mãn đẳng thức sau: $f(x+1)-f(x)=2x(2x+1)(x+1)$. Cho hàm số $g(x)=mx^2+nx+p$ và $f(x)=g(x^2-1)$. Tìm nghiệm của phương trình $g'(x)=0$.



A. $-\dfrac{1}{2}$.

B. -2.

C. $-\dfrac{1}{4}$.

D. -4.

Lời giải

Chọn C

Với $x=0$ thì $f(1)=f(0)$.

Vì $f(1)=f(0)$ và đồ thị hàm số $y=f(x)=ax^4+bx^2+c$ đi qua $(0;-1)$, $(2;11)$ nên ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} f(1)=f(0) \\ f(0)=-1 \\ f(2)=11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c=c \\ c=-1 \\ 16a+4b+c=11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \\ c=-1 \end{cases}.$$

Vậy $f(x)=x^4-x^2-1$.

Ta có $f(x)=g(x^2-1) \Leftrightarrow x^4-x^2-1=m(x^2-1)^2+n(x^2-1)+p$

$\Leftrightarrow x^4-x^2-1=mx^4+(-2m+n)x^2+(m-n+p)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m=1 \\ -2m+n=-1 \\ m-n+p=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=1 \\ n=1 \\ p=-1 \end{cases}$$

Do đó $g(x)=x^2+x-1$.

$g'(x)=0 \Leftrightarrow 2x+1=0 \Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{2}$.

Vậy $x=-\dfrac{1}{2}$.

Câu 12. Cho hàm số $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$. Nếu phương trình $f(x)=0$ có 3 nghiệm phân biệt thì phương trình $2f(x).f''(x)=\left[f'(x)\right]^2$ có nhiều nhất bao nhiêu nghiệm?

A. 1. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B

Giả sử $f(x)=0$ có 3 nghiệm phân biệt là x_1, x_2, x_3.

Xét $g(x)=2f(x).f''(x)-\left[f'(x)\right]^2$

$\Rightarrow g'(x)=2\left[f'(x).f''(x)+f(x).f'''(x)\right]-2f'(x)f''(x)=2f(x).f'''(x)=6f(x)$.

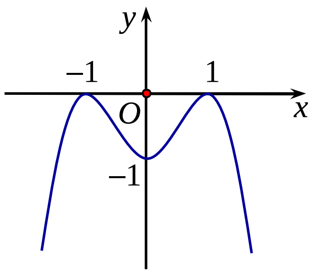
Khi đó $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=x_1 \\ x=x_2 \\ x=x_3 \end{array}\right.$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		x_1		x_2		x_3		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra phương trình $g(x)=0$ có nhiều nhất 4 nghiệm.

Câu 13. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên khoảng $(-\infty;+\infty)$. Đồ thị của hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ



Tìm số nghiệm của phương trình $\left(\left[f\left(x^2\right)\right]^2\right)'=0$

A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 5.

Lời giải

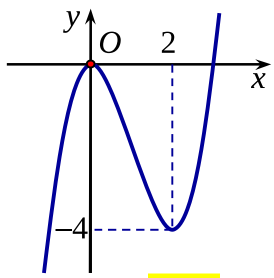
Chọn A.

Ta có

$$\left(\left[f\left(x^2\right)\right]^2\right)'=0\Leftrightarrow 4x.f\left(x^2\right).f'\left(x^2\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f\left(x^2\right)=0\\ f'\left(x^2\right)=0\\ x=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2=\pm1\\ x^2=\pm1,x^2=0\\ x=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=1\\ x=-1\end{array}\right..$$

Suy ra phương trình 3 nghiệm.

Câu 14. Biết rằng hàm số $f(x)$ có đồ thị được cho như hình vẽ bên. Tìm số nghiệm của phương trình $\left(f\left[f\left(x^2-1\right)\right]\right)'=0$.



A. 5. **B.** 3. **C.** 9. **D.** 8.

Lời giải

Chọn C.

Ta có $\left(f\left[f\left(x^2-1\right)\right]\right)'=0$, $\left(f\left[f\left(x^2-1\right)\right]\right)'=0\Leftrightarrow 2x.f'\left(x^2-1\right).f'\left[f\left(x^2-1\right)\right]=0$;

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ f'\left(x^2-1\right)=0\\ f'\left[f\left(x^2-1\right)\right]=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x^2-1=0\\ x^2-1=2\\ f\left(x^2-1\right)=0\\ f\left(x^2-1\right)=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=\pm1\\ x=\pm\sqrt{3}\\ x^2-1=0\\ x^2-1=a\in(2;+\infty)\\ x^2-1=b\in(a;+\infty)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=\pm1\\ x=\pm\sqrt{3}\\ x=\pm\sqrt{a+1},a+1\in(3;+\infty)\\ x=\pm\sqrt{b+1},\mathrm{b}+1\in(a+1;+\infty)\end{array}\right.$$

.

Vậy phương trình có 9 nghiệm.

Dạng 11: Biết đồ thị hoặc BBT của hàm số $y=f(x)$, xét các bài toán liên quan đến BẤT PHƯƠNG TRÌNH có dạng $f(x)\ge g(x);f\left(u(x)\right)\ge g(x)\ (>,<,\le)$... có thể có tham số.

1. Lý thuyết:

Loại 1: Không chứa tham số (đề thường yêu cầu về tập nghiệm của bất phương trình)

Phương pháp giải:

- Chuyển bất phương trình về $f(x) \geq g(x)$ 1 vế và lập bảng biến thiên

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $y = f'(x)$ và xét dấu của hàm số $y = g'(x)$

Lưu ý: 1) Hàm số $y = f(x); y = g(x)$ cùng đồng biến(nghịch biến) trên K thì hàm số $y = f(x) + g(x)$ đồng biến(nghịch biến) trên K

2) Nếu hàm số $y = f(x)$ đồng biến(nghịch biến) trên K thì:

+ Hàm số $y = \sqrt[n]{f(x)}$ đồng biến(nghịch biến) trên K

+ Hàm số $y = \dfrac{1}{f(x)}$ với $f(x) > 0$ nghịch biến(đồng biến) trên K

+ Hàm số $y = -f(x)$ nghịch biến(đồng biến) trên K

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x)$ và vẽ đồ thị của hàm số $y = g(x)$ để kết luận nghiệm.

- Đặt $t = u(x)$, xác định điều kiện của biến t. Biến đổi $f(u(x)) \geq g(x)$ thành $f(t) \geq h(t)$ sau đó làm tương tự như trên.

Loại 2: Chứa tham số (đề thường yêu cầu tìm điều kiện của m để bất phương trình **có nghiệm** hoặc **có nghiệm** với $x \in \mathbb{R}$)

Cô lập tham số m biến đổi đưa về dạng

$$f(x,m) \geq 0, \forall x \in K \Leftrightarrow g(x) \geq h(m), \forall x \in K \Leftrightarrow \underset{K}{Min}\, g(x) \geq h(m)$$

$$f(x,m) \leq 0, \forall x \in K \Leftrightarrow g(x) \leq h(m), \forall x \in K \Leftrightarrow \underset{K}{Max}\, g(x) \leq h(m)$$

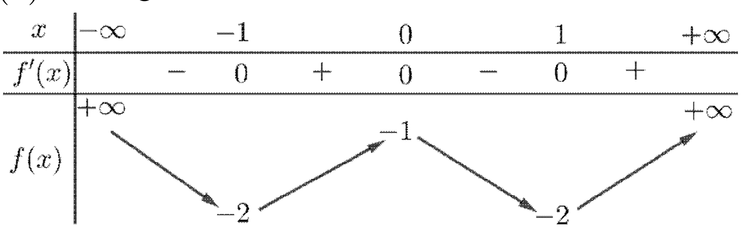
$$f(x,m) \geq 0 \text{ có nghiệm trên K } \Leftrightarrow f(x,m) \geq 0 \Leftrightarrow g(x) \geq h(m), \forall x \in K \Leftrightarrow \underset{K}{Max}\, g(x) \geq h(m)$$

$$f(x,m) \leq 0 \text{ có nghiệm trên K } \Leftrightarrow f(x,m) \leq 0 \Leftrightarrow g(x) \leq h(m), \forall x \in K \Leftrightarrow \underset{K}{Min}\, g(x) \leq h(m)$$

Chú ý: Đối với các bất phương trình $f(x,m) > 0, f(x,m) < 0$ làm tương tự tuy nhiên ở bước cuối nếu $\underset{K}{Max}\, g(x), \underset{K}{Min}\, g(x)$ đạt tại $x_0 \notin K$ thì ta kết luận dấu $\leq, \geq$. Nếu $\underset{K}{Max}\, g(x), \underset{K}{Min}\, g(x)$ đạt tại $x_0 \in K$ thì ta kết luận dấu $<, >$.

2. Bài tập:

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau



Tập nghiệm của phương trình là $3f(x) \geq 3e^{x^2} - 6$ là

A. $(-2019; 0)$.　　**B.** $(-1; +\infty)$

C. $[-1; 1]$　　**D.** 1 đáp án khác

Lời giải

Chọn D

Ta có: $3f(x) \geq 3e^{x^2} - 6 \Leftrightarrow f(x) - e^{x^2} + 2 \geq 0$.

Đặt $g(x) = f(x) - e^{x^2} + 2$. Ta thấy $g'(x) = f'(x) - 2xe^{x^2}$

Dựa vào bản biến thiên của hàm số $y = f(x)$ và hàm số $y = -e^{x^2} + 2$ ta được, Bảng biến thiên hàm số $g(x) = f(x) - e^{x^2} + 2$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
f'(x)		-	0	+	0	-	0	+	
$-2x.e^{x^2}$		+	|	+	0	-	|	-	
g'(x)		chưa xác định dấu	|	+	0	-	|	chưa xác định dấu	
g(x)		...	| $-e^4$	↗	0	↘	$-e^4$ |	...	

Dựa vào bảng biến thiên trên của hàm số $g(x)=f(x)-e^{x^2}+2$. Ta thấy $\forall x\in(-1;1)$. hàm số $g(x)=f(x)-e^{x^2}+2<0$.Vậy các đáp án A, B, C đều có các khoản tại đó hàm số âm nên không thể là nghiệm của phương trình $f(x)-e^{x^2}+2\geq 0$.

Vậy đáp án là **D.**

Câu 2. Cho hàm số y = f(x) có bảng biến thiên:

x	∞		1		3		$+\infty$
y'		+	0	–	0	+	
y	$+\infty$ -2	↗		↘		↗	

Tìm tất cả các giá trị của m để bất phương trình $f\left(\sqrt{x-1}+1\right)\leq m$ có nghiệm?

A. $m\geq 1$ **B.** $m\geq -2$.
C. $m\geq 4$. **D.** $m\geq 0$.

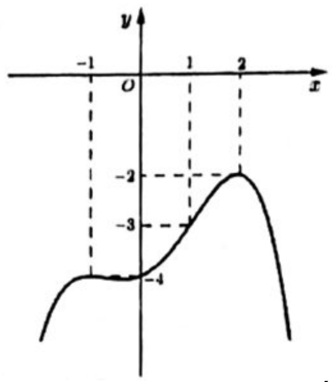
Lời giải

Chọn B

Đặt $t(x)=\sqrt{x-1}+1,$, $t\geq 1$.

Bất phương trình trở thành $f(t)\leq m$ $(t\geq 1)$ (*). Bất phương trình (*) có nghiệm với $t\geq 1$ thì $\min\limits_{[1;+\infty)} f(t)\leq m$. Dựa vào BBT ta thấy $\min\limits_{[1;+\infty)} f(t)=-2\Rightarrow m\geq -2$.

Câu 3. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình $9.6^{f(x)}+\left(4-f^2(x)\right).9^{f(x)}\leq\left(-m^2+5m\right).4^{f(x)}$ đúng với $\forall x\in\mathbb{R}$ là

A. 10. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 9.

Lời giải

Chọn A

Ta có bất phương trình $9.6^{f(x)}+\left(4-f^2(x)\right).9^{f(x)}\leq\left(-m^2+5m\right).4^{f(x)}$

$\Leftrightarrow 9.\left(\frac{3}{2}\right)^{f(x)}+\left(4-f^2(x)\right)\left(\frac{3}{2}\right)^{2f(x)}\le -m^2+5m$ (1).

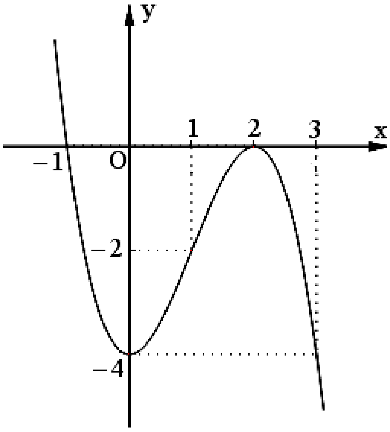
+Từ đồ thị suy ra $f(x)\le -2,\forall x \Rightarrow 9.\left(\frac{3}{2}\right)^{f(x)}\le 4,\forall x$ và $\left(4-f^2(x)\right)\left(\frac{3}{2}\right)^{2f(x)}\le 0,\forall x$

+Suy ra $9.\left(\frac{3}{2}\right)^{f(x)}+\left(4-f^2(x)\right)\left(\frac{3}{2}\right)^{2f(x)}\le 4,\forall x \Rightarrow Max g(x)=4$.

+ Bất phương trình (1) nghiệm đúng $\forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow -m^2+5m\ge 4 \Leftrightarrow 1\le m\le 4$. Vậy có 4 giá trị m nguyên $m\in\{1;2;3;4\}$. Vậy $1+2+3+4=10$.

Câu 4. Cho hàm số $y=f(x)=-x^3+3x^2-4$ có bảng biến thiên dưới đây. Biết rằng với $m>\alpha$ thì bất phương trình $\left(4-x^2\right)\left(3-\sqrt{4-x^2}\right)<m+6$ luôn đúng với mọi m. Hãy cho biết kết luận nào sau đây đúng?

A. α là số nguyên âm. **B.** α là số nguyên dương.
C. α là số hữu tỉ dương. **D.** α là số vô tỉ.



Lời giải.

Chọn A.

Đặt $t=\sqrt{4-x^2};\ 0\le t$

Khi đó bất phương trì ... $m+2$ (*)

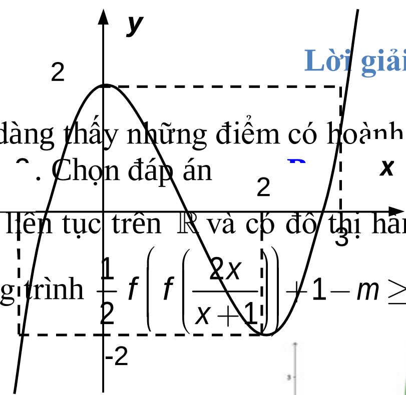
Để $\left(4-x^2\right)\left(3-\sqrt{4-x}\right.$ ... n thì (*) luôn đúng với mọi $t\in[0;2]$

Tức là $f(t)<m+2$ lı

$\Leftrightarrow m+2>\max\limits_{t\in[0;2]} f(t)$ <

Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)=x^3-3x^2+2$ có đồ thị như hình vẽ. Hãy cho biết tập nghiệm của bất phương trình $f(x)\ge -2$?

A. $S=(-1;+\infty)$. **B.** $S=[-1;+\infty)$. **C.** $S=(0;+\infty)$. **D.** $S=[-2;+\infty)$.

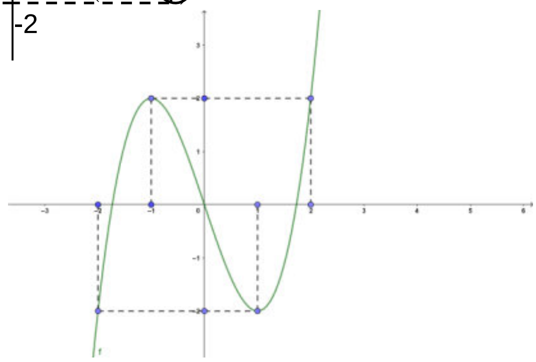


Lời giải.

Chọn B.

Nhìn vào đồ thị dễ dàng thấy những điểm có hoành độ lớn hơn hoặc bằng -1 đều có tung độ lớn hơn hoặc bằ... . Chọn đáp án ...

Câu 6. Cho hàm số y=f(x) liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số như hình vẽ. Tập hợp tất cả các giá trị của m để bất phương trình $\frac{1}{2}f\left(f\left(\frac{2x}{x+1}\right)\right)+1-m\ge 0$ có nghiệm là:



A. $m\le 2$ **B.** $1\le m\le 2$ **C.** $m\le 1$ **D.** $m\le -5$

Lời giải

Chọn A.

Nhìn vào đồ thị ta thấy:

$x \in [-1;1] \Rightarrow -2 \le f(x) \le 2$

$x \in [-2;2] \Rightarrow -2 \le f(x) \le 2$

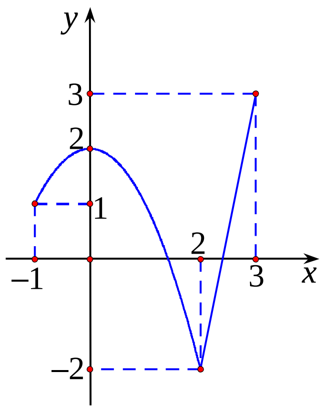
Ta có: $\dfrac{2|x|}{x^2+1} \le 1 \Leftrightarrow -1 \le \dfrac{2x}{x^2+1} \le 1$

$\Rightarrow f\left(f\left(\dfrac{2x}{x^2+1}\right)\right) \in [-2;2] \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} f\left(f\left(\dfrac{2x}{x+1}\right)\right) + 1 \in [0;2]$

$\dfrac{1}{2} f\left(f\left(\dfrac{2x}{x+1}\right)\right) + 1 - m \ge 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} f\left(f\left(\dfrac{2x}{x+1}\right)\right) + 1 \ge m$

Nên bpt có nghiệm khi và chỉ khi m≤2.

Câu 7. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[-1;3]$ và có đồ thị như hình vẽ.



Bất phương trình $f(x) + \sqrt{x+1} + \sqrt{7-x} \ge m$ có nghiệm thuộc $[-1;3]$ khi và chỉ khi

A. $m \le 7$. **B.** $m \ge 7$. **C.** $m \le 2\sqrt{2} - 2$. **D.** $m \ge 2\sqrt{2} - 2$.

Lời giải

Chọn A

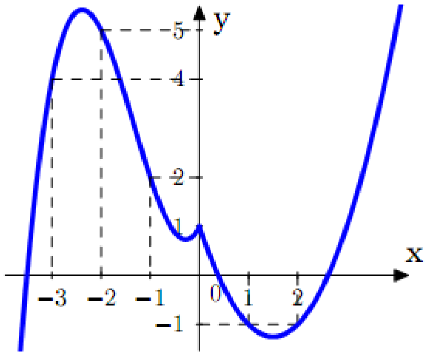
Ta có: $\sqrt{x+1} + \sqrt{7-x} \le \sqrt{(1^2+1^2)(x+1+7-x)} = 4$.

Dấu "=" xảy ra khi $1 + x = 7 - x \Leftrightarrow x = 3$.

Ta có : $\max\limits_{[-1;3]} f(x) = f(3) = 3$.

Do đó bất phương trình $f(x) + \sqrt{x+1} + \sqrt{7-x} \ge m$ có nghiệm thuộc $[-1;3]$ khi và chỉ khi $m \le \max\limits_{[-1;3]}\left(f(x) + \sqrt{x+1} + \sqrt{7-x}\right) = 4 + 3 = 7$. Vậy $m \le 7$.

Câu 8. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ. Biết trên $(-\infty;-3) \cup (2;+\infty)$ thì $f'(x) > 0$.

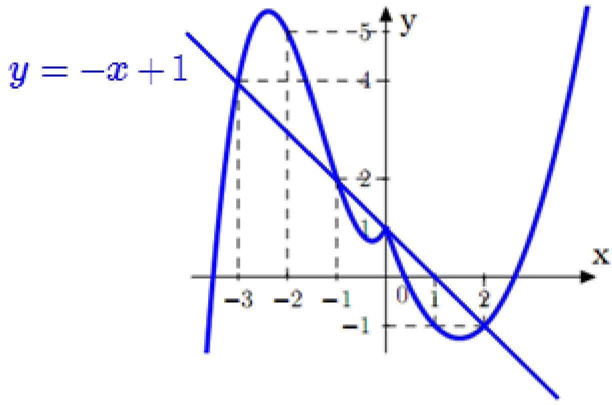


Số nghiệm nguyên thuộc $(-10;10)$ của bất phương trình $f(x)(x^2-x-6)>-x^3+2x^2+5x-6$ là

A. 9. **B.** 10. **C.** 8. **D.** 7.

Lời giải

Chọn C



Ta có $f(x)(x^2-x-6)>-x^3+2x^2+5x-6 \Leftrightarrow [f(x)+x-1](x^2-x-6)>0$

+ Trường hợp 1 :

$$\begin{cases} x^2-x-6>0 \\ f(x)+x-1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<-2 \vee x>3 \\ -3<x<-1 \vee x>2 \end{cases} \Leftrightarrow -3<x<-2 \vee x>3$$

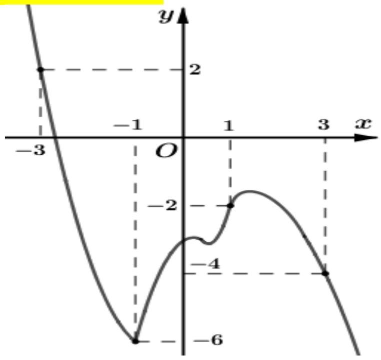
+ Trường hợp 2 :

$$\begin{cases} x^2-x-6<0 \\ f(x)+x-1<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2<x<3 \\ x<-3 \vee -1<x<2 \end{cases} \Leftrightarrow -1<x<2$$

+ Từ hai trường hợp trên ta được các nghiệm nguyên thuộc $(-10;10)$ là $\{0;1;4;5;6;7;8;9\}$.

Câu 9. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y=f(x)$ như hình dưới và $g(x)=-x-1$. Tập nào sau đây là nghiệm của bất phương trình $f(x)>g(x)$.

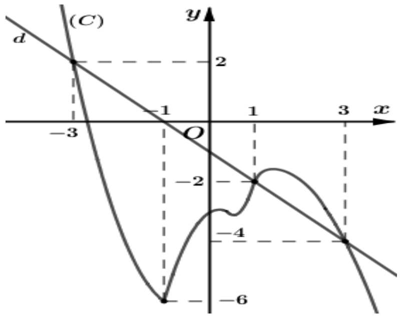
A. $(-3;1)$. **B.** $(-\infty;-3)\cup(1;3)$. **C.** $(-\infty;-3)$. **D.** $(1;3)$.



Lời giải

Chọn B

Ta có số nghiệm của phương trình $f(x) = g(x)$ chính là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $d: y = -x - 1$ (như hình vẽ bên dưới).



Dựa vào đồ thị suy ra phương trình $f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -3 \\ x = 1 \\ x = 3 \end{array}\right.$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ tìm các giá trị của x để đồ thị của hàm số $f(x)$ nằm phía trên đường thẳng $y = -x - 1$.

Đối chiếu các đáp án ta thấy đáp án **B** thỏa mãn.

Câu 10. Cho hàm số $y = f(x)$ có BBT như sau:

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	0	-	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	2	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Bất phương trình $(x^2+1).f(x) \geq m$ nghiệm đúng với mọi x trên $(-1;2)$ là

$A.m > 15$ $\quad$ $B.m \leq 15$ $\quad$ $C.m \leq 2$ $\quad$ $D.m > 2$

Lời giải

Chọn C

Đặt: $g(x) = (x^2+1).f(x) \Rightarrow g'(x) = 2x.f(x) + (x^2+1).f'(x)$

Với $-1 < x < 0 \Rightarrow g'(x) < 0$

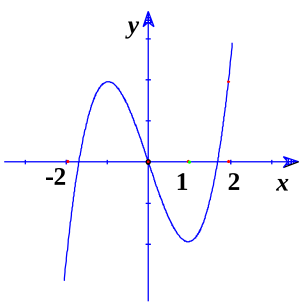
Với $0 < x < 2 \Rightarrow g'(x) > 0$

g(0)=2;g(-1)=8;g(2)=15

Suy ra $\forall x \in (-1;2) \Rightarrow 2 \leq g(x) < 15$

Yêu cầu bài toán ta được $\min\limits_{[-1;2]} g(x) \geq \mathrm{m} \Leftrightarrow 2 \geq \mathrm{m}$

Câu 11. Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x$ có ĐTHS như hình vẽ



Bất phương trình $\dfrac{f(x)-x}{f(|x|)} \le 0$ có bao nhiêu nghiệm nguyên thuộc đoạn $[-6;8]$

A. 8. **B.** 10. **C.** 7. **D.** 9.

Lời giải

ChọnC

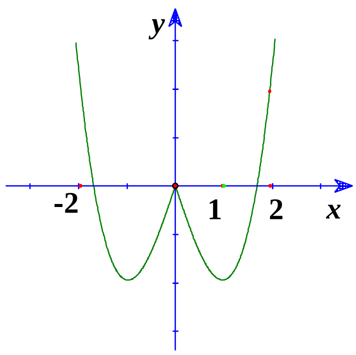
Ta giải các phương trình hoành độ giao điểm sau:

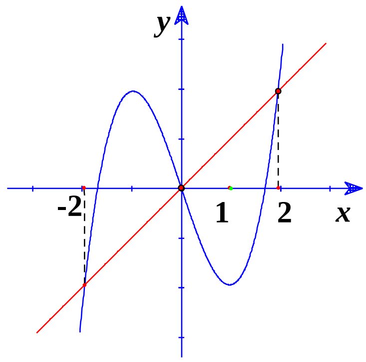
$$f(x)=0 \Leftrightarrow x^3-3x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm\sqrt{3} \end{array}\right.$$

$$f(x)-x=0 \Leftrightarrow x^3-4x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm 2 \end{array}\right.$$

$$f(|x|)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm 2 \end{array}\right.$$

Ta chia hai trường hợp và căn cứ vào đồ thị:





ĐTHS $f(|x|)$ Tương giao giữa đths $f(x)$ và đường thẳng $y=x$

Th1: $\begin{cases} f(x)-x \ge 0 \\ f(|x|)<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} -2 \le x \le 0 \\ x \ge 2 \end{array}\right. \\ -\sqrt{3}<x<\sqrt{3}, x \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\sqrt{3}<x<0 \Rightarrow x=-1$

Th2: $\begin{cases} f(x)-x \le 0 \\ f(|x|)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \le -2 \\ 0 \le x \le 2 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x<-\sqrt{3} \\ x>\sqrt{3} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \le -2 \Rightarrow x \in \{-6;-5;-4;-3;-2\} \\ \sqrt{3}<x \le 2 \Rightarrow x=2 \end{array}\right.$

Vậy bất phương trình trên có 7 nghiệm nguyên thuộc $[-6;8]$

Câu 12. Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

Tìm m để bất phương trình $m^2-f(x+4)-\dfrac{1}{3}x^3 \ge 0$ có nghiệm trên đoạn $[-5;1]$

A. $m \le \dfrac{47}{64}$ **B.** $\dfrac{47}{64}<m<\dfrac{3}{2}$.

C. $m \le -5$ hoặc $m \ge 5$ **D.** $-1 \le m \le 1$.

Lời giải

ChọnC

BPT $\Leftrightarrow\ m^2 \geq f(x+4)+\frac{1}{3}x^3$

Đặt $g(x)=f(x+4)+\frac{1}{3}x^3$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m^2 \geq \min g(x), \forall x \in [-5;-1]$

Ta có: $g'(x)=f'(x+4)+x^2$

Vì $-5 \leq x \leq -1$ nên $-1 \leq x+4 \leq 3$

Từ đó và quan sát bảng xét dấu thấy: $f'(x+4) \geq 0$

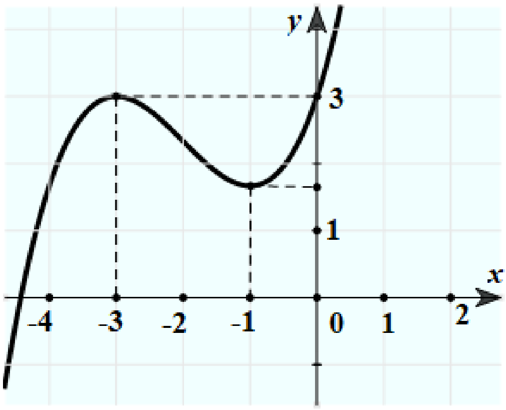
Suy ra $g'(x)=f'(x+4)+x^2 \geq 0, \forall x \in [-5;-1]$

x	-5	-1
$g(x)$	$g(-5)$ $\nearrow$	$g(-1)$

$\Rightarrow \min\limits_{[-5;-1]} g(x)=g(-5)=25$

Vậy $m^2 \geq 25 \Leftrightarrow m \geq 5$ hoặc $m \leq -5$.

Câu 13. Cho hố số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-10;10]$ để bất phương trình $f(m) \geq f\left(\sqrt{4-x^2}\right)+\frac{1}{3}x^3-x^2+\frac{20}{3}$ có nghiệm.



A. 9 **B.** 10. **C.** 11. **D.** 12.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $h(x)=f\left(\sqrt{4-x^2}\right)+\frac{1}{3}x^3-x^2+\frac{20}{3}$.

* Tập xác định: $D=[-2;2]$.

* $h'(x)=-\frac{x.f'\left(\sqrt{4-x^2}\right)}{\sqrt{4-x^2}}+x^2-2x=-x\left(\frac{f'\left(\sqrt{4-x^2}\right)}{\sqrt{4-x^2}}+2-x\right)$

Nx: $\begin{cases} 2-x \geq 0, \forall x \in [-2;2] \\ \sqrt{4-x^2} \geq 0, \forall x \in [-2;2] \end{cases}$ và $y=f(x)$ đồng biến trên $(-1;+\infty)$ nên

$\frac{f'\left(\sqrt{4-x^2}\right)}{\sqrt{4-x^2}}+2-x>0$

* Suy ra bảng biến thiên của hàm số $y=h(x)$ trên $D=[-2;2]$.

x	-2		0		2
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
$h(x)$	3	$\nearrow$	$f(2)+\frac{20}{3}$	$\searrow$	$\frac{16}{3}$

* Yêu cầu bài toán $f(m) \geq \min\limits_{[-2;2]} h(x) = 3$

* Từ đồ thị $y = f(x)$ suy ra $f(m) \geq \min\limits_{[-2;2]} h(x) = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -3 \\ m \geq 0 \end{array}\right.$ kết hợp $m \in [-10;10]$ và m nguyên nên có 12 giá trị của m.

Câu 14. Cho hố số $y = x^3 - 3x^2$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-10;10]$ để bất phương trình $\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{2-x}\right)^3 - 6\sqrt{2+x-x^2} - 9 \leq m$ có nghiệm.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

A. 12 **B.** 13. **C.** 14. **D.** 15.

Lời giải

Chọn D

* ĐKXĐ: $-1 \leq x \leq 2$

* Đặt $t = \sqrt{x+1}+\sqrt{2-x}$. Với $-1 \leq x \leq 2$ thì $\sqrt{3} \leq t \leq \sqrt{6}$

* Ta có $t^2 = 3 + 2\sqrt{2+x-x^2} \Rightarrow 2\sqrt{2+x-x^2} = t^2 - 3$

* Bất phương trình đã cho trở thành $m \geq t^3 - 3t^2 = f(t)$, $t \in \left[\sqrt{3};\sqrt{6}\right]$.

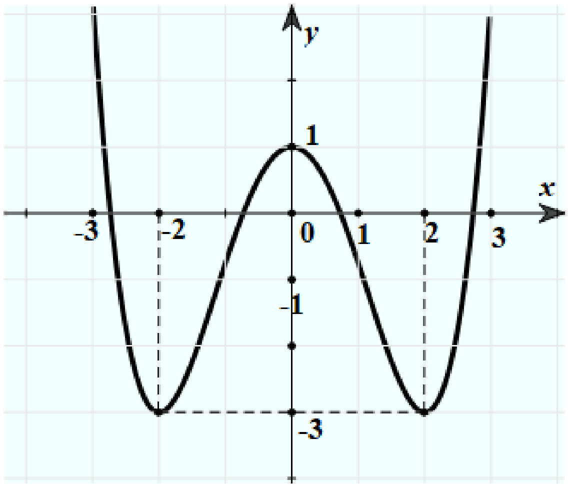
* Bảng biến thiên của hàm số $f(t)$ trên đoạn $\left[\sqrt{3};\sqrt{6}\right]$ là

x	$-\infty$		0	$\sqrt{3}$		2		$\sqrt{6}$	$+\infty$
y'		$+$	0		$-$	0	$+$		
y	$-\infty$	$\nearrow$	0		$\searrow$	-4	$\nearrow$		$+\infty$

* Yêu cầu bài toán $m \geq \min\limits_{\left[\sqrt{3};\sqrt{6}\right]} f(t) = -4$

* $m \geq -4$ kết hợp $m \in [-10;10]$ và m nguyên nên có 15 giá trị của m.

Câu 15. Cho hố số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Số các nghiệm nguyên của bất phương trình $\dfrac{\left(x^2-4\right)\left(x^2+2x\right)}{\left[f(x)\right]^3 + 3\left[f(x)\right]^2 + f(x) + 3} \leq 0$ là.



A. 1 **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

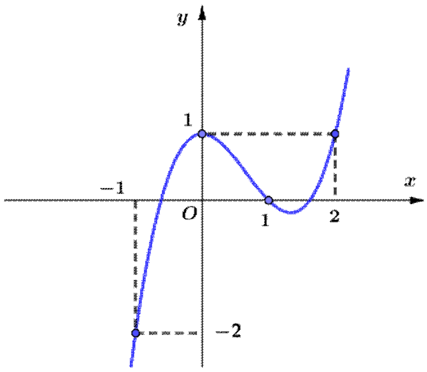
* Ta có $\left[f(x)\right]^3+3\left[f(x)\right]^2+f(x)+3=\left(f(x)+3\right)\left(\left[f(x)\right]^2+1\right)$ và

$f(x)+3=0 \Leftrightarrow a(x-2)^2(x+2)^2=0$, (với $a>0, a\in\mathbb{R}$)

* Do đó bất phương trình đã cho $\Leftrightarrow \dfrac{x(x-2)(x+2)^2}{(x-2)^2(x+2)^2}\le 0 \Leftrightarrow \dfrac{x}{x-2}\le 0 \Leftrightarrow 0\le x<2$

* Kết hợp điều kiện nghiệm nguyên nên có $x\in\{0;1\}$.

Câu 16. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Hãy tìm tập nghiệm S của bất phương trình $f(x)-x+1\ge 0$.

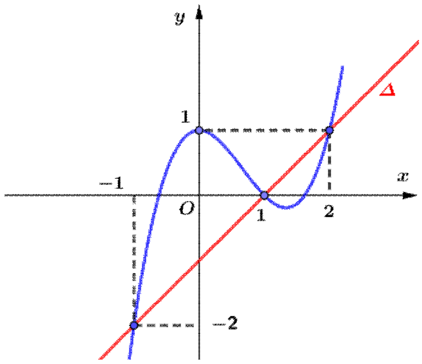
A. $S=[-1;1]\cup[2;+\infty)$. **B.** $S=(-\infty;-1]\cup[1;2]$.

C. $S=[0;1]\cup[2;+\infty)$. **D.** $S=(-\infty;0]\cup[1;2]$.

Lời giải

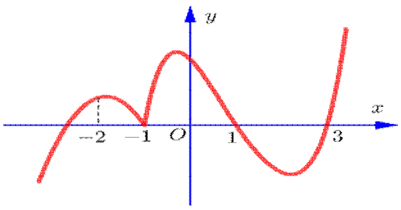
Chọn A

Ta có bất phương trình $f(x)-x+1\ge 0 \Leftrightarrow f(x)\ge x-1$ nên nếu vẽ đường thẳng $\Delta: y=x-1$ trên cùng hệ trục với đồ thị hàm số $y=f(x)$ thì tập nghiệm S của bất phương trình đã cho là tập hợp hoành độ các điểm sao cho đồ thị hàm số $y=f(x)$ nằm phía trên đường thẳng Δ.



Dựa vào đồ thị ta có tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S=[-1;1]\cup[2;+\infty)$.

Câu 17. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình bên.



Có bao nhiêu số nguyên m để bất phương trình $\left(mx+m^2\sqrt{5-x^2}+2m+1\right)f(x)\geq 0$ nghiệm đúng với mọi $x\in[-2;2]$?

A. 1. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 2.

Lời giải

Đặt $g(x)=mx+m^2\sqrt{5-x^2}+2m+1$.

Từ đồ thị của $y=f(x)$ ta thấy $f(x)$ đổi dấu khi qua $x=1$ nên suy ra $g(x)$ cũng phải đổi dấu khi qua $x=1$. Mặt khác $g(x)$ liên tục nên $g(x)=0$ có nghiệm $x=1$.

Kiểm tra: Với $m=-1$. Ta có

$$g(x).f(x)=\left(-x+\sqrt{5-x^2}-1\right)f(x)=(1-x)\left(\frac{1+x}{2+\sqrt{5-x^2}}+1\right)f(x)$$

Nhận xét: $\dfrac{1+x}{2+\sqrt{5-x^2}}+1=\dfrac{3+x+\sqrt{5-x^2}}{2+\sqrt{5-x^2}}>0,\ \forall x[-2;2]$.

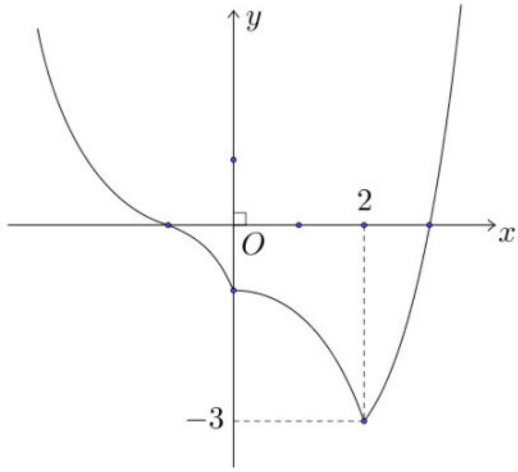
Khi đó quan sát đồ thị $f(x)$, ta thấy:

+ TH1: với $x\in[1;2]$ thì $f(x)\leq 0$ nên $(1-x).f(x)\geq 0$.

+ TH2: với $x\in[-2;1]$ thì $f(x)\geq 0$ nên $(1-x)f(x)\geq 0$.

Do đó trong cả hai trường hợp ta luôn có $g(x).f(x)\geq 0$, $\forall x\in[-2;2]$.

Câu 18. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình dưới đây



Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $2f(x)+x^2>4x+m$ nghiệm đúng với mọi $x\in(-1;3)$.

A. $m<-3$ **B.** $m<-10$. **C.** $m<-2$. **D.** $m<5$.

Lời giải

Chọn B

BPT đã cho nghiệm đúng với với $x\in(-1;3)\Leftrightarrow\ f(x)>\dfrac{-x^2+4x+m}{2}$ đúng $\forall x\in(-1;3)$

$\Leftrightarrow\dfrac{-x^2+4x+m}{2}<-3,\forall x\in(-1;3)\Leftrightarrow -x^2+4x+m+6<0,\forall x\in(-1;3)$

$\Leftrightarrow m<x^2-4x-6,\forall x\in(-1;3)$

Xét hàm số $h(x)=x^2-4x-6$ với $x\in(-1;3)$

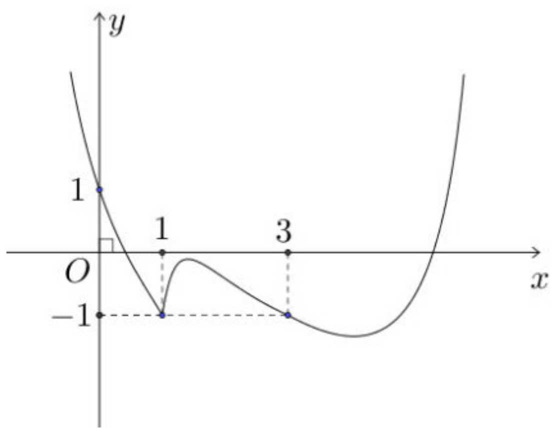
$h'(x)=2x-4\Rightarrow\ h'(x)=0\Leftrightarrow x=2$.

Ta có bảng biến thiên sau:

x	-1		2		3
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$	-1	$\searrow$	-10	$\nearrow$	-9

Từ BBT suy ra $m<\min\limits_{(-1;3)}h(x)\Leftrightarrow m<-10$.

Câu 19. Cho đồ thị (C) của hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ dưới đây



Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của m để bất phương trình $f\left(x\right)\le \frac{m}{x^2-2x+6}$ có nghiệm trên $\left[0;3\right]$?

A. 9 **B.** 10. **C.** 5. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

$f\left(x\right)\le \frac{m}{x^2-2x+6}$ có nghiệm trên $\left[0;3\right]$ $\Leftrightarrow m\ge \left(x^2-2x+6\right).f\left(x\right)$ có nghiệm $x\in\left[0;3\right]$

Xét hàm số $g\left(x\right)=\left(x^2-2x+6\right).f\left(x\right)$ với $x\in\left[0;3\right]$.

Ta có $\left|g\left(x\right)\right|=\left|x^2-2x+6\right|.\left|f\left(x\right)\right|\le 9.1=9,\forall x\in\left[0;3\right]$ (dấu bằng xảy ra khi $x=3$).

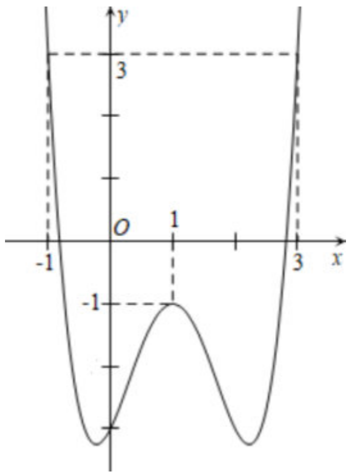
$\Rightarrow \min\limits_{[0;3]} g\left(x\right)=-9$.

Do đó bất phương trình đã cho có nghiệm trên $\left[0;3\right]$ $\Leftrightarrow m\ge -9$.

Vì m nguyên âm nên $-9\le m\le -1$ $\Rightarrow$ có 9 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Dạng 12: Biết đồ thị hoặc BBT của hàm số $y=f'\left(x\right)$, xét các bài toán liên quan đến BẤT PHƯƠNG TRÌNH có dạng $f\left(x\right)\ge g\left(x\right); f\left(u\left(x\right)\right)\ge g\left(x\right)\left(>,<,\le\right)$... có thể có tham số.

Câu 1. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y=f'\left(x\right)$ có đồ thị như hình dưới đây.



Bất phương trình $3f\left(x\right)\le x^3-3x^2+m$ đúng với mọi $x\in\left(-1;3\right)$ khi và chỉ khi

A. $m>3f\left(3\right)$. **B.** $m\ge 3f\left(3\right)$. **C.** $m>3f\left(-1\right)+4$. **D.** $m\ge 3f\left(-1\right)+4$.

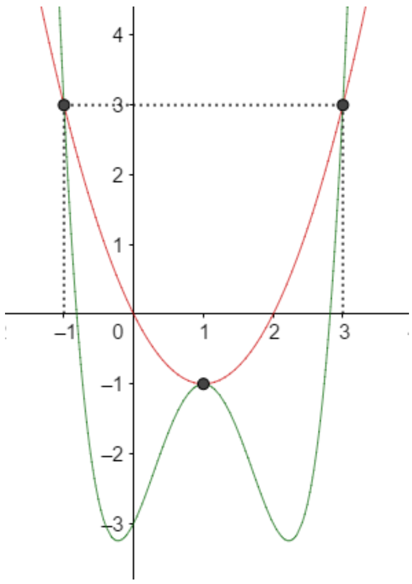
Chọn D

Ta có: $3f\left(x\right)\le x^3-3x^2+m \Leftrightarrow 3f(x)-x^3+3x^2\le m$ với mọi $x\in\left(-1;3\right)$.

Xét $g(x)=3f(x)-x^3+3x^2$ với $x\in\left(-1;3\right)$.

Khi đó: $g'(x)=3f'(x)-3x^2+6x=3\left[f'(x)-x^2+2x\right]$.

Nghiệm của phương trình $g'(x)=0$ là hoành độ giao điểm của đồ thị $y=f'(x)$ và parabol $y=x^2-2x$.



Phương trình $g'(x)=0$ có ba nghiệm $x=-1; x=3; x=1$ trên đoạn $[-1;3]$.

$\lim\limits_{x\to -1^+} g(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}\left[3f(x)-x^3+3x^2\right]=3f(-1)+4$;

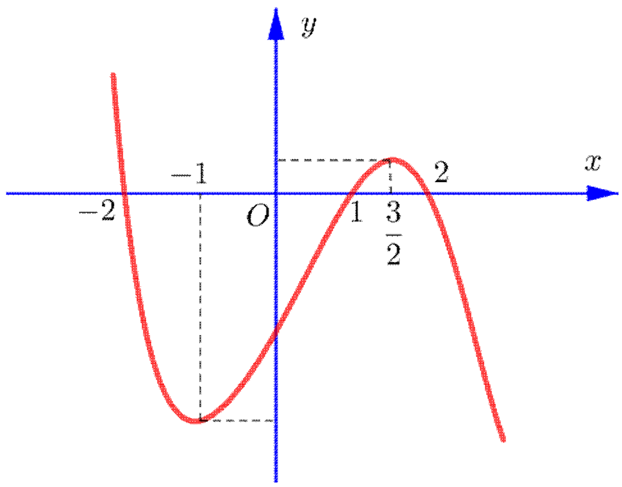
$\lim\limits_{x\to 3^-} g(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}\left[3f(x)-x^3+3x^2\right]=3f(3)$.

Ta có bảng biến thiên sau:

x	-1 $\quad$ 1 $\quad$ 3
$g'(x)$	0 $\quad$ - $\quad$ 0
$g(x)$	$3f(-1)+4$ ↘ $3f(3)$

Bất phương trình $3f(x)\le x^3-3x^2+m$ đúng với mọi $x\in(-1;3)$ khi và chỉ khi $m\ge g(x), \forall x\in(-1;3) \Leftrightarrow m\ge 3f(-1)+4$.

Câu 2. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thoả mãn $f(2)=f(-2)=0$ và đồ thị hàm số $y=f'(x)$ có hình dạng như hình vẽ bên dưới.

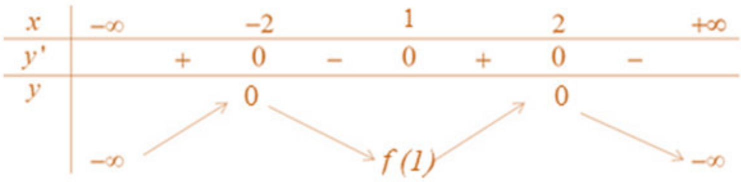


Bất phương trình $f(x)+2m-1\le 0$ đúng với mọi số thực x khi và chỉ khi

A. $m < \frac{1}{2}$. **B.** $m \le \frac{1}{2}$. **C.** $m \ge \frac{1}{2}$. **D.** $m > \frac{1}{2}$.

Lời giải

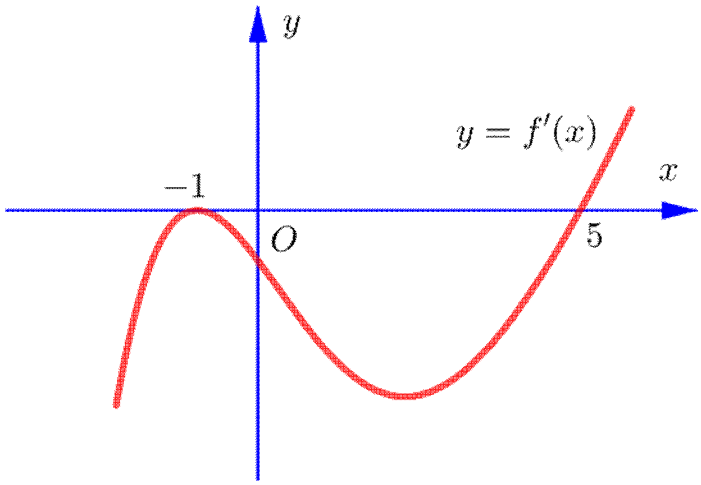
Từ đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và giả thiết ta có BBT của hàm số $y = f(x)$ như sau:



Ta có $f(x) + 2m - 1 \le 0 \Leftrightarrow 1 - 2m \ge f(x)$ (*).

Bất phương trình [*] đúng với mọi số thực x $\Leftrightarrow 1 - 2m \ge \max\limits_{\mathbb{R}} f(x)$.

Câu 3. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên dưới



Để hàm số $y = f(2x^3 - 6x + 3)$ đồng biến với mọi $x > m$ $(m \in \mathbb{R})$ thì $m \ge \sin\frac{b\pi}{c}$, trong đó $a, b, c \in \mathbb{N}^*$. $c > 2b$. Tổng bằng $S = 2a + 3b - c$ bằng

A. -9. **B.** 7. **C.** 5. **D.** -2.

Lời giải

Đặt $g(x) = f(2x^3 - 6x + 3)$. Ta có $g'(x) = 6(x^2 - 1) f'(2x^3 - 6x + 3)$.

Hàm số $y = g(x)$ đồng biến khi $g'(x) \ge 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2 - 1 \ge 0 \\ f'(2x^3 - 6x + 3) \ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 - 1 < 0 \\ f'(2x^3 - 6x + 3) < 0 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2 - 1 \ge 0 \\ 2x^3 - 6x + 3 \ge 5 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 - 1 < 0 \\ 2x^3 - 6x + 3 < 5 \end{cases} \end{array}\right.$.

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2 - 1 \ge 0 \\ 2x^3 - 6x + 3 \ge 5 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 - 1 < 0 \\ 2x^3 - 6x + 3 < 5 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2 - 1 \ge 0 \\ 2x^3 - 6x - 2 \ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 - 1 > 0 \\ 2x^3 - 6x - 2 < 0 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow x \in (-\infty, -1{,}53) \cup (-1; -0{,}35) \cup (1; 1{,}88).$$

Ta thấy $x \approx 1{,}88$ là nghiệm lớn nhất. Để hàm số $y = f(2x^3 - 6x + 3)$ đồng biến với mọi $x > m$ $(m \in \mathbb{R})$ thì $m \ge x \approx 1{,}88$. Ta sẽ tìm cách giải cụ thể giá trị $x \approx 1{,}88$ là nghiệm của $2x^3 - 6x - 2 = 0$ bằng phương pháp đổi biến lượng giác.

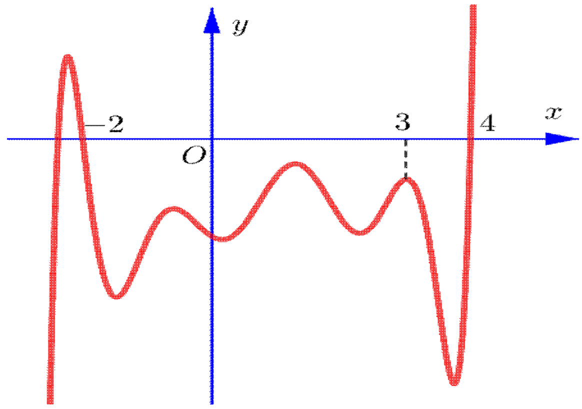
Đặt $x=2\cos t \Rightarrow 8\cos^3 t-6\cos t-1=0 \Rightarrow \cos 3t=\frac{1}{2} \Rightarrow t=\pm\frac{\pi}{9}+k\frac{2\pi}{3}$, với $t\in[0;2\pi]$

ta được $t=\frac{\pi}{9}$ hoặc $t=\frac{17\pi}{9}$. Do đó $2\cos\frac{17\pi}{9}=a\sin\frac{b}{c}\pi=2\sin\frac{-25}{18}\pi$ (không thỏa mãn đk)

hoặc $2\cos\frac{\pi}{9}=a\sin\frac{b}{c}\pi=2\sin\frac{7}{18}\pi$ $a=2,b=7;c=18\Rightarrow S=7$ (thỏa mãn).

$\Leftrightarrow 1-2m\geq 0 \Leftrightarrow m\leq\frac{1}{2}\Rightarrow$ ***Chọn B.***

Câu 4. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Bất phương trình $f(x)\geq\frac{2^{f(x)-m}+5^{f(x)-m}-2+27m}{27}$ nghiệm đúng với $x\in(-2;3)$ mọi khi

A. $f(3)\leq m\leq f(3)+1$. **B.** $f(-2)+1\leq m\leq f(3)$.

C. $f(-2)-2\leq m\leq f(3)$. **D.** $f(3)\leq m\leq f(-2)-2$.

Lời giải

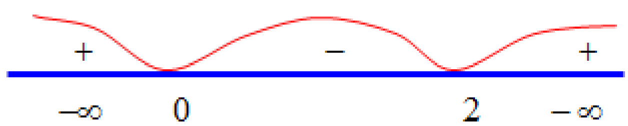
Ta có với $x\in(-2;3)$ thì $f'(x)<0$ Ta có $f(3)<f(x)<f(-2)$, $\forall x\in(-2;3)$.

$f(3)-2m<f(x)-m<f(-2)-m$ Đặt $t=f(x)-m\Rightarrow f(3)-m<t<f(-2)-m$

Ta có $f(x)\geq\frac{2^{f(x)-m}+5^{f(x)-m}-2+27m}{27}$ $2^{f(x)-m}+5^{f(x)-m}-2-27(f(x)-m)\leq 0$

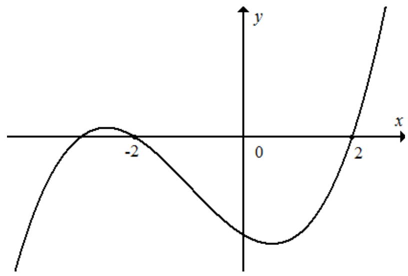
$2^t+5^t-27t-2\leq 0$ .Vế trái chỉ có 2 nghiệm $t=0;t=2$

Xét dấu



Ta có $0\leq t\leq 2\Rightarrow\begin{cases}f(3)-m\geq 0\\ f(-2)-m\leq 2\end{cases}\Rightarrow f(-2)-2\leq m\leq f(3)\Rightarrow$ ***Chọn C.***

Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như sau:



Bất phương trình $f(x) > x^2 - 2x + m$ đúng với mọi $x \in (1;2)$ khi và chỉ khi

A. $m \le f(2)$. **B.** $m < f(1) - 1$. **C.** $m \ge f(2) - 1$. **D.** $m \ge f(1) + 1$.

Lời giải:

Chọn A

Ta có: $f(x) > x^2 - 2x + m$, $\forall x \in (1;2) \Rightarrow g(x) = f(x) - x^2 + 2x > m,\ \forall x \in (1;2)$

Ta có: $g'(x) = f'(x) - 2x + 2 < 0$, $\forall x \in (1;2)$ do $\forall x \in (1;2) \Rightarrow \begin{cases} f'(x) < 0 \\ 2x - 2 > 0 \end{cases}$

Vậy ta có: $\min\limits_{x \in (1;2)} g(x) = g(2) = f(2) \ge m$.

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Bất phương trình $f(x) < e^{x^2} + m$ đúng với mọi $x \in (-1;1)$ khi và chỉ khi

A. $m \ge f(0) - 1$. **B.** $m > f(-1) - \mathrm{e}$. **C.** $m > f(0) - 1$. **D.** $m \ge f(-1) - \mathrm{e}$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $g(x) = \mathrm{e}^{x^2}$

Do $x^2 \in [0;1)$ $\forall x \in (-1;1)$ nên $g(x) = \mathrm{e}^{x^2} \ge \mathrm{e}^0 = 1$

Ta có $\max\limits_{x \in (-1;1)} f(x) = f(0)$, $\min\limits_{x \in (-1;1)} g(x) = g(0) = 1$

Bất phong trình $f(x) < e^{x^2} + m$ đúng với mọi $x \in (-1;1) \Leftrightarrow f(x) - \mathrm{e}^{x^2} < m$,

$\forall x \in (-1;1) \Leftrightarrow m \ge \max\limits_{x \in (-1;1)} \left[f(x) - \mathrm{e}^{x^2} \right] = f(0) - 1$.

Câu 7. Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		$\frac{\pi}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	6	$\searrow$	$-\infty$

Bất phương trình $f(x) > 2^{\cos x} + 3m$ đúng với mọi $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ khi và chỉ khi

A. $m \le \frac{1}{3}\left[f(0) - 2 \right]$. **B.** $m < \frac{1}{3}\left[f(0) - 2 \right]$.

C. $m\le \frac{1}{3}\left[f\left(\frac{\pi}{2}\right)-1\right]$. **D.** $m<\frac{1}{3}\left[f\left(\frac{\pi}{2}\right)-1\right]$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f(x)>2^{\cos x}+3m\ \forall x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)\Leftrightarrow f(x)-2^{\cos x}>3m\ \ \forall x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

Xét hàm $g(x)=f(x)-2^{\cos x}$ trên $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

Ta có $g'(x)=f'(x)+2^{\cos x}\sin x.\ln 2$

Vì $f'(x)\ge 1\ \forall x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$; $\sin x>0\ \forall x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow 2^{\cos x}\sin x.\ln 2>0\ \ \forall x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ nên ta suy ra

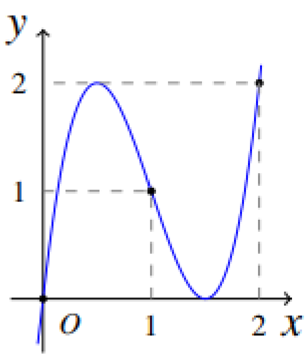
$g'(x)=f'(x)+2^{\cos x}\sin x.\ln 2>0\ \forall x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

Vậy ta có bảng biến thiên

x	0		$\frac{\pi}{2}$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	$g(0)$	$\nearrow$	$g\left(\frac{\pi}{2}\right)$

Từ bảng biến thiên ta có bất phương trình $f(x)>2^{\cos x}+3m$ đúng với mọi $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ khi và chỉ khi $g(0)\ge 3m\ \Leftrightarrow 3m\le f(0)-2\Leftrightarrow m\le\frac{1}{3}\left[f(0)-2\right]$.

Câu 8. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Bất phương trình $f(2\sin x)-2\sin^2 x<m$ đúng với mọi $x\in(0;\pi)$ khi và chỉ khi

A. $m>f(1)-\frac{1}{2}$. **B.** $m\ge f(1)-\frac{1}{2}$. **C.** $m\ge f(0)-\frac{1}{2}$. **D.** $m>f(0)-\frac{1}{2}$.

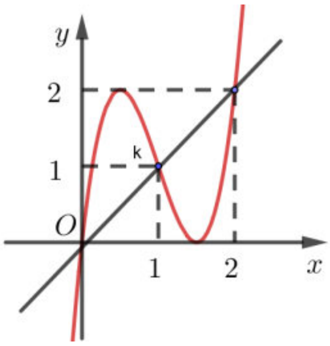
Lời giải

Chọn A

Ta có: $f(2\sin x)-2\sin^2 x<m\quad(1)$

Đặt $2\sin x=t$, do $x\in(0;\pi)$ nên $t\in(0;2]$.

Với $t\in(0;2]$ thì (1) trở thành: $f(t)-\dfrac{t^2}{2}<m$, $\forall t\in(0;2]\Leftrightarrow m>\max\limits_{t\in(0;2]} g(t)$, với $g(t)=f(t)-\dfrac{t^2}{2}$.



Ta có $g'(t)=f'(t)-t$. Từ đồ thị ta có: $g'(t)=0\Leftrightarrow f'(t)=t\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} t=0\\ t=1\\ t=2\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

t	0		1		2
$g'(t)$	0	$+$	0	$-$	0
$g(t)$	$g(0)$	$\nearrow$	$g(1)$	$\searrow$	$g(2)$

Từ bảng biến thiên ta có khi $m>\max\limits_{t\in(0;2]} g(1)\Leftrightarrow m>f(1)-\dfrac{1}{2}$ thì bất phương trình $f(2\sin x)-2\sin^2 x<m$ đúng với mọi $x\in(0;\pi)$.

Cô Hương Bùi

Câu 9. Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Bất phương trình $f(x)<\ln x+m$ đúng với mọi $x\in\left(\dfrac{1}{3};1\right)$ khi và chỉ khi

A. $m>f\left(\dfrac{1}{3}\right)+\ln 3$. **B.** $m<f(1)$. **C.** $m\ge f\left(\dfrac{1}{3}\right)+\ln 3$. **D.** $m\ge f(1)$.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện $x>0$.

$f(x)<\ln x+m,\forall x\in\left(\dfrac{1}{3};1\right)\Leftrightarrow m>f(x)-\ln x,\forall x\in\left(\dfrac{1}{3};1\right)$.

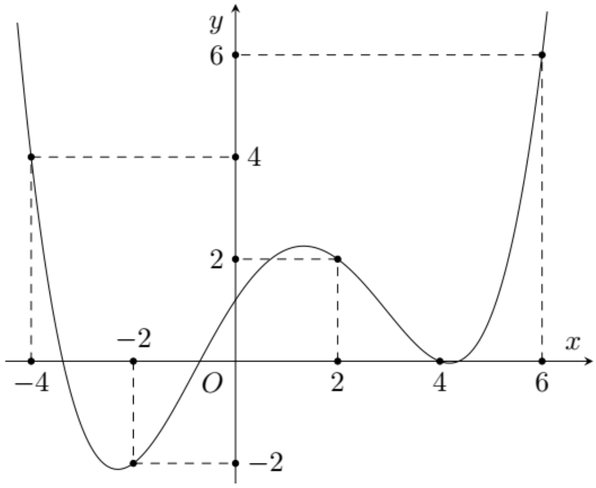
Đặt $g(x)=f(x)-\ln x \Rightarrow g'(x)=f'(x)-\frac{1}{x}$.

Xét trên đoạn $\left[\frac{1}{3};1\right]$ ta có: $f'(x)\le 0$ và $-\frac{1}{x}<0\Rightarrow g'(x)<0$.

$\Rightarrow$ Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên đoạn $\left[\frac{1}{3};1\right]\Rightarrow g\left(\frac{1}{3}\right)>g(x)\,,\forall x\in\left(\frac{1}{3};1\right)$.

Vậy $m>f(x)-\ln x\,,\forall x\in\left(\frac{1}{3};1\right)\Rightarrow m\ge g\left(\frac{1}{3}\right)=f\left(\frac{1}{3}\right)+\ln 3$.

Câu 10. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $-\frac{1}{3}f(-3x-8)\ge\frac{9}{2}x^2+16x-m$ đúng với mọi $x\in[-2;0]$:

A. $m\le\frac{1}{3}f(-2)-14$. **B.** $m\le\frac{1}{3}f(-4)-\frac{40}{3}$.

C. $m\ge\frac{1}{3}f(-2)-4$. **D.** $m\ge\frac{1}{3}f(-4)-\frac{40}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Bất phương trình đã cho tương đương với:

$$\frac{1}{3}f(-3x-8)+\frac{9}{2}x^2+16x\le m \text{ đúng với mọi } x\in[-2;0]$$

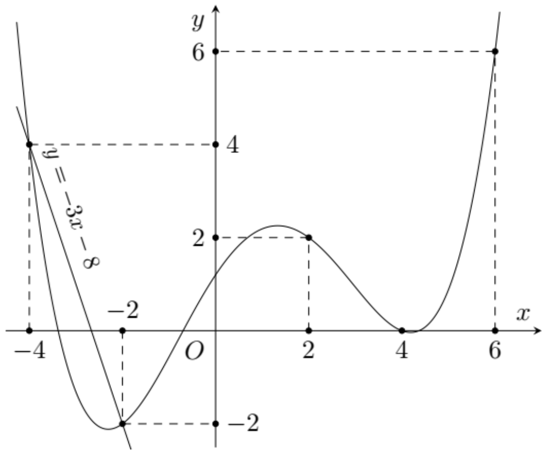
Xét hàm số $g(x)=\frac{1}{3}f(-3x-8)+\frac{9}{2}x^2+16x$ với $x\in[-2;0]$. Ta có:

$g'(x)=-f'(-3x-8)+9x+16$

$g'(x)=0\Leftrightarrow -f'(-3x-8)+9x+16=0\Leftrightarrow f'(-3x-8)=9x+16$ (1)

Đặt $t=-3x-8$ thì phương trình (1) trở thành: $f'(t)=-3t-8$ (2)

Số nghiệm của phương trình (2) là số giao điểm của ĐTHS $y=f'(t)$ và đường thẳng $y=-3t-8$.



Từ đồ thị ta được: $(2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-4 \\ t=-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -3x-8=-4 \\ -3x-8=-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{-4}{3} \\ x=-2 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

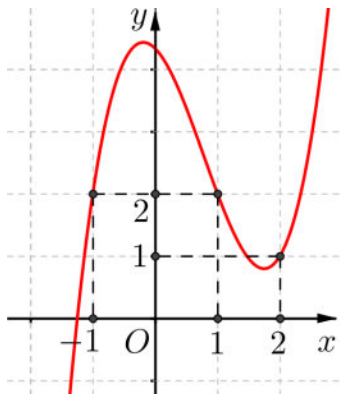
x	$-\infty$	-2		$-\dfrac{4}{3}$		0	$+\infty$
$g'(x)$			$+$	0	$-$		
$g(x)$		$\dfrac{1}{3}f(-2)-14$	$\nearrow$	$\dfrac{1}{3}f(-4)-\dfrac{40}{3}$	$\searrow$	$\dfrac{1}{3}f(-8)$	

Từ bảng biến thiên suy ra:

Bất phương trình $\dfrac{1}{3}f(-3x-8)+\dfrac{9}{2}x^2+16x\le m$ đúng với mọi $x\in[-2;0]$ khi và chỉ khi:

$$\max_{[-2;0]} g(x)\le m \Leftrightarrow m\ge \frac{1}{3}f(-4)-\frac{40}{3}.$$

Câu 11. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ.



Tìm m để bất phương trình $4f\left(\sqrt{5}\sin x\right)\ge 5\sin 2x+10x+m$ thỏa mãn $\forall x\in\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$?

A. $m\le 4f(1)-4+10\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$.

B. $m\le 4f(-1)+4-10\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$.

C. $m\le 4f(2)-4+10\arcsin\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$.

D. $m\le 4f(2)+4-10\arcsin\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $4f\left(\sqrt{5}\sin x\right)\ge 5\sin 2x+10x+m \Leftrightarrow m\le 4f\left(\sqrt{5}\sin x\right)-5\sin 2x-10x$

Xét hàm số $g(x)=4f\left(\sqrt{5}\sin x\right)-5\sin 2x-10x$ trên $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ ta có

$g'(x)=4\sqrt{5}\cos x.f'\left(\sqrt{5}\sin x\right)-10\cos 2x-10=4\sqrt{5}\cos x.f'\left(\sqrt{5}\sin x\right)-20\cos^2 x$

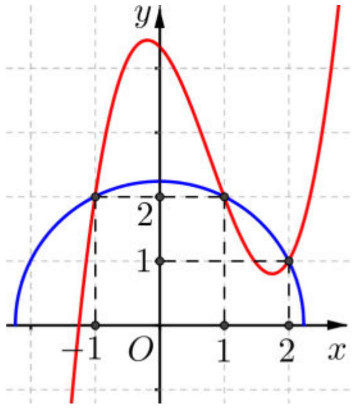
$=4\sqrt{5}\cos x\left[f'\left(\sqrt{5}\sin x\right)-\sqrt{5}\cos x\right]$

Do $x\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ nên $\cos x=\sqrt{1-\sin^2 x}>0$

Khi đó $g'(x)=0\Leftrightarrow f'\left(\sqrt{5}\sin x\right)=\sqrt{5}\cos x\Leftrightarrow f'\left(\sqrt{5}\sin x\right)=\sqrt{5-5\sin^2 x}$.

Đặt $t=\sqrt{5}\sin x$ ta được $f'(t)=\sqrt{5-t^2}$

Xét hàm số $y=\sqrt{5-x^2}$ có đồ thị là nửa đường tròn tâm O bán kính $\sqrt{5}$ nằm phía trên trục hoành.



Dựa vào đồ thị suy ra $f'(t)=\sqrt{5-t^2}\Leftrightarrow t\in\{-1;1;2\}$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{5}\sin x=-1\\ \sqrt{5}\sin x=1\\ \sqrt{5}\sin x=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)=x_1\\ x=\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)=x_2\\ x=\arcsin\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)=x_3\end{array}\right.$$

Ta có bảng biến thiên của $g(x)$ trên $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ là:

x	$-\frac{\pi}{2}$		x_1		x_2		x_3		$\frac{\pi}{2}$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$g\left(-\frac{\pi}{2}\right)$	$\searrow$	$g(x_1)$	$\nearrow$	$g(x_2)$	$\searrow$	$g(x_3)$	$\nearrow$	$g\left(\frac{\pi}{2}\right)$

Ta có $g(x_1)=4f(-1)+4-10\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ và $g(x_3)=4f(2)-4+10\arcsin\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$.

Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y=f'(x)$ trục hoành và hai đường thẳng $x=-1,\ x=2$. Dựa vào đồ thị ta thấy diện tích hình (H) lớn hơn 4.

Vì $f(2)-f(-1)=\int_{-1}^{2}f'(x)dx=S(H)$ nên $f(2)>f(-1)+4$

Do đó $g(x_3)=4f(2)-4+10\arcsin\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)>4f(-1)+12+10\arcsin\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)>g(x_1)$

Vậy để $m\le g(x)$ với $\forall x\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ thì $m\le g(x_1)=4f(-1)+4-10\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$.

Câu 12. Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		1		4		$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$

Bất phương trình $f(e^x)<e^{2x}+m$ nghiệm đúng với mọi $x\in(\ln 2;\ln 4)$ khi và chỉ khi

A. $m\ge f(2)-4$. **B.** $m\ge f(2)-16$. **C.** $m>f(2)-4$. **D.** $m>f(2)-16$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f(e^x)<e^{2x}+m$ nghiệm đúng với mọi $x\in(\ln 2;\ln 4)$ khi và chỉ khi

$m>f(e^x)-e^{2x},\forall x\in(\ln 2;\ln 4)$. (*)

Đặt $t=e^x\Rightarrow t\in(2;4)$

Bất phương trình (*) trở thành : $m>f(t)-t^2,\forall t\in(2;4)$

Xét hàm số $g(t)=f(t)-t^2$ trên $(2;4)$

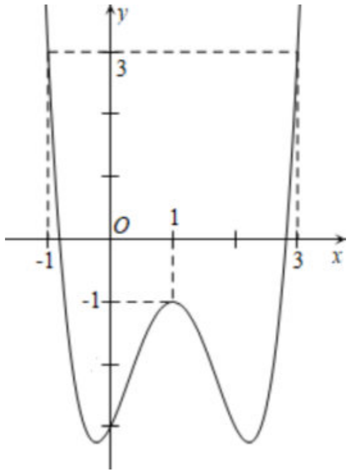
Ta có $g'(t)=f'(t)-2t<0$ (do $f'(t)<4,\forall t\in(2;4)$)

Vậy $g(t)=f(t)-t^2$ nghịch biến trên $(2;4)$

Suy ra : $g(t) < g(2) = f(2) - 4$

Do đó để thỏa mãn yêu cầu bài toán ta có $m \geq f(2) - 4$

Câu 13. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình dưới đây.



Bất phương trình $3f(x) \leq x^3 - 3x^2 + m$ đúng với mọi $x \in (-1;3)$ khi và chỉ khi

A. $m > 3f(3)$. **B.** $m \geq 3f(3)$. **C.** $m > 3f(-1) + 4$. **D.** $m \geq 3f(-1) + 4$.

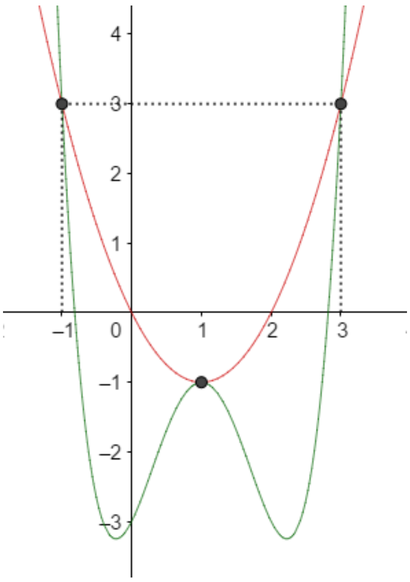
Chọn D

Ta có: $3f(x) \leq x^3 - 3x^2 + m \Leftrightarrow 3f(x) - x^3 + 3x^2 \leq m$ với mọi $x \in (-1;3)$.

Xét $g(x) = 3f(x) - x^3 + 3x^2$ với $x \in (-1;3)$.

Khi đó: $g'(x) = 3f'(x) - 3x^2 + 6x = 3\left[f'(x) - x^2 + 2x\right]$.

Nghiệm của phương trình $g'(x) = 0$ là hoành độ giao điểm của đồ thị $y = f'(x)$ và parabol $y = x^2 - 2x$.



Phương trình $g'(x) = 0$ có ba nghiệm $x = -1; x = 3; x = 1$ trên đoạn $[-1;3]$.

$\lim\limits_{x \to -1^+} g(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} \left[3f(x) - x^3 + 3x^2\right] = 3f(-1) + 4$;

$\lim\limits_{x \to 3^-} g(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} \left[3f(x) - x^3 + 3x^2\right] = 3f(3)$.

Ta có bảng biến thiên sau:

x	-1 1 3
$g'(x)$	0 - 0 - 0
$g(x)$	$3f(-1)+4$ ↘ $3f(3)$

Bất phương trình $3f(x) \le x^3 - 3x^2 + m$ đúng với mọi $x \in (-1;3)$ khi và chỉ khi $m \ge g(x), \forall x \in (-1;3) \Leftrightarrow m \ge 3f(-1)+4$.