PHƯƠNG PHÁP CASIO – VINACAL
BÀI 20. TÍNH NHANH DIỆN TÍCH HÌNH PHẲNG

1) KIẾN THỨC NỀN TẢNG

1. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y = f(x), y = g(x)$ và hai đường thẳng $x = a, x = b$ được tính theo công thức

$$S = \int_a^b \left| f(x) \quad g(x) \right| dx \ (1) \ \text{(Dạng 1)}$$

Quy ước : Trong bài học này ta gọi đường thẳng $x = a$ là cận thứ nhất , $x = b$ là cận thứ hai
Chú ý : Khi đề bài không cho hai cận thì hai cận sẽ có dạng $x = x_1$, $x = x_2$ với x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình hoành độ giao điểm

2. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $x = f(y)$, $x = g(y)$ và hai cận $y = a, y = b$ được tính theo công thức :

$$S = \int_a^b \left| f(y) \quad g(y) \right| dy \ (2) \ \text{(Dạng 2)}$$

3. Tổng hợp phương pháp (gồm 3 bước)

+)**Bước 1**: Xác định rõ hai hàm $y = f(x), y = g(x)$ hoặc $x = f(y), x = g(y)$

+)**Bước 2**: Xác định rõ 2 cận $x = a, x = b$ hoặc $y = a, y = b$

+)**Bước 3**: Lắp vào công thức (1) hoặc (2) rồi sử dụng máy tính casio

2) VÍ DỤ MINH HỌA

VD1-[Đề minh họa môn Toán Bộ GD-ĐT lần 1năm 2017]

Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^3 \quad x$ và đồ thị hàm số $y = x \quad x^2$

A. $\frac{37}{12}$ **B.** $\frac{9}{4}$ **C.** $\frac{81}{12}$ **D.** 13

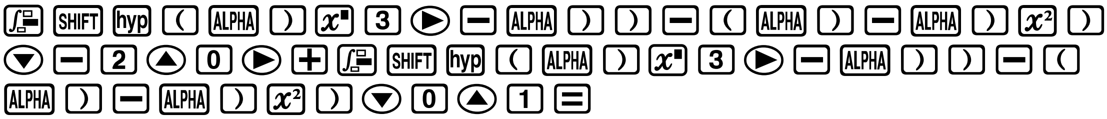
GIẢI

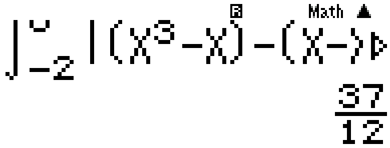
- Ta có hai hàm số $y = x^3 \quad x$ và $y = x \quad x^2$
- Giải phương trình hoành độ giao điểm $x^3 \quad x = x \quad x^2 \Leftrightarrow x^3 + x^2 \quad 2x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \\ x = \quad 2 \end{array}\right.$

  Ta có 3 cận $x = 0; x = 1; x = \quad 2$ mà công thức chỉ có 2 cận vậy ta chia thành 2 khoảng cận $\quad 2 \le x \le 0$ và $0 \le x \le 1$
- Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y = x^3 - x$, $y = 3 \quad x$ và hai đường thẳng $x = \quad 2; x = 0$ là $S_1 = \int_{\ 2}^{0} \left| \left(x^3 \quad x\right) \quad \left(x \quad x^2\right) \right| dx$

  Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y = x^3 - x$, $y = 3 \quad x$ và hai đường thẳng $x = 0; x = 1$ là $S_2 = \int_0^1 \left| \left(x^3 \quad x\right) \quad \left(x \quad x^2\right) \right| dx$
- Vậy tổng diện tích $S = \int_{\ 2}^{0} \left| \left(x^3 \quad x\right) \quad \left(x \quad x^2\right) \right| dx + \int_0^1 \left| \left(x^3 \quad x\right) \quad \left(x \quad x^2\right) \right| dx$

  Sử dụng Casio với lệnh tính tích phân





Vậy $S = \frac{37}{12}$ ta chọn đáp án chính xác là **A**

❖ **Bình luận :**

- Thật tuyệt vời phải không, và từ đây theo 3 bước kết hợp Casio ta sẽ làm mọi bài liên quan đến tính diện tích hình phẳng.

VD2-[Đề cương chuyên KHTN Hà Nội năm 2017]

Cho miền (D) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \ln(x+1), y = \ln 2.\sqrt{x}, x = 2$. Diện tích miền phẳng (D) bằng :

A. $\ln\sqrt[3]{16}.\left(\sqrt{2}+1\right) \quad 3\ln 3+1$ **B.** $\frac{4}{3}\ln 2.\left(\sqrt{2}+1\right)+3\ln 3 \quad 1$

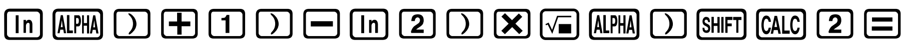
C. $\ln\frac{16}{27}+\frac{4}{3}\sqrt{2}\ln 2+1$ **D.** $\ln\frac{\sqrt[3]{16}}{27}+\frac{4}{3}\ln 2^{\sqrt{2}}+1$

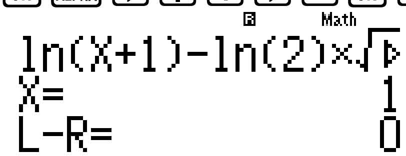
GIẢI

➢ Ta có hai hàm số $y = \ln(x+1)$ và $y = \ln 2.\sqrt{x}$

➢ Cận đầu tiên là $x = 2$ ta đi tìm cận tiếp theo bằng cách giải phương trình hoành độ giao điểm $\ln(x+1) = \ln 2.\sqrt{x} \Leftrightarrow \ln(x+1) \quad \ln 2.\sqrt{x} = 0$

Để giải nhanh phương trình này ta sẽ sử dụng Casio với chức năng dò nghiệm SHIFT SOLVE



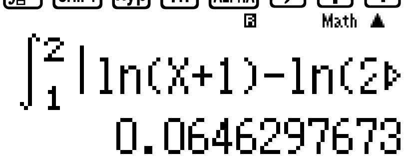


Ta được nghiệm $x = 1$

Vậy ta tìm được hai cận $x = 1; x = 2$

➢ Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai hàm số $y = \ln(x+1)$, $y = \ln 2.\sqrt{x}$ và hai đường thẳng $x = 1; x = 2$ là $S = \int_1^2 \left|\ln(x+1) \quad \ln 2.\sqrt{x}\right| dx$

Sử dụng Casio với lệnh tính tích phân



Vậy $S = 0,0646...$ Tính giá trị xem đáp án nào có kết quả $0,0646...$ thì là đáp án chính xac. $\Rightarrow$ ta chọn **B**

❖ **Bình luận :**

- Việc tìm nghiệm của phương trình hoành độ giao điểm hay tung độ giao điểm mà phức tạp ta có thể tính nhanh bằng kỹ thuật dò nghiệm với chức năng SHIFT SOLVE đã được học ở bài trước.

VD3-[Th thử website Vnmath.com lần 1 năm 2017]

Đường thẳng $y = c$ chia hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y = x^2$ và đường thẳng $y = 4$ thành hai phần bằng nhau. Tìm c

A. $\sqrt[3]{16}$ **B.** $\sqrt[3]{9}$ **C.** $2\sqrt{2}$ **D.** $3\sqrt{3}$

GIẢI

➢ Hai hàm số $y = x^2$ và $y = 4$

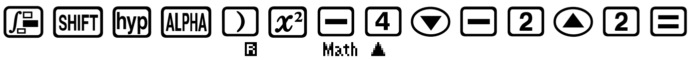
Giải phương trình hoành độ giao điểm $x^2 \quad 4 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$

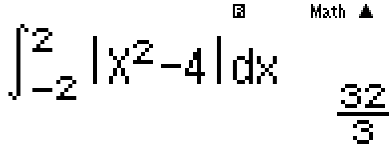
Vậy cận thứ nhất là $x = \quad 2$ cận thứ hai là $x = 2$

➢ Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y = x^2$, $y = 4$ và hai đường thẳng

$x = \quad 2, x = 2$ là : $S = \int_{2}^{2} \left| x^2 - 4 \right| dx$

Sử dụng Casio với lệnh tính tích phân





Vậy $S = \frac{32}{3} \Rightarrow$ một nửa diện tích là $\frac{16}{3}$

➢ Vì đường thẳng $y = c$ chia hình phẳng S thành 2 phần bằng nhau $\Rightarrow$ Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y = x^2$, đường thẳng $y = c$ có độ lớn là $\frac{16}{3}$

➢ Thử với đáp án A ta có $y = \sqrt[3]{16}$. Giải phương trình hoành độ giao điểm

$x^2 = \sqrt[3]{16} \Leftrightarrow x = \pm \sqrt[6]{16}$

$\Rightarrow S_1 = \int_{\sqrt[6]{16}}^{\sqrt[6]{16}} \left| x^2 \quad \sqrt[3]{16} \right| dx$

Vậy $S_1 = \frac{16}{3}$ (đúng) $\Rightarrow$ đáp án chính xác là **A**

VD4-[Đề cương chuyên KHTN Hà Nội năm 2017]

Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y^2 = x + 1$ và trục Oy bằng :

A. 2 **B.** $\frac{8}{3}$ **C.** $\frac{4}{3}$ **D.** $\frac{16}{3}$

GIẢI

➢ Hai hàm số $x = y^2 \quad 1$ và trục Oy có phương trình $x = 0$

Giải phương trình tung độ giao điểm $y^2 \quad 1 = 0 \Leftrightarrow y = \pm 1$

Vậy cận thứ nhất là $y = \quad 1$ cận thứ hai là $y = 1$

➢ Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $x = y^2 - 1$, $x = 0$ và hai đường thẳng $y = \quad 1, y = 1$ là : $S = \int_{1}^{1} \left| \left(y^2 \quad 1\right) \quad 0 \right| dy$

Sử dụng Casio với lệnh tính tích phân

[∫■] [SHIFT] [hyp] [ALPHA] [)] [x²] [−] [1] [▼] [−] [1] [▲] [1] [=]

$$\int_{-1}^{1} |X^2-1| dx \qquad \frac{4}{3}$$

Vậy $S = \frac{4}{3} \Rightarrow$ đáp số chính xác là **C**

❖ **Bình luận :**

- Bài toán này nên đưa về dạng 2 thì sẽ dễ dàng tính toán hơn. Nếu đưa về dạng 1 ta phải tính $y = \pm\sqrt{x+1}$ rồi lại phải tìm cận sẽ khó hơn
- Ta hiểu với máy tính X hay Y chỉ là kí hiệu nên

$S = \int_{1}^{1} \left| \left(y^2 \quad 1\right) \quad 0 \right| dy = \int_{1}^{1} \left| \left(x^2 \quad 1\right) \quad 0 \right| dx$

Nên ta có thể thực hiện phép tính với máy tính casio như trên

VD5-[Sách bài tập Nâng cao Giải tích lớp 12 t.153]

Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong $x = y^{\frac{2}{3}}$, đường cong $x + y^4 = 2$ và trục hoành

A. $\frac{6}{5}$ **B.** $\frac{8}{5}$ **C.** $\frac{5}{5}$ **D.** $\frac{7}{4}$

GIẢI

➢ Hai hàm số $x = y^{\frac{2}{3}}$ và $x = 2 - y^4$

Trục hoành có phương trình $y = 0 \Rightarrow$ cận thứ nhất $y = 0$

Để tìm cần thứ hai ta giải phương trình tung độ giao điểm : $y^{\frac{2}{3}} = 2 \quad y^4$. Để giải nhanh ta sử dụng chức năng dò nghiệm SHIFT SOLVE

[ALPHA] [)] [x■] [▭/▭] [2] [▼] [3] [▶] [▶] [+] [ALPHA] [)] [x■] [4] [▶] [−] [2] [SHIFT] [CALC] [1] [=]

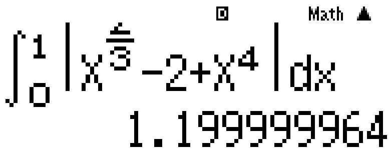
X^3+X^4-2
X= 1
L−R= 0

vậy cận thứ hai là $y = 1$

➢ Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $x = y^{\frac{2}{3}}$, $x = 2 \quad x^4$ và hai đường thẳng $y = 0, y = 1$ là : $S = \int_{0}^{1} \left| \left(y^{\frac{2}{3}}\right) \quad \left(2 \quad y^4\right) \right| dy$

Sử dụng Casio với lệnh tính tích phân

[∫■] [SHIFT] [hyp] [ALPHA] [)] [x■] [▭/▭] [2] [▼] [3] [▶] [▶] [−] [2] [+] [ALPHA] [)] [x■] [4] [▼] [0] [▲] [1] [=]



Vậy $S=2\ \Rightarrow$ đáp số chính xác là **A**

❖ **Bình luận :**

- Do cài đặt làm tròn của máy tính của mỗi máy là khá nhau nên ta nhanh nhạy trong việc làm tròn để tìm đáp án đúng nhất.

VD6-[Thi thử lớp toán thầy Bình lần 2 năm 2017]

Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi Elip có phương trình $x^2+\frac{y^2}{9}=1$

A. π **B.** 3π **C.** $\frac{9\pi}{5}$ **D.** $\frac{7\pi}{3}$

GIẢI

➢ Ta có $x^2+\frac{y^2}{9}=1\Leftrightarrow x^2=1-\frac{y^2}{9}\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{1-\frac{y^2}{9}}\Rightarrow$ Hai hàm số $x=-\sqrt{1-\frac{y^2}{9}}$ và $x=\sqrt{1-\frac{y^2}{9}}$

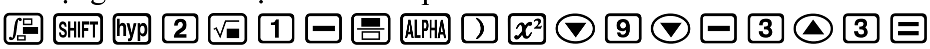
Để tìm hai cận ta giải phương trình tung độ giao điểm :

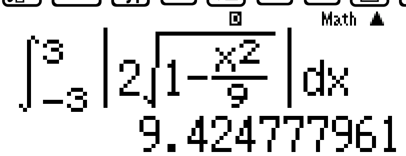
$\sqrt{1\ \frac{y^2}{9}}=\sqrt{1\ \frac{y^2}{9}}\Leftrightarrow\sqrt{1-\frac{y^2}{9}}=0\Leftrightarrow y^2=9\Leftrightarrow y=\pm3$.

vậy cận thứ nhất $y=\ 3$ và cận thứ hai $y=3$

➢ Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $x=-\sqrt{1-\frac{y^2}{9}}$, $x=\sqrt{1-\frac{y^2}{9}}$ và hai đường thẳng $y=\ 3, y=3$ là : $S=\int_{3}^{3}\left|\sqrt{1\ \frac{y^2}{9}}\ \left(\ \sqrt{1\ \frac{y^2}{9}}\right)\right|dy$

Sử dụng Casio với lệnh tính tích phân





Vậy $S=9.4247...=3\pi\ \Rightarrow$ đáp số chính xác là **B**

❖ **Bình luận :**

- Trong chương trình lớp 10 sách giáo khoa đã đề cập đến các tính chất cơ bản của hình Elip nhưng chưa đề cập đến công thức tính diện tích của Elip và việc sử dụng tích phân để tính diện tích Elip là một ứng dụng tuyệt vời.

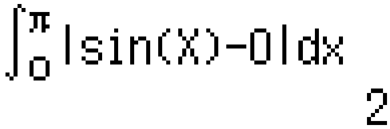
VD7-[Thi học sinh giỏi tỉnh Phú Thọ năm 2017]

Người ta trồng hoa vào phần đất được tô màu đen được giới hạn bởi các cạnh AB,CD đường trung bình MN của mảnh đất hình chữ nhật $ABCD$ và một đường cong hình sin (như hình vẽ). Biết $AB=2\pi(m)$, $AD=2(m)$. Tính diện tích đất phần còn lại (đơn vị tính m^2)

A. $4\pi \quad 1$	**B.** $4(\pi \quad 1)$
C. $4\pi \quad 2$	**D.** $4\pi \quad 3$

GIẢI

- Diện tích hình chữ nhật $ABCD$ là : $S_1 = AB.CD = 4\pi\left(m^2\right)$
- Hình sin có biên độ ± 1 và chu kì 2π nên có phương trình là : $y = \sin x$
  Gắn hình trên lên trục tọa độ Oxy với gốc tọa độ O là giao điểm của đồ thị hình sin với trục hoành MN
  Ta có diện tích hình mầu đen bên phải trục hoành là : $S_2 = \int_0^{\pi} \left|\sin x \quad 0\right| dx = 2$

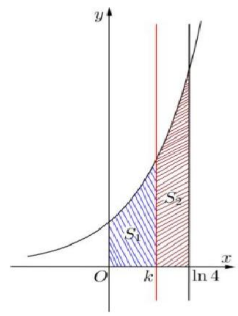


- Diện tích cần tìm $= S_1 \quad 2S_2 = 4\pi \quad 4 \Rightarrow$ đáp số chính xác là **B**

❖ **Bình luận :**
Nếu đề bài thay đổi thành $AD = 4$ như vậy biên độ hình sin là ± 2 vậy sẽ có phương trình là $y = 2\sin x$

VD8-[Đề minh họa Bộ GD-ĐT lần 2 năm 2017]

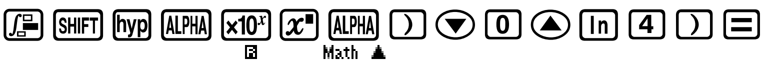
Cho hình thang cong (H) giới hạn bởi các đường $y = e^x, y = 0, x = 0$ và $x = \ln 4$. Đường thẳng $x = k$ $(0 < k < \ln 4)$ chia (H) thành hai phần có diện tích S_1, S_2 như hình vẽ bên. Tìm k để $S_1 = 2S_2$

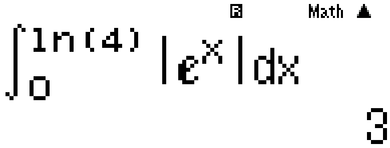


A. $k = \frac{2}{3}\ln 4$	**B.** $k = \ln 2$
C. $k = \ln\frac{8}{3}$	**D.** $k = \ln 3$

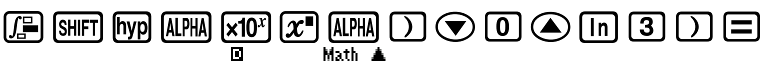
GIẢI

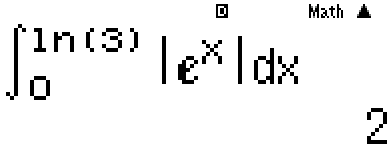
- Gọi S là diện tích hình (H) ta có $S = \int_0^{\ln 4} \left|e^x \quad 0\right| dx = 3$





- Vì $S_1 = 2S_2$ mà tổng diện tích là 3 $\Rightarrow S_1 = 2 \Rightarrow \int_0^k \left|e^x\right| dx = 2$. Thử các đáp án ta có $k = \ln 3$

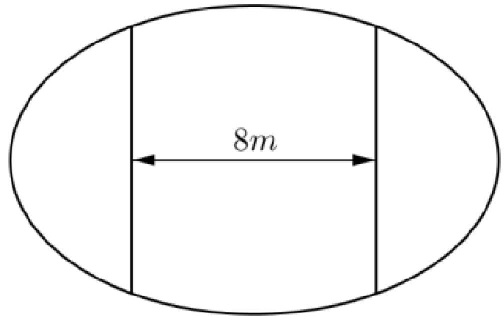




$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **D**

VD9-[Đề minh họa Bộ GD-ĐT lần 1 năm 2017]

Ông An có một mảnh vườn hình Elip có độ dài trục lớn bằng $16m$ và độ dài trục bé bằng $10m$. Ông muốn trồng hoa trên một dải đất rộng $8m$ và nhận trục bé của Elip làm trục đối xứng (như hình vẽ). Biết kinh phí để trồng hoa là 100.000 đồng $1\,m^2$. Hỏi ông An cần bao nhiêu tiền để trồng hoa trên dải đất đó ? (Số tiền làm tròn đến hàng ngàn)



A. 7.862.000 **B.** 7.653.000

C. 7.128.000 **D.** 7.826.000

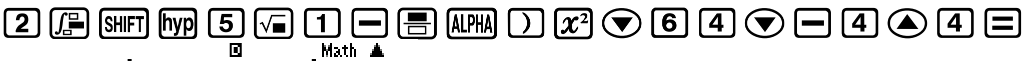
GIẢI

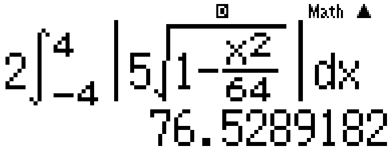
- Xét hệ tọa độ Oxy đặt vào tâm khu vườn, phương trình Elip viền khu vườn là $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{25}=1$

  Xét phần đồ thị Elip nằm phía trên trục hoành có $y=5\sqrt{1-\frac{x^2}{64}}$

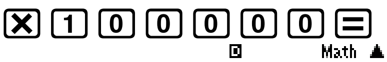
- Diện tích S của dải đất cũng chính bằng 2 lần phần hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y=f\left(x\right)$, trục hoành, đường thẳng $x = \ \ 4$, đường thẳng $x=4$

  $\Rightarrow S=2\int_{4}^{4}\left|5\sqrt{1-\frac{x^2}{64}}-0\right|dx=76.5389182$





$\Rightarrow$ Số tiền cần là $100.000S$



$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **B**

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1-[Thi thử chuyên KHTN Hà Nội lần 1 năm 2017]

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y=x^2$, đường thẳng $y=2 \quad x$ và trục hoành trong miền $x\geq 0$ bằng :

A. 2 **B.** $\frac{7}{6}$ **C.** $\frac{1}{3}$ **D.** $\frac{5}{6}$

Bài 2-[Thi thử chuyên Vị Thanh – Hậu Giang năm 2017]

Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x^2+x-1$ và $y=x^4+x-1$

A. $\frac{8}{15}$ **B.** $\frac{14}{15}$ **C.** $\frac{4}{15}$ **D.** $\frac{6}{15}$

Bài 3-[Đề cương chuyên KHTN Hà Nội năm 2017]

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y=\left|x^2+1\right|$ và $y=\left|x\right|+3$ bằng :

A. $\frac{10}{4}$ **B.** $\frac{20}{3}$ **C.** $\frac{40}{3}$ **D.** $\frac{52}{3}$

Bài 4-[Thi thử nhóm toán Đoàn Trí Dũng lần 3 năm 2017]

Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=2^x$ và đồ thị hàm số $y=3\quad x$ và trục tung

A. $\frac{5}{2}\quad\frac{1}{\ln 2}$ **B.** $3\quad\frac{1}{\ln 2}$ **C.** $5\quad\frac{3}{\ln 2}$ **D.** $2+\frac{1}{\ln 2}$

Bài 5-[Đoàn Quỳnh -Sách bài tập trắc nghiệm toán 12]

Biết diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\ln x$, $y=0$, $x=\frac{1}{e}$, $x=e$ có thể được viết dưới dạng $S=a\left(1\quad\frac{1}{e}\right)$. Tìm khẳng định sai :

A. $a^2\quad 3a+2=0$ **B.** $a^2\quad a\quad 2=0$ **C.** $a^2+3a\quad 4=0$ **D.** $2a^2\quad 3a\quad 2=0$

Bài 6-[Đề cương chuyên KHTN Hà Nội năm 2017]

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $(P): y=x^2\quad 2x+2$ và các tiếp tuyến với (P) đi qua các điểm $A(2;\quad 2)$ là :

A. $\frac{8}{3}$ **B.** $\frac{64}{3}$ **C.** $\frac{16}{3}$ **D.** $\frac{40}{3}$

Bài 7-[Thi thử THPT Lương Thế Vinh – Hà Nội lần 1 năm 2017]

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y=2\sqrt{ax}$ $(a>0)$, trục hoành và đường thẳng $x=a$ bằng ka^2 . Tính giá trị của tham số k

A. $k=\frac{7}{3}$ **B.** $k=\frac{4}{3}$ **C.** $k=\frac{12}{5}$ **D.** $k=\frac{6}{5}$

LỜI GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1-[Thi thử chuyên KHTN Hà Nội lần 1 năm 2017]

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y=x^2$, đường thẳng $y=2\quad x$ và trục hoành trong miền $x\ge 0$ bằng :

A. $\frac{9}{2}$ **B.** $\frac{7}{6}$ **C.** $\frac{10}{3}$ **D.** $\frac{5}{6}$

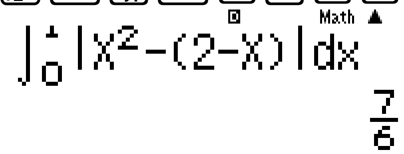
GIẢI

- Phương trình hoành độ giao điểm $x^2=2\quad x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\quad 2 \end{array}\right.$. Tuy nhiên đề bài yêu cầu tính diện tích trên miền $x\ge 0$ $\Rightarrow$ Ta tính diện tích hình phẳng trên miền $[0;1]$

$\Rightarrow$ Cận thứ nhất $x=0$, cận thứ hai $x=1$.

- Diện tích cần tính là : $S=\int_0^1\left|x^2\quad(2\quad x)\right|dx=\frac{7}{6}$

∫□ SHIFT hyp ALPHA) x² − (2 − ALPHA)) ▼ 0 ▲ 1 =



- Chú ý: Nếu đề bài không yêu cầu tính diện tích hình phẳng trên miền $x \ge 0$ thì ta tính trên

  toàn bộ miền $[\;\; 2;0]$. Ta có : $S = \int_{\;2}^{1} \left| x^2 \quad (2 \quad x) \right| dx = \dfrac{9}{2}$

  Nếu đề bài yêu cầu tính diện tích hình phẳng trên miền $x \le 0$ thì ta tính trên miền $[\;\; 2;0]$. Ta có : $S = \int_{\;2}^{0} \left| x^2 \quad (2 \quad x) \right| dx = \dfrac{10}{3}$

  Các e học sinh chú ý điều này vì rất dễ gây nhầm lẫn.

Bài 2-[Thi thử chuyên Vị Thanh – Hậu Giang năm 2017]

Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2 + x \quad 1$ và $y = x^4 + x \quad 1$

A. $\dfrac{8}{15}$ **B.** $\dfrac{14}{15}$ **C.** $\dfrac{4}{15}$ **D.** $\dfrac{6}{15}$

GIẢI

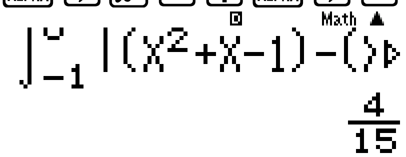
- Phương trình hoành độ giao điểm $x^2 + x \quad 1 = x^4 + x \quad 1 \Leftrightarrow x^4 \quad x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2\left(x^2 \quad 1\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \\ x = \quad 1 \end{array}\right.$

.

$\Rightarrow$ Ta có cận thứ nhất $x = \quad 1$, cận thứ hai 0, cận thứ ba $x = 1$

- Diện tích cần tính là : $S = \int_{\;1}^{0} \left| \left(x^2 + x \quad 1\right) \quad \left(x^4 + x \quad 1\right) \right| dx + \int_{0}^{1} \left| \left(x^2 + x \quad 1\right) \quad \left(x^4 + x \quad 1\right) \right| dx = \dfrac{4}{15}$

∫□ SHIFT hyp (ALPHA) x² + ALPHA) − 1) − (ALPHA) x■ 4 ▶ + ALPHA) −
1) ▼ − 1 ▲ 0 ▶ + ∫□ SHIFT hyp (ALPHA) x² + ALPHA) − 1) − (
ALPHA) x■ 4 + ALPHA) − 1) ▼ 0 ▲ 1 =



$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **C**

- Chú ý: Em nào hiểu phép biến đổi tính diện tích thì có thể bấm máy theo công thức

  $S = \int_{\;1}^{0} \left| x^2 \quad x^4 \right| dx + \int_{0}^{1} \left| x^2 \quad x^4 \right| dx$ sẽ rút gọn được thao tác bấm máy.

Bài 3-[Đề cương chuyên KHTN Hà Nội năm 2017]

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y = \left| x^2 + 1 \right|$ và $y = |x| + 3$ bằng :

A. $\dfrac{10}{4}$ **B.** $\dfrac{20}{3}$ **C.** $\dfrac{40}{3}$ **D.** $\dfrac{52}{3}$

GIẢI

- Phương trình hoành độ giao điểm $\left| x^2 + 1 \right| = |x| + 3 \Leftrightarrow x^2 + 1 = |x| + 3 \Leftrightarrow x^2 \quad |x| \quad 2 = 0$ (1).

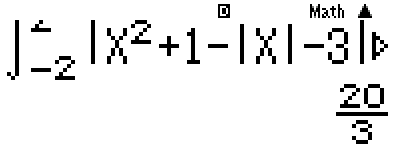
  Với $x \ge 0 \Leftrightarrow$ (1) $\Leftrightarrow x^2 \quad x \quad 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ (vì $x \ge 0$)

  Với $x < 0 \Rightarrow$ (1) $\Leftrightarrow x^2 + x \quad 2 = 0 \Leftrightarrow x = \quad 2$ (vì $x < 0$)

  $\Rightarrow$ Cận thứ nhất $x = \quad 2$, cận thứ hai $x = 2$.

- Diện tích cần tính là : $S=\int_{-2}^{2}\left|\left|x^2+1\right|-\left(\left|x\right|+3\right)\right|dx=\dfrac{20}{3}$

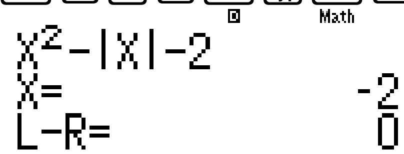
[∫□] [SHIFT] [hyp] [ALPHA] [)] [x²] [+] [1] [−] [SHIFT] [hyp] [ALPHA] [)] [▶] [−] [3] [▼] [−] [2] [▲] [2] [=]



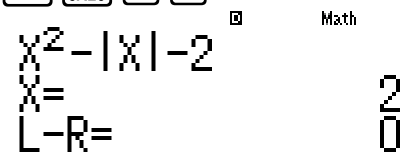
$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **B**

- Chú ý: Phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối $x^2-\left|x\right|-2=0$ có thể giải bằng Casio thay vì chia khoảng để phá dấu giá trị tuyệt đối.

[ALPHA] [)] [x²] [−] [SHIFT] [hyp] [ALPHA] [)] [▶] [−] [2] [SHIFT] [CALC] [−] [5] [=]



[SHIFT] [CALC] [5] [=]



$\Rightarrow$ Ta tìm được hai nghiệm $x=-2; x=2$

Bài 4-[Thi thử nhóm toán Đoàn Trí Dũng lần 3 năm 2017]

Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=2^x$ và đồ thị hàm số $y=3-x$ và trục tung

A. $\dfrac{5}{2}-\dfrac{1}{\ln 2}$ **B.** $3-\dfrac{1}{\ln 2}$ **C.** $5-\dfrac{3}{\ln 2}$ **D.** $2+\dfrac{1}{\ln 2}$

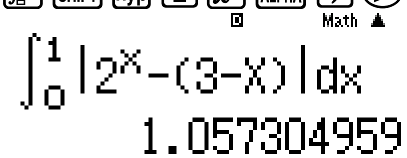
GIẢI

- Đề bài cho trục tung có phương trình $x=0$ nên cận thứ nhất là $x=0$

Phương trình hoành độ giao điểm $2^x=3-x$. $\Leftrightarrow x=1$ là nghiệm duy nhất $\Rightarrow$ cận thứ hai $x=1$

- Diện tích cần tính là : $S=\int_{0}^{1}\left|2^x-(3-x)\right|dx=1.0573...=\dfrac{5}{2}-\dfrac{1}{\ln 2}$

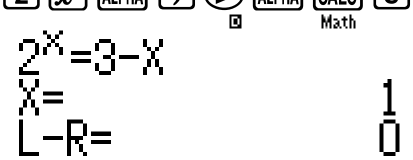
[∫□] [SHIFT] [hyp] [2] [x■] [ALPHA] [)] [▶] [−] [(] [3] [−] [ALPHA] [)] [)] [▼] [0] [▲] [1] [=]



$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **A**

- Chú ý: Để giải phương trình $2^x=3-x$ ta có thể sử dụng máy tính Casio

[2] [x■] [ALPHA] [)] [▶] [ALPHA] [CALC] [3] [−] [ALPHA] [)] [SHIFT] [CALC] [1] [=]



Ta nhận được nghiệm $x=1$. Tuy nhiên vì sao $x=1$ lại là nghiệm duy nhất thì xem lại ở bài *"Sử dụng Casio tìm nghiệm phương trình mũ."*

Bài 5-[Đoàn Quỳnh -Sách bài tập trắc nghiệm toán 12]

Biết diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\ln x$, $y=0$, $x=\frac{1}{e}$, $x=e$ có thể được viết dưới dạng $S=a\left(1 \quad \frac{1}{e}\right)$. Tìm khẳng định sai :

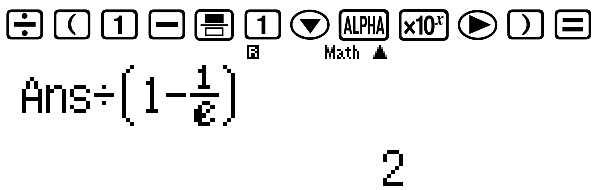
A. $a^2 \quad 3a+2=0$ **B.** $a^2 \quad a \quad 2=0$ **C.** $a^2+3a \quad 4=0$ **D.** $2a^2 \quad 3a \quad 2=0$

GIẢI

- Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y=\ln x$, $y=0$, $x=\frac{1}{e}$, $x=e$ là :

$$S=\int_{\frac{1}{e}}^{e}\left|\ln x \quad 0\right|dx=1.2642...$$

- Vì $S=a\left(1 \quad \frac{1}{e}\right)\Rightarrow a=\frac{S}{1 \quad \frac{1}{e}}=2$



Chỉ có phương trình ở câu C không chứa nghiệm này $\Rightarrow$ đáp án C là đáp án chính xác

- Chú ý: Bài này không cần dùng đến kiến thức của tích phân vẫn có thể làm được. Đề bài yêu cầu tìm đáp án mà số a không thỏa mãn $\Rightarrow$ a không phải nghiệm chung của các phương trình. Mà nghiệm chung của các phương trình là 2 nên đáp số **C** không thỏa mãn

Bài 6-[Đề cương chuyên KHTN Hà Nội năm 2017]

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $(P): y=x^2 \quad 2x+2$ và các tiếp tuyến với (P) đi qua các điểm $A(2; \quad 2)$ là :

A. $\frac{8}{3}$ **B.** $\frac{64}{3}$ **C.** $\frac{16}{3}$ **D.** $\frac{40}{3}$

GIẢI

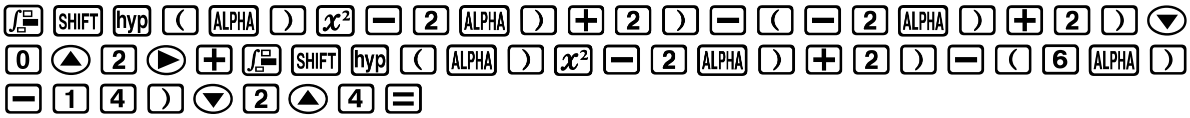
- Viết phương trình tiếp tuyến đi qua $A(2; \quad 2)$ ta thu được

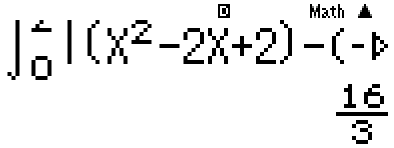
Tiếp tuyến thứ nhất $y= \quad 2x+2$ với tiếp điểm $B(0;2)$

Tiếp tuyến thứ hai $y=6x \quad 14$ với tiếp điểm $C(4;10)$

Ta hiểu hình phẳng cần tính diện tích là phần đường cong có 3 đỉnh A,B,C ta thu được ba cận là : $x=0; x=2; x=4$

$$\Rightarrow S=\int_0^2\left|\left(x^2 \quad 2x+2\right) \quad \left(\quad 2x+2\right)\right|dx+\int_2^4\left|\left(x^2 \quad 2x+2\right) \quad \left(6x \quad 14\right)\right|dx=\frac{16}{3}$$





$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **C**

- Chú ý: Để biết được tiếp tuyến tại sao lại là $y = \quad 2x+2; y = 6x \quad 14$ thì xem lại bài Casio tìm tiếp tuyến của đồ thị hàm số .

Giải thích công thức (1) : Trên miền $x \in [0;2]$ ta thấy hai cận này được hình thành bởi hai đường cong $y = x^2 \quad 2x+2; y = \quad 2x+2$ nên diện tích phải được tính theo công thức

$$\int_0^2 \left|\left(x^2 \quad 2x+2\right) \quad \left(\quad 2x+2\right)\right| dx$$

Bài 7-[Thi thử THPT Lương Thế Vinh – Hà Nội lần 1 năm 2017]

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y = 2\sqrt{ax}$ $(a > 0)$, trục hoành và đường thẳng $x = a$ bằng ka^2 . Tính giá trị của tham số k

A. $k = \frac{7}{3}$ **B.** $k = \frac{4}{3}$ **C.** $k = \frac{12}{5}$ **D.** $k = \frac{6}{5}$

GIẢI

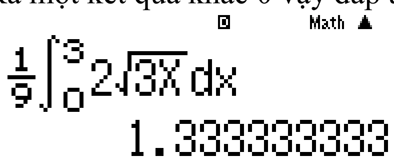
- Xét phương trình hoành độ giao điểm của đường cong và trục hoành : $2\sqrt{ax} = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Ta được cận thứ nhất $x = 0$ và cận thứ hai $x = a$. Khi đó diện tích hình phẳng là :

$$S = \int_0^a \left|2\sqrt{ax} \quad 0\right| dx$$

- Thiết lập quan hệ $\int_0^a \left|2\sqrt{ax} \quad 0\right| dx = ka^2 \Leftrightarrow k = \dfrac{\int_0^a \left|2\sqrt{ax} \quad 0\right| dx}{a^2}$. Chọn giá trị dương a bất kì ví dụ $a = 3$ khi đó $k = \frac{1}{9}\int_0^a \left|2\sqrt{3x} \quad 0\right| dx = 1.33(3) = \frac{4}{3}$

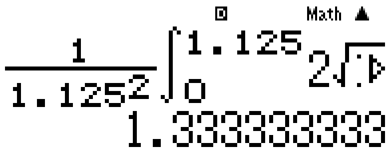
Ra một kết quả khác 0 vậy đáp án **A** sai



$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **B**

- Chú ý: Dù ta chọn giá trị dương a bất kì thì đáp số k đều ra $\frac{4}{3}$ ví dụ ta chọn $a = 1.125$

Khi đó $k = \dfrac{1}{1.125^2} \int_0^{1\ 125} \left|2\sqrt{1.125x} \quad 0\right| dx = 1.33(3) = \frac{4}{3}$


Math
1
1.125²
1.125
0
2√
1.333333333