

**PHƯƠNG PHÁP CASIO – VINACAL**  
**BÀI 26. TÌM HÌNH CHIẾU VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN**

**I) KIẾN THỨC NỀN TẢNG**

**1. Hình chiếu vuông góc của một điểm đến một mặt phẳng**

- Cho điểm  $M(x_0; y_0; z_0)$  và mặt phẳng  $(P): Ax + By + Cz + D = 0$  thì hình chiếu vuông góc  $H$  của  $M$  trên mặt phẳng  $(P)$  là giao điểm của đường thẳng  $\Delta$  và mặt phẳng  $(P)$
- $\Delta$  là đường thẳng qua  $M$  và vuông góc với  $(P)$  ( $\Delta$  nhận  $\vec{n_P}$  làm  $\vec{u_\Delta}$ )

**2. Hình chiếu vuông góc của một điểm đến một đường thẳng**

- Cho điểm  $M(x_0; y_0; z_0)$  và đường thẳng  $d: \frac{x - x_N}{a} = \frac{y - y_N}{b} = \frac{z - z_N}{c}$  thì hình chiếu vuông góc của  $M$  lên đường thẳng  $d$  là điểm  $H$  thuộc  $d$  sao cho  $\vec{MH} \perp \vec{u_d} \Leftrightarrow \vec{MH} \cdot \vec{u_d} = 0$

**3. Hình chiếu vuông góc của một đường thẳng đến một mặt phẳng**

- Cho đường thẳng  $d$  và mặt phẳng  $(P)$ . Hình chiếu vuông góc của đường thẳng  $d$  đến mặt phẳng  $(P)$  là giao điểm của mặt phẳng  $(\alpha)$  và mặt phẳng  $(P)$
- $(\alpha)$  là mặt phẳng đi chứa  $d$  và vuông góc với  $(P)$
- $(\alpha)$  nhận  $\vec{u_d}$  và  $\vec{n_P}$  là cặp vectơ chỉ phương
- $(\alpha)$  chứa mọi điểm nằm trong đường thẳng  $d$

**4. Lệnh Caso**

- Lệnh đăng nhập môi trường vecto MODE 8
- Nhập thông số vecto MODE 8 1 1
- Tính tích vô hướng của 2 vecto : vectoA SHIFT 5 7 vectoB
- Tính tích có hướng của hai vecto : vectoA x vectoB
- Lệnh giá trị tuyệt đối SHIFT HYP
- Lệnh tính độ lớn một vecto SHIFT HYP
- Lệnh dò nghiệm của bất phương trình MODE 7
- Lệnh dò nghiệm của phương trình SHIFT SOLVE

**II) VÍ DỤ MINH HỌA**

**VD1-[Thi thử Sở GD-ĐT tỉnh Hà Tĩnh lần 1 năm 2017]**

Cho mặt phẳng  $(\alpha): 3x - 2y + z + 6 = 0$  và điểm  $A(2; 1; 0)$ . Hình chiếu vuông góc của  $A$  lên mặt phẳng  $(\alpha)$  có tọa độ

A.  $(2; 2; 3)$     B.  $(1; 1; 2)$     C.  $(1; 0; 3)$  D.  $(-1; 1; 1)$

**GIẢI**

➤ Gọi  $H$  là hình chiếu vuông góc của  $A$  lên  $(\alpha) \Rightarrow$  Đường thẳng  $AH$  song song với

$$\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 1 - 2t \\ z = t \end{cases}$$

vecto pháp tuyến  $\vec{n_\alpha}(3; -2; 1)$  của  $(\alpha) \Rightarrow (AH): \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 1 - 2t \\ z = t \end{cases}$

$$\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 1 - 2t \\ z = t \end{cases}$$

$\Rightarrow$  Tọa độ điểm  $A(2 + 3t; 1 - 2t; 1 + t)$

(Phần này ta dễ dàng nhẩm được mà không cần nháp)

- Để tìm  $t$  ta chỉ cần thiết lập điều kiện  $A$  thuộc  $(\alpha)$  là xong

**3** **(** **2** **+** **3** **ALPHA** **)** **)** **=** **2** **(** **-** **1** **=** **2** **ALPHA** **)** **)** **+** **ALPHA** **)**  
**+** **6** **SHIFT** **CALC** **1** **=**

$$\begin{array}{l} 3(2+3X)-2(-1-2X) \\ X= \\ L-R= \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Math} \\ -1 \\ 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow t = -1 \Rightarrow H(-1; -1; -1)$$

$\Rightarrow$  Đáp số chính xác là **D**

### VD2-[Thi Học sinh giỏi tỉnh Phú Thọ năm 2017]

Tìm tọa độ của điểm  $M'$  đối xứng với điểm  $M(3; 3; 3)$  qua mặt phẳng  $(P): x + y + z - 1 = 0$

- A.  $M'(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3})$       B.  $M'(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3})$   
 C.  $M'(\frac{7}{3}; \frac{7}{3}; \frac{7}{3})$       D.  $M'(\frac{7}{3}; \frac{7}{3}; \frac{7}{3})$

### GIẢI

- Tương tự ví dụ 1 ta nhẩm được tọa độ hình chiếu vuông góc  $H$  của  $M$  lên  $(P)$  là  $M(3+t; 3+t; 3+t)$

- Tính  $t$  bằng Casio.

**3** **+** **ALPHA** **)** **+** **3** **+** **ALPHA** **)** **+** **3** **+** **ALPHA** **)** **=** **1** **SHIFT** **CALC** **1** **=**

$$\begin{array}{l} 3+X+3+X+3+X-1 \\ X= \\ L-R= \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Math} \\ -2.666666667 \\ 0 \end{array}$$

$$\text{Ta thu được } t = -\frac{8}{3} \Rightarrow H(-\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}; -\frac{1}{3})$$

- Vì  $A'$  đối xứng với  $M$  qua  $H$  nên  $H$  là trung điểm của  $MM'$ . Theo quy tắc trung điểm ta suy ra được  $M'(\frac{7}{3}; \frac{7}{3}; \frac{7}{3})$ .

$\Rightarrow$  Đáp số chính xác là **C**

### VD3-[Thi thử THPT Quảng Xương – Thanh Hóa lần 1 năm 2017]

Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho đường thẳng  $d: \frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{2}$  và điểm

$M(1; 2; 3)$ . Tọa độ hình chiếu vuông góc của điểm  $M$  lên đường thẳng  $d$  là:

- A.  $H(1; 2; 1)$  B.  $H(1; 2; 1)$  C.  $H(-1; 2; 1)$  D.  $H(1; 2; 1)$

### GIẢI

- Gọi  $H$  là hình chiếu vuông góc của  $M$  lên đường thẳng  $d$ .

$$\begin{cases} x = 3+t \\ y = -1+t \\ z = 1+2t \end{cases}$$

Đường thẳng  $d$  có phương trình tham số  $\begin{cases} y = -1+t \\ z = 1+2t \end{cases} \Rightarrow$  Tọa độ

$$\begin{cases} x = 3+t \\ y = -1+t \\ z = 1+2t \end{cases}$$

$$H(3+t; -1+t; 1+2t)$$

$$MH \perp d \Rightarrow M\vec{H} \cdot \vec{u_d} = 0 \text{ với } \vec{u_d}(2; 1; 2)$$

➤ Sử dụng máy tính Casio bấm :

$\boxed{2} \boxed{(} \boxed{3} \boxed{+} \boxed{2} \boxed{\text{ALPHA}} \boxed{)} \boxed{-} \boxed{1} \boxed{)} \boxed{+} \boxed{(} \boxed{-} \boxed{1} \boxed{+} \boxed{\text{ALPHA}} \boxed{)} \boxed{-} \boxed{2} \boxed{)} \boxed{+} \boxed{2} \boxed{(} \boxed{1} \boxed{+} \boxed{2} \boxed{\text{ALPHA}} \boxed{)} \boxed{-} \boxed{-} \boxed{3} \boxed{)} \boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\text{CALC}} \boxed{1} \boxed{=}$

$$\begin{array}{l} 2(3+2X-1)+(-1+X) \\ X= \\ L-R= \end{array} \begin{array}{l} \text{Math} \\ -1 \\ 0 \end{array}$$

Khi đó  $t = 1 \Rightarrow H(1; 2; 1)$

$\Rightarrow$  Đáp số chính xác là **B**

#### VD4-[Thi thử chuyên Khoa học tự nhiên lần 2 năm 2017]

Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho đường thẳng  $d: \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{2}$  và điểm

$A(2; 1; 1)$ . Gọi  $I$  là hình chiếu vuông góc của  $A$  lên  $d$ . Viết phương trình mặt cầu  $(C)$  có tâm  $I$  và đi qua  $A$

A.  $x^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 20$

B.  $x^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 5$

C.  $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 20$

D.  $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 14$

**GIẢI**

➤ Điểm  $I$  có tọa độ  $I(1-t; 2+t; 1+t)$

➤ Thiết lập điều kiện vuông góc  $\Leftrightarrow \vec{IA} \cdot \vec{u_d} = 0$

$\boxed{-} \boxed{1} \boxed{(} \boxed{1} \boxed{-} \boxed{\text{ALPHA}} \boxed{)} \boxed{-} \boxed{2} \boxed{)} \boxed{+} \boxed{(} \boxed{2} \boxed{+} \boxed{\text{ALPHA}} \boxed{)} \boxed{-} \boxed{-} \boxed{1} \boxed{)} \boxed{+} \boxed{2} \boxed{(} \boxed{-} \boxed{1} \boxed{+} \boxed{2} \boxed{\text{ALPHA}} \boxed{)} \boxed{-} \boxed{1} \boxed{)} \boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\text{CALC}} \boxed{1} \boxed{=}$

$$\begin{array}{l} -1(1-X-2)+(2+X) \\ X= \\ L-R= \end{array} \begin{array}{l} \text{Math} \\ 0 \\ 0 \end{array}$$

$\Rightarrow t = 0 \Rightarrow I(1; 2; 1)$

➤ Với  $I(1; 2; 1)$  và  $A(2; 1; 1)$  ta có :  $R^2 = IA^2 = |\vec{IA}|^2 = 14$

$\boxed{\text{MODE}} \boxed{8} \boxed{1} \boxed{1} \boxed{2} \boxed{-} \boxed{1} \boxed{=}$   $\boxed{-} \boxed{1} \boxed{-} \boxed{2} \boxed{=}$   $\boxed{1} \boxed{-} \boxed{-} \boxed{1} \boxed{=}$   $\boxed{\text{ON}}$   
 $\boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\text{hyp}} \boxed{\text{SHIFT}} \boxed{5} \boxed{3} \boxed{)} \boxed{=}$   $\boxed{=}$   $\boxed{x^2} \boxed{=}$

Ans<sup>2</sup>

VCT

14

$\Rightarrow$  Đáp số chính xác là **D**

#### VD5-[Thi thử chuyên Khoa học tự nhiên lần 1 năm 2017]

Cho đường thẳng  $d: \frac{x}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{1}$ . Hình chiếu vuông góc của  $d$  lên mặt phẳng

$(Oxy)$  là :

$$\begin{array}{llll} \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 - t \\ z = 0 \end{cases} & \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 0 \end{cases} & \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 0 \end{cases} & \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 0 \end{cases} \\ \text{A.} & \text{B.} & \text{C.} & \text{D.} \end{array}$$

### GIẢI

- Ta hiểu : Hình chiếu vuông góc  $d'$  của  $d$  lên mặt phẳng  $(Oxy)$  là giao tuyến của mặt phẳng  $(\alpha)$  chứa  $d$  vuông góc với  $(Oxy)$  và mặt phẳng  $(Oxy)$
- Mặt phẳng  $(\alpha)$  chứa  $d$  và vuông góc với  $(Oxy)$  nên nhận vecto chỉ phương  $\vec{u}(2;1;1)$  của đường thẳng  $d$  và vecto pháp tuyến  $\vec{n}_{Oxy}(0;0;1)$  là cặp vecto chỉ phương

$$\Rightarrow \vec{n}_\alpha = [\vec{u}_d; \vec{n}_{Oxy}] = (1; 2; 0)$$

MODE 8 1 1 2 = 1 = 1 = MODE 8 2 1 0 = 0 = 1 = ON  
SHIFT 5 3 X SHIFT 5 4 =

VCTO  
Ans [ ] -2 0]

1

Hơn nữa  $(\alpha)$  đi qua điểm có tọa độ  $(1; 1; 2)$  nên có phương trình :

$$(\alpha): 1(x - 1) - 2(y - 1) + 0(z - 2) = 0 \Leftrightarrow (\alpha): x - 2y - 3 = 0$$

- Phương trình của  $d'$  có dạng  $\begin{cases} (\alpha): x - 2y - 3 = 0 \\ (Oxy): z = 0 \end{cases}$ . Chuyển sang dạng tham số ta có :

$$\vec{u}_{d'} = [\vec{n}_{Oxy}; \vec{n}_\alpha] = (-2; -1; 0)$$

MODE 8 1 1 1 = - 2 = 0 = MODE 8 2 1 0 = 0 = 1 = ON  
ON SHIFT 5 3 X SHIFT 5 4 =

VCTO  
Ans [ ] -2 -1 0]

-2

Có 3 đáp án thỏa mãn vecto chỉ phương có tọa độ  $(-2; -1; 0)$  là **B**, **C**, **D**

Tuy nhiên chỉ có đáp án **B** chứa điểm  $M(1; 1; 0)$  và điểm này cũng thuộc  $d'$

$\Rightarrow$  Đáp số chính xác là **B**

### VD6-[Câu 61 Sách bài tập hình học nâng cao 12]

$$\begin{cases} x = \frac{7}{2} - 3t \\ y = 2t \\ z = 2t \end{cases}$$

Viết phương trình hình chiếu vuông góc của đường thẳng  $d: \begin{cases} y = 2t \\ z = 2t \end{cases}$  trên

$$\begin{cases} x = \frac{7}{2} - 3t \\ y = 2t \\ z = 2t \end{cases}$$

$$(\alpha): x + 2y - 2z - 2 = 0$$

A.  $\frac{x-5}{4} = \frac{y+\frac{3}{2}}{2} = \frac{z}{1}$

B.  $\frac{x+5}{4} = \frac{y-\frac{3}{2}}{2} = \frac{z}{1}$

$$\text{C. } 2 \frac{x-5}{4} = \frac{y+\frac{3}{2}}{2} = \frac{z}{1} \quad \text{D. } \frac{x+5}{4} = \frac{y-\frac{3}{2}}{2} = \frac{z}{1}$$

**GIẢI**

- Lập phương trình mặt phẳng  $(\beta)$  chứa  $d$  và vuông góc với  $(\alpha)$

$$\vec{n}_\beta = [\vec{u}_d; \vec{n}_\alpha] = (8; 4; 8)$$

MODE 8 1 1 3 = - 2 = - 2 = MODE 8 2 1 1 = 2 = - 2 =

ON SHIFT 5 3 X SHIFT 5 4 =

Ans VCT 4 8

$(\beta)$  đi qua điểm  $\left(\frac{7}{2}; 0; 0\right)$  nên có phương trình

$$8\left(x - \frac{7}{2}\right) + 8y + 8z = 0 \Leftrightarrow 2x + 2y + 2z - 7 = 0$$

- Ta có  $d': \begin{cases} 2x + 2y + 2z - 7 = 0 \\ x + 2y - 2z - 2 = 0 \end{cases}$

Tính  $\vec{n}_d = [\vec{n}_\alpha; \vec{n}_\beta] = (8; 6; 2) \Rightarrow \vec{n} (4; 3; 2)$  cũng là vectơ chỉ phương của  $d'$

Đường thẳng  $d'$  lại đi qua điểm  $\left(5; \frac{3}{2}; 0\right)$  nên có phương trình:  $\frac{x-5}{4} = \frac{y+\frac{3}{2}}{2} = \frac{z}{1}$

$\Rightarrow$  Đáp án chính xác là **A**

### **BÀI TẬP TỰ LUYỆN**

#### **Bài 1-[Thi thử THPT Phạm Văn Đồng lần 1 năm 2017]**

Hình chiếu vuông góc của  $A(2; 4; 3)$  lên mặt phẳng  $(P): 2x - 3y + 6z + 19 = 0$  có tọa độ là:

- A.  $(1; 1; 2)$  B.  $\left(\frac{20}{7}; \frac{37}{7}; \frac{3}{7}\right)$  C.  $\left(\frac{2}{5}; \frac{37}{5}; \frac{31}{5}\right)$  D. Kết quả khác

#### **Bài 2-[Thi Học sinh giỏi tỉnh Ninh Bình năm 2017]**

Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxy$  cho mặt phẳng  $(P): x + y - z - 4 = 0$  và điểm

$M(1; 2; 2)$ . Tìm tọa độ điểm  $N$  đối xứng với điểm  $M$  qua mặt phẳng  $(P)$

- A.  $N(3; 4; 8)$  B.  $N(3; 0; 4)$  C.  $N(3; 0; 8)$  D.  $N(3; 4; 4)$

#### **Bài 3-[Thi thử chuyên Khoa học tự nhiên lần 1 năm 2017]**

Cho  $A(5; 1; 3), B(-5; 1; 1), C(1; 3; 0), D(3; 6; 2)$ . Tọa độ của điểm  $A'$  đối xứng với  $A$  qua mặt phẳng  $(BCD)$  là:

- A.  $(-1; 7; 5)$  B.  $(1; 7; 5)$  C.  $(1; 7; 5)$  D.  $(1; 7; 5)$

#### **Bài 4-[Thi thử chuyên Khoa học tự nhiên lần 2 năm 2017]**

Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$  cho đường thẳng  $d: \frac{x+1}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z+2}{3}$  và mặt phẳng  $(P): x+y+2z+3=0$ . Viết phương trình hình chiếu vuông góc của  $d$  trên mặt phẳng  $(P)$ .

- A.  $\frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{3}$       B.  $\frac{x+2}{3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{1}$   
 C.  $\frac{x}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{1}$       D.  $\frac{x+2}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{3}$

**Bài 5-[Câu 75 Sách bài tập hình học nâng cao lớp 12]**

Cho ba điểm  $A(1; 3; 2)$ ,  $B(4; 0; 3)$ ,  $C(5; 1; 4)$ . Tìm tọa độ hình chiếu  $H$  của  $A$  lên đường thẳng  $BC$

- A.  $\left(\frac{77}{17}; \frac{9}{17}; \frac{12}{17}\right)$       B.  $\left(\frac{77}{17}; \frac{9}{17}; \frac{12}{17}\right)$       C.  $\left(\frac{77}{17}; \frac{9}{17}; \frac{12}{17}\right)$       D.  $\left(\frac{77}{17}; \frac{9}{17}; \frac{12}{17}\right)$

**Bài 6-[Câu 76 Sách bài tập hình học nâng cao lớp 12]**

Tìm tọa độ điểm đối xứng của  $M(3; 1; 1)$  qua đường thẳng  $d$  là giao tuyến của hai mặt phẳng  $(\alpha): 4x - 3y - 13 = 0$  và  $(\beta): y - 2z + 5 = 0$

- A.  $(2; 5; 3)$       B.  $(2; 5; 3)$       C.  $(5; 7; 3)$       D.  $(5; 7; 3)$

**Bài 7-[Câu 22 Sách bài tập hình học nâng cao lớp 12]**

Cho đường thẳng  $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{1}$ . Hình chiếu vuông góc của  $d$  trên mặt phẳng tọa độ  $(Oxy)$  là:

- A.  $\begin{cases} x=0 \\ y=1-t \\ z=0 \end{cases}$       B.  $\begin{cases} x=1+2t \\ y=1+t \\ z=0 \end{cases}$       C.  $\begin{cases} x=1+2t \\ y=1+t \\ z=0 \end{cases}$       D.  $\begin{cases} x=1+2t \\ y=1+t \\ z=0 \end{cases}$

**LỜI GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN**

**Bài 1-[Thi thử THPT Phạm Văn Đồng lần 1 năm 2017]**

Hình chiếu vuông góc của  $A(2; 4; 3)$  lên mặt phẳng  $(P): 2x - 3y + 6z + 19 = 0$  có tọa độ là:

- A.  $(1; 1; 2)$       B.  $\left(\frac{20}{7}; \frac{37}{7}; \frac{3}{7}\right)$       C.  $\left(\frac{2}{5}; \frac{37}{5}; \frac{31}{5}\right)$       D. Kết quả khác

**GIẢI**

$$\begin{cases} x=2+2t \\ y=4-3t \\ z=3+6t \end{cases}$$

- Đường thẳng  $\Delta$  chứa  $A$  và vuông góc với  $(P)$  có phương trình:  $\begin{cases} y=4-3t \\ z=3+6t \end{cases}$

Điểm  $H$  là hình chiếu vuông góc của  $A$  lên  $(P)$  nên có tọa độ  $H(2+2t; 4-3t; 3+6t)$

- Tính  $t$  bằng Casio

$\boxed{2} \boxed{(} \boxed{-} \boxed{2} \boxed{+} \boxed{2} \boxed{\text{ALPHA}} \boxed{)} \boxed{)} \boxed{-} \boxed{3} \boxed{(} \boxed{4} \boxed{-} \boxed{3} \boxed{\text{ALPHA}} \boxed{)} \boxed{)} \boxed{+} \boxed{6} \boxed{(} \boxed{3} \boxed{+} \boxed{6} \boxed{\text{ALPHA}} \boxed{)} \boxed{)} \boxed{+} \boxed{1} \boxed{9} \boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\text{CALC}} \boxed{1} \boxed{=}$

$$2(-2+2X)-3(4-3X) \\ X = -0.428571428 \\ L-R = 0$$

Chuyển  $t$  về dạng phân thức

Ans → A

$$-\frac{3}{7}$$

Vậy  $t = \frac{3}{7} \Rightarrow H\left(\frac{20}{7}; \frac{37}{7}; \frac{3}{7}\right)$

Vậy đáp số chính xác là **B**

### **Bài 2-[Thi Học sinh giỏi tỉnh Ninh Bình năm 2017]**

Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxy$  cho mặt phẳng  $(P): x + y - z - 4 = 0$  và điểm

$M(1; 2; 2)$ . Tìm tọa độ điểm  $N$  đối xứng với điểm  $M$  qua mặt phẳng  $(P)$

**A.**  $N(3; 4; 8)$  **B.**  $N(3; 0; -4)$  **C.**  $N(3; 0; 8)$  **D.**  $N(3; 4; -4)$

**GIẢI**

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 2 - t \end{cases}$$

- Phương trình  $\Delta: \begin{cases} y = 2 + t \\ z = 2 - t \end{cases} \Rightarrow$  Tọa độ hình chiếu  $H(1+t; 2+t; 2-t)$

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 2 - t \end{cases}$$

- Tìm  $t$  bằng Casio ta được  $t = 1$

**1** **+** **ALPHA** **)** **=** **2** **+** **ALPHA** **)** **=** **(** **=** **2** **=** **ALPHA** **)** **)** **=** **4** **SHIFT** **CALC** **1** **=**

$$1+X-2+X-(-2-X)-4 \\ X = 1 \\ L-R = 0$$

Với  $t = 1 \Rightarrow H(2; 1; 3) \Rightarrow N(3; 0; -4)$

$\Rightarrow$  Đáp án chính xác là **B**

### **Bài 3-[Thi thử chuyên Khoa học tự nhiên lần 1 năm 2017]**

Cho  $A(5; 1; 3), B(-5; 1; 1), C(1; 3; 0), D(3; 6; 2)$ . Tọa độ của điểm  $A'$  đối xứng với  $A$  qua mặt phẳng  $(BCD)$  là :

**A.**  $(-1; 7; 5)$  **B.**  $(1; 7; 5)$  **C.**  $(1; 7; -5)$  **D.**  $(1; -7; 5)$

**GIẢI**

- Tính vectơ chỉ phương của  $(BCD): \vec{u} = [\vec{BC}; \vec{BD}] = (-5; 10; -10)$

**MODE** **8** **1** **1** **1** **=** **=** **5** **=** **=** **3** **=** **1** **=** **0** **=** **=** **1** **=**

**MODE** **8** **2** **1** **3** **=** **=** **5** **=** **=** **6** **=** **1** **=** **2** **=** **=** **1** **=**

**ON** **SHIFT** **5** **3** **X** **SHIFT** **5** **4** **=**

$$\text{Ans} \quad \text{VCT} \quad \begin{bmatrix} -5 \\ 10 \\ -10 \end{bmatrix}$$

$$-5$$

$(BCD)$  qua  $B(-5; 1; 1) \Rightarrow (BCD): 5(x+5) - 10(y-1) - 10(z+1) = 0$

$$\Leftrightarrow x + 2y + 2z + 5 = 0$$

- Gọi  $H$  là hình chiếu của  $A$  lên  $(BCD) \Rightarrow H(5+t; 1+2t; 3+2t)$ . Tính  $t$

MODE 1 5 + ALPHA ) + 2 ( 1 + 2 ALPHA ) ) + 2 ( 3 + 2 ALPHA ) )  
+ 5 SHIFT CALC 1 =

$$5 + X + 2(1 + 2X) + 2(3 + 2X) = 0$$

$$X = -2$$

$$L-R = 0$$

$$\Rightarrow t = -2 \Rightarrow H(3; 3; 1) \Rightarrow A'(1; 7; 5)$$

$\Rightarrow$  Đáp án chính xác là C

#### Bài 4-[Thi thử chuyên Khoa học tự nhiên lần 2 năm 2017]

Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$  cho đường thẳng  $d: \frac{x+1}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z+2}{3}$  và mặt phẳng  $(P): x + y + 2z + 3 = 0$ . Viết phương trình hình chiếu vuông góc của  $d$  trên mặt phẳng  $(P)$ .

A.  $\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{3}$

B.  $\frac{x+2}{3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{1}$

C.  $\frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{1}$

D.  $\frac{x+2}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{3}$

GIẢI

- Lập mặt phẳng  $(\alpha)$  chứa  $d$  và vuông góc với  $(P) \Rightarrow \vec{n}_\alpha = [\vec{u}_d; \vec{n}_P] = (1; 7; 4)$

MODE 8 1 1 2 = 2 = 3 = MODE 8 2 1 - 1 = 1 = 2 = ON  
SHIFT 5 3 X SHIFT 5 4 =

$$\vec{n}_\alpha = (1; 7; 4)$$

1

$$(\alpha): (x+1) - 7y + 4(z+2) = 0 \Leftrightarrow x - 7y + 4z + 9 = 0$$

- Đường thẳng  $d$  có phương trình tổng quát  $\begin{cases} x - 7y + 4z + 9 = 0 \\ -x + y + 2z + 3 = 0 \end{cases}$ . Để so sánh kết quả ta phải

chuyển phương trình đường thẳng  $d$  về dạng chính tắc

Ta có:  $\vec{u}_d = [\vec{n}_\alpha; \vec{n}_P] = (-18; -6; -6) \Rightarrow \vec{u}(3; 1; 1)$  cũng là vectơ chỉ phương của  $d$

MODE 8 1 1 1 = - 7 = 4 = MODE 8 2 1 - 1 = 1 = 2 = ON  
SHIFT 5 3 X SHIFT 5 4 =

$$\vec{u}_d = (-18; -6; -6)$$

-18

Hơn nữa điểm  $M(2; 1; 1)$  cũng thuộc  $d \Rightarrow$  Phương trình chính tắc  $d: \frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{1}$

$\Rightarrow$  Đáp số chính xác là C

#### Bài 5-[Câu 75 Sách bài tập hình học nâng cao lớp 12]



Cho ba điểm  $A(1; 3; 2), B(4; 0; 3), C(5; 1; 4)$ . Tìm tọa độ hình chiếu  $H$  của  $A$  lên đường thẳng  $BC$

- A.  $(\frac{77}{17}; \frac{9}{17}; \frac{12}{17})$     B.  $(\frac{77}{17}; \frac{9}{17}; \frac{12}{17})$     C.  $(\frac{77}{17}; \frac{9}{17}; \frac{12}{17})$     D.  $(\frac{77}{17}; \frac{9}{17}; \frac{12}{17})$

**GIẢI**

- Đường thẳng  $BC$  nhận vectơ  $\vec{BC}(1; 1; 7)$  là vectơ chỉ phương và đi qua điểm  $B(4; 0; 3)$

$$\begin{cases} x = 4 + t \\ y = t \\ z = 3 + 7t \end{cases}$$

$$\Rightarrow BC: \begin{cases} y = t \\ z = 3 + 7t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 4 + t \\ y = t \\ z = 3 + 7t \end{cases}$$

Gọi  $H$  là hình chiếu vuông góc của  $A$  lên  $BC \Rightarrow H(4+t; t; 3+7t)$

- Mặt khác  $\vec{AH} \perp \vec{BC} \Rightarrow \vec{AH} \cdot \vec{BC} = 0$ .

MODE 1 4 + ALPHA ) = = 1 ) = ( = ALPHA ) = 3 ) + 7 ( = 3  
+ 7 ALPHA ) = 2 ) SHIFT CALC 1 =

(4+X--1)-(-X-3)÷  
X= 0.5294117647  
L-R= 0

Chuyển  $t$  về dạng phân số SHIFT RCL (←)

Ans→A

Math ▲

$$\frac{9}{17}$$

$$\Rightarrow t = \frac{9}{17} \Rightarrow H\left(\frac{77}{17}; \frac{9}{17}; \frac{12}{17}\right)$$

$\Rightarrow$  Đáp số chính xác là A

### **Bài 6-[Câu 76 Sách bài tập hình học nâng cao lớp 12]**

Tìm tọa độ điểm đối xứng của  $M(3; 1; 1)$  qua đường thẳng  $d$  là giao tuyến của hai mặt phẳng  $(\alpha): 4x - 3y - 13 = 0$  và  $(\beta): y - 2z + 5 = 0$

- A.  $(2; 5; 3)$  B.  $(2; 5; 3)$  C.  $(5; 7; 3)$  D.  $(5; 7; 3)$

**GIẢI**

- $d$  là giao tuyến của 2 mặt phẳng  $(\alpha); (\beta)$  nên có phương trình tổng quát:  $\begin{cases} 4x - 3y - 13 = 0 \\ y - 2z + 5 = 0 \end{cases}$

- Vectơ chỉ phương của  $d$  là  $\vec{u}_d = [\vec{n}_\alpha; \vec{n}_\beta] = (6; 8; 4) \Rightarrow$  nhận  $\vec{u}(3; 4; 2)$  là vectơ chỉ phương

MODE 8 1 1 4 = = 3 = 0 = MODE 8 2 1 0 = 1 = = 2 = ON  
SHIFT 5 3 X SHIFT 5 4 =

Ans  
[ ] F 8 4]  
6

$$\begin{cases} x = 4 + 3t \\ y = 1 + 4t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$$

Đường thẳng  $d$  có vectơ đi qua điểm  $N(4;1;3)$  nên có phương trình tham số

- Điểm  $H$  là hình chiếu vuông góc của  $M$  lên đường thẳng  $d$  nên có tọa độ  $M(4+3t; 1+4t; 3+2t)$

Mặt khác  $MH \perp d \Rightarrow MH \cdot \vec{u} = 0$

MODE 1 3 ( 4 + 3 ALPHA ) - - 3 ) + 4 ( 1 + 4 ALPHA ) - 1 )  
 + 2 ( 3 + 2 ALPHA ) - - 1 ) SHIFT CALC 1 =  
 3(4+3X--3)+4(1+  
 X= -1  
 L-R= 0

$$\Rightarrow t = 1 \Rightarrow H(1; 3; 1)$$

$M'$  đối xứng  $M$  qua  $d$  vậy  $H$  là trung điểm  $MM' \Rightarrow M'(5; 7; 3)$

$\Rightarrow$  Đáp số chính xác là **D**

### **Bài 7-[Câu 22 Sách bài tập hình học nâng cao lớp 12]**

Cho đường thẳng  $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{1}$ . Hình chiếu vuông góc của  $d$  trên mặt phẳng tọa độ  $(Oxy)$  là:

- A.  $\begin{cases} x = 0 \\ y = 1-t \\ z = 0 \end{cases}$  B.  $\begin{cases} x = 1+2t \\ y = 1+t \\ z = 0 \end{cases}$  C.  $\begin{cases} x = 1+2t \\ y = 1+t \\ z = 0 \end{cases}$  D.  $\begin{cases} x = 1+2t \\ y = 1+t \\ z = 0 \end{cases}$

**GIẢI**

- Dung mặt phẳng  $(\alpha)$  chứa đường thẳng  $d$  và vuông góc với

$$(Oxy) \Rightarrow \vec{n}_\alpha = [\vec{u}_d; \vec{n}_{Oxy}] = (1; 2; 0)$$

MODE 8 1 1 2 = 1 = 1 = MODE 8 2 1 0 = 0 = 1 = ON  
 SHIFT 5 3 X SHIFT 5 4 =

Ans [ ] -2 0]

**1**

Mặt phẳng  $(\alpha)$  chứa điểm  $N(1; 1; 2)$  nên có phương trình là:

$$(\alpha): (x-1) - 2(y+1) + 0(z-2) = 0 \Leftrightarrow x - 2y - 3 = 0$$

- Đường thẳng  $d'$  là hình chiếu vuông góc của đường thẳng  $d$  lên mặt phẳng  $(Oxy) \Rightarrow d'$  là

giao tuyến của  $(\alpha)$  và  $(Oxy) \Rightarrow d': \begin{cases} x - 2y - 3 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

Tính  $\vec{u}_{d'} = [\vec{n}_\alpha; \vec{n}_{Oxy}] = (2; 1; 0) \Rightarrow$  nhận  $\vec{u}(2; 1; 0)$  là vectơ chỉ phương

MODE 8 1 1 1 = - 2 = 0 = MODE 8 2 1 0 = 0 = 1 = ON  
 SHIFT 5 3 X SHIFT 5 4 =

---


$$\text{Ans} \quad \text{VCT} \quad \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad -2$$

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \end{cases}$$

Lại có  $d'$  qua điểm có tọa độ  $(1; 1; 0) \Rightarrow d': \begin{cases} y = 1 + t \end{cases}$

$$\begin{cases} z = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$  Đáp số chính xác là **B**.