TÓM TẮT KIẾN THỨC TOÁN CẤP III

ÔN THI THPT QUỐC GIA

I. CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

1. Hệ thức cơ bản:

▪ $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$	▪ $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$	▪ $\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$	▪ $\tan\alpha.\cot\alpha = 1$
▪ $1 + \tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$	▪ $1 + \cot^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$	▪ $\begin{cases} \forall k \in \mathbb{Z} \\ \sin(\alpha + k2\pi) = \sin\alpha \\ \cos(\alpha + k2\pi) = \cos\alpha \end{cases}$	▪ $\begin{cases} \forall k \in \mathbb{Z} \\ \tan(\alpha + k\pi) = \tan\alpha \\ \cot(\alpha + k\pi) = \cot\alpha \end{cases}$

2. Cung liên kết:

Đối: α **và** $-\alpha$	**Bù:** α **và** $\pi-\alpha$	**Phụ:** α **và** $\dfrac{\pi}{2}-\alpha$	**Khác pi:** $\alpha; \pi+\alpha$	**Khác** $\dfrac{Pi}{2}: \alpha; \dfrac{\pi}{2}+\alpha$
$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$	$\sin(\pi-\alpha) = \sin\alpha$	$\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cos\alpha$	$\sin(\pi+\alpha) = -\sin\alpha$	$\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right) = \cos\alpha$
$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$	$\cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha$	$\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right) = \sin\alpha$	$\cos(\pi+\alpha) = -\cos\alpha$	$\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\sin\alpha$
$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$	$\tan(\pi-\alpha) = -\tan\alpha$	$\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cot\alpha$	$\tan(\pi+\alpha) = \tan\alpha$	$\tan\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\cot\alpha$
$\cot(-\alpha) = -\cot\alpha$	$\cot(\pi-\alpha) = -\cot\alpha$	$\cot\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right) = \tan\alpha$	$\cot(\pi+\alpha) = \cot\alpha$	$\cot\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\tan\alpha$
Cos Đối	Sin Bù	Phụ Chéo	Khác pi Tang, Cotang	Khác pi chia 2 Sin bạn cos

3. Công thức cộng:

$\begin{Vmatrix} * \sin(a+b) = \sin a.\cos b + \sin b.\cos a \\ * \sin(a-b) = \sin a.\cos b - \sin b.\cos a \end{Vmatrix}$	$\begin{Vmatrix} * \cos(a+b) = \cos a.\cos b - \sin a.\sin b \\ * \cos(a-b) = \cos a.\cos b + \sin a.\sin b \end{Vmatrix}$
$\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a.\tan b}$	$\tan(a-b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a.\tan b}$

4. Công thức nhân đôi, nhân ba:

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha.\cos\alpha$	$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$ $= 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$	$\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$
$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$	$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$	$\tan 3\alpha = \dfrac{3\tan\alpha - \tan^3\alpha}{1-3\tan^2\alpha}$
5. Công thức hạ bậc		
$\sin^2\alpha = \dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$	$\cos^2\alpha = \dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$	$\tan^2\alpha = \dfrac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$

6. Công thức biến đổi tổng thành tích:

$\cos a + \cos b = 2\cos\dfrac{a+b}{2}.\cos\dfrac{a-b}{2}$	$\cos a - \cos b = -2\sin\dfrac{a+b}{2}.\sin\dfrac{a-b}{2}$
$\sin a + \sin b = 2\sin\dfrac{a+b}{2}.\cos\dfrac{a-b}{2}$	$\sin a - \sin b = 2\cos\dfrac{a+b}{2}.\sin\dfrac{a-b}{2}$
$\tan a + \tan b = \dfrac{\sin(a+b)}{\cos a.\cos b}$	$\tan a - \tan b = \dfrac{\sin(a-b)}{\cos a.\cos b}$
$\sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{2}.\sin\left(\alpha + \dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}.\cos\left(\alpha - \dfrac{\pi}{4}\right)$	$\sin\alpha - \cos\alpha = \sqrt{2}\sin\left(\alpha - \dfrac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}\cos\left(\alpha + \dfrac{\pi}{4}\right)$

7. Công thức biến đổi tích thành tổng:

$\cos a.\cos b = \dfrac{1}{2}\left[\cos(a+b) + \cos(a-b)\right]$	$\sin a.\sin b = \dfrac{1}{2}\left[\cos(a-b) - \cos(a+b)\right]$	$\sin a.\cos b = \dfrac{1}{2}\left[\sin(a+b) + \sin(a-b)\right]$
Cos.Cos thì Cos cộng cộng Cos trừ	Sin.Sin thì Cos trừ trừ Cos cộng	Sin.Cos thì Sin cộng cộng Sin trừ

II. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

▪ $\sin u = \sin v \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = v + k2\pi \\ u = \pi - v + k2\pi \end{array}\right. \quad (k\in\mathbb{Z})$	▪ $\cos u = \cos v \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = v + k2\pi \\ u = -v + k2\pi \end{array}\right. \quad (k\in\mathbb{Z})$
Đặc biệt: $\left\langle \begin{array}{l} \sin u = 1 \Leftrightarrow u = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \\ \sin u = -1 \Leftrightarrow u = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi \quad (k\in\mathbb{Z}) \\ \sin u = 0 \Leftrightarrow u = k\pi \end{array}\right.$	Đặc biệt: $\left\langle \begin{array}{l} \cos u = 1 \Leftrightarrow u = k2\pi \\ \cos u = -1 \Leftrightarrow u = \pi + k2\pi \quad (k\in\mathbb{Z}) \\ \cos u = 0 \Leftrightarrow u = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \end{array}\right.$
▪ $\tan u = \tan v \Leftrightarrow u = v + k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$	▪ $\cot u = \cot v \Leftrightarrow u = v + k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$

Kỹ thuật 1: Làm mất dấu trừ

- $\circ -\sin\alpha = \sin(-\alpha)$
- $\circ -\cos\alpha = \cos(\pi - \alpha)$
- $\circ -\tan\alpha = \tan(-\alpha)$
- $\circ -\cot\alpha = \cot(-\alpha)$

Ví dụ:

$\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) + \sin x = 0 \Leftrightarrow \sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = -\sin x \Leftrightarrow \sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \sin(-x)$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - \dfrac{\pi}{4} = -x + k2\pi \\ \cancel{x} - \dfrac{\pi}{4} = \pi + \cancel{x} + k2\pi \text{ (vô nghiệm)} \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{8} + k\pi \ (k\in\mathbb{Z}).$

Kỹ thuật 2: Biến đổi chéo

$\circ\ \sin\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$ $\circ\ \cos\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$ $\circ\ \tan\alpha = \cot\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$ $\circ\ \cot\alpha = \tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$	**Ví dụ:** $\sin 2x = \cos x \Leftrightarrow \sin 2x = \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = \frac{\pi}{2} - x + k2\pi \\ 2x = \pi - \left(\frac{\pi}{2}-x\right) + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + \frac{k2\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$

Phương trình dạng $a\sin x + b\cos x = c$ (với $a^2+b^2 \geq c^2$)	Phương trình dạng $a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = d$
▪ $a\sin x + b\cos x = c$ $\Leftrightarrow \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$ $\Leftrightarrow \sin x.\cos\alpha + \cos x.\sin\alpha = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$ (với $\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$) $\Leftrightarrow \sin(x+\alpha) = \sin\beta \Leftrightarrow$ .... với $\sin\beta = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$	▪ **Trường hợp 1:** Xét $\cos x = 0 \Rightarrow \sin^2 x = 1$. Ta có hệ sau: $\begin{cases} \sin^2 x = 1 \\ a\sin^2 x = d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin^2 x = 1 \\ a = d \end{cases} \Leftrightarrow$ ....(1) ▪ **Trường hợp 2:** Xét $\cos x \neq 0$, chia hai vế phương trình cho $\cos^2 x$, ta có: $a\tan^2 x + b\tan x + c = d(1+\tan^2 x) \Leftrightarrow$ ....(2) ▪ Hợp nghiệm của (1), (2) ta có tập nghiệm của phương trình đã cho.

✍ **Lưu ý:** Phương trình $a\sin x + b\cos x = c$ chỉ có nghiệm khi và chỉ khi $\boxed{a^2+b^2 \geq c^2}$.

III. TỔ HỢP – XÁC SUẤT

QUY TẮC CỘNG	QUY TẮC NHÂN
Nếu phép đếm được chia ra **nhiều trường hợp**, ta sẽ **cộng các kết quả** lại.	Nếu phép đếm được chia ra làm **nhiều giai đoạn bắt buộc**, ta sẽ **nhân các kết quả** của mỗi giai đoạn ấy.

HOÁN VỊ	TỔ HỢP	CHỈNH HỢP
▪ Sắp xếp (đổi chỗ) của n phần tử khác nhau, ta có số cách xếp là $\boxed{P_n = n!}$ với $n \in \mathbb{N}$. ▪ Cách tính: $n! = 1.2.....(n-1)n$. ▪ Quy ước sốc: $0! = 1$.	▪ Chọn k phần tử từ n phần tử (không sắp xếp thứ tự), ta có số cách chọn là $\boxed{C_n^k}$. ▪ Cách tính: $\boxed{C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}}$ với $\begin{cases} n,\ k \in \mathbb{N} \\ 0 \leq k \leq n \end{cases}$.	▪ Chọn k phần tử từ n phần tử (có sắp xếp thứ tự), ta được số cách chọn là $\boxed{A_n^k}$. ▪ Cách tính: $\boxed{A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}}$ với $\begin{cases} n,\ k \in \mathbb{N} \\ 0 \leq k \leq n \end{cases}$.

XÁC SUẤT	▪ **Công thức:** $\boxed{P(X) = \frac{n(X)}{n(\Omega)}}$ Trong đó: $n(X)$: số phần tử của tập biến cố X; $n(\Omega)$: số phần tử không gian mẫu; $P(X)$ là xác suất để biến cố X xảy ra với $X \subset \Omega$.	▪ **Tính chất:** $\boxed{0 \leq P(X) \leq 1}$. $\boxed{P(\varnothing) = 0;\ P(\Omega) = 1}$. $\boxed{P(X) = 1 - P(\overline{X})}$ với $\overline{X}$ là biến cố đối của X.

IV. KHAI TRIỂN NHỊ THỨC NEWTƠN

Khai triển dạng liệt kê:

Trong các công thức bên, ta luôn có $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

- $(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + \ldots\ldots + C_n^{n-1}ab^{n-1} + C_n^n b^n$.
- **Đặc biệt:** $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \ldots\ldots C_n^{n-1}x^{n-1} + C_n^n x^n$ (*).
- **Hệ quả 1:** $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots\ldots C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n$ (tức là thay $x=1$ vào (*)).
- **Hệ quả 2:** Với n chẵn, chỉ cần thay $x=-1$ vào (*), ta có:
  $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \ldots\ldots - C_n^{n-1} + C_n^n = 0 \Leftrightarrow C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 \ldots\ldots + C_n^n = C_n^1 + C_n^3 + \ldots\ldots C_n^{n-1}$

Khai triển tổng quát:

Trong các công thức bên, ta luôn có $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

- Khai triển: $\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k}$. Số hạng tổng quát: $\boxed{T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k}$
- Phân biệt hệ số và số hạng: $\underbrace{\underbrace{C_n^k (-1)^k a^{n-k} b^k}_{\text{HỆ SỐ}} . x^\alpha}_{\text{SỐ HẠNG}}$.

  Nhớ rằng **số hạng không chứa** x ứng với $\alpha = 0$.

V. CẤP SỐ CỘNG – CẤP SỐ NHÂN

CẤP SỐ CỘNG

1. Định nghĩa:

- Dãy số (u_n) được gọi là **cấp số cộng** khi và chỉ khi $\boxed{u_{n+1} = u_n + d}$ với $n \in \mathbb{N}^*$, d là hằng số.
- **Cấp số cộng** như trên có **số hạng đầu** u_1, **công sai** d.

2. Số hạng tổng quát:

- $\boxed{u_n = u_1 + (n-1)d}$ *với* $n \in \mathbb{N}^*$.

3. Tính chất các số hạng:

- $\boxed{u_{k-1} + u_{k+1} = 2u_k}$ *với* $k \in \mathbb{N}$ *và* $k \geq 2$.

4. Tổng *n* số hạng đầu tiên:

- $\boxed{S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \dfrac{(u_1 + u_n)n}{2}}$.

CẤP SỐ NHÂN

1. Định nghĩa:

- Dãy số (u_n) được gọi là **cấp số nhân** khi và chỉ khi $\boxed{u_{n+1} = u_n . q}$ với $n \in \mathbb{N}^*$, q là hằng số.
- **Cấp số nhân** như trên có **số hạng đầu** u_1, **công bội** q.

2. Số hạng tổng quát:

- $\boxed{u_n = u_1 . q^{n-1}}$ với $n \in \mathbb{N}^*$.

3. Tính chất các số hạng:

- $\boxed{u_{k-1} . u_{k+1} = u_k^2}$ với $k \in \mathbb{N}$ *và* $k \geq 2$.

4. Tổng *n* số hạng đầu tiên:

- $\boxed{S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \dfrac{u_1(1-q^n)}{1-q}}$ với $q \neq 1$.

VI. CÔNG THỨC ĐẠO HÀM

- $k' = 0$ (với k là hằng số)
- $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ $\longrightarrow (u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1}.\boxed{u'}$
- $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ $\longrightarrow \left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{\boxed{u'}}{2\sqrt{u}}$
- $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$ $\longrightarrow \left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{\boxed{u'}}{u^2}$
- $\left(e^x\right)' = e^x$ $\longrightarrow \left(e^u\right)' = e^u.\boxed{u'}$
- $\left(a^x\right)' = a^x \ln a$ $\longrightarrow \left(a^u\right)' = a^u.\ln a.\boxed{u'}$
- $(\sin x)' = \cos x$ $\longrightarrow (\sin u)' = \boxed{u'}\cos u$
- $(\cos x)' = -\sin x$ $\longrightarrow (\cos u)' = -\boxed{u'}\sin u$
- $(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$
- $(\cot x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x} = -\left(1 + \cot^2 x\right)$

$\longrightarrow (\tan u)' = \dfrac{\boxed{u'}}{\cos^2 u} = \boxed{u'}(1+\tan^2 u)$	$\longrightarrow (\cot u)' = -\dfrac{\boxed{u'}}{\sin^2 u} = -\boxed{u'}(1+\cot^2 u)$

VII. KHẢO SÁT HÀM SỐ & BÀI TOÁN LIÊN QUAN

XÉT TÍNH ĐƠN ĐIỆU

- **Bước 1:** Tìm tập xác định D.
- **Bước 2:** Tính $y' = f'(x)$; cho $y' = 0 \xrightarrow{\text{Tìm nghiệm}} x_1,\, x_2 ...$ Tìm thêm các giá trị x mà y' không xác định.
- **Bước 3:** Lập bảng biến thiên. *(Nên chọn giá trị x đại diện cho từng khoảng thay vào y' để tìm dấu của y' trên khoảng đó).*
- **Bước 4:** Dựa vào bảng biến thiên để kết luận về sự đồng biến, nghịch biến của hàm số.

HÀM BẬC BA $y = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (a \neq 0)$

- Đạo hàm $y' = 3ax^2 + 2bx + c$.
- Hàm số **đồng biến trên tập xác định** $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$.
- Hàm số **nghịch biến trên tập xác định** $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \leq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$.

✍ **Lưu ý:** Nếu a chứa tham số m thì ta xét $a = 0$, tìm m. Thay m tìm được để kiểm tra dấu y', xem y có **đơn điệu** trên $\mathbb{R}$ không?

HÀM NHẤT BIẾN $y = \dfrac{ax+b}{cx+d} \quad (ad - bc \neq 0,\ c \neq 0)$

- Đạo hàm $y' = \dfrac{ad - bc}{(cx+d)^2}$.
- Hàm số **đồng biến trên từng khoảng xác định** $\Leftrightarrow ad - bc > 0$.
- Hàm số **nghịch biến trên từng khoảng xác định** $\Leftrightarrow ad - bc < 0$.

✍ **Lưu ý:** Nếu đề cho **đồng biến (nghịch biến)** trên $(\alpha;\beta)$ thì ta xét điều kiện: $-\dfrac{d}{c} \notin (\alpha;\beta)$.

ĐIỀU KIỆN CỰC TRỊ

- Hàm số có điểm cực trị là $(x_0; y_0) \Leftrightarrow \begin{cases} y'(x_0) = 0 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$. (giả thiết là hàm số liên tục tại x_0).

- Nếu $\boxed{\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) < 0 \end{cases}}$ thì hàm số $f(x)$ **đạt cực đại** tại $x = x_0$.
- Nếu $\boxed{\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) > 0 \end{cases}}$ thì hàm số $f(x)$ **đạt cực tiểu** tại $x = x_0$.

CỰC TRỊ HÀM BẬC BA $y = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (a \neq 0)$

- Đạo hàm $y' = 3ax^2 + 2bx + c$.
- Hàm số có hai cực trị (tức là có CĐ-CT) $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta_{y'} > 0 \end{cases} \ (*)$.
- Hàm số có hai điểm cực trị trái dấu $\Leftrightarrow x_1 x_2 < 0 \Leftrightarrow ac < 0$.
- Hàm số có hai điểm cực trị cùng dấu $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0,\ \Delta_{y'} > 0 \\ ac > 0 \end{cases}$.
- Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị: $\boxed{y = f(x) - \dfrac{f'(x).f''(x)}{18a}}$.

CỰC TRỊ HÀM BẬC BỐN $y = ax^4 + bx^2 + c \quad (a \neq 0)$

- Đạo hàm $y' = 4ax^3 + 2bx$.
- Điều kiện cực trị

Ba cực trị	$ab < 0$
Một cực trị	$\begin{cases} ab \geq 0 \\ a^2 + b^2 > 0 \end{cases}$
Có cực trị	$a^2 + b^2 > 0$

- Cho $A,\ B,\ C$ là ba điểm cực trị, ta có: $\boxed{\cos \widehat{BAC} = \dfrac{b^3 + 8a}{b^3 - 8a}}$

$\boxed{S_{\Delta ABC} = \sqrt{\dfrac{b^5}{-32a^3}}}$.

TÌM MAX-MIN TRÊN ĐOẠN

Tìm Max-Min của $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$

- **Bước 1:** Tính $y' = f'(x)$.
  Tìm các nghiệm $x_i \in (a;b)$ khi cho $f'(x) = 0$.

TÌM MAX-MIN TRÊN KHOẢNG

Tìm Max-Min của $f(x)$ trên khoảng $(a;b)$

- **Bước 1:** Tính $y' = f'(x)$.
  Tìm các nghiệm $x_i \in (a;b)$ khi cho $f'(x) = 0$. Tìm

Tìm $x_j \in (a;b)$ mà y' không xác định.

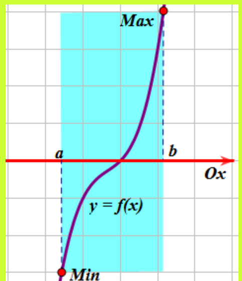
- **Bước 2:** Tính các giá trị $f(a)$, $f(b)$ và $f(x_i)$, $f(x_j)$ (nếu có).
- **Bước 3:** So sánh tất cả giá trị trong **bước 2** để **kết luận về giá trị lớn nhất, nhỏ nhất**.

$x_j \in (a;b)$ mà y' không xác định.

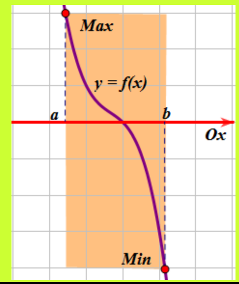
- **Bước 2:** Cần tính $\lim\limits_{x\to a^+} y$, $\lim\limits_{x\to b^-} y$. (Nếu thay $(a;b)$ bằng $(-\infty;+\infty)$ thì ta tính thêm $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y$).
- **Bước 3:** Lập bảng biến thiên và suy ra **giá trị lớn nhất, nhỏ nhất** trên khoảng.

ĐẶC BIỆT

- Nếu hàm $f(x)$ đồng biến trên $[a;b]$ thì $\begin{cases} \max\limits_{x\in[a;b]} f(x) = f(b) \\ \min\limits_{x\in[a;b]} f(x) = f(a) \end{cases}$



- Nếu hàm $f(x)$ nghịch biến trên $[a;b]$ thì $\begin{cases} \max\limits_{x\in[a;b]} f(x) = f(a) \\ \min\limits_{x\in[a;b]} f(x) = f(b) \end{cases}$



TIỆM CẬN ĐỨNG

- **Định nghĩa:** $\begin{cases} x \longrightarrow x_0 \\ y \longrightarrow \pm\infty \end{cases}$ (x hữu hạn, y vô hạn), ta có **tiệm cận đứng** $x = x_0$. **Lưu ý:** điều kiện $x \longrightarrow x_0$ có thể được thay bằng $x \longrightarrow x_0^-$ (giới hạn bên trái) hoặc $x \longrightarrow x_0^+$ (giới hạn bên phải).
- **Cách tìm TCĐ:** Nếu $x = x_0$ là một **nghiệm của mẫu số** mà **không phải là nghiệm của tử số** thì $x = x_0$ chính là một **TCĐ** của đồ thị.

(với tập xác định có dạng $D = K \setminus \{x_0;\ x_1;...\}$ *).*

TIỆM CẬN NGANG

- **Định nghĩa:** $\begin{cases} x \longrightarrow \pm\infty \\ y \longrightarrow y_0 \end{cases}$ (x vô hạn, y hữu hạn), ta có **tiệm cận ngang** $y = y_0$.
- **Cách tìm TCN:** Đơn giản nhất là dùng CASIO

Bước 1: Nhập hàm số vào máy.

Bước 2: $\boxed{CALC} \xrightarrow{NEXT} \boxed{X = 10\,^\wedge 10} \xrightarrow{NEXT} \boxed{=}$

$\boxed{CALC} \xrightarrow{NEXT} \boxed{X = -10\,^\wedge 10} \xrightarrow{NEXT} \boxed{=}$

Bước 3: Nếu kết quả thu được là **hữu hạn** (tức là y_0) thì ta kết luận **TCN**: $y = y_0$.

- Đồ thị hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ với $(c \neq 0, ad - bc \neq 0)$ có một TCĐ: $\boxed{x = -\dfrac{d}{c}}$, một TCN: $\boxed{y = \dfrac{a}{c}}$.

☞ **Nên nhớ, mỗi đồ thị chỉ có tối đa là 2 tiệm cận ngang.**

SỰ TƯƠNG GIAO GIỮA HAI ĐỒ THỊ

Xét hai đồ thị $(C_1): y = f(x)$ và $(C_2): y = g(x)$.

Phương pháp chung tìm giao điểm hai đồ thị

- **Bước 1 :** Lập phương trình hoành độ giao điểm của $(C_1) \& (C_2)$: $\boxed{f(x) = g(x)}$. (*)
- **Bước 2 :** Giải phương trình (*) để tìm các nghiệm $x_1, x_2,...$ (nếu có), suy ra $y_1, y_2...$

- Điều kiện để (C_1) và (C_2) có n điểm chung là phương trình (*) có n nghiệm khác nhau.
- Điều kiện để (C_1) tiếp xúc (C_2) là phương trình (*) có nghiệm kép hoặc hệ sau có nghiệm : $\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases}$.

Tìm tham số để $\begin{cases} (C): y = \dfrac{ax+b}{cx+d} \\ d: y = \alpha x + \beta \end{cases}$ **cắt nhau tại hai điểm phân biệt**

- **Bước 1 :** Viết phương trình hoành độ giao điểm : $\dfrac{ax+b}{cx+d}=\alpha x+\beta$, đưa phương trình về dạng $g(x)=Ax^2+Bx+C=0\left(x\neq -\dfrac{d}{c}\right)$.

- **Bước 2 :** Giải hệ $\begin{cases} A\neq 0 \\ \Delta_g>0 \\ g\left(-\dfrac{d}{c}\right)\neq 0 \end{cases} \xrightarrow{Tìm} m?$

Tìm tham số để $\begin{cases}(C): y=ax^3+bx^2+cx+d \\ d: y=\alpha x+\beta\end{cases}$ cắt nhau tại ba điểm phân biệt

(Ta chỉ áp dụng cho trường hợp phương trình hoành độ giao điểm có nghiệm đẹp)

- **Bước 1 :** Viết phương trình hoành độ giao điểm : $ax^3+bx^2+cx+d=\alpha x+\beta$, đưa phương trình về dạng $(x-x_0)\left(\underbrace{Ax^2+Bx+C}_{g(x)}\right)=0$.

(có vận dụng kỹ năng chia Hoocne)

- **Bước 2 :** Giải hệ điều kiện : $\begin{cases} A\neq 0 \\ \Delta_g>0 \\ g(x_0)\neq 0 \end{cases} \xrightarrow{Tìm} m?$

✍ **Lưu ý :** Để tìm nghiệm đẹp $x=x_0$, ta nhập vào máy chức năng giải phương trình bậc ba với $m=100$.

PHƯƠNG TRÌNH TIẾP TUYẾN

<u>**DẠNG 1**</u> Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị $(C): y=f(x)$ tại điểm $M(x_0;y_0)\in(C)$	<u>**DẠNG 2**</u> Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị $(C): y=f(x)$ biết tiếp tuyến có hệ số góc k.	<u>**DẠNG 3**</u> Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị $(C): y=f(x)$ biết tiếp tuyến đi qua $A(x_A;y_A)$.
▪ **Bước 1:** Tính đạo hàm y', từ đó có hệ số góc $k=y'(x_0)$. ▪ **Bước 2 :** Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị dạng $\boxed{y=k(x-x_0)+y_0}$.	▪ **Bước 1:** Gọi $M(x_0;y_0)$ là tiếp điểm và tính đạo hàm y'. ▪ **Bước 2:** Cho $y'(x_0)=k$, tìm được tiếp điểm $(x_0;y_0)$. ▪ **Bước 3:** Phương trình tiếp tuyến : $\boxed{y=k(x-x_0)+y_0}$.	▪ **Bước 1:** Tiếp tuyến có dạng : $y=y'(x_0)(x-x_0)+y_0$ (*) với $y_0=f(x_0)$. ▪ **Bước 2:** Thay tọa độ điểm A vào (*) để tìm được x_0. ▪ **Bước 3:** Thay x_0 vào (*) để viết phương trình tiếp tuyến.

☞ **Đặc biệt :** *Nếu tiếp tuyến **song song** đường thẳng $y=ax+b$ thì nó có hệ số góc $k=a$, nếu tiếp tuyến **vuông góc** đường thẳng $y=ax+b$ thì nó có hệ số góc $k=-\dfrac{1}{a}$ $(a\neq 0)$; nếu tiếp tuyến tạo với trục Ox góc α thì nó có hệ số góc $k=\pm\tan\alpha$.*

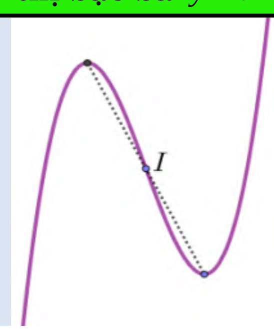
ĐIỂM ĐẶC BIỆT THUỘC ĐỒ THỊ

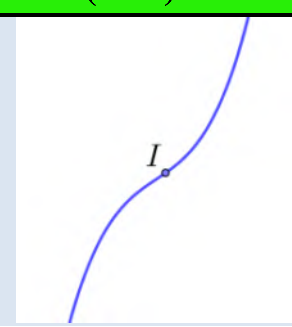
Tâm đối xứng (hay điểm uốn) của đồ thị bậc ba $y=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a\neq 0)$

- **Bước 1:** Tính $\begin{cases} y'=3ax^2+2bx+c \\ y''=6ax+2b \end{cases}$.
- **Bước 2:** Cho $y''=0 \xrightarrow{Tìm\ nghiệm} x_0=-\dfrac{b}{3a}\Rightarrow y_0$.

Ta có tâm đối xứng (tức điểm uốn): $I(x_0;y_0)$.

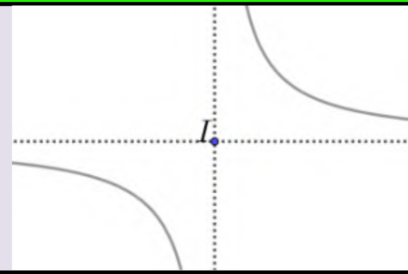
☞ **Cần nhớ:** Tâm đối xứng của đồ thị bậc ba cũng là trung điểm của hai điểm cực trị (nếu có).





Tâm đối xứng của đồ thị hàm nhất biến $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}\ (c\neq 0, ad-bc\neq 0)$

- Tìm tiệm cận đứng $x=-\dfrac{d}{c}$ và tiệm cận ngang $y=\dfrac{a}{c}$, ta tìm được tâm đối xứng của đồ thị $I\left(-\dfrac{d}{c};\dfrac{a}{c}\right)$ (là giao điểm 2 tiệm cận tìm được).



Điểm có tọa độ nguyên thuộc đồ thị hàm nhất biến $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}\ (c\neq 0, ad-bc\neq 0)$

Cách 1: Tự luận

- **Bước 1:** Chia đa thức cho đa thức, ta viết lại hàm số $y=\alpha+\dfrac{\beta}{cx+d}$.
- **Bước 2:** Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ $cx+d$ là ước số nguyên của $\beta \xrightarrow{\text{Tìm được}} \left[\begin{array}{l} x= \\ x= \\ \ldots\ldots \end{array}\right.$, suy ra các giá trị y tương ứng. Từ đây tìm được các điểm có tọa độ nguyên thuộc đồ thị.

Cách 2: Trắc nghiệm

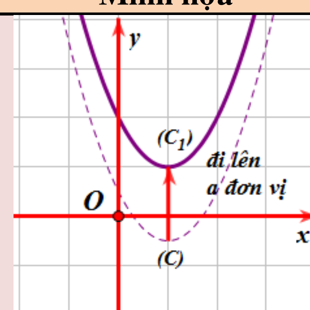
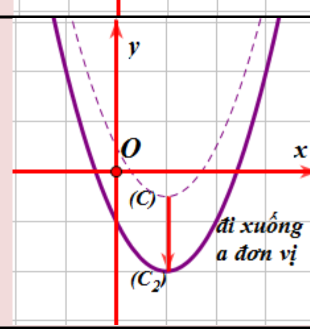
Thực hiện trên máy tính bỏ túi như sau:

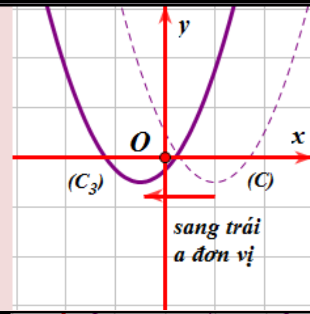
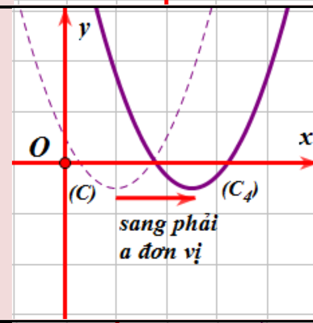
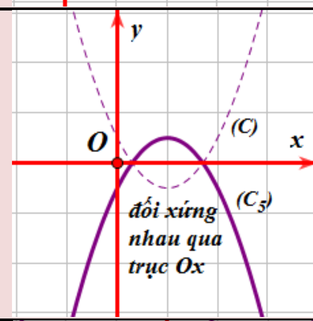
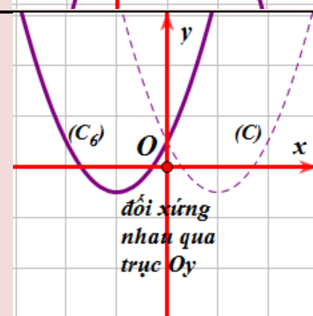
$\boxed{MODE} \longrightarrow \boxed{7} \longrightarrow \boxed{F(X)=\dfrac{aX+b}{cX+d}} \longrightarrow \boxed{START:-19} \longrightarrow \boxed{END:-1} \longrightarrow \boxed{STEP:1}$. Ta dò tìm những hàng có $F(X)$ nguyên thì nhận làm điểm cần tìm. Làm tương tự khi cho $\boxed{START:0} \longrightarrow \boxed{END:18} \longrightarrow \boxed{STEP:1}$, ta sẽ bổ sung thêm các điểm nguyên còn lại. **<u>Lưu ý</u>**: Học sinh muốn đạt được tính chính xác cao hơn thì có thể dò trên nhiều khoảng, mỗi khoảng có $START$ và END cách nhau 19 đơn vị. (*Máy tính đời mới sẽ có bộ nhớ lớn hơn*).

PHÉP SUY ĐỒ THỊ TỪ ĐỒ THỊ CÓ SẴN

Phép tịnh tiến và đối xứng đồ thị

Cho hàm $y=f(x)$ có đồ thị (C)

Đồ thị cần tìm	Cách biến đổi	Minh họa
$(C_1): y=f(x)+a$	Tịnh tiến đồ thị (C) theo phương Oy lên phía trên a đơn vị.	
$(C_2): y=f(x)-a$	Tịnh tiến đồ thị (C) theo phương Oy xuống phía dưới a đơn vị.	

$(C_3): y = f(x+a)$	Tịnh tiến đồ thị (C) theo phương Ox qua trái a đơn vị.	
$(C_4): y = f(x-a)$	Tịnh tiến đồ thị (C) theo phương Ox qua phải a đơn vị.	
$(C_5): y = -f(x)$	Lấy đối xứng (C) qua Ox.	
$(C_6): y = f(-x)$	Lấy đối xứng (C) qua Oy.	

Đồ thị hàm chứa giá trị tuyệt đối

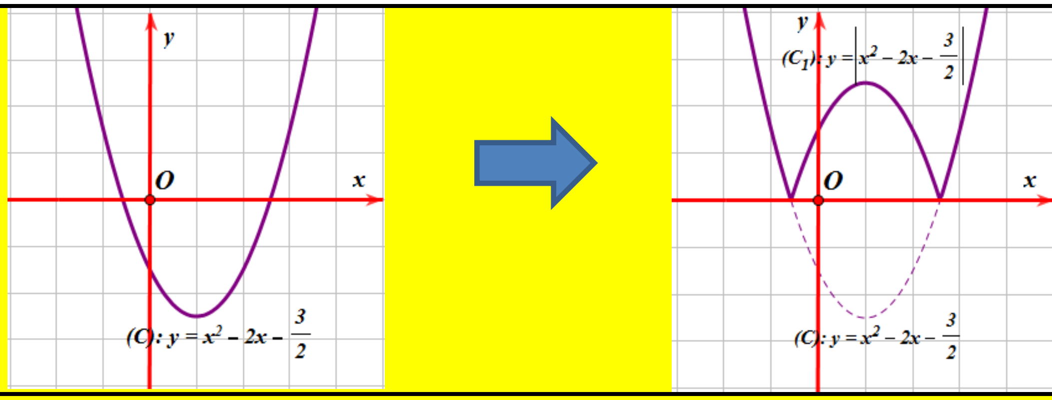
a) Từ đồ thị $(C): y = f(x)$ ta suy ra đồ thị $(C_1): y = |f(x)|$.

Ta có $y = |f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{nếu } f(x) \ge 0 \\ -f(x) & \text{nếu } f(x) < 0 \end{cases}$.

Bước 1: Giữ nguyên phần đồ thị (C) nằm phía trên Ox, ta được (C').

Bước 2: Lấy đối xứng phần đồ thị (C) phía dưới Ox qua Ox, ta được (C'').

Kết luận: Đồ thị $(C_1): y = |f(x)|$ là hợp của (C') với (C''). Xem **ví dụ minh họa** sau:



b) Từ đồ thị hàm số $(C): y = f(x)$ ta suy ra đồ thị $(C_2): y = f\left(\left|x\right|\right)$.

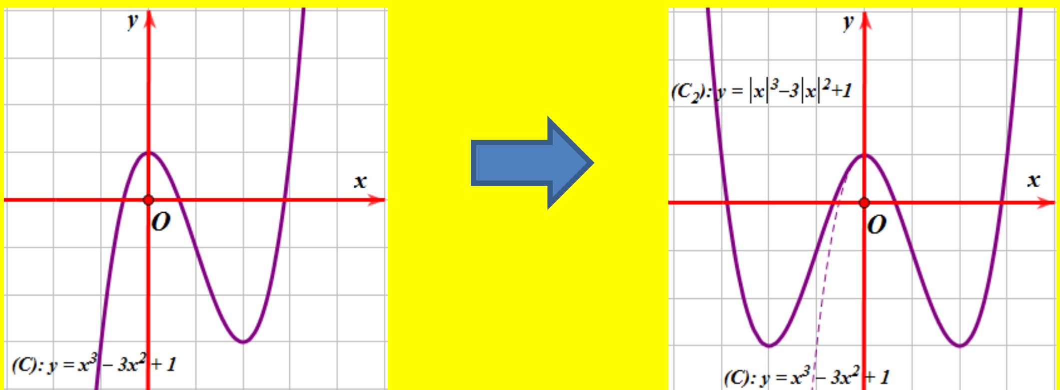
Ta có $y = f\left(\left|x\right|\right) = \begin{cases} f(x) & \text{nếu } x \geq 0 \\ f(-x) & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$.

Bước 1: Giữ nguyên phần đồ thị (C) nằm bên phải trục Oy, ta được (C').

Bước 2: Lấy đối xứng phần đồ thị (C') qua trục Oy, ta được (C'').

(Đây là tính chất đối xứng của đồ thị hàm số chẵn)

Kết luận: Đồ thị $(C_2): y = f\left(\left|x\right|\right)$ là hợp của (C') với (C''). Xem **ví dụ minh họa** sau:



CÔNG THỨC BỔ TRỢ CHO QUÁ TRÌNH GIẢI TOÁN HÀM SỐ

Bổ trợ về tam thức bậc hai

Cho phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ (*)

▪ (*) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$

▪ (*) có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow a.c < 0$.

☞ Định lí Vi-ét : $\begin{cases} S = x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a} \\ P = x_1 x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases} \xrightarrow{\text{Áp dụng}} x_1^2 + x_2^2 = S^2 - 2P;\ \ x_1^3 + x_2^3 = S^3 - 3SP; (x_1 - x_2)^2 = S^2 - 4P;$

$\left|x_1 - x_2\right| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2} = \sqrt{S^2 - 4P}$. Trong trắc nghiệm, ta nên dùng công thức : $\boxed{\left|x_1 - x_2\right| = \dfrac{\sqrt{\Delta}}{\left|a\right|}}$.

▪ (*) có hai nghiệm dương phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0, \Delta > 0 \\ S > 0, P > 0 \end{cases}$.

▪ (*) có hai nghiệm âm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0, \Delta > 0 \\ S < 0, P > 0 \end{cases}$.

Bổ trợ hình học giải tích phẳng

- Nếu ΔABC có $\begin{cases} \overrightarrow{AB}=(b_1;b_2) \\ \overrightarrow{AC}=(c_1;c_2) \end{cases}$ thì $\boxed{S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|b_1c_2-b_2c_1\right|}$.
- $\Delta ABC\perp$ tại $A\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0\Leftrightarrow b_1c_1+b_2c_2=0$.
- $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$.
- Khoảng cách từ điểm $M(x_M;y_M)$ đến $\Delta: ax+by+c=0$ là $\boxed{d\left(M;\Delta\right)=\frac{\left|ax_M+by_M+c\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}}$.
- Đặc biệt: $d\left(M;Ox\right)=\left|y_M\right|$, $d\left(M;Oy\right)=\left|x_M\right|$.

VIII. CÔNG THỨC LŨY THỪA

Cho các số dương a, b và $m, n\in\mathbb{R}$. Ta có:

$a^0=1$	$\underbrace{a^n=a.a.........a}_{n\ thừa\ số}$ với $n\in\mathbb{N}^*$	$a^{-n}=\frac{1}{a^n}$
$(a^m)^n=a^{mn}=(a^n)^m$	$a^m.a^n=a^{m+n}$	$\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$
$a^nb^n=(ab)^n$	$\frac{a^n}{b^n}=\left(\frac{a}{b}\right)^n$	$\sqrt[m]{a^n}=a^{\frac{n}{m}}$ $\left\langle \begin{array}{l} *\ \sqrt{a}=a^{\frac{1}{2}} \\ *\ \sqrt[3]{a}=a^{\frac{1}{3}} \end{array}\right.$ $(m,\ n\in\mathbb{N}^*)$

IX. CÔNG THỨC LOGARIT

Cho các số $a, b>0,\ a\neq 1$ và $m, n\in\mathbb{R}$. Ta có:

$\log_a b=\alpha\Leftrightarrow a^\alpha=b$	$\lg b=\log b=\log_{10} b$	$\ln b=\log_e b$
$\log_a 1=0$	$\log_a a=1$	$\log_a a^n=n$
$\log_{a^m} b=\frac{1}{m}\log_a b$	$\log_a b^n=n\log_a b$	$\log_{a^m} b^n=\frac{n}{m}\log_a b$
$\log_a(bc)=\log_a b+\log_a c$	$\log_a\left(\frac{b}{c}\right)=\log_a b-\log_a c$	$\begin{cases} a^{\log_a b}=b \\ a^{\log_b c}=c^{\log_b a} \end{cases}$
$\log_a b.\log_b c=\log_a c$	$\frac{\log_a c}{\log_a b}=\log_b c$	$\log_a b=\frac{1}{\log_b a}$

Công thức lãi kép

Nếu ta gởi tiền vào ngân hàng theo hình thức: **hàng tháng tiền lãi được cộng vào tiền gốc cũ để tạo ra tiền gốc mới** và cứ tính tiếp như thế, đây gọi là hình thức **lãi kép**.

Ta có: $\boxed{T=A(1+r)^n}$ *với A: tiền gởi ban đầu; r: lãi suất; n: kỳ hạn gởi; T: tổng số tiền nhận sau kỳ hạn n.* ***Lưu ý:*** *r và n phải khớp đơn vị; T bao gồm cả A, muốn* ***tính số tiền lời*** *ta lấy T – A.*

X. HÀM SỐ LŨY THỪA, MŨ VÀ LOGAGRIT

HÀM LŨY THỪA	HÀM SỐ MŨ	HÀM SỐ LOGARIT
Dạng: $\left\langle \begin{array}{l} y=x^\alpha \\ y=u^\alpha \end{array}\right.$ với u là đa thức đại số.	**Dạng:** $\left\langle \begin{array}{l} y=a^x \\ y=a^u \end{array}\right.$ với $\begin{cases} a>0 \\ a\neq 1 \end{cases}$. **Tập xác định:** $D=\mathbb{R}$.	**Dạng:** $\left\langle \begin{array}{l} y=\log_a x \\ y=\log_a u \end{array}\right.$ với $\begin{cases} a>0 \\ a\neq 1 \end{cases}$. **Đặc biệt:** $a=e\longrightarrow y=\ln x$; $a=10\longrightarrow y=\log x=\lg x$.

- **Tập xác định:**

  Nếu $\alpha \in \mathbb{Z}^+ \xrightarrow{ĐK} u \in \mathbb{R}$.

  Nếu $\alpha \in \mathbb{Z}^- \xrightarrow{ĐK} u \neq 0$.

  Nếu $\alpha \notin \mathbb{Z} \xrightarrow{ĐK} u > 0$.

- **Đạo hàm:**

  $\begin{cases} y = x^\alpha \longrightarrow y' = \alpha x^{\alpha-1} \\ y = u^\alpha \longrightarrow y' = \alpha u^{\alpha-1}.\boxed{u'} \end{cases}$

- **Đạo hàm:**

  $\begin{cases} y = a^x \longrightarrow y' = a^x \ln a \\ y = a^u \longrightarrow y' = a^x \ln a.\boxed{u'} \end{cases}.$

  Đặc biệt: $\begin{cases} (e^x)' = e^x \\ (e^u)' = e^u.\boxed{u'} \end{cases}.$

- **Sự biến thiên**: $y = a^x$.

  Nếu $\boxed{a > 1}$ thì hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$. Nếu $\boxed{0 < a < 1}$ thì hàm nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

- **Điều kiện xác định:** $u > 0$.
- **Đạo hàm:**

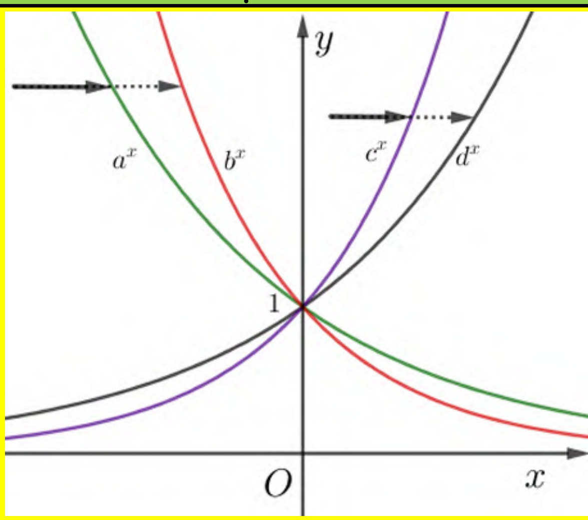
  $\begin{cases} y = \log_a x \longrightarrow y' = \dfrac{1}{x \ln a} \\ y = \log_a u \longrightarrow y' = \dfrac{\boxed{u'}}{u \ln a} \end{cases}.$

  Đặc biệt: $\begin{cases} (\ln x)' = \dfrac{1}{x} \\ (\ln u)' = \dfrac{\boxed{u'}}{u} \end{cases}.$

- **Sự biến thiên:** $y = \log_a x$. Nếu $\boxed{a > 1}$: hàm đồng biến trên $(0;+\infty)$. Nếu $\boxed{0 < a < 1}$: hàm nghịch biến trên $(0;+\infty)$.

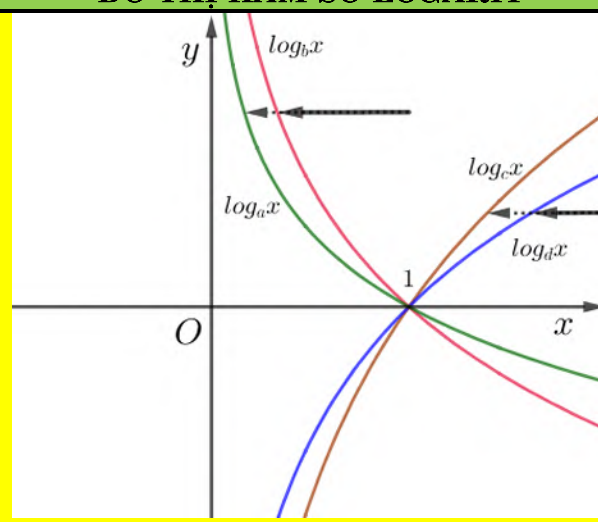
ĐỒ THỊ HÀM MŨ VÀ HÀM LOGARIT

ĐỒ THỊ HÀM SỐ MŨ



- Ta thấy: $a^x \downarrow \Rightarrow 0 < a < 1$; $b^x \downarrow \Rightarrow 0 < b < 1$.
- Ta thấy: $c^x \uparrow \Rightarrow c > 1$; $d^x \uparrow \Rightarrow d > 1$.
- ***So sánh a với b:*** Đứng trên cao, bắn mũi tên từ **trái sang phải**, trúng a^x trước nên $a > b$.
- ***So sánh c với d:*** Đứng trên cao, bắn mũi tên từ **trái sang phải**, trúng c^x trước nên $c > d$.
- Vậy $0 < b < a < 1 < d < c$.

ĐỒ THỊ HÀM SỐ LOGARIT



- Ta thấy: $\log_a x \downarrow \Rightarrow 0 < a < 1$; $\log_b x \downarrow \Rightarrow 0 < b < 1$.
- Ta thấy: $\log_c x \uparrow \Rightarrow c > 1$; $\log_d x \uparrow \Rightarrow d > 1$.
- ***So sánh a với b:*** Đứng trên cao, bắn mũi tên từ **phải sang trái**, trúng $\log_b x$ trước: $b > a$.
- ***So sánh c với d:*** Đứng trên cao, bắn mũi tên từ **phải sang trái**, trúng $\log_d x$ trước: $d > c$.
- Vậy $0 < a < b < 1 < c < d$.

XI. PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ LOGAGRIT

Phương trình mũ	Phương trình Logarit
▪ Dạng cơ bản: $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$	▪ Dạng cơ bản: $\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x) > 0$
▪ Dạng logarit hóa: $\left[\begin{array}{l} a^{f(x)} = b \Leftrightarrow f(x) = \log_a b \\ a^{f(x)} = b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x).\log_a b \end{array}\right. \quad (a, b > 0,\ a \neq 1)$	▪ Dạng mũ hóa: $\log_a f(x) = b \Leftrightarrow f(x) = a^b$ (không cần điều kiện)

XII. BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ LOGAGRIT

Bất Phương trình mũ	Bất Phương trình Logarit
▪ Dạng cơ bản: $\left[\begin{array}{l} * \ a^{f(x)} \geq a^{g(x)} \overset{a>1}{\Leftrightarrow} f(x) \geq g(x) \\ * \ a^{f(x)} \geq a^{g(x)} \overset{0<a<1}{\Leftrightarrow} f(x) \leq g(x) \end{array}\right.$	▪ Dạng cơ bản: $\left[\begin{array}{l} * \ \log_a f(x) \geq \log_a g(x) \overset{a>1}{\Leftrightarrow} f(x) \geq g(x) > 0 \\ * \ \log_a f(x) \geq \log_a g(x) \overset{0<a<1}{\Leftrightarrow} 0 < f(x) \leq g(x) \end{array}\right.$

XIII. CÔNG THỨC NGUYÊN HÀM

$$\int f(x)dx = F(x) + C \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$$

- $\int k.f(x)dx = k\int f(x)dx$
- $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$
- $\int f'(x)dx = f(x) + C$

1) $\int kdx = kx + C$
- $\int 2dx = 2x + C$
- $\int (-3)dx = -3x + C$

2) $\int x^\alpha dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \xrightarrow{MR} \int (ax+b)^\alpha dx = \dfrac{1}{a}.\dfrac{(ax+b)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$
- $\int x^3 dx = \dfrac{x^4}{4} + C$
- $\int \sqrt{x}dx = \int x^{\frac{1}{2}}dx = \dfrac{x^{\frac{3}{2}}}{3/2} + C = \dfrac{2}{3}\sqrt{x^3} + C$
- $\int (1-2x)^{10} dx = \dfrac{1}{-2}.\dfrac{(1-2x)^{11}}{11} + C = \dfrac{(1-2x)^{11}}{-22} + C$

3) $\int \dfrac{1}{x}dx = \ln|x| + C \xrightarrow{MR} \int \dfrac{1}{ax+b}dx = \dfrac{1}{a}\ln|ax+b| + C$
- $\int \dfrac{1}{1-3x}dx = \dfrac{1}{-3}\ln|1-3x| + C$

4) $\int \dfrac{1}{x^2}dx = -\dfrac{1}{x} + C \xrightarrow{MR} \int \dfrac{1}{(ax+b)^2}dx = \dfrac{1}{a}.\dfrac{-1}{ax+b} + C$
- $\int \dfrac{1}{(2x-3)^2}dx = \dfrac{1}{2}.\dfrac{-1}{2x-3} + C = -\dfrac{1}{4x-6} + C$
- $\int \left(x^2 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} - 10\right)dx = \dfrac{x^3}{3} + \ln|x| - \dfrac{1}{x} - 10x + C$
- $\int \dfrac{x^5+1}{x}dx = \int \left(x^4 + \dfrac{1}{x}\right)dx = \dfrac{x^5}{5} + \ln|x| + C$

5) $\int e^x dx = e^x + C \xrightarrow{MR} \int e^{ax+b}dx = \dfrac{1}{a}e^{ax+b} + C$
- $\int e^{-x}dx = \dfrac{1}{-1}e^{-x} + C = -e^{-x} + C$

6) $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C \xrightarrow{MR} \int a^{bx+c}dx = \dfrac{1}{b}.\dfrac{a^{bx+c}}{\ln a} + C$
- $\int 5^x dx = \dfrac{5^x}{\ln 5} + C$
- $\int 3^{2x}dx = \int 9^x dx = \dfrac{9^x}{\ln 9} + C$
- $\int 3^{2x+5}dx = \dfrac{1}{2}.\dfrac{3^{2x+5}}{\ln 3} + C = \dfrac{3^{2x+5}}{2\ln 3} + C$
- $\int \left(e^{x-1} - 2\right)e^x dx = \int \left(e^{2x-1} - 2e^x\right)dx = \dfrac{1}{2}e^{2x-1} - 2e^x + C$
- $\int 2^x.3^{x-1}dx = \int 2^x.3^x.\dfrac{1}{3}dx = \dfrac{1}{3}\int 6^x dx = \dfrac{6^x}{3\ln 6} + C$

7) $\int \sin xdx = -\cos x + C \xrightarrow{MR} \int \sin(ax+b)dx = -\dfrac{1}{a}\cos(ax+b) + C$
- $\int \sin\underbrace{\left(4x - \dfrac{\pi}{2}\right)}_{a=4;\ b=-\frac{\pi}{2}}dx = -\dfrac{1}{4}\cos\left(4x - \dfrac{\pi}{2}\right) + C$

8) $\int \cos xdx = \sin x + C \xrightarrow{MR} \int \cos(ax+b)dx = \dfrac{1}{a}\sin(ax+b) + C$
- $\int \cos\underbrace{\left(\dfrac{\pi}{3} - x\right)}_{a=-1;\ b=\frac{\pi}{3}}dx = \dfrac{1}{-1}\sin\left(\dfrac{\pi}{3} - x\right) + C = -\sin\left(\dfrac{\pi}{3} - x\right) + C$
- $\int (3\sin x - 2\cos x)dx = -3\cos x - 2\sin x + C$
- $\int \sin^2 xdx = \int \dfrac{1}{2}(1 - \cos 2x)dx = \dfrac{1}{2}\left(x - \dfrac{1}{2}\sin 2x\right) + C$

9) $\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \int \left(1+\tan^2 x\right)dx = \tan x + C$

$\xrightarrow{MR} \int \frac{1}{\cos^2(ax+b)}dx = \frac{1}{a}\tan(ax+b)+C$

$\xrightarrow{MR} \int \left[1+\tan^2(ax+b)\right]dx = \frac{1}{a}\tan(ax+b)+C$

- $\int \frac{1-2\cos^2 x}{\cos^2 x}dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x}-2\right)dx = \tan x - 2x + C$
- $\int \frac{1}{\cos^2 3x}dx = \frac{1}{3}\tan 3x + C$
- $\int \left[1+\tan^2\underbrace{(\pi-2x)}_{a=-2;\, b=\pi}\right]dx = \frac{1}{-2}\tan(\pi-2x)+C$

10) $\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = \int \left(1+\cot^2 x\right)dx = -\cot x + C$

$\xrightarrow{MR} \int \frac{1}{\sin^2(ax+b)}dx = -\frac{1}{a}\cot(ax+b)+C$

$\xrightarrow{MR} \int \left[1+\cot^2(ax+b)\right]dx = -\frac{1}{a}\cot(ax+b)+C$

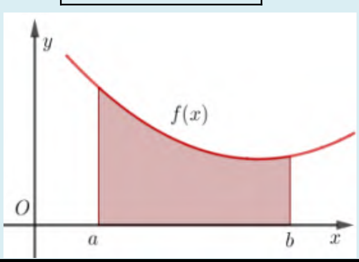
- $\int \frac{x\sin^2 x+1}{\sin^2 x}dx = \int \left(x+\frac{1}{\sin^2 x}\right)dx = \frac{x^2}{2}-\cot x + C$
- $\int \frac{1}{\sin^2 8x}dx = -\frac{1}{8}\cot 8x + C$
- $\int \left[1+\cot^2 3x\right]dx = -\frac{1}{3}\cot 3x + C$

- $\int \frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}dx = \int \frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{1}{\sin^2 x}\right)dx = \tan x - \cot x + C$

XIV. DIỆN TÍCH VÀ THỂ TÍCH

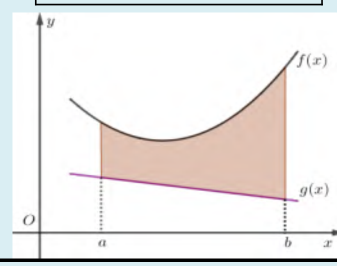
- Hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$, trục Ox, $x=a,\ x=b$ thì có diện tích:

$$\boxed{S=\int_a^b |f(x)|dx}$$



- Hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$, $y=g(x)$, $x=a,\ x=b$ thì có diện tích:

$$\boxed{S=\int_a^b |f(x)-g(x)|dx}$$



- Khi xoay hình phẳng $\begin{cases} y=f(x) \\ x=a,\ x=b \end{cases}$ quanh Ox, ta được khối trụ tròn có thể tích $\boxed{V=\pi\int_a^b f^2(x)dx}$

- Khi xoay hình phẳng $\begin{cases} y=f(x) \\ y=g(x) \\ x=a,\ x=b \end{cases}$ quanh Ox, được khối trụ tròn có thể tích $\boxed{V=\pi\int_a^b \left|f^2(x)-g^2(x)\right|dx}$.

- Xét hình khối được giới hạn bởi hai mặt phẳng $x=a,\ x=b$. Khi cắt khối này ta được thiết diện có diện tích $S(x)$ (là hàm liên tục trên $[a;b]$). Thể tích khối này trên $[a;b]$ là: $\boxed{V=\int_a^b S(x)dx}$.

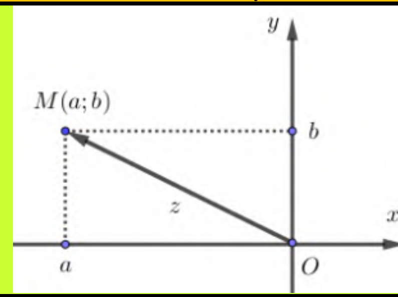
XV. CÔNG THỨC CHUYỂN ĐỘNG

Xét hàm quảng đường $S(t)$, hàm vận tốc $v(t)$ và hàm gia tốc $a(t)$. Ba hàm này sẽ biến thiên theo t.

- $S(t)=\int v(t)dt \Leftrightarrow v(t)=S'(t)$
- $v(t)=\int a(t)dt \Leftrightarrow a(t)=v'(t)$

XVI. SỐ PHỨC VÀ CÁC YẾU TỐ LIÊN QUAN

Số phức có dạng: $z = a + bi$ với $\begin{cases} a, b \in \mathbb{R} \\ i^2 = -1 \end{cases}$ (i: là đơn vị ảo). Ký hiệu tập số phức: $\mathbb{C}$.

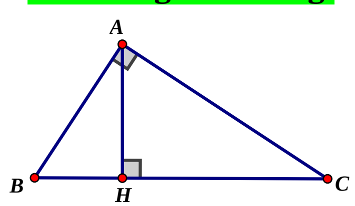
Thành phần	Hình học	Minh họa
▪ **Phần thực:** a. Nếu $a = 0$ thì $z = bi$ được gọi là **số thuần ảo**. ▪ **Phần ảo**: b. Nếu $b = 0$ thì $z = a$ là **số thực**. ▪ Khi $a = b = 0$ thì $z = 0$ vừa là số thuần ảo vừa là số thực.	▪ Điểm $M(a;b)$ biểu diễn cho z trên hệ trục Oxy. ▪ **Mô-đun:** $\lvert z\rvert = OM = \sqrt{a^2 + b^2}$.	

Số phức liên hợp – Hai số phức bằng nhau	Căn bậc hai	Phương trình bậc hai
Cho $z = a + bi$ và $z' = a' + b'i$ Khi đó: ▪ **Số phức liên hợp** của z là $\bar{z} = a - bi$. ▪ $z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$. ▪ $z = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$.	▪ Căn bậc hai của $a > 0$ là $\pm\sqrt{a}$. ▪ Căn bậc hai của $a < 0$ là $\pm i\sqrt{-a}$. ▪ Căn bậc hai của số phức $z = a + bi$ là hai số phức dạng $w = x + yi$ với $\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}$.	▪ Phương trình $z^2 = a > 0$ có hai nghiệm phức $z = \pm\sqrt{a}$. ▪ Phương trình $z^2 = a < 0$ có hai nghiệm phức $z = \pm i\sqrt{-a}$. ▪ Phương trình $az^2 + bz + c = 0$ $(a \neq 0)$ với $\Delta < 0$ sẽ có hai nghiệm phức là: $z_{1,2} = \dfrac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

XVII. KHỐI ĐA DIỆN VÀ THỂ TÍCH CỦA CHÚNG

A – MỘT SỐ HÌNH PHẲNG CƠ BẢN:

1. Tam giác vuông:



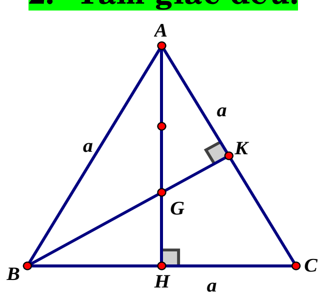
▪ $AB^2 + AC^2 \overset{Pitago}{=} BC^2$ ▪ $AB^2 = BH.BC$

▪ $AC^2 = CH.BC$ ▪ $AH^2 = BH.CH$

▪ $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2} \Rightarrow \boxed{AH = \dfrac{AB.AC}{\sqrt{AB^2 + AC^2}}}$

▪ $\sin B = \dfrac{AC}{BC}$ (đối/huyền) ▪ $\cos B = \dfrac{AB}{BC}$ (kề/huyền) ▪ $\tan B = \dfrac{AC}{AB}$ (đối/kề) ▪ $\cot B = \dfrac{AB}{AC}$ (kề/đối)

2. Tam giác đều:



Giả sử tam giác ABC đều có cạnh a; trọng tâm G; các đường cao (trùng với trung tuyến) gồm AH, BK.

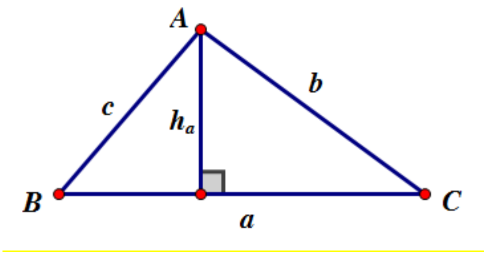
▪ Đường cao: $AH = BK = \dfrac{(cạnh) \times \sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

▪ $AG = \dfrac{2}{3}AH = \dfrac{2}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$; $GH = \dfrac{1}{3}AH = \dfrac{1}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

▪ Diện tích: $S_{\Delta ABC} = \dfrac{(cạnh)^2 \times \sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

3. Tam giác thường:

Giả sử tam giác ABC có $a = BC, b = AC, c = AB$; các đường cao

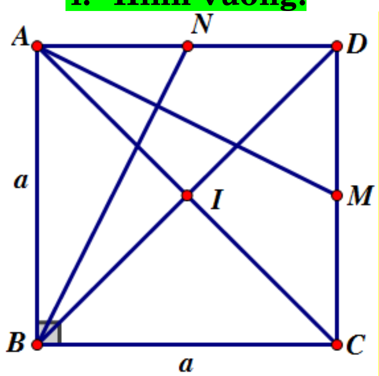


h_a, h_b, h_c lần lượt ứng với cạnh a, b, c. Ký hiệu R, r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp Δ.

- Định lí Sin: $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$.
- Định lí Cô-sin: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A$;
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac.\cos B;\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos C.$$

- Diện tích: $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}h_a.a = \dfrac{1}{2}h_b.b = \dfrac{1}{2}h_c.c$; $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}ab.\sin C = \dfrac{1}{2}ac.\sin B = \dfrac{1}{2}bc.\sin A$;
$$S_{\Delta ABC} = \frac{abc}{4R} = pr\ ;\ \underbrace{S_{\Delta ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-b)}}_{\text{Công thức Hê-Rông}}\ \text{với } p = \frac{a+b+c}{2}\ \text{(nửa chu vi).}$$

4. Hình vuông:



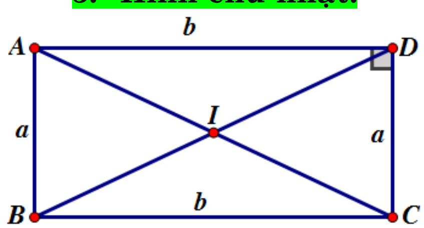
Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh a; hai điểm M, N lần lượt là trung điểm của CD, AD; I là tâm hình vuông.

- Đường chéo: $\begin{cases} AC \perp BD \\ AC = BD = (cạnh) \times \sqrt{2} = a\sqrt{2} \end{cases}$.

$IA = IB = IC = ID = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ nên I là tâm đường tròn đi qua bốn đỉnh hình vuông.

- Diện tích: $S_{ABCD} = (cạnh)^2 = a^2$; chu vi: $p = 4a$.
- Vì $\Delta ABN = \Delta ADM$, ta chứng minh được: $AM \perp BN$.

5. Hình chữ nhật:



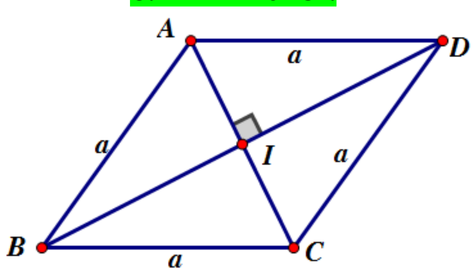
Cho hình chữ nhật $ABCD$ tâm I có $AB = a, AD = b$.

- Đường chéo: $AC = BD = \sqrt{a^2 + b^2}$.

$IA = IB = IC = ID = \dfrac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$ nên I là tâm đường tròn đi qua bốn điểm A, B, C, D.

- Diện tích: $S_{ABCD} = a.b$; chu vi: $p = 2(a + b)$.

6. Hình thoi:



Cho hình thoi $ABCD$ có tâm I, cạnh bằng a.

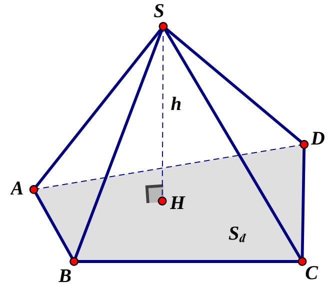
- Đường chéo: $AC \perp BD$; $AC = 2AI = 2AB\sin\widehat{ABI} = 2a.\sin\widehat{ABI}$.
- Diện tích: $S_{ABCD} = \dfrac{1}{2}AC.BD$; $S_{ABCD} = 2S_{\Delta ABC} = 2S_{\Delta ACD} = 2S_{\Delta ABD}$.

<u>Đặc biệt:</u> Nếu hình thoi có góc $\widehat{B} = \widehat{D} = 60^0$ ($\widehat{A} = \widehat{C} = 120^0$) thì ta chia hình thoi ra làm hai tam giác đều: $\Delta ABC = \Delta ACD$. $AC = a$ và

$S_{\Delta ABC} = S_{\Delta ACD} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$; $S_{ABCD} = 2S_{\Delta ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

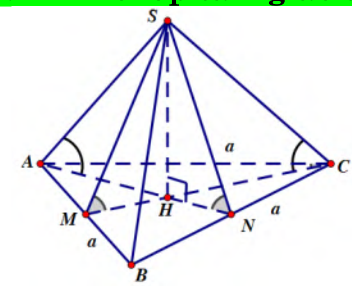
B – THỂ TÍCH KHỐI CHÓP:

7. Hình chóp:



$$\boxed{V = \frac{1}{3}h.S_đ}$$

7.1. Hình chóp tam giác đều



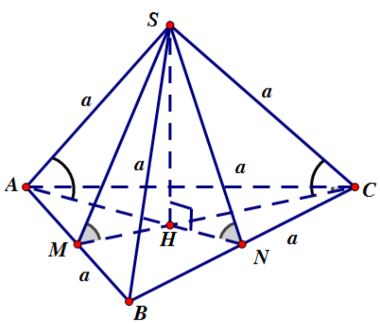
- Tất cả cạnh bên bằng nhau.
- Đáy là tam giác đều cạnh a.
- $SH \perp (ABC)$ với H là trọng tâm (cũng là trực tam) ΔABC.
- $\begin{cases} S_đ = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \\ SH = h \end{cases} \xrightarrow{\text{Thể tích}} \boxed{V = \dfrac{1}{3}h.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}}$

☆**Góc giữa cạnh bên và mặt đáy:** $\left(\widehat{SA,(ABC)}\right) = \widehat{SAH} = \left(\widehat{SC,(ABC)}\right) = \widehat{SCH}$.

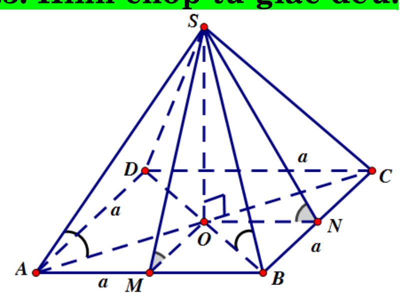
☆**Góc giữa mặt bên và mặt đáy:** $\left(\widehat{(SAB),(ABC)}\right) = \widehat{SMH} = \left(\widehat{(SBC),(ABC)}\right) = \widehat{SNH}$.

7.2. Tứ diện đều:

- Đây cũng là hình chóp tam giác đều, đặc biệt là cạnh bên bằng cạnh đáy. Thể tích: $\boxed{V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}}$.



7.3. Hình chóp tứ giác đều:

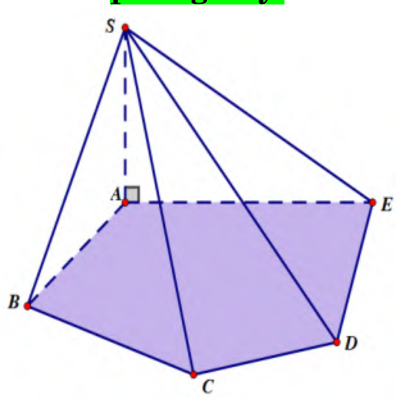


- Tất cả cạnh bên bằng nhau.
- Đáy là hình vuông cạnh a.
- $SO \perp (ABCD)$ với O là tâm hình vuông $ABCD$.
- $\begin{cases} S_đ = a^2 \\ SO = h \end{cases} \xrightarrow{\text{Thể tích}} \boxed{V = \dfrac{1}{3}h.a^2}$.

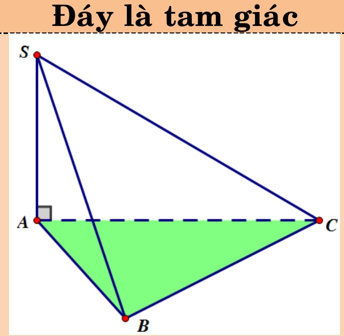
☆**Góc giữa cạnh bên và mặt đáy:** $\left(\widehat{SA,(ABCD)}\right) = \widehat{SAO} = \left(\widehat{SB,(ABCD)}\right) = \widehat{SBO}$.

☆**Góc giữa mặt bên và mặt đáy:** $\left(\widehat{(SAB),(ABCD)}\right) = \widehat{SMO} = \left(\widehat{(SBC),(ABCD)}\right) = \widehat{SNO}$.

7.4. Hình chóp có cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy.

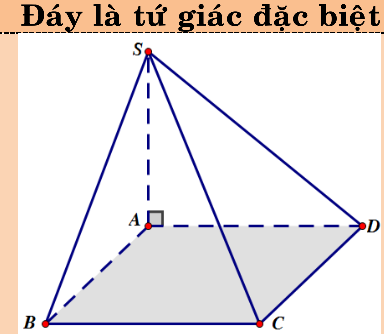


Đáy là tam giác



- $\begin{cases} h = SA \\ S_đ = S_{\Delta ABC} \end{cases} \xrightarrow{\text{Thể tích}} V = \dfrac{1}{3}SA.S_{\Delta ABC}$.
- Góc giữa cạnh bên và mặt đáy: $\begin{cases} \left(\widehat{SB,(ABC)}\right) = \widehat{SBA} \\ \left(\widehat{SC,(ABC)}\right) = \widehat{SCA} \end{cases}$.

Đáy là tứ giác đặc biệt



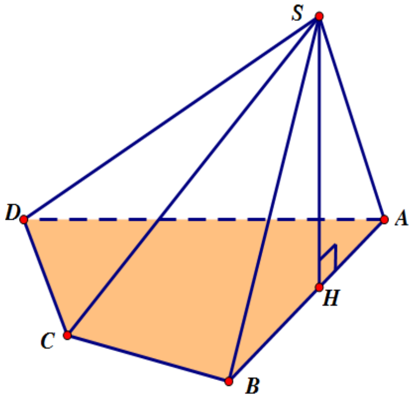
- $\begin{cases} h = SA \\ S_đ = S_{ABCD} \end{cases} \xrightarrow{\text{Thể tích}} V = \dfrac{1}{3}SA.S_{ABCD}$.
- Góc giữa cạnh bên và mặt đáy: $\begin{cases} \left(\widehat{SB,(ABCD)}\right) = \widehat{SBA} \\ \left(\widehat{SC,(ABCD)}\right) = \widehat{SCA} \end{cases}$.

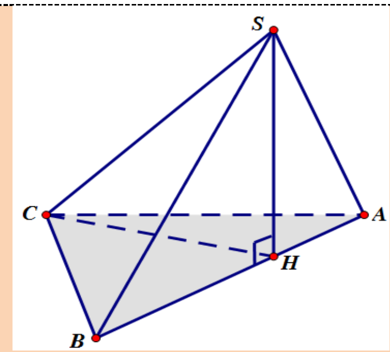
7.5. Hình chóp có mặt bên

Đáy là tam giác

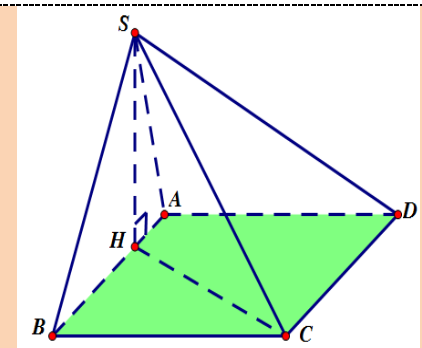
Đáy là tứ giác đặc biệt

(SAB) vuông góc với mặt phẳng đáy.





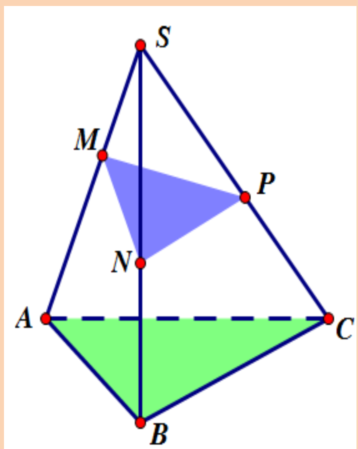
- Đường cao $h = SH$ cũng là đường cao của ΔSAB.
- Góc giữa cạnh bên và mặt đáy:
$$\begin{cases} \widehat{(SA,(ABC))} = \widehat{SAH} \\ \widehat{(SC,(ABC))} = \widehat{SCH} \end{cases}.$$



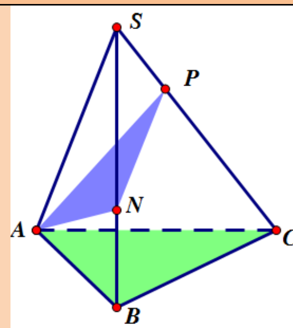
- Đường cao $h = SH$ cũng là đường cao của ΔSAB.
- Góc giữa cạnh bên và mặt đáy:
$$\begin{cases} \widehat{(SA,(ABCD))} = \widehat{SAH} \\ \widehat{(SC,(ABCD))} = \widehat{SCH} \end{cases}.$$

TỈ SỐ THỂ TÍCH

Cho hình chóp có đáy là tam giác ABC. Các điểm M, N, P nằm trên cạnh SA, SB, SC. Ta có:
$$\boxed{\frac{V_{S.MNP}}{V_{S.ABC}} = \frac{SM}{SA}\cdot\frac{SN}{SB}\cdot\frac{SP}{SC}}.$$

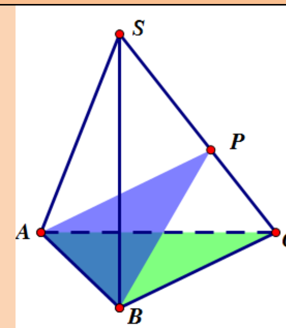


Đặc biệt: $M \equiv A$



$$\boxed{\frac{V_{S.ANP}}{V_{S.ABC}} = \frac{SN}{SB}\cdot\frac{SP}{SC}}$$

Đặc biệt $M \equiv A, N \equiv B$



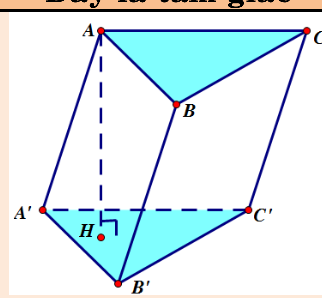
$$\boxed{\frac{V_{S.ABP}}{V_{S.ABC}} = \frac{SP}{SC}}$$

C – THỂ TÍCH KHỐI LĂNG TRỤ:

1. Hình lăng trụ thường:

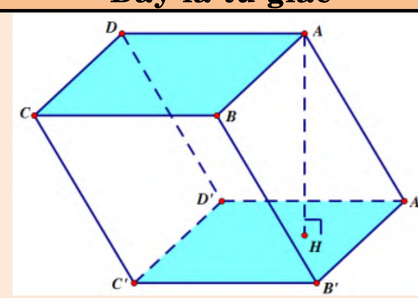
- Hai đáy là hai hình giống nhau và nằm trong hai mặt phẳng song song.
- Các cạnh bên song song và bằng nhau. Các mặt bên là các hình bình hành.
- Thể tích: $\boxed{V = h.S_đ}$.

Đáy là tam giác



$$\boxed{V = AH.S_{\Delta ABC} = AH.S_{\Delta A'B'C'}}$$

Đáy là tứ giác



$$\boxed{V = AH.S_{ABCD} = AH.S_{A'B'C'D'}}$$

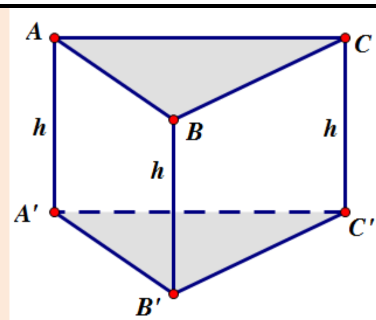
2. Hình lăng trụ đứng:

Đáy là tam giác

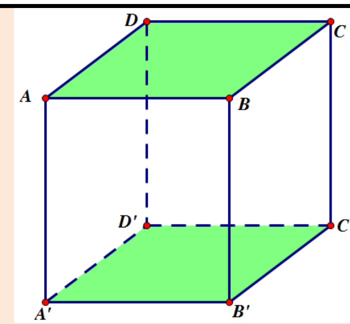
Đáy là tứ giác

- Các cạnh bên cùng vuông góc với hai mặt đáy nên mỗi cạnh bên cũng là đường cao của lăng trụ.

☞ **Lăng trụ tam giác đều:** Là **lăng trụ đứng** và có hai đáy là hai **tam giác đều** bằng nhau.



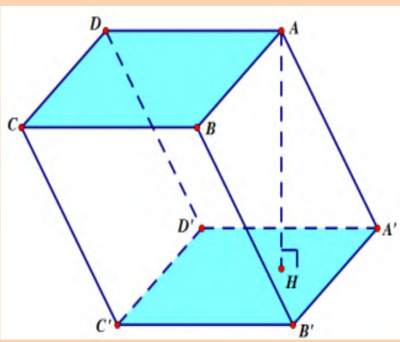
- Thể tích: $\boxed{V = h.S_đ}$ với $h = AA' = BB' = CC'$.



- Thể tích: $\boxed{V = h.S_đ}$ với $h = AA' = BB' = CC' = DD'$.

3. Hình hộp:

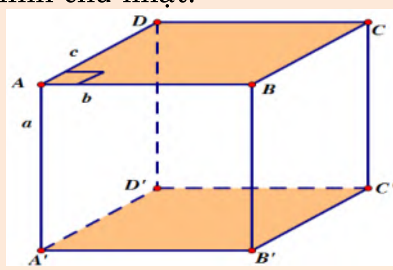
- Là lăng trụ có tất cả các mặt là hình bình hành.



- Thể tích: $\boxed{V = h.S_đ}$.

3.1 Hình hộp chữ nhật:

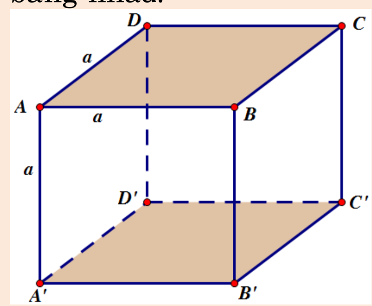
- Là lăng trụ đứng có đáy là hình chữ nhật.



- $\boxed{V = abc}$ với a, b, c là ba kích thước khác nhau của hình hộp chữ nhật.

3.2. Hình lập phương:

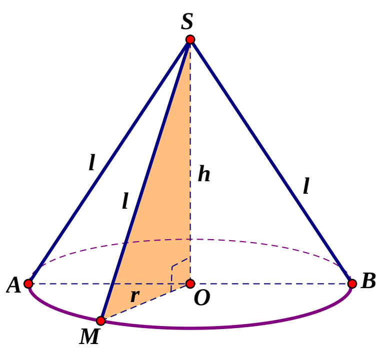
- Là hình hộp chữ nhật có tất cả các cạnh bằng nhau.



- $\boxed{V = a^3}$ với a là cạnh của hình lập phương.

XVIII. MẶT TRỤ – MẶT NÓN – MẶT CẦU

MẶT NÓN



☞**Hình thành:** Quay Δ vuông SOM quanh trục SO, ta được mặt nón như hình bên với: $\begin{cases} h = SO \\ r = OM \end{cases}$.

Các yếu tố mặt nón:

- **Đường cao**: $\boxed{h = SO}$. (SO cũng được gọi là **trục** của hình nón).
- **Bán kính đáy**: $\boxed{r = OA = OB = OM}$.
- **Đường sinh**: $\boxed{l = SA = SB = SM}$.
- **Góc ở đỉnh**: $\boxed{\widehat{ASB}}$.
- **Thiết diện qua trục**: ΔSAB cân tại S.
- **Góc giữa đường sinh và mặt đáy**: $\boxed{\widehat{SAO} = \widehat{SBO} = \widehat{SMO}}$.

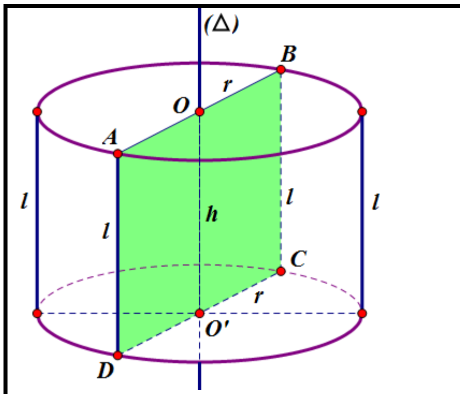
Một số công thức:

- **Chu vi đáy**: $\boxed{p = 2\pi r}$.
- **Diện tích đáy**: $\boxed{S_đ = \pi r^2}$.
- **Thể tích**: $\boxed{V = \frac{1}{3}h.S_đ = \frac{1}{3}h.\pi r^2}$.

(liên tưởng khối chóp).

- **Diện tích xung quanh**: $\boxed{S_{xq} = \pi rl}$.
- **Diện tích toàn phần**: $\boxed{S_{tp} = S_{xq} + S_đ = \pi rl + \pi r^2}$.

MẶT TRỤ	Các yếu tố mặt trụ:	Một số công thức:



☞**Hình thành:** Quay hình chữ nhật $ABCD$ quanh đường trung bình OO', ta có mặt trụ như hình bên.

- **Đường cao**: $\boxed{h = OO'}$.
- **Đường sinh**: $\boxed{l = AD = BC}$.

  Ta có: $\boxed{l = h}$.
- **Bán kính đáy**:

  $\boxed{r = OA = OB = O'C = O'D}$.
- **Trục** (Δ) là đường thẳng đi qua hai điểm O, O'.
- **Thiết diện qua trục**: Là hình chữ nhật $ABCD$.

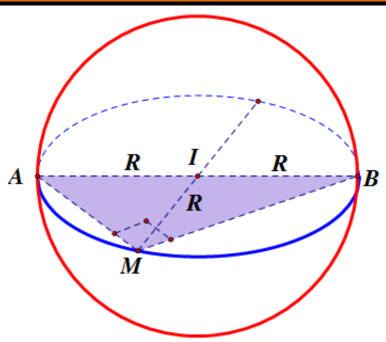
- **Chu vi đáy**: $\boxed{p = 2\pi r}$.
- **Diện tích đáy**: $\boxed{S_{đ} = \pi r^2}$.
- **Thể tích khối trụ**:

  $\boxed{V = h.S_{đ} = h.\pi r^2}$.
- **Diện tích xung quanh**:

  $\boxed{S_{xq} = 2\pi r.h}$.
- **Diện tích toàn phần**:

  $\boxed{S_{tp} = S_{xq} + 2S_{đ} = 2\pi r.h + 2\pi r^2}$.

MẶT CẦU

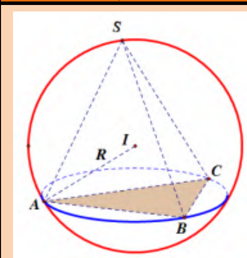


☞**Hình thành:** Quay đường tròn tâm I, bán kính $R = \dfrac{AB}{2}$ quanh trục AB, ta có mặt cầu như hình vẽ.

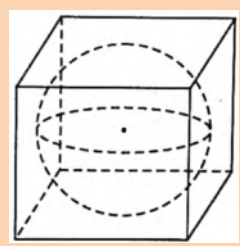
Một số công thức:

- **Tâm** I, **bán kính** $R = IA = IB = IM$.
- **Đường kính** $AB = 2R$.
- **Thiết diện qua tâm** mặt cầu: Là đường tròn tâm I, bán kính R.
- **Diện tích** mặt cầu: $\boxed{S = 4\pi R^2}$
- **Thể tích** khối cầu: $\boxed{V = \dfrac{4\pi R^3}{3}}$

Mặt cầu ngoại tiếp đa diện
Mặt cầu nội tiếp đa diện



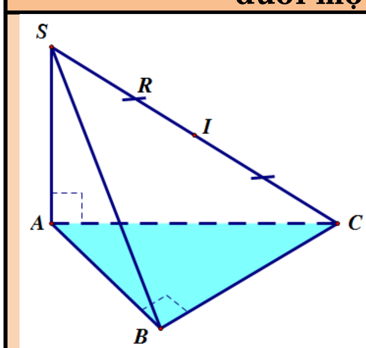
- **Mặt cầu ngoại tiếp đa diện** là mặt cầu đi qua tất cả đỉnh của đa diện đó.



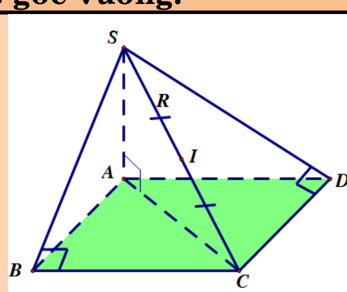
- **Mặt cầu nội tiếp** đa diện là mặt cầu tiếp xúc với tất cả các mặt của đa diện đó.

CÁCH TÌM BÁN KÍNH MẶT CẦU NGOẠI TIẾP HÌNH CHÓP THƯỜNG GẶP

1. Hình chóp có các đỉnh nhìn một cạnh dưới một góc vuông.

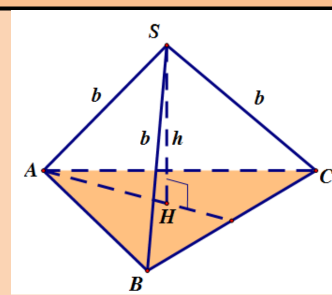


- Xét hình chóp có $SA \perp (ABC)$ và $\widehat{ABC} = 90^0$.

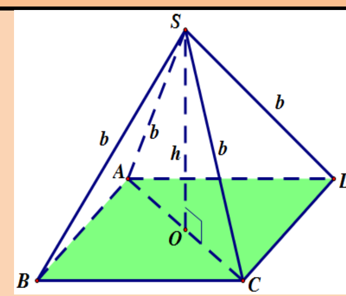


- Xét hình chóp có $SA \perp (ABCD)$ và $ABCD$ là hình chữ nhật hoặc hình vuông.
- Ta có: $\widehat{SAC} = \widehat{SBC}$

2. Hình chóp đều.



- Xét hình chóp tam giác đều có cạnh bên bằng b và đường cao $SH = h$.
- Bán kính mặt cầu



- Xét hình chóp tứ giác đều có cạnh bên bằng b và chiều cao $SO = h$
- Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp trên là

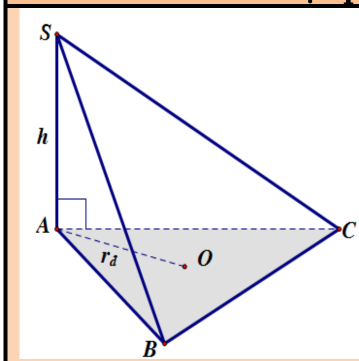
- Ta có $\widehat{SAC} = \widehat{SBC} = 90^0$ nên mặt cầu ngoại tiếp hình chóp có tâm I là trung điểm SC, bán kính $\boxed{R = \frac{SC}{2}}$.

$= \widehat{SDC} = 90^0$ Suy ra mặt cầu ngoại tiếp hình chóp có tâm I là trung điểm SC, bán kính $\boxed{R = \frac{SC}{2}}$.

ngoại tiếp hình chóp trên là $\boxed{R = \frac{b^2}{2h}}$.

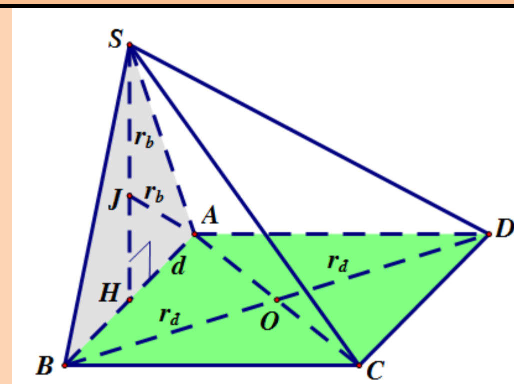
$\boxed{R = \frac{b^2}{2h}}$.

3. Hình chóp có cạnh bên vuông góc với mặt phẳng đáy.



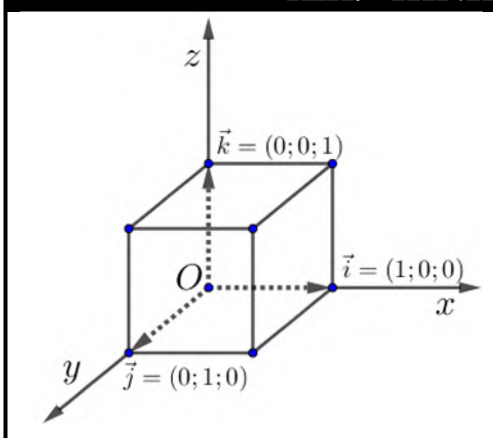
- Xét hình chóp có $SA \perp$ (đáy) và $SA = h$; bán kính đường tròn ngoại tiếp của đáy là r_d.
- Khi đó mặt cầu ngoại tiếp hình chóp có bán kính $\boxed{R = \sqrt{\left(\frac{h}{2}\right)^2 + r_d^{\ 2}}}$.
- Nếu đáy là tam giác đều cạnh a thì $r_d = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.
- Nếu đáy là hình vuông cạnh a thì $r_d = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.
- Nếu đáy là hình chữ nhật cạnh a, b thì $r_d = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}$.

4. Hình chóp có mặt bên vuông góc với mặt đáy.



- Xét hình chóp có mặt bên $(SAB) \perp$(đáy), bán kính ngoại tiếp đáy là r_d, bán kính ngoại tiếp ΔSAB là r_b, $d = AB = (SAB) \cap$ (đáy).
- Khi đó bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp là $\boxed{R = \sqrt{r_d^{\ 2} + r_b^{\ 2} - \frac{d^2}{4}}}$.

XIX. HÌNH HỌC GIẢI TÍCH TRONG KHÔNG GIAN



1. Hệ trục tọa độ *Oxyz*:

- Hệ trục gồm ba trục Ox, Oy, Oz đôi một vuông góc nhau.
- Trục Ox: **trục hoành**, có vectơ đơn vị $\vec{i} = (1;0;0)$.
- Trục Oy: **trục tung**, có vectơ đơn vị $\vec{j} = (0;1;0)$.
- Trục Oz: **trục cao**, có vectơ đơn vị $\vec{k} = (0;0;1)$.
- Điểm $O(0;0;0)$ là **gốc tọa độ**.

2. Tọa độ vectơ: Vectơ $\boxed{\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \Leftrightarrow \vec{u} = (x;y;z)}$.

Cho $\vec{a} = (a_1;a_2;a_3)$, $\vec{b} = (b_1;b_2;b_3)$. Ta có:

- $\vec{a} \pm \vec{b} = (a_1 \pm b_1; a_2 \pm b_2; a_3 \pm b_3)$
- $k\vec{a} = (ka_1; ka_2; ka_3)$
- $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ a_3 = b_3 \end{cases}$
- $\vec{a}$ cùng phương $\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} = k\vec{b}$ $(k \in R)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = kb_1 \\ a_2 = kb_2 \\ a_3 = kb_3 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$, $(b_1, b_2, b_3 \neq 0)$.

- $\vec{a}.\vec{b} = a_1.b_1 + a_2.b_2 + a_3.b_3$
- $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_2^2}$
- $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$
- $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b} = 0 \Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$
- $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|} = \dfrac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$

3. Tọa độ điểm: $\boxed{M(x;y;z) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = (x;y;z)}$. Cho $A(x_A;y_A;z_A)$, $B(x_B;y_B;z_B)$, $C(x_C;y_C;z_C)$, ta có:

- $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$
- $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$
- Toạ độ trung điểm M của đoạn thẳng AB: $M\left(\dfrac{x_A + x_B}{2}; \dfrac{y_A + y_B}{2}; \dfrac{z_A + z_B}{2}\right)$.
- Toạ độ trọng tâm G của tam giác ABC: $G\left(\dfrac{x_A + x_B + x_C}{3}; \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3}; \dfrac{z_A + z_B + z_C}{3}\right)$.

QUY TẮC CHIẾU ĐẶC BIỆT

Chiếu điểm trên trục tọa độ

- Điểm $M(x_M;y_M;z_M) \xrightarrow[(\text{Giữ nguyên } x)]{\text{Chiếu vào } Ox} M_1(x_M;0;0)$
- Điểm $M(x_M;y_M;z_M) \xrightarrow[(\text{Giữ nguyên } y)]{\text{Chiếu vào } Oy} M_2(0;y_M;0)$
- Điểm $M(x_M;y_M;z_M) \xrightarrow[(\text{Giữ nguyên } z)]{\text{Chiếu vào } Oz} M_3(0;0;z_M)$

Chiếu điểm trên mặt phẳng tọa độ

- Điểm $M(x_M;y_M;z_M) \xrightarrow[(\text{Giữ nguyên } x, y)]{\text{Chiếu vào } Oxy} M_1(x_M;y_M;0)$
- Điểm $M(x_M;y_M;z_M) \xrightarrow[(\text{Giữ nguyên } y, z)]{\text{Chiếu vào } Oyz} M_2(0;y_M;z_M)$
- Điểm $M(x_M;y_M;z_M) \xrightarrow[(\text{Giữ nguyên } x, z)]{\text{Chiếu vào } Oxz} M_3(x_M;0;z_M)$

Đối xứng điểm qua trục tọa độ

- $M(x_M;y_M;z_M) \xrightarrow[(\text{Giữ nguyên } x;\text{ đổi dấu } y, z)]{\text{Đối xứng qua } Ox} M_1(x_M;-y_M;-z_M)$
- $M(x_M;y_M;z_M) \xrightarrow[(\text{Giữ nguyên } y;\text{ đổi dấu } x, z)]{\text{Đối xứng qua } Oy} M_2(-x_M;y_M;-z_M)$
- $M(x_M;y_M;z_M) \xrightarrow[(\text{Giữ nguyên } z;\text{ đổi dấu } x, y)]{\text{Đối xứng qua } Oz} M_3(-x_M;-y_M;z_M)$

Đối xứng điểm qua mặt phẳng tọa độ

- $M(x_M;y_M;z_M) \xrightarrow[(\text{Giữ nguyên } x, y;\text{ đổi dấu } z)]{\text{Đối xứng qua } Oxy} M_1(x_M;y_M;-z_M)$
- $M(x_M;y_M;z_M) \xrightarrow[(\text{Giữ nguyên } x, z;\text{ đổi dấu } y)]{\text{Đối xứng qua } Oxz} M_2(x_M;-y_M;z_M)$
- $M(x_M;y_M;z_M) \xrightarrow[(\text{Giữ nguyên } y, z;\text{ đổi dấu } x)]{\text{Đối xứng qua } Oyz} M_3(-x_M;y_M;z_M)$

4. Tích có hướng của hai vectơ:

☞ **Định nghĩa:** Cho $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, tích có hướng của $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là:

$$\left[\vec{a}, \vec{b}\right] = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right) = \left(a_2b_3 - a_3b_2; a_3b_1 - a_1b_3; a_1b_2 - a_2b_1\right).$$

☞ **Tính chất:**	$[\vec{a}, \vec{b}] \perp \vec{a}$	$[\vec{a}, \vec{b}] \perp \vec{b}$	$\left\|[\vec{a}, \vec{b}]\right\| = \|\vec{a}\|.\|\vec{b}\|.\sin\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$

- Điều kiện **cùng phương** của hai vectơ $\vec{a}$ & $\vec{b}$ là $\left[\vec{a}, \vec{b}\right] = \vec{0}$ với $\vec{0} = (0;0;0)$.
- Điều kiện **đồng phẳng** của ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ và $\vec{c}$ là $[\vec{a}, \vec{b}].\vec{c} = 0$.
- **Diện tích hình bình hành** $ABCD$: $S_{\square ABCD} = \left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right]\right|$.
- **Diện tích tam giác** ABC: $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]\right|$.
- **Thể tích khối hộp**: $V_{ABCD.A'B'C'D'} = \left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}].\overrightarrow{AA'}\right|$.
- **Thể tích tứ diện:** $V_{ABCD} = \dfrac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}\right|$.

5. Phương trình mặt cầu:

Dạng 1: $(S): (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$

$\xrightarrow{\text{Mặt cầu } (S) \text{ có}} \begin{cases} I(a;b;c) \\ R = \sqrt{R^2} \end{cases}$

Dạng 2: $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$

$\xrightarrow{\text{Mặt cầu } (S) \text{ có}} \begin{cases} I(a;b;c) \\ R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d} \end{cases}$

☞ Phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ là phương trình mặt cầu $\Leftrightarrow \boxed{a^2 + b^2 + c^2 - d > 0}$.

Bài toán 5.1. Viết phương trình mặt cầu tâm

Bài toán 5.2. Viết phương trình mặt cầu có

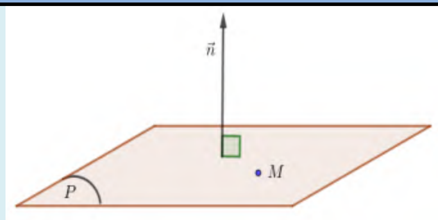
***I* và đi qua điểm *M*.**

- **Bước 1:** Tính bán kính $R = IM$.
- **Bước 2:** Viết phương trình mặt cầu **dạng 1**.

đường kính *AB*.

- **Bước 1:** Tìm tâm I là trung điểm AB. Bán kính $R = \dfrac{AB}{2} = IA = IB$.
- **Bước 2:** Viết phương trình mặt cầu **dạng 1**.

6. Phương trình mặt phẳng:

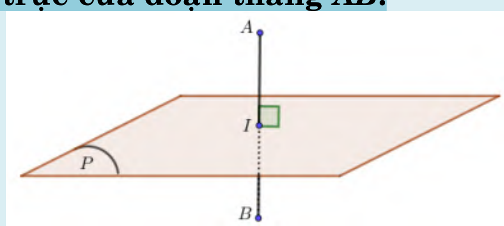


✍ **Lưu ý:** Vectơ pháp tuyến (VTPT) của mặt phẳng là vectơ khác $\vec{0}$ nằm trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng đó.

- Mặt phẳng $(P)\begin{cases}\text{qua } M(x_0;y_0;z_0) \\ VTPT\ \vec{n} = (a;b;c)\end{cases}$ thì phương trình $(P): \boxed{a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0}$.
- Ngược lại, một mặt phẳng bất kỳ đều có phương trình dạng $ax+by+cz+d=0$, mặt phẳng này có $VTPT\ \vec{n}=(a;b;c)$.

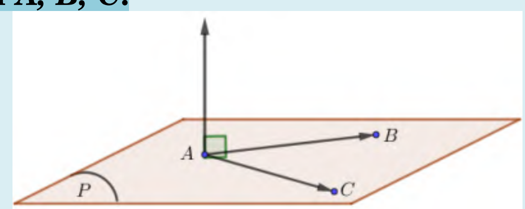
☞ **Đặc biệt:** $Mp(Oyz): x=0 \xrightarrow{VTPT} \overrightarrow{n_{(Oyz)}}=(1;0;0)$, $mp(Oxz): y=0 \xrightarrow{VTPT} \overrightarrow{n_{(Oxz)}}=(0;1;0)$, $mp(Oxy): z=0 \xrightarrow{VTPT} \overrightarrow{n_{(Oxy)}}=(0;0;1)$

<u>Bài toán 6.1.</u> Viết phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng *AB*.



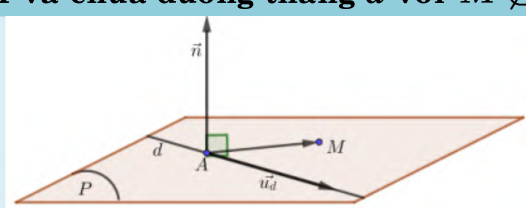
- **Bước 1:** Tìm trung điểm I của đoạn AB và tính tọa độ $\overrightarrow{AB}$.
- **Bước 2:** Phương trình $mp(P)\begin{cases}\text{qua } I \\ \text{VTPT } \vec{n}=\overrightarrow{AB}\end{cases}$.

<u>Bài toán 6.2.</u> Viết phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm *A, B, C*.



- **Bước 1:** Tính tọa độ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ và suy ra $\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]$.
- **Bước 2:** Phương trình $mp(P)\begin{cases}\text{qua } A \\ \text{VTPT } \vec{n}=\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]\end{cases}$.

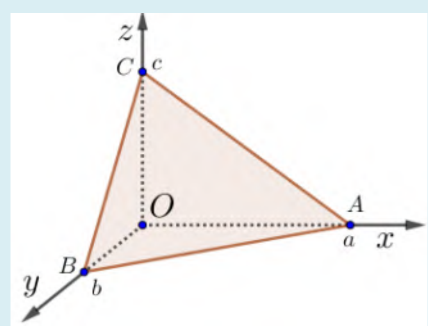
<u>Bài toán 6.3.</u> Viết phương trình mặt phẳng qua *M* và chứa đường thẳng *d* với $M \notin d$.



- **Bước 1:** Chọn điểm $A \in d$ và một VTCP $\overrightarrow{u_d}$. Tính $\left[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{u_d}\right]$.
- **Bước 2:** Phương trình $mp(P)\begin{cases}\text{qua } M \\ \text{VTPT } \vec{n}=\left[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{u_d}\right]\end{cases}$

<u>Bài toán 6.4.</u> Viết phương trình mặt phẳng cắt *Ox, Oy, Oz* lần lượt tại $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ với $a, b, c \neq 0$.

- Phương trình mặt phẳng được viết theo đoạn chắn $(P): \boxed{\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1}$.



Khoảng cách từ điểm đến mặt phẳng	Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song

- Cho $\begin{cases} M(x_0;y_0;z_0) \\ mp(P): ax+by+cz+d=0 \end{cases}$.
- Khi đó: $\boxed{d\left(M,(P)\right)=\dfrac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$.

- Cho hai mặt phẳng $\begin{cases} (P): ax+by+cz+d_1=0 \\ (Q): ax+by+cz+d_2=0 \end{cases}$.
- Khi đó: $\boxed{d\left((P),(Q)\right)=\dfrac{|d_1-d_2|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$ với $d_1 \neq d_2$.

Góc giữa hai mặt phẳng

- Cho hai mặt phẳng (α), (β) có phương trình:
  $\begin{cases} (P): a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0 \\ (Q): a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0 \end{cases}$.
- Góc giữa $(P)\&(Q)$ được tính:

$$\boxed{\cos\left((P),(Q)\right)=\frac{\left|\overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{n_Q}\right|}{\left|\overrightarrow{n_P}\right|.\left|\overrightarrow{n_Q}\right|}=\frac{|a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}.\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}}$$

☞ **<u>Chú ý:</u>** $0^0 \le \left(\widehat{(P),(Q)}\right) \le 90^0$.

Vị trí tương đối giữa hai mặt phẳng

Cho hai mặt phẳng (α), (β) có phương trình:
$\begin{cases} (P): a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0 \\ (Q): a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0 \end{cases}$. Ta có:

- $(P)\parallel(Q) \Leftrightarrow \dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}=\dfrac{c_1}{c_2}\neq\dfrac{d_1}{d_2}$.
- $(P)\equiv(Q) \Leftrightarrow \dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}=\dfrac{c_1}{c_2}=\dfrac{d_1}{d_2}$.
- $(P)\&(Q)$ cắt nhau $\Leftrightarrow a_1:b_1:c_1 \neq a_2:b_2:c_2$.
- $(P)\perp(Q) \Leftrightarrow a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0$.

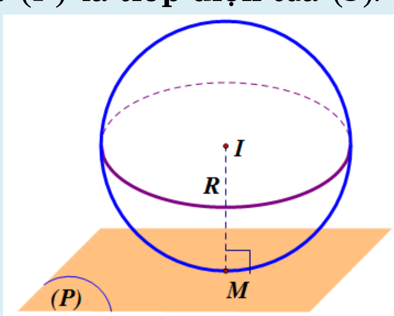
☞ **Lưu ý**: Các tỉ số trên có nghĩa khi mẫu khác 0.

Ví trị tương đối giữa mặt phẳng và mặt cầu

Cho mặt phẳng $(P): ax+by+cz+d=0$ và mặt cầu (S) có tâm I và bán kính R.

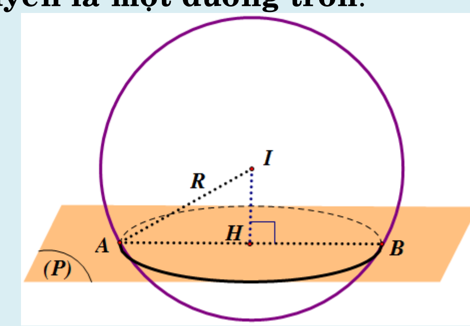
- **Trường hợp 1:** $\boxed{d\left(I,(P)\right)>R} \Leftrightarrow (P)$ và (S) **không có điểm chung.**

- **Trường hợp 2:** $\boxed{d\left(I,(P)\right)=R} \Leftrightarrow (P)$ và (S) có **một điểm chung**. Khi đó ta nói (P) **tiếp xúc** (S) hoặc (P) là **tiếp diện** của (S).



Ta có: $IM \perp (P)$ với M là tiếp điểm.

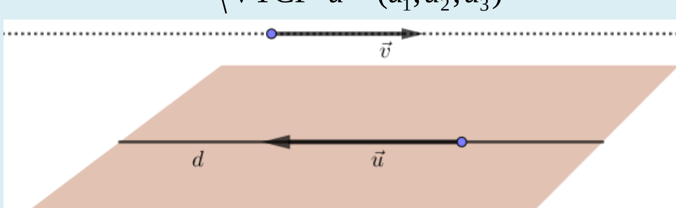
- **Trường hợp 3:** $\boxed{d\left(I,(P)\right)<R} \Leftrightarrow (P)$ cắt (S) theo **giao tuyến là một đường tròn**.



Đường tròn giao tuyến có tâm H (là trung điểm AB), bán kính $r=\sqrt{R^2-IH^2}$ với $IH=d\left(I,(P)\right)$.

7. Phương trình đường thẳng:

☞ Đường thẳng $d\left\langle\begin{array}{l} \text{qua } A(x_A;y_A;z_A) \\ \text{VTCP } \vec{u}=(u_1;u_2;u_3) \end{array}\right.$ có:



☞ Vectơ chỉ phương (VTCP) của đường thẳng d là

- Phương trình tham số $d: \boxed{\begin{cases} x=x_A+u_1t \\ y=y_A+u_2t \\ z=z_A+u_3t \end{cases}}$ với t là tham số.
- Phương trình chính tắc
  $d: \boxed{\dfrac{x-x_A}{u_1}=\dfrac{y-y_A}{u_2}=\dfrac{z-z_A}{u_3}}$ với $u_1.u_2.u_3 \neq 0$.

vectơ khác $\vec{0}$, có giá trùng với d hoặc song song với d.

✍ **Lưu ý:** Nếu có cặp vectơ khác $\vec{0}$ không cùng phương sao cho $\begin{cases}\vec{a}\perp d\\ \vec{b}\perp d\end{cases}$ thì d có VTCP là: $\boxed{\overrightarrow{u_d}=\left[\vec{a},\vec{b}\right]}$.

7.1. Vị trí tương đối giữa hai đường thẳng:

Xét vị trí tương đối của hai đường thẳng d_1, d_2 với $d_1\left\langle\begin{matrix}\text{qua } M\\ \text{VTCP } \overrightarrow{u_1}\end{matrix}\right.$, $d_2\left\langle\begin{matrix}\text{qua } N\\ \text{VTCP } \overrightarrow{u_2}\end{matrix}\right.$.

Bước I	Bước II	Kết luận
❖ $\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right]=\vec{0}\longrightarrow$ Hai đường thẳng d_1, d_2 **song song** hoặc **trùng nhau**.	❖ $\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{MN}\right]=\vec{0}$	$\longrightarrow d_1\equiv d_2$
	❖ $\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{MN}\right]\neq\vec{0}$	$\longrightarrow d_1 \parallel d_2$
❖ $\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right]\neq\vec{0}\longrightarrow$ Hai đường thẳng d_1, d_2 **cắt nhau** hoặc **chéo nhau**.	❖ $\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right].\overrightarrow{MN}=0$	$\longrightarrow d_1$ cắt d_2
	❖ $\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right].\overrightarrow{MN}\neq 0$	$\longrightarrow d_1 \,\&\, d_2$ chéo nhau

7.2. Vị trí tương đối giữa đường thẳng và mặt phẳng:

Xét vị trí tương đối giữa đường thẳng $d:\begin{cases}x=x_0+u_1t\\ y=y_0+u_2t\\ z=z_0+u_3t\end{cases}$ và mặt phẳng $(P): ax+by+cz+d=0$.

Bước I:	Bước II:Giải PT (*), ta gặp 1 trong 3 trường hợp sau	Kết luận
❖ Thay phương trình tham số d vào phương trình (P), ta được PT (*): $a(x_0+u_1t)+b(y_0+u_2t)+c(z_0+u_3t)+d=0$	❖ PT (*) vô nghiệm	$\longrightarrow d \parallel (P)$
	❖ PT (*) có 1 nghiệm $\begin{cases}x=x_0\\ y=y_0\\ z=z_0\end{cases}$	$\longrightarrow d$ cắt (P) tại điểm có tọa độ $(x_0;y_0;z_0)$.
	❖ PT (*) có vô số nghiệm	$\longrightarrow d\subset(P)$

7.3. Khoảng cách từ điểm đến đường thẳng:

☞ Cho điểm M và đường thẳng d (có phương trình tham số hoặc chính tắc).

- **Bước 1:** Chọn điểm $A\in d$ và một VTCP $\overrightarrow{u_d}$.
- **Bước 2:** $\boxed{d(M,d)=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{u_d},\overrightarrow{AM}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{u_d}\right|}}$.

7.4. Góc giữa hai đường thẳng:

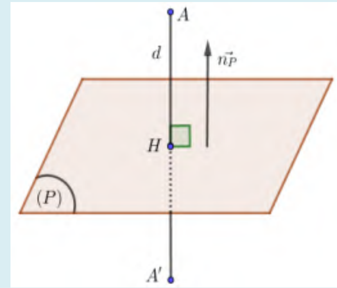
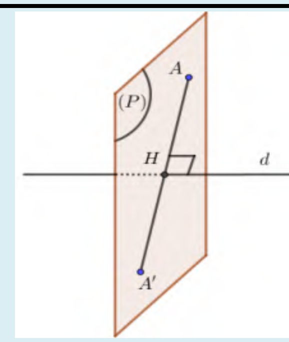
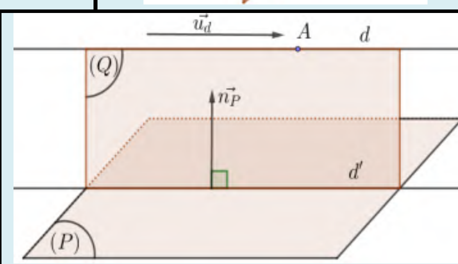
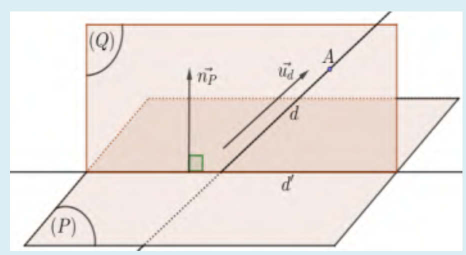
☞ Cho hai đường thẳng d_1, d_2 lần lượt có VTCP là $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$.

$\longrightarrow$ Ta có: $\boxed{\cos\left(\widehat{d_1,d_2}\right)=\dfrac{\left|\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2}\right|}{\left|\overrightarrow{u_1}\right|.\left|\overrightarrow{u_2}\right|}}$.

7.5. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng:

☞ Cho đường thẳng d có VTCP $\vec{u}$ và mặt phẳng (P) có VTPT $\vec{n}$.

$\longrightarrow$ Ta có: $\boxed{\sin\left(\widehat{d,(P)}\right)=\dfrac{\left|\vec{u}.\vec{n}\right|}{\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{n}\right|}}$.

<table>
<tr><th colspan="4">8. Hình chiếu và điểm đối xứng:</th></tr>
<tr><th>Bài toán</th><th colspan="3">Phương pháp</th></tr>
<tr><td>8.1. Tìm hình chiếu của điểm A trên mặt phẳng (P).</td><td colspan="2">❖ Gọi d là đường thẳng $\begin{cases}\text{qua } A\\ \perp (P)\end{cases} \longrightarrow$ Viết pt tham số của d với VTCP của d cũng là VTPT của (P).
❖ Gọi $H = d \cap (P)$. Thay pt tham số của d vào pt mp (P) ta tìm được tọa độ H.</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>8.2. Tìm điểm A' đối xứng với A qua (P).</td><td colspan="2">❖ Ta có H là trung điểm $AA' \Rightarrow \begin{cases}x_{A'} = 2x_H - x_A\\ y_{A'} = 2y_H - y_A\\ z_{A'} = 2z_H - z_A\end{cases}$.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">8.3. Tìm hình chiếu của điểm A trên đường thẳng d.</td><td>Cách I</td><td colspan="2">❖ Gọi $H(theo\ \ t)$ (dựa vào pt tham số của d).
❖ $AH \perp d \Leftrightarrow \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{u_d} = 0 \longrightarrow$ Tìm được $t = ...$ $\longrightarrow$ Tọa độ H.</td></tr>
<tr><td>Cách II</td><td>❖ Gọi $(P)\begin{cases}\text{qua } A\\ (P) \perp d\end{cases} \longrightarrow$ Viết pt mp(P).
❖ Gọi $H = d \cap (P)$. Thay pt tham số của d vào pt mp (P) ta tìm được tọa độ H.</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>8.4. Tìm điểm A' đối xứng với A qua đường thẳng d.</td><td colspan="2">❖ Ta có H là trung điểm $AA' \Rightarrow \begin{cases}x_{A'} = 2x_H - x_A\\ y_{A'} = 2y_H - y_A\\ z_{A'} = 2z_H - z_A\end{cases}$.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">8.5. Viết phương trình đường thẳng d' là hình chiếu của đường thẳng d trên mp(P).</td><td>Trường hợp 1:
d song song mp (P).</td><td rowspan="2">❖ Lập phương trình mp(Q) biết (Q) chứa d và $(Q) \perp (P)$:
▪ (Q) qua điểm $A \in d$.
▪ (Q) có VTPT $\overrightarrow{n_Q} = \left[\overrightarrow{u_d}, \overrightarrow{n_P}\right]$.
❖ Lập phương trình d' là giao tuyến hai mp (P) và (Q):
▪ Chọn hai điểm A, B thuộc d' bằng cách thay $x = 0 \xrightarrow{Tìm} y, z$ và thay $y = 0 \xrightarrow{Tìm} x, z$ (đối với hệ hai pt (P), (Q)).
▪ Viết pt d qua A, B.</td><td></td></tr>
<tr><td>Trường hợp 2:
d cắt mp (P) tại một điểm.</td><td></td></tr>
</table>