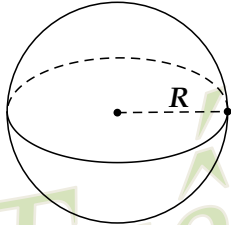
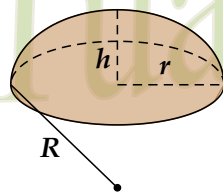
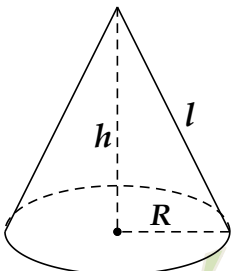
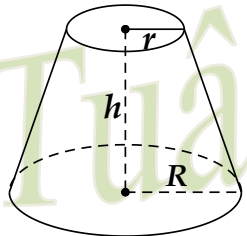
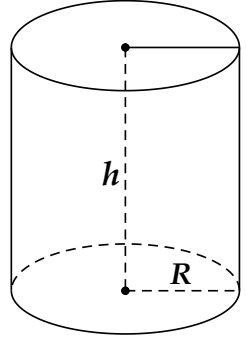
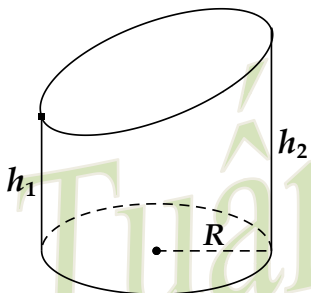
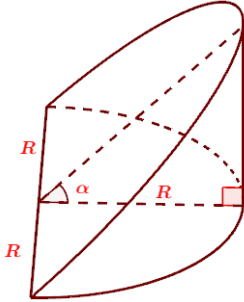
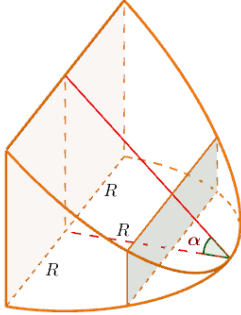
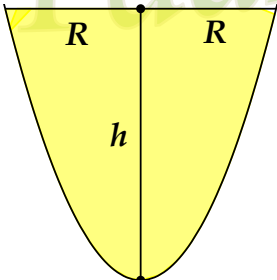
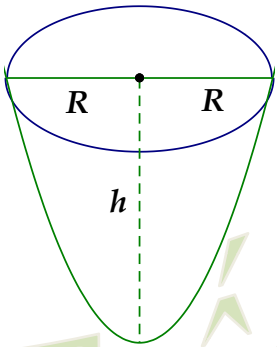
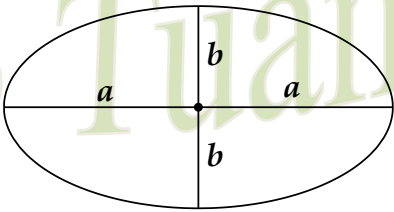


CÔNG THỨC TÍNH DIỆN TÍCH, THỂ TÍCH CỦA MỘT SỐ HÌNH THƯỜNG GẶP

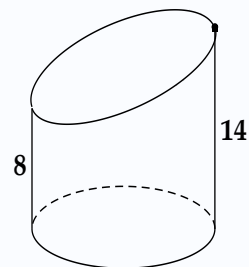
Sưu tầm & biên soạn: CAO VĂN TUẤN

	Công thức	Hình vẽ
Hình cầu	$\begin{cases} S_{xq} = 4\pi R^2 \\ V = \frac{4}{3}\pi R^3 \end{cases}$	
Chỏm cầu	$\begin{cases} S_{xq} = 2\pi Rh = \pi(r^2 + h^2) \\ V = \pi h^2 \left(R - \frac{h}{3} \right) = \frac{\pi h}{6}(h^2 + 3r^2) \end{cases}$	
Hình nón	$\begin{cases} S_{đáy} = \pi R^2 \\ S_{xq} = \pi Rl \\ S_{tp} = \pi R(R + l) \\ V = \frac{1}{3}\pi R^2 h \end{cases}$	
Hình nón cụt	$\begin{cases} S_{xq} = \pi l(R + r) \\ V = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + r^2 + Rr) \end{cases}$	
Hình trụ	$\begin{cases} S_{xq} = 2\pi Rh \\ V = \pi R^2 h \end{cases}$	
Hình trụ cụt	$\begin{cases} S_{xq} = \pi R(h_1 + h_2) \\ V = \pi R^2 \left(\frac{h_1 + h_2}{2} \right) \end{cases}$	

<p>Hình nêm</p>	$V = \frac{2}{3} R^3 \tan \alpha$	
	$V = \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \right) R^3 \tan \alpha$	
<p>Diện tích Parabol và Thể tích khối tròn xoay sinh bởi Parabol</p>	$S_{\text{parabol}} = \frac{4}{3} Rh$	
	$V = \frac{1}{2} \pi R^2 h = \frac{1}{2} V_{\text{trụ}}$	
<p>Diện tích Elip và Thể tích khối tròn xoay sinh bởi Elip</p>	$\begin{cases} S_{\text{elip}} = \pi ab \\ V_{\text{xoay quanh } 2a} = \frac{4}{3} \pi ab^2 \\ V_{\text{xoay quanh } 2b} = \frac{4}{3} \pi a^2 b \end{cases}$	

VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1 [Trích đề thi thử THPT Chuyên KHTN HN – lần 4]: Cắt một khối trụ bởi một mặt phẳng ta được một khối (H) như hình vẽ bên. Biết rằng thiết diện là một hình elip có độ dài trục lớn bằng 10, khoảng cách từ điểm thuộc thiết diện gần mặt đáy nhất và điểm thuộc thiết diện xa mặt đáy nhất tới mặt đáy lần lượt là 8 và 14 (hình vẽ). Tính thể tích của (H).



A. $V_{(H)} = 192\pi$.

B. $V_{(H)} = 275\pi$.

C. $V_{(H)} = 704\pi$.

D. $V_{(H)} = 176\pi$.

Lời giải:

Ta có:
$$\begin{cases} AB = 8 \\ AE = 10 \\ DE = CE - CD = 14 - 8 = 6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow AD = \sqrt{AE^2 - DE^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8 \Rightarrow R = \frac{AD}{2} = 4.$$

Cách 1: Áp dụng trực tiếp công thức

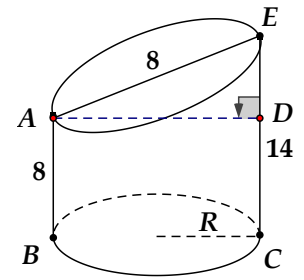
Thể tích của (H) là: $V_{(H)} = \pi R^2 \left(\frac{AB + CE}{2} \right) = \pi \cdot 4^2 \left(\frac{8 + 14}{2} \right) = 176\pi \Rightarrow$ **Chọn đáp án D.**

Cách 2:

Lấy mặt phẳng (P) vuông góc với đường sinh của hình trụ và đi qua điểm A (điểm thuộc thiết diện gần mặt đáy nhất). khi đó, ta chia khối (H) thành hai khối:

- + **Khối 1:** Khối trụ có chiều cao $h = 8$ và bán kính $r = 4 \Rightarrow V_1 = \pi \cdot 4^2 \cdot 8 = 128\pi$.
- + **Khối 2 (khối còn lại):** Có thể tích bằng một nửa thể tích của khối trụ có chiều cao $h = 6$ và bán kính $r = 4 \Rightarrow V_2 = \frac{1}{2} \pi \cdot 4^2 \cdot 6 = 48\pi$.

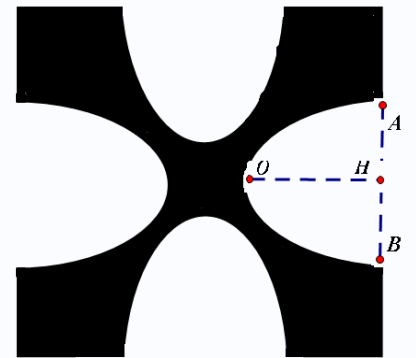
Thể tích của (H) là: $V_{(H)} = V_1 + V_2 = 128\pi + 48\pi = 176\pi \Rightarrow$ **Chọn đáp án D.**



Ví dụ 2 [Trích đề thi thử THPT Từ Đà, Phú Ninh, Phú Thọ]:

Một hoa văn trang trí được tạo ra từ một miếng bìa mỏng hình vuông cạnh 10 cm bằng cách khoét bỏ đi bốn phần bằng nhau có hình dạng parabol như hình bên. Biết $AB = 5$ cm, $OH = 4$ cm. Tính diện tích bề mặt hoa văn đó.

- A. $\frac{140}{3} \text{ cm}^2$. B. $\frac{40}{3} \text{ cm}^2$.
C. $\frac{160}{3} \text{ cm}^2$. D. 50 cm^2 .



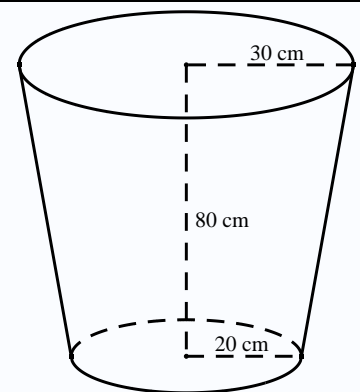
Lời giải:

Gọi S , S_{hv} , S_p lần lượt là diện tích của bề mặt hoa văn, miếng bìa mỏng hình vuông và một phần hình có hình dạng parabol bị khoét đi.

Khi đó: $S = S_{hv} - 4S_p = S_{hv} - 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot OH \cdot AB = 10^2 - 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 \cdot 5 = \frac{140}{3} \text{ cm}^2 \Rightarrow$ **Chọn đáp án A.**

Ví dụ 3 [Trích đề thi thử THPT Chuyên Ngoại Ngữ HN]: Học sinh A sử dụng một xô đựng nước có hình dạng và kích thước giống như hình vẽ, trong đó đáy xô là hình tròn có bán kính 20 cm, miệng xô là đường tròn bán kính 30 cm, chiều cao xô là 80 cm. Mỗi tháng A dùng hết 10 xô nước. Hỏi A phải trả bao nhiêu tiền nước mỗi tháng, biết giá nước là 20 000 đồng/ 1 m^3 (số tiền được làm tròn đến đơn vị đồng)?

- A. 35 279 đồng. B. 38 905 đồng.
C. 42 116 đồng. D. 31 835 đồng.



Lời giải:

Thể tích của một xô nước là:

$$V = \frac{1}{3} \pi h (R^2 + r^2 + Rr) = \frac{1}{3} \pi \cdot 80 (30^2 + 20^2 + 30 \cdot 20) \approx 159174,0278 \text{ (cm}^3\text{)} = 0,1591740278 \text{ (m}^3\text{)}.$$

⇒ Thể tích nước mỗi tháng A dùng hết là: $10V = 1,591740278 \text{ (m}^3\text{)}$

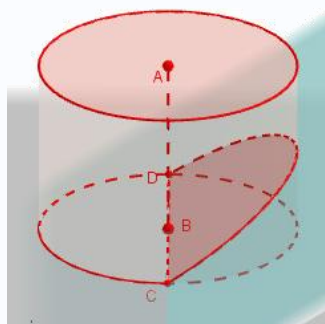
Vậy số tiền nước mà A phải trả mỗi tháng là: $1,591740278 \times 20000 \approx 31\,834$ đồng.

⇒ **Chọn đáp án D.**

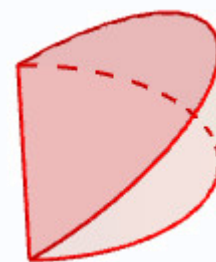
Ví dụ 4: Từ một khúc gỗ hình trụ có đường kính 30 cm, người ta cắt khúc gỗ bởi một mặt phẳng đi qua đường kính đáy và nghiêng với đáy một góc 45° để lấy một hình nêm (xem hình minh họa dưới đây). Kí hiệu V là thể tích của hình nêm (Hình 2). Khi đó, giá trị của V là

A. $V = 2250 \text{ (cm}^3\text{)}$. **B.** $V = \frac{225\pi}{4} \text{ (cm}^3\text{)}$.

C. $V = 1250 \text{ (cm}^3\text{)}$. **D.** $V = 1350 \text{ (cm}^3\text{)}$.



Hình 1



Hình 2

Lời giải:

Cách 1: Giải theo hướng tự luận

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.

Khi đó hình nêm có đáy là nửa hình tròn có phương trình: $y = \sqrt{225 - x^2}$, $x \in [-15; 15]$.

Một mặt phẳng cắt vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x , ($x \in [-15; 15]$) cắt hình nêm theo thiết diện có diện tích là $S(x)$ (hình vẽ).

Để thấy: $NP = y$ $\xrightarrow{MN = NP \tan 45^\circ = NP}$ $y = \sqrt{225 - x^2}$.

Khi đó: $S(x) = \frac{1}{2} MN \cdot NP = \frac{1}{2} (225 - x^2)$ suy ra thể tích hình nêm là:

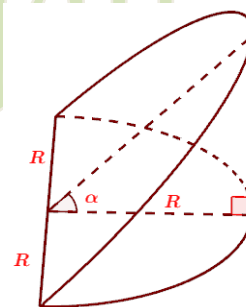
$$V = \int_{-15}^{15} S(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-15}^{15} (225 - x^2) dx = 2250 \text{ (cm}^3\text{)} \Rightarrow \text{Chọn đáp án A.}$$

Cách 2: Áp dụng công thức tính nhanh

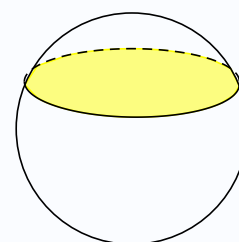
Hình nêm có dạng như hình vẽ bên với $\begin{cases} R = \frac{30}{2} = 15 \text{ cm} \\ \alpha = 45^\circ \end{cases}$.

Vậy thể tích hình nêm là:

$$V = \frac{2}{3} R^3 \tan \alpha = \frac{2}{3} \cdot 15^3 \tan 45^\circ = 2250 \text{ (cm}^3\text{)} \Rightarrow \text{Chọn đáp án A.}$$



Ví dụ 5: Một khối cầu bằng thủy tinh có bán kính 4 dm, người ta muốn cắt bỏ một chỏm cầu có diện tích mặt cắt là $15\pi \text{ (dm}^2\text{)}$ để lấy phần còn lại làm bể nuôi cá. Hỏi thể tích nước tối đa mà bể cá này có thể chứa là bao nhiêu?



A. $\frac{175}{4} \pi \text{ (dm}^3\text{)}$. **B.** $\frac{175}{3} \pi \text{ (dm}^3\text{)}$. **C.** $\frac{125}{4} \pi \text{ (dm}^3\text{)}$. **D.** $\frac{125}{3} \pi \text{ (dm}^3\text{)}$.

Lời giải:

Gọi V, V_c, V_{ch} lần lượt là thể tích tối đa của bể nuôi cá có thể chứa, thể tích khối cầu bằng thủy tinh và thể tích chỏm cầu bị cắt bỏ.

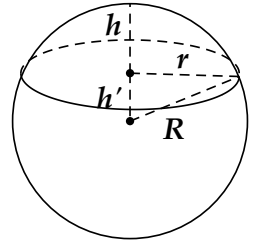
$$\text{Khi đó: } V = V_c - V_{ch} = \frac{4}{3}\pi R^3 - \pi h^2 \left(R - \frac{h}{3} \right).$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} R = 4 \text{ dm} \\ S = 4\pi r^2 = 15\pi (\text{dm}^2) \Rightarrow r^2 = 15 \end{cases}$$

$$\text{Khi đó: } h' = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{4^2 - 15} = 1 \Rightarrow h = R - h' = 3 \text{ dm}.$$

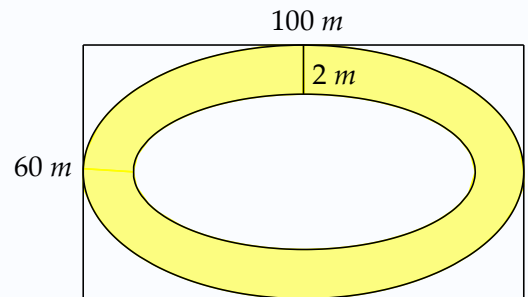
Vậy thể tích nước tối đa mà bể cá này có thể chứa là:

$$V = \frac{4}{3}\pi \cdot 4^3 - \pi \cdot 3^2 \left(4 - \frac{3}{3} \right) = \frac{175}{3}\pi (\text{dm}^3) \Rightarrow \text{Chọn đáp án C.}$$



Ví dụ 6 [Trích đề thi thử THPT Hà Huy Tập, Hà Tĩnh]:

Một sân chơi cho trẻ em hình chữ nhật có chiều dài 100 m và có chiều rộng 60 m. Người ta dự định làm một con đường nằm trong sân như hình vẽ. Biết rằng viền ngoài và viền trong của con đường là hai đường elip. Elip của đường viền ngoài có trục lớn và trục bé lần lượt song song với các cạnh hình chữ nhật và chiều rộng của mặt đường là 2 m.



Kinh phí cho mỗi m^2 làm đường là 600 000 đồng. Số tiền làm con đường đó là

A. 293 904 000 đồng.

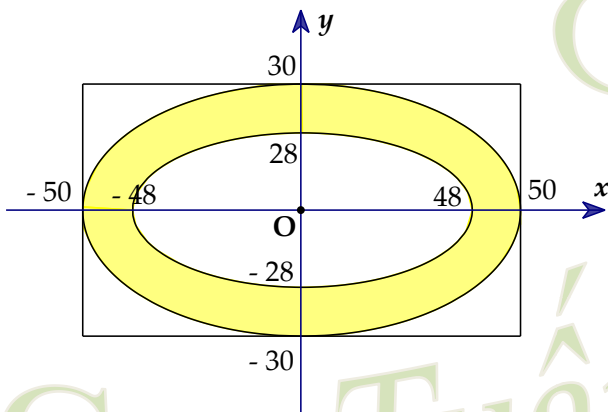
B. 283 904 000 đồng.

C. 293 804 000 đồng.

D. 283 604 000 đồng.

Lời giải:

Cách 1: Sử dụng ứng dụng của tích phân



Elip của đường viền ngoài có độ dài trục lớn là

$$100 \text{ m và độ dài trục bé là } 60 \text{ m} \Rightarrow \begin{cases} a = 50 \text{ m} \\ b = 30 \text{ m} \end{cases}$$

$$\Rightarrow (E_1): \frac{x^2}{50^2} + \frac{y^2}{30^2} = 1 \Rightarrow y = \pm 30 \sqrt{1 - \frac{x^2}{50^2}}.$$

Elip của đường viền trong có độ dài trục lớn là

$$96 \text{ m và độ dài trục bé là } 56 \text{ m} \Rightarrow \begin{cases} a = 48 \text{ m} \\ b = 28 \text{ m} \end{cases}$$

$$\Rightarrow (E_2): \frac{x^2}{48^2} + \frac{y^2}{28^2} = 1 \Rightarrow y = \pm 28 \sqrt{1 - \frac{x^2}{48^2}}.$$

Do tính đối xứng của elip, nên diện tích của mặt đường cần làm là:

$$S = 4 \left(\int_0^{50} 30 \sqrt{1 - \frac{x^2}{50^2}} dx - \int_0^{48} 28 \sqrt{1 - \frac{x^2}{48^2}} dx \right) \xrightarrow{MTBT} 156\pi \approx 489,84 (\text{m}^2).$$

$$\Rightarrow \text{Diện tích của mặt đường cần làm là: } S = S_1 - S_2 = 1500\pi - 1344\pi = 156\pi \approx 489,84 (\text{m}^2).$$

Vậy số tiền làm con đường đó là: $489,84 \times 600\,000 = 293\,904\,000$ đồng \Rightarrow Chọn đáp án A.

Cách 2: Sử dụng công thức tính diện tích của elip $\boxed{S_{\text{elip}} = \pi ab}$

+ Elip của đường viền ngoài có $\begin{cases} a = 50 \text{ m} \\ b = 30 \text{ m} \end{cases} \Rightarrow S_1 = \pi \cdot 50 \cdot 30 = 1500\pi \text{ (m}^2\text{)}.$

+ Elip của đường viền trong có $\begin{cases} a = 48 \text{ m} \\ b = 28 \text{ m} \end{cases} \Rightarrow S_2 = \pi \cdot 48 \cdot 28 = 1344\pi \text{ (m}^2\text{)}.$

\Rightarrow Diện tích của mặt đường cần làm là: $S = S_1 - S_2 = 1500\pi - 1344\pi = 156\pi \approx 489,84 \text{ (m}^2\text{)}.$

Vậy số tiền làm con đường đó là: $489,84 \times 600\,000 = 293\,904\,000$ đồng \Rightarrow **Chọn đáp án A.**