1. Hình chóp tam giác

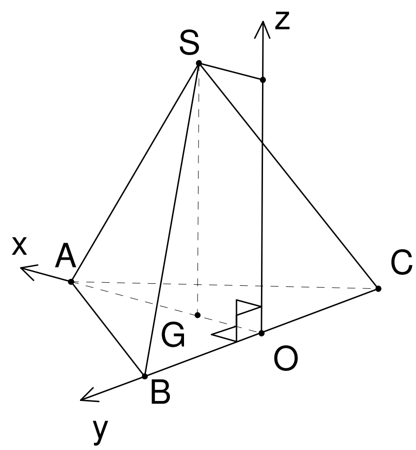
Bài 1. (Trích đề thi tuyển sinh ĐH Khối A năm 2002). Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có độ dài cạnh $AB = a$. Gọi *M*, *N* lần lượt là trung điểm của các cạnh *SB*, *SC*. Tính theo *a* diện tích của tam giác *AMN*, biết rằng mặt phẳng (*AMN*) vuông góc với mặt phẳng (*SBC*).

Gợi ý:

Gọi *O* là trung điểm *BC*, *G* là trọng tâm tam giác *ABC*, ta có

$OA = \dfrac{a\sqrt{3}}{2},\ OB = OC = \dfrac{a}{2},\ OG = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}.$

Đặt $SG = z > 0$. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho tia Ox chứa *A*, tia Oy chứa *B* và tia Oz nằm trên đường thẳng qua *O* và song song với *SG* (xem hình vẽ). Khi đó



$A\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2};0;0\right),\ B\left(0;\dfrac{a}{2};0\right),\ C\left(0;\dfrac{-a}{2};0\right),\ S\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{6};0;z\right).$

$M\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{12};\dfrac{a}{4};\dfrac{z}{2}\right),\ N\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{12};-\dfrac{a}{4};\dfrac{z}{2}\right).$

Tính được $z = \dfrac{a\sqrt{15}}{6}$. Suy ra $S_{AMN} = \dfrac{a^2\sqrt{10}}{16}.$

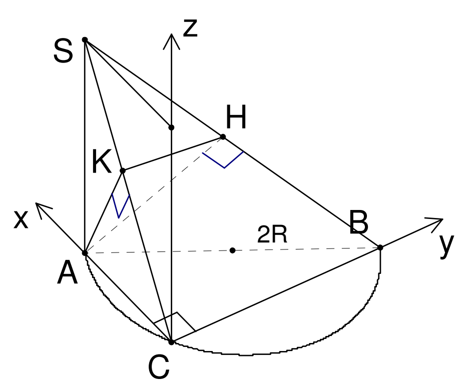
Bài 2. (Trích đề dự bị 1 – ĐH Khối B năm 2007). Trong nửa mặt phẳng (*P*) cho đường tròn đường kính *AB* và điểm *C* trên nửa đường tròn đó sao cho $AC = R$. Trên đường thẳng vuông góc với (*P*) tại *A* lấy điểm *S* sao cho góc giữa hai mặt phẳng (*SAB*) và (*SBC*) bằng 60^o. Gọi *H*, *K* lần lượt là hình chiếu của *A* trên *SB*, *SC*. Chứng minh rằng tam giác *AHK* vuông và tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

Gợi ý:

Ta có $AC = R, BC = R\sqrt{3}$. Đặt $SA = z > 0$.

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho $O \equiv C$, tia Ox chứa *A*, tia Oy chứa *B* và tia Oz nằm trên đường thẳng qua *O* và song song với *SA* (xem hình vẽ). Khi đó:

$C(0;0;0), A(R;0;0), B\left(0;R\sqrt{3};0\right), S(R;0;z)$. Khi đó tính được $H\left(\dfrac{8R}{9};\dfrac{R\sqrt{3}}{9};\dfrac{4R\sqrt{2}}{9}\right)$ và $K\left(\dfrac{2R}{3};0;\dfrac{2R\sqrt{2}}{3}\right).$



Thể tích khối chóp $S.ABC$ là: $V_{S.ABC} = \dfrac{R^3\sqrt{6}}{12}.$

Bài 3. (Trích đề tuyển sinh ĐH Khối D năm 2003). Cho hai mặt phẳng (*P*) và (*Q*) vuông góc với nhau, có giao tuyến là đường thẳng Δ. Trên Δ lấy hai điểm *A,B* với $AB = a$. Trong mặt phẳng (*P*) lấy điểm *C*, trong mặt phẳng (*Q*) lấy điểm *D* sao cho *AC, BD* cùng vuông góc với Δ và $AC = BD = AB = a.$ Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện *ABCD* và tính khoảng cách từ *A* đến mặt phẳng (*BCD*) theo *a*.

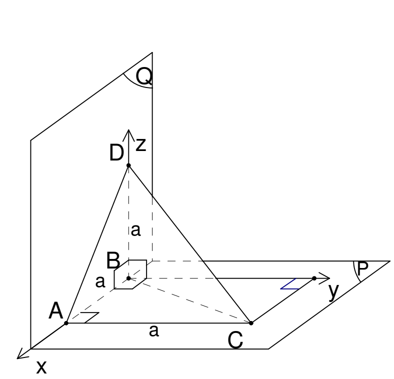
Gợi ý:

+ Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ, lúc đó $A(a;0;0), B(0;0;0), C(a;a;0), D(0;0;a).$

+ Mặt cầu ngoại tiếp tứ diện *ABCD* có tâm $I(a/2;a/2;a/2)$ và bán kính $R = a\sqrt{3}/2.$

+ Mặt phẳng (*BCD*) có phương trình $x - y = 0.$

+ Khoảng cách từ *A* đến (*BCD*) là $d(A,(BCD)) = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}.$



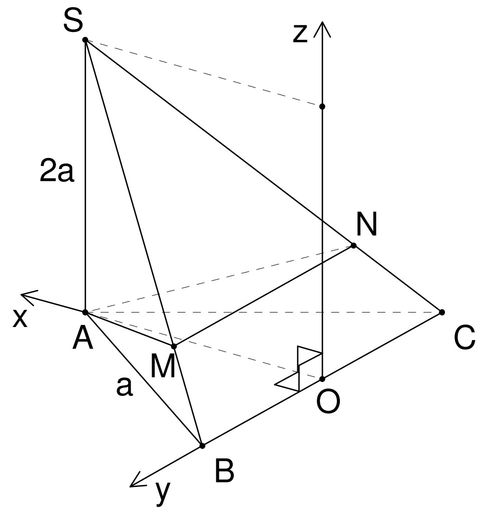
Bài 4. (Trích đề tuyển sinh ĐH Khối D năm 2006). Cho hình chóp tam giác *S.ABC* có đáy *ABC* là tam giác đều cạnh *a*, $SA = 2a$ và *SA* vuông góc với mặt phẳng (*ABC*). Gọi *M*, *N* lần lượt là hình chiếu vuông góc của *A* trên các đường thẳng *SB* và *SC*. Tính thể tích khối chóp *A.BCNM*.

Gợi ý:

+ Gọi O là trung điểm BC. Chọn hệ trục tọa độ *Oxyz* như hình vẽ, lúc đó $A\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};0;0\right), B\left(0;\frac{a}{2};0\right), C\left(0;-\frac{a}{2};0\right), S\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};0;2a\right)$.

+ Tìm được tọa độ các điểm M, N là $M\left(\frac{a\sqrt{3}}{10};\frac{2a}{5};\frac{2a}{5}\right)$ và $N\left(\frac{a\sqrt{3}}{10};-\frac{2a}{5};\frac{2a}{5}\right)$.

+ Thể tích khối chóp *A.BCNM* là $V_{A.BCNM} = \frac{3a^3\sqrt{3}}{50}$.



Bài 5. (Trích đề tuyển sinh ĐH Khối A năm 2011). Cho hình chóp *S.ABC* đáy *ABC* là tam giác vuông cân tại *B*, $AB = BC = 2a$, hai mặt phẳng (*SAB*) và (*SAC*) cùng vuông góc với mặt phẳng (*ABC*). Gọi *M* là trung điểm của *AB*; mặt phẳng qua *SM* và song song với *BC*, cắt *AC* tại *N*. Biết góc giữa hai mặt phẳng (*SBC*) và (*ABC*) bằng 60^o. Tính thể tích khối chóp *S.BCNM* và khoảng cách giữa hai đường thẳng *AB* và *SN* theo *a*.

Gợi ý:

+Đặt $SA = z > 0$. Chọn hệ tọa độ *Oxyz* như hình vẽ, lúc đó: $A(2a;0;0), B(0;0;0), C(0;2a;0),\ M(a;0;0), S(2a;0;z)$.

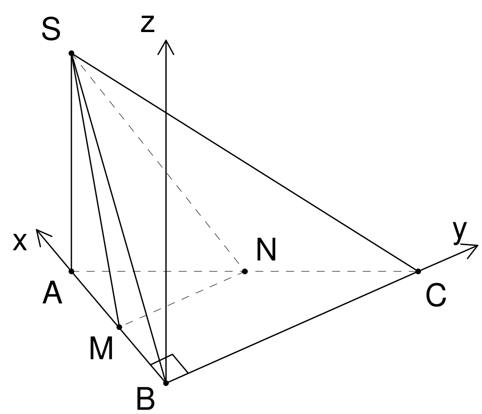
+ Tìm được điểm $N(a;a;0)$.

+ Vectơ pháp tuyến của (SBC) là $\overrightarrow{n_{SBC}} = (-z;0;2a)$.

+Vectơ pháp tuyến của (ABC) là $\overrightarrow{n_{ABC}} = (0;0;1)$.

+ Từ giả thiết góc giữa hai mặt phẳng (*SBC*) và (*ABC*) bằng 60^o tìm được $z = 2a\sqrt{3} \Rightarrow S\left(2a;0;2a\sqrt{3}\right)$.

+ Suy ra $V_{SBCNM} = a^3\sqrt{3}$ và $d(AB,SN) = \frac{2a\sqrt{39}}{13}$.



Bài 6. (Trích đề tuyển sinh ĐH Khối D năm 2011). Cho hình chóp *S.ABC* có đáy *ABC* là tam giác vuông tại *B*, $BA = 3a, BC = 4a$, mặt phẳng (*SBC*) vuông góc với mặt phẳng (*ABC*). Biết $SB = 2a\sqrt{3}$ và $\widehat{SBC} = 30^o$. Tính thể tích khối chóp *S.ABC* và khoảng cách từ điểm *B* đến mặt phẳng (*SAC*) theo *a*.

Gợi ý:

+ Kẻ $SO \perp BC$, khi đó $SO \perp (ABC)$. Tính được $SO = a\sqrt{3}, OB = 3a, OC = a$.

+ Chọn hệ tọa độ *Oxyz* như hình vẽ, lúc đó: $A(3a;3a;0), B(3a;0;0), C(-a;0;0), S\left(0;0;a\sqrt{3}\right)$.

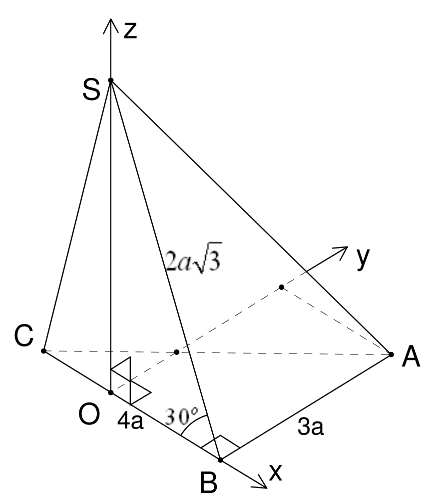
+ Tính thể tích khối chóp *S.ABC* là $V_{S.ABC} = 2a^3\sqrt{3}$.

+ Phương trình mặt phẳng (SAC) là:

$-3x + 4y + \sqrt{3}z - 3a = 0$.

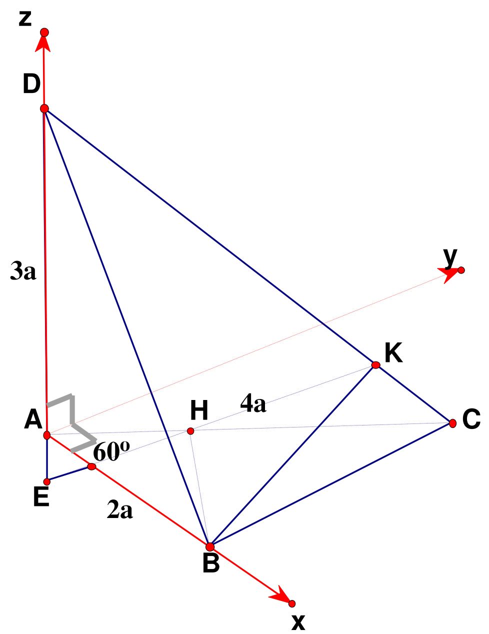
+ Khoảng cách từ điểm *B* đến mặt phẳng (*SAC*) là

$d\left(B,(SAC)\right) = \frac{6a\sqrt{7}}{7}$.



Chuyên Lam Sơn - Thanh Hóa: Cho tứ diện ABCD có AD vuông góc với mặt phẳng (ABC), AD = 3a, AB = 2a, AC = 4a, $\widehat{BAC} = 60^o$. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của B trên AC và CD. Đường thẳng HK cắt đường thẳng AD tại E. Chứng minh rằng BE vuông góc với CD và tính thể tích khối tứ diện BCDE theo a.

Giải:



Chọn hệ trục tọa độ Oxyz như hình vẽ với A trùng với gốc tọa độ O.

A(0;0;0), B(2a;0;0), $C\left(2a;2a\sqrt{3};0\right)$, D(0;0;3a)

$AH = AB.\cos 60^o = a$. Suy ra tọa độ của $H\left(\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right)$

$\overrightarrow{DC} = \left(2a;2a\sqrt{3};-3a\right)$ suy ra $\vec{u} = \left(2;2\sqrt{3};-3\right)$ là một vecto chỉ phương của DC nên phương trình đường thẳng DC là:

$\begin{cases} x = 2t \\ y = 2\sqrt{3}t \\ z = 3a - 3t \end{cases}$. Vì K thuộc DC nên $K\left(2t;2\sqrt{3}t;3a-3t\right)$.

Ta có $\overrightarrow{BK} = \left(2t-2a;2\sqrt{3}t;3a-3t\right)$

$\overrightarrow{BK}.\overrightarrow{DC} = 0 \Leftrightarrow t = \frac{13a}{25}$. Vậy $K\left(\frac{26a}{25};\frac{26a\sqrt{3}}{25};\frac{36a}{25}\right)$

Vì E thuộc trục Az nên E(0;0;z). $\overrightarrow{EH} = \left(\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};-z\right)$; $\overrightarrow{HK} = \left(\frac{27a}{50};\frac{27a\sqrt{3}}{50};\frac{36a}{25}\right)$

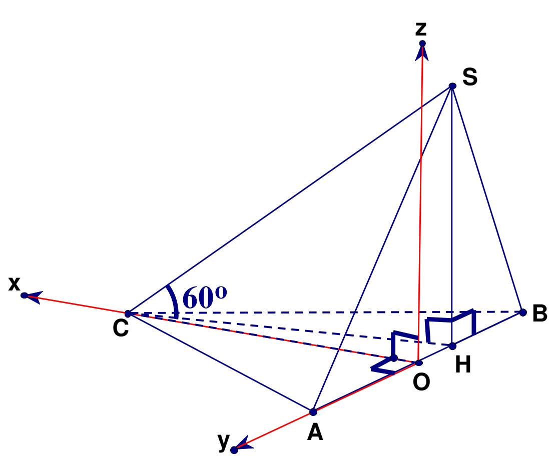
Vì E, H, K thẳng hàng nên $\overrightarrow{EH};\overrightarrow{HK}$ cùng phương, do đó suy ra $z = -\frac{4a}{3}$. Vậy E(0;0;$-\frac{4a}{3}$).

$\overrightarrow{EB} = \left(2a;0;\frac{4a}{3}\right)$ và $\overrightarrow{DC} = \left(2a;2a\sqrt{3};-3a\right)$ nên $\overrightarrow{EB}.\overrightarrow{DC} = 2a.2a + 0.2a\sqrt{3} + \frac{4a}{3}(-3a) = 0$

Vậy BE vuông góc với CD.

A12: Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC) là điểm H thuộc cạnh AB sao cho HA = 2HB. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng 60°. Tính thể tích khối chóp S.ABC và khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC theo a.

Giải:



Gọi O là trung điểm của AB. Chọn hệ trục tọa độ Oxyz như hình vẽ.

Ta có: $A\left(0;\frac{a}{2};0\right)$, $B\left(0;-\frac{a}{2};0\right)$, $C\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};0;0\right)$

$OH = \frac{a}{6} \Rightarrow CH = \sqrt{CO^2 + OH^2} = \frac{a\sqrt{7}}{3}$

$\Rightarrow SH = CH.\tan 60^o = \frac{a\sqrt{21}}{3}$

$\Rightarrow S\left(0;-\frac{a}{6};\frac{a\sqrt{21}}{3}\right)$

- $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}SH.S_{ABC} = \frac{a^3\sqrt{7}}{12}$

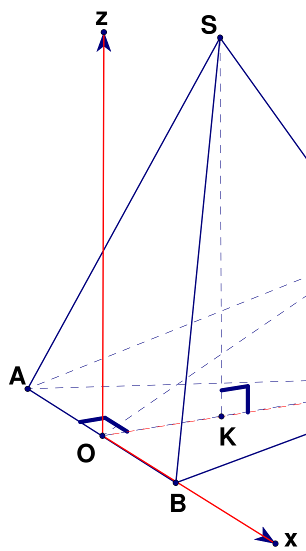
- $\overrightarrow{AB}=(0;-a;0)$; $\overrightarrow{SA}=\left(0;\dfrac{2a}{3};-\dfrac{a\sqrt{21}}{3}\right)$; $\overrightarrow{BC}=\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2};\dfrac{a}{2};0\right)$;

$\left[\overrightarrow{SA};\overrightarrow{BC}\right]=\left(\dfrac{\sqrt{21}}{6}a^2;\dfrac{\sqrt{7}}{2}a^2;-\dfrac{\sqrt{3}}{3}a^2\right)\Rightarrow\left|\left[\overrightarrow{SA};\overrightarrow{BC}\right]\right|=\dfrac{\sqrt{24}}{3}a^2$ và $\left[\overrightarrow{SA};\overrightarrow{BC}\right].\overrightarrow{AB}=-\dfrac{\sqrt{7}}{2}a^3$.

Suy ra: $d(SA;BC)=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{SA};\overrightarrow{BC}\right].\overrightarrow{AB}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{SA};\overrightarrow{BC}\right]\right|}=\dfrac{a^3\sqrt{7}}{2}.\dfrac{3}{\sqrt{24a^2}}=\dfrac{a\sqrt{42}}{8}$. ☺

B12: Cho hình chóp tam giác đều S.ABC với SA = 2*a*, AB = *a*. Gọi H là hình chóp vuông góc của A trên cạnh SC. Chứng minh SC vuông góc với mặt phẳng (ABH). Tính thể tích khối chóp S.ABH theo *a*.

Giải:



Gọi K là hình chiếu vuông góc của S lên (ABC) thì K là tâm của tam giác ABC.

Gọi O là trung điểm của AB. Chọn hệ trục tọa độ Oxyz như hình vẽ.

Ta có: $A\left(0;-\dfrac{a}{2};0\right),B\left(0;\dfrac{a}{2};0\right),\ C\left(0;\dfrac{a\sqrt{3}}{2};0\right)$.

$CK=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\Rightarrow SK=\sqrt{SC^2-CK^2}=\dfrac{a\sqrt{33}}{3}\Rightarrow S\left(0;\dfrac{a\sqrt{3}}{6};\dfrac{a\sqrt{33}}{3}\right)$

$\overrightarrow{SC}=\left(0;\dfrac{a\sqrt{3}}{3};-\dfrac{a\sqrt{33}}{3}\right)$; $\overrightarrow{AB}=(0;a;0)$

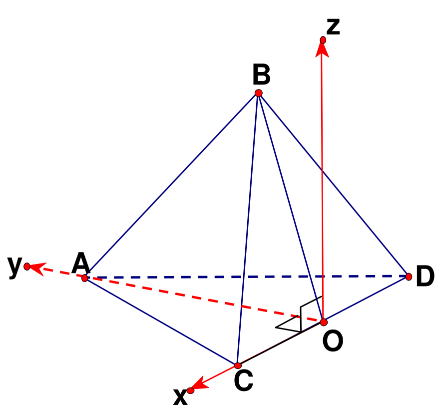
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{SC}=0\Rightarrow AB\perp SC$

$\left.\begin{array}{l}AB\perp SC\\AB\perp OH\end{array}\right\}\Rightarrow AB\perp(ABH)\Rightarrow OH=\dfrac{SK.OC}{SC}=\dfrac{a\sqrt{11}}{4}$.

Câu IV ***(1,0 điểm)*** Cho tứ diện *ABCD* có $AC=AD=a\sqrt{2},BC=BD=a$, khoảng cách từ *B* đến mặt phẳng *(ACD)* bằng $\dfrac{a}{\sqrt{3}}$. Thể tích tứ diện ABCD bằng $\dfrac{a^3\sqrt{15}}{27}$. Tính góc giữa hai mặt phẳng *(ACD)* và *(BCD)*.

Giải:

$V_{ABCD}=\dfrac{1}{3}S_{ACD}.d(B,(ACD))\Rightarrow S_{ACD}=\dfrac{a^2\sqrt{5}}{3}$. Từ đây tính được $CD=\dfrac{2a}{\sqrt{3}};h_A=\dfrac{a\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$.



Gọi O là trung điểm của CD. Chọn hệ trục tọa độ Oxyz như hình vẽ.

Ta có: $A\left(0;\dfrac{a\sqrt{5}}{\sqrt{3}};0\right),\ C\left(\dfrac{a}{\sqrt{3}};0;0\right),D\left(\dfrac{a}{\sqrt{3}};0;0\right),B\left(x;y;\dfrac{a}{\sqrt{3}}\right)$ với $y>0$

Từ giả thiết BC = BD = *a* ta giải ra được $x=0;y=\dfrac{a}{\sqrt{3}}$.

Vậy $B\left(0;\dfrac{a}{\sqrt{3}};\dfrac{a}{\sqrt{3}}\right)$. $\left[\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BD}\right]=\left(0;\dfrac{2a^2}{3};-\dfrac{2a^2}{3}\right)$.

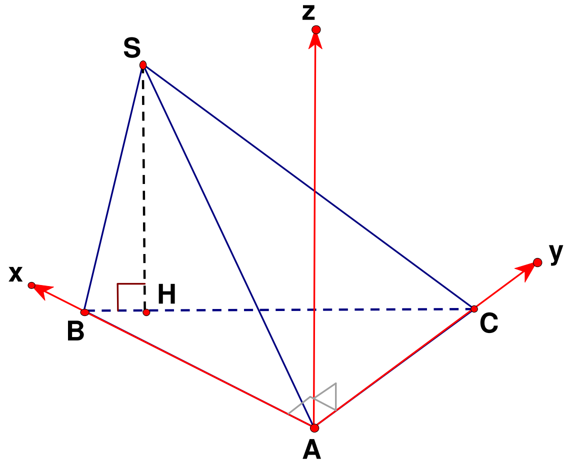
$\vec{n}_{(ACD)}=(0;0;1)$; $\vec{n}_{(BCD)}=(0;1;-1)$.

Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (ACD) và (BCD).

Ta có: $\cos\alpha=\left|\cos\left(\vec{n}_{(ACD)};\vec{n}_{(BCD)}\right)\right|=\dfrac{|0.0+0.1+1.(-1)|}{\sqrt{0^2+0^2+1^2}.\sqrt{0^2+1^2+1^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow\alpha=45^o$.

Toán học & Tuổi trẻ: Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại A, BC = a và $\widehat{ABC} = 30^{o}$. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng tạo với đáy một góc 60^{o}. Biết rằng hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC) thuộc cạnh BC. Tính thể tích khối chóp S.ABC theo *a*.

Giải:



Chọn hệ trục tọa độ Oxyz như hình vẽ với gốc tọa độ O trùng điểm A.

A(0;0;0), $B\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};0;0\right), C\left(0;\frac{a}{2};0\right), S(x;y;z)$ với $x>0; y>0; z>0$; $H(x;y;0)$ với H là hình chiếu vuông góc của của S trên (ABC).

$\overrightarrow{n_1} = (0;0;1)$ là vectơ pháp tuyến của (ABC) và

$\overrightarrow{n_2} = \left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AS}\right] = \left(0;-\frac{a\sqrt{3}}{2}z;\frac{a\sqrt{3}}{2}y\right)$ là vectơ pháp tuyến của (SAB).

$\overrightarrow{n_3} = \left[\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AS}\right] = \left(\frac{a}{2}z;0;-\frac{a}{2}x\right)$ là vectơ pháp tuyến của (SAC).

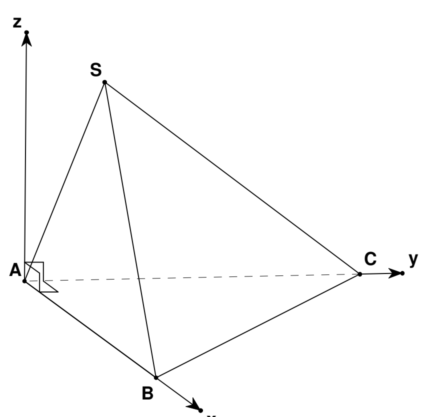
- $\cos\left((SAB),(ABC)\right) = \frac{\left|\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\left|\overrightarrow{n_2}\right|} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{y}{\sqrt{z^2+y^2}} \Leftrightarrow z^2 = 3y^2 \quad (1)$
- $\cos\left((SAC),(ABC)\right) = \frac{\left|\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_3}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\left|\overrightarrow{n_3}\right|} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{x}{\sqrt{z^2+x^2}} \Leftrightarrow z^2 = 3x^2 \quad (2)$

Từ (1), (2) ta có $x=y$. Nên $H(x;x;0)$. Vì H thuộc BC nên $\overrightarrow{BC} = \left(-\frac{a\sqrt{3}}{2};\frac{a}{2};0\right), \overrightarrow{CH} = \left(x;x-\frac{a}{2};0\right)$ cùng phương, suy ra $\frac{x}{-\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{x-\frac{a}{2}}{\frac{a}{2}} \Leftrightarrow x = \frac{a\sqrt{3}}{2\left(1+\sqrt{3}\right)}$ thay vào (1), ta được $z = \frac{3a}{2\left(1+\sqrt{3}\right)}$.

- $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}SH.S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3}.\frac{3a}{2\left(1+\sqrt{3}\right)}.\frac{a^2\sqrt{3}}{8} = \frac{\left(3-\sqrt{3}\right)a^3}{32}$. ☺

Câu IV: (1,0 điểm)

Cho hình chóp tam giác S.ABC có AC=6a, AB=8a, BC=10a, SA=7a, SB=9a, SC=11a. Tính thể tích hình chóp S.ABC phụ theo a.



Chọn hệ trục tọa độ Oxyz như hình vẽ với gốc tọa độ O trùng với điểm A.

Ta có A(0;0;0), B(8a;0;0), C(0;6a;0), S(x;y;z) với z>0

SA=7a $\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2 = 49a^2 \quad (1)$

SB=9a $\Leftrightarrow (x-8a)^2+y^2+z^2 = 81a^2 \quad (2)$

SC=11a $\Leftrightarrow x^2+(y-6a)^2+z^2 = 121a^2 \quad (3)$

Giải hệ (1), (2) và (3), ta được S(2a;-3a;6a).

Suy ra đường cao của hình chóp S.ABC là $h = z_S = 6a$.

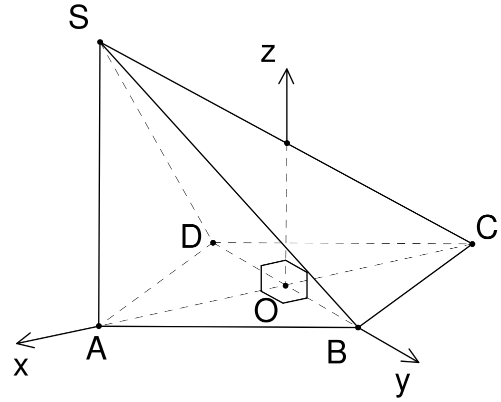
$S_{ABC} = \frac{1}{2}AB.AC = 24a^2$. $V_{S.ABC} = 48a^3$

2. Hình chóp tứ giác

Bài 1. (Trích đề dự bị 1 – ĐH Khối B năm 2006). Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, góc $\widehat{BAD} = 60^o$, SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SA = a$. Gọi *C'* là trung điểm của *SC*. Mặt phẳng (*P*) đi qua AC' và song song với BD cắt SB, SD lần lượt tại B', D'. Tính thể tích khối chóp $S.AB'C'D'$.

Gợi ý:

Gọi *O* là giao điểm của *AC* và *DB.*



Vì tam giác *ABD* đều nên $OB = OD = \frac{a}{2}, OA = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho tia Ox chứa *A*, tia Oy chứa *B* và tia Oz nằm trên đường thẳng qua *O* và song song với *SA* (xem hình vẽ). Khi đó:

$A\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};0;0\right), B\left(0;\frac{a}{2};0\right), C\left(-\frac{a\sqrt{3}}{2};0;0\right), D\left(0;-\frac{a}{2};0\right),$

$C'\left(0;0;\frac{a}{2}\right), S\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};0;a\right).$

Tìm được $B'\left(\frac{a\sqrt{3}}{6};\frac{a}{3};\frac{a}{3}\right)$ và $D'\left(\frac{a\sqrt{3}}{6};-\frac{a}{3};\frac{a}{3}\right).$

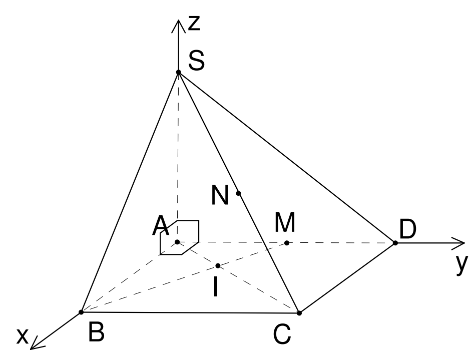
Thể tích khối chóp $S.AB'C'D'$ là:

$$V_{S.AB'C'D'} = V_{S.AB'C'} + V_{S.AC'D'} = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{SA},\overrightarrow{SC'}\right].\overrightarrow{SB'}\right| + \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{SA},\overrightarrow{SC'}\right].\overrightarrow{SD'}\right| = \frac{1}{6}.\frac{a^3\sqrt{3}}{6} + \frac{1}{6}.\frac{a^3\sqrt{3}}{6} = \frac{a^3\sqrt{3}}{18}.$$

Bài 2. (Trích đề ĐH Khối B năm 2006). Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a, AD = a\sqrt{2}, SA = a$ và SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi *M, N* lần lượt là trung điểm của *AD* và *SC*, *I* là giao điểm của *BM* và *AC*. Chứng minh rằng mặt phẳng (*SAC*) vuông góc với mặt phẳng (*SMB*). Tính thể tích khối tứ diện *ANIB*.

Gợi ý:

+Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho $O \equiv A$, tia Ox chứa *B*, tia Oy chứa *D* và tia Oz chứa *S* (xem hình vẽ). Khi đó:



$A(0;0;0), B(a;0;0), C\left(a;a\sqrt{2};0\right), D\left(0;a\sqrt{2};0\right), S(0;0;a);$

$M\left(0;\frac{a\sqrt{2}}{2};0\right), N\left(\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{2}}{2};\frac{a}{2}\right).$

$\overrightarrow{AS}(0;0;a), \overrightarrow{AC}\left(a;a\sqrt{2};0\right), \overrightarrow{SM} = \left(0;\frac{a\sqrt{2}}{2};-a\right), \overrightarrow{SB} = (a;0;-a).$

Vectơ pháp tuyến của (*SAC*) là $\left[\overrightarrow{AS},\overrightarrow{AC}\right] = \left(-a^2\sqrt{2};a^2;0\right).$

Vectơ pháp tuyến của (*SBM*) là $\left[\overrightarrow{SM},\overrightarrow{SB}\right] = \left(-\frac{a^2\sqrt{2}}{2};-a^2;0\right).$

Vì $\left[\overrightarrow{AS},\overrightarrow{AC}\right].\left[\overrightarrow{SM},\overrightarrow{SB}\right] = a^4 - a^4 = 0$ nên $(SAC) \perp (SBM)$.

Ta có $\frac{IC}{IA} = \frac{BC}{AM} = 2 \Rightarrow \overrightarrow{IC} = -2\overrightarrow{IA}$. Từ đây tìm được $I\left(\frac{a}{3};\frac{a\sqrt{2}}{3};0\right).$

Thể tích khối tứ diện *ANIB* là $V_{ANIB} = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AN},\overrightarrow{AI}\right].\overrightarrow{AB}\right| = \frac{1}{6}.\frac{a^3\sqrt{2}}{6} = \frac{a^3\sqrt{2}}{36}.$

Bài 3. (Trích đề ĐH Khối A năm 2007). Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy là hình vuông cạnh *a*, mặt bên *SAD* là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi *M, N, P* lần lượt là trung điểm của các cạnh *SB*, *BC*, *CD*. Chứng minh rằng *AM* vuông góc với *BP* và tính thể tích của khối tứ diện *CMNP*.

Gợi ý:

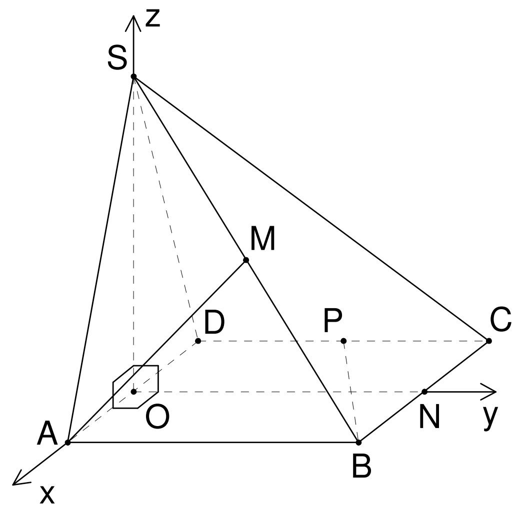
Gọi O là trung điểm AD, khi đó $SO \perp (ABCD)$. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho tia Ox chứa *A*, tia Oy chứa *N* và tia Oz chứa *S* (xem hình vẽ). Khi đó:

$$A\left(\frac{a}{2};0;0\right), B\left(\frac{a}{2};a;0\right), N(0;a;0), S\left(0;0;\frac{a\sqrt{3}}{2}\right),$$

$$P\left(-\frac{a}{2};\frac{a}{2};0\right), M\left(\frac{a}{4};\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{4}\right).$$

Ta có: $\overrightarrow{AM} = \left(-\frac{a}{4};\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2}\right), \overrightarrow{BP} = \left(-a;-\frac{a}{2};0\right).$

Thể tích của khối tứ diện *CMNP là* $V_{CMNP} = \frac{a^3\sqrt{3}}{96}.$



Bài 4. (Trích đề ĐH Khối B năm 2007). Cho hình chóp tứ giác đều *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình vuông cạnh *a*. Gọi *E* là điểm đối xứng của *D* qua trung điểm của *SA*, *M* là trung điểm của *AE*, *N* là trung điểm của *BC*. Chứng minh *MN* vuông góc với *BD* và tính (theo *a*) khoảng cách giữa hai đường thẳng *M*N và *AC*.

Gợi ý:

Gọi O là giao điểm của AC và BD. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho tia Ox chứa *A*, tia Oy chứa *B* và tia Oz chứa *S* (xem hình vẽ). Đặt *SO=z*, Khi đó:

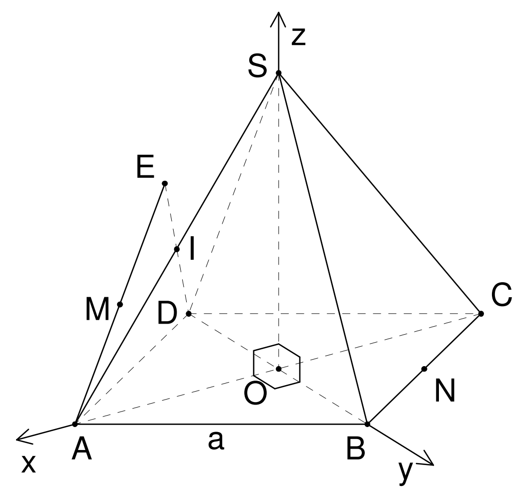
$$A\left(\frac{a\sqrt{2}}{2};0;0\right), B\left(0;\frac{a\sqrt{2}}{2};0\right), D\left(0;-\frac{a\sqrt{2}}{2};0\right), S(0;0;z),$$

$$C\left(-\frac{a\sqrt{2}}{2};0;0\right), N\left(-\frac{a\sqrt{2}}{4};\frac{a\sqrt{2}}{4};0\right), I\left(\frac{a\sqrt{2}}{4};0;\frac{z}{2}\right),$$

Ta

$$E\left(\frac{a\sqrt{2}}{2};\frac{a\sqrt{2}}{2};z\right); M\left(\frac{a\sqrt{2}}{2};\frac{a\sqrt{2}}{4};\frac{z}{2}\right).$$

có $\overrightarrow{MN} = \left(\frac{3a\sqrt{2}}{4};0;\frac{z}{4}\right), \overrightarrow{BD} = \left(0;-\frac{a\sqrt{2}}{4};0\right).$



\+ $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{BD} = 0 \Rightarrow MN \perp BD.$

\+ Khoảng cách giữa MN và AC là $d(MN, AC) = \frac{a\sqrt{2}}{4}.$

Bài 5. (Trích đề ĐH Khối D năm 2007). Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy là hình thang, $\widehat{ABC} = \widehat{BAD} = 90^o, AB = BC = a, AD = 2a.$ Cạnh bên *SA* vuông góc với đáy là $SA = a\sqrt{2}.$ Gọi *H* là hình chiếu của *A* trên *SB*. Chứng minh rằng tam giác *SCD* vuông và tính (theo *a*) khoảng cách từ *H* đến mặt phẳng (*SCD*).

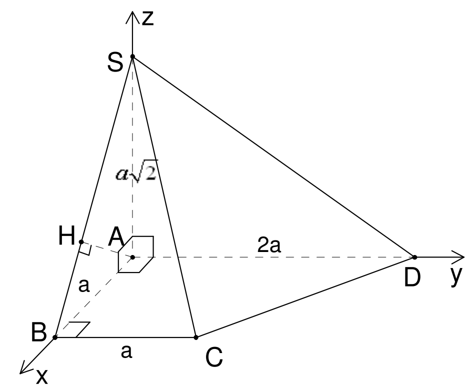
Gợi ý:

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho $O \equiv A$, tia Ox chứa B, tia Oy chứa D và tia Oz chứa S (xem hình vẽ).

$A(0;0;0), B(a;0;0), C(a;a;0), D(0;2a;0), S\left(0;0;a\sqrt{2}\right)$. Tìm được $H\left(\dfrac{2a}{3};0;\dfrac{a\sqrt{2}}{3}\right)$.

Phương trình mặt phẳng (SCD) là: $x + y + \sqrt{2}z - 2a = 0$.

Khoảng cách từ H đến (SCD) là $d\left(H,(SCD)\right) = \dfrac{a}{3}$.



Bài 6. (Trích đề ĐH Khối B năm 2008). Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình vuông cạnh 2*a*, $SA = a, SB = a\sqrt{3}$ và mặt phẳng (*SAB*) vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi *M, N* lần lượt là trung điểm của các cạnh *AB*, *BC*. Tính theo *a* thể tích của khối chóp *S.BMDN* và tính cosin của góc giữa hai đường thẳng *SM*, *DN*.

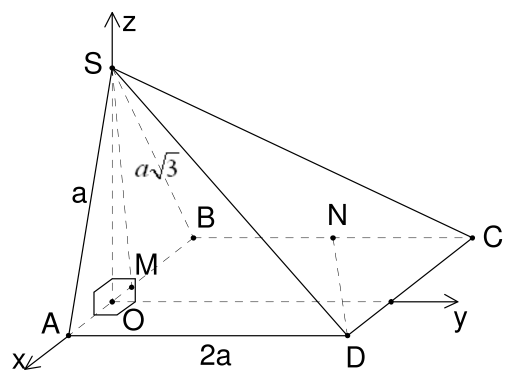
Gợi ý:

Gọi O là hình chiếu của S trên AB. Ta có: $SO = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}, OA = \dfrac{a}{2}, OB = \dfrac{3a}{2}$.

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho tia Ox chứa *A*, tia Oy vuông góc với *AB* và tia Oz chứa S (xem hình vẽ). Khi đó:

$A\left(\dfrac{a}{2};0;0\right), B\left(-\dfrac{3a}{2};0;0\right), C\left(-\dfrac{3a}{2};2a;0\right), D\left(\dfrac{a}{2};2a;0\right),$

$S\left(0;0;\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right), M\left(-\dfrac{a}{2};0;0\right), N\left(-\dfrac{3a}{2};a;0\right).$



+ Thể tích của khối chóp *S.BMDN* là $V_{S.BMDN} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

+ cosin của góc giữa hai đường thẳng *SM*, *DN* là $\cos(\widehat{SM,DN}) = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

Bài 7. (Trích đề ĐH Khối A năm 2009). Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình thang vuông tại *A* và *D*; $AB = AD = 2a, CD = a;$ góc giữa hai mặt phẳng (*SBC*) và (*ABCD*) bằng 60^o. Gọi *I* là trung điểm của cạnh *AD*. Biết hai mặt phẳng (*SBI*) và (*SCI*) cùng vuông góc với mặt phẳng (*ABCD*), tính thể tích khối chóp *S.ABCD* theo *a*.

Gợi ý:

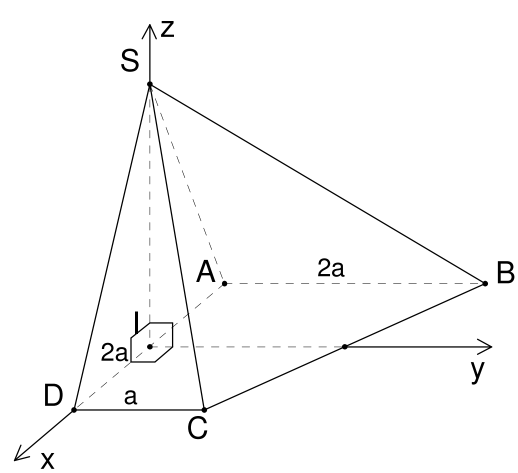
Từ giả thiết suy ra $SI \perp (ABCD)$. Đặt $SI = z > 0$.

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho $O \equiv I$, tia Ox chứa *D*, tia Oy vuông góc với *AB* và tia Oz chứa S (xem hình vẽ). Khi đó:

$A(-a;0;0), B(-a;2a;0), C(a;a;0), D(a;0;0), S(0;0;z)$.

+ Từ giả thiết góc giữa hai mặt phẳng (*SBC*) và (*ABCD*) bằng 60^o ta tìm được $z = \dfrac{3a\sqrt{15}}{5}$.

+ Thể tích khối chóp *S.ABCD* là $V_{S.ABCD} = \dfrac{3a^3\sqrt{15}}{5}$.



Bài 8. (Trích đề ĐH Khối A năm 2010). Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình vuông cạnh *a*. Gọi *M* và *N* lần lượt là trung điểm của các cạnh *AB* và *AD*; *H* là giao điểm của *CN* với *DM*. Biết *SH* vuông góc với mặt phẳng (*ABCD*) và $SH = a\sqrt{3}$. Tính thể tích khối chóp *S.CDNM* và tính khoảng cách giữa hai đường thẳng *DM* và *SC* theo *a*.

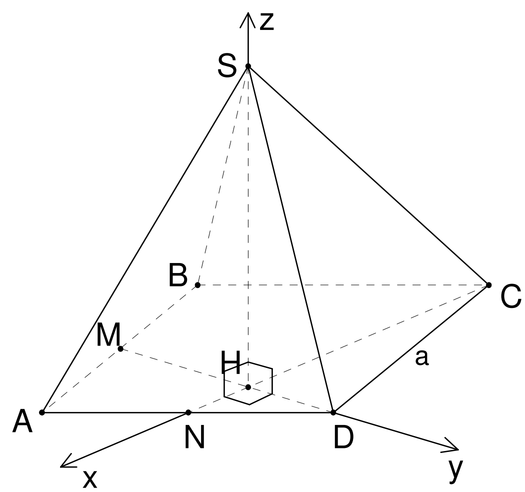
Gợi ý:

Trước hết chứng minh được $DM \perp CN$.

+ $\dfrac{1}{HD^2} = \dfrac{1}{DN^2} + \dfrac{1}{DC^2} = \dfrac{4}{a^2} + \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{5}{a^2} \Rightarrow DH = \dfrac{a\sqrt{5}}{5}$.

+ $DM = \dfrac{a\sqrt{5}}{2} \Rightarrow HM = DM - DH = \dfrac{3a\sqrt{5}}{10}$.

+ $HN = \dfrac{a\sqrt{5}}{10}; HC = \dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$.



+ Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho $O \equiv H$, tia Ox chứa *N*, tia Oy chứa *D* và tia Oz chứa S (xem hình vẽ). Khi đó:

$N\left(\dfrac{a\sqrt{5}}{10};0;0\right), D\left(0;\dfrac{a\sqrt{5}}{5};0\right), C\left(-\dfrac{2a\sqrt{5}}{5};0;0\right),$

$M\left(0;-\dfrac{3a\sqrt{5}}{10};0\right), S\left(0;0;a\sqrt{3}\right).$

+ Thể tích khối chóp *S.CDNM* là $V_{S.CDNM} = \dfrac{5a^3\sqrt{3}}{24}$.

+ Khoảng cách giữa hai đường thẳng *DM* và *SC* là: $d\left(DM, SC\right) = \dfrac{2a\sqrt{57}}{19}$.

Bài 9. (Trích đề ĐH Khối D năm 2010). Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình vuông cạnh *a*. cạnh bên $SA = a$, hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt phẳng (*ABCD*) là điểm *H* thuộc đoạn *AC*, $AH = \dfrac{AC}{4}$. Gọi *CM* là đường cao của tam giác *SAC*. Chứng minh *M* là trung điểm *SA* và tính thể tích khối tứ diện *SMBC* theo *a*.

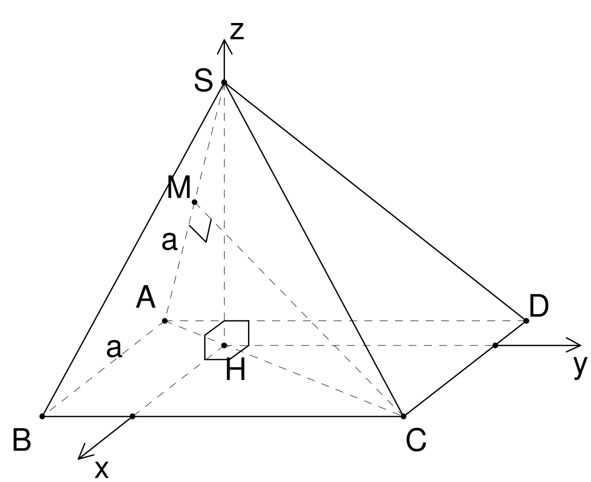
Gợi ý:

+ Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho $O \equiv H$, tia Ox song song với tia *AB*, tia Oy song song với tia AD và tia Oz chứa S (xem hình vẽ). Khi đó:

$SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \sqrt{a^2 - \left(\dfrac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{14}}{4}$ do đó

$A\left(-\dfrac{a}{4};-\dfrac{a}{4};0\right), B\left(\dfrac{3a}{4};-\dfrac{a}{4};0\right), C\left(\dfrac{3a}{4};\dfrac{3a}{4};0\right),$

$D\left(-\dfrac{a}{4};\dfrac{3a}{4};0\right), S\left(0;0;\dfrac{a\sqrt{14}}{4}\right).$



Ta có $SC = \sqrt{SH^2 + CH^2} = a\sqrt{2} = AC$ nên tam giác *SAC* cân tại *C* do đó *M* là trung điểm *SA*. Suy ra $M\left(-\dfrac{a}{8};-\dfrac{a}{8};\dfrac{a\sqrt{14}}{8}\right)$. Thể tích khối chóp *S.BMC* là $V_{S.BMC} = \dfrac{a^3\sqrt{14}}{48}$.

Bài 10. Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là bình hành, $AD = 4a$, các cạnh bên của hình chóp bằng nhau và bằng $a\sqrt{6}$. Tìm côsin của góc giữa hai mặt phẳng (*SBC*) và (*SCD*) khi thể tích của khối chóp *S.ABCD* lớn nhất.

Gợi ý:

+ Gọi *O* là giao điểm của *AC* và *BD*; *M,N* lần lượt là *AB* và *AD*. Từ giả thiết suy ra

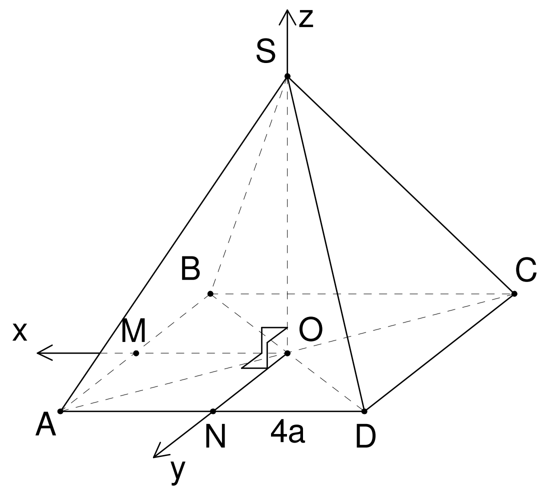
$$\left.\begin{matrix} SO \perp AC \\ SO \perp BD \end{matrix}\right\} \Rightarrow SO \perp (ABCD)$$

và $OA = OB = OC = OD = \sqrt{6a^2 - SO^2}$ nên *ABCD* là hình chữ nhật.

Đặt $ON = x > 0$. Khi đó $OA = \sqrt{x^2 + 4a^2}$.

$SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \sqrt{2a^2 - x^2}$.

+ Thể tích khối chóp *S.ABCD* là $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}AB.AD.SO = \frac{8}{3}ax\sqrt{2a^2 - x^2}$.



+ Bằng cách xét hàm số $f(x) = \frac{8}{3}ax\sqrt{2a^2 - x^2}$ với $x \in \left(0; a\sqrt{2}\right)$ hoặc áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta suy ra $V_{S.ABCD}$ lớn nhất khi và chỉ khi $x = a$. Suy ra $SO = a$. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ. Khi đó: $B\left(2a; -\frac{a}{2}; 0\right), C\left(-2a; -\frac{a}{2}; 0\right), D\left(-2a; \frac{a}{2}; 0\right), S(0;0;a)$.

Gọi φ góc giữa hai mặt phẳng (*SBC*) và (*SCD*) thì $\cos\varphi = \frac{2}{5}$.

*****

3. Hình lăng trụ tam giác

Bài 1. (Trích đề Dự bị 1- ĐH Khối A năm 2007). Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$ có $AB = a, AC = 2a, AA_1 = 2a\sqrt{5}$ và $\widehat{BAC} = 120^o$. Gọi M là trung điểm của cạnh CC_1. Chứng minh $MB \perp MA_1$ và tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (A_1BM).

Giải:

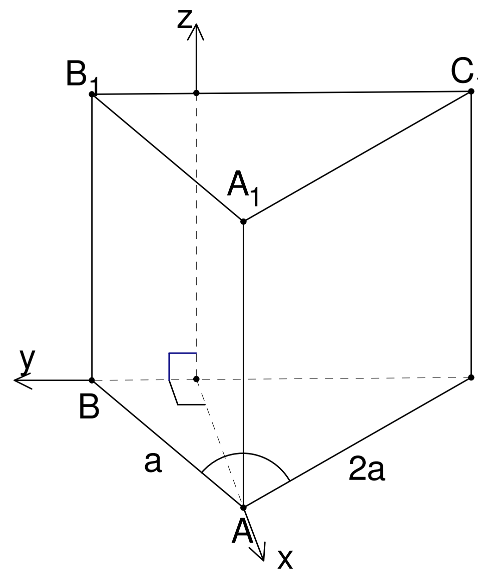
a) Kẻ $AO \perp BC$. Ta có

$$BC = \sqrt{a^2 + 4a^2 - 2.a.2a\cos 120^o} = a\sqrt{7}.$$

$$AO.BC = AB.AC.\sin 120^o \Rightarrow AO = \frac{AB.AC.\sin 120^o}{BC} = \frac{a\sqrt{21}}{7}.$$

$$OB = \sqrt{AB^2 - AO^2} = \sqrt{a^2 - \frac{21a^2}{49}} = \frac{2a\sqrt{7}}{7};$$

$$OC = BC - OB = \frac{5a\sqrt{7}}{7}.$$



Chọn hệ tọa độ Oxyz như hình vẽ. Khi đó

$$A\left(\frac{a\sqrt{21}}{7};0;0\right), B\left(0;\frac{2a\sqrt{7}}{7};0\right),$$

$$M\left(0;-\frac{5a\sqrt{7}}{7};a\sqrt{5}\right), A_1\left(\frac{a\sqrt{21}}{7};0;2a\sqrt{5}\right).$$

Ta có $\overrightarrow{MA_1} = \left(\frac{a\sqrt{21}}{7};\frac{5a\sqrt{7}}{7};a\sqrt{5}\right)$, $\overrightarrow{MB} = \left(0;a\sqrt{7};-a\sqrt{5}\right)$.

$$\overrightarrow{MA_1}.\overrightarrow{MB} = 5a^2 - 5a^2 = 0 \Rightarrow \overrightarrow{MA_1} \perp \overrightarrow{MB} \Rightarrow MA_1 \perp MB.$$

b) Phương trình mặt phẳng (A_1BM) là: $12\sqrt{5}x - \sqrt{15}\left(y - \frac{2a\sqrt{7}}{7}\right) - \sqrt{21}z = 0.$

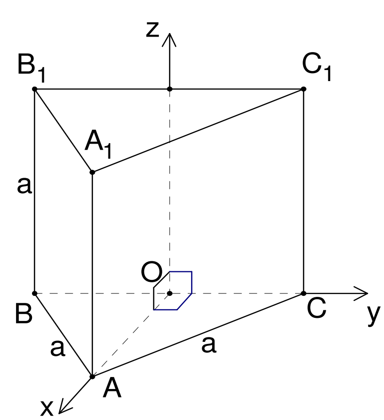
Khoảng cách từ A đến (A_1BM) là: $d\left(A,(A_1BM)\right) = \frac{a\sqrt{5}}{3}.$

Bài 2. (Trích đề dự bị 2 – ĐH Khối D năm 2007). Cho lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$ có tất cả các cạnh đều bằng *a*, *M* là trung điểm của đoạn AA_1. Chứng minh $BM \perp B_1C$ và tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BM và B_1C.

Gợi ý:

Gọi O là trung điểm BC và chon hệ trục tọa độ $Oxyz$ có tia Ox chứa A, tia Oy chứa C và tia Oz chứa trung điểm của B_1C_1 (xem hình vẽ). Khi đó:

$$B\left(0;-\frac{a}{2};0\right),\ C\left(0;\frac{a}{2};0\right),\ M\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};0;\frac{a}{2}\right) \text{ và } B_1\left(0;-\frac{a}{2};a\right).$$



Ta có $\overrightarrow{BC} = (0;a;0)$, $\overrightarrow{BM} = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2};\frac{a}{2};\frac{a}{2}\right)$, $\overrightarrow{B_1C} = (0;-a;0)$.

$$+\ \overrightarrow{BM}.\overrightarrow{B_1C} = -\frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} = 0 \Rightarrow BM \perp B_1C.$$

$$+\left[\overrightarrow{BM},\overrightarrow{B_1C}\right] = \left(a^2;-\frac{a^2\sqrt{3}}{2};-\frac{a^2\sqrt{3}}{2}\right).$$

$$d(BM,B_1C) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{BM},\overrightarrow{B_1C}\right].\overrightarrow{BC}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{BM},\overrightarrow{B_1C}\right]\right|} = \frac{\frac{a^3\sqrt{3}}{2}}{\frac{a^2\sqrt{10}}{2}} = \frac{a\sqrt{30}}{10}.$$

Bài 3. (Trích đề thi tuyển sinh ĐH Khối D năm 2009). Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB = a, AA' = 2a, A'C = 3a$. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng $A'C'$, I là giao điểm của AM và $A'C$. Tính theo a thể tích của khối tứ diện $IABC$ và khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (IBC).

Giải:

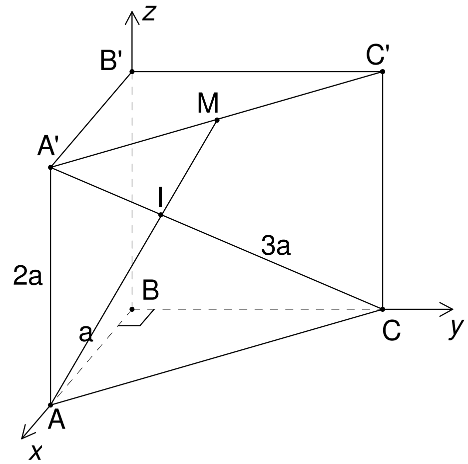
Ta có

$AC = \sqrt{A'C^2 - AA'^2} = a\sqrt{5};\ BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = 2a.$

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho $O \equiv B$, tia Ox chứa A, tia Oy chứa C và tia Oz chứa B' (xem hình vẽ). Khi đó:

$B(0;0;0),\ A(a;0;0),\ C(0;2a;0),\ M\left(\dfrac{a}{2};a;2a\right).$

Gọi $I(x;y;z)$, vì $\overrightarrow{IA} = -2\overrightarrow{IM} \Rightarrow I\left(\dfrac{2a}{3};\dfrac{2a}{3};\dfrac{4a}{3}\right).$



Thể tích khối tứ diện $IABC$ là:

$$V_{IABC} = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right].\overrightarrow{BI}\right| = \frac{1}{6}.\frac{8a^3}{3} = \frac{4a^3}{9}.$$

+ Gọi $\vec{n}$ là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (IBC). Khi đó $\vec{n} = \left[\overrightarrow{BI},\overrightarrow{BC}\right] = \left(-\dfrac{8a^2}{3};0;\dfrac{4a^2}{3}\right)$ cùng phương với $\overrightarrow{n'} = (-2;0;1)$. Mặt phẳng ($IBC$) đi qua B và có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n'} = (-2;0;1)$ nên có phương trình: $-2x + z = 0$. Vậy khoảng cách từ A đến (IBC) là $d\left(A,(IBC)\right) = \dfrac{|-2a|}{\sqrt{(-2)^2+1}} = \dfrac{2a\sqrt{5}}{5}.$

Bài 4. (Trích đề thi tuyển sinh ĐH Khối A năm 2008). Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có độ dài cạnh bên bằng $2a$, đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB = a, AC = a\sqrt{3}$ và hình chiếu vuông góc của đỉnh A trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của cạnh BC. Tính theo a thể tích khối chóp $A'.ABC$ và cosin của góc giữa hai đường thẳng AA' và $B'C'$.

Giải:

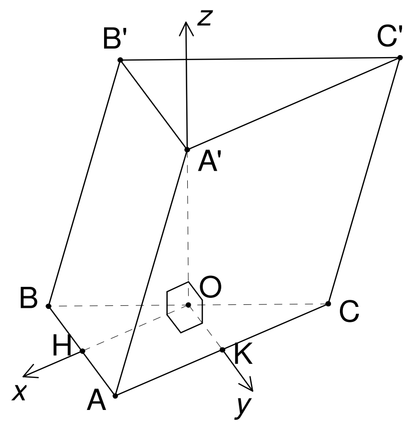
+ Gọi O là trung điểm BC, H là trung điểm AB, K là trung điểm AC thì $OHAK$ là hình chữ nhật. Ta có:

$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 2a, OA = \dfrac{BC}{2} = a,$

$OA' = \sqrt{AA'^2 - OA^2} = \sqrt{4a^2 - a^2} = a\sqrt{3}.$

$OH = \sqrt{OA^2 - AH^2} = \sqrt{a^2 - \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2};$

$OK = \sqrt{OA^2 - AK^2} = \sqrt{a^2 - \dfrac{3a^2}{4}} = \dfrac{a}{2}.$



+ Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho tia Ox chứa H, tia Oy chứa K và tia Oz chứa A' (xem hình vẽ). Khi đó:

$A'\left(0;0;a\sqrt{3}\right),\ A\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2};\dfrac{a}{2};0\right),\ B\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2};-\dfrac{a}{2};0\right),\ C\left(-\dfrac{a\sqrt{3}}{2};\dfrac{a}{2};0\right).$

+ Thể tích khối chóp $A'.ABC$ là $V_{A'.ABC} = \dfrac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{A'A},\overrightarrow{A'B}\right].\overrightarrow{A'C}\right| = \dfrac{1}{6}\left|-\dfrac{3a^3}{2} - \dfrac{3a^3}{2}\right| = \dfrac{a^3}{2}.$

+ $\overrightarrow{BC} = \left(-a\sqrt{3};a;0\right)$. Gọi φ là góc giữa AA' và $B'C'$. Khi đó: $\cos\varphi = \left|\cos(\overrightarrow{AA'},\overrightarrow{BC})\right| = \dfrac{\left|\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{BC}\right|}{AA'.BC} = \dfrac{1}{4}.$

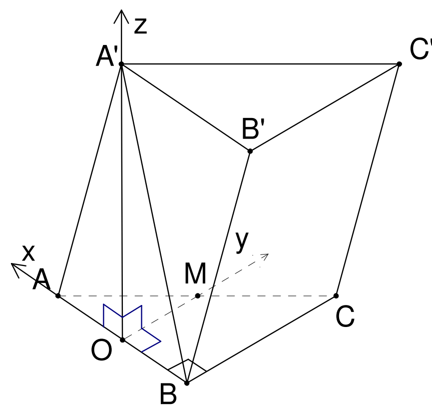
Bài 5. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, góc $\widehat{ACB} = 60^o$, biết rằng $AA' = BA' = a\sqrt{7}$, mặt bên $(ABB'A')$ vuông góc với mặt phẳng (ABC). Mặt phẳng $(ACC'A')$ tạo với (ABC) một góc 60^o. Tính thể tích khối lăng trụ đã cho.

Gợi ý:

+ Gọi O là trung điểm AB, M là trung điểm AC. Khi đó $A'O \perp AB, A'O \perp OM, OM \perp AB.$

Đặt $OA = x > 0,$ khi đó $OA' = \sqrt{7a^2 - x^2}; OM = \dfrac{x}{\sqrt{3}}.$

+ Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho tia Ox chứa A, tia Oy chứa M và tia Oz chứa A' (xem hình vẽ). Khi đó:



$A(x;0;0),\ M\left(0,\dfrac{x}{\sqrt{3}};0\right),\ A'\left(0;0;\sqrt{7a^2-x^2}\right).$

Theo giả thiết thì $\cos\varphi = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x = 2a.$

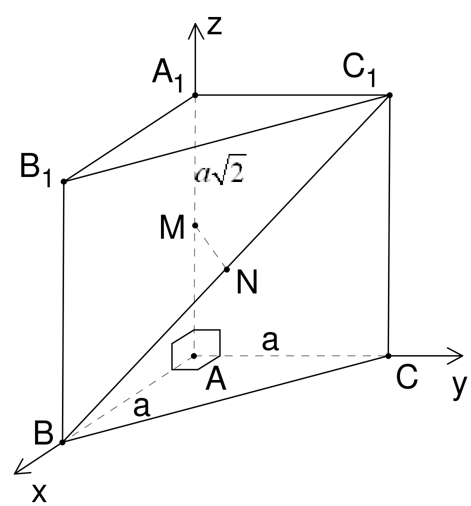
Suy ra $AB = 4a, BC = \dfrac{4a}{\sqrt{3}}; OA' = a\sqrt{3}.$ Thể tích khối lăng trụ đã cho là

$V = S_{ABC}.OA' = \dfrac{1}{2}AB.BC.OA' = \dfrac{1}{2}.4a.\dfrac{4a}{\sqrt{3}}.a\sqrt{3} = 8a^3.$

Bài 6. (Trích đề dự bị 1 – ĐH Khối D năm 2007). Cho lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$ đáy ABC là tam giác vuông, $AB = AC = a, AA_1 = a\sqrt{2}$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của đoạn AA_1 và BC_1. Chứng minh MN là đường vuông góc chung của AA_1 và BC_1. Tính thể tích khối chóp MA_1BC_1.

Gợi ý:

+ Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho $O \equiv A$, tia Ox chứa B, tia Oy chứa C và tia Oz chứa A' (xem hình vẽ). Khi đó:



$B(a;0;0),\ C(0;a;0),\ A_1(0;0;a\sqrt{2}), B_1(a;0;a\sqrt{2}),$

$C_1(0;a;a\sqrt{2}), M\left(0;0;\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right), N\left(\dfrac{a}{2};\dfrac{a}{2};\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right).$

+ $\overrightarrow{MN} = \left(\dfrac{a}{2};\dfrac{a}{2};0\right), \overrightarrow{AA_1} = (0;0;a\sqrt{2}), \overrightarrow{BC_1} = (-a;a;a\sqrt{2}).$

$\left.\begin{matrix}\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{AA_1} = 0\\ \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{BC_1} = 0\end{matrix}\right\} \Rightarrow MN \perp AA_1$ và $MN \perp BC_1$ do đó MN là đường vuông góc chung của AA_1 và BC_1.

Tính thể tích khối chóp MA_1BC_1 là $V_{MA_1BC_1} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}.$

Bài 7. (Trích đề thi tuyển sinh ĐH Khối D năm 2008). Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông, $AB = BC = a, AA' = a\sqrt{2}$. Gọi M trung điểm của cạnh BC. Tính theo a thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng $AM, B'C$.

Gợi ý:

+ Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho $O \equiv B$, tia Ox chứa A, tia Oy chứa C và tia Oz chứa B' (xem hình vẽ). Khi đó:

$A(a;0;0), B(0;0;0),\ C(0;a;0),\ A'(a;0;a\sqrt{2}), B'(0;0;a\sqrt{2}), C'(0;a;a\sqrt{2}), M\left(0;\dfrac{a}{2};0\right).$

+ Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là $V = a^3\sqrt{2}.$

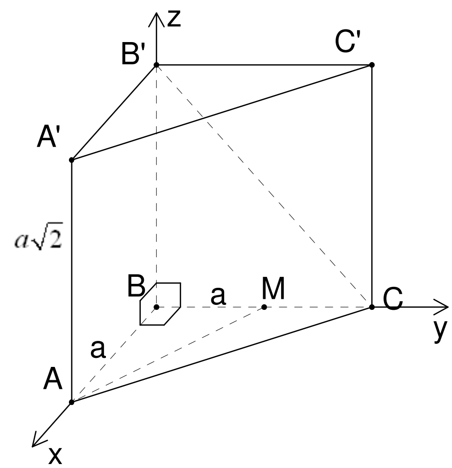
+ Ta có:

$\overrightarrow{AM}=\left(-a;\frac{a}{2};0\right),\overrightarrow{B'C}=\left(0;a;-a\sqrt{2}\right),\overrightarrow{AB'}=\left(-a;0;a\sqrt{2}\right).$

$\left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{B'C}\right]=\left(-\frac{a^2\sqrt{2}}{2};-a^2\sqrt{2};-a^2\right).$

+ Khoảng cách giữa hai đường thẳng $AM,B'C$ là

$d\left(AM,B'C\right)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{B'C}\right].\overrightarrow{AB'}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{B'C}\right]\right|}=\frac{a\sqrt{7}}{7}.$



Bài 8. (Trích đề thi tuyển sinh ĐH Khối B năm 2009). Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có $BB'=a$; góc giữa đường thẳng *BB'* và mặt phẳng (*ABC*) bằng 60^o; tam giác *ABC* vuông tại *C* và $\widehat{BAC}=60^o$. Hình chiếu vuông góc của điểm *B'* lên mặt phẳng (*ABC*) trùng với trọng tâm của tam giác *ABC*. Tính thể tích khối tứ diện $A'ABC$ theo *a*.

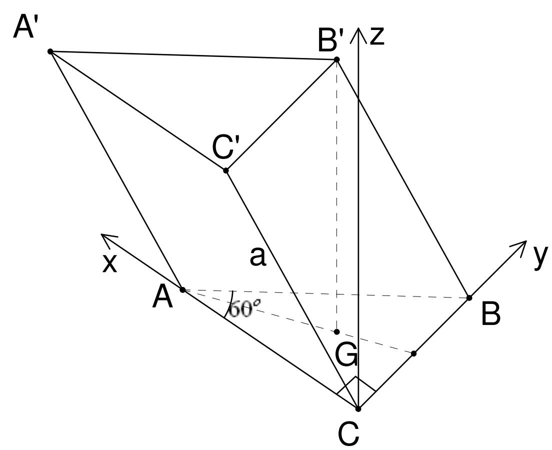
Gợi ý:

Gọi *G* là trọng tâm tam giác *ABC*. Đặt $AC=x$, suy ra $BC=x\sqrt{3},AC=2x.$ Chọn hệ trục tọa độ Oxyz như hình vẽ. Ta có

$A\left(x;0;0\right),\ B\left(0;x\sqrt{3};0\right),\ C\left(0;0;0\right),G\left(\frac{x}{3};\frac{x\sqrt{3}}{3};0\right).$

$\overrightarrow{BG}=\left(\frac{x}{3};\frac{-2x\sqrt{3}}{3};0\right)\Rightarrow BG=\frac{x\sqrt{13}}{3}$

$\Rightarrow GB'=\sqrt{a^2-\frac{13x^2}{9}}.$



Sử dụng giả thiết góc giữa *BB'* và mặt phẳng (*ABC*) bằng $\widehat{B'BO}=60^o$ suy ra $x=\frac{3a\sqrt{13}}{26}.$

Vậy $AC=\frac{3a\sqrt{13}}{26};BC=\frac{3a\sqrt{39}}{26};OB'=\frac{a\sqrt{3}}{2}.$ Thể tích khối tứ diện $A'ABC$ là $V_{A'ABC}=\frac{9a^3}{208}.$

Bài 9. (Trích đề thi tuyển sinh ĐH Khối B năm 2010). Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB=a$, góc giữa (*A'BC*) và (*ABC*) bằng 60^o. Gọi *G* là trọng tâm tam giác *A'BC*. Tính thể tích khối lăng trụ đã cho và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện *GABC* theo *a*.

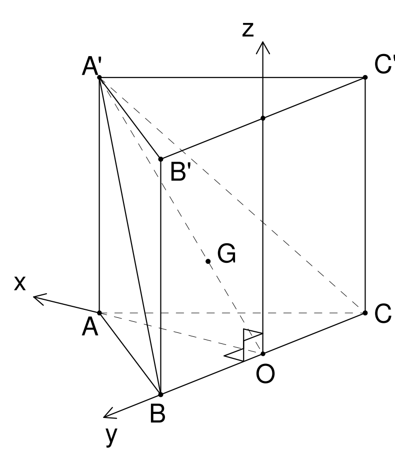
Gợi ý:

Gọi *O* là trung điểm *BC*. Chọn hệ trục tọa độ *Oxyz* sao cho, tia *Ox* chứa *A*, tia *Oy* chứa *B* và tia *Oz* song song với tia *AA'* (xem hình vẽ). Khi đó: $A\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};0;0\right),B\left(0;\frac{a}{2};0\right),\ C\left(0;-\frac{a}{2};0\right)$

$A'\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};0;\frac{3a}{2}\right),G\left(\frac{a\sqrt{3}}{6};0;\frac{a}{2}\right).$

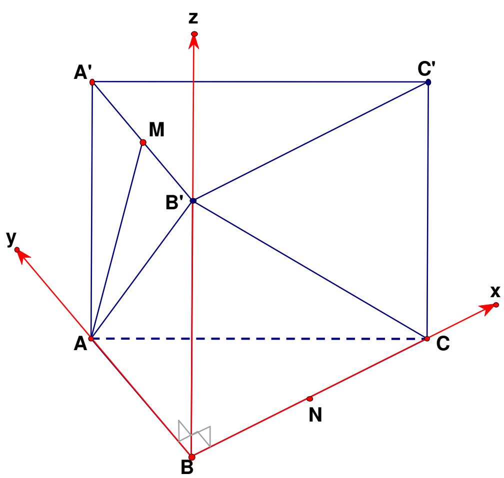
Thể tích khối lăng trụ đã cho là: $V_{ABC.A'B'C'}=\frac{a^3\sqrt{3}}{8}.$

Bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện *GABC là* $R=\frac{7a}{12}.$



K2pi.net - 2013: Cho hình lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có BC = 2AB, $AB \perp BC$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của A'B' và BC. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và B'C bằng $\frac{2a}{\sqrt{7}}$. Góc giữa hai mặt phẳng (AB'C) và (BCC'B') bằng 60^o. Tính thể tích khối chóp MABC và bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp B'ANC theo *a*.

Giải:



Chọn hệ trục tọa độ O*xyz* như hình vẽ với gốc tọa độ O trùng điểm B.
Đặt AB = *x* (*x*>0) thì BC = 2*x*.
Ta có B(0; 0; 0), C(2*x*; 0; 0), A(0; *x*; 0), N(*x*; 0; 0)

A'(0; *x*; *y*) (*y*>0), B'(0; 0; *y*), C'(2*x*; 0; *y*), M(0; $\frac{x}{2}$; *y*).

$\overrightarrow{AM} = \left(0;-\frac{x}{2};y\right), \overrightarrow{B'C} = (2x;0;-y)$

$\Rightarrow \left[\overrightarrow{AM};\overrightarrow{B'C}\right] = \left(\frac{xy}{2};2xy;x^2\right)$

$\overrightarrow{AC} = (2x;-x;0)$

$$d(AM,B'C) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{AM};\overrightarrow{B'C}\right].\overrightarrow{AC}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{AM};\overrightarrow{B'C}\right]\right|} \Leftrightarrow \frac{\left|-x^2y\right|}{\sqrt{\frac{x^2y^2}{4}+4x^2y^2+x^4}} = \frac{2a}{\sqrt{7}} \Leftrightarrow \frac{xy}{\sqrt{4x^2+17y^2}} = \frac{a}{\sqrt{7}} \qquad (1)$$

$\overrightarrow{AB'} = (0;-x;y)$ và $\overrightarrow{AC} = (2x;-x;0)$ nên $\left[\overrightarrow{AB'},\overrightarrow{AC}\right] = (xy;2xy;2x^2)$ nên (AB'C) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (y;2y;2x)$ (vì $\vec{n}$ cùng phương với $\left[\overrightarrow{AB'},\overrightarrow{AC}\right]$) và (BCC'B') có vectơ pháp tuyến là $\vec{j} = (0;1;0)$.

$$\cos\left((AB'C),(BCC'A')\right) = \frac{\left|\vec{n}.\vec{j}\right|}{\left|\vec{n}\right|\left|\vec{j}\right|} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{2y}{\sqrt{5y^2+4x^2}} \Leftrightarrow 5y^2+4x^2 = 16y^2 \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{11}}{2}y \qquad (2)$$

Thế (2) vào (1), giải phương trình ta được kết quả $y = \frac{4a}{\sqrt{11}}$ và $x = 2a$.

Vậy $V_{MABC} = S_{ABC}.AA' = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}.2a.4a\right).\frac{4a}{\sqrt{11}} = \frac{16\sqrt{11}a^3}{33}$ ☺

- Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp B'ANC theo *a*

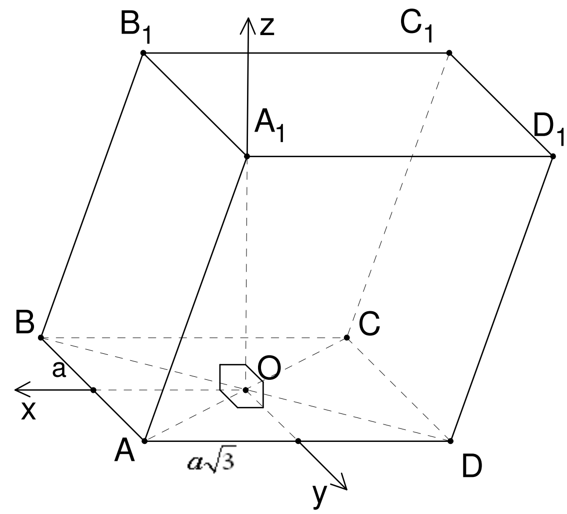
Phương trình mặt cầu (S) ngoại tiếp khối chóp B'ANC có dạng:
$(S): x^2+y^2+z^2+2a_1x+2by+2cz+d=0$ với tâm $T(-a_1;-b;-c), R = \sqrt{a_1^2+b^2+c^2-d}$
Vì B', A, N, C thuộc mặt cầu (S) nên tọa độ của chúng thỏa phương trình mặt cầu, ta có hệ:

$$\begin{cases} \frac{16}{11}a^2 + \frac{8\sqrt{11}}{11}a.c + d = 0 \\ 4a^2 + 4a.b + d = 0 \\ 4a^2 + 4a.a_1 + d = 0 \\ 16a^2 + 8a.a_1 + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = -3a \\ b = -3a \\ c = -\frac{13a}{\sqrt{11}} \\ d = 8a^2 \end{cases} \Rightarrow R = 3a\sqrt{\frac{31}{11}}.$$ ☺

4. Lăng trụ tứ giác

Bài 1. (Trích đề thi tuyển sinh ĐH Khối B năm 2011). Cho lăng trụ $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a, AD = a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của điểm A_1 trên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với giao điểm của AC và BD. Góc giữa hai mặt phẳng (ADD_1A_1) và $(ABCD)$ bằng 60^o. Tính thể tích khối lăng trụ đã cho và khoảng cách từ điểm B_1 đến mặt phẳng (A_1BD) theo a.

Gợi ý:



Gọi O là giao điểm của AC và BD. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ. Khi đó:

$A\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};\frac{a}{2};0\right), B\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};-\frac{a}{2};0\right), C\left(-\frac{a\sqrt{3}}{2};-\frac{a}{2};0\right),$

$D\left(-\frac{a\sqrt{3}}{2};\frac{a}{2};0\right).$

Từ giả thiết góc giữa hai mặt phẳng (ADD_1A_1) và $(ABCD)$ bằng 60^o tìm được $A_1\left(0;0;\frac{a\sqrt{3}}{2}\right).$

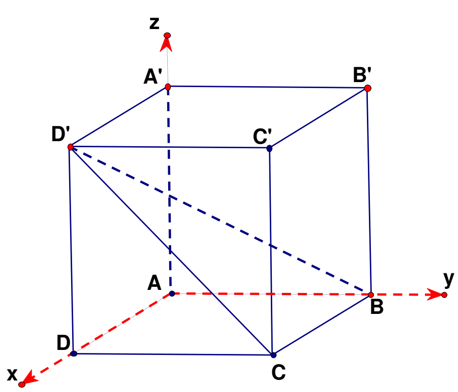
Suy ra $B_1\left(0;-a;\frac{a\sqrt{3}}{2}\right).$

Thể tích khối lăng trụ đã cho là $V_{ABCD.A_1B_1C_1D_1} = \frac{3a^3}{2}.$

Khoảng cách từ điểm B_1 đến mặt phẳng (A_1BD) là $d\left(B_1,(A_1BD)\right) = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$

D12: Cho hình hộp đứng ABCD.A’B’C’D’ có đáy là hình vuông, tam giác A’AC vuông cân, A’C = *a*. Tính thể tích của khối tứ diện ABB’C’ và khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (BCD’) theo *a*.

Giải:



Từ giả thiết ta tính được $AC = AA' = \frac{a}{\sqrt{2}}$ và $AB = \frac{a}{2}$.

Chọn hệ trục tọa độ Oxyz như hình vẽ với gốc tọa độ O trùng với điểm A.

Ta có: A(0;0;0), $B\left(0;\frac{a}{2};0\right), C\left(\frac{a}{2};\frac{a}{2};0\right), D\left(\frac{a}{2};0;0\right)$

$A'\left(0;0;\frac{a}{\sqrt{2}}\right), B'\left(0;\frac{a}{2};\frac{a}{\sqrt{2}}\right), C'\left(\frac{a}{2};\frac{a}{2};\frac{a}{\sqrt{2}}\right), D'\left(\frac{a}{2};0;\frac{a}{\sqrt{2}}\right)$

$\overrightarrow{AB} = \left(0;\frac{a}{2};0\right); \overrightarrow{AB'} = \left(0;\frac{a}{2};\frac{a}{\sqrt{2}}\right); \overrightarrow{AC'} = \left(\frac{a}{2};\frac{a}{2};\frac{a}{\sqrt{2}}\right).$

$\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AB'}\right] = \left(\frac{a^2}{2\sqrt{2}};0;0\right) \Rightarrow \left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AB'}\right].\overrightarrow{AC'} = \frac{a^3}{4\sqrt{2}} \Rightarrow V_{ABB'C'} = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AB'}\right].\overrightarrow{AC'}\right| = \frac{\sqrt{2}a^3}{48}.$

- $\overrightarrow{CB} = \left(-\frac{a}{2};0;0\right)$, $\overrightarrow{CD'} = \left(0;-\frac{a}{2};\frac{a}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow \left[\overrightarrow{CD};\overrightarrow{CD'}\right] = \left(0;\frac{a^2}{2\sqrt{2}};\frac{a^2}{4}\right) \Rightarrow \vec{n} = \left(0;\sqrt{2};1\right)$ là VTPT của mặt phẳng (BCD’) nên (BCD’): $\sqrt{2}y + z - \frac{a\sqrt{2}}{2} = 0 \Rightarrow d\left(A,(BCD')\right) = \frac{\left|\sqrt{2}.0 + 0 - \frac{a\sqrt{2}}{2}\right|}{\sqrt{(\sqrt{2})^2 + 1^2}} = \frac{a\sqrt{6}}{6}$. ☺