

**PHƯƠNG PHÁP CASIO – VINACAL**  
**BÀI 8. ĐẠO HÀM**

**1) KIẾN THỨC NỀN TẢNG**

1. Lệnh tính đạo hàm cấp 1 : **SHIFT**  **$\int \frac{1}{x}$**

2. Công thức tính đạo hàm cấp 2 :  $y''(x_0) = \frac{y'(x_0 + 0.000001) - y'(x_0)}{0.000001}$

3. Dự đoán công thức đạo hàm bậc n :

- Bước 1 : Tính đạo hàm cấp 1, đạo hàm cấp 2, đạo hàm cấp 3
- Bước 2 : Tìm quy luật về dấu, về hệ số, về số biến, về số mũ rồi rút ra công thức tổng quát.

**2) VÍ DỤ MINH HỌA**

**Bài 1-[Đề minh họa thi THPT Quốc Gian lần 1 năm 2017]**

Tính đạo hàm của hàm số  $y = \frac{x+1}{4^x}$

A.  $y' = \frac{1 - 2(x+1)\ln 2}{2^{2x}}$

B.  $y' = \frac{1 + 2(x+1)\ln 2}{2^{2x}}$

C.  $y' = \frac{1 - 2(x+1)\ln 2}{2^{x^2}}$

D.  $y' = \frac{1 + 2(x+1)\ln 2}{2^{x^2}}$

**GIẢI**

❖ **Cách 1 : CASIO**

➤ Chọn  $x = 1.25$  rồi tính đạo hàm của hàm số  $y = \frac{x+1}{4^x}$  Ta có :

$y'(1.25) = 0.3746\dots$  Sử dụng lệnh tính tích phân ta có :

**SHIFT**  **$\int \frac{1}{x}$**  **ALPHA** **)** **+** **1** **▼** **4**  **$x^a$**  **ALPHA** **)** **▶▶▶** **1** **.** **2** **5** **=**

$\frac{d}{dx} \left( \frac{x+1}{4^x} \right) \Big|_{x=1.25}$

**-0.3746185104**

➤ Nếu đáp án A đúng thì  $y'(1.25)$  cũng phải giống  $y'$  ở trên . Sử dụng lệnh tính giá trị CALC ta có

**$\frac{1}{x}$**  **1** **=** **2** **(** **ALPHA** **)** **+** **1** **)** **ln** **2** **)** **▼** **2**  **$x^a$**  **2** **ALPHA** **)** **CALC** **1** **.** **2** **5** **=**

$\frac{1 - 2(x+1)\ln(2)}{2^{2x}}$

**-0.3746185104**

Ta thấy giống hệt nhau  $\Rightarrow$  Rõ ràng đáp án đúng là A

**Bài 2-[Thi thử báo Toán học tuổi trẻ lần 4 năm 2017]**

Cho hàm số  $y = e^x (3 - x^2)$  . Đạo hàm của hàm số triệt tiêu tại các điểm :

A.  $x = 1; x = 3$

B.  $x = 1; x = 3$

C.  $x = -1; x = 3$

D.  $x = 0$

**GIẢI**

❖ **Cách 1 : CASIO**

- Ta hiểu : Đạo hàm bị triệt tiêu tại điểm  $x = x_0$  tức là  $f'(x_0) = 0$

Xét  $f'(1) = 0 \Rightarrow x = 1$  thỏa  $\Rightarrow$  Đáp số đúng là A hoặc B

$$\frac{d}{dx}(e^x(3-x^2))|_{x=1}$$

- Xét  $f'(3) = 0 \Rightarrow x = 3$  thỏa  $\Rightarrow$  Đáp số chính xác là A

$$\frac{d}{dx}(e^x(3-x^2))|_{x=3}$$

**Bài 3-[Thi HK1 THPT Kim Liên – Hà Nội năm 2017]**

Cho hàm số  $y = 2016e^{x \ln \frac{1}{8}}$ . Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng ?

- A.  $y' + 2y \ln 2 = 0$       B.  $y' + 3y \ln 2 = 0$       C.  $y' + 8y \ln 2 = 0$       D.  $y' + 8y \ln 2 = 0$

GIẢI

❖ **Cách 1 : CASIO**

- Chọn  $x = 1.25$  rồi tính đạo hàm của hàm số  $y = 2016e^{x \ln \frac{1}{8}}$ . Ta có :  $y'(1.25) = 0.3746 \dots$  Lưu giá trị này vào biến A cho gọn.

$$\frac{d}{dx}(2016e^{x \ln(1 \div 8)}) \text{ Ans} \rightarrow A$$

- Tính giá trị của  $y$  tại  $x = 1.25$ . Ta có  $y(1.25) =$  Nếu đáp án A đúng thì  $y'(1.25)$  cũng phải giống  $y'$  ở trên. Sử dụng lệnh tính giá trị CALC ta có

$$2016e^{x \ln(1 \div 8)} \text{ Ans} \rightarrow B$$

Ta thấy  $\frac{A}{B \ln 2} = 3 \Rightarrow A + 3B \ln 2 = 0 \Rightarrow$  Đáp án chính xác là B

$$\frac{A}{B \ln(2)}$$

**Bài 4-[Thi thử THPT Quảng Xương –Thanh Hóa lần 1 năm 2017]**

Tính đạo hàm cấp hai của hàm số sau  $y = (1 - 2x)^4$  tại điểm  $x = 2$  là /

**A. 81****B. 432****C. 108****D. 216****GIẢI**❖ **Cách 1 : CASIO**

- Áp dụng công thức  $f''(x_0) = \frac{f'(x_0 + \Delta x) - f'(x_0)}{\Delta x_0}$

Chọn  $\Delta x = 0.000001$  rồi tính đạo hàm của hàm số  $y = (1 - 2x)^4$ . Tính  $y'(2 + 0,000001) = A$ .

SHIFT  $\int$  ALPHA  $\times 10^x$   $x^\square$  ALPHA  $)$  ► sin ALPHA  $)$   $)$  ► 0 + 0  $\cdot$  0 0 1 =

SHIFT RCL (-)

$\frac{d}{dx}((1-2x)^4)|_{x=2}$  Ans→A

216.000432

216.000432

- Tính  $f'(2) = B$ .

◀ ◀ ◀ DEL DEL DEL DEL DEL DEL DEL DEL DEL DEL = SHIFT RCL  $\frac{d}{dx}$  Math ▲

$\frac{d}{dx}((1-2x)^4)|_{x=2}$  Ans→B

216

216

Lắp vào công thức  $f''(x_0) = \frac{f'(x_0 + \Delta x) - f'(x_0)}{\Delta x_0} = 432 \Rightarrow$  Đáp số chính xác là **B**

$\frac{A-B}{0.000001}$  Math ▲

A-B  
0.000001

432.000247

**Bài 5-[Thi Học sinh giỏi tỉnh Phú Thọ năm 2017]**

Cho hàm số  $f(x) = e^x \cdot \sin x$ . Tính  $f''(0)$

**A.  $2e$** **B. 1****C. 2****D.  $2e$** **GIẢI**❖ **Cách 1 : CASIO**

- Áp dụng công thức  $f''(x_0) = \frac{f'(x_0 + \Delta x) - f'(x_0)}{\Delta x_0}$

Chọn  $\Delta x = 0.000001$  rồi tính đạo hàm của hàm số  $f(x) = e^x \cdot \sin x$ . Tính  $y'(0 + 0,001) = A$ .

(Chú ý bài toán có yếu tố lượng giác phải chuyển máy tính về chế độ Radian)

SHIFT  $\int$  ALPHA  $\times 10^x$   $x^\square$  ALPHA  $)$  ► sin ALPHA  $)$   $)$  ► 0 + 0  $\cdot$  0 0 1 =

SHIFT RCL (-)

$$\frac{d}{dx}(e^x \sin(x))|_{x=0} \quad \text{Ans} \rightarrow A$$

$$\frac{500001}{500000} \quad \frac{500001}{500000}$$

➤ Tính  $f'(0) = B$ .

$$\frac{d}{dx}(e^x \sin(x))|_{x=0} \quad \text{Ans} \rightarrow B$$

$$1 \quad 1$$

Lắp vào công thức  $f''(x_0) = \frac{f'(x_0 + \Delta x) - f'(x_0)}{\Delta x_0}$  2 Đáp số chính xác là C

$$\frac{A-B}{0.000001}$$

$$1.999999618$$

### Bài 6-[Thi Học sinh giỏi tỉnh Ninh Bình năm 2017]

Cho hàm số  $y = e^x \sin x$ , đặt  $F = y'' + 2y'$  khẳng định nào sau đây đúng?

A.  $F = 2y$

B.  $F = y$

C.  $F = y$

D.  $F = 2y$

GIẢI

❖ Cách 1: CASIO

➤ Áp dụng công thức  $f''(x_0) = \frac{f'(x_0 + \Delta x) - f'(x_0)}{\Delta x_0}$

Chọn  $x = 2$ ,  $\Delta x = 0.000001$  rồi tính đạo hàm của hàm số  $y = e^x \sin x$ . Tính  $y'(2 + 0,001) = A$ .

$$\frac{d}{dx}(e^{-x} \sin(x))|_{x=2} \quad \text{Ans} \rightarrow A$$

$$-0.1793792622 \quad -0.1793792622$$

➤ Tính  $f'(0) = B$ .

$$\frac{d}{dx}(e^{-x} \sin(x))|_{x=0} \quad \text{Ans} \rightarrow B$$

$$-0.1793793748 \quad -0.1793793748$$

Lắp vào công thức  $f''(x_0) = \frac{f'(x_0 + \Delta x) - f'(x_0)}{\Delta x_0} = C$

$$\frac{A-B}{0.000001} \quad \text{Ans} \rightarrow C$$

$$0.112638413 \quad 0.112638413$$

➤ Tính  $F = y'' + 2y' = C + 2B = 0.2461... = 2y \Rightarrow$  Đáp số chính xác là **A**

**Bài 7 :** Một vật chuyển động theo quy luật  $S = \frac{1}{2}t^3 + 9t^2$  với thời gian  $t(s)$  là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và  $S(m)$  là quãng đường vật đi được trong thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian  $10(s)$  kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu ?

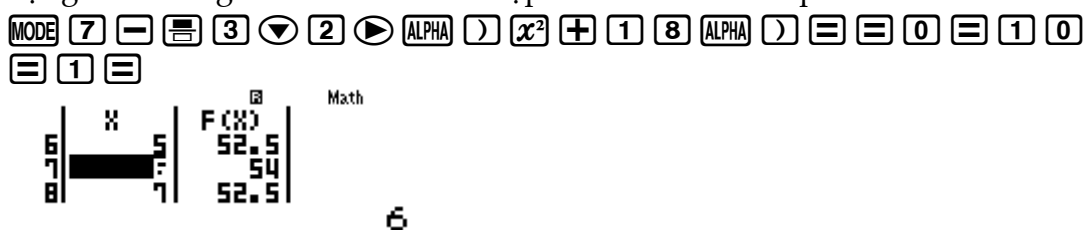
- A.  $216(m/s)$       B.  $30(m/s)$       C.  $400(m/s)$       D.  $54(m/s)$

GIẢI

❖ **Cách 1 : CASIO**

➤ Ta hiểu : trong chuyển động biến đổi theo thời gian thì quãng đường là nguyên hàm của vận tốc hay nói cách khác, vận tốc là đạo hàm của quãng đường  $\Rightarrow v(t) = \frac{3}{2}t^2 + 18t$

➤ Để tìm giá trị lớn nhất của  $v(t)$  trong khoảng thời gian từ 0 đến  $10(s)$  ta sử dụng chức năng MODE 7 với thiết lập Start 0 End 10 Step 1



Ta thấy ngay vận tốc lớn nhất là  $54(m/s)$  đạt được tại giây thứ 6  
 $\Rightarrow$  Đáp số chính xác là **D**

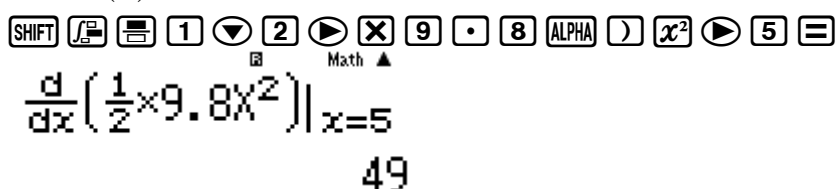
**Bài 8 :** Một vật rơi tự do theo phương trình  $S = \frac{1}{2}gt^2$  với  $g = 9.8(m/s^2)$ . Vận tốc tức thời của vật tại thời điểm  $t = 5s$  là :

- A.  $122.5(m/s)$       B. 29.5      C.  $10(m/s)$       D.  $49(m/s)$

GIẢI

❖ **Cách 1 : CASIO**

➤ Ta hiểu : Vận tốc tức thời trong chuyển động biến đổi tại thời điểm  $t = t_1$  có giá trị là  $S'(t_1)$



Ta thấy vận tốc tại  $t_1 = 5$  là 49  $\Rightarrow$  Đáp số chính xác là **D**

**BÀI TẬP TỰ LUYỆN**

**Bài 1-[Đề minh họa thi THPT Quốc Gian lần 1 năm 2017]**

Tính đạo hàm của hàm số  $y = 13^x$

- A.  $y' = x.13^{x-1}$       B.  $y' = 13^x \cdot \ln 13$       C.  $y' = 13^x$       D.

$$y' = \frac{13^x}{\ln 13}$$

**Bài 2-[Thi thử báo Toán học tuổi trẻ lần 4 năm 2017]**

Đạo hàm của hàm số  $y = 2^x \cdot 3^x$  bằng :

- A.  $6^x \ln 6$       B.  $6^x$       C.  $2^x + 3^x$       D.  
 $2^{x-1} + 3^{x-1}$

**Bài 3-[Thi thử chuyên Nguyễn Thị Minh Khai lần 1 năm 2017]**

Cho hàm số  $f(x) = \ln|\cos 3x|$  giá trị  $f'\left(\frac{\pi}{12}\right)$  bằng :

- A. 3      B. 3      C. 2      D. 1

**Bài 4 :** Cho hàm số  $f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x$  . Khi đó tập nghiệm của bất phương trình

$f'(x) \leq 0$  là :

- A.  $(0; +\infty)$       B.  $[2; 2]$       C.  $(-\infty; +\infty)$       D. Không  
 có  $m$  thỏa

**Bài 5 :** Cho hàm số  $f(x) = x.e^{x^2}$  . Khi đó  $f''(1)$  bằng :

- A.  $10e$       B.  $6e$       C.  $4e^2$       D. 10

**Bài 6 :** Tính vi phân của hàm số  $y = \sin x$  tại điểm  $x_0 = \frac{\pi}{3}$

- A.  $dy = \frac{\sqrt{3}}{2} dx$       B.  $dy = \frac{1}{2} dx$       C.       $dy = \cos x dx$   
 D.  $dy = \cos x dx$

**Bài 7 :** Đồ thị hàm số  $y = ax^3 + bx^2 + x + 3$  có điểm uốn  $I(2; 1)$  khi :

- A.  $a = \frac{1}{4}; b = \frac{3}{2}$       B.  $a = \frac{3}{2}; b = 1$       C.       $a = \frac{1}{4}; b = \frac{3}{2}$   
 D.  $a = \frac{1}{4}; b = \frac{3}{2}$

**Bài 8 :** Cho hàm số  $y = \frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{1 - \sin x \cos x}$  . Khi đó ta có :

- A.  $y'' = y$       B.  $y'' = y$       C.       $y'' = 2y$   
 D.  $y'' = 2y$

**LỜI GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN****Bài 1-[Đề minh họa thi THPT Quốc Gian lần 1 năm 2017]**

Tính đạo hàm của hàm số  $y = 13^x$

A.  $y' = x.13^{x-1}$

B.  $y' = 13^x \cdot \ln 13$

C.  $y' = 13^x$

D.

$$y' = \frac{13^x}{\ln 13}$$

GIẢI

- Chọn  $x = 2$ . Tính  $y'(2) = 433.4764... = 13^2 \cdot \ln 13 \Rightarrow$  Đáp án chính xác là B

SHIFT  $\int$  1 3  $x^y$  ALPHA  $\frac{\square}{\square}$   $\rightarrow$   $\rightarrow$  2  $=$

Math  $\blacktriangle$

$$\frac{d}{dx}(13^x)|_{x=2}$$

433.4764414

**Bài 2-[Thi thử báo Toán học tuổi trẻ lần 4 năm 2017]**

Đạo hàm của hàm số  $y = 2^x \cdot 3^x$  bằng :

A.  $6^x \ln 6$

B.  $6^x$

C.  $2^x + 3^x$

D.

$2^{x-1} + 3^{x-1}$

GIẢI

- Chọn  $x = 3$  tính  $y'(3) = 387.0200... = 6^3 \ln 6 \Rightarrow$  Đáp số chính xác là A

SHIFT  $\int$  2  $x^y$  ALPHA  $\frac{\square}{\square}$   $\rightarrow$   $\times$  3  $x^y$  ALPHA  $\frac{\square}{\square}$   $\rightarrow$   $\rightarrow$  3  $=$

Math  $\blacktriangle$

$$\frac{d}{dx}(2^x \times 3^x)|_{x=3}$$

387.0200454

**Bài 3-[Thi thử chuyên Nguyễn Thị Minh Khai lần 1 năm 2017]**

Cho hàm số  $f(x) = \ln|\cos 3x|$  giá trị  $f'\left(\frac{\pi}{12}\right)$  bằng :

A. 3

B. 3

C. 2

D. 1

GIẢI

- Tính  $(\ln|\cos 3x|)' = \frac{1}{|\cos 3x|}(|\cos 3x|)'$
  - Tính  $(|\cos 3x|)' = (\sqrt{\cos^2 3x})' = \frac{1}{2\sqrt{\cos^2 3x}}(\cos^2 3x)' = \frac{3\cos 3x \sin 3x}{|\cos 3x|}$
- $$\Rightarrow (\ln|\cos 3x|)' = \frac{3\sin 3x \cos 3x}{|\cos 3x|^2}$$
- $$\Rightarrow y'\left(\frac{\pi}{12}\right)$$

SHIFT MODE 4  $\frac{\square}{\square}$   $-$  3 sin 3 ALPHA  $\frac{\square}{\square}$   $\rightarrow$  cos 3 ALPHA  $\frac{\square}{\square}$   $\rightarrow$   $\blacktriangledown$  SHIFT hyp cos 3

ALPHA  $\frac{\square}{\square}$   $\rightarrow$   $\rightarrow$   $x^2$  CALC SHIFT  $\times 10^x$   $\div$  1 2  $=$

Math  $\blacktriangle$

$$\frac{-3\sin(3X)\cos(3X)}{|\cos(3X)|^2}$$

-3

$\Rightarrow$  Đáp số chính xác là A

**Bài 4 :** Cho hàm số  $f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x$  . Khi đó tập nghiệm của bất phương trình  $f'(x) \leq 0$  là :

- A.  $(0; +\infty)$                       B.  $[2; 2]$                       C.  $(-\infty; +\infty)$                       D. Không có  $m$  thỏa

GIẢI

- Tính  $y' = x^2 + x + 1$  .  $y' \leq 0 \Leftrightarrow x^2 + x + 1 \leq 0$
- Nhắm được luôn hoặc sử dụng tính năng giải bất phương trình MODE INEQ

MODE  $\blacktriangledown$  1 1 4 1 = 1 = 1 = =

No-Solution

$\Rightarrow$  Đáp số chính xác là D

**Bài 5 :** Cho hàm số  $f(x) = x.e^{x^2}$  . Khi đó  $f''(1)$  bằng :

- A.  $10e$                       B.  $6e$                       C.  $4e^2$                       D.  $10$

GIẢI

- Tính  $f'(1+0.000001)$  rồi lưu vào A

SHIFT  $\frac{1}{x}$  ALPHA  $\square$  X ALPHA  $\times 10^x$   $x^n$  ALPHA  $\square$   $x^2$   $\blacktriangleright$   $\blacktriangleright$  1 + 0 . 0 0 0 0 0 0 0 0 1 = SHIFT RCL ( ) Math  $\blacktriangle$

$\frac{d}{dx}(x \times e^{x^2})|_{x=1+0}$  Ans  $\rightarrow$  A

8.154872668

8.154872668

- Tính  $f'(1)$  rồi lưu vào B

$\blacktriangleleft$   $\blacktriangleleft$   $\blacktriangleleft$  DEL DEL DEL DEL DEL DEL DEL DEL DEL DEL = SHIFT RCL ( ) Math  $\blacktriangle$

$\frac{d}{dx}(x \times e^{x^2})|_{x=1}$  Ans  $\rightarrow$  B

8.154845485

8.154845485

- Thiết lập  $y'' = \frac{f'(1+0.000001) - f'(1)}{0.000001} = 27.1828... = 10e$

$\frac{\square}{\square}$  ALPHA ( ) = ALPHA  $\square$   $\blacktriangledown$  0 . 0 0 0 0 0 0 0 0 1 =

$\frac{A-B}{0.000001}$

27.18286827

$\Rightarrow$  Đáp số chính xác là A

**Bài 6 :** Tính vi phân của hàm số  $y = \sin x$  tại điểm  $x_0 = \frac{\pi}{3}$

- A.  $dy = \frac{\sqrt{3}}{2} dx$                       B.  $dy = \frac{1}{2} dx$                       C.  $dy = \cos x dx$   
D.  $dy = \cos x dx$

GIẢI



- Từ  $y = \sin x$  tiến hành vi phân 2 vế:  $(y') dy = (\sin x)' dx \Leftrightarrow dy = (\sin x)' dx$
- Tính  $(\sin x)'$  tại  $x_0 = \frac{\pi}{3}$

$$\frac{d}{dx}(\sin(x)) \Big|_{x=\frac{\pi}{3}} = 0.5$$

$\Rightarrow$  Đáp số chính xác là B

**Bài 7 :** Đồ thị hàm số  $y = ax^3 + bx^2 - x + 3$  có điểm uốn  $I(2;1)$  khi :

- A.  $a = \frac{1}{4}; b = \frac{3}{2}$       B.  $a = \frac{3}{2}; b = 1$       C.  $a = \frac{1}{4}; b = \frac{3}{2}$   
D.  $a = \frac{1}{4}; b = \frac{3}{2}$

**GIẢI**

- Hoành độ điểm uốn là nghiệm của phương trình  $y'' = 0$

Tính  $y' = 3ax^2 + 2bx + c \Rightarrow y'' = 6ax + 2b$ .

$$y' = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2b}{6a} = 2 \Leftrightarrow b = 6a \Rightarrow \text{Đáp số đúng là A hoặc C}$$

- Với  $a = \frac{1}{4}; b = \frac{3}{2}$  tính tung độ của điểm uốn:  $y(2) = 1$

$$-\frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - x + 3 = 1$$

$\Rightarrow$  Đáp số chính xác là A

**Bài 8 :** Cho hàm số  $y = \frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{1 - \sin x \cos x}$ . Khi đó ta có :

- A.  $y'' = y$       B.  $y'' = y$       C.  $y'' = 2y$   
D.  $y'' = 2y$

**GIẢI**

















- Chọn  $x = \frac{\pi}{12}$  Tính  $y'(\frac{\pi}{12} + 0.000001)$  rồi lưu và A

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\sin^3(x) + \cos^3(x)}{1 - \sin(x)\cos(x)} \right) \Big|_{x=\frac{\pi}{12}} = 0.7071055564$$

Tính  $y'(\frac{\pi}{12})$  rồi lưu và B

$\frac{d}{dx} \left( \frac{\sin(x)^5 + \cos(x)}{1 - \sin(x)\cos(x)} \right)$  Ans→B  
0.7071067812      0.7071067812

Tính  $y''\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{A}{0.000001} = 1.2247... = y$

$$\frac{A-B}{0.000001}$$

-1.224735667

- Tính  $y\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}}{2}$

 **sin** **ALPHA** **)** **)** **x<sup>n</sup>** **3** **▶** **+** **cos** **ALPHA** **)** **)** **x<sup>n</sup>** **3** **▼** **1** **-** **sin** **ALPHA** **)** **)**  
**cos** **ALPHA** **)** **)** **CALC** **SHIFT** **x10<sup>x</sup>** **÷** **1** **2** **=**

$$\frac{\sin(X) + \cos(X)}{1 - \sin(X)\cos(X)} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

⇒ Đáp số chính xác là **B**