

**PHƯƠNG PHÁP CASIO – VINACAL**  
**BÀI 22. TÍNH NHANH QUÃNG ĐƯỜNG VẬT CHUYỂN ĐỘNG**

**1) KIẾN THỨC NỀN TẢNG**

**Quãng đường đi được của một vật :** Một vật chuyển động có vận tốc thay đổi theo thời gian

,  $v = f(t)$  trong khoảng thời gian từ  $t_0$  đến  $t_1$  thì quãng đường vật đi được là :  $S = \int_{t_0}^{t_1} f(t) dt$

**2) CÁCH TÍNH NGUYÊN HÀM**

**VD1-[Câu 24 Đề minh họa BGD-ĐT lần 1 năm 2017]**

Một ô tô đang chạy với vận tốc  $10m/s$  thì người lái đạp phanh, từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc  $v(t) = 5t + 10(m/s)$  trong đó  $t$  là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh tới khi dừng hẳn, ô tô còn đi được bao nhiêu mét ?

A.  $0,2m$

B.  $2m$

C.  $10m$

D.  $20m$

**GIẢI**

❖ **Cách 1 : CASIO**

➤ Ta có quãng đường  $S(t) = v(t) \cdot t$ . Vì phân 2 về the  $t$  ta được

$$S'(t) \cdot dt = v(t) \cdot dt \Leftrightarrow S'(t) = v(t)$$

$$\Rightarrow S(t) \text{ là 1 nguyên hàm của } v(t) \Rightarrow S(t) = \int_{t_0}^{t_1} v(t) dt$$

➤ Khi xe dừng hẳn thì vận tốc tại điểm dừng  $= 0 \Leftrightarrow 0 = 5t + 10 \Leftrightarrow t = 2$

Chọn gốc thời gian  $t_0 = 0$  thì  $t_1 = 2$

$$\text{Quãng đường là } S = \int_0^2 (5t + 10) dt$$

Sử dụng máy tính Casio với chức năng tính tích phân

$$\int_0^2 (-5X + 10) dx$$

**10**

Quãng đường  $S = 10m$ . Vậy đáp án chính xác là C

❖ **Bình luận :**

- Nhắc lại kiến thức quan trọng nhất của Tích phân : Nếu hàm  $F(x)$  là một nguyên hàm của  $f(x)$  thì  $F'(x) = f(x)$

- Chính áp dụng kiến thức trên ta thấy  $S' = v(t) \Rightarrow S$  là một nguyên hàm của  $v(t)$

$$\Rightarrow S(t) = \int_{t_0}^{t_1} v(t) dt$$

**VD2-[Đề cương chuyên KHTN Hà Nội năm 2017]**

Lúc 9h sáng, một ô tô bắt đầu xuất phát từ Nhà hát Lớn thành phố Hà Nội đi thành phố Hồ Chí Minh. Trong 1 giờ đầu tiên, vì xe đi trong nội thành nên tốc độ di chuyển chưa nhanh, xe ô tô đi với vận tốc  $v(t) = 0,5 + 0,2 \cdot \cos \pi t$  (km/phút), trong đó  $t$  là thời gian kể từ lúc xe ô tô

xuất phát được tính bằng đơn vị phút. Hỏi lúc 9h10' x ô tô đi được quãng đường bao nhiêu km ?

A. 0,7

B. 5

C. 0,3

D. 5,2

**GIẢI**

❖ **Cách 1 : CASIO**

- Ta có quãng đường  $S(t) = v(t).t$  . Vì phân 2 về the  $t$  ta được

$$S'(t).dt = v(t).dt \Leftrightarrow S'(t) = v(t)$$

$$\Rightarrow S(t) \text{ là 1 nguyên hàm của } v(t) \Rightarrow S(t) = \int_{t_0}^t v(t) dt$$

- Chọn gốc thời gian lúc 9h là  $t_0 = 0$  thì lúc 9h10' là  $t_1 = 10$

$$\text{Quãng đường là } S = \int_0^{10} (0.5 + 0.2 \cos \pi t) dt$$

Sử dụng máy tính Casio với chức năng tích phân

SHIFT MODE 4  $\int$  ( 0 . 5 + 0 . 2 cos SHIFT  $\times 10^{-1}$  ALPHA ) ) ) ) ) 0  $\Delta$   
1 0  $\equiv$

$$\int_0^{10} (0.5 + 0.2 \cos \pi t) dt$$

Quãng đường  $S = 5m$  . Vậy đáp án chính xác là **B**

❖ **Bình luận :**

- Bài toán rất chuẩn mực về phép tính toán, con số ra cũng phản ánh tình trạng tắc xe tồi tệ ở Hà Nội khi 10s chỉ đi được có 5m

**VD3-[Thi thử chuyên Hạ Long – Quảng Ninh lần 1 năm 2017]**

Một vật chuyển động với vận tốc thay đổi theo thời gian được tính bởi công thức  $v(t) = 3t + 2$  , thời gian được tính theo đơn vị giây, quãng đường vật đó di chuyển được tính theo đơn vị m . Biết tại thời điểm  $t = 2(s)$  thì vật di chuyển được quãng đường là 10(m) . Hỏi tại thời điểm  $t = 30(s)$  thì vật di chuyển được quãng đường dài là bao nhiêu ?

A. 1410m

B. 1140m

C. 300m

D. 240m

**GIẢI**

❖ **Cách 1 : CASIO**

- Ta có quãng đường  $S(t) = v(t).t$  . Vì phân 2 về the  $t$  ta được

$$S'(t).dt = v(t).dt \Leftrightarrow S'(t) = v(t)$$

$$\Rightarrow S(t) \text{ là 1 nguyên hàm của } v(t) \Rightarrow S(t) = \int_{t_0}^t v(t) dt$$

- Chọn thời gian lúc đầu là  $t_0$  sau 2 giây thì  $t_1 = t_0 + 2$

$$\text{Quãng đường là } S = \int_{t_0}^{t_0+2} (3t + 2) dt$$

Để tìm  $t_0$  ta thiết lập quan hệ  $\int_{t_0}^{t_0+2} (3t+2)dt = 10(m)$ . Ta dự đoán  $t_0$  có thể là 0 ; 1;

2... và ta tiến hành thử với  $t_0 = 0$

Sử dụng máy tính Casio với chức năng tích phân

$$\int_0^2 (3x+2)dx$$

10

Ta thấy kết quả ra  $10(m)$  vậy dự đoán của ta đúng và  $t_0 = 0$

➤ Quãng đường vật đi được sau 30 giây là :  $S_1 = \int_{t_0}^{t_0+30} (3t+2)dt = \int_0^{30} (3t+2)dt$

$$\int_0^{30} (3x+2)dx$$

1410

Ta thấy  $S_1 = 1410(m)$  và A là đáp án chính xác

#### ❖ Bình luận :

- Mốc thời gian ban đầu không nhất thiết phải bằng 0 tuy nhiên khi sử dụng phép thử để tìm  $t_0$  thì ta luôn ưu tiên  $t_0 = 0$

#### **VD4-[Thi thử chuyên Hạ Long – Quảng Ninh lần 1 năm 2017]**

Một vận động viên đua  $F_1$  đang chạy với vận tốc  $10(m/s)$  thì anh ta tăng tốc với gia tốc  $a(t) = 6(m/s^2)$  trong đó  $t$  là khoảng thời gian tính bằng giây từ lúc tăng tốc. Hỏi quãng đường xe của anh ta đi được trong thời gian  $10(s)$  kể từ lúc bắt đầu tăng tốc là bao nhiêu ?

A. 1100m

B. 400m

C. 1010m

D. 1110m

**GIẢI**

#### ❖ Cách 1 : CASIO

➤ Ta có quãng đường  $S(t) = v(t).t$ . Vì phân 2 vế theo  $t$  ta được

$$S'(t).dt = v(t).dt \Leftrightarrow S'(t) = v(t)$$

$$\Rightarrow S(t) \text{ là 1 nguyên hàm của } v(t) \Rightarrow S(t) = \int_{t_0}^{t_1} v(t)dt$$

➤ Vận tốc của xe  $v(t) = v_0 + a(t) \Rightarrow v(t) = 10 + 6t$

Chọn gốc thời gian lúc xe bắt đầu tăng tốc là  $t_0 = 0$  vậy  $t_1 = t_0 + 10 = 10$

$$\text{Quãng đường là } S = \int_0^{10} (10 + 6t)dt$$

Sử dụng máy tính Casio với chức năng tích phân

$$\int_0^{10} (10+6x)dx$$

400

Ta thấy kết quả ra  $400(m)$  vậy **B** là đáp án chính xác

❖ **Bình luận :**

- Ta có thể giải theo công thức vật lý :  $S = v_0 t + \frac{at^2}{2} = 10.10 + \frac{6.10^2}{2} = 400(m)$

**BÀI TẬP TỰ LUYỆN**

**Bài 1-[Thi thử THPT Lương Thế Vinh – HN lần 2 năm 2017]**

Giả sử một vật từ trạng thái nghỉ khi  $t = 0$  chuyển động với vận tốc  $v(t) = t(5 - t) \text{ (m/s)}$ .  
Tính quãng đường vật đi được cho đến khi nó dừng hẳn

- A.  $\frac{125}{12}(m)$       B.  $\frac{125}{9}(m)$       C.  $\frac{125}{3}(m)$       D.  $\frac{125}{6}(m)$

**Bài 2-[Thi thử Group nhóm toán Facebook năm 2017]**

Học sinh lần đầu thử nghiệm tên lửa tự chế phóng từ mặt đất theo phương thẳng đứng với vận tốc  $15m/s$ . Hỏi sau  $2.5s$  tên lửa lên đến độ cao bao nhiêu? Giả sử bỏ qua sức cản của gió, tên lửa chỉ chịu tác động của trọng lực  $g = 9.8(m/s^2)$

- A.  $62.25m$       B.  $6.875m$       C.  $68.125m$       D.  $30.625m$

**Bài 3-[Bài 15 trang 153 Sách giáo khoa giải tích nâng cao 12]**

Một vật đang chuyển động với vận tốc  $v = 10(m/s)$  thì tăng tốc với gia tốc  $a(t) = 3t + t^2 \text{ (m/s}^2\text{)}$ . Tính quãng đường vật đi được trong thời gian  $10(s)$  kể từ lúc bắt đầu tăng tốc

- A.  $996m$       B.  $1200$       C.  $1680m$       D.  $3600m$

**Bài 4-[Đề cương chuyên KHTN Hà Nội năm 2017]**

Một vật chuyển động với vận tốc  $v(t) = \frac{1}{2\pi} + \frac{\sin(\pi t)}{\pi} \text{ (m/s)}$ . Quãng đường di chuyển của vật đó trong khoảng thời gian  $1,5$  giây chính xác đến  $0,01(m)$  là :

- A.  $0,32m$       B.  $0,33m$       C.  $0,34m$       D.  $0,35m$

**Bài 5-[Thi thử nhà sách Lovebook lần 1 năm 2017]**

Một bác thợ xây bơm nước vào bể chứa nước. Gọi  $h(t)$  là thể tích nước bơm được sau  $t$  giây. Cho  $h'(t) = 3at^2 + bt$  với  $a, b$  là các tham số. Ban đầu bể không có nước. Sau 5 giây thì thể tích nước trong bể là  $150m^3$ , sau 10 giây thì thể tích nước trong bể là  $1100m^3$ . Tính thể tích nước trong bể sau khi bơm được 20 giây.

- A.  $8400m^3$       B.  $2200m^3$       C.  $600m^3$       D.  $4200m^3$

**LỜI GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN**

**Bài 1-[Thi thử THPT Lương Thế Vinh – HN lần 2 năm 2017]**

Giả sử một vật từ trạng thái nghỉ khi  $t = 0$  chuyển động với vận tốc  $v(t) = t(5 - t) \text{ (m/s)}$ .  
Tính quãng đường vật đi được cho đến khi nó dừng hẳn

- A.  $\frac{125}{12}(m)$       B.  $\frac{125}{9}(m)$       C.  $\frac{125}{3}(m)$       D.  $\frac{125}{6}(m)$

GIẢI

- Thời điểm  $t_0 = 0$  vật ở trạng thái nghỉ. Tại thời điểm  $t_1$  ( $t_1 > t_0$ ) vật dừng lại hẳn khi đó

$$v(t) = 0$$

$$\Leftrightarrow t_1(5 - t_1) = 0 \Leftrightarrow t_1 = 5$$

- Vận tốc là một hàm biến thiên theo thời gian, đồng thời  $v(t)$  liên tục trên miền  $[0; 5] \Rightarrow$  Quãng đường vật di chuyển từ trạng thái nghỉ đến khi dừng hẳn là :

$$\int_{t_0}^{t_1} v(t) dt = \int_0^5 t(5 - t) dt = \frac{125}{6}$$

$$\int_0^5 x(5-x) dx = \frac{125}{6}$$

$$\int_0^5 x(5-x) dx$$

$$\frac{125}{6}$$

$\Rightarrow$  D là đáp án chính xác

Chú ý : Vận tốc của vật theo thời điểm nếu biểu diễn trên trục tọa độ  $Oxy$  sẽ là một Parabol .

Dựa vào đó nếu đề bài yêu cầu tìm thời điểm để vật có vận tốc lớn nhất thì ta dựa vào tọa độ

đỉnh của Parabol suy ra  $t = \frac{5}{2}$  và vận tốc lớn nhất vật có thể đạt được là  $v\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{25}{4} (m/s)$

### **Bài 2-[Thi thử Group nhóm toán Facebook năm 2017]**

Học sinh lần đầu thử nghiệm tên lửa tự chế phóng từ mặt đất theo phương thẳng đứng với vận tốc  $15m/s$  .Hỏi sau  $2.5s$  tên lửa lên đến độ cao bao nhiêu ? Giả sử bỏ qua sức cản của gió, tên lửa chỉ chịu tác động của trọng lực  $g = 9.8(m/s^2)$

A. 62.25m

B. 6.875m

C. 68.125m

D. 30.625m

**GIẢI**

- Phương trình vận tốc theo thời gian  $v(t) = v_0 + gt = 15 - 9.8t$
- Vì hàm  $v(t)$  liên tục trên miền  $[0; 2.5]$  nên quãng đường vật di chuyển từ thời điểm  $t_0 = 0$  đến thời điểm  $t_1 = 2.5(s)$  được tính theo công thức :

$$S = \int_{t_0}^{t_1} v(t) dt = \int_0^{2.5} (15 - 9.8t) dt = 6.875(m)$$

$$\int_0^{2.5} (15 - 9.8x) dx = 6.875$$

$$\int_0^{2.5} (15 - 9.8x) dx$$

$$6.875$$

$\Rightarrow$  Nếu chọn thì chọn đáp án B

Chú ý : Nếu xét theo phân loại dạng vật lý thì đây là dạng bài chuyển động thẳng đứng

### **Bài 3-[Bài 15 trang 153 Sách giáo khoa giải tích nâng cao 12]**

Một vật đang chuyển động với vận tốc  $v = 10(m/s)$  thì tăng tốc với gia tốc  $a(t) = 3t + t^2 (m/s^2)$  . Tính quãng đường vật đi được trong thời gian  $10(s)$  kể từ lúc bắt đầu tăng tốc

A. 996m

B. 1200

C. 1680m

D. 3600m

**GIẢI**

- Ta có vận tốc  $v(t) = v_0 + at = 10 + (3t + t^2)t$  và  $v(t)$  là một hàm biến thiên theo thời gian và liên tục trên  $R \Rightarrow$  Quãng đường vật di chuyển từ thời điểm  $t_0 = 0$  đến thời điểm  $t_1 = 10$

$$\text{được tính theo công thức } S = S(t) = \int_{t_0}^{t_1} v(t) dt = \int_0^{10} (10 + (3t + t^2)t) dt = 966(m)$$

$$\int_0^{10} (10 + (3x + x^2)x) dx = 966$$

$\Rightarrow$  Đáp số chính xác là **D**

Chú ý : Ta phải nhớ rõ công thức  $v(t) = v_0 + at$  với  $a = 3t + t^2$  tránh nhầm lẫn  $at = 3t + t^2$

$\Rightarrow v(t) = 10 + 3t + t^2$  là sai

#### **Bài 4-[Đề cương chuyên KHTN Hà Nội năm 2017]**

Một vật chuyển động với vận tốc  $v(t) = \frac{1}{2\pi} + \frac{\sin(\pi t)}{\pi}$  ( $m/s$ ). Quãng đường di chuyển của vật đó trong khoảng thời gian 1,5 giây chính xác đến 0,01( $m$ ) là :

A. 0,32m

B. 0,33m

C. 0,34m

D. 0,35m

**GIẢI**

- Vận tốc  $v(t)$  là một hàm biến thiên theo thời gian  $\Rightarrow$  Quãng đường vật di chuyển từ lúc bắt đầu tới thời điểm 1,5 giây là :

$$\int_{t_0}^{t_1} v(t) dt = \int_0^{1.5} \left( \frac{1}{2\pi} + \frac{\sin(\pi t)}{\pi} \right) dt = 0.34 (s) \quad (\text{sau khi làm tròn})$$

$$\int_0^{1.5} \left( \frac{1}{2\pi} + \frac{\sin(\pi x)}{\pi} \right) dx = 0.3400535983$$

$\Rightarrow$  C là đáp án chính xác

#### **Bài 5-[Thi thử nhà sách Lovebook lần 1 năm 2017]**

Một bác thợ xây bơm nước vào bể chứa nước. Gọi  $h(t)$  là thể tích nước bơm được sau  $t$  giây. Cho  $h'(t) = 3at^2 + bt$  với  $a, b$  là các tham số. Ban đầu bể không có nước. Sau 5 giây thì thể tích nước trong bể là  $150m^3$ , sau 10 giây thì thể tích nước trong bể là  $1100m^3$ . Tính thể tích nước trong bể sau khi bơm được 20 giây.

A.  $8400m^3$

B.  $2200m^3$

C.  $600m^3$

D.  $4200m^3$

**GIẢI**

- $h'(t)$  là một hàm biến thiên theo thời gian và liên tục trên  $R \Rightarrow$  Thể tích nước bơm được

$$\text{tính theo công thức } V = h(t) = \int_{t_0}^{t_1} (3at^2 + bt) dt$$

- Tại thời điểm  $t_1 = 5$  giây thì  $V = \int_0^5 (3at^2 + bt) dt = 150(m^3) \Leftrightarrow \left( at^3 + \frac{bt^2}{2} \right) \Big|_0^5 = 150$

$$\Leftrightarrow 125a + 12.5b = 150$$

- Tại thời điểm  $t_1 = 10$  giây thì  $V = \int_0^{10} (3at^2 + bt) dt = 1100(m^3) \Leftrightarrow \left( at^3 + \frac{bt^2}{2} \right) \Big|_0^5 = 1100$   
 $\Leftrightarrow 1000a + 50b = 1100$

- Giải hệ phương trình  $\begin{cases} 125a + 12.5b = 150 \\ 1000a + 50b = 1100 \end{cases}$

$\text{MODE}$   $\boxed{5}$   $\boxed{1}$   $\boxed{1}$   $\boxed{2}$   $\boxed{5}$   $\boxed{=}$   $\boxed{1}$   $\boxed{2}$   $\boxed{\cdot}$   $\boxed{5}$   $\boxed{=}$   $\boxed{1}$   $\boxed{5}$   $\boxed{0}$   $\boxed{=}$   $\boxed{1}$   $\boxed{0}$   $\boxed{0}$   $\boxed{0}$   $\boxed{=}$   $\boxed{5}$   $\boxed{0}$   $\boxed{=}$   $\boxed{1}$   
 $\boxed{1}$   $\boxed{0}$   $\boxed{0}$   $\boxed{=}$   $\boxed{=}$   $\boxed{=}$   
 $\text{Math} \nabla$   $\text{Y} =$   $\text{Math} \blacktriangle$

$$\frac{1}{1000} = \frac{2}{50}$$

Vậy tại thời điểm  $t_1 = 20$  thì thể tích  $V = \int_0^{20} (3t^2 + 2t) dt = 8400 \Rightarrow \mathbf{A}$  là đáp án chính xác

$\int_0^{20} (3x^2 + 2x) dx$   
 $\text{Math} \blacktriangle$