

BÀI 4. TIẾP TUYẾN CỦA HÀM SỐ

1) KIẾN THỨC NỀN TẢNG

1. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại một điểm : Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C) và một điểm $M(x_0; y_0)$ thuộc đồ thị (C) . Tiếp tuyến của đồ thị (C) tại tiếp điểm M là đường thẳng d có phương trình : $y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$

2. Lệnh Casio :  

2) VÍ DỤ MINH HỌA

Bài 1-[Thi thử THPT Lục Ngạn – Bắc Giang lần 1 năm 2017]

Tìm hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{x} \ln x$ tại điểm có hoành độ bằng 2

A. $\frac{1}{2} \ln 2$

B. $\frac{1}{4}$

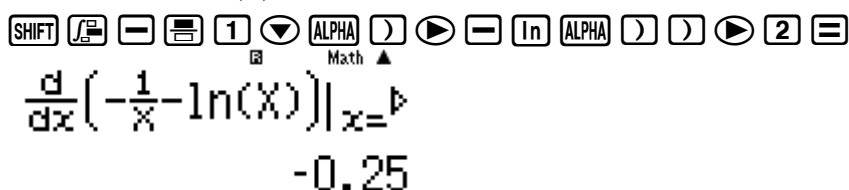
C. $\frac{3}{4}$

D. $\frac{1}{4}$

GIẢI

❖ **Cách 1 : CASIO**

- Gọi tiếp điểm là $M(x_0; y_0) \Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến $y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$
- Sử dụng máy tính Casio để tính hệ số góc tiếp tuyến tại điểm có hoành độ bằng 2 $\Rightarrow k = f'(2)$



- Ta thấy $k = f'(2) = -0.25 = -\frac{1}{4}$.

\Rightarrow B là đáp án chính xác

Bài 2-[Thi thử chuyên Hạ Long – Quảng Ninh lần 1 năm 2017]

Cho hàm số $y = -x^3 + 3x - 2$ có đồ thị (C) . Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) với trục tung.

A. $y = 2x + 1$

B. $y = 3x - 2$

C. $y = 2x + 1$

D.

$y = -3x - 2$

GIẢI

❖ **Cách 1 : CASIO**

- Gọi tiếp điểm là $M(x_0; y_0) \Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến $y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$
- M là giao điểm của đồ thị (C) và trục tung $\Rightarrow M$ có tọa độ $(0; -2)$

Tính $f'(0) = 0$



$$\frac{d}{dx}(-x^3+3x-2)|_{x=0}$$

- Thế vào phương trình tiếp tuyến có $y = 3(x - 0) - 2 \Leftrightarrow y = 3x - 2$
 \Rightarrow B là đáp án chính xác

Bài 3-[Thi thử chuyên Nguyễn Thị Minh Khai lần 1 năm 2017]

Số tiếp tuyến với đồ thị (C) : $y = x^3 - 3x^2 + 2$ đi qua điểm $M(1;0)$ là :

A. 4

B. 2

C. 3

D. 1

GIẢI

❖ **Cách 1 : CASIO**

- Gọi tiếp điểm là $M(x_0; y_0) \Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến $y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$
 Trong đó hệ số góc $k = f'(x_0) = 3x_0^2 - 6x_0$

- Thế $f'(x_0)$ vào phương trình tiếp tuyến được
 $y = (3x_0^2 - 6x_0)(x - x_0) + x_0^3 - 3x_0^2 + 2$

Tiếp tuyến đi qua điểm $M(1;0) \Rightarrow 0 = (3x_0^2 - 6x_0)(1 - x_0) + x_0^3 - 3x_0^2 + 2$

$$\Leftrightarrow 2x_0^3 + 6x_0^2 - 6x_0 + 2 = 0$$

Sử dụng máy tính với lệnh MODE 5 để giải phương trình bậc 3 trên

MODE 5 = 4 = 2 = 6 = = 6 = 2 =

X=

1

- Ta thấy có 1 nghiệm $x_0 \Rightarrow$ Chỉ có 1 tiếp tuyến duy nhất.
 \Rightarrow D là đáp án chính xác

Bài 4-[Thi thử báo Toán học tuổi trẻ lần 4 năm 2017]

Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ có đồ thị (C) . Đường thẳng nào sau đây là tiếp tuyến của (C) với hệ số góc nhỏ nhất

A. $y = 3x + 3$

B. $y = 3x - 3$

C. $y = 3x$

D. $y = 0$

GIẢI

❖ **Cách 1 : CASIO**

- Gọi tiếp điểm là $M(x_0; y_0) \Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến $y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$
 Trong đó hệ số góc $k = f'(x_0) = 3x_0^2 - 6x_0$

- Tìm giá trị nhỏ nhất của k bằng chức năng MODE 7

MODE 7 3 ALPHA) x^2 = 6 ALPHA) = = = 9 = 1 0 = 1 =

10 1 2 1 2 F(X) 0 0

1

Ta thấy $f'(\min) = f'(1) = -3 \Rightarrow x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = 1^3 - 3.1^2 + 2 = 0$

- Thế vào phương trình tiếp tuyến có $y = 3(x - 1) + 0 \Leftrightarrow y = 3x - 3$
 \Rightarrow D là đáp án chính xác

Bài 5-[Thi thử báo Toán học tuổi trẻ lần 4 năm 2017]

Cho hàm số $y = \frac{x+2}{x+1}$ (C) Gọi d là khoảng cách từ giao điểm hai tiệm cận của (C) đến một tiếp tuyến bất kì của (C). Giá trị lớn nhất d có thể đạt được là :

A. $3\sqrt{3}$

B. $\sqrt{3}$

C. $\sqrt{2}$

D. $2\sqrt{2}$

GIẢI

❖ **Cách 1 : T. CASIO**

- Gọi tiếp điểm là $M(x_0; y_0) \Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến $y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$

Trong đó hệ số góc $k = f'(x_0) = \frac{1}{(x_0+1)^2}$.

Thế k, y_0 vào phương trình tiếp tuyến có dạng : $y = \frac{1}{(x_0+1)^2}(x - x_0) + \frac{x_0+2}{x_0+1}$

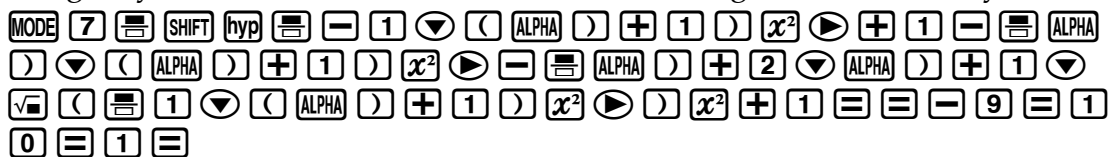
$\Leftrightarrow \frac{1}{(x_0+1)^2}x + y - \frac{x_0}{(x_0+1)^2} - \frac{x_0+2}{x_0+1} = 0$

- Hàm số có tiệm cận đứng $x = -1$ và tiệm cận ngang $y = 1$ nên giao điểm hai tiệm cận là $I(-1; 1)$.

Áp dụng công thức tính khoảng cách từ 1 điểm đến 1 đường thẳng ta có :

$$h = d(I; (d)) = \frac{\left| \frac{1}{(x_0+1)^2}(-1) + 1 - \frac{x_0}{(x_0+1)^2} - \frac{x_0+2}{x_0+1} \right|}{\sqrt{\left(\frac{1}{(x_0+1)^2} \right)^2 + 1^2}}$$

Dùng máy tính Casio với lệnh MODE 7 để tính các giá trị lớn nhất này.



- Ta thấy $h(\max) = \sqrt{2}$
 \Rightarrow C là đáp án chính xác

Bài 6-[Thi HK1 THPT Việt Đức – Hà Nội năm 2017]

Hàm số $y = \frac{2x}{x-1}$ (H), M là điểm bất kì và $M \in (H)$. Tiếp tuyến với (H) tại M tạo với hai đường tiệm cận một tam giác có diện tích bằng :

A. 4

B. 5

C. 3

D. 2

GIẢI

❖ **Cách 1 : CASIO**

- Gọi tiếp điểm là $M(x_0; y_0) \Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến $y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$

Trong đó hệ số góc $k = f'(x_0) = \frac{1}{(x_0 - 1)^2}$.

Thế k, y_0 vào phương trình tiếp tuyến có dạng : $y = \frac{1}{(x_0 - 1)^2}(x - x_0) + \frac{2x_0 - 1}{x_0 - 1}$
(d)

- Hàm số có tiệm cận đứng $x = 1$ và tiệm cận ngang $y = 2$ và giao điểm 2 tiệm cận là $I(1; 2)$

Gọi E là giao điểm của tiếp tuyến d và tiệm cận đứng $\Rightarrow E\left(1; \frac{2x_0 - 1}{x_0 - 1}\right)$

Gọi F là giao điểm của tiếp tuyến d và tiệm cận ngang $\Rightarrow F(2x_0 - 1; 2)$

- Độ dài $IE = |\vec{IE}| = \sqrt{(1-1)^2 + \left(\frac{2x_0 - 1}{x_0 - 1} - 2\right)^2} = \frac{2}{|x_0 - 1|}$

Độ dài $IF = \sqrt{(2x_0 - 1 - 1)^2 + (2 - 2)^2} = 2|x_0 - 1|$ Áp dụng công thức tính khoảng cách từ 1 điểm đến 1 đường thẳng ta có :

- Diện tích $\Delta IEF = \frac{1}{2} IE \cdot IF = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{|x_0 - 1|} \cdot 2|x_0 - 1| = 2 \Rightarrow \mathbf{D}$ là đáp án chính xác

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1-[Thi thử chuyên Khoa học tự nhiên lần 3 năm 2017]

Cho hàm số $y = \frac{x+1}{2x-1}$. Tiếp tuyến tại điểm có hoành độ bằng 1 có hệ số góc bằng :

- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{6}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{1}{6}$

Bài 2-[Thi thử chuyên Quốc Học Huế lần 1 năm 2017]

Tìm tọa độ của tất cả các điểm M trên đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{x-1}{x+1}$ sao cho tiếp tuyến của (C) tại M song song với đường thẳng $d: y = \frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$

- A. $(0;1), (2;3)$ B. $(1;0), (-3;2)$ C. $(-3;2)$ D. $(1;0)$

Bài 3-[Thi thử chuyên Thái Bình lần 1 năm 2017]

Cho hàm số $y = \frac{x-1}{x+2}$ có đồ thị (C) . Tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) và trục hoành có phương trình là :

D.

Bài 4-[Thi thử nhóm toán Đoàn Trí Dũng lần 3 năm 2017]

D.

Bài 5-[Thi thử Group nhóm toán Facebook lần 5 năm 2017]

D.

Bài 6-[Thi tốt nghiệp THPT năm 2012]

D.

$$y = 3x + \frac{5}{4}$$

LỜI GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1-[Thi thử chuyên Khoa học tự nhiên lần 3 năm 2017]

D. $\frac{1}{6}$

GIẢI

SHIFT \int $\frac{\square}{\square}$ ALPHA) + 1 ∇ 2 ALPHA) - 1 \blacktriangleright \blacktriangleright - 1 =

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{x+1}{2x-1} \right) \Big|_{x=-1} = -\frac{1}{3}$$

⇒ Đáp số chính xác là C

Bài 2-[Thi thử chuyên Quốc Học Huế lần 1 năm 2017]

Tìm tọa độ của tất cả các điểm M trên đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{x-1}{x+1}$ sao cho tiếp tuyến của (C) tại M song song với đường thẳng $d: y = \frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$

- A. $(0;1), (2;3)$ B. $(1;0), (-3;2)$ C. $(-3;2)$ D. $(1;0)$

GIẢI

- Đề bài hỏi các điểm M nên ta dự đoán có 2 điểm, lại quan sát thấy đáp án B được cấu tạo từ đáp án C và D nên ta ưu tiên thử đáp án D trước.
- Tiếp tuyến song song với d nên tiếp tuyến có hệ số góc bằng hệ số góc của d và bằng $\frac{1}{2}$

Tính $f'(1) = \frac{1}{2} \Rightarrow$ Điểm $M(1;0)$ là một tiếp điểm

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{x-1}{x+1} \right) \Big|_{x=1} = \frac{1}{2}$$

Tính $f'(-3) = \frac{1}{2} \Rightarrow$ Điểm $M(-3;2)$ là một tiếp điểm

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{x-1}{x+1} \right) \Big|_{x=-3} = 0.5$$

⇒ B là đáp án chính xác

Bài 3-[Thi thử chuyên Thái Bình lần 1 năm 2017]

Cho hàm số $y = \frac{x-1}{x+2}$ có đồ thị (C) . Tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) và trục hoành có phương trình là :

A. $y = 3x$ B. $y = 3x - 3$ C. $y = x - 3$ D. $y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$

GIẢI

- Gọi tiếp điểm là $M(x_0; y_0) \Rightarrow$ Tiếp tuyến $y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$
- M là giao điểm của đồ thị (C) và trục hoành $\Rightarrow M(1; 0) \Rightarrow x_0 = 1; y_0 = 0$

Tính hệ số góc $k = f'(1)$

SHIFT $\frac{1}{x}$ () ALPHA $\frac{1}{x^2}$ () = 1 $\frac{1}{x}$ ALPHA $\frac{1}{x^2}$ () + 2 $\frac{1}{x}$ =

$$\left. \frac{d}{dx} \left(\frac{x-1}{x+2} \right) \right|_{x=1} = \frac{1}{3}$$

Thay vào ta có tiếp tuyến $y = \frac{1}{3}(x - 1) + 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$

\Rightarrow Đáp số chính xác là D

Bài 4-[Thi thử nhóm toán Đoàn Trí Dũng lần 3 năm 2017]

Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x$ biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = 9x - 16$

A. $y = 9x + 16$ B. $y = 9x + 12$ C. $y = 9x - 10$ D. $y = 9x - 12$

GIẢI

- Gọi tiếp điểm là $M(x_0; y_0) \Rightarrow$ Tiếp tuyến $y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$ với hệ số góc $k = f'(x_0) = 3x_0^2 - 3$

- Tiếp tuyến song song với $y = 9x - 16$ nên có hệ số góc $k = 9 \Leftrightarrow 3x_0^2 - 3 = 9 \Leftrightarrow x_0 = \pm 2$

Với $x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = 2 \Rightarrow$ Tiếp tuyến : $y = 9(x - 2) + 2 \Leftrightarrow y = 9x - 16$ Tính hệ số góc

$k = f'(1)$

\Rightarrow Đáp số chính xác là A

Bài 5-[Thi thử Group nhóm toán Facebook lần 5 năm 2017]

Tìm tọa độ điểm M có hoành độ âm trên đồ thị $(C): y = \frac{1}{3}x^2 - x + \frac{2}{3}$ sao cho tiếp tuyến tại M vuông góc với đường thẳng $y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$

A. $M(2;0)$
B. $M\left(3; \frac{16}{3}\right)$
C. $\left(1; \frac{4}{3}\right)$
D. $M\left(\frac{1}{2}; \frac{9}{8}\right)$

GIẢI

- Gọi tiếp điểm là $M(x_0; y_0) \Rightarrow$ Tiếp tuyến $y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$ với hệ số góc

$$k = f'(x_0) = x_0^2 - 1$$

- Tiếp tuyến vuông góc với $y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$ nên có hệ số góc

$$k \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -1 \Leftrightarrow k = 3 \Leftrightarrow x_0^2 - 1 = 3 \Leftrightarrow x_0 = \pm 2$$

\Rightarrow Đáp số chính xác là **A**

Bài 6-[Thi tốt nghiệp THPT năm 2012]

Cho hàm số $y = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 (C)$. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ $x = x_0$ biết $f''(x_0) = -1$

A. $\begin{cases} y = 3x - \frac{5}{4} \\ y = 3x + \frac{5}{4} \end{cases}$
B. $\begin{cases} y = 3x - \frac{5}{4} \\ y = -3x + \frac{5}{4} \end{cases}$
C. $\begin{cases} y = -3x - \frac{5}{4} \\ y = 3x - \frac{5}{4} \end{cases}$
D. $\begin{cases} y = -3x + \frac{5}{4} \\ y = 3x + \frac{5}{4} \end{cases}$

GIẢI

- Gọi tiếp điểm là $M(x_0; y_0) \Rightarrow$ Tiếp tuyến $y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$ với hệ số góc

$$k = f'(x_0) = x_0^4 - 4x_0$$

- Ta có $f''(x) = 3x^2 - 4 \Rightarrow 3x_0^2 - 4 = -1 \Leftrightarrow x_0^2 = 1 \Rightarrow$

$$\begin{cases} x_0 = 1; y_0 = -\frac{7}{4} \\ x_0 = -1; y_0 = -\frac{7}{4} \end{cases}$$

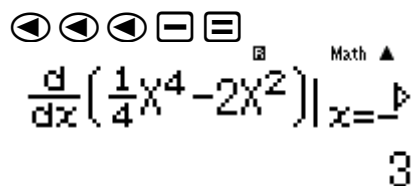
Với $x_0 = 1$ Tính hệ số góc $k = f'(1)$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{4}x^4 - 2x^2 \right) \Big|_{x=1} = -3$$

Thay vào ta có tiếp tuyến $y = 3(x - 1) - \frac{7}{4} \Leftrightarrow y = 3x - \frac{19}{4}$

\Rightarrow Đáp số chính xác là **D**

Với $x_0 = -1$ Tính hệ số góc $k = f'(-1)$



The image shows a sequence of calculator button presses: three left arrow keys, followed by a minus sign, an equals sign, a fraction template key (a box with a horizontal line), the number 1, the number 4, a minus sign, the number 2, the number 2, a right arrow key, the variable key (X), the number -1, and a right arrow key. The display shows the expression $\frac{d}{dx}(\frac{1}{4}X^4 - 2X^2) \Big|_{x=-1}$ and the result 3.

Thay vào ta có tiếp tuyến $y = 3(x + 1) - \frac{7}{4} \Leftrightarrow y = 3x + \frac{5}{4}$

\Rightarrow Đáp số chính xác là **D**.