**“Một dạng toán tổ hợp”**

Nhóm thực hiện: Nguyễn Long Nhật, Hà Minh Đăng, Nguyễn Hùng Quang.

Giáo viên hướng dẫn: Nguyễn Vũ Lương.

**I.Giới thiệu:**

Xuất phát từ bài toán “Có m cái kẹo chia cho n em nhỏ.Hỏi có bao nhiêu cách chia?”.Đây là bài toán tưởng chừng đơn giản nhưng lại là bài toán khó với nhiều học sinh.Sau đây tôi sẽ giới thiệu bài toán này và một số ứng dụng của nó.

**II.Kiến thức cơ bản:**

***Bài toán mở đầu:*** Có m chiếc kẹo giống nhau chia cho n em bé. Hỏi có bao nhiêu cách chia?

Hay chính là bài toán: Tìm số nghiệm không âm của phương trình :x1+ x2+…+ xn=m ( với n, m là những số nguyên dương).

Giải:

Ta có mỗi bộ x1, x2,…, xn thỏa mãn x1+ x2+…+ xn=m tương ứng 1-1 với bộ  gồm m số 1 và n-1 số 0. Để có một bộ số chúng ta cần chọn n-1 vị trí trong m+n-1 vị trí để đặt chữ số 0 và còn lại đặt chữ số 1. Suy ra số cách chia kẹo là: d = .

***Bài toán cơ bản 1:*** Tìm số nghiệm nguyên dương của phương trình :

x1+ x2+…+ xn=m ( với n, m là những số nguyên dương) (1).

Giải:

Đặt yi=xi-1 (Với i=) nên ta có:

y1+ y2 +…+ yn= x1+ x2+…+ xn-n = m-n

+) Nếu m<n phương trình vô nghiệm.

+) Nếu m n, quay trở lại bài toán ban đầu số nghiêm của phương trình trên chính là số nghiệm của phương trình (1) là: d=  .

***(\*) Tổng quát:***Cho n số tự nhiên, a1,a2,…,an.Tìm số nghiệm tự nhiên của phương trình : x1+ x2+…+ xn=m thỏa mãn xi  ai (Với mọi i=).

Giải:

Đặt yi=xi- ai (Với i=) và A= a1+a2+…+an nên ta có:

y1+ y2 +…+ yn= x1+ x2+…+ xn- a1+a2+…+an = m-A.

+) Nếu m<A. Phương trình vô nghiệm.

+) Nếu m=A.Phương trình có 1 nghiệm.

+) Nếu m>A.Phương trình có  nghiệm.

***Bài toán cơ bản 2:*** Tìm số nghiệm không âm của phương trình:x+y+z=n thỏa mãn điều kiện x y z (2).

Giải:

Trước tiên ta sẽ có bài toán sau (\*):

“Tìm số nghiệm không âm của phương trình: x+y=n thỏa mãn điều kiện

x y.”

Vì x y suy ra x  

+) Nếu n chia hết cho 2 thì x có thể nhận  + 1= +1 giá trị

0,1,2,…, và y tính được theo x ( vì y=n-x) suy ra ta có  +1 bộ (x,y) nguyên không âm thỏa mãn x+y=n và x y.

+) Nếu n không chia hết cho 2 suy ra x   và x có thể nhận  +1 giá trị và có  + 1 bộ (x,y) nguyên không âm thỏa mãn bài toán.

Quay trở lại bài toán ta có:

+) Kí hiệu r1xyz là nghiệm số của phương trình (2) thỏa mãn x<y<z. Tương tự có r1xzy ,r1yzx ,r1yxz ,r1zxy ,r1zyx.

Do vai trò của x,y,z hoàn toàn bình đẳng trong phương trình: x+y+x=n

Ta có: r1xyz = r1xzy = r1yzx = r1yxz = r1zxy = r1zyx=r1.

+) Kí hiệu r2xyz là nghiệm số của phương trình (2) thỏa mãn x=y<z. Tương tự có r2yzx ,r3zxy.

Ta có: r2xyz = r2yzx = r1zxy = r2.

+) Kí hiệu r3xyz là nghiệm số của phương trình (2) thỏa mãn x<y=z. Tương tự có r3yzx ,r3zxy.

Ta có: r3xyz = r3yzx = r3zxy = r3.

+) Kí hiệu r4 là nghiệm số của phương trình (2) thỏa mãn x=y=z.

Tất cả các bộ số nguyên không âm (x,y,z) thỏa mãn x+y+z=n bằng

 = mỗi bộ số sẽ thuộc một trong những trường hợp trên nên ta có:

6r1 + 3r2 + 3r3 + r4 =  (3)

Ta có : r2 + r3 + r4  chính là số nghiệm của phương trình 2u+v=n (vì từ phương trình x+y+z=n ta có thể cho 2 số hạng x=y hoặc y=z hoặc z=x và tất nhiên bao gồm cả trường hợp x=y=z.)

Giả sử x=y sẽ bao gồm x=y>z, x=y<z, x=y=z.

Phương trình 2u+v=n <=> u+(u+v)=n. Đặt t=u+v  u thu được u+t=n với u  t.

Theo như bài toán đầu (\*) số nghiệm của phương trình này là  +1

hay r2 + r3 + r4  =  +1.

Xét: +) Nếu n chia hết cho 3 => r4 = 1. Nếu n không chia hết cho 3 => r4 = 0 hay r4 =.

Vì x y z bao gồm x<y<z hoặc x=y<z hoặc x<y=z hoặc x=y=z.

Vậy số nghiệm thỏa mãn yêu cầu của bài toán là: d=r1 + r2 + r3 + r4.

Áp dụng đẳng thức (3) ta có:

d = 

=

=

=

***Mở rộng cho 4 số:*** Tìm số nghiệm nguyên không âm của phương trình thỏa mãn: x1+ x2+x3+ x4 = n và x1  x2  x3  x4 .

Giải:

Bổ đề Burnside: ,trong đó v() là số các  mà có các a X sao cho a không đổi qua :

v() = 

X={(x1,x2,x3,x4); x1,x2,x3,x4N; x1+ x2+x3+ x4 = n}.

Giả sử  là các bộ song ánh trên x bởi các hoán vị của tập A = {1;2;3;4}.

+) Nếu = id ,có một , thì v() là số nghiệm của phương trình

x1+ x2+x3+ x4= n => v() = .

+) Nếu  tạo bởi việc thay đổi 2 phần tử trong A khi đó có

 = 6 () ,v() là số nghiệm của phương trình 2x+y+z=n

Ta có x ∈{0;1;…;} và phương trình có n-2x+1 với mỗi x.

=> Số nghiệm của phương trình là:

v() =

= 

=> v() = .

+) Nếu  tạo bởi việc thay đổi 2 cặp phần tử trong A khi đó có

 = 3 (), v() là số nghiệm của phương trình 2x+2y=n

-) Nếu n lẻ, phương trình vô nghiệm.

-) Nếu n chẵn, phương trình có  nghiệm.

=> v() = .

+) Nếu  tạo bởi việc thay đổi 3 phần tử trong A khi đó có

2.4 = 8 () , v() là số nghiệm của phương trình 3x+y=n

=> v() = .

+) Nếu  tạo bởi việc thay đổi 4 phần tử trong A khi đó có

 = 6 () v() là số nghiệm của phương trình 4x=n

=> v() = .

Tổng số các  là 1+6+3+8+6=24.

Theo bổ đề Burnside số nghiệm của phương trình ban đầu là:



***Bài toán tổng quát:*** Tìm số nghiệm của phương trình thỏa mãn:

x1+ x2+…+ xn=m thỏa mãn : x1  x2  …  xn..

Giải:

Giả sử Mm,n là tập hợp các kết quả của phương trình (4), và P (m, n) số tập thỏa mãn của các yếu tố của (4). Chúng ta dễ dàng thấy rằng:

P (0, n) = 1 với mọi k, P (m, n) = P (m, m) cho tất cả các k  n.

Do đó, ta giả định thêm rằng m cố định, chúng ta có 1< n  m. Ta chia nhỏ các tập Mm,n vào thành các tập Ti (i = 0,1, ..., n-1), nên Ti chứa chính xác những kết quả của (4) trong đó N0 thoả mãn điều kiện:

0=x1=x2=…=xi<xi+1<xi+2<…<xn.

Ta có (x1,x2,…,xn)  (xi+1-1,xi+2-1,…,xn-1), định nghĩa một song ánh từ Ti đến Mm-n+i,n-i từ 0 xi+1-1 xi+2-1 … xn-1,

(xi+1-1)+(xi+2-1)+…+(xn-1)=m-n+i, và ánh xạ:

(y1,y2,…,yn-i)  (0,0,…,0, y1+1,y2+1,…,yn-i+1).

Có nghĩa là | Ti | = | Mm-n+i,n-i |,và do đó có thể viết:

P (m, n) = P (m-1,1) + P (m-2,2) + ... + P (m-n, n)

(1< n  m), và với phương trình (4) cụ thể ta có thể tính được kết quả cụ thể.

**Những kĩ năng hay sử dụng trong bài toán chia kẹo là:**

1. Phương pháp đánh số.

2. Nguyên lý bao gồm và loại trừ.

**II.Một số kết quả và áp dụng:**

**Bài 1:** Tìm số nghiệm không âm của phương trình: x+y+z+t=1000 với

t  499.

Giải:

Số nghiệm thỏa mãn x+y+z+t=1000 là được chia làm 2 loại:

Loại 1: Thỏa mãn yêu cầu đề bài t  499.

Loại 2: Không thỏa mãn yêu cầu đề bài t  500 .

Xét t  500 ta có: x+y+z+(t-500) = 500

Đặt t1=t-500 ta thu được số nghiệm trong trường hợp này là 

Vậy đáp số của bài toán là: d =  - .

**Bài 2:** Tìm số nghiệm không âm của bất phương trình: x+y+z+t  1000.

Giải:

Đặt u=1000-(x+y+z+t)  0 ta thu được bài toán tương đương x+y+z+t+u=1000 (với x,y,z,u là những số nguyên không âm)

Đáp số của bài toán là: d=

***Tổng quát:*** Số nghiệm nguyên không âm của bất phương trình

x1+ x2+…+ xn  m là 

**Bài 3:** Tìm số bộ số nguyên không âm (x,y,z,t) thỏa mãn :

1  x  y  z  t  1000

Giải:

Đặt a1=x-10 , a2=y-x0, a3=z-y0, a4=t-z0, a5=1000-t0. Ta có:

a1 + a2 + a3 + a4 + a5 =1000.

Đáp số: 

**Bài 4:** Tìm số nghiệm của phương trình sau: x1+x2+x3+x4=30 (5xi10 )

Giải:

Đặt yi=xi-5  .Từ giả thiết suy ra 0yi5 . Ta có phương trình:

y1+y2+y3+y4=10 (0yi5 ) (1).

Gọi X là tập hợp các nghiệm nguyên không âm của phương trình (1). Khi đó |X|=.

Gọi A,B,C,D lần lượt là các tập hợp thỏa mãn y1+y2+y3+y4=10 và 5yi.

Theo bài 1 ta có:

|A|=|B|=|C|=|D|=.







Áp dụng nguyên lí bù trừ ta có số nghiệm bằng:









Vậy đáp số là: - 4 = 146.

**Bài 5:** Tìm số nghiệm của phương trình sau: x1+x2+x3+x4=100 và x1 chia hết cho 3.

Giải:

Hàm sinh của x1 là: x3+x6+…+x99 = 

Hàm sinh của x2,x3,x4 là: 

Hàm sinh của phương trình là: 

Hệ số của x100 là: 

Vậy đáp số của bài toán là: 115940.

**Bài 6:** Tìm số nghiệm của phương trình sau: x1+x2+x3+x4=14 và |xi|5 .

Giải:

Vì |xi|5 => -5xi5. Đặt yi = xi + 5

=> y1+y2+y3+y4=34 với 0xi10 

Làm tương tự bài 4 ta có kết quả là:540 nghiệm.

**Bài 7:** Cho tập A={ 1;2;3;…;18} có bao nhiêu cách lấy ra 5 số mà giá trị tuyệt đối hiệu của 2 số bất kì trong 5 số đó không nhỏ hơn 2?

Giải:

Theo bài toán ta sẽ có 5 số thỏa mãn đề bài sẽ không có 2 số nào liên tiếp, suy ra 5 số này chia chuỗi 13 số còn lại thành 6 chuỗi con trong đó mỗi chuỗi đều có ít nhất 1 phần tử. Gọi số phần tử trong chuỗi là a1,a2,..,a6 bài toán tương đương với việc tìm số nghiệm nguyên dương của phương trình a1+a2+..+a6=13. Kết quả bài toán là 792.

**Bài 8:** Có bao nhiêu số nguyên dương nhỏ hơn 10000 mà có tổng các chữ số bằng 14?

Giải:

Gọi số phải tìm có dạng  sao cho 0a, b, c, d9.Theo bài ra ta có:

a+b+c+d=14.

Tương tự bài 4, số các số nguyên dương phải tìm là 456.

**Bài 9:** Có 8 viên giống nhau và 12 hộp bi khác nhau. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp 8 viên bi đó vào các hộp sao cho tổng số bi trong hộp 1,2,3 là chẵn?

Giải:

Gọi số bi trong các hộp lần lượt là a1,…, a12.

Đặt a1+a2+a3=x => x chẵn

-) Nếu x=0 => có a4+…+a12=8

Số nghiệm (a4,…,a12) là .

Số nghiệm (a1,a2,a3) là 1.

-) Nếu x=2 => a4+…+a12=6

Số nghiệm (a4,…,a12) là .

Số nghiệm (a1,a2,a3) là .

-) Nếu x=4 => a4+…+a12=4

Số nghiệm (a4,…,a12) là .

Số nghiệm (a1,a2,a3) là  .

-) Nếu x=6 => a4+…+a12=2

Số nghiệm (a4,…,a12) là 

Số nghiệm (a1,a2,a3) là  .

-) Nếu x=8 => a4+…+a12=0

Số nghiệm (a4,…,a12) là 1.

Số nghiệm (a1,a2,a3) là  .

Vậy số cách xếp bóng vào hộp là 24528 cách.

**Tài liệu**

+ Counting and Configuration – Jiri Herman, Radan Kucera, Jaromir Simsa.

+ Mathematical Olympiad Series, Vol.4: Combinatorial Problems on Mathematical Competitions – Yao Zhang.

+ Problem-Solving Methods in Combinatorics – Pablo Soberón Bravo.

.