Documentație-Metoda programării dinamice-Problema 10

Enunțul problemei:

Fermierul Gigel are o livadă cu peri de forma unui triunghi dreptunghic cu laturile de câte n peri fiecare și având perii organizați pe linii și coloane. Pe prima linie este un singur păr, pe a doua doi peri, etc. Pe ultima linie sunt n peri. Pentru fiecare păr se cunoaște numărul de pere din el. Hoțul intră în livada lui Gigel prin colțul stânga jos, adică prin primul element al ultimei linii. El se poate deplasa paralel cu rândurile de peri, adică cu liniile, respectiv cu coloanele livezii. Astfel, dintr-o poziție aflată pe linia i și coloana j, hotul poate merge pe linia i- 1 și coloana j sau pe linia i și coloana j+1. Ca să nu îl prindă Gigel, hoțul trebuie ia toate perele din perii de pe traseul pe care merge, să iasă pe la sfârșitul unei linii de peri și să fure un număr minim de pere (deoarece nu e lacom sau nu le poate duce și îl prinde Gigel).

Problema de a aduna cât mai puține pere este doar o mască pentru o problemă de a calcula un traseu de sumă minimă dintr-o matrice triunghiulară.

Practic, pentru rezolvarea relației de recurență, vom aplica tehnica memoizării, utilizând un triunghi de numere smin pentru a reține soluțiile subproblemelor, respectiv elementul smin[i][j] va păstra suma minimă pe un traseu care începe cu elementul t[i][j]:

smin[i][j]= t[i][j],dacă i=j

t[i][j]+min{smin[i-1][j],smin[i][j+1]} ,dacă 0≤i<n−1

pentru fiecare j∈{0,1,…,i}.

Soluția problemei (suma minimă) este dată de smin[n-1][0], iar reconstituirea traseului pe care a fost obținută suma minimă se poate realiza într-o manieră Greedy, utilizând elementele matricei smin, astfel: plecăm din primul element aflat pe ultima linie a matricei smin și apoi ne deplasăm pe cel mai mic dintre cei doi succesori posibili ai elementului curent.

Reconstituirea traseului se poate realiza într-o manieră Greedy deoarece matricea smin este o matrice de optime locale care au condus la un optim global.

Complexitatea algoritmului prezentat este egală cu O(𝑛^2), iar prin alocarea dinamică a tablourilor t și smin sub forma unor tablouri bidimensionale triunghiulare de numere întregi s-ar putea optimiza spațiul de memorie utilizat.

Exemple:

Date.in

5

5

6 7

1 1 1

1 2 1 3

1 6 1 1 1

Date.out

Numarul minim de pere este 5

Traseul cu numarul minim de pere este:

t[4][0] -> t[3][0] -> t[2][0] -> t[2][1] -> t[2][2]

Date.in

5

10

-2 15

13 -8 -10

-17 1 21 16

7 3 -11 14 1

Date.out

Numarul minim de pere este -27

Traseul cu numarul minim de pere este:

t[4][0] -> t[3][0] -> t[3][1] -> t[2][1] -> t[2][2]