

確率・統計基礎 模擬期末試験

森 立平

問 1

以下の確率質量関数および確率密度関数を持つ確率変数 X の期待値と分散をもとめよ。

(1) $\Pr(X = 0) = 1 - p, \Pr(X = 1) = p$ for $p \in [0, 1]$.

(2) $\Pr(X = 0) = 1/2, \Pr(X = 1) = 1/3, \Pr(X = 2) = 1/6$.

問 2

正の実数 $\lambda > 0$ について、確率変数 X がポアソン分布にしたがうとする。つまり

$$\Pr(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \quad \text{for } k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

である。このとき以下の問に答えよ。

(1) X のキュムラント母関数 $K_X(t) = \log \mathbb{E}[e^{tX}]$ をもとめよ。

(2) X のキュムラント母関数のルジャンドル変換 $I_X(a) = \sup_{t \in \mathbb{R}} \{at - K_X(t)\}$ をもとめよ。

(3) X_1, \dots, X_N を X と独立同分布の確率変数とする。実数 a について、以下の値をクラメールの定理を用いてもとめよ。

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log \Pr \left(\frac{X_1 + \dots + X_N}{N} \geq a \right).$$

問 3

$A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{0, 1\}$ とし、

$$\begin{array}{lll} \Pr(S = 0) = 4/11 & \Pr(S = 1) = 7/11 & \\ \Pr(X = 0 \mid S = 0) = 1/6 & \Pr(X = 1 \mid S = 0) = 2/6 & \Pr(X = 2 \mid S = 0) = 3/6 \\ \Pr(X = 0 \mid S = 1) = 3/6 & \Pr(X = 1 \mid S = 1) = 1/6 & \Pr(X = 2 \mid S = 1) = 2/6 \end{array}$$

とするとき、以下の問に答えよ。

- (1) X から S を最大事後確率推定する関数 $E_{\text{MAP}}: A \rightarrow B$ と最尤推定する関数 $E_{\text{ML}}: A \rightarrow B$ を求めよ。
- (2) X から S を最大事後確率推定した場合の平均誤り確率を求めよ。
- (3) X から S を最尤推定した場合の平均誤り確率を求めよ。

問 4

$A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{0, 1\}$ とし、

$$\begin{array}{lll} \Pr(X = 0 \mid S = 0) = \frac{1}{6} & \Pr(X = 1 \mid S = 0) = \frac{2}{6} & \Pr(X = 2 \mid S = 0) = \frac{3}{6} \\ \Pr(X = 0 \mid S = 1) = \frac{3}{6} & \Pr(X = 1 \mid S = 1) = \frac{2}{6} & \Pr(X = 2 \mid S = 1) = \frac{1}{6} \end{array}$$

とする。このとき、 $\eta > 0$ について、以下の決定的な尤度比検定関数 $E_\eta: A \rightarrow B$ で仮説検定することを考える。

$$E_\eta(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } \frac{\Pr(X=x|S=0)}{\Pr(X=x|S=1)} > \eta \\ 1 & \text{if } \frac{\Pr(X=x|S=0)}{\Pr(X=x|S=1)} \leq \eta \end{cases}$$

以下の問に答えよ。

1. 一般の $\eta > 0$ について、二種類の誤り確率

$$\begin{aligned} \alpha_{E_\eta} &= \Pr(E_\eta(X) = 1 \mid S = 0) \\ \beta_{E_\eta} &= \Pr(E_\eta(X) = 0 \mid S = 1) \end{aligned}$$

を求めよ。 η の値で場合分けしてもとめること。

2. 任意の確率的な検定関数 $E: A \rightarrow [0, 1]$ で実現可能な (α_E, β_E) の範囲を図示せよ。