確率・統計基礎
模擬期末試験

森 立平

問 1

以下の確率質量関数および確率密度関数を持つ確率変数 X の期待値と分散をもとめよ。

(1) $\Pr(X=0) = 1-p$, $\Pr(X=1) = p$ for $p \in [0,1]$.

(2) $\Pr(X=0) = 1/2$, $\Pr(X=1) = 1/3$, $\Pr(X=2) = 1/6$.

問 2

正の実数 $\lambda > 0$ について、確率変数 X がポアソン分布にしたがうとする。つまり

$$\Pr(X=k) = \frac{\lambda^k \mathrm{e}^{-\lambda}}{k!}$$

である。このとき以下の問に答えよ。

(1) X のキュムラント母関数 $K_X(t) = \log \mathbb{E}[\mathrm{e}^{tX}]$ をもとめよ。

(2) X のキュムラント母関数のルジャンドル変換 $I_X(a) = \sup_{t\in\mathbb{R}}\{at - K_X(t)\}$ をもとめよ。

(3) $X_1,\dots,X_N$ を X と独立同分布の確率変数とする。実数 a について、以下の値をクラメールの定理を用いてもとめよ。

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \log \Pr\left(\frac{X_1+\cdots+X_N}{N} \ge a\right).$$

問 3

$A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{0, 1\}$ とし、

$$
\begin{array}{ccc}
\Pr(S=0) = 4/11 & \Pr(S=1) = 7/11 & \\
\Pr(X=0 \mid S=0) = 1/6 & \Pr(X=1 \mid S=0) = 2/6 & \Pr(X=2 \mid S=0) = 3/6 \\
\Pr(X=0 \mid S=1) = 3/6 & \Pr(X=1 \mid S=1) = 1/6 & \Pr(X=2 \mid S=1) = 2/6
\end{array}
$$

とするとき、以下の問に答えよ。

(1) X から S を最大事後確率推定する関数 $E_{\mathrm{MAP}}\colon A \to B$ と最尤推定する関数 $E_{\mathrm{ML}}\colon A \to B$ をもとめよ。

(2) X から S を最大事後確率推定した場合の平均誤り確率をもとめよ。

(3) X から S を最尤推定した場合の平均誤り確率をもとめよ。

問 4

$A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{0, 1\}$ とし、

$$
\begin{array}{ccc}
\Pr(X=0 \mid S=0) = \dfrac{1}{6} & \Pr(X=1 \mid S=0) = \dfrac{2}{6} & \Pr(X=2 \mid S=0) = \dfrac{3}{6} \\
\Pr(X=0 \mid S=1) = \dfrac{3}{6} & \Pr(X=1 \mid S=1) = \dfrac{2}{6} & \Pr(X=2 \mid S=1) = \dfrac{1}{6}
\end{array}
$$

とする。このとき、$\eta > 0$ について、以下の決定的な尤度比検定関数 $E_\eta\colon A \to B$ で仮説検定することを考える。

$$
E_\eta(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } \frac{\Pr(X=x|S=0)}{\Pr(X=x|S=1)} > \eta \\ 1 & \text{if } \frac{\Pr(X=x|S=0)}{\Pr(X=x|S=1)} \leq \eta \end{cases}
$$

以下の問に答えよ。

1. 一般の $\eta > 0$ について、二種類の誤り確率

$$
\begin{aligned}
\alpha_{E_\eta} &= \Pr(E_\eta(X) = 1 \mid S = 0) \\
\beta_{E_\eta} &= \Pr(E_\eta(X) = 0 \mid S = 1)
\end{aligned}
$$

   をもとめよ。η の値で場合分けしてもとめること。

2. 任意の確率的な検定関数 $E\colon A \to [0, 1]$ で実現可能な (α_E, β_E) の範囲を図示せよ。