

# 確率・統計基礎 模擬期末試験

森 立平

## 問 1

以下の確率質量関数および確率密度関数を持つ確率変数  $X$  の期待値と分散をもとめよ。

(1)  $\Pr(X = 0) = 1 - p$ ,  $\Pr(X = 1) = p$  for  $p \in [0, 1]$ .

(2)  $\Pr(X = 0) = \frac{1}{2}$ ,  $\Pr(X = 1) = \frac{1}{3}$ ,  $\Pr(X = 2) = \frac{1}{6}$ .

## 問 2

正の実数  $\lambda > 0$  について、確率変数  $X$  がポアソン分布にしたがうとする。つまり

$$\Pr(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

である。このとき以下の問に答えよ。

(1)  $X$  のキュムラント母関数  $K_X(t) = \log \mathbb{E}[e^{tX}]$  をもとめよ。

(2)  $X$  のキュムラント母関数のルジャンドル変換  $I_X(a) = \sup_{t \in \mathbb{R}} \{at - K_X(t)\}$  をもとめよ。

(3)  $X_1, \dots, X_N$  を  $X$  と独立同分布の確率変数とする。実数  $a$  について、以下の値をクラメールの定理を用いてもとめよ。

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log \Pr \left( \frac{X_1 + \dots + X_N}{N} \geq a \right).$$

### 問 3

$$\begin{array}{lll} \Pr(S = 0) = 4/11 & \Pr(S = 1) = 7/11 & \\ \Pr(X = 0 \mid S = 0) = 1/6 & \Pr(X = 1 \mid S = 0) = 2/6 & \Pr(X = 2 \mid S = 0) = 3/6 \\ \Pr(X = 0 \mid S = 1) = 3/6 & \Pr(X = 1 \mid S = 1) = 1/6 & \Pr(X = 2 \mid S = 1) = 2/6 \end{array}$$

とするとき、以下の問に答えよ。

- (1)  $X$  から  $S$  を最大事後確率推定する関数  $E_{\text{MAP}}: A \rightarrow B$  と最尤推定する関数  $E_{\text{ML}}: A \rightarrow B$  をもとめよ。
- (2)  $X$  から  $S$  を最大事後確率推定した場合の平均誤り確率をもとめよ。
- (3)  $X$  から  $S$  を最尤推定した場合の平均誤り確率をもとめよ。

### 問 4

$$\begin{array}{lll} \Pr(X = 0 \mid S = 0) = \frac{1}{6} & \Pr(X = 1 \mid S = 0) = \frac{2}{6} & \Pr(X = 2 \mid S = 0) = \frac{3}{6} \\ \Pr(X = 0 \mid S = 1) = \frac{3}{6} & \Pr(X = 1 \mid S = 1) = \frac{2}{6} & \Pr(X = 2 \mid S = 1) = \frac{1}{6} \end{array}$$

とする。このとき、 $\eta > 0$  について、以下の尤度比検定関数  $E(x)$  で仮説検定することを考える。

$$E(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } \frac{\Pr(X=x|S=0)}{\Pr(X=x|S=1)} > \eta \\ 1 & \text{if } \frac{\Pr(X=x|S=0)}{\Pr(X=x|S=1)} < \eta \end{cases}$$

以下の問に答えよ。

1. 一般の  $\eta > 0$  について、二種類の誤り確率

$$\begin{aligned} \alpha_E &= \Pr(E(X) = 1 \mid S = 0) \\ \beta_E &= \Pr(E(X) = 0 \mid S = 1) \end{aligned}$$

をもとめよ。 $\eta$  の値で場合分けしてもとめること。

2. 任意の検定関数  $E: A \rightarrow [0, 1]$  で実現可能な  $(\alpha_E, \beta_E)$  の範囲を図示せよ。