確率・統計基礎
模擬期末試験

森 立平

問 1

以下の確率質量関数および確率密度関数を持つ確率変数 X の期待値と分散をもとめよ。

(1) $\mathrm{Pr}(X=0)=1-p$, $\mathrm{Pr}(X=1)=p$ for $p\in[0,1]$.

(2) $\mathrm{Pr}(X=0)=\frac{1}{2}$, $\mathrm{Pr}(X=1)=\frac{1}{3}$, $\mathrm{Pr}(X=2)=\frac{5}{12}$.

問 2

正の実数 $\lambda>0$ について、確率変数 X がポアソン分布にしたがうとする。つまり

$$\mathrm{Pr}(X=k)=\frac{\lambda^k \mathrm{e}^{-\lambda}}{k!}$$

である。

(1) X のキュムラント母関数 $K_X(t)=\log\mathbb{E}[\mathrm{e}^{tX}]$ をもとめよ。

(2) X のキュムラント母関数のルジャンドル変換 $I_X(a)=\sup_{t\in\mathbb{R}}\{at-K_X(t)\}$ をもとめよ。

(3) $X_1,\dots,X_N$ を X と独立同分布の確率変数とする。実数 a について、以下の値をクラメールの定理を用いてもとめよ。

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\log\mathrm{Pr}\left(\frac{X_1+\cdots+X_N}{N}\geq a\right).$$

問 3

$A = \{0,1,2\}$, $B = \{0,1\}$ とし、

$$
\begin{array}{ccc}
\Pr(S=0)=4/11 & \Pr(S=1)=7/11 & \\
\Pr(X=0 \mid S=0)=1/6 & \Pr(X=1 \mid S=0)=2/6 & \Pr(X=2 \mid S=0)=3/6 \\
\Pr(X=0 \mid S=1)=3/6 & \Pr(X=1 \mid S=1)=1/6 & \Pr(X=2 \mid S=1)=2/6
\end{array}
$$

とするとき、以下の問に答えよ。

(1) X から S を最大事後確率推定する関数 $E_{\mathrm{MAP}} \colon A \to B$ と最尤推定する関数 $E_{\mathrm{ML}} \colon A \to B$ をもとめよ。

(2) X から S を最大事後確率推定した場合の平均誤り確率をもとめよ。

(3) X から S を最尤推定した場合の平均誤り確率をもとめよ。

問 4

$A = \{0,1,2\}$, $B = \{0,1\}$ とし、

$$
\begin{array}{ccc}
\Pr(X=0 \mid S=0)=\dfrac{1}{6} & \Pr(X=1 \mid S=0)=\dfrac{2}{6} & \Pr(X=2 \mid S=0)=\dfrac{3}{6} \\
\Pr(X=0 \mid S=1)=\dfrac{3}{6} & \Pr(X=1 \mid S=1)=\dfrac{2}{6} & \Pr(X=2 \mid S=1)=\dfrac{1}{6}
\end{array}
$$

とする。このとき、$\eta > 0$ について、以下の尤度比検定関数 $E(x)$ で仮説検定することを考える。

$$
E(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } \frac{\Pr(X=x|S=0)}{\Pr(X=x|S=1)} > \eta \\ 1 & \text{if } \frac{\Pr(X=x|S=0)}{\Pr(X=x|S=1)} < \eta \end{cases}
$$

以下の問に答えよ。

1. 一般の $\eta > 0$ について、二種類の誤り確率

$$
\alpha_E = \Pr(E(X)=1 \mid S=0)
$$
$$
\beta_E = \Pr(E(X)=0 \mid S=1)
$$

   をもとめよ。η の値で場合分けしてもとめること。

2. 任意の検定関数 $E \colon A \to [0,1]$ で実現可能な (α_E, β_E) の範囲を図示せよ。