آمار و احتمال مهندسی

کواریانس و همبستگی

(Ross 7.4)

خطی بودن امید ریاضی

- نشان دادیم که $E[X+Y]=E[X]+E[Y]$ و در حالت کلی:

$$E[X_1+X_2+\ \ldots+X_n]=E[X_1]+E[X_2]+\cdots+E[X_n]$$

- به عبارت دیگر امید ریاضی یک عملگر خطی بر روی متغیرهای تصادفی است.
- خاصیت خطی بودن امید ریاضی فارغ از وابسته یا مستقل بودن X_iها برقرار است.
- فرض کنید E_1، E_2، ... و E_n پیشامدهایی متناظر با متغیرهای تصادفی شاخص X_i باشند.
  - اگر E_i اتفاق بیافتد، آنگاه $X_i=1$ و در غیر این صورت $X_i=0$
  - قبلا نشان دادیم که: $E[X_i]=P(E_i)$

حاصل‌ضرب امید ریاضی

قضیه. اگر X و Y متغیرهای تصادفی مستقل باشند، و $g(.)$ و $h(.)$ دو تابع حقیقی باشند، آنگاه:

$$E[g(X)h(Y)] = E[g(X)]E[h(Y)]$$

اثبات:

$$E[g(X)h(Y)] = \int_{y=-\infty}^{\infty}\int_{x=-\infty}^{\infty} g(x)h(y)f_{XY}(x,y)dx\,dy$$

$$= \int_{y=-\infty}^{\infty}\int_{x=-\infty}^{\infty} g(x)h(y)f_X(x)f_Y(y)dx\,dy$$

$$= \left[\int_{x=-\infty}^{\infty} g(x)f_X(x)dx\right]\left[\int_{y=-\infty}^{\infty} h(y)f_Y(y)dy\right] = E[g(X)]E[h(Y)]$$

کواریانس (Covariance)

- کواریانس پارامتری است که میزان وابستگی دو متغیر تصادفی را به یکدیگر نشان می‌دهد.
- طبق تعریف کواریانس X و Y برابر است با:

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{E}[(X - E[X])(Y - E[Y])]$$

- به عبارت دیگر برای دو متغیر تصادفی گسسته X و Y:

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \sum_y \sum_x (x - E[X])(y - E[Y])P_{XY}(x,y)$$

و برای دو متغیر تصادفی پیوسته X و Y:

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (x - E[X])(y - E[Y])f_{XY}(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

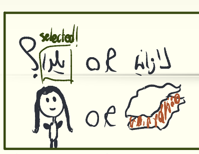
- توجه کنید که بر خلاف واریانس که کمیتی همواره نامنفی بود، کواریانس می‌تواند مثبت یا منفی باشد.

مفهوم کواریانس

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = E[(X-E[X])(Y-E[Y])]$$

x	y	$(x-E[X])(y-E[Y])P_{XY}(x,y)$
بالای میانگین	بالای میانگین	مثبت
پایین میانگین	پایین میانگین	مثبت
پایین میانگین	بالای میانگین	منفی
بالای میانگین	پایین میانگین	منفی

خواص کواریانس



۱)

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X,Y) &= E[(X-E[X])(Y-E[Y])]\\ &= E\big[XY - E[X]Y - E[Y]X + E[X]E[Y]\big]\\ &= E[XY] - E[X]E[Y] - E[Y]E[X] + E[X]E[Y]\\ &= E[XY] - E[X]E[Y]\end{aligned}$$

- دیدیم که اگر X و Y مستقل باشند: $E[XY] = E[X]E[Y]$، بنابراین:
$\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$

- عکس این قضیه لزوما صحیح نیست، به عبارت دیگر اگر $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$، متغیرهای تصادفی X و Y لزوما مستقل نیستند.

$E(x)=0$ — $X \sim N(0,1)$ و $Y = X^2$: مثال ۲

$E(xy) = E(X^3) = \int_{-\infty}^{\infty} x^3 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 0 \Rightarrow Cov(X,Y)=0$

مثال ۱

- دو متغیر تصادفی X و Y را با توزیع زیر در نظر بگیرید:

$$f_X(x) = \begin{cases} 1/2 & -1 < x < 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad \text{و} \quad Y = X^2$$

در اینجا X و Y مستقل نیستند ولی داریم:

$$E(X) = 0$$

$$E(Y) = E(X^2) = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2} x^2 dx = \frac{1}{3}$$

$$E(XY) = E(X^3) = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2} x^3 dx = 0$$

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0 - 0 = 0$$

مثال ۲

- فرض کنید تاسی را پرتاب میکنیم و دو متغیر تصادفی شاخص X و Y را به صورت زیر تعریف میکنیم:
  - اگر خروجی ۱، ۲، ۳ و یا ۴ باشد، $X = 1$ و در غیر این صورت $X = 0$.
  - اگر خروجی ۳، ۴، ۵ و یا ۶ باشد، $Y = 1$ و در غیر این صورت $Y = 0$.
- $Cov(X,Y)$ چقدر است؟

$$E[X] = 1 \times \frac{4}{6} + 0 \times \frac{2}{6} = \frac{2}{3}, \qquad E[Y] = 1 \times \frac{4}{6} + 0 \times \frac{2}{6} = \frac{2}{3}$$

$$E[XY] = \sum_x \sum_y xyP_{XY}(x,y) = \big(0 \times 0 \times P(0,0)\big) + \big(0 \times 1 \times P(0,1)\big) + \big(1 \times 0 \times P(1,0)\big) + \left(1 \times 1 \times \frac{2}{6}\right) = \frac{1}{3}$$

ادامه مثال ۲

$$Cov(X,Y) = E[XY] - E[X]E[Y] = \frac{1}{3} - \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{1}{9}$$

- توجه کنید که:

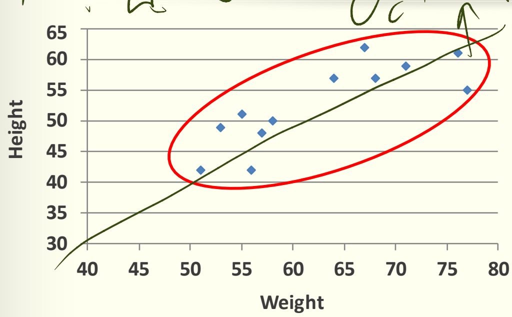
$$P(X=1) = \frac{2}{3}$$

$$P(X=1\,|Y=1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

- به عبارت دیگر مشاهده $Y=1$، احتمال رخ دادن $X=1$ را کاهش میدهد.

اگر یه خط حدودی طوری از نقاط رد کنی شیب اون
خط مثبت باشه، covariance اینها مثبت است.

مثال ۳



Weight	Height	Weight × Height
64	57	3648
71	59	4189
53	49	2597
67	62	4154
55	51	2805
58	50	2900
77	55	4235
57	48	2736
56	42	2352
51	42	2142
76	61	4636
68	57	3876
E[W] = 62.75	E[H] = 52.75	E[W×H] = 3355.83

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(W,H) &= E[W\times H] - E[W]E[H] \\ &= 3355.83 - 62.75 \times 52.75 \\ &= 45.77 \end{aligned}$$

چون عدد محدوده اندازه‌ها [illegible]
* اگر شیب منفی بود cov منفی می شد

خواص کواریانس

۲)

$$\mathrm{Cov}(X,X) = \mathrm{Var}(X)$$

اثبات:

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = E[(X - E[X])(Y - E[Y])]$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X,X) &= E[(X - E[X])(X - E[X])] \\ &= E[(X - E[X])^2] \\ &= \mathrm{Var}(X)\end{aligned}$$

خواص کواریانس

۳)

$$\mathrm{Cov}(aX + b, Y) = a\mathrm{Cov}(X,Y)$$

اثبات:

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(aX + b, Y) &= E[(aX + b - E[aX + b])(Y - E[Y])] \\ &= E[(aX - aE[X])(Y - E[Y])] \\ &= E[a(X - E[X])(Y - E[Y])] \\ &= aE[(X - E[X])(Y - E[Y])] = a\mathrm{Cov}(X,Y)\end{aligned}$$

خواص کواریانس

۴)

$$\mathrm{Cov}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i, \sum_{j=1}^{m} Y_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \mathrm{Cov}(X_i, Y_j)$$

اثبات:

$$\mathrm{Cov}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i, \sum_{j=1}^{m} Y_j\right) = E\left[(\sum_{i=1}^{n} X_i)(\sum_{j=1}^{m} Y_j)\right] - E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] E\left[\sum_{j=1}^{m} Y_j\right]$$

$$= E\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} X_i Y_j\right] - \left[\sum_{i=1}^{n} E[X_i]\right]\left[\sum_{j=1}^{m} E[Y_j]\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} E[X_i Y_j] - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} E[X_i]E[Y_j] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \mathrm{Cov}(X_i, Y_j)$$

خواص کواریانس

۵)

$$\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) + 2\mathrm{Cov}(X,Y)$$

اثبات:

$$\mathrm{Var}(X+Y) = E[((X+Y) - E[X+Y])^2]$$

$$= E\left[((X - E[X]) + (Y - E[Y]))^2\right]$$

$$= E[(X - E[X])^2 + (Y - E[Y])^2 + 2(X - E[X])(Y - E[Y])]$$

$$= E[(X - E[X])^2] + E[(Y - E[Y])^2] + 2E[(X - E[X])(Y - E[Y])]$$

$$= \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) + 2\mathrm{Cov}(X,Y)$$

واریانس مجموع متغیرهای تصادفی

قضیه. برای واریانس مجموع متغیرهای تصادفی داریم:

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(X_i) + 2\underbrace{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} \mathrm{Cov}(X_i, X_j)}_{\text{اگر } X_i \text{ ها مستقل باشن این term صفره.}}$$

اثبات:

دیدیم که $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Cov}(X, X)$، بنابراین:

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \mathrm{Cov}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i, \sum_{j=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \mathrm{Cov}(X_i, X_j)$$

واریانس مجموع متغیرهای تصادفی

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \mathrm{Cov}(X_i, X_j)$$

	X_1	X_2	X_3	X_4
X_1	$\mathrm{Cov}(X_1,X_1)$	$\mathrm{Cov}(X_1,X_2)$	$\mathrm{Cov}(X_1,X_3)$	$\mathrm{Cov}(X_1,X_4)$
X_2	$\mathrm{Cov}(X_2,X_1)$	$\mathrm{Cov}(X_2,X_2)$	$\mathrm{Cov}(X_2,X_3)$	$\mathrm{Cov}(X_2,X_4)$
X_3	$\mathrm{Cov}(X_3,X_1)$	$\mathrm{Cov}(X_3,X_2)$	$\mathrm{Cov}(X_3,X_3)$	$\mathrm{Cov}(X_3,X_4)$
X_4	$\mathrm{Cov}(X_4,X_1)$	$\mathrm{Cov}(X_4,X_2)$	$\mathrm{Cov}(X_4,X_3)$	$\mathrm{Cov}(X_4,X_4)$

واریانس مجموع متغیرهای تصادفی

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\mathrm{Cov}(X_i,X_j)$$

	X_1	X_2	X_3	X_4
X_1	$\mathrm{Cov}(X_1,X_1)$	$\mathrm{Cov}(X_1,X_2)$	$\mathrm{Cov}(X_1,X_3)$	$\mathrm{Cov}(X_1,X_4)$
X_2	$\mathrm{Cov}(X_2,X_1)$	$\mathrm{Cov}(X_2,X_2)$	$\mathrm{Cov}(X_2,X_3)$	$\mathrm{Cov}(X_2,X_4)$
X_3	$\mathrm{Cov}(X_3,X_1)$	$\mathrm{Cov}(X_3,X_2)$	$\mathrm{Cov}(X_3,X_3)$	$\mathrm{Cov}(X_3,X_4)$
X_4	$\mathrm{Cov}(X_4,X_1)$	$\mathrm{Cov}(X_4,X_2)$	$\mathrm{Cov}(X_4,X_3)$	$\mathrm{Cov}(X_4,X_4)$

واریانس مجموع متغیرهای تصادفی

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\mathrm{Cov}(X_i,X_j)$$

	X_1	X_2	X_3	X_4
X_1	$\mathrm{Var}(X_1)$	$\mathrm{Cov}(X_1,X_2)$	$\mathrm{Cov}(X_1,X_3)$	$\mathrm{Cov}(X_1,X_4)$
X_2	$\mathrm{Cov}(X_2,X_1)$	$\mathrm{Var}(X_2)$	$\mathrm{Cov}(X_2,X_3)$	$\mathrm{Cov}(X_2,X_4)$
X_3	$\mathrm{Cov}(X_3,X_1)$	$\mathrm{Cov}(X_3,X_2)$	$\mathrm{Var}(X_3)$	$\mathrm{Cov}(X_3,X_4)$
X_4	$\mathrm{Cov}(X_4,X_1)$	$\mathrm{Cov}(X_4,X_2)$	$\mathrm{Cov}(X_4,X_3)$	$\mathrm{Var}(X_4)$

واریانس مجموع متغیرهای تصادفی

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\mathrm{Cov}(X_i,X_j)$$

	X_1	X_2	X_3	X_4
X_1	$\mathrm{Var}(X_1)$	$\mathrm{Cov}(X_1,X_2)$	$\mathrm{Cov}(X_1,X_3)$	$\mathrm{Cov}(X_1,X_4)$
X_2	$\mathrm{Cov}(X_2,X_1)$	$\mathrm{Var}(X_2)$	$\mathrm{Cov}(X_2,X_3)$	$\mathrm{Cov}(X_2,X_4)$
X_3	$\mathrm{Cov}(X_3,X_1)$	$\mathrm{Cov}(X_3,X_2)$	$\mathrm{Var}(X_3)$	$\mathrm{Cov}(X_3,X_4)$
X_4	$\mathrm{Cov}(X_4,X_1)$	$\mathrm{Cov}(X_4,X_2)$	$\mathrm{Cov}(X_4,X_3)$	$\mathrm{Var}(X_4)$

واریانس مجموع متغیرهای تصادفی

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\mathrm{Cov}(X_i,X_j)$$

	X_1	X_2	X_3	X_4
X_1	$\mathrm{Var}(X_1)$	$\mathrm{Cov}(X_1,X_2)$	$\mathrm{Cov}(X_1,X_3)$	$\mathrm{Cov}(X_1,X_4)$
X_2	$\mathrm{Cov}(X_2,X_1)$	$\mathrm{Var}(X_2)$	$\mathrm{Cov}(X_2,X_3)$	$\mathrm{Cov}(X_2,X_4)$
X_3	$\mathrm{Cov}(X_1,X_3)$	$\mathrm{Cov}(X_3,X_2)$	$\mathrm{Var}(X_3)$	$\mathrm{Cov}(X_3,X_4)$
X_4	$\mathrm{Cov}(X_4,X_1)$	$\mathrm{Cov}(X_4,X_2)$	$\mathrm{Cov}(X_4,X_3)$	$\mathrm{Var}(X_4)$

واریانس مجموع متغیرهای تصادفی

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\mathrm{Cov}(X_i,X_j)$$

	X_1	X_2	X_3	X_4
X_1	$\mathrm{Var}(X_1)$	$\mathrm{Cov}(X_1,X_2)$	$\mathrm{Cov}(X_1,X_3)$	$\mathrm{Cov}(X_1,X_4)$
X_2	$\mathrm{Cov}(X_1,X_2)$	$\mathrm{Var}(X_2)$	$\mathrm{Cov}(X_2,X_3)$	$\mathrm{Cov}(X_2,X_4)$
X_3	$\mathrm{Cov}(X_1,X_3)$	$\mathrm{Cov}(X_2,X_3)$	$\mathrm{Var}(X_3)$	$\mathrm{Cov}(X_3,X_4)$
X_4	$\mathrm{Cov}(X_1,X_4)$	$\mathrm{Cov}(X_2,X_4)$	$\mathrm{Cov}(X_3,X_4)$	$\mathrm{Var}(X_4)$

واریانس مجموع متغیرهای تصادفی

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\mathrm{Cov}(X_i,X_j)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Var}(X_i)+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1,j\neq i}^{n}\mathrm{Cov}(X_i,X_j)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Var}(X_i)+2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n}\mathrm{Cov}(X_i,X_j)$$

با توجه به تقارن $\mathrm{Cov}(X_i,X_j)=\mathrm{Cov}(X_j,X_i)$

واریانس مجموع متغیرهای تصادفی مستقل

- دیدیم که اگر متغیرهای تصادفی X و Y مستقل باشند، آنگاه کوواریانس آنها برابر با صفر است:

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=0$$

- بنابراین با توجه به قضیه قبلی، اگر همه متغیرهای تصادفی X_i و X_j ($i\neq j$) مستقل باشند، آنگاه داریم:

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Var}(X_i)$$

- به عبارت دیگر به شرط استقلال متغیرهای تصادفی، واریانس مجموع متغیرهای تصادفی، با مجموع واریانس آنها برابر است.

مثال: واریانس توزیع دوجمله‌ای

- دیدیم که متغیر تصادفی دوجمله‌ای $Y\sim\mathrm{Bin}(n,p)$ را می‌توان به صورت مجموع n متغیر تصادفی برنولی مستقل با احتمال موفقیت p نوشت:

$$Y=X_1+X_2+\cdots+X_n \quad : \quad X_i\sim\mathrm{Ber}(p)$$

- با توجه به قضیه قبل داریم:

$$\mathrm{Var}(Y)=\mathrm{Var}(X_1)+\mathrm{Var}(X_2)+\cdots+\mathrm{Var}(X_n)$$

$$\mathrm{Var}(X_i)=E\left[X_i^2\right]-(E[X_i])^2$$
$$=E[X_i]-(E[X_i])^2=p-p^2=p(1-p)$$

$$\mathrm{Var}(Y)=np(1-p)$$

ضریب همبستگی (Correlation Coefficient)

- ضریب همبستگی X و Y به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\rho(X,Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y)}} \rightarrow \sigma_X \cdot \sigma_Y$$

- می‌توان نشان داد که:

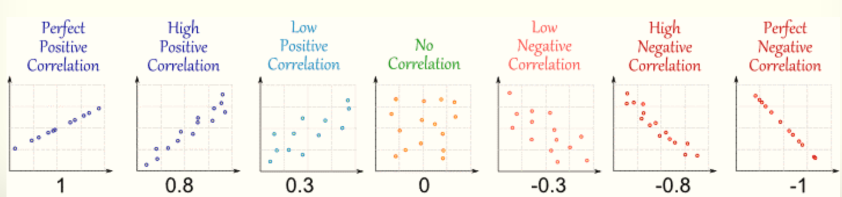
$$\rho(X,Y) = \mathrm{Cov}\left(\frac{X-\mu_X}{\sigma_X}, \frac{Y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)$$

- یعنی $\rho(X,Y)$ کواریانس نرمالیزه است.
- در ادامه نشان خواهیم داد که: $-1 \le \rho(X,Y) \le 1$
- ضریب همبستگی در واقع میزان خطی بودن رابطه بین X و Y را اندازه می گیرد.

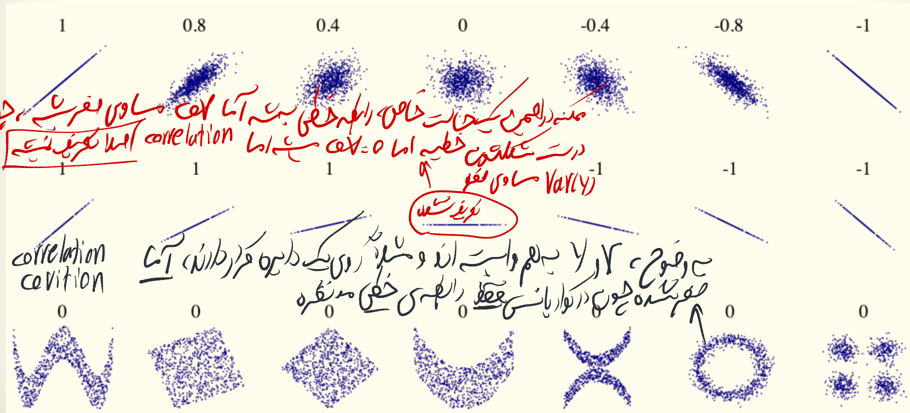
اگر اρا ۱ بشه یعنی X و Y دقیقاً خطی اند
و اگر اρا ۰ بشه یعنی X و Y اصلا خطی نیستند
که معادل با اینه که شیب خط گذرنده از XY plot
رسماً بهترین حالت ممکنه
که همون شیب است
دقت کن ρ شیب خط XY plot را نمیده (در حالت دو طرفه
حالت کاملاً مشخصه)

مفهوم ضریب همبستگی

- گاهی اگر X بالاتر از متوسطش برود، معمولاً Y هم بالاتر از متوسطش خواهد شد. در این صورت خواهیم داشت: $\rho > 0$
- گاهی نیز به عکس اگر X بالاتر از متوسطش برود، Y پایینتر از متوسطش خواهد شد. در این صورت خواهیم داشت: $\rho < 0$
- گاهی هم X و Y تاثیری روی هم ندارند. در این صورت: $\rho = 0$



مفهوم ضریب همبستگی



ممکنه در همه یک حالت خاص رابطه خطی بینشه آیا cov مساوی صفر میشه، چون
چون اصلا تعریف نشده correlation اما cov = 0 اما خطیه درسته شکلشون
مساوی صفر Var(Y)
تعریف نشده

correlation
cevition

آیا X و Y به هم وابسته اند و مثلاً روی یک دایره قرار دارند؟ آره
صفر شده چون در کواریانس فقط رابطه‌ی خطی مدنظره

مثال

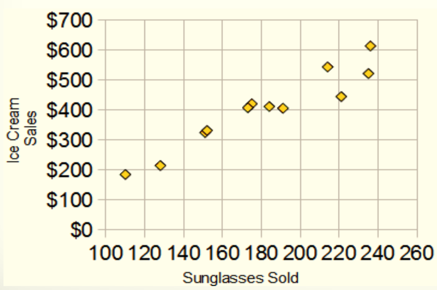
الف) میزان نوشیدن آب و میزان درجه حرارت: با افزایش درجه حرارت، میزان نوشیدن آب نیز افزایش می‌یابد، یعنی $\rho > 0$

ب) میزان نوشیدن آب و میزان رطوبت هوا: با افزایش رطوبت هوا، میزان نوشیدن آب کاهش می‌یابد، یعنی $\rho < 0$

پ) میزان نوشیدن آب و میزان فروش کتاب، اصولا ربطی به هم ندارند، به عبارت دیگر $\rho = 0$.

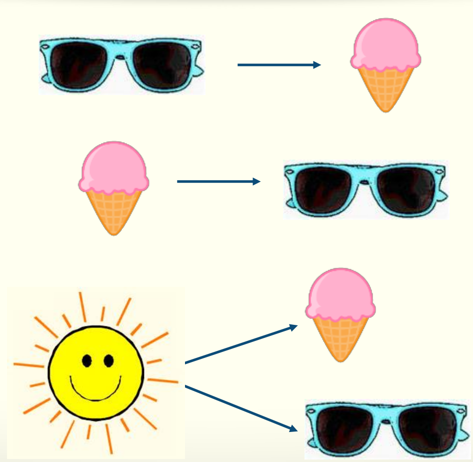
مغالطه علت شمردن همبستگی

- **مغالطه علت شمردن همبستگی** یا **تسبیب مایقارن** در منطق سنتی، از مغالطه‌های مشهور است که از این پیش‌فرض نادرست ناشی می‌شود که هرگاه دو رویداد با هم اتفاق بیافتند، می‌توان یکی از آن دو را علت دیگری دانست.

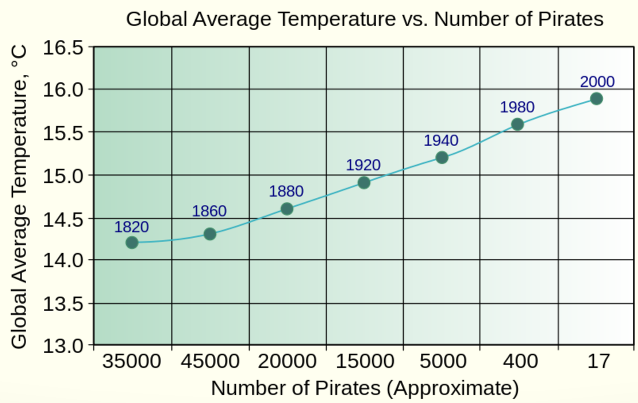


- مثال: آمار نشان می‌دهد که بین تعداد عینک‌های آفتابی فروخته شده در یک فروشگاه بزرگ و فروش بستنی در یک سوپرمارکت همبستگی بالایی وجود دارد.

مغالطه علت شمردن همبستگی



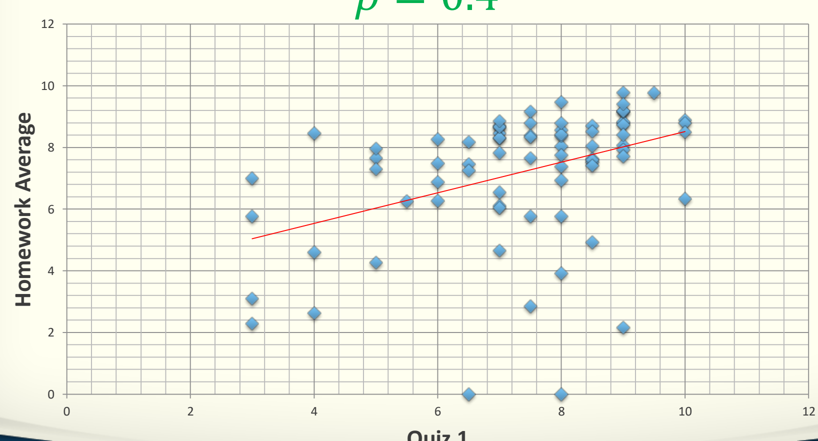
Correlation does not imply causation!



http://tylervigen.com

مثال: رابطه نمرات تمرین و امتحان

$\rho = 0.4$



ناهمبستگی و تعامد

- متغیرهای تصادفی X و Y را ناهمبسته (uncorrelated) گویند، هرگاه $\overbrace{\rho(X,Y) = 0}^{1}$ باشد، یعنی: $\underbrace{\mathrm{Cov}(X,Y) = 0}_{2}$

۳ تعریف که زیرشان خط زده شده، معادل یکدیگرند و هرکدام را ببینیم می‌گوییم ناهمبستگی داریم

- یا معادلا $\underbrace{\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)}_{3}$
- متغیرهای تصادفی X و Y را متعامد (orthogonal) گویند، هرگاه: $\mathrm{E}(XY) = 0$
- قضیه ۱. اگر X و Y ناهمبسته باشند، داریم: $\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)$

کلاً شرطش استقلال بود، اما الان یه شرط سست‌تر براش داریم

- قضیه ۲. اگر X و Y متعامد باشند، داریم: $\mathrm{E}\left((X+Y)^2\right) = \mathrm{E}\left(X^2\right) + \mathrm{E}\left(Y^2\right)$
- قضیه ۳. اگر X و Y ناهمبسته باشند، $X-\mu_X$ و $Y-\mu_Y$ متعامدند و برعکس، زیرا:

$$\mathrm{E}\left((X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\right) = \mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbf{0}$$

نامساوی شوارتز

- قضیه.

$$\mathrm{E}^2(XY) \le \mathrm{E}\left(X^2\right)\mathrm{E}\left(Y^2\right)$$

اثبات: برای هر مقدار ثابت α داریم:

$$\mathrm{E}\left((\alpha X - Y)^2\right) \ge 0 \Rightarrow \alpha^2\mathrm{E}\left(X^2\right) - 2\alpha\mathrm{E}(XY) + \mathrm{E}\left(Y^2\right) \ge 0$$

اکنون اگر بگیریم $\alpha = \frac{\mathrm{E}(XY)}{\mathrm{E}(X^2)}$، داریم:

$$\frac{\mathrm{E}^2(XY)}{\mathrm{E}(X^2)} - \frac{2\mathrm{E}^2(XY)}{\mathrm{E}(X^2)} + \mathrm{E}\left(Y^2\right) \ge 0$$

$$\Rightarrow\ \mathrm{E}\left(Y^2\right) \ge \frac{\mathrm{E}^2(XY)}{\mathrm{E}(X^2)} \qquad \Rightarrow\ \mathrm{E}^2(XY) \le \mathrm{E}\left(X^2\right)\mathrm{E}\left(Y^2\right)$$

تساوی در نامساوی شوارتز

- تساوی را در نامساوی شوارتز وقتی داریم که: $Y = cX$، زیرا:

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{E}^2(XY) = \left[\mathrm{E}\left(cX^2\right)\right]^2 = c^2\mathrm{E}^2\left(X^2\right) \\ \mathrm{E}\left(X^2\right)\mathrm{E}\left(Y^2\right) = \mathrm{E}\left(X^2\right)\mathrm{E}\left(c^2X^2\right) = c^2\mathrm{E}^2\left(X^2\right) \end{array}\right\} \Rightarrow \mathrm{E}^2(XY) = \mathrm{E}\left(X^2\right)\mathrm{E}\left(Y^2\right)$$

- ضمنا $c = \mathrm{E}(XY)/\mathrm{E}(X^2)$.
- به عکس در صورت تساوی داریم:

$$\mathrm{E}^2(XY) = \mathrm{E}\left(X^2\right)\mathrm{E}\left(Y^2\right) \Rightarrow \mathrm{E}\left(\left(\frac{\mathrm{E}(XY)}{\mathrm{E}(X^2)}X - Y\right)^2\right) = 0 \Rightarrow Y = \mathrm{c}X$$

$$\mathrm{c} = \mathrm{E}(XY)/\mathrm{E}(X^2)$$

محدوده ضریب همبستگی

- اگر در نامساوی شوارتز، به جای X، $X - \mu_X$ و به جای Y، $Y - \mu_Y$ قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$[\mathrm{Cov}(X,Y)]^2 \leq \mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y)$$

- یعنی کواریانس گر چه می‌تواند مثبت و منفی شود، اما تغییرات آن از دو سو حدی برابر با $\sqrt{\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y)}$ دارد.
- پس در مورد ضریب همبستگی داریم:

$$\rho(X,Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y)}} \Rightarrow \rho^2 \leq 1 \Rightarrow -1 \leq \rho \leq 1$$

ضریب همبستگی واحد

- تساوی وقتی برقرار خواهد بود که: $Y-\mu_Y=c(X-\mu_X)$
- در این صورت داریم: $[\mathrm{Cov}(X,Y)]^2=\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y)$، یعنی $\rho^2=1$
- اگر c مثبت باشد، $\rho=1$، و اگر c منفی باشد، $\rho=-1$ خواهد بود، زیرا:

$$c=\frac{Cov(X,Y)}{Var(X)}=\frac{\rho\sqrt{\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y)}}{Var(X)}=\pm\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}$$