آمار و احتمال مهندسی - دکتر بهرک

آزمون کوتاه یک - پاسخنامه

۱. **۳ نمره**

۱۴ میوه متفاوت را به صورت تصادفی میان ۷ فرد تقسیم می‌کنیم.

الف) احتمال این که به یکی از افراد بیشتر از ۲ میوه رسیده باشد چقدر است؟

ب) احتمال این که به فرد A (که یکی از آن ۷ نفر است) بیشتر از ۳ میوه رسیده باشد چقدر است؟

پاسخ:

الف) تعداد کل حالات برابر است با $۷^{۱۴}$. تنها حالتی که در آن به هیچ کس بیشتر از دو میوه نمی‌رسد، این است که هر فرد دو میوه داشته باشد. پس تعداد حالات نامطلوب برابر است:

$$\binom{۱۴}{۲} \times \binom{۱۲}{۲} \times \binom{۱۰}{۲} \times \binom{۸}{۲} \times \binom{۶}{۲} \times \binom{۴}{۲} \times \binom{۲}{۲}$$

برای نفر اول، از بین ۱۰ میوه، ۲ تا را انتخاب می‌کنیم. برای نفر دوم، باید از بین ۸ میوه ۲ تا را انتخاب کنیم. به همین صورت تا نفر آخر ادامه می‌دهیم.

پس احتمال خواسته شده برابر است با:

$$۱ - \frac{\binom{۱۴}{۲} \times \binom{۱۲}{۲} \times \binom{۱۰}{۲} \times \binom{۸}{۲} \times \binom{۶}{۲} \times \binom{۴}{۲} \times \binom{۲}{۲}}{۷^{۱۴}}$$

ب) در این قسمت، حالت نامطلوب این است که فرد A صفر، یک، دو یا سه میوه داشته باشد. تعداد حالات نامطلوب برابر است با:

$$\text{A has zero fruits} \quad \Rightarrow \quad ۶^{۱۴}$$

$$\text{A has exactly one fruit} \quad \Rightarrow \quad \binom{۱۴}{۱} \times ۶^{۱۳}$$

$$\text{A has exactly two fruits} \quad \Rightarrow \quad \binom{۱۴}{۲} \times ۶^{۱۲}$$

$$\text{A has exactly three fruits} \quad \Rightarrow \quad \binom{۱۴}{۳} \times ۶^{۱۱}$$

بنابراین احتمال خواسته شده برابر است با:

$$۱ - \frac{۶^{۱۴} + \binom{۱۴}{۱} \times ۶^{۱۳} + \binom{۱۴}{۲} \times ۶^{۱۲} + \binom{۱۴}{۳} \times ۶^{۱۱}}{۷^{۱۴}}$$

۲. ۳ نمره

تعداد جایگشت‌های حروف کلمه $STATISTICS$ را در هر بخش بدست آورید.

الف) هیچ محدودتی نداشته باشیم.

ب) حداقل دو حرف s کنار هم قرار بگیرند.

ج) دقیقا دو حرف t کنار هم قرار بگیرند.

پاسخ :

الف) از آن جایی که ۳ حرف sو t و دو حرف i داریم، تعداد جایگشت‌ها برابر است با:

$$\frac{۱۰!}{۳!۳!۲!}$$

ب) از اصل متمم استفاده می‌کنیم و تعداد جایگشت‌هایی که هیچ دو حرف s کنار هم نباشند را بدست آورده و از تعداد کل جایشگت‌ها کم می‌کنیم. برای بدست آوردن تعداد جایگشت‌هایی که هیچ دو حرف s کنار هم نباشند ابتدا حروف دیگر کلمه را می‌چینیم و سپس حروف s را میان آن‌ها قرار می‌دهیم.

تعداد حالات چیدن بقیه حروف به جز s برابر است با:

$$\frac{۷!}{۳!۲!}$$

تعداد حالات انتخاب ۳ مکان بین حروف برای s برابر است با:

$$\binom{۸}{۳}$$

پس تعداد حالات کل برابر با:

$$\binom{۸}{۳} \times \frac{۷!}{۳!۲!}$$

خواهد شد.

پس جواب مسئله:

$$\frac{۱۰!}{۳!۳!۲!} - \binom{۸}{۳} \times \frac{۷!}{۳!۲!}$$

خواهد بود.

ج) مانند بخش قبل حروف به جز t را می‌چینیم و یک بسته دو تایی و یک بسته یکی از t را کنار هم قرار داده و بین آن‌ها قرار می‌دهیم.

$$۲ \times \binom{۸}{۲} \times \frac{۷!}{۳!۲!}$$

(ضریب ۲ برای جایشگت بسته تکی و دوتایی از t است.)

۳. **۴ نمره**

سجاد و سپنتا علاقه به جمع‌آوری کتاب دارند. کتابخانه سپنتا دارای ۲ طبقه و کتابخانهٔ سجاد دارای ۷ طبقه است. نمایشگاه کتابی در دانشگاه برگزار شده و قرار است فردا تنها یکی از این دو نفر به نمایشگاه برود. اگر سجاد به نمایشگاه برود i کتاب و اگر سپنتا برود j کتاب می‌خرد و هر کدام سپس به خانهٔ خود می‌روند و هر کتاب را به صورت تصادفی در یکی از طبقه‌های کتابخانه‌هایشان قرار می‌دهند.

الف)تعداد حالت های قرار گیری کتاب‌ها در این طبقات اگر ندانیم چه کسی به کتاب خانه رفته چقدر است؟

ب) اگر $۱ < i, j < ۴۸$ چقدر احتمال دارد که رقم یکان جواب بخش قبل ۵ باشد؟

پاسخ :

الف) با توجه به اینکه اگر سجاد هر کتاب را میتواند در یکی از ۷ طبقه کتابخانه‌اش قرار دهد پس ۷^i حالت برای قرار گیری کتاب‌ها وجود خواهد داشت. و برای سپنتا نیز به طور مشابه ۲^j حالت وجود خواهد داشت.

با توجه به اینکه تنها یکی از این دو نفر به کتابخانه می‌روند،پس تعداد کل حالات جمع این دو حالت است:

$$۷^i + ۲^j$$

ب)

برای یکان عدد ۲^j چهار حالت وجود دارد:

$$j \bmod ۴ = ۱ \quad \Rightarrow \quad ۲^j \bmod ۱۰ = ۲$$

$$j \bmod ۴ = ۲ \quad \Rightarrow \quad ۲^j \bmod ۱۰ = ۴$$

$$j \bmod ۴ = ۳ \quad \Rightarrow \quad ۲^j \bmod ۱۰ = ۸$$

$$j \bmod ۴ = ۰ \quad \Rightarrow \quad ۲^j \bmod ۱۰ = ۶$$

همچنین برای یکان عدد ۷^i چهار حالت وجود دارد:

$$i \bmod ۴ = ۱ \quad \Rightarrow \quad ۷^i \bmod ۱۰ = ۷$$

$$i \bmod ۴ = ۲ \quad \Rightarrow \quad ۷^i \bmod ۱۰ = ۹$$

$$i \bmod ۴ = ۳ \quad \Rightarrow \quad ۷^i \bmod ۱۰ = ۳$$

$$i \bmod ۴ = ۰ \quad \Rightarrow \quad ۷^i \bmod ۱۰ = ۱$$

همان طور که می‌بینیم، برای این که یکان عدد $۲^j + ۷^i$ برابر با ۵ شود، زوج‌های زیر را می‌توان برای یکان اعداد ۲^j و ۷^i در نظر گرفت:

$$(۲,۳) \quad (۴,۱) \quad (۸,۷) \quad (۶,۹)$$

به عنوان مثال، اگر حالت $(۲,۳)$ را در نظر بگیریم، باقی‌مانده a بر ۴ باید ۱، و باقی‌مانده b بر ۴ باید ۳ باشد. حال برای هر یک از حالات تعداد اعداد موجود در بازه را حساب می‌کنیم.

۱. **حالت اول**

$$\begin{aligned} ۷^i \bmod ۱۰ = ۳ \quad \& \quad ۲^j \bmod ۱۰ = ۲ \\ \Rightarrow \quad i \bmod ۴ = ۳ \quad \& \quad j \bmod ۴ = ۱ \\ \Rightarrow \quad i \in \{۳, ۷, \ldots, ۴۷\} \quad \& \quad j \in \{۵, ۹, \ldots, ۴۵\} \end{aligned}$$

پس ۱۱ حالت برای j و ۱۲ حالت برای i داریم.

۲. **حالت دوم**

$$\begin{aligned} ۷^i \bmod ۱۰ = ۱ \quad \& \quad ۲^j \bmod ۱۰ = ۴ \\ \Rightarrow \quad i \bmod ۴ = ۰ \quad \& \quad j \bmod ۴ = ۲ \\ \Rightarrow \quad i \in \{۴, ۸, \ldots, ۴۴\} \quad \& \quad j \in \{۲, ۶, \ldots, ۴۶\} \end{aligned}$$

پس ۱۲ حالت برای j و ۱۱ حالت برای i داریم.

۳. **حالت سوم**

$$\begin{aligned} ۷^i \bmod ۱۰ = ۷ \quad \& \quad ۲^j \bmod ۱۰ = ۸ \\ \Rightarrow \quad i \bmod ۴ = ۱ \quad \& \quad j \bmod ۴ = ۳ \\ \Rightarrow \quad i \in \{۵, ۹, \ldots, ۴۵\} \quad \& \quad j \in \{۳, ۷, \ldots, ۴۷\} \end{aligned}$$

پس ۱۲ حالت برای j و ۱۱ حالت برای i داریم.

۴. **حالت چهارم**

$$\begin{aligned} ۷^i \bmod ۱۰ = ۹ \quad \& \quad ۲^j \bmod ۱۰ = ۶ \\ \Rightarrow \quad i \bmod ۴ = ۲ \quad \& \quad j \bmod ۴ = ۰ \\ \Rightarrow \quad i \in \{۲, ۶, \ldots, ۴۶\} \quad \& \quad j \in \{۴, ۸, \ldots, ۴۴\} \end{aligned}$$

پس ۱۱ حالت برای j و ۱۲ حالت برای i داریم.

بنابراین احتمال خواسته شده برابر است با:

$$\frac{۱۱ \times ۱۲}{۴۶ \times ۴۶} + \frac{۱۲ \times ۱۱}{۴۶ \times ۴۶} + \frac{۱۲ \times ۱۱}{۴۶ \times ۴۶} + \frac{۱۱ \times ۱۲}{۴۶ \times ۴۶} = ۴ \times \frac{۱۱ \times ۱۲}{۴۶ \times ۴۶} = \frac{۱۱ \times ۱۲}{۲۳ \times ۲۳}$$