دانشگاه تهران، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر
آمار و احتمال مهندسی

تمرین سه - متغیر های تصادفی، امید ریاضی، واریانس و توزیع های گسسته

طراح: کسری کاشانی، صادق صمدی

۱. ایده‌ی درخشان

در زمان امتحانات میان ترم، در برگه ی اول پاسخنامه، دانشجویان باید مشخصات خود را درج کنند. کسری برای رعایت بی طرفی کامل در تصحیح برگه ها، صفحه اول تمام برگه ها را جدا می کند تا رفاقتش در عدالتش اثری نگذارد. مادامی که فکر می کرد کار خیلی قشنگی انجام داده، صادق به او یادآوری می کند که بر روی برگه ها شماره گذاری انجام نداده است و امکان تطبیق برگه ها با دانشجویان وجود ندارد! کسری برای آبروداری تصمیم می گیرد که برگه ها را به صورت تصادفی با دانشجویان تطبیق دهد. صادق بسیار نگران است و از شما می خواهد که محاسبه کنید که با این ایده ی درخشان به طور متوسط، چند دانشجو در یک کلاس n نفره، دقیقا برگه ی خود را دریافت خواهند کرد.

۲. مداد رنگی

فرض کنید یک جعبهٔ *فلزی مدادرنگیِ* nـ رنگی داریم که در ابتدا هیچ مدادی ندارد؛ یعنی در کل n رنگِ مختلف وجود دارد. علاوه بر آن *بی‌نهایت* جامدادی داریم و در هر جامدادی دقیقاً یک مداد رنگی قرار دارد. رنگ‌ها میان جامدادی‌ها به صورت یکنواخت توزیع شده است. در هر مرحله یک جامدادی را انتخاب می‌کنیم و باز می‌کنیم و مداد داخل آن را مشاهده می‌کنیم. اگر جای آن رنگ در جعبه فلزی خالی بود، آن را در جایگاه مخصوصش قرار می‌دهیم. در غیر این صورت مداد را دور می‌اندازیم. امید ریاضی تعداد مراحلی که باید انجام دهیم تا جعبه فلزی مداد رنگی ما کامل شود چقدر است؟

۳. وبسایت پرطرفدار

فرض کنید یک وبسایتی دارید که یک میلیون کاربر مستقل دارد، اما احتمال سر زدن هر یک از این کاربران به وبسایت در هر روز تنها برابر با $p = ۲ \times ۱۰^{-۶}$ می باشد.

الف) تقریب خوبی برای احتمال حضور حداقل ۲ کاربر در یک روز خاص برای این وبسایت پیدا کنید.

ب) به طور متوسط، چند روز طول می کشد تا به روزی با حداقل ۲ کاربر فعال در وبسایت برسیم؟

۴. آب‌نبات

الفو که از کارگری در کارخانه آب‌نبات‌سازی بابالفو خسته شده بود، تصمیم گرفت فرار کند و همراه با لوسی و بین، در شهر دریم‌لند کارخانه آب‌نبات‌سازی خودش را راه‌اندازی کند. هر یک از این سه نفر یک خط تولید مستقل دارند. تعداد آب‌نبات‌های تلخ تولیدشده در هر خط تولید از توزیع پواسون با پارامترهای $\lambda_۱$، $\lambda_۲$ و $\lambda_۳$ پیروی می‌کند و خطوط مستقل از یکدیگر هستند.

با توجه به استانداردهای کیفیت در شهر دریم‌لند، کارخانه در صورتی مجوز خود را از دست می‌دهد (و ورشکست می‌شود) که حداقل یکی از خطوط تولید، دست‌کم ۲ آب‌نبات تلخ تولید کرده باشد.

آن‌ها می‌دانند که هفته‌ی دیگر یک بازرس از کارخانه بازدید خواهد کرد. اگر هیچ تغییری در فرایند تولید خود ایجاد نکنند، احتمال ورشکستگی آن‌ها چقدر است؟

۵. جایگزینی سرور در شبکه

در یک شبکه اینترنتی، ۱۰ سرور قرار دارند که هر درخواستی که به این شبکه ارسال می شود، به صورت تصادفی و هم‌احتمال به یکی از این ۱۰ سرور فرستاده می شود. می دانیم تعداد درخواست هایی که به سمت این شبکه می آیند، از یک توزیع پوآسون با پارامتر ۵۰ درخواست در ثانیه پیروی می کند. تصمیم داریم یکی از این سرور ها را با یک سرور جدید جایگزین کنیم که در طی این جایگزینی، این سرور برای ۱ ثانیه از دسترس خارج خواهد شد و هر درخواستی که به آن ارسال شود از دست می رود. متغیر تصادفی X را تعداد درخواست های از دست رفته به علت از دسترس خارج بودن این سرور در نظر بگیرید.

الف) نشان دهید X نیز از یک توزیع پوآسون پیروی می کند و پارامتر آن را بدست آورید.

ب) احتمال اینکه در طی این جایگزینی، حداقل ۳ درخواست از دست بروند را محاسبه کنید.

۶. امید به تاس

سه تاس سالم و یکسان را مستقل از یکدیگر پرتاب می کنیم.

الف) احتمال آنکه کمترین عدد مشاهده شده در میان این سه تاس، بیشتر از عدد صحیح k باشد چقدر است؟ $(۰ \leq k \leq ۶)$

ب) امید ریاضی کمترین عدد مشاهده شده در میان این سه تاس را محاسبه کنید.

ج) امید ریاضی مجموع دو عدد بزرگتر مشاهده شده در میان این سه تاس را محاسبه کنید.

۷. عباس آقا

عباس آقا در یک آزمون دانشگاهی شرکت کرده است که شامل ۴ سوال تشریحی و ۴ سوال تستی چهارگزینه‌ای می‌باشد.

(الف) عباس آقا می‌خواهد قبل از آزمون، احتمال توزیع تعداد سوالاتی را که می‌تواند حل کند (PMF) محاسبه کند. او می‌داند که با احتمال ۷۵% می‌تواند هر سوال تستی را درست پاسخ دهد و با احتمال ۵۰% ایده‌ی حل هر سوال تشریحی به ذهنش می‌رسد و آن را کامل حل می‌کند. به او کمک کنید تا PMF را به دست آورد.

(ب) فرض کنید هر سوال تستی ۱۰ نمره و هر سوال تشریحی ۱۵ نمره دارد. امید ریاضی و و واریانس نمره‌ای که عباس آقا کسب می‌کند را محاسبه کنید.

(پ) اگر عباس آقا در طول ترم ۴۰ نمره‌ی امتیازی کسب کرده باشد که مستقیماً به نمره‌ی امتحان پایان‌ترمش اضافه شود، امید ریاضی و انحراف معیار نمره‌ی نهایی او را محاسبه کنید .

(ت) عباس آقا تصمیم می‌گیرد برای امتحان، از یک استراتژی استفاده کند. او به این نتیجه می‌رسد که سوالات تستی را به طور تصادفی جواب بدهد و برای سوالات تشریحی از ایده‌های مختلف استفاده کند تا بتواند حتماً به پاسخ برسد. فرض کنید هر ایده با احتمال ٪۴۰ به جواب درست منجر شود و بررسی هر ایده ۲۰ دقیقه زمان ببرد. با توجه به محدودیت زمانی ۶ ساعت امتحان، بررسی کنید آیا این استراتژی برای پاسخگویی به همه‌ی سوالات عاقلانه و امکان‌پذیر است یا خیر.

۸. مسابقه‌ی قانونی

فرض کنید در یک مسابقه ی کاملا قانونی شرکت کرده اید. در هر مرحله از این مسابقه، شما سه سکه ی A و B و C را به صورت همزمان پرتاب می کنید. سکه ی A با احتمال $\frac{1}{2}$، سکه ی B با احتمال $\frac{1}{4}$، و سکه ی C با احتمال $\frac{1}{6}$ رو می آیند.

الف) فرض کنید شما ۱۰ مرحله این سکه ها را پرتاب می کنید. در هر مرحله، اگر حداقل ۲ سکه رو بیاید، ۱۰ تومان در آن مرحله برنده می شوید. با چه احتمالی در این مسابقه، شما حداقل ۸۰ تومان برنده می شوید؟

ب) با توجه به قسمت قبل، امید ریاضی و واریانس مقدار پولی که در انتهای این ۱۰ مرحله برنده می شوید را محاسبه کنید.

ج) حال فرض کنید مسابقه به گونه ای است که شما در هر مرحله ۲ انتخاب دارید:

۱- می توانید بازی را ترک کنید و پولی که تا آن مرحله برنده شده اید را دریافت کنید.

۲- یک مرحله دیگر بازی را ادامه دهید و مجددا سه سکه را همزمان پرتاب کنید. در این صورت اگر در آن مرحله حداقل ۱ سکه پشت بیاید، ۱۰ تومان دریافت می کنید و در غیر این صورت، از مسابقه حذف شده و هیچ پولی دریافت نمی کنید.

طبق این شرایط جدید مسابقه، شما باید حداقل چند مرحله به این مسابقه ادامه دهید تا امید ریاضی پولی که برنده می شوید، بیشینه باشد؟ مقدار متوسط این پول چقدر است؟

۹. درخت

می‌خواهیم یک درخت با n راس بسازیم. ابتدا راس شماره ۱ را به عنوان ریشه داریم. سپس راس های ۲ تا n را یکی‌یکی به درخت اضافه می‌کنیم. هر راس جدید را به یکی از راس‌های موجود در درخت به عنوان پدر متصل می‌کنیم، حال مسیر راس شماره ۱ تا راس شماره n را در نظر بگیرید. امید ریاضی مجموع شماره راس‌هایی که روی این مسیر قرار می‌گیرند را حساب کنید.

راهنمایی: به ازای هر دو راس u و v $(u < v)$ می‌توان اثبات کرد که به احتمال $\frac{1}{u}$ راس u یکی از اجداد راس v .می‌شود. شما می‌توانید بدون اثبات از این راهنمایی استفاده کنید

۱۰.

تمرین کامپیوتری سری سوم را می‌توانید از طریق این لینک دریافت کنید.

- یک کپی از فایل مذکور با نام EPS_CA3_SID در گوگل درایو خود تهیه کنید.
- در فایل خود بخش هایی‌که به وسیله TODO مشخص شده‌اند را با کد های مناسب جایگزین کنید.
- جواب سوالات تئوری را در بخش‌هایی که با Answer مشخص شده‌اند قرار دهید.
- فایل دفترچه پاسخ خود را در جایگاه آپلود این تمرین در سامانه ایلرن قرار دهید.