دانشگاه تهران، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر
آمار و احتمال مهندسی

تمرین چهارم - توزیع های پیوسته، توابع متغیر های تصادفی و توزیع های مشترک

طراح: محمد شهاب شرافت، پرهام حیدریان، آیدین کاظمی

۱. مثلثاتی

الف) اگر $X \sim \mathrm{U}(-\frac{\pi}{۲}, \pi)$ و $Y = \tan X$ باشد، $f_Y(y)$ را بیابید.

ب) اگر $X_۱, X_۲ \sim \mathrm{U}(۰, \pi)$ مستقل و $D = X_۱ - X_۲$ و $Y = \sin D$ باشد، $f_Y(y)$ را بیابید.

راهنمایی: اگر $X, Y \sim \mathrm{U}(a, b)$ و $Z = X - Y$ و $L = b - a$:

$$f_Z(z) = \begin{cases} \dfrac{L - |z|}{L^۲} & |z| \leq L \\ ۰ & \text{otherwise} \end{cases}$$

۲. رضا تریدر خصوصی

رضا یک تریدر است که در یک شرکت خصوصی استخدام شده. شرکت به او یک سرمایه ثابت می‌دهد و بناست بر حسب میزان سود/ضرری که رضا با آن سرمایه ایجاد می‌کند، به او پرداختی انجام شود. مقدار سود/ضرر رضا را با X نمایش می‌دهیم و فرض می‌کنیم

توزیع سوددهی خود رضا (چگالی X) به صورت زیر است:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{۱}{۳}\, e^{x-۶}, & x < ۶, \\ \frac{۱}{۲۱}\left(۱ - \frac{|x-۱۳|}{۷}\right), & ۶ \le x < ۲۰, \\ \frac{۱}{۳}\, e^{-(x-۲۰)}, & x \ge ۲۰\,. \end{cases}$$

سیاست پرداخت شرکت چنین است: اگر مقدار X مشخص باشد، مبلغ دریافتی رضا Y به‌صورت تکه‌ای زیر تعیین می‌شود:

$$Y = \begin{cases} X - ۴ & X < ۴, \\ ۰ & ۴ \le X \le ۱۰, \\ X^۲ - ۱۰۰ & X > ۱۰\,. \end{cases}$$

توزیع احتمال Y را بیابید.

۳. تاس باز قرمز آبی

دو تاس قرمز و آبی داریم

الف) جفت تاس را ۸۰۰ بار می‌اندازیم. چقدر احتمال دارد حداقل ۳۷۰ بار هر دو تاس کمتر از ۵ بیایند؟

ب) دو آزمایش مستقل انجام می‌دهیم؛ در هر کدام، تاس‌ها n بار پرتاب می کنیم اگر در ازمایش اول X تعداد دفعات زوج بودن مجموع دو تاس و Y تعداد دفعات کمتر از ۵ بودن هر دو تاس باشد و معادله زیر بر قرار باشد

$$\mathbb{P}\left(\tfrac{۴}{۹}n \le Y \le \tfrac{۴۱}{۹۰}n\right) = ۳\,\mathbb{P}\left(X \le \tfrac{n}{۲} - \frac{n}{۲۰\sqrt{۲۰}}\right).$$

n را بیابید(برای ب نیازی نیست تصحیح پیوستگی را در نظر بگیرید)

۴. ردبول و جوگیراتش!

شرکت RedBull برای ماشین مسابقهٔ خود دو تیم تعمیراتی A و B دارد. هرگاه ماشین خراب می‌شود، هر دو تیم به سمت ماشین حرکت می‌کنند؛ هر کدام زودتر برسد همان لحظه تعمیر می‌کند و هر دو به جای خود بر می گردند و همه چی از اول ریست می‌شود برای تعمیر بعدی. زمان رسید این دو تیم مستقل و به صورت نمایی است.

الف) اگر میانگین زمان رسیدن تیم‌ها به ترتیب $\frac{۱}{۵}$ و $\frac{۱}{۶}$ دقیقه باشد، در طی مسابقه از میان ۱۰۰۰ خرابی، احتمال این که حداکثر ۴۷۰ خرابی را تیم A تعمیر کند چقدر است؟

ب) RedBull می‌خواهد دستش بیاید چقدر زمان سر خرابی‌ها تلف می‌شود، برای همین می‌خواهد جمع زمان رسیدن برای ۳ خرابی اول را به دست بیاورد. توزیع مجموع زمان رسید برای ۳ خرابی اول را به‌دست آورید. *راهنمایی:* برای دو نمایی مستقل با نرخ‌های $\lambda_۱, \lambda_۲$، $\min\{T_۱, T_۲\} \sim \mathrm{Exp}(\lambda_۱ + \lambda_۲)$.

ج) راننده که تایرش پنچر شده همان لحظه کنار میزند تا یک تیم برسد. او ۱۰ ثانیه صبر می کند و می بیند کسی نمی آید و عصبانی می‌شود ولی می‌گوید من که تا اینجا صبر کردم، ۱۰ ثانیهٔ دیگر هم صبر می‌کنم. احتمال این‌که تیم امداد قبل از اتمام صبر راننده برسد چقدر است؟

۵. فرشته‌ی نجات آمار

آیدین که دو ترم درس «آمار و احتمال» را افتاده، حالا وسط امتحان میان‌ترمِ ترم سوم نشسته، به این سؤال نگاه می‌کند و تنها چیزی که به ذهنش می‌رسد این است که آیا می‌گذارند یک درس را برای بار چهارم بردارد یا خیر.

در اوج نا امیدی، ناگهان ***فرشته‌ی نجات آمار*** که شما باشید (۱۴ ایموجی خنده) برای نجات او ظاهر می‌شود و حل سوال را بر عهده می‌گیرد.

در این سوال متغیرهای تصادفی پیوسته‌ی مشترک X و Y دارای تابع چگالی مشترک زیر هستند:

$$f_{X,Y}(u,v) = \begin{cases} c\,(u^{۲} - v^{۲})e^{-u}, & ۰ \leq u < \infty \text{ and } -u \leq v \leq u, \\ ۰, & \text{else.} \end{cases}$$

حال فرشته به سؤالات زیر جواب می‌دهد:

(آ) مقدار ثابت c را بیابید.

(ب) تابع چگالی احتمال حاشیه‌ایِ X را پیدا کنید.

(ج) تابع چگالی احتمال حاشیه‌ایِ Y را پیدا کنید.

(د) $P\{X + Y \geq ۰\}$ را به‌دست آورید.

۶. نمونه‌های آلوده به ویروس

فرشته نجات آمار که خودش به خوبی درس را بلد نبود، سوال قبلی را اشتباه حل کرد (و خودتان حدس بزنید چه اتفاقی برای بار سوم افتاد). آیدین که دید دیگر کامپیوتر خواندن برایش فایده ای ندارد، تغییر رشته داد و حالا زیست می‌خواند، اما متاسفانه در آزمایشگاه ویروس فراموش کرده است که روی نمونه‌های آزمایش خود برچسب بزند. پنج نمونه وجود دارد که سه‌تای آن‌ها نمونه‌ی کنترل هستند و دو نمونه حاوی یک ویروس آزمایشی‌اند. هر نمونه یکی‌یکی بررسی می‌شود تا زمانی که هر دو نمونه‌ی حاوی ویروس شناسایی شوند. در نظر بگیرید $S_۱$ تعداد نمونه‌های بررسی‌شده تا شناسایی اولین نمونه‌ی آلوده به ویروس، و $S_۲$ تعداد نمونه‌های اضافیِ بررسی‌شده تا شناسایی دومین نمونه‌ی آلوده به ویروس باشد.

(آ) تابع جرم احتمال مشترک $p_{S_۱,S_۲}(i,j)$ را برای همه‌ی i و jها را به دست آورید.

(ب) تابع جرم احتمال حاشیه‌ای $p_{S_۱}(i)$ را برای همه‌ی i ها را به دست آورید.

(ج) تابع جرم احتمال حاشیه‌ای $p_{S_۲}(j)$ را برای همه‌ی j ها را به دست آورید.

(د) آیا $S_۱$ و $S_۲$ مستقل‌اند؟ چرا بله یا چرا نه؟

(ه) $P\{S_۲ < S_۱\}$ را پیدا کنید.

(و) $P\{S_۱ = S_۲\}$ را پیدا کنید.

(ز) $P\{S_۱ = ۲ \mid S_۲ = ۲\}$ را پیدا کنید.

۷. فرشته‌ی نجات آمار ۲

به دلیل حواس‌پرتی آیدین، ویروسی از آزمایشگاه نشت و دنیا را درگیر می‌کند. آیدین هم که از آزمایشگاه بیرون شده، تصمیم می‌گیرد از این موقعیت قرنطینه‌ی جهانی نهایت استفاده را کرده و وارد کار پرورش گیاهان دارویی و قارچ بشود.

برای ساده‌سازی، او شرایط رشد را به دو ویژگی تصادفی خلاصه می‌کند:

- X یک کمیت نرمال‌شده در بازه‌ی $(۰, ۱)$ است که کیفیت شرایط رشد گیاه دارویی را نشان می‌دهد.
- Y یک کمیت نرمال‌شده در بازه‌ی $(۰, ۱)$ است که کیفیت شرایط رشد قارچ را نشان می‌دهد.

از نظر آزمایشی، آیدین می‌بیند که اگر هر دو کیفیت ضعیف باشند (هر دو کمتر از ۱/۲)، تقریباً هیچ‌کدام رشد خوبی ندارند؛ اما به‌محض این‌که حداقل یکی از آن‌ها از سطح متوسط بالاتر باشد (بیش از ۱/۲)، سیستم گلخانه وارد «وضعیت رشد قابل‌قبول» می‌شود. از طرفی رفتار مشترک (X, Y) را می‌توان تقریباً یکنواخت روی آن ناحیه مدل کرد و بنابراین او فرض می‌کند که (X, Y) یک زوج تصادفی پیوسته با تابع چگالی مشترک زیر است:

$$f_{X,Y}(u,v) = \begin{cases} c, & ۰ < u < ۱,\ ۰ < v < ۱,\ \max\{u,v\} > \frac{۱}{۲}, \\ ۰, & \text{elsewhere.} \end{cases}$$

اما آیدین که از آمار سر در نمی‌آورد، در تحلیل این سیستم دجار مشکل شده و دچار نا امیدی می‌شود. فرشته نجات آمار که هنوز از راهنمایی های اشتباه خود احساس گناه می‌کند، بار دیگر بر او ظاهر می‌شود و حل مسئله را به عهده می‌گیرد:

(آ) صفحه‌ی u—v را رسم کنید و ناحیه‌ای را که در آن $f_{X,Y}(u,v)$ ناصفر است روی آن مشخص نمایید.

(ب) مقدار ثابت c را بیابید.

(ج) تابع چگالی احتمال حاشیه‌ای Y، یعنی $f_Y(v)$، را به‌دست آورید.

(د) با استفاده از پاسخ قسمت (c)، مقدار $\mathbb{E}[Y]$ را محاسبه کنید.

(ه) مقدار $P\{Y \le \alpha X\}$ را برای $۰ < \alpha \le ۱$ به‌دست آورید.

(و) مقدار $P\{Y \le \alpha X\}$ را برای $۱ < \alpha < \infty$ به‌دست آورید.

(ز) اگر $Z = Y/X$ باشد، مقدار $P\{Z \le \alpha\}$ را برای همه‌ی α با $۰ < \alpha < \infty$ به‌دست آورید.

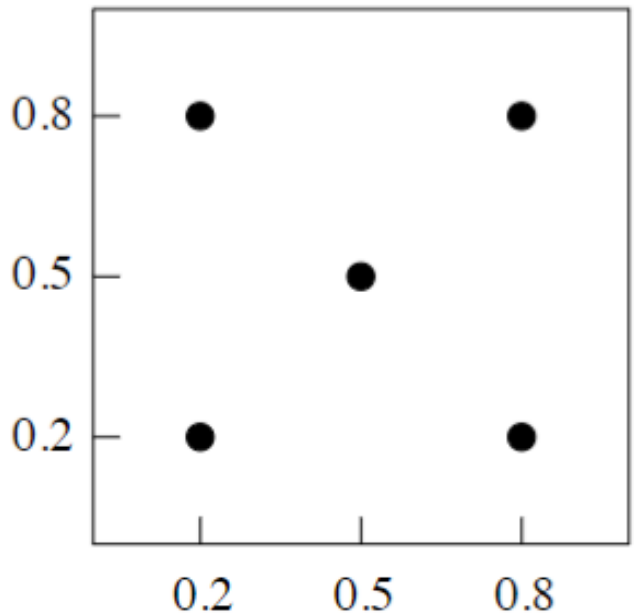
(ح) تابع چگالی احتمال Z، یعنی $f_Z(\alpha)$، را بیابید. دقت کنید که باید مقدار $f_Z(\alpha)$ را برای همه‌ی α با $-\infty < \alpha < \infty$ مشخص کنید.

۸. تحلیل یک کمّی‌ساز برداری

یک کمّی‌ساز برداری تابعی است، به نام g، که یک ناحیه‌ی ورودی در چندین بعد را به یک زیرمجموعه‌ی متناهی از آن ناحیه نگاشت می‌کند. برای مثال، فرض کنید g نگاشتِ حداقل فاصله برای پنج نقطه‌ی نگاشت در مربع واحدِ نشان‌داده‌شده در شکل ۱ باشد.

به طور مشخص، برای (x, y) در مربع واحد، خروجی $g(x, y)$ برابر است با نقطه‌ی نگاشت (w, z) که از همه به (x, y) نزدیک‌تر است. برای مثال، داریم $g(۰/۳, ۰/۳) = (۰/۲, ۰/۲)$ و $g(۰/۴, ۰/۶) = (۰/۵, ۰/۵)$.

(آ) مربع واحد را به پنج ناحیه، متناظر با پنج مقدار ممکن g، افراز کنید. برای مثال، یکی از نواحی، مجموعه‌ی تمام (x, y)هایی است که به نقطه‌ی $(۰/۲, ۰/۲)$ نزدیک‌تر از هر یک از چهار نقطه‌ی نگاشت دیگر هستند.



شکل ۱

(ب) فرض کنید (X, Y) در مربع واحد به طور یکنواخت توزیع شده است و $(W, Z) = g(X, Y)$. تابع جرم احتمالِ مشترکِ (W, Z) را تعیین کنید.

۹. سوال کاربردی

مدارهای مجتمع دیجیتال که با فناوری‌های فرایندی نانومقیاس طراحی شده‌اند، توان دینامیکی تلف‌شده‌ی P_D و تأخیر T_d دارند که به صورت زیر داده می‌شوند:

$$P_D = k_۱ V_{dd}(V_{dd} - V_t),$$
$$T_d = \frac{k_۲ V_{dd}}{V_{dd} - V_t},$$

که در آن V_t ولتاژ آستانه‌ی ترانزیستور، V_{dd} ولتاژ تغذیه، و $k_۱$ و $k_۲$ ثابت هستند. ولتاژ تغذیه‌ی V_{dd} و ولتاژ آستانه‌ی V_t متغیرهای تصادفی مستقل‌اند. در نتیجه، توان تلف‌شده و تأخیر مدارهای مجتمع نانومقیاس نیز متغیرهای تصادفی هستند.

در این مسئله از شما خواسته شده است چگالی احتمال مشترک P_D و T_d را به‌دست آورید. در نظر داشته باشید $X, Y, W,$ و Z به‌ترتیب متغیرهای تصادفی متناظر با V_{dd}، V_t، P_D و T_d هستند. حال به پرسش‌های زیر پاسخ دهید:

(آ) ولتاژ تغذیه در بازه‌ی [۰/۸ V, ۱/۲ V] به‌طور یکنواخت توزیع شده است. ولتاژ آستانه‌ی V_t نامنفی است و تابع چگالی احتمال آن، یک تابع گاوسیِ «شبیه به متقارن» با میانگین ۰/۳ V، انحراف معیار ۰/۱ V و تکیه‌گاه (تکیه‌گاه یعنی بازه ای که متغیر در آن تعریف می‌شود) [۰, ۰/۶ V] است. به طور دقیق‌تر، تابع چگالی احتمال V_t برابر است با یک ضریب ثابت ضرب‌در تابع چگالی نرمال با میانگین ۰/۳ V و انحراف معیار ۰/۱ V در بازه‌ی [۰, ۰/۶ V] و در خارج از این بازه صفر است. این ضریب ثابت طوری انتخاب می‌شود که انتگرال چگالی برابر یک شود. چگالی احتمال مشترک $f_{X,Y}(u, v)$ را به‌دست آورید.

(ب) رابطه‌ی داده‌شده، زوج (W, Z) را به صورت تابعی $g(X, Y)$ از (X, Y) تعیین می‌کند. تابع g را به‌صورت نگاشتی از تکیه‌گاه $f_{X,Y}$ در صفحه‌ی u—v به صفحه‌ی α—β در نظر بگیرید. آیا g یک‌به‌یک است؟ اگر بله، تبدیل معکوس را یعنی $(u, v) = g^{-۱}(\alpha, \beta)$ (به‌طوری‌که $(X, Y) = g^{-۱}(W, Z)$) به‌دست آورید.

(ج) در یک سناریوی طراحی، فرض کنید طراح مدار می‌خواهد احتمال این را محاسبه کند که مدار به طور هم‌زمان دو قید زیر را ارضا کند:

$$P_D \leq P_{\max}, \qquad T_d \leq T_{\max},$$

که در آن $P_{\max}$ و $T_{\max}$ به‌ترتیب حد مجاز توان دینامیکی و حداکثر تأخیر قابل‌قبول در مشخصات طراحی هستند. برای آن‌که بتوان چنین احتمالاتی را به‌صورت تحلیلی محاسبه کرد، لازم است تابع چگالی احتمال مشترک توان و تأخیر را در اختیـار داشته باشیم.

تابع چگالی احتمال مشترک $f_{W,Z}(\alpha, \beta)$ را به‌دست آورید. (عبارت صریح تکیه‌گاه $f_{W,Z}$ ـ یعنی مجموعه‌ای که چگالی روی آن ناصفر است ـ پیچیده است و از آن صرف‌نظر می‌شود.)

۱۰. تمرین کامپیوتری

تمرین کامپیوتری سری چهارم را می‌توانید از طریق این لینک دریافت کنید.

- یک کپی از فایل مذکور با نام EPS_CA4_SID در گوگل درایو خود تهیه کنید.
- در فایل خود بخش هایی‌که به وسیله TODO مشخص شده‌اند را با کد های مناسب جایگزین کنید.
- فایل دفترچه پاسخ خود را در جایگاه آپلود این تمرین در سامانه ایلرن قرار دهید.