Universidad Nacional Autónoma de México

Probabilidad I

Tarea IV

Alan Ernesto Arteaga Vázquez

Raúl Llamosas Alvarado

Edgar Quiroz Castañeda

Jean Paul Ruiz Melo

Sandra Del Mar Soto Corderi

Lunes 15 de octubre del 2018

1. Sea A un evento ($A \in F$). Definimos X por

$$X(\omega) = \begin{cases} 1, \text{ si } \omega \in A \\ 0, \text{ si } \omega \notin A \end{cases}$$

¿Es X variable aleatoria?

2. Considere un espacio de probabilidad $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y $F = \{\emptyset, \Omega, \{2, 4, 6\}, \{1, 3, 4\}\}$. Sean $X_1, X_2 : \Omega \to \mathbb{R}$ definidas como

$$X_1(\omega) = \omega^2 X_2(\omega) = \begin{cases} 1, \omega \text{ par} \\ 0, \omega \text{ impar} \end{cases}$$

¿Son X_1 y X_2 variables aleatorias en este espacio de probabilidad?

3. Sea f una función definida por

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, \text{ si } -1 \leq x \leq 0 \\ 2x - 6, \text{ si } 3 \leq x \leq c \\ 0, \text{ en otro caso} \end{cases}$$

Con c constante.

   (a) Determine el valor de c de tal manera que f sea una función de densidad.

   (b) Encuentre la función de distribución correspondiente a f.

4. Sea f una función definida por

$$f(x) = \begin{cases} cr^x, \text{ si } x \in \{0, 1, ...\} \\ 0, \text{ en otro caso} \end{cases}$$

En donde $0 < r < 1$. Encuentre c para que f sea función de densidad.
Podemos notar que es una funcion de densidad discreta, entonces tenemos:

$$1 = \textstyle\sum_{x=0}^{\infty} P(i)$$

Donde $P(i) = cr^x$. Entoces sustituyendo tenemos:

$$1 = \sum_{x=0}^{\infty} cr^x$$

$$1 = c \sum_{x=0}^{\infty} r^x$$

$$\frac{1}{c} = \sum_{x=0}^{\infty} r^x$$

Entonces esto es la serie geométrica:

$$\frac{1}{c} = 1 + r + r^2 + r^3 + ...$$

Y como r es un fración, converge a:

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{1-r}$$

Entonces para que f sea función de densidad:

$$c = r - 1$$

5. La función de densidad de una variable aleatoria X es

$$f_X(x) = \gamma x^2 e^{-kx} \mathbb{I}_{(0,\infty)}$$

Donde $k > 0$.

(a) Encontrar el valor de γ.
Tenemos que:

$$1 = \int_0^\infty \gamma x^2 e^{-kx} dx$$

Entonces resolviendo la integral tenemos:

$$= \gamma \int x^2 e^{-kx}$$

$$= \gamma(-\frac{x^2 e^{-kx}}{k} - \int \frac{2xe^{-kx}}{k})$$

$$= \gamma(-\frac{x^2 e^{-kx}}{k} + \frac{2}{k}(-\frac{xe^{-kx}}{k} - \int -\frac{e^{-kx}}{k}))$$

$$= \gamma(-\frac{x^2 e^{-kx}}{k} + \frac{2}{k}(-\frac{xe^{-kx}}{k} - \frac{1}{k^2}(\int e^u)); u = -kx, dx = \frac{-1}{k} du$$

$$= \gamma(-\frac{x^2 e^{-kx}}{k} + \frac{2}{k}(-\frac{xe^{-kx}}{k} - \frac{e^{-kx}}{k^2}))$$

$$= \gamma(-\frac{x^2 e^{-kx}}{k} - \frac{2xe^{-kx}}{k^2} - \frac{e^{-kx}}{k^3})$$

$$= -\gamma(\frac{(k^2x^2 + 2kx + 2)e^{-kx}}{k^3}\Big|_0^\infty$$

Resolviendo, tenemo:

$$1 = \frac{2\gamma}{k^3}$$

Entonces $\gamma = \frac{k^3}{2}$.

(b) Encontrar la función de distribución F_X de la variable aleatoria X.
Encontrar la función de distribución F_X de la variable aleatoria X.
Entonces tenemos:

$$FX(x) = \int_0^x \gamma x^2 e^{-kx} dx$$

Pero ya tenemos que $\gamma = \frac{k^3}{2}$, entonces:

$$FX(x) = \int_0^x \frac{k^3}{2} x^2 e^{-kx} dx$$

Entonces calculando el integral tenemos:

$$FX(x) = \frac{(k^2x^2 + 2kx + 2)e^{-kx}}{2}\Big|_0^x$$

Y sustituyendo tenemos:

$$FX(x) = \frac{e^{-kx}(2e^{kx} - k^2x^2 - 2kx - 2)}{2}$$

(c) Calcule $P(0 < X < \frac{1}{k})$ Tenemos:

$$P(a < X < b) = FX(b) - FX(a)$$

Entonces:

$$= P(0 < X < \frac{1}{k}) = FX(\frac{1}{k}) - FX(0)$$

$$= \frac{e^{-k\frac{1}{k}}(2e^{k\frac{1}{k}} - k^2\frac{1}{k}^2 - 2k\frac{1}{k} - 2)}{2} - \frac{e^{-k0}(2e^{k0} - k^2 0^2 - 2k0 - 2)}{2}$$

$$= \frac{0.367(5.43 - 5)}{2} - \frac{1(2-2)}{2}$$

$$0.079 - 0$$

$$= 0.079$$

6. Sea

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ si } x < 0 \\ \frac{1}{2}\beta, \text{ si } 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{2}, \text{ si } 1 \leq x < 2 \\ \frac{1}{2}(1-\beta), \text{ si } 2 < x < 3 \\ 0, \text{ si } x \geq 3 \end{cases}$$

Donde $0 < \beta < 1$. Encontrar la función de distribución F_X

Si x < 0, se queda en cero.

Cuando $0 \leq$ X < 1, tenemos:

$$\int_0^x \frac{1}{2}\beta dx = \frac{\beta x}{2}$$

Para 1 ≤ X < 1:

$$\int_1^x \frac{1}{2}dx = \frac{(x-1)}{2}$$

Usando el anterior tenemos:

$$\frac{(x-1)}{2} + \frac{\beta x}{2}$$

Para 2 ≤ X < 3:

$$\int_2^x \frac{1}{2}(1-\beta)dx = -\frac{(x-2)x}{4}$$

Lo cual es:

$$-\frac{(x-2)x}{4} + \frac{(x-1)}{2} + \frac{\beta x}{2}$$

Entonces la funcion de distribucion es:

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ si } x < 0 \\ \frac{\beta x}{2}, \text{ si } 0 \leq x < 1 \\ \frac{(x-1)}{2} + \frac{\beta x}{2}, \text{ si } 1 \leq x < 2 \\ -\frac{(x-2)x}{4} + \frac{(x-1)}{2} + \frac{\beta x}{2}, \text{ si } 2 < x < 3 \\ 1, \text{ si } x \geq 3 \end{cases}$$

7. Demuestre que $f_X(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}\mathbb{I}_{\mathbb{R}}(x)$ es una función de densidad.

8. Sea X una variable aleatoria con función de densidad

$$f_\gamma(y) = cy\mathbb{I}_{\{1,2,3,4\}}(y)$$

   (a) Determinar el valir de c para que f_γ sea una función de densidad de probabilidad.
   (b) Calcule $P(1 < Y \leq 3)$ y $p(Y < 1|Y \leq 3)$

9. Sea X una variable aleatoria continua con función de densidad

$$f_X(x) = \begin{cases} 6x(1-x), \text{ si } 0 < x < 1 \\ 0, \text{ en otro caso} \end{cases}$$

   Calcule $P(|X - \frac{1}{2}| > \frac{1}{4})$.

10. Suponga que se selecciona aleatoriamente un punto z del cuadrado con esquinas (2, 1), (3, 1), (2, 2,) y (3, 2). Sea A la variable aleatoria que mide el área del triángulo con vértices (2, 1), (3, 1) y z.

   (a) ¿Cuál es el valor más grande que A puede tomar?
   (b) ¿Cuál es el conjunto de puntos para el cuál $A \leq \frac{1}{2}$?
   (c) Encuentre la función de densidad de A.
   (d) Encuentre la función de distribución de A.

11. Una póliza de seguros cubre las reclamaciones médicas de los empleados de una pequeña compañía.
    El valor V de las reclamaciones hechas en un año es descrita mediante

$$V = 100000Y$$

    Donde Y es una variable aleatoria con función de densidad

$$f_{\gamma}(y) = \begin{cases} k(1-y)^4, \text{ si } 0 < y < 1 \\ 0, \text{ en otro caso} \end{cases}$$

    Donde k es constante. ¿Cuál es la probabilidad de que V exceda 10000?

12. Una urna contiene 5 bolas rojas y 5 bolas azules. Se realiza un juego que consiste en extraer aleatoriamente 2 bolas de la urna. Suponga que si se extraen dos bolas del mismo color, el jugador gana \$1.11 y si se extraen dos bolas de distinto color el jugador pierde \$1.00. Si una persona participa en el juego dos veces, calcule la probabilidad de que la ganancia de esta persona sea mayos a \$0.00.

13. Sea X una variable aleatoria con función de densidad dada por

$$f_X(x) = \frac{1}{1} e^{-|x|} \mathbb{I}_{\mathbb{R}}(x)$$

    Si $Y = X^2$, encuentre la función de distribución acumulada de Y.

14. Sea X una variable aleatoria con función de densidad dada por

$$f_X(x) = \begin{cases} 4x^3, \text{ si } 0 < x < 1 \\ 0, \text{ en otro caso} \end{cases}$$

    Encuentre $P(X \leq \frac{2}{3} | X > \frac{1}{3})$.