Universidad Nacional Autónoma de México

Probabilidad I

Tarea IV

Alan Ernesto Arteaga Vázquez

Raúl Llamosas Alvarado

Edgar Quiroz Castañeda

Jean Paul Ruiz Melo

Sandra Del Mar Soto Corderi

Lunes 15 de octubre del 2018

1. Sea A un evento ($A \in F$). Definimos X por

$$X(\omega) = \begin{cases} 1, \text{ si } \omega \in A \\ 0, \text{ si } \omega \notin A \end{cases}$$

¿Es X variable aleatoria?

Tenemos que una variable aleatoria está definida como:
Definición: Para un espacio de probabilidad $P = (\Omega, F, P)$ tenemos que $X : \Omega \mapsto R$ es una variable aleatoria si:

$$\{w \in \Omega : X(w) \leq x\} \in F.$$

Donde $x \in R$ y $Im^{-1}(X) = (-\infty, x]$. Tenemos que la función está dada para un evento en específico de A. Si F está dado como:

$$F = \{A, A_1, ..., A_n\} \subset P(\Omega) : \Omega = \{O_1, ..., O_k\}$$

Tenemos que los valores de la función está acotada por 1 y por 0. Entonces los rangos de x corren en $(-\infty, 0), [0, 1), [1, \infty)$. Tenemos entonces que:

$$\text{si } x \in (-\infty, 0) \Rightarrow \{w \in \Omega : X(w) \leq x\} = \emptyset \in F$$
$$\text{si } x \in [0, 1) \Rightarrow \{w \in \Omega : X(w) \leq x\} = \{w \in \Omega : X(w) = 0\}$$

Pero ésto solamente sucede cuando $w \notin A$, es decir cuando $w \in A^c$, pero como F es una $\sigma - algebra$ entonces claramente $A^c \in F$ por lo que $\{w \in \Omega : X(w) \leq x\} = A^c \in F$ si $x \in [0, 1)$. Ahora tenemos que:

si $x \in [1, \infty) \Rightarrow \{w \in \Omega : X(w) \leq x\} = \{w \in \Omega : X(w) = 1\} = \{w \in \Omega : w \in A\} = A$. Y $A \in F$ por hipótesis. Entonces cumple los requisitos de que sea una variable aleatoria$\blacksquare$

2. Considere un espacio de probabilidad $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y $F = \{\emptyset, \Omega, \{2, 4, 6\}, \{1, 3, 5\}\}$. Sean $X_1, X_2 : \Omega \to \mathbb{R}$ definidas como:

$$X_1(\omega) = \omega^2$$
$$X_2(\omega) = \begin{cases} 1, \omega \text{ par} \\ 0, \omega \text{ impar} \end{cases}$$

¿Son X_1 y X_2 variables aleatorias en este espacio de probabilidad?

Tenemos que:

$$X_1(w) = \begin{cases} 1, si\ \omega = 1 \\ 4, si\ \omega = 2 \\ 9, si\ \omega = 3 \\ 16, si\ \omega = 4 \\ 25, si\ \omega = 5 \\ 36, si\ \omega = 6 \end{cases}$$

Entonces que los intervalos a considerar son $(-\infty, 1), [1, 4), [4, 9), [9, 16), [16, 25), [25, 36), [36, \infty)$

$$\text{si } x \in (-\infty, 1) \Rightarrow \{w \in \Omega : X(w) \leq x\} = \emptyset \in F$$
$$\text{si } x \in [1, 4) \Rightarrow \{w \in \Omega : X(w) \leq x\} = \{1\} \notin F$$

Como podemos ver, no se encuentra en F por lo tanto X_1 no es una variable aleatoria. Ahora, tenemos que:

$$X_2(w) = \begin{cases} 1, si\ \omega \in \{2, 4, 6\} \\ 0, si\ \omega \in \{1, 3, 5\} \end{cases}$$

Los intervalos a considerar son $(-\infty, 0), [0, 1), [1, \infty)$ entonces:

$$\text{si } x \in (-\infty, 0) \Rightarrow \{w \in \Omega : X(w) \leq x\} = \emptyset \in F.$$
$$\text{si } x \in [0, 1) \Rightarrow \{w \in \Omega : X(w) \leq x\} = \{1, 3, 5\} \in F$$
$$\text{si } x \in [1, \infty) \Rightarrow \{w \in \Omega : X(w) \leq x\} = \{2, 4, 6\} \in F$$

Entonces sí es una variable aleatoria. Entonces en conclusión X_2 es una variable aleatoria pero X_1 no lo es.

3. Sea f una función definida por

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, \text{ si } -1 \leq x \leq 0 \\ 2x - 6, \text{ si } 3 \leq x \leq c \\ 0, \text{ en otro caso} \end{cases}$$

Con c constante.

(a) Determine el valor de c de tal manera que f sea una función de densidad.

Como es una función de densidad continua tenemos que tiene que cumplir lo siguiente:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{-1} f(x)dx + \int_{-1}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{3} f(x)dx + \int_{3}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{\infty} f(x)dx$$

$$= 0 + \int_{-1}^{0} (x+1)dx + 0 + \int_{3}^{c} (2x+6)dx + 0 =$$

$$(\frac{x^2}{2} + x)|_{-1}^{0} + 2[(\frac{x^2}{2} + 3x)|_3^c] = 1$$

$$(\frac{0^2}{2} + 0) - (\frac{(-1)^2}{2} - 1) + 2[(\frac{c^2}{2} + 3c) - (\frac{9}{2} + 9)] = 1$$

$$\frac{1}{2} + 2[(\frac{c^2 + 6c}{2}) - (\frac{27}{2})] = 1$$

Y eso solo sucede cuando:

$$c^2 + 6c - 27 + \frac{1}{2} = 1$$

$$c^2 + 6c - \frac{55}{2} = 0$$

Cuyos valores que resuelven dicha ecuación son:

$$c_1 = \tfrac{-6+\sqrt{36+110}}{2} = \tfrac{-6+\sqrt{146}}{2}$$
$$c_2 = \tfrac{-6-\sqrt{146}}{2}$$

Tenemos que el valor tendría que ser positivo para que ésto tuviese sentido y dado que $c_1 \approx 3.041$ se tiene que éste será el valor que tenga que tomar c. Entonces el valor de c es:

$$c = \frac{-6 + \sqrt{146}}{2}$$

(b) Encuentre la función de distribución correspondiente a f.

Al tratarse de una función continua se tiene que $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$ entonces se sigue que:

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} + x, \text{ si } -1 \leq x \leq 0 \\ \frac{3x^2}{2} - 5x, \text{ si } 3 \leq x \leq \frac{-6+\sqrt{146}}{2} \end{cases}$$

Ya que que al tratarse de una función acumulativa se suma a la integral $\int 2x-6$ la integral $\int x+1$ debido a que es acumulativa.

4. Sea f una función definida por

$$f(x) = \begin{cases} cr^x, \text{ si } x \in \{0,1,...\} \\ 0, \text{ en otro caso} \end{cases}$$

En donde $0 < r < 1$. Encuentre c para que f sea función de densidad.
Podemos notar que es una funcion de densidad discreta, entonces tenemos:

$$1 = \textstyle\sum_{x=0}^{\infty} P(i)$$

Donde $P(i) = cr^x$. Entoces sustituyendo tenemos:

$$1 = \sum_{x=0}^{\infty} cr^x$$

$$1 = c\sum_{x=0}^{\infty} r^x$$

$$\frac{1}{c} = \sum_{x=0}^{\infty} r^x$$

Entonces esto es la serie geométrica:

$$\frac{1}{c} = 1 + r + r^2 + r^3 + ...$$

Y como r es un fración, converge a:

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{1-r}$$

Entonces para que f sea función de densidad:

$$c = r - 1$$

5. La función de densidad de una variable aleatoria X es

$$f_X(x) = \gamma x^2 e^{-kx} \mathbb{I}_{(0,\infty)}$$

Donde $k > 0$.

(a) Encontrar el valor de γ.
Tenemos que:

$$1 = \int_0^{\infty} \gamma x^2 e^{-kx} dx$$

Entonces resolviendo la integral tenemos:

$$= \gamma \int x^2 e^{-kx}$$

$$= \gamma(-\frac{x^2e^{-kx}}{k} - \int \frac{2xe^{-kx}}{k})$$

$$= \gamma(-\frac{x^2e^{-kx}}{k} + \frac{2}{k}(-\frac{xe^{-kx}}{k} - \int -\frac{e^{-kx}}{k}))$$

$$= \gamma(-\frac{x^2e^{-kx}}{k} + \frac{2}{k}(-\frac{xe^{-kx}}{k} - \frac{1}{k^2}(\int e^u)); u = -kx, dx = \frac{-1}{k}du$$

$$= \gamma(-\frac{x^2e^{-kx}}{k} + \frac{2}{k}(-\frac{xe^{-kx}}{k} - \frac{e^{-kx}}{k^2}))$$

$$= \gamma(-\frac{x^2e^{-kx}}{k} - \frac{2xe^{-kx}}{k^2} - \frac{e^{-kx}}{k^3})$$

$$= -\gamma(\frac{(k^2x^2 + 2kx + 2)e^{-kx}}{k^3}\Big|_0^\infty$$

Resolviendo, tenemo:

$$1 = \frac{2\gamma}{k^3}$$

Entonces $\gamma = \frac{k^3}{2}$.

(b) Encontrar la función de distribución F_X de la variable aleatoria X.

Entonces tenemos:

$$FX(x) = \int_0^x \gamma x^2 e^{-kx} dx$$

Pero ya tenemos que $\gamma = \frac{k^3}{2}$, entonces:

$$FX(x) = \int_0^x \frac{k^3}{2} x^2 e^{-kx} dx$$

Entonces calculando el integral tenemos:

$$FX(x) = \frac{(k^2x^2 + 2kx + 2)e^{-kx}}{2}\Big|_0^x$$

Y sustituyendo tenemos:

$$FX(x) = \frac{e^{-kx}(2e^{kx} - k^2x^2 - 2kx - 2)}{2}$$

(c) Calcule $P(0 < X < \frac{1}{k})$ Tenemos:

$$P(a < X < b) = FX(b) - FX(a)$$

Entonces:

$$= P(0 < X < \frac{1}{k}) = FX(\frac{1}{k}) - FX(0)$$

$$= \frac{e^{-k\frac{1}{k}}(2e^{k\frac{1}{k}} - k^2\frac{1}{k}^2 - 2k\frac{1}{k} - 2)}{2} - \frac{e^{-k0}(2e^{k0} - k^2 0^2 - 2k0 - 2)}{2}$$

$$= \frac{0.367(5.43 - 5)}{2} - \frac{1(2 - 2)}{2}$$

$$0.079 - 0$$

$$= 0.079$$

6. Sea

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ si } x < 0 \\ \frac{1}{2}\beta, \text{ si } 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{2}, \text{ si } 1 \leq x < 2 \\ \frac{1}{2}(1-\beta), \text{ si } 2 < x < 3 \\ 0, \text{ si } x \geq 3 \end{cases}$$

Donde $0 < \beta < 1$. Encontrar la función de distribución F_X

Si x $<$ 0, se queda en cero.

Cuando 0 $\leq$ X $<$ 1, tenemos:

$$\int_0^x \frac{1}{2}\beta dx = \frac{\beta x}{2}$$

Para 1 $\leq$ X $<$ 1:

$$\int_1^x \frac{1}{2}dx = \frac{(x-1)}{2}$$

Usando el anterior tenemos:

$$\frac{(x-1)}{2} + \frac{\beta x}{2}$$

Para 2 $\leq$ X $<$ 3:

$$\int_2^x \frac{1}{2}(1-\beta)dx = -\frac{(x-2)x}{4}$$

Lo cual es:

$$-\frac{(x-2)x}{4} + \frac{(x-1)}{2} + \frac{\beta x}{2}$$

Entonces la función de distribución es:

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ si } x < 0 \\ \frac{\beta x}{2}, \text{ si } 0 \leq x < 1 \\ \frac{(x-1)}{2} + \frac{\beta x}{2}, \text{ si } 1 \leq x < 2 \\ -\frac{(x-2)x}{4} + \frac{(x-1)}{2} + \frac{\beta x}{2}, \text{ si } 2 < x < 3 \\ 1, \text{ si } x \geq 3 \end{cases}$$

7. Demuestre que $f_X(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}\mathbb{I}_{\mathbb{R}}(x)$ es una función de densidad.

   Como la variable aleatoria toma valores continuos, se tiene que para demostrar que $f_X^{(x)}$ se trata de una función de densidad, basta con probar que:

   (a)
   $$f_X^{(x)} \geq 0 \forall x$$

   Veamos el límite de la función cuando $x \to \infty$, así:

   $$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{2}e^{-|x|}$$

   (como x tiende a infinito positivo, se sigue:)

   $$= \lim_{x \to \infty} \frac{1}{2}e^{-x} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{2e^x} = \frac{1}{\infty} = 0$$

   análogamente, el límite de la función cuando $x \to -\infty$:

   $$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{2}e^{-|x|}$$

   (como x tiende a infinito negativo, y por la definición de valor absoluto, se sigue:)

   $$= \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{2}e^{-(-x)} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{2}e^{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2} \lim_{x \to -\infty} e^x = \frac{1}{2} \cdot 0 = 0$$

   Luego, para cualquier número real, se tiene que $|x|$ es positivo para cualquier $x \in \mathbb{R}$, luego, como e^x es positivo para cualquier x número real, notemos que:

   $$1 = e^0 = e^{-x}e^x$$

   y así:

   $$e^{-x} = \frac{1}{e^x}$$

   lo cual, resulta ser un número positivo.
   Así, podemos comprobar que $\frac{1}{2}e^{-|x|} = f_X^{(x)} \geq 0 \ \forall x$

   (b)
   $$\int_{-\infty}^{\infty} f_X^{(x)} du = 1$$

   Se tiene que la integral definida de la función f_X viene dada por:

   $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}e^{-|x|}dx$$

   lo cual equivale a:

   $$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{2}e^{-|x|}dx + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{2}e^{-|x|}dx$$

luego, como en la primera integral, el intervalo de integración es $-\infty \leq x \leq 0$, y en la segunda $0 \leq 0 \leq \infty$ podemos reescribir:

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{2} e^{-(-x)} dx + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{2} e^{-(x)} dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{2} e^{x} dx + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{2} e^{-(x)} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{0} e^{x} dx + \frac{1}{2} \int_{0}^{\infty} e^{-(x)} dx$$

Ahora, considerando que

$$\lim_{x \to \infty} e^{-x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{e^{x}} = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} e^{x} = 0$$

Tenemos que:

$$= \frac{1}{2}[e^{0} - e^{-\infty}] - \frac{1}{2}[e^{-\infty} - e^{-0}] = \frac{1}{2}[1 - 0] - \frac{1}{2}[0 - 1] = \frac{1}{2} - (-\frac{1}{2}) = 1$$

Así, como se cumplen $f_X^{(x)} \geq 0 \ \forall x$ y $\int_{-\infty}^{\infty} f_X^{(x)} du = 1$, se tiene que $f_X^{(x)}$ resulta ser una función de densidad de variable aleatoria continua.

8. Sea X una variable aleatoria con función de densidad

$$f_Y(y) = cy\mathbb{I}_{\{1,2,3,4\}}(y)$$

(a) Determinar el valor de c para que f_Y sea una función de densidad de probabilidad. Como la variable aleatoria Y toma valores discretos, se tiene que para que f_Y cumpla ser una funcion de densidad de probabilidad debe cumplirse:

$$\sum_{j=1}^{\infty} f_Y^{(y_j)} = 1$$

así, se tiene por la definición de f_Y (como para todo valor distinto de $1, 2, 3, 4$; $f_Y(y) = 0$):

$$1 = \sum_{j=1}^{\infty} f_Y^{(y_j)} = 0 + c + 2c + 3c + 4c + 0 + 0 + ...$$

$$1 = \sum_{j=1}^{\infty} f_Y^{(y_j)} = c + 2c + 3c + 4c$$

de ahí obtenemos la ecuación:

$$1 = c + 2c + 3c + 4c$$

$$1 = 10c$$

$$c = \frac{1}{10}$$

Así, para que se cumpla $\sum_{j=1}^{\infty} f_Y^{(y_j)} = 1$, se sigue que c debe tener el valor $\frac{1}{10}$.

(b) Calcule $P(1 < Y \leq 3)$ y $P(Y < 1|Y \leq 3)$

Se tiene que $P(a < y \leq b) = F_Y^{(b)} - F_Y^{(a)}$, así, como Y es una variable aleatoria que toma valores discretos podemos decir:

$$F_Y^{(3)} = \sum_{\{y|y\leq 3\}} f_Y^{(y)} = f_Y^{(1)} + f_Y^{(2)} + f_Y^{(3)} = \frac{1}{10} + \frac{2}{10} + \frac{3}{10} = \frac{6}{10}$$

análogamente:

$$F_Y^{(1)} = \sum_{\{y|y\leq 1\}} f_Y^{(y)} = f_Y^{(1)} = \frac{1}{10}$$

así, se sigue:

$$P(1 < Y \leq 3) = F_Y^{(b)} - F_Y^{(a)} = \frac{6}{10} - \frac{1}{10} = \frac{5}{10}$$

Ahora, para $P(Y < 1|Y \leq 3)$, se tiene:

$$P(Y < 1|Y \leq 3) = \frac{P[(Y < 1) \cap (Y \leq 3)]}{P(Y \leq 3)} = \frac{P(Y < 1)}{P(Y \leq 3)}$$

Notemos ahora:

$$P(Y \leq 3) = F_Y^{(3)} = \frac{6}{10}$$

$$P(Y < 1) = \lim_{h\to 0^+} F_Y^{(1-h)} = \lim_{h\to 0^+} \sum_{\{y|y\leq 1-h\}} f_Y^{(y)} = \lim_{h\to 0^+} 0 = 0$$

De esta manera concluimos:

$$P(Y < 1|Y \leq 3) = \frac{P(Y < 1)}{P(Y \leq 3)} = \frac{0}{\frac{6}{10}} = 0$$

9. Sea X una variable aleatoria continua con función de densidad

$$f_X(x) = \begin{cases} 6x(1-x), \text{ si } 0 < x < 1 \\ 0, \text{ en otro caso} \end{cases}$$

Calcule $P(|X - \frac{1}{2}| > \frac{1}{4})$.

Tenemos que la siguiente desigualdad es equivalente a:

$$|X - \frac{1}{2}| > \frac{1}{4} = (X - \frac{1}{2} > \frac{1}{4}) \cup (X - \frac{1}{2} < -\frac{1}{4})$$

$$= (X > \frac{3}{4}) \cup (X < \frac{1}{4})$$

De ahí, podemos reescribir:

$$P(|X - \frac{1}{2}| > \frac{1}{4}) = P[(X > \frac{3}{4}) \cup (X < \frac{1}{4})]$$

Luego, como P es una medida de probabilidad, se sigue:

$$P[(X > \frac{3}{4}) \cup (X < \frac{1}{4})] = P(X > \frac{3}{4}) + P(X < \frac{1}{4})$$

De allí, obtenemos $P(X > \frac{3}{4})$ y $P(X < \frac{1}{4})$, las cuales pueden calcularse mediante:

$$P(X > \frac{3}{4}) = 1 - P(X \leq \frac{3}{4}) = 1 - F_X^{(\frac{3}{4})}$$

y como X es una variable aleatoria continua, se sigue:

$$\begin{aligned}
1 - F_X^{(\frac{3}{4})} = 1 - \int_0^{\frac{3}{4}} 6x(1-x)dx = 1 - [\int_0^{\frac{3}{4}} 6x - 6x^2 dx] \\
= 1 - [\int_0^{\frac{3}{4}} 6xdx - \int_0^{\frac{3}{4}} 6x^2 dx] \\
= 1 - [3x^2\Big|_0^{\frac{3}{4}} - 2x^3\Big|_0^{\frac{3}{4}}] = 1 - [3 \cdot \frac{9}{16} - 2 \cdot \frac{27}{64}] = 1 - [\frac{27}{16} - \frac{54}{64}] \\
= 1 - [\frac{108}{64} - \frac{54}{64}] = 1 - [\frac{108}{64} - \frac{54}{64}] = 1 - [\frac{54}{64}] \\
= \frac{64}{64} - \frac{54}{64} = \frac{10}{54} = \frac{5}{32}
\end{aligned}$$

Ahora, para $P(X < \frac{1}{4})$:

$$\begin{aligned}
P(X < \frac{1}{4}) = \lim_{h \to 0^+} F_Y^{(\frac{1}{4} - h)} = \lim_{h \to 0^+} \int_0^{(\frac{1}{4} - h)} 6x - 6x^2 dx \\
= \lim_{h \to 0^+} [3x^2\Big|_0^{(\frac{1}{4} - h)} - 2x^3\Big|_0^{(\frac{1}{4} - h)}] \\
= \lim_{h \to 0^+} [3(\frac{1}{4} - h)^2 - 2(\frac{1}{4} - h)^3] \\
= \lim_{h \to 0^+} [3(\frac{1}{4} - h)^2 - 2(\frac{1}{4} - h)^3] \\
= \lim_{h \to 0^+} [\frac{16h^3 + 12h^2 - 9h}{8} + \frac{5}{32}] \\
= \frac{16(0)^3 + 12(0)^2 - 9(0)}{8} + \frac{5}{32} = \frac{5}{32}
\end{aligned}$$

Así, concluimos que :

$$P[(X > \frac{3}{4}) \cup (X < \frac{1}{4})] = P(X > \frac{3}{4}) + P(X < \frac{1}{4}) = \frac{5}{32} + \frac{5}{32} = \frac{10}{32} = \frac{5}{16}$$

10. Suponga que se selecciona aleatoriamente un punto z del cuadrado con esquinas (2, 1), (3, 1), (2, 2,) y (3, 2). Sea A la variable aleatoria que mide el área del triángulo con vértices (2, 1), (3, 1) y z.
El área de un triángulo es $\frac{b \cdot h}{2}$.
En este caso la base está fija como $b = \sqrt{(2-3)^2 + (1-1)^2} = 1$.
Y cómo la base es paralela al eje x, ambas entradas son 1, entonces la altura del triángulo sería la altura del punto menos la altura de la base, o sea $y_z - 1, z = (x_z, y_z)$. De estas dos cosas, $A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{1 \cdot (y_z - 1)}{2} = \frac{y_z - 1}{2}$

(a) ¿Cuál es el valor más grande que A puede tomar?
Como la base está fija, el cambio en el área depenede sólo de la altura.
Dado el cuadrado, esta altura puede ser a lo más $2-1=1$. Entonces el área máxima es $A_m = \frac{1 \cdot 1}{2} = \frac{1}{2}$.

(b) ¿Cuál es el conjunto de puntos para el cuál $A \leq \frac{1}{4}$?

$$\begin{aligned} A = \frac{y_z - 1}{2} &\leq \frac{1}{4} \\ \implies y_z - 1 &\leq \frac{1}{2} \\ \implies y_z &\leq \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Entonces, ese conjunto de puntos son $\{(x, y) | y \leq \frac{3}{2}\}$ y están dentro del cuadrado. Forman una rectángulo dentro del cuadrado con base igual a la del cuadrado y altura $\frac{3}{2}$.

(c) Encuentre la función de densidad de A.
La densidad es la derivada de la distribución

$$\frac{d(2x)}{dx} = 2$$

$$f_X(x) = 2\mathbb{I}_{[0,\frac{1}{2}]}$$

(d) Encuentre la función de distribución de A.
El área no puede ser negativa, ni mayor a $\frac{1}{2}$. En otro caso, los puntos que dan un área menor o igual a k son

$$A = \frac{y_z - 1}{2} \leq k \implies y_z \leq 2k + 1$$

Que corresponden a todos los puntos dentro del cuadrado y debajo de la recta $y = 2k + 1$.
Como el área total del cuadrado es 1, y el área de los puntos es en rectángulo con base $b = 1$ y altura $h = 2k + 1 - 1 = 2k$, entonces el área proporcional de los puntos es $A = \frac{A_{puntos}}{A_{total}} = \frac{1 \cdot 2k}{1} = 2k$ Entonces, la función de distribución es

$$F_X(x) = 2x\mathbb{I}_{[0,\frac{1}{2}]}$$

11. Una póliza de seguros cubre las reclamaciones médicas de los empleados de una pequeña compañía.
El valor V de las reclamaciones hechas en un año es descrita mediante

$$V = 100,000Y$$

Donde Y es una variable aleatoria con función de densidad

$$f_Y(y) = \begin{cases} k(1-y)^4, \text{ si } 0 < y < 1 \\ 0, \text{ en otro caso} \end{cases}$$

Donde k es constante. ¿Cuál es la probabilidad de que V exceda 10,000?
Esto sería

$$V = 100,000Y > 10,000 \implies Y > \frac{1}{10}$$

Luego, hay que encontrar la distribución

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \int_{-\infty}^{y} f_Y(u)du = \int_0^y k(1-u)^4 du \\ &= k\int_0^y (1-u)^4 du = k(\frac{(1-u)^5}{5})\Big|_0^y \\ &= k(\frac{(1-y)^5}{5} - \frac{1}{5}) \end{aligned}$$

Y tenemos que

$$\begin{aligned} P(Y > \frac{1}{10}) &= 1 - P(Y \leq \frac{1}{10}) \\ &= 1 - F_Y(\frac{1}{10}) \\ &= k(\frac{(1-\frac{1}{10})^5}{5} - \frac{1}{5}) \\ &= k(\frac{59049}{100000} - \frac{20000}{100000}) \\ &= k(\frac{39049}{100000}) = 0.39049k \end{aligned}$$

Entonces, la probabilidad de que V exceda los 10,000 es un poco menos del 40%.

12. Una urna contiene 5 bolas rojas y 5 bolas azules. Se realiza un juego que consiste en extraer aleatoriamente 2 bolas de la urna. Suponga que si se extraen dos bolas del mismo color, el jugador gana \$1.11 y si se extraen dos bolas de distinto color el jugador pierde \$1.00. Si una persona participa en el juego dos veces, calcule la probabilidad de que la ganancia de esta persona sea mayor a \$0.00.
Nuestro espacio de probabilidad para una ronda dada sería $\Omega = \{(c_1, c_2) | c_j \in \{rojo, azul\}\}$.
La probabilidad sería sólo casos favorables sobre totales. Los casos totales de una ronda son $10 \cdot 9 = 90$.
Para que las bolas sean del mismo color en una ronda, los casos favorables son $10 \cdot 4 = 40$.
Con M el evento de que las bolas tengan el mismo color, $P(M) = \frac{40}{90} = \frac{4}{9}$.

Y la probabilidad de que sean de diferente color es $P(M^c) = 1 - P(M_i) = \frac{5}{9}$.
Sea X la variable aleatoria que dice cuanto dinero ganas en una ronda

$$X(\omega) = \begin{cases} 1, \text{ si } \omega \in M \\ -1.11, \text{ en otro caso} \end{cases}$$

Para dos rondas, el espacio sería Ω^2. Como al inicio de cada participación el estado del juego es el mismo, 5 bolas de cada color, entonces cada ronda es un experimento independiente.
Entonces, la probabilidad de un evento (A_1, A_2) en este espacio es $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2)$.
La ganancia sería simplemente la suma de la ganancia de las dos rondas.
Entonces, la variable aleatoria X_2 que dice cuanto dinero ganas en dos rondas sería

$$\begin{aligned} X_2((A_1, A_2)) &= X(A_1) + X(A_2) \\ &= \begin{cases} -1.11 - 1.11 = -2.22, \text{ si } A_1 = A_2 = M^c \\ 1 - 1.11 = -0.11, \text{ si } A_1 = M, A_2 = M^c \\ -1.11 + 1 = -0.11, \text{ si } A_1 = M^c, A_2 = M \\ 1 + 1 = 2, \text{ si } A_1 = A_2 = M \end{cases} \end{aligned}$$

Entonces la densidad de X_2 sería

$$f_{X_2}(x) = \begin{cases} P(M)^2 = \frac{16}{81}, \text{ si } x = 2 \\ P(M)P(M^c) + P(M^c)P(M) = \frac{40}{81}, \text{ si } x = -0.11 \\ P(M^c)^2 = \frac{25}{81}, \text{ si } x = -2.22 \\ 0, \text{ en otro caso} \end{cases}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} P(X_2 > 0) &= 1 - P(X_2 \leq 0) \\ &= 1 - \sum_{x \leq 0} f_{X_2}(x) \\ &= 1 - (f_{X_2}(-2.22) + f_{X_2}(-0.11)) \\ &= 1 - (\frac{25}{81} + \frac{40}{81}) = 1 - \frac{65}{81} = \frac{16}{81} \\ &\approx 0.2 \end{aligned}$$

Entonces la probabilidad de no perder dinero después de dos rondas es poco menos de 20%.

13. Sea X una variable aleatoria con función de densidad dada por

$$f_X(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|} \mathbb{I}_{\mathbb{R}}(x)$$

Si $Y = X^2$, encuentre la función de distribución acumulada de Y.

Para obtener la función de distribución acumulada usamos la ley de estadística inconsciente y tenemos que:

$F_x(y) = P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y) = P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y})$

Ya que es una variable aleatoria continua, y basándonos en cómo definimos la función de distribución arriba, el resultado sería la siguiente integral: $\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \frac{1}{2}e^{-|x|}$

Desarrollamos:

$$\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \frac{1}{2}e^{-|x|} = \int_{-\sqrt{y}}^{0} \frac{1}{2}e^{x} + \int_{0}^{\sqrt{y}} \frac{1}{2}e^{-x} = \left[\frac{1}{2}e^{x}\right]\Big|_{-\sqrt{y}}^{0} + \left[-\frac{1}{2}e^{-x}\right]\Big|_{0}^{\sqrt{y}}$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-\sqrt{y}}\right) + \left(-\frac{1}{2}e^{-\sqrt{y}} + \frac{1}{2}\right) = 1 - e^{-\sqrt{y}}$$

De ahí,
$F_x(y) = 1 - e^{-\sqrt{y}}$

14. Sea X una variable aleatoria con función de densidad dada por

$$f_X(x) = \begin{cases} 4x^3, \text{ si } 0 < x < 1 \\ 0, \text{ en otro caso} \end{cases}$$

Encuentre $P(X \leq \frac{2}{3}|X > \frac{1}{3})$.

Tenemos una probabilidad condicional y vemos que:

$P(X \leq \frac{2}{3}|X > \frac{1}{3}) = \frac{P((X\leq\frac{2}{3})\cap(X>\frac{1}{3}))}{P(X>\frac{1}{3})}$

Sabemos que la variable es continua, y estamos evaluando en el caso donde está entre $0 < x < 1$ ya que es el caso donde está valuada, así que:

$P((X \leq \frac{2}{3}) \cap (X > \frac{1}{3})) = \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} 4x^3 dx$

Ya que en el caso donde estamos valuando, el límite está en 1, podemos tener lo siguiente:
$P(X > \frac{1}{3}) = \int_{\frac{1}{3}}^{1} 4x^3 dx$

Desarrollamos:
$P((X \leq \frac{2}{3}) \cap (X > \frac{1}{3})) = [x^4]\Big|_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} = \frac{16}{81} - \frac{1}{81} = \frac{5}{27}$

$P(X > \frac{1}{3}) = [x^4]\Big|_{\frac{1}{3}}^{1} = 1 - \frac{1}{81} = \frac{80}{81}$

Entonces,
$P(X \leq \frac{2}{3}|X > \frac{1}{3}) = \frac{\frac{5}{27}}{\frac{80}{81}} = \frac{3}{16}$