UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

PROBABILIDAD I

Tarea IV

Alan Ernesto Arteaga Vázquez

Raúl Llamosas Alvarado

Edgar Quiroz Castañeda

Jean Paul Ruiz Melo

Sandra Del Mar Soto Corderi

Lunes 15 de octubre del 2018

1. Sea A un evento ($A \in F$). Definimos X por

$$X(\omega) = \begin{cases} 1, \text{ si } \omega \in A \\ 0, \text{ si } \omega \notin A \end{cases}$$

¿Es X variable aleatoria?

2. Considere un espacio de probabilidad $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y $F = \{\emptyset, \Omega, \{2, 4, 6\}, \{1, 3, 4\}\}$. Sean $X_1, X_2 : \Omega \to \mathbb{R}$ definidas como

$$X_1(\omega) = \omega^2 X_2(\omega) = \begin{cases} 1, \omega \text{ par} \\ 0, \omega \text{ impar} \end{cases}$$

¿Son X_1 y X_2 variables aleatorias en este espacio de probabilidad?

3. Sea f una función definida por

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, \text{ si } -1 \leq x \leq 0 \\ 2x - 6, \text{ si } 3 \leq x \leq c \\ 0, \text{ en otro caso} \end{cases}$$

Con c constante.

   (a) Determine el valor de c de tal manera que f sea una función de densidad.
   (b) Encuentre la función de distribución correspondiente a f.

4. Sea f una función definida por

$$f(x) = \begin{cases} cr^x, \text{ si } x \in \{0, 1, ...\} \\ 0, \text{ en otro caso} \end{cases}$$

En donde $0 < r < 1$. Encuentre c para que f sea función de densidad.

5. La función de densidad de una variable aleatoria X es

$$f_X(x) = \gamma x^2 e^{-kx} \mathbb{I}_{(0,\infty)}$$

Donde $k > 0$.

   (a) Encontrar el valor de γ.
   (b) Encontrar la función de distribución F_X de la variable aleatoria X.
   (c) Calcule $P(0 < X < \frac{1}{k})$

6. Sea

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ si } x < 0 \\ \frac{1}{2}\beta, \text{ si } 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{2}, \text{ si } 1 \leq x < 2 \\ \frac{1}{2}(1 - \beta), \text{ si } 2 < x < 3 \\ 0, \text{ si } x \geq 3 \end{cases}$$

Donde $0 < \beta < 1$. Encontrar la función de distribución F_X

7. Demuestre que $f_X(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}\mathbb{I}_{\mathbb{R}}(x)$ es una función de densidad.

8. Sea X una variable aleatoria con función de densidad

$$f_\gamma(y) = cy\mathbb{I}_{\{1,2,3,4\}}(y)$$

   (a) Determinar el valir de c para que f_γ sea una función de densidad de probabilidad.

   (b) Calcule $P(1 < Y \leq 3)$ y $p(Y < 1|Y \leq 3)$

9. Sea X una variable aleatoria continua con función de densidad

$$f_X(x) = \begin{cases} 6x(1-x), \text{ si } 0 < x < 1 \\ 0, \text{ en otro caso} \end{cases}$$

   Calcule $P(|X - \frac{1}{2}| > \frac{1}{4})$.

10. Suponga que se selecciona aleatoriamente un punto z del cuadrado con esquinas (2, 1), (3, 1), (2, 2,) y (3, 2). Sea A la variable aleatoria que mide el área del triángulo con vértices (2, 1), (3, 1) y z.
    El área de un triángulo es $\frac{b \cdot h}{2}$.
    En este caso la base está fija como $b = \sqrt{(2-3)^2 + (1-1)^2} = 1$.
    Y cómo la base es paralela al eje x, ambas entradas son 1, entonces la altura del triángulo sería la altura del punto menos la altura de la base, o sea $y_z - 1, z = (x_z, y_z)$. De estas dos cosas, $A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{1 \cdot (y_z - 1)}{2} = \frac{y_z - 1}{2}$

    (a) ¿Cuál es el valor más grande que A puede tomar?
    Como la base está fija, el cambio en el área depenede sólo de la altura.
    Dado el cuadrado, esta altura puede ser a lo más $2-1 = 1$. Entonces el área máxima es $A_m = \frac{1 \cdot 1}{2} = \frac{1}{2}$.

    (b) ¿Cuál es el conjunto de puntos para el cuál $A \leq \frac{1}{4}$?

$$\begin{aligned} A = \frac{y_z - 1}{2} &\leq \frac{1}{4} \\ \implies y_z - 1 &\leq \frac{1}{2} \\ \implies y_z &\leq \frac{3}{2} \end{aligned}$$

    Entonces, ese conjunto de puntos son $\{(x, y)|y \leq \frac{3}{2}\}$ y están dentro del cuadrado.
    Forman una rectángulo dentro del cuadrado con base igual a la del cuadrado y altura $\frac{3}{2}$.

    (c) Encuentre la función de densidad de A.
    La densidad es la derivada de la distribución

$$\frac{d(2x)}{dx} = 2$$

$$f_X(x) = 2\mathbb{I}_{[0,\frac{1}{2}]}$$

(d) Encuentre la función de distribución de A.
El área no puede ser negativa, ni mayor a $\frac{1}{2}$. En otro caso, los puntos que dan un área menor o igual a k son

$$A = \frac{y_z - 1}{2} \leq k \implies y_z \leq 2k + 1$$

Que corresponden a todos los puntos dentro del cuadrado y debajo de la recta $y = 2k + 1$.
Como el área total del cuadrado es 1, y el área de los puntos es en rectángulo con base $b = 1$ y altura $h = 2k + 1 - 1 = 2k$, entonces el área proporcional de los puntos es $A = \frac{A_{puntos}}{A_{total}} = \frac{1 \cdot 2k}{1} = 2k$ Entonces, la función de distribución es

$$F_X(x) = 2x\mathbb{I}_{[0, \frac{1}{2}]}$$

11. Una póliza de seguros cubre las reclamaciones médicas de los empleados de una pequeña compañía.
El valor V de las reclamaciones hechas en un año es descrita mediante

$$V = 100,000Y$$

Donde Y es una variable aleatoria con función de densidad

$$f_Y(y) = \begin{cases} k(1-y)^4, \text{ si } 0 < y < 1 \\ 0, \text{ en otro caso} \end{cases}$$

Donde k es constante. ¿Cuál es la probabilidad de que V exceda 10,000?
Esto sería

$$V = 100,000Y > 10,000 \implies Y > \frac{1}{10}$$

Luego, hay que encontrar la distribución

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \int_{-\infty}^{y} f_Y(u)du = \int_0^y k(1-u)^4 du \\ &= k\int_0^y (1-u)^4 du = k(\frac{(1-u)^5}{5})\Big|_0^y \\ &= k(\frac{(1-y)^5}{5} - \frac{1}{5}) \end{aligned}$$

Y tenemos que

$$\begin{aligned} P(Y > \frac{1}{10}) &= 1 - P(Y \leq \frac{1}{10}) \\ &= 1 - F_Y(\frac{1}{10}) \\ &= k(\frac{(1-\frac{1}{10})^5}{5} - \frac{1}{5}) \\ &= k(\frac{59049}{100000} - \frac{20000}{100000}) \\ &= k(\frac{39049}{100000}) = 0.39049k \end{aligned}$$

Entonces, la probabilidad de que V exceda los 10,000 es un poco menos del 40%.

12. Una urna contiene 5 bolas rojas y 5 bolas azules. Se realiza un juego que consiste en extraer aleatoriamente 2 bolas de la urna. Suponga que si se extraen dos bolas del mismo color, el jugador gana \$1.11 y si se extraen dos bolas de distinto color el jugador pierde \$1.00. Si una persona participa en el juego dos veces, calcule la probabilidad de que la ganancia de esta persona sea mayor a \$0.00.
Nuestro espacio de probabilidad para una ronda dada sería $\Omega = \{(c_1, c_2)|c_j \in \{rojo, azul\}\}$.
La probabilidad sería sólo casos favorables sobre totales. Los casos totales de una ronda son $10 \cdot 9 = 90$.
Para que las bolas sean del mismo color en una ronda, los casos favorables son $10 \cdot 4 = 40$.
Con M el evento de que las bolas tengan el mismo color, $P(M) = \frac{40}{90} = \frac{4}{9}$.
Y la probabilidad de que sean de diferente color es $P(M^c) = 1 - P(M_i) = \frac{5}{9}$.
Sea X la variable aleatoria que dice cuanto dinero ganas en una ronda

$$X(\omega) = \begin{cases} 1, \text{ si } \omega \in M \\ -1.11, \text{ en otro caso} \end{cases}$$

Para dos rondas, el espacio sería Ω^2. Como al inicio de cada participación el estado del juego es el mismo, 5 bolas de cada color, entonces cada ronda es un experimento independiente.
Entonces, la probabilidad de un evento (A_1, A_2) en este espacio es $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2)$.
La ganancia sería simplemente la suma de la ganancia de las dos rondas.
Entonces, la variable aleatoria X_2 que dice cuanto dinero ganas en dos rondas sería

$$\begin{aligned} X_2((A_1, A_2)) &= X(A_1) + X(A_2) \\ &= \begin{cases} -1.11 - 1.11 = -2.22, \text{ si } A_1 = A_2 = M^c \\ 1 - 1.11 = -0.11, \text{ si } A_1 = M, A_2 = M^c \\ -1.11 + 1 = -0.11, \text{ si } A_1 = M^c, A_2 = M \\ 1 + 1 = 2, \text{ si } A_1 = A_2 = M \end{cases} \end{aligned}$$

Entonces la densidad de X_2 sería

$$f_{X_2}(x) = \begin{cases} P(M)^2 = \frac{16}{81}, \text{ si } x = 2 \\ P(M)P(M^c) + P(M^c)P(M) = \frac{40}{81}, \text{ si } x = -0.11 \\ P(M^c)^2 = \frac{25}{81}, \text{ si } x = -2.22 \\ 0, \text{ en otro caso} \end{cases}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} P(X_2 > 0) &= 1 - P(X_2 \leq 0) \\ &= 1 - \sum_{x \leq 0} f_{X_2}(x) \\ &= 1 - (f_{X_2}(-2.22) + f_{X_2}(-0.11)) \\ &= 1 - (\frac{25}{81} + \frac{40}{81}) = 1 - \frac{65}{81} = \frac{16}{81} \\ &\approx 0.2 \end{aligned}$$

Entonces la probabilidad de no perder dinero después de dos rondas es poco menos de 20%.

13. Sea X una variable aleatoria con función de densidad dada por

$$f_X(x) = \frac{1}{1} e^{-|x|} \mathbb{I}_{\mathbb{R}}(x)$$

Si $Y = X^2$, encuentre la función de distribución acumulada de Y.

14. Sea X una variable aleatoria con función de densidad dada por

$$f_X(x) = \begin{cases} 4x^3, \text{ si } 0 < x < 1 \\ 0, \text{ en otro caso} \end{cases}$$

Encuentre $P(X \leq \frac{2}{3} | X > \frac{1}{3})$.