# Universidad Nacional Autónoma de México

## Probabilidad I

# Tarea IV

*Alan Ernesto Arteaga Vázquez*

*Raúl Llamosas Alvarado*

*Edgar Quiroz Castañeda*

*Jean Paul Ruiz Melo*

*Sandra Del Mar Soto Corderi*

Lunes 15 de octubre del 2018

1. Sea $A$ un evento ($A \in F$). Definimos $X$ por

$$X(\omega) = \begin{cases} 1, \text{ si } \omega \in A \\ 0, \text{ si } \omega \notin A \end{cases}$$

¿Es $X$ variable aleatoria?

Tenemos que una variable aleatoria está definida como:
**Definición:** Para un espacio de probabilidad $P = (\Omega, F, P)$ tenemos que $X : \Omega \mapsto R$ es una variable aleatoria si:

$$\{w \in \Omega : X(w) \leq x\} \in F.$$

Donde $x \in R$ y $Im^{-1}(X) = (-\infty, x]$. Tenemos que la función está dada para un evento en específico de A. Si F está dado como:

$$F = \{A, A_1, ..., A_n\} \subset P(\Omega) : \Omega = \{O_1, ..., O_k\}$$

Tenemos que los valores de la función está acotada por 1 y por 0. Entonces los rangos de x corren en $(-\infty, 0), [0, 1), [1, \infty)$. Tenemos entonces que:

$$\text{si } x \in (-\infty, 0) \Rightarrow \{w \in \Omega : X(w) \leq x\} = \emptyset \in F$$
$$\text{si } x \in [0, 1) \Rightarrow \{w \in \Omega : X(w) \leq x\} = \{w \in \Omega : X(w) = 0\}$$

Pero ésto solamente sucede cuando $w \notin A$, es decir cuando $w \in A^c$, pero como F es una $\sigma - algebra$ entonces claramente $A^c \in F$ por lo que $\{w \in \Omega : X(w) \leq x\} = A^c \in F$ si $x \in [0, 1)$. Ahora tenemos que:

si $x \in [1, \infty) \Rightarrow \{w \in \Omega : X(w) \leq x\} = \{w \in \Omega : X(w) = 1\} = \{w \in \Omega : w \in A\} = A$. Y $A \in F$ por hipótesis. Entonces cumple los requisitos de que sea una variable aleatoria$\blacksquare$

2. Considere un espacio de probabilidad $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y $F = \{\emptyset, \Omega, \{2, 4, 6\}, \{1, 3, 5\}\}$. Sean $X_1, X_2 : \Omega \to \mathbb{R}$ definidas como:

$$X_1(\omega) = \omega^2$$
$$X_2(\omega) = \begin{cases} 1, \omega \text{ par} \\ 0, \omega \text{ impar} \end{cases}$$

¿Son $X_1$ y $X_2$ variables aleatorias en este espacio de probabilidad?

Tenemos que:

$$X_1(w) = \begin{cases} 1, si\ \omega = 1 \\ 4, si\ \omega = 2 \\ 9, si\ \omega = 3 \\ 16, si\ \omega = 4 \\ 25, si\ \omega = 5 \\ 36, si\ \omega = 6 \end{cases}$$

Entonces que los intervalos a considerar son $(-\infty, 1), [1, 4), [4, 9), [9, 16), [16, 25), [25, 36), [36, \infty)$

$$\text{si } x \in (-\infty, 1) \Rightarrow \{w \in \Omega : X(w) \leq x\} = \emptyset \in F$$
$$\text{si } x \in [1, 4) \Rightarrow \{w \in \Omega : X(w) \leq x\} = \{1\} \notin F$$

Como podemos ver, no se encuentra en F por lo tanto $X_1$ no es una variable aleatoria. Ahora, tenemos que:

$$X_2(w) = \begin{cases} 1, si\ \omega \in \{2, 4, 6\} \\ 0, si\ \omega \in \{1, 3, 5\} \end{cases}$$

Los intervalos a considerar son $(-\infty, 0), [0, 1), [1, \infty)$ entonces:

$$\text{si } x \in (-\infty, 0) \Rightarrow \{w \in \Omega : X(w) \leq x\} = \emptyset \in F.$$
$$\text{si } x \in [0, 1) \Rightarrow \{w \in \Omega : X(w) \leq x\} = \{1, 3, 5\} \in F$$
$$\text{si } x \in [1, \infty) \Rightarrow \{w \in \Omega : X(w) \leq x\} = \{2, 4, 6\} \in F$$

Entonces sí es una variable aleatoria. Entonces en conclusión $X_2$ es una variable aleatoria pero $X_1$ no lo es.

3. Sea $f$ una función definida por

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, \text{ si } -1 \leq x \leq 0 \\ 2x - 6, \text{ si } 3 \leq x \leq c \\ 0, \text{ en otro caso} \end{cases}$$

Con $c$ constante.

(a) Determine el valor de $c$ de tal manera que $f$ sea una función de densidad.

Como es una función de densidad continua tenemos que tiene que cumplir lo siguiente:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{-1} f(x)dx + \int_{-1}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{3} f(x)dx + \int_{3}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{\infty} f(x)dx$$

$$= 0 + \int_{-1}^{0} (x+1)dx + 0 + \int_{3}^{c} (2x+6)dx + 0 =$$

$$(\frac{x^2}{2} + x)|_{-1}^{0} + 2[(\frac{x^2}{2} + 3x)|_{3}^{c}] = 1$$

$$(\frac{0^2}{2} + 0) - (\frac{(-1)^2}{2} - 1) + 2[(\frac{c^2}{2} + 3c) - (\frac{9}{2} + 9)] = 1$$

$$\frac{1}{2} + 2[(\frac{c^2 + 6c}{2}) - (\frac{27}{2})] = 1$$

Y eso solo sucede cuando:

$$c^2 + 6c - 27 + \frac{1}{2} = 1$$

$$c^2 + 6c - \frac{55}{2} = 0$$

Cuyos valores que resuelven dicha ecuación son:

$$c_1 = \frac{-6+\sqrt{36+110}}{2} = \frac{-6+\sqrt{146}}{2}$$
$$c_2 = \frac{-6-\sqrt{146}}{2}$$

Tenemos que el valor tendría que ser positivo para que ésto tuviese sentido y dado que $c_1 \approx 3.041$ se tiene que éste será el valor que tenga que tomar c. Entonces el valor de c es:

$$c = \frac{-6 + \sqrt{146}}{2}$$

(b) Encuentre la función de distribución correspondiente a $f$.

Al tratarse de una función continua se tiene que $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$ entonces se sigue que:

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} + x, \text{ si } -1 \leq x \leq 0 \\ \frac{3x^2}{2} - 5x, \text{ si } 3 \leq x \leq \frac{-6+\sqrt{146}}{2} \end{cases}$$

Ya que que al tratarse de una función acumulativa se suma a la integral $\int 2x-6$ la integral $\int x+1$ debido a que es acumulativa.

4. Sea $f$ una función definida por

$$f(x) = \begin{cases} cr^x, \text{ si } x \in \{0, 1, ...\} \\ 0, \text{ en otro caso} \end{cases}$$

En donde $0 < r < 1$. Encuentre $c$ para que $f$ sea función de densidad.

5. La función de densidad de una variable aleatoria $X$ es

$$f_X(x) = \gamma x^2 e^{-kx} \mathbb{I}_{(0,\infty)}$$

Donde $k > 0$.

(a) Encontrar el valor de $\gamma$.

(b) Encontrar la función de distribución $F_X$ de la variable aleatoria $X$.

(c) Calcule $P(0 < X < \frac{1}{k})$

6. Sea

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ si } x < 0 \\ \frac{1}{2}\beta, \text{ si } 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{2}, \text{ si } 1 \leq x < 2 \\ \frac{1}{2}(1-\beta), \text{ si } 2 < x < 3 \\ 0, \text{ si } x \geq 3 \end{cases}$$

Donde $0 < \beta < 1$. Encontrar la función de distribución $F_X$

7. Demuestre que $f_X(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|} \mathbb{I}_{\mathbb{R}}(x)$ es una función de densidad.

8. Sea $X$ una variable aleatoria con función de densidad

$$f_\gamma(y) = cy\mathbb{I}_{\{1,2,3,4\}}(y)$$

(a) Determinar el valir de $c$ para que $f_\gamma$ sea una función de densidad de probabilidad.

(b) Calcule $P(1 < Y \leq 3)$ y $p(Y < 1 | Y \leq 3)$

9. Sea $X$ una variable aleatoria continua con función de densidad

$$f_X(x) = \begin{cases} 6x(1-x), \text{ si } 0 < x < 1 \\ 0, \text{ en otro caso} \end{cases}$$

Calcule $P(|X - \frac{1}{2}| > \frac{1}{4})$.

10. Suponga que se selecciona aleatoriamente un punto $z$ del cuadrado con esquinas (2, 1), (3, 1), (2, 2,) y (3, 2). Sea $A$ la variable aleatoria que mide el área del triángulo con vértices (2, 1), (3, 1) y $z$.

(a) ¿Cuál es el valor más grande que $A$ puede tomar?

(b) ¿Cuál es el conjunto de puntos para el cuál $A \leq \frac{1}{2}$?

(c) Encuentre la función de densidad de $A$.

(d) Encuentre la función de distribución de $A$.

11. Una póliza de seguros cubre las reclamaciones médicas de los empleados de una pequeña compañía.
El valor $V$ de las reclamaciones hechas en un año es descrita mediante

$$V = 100000Y$$

Donde $Y$ es una variable aleatoria con función de densidad

$$f_{\gamma}(y) = \begin{cases} k(1-y)^4, \text{ si } 0 < y < 1 \\ 0, \text{ en otro caso} \end{cases}$$

Donde $k$ es constante. ¿Cuál es la probabilidad de que $V$ exceda 10000?

12. Una urna contiene 5 bolas rojas y 5 bolas azules. Se realiza un juego que consiste en extraer aleatoriamente 2 bolas de la urna. Suponga que si se extraen dos bolas del mismo color, el jugador gana \$1.11 y si se extraen dos bolas de distinto color el jugador pierde \$1.00. Si una persona participa en el juego dos veces, calcule la probabilidad de que la ganancia de esta persona sea mayos a \$0.00.

13. Sea $X$ una variable aleatoria con función de densidad dada por

$$f_X(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}\mathbb{I}_{\mathbb{R}}(x)$$

Si $Y = X^2$, encuentre la función de distribución acumulada de $Y$.

Para obtener la función de distribución acumulada usamos la ley de estadística inconsciente y tenemos que:
$F_x(y) = P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y) = P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y})$

Ya que es una variable aleatoria continua, y basándonos en cómo definimos la función de distribución arriba, el resultado sería la siguiente integral: $\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \frac{1}{2}e^{-|x|}$

Desarrollamos:

$$\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \frac{1}{2}e^{-|x|} = \int_{-\sqrt{y}}^{0} \frac{1}{2}e^{x} + \int_{0}^{\sqrt{y}} \frac{1}{2}e^{-x} = \left[\frac{1}{2}e^{x}\right]\Big|_{-\sqrt{y}}^{0} + \left[-\frac{1}{2}e^{-x}\right]\Big|_{0}^{\sqrt{y}}$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-\sqrt{y}}\right) + \left(-\frac{1}{2}e^{-\sqrt{y}} + \frac{1}{2}\right) = 1 - e^{-\sqrt{y}}$$

De ahí,
$F_x(y) = 1 - e^{-\sqrt{y}}$

14. Sea $X$ una variable aleatoria con función de densidad dada por

$$f_X(x) = \begin{cases} 4x^3, \text{ si } 0 < x < 1 \\ 0, \text{ en otro caso} \end{cases}$$

Encuentre $P(X \leq \frac{2}{3} | X > \frac{1}{3})$.

Tenemos una probabilidad condicional y vemos que:

$P(X \leq \frac{2}{3} | X > \frac{1}{3}) = \frac{P((X \leq \frac{2}{3}) \cap (X > \frac{1}{3}))}{P(X > \frac{1}{3})}$

Sabemos que la variable es continua, y estamos evaluando en el caso donde está entre $0 < x < 1$ ya que es el caso donde está valuada, así que:

$P((X \leq \frac{2}{3}) \cap (X > \frac{1}{3})) = \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} 4x^3 dx$

Ya que en el caso donde estamos valuando, el límite está en 1, podemos tener lo siguiente:
$P(X > \frac{1}{3}) = \int_{\frac{1}{3}}^{1} 4x^3 dx$

Desarrollamos:
$P((X \leq \frac{2}{3}) \cap (X > \frac{1}{3})) = [x^4] \Big|_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} = \frac{16}{81} - \frac{1}{81} = \frac{5}{27}$

$P(X > \frac{1}{3}) = [x^4] \Big|_{\frac{1}{3}}^{1} = 1 - \frac{1}{81} = \frac{80}{81}$

Entonces,
$P(X \leq \frac{2}{3} | X > \frac{1}{3}) = \frac{\frac{5}{27}}{\frac{80}{81}} = \frac{3}{16}$