Universidad Nacional Autónoma de México

Probabilidad I

Tarea V

Alan Ernesto Arteaga Vázquez

Raúl Llamosas Alvarado

Edgar Quiroz Castañeda

Jean Paul Ruiz Melo

Sandra Del Mar Soto Corderi

Lunes 26 de octubre del 2018

1. Suponga de Gage e Itzel participan en un juego, el cual consiste en lanzar un dado hasta que alguno de los dos obtenga un 6. Suponga que Itzel es la primera en lanzar un dado. ¿Cuál es la probabilidad de que Gage gane?

   Tenemos que la probabilidad de que gane Gage en su primer lanzamiento es la probabilidad de que lanzo un 6 por la probabilidad de que Itzel no lanzo un 6, lo cual es:

$$\frac{1}{6}\frac{5}{6}$$

   De esto, tenemos que en su tercer lanzamiento es la probabilidad de que en ninguno de los anteriors lanzo un 6 por la probabilidad que lanzo un 6:

$$\frac{1}{6}\frac{5}{6}\frac{5}{6}\frac{5}{6}$$

   Y esto lo podemos ver como:

$$\frac{1}{6}(\frac{5}{6})^3$$

   Entonces en el n-esimo lanzamiento tendremos:

$$\frac{1}{6}(\frac{5}{6})^n$$

   Por lo tanto la probabilidad de que Gage gane es:

$$\frac{1}{6}\frac{5}{6}+\frac{1}{6}(\frac{5}{6})^3+...+\frac{1}{6}(\frac{5}{6})^n$$

$$\sum_{x=1}^{\infty}\frac{1}{6}(\frac{5}{6})^{2x-1}$$

   ‘

2. Considere una variable aleatoria X con una función de densidad

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1-|\frac{x-\alpha}{\beta}|}{\beta}, \text{ si } x \in (\alpha-\beta, \alpha+\beta) \\ 0, \text{ en otro caso} \end{cases}$$

   Prueve que $f_X(x)$ es de densidad. Grafíquela.

   Podemos ver a $x-\alpha$ como u, entonces:

$$\alpha-\beta-\alpha=-\beta$$

$$\beta-\alpha-\alpha=\beta$$

   Estos van a ser los limites inferiores y superiores del integral:

$$\int_{-\beta}^{\beta}\frac{1-|\frac{u}{\beta}|}{\beta}du$$

Pero es valor absoluto entonces:

$$\int_{-\beta}^{\beta} \frac{1}{\beta} du - \int_{-\beta}^{\beta} \frac{|\frac{u}{\beta}|}{\beta} du$$

$$\int_{-\beta}^{\beta} \frac{1}{\beta} du - (\int_{0}^{\beta} \frac{\frac{u}{\beta}}{\beta} du + \int_{-\beta}^{0} \frac{\frac{u}{\beta}}{\beta} du)$$

$$(\frac{\beta}{\beta} - \frac{-\beta}{\beta}) - ((\frac{\beta^2}{2\beta^2} - 0) + (0 - \frac{(-\beta)^2}{2\beta^2}))$$

$$(1 - (-1) - (\frac{1}{2} + \frac{1}{2})$$

$$2 - 1$$

$$1$$

Entonces $f_X(x)$ es de densidad.
En la grafica tendremos un v invertido. Donde β define que tan grande es su angulo, si β es grande, el angulo sera menor. Ademas, el punto de origen se define a respeto de β y α. El mas pequeno que es β, mas grande es y, y $x = \alpha$.

3. *(La paradoja de San Petersburgo, planteada por Nicolás Bernoulli en 1728).*
De acuerdo a la historia, en casino de SanPetersburgo estaba dispuesto a ofrecer cualquier tipo de juego siempre que la dirección del casino pudiera establecer el precio de la entrara que se paga por participar. Se propone el siguiente juego: suponga que alguien lanza una moneda balanceada y se reciben 2^n pesos si cae cara en el $n-$ésimo lanzamiento.
Sea X la ganancia del jugador.

   (a) Calcule $\mathbb{E}(X)$.
   Tenemos que en el primer lanzamiento es:

$$\frac{1}{2}2^1$$

   En el segundo es:

$$(\frac{1}{2})(\frac{1}{2})2^2 = \frac{1}{4}4$$

   Y asi se va hasta n:

$$(\frac{1}{2})^n = \frac{1}{2^n}2^n$$

   De donde $\mathbb{E}(X)$ es:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \frac{1}{2}2 + \frac{1}{4}4 + ... + \frac{1}{2^n}2^n \\ &= 1 + 1 + ... + 1\end{aligned}$$

   Como puede ser cualquier numero de lanzamientos:

$$= \infty$$

(b) ¿Estaría dispuesto a liquidar toda la fortuna material que posee a cambio de la entrada de este juego?
No, porque de todas formas es menos probable que ganas lo suficiente para que vale la pena.

4. Suponga que se lanzan n dados. Sea S_n la suma de las caras obtenidaas al lanzar los n dados.

(a) Encuentre $\mathbb{E}(S_2)$
La esperanza de solo un dado seria:

$$(\frac{1}{6})1 + (\frac{1}{6})2 + (\frac{1}{6})3 + (\frac{1}{6})4 + (\frac{1}{6})5 + (\frac{1}{6})6$$

Entonces para dos seria:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(S_2) &= 2((\frac{1}{6})1 + (\frac{1}{6})2 + (\frac{1}{6})3 + (\frac{1}{6})4 + (\frac{1}{6})5 + (\frac{1}{6})6)) \\ &= 2(\frac{1+2+3+4+5+6}{6}) \\ &= \frac{42}{6} = \frac{6*7}{6} \\ \mathbb{E}(S_2) &= 7\end{aligned}$$

(b) Encuentre $\mathbb{E}(S_n)$
Entonces tenemos lo mismo que el inciso a, solo que en lugar de 2 dados, son n:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(S_n) &= n((\frac{1}{6}) + (\frac{2}{6}) + (\frac{3}{6}) + (\frac{4}{6}) + (\frac{5}{6}) + (\frac{6}{6})) \\ &= n(\frac{1+2+3+4+5+6}{6}) \\ &= n(\frac{21}{6}) \\ &= n(\frac{3*7}{6}) = n\frac{7}{2}\end{aligned}$$

De donde tenemos que:

$$\mathbb{E}(S_n) = n(3.5)$$

5. Sea Y una variable aleatoria con media $\mu > 0$ y varianza $\sigma^2 > 0$. Para que valor de $a > 0$ se minimiza

(a) $\mathbb{E}((Y-a)^n)$
Consideremos a $g(a)$ una función de "a", tal que

$$g(a) = \mathbb{E}((Y-a)^2)$$

desarrollando, se sigue:

$$\mathbb{E}((Y-a)^2) = \mathbb{E}(Y^2 - 2aY + a^2)$$

luego, por propiedades de la esperanza:

$$g(a) = \mathbb{E}(Y^2) - 2a\mathbb{E}(Y) + a^2$$

ahora, para encontrar el valor de a que minimiza a $g(a)$, se tiene derivando:

$$\frac{d}{da}[\mathbb{E}(Y^2) - 2a\mathbb{E}(Y) + a^2] = -2\mathbb{E}(Y) + 2a$$

luego, igualando a cero la derivada:

$$0 = -2\mathbb{E}(Y) + 2a$$

$$a = \mathbb{E}(Y)$$

así, se tiene que a se minimiza cuando $a = \mathbb{E}(Y)$, ahora, solo resta corroborar que en punto es un mínimo, así, usando el criterio de la segunda derivada:

$$\frac{d^2}{da^2}[\mathbb{E}(Y^2) - 2a\mathbb{E}(Y) + a^2] = 2$$

y evaluando el punto crítico en la segunda derivada, se tiene:

$$f''(\mathbb{E}(Y)) = 2$$

así, como la evaluación en la segunda derivada es positiva, se sigue que $\mathbb{E}(Y) = a$ minimiza a "$g(a)$".

(b) $\mathbb{E}((aY - \frac{1}{a})^2)$
Ahora, considerando a $h(a)$ una función tal que

$$h(a) = \mathbb{E}((aY - \frac{1}{a})^2)$$

desarrollando, se tiene:

$$\mathbb{E}((aY - \frac{1}{a})^2) = \mathbb{E}(a^2Y^2 - 2Y + \frac{1}{a^2})$$

entonces, por propiedades de la esperanza, se sigue:

$$h(a) = a^2\mathbb{E}(Y^2) - 2\mathbb{E}(y) + \frac{1}{a^2}$$

ahora, para encontrar el valor de a que minimiza a $g(a)$, se tiene derivando:

$$\frac{d}{da}[a^2\mathbb{E}(Y^2) - 2\mathbb{E}(y) + \frac{1}{a^2}] = 2a\mathbb{E}(Y^2) - \frac{2}{a^3}$$

igualando a cero:

$$0 = 2a\mathbb{E}(Y^2) - \frac{2}{a^3}$$

$$\frac{2}{a^3} = 2a\mathbb{E}(Y^2)$$

$$\frac{1}{a^4} = \mathbb{E}(Y^2)$$
$$a^4 = \frac{1}{\mathbb{E}(Y^2)}$$
$$a = \sqrt[4]{\frac{1}{\mathbb{E}(Y^2)}}$$

finalmente, comprobamos que el punto $a = \sqrt[4]{\frac{1}{\mathbb{E}(Y^2)}}$ es un mínimo aplicando el criterio de la segunda derivada, así:

$$\frac{d^2}{da^2}[a^2\mathbb{E}(Y^2) - 2\mathbb{E}(y) + \frac{1}{a^2}] = 2\mathbb{E}(Y^2) + \frac{6}{a^4}$$

evaluando en el punto crítico:

$$f''\Big(\sqrt[4]{\frac{1}{\mathbb{E}(Y^2)}}\Big) = 2\mathbb{E}(Y^2) + \frac{6}{\frac{1}{\mathbb{E}(Y^2)}} = 2\mathbb{E}(Y^2) + 6\mathbb{E}(Y^2)$$

ahora, como por hipótesis se tiene $\mathbb{E}(Y) = \mu > 0$ y $Var(Y) = \sigma^2 > 0$, y por definición de varianza:

$$Var(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}(Y)^2$$
$$\mathbb{E}(Y^2) = Var(Y) + \mathbb{E}(Y)^2$$

entonces se tiene que $\mathbb{E}(Y^2) > 0$, por lo que también $8\mathbb{E}(Y^2) > 0$, por lo que la evaluación de la segunda derivada en el punto es positiva, y por lo tanto, el punto $a = \sqrt[4]{\frac{1}{\mathbb{E}(Y^2)}}$ minimiza a $h(a)$.

6. Sea X una variable aleatoria con función de densidad

$$f_X(x) = c\Big(\frac{1}{6}\Big)^x \mathbb{I}_{\mathbb{N}}(x)$$

(a) Determinar el valor de c para que f_X sea función de densidad.
Para que $f_X^{(x)}$ cumpla ser función de densidad, debe ocurrir (ya que X es una variable aleatoria discreta):

$$1 = \sum_{x=1}^{\infty} c\Big(\frac{1}{6}\Big)^x$$
$$1 = c\sum_{x=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{6}\Big)^x$$

luego, como $\Big(\frac{1}{6}\Big) < 1$, la serie converge de tal forma que:

$$1 = c\Big(\frac{1}{1-\frac{1}{6}}\Big)$$
$$1 = c\Big(\frac{1}{\frac{5}{6}}\Big)$$

se sigue entonces:

$$\frac{5}{6} = c$$

(b) Encontrar la función generador de momentos $m_X(t)$.
Se tiene que la función generadora de momentos para una variable aleatoria discreta puede ser hallada mediante:

$$m_X(t) = \sum_{j=1}^{\infty} e^{tx_j} f_X^{(x_j)}$$

aplicando la definición a la función de densidad dada:

$$m_X(t) = \sum_{j=1}^{\infty} e^{tx_j} \left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right)^{x_j} = \left(\frac{5}{6}\right) \sum_{j=1}^{\infty} e^{tx_j} \left(\frac{1}{6}\right)^{x_j}$$

$$= \left(\frac{5}{6}\right) \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{e^t}{6}\right)^{x_j}$$

ahora, condicionando a $\frac{e^t}{6} < 1$, i.e. $t < ln(6)$ de tal forma que la serie converja, se tiene:

$$\left(\frac{5}{6}\right) \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{e^t}{6}\right)^{x_j} = \left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{1}{1-\frac{e^t}{6}}\right) = \frac{\frac{5}{6}}{1-\frac{e^t}{6}}$$

7. Sea X una función de densidad de probabilidad dada por

$$f_X(x) = \frac{2}{3^x} \mathbb{I}_{\{1,2,3,...\}}(x)$$

¿Cuál es la probabilidad de que X sea par?
Se tiene que la probabilidad de que X sea par, está dada por

$$P(X=2) + P(X=4) + P(X=6) + ... + P(X=2x) \text{ con } x \in \{1,2,3,...\}$$

exprasándola en términos de la función de densidad:

$$f_X^{(2)} + f_X^{(4)} + f_X^{(6)} + ... + f_X^{(2x)} \text{ con } x \in \{1,2,3,...\}$$

lo cual, también se puede expresar como :

$$\sum_{x=1}^{\infty} f_X^{(2x)}$$

que a su vez, es equivalente a :

$$\sum_{x=1}^{\infty} \frac{2}{3^{2x}}$$

desarrollando, tenemos:

$$\sum_{x=1}^{\infty} \frac{2}{3^{2x}} = \sum_{x=1}^{\infty} 2\frac{1}{3^{2x}} = 2\sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{9^x} = 2\sum_{x=1}^{\infty} \left(\frac{1}{9}\right)^x$$

luego, sumando y restando $\left(\frac{1}{9}\right)^0$ de tal forma que el resultado no se vea alterado:

$$= 2\Big[\sum_{x=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{9}\Big)^x + \Big(\frac{1}{9}\Big)^0 - \Big(\frac{1}{9}\Big)^0\Big]$$

$$= 2\Big[\sum_{x=0}^{\infty}\Big(\frac{1}{9}\Big)^x - \Big(\frac{1}{9}\Big)^0\Big]$$

$$= 2\Big[\sum_{x=0}^{\infty}\Big(\frac{1}{9}\Big)^x - 1\Big]$$

se tiene que como $\left(\frac{1}{9}\right) < 1$, la serie converge de tal forma que:

$$= 2\Big[\frac{1}{1-\frac{1}{9}} - 1\Big] = 2\Big[\frac{9}{8} - \frac{8}{8}\Big] = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

se sigue entonces que la probabilidad de que X sea par es $\frac{1}{4}$.

8. Sea X variable aleatoria con función de densidad dada por

$$f_X(x) = \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{2}$$

Con $x > 0$.
Encuentre

(a) $M_X(t)$
Se tiene para una variable aleatoria continua que la función generadora de momentos está dada por:

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f_X^{(x)} dx$$

sustituyendo la función de densidad dada en el ejercicio:

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx}\Big(\frac{e^{-\frac{x}{2}}}{2}\Big)dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{tx}e^{-\frac{x}{2}}dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{tx-\frac{x}{2}}dx$$

tomando $u = tx - \frac{x}{2}$, $du = (t - \frac{1}{2})dx$, $dx = \frac{du}{(t-\frac{1}{2})}$:

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^u \frac{du}{t-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} 2e^u \frac{du}{2t-1}$$

$$= \frac{1}{2t-1}\int_{-\infty}^{\infty} e^u du$$

$$= \frac{1}{2t-1}\Big[e^{tx-\frac{x}{2}}\Big]\Big|_{-\infty}^{\infty}$$

notemos que como por hipótesis del problema, $x > 0$, entonces:

$$= \frac{1}{2t-1}\Big[e^{tx-\frac{x}{2}}\Big]\Big|_{0}^{\infty} = \frac{1}{2t-1}\Big[e^{x(t-\frac{1}{2})}\Big]\Big|_{0}^{\infty}$$

ahora, condicionando a $t - \frac{1}{2} < 0$, i.e. $t < \frac{1}{2}$ de tal forma que la función exponencial converja, se sigue:

$$= \frac{1}{2t-1}\Big[e^{-\infty} - e^{0}\Big] = \frac{1}{2t-1}\Big[0-1\Big] = -\frac{1}{2t-1}$$

por lo tanto:

$$M_X(t) = -\frac{1}{2t-1}$$

(b) $\mathbb{E}(X)$

Dada la función generadora de momentos, se sigue que la esperanza puede hallarse mediante:

$$\mathbb{E}(X) = \frac{d}{dt}M_X(t)\Big|_0$$

desarrollando, se tiene:

$$\mathbb{E}(X) = \frac{d}{dt}\Big[-\frac{1}{2t-1}\Big]\Big|_0$$

$$= \frac{2}{(2t-1)^2}\Big|_0 = \frac{2}{(0-1)2} = \frac{2}{1} = 2$$

así, $\mathbb{E}(X) = 2$

(c) $Var(X)$

Por definición de varianza, se tiene:

$$Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$$

usando la función generadora de momentos para hallar $\mathbb{E}(X^2)$:

$$\mathbb{E}(X^2) = \frac{d^2}{dt^2}\Big[-\frac{1}{2t-1}\Big]\Big|_0$$

$$= \frac{-8}{(2t-1)^3}\Big|_0 = \frac{-8}{(0-1)3} = \frac{-8}{-1} = 8$$

así,

$$Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = 8 - 2^2 = 8 - 4 = 4$$

9. Demostrar que si $m_X(t)$ es la función generadora de momentos de una variable aleatoria X, entonces

(a) $\frac{d}{dt}Ln(m_X(t))|_{t=0} = \mathbb{E}(X)$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}Ln(m_X(0)) &= \frac{1}{m_X(0)} \cdot m'_X(0)\\ &= \frac{m'_X(0)}{m_X(0)} = \frac{E(X)}{E(X^0)}\\ &= E(X)\end{aligned}$$

(b) $\frac{d^2}{dt^2}Ln(m_X(t))|_{t=0} = Var(X)$

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dt^2}Ln(m_X(0)) &= \frac{d}{dt}\frac{m'_X(0)}{m_X(0)}\\ &= \frac{m''_X(0)m_X(0) - m'_X(0)m'_X(0)}{m_X(0)^2}\\ &= \frac{E(X^2)\cdot E(X^0) - E(X)E(X)}{E(X^0)}\\ &= \frac{E(X^2) - E(X)^2}{1} = E(X^2) - E(X)^2\\ &= Var(X)\end{aligned}$$

10. Conteste

(a) Si X es una variable aleatoria tal que $\mathbb{E}(X) = 3$ y $\mathbb{E}(X^2) = 13$, use la desigualdad de Chebyshev para determinar una cota inferior para $\mathbb{P}(-2 < X < 8)$.
Notemos que si no sucede que $-2 < X < 8$, entonces sucede que $X \leq -2$ o que $8 \leq X$.
De estas dos ecuaciones tenemos que

$$X \leq -2 \implies X - 3 \leq -5 \implies -(X-3) \geq 5$$

$$8 \leq X \implies X - 3 \geq 5$$

Lo que implica que $|X - 3| \geq 5$.
Entonces $-2 < X < 8$ y $|X - 3| \geq 5$ son eventos complementarios, por lo que

$$\mathbb{P}(-2 < X < 8) = 1 - \mathbb{P}(|X - 3| \geq 5)$$

Luego, por la desigualdad de Chebyshev,

$$\mathbb{P}(|X - E(X)| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}$$

Y se sabe que

$$E(X) = 3$$

$$\sigma^2 = E(X^2) - E(X)^2 = 13 - 9 = 4 \implies \sigma = 2$$

Entonces

$$\mathbb{P}(|X - 3| \geq 5) = \mathbb{P}(|X - 3| \geq 2 \cdot \frac{5}{2}) \leq \frac{1}{(\frac{5}{2})^2} = \frac{4}{25}$$

Por lo tanto

$$\mathbb{P}(-2 < X < 8) = 1 - \mathbb{P}(|X-3| \geq 5) \geq 1 - \frac{4}{25} = \frac{21}{25}$$

Por lo que $\frac{21}{25}$ es una cota inferior de $\mathbb{P}(-2 < X < 8)$.

(b) Sea X una variable aleatoria con función de densidad

$$f_X(x) = \frac{1}{8}\mathbb{I}_{\{-1\}} + \frac{6}{8}\mathbb{I}_{\{0\}} + \frac{1}{8}\mathbb{I}_{\{1\}}$$

Para $k = 2$, evaluar $\mathbb{P}(|X - \mu_X| \geq k\sigma_X)$. Con $\mu_X = \mathbb{E}(X)$. Compare con la cota dada por la desigualdad de Chebyshev.

$$\mathbb{E}(X) = \sum x_i f_X(x_i) = -1\frac{1}{8} + 0\frac{6}{8} + 1\frac{1}{8} = 0$$

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum (x_i)^2 f_X(x_i) = 1\frac{1}{8} + 0\frac{6}{8} + 1\frac{1}{8} = \frac{1}{4}$$

$$\sigma_X = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{1}{4} - (0)^2 = \frac{1}{4}$$

Por lo que

$$\mathbb{P}(|X - \mu_X| \geq k\sigma_X)) = \mathbb{P}(|X| \geq 2 \cdot \frac{1}{4}) = \mathbb{P}((X \geq \frac{1}{2}) \cup (X \leq -\frac{1}{2}))$$

Y como $X \geq \frac{1}{2}$ y $X \leq -\frac{1}{2}$ no pueden pasar al mismo tiempo, son ajenos, por lo que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}((X \geq \frac{1}{2}) \cup (X \leq -\frac{1}{2})) &= \mathbb{P}(X \geq \frac{1}{2}) + \mathbb{P}(X \leq -\frac{1}{2}) \\ &= \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}\end{aligned}$$

Por otra parte, por la desigualdad de Chebyshev.

$$\mathbb{P}(|X - 0| \geq 2 \cdot \frac{1}{4}) \leq \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$$

Por lo que el valor real y la cota obtenida por la desigualdad de Chebyshev son iguales.

(c) Suponga que X es una variable aleatoria con media y varianza igual a 20. ¿Qué se puede decir de $\mathbb{P}(0 \leq X \leq 40)$?
El evento contrario sería que $X < 0$ o $40 < X$. De aquí

$$\begin{aligned} X < 0 &\implies X - 20 < -20 \implies -(X-20) > 20 \\ 40 < X &\implies X - 20 > 20 \\ &\implies |X - 20| > 20 \end{aligned}$$

Entonces, $P(0 \leq X \leq 40) = 1 - P(|X - 20| > 20)$.
Luego, por la desigualdad Chebyshev,

$$P(|X - E(X)| > k\sigma) < \frac{1}{k^2}$$

Como $E(X) = \sigma^2 = 20$, entonces $k = \sqrt{20}$. Por lo que

$$P(|X - 20| > 20) = P(|X - 20| > \sqrt{20}\sqrt{20}) < \frac{1}{20}$$

Finalmente

$$P(0 \leq X \leq 40) = 1 - P(|X - 20| > 20) > 1 - \frac{1}{20} = \frac{19}{20}$$

Se puede decir que $P(0 \leq X \leq 40)$ es mayor a $\frac{19}{20}$.

11. Si X es una variable aleatoria tal que $\mathbb{E}(X) = 3$ y $\mathbb{E}(X^2) = 13$, use la desigualdad de Chebyshev para determinar una cota mínima para $\mathbb{P}(-2 < X < 8)$.
Notemos que si no sucede que $-2 < X < 8$, entonces sucede que $X \leq -2$ o que $8 \leq X$. De estas dos ecuaciones tenemos que

$$X \leq -2 \implies X - 3 \leq -5 \implies -(X-3) \geq 5$$

$$8 \leq X \implies X - 3 \geq 5$$

Lo que implica que $|X - 3| \geq 5$.
Entonces $-2 < X < 8$ y $|X - 3| \geq 5$ son eventos complementarios, por lo que

$$\mathbb{P}(-2 < X < 8) = 1 - \mathbb{P}(|X - 3| \geq 5)$$

Luego, por la desigualdad de Chebyshev,

$$\mathbb{P}(|X - E(X)| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}$$

Y se sabe que

$$E(X) = 3$$

$$\sigma^2 = E(X^2) - E(X)^2 = 13 - 9 = 4 \implies \sigma = 2$$

Entonces

$$\mathbb{P}(|X - 3| \geq 5) = \mathbb{P}(|X - 3| \geq 2 \cdot \frac{5}{2}) \leq \frac{1}{(\frac{5}{2})^2} = \frac{4}{25}$$

Por lo tanto

$$\mathbb{P}(-2 < X < 8) = 1 - \mathbb{P}(|X - 3| \geq 5) \geq 1 - \frac{4}{25} = \frac{21}{25}$$

Por lo que $\frac{21}{25}$ es una cota mínima de $\mathbb{P}(-2 < X < 8)$.

12. Demuestre o dé un contraejemplo

(a) Existe una variable aleatoria X para la cual

$$\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : E(X) - 2\sigma_X < X(\omega) < E(X) + 2\sigma_X\}) = \frac{3}{5}$$

Utilizando la desigualdad de Chebyshev, que dice:
$\mathbb{P}[\mu x - r\sigma_X \leq X \leq \mu x + r\sigma_X] \geq 1 - \frac{1}{r^2}$

Podemos ver que en el caso de la ecuación, $r = 2$, entonces aplicando la desigualdad de Chebyshev, tendríamos que:

$$\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : E(X) - 2\sigma_X < X(\omega) < E(X) + 2\sigma_X\}) \geq 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$\frac{3}{5} < \frac{3}{4}$, lo que incumpliría la desigualdad de Chebyshev, entonces la variable aleatoria no existe.

(b) Si X es una variable aleatoria no negativa, entonces $\mathbb{E}(X) \leq (\mathbb{E}(X^2))^{\frac{1}{2}}$.
Si X es una variable aleatoria no negativa, su segunda derivada es cero. Tomando en cuenta esto, tenemos una función cóncava y convexa. Si usamos la desigualdad de Jensen, con $g(X) = X^2$ tendríamos que:

$E(X)^2 = E(X^2)$

Si aplicamos raíz cuadrada a los dos lados de la igualdad, tenemos:
$E(X) = E(X^2)^{\frac{1}{2}}$

Ya que son iguales, en particular tenemos que se cumple el menor de igual:
$E(X) \leq E(X^2)^{\frac{1}{2}} \blacksquare$

13. Considerese una variable aleatoria X con función de densidad $f_X(x) = 2(1-x)\mathbb{I}_{\{0,1\}}(x)$. Calcule $\mathbb{E}((X+10)^2)$ y $\mathbb{E}\left(\frac{1}{1-X}\right)$.

Usando la Ley Estadística Inconsciente:

$\mathbb{E}((X+10)^2) = \int_0^1 ((X+10)^2)(2(1-x))dx$
Usando integración por partes, con $u = (1-X)$ y $dv = (X+10)^2$
$= 2(-\frac{x^4}{3} + \frac{x^4}{12} + \frac{x^3}{3} - 10x^3 + \frac{10x^3}{3} - 40x^2 + 100x)\Big|_0^1 = 2(-\frac{1}{3} + \frac{1}{12} + \frac{1}{3} - 10 + \frac{10}{3} - 40 + 100) = \frac{641}{6}$

$\mathbb{E}(\frac{1}{1-x}) = \int_0^1 (\frac{1}{1-x})(2(1-x))dx = \int_0^1 2dx = 2x\Big|_0^1 = 2$

14. Un experimento consiste en lanzar dos bolas dentro de cuatro cajas de tal forma que cada bola tiene la misma probabilidad de caer en cualquier caja. Sea X el número de bolas en la primera caja.

(a) ¿Cuál es la función de distribución acumulativa de X?
Tenemos que X toma los valores $X = \{0, 1, 2\}$

En cada caso hay una posibilidad de $\frac{1}{4}$ de que la bola entre en la primera caja, sea "b" el símbolo que represente una bola en la primera caja y "0" cuando no está en la caja, tendríamos cuatro resultados:

$P(00) = (\frac{3}{4}) \cdot (\frac{3}{4})$
$P(0b) = (\frac{3}{4}) \cdot (\frac{1}{4})$
$P(b0) = (\frac{1}{4}) \cdot (\frac{3}{4})$
$P(bb) = (\frac{1}{4}) \cdot (\frac{1}{4})$

De ahí, obtenemos las probabilidades de los 3 casos:

$P(X = 0) = P(00) = \frac{9}{16}$
$P(X = 1) = P(b0) + P(0b) = \frac{3}{16} + \frac{3}{16} = \frac{6}{16}$
$P(X = 2) = P(bb) = \frac{1}{16}$

Entonces, encontramos la función de distribución sumando las probabilidades de los casos cuando se vayan acumulando:

$$F_x^{(x)} = \begin{cases} \frac{9}{16}, \text{ si } X \leq 0 \\ \frac{15}{16}, \text{ si } X \leq 1 \\ 1, \text{ si } X \leq 2 \end{cases}$$

(b) ¿Cuál es la función de densidad de X?
De las probabilidades de los 3 casos, que obtuvimos en el inciso anterior, podemos obtener directamente la función de densidad:

$$f_x^{(x)} = \begin{cases} \frac{9}{16}, \text{ si } X \leq 0 \\ \frac{6}{16}, \text{ si } X \leq 1 \\ \frac{1}{16}, \text{ si } X \leq 2 \end{cases}$$

(c) Encontrar $\mathbb{E}(X)$ y $Var(X)$.
Sabemos que la esperanza es la suma del producto del valor de X con el valor de su probabilidad, así que tenemos que:

$\mathbb{E}(X) = (0 \cdot \frac{9}{16}) + (1 \cdot \frac{6}{16}) + (2 \cdot \frac{1}{16}) = 0 + \frac{6}{16} + \frac{2}{16} = \frac{1}{2}$

Para obtener la varianza, usamos la fórmula var(X) $= \mathbb{E}(X^2) - [E(X)]^2$, vemos que $[E(X)]^2 = \frac{1}{2}$, y necesitamos encontrar $\mathbb{E}(X^2)$

$\mathbb{E}(X^2) = (0^2 \cdot \frac{9}{16}) + (1^2 \cdot \frac{6}{16}) + (2^2 \cdot \frac{1}{16}) = 0 + \frac{6}{16} + \frac{4}{16} = \frac{5}{8}$

De ahí, var(X) $= \frac{5}{8} - \frac{2}{8} = \frac{3}{8}$

15. Sean $a_1, a_2, ..., a_n$ números positivos. Se define

$$a_A = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n} a_i$$
$$a_G = (\prod_{i=1}^{n} a_i)^{\frac{1}{n}}$$
$$a_H = \frac{1}{\frac{1}{n}(\frac{1}{a_1} + ... + \frac{1}{a_n})}$$

como las medidas aritmética, geométrica y armónica respectivamente. Usando la desigualdad de Jenses, demuestre que

$$a_H \leq a_G \leq a_A$$

Demostración:
La desigualdad de Jensen nos dice que para el caso finito si f es una función convexa entonces:

$$f(\frac{\sum a_i x_i}{\sum a_i}) \leq \frac{\sum a_i f(x_i)}{\sum a_i}$$

Y si es una función concava se sigue que:

$$f(\frac{\sum a_i x_i}{\sum a_i}) \geq \frac{\sum a_i f(x_i)}{\sum a_i}$$

Con $\{x_i\}_{i=1}^{n}$ elementos del dominio de f y $\{a_i\}_{i=1}^{n}$ pesos positivos.
Tomando a $f(x) = log(x)$ y $a_i = 1 \ \forall i \in \{1, ..., n\}$ se sigue que por criterio de la segunda derivada con respecto de f(x):

$$f'(x) = \tfrac{1}{x} \quad \Rightarrow f''(x) = -\tfrac{1}{x^2}$$

Se sigue que $\forall x \in Dom(f)$ $f''(x)$ es negativa ya que x^2 es positiva siempre. Entonces por criterio de la segunda derivada es concava. Entonces tenemos que usando la desigualdad de Jensen:

$$log(\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} a_i}) \geq \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i log(x_i)}{\sum_{i=1}^{n} a_i}$$

Pero como $a_i = 1$ $\forall i$ entonces:

$$log(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}) \geq \frac{\sum_{i=1}^{n} log(x_i)}{n}$$

Pero por propiedades de logaritmo se sigue que:

$$\sum_{i=1}^{n} log(x_i) = log(\prod_{i=1}^{n} x_i)$$

$$\frac{log(x)}{n} = log(x^{\frac{1}{n}})$$

Entonces:

$$log(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}) \geq log((\prod_{i=1}^{n} x_i)^{\frac{1}{n}})$$

Y eso sucede solamente cuando:

$$a_A = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \geq (\prod_{i=1}^{n} x_i)^{\frac{1}{n}} = a_G$$

Y eso es igual a decir que $a_A \geq a_G$. Ahora, podemos reescribir a a_H de la siguiente forma:

$$\frac{1}{(\frac{1}{n})(\sum_{i=1}^{n}(\frac{1}{a_i}))} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n}(a_i)^{-1}} = (\frac{\sum_{i=1}^{n}(a_i)^{-1}}{n})^{-1}$$

Reescribiendo a $(a_i)^{-1} = k_i$ por la desigualdad antes vista se tiene que:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} k_i}{n} \geq (\prod_{i=1}^{n} k_i)^{\frac{1}{n}}$$

Por propiedades de producto, el exponente se distribuye de la siguiente manera:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} k_i}{n} \geq \prod_{i=1}^{n} (k_i)^{\frac{1}{n}}$$

Y reemplazando k_i por a_i^{-1}

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} (a_i)^{-1}}{n} \geq \prod_{i=1}^{n} a_i^{-\frac{1}{n}}$$

Y por las mismas propiedades de exponentes se tiene que:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} (a_i)^{-1}}{n} \geq (\prod_{i=1}^{n} (a_i)^{\frac{1}{n}})^{-1}$$

Entonces se tiene que:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} (a_i)^{-1}}{n} \geq \frac{1}{(\prod_{i=1}^{n} a_i)^{\frac{1}{n}}}$$

$$a_G = (\prod_{i=1}^{n} a_i)^{\frac{1}{n}} \geq \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} (a_i)^{-1}} = \frac{1}{\frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n} (\frac{1}{a_i}))} = a_H$$

Entonces $a_G \geq a_H$ pero $a_A \geq a_G$ entonces:

$$a_A \geq a_G \geq a_H \blacksquare$$

16. Sea X una variable aleatoria no negativa con media 25. ¿Qué puede decir de las siguientes cantidades?

(a) $\mathbb{E}(X^3)$

Tenemos que $\frac{d^2}{dx^2}x^3 = 6x$ y como X es variable aleatoria no negativa tenemos que $6x > 0 \ \forall x$. Entonces es una función convexa entonces se cumple que:

$$E(X)^3 \leq E(X^3)$$

Pero como $E(X) = 25$ entonces:

$$E(X) < E(X^3)$$

(b) $\mathbb{E}(\sqrt{X})$
Tenemos que si $f(x) = \sqrt{x}$ se sigue que $f''(x) = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}}$ y como $x > 0 \ \forall x \in Dom(f)$ porque nuestra variable aleatoria es positiva se sigue entonces que $f''(x) < 0$ entonces es concava entonces:

$$\sqrt{E(X)} \geq E(\sqrt{X})$$

Pero, como $E(X) = 25 \ \Rightarrow \sqrt{E(X)} = 5$ entonces:

$$E(X) > E(\sqrt{X})$$

(c) $\mathbb{E}(log(X))$

Como $log(x)$ es una función cóncava (inciso anterior) entonces por la desigualdad de Jensen para la esperanza se sigue que:

$$log(E(X)) \geq E(log(X))$$

Y por propiedades de logaritmo: $log(x) \leq x - 1 \ \Rightarrow log(x) < x$ entonces:

$$E(X) > log(E(X)) \geq E(log(X)) \Rightarrow E(X) > E(log(X))$$

(d) $\mathbb{E}(e^{-X})$
Tenemos que:

$$\frac{d^2}{dx^2}e^{-x} = e^{-x} = \frac{1}{e^x}$$

Tenemos que como $\frac{1}{e^x} > 0 \ \forall x \in Dom(f)$ la función es convexa. Entonces por desigualdad de Jensen:

$$e^{-E(X)} \leq E(e^{-x})$$

Pero $E(X) = 25$ entonces:

$$\frac{1}{e^{25}} \leq E(e^{-x})$$

17. **(OPCIONAL)**
Si X es una variable aleatoria con valor esperado finito, entonces

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^\infty (1 - F_X(x))dx - \int_{-\infty}^0 F_X(x)dx$$

$$\begin{aligned}
E[X] &= E\left[\int_0^X 1\,dx\right] \\
&= E\left[\int_0^\infty 1_{\{X>x\}}\,dx\right] \\
&= \int_0^\infty E[1_{\{X>x\}}]\,dx \\
&= \int_0^\infty P(X>x)\,dx \\
&= \int_0^\infty (1-F(x))\,dx
\end{aligned}$$