Facultad de Ingeniería y Tecnologías
Departamento de Matemática
Probabilidad y Estadística

Práctico 3: Variables aleatorias discretas

1. Sea X una variable aleatoria discreta con recorrido $\text{Rec}(X) = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ y las siguientes probabilidades puntuales: $P(X = -2) = 1/15$, $P(X = -1) = 2/15$, $P(X = 0) = 3/15$ y $P(X = 1) = 4/15$. Sea $Y = X^2$.

   a) Hallar el recorrido y la función de probabilidad de masa de Y.
   b) Hallar $E(X)$ y $E(Y)$.
   c) Hallar $\text{Var}(X)$ y $\text{Var}(Y)$.
   d) Hallar y graficar las funciones de distribución de X e Y.

2. Se tiran dos dados de forma independiente. Sea X la diferencia en valor absoluto de los resultados de los dados.

   a) Hallar el recorrido de X.
   b) Hallar la función de probabilidad de masa de X.
   c) Hallar la esperanza de X.
   d) Hallar la varianza de X.

3. Se tiene una urna con 12 bolas rojas y 16 bolas azules. Se extraen 5 bolas al azar de la urna. Definimos las siguientes variables aleatorias:

   - X es la cantidad de bolas rojas extraídas si la extracción se hace con reposición.
   - Y es la cantidad de bolas rojas extraídas si la extracción se hace sin reposición.

   a) ¿Cuál es la distribución de X? ¿Cuál es la distribución de Y?
   b) Hallar la probabilidad de que se extraigan al menos tres bolas rojas en ambos casos.
   c) Hallar $E(X)$ y $E(Y)$.

4. Una empresa petrolera perforará una serie de pozos en cierta área hasta encontrar un pozo productivo. Se sabe, por estudios geológicos, que la probabilidad de tener éxito en una perforación es $0,1$.

   a) ¿Cuál es la probabilidad de que el primer pozo productivo sea el tercer pozo perforado?
   b) ¿Cuál es la probabilidad de que la empresa no vaya a encontrar un pozo productivo si, debido al alto costo de la perforación, puede perforar un máximo de 10 pozos?

5. Una empresa que fabrica cierto tipo de celulares realiza un estudio en su cadena de producción y determina que la probabilidad de que un celular creado no resulte apto para la venta es de $p = 0{,}015$.

   a) En un día el lote de producción de la empresa es de 100 celulares, hallar la probabilidad de que al menos 90 celulares sean aptos para la venta.
   b) Debido a un pedido especial, se requieren 100 celulares aptos para la venta, pero la empresa solo tiene materiales suficientes para la fabricación de 110 celulares. Hallar la probabilidad de que la empresa pueda cumplir con el pedido especial.

6. La *Ley de Benford* predice la frecuencia de la primer cifra significativa de una cierta medición. Por ejemplo, la primer cifra significativa de 1846 es 1, y la de $0,633$ es 6. La fórmula teórica predicha por dicha ley es

$$\text{Frecuencia relativa del dígito } d = \log_{10}\left(1 + \frac{1}{d}\right), \text{ para } d = 1, 2, \ldots, 9.$$

Sea X una variable aleatoria con distribución de Benford.

a) Demuestre que la fórmula anterior define una función de probabilidad de masa.

b) Hallar la función de distribución de X.

c) Hallar la probabilidad de que X sea par.

d) Hallar $P(X \in [3,7])$.

e) La moda de una variable aleatoria discreta se define como el elemento del recorrido que tenga mayor probabilidad. Hallar la moda de X.

7. Supongamos que participo en un juego de apuestas en el que gano o pierdo lo apostado, es decir, si apuesto \$50 y gano me los devuelven junto con otros \$50 de ganancia. Supongamos además que la probabilidad de ganar es $p = 1/2$.

Empleo la siguiente estrategia para intentar ganar algo de dinero.

Apuesto \$1, si pierdo, doblo mi apuesta a \$2, si pierdo, doblo mi apuesta nuevamente. Sigo así hasta ganar una de las apuestas y me retiro.

a) Demostrar que si uso esta estrategia, entonces al retirarme obtengo una ganancia de \$1.
Sugerencia: La siguiente fórmula puede ser de utilidad

$$\sum_{i=0}^{N} r^i = \frac{1 - r^{N+1}}{1 - r}$$

Si esto realmente funcionara, los casinos estarían fuera del negocio. Nuestro objetivo en este problema es comprender la falla en la estrategia.

b) Sea X la cantidad de dinero apostado en el último juego (el que yo gané). X toma los valores $1, 2, 4, 8, \ldots$. Determinar la función de probabilidad de masa de X.

c) Calcular $E(X)$.

d) Usar la parte anterior para explicar por qué la estrategia es mala.

8. Sean $p \in (0,1)$ y X una variable aleatoria con distribución geométrica de parámetro p. Demostrar la siguiente propiedad de pérdida de memoria: $P(X > n + m \mid X > n) = P(X > m)$. Interprete esta propiedad.

Sugerencia: La siguiente fórmula puede ser de utilidad, si $r \in (0,1)$ *y* $m \in \mathbb{N}$ *entonces*

$$\sum_{k=m}^{+\infty} r^k = \frac{r^m}{1 - r}$$

9. El número de personas que llegan para tratamiento a una cierta sala de urgencias en una hora tiene distribución de Poisson de parámetro $\lambda = 5$. El personal solo puede atender ocho personas simultáneamente, por lo que si llegan más de ocho personas a la sala algunas deberán esperar.

a) Hallar la probabilidad de que en una cierta hora haya pacientes esperando.

b) Hallar la probabilidad de que en al menos 16 de las 24 horas de un día, la sala no tenga pacientes esperando para ser atendidos.