2. Se sabe que el error en la medición de la temperatura en un experimento controlado de un laboratorio es una variable aleatoria X que tiene la función de densidad:

$$f_X(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{3} & \text{si } t \in (-1,2) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) Verificar que f_X es efectivamente una densidad.

b) Hallar $E(X)$.

c) Calcular $P(0 < X < 1)$.

d) Hallar y graficar la función de distribución acumulada F_X.

Si es f_X tiene que cumplir $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\,dt = 1$

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{-1} f_X(t)\,dt}_{0} + \underbrace{\int_{-1}^{2} F_X(t)\,dt}_{\int_{-1}^{2} \frac{t^2}{3}dt = 1} + \underbrace{\int_{2}^{+\infty} f_X(t)\,dt}_{0} = 1$$

$$\frac{t^3}{9}\Big|_{-1}^{2} = \frac{2^3}{9} - \left(\frac{-1^3}{9}\right) = \frac{8}{9} + \frac{1}{9} = \frac{9}{9} = \boxed{1}$$

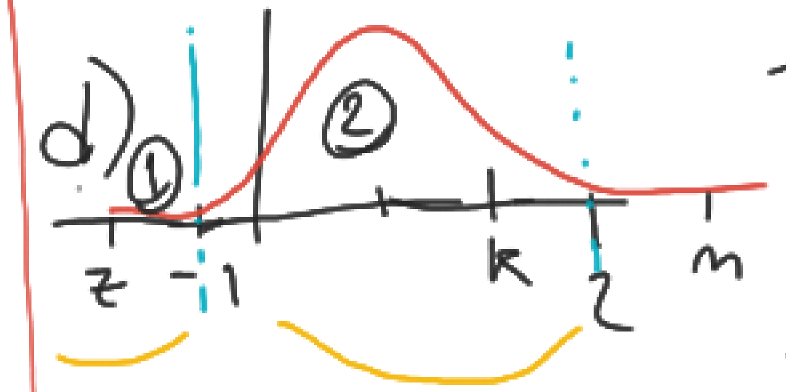
b) $\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t \cdot f_X(t)\,dt$

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{-1} t\, \overset{0}{f_X(t)}}_{\emptyset} + \int_{-1}^{2} t \cdot \left(\frac{t^2}{3}\right)dt + \underbrace{\int_{2}^{+\infty} t \cdot 0\,dt}_{0}$$

$$\int_{-1}^{2} \frac{t^3}{3}\,dt = \frac{t^4}{12}\Big|_{-1}^{2} = \frac{2^4}{12} - \frac{(-1)^2}{12} = \frac{16}{12} - \frac{1}{12} = 1{,}25 = \boxed{\frac{5}{4}}$$

c) $P(0<X<1) = \int_{0}^{1} \frac{t^2}{3}\,dt = \frac{t^3}{9}\Big|_{0}^{1} = \frac{1^3}{9} - \frac{0^3}{9} = \boxed{\frac{1}{9}}$

d)



Tramo 1 $\Rightarrow \int_{-\infty}^{z} f_X(t)\,dt = \int_{-\infty}^{z} 0\,dt = 0 \quad t<-1$

Tramo 2 $\underbrace{\int_{-\infty}^{-1}}_{\emptyset} + \int_{-1}^{k} = \int_{-1}^{k} \frac{t^2}{3} = \frac{t^3}{9}\Big|_{-1}^{k} = \boxed{\frac{k^3+1}{9}}$

$\parallel$

$-1<t<2$

Tramo 3 $\int_{-\infty}^{-1} + \int_{-1}^{2} + \int_{2}^{+\infty}$

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{-1}}_{\emptyset} + \int_{-1}^{2} \frac{t^2}{3}\,dt + \underbrace{\int_{2}^{+\infty}}_{0} \longrightarrow \frac{t^3}{9}\Big|_{-1}^{2} = \frac{2^3}{9} - \frac{(-1^3)}{9}$$

$$\frac{8}{9} + \frac{1}{9} = \boxed{1}$$

$$F_X(t) \begin{cases} 0 & t<-1 \\ \frac{t^3+1}{9} & -1<t<2 \\ 1 & t>2 \end{cases}$$

3. Una variable aleatoria continua X tiene densidad

$$f_X(t) = \begin{cases} t + at^2 & \text{si } t \in [0,1] \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) Hallar a.

b) Hallar la función de distribución acumulada de X.

c) Calcular $P(1/2 < X < 1)$.

d) Calcular $E(X)$ y $\mathrm{Var}(X)$.

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{0}}_{0} + \int_0^1 t + at^2 + \underbrace{\int_1^{+\infty}}_{0} = 1$$

$$\frac{t^2}{2} + \frac{at^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{a}{3} - 0 = 1$$

$$\frac{a}{3} = \frac{1}{2} \quad a = \frac{3}{2}$$

$$\sigma^2 = \int_{-}^{+} t^2 \cdot f_x(t)\,dt - \mu^2$$