qnorm() determina el cuantil de una probabilidad dada. El
representa los valores menores asociados al percentil 97 de la distribución,
una media de cero y desviación estándar de uno.

) C que cumple $P(Z \geq c) = 0{,}25$

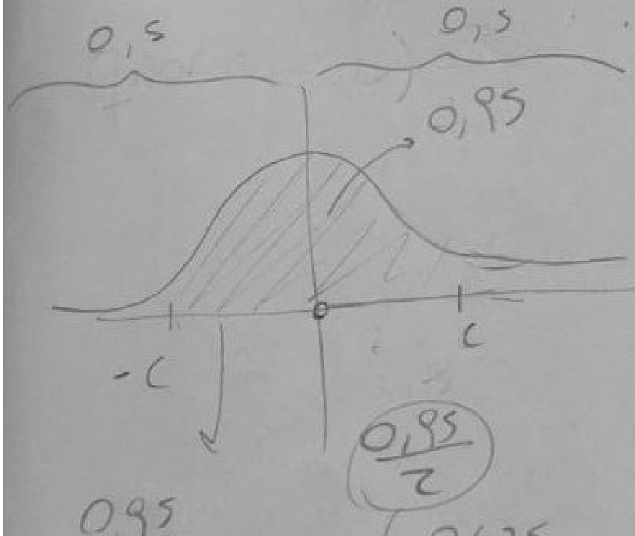
$$1 - [P(Z \leq c) = 0{,}25] = 1 - 0{,}25 = P(Z \leq c) = 0{,}75$$

qnorm(0,75) = 0,674489

e) C que cumple $P(Z \leq c) = 0{,}0287$

qnorm(0,0287) = −1,9003

) C que cumple $P(-c \leq Z \leq c) = 0{,}95$



$P(0 \leq x \leq c) =$

$P(x \leq c) - \underbrace{P(x \leq 0)}_{0{,}5} = 0{,}475$

$P(x \leq c) = \underbrace{0{,}475 + 0{,}5}_{0{,}975}$

↳ busco en la tabla

1,96.

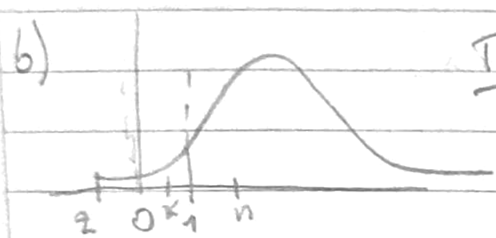
en simétricas c y −c = 1,96.

EJ3 PARTE 1

ESPERANZA

$$y = E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} t\, f_x(t)\, dt$$

b)



TR1 $\int_{-\infty}^{z} 0 = 0$ $\boxed{t<0}$

TR2 $\int_{-\infty}^{0} 0 + \int_{0}^{k} t + \frac{3}{2}t^2 =$

$= \frac{t^2}{2} + \frac{3t^3}{6} = \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{2} \Big|_0^k =$

$= \boxed{\frac{k^2}{2} + \frac{k^3}{2}}$ $\boxed{0<t<1}$

$$F_x(x) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ \frac{t^2+t^3}{2} & 0<t<1 \\ 1 & t>1 \end{cases}$$

TR3 $\int_{-\infty}^{0} 0 + \underbrace{\int_{0}^{1} t + \frac{3t^2}{2}} + \int_{1}^{+\infty} 0$

$\frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \boxed{1}$

$\boxed{t \geq 1}$

c) $P(1/2 < x < 1) =$

$\frac{t^2 + t^3}{2} \Big|_{1/2}^{1} = \frac{13}{16}$

EJ3 PARTE 2

d) Calcular $E(x)$

$$E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} t\, f_X(t)\, dt$$

$$\int_{-\infty}^{0} t\, \underbrace{f_X(t)}_{0} dt + \int_{0}^{1} t\, f_X(t)\, dt + \int_{1}^{+\infty} t\, \underbrace{f_X(t)}_{0}$$

$$\int_{0}^{1} t \cdot \left[t + \frac{3t^2}{2} \right] dt = \int_{0}^{1} t^2 + \frac{3t^3}{2}$$

$$\frac{t^3}{3} + \frac{3}{2}\frac{t^4}{4} = \left. \frac{t^3}{3} + \frac{3t^4}{8} \right|_{0}^{1} = \frac{1}{3} + \frac{3}{8} = \frac{8+9}{24} = \frac{17}{24}$$

EJ3 PARTE 3

$$Var(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 \cdot f_x(t)\, dt - \mu^2$$

$$t^2 \cdot \left[t + \frac{3t^2}{2} \right] =$$

$$\int_0^1 t^3 + \frac{3t^4}{2} = \underbrace{\frac{t^4}{4} + \frac{3}{2}\frac{t^5}{5}}_{} = \frac{t^4}{4} + \frac{3t^5}{10} \Bigg|_0^1$$

$$\frac{1}{4} + \frac{3}{10} = \frac{10+12}{40} = \frac{22}{40}$$

0,0482

$$\frac{22}{40} - \frac{289}{576} = \boxed{0,0482}$$

2. Se sabe que el error en la medición de la temperatura en un experimento controlado de un laboratorio es una variable aleatoria X que tiene la función de densidad:

EJ2)

$$f_X(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{3} & \text{si } t \in (-1, 2) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) Verificar que f_X es efectivamente una densidad.

b) Hallar $E(X)$.

c) Calcular $P(0 < X < 1)$.

d) Hallar y graficar la función de distribución acumulada F_X.

Si es función de densidad:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_x(t)\,dt = 1$$

$$\Downarrow$$

$$\int_{-\infty}^{-1} f_x(t)\,dt + \int_{-1}^{2} f_x(t)\,dt + \int_{2}^{+\infty} f_x(t)\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{-1} 0\,dt + \int_{-1}^{2} f_x(t)\,dt + \int_{2}^{+\infty} 0\,dt \Rightarrow \int_{-1}^{2} \frac{t^2}{3}\,dt = \frac{1}{3} \int_{-1}^{2} t^2 = \left.\frac{t^3}{3}\right|_{-1}^{2} =$$

$$\frac{1}{3} \cdot \left.\frac{t^3}{3}\right|_{-1}^{2} = \frac{2^3}{9} - \frac{(-1)^3}{9} = \frac{9}{9} = 1 \checkmark$$

Como el resultado es 1, decimos que Fx es efectivamente densidad

$$\boxed{\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t \cdot f(t)\, dt}$$

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{-1} t\, f(t)\, dt}_{\emptyset} + \int_{-1}^{2} t\, f(t)\, dt + \underbrace{\int_{2}^{\infty} t\, f(t)\, dt}_{\emptyset}$$

$$\int_{-1}^{2} t\left(\frac{t^2}{3}\right) dt = \frac{t^3}{3} = \frac{1}{3}\int_{-1}^{2} t^3 = \frac{1}{3}\left[\frac{t^4}{4}\Big|_{-1}^{2}\right] = \frac{1}{3}\left(\frac{2^4}{4} - \frac{(-1)^4}{4}\right) = \frac{1}{3}\left(4 - \frac{1}{4}\right)$$

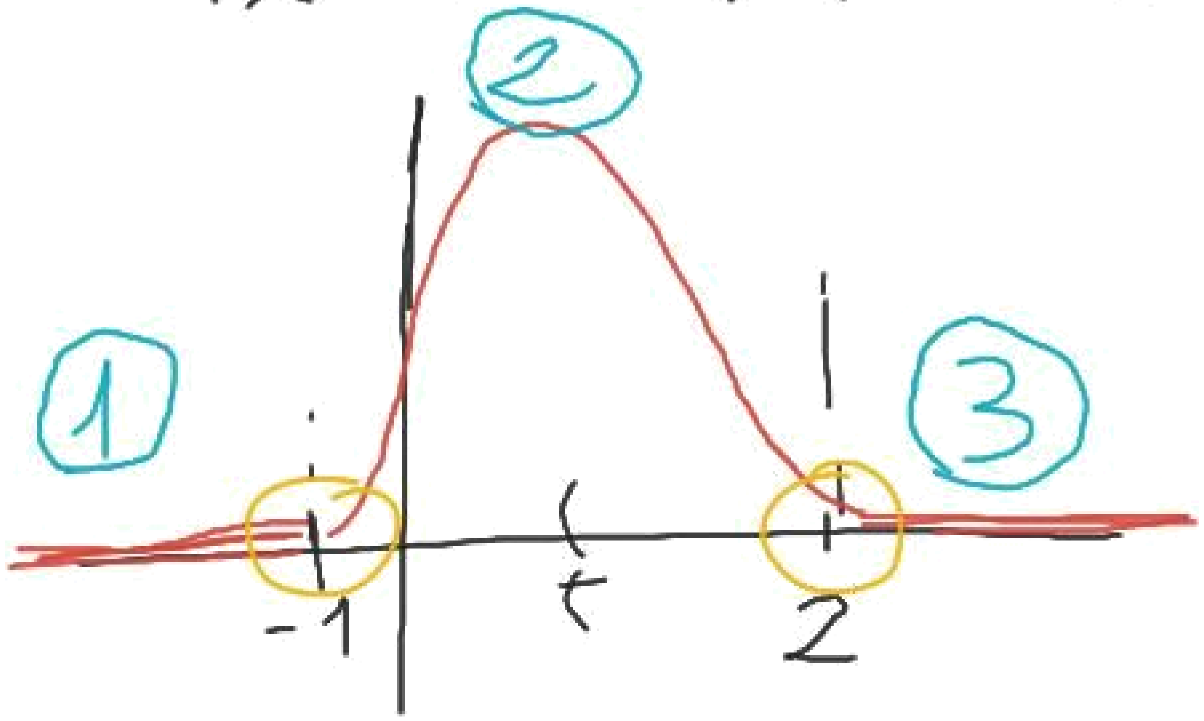
$$= \boxed{\frac{5}{4}} \checkmark$$

$$P(0 < x < 1) = \int_0^1 \frac{t^2}{3} dt = \frac{1}{3}\int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right] = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \boxed{\frac{1}{9}} \checkmark$$

$$F_x(t) = P(x \leq t) = \int_{-\infty}^{t} f_x(y)\,dy$$

$$f_x(t) \begin{cases} \frac{t^2}{3}, & x \in (-1,2) \\ 0, & \text{si NO} \end{cases}$$



$$F(x) \begin{cases} 0 & \text{si } t < -1 \\ \frac{t^3+1}{9} & \text{si } -1 < t < 2 \\ 1 & \text{si } t > 2 \end{cases}$$

1) $P(x \leq t)$, $t < -1$

$$\int_{-\infty}^{t} f_x(x)\,dx = \int_{-\infty}^{t} 0\,dx = 0$$

$-1 < t < 2$

2) $$P(x \leq t) = \int_{-\infty}^{-1} \overset{0}{F(t)}\,dy + \int_{-1}^{t} F(y)\,dy = \int_{-1}^{t} \frac{x^2}{3}\,dx = *$$

A) $$\frac{1}{3}\left[\frac{y^3}{3}\Big|_{-1}^{t}\right] = \frac{1}{3}\left(\frac{t^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3}\right) = \frac{t^3}{9} + \frac{1}{9} = \frac{t^3+1}{9}$$

$$\boxed{-1 < t < 2}$$

3) $$\int_{-\infty}^{-1} + \underbrace{\int_{-1}^{2}}_{1} + \int_{2}^{+\infty}$$

Calculado en parte A

3. Una variable aleatoria continua X tiene densidad

$$f_X(t) = \begin{cases} t + at^2 & \text{si } t \in [0,1] \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

EJ3)

a) Hallar a.

b) Hallar la función de distribución acumulada de X.

c) Calcular $P(1/2 < X < 1)$.

d) Calcular $E(X)$ y $\mathrm{Var}(X)$.

$$\int_0^1 f(x)dx = 1 \Rightarrow \int_0^1 t + at^2 \, dt = 1 \Rightarrow \int_0^1 t\,dt + \int_0^1 at^2 \, dt = 1 \Rightarrow \frac{t^2}{2}\Big|_0^1 + a\left(\frac{t^3}{3}\right)\Big|_0^1$$

$$\frac{1}{2} + \frac{a}{3} = 1 \Rightarrow \quad a = \left(1 - \frac{1}{2}\right)3$$

$$\boxed{a = \frac{3}{2}} \checkmark$$

2. Se sabe que el error en la medición de la temperatura en un experimento controlado de un laboratorio es una variable aleatoria X que tiene la función de densidad:

EJ 2)

$$f_X(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{3} & \text{si } t \in (-1,2) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) Verificar que f_X es efectivamente una densidad.

b) Hallar $E(X)$.

c) Calcular $P(0 < X < 1)$.

d) Hallar y graficar la función de distribución acumulada F_X.

Si es f_x tiene que cumplir $\int_{-\infty}^{+\infty} f_x(t)\,dt = 1$

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{-1} f_x(t)\,dt}_{0} + \underbrace{\int_{-1}^{2} f_x(t)\,dt} + \underbrace{\int_{2}^{+\infty} f_x(t)\,dt}_{0} = 1$$

$$\underbrace{\int_{-1}^{2} \frac{t^2}{3}\,dt} = 1$$

$$\frac{t^3}{9}\Big|_{-1}^{2} = \frac{2^3}{9} - \left(\frac{-1^3}{9}\right) = \frac{8}{9} + \frac{1}{9} = \frac{9}{9} = \boxed{1}$$ ✓

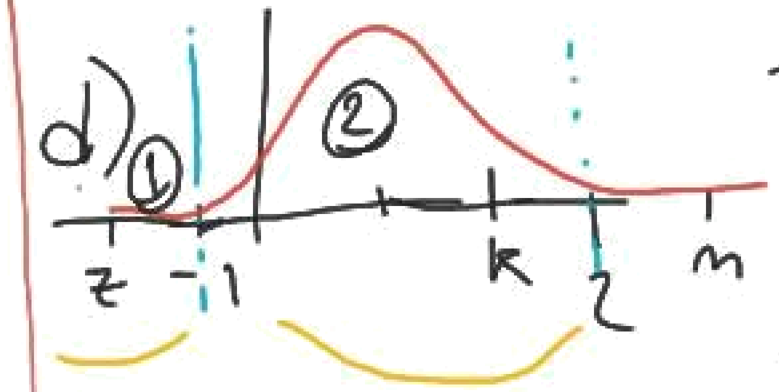
b) $\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t \; f_x(t)\,dt$

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{-1} t\, f_x(t)}_{\emptyset} + \int_{-1}^{2} t \cdot \left(\frac{t^2}{3}\right)dt + \underbrace{\int_{2}^{+\infty} t \cdot 0\,dt}_{0}$$

$$\int_{-1}^{2} \frac{t^3}{3}\,dt = \frac{t^4}{12}\Big|_{-1}^{2} = \frac{2^4}{12} - \frac{(-1)^2}{12} = \frac{16}{12} - \frac{1}{12} = 1,25 = \boxed{\frac{5}{4}}$$ ✓

c) $P(0<X<1) = \int_{0}^{1} \frac{t^2}{3}\,dt = \frac{t^3}{9}\Big|_{0}^{1} = \frac{1^3}{9} - \frac{0^3}{9} = \boxed{\frac{1}{9}}$ ✓

d)



Tramo 1 $\Rightarrow \int_{-\infty}^{z} f_x(t)\,dt = \int_{-\infty}^{z} 0\,dt = 0 \quad t < -1$

Tramo 2 $\underbrace{\int_{-\infty}^{-1}}_{\emptyset} + \int_{-1}^{k} = \int_{-1}^{k} \frac{t^2}{3} = \frac{t^3}{9}\Big|_{-1} = \boxed{\frac{k^3+1}{9}}$ $= -1 < t < 2$

Tramo 3 $\int_{-\infty}^{-1} + \int_{-1}^{2} + \int_{2}^{+\infty}$

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{-1}}_{\emptyset} + \int_{-1}^{2} \frac{t^2}{3}\,dt + \underbrace{\int_{2}^{+\infty}}_{0} \longrightarrow \frac{t^3}{9}\Big|_{-1}^{2} = \frac{2^3}{9} - \frac{(-1^3)}{9}$$

$$\frac{8}{9} + \frac{1}{9} = \boxed{1}$$

$$F_x(t) \begin{cases} 0 & t < -1 \\ \frac{t^3+1}{9} & -1 < t < 2 \\ 1 & t > 2 \end{cases}$$

3. Una variable aleatoria continua X tiene densidad

$$f_X(t) = \begin{cases} t + at^2 & \text{si } t \in [0,1] \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

EJ3)

a) Hallar a.

b) Hallar la función de distribución acumulada de X.

c) Calcular $P(1/2 < X < 1)$.

d) Calcular $E(X)$ y $\text{Var}(X)$.

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{0}}_{0} + \int_0^1 t + at^2 + \underbrace{\int_1^{+\infty}}_{0} = 1$$

$$\frac{t^2}{2} + \frac{at^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{a}{3} - 0 = 1$$

$$\frac{a}{3} = \frac{1}{2} \therefore a = \frac{3}{2}$$

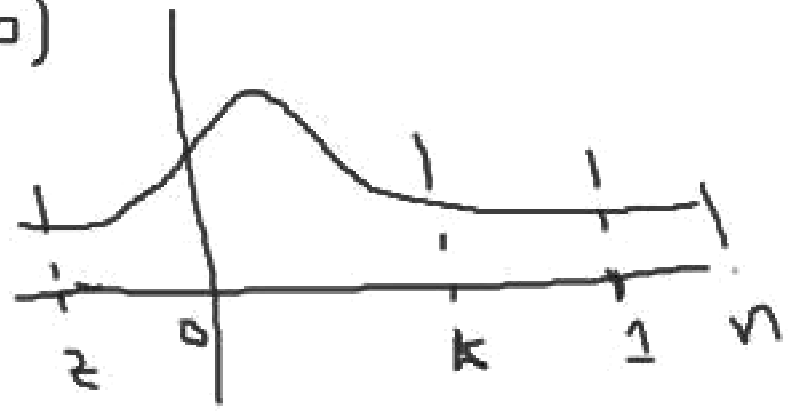
DENSIDAD

$$f_X(t) = \begin{cases} t + \frac{3t^2}{2} \\ 0 \end{cases}$$

ACUMULADA

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \frac{t^3+t^2}{2} & \text{si } 0 < t < 1 \\ 1 & \text{en otro} \end{cases}$$

b)



$$\frac{t^3+t^2}{2} \Rightarrow \text{PRIMITIVA}$$

Tramo1) $\int_{-\infty}^{z} f_X(t)\,dt = 0$ si $t < 0$

tramo2) $\underbrace{\int_{-\infty}^{0}}_{0} + \int_0^k t + \frac{3}{2}t^2\,dt = \frac{k^3+k^2}{2}$ si $0 < t < 1$

tramo3) $\underbrace{\int_{-\infty}^{0}}_{0} + \underbrace{\int_0^1 f_X(t)\,dt}_{} + \underbrace{\int_1^{+\infty}}_{0}$

$\Downarrow$

$$\frac{t^3+t^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1+1}{2} - \frac{0+0}{2} = 1 \checkmark$$

EJ 3)

$$\int_a^b f(s)ds = F(b) - F(a)$$

$$P\left(\frac{1}{2} < x < 1\right) = \int_{\frac{1}{2}}^{1} f_x(t)\,dt = \frac{13}{16}$$

$$E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f x(t)\,dt = \underbrace{\int_{-\infty}^{0}}_{0} + \underbrace{\int_{0}^{1} t\left(t + \frac{3}{2}t^2\right)dt}_{\int_0^1 t^2 + \frac{3t^3}{2} = \frac{17}{24}} + \underbrace{\int_{1}^{+\infty}}_{0}$$

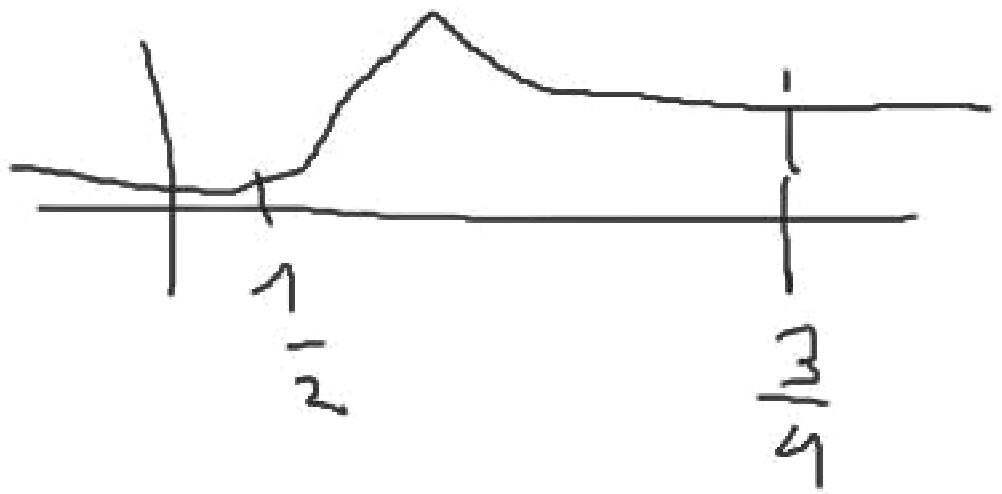
4. Sea X una variable aleatoria continua con función de distribución acumulada

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 2t^2 - t^4 & \text{si } t \in [0,1] \\ 1 & \text{si } t > 1 \end{cases}$$

EJ4)

a) Hallar $P(1/2 < X < 3/4)$.

b) Hallar la función de densidad de X.



a) $P(\frac{1}{2} < x < \frac{3}{4}) = P(x \leq \frac{3}{4}) - P(x < \frac{1}{2})$

$F(3/4) - F(1/2) = 0{,}808 - 0{,}437 = 0{,}3705$ ✓

$\boxed{\text{Si } t < 0}$

$F_X(x) = 0 \quad f_X = 0$

$\boxed{\text{Si } t \in [0,1]}$

$F_X = 2t^2 - t^4 \quad f_X(t) = 4t - 4t^3$

$\boxed{\text{Si } t > 1}$

$F_X = 1 \quad f_X = 0$

$$f_X(t) = \begin{cases} 4t - 4t^3, & t \in [0,1] \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$ ✓

8. Un sistema contiene cierto tipo de componente cuyo tiempo de vida está dado por la variable aleatoria $T \sim \exp\left(\frac{1}{8}\right)$. Si 5 de estos componentes se instalan en diferentes sistemas, ¿cuál es la probabilidad de que al menos 2 continúen funcionando después de 8 años?

EJ8)

$$f_x(t) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda t} & , t > 0 \\ 0 & , \text{en otro caso} \end{cases} \qquad \boxed{\lambda = 1/8}$$

$$\int_8^{+\infty} \frac{1}{8} \cdot e^{-\frac{1}{8}t}\, dt = \frac{1}{8} \int_8^{+\infty} e^{-\frac{1}{8}t} = -8 e^{-\frac{1}{8}t} \Big|_8^{+\infty} \quad -8 e^{-\frac{1}{8} \cdot 8} - \lim_{A \to +\infty} -8 \cdot e^{-\frac{1}{8}A}$$

$$-8 \cdot e^{-1}$$

$$-2{,}943 - 8$$

Teorico

$$-1\int_1^{\infty} 5e^{-5t}\,dt$$

$\boxed{-5t = u}$ $\boxed{du = -5}$

$$\frac{du}{dt} = -5 \Rightarrow du = -5dt$$

$$\int_1^{\infty} e^{\overset{u}{-5t}} \cdot \overset{du}{-5\,dt}$$

$u = -5t$

$$\int_1^{\infty} e^u \cdot du = -e^u = \boxed{-e^{-5t}} \checkmark$$

7) $X \rightarrow$ VA exponecial $\lambda > 0$

EJ7)

$$f_X(t) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda t} , & \text{si } t \geq 0 \\ 0 , & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

a) $P(X > x)$

$$\int_{x}^{+\infty} \lambda \cdot e^{-\lambda t} \, dt = \lim_{A \to +\infty} \int_{x}^{A} \lambda \cdot e^{-\lambda t} \, dt = \lim_{A \to \infty} -e^{-\lambda t} \Big|_{x}^{A}$$

$$= \lim_{A \to \infty} -e^{-\lambda A} - (-e^{-\lambda x}) = \boxed{e^{-\lambda x}} \checkmark$$

$\rightarrow$ tiende zero.

Cambio de variable

$$-1 \int_{x}^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} \, dt$$

$$\int e^{-\lambda t} \cdot -\lambda \, dt$$

$$\int e^{u} \cdot du = -e^{u} = -e^{-\lambda t}$$

$$F = \begin{cases} e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 1 & x < 0 \end{cases}$$

Distribución Exponencial

Es una distribución de probabilidad continua con un parámetro $\lambda > 0$

Función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{para } x \geq 0 \\ 0 & \text{de otro modo} \end{cases}$$

Función de distribución:

$$F(x) = P(X \leq x) \begin{cases} 0 & \text{para } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{para } x \geq 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{x} \lambda \cdot e^{-\lambda t} \, dt = -1 \int_{-\infty}^{x} \lambda e^{-\lambda t} \, dt = \int_{-\infty}^{x} e^{-\lambda t} \, (-\lambda \, dt) = \int -e^{-\lambda t} \Big|_{-\infty}^{x}$$

1. Sea X una variable aleatoria continua y sea F_X su función de distribución acumulada. Demostrar que

$$P(X \in [a,b]) = F_X(b) - F_X(a)$$

EJ1)

probables

$$P(X \in [a,b]) = \frac{b-a}{B-A} = \frac{1}{B-A} = \int_a^b F_x(t)\,dt = F_x(b) - F_x(a)$$

posibles