Facultad de Ingeniería y Tecnologías
Departamento de Matemática
Probabilidad y Estadística

UCU

Práctico 4: Variables aleatorias continuas

1. Sea X una variable aleatoria continua y sea F_X su función de distribución acumulada. Demostrar que
$$P(X \in [a,b]) = F_X(b) - F_X(a)$$

2. Se sabe que el error en la medición de la temperatura en un experimento controlado de un laboratorio es una variable aleatoria X que tiene la función de densidad:
$$f_X(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{3} & \text{si } t \in (-1,2) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$
   a) Verificar que f_X es efectivamente una densidad.
   b) Hallar $E(X)$.
   c) Calcular $P(0 < X < 1)$.
   d) Hallar y graficar la función de distribución acumulada F_X.

3. Una variable aleatoria continua X tiene densidad
$$f_X(t) = \begin{cases} t + at^2 & \text{si } t \in [0,1] \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$
   a) Hallar a.
   b) Hallar la función de distribución acumulada de X.
   c) Calcular $P(1/2 < X < 1)$.
   d) Calcular $E(X)$ y $\mathrm{Var}(X)$.

4. Sea X una variable aleatoria continua con función de distribución acumulada
$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 2t^2 - t^4 & \text{si } t \in [0,1] \\ 1 & \text{si } t > 1 \end{cases}$$
   a) Hallar $P(1/2 < X < 3/4)$.
   b) Hallar la función de densidad de X.

5. Se considera la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por
$$f(t) = \begin{cases} \frac{k}{t^2} & \text{si } t \in [1,+\infty) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$
   a) Hallar k para que f sea una función de densidad de probabilidad.
   b) Se considera una variable aleatoria X con densidad f (con el valor k hallado).
      1. Hallar y graficar la función de distribución acumulada F_X.
      2. Calcular $P(-1 < X < 2)$.
      3. ¿Existe $E(X)$? ¿Qué se puede decir de los promedios empíricos de variables aleatorias independientes con la misma distribución que X?

6. Un transmisor inalámbrico emite una señal con cierta potencia. Debido al ruido y a las reflexiones que sufre la señal en el camino, la señal recibida puede modelarse como una variable aleatoria X cuya densidad está dada por

$$f_X(t) = \begin{cases} \frac{t}{\sigma^2} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

donde $\sigma > 0$ es un parámetro relacionado con la potencia del transmisor.

   a) Calcular $P(X > x)$ para $x \in \mathbb{R}$.

   b) Hallar y bosquejar la función de distribución acumulada de X.

   c) Para que el mensaje sea recibido correctamente, se requiere $X > 1$.
   Calcular el mínimo valor de $\sigma > 0$ tal que $P(X > 1) \geq 0{,}9$.

   d) Para el valor de σ hallado, calcule $P(1 < X < 2)$.

7. Sea X una variable aleatoria exponencial de parámetro $\lambda > 0$.

   a) Hallar $P(X > x)$ para $x \in \mathbb{R}$.

   b) Hallar la función de distribución acumulada de X.

   c) Probar la propiedad de "pérdida de memoria":

$$P(X > t + s \mid X > t) = P(X > s) \quad \forall t, s \in \mathbb{R}^+$$

   d) Las duraciones de los neumáticos para ciertos automóviles se pueden modelar por una distribución exponencial de valor medio teórico de 30000 km.

      1) Hallar la probabilidad de que un neumático dure más de 30000 km.
      2) Hallar la probabilidad de que un neumático dure más de 60000 km si se sabe que duró más de 30000 km.

   e) Demostrar que $\lfloor X \rfloor$ (parte entera de X) tiende distribución geométrica de parámetro $1 - e^{-\lambda}$.

8. Un sistema contiene cierto tipo de componente cuyo tiempo de vida está dado por la variable aleatoria $T \sim \exp\left(\frac{1}{8}\right)$. Si 5 de estos componentes se instalan en diferentes sistemas, ¿cuál es la probabilidad de que al menos 2 continúen funcionando después de 8 años?

9. Se asume que para $t > 0$, el número de ómnibus N_t que pasan por una parada en un intervalo $[0, t]$ es aleatorio y se distribuye según una distribución de Poisson de parámetro λt, con $\lambda > 0$. Sea X el tiempo de espera de un pasajero que llega a la parada en un instante cualquiera (que podemos pensar como tiempo cero).

   a) Calcular $P(X > t)$ para $t > 0$.
   Sugerencia: ¿cuánto tiene que valer N_t para que se cumpla el evento $X > t$?

   b) Deducir que X tiene distribución exponencial de parámetro λ

   c) ¿Cuál es el tiempo de espera medio de un pasajero?

   d) Asumiendo $\lambda = \frac{1}{15}$, hallar la probabilidad de que el pasajero tenga que esperar menos de 5 minutos para que llegue el primer ómnibus a la parada.

10. Sea Z una variable aleatoria con distribución normal estándar ($Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$). Sea $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

   a) Calcular $P(0 \leq Z \leq 1)$, $P(Z \geq 1)$, $P(Z \geq -1)$.

   b) Calcular $P(Z \in [-1, 1])$, $P(Z \in [-2, 2])$ y $P(Z \in [-3, 3])$.

   c) Calcular $P(X \in [\mu - \sigma, \mu + \sigma])$, $P(X \in [\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma])$ y $P(X \in [\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma])$.

   d) Hallar el valor de C que cumple $P(Z \geq C) = 0{,}25$.

   e) Hallar el valor de C que cumple $P(Z \leq C) = 0{,}0287$.

   f) Hallar el valor de C que cumple $P(-C \leq Z \leq C) = 0{,}95$.

11. Una empresa fabrica tornillos mediante dos máquinas A y B que producen el 75 % y 25 % del total respectivamente.

    El largo de los tornillos es una variable aleatoria con distribución normal que, para la máquina A, tiene media 4 cm y desviación estándar de 1 cm mientras que, para la máquina B tiene media 5 cm y desviación estándar 2 cm.

    Un tornillo se considera defectuoso si su largo es mayor a 6 cm o si es menor a 3 cm.

    Si se extrae un tornillo al azar de la producción total, ¿cuál es la probabilidad de que resulte defectuoso?

12. (Simulación de variables aleatorias): Sea $U \sim \mathcal{U}(0,1)$ y F una función de distribución acumulada continua y estrictamente creciente. Hallar la función de distribución acumulada de la variable aleatoria $X = F^{-1}(U)$. Explique por qué esto es útil para simular variables aleatorias con distintas distribuciones en una computadora.