2. Se sabe que el error en la medición de la temperatura en un experimento controlado de un laboratorio es una variable aleatoria X que tiene la función de densidad:

$$f_X(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{3} & \text{si } t \in (-1,2) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) Verificar que f_X es efectivamente una densidad.

b) Hallar $E(X)$.

c) Calcular $P(0 < X < 1)$.

d) Hallar y graficar la función de distribución acumulada F_X.

Si es f_X tiene que cumplir $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\,dt = 1$

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{-1} f_X(t)\,dt}_{0} + \underbrace{\int_{-1}^{2} f_X(t)\,dt}_{} + \underbrace{\int_{2}^{+\infty} f_X(t)\,dt}_{0} = 1$$

$$\underbrace{\int_{-1}^{2} \frac{t^2}{3}\,dt}_{} = 1$$

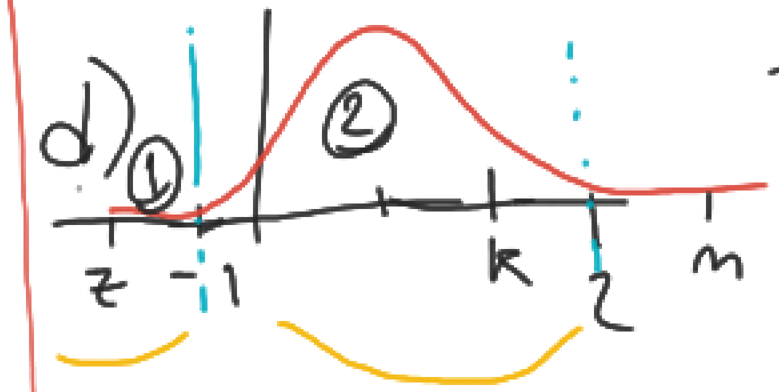
$$\left.\frac{t^3}{9}\right|_{-1}^{2} = \frac{2^3}{9} - \left(\frac{-1^3}{9}\right) = \frac{8}{9} + \frac{1}{9} = \frac{9}{9} = \boxed{1}$$

b) $\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t \cdot f_X(t)\,dt$

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{-1} t\, \overset{0}{f_X(t)}}_{\emptyset} + \int_{-1}^{2} t \cdot \left(\frac{t^2}{3}\right) dt + \underbrace{\int_{2}^{+\infty} t \cdot 0\,dt}_{0}$$

$$\int_{-1}^{2} \frac{t^3}{3}\,dt = \left.\frac{t^4}{12}\right|_{-1}^{2} = \frac{2^4}{12} - \frac{(-1)^2}{12} = \frac{16}{12} - \frac{1}{12} = 1{,}25 = \boxed{\frac{5}{4}}$$

c) $P(0 < X < 1) = \int_0^1 \frac{t^2}{3}\,dt = \left.\frac{t^3}{9}\right|_0^1 = \frac{1^3}{9} - \frac{0^3}{9} = \boxed{\frac{1}{9}}$

d) 

Tramo 1 $\Rightarrow \int_{-\infty}^{z} f_X(t)\,dt = \int_{-\infty}^{z} 0\,dt = 0 \quad t < -1$

Tramo 2 $\underbrace{\int_{-\infty}^{-1}}_{\emptyset} + \int_{-1}^{k} = \int_{-1}^{k} \frac{t^2}{3} = \left.\frac{t^3}{9}\right|_{-1} = \boxed{\frac{k^3+1}{9}}$

$= \quad -1 < t < 2$

Tramo 3 $\int_{-\infty}^{-1} + \int_{-1}^{2} + \int_{2}^{+\infty}$

$$\int_{-\infty}^{-1} \overset{\emptyset}{} + \int_{-1}^{2} \frac{t^2}{3}\,dt + \underbrace{\int_{2}^{+\infty}}_{0} \longrightarrow \left.\frac{t^3}{9}\right|_{-1}^{2} = \frac{2^3}{9} - \frac{(-1^3)}{9}$$

$$\frac{8}{9} + \frac{1}{9} = \boxed{1}$$

$$\boxed{F_X(t) \begin{cases} 0 & t < -1 \\ \frac{t^3+1}{9} & -1 < t < 2 \\ 1 & t > 2 \end{cases}}$$

3. Una variable aleatoria continua X tiene densidad

$$f_X(t) = \begin{cases} t + at^2 & \text{si } t \in [0,1] \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) Hallar a.

b) Hallar la función de distribución acumulada de X.

c) Calcular $P(1/2 < X < 1)$.

d) Calcular $E(X)$ y $\text{Var}(X)$.

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{0}}_{0} + \int_0^1 t + at^2 + \underbrace{\int_1^{+\infty}}_{0} = 1$$

$$\frac{t^2}{2} + \frac{at^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{a}{3} - 0 = 1$$

$$\frac{a}{3} = \frac{1}{2} \therefore a = \frac{3}{2}$$

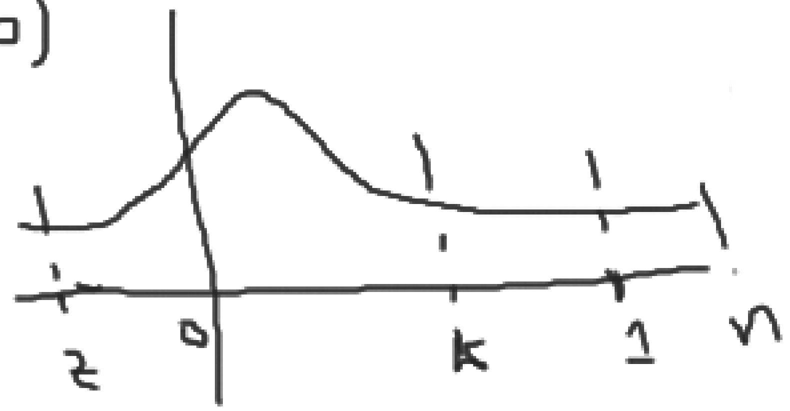
DENSIDAD

$$f_x(t) = \begin{cases} t + \frac{3}{2}t^2 \\ 0 \end{cases}$$

ACUMULADA

$$F_x(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \frac{t^3 + t^2}{2} & \text{si } 0 < t < 1 \\ 1 & \text{en otro} \end{cases}$$

b)



$$\frac{t^3 + t^2}{2} \Rightarrow \text{Primitiva}$$

Tramo 1) $\int_{-\infty}^{z} f_x(t)\,dt = 0$ si $t < 0$

Tramo 2) $\underbrace{\int_{-\infty}^{0}}_{0} + \int_0^k t + \frac{3}{2}t^2\,dt = \frac{k^3 + k^2}{2}$

si $0 < t < 1$

Tramo 3) $\underbrace{\int_{-\infty}^{0}}_{0} + \underbrace{\int_0^1 f_x(t)\,dt}_{} + \underbrace{\int_z^{+\infty}}_{0}$

$$\frac{t^3 + t^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1+1}{2} - \frac{0+0}{2} = 1$$

EJ 3)

$$\int_a^b f(s)ds = F(b) - F(a)$$

$$P\left(\frac{1}{2} < X < 1\right) = \int_{\frac{1}{2}}^{1} f_X(t)\,dt = \frac{13}{16}$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f_X(t)\,dt = \underbrace{\int_{-\infty}^{0}}_{0} + \underbrace{\int_{0}^{1} t\left(t + \frac{3}{2}t^2\right)dt}_{\int_0^1 t^2 + \frac{3t^3}{2} = \frac{17}{24}} + \underbrace{\int_{1}^{+\infty}}_{0}$$

4. Sea X una variable aleatoria continua con función de distribución acumulada

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 2t^2 - t^4 & \text{si } t \in [0,1] \\ 1 & \text{si } t > 1 \end{cases}$$

a) Hallar $P(1/2 < X < 3/4)$.

b) Hallar la función de densidad de X.

a) $P\left(\frac{1}{2} < x < \frac{3}{4}\right) = P\left(x \leq \frac{3}{4}\right) - P\left(x < \frac{1}{2}\right)$ ✓

$F(3/4) - F(1/2) = 0{,}808 - 0{,}437 = 0{,}3705$

$\boxed{\text{Si } t < 0}$

$F_X(x) = 0 \quad f_X = 0$

$\boxed{\text{Si } t \in [0,1]}$

$F_X = 2t^2 - t^4 \quad f_X(t) = 4t - 4t^3$

$\boxed{\text{Si } t > 1}$

$F_X = 1 \quad f_X = 0$

$$f_X(t) = \begin{cases} 4t - 4t^3, & t \in [0,1] \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$ ✓

8. Un sistema contiene cierto tipo de componente cuyo tiempo de vida está dado por la variable aleatoria $T \sim \exp\left(\frac{1}{8}\right)$. Si 5 de estos componentes se instalan en diferentes sistemas, ¿cuál es la probabilidad de que al menos 2 continúen funcionando después de 8 años?

$$f_x(t) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda t} & , t \geq 0 \\ 0 & , \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$\boxed{\lambda = 1/8}$$

$$\int_8^{+\infty} \frac{1}{8} \cdot e^{-\frac{1}{8}t} \, dt = \frac{1}{8} \int_8^{+\infty} e^{-\frac{1}{8}t} = -8 e^{-\frac{1}{8}t} \Big|_8^{+\infty}$$

$$-8 e^{-\frac{1}{8} \cdot 8} - \lim_{A \to +\infty} -8 \cdot e^{-\frac{1}{8}A}$$

$$-8 \cdot e^{-1}$$

$$-2{,}943 - 8$$

Teorico

$$-\frac{1}{}\int_1^{\infty} 5e^{-5t}\,dt$$

$$\boxed{-5t = u} \qquad \boxed{du = -5}$$

$$\frac{du}{dt} = -5 \Rightarrow du = -5dt$$

$$\int_1^{\infty} e^{\overset{u}{-5t}} \cdot \overset{du}{-5\,dt}$$

$$u = -5t$$

$$\int_1^{\infty} e^u \cdot du = -e^u = \boxed{-e^{-5t}}\ \checkmark$$

7) $X \to$ VA exponencial $\lambda > 0$

$$f_X(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t}, & \text{si } t \geq 0 \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

cambio de variable

$$-1 \int_x^{\infty} -\lambda e^{-\lambda t}\, dt$$

$$\int_x e^{u}\, du$$

$$\int e^{u} \cdot du = -e^{u} = -e^{-\lambda t}$$

a) $P(X > x)$

$$\int_x^{+\infty} \lambda \cdot e^{-\lambda t}\, dt = \lim_{A \to +\infty} \int_x^{A} \lambda \cdot e^{-\lambda t}\, dt = \lim_{A \to \infty} -e^{-\lambda t}\Big|_x^{A}$$

$$= \lim_{A \to \infty} -e^{-\lambda A} + e^{-\lambda x} = \boxed{e^{-\lambda x}}$$

tiende a cero.

$$F = \begin{cases} e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 1 & x < 0 \end{cases}$$

Distribución Exponencial

Es una distribución de probabilidad continua con un parámetro λ>0

Función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{para } x \geq 0 \\ 0 & \text{de otro modo} \end{cases}$$

Función de distribución:

$$F(x) = P(X \leq x) \begin{cases} 0 & \text{para } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{para } x \geq 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{x} \lambda \cdot e^{-\lambda t}\, dt = -1 \int_{-\infty}^{\lambda} \lambda e^{-\lambda t}\, dt = \int_{-\infty}^{x} e^{-\lambda t} \, (-\lambda\, dt) = \int -e^{-\lambda t}\Big|_{-\infty}^{x}$$

du

1. Sea X una variable aleatoria continua y sea F_X su función de distribución acumulada. Demostrar que

$$P(X \in [a, b]) = F_X(b) - F_X(a)$$

probables

$$P(x \in [a,b]) = \frac{b-a}{B-A} = \frac{1}{B-A} = \int_a^b F_x(t)\,dt = F_x(b) - F_x(a)$$

posibles