2. Se sabe que el error en la medición de la temperatura en un experimento controlado de un laboratorio es una variable aleatoria X que tiene la función de densidad:

$$f_X(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{3} & \text{si } t \in (-1, 2) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) Verificar que f_X es efectivamente una densidad.

b) Hallar $E(X)$.

c) Calcular $P(0 < X < 1)$.

d) Hallar y graficar la función de distribución acumulada F_X.

Si es función de densidad:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_x(t)\,dt = 1$$

$$\Downarrow$$

$$\int_{-\infty}^{-1} f_x(t)\,dt + \int_{-1}^{2} f_x(t)\,dt + \int_{2}^{+\infty} f_x(t)\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{-1} 0\,dt + \int_{-1}^{2} f_x(t)\,dt + \int_{2}^{+\infty} 0\,dt \Rightarrow \int_{-1}^{2} \frac{t^2}{3}\,dt = \frac{1}{3}\int_{-1}^{2} t^2 = \left.\frac{t^3}{3}\right|_{-1}^{2} =$$

$$\frac{1}{3} \cdot \left.\frac{t^3}{3}\right|_{-1}^{2} = \frac{2^3}{9} - \frac{(-1)^3}{9} = \frac{9}{9} = 1 \checkmark$$

Como el resultado es 1, decimos que Fx es efectivamente densidad

$$\boxed{\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t \cdot f(t)\,dt}$$

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{-1} t\, f(t)\,dt}_{\emptyset} + \int_{-1}^{2} t\, f(t)\,dt + \underbrace{\int_{2}^{\infty} t\, f(t)\,dt}_{\emptyset}$$

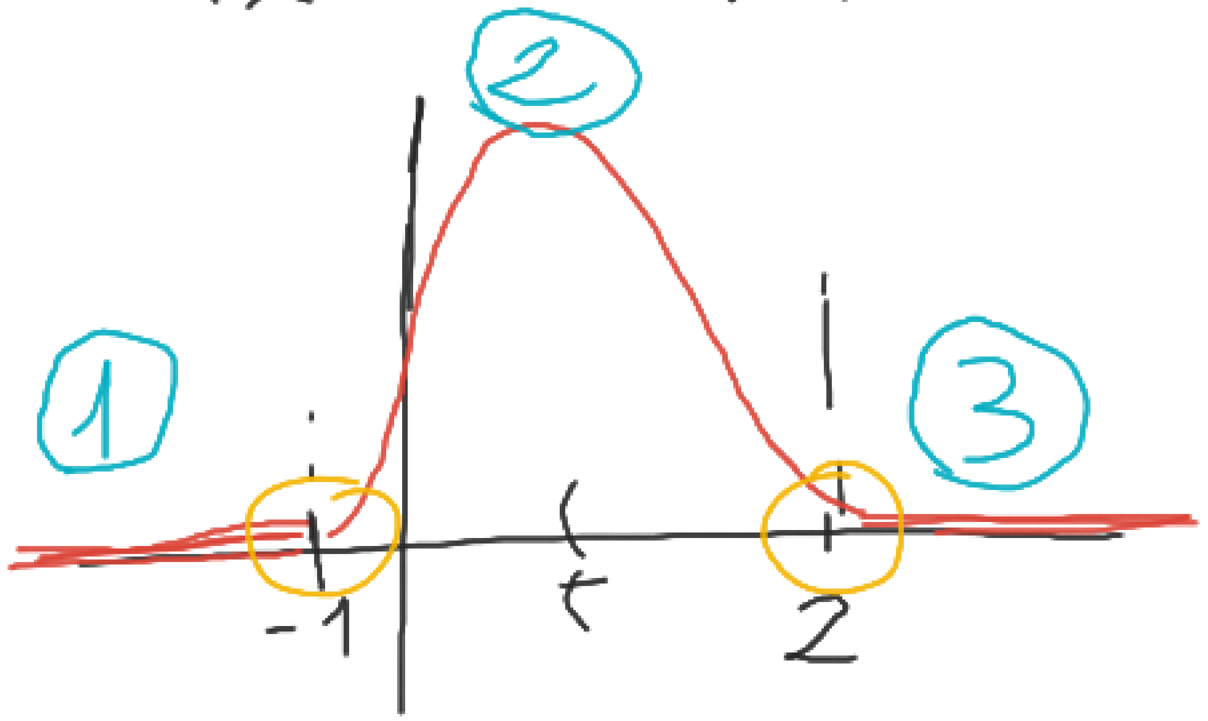
$$\int_{-1}^{2} t\left(\frac{t^2}{3}\right)dt = \frac{t^3}{3} = \frac{1}{3}\int_{-1}^{2} t^3 = \frac{1}{3}\left[\frac{t^4}{4}\Big|_{-1}^{2}\right] = \frac{1}{3}\left(\frac{2^4}{4} - \frac{(-1)^4}{4}\right) = \frac{1}{3}\left(4 - \frac{1}{4}\right) = \boxed{\frac{5}{4}}$$

$$P(0 < X < 1) = \int_0^1 \frac{t^2}{3}\,dt = \frac{1}{3}\int_0^1 t^2\,dt = \frac{1}{3}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right] = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \boxed{\frac{1}{9}}$$

$$F_x(t) = P(x \leq t) = \int_{-\infty}^{t} f_x(y)\,dy$$

$$f_x(t) \begin{cases} \frac{t^2}{3}, & x \in (-1,2) \\ 0, & \text{si NO} \end{cases}$$



$$F(x) \begin{cases} 0 & \text{si } t < -1 \\ \frac{t^3+1}{9} & \text{si } -1 < t < 2 \\ 1 & \text{si } t > 2 \end{cases}$$

1) $P(x \leq t)$, $t < -1$

$$\int_{-\infty}^{t} f_x(x)\,dy = \int_{-\infty}^{t} 0\,dx = 0$$

$-1 < t < 2$

2) $P(x \leq t) = \int_{-\infty}^{-1} \overset{\text{“}0}{F(t)}\,dy + \int_{-1}^{t} F(y)\,dy = \int_{-1}^{t} \frac{y^2}{3}\,dy = *$

A $\frac{1}{3}\left[\frac{y^3}{3}\Big|_{-1}^{t}\right] = \frac{1}{3}\left(\frac{t^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3}\right) = \frac{t^3}{9} + \frac{1}{9} = \frac{t^3+1}{9}$

$$\boxed{-1 < t < 2}$$

3) $\underbrace{\int_{-\infty}^{-1} + \int_{-1}^{2}}_{1} + \int_{2}^{+\infty}$

Calculado en parte A

3. Una variable aleatoria continua X tiene densidad

$$f_X(t) = \begin{cases} t + at^2 & \text{si } t \in [0,1] \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) Hallar a.

b) Hallar la función de distribución acumulada de X.

c) Calcular $P(1/2 < X < 1)$.

d) Calcular $E(X)$ y $\mathrm{Var}(X)$.

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 1 \Rightarrow \int_0^1 t + at^2 \, dt = 1 \Rightarrow \int_0^1 t\,dt + \int_0^1 at^2\,dt = 1 \Rightarrow \frac{t^2}{2}\Big|_0^1 + a\left(\frac{t^3}{3}\right)\Big|_0^1$$

$$\frac{1}{2} + \frac{a}{3} = 1 \Rightarrow \quad a = \left(1 - \frac{1}{2}\right)3$$

$$\boxed{a = \frac{3}{2}}$$