Facultad de Ingeniería y Tecnologías
Departamento de Matemática
Probabilidad y Estadística

UCU

Práctico 5: Distribución conjunta

1. Sean X e Y variables aleatorias discretas con recorrido $\{1,2,3,4\}$. Se sabe que la función de probabilidad de masa conjunta es
$$p_{(X,Y)}(n,m) = \frac{n+m}{80}$$
   a) Calcular $P(X \geq 3)$.
   b) Calcular $P(X = Y)$.
   c) Calcular $P(XY = 6)$.
   d) Calcular $P(1 \leq X \leq 2,\, 2 < Y \leq 4)$.
   e) ¿Son X e Y independientes?

2. Sean X e Y dos variables aleatorias independientes con distribución Bernoulli de parámetro $1/2$. Se definen las variables aleatorias S y T de la siguiente forma
$$S = X + Y \text{ y } T = X - Y$$
   a) Hallar la funciones de probabilidad de masa de S y T.
   b) Hallarla función de probabilidad de masa conjunta de S y T.
   c) ¿Son S y T independientes?
   d) Hallar $E(ST)$.

3. Sean X e Y variables aleatorias independientes con distribución uniforme en el intervalo $[0,1]$.
   a) Hallar $P(X^2 + Y^2 \leq 1)$.
   b) Proponer un método numérico basado en la simulación de variables aleatorias con distribución uniforme para estimar el número π.

4. Sean X e Y variables aleatorias continuas con densidad conjunta
$$f_{(X,Y)}(t,s) = \begin{cases} c\,t^2 s(1+s) & \text{si } 0 \leq t \leq 3,\ 0 \leq s \leq 3 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$
   a) Hallar el valor de c.
   b) Calcular la probabilidad $P(1 \leq X \leq 2,\, 0 \leq Y \leq 1)$.
   c) Hallar la función de distribución acumulada de X directamente de la definición: $F_X(t) = P(X \leq t)$.
   d) Hallar la densidad marginal $f_X(t)$ usando la fórmula vista en clase, y verificar que es la derivada de $F_X(t)$.
   e) ¿Son X e Y independientes?