Facultad de Ingeniería y Tecnologías
Departamento de Matemática
Probabilidad y Estadística

Práctico 6: Estimación

1. Encontrar un ejemplo de dos variables aleatorias X e Y con $\text{Cov}(X, Y) = 0$ pero que no sean independientes.

   Sugerencia: considerar U y V variables aleatorias independientes con la misma distribución y definir $X = U + V$ e $Y = U - V$.

2. Se considera $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una muestra iid con la distribución de una cierta variable aleatoria X, e $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ una muestra iid con la distribución de una cierta variable aleatoria Y. Se asume que ambas muestras son independientes.

   a) Usar la ley de los grandes números para demostrar que
   $$C_{XY} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)(Y_i - \overline{Y}_n)$$
   es un estimador consistente de $\text{Cov}(X, Y)$.

   b) El coeficiente de correlación teórico de X e Y se define de la siguiente forma
   $$\rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)}\sqrt{\text{Var}(Y)}}$$
   Usar la ley de los grandes números para demostrar que
   $$R_{XY} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)(Y_i - \overline{Y}_n)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \overline{Y}_n)^2}}$$
   es un estimador consistente de $\rho(X, Y)$.

3. Sean θ_1, θ_2 dos estimadores insesgados del mismo parámetro θ, independientes, con varianzas σ_1^2, σ_2^2 respectivamente. Se considera, para $a \in (0, 1)$, el nuevo estimador de θ definido de la siguiente forma:
   $$\theta_3 = a\theta_1 + (1 - a)\theta_2$$

   a) Demostrar que θ_3 también es un estimador insesgado $\forall a \in (0, 1)$.

   b) ¿Cómo debe elegirse a para que el estimador sea el más eficiente de los así definidos?

4. Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ un muestreo aleatorio iid de una distribución discreta con recorrido $\{0, 1, 2, 3\}$ y que depende de un parámetro θ que solo puede tomar los valores $\theta = 0$ y $\theta = 1$. La función de probabilidad de masa para $\theta = 0$ y $\theta = 1$ es:

	$\theta = 0$	$\theta = 1$
$X = 0$	$0,1$	$0,2$
$X = 1$	$0,3$	$0,4$
$X = 2$	$0,3$	$0,3$
$X = 3$	$0,3$	$0,1$

   Se tiene una muestra de tamaño 6 y los datos son $0, 3, 1, 2, 0, 3$. Hallar el estimador de máxima verosimilitud de θ.

5. Se tienen tres monedas con probabilidad de cara p igual a $0,4$, $0,5$ y $0,6$ respectivamente. Beto toma una de las monedas y se la da a Ana. Después de lanzar la moneda 100 veces, Ana obtiene cara 53 veces. Hallar una estimación de p basada en el método de máxima verosimilitud.

6. Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una muestra iid de una variable aleatoria continua X con función de densidad

$$f_X(t) = \frac{1}{2\sigma}\, e^{-|t|/\sigma}$$

donde σ es un parámetro desconocido.

   a) Demostrar que $|X| \sim \exp(\frac{1}{\sigma})$.
   Sugerencia: hallar la función de distribución acumulada $F_{|X|}(t) = P(|X| \leq t)$ y observar que queda igual a la función de distribución acumulada de una exponencial con ese parámetro.

   b) Hallar $\hat{\sigma}$ el estimador de máxima verosimilitud de σ.

   c) Determinar si $\hat{\sigma}$ es insesgado y hallar su error cuadrático medio. ¿Es $\hat{\sigma}$ un estimador consistente?

   d) Hallar un estimador de σ usando el método de los momentos.

7. Ana y Beto saben que el delivery llega en tiempo uniforme en el intervalo $[0, a]$, en donde 0 es el momento en que hacen el pedido y a es un valor desconocido. Para estimarlo, se propone el estimador

$$A_n = \text{máx}\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$$

y el estimador B_n obtenido a partir del método de los momentos.

   a) Hallar B_n.

   b) Calcular el sesgo y el error cuadrático medio de B_n. Determinar si B_n es consistente.

   c) Hallar la función de distribución acumulada y la función de densidad de A_n.
   Sugerencia: demostrar primero que

$$A_n \leq t \iff X_i \leq t \;\forall i = 1, \ldots, n$$

   d) Calcular el sesgo y el error cuadrático medio de A_n. ¿Es A_n asintóticamente insesgado?

   e) Hallar $k > 1$ tal que $P(a \in [A_n, kA_n]) = 0,95$.

   f) Luego de pedir el delivery durante una semana, Ana y Beto obtienen la siguiente muestra: 15,38,32,41,15,18,29, en minutos. Dar una estimación para a y justificarla. Dar un intervalo que contenga a a con probabilidad $0,95$.

8. Demostrar que el estimador A_n del ejercicio anterior es el estimador de máxima verosimilitud de a.

   Sugerencia: demostrar primero que la función de verosimilitud $L(a)$ es partida y que es distinta de cero si y solo si $a \geq A_n$, demostrar que en ese caso la derivada de L es negativa y concluir.