1. Encontrar un ejemplo de dos variables aleatorias X e Y con $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$ pero que no sean independientes.

   Sugerencia: considerar U y V variables aleatorias independientes con la misma distribución y definir $X = U + V$ e $Y = U - V$.

$$\mathrm{cov}(x,y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0$$

$$\mathrm{cov}(x,y) = E((U+V)(U-V)) - E(U+V)E(U-V)$$

$$\mathrm{cov}(x,y) = E(U^2 - V^2) - (E(U)+E(V))(E(U)-E(V))$$

$$\mathrm{cov}(x,y) = E(U^2) - E(V^2) - E(U)^2 + E(V)^2$$

-1

$$= V(U) - V(V)$$

dado que u y v tienen la misma distribucion la resta de las var da cero porque ambas varianzas son iguales

EJ. 2 P - 5

EJ: $U, V \Rightarrow Ber(1/2)$

$X = U + V$

$Y = U - V$

2. Se considera $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una muestra iid con la distribución de una cierta variable aleatoria X, e $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ una muestra iid con la distribución de una cierta variable aleatoria Y. Se asume que ambas muestras son independientes.

   a) Usar la ley de los grandes números para demostrar que

$$C_{XY} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)(Y_i - \overline{Y}_n)$$

   es un estimador consistente de $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

Como por ley de los grandes numeros se llega a la función de covarianza podemos decir que es un estiamdor consistente

$\mu = E(x)$

$\sigma = E(y)$

$$C_{xx} \to \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}((x_i - Ex)(x_i - E(y))) \to E[(x - E(x))(y - E(x))]$$

b) El coeficiente de correlación teórico de X e Y se define de la siguiente forma

$$\rho(X,Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}\sqrt{\mathrm{Var}(Y)}}$$

Usar la ley de los grandes números para demostrar que

$$R_{XY} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)(Y_i - \overline{Y}_n)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \overline{Y}_n)^2}}$$

es un estimador consistente de $\rho(X,Y)$.

4. Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ un muestreo aleatorio iid de una distribución discreta con recorrido $\{0, 1, 2, 3\}$ y que depende de un parámetro θ que solo puede tomar los valores $\theta = 0$ y $\theta = 1$. La función de probabilidad de masa para $\theta = 0$ y $\theta = 1$ es:

	$\theta = 0$	$\theta = 1$
$X = 0$	0, 1	0, 2
$X = 1$	0, 3	0, 4
$X = 2$	0, 3	0, 3
$X = 3$	0, 3	0, 1

Se tiene una muestra de tamaño 6 y los datos son $0, 3, 1, 2, 0, 3$. Hallar el estimador de máxima verosimilitud de θ.

$\theta = 0$

$M = 0{,}1 \times 0{,}3 \times 0{,}3 \times 0{,}3 \times 0{,}1 \times 0{,}3 = 0{,}000081$

$\theta = 1$

$M = 0{,}2 \times 0{,}1 \times 0{,}4 \times 0{,}2 \times 0{,}1 = 0{,}00016$

El estimador de maxima verosimilitud es tita = 0 (el optimo es el mayor)

5. Se tienen tres monedas con probabilidad de cara p igual a $0,4$, $0,5$ y $0,6$ respectivamente. Beto toma una de las monedas y se la da a Ana. Después de lanzar la moneda 100 veces, Ana obtiene cara 53 veces. Hallar una estimación de p basada en el método de máxima verosimilitud.

7. Ana y Beto saben que el delivery llega en tiempo uniforme en el intervalo $[0, a]$, en donde 0 es el momento en que hacen el pedido y a es un valor desconocido. Para estimarlo, se propone el estimador

$$A_n = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$$

y el estimador B_n obtenido a partir del método de los momentos.

a) Hallar B_n.

b) Calcular el sesgo y el error cuadrático medio de B_n. Determinar si B_n es consistente.

c) Hallar la función de distribución acumulada y la función de densidad de A_n.
Sugerencia: demostrar primero que

$$A_n \leq t \iff X_i \leq t \;\forall i = 1, \ldots, n$$

d) Calcular el sesgo y el error cuadrático medio de A_n. ¿Es A_n asintóticamente insesgado?

e) Hallar $k > 1$ tal que $P(a \in [A_n, kA_n]) = 0{,}95$.

f) Luego de pedir el delivery durante una semana, Ana y Beto obtienen la siguiente muestra: 15,38,32,41,15,18,29, en minutos. Dar una estimación para a y justificarla. Dar un intervalo que contenga a a con probabilidad $0{,}95$.

$X \sim \text{unif}.\,(a,b)$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si } x \in (a,b), \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Por def a es siempre 0

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 \ldots\ldots + x_n}{n} = E(X_1) : \longrightarrow \; = \frac{a+b}{2} = \frac{a}{2} =$$

$$\bar{X} = \frac{\hat{a}}{2} \rightarrow \hat{a} = 2\bar{X} = B_n$$

$$B_n = 2 \cdot \bar{X}$$

$$\text{sesgo} = E(B_n) - a \rightarrow 2 \cdot (E(X_1)) - a = 2\frac{a}{2} - a = 0$$ Estimador insesgado

$$\text{ECM} = Var(B_n) + \text{sesg}^2 = Var(B_n) = Var(2\bar{X}) = 2^2 Var(\bar{X})$$

$$2^2 Var(\bar{X}) =$$