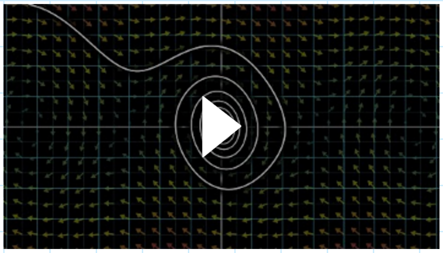
# HW7

Monday, November 8, 2021 7:09 AM

1) watch
[Differential equations, a tourist's guide | DE1]



2) for the ode: $x'' + \epsilon (x'^3/3 - x') + x = 0$ Analyze the behavior of solutions near the equilibrium point (0,0). Use Linstadt's Method (perturbation theory) writing $x = x_0 + \epsilon x_1 + \dots$ Find $x_0$ and compare that to the slopefield numerical approx. for the ode.

In[327]:=

```
Clear["Global`*"];
```

In[328]:=

```
x[τ] = x0[τ] + ϵ x1[τ] + ϵ^2 x2[τ];
ode = ω^2 D[x[τ], {τ, 2}] + ϵ (ω^3 D[x[τ], {τ, 1}]^3/3 - ω D[x[τ], {τ, 1}]) + x[τ] == 0 /.
  ω → 1 + ϵ ω1 + ϵ^2 ω2
Collect[
 ode,
 ϵ]
```

Out[329]=

$$x_0[\tau] + \epsilon\, x_1[\tau] + \epsilon^2 x_2[\tau] + \epsilon \left(-\left(\left(1 + \epsilon\, \omega_1 + \epsilon^2 \omega_2\right) \left(x_0'[\tau] + \epsilon\, x_1'[\tau] + \epsilon^2 x_2'[\tau]\right)\right) + \frac{1}{3} \left(1 + \epsilon\, \omega_1 + \epsilon^2 \omega_2\right)^3 \left(x_0'[\tau] + \epsilon\, x_1'[\tau] + \epsilon^2 x_2'[\tau]\right)^3\right) + \left(1 + \epsilon\, \omega_1 + \epsilon^2 \omega_2\right)^2 \left(x_0''[\tau] + \epsilon\, x_1''[\tau] + \epsilon^2 x_2''[\tau]\right) = 0$$

Out[330]=

$$
\begin{aligned}
& x_0[\tau] + \frac{1}{3}\,\epsilon^{13}\,\omega_2^3\,x_2'[\tau]^3 + \\
& \epsilon^7 \Big(\frac{1}{3}\,\omega_2^3\,x_0'[\tau]^3 + 3\,\omega_1\,\omega_2^2\,x_0'[\tau]^2\,x_1'[\tau] + 3\,\omega_1^2\,\omega_2\,x_0'[\tau]\,x_1'[\tau]^2 + 3\,\omega_2^2\,x_0'[\tau]\,x_1'[\tau]^2 + \\
& \quad \frac{1}{3}\,\omega_1^3\,x_1'[\tau]^3 + 2\,\omega_1\,\omega_2\,x_1'[\tau]^3 + 3\,\omega_1^2\,\omega_2\,x_0'[\tau]^2\,x_2'[\tau] + 3\,\omega_2^2\,x_0'[\tau]^2\,x_2'[\tau] + 2\,\omega_1^3\,x_0'[\tau] \\
& \quad x_1'[\tau]\,x_2'[\tau] + 12\,\omega_1\,\omega_2\,x_0'[\tau]\,x_1'[\tau]\,x_2'[\tau] + 3\,\omega_1^2\,x_1'[\tau]^2\,x_2'[\tau] + 3\,\omega_2\,x_1'[\tau]^2\,x_2'[\tau] + \\
& \quad 3\,\omega_1^2\,x_0'[\tau]\,x_2'[\tau]^2 + 3\,\omega_2\,x_0'[\tau]\,x_2'[\tau]^2 + 3\,\omega_1\,x_1'[\tau]\,x_2'[\tau]^2 + \frac{1}{3}\,x_2'[\tau]^3\Big) + \\
& \epsilon^8 \big(\omega_2^3\,x_0'[\tau]^2\,x_1'[\tau] + 3\,\omega_1\,\omega_2^2\,x_0'[\tau]\,x_1'[\tau]^2 + \omega_1^2\,\omega_2\,x_1'[\tau]^3 + \omega_2^2\,x_1'[\tau]^3 + \\
& \quad 3\,\omega_1\,\omega_2^2\,x_0'[\tau]^2\,x_2'[\tau] + 6\,\omega_1^2\,\omega_2\,x_0'[\tau]\,x_1'[\tau]\,x_2'[\tau] + 6\,\omega_2^2\,x_0'[\tau]\,x_1'[\tau]\,x_2'[\tau] + \\
& \quad \omega_1^3\,x_1'[\tau]^2\,x_2'[\tau] + 6\,\omega_1\,\omega_2\,x_1'[\tau]^2\,x_2'[\tau] + \omega_1^3\,x_0'[\tau]\,x_2'[\tau]^2 + \\
& \quad 6\,\omega_1\,\omega_2\,x_0'[\tau]\,x_2'[\tau]^2 + 3\,\omega_1^2\,x_1'[\tau]\,x_2'[\tau]^2 + 3\,\omega_2\,x_1'[\tau]\,x_2'[\tau]^2 + \omega_1\,x_2'[\tau]^3\big) + \\
& \epsilon^9 \big(\omega_2^3\,x_0'[\tau]\,x_1'[\tau]^2 + \omega_1\,\omega_2^2\,x_1'[\tau]^3 + \omega_2^3\,x_0'[\tau]^2\,x_2'[\tau] + 6\,\omega_1\,\omega_2^2\,x_0'[\tau]\,x_1'[\tau]\,x_2'[\tau] + \\
& \quad 3\,\omega_1^2\,\omega_2\,x_1'[\tau]^2\,x_2'[\tau] + 3\,\omega_2^2\,x_1'[\tau]^2\,x_2'[\tau] + 3\,\omega_1^2\,\omega_2\,x_0'[\tau]\,x_2'[\tau]^2 + 3\,\omega_2^2\,x_0'[\tau]\,x_2'[\tau]^2 + \\
& \quad \omega_1^3\,x_1'[\tau]\,x_2'[\tau]^2 + 6\,\omega_1\,\omega_2\,x_1'[\tau]\,x_2'[\tau]^2 + \omega_1^2\,x_2'[\tau]^3 + \omega_2\,x_2'[\tau]^3\big) + \\
& \epsilon^{10} \Big(\frac{1}{3}\,\omega_2^3\,x_1'[\tau]^3 + 2\,\omega_2^3\,x_0'[\tau]\,x_1'[\tau]\,x_2'[\tau] + 3\,\omega_1\,\omega_2^2\,x_1'[\tau]^2\,x_2'[\tau] + 3\,\omega_1\,\omega_2^2\,x_0'[\tau]\,x_2'[\tau]^2 + \\
& \quad 3\,\omega_1^2\,\omega_2\,x_1'[\tau]\,x_2'[\tau]^2 + 3\,\omega_2^2\,x_1'[\tau]\,x_2'[\tau]^2 + \frac{1}{3}\,\omega_1^3\,x_2'[\tau]^3 + 2\,\omega_1\,\omega_2\,x_2'[\tau]^3\Big) + \\
& \epsilon^{11} \big(\omega_2^3\,x_1'[\tau]^2\,x_2'[\tau] + \omega_2^3\,x_0'[\tau]\,x_2'[\tau]^2 + 3\,\omega_1\,\omega_2^2\,x_1'[\tau]\,x_2'[\tau]^2 + \omega_1^2\,\omega_2\,x_2'[\tau]^3 + \omega_2^2\,x_2'[\tau]^3\big) + \\
& \epsilon^{12} \big(\omega_2^3\,x_1'[\tau]\,x_2'[\tau]^2 + \omega_1\,\omega_2^2\,x_2'[\tau]^3\big) + x_0''[\tau] + \\
& \epsilon \Big(x_1[\tau] - x_0'[\tau] + \frac{1}{3}\,x_0'[\tau]^3 + 2\,\omega_1\,x_0''[\tau] + x_1''[\tau]\Big) + \\
& \epsilon^2 \big(x_2[\tau] - \omega_1\,x_0'[\tau] + \omega_1\,x_0'[\tau]^3 - x_1'[\tau] + \\
& \quad x_0'[\tau]^2\,x_1'[\tau] + \omega_1^2\,x_0''[\tau] + 2\,\omega_2\,x_0''[\tau] + 2\,\omega_1\,x_1''[\tau] + x_2''[\tau]\big) + \\
& \epsilon^3 \big(-\omega_2\,x_0'[\tau] + \omega_1^2\,x_0'[\tau]^3 + \omega_2\,x_0'[\tau]^3 - \omega_1\,x_1'[\tau] + 3\,\omega_1\,x_0'[\tau]^2\,x_1'[\tau] + x_0'[\tau]\,x_1'[\tau]^2 - \\
& \quad x_2'[\tau] + x_0'[\tau]^2\,x_2'[\tau] + 2\,\omega_1\,\omega_2\,x_0''[\tau] + \omega_1^2\,x_1''[\tau] + 2\,\omega_2\,x_1''[\tau] + 2\,\omega_1\,x_2''[\tau]\big) + \\
& \epsilon^4 \Big(\frac{1}{3}\,\omega_1^3\,x_0'[\tau]^3 + 2\,\omega_1\,\omega_2\,x_0'[\tau]^3 - \omega_2\,x_1'[\tau] + 3\,\omega_1^2\,x_0'[\tau]^2\,x_1'[\tau] + 3\,\omega_2\,x_0'[\tau]^2\,x_1'[\tau] + \\
& \quad 3\,\omega_1\,x_0'[\tau]\,x_1'[\tau]^2 + \frac{1}{3}\,x_1'[\tau]^3 - \omega_1\,x_2'[\tau] + 3\,\omega_1\,x_0'[\tau]^2\,x_2'[\tau] + \\
& \quad 2\,x_0'[\tau]\,x_1'[\tau]\,x_2'[\tau] + \omega_2^2\,x_0''[\tau] + 2\,\omega_1\,\omega_2\,x_1''[\tau] + \omega_1^2\,x_2''[\tau] + 2\,\omega_2\,x_2''[\tau]\Big) + \\
& \epsilon^5 \big(\omega_1^2\,\omega_2\,x_0'[\tau]^3 + \omega_2^2\,x_0'[\tau]^3 + \omega_1^3\,x_0'[\tau]^2\,x_1'[\tau] + 6\,\omega_1\,\omega_2\,x_0'[\tau]^2\,x_1'[\tau] + 3\,\omega_1^2\,x_0'[\tau]\,x_1'[\tau]^2 + \\
& \quad 3\,\omega_2\,x_0'[\tau]\,x_1'[\tau]^2 + \omega_1\,x_1'[\tau]^3 - \omega_2\,x_2'[\tau] + 3\,\omega_1^2\,x_0'[\tau]^2\,x_2'[\tau] + 3\,\omega_2\,x_0'[\tau]^2\,x_2'[\tau] + \\
& \quad 6\,\omega_1\,x_0'[\tau]\,x_1'[\tau]\,x_2'[\tau] + x_1'[\tau]^2\,x_2'[\tau] + x_0'[\tau]\,x_2'[\tau]^2 + \omega_2^2\,x_1''[\tau] + 2\,\omega_1\,\omega_2\,x_2''[\tau]\big) + \\
& \epsilon^6 \big(\omega_1\,\omega_2^2\,x_0'[\tau]^3 + 3\,\omega_1^2\,\omega_2\,x_0'[\tau]^2\,x_1'[\tau] + 3\,\omega_2^2\,x_0'[\tau]^2\,x_1'[\tau] + \omega_1^3\,x_0'[\tau]\,x_1'[\tau]^2 + \\
& \quad 6\,\omega_1\,\omega_2\,x_0'[\tau]\,x_1'[\tau]^2 + \omega_1^2\,x_1'[\tau]^3 + \omega_2\,x_1'[\tau]^3 + \omega_1^3\,x_0'[\tau]^2\,x_2'[\tau] + \\
& \quad 6\,\omega_1\,\omega_2\,x_0'[\tau]^2\,x_2'[\tau] + 6\,\omega_1^2\,x_0'[\tau]\,x_1'[\tau]\,x_2'[\tau] + 6\,\omega_2\,x_0'[\tau]\,x_1'[\tau]\,x_2'[\tau] + \\
& \quad 3\,\omega_1\,x_1'[\tau]^2\,x_2'[\tau] + 3\,\omega_1\,x_0'[\tau]\,x_2'[\tau]^2 + x_1'[\tau]\,x_2'[\tau]^2 + \omega_2^2\,x_2''[\tau]\big) == 0
\end{aligned}
$$

In[331]:=
```
DSolve[{x0[τ] + x0''[τ] == 0, x0[0] == a0, x0'[0] == 0}, x0[τ], τ]
d0 = Cos[τ] a0;
```

Out[331]= $\{\{x_0[\tau] \to \mathrm{Cos}[\tau]\, a_0\}\}$

```
TrigExpand[
 DSolve[{x1[τ] - (D[d0, {τ, 1}]) + 1/3 (D[d0, {τ, 1}])^3 + 2 ω1 (D[d0, {τ, 2}]) + x1''[τ] == 0,
   x1[0] == 0, x1'[0] == 0}, x1[τ], τ]]
Expand[FullSimplify[1/2 τ Cos[τ] a0 - 1/2 Sin[τ] a0 - 1/8 τ Cos[τ] a0^3 + 3/32 Sin[τ] a0^3 + 1/32 Cos[τ]^2
     Sin[τ] a0^3 - 1/96 Sin[τ]^3 a0^3 + τ Sin[τ] a0 ω1]] /. {τ Cos[τ] → 0, τ Sin[τ] → 0}
d1 = Expand[1/96 × (48 (-Sin[τ]) a0 + (+9 Sin[τ] + Sin[3 τ]) a0^3)];
```

Out[333]= $\left\{\left\{x_1[\tau] \to \frac{1}{2}\tau\,\mathrm{Cos}[\tau]\,a_0 - \frac{1}{2}\mathrm{Sin}[\tau]\,a_0 - \frac{1}{8}\tau\,\mathrm{Cos}[\tau]\,a_0^3 + \frac{3}{32}\mathrm{Sin}[\tau]\,a_0^3 + \frac{1}{32}\mathrm{Cos}[\tau]^2\,\mathrm{Sin}[\tau]\,a_0^3 - \frac{1}{96}\mathrm{Sin}[\tau]^3\,a_0^3 + \tau\,\mathrm{Sin}[\tau]\,a_0\,\omega_1\right\}\right\}$

Out[334]= $-\frac{1}{2}\mathrm{Sin}[\tau]\,a_0 + \frac{3}{32}\mathrm{Sin}[\tau]\,a_0^3 + \frac{1}{96}\mathrm{Sin}[3\,\tau]\,a_0^3$

In[353]:=

```
TrigExpand[DSolve[{x2[τ] - ω1 (D[d0, {τ, 1}]) + ω1 (D[d0, {τ, 1}])^3 - (D[d1, {τ, 1}]) +
    (D[d0, {τ, 1}])^2 (D[d0, {τ, 1}]) + ω1^2 (D[d0, {τ, 2}]) + 2 ω2 (D[d0, {τ, 2}]) +
    2 ω1 (D[d1, {τ, 2}]) + x2''[τ] == 0, x2[0] == 0, x2'[0] == 0}, x2[τ], τ]]
```

$$\text{Expand}\Big[\text{FullSimplify}\Big[-\frac{1}{4}\tau\,\text{Sin}[\tau]\,a_0+\frac{1}{256}\text{Cos}[\tau]\,a_0^3-\frac{3}{8}\tau\,\text{Cos}[\tau]\,a_0^3-\frac{1}{256}\text{Cos}[\tau]^3 a_0^3+\frac{9}{32}\text{Sin}[\tau]\,a_0^3+\frac{3}{64}\tau\,\text{Sin}[\tau]\,a_0^3+\frac{3}{32}\text{Cos}[\tau]^2\text{Sin}[\tau]\,a_0^3+\frac{3}{256}\text{Cos}[\tau]\,\text{Sin}[\tau]^2 a_0^3-\frac{1}{32}\text{Sin}[\tau]^3 a_0^3+\tau\,\text{Cos}[\tau]\,a_0\,\omega_1-\text{Sin}[\tau]\,a_0\,\omega_1-\frac{15}{32}\tau\,\text{Cos}[\tau]\,a_0^3\,\omega_1+\frac{57}{128}\text{Sin}[\tau]\,a_0^3\,\omega_1+\frac{3}{128}\text{Cos}[\tau]^2\text{Sin}[\tau]\,a_0^3\,\omega_1-\frac{1}{128}\text{Sin}[\tau]^3 a_0^3\,\omega_1+\frac{1}{2}\tau\,\text{Sin}[\tau]\,a_0\,\omega_1^2+\tau\,\text{Sin}[\tau]\,a_0\,\omega_2\Big]\Big]\;/.\;\{\tau\,\text{Cos}[\tau]\to 0,\ \tau\,\text{Sin}[\tau]\to 0\}$$

$$\text{d2}=\frac{1}{256}\text{Cos}[\tau]\,a_0^3-\frac{1}{256}\text{Cos}[3\tau]\,a_0^3+\frac{9}{32}\text{Sin}[\tau]\,a_0^3+\frac{1}{32}\text{Sin}[3\tau]\,a_0^3;$$

Out[353]=

$$\Big\{\Big\{x_2[\tau]\to-\frac{1}{4}\tau\,\text{Sin}[\tau]\,a_0+\frac{1}{256}\text{Cos}[\tau]\,a_0^3-\frac{3}{8}\tau\,\text{Cos}[\tau]\,a_0^3-\frac{1}{256}\text{Cos}[\tau]^3 a_0^3+\frac{9}{32}\text{Sin}[\tau]\,a_0^3+\frac{3}{64}\tau\,\text{Sin}[\tau]\,a_0^3+\frac{3}{32}\text{Cos}[\tau]^2\text{Sin}[\tau]\,a_0^3+\frac{3}{256}\text{Cos}[\tau]\,\text{Sin}[\tau]^2 a_0^3-\frac{1}{32}\text{Sin}[\tau]^3 a_0^3+\tau\,\text{Cos}[\tau]\,a_0\,\omega_1-\text{Sin}[\tau]\,a_0\,\omega_1-\frac{15}{32}\tau\,\text{Cos}[\tau]\,a_0^3\,\omega_1+\frac{57}{128}\text{Sin}[\tau]\,a_0^3\,\omega_1+\frac{3}{128}\text{Cos}[\tau]^2\text{Sin}[\tau]\,a_0^3\,\omega_1-\frac{1}{128}\text{Sin}[\tau]^3 a_0^3\,\omega_1+\frac{1}{2}\tau\,\text{Sin}[\tau]\,a_0\,\omega_1^2+\tau\,\text{Sin}[\tau]\,a_0\,\omega_2\Big\}\Big\}$$

Out[354]=

$$\frac{1}{256}\text{Cos}[\tau]\,a_0^3-\frac{1}{256}\text{Cos}[3\tau]\,a_0^3+\frac{9}{32}\text{Sin}[\tau]\,a_0^3+\frac{1}{32}\text{Sin}[3\tau]\,a_0^3-\text{Sin}[\tau]\,a_0\,\omega_1+\frac{57}{128}\text{Sin}[\tau]\,a_0^3\,\omega_1+\frac{1}{128}\text{Sin}[3\tau]\,a_0^3\,\omega_1$$

In[359]:=

$$\text{d0}+\epsilon\,\text{d1}+\epsilon^2\,\text{d2}$$

Out[359]=

$$\text{Cos}[\tau]\,a_0+\epsilon\left(-\frac{1}{2}\text{Sin}[\tau]\,a_0+\frac{3}{32}\text{Sin}[\tau]\,a_0^3+\frac{1}{96}\text{Sin}[3\tau]\,a_0^3\right)+\epsilon^2\left(\frac{1}{256}\text{Cos}[\tau]\,a_0^3-\frac{1}{256}\text{Cos}[3\tau]\,a_0^3+\frac{9}{32}\text{Sin}[\tau]\,a_0^3+\frac{1}{32}\text{Sin}[3\tau]\,a_0^3\right)$$

1. $f(x)=a\cos(x)$

2. $g(x)=b\left(-\frac{a}{2}\sin(x)+\frac{3a^3}{32}\sin(x)+\frac{a^3}{96}\sin(3x)\right)$

3. $h(x)=b^2\left(\frac{a^3}{256}\cos(x)-\frac{a^3}{256}\cos(3x)+\frac{9a^3}{32}\sin(x)+\frac{a^3}{32}\sin(3x)\right)$

4. $f(x)+g(x)+h(x)$

5. $a=1$ (−10 … 10)

6. $b=4.2$ (−10 … 10)

7.