

高中物理讲义

高寒*

2021 年 2 月 25 日

目录

1 引言、质点和运动的描述	3
1.1 高中物理的研究对象	3
1.2 质点	3
1.3 运动的描述	4
1.4 速度和加速度	5
2 匀加速直线运动的规律	9
2.1 速度时间关系	9
2.2 位移时间关系和位移速度关系	9
2.3 追击问题	10
2.4 其他习题	11
3 静力平衡	13
3.1 矢量合成和正交分解	13
3.2 常见力的特征	13
3.3 典型习题	14
4 牛顿第二定律	16
4.1 牛顿第二定律的理解	16
4.2 整体法与隔离法	16
4.3 量纲分析	17
5 多过程的牛顿第二定律分析	19
5.1 单物体的多过程分析：斜面-平面模型	19
5.2 多物体的多过程分析：物块-木板模型	21

*gaoh26@mail2.sysu.edu.cn

目录	2
6 能量和动量	23
6.1 功和势能	23
6.2 动能和动能定理	23
6.3 机械能守恒定律	24
6.4 动量定理和动量守恒	24
7 直线运动综合问题	27
8 平抛运动	30
8.1 速度合成	30
8.2 曲线运动	31
8.3 平抛运动	32
9 匀速圆周运动	35
9.1 角速度和线速度	35
9.2 向心加速度	36
9.3 离心现象	39
10 万有引力定律	40
10.1 万有引力	40
10.2 行星轨道和开普勒定律	42
10.3 椭圆轨道	43

1 引言、质点和运动的描述

1.1 高中物理的研究对象

目前来看，你觉得高中物理都讲了些什么？研究什么问题？未来可能继续学习什么内容？

- 如果要理一条主线，高中物理主要是讲**质点**在各种**力**的作用下如何**运动**，也就是质点牛顿第二定律的应用。
- 全国卷高考物理有 2 道大题，一般都围绕这个话题展开。一般一道题涉及电、另一题为纯力学，且喜欢考直线运动（e.g. 木板滑块模型） \Rightarrow 高一上的知识点是整个高中物理的基础，也是高考的重点。

怎么学习？

- 多阅读教材，熟悉基本**概念**：了解概念背后的**数学工具**，熟悉定律定理对应的典型物理**现象**；
- 多想一些实际例子，建立清晰的物理图像 \Rightarrow 对题目能够很清晰地想清楚物理过程，这对高考的物理综合大题非常重要！

1.2 质点

怎么理解质点？

- 不妨把我们的问题放大一点，看看怎么理解物理中的各种模型。
- 质点可以理解成数学中的点，它的唯一属性是质量 m （未来还会引入电荷 q ）。 \Rightarrow 高度抽象化和理想化。
- 如果题目没有说，质点**不会碎**；在高中阶段，所有的质点都**不会转**。
 - 不会碎：质点永远只是一个点，就像小时候玩的弹珠：只要不用太大的力，它永远都是一个坚硬的球体。（著名段子：坚不可摧的小滑块）
 - 不会转：质点不会自己转动。高中阶段不考虑转动。下面的问题具有启发性：

例 1.1 一个玻璃弹珠从倾角为 θ 的斜面下滚下，其加速度大小是多少？是 $g \sin \theta$ 吗？

解答 1.1 答案不是著名的 $g \sin \theta$ 。因为弹珠是从斜面上滚下而不是滑下，它会越滚越快从而消耗一部分重力势能，使得加速度小于 $g \sin \theta$ 。真实的答案是 $a = \frac{5}{7}g \sin \theta$ 。（怎么得到这个答案的？超纲啦，别管）

如果考虑的是小滑块，那么加速度就是 $g \sin \theta$ 。 \Rightarrow 高中物理不考虑质点的转动！

- 因此，老生常谈的例题：研究地球绕太阳转的时候，可以把地球当初质点；研究地球自转的时候就不行。

物理中的其他模型也是这样高度抽象化的，当然，考虑清楚什么时候这种抽象是合理的是一种重要的，需要慢慢培养的能力。来看另外一个抽象的例子：

例 1.2 将一个质量为 2 kg 的物块靠近一个粗糙的竖直墙面后松手，请问墙面和滑块间有没有**摩擦力**的作用？墙面和滑块间有没有**力**的作用？

解答 1.2 滑块对墙面没有正压力的作用 \Rightarrow 由 $f = \mu N$ ，不存在摩擦力作用。

但有没有**力**的作用呢？肯定是没有了。但是比较杠的同学可能会说，任何两个物体都存在万有引力，为什么不考虑呢？

两个物体间万有引力的公式为 $F = \frac{Gm_1m_2}{r^2}$ ， G 在国际单位制下大概是 6.7×10^{-11} ，两个相隔 0.1 m ，质量在 kg 量级的物体间万有引力只有 $\sim 10^{-9} \text{ N}$ 。而这里我们考虑的力都在 $mg \sim 10 \text{ N}$ 的量级，因此在这种问题里我们就当万有引力不存在了。

同样的哲学：为什么研究地球公转的时候不用考虑自转？地球半径 $R_{\oplus} \approx 6000 \text{ km}$ ；地日距离 $r \approx 2 \times 10^8 \text{ km}$ ，相比起来实在太小了！

1.3 运动的描述

我们已经同意了质点就是一个数学上的点，那么，怎么描述运动？

- 数学和物理是不可分离的整体，在学习物理时要主动借用初高中数学中学到的工具！即使高中物理老师常常回避这个问题 \Rightarrow 初中的平面直角坐标系、三角函数；高中将要学到的向量和导数都是帮助理解物理概念的重要数学工具，在将来学到这些数学时要主动跟物理联系起来。
- 数学上，点的位置用坐标系描述，点的坐标为 (x, y) 。高一上学期，我们考虑的问题更简单：质点只在 x 轴上运动 \Rightarrow 我们只需要一个坐标 x 。
- 质点的坐标 x 是时间 t 的函数，就是一个类似于抽象成 $f(x)$ 的关系式 $x(t) \Rightarrow$ 如果 $x(t)$ 的表达式已知，质点的运动也就清楚了。
- 数学里函数图像是研究函数的重要工具 \Rightarrow 我们也把 $x(t)$ 做成一个图，并且物理老师给它起了一个有点可怕的名字，叫 $x-t$ 图。

例 1.3 以 2 m/s 的速度匀速运动的质点在 $t = 3 \text{ s}$ 时位于 $x = 3 \text{ m}$ 的位置，它的位置时间关系写成公式是什么样子？画成 $x-t$ 图是什么样子呢？

解答 1.3 虽然这是一个很简单的问题，但是请在下面自己写写吧：

1.4 速度和加速度

为什么匀速直线运动的平均速度就等于瞬时速度？

- 质点在 $(t, t + \Delta t)$ 时间段里的**平均速度**定义为

$$\bar{v} = \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} \quad (1)$$

而质点在 t 时刻的**瞬时速度**就是令 $\Delta t \rightarrow 0$ 的 \bar{v} 。

- 平均速度对一个时间段定义，而瞬时速度对一个时间点定义。
- 令 $\Delta t \rightarrow 0$ 得到瞬时速度的操作也可以对任意的数学函数 $f(x)$ 做，它在数学上叫做求导数，我们会在高一下学期的数学课上学习到这种操作和导数的具体计算，从而更好地回来理解这一块知识点。不过我们可以看一个简单的例子体验一下：

例 1.4 如果一个质点的运动规律是 $x = t^2 + 3$ ，求它在 $(2 \text{ s}, 2 \text{ s} + \Delta t)$ 时间段内的平均速度和 2 s 时的瞬时速度。

解答 1.4 按定义

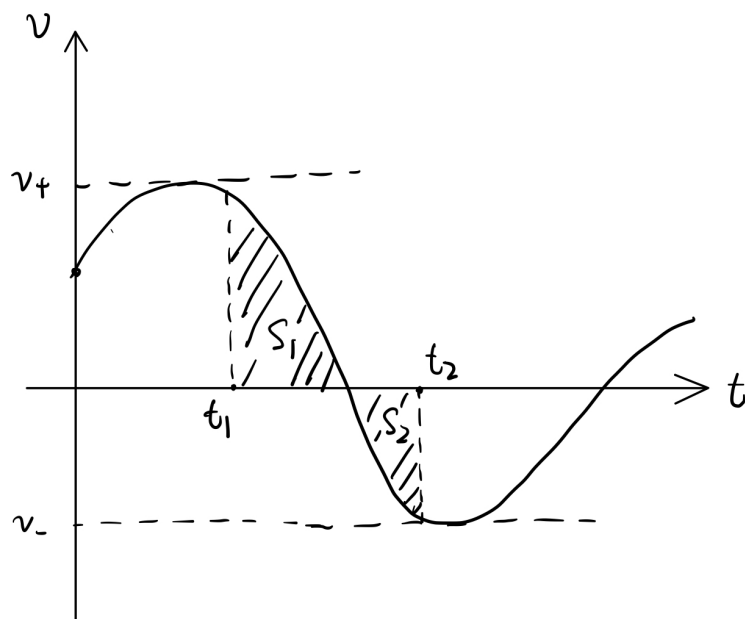
$$\bar{v} = \frac{(2 + \Delta t)^2 + 3 - (2^2 + 3)}{\Delta t} = \frac{4 + 4\Delta t + \Delta t^2 - 4}{\Delta t} = 4 + \Delta t \quad (2)$$

从而再让 Δt 趋于零得到 $t = 2 \text{ s}$ 的瞬时速度 $v = 4 \text{ m/s}$ 。

- 对应应在 $x - t$ 图上，在 t 时刻质点的瞬时速度就是 $x - t$ 曲线在那一点处的斜率（画个图在下面解释一下）。

现在你应该能回答我们开头提出的问题了！

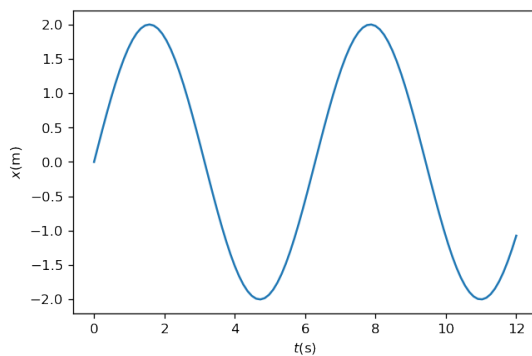
- 把上面的所有 x 改成 v ； v 改成 a 就是平均加速度和瞬时加速度的定义。
 - 速度 v 衡量位置 x 的变换快慢；而 a 就相应地衡量 v 的变换快慢。
 - 就像某时刻的速度 v 和位置 x 毫无关系一样，某时刻的 a 也和 v 毫无关系（e.g. 刚点火的火箭具有巨大的 a ，而 v 几乎为 0；在高空巡航的客机有很大的 v ，而 a 几乎为 0）。
 - 学完高一上学期应该很清楚了：为什么研究加速度？因为它出现在我们的中心定律 $F = ma$ 的右端！
 - 对 $x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t$ 做一次“求导数”操作得到 $v(t)$ 函数；再对 $v(t)$ 函数做一次“求导数”操作可以得到加速度 a ，从而可以自己验证这个公式的正确性。感兴趣就自己动手试试吧！
- 研究这种问题的一个更加 powerful 的工具就是 $v - t$ 图，它就是函数关系 $v(t)$ 的函数图像。
 - 中心结论： $v - t$ 曲线和 t 轴围成的面积是质点在这段时间内的位移 Δx ； $v - t$ 曲线在某点处的斜率是质点在这个时刻的速度。
 - 上面两个东西都区分正负：如果曲线在 t 轴下方，则围成面积为负，位移也为负（为什么？曲线在 t 轴下方 $\Rightarrow v < 0 \Rightarrow$ 质点朝 $-x$ 方向运动）；如果斜率为负，加速度 a 就为负（为什么？斜率为负表示速度在减小）。
 - 斜率为 0 的点，质点速度达到最大或最小值。
 - 看图 1...

图 1: 一个典型的 $v-t$ 图

— $v-t$ 曲线为倾斜直线 \Rightarrow 斜率为常数 $\Rightarrow a$ 为常数 \Rightarrow 质点做匀加速直线运动 (曲线就一定为变加速!)

下面一个题有一定难度, 不过如果你能理清这例题, 你就能理清 $v-t$ 图这一节的所有概念!

例 1.5 质点的运动规律是 $x = 2 \sin t$ (m), 如图 2, 试大概画出对应的 $v-t$ 图, 并指出质点的加速度什么时候达到最大? 质点的位置什么时候达到最大? 对于这个运动你还能说出一些什么特征?

图 2: $x = 2 \sin t$ (m) 对应的 $x-t$ 图

解答 1.5 自己动手做一做！

2 匀加速直线运动的规律

我们上一讲的末尾介绍了高中物理大杀器 $v-t$ 图。这一节我们来小试牛刀，用它来复习一下匀加速直线运动。

2.1 速度时间关系

匀加速直线运动的规律那么多条，怎么记住？

- 答案是，你只用记一条：

$$v = at + v_0 \quad (3)$$

说一说上面这个公式里每个参数的物理意义？

2.2 位移时间关系和位移速度关系

后面那么多怎么办呢？

- 先画出 $v = at + v_0$ 对应的 $v-t$ 图。利用规律“ $v-t$ 图和 t 轴围成的面积就是质点的位移”，得到

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t \quad (4)$$

- 怎么用 $v-t$ 图推出速度位移关系？看图 3。

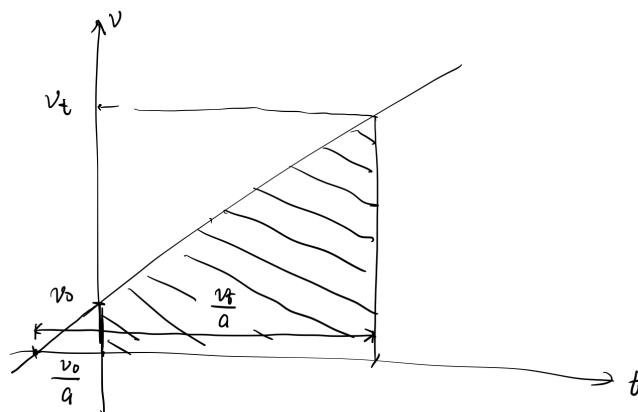


图 3: 用 $v-t$ 图得到速度位移关系

提示够多啦，请自己写出完整的推导过程。

例 2.1 解释公式 $\Delta s = at^2$ 的中各个符号的物理含义，在一个 $v-t$ 图上画出各个物理量并用 $v-t$ 图证明之。

解答 2.1 自己动手做一做！

老师好无聊，为什么非要用 $v-t$ 图这种东西研究？

- 可视：容易建立清晰的物理图像。在力学大题中一般涉及多个过程 $\Rightarrow v-t$ 图可以更方便地研究相对运动趋势；判断摩擦力方向等，因此最好从最基本的物理开始就熟悉运用 $v-t$ 图这种工具！

例 2.2 用 $v-t$ 图证明对匀加速直线运动有

$$\bar{v}_{(t_1, t_2)} = \frac{v(t_2) + v(t_1)}{2} = v\left(\frac{t_1 + t_2}{2}\right) \quad (5)$$

指明上式每个表达式对应的 $v-t$ 图几何元素，说出上式的几何原理和物理意义。

解答 2.2 (回想一下梯形中位线的几何性质...)

2.3 追击问题

- 追击问题的最有效解决工具就是 $x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0$ ，然后就可以转换成初中二次函数求最值问题无脑做了。

- 不过也要理清楚物理图像，比如问一下自己，为什么两者速度相等时相距最大/最小？和你直接用二次函数求最值的方法一致吗？

例 2.3 静止的警车发现前方 100 m 处有一辆违法车辆以 72 km/h 的速度行驶，警车立即以 $a = 2 \text{ m/s}^2$ 的恒定加速度追赶。由于当天大雾，当两车相距 240 m 后便会失去视野而无法再跟踪车辆。请问警车能否追上违法车辆？

解答 2.3 以警车为原点建立一维坐标系 Ox ，警车的速度-时间关系写为

$$x_1 = t^2 \quad (6)$$

犯罪车辆的速度-时间关系为

$$x_2 = 20t + 100 \quad (7)$$

两者的距离差为

$$s = x_2 - x_1 = -t^2 + 20t + 100 \quad (8)$$

根据数学中的二次函数知识，当 $t = \frac{20}{2} \text{ s} = 10 \text{ s}$ 时， s 有最大值 $-10^2 + 200 + 100 = 200(\text{m})$ ，小于 240 m。此后警车开始靠近违法车辆，故可以追上。

2.4 其他习题

- 其他习题主要涉及匀加速直线运动的复杂计算和读 $v-t$ 图。主要运用的工具还是 $v-t$ 图，它能很好地帮你看清问题。
- 灵活运用 $v^2 - v_0^2 = 2ax$ 和 $\Delta s = aT^2$ 有时可以很大地减小计算量。

例 2.4 坐标轴上有原点 O 和三点 ABC ，其中 $AB = s_1, BC = s_2$ 。一静止质点在 $t = 0$ 时刻开始从原点做匀加速直线运动，通过 AB 段和通过 BC 段的时间相等，求 OA 长度。

解答 2.4 画出 $v-t$ 图：

假设相等的时间是 T ，则加速度为 $a =$ ，且 B 点速度为 $v_B =$ ，最后在 $v-t$ 图上补完所有可以推得的物理量求得 $OA =$ 。

- $v-t$ 图同样可以很方便地解决比例问题。

- 不要去刻意记忆那些奇奇怪怪的比例式！
- 初中几何：相似三角形，面积比 = 边长比²。

例 2.5 求下列比例问题：

1. 从 $t = 0$ 时刻从原点开始做自由落体的质点，以 y_n 表示质点在 $t = n$ s 时的位置； $s_n = y_{n+1} - y_n$ 表示质点第 n 秒内的位移。求 $y_1 : y_2 : \cdots : y_n$ 和 $s_1 : s_2 : \cdots : s_n$ ；
2. 如图 4，一列有 N 节车厢的火车从站台静止开始匀加速开出，一个无聊的人站在火车头旁的站台处看火车，火车开动的时间为 $t = 0$ 。若他看到火车头完全离开他的时间为 T ，则整列火车完全离开他的时间 t_N 是多少？

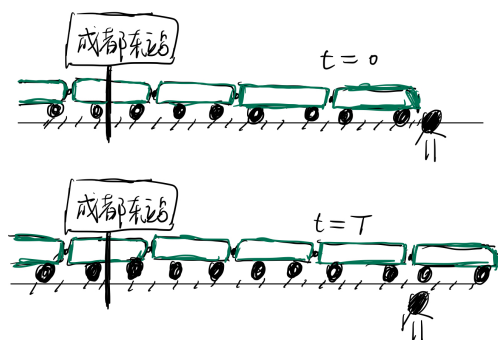


图 4: 看！火车

解答 2.5 从静止开始的匀加速直线运动 $v-t$ 图过原点，所以...

3 静力平衡

3.1 矢量合成和正交分解

什么是矢量？力和速度是矢量吗？电流是矢量吗？

- 矢量有大小和方向，还必须符合平行四边形定则（或三角形定则，更常用）。
- 数学上的向量：在坐标系中表示成一个数组 $\vec{a} = (a_x, a_y) \Rightarrow$ 物理上的 jargon：矢量的正交分解（i.e. 正交 = 两个垂直方向）。
- 常用的正交分解方案：遇到斜面沿斜面；其他问题沿竖直和水平方向。
- 合力和分力：等效替代的思想。
- 平衡条件：系统内各个质点受到的合外力在 x, y 两个方向上都为 0

$$\begin{aligned} F_{1x} + F_{2x} + \dots F_{nx} &= 0 \\ F_{1y} + F_{2y} + \dots F_{ny} &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

区分方向：正交分解后，沿 x 正方向的力写正号；负方向写负号（和速度一样）。

例 3.1 若质点在 n 个力的作用下平衡，则力 F_1, \dots, F_{n-1} 的合力 F_t 和 F_n 的关系是什么？

解答 3.1 自己试一试！如果一下想不出来，先考虑 $n = 2, 3$ 的情况...

- 受力分析：整体法与隔离法。结合生活实际经验，先定性分析想清楚图像！
顺序：重力 \rightarrow 弹力 \rightarrow 摩擦力（为什么有这个顺序？）
- 整体法的物理依据是什么？

3.2 常见力的特征

杆和绳有什么区别？

- 重力：竖直向下，正比于质量（生活常识）

$$G = mg \quad (10)$$

质量和重量的区别：日常生活中不区分，物理上？ \Rightarrow 质量用 $m = F/a$ 定义；重量是在地球表面测到的 mg 值 \Rightarrow 在月球表面，因为月球的 g 大概是地球的 $1/6$ ，同样的物体重量也变成原来的 $1/6$ ，但是质量不变。

- 弹力：与形变方向相反，大小正比于形变量： $F = kx$ 。 \Rightarrow **硬**杆是什么意思？ $k \rightarrow \infty$ 使得形变可以忽略不计，提供任意的弹力。
- 摩擦力
 - 不管是静摩擦力还是滑动摩擦力，总是阻碍相对运动（趋势）：不准离开我
 - 静摩擦力：有一个最大值，一般题目不明说可以认为近似等于滑动摩擦力 $f = \mu N$ 。 \Rightarrow 如果没有沿表面的压力 N ，任何情况下也不会有静摩擦力。
 - 滑动摩擦力： $f = \mu N$ ，只取决于这两个因素！

高二开始会学习简单的电场力和磁场力，不过也万变不离其中。

3.3 典型习题

- 斜面滑块问题：

例 3.2 固定斜面上放置一个物块，认为最大静摩擦力等于滑动摩擦力，摩擦系数为 μ ，倾角为 α 。如果物块能够沿斜面滑下， μ 和 α 之间应该满足？

解答 3.2 思路：定性分析：生活经验， θ 越大， μ 越小，越容易滑下。

做法：正交分解，最大滑动摩擦力等于

- 自锁问题：

例 3.3 拖把和地面的摩擦系数为 μ ，拖把自重不计。拖把杆与地面夹角至少为多大时，无论使多大的力都无法推动拖把？

解答 3.3 思路：定性分析：生活经验， $\theta = 90^\circ$ 时，肯定没法推动； $\theta = 0^\circ$ 时，一点点力就可以推动（为什么？） $\Rightarrow \theta$ 越大，越难推动。

做法：正交分解，最大滑动摩擦力大于

，人施加的水平方向分力（动力）等于

。要推动，动力要大于

。从而列出等式...

如果考虑拖把自重呢？刚才的定性分析不会有太大变化,具体计算？试一试!(如何快速检查你的结果？和上题比较，取极限...

- 摩擦力叠叠乐：先整体再隔离的一般思路。

4 牛顿第二定律

4.1 牛顿第二定律的理解

- 牛顿第二定律是连接运动学和力学的桥梁

$$F = ma \quad (11)$$

- 定量地定义了惯性（惯性 = 质量）：质量是物体被外力改变运动状态的难易程度。
- 矢量等式： $\vec{F} = m\vec{a}$ ，在平面内找两个正交方向 x, y ，实际上牛顿第二定律是两个方程：

$$\begin{aligned} F_x &= ma_x \\ F_y &= ma_y \end{aligned} \quad (12)$$

- 牛顿第二定律是一个**方程**，也就是等号两边描述的是不同的对象。 \Rightarrow 绝不能把加速度和力混为一谈。 \Rightarrow 运用牛顿第二定律解题时，**坚持左边写合外力、右边写加速度的原则！**。

4.2 整体法与隔离法

- 牛顿第二定律具有**可加性**：假设有两个物体 A, B ，分别受到外力 \vec{F}_A, \vec{F}_B ，加速度为 \vec{a}_A, \vec{a}_B ，且存在相互作用力： A 对 B 为 \vec{F}_{AB} ， B 对 A 为 \vec{F}_{BA} 。 \Rightarrow 分别列出各自的牛顿第二定律

$$\begin{aligned} \vec{F}_A + \vec{F}_{BA} &= m_A \vec{a}_A \\ \vec{F}_B + \vec{F}_{AB} &= m_B \vec{a}_B \end{aligned} \quad (13)$$

\Rightarrow 两式相加，牛顿第三定律保证了 $\vec{F}_{AB} + \vec{F}_{BA} = 0 \Rightarrow$

$$\vec{F}_A + \vec{F}_B = m_A \vec{a}_A + m_B \vec{a}_B \quad (14)$$

- 物理诠释：将 A, B 打包成一个整体系统，系统受的总合外力等于系统内部的所有 $m\vec{a}$ 相加，并且不用考虑系统内力。 \Rightarrow **整体法**的物理依据。

例 4.1 两个用弹簧连接的物块在空中自由下落，上方物块的质量为 $m_1 = 2 \text{ kg}$ ，下方物块的质量为 $m_2 = 1 \text{ kg}$ ，某一时刻测得上方物块向下掉落的加速度为 8 m/s^2 ，求下方物块此时的加速度和弹簧的弹力。指明弹簧此时是压缩还是拉伸。

解答 4.1 先整体法：打包成整体，只受重力。 \Rightarrow 列出等式

$$(m_1 + m_2)g = m_1 a_1 + m_2 a_2 \quad (15)$$

$\Rightarrow a_2 =$ 。

再对随意一个物块单独分析：请自己完成这部分。

例 4.2 一个倾角为 θ 的粗糙斜面固定在水平面上，其上放置一个质量为 m 的物块，物块以 a 的加速度下滑，地面对斜面的支持力是多大？朝什么方向？地面对斜面的摩擦力是多大？朝什么方向？

解答 4.2 正交分解后在水平和竖直方向上分别列整体法的等式：

4.3 量纲分析

为什么初中教 $g = 9.8 \text{ N/kg}$ ，高中教 $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ ？

- 物理的等式不仅是数的等式，更是量的等式 \Rightarrow 带单位计算，等式左右两边必须是同类单位

例 4.3 判断以下表达式是否可能正确。

1. $s = v^2/t$

2. $v = s_1 s_2/t$

解答 4.3 第一个等式左边单位为 m ，右边为 m^2/s^3 ，非同类单位，不可能正确。
第二个

- 牛顿第二定律给出了力的单位： $1 \text{ N} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2$ 。

- 量纲分析：高中力学只有 3 个基本单位 m, s, kg ，其他单位，如牛顿 N ，焦耳 J 都可以写成这三个基本单位的乘积。 \Rightarrow 用单位来排除选择题错误答案，快速检查自己计算题结果。

例 4.4 单摆的周期（摆动一个往返的时间） T 可能和摆长 l ，重力加速度 g 以及摆的质量 m 有关，下面哪个可能是 T 的正确公式？

(A) $T = 2\pi \frac{l}{g}$ (B) $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{mg}}$ (C) $T = 2\pi \frac{mg}{l}$ (D) $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$

解答 4.4 自己试试，算出各选项右边表达式对应的单位。

5 多过程的牛顿第二定律分析

应用牛顿第二定律的关键是求出各物体在各阶段的加速度，再用 $v-t$ 图分析运动。

5.1 单物体的多过程分析：斜面-平面模型

- 从斜面上滑下再停止：对每个过程分别列出牛顿第二定律后算出每个过程的加速度，用 $v-t$ 图分析。

例 5.1 如图 5， $m = 0.5 \text{ kg}$ 的质点从距斜面低端 $L = 25 \text{ m}$ 的地方滑下，斜面的倾角为 $\theta = 37^\circ$ ，质点与斜面的动摩擦因数为 $\mu_1 = 0.5$ ，与水平地面的动摩擦因数为 $\mu_2 = 0.4$ ，求质点运动的总时间。



图 5: 斜面-平面模型

解答 5.1 受力分析：在斜面上，质点受到重力 mg 、斜面对质点的支持力 N 和斜面对质点的摩擦力 $f = \mu_1 N$ ，在垂直斜面方向列出牛顿第二定律

$$mg \cos \theta - N = 0 \quad (16)$$

在平行斜面方向列出牛顿第二定律

$$mg \sin \theta - f = ma_1 \quad (17)$$

从中解得 $a_1 =$

在水平面上，在竖直和水平方向分解，质点的加速度为 $a_2 = \mu_2 g = 4 \text{ m/s}^2$ ，方向向左。

质点将在水平面上一直减速运动直到停止，画出过程的 $v-t$ 图，算出关键点的坐标

思考：给定 $m = 0.5 \text{ kg}$ 是多余条件吗？量纲分析的角度...

- 如果水平面变成传送带，如何处理？摩擦减速过程结束 = 质点静止 = 质点和水平面速度相等（都为 0） \Rightarrow 在传送带上：摩擦减速过程结束 = 质点和传送带速度相等。（生活经验：安检传送带）

例 5.2 其他条件不变，将上面例题里的地面换成以 $v_0 = 2 \text{ m/s}$ 向右运行的传送带，其他条件不变，怎么解决？

解答 5.2 牛顿第二定律求加速度的部分不会变化，唯一变化的是...

- 如果物体初速度不为零，需要分成几个过程分析？

例 5.3 例 5.1 中其他条件不变，但质点一开始有沿斜面向上的初速度 $v_0 = 5 \text{ m/s}$ 。

解答 5.3（质点向上运动和下滑过程中摩擦力一样吗？）

5.2 多物体的多过程分析：物块-木板模型

- 两物体画在同一个 $v-t$ 图上 \Rightarrow 两条线夹成的面积 = 相对位移（为什么？两个角度证实）
- $v-t$ 图判断共速时的时间和速度、共速前的位移 \Rightarrow 是否会掉下木板。

例 5.4 如图 6，光滑水平面上有一个质量为 $M = 2 \text{ kg}$ 的无限长木板，另有一质量为 $m = 1 \text{ kg}$ 的木块以 $v_0 = 6 \text{ m/s}$ 的速度从左端冲上木板，它们随即开始向右运动。木板和木块之间的动摩擦因数为 0.4。求两者的最终速度和木块在木板上划过的长度。

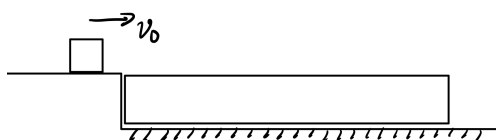


图 6: 物块-木板模型

解答 5.4 对物块应用牛顿第二定律：

对木板应用牛顿第二定律：

画出 $v-t$ 图，两线的交点表明木板和物块达到相对静止，不再相对滑动。

从图中读出此时的时间为 $t_c =$ ，速度为 $v_c =$ 。围成的面积为相对位移，为 $\Delta x =$ 。

- 如果水平面光滑，则有 $mv_0 = (m + M)v_c$ （计算验证一下） \Rightarrow 动量守恒定律的体现
- 如果有外力牵引或地面对木板有摩擦：共速后整体法分析得到加速度 a_c ，判断 a_c 和 μg 的相对大小 $\Rightarrow a_c > \mu g$ ，不能一起运动，需要用隔离法分析。

例 5.5 例 5.4 中的其他条件不变, 但

1. 光滑水平面改成 $\mu = 0.1$ 的粗糙水平面;
2. 光滑水平面改成 $\mu = 0.8$ 的粗糙水平面;
3. 水平面光滑, 但有水平向右的恒力 $F = 18 \text{ N}$ 作用在木板上。木板长度有限, 为 $L = 6.6 \text{ m}$ 。求物块在木板上运动的总时间

求两者的最终速度和木块在木板上划过的长度; 并求物块最终停在木板上的位置。

解答 5.5 (记得讨论最终能不能共同运动)

6 能量和动量

6.1 功和势能

初中的时候为什么引入功的概念？

- **功是能量转换的量度**：e.g. 电做了多少功 = 多少电能转换成了其他的能量。
- 人把重物往上提：人消耗自己干饭获得的能量增加重物的势能 \Rightarrow 生活经验：越重、举得越高，消耗能量越大 \Rightarrow 转换的能量 = 功 = $F s$ 。
- 力 \vec{F} ，位移 \vec{s} 都是矢量 $\Rightarrow W = \vec{F} \cdot \vec{s} = F s \cos \theta$ 。 \Rightarrow 垂直于物体运动方向不做功，于运动方向相反的力做负功。
- 合力（矢量和）做功 = 各分力做功之和（代数和）
- 重物向上提，重力势能增大。同时，重力向下，位移向上，重力做负功 \Rightarrow 什么力做负功，什么力对应的能量就增大。
- 滑动摩擦力方向和位移相反 \Rightarrow 摩擦力做负功，热能（内能）增加。
- 不是所有力都有势能：高中范围内，只有重力（引力）、弹力和电场力有相应的势能。

势能的表达式是什么？

- 重力做了多少负功 = 重力势能增大了多少 \Rightarrow 取地面为参考平面（高度 $h = 0$ ）， $E_g = -(-mg) \cdot h = mgh$ 。
- 弹性势能的表达式是什么呢？力 F 随 x 变化... 和 $v-t$ 图下的面积为位移一样的思想 $\Rightarrow E_e = \frac{1}{2} k x^2$ 。（不要求，从量纲分析的角度能知道 $E \propto k x^2$ ）

6.2 动能和动能定理

- 公式 $v_2^2 - v_1^2 = 2as$ 两边同乘 $\frac{1}{2}m \Rightarrow$

$$\frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = F s \quad (18)$$

- 等式右边是功，暗示左边是某种能量 \Rightarrow 定义动能 $E_k = \frac{1}{2} m v^2$ 。
- 动能定理：合外力所做的功等于物体动能的变化量。（对任意运动都成立）

6.3 机械能守恒定律

- 只有重力做功的动能定理：物体从高度 h_1 运动到 h_2

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = (-mg)(h_2 - h_1) \quad (19)$$

\Rightarrow

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + mgh_1 = \frac{1}{2}mv_2^2 + mgh_2 \quad (20)$$

- 物理意义：只有重力做功时，动能 + 势能等于常数
- 推广到有弹力的情况和多个物体组成的系统 \Rightarrow 定义机械能 = 动能 + 势能 \Rightarrow **只有重力和弹力做功（无摩擦力）时，物体（系统）的机械能守恒。【机械能守恒定律】**
- 再推广：能量守恒定律

为什么初中的时候告诉我们使用机械只能省力不能省功？

6.4 动量定理和动量守恒

由 $v_2^2 - v_1^2 = 2as$ 可以得到动能定理，那由另一个相似的公式 $v_2 - v_1 = a\Delta t$ 可以得到什么类似的结论？

- $v_2 - v_1 = a\Delta t$ 两边同乘质量 $m \Rightarrow mv_2 - mv_1 = F\Delta t \Rightarrow$ 定义动量 $p = mv$ ，冲量 $I = F\Delta t$
- 动量定理：

$$I = \Delta p \quad (21)$$

- 是矢量等式！
- 动量定理和动能定理都是牛顿第二定律的推论，不是独立的。

例 6.1 一个质量为 $m = 0.1 \text{ kg}$ 的小球以 $v = 100 \text{ m/s}$ 的速度垂直地砸向一个弹性墙壁，在 0.2 s 后被以原速度大小弹回，求弹性墙壁形变最大时的弹性势能和墙壁受到的平均冲力大小。

解答 6.1 形变最大时，小球不再深入墙壁，所有动能转换为弹性势能

$$E_{p,max} = \frac{1}{2}mv^2 = 500 \text{ J} \quad (22)$$

由动量定理，冲力为

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{mv - (-mv)}{\Delta t} = 100 \text{ N} \quad (23)$$

机械能守恒的动量类比是什么

- 两个物体 A, B 组成的系统，若系统不受外力而只存在内力：分别写出动量定理

$$\begin{aligned}\Delta \vec{p}_A &= \vec{F}_{BA} \Delta t \\ \Delta \vec{p}_B &= \vec{F}_{AB} \Delta t\end{aligned}\quad (24)$$

牛顿第三定律保证 $\vec{F}_{BA} + \vec{F}_{AB} = 0 \Rightarrow \Delta(\vec{p}_A + \vec{p}_B) = 0 \Rightarrow$ **不受合外力的系统动量不变【动量守恒定律】**

- 动量守恒和机械能守恒的适用范围区别：动量守恒无外力（可以有内部的摩擦力）；机械能守恒无摩擦力（可以有外部的重力）
- jargon：弹性碰撞 = 碰撞前后总机械能不变

例 6.2 如图 7。一个质量为 M 的沙袋用绳悬挂在空中，一个质量为 m 的子弹以 V 的速度水平打入沙袋后和沙袋一起运动，求沙袋上升的最大高度。有多少能量转化成了热能？

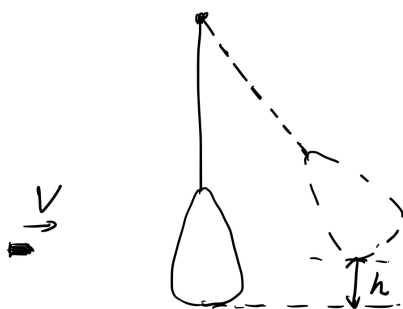


图 7: 子弹和沙袋

解答 6.2 子弹和沙袋组成的系统在子弹打入的瞬间不受合外力作用，满足动量守恒

$$mV = (m + M)v \quad (25)$$

其中 v 是子弹打入后瞬间沙袋的速度。此后两者相对静止，无摩擦耗散，由机械能守恒由

$$\frac{1}{2}(m + M)v^2 = (m + M)gh \quad (26)$$

联立两式容易解得

$$h = \frac{(mV)^2}{2(m + M)^2g} \approx \left(\frac{m}{M}\right)^2 \frac{V^2}{2g} \quad (27)$$

- 这一题目的实际应用？测量 $h \Rightarrow$ 测量子弹速度！

7 直线运动综合问题

- 原则上来说,需要用机械能解决的直线运动问题也可以全部用牛顿第二定律解决 \Rightarrow 求加速度和 $v-t$ 图是永远的重点和工具。
- 2017 年高考后引入了动量作为必考点 \Rightarrow 有一些涉及碰撞的问题需要用动量守恒解决,并且速度可能突变(如果没有碰撞,速度不可能突变)。

例 7.1 (2015 全国卷 2) 下暴雨时,有时会发生山体滑坡或泥石流等地质灾害。某地有一倾角 $\theta = 37^\circ$ 的山坡 C ,上面有一质量为 m 的石板 B ,其上下表面于斜坡平行; B 上有一碎石堆 A (含有大量泥土), A 和 B 均处于静止状态,如图 8 所示。假设某次暴雨中, A 浸湿雨水后总质量也为 m (可视为质量不变的滑块),在极短时间内, A, B 间的动摩擦因数 μ_1 减小为 $\frac{3}{8}$, B, C 间的动摩擦因数 μ_2 减小为 0.5, A, B 开始运动,此时刻为计时起点;在第 2 s 末, B 的上表面突然变为光滑, μ_2 保持不变。已知 A 开始运动时, A 离 B 下边缘的距离 $l = 27$ m, C 足够长,设最大静摩擦力等于滑动摩擦力。取 $g = 10$ m/s², $\sin \theta = 0.6$, 求

1. $0-2$ s 时间内 A 和 B 的加速度大小。
2. A 在 B 上总的运动时间。

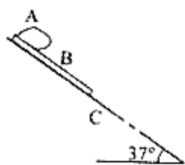


图 8: 例 7.1 题图

解答 7.1

例 7.2 (2017 全国卷 3) 如图 9, 两个滑块 A 和 B 的质量分别为 $m_A = 1\text{ kg}$ 和 $m_B = 5\text{ kg}$, 放在静止于水平地面上的木板的两端, 两者与木板间的动摩擦因数为 $\mu_1 = 0.5$; 木板的质量为 $m = 4\text{ kg}$, 与地面间的动摩擦因数为 $\mu_2 = 0.1$ 。某时刻 A, B 两滑块开始相对滑动, 初速度大小均为 $v_0 = 3\text{ m/s}$ 。 A, B 相遇时, A 与木板恰好相对静止。设最大静摩擦力等于滑动摩擦力, 取重力加速度大小 $g = 10\text{ m/s}^2$, 求

1. B 与木板相对静止时, 木板的速度;
2. A, B 开始运动时, 两者之间的距离

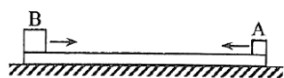


图 9: 例 7.2 题图

解答 7.2

- 关于弹性碰撞的简单结论:
 - 弹性撞墙: 速度反向 (类比光的反射);
 - 两个质量相等的物体弹性碰撞: 交换速度。
- 其他情形: 联立能量守恒 (碰撞前后动能相等) 和动量守恒求解。

例 7.3 (2019 全国卷 3) 静止在水平地面上的两小物块 A, B , 质量分别为 $m_A = 1.0 \text{ kg}$, $m_B = 4.0 \text{ kg}$; 两者之间有一被压缩的微型弹簧, A 与其右侧的竖直墙壁距离 $l = 1.0 \text{ m}$, 如图所示。某时刻, 将压缩的微型弹簧释放, 使 A, B 瞬间分离, 两物块获得的动能之和为 $E_k = 10.0 \text{ J}$ 。释放后, A 沿着与墙壁垂直的方向向右运动。 A, B 与地面之间的动摩擦因数均为 $\mu = 0.20$ 。重力加速度取 $g = 10 \text{ m/s}^2$ 。 A, B 运动过程中所涉及的碰撞均为弹性碰撞且碰撞时间极短。

1. 求弹簧释放后瞬间 A, B 速度的大小
2. 物块 A, B 中的哪一个先停止? 该物块刚停止时 A 与 B 之间的距离是多少?
3. A, B 都停止后, A 与 B 之间的距离是多少?

解答 7.3

8 平抛运动

8.1 速度合成

如何描述平面内的运动？

- 速度是矢量 \Rightarrow 加法遵循平行四边形定则。
- 小船过河问题：速度合成，船在静水中的速度 \vec{v}_b ，河水速度 \vec{v}_r \Rightarrow 实际速度 $\vec{v} = \vec{v}_b + \vec{v}_r$ 。如图 10。

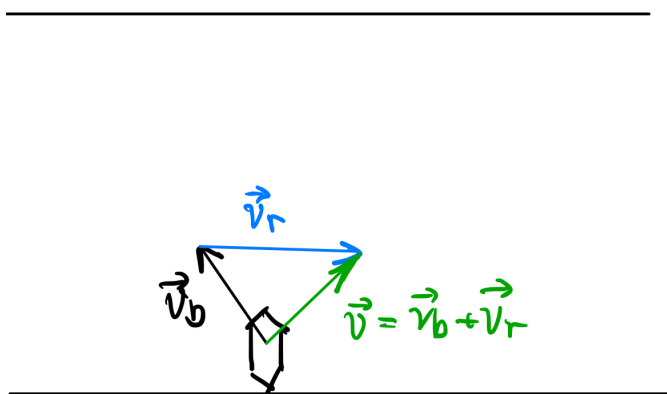


图 10: 小船过河的速度合成

- 以最短时间和最短路程过河。

例 8.1 河两岸之间的距离为 h ，船速大小为 v_b ，方向可以自由调节；水速为 v_r 平行与河岸，求小船过河的最短时间和最短路程。

解答 8.1 最短路程需要分类讨论：看合速度 \vec{v} 可能落在平面上的什么范围内。

8.2 曲线运动

轨迹为曲线时，如何描述质点在某一点的速度方向？

- 按定义

$$\vec{v} = \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} \quad (28)$$

其中 $\vec{r}(t)$ 是质点在 t 时刻的位置，如图 11。

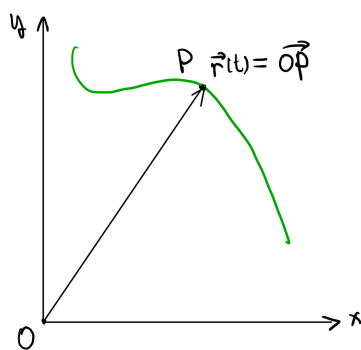


图 11: 质点的位置可以用一个矢量 $\vec{r} = (x, y)$ 描述， x, y 都是 t 的函数

- Δt 越小，越接近切线 \Rightarrow 瞬时速度沿曲线切线方向，如图 12。

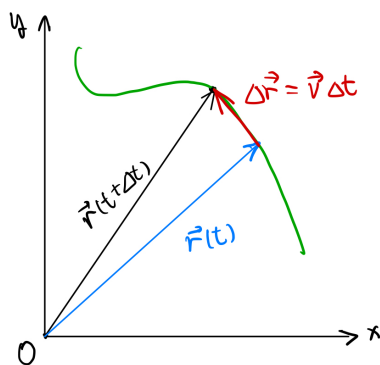


图 12: 速度方向是曲线某点的切线方向

- 数轴图像 \Rightarrow 坐标系图像

- 初中知识：力是改变速度的原因， \vec{F}, \vec{v} 不共线则做曲线运动 \Rightarrow 曲线运动需要力来维持，存在加速度；曲线运动速度方向在不断改变 \Rightarrow 曲线运动无论如何都是变速运动

8.3 平抛运动

为什么二次函数的图像被称为抛物线？

- 如图 13，将质点从 h 的高度以 v_0 的初速度水平抛出
 - 竖直方向受重力 \Rightarrow 自由落体运动 $\Rightarrow y = -\frac{1}{2}gt^2 + h$;
 - 水平方向不受力 \Rightarrow 匀速直线运动 $\Rightarrow x = v_0t$ 。

- 两式消去 t :

$$y = -\frac{g}{2v_0^2}x^2 + h \quad (29)$$

轨迹为一个二次函数。

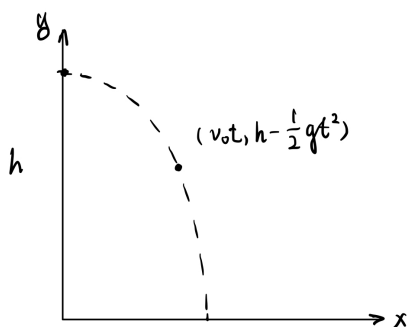


图 13: 平抛运动的轨迹

- 数学上

$$\begin{cases} x = v_0t, \\ y = -\frac{1}{2}gt^2 + h \end{cases} \quad (30)$$

称为参数方程。物理意义：描述质点在 t 时刻的位置。

- 用 $y = -\frac{1}{2}gt^2 + h$ 还是 $y = \frac{1}{2}gt^2$ 取决于具体问题中所建立的 y 轴方向。
- 在 t 时刻的**速度**为 $v_x = v_0, v_y = gt$ ，**速率**为 $\sqrt{v_0^2 + (gt)^2}$ 。

例 8.2 轰炸机在高度为 h 的高空以 v 匀速飞行，欲摧毁一个地面目标，不计空气阻力，请问轰炸机需要在到达目标正上空前提前多少时间投弹？

解答 8.2 定性分析：由于惯性需要提前投弹，高度越高提前时间越长 \Rightarrow 假设需要提前时间为 t ，满足方程

例 8.3 如图 14，从倾角为 α 的足够长斜面顶端以 v 的速度平抛一个质点，求其在斜面上的落点到斜面顶端的距离。

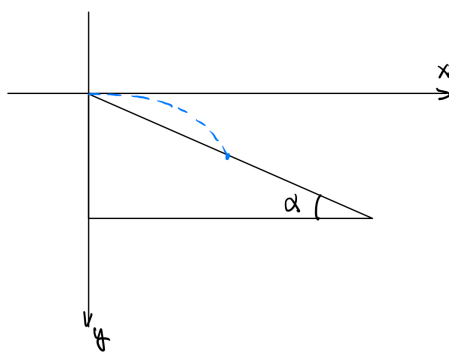


图 14: 斜面平抛模型

解答 8.3 方法 1: 在顶端建立平面直角坐标系 xOy , 联立轨迹方程和直线方程...

方法 2: 利用质点在 t 时刻的位置满足 $\frac{y}{x} = \tan \alpha$, 有方程...

如果斜面长度是有限的, 怎么分类讨论?

9 匀速圆周运动

9.1 角速度和线速度

怎么严格定义匀速圆周运动？

- 轨迹沿圆周（圆周），速率始终不变（匀速）。
- **线速度**为不变的速率：

$$v = \frac{\text{在 } \Delta t \text{ 时间内走过的弧长}}{\Delta t} = \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad (31)$$

- **角速度**为单位时间内走过的圆心角弧度数：

$$\omega = \frac{\text{在 } \Delta t \text{ 时间内转过的弧度数}}{\Delta t} = \frac{\Delta \theta}{\Delta t} \quad (32)$$

- ω 的单位 弧度/s = rad/s = s⁻¹。
- 曲线运动速度方向沿曲线切线方向 \Rightarrow 匀速圆周运动速度方向沿该点切线方向。
- 弧度的定义 $\Delta \theta = \frac{\Delta s}{r} \Rightarrow$

$$v = \omega r \quad (33)$$

- 一图总结：图 15。

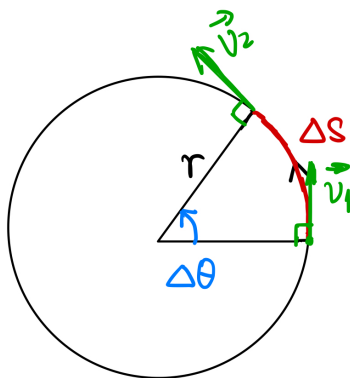


图 15: 匀速圆周运动的速度和角速度

- 匀速圆周运动的周期 = 转一周所花费的时间。一周 = $2\pi \Rightarrow$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (34)$$

如果角的单位用度 ($^{\circ}$) 而非弧度, $v = \omega r$ 还成立吗?

例 9.1 如图 16, 两个齿轮的半径分别为 r_1 和 r_2 。当左边齿轮以 n_1 圈/s 的转速转动时, 右边齿轮的转速是多少?

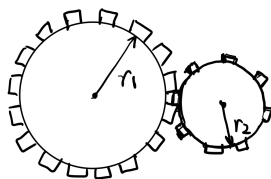


图 16: 两个贴合的齿轮

解答 9.1 分析: 两个齿轮如此贴合, 连接处的线速度必须相等。

思考: 汽车离合器的原理是什么?

9.2 向心加速度

匀速圆周运动是变速运动, 其加速度是多大?

- 量纲分析的角度: a 的单位为 m/s^2 , a 可能取决于 ω 和 $r \Rightarrow a \propto \omega^2 r = \frac{v^2}{r}$
- 运动学严格分析: 几何学角度, 相似三角形给出 $\frac{\Delta s}{r} \approx \frac{\Delta l}{r} = \frac{\Delta v}{v} \Rightarrow \Delta v = \frac{v^2}{r} \Delta t \Rightarrow$

$$a = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r \quad (35)$$

方向指向圆心。

- 推导过程中没有用到牛顿定律 \Rightarrow 向心加速度是 $F = ma$ 的右边而非左边, $m \frac{v^2}{r}$ 不是力。
- 向心加速度公式对非匀速圆周运动也适用, v 是在某点的瞬时线速度 (速率)。此时的向心加速度也称法向加速度 a_n (方向指向法线方向)。

例 9.2 水平面内一个质点被长度为 l 的绳子牵引围绕原点 O 做匀速圆周运动，质点的动能为 E_k ，求绳子对小球的拉力为多少。

解答 9.2 小球做匀速圆周运动对应的向心加速度为 $a_n = \frac{v^2}{r}$ 。由牛顿第二定律

$$F = ma_n = \frac{mv^2}{l} \quad (36)$$

由根据动能的定义 $E_k = \frac{1}{2}mv^2$ ，有

$$F = \frac{2E_k}{l} \quad (37)$$

例 9.3 如图 17，光滑水平面上有一个小孔和一个质量为 m 的做匀速圆周运动的质点，其圆周运动的半径为 r 。一绳连接该质点穿过小孔，连接一个质量为 M 的重物。重物在竖直方向上静止，求质点的角速度。

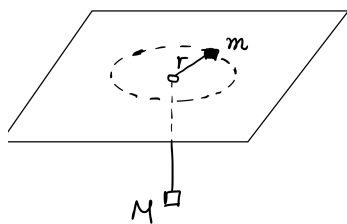


图 17: 平面穿绳模型

解答 9.3 分析：经验定性判断，如果质点角速度为 0，肯定会被重物拉掉下平面；如果质点运动太快，重物肯定会被拉飞 \Rightarrow 存在一个合适的速度保持平衡，应该是绳上拉力刚好提供向心加速度的时候（和上面例题一样）。

设绳上的张力为 T ，对重物运用牛顿第二定律，有

例 9.4 如图 18，半圆形轨道的半径为 R ，一个质量为 m 的质点以 v_0 的速度冲上轨道。

1. 如果质点不从最高点落下， v_0 至少为多大？

2. 如果质点在最高点对轨道的压力为 N ，其离开轨道后在水平面上的落点距离轨道下端多远？

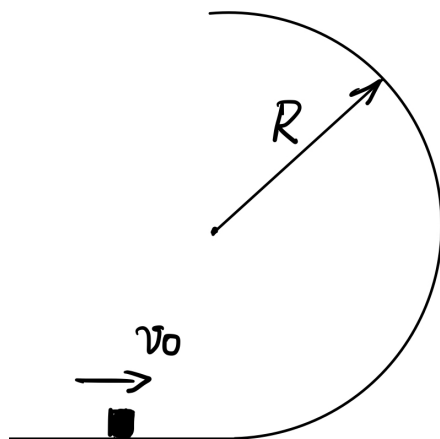


图 18: 半圆轨道模型

解答 9.4 定性分析：如果速度较小，肯定会从最高点落下 \Rightarrow 有一个合适的速度使得质点不会落下，在最高点的速度应该刚好满足重力提供向心加速度。

从轨道最低点到最高点，设在最高点的速度为 v ，由机械能守恒定律（或动能定理）：

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + mg(2R) \quad (38)$$

在最高点，由牛顿第二定律：

9.3 离心现象

洗衣机甩干衣服的原理是什么？

- 匀速圆周运动需要时刻指向圆心的外力维持 \Rightarrow 当外力突然不足（小于 $\frac{mv^2}{r}$ ），物体远离圆心运动 \Rightarrow 离心现象。
- 反过来，如果指向圆心的外力突然增大 \Rightarrow 靠近圆心运动。
- 典型例子：洗衣机、印度飞饼...

思考：一个自转的圆盘需要力维持旋转吗？什么力承担了这个角色？

10 万有引力定律

10.1 万有引力

为什么万有引力普遍存在于物体间，却被人类忽视了几千年？

- **据说**牛顿被苹果砸了一下，然后就想出了万有引力定律，如图 19。

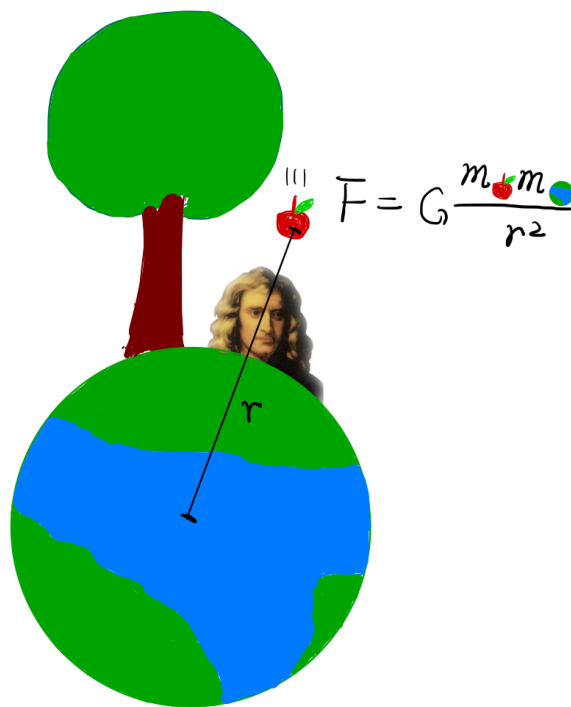


图 19: 高空抛物的危害性

- 既然地球和苹果之间有，那任何两个物体之间都应该有 \Rightarrow 物理定律有普适性，不偏爱任何一个特殊物体。
- 质量分别为 m_1 和 m_2 的物体（质点），间距 r 为质心的间距，万有引力方向指向对方，大小为

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad (39)$$

其中 $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$ （化成基本单位是什么?）。

- 为什么叫 G ? \Rightarrow 引力 = Gravitation

- 为什么是 $m_1 m_2$? \Rightarrow 牛顿第三定律的要求。
- 为什么正比于 $\frac{1}{r^2}$? \Rightarrow 类比于一个灯泡在 r 距离的亮度 (单位面积上的功率), 如图 20。 \Rightarrow 很大程度上因为我们生活在 3 维空间, 所以电场力也是 $\frac{1}{r^2}$ 的。

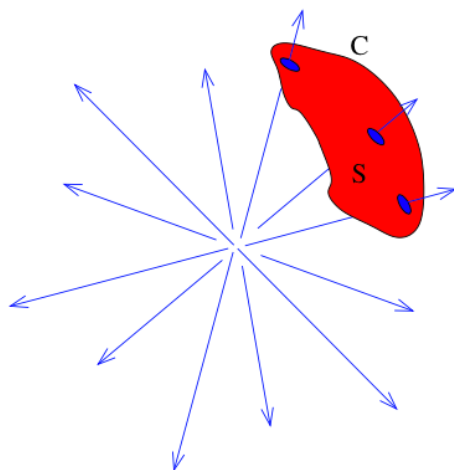


图 20: 为什么是平方反比

例 10.1 根据万有引力定律, 重力加速度 g 可以怎样用地球质量 M 和地球半径 R , 以及万有引力常数表示? 怎么用地球密度 ρ 和 R 已经 G 表示? 在距地球表面高度 h 的山上, 重力加速度 $g(h)$ 和地面重力加速度 $g(h=0) = g$ 的关系是什么?

解答 10.1 在地球表面, 质点受到的重力就是地球对质点的万有引力。于是

10.2 行星轨道和开普勒定律

地理知识：太阳系内行星的轨道有什么特点？

- 行星轨道具有近圆性，近似认为它们就是半径为 r 的圆，行星在轨道上做匀速圆周运动，角速度为 ω 。太阳质量记为 M_{\odot} 。⇒ 牛顿第二定律，万有引力提供向心力

$$\frac{GM_{\odot}m}{r^2} = m\omega^2 r \quad (40)$$

- 天文上更常用的是周期 T （大家都知道地球绕太阳转的周期是 1 年，但是很少说角速度是多少）， $\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow$

$$\frac{GM_{\odot}m}{r^2} = m \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 r \quad (41)$$

⇒

$$\frac{r^3}{T^2} = \frac{GM_{\odot}}{4\pi^2} \quad (42)$$

右边对太阳系的所有行星都是一个常数。（开普勒第三定律）

- 历史上，开普勒 **先从天文观测数据** 总结出 (42)，此外还有开普勒第一和第二定律：
 - （第一定律）行星的轨道都是一个椭圆，太阳在椭圆的一个焦点上。
 - （第二定律）行星与太阳的连线在相同时间扫过相同的面积。
 - （第三定律）行星椭圆轨道半长轴 a 的三次方和周期 T 的平方成正比。
- 初学第一次不用理解椭圆、焦点这些概念，这也不是考试重点。圆是椭圆的退化情况，此时椭圆的焦点退化为圆心；半长轴退化为半径。
- 太阳质量 $M_{\odot} = 2.0 \times 10^{30} \text{ kg}$ ，如何从天文观测数据上得到？怎么得到地球的质量？

例 10.2 地球和太阳的平均距离 r_{\oplus} 常记做一个天文单位 $r_{\oplus} = 1 \text{ AU}$ 。若某一个太阳系行星到太阳的距离是 $a \text{ AU}$ ，其周期是多少年？

解答 10.2 根据开普勒第三定律，有

例 10.3 绕地球以半径为 r 的圆轨道运行的卫星的速度为多大？卫星越贴近地球表面，卫星的速度是增大还是减小？卫星的最大可能速度称为第一宇宙速度 v_1 ，求第一宇宙速度的表达式，分别用 G, M, R 和 g, R 表示。

解答 10.3 由牛顿第二定律，万有引力提供向心加速度，有

10.3 椭圆轨道

什么是椭圆？

- 椭圆的数学定义：平面内到给定两点 F_1, F_2 距离之和为定值 $2a$ 的所有点的集合，
- 其他几何特征，如图 21：
 - 焦点： F_1, F_2 是椭圆的两个焦点。线段 F_1F_2 的中点 O 是椭圆中心。
焦距 c 是 F_1F_2 长的一半。
 - 长轴： F_1F_2 所在的弦，是椭圆中最长的那条弦，长度为 $2a$ 。 \Rightarrow 半长轴为长轴的一半，长度为 a 。
 - 短轴：线段 F_1F_2 的中垂线对应的弦，长度为 $2b$ 。 \Rightarrow 半短轴为短轴的一半，长度为 b 。
 - 离心率：椭圆的离心率定义为 $e = \frac{c}{a}$ 。 \Rightarrow 按定义 $0 < e < 1$ ， $e = 0$ 的椭圆就是圆。

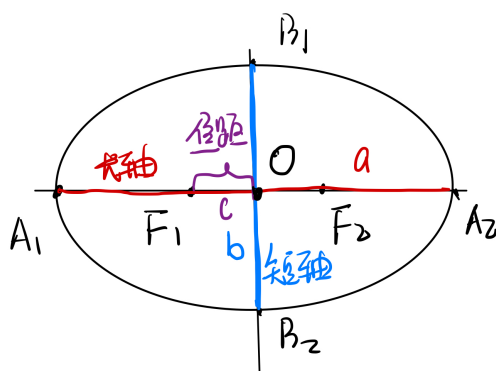


图 21: 椭圆

地球是冬天离太阳远还是夏天离太阳远？

- 行星轨道是椭圆 \Rightarrow 存在近日点和远日点，如图 22。
- 根据开普勒第二定律，行星在近日点运行更快。这一点也可以用机械能守恒理解。

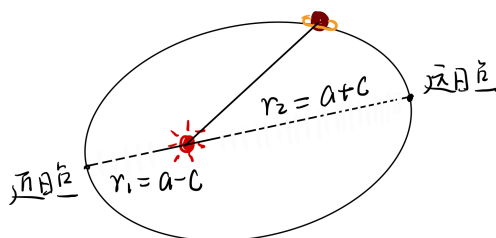


图 22: 椭圆轨道

例 10.4 对如图 22 的行星椭圆轨道，设其离心率为 e ，则行星在近日点 r_1 和远日点 r_2 的速度比是多少？判断大小关系：

1.

$$m \frac{v_1^2}{r_1} = \frac{GM_{\odot} m}{r_1^2}$$

2.

$$m \frac{v_2^2}{r_2} = \frac{GM_{\odot} m}{r_2^2}$$

解答 10.4 根据开普勒第二定律, 对于一个很小的时间 Δt , 行星在近日点划过的面积为 $\frac{1}{2}r_1(v_1\Delta t)$, 在远日点划过的面积为 $\frac{1}{2}r_2(v_2\Delta t)$ 。这两个面积应该相等, 于是有

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{a+c}{a-c} = \frac{1+e}{1-e} > 1 \quad (43)$$

在远日点, 行星开始靠近太阳运动, 说明万有引力提供的加速度大于该点做匀速圆周运动对应的向心加速度。