群的实例和表示论简介

Probfia

2019 年 4 月 22 日

目录

1 群及其实例

1.1 群的定义

简单的说，群是一个集合连同一个运算构成的封闭代数结构。群的弱化为半群，它的定义如下：

定义 1.1 (半群) 设 G 是一个集合，$\cdot$ 为集合中元素的一个运算，称 $(G,\cdot)$ 构成一个半群。若

1. 封闭性：$\forall a, b \in G,\ a \cdot b \in G$；

2. 存在单位元：$\exists e \in G,\ \forall a \in G,\ a \cdot e = e \cdot a = a$

3. 结合律：$\forall a, b, c \in G,\ a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c =$，因此可以将连乘无歧义地记作 $a \cdot b \cdot c$。

举例来说，全体自然数连同自然加法运算构成半群，单位元为 0；全体 n 阶方阵构成的集合连同矩阵乘法运算也构成半群，单位元为 n 阶单位阵 E。一般在不引起歧义的时候将 $(G, \cdot)$ 简记为 G，并且将运算 $a \cdot b$ 简记成 ab。

群的定义为半群加上逆元的存在性

定义 1.2 (群) *若 $(G, \cdot)$ 为一个半群，称 $(G, \cdot)$ 一个群，若*

1. 存在逆元：$\forall a \in G,\ \exists r \in G,\ a \cdot r = r \cdot a = e$，其中 e 为 G 的单位元。

举例来说，全体整数连同自然加法运算构成群，单位元为 0，逆元为某个元素的负；全体可逆 n 阶方阵构成的集合连同矩阵乘法运算也构成群，单位元为 n 阶单位阵 E，逆元为某个矩阵的逆。上面的例子建议了下面定理的正确性。

定理 1.1 (逆元的唯一性) *群 G 中任意元素的逆元唯一，因此可以将 a 的逆元无歧义地记作 a^{-1}。*

证明如下：

设 r, s 同时为 a 的逆元，则有 $e = ar$ 和 $e = sa$，在第一个等式两边左乘 s 得到

$$s = se = sar = er = r \tag{1}$$

有时候我们会遇到阿贝尔群，它的定义是满足交换律的群

定义 1.3 (阿贝尔群) *称群 G 是一个阿贝尔群，或者说，群 G 是阿贝尔的，或可交换的，若群 $(G, \cdot)$ 满足*

1. 交换律：$\forall a, b \in G,\ a \cdot b = b \cdot a$。

从上面的例子看出，全体整数构成的群是阿贝尔的，而可逆方阵构成的群则不是。

1.2 旋转群

1.2.1 SO(2) 群

我们考虑 2 维平面对一个向量绕原点旋转的操作。例如将一个向量 $\vec{x}$ 旋转一定角度 θ 的操作后得到的向量记作 $\hat{R}(\theta)\vec{x}$，我们可以对 $\hat{R}(\theta)\vec{x}$ 再次沿另一个角度旋转，得到向量 $\hat{R}(\phi)(\hat{R}(\theta)\vec{x})$。但我们知道，旋转两次这个操作也可以通过一次旋转 $\hat{R}(\theta+\phi)$ 完成，因此，我们定义旋转操作的乘法运算

$$\hat{R}_1\hat{R}_2,\ \forall\vec{x}\in\mathbb{R}^2,\ \hat{R}_1(\hat{R}_2\vec{x})=\hat{R}_1(\hat{R}_2\vec{x}) \tag{2}$$

即两个旋转操作的乘积的结果是，先按第二个操作旋转，再按第一个操作旋转。

我们看到，旋转操作的乘积依然是旋转操作，再加之，零角度旋转是旋转操作的单位元；每个旋转操作 $\hat{R}(\theta)$ 的逆元就是 $\hat{R}(-\theta)$。因此，所有二维旋转操作 $\hat{R}$ 连同它们的乘法运算构成一个群。这个群记作 $SO(2)$。此外我们注意到，$SO(2)$ 事实上是一个阿贝尔群，因为两次旋转的总旋转角度就是两个角度的代数和，而代数和是可交换的。

1.2.2 SO(3) 群

三维空间中绕原点的转动不能仅仅由一个角度定义，还需要一个转动轴 $\vec{n}$ 作为转动方向的表征。我们将一个向量 $\vec{x}$ 沿 $\vec{n}$ 轴（逆时针）转动 θ 角后得到的向量记作 $\hat{R}(\vec{n},\theta)\vec{x}$。两次旋转 $\hat{R}(\vec{n_2},\phi)\hat{R}(\vec{n_1},\theta)\vec{x}$ 事实上可以由一次总的旋转完成（给定一个初末位置，你总能找个一个旋转方法让向量一次就由初位置转到末位置）。仿照之前的乘法定义，我们发现，三维空间中的旋转操作也对乘法运算封闭，且零角度旋转是旋转操作的单位元；每个旋转操作 $\hat{R}(\vec{n},\theta)$ 的逆元就是 $\hat{R}(\vec{n},-\theta)$，因此，所有三维空间内的旋转操作构成群，这个群记作 $SO(3)$。

与 $SO(2)$ 群不同，我们很容易发现，$SO(3)$ 是非阿贝尔的。对 $\vec{n_1}\neq\vec{n_2}$，显然有 $\hat{R}(\vec{n_2},\phi)\hat{R}(\vec{n_1},\theta)\neq\hat{R}(\vec{n_1},\theta)\hat{R}(\vec{n_2},\phi)$。

1.2.3 SO(n) 群、子群

一般地，$\mathbb{R}^n$ 中的旋转操作也构成一个群，这个群称为 $SO(n)$ 群，其中 S 代表 special（特殊），O 代表 orthogonal（正交）。其意义将在下一节阐明。一般地，除了之前提到的 $n=2$ 的情况，$SO(n)$ 群都是非阿贝尔的[1]。

[1]我们不讨论 $n=1$ 的平凡情况

任何 $n-1$ 维空间中的旋转操作都可以视作 n 维空间中的旋转操作，即 $SO(n-1) \subset SO(n)$。一般地，我们有如下子群定义：

定义 1.4 (子群) *若 $(G,\cdot)$ 为一个群，集合 $S \subset G$，称 $(S,\cdot)$ 为 $(G,\cdot)$ 的子群，若 $(S,\cdot)$ 构成群。*

$SO(n)$ 中除了这种降维的子群外，也有限制旋转角度的子群，例如 $SO(2)$ 中的子群 $D_4 = \{\hat{R}(\theta) \in SO(2) | \theta = n \cdot 90^\circ,\ n \in \mathbb{Z}\}$ 表征了 90° 的旋转等，这种限制旋转角度的子群在晶体学中十分有用，因为它表征了晶体的旋转对称性。

1.3 旋转群的矩阵表示

旋转群事实上一个线性变换

$$\hat{R} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ \vec{x} \to \hat{R}\vec{x} \tag{3}$$

而线性变换总可以用一个矩阵表示。我们先寻找 $SO(2)$ 群的矩阵表示，设 $\vec{x} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y = r\cos\phi\vec{e}_x + r\sin\phi\vec{e}_y$，将它逆时针旋转 θ 角得到的向量是

$$\begin{aligned}
\hat{R}(\theta)\vec{x} &= r\cos(\phi+\theta)\vec{e}_x + r\sin(\phi+\theta)\vec{e}_y \\
&= (r\cos\phi\cos\theta - r\sin\phi\sin\theta)\vec{e}_x + (r\sin\phi\cos\theta + r\sin\theta\cos\phi)\vec{e}_y \\
&= (x\cos\theta - y\sin\theta)\vec{e}_x + (y\cos\theta + x\sin\theta)\vec{e}_y \\
&= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{4}$$

于是旋转操作的矩阵表示

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{5}$$

上式称为 $SO(2)$ 的代表元，它具有以下性质

1. $\det R = 1$

2. $RR^T = E$

满足第二条性质的所有矩阵构成 $O(2)$ 群，即二维正交群；在二维正交群上加上第一条限制就成为了二维特殊正交群。可以想象，二维正交群包括了选择操作和镜像反转操作（$\vec{x} \to -\vec{x}$），而特殊性的要求剔除了镜像反转操作的存在。

1.4 洛伦兹群及其矩阵表示

1.5 量子力学：$SU(n)$ 群

2 旋转群的李代数表示

2.1 李代数

2.2 旋转群的李代数

3 表示论简介