DiffGeo

Talk 2-Vectors and Tensors on a Manifold

什么是流形

- 一个被许多个小开集覆盖的拓扑空间。
- 每个小开集上定义了局域坐标。

什么是矢量

我们先在流形上点点定义矢量。

标量场

- 流形$\mathcal{M}$上的**标量场**是映射
$$f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}$$
即将流形上的点p映射到一个实数$f(p)$。
- 流形$\mathcal{M}$上所有标量场的集合记为$\mathscr{F}_{\mathcal{M}}$。$\mathcal{M}$上$r$阶连续（指它的分量形式$r$阶连续）的标量场组成的集合记作$C^r_{\mathcal{M}}$。
- 请举出标量场的一些物理或几何例子。

流形上某一点的（切）矢量

流形$\mathcal{M}$上点p的（切）矢量是标量场到实数的映射

$$X_p : \mathscr{F}_{\mathcal{M}} \to \mathbb{R}$$

并且满足

- X_p是线性映射，即

$$X_p(\alpha f + \beta g) = \alpha X_p(f) + \beta X_p(g)$$

  其中$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$。
- X_p满足莱布尼兹律

$$X_p(fg) = f(p)X_p(g) + g(p)X_p(f)$$

使验证：$\mathbb{R}^3$上的方向导数算符

$$\partial_{\vec{v}} \equiv \vec{v} \cdot \vec{\nabla}$$

是$\mathbb{R}^3$流形上的一个矢量。

课堂小练习：切矢的性质

利用切矢X的一般定义证明

- $X_p(1) = 0$；
- $X_p(c) = 0$，其中c为常数函数；
- $X_p(\alpha f) = \alpha X_p(f)$，其中$\alpha \in \mathbb{R}$为常数。

切矢的运算

我们定义p点处切矢的线性运算：

- 加法：$(X_p + Y_p)(f) = X_p(f) + Y_p(f)$;
- 零元：存在一个特殊的$0_p \in T_p\mathcal{M}$使得对任意$f \in \mathscr{F}_\mathcal{M}$有$0_p(f) = 0$
- 数乘：$(\alpha X_p)(f) = \alpha X_p(f)$。

在这样的定义下，我们稍后会说明，所有的p点处的切矢构成线性空间$T_p\mathcal{M}$，且其维度$\dim T_p\mathcal{M} = \dim \mathcal{M}$。

线性空间的对偶空间

对一般的线性空间V，我们可以定义它的**对偶空间**V^*，它的元素是V上的所有线性函数，步骤是

- 线性空间V上的线性函数定义为满足$f(\alpha u+\beta v)=\alpha f(u)+\beta f(v)$的函数；
- 定义线性函数间的加法和数乘为$(\alpha f+\beta g)(v)=\alpha f(v)+\beta g(v)$；
- 假设V有一组基底$\{e_1,\cdots,e_n\}$，定义线性函数e^i满足$e^i(e_j)=\delta^i_j$，证明所有的线性函数都可以用e^i线性表示；
- 于是V^*是一个和V同维的线性空间。

切空间的对偶空间

因为切空间$T_p\mathcal{M}$是一个线性空间，所以就可以定义它的对偶空间$T_p^*\mathcal{M}$（称为余切空间），它的元素记作$df_p : T_p\mathcal{M} \to \mathbb{R}$。

- 按定义，df_p应该满足$df_p(\alpha X_p + \beta Y_p) = \alpha df_p(X) + \beta df_p(Y)$。
- 因为$T_p^*\mathcal{M}$也是一个有限维线性空间，所以只用找到一种合理的df_p定义即可。
- 试验证：定义

$$df_p(X_p) \equiv X_p(f)$$

满足df_p是线性，且df_p和dg_p线性可加的要求。

今后在不引起歧义的情况下，我们可能省略X_p和df_p中指代点p的下标。

切空间上的张量

有了切空间和余切空间的概念，我们就可以定义切空间上的张量。

- 对一般的线性空间V，若其对偶空间为V^*，其上的(s,t)型张量一般定义为一个$s+t$元多重线性函数（对每一个自变量呈线性）

$$T : \underbrace{V \times V \times \cdots \times V}_{s\text{ 个}} \times \underbrace{V^* \times V^* \times \cdots \times V^*}_{t\text{ 个}} \to \mathbb{R}$$

也就是一个接受s个矢量和t个对偶矢量的多重线性函数$T(v_1, \cdots, v_s; f_1, \cdots, f_t)$。

- 流形$\mathcal{M}$上点p处的张量定义只用把上面的V换成$T_p\mathcal{M}$，也就是多重线性函数$T(X_1, \cdots, X_s; df_1, \cdots, df_t)$。

度规张量

流形$\mathcal{M}$上的度规张量是切空间$T_p\mathcal{M}$上的一个$(2,0)$型对称张量，它定义了$T_p\mathcal{M}$上两个矢量的内积

$$\langle X, Y\rangle \equiv g(X, Y)$$

- 度规按定义必须满足$g(X, Y) = g(Y, X)$；
- 根据线性空间上内积的一般定义，度规还必须是非退化的，也就是是如果$\forall Y \in T_p\mathcal{M}$，$g(X, Y) = 0$当且仅当$X = 0$。
- 如果对任意$X \in T_p\mathcal{M}$都有$g(X, X) > 0$，则称装备了这样正定度规的流形为**黎曼流形**。

切矢的对应余切矢

假设流形$\mathcal{M}$装备了度规g，那么对给定的$X \in T_p\mathcal{M}$，映射

$$g_X(Y) \equiv g(X, Y)$$

是$T_p\mathcal{M} \to \mathbb{R}$的线性映射，因此按定义$g_X \in T_p^*\mathcal{M}$。这称为切矢$X$自然对应的余切矢。

流形上的局部坐标

回忆以下事实

- 对于流形$\mathcal{M}$上的一个小开集O（小恐龙的鳞片）上都定义了一个到$\mathbb{R}^n$的一一映射ψ，称为局部坐标。

- 结构(O,ψ)称作图。
- 两个图(O_a,ψ_a)和(O_b,ψ_b)可能有重叠部分，重叠部分的坐标变换为$\psi_b\circ\psi_a^{-1}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$。假如这个映射在流形上处处至少是$C^r$的，就说$\mathcal{M}$是$C^r$流形。$C^\infty$流形称为光滑流形。

标量场的坐标表象

假如$p \in O$，开集O的局部坐标为ψ。则$\mathcal{M}$上的标量场$f(p)$在p附近可以表现称一个$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$的函数

$$F \equiv f \circ \psi^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

它就是一个我们熟悉的n元函数$F(x^1, \cdots, x^n)$，它将代表点的局部坐标映到一个实数。

切空间的基

在定义了局域坐标的开集O中的一点p处，定义n个算符：

$$\partial_\mu(f) \equiv \frac{\partial F}{\partial x^\mu}$$

- 证明上面的n个∂_μ满足线性和莱布尼兹律（提示：两个标量场乘积的坐标表示等于其坐标表示之积），从而它们是切矢。
- 所有的切矢X都可以用∂_μ唯一地线性表示

$$X = X^\mu \partial_\mu$$

（很好理解，证明困难，所以不证）

- 从而这n个X_μ张成$T_p\mathcal{M}$。

余切空间的基

- 显然，第ν个局部坐标x^μ的坐标表象是它本身$F = x^\nu$。
- 按定义，$\partial_\mu(x^\nu) = \delta^\nu_\mu$。
- 这显然满足对偶空间基底的一般定义。
- 于是有n个特殊的余切矢dx^ν满足$dx^\nu(\partial_\mu) \equiv \partial_\mu(x^\nu) = \delta^\nu_\mu$。

- 任意余切矢$df \in T^*_p\mathcal{M}$可以按$df = f_\nu dx^\nu$展开。

切矢和余切矢的分量

- 对一般的切矢$X = X^\mu \partial_\mu$，
有$dx^\nu(X) = dx^\nu(X^\mu \partial_\mu) = X^\mu dx^\nu(\partial_\mu) = X^\nu$。于是余切矢基底$dx^\nu$作用在切矢的作用是取出切矢的第$\nu$分量。
- 同样的，对余切矢$df = f_\nu dx^\nu$，有$df(\partial_\mu) = f_\mu$。
- 对任意的$X \in T_p\mathcal{M}$和$df \in T_p^*\mathcal{M}$，有

$$df(X) = f_\mu X^\mu$$

- 给定p所在图的局部坐标就相当于指定了切空间和余切空间的基底，从而给出切矢和余切矢的分量表示。

张量的分量

- 一般的(s,t)型张量接受s个切矢和t个余切矢作为自变量。
- 在给定基的情况下，第i个切矢展开为$X_i = X_i^{\mu_i}\partial_{\mu_i}$，第$j$个余切矢展开为$df_j = f_{j\nu_j}dx^{\nu_j}$。
- 根据T的多重线性要求有

$$T(X_1,\cdots,X_s;df^1,\cdots,df^t)$$

$$= X_1^{\mu_1}\cdots X_s^{\mu_s}f_{1\nu_1}\cdots f_{t\nu_t}T(\partial_{\mu_1},\cdots,\partial_{\mu_s};dx^{\nu_1},\cdots,dx^{\nu_t})$$

- 记

$$T^{\nu_1\cdots\nu_t}_{\mu_1\cdots\mu_s} \equiv T(\partial_{\mu_1},\cdots,\partial_{\mu_s};dx^{\nu_1},\cdots,dx^{\nu_t})$$

称为张量（在给定坐标下）的分量

度规张量的分量

- 度规张量是一个$(2,0)$张量，所以它的分量是

$$g_{\mu\nu} = g(\partial_\mu, \partial_\nu)$$

- 两个切矢X, Y的内积

$$\langle X, Y\rangle \equiv g(X, Y) = g_{\mu\nu} X^\mu Y^\nu$$

- 切矢X的自然对偶的分量

$$(g_X)_\nu \equiv g_X(\partial_\nu) \equiv g(X, \partial_\nu) = g_{\mu\nu} X^\mu$$

将$(g_X)_\nu$就记作X_ν不至于引起歧义，于是有著名的升降指标公式

$$X_\mu = g_{\mu\nu} X^\nu$$

例子1：3维空间中的切矢和余切矢

- 我们考虑3维欧氏空间$\mathbb{R}^n$点$P(x,y,z)$处的切空间。
- 根据定义，P处的切矢可以按∂_i展开为$X = X\partial_x + Y\partial_y + Z\partial_z$。这就是$\vec{X} = (X, Y, Z)$矢量的方向导数算符（再乘以$\vec{X}$的长度）
- 我们考虑X对标量场$f(x,y,z)$的作用。有

$$X(f) = X\frac{\partial f}{\partial x} + Y\frac{\partial f}{\partial y} + Z\frac{\partial f}{\partial z}$$

这就是求方向导数。另一方面也可以看出，$T_P\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^3$。

例子1：3维空间中的切矢和余切矢

- 另一方面，从余切矢的角度看，f定义出的余切矢的第i分量按定义为
$$df(\partial_i) \equiv \partial_i f$$
这可以看成f在i方向的增长速率乘以单位长度。
- 记号df的实际值取决于X的选择：$df(X) \equiv X(f) = \vec{X} \cdot \vec{\nabla} f$。也就是说，$f$在$P$处的增量取决于选定参考矢量$\vec{X}$的方向和大小。这和我们一般将$df$理解成线性阶增量的想法是一致的，增量当然依赖于参考矢量的大小和方向，这使得df不再代表一个无穷小量。
- 当然，无穷小量本身就是一个不严谨的概念。

例子2：2维正则曲面

- 我们在古典微分几何那里已经研究过正则曲面$\mathcal{S}$，它由两个参数(u, v)表征，这就是这块正则曲面的局部坐标。给定(u, v)，它们就唯一确定了曲面上的点$p(u, v)$。
- 切向量按基展开为$X = X^u \partial_u + X^v \partial_v$。
- 余切矢按基展开为$df = f_u du + f_v dv$。
- $df(X) = f_u X^u + f_v X^v$就是标量函数$f$沿给定切向量$X$方向的线性阶增量。
- 这里还不怎么能看出和之前学过的曲面论的联系，因为我们没有利用度规去决定曲面的形状，也没有把曲面放在$\mathbb{R}^3$中去研究。我们稍后再返回这个例子。

切矢的另一种解释

我们之前是利用了曲面$\mathcal{S}$上的曲线定义了切向量。我们可以仿照曲面上曲线的定义定义流形$\mathcal{M}$上的曲线:

- 定义流形上的曲线为$\mathbb{R}$上一个开区间(a, b)到$\mathcal{M}$上点的映射

$$\gamma : (a, b) \to \mathcal{M}$$

- 利用流形上某一点p附近的局部坐标映射，曲线可以表现为一个单变量向量函数

$$C \equiv \psi \circ \gamma : (a, b) \to \mathbb{R}^n$$

- 考虑一个标量场f，其坐标表象为$F \equiv f \circ \psi^{-1}$，$f(\gamma(t))$就是一个$(a, b) \to \mathbb{R}$的普通单变量函数。

切矢的另一种解释

我们自然地会希望去研究$f(\gamma(t))$的导数:

- 考虑$f(\gamma(t))$的变化：显然有$f \circ \gamma = f \circ \psi^{-1} \circ \psi \circ \gamma = F \circ C$（请画图理解这个等式），也即$f(\gamma(t)) = F(C(t))$。
- 于是$f(\gamma(t))$的线性阶变化为

$$\frac{\Delta f}{\Delta t}\Big|_p \simeq \frac{dC^\mu}{dt}\partial_\mu F$$

这给出两个向量：$\frac{dC^\mu}{dt}$和$\partial_\mu F$，一个可以看成切矢的分量；另一个看成余切矢的分量。

张量

像我们之前说的，张量的本质是一个多重线性映射，将几个矢量（和余切矢量）映射到一个数。

- 转动惯量张量$I(,)$接受两个角速度$\vec{\omega}$，返回刚体转动动能的两倍$T = \frac{1}{2}I(\vec{\omega}, \vec{\omega})$。
- 电导率张量接受两个电场，返回热功率密度$h = \sigma(\vec{E}, \vec{E})$。

当我们选取了空间的一组基底，张量就有了坐标表示，也就是我们熟悉的分量形式$T_{\mu\nu}$

标量和矢量作为特殊的张量

既然张量是一个多重线性映射，那么把“多”改成“单”并不会有什么实质性的影响。

- 切矢X可以看成将余切矢映射到实数的函数$X : T_p^*\mathcal{M} \to \mathbb{R}$，具体形式是$X(df) \equiv X(f)$。
- 余切矢X可以看成将切矢映射到实数的函数$X : T_p\mathcal{M} \to \mathbb{R}$，具体形式是$df(X) \equiv X(f)$。
- 而张量的一般定义是$T : \underbrace{V \times V \times \cdots \times V}_{s\text{个}} \times \underbrace{V^* \times V^* \times \cdots \times V^*}_{t\text{个}} \to \mathbb{R}$

也就是说，切矢就是一个$(0,1)$型张量；余切矢就是一个$(1,0)$型张量。

度规的逆

我们可以利用度规把一个切矢变成余切矢

$$g_X \equiv g(X,)$$

我们也可以定义余切空间$T_p^*\mathcal{M}$上的度规$h(,)$满足把两个切矢对应的余切矢映射到实数，且值等于切矢的内积

$$h(g_X, g_Y) = g(X, Y)$$

h就称作度规的逆，也就是h定义了余切空间上的内积

度规的逆的分量表示

利用(0, 2)张量分量的定义$h(dx^\mu, dx^\nu) \equiv h^{\mu\nu}$证明，在给定基底的情况下，上面的等式$h(g_X, g_Y) = g(X, Y)$等价于

$$g_{\mu\nu} g_{\rho\sigma} h^{\nu\sigma} = g_{\mu\rho}$$

或

$$g_{\rho\sigma} h^{\sigma\nu} = \delta_\rho^{\ \nu}$$

上面的等式对应的矩阵形式就是说h是g的逆矩阵。通常将$h^{\mu\nu}$直接记作$g^{\mu\nu}$不会引发歧义。

度规的逆的分量表示

度规的逆又可以把余切矢自然对应到一个切矢:

$$h_{df} \equiv h(df,) : V_p^* \mathcal{M} \to \mathbb{R}$$

使验证:

- 上面定义的合理性: 也即$h_{gx} = X$。
- 分量形式为

$$(h_{df})^\nu = h(f_\mu dx^\mu, dx^\nu) = f_\mu h^{\mu\nu}$$

张量的升降指标

把矢量升降指标的定义推广，按照以下方法升降张量的指标：

- 升指标：乘以度规的逆：

$$T^{\cdots\ \ \cdots}_{\cdots\mu\cdots}g^{\mu\rho}=T^{\cdots\rho\cdots}_{\cdots\ \ \cdots}$$

- 降指标：乘以度规本身：

$$T^{\cdots\mu\cdots}_{\cdots\ \ \cdots}g_{\mu\rho}=T^{\cdots\ \ \cdots}_{\cdots\rho\cdots}$$

请学有余力的同学用映射语言重新叙述上面的两个等式。

场

我们之前在流形$\mathcal{M}$上的某一点定义了矢量和张量。

假如我们能在每一点都定义矢量或张量，我们就得到了一个矢量场或张量场。

矢量场

流形$\mathcal{M}$上的矢量场X定义为光滑标量场间的映射

$$X : C^{\infty}_{\mathcal{M}} \to C^{\infty}_{\mathcal{M}}$$

如何找到这样的一个映射，而且它和我们之前对给定点定义的矢量建立联系呢?

矢量场

- 我们回忆，给定点p，矢量X_p是标量场到实数的映射$C^\infty_{\mathcal{M}} \to \mathbb{R}$。
- 如果我们在每一点都定义了矢量X_p，对给定的标量场f，$X_p(f)$（随p变动时）显然也构成了一个标量场。
- 定义矢量场
$$(X(f))(p) = X_p(f)$$
坐标表象和X_p一致，$X = X^\mu \partial_\mu$，不过现在是对一片点都有定义。
- 流形$\mathcal{M}$上的所有矢量场记作$\mathcal{V}_{\mathcal{M}}$。

矢量场的复合不是矢量场

- 矢量场X是标量场到标量场的映射$(X(f))(p) = X_p(f)$。
- 这让我们产生一种感觉：我们可以把得到的标量场$X(f)$再喂给另一个矢量场Y产生另一个新的标量场$Y(X(f))$。
- 但并不能说复合函数$Y \circ X$是一个矢量场：使验证它不满足莱布尼兹律，也就是$(Y \circ X)_p$不是一个$T_p\mathcal{M}$上的元素。

- 粗略地讲，$Y \circ X$是一个二阶导数，而矢量是一个一阶导数。

矢量场对易子

- 一般我们有

$$(X \circ Y)(fg) = X(Y(fg)) = X(fY(g) + gY(f))$$
$$= X(f)Y(g) + fX(Y(g)) + X(g)Y(f) + gX(Y(f))$$
$$\neq fX(Y(g)) + gX(Y(f))$$

- 但我们把X和Y交换位置再相减就可以消去不符合莱布尼兹律的项。

$$(XY - YX)(fg) = f(XY - YX)(g) + g(XY - YX)(f)$$

- 因此，两个矢量场的对易子$[X, Y] \equiv XY - YX$还是矢量场。
- 使验证：对易子的坐标表象是

$$[X, Y] = (X^\mu \partial_\mu Y^\nu - Y^\mu \partial_\mu X^\nu)\, \partial_\nu$$

李导数

因为两个矢量场的对易子还是矢量场，当我们固定X而变化Y，就相当于得到了一个矢量场到矢量场的映射

$$\mathcal{L}_X \equiv [X,] : \mathcal{V}_{\mathcal{M}} \to \mathcal{V}_{\mathcal{M}}$$

具体形式为

$$\mathcal{L}_X(Y) = [X, Y]$$

$\mathcal{L}_X$称为**李导数**。

余切矢量场

现在事情就简单了：对一个矢量场，把每点的矢量对偶一下就得到了余切矢量场。所有余切矢量场的集合记作$\mathcal{V}^*_{\mathcal{M}}$。

张量场

同样的，如果我们对$\mathcal{M}$上的每点都定义了张量T，就得到了一个张量场。

一般我们都假定张量场是光滑的。

张量场的更严格定义

当然上面这个定义不是特别严格，从映射的角度，一个(s,t)型张量场就是多重线性映射

$$T:\underbrace{\mathcal{V}_{\mathcal{M}}\times\mathcal{V}_{\mathcal{M}}\times\cdots\times\mathcal{V}_{\mathcal{M}}}_{s\text{ 个}}\times\underbrace{\mathcal{V}^*_{\mathcal{M}}\times\mathcal{V}^*_{\mathcal{M}}\times\cdots\times\mathcal{V}^*_{\mathcal{M}}}_{t\text{ 个}}\to\mathscr{F}_{\mathcal{M}}$$

也就是把s个矢量场和t个对偶矢量场映射到一个标量场。因此张量场记作

$$T(X_1,\cdots,X_s;df_1,\cdots,df_t)(p)\equiv T(X_{1p},\cdots,X_{sp};df_{1p},\cdots,df_{tp})$$

度规张量场

特别的我们有度规张量场$g(X, Y)$。

局部坐标的变换

我们知道，在同时存在两个（或多个）图(O_a, ψ_a)和(O_b, ψ_b)覆盖的开集内，两种局部坐标之间的变换为

$$\psi_a \circ \psi_b^{-1}$$

假设a代表的局部坐标为$x^\mu(p)$，b代表的局部坐标为$u^\nu(p)$，坐标变换映射就可以显式地写成一个$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$的映射

$$x^\mu = x^\mu(u^\nu)$$

基的变换

$\frac{\partial}{\partial x^\mu}$是切空间$T_p\mathcal{M}$的一组基。假如我们用$u$而不用$x$的话，这组基就相应地变成

$$\frac{\partial}{\partial u^\mu}$$

但根据多元函数的链式法则我们有

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{\partial u^\nu}{\partial x^\mu}\frac{\partial}{\partial u^\nu}$$

于是基底的变换矩阵就是

$$\frac{\partial x^\mu}{\partial u^\nu}$$

变换矩阵$J^\mu_{\ \nu} = \frac{\partial x^\mu}{\partial u^\nu}$也是流形$\mathcal{M}$上的一个$(1,1)$张量场。

切矢分量的变换

任意的$V \in T_p\mathcal{M}$按两种基展开为

$$V = X^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} = U^\nu \frac{\partial}{\partial u^\nu}$$

根据之前的基变换公式又有

$$U^\nu \frac{\partial}{\partial u^\nu} = X^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} = X^\mu \frac{\partial u^\nu}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial u^\nu}$$

于是我们得到任意切矢的分量的变换关系

$$U^\nu = \frac{\partial u^\nu}{\partial x^\mu} X^\mu$$

张量分量的变换

请自行仿照上面过程推导

- 余切矢基底的变换:

$$dx^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial u^\nu} du^\nu$$

- 余切矢分量的变换:

$$U_\nu = \frac{\partial x^\mu}{\partial u^\nu} X_\mu$$

- (s,t)张量分量的变换:

$$U^{\nu_1\cdots\nu_t}_{\mu_1\cdots\mu_s} = \frac{\partial u^{\nu_1}}{\partial x^{\sigma_1}} \cdots \frac{\partial u^{\nu_t}}{\partial x^{\sigma_t}} \frac{\partial x^{\rho_1}}{\partial u^{\mu_1}} \cdots \frac{\partial x^{\rho_s}}{\partial u^{\mu_s}} X^{\sigma_1\cdots\sigma_t}_{\rho_1\cdots\rho_s}$$

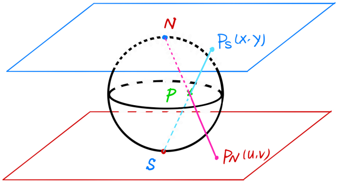
(提示:回忆张量分量的定义)

我傻了，你们呢

还记得∂_μ和dx^μ是什么意思的同学请举手。

练习：球面的坐标变换

我们知道描述一个球面S^2至少需要两个图：南极投影P_S和北极投影P_N。



- 南极投影可以完成除南极点以外所有点到$\mathbb{R}^2$（下方红色平面）的映射；
- 北极投影可以完成除北极点以外所有点到$\mathbb{R}^2$（上方蓝色平面）的映射。

练习：球面的坐标变换

1. 假设已知单位球面上非极点的南极坐标（南极投影点P_S在红色平面上的坐标）为(x, y)，求这个点的北极坐标为(u, v)。
2. 试用(∂_x, ∂_y)表示(∂_u, ∂_v)。
3. 在南极放置一个$q = 4\pi\epsilon_0$的点电荷，点电荷的电势是球面上的标量场f。求这个标量场在南极坐标和北极坐标下的表示。
4. 在南极坐标为$(2, 1)$的点有一个切矢$X = \partial_x + 2\partial_y$，求这个切矢对$f$的作用$X(f)$。写出这个切矢在北极坐标基$(\partial_u, \partial_v)$下的表达式，重新求这个切矢对$f$的作用，验证两者是相等的。说出$X(f)$的物理意义。