Relativistic Quantum Mechanics: Dirac Eq (III)

December 18, 2019

自旋角动量

$$\vec{J} = \vec{L} + \frac{1}{2}\vec{\Sigma}$$

复习：狄拉克方程和旋量

- 回忆：我们把 KG 方程的二次算符 $H^2 = \vec{p}^2 + m^2$ 强行拆成两个一次算符 $H = \vec{\alpha}\cdot\vec{p} + \beta m$ 得到了狄拉克方程，因此它首先具有我们希望的相对论色散关系。
- 狄拉克表象下的

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- 狄拉克方程的波函数是一个 4 分量的列向量 ψ，称为旋量。其中的两个自由度描述正能量解，对应正粒子；另外两个自由度描述负能量解，对应反粒子。
- 我们还被告知，正能量解包含的 2 个自由度描述了一个自旋 1/2 粒子，但为什么呢？这是我们这节课要回答的问题。

守恒量

- 哈密顿量
$$H = \vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m$$
同时包括了外部时空坐标的算符（$\vec{p}$，连续谱）和内部旋量空间的算符（$\vec{\alpha}$，β，离散谱）。
- 我们知道，量子力学中与哈密顿量对易的可观测量算符是守恒量。例如，对薛定谔的 $H = \frac{\vec{p}^2}{2m}$，轨道角动量 $\vec{L} = \vec{x} \times \vec{p}$ 守恒，$[\vec{L}, H] = 0$。
- 在狄拉克的 H 中，$\vec{L}$ 还守恒吗？

$[\vec{L}, H] \neq 0$

- 我们开始了：

$$[L_i, H] = [\epsilon_{ijk} x_j p_k, \alpha_l p_l + \beta m] = \epsilon_{ijk} [x_j p_k, p_l] \alpha_l$$

对易子可以用基本对易关系化简

$$[x_j p_k, p_l] = x_j [p_l, p_k] + [x_j, p_l] p_k = i\delta_{jl} p_k$$

于是 $[L_i, H] = i\epsilon_{ijk}\delta_{jl} p_k \alpha_l = i\epsilon_{ijk}\alpha_j p_k$

$$[\vec{L}, H] = i\vec{\alpha} \times \vec{p} \neq 0$$

- 讨论：轨道角动量算符不守恒来自外部坐标空间的算符非对易性。

自旋角动量算符

- 定义自旋角动量算符

$$\vec{\Sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix} = \gamma^5 \vec{\alpha}$$

其中 $\gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 是狄拉克表象下的 γ^5。

- 先证明：

$$[\Sigma_i, \alpha_j] = 2i\epsilon_{ijk}\alpha_k$$

$[\vec{\Sigma}, H] \neq 0$

- $[\Sigma_i, \alpha_j] = \begin{pmatrix} \sigma_i & 0 \\ 0 & \sigma_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_j \\ \sigma_j & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \sigma_j \\ \sigma_j & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_i & 0 \\ 0 & \sigma_i \end{pmatrix} =$ $\begin{pmatrix} 0 & \sigma_i\sigma_j \\ \sigma_i\sigma_j & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \sigma_j\sigma_i \\ \sigma_j\sigma_i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & [\sigma_i, \sigma_j] \\ [\sigma_i, \sigma_j] & 0 \end{pmatrix}$
- 利用泡利矩阵的著名对易关系 $[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k$ 就有

$$[\Sigma_i, \alpha_j] = 2i\epsilon_{ijk} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ \sigma_k & 0 \end{pmatrix} = 2i\epsilon_{ijk}\alpha_k$$

- 于是 $[\Sigma_i, H] = [\Sigma_i, \alpha_j p_j + \beta m] = [\Sigma_i, \alpha_j]p_j = 2i\epsilon_{ijk}p_j\alpha_k$

$$[\vec{\Sigma}, H] = 2i\vec{p} \times \vec{\alpha} \neq 0$$

- 自旋角动量也不守恒，来源于内部旋量空间算符的非对易性。

$[\vec{J}, H] = 0$

- 我们有 $[\vec{L}, H] = i\vec{\alpha} \times \vec{p}$ 和 $[\vec{\Sigma}, H] = 2i\vec{p} \times \vec{\alpha}$。
- 于是
$$[\vec{L} + \frac{1}{2}\vec{\Sigma}, H] = 0$$
- 定义总角动量算符
$$\vec{J} = \vec{L} + \frac{1}{2}\vec{\Sigma}$$
  则
$$[\vec{J}, H] = 0$$
- 总角动量算符守恒！并且可以看出，狄拉克方程描述了自旋 $1/2$ 粒子。

螺旋度也是守恒量

- 因为 $[\vec{\Sigma}, H] = 2i\vec{p} \times \vec{\alpha}$，$[\vec{p}, H] = 0$（对自由粒子）。
- 于是 $[\vec{\Sigma} \cdot \vec{p}, H] = 0$，即自旋（的两倍）在动量方向的投影为一个守恒量。
- 定义螺旋度算符

$$h = \frac{\vec{\Sigma} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|}$$

则

$$[h, H] = 0$$

- h 的本征值为 ± 1，分别为右手粒子和左手粒子。

课堂小练习：Chirality and Helicity

- 设质量为 m 的粒子沿 z 轴匀速运动，$\vec{p} = p\vec{e}_z$，显式写出狄拉克的哈密顿量 $H = \vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m$ 和螺旋度算符 h。
- 用Mathematica算出这个哈密顿量的本征值和本征矢为

$$+E: \begin{pmatrix} E+m \\ 0 \\ -p \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ E+m \\ 0 \\ -p \end{pmatrix}; \quad -E: \begin{pmatrix} m-E \\ 0 \\ -p \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ m-E \\ 0 \\ p \end{pmatrix}$$

验证上面这 4 个本征矢是 h 的本征矢并计算对应的本征值。
- 证明：对一般的狄拉克哈密顿量，手性算符 $\gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 与 H 仅当 $m = 0$ 时对易。
- 计算 γ_5 对上面四个 H 本征矢的作用，证明：仅当 $m = 0$ 时，h 的本征矢和 γ_5 的本征矢重合。

Chirality and Helicity

- h 和哈密顿量对易，因此一个自由粒子的螺旋度是不变的；但对有质量粒子 γ_5 和哈密顿量不对易，因此一个有质量自由粒子的手性会不断震荡。
- γ_5 只依赖于内部旋量空间，因此空间洛伦兹变换不会改变手性；但对有质量粒子 h 非洛伦兹不变，因为我总可以找到一个比粒子快的坐标系使得动量反向（自旋不变，从而 h 变号）。
- 对无质量粒子，手性和螺旋度重合，这样，粒子的手性也不震荡了；螺旋度也洛伦兹不变了。
- 总结：

	有质量粒子	无质量粒子
γ_5 本征态：手性	不守恒但洛伦兹不变	守恒且洛伦兹不变
h 本征态：螺旋度	守恒但非洛伦兹不变	守恒且洛伦兹不变

电磁场中的粒子：朗道能级，g 因子和 **QCD** 反常运输

$$E = \sqrt{m^2 + p_z^2 + 2neB}$$

引入电磁场

- 引入电磁场的最小耦合标准手续是 $\vec{p} \to \vec{p} - q\vec{A}$，相当于把导数变成协变导数。
- 引入电磁场后，狄拉克的哈密顿量是

$$H = \vec{\alpha} \cdot (\vec{p} - q\vec{A}) + \beta m + q\phi$$

注意这里的 $\vec{p}$ 都是算符 $-i\vec{\nabla}$。

- 设旋量波函数 $\psi = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$，我们关注前两个代表正粒子的分量 u。

电磁场中的定态狄拉克方程

- 代入狄拉克表象下的 α 和 β，有

$$\begin{pmatrix} m+q\phi & -\vec{\sigma}\cdot(i\vec{\nabla}+q\vec{A}) \\ -\vec{\sigma}\cdot(i\vec{\nabla}+q\vec{A}) & -m+q\phi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = E\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

- 耦合的方程组

$$\begin{cases} (m+q\phi-E)u-\vec{\sigma}\cdot(i\vec{\nabla}+q\vec{A})v=0 \\ -\vec{\sigma}\cdot(i\vec{\nabla}+q\vec{A})u+(-m-E+q\phi)v=0 \end{cases}$$

- 因为我们只关注正能量解 u，因此我们可以从第 2 式中解出

$$v=\frac{-\vec{\sigma}\cdot(i\vec{\nabla}+q\vec{A})}{m+E-q\phi}u$$

电磁场中的定态狄拉克方程

- 代入第一式就得到

$$[(E-q\phi)^2-m^2]u=\left[\vec{\sigma}\cdot(i\vec{\nabla}+q\vec{A})\right]^2 u$$

处理右边项的时候要特别小心：因为这是个算符。

- $\left[\vec{\sigma}\cdot(i\vec{\nabla}+q\vec{A})\right]^2 u=\sigma_i(i\partial_i+qA_i)\sigma_j(i\partial_j+qA_j)u=$
$\sigma_i\sigma_j(i\partial_i+qA_i)(i\partial_j u+qA_j u)=$
$(\delta_{ij}+i\epsilon_{ijk}\sigma_k)(-\partial_i\partial_j u+iq(\partial_i A_j)u+iqA_j\partial_i u+iqA_i\partial_j u+q^2A_iA_j u)$
- 青色的项是全对称的，ϵ_{ijk} 对它们的作用为 0，因此

$$\left[\vec{\sigma}\cdot(i\vec{\nabla}+q\vec{A})\right]^2 u=(-\nabla^2+2iq\vec{A}\cdot\vec{\nabla}+q^2\vec{A}^2)u-q(\vec{\nabla}\times\vec{A})\cdot\vec{\sigma}u$$

磁场的直接作用

- 因为 $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$，我们发现，狄拉克方程中，磁场直接出现在方程里

$$[(E - q\phi)^2 - m^2]u = (-\nabla^2 + 2iq\vec{A} \cdot \vec{\nabla} + q^2\vec{A}^2)u - q\vec{B} \cdot \vec{\sigma} u$$

- 这是狄拉克方程中独有的性质：在 KG 方程和薛定谔方程中这一项都不会自然出现（必须人为引入），而且我们发现，这一项于 $\vec{\sigma}$ 相关，因此事实上描述了自旋和磁场的耦合。

匀强磁场

- 假设我们只有匀强磁场 $\vec{B}=B\vec{e}_z$，选取 $\vec{A}=Bx\vec{e}_y$，那么我们的方程化为

$$(E^2-m^2)u=(-\nabla^2+2iqBx\partial_y+(qBx)^2)u-qB\sigma_3 u$$

- 方程不显含 y,z，我们依然按套路 $u\sim e^{ip_y y+ip_z z}$ 分量变量，有

$$(E^2-m^2)u=(-\frac{d^2}{dx^2}+p_y^2+p_z^2-2qBp_y x+(qBx)^2)u-qB\sigma_3 u$$

或

$$(E^2-m^2-p_z^2+qB\sigma_3)u=\left(-\frac{d^2}{dx^2}+(qBx-p_y)^2\right)u$$

分离上下旋

- 我们还依稀记得 u 是一个 2 分量的旋量，进一步分解 $u = \begin{pmatrix} u_+ \\ u_- \end{pmatrix}$，发现这个方程是自然解耦的

$$\begin{cases} (E^2 - m^2 - p_z^2 + qB)u_+ = \left(-\frac{d^2}{dx^2} + (qBx - p_y)^2\right) u_+ \\ (E^2 - m^2 - p_z^2 - qB)u_- = \left(-\frac{d^2}{dx^2} + (qBx - p_y)^2\right) u_- \end{cases}$$

- 合写成

$$(E^2 - m^2 - p_z^2 \pm qB)u_\pm = \left(-\frac{d^2}{dx^2} + (qBx - p_y)^2\right) u_\pm$$

对比谐振子

- 继续以前的套路，我们对比谐振子方程

$$Eu = \left(-\frac{1}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2\right)u \Rightarrow E = \left(n + \frac{1}{2}\right)\omega$$

和方程

$$(E^2 - m^2 - p_z^2 \pm qB)u_\pm = \left(-\frac{d^2}{dx^2} + (qBx - p_y)^2\right)u_\pm$$

的系数，简单变形：

$$\frac{E^2 - m^2 - p_z^2 \pm qB}{2m}u_\pm = \left(-\frac{1}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}m\left(\frac{qB}{m}\right)^2\left(x - \frac{p_y}{qB}\right)^2\right)u_\pm$$

朗道能级

- 于是我们发现，磁场中的狄拉克粒子相当于一个频率为 $\omega = \frac{qB}{m}$，中心位于 $x_B = \frac{p_y}{qB}$ 的谐振子。能级为

$$\frac{E^2 - m^2 - p_z^2 \pm qB}{2m} = \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{qB}{m}$$

解出

$$E_n^{(\pm)}(p_z) = \sqrt{m^2 + p_z^2 + (2n+1)qB \mp qB}$$

- 讨论：朗道能级依赖于 3 个量 n, p_z, m_s，而在 KG 方程那里我们得到过 $E_n(p_z) = \sqrt{m^2 + p_z^2 + (2n+1)qB}$，狄拉克方程的区别在于出现了自旋与磁场相互作用的附加能量。

电子 g 因子

- 上旋粒子的最低能量为

$$E_0^{(+)}(p_z) = \sqrt{m^2 + p_z^2} \simeq m + \frac{p_z^2}{2m}$$

- 下旋粒子的最低能量为

$$E_0^{(-)}(p_z) = \sqrt{m^2 + p_z^2 + 2qB} \simeq m + \frac{p_z^2}{2m} + \frac{qB}{m}$$

- 上下自旋的磁矩分别为 $\mu_z = g\mu_B m_s = \pm\frac{g}{2}\frac{q}{2m}$，能量差为 $\Delta E = \vec{B}\cdot\Delta\vec{\mu} = g\frac{qB}{2m}$，和狄拉克方程朗道能级的结果对比就得到了狄拉克粒子的朗德因子

$$g = 2$$

理论的美

- 我们只是把 KG 方程的二阶导数拆成了两个一阶算符的积得到了狄拉克方程，就自然地得到了自旋 $1/2$ 和电子 g 因子，而这些在非相对论量子力学中都只能是实验测得的参数。
- QED 的耦合常数不是一个常数，而有重整化带来的修正，这又可以得到电子的反常磁矩 $g = 2\left(1 + \frac{\alpha}{2\pi} + O(\alpha^2)\right)$。
- 根据场论里的自旋-统计定理又可以知道自旋 $1/2$ 粒子只能是费米子，而这在非相对论性量子力学中又只能是一个实验事实。

特定自旋粒子朗道能级的简并度

- 假设我们的空间有限，在 x，y 方向的长度分别是 L_x, L_y，那么，p_y 只能取离散值 $p_y = \frac{n\pi}{L_y}$。
- 谐振子中心为 $x_c = \frac{p_y}{qB} = \frac{n\pi}{qBL_y}$，它同样不能超过盒子，于是有

$$\frac{n\pi}{qBL_y} < L_x$$

- 于是我们得到对特定自旋粒子，朗道能级的简并度

$$g^{(\pm)}(n) = \frac{qBA}{\pi}$$

朗道能级的简并度

- 我们发现，上下旋粒子的朗道能级都可以写成

$$E=\sqrt{m^2+p_z^2+2nqB}$$

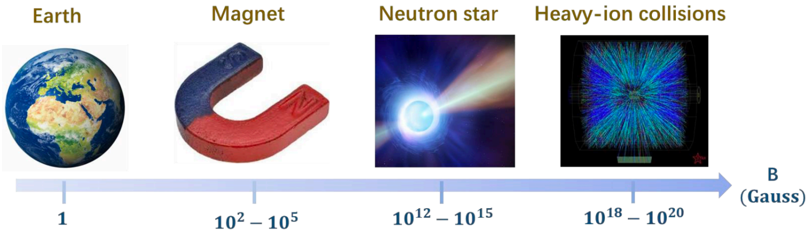
但$n=0$ 的朗道能级（最低朗道能级，LLL）只有自旋向上的粒子占据，而高朗道能级可以被两种自旋的粒子占据。

- LLL 只容纳自旋向上粒子的事实非常重要!
- 简并度是（不考虑其他量子数）能量相同的所有态的数目，于是我们发现朗道能级的简并度准确地应该写成

$$g(n)=\begin{cases}\frac{qBA}{\pi}, n=0\\ 2g(0), n\geq 1\end{cases}$$

QGP 的 LLL 近似

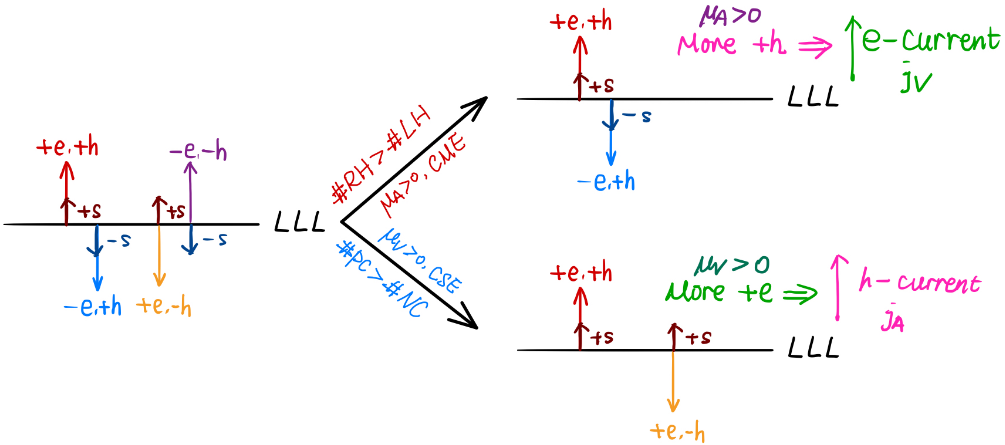
- 重离子非对心碰撞形成的夸克-胶子等离子体（QGP）拥有极强的磁场 $eB \sim 10^{19}$ Gs。



- 有限温度和强磁场下的 QGP，高朗道能级的粒子数都被玻尔兹曼因子 $\sim e^{-\beta\sqrt{2neB}}$ 压低，因此，我们认为所有粒子都在 LLL。这带来了量子反常运输现象。
- 我们这里讨论手征磁效应和手征分离效应两种量子反常运输。

CME 和 CSE

量子反常运输源于 LLL 只容许自旋向上的正粒子和自旋向下的反粒子。



手征磁效应（CME）

- LLL 上的这群正粒子都自旋向上，负粒子因为带电相反，都自旋向下（保证低能量）。
- 假设我们有一堆左手粒子和右手粒子，但右手粒子因为某些原因更多。因为 LLL 只容纳自旋向上的正粒子，右手正粒子全部往上跑；因为 LLL 只容纳自旋向下的负粒子，右手负粒子都往下跑，因此，我们有一个平行于外磁场方向的电流。
- 估计电流的大小：正比于电量 e，正比于 LLL 简并度 $\sim eB$，正比于多出来的右手粒子数，以轴化学势 μ_A 表征：

$$\vec{j}_V \sim e^2 \mu_A \vec{B}$$

- 这就是手征磁效应的电流。

手征分离效应（CSE）

- CME 中，正负粒子一样多，而 RH 粒子多于 LH 粒子，产生一个电流 $j_V \sim \mu_A$。
- 对偶效应：LH 粒子和 RH 粒子一样多，但正粒子多于负粒子，对偶地，它将产生一个手性流 $j_A \sim \mu_V$。
- 原因：在 LLL 下，正的 RH 粒子往上跑，正的 LH 粒子往下跑。等效于有一个向上运输的正螺旋（h）流。
- 估计手征流的大小：正比于电量 e，正比于 LLL 简并度 $\sim eB$，正比于多出来的正粒子数，以粒子化学势 μ_V 表征：

$$\vec{j}_A \sim e^2 \mu_V \vec{B}$$

- 这就是手征分离效应的流。

手征磁波（CMW）

- 我们看到，多出来的正电荷带来手性的向上流动；而多出来的手性又带来电荷的向上流动。
- $j_A \sim \mu_V$，$j_V \sim \mu_A$，两者交替激发形成手征磁波。
- 在强磁场极限下，CMW 以光速传播（D. E. Kharzeev, H.-U. Yee, *PRD*, 2010, https://arxiv.org/abs/1012.6026v2）

其他 QCD 反常运输

Table of anomalous chiral transports

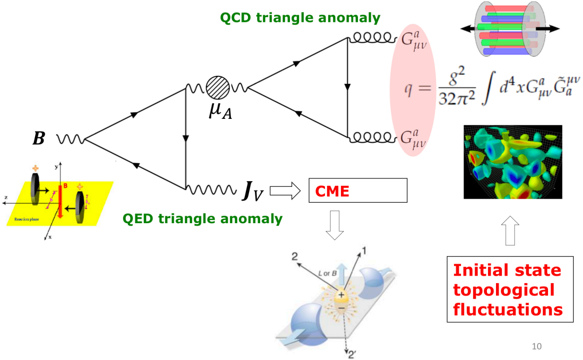
- Transport phenomena closely related to chirality and quantum anomalies.

	$\boldsymbol{E}$	$\boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{\omega}$
J_V	σ Ohm's law	$\frac{e^2}{2\pi^2}\mu_A$ Chiral magnetic effect	$\frac{e}{\pi^2}\mu_V\mu_A$ Vector chiral vortical effect
J_A	$\propto \frac{\mu_V\mu_A}{T^2}\sigma$ Chiral electric separation effect	$\frac{e^2}{2\pi^2}\mu_V$ Chiral separation effect	$e(\frac{T^2}{6}+\frac{\mu_V^2+\mu_A^2}{2\pi^2})$ Axial chiral vortical effect

And the collective waves (chiral magnetic wave, chiral vortical wave, chiral electric wave, etc)

μ_V 和 μ_A 的来源

- 我们看到，QGP 反常运输现象与手性不平衡和电荷不平衡密切相关；但为什么会凭空多出右手粒子/正粒子?
- QCD 真空拓扑涨落，$SU(3)$ 群独特的拓扑结构。



For more on anomalous transport, see, e.g. D. E. Kharzeev, et al. http://arxiv.org/abs/arXiv:1511.04050, X.-G. Huang,https://arxiv.org/abs/1509.04073v3.

γ 矩阵求迹技巧

以后会有用的

矩阵求迹的一般性质

迹内部的矩阵乘积可以轮换顺序

$$\operatorname{tr} ABC = \operatorname{tr} CAB = \operatorname{tr} BCA$$

$$\operatorname{tr} ABCD = \operatorname{tr} BCDA = \operatorname{tr} CDAB = \operatorname{tr} DABC$$

但不成立

$$\operatorname{tr} AB = \operatorname{tr} A \operatorname{tr} B$$

和

$$\operatorname{tr} ABC = \operatorname{tr} ACB$$

等

γ^5 的一般性质

- 我们之后的讨论都不依赖于具体的表象，而只利用基本定义

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}$$

- 定义

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$$

- 证明：
  1. $$(\gamma^5)^2 = 1$$
  2. $$\{\gamma^\mu, \gamma^5\} = 0$$
  3. $$\operatorname{tr}\gamma^5 = 0$$

$(\gamma^5)^2 = 1$

$$
\begin{aligned}
(\gamma^5)^2 &= -\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \\
&= -\gamma^0\gamma^1\gamma^2(\{\gamma^3,\gamma^0\} - \gamma^0\gamma^3)\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \\
&= \gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^0\gamma^3\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \\
&= \ldots(\text{再移两次}) \\
&= \gamma^0\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \quad \left(\gamma^0\gamma^0 = \frac{1}{2}\{\gamma^0,\gamma^0\} = \frac{1}{2}2\eta^{00} = 1\right) \\
&= \gamma^1\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^2\gamma^3 \quad \left(\gamma^1\gamma^1 = \frac{1}{2}\{\gamma^1,\gamma^1\} = \frac{1}{2}2\eta^{11} = -1\right) \\
&= -\gamma^2\gamma^3\gamma^2\gamma^3 \\
&= \gamma^2\gamma^2\gamma^3\gamma^3 \\
&= 1
\end{aligned}
$$

其他两个

- $$\{\gamma^\mu, \gamma^5\} = i\gamma^\mu\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 - i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^\mu$$
  把第一项的第一个 γ^μ 往后移到第二个 γ^μ 前，要移 μ 次，添符号 $(-1)^\mu$；把第二项的第二个 γ^μ 移到第一个 γ^μ 后，添符号 $(-1)^{3-\mu} = -(-1)^\mu$，于是
  $$\{\gamma^\mu, \gamma^5\} = i(-1)^\mu(\gamma^0 \dots \gamma^\mu\gamma^\mu \dots \gamma^3 - \gamma^0 \dots \gamma^\mu\gamma^\mu \dots \gamma^3) = 0$$
- 利用 $(\gamma^0)^2 = 1$，
  $$\gamma^5 = \gamma^5\gamma^0\gamma^0 = -\gamma^0\gamma^5\gamma^0$$
  两边取迹得到
  $$\operatorname{tr}\gamma^5 = -\operatorname{tr}\gamma^0\gamma^5\gamma^0 = -\operatorname{tr}\gamma^5\gamma^0\gamma^0 = -\operatorname{tr}\gamma^5$$
  于是
  $$\operatorname{tr}\gamma^5 = 0$$

零迹定理

- 定理：奇数个 γ^μ 乘积的迹为 0。
- 证明：利用 $(\gamma^5)^2 = 1$

$$\gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_n} = \gamma^5 \gamma^5 \gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_n}$$

因为 γ^5 和所有 γ^μ 都对易，把第二个 γ^5 移到最后，填符号 $(-1)^n$

$$\gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_n} = (-1)^n \gamma^5 \gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_n} \gamma^5$$

两边取迹，在右边的迹中把最后一个 γ^5 轮换到第一个消掉，得到

$$\mathrm{tr}\, \gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_n} = (-1)^n \, \mathrm{tr}\, \gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_n}$$

n 为奇数时给出

$$\mathrm{tr}\, \gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_n} = 0$$

思考

如何处理偶数个 γ 矩阵乘积的迹？

课堂小练习

证明：$\mathrm{tr}\,\gamma^{\mu_1}\ldots\gamma^{\mu_n}\gamma^5=0$，$n$ 为奇数

γ 矩阵求迹公式列举

记号：$\mu, \nu, \cdots = 0, 1, 2, 3$，$i, j, \cdots = 1, 2, 3$，$a, b, \cdots = 1, 2, 3, 5$；$d$ 为旋量空间的维数（最小且默认等于 4）。

1. $\mathrm{tr}\, 1 = d (= 4)$;
2. $\mathrm{tr}\, \gamma^\mu \gamma^\nu = d\eta^{\mu\nu}$;
3. $\mathrm{tr}\, \gamma^a = 0$;
4. $\mathrm{tr}\, \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^5 = 0$;
5. $\mathrm{tr}\, \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma = d(\eta^{\mu\nu}\eta^{\rho\sigma} - \eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma} + \eta^{\mu\sigma}\eta^{\nu\rho})$.

后两个公式的证明

- $$\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^5 = (\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\} - \gamma^\nu\gamma^\mu)\gamma^5 = 2\eta^{\mu\nu}\gamma^5 - \gamma^\nu\gamma^\mu\gamma^5$$

  两边取迹得到

  $$\operatorname{tr}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^5 = 2\eta^{\mu\nu}\operatorname{tr}\gamma^5 - \operatorname{tr}\gamma^\nu\gamma^\mu\gamma^5 = -\operatorname{tr}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^5$$

  即 $\operatorname{tr}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^5 = 0$
- $\operatorname{tr}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma = \operatorname{tr}(2\eta^{\mu\nu} - \gamma^\nu\gamma^\mu)\gamma^\rho\gamma^\sigma =$ $2\eta^{\mu\nu}\operatorname{tr}\gamma^\rho\gamma^\sigma - \operatorname{tr}\gamma^\nu\gamma^\mu\gamma^\rho\gamma^\sigma = 2d\eta^{\mu\nu}\eta^{\rho\sigma} - \operatorname{tr}\gamma^\nu(2\eta^{\mu\rho} - \gamma^\rho\gamma^\mu)\gamma^\sigma =$ $2d\eta^{\mu\nu}\eta^{\rho\sigma} - 2d\eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma} + \operatorname{tr}\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\mu\gamma^\sigma = 2d\eta^{\mu\nu}\eta^{\rho\sigma} - 2d\eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma} +$ $\operatorname{tr}\gamma^\nu\gamma^\rho(2\eta^{\sigma\mu} - \gamma^\sigma\gamma^\mu) = 2d(\eta^{\mu\nu}\eta^{\rho\sigma} - \eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma} + \eta^{\sigma\mu}\eta^{\nu\rho}) - \operatorname{tr}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma$

  于是

  $$\operatorname{tr}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma = d(\eta^{\mu\nu}\eta^{\rho\sigma} - \eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma} + \eta^{\mu\sigma}\eta^{\nu\rho})$$

Feynman / 符号

- 对任意 4 维矢量 a_μ，定义 $\not{a} = a_\mu \gamma^\mu$。
- 证明：$\not{a}\not{b} = ab - i a_\mu b_\nu \sigma^{\mu\nu}$，其中 $\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$，其中 $ab = a_\mu b^\mu$ 是四维矢量的内积。

slash 内积的公式的证明

我们有

$$
\begin{aligned}
\not{a}\not{b} &= a_\mu \gamma^\mu b_\nu \gamma^\nu \\
&= a_\mu b_\nu \frac{1}{2}(\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} + [\gamma^\mu, \gamma^\nu]) \\
&= a_\mu b_\nu \frac{1}{2}(2\eta^{\mu\nu} - 2i\sigma^{\mu\nu}) \\
&= a_\mu b^\mu - i a_\mu b_\nu \sigma^{\mu\nu}
\end{aligned}
$$

Feynman / 符号的迹

利用之前求得的 γ 矩阵求迹公式和 slash 符号内积公式进一步证明

1. $\mathrm{tr}\,\not{a} = 0$;
2. $\mathrm{tr}\,\not{a}\not{b} = d\,ab$;
3. $\mathrm{tr}\,\not{a}\not{b}\not{c}\not{d} = d[(ab)(cd) - (ac)(bd) + (ad)(bc)]$;
4. 奇数个 Feynman slash 乘积的迹为零。

下标 γ 矩阵

形式上定义 $\gamma_\mu = \eta_{\mu\nu}\gamma^\nu$，证明

1. $\gamma_\mu\gamma^\nu = \delta_\mu^\nu - i\sigma_\mu{}^\nu$;
2. $\gamma_\mu\gamma^\mu = 4$;
3. $\not{a} = a^\mu\gamma_\mu$;

第一个等式的证明:

下标 γ 矩阵

形式上定义 $\gamma_\mu = \eta_{\mu\nu}\gamma^\nu$，证明

1. $\gamma_\mu\gamma^\nu = \delta_\mu^\nu - i\sigma_\mu{}^\nu$;
2. $\gamma_\mu\gamma^\mu = 4$;
3. $\not{a} = a^\mu\gamma_\mu$;

第一个等式的证明： $\gamma_\mu\gamma^\nu = \eta_{\mu\rho}\gamma^\rho\gamma^\nu = \eta_{\mu\rho}\frac{1}{2}(\{\gamma^\rho, \gamma^\nu\} + [\gamma^\rho, \gamma^\nu]) = \eta_{\mu\rho}\frac{1}{2}(2\eta^{\rho\nu} - 2i\sigma^{\rho\nu}) = \delta_\mu^\nu - i\sigma_\mu{}^\nu$

slash 记号和 γ 矩阵的积

证明：

1. $\gamma_\mu \not{a} \gamma^\mu = -2\not{a}$;
2. $\gamma_\mu \not{a}\not{b} \gamma^\mu = 4ab$;
3. $\gamma_\mu \not{a}\not{b}\not{c} \gamma^\mu = -2\not{c}\not{b}\not{a}$

证明方法：反复移位。