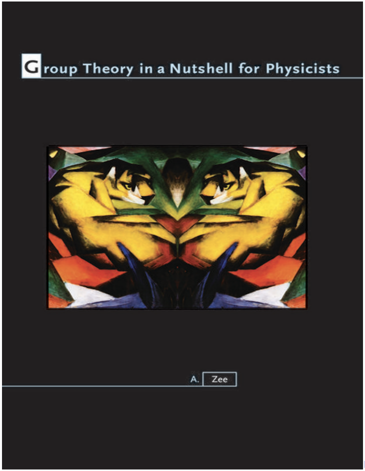
Group Theory

Talk 1-Introduction and Discrete Groups

参考书目

Group Theory in a Nutshell for Physicists by Anthony Zee. （徐一鸿）



A. Zee

为什么徐一鸿的英文姓是Zee?

上海阿拉

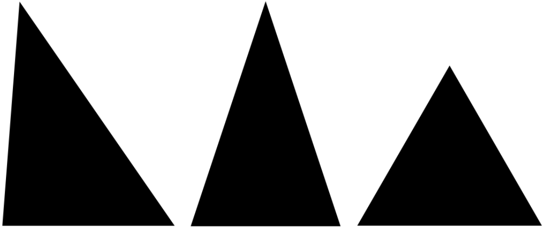
因为他是上海人。上海人就要说上海话。

对称性

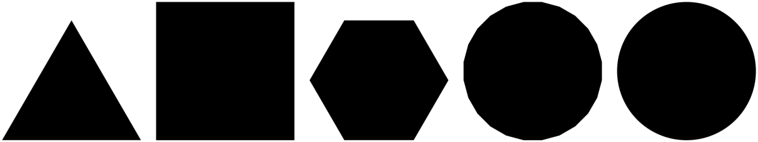
观察下面几组图形，不要思考，直观地给每组中图形的对称性排个序。



对称性



对称性

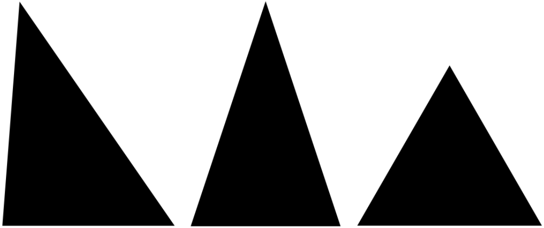


衡量对称性

直观告诉我们可以分出图形对称性的大小，如何定量地去衡量?
设T是对图形的一个操作，例如镜面反射和旋转。称T是一个对称操作，若操作前后图形完全相同。
定义操作的乘法T_2T_1为先进行操作1，再进行操作2。显然，若T_1和T_2都是对称操作，则它们的乘积也是对称操作（封闭性）。

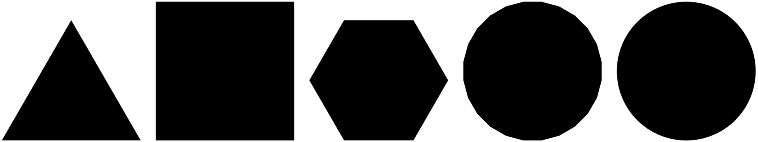
三角形的对称群

记I为恒等操作（什么也不干），$R(\theta)$为逆时针旋转θ角的操作，r为沿竖直的轴镜像反射的操作，则对三角形组，它们各自的所有对称操作组成的集合为



$$S_1 = \{I\},\ S_2 = \{I, r\},\ S_3 = \{I, r, R(120^\circ), R(240^\circ)\}$$

正多边形的对称群



正多边形各自的所有对称操作组成的集合为

$$D_3=\{I,r,R(120^\circ),R(240^\circ)\},\ D_4=\{I,r,R(90^\circ),R(180^\circ),R(270^\circ)\},$$

$$D_6=\{I,r,R(60^\circ),R(120^\circ),R(180^\circ),R(240^\circ),R(300^\circ)\},$$

$$D_{24}=\{I,r,R(n\cdot 15^\circ)\},\ D_\infty=\{I,r,R(\theta)\ for\ \theta\in[0^\circ,360^\circ)\}$$

对称群

群是一个对"乘法"封闭的集合G，并且

- 存在单位元$I \in G$，使得对任意其他元素$g \in G$都有$gI = Ig = g$。
- 存在逆元，对任意元素$g \in G$，都存在一个元素$g^{-1} \in g$使得$g^{-1}g = gg^{-1} = I$。
- 结合律成立，即$g_1(g_2g_3) = (g_1g_2)g_3$，乘法可以保持顺序任意加括号。

试验证刚才讨论的对称操作组成的集合满足上面三个要求，因此这些集合称为是图形对应的对称群。
经验总结：对称性越"大"，对称群的元素就越多。

阿贝尔群

群中的乘法一般是不可交换的，即$gh \neq hg$。若$gh = hg$对任意元素都成立，则称这个群是可交换群或阿贝尔群。

群的其他实例

三维空间旋转群$SO(3)$非阿贝尔，但$SO(2)$是阿贝尔群。
方程$z^N = 1$在复数域的所有根构成阿贝尔群Z_N。
$U(1) = \{e^{i\theta},\ \theta \in \mathbb{R}\}$是$Z_N$的连续极限。
所有的n阶方阵构成非阿贝尔群。

子群

若（从集合角度）$H \subset G$，且H也构成群，则称H是G的子群。
例如$SO(2) \subset SO(3)$。

直积

两集合F和G的笛卡尔积定义为$F \otimes G = \{(f, g) | f \in F, g \in G\}$。
若F和G构成群，则可以定义$F \otimes G$上的乘法

$$(f_1, g_1)(f_2, g_2) = (f_1 f_2, g_1 g_2)$$

这显然使得$F \otimes G$构成群，称为F和G的直积。
显然有$F, G \subset F \otimes G$。

离散群

元素有限的群称为有限群，元素可数的群称为离散群。
循环群，拉格朗日定理，乘法表，表示论，同态和同构，不变子群和派生子群，商群……看黑板，懒得打字了。