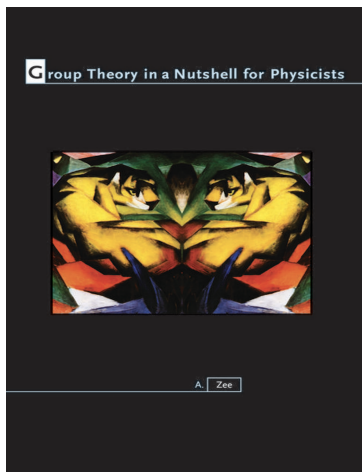


Group Theory

Talk 1-Introduction and Discrete Groups

参考书目

Group Theory in a Nutshell for Physicists by Anthony Zee. (徐一鸿)



A. Zee

为什么徐一鸿的英文姓是Zee?



上海阿拉

因为他是上海人。上海人就要说上海话。



对称性

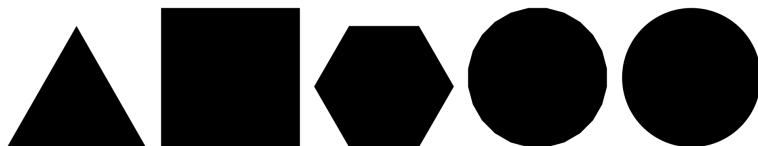
观察下面几组图形，不要思考，直观地给每组中图形的对称性排个序。



对称性



对称性



衡量对称性

直观告诉我们可以分出图形对称性的大小，如何定量地去衡量？
设 T 是对图形的一个操作，例如镜面反射和旋转。称 T 是一个对称操作，若操作前后图形完全相同。

定义操作的乘法 $T_2 T_1$ 为先进行操作1，再进行操作2。显然，若 T_1 和 T_2 都是对称操作，则它们的乘积也是对称操作（封闭性）。

记 I 为恒等操作（什么也不干）， $R(\theta)$ 为逆时针旋转 θ 角的操作， r 为沿竖直的轴镜像反射的操作，则对三角形组，

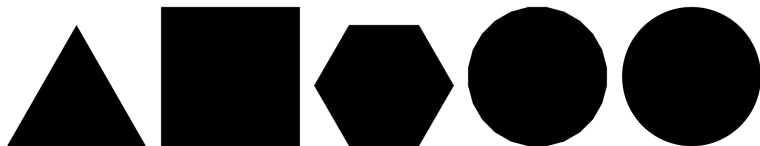
三角形的对称群

记 I 为恒等操作（什么也不干）， $R(\theta)$ 为逆时针旋转 θ 角的操作， r 为沿竖直的轴镜像反射的操作，则对三角形组，它们各自的所有对称操作组成的集合为



$$S_1 = \{I\}, S_2 = \{I, r\}, S_3 = \{I, r, R(120^\circ), R(240^\circ)\}$$

正多边形的对称群



正多边形各自的所有对称操作组成的集合为

$$D_3 = \{I, r, R(120^\circ), R(240^\circ)\}, \quad D_4 = \{I, r, R(90^\circ), R(180^\circ), R(270^\circ)\},$$

$$D_6 = \{I, r, R(60^\circ), R(120^\circ), R(180^\circ), R(240^\circ), R(300^\circ)\},$$

$$D_{24} = \{I, r, R(n \cdot 15^\circ)\}, \quad D_\infty = \{I, r, R(\theta) \text{ for } \theta \in [0^\circ, 360^\circ)\}$$

对称群

群是一个对“乘法”封闭的集合 G ，并且

- ▶ 存在单位元 $I \in G$ ，使得对任意其他元素 $g \in G$ 都有 $gI = Ig = g$ 。
- ▶ 存在逆元，对任意元素 $g \in G$ ，都存在一个元素 $g^{-1} \in G$ 使得 $g^{-1}g = gg^{-1} = I$ 。
- ▶ 结合律成立，即 $g_1(g_2g_3) = (g_1g_2)g_3$ ，乘法可以保持顺序任意加括号。

试验证刚才讨论的对称操作组成的集合满足上面三个要求，因此这些集合称为是图形对应的对称群。

经验总结：对称性越“大”，对称群的元素就越多。

阿贝尔群

群中的乘法一般是不可交换的，即 $gh \neq hg$ 。若 $gh = hg$ 对任意元素都成立，则成这个群是可交换群或阿贝尔群。

群的其他实例

三维空间旋转群 $SO(3)$ 非阿贝尔，但 $SO(2)$ 是阿贝尔群。

方程 $z^N = 1$ 在复数域的所有根构成阿贝尔群 Z_N 。

$U(1) = \{e^{i\theta}, \theta \in \mathbb{R}\}$ 是 Z_N 的连续极限。

所有的 n 阶方阵构成非阿贝尔群。

子群

若（从集合角度） $H \subset G$ ，且 H 也构成群，则称 H 是 G 的子群。
例如 $SO(2) \subset SO(3)$ 。

直积

两集合 F 和 G 的笛卡尔积定义为 $F \otimes G = \{(f, g) | f \in F, g \in G\}$ 。
若 F 和 G 构成群，则可以定义 $F \otimes G$ 上的乘法

$$(f_1, g_1)(f_2, g_2) = (f_1 f_2, g_1 g_2)$$

这显然使得 $F \otimes G$ 构成群，称为 F 和 G 的直积。
显然有 $F, G \subset F \otimes G$ 。

离散群

元素有限的群称为有限群，元素可数的群称为离散群。
循环群，拉格朗日定理，乘法表，表示论，同态和同构，不变子群和派生子群，商群.....看黑板，懒得打字了。