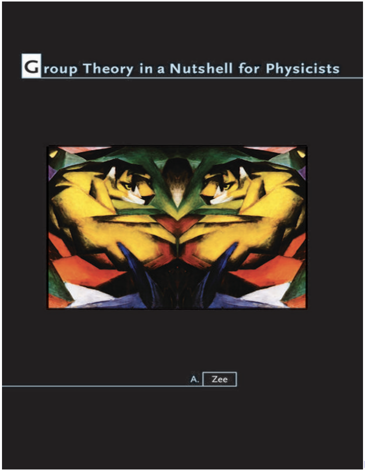
Group Theory

Talk 1-Introduction and Discrete Groups

参考书目

Group Theory in a Nutshell for Physicists by Anthony Zee. （徐一鸿）



A. Zee

为什么徐一鸿的英文姓是Zee?

上海阿拉

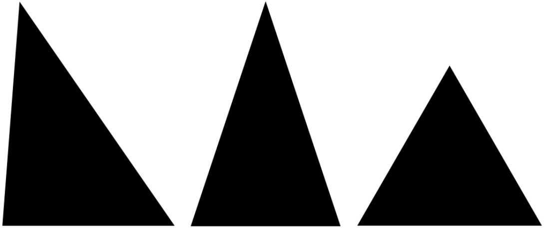
因为他是上海人。上海人就要说上海话。

对称性

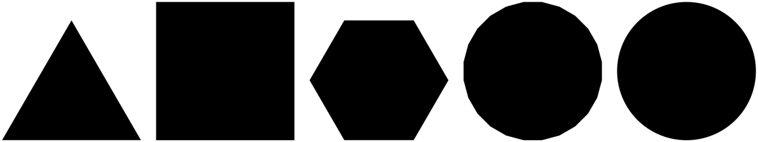
观察下面几组图形，不要思考，直观地给每组中图形的对称性排个序。

对称性



对称性

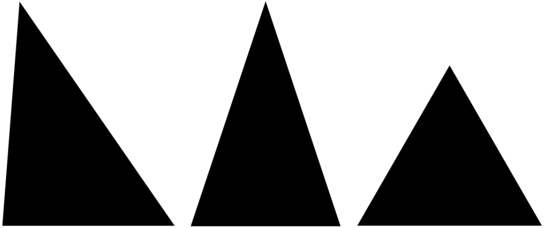


衡量对称性

直观告诉我们可以分出图形对称性的大小，如何定量地去衡量?
设T是对图形的一个操作，例如镜面反射和旋转。称T是一个对称操作，若操作前后图形完全相同。
定义操作的乘法T_2T_1为先进行操作1，再进行操作2。显然，若T_1和T_2都是对称操作，则它们的乘积也是对称操作（封闭性）。

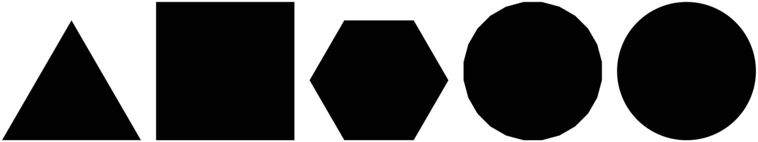
三角形的对称群

记I为恒等操作（什么也不干），$R(\theta)$为逆时针旋转θ角的操作，r为沿竖直的轴镜像反射的操作，则对三角形组，它们各自的所有对称操作组成的集合为



$$S_1 = \{I\},\ S_2 = \{I, r\},\ S_3 = \{I, r, R(120^\circ), R(240^\circ)\}$$

正多边形的对称群



正多边形各自的所有对称操作组成的集合为

$$D_3 = \{I, r, R(120^\circ), R(240^\circ)\},\ D_4 = \{I, r, R(90^\circ), R(180^\circ), R(270^\circ)\},$$

$$D_6 = \{I, r, R(60^\circ), R(120^\circ), R(180^\circ), R(240^\circ), R(300^\circ)\},$$

$$D_{24} = \{I, r, R(n \cdot 15^\circ)\},\ D_\infty = \{I, r, R(\theta)\ \mathit{for}\ \theta \in [0^\circ, 360^\circ)\}$$

对称群

群是一个对"乘法"封闭的集合G，并且

- 存在单位元$I \in G$，使得对任意其他元素$g \in G$都有$gI = Ig = g$。
- 存在逆元，对任意元素$g \in G$，都存在一个元素$g^{-1} \in g$使得$g^{-1}g = gg^{-1} = I$。
- 结合律成立，即$g_1(g_2g_3) = (g_1g_2)g_3$，乘法可以保持顺序任意加括号。

试验证刚才讨论的对称操作组成的集合满足上面三个要求，因此这些集合称为是图形对应的对称群。
经验总结：对称性越"大"，对称群的元素就越多。

阿贝尔群

群中的乘法一般是不可交换的，即$gh \neq hg$。若$gh = hg$对任意元素都成立，则称这个群是可交换群或阿贝尔群。

群的其他实例

三维空间旋转群$SO(3)$非阿贝尔，但$SO(2)$是阿贝尔群。
方程$z^N = 1$在复数域的所有根构成阿贝尔群Z_N。
$U(1) = \{e^{i\theta}，\theta \in \mathbb{R}\}$是$Z_N$的连续极限。
所有的n阶方阵构成非阿贝尔群。

子群

若（从集合角度）$H \subset G$，且H也构成群，则称H是G的子群。
例如$SO(2) \subset SO(3)$。

直积

两集合F和G的笛卡尔积定义为$F \otimes G = \{(f,g)|f \in F, g \in G\}$。
若F和G构成群，则可以定义$F \otimes G$上的乘法

$$(f_1, g_1)(f_2, g_2) = (f_1 f_2, g_1 g_2)$$

这显然使得$F \otimes G$构成群，称为F和G的直积。
显然有$F, G \subset F \otimes G$。

同态和同构

称群G和H同态，若存在映射$f : G \to H$使得对任意元素有$f(g_1 g_2) = f(g_1)f(g_2)$。映射$f$称为同态映射。
例如一个群总和自己的某个子群同态。
若f是双射（单且满），则称G和H同构。例如$SU(2) \simeq U(1)$。

不变子群

设F是一个群，g是某个可以与F中元素做乘法的元素，
记$gF = \{gf|f \in F\}$，$Fg = \{fg|f \in F\}$。
称G的子群H是一个不变子群（规范子群），若对任意$g \in G$，
有$g^{-1}Hg = H$。例如Z_2是Z_4的一个不变子群。
试说明一个群总有两个平凡不变子群$\{I\}$和G本身。若群G没有非平凡不变子群，则称G是简单的。

衡量非阿贝尔性：导群

定义群G的导群（换位子群，derived subgroup）为$D[G] = \{\langle a, b\rangle \equiv (ba)^{-1}(ab) | a, b \in G\}$。
试说明：

- 导群的确是一个子群（我也不会证）。
- 导群的大小衡量了群的非阿贝尔性。阿贝尔群A的派生子群$D[A] = \{I\}$。
- 导群是不变子群（证明$g^{-1}\langle a, b\rangle g = \langle g^{-1}ag, g^{-1}bg\rangle$）。

余集

设H是G的一个不变子群，对选定的元素$g \in G$，称gH为H的一个左余集（试说明左余集一般不构成群）。
定义左余集见的乘法$(g_a H)(g_b H) \equiv \{g_a h_i g_b h_j | h_i, h_j \in H\}$。试证明代表元的表达式一定在另一个左余集中。

左余集间的乘法

证明：

$$g_a h_i g_b h_j = g_a g_b g_b^{-1} h_i g_b h_j = g_a g_b (g_b^{-1} h_i g_b) h_j$$

由于G封闭，存在一个元素$g_c = g_a g_b$；又因为H是不变子群，$g_b^{-1} h_i g_b$依然是H的元素，记作h_k。再利用H的封闭性，$h_k h_j$依然在H中，记作h_l。故$g_a h_i g_b h_j = g_c h_l$。

由此可以看出$(g_a H)(g_b H) = (g_a g_b)H$，因此$H$的所有左余集构成一个群，称为商群$Q = G/H$。

离散群

元素有限的群称为有限群，元素可数的群称为离散群。G中元素的个数记为card G
循环群，拉格朗日定理，乘法表，表示论……看黑板，懒得打字了。