Group Theory

Spin, Compactness, Symplectic Groups and QFT

电子波函数

电子自旋是1/2意味着波函数Ψ有两个分量，遵循变换：

$$\Psi \to e^{i\vec{\varphi}\cdot\vec{\sigma}/2}\Psi$$

对于一个绕z轴2π的转动：

$$\Psi \to e^{i(2\pi)\sigma_3/2}\Psi = \begin{pmatrix} e^{i\pi} & 0 \\ 0 & e^{-i\pi} \end{pmatrix}\Psi = -\Psi$$

为什么一个2π的转动会使得波函数异号？

自旋进动

- 考虑静止的满足薛定谔方程的电子，将其放置在不随时变化的外磁场$\vec{B}$下，其哈密顿量为：$H=\mu\vec{B}\cdot\frac{\vec{\sigma}}{2}$，代入薛定谔方程可以得到解：$\Psi(t)=e^{-i\mu\vec{B}\cdot\frac{\vec{\sigma}}{2}t}\Psi(0)$，假设磁场沿着3的方向，上式可化为：

$$\Psi(t)=\begin{pmatrix} e^{-i\frac{\mu Bt}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\mu Bt}{2}} \end{pmatrix}\Psi(0)$$

- 自旋$\vec{S}=\Psi^{\dagger}\frac{\vec{\sigma}}{2}\Psi$，各个自旋分量的变化为：

$$\begin{aligned}\vec{S}_1(t)&=\cos\mu Bt\vec{S}_1(0)-\sin\mu Bt\vec{S}_2(0)\\ \vec{S}_2(t)&=\sin\mu Bt\vec{S}_1(0)+\cos\mu Bt\vec{S}_2(0)\\ \vec{S}_3(t)&=\vec{S}_3(0)\end{aligned}$$

- 当$t=2\pi(\mu B)^{-1}$时，上式有什么变化？

时间反演

- 考虑自由粒子的薛定谔方程$i\frac{\partial}{\partial t}\Psi(t)=H\Psi(t)$，假设在变换$t\rightarrow t'=-t$下，方程依然满足上诉形式，即：$i\frac{\partial}{\partial t'}\Psi'(t')=H\Psi'(t')$
- 假设$\Psi'(t')=T\Psi(t)$，T是时间反演算符。代入上式化简并且$HT=TH$，可以得到：

$$T^{-1}(-i)T=i$$

- 假设$T=UK$，且$K\varphi=\varphi^*K$, $K^2=I$，代入上式化简得到：$U^{-1}iU=i$，成立的条件是U是幺正矩阵，所以T的反幺正性就体现在K上
- 可以验证对于自旋为0粒子的平面波解$\Psi(t)=e^{i(\vec{p}\cdot\vec{x}-Et)}$，时间反演后 $\Psi^{'}(t)=e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{x}+Et)}$，空间朝着相反的方向，但是能量依然是正的。此时$T^2=UKUK=UU^*K^2=+1$

自旋的时间反演

- 时间反演算符作用在自旋$\vec{S} = \Psi^\dagger \frac{\vec{\sigma}}{2} \Psi$上，$\Psi \to \Psi' = T\Psi$，并且$T = UK$，作用后得到：$\vec{S'} = \frac{1}{2}\Psi^\dagger K U^\dagger \vec{\sigma} U K \Psi$。显然时间反演后的自旋应该是$\vec{S'} = -\vec{S}$，因此满足：$KU^\dagger \vec{\sigma} UK = -\vec{\sigma}$
- 能够找到一组解$U = \eta\sigma_2$使得上式成立

$$KU^\dagger \vec{\sigma} UK = \eta^* \eta K \sigma_2 \vec{\sigma} \sigma_2 K = K \begin{pmatrix} -\sigma_1 \\ +\sigma_2 \\ -\sigma_3 \end{pmatrix} K = -\vec{\sigma}$$

- 将这个解带进$T = UK$,得到连续作用两次的时间反演：

$$T^2 = \eta\sigma_2 K \eta \sigma_2 K = \eta \sigma_2 \eta^* \sigma_2^* KK = -1$$

两次时间反演后不会得到原来的状态，这意味着?

Kramer 简并

- Kramer简并：一个在电场中运动的电子，不管电场有多复杂，每一个能级都是二重简并的。
- 证明：电场在时间反演下不变，$HT = TH$，Ψ和$T\Psi$有相同的能量。 假设两者表示同一个态。则$T\Psi$正比于Ψ，即$T\Psi = e^{i\alpha}\Psi$。

$$T^2\Psi = T(T\Psi) = Te^{i\alpha}\Psi = e^{-i\alpha}T\Psi = e^{-i\alpha}e^{i\alpha}\Psi = \Psi$$

与之前矛盾，所以Ψ和$T\Psi$代表不同的两个态

群流形的紧致性

有限群的连续推广

幺正定理

- 我们知道，对一个有限群，总有幺正定理成立：
- 如果D是有限群G的一个表示，那么D和幺正表示U之间总相差一个相似变换

$$\forall g \in G,\ D(g) = S^{-1}U(g)S$$

- 其中，幺正表示的定义是

$$\forall g \in G,\ U^{\dagger}(g)U(g) = I$$

- 对连续群是否有幺正定理成立呢?

紧致性

- 如果群流形上紧致的，那么，对连续群依然有幺正定理。
- 称连续群G紧致，如果对整个群流形$\mathcal{M}$的测度积分有限

$$\int_{\mathcal{M}} d\mu(g) < \infty$$

- 粗略来讲就是群流形的体积有限。
- 因此对$SO(n)$和$SU(n)$都有幺正定理成立，而对洛伦兹群$SO(1,1)$（群元的表达式为$\Lambda(\varphi) = \begin{pmatrix} \cosh\varphi & \sinh\varphi \\ \sinh\varphi & \cosh\varphi \end{pmatrix}$）则不成立幺正定理。

辛群

正则变换是保辛变换

哈密顿力学

请一位同学来默写一下哈密顿正则方程。

哈密顿力学就是辛流形上的几何

哈密顿正则方程

$$\dot{q}_a = \frac{\partial H}{\partial p_a}, \quad \dot{p}_b = -\frac{\partial H}{\partial q_b}$$

引入记号$\xi = (q_1, \cdots, q_n, p_1, \cdots, p_n)^T$，上式可以合写成

$$\dot{\xi} = J\frac{\partial H}{\partial \xi}$$

其中J是一个$2n \times 2n$矩阵

$$J_{2n} = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$$

正则变换

回忆理论力学：正则变换是保持辛流形上柏松括号

$$[f,g] = \frac{\partial f}{\partial q_a}\frac{\partial g}{\partial p_a} - \frac{\partial f}{\partial p_a}\frac{\partial g}{\partial q_a} = J_{\alpha\beta}\partial_\alpha f \partial_\beta g$$

不变（从而保持哈密顿正则方程形式不变）的相空间坐标变换$\xi_\alpha \to \zeta_\alpha(\xi_\beta)$。代入上式有

$$\begin{aligned}
[f,g] &= J_{\alpha\beta}\frac{\partial f}{\partial \xi_\alpha}\frac{\partial g}{\partial \xi_\beta} \\
&\to J_{\alpha\beta}\frac{\partial f}{\partial \zeta_\rho}\frac{\partial \zeta_\rho}{\partial \xi_\alpha}\frac{\partial g}{\partial \zeta_\sigma}\frac{\partial \zeta_\sigma}{\partial \xi_\beta} \\
&\equiv J_{\rho\sigma}\frac{\partial f}{\partial \zeta_\rho}\frac{\partial g}{\partial \zeta_\sigma}
\end{aligned}$$

辛群

上式相当于要求变换矩阵$R_{\beta\sigma} = \frac{\partial\zeta_\sigma}{\partial\xi_\beta}$满足

$$R_{\alpha\rho}J_{\alpha\beta}R_{\beta\sigma} = J_{\rho\sigma}$$

或

$$R^T JR = J$$

- 回忆一下：$O(n)$是保持欧式度规δ_{ij}不变的矩阵集合；$O(1, n-1)$是保持闵氏度规$\eta_{\mu\nu}$不变的矩阵集合。
- 相似地，所有保持辛流形上“度规” J_{2n}不变的矩阵集合构成辛群$Sp(2n)$。

辛几何

- 所以哈密顿力学就是辛流形上的几何。
- 辛几何的研究很困难，因为一般人吃不了那么辣。

实辛群和复辛群

- 满足条件$R^T JR = J$的实矩阵R构成群$Sp(2n,\mathbb{R})$。
- 满足条件$C^T JC = J$的复矩阵C构成群$Sp(2n,\mathbb{C})$（注意是C^T不是$C^\dagger$）。
- 上面的定义式自动包含了条件$\det R = 1$（$\det C = 1$）。证明思路：如果z是R的本征值，那么$1/z$也是。

幺正辛群

幺正的辛群称为幺正辛群$USp(2n)$。显然

$$USp(2n) = U(2n) \cap Sp(2n, \mathbb{C}) = SU(2n) \cap Sp(2n, \mathbb{C})$$

幺正辛群的代数

- 按一般的套路：设$U = I + i\epsilon H \in USp(2n)$。证明：

$$H = \begin{pmatrix} P & W^* \\ W & -P^T \end{pmatrix}$$

其中$P^\dagger = P$为厄米阵，$W = W^T$为（复）对称阵。

- 厄米阵的独立实分量为n^2，复对称阵的独立分量为$n(n+1)$，于是

$$\dim USp(2n) = n(2n+1)$$

- 特别地我们注意到

$$\dim USp(2) = 3 = \dim SU(2) = \dim SO(3)$$

$$\dim USp(4) = 10 = \dim SO(5)$$

等。

用泡利矩阵表示幺正辛代数

- 设我们有一个n阶实反称阵A和3个n阶实对称阵S_1, S_2, S_3，$USp(2n)$的生成元就可以写成

$$H = \begin{pmatrix} iA + S_3 & S_1 - iS_2 \\ S_1 + iS_2 & iA - S_3 \end{pmatrix}$$

- 利用矩阵直积记号，上式也可以写成

$$H = iA \otimes I + S_a \otimes \sigma_a$$

$SU(2) \simeq USp(2)$

- 刚才已经知道$SU(2)$和$USp(2)$是代数同维的。
- 在$n = 1$时，$A \equiv 0$，S_a就是一个数s_a，于是

$$H = s_a \sigma_a$$

- 于是任意的$USp(2)$群元就是$SU(2)$群元

$$U = e^{i s_a \frac{\sigma_a}{2}}$$

量子场论速成

$$\hat{\phi} \sim \hat{a} + \hat{a}^{\dagger}$$

课程中止

因为大家没学过量子场论，我们的课程可能需要就此中止。

为了课程的延续

为了让课程继续，Zee 一鸿决定带领大家一节速成QFT。

一维谐振子的正则量子化

- 单位质量的谐振子哈密顿量为
$$H=\frac{1}{2}p^2+\frac{1}{2}\omega^2q^2$$
- 施加正则量子化条件$[\hat{q},\hat{p}]=i$，定义产生湮灭算符
$$\hat{a}^\dagger=\frac{1}{\sqrt{2\omega}}(\omega\hat{q}-i\hat{p}),\ \hat{a}=\frac{1}{\sqrt{2\omega}}(\omega\hat{q}+i\hat{p})$$
正则量子化条件等价为$[\hat{a},\hat{a}^\dagger]=1$。
- 坐标算符用产生湮灭算符表示为
$$\hat{q}=\frac{1}{\sqrt{2\omega}}(\hat{a}+\hat{a}^\dagger)$$
略去零点能，哈密顿算符用产生湮灭算符表示为
$$\hat{H}=\omega\hat{a}^\dagger\hat{a}$$

海森堡绘景

- 我们一般的非相对论量子力学都是在薛定谔绘景下描述的，这个绘景可以简单概括成算符不变态矢变，态矢的含时演化方程就是薛定谔方程

$$i\frac{\partial}{\partial t}|\Psi\rangle = \hat{H}|\Psi\rangle$$

- 我们可以作么正变换$|\Psi\rangle \to |\Psi, t\rangle = e^{i\hat{H}t}|\Psi\rangle$，算符也要相应变换为$\hat{O} \to \hat{O}(t) = e^{-i\hat{H}t}\hat{O}e^{i\hat{H}t}$。这样变换后的绘景称为海森堡绘景，它可以简单概括成态矢不变算符变。
- 代人薛定谔方程验证：

$$\frac{\partial}{\partial t}|\Psi, t\rangle = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\hat{O}(t) = i[\hat{H}, \hat{O}]$$

海森堡绘景下的谐振子

- 利用我们刚才得到的$\hat{H} = \omega \hat{a}^\dagger \hat{a}$，变换到海森堡绘景，利用运动方程$\frac{\partial}{\partial t}\hat{O}(t) = i[\hat{H}, \hat{O}]$得到

$$\hat{a}(t) = \hat{a}e^{-i\omega t},\ \hat{a}^\dagger = \hat{a}^\dagger(t)e^{i\omega t}$$

- 于是坐标算符的含时演化为

$$\hat{q}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\omega}}(\hat{a}e^{-i\omega t} + \hat{a}^\dagger e^{i\omega t})$$

其中$\hat{a} \equiv \hat{a}(t = 0)$。

从经典力学到经典场论

- 假设我们有许多个用弹簧相连的单位质量振子，以$q_a(t)$表示每个振子的位移，体系的拉格朗日函数就是

$$L = \sum_a \left(\frac{1}{2}\dot{q}_a^2 - \frac{1}{2}\omega^2 (q_{a+1} - q_a)^2 \right)$$

- 如果这些振子变得稠密，以至于整个体系变成连续的（想象：从一个一维无限振子链过渡到一根橡皮筋），那么，指标a应该用坐标x替换。其他东西也应该按规则替换

$$\sum_a \to \int dx$$

$$\dot{q} \to \frac{\partial q}{\partial t}$$

$$q_{a+1} - q_a \to \frac{\partial q}{\partial x}$$

推广到高维

- 于是一维橡皮筋的拉格朗日函数就是

$$L = \int dx \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial q}{\partial t}\right)^2 - \omega^2\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)^2\right]$$

积分号内的东西称为拉氏密度$\mathcal{L}$。

- 把q记作ϕ，令$\omega = 1$，重新引入外势$\frac{1}{2}m^2\phi^2$，就有

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)^2 - \frac{1}{2}(\vec{\nabla}\phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2$$

- 上式可以写成更相对论协变的形式

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2$$

经典场的运动方程和哈密顿量

- 作用量原理给出经典场的欧拉-拉格朗日方程

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}$$

- 场的广义动量定义为

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}$$

- 哈密顿密度

$$\mathcal{H} = \pi \dot{\phi} - \mathcal{L}$$

哈密顿量

$$H = \int d^3\vec{x}\ \mathcal{H}$$

KG场的运动方程和哈密顿量

请大家计算一下$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2$给出的运动方程和哈密顿密度。

场的傅立叶分解

- 对运动方程$(\partial^2 + m^2)\phi = 0$两边傅立叶变换得到色散关系$\omega_{\vec{k}} = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$。
- 哈密顿量$H = \frac{1}{2}\int d^3\vec{x}\ \left(\pi^2 + (\vec{\nabla}\phi)^2 + m^2\phi^2\right)$可以利用傅立叶变换写成

$$H = \frac{1}{2}\int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3}\ \left(|\pi_{\vec{k}}|^2 + \omega_{\vec{k}}^2|\phi_{\vec{k}}|^2\right)$$

- 哈密顿量可以看成无穷个谐振子的和

$$H_{\vec{k}} = \frac{1}{2}\left(|\pi_{\vec{k}}|^2 + \omega_{\vec{k}}^2|\phi_{\vec{k}}|^2\right)$$

从经典场论到量子场论

- 上面做的工作都还是在经典场论的框架下进行的。
- 但我们已经把场分解成了无数个谐振子的和，而对单个以$\vec{k}$标记的谐振子，我们都可以定义正则对易关系，引入产生湮灭算符$\hat{a}_{\vec{k}}$和$\hat{a}_{\vec{k}}^{\dagger}$。这就完成了场的量子化。
- 总的哈密顿量用产生湮灭算符写出

$$\hat{H} = \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3}\omega_{\vec{k}}\hat{a}_{\vec{k}}^{\dagger}\hat{a}_{\vec{k}}$$

- 傅立叶变换回去，在海森堡绘景下得到场算符的含时演化

$$\hat{\phi}(\vec{x},t) = \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}}\left(\hat{a}_{\vec{k}}e^{i\omega_{\vec{k}}t-i\vec{k}\cdot\vec{x}} + \hat{a}_{\vec{k}}^{\dagger}e^{-i\omega_{\vec{k}}t+i\vec{k}\cdot\vec{x}}\right)$$

从量子场到粒子

- 我们定义了一堆产生湮灭算符$\hat{a}^\dagger_{\vec{k}}$和$\hat{a}_{\vec{k}}$。
- 仿照量子谐振子，真空定义为使得所有模式$\vec{k}$都有$\hat{a}_{\vec{k}}|0\rangle = 0$的态。
- 动量$\vec{p}$粒子态定义为

$$|\vec{p}\rangle = \hat{a}^\dagger_{\vec{p}}|0\rangle$$

真空涨落

- 场算符可以分解成产生算符和湮灭算符的和

$$\hat{\phi} \sim \hat{a} + \hat{a}^\dagger$$

- 我们写出的拉氏量$\mathcal{L} \sim \phi^2$，也就是$\mathcal{L}$包含$\sim \hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a}$的项。
- 换句话说，KG场的真空会自己涨落出粒子然后经过一段时间后又湮灭掉。

构造对称操作下不变的拉氏量

- 如果拉氏量在群元$g \in G$的对称操作下不变，则称这个拉氏量的对称群是G。
- 很多时候我们反过来，先猜一个对称群，然后再构造在这个对称群下不变的拉氏量。
- 比如我们想考虑$U(1)$对称的拉氏量，最简单的可以引入一个复标量场Ψ，$U(1)$变化是$\Psi \to e^{i\alpha}\Psi$。
- 于是可以想到，最简单的拉氏量大概长这样

$$\mathcal{L} \sim \Psi^{\dagger}\Psi$$

复自由标量场

- 我们把复数引入进来相当于多引入自由度。因此我们需要两组产生湮灭算符。
- 自洽的定义方法是$\Psi \sim \hat{a} + \hat{b}^\dagger$；$\Psi^\dagger \sim \hat{a}^\dagger + \hat{b}$。
- 拉氏量$\mathcal{L} \sim \Psi^\dagger\Psi \sim \hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{a}^\dagger\hat{b}^\dagger + \hat{b}\hat{b}^\dagger + \hat{b}\hat{a}$
- 复标量场真空包含的物理过程:
  - $\hat{a}^\dagger\hat{a}$：湮灭一个a粒子再产生（和反过来）；
  - $\hat{a}^\dagger\hat{b}^\dagger$：产生一个$a, b$粒子对;
  - $\hat{b}\hat{b}^\dagger$：产生一个b粒子再湮灭（和反过来）；
  - $\hat{b}\hat{a}$：湮灭一个a, b粒子对。

$SU(N)$场论

- $SU(N)$对称的拉氏量：最简单的构造方法是$\mathcal{L}_0 \sim \Psi^i \Psi_i$，真空物理过程和$U(1)$没有太大差异：这是自由场。
- 次简单的定义方法：$\mathcal{L}_1 \sim \Psi_i \Psi_j \eta^{ij}$，这是在$SU(N)$自由场下引入的可能的相互作用项。
- 同样的，$\Psi \sim \hat{a} + \hat{a}^\dagger$；$\eta \sim \hat{b} + \hat{b}^\dagger$，$\mathcal{L} \sim \hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger \hat{b} + \cdots$：对应的物理过程为湮灭一个$b$粒子并产生两个$a$粒子等等。