Quantum Field Theory

高寒

February 12, 2020

Introduction

$$c = \hbar = \mu_0 = \epsilon_0 = k_B = 1$$

参考书目

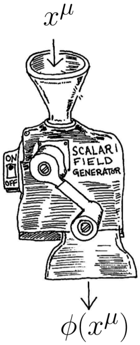
- 主要参考： T. Lancaster, S. J. Blundell: *Quantum Field Theory for the Gifted Amateur*
- Banks: *Modern Quantum Field Theory A Concise Introduction*
- 其他： David Tong: *Lectures on Quantum Field Theory*`http://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/qft/qft.pdf`
- Peskin: *An Introduction to Quantum Field Theory*
- Zee: *Quantum Field Theory in a Nutshell*

为什么需要量子场论

- 量子力学和狭义相对论是不相容的：量子力学的粒子数不变，但 $\Delta E \sim \frac{1}{\Delta t}$，$E = mc^2$，在非常短的时间尺度内......
- 为什么所有电子，光子，质子...... 都长得一摸一样?

什么是场

- 场是时空的函数 $\phi(x^\mu)$。



- 但在学习场论中我们一般不把场当成时空的函数，而是生活在时空各点上的一个个数（或者矢量、张量）。

单位制

- 我们采用自然单位制 $c=\hbar=\epsilon_0=k_B=1$。
- 在这种单位制下，只有一个独立的量纲，我们习惯选取为能量，并且以 MeV 为单位。
- 因为 $\hbar c=197\ \ \mathrm{MeV}\cdot\mathrm{fm}$，$1\ \ \mathrm{fm}=\frac{1}{197}\ \mathrm{MeV}^{-1}$。
- 常见量的量纲:
    1. 质量 = 能量 = 频率 = 温度
    2. 长度 = 时间 = 能量$^{-1}$

狭义相对论

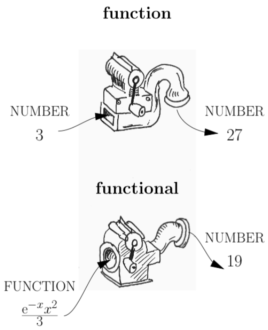
- 度规 $g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$。
- $a^\mu = (a_0, \vec{a}), \quad \partial_\mu = (\partial_t, \vec{\nabla})$

傅立叶变换

- 利用傅立叶变换把拉氏量和哈密顿量对角化。
- 习惯约定：归一化系数全部放在对动量（波矢）的积分体积元上

$$f(k) = \int d^4x\, f(x)\, e^{ik\cdot x}, \quad f(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} f(k)\, e^{-ik\cdot x}$$

泛函导数



$$F[f] = \lim_{N \to \infty} F(f_1, f_2, \ldots, f_N)$$

$$\frac{\delta F}{\delta f} \to \frac{\partial F}{\partial f_n}$$

拉氏密度

- 拉氏密度

$$S = \int dt\ L = \int dt d^3\vec{x}\ \mathcal{L}$$

- 泛函导数 $\frac{\delta S}{\delta \phi} = 0$ 得到欧拉-拉格朗日方程

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0$$

- 场的广义动量 $\pi = \mathcal{L}\dot{\phi}$，哈密顿密度 $\mathcal{H} = \pi\dot{\phi} - \mathcal{L}$

标量场

- 自由场论

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi-\frac{1}{2}m^2\phi^2$$

- 含外源的场论

$$\mathcal{L}[J]=\mathcal{L}[J=0]+J(x)\phi(x)$$

- $SO(2)$ 场论

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}\partial_\mu\phi_1\partial^\mu\phi_1-\frac{1}{2}m^2\phi_1^2+\frac{1}{2}\partial_\mu\phi_2\partial^\mu\phi_2-\frac{1}{2}m^2\phi_2^2$$

- $U(1)$ 场论：$\psi=\frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1+i\phi_2)$

$$\mathcal{L}=\partial_\mu\psi\partial^\mu\psi^*-m^2\psi\psi^*$$

- 相互作用场论：$\mathcal{L}$ 中含 ϕ^3 以上的项。

量子力学二次量子化

$$\hat{H} = \hbar\omega(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2})$$

一次量子化和二次量子化

- 一次量子化：粒子表现得像波。
- 例子：电子是一个非定域的存在，需要用波函数表征。
- 二次量子化：波表现得像粒子。
- 例子：电磁波事实上由一个个光子构成。

声子数算符

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\hat{p}^2 + \frac{1}{2}\omega^2\hat{q}^2 = \hbar\omega(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2})$$

- 能量的量子化表现得像新的粒子：声子。
- 挂在弹簧上的谐振子是实物粒子，将其一次量子化后得到波函数；波函数的二次量子化得到我们的“假想”粒子声子。

多个谐振子

- N 个解耦的谐振子，频率分别为 ω_k，哈密顿量

$$\hat{H} = \sum_{k=1}^{N} (\frac{1}{2m_k}\hat{p}_k^2 + \frac{1}{2} m_k \omega_k^2 \hat{x}_k^2)$$

- 每个谐振子都可以单独定义产生湮灭算符进行二次量子化

$$\hat{H}_k = \hbar\omega_k(\hat{n}_k + \frac{1}{2}), \quad \hat{H} = \sum_{k=1}^{N} \hat{H}_k$$

- 系统的态定义为

$$|n_1, n_2, \ldots, n_N\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_1! n_2! \ldots n_N!}} (\hat{a}_1^\dagger)^{n_1} (\hat{a}_2^\dagger)^{n_2} \ldots (\hat{a}_N)^{n_N} |0\rangle$$

小学语文

- 考虑一维无限深势阱 $-L/2 < x < L/2$，其中的粒子动量只能取离散值
$$p_n = \frac{n\pi}{L}$$
- 如果我们有多个粒子 $A, B, C, \cdots$，我们可以用这样的语言描述量子体系：

粒子 A 处于 p_1 态上，粒子 B 处于 p_3 态上,……

- 我们也可以换一个角度描述：

p_1 态上有 3 个粒子，p_2 态上有 1 个粒子,……

占据数表象

- 因为量子力学中全同粒子的不可分辨性，第二种描述显然好过第一种。
- 我们把第 p_k 个模式上有 n_k 个粒子的态记作

$$|n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots\rangle$$

- 占据数表象是多个谐振子模式总声子态的推广。粒子体系的哈密顿量对占据数态的作用

$$\hat{H}|n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots\rangle = \sum_k n_k E_k |n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots\rangle$$

波色子和费米子

- 向真空内加入一个动量为 p_i 的粒子和加入一个动量为 p_j 的粒子有两种方式
$$\hat{a}_i^\dagger \hat{a}_j^\dagger |0\rangle, \quad \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_i^\dagger |0\rangle$$
- 这两种方式都正比于占据数态 $|\ldots, 1, \ldots, 1, \ldots\rangle$，因此 $\hat{a}_i^\dagger \hat{a}_n^\dagger \propto \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_m^\dagger$。
- 但是算符不对易，它们不一定是相等的。如果 $\hat{a}_i^\dagger \hat{a}_j^\dagger = \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_i^\dagger$，称粒子为波色子；如果 $\hat{a}_i^\dagger \hat{a}_j^\dagger = -\hat{a}_j^\dagger \hat{a}_i^\dagger$，称粒子为费米子。

对易和反对易

- 泡利不相容原理。
- 定义波色子的产生湮灭算符

$$[\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger] = \delta_{ij}$$

- 重新定义费米子的产生湮灭算符

$$\{\hat{b}_i, \hat{b}_j^\dagger\} = \delta_{ij}$$

连续极限

- 我们之前讨论了有限空间内粒子的产生湮灭算符，它们满足 $[\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger] = \delta_{ij}$。
- 如果取 $L \to \infty$，动量谱趋于连续分布

$$[\hat{a}_p, \hat{a}_q^\dagger] = 2\pi\delta(p-q)$$

粒子数算符

$$\hat{N} = \int \frac{dp}{2\pi}\ \hat{a}_p^\dagger \hat{a}_p$$

哈密顿量

$$\hat{H} = \int \frac{dp}{2\pi}\ E_p \hat{a}_p^\dagger \hat{a}_p$$

场算符

- 场算符

$$\hat{\psi}^\dagger(\vec{x}) = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \hat{a}^\dagger_{\vec{p}} e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}}$$

- 对易关系

$$[\hat{\psi}(\vec{x}), \hat{\psi}^\dagger(\vec{y})] = \delta(\vec{y} - \vec{x})$$

一般算符推广

- 希尔伯特空间的单粒子力学量算符 $\hat{A}$ 对应到 Fock 空间

$$\hat{A} \to \sum \langle p|A|q\rangle \hat{a}_p^\dagger \hat{a}_q$$

- 密度算符

$$\hat{\rho}(\vec{x}) = \hat{\psi}^\dagger(\vec{x})\hat{\psi}(\vec{x})$$

- 坐标函数的推广。

相互作用势散射振幅

- 二体势推广

$$\hat{V}(\vec{x}-\vec{y}) \to \frac{1}{2}\int d^3\vec{x}d^3\vec{y}\hat{\psi}^\dagger(\vec{x})\hat{\psi}^\dagger(\vec{y})\,V(\vec{x}-\vec{y})\hat{\psi}(\vec{y})\hat{\psi}(\vec{x})$$

- 相互作用绘景散射振幅

$$\mathcal{M} = \langle f|e^{-i\int dt\hat{V}(t)}|i\rangle \simeq \delta_{fi} - i\mathcal{T}\langle f|\,\hat{V}|i\rangle$$

- 化简

$$\begin{aligned}\mathcal{M} &\simeq -i(2\pi)^3 T[\,V(\vec{q}_1-\vec{p}_1)+V(\vec{q}_2-\vec{p}_1)]\delta(\vec{p}_1+\vec{p}_2-\vec{q}_1-\vec{q}_2)\\ &= -i[\,V(\vec{q}_1-\vec{p}_1)+V(\vec{q}_2-\vec{p}_1)]\mathcal{V}\mathcal{T}\end{aligned}$$

- 用费曼图表示，高阶散射振幅...

作业

1. 计算 $1\ \ \mathrm{Mpc} = ?\ \mathrm{MeV}^{-1}$
2. 已知 $f(x) = \int \frac{dk}{2\pi} f(k)\, e^{ikx}$，求证 $\int dx \left(\frac{df(x)}{dx}\right)^2 = \int \frac{dk}{2\pi} k^2 f(k) f(-k)$
3. 泛函
$$Z[J] = e^{-\frac{1}{2}\int dxdy\ \ J(x)D(x-y)J(y)}, \quad D(x) = D(-x)$$
求 $\frac{\delta^2 Z}{\delta J^2}$
4. 计算 $\langle\vec{p}|\hat{\psi}^\dagger(\vec{x})\hat{\psi}(\vec{y})|\vec{p}\rangle$。