Group Theory

Talk 7 - Group Theory in a Quantum World

Han Gao

gaoh26@mail2.sysu.edu.cn

https://github.com/Probfia/Notes/blob/master/groups/seminar_lec_2/talk.pdf

这章特别水

所以秉着“人人都拿公益时”的理念，莫宗霖同学给我们先对前一章作一个回顾：

- 群的表示：定义，可约与不可约；
- 方特征标表等式$N(C)=N(R)$，$\sum_c n_c\chi^*(c)\chi(c)=N(G)$；
- 实表示与复表示；
- ...

大览

- 群表示论与量子力学
- 物理中的对称性：作用量

薛定谔方程

量子力学薛定谔方程

$$H\psi = E\psi$$

哈密顿量H是一个线性算符，ψ是一个能量为E的本征态。

简并

单个能量E可能对应一系列本征态ψ^α。

$$H\psi^\alpha = E\psi^\alpha,\ \alpha = 1, 2, \cdots, d$$

这种情况称为d重简并。
你能举一些简并的例子么?

简并的来源

从刚才举出来的例子中总结一下，量子力学中，简并的来源是什么?

Spoiler: Symmetry.

简并的来源

设有一系列幺正变换$\hat{T}$，称哈密顿量在变换$\hat{T}$下不变，如果

$$\hat{T}^\dagger H \hat{T} = H$$

证明：

- 上面的等式等价于$[H, T] = 0$；
- 所有的T构成群；
- 若ψ是H能量为E的本征态，则$\hat{T}\psi$也是。

糟糕的记号

上面最后一个记号其实有问题：T其实并不能直接作用在态上，因为T是对物理空间里的矢量的某种操作（e.g. $SO(3)$旋转；镜面反射$x \to -x$等），而不是希尔伯特空间里的算符。
不过我们还是暂且这样写。它的意思是，如果我们把空间中的矢量按一定规则变化，对应的态按照这个规则会怎么变。

简并态构成子空间

假设我们已经找到了d和能量E本征态ψ_a，$a = 1, 2, \cdots, d$，并且它们是正交归一的$\langle\psi_a|\psi_b\rangle = \delta_{ab}$。
线性组合

$$\psi = c^a\psi_a$$

也是一个能量为E的本征态。因此说简并的本征态生活在由ψ_a张成的线性空间$\langle\psi_a\rangle$中。

简并态构成子空间

因为$\hat{T}\psi_a \in \langle\psi_a\rangle$，可以按基展开，形式上写成

$$\hat{T}\psi_a = D(T)_a^b \psi_b$$

其中$D(T)$在给定操作T时，就是一个普通的系数（或者，d阶方阵）。
D建立了空间对称变换和希尔伯特空间中态矢变换间的对应关系。

你看出来我在说什么了么

T是空间对称群的元素，$D(T)$是（希尔伯特空间中的）矩阵。
这不就是群表示论么？
证明：$D(T_1 T_2) = D(T_1)D(T_2)$，等式右边理解为矩阵乘法。

简并度告诉我们对称性的信息

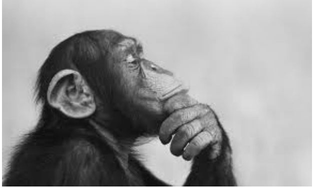
D就是对称群$G = \{T\}$的一个d维不可约表示。
因此，假如我们从实验中得到了一个d重简并度，我们知道带来这个简并度的对称群至少有一个d维不可约表示。

$$\begin{aligned} d &= \text{简并度（来源于实验）} \\ &= \text{对称群的一个不可约表示维数（理论的追求）} \end{aligned} \quad (1)$$

总结一下

- 物理空间中的对称群G中的元素T可以映射到一个希尔伯特空间中的线性算符$D(T)$;
- 在这个希尔伯特空间中可以找一组正交基;
- 哈密顿算符在这种正交基下的矩阵表示是一个分块纯量阵$H = \mathrm{diag}\left(E_{(1)} I_{d(1)}, E_{(2)} I_{d(2)}, \cdots, E_{(s)} I_{d(s)}\right)$, 自然地分出了简并态;
- 每一个分块对应群G的一个不可约表示$D^{(r)}$, 哈密顿算符在子空间中是纯量阵, 与舒尔引理对应。

回到现实



给定一个量子体系，只给你一个测量能量的装置，你能得到关于一个量子体系简并度的任何信息么？

不可能

当然不行。
比如说，对氢原子，假如你不去测量1s电子的自旋，你永远不会知道基态其实是2重简并的。
因此，需要更多的信息才能确定简并度。

实验很重要

只有做其他实验才能知道简并度的其他信息。

- 8种重子具有几乎相同的质量;
- 怎么区分8种重子? 电荷数和奇异数;
- 质量=能量, $d = 8$;
- 强相互作用至少有一个8维不可约表示;
- 8个盖尔曼矩阵, 对应8种传递色相互作用的胶子。

实验真的很重要吗?

- 理论爱好者：不需要实验，我就坐在那里想，我就知道这个世界（至少）是$SO(3)$的；我还可以拿这个算出很多符合实验的结果；然后我还可以把对称群推到$SO(10), SU(20), SU(\infty)\cdots$。
- 但这真的是完全想出来的么？如果我们去问一个刚出生的婴儿这个世界是不是$SO(3)$对称的，他会怎么回答？你又怎么知道把对称群推大就能够奏效呢？
- 哲学问题：我们真的有与生俱来的知识么？人是否是自身经验的总和？

STOP

宇称Parity对称性

一维粒子

$$H = -\frac{1}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V(x)$$

如果$V(x) = V(-x)$，哈密顿量在宇称变换$r : x \to -x$下不变。物理空间的一个对称群$Z_2 = \{I, r\}$。

宇称对称性的后果

我们知道Z_2有两个1维不可约表示

- 平凡表示：$I \to 1$，$r \to 1$，使得态（波函数）必须满足$\psi(-x) \equiv \hat{r}\psi(x) = D(r)\psi(x) = \psi(x)$;
- 自身表示：$I \to 1$，$r \to -1$，使得态（波函数）必须满足$\psi(-x) \equiv \hat{r}\psi(x) = D(r)\psi(x) = -\psi(x)$。

群表示论直接告诉我们，当空间具有宇称对称性时，波函数只能是严格奇函数或偶函数。（qm作业第2题）

周期平移对称性

一维粒子

$$H = -\frac{1}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V(x)$$

如果$V(x) = V(x+a)$，哈密顿量在平移变换$T : x \to x + a$下不变。物理空间的一个对称群$G = \{\cdots T^{-1}, I, T, T^2 \cdots\}$。

阿贝尔群

虽然对称群G很大，甚至是无限的；但显然G是一个阿贝尔群，而阿贝尔群只能有一维表示。
（复习：
方特征标表等式$N(C) = N(R)$和$\sum_r d_r^2 = N(G)$；阿贝尔群每个元素各成一类，$N(C) = N(G)$，只能所有$d_r = 1$。）

于是可以设$D(T) = \xi$为一个任意复数，则有$\psi(x+a) \equiv \hat{T}\psi(x) = D(T)\psi(x) = \xi\psi(x)$。

归一化条件

$$1 = \int |\psi(x+a)|^2 dx |\xi|^2 \int |\psi(x)|^2 dx = |\xi|^2$$

于是只能有$\xi \in U(1)$。将其写成$\xi = e^{ika}$，于是得到Bloch定理

$$\psi(x+a) = e^{ika}\psi(x)$$

布里渊区

因为$e^{ika} = e^{i(ka+2\pi)} = e^{i(k+\frac{2\pi}{a})}$，$k$的取值精确到周期$\frac{2\pi}{a}$，通常限制

$$-\frac{\pi}{a} < k < \frac{\pi}{a}$$

这一限制就是布里渊区。

更多的表示论

我们已经看到表示论在量子力学中的强大作用。
之后的章节中将讨论更广泛的对称群，例如：

- 空间$SO(3)$对称性的量子力学效应：它自然地引出自旋的概念；
- 狄拉克方程中的4个γ矩阵其实就是洛伦兹群（狭义相对论的对称群）的一个表示论。

不过这些东西我们今天都不讲。

运动方程与作用量

我们好几年没有用过的

$$F = ma$$

和我们半年没有用过的

$$S[q] = \int dt L(q, \dot{q}), \ \ L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} m\dot{q}^2 - V(q), \ \ \delta S = 0$$

是等价的。

对称性

我们说一个理论具有对称性，如果

- 在对称操作下，运动方程左右两边按相同的方式变换；
- 或：在对称操作下，作用量（或者，很多时候可以严格到拉氏量）不变。

这两种定义是等价的，但显然后一种定义更加好用：你只需要傻算就行了。

例子：中心简谐势场

三维空间中势场$V(\vec{x}) = \frac{1}{2}k\vec{x}^2$对应的运动方程为

$$m\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = k\vec{x}$$

拉氏量为

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\vec{x}}^2 - \frac{1}{2}k\vec{x}^2$$

作旋转变换$\vec{x} \to R\vec{x}$，$R \in SO(3)$，试从两种角度证明中心简谐势场具有$SO(3)$对称性。

场论作用量

ϕ场依赖于D个自变量x_μ，作用量

$$S[\phi] = \int d^D x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$$

$\delta S = 0$当

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0$$

例子

QED拉氏量

$$\mathcal{L}_{QED} = \bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$$

其中$\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0$，$\not{D} = \gamma^\mu(\partial_\mu - iqA_\mu)$,$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$。
试求ψ的运动方程：不包含$\psi^\dagger$的导数项，对$\psi^\dagger$变分就得到

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}_{QED}}{\partial(\partial_\mu \psi^\dagger)} = 0 = \frac{\partial \mathcal{L}_{QED}}{\partial \psi^\dagger}$$

$$\gamma^0(i\not{D} - m)\psi = 0$$

或

$$(\not{D} + im)\psi = 0$$

我今天已经速成QED了？

tql

场论对称性与守恒流

例如，复自由标量场

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \psi \partial^\mu \psi^* - M^2 \psi \psi^*$$

和刚才提到的QED拉氏量在$U(1)$变换$\psi \to e^{i\lambda}\psi$下是对称的。
每个对称性带来一个守恒流，$U(1)$对称性带来的守恒流是概率流守恒；二次量子化后可以重新诠释为正粒子数-反粒子数守恒。