Group Theory: Symmetry in the Particle World

Han G.

December 25, 2019

内容提要

准备知识：复标量场和旋量场

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\not{\partial} - m)\psi$$

自旋 0 粒子：复标量场

- 自由标量场的拉氏量

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2$$

- 量子化后描述质量为 m 的自旋 0 粒子。

自旋 $\frac{1}{2}$ 粒子：旋量场

- 自由旋量场的拉氏量

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\partial\!\!\!/ - m)\psi$$

- 我们知道，旋量是 4 分量列向量，$\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0$，$\partial\!\!\!/ = \gamma^\mu\partial_\mu$。这些在量子力学 seminar 上都讨论了。
- 量子化后描述质量为 m 的自旋 1/2 粒子（区分正负）。

如果有很多种粒子

那就把这些粒子的拉氏量全加起来。

味对称性破缺

$$m_s \gg m_{u,d}$$

n 重态的来源

- 我们在之前两节的讨论中发现，介子 8 重态，重子 8 重态和 10 重态的来源都是三种夸克态

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad s = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

  的 $SU(3)$ 旋转对称性。这称作味对称性。
- 如果 $SU(3)_f$ 对称性是精确的，同种表示中的所有粒子都具有同样的质量（最多相差静电能的量级）。
- 但是，我们发现，对介子 8 重态，这些介子质量差得离谱；重子 8 重态的重子质量也差 ~ 0.2 左右。
- 来源：奇夸克 s 的质量比其他两个大得多！

$$m_u \approx 2.3 \text{ MeV}, \quad m_d \approx 4.8 \text{ MeV}, \quad m_s \approx 95 \text{ MeV}$$

破缺的对称性

- 粒子世界的 $SU(3)_f$ 味对称性因为某种机制被破坏了。
- 在一级近似下，我们认为 $SU(3)_f$ 破缺成同位旋对称性 $SU(2)_i$ 和超荷（奇异数）对称性 $U(1)_s$。$SU(2)_i$ 对称性在实验上符合得很好。
- 来源：u, d 夸克差不多，象征奇异数的 s 夸克重很多。
- 对称性破缺的其他粒子：原子的轨道量子数 j 在自由 $SO(3)$ 空间中无限制：不可约表示的维数 $2j+1$ 可以取到无穷；但假如把原子放到晶格里，$SO(3)$ 对称性被破坏，j 的取值有限个。

介子八重态

$$4m_K^2 = m_\pi^2 + 3m_\eta^2$$

构造介子场

- 介子 8 重态对应 $SU(3)_f$ 的 $(1,1)$ 张量表示，即伴随表示。也就是，介子场可以用盖尔曼矩阵张成

$$M=\frac{1}{\sqrt{2}}M_a\lambda_a=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} M_3+\frac{1}{\sqrt{3}}M_8 & M_1-iM_2 & M_4-iM_5 \\ M_1+iM_2 & -M_3+\frac{1}{\sqrt{3}}M_8 & M_6-iM_7 \\ M_4+iM_5 & M_6+iM_7 & -\frac{2}{\sqrt{3}}M_8 \end{pmatrix}$$

- 重新线性组合：注意同位旋对称性没有被破坏，而 $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3),(\lambda_4,\lambda_5),(\lambda_6,\lambda_7),\lambda_8$ 各对应一组同位旋对称性 $8\to 3_0\oplus 2_3\oplus 2_{-3}\oplus 1_0$：

$$M=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\pi^0+\frac{1}{\sqrt{6}}\eta & \pi^+ & K^+ \\ \pi^- & -\frac{1}{\sqrt{2}}\pi^0+\frac{1}{\sqrt{6}}\eta & K^0 \\ K^- & \bar{K}^0 & -\frac{2}{\sqrt{6}}\eta \end{pmatrix}$$

构造完全 $SU(3)_f$ 对称的拉氏量

- 最简单的，含动能项和质量项的，$SU(3)_f$ 不变的标量是

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\left[(\partial M)^2 - m^2 M^2\right]$$

- 计算出

$$\mathrm{tr}\, M^2 = (\pi^0)^2 + 2\pi^+\pi^- + 2(K^0\bar{K}^0 + K^+K^-) + \eta^2$$

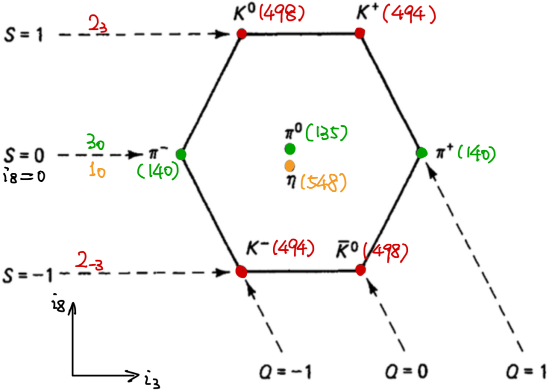
- 物理意义：介子场解耦合，所有同型（同一个同位旋）的介子质量相同，都是 m。

破坏对称性

- 刚刚我们建立了完美 $SU(3)_f$ 的介子场拉氏量，它的各个介子确实是等质量的。
- 现在我们就来着手破坏这个美丽的对称性。
- 悲剧就是把美好的事物毁灭给人看。——鲁迅

开局一张图

- 我们思考怎么去破坏对称性，为此我们先看熟悉的图



- 然后我们发现，质量差异与超荷（奇异数）I_8 密切相关，这很容易理解，因为超荷由 s 夸克数决定，而它比其他两个夸克都重很多。我们又知道，描述超荷的盖尔曼矩阵是 λ_8。

后面全靠编

- 然后我们发现，质量差异与超荷（奇异数）I_8 密切相关，这很容易理解，因为超荷由 s 夸克数决定，而它比其他两个夸克都重很多。我们又知道，描述超荷的盖尔曼矩阵是 λ_8。
- 为此我们在原来的拉氏量中引入一个 $\sim \lambda_8$ 的标量作为破坏对称性的项。这一项的一种可能的，也是最简单的非平凡取法是

$$\mathrm{tr}\, M^2 \lambda_8$$

- 但 $\lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} I - \sqrt{3}\mathrm{diag}\,(0,0,1)$，前面的含单位阵的项可以吸收到原来的拉氏量中去，剩下 $\sim \mathrm{tr}\, M^2 \mathrm{diag}\,(0,0,1)$ 破坏对称性。
- 课堂小练习：利用 $M = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\pi^0 + \frac{1}{\sqrt{6}}\eta & \pi^+ & K^+ \\ \pi^- & -\frac{1}{\sqrt{2}}\pi^0 + \frac{1}{\sqrt{6}}\eta & K^0 \\ K^- & \bar{K}^0 & -\frac{2}{\sqrt{6}}\eta \end{pmatrix}$ 用介子场表示出 $\mathrm{tr}\, M^2 \mathrm{diag}\,(0,0,1)$。

继续编

- 所以，我们现在引入对称性破缺后的拉氏量，称作有效拉氏量，为

$$\mathcal{L}_{eff} = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left[(\partial M)^2 - m^2 M^2\right] - \frac{\alpha}{2}\mathrm{tr}\, M^2 \mathrm{diag}\,(0,0,1)$$

- 代入刚才课堂小练习的结果，有效拉氏量中的质量项是
$\frac{1}{2}m^2\left[(\pi^0)^2 + 2\pi^+\pi^-\right] + \left(m^2 + \frac{\alpha}{2}\right)\left(K^0\bar{K}^0 + K^+K^-\right) + \frac{1}{2}\left(m^2 + \frac{2}{3}\alpha\right)\eta^2$
- 于是我们马上得到，引入 $SU(3)_f$ 破缺后，各个介子的质量为

$$m_\pi^2 = m^2, \quad m_K^2 = m^2 + \frac{\alpha}{2}, \quad m_\eta^2 = m^2 + \frac{2}{3}\alpha$$

检查一下编得怎么样

- 消去我们的模型参量 m 和 α，最后留下 3 个可观测质量的关系

$$4m_K^2 = 3m_\eta^2 + m_\pi^2$$

这称为 Gell-Mann–Okudo（没错，盖尔曼一人顶两）公式。

- 代入数据 $m_K \approx 496\ \mathrm{MeV}, m_\eta \approx 548\ \mathrm{MeV}, m_\pi \approx 138\ \mathrm{MeV}$，有

$$LHS \approx 9.8 \times 10^5\ \mathrm{MeV}^2, RHS \approx 9.2 \times 10^5\ \mathrm{MeV}^2$$

还是比较靠谱。要知道，介子八重态的质量差异几乎是 $\sim 300\%$，这里把差异降到了 ~ 0.06，已经非常不错了。

- 这也暗示了，引入的对称破缺的最低阶修正已经能够很好地解释现象。但是我们这里的模式其实是一个唯象模型：我们没办法第一性地直接计算出模型参数 α。

重 (zhòng) 子八重 (chóng) 态

$$3m_\Lambda + m_\Sigma = 2(m_N + m_\Xi)$$

构造重子场

- 重子 8 重态同样对应 $SU(3)_f$ 的 $(1,1)$ 张量表示，即伴随表示。一样的套路：

$$B = \frac{1}{\sqrt{2}} B_a \lambda_a$$

- 但是和介子（自旋 0 波色子）不同，重子是自旋 1/2 费米子，它的场是旋量场。也就是，每个 B_a 是四分量的旋量。
- 同样的套路，把同位旋相同的粒子写在同一组盖尔曼矩阵，重新线性组合：

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\Sigma^0 + \frac{1}{\sqrt{6}}\Lambda & \Sigma^+ & p \\ \Sigma^- & -\frac{1}{\sqrt{2}}\Sigma^0 + \frac{1}{\sqrt{6}}\Lambda & n \\ \Xi^- & \Xi^0 & -\frac{2}{\sqrt{6}}\Lambda \end{pmatrix}$$

构造完全 $SU(3)_f$ 对称的拉氏量

- 仿照单粒子自由狄拉克场的拉氏量写出 $SU(3)$ 不变的自由狄拉克场拉氏量
$$\mathcal{L} = \mathrm{tr}\, \bar{B}(i\partial\!\!\!/ - m)B$$
- 很容易想到，$\bar{B}$ 应该是对每个重子场取狄拉克共轭 $\bar{B}_a = B_a^\dagger \gamma^0$ 后取矩阵转置

$$\bar{B} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{\Sigma}^0 + \frac{1}{\sqrt{6}}\bar{\Lambda} & \bar{\Sigma}^- & \bar{\Xi}^- \\ \bar{\Sigma}^+ & -\frac{1}{\sqrt{2}}\bar{\Sigma}^0 + \frac{1}{\sqrt{6}}\bar{\Lambda} & \bar{\Xi}^0 \\ \bar{p} & \bar{n} & -\frac{2}{\sqrt{6}}\bar{\Lambda} \end{pmatrix}$$

自然解耦

- 直接计算出

$$\mathrm{tr}\,\bar{B}B = \bar{\Sigma}^0\Sigma^0 + \bar{\Sigma}^+\bar{\Sigma}^+ + \bar{\Sigma}^-\bar{\Sigma}^- + \bar{\Xi}^-\Xi^- + \bar{\Xi}^0\Xi^0 + \bar{p}p + \bar{n}n + \bar{\Lambda}\Lambda$$

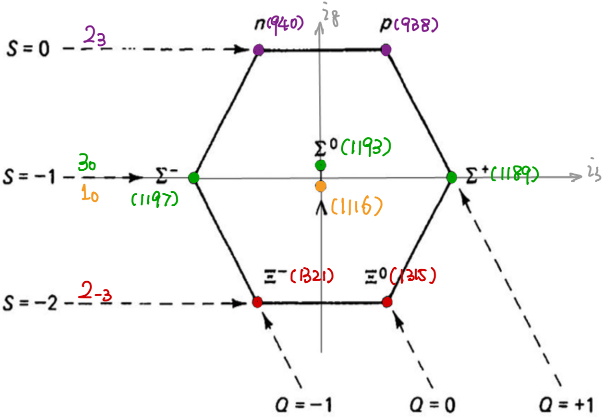
- 所有重子自然解耦合，拉氏量中的质量项为

$$m\left(\sum_{\Sigma}\bar{\Sigma}\Sigma + \sum_{\Xi}\bar{\Xi}\Xi + \sum_{N}\bar{N}N + \bar{\Lambda}\Lambda\right)$$

- 在 $SU(3)_f$ 对称下，4 种重子的质量都是 m。

开局一张图

- 我们又来看图思考怎么破坏对称性



- 明显，我们之前引入 λ_8 的套路依然可行。

后面全靠编

- 因为 $\bar{B}$ 和 B 之间不对易，可以引入两种可能的对称破缺项

$$\sim \mathrm{tr}\,\bar{B}B\mathrm{diag}\,(0,0,1) = \bar{p}p + \bar{n}n + \frac{2}{3}\bar{\Lambda}\Lambda$$

$$\sim \mathrm{tr}\,\bar{B}\mathrm{diag}\,(0,0,1)B = \bar{\Xi}^-\Xi^- + \bar{\Xi}^0\Xi^0 + \frac{2}{3}\bar{\Lambda}\Lambda$$

- 上两项的 α 倍和 β 倍减到原拉氏量中，有效拉氏量的质量项

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{eff} =& (\text{kinetic terms}) \\ & - m\sum_{\Sigma}\bar{\Sigma}\Sigma - (m+\beta)\sum_{\Xi}\bar{\Xi}\Xi - (m+\alpha)\sum_{N}\bar{N}N \\ & - \left(m + \frac{2}{3}\alpha + \frac{2}{3}\beta\right)\bar{\Lambda}\Lambda\end{aligned}$$

看下编得怎么样

- $SU(3)_f$ 破缺理论中的 4 种核子质量为

$$m_\Sigma = m, \quad m_\Xi = m + \beta, \quad m_N = m + \alpha, \quad m_\Lambda = m + \frac{2}{3}(\alpha + \beta)$$

- 消去模型参数，得到重子八重态的 Gell-Mann–Okudo 公式

$$3m_\Lambda + m_\Sigma = 2(m_N + m_\Xi)$$

- 代入数值 $m_N \approx 939\ \mathrm{MeV}, m_\Sigma \approx 1193\ \mathrm{MeV}, m_\Xi \approx 1318\ \mathrm{MeV}, m_\Lambda \approx 1116\ \mathrm{MeV}$ 得到

$$LHS \approx 4541\ \mathrm{MeV}, \quad RHS \approx 4514\ \mathrm{MeV}$$

- 很好！

对称性破缺与表示论

Throw away the 27!

我们从群论角度看看我们做了什么

- 我们的拉氏量包含了两个 $(1,1)$ 张量相乘的项

$$\varphi^i_j\varphi^k_l$$

- 这个表示按道理可以分解成 $8\otimes 8=27\oplus 10\oplus 10^*\oplus 8\oplus 8\oplus 1$，但因为两个相乘的张量上一样的，所以事实上我们只能得到

$$(8\otimes 8)_S=27\oplus 8\oplus 1$$

- 课堂小练习：证明为什么 $(8\otimes 8)_S=27\oplus 8\oplus 1$

只保留伴随表示

- 本来我们要求 $\varphi^i_j\varphi^k_l$ 按张量变换

$$\varphi^i_j\varphi^k_l \to U^i_p U^k_r (U^\dagger)^q_j (U^\dagger)^s_l \varphi^p_q \varphi^r_s$$

它的各个不可约表示分解也应该按相应规则变换。

- 但现在我们加入了 $\sim \varphi^2\lambda_8$ 的项，相当于要求

$$\varphi^i_m\varphi^m_k(\lambda_8)^k_j$$

按 $(1,1)$ 张量变换，这相当于仅仅保留了伴随表示 8。

上帝恩惠搞理论的

- 不知道为什么，在物理中，我们从来都只用考虑几个最低价的表示，特别是基础表示和伴随表示。
- *George Zweig, who discovered quarks independently of Gell-Mann, recalled that he thought that the weak interaction currents of the strongly interacting particles should also be classified in representations of* $SU(3)$*, and that both the 8- and 27-dimensional representations were to be used. At the time, a decay process requiring the presence of the 27 had been seen by an experimentalist of high reputation working with a strong team using a well understood technique.*
- *Zweig went to talk to Feynman, who liked the idea of applying* $SU(3)$ *to the decay, but kept saying "Throw away the 27!"*
- *Feynman turned out to be right; the experimentalists were mistaken.*

课程中止

下学期继续

回顾

我们来回顾一下这学期的群论都学了什么：

- 对称性和群，群的定义和实例。
- 有限群的表示论：可约与不可约，幺正定理，舒尔引理，特征标正交定理……
- 连续群的表示论：$SO(N)$ 和 $SU(N)$ 张量，基础表示和伴随表示，乘积表示的直和分解，群流形和 $SU(2)$ 双覆盖……
- 群论与物理：不可约表示与量子力学简并，内部对称性与外部对称性，同位旋对称性，$SU(3)_f$ 对称性与核子物理……

谈谈感想

大家来谈谈学习群论的感想。

展望

我们来看看下学期我们继续学什么

- 一般李群的李代数
- 相对论的对称群：洛伦兹群和旋量。
- 膨胀宇宙与共形代数。
- 规范对称性。

下学期继续我们有趣的对称之旅

明年再见!