# Physics of quark-gluon plasma and high-energy heavy-ion collisions

Probfia

2019 年 7 月 30 日

## 目录



## 1 Introduction

粒子物理标准模型中，有三代费米子共 12 个，规范玻色子共 4 个，以及希格斯玻色子。数学上讲，标准模型是 $U(1) \times SU(2) \times SU(3)$。

采用自然单位制 $\hbar = c = k_B = 1$。根据 $\hbar c = 197\ \mathrm{MeV} \cdot \mathrm{fm}$ 就可以得到 $1\ \mathrm{fm} = \frac{1}{197}\ \mathrm{MeV}^{-1}$ 等自然单位制下的数值。

粒子物理实验中常用到散射截面的概念，它反应了粒子数随角度的分布

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{dN}{d\Omega dt}/nv \tag{1}$$

方位角微元为 $d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$。

### 1.1 群论简介

群是一个带乘法运算的集合，与对称性密切相关。一个群可以有自己的表示，例如，考虑反射群 $\{I, P\}$，其中 $P$ 是镜面反射算符满足 $P^2 = I$。另外，考虑 $Z_2 = \{1, -1\}$ 和自然乘法构成的群，它同样满足 $(-1)^2 = 1$。可以建立两个群元素间的一一对应关系，因此说，$Z_2$ 群是反射群的一个表示。

$SO(3)$ 群是三维空间中的旋转群，一般元素可以表示为 $R_{\vec{n}}(\psi)$，意义为绕 $\vec{n}$ 方向的轴进行 $\psi$ 角度旋转。为了得到 $SO(3)$ 群的表示，考虑一个小的角度 $\delta\psi$，显然有

$$R_{\vec{n}}(\delta\psi)\vec{x} = \vec{x} + \delta\psi\vec{n} \times \vec{x} + o(\delta\psi) \tag{2}$$

或者写成

$$R_{\vec{n}}(\delta\psi)_{ik} = \delta_{ik} - i(i\delta\psi\epsilon_{ijk}n_j) \tag{3}$$

选取 $n_j$ 为三维空间的正交基，就得到了三个表征 $SO(3)$ 的生成元 $(J_k)_{ij} = i\epsilon_{ikj}$

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mathrm{i} \\ 0 & \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mathrm{i} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\mathrm{i} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad J_3 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} & 0 \\ \mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

有限角度的旋转可以由无数个无穷小转动相乘而成，于是

$$R_{\vec{n}}(\psi) = \left[R_{\vec{n}}\left(\frac{\psi}{N}\right)\right]^N \equiv e^{-i\psi\vec{n}\cdot\vec{J}} \tag{5}$$

$\vec{J}$ 构成 $SO(3)$ 的李代数 $so(3)$。基本李括号是 $[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk}J_k$。

$SU(2)$ 群是二维特殊酉群，满足 $U^\dagger U = I$ 和 $\det U = 1$。同样考虑它的李代数，即考虑 $U = I + i\epsilon A$。容易算出来 $A$ 必须是厄米的。在 $SO(3)$ 的例子中，因为各个 $J$ 是反称的，对任意的 $SO(3)$ 元，$\det R = \det e^{-i\psi\vec{n}\cdot\vec{J}} e^{-i\psi\mathrm{tr}\ \vec{n}\cdot\vec{J}} = 1$ 自然满足，但对于 $SU(2)$，由于允许矩阵元是复数，必须外加条件 $\mathrm{tr}\ A = 0$。以实数为域，$su(2)$ 的维数为变量数 8 减去约束方程的个数 5，下面的三个泡利矩阵可以作为 $su(2)$ 的基：

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},\ \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{6}$$

$\sigma$ 矩阵间满足关系 $\sigma_i\sigma_j = \delta_{ij} + i\epsilon_{ijk}\sigma_k$。为了保持 $i\epsilon_{ijk}$ 为 $su(2)$ 的结构常数，最好让 $\sigma_i/2$ 作为基，这样，基本李括号才是

$$\left[\frac{1}{2}\sigma_i, \frac{1}{2}\sigma_j\right] = i\epsilon_{ijk}\frac{1}{2}\sigma_k \tag{7}$$

同样地，作为李群的 $SU(2)$ 中的元素就可以仿照 $SO(3)$ 的情形写成

$$R_{\vec{n}}(\psi) = e^{-i\psi\vec{n}\cdot\frac{\vec{\sigma}}{2}} \tag{8}$$

可以看到，在这种表示下 $SU(2)$ 是以 $4\pi$ 为周期的，因此也有 $SO(3) \simeq SU(2)/Z_2$。

### 1.2 夸克的味对称性与色荷

核力事实上是夸克间强相互作用的剩余，而实验表明，核力并不对核子的种类作区分，即 $p-p$, $p-n$, $n-n$ 间的核力都是差不多的，因此可以说，质子态和中子态间有旋转对称性，这一旋转同样用 $SU(2)$ 群表征。

夸克模型建立后，发现，虽然 $u, d, t$ 三种夸克的质量不相同，但强相互作用依然对它们几乎不作区分，它们之间具有 $SU(3)$ 旋转对称性。

$SU(3)$ 的李代数维数为 8，盖尔曼矩阵为它的一组基

$$\begin{aligned}
&\lambda_1=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\quad \lambda_2=\begin{pmatrix}0&-i&0\\i&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\quad \lambda_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\\
&\lambda_4=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}\quad \lambda_5=\begin{pmatrix}0&0&-i\\0&0&0\\i&0&0\end{pmatrix}\\
&\lambda_6=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\quad \lambda_7=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-i\\0&i&0\end{pmatrix}\quad \lambda_8=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{9}$$

定义夸克态

$$u=(1,0,0)^T,\quad d=(0,1,0)^T,\quad s=(0,0,1)^T \tag{10}$$

以及反夸克态

$$\bar{u}=(-1,0,0)^T,\quad \bar{d}=(0,-1,0)^T,\quad \bar{s}=(0,0,-1)^T \tag{11}$$

对于 8 个盖尔曼矩阵中的两个对角阵，定义

$$I_3=\frac{1}{2}\lambda_3,\quad Y=\frac{1}{\sqrt{3}}\lambda_8 \tag{12}$$

夸克和反夸克态都是这两个矩阵的本征态，把对应的本征值画在 $(I_3, Y)$ 平面上，就得到了所谓的夸克的权重图，如图 1。这称作夸克的味。此外，可以像对自旋那样定义 3 组（6 个）升降阶算符，实现夸克味间的转换。

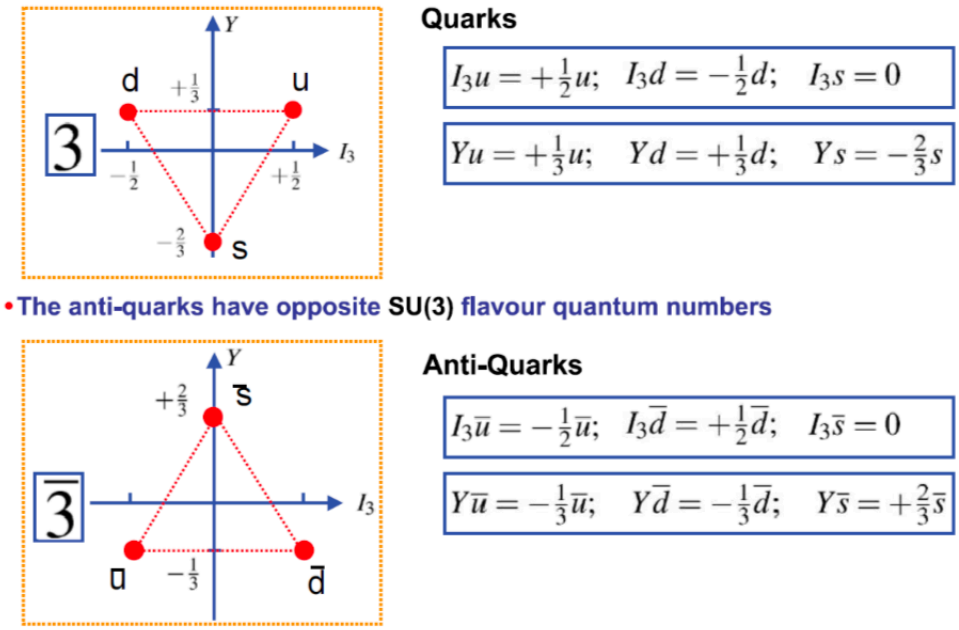


图 1: 夸克三种味的 weight diagram.

但在历史上，发现一些重子和介子由 3 个或 2 个完全相同的夸克组成，例如 $\Delta^{++} = (uuu)$。这违背了泡利不相容原理。为了解决这一问题，只能给夸克额外增加一个称为色的自由度，色有三种，分别为红，绿，蓝三色（及其反色）。