Hamilton-Jacobi Equation

Probfia

Dec. 20, 2018

1 哈密顿-雅可比方程的回顾

以积分上限和时间作为自变量的作用量 $S(q,t)$ 满足方程

$$\frac{\partial S}{\partial t}+H(p,q,t)=0 \tag{1}$$

和

$$\frac{\partial S}{\partial q}=p \tag{2}$$

我们约定[1]，在不特别指明下（上）标时，p 和 q 都表征含 s 维矢量，并约定函数 f 对一个矢量 v 求偏导的结果为以 $\dfrac{\partial f}{\partial v_i}$ 为第 i 个分量的矢量。因此，(2) 包含 s 个方程，其中的第 i 个方程为

$$\frac{\partial S}{\partial q_i}=p_i \tag{3}$$

将 (2) 带入 (1)，就得到了所谓的哈密顿-雅可比方程

$$\frac{\partial S}{\partial t}+H(\frac{\partial S}{\partial q},q,t)=0 \tag{4}$$

(4) 为一阶偏微分方程，中含有 $s+1$ 个独立变量，因此通解含有 $s+1$ 个任意常数。但含 S 的项并仅以一阶偏导数的形式出现，因此，若 $f(q,t)$ 为 (4) 的解，那么，相差一个常数的

$$S'=S(q,t)+C \tag{5}$$

[1]这个约定大概是我自己编的，它的意义在于，推导多自由度系统的力学规律时，通常可以当成只有一个自由度来推导，最后用这个约定直接外推到多个自由度的情况。

也是 (4) 的解。那么，我们仅仅对包含 s 个任意常数的 $S(q,t)$ 感兴趣。设这 s 个常数为 α_i，将它们看成变量，记

$$f(q,t,\alpha) \equiv S(q,t) \tag{6}$$

并将 f 看成一个正则变换的生成函数，视 α 为变换后的广义动量。正则变换后的哈密顿函数为

$$H' = H + \frac{\partial f}{\partial t} \tag{7}$$

由于 f 满足 (1)，恰好有

$$H' \equiv 0 \tag{8}$$

那么，根据正则方程，变换后的广义动量 α 和广义动量 β 都为常数！于是我们就找到了 f 中缺失的 s 个常数，他们正是 f 表征的正则变换对应的正则动量。并且，α 和 β 正好给出系统的 $2s$ 个运动积分。

2 分离变量

解哈密顿-雅可比方程的一个通用技巧就是分离变量，它的思想是这样的：将 (4) 写成如下形式：

$$\Phi(\frac{\partial S}{\partial t}, \frac{\partial S}{\partial q}, q, t) \equiv \frac{\partial S}{\partial t} + H(\frac{\partial S}{\partial q}, q, t) = 0 \tag{9}$$

可以发现，时间 t 和坐标 q 似乎拥有某种对等的关系，因此我们不如将他们合在一起，记为 $\xi = (t,q)$，容易看出 ξ 有 $s+1$ 个分量（s 个坐标维度加一个时间维度），约定 ξ_i 中的 i 取遍 $0,1,2,\cdots,s$，但 ξ_0 不一定代指时间分量[2]。总之，在这种约定下，哈密顿-雅可比方程可以写成下面这个非常简洁的形式：

$$\Phi(\frac{\partial S}{\partial \xi}, \xi) = 0 \tag{10}$$

不妨把这里的 Φ 称为体系的 Phimiltonian[3]（或许中文叫 Φ 密顿函数?）。我们发现，HJ 方程就是说，体系的 Φ 密顿函数恒等于 0！

分离变量的关键思想是，ξ 的某个分量（不妨设为 ξ_0）在 (10) 中仅以某种组合 $\varphi_0(\frac{\partial S}{\partial \xi_0}, \xi_0)$ 的形式出现（例如 $\Phi = (\frac{\partial S}{\partial t} + t)\frac{\partial S}{\partial q} + aq^2$ 中，时间 t

---

[2]这个记号是我自己编的。

[3]这个名字也是我自己编的，不过灵感来源于二班的讲义中的咔密顿函数。

对应的 $\varphi_t = \dfrac{\partial S}{\partial t} + t$，坐标 q 则不可分离）。那么，(10) 可以写为

$$\varPhi(\frac{\partial S}{\partial \xi_i}, \xi_i; \varphi_0(\frac{\partial S}{\partial \xi_0}, \xi_0)) = 0 \ , i = 1, 2, \cdots, s \tag{11}$$

我们寻求以下形式的分量变量解[4]：

$$S(\xi) = S_0(\xi_0) + S^0(\xi_i) \ , i = 1, 2, \cdots, s \tag{12}$$

于是有

$$\varPhi(\frac{\partial S^0(\xi_i)}{\partial \xi_i}, \xi_i; \varphi_0(\frac{\partial S_0}{\partial \xi_0}, \xi_0)) = 0 \ , i = 1, 2, \cdots, s \tag{13}$$

现在让我们做这样的讨论：固定各 ξ_i 不变，改变 ξ_0 的值，$\varPhi$ 却不发生变化，始终等于 0，因此，必须有

$$\varphi_0(\frac{\partial S_0}{\partial \xi_0}, \xi_0) = C_0 \tag{14}$$

为一个常量。这一点确立后，就可以立刻推关于出剩下的 s 个 ξ 分量的未知函数 $S^0(\xi)$ 满足的方程

$$\varPhi(\frac{\partial S^0(\xi)}{\partial \xi}, \xi; C_0) = 0 \ , i = 1, 2, \cdots, s \tag{15}$$

假如下一个分量 ξ_1 在 Φ 密顿函数中也以 $\varphi_1(\dfrac{\partial S}{\partial \xi_1}, \xi_1)$ 的形式出现，则可以继续设 $S^0(\xi) = S^{01}(\xi_i) + S_1(\xi_1) \ , i = 2, 3, \cdots, s$，从而将 Φ 密顿函数写成

$$\varPhi(\frac{\partial S^{01}(\xi_i)}{\partial \xi_i}, \xi_i; \varphi_1(\frac{\partial S_1}{\partial \xi_1}, \xi_1); C_0) = 0 \ , i = 2, 3, \cdots, s \tag{16}$$

那么定有

$$\varphi_1(\frac{\partial S_1}{\partial \xi_1}, \xi_1) = C_1 \tag{17}$$

$$\varPhi(\frac{\partial S^{01}(\xi_i)}{\partial \xi_i}, \xi_i; C_0, C_1) = 0 \ , i = 2, 3, \cdots, s \tag{18}$$

假设 ξ 的前 s 个分量都在 Φ 密顿函数中以组合 $\varphi_i(\dfrac{\partial S}{\partial \xi_i}, \xi_i)$ 的形式出现的话，上述操作就可以一直进行下去，直到将 ξ_{s-1} 按照 $S^{0,1,\cdots,s-2}(\xi_{s-1}, \xi_s) =$

[4] 我们以上标表示 S 中已经被剥离的变量。

$S^{0,1,\cdots,s-1}(\xi_s)+S_{s-1}(\xi_{s-1})$ 的形式成功分离，不妨记 $S^{0,1,\cdots,s-1}(\xi_s)=S_s(\xi_s)$ 这时，最后一个剩余的坐标 ξ_s 满足方程

$$\varPhi(\frac{\partial S_s(\xi_s)}{\partial \xi_s},\xi_s;C_0,C_1,\cdots,C_{s-1})=0 \tag{19}$$

于是我们看到，ξ_s 原本能不能从 Φ 密顿函数里分离已经不重要了。我们一定从这个方程解出的 S_s，但它将不含独立的任意常数[5]，而是依赖于其他 s 个常数 $C_0,C_1,\cdots,C_{s-1}$，这与之前讨论的一致。因此，该体系的 HJ 方程的解就为

$$S(\xi)=S_0(\xi_0)+S_1(\xi_1)+\cdots+S_s(\xi_s) \tag{20}$$

或者，更加准确地，将每个 S_i 包含的任意常数纳入考虑

$$\begin{aligned}&S(\xi;C_0,C_1,\cdots,C_{s-1})\\=&S_0(\xi_0;C_0)+S_1(\xi_1;C_1)+\cdots+S_{s-1}(\xi_{s-1};C_{s-1})+S_s(\xi_s;C_0,C_1,\cdots,C_{s-1})\end{aligned} \tag{21}$$

3 分离变量解告诉我们什么

我们发现，我们已经成功解出含有 s 个独立常数的 $S(\xi)\equiv S(t,q,C)$，但从第一节的讨论可知，S 事实上也可以表征一个正则变换，它使变换后的哈密顿函数[6]为 0，使得变换后的坐标和动量都守恒。那么，不如就钦定这 s 个常数 $C_0,C_1,\cdots,C_{s-1}$ 为变换后的动量[7]，而其对应的坐标由正则变换公式

$$B_i=\frac{\partial f}{\partial C_i} \tag{22}$$

给出，它们也是守恒量。将已经得到的分离变量解 (21) 带入 (22) 得到

$$\frac{\partial S_i(\xi_i;C_i)}{\partial C_i}+\frac{\partial S_s(\xi_s;C_0,C_1,\cdots,C_i,\cdots,C_{s-1})}{\partial C_i}=B_i \tag{23}$$

上式第一项为 ξ_i 的函数，第二项为 ξ_s 的函数，于是，我们就可以将每个 ξ_i 都用 ξ_s 连同 $s+1$ 个常数表达出来！

$$\xi_i=\xi_i(\xi_s;C_0,C_1,\cdots,C_{s-1};B_i)\ ,i=0,1,2,\cdots,s-1 \tag{24}$$

[5]会含一个积分常数，但它的作用在于使得最后求出的 S 相差一个常数，我们已经谈到，我们对这种常数不感兴趣。

[6]其实变换后的哈密顿函数就是 Φ 密顿函数。

[7]其实你钦定它们是坐标也可以，因为哈密顿力学里坐标和动量本来就没太大区别。

上式的神奇之处在于，它事实上可以被看成一个参数方程，随着 ξ_s 的变动，其余的 ξ_i 一同变动，在时空中划出一条曲线！（如果你不能理解这一点，考虑三维空间 $\{x, y, z\}$，那么，方程组 $y = y(x), z = z(x)$ 表征的就是一条曲线。）

假如 $\xi_s = t$，那么 (24) 给出各个坐标的时间演化 $q_i \equiv \xi_{i-1}(t; C)$；假如系统的自由度 $s = 2$，即质点的平面运动，并令 $(\xi_0, \xi_1, \xi_2) = (t, x, y)$，那么 (24) 在 $i = 1$ 时给出

$$x(y) = x(y; C_0, C_1; B_1) \tag{25}$$

它正好是质点在这个平面内运动的轨迹方程！当然，上述讨论也可以自然推广到高维空间，因此我们发现，HJ 方程可以非常方便地求解粒子的空间轨迹。

4 循环坐标和时间的分离变量

假设体系的哈密顿函数不显含 ξ_i，那么，对应的 Φ 密顿函数也不显含 ξ_i，因此，HJ 方程中与 ξ_i 有关的项只剩下 $\varphi_i = \dfrac{\partial S}{\partial \xi_i}$，带入 (14) 就得到

$$\frac{dS_i}{d\xi_i} = C_i \tag{26}$$

即

$$S_i(\xi_i) = C_i \xi_i \tag{27}$$

假如 ξ_i 不是时间，那么从前面的讨论可以得知，C_i 就是 ξ_i 的广义动量。

所有的循环坐标都可以这样分离变量，并且方便起见，循环坐标的分离应该优先进行（避免它成为最后一个 ξ，否则上面的讨论就失效了）。

一个特别的情况是保守体系，此时的哈密顿函数不显含时间，于是 Phi 密顿函数也不显含时间，尝试将 HJ 方程的解 $S(q, t)$ 对时间 t 的分离变量为以下形式：

$$S(q, t) = S_t(t) + W(q) \tag{28}$$

根据 (27) 得知

$$S_t(t) = C_t t \tag{29}$$

有必要讨论常数 C_t 的物理意义：将分离变量解带入 Phi 密顿函数的表达式，得到

$$\frac{\partial C_t t}{\partial t} + H = 0 \tag{30}$$

即

$$H \equiv -C_t \tag{31}$$

这说明，保守体系的哈密顿函数守恒（废话），我们知道这个守恒量就是能量 E，于是

$$C_t = -E \tag{32}$$

这在某种意义上说明，在经典力学的框架下，时间对应的广义动量事实上是 $-E$。

5 例子：带电粒子在偶极子场中的运动

我们来求解一个带电量为 e 的粒子在偶极子场 $u(r,\theta) = \dfrac{p\cos\theta}{r^2}$ 中的运动轨迹。简单起见，我们将粒子的轨迹限定在平面内，并记粒子的势能为

$$V(r,\theta) = eu \equiv \frac{\alpha\cos\theta}{r^2} \tag{33}$$

于是，粒子的哈密顿函数为

$$H = \frac{1}{2m}(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2}) + \frac{\alpha\cos\theta}{r^2} \tag{34}$$

对于的 Phi 密顿函数就是

$$\mathit{\Phi} = \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}[(\frac{\partial S}{\partial r})^2 + \frac{1}{r^2}(\frac{\partial S}{\partial \theta})^2] + \frac{\alpha\cos\theta}{r^2} = 0 \tag{35}$$

为了分离变量，将其写成一个更加紧凑的形式

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}(\frac{\partial S}{\partial r})^2 + \frac{1}{2mr^2}[(\frac{\partial S}{\partial \theta})^2 + 2m\alpha\cos\theta] = 0 \tag{36}$$

很明显，第一个可以分离的变量是时间 t，记 $S(t,r,\theta) = S_t(t) + W(r,\theta) = -Et + W(r,\theta)$，就有

$$-E + \frac{1}{2m}(\frac{\partial W}{\partial r})^2 + \frac{1}{2mr^2}[(\frac{\partial W}{\partial \theta})^2 + 2m\alpha\cos\theta] = 0 \tag{37}$$

而 θ 在这里又仅以组合 $(\dfrac{\partial W}{\partial \theta})^2 + 2m\alpha\cos\theta$ 出现了，于是根据分离变量法的原则，该组合必定等于一个常数 J

$$(\frac{dlW_\theta}{d\theta})^2 + 2m\alpha\cos\theta = J \tag{38}$$

它的解（原函数不存在）为

$$W_\theta(\theta) = \int \sqrt{J - 2m\alpha\cos\theta} d\theta \tag{39}$$

最后剩下变量 r，它满足

$$-E + \frac{J}{2mr^2} + \frac{1}{2m}(\frac{dW_r(r)}{dr})^2 = 0 \tag{40}$$

解得（感谢 Mathematica，其实不需要把它积出来）

$$\begin{aligned} W_r(r) = &\int \sqrt{2mE - \frac{J}{r^2}} dr \\ &= \sqrt{2mEr^2 - J} + \sqrt{J}\arctan\frac{\sqrt{J}}{\sqrt{2mEr^2 - J}} \end{aligned} \tag{41}$$

于是，对于这个粒子，HJ 方程的解就是

$$S = -Et + \int \sqrt{J - 2m\alpha\cos\theta} d\theta + \sqrt{2mEr^2 - J} + \sqrt{J}\arctan\frac{\sqrt{J}}{\sqrt{2mEr^2 - J}} \tag{42}$$

由 (25)，这里 $x = \theta$，$y = r$，于是

$$B_\theta = \frac{\partial S}{\partial J} \tag{43}$$

求导后再从上式中反解出 θ，就得到了 $\theta(r)$ 的表达式。结果过于冗长，所以就不写了。不过我们已经看到，HJ 方程确实能够给出一个二维空间上粒子的轨迹方程。并且我们看到了一个值得注意的点：我们处理的最后一个变量在 Φ 密顿函数中不需要具有可分离变量的形式，这在之前已经讨论过了。

6 注记

这个讲稿本来是抄朗道，但后来发现了一点新东西和新理解，主要在于将坐标和时间合写在矢量 ξ 里可以让我们对 HJ 方程的数学结构有更深刻的认识，也表明了在经典力学中其实已经出现了时间空间对等的雏形。很多记号是我走路的时候想出来的，所以可能有部分不妥。

值得提的一点是，若一个势的 HJ 方程可以完全分离变量，则这个势对应的薛定谔方程也可以分离变量。在 HJ 方程中我们用加法分离变量，而在薛定谔方程中我们用乘法（如学过的其他数理方程一样）分离变量，这其实是因为，S 和波函数 ψ 的关系大概就是 $S = \hbar\ln\psi$，对数将一个乘法变成了加法。