

# Group Theory

## Talk 7 - Group Theory in a Quantum World

Han Gao

gaoh26@mail2.sysu.edu.cn

[https://github.com/Probfia/Notes/blob/master/groups/seminar\\_lec\\_2/talk.pdf](https://github.com/Probfia/Notes/blob/master/groups/seminar_lec_2/talk.pdf)

# 这章特别水

所以秉着“人人都拿公益时”的理念，莫宗霖同学给我们先对前一章作一个回顾：

- ▶ 群的表示：定义，可约与不可约；
- ▶ 方特征标表等式  $N(C) = N(R)$ ,  $\sum_c n_c \chi^{(r)*}(c) \chi^{(s)}(c) = N(G) \delta^{rs}$ ,  $\sum_r d_r^2 = N(G)$ ;
- ▶ 实表示与复表示；
- ▶ ...

# 大览

- ▶ 群表示论与量子力学
- ▶ 物理中的对称性：作用量

# 薛定谔方程

量子力学薛定谔方程

$$H\psi = E\psi$$

哈密顿量  $H$  是一个线性算符,  $\psi$  是一个能量为  $E$  的本征态。

# 简并

单个能量 $E$ 可能对应一系列本征态 $\psi^\alpha$ 。

$$H\psi^\alpha = E\psi^\alpha, \alpha = 1, 2, \dots, d$$

这种情况称为 $d$ 重简并。  
你能举一些简并的例子么？

# 简并的来源

从刚才举出来的例子中总结一下，量子力学中，简并的来源是什么？

Spoiler: Symmetry.

# 简并的来源

设有一系列么正变换 $\hat{T}$ ，称哈密顿量在变换 $\hat{T}$ 下不变，如果

$$\hat{T}^\dagger H \hat{T} = H$$

证明：

- ▶ 上面的等式等价于 $[H, T] = 0$ ；
- ▶ 所有的 $T$ 构成群；
- ▶ 若 $\psi$ 是 $H$ 能量为 $E$ 的本征态，则 $\hat{T}\psi$ 也是。

# 糟糕的记号

上面最后一个记号其实有问题： $T$ 其实并不能直接作用在态上，因为 $T$ 是对物理空间里的矢量的某种操作（e.g.  $SO(3)$ 旋转；镜面反射 $x \rightarrow -x$ 等），而不是希尔伯特空间里的算符。不过我们还是暂且这样写。它的意思是，如果我们把空间中的矢量按一定规则变化，对应的量子态按照这个规则会怎么变。



## 简并态构成子空间

假设我们已经找到了 $d$ 和能量 $E$ 本征态 $\psi_a$ ,  $a = 1, 2, \dots, d$ , 并且它们是正交归一的 $\langle \psi_a | \psi_b \rangle = \delta_{ab}$ 。

线性组合

$$\psi = c^a \psi_a$$

也是一个能量为 $E$ 的本征态。因此说简并的本征态生活在由 $\psi_a$ 张成的线性空间 $\langle \psi_a \rangle$ 中。

## 简并态构成子空间

因为  $\hat{T}\psi_a \in \langle \psi_a \rangle$ ，可以按基展开，形式上写成

$$\hat{T}\psi_a = D(T)_a^b \psi_b$$

其中  $D(T)$  在给定操作  $T$  时，就是一个普通的系数（或者， $d$  阶方阵）。

$D$  建立了空间对称变换和希尔伯特空间中态矢变换间的对应关系：按  $T$  的规则改变空间 = 按  $D(T)$  做希尔伯特空间中的态矢变换。

# 你看出来我在说什么了么

$T$ 是空间对称群的元素， $D(T)$ 是（希尔伯特空间中的）矩阵。  
这不就是群表示论么？

证明： $D(T_1 T_2) = D(T_1)D(T_2)$ ，等式右边理解为矩阵乘法。

# 简并度告诉我们对称性的信息

$D$ 就是对称群  $G = \{T\}$  的一个  $d$  维不可约表示。

因此，假如我们从实验中得到了一个  $d$  重简并度，我们知道带来这个简并度的对称群至少有一个  $d$  维不可约表示。

$$d = \text{简并度 (来源于实验)} \quad (1)$$

$$= \text{对称群的一个不可约表示维数 (唯象描述)} \quad (2)$$

$$\Rightarrow \text{世界的对称群 (理论的追求)}$$

# 总结一下

- ▶ 物理空间中的对称群  $G$  中的元素  $T$  可以映射到一个希尔伯特空间中的线性算符  $D(T)$ ;
- ▶ 在这个希尔伯特空间中可以找一组正交基;
- ▶ 哈密顿算符在这种正交基下的矩阵表示是一个分块纯量阵  $H = \text{diag} (E_{(1)} I_{d(1)}, E_{(2)} I_{d(2)}, \cdots, E_{(s)} I_{d(s)})$ , 自然地分出了简并态;
- ▶ 每一个分块对应群  $G$  的一个不可约表示  $D^{(r)}$ , 哈密顿算符在子空间中是纯量阵, 与舒尔引理对应。

# 回到现实



给定一个量子体系，只给你一个测量能量的装置，你能得到关于一个量子体系简并度的任何信息么？

# 不可能

当然不行。

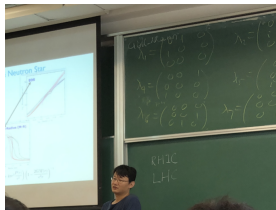
比如说，对氢原子，假如你不去测量 $1s$ 电子的自旋，你永远不会知道基态其实是 $2$ 重简并的。

因此，需要更多的信息才能确定简并度。

## 实验很重要

只有做其他实验才能知道简并度的其他信息。

- ▶ 8种重子具有几乎相同的质量；
- ▶ 怎么区分8种重子？电荷数和奇异数；
- ▶ 质量=能量， $d = 8$ ；
- ▶ 强相互作用至少有一个8维不可约表示；
- ▶ 8个盖尔曼矩阵，对应8种传递色相互作用的胶子。





# 实验真的很重要吗？

- ▶ 理论爱好者：不需要实验，我就坐在那里想，我就知道这个世界（至少）是 $SO(3)$ 的；我还可以拿这个算出很多符合实验的结果；然后我还可以把对称群推到 $SO(10)$ ,  $U(10) \times SU(20) \times SU(30)$ ,  $\prod_{n=1}^{\infty} SU_n(\infty) \dots$ 。
- ▶ 但这真的是完全想出来的么？如果我们去问一个刚出生的婴儿这个世界是不是 $SO(3)$ 对称的，他会怎么回答？你又怎么知道把对称群推大就能够奏效呢？
- ▶ 哲学问题：我们真的有与生俱来的知识么？人是否是自身经验的总和？

# STOP

# 宇称Parity对称性

一维粒子

$$H = -\frac{1}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x)$$

如果  $V(x) = V(-x)$ , 哈密顿量在宇称变换  $r : x \rightarrow -x$  下不变。  
物理空间的一个对称群  $Z_2 = \{I, r\}$ 。

# 宇称对称性的后果

我们知道 $Z_2$ 有两个1维不可约表示

- ▶ 平凡表示:  $l \rightarrow 1, r \rightarrow 1$ , 使得态 (波函数) 必须满足  $\psi(-x) \equiv \hat{r}\psi(x) = D(r)\psi(x) = \psi(x)$ ;
- ▶ 自身表示:  $l \rightarrow 1, r \rightarrow -1$ , 使得态 (波函数) 必须满足  $\psi(-x) \equiv \hat{r}\psi(x) = D(r)\psi(x) = -\psi(x)$ 。

群表示论直接告诉我们, 当空间具有宇称对称性时, 波函数只能是严格奇函数或偶函数。(qm作业第2题)

# 周期平移对称性

一维粒子

$$H = -\frac{1}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x)$$

如果  $V(x) = V(x + a)$ , 哈密顿量在平移变换  $T : x \rightarrow x + a$  下不变。物理空间的一个对称群  $G = \{\dots T^{-1}, I, T, T^2 \dots\}$ 。

# 阿贝尔群

虽然对称群 $G$ 很大，甚至是无限的；但显然 $G$ 是一个阿贝尔群，而阿贝尔群只能有一维表示。

(复习：

方特征标表等式 $N(C) = N(R)$ 和 $\sum_r d_r^2 = N(G)$ ；阿贝尔群每个元素各成一类， $N(C) = N(G)$ ，只能所有 $d_r = 1$ 。)

于是可以设 $D(T) = \xi$ 为一个任意复数，则有 $\psi(x + a) \equiv \hat{T}\psi(x) = D(T)\psi(x) = \xi\psi(x)$ 。

# 归一化条件

$$1 = \int |\psi(x+a)|^2 dx |\xi|^2 \int |\psi(x)|^2 dx = |\xi|^2$$

于是只能有  $\xi \in U(1)$ 。又因为表示的定义要求  $D(T^k) = D(T)^k = \xi^k$ ，只能写成  $\xi = e^{ika}$ ，于是得到 Bloch 定理

$$\psi(x+a) = e^{ika} \psi(x)$$

# 布里渊区

因为  $e^{ika} = e^{i(ka+2\pi)} = e^{i(k+\frac{2\pi}{a})}$ ,  $k$  的取值精确到周期  $\frac{2\pi}{a}$ , 通常限制

$$-\frac{\pi}{a} < k < \frac{\pi}{a}$$

这一限制就是布里渊区。



## 更多的表示论

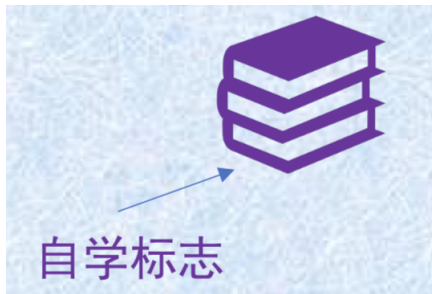
我们已经看到表示论在量子力学中的强大作用。  
之后的章节中将讨论更广泛的对称群，例如：

- ▶ 空间 $SO(3)$ 对称性的量子力学效应：它自然地引出自旋的概念（李代数）；
- ▶ 狄拉克方程中的4个 $\gamma$ 矩阵其实就是洛伦兹群 $SO(1, 3)$ （狭义相对论的对称群）的一个表示论（Clifford 代数）；
- ▶  $SO(1, 3)$ 的不可约表示分解 $16 = 1 \oplus 6 \oplus 9$ ，6对应6个电磁场张量 $F_{\mu\nu}$ ；9对应9个爱因斯坦张量 $G_{\mu\nu}$ 。

不过这些东西我们今天都不讲。

## 经典谐振子的对称性

根据振子体系的对称性可以直接找到同本征频率的简正坐标。  
dbq, 我不想讲。



# 运动方程与作用量

我们好几年没有用过的

$$F = ma$$

和我们半年没有用过的

$$S[q] = \int dt L(q, \dot{q}), \quad L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 - V(q), \quad \delta S = 0$$

是等价的。

# 对称性

我们说一个理论具有对称性，如果

- ▶ 在对称操作下，运动方程左右两边按相同的方式变换；
- ▶ 或：在对称操作下，作用量（或者，很多时候可以严格到拉氏量）不变。

这两种定义是等价的，但显然后一种定义更加好用：你只需要傻算就行了。

## 例子：中心简谐势场

三维空间中势场  $V(\vec{x}) = \frac{1}{2}k\vec{x}^2$  对应的运动方程为

$$m \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = -k\vec{x}$$

拉氏量为

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\vec{x}}^2 - \frac{1}{2}k\vec{x}^2$$

作旋转变换  $\vec{x} \rightarrow R\vec{x}$ ,  $R \in SO(3)$ , 试从两种角度证明中心简谐势场具有  $SO(3)$  对称性。

# 娱乐为主

以下内容纯属娱乐用。

# 场论作用量

一个物理理论（几乎）总可以用场论语言写出来，在场论语言下很容易进行对称性验证，量子化等操作。 $\phi$ 场依赖于 $D$ 个自变量 $x_\mu$ ，作用量

$$S[\phi] = \int d^D x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$$

$\delta S = 0$ 当

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0$$

# 例子

## QED拉氏量

$$\mathcal{L}_{QED} = \bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$$

其中 $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$ ,  $\not{D} = \gamma^\mu(\partial_\mu - iqA_\mu)$ ,  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ 。  
试求 $\psi$ 的运动方程：不包含 $\psi^\dagger$ 的导数项，对 $\psi^\dagger$ 变分就得到

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}_{QED}}{\partial (\partial_\mu \psi^\dagger)} = 0 = \frac{\partial \mathcal{L}_{QED}}{\partial \psi^\dagger}$$

$$\gamma^0(i\not{D} - m)\psi = 0$$

或

$$(i\not{D} - m)\psi = 0$$

这就是（电磁场中的）狄拉克方程。



我今天已经速成QED了？

tql

# 场论对称性与守恒流

把刚才的QED拉氏量

$$\mathcal{L}_{QED} = \bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$$

分解成自由狄拉克场、电磁场和相互作用三部分

$$\mathcal{L}_{Dirac} = \bar{\psi}(i\not{\partial} - m)\psi$$

$$\mathcal{L}_{EM} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$$

$$\mathcal{L}_{int} = q\bar{\psi}\not{A}\psi$$

验证

- ▶ 狄拉克场是全局 $U(1)$ 不变的:  $\psi \rightarrow \psi e^{i\alpha}$ ;
- ▶ 电磁场是规范不变的:  $A_\mu \rightarrow A_\mu - \frac{1}{q}\partial_\mu\lambda$ ;
- ▶ QED是定域 $U(1)$ 不变的:  $\psi \rightarrow \psi e^{i\lambda(x)}$ ,  $A_\mu \rightarrow A_\mu - \frac{1}{q}\partial_\mu\lambda(x)$ 。