Physics of quark-gluon plasma and high-energy heavy-ion collisions

Probfia

2019 年 8 月 1 日

目录

1 Introduction

粒子物理标准模型中，有三代费米子共 12 个，规范玻色子共 4 个，以及希格斯玻色子。数学上讲，标准模型是 $U(1) \times SU(2) \times SU(3)$。

采用自然单位制 $\hbar = c = k_B = 1$。根据 $\hbar c = 197\ \mathrm{MeV} \cdot \mathrm{fm}$ 就可以得到 $1\ \mathrm{fm} = \frac{1}{197}\ \mathrm{MeV}^{-1}$ 等自然单位制下的数值。

粒子物理实验中常用到散射截面的概念，它反应了粒子数随角度的分布

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{dN}{d\Omega dt}/nv \tag{1}$$

方位角微元为 $d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$。

1.1 群论简介

群是一个带乘法运算的集合，与对称性密切相关。一个群可以有自己的表示，例如，考虑反射群 $\{I, P\}$，其中 P 是镜面反射算符满足 $P^2 = I$。另外，考虑 $Z_2 = \{1, -1\}$ 和自然乘法构成的群，它同样满足 $(-1)^2 = 1$。可以建立两个群元素间的一一对应关系，因此说，Z_2 群是反射群的一个表示。

$SO(3)$ 群是三维空间中的旋转群，一般元素可以表示为 $R_{\vec{n}}(\psi)$，意义为绕 $\vec{n}$ 方向的轴进行 ψ 角度旋转。为了得到 $SO(3)$ 群的表示，考虑一个小的角度 $\delta\psi$，显然有

$$R_{\vec{n}}(\delta\psi)\vec{x} = \vec{x} + \delta\psi\vec{n} \times \vec{x} + o(\delta\psi) \tag{2}$$

或者写成

$$R_{\vec{n}}(\delta\psi)_{ik} = \delta_{ik} - i(i\delta\psi\epsilon_{ijk}n_j) \tag{3}$$

选取 n_j 为三维空间的正交基，就得到了三个表征 $SO(3)$ 的生成元 $(J_k)_{ij} = i\epsilon_{ikj}$

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mathrm{i} \\ 0 & \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mathrm{i} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\mathrm{i} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad J_3 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} & 0 \\ \mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

有限角度的旋转可以由无数个无穷小转动相乘而成，于是

$$R_{\vec{n}}(\psi) = \left[R_{\vec{n}}\left(\frac{\psi}{N}\right)\right]^N \equiv e^{-i\psi\vec{n}\cdot\vec{J}} \tag{5}$$

$\vec{J}$ 构成 $SO(3)$ 的李代数 $so(3)$。基本李括号是 $[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk}J_k$。

$SU(2)$ 群是二维特殊酉群，满足 $U^\dagger U = I$ 和 $\det U = 1$。同样考虑它的李代数，即考虑 $U = I + i\epsilon A$。容易算出来 A 必须是厄米的。在 $SO(3)$ 的例子中，因为各个 J 是反称的，对任意的 $SO(3)$ 元，$\det R = \det e^{-i\psi\vec{n}\cdot\vec{J}} e^{-i\psi \mathrm{tr}\ \vec{n}\cdot\vec{J}} = 1$ 自然满足，但对于 $SU(2)$，由于允许矩阵元是复数，必须外加条件 $\mathrm{tr}\ A = 0$。以实数为域，$su(2)$ 的维数为变量数 8 减去约束方程的个数 5，下面的三个泡利矩阵可以作为 $su(2)$ 的基：

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},\ \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{6}$$

σ 矩阵间满足关系 $\sigma_i\sigma_j = \delta_{ij} + i\epsilon_{ijk}\sigma_k$。为了保持 $i\epsilon_{ijk}$ 为 $su(2)$ 的结构常数，最好让 $\sigma_i/2$ 作为基，这样，基本李括号才是

$$\left[\frac{1}{2}\sigma_i, \frac{1}{2}\sigma_j\right] = i\epsilon_{ijk}\frac{1}{2}\sigma_k \tag{7}$$

同样地，作为李群的 $SU(2)$ 中的元素就可以仿照 $SO(3)$ 的情形写成

$$R_{\vec{n}}(\psi) = e^{-i\psi\vec{n}\cdot\frac{\vec{\sigma}}{2}} \tag{8}$$

可以看到，在这种表示下 $SU(2)$ 是以 4π 为周期的，因此也有 $SO(3) \simeq SU(2)/Z_2$。

1.2 夸克的味对称性与色荷

核力事实上是夸克间强相互作用的剩余，而实验表明，核力并不对核子的种类作区分，即 $p-p$, $p-n$, $n-n$ 间的核力都是差不多的，因此可以说，质子态和中子态间有旋转对称性，这一旋转同样用 $SU(2)$ 群表征。

夸克模型建立后，发现，虽然 u, d, t 三种夸克的质量不相同，但强相互作用依然对它们几乎不作区分，它们之间具有 $SU(3)$ 旋转对称性。

$SU(3)$ 的李代数维数为 8，盖尔曼矩阵为它的一组基

$$\begin{aligned}
&\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{9}$$

定义夸克态

$$u = (1,0,0)^T, \quad d = (0,1,0)^T, \quad s = (0,0,1)^T \tag{10}$$

以及反夸克态

$$\bar{u} = (-1,0,0)^T, \quad \bar{d} = (0,-1,0)^T, \quad \bar{s} = (0,0,-1)^T \tag{11}$$

对于 8 个盖尔曼矩阵中的两个对角阵，定义

$$I_3 = \frac{1}{2}\lambda_3, \quad Y = \frac{1}{\sqrt{3}}\lambda_8 \tag{12}$$

夸克和反夸克态都是这两个矩阵的本征态，把对应的本征值画在 (I_3, Y) 平面上，就得到了所谓的夸克的权重图，如**??**。这称作夸克的味。此外，可以像对自旋那样定义 3 组（6 个）升降阶算符，实现夸克味间的转换。

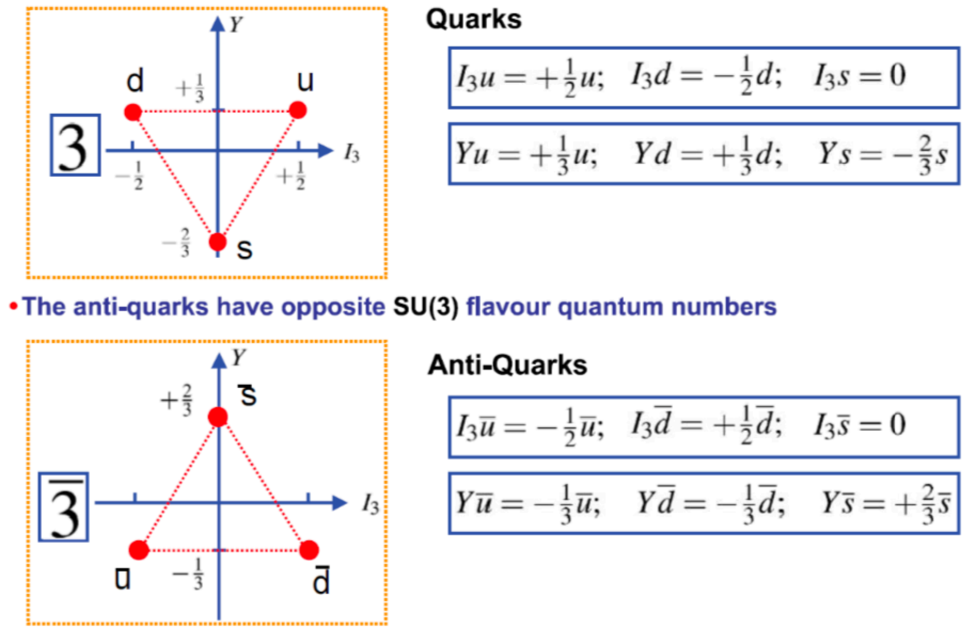

图 1: 夸克三种味的 weight diagram.

但在历史上，发现一些重子和介子由 3 个或 2 个完全相同的夸克组成，例如 $\Delta^{++}=(uuu)$。这违背了泡利不相容原理。为了解决这一问题，只能给夸克额外增加一个称为色的自由度，色有三种，分别为红，绿，蓝三色（及其反色）。

引入色后，为了构造强相互作用的理论，类比电到电荷的过程，将色推广到色荷，最终可以写出量子色动力学的拉氏量

$$\mathcal{L}_{\mathrm{QCD}}=\overline{\psi}_i\left(i\gamma^{\mu}\left(D_{\mu}\right)_{ij}-m\delta_{ij}\right)\psi_j-\frac{1}{4}G^a_{\mu\nu}G^{\mu\nu}_a \tag{13}$$

量子色动力学有几个基本特性，其中一个是色荷禁闭，即我们没法观察到非色中性物质的存在。色荷禁闭的特征尺度大致随能标增大而增大，也就是说，在高能标下会发生去禁闭的现象。这一现象可以由熵与稳定的关系表征。在低温下，$S/T^3\sim O(1)$；而在高温下，$S/T^3\sim O(N_c^2)$，其中色荷数 $N_c=3$。这说明高温下存在额外自由度，这就是由去禁闭的色荷贡献的。

在 (ρ,T) 平面上作出 QCD 物质的存在状态，可以得到所谓的 QCD 相图如??。

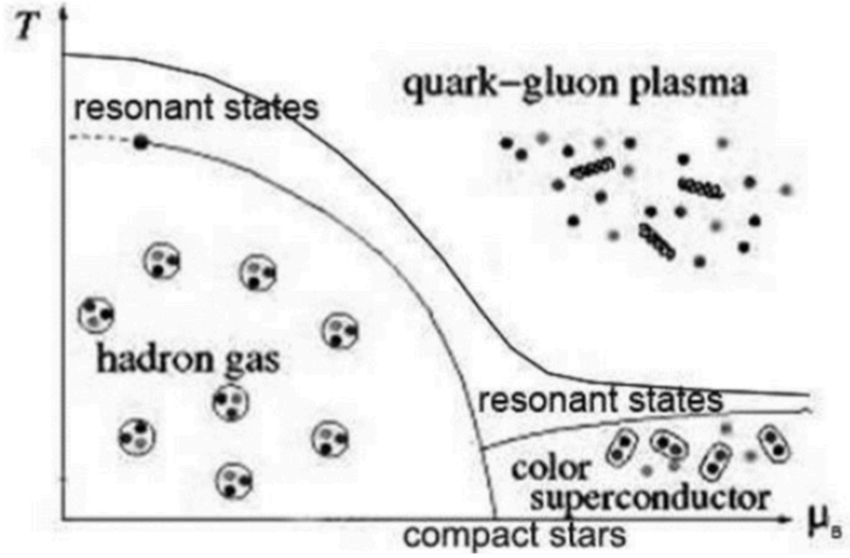

图 2: QCD 相图示意

可以看到，为了实现去禁闭，可以通过高温和高压两种手段实现，高温可以通过重离子碰撞实现，也是早期宇宙对应的情形；而高压情形则存在于致密天体中。

2 Relativistic quantum mechanics and field theory

2.1 相对论性量子力学

回忆非相对论性量子力学基本方程-薛定谔方程的建立：首先我们有色散关系

$$E = \frac{\vec{p}^2}{2m} \tag{14}$$

此后，将可观测量分别用算符代替，$E \to i\frac{\partial}{\partial t}$，$\vec{p} \to -i\vec{\nabla}$，两边作用波函数 ψ，就得到了薛定谔方程

$$-\frac{1}{2m}\vec{\nabla}^2\psi = i\frac{\partial\psi}{\partial t} \tag{15}$$

薛定谔方程显然不是相对论协变的，为了得到一个相对论性的量子力学方程，最简单的考虑是利用相对论色散关系

$$E^2 = \vec{p}^2 + m^2 \tag{16}$$

利用之前的替换原则就得到

$$-\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -\vec{\nabla}^2 \psi + m^2 \psi \tag{17}$$

这称为 KG 方程（克莱因-高登方程），但它存在一些问题，首先态矢本身不足以确定系统的动力学演化，必须加入其一阶导数；其次，$|\psi|^2$ 非正定，使得概率诠释失效。

为了解决这些问题，狄拉克提出，让 $E = \vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m$，且上式作平方时能够恢复到相对论色散关系，即

$$E^2 = \alpha^i p_i \alpha^j p_j + (\alpha^i \beta + \beta \alpha^i) p_i + \beta^2 m^2 \equiv p_i p_j \delta^{ij} + m^2 \tag{18}$$

于是有

$$\begin{aligned} \{\alpha^i, \alpha^j\} &= 2\delta^{ij} \\ \{\alpha^i, \beta\} &= 0 \\ \beta^2 &= 1 \end{aligned} \tag{19}$$

狄拉克找到了一组解。首先选取 $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \equiv \gamma^0$，其中 1 为 2 阶单位阵；再在方程 $E = \vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m$ 两边左乘 β 得到 $\beta(E - m) + \beta \vec{\alpha} \cdot \vec{p}$，发现，$\vec{\alpha} = \beta \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}$ 是满足条件的解。

把能量和动量换成算符，就得到了狄拉克方程

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0 \tag{20}$$

其中 $\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$，$\gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}$。

代入试探解 $\psi = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} e^{i(\vec{p}\cdot\vec{x} - Et)}$，得到

$$\begin{pmatrix} E - m & -\vec{\sigma} \cdot \vec{p} \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{p} & -E - m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 0 \tag{21}$$

非平凡的 u, v 要求前面矩阵的行列式为 0，即

$$m^2 - E^2 + (\vec{p}\cdot\vec{\sigma})^2 = m^2 - E^2 + \vec{p}^2 = 0 \tag{22}$$

有两个本征解

$$E = \pm\sqrt{m^2 + \vec{p}^2} \tag{23}$$

为了研究正负号的意义，利用相对论协变性改在粒子静止的坐标系中研究。此时的本征方程变为

$$\begin{pmatrix} E-m & 0 \\ 0 & -E-m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 0 \tag{24}$$

正能量对应的本征矢为 $u = (u, 0)^T$，负能量对应的本征矢为 $v = (0, v)^T$。

定义角动量算符 $\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p}$，它与哈密顿量的对易关系为

$$\begin{aligned} &= [\vec{\alpha}\cdot\vec{p} + \beta m, \vec{r}\times\vec{p}] = [\vec{\alpha}\cdot\vec{p}, \vec{r}\times\vec{p}] \\ &= \vec{\alpha}[\vec{p}, \vec{r}\times\vec{p}] = \vec{\alpha}\cdot([\vec{p}, \vec{r}]\times\vec{p} + \vec{r}\times[\vec{p}, \vec{p}]) \\ &= -i\vec{\alpha}\times\vec{p} \end{aligned} \tag{25}$$

也即角动量非守恒量。

定义自旋算符 $\vec{\Sigma} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix} = -i\alpha_1\alpha_2\alpha_3\vec{\alpha}$，有

$$\begin{aligned} &= [\vec{\alpha}\cdot\vec{p}, -i\alpha_1\alpha_2\alpha_3\vec{\alpha}] = \left(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha^l\alpha^i - \alpha^i\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_l\right)\partial_i \\ &= 2i\vec{\alpha}\cdot\vec{p} \end{aligned} \tag{26}$$

于是，量 $\vec{L} + \frac{1}{2}\vec{\Sigma}$ 是一个守恒量，物理意义为自旋角动量加轨道角动量守恒；也表明，狄拉克方程描述的是自旋 1/2 粒子。此外，自旋与动量的点乘 $vec\Sigma\cdot\vec{p} = -i\alpha_1\alpha_2\alpha_3\vec{\alpha}\cdot\vec{p}$ 显然也与哈密顿量对易。定义 $h = \vec{\Sigma}\cdot\vec{p}/|\vec{p}|$，其本征值为 ±1，物理意义对应右旋（自旋动量同向）与左旋（自旋动量反向）粒子。