量子场论

其实我也不会

高寒
gaoh26@mail2.sysu.edu.cn

γ γ
e⁻ e⁺
费曼图物理连帽衫加绒卫衣男士秋冬装科学量子力学衣服大学生外套
价格 ¥169.00
促销价 ¥88.00 新品促销
运费 山东潍坊 至 United States 什么是官方转运?
月销量 0
累计评价 0
送天猫积分 44
尺码 S M L XL XXL XXXL
颜色分类
数量 1 件 库存2968件
立即购买
加入购物车
服务承诺 正品保证 极速退款 七天无理由退换
支付方式

自由实标量场的拉格朗日量

拉格朗日量$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2$对应的标量场满足运动方程

$$(\partial^2 + m^2)\phi = \ddot{\phi} - \vec{\nabla}^2\phi + m^2\phi = 0$$

量子化

解的行为类似谐振子，这建议我们采用量子化谐振子的方法量子化标量场，即定义产生湮灭算符。
产生湮灭算符必须对每个模式定义，然后按各个模式叠加得到总的场算符。定义产生湮灭算符满足对易关系$[\hat{a}_{\vec{p}}, \hat{a}_{\vec{q}}] = [\hat{a}^\dagger_{\vec{p}}, \hat{a}^\dagger_{\vec{q}}] = 0$；$[\hat{a}_{\vec{p}}, \hat{a}^\dagger_{\vec{q}}] = (2\pi)^3\delta(\vec{p} - \vec{q})$。定义场算符

$$\hat{\phi}(x) = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{p}}}} (\hat{a}_{\vec{p}} e^{-ip\cdot x} + \hat{a}^\dagger_{\vec{p}} e^{ip\cdot x})$$

x和p是四维坐标和四维动量。

真空与粒子

定义场的真空态$|0\rangle$，使得对于任意模式$\vec{p}$都有$\hat{a}_{\vec{p}}|0\rangle = 0|0\rangle$。
消除零点能，真空的能量为零。
粒子态定义为

$$|\vec{p}_1, \vec{p}_2, \cdots, \vec{p}_n\rangle = \hat{a}^\dagger_{\vec{p}_1} \hat{a}^\dagger_{\vec{p}_2} \cdots \hat{a}^\dagger_{\vec{p}_n} |0\rangle$$

验证，粒子数算符

$$\hat{N} = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \hat{a}^\dagger_{\vec{p}} \hat{a}_{\vec{p}}$$

满足$\hat{N}|\vec{p}_1, \vec{p}_2, \cdots, \vec{p}_n\rangle = n|\vec{p}_1, \vec{p}_2, \cdots, \vec{p}_n\rangle$。粒子态可以被诠释为具有一系列动量的$n$个粒子。而产生算符则用来产生这些粒子，因此我们说，粒子是场的激发态。

总结

1. 粒子是场的激发态;
2. 自由实标量场的激发态对应自旋0玻色子。

自由复标量场

复值场ψ的拉格朗日密度为

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \psi \partial^\mu \psi^* - m^2 \psi \psi^*$$

它的运动方程为

$$\partial_\mu \partial^\mu \psi + m^2 \psi = 0$$

$$\partial_\mu \partial^\mu \psi^* + m^2 \psi^* = 0$$

量子化

复标量场多了一个自由度，因此定义两种产生湮灭算符。同组产生湮灭算符内满足的对易关系与之前实标量场一致，并且增加它们之间的对易关系为$[\hat{b}_{\vec{p}}, \hat{c}^\dagger_{\vec{p}}] = [\hat{c}_{\vec{p}}, \hat{b}^\dagger_{\vec{p}}] = 0$。
场算符为

$$\hat{\psi}(x) = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{p}}}} (\hat{b}_{\vec{p}} e^{-ip\cdot x} + \hat{c}^\dagger_{\vec{p}} e^{ip\cdot x})$$

$$\hat{\psi}^\dagger(x) = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{p}}}} (\hat{b}^\dagger_{\vec{p}} e^{ip\cdot x} + \hat{c}_{\vec{p}} e^{-ip\cdot x})$$

正粒子和反粒子

采用与之前相当的真空定义，定义正粒子数算符

$$\hat{N}_b = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \hat{b}^\dagger_{\vec{p}} \hat{b}_{\vec{p}}$$

和反粒子数算符

$$\hat{N}_c = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \hat{c}^\dagger_{\vec{p}} \hat{c}_{\vec{p}}$$

正粒子产生算符作用到真空态上产生一个正粒子，
如$\hat{b}^\dagger_{\vec{p}}|0\rangle = |\vec{p}_b\rangle$，等等，反粒子亦如此。粒子数算符的本征值为正粒子或反粒子的粒子数。

总结

1. 粒子是场的激发态;
2. 自由复标量场的激发态对应自旋0玻色子，包括正粒子和反粒子;
3. 自由场下正粒子和反粒子不发生相互作用，各自的粒子数守恒。

一句话概括

场都被我们量子化啦！

相互作用项

我们要描述场的相互作用，最好的方法是在拉格朗日量中加上二次以上的项。

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{free} + g\phi^3 + \lambda\phi^4 + \sum_{n>4} \lambda_n \phi^n$$

各个展开系数的量纲不同，在我们采用的自然单位制$c = \hbar = 1$下，场的量纲是质量m；拉格朗日量的量纲是m^4；能量的量纲是m。$[\lambda_n] = m^{4-n}$，在能标E下无量纲参量为$\frac{\lambda_n}{E^{4-n}}$。当这个参量远小于1，则做微扰展开是合理的。

相互作用图景

哈密顿算符分解为$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_i$。
态的演化按

$$|\psi, t_2\rangle = \mathcal{T}(e^{-i\int_{t_1}^{t_2} \hat{H}_i dt})|\psi, t_1\rangle$$

算符的演化按

$$\frac{d\hat{\mathcal{O}}}{dt} = -i[\hat{\mathcal{O}}, \hat{H}_0]$$

算符的时序乘积和正序乘积

$\mathcal{T}(\hat{\mathcal{O}}(x)\hat{\mathcal{O}}(y)\cdots)$为算符的时序乘积，将算符按时间大小顺序从左到右排序，例如若$x^0 < y^0$，
则$\mathcal{T}(\hat{\mathcal{O}}(x)\hat{\mathcal{O}}(y)\cdots) = \hat{\mathcal{O}}(y)\hat{\mathcal{O}}(x)$。
$\mathcal{R}(\hat{\mathcal{O}}(x)\hat{\mathcal{O}}(y)\cdots)$为算符的正序乘积，它按产生算符在左，湮灭算符在右的顺序将算符重新排序。

Wick定理

将$\hat{\phi}(x) = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{p}}}}(\hat{a}_{\vec{p}}e^{-ip\cdot x} + \hat{a}^{\dagger}_{\vec{p}}e^{ip\cdot x})$分解
为$\hat{\phi}^{+}(x) = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{p}}}}\hat{a}_{\vec{p}}e^{-ip\cdot x}$和$\hat{\phi}^{-}(x) = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{p}}}}\hat{a}^{\dagger}_{\vec{p}}e^{ip\cdot x}$,
可以算得

$$\mathcal{T}(\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y)) = \begin{cases} [\hat{\phi}^{+}(x), \hat{\phi}^{-}(y)] + \mathcal{R}(\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y)), & x^0 > y^0 \\ [\hat{\phi}^{+}(y), \hat{\phi}^{-}(x)] + \mathcal{R}(\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y)), & x^0 < y^0 \end{cases}$$

其中$\begin{cases} [\hat{\phi}^{+}(x), \hat{\phi}^{-}(y)], & x^0 > y^0 \\ [\hat{\phi}^{+}(y), \hat{\phi}^{-}(x)], & x^0 < y^0 \end{cases}$称作算符的缩并。
上面的情况可以推广到任意个算符,称为Wick定理,表述为:
时序乘积等于所有可能的缩并的和的正序乘积。

费曼传播子

缩并$\begin{cases}[\hat{\phi}^+(x),\hat{\phi}^-(y)], & x^0>y^0\\ [\hat{\phi}^+(y),\hat{\phi}^-(x)], & x^0<y^0\end{cases}$是一个数，其结果为

$$\Delta_F(x-y)=\lim_{\epsilon\to 0^+}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{ie^{ik\cdot(x-y)}}{k^2-m^2+i\epsilon}$$

称为费曼传播子。

一句话概括

其实没学会问题也不大。

ϕ^4散射

考虑拉格朗日量$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4$，利用场算符代替场本身，将哈密顿算符分解成自由实标量场的哈密顿算符和相互作用的哈密顿算符$\hat{H}_i = \int d^3\vec{x}\frac{\lambda}{4!}\hat{\phi}^4$。

粒子态$|p_1, p_2\rangle = \sqrt{4\omega_{\vec{p}_1}\omega_{\vec{p}_2}}\hat{a}^\dagger_{\vec{p}_1}\hat{a}^\dagger_{\vec{p}_2}|0\rangle$从$t = -\infty$开始散射到$t = \infty$为$|q_1, q_2\rangle = \sqrt{4\omega_{\vec{q}_1}\omega_{\vec{q}_2}}\hat{a}^\dagger_{\vec{q}_1}\hat{a}^\dagger_{\vec{q}_2}|0\rangle$。这个过程的振幅是

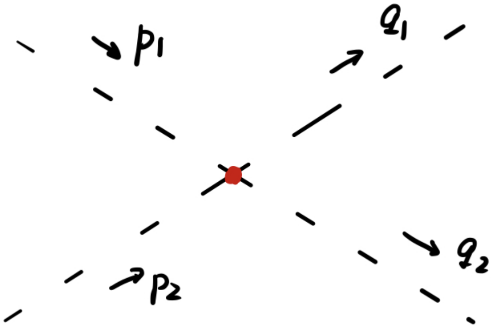
$$A = \langle q_1, q_2|\mathcal{T}e^{-i\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{H}_i dt}|p_1, p_2\rangle \simeq \langle q_1, q_2| -\frac{i\lambda}{4!}\int d^4x\hat{\phi}(x)^4|p_1, p_2\rangle$$

把场展开成产生湮灭算符计算，考虑所有的组合和真空态的定义，最终得到结果为$A = -i\lambda\delta(p_1 + p_2 - q_1 - q_2)$。

后面的δ函数事实上是散射过程中能量守恒的动量守恒的要求，否则散射不会发生。

ϕ^4散射的费曼图

用虚线表示ϕ粒子，以时间从左到右顺序画出费曼图。



ϕ^4理论的费曼规则：交点给出因子$-i\lambda\delta(\sum p)$，其中$\sum p$是所有流入交点的净动量。

玩具汤川势

考虑一个复标量场ψ（其代表粒子称为核子）和实标量场ϕ（其代表粒子称为媒介子）的相互作用，拉格朗日量为

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \psi^* \partial^\mu \psi + \frac{1}{2}\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - M^2 \psi^* \psi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - g\psi^* \psi \phi$$

表征的相互作用为

$$\hat{H}_i = \int d^3\vec{x} g \hat{\psi}^* \hat{\psi} \hat{\phi}$$

媒介子衰变

媒介子态$|p\rangle = \sqrt{2\omega_{\vec{p}}}\hat{a}^\dagger_{\vec{p}}|0\rangle$散射为核子-反核子态$|q_1, q_2\rangle = \sqrt{4\omega_{\vec{q}_1}\omega_{\vec{q}_2}}\hat{b}^\dagger_{\vec{q}_1}\hat{c}^\dagger_{\vec{q}_2}$的振幅为

$$A = \langle q_1, q_2|\mathcal{T}e^{-i\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{H}_i dt}|p\rangle \simeq \langle q_1, q_2| - ig\int d^4x\hat{\psi}^*\hat{\psi}\hat{\phi}|p\rangle$$

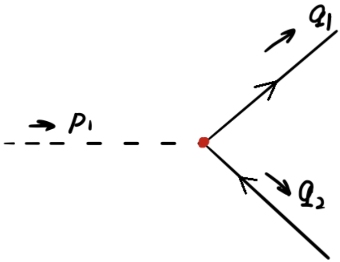
同样利用真空态的定义并从三个场算符中的乘积中选出唯一使得振幅不为零的项$\sim \hat{b}^\dagger\hat{c}^\dagger\hat{a}$积分可以得到结果

$$A = -ig(2\pi)^4\delta(p - q_1 - q_2)$$

δ函数保证能量守恒和动量守恒，且可以在质心系中计算，媒介子衰变的条件至少是$M > 2m$。

媒介子衰变的费曼图

用虚线表示媒介子，用带箭头的实线表示核子和反核子。实线上的箭头表示核子的运动，若为反核子，箭头与运动方向相反。



费曼规则：交点贡献$-ig(2\pi)^4\delta(\sum p)$。

一句话概括

其实就是算费曼图。

核子散射

考虑两个核子之间的散射，即粒子态$|p_1, p_2\rangle = \sqrt{4\omega_{\vec{p}_1}\omega_{\vec{p}_2}}\hat{b}^\dagger_{\vec{p}_1}\hat{b}^\dagger_{\vec{p}_2}|0\rangle$散射$|q_1, q_2\rangle = \sqrt{4\omega_{\vec{q}_1}\omega_{\vec{q}_2}}\hat{c}^\dagger_{\vec{q}_1}\hat{c}^\dagger_{\vec{q}_2}|0\rangle$。的振幅。需要找到至少2个$\hat{b}^\dagger$和2个$\hat{b}$使得振幅非零，这要求对指数至少展开到$\sim g^2$的项。

$$
\begin{aligned}
A &= \langle q_1, q_2|\mathcal{T}e^{-i\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{H}_i dt}|p_1, p_2\rangle \\
&\simeq \langle q_1, q_2| - g^2\mathcal{T}(\int d^4x d^4y \hat{\psi}^*(x)\hat{\psi}(x)\hat{\phi}(x)\hat{\psi}^*(y)\hat{\psi}(y)\hat{\phi}(y)|p_1, p_2\rangle
\end{aligned}
$$

这里，时序乘积要起作用了。

唯一有贡献的缩并

根据之前所说，要保留至少2个$\hat{b}^\dagger$和2个$\hat{b}$，只能缩并掉两个$\hat{\phi}$。
因此，唯一起作用的散射矩阵是

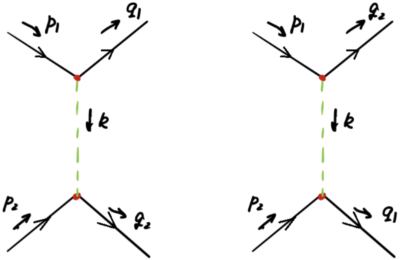
$$\int d^4x d^4y \mathcal{R}(\hat{\psi}^*(x)\hat{\psi}(x)\hat{\psi}^*(y)\hat{\psi}(y))\Delta_F(x-y)$$

用产生湮灭算符代替各个场算符后正则排序（这事实上减小了工作量），化简两三页纸就可以得到
$A = -ig^2(2\pi)^4 \int d^4k \frac{1}{k^2-m^2}[\delta(p_1-q_1-k)\delta(k+p_2-q_2)+\delta(p_1-q_2-k)\delta(k+p_1-q_2)]$。
最后完成这个积分，结果为

$$A = -ig^2(2\pi)^4[\frac{1}{(p_1-q_1)^2-m^2}+\frac{1}{(p_1-q_2)^2-m^2}]\delta(p_1+p_2-q_1-q_2)$$

核子散射的费曼图

根据之前的标记，画出费曼图为



额外的费曼规则：内线给出因子$\lim_{\epsilon\to 0^+}\int d^4k\frac{i}{k^2-m^2+i\epsilon}$
最终的散射振幅是将交点和内线的因子相乘在积分号内完成积分。

散射振幅的诠释

散射振幅可以用于计算散射截面和粒子衰变率。
另外可以将散射振幅取非相对论极限，并与非相对论性量子力学中$V(r)$中心势给出的散射振幅进行类比，得到我们随手写出的场相互作用对应的粒子的相互作用。
对核子散射，上述方法给出的势为

$$V(r) \sim \frac{1}{r} e^{-mr}$$

这个势称为汤川势，它的作用范围$b \sim \frac{1}{m}$。

与静电场的类比

我们知道，自由媒介子的场ϕ满足的方程为$(\partial^2+m^2)\phi=0$，假设它不依赖与时间，则$(-\vec{\nabla}^2+m^2)\phi=0$。利用傅立叶变换可以解出

$$\phi(\vec{x})\sim\frac{1}{4\pi r}e^{-mr}$$

而电势满足的方程正是取$m=0$的情况，这暗示我们，电磁力对应的媒介子-光子的质量为0。

介子的质量

核力的作用范围$b = \frac{1}{m} \sim 2\ \mathrm{fm}$。于是媒介子的质量估计为

$$m = \frac{1}{b} \equiv \frac{\hbar}{cb} \sim \frac{1240\ \mathrm{MeV} \cdot \mathrm{fm}}{2\ \mathrm{fm} \cdot c^2} \sim 600\ \mathrm{MeV}/c^2$$

高能物理实验通过测量散射截面给出的π介子质量
为$m_\pi \approx 140\ \mathrm{MeV}/c^2$。
......至少数量级是差不多的。事实上，真正的汤川模型是实标量场与旋量场（自旋1/2粒子）间的相互作用，而非实标量场与复标量场间的相互作用。

其他

1. 你可以用费曼图求玩具汤川模型中$\phi\phi \to \phi\phi$等等散射振幅;
2. 其他场的量子化：旋量场的量子化-自旋1/2粒子；电磁场（规范场）的量子化-自旋1粒子;
3. 汤川势：旋量场与实自由场的相互作用-核力；QED：电磁场与旋量场的相互作用-电磁力;
4. 散射振幅的更高阶展开，更奇形怪状的费曼图;
5. 凝聚态中的相互作用，统计场论......