线性空间和张量

Probfia

目录

1 线性空间

我们熟悉的向量生活在线性空间中。所谓线性空间是一群向量的集合 V 连同一个代数域 $\mathscr{F}$ 形成的代数结构。这个域的作用是定义向量的数乘。向量空间有 8 大条公理，不过这里就不必一一叙述了，只需要记住最重要的一条：

公理 1.1 (封闭性) *设 V 是一个线性空间，$\mathscr{F}$ 是它连同的域，则*

$$\forall u, v \in V,\ u + v \in V \tag{1}$$

$$\forall v \in V,\ \forall \alpha \in \mathscr{F},\ \alpha v \in V \tag{2}$$

我们熟悉的长度为 n 的数组就生活在空间 $\mathbb{R}^n$ 中，它连同的域就是实数域 $\mathbb{R}$，如果让它连同的域是 $\mathbb{C}$ 就会破坏第二条封闭性。数组只是向量的一个特例。

如果一个线性空间中的所有向量都可以用其中的 n 个向量线性表示出（只涉及数乘和加法运算），那么就称这个线性空间的维度为 n，记作 $\dim V = n$。这 n 个向量称为这个线性空间的一组基。下面的定理确真：

定理 1.1 (向量在基下的表示) *设 V 有一组基 $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$，那么，*

$$\forall v \in V,\ \exists!(v^1, v^2, \cdots, v^n) \in \mathscr{F}^n,\ v = v^1 e_1 + v^2 e_2 + \cdots v^n e_n \tag{3}$$

即任意向量 v 在这组基下的线性表示唯一。

这个定理无聊爆了，唯一需要证明的是它的唯一性，不过这也无聊爆了，所以不证。各个域中的数 v^i 称为向量 v 在这组基下的坐标。采用爱因斯坦求和规则，上面这个式子可以用特别漂亮的方式写出

$$v = v^i e_i \tag{4}$$

讲一个稍微有意思一点的话题。将 $\mathbb{C}^n$ 作为线性空间，它的域可以是 $\mathbb{C}$，也可以是 $\mathbb{R}$。假如让 $\mathbb{R}$ 作为域的话，会有 $\dim \mathbb{C}^n = 2n$。你能一眼看出这个命题的证明吗？

2 对偶空间

考虑一个映射 f，它将线性空间 V 中的元素映到这个空间的域 $\mathscr{F}$ 上。此外，我们要求这个映射满足线性条件：

$$\forall u, v \in V,\ \forall \alpha, \beta \in \mathscr{F},\ f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v) \tag{5}$$

那么，这个映射就称为线性映射。我们定义线性映射 f 和 g 的加法为

$$(f+g) : V \to \mathscr{F},\ \forall v \in V,\ (f+g)(v) = f(v) + g(v) \tag{6}$$

以及数乘

$$\alpha f : V \to \mathscr{F},\ \forall v \in V,\ (\alpha f)(v) = \alpha f(v) \tag{7}$$

其中 $\alpha \in \mathscr{F}$。这也无聊爆了。还有一个更无聊的定理

定理 2.1 线性空间 V 上所有的线性映射连同 V 上原本的域 $\mathscr{F}$ 构成另一个线性空间，记作 V^*，称为 V 的对偶空间。

既然 V^* 是一个线性空间，那么它必然具有自己的维数，是多少呢？猜都不用猜，肯定是 $\dim V^* = \dim V$。

我们先定义几个特殊的线性映射。若 V 有一组基 $\{e_i\}$，那么，定义线性映射 e^j，使得

$$e^j(e_i) = \delta_i^j \tag{8}$$

e^j 对 V 中的向量 v 的作用是

$$\begin{aligned} e^j(v) &= e^j(v^i e_i) \\ &= v^i e^j(e_i) \\ &= v^i \delta_i^j = v^j \end{aligned} \tag{9}$$

于是 e^j 也被称为求坐标函数。

引入这些无聊的函数是为了这个稍微不那么无聊一点的定理

定理 2.2 (对偶空间的基) 设找到 V 的一组基为 $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$,那么,$\{e^1, e^2, \cdots, e^n\}$ 一定是 V^* 的一组基。

这个定理的证明就不给了，反正也没人在意，而且我们也没时间讲线性空间的一些证明技巧（套路）。对 V^* 中的任意元素 f，都有一个分解

$$f = f_j e^j \tag{10}$$

这个线性函数作用到 V 中的元素 v 上得到的结果就是

$$f(v) = (f_j e^j)(v^i e_i) = f_j v^i e^j(e_i) = f_i v^i \tag{11}$$

3 变换基公式

习惯上将 V 中的向量记作列向量，而将 V^* 中的向量记为行向量。即下标对应列，上标对应行。如果有一个满秩矩阵 $A = (a^i{}_j)$，它将 V 的基 $\{e_i\}$ 变换到 $\{e'_i\}$ 的方式如

$$e'_j = a^i{}_j e_i \tag{12}$$

也即

$$(e'_1, e'_2, \cdots, e'_n) = (e_1, e_2, \cdots, e_n)A \tag{13}$$

那么，V^* 的基变换公式就是

$$(e'^1, e'^2, \cdots, e'^n) = A^{-1}(e^1, e^2, \cdots, e^n) \tag{14}$$

这个定理可以这样证明。设 $e'^j = b^j{}_k e^k$，$B = b^j{}_k$。考虑 e'^j 对 e'_i 的作用，有

$$\begin{aligned}
\delta^j_i &= e'^j(e'_i) \\
&= e'^j(a^l{}_i e_l) \\
&= (b^j{}_k e^k)(a^l{}_i e_l) \\
&= b^j{}_k a^l{}_i \delta^k_l \\
&= b^j{}_k a^k{}_i
\end{aligned} \tag{15}$$

$b^j{}_k a^k{}_i$ 不是别的，就是矩阵乘积 BA 的第 i, j 个元素，它等于 δ^j_i。这就是说 $BA = E$ 或 $B = A^{-1}$。

因为一个向量的坐标就是去坐标函数对这个向量的作用，因此，V 中向量的坐标也会按 V^* 的基变换公式那样变换，也就是

$$(v'^1, v'^2, \cdots, v'^n) = A^{-1}(v^1, v^2, \cdots, v^n) \tag{16}$$

或

$$v'^j = b^j{}_i v^i \tag{17}$$

4 张量和张量运算

有了对偶空间的基础，我们现在终于可以考虑张量了。(s, t) 阶张量的一般定义是一个映射：

$$T : \underbrace{V \times V \times \cdots \times V}_{s\text{ 个}} \times \underbrace{V^* \times V^* \times \cdots \times V^*}_{t\text{ 个}} \to \mathscr{F} \tag{18}$$

其中 $\times$ 是集合的笛卡尔积。此外，T 必须对每一个自变量是单线性的。

讲人话……

张量 T 是一个函数，它接受 $s + t$ 个自变量，其中 s 个是在线性空间 V 上的向量；t 个是在对偶空间 V^* 上的向量。它的输出结果是 V 的代数域（同时也是 V^* 的代数域）上的一个数。单线性是指，对每个自变量，都要有

$$T(\cdots, \alpha u + \beta v, \cdots) = \alpha T(\cdots, u, \cdots) + \beta T(\cdots, v, \cdots) \tag{19}$$

这和上课老师讲的不一样啊……

别急，我们先来看看 $(s,t)=(2,0)$ 的情况。假设 V 有一组基 $\{e_i\}$，设有两个向量 u，v，它们的坐标表示分别是 $u=u^ie_i$ 和 $v=v^je_j$，那么

$$\begin{aligned}T(u,v)=&T(u^1e_1+u^2e_2+\cdots+u^ne_n,v)\\ =&u^1T(e_1,v)+u^2T(e_2,v)+\cdots+u^nT(e_n,v)\\ =&u^1T(e_1,v^1e_1+v^2e_2+\cdots+v^ne_n)+\\ &u^2T(e_2,v^1e_1+v^2e_2+\cdots+v^ne_n)+\\ &\vdots\\ &u^nT(e_n,v^1e_1+v^2e_2+\cdots+v^ne_n)+\\ =&u^1v^1T(e_1,e_1)+u^1v^2T(e_1,e_2)+\cdots+u^1v^nT(e_1,e_n)\\ &u^2v^1T(e_2,e_1)+u^2v^2T(e_2,e_2)+\cdots+u^2v^nT(e_2,e_n)+\\ &\cdots+\\ &u^nv^1T(e_n,e_1)+u^nv^2T(e_n,e_2)+\cdots+u^nv^nT(e_n,e_n)\end{aligned}\tag{20}$$

其实这么长而且这么丑陋无比的公式，用爱因斯坦求和规则写出来就是

$$T(u,v)=T(u^ie_i,v^je_j)=u^iv^jT(e_i,e_j)\tag{21}$$

多么美观！爱因斯坦简直就是美学大师，而且他还帮我们节约了数以吨记的墨水，拯救了几千个亚马逊雨林。如果诺贝尔有环保奖的话，一定归爱因斯坦莫属。

引入记号 $T_{ij}=T(e_i,e_j)$，就有

$$T(u,v)=T_{ij}u^iv^j\tag{22}$$

我们就回到了我们在课上学过的那种，和矩阵傻傻分不清的，带角标的张量了。

推广到 (s,t) 型张量，若第 p 个 V 中的向量的坐标表示是 $v_p=v_p^{i_p}e_{i_p}$，第 q 个 V^* 中的向量的坐标是 $f_q=f_{qj_q}e^{j_q}$，那么就有

$$\begin{aligned}T(v_1,\cdots,v_s;f_1,\cdots,f_t)&=T(v_1^{i_1}e_{i_1},\cdots,v_s^{i_s}e_{i_s},f_{1j_1}e^{j_1},\cdots,f_{tj_t}e^{j_t})\\ &=v_1^{i_1}\cdots v_s^{i_s}f_{1j_1}\cdots f_{tj_t}T(e_{i_1},\cdots,e_{i_s},\cdots,e^{j_1},\cdots,e^{j_t})\\ &=v_1^{i_1}\cdots v_s^{i_s}f_{1j_1}\cdots f_{tj_t}T^{j_1\cdots j_t}_{i_1\cdots i_s}\end{aligned}\tag{23}$$

再一次，$T_{i_1\cdots i_s}^{j_1\cdots j_t}$ 就是我们一般知道的张量，或者说，它其实只是张量 T 的各个分量。这其实是所谓的张量的坐标表示。顺便一提，你可以发现上下标已经根本不够用了，我希望有一天可以发明三维的纸，这样就可以有左上、左下、右上、右下四个指标了；另外，拉丁字母和希腊字母符号也不够用了，我也希望有一天可以引入 emoji 表情作为符号。

如果对于张量 T，对换任意两个向量，都有 $T(\cdots,u,\cdots,v,\cdots) = T(\cdots,v,\cdots,u,\cdots)$，就说这个张量的对称的，如果反过来，对任意两个向量，都有 $T(\cdots,u,\cdots,v,\cdots) = -T(\cdots,v,\cdots,u,\cdots)$，就说这个张量是反称的。反称张量的一个著名例子是行列式张量：考虑 n 个 n 维列向量构成的矩阵的行列式

$$D(v_1,v_2,\cdots,v_n) \tag{24}$$

它显然符合张量的一般定义，而且是反称的。你也很容易想到，行列式张量的坐标表示就是 $\varepsilon_{i_1 i_2\cdots i_n}$。

对 (p,q) 张量 T 和 (s,t) 张量 U，它们的代数乘积显然也是一个张量。

$$T(v_1,\cdots,v_p;f_1\cdots,f_q)U(u_1,\cdots,u_s;g_1,\cdots,g_t) \tag{25}$$

对每个自变量都呈单线性，于是这个乘积的行为和张量的一般定义一致，它就是一个张量（著名谚语：If it looks like a duck, walks like a duck and quacks like a duck, then it’s a duck）。乘积的坐标表示是

$$(TU)_{i_1\cdots i_p k_1\cdots k_s}^{j_1\cdots j_q l_1\cdots l_t} = T_{i_1\cdots i_s}^{j_1\cdots j_t} U_{k_1\cdots k_s}^{l_1\cdots l_t} \tag{26}$$

(s,t) 张量可以定义缩并运算得到一个 $(s-1,t-1)$ 张量。这个定义如下：

$$T(v_1,\cdots,v_p,\cdots,v_s;f_1,\cdots,f_q,\cdots,f_t) \to T(v_1,\cdots,e_k,\cdots,v_s;f_1,\cdots,e^k,\cdots,f_t) \tag{27}$$

注意这里需要对所有的 (e_k,e^k) 对求和。缩并后的张量对每一个自变量依然是单线性的，所以它还是一个张量。它的坐标表示很容易求得

$$\begin{aligned} &T(e_{i_1},\cdots\ e_i,\cdots,e_{i_s},\cdots,e^{j_1},\cdots,e^i,\cdots,e^{j_t}) \\ =&T_{i_1\cdots k\cdots i_s}^{j_1\cdots k\cdots j_t} \end{aligned} \tag{28}$$

注意这里也是要对所有的 k 求和。

如果你理解不了乘积和缩并运算，举两个例子。考虑 $\mathbb{R}^n$ 的 $(1,0)$ 张量（向量，列向量）a 和 $(0,1)$ 张量（对偶向量，行向量）b^{T} 间的乘积运算

$$ab^{\mathrm{T}} \tag{29}$$

它的结果显然是一个 n 阶方阵，n 阶方阵是 $(1,1)$ 张量的坐标表示。每个坐标分量是

$$(ab^{\mathrm{T}})^{j}{}_{i} = a_i b^j \tag{30}$$

缩并运算就是让两个指标相等并求和，它就是矩阵 ab^{T} 的迹，而且就是 a 和 b 的内积。

5 度规张量和升降指标

欧几里得空间是一个定义了内积的线性空间。内积是用一个 $(2,0)$ 型对称张量（度规）$g(\ ,\ )$ 定义的，它还满足正定性，也就是

$$\forall x \neq 0,\ g(x,x) > 0 \tag{31}$$

显然像对一般张量的处理方式一样把 g 写成坐标形式，为 g_{ij}。

向量 x 的范数定义为 $||x|| = \sqrt{g(x,x)}$，显然，用坐标形式写出来就是

$$||x|| = \sqrt{g_{ij}x^i x^j} \tag{32}$$

一定存在一组基使得 $g_{ij} = \delta_{ij}$，这组基称为 V 的单位正交基。

度规可以让本体空间中的向量变到对偶空间去。考虑这样的映射

$$f_v:\ V \to \mathscr{F},\ f_v(u) = g(v,u) \tag{33}$$

对每个选定的向量 v，f_v 都是 V^* 中的元素（对 u 的线性映射）。

度规张量和它的逆可以用来提升和下放一个张量的指标。张量指标的上升和下降操作定义为乘以度规的逆或者度规本身。但在平直的欧式空间中，只要好好选取坐标系，度规张量就是一个单位张量，于是，升降一个张量的指标不会带来数值上的区别，在这种情况下就可以把张量的所有角标全部写在下面。

6 张量的例子

我们最先接受的张量是转动惯量张量，它其实是一个二次型（对应一个 $(2,0)$ 对称张量），接受两个角速度，返回一个动能值

$$T = I(\vec{\omega},\vec{\omega}) \tag{34}$$

其中 $\vec{\omega}$ 是角速度矢量。而

$$\vec{J}=I(\vec{\omega},\ ) \tag{35}$$

将角速度变到对应的角动量（由本体空间变到对偶空间，或者用微分几何的语言，由切空间变到余切空间。二班的同学应该对这两个名字还有印象）。

我们后来又遇到了应力张量，它是一个对称张量，接受两个方向，返回以其中一个方向为法向的面上朝另一个方向的应力分量

$$P=P(\vec{n}_1,\vec{n}_2) \tag{36}$$

张量的映射定义比基变换定义更为自然，这也说明，如果一个带几个角标的量可以代表一个实实在在的物理量，那它通常就是一个张量。

7 坐标变换

考虑一个 (s,t) 张量 $T(\cdots,v,\cdots;,\cdots,f,\cdots)$，它在基 $\{e_i\}$ 下的坐标表示为 $T^{\cdots j\cdots}_{\cdots i\cdots}$，那么当我们选取一组新基 $\{e'_i\}$ 时，张量的坐标表示又会变成什么样子呢？

回忆一下，旧基下，张量本身和它的坐标表示的关系为

$$\begin{aligned} T(\cdots,v,\cdots;,\cdots,f,\cdots)&=\cdots v^i\cdots f_j\cdots T(\cdots,e_i,\cdots;,\cdots,e^j,\cdots)\\ &\equiv\cdots v^i\cdots f_j\cdots T^{\cdots j\cdots}_{\cdots i\cdots}\end{aligned} \tag{37}$$

在新基下，有 $e'_j=a^i{}_je_i$ 和 $e'^j=b^j{}_ke^k$，于是

$$\begin{aligned} T(\cdots,v,\cdots;\cdots,f,\cdots)&=T(\cdots,v'^ie'_i,\cdots;,\cdots,f'_je'^j,\cdots)\\ &=\cdots v'^i\cdots f'_j\cdots T(\cdots,e'_i,\cdots;,\cdots,e'^j,\cdots)\\ &=\cdots v'^if'_j\cdots a^k{}_i\cdots b^j{}_l\cdots T(\cdots,e_k,\cdots;,\cdots,e^l,\cdots)\\ &=v'^if'_ja^k{}_ib^j{}_lT^{\cdots l\cdots}_{\cdots k\cdots}\cdots\end{aligned} \tag{38}$$

于是有

$$T'^{\cdots j\cdots}_{\cdots i\cdots}=\cdots a^k{}_ib^j{}_lT^{\cdots l\cdots}_{\cdots k\cdots} \tag{39}$$

也就是说，张量上标按坐标变换规则变换 $b^j{}_l=\dfrac{\partial x'^j}{\partial x^l}$，下标按基底变换规则变换（坐标变换规则的逆）$a^k{}_i=\dfrac{\partial e'_i}{\partial e^k}=\dfrac{\partial x^k}{\partial x'^i}$。这和课上讲的所谓张量识别定理是一样的。

8 张量计算练习

张量说着简单算着难，你可以体验一下。

$\mathbb{R}^3$ 内有单位双曲面 $\vec{x}(u,v) = (\cosh u \cos v, \cosh u \sin v, \sinh u)$，

1. 计算度规张量，它的定义是 (u,v) 发生微小变化时，$\vec{x}$ 微小变化的长度，也即 $g_{ij} = \dfrac{\partial \vec{x}}{\partial u^i} \cdot \dfrac{\partial \vec{x}}{\partial u^j}$。其中 $(u^1, u^2) = (u, v)$。
2. 计算度规张量的逆 g^{kl}。
3. 计算仿射联络 $\mathit{\Gamma}^k_{ij} = \dfrac{1}{2} g^{lk} (\dfrac{\partial g_{il}}{\partial u^j} + \dfrac{\partial g_{jl}}{\partial u^i} - \dfrac{\partial g_{ij}}{\partial u^l})$（一共 8 个分量）。
4. 写出测地线方程 $\dfrac{d^2 u^k}{ds^2} + \mathit{\Gamma}^k_{ij} \dfrac{du^i}{ds} \dfrac{du^j}{ds} = 0$（2 个方程）。
5. 计算黎曼曲率张量 $R^l_{ijk} = \partial_k \mathit{\Gamma}^l_{ij} - \partial_j \mathit{\Gamma}^l_{ik} + \mathit{\Gamma}^m_{ij} \mathit{\Gamma}^l_{km} - \mathit{\Gamma}^m_{ik} \mathit{\Gamma}^l_{jm}$（give it up, for life is short.）。