

Physics of quark-gluon plasma and high-energy heavy-ion collisions

Probfia

2019 年 8 月 1 日

目录

1 Introduction	1
1.1 群论简介	1
1.2 夸克的味对称性与色荷	3
2 Relativistic quantum mechanics and field theory	5
2.1 相对论性量子力学	5
2.2 场论	8

1 Introduction

粒子物理标准模型中, 有三代费米子共 12 个, 规范玻色子共 4 个, 以及希格斯玻色子。数学上讲, 标准模型是 $U(1) \times SU(2) \times SU(3)$ 。

采用自然单位制 $\hbar = c = k_B = 1$ 。根据 $\hbar c = 197 \text{ MeV} \cdot \text{fm}$ 就可以得到 $1 \text{ fm} = \frac{1}{197} \text{ MeV}^{-1}$ 等自然单位制下的数值。

粒子物理实验中常用到散射截面的概念, 它反应了粒子数随角度的分布

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{dN}{d\Omega dt} / nv \quad (1)$$

方位角微元为 $d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$ 。

1.1 群论简介

群是一个带乘法运算的集合, 与对称性密切相关。一个群可以有自己的表示, 例如, 考虑反射群 $\{I, P\}$, 其中 P 是镜面反射算符满足 $P^2 = I$ 。另

外, 考虑 $Z_2 = \{1, -1\}$ 和自然乘法构成的群, 它同样满足 $(-1)^2 = 1$ 。可以建立两个群元素间的一一对应关系, 因此说, Z_2 群是反射群的一个表示。

$SO(3)$ 群是三维空间中的旋转群, 一般元素可以表示为 $R_{\vec{n}}(\psi)$, 意义为绕 \vec{n} 方向的轴进行 ψ 角度旋转。为了得到 $SO(3)$ 群的表示, 考虑一个小的角度 $\delta\psi$, 显然有

$$R_{\vec{n}}(\delta\psi)\vec{x} = \vec{x} + \delta\psi\vec{n} \times \vec{x} + o(\delta\psi) \quad (2)$$

或者写成

$$R_{\vec{n}}(\delta\psi)_{ik} = \delta_{ik} - i(\delta\psi\epsilon_{ijk}n_j) \quad (3)$$

选取 n_j 为三维空间的正交基, 就得到了三个表征 $SO(3)$ 的生成元 $(J_k)_{ij} = i\epsilon_{ikj}$

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

有限角度的旋转可以由无数个无穷小转动相乘而成, 于是

$$R_{\vec{n}}(\psi) = \left[R_{\vec{n}}\left(\frac{\psi}{N}\right) \right]^N \equiv e^{-i\psi\vec{n}\cdot\vec{J}} \quad (5)$$

\vec{J} 构成 $SO(3)$ 的李代数 $so(3)$ 。基本李括号是 $[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk}J_k$ 。

$SU(2)$ 群是二维特殊酉群, 满足 $U^\dagger U = I$ 和 $\det U = 1$ 。同样考虑它的李代数, 即考虑 $U = I + i\epsilon A$ 。容易算出来 A 必须是厄米的。在 $SO(3)$ 的例子中, 因为各个 J 是反称的, 对任意的 $SO(3)$ 元, $\det R = \det e^{-i\psi\vec{n}\cdot\vec{J}} e^{-i\psi\text{tr } \vec{n}\cdot\vec{J}} = 1$ 自然满足, 但对于 $SU(2)$, 由于允许矩阵元是复数, 必须外加条件 $\text{tr } A = 0$ 。以实数为域, $su(2)$ 的维数为变量数 8 减去约束方程的个数 5, 下面的三个泡利矩阵可以作为 $su(2)$ 的基:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (6)$$

σ 矩阵间满足关系 $\sigma_i\sigma_j = \delta_{ij} + i\epsilon_{ijk}\sigma_k$ 。为了保持 $i\epsilon_{ijk}$ 为 $su(2)$ 的结构常数, 最好让 $\sigma_i/2$ 作为基, 这样, 基本李括号才是

$$\left[\frac{1}{2}\sigma_i, \frac{1}{2}\sigma_j \right] = i\epsilon_{ijk}\frac{1}{2}\sigma_k \quad (7)$$

同样地，作为李群的 $SU(2)$ 中的元素就可以仿照 $SO(3)$ 的情形写成

$$R_{\vec{n}}(\psi) = e^{-i\psi\vec{n}\cdot\frac{\vec{\sigma}}{2}} \quad (8)$$

可以看到，在这种表示下 $SU(2)$ 是以 4π 为周期的，因此也有 $SO(3) \simeq SU(2)/Z_2$ 。

1.2 夸克的味对称性与色荷

核力事实上是夸克间强相互作用的剩余，而实验表明，核力并不对核子的种类作区分，即 $p-p$, $p-n$, $n-n$ 间的核力都是差不多的，因此可以说，质子态和中子态间有旋转对称性，这一旋转同样用 $SU(2)$ 群表征。

夸克模型建立后，发现，虽然 u, d, t 三种夸克的质量不相同，但强相互作用依然对它们几乎不作区分，它们之间具有 $SU(3)$ 旋转对称性。

$SU(3)$ 的李代数维数为 8，盖尔曼矩阵为它的一组基

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} & & (9) \\ \lambda_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} & \lambda_8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

定义夸克态

$$u = (1, 0, 0)^T, \quad d = (0, 1, 0)^T, \quad s = (0, 0, 1)^T \quad (10)$$

以及反夸克态

$$\bar{u} = (-1, 0, 0)^T, \quad \bar{d} = (0, -1, 0)^T, \quad \bar{s} = (0, 0, -1)^T \quad (11)$$

对于 8 个盖尔曼矩阵中的两个对角阵，定义

$$I_3 = \frac{1}{2}\lambda_3, \quad Y = \frac{1}{\sqrt{3}}\lambda_8 \quad (12)$$

夸克和反夸克态都是这两个矩阵的本征态，把对应的本征值画在 (I_3, Y) 平面上，就得到了所谓的夸克的权重图，如图 1。这称作夸克的味。此外，可以像对自旋那样定义 3 组（6 个）升降阶算符，实现夸克味间的转换。

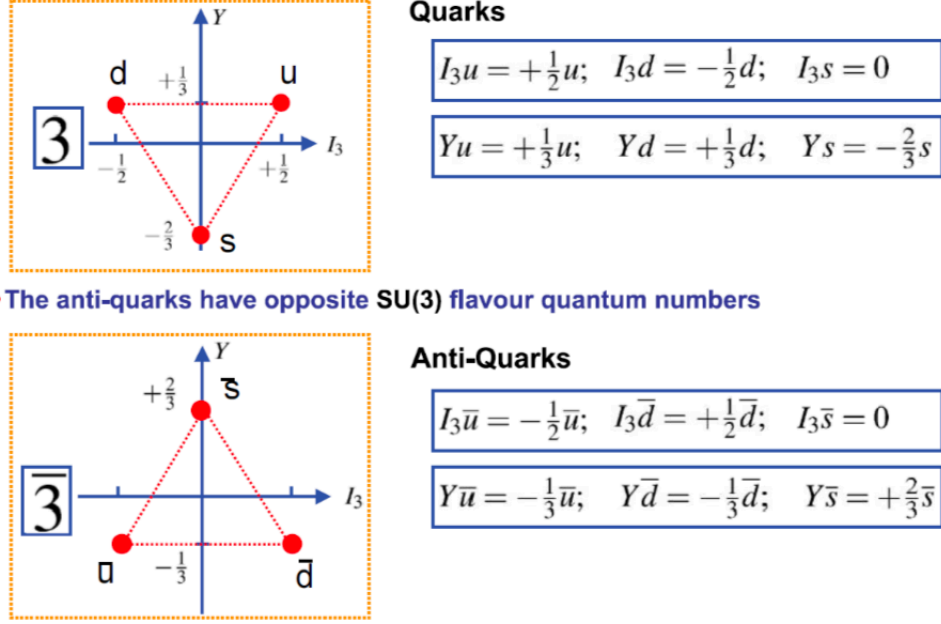


图 1: 夸克三种味的 weight diagram.

但在历史上，发现一些重子和介子由 3 个或 2 个完全相同的夸克组成，例如 $\Delta^{++} = (uuu)$ 。这违背了泡利不相容原理。为了解决这一问题，只能给夸克额外增加一个称为色的自由度，色有三种，分别为红，绿，蓝三色（及其反色）。

引入色后，为了构造强相互作用的理论，类比电到电荷的过程，将色推广到色荷，最终可以写出量子色动力学的拉氏量

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = \bar{\psi}_i \left(i\gamma^\mu (D_\mu)_{ij} - m\delta_{ij} \right) \psi_j - \frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu} \quad (13)$$

量子色动力学有几个基本特性，其中一个是色荷禁闭，即我们没法观察到非色中性物质的存在。色荷禁闭的特征尺度大致随能标增大而增大，也就是说，在能标下会发生去禁闭的现象。这一现象可以由熵与稳定的关系表征。在低温下， $S/T^3 \sim O(1)$ ；而在高温下， $S/T^3 \sim O(N_c^2)$ ，其中色荷数 $N_c = 3$ 。这说明高温下存在额外自由度，这就是由去禁闭的色荷贡献的。

在 (ρ, T) 平面上作出 QCD 物质的存在状态, 可以得到所谓的 QCD 相图如图 2。

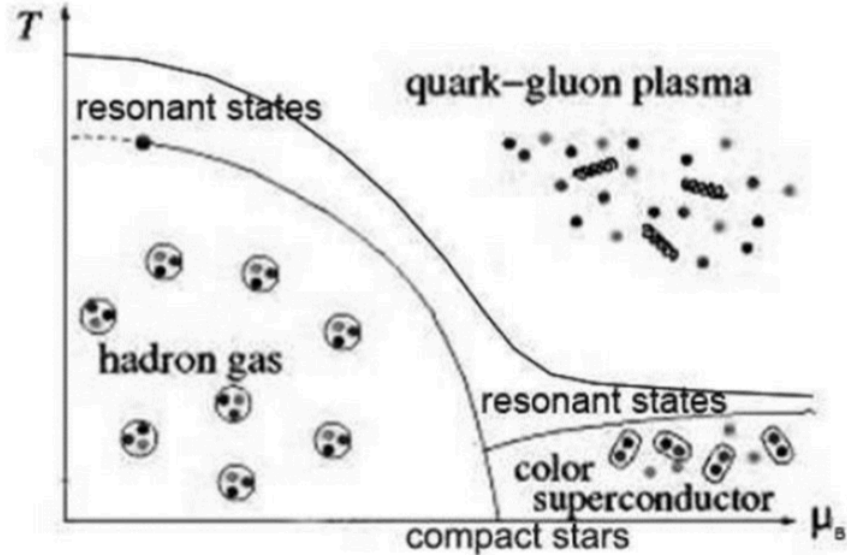


图 2: QCD 相图示意

可以看到, 为了实现去禁闭, 可以通过高温和高压两种手段实现, 高温可以通过重离子碰撞实现, 也是早期宇宙对应的情形; 而高压情形则存在于致密天体中。

2 Relativistic quantum mechanics and field theory

2.1 相对论性量子力学

回忆非相对论性量子力学基本方程-薛定谔方程的建立: 首先我们有色散关系

$$E = \frac{\vec{p}^2}{2m} \quad (14)$$

此后, 将可观测量分别用算符代替, $E \rightarrow i\frac{\partial}{\partial t}$, $\vec{p} \rightarrow -i\vec{\nabla}$, 两边作用波函数 ψ , 就得到了薛定谔方程

$$-\frac{1}{2m}\vec{\nabla}^2\psi = i\frac{\partial\psi}{\partial t} \quad (15)$$

薛定谔方程显然不是相对论协变的，为了得到一个相对论性的量子力学方程，最简单的考虑是利用相对论色散关系

$$E^2 = \vec{p}^2 + m^2 \quad (16)$$

利用之前的替换原则就得到

$$-\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -\vec{\nabla}^2 \psi + m^2 \psi \quad (17)$$

这称为 KG 方程（克莱因-高登方程），但它存在一些问题，首先态矢本身不足以确定系统的动力学演化，必须加入其一阶导数；其次， $|\psi|^2$ 非正定，使得概率诠释失效。

为了解决这些问题，狄拉克提出，让 $E = \vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m$ ，且上式作平方时能够恢复到相对论色散关系，即

$$E^2 = \alpha^i p_i \alpha^j p_j + (\alpha^i \beta + \beta \alpha^i) p_i + \beta^2 m^2 \equiv p_i p_j \delta^{ij} + m^2 \quad (18)$$

于是有

$$\begin{aligned} \{\alpha^i, \alpha^j\} &= 2\delta^{ij} \\ \{\alpha^i, \beta\} &= 0 \\ \beta^2 &= 1 \end{aligned} \quad (19)$$

狄拉克找到了一组解。首先选取 $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \equiv \gamma^0$ ，其中 1 为 2 阶单位阵；再在方程 $E = \vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m$ 两边左乘 β 得到 $\beta(E - m) + \beta \vec{\alpha} \cdot \vec{p}$ ，发现， $\vec{\alpha} = \beta \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & -\vec{\sigma} \end{pmatrix}$ 是满足条件的解。

把能量和动量换成算符，就得到了狄拉克方程

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0 \quad (20)$$

其中 $\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ， $\gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}$ 。

代入试探解 $\psi = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} e^{i(\vec{p} \cdot \vec{x} - Et)}$ ，得到

$$\begin{pmatrix} E - m & -\vec{\sigma} \cdot \vec{p} \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{p} & -E - m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 0 \quad (21)$$

非平凡的 u, v 要求前面矩阵的行列式为 0, 即

$$m^2 - E^2 + (\vec{p} \cdot \vec{\sigma})^2 = m^2 - E^2 + \vec{p}^2 = 0 \quad (22)$$

有两个本征解

$$E = \pm \sqrt{m^2 + \vec{p}^2} \quad (23)$$

为了研究正负号的意义, 利用相对论协变性改在粒子静止的坐标系中研究。此时的本征方程变为

$$\begin{pmatrix} E - m & 0 \\ 0 & -E - m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 0 \quad (24)$$

正能量对应的本征矢为 $u = (u, 0)^T$, 负能量对应的本征矢为 $v = (0, v)^T$ 。

定义角动量算符 $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$, 它与哈密顿量的对易关系为

$$\begin{aligned} &= [\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m, \vec{r} \times \vec{p}] = [\vec{\alpha} \cdot \vec{p}, \vec{r} \times \vec{p}] \\ &= \vec{\alpha} [\vec{p}, \vec{r} \times \vec{p}] = \vec{\alpha} \cdot ([\vec{p}, \vec{r}] \times \vec{p} + \vec{r} \times [\vec{p}, \vec{p}]) \\ &= -i\vec{\alpha} \times \vec{p} \end{aligned} \quad (25)$$

也即角动量非守恒量。

定义自旋算符 $\vec{\Sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix} = -i\alpha_1\alpha_2\alpha_3\vec{\alpha}$, 有

$$\begin{aligned} &= [\vec{\alpha} \cdot \vec{p}, -i\alpha_1\alpha_2\alpha_3\vec{\alpha}] = (\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha^l\alpha^i - \alpha^i\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_l)\partial_i \\ &= 2i\vec{\alpha} \cdot \vec{p} \end{aligned} \quad (26)$$

于是, 量 $\vec{L} + \frac{1}{2}\vec{\Sigma}$ 是一个守恒量, 物理意义为自旋角动量加轨道角动量守恒; 也表明, 狄拉克方程描述的是自旋 1/2 粒子。此外, 自旋与动量的点乘 $\vec{\Sigma} \cdot \vec{p} = -i\alpha_1\alpha_2\alpha_3\vec{\alpha} \cdot \vec{p}$ 显然也与哈密顿量对易。可以算出, 这个矩阵的本征值为 $\pm|\vec{p}|$ 。定义螺旋度 (helicity) 算符 $h = \vec{\Sigma} \cdot \vec{p}/|\vec{p}|$, 其本征值为 ± 1 , 物理意义对应右旋 (自旋动量同向) 与左旋 (自旋动量反向) 粒子。4 个本征态中, 恰好有 2 个正粒子态, 其本征值分别为 1 和 -1; 另外两个负粒子态的本征值也分别为 1 和 -1, 按之前的记号, 它们分别记为 $u_\uparrow, u_\downarrow, v_\uparrow$ 和 v_\downarrow 。螺旋度不是洛伦兹不变的。

定义 $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 。进一步定义左旋投影算符 $P_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma^5) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ 和右旋投影算符 $P_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma^5) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ 。

γ^5 称为手征 (chirality) 算符, 其本征态称为左手态和右手态。在零质量极限下, 螺旋与手征重合 (不知道为什么)。

2.2 场论

拉格朗日函数

$$\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \quad (27)$$

对应作用量 $S[\phi] = \int d^4x \mathcal{L}$ 。最小作用量原理给出欧拉-拉格朗日方程为

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0 \quad (28)$$

把 KG 方程和狄拉克方程中的波函数重新诠释成一个经典场, 把方程看成一个欧拉-拉格朗日方程, 两种场对应的拉格朗日函数就是

$$\mathcal{L}_{KG} = \frac{1}{2} \partial^2 \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \quad (29)$$

$$\mathcal{L}_{Dirac} = \bar{\psi} (i \gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi \quad (30)$$

其中 $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$ 为旋量的狄拉克共轭。

KG 场和狄拉克场都具有全局 $U(1)$ 不变性, 也即拉格朗日函数在变换 $\phi \rightarrow e^{i\theta} \phi$ 下不变。 θ 是一个常数。在狄拉克场中, 为了将全局 $U(1)$ 不变性推广到局域 $U(1)$ 不变性, 对拉格朗日函数必须做如下修改

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu + ie A_\mu \quad (31)$$

其中 A_μ 是一个规范场, 在变换 $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \theta(x)$ 下不变。