

Classical Electrodynamics

Probfa

2019 年 12 月 7 日

目录

1	无边界的经典电磁场	2
1.1	麦克斯韦方程	2
1.2	格林函数	3
1.3	推迟势	4
2	静场	5
2.1	拉普拉斯方程	5
2.2	分离变量解	6
2.2.1	直角区域分离变量	6
2.2.2	扇形区域分离变量	13
2.2.3	球形区域分离变量	19
2.3	电像法与格林函数	23
2.4	多极展开	24
3	介质	27
3.1	电介质的基本图像	27
3.2	磁介质的基本图像	28
3.3	欧姆定律	29
3.4	介质中的边值问题	30
4	动场	31
4.1	自由无界空间中的场	31
4.2	波导和谐振腔	31
4.2.1	谐振腔	31

4.2.2 波导	34
4.3 辐射	35
4.3.1 多极展开	35
4.3.2 电偶极辐射	36

1 无边界的经典电磁场

1.1 麦克斯韦方程

真空中与源耦合的麦克斯韦方程具有如下形式

$$\begin{aligned}
 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\
 \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\
 \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\
 \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0 \vec{j}
 \end{aligned} \tag{1}$$

为了简化上面的方程，引入势函数 ϕ 和 \vec{A} 使得

$$\begin{aligned}
 \vec{E} &= -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\
 \vec{B} &= \vec{\nabla} \times \vec{A}
 \end{aligned} \tag{2}$$

这使得麦克斯韦方程中的 $\vec{\nabla} \times \vec{E}$ 和 $\vec{\nabla} \cdot \vec{B}$ 式自动满足。势函数的选取依然存在不定性，可以验证，若 (ϕ, \vec{A}) 给出的物理场是 (\vec{E}, \vec{B}) ，对任意的标量场 $\lambda(\vec{x}, t)$ ， $(\phi - \partial_t \lambda, \vec{A} - \vec{\nabla} \lambda)$ 也给出同样的物理场。这种不变性称为势函数的规范不变性，它事实上反应了我们定义出的规范场的冗余自由度。规范给出对势函数的一个具体限制从而去掉冗余自由度，我们常用洛伦兹规范 $\partial_t \phi + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ 。对静场，洛伦兹规范退化到库伦规范 $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ 。

把势函数和规范要求带入麦克斯韦方程的剩下两式就得到

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \nabla^2 \phi &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\
 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \nabla^2 \vec{A} &= \mu_0 \vec{j}
 \end{aligned} \tag{3}$$

推导第二式需要将原等式右边的 \vec{E} 用势函数表示，并用洛伦兹规范条件与左边的 $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{A})$ 抵消。

当源 (ρ, \vec{j}) 不存在时，势函数 ϕ 和 \vec{A} 的各个分量满足自由空间中的波动方程。

1.2 格林函数

当空间中存在源 (ρ, \vec{j}) 时, 容易看出 $\phi \sim \rho$, $A_i \sim j_i$ 。方程形式的类似性告诉我们为了具体讨论源对势函数的影响, 只用讨论 ϕ 对 ρ 的影响。

由于电磁场的叠加原理, 我们只需要考虑点源的影响。考虑方程

$$\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} - \nabla^2 G = \delta(t - t_0, \vec{x} - \vec{x}_0) \quad (4)$$

两边乘 $e^{-i\omega t + i\vec{k} \cdot \vec{x}} dt d^3 \vec{x}$ 做积分, 得到傅立叶空间中的方程为

$$(\vec{k}^2 - \omega^2)G = e^{-i\omega t_0 + i\vec{k} \cdot \vec{x}_0} \quad (5)$$

傅立叶逆变换为

$$G = \int \frac{d\omega}{2\pi} \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\vec{k}^2 - \omega^2} e^{-i\omega t_0 + i\vec{k} \cdot \vec{x}_0} e^{i\omega t - i\vec{k} \cdot \vec{x}} \quad (6)$$

这个积分可以这样进行, 首先, 由于傅立叶空间中 \vec{x} 是一个给定的量, 记 $\vec{x} - \vec{x}_0$ 的长度为 r , $\vec{x} - \vec{x}_0$ 与 \vec{k} 的夹角为 θ (随 \vec{k} 变化而变化, 从而被对 $d^3 \vec{k}$ 的积分积掉。第二个积分因此可以改到在球坐标下进行。球坐标下的体积元 $d^3 \vec{k} = k^2 \sin \theta dk d\theta d\phi$, 因此有

$$G = \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{i\omega(t-t_0)} \int_{k=0}^{\infty} \frac{k^2 dk}{(2\pi)^3} \frac{1}{k^2 - \omega^2} \int_{\theta=0}^{\pi} e^{ikr \cos \theta} \sin \theta d\theta \int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi \quad (7)$$

最后两个角向积分很容易进行

$$\begin{aligned} \int_{\theta=0}^{\pi} e^{ikr \cos \theta} \sin \theta d\theta &= - \int_{\theta=0}^{\pi} e^{ikr \cos \theta} d(\cos \theta) \\ &= \int_{x=-1}^1 e^{ikrx} dx = \frac{e^{ikrx}}{ikr} \Big|_{-1}^1 = 2 \frac{\sin kr}{kr} \end{aligned} \quad (8)$$

现在可以进行对 k 的积分, 首先为了利用复变函数积分技巧, 有

$$\frac{2}{r} \int_{k=0}^{\infty} \frac{k dk}{(2\pi)^3} \frac{1}{k^2 - \omega^2} \sin kr = \frac{1}{r} \text{Im} \int_{k=-\infty}^{\infty} \frac{k dk}{(2\pi)^3} \frac{1}{k^2 - \omega^2} e^{ikr} \quad (9)$$

由于 $r > 0$, 在上半复平面积分可以让 e^{ikr} 在上半围道消失, 但极点 $k = \pm \omega$ 出现在围道上, 为了解决这个困境, 考虑

$$\int \frac{k dk}{(2\pi)^3} \frac{1}{k^2 - \omega^2} e^{ikr} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int \frac{k dk}{(2\pi)^3} \frac{1}{k^2 - \omega^2 + i\epsilon} e^{ikr} \quad (10)$$

这时被积函数的极点就出现在 $k = \pm \sqrt{\omega^2 - i\epsilon} \simeq \pm \omega \mp i \frac{\epsilon}{2\omega}$, 极点 $-\omega + i \frac{\epsilon}{2\omega}$ 出现在上半复平面, 对积分有贡献。当然抬极点的方法不是唯一的, 结果也

会有差异。这里只是一种可能的途径，得到的结果称为费曼传播子，记作 G_F 。由于

$$\frac{k}{k^2 - \omega^2} e^{ikr} = \frac{1}{k - (-\omega)} \frac{k}{k - \omega} e^{ikr} \quad (11)$$

该点的留数为 $\frac{1}{2(2\pi)^3} e^{-i\omega r}$ ，积分的最终结果因此为 $\frac{1}{2(2\pi)^2 r} \cos \omega r$ 。

最后进行对 ω 的积分，有

$$\begin{aligned} G_F &= 2\pi \int_{\omega=-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{i\omega(t-t_0)} \frac{\cos \omega r}{2(2\pi)^2 r} \\ &= \frac{1}{2(2\pi)^2 r} \int_{\omega=-\infty}^{\infty} d\omega \cos \omega(t-t_0) \cos \omega r \\ &= \frac{1}{4(2\pi)^2 r} \int_{\omega=-\infty}^{\infty} d\omega [\cos \omega(t-t_0-r) + \cos \omega(t-t_0+r)] \\ &= \frac{1}{4\pi r} \frac{1}{2} [\delta(t-t_0-r) + \delta(t-t_0+r)] \end{aligned} \quad (12)$$

其中利用了等式 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} dk = \int_{-\infty}^{\infty} \cos kx dk = 2\pi \delta(x)$ 。这就是势函数对电源的响应，也即源对势的格林函数。

1.3 推迟势

根据格林函数的公式，对一般的源 $\epsilon_0 \rho(\vec{x}, t)$ 有

$$\begin{aligned} \phi_F(\vec{x}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int dt' d^3\vec{x}' \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \rho(\vec{x}', t') \frac{1}{2} [\delta(t-t'-r) + \delta(t-t'+r)] \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\vec{x}' \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \frac{1}{2} [\rho(\vec{x}', t - |\vec{x} - \vec{x}'|) + \rho(\vec{x}', t + |\vec{x} - \vec{x}'|)] \end{aligned} \quad (13)$$

这里发现，（费曼）势函数 ϕ 可以分解为推迟势

$$\phi_{ret}(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\vec{x}' \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \rho(\vec{x}', t - |\vec{x} - \vec{x}'|) \quad (14)$$

和超前势

$$\phi_{adv}(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\vec{x}' \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \rho(\vec{x}', t + |\vec{x} - \vec{x}'|) \quad (15)$$

的组合

$$\phi_F = \frac{1}{2} (\phi_{ret} + \phi_{adv}) \quad (16)$$

可以验证，推迟势和超前势都各自满足有源的势函数波动方程，它们之间任意的归一线性组合 $\phi = \alpha \phi_{ret} + (1 - \alpha) \phi_{adv}$ 也满足有源的势函数波动方

程，但超前势却面临严重的因果律问题（未来时间对现在世界的影响），因此，我们以后将只考虑推迟势。势对源的响应因此概括为

$$\begin{aligned}\phi(\vec{x}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\vec{x}' \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \rho(\vec{x}', t - |\vec{x} - \vec{x}'|) \\ \vec{A}(\vec{x}, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3\vec{x}' \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \vec{j}(\vec{x}', t - |\vec{x} - \vec{x}'|)\end{aligned}\quad (17)$$

如果要放回所有的光速 c ，则是

$$\begin{aligned}\phi(\vec{x}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\vec{x}' \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \rho(\vec{x}', t - \frac{1}{c}|\vec{x} - \vec{x}'|) \\ \vec{A}(\vec{x}, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3\vec{x}' \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \vec{j}(\vec{x}', t - \frac{1}{c}|\vec{x} - \vec{x}'|)\end{aligned}\quad (18)$$

推迟势的物理意义在于否定了超距作用：一个位于 \vec{x}' 点的电子必须经过 $\sim \frac{1}{c}|\vec{x}' - \vec{x}|$ 的时间后才能感受到位于 \vec{x} 处的电子发生的变化，信息以光速传递。此外可以看出， $\phi \sim \frac{1}{r}$ ，即势在无穷远处消散。这都是符合我们的物理直觉的。

2 静场

2.1 拉普拉斯方程

假设电荷分布和电流分布都不显含时间 t ，则从 (17) 可以看出，势函数同样不显含时间。这样不随时间演化的场称为静场。此时 (3) 简化为

$$\begin{aligned}\nabla^2 \phi &= -\frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla^2 \vec{A} &= -\mu_0 \vec{j}\end{aligned}\quad (19)$$

即势函数的各个分量都分别满足泊松方程。同样的，由于它们相仿的形式，我们暂且将目光局限在决定 ϕ 的方程上。在无界空间中， ϕ 的解可以直接套用推迟势公式 (17)，此时 ρ 无时间依赖

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\vec{x}' \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}\quad (20)$$

但实际问题中，空间中存在着各种介质和导体，因此，电势 ϕ 需要满足一些有限空间的边界条件。

边界条件分为两类，第一类边界条件给出边界上 ϕ 取值的直接限制

$$\phi|_S = f(\vec{x})\quad (21)$$

第二类边界条件给出 ϕ 梯度的法向分量，即电场垂直于边界面分量的限制，也就相当于面电荷分布的限制。

$$\vec{\nabla}\phi \cdot \vec{n}|_S = f(\vec{x}) \quad (22)$$

静场问题归结于在边界条件下解泊松方程的问题。好的一点在于，若给定电荷分布 $\rho(\vec{x})$ ，我们总能做变换 $\psi = \phi - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\vec{x}' \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$ 。此时， ψ 满足拉普拉斯方程

$$\nabla^2\psi = 0 \quad (23)$$

而 ψ 的第一类（第二类）边界条件相当于原来 ϕ 的边界条件减去对于自由解在边界上（的法向分量）的取值。也就是说，我们总能靠减去自由解的方法把泊松方程问题转化为拉普拉斯方程问题。

2.2 分离变量解

2.2.1 直角区域分离变量

在直角区域内，一个函数可以按正余弦函数展开。对于有界空间，电势表达为一系列傅立叶级数形式；而对无界空间，电势表达为傅立叶积分。我们分别举一个有界和无界的例子表明直角区域静电问题的解法。

例 2.1 在正方形区域 $0 < x, y < L$ 中，除顶边 $0 < x < L, y = L$ 的电势为 $V(x)$ 外，其余三边接地。求该正方形区域内的电势分布。

解答 2.1 设电势 $\phi(x, y) = X(x)Y(y)$ ，带入拉普拉斯方程有

$$\frac{1}{X} \frac{d^2X}{dx^2} = -\frac{1}{Y} \frac{d^2Y}{dy^2} = -k^2 \quad (24)$$

右边取 $-k^2$ 可以让 $X(x)$ 取震荡形式从而满足两边的零边界条件，从而有分离变量解

$$X_n = a_n \sin \frac{n\pi x}{L}, n = 0, 1, 2, \dots \quad (25)$$

$$Y_n = b_n \sinh \frac{n\pi y}{L}, n = 0, 1, 2, \dots \quad (26)$$

于是写出

$$\phi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{n\pi x}{L} \sinh \frac{n\pi y}{L} \quad (27)$$

将上式代入边界条件 $u(x, L) = V(x)$, 得到

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{n\pi x}{L} \sinh n\pi = V(x) \quad (28)$$

上式两边同乘 $\sin \frac{m\pi x}{L}$ 并对 x 从 0 到 L 积分 (利用函数集 $\{\sin \frac{n\pi x}{L}\}$ 的正交性, 相当于求 V 的傅里叶正弦展开系数), 得到

$$\frac{L}{2} c_n \sinh n\pi = \int_{x=0}^L V(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \quad (29)$$

于是

$$\phi(x, y) = \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sinh n\pi} \left(\int_{x=0}^L V(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \right) \sin \frac{n\pi x}{L} \sinh \frac{n\pi y}{L} \quad (30)$$

当 $V(x) = V$ 为一常数时

$$c_n = \frac{2V[1 - (-1)^n]}{n\pi \sinh n\pi} \quad (31)$$

故正方形区域内的电势分布为

$$\phi(x, y) = 4V \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi \sinh n\pi} \sin \frac{n\pi x}{L} \sinh \frac{n\pi y}{L} \quad (32)$$

取 $n = 1000$ 的截断作出的图像如图 1。

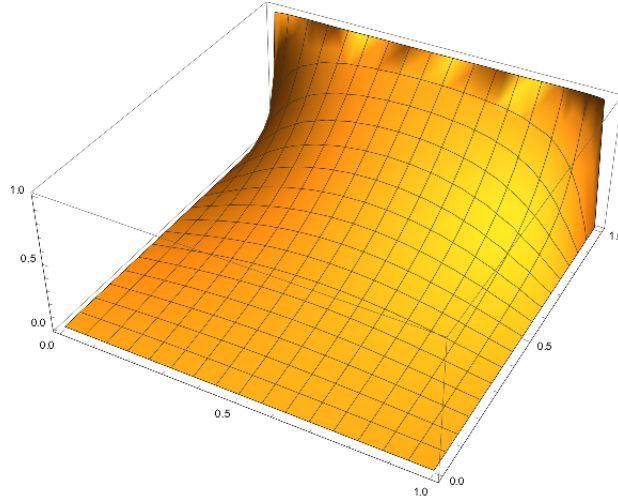


图 1: 本例题中方形区域内的电势分布

下面一个例子说明无界空间中的分离变量。

例 2.2 在三维空间中的 xy 平面上有一个无限大平板，其上的电势给定为 $V(x, y)$ 。求全空间的电势分布和板两侧的电荷分布。

解答 2.2 根据对称性，先分离 z 变量。设 $\phi(x, y, z) = \psi(x, y)Z(z)$ ，有

$$\frac{1}{\psi} \nabla^2 \psi = -\frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = -k^2 \quad (33)$$

右边选择 $-k^2$ 是因为 $Z(z)$ 必然在足够远处按指数形式 $\sim e^{-k|z|}$ 消散而不能持续震荡。因此

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} - k^2 Z = 0 \quad (34)$$

根据 z 的正负选取合适的解

$$Z(z) \sim \begin{cases} e^{-kz} & , z > 0; \\ e^{kz} & , z < 0 \end{cases} \quad (35)$$

进一步分离变量，设 $\psi(x, y) = X(x)Y(y)$ ，有

$$\begin{aligned} \frac{d^2 X}{dx^2} + k_1^2 X &= 0 \\ \frac{d^2 Y}{dy^2} + k_2^2 Y &= 0 \end{aligned} \quad (36)$$

其中 $k_1^2 + k_2^2 = k^2$ 。 xy 平面的无界性给出模式 (k_1, k_2) 的连续谱， $X \sim e^{ik_1 x}$ ， $Y \sim e^{ik_2 y}$ 。解形式上为各个模式的线性组合

$$\phi(x, y, z) = \int \frac{dk_1 dk_2}{(2\pi)^2} c(k_1, k_2) e^{i(k_1 x + k_2 y)} e^{-\sqrt{k_1^2 + k_2^2} |z|} \quad (37)$$

为了确定系数 $c(k_1, k_2)$ ，令 $z = 0$ 有

$$V(x, y) = \int \frac{dk_1 dk_2}{(2\pi)^2} c(k_1, k_2) e^{i(k_1 x + k_2 y)} \quad (38)$$

可以看出 $V(x, y)$ 就是 $c(k_1, k_2)$ 的傅立叶逆变换，于是

$$c(k_1, k_2) = \int dx dy V(x, y) e^{-i(k_1 x + k_2 y)} \quad (39)$$

由电磁学的高斯定理知道表面电荷分布 $\sigma = \epsilon_0 \vec{E} \cdot \vec{n}$ ，于是需要知道电场的 z 分量

$$E_z = -\frac{\partial \phi}{\partial z} = \text{sgn}(z) \int \frac{dk_1 dk_2}{(2\pi)^2} \frac{c(k_1, k_2)}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} e^{i(k_1 x + k_2 y)} e^{-\sqrt{k_1^2 + k_2^2} |z|} \quad (40)$$

符号函数的出现是因为对 z 的绝对值求导。于是面电荷分布

$$\begin{aligned}\sigma_{\pm} &= \epsilon_0 \text{sgn}(z) \int \frac{dk_1 dk_2}{(2\pi)^2} \frac{c(k_1, k_2)}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} e^{i(k_1 x + k_2 y)} e^{-\sqrt{k_1^2 + k_2^2}|z|} \vec{e}_z \cdot (\pm \vec{e}_z) \Big|_{z=0} \\ &= \epsilon_0 \int \frac{dk_1 dk_2}{(2\pi)^2} \frac{c(k_1, k_2)}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} e^{i(k_1 x + k_2 y)}\end{aligned}\quad (41)$$

正负号的出现是因为上下表面的法向量方向不同，这个正负号于 $\text{sgn}(z)$ 抵消。我们发现上下表面带等量同种电荷，这其实从对称性可以很容易看出。

下面去特例对结果进行讨论。当 $V(x, y) = V$ 为一常数时，有

$$c(k_1, k_2) = \int dx dy V e^{-i(k_1 x + k_2 y)} = (2\pi)^2 \delta(k_1) \delta(k_2) \quad (42)$$

于是

$$\begin{aligned}\phi(x, y, z) &= \int \frac{dk_1 dk_2}{(2\pi)^2} (2\pi)^2 V \delta(k_1) \delta(k_2) e^{i(k_1 x + k_2 y)} e^{-\sqrt{k_1^2 + k_2^2}|z|} \\ &= V\end{aligned}\quad (43)$$

即全空间的电势为一个常数，这乍看不符合直觉，但显然 $\phi = V$ 是 $\nabla^2 \phi = 0$ 符合给定边界条件的一个解，而且唯一性定理保证了它就是唯一的解。

再例如 $V(x, y) = \frac{1}{1+x^2}$ 。有

$$c(k_1, k_2) = \int dx dy \frac{1}{1+x^2} e^{-i(k_1 x + k_2 y)} = 2\pi \delta(k_2) \int dx \frac{1}{1+x^2} e^{-ik_1 x} \quad (44)$$

积分可以用复变函数的方法进行，注意到被积函数 $f(z) = \frac{1}{1+z^2} e^{-ik_1 z}$ 下有两个极点 $\text{res } f(i) = \frac{e^{-k_1}}{2i}$ ， $\text{res } f(-i) = -\frac{e^{k_1}}{2i}$ 。当 $k_1 > 0$ ，积分在上半围道进行，结果为 πe^{-k_1} ；当 $k_1 < 0$ ，积分在下半围道进行，这时在实轴上 x 从正无穷走向负无穷，因此需要在 $2\pi i \text{res } f(-i)$ 上再添一个符号才是原积分的结果，为 πe^{k_1} 。两种情况积分可以统一表示成 $\pi e^{-|k_1|}$ 。故

$$c(k_1, k_2) = 2\pi^2 \delta(k_2) e^{-|k_1|} \quad (45)$$

于是全空间电势分布

$$\begin{aligned}\phi(x, y, z) &= \int \frac{dk_1 dk_2}{(2\pi)^2} 2\pi^2 \delta(k_2) e^{-|k_1|} e^{i(k_1 x + k_2 y)} e^{-\sqrt{k_1^2 + k_2^2}|z|} \\ &= \int_{k_1=-\infty}^{\infty} dk_1 \frac{1}{2} e^{-|k_1|} e^{ik_1 x} e^{-|k_1||z|} \\ &= \text{Re} \int_{k_1=0}^{\infty} dk_1 e^{-k_1(1+|z|-ix)} \\ &= \text{Re} \frac{1}{1+z-ix} = \frac{1+|z|}{(1+|z|)^2 + x^2}\end{aligned}\quad (46)$$

电场分布

$$\vec{E} = -\frac{\partial\phi}{\partial x}\vec{e}_x - \frac{\partial\phi}{\partial z}\vec{e}_z = \operatorname{sgn}z \left(\frac{2x(z+1)}{(x^2+(z+1)^2)^2}\vec{e}_x + \left[\frac{2(z+1)^2}{(x^2+(z+1)^2)^2} - \frac{1}{x^2+(z+1)^2} \right] \vec{e}_z \right) \quad (47)$$

表面电荷分布

$$\sigma(x, y) = \epsilon_0 \vec{E} \cdot \vec{e}_z \Big|_{z=0} = \epsilon_0 \frac{2-x^2}{x^4} \quad (48)$$

容易计算的情形是 $V(x, y) = V(\sqrt{x^2 + y^2}) \equiv V(r)$ 的情形。给定 $\vec{k} = (k_1, k_2)$ ，记 θ 为 \vec{k} 和 \vec{r} 之间的夹角。容易想到，现在 $c(k_1, k_2)$ 也只依赖于 \vec{k} 的模长 k 。在极坐标下积分，有

$$\begin{aligned} c(k) &= \int_{r=0}^{\infty} r dr \int_{\theta=0}^{2\pi} V(r) e^{-ikr \cos \theta} d\theta \\ &= 2\pi \int_{r=0}^{\infty} r dr V(r) J_0(kr) \end{aligned} \quad (49)$$

其中引入了贝塞尔函数 J_0 及其积分表达式 $J_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ix \cos \theta} d\theta$ 。

全空间的电场于是为

$$\begin{aligned} \phi(r, z) &= \int_{k=0}^{\infty} \frac{k dk}{(2\pi)^2} \int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi \left(2\pi \int_{r'=0}^{\infty} r' dr' V(r') J_0(kr) \right) e^{ikr \cos \varphi} e^{-k|z|} \\ &= \int_{k=0}^{\infty} k dk e^{-k|z|} J_0(kr) \int_{r'=0}^{\infty} r' dr' V(r') J_0(kr') \end{aligned} \quad (50)$$

此处必须知道 $V(r)$ 的具体表达式，否则无法继续再化简。例如当 $V(r) = e^{-\frac{r^2}{2a^2}}$ ，后一个积分可以这样计算：回忆第一类贝塞尔函数的级数定义

$$J_\nu(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(m+\nu)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\nu} \quad (51)$$

于是有

$$\begin{aligned}
 \int_{x=0}^{\infty} x e^{-\frac{x^2}{2}} J_0(\alpha x) dx &= \int_{x=0}^{\infty} x e^{-\frac{x^2}{2}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m!)^2} \left(\frac{\alpha x}{2}\right)^{2m} dx \\
 &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m!)^2} \left(\frac{\alpha^2}{2}\right)^m \int_{x=0}^{\infty} x e^{-\frac{x^2}{2}} \left(\frac{x^2}{2}\right)^m \\
 &\quad \left(u = \frac{x^2}{2}\right) \\
 &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m!)^2} \left(\frac{\alpha^2}{2}\right)^m \int_{u=0}^{\infty} e^{-u} u^m du \\
 &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m!)^2} \left(\frac{\alpha^2}{2}\right)^m m! \\
 &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \left(\frac{\alpha^2}{2}\right)^m = e^{-\frac{\alpha^2}{2}}
 \end{aligned} \tag{52}$$

再作代换 $x \rightarrow \frac{r}{a}$, $\alpha \rightarrow ak$, 就得到

$$\int_{r=0}^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2a^2}} J_0(kr) r dr = a^2 e^{-\frac{a^2 k^2}{2}} \tag{53}$$

再带入积分就得到

$$\phi(r, z) = a^2 \int_{k=0}^{\infty} k dk e^{-k|z| - \frac{1}{2}a^2 k^2} J_0(kr) \tag{54}$$

这里还是化简不了, 不过我们依然是得到了一个积分表达式。可以用这个表达式进行数值计算观察势的行为。结果如图 2。

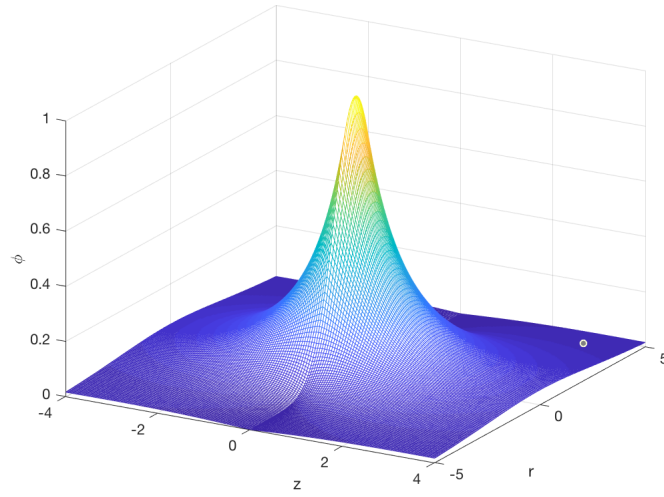


图 2: 本例中电势随 (r, z) 的分布

可以看到，在 r 方向，电势大致呈高斯型，特别是在 $r=0$ 处电势的导数为 0，体现出原有电势分布的对称性；而在 z 方向，电势大致是按 $\sim e^{-z/a}$ 下降的，这点可以从 $z=0$ 处电势的导数非零看出。

也可以将积分表达式展开成双级数, 有

$$\begin{aligned}
\phi(r, z) &= a^2 \int_{k=0}^{\infty} k dk e^{-k|z| - \frac{1}{2}a^2 k^2} J_0(kr) \\
&= a^2 \int_{k=0}^{\infty} k e^{-k|z| - \frac{1}{2}a^2 k^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m!)^2} \left(\frac{kr}{2}\right)^{2m} dk \\
&= a^2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m!)^2} \left(\frac{r^2}{2}\right)^m \int_{k=0}^{\infty} k e^{-k|z| - \frac{1}{2}a^2 k^2} \left(\frac{k^2}{2}\right)^m dk \\
&\quad (u = \frac{k^2}{2}) \\
&= a^2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m!)^2} \left(\frac{r^2}{2}\right)^m \int_{u=0}^{\infty} e^{-\sqrt{2u}|z| - a^2 u} u^m du \\
&= a^2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m!)^2} \left(\frac{r^2}{2}\right)^m \int_{u=0}^{\infty} e^{-a^2 u} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-\sqrt{2u}|z|)^n u^m du \\
&= a^2 \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n}}{(m!)^2} \left(\frac{r^2}{2}\right)^m \frac{1}{n!} (\sqrt{2}|z|)^n \int_{u=0}^{\infty} e^{-a^2 u} u^{\frac{n}{2}+m} du \\
&\quad (v = a^2 u) \\
&= a^2 \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n}}{(m!)^2} \left(\frac{r^2}{2}\right)^m \frac{1}{n!} (\sqrt{2}|z|)^n \left(\frac{1}{a^2}\right)^{\frac{n}{2}+m+1} \int_{v=0}^{\infty} e^{-v} v^{\frac{n}{2}+m} dv \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n}}{(m!)^2} \left(\frac{r^2}{2a^2}\right)^m \frac{1}{n!} \left(\sqrt{2}\frac{|z|}{a}\right)^n \int_{v=0}^{\infty} e^{-v} v^{\frac{n}{2}+m} dv \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n} (m + \frac{n}{2})!}{(m!)^2 n!} \left(\frac{r^2}{2a^2}\right)^m \left(\sqrt{2}\frac{|z|}{a}\right)^n
\end{aligned} \tag{55}$$

非常之壮观。最低一阶近似为

$$\phi \simeq 1 - \frac{r^2}{2a^2} - \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{|z|}{a}, \quad r, |z| \ll a \tag{56}$$

2.2.2 扇形区域分离变量

采用柱坐标在扇形或圆形区域分离变量时, 解的形式依赖于 z 轴依赖是否存在。当电势不依赖于 z 时, 可以假设 $\phi(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$, 进而有

$$\Theta \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) + R \frac{1}{r^2} \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} = 0 \tag{57}$$

进一步整理得到

$$\frac{r}{R} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) = -\frac{1}{\Theta} \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} = \nu^2 \tag{58}$$

角向方程的解写成

$$\Theta(\theta) = c_\nu \cos \nu\theta + s_\nu \sin \nu\theta \quad (59)$$

当 $\nu = 0$ 时, 由于二阶常微分线性方程总有两个线性无关解, $\Theta = c_0$ 不足以构成完备解, 但容易验证, $\Theta = c_0 + s_0\theta$ 也满足 $\nu = 0$ 时的方程。 ν 的取值与边界条件有关, 当形区域为圆形区域时, 需要添加自然周期性边界条件 (PBC) $\Theta(\theta + 2\pi) = \Theta(\theta)$, 这要求 ν 只能取整数, 且 $s_0 = 0$ 。

径向方程整理为

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + r \frac{dR}{dr} - \nu^2 R = 0 \quad (60)$$

这个方程可以简单求解如下: 假设 $R \sim r^p$, 有

$$p(p-1) + p - \nu^2 = 0 \quad (61)$$

当 $\nu \neq 0$ 时, 解为 $R \sim r^\nu + r^{-\nu}$; 当 $\nu = 0$, 由于二阶常微分线性方程总有两个线性无关解, $R \sim \text{const.}$ 不足以构成完备解, 但容易验证, $R \sim \ln r$ 也满足 $\nu = 0$ 时的方程。

于是, 无 z 依赖时, 扇形区域分离变量的形式解写成

$$\phi(r, \theta) = (a_0 + b_0 \ln r)(c_0 + s_0\theta) + \sum_{\nu} \left(a_\nu r^\nu + b_\nu \frac{1}{r^\nu} \right) (c_\nu \cos \nu\theta + s_\nu \sin \nu\theta) \quad (62)$$

当考虑的空间区域包括原点时, 电势在原点不发散要求 b 项全部为 0; 剔除原点时, 所有项都可能对最终表达式做贡献。

例 2.3 空间中两个半无限大金属板张成一个二面角 β , 下板接地, 上板固定电势为 V , 两板间的接触线绝缘。求二面角内的电势分布。

解答 2.3 显然, 在通解中取出

$$\phi(r, \theta) = \frac{\theta}{\beta} V \quad (63)$$

就满足边界条件和拉普拉斯方程。

例 2.4 空间内有一半径为 a 的无限长圆柱面, 其轴与 z 轴重合。圆柱面上的电势 $V(\theta)$ 给定且只依赖于极角。求全空间的电势分布。

解答 2.4 按之前的讨论, 在 $r < a$ 范围内, 解按

$$\phi(r, \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{r}{a} \right)^m (c_m \cos m\theta + s_m \sin m\theta) \quad (64)$$

展开。令 $r = a$ 得到

$$V(\theta) = \sum_{m=0}^{\infty} (c_m \cos m\theta + s_m \sin m\theta) \quad (65)$$

于是

$$\begin{aligned} c_m &= \frac{1}{\pi} \int_{\theta=0}^{2\pi} V(\theta) \cos m\theta d\theta \\ s_m &= \frac{1}{\pi} \int_{\theta=0}^{2\pi} V(\theta) \sin m\theta d\theta \end{aligned} \quad (66)$$

圆柱面以外的解只需要将 $\frac{r}{a}$ 替换为 $\frac{a}{r}$ 。

例如，当 $V(\theta) = V_0 \sin 2\theta$ 时，展开系数只有 $s_2 = V_0$ 非零，故解为

$$\phi(r, \theta) = V_0 \min\left\{\left(\frac{r}{a}\right)^2, \left(\frac{a}{r}\right)^2\right\} \sin 2\theta \quad (67)$$

对应的图像如 3。

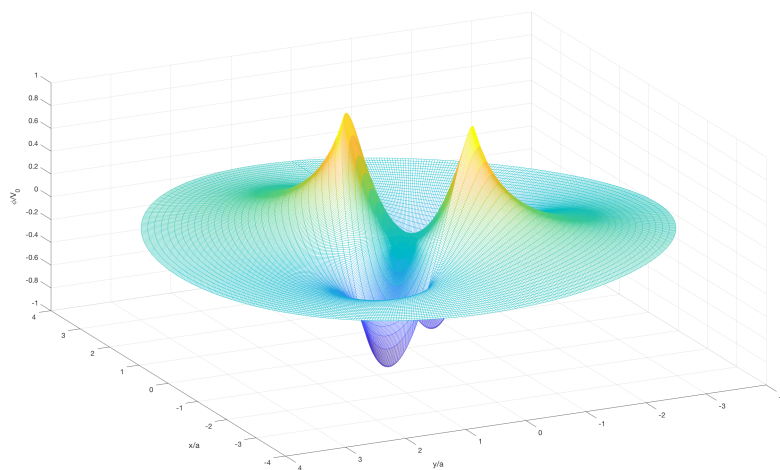


图 3: $V(\theta) = V_0 \sin 2\theta$ 时全空间的电势分布

$$\begin{aligned} \text{再例如 } V(\theta) &= \begin{cases} V_0 & , 0 < \theta \leq \pi \\ 0 & , \pi < \theta \leq 2\pi \end{cases} \text{ 可以很容易算出} \\ c_0 &= \frac{V_0}{2} \\ c_n &= 0, \quad n \geq 1 \\ s_n &= V_0 \frac{1 - (-1)^n}{n\pi} \end{aligned} \quad (68)$$

于是

$$\phi(r, \theta) = \frac{V_0}{2} + V_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n\pi} \min\left\{\left(\frac{r}{a}\right)^n, \left(\frac{a}{r}\right)^n\right\} \sin n\theta \quad (69)$$

下面一个例子说明扇形区域下的解法。

例 2.5 空间中一扇形区域边界为两个半无限大接地金属板，其张角为 β 。求扇形区域内电势分布和金属板上电荷分布的通解，并讨论 $\beta \rightarrow 0$ ， $\beta = \pi$ 和 $\beta \rightarrow 2\pi$ 的行为。

解答 2.5 由于原点包括在内，形式上的分离变量解为

$$\phi(r, \theta) = a_0 + \sum_{\nu} (a_{\nu} \cos \nu\theta + b_{\nu} \sin \nu\theta) r^{\nu} \quad (70)$$

边界条件为

$$\begin{aligned} \phi(r, \theta = 0) &= a_0 \\ \phi(r, \theta = \beta) &= a_0 \end{aligned} \quad (71)$$

可知 $a_{\nu} = 0$ ， $\nu > 0$ ， $\nu = n\pi\theta/\beta$ 。于是通解为

$$\phi(r, \theta) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n r^{\frac{n\pi}{\beta}} \sin \frac{n\pi\theta}{\beta} \quad (72)$$

取一阶近似得到

$$\phi(r, \theta) \simeq a_0 + a_1 r^{\frac{\pi}{\beta}} \sin \frac{\pi\theta}{\beta} \quad (73)$$

于是电场为

$$\begin{aligned} \vec{E} &\simeq -\frac{\partial\phi}{\partial r} \vec{e}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial\phi}{\partial\theta} \vec{e}_{\theta} \\ &= -\frac{\pi}{\beta} a_1 r^{\frac{\pi}{\beta}-1} \sin \frac{\pi\theta}{\beta} \vec{e}_r - \frac{\pi}{\beta} a_1 r^{\frac{\pi}{\beta}-1} \cos \frac{\pi\theta}{\beta} \vec{e}_{\theta} \end{aligned} \quad (74)$$

电场大小 $E \sim r^{\frac{\pi}{\beta}-1}$ ，板上的面电荷密度为

$$\sigma = \epsilon_0 \vec{E} \cdot \vec{e}_{\theta} = -\frac{\pi}{\beta} a_1 r^{\frac{\pi}{\beta}-1} \sim r^{\frac{\pi}{\beta}-1} \quad (75)$$

当 $\beta = \epsilon \rightarrow 0$ ，图像上对应一个带狭缝的无限长金属棒。狭缝上的电荷分布 $\sigma \sim r^{1/\epsilon}$ ，即在原点处，狭缝边缘几乎没有电荷，跟容易想出这是由于该处电荷间的强烈排斥导致的。

当 $\theta = \pi$, 图像上对应一个无限大金属板。此时的电场分布为

$$\vec{E} \simeq -a_1 \sin \theta \vec{e}_r - a_1 \cos \theta \vec{e}_\theta = -a_1 \vec{e}_y \quad (76)$$

对应一个匀强电场。从电磁学知识我们已经知道, 一个无限大带电金属板对应的电场就是一个匀强电场, 于是系数 $a_1 = -E$ 。再看面电荷分布, 有

$$\sigma = -\epsilon_0 a_1 = \epsilon_0 E \quad (77)$$

与熟知的结果 $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$ 一致。

当 $\theta \rightarrow 2\pi$, 图像上对应一个二维劈尖, 面电荷分布和电场大小 $\sigma \sim E \sim \frac{1}{\sqrt{r}}$, 即在尖端处, 电场和面电荷都非常大, 之后随远离尖端而衰减, 符合尖端放电的物理事实。

下面一个例子包括原点。

例 2.6 在 xz 平面上有一个无限大金属板, 在原点处有一个无限长半圆柱状的突起, 圆柱的半径为 a 。给出区域内空间电势分布的通解, 并讨论一阶近似下的解。

解答 2.6 除去原点下, 极坐标下的通解可以写成

$$\phi(r, \theta) = a_0 + \sum_{\nu} \left(a_{\nu} r^{\nu} + b_{\nu} \frac{1}{r^{\nu}} \right) (c_{\nu} \cos \nu \theta + s_{\nu} \sin \nu \theta) \quad (78)$$

其中正比于 θ 的第一项由于周期性差被舍去。边界条件为

$$\begin{aligned} \phi(r, \theta = 0) &= a_0 \\ \phi(r = a, \theta) &= a_0 \\ \phi(r, \theta = \pi) &= a_0 \end{aligned} \quad (79)$$

第二个边界条件给出

$$\sum_{\nu} \left(a_{\nu} a^{\nu} + b_{\nu} \frac{1}{a^{\nu}} \right) (c_{\nu} \cos \nu \theta + s_{\nu} \sin \nu \theta) = 0 \quad (80)$$

只能有

$$b_{\nu} = -a_{\nu} a^{2\nu} \quad (81)$$

才能使得上式对所有 θ 成立。第一个边界条件给出

$$\sum_{\nu} \left(a_{\nu} r^{\nu} + b_{\nu} \frac{1}{r^{\nu}} \right) c_{\nu} = 0 \quad (82)$$

只能取 $c_\nu = 0$ 。第三个边界条件给出

$$\sum_{\nu} \left(a_{\nu} r^{\nu} + b_{\nu} \frac{1}{r^{\nu}} \right) s_{\nu} \sin \nu \pi = 0 \quad (83)$$

只能取 $\nu = n$ 。于是通解为

$$\phi(r, \theta) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(r^n - \frac{a^{2n}}{r^n} \right) \sin n\theta \quad (84)$$

当 $a = 0$ 时恢复到上一例的解。一阶近似

$$\phi(r, \theta) \simeq a_0 + a_1 \left(r - \frac{a^2}{r} \right) \sin \theta \quad (85)$$

对应图像如图 4，可以看到，在远处，电势分布几乎上一个匀强电场。

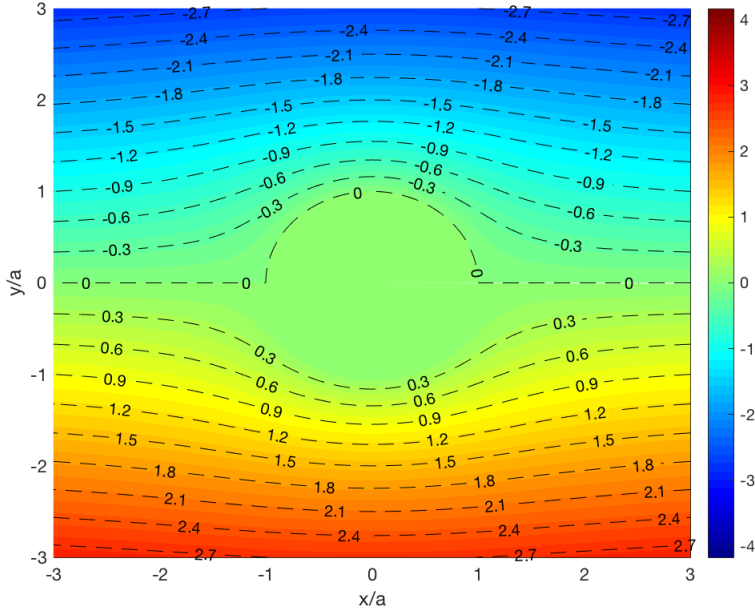


图 4: 该例中的电势分布，取 $a_1 = -1$

电场

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\frac{\partial \phi}{\partial r} \vec{e}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \vec{e}_\theta \\ &= -a_1 \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \sin \theta \vec{e}_r - a_1 \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \cos \theta \vec{e}_\theta \\ &= -a_1 \vec{e}_y - a_1 \frac{a^2}{r^2} (\sin \theta \vec{e}_r - \cos \theta \vec{e}_\theta) \end{aligned} \quad (86)$$

在远处, 第二项消失, 对应无限大平板的电场 $E\vec{e}_y$, 于是有 $a_1 = -E$ 。第二项 $\sim a^2$, 描述了柱状突起对外电场的响应。

面电荷分布为

$$\begin{aligned}\sigma(r, \theta = 0) = \sigma(r, \theta = \pi) &= \epsilon_0 \vec{E} \cdot \vec{e}_\theta|_{\theta=0} = \epsilon_0 E \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) \\ \sigma(r = a, \theta) &= \epsilon_0 \vec{E} \cdot \vec{e}_r|_{r=a} = \epsilon_0 E \sin \theta\end{aligned}\quad (87)$$

2.2.3 球形区域分离变量

首先讨论简单的情况: 假设空间具有绕 z 轴的选择不变性而使得电势不依赖于经度角 φ , 拉普拉斯方程的分离变量就相对简单

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} = 0 \quad (88)$$

分离变量的结果应该耳熟能详了

$$\phi(r, \theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(a_\ell r^\ell + b_\ell \frac{1}{r^{\ell+1}} \right) P_\ell(\cos \theta) \quad (89)$$

其中 P_ℓ 为勒让德多项式

$$P_\ell(x) = \frac{1}{2^\ell \ell!} \frac{d^\ell}{dx^\ell} (x^2 - 1)^\ell \quad (90)$$

勒让德多项式在区间 $(-1, 1)$ 上按

$$\int_{-1}^1 x P_n(x) P_m(x) dx = \frac{2}{2n+1} \delta_{mn} \quad (91)$$

正交归一化。此外, 勒让德多项式还有著名的母函数公式

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} P_\ell(x) r^\ell = \frac{1}{\sqrt{r^2 + 1 - 2rx}}, r < 1 \quad (92)$$

例 2.7 空间中存在一个半径为 a 的球壳, 其上的电势给定, 为 $V(\theta)$, 其中 θ 为纬度角。使讨论全空间的电势分布。

解答 2.7 当 $r < a$ 时, 分离变量通解为

$$\phi(r, \theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} a_\ell \left(\frac{r}{a} \right)^\ell P_\ell(\cos \theta) \quad (93)$$

有

$$V(\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} a_{\ell} P_{\ell}(\cos \theta) \quad (94)$$

两边乘以 $P_m(\cos \theta) \sin \theta d\theta$ 积分, 利用正交归一性有

$$a_{\ell} = \frac{2\ell+1}{2} \int_{\theta=0}^{\pi} V(\theta) P_{\ell}(\cos \theta) \sin \theta d\theta \quad (95)$$

$r > a$ 的情形只需要将 $(\frac{r}{a})^{\ell}$ 换成 $(\frac{a}{r})^{\ell+1}$ 。

讨论一阶近似的结果是有益的。这时有

$$\phi(r, \theta) = \begin{cases} a_0 + a_1 \frac{r}{a} \cos \theta & , r < a \\ a_0 + a_1 \frac{a^2}{r^2} \cos \theta & , r > a \end{cases} \quad (96)$$

球外的电场为

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\frac{\partial \phi}{\partial r} \vec{e}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \vec{e}_{\theta} \\ &= \frac{2a_1 a^2}{r^3} \cos \theta \vec{e}_r + \frac{a_1 a^2}{r^3} \sin \theta \vec{e}_{\theta} \end{aligned} \quad (97)$$

在电磁学中我们已经学过 z 轴上的偶极子 $\vec{p} = p \vec{e}_z$ 在远处产生的电场为 $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{2p \cos \theta}{r^3} \vec{e}_r + \frac{p \sin \theta}{r^3} \vec{e}_{\theta} \right)$ 。从而我们可以看出, 展开系数 a_1 对应球壳的偶极矩

$$p = 4\pi\epsilon_0 a_1 a^2 \quad (98)$$

这个关系也可以先得到球面的面电荷密度再积分得到。球内的极化强度, 即球体内的平均偶极矩为

$$P = \frac{p}{\frac{4\pi}{3} a^3} = 3\epsilon_0 a_1 \quad (99)$$

而球内的电场为

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \left(a_0 + a_1 \frac{r}{a} \cos \theta \right) = -\vec{\nabla} \left(a_0 + a_1 \frac{z}{a} \right) = -\frac{a_1}{a} \vec{e}_z \quad (100)$$

于是我们得到一阶近似的情况下, 球内的电场与极化强度的关系

$$\vec{E} = -\frac{\vec{P}}{3\epsilon_0} \quad (101)$$

例 2.8 将一个半径为 a 的接地金属球放入匀强电场 \vec{E} 中, 求空间的电势分布, 并求金属球的等效偶极矩。

解答 2.8 取球心为原点，电场方向沿 z 轴正向。在球内，电场和电势恒为零；在金属球表面，电场的法向分量为零；在远处，电势 $\phi \rightarrow -Er \cos \theta$ 。边界条件为

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial r} \Big|_{r=a} = 0 \\ \phi \Big|_{r=a} = 0 \\ \phi(r \gg a, \theta) \rightarrow -Er \cos \theta \end{cases} \quad (102)$$

设 $u = \phi + Er \cos \theta$ ，代入得 u 的边界条件为

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=a} = E \cos \theta \\ u \Big|_{r=a} = Ea \cos \theta \\ u(r \gg a, \theta) \rightarrow 0 \end{cases} \quad (103)$$

u 必然有分离变量形式解

$$u(r, \theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} a_{\ell} \left(\frac{a}{r}\right)^{\ell+1} P_{\ell}(\cos \theta) \quad (104)$$

代入第二个边界条件可知

$$a_0 + a_1 \cos \theta + \sum_{\ell \geq 2}^{\infty} a_{\ell} P_{\ell}(\cos \theta) = Ea \cos \theta \quad (105)$$

只能有

$$a_1 = Ea \quad (106)$$

其余 a_{ℓ} 为零。于是 $u(r, \theta) = E \frac{a^3}{r^2} \cos \theta$ ，球外电势分布为

$$\phi(r, \theta) = -E \left(r - \frac{a^3}{r^2} \right) \cos \theta \quad (107)$$

由偶极子电势公式 $\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cos \theta}{r^2}$ ，等效偶极子为

$$\vec{p} = -4\pi\epsilon_0 a^3 \vec{E} \quad (108)$$

体积平均为

$$\vec{P} = -3\epsilon_0 \vec{E} \quad (109)$$

我们发现，极化偶极子与外电场成正比，且反向。这是我们讨论物质极化的一个重要模型。

当空间不再沿 z 轴旋转对称时, 电势的分离变量解只能按球谐函数展开成如下形式

$$\phi(r, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left(a_{lm} r^l + b_{lm} \frac{1}{r^{l+1}} \right) Y_{lm}(\theta, \varphi) \quad (110)$$

其中球谐函数的定义是

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos \theta) e^{im\varphi} \quad (111)$$

而连带勒让德函数又定义为

$$P_l^m(x) = (-1)^m (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x) \quad (112)$$

球谐函数的正交归一化为

$$\int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} Y_{lm}(\theta, \varphi) Y_{l'm'}(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi = \delta_{ll'} \delta_{mm'} \quad (113)$$

即在单位球面上对面积的积分正交归一。

例 2.9 如上例, 但此时球壳上的电势 $V = V(\theta, \varphi)$, 并取前 2 阶近似讨论解的行为。

解答 2.9 当 $r < a$ 时, 形式上写出解为

$$\phi(r, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_{lm} \left(\frac{r}{a} \right)^l Y_{lm}(\theta, \varphi) \quad (114)$$

有

$$V(\theta, \varphi) = \phi(r = a, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_{lm} Y_{lm}(\theta, \varphi) \quad (115)$$

两边乘以 $\sin \theta d\theta d\varphi$ 对整个球面积分, 利用正交归一性得到

$$a_{lm} = \int \sin \theta d\theta d\varphi V(\theta, \varphi) Y_{lm}(\theta, \varphi) \quad (116)$$

球面外的解只需要将 $\left(\frac{r}{a}\right)^l$ 替换成 $\left(\frac{a}{r}\right)^{l+1}$ 。

2.3 电像法与格林函数

电像法可以用来求解点电荷与对称性边界的问题。

格林函数的起点为积分公式

$$\begin{aligned}\int_V d^3\vec{x}(u\nabla^2v - v\nabla^2u) &= \int_V d^3\vec{x}\vec{\nabla} \cdot (u\vec{\nabla}v - v\vec{\nabla}u) \\ &= \int_{\partial V} dS\vec{n} \cdot (u\vec{\nabla}v - v\vec{\nabla}u) = \int_{\partial V} dS(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n})\end{aligned}\quad (117)$$

接下来考虑边界问题

$$\nabla^2u = -\frac{\rho(\vec{x})}{\epsilon_0} \quad (118)$$

$$\begin{cases} u|_S = V(\vec{x}); \\ \text{或} \\ \frac{\partial u}{\partial n}|_S = \frac{\sigma(\vec{x})}{\epsilon_0} \end{cases} \quad (119)$$

我们考虑同样边界的点源问题

$$\nabla^2G = -\delta(\vec{x} - \vec{x}') \quad (120)$$

$$\begin{cases} G|_S = 0; \\ \text{或} \\ \frac{\partial G}{\partial n}|_S = 0 \end{cases} \quad (121)$$

这一解记作 $G(\vec{x}; \vec{x}')$, 显然有 $G(\vec{x}; \vec{x}') = G(\vec{x}'; \vec{x})$ 。假如 G 已经由其他方法求得, 就可以代入一开始的积分公式。左边项

$$\begin{aligned}\int_V d^3\vec{x}(u\nabla^2G - G\nabla^2u) &= \int_V d^3\vec{x}(-u\delta(\vec{x} - \vec{x}') + G\frac{\rho(\vec{x})}{\epsilon_0}) \\ &= -u(\vec{x}') + \int_V d^3\vec{x}G(\vec{x}; \vec{x}')\frac{\rho(\vec{x})}{\epsilon_0}\end{aligned}\quad (122)$$

对第一类边界条件, 右边项

$$\int_{\partial V} dS(u\frac{\partial G}{\partial n} - G\frac{\partial u}{\partial n}) = \int_{\partial V} dSV(\vec{x})\frac{\partial G}{\partial n} \quad (123)$$

于是

$$u(\vec{x}') = \int_V d^3\vec{x}G(\vec{x}; \vec{x}')\frac{\rho(\vec{x})}{\epsilon_0} - \int_{\partial V} dS\frac{\partial G}{\partial n}V(\vec{x}) \quad (124)$$

习惯上用 \vec{x} 表示场点； \vec{x}' 表示源点，交换得到

$$u(\vec{x}) = \int_V d^3\vec{x}' G(\vec{x}; \vec{x}') \frac{\rho(\vec{x}')}{\epsilon_0} - \int_{\partial V} dS' \frac{\partial G(\vec{x}; \vec{x}')}{\partial n'} V(\vec{x}') \quad (125)$$

对第二类边界条件，右边项

$$\int_{\partial V} dS (u \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial u}{\partial n}) = - \int_{\partial V} dS \frac{\sigma(\vec{x})}{\epsilon_0} G(\vec{x}; \vec{x}') \quad (126)$$

于是

$$u(\vec{x}') = \int_V d^3\vec{x} G(\vec{x}; \vec{x}') \frac{\rho(\vec{x})}{\epsilon_0} + \int_{\partial V} dS \frac{\sigma(\vec{x})}{\epsilon_0} G(\vec{x}; \vec{x}') \quad (127)$$

或

$$u(\vec{x}) = \int_V d^3\vec{x}' G(\vec{x}; \vec{x}') \frac{\rho(\vec{x}')}{\epsilon_0} - \int_{\partial V} dS' \frac{\sigma(\vec{x}')}{\epsilon_0} G(\vec{x}; \vec{x}') \quad (128)$$

特别地，当空间中无自由电荷，而给定空间中某一表面上的电势分布 $V(\vec{x})$ 时，可以得到

$$u(\vec{x}) = - \int_S dS' \frac{\partial G(\vec{x}; \vec{x}')}{\partial n'} V(\vec{x}') \quad (129)$$

当 $V(\vec{x}) = \delta(\vec{x} - \vec{x}')$ 时，得到的空间电势分布称为电势格林函数 G_V ，有

$$G_V(\vec{x}; \vec{x}') = - \frac{\partial G(\vec{x}; \vec{x}')}{\partial n'} \quad (130)$$

2.4 多极展开

多极展开研究电荷远处的电势。我们从自由空间静场解

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\vec{x}' \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \quad (131)$$

出发，假定电荷分布在一个原点附近 $\sim a$ 的范围内，我们考虑 $|\vec{x}| \gg a$ 的电势。记

$$r = |\vec{x} - \vec{x}'| = \sqrt{(x_k - x'_k)(x_k - x'_k)} \quad (132)$$

我们计算 $\frac{1}{r}$ 按 x'_i 的展开系数。首先有

$$\frac{\partial r}{\partial x'_i} = \frac{-2\delta_{ik}(x_k - x'_k)}{2\sqrt{(x_k - x'_k)(x_k - x'_k)}} = \frac{x'_i - x_i}{r} \quad (133)$$

于是

$$\frac{\partial}{\partial x'_i} \left(\frac{1}{r} \right) = - \frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial x'_i} = \frac{x_i - x'_i}{r^3} \sim O\left(\frac{1}{r^2}\right) \quad (134)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial x'_i \partial x'_j} \left(\frac{1}{r} \right) &= \frac{\partial}{\partial x'_j} \frac{\partial}{\partial x'_i} \left(\frac{1}{r} \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x'_j} \left(\frac{x_i - x'_i}{r^3} \right) \\
&= \frac{-\delta_{ij}}{r^3} + (x_i - x'_i) \left(-\frac{3}{r^4} \right) \frac{\partial r}{\partial x'_j} \\
&= \frac{-\delta_{ij}}{r^3} + (x_i - x'_i) \left(-\frac{3}{r^4} \right) \frac{x'_j - x_j}{r} \\
&= \frac{-\delta_{ij}}{r^3} + \frac{3(x_i - x'_i)(x_j - x'_j)}{r^5} \sim O\left(\frac{1}{r^3}\right)
\end{aligned} \tag{135}$$

于是 $\frac{1}{r}$ 展开到 $\sim \frac{1}{r^3}$ 项就是

$$\begin{aligned}
\frac{1}{r} &\simeq \frac{1}{r} \Big|_{\vec{x}'=0} + \frac{\partial r}{\partial x'_i} \Big|_{\vec{x}'=0} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x'_i \partial x'_j} \left(\frac{1}{r} \right) \Big|_{\vec{x}'=0} x'_i x'_j \\
&= \frac{1}{r} + \frac{x_i x'_i}{r^3} + \frac{1}{2} \frac{3x_i x_j - \delta_{ij} r^2}{r^5} x'_i x'_j
\end{aligned} \tag{136}$$

其中重新引入了记号 $r = \sqrt{|\vec{x}'|}$ 。在远处的电势

$$\begin{aligned}
\phi(\vec{x}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\vec{x}' \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \\
&\simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\vec{x}' \left(\frac{1}{r} + \frac{x_i x'_i}{r^3} + \frac{1}{2} \frac{3x_i x_j - \delta_{ij} r^2}{r^5} x'_i x'_j \right) \rho(\vec{x}') \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\vec{x}' \left(\frac{1}{r} + \frac{x_i x'_i}{r^3} + \frac{1}{2} \frac{3x'_i x'_j - \delta_{ij} r'^2}{r^5} x_i x_j \right) \rho(\vec{x}')
\end{aligned} \tag{137}$$

最后一个等号将 δ_{ij} 重新分配到了 $\sim \vec{x}'$ 项上，很容易验证它们之间是相等的。定义

$$Q = \int d^3\vec{x}' \rho(\vec{x}') \tag{138}$$

$$p_i = \int d^3\vec{x}' \rho(\vec{x}') x'_i \tag{139}$$

$$D_{ij} = \int d^3\vec{x}' \rho(\vec{x}') (3x'_i x'_j - \delta_{ij} r'^2) \tag{140}$$

分别为零极、偶极和四极矩，就有

$$\phi(\vec{x}') \simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q}{r} + \frac{p_i x_i}{r^2} + \frac{1}{2} \frac{D_{ij} x_i x_j}{r^3} \right) \tag{141}$$

四级矩 D_{ij} 显然是一个对称无迹张量，一个对称无迹张量的独立分量数为 5 ($SO(3)$ 群的分解 $9 = 5 \oplus 3 \oplus 1$)。各独立分量为

$$D_{xx} = \int (2x^2 - y^2 - z^2) \rho(\vec{x}) d^3\vec{x} \tag{142}$$

$$D_{yy} = \int (2y^2 - x^2 - z^2) \rho(\vec{x}) d^3\vec{x} \quad (143)$$

$$D_{xy} = \int 3xy \rho(\vec{x}) d^3\vec{x} \quad (144)$$

$$D_{yz} = \int 3yz \rho(\vec{x}) d^3\vec{x} \quad (145)$$

$$D_{zx} = \int 3zx \rho(\vec{x}) d^3\vec{x} \quad (146)$$

其他分量 $D_{zz} = -D_{xx} - D_{yy}$; $D_{yx} = D_{xy}$, $D_{zy} = D_{yz}$, $D_{xz} = D_{zx}$ 。

例 2.10 估算一个均匀带电的半径为 a 的圆盘在远处产生的电势和这个圆盘的电容。

解答 2.10 设圆盘上的面电荷密度为 σ , 空间电荷分布 $\rho(\vec{x}) = \sigma\delta(z)$ 。零极矩就是总电荷 $Q = \sigma\pi a^2$, 偶极矩显然可以根据对称性判断为 0。四级矩

$$D_{xx} = \int (2x^2 - y^2) \sigma dx dy = \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta \int_{r=0}^a (2r^2 \cos^2 \theta - r^2 \sin^2 \theta) r dr = \frac{\sigma\pi a^4}{4} \quad (147)$$

$$D_{yy} = \int (2y^2 - x^2) \sigma dx dy = D_{xx} = \frac{\sigma\pi a^4}{4} \quad (148)$$

$$D_{zz} = -D_{xx} - D_{yy} = -\frac{\sigma\pi a^4}{2} \quad (149)$$

非对角项 D_{xy} 根据对称性判断为 0; D_{zy} 和 D_{zx} 由于 $\rho(\vec{x}) \propto \delta(z)$ 的限制只能为 0。于是远场电势

$$\phi(\vec{x}) \simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q}{r} + \frac{\sigma\pi a^4}{8r^5} (x^2 + y^2 - 2z^2) \right) \quad (150)$$

或者用球坐标表示为

$$\phi(r, \theta) \simeq \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} + \frac{a^2}{8r^3} (\sin^2 \theta - 2\cos^2 \theta) \right) \quad (151)$$

电容可以这样估计：圆盘边缘的电势为

$$\phi(r = a, \theta = \frac{\pi}{2}) \sim \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{9}{8a} \quad (152)$$

电容为

$$C = \frac{Q}{\phi(r = a, \theta = \frac{\pi}{2})} \sim \frac{32a\pi\epsilon_0}{9} \quad (153)$$

可以想象，因为多极展开只适用于 $r \gg a$ 的情况，因此上式对电容的估计是十分粗糙的。

虽然磁场和电场很大程度上是对偶的，上面的讨论一般都可以直接套用到磁场上。但需要注意的是，对于磁场，由于不存在磁荷，磁矢势的多极展开是从偶极项开始的，磁矩 \vec{m} 产生的磁矢势为

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{x}}{x^3} \quad (154)$$

3 介质

3.1 电介质的基本图像

在外场下，一个实际的物质会发生极化，产生出偶极矩。

$$\vec{P} = \vec{P}(\vec{E}, \vec{B}) \quad (155)$$

偶极子势

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} \quad (156)$$

给定电荷分布 $\rho(\vec{x})$ 和偶极分布 $\vec{P}(\vec{x})$ ，空间中的电势

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \left(\frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} + \frac{\vec{P}(\vec{x}') \cdot (\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} \right) d^3\vec{x}' \quad (157)$$

注意到

$$\frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} = \vec{\nabla}' \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right) \quad (158)$$

于是

$$\begin{aligned} \int d^3\vec{x}' P(\vec{x}') \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} &= \int d^3\vec{x}' P(\vec{x}') \cdot \vec{\nabla}' \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right) \\ &= \int d^3\vec{x}' \left[\vec{\nabla}' \cdot \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} P(\vec{x}') \right) - \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \vec{\nabla}' P(\vec{x}') \right] \\ &= \oint d\vec{S} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} P(\vec{x}') - \int d^3\vec{x}' \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \vec{\nabla}' P(\vec{x}') \end{aligned} \quad (159)$$

也就是说，极化矢量 \vec{P} 的作用等价于一个分布在介质的面电荷密度 $\sigma_b = \vec{P} \cdot \vec{n}$ 以及分布在介质当中的体电荷密度 $\rho_b = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$ 。这从图像上来讲是清楚的：比如一块均匀极化的长方体介质，其内部的正负电荷略微分离，把介质分成一层一层的离散小片，某一层向下一层分量出的正电荷总能和下一层剩余的负电荷抵消，从而在介质内部无净极化电荷；唯独表明层向外贡献的正电荷不能再被抵消，存在表面电荷。

在外场不强的情况下，一般假设极化是均匀且线性的

$$\vec{P} = (\epsilon - \epsilon_0) \vec{E} \quad (160)$$

这时，所有静电场规律只需要将原来的 ϵ_0 换成 ϵ 。

3.2 磁介质的基本图像

磁介质的基本图像和电介质稍有差别。磁矩 \vec{m} 产生的矢势近似为

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{x}}{x^3} \quad (161)$$

于是对于一个磁矩分布 \vec{M} ，有

$$\vec{A}(\vec{x}) = \int d^3\vec{x}' \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{M}(\vec{x}') \times (\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} \quad (162)$$

我们按同样的套路整理右边项：为了清楚起见，把叉乘写成指标的形式

$$A_i(\vec{x}) = \epsilon_{ijk} \int d^3\vec{x}' \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{M_j(\vec{x}')(\vec{x} - \vec{x}')_k}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} \quad (163)$$

同样利用

$$\frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} = \vec{\nabla}' \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right) \quad (164)$$

有

$$\begin{aligned} A_i(\vec{x}) &= \epsilon_{ijk} \int d^3\vec{x}' \frac{\mu_0}{4\pi} M_j(\vec{x}') \partial'_k \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right) \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \epsilon_{ijk} \int d^3\vec{x}' \partial'_k \left(M_j(\vec{x}') \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right) - \frac{\mu_0}{4\pi} \epsilon_{ijk} \int d^3\vec{x}' (\partial'_k M_j(\vec{x}')) \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \epsilon_{ijk} \oint dS'_k M_j(\vec{x}') \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} + \frac{\mu_0}{4\pi} \epsilon_{ijk} \int d^3\vec{x}' (\partial'_j M_k(\vec{x}')) \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \oint dS' \epsilon_{ijk} M_j n_k(\vec{x}') \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} + \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3\vec{x}' (\epsilon_{ijk} \partial'_j M_k(\vec{x}')) \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \end{aligned} \quad (165)$$

再把指标语言换成矢量语言就清楚了

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint dS' (\vec{M} \times \vec{n}) \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} + \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3\vec{x}' (\vec{\nabla}' \times \vec{M}) \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \quad (166)$$

立即看出，等效的面电流密度和体电流密度分别为

$$\vec{K}_{\vec{M}} = \vec{M} \times \vec{n} \quad (167)$$

$$\vec{j}_{\vec{M}} = \vec{\nabla} \times \vec{M} \quad (168)$$

面电流密度这项的图像特别清楚：由于 \vec{M} 可以看出介质中许多小电流圈的分别，在均匀极化的情况下，介质内部的这些电流圈在相切处的电流方向相反，全部抵消；仅仅在表面产生如图 5 的面电流。

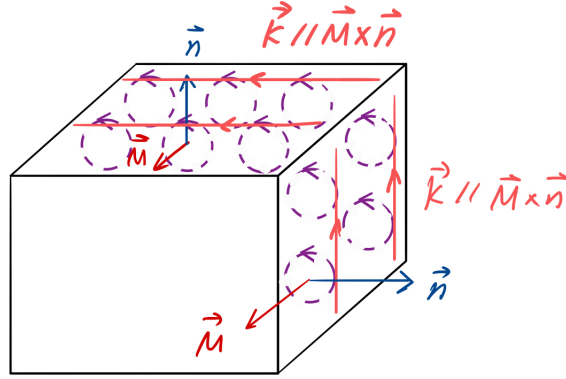


图 5: 磁极化的表面效应

在外场不强的情况下，一般假设磁化是均匀且线性的

$$\vec{M} = \left(\frac{1}{\mu_0} - \frac{1}{\mu} \right) \vec{B} \quad (169)$$

这时，所有的静磁场规律只要将原来的 μ_0 换成 μ 。

3.3 欧姆定律

上面都考虑的是理想的介质：在外场下，电子会稍微偏离原子核，但仍然被束缚在原所在位置（原子核）附近（对应量子力学的 Stark 效应）。而对于一些不太理想的介质，电子可能被剥离原子而在介质中自由运动。在外场不强的情况下，我们可以假设这部分电子产生的电流正比于外场

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} \quad (170)$$

3.4 介质中的边值问题

我们先考虑介质中的麦克斯韦方程。出发点依然是真空中的麦克斯韦方程。注意到，麦克斯韦方程右边的源项是空间中所有的电荷（电流），也即是自由电荷（人为添加的电荷）和束缚电荷（介质对外场的相应）之和。

$$\begin{aligned}\rho_t &= \rho_f + \rho_b = \rho_f - \vec{\nabla} \cdot \vec{P} \\ \vec{j}_t &= \vec{j}_f + \vec{j}_b = \vec{j}_f + \vec{\nabla} \times \vec{M}\end{aligned}\quad (171)$$

此时麦克斯韦方程组中的含源方程变为

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{1}{\epsilon_0}(\rho_f - \vec{\nabla} \cdot \vec{P}) \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu_0(\vec{j}_f + \vec{\nabla} \times \vec{M})\end{aligned}\quad (172)$$

移项就得到

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot (\vec{P} + \epsilon_0 \vec{E}) &= \rho_f \\ \vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M} \right) &= \vec{j}_f\end{aligned}\quad (173)$$

定义电位移矢量 \vec{D} 和磁场强度 \vec{H}

$$\begin{aligned}\vec{D} &= \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \\ \vec{H} &= \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M}\end{aligned}\quad (174)$$

在线性极化的情况下

$$\begin{aligned}\vec{D} &= \epsilon \vec{E} \\ \vec{H} &= \frac{1}{\mu} \vec{B}\end{aligned}\quad (175)$$

此时麦克斯韦方程组化为

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= \rho_f \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} &= \vec{j}_f\end{aligned}\quad (176)$$

4 动场

4.1 自由无界空间中的场

如果空间中没有自由电荷，且介质是线性的，把麦克斯韦方程按

$$\begin{aligned}\partial_0 &\equiv \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow i\omega \\ \vec{\nabla} &\rightarrow -i\vec{k}\end{aligned}\tag{177}$$

傅立叶变换，一组用于确定自由无界空间中的场的方程就是

$$\begin{aligned}\vec{k} \cdot \vec{D} &= 0 \\ \vec{k} \times \vec{E} &= \omega \vec{B} \\ \vec{k} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{k} \times \vec{H} &= -\omega \vec{D} + \vec{j} \\ \vec{D} &= \epsilon \vec{E} \\ \vec{B} &= \mu \vec{H} \\ \vec{j} &= \sigma \vec{E}\end{aligned}\tag{178}$$

4.2 波导和谐振腔

对有界的空间，我们可以想象，场的本质模式变成离散情形。通常我们要处理的是理想导体作为边界的电磁场问题，在这里，导体表面处必须满足电场的切向分量等于 0，且散度定理 $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$ 成立。也就是法向电场的法向导数 $\frac{\partial E_n}{\partial n} = 0$ 成立。

4.2.1 谐振腔

在一个完全由理想导体包围的区域内，电场 \vec{E} 满足波动方程

$$\nabla^2 \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E}\tag{179}$$

我们依然按 $\vec{E} \sim e^{-i\omega t}$ 先将时间分离变量得到

$$\nabla^2 \vec{E} = -\frac{\omega^2}{c^2} \vec{E} = -k^2 \vec{E}\tag{180}$$

这就是一个空间中的亥姆霍兹方程：之前考虑的静电问题就是 $k = 0$ 时候的情况。对给定的边界条件求解这个亥姆霍兹方程就可以得到 k 的各个（离散的）可能取值，从而得到封闭空间中的电磁波震荡的本征模式。

例 4.1 对一个长宽高分别为 l, w, h 的长方体导体盒, 求内部电磁震荡的本征模式。

解答 4.1 在 $x = 0$ 和 $x = l$ 平面上的边界条件为

$$E_y = E_z = 0 \quad (181)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = 0 \quad (182)$$

在 $y = 0$ 和 $y = w$ 平面上的边界条件为

$$E_x = E_z = 0 \quad (183)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial y} = 0 \quad (184)$$

在 $z = 0$ 和 $z = h$ 平面上的边界条件为

$$E_x = E_y = 0 \quad (185)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \quad (186)$$

从而我们有以下分离变量形式的解

$$E_x \sim \cos \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{n\pi y}{w} \sin \frac{p\pi z}{h} \quad (187)$$

$$E_y \sim \sin \frac{m\pi x}{l} \cos \frac{n\pi y}{w} \sin \frac{p\pi z}{h} \quad (188)$$

$$E_z \sim \sin \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{n\pi y}{w} \cos \frac{p\pi z}{h} \quad (189)$$

对给定的模式 (m, n, p) , 电场的空间分量为

$$\vec{E} = A \cos \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{n\pi y}{w} \sin \frac{p\pi z}{h} \vec{e}_x + B \sin \frac{m\pi x}{l} \cos \frac{n\pi y}{w} \sin \frac{p\pi z}{h} \vec{e}_y + C \sin \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{n\pi y}{w} \cos \frac{p\pi z}{h} \vec{e}_z \quad (190)$$

附加约束条件 $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$ 表现为

$$-\left(A \frac{m\pi}{l} + B \frac{n\pi}{w} + C \frac{p\pi}{h}\right) \sin \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{n\pi y}{w} \sin \frac{p\pi z}{h} = 0 \quad (191)$$

这表示, 三个振幅 (A, B, C) 之间只有两个是独立的。另外该模式的

$$k = \pi \sqrt{\left(\frac{m}{l}\right)^2 + \left(\frac{n}{w}\right)^2 + \left(\frac{p}{h}\right)^2} \quad (192)$$

相当于给出了电磁波频率的限制

$$\omega_{mnp} = c\pi \sqrt{\left(\frac{m}{l}\right)^2 + \left(\frac{n}{w}\right)^2 + \left(\frac{p}{h}\right)^2} \quad (193)$$

为一系列离散的值，并且最低的（假如 l 是 l, w, h 中最大的）频率为

$$\omega_{100} = \frac{\pi c}{l} \quad (194)$$

低于这个频率的电磁波都不能在这个盒子里存活。相当于说波长大于 $2l$ 的波都不能在这个盒子里存活，这是符合我们的物理直觉的。

例 4.2 讨论一个半径为 a ，高为 h 的圆柱形导体壳内允许的电磁震荡模式。

解答 4.2 $r = a$ 处的边界条件为

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(rE_r)}{\partial r} = 0 \quad (195)$$

$$E_z = E_\theta = 0 \quad (196)$$

$z = 0, h$ 处的边界条件为

$$\frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \quad (197)$$

$$E_r = E_\theta = 0 \quad (198)$$

先讨论 z 方向的边界条件给出的限制比较简单：这只是告诉我们

$$E_z \sim \cos \frac{n\pi z}{h} \quad (199)$$

$$E_r \sim E_\theta \sim \sin \frac{n\pi z}{h} \quad (200)$$

记 $k_T^2 = k^2 - \left(\frac{n\pi}{h}\right)^2$ ，问题进一步化简为求极坐标下的亥姆霍兹方程

$$\nabla^2 \vec{E} = -k_T^2 \vec{E} \quad (201)$$

它具有分量变量形式解

$$\vec{E} \sim J_m(k_T r) (c \cos m\theta + s \sin m\theta) \quad (202)$$

$r = a$ 处的边界条件对 E_θ 和 E_z 的限制比较简单：

$$E_\theta \sim E_z \sim J_m\left(\frac{\mu_{m,n} r}{a}\right) (c \cos m\theta + s \sin m\theta) \quad (203)$$

其中 $\mu_{m,n}$ 是第 m 阶贝塞尔函数 $J_m(x)$ 的第 n 个零点。

比如我们可以在此限制 $E_r = 0$ ，于是得到对给定的波模

$$\vec{E} = J_m\left(\frac{\mu_{m,n} r}{a}\right) (c \cos m\theta + s \sin m\theta) \left(A \cos \frac{n\pi z}{h} \vec{e}_z + B \sin \frac{n\pi z}{h} \vec{e}_\theta\right) \quad (204)$$

本征频率

$$\omega_{mnp} = c \sqrt{\left(\frac{\mu_{m,n}}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{h}\right)^2} \quad (205)$$

4.2.2 波导

波导与谐振腔的不同之处在于,波导在某个方向(常取作 z 方向)是无界的,也就是说,在这个方向上的模式是连续的,我们可以按 $\vec{E} \sim \vec{E}(x, y)e^{i(kz - \omega t)}$ 把时间上的传播模式和 z 轴上的传播模式先分离变量,从而将问题化为一个二维的亥姆霍兹方程求解问题

$$\nabla^2 \vec{E} = -k_T^2 \vec{E} \quad (206)$$

其中 $k_T^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - k^2$ 是波矢的横向分量。在横向的约束依然使得电磁波在波导内不一定是横波。我们引入一些习惯记号:

1. TEM 波: 电场 \vec{E} 和磁场 \vec{B} 都和波的整体传播方向 $\vec{k} = k\vec{e}_z$ 垂直: 在无界空间中的电磁波总是 TEM 波;
2. TE 波: 只有电场 \vec{E} 和波的整体传播方向 $\vec{k} = k\vec{e}_z$ 垂直, 相当于要求 $E_z = 0$;
3. TM 波: 只有磁场 \vec{H} 和波的整体传播方向 $\vec{k} = k\vec{e}_z$ 垂直, 相当于要求 $B_z = 0$;

在自由无界空间中,电磁波总是 TEM 的,而在有限空间里这一结论不再成立。我们按照横纵两个方向对电场、磁场和梯度算符作分解

$$\vec{E} = \vec{E}_T + E_z \vec{e}_z \quad (207)$$

$$\vec{B} = \vec{B}_T + B_z \vec{e}_z \quad (208)$$

$$\vec{\nabla} = \vec{\nabla}_T + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z = \vec{\nabla}_T + ik\vec{e}_z \quad (209)$$

麦克斯韦方程的散度项给出要求

$$\vec{\nabla}_T \cdot \vec{E}_T + ikE_z = 0 \quad (210)$$

$$\vec{\nabla}_T \cdot \vec{B}_T + ikB_z = 0 \quad (211)$$

旋度项

$$\vec{\nabla}_T \times \vec{E}_T + ik\vec{E}_T \times \vec{e}_z + \vec{\nabla}_T E_z \times \vec{e}_z = i\omega(\vec{B}_T + B_z \vec{e}_z) \quad (212)$$

这相当于要求

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}_T \times \vec{E}_T &= i\omega B_z \\ ik\vec{E}_T \times \vec{e}_z + \vec{\nabla}_T E_z \times \vec{e}_z &= i\omega \vec{B}_T \end{aligned} \quad (213)$$

另外还有

$$\vec{\nabla}_T \times \vec{B}_T + ik\vec{B}_T \times \vec{e}_z + \vec{\nabla}_T B_z \times \vec{e}_z = -\frac{1}{c^2}i\omega\vec{E}_T \quad (214)$$

同样给出限制

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}_T \times \vec{B}_T &= -i\frac{\omega}{c^2}\vec{E}_z \\ ik\vec{B}_T \times \vec{e}_z + \vec{\nabla}_T B_z \times \vec{e}_z &= -i\frac{\omega}{c^2}\vec{E}_T \end{aligned} \quad (215)$$

现在我们可以预想，空间在 xy 方向上的有限性会使得 k_T 只能去按两个指标 mn 表示的离散值，从而使得对 z 方向的波矢有限制

$$k^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - k_{T,mn}^2 \quad (216)$$

另一方面， $k^2 > 0$ 使得在波导中传播的电磁波有最小频率

$$\omega_c = c \max\{k_{T,10}, k_{T,01}\} \quad (217)$$

4.3 辐射

上面都讨论的是自由空间中场的传播，但事实上我们更感兴趣的是由源激发的场。回忆我们一开始的推迟势公式，简单起见，我们暂时使用 $c = 1$ 的单位制。

$$\phi_{ret}(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\vec{x}' \frac{\rho(\vec{x}', t - |\vec{x} - \vec{x}'|)}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \quad (218)$$

$$\vec{A}_{ret}(\vec{x}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3\vec{x}' \frac{\vec{j}(\vec{x}', t - |\vec{x} - \vec{x}'|)}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \quad (219)$$

4.3.1 多极展开

我们在静场的多极展开那里讨论过 $|\vec{x}| \gg |\vec{x}'|$ 时 $\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$ 的展开式。

$$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \frac{1}{r} + \frac{\vec{x} \cdot \vec{x}'}{r^3} + O\left(\frac{1}{r^3}\right) \quad (220)$$

另外还有一个展开式

$$|\vec{x} - \vec{x}'| \simeq r - \frac{\vec{x} \cdot \vec{x}'}{r} + O\left(\frac{1}{r}\right) \quad (221)$$

电流（和电荷）同样可以继续展开

$$\begin{aligned} \vec{j}(\vec{x}', t - |\vec{x} - \vec{x}'|) &\simeq \vec{j}(\vec{x}', t - r + \frac{\vec{x} \cdot \vec{x}'}{r}) \\ &= \vec{j}(\vec{x}', t - r) + \dot{\vec{j}}(\vec{x}', t - r) \frac{\vec{x} \cdot \vec{x}'}{r} + O\left(\frac{1}{r}\right) \end{aligned} \quad (222)$$

于是

$$\vec{A}(\vec{x}) \simeq \frac{\mu_0}{4\pi r} \int d^3\vec{x}' \left(\vec{j}(\vec{x}', t-r) + \dot{\vec{j}}(\vec{x}', t-r) \frac{\vec{x} \cdot \vec{x}'}{r} \right) \left(1 + \frac{\vec{x} \cdot \vec{x}'}{r^2} \right) \quad (223)$$

我们可以将上式按 $\frac{1}{r}$ 各阶展开：

- $\sim \frac{1}{r}$ 阶

$$\vec{A}^{(1)} = \frac{\mu_0}{4\pi r} \int d^3\vec{x}' \vec{j}(\vec{x}', t-r) \quad (224)$$

积分号内的等式这样变形：用指标语言

$$\partial'_j(x'_i j_j) = j_i + x'_i \partial'_j j_j = j_i - x'_i \dot{\rho} = j_i - \dot{p}_i \quad (225)$$

简单认为全导数项积分消失，就得到了

$$\vec{A}^{(1)} = A^{ED} = \frac{\mu_0}{4\pi r} \int d^3\vec{x}' \vec{p}(\vec{x}', t-r) \quad (226)$$

也就是说，矢势的最低阶贡献是时变电偶极矩产生的。

- $\sim \frac{1}{r^2}$ 阶

$$\vec{A}^{(2)} = \frac{\mu_0}{4\pi r^2} \int d^3\vec{x}' \dot{\vec{j}}(\vec{x}', t-r) (\vec{x} \cdot \vec{x}') \quad (227)$$

我们同样可以把积分号内的 $\dot{j}_i x_j$ 变形，利用

$$\partial'_k(x'_j x'_i \dot{j}_k) = -x'_i x'_j \ddot{\rho} + x'_j \dot{j}_i + x'_i \dot{j}_j \quad (228)$$

有

$$x_j \int d^3\vec{x}' \dot{j}_i x'_j = \frac{1}{2} x_j \int d^3\vec{x}' \dot{j}_i x'_j + \frac{1}{2} x_j \int d^3\vec{x}' (\ddot{\rho} x'_i x'_j - \dot{j}_j x'_i) \quad (229)$$

磁矩的定义是

$$m_j = \frac{1}{2} \int d^3\vec{x}' \epsilon_{jkl} x_k \dot{j}_l \quad (230)$$

于是我们把该阶矢势分解成了两项：电四极辐射：

$$\vec{A}^{EQ} = \frac{\mu_0}{24\pi r^2} \int d^3\vec{x}' \ddot{\vec{D}}(\vec{x}', t-r) \cdot \vec{x} \quad (231)$$

磁偶极辐射：

$$\vec{A}^{MD} = \frac{\mu_0}{4\pi r^2} \int d^3\vec{x}' \dot{\vec{m}}(\vec{x}', t-r) \times \vec{x} \quad (232)$$

4.3.2 电偶极辐射