

# Appunti di Fondamenti di Fisica Sperimentale

Lorenzo Prosseda, a.a. 2016-2017



*Copyright ©2017 Lorenzo Prosseda. Permission is granted to copy, distribute and/or modify this document under the terms of the GNU Free Documentation License, Version 1.3 or any later version published by the Free Software Foundation; with no Invariant Sections, no Front-Cover Texts, and no Back-Cover Texts. A copy of the license is included in the file called "LICENSE".*



# Indice

<b>Parte 1. Meccanica</b>	<b>7</b>
Capitolo 1. Cinematica del punto	9
1.1. Richiami di calcolo vettoriale	9
1.2. Sistemi di coordinate	11
1.3. Moto rettilineo	14
1.4. Moto nel piano	18
1.5. Moto armonico semplice	20
1.6. Moto circolare	22
1.7. Lancio balistico	23
Capitolo 2. Dinamica del punto	25
2.1. Leggi di Newton	25
2.2. Quantità di moto e impulso	25
2.3. Attrito radente	26
2.4. Attrito viscoso	27
2.5. Molle e fili	27
2.6. Pendolo	28
2.7. Sistemi non inerziali	30
2.8. Lavoro, potenza, energia cinetica	30
2.9. Forze conservative	33
2.10. Superficie equipotenziale	34
2.11. Momento di un vettore	35
Capitolo 3. Dinamica dei sistemi di punti	37
3.1. Centro di massa	37
3.2. Momento angolare	39
3.3. Teorema dell'energia	40
3.4. Riferimento del centro di massa	40
3.5. Relazioni di König	42
3.6. Baricentro	42
3.7. Urti	43
Capitolo 4. Gravitazione	47
4.1. Forze centrali	47
4.2. Leggi di Keplero	48
4.3. Vettore di campo gravitazionale	49
4.4. Teorema di Gauss	50
4.5. Potenziale per massa estesa	52
4.6. Energia dell'orbita	52
4.7. Traiettoria	53
Capitolo 5. Oscillatore armonico	55
5.1. Proprietà dell'equazione	55
5.2. Energia dell'oscillatore armonico	56
5.3. Somma di moti armonici	57

5.4. Oscillatore smorzato	59
<b>Parte 2. Elettromagnetismo</b>	<b>61</b>
Capitolo 6. Elettrostatica	63
6.1. Legge di Coulomb	63
6.2. Campo elettrostatico	63
6.3. Lavoro e potenziale elettrico	64
6.4. Geometria differenziale	65
6.5. Dipolo elettrico	69
Capitolo 7. Conduttori	71
7.1. Campo elettrico nei conduttori	71
7.2. Teorema di Coulomb	72
7.3. Sfera conduttrice	74
Capitolo 8. Condensatore	77
8.1. Sistema di conduttori	77
8.2. Lavoro per la carica del condensatore	79
8.3. Energia tra le armature	79
Capitolo 9. Dielettrici	81
9.1. Costante dielettrica	81
9.2. Campo elettrico nel dielettrico	81
9.3. Dielettrico come dipolo	82
9.4. Carica di condensatore con dielettrico	83
9.5. Condizioni di interfaccia	84
Capitolo 10. Corrente	85
10.1. Definizione globale e locale	85
10.2. Conservazione della carica	86
10.3. Leggi di Ohm	87
10.4. Campo elettromotore	89
10.5. Transitorio di un condensatore	90
Capitolo 11. Magnetismo	93
11.1. Legge di Biot-Savart	93
11.2. Prima legge di Laplace	93
11.3. Seconda legge di Laplace	94
11.4. Forza di Lorentz	95
11.5. Geometria del campo magnetico	95
11.6. Solenoide infinito	97
11.7. Spira	98
Capitolo 12. Magnetismo nella materia	101
12.1. Forza magnetica su spira	101
12.2. Modello di Böhr	101
12.3. Polarizzazione della materia	102
12.4. Campo magnetico all'interfaccia	105
Capitolo 13. Fenomeni elettromagnetici	107
13.1. Induzione di Faraday	107
13.2. Relazione tra campo elettrico e magnetico	108
13.3. Mutua induzione	109
13.4. Autoinduzione	109

13.5. Equazioni di Maxwell	111
13.6. Onde elettromagnetiche	112
13.7. Teorema di Poynting	114
Indice analitico	117



**Parte 1**

**Meccanica**





## CAPITOLO 1

### Cinematica del punto

#### 1.1. Richiami di calcolo vettoriale

Le grandezze fisiche rappresentabili mediante un numero, una costante o una funzione dello spazio e del tempo si dicono *grandezze scalari*. In alcuni casi non basta specificare un solo valore per indicare il tipo di grandezza misurata: per esempio lo spostamento da un punto sarà indicato da una distanza percorsa, da una direzione e da un verso col quale si è presa quella direzione; si ha in questo caso una *grandezza vettoriale*, poiché l'elemento matematico con cui vengono rappresentate è il vettore. Seguono ora alcune proprietà delle operazioni tra vettori:

- PRODOTTO PER UNO SCALARE

$$\vec{b} = m \cdot \vec{a}$$

Il prodotto dello scalare  $m$  per il vettore  $\vec{a}$  dà come risultato il vettore  $\vec{b}$ , il quale ha stessa direzione di  $\vec{a}$ , modulo  $m$  volte quello di  $\vec{a}$  e stesso verso di  $\vec{a}$  se  $m > 0$  oppure verso opposto se  $m < 0$

- VETTORE OPPOSTO

$$\vec{b} = -\vec{a}$$

Ponendo  $m = -1$  nell'esempio precedente otteniamo il vettore opposto ad  $\vec{a}$ , che ha stessa direzione e modulo ma verso opposto

- VERSORE

$$\vec{a} = a \cdot \hat{u}_a$$

Ogni vettore può essere scritto come prodotto tra uno scalare che rappresenta il suo modulo per un vettore di modulo unitario col suo verso e direzione: esso si chiama versore della direzione  $r$  (con  $r$  la direzione del vettore associato al versore); si usa scrivere come  $\hat{u}_r$

- SOMMA DI VETTORI

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$

Dati due vettori  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  è possibile sommarli in due modi:

- *Regola del triangolo*: applicando  $\vec{b}$  nel punto terminale di  $\vec{a}$  la somma è il vettore  $\vec{c}$  che si ottiene unendo l'origine di  $\vec{a}$  con l'estremo terminale di  $\vec{b}$
- *Vettore risultante (regola del parallelogramma)*: si applicano i due vettori nello stesso origine: il vettore somma  $\vec{c}$  coincide con la diagonale del parallelogramma che ha come lati  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$

La regola del parallelogramma permette di verificare che la somma è commutativa

- DIFFERENZA DI VETTORI

$$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$

Usando il concetto di vettore opposto e di somma si definisce la differenza tra vettori come la somma col vettore di verso opposto a  $\vec{b}$  con  $\vec{a}$

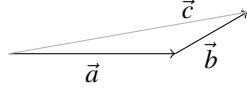


Figura 1.1.1. Regola del triangolo

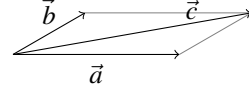


Figura 1.1.2. Regola del parallelogramma

Per le operazioni sopra definite vale la proprietà associativa, mentre rispetto al prodotto scalare vale anche la distributiva.

Un vettore  $\vec{v}$  viene scomposto nelle sue *componenti*  $\vec{v}_r$  e  $\vec{v}_s$  lungo le direzioni  $r$  e  $s$  caratterizzate dai versori  $\hat{u}_r$  e  $\hat{u}_s$  considerando la seguente uguaglianza

$$\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_s = v_r \cdot \hat{u}_r + v_s \cdot \hat{u}_s$$

Il caso più frequente è che le direzioni siano gli assi di un sistema di riferimento. Estendendo la definizione di somma e l'associatività alle componenti in un riferimento cartesiano a tre assi si ha che

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x) \cdot \hat{u}_x + (a_y + b_y) \cdot \hat{u}_y + (a_z + b_z) \cdot \hat{u}_z$$

cioè il vettore somma ha come componenti la somma delle componenti dei singoli vettori; questo vale per la somma di un numero qualsiasi di vettori e anche nel caso di assi non ortogonali.

Una importante osservazione è l'indipendenza della somma e del prodotto per uno scalare dei vettori dal sistema di riferimento questa caratteristica si definisce come *proprietà di invarianza*. Quando si fissa un sistema di riferimento un vettore al suo interno è individuato dalle sue componenti e una equazione tra vettori si riconduce a una equazione tra componenti e spesso le operazioni si portano a termine ragionando sulle componenti.

A seconda del cambiamento del sistema di riferimento le componenti possono subire una delle seguenti trasformazioni:

- TRASLAZIONE:

$$\begin{cases} x' = x - x_0 \\ y' = y - y_0 \end{cases}$$

si modifica l'origine dei vettori, rimangono inalterate direzione e verso; nell'esempio il nuovo origine è in  $O(x_0, y_0)$

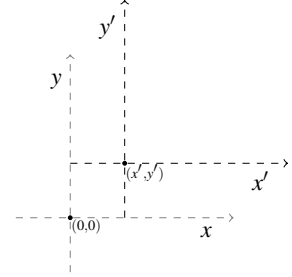


Figura 1.1.3. Traslazione

- ROTAZIONE:

$$\begin{cases} x' = x \cos \theta + y \sin \theta \\ y' = -x \sin \theta + y \cos \theta \end{cases}$$

si modifica la direzione dei vettori, verso e origine rimangono inalterati; nell'esempio il riferimento ruota di un angolo  $\theta$

Inoltre si osserva che non ostante le componenti siano dipendenti dal sistema, il *modulo* del vettore è uno scalare che si mantiene lo stesso per qualsiasi sistema, ed è definito come

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

Il prodotto tra due vettori è definito di due tipi:

• **PRODOTTO SCALARE:**

$$s = \vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \theta$$

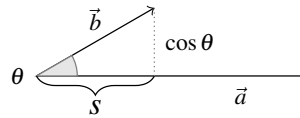


Figura 1.1.4. Prodotto scalare

dove  $\theta$  indica l'angolo tra i vettori e  $a$  e  $b$  sono i rispettivi moduli. Questa operazione gode delle seguenti proprietà:

- si annulla se uno dei due vettori è nullo o se l'angolo tra di essi è di  $\pi/2$
- vale la commutativa, in particolare  $\vec{a} \cdot \vec{a} = a^2$  (il prodotto scalare di un vettore per sé stesso è uguale al quadrato del suo modulo)
- non si può iterare il prodotto scalare, dal momento che opera su vettori e restituisce scalari
- vale la distributiva rispetto alla somma, in particolare se  $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$  allora vale

$$c^2 = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = a^2 + b^2 + 2(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \boxed{a^2 + b^2 + 2ab \cos \theta}$$

che è il *Teorema di Carnot* e permette di ricavare il modulo della somma di due vettori; se  $\theta = \pi/2$  si ha il *Teorema di Pitagora*

- in un dato sistema di riferimento, il prodotto scalare tra due vettori è la somma dei prodotti delle singole componenti di tali vettori:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a}_x \vec{b}_x + \vec{a}_y \vec{b}_y + \vec{a}_z \vec{b}_z$$

si può anche definire come prodotto del modulo di uno dei due vettori per la proiezione su di questo dell'altro vettore

• **PRODOTTO VETTORIALE**

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$$

il vettore risultante da tale operazione ha direzione perpendicolare al piano individuato da  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$ , il verso di una terna destrorsa (dalla punta di  $\vec{c}$  deve apparire antioraria la rotazione che porta  $\vec{a}$  su  $\vec{b}$ ) e il modulo pari a  $ab \sin \theta$ . Questa operazione gode delle seguenti proprietà:

- il prodotto vettoriale è nullo se uno dei due vettori è nullo o se sono paralleli (in particolare il prodotto vettoriale di un vettore per sé stesso)
- vale la distributiva, non l'associativa né la commutativa: quindi è possibile iterare il prodotto vettoriale specificando la sequenza delle operazioni

## 1.2. Sistemi di coordinate

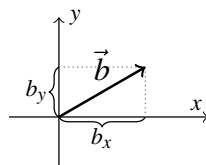


Figura 1.2.1. Componenti cartesiane

**1.2.1. Coordinate cartesiane.** Un sistema di coordinate è caratterizzato da quattro elementi:

(1) **ORIGINE**

Esso potrebbe coincidere con il punto di simmetria del sistema o dell'oggetto in esame

## (2) ASCISSE

L'insieme più elementare di ascisse è la terna di assi Cartesiani, denominati asse  $x$ , asse  $y$ , e asse  $z$ ; ancora una volta la scelta dipende dal sistema o dall'oggetto in esame. dopo aver fissato un insieme di assi un punto nello spazio viene individuato da una tupla di valori, detti coordinate, tanti quante sono le ascisse fissate; per quanto riguarda la terna Cartesiana, dato un punto  $P$  esso sarà individuato dalla terna  $(x_p, y_p, z_p)$ , dove  $x_p, y_p, z_p \in (-\infty, +\infty)$ .

Fissata una delle tre coordinate, le altre due individuano un piano rispetto alla terza, alla quale esso sarà perpendicolare.

## (3) SCELTA DEL VERSO POSITIVO (per ciascuna ascissa)

Questa scelta è del tutto arbitraria ma può influenzare molto la difficoltà di un problema.

## (4) SCELTA DEL VETTORE UNITÀ (per ciascuna ascissa)

Associamo a ciascun punto una tupla di versori nelle direzioni delle ascisse; nel caso del riferimento cartesiano si hanno  $(\hat{i}_p, \hat{j}_p, \hat{k}_p)$  tali che  $\hat{i}_p$  abbia direzione nel verso positivo dell'asse  $x$ ,  $\hat{j}_p$  abbia direzione nel verso positivo dell'asse  $y$ ,  $\hat{k}_p$  abbia direzione nel verso positivo dell'asse  $z$ .

All'interno del riferimento Cartesiano possiamo definire i seguenti elementi geometrici:

## • Elemento di linea infinitesimo

Sia  $d\vec{s}$  uno spostamento piccolissimo tra due punti,  $P_1$  e  $P_2$ , allora tale vettore può essere scomposto in

$$d\vec{s} = dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}$$

Elemento di area infinitesimo

È un quadratino piccolissimo dell'area della faccia di un cubo, ottenuto da  $dA = (dx)(dy)$ ; gli elementi di area sono vettori quando la direzione del vettore  $d\vec{A}$  è perpendicolare al piano definito dall'area; dal momento che il sistema di riferimento è orientato e per la regola della mano destra, dobbiamo scegliere la direzione uscente

$$d\vec{A} = (dx \cdot dy) \hat{k}$$

Elemento di volume infinitesimo

È il volume di un cubo piccolissimo, in coordinate si ha

$$dV = dx \cdot dy \cdot dz$$

**1.2.2. Coordinate cilindriche.** Scegliamo un origine e un asse che chiameremo  $z$  con versore associato  $\hat{z}$  in direzione del verso positivo dell'asse; i punti con la stessa coordinata su  $z$  formano un piano perpendicolare all'asse e in tale piano scegliamo le coordinate di un punto  $P$  nel seguente modo:  $\rho$  è la distanza dall'asse  $z$  e vale  $\rho \in [0, +\infty)$ ; fissato un raggio di distanza dall'asse, la coordinata angolare sulla circonferenza è individuata scegliendo un raggio di riferimento e considerando l'angolo  $\theta$  in senso antiorario tra il raggio che collega l'asse con il punto  $P$  e il raggio di riferimento, per il quale vale  $\theta \in [0, 2\pi]$ .

Coordinate polari  
piane

Le coordinate  $(\rho, \theta)$  nel piano  $z$  si chiamano *coordinate polari piane*. Scegliamo ora due versori,  $\hat{\rho}$  nella direzione di  $\rho$  positivo e  $\hat{\phi}$  nella direzione di  $\theta$  crescente; esso punta in senso antiorario, tangente al cerchio. Con l'aggiunta di una direzione tangenziale e una radiale, otteniamo il sistema di riferimento in coordinate cilindriche.

Per indicare un generico punto del piano scriviamo i versori  $\hat{\rho}$  e  $\hat{\varphi}$  tenendo presente che possono cambiare direzione nel tempo.

Date le coordinate cartesiane, valgono le seguenti:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = \arctan \frac{y}{x}$$

Nel sistema di coordinate cilindriche possiamo definire i seguenti elementi geometrici:

- Elemento di linea infinitesimo

$$d\vec{s} = d\rho\hat{\rho} + \rho d\theta\hat{\varphi} + dz\hat{k}$$

- Elemento di area infinitesimo

È individuato da un elemento di area piccolissimo sulla superficie laterale di un cilindro, definito come

$$d\vec{A} = \rho d\theta dz \cdot \hat{\rho}$$

e invece si considera l'elemento di area su una base del cilindro, esso è definito come

$$d\vec{A} = \rho d\theta d\rho \cdot \hat{k}$$

- Elemento di volume infinitesimo

$$dV = \rho (d\theta \cdot d\rho \cdot dz)$$

**1.2.3. Coordinate sferiche.** Scegliamo un origine, una coordinata  $r \in [0, +\infty)$  che misura la distanza radiale dall'origine al punto  $P$  generico; in questo modo individuiamo infinite sfere di raggio  $r$ . Ogni punto su una delle sfere può essere individuato a sua volta da due angoli associati al raggio: definiamo tali angoli rispetto a un sistema Cartesiano. Sia allora  $\theta \in [0, \pi]$  definito tra l'asse  $z$  positivo e il raggio dall'origine al punto  $P$ , e sia  $\varphi \in [0, 2\pi]$  definito tra l'asse  $x$  positivo e la proiezione del raggio che congiunge  $P$  con l'origine nel piano  $xy$ .

Le coordinate sferiche di un punto saranno  $(r, \theta, \varphi)$ . I rispettivi versori,  $(\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\varphi})$  definiti nel modo seguente: sia  $\hat{r}$  diretto all'esterno dall'origine, sia  $\hat{\theta}$  tangente alla circonferenza nel piano individuato dall'asse  $z$  e il raggio dall'origine a  $P$ , sia  $\hat{\varphi}$  diretto verso  $\varphi$  crescente e tangente a una circonferenza nel piano  $xy$  e centrata sull'asse  $z$ .

Date le coordinate Cartesiane, valgono le seguenti:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\theta = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\varphi = \arctan \frac{y}{x}$$

Nel sistema di coordinate sferiche possiamo definire i seguenti elementi geometrici:

- Elemento di linea infinitesimo

$$d\vec{s} = dr\hat{r} + r d\theta\hat{\theta} + r \sin \theta d\varphi\hat{\varphi}$$

- Elemento di area infinitesimo

$$dA = (r d\theta) (r \sin \theta d\varphi) \Rightarrow d\vec{A} = r^2 \sin \theta \cdot d\theta d\varphi \cdot \hat{r}$$

- Elemento di volume infinitesimo

$$dV = r^2 \sin \theta \cdot d\theta d\varphi dr$$

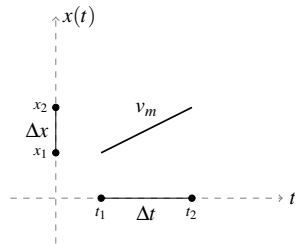
### 1.3. Moto rettilineo

**1.3.1. Introduzione alla cinematica.** La meccanica riguarda lo studio di un corpo: inizieremo da quello più semplice, il modello del *punto materiale*: un corpo privo di dimensioni (sono trascurabili rispetto allo spazio in cui si muove e a quelle dei corpi con cui interagisce). La parte della meccanica che descrive il moto di un corpo indipendentemente dalle cause che lo provocano si chiama *cinematica*; il moto di un punto materiale è determinato se è nota la sua posizione in funzione del tempo rispetto a un *sistema di riferimento*.

La *traiettoria* è il luogo dei punti occupati successivamente dal punto in movimento e costituisce una curva continua nello spazio; lo studio delle variazioni di posizione nel tempo porta a definire la *velocità* e quello delle variazioni di velocità a definire l'*accelerazione*. La *quiete* è un moto particolare caratterizzato da coordinate costanti con velocità e accelerazione nulle.

Riferimento del  
moto

**1.3.2. Velocità nel moto rettilineo.** Tale moto si svolge lungo una retta orientata sulla quale sono fissati in modo arbitrario un'origine e un verso di percorrenza:



per descrivere il moto basta la funzione di una sola coordinata  $x(t)$ .

Rappresentando tale funzione su un riferimento a due assi possiamo mostrare la dipendenza tra la posizione sulla retta del punto e il tempo corrispondente, ottenendo un *diagramma orario*.

Figura 1.3.1. Velocità nel moto rettilineo

Se al tempo  $t_1$  il punto si trova in posizione  $x_1$  e al tempo  $t_2$  in  $x_2$  allora  $\Delta x = x_2 - x_1$  rappresenta lo spazio percorso in  $\Delta t = t_2 - t_1$ ; la rapidità con la quale avviene lo spostamento si chiama *velocità media*:

**Velocità media**

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t} = \frac{\vec{x}_2 - \vec{x}_1}{t_2 - t_1}$$

Tuttavia si tratta di una informazione complessiva: un generico moto rettilineo non è costante nel tempo. Suddividendo lo spazio in intervallini e calcolando la velocità media su di essi ci si avvicina ad una informazione istantanea: se  $\Delta \vec{x}$  è diviso in un gran numero di intervallini  $dx$ , ciascuno percorso in  $dt$ , si può definire la *velocità istantanea* come il limite della velocità media per il tempo che tende a 0:

**Velocità  
istantanea**

(1.3.1)

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t} = \frac{d\vec{x}}{dt}$$

Nel caso particolare di velocità costante si ha il moto rettilineo uniforme.

In conclusione se è nota la funzione  $\vec{x}(t)$  si può ottenere la velocità istantanea con l'operazione di derivazione (1.3.1). Da essa deduciamo che lo spostamento  $d\vec{x}$  è uguale al prodotto del tempo  $dt$  impiegato per percorrerlo per il valore della velocità istantanea ( $d\vec{x} = \vec{v}(t) dt$ ); lo spostamento complessivo sulla retta in un intervallo di

tempo  $\Delta t = t - t_0$  è la somma degli spostamenti infinitesimi su tale intervallo di tempo: usando l'integrale si ottiene

$$(1.3.2) \quad \Delta \vec{x} = \int_{t_0}^t dx = \int_{t_0}^t v(t) dt \Rightarrow \boxed{x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t v(t) dt}$$

---

**Legge oraria  
moto rettilineo**

dove la  $x_0$  indica la posizione iniziale del punto occupata nell'istante  $t_0$  (è necessario conoscere le *condizioni iniziali* del moto per calcolare lo spazio percorso); inoltre  $\Delta x$  rappresenta lo spostamento complessivo e non lo spazio percorso - non è la somma dei moduli degli spostamenti ma la somma algebrica.

Ricordando la definizione di velocità media, possiamo riscrivere (1.3.2) per trovare la relazione tra velocità media e istantanea

$$(1.3.3) \quad \vec{v}_m = \frac{1}{t - t_0} \int_{t_0}^t \vec{v}(t) dt$$

Consideriamo ora il moto rettilineo uniforme (velocità costante) e applichiamo la (1.3.2):

$$(1.3.4) \quad x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t v dt = x_0 + v(t - t_0)$$

---

**Moto rettilineo  
uniforme**

Nel moto rettilineo uniforme lo spazio è funzione lineare del tempo e la velocità istantanea coincide con quella media.

**1.3.3. Accelerazione nel moto rettilineo.** Se in un intervallo di tempo  $\Delta t$  la velocità  $\vec{v}(t)$  varia di una quantità  $\Delta \vec{v}$  possiamo definire l'*accelerazione media* come  $\vec{a}_m = \Delta \vec{v} / \Delta t$ ; con un processo analogo a quello utilizzato per la velocità si può definire l'*accelerazione istantanea* (la rapidità della variazione della velocità nel tempo) come:

$$(1.3.5) \quad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{x}}{dt^2}$$

---

**Accelerazione  
istantanea**

dove nel secondo passaggio è stata usata la (1.3.1) per porre  $\vec{v} = d\vec{x}/dt$ .

Se l'accelerazione è nulla la velocità è costante e si ricade nel caso del moto rettilineo uniforme; per accelerazioni positive la velocità cresce, mentre con accelerazioni negative decresce: il verso del moto è determinato dal segno algebrico della velocità istantanea e non dall'accelerazione.

Nota la  $\vec{a}(t)$  possiamo conoscere la velocità istantanea con l'integrazione della equazione differenziale (1.3.5):

$$(1.3.6) \quad d\vec{v} = \vec{a}(t) dt \Rightarrow \Delta \vec{v} = \int_{v_0}^v d\vec{v} = \int_{t_0}^t \vec{a}(t) dt \Rightarrow \boxed{\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \int_{t_0}^t \vec{a}(t) dt}$$

---

**Dipendenza  
velocità dal  
tempo**

Se l'accelerazione non è costante il moto rettilineo si dice *vario*, altrimenti *uniformemente accelerato* e la dipendenza della velocità dal tempo risulta lineare:

$$(1.3.7) \quad \vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}(t - t_0)$$

---

**Moto rettilineo  
uniformemente  
accelerato**

Utilizzando (1.3.2) e (1.3.7) si ottiene la posizione rispetto al tempo come:

$$\vec{x}(t) = x_0 + \int_{t_0}^t [\vec{v}_0 + \vec{a}(t - t_0)] dt = x_0 + \int_{t_0}^t \vec{v}_0 dt + \int_{t_0}^t \vec{a}(t - t_0) dt \Rightarrow$$

$$(1.3.8) \quad \vec{x}(t) = x_0 + \vec{v}_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\vec{a}(t - t_0)^2$$

Ovvero nel moto uniformemente accelerato la velocità è funzione lineare del tempo e lo spazio una funzione quadratica del tempo. Se ad un certo istante  $t$  il punto si trova in  $x$  con velocità  $v$  e accelerazione  $a$  queste possono essere espresse in funzione della posizione piuttosto che del tempo:  $\vec{v}(t) = \vec{v}(x(t))$ ,  $\vec{a}(t) = \vec{a}(x(t))$ . Derivando la prima rispetto al tempo con la derivazione delle funzioni composte si ha:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\vec{v}(x(t)) = \frac{d\vec{v}}{dx} \frac{dx}{dt} \Rightarrow \vec{a} = \vec{v} \frac{d\vec{v}}{dx} \Rightarrow \boxed{\vec{a} dx = \vec{v} d\vec{v}}$$

Se dalla posizione  $x$  si ha uno spostamento  $dx$ , il punto subisce una variazione di velocità  $d\vec{v}$ ; integrando la precedente si ha:

$$(1.3.9) \quad \int_{x_0}^x \vec{a}(x) dx = \int_{v_0}^v \vec{v} dv = \frac{1}{2}\vec{v}^2 - \frac{1}{2}\vec{v}_0^2$$

La (1.3.9) permette il calcolo dalla variazione di velocità nel passaggio da  $x_0$  a  $x$  ma si perde l'informazione sul segno, essendo quadratica; nel moto uniformemente accelerato si ha:

$$(1.3.10) \quad \vec{v}^2 = \vec{v}_0^2 + 2\vec{a}(x - x_0)$$

**1.3.4. Moto smorzato esponenzialmente.** In tale moto l'accelerazione soddisfa la relazione  $\vec{a} = -k\vec{v}$ , con  $k$  costante positiva: l'accelerazione è sempre contraria alla velocità, e varia con la stessa legge con cui varia la velocità. La condizione si traduce con:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -k\vec{v}$$

che integrata risulta

$$\frac{d\vec{v}}{\vec{v}} = -k dt \Rightarrow \int_{v_0}^v \frac{1}{v} dv = -k \int_0^t dt \Rightarrow \ln \frac{v}{v_0} = -kt$$

dove  $v_0$  è la velocità del punto nell'istante iniziale  $t = 0$  (tale velocità deve essere non nulla, altrimenti si avrebbe accelerazione nulla e assenza di moto); dalla precedente si ottiene, risolvendo rispetto alla velocità

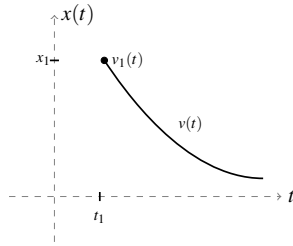


Figura 1.3.2. Velocità nel moto smorzato

#### Velocità moto smorzato

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 e^{-kt}$$

La velocità decresce esponenzialmente finché il punto non si ferma. Per calcolare la velocità rispetto alla posizione partiamo dalla definizione di accelerazione e integriamo dopo aver esplicitato lo spazio

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{d\vec{v}}{dx} \vec{v} = -k\vec{v} \Rightarrow \frac{d\vec{v}}{dx} = -k$$

$$d\vec{v} = -k dx \Rightarrow \int_{v_0}^v d\vec{v} = -k \int_0^x dx \Rightarrow \boxed{\vec{v}(x) = \vec{v}_0 - kx}$$



La velocità si annulla per  $x = \vec{v}_0/k$ , in questa posizione il punto si ferma. Ricaviamo la legge oraria integrando  $\vec{v}(t)$  secondo (1.3.2):

$$\vec{x}(t) = x_0 + \int_0^t \vec{v}(t) dt = \int_0^t \vec{v}_0 e^{-kt} dt = -\frac{\vec{v}_0}{k} [e^{-kt}]_0^t = \boxed{\frac{\vec{v}_0}{k} (1 - e^{-kt})}$$

Si osserva che il punto tende asintoticamente alla posizione in cui si ferma ( $x(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \vec{v}_0/k$ ); la stessa espressione si poteva ottenere eguagliando  $\vec{v}(t) = \vec{v}_0 e^{-kt}$  e  $v(x) = \vec{v}_0 - kx$ .

Posto  $\tau = 1/k$ , in un intervallo di tempo  $\Delta t = \tau$  la funzione  $\vec{v}(t)$  si riduce di un fattore  $e$  ( $\simeq 2,7$ ):  $\tau$  si chiama *costante di tempo* ed è inversamente proporzionale a  $k$ .

### 1.3.5. Moto verticale.

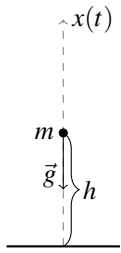


Figura  
1.3.3. Moto  
verticale

di cadere in vicinanza della superficie terrestre si muove verso il basso con un'accelerazione costante che vale in modulo  $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ , quindi si osserva sperimentalmente un moto rettilineo uniformemente accelerato. Prendiamo un riferimento con origine al suolo e asse  $x$  rivolto verso l'alto:  $\vec{a} = -9.8 \text{ m/s}^2$ . Esaminiamo il caso di una caduta da altezza  $h$  con velocità iniziale nulla e  $t = t_0 = 0$ . Da (1.3.7) si ricava che  $\vec{v}(t) = -gt$  quindi la velocità aumenta in modulo durante il moto; la dipendenza della posizione dal tempo si ottiene da (1.3.8):

$$x(t) = h - \frac{1}{2}gt^2$$

---

**Posizione  
durante caduta**

quindi il punto arriva nell'origine, dove  $x = 0$ , al tempo  $\tau = \sqrt{2h/g}$ . Da (1.3.10) si ottiene  $v^2 = 2g(h - x)$  quindi il punto arriva nell'origine con

$$v_0 = \sqrt{2gh}$$

---

**Velocità al suolo**

Se invece la velocità iniziale fosse non nulla ma diretta come l'accelerazione di gravità ( $-\hat{u}_y$  nel nostro riferimento) si avrebbe la seguente legge oraria

$$x(t) = h - v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$$

da cui si ottiene, risolvendo rispetto al tempo  $t$

$$t(x) = \frac{-v_0 \pm \sqrt{v_0^2 + 2g(h - x)}}{g}$$

scartando la soluzione negativa (il tempo è positivo), il tempo di caduta per  $x = 0$  sarà

$$t_c = \frac{-v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2gh}}{g}$$

---

**Tempo di caduta**

Inoltre da (1.3.10) la velocità al suolo sarà

$$v_f^2 = v_0^2 + 2gh$$

Infine se il punto viene lanciato verso l'alto dal suolo avrà un punto della sua traiettoria in cui la velocità si annulla, dopodiché cresce di nuovo con segno opposto: le condizioni iniziali sono ora  $x_0 = 0$  e  $v_0 = v_1$

$$x(t) = v_1 t - \frac{1}{2} g t^2$$

Il punto stazionario del moto è in  $x_M = x(t_M) = v_1^2/2g$  nell'istante  $t_M = v_1/g$ : per  $t \geq t_M$  siamo nel caso del moto verticale a partire da altezza  $x_M$  e velocità iniziale nulla, quindi risulta sostituendo  $t_c = \sqrt{2x_m/g} = t_M$  e la durata del moto è quindi  $2t_M = 2v_1/g$ .

Per questo caso di moto verticale possiamo ricavare  $t(x)$  dalla legge oraria e  $v(x)$  da (1.3.10)

$$t(x) = \frac{v_1 \pm \sqrt{v_1^2 - 2gx}}{g} = t_M \pm \sqrt{t_M^2 - \frac{2x}{g}}$$

$$v(x) = \pm \sqrt{v_1^2 - 2gx}$$

Il doppio segno in entrambe è legato al fatto che il punto passa due volte nelle stesse posizioni, una volta salendo e la seconda scendendo; inoltre il punto ritorna nella posizione di partenza con velocità uguale modulo e opposta a quella iniziale.

## 1.4. Moto nel piano

### 1.4.1. Posizione. Nel caso di un moto vincolato a svolgersi su un piano

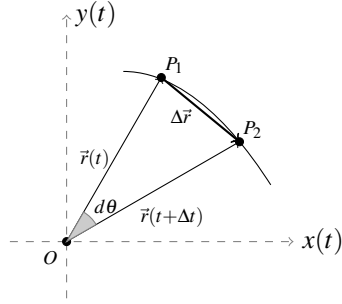


Figura 1.4.1. Moto nel piano

(all'interno di un riferimento Cartesiano) la traiettoria di un punto è in generale una linea curva: si rende necessario descrivere il moto tramite grandezze vettoriali, non solo scalari.

Oltre alle coordinate polari e cartesiane, possiamo individuare un generico punto  $P$  grazie al raggio vettore:

$$\vec{r}(t) = \overline{OP} = x(t) \hat{u}_x + y(t) \hat{u}_y$$

dove  $\overline{OP}$  è il raggio che unisce l'origine col punto  $P$  e risulta variabile nel tempo, mentre  $\hat{u}_x$  e  $\hat{u}_y$  sono i versori degli assi Cartesiani  $x$  e  $y$ ; conoscere  $\vec{r}$  significa dare  $x(t)$  e  $y(t)$  oppure  $r(t)$  e  $\theta(t)$ .

**1.4.2. Velocità.** Introduciamo l'ascissa curvilinea  $s$ , misurata a partire da un origine arbitrario sulla traiettoria: allora  $ds/dt$  indica la velocità istantanea.

Consideriamo due posizioni occupate da  $P$  al tempo  $t$  e  $t + \Delta t$ , individuate da  $\vec{r}(t)$  e  $\vec{r}(t + \Delta t) = \vec{r}(t) + \Delta \vec{r}$ . Costruiamo il rapporto incrementale  $\frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$  e chiamiamo il suo limite per  $\Delta t \rightarrow 0$  velocità vettoriale:

$$(1.4.1) \quad \vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Essa è definita come la derivata del raggio vettore rispetto al tempo; nel limite del rapporto si osserva che l'incremento del raggio vettore è tangente alla traiettoria nel punto  $P$  e uguale in modulo allo spostamento infinitesimo  $ds$ : vale  $d\vec{r} = ds \hat{u}_\tau$ , dove  $\hat{u}_\tau$  è il versore tangente alla curva; pensando il moto come una successione

Raggio vettore

Velocità vettoriale

di spostamenti infinitesimi con direzione variabile, la direzione istantanea del moto coincide con quella della tangente alla traiettoria nel punto all'istante considerato: esplicitando (1.4.1):

$$(1.4.2) \quad \vec{v} = \frac{ds}{dt} \hat{u}_\tau = v \hat{u}_\tau$$

COMPONENTI CARTESIANE

Da  $\vec{r} = x\hat{u}_x + y\hat{u}_y$  segue

$$\vec{v} = \frac{dr}{dt} = \frac{dx}{dt} \hat{u}_x + \frac{dy}{dt} \hat{u}_y = v_x \hat{u}_x + v_y \hat{u}_y$$

COMPONENTI POLARI

Sia  $\hat{u}_\rho$  il versore della direzione di  $\vec{r}$  e  $\hat{u}_\theta$  il versore ad essa ortogonale (tali versori cambiano durante il moto); allora il raggio vettore può essere espresso come  $r\hat{u}_\rho$  e vale

$$(1.4.3) \quad \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt} \hat{u}_\rho + r \frac{d\hat{u}_\rho}{dt} \Rightarrow \vec{v} = \frac{dr}{dt} \hat{u}_\rho + r \frac{d\theta}{dt} \hat{u}_\theta = \vec{v}_\rho + \vec{v}_\theta$$

La velocità, sempre tangente alla traiettoria, si scompone in velocità radiale  $\vec{v}_\rho$  (diretta lungo  $\vec{r}$  e di modulo  $dr/dt$ ) e velocità trasversa  $\vec{v}_\theta$  (ortogonale a  $\vec{r}$  e di modulo  $r d\theta/dt$ )

Abbiamo usato la derivata di un prodotto, dalla seguente nozione di **derivata di un**

**vettore:** Sia  $\vec{v}$  un vettore funzione di una grandezza scalare variabile  $t$  e siano  $\vec{v}(t)$  e  $\vec{v}(t + \Delta t)$  due valori di tale funzione: possiamo scrivere  $\vec{v}(t + \Delta t) = \vec{v}(t) + \Delta \vec{v}$  e costruire il rapporto incrementale  $\frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t}$ ; si definisce derivata del vettore  $\vec{v}$  rispetto alla variabile  $t$  il

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t}$$

Tale valore è ancora un vettore, infatti equivale al prodotto di un vettore  $d\vec{v}$  per uno scalare  $1/dt$ ; inoltre il vettore derivata non è parallelo a  $\vec{v}$ . Per un vettore definito come  $\vec{v}$  valgono le regole di derivazione delle funzioni continue.

Nota la velocità vettoriale, per conoscere la posizione si integra la (1.4.1):

$$(1.4.4) \quad \vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \int_{t_0}^t \vec{v}(t) dt$$

**1.4.3. Accelerazione.** Come nel moto rettilineo, anche l'accelerazione può essere definita come la derivata della velocità rispetto al tempo e risulta diretta verso la concavità della curva che descrive la traiettoria

$$(1.4.5) \quad \vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}$$

Utilizzando (1.4.2) e la regola di derivazione di un vettore si ottiene

$$\vec{a} = \frac{d}{dt} (v \hat{u}_\tau) = \frac{dv}{dt} \hat{u}_\tau + v \frac{d\hat{u}_\tau}{dt} = \frac{dv}{dt} \hat{u}_\tau + v \frac{d\theta}{dt} \hat{u}_n$$

dove la prima componente parallela alla velocità ne esprime la variazione del modulo, mentre la seconda è ad essa ortogonale ( $\hat{u}_\tau$  e  $\hat{u}_n$  sono rispettivamente i versori tangenziale e normale, tra loro ortogonali). Al limite per  $\Delta t \rightarrow 0$  le rette in direzione normale di due punti della traiettoria si incontrano in un punto  $C$ , centro della circonferenza tangente alla traiettoria in  $P$ , chiamata *circonferenza osculatrice*, e si chiama *centro di curvatura*. L'arco di traiettoria vale  $ds = R d\theta$  con  $R = CP$  raggio di curvatura (non è il raggio vettore).

Al variare di  $P$  lungo la traiettoria variano sia  $R$  che la posizione di  $C$  (può trovarsi sopra o sotto la traiettoria o addirittura all'infinito nei rettilinei), quindi

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{1}{R}v$$

che sostituito nell'espressione dell'accelerazione trovata prima si ottiene

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\hat{u}_\tau + \frac{v^2}{R}\hat{u}_n = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$$

in modulo  $a = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \frac{v^4}{R^2}}$ : le due componenti si chiamano *accelerazione tangenziale* e *accelerazione centripeta* o normale.

#### COMPONENTI CARTESIANE

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\hat{u}_x + \frac{dv_y}{dt}\hat{u}_y = \frac{d^2x}{dt^2}\hat{u}_x + \frac{d^2y}{dt^2}\hat{u}_y = a_x\hat{u}_x + a_y\hat{u}_y$$

Sia inoltre  $\theta$  l'angolo formato da  $\hat{u}_\tau$  con  $\hat{u}_x$

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{dv}{dt} \cos \theta - \frac{v^2}{R} \sin \theta \\ a_y &= \frac{dv}{dt} \sin \theta + \frac{v^2}{R} \cos \theta \end{aligned}$$

#### COMPONENTI POLARI

Ricordando che  $\hat{u}_\rho$  e  $\hat{u}_\theta$  sono mobili e usando (1.4.3) si ha:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{dr}{dt} \hat{u}_\rho + r \frac{d\theta}{dt} \hat{u}_\theta \right) = \frac{d^2r}{dt^2} \hat{u}_\rho + \frac{dr}{dt} \cdot \frac{d\hat{u}_\rho}{dt} + \frac{dr}{dt} \cdot \frac{d\theta}{dt} \hat{u}_\theta + r \frac{d^2\theta}{dt^2} \hat{u}_\theta + r \frac{d\theta}{dt} \cdot \frac{d\hat{u}_\theta}{dt}$$

Considerato che  $\frac{d\hat{u}_\rho}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \hat{u}_\theta$  e che  $\frac{d\hat{u}_\theta}{dt} = -\frac{d\theta}{dt} \hat{u}_\rho$  si ottiene da sopra:

$$(1.4.6) \quad \vec{a} = \left[ \frac{d^2r}{dt^2} - r \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] \hat{u}_\rho + \left[ \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dt} \left( r^2 \frac{d\theta}{dt} \right) \right] \hat{u}_\theta$$

La prima componente si chiama *accelerazione radiale* mentre la seconda *accelerazione trasversa*.

Nota la velocità vettoriale nell'istante iniziale, si ricava la velocità in un istante arbitrario integrando (1.4.5)

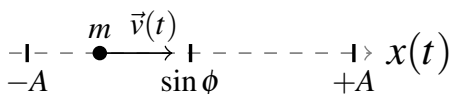
$$(1.4.7) \quad \vec{v}(t) = \vec{v}(t_0) + \int_{t_0}^t \vec{a}(t) dt$$

### 1.5. Moto armonico semplice

Si tratta di un moto vario lungo un asse rettilineo la cui legge oraria è definita come:

$$(1.5.1) \quad x(t) = A \sin(\omega t + \phi)$$

**Legge oraria  
moto armonico**



dove  $A$  è detta *ampiezza* del moto,  $\phi$  *fase iniziale* e  $\omega$  *pulsazione*; l'argomento del seno è detto *fase del moto*. Inoltre le tre grandezze appena descritte sono costanti per il moto.

Figura 1.5.1. Moto armonico

Dato che  $\sin x \in [-1, 1]$ , il punto che obbedisce alla (1.5.1) percorre un segmento lungo  $2A$  (dalla posizione  $-A$  alla posizione  $A$ ), con centro nell'origine. La distanza

massima che il punto raggiungerà dall'origine quindi sarà in modulo pari ad  $A$ . Al tempo  $t = 0$  il punto occupa la posizione  $x(0) = A \sin \phi$  ed essendo note  $A$  e  $\phi$  costanti si determina la posizione iniziale del punto - il punto si troverà nell'origine solo se  $\phi = 0$  oppure  $\phi = \pi$ .

La presenza della funzione seno (periodica di  $2\pi$ ) rende il moto armonico *periodico*: in generale

il moto di un punto si dice periodico quando, ad intervalli uguali di tempo, il punto passa nella stessa posizione con la stessa velocità per qualsiasi posizione del moto

Definizione di moto periodico

Per determinare il *periodo* del moto armonico che indicheremo con  $T$ , consideriamo due tempi  $t'$ ,  $t$  tali che  $t' - t = T$ ; per come sono definiti tali tempi si avrà  $x(t') = x(t)$  e da (1.5.1) dovendo le fasi differire di  $2\pi$  nei due istanti si ha  $\omega t' + \phi = \omega t + \phi + 2\pi$ ; segue che il periodo  $T = t' - t$  vale

$$(1.5.2) \quad T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T}$$

**Periodo delle oscillazioni**

Si definisce *frequenza*  $\nu$  del moto il numero di oscillazioni in un secondo

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

**Frequenza**

Il periodo (quindi la frequenza) di un moto armonico semplice sono indipendenti dall'ampiezza del moto.

Fissato il valore della pulsazione si ottengono moti armonici che differiscono solo al variare dell'ampiezza e della fase iniziale.

La velocità di un punto che si muove di moto armonico semplice si calcola derivando  $x(t)$ :

$$(1.5.3) \quad \dot{x} = v(t) = \frac{dx}{dt} = \omega A \cos(\omega t + \phi)$$

**Velocità moto armonico**

Con una ulteriore derivazione si ottiene l'accelerazione:

$$(1.5.4) \quad \ddot{x} = \dot{v} = a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A \sin(\omega t + \phi) = -\omega^2 x(t)$$

**Accelerazione moto armonico**

Osservando la forma delle relazioni ottenute si nota che la velocità assume valore massimo nell'origine del moto, dove vale  $\omega A$ , e si annulla negli estremi del moto ( $x = A$  e  $x = -A$ ); l'accelerazione si annulla nel centro del moto ed è massima in modulo (vale  $\omega^2 A$ ) agli estremi del moto, dove la velocità si annulla; inoltre l'accelerazione è sempre proporzionale ed opposta allo spostamento dal centro di oscillazione.

Tali caratteristiche del moto armonico si descrivono nel modo seguente: la velocità è in *quadratura di fase* con lo spostamento (sfasata di  $\pi/2$ ) mentre l'accelerazione è in *opposizione di fase* con lo spostamento (sfasata di  $\pi$ ).

Le condizioni iniziali del moto sono individuate ponendo il tempo  $t = 0$  e conoscendo le costanti  $A$  e  $\phi$ :

$$x_0 = x(0) = A \sin \phi, \quad \vec{v}_0 = \vec{v}(0) = \omega A \cos \phi$$

Note invece le condizioni iniziali  $x_0$  e  $v_0$ , si possono calcolare le costanti  $A$  e  $\phi$ :

$$\tan \phi = \frac{\omega x_0}{v_0}, \quad A^2 = x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}$$

Inserendo la (1.5.4) nella (1.3.9) si calcola la dipendenza della velocità dalla posizione

$$\vec{v}(x) = \int_{x_0}^x \vec{a}(x) dx = -\omega^2 \int_{x_0}^x x dx = \left[ \frac{1}{2} \omega^2 (x_0^2 - x^2) = \frac{1}{2} \vec{v}^2 - \frac{1}{2} \vec{v}_0^2 \right] \Rightarrow$$

$$\vec{v}^2 = \vec{v}_0^2 + \omega^2 (x_0^2 - x^2)$$

Con riferimento al centro di oscillazione dove  $x_0 = 0$  e  $\vec{v}_0 = \omega A$  si ottiene

$$(1.5.5) \quad \vec{v}^2(x) = \omega^2 (A^2 - x^2)$$

In modo coerente alle osservazioni fatte in precedenza  $\vec{v}(0) = \pm \omega A$  col segno determinato dal verso di percorrenza.

Un moto si dice armonico se l'accelerazione è proporzionale allo spostamento con costante di proporzionalità negativa ( $\vec{a}(x) \propto -\mathbf{k}x$ ), ovvero la condizione necessaria perché un moto sia armonico è data dalla seguente

$$(1.5.6) \quad \ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

dove  $\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$ . Le funzioni che soddisfano tale equazione nel campo reale sono seno e coseno. Segue che usare il seno o il coseno per descrivere il moto armonico non ne altera le proprietà, se non di un fattore di sfasamento  $\pi/2$ .

## 1.6. Moto circolare

Si definisce in questo modo un moto piano la cui traiettoria è rappresentata da una circonferenza. Dato che la velocità cambia sempre direzione, l'accelerazione centripeta è sempre non nulla (agisce una forza verso il centro della circonferenza detta *forza centripeta*).

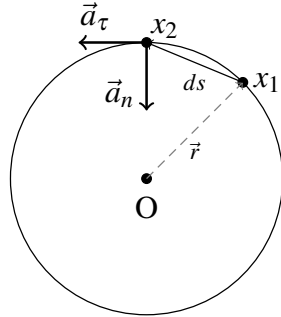


Figura 1.6.1. Moto circolare

Se la velocità è costante in modulo l'accelerazione tangenziale è nulla ( $\vec{a} = \vec{a}_n$ ), altrimenti la direzione dell'accelerazione non passa per il centro.

Prendiamo in esame l'angolo spazzato dal punto nell'arco di tempo come variabile ( $\theta(t)$ ), ponendoci in un sistema di coordinate polari col raggio come costante ( $r(t) = R$ ), e definiamo la *velocità angolare* come derivata dell'angolo rispetto al tempo:

**Velocità  
angolare**

$$(1.6.1) \quad \omega(t) = \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{R} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{v(t)}{R}$$

che risulta proporzionale alla velocità con cui è descritta la circonferenza (se una è variabile lo è anche l'altra). Infine la velocità radiale è nulla poiché la distanza dall'origine rimane costante su una circonferenza.

**1.6.1. Moto circolare uniforme.** In questo caso si hanno  $v$  e  $\omega$  costanti e le leggi orarie diventano

$$s(t) = s_0 + vt$$

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega t$$

La velocità si mantiene costante in modulo, come l'accelerazione, la quale vale

$$(1.6.2) \quad a = a_n = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R$$

Nota che si tratta di un moto periodico con  $T = \frac{2\pi T}{v} = \frac{2\pi}{\omega}$  per compiere un giro; i moti proiettati sugli assi cartesiani sono

$$\begin{cases} x = R \cos \theta = R \cos (\omega t + \theta_0) \\ y = R \sin \theta = R \sin (\omega t + \theta_0) \end{cases}$$

**1.6.2. Moto circolare non uniforme.** In questo caso la velocità varia anche in modulo, dunque dobbiamo considerare anche l'accelerazione tangenziale  $\vec{a}_\tau = d\vec{v}/dt$ ; definiamo allora l'*accelerazione angolare* come

$$(1.6.3) \quad \alpha(t) = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{1}{R} \cdot \frac{dv}{dt} = \frac{\alpha_\tau}{R}$$

**Accelerazione  
angolare**

Se è nota la legge oraria  $\theta(t)$  con le due derivazioni (1.6.1) e (1.6.3) ricaviamo la variazione dell'angolo e della velocità angolare; nota invece la  $\alpha(t)$  integriamo ottenendo

$$(1.6.4) \quad \omega(t) = \omega_0 + \int_{t_0}^t \alpha(t) dt$$

$$(1.6.5) \quad \theta(t) = \theta_0 + \int_{t_0}^t \omega(t) dt$$

Se invece di conoscere  $\alpha(t)$  è nota  $\alpha(\theta)$  possiamo calcolare l'incremento della velocità angolare in corrispondenza all'incremento angolare

$$(1.6.6) \quad \alpha(\theta) = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \omega \frac{d\omega}{d\theta} \Rightarrow \alpha d\theta = \omega d\omega \Rightarrow \int_{\theta_0}^{\theta} \alpha(\theta) d\theta = \frac{1}{2}\omega^2 - \frac{1}{2}\omega_0^2$$

**1.6.3. Moto circolare uniformemente accelerato.** In questo caso  $\alpha(t)$  è costante ( $\alpha_\tau$  è costante); ponendo  $t = 0$  si ottiene da (1.6.4) e (1.6.5)

$$\omega(t) = \omega_0 + \alpha t, \quad \theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

Inoltre l'accelerazione centripeta vale  $\alpha_n = \omega^2 R = (\omega_0 + \alpha t)^2 R$ .

## 1.7. Lancio balistico

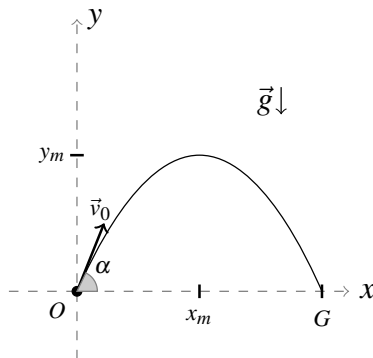


Figura 1.7.1. Moto circolare

Riprendendo il *moto verticale* (pagina 17) facciamo la seguente considerazione: la velocità iniziale del punto lanciato dall'origine formi un angolo  $\alpha$  con l'asse orizzontale; il moto è caratterizzato da una accelerazione costante  $\vec{a} = \vec{g} = -g\hat{u}_y$ , mentre le condizioni iniziali sono  $r = 0$  e  $v(0) = v_0$  all'istante del lancio ( $t = 0$ ).

Per la (1.4.7) vale

$$v(t) = v_0 + \int_0^t a(t) dt = v_0 - gt \hat{u}_y$$

Dato che  $\vec{v}_0 = (v_0 \cos \alpha) \hat{u}_x + (v_0 \sin \alpha) \hat{u}_y$  si può riscrivere la precedente come

$$\vec{v}(t) = (v_0 \cos \alpha) \hat{u}_x + (v_0 \sin \alpha - gt) \hat{u}_y$$

Segue che le leggi orarie dei moti sugli assi sono, rispettivamente

$$\begin{cases} x(t) = v_0 \cos \alpha t \\ y(t) = v_0 \sin \alpha t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

Sull'asse  $x$  il moto è uniforme mentre sull'asse  $y$  è uniformemente accelerato; la *traiettoria* si ricava elidendo il tempo tra  $x(t)$  e  $y(t)$  ottenendo la funzione  $t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha}$  che permette di scrivere

---

**Traiettoria**

$$y(x) = x \tan \alpha - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2$$

Per calcolare la gittata, ovvero la distanza raggiunta dal punto del lancio sull'asse orizzontale, imponiamo  $y(x) = 0$  ottenendo due soluzioni:  $x = 0$  e la gittata

---

**Gittata**

$$x_G = \frac{2\vec{v}_0^2 \cdot \cos^2 \alpha \tan \alpha}{g} = \frac{2\vec{v}_0^2 \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha}{g} = 2x_M = \boxed{\frac{\vec{v}_0^2}{g} \sin(2\alpha)}$$

dove  $x_M = \frac{v_0^2 \cos \alpha \sin \alpha}{g}$  è la coordinata del punto medio del segmento che rappresenta la gittata e quindi, per la simmetria della traiettoria parabolica, corrisponde alla coordinata  $x$  del punto di massima altezza raggiunta:

---

**Massima altezza  
proiettile**

$$y_M = y(x_M) = \frac{v_0^2 \cdot \sin^2 \alpha}{2g}$$

Si osserva che l'angolo di lancio per cui si ha la massima altezza si ottiene da  $\frac{dx_G}{d\alpha} = 0 \Rightarrow \frac{2v_0^2}{g} (-\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = 0$  e risulta  $\alpha = 45^\circ$ ; si può anche ragionare annullando  $dy/dx$  oppure sfruttando il fatto che nel punto di massima altezza la velocità verticale è nulla, cioè  $t = t_M = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}$  e poi sostituendo in  $x(t)$  e  $y(t)$  si ottengono  $x_M$  e  $y_M$ .

L'accelerazione del moto può essere scomposta nel modo seguente:  $\vec{a} = \cancel{a_\tau \hat{\tau}} + a_n \hat{n} = \frac{v_0^2}{\rho} \hat{n}$  con  $\rho$  il *raggio del cerchio osculatore* della parabola; infatti l'accelerazione tangenziale è nulla nel vertice della parabola e quella normale ha stessa direzione del raggio del cerchio osculatore; è possibile esprimere tale raggio come

$$\rho = \frac{\vec{v}_0^2 \cos^2 \alpha}{g}$$

Infine, si nota che nella posizione finale del moto, alla massima gittata  $x_G$ , la velocità è la stessa dell'istante iniziale posta in modo simmetrico rispetto all'asse orizzontale.



## CAPITOLO 2

### Dinamica del punto

#### 2.1. Leggi di Newton

L'interazione, ovvero l'azione di una forza, porta a una variazione dello stato del moto: essa è la grandezza che esprime e misura l'interazione tra sistemi fisici. La formulazione quantitativa del legame tra la forza e lo stato del moto è data dal SECONDO PRINCIPIO DELLA DINAMICA

$$(2.1.1) \quad \vec{F} = m\vec{a} \quad \text{Seconda legge di Newton}$$

L'interazione di un punto materiale con l'ambiente è rappresentata dal vettore  $\vec{F}$ , che causa una variazione di velocità nel tempo (accelerazione) rispetto alla sua *massa inerziale* (chiamata così perché esprime l'inerzia del punto, ovvero la sua resistenza a variare il proprio stato di moto). Possiamo definire le unità di misura di forza, accelerazione e massa come:

$$[m] = kg; \quad [\vec{a}] = m/s^2; \quad [\vec{F}] = kg \cdot m/s^2 = N$$

Si osservi che la legge di Newton può essere riscritta come  $\vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = m \frac{d}{dt} \left( \frac{d\vec{r}}{dt} \right) = m \frac{d\vec{v}}{dt}$  da cui si nota che se  $\vec{a} = 0$  allora  $\vec{v}$  è costante; questo caso particolare della legge di Newton è il principio di inerzia, al quale ci si riferisce come PRIMO PRINCIPIO DELLA DINAMICA

*In assenza di forze un corpo resta nel suo stato di quiete o di moto uniforme  
(somma di tutte le forze agenti nulla)* Prima legge di Newton

Infine si osserva che le forze agiscono sempre a coppie abbinate, con punti di applicazione diversi: sia  $\vec{F}_{AB}$  una forza che agisce da  $A$  su  $B$ , allora si avrà una forza uguale ed opposta su  $B$  diretta verso  $A$  secondo la relazione nota come TERZO PRINCIPIO DELLA DINAMICA

$$(2.1.2) \quad \vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA} \quad \text{Azione e reazione}$$

Questi principi della dinamica valgono solo nei sistemi inerziali, ovvero dove vale il primo principio; altrimenti sono necessari termini correttivi nelle leggi e nelle relazioni.

Inoltre, si deduce che un punto soggetto a molteplici forze avrà un moto determinato dalla risultante della somma di tali forze; se invece un punto rimane fermo anche se soggetto a una forza o una risultante non nulla, si deduce che c'è una reazione uguale ed opposta dell'ambiente, chiamata *reazione vincolare*.

#### 2.2. Quantità di moto e impulso

Se riscriviamo la seconda legge di Newton in funzione della traiettoria otteniamo  $\vec{F} = m\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = m \frac{d}{dt} \vec{v} = \frac{d}{dt} (m\vec{v})$ , ponendoci nel caso di una massa costante;

possiamo definire la quantità di moto come

**Quantità di moto** (2.2.1)  $\vec{p} = m\vec{v}$

Dunque la (2.1.1) diventa

(2.2.2)  $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$

dove si osserva che la quantità di moto è costante se le forze sono nulle. Questa formulazione è valida anche se la massa non è costante. Dalla precedente si ha che  $\vec{F}dt = d\vec{p}$  e integrando si ottiene

**Teorema dell'impulso**

(2.2.3) 
$$\int_0^t \vec{F}dt = \int_{p_0}^p d\vec{p} \Rightarrow \boxed{\int_0^t \vec{F}dt = \Delta\vec{p} = \vec{I}}$$

dove il termine vettoriale  $\vec{I}$  è chiamato impulso della forza ed esprime una interazione tra forze che ha variato la quantità di moto; minore è il tempo di interazione e maggiore sarà l'impulso che scaturirà dall'interazione. Con forza costante si può scrivere  $\vec{F}(t) = m\Delta\vec{v}$  e applicando il teorema della media all'integrale dell'impulso si ha:

$$\vec{I} = \overline{\vec{F}}\tau$$

dove  $\tau$  è il tempo  $\Delta t$  di interazione tra le forze.

### 2.3. Attrito radente

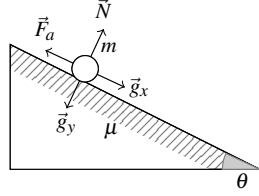


Figura 2.3.1. Attrito radente

Si tratta di una forza che dipende dalla reazione vincolare e non dalla superficie di appoggio; inoltre ogni materiale ha un proprio *coefficiente di attrito*  $\mu$ , che può essere statico o dinamico ed è costante. Si osserva sperimentalmente che:

**Attrito radente**

(2.3.1)  $\vec{F}_{a,MAX}^s = \mu_s \vec{N}; \quad \vec{F}_a^d = \mu_d \vec{N}$

Nota che abbiamo usato la forza di attrito statica massima, superata la quale l'oggetto si mette in moto; le forze di attrito non si oppongono al moto.

Su un piano inclinato si osserva che, oltre un angolo limite, la forza peso può vincere la forza di attrito statica, ovvero:

$$\vec{F}_a^s = m\vec{g} \sin \theta \leq \vec{F}_{a,MAX}^s = \mu_s \vec{N}; \quad \vec{N} = m\vec{g} \cos \theta$$

**Equilibrio statico dell'attrito**

(2.3.2)  $\sin \theta \leq \mu_s \cos \theta \Rightarrow \boxed{\tan \theta \leq \mu_s}$

Per angoli la cui tangente è maggiore di  $\mu_s$ , il corpo scivola lungo il piano inclinato con attrito.

Nel caso di moto (attrito dinamico) le equazioni del moto sarebbero:

$$m\vec{g} \sin \theta - \mu_d m\vec{g} \cos \theta = m\vec{a}_x \Rightarrow \boxed{\vec{g}(\sin \theta - \mu_d \cos \theta) = \vec{a}_x}$$

Si è così ottenuta la formulazione dell'accelerazione su un piano inclinato in presenza di attrito dinamico. Nota che se  $\sin \theta - \mu_d \cos \theta = 0$  ovvero  $\tan \theta = \mu_d$  l'accelerazione  $\vec{a}_x = 0$  quindi il corpo cade di moto rettilineo uniforme.

## 2.4. Attrito viscoso

Il moto di un corpo in un fluido è influenzato dall'attrito viscoso, una quantità in generale proporzionale alla velocità  $\vec{F}_a \propto \vec{v}$ . Come per l'attrito radente, entra in gioco una costante dipendente dal fluido chiamata *coefficiente di viscosità* e la relazione diventa:

$$\vec{F}_a = -b\vec{v}$$

---

**Attrito viscoso**

Si noti che il segno meno implica che l'attrito viscoso si oppone sempre al moto. Inoltre non è ammessa una situazione di equilibrio statico: se il corpo è fermo ( $\vec{v} = 0$ ) l'attrito viscoso è nullo; tuttavia esiste un equilibrio dinamico di un corpo in caduta sottoposto ad attrito viscoso:

sia un punto materiale in caduta lungo una retta:

$$m\vec{g} - b\vec{v} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

Mettiamo in evidenza la massa riscrivendo la costante  $b = mk$ :

$$mg - mk\vec{v} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow \vec{g} - k\vec{v} = \frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow dt = \frac{d\vec{v}}{\vec{g} - k\vec{v}}$$

Consideriamo la velocità iniziale  $v_0 = 0$  e ragionando sui moduli delle velocità integriamo ottenendo

$$\int_0^t dt' = \int_{v_0}^v \frac{dv'}{g - kv'} \Rightarrow t = \left[ -\frac{1}{k} \ln(g - kv) \right]_{v_0}^v \Rightarrow -kt = \ln\left(\frac{g - kv}{g - kv_0}\right)$$

$$(2.4.1) \quad v(t) = \frac{g}{k} (1 - e^{-kt})$$

---

**Velocità di caduta libera**

Si osserva che per un tempo  $t \rightarrow \infty$  la velocità  $v(t) = g/k$  e se  $t \geq 1/k$  il corpo si muove di moto rettilineo uniforme (equilibrio dinamico).

## 2.5. Molle e fili

**2.5.1. Legge di Hooke.** Un corpo che deformandosi sviluppa una forza resistente si chiama corpo elastico: la molla ne è un rappresentante e tale forza viene definita con la legge di Hooke:

$$\vec{F}_H = -k\Delta\vec{x}$$

dove  $\Delta\vec{x} = \vec{x} - \vec{x}_0$  rappresenta la deformazione della molla e  $\vec{x}_0$  è la lunghezza iniziale.

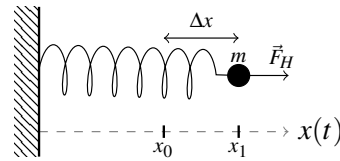


Figura 2.5.1. Legge di Hooke

---

**Legge di Hooke**

La *forza elastica* è quindi sempre opposta alla variazione che provoca la deformazione: tale forza si chiama *forza di richiamo*; una molla ideale ha un allungamento lineare e non ha massa; infine la costante  $k$  è detta *costante elastica* e dipende dal materiale della molla.

Il moto risultante dall'effetto di una forza elastica è rettilineo e l'accelerazione vale:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_H}{m} = -\frac{k}{m}\Delta\vec{x} \Rightarrow \boxed{\vec{a} = -\omega^2\Delta\vec{x}}$$

Si osserva che il moto è armonico semplice con pulsazione  $\omega = \sqrt{k/m}$  e periodo  $T = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{m/k}$ . Si abbia ora una molla attaccata a un muro a un'estremità con

un punto materiale di massa  $m$  all'altra: se la molla è compressa e viene lasciata libera di muoversi il punto si muoverà di moto armonico secondo l'equazione

$$m \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = -k \vec{x} \Rightarrow x = A \sin(\omega t + \phi)$$

dove  $\omega$  è data dalle precedenti considerazioni e  $A$  e  $\phi$  si calcolano dalle condizioni iniziali

$$x_0 = A \sin \phi, \quad 0 = \omega A \cos \phi$$

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}, \quad \tan \phi = \omega \frac{x_0}{v_0}$$

Per  $\phi \in [0, 2\pi]$  sono possibili due soluzioni coniugate. Le espressioni della legge oraria e della velocità risultano invece:

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t), \quad v(t) = \omega x_0 \sin(\omega t)$$

dalle leggi dell'oscillatore armonico.

**2.5.2. Tensione delle funi.** Una fune ideale può essere modellizzata da una molla con costante elastica infinita; inoltre una fune ideale è priva di massa e non occupa spazio. Le funi sono spesso abbinate con carrucole ideali: esse non hanno attrito e permettono di trasferire la tensione della fune su una direzione differente senza modificarla.

Si abbia ad esempio una fune attaccata a un muro e una forza  $\vec{F}_1$  applicata al suo altro capo in direzione ortogonale e verso opposto alla posizione del muro: la forza applicata al capo libero della fune è contrastata da una forza uguale ed opposta lungo la fune chiamata *tensione* (corrisponde alla proiezione della forza lungo il filo teso), che agisce a sua volta sul capo vincolato al muro e provoca una reazione vincolare  $\vec{N}$  uguale in modulo, direzione e verso alla forza  $\vec{F}_1$ .

Per dimostrare il trasferimento di forza dovuto alla tensione immaginiamo di avere un filo teso e consideriamo un suo infinitesimo elemento  $dl$ : per far sì che sia in equilibrio esso deve avere applicate su di sé due forze,  $-\vec{T}_F$  e  $\vec{T}_F$ , uguali in modulo e direzione; questo vale per ogni elemento  $dl$  del filo e quindi si ha che  $\vec{T} = -\vec{F}_1$  rifacendosi all'esempio precedente.

## 2.6. Pendolo

**2.6.1. Pendolo semplice.** Il pendolo semplice è costituito da un punto materiale appeso tramite un filo inestensibile di massa nulla: la posizione di *equilibrio statico* è quella verticale, col punto fermo e il filo teso; la forza peso del punto è bilanciata dalla tensione ( $\vec{T}_F = m\vec{g}$ ). Se spostiamo il punto in una posizione differente esso comincerà ad oscillare attorno ad essa lungo un arco di circonferenza di raggio  $L$  (lunghezza del filo) in un piano verticale, scostandosi di un angolo  $\theta$  dalla posizione di equilibrio.

Le forze agenti sul punto sono il peso e la tensione, dunque il moto è regolato da  $m\vec{g} + \vec{T}_F = m\vec{a}$ ; se consideriamo le componenti del raggio vettore della traiettoria che segue il punto, descritta dall'arco di circonferenza si ha

$$\begin{cases} R_\tau = -m\vec{g} \sin \theta = m\vec{a}_\tau \\ R_n = \vec{T}_F - m\vec{g} \cos \theta = m\vec{a}_n \end{cases}$$

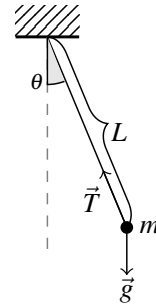


Figura 2.6.1. Pendolo semplice

Si osserva che il segno meno sulla componente tangenziale è legato al fatto che si ha una forza di richiamo, che tende a riportare il punto verso la sua posizione di equilibrio, anche se non di direzione costante. Dato che dalla (1.6.3) si ha  $\vec{a}_\tau = L \frac{d^2\theta}{dt^2}$  e  $\vec{a}_n = \frac{\vec{v}^2}{L}$  otteniamo

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{\vec{g}}{L} \sin \theta \Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \frac{\vec{g}}{L} \sin \theta = 0}$$

---

**Equazione differenziale del pendolo**

$$m \frac{\vec{v}^2}{L} = \vec{T}_F - m\vec{g} \cos \theta \quad (\blacktriangle)$$

Dalla prima, che è l'*equazione differenziale* del moto del pendolo, si ottiene la legge oraria del moto  $\theta(t)$ ; tuttavia risulta complicata per qualsiasi valore dell'angolo: sviluppiamo allora la funzione seno per piccoli angoli ( $\sin \theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!}$ ), quantitativamente per angoli minori di  $7^\circ$  si ha  $\sin \theta \sim \theta$  con errore di  $10^{-3}$ . Per *piccole oscillazioni* l'equazione del pendolo diventa, posto  $\vec{g}/L = \omega^2$ :

$$(2.6.1) \quad \ddot{\theta} + \omega^2 \theta = 0$$

---

**Piccole oscillazioni nel pendolo**

Si osserva che coincide con l'equazione del moto armonico semplice (1.5.6); la legge oraria del moto, nelle condizioni poste, risulta

$$\theta(t) = \theta_0 \sin(\omega t + \phi)$$

dove l'ampiezza dell'oscillazione  $\theta_0$  e la fase  $\phi$  dipendono dalle condizioni iniziali. Il periodo del moto è dato da

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

Il periodo non dipende dall'ampiezza dell'oscillazione, quindi per piccole oscillazioni si ha *isocronismo del pendolo*. Si hanno le seguenti espressioni:

$$\begin{cases} \text{spostamento} & x(t) = L\theta(t) = L \cdot \theta_0 \sin(\omega t + \phi) \\ \text{velocità lin.} & v(t) = \frac{ds}{dt} = L \frac{d\theta}{dt} = L\omega\theta_0 \cos(\omega t + \phi) \\ \text{velocità ang.} & \omega(t) = \frac{d\theta}{dt} = \omega\theta_0 \cos(\omega t + \phi) \end{cases}$$

La velocità è massima quando il punto si trova presso la posizione verticale ed è nulla quando il pendolo raggiunge la massima ampiezza.

La tensione del filo che sostiene il punto è data da ( $\blacktriangle$ ):

$$(2.6.2) \quad \vec{T}_F = m \left[ \vec{g} \cos \theta(t) + \frac{\vec{v}^2(t)}{L} \right]$$

---

**Tensione nel pendolo**

La tensione è massima nella posizione di equilibrio ed è minima nei punti di inversione del moto (quando si raggiunge la massima ampiezza).

**2.6.2. Pendolo conico.** Come per il pendolo semplice, solo che il punto materiale si trova a ruotare lungo una circonferenza mentre è vincolato al filo: il moto è circolare per il punto; poniamoci sul riferimento del piano su cui si trova la traiettoria:

$$\begin{cases} \text{x:} & \vec{T}_F \sin \theta = m\vec{a}_{cp} \\ \text{y:} & \vec{T}_F \cos \theta - m\vec{g} = 0 \end{cases}$$

La tensione fa le veci della forza centripeta, quindi si ha  $m\omega^2 R = m\omega^2 L \sin \theta$  posto  $R = L \sin \theta$ . Dalla seconda si ha:

$$\vec{T}_F = \frac{m\vec{g}}{\cos \theta} = m\omega^2 L \Rightarrow \boxed{\omega = \sqrt{\frac{g}{L \cos \theta}}}$$

Sotto questa condizione il pendolo conico ruota con moto circolare uniforme, rientrando in un *equilibrio dinamico*.

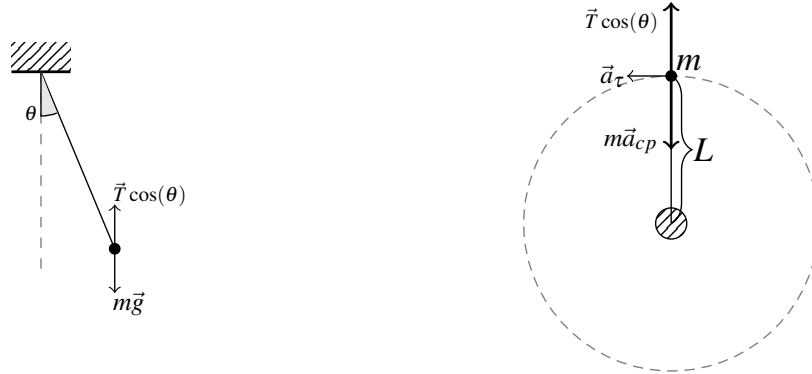


Figura 2.6.2. Pendolo conico

## 2.7. Sistemi non inerziali

Un sistema di riferimento si dice *inerziale* se valgono al suo interno i tre principi della dinamica. Per esempio un osservatore all'interno di un vagone in accelerazione chiuso (senza finestrini) vedrà un pendolo spostarsi in una posizione di equilibrio differente da quella verticale, mentre un osservatore all'esterno vedrà una forza sul pendolo a bilanciare quella forza dall'accelerazione del vagone

Esterno	Interno
$\begin{cases} T \sin \theta = ma \cdot \hat{u}_x & (x) \\ T \cos \theta - mg = 0 & (y) \end{cases}$	$\begin{cases} T \sin \theta - \boxed{F} = 0 & (x) \\ T \cos \theta - mg = 0 & (y) \end{cases}$

La forza nel riquadro, che è quella percepita dall'osservatore interno, si chiama *forza apparente*, poiché non soddisfa il terzo principio della dinamica (tali forze non hanno la reazione) ma è necessaria la sua esistenza per descrivere la dinamica dei sistemi non inerziali.

## 2.8. Lavoro, potenza, energia cinetica

Supponiamo di avere un punto materiale  $m$ , che si muova lungo una traiettoria per azione di una forza  $\vec{F}$ ; in un tempo  $dt$  esso si sposta di un tratto  $d\vec{r}$ . La forza è costante in ogni punto della traiettoria: essa ha cambiato il suo *punto di applicazione*. Vale il secondo principio della dinamica

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F}$$

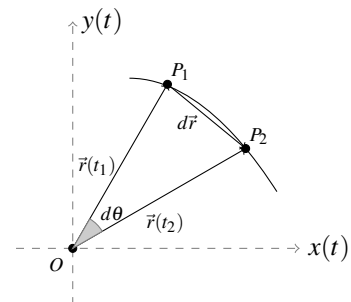


Figura 2.8.1. Lavoro

Se riuscissimo ad usare una formulazione scalare questo sarebbe utile nello studio di sistemi di forze vettoriali: con l'operazione di prodotto scalare si ottiene uno scalare

da un campo vettoriale; la precedente diventa:

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot d\vec{r} \Rightarrow m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot d\vec{r} \Rightarrow m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} dt = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$m \cdot \vec{v} d\vec{v} = \vec{F} \cdot d\vec{r} \Rightarrow \frac{m}{2} (d\vec{v} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot d\vec{v}) = \vec{F} \cdot d\vec{r} \Rightarrow \boxed{d\left(\frac{m}{2}v^2\right) = \vec{F} \cdot d\vec{r}}$$

Al primo membro abbiamo una quantità che non dipende dalla traiettoria, mentre il prodotto scalare al secondo membro dipende dalla traiettoria (incide la direzione reciproca dei due vettori). Se tale prodotto è positivo, anche il differenziale a primo membro sarà positivo: allora il prodotto agisce aumentando la velocità nel differenziale; se  $\vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$  allora  $\frac{1}{2}m\vec{v}^2 = \text{costante}$ . Nella formulazione integrale:

$$(2.8.1) \quad \int_A^B d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \int_L \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

dove il secondo membro è un integrale di linea dipendente dal percorso, mentre il primo membro è un differenziale esatto il cui integrale può essere calcolato come variazione *finita* dell'energia cinetica:

$$(2.8.2) \quad \int_A^B d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = \Delta K$$

---

**Variazione di  
energia cinetica**

Chiamo dunque lavoro l'*integrale di linea* del prodotto scalare della forza sullo spostamento del punto di applicazione:

$$W := \int_L \vec{F} d\vec{r}$$

---

**Lavoro**

Il lavoro si misura in Joule ( $[J] = N \cdot m$ ). Possiamo enunciare allora il TEOREMA DELLE FORZE VIVE formulando il lavoro come  $dk = dW$ , dove con  $d$  si sottintende la dipendenza del differenziale dal percorso; si parla di forze vive riferendosi a quelle che producono uno spostamento e non vi si oppongono (forze resistenti).

Il lavoro è l'integrale di linea di una forza  $\vec{F}$  che segue la seconda legge della dinamica, ovvero è la somma di tutte le forze:

$$(2.8.3) \quad W = \int_L \vec{F} d\vec{r} = \int_L \sum_{i=1}^N \vec{F}_i d\vec{r} = \boxed{\sum_{i=1}^N \int_L \vec{F}_i d\vec{r}}$$

---

**Teorema delle  
forze vive**

Quindi il lavoro complessivo è la somma dei lavori delle singole forze. Si parla di lavoro *scambiato* all'interno di un sistema a seguito dell'interazione delle singole forze.

Come conseguenza del teorema delle forze vive, il lavoro di una forza produce sempre una variazione di energia cinetica: dunque l'energia cinetica può essere conosciuta a meno di una costante:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 + \alpha$$

---

**Energia cinetica**

Per una velocità nulla possiamo imporre  $K = 0$  e  $\alpha = 0$ , per esempio in uno stato di quiete del sistema. La variazione di energia cinetica così definita è una caratteristica del punto: l'energia cinetica è una *funzione di stato* del punto.

Variare l'energia cinetica di un corpo in tempi diversi non influisce sulla quantità di lavoro da erogare ma su una quantità chiamata potenza e definita come variazione del lavoro nell'unità di tempo:

---

**Potenza** (2.8.4) 
$$P = \frac{dW}{dt} \Rightarrow \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

La potenza si misura in Watt [W].

**2.8.1. Lavoro della forza peso.** Sia uno spostamento tra due punti  $A$  e  $B$  individuato dal vettore  $\Delta\vec{r}$ , differenza tra i due vettori spostamento  $\vec{r}_A$  e  $\vec{r}_B$  e  $l$  la traiettoria lungo uno scivolo; se agisce la forza peso, il lavoro che essa compie è dato da:

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B (-m\vec{g}) \cdot d\vec{r} \Rightarrow -m\vec{g} \cdot \int_A^B d\vec{r} = \boxed{-m\vec{g} \cdot \Delta\vec{r}}$$

dove abbiamo portato fuori la forza di gravità e la massa per la loro costanza e indipendenza e  $\Delta\vec{r} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$ . L'integrale non dipende dal percorso  $l$  ma dallo spostamento complessivo. Interpretando il prodotto scalare nel riferimento cartesiano otteniamo:

$$-mg\hat{u}_y \cdot (\Delta x\hat{u}_x + \Delta y\hat{u}_y + \Delta z\hat{u}_z)$$

e considerando che il prodotto di versori ortogonali si elide, dal prodotto scalare si ha  $-mg\Delta y = -mg(y_B - y_A) = mgy_A - mgy_B > 0$ ; tale quantità è maggiore di zero poiché  $y_A$  era maggiore di  $y_B$ : la forza peso svolge un *lavoro motore* per portare un punto da una quota più alta a una più bassa. Si osserva che la differenza può essere riscritta ponendo  $U = mgz + \beta$  considerando che la costante  $\beta$  scompare nella differenza. Per la presenza di tale costante è necessario specificare una quota di riferimento all'interno del sistema, alla quale  $U = 0 \Rightarrow \beta = 0$ .

Interpretando la  $U$  come differenza possiamo scrivere il lavoro come:

(2.8.5) 
$$W = -\Delta U = -(mgz_A - mgz_B)$$

**2.8.2. Lavoro della forza elastica.** Si abbia una molla vincolata a un muro e la sua estremità libera si trovi in  $x = 0$ ; il lavoro della forza elastica  $\vec{F} = -k(B - A)$  per una deformazione  $dx = (B - A)$  lungo l'asse  $x$  vale:

$$W = \int_A^B -k\vec{x}dx = -k \int_A^B \vec{x}dx = \boxed{\frac{1}{2}k\vec{x}_A^2 - \frac{1}{2}k\vec{x}_B^2}$$

Se la deformazione  $\Delta\vec{x}$  avviene verso la posizione di equilibrio il lavoro è motore, se avviene allontanandosi da essa il lavoro è resistente.

Facendo alcune considerazioni sulle forze conservative (vedi sezione successiva), chiamando la quantità  $\frac{1}{2}kx^2 + c$  *energia potenziale elastica*  $U_E$  il lavoro vale  $W = -\Delta U_E$ . Se applichiamo nabla possiamo definire

---

**Forza elastica**

$$\vec{F}_E = -\vec{\nabla}U_E = -kx\hat{u}_x$$

Il risultato è dato dal fatto che la direzione dell'allungamento della molla è lungo l'asse  $x$ . Imponiamo inoltre che la costante  $c$  nell'energia potenziale elastica valga 0 poiché vogliamo che nella posizione di riposo essa abbia energia potenziale elastica nulla.

Si osserva che queste considerazioni sull'energia potenziale sono valide poiché la forza elastica è conservativa ( $\oint \vec{F}_E \cdot d\vec{r} = 0$ ).



**2.8.3. Lavoro della forza di attrito.** Sia  $\mu_d$  il coefficiente di attrito dinamico di un piano scabro su cui si trova un punto di massa  $m$  in movimento: esso è sottoposto a una forza di attrito dinamico  $\vec{F}_A$ , a una velocità iniziale  $\vec{v}_s$ , alla reazione vincolare  $N$  e alla forza peso  $\vec{F}_P$ . Allora il lavoro è definito, per il (2.8.3), come:

$$W = \sum_{i=1}^3 \int_L \vec{F}_i \cdot d\vec{r} = \int_L \cancel{\vec{F}_P \cdot d\vec{r}} + \int_L \cancel{\vec{N} \cdot d\vec{r}} + \int_L \vec{F}_A \cdot d\vec{r}$$

dove i primi due integrali si elidono poiché reazione vincolare e forza peso in questo caso sono ortogonali allo spostamento; dal terzo integrale otteniamo:

$$-\mu_d mg \cdot \int_L d\vec{r} = \boxed{-\mu_d mgl}$$

Il segno meno dipende dal fatto che nel nostro riferimento la forza di attrito ha un angolo di  $\pi$  con la direzione dello spostamento e il prodotto scalare assume valore negativo (si ha *lavoro resistente*); inoltre per il (2.8.3) l'energia cinetica finale sarà minore di quella iniziale poiché una sua parte sarà usata dal lavoro delle forze di attrito. Si noti che che l'integrale in  $d\vec{r}$  non è un delta ma il percorso effettivo che è stato compiuto ( $l$ ).

## 2.9. Forze conservative

Nel mondo fisico vi sono alcune forze *posizionali*, che sono legate alla posizione del punto di applicazione, come per esempio la forza di gravità; essa appartiene anche alla sottoclasse delle forze *conservative*. Immaginiamo un percorso  $l$  qualsiasi tra due punti  $A$  e  $B$  nello spazio; il lavoro compiuto da una forza su questo percorso è l'integrale di linea  $\int \vec{F} \cdot d\vec{r}$  e supponiamo che abbia una soluzione che non dipenda dal percorso del tipo  $-[f(B) - f(A)] > 0$  supponendo che sia lavoro motore; se ora calcoliamo il lavoro sullo stesso percorso a ritroso otteniamo, con le stesse ipotesi  $-[f(A) - f(B)] < 0$ , un lavoro resistente uguale in modulo.

Si ottengono due risultati uguali ed opposti; chiamando circuitazione l'integrale sulla linea chiusa  $l$  che va dal punto  $A$  al punto  $B$  e torna in  $A$ , possiamo scrivere

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

Condizione di  
conservazione

Una forza conservativa ha la circuitazione nulla, ovvero l'integrale sul percorso chiuso tra due dei suoi punti di applicazione è uguale a zero, a prescindere dal percorso scelto. Inoltre una forza conservativa deve ammettere differenziale esatto per ricadere nell'ipotesi precedente, ovvero:

$$W = -[f(A) - f(B)] = -\int_A^B df \Rightarrow -\Delta f$$

Nota che quando esiste, chiamo la  $-\Delta f$  come  $-\Delta U$  e possiamo riscrivere l'integrale del lavoro come

$$W = \int_L \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_A^B dU = -\Delta U = -(U_A - U_B)$$

Lavoro di una  
forza  
conservativa

dove  $U$  è sempre definito a meno di una costante  $\beta$ .

Per il (2.8.3) si ha che  $\Delta K = W = -\Delta U$ , relazione che può essere riscritta come

$$K_A + U_A = K_B + U_B$$

Questa uguaglianza è sempre verificata nell'ipotesi di forze conservative: definisco una quantità chiamata *energia meccanica* come

---


$$\text{Energia meccanica} \quad (2.9.1) \quad E = K + U$$

Nel caso di forze conservative tale grandezza è costante nel sistema. Se non si conserva allora  $\Delta E = (K_B - K_A) + (U_B - U_A) \neq 0$ , in presenza di forze non conservative (come la forza di attrito).

Il lavoro di un sistema in cui agiscano forze non conservative allora vale:

$$(2.9.2) \quad W = \Delta E$$

## 2.10. Superficie equipotenziale

Possiamo modellizzare il mondo fisico come se fosse un campo vettoriale: in presenza di forze conservative si può studiare come se fosse un campo scalare, per via della natura dell'integrale di linea che determina il lavoro in tal caso; questo campo, per quanto riguarda la forza di gravità, dipende quindi dalla quota. Ogni quota si presenta come una superficie sulla quale la funzione  $U$  assume sempre lo stesso valore; una superficie di questo tipo si dice *equipotenziale*, e su di essa non agiscono forze.

Nella formulazione locale il lavoro infinitesimo  $dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = -dU$ ; se  $dU = 0$  significa che la proiezione della forza sullo spostamento è nulla ( $\vec{F} \perp d\vec{r}$ ) e l'energia potenziale si mantiene costante.

Supponiamo di muoverci lungo l'asse  $z$ : si ha  $\vec{F} \cdot d\vec{z} = -dU$ ; per descrivere il campo vettoriale rispetto a quello scalare riscrivo come  $\vec{F} = -\frac{dU}{dz}$ . Tuttavia si perde la natura vettoriale. Se si ha una variazione positiva della  $z$  allora  $dU > 0$  (salendo di quota aumenta l'energia potenziale); il campo vettoriale è rivolto verso il basso e il segno meno dell'energia potenziale rispecchia questa osservazione.

Sapendo che  $U = mgz$  possiamo scrivere  $d/dz U = mg$ .

Introduciamo l'operatore nabla per formalizzare correttamente la precedente:

---

**Nabla**

$$\vec{\nabla} := \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

La nabla effettua l'operazione di *gradiente* che trasforma uno spazio scalare in uno vettoriale: dall'esempio precedente possiamo ottenere:

$$(2.10.1) \quad \vec{F} = -\vec{\nabla}U$$

ovvero viene indicata direzione e verso lungo i quali aumenta l'energia potenziale:  $U = mgz \Rightarrow \vec{\nabla}U = \left( \frac{\partial mgz}{\partial x}, \frac{\partial mgz}{\partial y}, \frac{\partial mgz}{\partial z} \right) = (0, 0, mg) = -mg\hat{u}_z$ . Dunque è possibile passare dal campo scalare al campo vettoriale tramite nabla, ricordando il segno meno legato alle forze che spingono verso una situazione di potenziale minore.

### 2.11. Momento di un vettore

Sia  $O$  il punto di osservazione; supponiamo che in  $P$  si trovi un punto materiale con una certa massa  $m$  e una velocità  $\vec{w}$ : possiamo tracciare il vettore di puntamento  $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$ ; chiamiamo  $\theta$  l'angolo compreso tra  $\vec{w}$  e il prolungamento di  $\vec{r}$ . Mettendo in relazione il vettore puntamento col vettore velocità tramite il prodotto vettoriale si ottiene un *momento* del vettore  $\vec{w}$ :

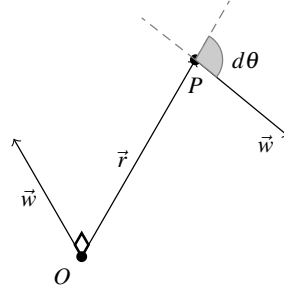


Figura 2.11.1. Momento vettore

$$(2.11.1) \quad \vec{M} = \vec{r} \times \vec{w}$$

**Momento  
vettore**

Un momento non è un vettore vero e proprio (si chiama tensore), poiché cambiando sistema di riferimento non si mantiene invariato. Il momento è ortogonale al piano dei due vettori che lo originano ed è applicato in  $O$ ; esso è nullo se  $\sin \theta = 0$  ovvero se il prolungamento di  $\vec{w}$  passa per il punto di osservazione, infatti  $|\vec{M}| = |\vec{r}| |\vec{w}| \sin \theta$ .

La distanza del polo dalla direttrice su cui giace  $\vec{w}$  definita  $d = |\vec{r}| \sin \theta$  si chiama braccio, e si ha:

$$|\vec{M}| = d |\vec{w}|$$

Nota che l'ordine dei vettori per il momento è sempre *vettore puntamento*  $\times$  *velocità*; per il verso del momento si usa la regola della mano destra:

Si osservi la mano destra: il medio è allineato al primo vettore del prodotto vettoriale, l'indice al secondo; allora direzione e verso del vettore risultante dal prodotto sono date dal pollice

Si osserva che spostando solo  $O$  varia il momento rispetto al nuovo punto di osservazione.

Un punto materiale  $m$  con velocità  $\vec{v}$  ha una quantità di moto pari a  $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$ : possiamo calcolare il momento della quantità di moto rispetto a un polo  $O$  come

$$(2.11.2) \quad \vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times (m \cdot \vec{v})$$

**Momento  
angolare**

chiamato momento angolare.

**2.11.1. Teorema del momento angolare.** Provando a derivare il momento angolare rispetto al tempo si osserva che

$$(2.11.3) \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = \underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{v}}_{(1)} + \underbrace{\vec{r} \times \frac{d(m\vec{v})}{dt}}_{(2)} = \vec{M}$$

(1)  $\frac{d\vec{r}}{dt}$  è la definizione di velocità che è in relazione a  $m\vec{v}$ : si hanno due vettori paralleli e la relazione prodotto vettoriale è nulla

(2)  $m\vec{v} = \vec{p}$  è la definizione della quantità di moto e  $\frac{d\vec{p}}{dt}$  è la forza (2.2.2) che è in relazione al raggio vettore: si ha il momento di una forza

Osservando la derivata come rapporto infinitesimo possiamo scrivere

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} \Rightarrow \int d\vec{L} = \int \vec{M} \cdot dt \Rightarrow \Delta\vec{L} \simeq \overline{\vec{M}} \int_0^\tau dt = \overline{\vec{M}} \cdot \tau$$

(2.11.4)

$$\boxed{\Delta\vec{L} = \overline{\vec{M}} \cdot \tau}$$

Dove  $\tau$  è un tempo di interazione della forza e  $\overline{\vec{M}}$  il momento angolare medio (dal teorema della media); segue che il momento angolare si conserva se in media il momento delle forze è nullo.

## CAPITOLO 3

### Dinamica dei sistemi di punti

#### 3.1. Centro di massa

##### 3.1.1. Riepilogo dinamica del punto.

**Forza:**  $\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$  (II legge della dinamica)

**Lavoro:**  $\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$  (teorema del momento angolare)

**Cinetica:**  $\int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \Delta K$  (teorema delle forze vive)

**Potenziale:**  $F = -\vec{\nabla}U$  (per forze riscrivibili in un campo scalare, conservazione dell'energia)

Consideriamo un sistema di  $n > 1$  punti materiali interagenti tra di loro e con il resto dell'universo: la forza agente sull' $i$ -esimo punto si può considerare come risultante delle *forze esterne*  $\vec{F}_i^{(E)}$  e dalle forze esercitate dagli altri  $n - 1$  punti, che sono le *forze interne* al sistema  $\vec{F}_i^{(I)}$

$$(3.1.1) \quad \vec{F}_i = \vec{F}_i^{(E)} + \vec{F}_i^{(I)}$$

Alle forze interne si applica il terzo principio della dinamica (azione e reazione): in generale la risultante delle forze esterne agenti su un punto è non nulla ma la somma di tutte le forze interne è uguale a zero; si ha

$$(3.1.2) \quad \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^{(I)} = \sum_{i,j=1}^n \vec{F}_{i,j} = 0$$

Se un sistema di corpi estesi discreti si potesse studiare come se fosse una somma di punti materiali sarebbe un vantaggio dal punto di vista analitico; per generalizzare il punto materiale è necessario introdurre nuove grandezze, la prima il *centro di massa*

**3.1.2. Posizione del centro di massa.** Si definisce posizione del centro di massa in un sistema di punti materiali il vettore

$$(3.1.3) \quad \vec{r}_{\text{CM}} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i}$$

In presenza di un solo punto il centro di massa coincide con la posizione di esso; nel caso di due punti  $x_1$  e  $x_2$  opposti simmetricamente rispetto all'origine con massa eguale, il centro di massa coincide con l'origine stesso; se invece fosse  $m_{x_1} \gg m_{x_2}$  il centro di massa si troverebbe quasi a coincidere con  $x_1$ . Allora il centro di massa, che può anche non trovarsi su un punto materiale, rappresenta il punto in cui si può assumere si trovi la massa totale del sistema. La simmetria del problema aiuta a semplificare i calcoli per il centro di massa.

Notando che  $\sum_i m_i = M$  è la massa totale del sistema si ha

$$\vec{r}_{\text{CM}} := \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{M} \Rightarrow M \cdot \vec{r}_{\text{CM}} = \sum_i m_i \vec{r}_i$$

Se nel sistema di punti alcuni sono in movimento, risulta in movimento (di solito) anche la posizione del centro di massa: calcoliamo la velocità del centro di massa col differenziale

$$\vec{v}_{\text{CM}} = \frac{d\vec{r}_{\text{CM}}}{dt} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}}{M} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i}{M} \Rightarrow M \frac{d\vec{r}_{\text{CM}}}{dt} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i \Rightarrow M \cdot \vec{v}_{\text{CM}} = \boxed{\sum_{i=1}^n \vec{p}_i}$$

$$(3.1.4) \quad \vec{p}_{\text{TOT}} := \sum_{i=1}^n \vec{p}_i \stackrel{!}{=} M \cdot \vec{v}_{\text{CM}}$$

Questa estensione concettuale ci permette di vedere la quantità di moto totale legata al centro di massa. Derivando nuovamente ottengo l'accelerazione del centro di massa:

$$\vec{a}_{\text{CM}} = \frac{d\vec{v}_{\text{CM}}}{dt} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2}}{M} \Rightarrow M \cdot \vec{a}_{\text{CM}} = \sum_{i=1}^n m_i \cdot \vec{a}_i = \boxed{\sum_{i=1}^n \vec{F}_i}$$

$$\vec{F}_{\text{TOT}} := \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \stackrel{!}{=} M \cdot \vec{a}_{\text{CM}}$$

Questa definizione non è utile, poiché la forza totale è sconosciuta perché influenzata da ogni singola forza; considerando il dato che le forze interne si elidono a vicenda per (3.1.2), possiamo riscrivere la forza totale come

$$\vec{F}_{\text{TOT}} \stackrel{!}{=} \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^{(\text{E})} + \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^{(\text{I})}$$

Il fatto che una forza sia interna o esterna, dipende dal modo in cui è definito il sistema stesso; possiamo scrivere

$$M \cdot \vec{a}_{\text{CM}} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^{(\text{E})} + \sum_{i \neq j}^n \underbrace{(\vec{F}_{i,j} - \vec{F}_{j,i})}_{\text{si elidono a coppie}}^{(\text{I})} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^{(\text{E})} = \vec{F}_{\text{TOT}}^{(\text{E})}$$

Si osserva che le forze interne non possono variare l'accelerazione del sistema, che subisce un'accelerazione pari a

---

**Teorema moto  
centro di massa**

$$(3.1.5) \quad \vec{a}_{\text{CM}} = \frac{\vec{F}_{\text{TOT}}^{(\text{E})}}{M}$$

Dal precedente e da (3.1.4) possiamo ottenere la I EQUAZIONE CARDINALE DELLA DINAMICA:

$$(3.1.6) \quad \vec{F}_{\text{TOT}}^{(\text{E})} = M \vec{a}_{\text{CM}} = M \frac{d\vec{v}_{\text{CM}}}{dt} = \frac{d}{dt} (M \vec{v}_{\text{CM}}) = \boxed{\frac{d\vec{p}_{\text{TOT}}}{dt}}$$

Conoscendo la quantità di moto iniziale, l'interazione tra punti materiali è data dal teorema delle forze interne (3.1.1) ma dato che vale la precedente (3.1.5), la quantità di moto rimane invariata a seguito dell'azione di forze interne:

Quando la risultante delle forze esterne è nulla, la quantità di moto totale del sistema rimane costante nel tempo e il centro di massa si muove di moto rettilineo uniforme o resta in quiete

$$\vec{a}_{\text{CM}} = 0, \vec{v}_{\text{CM}} = \text{costante}, \vec{p}_{\text{TOT}} = \text{costante}$$

---

**Conservazione  
della quantità di  
moto**

### 3.2. Momento angolare

Supponiamo di trovarci in un riferimento bidimensionale, sia  $S$  un sistema e  $P_i$  un suo punto materiale,  $O$  un polo: il momento angolare della particella  $i$ -esima rispetto al polo è dato da  $\vec{l}_i = \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$ ; allora il momento angolare complessivo di  $S$  è dato da

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^n \vec{l}_i = \sum_{i=1}^n (\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i)$$

Per mettere in evidenza i momenti delle forze deriviamo rispetto al tempo

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{d\vec{r}_i}{dt} \times m_i \vec{v}_i + \vec{r}_i \times m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} \right)$$

Riscriviamo  $\vec{r}_i$  per tener conto dello spostamento del polo (mobile):  $\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{d}{dt} (\vec{r}_{P_i} - \vec{r}_O) = \vec{v}_i - \vec{v}_O$ ; allora la precedente diventa

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}}{dt} &= \sum_{i=1}^n (\vec{v}_i \times m_i \vec{v}_i - \vec{v}_O \times m_i \vec{v}_i + \vec{r}_i \times m_i \vec{a}_i) \\ \frac{d\vec{L}}{dt} &= \sum_{i=1}^n (\vec{r}_i \times m_i \vec{a}_i) - \vec{v}_O \times M \vec{v}_{CM} \end{aligned}$$

dove si elide  $\vec{v}_i \times m_i \vec{v}_i$  poiché prodotto vettoriale di vettori paralleli e  $\vec{v}_O$  che non è influenzato dalla sommatoria può essere portato fuori usando la (3.1.4). Possiamo vedere invece  $m_i \vec{a}_i$  come  $\vec{F}_i^{(\text{TOT})} = \vec{F}_i^{(\text{E})} + \vec{F}_i^{(\text{I})}$ ; preso  $P_j$  il  $j$ -esimo punto di  $S$ , si avrà per il terzo principio della dinamica  $\vec{F}_i^{(\text{TOT})} = \vec{F}_i^{(\text{E})}$ . Le forze interne infatti sono uguali ed opposte, e i due momenti angolari per ogni coppia di punti  $i, j$  sono opposti ovvero *la somma dei momenti interni si elide a coppie*

$$\vec{M}_i = b \cdot \vec{F}_{i,j} = -\vec{M}_j = -b \cdot \vec{F}_{j,i}$$

Il differenziale precedente, anche per (3.1.4), diventa

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^n \left( \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(\text{E})} \right) - \vec{v}_O \times \vec{P}_{\text{TOT}}$$

dove  $\sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(\text{E})}$  è uguale al momento complessivo esterno del sistema  $\vec{M}^{(\text{E})}$ : enunciamo dunque la II EQUAZIONE CARDINALE DELLA DINAMICA, nota anche come

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^{(\text{E})} - \vec{v}_O \times \vec{P}_{\text{TOT}}$$

---

**Teorema del  
momento  
angolare**

Si osserva che se il polo è fisso, il centro di massa è in quiete, la velocità è parallela al centro di massa oppure polo e centro di massa coincidono, la precedente diventa  $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^{(\text{E})}$ ; vice versa se  $\vec{M}^{(\text{E})} = 0$  allora il momento angolare complessivo si conserva ( $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{L} = \text{costante}$ ). Le uniche forze che contribuiscono a modificare l'andamento del momento angolare del sistema sono quelle esterne.

La conservazione del momento angolare di un sistema discende dall'isotropia dello spazio, ovvero il fatto che non esistano particolari direzioni privilegiate.

### 3.3. Teorema dell'energia

Sia definito un sistema isolato di punti con  $n > 1$  particelle; il lavoro dell' $i$ -esima particella sarà dato da due contributi

$$\mathcal{W}_i = \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i = \left( \vec{F}_i^{(E)} + \vec{F}_i^{(I)} \right) \cdot d\vec{r}_i = \boxed{\mathcal{W}_i^{(E)} + \mathcal{W}_i^{(I)}}$$

Per conoscere il lavoro complessivo su ogni particella bisognerebbe integrare

$$\sum_{i=1}^n \int_L \mathcal{W}_i = \sum_{i=1}^n \left[ \int_L \mathcal{W}_i^{(E)} + \int_L \mathcal{W}_i^{(I)} \right]$$

In generale si tratta di un problema complicato. Proviamo a semplificare le forze interne

$$\vec{F}_{i,j} \cdot d\vec{r}_i = -\vec{F}_{i,j} \cdot d\vec{r}_j = \vec{F}_{i,j} (d\vec{r}_i - d\vec{r}_j) = \boxed{\vec{F}_{i,j} \cdot d\vec{r}_{i,j}}$$

dove  $d\vec{r}_{i,j}$  è lo spostamento relativo e il suo prodotto scalare con la forza in generale è non nullo. Non troviamo allora un annullamento chiaro per i contributi interni delle forze nel lavoro di un sistema. Possiamo comunque affermare che  $W_{\text{TOT}} = W^{(E)} + W^{(I)}$ .

Osservando che la forza complessiva sulla particella  $i$ -esima può essere riscritta, per la seconda legge della dinamica come

$$\vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i = m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} \cdot \vec{v}_i dt = m_i \vec{v}_i \cdot d\vec{v}_i$$

Essa ha un differenziale esatto, ovvero il termine dell'energia cinetica (2.8.2). Allora il lavoro complessivo può essere riscritto come

$$W_{\text{TOT}} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{2} m_i v_{iB}^2 - \frac{1}{2} m_i v_{iA}^2 \right) = K_B - K_A = \boxed{\Delta K}$$

usando in modo generalizzato il (2.8.3), dove  $A$  è l'istante iniziale e  $B$  quello finale del sistema, e rappresentano due dei suoi stati.

L'energia cinetica risente dei contributi interni del sistema. Se una o alcune forze sono conservative, allora è possibile definire il potenziale di tali forze; supponendo che la forza esterna sia la gravità, il suo lavoro può essere riletto come  $-\Delta U$ . Se tutte le forze interne ed esterne sono conservative (da dimostrare) vale la conservazione dell'energia. Solitamente le forze interne sono non conservative.

### 3.4. Riferimento del centro di massa

Sia  $S$  un sistema e  $CM$  il suo centro di massa; scelto un riferimento cartesiano esterno al sistema (non primato) possiamo definire un sistema di riferimento interno (primato) nel modo seguente: impongo l'origine coincidente sul centro di massa; il sistema può traslare ma gli assi rimangono orientati e concordi con quelli non primati; una eventuale rotazione del sistema di riferimento primato viene tradotta come rotazione di tutto il sistema  $S$ . In generale questo riferimento è *non inerziale* (il centro di massa potrebbe essere in accelerazione).

Un punto  $P_i$  del sistema può essere scritto, rispetto ai due riferimenti, come  $\vec{r}_i = \vec{r}'_i + \vec{r}_{CM}$ , mettendo in relazione i due sistemi di riferimento primato e non. Provando a derivare il raggio vettore del sistema non primato rispetto al tempo, ottengo

$$\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \vec{v}_i = \vec{v}'_i + \vec{v}_{CM}$$



La relazione precedente, scoperta da Galileo, si chiama *legge di somma delle velocità* e riguarda due sistemi di riferimento in modo reciproco. Domandiamoci dove si trova il vettore centro di massa nel sistema primato:

$$\vec{r}'_{\text{CM}} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}'_i}{M} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i (\vec{r}_i - \vec{r}_{\text{CM}})}{M} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{M} - \frac{\vec{r}_{\text{CM}} \sum_{i=1}^n m_i}{M} = 0$$

Questo risultato era atteso poiché il centro di massa coincide con l'origine del riferimento e si ha  $\vec{r}_{\text{CM}} = 0$ . Dalla precedente segue che  $\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}'_i = 0$ . Un ragionamento analogo può essere fatto per la quantità di moto totale del sistema:

$$\sum_{i=1}^n m_i \vec{v}'_i = \sum_{i=1}^n m_i (\vec{v}_i - \vec{v}_{\text{CM}}) = \underbrace{\sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i}_{\vec{P}_{\text{TOT}}} - \underbrace{\left( \sum_{i=1}^n m_i \right)}_M \vec{v}_{\text{CM}} = 0$$

Si osserva che, essendo nulla  $\vec{v}_{\text{CM}}$ , deve esserlo anche  $\vec{P}_{\text{TOT}}$  del sistema rispetto al riferimento centro di massa. Quindi per un osservatore sul centro di massa si ha

$$\sum_{i=1}^n m_i \vec{v}'_i = 0.$$

Ragioniamo sul momento angolare, sempre all'interno del riferimento centro di massa: il polo coincide proprio col centro di massa; si ha

$$\vec{l}'_i = \vec{r}'_i \times m_i \vec{v}'_i \Rightarrow \vec{L}' = \sum_{i=1}^n \vec{l}'_i = \sum_{i=1}^n (\vec{r}'_i \times m_i \vec{v}'_i)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}'}{dt} &= \sum_{i=1}^n \left( \overbrace{\frac{d\vec{r}'_i}{dt}}^{\vec{v}'_i} \times m_i \vec{v}'_i + \vec{r}'_i \times m_i \underbrace{\frac{d\vec{v}'_i}{dt}}_{\vec{a}'_i} \right) = \sum_{i=1}^n \vec{r}'_i \times \vec{F}'_i = \\ &= \sum_{i=1}^n \left[ \vec{r}'_i \times \left( \vec{F}'_{i(\text{E})} + \cancel{\vec{F}'_{i(\text{M})}} \right) \right] = \sum_{i=1}^n \vec{r}'_i \times \vec{F}'_{i(\text{E})} = \vec{M}'_{(\text{E})} \end{aligned}$$

ottenuto dalla (3.1.2), derivando il momento angolare del sistema primato; possiamo riscrivere in modo sintetico

$$\frac{d\vec{L}'}{dt} = \sum_{i=1}^n \vec{r}'_i \times \vec{F}'_{i(\text{E})} = \vec{M}'_{(\text{E})}$$

Si osserva che le forze esterne possono produrre una variazione del momento angolare (il sistema può ruotare attorno al centro di massa).

### 3.5. Relazioni di König

PRIMA RELAZIONE (MOMENTO ANGOLARE)

$$\begin{aligned}\vec{L} &= \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^n [(\vec{r}'_i + \vec{r}_{\text{CM}}) \times m_i (\vec{v}'_i + \vec{v}_{\text{CM}})] = \underbrace{\sum_{i=1}^n \vec{r}'_i \times m_i \vec{v}'_i}_{\vec{L}' \neq 0} + \underbrace{\sum_{i=1}^n \vec{r}'_i \times m_i \vec{v}_{\text{CM}}}_{=0} + \\ &\quad \underbrace{\sum_{i=1}^n \vec{r}_{\text{CM}} \times m_i \vec{v}'_i}_{=0} + \underbrace{\sum_{i=1}^n \vec{r}_{\text{CM}} \times m_i \vec{v}_{\text{CM}}}_{\vec{P}_{\text{TOT}}} \\ \vec{L} &= \vec{L}' + \left( \vec{r}_{\text{CM}} \times \vec{P}_{\text{TOT}} \right) = \boxed{\vec{L}' + \vec{L}_{\text{CM}}}\end{aligned}$$

Il momento angolare complessivo di un sistema è in realtà uguale alla somma del momento angolare del centro di massa più un momento angolare legato al fatto che il centro di massa si sta spostando.

SECONDA RELAZIONE (ENERGIA CINETICA)

$$\begin{aligned}K &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i v_i^2 \text{ dove la velocità può essere riscritta come } \vec{v}_i^2 = (\vec{v}'_i + \vec{v}_{\text{CM}})^2 = v_{\text{CM}}^2 + \\ &\quad 2\vec{v}'_i \cdot \vec{v}_{\text{CM}} + v_i'^2 \text{ e sostituendo nella precedente si ha} \\ K &= \underbrace{\sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i v_i'^2}_{K'} + \underbrace{\sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i v_{\text{CM}}^2}_{K_{\text{CM}}} + \underbrace{\sum_{i=1}^n m_i \vec{v}'_i \cdot \vec{v}_{\text{CM}}}_{\vec{v}'_i \parallel \vec{v}_{\text{CM}}} = \boxed{K' + K_{\text{CM}}}\end{aligned}$$

### 3.6. Baricentro

Sulla terra il campo di forze in cui siamo immersi (gravità) è un sistema di *forze parallele*, per cui  $\vec{F}_i = F_i \hat{u}$ :

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \sum_{i=1}^n F_i \hat{u} = F \hat{u}$$

Andando a calcolare il momento di questo sistema si ha

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times F_i \hat{u} = \left( \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \vec{r}_i \right) \times \hat{u}$$

L'ultima relazione vale poiché il versore è sempre uguale a prescindere dalla forza; inoltre si osserva che il momento deve essere ortogonale al versore  $\vec{M} \perp \hat{u}$  per come è definito il prodotto vettoriale. La precedente vale se esiste un punto  $C$  del sistema per cui io possa riscrivere il momento in tale modo:

$$\vec{M} = \vec{OC} \times \vec{F}^{(\text{E})} = \vec{r}_c \times \sum_{i=1}^n F_i \hat{u} = \sum_{i=1}^n F_i \vec{r}_c = \sum_{i=1}^n F_i \vec{r}_i$$

Centro di forza (3.6.1)

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^n F_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n F_i}$$

Tale vettore si chiama *centro di forza*; se la forza in gioco è la forza peso tale punto si chiama *baricentro*; il centro di forza è definito soltanto all'interno di un sistema di forze parallelo. Nel caso della forza peso si ha

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i g \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i g} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{M} = \vec{r}_{\text{CM}}$$

### 3.7. Urti

Consideriamo un sistema unidimensionale nel quale si hanno una massa  $m_1$  con velocità  $\vec{v}_1$  e una massa  $m_2$  con velocità  $\vec{v}_2 = -\vec{v}_1$ ; non ci sono forze esterne, quindi vale  $\vec{F}^{(\text{E})} = \frac{d\vec{p}_{\text{TOT}}}{dt} = 0$  cioè si conserva la quantità di moto complessiva. Possiamo scrivere

$$(3.7.1) \quad \vec{p}_{\text{TOT}} = \begin{cases} m_1 \vec{v}_1^i + m_2 \vec{v}_2^i = m_1 \vec{v}_1^f + m_2 \vec{v}_2^f \\ M \vec{v}_{\text{CM}} = (m_1 + m_2) \vec{v}_{\text{CM}} = \text{costante} \end{cases}$$

Dato che le masse non cambiano nelle nostre ipotesi, anche il centro di massa non cambierà; nel caso di masse uguali con stessa velocità opposta si ha che il centro di massa (rispetto al sistema) rimane in quiete, mentre i punti (impenetrabili) tonano indietro con velocità opposta. Relativamente al primo dei due punti, la quantità di moto subirà una variazione:

$$\vec{p}_1^i \neq \vec{p}_1^f \Rightarrow \Delta \vec{p}_1 \neq 0 = \vec{I} = \int_{\tau} \vec{F}_{1,2} dt \simeq \boxed{\vec{F}_{1,2} \tau}$$

ottenuto da (2.2.3) applicando il teorema della media. Si osserva che negli urti il tempo di interazione è molto piccolo dunque la forza impulsiva media è molto elevata. Se calcoliamo la variazione di quantità di moto relativamente al secondo punto  $\Delta \vec{p}_2$ , otteniamo  $\vec{F}_{2,1} \tau = -\vec{F}_{1,2} \tau$ .

Prendendo l'impulso sulla  $i$ -esima particella, scrivo

$$\vec{I}_i = \int_{\tau} \vec{F}_i dt = \int_{\tau} \left( \vec{F}_i^{(\text{E})} + \vec{F}_i^{(\text{I})} \right) dt = \cancel{\int_{\tau} \vec{F}_i^{(\text{E})} dt} + \int_{\tau} \vec{F}_i^{(\text{I})} dt$$

L'ultimo integrale in generale non è facile da svolgere poiché le forze interne non hanno andamento analitico rispetto al tempo, tuttavia è possibile usare il teorema della media; il primo addendo invece, riguarda le forze all'esterno del sistema ed improbabile che subiscano grandi variazioni nel breve tempo di interazione, è piccolo e trascurabile: le forze interne dominano sulla variazione della quantità di moto, mentre l'impulso delle forze esterne è trascurabile.

Segue che la quantità di moto totale è costante mentre non conoscendo la natura delle forze interne in generale non abbiamo informazioni sulla conservazione dell'energia; se l'energia meccanica si conserva questa ipotesi deve essere esplicitata (bisogna essere in presenza di forze conservative). Dato che l'energia potenziale è configurazionale, la conservazione dell'energia meccanica è a carico della variazione dell'energia cinetica.

**3.7.1. Urto completamente anelastico.** Prima di un urto in generale la situazione iniziale è data dalla somma delle quantità di moto: mettiamoci nel caso di due masse con due velocità iniziali tali che  $m_1 \vec{v}_1^i + m_2 \vec{v}_2^i = \vec{p}_{\text{TOT}}^i$ ; definiamo l'urto completamente anelastico se le due masse rimangono unite dopo l'evento; esse avranno una quantità di moto

$$\vec{p}_{\text{TOT}}^f = (m_1 + m_2) \vec{v}^f$$

dove la velocità sarà data da

$$\vec{v}^f = \frac{m_1 \vec{v}_1^i + m_2 \vec{v}_2^i}{m_1 + m_2} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \boxed{\vec{v}_{\text{CM}}}$$

Dopo l'urto il sistema ha la velocità del centro di massa (la stessa anche prima dell'urto), che dopo l'urto completamente anelastico sarà sul sistema formato dalle masse unite assieme. L'energia cinetica invece risulta, prima e dopo l'urto:

$$K^i = \frac{1}{2} m_1 v_1^{2,i} + \frac{1}{2} m_2 v_2^{2,i}; \quad K^f = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_{\text{CM}}^2 = K_{\text{CM}}$$

Usando la seconda relazione di König (3.5) possiamo scrivere (rispetto al riferimento universo)

$$K^i = K_{\text{CM}} + K'$$

Il termine  $K'$  è sparito tra prima e dopo l'urto; inoltre l'energia cinetica del centro di massa rimane costante prima e dopo l'urto (positiva): tutto ciò che si poteva perdere in energia cinetica è andato perso e grazie a questa perdita massima di energia i corpi si sono attaccati. Tale urto è stato usato per studiare la velocità dei proiettili grazie al sistema del pendolo balistico.

**3.7.2. Pendolo balistico.** Sia un pendolo fissato al soffitto con una massa  $M$  attaccata a una fune lunga  $l$  in posizione di equilibrio; un proiettile di massa  $m$  e velocità iniziale  $\vec{v}^i$  (sconosciuta) viene sparato contro la massa attaccata al pendolo, rimanendo conficcato in essa e facendo alzare il pendolo di  $h$  portandolo in una posizione  $\theta$ . La quantità di moto prima e dopo l'urto sarà  $m\vec{v}^i = (m + M) \vec{v}_{\text{CM}}$ .

Allora subito dopo l'urto l'energia meccanica sarà

$$E^i = K^i = \frac{1}{2} (m + M) v_{\text{CM}}^2$$

Durante il movimento del pendolo che ne segue, l'energia meccanica si trasformerà in energia potenziale fino al punto di massima quota del pendolo:

$$E^f = U^f = (m + M) gh = (m + M) gl (1 - \cos \theta)$$

La massima quota è un punto di inversione del moto, quindi la velocità sarà nulla in esso; grazie alla misurazione di  $\theta$  possiamo conoscere tutta l'espressione dell'energia meccanica finale, dunque è nota anche quella iniziale e di conseguenza la velocità del centro di massa può essere ottenuta.

Sparando il proiettile non orizzontalmente ma con un angolo  $\theta$  rispetto alla posizione della massa del pendolo abbiamo forze impulsive dovute ad effetti vincolari non trascurabili e in generale la quantità di moto non si conserva:

$$\vec{p}_{\text{TOT}}^i = m\vec{v}^i = mv^i (\sin \theta \hat{u}_x - \cos \theta \hat{u}_y)$$

A causa della presenza del vincolo (fune del pendolo) il sistema formato dalle due masse unite si sposta con una oscillazione del pendolo, poiché la reazione della fune

ha modificato la traiettoria; in particolare la direzione nella quale agisce il vincolo è ortogonale alla traiettoria (la fune agisce solo lungo l'asse  $y$ ): vale

$$\vec{p}_{\text{TOT}}^i = \vec{p}_{\text{TOT}}^f \Rightarrow \Delta \vec{p}_{\text{TOT}}^x = 0 \Rightarrow mv^i \sin \theta = (m + M) \vec{v}_{\text{CM}}$$

Tuttavia si osserva che  $\Delta \vec{p}_{\text{TOT}}^y \neq 0$ , ovvero ci sarà un impulso lungo  $y$ :  $\vec{I}^y = \int_{\tau} \vec{F}^y dt$ . Trattiamo il problema rispetto ai momenti angolari: sia  $O$  il polo sull'attaccatura del pendolo al vincolo, se il momento esterno è nullo si conserva il momento angolare; in questo esempio le forze esterne (gravità e tensione del filo) sono non nulle, quindi

$$\begin{aligned} \vec{M}^{(E)} &= \frac{d\vec{L}}{dt} \Rightarrow d\vec{L} = M^{(E)} dt \\ \Delta \vec{L} &= \vec{I} = \int_{\tau} M^{(E)} dt \end{aligned}$$

Il momento delle forze esterne varia poco durante l'interazione  $\tau$ , quindi il momento angolare si conserverà dopo l'urto (le forze impulsive agiscono lungo il vincolo), dato che le forze esterne avranno braccio nullo:

$$\left| \vec{L}_{\text{TOT}}^i \right| = \left| \vec{r} \times m\vec{v}^i \right| = \underbrace{lmv^i \sin \theta}_{\text{iniziale}} = \underbrace{l(m + M)v_{\text{CM}}}_{\text{finale}} = \left| \vec{L}_{\text{TOT}}^f \right|$$

Possiamo a questo punto ottenere l'espressione della velocità del centro di massa dalla precedente, esplicitando ed elidendo i bracci.

**3.7.3. Urto elastico.** Sia un punto materiale di massa  $m_1$  con velocità iniziale  $\vec{v}_1$  e un corpo fermo di massa  $m_2$ ; allora l'urto si definisce elastico se

$$\Delta \vec{p}_{\text{TOT}} = 0; \quad \boxed{\Delta E = 0 \Rightarrow \Delta K = 0}$$

Se non vale la precedente l'urto non è elastico. Analizziamo il nostro esempio: deve valere

$$\begin{cases} m_1 \vec{v}_1^i = m_1 \vec{v}_1^f + m_2 \vec{v}_2^f & (\text{conserv. quantità di moto}) \\ \frac{1}{2} m_1 v_1^{2,i} = \frac{1}{2} m_1 v_1^{2,f} + \frac{1}{2} m_2 v_2^{2,f} & (\text{conserv. energia cinetica}) \end{cases}$$

La soluzione del sistema (due equazioni in due incognite) è:

$$(3.7.2) \quad v_1^f = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1^i; \quad v_2^f = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1^i$$

Analizziamo i seguenti casi particolari (regole di Cartesio)

- Se  $m_2 \rightarrow \infty$ :  $v_1^f = -v_1^i$ ,  $v_2^f = 0$  (urto contro un muro)
- Se  $m_1 = m_2$ :  $v_1^f = 0$ ,  $v_2^f = v_1^i$  (pendolo di Newton)
- Se  $m_1 \rightarrow \infty$ :  $v_1^f = v_1^i$ ,  $v_2^f = 2v_1^i$  (urto tra boccia e boccino)

**3.7.4. Coefficiente di restituzione.** Indica il livello di anelasticità dell'urto, ed è uguale per definizione, rispetto al riferimento centro di massa, a

$$(3.7.3) \quad e := -\frac{\vec{p}_1'^f}{\vec{p}_1'^i} = -\frac{\vec{p}_2'^f}{\vec{p}_2'^i} = -\frac{v_1'^f}{v_1'^i} = -\frac{v_2'^f}{v_2'^i}$$

A questo punto se calcoliamo l'energia cinetica del sistema centro di massa possiamo scrivere

$$K'^f = \frac{1}{2} m_1 v_1^{2,f} + \frac{1}{2} m_2 v_2^{2,f} = e^2 K'^i$$

Per  $e = 1$  abbiamo un urto elastico ( $\Delta K' = 0$ ) mentre per  $e = 0$  si ha un urto anelastico ( $K'^f = 0$ ); infine per  $0 < e < 1$  si ha un processo parzialmente anelastico.



## CAPITOLO 4

### Gravitazione

#### 4.1. Forze centrali

Sia  $P$  un punto materiale rispetto a un polo  $O$ , individuato da un raggio  $\vec{r}$ ;  $P$  si dirà sottoposto a una forza *centrale* se essa agisce lungo la direttrice del raggio vettore  $\vec{r}$ . Allora le direttrici di tutti i vettori di una forza centrale convergono in un punto (il campo ha simmetria sferica); l'unico parametro di questo campo di forze è la distanza dal centro.

La forza dipenderà dal raggio, quindi possiamo descriverla come  $\vec{F}(\vec{r}) = F(r) \cdot \hat{u}_r$ ; per forze positive abbiamo *repulsione*, per forze negative abbiamo *attrazione*; l'azione di queste forze è istantanea.

Calcoliamo il momento angolare di un punto sottoposto a una forza centrale:

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} \Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times F(r) \hat{u}_r = \underbrace{r\hat{u}_r \times F(r) \hat{u}_r}_{r\|F(r)} = 0$$

Quindi in un campo di forze centrali si mantiene costante il momento angolare; se abbiamo un punto materiale che traccia una traiettoria sottoposto unicamente a forze centrali, essendo il momento angolare costante, è possibile associare a ciascuna traiettoria (orbita) un momento angolare (diventa una *caratteristica* dell'orbita).

Prendiamo un punto materiale e la sua orbita: la velocità è tangente all'orbita; il centro di forza è  $O$ . Il punto di massa  $m$  in posizione 1 ha vettore di puntamento  $\vec{r}_1 = \vec{r}(t)$ . In un istante 2, dopo  $dt$ , avrà una posizione individuata da  $\vec{r}_2 = \vec{r}(t + dt)$ , producendo una variazione dell'angolo  $d\theta$ . Sia  $\vec{v}_r$  la proiezione della velocità lungo la direttrice del raggio vettore e  $\vec{v}_\theta$  la componente ortogonale.

Il momento angolare, caratteristica costante, sarà uguale a:

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} = \vec{r} \times m(\vec{v}_r + \vec{v}_\theta) = \underbrace{\vec{r} \times m\vec{v}_r}_{\vec{r}\|\vec{v}_r} + \underbrace{\vec{r} \times m\vec{v}_\theta}_{\vec{r} \perp \vec{v}_\theta}$$

Osservando la velocità angolare, si ha  $|\omega| = \frac{d\theta}{dt} = \vec{v}_\theta \Rightarrow \vec{\omega} \times \vec{r}$  e sostituendo nel modulo di  $\vec{L}$ :

$$|\vec{L}| = rmv_\theta = rm\omega r = \boxed{(mr^2) \omega}$$

---

**Momento  
inerziale**

Riscrivendo  $|\vec{L}| = m \left( r^2 \frac{d\theta}{dt} \right) \Rightarrow$  costante, concludiamo che la variazione  $d\theta$  è costante nel tempo: rispetto all'area spazzata si ha

$$dA = \frac{1}{2} r \cdot r d\theta = \frac{1}{2} r^2 d\theta \Rightarrow |\vec{L}| = m \left( 2 \frac{dA}{dt} \right)$$

Definiamo la velocità areale come  $v_a := \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2 \frac{d\theta}{dt}$  e sostituendo nella precedente si ha

$$|\vec{L}| = 2mv_a \Rightarrow \boxed{\frac{|\vec{L}|}{2m} dt = dA} \Rightarrow \frac{|\vec{L}|}{2m} \int_{\tau} dt = \int_A dA$$

Supponendo un'orbita chiusa, l'area dell'orbita è legata al periodo per percorrerla e al momento angolare associato ad essa.

#### 4.2. Leggi di Keplero

- (1) Le orbite dei pianeti sono ellittiche; nel nostro sistema solare, il Sole occupa uno dei due fuochi.
- (2) La velocità areale dei corpi in moto su orbite chiuse è costante (su orbite ellittiche l'accelerazione è variabile per spazzare la stessa area)
- (3) Tra il periodo e il semiasse maggiore dell'orbita vale la relazione:  $T^2 = ka^3$

Usando la dinamica di Newton possiamo definire la forza (centripeta) su un punto all'interno di un'orbita come  $\vec{F} = m\vec{a}_c = m\omega^2\vec{r} = m \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \vec{r} = \frac{4\pi^2 m\vec{r}}{T^2}$

Sostituendo il periodo al quadrato dalla terza legge di Keplero, facendo attenzione a sostituire il semiasse maggiore con il raggio (siamo nell'ipotesi di orbite circolari) otteniamo

$$\vec{F} = \frac{4\pi^2}{k_S} \frac{m_T}{r^2} = \vec{F}_{T,S}$$

dove stiamo guardando il modulo della forza dal punto  $T$  verso il polo  $S$ ; la reazione sarà definita come  $\vec{F}_{S,T} = \frac{4\pi^2}{k_T} \frac{m_S}{r^2}$  applicata sul polo  $S$  verso il punto  $T$ . Queste due forze devono essere in modulo uguali, quindi deve valere  $\frac{m_T}{k_S} = \frac{m_S}{k_T} \Rightarrow m_T k_T = m_S k_S$ ; definiamo allora

---

**Costante di  
gravitazione  
universale**

$$\gamma := \frac{4\pi^2}{m_T k_T} = \frac{4\pi^2}{m_S k_S} \simeq 6.67 \cdot 10^{-11} \text{m}^2/\text{kg}\cdot\text{s}^2$$

Tale costante è legata a una simmetria sferica ma indipendente dal centro di forza; inoltre il valore numerico è molto piccolo, quindi le interazioni avvengono se le masse in gioco sono sufficientemente grandi. Possiamo affermare ora che la forza che agisce tra due punti materiali è  $|\vec{F}| = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}$ ; la forza è centrale: riscriviamo la precedente in termini vettoriali come:

$$\vec{F}(r) = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{u}_r$$

Confrontando la forza peso con la legge di gravitazione universale ottengo:

$$\begin{cases} \vec{F} = -m\vec{g} \\ \vec{F} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{u}_r \end{cases}$$

Nella relazione di uguaglianza che otterremo dal sistema bisogna tuttavia distinguere due tipi di massa: la massa inerziale ( $m_I$ ) dalla seconda legge della dinamica e la massa gravitazionale ( $m_G$ ), ottenendo:

$$(4.2.1) \quad \gamma \frac{m_G \cdot M}{r^2} = m_I g \Rightarrow g = \gamma \frac{M}{r^2}$$

Possiamo al più affermare che la massa inerziale e la massa gravitazionale, anche se riferite allo stesso corpo, sono proporzionali ma dobbiamo mantenerle distinte;

---

**Legge di  
gravitazione  
universale**



noi le semplifichiamo ottenendo la precedente relazione. L'espressione newtoniana sarebbe quindi  $g = \gamma \frac{M}{r^2} \frac{m_G}{m_I}$ .

### 4.3. Vettore di campo gravitazionale

Siano  $m \ll M$  due masse poste a una distanza  $r$ : in queste condizioni definiamo il vettore di campo gravitazionale come:

$$(4.3.1) \quad \vec{G} := \frac{\vec{F}}{m} = -\gamma \frac{M}{r^2} \hat{u}_r$$

Nota che abbiamo ben definito l'interazione tra due soli punti materiali: se fossero di più basterebbe sommare i contributi delle forze relativi al punto in esame rispetto agli altri; possiamo sostituire il vettore di campo gravitazionale nella legge di Newton osservando che  $\vec{F} = m\vec{G} = -\vec{\nabla}U$  ed esplicitando  $\vec{G}$  otteniamo:

$$(4.3.2) \quad \vec{G} = -\frac{\vec{\nabla}U}{m} = \boxed{-\vec{\nabla}V} \Rightarrow U = mV$$

Se consideriamo il vettore di campo totale, stiamo osservando la somma dei vettori relativi a tutti i punti del mio sistema:

$$\vec{G}_{TOT} = \sum_{i=1}^n \vec{G}_i = \sum_{i=1}^n -\vec{\nabla}V_i = -\vec{\nabla} \sum_{i=1}^n V_i = -\vec{\nabla}V$$

Per mettere in evidenza l'energia potenziale calcolo il lavoro:

$$\begin{aligned} W &= \int_l \vec{F}_c ds = \int_l -\gamma \frac{mM}{r^2} \hat{u}_r ds = \int_{r_A}^{r_B} -\gamma \frac{mM}{r^2} dr = -\gamma mM \int_{r_A}^{r_B} \frac{dr}{r^2} = \\ &= \gamma mM \left[ \frac{1}{r} \right]_{r_A}^{r_B} = - \left[ \gamma \frac{mM}{r_A} - \gamma \frac{mM}{r_B} \right] \end{aligned}$$

Definiamo l'energia potenziale gravitazionale  $\boxed{U = -\gamma \frac{mM}{r}}$ ; dalla (4.3.2) ottengo

che  $V = \frac{U}{m} = -\gamma \frac{M}{r}$ ; si nota che per un raggio nullo l'energia potenziale sarà infinita come il potenziale gravitazionale.

Studiamo ora l'energia meccanica in un campo gravitazionale: sia  $P$  un punto materiale che si trova inizialmente sulla superficie terrestre e viene portato a una quota  $h$ ; il lavoro compiuto per contrastare la forza gravitazionale e spostare il punto sarà:

$$\begin{aligned} mgh = W &= \gamma \frac{mM}{r} - \gamma \frac{mM}{r+h} = \gamma \frac{mM}{r} \left( 1 - \frac{1}{1 + \underbrace{h/r}_{\sim 0}} \right) = \gamma \frac{mM}{r} \left( 1 - 1 - \frac{h}{r} \right) = \\ &= \gamma \frac{M}{r^2} mh = mgh \end{aligned}$$

dove nell'ultima uguaglianza abbiamo usato (4.2.1). Chiediamoci ora di quale velocità iniziale avremo bisogno per sottrarci all'effetto dell'interazione gravitazionale allontanandoci dalla superficie: avremo energia meccanica nulla e velocità nulla nel punto al limite dell'interazione gravitazionale; otteniamo il risultato da:

$$E = \underbrace{\frac{1}{2}mv^2}_K + \underbrace{\left( -\gamma \frac{mM}{r} \right)}_U = 0 \Rightarrow \boxed{v_f = \sqrt{2\gamma \frac{M}{r}}}$$

---

**Vettore di  
campo  
gravitazionale**

---

**Potenziale  
gravitazionale**

---

**Velocità di fuga**

Se l'energia meccanica complessiva è nulla il punto in fuga dalla superficie raggiungerà l'infinito con velocità nulla (orbite ellittiche), mentre se è positiva il punto sfuggerà all'attrazione con una velocità residua (orbite paraboliche); se l'energia meccanica è negativa il sistema è vincolato dalla gravitazione (orbita ellittica o circolare).

Nota che calcolando  $-\vec{\nabla}U = -\frac{dU}{dr}\hat{u}_r$  la derivata sarà negativa se non si va al limite per  $r \rightarrow +\infty$ , ovvero agisce una forza attrattiva che lega il sistema.

#### 4.4. Teorema di Gauss

Per semplificare i calcoli delle somme integrali dei contributi delle forze sui singoli punti che compongono un corpo a simmetria sferica possiamo enunciare il teorema di Gauss; prima è necessaria una osservazione sulle forze centrali: sia  $m$  una massetta di prova al centro di un campo di forze centrali, allora è lecito considerare le linee di forza a cui sono tangenti i vettori della forza ovvero le *linee di campo*; nelle nostre ipotesi le linee di forza si incontrano nell'origine del campo di forze centrali.

Immaginando le linee di campo come il flusso di un liquido verso il centro di forza del campo, possiamo prendere una superficie chiusa  $S$  e considerare le linee di campo che attraversano tale superficie. Se la superficie è perpendicolare alle linee di campo il flusso attraverso di essa è massimo e in generale dipende dall'angolo tra le due.

Definiamo il *flusso elementare* di  $\vec{G}$  attraverso un elementino di superficie  $ds$  come:

$$d\Phi := \hat{u}_G \cdot \hat{u}_n ds$$

dove  $ds\hat{u}_n$  è un elementino di superficie orientato; il *flusso complessivo* su tutta la superficie  $S$  si ottiene integrando la precedente:

$$\Phi_S(\vec{G}) = \int_S \vec{G} \cdot \hat{u}_n ds$$

Per il teorema di Gauss, il flusso complessivo del campo gravitazionale attraverso la superficie  $S$  che racchiuda  $n$  masse  $m_i$ , è pari a:

Teorema di Gauss  
per il campo  
gravitazionale

$$(4.4.1) \quad \Phi_G = 4\pi\gamma \sum_{i=1}^n m_i$$

- (1) *Supponiamo che la superficie  $S$  sia esterna a un insieme di masse:* allora se non ha masse al proprio interno il flusso attraverso di essa è nullo per via delle linee di campo sia entranti che uscenti dalla superficie (con sorgenti all'esterno) oppure per l'assenza di linee di campo (zona dello spazio senza sorgenti); non si annulla se c'è della massa all'interno della superficie. Prendiamo per esempio la terra e una massa  $m_1$  sulla superficie: allora  $\vec{G}$  sarà costante per simmetria, permettendo di scrivere

$$\Phi_G = G \int_s ds = G \cdot 4\pi R^2$$

Dal momento che esiste una massa all'interno della superficie possiamo scrivere per il teorema di Gauss  $\Phi_G = 4\pi\gamma M$ , ottenendo dalla precedente

$$\vec{G} = \gamma \frac{M}{R^2} \hat{u}_r$$

La precedente è proprio (4.3.1), che riguarda un punto materiale, quindi possiamo concludere che la Terra può essere considerata puntiforme.

- (2) *Supponiamo che la superficie  $S$  sia all'interno di un solido dotato di massa  $M$ :*

Grazie al teorema di Gauss possiamo trascurare la massa del solido all'esterno della superficie che ha un contributo nullo al flusso; consideriamo invece la massa  $m_r$  racchiusa della superficie  $S$  scrivendo

$$\vec{G}_r = \gamma \frac{m_r}{r^2} \hat{u}_r$$

Possiamo ottenere la densità media del solido come  $\bar{\rho} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$  e sostituendo troviamo  $m_r = \bar{\rho}S = \frac{Mr^3}{R^3}$ ; allora il vettore di campo sarà

$$\vec{G} = -\gamma \frac{M}{R^3} r \cdot \hat{u}_r$$

Si osserva che il campo gravitazionale al centro della Terra è zero; all'interno di essa cresce linearmente fino alla superficie; da quel punto la dipendenza è  $\frac{1}{r^2}$  annullandosi nuovamente all'infinito.

**4.4.1. Sorgente di campo.** Se il flusso attraverso di una superficie è non nullo ci deve essere una sorgente di campo all'interno di essa. Possiamo usare una superficie di prova con una simmetria conveniente per studiare lo spazio cercando delle sorgenti di campo. All'interno di una superficie cava il vettore di campo è identicamente nullo ma c'è un potenziale costante.

Supponiamo di trovarci in prossimità di un piano omogeneo, isotropo e infinito (superficie con raggio di curvatura al limite per  $+\infty$ ) in un punto  $P$ : il punto sarà soggetto all'attrazione di tutti i punti, i cui contributi si annulleranno a coppie tranne quello ortogonale al piano; questo ragionamento vale in qualsiasi punto del piano. Immaginando di integrare su tutti i contributi ottengo un flusso complessivo perpendicolare; per conoscere il modulo di tale vettore usiamo il teorema di Gauss: il problema ha una simmetria cilindrica, che può essere messa in evidenza grazie alle coordinate polari; creo una superficie cilindrica di raggio  $r$  e altezza  $h$ , inserita a metà sul piano; tale superficie ha due superfici di base e una superficie laterale, ovvero:

$$\Phi = 2\Phi_B + \cancel{\Phi_L}$$

Il flusso laterale è nullo poiché la superficie orientata laterale è parallela al vettore di campo che è verticale, e il loro prodotto scalare è zero. Per le superfici di base si ha (considerando  $G$  costante):

$$2G \int_B ds = 2G\pi r^2 \stackrel{G}{=} 4\pi\gamma M = 4\pi\gamma\sigma\pi r^2$$

$$\vec{G} = -2\pi\gamma\sigma \cdot \hat{u}_z$$

dove abbiamo usato Gauss per la seconda uguaglianza ( $\stackrel{G}{=}$ ) e abbiamo esplicitato la massa racchiusa dalla superficie cilindrica rispetto alla densità del piano; otteniamo un vettore di campo *costante* e quindi  $\vec{F} = m\vec{g} \Rightarrow \vec{G} = \frac{\vec{F}}{m} = \vec{g} \Rightarrow$  costante, ovvero sulla terra percepiamo un campo di forze parallele e costanti poiché la superficie terrestre ci appare come un piano infinito.

#### 4.5. Potenziale per massa estesa

Calcoliamo il potenziale gravitazionale per una sfera omogenea: il potenziale (e l'energia potenziale) è una energia *configurazionale* e dipenderà dal modo in cui sono disposte le masse; ragioniamo con una costruzione progressiva per risolvere il problema, supponendo che tutte le massette che costituiranno questa sfera sono a infinita distanza (non interagiscono tra loro). Prendiamo una massa  $dm$  che viene portata dall'infinito a una posizione interagente in questa configurazione, piazzandola al centro; mano a mano ripetendo questa operazione costruiamo la sfera. Dalla seconda massa che sposto dall'infinito è presente un campo gravitazionale.

Il percorso con cui le massette sono spostate dall'infinito non è importante poiché siamo in un campo *conservativo*. Supponiamo di aver già costruito una sfera di raggio  $r$  e di aver compiuto un lavoro per arrivare a tale configurazione. Continuando a spostare le massette accresciamo la sfera di un raggio  $r+dr$  fino al raggio complessivo  $R$  della sfera che vogliamo costruire.

Il lavoro infinitesimo per spostare la massetta in posizione è dato da:

$$dW = -dU = -[U(r) - U(\infty)] = \gamma \frac{m(r) dm}{r}$$

dove il termine del potenziale all'infinito è nullo. Per poter integrare la precedente è necessario portare il differenziale sul raggio, che è l'unico termine variabile dell'espressione. Nell'ipotesi di una massa omogenea, possiamo mettere in relazione la massa  $m(r)$  con la densità  $\rho$ , nella cui espressione compare il volume (della sfera nel nostro caso) che è in relazione geometrica col raggio:

$$m(r) = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = M \frac{r^3}{R^3} \Rightarrow dm = 3 \frac{M}{R^3} r^2 dr$$

dove  $M$  e  $R$  sono massa e raggio della sfera complessiva che voglio costruire. Il lavoro infinitesimo diventa allora:

$$dW = \frac{\gamma}{r} \cdot \frac{Mr^3}{R^3} \cdot \left( 3 \frac{Mr^2}{R^3} dr \right) = 3\gamma \frac{M^2 r^4}{R^6} dr \Rightarrow \int_0^R dW = \boxed{W = \frac{3}{5} \gamma \frac{M^2}{R}} = -U^f$$

Allora l'energia potenziale della sfera di raggio  $R$  è  $-W$ :  $U = -\frac{3}{5} \gamma \frac{M^2}{R}$  dove l'energia configurazionale dipende dal raggio  $R$ . Portando il raggio a zero l'energia potenziale diverge a  $-\infty$ .

#### 4.6. Energia dell'orbita

In un problema di gravitazione, sapere che l'orbita è circolare ci autorizza ad affermare che la forza centripeta è uguale alla forza di gravità ( $\vec{F}_C = \vec{F}_G$ ); se siamo in presenza di un'orbita ellittica invece la velocità areale è costante ovvero il momento angolare è costante ( $d\vec{L} = 0$ ).

Sia ad esempio il caso di un pianeta in orbita circolare attorno a una stella; avremo:

$$\begin{cases} K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\gamma \frac{mM}{r} \\ U = -\gamma \frac{mM}{r} \end{cases} \Rightarrow \boxed{mv^2 = \gamma \frac{mM}{r}}$$

Per quanto riguarda l'energia meccanica (dal sistema precedente):

$$E = K + U = \frac{1}{2}\gamma \frac{mM}{r} - \gamma \frac{mM}{r} = -\frac{1}{2}\gamma \frac{mM}{r} = -\frac{1}{2}U = E(r)$$

Tale energia è associata all'orbita di raggio  $r$ ; per spostarsi da un'orbita a un'altra c'è una variazione di energia meccanica (non solo di energia potenziale come per la caduta di un corpo); si osserva infatti che anche la velocità (energia cinetica) deve essere calibrata per la nuova orbita.

### 4.7. Traiettorie

Per dimostrare la prima legge di Keplero, ovvero che le orbite dei pianeti sono ellittiche, bisogna premettere alcune proprietà delle coniche: una conica è una curva piana definita come luogo dei punti per cui il rapporto tra la distanza da un punto e da una retta è pari a una costante  $\varepsilon$  chiamata *eccentricità*. Preso il punto  $F$  (fuoco) e il punto  $Q$  sulla retta (direttrice) si ha la seguente definizione

$$(4.7.1) \quad \varepsilon = \frac{\overline{PF}}{\overline{PQ}} = \frac{r}{d + r \cos \theta} \Rightarrow \frac{1}{r} = \frac{1}{\varepsilon d} - \frac{1}{d} \cos \theta$$

dove abbiamo riscritto in coordinate polari l'equazione di una conica. Se  $\varepsilon = 0$  si ha una circonferenza mentre per  $\varepsilon < 1$  si ha un'ellisse, per cui valgono le seguenti relazioni:

$$a = \frac{\varepsilon d}{1 - \varepsilon^2}; \quad b = a\sqrt{1 - \varepsilon^2}; \quad \varepsilon^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2}; \quad A = \pi ab$$

Consideriamo due punti isolati di masse  $m$  e  $M$  tra i quali agisca la forza gravitazionale  $\gamma \frac{mM}{r^2}$ ; in un sistema di riferimento inerziale si avrà:

$$\vec{F} = m\vec{a}_m; \quad -\vec{F} = M\vec{a}_M$$

L'accelerazione relativa di  $m$  rispetto a  $M$  sarà:

$$\vec{a} = \vec{a}_m - \vec{a}_M = \left( \frac{1}{m} + \frac{1}{M} \right) \vec{F} = \frac{1}{\mu} \vec{F}$$

dove  $\mu$  si chiama massa ridotta del sistema, definita come  $\frac{mM}{m+M}$  tale che  $\mu < M$  e  $\mu < m$ : pertanto:

$$\vec{F} = \mu \vec{a}$$

Il moto di un sistema di due punti sottoposti a mutua interazione è equivalente al moto di un singolo punto con massa eguale alla massa ridotta sottoposto alla forza di interazione; il risultato non dipende dal tipo di forza. Nella nostra ipotesi la forza è centrale e il moto si svolge in un piano con momento angolare costante. Usando la formula di Binet  $\left( \vec{a} = -\frac{L^2}{m^2 r^2} \left[ \frac{d^2}{d\theta^2} \left( \frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \right] \right)$  per  $\vec{a}$  usando  $\mu^2$  al posto di  $m^2$  la precedente diventa:

$$\begin{aligned} -\gamma \frac{mM}{r^2} \hat{u}_r &= -\mu \frac{L^2}{\mu^2 r^2} \left[ \frac{d^2}{d\theta^2} \left( \frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \right] \hat{u}_r \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{d^2}{d\theta^2} \left( \frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} = \gamma \mu \frac{mM}{L^2} \end{aligned}$$

L'equazione differenziale ottenuta ha per soluzione  $r(\theta)$  ovvero la traiettoria di  $m$  rispetto a  $M$ . Si osserva una struttura dell'equazione simile all'oscillatore armonico ma essa non è omogenea. La soluzione tuttavia è la somma di una soluzione particolare dalla precedente, come  $\gamma \mu \frac{mM}{L^2}$  e della soluzione generale dell'omogenea associata  $A \cos \theta$ . Pertanto:

$$(4.7.2) \quad \frac{1}{r} = \gamma \mu \frac{mM}{L^2} + A \cos \theta$$

Confrontando (4.7.1) con (4.7.2) si vede che la traiettoria è un'ellisse. Un primo risultato dalla precedente è che:

$$L^2 = \gamma \mu m M \varepsilon d$$

ovvero i parametri del momento angolare della traiettoria sono costanti.

## CAPITOLO 5

### Oscillatore armonico

#### 5.1. Proprietà dell'equazione

Richiamiamo l'equazione del moto armonico:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \Rightarrow x = A \sin(\omega t + \phi)$$

dove  $A$  e  $\phi$  sono le condizioni cinematiche iniziali; la soluzione può essere scritta anche con la funzione coseno. Come osservato nelle forze di Hooke la forza è minima ai bordi dell'oscillazione e massima al centro di essa; il modo in cui sono in relazione velocità, accelerazione e posizione è una caratteristica del moto armonico.

Sia definito  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ , allora vale:

$$x(t + T) = A \sin(\omega[t + T] + \phi) = A \sin(\omega t + \phi + 2\pi) = x(t)$$

Possiamo ignorare lo sfasamento di  $2\pi$  poiché corrisponde al periodo del seno; allora dopo un periodo pari a  $T$  il moto si ripete nello stesso modo. Abbiamo trovato la *proprietà di periodicità*:  $x(t + T) = x(t)$

Sia  $x(t)$  soluzione dell'equazione differenziale del moto armonico, allora anche  $y(t) = ax(t)$ ; vale:

$$ax(t) = \ddot{y} + \omega^2 y = a\ddot{x} + a\omega^2 x = a(\ddot{x} + \omega^2 x) = 0$$

dove per ottenere l'annullamento dell'ultimo termine è necessario che la parentesi  $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ , ovvero deve valere  $y(t) = ax(t)$ .

Siano  $x(t)$  e  $y(t)$  due soluzioni distinte dell'equazione differenziale del moto armonico e la funzione  $z(t) = x(t) + y(t)$ : per la proprietà di linearità si ha:

$$\ddot{z} = \ddot{x} + \ddot{y} + \omega^2(x + y) \Rightarrow (\ddot{x} + \omega^2 x) + (\ddot{y} + \omega^2 y) = 0$$

Si osserva che, essendo per ipotesi entrambe soluzioni dell'equazione, la somma di  $\ddot{x} + \ddot{y}$  è nulla. Segue che anche  $z(t)$  è soluzione. *Allora la somma di soluzioni è ancora soluzione.*

Dalle due precedenti considerazioni si deduce che anche *la combinazione lineare di soluzioni è ancora soluzione*, ovvero vale:

$$z(t) = ax(t) + by(t) = 0$$

Riscriviamo quindi la soluzione, considerando che si tratta di una funzione trigonometrica: vale  $x = a \sin \omega t = b \cos \omega t$ ; allora la soluzione dell'equazione differenziale diventa  $x(t) = a \sin \omega t + b \cos \omega t$  ovvero ogni moto armonico può essere scomposto in oscillazioni più semplici.

Per un oscillatore non omogeneo si ha l'equazione  $\ddot{x} + \omega^2 x = f(x)$  e la soluzione sarà:

$$x(t) = \underbrace{a \sin \omega t + b \cos \omega t}_{\text{soluzione omogenea}} + \overbrace{x_P(t)}^{\text{soluzione particolare}}$$

Vediamo un esempio: sia una molla di costante elastica  $k$  appesa in verticale a un vincolo e una massa  $m$ ; il sistema è sottoposto alla gravità  $\vec{g}$ . La molla ha lunghezza

a riposo 0. In assenza di oscillazioni la posizione di equilibrio è data da  $x_s = \frac{mg}{k}$ . Se la massa è portata in posizione  $2x_s$  come sarà descritta l'oscillazione?

Cominciamo scrivendo la forza agente:  $\vec{F} = m\vec{g} - kx = m\ddot{x}$  da cui  $\dot{x} + \frac{k}{m}x = g$  e scrivendo  $\omega^2 = k/m$  si ha  $\ddot{x} + \omega^2 x = g$ , che non si tratta di un'equazione di un oscillatore omogeneo; ci aspettiamo che l'oggetto oscilli come se fosse un oscillatore armonico, alla cui equazione va aggiunta la soluzione particolare. Calcoliamo la soluzione particolare quando  $x(t) = 0$ :  $x_p = \frac{mg}{k} = x_s$ ; dal punto di vista analitico ciò vuol dire che l'oscillazione avviene attorno al punto di equilibrio.

Inoltre anche l'equazione non omogenea gode della proprietà di linearità.

## 5.2. Energia dell'oscillatore armonico

Sia la soluzione dell'equazione di un oscillatore  $x(t) = A \sin(\omega t + \phi)$ : essendo la legge di Hooke un rappresentante di un oscillatore ed essendo conservativa, possiamo supporre che l'energia meccanica si conservi:

$$U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}k[A^2 \sin^2(\omega t + \phi)]$$

sapendo che  $\dot{x} := \frac{dx}{dt} = A \cos(\omega t + \phi)$  scriviamo anche:

$$K = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{1}{2}m[A^2 \cos^2(\omega t + \phi)]$$

Nella formula dell'energia meccanica i termini trigonometrici si semplificano con 1 ( $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ) e si ha:

$$E = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2$$

dove abbiamo scritto la seconda uguaglianza ricordando che  $k = \omega^2 m$ .

Dato che il moto è periodico, calcoliamo l'energia media dell'oscillazione: richiamiamo la media di una funzione trigonometrica  $\overline{\sin \theta} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta = 0$ . Cerco il risultato per le funzioni trigonometriche osservando che:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta = 1 \Rightarrow \frac{1}{2\pi} \left( \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta + \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta \right) = \overline{\sin^2 \theta} + \overline{\cos^2 \theta} = 1$$

Mi aspetto dunque che l'integrale per seno o coseno singolarmente pesi  $1/2$ :

$$\begin{aligned} \overline{K} &= \frac{1}{T} \int_0^T K dt = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} k A^2 \right) \\ \overline{U} &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} k A^2 \right) \end{aligned}$$

in media l'energia cinetica e potenziale valgono la metà dell'energia meccanica (*equipartizione dell'energia meccanica*).

L'oscillatore armonico è un moto periodico in cui l'energia potenziale ha forma parabolica ovvero  $U = \frac{1}{2}kx^2$ ; scriviamo la relazione della forza agente:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U = -\frac{d}{dx}U \cdot \hat{u}_x = -kx \cdot \hat{u}_x$$



Da cui si osserva che un punto in moto armonico passa più tempo nelle posizioni di inversione del moto che nel punto di equilibrio.

Sia ora una curva che rappresenta l'energia potenziale di un moto: nell'intorno di un punto di minimo possiamo usare Taylor e scrivere:

$$U(x)|_{x_0} = U(x_0) + U'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}U''(x_0)(x - x_0)^2 + o(x^2)$$

a patto di considerare  $U''(x_0) = k$  e scartando il valore  $U(x_0)$  e  $U'(x_0)$  perché valori minimi della funzione, otteniamo dalla precedente  $\frac{1}{2}k\Delta x^2$  che è un potenziale armonico; allora intorno a un punto di equilibrio (minimo) un moto si comporta come se fosse armonico.

### 5.3. Somma di moti armonici

**5.3.1. Sullo stesso asse.** Supponiamo di avere un punto materiale sottoposto a due forze elastiche lungo lo stesso asse: allora possiamo distinguere tra

- FORZE UGUALI

$$x_1(t) = A_1 \sin(\omega t + \phi_1)$$

$$x_2(t) = A_2 \sin(\omega t + \phi_2)$$

Le condizioni cinematiche possono differire ma la  $\omega$  è la stessa (forza). Per le proprietà dell'equazione del moto armonico la somma delle soluzioni è ancora soluzione:  $x(t) = x_1(t) + x_2(t) = A \sin(\omega t + \phi) = A_1 \sin(\omega t + \phi_1) + A_2 \sin(\omega t + \phi_2)$ ; sviluppando si ha  $A \cos \phi \sin \omega t + A \sin \phi \cos \omega t = A_1 \sin \phi_1 \cos \omega t + A_1 \cos \phi_1 \sin \omega t + A_2 \sin \phi_2 \cos \omega t + A_2 \cos \phi_2 \sin \omega t$ , da cui segue:

$$\begin{cases} A \cos \phi = A_1 \cos \phi_1 + A_2 \cos \phi_2 \\ A \sin \phi = A_1 \sin \phi_1 + A_2 \sin \phi_2 \end{cases}$$

Risolvendo per  $A$  si ottiene che:  $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\phi_1 - \phi_2)}$  e d'altra parte  $\tan \phi = \frac{A_1 \sin \phi_1 + A_2 \sin \phi_2}{A_1 \cos \phi_1 + A_2 \cos \phi_2}$ .

Questo risultato ci mostra che l'ampiezza complessiva non è la media delle ampiezze ma è presente il termine  $\phi_1 - \phi_2$

- Se  $\phi_1 = \phi_2$  il moto si dice in fase e  $A = A_1 + A_2$
- Se  $\phi_1 = -\phi_2$  il moto si dice in opposizione di fase e  $A = A_1 - A_2$
- Se  $\phi_1 - \phi_2 = \pi/2$  il moto si dice in quadratura di fase e l'ampiezza è la media geometrica

- FORZE DIVERSE

Consideriamo le seguenti ipotesi: sia  $\omega_1 \neq \omega_2$  e  $t = 0$  il tempo iniziale; le equazioni di due generici moti saranno allora

$$x_1(t) = A_1 \sin(\omega_1 t + \phi_1)$$

$$x_2(t) = A_2 \sin(\omega_2 t + \phi_2)$$

Se abbiamo una differenza di fase non nulla ( $\phi_1 - \phi_2 \neq 0$ ) allora potremo scrivere la differenza di fase, dalla  $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\delta)}$

$$\delta = (\omega_1 t - \phi_1) - (\omega_2 t - \phi_2) = (\omega_1 - \omega_2)t + (\phi_1 - \phi_2)$$

Si osserva che il coseno ha un argomento che dipende dal tempo e questo risulterà in valori massimi e minimi dell'oscillazione alternati, ovvero con due moti armonici con due forze diverse l'ampiezza complessiva cambia nel tempo.

Scegliamo un caso semplificato per mettere in evidenza la dipendenza dal tempo: sia  $A_1 = A_2 = A$  e  $\phi_1 = \phi_2 = 0$ ; gli oscillatori avranno le equazioni

$$\begin{aligned}x_1(t) &= A \sin(\omega_1 t); & x_2(t) &= A \sin(\omega_2 t) \\x(t) &= x_1(t) + x_2(t) = A(\sin(\omega_1 t) + \sin(\omega_2 t))\end{aligned}$$

Applicando le formule di bisezione si ha

$$x(t) = 2A \left( \overbrace{\cos \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t}^{\Omega} \right) \left( \overbrace{\sin \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t}^{\omega} \right) = \boxed{2A \cos(\Omega t) \sin(\omega t)}$$

Si nota che la soluzione è il prodotto di due funzioni trigonometriche con pulsazioni diverse, infatti  $\Omega$  è una differenza e  $\omega$  una somma: si ha un inviluppo delle funzioni seno e coseno (fenomeno dei *battimenti*).

**5.3.2. Su assi ortogonali.** Immaginiamo due assi ortogonali, per semplicità  $x$  e  $y$ , lungo i quali siano due oscillatori con stessa pulsazione:

- (1) Caso  $\phi = 0$ :  $\begin{cases} x = A \sin(\omega t) \\ y = B \sin(\omega t) \end{cases} \Rightarrow y = \frac{B}{A}x$  [bisettrice primo e terzo quadrante]
- (2) Caso  $\phi = \pi$ :  $\begin{cases} x = A \sin(\omega t) \\ y = B \sin(\omega t + \pi) \end{cases} \Rightarrow y = -\frac{B}{A}x$  [bisettrice secondo e quarto quadrante]
- (3) Caso  $\phi = \pi/2$ :  $\begin{cases} x = A \sin(\omega t) \\ y = B \underbrace{\sin(\omega t + \pi/2)}_{\cos(\omega t)} \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{x}{A}\right)^2 + \left(\frac{y}{B}\right)^2 = 1$  [ellisse nell'origine: con  $A = B$  si ha una circonferenza]

Calcoliamo le velocità degli oscillatori visti nei tre casi precedenti:  $\dot{x} = \omega A \cos(\omega t)$ ,  $\dot{y} = \omega B \cos(\omega t + \phi)$ ; l'energia cinetica complessiva risulterà:

$$K = \frac{1}{2}m(\omega^2 A^2 \cos^2(\omega t) + \omega^2 B^2 \cos^2(\omega t + \phi))$$

$$K = \frac{1}{2}m\omega^2 \underbrace{\left[ A^2 \cos^2(\omega t) + B^2 \cos^2(\omega t + \phi) \right]}_{\star}$$

L'energia potenziale allora sarà:

$$U = \frac{1}{2}k(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2}k \underbrace{\left[ A^2 \sin^2(\omega t) + B^2 \sin^2(\omega t) \right]}_{\star}$$

Allora l'energia meccanica risulta:

$$E = K + U = \frac{1}{2}k(A^2 + B^2)$$

poiché si semplificano i termini  $\star$  ricordando che  $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ .

L'energia meccanica complessiva è indipendente dal fatto che abbiamo un oscillatore complessivo particolare come nei casi precedenti: se abbiamo la stessa pulsazione l'energia meccanica è indipendente dal termine di fase (è un termine puramente cinematico).

## 5.4. Oscillatore smorzato

**5.4.1. Smorzamento viscoso.** Questa definizione si riferisce al fatto che è presente un termine dissipativo che riduce l'energia meccanica del sistema. Immaginiamo un punto materiale attaccato a una molla di costante  $k$  in movimento su un piano liscio e il sistema è immerso in un fluido viscoso.

Le forze agenti sono la forza elastica e quella di attrito viscoso: scriviamo la somma delle forze con la seconda legge della dinamica:

$$m\ddot{x} = -kx - \lambda\dot{x} \Rightarrow \ddot{x} + \frac{\lambda}{m}\dot{x} + \omega^2 x = 0$$

Scrivendo il *coefficiente di smorzamento* come  $\gamma = \lambda/2m$  si ha  $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega^2 x = 0$ ; si ha che  $\omega^2 = \frac{k}{m}$  è una caratteristica *propria* del sistema, quindi inserisco un pedice per caratterizzare tale pulsazione scrivendo  $\omega_0^2$ :

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

L'equazione differenziale trovata ha una soluzione esponenziale: sicuramente mi aspetto  $x(t) \simeq e^{\alpha t}$ ; controllo che sostituendo la soluzione nell'equazione ottengo un annullamento:

$$(5.4.1) \quad x(e^{\alpha t}) = e^{\alpha t} (\alpha^2 + 2\gamma\alpha + \omega_0^2) = 0$$

Controllo le condizioni su  $\alpha$  per garantire l'annullamento e ottengo  $\alpha = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$  da discutere rispetto al discriminante sotto radice (che entro le ipotesi iniziali può assumere in generale ogni valore):

- $\gamma^2 > \omega_0^2$ : si ha uno smorzamento *forte*, ovvero  $\alpha_1, \alpha_2 < 0 \rightarrow x(t) = Ae^{\alpha_1 t} + Be^{\alpha_2 t}$  [non oscilla]
- $\gamma^2 < \omega_0^2$ : si ha uno smorzamento *debole*, ovvero  $\alpha_1, \alpha_2 = -\gamma \pm \omega i$  con  $\omega = \omega_0^2 - \gamma$  e risulta  $x(t) = Ae^{(-\gamma - \omega i)t} + Be^{(-\gamma + \omega i)t}$
- $\gamma^2 = \omega_0^2$ : si ha uno smorzamento *critico*, ovvero  $\alpha = -\gamma \rightarrow x(t) = Ae^{-\gamma t}$  [non oscilla]

Discutiamo lo smorzamento debole:

$$x(t) = \underbrace{e^{-\gamma t}}_{(1)} \left[ \underbrace{Ae^{-\omega t i} + Be^{-\omega t i}}_{(2)} \right]$$

In generale abbiamo il termine (1) che modula smorzando esponenzialmente, mentre il termine (2) può essere riscritto con le formule di Eulero nel modo seguente:

$$x(t) = e^{-\gamma t} \left[ (A + B) \cos(\omega t) + \underbrace{i(B - A) \sin(\omega t)}_{\textcircled{C}} \right]$$

È necessario discutere a questo punto la parte complessa dell'equazione  $\textcircled{C}$ , che non è accettabile come risultato nella Fisica: impongo che tale equazione sia in campo reale usando  $A$  e  $B$  complessi coniugati  $\left( A = \frac{a}{2} + i\frac{b}{2}, B = \frac{a}{2} - i\frac{b}{2} \right)$  ottenendo la seguente:

$$x(t) = e^{-\gamma t} [a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)]$$

Dove abbiamo ritrovato la soluzione dell'oscillatore armonico; se  $\gamma = 0$  otteniamo l'oscillatore armonico con  $\omega = \omega_0$ ; altrimenti abbiamo un oscillatore esponenzialmente decrescente. Si osserva che l'oscillatore smorzato oscilla con una pulsazione diversa da quella propria.

---

**Equazione  
caratteristica  
oscillatore  
smorzato**

---

**Smorzamento  
debole**

**5.4.2. Smorzamento costante.** Introduciamo il caso in cui un punto materiale è attaccato a una molla e oscilla a contatto con un piano scabro: l'attrito che si oppone al moto compie lavoro negativo diminuendo costantemente l'energia meccanica; abbiamo il punto che partendo da fermo in  $x_0 = 0$  passa per il punto di inversione  $x_1$ . Ricordando la (2.9.2) applicata in  $x_1$  otteniamo:

$$\begin{aligned} W_{\text{elastica}} + W_{\text{attrito}} &= 0 \Rightarrow W_{\text{attrito}} = \Delta E_{\text{elastica}} \\ \frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}kx_0^2 &= \mu mg \cdot \hat{u}_x \cdot (x_0 - x_1) \hat{u}_x = -\mu mg(x_1 + x_0) \\ x_1 &= x_0 - 2\frac{\mu mg}{k} = \boxed{-2x_A} \end{aligned}$$

posto  $x_A = \frac{\mu mg}{k}$  e sostituito il valore di  $x_0$ ; a causa dell'attrito il punto non si arresta in  $x_1$  ma inverte prima il moto: applicando di nuovo l'analisi appena condotta per il nuovo punto di inversione si avrà  $x_1' = -4x_A$ : possiamo concludere che nell' $n$ -esima oscillazione, il moto si invertirà nel punto  $x_1 = x_0 - nx_A$ .

Tale moto non è strettamente periodico: l'intervallo di tempo che intercorre tra una inversione e la successiva si chiama *pseudoperiodo*:

---

**Pseudo-pendolo**

$$T' = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Calcoliamo la posizione di arresto del punto: esso riparte da un estremo se la forza elastica è ancora maggiore dell'attrito statico ovvero  $kx_n > \mu_s mg \Rightarrow x_n > \frac{\mu_s mg}{k} = x_A$ ; se questa condizione è soddisfatta da  $x_n$  ma non dal successivo  $x_{n+1}$  allora il punto si arresta nella  $n + 1$  esima oscillazione.

**5.4.3. Oscillatore forzato.** Immaginiamo il caso in cui un oscillatore mantiene la sua pulsazione non ostante la presenza di attrito viscoso: introduciamo un *termine forzante* nell'equazione (esso sarà necessariamente periodico):

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \underbrace{\frac{F}{m} \sin(\omega t)}_{\text{forzante}}$$

Con una forzante di pulsazione  $\omega$  mi aspetto una soluzione del tipo  $x(t) = A \sin(\omega t + \phi)$  a regime; ci sarà necessariamente un termine particolare relativo allo smorzamento del tipo  $ae^{\alpha_1 t} + be^{\alpha_2 t}$ , e la soluzione risulta come:  $A \sin(\omega t + \phi) + ae^{\alpha_1 t} + be^{\alpha_2 t}$ .

Sostituendo nell'equazione dell'oscillatore ottengo le seguenti condizioni di annullamento:

$$\begin{aligned} (5.4.2) \quad A &= \frac{F}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}} \\ \tan \phi &= -\frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \end{aligned}$$

**Parte 2**

# **Elettromagnetismo**



## CAPITOLO 6

### Elettrostatica

#### 6.1. Legge di Coulomb

Il primo che cercò di quantificare i fenomeni elettrostatici fu Coulomb, grazie a una bilancia a torsione: si appende a un filo di costante elastica nota una bacchetta trascurabile rispetto a due masse appese alle sue estremità e uguali,  $q_1$  e  $q_2$  tali da essere sensibili ai fenomeni elettrostatici dunque cariche, con la stessa quantità di carica (misurabile con un elettroscopio). Avvicinando alle due masse altri due corpi dotati di carica uguale e fatti con lo stesso materiale si osserva una repulsione, che causerà una rotazione dell'asta e una torsione del filo; questa interazione è lungo la direttrice tra ciascuna coppia massa sull'asta, massa carica dello stesso materiale, considerandole come punti materiali.

Coulomb ha quantificato questa interazione nel modo seguente:

$$(6.1.1) \quad \vec{F} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{u}_r \quad \text{Forza di Coulomb}$$

Si osserva che tale forza si presenta come centrale: se si hanno due cariche dello stesso segno la forza è repulsiva mentre è attrattiva in presenza di cariche con segno opposto, rispetto al versore  $\hat{u}_r$  che congiunge le due cariche interagenti.

Questa legge si presenta come un'equazione vettoriale: in caso di più corpi interagenti è possibile lavorare usando il principio di sovrapposizione degli effetti, sommando l'interazione sulle singole coppie di corpi soggetti alla forza.

La differenza con la legge di gravitazione è la costante  $k$ : per ben definire tale quantità si introduce l'unità di misura *Coulomb* ( $C$ ) e la costante vale:

$$k := \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$

dove la  $\varepsilon_0$  vale  $8,85 \cdot 10^{-12} C^2/Nm^2$  e si chiama costante dielettrica del vuoto (il fatto che l'esperimento di Coulomb sia effettuato nell'aria non ha un impatto sul risultato finale). Si osserva che la carica dell'elettrone in queste condizioni è  $e^- := -1,6 \cdot 10^{-19} C$ .

#### 6.2. Campo elettrostatico

**6.2.1. Linee di campo.** Per Coulomb se abbiamo due cariche puntiformi poste a una certa distanza, esse interagiscono istantaneamente; vogliamo reinterpretare questa interazione come una modifica dello spazio legata alla posizione di una carica: supponiamo di prendere una carica  $Q^+$  positiva, e una carica trascurabile (*esploratrice*)  $q$  sempre definita positiva. Nel momento in cui costruiamo questo sistema, per la legge di Coulomb è presente una forza repulsiva lungo la direttrice che congiunge le due cariche.

Lo spazio intorno a  $Q^+$  sembra modificato: la linea di inviluppo di tutti i punti in cui possiamo posizionare  $q$  rappresenta la linea di campo; le linee di campo sono ora uscenti dalla carica  $Q^+$ . Inserendo una carica uguale ma negativa  $Q^-$ , le linee di campo saranno entranti (forza attrattiva).

Mettiamo in evidenza le grandezze che caratterizzano questo campo definendo il

---

**Vettore di  
campo elettrico**

$$(6.2.1) \quad \vec{E} := \frac{\vec{F}}{q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{u}_r$$

Il segno del vettore dipende esclusivamente dal segno di  $Q$ .

Se due cariche opposte di uguale intensità sono a una certa distanza tra loro si ha un sistema chiamato *dipolo*: le linee di campo si ottengono con la sovrapposizione degli effetti e saranno uscenti dalla carica positiva ed entranti in quella negativa; si avranno linee di campo non incrociate, in accordo col p.s.e.

**6.2.2. Distribuzione di carica.** Nei casi pratici non si ha a che fare con cariche puntiformi quanto con distribuzioni di carica su superfici: esse sono naturalmente sorgenti di campo; in generale si cerca di conoscere il campo medio nei punti distanti dalle cariche dai quali la distribuzione è percepita *continua*. Se la carica  $q$  è distribuita su una superficie  $S$  chiusa contenente il volume  $\tau$  si definisce la *densità spaziale di carica*  $\rho(x, y, z)$  mediante

Densità spaziale di  
carica

$$(6.2.2) \quad dq = \rho(x, y, z) d\tau$$

allora la carica  $q$  sarà data da  $q = \int_{\tau} \rho(x, y, z) d\tau$  esteso a tutto il volume. Grazie alla (6.2.1) possiamo scrivere il campo prodotto dalla carica infinitesima  $dq$  in un elementino della superficie  $dS$  su un punto  $P$  posto a una distanza  $r$ :

$$d\vec{E} = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{u}_r = \frac{\rho d\tau}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{u}_r$$

con  $\hat{u}_r$  versore della direzione orientata che va da  $dq$  al punto  $P$ . Il campo elettrico in  $P$  dovuto da tutta la superficie  $S$  si calcola integrando la precedente:

$$(6.2.3) \quad \vec{E}_P(S) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\tau} \frac{\rho d\tau}{r^2} \hat{u}_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\tau} \frac{\rho(x, y, z) dxdydz}{r^2} \hat{u}_r$$

Se siamo interessati alla carica superficiale di un corpo definiamo la *densità superficiale* di carica come

Densità superficiale  
di carica

$$(6.2.4) \quad dq = \sigma(x, y, z) d\Sigma, \quad q = \int_{\Sigma} \sigma(x, y, z) d\Sigma$$

dove  $d\Sigma$  è l'area della superficie infinitesima su cui è distribuita la carica.

Se la carica è invece distribuita su una linea si ha una *densità lineare* di carica definita come

Densità lineare di  
carica

$$(6.2.5) \quad dq = \lambda(x, y, z) dl, \quad q = \int_l \lambda(x, y, z) dl$$

In generale le funzioni di densità non sono costanti nel dominio di integrazione; se lo sono si parla di distribuzione costante e valgono le formule più semplici  $q = \rho\tau$ ,  $q = \sigma\Sigma$ ,  $q = \lambda l$ .

### 6.3. Lavoro e potenziale elettrico

Anche il campo elettrico ha un potenziale, definito come

---

**Potenziale  
elettrico**

$$(6.3.1) \quad V_i(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{r} + k$$

con  $k$  che può essere eliminata ponendo il potenziale nullo per raggio infinito rispetto alla sorgente di campo; per calcolare il potenziale dovuto da più cariche si usa la sovrapposizione degli effetti, mentre l'espressione precedente si ottiene direttamente dall'integrazione del vettore di campo elettrico. Infatti considerando che la forza di



Coulomb è una forza centrale (quindi conservativa) per essa è possibile introdurre un'energia potenziale a partire dalla definizione del lavoro (come per la forza di gravità):

$$W = \int_l \vec{F} \cdot d\vec{s} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \int_A^B \frac{\overbrace{\vec{r} \cdot d\vec{s}}^{d\vec{r}}}{r^2} = -q \left[ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right) \right]$$

Tramite la forza possiamo definire l'energia potenziale dalla precedente (analogamente al campo gravitazionale) e successivamente il potenziale dall'energia:

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r} \Rightarrow V = \frac{U}{q} = \boxed{\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}}$$

Usando il gradiente possiamo riscrivere la forza come  $\vec{F} = -\vec{\nabla} \cdot U$  e generalizzare per il campo elettrico dividendo tutto per  $q$  e scrivendo la forma

$$(6.3.2) \quad \vec{E} = -\vec{\nabla} \cdot V = - \left( \frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z} \right)$$

## 6.4. Geometria differenziale

**6.4.1. Teorema di Gauss.** Sia  $S$  una superficie orientata uscente e  $q$  una carica positiva: il teorema di Gauss ci dice che il flusso attraverso la superficie è

$$(6.4.1) \quad \Phi_S(\vec{E}) := \int_S (\vec{E} \cdot \hat{n}) ds = \begin{cases} 0 & \text{per } q \text{ esterna} \\ q/\epsilon_0 & \text{per } q \text{ interna} \end{cases}$$

Teorema di Gauss  
per il campo  
elettrico

Supponiamo di avere un piano carico positivamente e infinito (carico uniformemente), nel quale interseco una superficie cilindrica in modo che il piano la tagli perfettamente a metà (quota  $h/2$ ); su ogni elementino di superficie del piano  $ds$ , ci sarà una unità di carica  $dq$  e una densità di carica superficiale  $\sigma$ .

Prese delle coppie di elementini di superficie  $ds$ , si ha una interazione repulsiva e per ogni coppia di elementini il vettore risultante del campo elettrico sarà perpendicolare al piano, che essendo infinito e omogeneo presenta ovunque questa proprietà; il flusso del campo elettrico attraverso la superficie sarà dato dai contributi:

$$\Phi = 2\Phi_{\text{base}} + \cancel{\Phi_{\text{laterale}}}$$

Il flusso attraverso la superficie laterale (ortogonale al vettore di campo) è nullo a causa del prodotto col versore normale; questo vuol dire che la quota alla quale ci si pone dal piano non varia l'intensità del flusso; possiamo scrivere allora

$$\Phi = 2 \underbrace{ES}_{(*)} \stackrel{G}{=} \frac{1}{\epsilon_0} \sigma S \Rightarrow |\vec{E}| = \boxed{\frac{\sigma}{2\epsilon_0}}$$

Si osserva che in presenza di un piano infinito carico il campo elettrico è costante. Nella precedente si è portato fuori dall'integrale  $(*)$  il prodotto con  $\vec{E}$  massimizzato e l'area della superficie di base  $S$ .

*Dimostrazione.* Consideriamo una superficie chiusa e orientata  $S$  concava e una carica positiva  $q^+$  all'interno del suo volume; tracciamo la congiungente dalla carica a un punto interno alla cavità della superficie (quindi esterno al suo volume) e chiamiamo  $r$  tale distanza con versore  $\hat{u}_r$ ; si forma un angolo tra la normale alla superficie e il campo pari ad  $\alpha$  e il vettore di campo sarà diretto come  $\hat{u}_r$ .

Definiamo il flusso attraverso la superficie come:

$$d\Phi_{dS}(\vec{E}) := \vec{E} \cdot \hat{u}_n dS = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{u}_r \cdot \hat{u}_n dS$$

da cui  $\hat{u}_r \cdot \hat{u}_n = 1 \cdot \cos \alpha$  ci permette di considerare che  $dS \cdot \cos \alpha \Rightarrow d\Sigma$  come elementino di superficie ortogonale al piano dei due versori; la precedente diventa allora:

$$\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{d\Sigma}{r^2} \Rightarrow \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega$$

dal fatto che si ha il rapporto  $d\Sigma/r^2$  è un angolo solido, da  $d\alpha = dl/r \rightarrow d\Omega = d\Sigma/r^2$ . Esaminiamo i due casi possibili per il posizionamento della carica  $q^+$ :

(1) DENTRO LA SUPERFICIE:

Non dipendendo dalla distanza ma solo dall'angolo solido, bisogna integrare su tutto l'angolo  $\Omega$  (che risulta essere  $4\pi$ )

$$d\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega \Rightarrow \Phi = \int_{S \sim \Omega} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega = \boxed{\frac{q}{\epsilon_0}}$$

(2) FUORI DALLA SUPERFICIE:

Quando si integra la zona dell'angolo solido ha importanza solo quando esso interseca la superficie; essendo il vertice all'esterno, esso avrà una superficie di intersezione entrante e uscente e a parità di angolo solido, laddove viene intersecata  $S$ , avrà un elementino di flusso entrante e uno corrispondente uscente; i contributi si semplificano nel modo seguente

$$\Phi = \int_{\Omega} \left( -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \right) d\Omega = \boxed{0}$$

**6.4.2. Teorema della divergenza.** Sia  $\vec{v}$  un generico vettore, allora vale la seguente:

$$\int_S (\vec{v} \cdot \hat{n}) dS = \int_{\Omega} (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) d\Omega$$

dove  $S$  è una superficie chiusa e  $\Omega$  il volume da essa racchiuso e l'operazione *divergenza* è il prodotto scalare di nabla per un vettore.

Usiamo il teorema della divergenza per trovare le proprietà locali di un campo a partire dal teorema di Gauss:

$$\Phi(\vec{E}) = \int_S (\vec{E} \cdot \hat{n}) dS \stackrel{G}{=} \frac{q}{\epsilon_0} \text{ (per Gauss)}$$

**Divergenza del  
campo elettrico**

$$(6.4.2) \quad \Phi(\vec{E}) \stackrel{\text{DIV.}}{=} \int_{\Omega} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) d\Omega \text{ (per Divergenza)}$$

Cerchiamo di ricavare un integrale di volume anche dalla prima, poiché potremo comparare gli integrandi (il volume è fissato ed è racchiuso dalla superficie  $S$ ):

$$\frac{q}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\Omega} \underbrace{\rho(x, y, z)}_{\text{densità di carica}} d\Omega$$

L'integrale per la densità di carica può essere anche molto complicato, ma ora può essere comparato con quello proveniente dal teorema della divergenza:

$$\Phi(\vec{E}) = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\Omega} \rho(x, y, z) d\Omega = \int_{\Omega} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) d\Omega$$

A questo punto si può affermare che l'uguaglianza fra le due scritture del flusso deve essere vera in ogni punto del volume e quindi deve valere per gli integrandi; concludiamo che, dato un vettore di campo elettrico, si ha:

Formulazione  
locale di Gauss

$$(6.4.3) \quad \text{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

*Dimostrazione.* Consideriamo un elementino infinitesimo di volume in un riferimento cartesiano; considero due delle sue facce opposte  $A$  e  $B$  separate dallo spigolo  $dx$  lungo l'asse  $x$ ; la normale di ciascuna faccia è uscente dalle due facce rispetto all'elementino di volume. Se nello spazio in cui è preso l'elementino esiste un campo definito dal vettore  $\vec{v}$ , possiamo calcolare l'elementino di flusso delle due facce:

$$\begin{cases} -\vec{v} \cdot \hat{u}_x(dydz) & (A) \\ \vec{v}' \cdot \hat{u}_x(dydz) & (B) \end{cases}$$

chiamando le superfici laterali dell'elementino di volume  $dS = dydz$ . Attraverso le superfici parallele a  $A$  e  $B$  il flusso sarà pari a:

$$d\Phi(A, B \parallel z) = (\vec{v}' - \vec{v}) \cdot \hat{u}_x(dydz)$$

L'azione del prodotto scalare proietta il campo di  $\vec{v}$  lungo  $x$ , quindi sapremo come varia il vettore campo in due punti  $A$  e  $B$  infinitamente vicini; possiamo scriverlo tramite una derivazione di  $\vec{v}$  lungo  $x$  rispetto allo spostamento sull'asse:

$$(\vec{v}' - \vec{v}) \cdot (dydz) = \frac{\partial \vec{v}_x}{\partial x} \underbrace{dx}_{\text{elem. di volume}} (dydz)$$

La precedente scrittura mette in evidenza l'elementino di volume infinitesimo; ripetendo lo stesso ragionamento per variazioni lungo l'asse  $y$  o  $z$  si ottiene la stessa espressione; d'altra parte tutti gli elementini di flusso vanno sommati. Allora l'elementino di flusso complessivo va scritto come:

$$d\Phi = \left( \frac{\partial \vec{v}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{v}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{v}_z}{\partial z} \right) (dxdydz) = \vec{\nabla} \cdot \vec{v}$$

Con la precedente infatti si studia la variazione del campo nelle diverse direzioni. Per spostare sul piano macroscopico il ragionamento possiamo assumere che ogni elementino di volume ne abbia altri adiacenti fino alla frontiera del volume che si sta considerando: dato che stiamo calcolando il flusso e le superfici degli elementini si annullano a coppie, l'integrale del flusso su un volume è pari al flusso attraverso la superficie che lo racchiude.

**6.4.3. Rotore.** L'operatore nabla si comporta come un vettore quando agisce su un campo vettoriale: l'operazione di prodotto vettoriale di nabla con un vettore si chiama

$$\vec{\nabla} \times \vec{v} = \text{rot}(\vec{v}) = \det \begin{bmatrix} \hat{u}_x & \hat{u}_y & \hat{u}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \vec{v}_x & \vec{v}_y & \vec{v}_z \end{bmatrix}$$

Questo termine è non nullo nel momento in cui le linee di campo sono chiuse; si dimostra che esiste una relazione tra il rotore e il momento angolare.

Per quanto riguarda una carica puntiforme, calcoliamo il rotore del suo campo elettrico: possiamo generalizzare il calcolo ricordando la (6.3.2):

$$(6.4.4) \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = \left( -\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z} V + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial y} V \right) \hat{u}_x + \left( -\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x} V + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} V \right) \hat{u}_y + \left( -\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} V + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} V \right) \hat{u}_z$$

---

**Rotore del  
campo elettrico**

Se possiamo affermare che tutte le derivate miste tra parentesi si annullano allora troviamo che il rotore del campo elettrico (linee di campo aperte) è identicamente nullo.

**6.4.4. Teorema di Schwartz.** Per funzioni continue e derivabili con continuità le derivate parziali incrociate coincidono; prendiamo ad esempio la funzione potenziale: svolgendo le derivate incrociate di  $z$  rispetto a  $y$  otteniamo:

$$\frac{\partial}{\partial z} V = -\frac{1}{2} \frac{2z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial V}{\partial z} \right) = \frac{3yz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}}$$

Il denominatore rimane simmetrico nelle tre variabili, il numeratore romperebbe la simmetria ma compaiono entrambe  $y$  e  $z$  dopo aver derivato per entrambe; se incrocio le derivate e derivo prima per  $z$  e poi per  $y$  otterrò allora per simmetria la stessa derivata.

Per il teorema di Schwartz possiamo affermare che:

$$(6.4.5) \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$$

ovvero che *il campo elettrostatico è irrotazionale* (ha rotore nullo).

**6.4.5. Teorema di Stokes.** Dato un vettore di un campo  $\vec{v}$ , la circuitazione del vettore sul percorso  $L$  è uguale a

Teorema di Stokes (6.4.6) 
$$\oint_L \vec{v} \cdot d\vec{l} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \cdot \hat{u}_n dS$$

Questa relazione collega un integrale di linea lungo un percorso chiuso  $L$  nello spazio e uno di superficie; la circuitazione del vettore  $\vec{v}$  è allora uguale al flusso del suo rotore, presa  $S$  orlata dal percorso chiuso scelto  $L$ .

Considerando il campo elettrico abbiamo che la sua circuitazione su un percorso chiuso  $L$  sarà  $\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$  per la precedente dimostrazione (6.4.5); esso è uguale per il teorema di Stokes alla quantità  $\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot \hat{u}_n dS$  che risulta identicamente nulla dal fatto che  $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ .

**Dimostrazione.** Poniamoci sul piano  $xy$  e consideriamo la corrispondente faccia dell'elementino di volume sulla quale calcoleremo la circuitazione del vettore  $\vec{v}$ . Dobbiamo quindi vedere la proiezione del vettore lungo il percorso che stiamo compiendo: la faccia che stiamo considerando ha i lati paralleli agli assi, i quali possono essere scritti come  $dx$  e  $dy$  (la superficie della faccia sarà  $dS = dxdy$ ); lo spostamento lungo il perimetro della faccia sarà dato dalla proiezione del vettore su ciascun lato associata allo spostamento:

$$\vec{v}_x dx - \vec{v}_y dy - \vec{v}'_x dx + \vec{v}'_y dy = \underbrace{(\vec{v}_x + \vec{v}'_x)}_{-\frac{\partial \vec{v}_x}{\partial y} dy} dx + \underbrace{(\vec{v}'_y - \vec{v}_y)}_{\frac{\partial \vec{v}_y}{\partial x} dx} dy$$

Nella precedente usiamo i vettori con apice per distinguerli, dal momento che i quattro vettori sono in punti diversi dello spazio e non è detto che il vettore di campo proiettato sia uguale solo per la simmetria del caso particolare considerato; inoltre scegliamo come variazione positiva  $\vec{v}' - \vec{v}$ , usando un riferimento per il segno dei differenziali che risulteranno dalle differenze in parentesi: infatti la prima rappresenta la proiezione di  $\vec{v}$  lungo l'asse  $y$  in due  $x$  differenti, che può essere scritta come differenziale  $-\partial \vec{v}_x / \partial y dy$ ; analogamente la seconda differenza rappresenta una variazione di  $\vec{v}$  lungo  $y$  proiettato sull'asse  $x$ .

La precedente può essere scritta come:

$$\overbrace{\left( \frac{\partial \vec{v}_y}{\partial x} - \frac{\partial \vec{v}_x}{\partial y} \right)}^{\text{componente } z \text{ del rotore}} \cdot \underbrace{(dx dy)}_{\text{superficie } dS}$$

A patto di prendere una superficie come la faccia del caso particolare e un vettore orientato  $\vec{v}$ , allora ricostruiamo un elementino di flusso (dalla precedente).

Per generalizzare il discorso a qualsiasi superficie possiamo immaginare di suddividere una generica superficie in un reticolato di elementini di superficie; ogni elementino avrà un lato adiacente a quello di un'altro: se manteniamo la stessa circuitazione sul tratto contiguo comune ai due elementini le circuitazioni sono uguali e opposte, dunque si annullano lungo tutti i lati degli elementini di superficie eccetto che sul percorso che orla la superficie stessa:

*l'integrale della circuitazione sul percorso complessivo visto come somma di circuitazioni elementari è pari alla circuitazione sul percorso che orla la superficie*

**6.4.6. Equazione di Poisson.** Dalle equazioni precedenti consideriamo il sistema formato da:

$$(6.4.7) \quad \begin{cases} \vec{E} = -\vec{\nabla} V & (1) \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} & (2) \end{cases}$$

Si nota che la (2) è la riscrittura di (6.4.3) e si tratta della *prima equazione di Maxwell*.

La (1) ci dice che possiamo interpretare il campo elettrico (vettoriale) come un campo scalare (è un campo conservativo che ammette potenziale), la (2) ci dice che cercando le variazioni del campo nello spazio abbiamo divergenze particolari quando troviamo le cariche (che sono sorgenti di campo). Accoppiando le precedenti si ha:

$$\vec{\nabla} \cdot (-\vec{\nabla} V) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

La precedente è corretta poiché il nabla più interno opera su un campo vettoriale e il nabla più esterno opera su un argomento alla sua destra, quindi per le proprietà del prodotto scalare possiamo accoppiare i due nabla ottenendo

$$(6.4.8) \quad \nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} = \boxed{\frac{\partial^2}{\partial x^2} V + \frac{\partial^2}{\partial y^2} V + \frac{\partial^2}{\partial z^2} V} \quad \begin{array}{l} \text{Equazione di} \\ \text{Poisson} \end{array}$$

Storicamente l'equazione di Poisson in assenza di sorgenti di campo prende il nome di *equazione di Laplace*:  $\nabla^2 V = 0$

## 6.5. Dipolo elettrico

Poniamoci in un riferimento su un asse  $z$  e su di esso siano presenti due cariche uguali ma opposte,  $+q$  e  $-q$  poste a distanza  $d$ ; ci chiediamo come è il potenziale in un punto  $P$  molto distante dal sistema di cariche, che chiamiamo dipolo, rispetto alla distanza tra le cariche  $d$ .

Chiamiamo la distanza di  $+q$  da  $P$ ,  $d_1$  e la distanza di  $-q$  da  $P$ ,  $d_2$ ; il potenziale che avremo in  $P$  sarà allora:

$$V_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left( \frac{q}{d_1} - \frac{q}{d_2} \right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{d_2 - d_1}{d_1 d_2}$$

Usando l'*ipotesi del dipolo* ( $d_1, d_2 \gg d$ ) ci poniamo con  $P$  a una distanza molto maggiore di  $d$ : preso il centro del dipolo, tracciamo una nuova distanza  $r$  che congiunga  $P$  al punto medio di  $d$ ; traccio ora la perpendicolare  $h$  a  $d_2$  e, per distanze molto grandi, essa si confonde con l'arco di circonferenza  $\widehat{a}$  che descrive l'angolo in  $P$ .

Possiamo dire che il tratto  $d_2 - d_1 = \frac{d \cos \theta}{r^2}$  sfruttando le proprietà del triangolo rettangolo formato da  $h$  e  $\theta$  l'angolo formato tra  $d_2$  e  $d$ ; si ottiene allora:

$$V_P \simeq \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{d \cos \theta}{r^2}$$

Il circa uguale viene dalla precedente osservazione per cui è possibile approssimare  $h \sim \widehat{a}$ .

Costruiamo un oggetto unico, un vettore dalla carica negativa verso quella positiva, allora l'angolo  $\theta$  è la deflessione del vettore rispetto a  $P$ ; consideriamo come  $q$  la carica del dipolo (ammettendola non come carica complessiva ma come caratteristica), allora otteniamo un vettore che chiamiamo dipolo, caratterizzato da  $q$  e  $d$ :

---

**Potenziale del  
dipolo elettrico**

$$(6.5.1) \quad \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{d \cos \theta}{r^2} \hat{u}_r = \boxed{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{P} \cdot \vec{r}}{r^3}} = V_P$$

la precedente si ottiene considerando che il vettore puntamento  $\vec{P} = d \cos \theta$  all'interno della costruzione effettuata e  $\hat{u}_r = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$ .

Il campo elettrico si ottiene derivando il potenziale rispetto alla distanza  $r$ :

---

**Campo elettrico  
del dipolo**

$$(6.5.2) \quad \vec{E}_P = -\frac{\partial \vec{V}}{\partial \vec{r}} = \boxed{\frac{P}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2 \cos \theta \hat{u}_r + \sin \theta \hat{u}_\theta)}$$

dove il versore  $\hat{u}_\theta$  è tangente a quello  $\hat{u}_r$ . Il modulo di tale vettore vale  $E_P = \frac{P}{4\pi\epsilon_0} \sqrt{3 \cos^2 \theta + 1}$ .

## CAPITOLO 7

### Conduttori

#### 7.1. Campo elettrico nei conduttori

Quando un oggetto si carica, per convenzione si assume che vi sia stato un trasferimento di carica negativa (elettroni) da o verso di esso; i materiali che permettono il passaggio di cariche, anche al loro interno, sono definiti *conduttori*. Dopo una fase iniziale di spostamento delle cariche, si arriva a una configurazione finale per le cariche (elettrostatica).

Immaginiamo di avere un generico conduttore e di mettere delle cariche su di esso; siccome le cariche si possono muovere all'interno di esso, vi sarà un tempo nel quale si sposteranno fino a raggiungere la posizione di minima energia.

Supponiamo di prendere una superficie  $\Sigma$  all'interno del conduttore, che ha carica  $+Q$ ; è ben definito il flusso del campo  $\vec{E}$  all'interno del conduttore (attraverso  $\Sigma$ ) come:

$$\Phi(\vec{E}) := \int_{\Sigma} \vec{E}_{\text{INT}} \cdot \hat{u}_n d\vec{S}$$

La superficie può essere costruita arbitrariamente; d'altra parte se ci fosse un campo elettrico all'interno non si avrebbe la condizione di elettrostatica: una carica esploratrice all'interno del conduttore sarebbe sottoposta a una forza  $\vec{F} = q\vec{E}_M$  che sarà pari a zero nel caso di equilibrio; allora anche il campo elettrico all'interno dovrà essere nullo e di conseguenza il flusso.

Se prendiamo la superficie esterna  $\Sigma'$  allora per Gauss si ha che:

$$\Phi(\vec{E}) \stackrel{G}{=} \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

e il flusso sarà non nullo (ci sarà necessariamente un campo). Mettendo assieme i due ragionamenti appena seguiti, costruendo delle superfici sempre più vicine alla frontiera del conduttore, concludiamo per Gauss che *la carica di un conduttore in condizione di elettrostatica sarà localizzata solo sulla sua superficie e non al suo interno*.

La precedente osservazione si presta a una verifica sperimentale: immaginiamo di prendere una sfera conduttrice con carica  $Q$ , posta su un'asta isolante; se avviciniamo ad essa due semi calotte sferiche conduttrici, anche esse isolate dall'esterno, fino ad unirle a contatto con la sfera, avremo il passaggio della carica  $Q$  sulla superficie delle calotte, che formano un unico conduttore con la sfera iniziale; ciò si verifica automaticamente poiché per la legge di Coulomb per cui la forza elettrica varia come  $1/r^2$  e le cariche tendono a raggiungere la configurazione a più bassa energia. Se separiamo nuovamente le calotte, otterremo  $Q/2$  di carica su ciascuna calotta, mentre la sfera si sarà completamente scaricata.

Questa prova permette anche di verificare sperimentalmente la legge di Coulomb. Si osserva inoltre che la distribuzione elettrostatica delle cariche sulla superficie di un conduttore è *equipotenziale*.

## 7.2. Teorema di Coulomb

Prendiamo una porzione di un conduttore con carica  $Q$  positiva, in sezione: il conduttore si trova al di sotto della superficie e il vuoto al di sopra; il campo elettrico è allora perpendicolare alla sua superficie: se non lo fosse avremmo una proiezione del campo lungo la superficie e allora non si avrebbe la condizione di elettrostatica (solo con campo ortogonale si ha una superficie equipotenziale).

Immaginiamo di prendere un cilindro e di intersecarlo con la sezione del conduttore, ottenendo una simmetria analoga a quella della costruzione per il teorema di Gauss che ci permette di aspettarci che il campo non dipenderà dalla distanza, essendo il suo vettore parallelo alla superficie laterale; il flusso complessivo è uguale alla somma dei flussi attraverso alle superfici di base nel vuoto (1) e nel conduttore (2):

$$\Phi(\vec{E}) = \Phi_1 + \Phi_2 = \overbrace{\int_1 \vec{E} \cdot \hat{u}_n d\vec{s}}^{=Es_1} + \overbrace{\int_2 \vec{E} \cdot \hat{u}_n d\vec{s}}^{=0} \stackrel{Q}{=} \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Teorema di  
Coulomb (7.2.1)

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \hat{u}_n}$$

Il ragionamento è valido nel momento in cui siamo in prossimità della superficie del conduttore abbastanza vicini per vedere il campo elettrico ortogonale ad essa; inoltre abbiamo dimostrato nel paragrafo precedente che all'interno dei conduttori carichi il campo elettrico è nullo (quindi il flusso attraverso la superficie 2 è nullo).

Il campo elettrico dipende direttamente dalla densità della superficie del conduttore, per questo motivo le punte elettrostatiche hanno un comportamento particolare.

Se consideriamo una calotta conduttrice, ragionando di nuovo con Gauss e scegliendo una superficie all'interno si ha un flusso nullo (in assenza di cariche) e quindi un campo nullo (per Gauss le cariche all'esterno della superficie non contano).

*Dimostrazione.* Prendiamo un conduttore che abbia all'interno una cavità; a patto di porre una distribuzione di cariche sulla superficie interna in modo adeguato, il campo elettrico è nullo, non ostante siano presenti effettivamente delle cariche. Se così fosse potremo calcolare la circuitazione del campo lungo un percorso costruito in base alla distribuzione di carica, in modo che un tratto del percorso sia nella cavità ( $l_1$ ) e un tratto all'interno del conduttore ( $l_2$ ):

$$\oint_{l_2, l_1} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \oint_{l_1} \vec{E}_{\text{CAV}} \cdot d\vec{l} + \oint_{l_2} \vec{E}_{\text{INT}} \cdot d\vec{l} = 0$$

La circuitazione del campo elettrico è nulla dalla (6.4.5) e dal (6.4.6), quindi il precedente integrale si deve annullare: il secondo termine è nullo come dimostrato in precedenza (campo elettrico all'interno di un conduttore), mentre il primo termine può annullarsi solo se il campo elettrico all'interno della cavità è identicamente nullo.

Allora giunti a un assurdo concludiamo che la distribuzione di carica sulla cavità non può essere arbitraria, con affacciate cariche positive e negative.

Ponendoci di nuovo nel caso appena trattato, se nella cavità del conduttore ora scarico abbiamo una carica  $+q$  sicuramente nello spazio circostante ci sarà un campo elettrico al quale sarà soggetto il conduttore. All'interno del conduttore ci dovrà essere campo nullo e per Gauss, presa una superficie  $\Sigma$  esterna alla cavità ma nel volume del conduttore:

$$\Phi_{\Sigma}(\vec{E}) = \frac{q}{\varepsilon_0} \neq 0 = \int_{\Sigma} \vec{E} \cdot \hat{u}_n d\vec{s} \Rightarrow \vec{E} \neq 0$$



si osserva che il campo deve essere non nullo ma c'è una contraddizione col fatto che in un conduttore il campo debba essere nullo; allora si dovrà necessariamente avere una situazione di equilibrio tra le cariche che annulli il campo e bilanci la carica  $+q$ : affacciate sulla superficie interna della cavità ci saranno cariche negative per un totale di  $-q$  che annulleranno il flusso. È evidente che l'accumulo di cariche negative sull'interno della cavità dovrà essere bilanciato da una distribuzione di carica positiva  $+q$  sulla superficie esterna del conduttore.

**7.2.1. Induzione elettrostatica.** Immaginiamo di prendere un conduttore nello spazio e una carica  $+q$  posta in prossimità: per il p.s.e. il conduttore sarà immerso in una zona soggetta a campo elettrico che nel conduttore dovrà essere nullo; allora le cariche si disporranno sulla sua superficie in modo da contrastare l'azione del campo generato da  $q$  e sapendo che le linee di campo sono ortogonali alla superficie, possiamo disegnare il campo in cui è immerso il sistema.

Questo fenomeno si chiama *induzione elettrostatica*; per certi tipi di esperimento è utile sfruttare questo fenomeno ponendosi in uno schermo chiamato *gabbia di Faraday*, ovvero una struttura chiusa fatta di materiale conduttore al cui interno il campo elettrico non è perturbato da cariche esterne. All'interno della gabbia, che può essere considerata una superficie equipotenziale, essendo il campo nullo, il potenziale vale:

$$(7.2.2) \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}V = 0 \Rightarrow V = \text{costante}$$

**7.2.2. Elettroforo di Volta.** Supponiamo di avere una piastra carica ricoperta da una resina isolante. Prendiamo un disco di conduttore dotato di manico isolante. Possiamo posare il disco sulla piastra ricoperta di resina e indurre le cariche a spostarsi; se mettiamo a contatto il disco con un altro punto a potenziale minore ci sarà un passaggio di cariche positive verso di esso e questo punto rimane carico negativamente. In questo modo possiamo portare una quantità di carica in un'altro punto.

Il processo si arresterà quando le forze derivanti dall'induzione saranno troppo elevate per permettere di avvicinare il disco alla piastra (bisognerebbe compiere un lavoro elevatissimo). Un secondo inconveniente si verifica quando abbiamo una elettrizzazione per contatto, ovvero quando si verifica un frazionamento delle cariche.

**7.2.3. Generatore di Wandegraf.** Wandegraf risolve il problema dell'elettrizzazione per contatto usando la cavità interna dei conduttori; il suo sistema è costruito nel seguente modo: abbiamo un nastro di materiale non conduttore in movimento grazie a un motore, e alla sua base c'è una punta metallica a contatto col nastro collegata a un generatore che la carica in continuazione. Il campo elettrostatico è molto intenso in prossimità della punta, che carica positivamente il nastro in continuazione; all'altra estremità del nastro c'è una calotta sferica collegata *all'interno* a un'altra punta a contatto col nastro. Quando le cariche positive sono in prossimità della calotta si ha una induzione elettrostatica che porta le cariche negative all'interno e le positive all'esterno di essa, mentre grazie alla punta le cariche positive sono accumulate sulla calotta e il processo prosegue. Se la superficie non fosse sferica si avrebbero fenomeni di movimento di cariche nelle zone con campo più intenso.

Il processo si arresta se il motore non riesce a spostare le cariche verso la calotta o se nell'intercapedine della calotta in prossimità della punta l'aria ionizzata annulla la carica del nastro (per ovviare al secondo problema si usa gas inerte). Il limite fisico del generatore, che gli impedirebbe di mantenere la carica, è la *rigidità dielettrica*

dell'aria, pari a  $3 \cdot 10^6 \text{V/m}$ : una volta superato tale valore di potenziale elettrico la carica si trasferirebbe al conduttore più vicino.

### 7.3. Sfera conduttrice

**7.3.1. Capacità.** Prendiamo un conduttore con una carica sulla sua superficie: tutto il volume al suo interno ha lo stesso valore di potenziale. Allora è ben definito il rapporto:

---

**Capacità** (7.3.1) 
$$C := \frac{Q}{V}$$

Tale quantità si misura in *Farad* come  $C/V$ . Prendiamo ora una sfera conduttrice con carica  $Q$  di raggio  $R$  e una superficie  $\Sigma$  esterna al conduttore; per Gauss il flusso attraverso la superficie sarà:

$$\Phi_{\Sigma}(\vec{E}) = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \int_{\Sigma} \vec{E} \cdot \hat{u}_n d\vec{s} \neq 0$$

In generale il campo elettrico è uguale ovunque per simmetria e il prodotto risulterà massimizzato dal fatto che il vettore  $\vec{E}$  è sempre ortogonale alla superficie del conduttore:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{u}_r = -\vec{\nabla}V = -\frac{dV}{dr}$$

si osserva che la nabra opera solo lungo la radiale per simmetria e possiamo scrivere  $\vec{\nabla}V = dV/dr$ ; il potenziale in funzione del raggio sarà scritto come:

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r} \xrightarrow{\infty} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{R}$$

Nota che nella precedente abbiamo usato un limite a distanza infinita per cui  $r \rightarrow R$ . Allora possiamo calcolare la capacità della sfera come

---

**Capacità della sfera** (7.3.2) 
$$C_s = \frac{Q}{V} = 4\pi R\varepsilon_0$$

**7.3.2. Densità di carica.** Immaginiamo un sistema formato da una sfera conduttrice inizialmente dotata di carica  $q$  di raggio  $R_2$  ad una certa distanza da una seconda sfera conduttrice di raggio  $R_1$ : si verificheranno dei fenomeni di induzione elettrostatica. Per il nostro obiettivo supponiamo che le sfere siano abbastanza distanti da evitare il fenomeno di mutua induzione; colleghiamo le due sfere con un cavo e dato che una è carica e l'altra no, ci aspettiamo che la differenza di potenziale causi il movimento delle cariche verso la sfera scarica. Il processo proseguirà fino a quando i due potenziali saranno uguali, ovvero fino a quando il gradiente si annulla e quindi non ci sarà più un campo elettrico che possa spostare le cariche.

La condizione da imporre per l'elettrostatica è  $V_1 = V_2$ ; alla fine del processo le sfere avranno rispettivamente una carica  $q_1$  e  $q_2$ , e in generale  $q = q_1 + q_2$  ma anche  $q_1 \neq q_2$  poiché le sfere hanno raggi diversi e quindi capacità diverse. Ricordando che  $q = q_1 + q_2$  possiamo mettere in relazione il frazionamento con la carica iniziale:

$$V_1 = V_2 \Rightarrow \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1}{R_1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_2}{R_2} \Rightarrow q_1 = \underbrace{\frac{R_1}{R_1 + R_2} q}_{\text{frazionamento della carica}}, q_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} q$$

Si osserva che se le due sfere hanno stesso raggio, la carica si fraziona a metà tra le due sfere; per  $n$  sfere uguali si avrebbe una carica  $1/n$  per ciascuna sfera. Inoltre il rapporto tra carica e raggio  $\frac{q_1}{R_1} = \frac{q}{R_1 + R_2} = \frac{q_2}{R_2}$  è costante ed è ciò che si mantiene costante alla fine del processo di frazionamento.

Essendo sfere conduttrici diciamo che la carica si troverà sulla superficie con densità uniforme, e ricordando la (7.3.2) scriviamo:

$$q_1 = \sigma_1 4\pi R_1^2, \quad q_2 = \sigma_2 4\pi R_2^2$$

Sostituendo la precedente nell'uguaglianza del rapporto carica/raggio otteniamo:

$$(7.3.3) \quad \sigma_1 R_1 = \sigma_2 R_2 \Rightarrow \boxed{\sigma_1 = \frac{R_2}{R_1} \sigma_2}$$

---

**Densità di carica  
della sfera**

Nota che la densità di carica e il raggio sono inversamente proporzionali.

**7.3.3. Lavoro per spostare una carica.** Consideriamo un lavoro infinitesimo e una sfera di raggio  $R$  con carica  $q$ , a cui è abbinato un certo potenziale  $V$ . Per caricare tale sfera devo prendere una carica da distanza infinita (non interagisce con la sfera)  $dq$  e portarla alla sfera per portarla alla carica  $Q$ . Allora il lavoro sarà, da (7.3.1) e (7.3.2):

$$(7.3.4) \quad dW = \int_0^Q V dq = \int_0^Q \frac{q dq}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R} \int_0^Q q dq \Rightarrow \boxed{W = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{R}}$$

---

**Lavoro per  
caricare una  
sfera**



## Condensatore

### 8.1. Sistema di conduttori

**8.1.1. Più di un conduttore.** Prendiamo un sistema formato da un conduttore con carica  $Q_1$  con potenziale  $V_1$  e un secondo conduttore con carica  $Q_2$  e potenziale  $V_2$ : per avere una situazione di elettrostatica bisogna ottenere un campo uniforme sulla superficie dei conduttori; la geometria dei conduttori ne definisce la capacità ma non ostante ciò la situazione del potenziale nello spazio è complicata. Restringiamo il problema a due conduttori in *completa induzione* tra di loro, in modo da sfruttare fenomeni come induzione elettrostatica; usiamo quindi conduttori sferici concentrici in modo che le linee di campo raggiungano tutte perpendicolari la superficie interna.

Abbiamo una sferetta conduttrice di raggio  $R_1$  con carica  $+q$  al centro di una sfera cava di spessore  $R_3 - R_2$  ( $R_1 < R_2 < R_3$ ). In condizioni di induzione completa abbiamo un sistema chiamato *condensatore*; possiamo avere più condensatori nello stesso sistema, ovvero più coppie di conduttori in induzione completa.

Per calcolare il potenziale nello spazio applichiamo il p.s.e. sapendo che la superficie della sfera interna ha carica  $+q$ : la superficie interna della sfera cava avrà una carica  $-q$  e quella esterna una carica  $+q$  per bilanciarla; abbiamo tre superfici con carica. Calcoliamo il potenziale all'interno dei due conduttori sapendo che sarà costante (gradiente nullo) e dipenderà da ogni superficie carica:

- all'interno della sferetta (da 0 a  $R_1$ ):  $V_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q}{R_1} + \frac{-q}{R_2} + \frac{q}{R_3} \right)$
- all'interno dello spessore della sfera cava (da  $R_2$  a  $R_3$ ):  

$$V_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q}{r} + \frac{-q}{r} + \frac{q}{R_3} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R_3}$$
dove l'andamento  $1/r$  si ha per Gauss dal fatto che siamo fuori dalla superficie carica ed è come se la carica fosse tutta al centro.

Se colleghiamo un filo schermato alla sferetta interna e un'altro alla superficie della sfera cava, possiamo calcolare la differenza di potenziale tra i due "terminali":

$$(8.1.1) \quad \Delta V = V_1 - V_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = \boxed{\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}}$$

Le superfici in condizione di induzione completa di un condensatore si chiamano *armature*. La capacità del condensatore sferico sarà allora, dalla definizione:

$$(8.1.2) \quad C_s = \frac{q}{\Delta V} = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

Nota che se nella precedente si ha che  $R_1 \simeq R_2 \simeq r$  e chiamando  $d$  la differenza tra i raggi tendente a zero, diventa  $C_s = 4\pi\epsilon_0 \frac{r^2}{d}$ ; la superficie affacciata è proprio  $s = 4\pi r^2$ , e sostituendo si ha:

$$(8.1.3) \quad \epsilon_0 \frac{s}{d} \simeq C$$

---

**Differenza di  
potenziale  
armature  
condensatore  
sferico**

---

**Capacità  
condensatore  
sferico**

**8.1.2. Condensatore piano.** Se abbiamo due piani carichi  $s$  che siano separati da una distanza trascurabile  $d$  rispetto alle loro dimensioni, possiamo trascurare i fenomeni di bordo e considerare il sistema in completa induzione: il potenziale tra i due piani sarà  $\Delta V = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}d$ . Calcoliamo la capacità del condensatore piano a partire dalla definizione:

---

Capacità  
condensatore  
piano

$$(8.1.4) \quad C_p = \frac{q}{\Delta V} = \frac{\sigma s / \sigma d}{\varepsilon_0} = \boxed{\varepsilon_0 \frac{s}{d}}$$

Si osserva che il risultato ottenuto è il medesimo di (8.1.3).

**8.1.3. Combinazione di condensatori.** Prendiamo due condensatori: il primo di capacità  $C_1$  è dotato di due terminali  $A$  e  $B$ , e il secondo con capacità  $C_2$  è dotato di due terminali  $C$  e  $D$ ; essi sono collegati tramite i terminali  $B$  e  $C$ . Se la piastra attaccata al terminale  $A$  ha una carica  $+q$ , per il fenomeno di completa induzione avremo una carica  $-q$  sulla piastra opposta (in  $B$ ); allora anche il condensatore  $C_2$  subirà il fenomeno di induzione e anche sulle sue piastre si concentrerà una carica  $q$ :

Un collegamento tra condensatori in cui la carica sulle armature è la stessa ma la tensione tra di esse è diversa (i condensatori hanno capacità differenti), è detto *serie*.

La differenza di potenziale della serie di condensatori intesa come  $\Delta V = V_D - V_A$  sarà uguale a:

$$\Delta V_1 + \Delta V_2 = \frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2} = q \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right)$$

Se scegliamo un condensatore di capacità  $1/C = 1/C_1 + 1/C_2$  possiamo dire che l'inverso della capacità equivalente in un sistema serie di  $n$  condensatori (potendo accoppiarli a due a due) risulta

---

Capacità  
equivalente serie  
condensatori

$$(8.1.5) \quad \frac{1}{C_{\text{Seq}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n}$$

Se prendiamo invece una configurazione in cui i due condensatori siano collegati in due punti, terminale  $A$  con  $C$  e terminale  $B$  con  $D$ , avremo per la condizione di elettrostatica una differenza di potenziale uguale tra le armature dei due condensatori; tuttavia la carica su di esse sarà differente dato che i condensatori hanno capacità diverse:

Un collegamento tra condensatori in cui la carica sulle armature è differente ma la tensione tra di esse è la stessa, il collegamento è detto *parallelo*.

Possiamo allora scrivere che:

$$\Delta V = \frac{q_1}{C_1} = \frac{q_2}{C_2} \Rightarrow (C_1 + C_2)\Delta V = q_1 + q_2$$

A patto di trovare un condensatore la cui capacità sia la somma delle due, possiamo costruire un sistema equivalente. Siccome il ragionamento vale tra coppie di condensatori, con  $n$  condensatori in parallelo vale:

---

Capacità  
equivalente  
parallelo  
condensatori

$$(8.1.6) \quad C_{\text{Peq}} = C_1 + C_2 + \dots + C_n$$

Le formule ottenute permettono di semplificare qualunque combinazione circuitale di condensatori con un singolo componente.

## 8.2. Lavoro per la carica del condensatore

Prendiamo un condensatore piano con le piastre di superficie  $s$  a distanza  $d$  scariche e spostiamo una carica  $dq$  da una piastra all'altra: questa operazione genera una variazione del potenziale pari a:

$$dV = \frac{q}{C} dq = dW$$

che è anche il lavoro infinitesimo per spostare la porzione di carica; esso diverrà sempre maggiore tante più cariche sono già state spostate (per spostare una carica bisognerà vincere un campo elettrico sempre più forte). Integrando la precedente si ha

$$(8.2.1) \quad W = \frac{Q^2}{2C} = Q \frac{\Delta V}{2} = \frac{C}{2} \Delta V^2$$

Le riscritture della precedente si ricavano da (7.3.1). In particolare definiamo l'energia potenziale che viene immagazzinata nel condensatore a patto di scegliere come potenziale nullo  $Q = 0$ , abbiamo  $W = U_c$ :

$$(8.2.2) \quad U_c = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

Siccome il campo elettrostatico è conservativo, dopo aver compiuto del lavoro per caricare il condensatore l'energia può essere riottenuta; cerchiamo di mostrare dove è conservata questa energia a partire dalla geometria del condensatore piano. Ricordando che (8.1.4) e osservato che  $\Delta V = Ed$ , scriviamo dall'ultima uguaglianza di (8.2.1):

$$W = \frac{1}{2} \underbrace{\left( \varepsilon_0 \frac{s}{d} \right)}_C \underbrace{\left( Ed \right)^2}_{\Delta V^2} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \underbrace{sd}_v E^2$$

dove  $v$  è il volume all'interno delle armature: il lavoro svolto, trasformato in energia potenziale elettrostatica, è legato al volume. Possiamo definire per il condensatore una densità di energia potenziale:

$$(8.2.3) \quad U_e := \frac{U_c}{v} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2$$

## 8.3. Energia tra le armature

Se prendiamo un condensatore carico osserviamo che se le piastre fossero libere di muoversi esse si attirerebbero a vicenda. Sfruttiamo questo fenomeno e immaginiamo di vincolare una delle armature mentre lasciamo l'altra libera di muoversi ma attaccata a una molla. Essendoci tra le armature una densità di energia, se cambiamo la geometria del sistema (per esempio modificando la distanza tra le armature) ci sarà una variazione dell'energia e il gradiente dell'energia potenziale sarà pari alla forza di interazione.

Chiamando la distanza tra le armature  $x$  (essa è variabile poiché una delle armature è libera di muoversi) si ha dalla (8.1.4)  $C = \varepsilon_0 s/x$ ; ricavo l'energia potenziale sostituendo la precedente nella (8.2.2):

$$U_c = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{\varepsilon_0 s} x$$

Ragionando sui moduli delle grandezze possiamo scrivere la relazione che ci fornisce la forza di attrazione tra le armature:

$$(8.3.1) \quad \left| \vec{F} \right| = - \left| -\vec{\nabla} U \right| = \left| -\frac{dU}{dx} \right| = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{\varepsilon_0 s}$$

---

**Lavoro per  
caricare un  
condensatore**

---

**Energia  
elettrostatica**

---

**Densità di  
energia  
potenziale  
elettrica**

Generalmente per le armature di un condensatore piano si usa la pressione di interazione: la pressione è definita come *forza/superficie*; ottengo dalla precedente:

---

**Energia tra le  
armature** (8.3.2) 
$$p_c := \frac{|\vec{F}|}{s} = \frac{1}{2\varepsilon_0} \underbrace{\frac{Q^2}{s^2}}_{\sigma^2} = \boxed{\frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}}$$

La (8.3.1) viene solitamente riscritta grazie alla (7.3.1) come:

$$|\vec{F}| = \frac{1}{2} \frac{\overbrace{C^2 \Delta V^2}^{Q^2}}{\varepsilon_0 s} = \frac{\varepsilon_0 s}{2d^2} \Delta V^2$$

dove nella seconda uguaglianza si è utilizzata la (8.1.4). Si osserva che al primo membro c'è una forza, valutabile sperimentalmente con un dinamometro, mentre dall'altra parte c'è la differenza di potenziale tra le armature che se messa in evidenza risulta:

---

**Differenza di  
potenziale  
armature  
rispetto forza** (8.3.3) 
$$\Delta V = d \sqrt{\frac{2}{\varepsilon_0 s}} |\vec{F}|$$



## CAPITOLO 9

### Dielettrici

#### 9.1. Costante dielettrica

Prendiamo un condensatore piano: se tra le sue armature inseriamo un materiale conduttore, esso si scaricherebbe. Inseriamo allora un materiale *dielettrico* tra le armature (a contatto con esse) che al suo interno avrà delle cariche *non libere di muoversi* (al contrario di conduttori); queste cariche saranno immerse nel campo costante tra le armature del condensatore.

Nominalmente la situazione è complicata, quindi procediamo con un esperimento: controllando cosa accade all'espressione della capacità con un dielettrico tra le armature, essa risulterà comunque legata alla geometria del condensatore

$$C \propto \frac{s}{d} = \varepsilon \frac{s}{d}$$

dove la  $\varepsilon$  è una costante dielettrica dipendente dal materiale scelto. Dato che  $\varepsilon_0$  è diretta conseguenza della (6.1.1), delle cariche immerse in un dielettrico e non nel vuoto interagiranno con  $\varepsilon$  invece di  $\varepsilon_0$  e tutta la teoria dell'elettrostatica risulta ancora valida. Definiamo:

$$(9.1.1) \quad \varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$$

ottenuta sperimentalmente; il valore  $\varepsilon_r$  è un coefficiente dipendente dal materiale,  $\varepsilon_0$  la costante dielettrica del vuoto.

Si osserva che studiare un fenomeno all'interno di un dielettrico è come studiarlo nel vuoto con una "piccola" perturbazione, e su questa idea Maxwell costruisce la sua teoria.

---

**Costante  
dielettrica  
assoluta**

#### 9.2. Campo elettrico nel dielettrico

Prendiamo come prima un condensatore carico e poniamo al suo interno un dielettrico a contatto con le piastre; se avessimo affacciato un conduttore (non a contatto) esso avrebbe risentito di una induzione che sposta tante cariche di segno opposto verso l'armatura su cui si affaccia, tuttavia nel caso di un dielettrico (nel quale le cariche non si possono muovere) si verifica una "elettrizzazione" con alcune cariche di segno opposto affacciate verso l'armatura, in quantità differente dalla carica sull'armatura: chiamiamo  $\sigma$  la distribuzione di carica sull'armatura e  $\sigma'$  quella nel dielettrico in prossimità; se l'armatura ha una superficie  $s$  valgono:

$$\sigma s = Q, \sigma' s = Q'$$

Usiamo Gauss su un "tubo" di flusso, un cilindro con area di base  $\Sigma$  posto tra l'armatura e il dielettrico. Possiamo a priori scartare il flusso sulla superficie laterale, poiché nelle nostre condizioni microscopiche il campo è sempre ortogonale alla superficie. Vale allora:

$$\Phi(E) = \underbrace{\Phi_{\text{armat.}}(E_\Sigma)}_{\text{campo nullo nel conduttore}} + \Phi_{\text{dielet.}}(E_\Sigma) \stackrel{G}{=} \frac{\sigma \Sigma - \sigma' \Sigma}{\boxed{\varepsilon_0}} = E \Sigma$$

Il flusso sarà pari alla carica complessiva all'interno del cilindro; tuttavia in questo caso stiamo trattando le cariche di *polarizzazione* (del dielettrico) ed esse interagiscono come delle cariche nel vuoto.

La parte scalare del campo sarà, dall'ultima uguaglianza precedente:

**Campo tra  
armature e  
dielettrico**

$$(9.2.1) \quad E = \frac{\sigma - \sigma'}{\varepsilon_0}$$

Se adesso studiamo il campo solo tramite le cariche delle armature scriviamo (considerando la presenza del dielettrico):

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{\sigma - \sigma'}{\varepsilon_0}$$

Otengo una relazione tra la carica sulle armature e la polarizzazione del dielettrico; esplicitando  $\sigma'$  ottengo:

$$(9.2.2) \quad \sigma' = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r} \sigma = \frac{\chi}{\varepsilon_r} \sigma$$

Si osserva che il coefficiente  $\varepsilon_r$  è in strettissima relazione con la polarizzazione del dielettrico; la (9.1.1) deriva dal fatto che  $\varepsilon_r$  tiene conto che sul dielettrico si è polarizzata la materia creando una densità di carica  $\sigma'$ . Generalmente si indica  $\varepsilon_r - 1 = \chi$  chiamata *susceptività dielettrica* del mezzo.

### 9.3. Dielettrico come dipolo

Immaginiamo di avere due piastre di superficie  $s$  cariche immerse nell'acqua a distanza  $d$ : essendo le molecole d'acqua dipolari, sottoposte al campo elettrico si orienteranno con gli idrogeni (carica positiva) verso la lastra con carica negativa (indotta), e gli ossigeni (carica negativa) verso la lastra con carica positiva. Questo ragionamento può essere esteso a ogni materiale, essendo costituito da protoni ed elettroni; bisogna scegliere comunque delle porzioni di materia piccole quanto basta rispetto alle piastre ma grande abbastanza da contenere un numero significativo di atomi.

Definiamo allora  $\sigma'$  come l'eccesso di carica che si concentrerà nel dielettrico in prossimità delle superfici. Sulla frontiera del dielettrico questo ragionamento non vale più, dato che si verificano effetti di bordo.

Il dielettrico si presenta in generale come un grande dipolo *orientato*, quindi possiamo definire il momento di dipolo come:

$$\vec{p} = Q' d \hat{u}_n = \sigma' \underbrace{sd}_v \hat{u}_n$$

Si osserva che la carica  $Q'$  distribuita nel dielettrico può essere riscritta rispetto alla superficie con  $\sigma's$ , mentre se consideriamo  $sd$  come il volume  $v$  del dielettrico possiamo definire

**Densità di  
momento del  
dipolo**

$$(9.3.1) \quad \vec{P} = \frac{\vec{p}}{v} = \boxed{\sigma' \hat{u}_n}$$

Notiamo che tramite  $\vec{P}$  è possibile conoscere la densità di carica di polarizzazione  $\sigma'$ , che risulta la parte scalare di tale vettore.

Cerchiamo di operare una separazione formale tra le cariche di polarizzazione  $\sigma'$  e le cariche macroscopiche  $Q'$ : elencando i risultati finora ottenuti e ragionando sulle parti scalari possiamo scrivere  $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}$ ; cerchiamo di venire a capo del  $\varepsilon_r$  usando la (9.2.2):

$$\sigma = \frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_r - 1} \sigma'$$

A questo punto, sapendo anche che  $\sigma' = P$  sostituiamo nell'espressione del campo elettrico:

$$E = \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} \frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_r - 1} P$$

Risulta una relazione tra il vettore di campo e il vettore di polarizzazione: si ha che:

$$(9.3.2) \quad \vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E}$$

In generale quando un dipolo viene immerso in un campo elettrico c'è una polarizzazione del mezzo tale per cui possiamo definire una densità di momento di dipolo locale legata a tale campo. Inoltre non sempre  $\vec{P}$  ed  $\vec{E}$  sono paralleli ma noi tratteremo solo casi particolari di materiali in cui lo sono.

Dall'ultima relazione considerata:

$$P = \sigma' = \sigma \left( 1 - \frac{1}{\varepsilon_r} \right) = \sigma - \frac{\sigma}{\varepsilon_r}$$

Dividendo per  $\varepsilon_0$  si ottiene:

$$\frac{P}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} - \underbrace{\frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}}_E \Rightarrow E = \frac{\sigma - P}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{\sigma = \varepsilon_0 E + P}$$

La relazione ottenuta ci permette di definire, sapendo che  $\sigma' = P$ , il vettore spostamento elettrico:

$$(9.3.3) \quad \vec{D} := \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

Grazie a questa costruzione abbiamo ottenuto il vettore (9.3.3) che è legato soltanto alle cariche macroscopiche mentre (9.3.1) è legato a quelle microscopiche; questo permette di studiare sistemi di conduttori e dielettrici, i quali renderebbero molto complesso lo studio dal punto di vista del campo elettrico.

Per il teorema di Gauss avevamo ottenuto  $\Phi(\vec{E}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$  dove le cariche macroscopiche nello spazio sono rappresentate da  $\rho$ ; allora se moltiplichiamo entrambi i membri per  $\varepsilon_0$  otteniamo:

$$(9.3.4) \quad \Phi(\vec{D}) = \rho$$

Possiamo considerare la precedente come una rilettura della prima equazione di Maxwell: l'unica sorgente del vettore spostamento elettrico sono le cariche macroscopiche.

#### 9.4. Carica di condensatore con dielettrico

Prendiamo un condensatore piano con armature di superficie  $s$  a distanza  $d$  tra cui è inserito un dielettrico: il lavoro che dobbiamo compiere per caricare il condensatore fino alla carica  $Q$  portando una porzione  $dq$  di carica alla volta è dato da:

$$W = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{1}{2} \frac{d}{\varepsilon s} Q^2$$

dove abbiamo usato le (8.1.3) e (8.2.1). In generale per scrivere questa energia si moltiplica numeratore e denominatore per  $s$ , facendo comparire il volume e il rapporto *carica/superficie*:

$$U_c = \frac{1}{2} \frac{\overbrace{sd}^v}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} \underbrace{\frac{Q^2}{s^2}}_{\sigma^2} = \frac{1}{2} \frac{v}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} \sigma^2$$

---

**Densità locale di momento di dipolo**

---

**Vettore di spostamento elettrico**

---

**Flusso dello spostamento elettrico**

A questo punto calcoliamo la (8.2.3):

Densità di  
energia  
condensatore  
con dielettrico

$$(9.4.1) \quad U_e := \frac{U_c}{v} = \frac{1}{2} \frac{\overbrace{\sigma}^E}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} \sigma = \frac{1}{2} E \sigma = \boxed{\frac{1}{2} E D}$$

dove abbiamo sostituito a  $\sigma$  la sua parte scalare dalla (9.3.3). Nel caso di sole cariche macroscopiche la precedente diventa  $U_e = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2$  come la (8.2.3).

### 9.5. Condizioni di interfaccia

Consideriamo due dielettrici affacciati uno sull'altro, a contatto; uno ha costante dielettrica relativa  $\varepsilon_{r1}$  e l'altro  $\varepsilon_{r2}$ ; supponiamo che all'*interfaccia* (la superficie di contatto tra i dielettrici) ci possano essere delle cariche di polarizzazione. Ci interessa studiare in questo caso il flusso e la circuitazione (l'andamento) del campo elettrico sull'interfaccia tra i due materiali, dato che i campi elettrici e magnetici si propagano nello spazio e possono attraversare diversi materiali.

Si può ridurre il problema in due dimensioni: possiamo definire la direzione tangenziale ( $\hat{u}_\tau$ ) e normale ( $\hat{u}_n$ ) e un circuitino  $\vec{L}$  sulla frontiera tra i mezzi in modo che i lati che attraversano l'interfaccia siano infinitesimi maggiori dei lati  $d\vec{l}$  paralleli ad essa (non perdiamo in generalità ma ci poniamo in condizione di trascurare le anomalie del campo in prossimità dell'interfaccia).

Calcoliamo la circuitazione del campo elettrico tra i dielettrici 1 e 2:

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = \vec{E}_{\tau,1} d\vec{l}_1 + \vec{E}_{\tau,2} d\vec{l}_2 = 0$$

Essendo i tratti perpendicolari di un ordine di infinitesimo maggiore sono trascurati; inoltre avendo fatto il prodotto scalare considero la componente tangenziale del campo sia nel dielettrico 1 che nel 2; per la simmetria della costruzione  $-d\vec{l}_1 = d\vec{l}_2$ . Per quanto il campo elettrico possa essere complicato, la sua circuitazione deve essere nulla; allora la componente  $E\hat{u}_{\tau,1} = E\hat{u}_{\tau,2}$  ovvero il campo elettrico si mantiene invariato in *direzione tangenziale* rispetto a una superficie di interfaccia.

Per quanto riguarda la componente normale, essa può variare in continuazione per la presenza di cariche di polarizzazione disposte in modo arbitrario; tuttavia possiamo costruire un tubo di flusso con area di base  $d\vec{s}$  infinitesimo minore rispetto alla superficie laterale e calcolare (9.3.4) attraverso le superfici di base:

$$\Phi(\vec{D}) = \int_1 \vec{D} \cdot \hat{u}_n d\vec{s} + \int_2 \vec{D} \cdot \hat{u}_n d\vec{s} = 0$$

Dagli integrali risulta infatti  $D_{n,1} = D_{n,2}$ ; inoltre per come è definito il vettore spostamento elettrico esso è non nullo solo se le cariche nel tubo di flusso (sull'interfaccia) non sono di polarizzazione. Per le ipotesi in cui siamo, dato che le uniche cariche dei dielettrici considerati sono di polarizzazione, il flusso deve necessariamente essere zero.

In conclusione, si conserva la componente tangenziale del campo elettrico ( $\vec{E}_\tau$ ) e la componente normale del vettore di spostamento ( $\vec{D}_n$ ).

## Corrente

## 10.1. Definizione globale e locale

Consideriamo una carica  $+q$  sottoposta a un campo  $\vec{E}$ : essa si muoverà a causa della forza elettrica; se poniamo ora una superficie  $S$  davanti a delle cariche in movimento sottoposte a un campo elettrico, possiamo definire la *corrente elettrica* come la quantità di carica che fluisce per unità di tempo attraverso  $S$ :

$$(10.1.1) \quad i := \frac{dq}{dt}$$

---

**Corrente  
elettrica**

La corrente si misura in Ampère, definiti come Coulomb al secondo ( $[A] = [C] / [s]$ ). Per analizzare la situazione dal punto di vista microscopico poniamoci in una situazione più specifica: prendiamo la sezione di un cavo conduttore, la cui area di superficie è orientata secondo un versore  $\hat{u}_n$  e misura  $\Delta S$ . Misuriamo la corrente attraverso tale superficie; supponiamo che ci sia una carica  $+q$  nel conduttore in movimento verso  $\Delta S$  da cui dista  $dl$ , con una velocità  $\vec{V}_d$  che chiamiamo:

$$\vec{V}_d \Rightarrow \text{effetto del campo elettrico applicato}$$

---

**Velocità di  
deriva**

La carica  $q$  attraversa la superficie  $\Delta S$  nel tempo  $dt$  se la distanza dalla superficie è minore di  $dl = \vec{V}_d dt$ . Via via che ci allontaniamo dalla superficie, il fatto che una carica riesca ad attraversarla dipende dalla velocità di deriva comune a tutte le cariche in moto, se si trova entro la distanza  $dl$ .

Dato che nel mezzo ci sono molteplici cariche, definisco la *densità di carica del conduttore*  $N$  come quantità di carica per unità di volume (relativa al mezzo).

Possiamo quindi definire la carica complessiva come:

$$dQ = q \underbrace{dv N}_*$$

dove la  $(*)$  rappresenta la quantità di carica nel volume del cavo entro  $dl$  dalla superficie, grazie alla densità di carica appena definita. Con queste considerazioni riscriviamo il volume  $dv$  e ottengo:

$$dQ = N q \underbrace{\vec{V}_d dt \cdot \hat{u}_n \Delta S}_{dv}$$

Dalla definizione macroscopica della corrente (10.1.1) sposto  $dt$  nella precedente ottenendo:

$$(10.1.2) \quad i = \frac{dQ}{dt} = \boxed{N q \vec{V}_d \cdot \hat{u}_n \Delta S}$$

Definisco un vettore che racchiuda le caratteristiche di moto delle cariche nel mezzo:

$$(10.1.3) \quad \vec{J} = N q \vec{V}_d$$

---

**Vettore densità  
di corrente**

Se la carica  $q$  è positiva e la velocità di deriva  $\vec{V}_d$  è positiva allora il vettore  $\vec{J}$  è positivo, altrimenti è negativo se sono entrambe negative; si osserva che la corrente

non dipende da un portatore di carica ma è definita positiva o negativa indipendentemente dalla carica che si sta muovendo (il prodotto  $q\vec{V}_d$  non risente del segno della carica).

Allora la corrente può essere riscritta come:

$$(10.1.4) \quad i = \int_S \vec{J} \cdot \hat{u}_n \Delta S$$

## 10.2. Conservazione della carica

Riformuliamo il principio di conservazione della carica con la nozione di corrente: la carica non può essere creata né distrutta ma se in una regione dello spazio una carica cambia nel tempo allora essa è fluita verso un'altro punto.

Consideriamo una regione  $\Sigma$  e due istanti di tempo,  $t$  e  $t + dt$ , e chiediamoci come è variata la carica tra questi istanti di tempo in tale regione di spazio:

$$\Delta Q = Q(t + dt) - Q(t) \begin{cases} > 0 & \text{carica entrata in } \Sigma \\ < 0 & \text{carica uscita da } \Sigma \end{cases}$$

Mettiamo in relazione la variazione di carica con la corrente, che ne rappresenta lo spostamento:

$$\Delta Q = -i \Delta t$$

dove il segno meno esplicito determina la convenzione con cui si sceglie il verso della corrente: se la carica entra in  $\Sigma$  la corrente è negativa, se esce la corrente è positiva; possiamo riscrivere la precedente come (sempre a livello macroscopico):

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} + i = 0$$

Passando alla definizione più locale della corrente (10.1.4) otteniamo:

$$\frac{dq}{dt} + \int_{\Sigma} \vec{J} \cdot \hat{u}_n d\Sigma = 0$$

Nella precedente si nota che la carica con cui ci stiamo confrontando è interna a  $\Sigma$ ; allora possiamo mettere in relazione il precedente integrale di superficie con uno di volume dal teorema della divergenza (6.4.2):

$$\frac{dq}{dt} + \int_v \vec{\nabla} \cdot \vec{J} dv = 0$$

dove  $v$  è il volume all'interno di  $\Sigma$ . Se vogliamo trovare la formulazione puntuale della carica abbiamo bisogno di svolgere l'integrale: riscriviamo allora la carica interna alla superficie  $\Sigma$  come:

$$Q = \frac{dq}{dt} \int_v \rho dv$$

Dato che il precedente integrale è separato dalla variabile  $t$ , possiamo portare dentro la frazione e ottenere la somma di due integrali nel differenziale del volume:

$$\int_v \underbrace{\left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} \right)}_{*} dv = 0$$

Notiamo che nel precedente integrale la derivata della densità rispetto al tempo  $(*)$  è parziale, poiché la densità in generale è una funzione anche dello spazio.

Il risultato è nullo su un volume generico: questo è possibile solo se l'integranda è sempre nulla, ovvero:

$$(10.2.1) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

---

**Conservazione  
della carica  
elettrica (locale)**

La densità di carica proviene dalla prima equazione di Maxwell (6.4.7): possiamo accoppiarla con la (10.2.1) appena ottenuta:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E}) = \vec{\nabla} \cdot \left( \varepsilon_0 \frac{d\vec{E}}{dt} \right) \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{J} \end{cases}$$

La variazione nel tempo della densità di carica viene messa in relazione con una divergenza dalla conservazione della carica, però da Gauss sappiamo che è anche uguale alla divergenza della variazione del campo elettrico nel tempo: siccome si tratta della stessa quantità possiamo metterle assieme ottenendo:

$$(10.2.2) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \vec{\nabla} \cdot \left( \varepsilon_0 \frac{d\vec{E}}{dt} \right) = \vec{\nabla} \cdot \left( \vec{J} + \varepsilon_0 \frac{d\vec{E}}{dt} \right) = 0$$

---

**Campo  
solenoidale**

La formulazione locale di Gauss ci dice se ci sono sorgenti di campo, quindi il campo definito dal (10.2.2) ha sempre divergenza nulla (il campo non ha sorgente); questo vuol dire che il vettore complessivo ha delle linee di campo chiuse.

Un campo dotato di tale proprietà è detto solenoidale, concludiamo quindi che il vettore  $\vec{J} + \varepsilon_0 \frac{d\vec{E}}{dt} = \vec{J} + \frac{d\vec{D}}{dt}$  definisce un campo solenoidale.

### 10.3. Leggi di Ohm

#### 10.3.1. Enunciato.

(1)

$$(10.3.1) \quad \Delta V = Ri$$

La prima legge di Ohm mette in relazione di proporzionalità diretta la tensione ai capi di un componente con la corrente che lo attraversa tramite una grandezza chiamata *resistenza*.

(2)

$$(10.3.2) \quad R = \rho \frac{dl}{ds}$$

La seconda legge di Ohm permette di ricavare la grandezza *resistenza* grazie alle caratteristiche fisiche del componente:  $\rho$  è la sua *resistività*,  $dl$  la sua lunghezza e  $ds$  l'area della sezione del componente.

Dalla (10.3.1), sostituendo la resistenza con (10.3.2) e la differenza di potenziale col campo elettrico, ottengo (in una formulazione locale):

$$(10.3.3) \quad \overbrace{\vec{E} dl}^{\Delta V} = \overbrace{\rho \frac{dl}{ds} di}^R = \underbrace{\rho \frac{dl}{ds}}_R \underbrace{\vec{J} ds}_{di} \Rightarrow \boxed{\vec{E} = \rho \vec{J}}$$

---

**Formulazione  
locale della legge  
di Ohm**

dove abbiamo usato la (10.1.4).

**10.3.2. Composizione di resistori.** Introduciamo la notazione per la composizione dei resistori in serie e parallelo: siano  $R_1$  e  $R_2$  due resistori di cui chiamiamo le estremità  $A$  e  $B$  per il primo e  $C$  e  $D$  per il secondo, collegati tra  $B$  e  $C$ ; se da  $A$  a  $D$  la carica fluisce senza zone di accumulo di carica, ovvero la corrente che entra nella serie dei resistori è la stessa che esce, possiamo chiamare il sistema serie di resistori, dove valgono:

$$\Delta V_1 = R_1 i, \quad \Delta V_2 = R_2 i$$

$$\Delta V = V_D - V_A = \Delta V_1 - \Delta V_2 = (R_1 + R_2) i$$

Si nota che la precedente assomiglia alla (10.3.1) a patto di scrivere la somma delle resistenze come resistenza equivalente; per  $n$  resistori, accoppiabili a due a due nel modo descritto, la relazione tra le resistenze sarà:

---

**Resistenza  
equivalente serie  
resistori**

(10.3.4) 
$$R_{eq} = R_1 + R_2 + \dots + R_n$$

Se colleghiamo invece i resistori  $R_1$  e  $R_2$  ai capi  $A$  con  $C$  e  $B$  con  $D$ , avremo un sistema in cui la corrente fluisce in maniera differente nei componenti, che avranno la stessa caduta di tensione tra le estremità; la relazione tra le resistenze di  $n$  componenti sarà

---

**Resistenza  
equivalente  
parallelo  
resistori**

(10.3.5) 
$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n}$$

**10.3.3. Effetto Joule.** Prendiamo un elemento resistivo in cui scorra corrente; viene compiuto del lavoro per spostare una carica attraverso di esso, pari a

$$dW = dq \Delta V$$

Se riscriviamo la carica usando (10.1.1) si ha:

$$dW = i dt \Delta V \Rightarrow \frac{dW}{dt} = \Delta V i$$

Essendo in un componente resistivo, soggetto alle leggi di Ohm, possiamo riscrivere  $\Delta V i$  con (10.3.1) come:

---

**Legge di Joule** (10.3.6) 
$$\Delta V i = \frac{\Delta V^2}{R} = i^2 R = P$$

La potenza dissipata dal circuito sotto forma di calore è uguale per la legge di Joule alla (10.3.6). La doppia riscrittura è utile per lavorare con diversi tipi di generatori.

**10.3.4. Conducibilità elettrica.** La conducibilità elettrica è definita per un corpo soggetto alle leggi di Ohm come un coefficiente di proporzionalità tra la densità di corrente (10.1.3) e il campo elettrico (6.2.1)

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \Rightarrow \sigma = \frac{\vec{J}}{\vec{E}}$$

Inoltre, l'inverso della conducibilità elettrica è la resistività ( $\rho = \sigma^{-1}$ ), come il nome lascia intuire.



### 10.4. Campo elettromotore

Dato che le proprietà del campo elettrico sono ora note, possiamo calcolare la circuitazione del campo elettrico: prendiamo un percorso chiuso  $L$ ; dato che la (10.2.2) impone una relazione diretta tra campo elettrico e densità di corrente e la circuitazione su un percorso chiuso è nulla (ricordando che il campo elettrico è irrotazionale da (6.4.5)), otteniamo la stessa espressione può essere ricavata come circuitazione di (10.1.3):

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = \oint_L \vec{J} \cdot d\vec{l} = 0$$

questo vuol dire che un circuito elettrico non può funzionare a regime solo grazie alle forze elettrostatiche - si avrebbe altrimenti una circuitazione non nulla e quindi passaggio di corrente continuo.

Per aggirare la precedente uguaglianza abbiamo bisogno di un componente chiamato *generatore*; Esso ha un campo elettrico non conservativo e due poli tra i quali scorre la carica elettrica.

Se colleghiamo i poli del generatore tramite un resistore abbiamo un sistema in cui, se ci fosse solo l'azione di un campo elettrostatico, la carica si sposterebbe dal polo positivo a quello negativo del generatore fino ad annullare la differenza di potenziale tra i suoi poli. Tuttavia nel generatore vi è un altro sistema (generalmente di natura chimica) chiamato campo motore  $\vec{E}_m$  che contrasta l'azione del campo elettrostatico e sposta nuovamente le cariche dal polo negativo a quello positivo.

Il campo nel generatore sarà  $\vec{E} = \vec{E}_m + \vec{E}_s$ . Definiamo il campo elettromotore come:

$$(10.4.1) \quad \vec{E}_m := \frac{\vec{F}_m}{q}$$

---

**Campo  
elettromotore**

La circuitazione nulla del campo elettrico può essere scritta come un contributo interno (generatore) e uno esterno (circuito); detti  $A$  e  $B$  i poli del generatore nel circuito abbiamo:

$$\overbrace{\int_A^B \vec{E}_s d\vec{l}}^{(\blacktriangle)} = \overbrace{\int_A^B \vec{E}_s d\vec{l}}^{(\blackstar)}$$

ovvero se la circuitazione è nulla (sappiamo che lo è) l'integrale di linea per andare dal polo  $A$  al polo  $B$  attraverso il generatore ( $\blacktriangle$ ) è uguale all'integrale di linea attraverso il circuito ( $\blackstar$ ) in modo che quando siano allo stesso membro abbiano somma nulla; se calcoliamo come prima la circuitazione complessiva con questa ipotesi abbiamo:

$$(10.4.2) \quad \oint_L (\vec{E}_s + \vec{E}_m) d\vec{l} = \boxed{\oint_L \vec{E}_m d\vec{l}} + \cancel{\oint_L \vec{E}_s d\vec{l}} = \mathcal{E}$$

---

**Forza  
elettromotrice**

nella precedente sappiamo che il campo elettrico ha circuitazione nulla mentre il campo motore è in generale diverso da zero poiché agisce solo all'interno del generatore.

Scollegando il generatore dal circuito, al suo interno si avrà una situazione di equilibrio, altrimenti si avrebbe uno spostamento di carica infinito tra i poli; inoltre c'è il campo elettrostatico che contrasta quello motore: si avrà una situazione in cui

$$\vec{E} = \vec{E}_m + \vec{E}_s = 0$$

Ovvero, con gli integrali di linea della circuitazione:

$$\int_A^B \vec{E} dl = \int_A^B \vec{E}_m dl + \int_A^B \vec{E}_s dl = 0 \Rightarrow \int_A^B \vec{E}_m dl = \int_A^B \vec{E}_s dl$$

Forza  
elettromotrice  
come differenza di  
potenziale

(10.4.3)

$$\mathcal{E} = \Delta V$$

Abbiamo così ben definito la quantità  $\mathcal{E}$ , chiamata forza elettromotrice e abbreviata con f.e.m., come differenza di potenziale a circuito aperto ai capi del generatore.

Prendiamo un circuito chiuso formato da un generatore  $\mathcal{E}$  e un resistore  $R$  collegati in serie: comunque preso il valore di resistenza  $R$ , per (10.3.1) ci sarà la stessa differenza di potenziale con conseguente variazione di corrente; questo tuttavia non si osserva sperimentalmente.

Le cose vanno invece come se il generatore avesse al suo interno un resistore in serie di resistenza  $r$ ; siccome la corrente che scorre è la stessa in tutti i componenti, abbiamo per (10.3.4):

$$i = \frac{\mathcal{E}}{r + R}$$

Allora la differenza di potenziale ai capi di  $R$  sarà:

$$\Delta V_R = \frac{R}{r + R} \mathcal{E}$$

Si nota che tanto più  $R \gg r$ , tanto più la caduta di tensione ai suoi capi sarà approssimabile con la forza elettromotrice ( $\Delta V_R \sim \mathcal{E}$ ).

### 10.5. Transitorio di un condensatore

Consideriamo un circuito costituito da due maglie unite da un interruttore a due vie: la prima maglia ha un generatore di tensione e la seconda un resistore in serie a un condensatore; se inizialmente il condensatore è scarico, chiudendo la prima maglia con la seconda grazie all'interruttore è possibile caricare il condensatore.

Studiamo come si imposta l'equazione per questo circuito applicando la *L.K.T.*<sup>1</sup>

$$\mathcal{E} = Ri + \Delta V = Ri + \frac{q}{C}$$

dove  $R$  è la resistenza del resistore e  $\Delta V$  la caduta di tensione ai capi del condensatore e sapendo che  $C = \frac{q}{\Delta V} \Rightarrow \Delta V = \frac{q}{C}$  otteniamo la relazione precedente.

Applicando la (10.1.1) otteniamo:

$$\mathcal{E} = R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C}$$

La precedente formalizza il fatto che se scorre della corrente è perché stiamo portando delle cariche sull'armatura del condensatore. Riscriviamo la precedente come:

$$C\mathcal{E} = RC \frac{dq}{dt} + q \Rightarrow \overbrace{RC}^{\tau} \frac{dq}{dt} = C\mathcal{E} - q$$

al secondo membro c'è una somma omogenea di cariche, quindi deve esserci una carica anche al primo membro; dato che la corrente è definita carica/tempo, il prodotto  $RC$  ha la dimensione di un tempo: esso rappresenta il *tempo caratteristico del circuito*, che indichiamo con  $\tau$ . Separando le variabili dalla precedente si ha (integrando la carica sulle armature del condensatore e sul tempo generico  $t$  trascorso dalla

<sup>1</sup>Legge di Kirchhoff delle Tensioni: la somma delle differenze di potenziale ai capi di ogni bipolo lungo la stessa linea chiusa è zero; nel nostro caso la differenza di potenziale ai capi della maglia condensatore - resistore è pari alla f.e.m. del generatore

chiusura dell'interruttore):

$$\int_0^q \frac{dq'}{C\mathcal{E} - q'} = \int_0^t \frac{dt'}{\tau} \Rightarrow [-\ln(C\mathcal{E} - q')]_0^q = \frac{t}{\tau}$$

$$C\mathcal{E} - q = C\mathcal{E} \cdot e^{-t/\tau} \Rightarrow q(t) = C\mathcal{E} (1 - e^{-t/\tau})$$

L'andamento esponenziale ci permette di avere un tempo critico oltre il quale il processo di carica si può dire completato (quando i 2/3 del processo si sono verificati).



## CAPITOLO 11

# Magnetismo

### 11.1. Legge di Biot-Savart

Dall'esperimento di Ørsted sappiamo che un filo percorso da corrente genera un campo magnetico e dall'esperimento di Ampère sappiamo che due fili paralleli percorsi da corrente si attraggono o respingono con una certa forza a seconda del verso della corrente che li attraversa; i primi a scrivere una relazione tra i fenomeni elettrici e quelli magnetici sono stati Biot e Savart con la loro legge:

*“il campo magnetico di un filo indefinito ha simmetria cilindrica e viene definito (in modulo) come proporzionale alla corrente  $i$  nel filo rispetto alla distanza dal filo  $R$ ”*

$$(11.1.1) \quad |\vec{B}| = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i}{R}$$

La costante  $\mu_0$  è la permeabilità magnetica del vuoto; le linee di campo, a parità di distanza dal filo, formano un cerchio.

### 11.2. Prima legge di Laplace

La (11.1.1) in generale non può essere direttamente applicata a un circuito elettrico, dato che si tratta di un percorso chiuso e non rettilineo; tuttavia Laplace riesce a esprimere tale legge nella massima generalità: consideriamo una porzione infinitesima di filo  $d\vec{l}$  percorsa da corrente (e quindi orientata).

Questo tratto sarà soggetto alla (11.1.1) dato che sta passando corrente; tuttavia ognuno di questi tratti di filo parteciperà al campo totale del filo a una distanza  $\vec{r}$  fissata. Vale la

$$(11.2.1) \quad d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

---

**I Legge di  
Laplace**

se da essa integrando si ottiene nuovamente la (11.1.1). La (11.2.1) tuttavia ha significato puramente matematico, poiché non si può avere un tratto di circuito infinitesimo isolato in cui scorra corrente.

Prendiamo un tratto di filo infinitesimo  $dz$  e chiediamoci che campo genera in un punto  $P$  a distanza  $\vec{r}$ ; chiamiamo l'angolo tra il tratto di filo e il vettore puntamento  $\theta$  e  $\phi$  l'angolo in  $P$  rispetto al segmento perpendicolare al filo  $D$ . Per la (11.2.1):

$$|d\vec{B}| = \frac{\mu_0}{4\pi} i \overbrace{\frac{dz \times r}{r^3}}^* \sin \theta = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{dz}{r^2} \sin \theta$$

Nella precedente abbiamo sfruttato la stessa considerazione per le distribuzioni di carica: per ogni tratto  $dz$  di filo, potremo sempre scegliere uno speculare  $dz'$  per cui in  $P$  si manterrà solo la componente perpendicolare al filo nel prodotto vettoriale  $(*)$ .

Osservando che  $\sin \theta = \cos \phi$ ,  $z = D \tan \phi \Rightarrow dz = D d\phi / \cos^2 \phi$  e  $r = D \cos \phi$  possiamo riscrivere la precedente in funzione dell'angolo  $\phi$ :

$$|d\vec{B}| = \frac{\mu_0}{4\pi} i \overbrace{\frac{D}{\cos^2 \phi}}^{dz} \underbrace{d\phi \cos \phi}_{\sin \theta} \overbrace{\frac{\cos^2 \phi}{D^2}}^{1/r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i}{D} \cos \phi d\phi$$

Se abbiamo un filo infinito possiamo integrare facendo variare  $\phi$  tra  $-\pi/2$  e  $\pi/2$ , per ciascun tratto di filo  $dz$  rispetto al punto  $P$ ; otterremo allora:

$$|\vec{B}| = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i}{D} \cos \phi d\phi = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i}{D} [\sin \phi]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \boxed{\frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i}{D}}$$

Nota che abbiamo ottenuto di nuovo la (11.1.1) e possiamo allora dare validità fisica all'integrale della (11.2.1).

### 11.3. Seconda legge di Laplace

Dall'esperimento di Ampère<sup>1</sup> sappiamo che due fili percorsi da corrente si attraggono: applichiamo la (11.2.1) su un filo e sappiamo che genera un campo magnetico; il filo che viene attratto o respinto è legato al fatto che lui stesso è percorso da corrente. Se ciò è vero allora su un tratto di filo  $d\vec{l}$  percorso da corrente  $i$  e immerso in un campo magnetico  $\vec{B}$  si genera una forza:

**II Legge di Laplace**

$$(11.3.1) \quad d\vec{F} = i d\vec{l} \times \vec{B}$$

Come per la prima legge, anche questa ha significato puramente matematico e non è lecito domandarsi se valga (2.1.2); essa varrà sull'equazione integrata.

Se accoppiassimo le equazioni per entrambi i fili avremmo:

$$\vec{F}_{1,2} = \frac{\mu_0}{4\pi} i_1 i_2 \oint_{\Gamma_1} d\vec{l}_1 \times \oint_{\Gamma_2} \frac{d\vec{l}_2 \times \vec{r}}{r^3}$$

da cui risulterebbe, scambiando  $d\vec{l}_1$  con  $d\vec{l}_2$ , un cambiamento di segno per cui  $\vec{F}_{1,2} = -\vec{F}_{2,1}$ . Poniamoci in una geometria semplice per facilitare i calcoli delle due circuitazioni.

Abbiamo un primo filo percorso da corrente  $i_1$  orientato lungo l'asse  $z$  e a una certa distanza  $D$  da esso poniamo un secondo filo percorso da corrente  $i_2$  con lo stesso verso di  $i_1$  e parallelo al primo lungo  $z$ , così da sfruttare la simmetria cilindrica del campo, che sarà uguale in ogni punto del filo.

Il campo generato dal primo filo sarà:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i_1}{D} \hat{u}_y$$

La forza sul secondo filo sarà:

$$d\vec{F} = i_2 d\vec{l} \times \vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} i_1 i_2 \frac{dz}{D} \overbrace{\hat{u}_z \times \hat{u}_y}^{=-\hat{u}_x} = -\frac{\mu_0}{2\pi} i_1 i_2 dz \hat{u}_x$$

La forza sviluppata in questo caso, col segno meno, sarà definita attrattiva. Riscriviamo dalla (11.3.1) la corrente con la (10.1.1) e il tratto  $d\vec{l}$  come una velocità per un certo tempo, ottenendo:

$$d\vec{F} = \frac{dq}{dt} \vec{v} dt \times \vec{B} = \boxed{dq \vec{v} \times \vec{B}}$$

<sup>1</sup>Ampère [A]: quantità di corrente che deve scorrere in due fili paralleli indefiniti affinché tra loro si sviluppino a un metro di distanza nel vuoto la forza di  $4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N/m}^2$

Se invece di una carica infinitesima avessimo una carica definita e in moto, essa risente di una forza, la quale viene definita nel paragrafo seguente.

### 11.4. Forza di Lorentz

Prendiamo una carica  $q$  in movimento con velocità  $\vec{v}$  e accendiamo un campo magnetico ortogonale  $\vec{B} \perp \vec{v}$ ; per la (11.3.1) la carica risentirà di una forza ortogonale al piano formato dal campo magnetico con la velocità (quindi sempre ortogonale allo spostamento infinitesimo) definita:

$$(11.4.1) \quad \vec{F}_L = q\vec{v} \times \vec{B}$$

---

**Forza di Lorentz**

A parità di velocità e campo magnetico la forza cambia direzione in base al segno della carica; non avendo proiezione lungo la velocità per il prodotto vettoriale, la forza di Lorentz non compie mai lavoro ma deflette le cariche.

Nel momento in cui una particella è sottoposta alla (11.4.1) essa ruota attorno al vettore del campo magnetico, quindi la forza di Lorentz farà le veci dell'accelerazione centripeta:

$$\vec{F}_L = q\vec{v}\vec{B} = m\frac{v^2}{R} \Rightarrow \boxed{\vec{v} = \frac{q}{m}R\vec{B}}$$

Abbiamo esplicitato la velocità necessaria a far compiere a una carica una determinata traiettoria circolare con un determinato raggio; dalla precedente abbiamo il rapporto  $q\vec{B}/m$  che può essere riscritto come  $v/R$ : esso viene definito:

$$(11.4.2) \quad \omega_c = \frac{q}{m}B = \frac{v}{R}$$

---

**Frequenza di ciclotrone**

Con la (11.4.1) rimane indissolubile il rapporto  $q/m$  tra caratteristiche elettriche e dinamiche del sistema.

Nel caso in cui la velocità abbia un certo angolo rispetto al campo magnetico (proiezione non nulla sul suo vettore) essa descriverà una traiettoria ad elica attorno al suo vettore.

## 11.5. Geometria del campo magnetico

**11.5.1. Flusso del campo magnetico.** Comunque presa una porzione di spazio i poli nord e sud di una calamita sono sempre accoppiati, quindi o ci si trova in una regione senza calamite oppure siamo in una regione dove ci sono coppie di poli comunque scelta piccola la regione di spazio; segue che:

$$\int_{\Sigma} \vec{B} \cdot \hat{u}_n d\vec{s} = 0$$

il flusso del campo magnetico è sempre identicamente nullo, poiché non vi sono mai sorgenti di campo isolate (dall'esperienza della calamita spezzata); vale allora:

$$(11.5.1) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

---

**Divergenza del campo magnetico**

**11.5.2. Circuitazione del campo magnetico.** Poniamoci in prossimità di un filo indefinito percorso da corrente; lo spazio intorno a esso è modificato da un campo magnetico. L'asse di simmetria del campo è il filo stesso, lungo il quale si trova la sorgente del campo: allora muoversi ruotando attorno al filo o con una traiettoria arbitraria avrà conseguenze differenti.

Prendiamo due percorsi nello spazio: il percorso 1 arbitrario in prossimità del filo e il percorso 2 attorno al filo su un piano ortogonale ad esso in modo da circondare il filo stesso.

Qualunque percorso nello spazio sarà parametrizzato dalle coordinate cilindriche:

$$d\vec{l} = dr\hat{u}_r + r d\theta\hat{u}_\theta + dz\hat{u}_z$$

Essendo il filo percorso da corrente avremo nello spazio il campo magnetico così definito:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} i \frac{1}{r} \hat{u}_\theta$$

Vogliamo calcolare la circuitazione sui percorsi definiti in precedenza partendo dal percorso 2:

$$\oint_2 \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_2 \frac{\mu_0}{2\pi} i \frac{1}{r} r d\theta \hat{u}_\theta = \oint_2 \frac{\mu_0}{2\pi} i d\theta$$

dove abbiamo semplificato le componenti ortogonali, dalle definizioni precedenti alla circuitazione calcolata; possiamo ora lavorare sull'integrale con più facilità:

$$\frac{\mu_0}{2\pi} i \oint_{\theta_0}^{\theta_0+2\pi} d\theta = \boxed{\mu_0 i}$$

Abbiamo integrato sapendo che le linee di campo attorno al filo ruoteranno attorno ad esso, quindi integriamo l'angolo da un valore di partenza  $\theta_0$  fino a una rotazione completa di  $2\pi$  da tale posizione per percorrere tutto il percorso. La corrente  $i$  nel precedente viene detta *concatenata*, poiché il percorso cinge il filo.

Per quanto riguarda il percorso 1 avremo (dal ragionamento appena svolto):

$$\oint_1 \vec{B} \cdot d\vec{l} = \frac{\mu_0}{2\pi} i \oint_{\theta_0}^{\theta_0} d\theta = 0$$

Si osserva che per quanto possa essere esteso il percorso, per percorrerlo ci si muove da un angolo di partenza per poi spostarsi indietro fino alla stessa posizione - ciò accade perché le linee di campo non coincidono col percorso. L'integrale sarà allora identicamente nullo e di conseguenza la circuitazione lungo il percorso 1.

I precedenti risultati sono riassunti nella legge della circuitazione di Ampère, così definita:

---

**Legge della  
circuitazione di  
Ampère**

$$(11.5.2) \quad \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \sum_{j=1}^N \mu_0 i_{j, \text{conc.}}$$

Le correnti concatenate sono le uniche che partecipano alla circuitazione del campo magnetico.

**11.5.3. Rotore del campo magnetico.** Possiamo mettere in relazione la circuitazione della (11.5.2) col (6.4.6) nel modo seguente:

$$\frac{\mu_0}{2\pi} i \oint_{\theta_0}^{\theta_0+2\pi} d\theta = \int_{\Sigma} (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot \hat{u}_n ds = \dots$$

Scegliamo la superficie  $\Sigma$  ortogonale a un filo percorso da corrente; la corrente è l'integrale di un flusso, da (10.1.3):

$$\dots = \mu_0 \int_{\Sigma} \vec{J} \cdot \hat{u}_n ds$$

In altre parole possiamo mettere in relazione la corrente col vettore densità di corrente; se considero una superficie maggiore di  $\Sigma$ , avrò delle somme di zeri nei punti dello spazio in cui  $\vec{J} = 0$ . Dato che l'uguaglianza dipende dagli integrandi e non dal dominio di integrazione vale l'uguaglianza tra gli integrandi:

---

**Formulazione  
locale della  
circuitazione di  
Ampère**

$$(11.5.3) \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$



## 11.6. Solenoide infinito

**11.6.1. Campo magnetico nel solenoide.** Un solenoide si realizza prendendo un filo e spiralizzandolo (avvolgendolo attorno a un asse) in modo tale che gli avvolgimenti abbiano tutti lo stesso raggio.

Supponiamo di avere un solenoide infinito attraversato da una corrente  $i$  e consideriamo un percorso di circuitazione rettangolare a una certa distanza dal solenoide tale che i tratti ortogonali al raggio degli avvolgimenti del solenoide (chiamati  $l_1$  e  $l_2$ ) siano un infinitesimo inferiore rispetto a quelli paralleli. Per la (11.5.2) vale (siamo in assenza di correnti concatenate):

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0 \Rightarrow B_{l_1}l - B_{l_2}l = 0 \Rightarrow B_{l_1} = B_{l_2}$$

Per la simmetria del sistema abbiamo che i contributi del campo lungo i tratti  $l_1$  e  $l_2$  sono uguali in modulo; questo ragionamento vale per tutto lo spazio attorno al solenoide. Tuttavia se all'infinito questo contributo dovrà essere nullo per (11.1.1), sarà dunque nullo ovunque.

Consideriamo un secondo percorso costruito come il primo ma a cavallo delle spire; essendoci correnti concatenate ci aspettiamo che la circuitazione non sarà nulla; per (11.5.2) vale:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \sum_{j=1}^N \mu_0 i_j = \mu_0 \frac{N}{L} li$$

dove abbiamo usato  $N$  numero di spire nel solenoide e  $L$  la lunghezza del filo del solenoide e il fatto che la corrente che attraversa le spire è sempre la stessa. Come prima possiamo scrivere l'equazione seguente, sapendo che il campo magnetico fuori dal solenoide è nullo e chiamando  $n = N/L$  la densità di spire abbiamo:

$$(11.6.1) \quad B_{l_1}l - B_{l_2}l = \mu_0 nli \Rightarrow B_{l_2} = \boxed{\mu_0 ni}$$

Se infine prendessimo un percorso di circuitazione completamente all'interno del solenoide, avremo nuovamente il campo che si annulla comunque preso il percorso.

Per esempio se abbiamo una corrente che scorre sul piano  $xz$  con densità  $\vec{J}$  cerchiamo di calcolare il campo magnetico. Cominciamo considerando la sezione del piano  $xz$ : possiamo approssimare il piano come un fascio di fili nei quali scorre corrente; immaginiamo di centrarci su un filo e porci a una certa distanza, se non ci fossero altri fili il campo sarebbe parallelo al piano per (11.1.1); comunque presi due fili è possibile avere le componenti ortogonali al piano  $xz$  del campo che si semplificano mentre quelle parallele sopravvivono. Lo stesso ragionamento vale sia sopra che sotto il piano  $xz$ , con inversione della direzione del campo rispetto ai due semipiani di  $y$ .

Costruiamo un percorso di circuitazione nel quale chiamiamo i tratti paralleli al piano  $l_1$  e  $l_2$ ; abbiamo che:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 ni = \mu_0 J l$$

La corrente concatenata sarà quella interna al percorso, con  $n$  la densità di fili sul piano  $xz$ . Per come sono orientati i vettori di campo rispetto al piano abbiamo che:

$$B_{l_1}l - B_{l_2}l = 2B_l l$$

Confrontando con l'espressione della circuitazione otteniamo:

$$|\vec{B}| = \frac{1}{2} \mu_0 |\vec{J}|$$

---

**Campo  
magnetico nel  
solenoid infinito**

**11.6.2. Momento della forza magnetica.** Se abbiamo un aghetto magnetico sottoposto a un campo magnetico, esso si orienterà sotto l'azione di un momento torcente legato sia all'intensità del campo che alle proprietà dell'aghetto; definisco un vettore  $\vec{m}$  che va dal polo sud al nord dell'aghetto magnetico; allora l'aghetto sarà sottoposto a una coppia di forze che portano i suoi poli ad orientarsi secondo il vettore del campo magnetico:

---

**Momento della  
forza magnetica**

$$(11.6.2) \quad \vec{M}_B = \vec{m} \times \vec{B}$$

Notiamo che un aghetto già orientato non tenderà a spostarsi, in effetti il braccio della forza magnetica è nullo; per rappresentare questa differenza tra gli orientamenti dell'aghetto con una relazione energetica:

---

**Energia del  
momento  
magnetico**

$$(11.6.3) \quad U = -\vec{m} \cdot \vec{B}$$

Si osserva che la configurazione antiparallela (angolo di  $\pi$  tra  $\vec{m}$  e  $\vec{B}$ ) è quella con energia maggiore.

## 11.7. Spira

**11.7.1. Spira in un campo magnetico.** Se prendiamo una spira percorsa da corrente  $i$  di area  $A$  all'interno del campo magnetico  $\vec{B}$ , si osserva sperimentalmente che essa si orienterà in modo da avere la sua superficie perpendicolare al campo magnetico. Se invertiamo il verso della corrente e la spira non si trova in equilibrio essa ruota di 180 gradi, in modo che il campo magnetico veda la corrente scorrere sempre in senso antiorario.

Osserviamo che anche la spira sarà soggetta al (11.6.2), che la ruoterà modo analogo a un aghetto magnetico; associamo alla spira il

---

**Momento  
magnetico di  
una spira**

$$(11.7.1) \quad \vec{m} = i \cdot A \hat{u}_n$$

Se la meccanica è equivalente a quella di un aghetto magnetico sarà anche vero che una spira avrà un campo magnetico equivalente a quello di un aghetto.

**11.7.2. Campo magnetico di una spira.** Calcoliamo il campo magnetico generato da una spira circolare di raggio  $R$  percorsa da corrente  $i$  sull'asse di simmetria radiale  $z$  nel punto  $P$  distante  $z$  dal suo centro  $O$ .

un elementino  $d\vec{l}$  di spira genera per (11.2.1) il campo:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{\overbrace{d\vec{l} \perp \hat{u}_r}^{d\vec{l} \times \hat{u}_r}}{r^2} = \frac{\mu_0 i dl}{4\pi r^2} \hat{u}_z$$

Detta  $r$  la distanza tra l'elementino  $d\vec{l}$  e il punto  $P$  e  $\theta$  l'angolo tra il piano della spira e  $r$ , abbiamo che la proiezione su  $z$  del campo magnetico sarà:

$$dB_z = \frac{\mu_0 i dl}{4\pi r^2} \cos \theta$$

Considerando i contributi di ciascun elementino di spira, le componenti parallele all'asse si sommano mentre quelle ortogonali si elidono (ci troviamo in un sistema a simmetria radiale), quindi il campo magnetico risulta:

$$\vec{B} = \oint_l \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{\cos \theta}{r^2} dl \hat{u}_z = \frac{\mu_0 i}{4\pi} 2\pi R \frac{\cos \theta}{r^2} \hat{u}_z$$

dato che  $\cos \theta$  e  $R$  sono costanti nel nostro sistema; scrivendo  $r = \sqrt{z^2 + R^2} = d$  e  $\cos \theta = R/d$ , otteniamo:

$$(11.7.2) \quad \vec{B}_z = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{iA}{d^3} \hat{u}_z = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{m}{d^3} \hat{u}_z$$

indicando con  $A$  l'area della spira (nel nostro caso  $\pi R^2$ ) e con  $m = iA$  il momento magnetico della spira dalla (11.7.1).

---

**Campo  
magnetico asse  
spira circolare**

**11.7.3. Equivalenza spira ago.** Il momento di dipolo magnetico della spira (11.6.2) genera un campo lungo l'asse come dimostrato in precedenza; se avessimo un aghetto magnetico si avrebbe un andamento uguale del campo (lungo l'asse).

Supponiamo di prendere un aghetto orientato lungo l'asse  $z$  orientato col nord nel verso positivo dell'asse e il sud opposto ad esso, a una distanza  $l$ ; i poli sono considerati *monopoli magnetici* (ne isoliamo il contributo) e ci poniamo a una distanza  $d$  sull'asse  $z$  dal centro dell'aghetto; il campo sarà costituito dalla somma dei contributi dei due monopoli, che scriviamo rispetto alla densità del momento di dipolo (9.3.1):

$$B_d = \frac{\mu_0}{4\pi} P \left( \frac{1}{(d-l/2)^2} - \frac{1}{(d+l/2)^2} \right) \hat{u}_z \stackrel{\text{dipolo}}{=} \frac{\mu_0}{4\pi} P \frac{d^2 + ld - d^2 + ld}{d^4} \hat{u}_z$$

Sotto l'ipotesi che  $d \gg l$  (ipotesi del dipolo) possiamo trascurare nella precedente i termini in  $l$  con esponente maggiore di uno; otteniamo allora:

$$B_d = \frac{\mu_0}{4\pi} P \frac{2l}{d^3} \hat{u}_z = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\overbrace{m}^{P \cdot l}}{d^3} \hat{u}_z$$

a patto di prendere il prodotto  $p \cdot l$  come momento di dipolo magnetico  $m$  dell'aghetto. Abbiamo ottenuto la stessa espressione della (11.7.2) e possiamo concludere che un aghetto e una spira sono indistinguibili dal punto di vista dei fenomeni meccanici e fisici:

*Non è possibile dire se un campo magnetico in una regione dello spazio sia generato da una calamita (ago magnetico) o da opportuni fili percorsi da corrente (spire)*



## Magnetismo nella materia

### 12.1. Forza magnetica su spira

Prendiamo una spira rettangolare di superficie  $S$  percorsa da corrente in un riferimento cartesiano inclinata di un angolo  $\theta$  rispetto al piano  $yz$ ; chiamiamo  $a$  i suoi lati paralleli all'asse  $z$  e  $b$  i suoi lati sul piano  $xy$ ; supponiamo che un campo magnetico sia diretto lungo l'asse delle  $x$ . Da (11.3.1) si ha che:

$$d\vec{F} = i d\vec{l} \times \vec{B}$$

Supponiamo che la spira sia *indeformabile*, per cui manterrà la propria superficie  $S = ab$ ; ad essa associamo un momento  $\vec{m} = i \cdot S \hat{u}_n$ . Ovviamente siccome la spira è ruotata di  $\theta$  rispetto al piano  $yz$ , la direzione ortogonale alla spira sarà a sua volta ruotata di  $\theta$  rispetto l'asse delle  $x$  (quindi al campo magnetico).

Per il teorema di equivalenza tra spira ed ago ci aspettiamo un momento torcente che agirà sulla spira.

- Sul tratto di lunghezza  $b$  avremo che

$$\vec{F} = i \oint_b d\vec{l} \times \vec{B}$$

risulta uguale e contraria per i due tratti, dunque per la nostra ipotesi di spira indeformabile si annullano tali contributi.

- Sul tratto di lunghezza  $a$  avremo una forza orientata parallelamente all'asse  $y$  (la corrente scorre nei tratti di spira paralleli all'asse  $z$  e il campo magnetico è parallelo all'asse  $x$ ); osserviamo che si avrà una coppia di forze uguali ed opposte sui tratti di spira, che provocherà un momento torcente:

$$\vec{F} = i \oint_a \underbrace{d\vec{l} \times \vec{B}}_{d\vec{l} \perp \vec{B}} = ia\vec{B}$$

$$|\vec{M}| = \overbrace{b \sin \theta}^{\text{braccio}} \overbrace{iaB}^{\text{forza}} = i \left( \overbrace{ab}^S \right) B \sin \theta = |\vec{m} \times \vec{B}|$$

Abbiamo riconfermato inoltre i risultati dell'equivalenza tra spira percorsa da corrente e ago magnetico

### 12.2. Modello di Böhr

Immaginiamo un atomo formato da un nucleo  $N$ , attorno al quale orbita a distanza  $R$  una carica  $q$  con una certa velocità  $\vec{v}$ ; a tale orbita è associato un momento angolare

$$\vec{L} = \vec{R} \times \vec{M}\vec{v} = RMv\hat{u}_n$$

L'orbita di Böhr è assimilabile a una spira percorsa da corrente, misurabile come:

$$i = \frac{q}{T} = \frac{qv}{2\pi R}$$

Il momento magnetico associato alla spira risulta essere:

$$|\vec{m}| = \frac{\overbrace{qv}^{\text{corrente}} \overbrace{\pi R^2}^{\text{area}}}{2\pi R} = \frac{1}{2} qvR$$

Possiamo mettere in relazione il momento di dipolo col momento angolare grazie al prodotto  $Rv$ :

---

**Momento  
magnetico  
orbitale**

$$(12.2.1) \quad \vec{m} = \frac{1}{2} \frac{q}{M} \vec{L}$$

Sperimentalmente si osserva che il momento associato all'elettrone è:

---

**Spin** (12.2.2) 
$$\vec{m}_e = -\frac{e}{m_e} \vec{S}$$

### 12.3. Polarizzazione della materia

Possiamo avere nella materia tre condizioni di polarizzazione:

- (1) Le spire atomiche sono disordinate: abbiamo sostanze *diamagnetiche*
- (2) Le spire atomiche sono parzialmente ordinate: abbiamo sostanze *paramagnetiche* (nelle quali l'agitazione termica contrasta il parziale allineamento degli atomi)
- (3) Le spire atomiche spontaneamente si orientano: abbiamo sostanze *ferromagnetiche* (rimangono magnetizzate anche in assenza di un campo esterno)

**12.3.1. Sostanze diamagnetiche.** Supponiamo di avere un atomo modellizzato secondo Böhr, e un campo magnetico ortogonale al piano dell'orbita; sull'elettrone si applica la forza di Lorentz (11.4.1) per cui:

$$\vec{F}_L = q\vec{v} \times \vec{B} = qvB \hat{u}_r$$

La forza risulterà radiale e opposta alla forza centripeta, che è pari a  $a_c = \frac{V^2}{R}$ : dato che il raggio dell'orbita è costante, (le cose vanno come se) la forza di Lorentz frena la carica; una variazione di velocità comporta una variazione di corrente e quindi una variazione del momento di dipolo magnetico.

Il vettore variazione di momento di dipolo magnetico sarà:

$$\Delta \vec{m} = \vec{m}_f - \vec{m}_i$$

che è opposto al vettore di campo magnetico, dato che  $\vec{m}_f < \vec{m}_i$  (da  $\vec{v}_f < \vec{v}_i$ ).

**12.3.2. Correnti di superficie.** Prendiamo un solenoide, all'interno del quale (tra le spire) il campo magnetico è costante; se spiralizziamo il solenoide attorno a un materiale si osserva che il campo magnetico è comunque costante ma dipende da una permeabilità magnetica differente; dalla (11.6.1):

$$\begin{cases} \vec{B} = \mu_0 i n \hat{u}_B & (\text{nel vuoto}) \\ \vec{B} = \mu i n \hat{u}_B & (\text{con materiale}) \end{cases}$$

Necessariamente ci saranno delle correnti all'interno del materiale che influenzano la permeabilità magnetica. Vogliamo costruire allora un vettore di campo magnetico

che sia sensibile solo alle correnti concatenate macroscopiche per modellizzare questa variazione di permeabilità dipendente dal materiale; calcoliamo con (11.5.2) la circuitazione del campo su una generica spira  $L$ :

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \overbrace{\sum_{j=1}^n i_j}^{\text{concatenate}} \xrightarrow{\text{materiale}} \mu \overbrace{\sum_{j=1}^n i_j}^{\text{concatenate}}$$

Se abbiamo una spira attorno a del materiale dovremo calcolare la circuitazione con la costante di permeabilità magnetica relativa a tale materiale; per avere una interpretazione microscopica modifichiamo la precedente includendo le correnti concatenate macroscopiche ( $i$ ) e microscopiche ( $i'$ ):

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu \left( \overbrace{\sum_{j=1}^n i_j + \sum_{j=1}^{n'} i'_j}^{\text{concatenate}} \right)$$

Possiamo prendere una spira piccolissima in modo arbitrario (per esempio un atomo di Böhr) e dunque ricoprire il materiale di circuitini che sommandosi formano una unica spira superficiale sulla superficie di separazione; le cose andranno come se ci fossero delle correnti di superficie concatenate attorno al mezzo. Per il teorema di equivalenza tra spira e ago, il solenoide con materiale genera un campo magnetico.

Abbiamo ora il vantaggio pratico di conoscere le caratteristiche geometriche del materiale all'interno del solenoide: grazie alla (11.5.3) possiamo scrivere:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 (\vec{J} + \vec{J}')$$

dove il vettore  $\vec{J}'$  è legato alle correnti microscopiche. Sotto questo modello riscrivo il campo con i contributi macroscopici e microscopici (indicati con  $*$ ):

$$(12.3.1) \quad \vec{B} = \mu_0 (in + \underbrace{i'n'}_{*}) \hat{u}_B$$

Chiamata  $A$  la superficie del materiale tra le spire (in pratica l'area della sezione del solenoide), possiamo affermare che una spira di area  $A$  in cui scorre corrente  $i'$  che genera un campo magnetico; abbiamo tuttavia  $N$  spire, quindi otteniamo dalla (11.7.1):

$$\vec{m} = \overbrace{N}^{n'l} i' A$$

Scrivendo il numero totale di spire  $N$  come numero di spire per unità di lunghezza  $n'$  per la lunghezza del solenoide  $l$  (che sarà anche la lunghezza del materiale inserito); possiamo scrivere:

$$\vec{m} = \overbrace{lA}^v \underbrace{i'n'}_{*} \hat{u}_B$$

Osserviamo che il momento di dipolo complessivo diviso per il volume (chiamiamo  $v = lA$  il volume del materiale nel solenoide) otteniamo una densità; definiamo dalla precedente:

$$(12.3.2) \quad \vec{M} = \frac{\vec{m}}{v} = \frac{d\vec{m}}{dv} = \underbrace{i'n'}_{*} \hat{u}_B$$

Abbiamo ottenuto una densità di momento che tiene conto dei contributi microscopici;

---

**Densità di  
momento di  
dipolo  
magnetico**

Per la costruzione appena fatta possiamo inserire (12.3.2) nella (12.3.1) e scrivere:

$$\vec{B} = \mu_0 (in + M) \hat{u}_B$$

La circuitazione del precedente si scrive come:

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \oint_L (in \cdot \hat{u}_B) d\vec{l} + \mu_0 \overbrace{\oint_L \vec{M} \cdot d\vec{l}}^{\text{correnti micros.}}$$

Dal ragionamento precedente abbiamo che  $\oint_L \vec{M} \cdot d\vec{l} = \sum_{j=1}^N i'_j$  e applicando il teore-

ma del rotore in modo analogo alla (11.5.3) otteniamo:

$$(12.3.3) \quad \vec{\nabla} \times \vec{M} = \vec{J}$$

Grazie a questa considerazione il rotore del campo magnetico viene riscritto come:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 (\vec{J} + \vec{J}') = \mu_0 (\vec{J} + \vec{\nabla} \times \vec{M}) \Rightarrow \boxed{\vec{\nabla} \times (\vec{B} - \mu_0 \vec{M}) = \mu_0 \vec{J}}$$

abbiamo ottenuto una relazione tra le correnti macroscopiche e microscopiche ( $\vec{B}$  dipende da  $\vec{J}$  e  $\vec{J}'$  mentre  $\vec{M}$  dipende solo da  $\vec{J}'$ ); definiamo:

**Vettore intensità  
di campo  
magnetico**

$$(12.3.4) \quad \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$$

Sostituendolo nella precedente otteniamo:

**Rotore intensità  
di campo  
magnetico**

$$(12.3.5) \quad \vec{\nabla} \times (\mu_0 \vec{H}) = \mu_0 \vec{J} \Rightarrow \boxed{\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}}$$

Da questa formula abbiamo che il vettore di campo magnetico è pari a:

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) = \mu_r \mu_0 \vec{H}$$

**Vettore di  
magnetizzazione**

$$(12.3.6) \quad \vec{M} = (\mu_r - 1) \vec{H} = \boxed{\chi_m \vec{H}}$$

dove nella precedente abbiamo definito, in analogia con la costante dielettrica, la *suscettività magnetica* del mezzo  $\chi_m$ ; possiamo quindi studiare l'effetto della magnetizzazione in modo macroscopico.

**12.3.3. Diamagneti e paramagneti in un solenoide.** Se inseriamo un materiale *diamagnetico* in un solenoide le cose vanno come se

- la corrente di superficie  $i'$  genera un momento di dipolo complessivo che si oppone al campo.

Se inseriamo un materiale *paramagnetico* in un solenoide le cose vanno come se

- la corrente di superficie  $i'$  genera un momento di dipolo complessivo nella stessa direzione del campo.



**12.3.4. Sostanze ferromagnetiche.** Se mettiamo del ferro (che è una sostanza ferromagnetica assieme a cobalto e nickel) all'interno di un solenoide abbiamo una sostanza ferromagnetica in un campo magnetico prodotto da correnti macroscopiche. La suscettività magnetica del ferro è positiva e risulta

$$\chi_m(\text{Fe}) \simeq 10^2 \div 10^4$$

circa dai 7 ai 9 ordini di grandezza maggiore della suscettività di sostanze diamagnetiche o paramagnetiche; questo comporta che i fenomeni magnetici possono essere osservati chiaramente nei materiali ferromagnetici anche con strumenti grossolani.

Possiamo usare (12.3.6) per scrivere  $\vec{B}$  (campo magnetico, dipendente dalle correnti microscopiche) in funzione di  $\chi_m$  (suscettività, caratteristica macroscopica di un materiale):

$$\vec{B} = (\chi_m + 1) \mu_0 \vec{H}$$

Se il termine  $\chi_m$  è costante (stesso materiale) si ha proporzionalità diretta tra  $\vec{B}$  e  $\vec{H}$ ; se quindi una bacchetta di ferro inserita in un solenoide e possiamo decidere quanta corrente scorre in esso, possiamo controllare il modulo del vettore  $\vec{H}$ ; sperimentalmente si osserva che  $\vec{B}$  aumenta fino a un valore massimo (saturazione del mezzo).

Se interrompiamo il passaggio di corrente, invece di ritornare “sui suoi passi” il sistema si separa dall'andamento  $\vec{B}/\vec{H}$  che ha avuto durante la fase di magnetizzazione e si blocca in un punto  $B_r$  della sua caratteristica con  $\vec{H} = 0$ , chiamato *campo residuo*.

Per “smagnetizzare” la bacchetta di ferro invertiamo la corrente che percorre il solenoide e notiamo che il campo si annulla fin quando mantengo il modulo di  $\vec{H}$  a un valore che chiamiamo  $H_F$ , un campo esterno forzante che si oppone a  $\vec{B}$ .

Continuando ad aumentare la corrente si giunge a una nuova condizione di saturazione; interrompendo la corrente si giunge nuovamente a un valore finale di campo residuo  $B'_r$  (in generale uguale in modulo al  $B_r$  dalla precedente magnetizzazione).

A causa di tali campi residui si osservano le proprietà magnetiche nei materiali; tale fenomeno si chiama ciclo d'isteresi.

*Un materiale ferromagnetico è diviso in **domini** magnetici orientati **casualmente** che in assenza di un campo sono disposti in modo da minimizzare l'energia del campo; sotto l'azione di un campo esterno si orientano in modo concorde ad esso.*

*Nel momento in cui il campo si interrompe non tutti i domini tornano ad orientarsi come in origine, a causa di attriti interni alle porzioni di materia.*

*Ogni sistema ha una temperatura caratteristica alla quale perde la magnetizzazione acquisita, chiamata **temperatura di Curie**; tuttavia una volta portato a tale temperatura il materiale diventa paramagnetico in modo permanente.*

*Per uscire dal ciclo d'isteresi bisogna effettuare la magnetizzazione applicando un campo di segno alternato e sempre minore, fino ad avere un campo residuo nullo.*

---

Ciclo d'isteresi

---

Domini di Vice

## 12.4. Campo magnetico all'interfaccia

Prendiamo due materiali a contatto con due permeabilità magnetiche relative differenti,  $\mu_1$  e  $\mu_2$ . Se non ci sono correnti macroscopiche vale, dalla (12.3.5)

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = 0 \iff \overbrace{\vec{H}_1 = \vec{H}_2}^{\uparrow}$$

Infatti se prendiamo un percorso rettangolare sulla superficie di separazione tra i materiali che abbia i lati ortogonali a essa di infinitesimo maggiore rispetto a quelli

paralleli, automaticamente il rotore nullo di  $\vec{H}$  implica ( $\blacktriangle$ ) che i due vettori di intensità nei due mezzi siano uguali (due tratti del circuito sono trascurati e gli altri due sono percorsi in versi opposti)

Le componenti *tangenziali* (parallele alla superficie di interfaccia) dei campi magnetici nei due materiali saranno:

$$\left. \begin{aligned} \vec{B}_{1,\tau} &= \mu_1 \mu_0 H_1 \hat{u}_\tau \\ \vec{B}_{2,\tau} &= \mu_2 \mu_0 H_2 \hat{u}_\tau \end{aligned} \right\} \frac{\vec{B}_{1,\tau}}{\vec{B}_{2,\tau}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$$

I due campi saranno in generale differenti perché sensibili alla permeabilità magnetica (infatti sono influenzati dai coefficienti di permeabilità relativi al materiale) e quindi alle correnti microscopiche. Osserviamo le componenti *normali* del campo in funzione di quelle tangenziali rispetto all'angolo  $\theta$  con cui il campo magnetico incide sull'interfaccia:

$$\left. \begin{aligned} \vec{B}_{1,\tau} &= \vec{B}_{1,n} \tan \theta_1 \\ \vec{B}_{2,\tau} &= \vec{B}_{2,n} \tan \theta_2 \end{aligned} \right\} \frac{\vec{B}_{1,\tau}}{\vec{B}_{2,\tau}} = \frac{\vec{B}_{1,n} \tan \theta_1}{\vec{B}_{2,n} \tan \theta_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$$

dove abbiamo sostituito il rapporto delle permeabilità a quello dei vettori di campo magnetico dalla precedente relazione; osserviamo inoltre che la componente del campo magnetico ortogonale all'interfaccia del materiale dipende dal flusso del campo magnetico attraverso tale superficie; tuttavia sappiamo che per (11.5.1) essa è nulla, quindi le componenti normali saranno uguali. Semplificando il rapporto nella precedente otteniamo:

---

**Permeabilità  
magnetica e  
angolo di  
incidenza del  
campo**

(12.4.1)

$$\frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$$

## Fenomeni elettromagnetici

### 13.1. Induzione di Faraday

Immaginiamo di avere un magnete in prossimità di una spira. Se la spira fosse percorsa da corrente genererebbe un campo magnetico e interagirebbe col magnete; se tuttavia non c'è corrente che scorre nella spira e il magnete viene messo in moto con velocità  $\vec{v}_0$  si osserva che sulla spira inizia a girare corrente (si otterrebbe lo stesso effetto muovendo la spira rispetto al magnete); si hanno quattro casi diversi per tale fenomeno

- (1) Il magnete ha il polo *nord* rivolto verso la spira e velocità diretta *verso la spira*  
allora la corrente scorrerà in senso *antiorario* rispetto al lato dove si trova il magnete e il momento di dipolo è rivolto *verso il magnete*;
- (2) Il magnete ha il polo *nord* rivolto verso la spira e velocità in direzione *opposta alla spira*  
allora la corrente scorrerà in senso *orario* rispetto al lato dove si trova il magnete e il momento di dipolo è rivolto *lontano dal magnete*;
- (3) Il magnete ha il polo *sud* rivolto verso la spira e velocità diretta *verso la spira*  
allora la corrente scorrerà in senso *orario* rispetto al lato dove si trova il magnete e il momento di dipolo è rivolto *lontano dal magnete*;
- (4) Il magnete ha il polo *sud* rivolto verso la spira e velocità in direzione *opposta alla spira*  
allora la corrente scorrerà in senso *antiorario* rispetto al lato dove si trova il magnete e il momento di dipolo è rivolto *verso il magnete*;

Faraday interpretò il fenomeno immaginando che che il magnete modifica lo spazio attorno a sé, quindi uno spostamento del magnete lascia la spira in una porzione di spazio differente; per tenerne conto di tali modifiche costruiamo le linee di campo in modo che siano più dense vicino ai poli del magnete e più rarefatte a mano a mano che ci si allontana da esso.

Possiamo calcolare il flusso del campo magnetico (tangente in ogni punto alle linee di campo) generato dal magnete attraverso l'area racchiusa dalla spira; se il magnete è fermo il flusso è costante ma si osserva un passaggio di corrente solo per variazioni di tale flusso. La variazione del flusso genera dunque un effetto elettromotore nella spira che tuttavia (come osservato nei 4 casi precedenti) si oppone alla variazione; enunciamo la legge di Faraday-Lenz per l'induzione elettromagnetica (Lenz apportò la correzione mettendo un segno meno per rappresentare questa opposizione alla variazione di flusso):

$$(13.1.1) \quad \mathcal{E}_{\text{indotta}} = - \frac{d\Phi(\vec{B})}{dt}$$

---

**Legge di  
Faraday-Lenz**

Le variazioni di flusso sono spontaneamente rifiutate dal sistema, a meno che non ci sia una forza esterna che compiendo lavoro riesca a modificare il flusso.

### 13.2. Relazione tra campo elettrico e magnetico

Poniamoci nello spazio tra una zona in cui abbiamo una superficie che genera un campo magnetico uniforme accanto a una regione di spazio in cui il campo è nullo; poniamo una spira quadrata  $ABCD$  di lato  $l$  e velocità  $\vec{v}$  diretta verso la regione con campo nullo, situata nella regione a campo costante.

La (13.1.1) fornisce una interpretazione macroscopica, mentre adesso cerchiamo di osservare cosa accade a livello delle singole cariche nella spira; finché la spira si sposta nella zona di spazio sul piano con campo uniforme non c'è variazione di flusso delle correnti concatenate.

Sui tratti della spira ( $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$ ) paralleli alla velocità si avrà un accumulo di carica nella parte verticale del filo della spira (che non provoca passaggio di carica); sui tratti ortogonali alla velocità ( $\overline{AD}$  e  $\overline{BC}$ ) si avrà una separazione delle cariche dovuta alla forza di Lorentz che genererà una differenza di potenziale (e dunque un campo elettromotore): essi si comporteranno come due generatori opposti ed equivalenti, dunque abbiamo una situazione in cui lungo la spira  $L$ :

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

Abbiamo ottenuto, dalla situazione microscopica, la situazione prevista dalla legge di Faraday-Lentz.

Poniamoci invece nella situazione in cui la spira sia a cavallo delle due regioni di spazio con un tratto  $x$  ancora sul piano con campo magnetico, sempre in movimento con la stessa velocità  $\vec{v}$ ; se calcoliamo la circuitazione abbiamo:

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{\overline{AB}} \frac{\vec{F}_L}{q} d\vec{l} = \underbrace{\vec{v}Bl}_*$$

Rispetto alla situazione precedente si ha che il tratto  $\overline{BC}$  non ha un campo elettromotore opposto al tratto  $\overline{AD}$ , quindi ci sarà passaggio di carica.

L'area della spira attraverso cui c'è flusso del campo non sarà più  $l^2$  ma  $xl$ ; applichiamo la (12.4.1):

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt} \Phi(\vec{B}) = \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot \hat{u}_n d\vec{s} = \frac{d}{dt} (Bxl)$$

nella precedente abbiamo svolto l'integrale di superficie considerando  $\vec{B}$  costante, per come abbiamo definito il sistema; anche  $l$  è costante, quindi scriviamo:

$$\dots = Bl \frac{dx}{dt} = -vBl \stackrel{\text{Lentz}}{=} vBl$$

dove abbiamo ottenuto un valore negativo per la variazione di flusso poiché  $x$  è definito in modo tale da diminuire nel tempo (la spira si sposta entrando nella regione con campo nullo e lasciando quella a campo costante), che grazie al termine di Lentz torna positiva e corrisponde a (\*).

La forza elettromotrice *indotta* che deriva da questo fenomeno, essendo legata alla legge di Faraday-Lentz, riguarda il sistema dal punto di vista macroscopico; sappiamo che:

$$\mathcal{E}_{\text{indotta}} = \underbrace{\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l}}_{\blacksquare} = \underbrace{-\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt}}_{\blacklozenge} = \underbrace{-\frac{d}{dt} \int_{\Gamma} \vec{B} \cdot \hat{u}_n d\vec{s}}_{\star}$$

integrando su  $\Gamma$ , la superficie racchiusa dalla spira  $L$  e utilizzando in ( $\blacklozenge$ ) la (13.1.1); essendo l'integrale di superficie ( $\star$ ) costante e trasparente alla derivata rispetto

al tempo e scrivendo la circuitazione (■) rispetto al rotore del campo elettrico, otteniamo:

$$\int_{\Gamma} (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot \hat{u}_n d\vec{s} = \int_{\Gamma} \left( -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \cdot \hat{u}_n d\vec{s}$$

L'uguaglianza precedente non dipende dalla superficie  $\Gamma$ , quindi dipende dagli integrandi: possiamo scrivere:

$$(13.2.1) \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

da cui notiamo che se il campo magnetico è nullo, la variazione rispetto al tempo è nulla e il rotore del campo elettrico è nullo (otteniamo lo stesso risultato per il campo elettrostatico).

---

**Rotore del  
campo elettrico  
con contributo  
magnetico**

### 13.3. Mutua induzione

Prendiamo due spire percorse da corrente, poste a breve distanza una dall'altra; si osserva che le linee di campo delle due spire saranno concatenate e si influenzeranno a vicenda.

Calcoliamo il flusso del campo magnetico attraverso ciascuna di esse introducendo un coefficiente di proporzionalità  $M_{i,j}$  rispetto alla corrente che indica la mutua induzione di un circuito  $i$  su un circuito  $j$ :

$$\begin{aligned} \Phi_2(\vec{B}_1) &= M_{1,2} i_1 \\ \Phi_1(\vec{B}_2) &= M_{2,1} i_2 \end{aligned}$$

Sperimentalmente si osserva che:

$$(13.3.1) \quad M_{1,2} = M_{2,1} = M$$

questo coefficiente si misura in Henry come  $[H] = [Wb] / [A]$ .

---

**Coefficiente di  
mutua induzione**

### 13.4. Autoinduzione

Se prendiamo due spire vicine, di cui una percorsa da corrente  $i$  (spira 1) e l'altra no (spira 2), la spira percorsa da corrente genera un campo magnetico  $\vec{B}_1$  che si concatena sull'altra spira, per (13.3.1):

$$\Phi_2(\vec{B}_1) = M_{1,2} i_1$$

Se avessimo che la corrente scorre nella spira 2 la formula appena ottenuta varrebbe ancora per il flusso attraverso la spira 1 (ora non percorsa da corrente), con i pedici invertiti. Mettiamo la (13.1.1) in relazione al coefficiente di mutua induzione:

$$\mathcal{E}_{\text{indotta}} = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt} = -M \frac{di}{dt}$$

Da questa relazione osserviamo che una variazione del flusso nella spira 2 causata dalla spira 1, provoca una corrente elettrica che a sua volta provoca una ulteriore variazione del flusso attraverso la spira 2; tale processo si chiama *autoinduzione*: essendo la geometria fissa, facendo scorrere corrente nella spira 2 si avrà una variazione del flusso nella spira stessa:

$$(13.4.1) \quad \Phi_2(\vec{B}_2) = L i_2$$

dove nella precedente il valore  $L$  si chiama coefficiente di autoinduzione. Nel momento in cui si accende una corrente il sistema si opporrà alla variazione di flusso generando una corrente autoindotta che cercherà di evitare la variazione:

$$(13.4.2) \quad \mathcal{E}_{\text{indotta}} = -L \frac{di}{dt}$$

---

**Coefficiente di  
autoinduzione**

---

**Forza  
elettromotrice  
autoindotta**

Se consideriamo un solenoide infinito percorso da corrente  $i$  con densità di spire  $n$  che abbia il vuoto al suo interno, spiralizzato attorno all'asse  $z$ , il campo magnetico all'interno dipende da (11.6.1):

$$\vec{B} = \mu_0 i n \hat{u}_z = \mu_0 \frac{N}{l} i \hat{u}_z$$

dove abbiamo riscritto la densità di spire come  $n = N/l$  dove  $N$  è il numero totale di spire e  $l$  la lunghezza del filo del solenoide. Calcoliamo il flusso del campo attraverso il solenoide, considerando che il campo sarà diretto lungo l'asse ed è come se incontrasse  $N$  spire di area  $A$ , come gli avvolgimenti del solenoide (per questa configurazione il vettore di campo sarà ortogonale alle superfici contenute negli avvolgimenti e il suo prodotto sarà massimizzato):

$$\Phi(\vec{B}) = \overbrace{B N A}^{\vec{B} \perp A} = \mu_0 N^2 \frac{A}{l} i = L i$$

L'ultima uguaglianza è stata ottenuta definendo nel modo seguente il:

---

**Coefficiente di  
autoinduzione  
del solenoide**

$$(13.4.3) \quad L_{\text{sol.}} = \mu_0 N^2 \frac{A}{l}$$

il quale dipende dalle caratteristiche *costruttive* del solenoide, per esempio inserendo un materiale nel solenoide si usa il  $\mu_r$  del materiale nel coefficiente di autoinduzione.

Nel momento in cui opero su un circuito che contiene un solenoide di questo tipo variando la quantità di corrente, il generatore a cui è collegato dovrà opporsi a questo effetto di autoinduzione prodotto dalla variazione del flusso; trascurando l'effetto dissipativo di Joule (10.3.6), tale lavoro aggiuntivo dovrà essere immagazzinato in qualche modo. Calcoliamo il lavoro come:

$$dW := -\mathcal{E} dq = - \left( -L \frac{di}{dt} \right) dq = L \frac{dq}{dt} di = L i di$$

dove abbiamo riscritto la forza elettromotrice autoindotta dalla (13.4.2) e la carica infinitesima  $dq = i dt$ ; il lavoro complessivo sarà un'integrale immediato fino a una corrente  $i$  fissata:

---

**Lavoro della  
forza  
elettromotrice  
autoindotta**

$$(13.4.4) \quad W = \frac{1}{2} L i^2 = \frac{1}{2} \mu_0 N^2 \frac{A}{l} i^2$$

ricordando il (13.4.3). Se nel solenoide scorre corrente  $i$  bisogna compiere tale lavoro per portare la corrente a fluire attraverso di esso.

Se adesso mettiamo in evidenza il volume all'interno del solenoide come  $v = Al$ , possiamo scrivere la densità di energia come:

$$\frac{W}{v} = \frac{1}{2} \mu_0 \frac{N^2}{l^2} i^2 \Rightarrow \frac{1}{2} \mu_0 \left( \frac{\vec{B}}{\mu_0} \right)^2$$

dove abbiamo sostituito i termini del campo magnetico all'interno del solenoide (11.6.1) con la riscrittura  $n = N/l$ ; l'espressione finale dell'energia immagazzinata fra le spire del solenoide sarà:

---

**Energia  
potenziale  
magnetica**

$$(13.4.5) \quad U_m = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} = \frac{1}{2} B H$$

Se inseriamo un materiale con una certa permeabilità  $\mu_r$  possiamo usare la seconda uguaglianza mettendo in evidenza  $\vec{H}$ .

### 13.5. Equazioni di Maxwell

Le equazioni di Maxwell sono le forme locali degli esperimenti già conseguiti e formulati in modo integrale riguardo campo elettrico e magnetico, in particolare divergenza e rotore di entrambi i campi:

$$\begin{array}{l} \text{CAMPO ELETTRICO} \\ \left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (\text{forma locale teorema Gauss}) \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{dalla legge di Faraday-Lenz}) \end{array} \right. \\ \\ \text{CAMPO MAGNETICO} \\ \left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (\text{esperienza della calamita spezzata}) \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \left[ \vec{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right] \quad (\text{forma locale legge di Ampère}) \end{array} \right. \end{array}$$

Maxwell si accorge dell'inconsistenza della quarta equazione nella conservazione della carica: introduce quindi il termine correttivo (\*); sappiamo infatti che:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

La divergenza di  $\vec{J}$  può essere riscritta, dalla quarta equazione, come:

$$\vec{\nabla} \cdot \left( \frac{\vec{\nabla} \times \vec{B}}{\mu_0} \right) \rightarrow 0$$

dove si ha la *divergenza di un rotore*; ricordando che il rotore di un campo vettoriale è diverso da zero se le linee di campo sono chiuse (non ci sono sorgenti isolate di campo) mentre la divergenza mostra proprio la presenza di sorgenti di campo, ci aspettiamo che la relazione precedente sia nulla.

Prendiamo un generico vettore e calcoliamone il rotore:

$$\vec{\nabla} \times \vec{v} = \left( \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \hat{u}_x + \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \hat{u}_y + \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \hat{u}_z$$

Adesso calcoliamone la divergenza:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{v}) = \frac{\partial v_z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x \partial z} + \frac{\partial v_x}{\partial y \partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial y \partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial z \partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial z \partial y} = 0 \quad (\text{c.v.d.})$$

dove abbiamo semplificato le derivate miste grazie al (6.4.4).

Non riusciamo allora a ritrovare la conservazione della carica dalle forme locali: l'ipotesi di Maxwell è un termine correttivo che fa riferimento alla corrente di spostamento, per quanto riguarda il contributo al rotore:

$$(13.5.1) \quad \vec{J}_s = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

---

**Densità di  
corrente di  
spostamento**

Usando la quarta equazione dotata del termine correttivo (\*), la divergenza del campo elettrico diventa:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{J} + \vec{J}_s) = -\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J}_s = -\frac{\partial \rho}{\partial t} + \varepsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \dots$$

Dato che abbiamo delle variabili separabili ( $t$  ed  $\vec{E}$ ), possiamo riscrivere l'ultima uguaglianza:

$$\dots = -\frac{\partial \rho}{\partial t} + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \stackrel{1M}{=} -\frac{\partial \rho}{\partial t} + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\rho}{\varepsilon_0} \right) = 0$$

in cui abbiamo usato la scrittura della prima equazione di Maxwell (1M).

Le equazioni riscritte tenendo conto delle sorgenti di campo saranno:

---

**Equazioni di Maxwell** (13.5.2)

$$\begin{cases} 1) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} & (\rho \text{ è sorgente di campo elettrico}) \\ 2) \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ 3) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ 4) \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \left[ \vec{J} + \vec{J}_s \right] & (\vec{J} \text{ è sorgente di campo magnetico}) \end{cases}$$

Per accoppiare le equazioni (13.5.2) è necessario calcolare il *rotore del rotore* di un vettore; dal calcolo si ottiene:

$$(13.5.3) \quad \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) - \nabla^2 \vec{v}$$

Allora possiamo calcolare:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \stackrel{2M}{=} \vec{\nabla} \times \left( -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \stackrel{4M}{=} -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

La precedente ottenuta lavorando con la Fisica, deve essere per l'Analisi matematica anche (dal risultato (13.5.3) e per l'assenza di sorgenti di campo) uguale a:

$$\vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} \stackrel{1M}{=} -\nabla^2 \vec{E}$$

Mettendo insieme le due relazioni otteniamo (i segni si semplificano):

---

**Equazione di d'Alambert** (13.5.4)

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \square \vec{E}$$

Nella precedente definiamo l'*operatore d'alambertiano* come  $\square(\vec{v}) = \nabla^2 \vec{v} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial t^2}$ ; se il d'alambertiano di un campo vettoriale è nullo, esso si propaga come un'onda.

Incrociando le equazioni di Maxwell osserviamo che il campo elettrico e magnetico possono esserci in regioni dello spazio prive di sorgenti e propagarsi in esse sotto forma di onde.

Inoltre il termine  $\mu_0 \varepsilon_0$  deve essere, dall'analisi dimensionale della (13.5.4), l'inverso di una velocità (la velocità della luce,  $c$ ); la scrittura finale dell'equazione di D'alambert per il campo elettrico e magnetico sarà:

Equazione di d'Alambert per onde elettriche e magnetiche (13.5.5)

$$\begin{aligned} \nabla^2 \vec{E} &= \frac{1}{c} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \\ \nabla^2 \vec{B} &= \frac{1}{c} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \end{aligned}$$

### 13.6. Onde elettromagnetiche

Sia  $S$  una sorgente di campo elettrico o magnetico; è evidente dall'analisi svolta nel capitolo 13 che da essa si propagheranno delle onde a simmetria sferica. Studieremo per semplicità le *onde piane* ponendoci in una zona dello spazio adeguata, infatti a



mano a mano che ci si allontana dalla sorgente in una zona dello spazio priva di altre sorgenti di campo, la curvatura delle onde tende a zero (si hanno le onde piane).

Il fronte d'onda che investe un osservatore in un punto  $P$  a distanza  $\vec{r}$  e al tempo  $t$  avrà la seguente equazione d'onda:

$$f(\omega) = f(\underbrace{\vec{r} \cdot \hat{u}_n}_{\blacktriangle} + \underbrace{vt}_{\blacklozenge})$$

dove nell'argomento  $\omega$  troviamo la relazione della dipendenza spaziale ( $\blacktriangle$ ) e temporale ( $\blacklozenge$ ) dell'onda, inoltre chiamiamo  $\hat{u}_n$  il versore normale al fronte d'onda.

Calcoliamo le variazioni della funzione d'onda nel tempo e nello spazio per ottenere una formulazione rispetto alla propagazione delle onde:

$$(13.6.1) \quad \frac{\partial f}{\partial t} = v \frac{df}{d\omega} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial}{\partial t} = v \frac{d}{d\omega}}$$

$$(13.6.2) \quad \left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \hat{u}_{n,x} \frac{d^2 f}{d\omega^2} &\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \hat{u}_{n,x} \frac{d^2}{d\omega^2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \hat{u}_{n,y} \frac{d^2 f}{d\omega^2} &\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \hat{u}_{n,y} \frac{d^2}{d\omega^2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \hat{u}_{n,z} \frac{d^2 f}{d\omega^2} &\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \hat{u}_{n,z} \frac{d^2}{d\omega^2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \nabla^2 = \frac{d^2}{d\omega^2}$$

Possiamo effettuare questi cambi di differenziale per la combinazione lineare degli addendi di  $\omega$ ; abbiamo inoltre usato le derivate seconde per ricondurci a  $\nabla^2$ , che otteniamo considerando che  $\nabla^2 = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}$  e quindi sommando le tre componenti dall'ultima relazione a destra.

Ora abbiamo gli strumenti per studiare le funzioni d'onda dei campi elettrico e magnetico:

$$(13.6.3) \quad \begin{cases} \vec{E} = \vec{E}_0 f_E(\vec{r} \cdot \hat{u}_n + vt) & (\text{campo elettrico}) \\ \vec{B} = \vec{B}_0 f_B(\vec{r} \cdot \hat{u}_n + vt) & (\text{campo magnetico}) \end{cases}$$

---

**Equazioni  
d'onda campo  
elettrico e  
magnetico**

Osserviamo che nelle precedenti abbiamo usato la stessa velocità  $v$  per il campo elettrico e magnetico, risultato noto dalla (13.5.5).

Nell'ipotesi delle onde piane siamo in una zona dello spazio in cui non ci sono sorgenti, quindi scriviamo la prima equazione di Maxwell (13.5.2):

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} \stackrel{\text{IM}}{=} 0 = \partial_x E_x + \partial_y E_y + \partial_z E_z = \hat{u}_{n,x} \frac{dE_x}{d\omega} + \hat{u}_{n,y} \frac{dE_y}{d\omega} + \hat{u}_{n,z} \frac{dE_z}{d\omega} = \dots$$

osservando che l'operatore  $d/d\omega$  è trasparente ai coseni direttori possiamo raccogliarlo:

$$\dots = \frac{d}{d\omega} (\hat{u}_{n,x} E_x + \hat{u}_{n,y} E_y + \hat{u}_{n,z} E_z) = \frac{d}{d\omega} (\hat{u}_n \cdot \vec{E})$$

nella precedente abbiamo sostituito la (13.6.3) al campo elettrico con le riscritture (13.6.1) e (13.6.2); inoltre abbiamo accorpato la somma del prodotto di componenti omologhe.

Infine, ritornando alla prima uguaglianza, abbiamo che deve valere:

$$\frac{d}{d\omega} (\hat{u}_n \cdot \vec{E}) = 0 \Rightarrow \hat{u}_n \cdot \vec{E} = 0 \Rightarrow \boxed{\hat{u}_n \perp \vec{E}}$$

concludiamo che il campo elettrico deve essere ortogonale alla direzione di propagazione, poiché nelle ipotesi del nostro ragionamento esso non potrà essere costante ma dovrà avere una proiezione nulla sul versore normale al fronte d'onda (giace sul fronte d'onda).

Ripetendo lo stesso ragionamento con la terza equazione di Maxwell e l'ipotesi delle onde piane avremo:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} \stackrel{3M}{=} 0 = \dots = \frac{d}{d\omega} (\hat{u}_n \cdot \vec{B}) \Rightarrow \hat{u}_n \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow \boxed{\hat{u}_n \perp \vec{B}}$$

Anche il campo magnetico giace sul piano del fronte d'onda; cerchiamo adesso la relazione tra i due vettori di campo; cominciamo calcolando il rotore di  $\vec{E}$  usando la (13.6.2):

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \det \begin{pmatrix} \hat{u}_x & \hat{u}_y & \hat{u}_z \\ \hat{u}_{n,x} \frac{d}{d\omega} & \hat{u}_{n,y} \frac{d}{d\omega} & \hat{u}_{n,z} \frac{d}{d\omega} \\ E_x & E_y & E_z \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{d}{d\omega} \det \begin{pmatrix} \hat{u}_x & \hat{u}_y & \hat{u}_z \\ \hat{u}_{n,x} & \hat{u}_{n,y} & \hat{u}_{n,z} \\ E_x & E_y & E_z \end{pmatrix} = \dots$$

La nuova matrice rappresenta il prodotto vettoriale del campo elettrico per il versore normale; possiamo riscrivere:

$$\dots = \frac{d}{d\omega} (\hat{u}_n \times \vec{E})$$

Anche per il campo magnetico otteniamo l'analogo risultato:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \dots = \frac{d}{d\omega} (\hat{u}_n \times \vec{B})$$

Con le precedenti considerazioni otteniamo la seguente scrittura:

$$\frac{d}{d\omega} (\hat{u}_n \times \vec{E}) = \vec{\nabla} \times \vec{E} \stackrel{2M}{=} -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \stackrel{!}{=} -v \frac{d\vec{B}}{d\omega} \Rightarrow \frac{d}{d\omega} (\hat{u}_n \times \vec{E} + v\vec{B}) = 0$$

nella precedente abbiamo usato la seconda equazione di Maxwell e la (13.6.1) nell'uguaglianza ( $\stackrel{!}{=}$ ); ragionando in modo simile a prima, per avere un differenziale nullo bisognerebbe avere o una equazione d'onda costante (ciò è falso dato che abbiamo fronti d'onda che si propagano) oppure un oggetto identicamente nullo, che è proprio ciò che si ottiene ( $\hat{u}_n \times \vec{E} + v\vec{B} = 0$ ).

Allora possiamo affermare che il campo magnetico è proporzionale al prodotto vettoriale della proiezione del campo elettrico sulla direzione di propagazione:

$$\vec{B} \propto \hat{u}_n \times \vec{E}$$

ma questo vuol dire che il campo magnetico è ortogonale tanto al campo elettrico quanto al fronte d'onda:

$$(13.6.4) \quad \vec{B} \perp \vec{E} \perp \hat{u}_n \text{ (formano una terna cartesiana)}$$

### 13.7. Teorema di Poynting

Vogliamo studiare una regione di spazio che viene investita da un campo elettromagnetico; conosciamo già la densità di energia per il campo elettrico (8.2.3) e quello magnetico (13.4.5), quindi per l'energia di un'onda elettromagnetica basterà sommare tali contributi:

$$(13.7.1) \quad U_{em} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0}$$

Consideriamo ora un volume  $V$  al cui interno ci sono delle cariche  $q$ , sul quale arriva un fronte d'onda: studiamo l'effetto del campo sulle cariche nel volumetto; la carica  $q$  risentirà di entrambi i campi subendo una forza data dalla somma dei contributi di (6.2.1) e (11.4.1):

$$\vec{F} = q (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

---

**Direzione dei  
campi nelle onde  
elettromag-  
netiche**

---

**Energia  
potenziale  
elettromagnetica**

Se la carica si sposta subendo tale forza, essa compirà un lavoro che possiamo calcolare come:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot \vec{v} dt = q \left( \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right) \cdot \vec{v} dt \Rightarrow q \vec{E} \cdot \vec{v} dt = \boxed{\vec{E} \cdot \vec{J} dv dt}$$

notiamo che nella precedente il prodotto  $\vec{v} \times \vec{B}$  restituisce un vettore ortogonale a  $\vec{v}$  e  $\vec{B}$ , dunque il successivo prodotto con  $\vec{v}$  sarà nullo; ricordando la (10.1.3) e considerando che il vettore  $\vec{J}$  ha un termine di densità, otteniamo l'ultima relazione in cui  $dv$  è un elementino di volume.

Possiamo ottenere il lavoro svolto nel tempo  $\tau$  sul volume  $V$  da un'onda elettromagnetica integrando la precedente:

$$\int_{\tau} \frac{dW}{dt} = \int_V \vec{E} \cdot \vec{J} dv \stackrel{4M}{=} \int_V \vec{E} \cdot \left[ \frac{\vec{\nabla} \times \vec{B}}{\mu_0} - \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right] dv = \int_V \left[ \frac{\vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B})}{\mu_0} - \varepsilon_0 \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right] dv$$

Raccogliendo il differenziale del tempo nel secondo addendo abbiamo:

$$\int_V \underbrace{\left[ \frac{\vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B})}{\mu_0} - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 \right) \right]}_{*} dv$$

Analizziamo l'oggetto (\*) applicando la seguente relazione: dati due vettori  $\vec{v}_1$  e  $\vec{v}_2$ , vale:

$$(13.7.2) \quad \vec{\nabla} \cdot (\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) = (\vec{\nabla} \times \vec{v}_1) \cdot \vec{v}_2 - \vec{v}_1 \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{v}_2)$$

Per la (13.7.2) interpretata su  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  l'integrale precedente diventa:

$$\int_V \left[ \frac{(\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot \vec{B} - \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{B})}{\mu_0} - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 \right) \right] dv$$

Per la seconda equazione di Maxwell (13.5.2) riscriviamo il rotore di  $\vec{E}$  e svolgere il prodotto scalare con  $\vec{B}$  raccogliendo poi il differenziale:

$$\begin{aligned} \int_V \left[ -\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \frac{B}{\mu_0} \right) - \frac{\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{B})}{\mu_0} - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 \right) \right] dv = \\ - \underbrace{\int_V \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} \frac{B}{\mu_0} \right) dv}_{(1)} - \underbrace{\int_V \frac{\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{B})}{\mu_0} dv}_{(2)} \end{aligned}$$

Osserviamo i due integrali separatamente:

- (1) Abbiamo un integrale esteso allo spazio sul volume  $V$  mentre la derivata rispetto al tempo riguarda la densità di energia potenziale, quindi è lecito raccogliere il differenziale  $\partial/\partial t$ ; inoltre l'integranda corrisponde alla (13.7.1)
- (2) Abbiamo l'integrale sul volume della divergenza di un vettore: possiamo applicare il teorema della divergenza (6.4.2) per eliminare l'operatore nabla interpretando l'integrale come un flusso attraverso la superficie  $\Sigma$  che racchiude il volume  $V$

dalle precedenti otteniamo il teorema di Poynting

$$W = -\frac{\partial}{\partial t} \int_V U_{em} dv - \int_{\Sigma} \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} d\vec{\Sigma}$$

Se definiamo il

---

**Vettore di  
Poynting**

---

(13.7.3)

$$\vec{S} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0}$$

possiamo formulare il teorema come:

---

**Teorema di  
Poynting**

---

(13.7.4)

$$W = -\frac{\partial}{\partial t} \int_V U_{em} dv - \int_{\Sigma} \vec{S} d\vec{\Sigma}$$

Se un'onda arriva sul volume  $V$ , siccome il fronte trasporta dell'energia, la variazione dell'energia nel tempo è pari all'energia sottratta al fronte d'onda (primo integrale); abbiamo tuttavia messo in evidenza un vettore (secondo integrale) che ha un flusso nel tempo attraverso la superficie e partecipa al bilancio energetico dell'onda elettromagnetica.

## Indice analitico

- Accelerazione angolare, 23  
Accelerazione istantanea, 15  
Accelerazione moto armonico, 21  
Attrito radente, 26  
Attrito viscoso, 27
- Biot-Savart, legge, 93
- Campo elettrico del dipolo, 70  
Campo elettromotore, 89  
Campo magnetico asse spira circolare, 99  
Campo magnetico nel solenoide infinito, 97  
Campo solenoidale, 87  
Campo tra armature e dielettrico, 82  
Capacità condensatore piano, 78  
Capacità, 74  
Capacità condensatore sferico, 77  
Capacità della sfera, 74  
Capacità equivalente parallelo condensatori, 78  
Capacità equivalente serie condensatori, 78  
Centro di forza, 42  
Ciclo d'isteresi, 105  
Coefficiente di autoinduzione, 109  
Coefficiente di autoinduzione del solenoide, 110  
Coefficiente di mutua induzione, 109  
Coostante di gravitazione universale, 48  
Conservazione della carica elettrica (locale), 87  
Conservazione della quantità di moto, 38  
Corrente elettrica, 85  
Costante dielettrica assoluta, 81
- Densità di carica della sfera, 75  
Densità di corrente di spostamento, 111  
Densità di energia condensatore con dielettrico, 84
- Densità di energia potenziale elettrica, 79  
Densità di momento del dipolo, 82  
Densità di momento di dipolo magnetico, 103  
Densità locale di momento del dipolo, 83  
Differenza di potenziale armature condensatore sferico, 77  
Differenza di potenziale armature rispetto forza, 80  
Dipendenza velocità dal tempo, 15  
Direzione dei campi nelle onde elettromagnetiche, 114  
Divergenza del campo elettrico, 66  
Divergenza del campo magnetico, 95  
Domini di Vice, 105
- Energia cinetica, 31  
Energia del momento magnetico, 98  
Energia elettrostatica, 79  
Energia meccanica, 34  
Energia potenziale elettromagnetica, 114  
Energia potenziale magnetica, 110  
Energia tra le armature, 80  
Equazione caratteristica oscillatore smorzato, 59  
Equazione di d'Alambert, 112  
Equazione differenziale del moto armonico, 22  
Equazione differenziale del pendolo, 29  
Equazioni d'onda campo elettrico e magnetico, 113  
Equazioni di Maxwell, 112  
Equilibrio statico dell'attrito, 26
- Flusso dello spostamento elettrico, 83  
Formulazione locale della circuitazione di Ampère, 96  
Formulazione locale della legge di Ohm, 87

- Forza di Lorentz, 95
- Forza elastica, 32
- Forza elettromotrice, 89
- Forza elettromotrice autoindotta, 109
- Frequenza, 21
- Frequenza di ciclotrone, 95
- Gittata, 24
- I Legge di Laplace, 93
- II Legge di Laplace, 94
- Lavoro, 31
- Lavoro della forza elettromotrice autoindotta, 110
- Lavoro di una forza conservativa, 33
- Lavoro per caricare un condensatore, 79
- Lavoro per caricare una sfera, 75
- Legge della circuitazione di Ampère, 96
- Legge di Faraday-Lentz, 107
- Legge di gravitazione universale, 48
- Legge di Hooke, 27
- Legge di Joule, 88
- Legge oraria del moto armonico, 20
- Legge oraria moto rettilineo, 15
- Massima altezza proiettile, 24
- Momento angolare, 35
- Momento della forza magnetica, 98
- Momento inerziale, 47
- Momento magnetico di una spira, 98
- Momento magnetico orbitale, 102
- Momento vettore, 35
- Moto rettilineo uniforme, 15
- Moto rettilineo uniformemente accelerato, 15
- Nabla, 34
- Periodo delle oscillazioni, 21
- Permeabilità magnetica e angolo di incidenza del campo, 106
- Piccole oscillazioni nel pendolo, 29
- Posizione durante caduta, 17
- Potenza, 32
- Potenziale del dipolo elettrico, 70
- Potenziale elettrico, 64
- Potenziale gravitazionale, 49
- Pseudo-pendolo, 60
- Quantità di moto, 26
- Raggio vettore, 18
- Resistenza equivalente parallelo resistori, 88
- Resistenza equivalente serie resistori, 88
- Rotore del campo elettrico, 67
- Rotore del campo elettrico con contributo magnetico, 109
- Rotore del vettore densità di momento magnetico, 104
- Rotore intensità di campo magnetico, 104
- Smorzamento debole, 59
- Spin, 102
- Tempo di caduta, 17
- tensione nel pendolo, 29
- Teorema del momento angolare, 39
- Teorema dell'impulso, 26
- teorema delle forze vive, 31
- Teorema di Poynting, 116
- Teorema moto centro di massa, 38
- Traiettoria, 24
- Variazione di energia cinetica, 31
- Velocità al suolo, 17
- Velocità angolare, 22
- Velocità di caduta libera, 27
- Velocità di deriva, 85
- Velocità di fuga, 49
- Velocità ettoriale, 18
- Velocità istantanea, 14
- Velocità media, 14
- Velocità moto armonico, 21
- Velocità moto smorzato, 16
- Vettore di Poynting, 116
- Vettore densità di corrente, 85
- Vettore di campo elettrico, 64
- Vettore di campo gravitazionale, 49
- vettore di magnetizzazione, 104
- Vettore di spostamento elettrico, 83
- Vettore intensità di campo magnetico, 104