

Appunti di Sicurezza delle reti

Lorenzo Prosseda, a.a. 2018-2019



Copyright ©2019 Lorenzo Prosseda. Permission is granted to copy, distribute and/or modify this document under the terms of the GNU Free Documentation License, Version 1.3 or any later version published by the Free Software Foundation; with no Invariant Sections, no Front-Cover Texts, and no Back-Cover Texts. A copy of the license is included in the file called "LICENSE".

Indice

Parte 1. Crittografia	5
Capitolo 1. Teoria dei numeri	7
1.1. Proprietà degli interi	7
1.2. Numeri primi	7
1.3. Algoritmo di Euclide	8
1.4. Congruenza in modulo	9
1.5. Teorema cinese del resto	12
1.6. Square & multiply	14
1.7. Teorema piccolo di Fermat	14
1.8. Principio fondamentale	16
1.9. Radici in aritmetica modulare	16
Capitolo 2. Cifrari elementari	23
2.1. Introduzione	23
2.2. Cifrari a scorrimento e sostituzione	23
2.3. Cifrario a permutazione	24
2.4. Proprietà fondamentali dei cifrari a blocchi	25
Capitolo 3. Cifrario DES	27
3.1. Introduzione	27
3.2. Algoritmo DES	28
3.3. Modi operativi	29
3.4. Sicurezza del DES	30
3.5. Sicurezza delle password	31
Capitolo 4. Cifrario AES	33
4.1. Introduzione	33
4.2. Algoritmo AES	33
4.3. Sicurezza dell'AES	35
Capitolo 5. Successioni Pseudo-casuali	37
5.1. Sequenze binarie pseudo-casuali (PRBS)	37
5.2. Periodo del generatore ai residui quadratici	38
5.3. Successioni LFSR	40
5.4. Stato della successione	41
5.5. Scrambler	42
Capitolo 6. RSA	45
6.1. Introduzione	45
6.2. Algoritmo	45
6.3. Sicurezza di RSA	46
6.4. Test di primalità	47
6.5. Fattorizzazione	49
Esercizi	51

Equazioni congruenziali	51
Elementi primitivi	53
Scrambling	54
Parte 2. Protocolli e sistemi per la comunicazione sicura	55
Appendice A. Introduzione alla crittografia	57
Appendice B. Campi di Galois	61
B.1. Costruzione con polinomi	61
B.2. Polinomi come elementi generatori	63
B.3. Cardinalità dei polinomi irriducibili	64
Indice analitico	65

Parte 1

Crittografia

CAPITOLO 1

Teoria dei numeri

1.1. Proprietà degli interi

Da ora in avanti parleremo di numeri interi, positivi o negativi, operando all'interno dell'insieme \mathbb{Z} ; enunciamo la proprietà di divisione nel modo seguente: presi due interi $a, b \in \mathbb{Z}$ non uguali ($a \neq b$) si dice che a divide b quando a è un divisore di b , ovvero

$$a \setminus b \implies \exists k : b = k \cdot a$$

Dalla precedente deduciamo che b dovrà essere un multiplo di a . Inoltre, otteniamo anche che:

$$\forall a \in \mathbb{Z} : a \setminus 0; \nexists a \in \mathbb{Z} : 0 \setminus a; \forall a \in \mathbb{Z} : a \setminus a$$

La relazione di divisione introdotta ammette la proprietà transitiva:

$$\forall a, b, c \in \mathbb{Z} \wedge a \neq b \neq c : a \setminus b \wedge b \setminus c \implies a \setminus c$$

1.2. Numeri primi

1.2.1. Definizione e proprietà. Un numero a si dice primo quando è divisibile solo per 1 e per sé stesso (ovvero se vale $\forall b \in \mathbb{Z} : b \setminus a \iff b = 1 \vee b = a$); un numero composto è scomponibile in un numero finito di fattori, e questa scomposizione è unica. Determinare la primalità di un numero tuttavia non è cosa facile; introduciamo il seguente teorema:

TEOREMA 1.1. Sia $\pi(n) :=$ “numero di numeri primi fino a n ”, allora vale

$$\pi(n) \sim \frac{n}{\ln(n)}$$

Teorema dei numeri primi

Alcuni algoritmi crittografici usano i numeri primi come “ingredienti” per creare le chiavi: in questi casi il teorema introdotto si dimostra molto utile per determinare la quantità di numeri primi che è possibile ottenere con una data quantità di cifre.

ESEMPIO 1.1. Determinare una stima della quantità di numeri primi che è possibile ottenere a partire da 100 cifre.

✓ Usando il Teorema 1.1 possiamo scrivere la quantità di numeri primi con 100 cifre come

$$\pi(10^{100}) - \pi(10^{99}) = \frac{10^{100}}{100 \ln(10)} - \frac{10^{99}}{99 \ln(10)} \simeq \boxed{10^{97}}$$

□

Se fossimo nel contesto di un algoritmo di cifratura, pur sapendo che la chiave sia un numero primo di 100 cifre, dovremmo analizzare in ogni caso 10^{97} possibili candidati.

Prendiamo ora $a, b \in \mathbb{Z}$ tali che $\text{MCD}(a, b) = 1$: in tal caso diremo che a e b sono *coprimi* o *primi relativi*, indicando la loro relazione come $a \perp b$; da questa relazione segue che due numeri coprimi non hanno fattori in comune.

Escluso il numero 2, tutti i primi sono dispari, e sono divisi in due classi: preso un numero primo p , esso appartiene a una delle seguenti classi:

La funzione $\text{MCD}(a, b)$ indica il massimo comune divisore tra a e b

- $p \equiv 1 \pmod{4}$
- $p \equiv 3 \pmod{4}$

L'operatore \equiv indica la congruenza in modulo: si dice che un numero $a \in \mathbb{Z}$ è *congruente a 1 modulo n* (e si scrive $a \equiv 1 \pmod{n}$) se il resto della divisione di a per n è 1.

Componendo le due classi osserviamo che tutti i numeri primi p possono essere indicati come

$$(1.2.1) \quad p = 6k \pm 1 \implies p \equiv \pm 1 \pmod{6}, k \in \mathbb{Z}$$

Troveremo per esempio $p_{k=1} = 6 \pm 1 = \{5, 7\}$, $p_{k=2} = 12 \pm 1 = \{11, 13\}$, $p_{k=3} = 18 \pm 1 = \{17, 19\}$, ...; osserviamo che tutti i numeri della successione appena definita sono primi, tuttavia non tutti i primi appartengono a questa successione.

1.2.2. Test di primalità con classi. Possiamo usare la successione (1.2.1) per testare la primalità di un numero intero: sia $n > 0$ un numero del quale si vuole conoscere la primalità; allora definiamo un algoritmo iterativo che costruisce la successione (1.2.1) incrementando k , e per ogni primo p_k ottenuto, se non vale $p_k \nmid n$ fino a che $6k + 1 \leq \sqrt{n}$, allora n è primo.

1.3. Algoritmo di Euclide

1.3.1. Definizione della successione. La funzione principale di questo algoritmo, è calcolare il massimo comune divisore di due numeri; presi due interi m e n tali che $m < n$, vogliamo calcolare $\text{MCD}(m, n)$. Tramite questo algoritmo otteniamo il risultato desiderato, senza passare per la scomposizione in fattori primi di m e n ; definendo la seguente successione:

$$(1.3.1) \quad \begin{aligned} \text{MCD}(m, n) &= \text{MCD}(n \bmod m, n) \\ &= \text{MCD}((n \bmod m) \bmod n, n) \\ &= \text{MCD}(0, n) = n \end{aligned}$$

Osserviamo come calcolare questa successione con un esempio.

ESEMPIO 1.2. *Calcolare il massimo comune divisore tra 482 e 1180*

✓Procediamo applicando la definizione (1.3.1): per farlo dovremo scomporre il numero maggiore (n dalla definizione) usando il suo modulo rispetto al minore (m); in pratica prendiamo 1180 e lo dividiamo per 482, conservando il residuo dell'operazione da usare nel termine successivo della successione

$$\text{MCD}(482, 1180) \rightarrow 1180 = 2 \cdot 482 + 216$$

proseguiamo lavorando col resto del passo precedente (216) e col valore precedentemente usato per calcolare il modulo (482)

$$\text{MCD}(216, 482) \rightarrow 482 = 2 \cdot 216 + 50$$

$$\text{MCD}(50, 216) \rightarrow 216 = 4 \cdot 50 + 16$$

$$\text{MCD}(16, 50) \rightarrow 3 \cdot 16 + \mathbf{2} = \mathbf{d}$$

$$\text{MCD}(2, 16) \rightarrow 8 \cdot 2 + \boxed{0}$$

La successione termina quando si ottiene resto zero; il resto chiamato d , ottenuto alla penultima riga (sopra a quella con resto 0, vale 2 in questo caso) è effettivamente il risultato della richiesta: $\text{MCD}(482, 1180) = 2$ □

1.3.2. Algoritmo in forma simbolica. Presi $a, b \in \mathbb{Z}$ tali che $a < b$, otteniamo $\text{MCD}(a, b) = d$ applicando (1.3.1) nel seguente modo:

$$(1.3.2) \quad \begin{aligned} b &= q_1 \cdot a + r_1 \\ a &= q_2 \cdot r_1 + r_2 \\ r_1 &= q_3 \cdot r_2 + r_3 \\ &\vdots \\ r_{k-2} &= q_k \cdot r_{k-1} + r_k \\ r_{k-1} &= q_{k+1} \cdot r_k + 0 \\ \boxed{r_k} &= d \end{aligned}$$

Algoritmo di Euclide

dove q_i è l' i -esimo quoziente e r_i è l' i -esimo resto; dall'algoritmo si può dedurre che, presi $a, b \neq 0$ e sia $d = \text{MCD}(a, b)$, allora è vero che $\exists x, y \in \mathbb{Z} : a \cdot x + b \cdot y = d$. Questo risulta chiaro se immaginiamo che i due interi cercati siano anche negativi; per trovare tali interi è necessario utilizzare una estensione del (1.3.2).

1.3.3. Algoritmo esteso. L'algoritmo di Euclide presentato nella sottosezione precedente può essere esteso, impiegando nel suo svolgimento due successioni $\{x_k\}$ e $\{y_k\}$: esse avranno i primi due valori ben definiti, come

$$(1.3.3) \quad x_0 =, x_1 = 1; y_0 = 1, y_1 = 0$$

Facendo corrispondere ai passi (1.3.2) gli elementi delle successioni $\{x_k\}$ e $\{y_k\}$, possiamo ottenere gli elementi dal secondo in poi come:

$$(1.3.4) \quad \begin{aligned} x_2 &= -q_1 \cdot x_1 + x_0 & y_2 &= -q_1 \cdot y_1 + y_0 \\ x_3 &= -q_2 \cdot x_2 + x_1 & y_3 &= -q_2 \cdot y_2 + y_1 \\ x_4 &= -q_3 \cdot x_3 + x_2 & y_4 &= -q_3 \cdot y_3 + y_2 \\ &\vdots & &\vdots \\ \boxed{x_{k+1}} &= -q_k \cdot x_k + x_{k-1} & \boxed{y_{k+1}} &= -q_k \cdot y_k + y_{k-1} \end{aligned}$$

Algoritmo di Euclide esteso

Osserviamo che gli elementi delle successioni in x e y si ottengono in modo analogo, tuttavia le due successioni sono inizializzate in modo differente (1.3.3). Euclide Esteso ci permette di affermare che

$$\text{MCD}(a, b) = d = a \cdot x_{k+1} + b \cdot y_{k+1}$$

dove gli interi x_{k+1} e y_{k+1} sono ottenuti dalle successioni (1.3.4); normalmente uno dei due è positivo e l'altro è negativo.

1.4. Congruenza in modulo

1.4.1. Definizione e proprietà. Nelle sezioni precedenti abbiamo introdotto il simbolo di congruenza ' \equiv ', che usato nel modo seguente implica che

$$a \equiv b \pmod{n} \implies a \bmod n = b \bmod n \implies a - b = k \cdot n$$

ovvero il fatto che a sia congruente in modulo n a b implica il fatto che a e b siano multipli; possiamo infatti dedurlo osservando l'ultima implicazione, riscritta come

$$a = b + k \cdot n$$

Per la congruenza in modulo valgono alcune proprietà simili a quelle dell'uguaglianza:

- $a \equiv 0 \pmod{n} \iff n \mid a$
- $\forall a \in \mathbb{Z} : a \equiv a \pmod{n}$
- $a \equiv b \pmod{n} \iff b \equiv a \pmod{n}$
- $a \equiv b \pmod{n} \wedge b \equiv c \pmod{n} \implies a \equiv c \pmod{n}$

1.4.2. Insieme dei residui. Fin'ora abbiamo lavorato all'interno dell'insieme dei numeri interi \mathbb{Z} ; introduciamo l'insieme dei residui modulo n , indicato come \mathbb{Z}_n , che contiene l'insieme dei valori da 0 a $n - 1$ e al suo interno sono definite ciclicamente le operazioni di addizione, sottrazione e moltiplicazione; osserviamo un esempio sull'addizione.

ESEMPIO 1.3. *Determinare i risultati delle seguenti operazioni, all'interno dell'insieme \mathbb{Z}_{10} : $4 + 5$, $5 + 5$, $2 - 3$, $3 \cdot 4$.*

✓ Dalla definizione sappiamo che $\mathbb{Z}_{10} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, allora le operazioni richieste valgono:

$$4 + 5 = 9, \quad 5 + 5 = 0, \quad 2 - 3 = 9, \quad 3 \cdot 4 = 2$$

□

La divisione in un insieme dei residui non è definita in modo banale come le altre tre operazioni; introdurremo in seguito questa operazione.

1.4.3. Insieme ridotto dei residui. Dato un insieme dei residui \mathbb{Z}_n , possiamo definire il suo insieme ridotto \mathbb{Z}_n^* , che contiene gli elementi di \mathbb{Z}_n che sono coprimi rispetto a n , ovvero

$$\forall z \in \mathbb{Z}_n^* : z \in \mathbb{Z}_n \wedge z \perp n$$

Procedendo con l'Esempio 1.3, l'insieme ridotto dei residui modulo 10 avrà i seguenti elementi al suo interno:

$$\mathbb{Z}_{10}^* = \{1, 3, 7, 9\}$$

Notiamo che lo zero è sempre escluso dall'insieme ridotto, perché non è coprimo rispetto ad alcun intero; la cardinalità di \mathbb{Z}_n^* è determinata da una funzione di n chiamata *toziente* o *φ di Eulero*; in particolare vale $\varphi(10) = 4$ (vedremo in seguito come calcolare questa funzione).

1.4.4. Equazioni congruenziali. Una equazione congruenziale è una relazione definita su un'insieme di residui; nel seguito vedremo delle proprietà che ci permetteranno di operare con queste relazioni.

PROPOSIZIONE 1.1. *Prendiamo un intero $n \neq 0$ e quattro interi a, b, c, d tali che $a \equiv b \pmod{n}$ e $c \equiv d \pmod{n}$; allora si verifica che*

$$a + c \equiv b + d \pmod{n}, \quad a - c \equiv b - d \pmod{n}, \quad a \cdot c \equiv b \cdot d \pmod{n}$$

Possiamo usare queste proprietà per risolvere la seguente equazione congruenziale.

ESEMPIO 1.4. *Risolvere rispetto a x l'equazione $x + 7 \equiv 3 \pmod{17}$.*

✓ Dato che 7 è congruente a 3 in modulo 17, possiamo sfruttare la seconda proprietà, per cui

$$\begin{aligned} x + 7 - 7 &\equiv 3 - 7 \pmod{17} \\ x &\equiv -4 \pmod{17} \end{aligned}$$

Osservando che $17 - 4 = 13$, otteniamo infine (è equivalente a scrivere la congruenza con -4)

$$x \equiv 13 \pmod{17}$$

□

Ora introduciamo il concetto di divisione nell'insieme dei residui, con una seconda proposizione.

PROPOSIZIONE 1.2. *Prendiamo un intero $n \neq 0$ e tre interi a, b, c con $a \perp n$ e vale $a \cdot b \equiv a \cdot c \pmod{n}$; allora possiamo dire che $a \cdot b \equiv a \cdot c \pmod{n} \implies b \equiv c \pmod{n}$, tramite la moltiplicazione da ambo i lati per l'inverso a^{-1}*

Possiamo risolvere una forma di equazione congruenziale più elaborata.

ESEMPIO 1.5. *Risolvere rispetto a x l'equazione $2x + 7 \equiv 3 \pmod{17}$.*

✓ Come nel caso precedente, possiamo sottrarre 7 da entrambi i lati, dato che $7 \equiv 3 \pmod{17}$, ottenendo

$$2x \equiv -4 \pmod{17}$$

Ora sfruttando il fatto che $2 \perp 17$ la precedente diventa

$$x \equiv -2 \pmod{17} = x \equiv 15 \pmod{17}$$

□

ESEMPIO 1.6. *Risolvere rispetto a x l'equazione $5x + 6 \equiv 13 \pmod{11}$.*

✓ Osservando che $6 \equiv 13 \pmod{11}$, applichiamo la proprietà della divisione e otteniamo

$$5x \equiv 7 \pmod{11}$$

Se ora usiamo la proprietà della divisione (vale $5 \perp 11$) dovremo scrivere

$$x \equiv \frac{7}{5} \pmod{11}$$

dove la frazione $\frac{7}{5}$ in realtà non esiste nell'insieme \mathbb{Z}_{11} ; tuttavia sappiamo che $5x$ è congruente modulo 11 a 7, ma anche a (per la ciclicità dell'insieme dei residui) $7 + 11, 7 + 22, \dots, 7 + k \cdot 11$; il primo numero che sia un multiplo di 5 si ha per 3; abbiamo ottenuto che $[7 = 40] \ni \mathbb{Z}_{11}$, quindi possiamo scrivere

$$\begin{aligned} 5x &\equiv 40 \pmod{11} \\ x &\equiv 8 \pmod{11} \end{aligned}$$

Possiamo in un certo senso affermare che 8 si comporta come $\frac{7}{5}$ in \mathbb{Z}_{11} .

Esiste una seconda strada per risolvere questo esercizio; sapendo che 5 e 11 sono primi relativi, usiamo il prodotto invece della divisione:

$$5x \cdot 5^{-1} \equiv 7 \cdot 5^{-1} \pmod{11}$$

L'inverso di un numero n è quel numero m tale che $n \cdot m = 1$; dunque cerchiamo l'elemento di \mathbb{Z}_{11} che moltiplicato per 5 risulta 1; troviamo $m \cdot 5 = 1|_{\mathbb{Z}_{11}} \implies m = 9$, da cui segue che

$$x \equiv 7 \cdot 9 \pmod{11}$$

e dato che $7 \cdot 9 = 63 = 5 \cdot 11 + 8$ la precedente si scrive come

$$x \equiv 8 \pmod{11}$$

Abbiamo ottenuto il medesimo risultato a cui siamo arrivati attraverso il primo procedimento. □

OSSERVAZIONE 1.1. Presi $a \in \mathbb{Z}_n$ e $b \notin \mathbb{Z}_n^*$, non è definita la divisione $a \div b$ (deve infatti valere $b \perp n \implies b \in \mathbb{Z}_n^*$).

OSSERVAZIONE 1.2. Se prendiamo l'equazione $a \cdot x \equiv b \pmod{n}$, essa ammetterà soluzione se vale $a \perp n$; in tal caso $\exists a^{-1} \in \mathbb{Z}_n^*$ e la soluzione sarà $x \equiv b \cdot a^{-1} \pmod{n}$.

Cosa possiamo concludere nel caso in cui, data l'equazione $E : a \cdot x \equiv b \pmod{n}$, non sia vero che $a \perp n$, cioè nel caso in cui $\text{MCD}(a, n) = d > 1$? In tal caso, l'equazione può non ammettere soluzione o ammetterne d .

Se $d \nmid b$ allora dividiamo per d tutte le quantità costanti, ottenendo

$$\overline{E} : \frac{a}{d}x \equiv \frac{b}{d} \pmod{\frac{n}{d}}$$

questa equazione ha ora una soluzione, perché $\text{MCD}(a, n) = d \implies \text{MCD}\left(\frac{a}{d}, \frac{n}{d}\right) = \frac{d}{d} = 1$ e ricadiamo nel caso dell'osservazione precedente.

Otteniamo la soluzione dell'equazione \overline{E} e la chiamiamo x_0 , la quale sarà in modulo n/d ($x_0 \in \mathbb{Z}_{n/d}$); dato che l'equazione di partenza E ha soluzioni in \mathbb{Z}_n , esse saranno i termini della successione

$$\{x\} = x_0, x_0 + \frac{n}{d}, x_0 + 2\frac{n}{d}, \dots, x_0 + (d-1)\frac{n}{d}$$

Osserviamo l'esempio di un'equazione con queste caratteristiche.

ESEMPIO 1.7. *Risolvere rispetto a x l'equazione $12x \equiv 21 \pmod{39}$.*

✓ Osserviamo subito che $\text{MCD}(12, 39) = 3$, dunque l'equazione avrà 0 o 3 soluzioni; dividiamo le costanti per 3 e otteniamo

$$4x \equiv 7 \pmod{13}$$

da cui otteniamo $x \equiv \frac{7}{4} \pmod{13}$ e trovando $4 \setminus (7 + 1 \cdot 13) = 20$ la precedente equazione fornisce una soluzione $x_0 \equiv 5 \pmod{n}$; adesso usiamo la successione delle soluzioni $\{x\}$ per ottenere tutte le soluzioni dell'equazione di partenza:

$$x = \left\{ x_0 = \boxed{5}, x_0 + \frac{39}{3} = \boxed{18}, x_0 + \frac{2 \cdot 39}{3} = \boxed{31} \right\}$$

Possiamo immaginare le radici di E come dei punti su una circonferenza, a distanza d/n da x_0 . \square

Posto che valga $a \perp n$ (ovvero $\text{MCD}(a, n) = 1$), come possiamo calcolare l'inverso a^{-1} ? Potremmo tentare tutti i numeri da 1 a $n-1$ conducendo un'analisi esaustiva, tuttavia per n molto grande questo non è pratico; usiamo allora l'algoritmo di Euclide esteso (1.3.4): esso ci garantisce che

$$\text{MCD}(a, n) = 1 \implies \exists s, t \in \mathbb{Z}_n : a \cdot s + n \cdot t = 1$$

segue dalla precedente relazione che $a \cdot s = 1 - n \cdot t$, allora abbiamo $a \cdot s \equiv 1 \pmod{n}$ e risolvendo l'equazione si ottiene

$$s \equiv a^{-1} \pmod{n}$$

ovvero il numero s è proprio l'elemento finale x_{k+1} della sequenza di x dell'algoritmo; esso risulta essere anche il valore cercato dell'inverso a^{-1} .

1.5. Teorema cinese del resto

1.5.1. Applicazione ed enunciato. Mostriamo direttamente l'applicazione del teorema a un caso specifico: prendiamo $x \equiv 25 \pmod{42}$; possiamo esprimere $x = 25 + 6 \cdot (7 \cdot k) \Leftrightarrow 25 + 7 \cdot (6 \cdot k)$, da cui ricaviamo

- per $x = 25 + 6 \cdot (7 \cdot k)$: $25 \bmod 6 = 1 \implies x \equiv 1 \pmod{6}$
- per $x = 25 + 7 \cdot (6 \cdot k)$: $25 \bmod 7 = 3 \implies x \equiv 3 \pmod{7}$

Dalle due congruenze più semplici ottenute possiamo scrivere il sistema

$$x \equiv 25 \pmod{42} \implies \begin{cases} x \equiv 1 \pmod{6} \\ x \equiv 3 \pmod{7} \end{cases}$$

Il teorema cinese del resto afferma che:

TEOREMA 1.2. *Dati due interi n, m che siano primi relativi (deve valere $n \perp m$), e presi due interi a, b , allora il sistema delle congruenze*

Teorema cinese del resto

$$\begin{cases} x \equiv a \pmod{n} \\ x \equiv b \pmod{m} \end{cases}$$

è equivalente alla singola congruenza

$$x \equiv c \pmod{n \cdot m}$$

Il teorema afferma che, quanto introdotto all'inizio della sezione, può valere nel senso opposto in alcune condizioni specifiche. Osserviamo l'applicazione del teorema in un esempio.

ESEMPIO 1.8. *Sia dato il seguente insieme di congruenze:*

$$\begin{cases} x \equiv 3 \pmod{7} \\ x \equiv 5 \pmod{15} \end{cases}$$

Scrivere una forma equivalente, con una singola congruenza.

✓ Dato che $7 \perp 15$, per il Teorema 1.2 possiamo affermare che esisterà una singola congruenza equivalente alle due della consegna; essa sarà scritta nella forma $x \equiv c \pmod{105}$. Per ottenere c possiamo provare i numeri multipli di 5, i quali in modulo 7 diano 3 come risultato; si ottiene facilmente $c = 80$ (possiamo scomporlo come $80 = 11 \cdot 7 + 3$).

Nel caso di numeri molto grandi, non è possibile scegliere di procedere per tentativi, ed è necessario usare gli strumenti della teoria dei numeri: se sappiamo che $x \equiv a \pmod{n}$ e anche $x \equiv b \pmod{m}$, allora possiamo scrivere

$$x = b + \bar{k} \cdot m \equiv a \pmod{n}$$

risolvendo questa relazione si ottiene $a - b \equiv \bar{k} \cdot m \pmod{n}$ da cui, rispetto a \bar{k} otteniamo

$$\bar{k} \equiv (a - b) \cdot m^{-1} \pmod{n}$$

Il valore \bar{k} corrisponde al c del Teorema 1.2, esso infatti è congruente sia ad a in modulo n , sia a b in modulo m . \square

1.5.2. Estensione. Il Teorema 1.2 ammette un'estensione a un caso generale, con N congruenze.

COROLLARIO 1.1. *Prendiamo N numeri interi, indicati come $m_i : i \in [1, N]$, tali che a coppie siano tutti coprimi ($\forall i, j \in [1, N] \wedge i \neq j : m_i \perp m_j$). Se abbiamo il seguente sistema di congruenze*

Teorema cinese del resto esteso

$$\begin{cases} x \equiv a_1 \pmod{m_1} \\ x \equiv a_2 \pmod{m_2} \\ \vdots \\ x \equiv a_N \pmod{m_N} \end{cases}$$

è equivalente alla singola congruenza

$$x \equiv C \left(\pmod{\prod_{i=1}^N m_i} \right)$$

Tale congruenza si costruisce a partire dalle seguenti serie:

$$M = \prod_{i=1}^N m_i; \quad Z_i = \frac{M}{m_i}; \quad Y_i = Z_i^{-1} \bmod m_i$$

Otteniamo infine la seguente soluzione, equivalente a una singola congruenza:

$$(1.5.1) \quad X = \sum_{i=1}^N a_i Y_i Z_i \bmod M$$

1.6. Square & multiply

Tramite l'algoritmo chiamato square and multiply, è possibile calcolare il modulo di un numero che abbia molte cifre; mostriamo un esempio per illustrare l'idea dietro a questo algoritmo, usando numeri "piccoli".

ESEMPIO 1.9. *Si calcoli il risultato dell'operazione $7^{11} \bmod 26$.*

✓Eseguiamo i seguenti passi per cercare il valore desiderato:

LSB indica il least significant bit (bit meno significativo) e si riferisce al primo bit da destra

- (1) Esprimiamo 11 (l'esponente) in forma binaria: $11_{10} = 1011_2 = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$;
- (2) Sostituire 11 con la sua rappresentazione binaria: $7^{11} = 7^{(8+2+1)} = 7^8 \cdot 7^2 \cdot 7$;
- (3) Scriviamo i bit di 11 in colonna, al contrario (a partire dal LSB): $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$;
- (4) Scriviamo accanto a ciascun bit la potenza di 7 corrispondente, ottenuta dalla scomposizione al punto (1);
- (5) Scriviamo accanto alle potenze 7^i il risultato dell'operazione $7^i \bmod 26$;
- (6) Componiamo il risultato prendendo il prodotto dei valori scritti al punto (5) in corrispondenza di un 1, scritto al punto (3)

Otterremo infine:

$$\begin{array}{ccc} 1 & 7^1 & \boxed{7} \\ 1 & 7^2 & \boxed{23} \\ 0 & 7^4 & 9 \\ 1 & 7^8 & \boxed{3} \end{array} \implies (7 \cdot 23 \cdot 3) \bmod 26 = 15$$

Il vantaggio di questo metodo è il fatto che si basa solo sull'operazione di elevamento al quadrato di numeri piccoli (relativamente al modulo, nell'esercizio siamo in \mathbb{Z}_{26}). In totale, saranno necessari (per questo caso dell'esercizio) $2 \cdot \log_2(11) \simeq 4$. \square

1.7. Teorema piccolo di Fermat

Teorema piccolo di Fermat TEOREMA 1.3. *Sia p un intero primo, e a un intero tale che p non divida a , allora è vero che*

$$(1.7.1) \quad a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

Non vale l'implicazione inversa, infatti prendendo a ed n due interi qualsiasi, e osservando che $a^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$, non possiamo dedurre che n sia primo.

Piuttosto possiamo usare il Teorema 1.3 per provare che un numero sia composto (non primo); tuttavia i numeri composti che danno resto 1 non ostante non siano primi sono pochi, e sono definiti *pseudo-primi*. Questi numeri sono sempre più rarefatti all'aumentare dell'ordine di grandezza.

Non ostante la scelta di una base a differente possa "smascherare" un numero pseudo-primo, esiste una categoria di interi chiamati *pseudo-primi assoluti*, i quali forniscono resto 1 con qualunque base scelta nel test del teorema piccolo di Fermat.

OSSERVAZIONE 1.3. Abbiamo concluso dal Teorema 1.3 che, se non è vero $p \nmid a$, allora vale $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$; possiamo scrivere questa congruenza in modo equivalente come $a \cdot a^{p-2} \equiv 1 \pmod{p}$, che può essere risolta con la regola della divisione nel modo seguente:

$$(1.7.2) \quad a^{p-2} \equiv a^{-1} \pmod{p}$$

Abbiamo appena ottenuto un nuovo metodo per calcolare l'inverso di un intero a .

Poniamoci nel caso generale, in cui abbiamo un intero qualunque a e un intero composto n : la condizione del teorema diventa che $a \perp n$; in queste condizioni possiamo enunciare il seguente Teorema 1.4.

TEOREMA 1.4. *Sia a un intero qualunque e n un intero composto, tali che $a \perp n$, allora è vero che*

$$(1.7.3) \quad a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$$

**Teorema di
Eulero**

La funzione *toziente* $\varphi(p)$ con p numero primo, è il numero di primi relativi rispetto a p , in questo caso $p - 1$ numeri, tutti i predecessori di p , il quale essendo primo ha come fattore comune con essi solo 1; vale dunque $\varphi(p) = p - 1$ per p numero primo. In generale il toziente di un intero n qualunque si può calcolare in uno dei seguenti modi:

$$\begin{aligned} \bullet \quad \varphi(n) &= n \cdot \prod_{i \in [1, n-1], p_i \nmid n} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right) \\ \bullet \quad n &= \prod_{i=1}^m p_i^{r_i} \implies \varphi(n) = \prod_{i=1}^m (p_i^{r_i} - p_i^{r_i-1}) \end{aligned}$$

Toziente

Vediamo un esempio in cui calcoliamo il toziente di due numeri adoperando entrambi i procedimenti:

ESEMPIO 1.10. *Calcolare il toziente di 1000.*

✓ Adoperando il primo metodo, scriviamo la scomposizione di 1000 nei suoi fattori primi: $1000 = 2^3 \cdot 5^3$; scriviamo dunque la produttoria usando i due fattori $p_i = \{2, 5\}$ senza esponente

$$1000 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{5}\right) = \boxed{400} = \varphi(1000)$$

Se adoperiamo il secondo metodo, scriviamo direttamente la produttoria a partire dai fattori primi 2^3 e 5^3 :

$$(2^3 - 2^2) \cdot (5^3 - 5^2) = \boxed{400} = \varphi(1000)$$

Abbiamo ottenuto lo stesso toziente, mostrando che entrambi i procedimenti si equivalgono. \square

OSSERVAZIONE 1.4. Se vogliamo calcolare l'inverso di un intero a modulo n non primo, posto che $a \perp n$ possiamo scrivere la congruenza

$$(1.7.4) \quad a^{-1} \equiv a^{\varphi(n)-1} \pmod{n}$$

Questa relazione ci permette di calcolare un inverso utilizzando il modulo di un elevamento a potenza (evitando la strada di Euclide esteso (1.3.4)), per esempio tramite square and multiply eseguito su un calcolatore.

Mettendo assieme quanto illustrato in questa sezione, possiamo rispondere alla richiesta mostrata nel seguente esempio.

ESEMPIO 1.11. *Calcolare le ultime tre cifre di 7^{803} .*

✓Le ultime tre cifre di un numero possono essere ottenute usando il resto della sua divisione per 10^3 ; allora dobbiamo trovare il risultato di $7^{803} \bmod 1000$.

Per il teorema di Eulero (1.7.3) sappiamo che $7^{\varphi(1000)} \equiv 1 \pmod{1000}$ e dal precedente esempio abbiamo già calcolato $\varphi(1000) = 400$, per cui possiamo scomporre 7^{803} nel modo seguente:

$$(7^{400} \cdot 7^{400} \cdot 7^3) \bmod 1000 = (1 \cdot 1 \cdot 343) \bmod 1000 = \boxed{343}$$

□

1.8. Principio fondamentale

Se abbiamo gli interi a, b, n, x, y e $n > 0$, tali che $a \perp n$, allora se $x \equiv y \pmod{\varphi(n)}$ vale

$$(1.8.1) \quad a^x \equiv a^y \pmod{n}$$

tuttavia non vale l'implicazione inversa.

Concludiamo che, in una congruenza modulo n , in presenza di elevamenti a potenza gli esponenti della stessa base lavorano in modulo di $\varphi(n)$.

Questo principio permette di risolvere rapidamente la richiesta dell'Esercizio 1.11: dato che $803 \equiv 3 \pmod{\varphi(1000) = 400}$ otteniamo direttamente $7^{803} \equiv 7^3 \pmod{1000}$; abbiamo usato (1.8.1) in cui $x = 803$ e $y = 3$.

1.9. Radici in aritmetica modulare

1.9.1. Radici primitive. Introduciamo il concetto di gruppo algebrico:

**Gruppo
algebrico**

Chiamiamo gruppo una struttura formata da un insieme e da un'operazione binaria definita su di esso, la quale soddisfi gli assiomi di associatività, esistenza dell'elemento neutro ed esistenza dell'elemento inverso

Ad esempio, se prendiamo l'insieme dei numeri interi \mathbb{Z} e l'operazione di somma $+$, possiamo formare il gruppo $(\mathbb{Z}, +)$ poiché la somma è associativa, l'elemento neutro è lo zero e l'inverso di qualunque elemento è sempre definito; anche prendendo \mathbb{Z}_p^* (insieme dei residui interi modulo p , escluso lo 0) e l'operazione di prodotto, otteniamo di nuovo un gruppo (\mathbb{Z}_p^*, \cdot) . Non si ottiene un gruppo rispetto al prodotto per \mathbb{Z}_p (residui modulo p , da 0 a $p-1$), poiché lo 0 non ha un inverso definito.

Se prendiamo un elemento $a \in \mathbb{Z}_p^*$ allora vale $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ per il Teorema 1.3; chiamiamo inoltre ordine dell'elemento a (e lo indichiamo tramite $\text{ORD}(a)$) l'intero $n > 0$ più piccolo tale che

$$(1.9.1) \quad a^n \equiv 1 \pmod{p}$$

Il teorema piccolo di Fermat (1.7.1) ci assicura che vale sempre $n \leq p-1$, ma non è detto che sia proprio $n = p-1$. Chiamiamo quindi α l'elemento primitivo $a \in \mathbb{Z}_p^*$ se e solo se l'ordine di a è 1, ovvero non esiste nessun altro intero n per cui $a^n \equiv 1 \pmod{p}$; in altri termini vale

$$(1.9.2) \quad a^n \equiv 1 \pmod{p} \iff n = 1$$

Se l'ordine di a fosse proprio $p-1$, allora preso α^i l'elemento primitivo, presi tutti gli interi $i \in [1, p-1]$, otteniamo dalla successione degli α^i tutti e soli gli elementi dell'insieme \mathbb{Z}_p^* (in ordine anche differente); chiameremo l'elemento α la *radice primitiva*.

Chiamiamo α una radice primitiva per p se vale (1.9.2) e inoltre l'ordine di α è pari a $n = p - 1$.

Radice primitiva

ESEMPIO 1.12. Trovare se $\alpha = 3$ sia una radice primitiva di $p = 7$.

✓ Per trovare se α sia effettivamente una radice primitiva di p , calcoliamo gli elementi:

$$\{\forall i \in [0, p - 1] : \beta \equiv \alpha^i \pmod{p}\}$$

Otteniamo quindi:

$$\begin{aligned} 3^0 &\equiv 1 \pmod{7} \\ 3^1 &\equiv 3 \pmod{7} \\ 3^2 &\equiv 2 \pmod{7} \\ 3^3 &\equiv 6 \pmod{7} \\ 3^4 &\equiv 4 \pmod{7} \\ 3^5 &\equiv 5 \pmod{7} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Abbiamo riottenuto tutti e soli gli elementi da 1 a $p - 1 = 6$ (i membri di \mathbb{Z}_7^*), con periodo $p - 1 = 6$. Si verifica dunque la condizione che rende un elemento primitivo α una radice per p ; la radice primitiva è anche detta elemento generatore: infatti, tramite essa è possibile ottenere tutti i residui in modulo p di un certo insieme \mathbb{Z}_p^* . \square

ESEMPIO 1.13. Trovare se $\alpha = 2$ sia una radice primitiva di $p = 7$.

✓ Calcolando di nuovo gli α^i con $i \in [0, p - 1]$ otteniamo

$$\begin{aligned} 2^0 &\equiv 1 \pmod{7} \\ 2^1 &\equiv 2 \pmod{7} \\ 2^2 &\equiv 4 \pmod{7} \\ 2^3 &\equiv 1 \pmod{7} \\ &\vdots \end{aligned}$$

In questo caso abbiamo ottenuto periodo 3; inoltre l'ordine di α è $n = 3 \neq p - 1 = 6$, quindi $\alpha = 2$ non è radice primitiva di $p = 7$. \square

OSSERVAZIONE 1.5. Se prendiamo l'elemento primitivo $a \in \mathbb{Z}_p^*$, esso avrà al massimo ordine $p - 1$; tuttavia potrà presentare anche ordini pari ai sottomultipli di $p - 1$, ma non ordini differenti da essi.

OSSERVAZIONE 1.6. Se α è un elemento primitivo di \mathbb{Z}_p^* e vale $\beta \equiv \alpha^i \pmod{p}$ con $1 \leq i \leq p - 1$, questi β sono tutti e soli gli elementi di \mathbb{Z}_p^* . Se ora prendiamo un elemento primitivo di \mathbb{Z}_p^* espresso come β (tramite la precedente congruenza), il suo ordine sarà dipendente dall'esponente i usato per ottenerlo a partire da α , e dovrà valere

$$(1.9.3) \quad \text{ORD}(\beta) = \frac{p - 1}{\text{MCD}(p - 1, i)}$$

dove i è l'esponente a cui elevare α per ottenere β . Questo si verifica perché i β sono potenze di α , ed essendo $\text{ORD}(\alpha) = p - 1$ (α è radice primitiva) necessariamente l'ordine di β sarà un sottomultiplo di $p - 1$, determinato da (1.9.3)

Gli elementi primitivi di \mathbb{Z}_p^* sono in numero $\varphi(p - 1)$; infatti saranno tutti gli elementi di \mathbb{Z}_p^* coprimi rispetto a $p - 1$, per cui si verifica la condizione (1.9.3). Notiamo infatti che β è una radice primitiva di p (vale $\text{ORD}(\beta) = p - 1$) quando si $\text{hamCD}(p - 1, i) = 1$; concludiamo che il numero di elementi primitivi β di un insieme \mathbb{Z}_p^* è il numero di elementi coprimi rispetto a $p - 1$ (valore ottenuto dalla funzione toziente di $p - 1$).

1.9.2. Test di primitività. Prendiamo un $\alpha \in \mathbb{Z}_p^*$ con p qualunque, e cerchiamo se α sia primitivo o meno rispetto a p ; usiamo il seguente test di primitività: scomporre $p-1$ nei suoi fattori primi, in modo da avere una produttoria di quozienti elevati a un certo esponente $p-1 = \prod_i q_i^{r_i}$; diremo che α è primitivo rispetto a p se e solo se vale

Test primitività (1.9.4)
$$\forall i : \alpha^{(p-1)/q_i} \not\equiv 1 \pmod{p}$$

Si noti che p è primo (per definizione), di conseguenza $p-1$ è sempre pari.

ESEMPIO 1.14. *Ottenere se $\alpha = 2$ sia radice primitiva per $p = 19$.*

✓ Usando il test (1.9.4), scomponiamo $19-1 = 18$ nei suoi fattori primi:

$$18 = 2 \cdot 3^2$$

Ora testiamo la congruenza per tutti i fattori primi (presi senza esponente):

$$\begin{aligned} 2^{18/3} &= 2^6 = 64 \equiv 7 \pmod{19} \\ 2^{18/2} &= 2^9 = 512 \equiv 18 \pmod{19} \end{aligned}$$

Per nessun fattore primo si ha congruenza a 1 modulo 19, dunque $\alpha = 2$ è davvero una radice primitiva per $p = 19$.

Osserviamo infine che gli elementi primitivi di \mathbb{Z}_{19} sono $\varphi(18) = 6$, distribuiti all'interno dell'insieme in modo non predicibile. \square

1.9.3. Radici quadrate. Poniamoci nel caso di radici quadrate in modulo a un intero p primo; inoltre, consideriamo per tale intero solamente la metà dei numeri primi (si ricordi la separazione dei primi in classi di congruenza (1.2.1)):

(1.9.5)
$$p \equiv 3 \pmod{4}$$

Risolviamo, sotto queste condizioni, l'equazione $x^2 \equiv a \pmod{p}$, ovvero cerchiamo $\sqrt{a} \in \mathbb{Z}_p$; si dimostra che, se esiste \sqrt{a} , allora vale:

Radice quadrata (1.9.6)
$$\pm a^{(p+1)/4} = \sqrt{a} \vee \pm a^{(p+1)/4} = \sqrt{-a}$$

dove abbiamo l'unione di due condizioni che sono esclusive (se non esiste la radice di a allora esisterà quella di $-a$, e vale quanto indicato in (1.9.6), e vice versa).

OSSERVAZIONE 1.7. Se avessimo $p \not\equiv 3 \pmod{4}$ ma $p \equiv 1 \pmod{4}$ (p appartenente all'altra classe di congruenze), allora nel caso in cui non esista una delle due radici (\sqrt{a} o $\sqrt{-a}$) non esiste nemmeno l'altra.

ESEMPIO 1.15. *Si calcoli, se esiste, la radice di 5 in modulo 11.*

✓ Cercare $\sqrt{5} \pmod{11}$ equivale a risolvere l'equazione

$$x^2 \equiv 5 \pmod{11}$$

Dato che per 11 vale (1.9.5), possiamo usare la formula (1.9.6):

$$\pm 5^{(11+1)/4} = \pm 125 \pmod{11} = \pm 4$$

Per determinare se in modulo 11 i numeri ± 4 siano la radice di 5 o di -5 , effettuiamo l'elevamento a potenza della radice cercata:

$$4^2 \pmod{11} = 5, \quad -4^2 = 7^2 \pmod{11} = 5$$

Abbiamo ottenuto che la radice quadrata di 5 modulo 11 è ± 4 . \square

ESEMPIO 1.16. *Si calcoli, se esiste, la radice di 2 in modulo 11.*

✓Come prima, impostiamo così l'equazione da risolvere:

$$x^2 \equiv 2 \pmod{11}$$

Possiamo usare (1.9.6), dato che per 2 vale (1.9.5):

$$\pm 2^{(11+1)/4} = \pm 8 \pmod{11} = \pm 8$$

Infine effettuiamo l'elevamento a potenza della radice per ottenere il segno:

$$8^2 \pmod{11} = 9 \pmod{11} = -2$$

Abbiamo ottenuto che in modulo 11 non esiste la radice quadrata di 2; la radice di -2 però esiste, e vale ± 8 . \square

1.9.4. Test per segno della radice. Prendiamo un primo p dispari, un $a \neq 0$ in modulo p , allora

$$(1.9.7) \quad a^{(p-1)/2} \equiv \pm 1 \pmod{p}$$

Distinguiamo i due casi:

- se il segno in (1.9.7) è $+$, allora esiste \sqrt{a} in modulo p ;
- se il segno in (1.9.7) è $-$, allora esiste $\sqrt{-a}$ in modulo p .

Ricordando l'Osservazione 1.7, si nota che il test appena mostrato permette di affermare se la radice non sia definita, nel caso in cui $p \equiv 1 \pmod{4}$ e in cui il segno in (1.9.7) sia $-$.

1.9.5. Radice quadrata modulo composto. Esaminiamo il problema $x^2 \equiv a \pmod{n}$ dove n sia un numero composto; dato che n sarà scomponibile in fattori primi, possiamo scomporre la congruenza esaminata in due congruenze più semplici in modulo p e q , sapendo che $n = p \cdot q$. Le due soluzioni ottenute si combinano infine tramite il Teorema 1.2.

Questo problema ha la sua difficoltà nella fattorizzazione di n , al punto che la complessità computazionale del calcolo della radice modulo n equivale a quella della sua scomposizione in fattori primi.

ESEMPIO 1.17. *Si calcoli, se esiste, la radice di 71 in modulo 77.*

✓Notiamo subito che $77 = 7 \cdot 11$; per il Teorema 1.2 possiamo scomporre la congruenza in esame nelle due più semplici:

$$x^2 \equiv 71 \pmod{77} \implies \begin{cases} x^2 \equiv 1 \pmod{7} \\ x^2 \equiv 5 \pmod{11} \end{cases}$$

Nella precedente abbiamo già sostituito $71 \pmod{7} = 1$ e $71 \pmod{11} = 5$; possiamo risolvere le due congruenze in modo indipendente:

- (1) la radice quadrata di 1 è comunque ± 1 , modulo 7;
- (2) la radice quadrata di 5 modulo 11 si può ottenere da (1.9.6) e risulta $x \equiv \pm 5^{(11+1)/4} \pmod{11} \implies x \equiv \pm 4 \pmod{11}$.

Abbiamo ottenuto due radici da ciascuna congruenza, che possono essere combinate in $2^2 = 4$ modi possibili, per costruire la soluzione tramite il Teorema 1.2.

- $\{x \equiv 1 \pmod{7}; x \equiv 4 \pmod{11}\}$

Risolviamo la combinazione delle due congruenze analizzate:

$$\begin{aligned} x &= 1 + k \cdot 7 \equiv 4 \pmod{11} \\ 7 \cdot k &\equiv 3 \pmod{11} \\ k &\equiv 3 \cdot 7^{-1} \pmod{11} \end{aligned}$$

Per trovare l'inverso utilizziamo (1.7.2), da cui $7^{-1} \bmod 11 = 7^9 \bmod 11 = 8$, da cui segue che $k = 24 \bmod 11 = 2$; sostituendo nella prima si ottiene

$$x = 14 + 1 \equiv 4 \pmod{11} \implies \boxed{x \equiv 15 \pmod{77}}$$

dal Teorema 1.2.

$$\bullet \{x \equiv 1 \pmod{7}; x \equiv -4 \pmod{11}\}$$

$$x \equiv -15 \pmod{77}$$

$$\bullet \{x \equiv -1 \pmod{7}; x \equiv 4 \pmod{11}\}$$

$$x \equiv 29 \pmod{77}$$

$$\bullet \{x \equiv -1 \pmod{7}; x \equiv -4 \pmod{11}\}$$

$$x \equiv -29 \pmod{77}$$

Non è detto che le radici siano sempre 4, in questo caso esistevano tutte le radici per ciascuna congruenza in cui è stata scomposta quella iniziale. \square

1.9.6. Residui quadratici. Abbiamo chiamato gli elementi di \mathbb{Z}_p^* residui modulo p ; i residui quadratici sono residui che corrispondono anche al quadrato di qualche elemento dello stesso insieme \mathbb{Z}_p^* .

Chiamiamo $a_q \in \mathbb{Z}_p^*$ i residui quadratici per cui valga

$$a_q \equiv (\pm b)^2 \pmod{p}$$

con $b \in \mathbb{Z}_p^*$ un elemento dell'insieme a cui appartiene anche a_q .

Osserviamo che $p \in \{1, 2, \dots, \frac{p-1}{2}\}$, poiché i residui a partire da $\frac{p-1}{2} + 1$ sono i residui negativi dei precedenti dal minore al maggiore ($-1 = p - 1$).

ESEMPIO 1.18. *Trovare i residui quadratici dell'insieme \mathbb{Z}_{11}^* .*

✓ Otteniamo subito che nell'insieme analizzato ci sono $\frac{p-1}{2} = \frac{11-1}{2} = 5$ residui quadratici; possiamo ottenerli tramite il test (1.9.7):

$$a^{(p-1)/2} \not\equiv +1 \pmod{p} \implies a \text{ **non** è residuo quadratico!}$$

Effettuiamo questo test per ciascun elemento di \mathbb{Z}_{11}^* :

$$\begin{array}{ll} 1^5 \equiv \boxed{1} \pmod{11} & 6^5 \equiv -1 \pmod{11} \\ 2^5 \equiv -1 \pmod{11} & 7^5 \equiv -1 \pmod{11} \\ 3^5 \equiv \boxed{1} \pmod{11} & 8^5 \equiv -1 \pmod{11} \\ 4^5 \equiv \boxed{1} \pmod{11} & 9^5 \equiv \boxed{1} \pmod{11} \\ 5^5 \equiv \boxed{1} \pmod{11} & 10^5 \equiv -1 \pmod{11} \end{array}$$

Raccogliendo i risultati dei test con la congruenza a $+1$, possiamo scrivere l'insieme dei residui quadratici di \mathbb{Z}_{11}^* :

$$a_q = \{1, 3, 4, 5, 9\}$$

\square

OSSERVAZIONE 1.8. Un modo più rapido per ottenere i residui quadratici consiste nel sfruttare il fatto che essi saranno i quadrati dei primi $\frac{p-1}{2}$ elementi dell'insieme dei residui:

$$a_q = \left\{ 1^2, \dots, \left(\frac{p-1}{2} \right)^2 \right\}$$

Riprendendo la consegna dell'Esempio 1.18, i residui quadratici di \mathbb{Z}_{11}^* si ottengono come:

$$\begin{array}{llll} 1^2 \bmod 11 = 1 & 3^2 \bmod 11 = 9 & 5^2 \bmod 11 = 3 & \\ 2^2 \bmod 11 = 4 & 4^2 \bmod 11 = 5 & & \end{array} \implies a_q = \{1, 4, 9, 5, 3\}$$

Otteniamo gli stessi residui quadratici trovati con i test, in ordine diverso.

CAPITOLO 2

Cifrari elementari

2.1. Introduzione

Facendo riferimento alla figura A.0.1, possiamo individuare la caratteristica del sistema di cifratura modellizzato: esso usa la stessa chiave k per la cifratura e la decifratura del messaggio; ammettiamo che essa sia consegnata al destinatario tramite un canale sicuro.

Il testo in chiaro è definito all'interno di tutti i possibili messaggi in chiaro componibili con l'alfabeto a disposizione ($p \in \mathcal{P}$), il messaggio cifrato è anch'esso definito all'interno di un insieme di ogni possibile messaggio cifrato componibile ($c \in \mathcal{C}$), infine la chiave appartiene all'insieme di tutte le possibili chiavi componibili ($k \in \mathcal{K}$).

Ogni chiave, all'interno dello spazio delle chiavi, è definita una regola di cifratura ($\forall k \in \mathcal{K} : E_k \in \mathcal{E}$) e anche una regola di decifratura ($\forall k \in \mathcal{K} : D_k \in \mathcal{D}$), entrambe dipendenti da k .

Deve valere che la cifratura sia invertibile con la decifratura, ovvero $\forall k \in \mathcal{K}, p \in \mathcal{P}, c \in \mathcal{C} : c = E_k(p) \wedge p = D_k(c)$; in caso contrario la decifratura non sarebbe più possibile (collisioni durante la cifratura di messaggi differenti).

2.2. Cifrari a scorrimento e sostituzione

2.2.1. Cifrario di Cesare. Il cifrario di Cesare utilizza uno scorrimento dell'alfabeto, la chiave stessa è un simbolo dell'alfabeto:

$$\mathcal{P} = \mathcal{C} = \mathcal{K} = \mathbb{Z}_n$$

Si verifica nel caso dell'alfabeto inglese vale $n = 26$; la funzione di cifratura e di decifratura si indicano come:

$$\begin{aligned} c &= E_k(p) = (p + k) \bmod n \\ p &= D_k(c) = (c - k) \bmod n \end{aligned}$$

Possiamo attaccare questo cifrario con una ricerca esaustiva dello spazio delle chiavi, sapendo che $|\mathcal{K}| = n$, oppure possiamo confrontare un testo in chiaro noto con un testo cifrato per ottenere la chiave ($k = p - c$).

Chiamiamo questo tipo di cifrario *mono-alfabetico*, ovvero ad ogni carattere corrisponde un carattere.

2.2.2. Cifrario affine. Utilizza una combinazione lineare applicata al testo in chiaro; per questo cifrario vale:

$$\mathcal{P} = \mathcal{C} = \mathbb{Z}_n, \mathcal{K} = k(a, b)$$

La funzione di cifratura e di decifratura si indicano come:

$$\begin{aligned} c &= E_k(p) = (ap + b) \bmod n \\ p &= D_k(c) = (c - b) a^{-1} \bmod n \end{aligned}$$

Bisogna prendere $a, b \in \mathbb{Z}_n$ e per la presenza dell'inversione di a , è necessario che esso sia primo relativo a n ($a \perp n$); se così non fosse, si verificherebbero delle collisioni nella cifratura.

2.2.3. Cifrario a sostituzione. Ogni carattere è sostituito da un'altro, secondo una tabella arbitraria; esso è la generalizzazione dei due precedenti cifrari (la chiave è una permutazione dell'alfabeto), e vale

$$\mathcal{P} = \mathcal{C} = \mathbb{Z}_n, |\mathcal{K}| = n!$$

La chiave è la tabella di sostituzione, e le funzioni di cifratura e decifratura sono determinate dalle sostituzioni indicate nella tabella.

Possiamo attaccare questo cifrario (e tutti gli altri cifrari mono-alfabetici) analizzando l'entropia dei singoli simboli dell'alfabeto: nel caso di messaggi cifrati in linguaggio naturale, l'analisi delle frequenze dei simboli può rivelare lettere molto usate.

Altri attacchi di questo tipo includono l'analisi della frequenza dei digrammi e trigrammi (coppie e triple di lettere).

2.2.4. Cifrario di Vigenère. Questo cifrario lavora su blocchi di h caratteri alla volta, e per questo viene detto poli-alfabetico. In questo caso abbiamo:

$$\mathcal{P} = \mathcal{C} = \mathcal{K} = (\mathbb{Z}_n)^h$$

La chiave, il testo in chiaro e il testo cifrato saranno vettori di h elementi:

$$k = (k_1, \dots, k_h), p = (p_1, \dots, p_h), c = (c_1, \dots, c_h)$$

Le regole di cifratura e decifratura sono le stesse del cifrario di Cesare, applicate su ciascun elemento del vettore p o c :

$$\begin{aligned} c &= E_k(p) = (p_1 + k_1 \bmod n, \dots, p_h + k_h \bmod n) \\ p &= D_k(c) = (c_1 - k_1 \bmod n, \dots, c_h - k_h \bmod n) \end{aligned}$$

In questo cifrario gli scorrimenti per ciascun elemento del blocco dipendono dalla posizione al suo interno; la stessa lettera verrà cifrata in modo diverso a seconda della sua posizione nel blocco; l'analisi di frequenza si applica, suddividendo la frequenza di un simbolo su h possibili modi di cifrarlo (la difficoltà cresce all'aumentare di h).

2.3. Cifrario a permutazione

Si tratta di un cifrario a blocco (lavora su h simboli alla volta), che permuta le posizioni dei caratteri in ogni blocco. Al contrario del cifrario a sostituzione, la permutazione in ogni blocco è indipendente. La chiave adottata è una permutazione delle posizioni all'interno del blocco.

ESEMPIO 2.1. Dato il cifrario a permutazione con blocchi di dimensione $n = 6$ e permutazione $k = (3, 5, 1, 6, 4, 2)$, cifrare il messaggio $p = \text{"she sells sea shells"}$ (gli spazi tra le parole non sono caratteri dell'alfabeto).

✓Identifichiamo i blocchi di $n = 6$ caratteri; il primo blocco da sinistra è $\mathbb{B}_1 = \text{"shesel"}$, che possiamo indicare come:

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ s, & h, & e, & s, & e, & l \end{pmatrix}$$

A questo punto applichiamo la permutazione k , che sposta i simboli del blocco nella seguente configurazione:

$$c = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 & 6 & 4 & 2 \\ e, & e, & s, & l, & s, & h \end{pmatrix}$$

□

Questo cifrario risulta poli-alfabetico, e ogni blocco di lunghezza n può essere cifrato in $n!$ modi differenti.

2.4. Proprietà fondamentali dei cifrari a blocchi

In un cifrario a blocco di lunghezza n , si prende un messaggio in chiaro e a partire da esso si ottiene un messaggio cifrato, entrambi della stessa lunghezza ($|p| = |c| = n$). Nell'articolo¹ sulla crittografia pubblicato da Shannon, egli espone due proprietà fondamentali che ogni sistema crittografico dovrebbe avere:

DIFFUSIONE: Si ha diffusione perfetta se, cambiando 1 bit del blocco in chiaro, tutti i bit del blocco cifrato corrispondente cambiano in maniera apparentemente casuale, con probabilità $1/2$. La perfetta diffusione vale anche nel senso opposto: cambiando 1 bit del blocco cifrato, tutti i bit del blocco in chiaro corrispondente cambiano con probabilità $1/2$.

CONFUSIONE: La chiave deve avere effetto su tutti i bit del blocco cifrato: a parità di blocco in chiaro, se cambia 1 bit della chiave, tutti i bit del blocco cifrato cambieranno, con probabilità $1/2$.

Queste due proprietà si riassumono nella seguente affermazione:

PROPOSIZIONE 2.1. *Non solo ogni bit della chiave ha effetto su tutti i bit del blocco cifrato, ma anche tutti i bit della chiave hanno effetto su ogni bit del blocco cifrato.*

¹“*Communication Theory of Secrecy Systems*” (1949), Bell System Technical Journal

CAPITOLO 3

Cifrario DES

3.1. Introduzione

3.1.1. Nascita del DES come standard. L'algoritmo Data Encryption Standard (DES) nasce negli anni '70 per soddisfare la necessità degli Stati Uniti di usare un cifrario per le comunicazioni segrete; allora l'NBS (attuale NIST) pubblica un bando, a cui risponde IBM con l'algoritmo LUCIFER.

L'algoritmo di IBM conteneva delle tabelle di sostituzione, che furono modificate dall'NBS: questo portò a pensare, per molti anni, che il governo introdotta una trapdoor nelle tabelle di sostituzione, tuttavia non fu mai trovata.

Infine il DES fu pubblicato come standard nel '77; col progredire della potenza di calcolo nei calcolatori, questo algoritmo è divenuto suscettibile a diversi attacchi, così sono state introdotte delle sue varianti (compatibilmente con l'hardware legacy), come il triplo DES (3DES).

Di per sé l'algoritmo DES è robusto, tuttavia la sua chiave di 56bit è relativamente corta ($|\mathcal{K}| = 2^{56} \simeq 2^6 \cdot 10^{15}$), e questo permette di effettuare in breve tempo un'analisi esaustiva dello spazio delle chiavi. Oltre a questo, DES sarebbe stato vulnerabile ad attacchi di crittoanalisi differenziale (si cerca un errore nella realizzazione della proprietà di perfetta diffusione, prendendo un blocco di testo in chiaro e cifrandolo, cambiando un bit alla volta e cercando evidenza statistica all'interno del blocco cifrato) se il suo algoritmo avesse avuto 14 *round*; tuttavia la specifica di IBM prevede 16 *round* (si veda 2.1).

DES è un cifrario a blocchi di 64bit, che nel modo più semplice lavora prendendo un blocco, cifrandolo e poi ripetendo il processo in modo indipendente per il blocco successivo (modo *ECB*).

3.1.2. Schema Feistel. Descriviamo l'idea dietro a questo schema con la procedura da implementare per realizzarlo:

- prendiamo un blocco di bit B_1 , e dividiamolo in due metà, in modo da avere la sinistra L_1 e la destra R_1 ;
- usiamo la chiave K per generare una sotto-chiave di round K_i ;
- permutiamo le due metà al round i -esimo, facendo passare la metà di sinistra attraverso una funzione fortemente non lineare che utilizzi la chiave: $B_i = R_{i-1} \parallel L_{i-1} \oplus f(R_{i-1}, K_i)$;
- se vi sono n round in totale, non si effettua la permutazione di L_i ed R_i al round n -esimo, e si ottiene $B_n = R_n \parallel L_n$

La notazione $A \parallel B$ indica la concatenazione di B dopo di A

Possiamo presumere che, continuando a permutare le due metà del blocco, grazie alla funzione $f()$, vi sarà un'ottima diffusione dei bit in ingresso; inoltre la confusione sarà garantita dalla presenza delle chiavi di round K_i , generate a partire dalla chiave iniziale.

Lo schema Feistel permette di decifrare con la stessa procedura della cifratura, utilizzando B_n e K_n come ingresso, e ottenendo B_1 alla fine degli n round.

3.2. Algoritmo DES

Il DES applica 16 volte (round) il blocco di Feistel, utilizzando la seguente procedura:

- (1) si applica una permutazione iniziale (IP) fissata al blocco di 64bit in chiaro;
- (2) si prende la chiave DES (da 64bit), si rimuovono gli 8bit di parità e si utilizzano i 56bit per produrre le successive chiavi di round K_i ;
 - (a) si permutano i bit della chiave da 56bit, poi essa viene divisa in due blocchi da 28bit, rispettivamente C_0 e D_0 ;
 - (b) si produce la chiave di round secondo una tabella di shift fissa (funzione LS_i), che fa scorrere i bit delle due metà della chiave (C_i, D_i) in modo circolare di 1 o 2 posizioni, a seconda del numero i del round: $C_i = LS_i(C_{i-1}), D_i = LS_i(D_{i-1}) \implies K_i = C_i \parallel D_i$;
 - (c) tramite una tabella di riduzione, si estraggono dalla chiave di round 48bit, da usare nella funzione $f()$.
- (3) si prende la chiave di round K_i e il blocco sinistro di round R_{i-1} e si genera il blocco destro L_i tramite la funzione $f()$
 - (a) il blocco R_{i-1} in ingresso viene espanso a 48bit tramite una tabella di espansione;
 - (b) si somma modulo due la chiave di round al blocco espanso: $E(R_{i-1}) \oplus K_i$;
 - (c) si divide il risultato da 48bit in 8 gruppi da 6bit;
 - (d) ciascun gruppo viene modificato tramite una S-Box (8 in totale), che prende un blocco da 6bit e lo riduce a 4bit;
 - (e) gli 8 gruppi da 4bit sono uniti in un blocco da 32bit, che viene permutato;
 - (f) il blocco ottenuto viene infine usato assieme alla chiave nella funzione $f()$.

Initial Permutation (IP). Essa lavora su un blocco di 64bit, e produce un'altro blocco altrettanto lungo. Osserviamo che la permutazione iniziale, nota e fissa, non migliora diffusione o confusione; alcune ipotesi sostengono che poteva essere un modo per inizializzare l'hardware dell'epoca ('70).

La seguente tabella di look-up realizza la permutazione iniziale del DES:

Funzione f . Essa lavora su blocchi di 32bit, e garantisce ottima diffusione grazie alle permutazioni effettuate sui blocchi di bit.

S-Box. Tabella di sostituzione che prende un blocco da 6bit, e usando il primo e l'ultimo per indicare la riga e i 4 centrali per indicare la colonna, si ottiene un blocco da 4bit. Infatti, la tabella dell'S-Box contiene valori di massimo 4bit, che vengono indirizzati nel modo seguente: se $B_h = \begin{matrix} & R_0 & & & R_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ & C_0 & C_1 & C_2 & C_3 \end{matrix}$, allora il valore ottenuto sarà l'elemento alla riga $01_2 = 1_{10}$ e alla colonna $0100_2 = 4_{10}$ della S-Box h (righe e colonne sono numerate a partire da 0); queste tabelle sono state progettate per realizzare una trasformazione non lineare sui blocchi.

Chiave di round. Ogni bit della chiave sarà utilizzato mediamente in 14 su 16 round; questo permette di realizzare ottima confusione. I bit di parità della chiave, che portano la sua lunghezza da 56 a 64bit, sono un metodo per controllarne l'integrità (per esempio per trasmettere la chiave senza errori, come controllo aggiuntivo).

Notiamo che il DES rispetta il principio di Kerchoffs (pagina 58) infatti la chiave deve rimanere privata, ed è l'unico "ingrediente" che permette di decifrare un blocco

cifrato; l'algoritmo è invece pubblico e ben definito. L'algoritmo è infatti progettato per rendere l'analisi esaustiva dello spazio delle chiavi l'unico tipo di attacco possibile.

3.3. Modi operativi

I cifrari a blocchi, come DES, supportano i modi operativi descritti nelle seguenti sotto-sezioni.

Electronic Code Book (ECB). Il messaggio in chiaro è diviso in blocchi, i quali sono cifrati in modo indipendente, utilizzando la stessa chiave:

$$c_i = E_k(p_i), \quad p_i = E_k(c_i)$$

Risulta facile individuare i blocchi ripetuti, inoltre è possibile costruire una tabella con le corrispondenze tra blocchi in chiaro e blocchi cifrati.

Cipher Block Chaining (CBC). Si tratta di un modo operativo concatenato: in qualche modo, ciascun blocco è legato agli altri, e si ottiene l'effetto di non avere blocchi ripetuti (questo vale per ciascun modo concatenato). CBC usa un vettore di inizializzazione (IV), come se fosse una chiave addizionale, come primo blocco cifrato c_0 ; a partire da esso, le funzioni di cifratura e decifratura sono definite come:

$$c_i = E_k(p_i \oplus c_{i-1}), \quad p_i = c_{i-1} \oplus D_k(c_i)$$

Si noti che IV può essere inviato anche in chiaro.

Cipher Feedback (CFB). Si tratta di un modo concatenato. Consiste nel cifrare il vettore di inizializzazione e poi sommarlo al blocco in chiaro; il risultato è usato come IV per il round successivo. Questo algoritmo crea una sequenza di bit pseudo-casuali.

Per decifrare non è necessaria una funzione specifica, ma basta ripetere la somma in base 2 con i blocchi cifrati al posto dei blocchi in chiaro:

$$c_i = p_i \oplus E_k(c_{i-1}), \quad p_i = c_i \oplus E_k(c_{i-1})$$

Lo svantaggio di questo cifrario è l'amplificazione degli errori di trasmissione, da un blocco al suo successivo.

Output Feedback Mode (OFB). Si tratta di un modo concatenato. Consiste nel cifrare il vettore di inizializzazione, sommarlo al blocco in chiaro, e poi usare l'IV cifrato come ingresso per il blocco successivo. La catena di cifrature effettuate sull'IV costituisce una PRBS (pseudo-random binary sequence, una sequenza pseudo-casuale di bit). L'unico modo per generare la stessa sequenza è conoscere la chiave; inoltre un errore di trasmissione non si propaga tra i blocchi.

Le funzioni di cifratura e decifratura sono definite come:

$$c_i = p_i \oplus E_k^{(i)}(IV), \quad p_i = c_i \oplus E_k^{(i)}(IV)$$

dove $E_k^{(i)}(IV)$ è la funzione E_k applicata in modo ricorsivo per i volte all'IV.

Counter Mode (CTR). Questo modo non è concatenato. Consiste nel cifrare un IV con la chiave, per poi sommarlo al blocco in chiaro; per ciascun blocco in chiaro i -esimo viene usato un $IV^{(i)} := IV + i$, e ogni blocco cifrato è prodotto in modo indipendente; la sicurezza di questo modo si basa unicamente su quella della funzione di cifratura (in caso di ottima diffusione e confusione, un attaccante non può sapere se a IV sta venendo sommato un intero e quale esso sia).

Le funzioni di cifratura e decifratura sono definite come:

$$c_i = p_i \oplus E_k \left(IV^{(i)} \right), \quad p_i = c_i \oplus E_k \left(IV^{(i)} \right)$$

3.4. Sicurezza del DES

3.4.1. Doppio DES. Per aumentare la sicurezza di DES potremmo provare ad utilizzare una chiave più lunga; in tal caso, ci chiediamo se esista una chiave $K' = K_1 | K_2$ tale che $|K'| = 56 + 56 = 112\text{bit}$, e per essa si verifichi che $E_{K'}(p) \equiv E_{K_2}(E_{K_1}(c))$.

Se prendiamo la funzione di cifratura *affine* (si veda la sezione 2.2.2), dove abbiamo $K_1 = (a, b)$, allora possiamo cifrare un testo in chiaro p come $c_1 = E_{K_1}(p) = a \cdot p + b \bmod n$; prendiamo un'altra chiave $K_2 = (c, d)$ e con essa cifriamo di nuovo il messaggio p , ottenendo $c_2 = E_{K_2}(p) = c \cdot p + d \bmod n$.

Si nota subito che, per le caratteristiche della funzione di cifratura (combinazione lineare con la chiave), esiste $K' = (a \cdot c, b + d)$ per cui vale $c' = E_{K_2}(E_{K_1}(p)) \equiv E_{K'}(p) = ac \cdot p + b + d \bmod n$. Dato che il cifrario affine forma un gruppo algebrico (chiuso rispetto alla composizione), cifrando due volte con due chiavi K_1 e K_2 non viene aumentata la cardinalità dello spazio delle chiavi, dato che esiste in ogni caso una chiave equivalente K' di lunghezza identica alle singole chiavi.

Il DES non gode di questa proprietà: cifrando più volte il messaggio in chiaro con due chiavi differenti, aumenta di $2^{|K|}$ la cardinalità dello spazio delle chiavi. Nel caso del doppio DES (2DES), si ha una chiave $K = K_1 | K_2$ lunga il doppio di una chiave singola, dunque $|\mathcal{K}| = 2^{112} \simeq 2^2 \cdot 10^{33}$.

Il doppio DES è suscettibile dell'attacco Meet-in-the-Middle (MiM): questa vulnerabilità permette di analizzare al più 2^{57} chiavi, invece delle 2^{112} totali; per ovviare al problema si è scelto di proseguire con la composizione, ottenendo il triplo DES.

3.4.2. Triplo DES. Questo cifrario è la composizione di tre chiavi DES, che portano la cardinalità dello spazio delle chiavi a 2^{168} ; anche con un attacco MiM lo spazio delle chiavi si riduce al più a 2^{112} , e al giorno d'oggi è considerato sicuro almeno quanto l'AES, ma è meno veloce (bisogna cifrare 3 volte con DES).

Il metodo più intuitivo per implementare il 3DES è effettuare tre volte la cifratura con tre chiavi differenti: $c = E_{K_1}(E_{K_2}(E_{K_3}(p)))$; un approccio che utilizza solo due chiavi, senza ridurre lo spazio delle chiavi, è il seguente:

$$c = E_{K_1}(D_{K_2}(E_{K_1}(p))), \quad p = D_{K_1}(E_{K_2}(D_{K_1}(c)))$$

Questa implementazione del triplo DES è compatibile con l'hardware per il singolo DES.

Rivest ha proposto la seguente alternativa, chiamata DESX, che usa tre chiavi ma effettua una sola cifratura DES, ed è sicura quanto il 3DES standard:

$$c = K_3 \oplus E_{K_2}(K_1 \oplus p)$$

3.4.3. Attacco Meet-in-the-Middle. Abbiamo già osservato che DES non è un gruppo; ci chiediamo come possiamo affrontare questa caratteristica, per ridurre lo spazio delle chiavi nel caso di una composizione. Conduciamo un attacco di testo in chiaro noto, partendo da una coppia corrispondente di testo in chiaro e testo cifrato $p \xleftrightarrow{\quad} c$, senza conoscere la chiave.

Poniamoci nel caso di un testo cifrato ricavato tramite 2DES come $c = E_{K_2}(E_{K_1}(p))$, e vogliamo ottenere $K' = K_1|K_2$. Se quanto affermato sul testo cifrato è vero, allora applicando a c la decifratura con K_2 si ottiene

$$(3.4.1) \quad D_{K_2}(c) = E_{K_1}(p)$$

Effettuiamo una esplorazione esaustiva dello spazio delle chiavi K_1 memorizzando i risultati in una tabella, per cui sarà necessario memorizzare 2^{56} valori da 8Byte (64bit) ovvero circa 0.5EB; poi effettuiamo la stessa analisi per lo spazio delle chiavi K_2 , questa volta evitando di memorizzare i risultati ma confrontando ciascuna chiave trovata con i valori di K_1 salvati.

Notiamo che saranno necessarie al più $2 \cdot 2^{56} = 2^{57}$ operazioni di cifratura e decifratura con DES, e al più 2^{112} confronti.

3.5. Sicurezza delle password

3.5.1. Funzioni di hash. Per ragioni di sicurezza, una password non viene mai memorizzata in chiaro; in pratica, si usa una funzione di *hash*. Si tratta di una funzione con le seguenti caratteristiche:

- accetta un ingresso di lunghezza arbitraria, produce una uscita di lunghezza fissa;
- non è invertibile (ci sono infiniti messaggi con lo stesso hash in uscita dalla funzione);
- sia unidirezionale (presa una uscita $y(x)$, sia impossibile trovare uno qualunque degli infiniti x che produca quell'uscita);
- goda di ottima diffusione.

Usando una simile funzione, possiamo memorizzare lo hash della password, e confrontarlo con l'hash calcolato sulla password quando fornita.

È possibile attaccare queste funzioni provando un gran numero di ingressi casuali differenti, rispetto al numero delle possibili uscite; la sicurezza viene determinata dalla lunghezza dell'uscita.

Si può mitigare questo attacco scegliendo una funzione di hash particolarmente lenta.

3.5.2. Attacco del vocabolario. Dato che quasi nessuno sceglie una stringa veramente casuale come password, è possibile attaccare l'hash corrispondente generando tutti gli hash di tutte le parole di una lingua, apportando eventuali variazioni sulle singole parole (aggiunta di un numero, iniziale maiuscola, eccetera...) e poi confrontando gli hash ottenuti con quelli nel file delle password.

All'interno di sistemi con un gran numero di utenti, la probabilità di trovare una password "banale" per almeno qualche utenza è molto elevata.

La contromisura migliore è applicare un *salt* ("sale") alla password; esso è una stringa di bit, memorizzata in chiaro nel file delle password. L'hash "salato" è calcolato sulla stringa ottenuta dalla concatenazione del sale con la password.

Il sale non aumenta la complessità dell'attacco sul singolo utente, bensì ha il vantaggio che, nel caso di un attacco del vocabolario su numerose utenze, essi abbiano tutti un hash diverso, anche a parità di password, per via del sale (che sarà diverso per

ogni utente). Un attaccante dovrà calcolare l'hash per ogni parola del vocabolario, per ogni sale possibile.

Nei sistemi UNIX, le password sono salate con un salt a 12bit, e la funzione di hash è basata su DES; tradizionalmente si troncava la password utente a 64bit (8 caratteri), da questi si ottenevano i primi 7 bit di ciascun Byte (per rappresentare solo i caratteri stampabili), e i 56bit così ottenuti erano usati come chiave DES. Questa chiave K_h è poi usata per cifrare un blocco di 0 da 64bit, con 25 round di DES; a ogni round, i 12bit del sale sono usati per perturbare la funzione di cifratura (modificando le S-Box, rende inutile l'implementazione hardware a priori). Infine sale e blocco cifrato sono codificati in base 64.

La funzione così realizzata è reputata unidirezionale: infatti ottenere la password senza conoscere la chiave e con un DES da più di 16 round, per giunta perturbato dal sale, è un problema difficile.

CAPITOLO 4

Cifrario AES

4.1. Introduzione

Nel '97, quando DES era ancora in vigore, il NIST fece un bando per la creazione di un nuovo standard crittografico, destinato alle informazioni governative; l'algoritmo selezionato fu chiamato AES. Si tratta di un cifrario a blocchi da 128bit, con chiave a 128, 192 o 256bit.

La procedura per selezionare l'algoritmo fu gestita in modo pubblico e trasparente, attraverso delle conferenze; prima di selezionare l'algoritmo che sarebbe divenuto AES, arrivarono "in finale" i cinque seguenti algoritmi (oggi ancora usati, perché paragonabili all'AES nella sicurezza): MARS, RC6, Rijndael, Serpent, Twofish.

Nel 2000 viene infine selezionato Rijndael, che viene rinominato in AES; in particolare, Rijndael definisce una famiglia di cifrari: per AES viene selezionato una dimensione del blocco di 128bit e chiavi da 128 a 265bit.

Dal punto di vista matematico, AES non si basa su uno schema Feistel, ma su una rete di sostituzioni e trasformazioni; a seconda della dimensione della chiave, il Rijndael effettua 10, 12 o 14 cicli su ciascun blocco, e può essere utilizzato in tutti i modi operativi concatenati mostrati per il DES (vedere la sezione §3.3).

4.2. Algoritmo AES

Per maggiore semplicità, analizziamo il caso di Rijndael con chiave a 128bit, e 10 round. Osserviamo che i blocchi da 128bit sono suddivisi in 16Byte, organizzati in matrici 4×4 ; tutti gli elementi di queste matrici sono ottetti del campo $\mathcal{GF}(2^8)$ e rappresentano i polinomi al suo interno, dove il polinomio irriducibile per definire il campo è $P(x) = x^8 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$. L'ottetto di zeri non è invertibile, tuttavia deve essere ammissibile nel cifrario: si consideri l'elemento nullo come inverso di sé stesso.

Ogni round del Rijndael è composto di 4 livelli, che operano sulla matrice 4×4 che rappresenta il blocco da 128bit:

- Substitute Byte (SB): tabella di sostituzione, simile alle S-Box del DES, ma costruita algebricamente in maniera trasparente;
- Shift Row (SR): scorrimento delle righe della matrice a sinistra;
- Mix Column (MC): scorrimento delle colonne a sinistra, evita la degenerazione del cifrario in 4 cifrari applicati alle singole colonne della matrice;
- Add Round Key (ARK): per ciascun ciclo si aggiunge una chiave di round, derivata da quella iniziale a 128bit.

L'algoritmo usa round e livelli nel modo seguente:

- (1) ARK con chiave di round 0;
- (2) nove round che usano i livelli $SB \rightarrow SR \rightarrow MC \rightarrow ARK$, con le chiavi di round dalla 1 alla 9;
- (3) un ultimo round che usa i livelli $SB \rightarrow SR \rightarrow ARK$, con la chiave di round 10.

Le differenze col DES riguardano l'assenza del Feistel, rispetto al rimescolamento dei bit dato dai quattro livelli di ciascun round; il risultato è una apparente diffusione perfetta già dal secondo round. Inoltre, tutte le operazioni sugli ottetti del blocco, sono all'interno del campo $\mathcal{GF}(256)$.

La notazione \mathbf{A} in maiuscolo corsivo e grassetto, indica che \mathbf{A} è una matrice

SB. Sostituzione non lineare applicata ai Byte (elementi) della matrice; secondo una matrice di sostituzione con 16 righe e 16 colonne, numerate a partire da 0, indirizzate tramite gli stessi bit degli ottetti, nel modo seguente: sia \mathbf{A} la matrice che rappresenta il blocco di partenza, e sia $a_{1,0} = 10001011$; sia \mathbf{B} la matrice ottenuta al termine del livello SB; allora $b_{1,0}$ si ottiene prendendo il valore indicato all'incrocio della riga 8 con la colonna 11, nella tabella di sostituzione, e sostituendolo al valore

di un elemento di \mathbf{A} (per esempio $a_{i,j} = \overbrace{1000}^{\text{riga}} \underbrace{1011}_{\text{colonna}} \rightarrow 61$).

Questa tabella si calcola nel modo seguente:

- l'input è un ottetto di bit $a_{i,j} = x_7x_6x_5x_4x_3x_2x_1x_0$
- calcoliamo il suo inverso in $\mathcal{GF}(256) \ni a_{i,j}^{-1} = y_7y_6y_5y_4y_3y_2y_1y_0$ (assumendo che 000000000 sia l'inverso di sé stesso)
- prendiamo l'ottetto $a_{i,j}^{-1}$, scriviamolo partendo dal bit meno significativo e come un vettore colonna $(y_0y_1y_2y_3y_4y_5y_6y_7)^T$
- computiamo $b_{i,j} = z_7z_6z_5z_4z_3z_2z_1z_0$ e scriviamolo come $(z_0z_1z_2z_3z_4z_5z_6z_7)^T$

per computare $b_{i,j}$ usiamo la seguente trasformazione, per diffondere e confondere ulteriormente i bit:

$$b_{i,j} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

SR. Spostamento a sinistra delle 4 righe rispettivamente di 0, 1, 2, 3 passi (la prima riga rimane immutata, la seconda è spostata di 1, ecc...); sia \mathbf{B} la matrice proveniente dal livello SB, allora da questo livello otteniamo la seguente matrice \mathbf{C} :

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{0,0} & c_{0,1} & c_{0,2} & c_{0,3} \\ c_{1,0} & c_{1,1} & c_{1,2} & c_{1,3} \\ c_{2,0} & c_{2,1} & c_{2,2} & c_{2,3} \\ c_{3,0} & c_{3,1} & c_{3,2} & c_{3,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{0,0} & b_{0,1} & b_{0,2} & b_{0,3} \\ b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} & b_{1,0} \\ b_{2,2} & b_{2,3} & b_{2,0} & b_{2,1} \\ b_{3,3} & b_{3,0} & b_{3,1} & b_{3,2} \end{bmatrix}$$

MC. Prendiamo la matrice \mathbf{C} ottenuta dal livello precedente ed effettuiamo il suo prodotto per una matrice \mathbf{M} per ottenere $\mathbf{D} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{C}$, nel modo seguente:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 00000010 & 00000011 & 00000001 & 00000001 \\ 00000001 & 00000010 & 00000011 & 00000001 \\ 00000001 & 00000001 & 00000010 & 00000011 \\ 00000011 & 00000001 & 00000001 & 00000001 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_{0,0} & c_{0,1} & c_{0,2} & c_{0,3} \\ c_{1,0} & c_{1,1} & c_{1,2} & c_{1,3} \\ c_{2,0} & c_{2,1} & c_{2,2} & c_{2,3} \\ c_{3,0} & c_{3,1} & c_{3,2} & c_{3,3} \end{bmatrix}$$

Per garantire la decifratura, sarà necessario che la matrice \mathbf{M} sia invertibile; l'inversa \mathbf{M}^{-1} avrà più 1 che 0, e per questo la decifratura in AES è più lenta (di poco) della cifratura.

ARK. La chiave di round viene sommata bit a bit col blocco ottenuto al livello precedente: $E = D \oplus K^{(i)}$. Ad ogni round i -esimo ricaviamo una chiave di 16Byte a partire da quella iniziale; se abbiamo chiavi da 128bit l'algoritmo prevede 10 round e quindi saranno necessarie 11 chiavi di round.

Esprimendo la chiave iniziale come matrice 4×4 chiamata K , possiamo indicarla come la giustapposizione di 4 colonne di 4 elementi ciascuna; le 11 chiavi necessarie saranno costituite in totale da 44 colonne di 4Byte ciascuna. Allora le colonne 0, 1, 2, 3 appartengono alla chiave $K^{(0)}$, le colonne 4, 5, 6, 7 costituiscono $K^{(1)}$, e così via.

Le altre 40 colonne si ottengono dalle 4 iniziali nel modo seguente; sia $\vec{w}(i)$ la i -esima colonna:

$$\begin{cases} \vec{w}(i) = \vec{w}(i-4) \oplus \vec{w}(i-1) & i \bmod 4 \neq 0 \\ \vec{w}(i) = \vec{w}(i-4) \oplus T[\vec{w}(i-1)] & i \bmod 4 = 0 \end{cases}$$

La trasformazione T è definita nel modo seguente; sia $r(i) = 00000010^{(i-4)/4} \in \mathcal{GF}(2^8)$, e sia SB il livello Substitute Byte dell'algoritmo Rijndael:

$$T[(a, b, c, d)] = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} b \\ c \\ d \\ a \end{bmatrix} \rightarrow \text{SB} \rightarrow \begin{bmatrix} e \\ f \\ g \\ h \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} e \oplus r(i) \\ f \\ g \\ h \end{bmatrix}$$

In questo modo si ottiene la chiave di round come:

$$K^{(i)} = [\vec{w}(4i), \vec{w}(4i+1), \vec{w}(4i+2), \vec{w}(4i+3)]$$

Decifratura. I quattro livelli di ciascun ciclo dell'algoritmo Rijndael sono invertibili:

- Inverted Substitute Byte (ISB): tabella di sostituzione inversa a quella del livello SB;
- Inverted Shift Row (ISR): scorrimento delle righe a destra invece che a sinistra;
- Inverted Mix Column (IMC): si usa l'inversa della matrice M : $C = M^{-1} \cdot D$;
- Add Round Key (ARK): questo livello, basato sulla somma bit a bit, è l'inverso di sé stesso.

Possiamo decifrare un blocco applicando all'inverso i 10 round:

- (1) il primo round usa $K^{(10)}$ e i livelli $\text{ARK} \rightarrow \text{ISR} \rightarrow \text{ISB}$;
- (2) i nove round successivi usano le chiavi dalla 9 alla 1, con i livelli $\text{ARK} \rightarrow \text{IMC} \rightarrow \text{ISR} \rightarrow \text{ISB}$;
- (3) un ultimo round usa ARK con la chiave $K^{(0)}$.

4.3. Sicurezza dell'AES

Al contrario del DES, le cui S-Box avevano fatto sorgere il dubbio della presenza di trapdoor segrete, in AES la tabella di sostituzione è ottenuta tramite una procedura algebrica definita; inoltre, il livello Substitute Byte consente di ottenere un elevato livello di non linearità, con la trasposizione dei vettori.

Ad oggi, gli unici attacchi che funzionano contro AES, sfruttano debolezze dell'implementazione, e non dell'algoritmo.

Successioni Pseudo-casuali

5.1. Sequenze binarie pseudo-casuali (PRBS)

Se pensiamo che l'AES sia sicuro, dobbiamo limitare questa osservazione alla pratica: infatti, anche se non è possibile trovare la chiave di cifratura in un periodo di tempo accettabile, dal punto di vista teorico e con un tempo infinito a disposizione, è possibile eludere la sicurezza di AES.

Esiste tuttavia un cifrario inviolabile anche dal punto di vista teorico: prendiamo una sequenza di bit da cifrare p e la sommiamo bit a bit con una sequenza casuale r , ottenendo la sequenza cifrata:

$$c = p \oplus r$$

La sequenza r deve essere veramente casuale (nessuna autocorrelazione del primo o secondo ordine) e imprevedibile, ottenuta per esempio osservando un fenomeno aleatorio. Per decifrare un c ottenuto in questo modo, è necessario sommare bit a bit a c la stessa sequenza casuale r usata nella cifratura.

Osserviamo che la sequenza casuale r deve avere la stessa lunghezza dei dati da cifrare ($|r| = |p|$, per consentire la somma bit a bit con p), ed essa deve essere trasportata in modo sicuro al destinatario; inoltre, la sequenza r va usata una volta sola, per mantenere la sua imprevedibilità.

Questo sistema di cifratura ha rilevanza se possiamo generare una sequenza r pseudo-casuale, ovvero a parità di inizializzazione, è possibile generare in modo indipendente la stessa sequenza r .

5.1.1. Generatore lineare congruenziale. Ricaviamo l'elemento i -esimo della sequenza pseudo-casuale attraverso una trasformazione lineare applicata al precedente, modulo un composto:

$$x_i = (a \cdot x_{i-1} + b) \bmod n$$

La sequenza viene generata a partire dai tre parametri a , b , n e il suo sviluppo è determinato dal seme iniziale, il primo elemento x_0 .

Anche se il modulo aggiunge della complessità alla trasformazione lineare, in molti casi è possibile ottenere i tre parametri osservando abbastanza a lungo la sequenza r .

5.1.2. Funzione unidirezionale. Un metodo algoritmicamente sicuro ma computazionalmente non efficiente, consiste nell'impiego di funzioni unidirezionali nella generazione della sequenza. Le funzioni non invertibili $y = f(x)$ permettono di tentare di trovare un \bar{y} provando per tentativi degli \bar{x} tali che $\bar{y} = f(\bar{x})$, mentre le funzioni unidirezionali (invertibili o meno) non permettono di "tirare a indovinare" l' \bar{x} che genera un \bar{y} (anche provando per tentativi non è possibile trovare \bar{x}).

Una sequenza pseudo-casuale del genere si inizializza con un seme x_0 , mentre l'elemento i -esimo si ottiene come:

$$x_i = f(x_0 + i)$$

Se la funzione unidirezionale $f()$ è la funzione di cifratura del DES con chiave $K = x_0 + i$ (va applicata la funzione per generare ciascun bit i -esimo), abbiamo una buona funzione unidirezionale (genera una sequenza apparentemente casuale, per invertire la funzione sarebbe necessario trovare la chiave DES) che tuttavia risulta non pratica per l'elevato costo computazionale.

5.1.3. Generatore ai residui quadratici (Blum, Blum e Shub). Si prendano due primi p e q grandi, entrambi congruenti a 3 in modulo 4:

$$p \gg 1, q \gg 1 : p \equiv 3 \pmod{4} \wedge q \equiv 3 \pmod{4}$$

Definiamo il prodotto $n = p \cdot q$, e prendiamo un numero casuale che non abbia p o q tra i suoi fattori ($x \perp n$).

La successione viene inizializzata a partire da un residuo quadratico $x_0 \equiv x^2 \pmod{n}$; l' i -esimo elemento viene calcolato come:

$$x_i \equiv x_{i-1}^2 \pmod{n}$$

mentre il bit i -esimo della sequenza sarà il bit meno significativo dell'elemento x_i ($b_i = \text{LSB}(x_i)$):

Normalmente, la sequenza di bit $\{b_i\}$ ha una statistica ben fatta (probabilità circa $1/2$ che esca 0 o 1), ha autocorrelazione nulla, ed assenza di memoria (b_i non dipende da b_{i-1}). La differenza con una sequenza casuale vera è che essa è periodica (dovrà essere garantito un periodo lungo); inoltre si tratta di un generatore lento (per il calcolo di un quadrato per ciascun bit).

Con una sequenza generata in questo modo, è possibile prevedere un bit successivo b_{i+k} una volta noti un x_i e n ; tuttavia è impossibile ottenere un b_{i-h} , poiché sarebbe necessario calcolare la radice quadrata modulo n , e quindi sono necessari i fattori p e q (e con p e q scelti adeguatamente il problema della fattorizzazione risulta impraticabile).

ESEMPIO 5.1. Usare il generatore di Blum, Blum e Shub con $p = 43$ e $q = 31$, cercando di determinare il suo periodo.

✓ Ricaviamo subito $n = p \cdot q = 1333$; scegliamo inoltre $x_0 = 50 \perp 1333$. Applichiamo l'algoritmo:

i	x_i	b_i
0	$50^2 \equiv \mathbf{1167} \pmod{1333}$	1
1	$1167^2 \equiv \mathbf{896} \pmod{1333}$	0
2	$896^2 \equiv \mathbf{350} \pmod{1333}$	0
3	$350^2 \equiv \mathbf{1197} \pmod{1333}$	1
4	$1197^2 \equiv \mathbf{1167} \pmod{1333}$	1

Notiamo che il periodo vale 4 (il generatore continuerà a produrre 1, 0, 0, 1...). □

5.2. Periodo del generatore ai residui quadratici

5.2.1. Calcolare il periodo. Gli studi di Blum, Blum e Shub hanno mostrato che il periodo τ della sequenza del loro generatore, è un divisore della funzione della funzione di Carmichael, del prodotto $n = p \cdot q$:

$$\tau \mid \lambda(\lambda(n)), n = p \cdot q$$

La funzione di Carmichael di un numero n è, a sua volta, un divisore del toziente di n ($\lambda(n) \mid \varphi(n)$); essa si calcola nel modo seguente; preso un intero composto positivo n , esso può essere espresso come prodotto di fattori primi p_i , ciascuno con la propria potenza a_i :

$$n = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \dots \cdot p_r^{a_r}$$

La funzione di Carmichael è pari al minimo comune multiplo degli ordini (tozienti) di ciascuno dei $p_i^{a_i}$, per i da 1 a r (elementi del gruppo moltiplicativo degli elementi invertibili di \mathbb{Z}_n):

$$(5.2.1) \quad \lambda(n) = \text{mcm}(\{\varphi(p_i^{a_i})\}, i \in [1, r])$$

Funzione di Carmichael

Prendiamo in mano le ipotesi del Teorema 1.3, il quale afferma che preso un intero a e un primo p , vale $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$; se p non fosse primo, il Teorema 1.4 ci dice che $a^{\varphi(p)} \equiv 1 \pmod{p}$. Nel primo caso, ci chiediamo infine se esista un intero $q < p-1$ per cui il residuo modulo p di a vale sempre 1 ($a^q \equiv 1 \pmod{p}$); in generale questo dipende da a , e chiamiamo questo intero $\text{ORD}(a) = q$.

Nel secondo caso, ci chiediamo se esista un divisore di $\varphi(p)$ per cui il residuo modulo p di a sia sempre 1; questo accade per $\lambda(p)$, che possiamo considerare come l'analogo dell'ordine di a .

Facciamo un paragone tra ordine e funzione di Carmichael:

- $\text{ORD}(a) \in \mathbb{Z}_p$ è il minimo intero n tale che $a^n \equiv 1 \pmod{p}$; l'ordine di a è massimo $p-1$ o comunque un suo divisore.
- $\lambda(n) \in \mathbb{Z}_p$ è il minimo intero N tale che $a^N \equiv 1 \pmod{p}$; $\lambda(n)$ è al massimo $\varphi(n)$ o comunque un suo divisore.

ESEMPIO 5.2. Calcolare il periodo del generatore BBS (Blum, Blum e Shub), con $p = 23$, $q = 19$, $x_0 = 7$.

✓ Sia p che q sono congruenti a 3 modulo 4, inoltre x_0 essendo primo è sicuramente primo relativo rispetto a $p \cdot q = n = 437$. Calcoliamo la successione (si ricorda che tutti i conti per la colonna x_i sono quadrati in modulo n , mentre la colonna b_i contiene l'LSB corrispondente):

i	x_i	b_i	i	x_i	b_i
0	49	1	6	87	1
1	216	0	7	140	0
2	334	0	8	372	0
3	121	1	9	292	0
4	220	0	10	49	1
5	330	0			

Dalla successione costruita osserviamo che il periodo vale 10. Sappiamo che il periodo sarà un divisore di $\lambda(\lambda(n))$; calcoliamo $\lambda(n)$:

$$\begin{aligned} \lambda(n) &= \lambda(437) = \lambda(23 \cdot 19) = \text{mcm}(\varphi(23), \varphi(19)) \\ &= \text{mcm}(22, 18) = \text{mcm}(2 \cdot 11, 2 \cdot 3^2) = 11 \cdot 2 \cdot 9 \\ &= 198 \end{aligned}$$

Ora possiamo calcolare $\lambda(\lambda(n))$:

$$\begin{aligned} \lambda(198) &= \lambda(2 \cdot 3^2 \cdot 11) = \text{mcm}(\varphi(2), \varphi(9), \varphi(11)) \\ &= \text{mcm}(1, 2 \cdot 3, 2 \cdot 5) = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30 \end{aligned}$$

Concludiamo che il periodo τ sarà uno tra i possibili divisori di 30, a seconda dal x_0 selezionato: $\tau \in \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$; presi $p = 23$, $q = 19$ il periodo è un divisore di 30; con $x_0 = 7$ si ha esattamente $\pi = 10$. \square

5.2.2. Massimizzare il periodo. Per avere un periodo lungo di una sequenza BBS, è necessario scegliere un x_0 tale che $\pi = \lambda(\lambda(n)) \gg 1$; perché ciò si verifichi, scegliamo p e q nel modo seguente:

- prendiamo un primo p_2 , tale che anche un $p_1 = 2p_2 + 1$ sia primo; scegliamo il primo $p = 2 \cdot p_1 + 1$
- prendiamo un primo q_2 , tale che anche un $q_1 = 2q_2 + 1$ sia primo; scegliamo il primo $q = 2 \cdot q_1 + 1$
- deve valere $p \neq q$, e $p, q \gg 1$

Scegliendo i due primi col criterio appena mostrato, si otterrà in periodo più lungo possibile.

5.3. Successioni LFSR

Si tratta di successioni lineari di bit, con aritmetica modulo 2; definiamo una sequenza PRBS con la seguente costruzione:

$$x_{n+5} \equiv x_n + x_{n+2} \pmod{2}$$

Una notazione equivalente per la precedente congruenza è:

$$(5.3.1) \quad x_n \equiv x_{n-5} + x_{n-3} \pmod{2}$$

Chiamiamo successione LFSR con memoria 5 la congruenza (5.3.1).

In generale, data una memoria di M bit (la quale genera una ricorrenza di ordine M), possiamo definire una successione LFSR come:

$$x_{n+M} \equiv c_M \cdot x_n + c_{M-1} \cdot x_{n+1} + \dots + c_1 \cdot x_{n+M-1} \pmod{2}$$

Come prima, una costruzione alternativa (vedremo che essa semplificherà la sintesi di un circuito sequenziale) per la precedente è:

**Successione
LFSR**

$(5.3.2) \quad x_n \equiv c_M \cdot x_{n-M} + c_{M-1} \cdot x_{n-M+1} + \dots + c_1 \cdot x_{n-1} \pmod{2}$

Possiamo descrivere la ricorrenza M relativa alla successione (5.3.2) tramite il seguente polinomio, che ha per coefficienti i c_i della ricorrenza:

$$(5.3.3) \quad P(Y) = c_M Y^M + c_{M-1} Y^{M-1} + \dots + c_1 Y + c_0$$

Il polinomio è nella variabile Y per distinguere chiaramente la sua variabile da quella della successione (5.3.2); usiamo un polinomio per descrivere la ricorrenza, per lavorare con i campi di Galois.

Il polinomio (5.3.3) ha grado M e descrive una successione con periodo al più $2^M - 1$; i polinomi di grado esattamente M sono in numero $2^M - 1$: infatti possiamo affermare che $c_0 = 1$ (riferito all'elemento presente) e $c_M = 1$ (altrimenti il polinomio non arriverebbe al grado M), sottraendo due gradi di libertà dal numero totale di polinomi di grado M .

Per avere una ricorrenza di periodo massimo, dovremo scegliere un polinomio *irriducibile*, da cercare tra i $2^M - 1$ disponibili.

Questa ricorrenza può essere implementata via hardware, tramite dei registri a scorrimento; per esempio per avere una ricorrenza con periodo di un milione serviranno almeno 20 celle di memoria ($2^{20} - 1 \simeq 10^6$). La sequenza $\{x_M\}$ generata in questo modo potrà essere usata come sequenza pseudo-casuale r , nel sistema di cifratura introdotto all'inizio della sezione §5.1. In tal caso la chiave sarà costituita da:

- i coefficienti del polinomio (5.3.3), tranne il primo e l'ultimo – sappiamo che essi valgono sempre 1 – ovvero $M - 1$ bit in totale, a rappresentare i rimanenti coefficienti (che essendo residui modulo 2 valgono 0 o 1);
- i valori degli x con i quali inizializzare il polinomio, ovvero M bit.

Questo metodo è vulnerabile all'attacco del testo in chiaro, ed è usato quando la velocità di cifratura va privilegiata rispetto alla sicurezza.

ESEMPIO 5.3. Consideriamo la successione LFSR definita con la congruenza seguente:

$$x_n \equiv x_{n-2} + x_{n-3} \pmod{2}$$

Implementare la ricorrenza in esame con un circuito sequenziale.

✓ Possiamo rappresentare la successione col seguente polinomio:

$$P(Y) = Y^3 + Y^2 + 1$$

Infatti l'ordine della ricorrenza è 3 (ottenuto osservando gli indici delle x), sappiamo che $c_3 = c_0 = 1$ e infine i termini x_{n-2} e x_{n-3} rappresentano Y^2 e Y^3 rispettivamente; il periodo massimo della sequenza vale $2^3 - 1 = 7$ (sarebbe sicuramente massimo se $P(Y)$ fosse irriducibile).

Implementiamo la successione LFSR col circuito ne la figura 5.3.1. \square

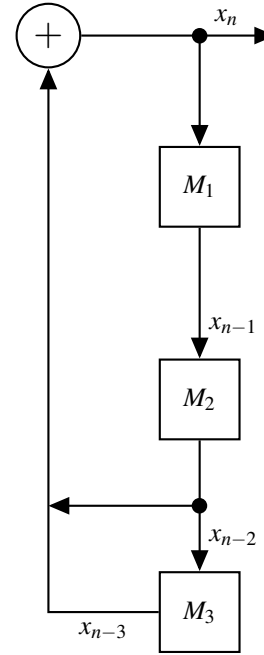


Figura 5.3.1. Registro a scorrimento con 3 celle di memoria

OSSERVAZIONE 5.1. Abbiamo già concluso che il periodo di una successione LFSR definita dal polinomio (5.3.2) *irriducibile*, sarà al massimo $2^M - 1$, oppure un suo sottomultiplo (può essere un numero diverso se $P(Y)$ non è irriducibile); tuttavia, se $2^M - 1$ è *primo*, il suo unico sottomultiplo è lui stesso (si ottiene il periodo massimo possibile). In breve vale la seguente condizione:

$$P(Y) \text{ irriducibile} \wedge 2^M - 1 \text{ primo} \implies \{x_M\} \text{ periodo massimo } (2^M - 1)$$

5.4. Stato della successione

Supponiamo di prendere il polinomio $P(Y)$ irriducibile (5.3.3), allora possiamo definire il campo di Galois con questo polinomio:

$$\mathcal{GF}(2^M) = \mathbb{Z}_2[Y] \pmod{P(Y)}$$

I polinomi appartenenti a questo campo, che chiamiamo $s_j(Y)$, avranno al massimo grado $M - 1$ e gli M coefficienti di ciascun polinomio rappresentano lo stato al passo j -esimo di un circuito sequenziale che genera una successione LFSR, che chiameremo *scrambler*.

Possiamo anche considerare $s_j(Y) \in \mathcal{GF}(2^M)$ come un vettore a M dimensioni, dove le coordinate valgono in modulo 2 (0 o 1).

Se moltiplichiamo per Y un polinomio $s_j(Y)$ – il quale rappresenta lo stato delle M celle di memoria – otteniamo lo shift in avanti di un passo del circuito combinatorio:

$$Y \cdot s_j(Y) = s_{j+1}(Y)$$

A questo punto, possiamo scrivere lo stato al passo j -esimo come un residuo in modulo $P(Y)$, rispetto allo stato iniziale:

$$s_j(Y) \equiv s_0(Y) \cdot Y^j \pmod{P(Y)}$$

Chiediamoci dunque sotto quali condizioni $s_j(Y) = s_0(Y)$, o in altre parole quanto vale il passo al quale inizia il secondo periodo; questo si verifica quando $Y^j \equiv$

$1 \pmod{P(Y)}$). Ci interessa il j per cui questa congruenza è vera, quindi ci interessa l'intero minimo per cui Y (elemento del campo) elevato a quell'intero dia 1 come residuo: in pratica cerchiamo l'ordine dell'elemento Y :

$$s_j(Y) = s_0(Y) \implies j = \text{ORD}(Y), Y \in \mathcal{GF}(2^M)$$

PROPOSIZIONE 5.1. *L'ordine di un elemento del campo sarà del tipo $(2^M - 1)/d$, con d un qualche intero; si verifica $d = 1$ (ordine massimo, pari a $2^M - 1$) quando Y è un elemento generatore del campo:*

$$\text{ORD}(Y) = 2^M - 1 \implies Y \text{ elemento generatore}$$

PROPOSIZIONE 5.2. *Condizione sufficiente perché il periodo della ricorrenza sia $2^M - 1$ è che il numero $2^M - 1$ sia primo; in tal caso tutti gli elementi del campo $\mathcal{GF}(2^M)$ saranno generatori.*

5.5. Scrambler

Consideriamo un apparato di telecomunicazioni: esso avrà un canale che trasporta una sequenza di bit; in generale le proprietà statistiche della sequenza di bit, emessi dalla sorgente, non saranno uniformi. È possibile che una sorgente trasmetta sequenze lunghe di 0 o 1 (sia per volontà degli utenti, che per segnalare una condizione o un evento, o uno stato dell'infrastruttura).

Il modo più banale per codificare bit su un canale di comunicazione, per esempio sulla fibra ottica, è quello di emettere potenza (luce) quando si vuole inviare un 1, e non emettere nulla quando si vuole inviare uno 0. In ricezione, si pone il problema di capire se sia arrivato un 1 o uno 0: si misura la potenza ricevuta, a intervalli di tempo regolari T (periodo di cifra), e si determina dell'intensità del segnale in arrivo è maggiore di una certa soglia e può essere considerata la codifica di un 1 piuttosto che di uno 0.

Tuttavia i componenti che costituiscono i circuiti del trasmettitore e del ricevitore, a causa della propria tolleranza di fabbricazione, non possono essere allineati in partenza sulla frequenza di trasmissione (sarà sempre presente uno sfasamento del segnale ricevuto, chiamato *jitter*, o rumore di fase). Si usa quindi un circuito chiamato *clock recovery*, che estrae il sincronismo dal segnale ricevuto; questo è usato come base per generare un segnale di clock che pilota un campionatore, facendolo agire esattamente a metà del periodo di cifra ($T/2$); per estrarre il clock si utilizzano i fronti di salita e discesa del segnale in ricezione.

Un test a livello fisico che si effettua sul ricevitore è chiamato CID (consecutive identical digits, ovvero cifre identiche consecutive)

Il problema del clock recovery è l'incapacità di estrarre il sincronismo da una sequenza di cifre uguali (tutti 1 o 0). Vi sono due strade per ovviare al problema:

- (1) usare una modulazione differente per codificare il segnale nel canale (per esempio HDB3 trasmette transizioni di potenza a prescindere dalla cifra codificata);
- (2) su fibra, dove si trasmette con la modulazione on/off, si usa uno *scrambler*.

La seconda strada prevede l'impiego dello scrambler, che genera una sequenza pseudo-casuale (non ci saranno più sequenze lunghe di cifre ripetute); esso dovrà avere le seguenti proprietà:

- equalizza la statistica del primo ordine (la *media* degli 1 e 0 trasmessi sia *uguale*);
- equalizza la statistica del secondo ordine (l'autocorrelazione degli 1 e degli 0 deve essere uguale, ovvero la sequenza deve avere *assenza di memoria* – essere non periodica).

Per realizzare uno scrambler si usa una successione LFSR (si veda la sezione §5.3); possiamo realizzare gli scrambler in due modi.

5.5.1. Scrambler auto-sincronizzante. Si prenda la sequenza $\{I_k\}$ dei dati da confondere, la si somma in modulo 2 al contenuto di una serie di celle di memoria, collegando in retroazione solo quelle identificate dal polinomio caratteristico che descrive la successione LFSR usata. Si ottiene la sequenza $\{U_k\}$ dei dati confusi.

ESEMPIO 5.4. Consideriamo la successione LFSR definita dal polinomio:

$$P(Y) = Y^3 + X + 1$$

Implementare uno scrambler descritto da $P(Y)$.

✓ Possiamo rappresentare il polinomio con la congruenza:

$$x_n \equiv x_{n-1} + x_{n-3} \pmod{2}$$

Infatti l'ordine della ricorrenza è 3 (ottenuto osservando il grado di $P(Y)$), sappiamo che $c_3 = c_0 = 1$ e infine i termini Y e Y^3 rappresentano rispettivamente x_{n-1} e x_{n-3} ; il periodo massimo della sequenza vale $2^3 - 1 = 7$ (sarebbe sicuramente massimo se $P(Y)$ fosse irriducibile).

Lo scrambler è implementato dal circuito ne la figura 5.5.1.

□

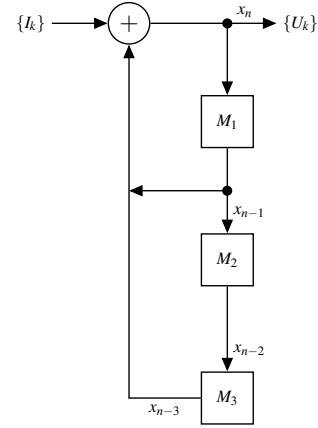


Figura 5.5.1. Scrambler auto-sincronizzante di ordine 3

Uno scrambler come quello realizzato nell'esempio, avrà periodo massimo 7, nel caso in cui l'ingresso sia costituito da una sequenza di cifre uguali.

Per effettuare l'operazione inversa dello scrambling, basta invertire il senso delle frecce che escono da $\{I_k\}$ e entrano in $\{U_k\}$ (grazie alle somme modulo 2, bisogna solamente invertire la direzione di ingresso e uscita); inoltre non è necessario conoscere il contenuto di M_1 , M_2 e M_3 , tuttavia saranno necessari 3 passi iniziali per inizializzare lo stato dello scrambler. In pratica sarà necessario conoscere unicamente il polinomio $P(Y)$.

5.5.2. Scrambler additivo.

Il funzionamento di questo scrambler è simile al precedente, con la differenza che l'ingresso viene spento (sostituito da zeri), e il circuito LFSR genera una sequenza casuale $\{R_k\}$ (come un generatore PRBS), che viene infine sommata all'ingresso per generare l'uscita. In questo caso è necessario conoscere anche l'inizializzazione delle celle M_i , oltre al polinomio $P(Y)$.

Lo scrambler additivo sopperisce a un difetto di quello auto-sincronizzante: quest'ultimo infatti propaga gli errori; un bit sbagliato ricevuto da uno scrambler auto-sincronizzante interrompe la sequenza, e sono necessari M passi per inizializzare nuovamente il registro a scorrimento.

Per effettuare il *descrambling* (operazione inversa dello scrambling), si effettua di nuovo l'inversione delle frecce collegate all'ingresso e all'uscita.

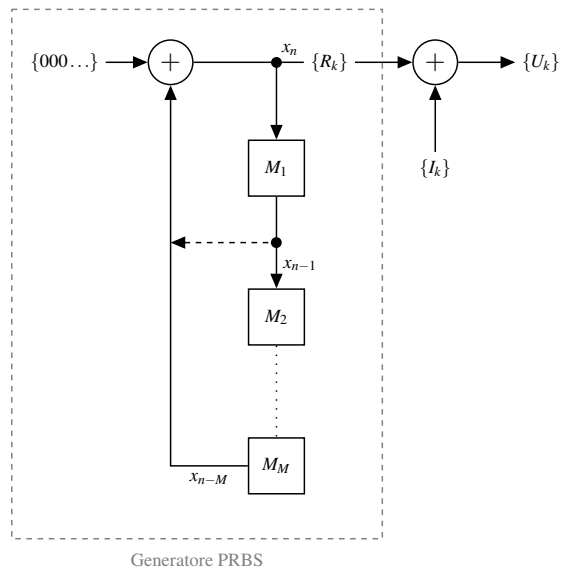


Figura 5.5.2. Scrambler additivo di ordine M

FATTO 5.1. *Tutti i dati trasmessi da un utente, prima di essere mappati nel canale trasmissivo tramite un protocollo di livello 2 o 1, passano attraverso un scrambler auto-sincronizzante con polinomio $P(Y) = Y^{43} + 1$; questa configurazione comporta una propagazione di eventuali errori, tuttavia garantisce maggiore sicurezza, impedendo che un attaccante manipoli l'uscita $\{U_k\}$ dello scrambler (sarebbe necessario conoscere lo stato del registro a scorrimento, è possibile ottenerlo tramite 2^{43} tentativi – circa 10^{12}).*

In tutti i sistemi di comunicazione si disaccoppiano i dati trasmessi dall'utente da quelli che circolano sul mezzo trasmissivo

CAPITOLO 6

RSA

6.1. Introduzione

Trattiamo l'algoritmo di cifratura a chiave pubblica Rivest-Shamir-Adleman (RSA). La peculiarità degli algoritmi a chiave pubblica è la condivisione di una chiave pubblica con chiunque voglia cifrare un messaggio, il quale potrà essere decifrato solo dalla chiave privata, custodita dal destinatario. La generazione della coppia di chiavi pubblica e privata è realizzata mediante una funzione unidirezionale (si veda la sezione 3.5.1); in questo modo, si ricava la chiave pubblica da quella privata. In questo modo chi entrerà in possesso della chiave pubblica non sarà in grado di ricavarne la chiave privata.

Nel caso dell'RSA, la funzione unidirezionale è la seguente. Prendiamo una coppia di primi p e q molto grandi, e scelti secondo un criterio (mostrato più avanti); calcoliamo $n = p \cdot q$, e a questo punto avremo un intero composto computazionalmente impossibile da fattorizzare. Il prodotto dei due primi costituisce una funzione invertibile, e se essi sono scelti correttamente è anche unidirezionale; il composto n sarà pubblico, e i primi p, q saranno mantenuti segreti.

6.2. Algoritmo

Prendiamo un composto $n = p \cdot q$, costituito da due primi p e q scelti adeguatamente; prendiamo un intero e , che chiamiamo esponente di cifratura, tale che $e \perp \varphi(n)$. Dato che n è costituito da due primi, vale $\varphi(n) = (p-1)(q-1)$.

Il messaggio in chiaro m e quello cifrato c sono entrambi elementi di \mathbb{Z}_n ; le funzioni di cifratura e decifratura sono definite come:

$$(6.2.1) \quad \begin{aligned} c &\equiv p^e \pmod{n} \\ m &\equiv c^d \pmod{n} \end{aligned}$$

L'intero d , chiamato esponente di decifratura, è legato a e nel modo seguente:

$$e \cdot d \equiv 1 \pmod{\varphi(n)} \implies \boxed{d \equiv e^{-1} \pmod{\varphi(n)}}$$

Dalla congruenza con 1 modulo $\varphi(n)$ e il prodotto degli esponenti di cifratura, si deduce che:

$$e \cdot d = 1 + k \cdot \varphi(n)$$

A questo punto dalla funzione di decifratura (6.2.1) otteniamo:

$$c^d = m^{e \cdot d} = m^{1+k \cdot \varphi(n)} \stackrel{*}{=} \boxed{m} \cdot 1^k$$

Nella relazione $*$ abbiamo usato (1.7.3); si è voluto mostrare che esiste una corrispondenza univoca tra m e c , per l'ipotesi che $e \perp \varphi(n)$ (esiste un solo d che sia inverso di e in modulo $\varphi(n)$, e vice versa).

La *chiave pubblica* è costituita da n, e mentre la *chiave privata* è d , insieme a p, q oppure a $\varphi(n)$.

ESEMPIO 6.1. Siano dati due primi $p_s = 3, q_s = 11$ e un intero $e_p = 7$, cifrare tramite RSA il messaggio $m = 19$.

All'interno di questo esempio, abbiamo usato i pedici \mathbb{P} e \mathbb{S} per indicare un elemento della chiave pubblica o della chiave privata

✓Calcoliamo il composto $n_{\mathbb{P}} = p \cdot q = 33$; calcoliamo inoltre $\varphi(n)_{\mathbb{S}} = \varphi(33) = (3-1)(11-1) = 2 \cdot 10 = 20$. A questo punto possiamo calcolare d :

$$\begin{aligned} d &\equiv e^{-1} \pmod{\varphi(n)} \\ d &\equiv e^{\varphi(n)-1} \pmod{\varphi(n)} \\ d &\equiv 7^7 \pmod{20} \\ \boxed{d_{\mathbb{S}} &\equiv 3 \pmod{20}} \end{aligned}$$

Nella precedente relazione abbiamo usato (1.7.4), e abbiamo calcolato $\varphi(\varphi(n)) = (2^2 - 2)(5 - 1) = 8$.

Cifriamo il messaggio $m = 19$ applicando (6.2.1):

$$c = 19^7 \bmod 33 = 13$$

Si noti che possiamo riottenere $m = 13^3 \bmod 33 = 19$. □

OSSERVAZIONE 6.1. Per effettuare la decifratura (operazione adibita alla chiave privata) è necessario l'esponente d , il quale a sua volta viene calcolato tramite $\varphi(n)$, che a sua volta deriva dai due primi p, q . Ebbene, la conoscenza dei primi p, q o del toziente del loro prodotto $\varphi(n)$, compromette nello stesso modo la sicurezza dell'algoritmo, e permette di calcolare d (la chiave privata).

ESEMPIO 6.2. Sia dato il composto $n = p \cdot q = 11413$, prodotto di due primi, e il suo toziente sia noto $\varphi(n) = (p-1)(q-1) = 11200$. Calcolare i due primi p e q .

✓Analizziamo la relazione $n - \varphi(n) + 1$, con le seguenti riscritture:

$$\begin{aligned} n - \varphi(n) + 1 &= p \cdot q - (p-1)(q-1) + 1 \\ 214 &= p + q \end{aligned}$$

Con la conoscenza della somma dei primi cercati, possiamo risolvere la seguente equazione:

$$\begin{aligned} (x-p)(x-q) &= 0 \\ x^2 - \overbrace{(p+q)}^{n-\varphi(n)+1} x + \overbrace{p \cdot q}^n &= 0 \\ x^2 - 214x + 11413 &= 0 \end{aligned}$$

Nella formula risolutiva deve valere $\Delta > 0$, altrimenti n e $\varphi(n)$ non sarebbero corretti

Otteniamo le seguenti soluzioni:

$$x = \frac{214 \pm \sqrt{214^2 - 4 \cdot 11413}}{2} = \{101, 113\}$$

Abbiamo ottenuto $p = 101$, $q = 113$. Avremmo ottenuto il risultato con una bassa complessità computazionale (risolvere un'equazione di secondo grado), anche nel caso di p e q molto grandi. □

6.3. Sicurezza di RSA

In teoria, l'RSA correttamente implementato è sicuro, fintanto che la scomposizione in fattori primi molto grandi rimane un problema difficile; tuttavia esistono delle insidie che influenzano la corretta realizzazione, di cui parleremo in questa sezione.

Debolezza sulle cifre dei primi in RSA

TEOREMA 6.1. Sia m il numero di cifre di $n = p \cdot q$ ($m = \lceil \log_{10}(p \cdot q) \rceil$); se si conoscono almeno le prime o le ultime $m/4$ cifre di uno dei due primi p o q , allora è possibile fattorizzare in modo efficiente n .

OSSERVAZIONE 6.2. Se n ha m cifre, e p e q sono confrontabili, allora essi avranno ciascuno $m/2$ cifre.

Il Teorema 6.1 può essere sfruttato se il metodo che il mittente utilizza per ricavare i primi p e q è noto e predicibile: provando per tentativi le cifre dei primi in un intorno di candidati, è possibile trovare le prime o le ultime $m/4$ cifre di p o q .

COROLLARIO 6.1. *Consideriamo una chiave pubblica RSA costituita da n , e , sia m il numero di cifre di n ; se si conoscono almeno le ultime $m/4$ cifre di d (esponente di decifratura, segreto) allora è possibile fattorizzare in modo efficiente d .*

OSSERVAZIONE 6.3. Dato che $d \equiv e^{-1} \pmod{\varphi(n)}$, esso avrà da 1 a m cifre, per il limite imposto dal modulo di $\varphi(n)$ (il toziente avrà al più il numero di cifre di n).

Abbiamo enunciato nelle sezioni precedenti che la scelta di p e q deve essere fatta prendendo due primi grandi (nella pratica si usano numero di 150 cifra, ottenendo un n di 300 cifre). per la scelta dell'esponente di cifratura, bisogna evitare invece un e troppo piccolo, il quale favorirebbe la velocità di cifratura ma sicuramente causerebbe la comparsa di un d molto grande. Nella scelta di e bisogna anche tenere a mente l'ipotesi che esso sia $e \perp \varphi(n)$.

Un valore per l'esponente di cifratura comunemente usato e comprovato è il seguente:

$$e_{\text{RSA}} = 2^{16} + 10 = 65537$$

Esso è un numero primo (è altamente improbabile che abbia fattori in comune con $p-1$ o $q-1$, possiamo verificarlo con (1.3.4)); inoltre è facile calcolare il suo valore, tramite square&multiply (si veda la sezione §1.6).

Un altro approccio consiste nello scegliere un d sufficientemente robusto (50 cifre sono sufficienti), e a partire da esso si calcola e effettuando l'inverso in modulo $\varphi(n)$.

6.4. Test di primalità

Normalmente testare la primalità di un numero e fattorizzarlo sono problemi differenti: è molto più semplice determinare che un numero sia primo o meno. Vi sono per esempio numeri molto grandi di cui si sa con certezza che sono composti, ma nessuno è stato in grado di determinare i loro fattori.

6.4.1. Test di Fermat. Richiamiamo il Teorema 1.3: $a \perp p \wedge p$ primo $\implies a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$; usando questo risultato, ci chiediamo se, preso un n intero da testare e un $a \perp n$ qualunque, valga

$$(6.4.1) \quad a^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$$

In caso di residuo esattamente 1, possiamo essere abbastanza sicuri che n sia un primo: lo chiameremo *pseudo-primo di Fermat rispetto alla base a* . Se il residuo della congruenza fosse diverso da 1, potremo affermare che n sia composto.

OSSERVAZIONE 6.4. Gli interi primi diventano rarefatti tanto più si cercano con un valore grande, quindi per $n \gg 1$ la probabilità che uno pseudo-primo di Fermat sia davvero un primo è elevata.

ESEMPIO 6.3. *Applicare il test di Fermat all'intero $n = 341$.*

✓Scegliamo una base che sia prima relativa rispetto a n ; dato che 341 è dispari, prendiamo $a = 2$. Applichiamo (6.4.1):

$$2^{340} \bmod 341 = 1$$

Possiamo affermare che 341 sia uno pseudo-primo di Fermat rispetto alla base 2; con un'analisi veloce tuttavia, otteniamo che $11 \nmid 341$ (infatti $341 = 11 \cdot 31$).

Si ricorda che è possibile testare che due interi siano primi relativi ($a \perp b$) tramite Euclide Esteso (1.3.4)

Gli pseudo-primi di Fermat rispetto alla base 2 sono detti anche *numeri di Poulet, Sarrus o Fermatians*

Ripetiamo il test per un'altra base, rispettando l'ipotesi che sia prima relativa rispetto a n ; scegliamo $a' = 3$, dal test si ottiene:

$$3^{340} \bmod 341 = 56 \neq 1$$

Dato che il candidato al test n non passa il test di Fermat per qualunque base a , possiamo affermare che si tratta di un composto. La condizione appena enunciata è rappresentata da:

$$\exists a \in \mathbb{Z} : a^{n-1} \not\equiv 1 \pmod{n} \implies n \text{ composto}$$

□

ESEMPIO 6.4. Applicare il test di Fermat all'intero $n = 561$.

✓Prendiamo la base $a = 2$, e applichiamo il test:

$$2^{560} \bmod 561 = 1$$

Possiamo quindi affermare che 561 è uno pseudo-primi di Fermat rispetto alla base 2; proviamo a usare un'altra base $a = 3$, in tal caso il test vale:

$$3^{560} \bmod 561 = 375$$

Da quest'ultimo risultato deduciamo che 561 è composto; tuttavia quello che abbiamo appena effettuato non era un test di Fermat! Infatti 3 è un fattore di 561 ($561 = 3 \cdot 11 \cdot 17$); inoltre l'intero 561 appare pseudo-primi per tutte le basi, ad eccezione dei suoi fattori. □

Numeri di Carmichael

DEFINIZIONE 6.1. Un intero pseudo-primi di Fermat rispetto ad ogni base, ad eccezione di quelle che sono i suoi fattori, è chiamato *pseudo-primi assoluto*, oppure *numero di Carmichael*.

OSSERVAZIONE 6.5. La distribuzione dei primi di Carmichael è estremamente rarefatta: il primo elemento è proprio 561, il secondo è 41041, ecc... Il numero $\mathcal{C}(x)$ dei primi di Carmichael da 0 a x è limitato superiormente nel modo seguente:

$$(6.4.2) \quad \mathcal{C}(x) < x \cdot e^{\frac{-k \cdot \ln(x) \cdot \ln(\ln(\ln x))}{\ln(\ln(x))}}$$

OSSERVAZIONE 6.6. Non esistono pseudo-primi che siano forti e assoluti; tuttavia, sia \mathbb{B} un insieme finito di basi, b un suo elemento, e $\#_{\mathbb{F}}(b)$ il numero di pseudo-primi forti rispetto a una base b , allora

$$\forall b \in \mathbb{B} : \#_{\mathbb{F}}(b) = \infty$$

6.4.2. Test del principio fondamentale. Richiamiamo il principio fondamentale (1.8.1); possiamo usare questo risultato per dedurre:

$$(6.4.3) \quad \exists a, b \in \mathbb{Z} : a^2 \equiv b^2 \pmod{n} \wedge a \not\equiv \pm b \pmod{n} \implies n \text{ composto}$$

Il test (6.4.3) ci fornisce anche la seguente informazione: il massimo comune divisore tra $a - b$ e n è un fattore non banale di n (diverso da 1 e da n), ovvero vale:

$$\text{MCD}(a - b, n) \neq \{1, n\}$$

Tramite la conoscenza di un fattore non banale, si può scomporre n e ridurre il problema alla fattorizzazione di un intero più piccolo.

6.4.3. Test di Miller-Rabin. Dato un candidato n da testare, esso viene prima testato con Fermat (6.4.1); se n si rivela uno pseudo-primo di Fermat, viene sottoposto al test del principio fondamentale (6.4.3); gli interi che passano anche il secondo test sono chiamati *pseudo-primi forti* (non sono sicuramente dei primi, ma lo sono con alta probabilità). Gli interi che non passano il test di Miller-Rabin sono sicuramente composti.

Se prendiamo il candidato $n = 561$ dell'Esempio 6.4, esso non passa il test di Miller-Rabin, quindi è uno pseudo-primo assoluto ma non uno pseudo-primo forte.

6.4.4. Densità dei primi. Vogliamo trovare un intero primo che abbia 100 cifre; la densità dei numeri primi intorno a 10^{100} può essere calcolata usando la quantità di primi dal Teorema 1.1:

$$\frac{\# \text{ primi}}{\# \text{ interi}} = \frac{\pi(10^{100})}{10^{100}} = \frac{1}{\ln(10^{100})} = \frac{1}{100 \cdot \ln(10)} \simeq \frac{1}{230}$$

Possiamo scrivere in generale, chiamando $\delta(x)$ la densità di primi intorno a x :

$$(6.4.4) \quad \delta(x) = \frac{1}{\ln(x)}$$

**Densità di interi
primi**

La densità calcolata attorno a 10^{100} si traduce nella seguente osservazione: prendendo a caso un intero di 10 cifre, la probabilità che sia primo è circa $1/230$.

6.5. Fattorizzazione

Esercizi

Equazioni congruenziali

ESERCIZIO 6.1. Risolvere la seguente equazione congruenziale:

$$28x \equiv 16 \pmod{412}$$

► *Esercizio:
equazione
congruenziale,
modulo composto*

SOLUZIONE 6.1. Procediamo calcolando $\text{MCD}(28, 412) = 4$; allora possiamo dividere per 4 tutti i termini dell'equazione, ottenendo

$$7x \equiv 4 \pmod{103}$$

L'equazione originale avrà 4 soluzioni, e la prima si ricava dall'equazione ridotta appena trovata:

$$x_0 \equiv 4 \cdot 7^{-1} \pmod{103}$$

Per calcolare l'inverso di 7 modulo 103 possiamo usare il Teorema 1.3 oppure l'algoritmo (1.3.4).

TEOREMA PICCOLO DI FERMAT

Il teorema afferma che, in questo caso, vale

$$7^{-1} \equiv 7^{101} \pmod{103}$$

dato che 103 è primo; adesso effettuiamo l'operazione di $7^{101} \bmod 103 = 59$ (possiamo usare l'algoritmo descritto nella sezione §1.6), da cui segue che

$$7^{-1} \equiv 59 \pmod{103}$$

ALGORITMO DI EUCLIDE ESTESO

Usiamo l'algoritmo per ottenere che $7 \perp 103$ e in tal caso anche 7^{-1} ; cominciamo a costruire la sequenza (1.3.2):

$$\begin{array}{ll} 103 = 14 \cdot 7 + 5 & q_1 = 14 \\ 7 = 1 \cdot 5 + 2 & q_2 = 1 \\ 5 = 2 \cdot 2 + \boxed{1} & q_3 = 2 \\ 2 = 2 \cdot 1 + 0 & q_4 = 1 \end{array}$$

Otteniamo che $\text{MCD}(7, 103) = 1$, e per quanto riguarda l'inverso costruiamo la sequenza (1.3.4):

$$\begin{array}{l} x_0 = 0 \\ x_1 = 1 \\ x_2 = -q_1 x_1 + x_0 = -14 \\ x_3 = -q_2 x_2 + x_1 = 15 \\ x_4 = -q_3 x_3 + x_2 = \boxed{-44} \end{array}$$

Segue che $-44 \bmod 103 = 59 = 7^{-1}$.

Ora che abbiamo l'inverso di 7 in modulo 103, siamo in grado di scrivere la soluzione dell'equazione ridotta:

$$x_0 \equiv 4 \cdot 59 \pmod{103}$$

$$x_0 \equiv 30 \pmod{103}$$

Le soluzioni successive saranno altre tre, a 103 di distanza da x_0 , esse inoltre saranno in modulo 412:

$$X = \{30, 133, 236, 339\} \pmod{412}$$

□

► *Esercizio:* **ESERCIZIO 6.2.** Trovare la congruenza equivalente al seguente sistema di congruenze:
sistema di 2 congruenze

$$\begin{cases} x \equiv 5 \pmod{11} \\ x \equiv 2 \pmod{20} \end{cases}$$

SOLUZIONE 6.2. Esisterà una sola congruenza equivalente, per il Teorema 1.2, infatti vale $11 \perp 20$; per riassumere le due congruenze in una sola, cerchiamo un valore x della successione $5 + k \cdot 11$ che sia anche congruente a 2 in modulo 20:

$$x = 5 + k \cdot 11 \equiv 2 \pmod{20}$$

Questo sarà vero per un valore di k pari a

$$k \cdot 11 \equiv 2 - 5 \pmod{20}$$

$$k \equiv -3 \cdot 11^{-1} \pmod{20}$$

Troviamo l'inverso di 11 in modulo 20 usando il Teorema 1.4:

$$11^{-1} \equiv 11^{\varphi(20)-1} \pmod{20}$$

sapendo che la funzione toziente di 20 vale $\varphi(20) = (2^2 - 2^1)(5^1 - 5^0) = 2 \cdot 4 = 8$, e che $11^{8-1} \pmod{20} = 11$, abbiamo la seguente congruenza per k :

$$k \equiv -33 \pmod{20}$$

$$k \equiv 7 \pmod{20}$$

Ritornando alla congruenza per x , si ottiene dalla precedente (con $k = 7$):

$$x = 5 + 77 \equiv 2 \pmod{20 \cdot 11}$$

$$x \equiv 82 \pmod{220}$$

dove abbiamo usato il Teorema 1.2 per comporre la congruenza in modulo 220. □

► *Esercizio:* **ESERCIZIO 6.3.** Trovare il valore della variabile x , che compare nel sistema di congruenze:
sistema di 3 congruenze

$$\begin{cases} x \equiv 1 \pmod{10} \\ x \equiv 2 \pmod{11} \\ x \equiv 0 \pmod{3} \end{cases}$$

SOLUZIONE 6.3. Mettiamo assieme la prima congruenza con la seconda, ottenendo:

$$x = 1 + k \cdot 10 \equiv 2 \pmod{11}$$

Risolviamo la precedente rispetto a k :

$$k \cdot 10 \equiv 1 \pmod{11}$$

Notando che $100 = 9 \cdot 11 + 1 \implies 100 \pmod{11} = 1$ possiamo affermare subito che $k = 10$; per il Teorema 1.2 scriviamo:

$$x \equiv 101 \pmod{110}$$

Unendo quanto ottenuto con la terza congruenza del sistema, si ha:

$$x = 101 + k \cdot 110 \equiv 0 \pmod{3}$$

Effettuando l'operazione di modulo 3 sui termini dell'equazione, avremo:

$$x = 2 + h \cdot 2 \equiv 0 \pmod{3}$$

Risolviamo la precedente rispetto ad h :

$$\begin{aligned} 2 \cdot h &\equiv -2 \pmod{3} \\ h &\equiv 1 \cdot 2^{-1} \pmod{3} \end{aligned}$$

Osserviamo che l'inverso di 2 in \mathbb{Z}_3 è proprio 2, infatti $2 \cdot 2 = 4 \pmod{3} = 1$; allora h è congruente a 2 in modulo 3, e sostituendo nella congruenza di x otteniamo:

$$\begin{aligned} x &\equiv 101 + 220 \pmod{110 \cdot 3} \\ x &\equiv 321 \pmod{330} \end{aligned}$$

Abbiamo trovato che x deve valere $321 + k \cdot 330$ per generare le tre congruenze esaminate. \square

Elementi primitivi

ESERCIZIO 6.4. Quanti elementi primitivi ha l'insieme \mathbb{Z}_{31}^* , e quali sono?

► *Esercizio:
elementi primitivi
di un insieme dei
residui*

SOLUZIONE 6.4. Gli elementi primitivi sono in numero $\varphi(31 - 1) = \varphi(30) = (2^1 - 2^0)(3^1 - 3^0)(5^1 - 5^0) = 1 \cdot 2 \cdot 4 = 8$ (appliciamo una delle formule a pagina 15 per calcolare il toziente $\varphi(\circ)$).

Per capire quali siano gli elementi primitivi, usiamo il test (1.9.4) con i quozienti $q_i = \{2, 3, 5\}$, per ciascun elemento di \mathbb{Z}_{31}^* (da 1 a 30); facendo le prove col test rispetto ai tre quozienti, si ottengono i seguenti elementi primitivi:

$$\alpha = \{3, 11, 12, 13, \dots\}$$

\square

ESERCIZIO 6.5. Trovare gli elementi primitivi dell'insieme \mathbb{Z}_{13}^*

► *Esercizio:
elementi primitivi
di un insieme dei
residui*

SOLUZIONE 6.5. Usiamo un secondo metodo, a partire da un elemento sicuramente primitivo $\alpha \in \mathbb{Z}_{13}^*$; proviamo con 2, sottoponendolo al test (1.9.4):

$$2^6 \equiv -1 \pmod{13}, \quad 2^4 \equiv 3 \pmod{13}$$

Allora $\alpha = 2$ è un elemento primitivo rispetto a $p = 13$; possiamo elevare α a tutte le potenze, per ottenere tutti gli elementi dell'insieme. Tuttavia solo le potenze positive pari restituiranno un altro elemento primitivo rispetto a p che è un quadrato:

$$\begin{array}{lll} \alpha^1 \equiv 2 \pmod{13} & \alpha^5 \equiv 6 \pmod{13} & \alpha^9 \equiv 5 \pmod{13} \\ \alpha^2 \equiv \boxed{4} \pmod{13} & \alpha^6 \equiv \boxed{12} \pmod{13} & \alpha^{10} \equiv \boxed{10} \pmod{13} \\ \alpha^3 \equiv 8 \pmod{13} & \alpha^7 \equiv 11 \pmod{13} & \alpha^{11} \equiv 7 \pmod{13} \\ \alpha^4 \equiv \boxed{3} \pmod{13} & \alpha^8 \equiv \boxed{9} \pmod{13} & \alpha^{12} \equiv \boxed{1} \pmod{13} \end{array}$$

Le radici primitive in \mathbb{Z}_{13}^* sono:

$$a_q = \{1, 3, 4, 9, 10, 12\}$$

Si noti che ci troviamo nel caso $p \equiv 1 \pmod{4}$, per cui se non esiste \sqrt{a} nemmeno $\sqrt{-a}$ è definita rispetto a p . \square

Scrambling

► *Esercizio:* **ESERCIZIO 6.6.** Si consideri uno scrambler auto-sincronizzante con polinomio caratteristico $P(Y) = Y^3 + Y + 1$; esso è inizializzato come $M_1M_2M_3 = 000$, in ingresso si ha una sequenza di soli 1 ($\{I_k\} = 111 \dots$); determinare la sequenza di uscita $\{U_k\}$.

SOLUZIONE 6.6. Innanzitutto cerchiamo il periodo della successione, analizzando la riducibilità del polinomio $P(Y)$; esso non è divisibile per Y , tuttavia può esserlo per $Y + 1$; dalla divisione tra polinomi si ottiene:

Si ricorda che le operazioni su questo polinomio sono tutte in modulo 2

$$\begin{array}{r} Y^3 + Y + 1 \quad (\div Y + 1) \\ Y^3 + Y^2 \\ \hline Y^2 + Y + 1 \\ Y^2 + Y \\ \hline 1 \end{array}$$

Ottenendo resto non nullo, confermiamo che il polinomio non può essere diviso nemmeno per $Y + 1$; in tal caso possiamo affermare che $P(Y)$ sia irriducibile, e quindi il periodo della sequenza pseudo-casuale generata sarà determinato dal suo grado $M = 3$ come $\pi = 2^3 - 1 = 7$.

Lo scrambler descritto dal polinomio $P(Y)$ può essere implementato col circuito nella figura 5.5.1; l'andamento della sua uscita si ricava riempiendo la seguente tabella (viene mostrato anche il descrambling della sequenza $\{U_k\}$ ottenuta):

k	$\overset{\bullet}{I}_k$	$\overset{\bullet}{M}_{1,k}$	$M_{2,k}$	$\overset{\bullet}{M}_{3,k}$	U_k
0	1	0	0	0	1
1	1	1	0	0	0
2	1	0	1	0	1
3	1	1	0	1	1
4	1	1	1	0	0
5	1	0	1	1	0
6	1	0	0	1	0
7	1	0	0	0	1

Tabella 6.5.1. Uscita dello scrambler

k	$\overset{\bullet}{U}_k$	$\overset{\bullet}{M}_{1,k}$	$M_{2,k}$	$\overset{\bullet}{M}_{3,k}$	I_k
0	1	1	0	0	0
1	0	1	1	0	1
2	1	0	1	1	0
3	1	1	0	1	1
4	0	1	1	0	1
5	0	0	1	1	1
6	0	0	0	1	1
7	1	0	0	0	1

Tabella 6.5.2. Uscita del descrambler

La tabella indica lo stato al passo k -esimo delle celle di memoria e dell'uscita; la consegna prevede di assegnare all'ingresso 1 in ciascun passo ($\forall k \in [0, \infty) : I_k = 1$). Le colonne con un cerchio pieno sopra l'etichetta di una colonna relativa a una cella di memoria, indica che essa è collegata in retroazione; in pratica l'uscita sarà influenzata dalla somma modulo 2 dell'ingresso con tutte le celle $\overset{\bullet}{M}_{i,k}$.

Possiamo notare che l'uscita ha proprio periodo 7; infatti lo stato delle celle di memoria al passo 7 è uguale a quello al passo 0.

Si noti che, nella tabella del descrambler, le tre celle di memoria sono state inizializzate in modo arbitrario ($M_1M_2M_3 = 100$), inoltre sono stati necessari 3 passi per avere la traduzione corretta della sequenza – lo scrambler auto-sincronizzante descritto da $P(Y)$ impiega $M = 3$ passi per raggiungere da solo la configurazione corretta. □

Parte 2

Protocolli e sistemi per la comunicazione sicura

APPENDICE A

Introduzione alla crittografia

Cenni storici. Il termine crittografia deriva dal greco $\kappa\rho\upsilon\pi\tau\acute{o}\varsigma$ (kryptós - segreto) e $\gamma\rho\alpha\varphi\acute{\eta}$ (grafi - scrittura); tra gli esempi di crittografia dal passato il più famoso è il cifrario di Cesare: si tratta di un cifrario a scorrimento ciclico, che consisteva nello scrivere le lettere dell'alfabeto su due anelli per poi ruotarne uno rispetto all'altro di $k = +3$ posizioni; in questo modo si ottiene $A \rightarrow D, B \rightarrow E, \dots Z \rightarrow C$.

Non si trattava di un cifrario robusto, ma veniva usato quando gli avversari dell'Impero Romano erano i Galli: si rivelò un metodo più che sufficiente.

Comunicazione sicura. In generale una comunicazione sicura tra due parti si svolge nel modo seguente: sia A il mittente del messaggio, B il destinatario, ed E un intruso che abbia accesso al canale di comunicazione. L'intruso può essere *passivo* (intercetta i messaggi senza modificarne il flusso) oppure *attivo* (modifica il contenuto dei messaggi).

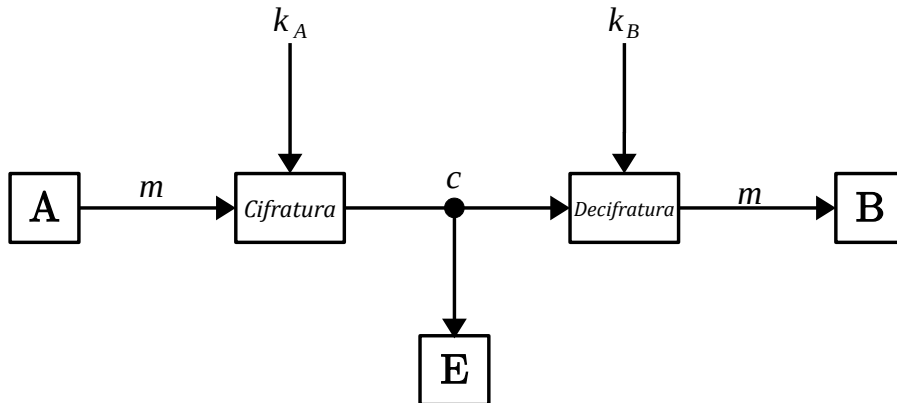


Figura A.0.1. Scenario fondamentale di comunicazione

A invia un *plaintext* m (testo in chiaro), lo codifica usando una funzione di cifratura (un algoritmo crittografico) che prende in ingresso anche la sua chiave k_A e ottiene un *ciphertext* c (messaggio cifrato); il messaggio c giunge a B , il quale usa una funzione di de-cifratura — tramite la sua chiave k_B , che è associata in qualche modo alla chiave k_A — per ottenere nuovamente il *plaintext* m inviato da A .

E potrebbe avere le seguenti intenzioni malevole rispetto alla comunicazione tra A e B :

- leggere il messaggio e comprenderne il contenuto;
- ottenere la chiave;
- corrompere il contenuto del messaggio;
- impersonare A senza che B se ne accorga.

L'intruso può mettere in atto i seguenti tipi di attacchi sull'algoritmo di cifratura usato nella comunicazione:

- CIPHERTEXT-ONLY: avendo a disposizione il testo cifrato, si cerca di ricavarne delle informazioni (attacco più comune);

- **KNOWN PLAINTEXT:** avendo a disposizione una coppia di testo cifrato e testo in chiaro corrispondente, si confrontano i due cercando di ottenere informazioni sulla chiave;
- **CHOSEN PLAINTEXT:** avendo a disposizione la stessa implementazione dell'algoritmo utilizzato per cifrare il messaggio, si scelgono dei testi in chiaro da cifrare e si osservano i testi cifrati in uscita, per cercare di ricavare informazioni sull'implementazione;
- **CHOSEN CIPHERTEXT:** avendo a disposizione la stessa implementazione dell'algoritmo utilizzato per decifrare il messaggio, si scelgono dei testi cifrati da decifrare e si osservano i testi in chiaro in uscita, per cercare di ricavare informazioni sull'implementazione.

Sicurezza e segretezza. Giulio Cesare basava la sicurezza del proprio algoritmo di cifratura sul fatto che i possibili avversari non ne conoscessero il funzionamento; il crittografo olandese Auguste Kerckhoffs, enunciò ne *'La cryptographie militaire'* (1883) il principio di Kerchoffs:

**Principio di
Kerchoffs**

La sicurezza di un sistema di cifratura è basata sulla segretezza della chiave (assumere sempre che il nemico conosca l'algoritmo di cifratura)

Da questa considerazione segue che la chiave utilizzata deve essere lunga, complessa, e in generale essere costruita per evitare che sia possibile indovinarla.

Claude Elwood Shannon, che scrisse cinque articoli che cambiarono la storia della comunicazione dell'informazione, tra cui un articolo sulla crittografia¹, espresse lo stesso principio in maniera molto incisiva con le parole "Il nemico conosce il sistema" (frase nota come massima di Shannon).

È interessante notare come si è passati dal fondare la sicurezza del sistema sulla segretezza dell'algoritmo alla segretezza della chiave; il passo successivo fu il sistema a *chiave pubblica*: gli algoritmi usati sono noti e accessibili a tutti, e una chiave del mittente (quella pubblica) è resa nota a tutti; tramite la chiave pubblica è possibile cifrare i messaggi, tuttavia la chiave per decifrare, associata alla chiave pubblica, è mantenuta riservata (si parla di *chiave privata*).

Fondamentale è il fatto che, non ostante esista una regola (formula o algoritmo) che permetta di associare la chiave pubblica a quella privata, per un intruso qualunque è impossibile, dal punto di vista computazionale, risalire alla chiave privata attraverso quella pubblica. Solo il mittente che possiede la chiave privata è in grado di computare questa associazione, poiché egli deve aver ricavato la chiave pubblica a partire da quella privata (l'operazione inversa risulta molto più difficile).

Algoritmi noti. Gli algoritmi a chiave simmetrica hanno una coppia di chiavi, per cifratura e de-cifratura, che sono entrambe segrete: DES, AES; si pone il problema di scambiare col destinatario la chiave di de-cifratura, utilizzando un canale sicuro.

Con i sistemi di cifratura a chiave pubblica questo problema non si pone, tuttavia si pone il nuovo problema dell'autenticità delle chiavi pubbliche in circolazione; è stato introdotto il meccanismo dei certificati, da associare alle chiavi pubbliche, per garantire la loro provenienza e affidabilità.

¹"*Communication Theory of Secrecy Systems*" (1949), Bell System Technical Journal

Numeri interi grandi. Lavoreremo prevalentemente con numeri interi (positivi e negativi) di elevato ordine di grandezza; ecco un esempio per effettuare un calcolo approssimato.

ESEMPIO A.1. *Calcolare in modo approssimato il valore di 2^{35} .*

✓Sfruttando le proprietà delle potenze e la costante informatica $2^{10} \sim 1000 = 10^3$, possiamo ragionare nel modo seguente:

$$2^{35} = 2^{30} \cdot 2^5 = (2^{10})^3 \cdot 32 \simeq (10^3)^3 \cdot 32 = \boxed{32 \times 10^9}$$

□

Trattare interi grandi è importante nell'ambito degli algoritmi di cifratura: prendendo l'algoritmo a chiave simmetrica DES come esempio, è ragionevole pensare che una chiave di 56 bit non sia sufficientemente sicura; usando le considerazioni fatte nell'Esempio A.1 otteniamo che $2^{56} \simeq 10^{16}$, ed essendo in possesso di una macchina in grado di ottenere una chiave in $1ns$, allora sarebbero necessari 27 mesi per ottenere questa chiave; ovviamente si può ridurre questo tempo aumentando il numero di macchine impiegate.

Al giorno d'oggi sono considerate sicure chiavi a 265 bit ($\sim 10^{77}$): per analizzare in modo esaustivo un simile spazio delle chiavi sarebbero necessari 10^{60} anni, nelle condizioni descritte in precedenza!

APPENDICE B

Campi di Galois

B.1. Costruzione con polinomi

Per comprendere la struttura e le proprietà dei campi di Galois, analizziamo il seguente esempio: sia dato l'insieme $\mathcal{GF}(4) = \{0, 1, \omega, \omega^2\}$, che chiamiamo “campo di Galois 4”; su questo insieme siano definite le seguenti proprietà, posto $\forall x \in \mathcal{GF}(4)$:

- (1) Ogni elemento del campo ha un inverso additivo: $x + 0 = x$;
- (2) $x + x = 0$;
- (3) Ogni elemento del campo ha un inverso moltiplicativo: $1 \cdot x = x$;
- (4) $\omega + 1 = \omega^2$;
- (5) somma e prodotto godono delle proprietà commutativa, associativa e distributiva.

Usando queste proprietà possiamo calcolare $\omega^2 + 1 \xrightarrow{4} \omega + 1 + 1 \xrightarrow{2} \omega$. Notiamo dalle proprietà enunciate, che con 0 indichiamo l'elemento neutro rispetto alla somma e con 1 l'elemento neutro rispetto al prodotto; rispetto alla somma inoltre, ogni elemento è l'inverso di sé stesso. L'inverso moltiplicativo invece, non è definito per 0, e vale 1 per l'elemento 1; negli altri casi, (ω e ω^2) si ha che l'inverso è ω^2 ; infatti si ricava che

$$\omega \cdot \omega^2 = \omega \cdot (\omega + 1) = \omega + \omega^2 = \omega + \omega + 1 = 1 \implies \omega \cdot \omega^2 = 1 \implies \boxed{\omega^{-1} = \omega^2}$$

Vale anche l'opposto, ovvero l'inverso di ω^2 è ω .

Possiamo enunciare la definizione di *campo*:

DEFINIZIONE B.1. Un campo è un insieme che abbia almeno una operazione di somma e una di prodotto, includa come minimo gli elementi 0 e 1, dove 0 è l'elemento neutro rispetto alla somma e 1 l'elemento neutro rispetto al prodotto; l'insieme deve soddisfare inoltre le proprietà (1), (3) e (5) tra quelle elencate in precedenza.

Campo

Questo implica che un insieme che soddisfa la definizione di campo sarà chiuso rispetto alle operazioni di somma e prodotto.

ESEMPIO B.1. L'insieme dei numeri reali forma un campo, infatti in esso sono contenuti 0 e 1, e per ciascun numero reale esiste un inverso definito all'interno dell'insieme.

L'insieme degli interi non è un campo, poiché l'inverso degli elementi non appartiene all'insieme.

Consideriamo l'insieme \mathbb{Z}_p con p un primo, e l'insieme \mathbb{Z}_n con n composto: il primo è un campo, mentre il secondo no, dato che i suoi elementi hanno inverso moltiplicativo solo se primi relativi rispetto a n .

Infine, l'insieme delle matrici 2×2 non forma un campo, perché non gode della proprietà commutativa e non tutti i suoi elementi sono invertibili. \square

Vale in generale la seguente proprietà, che lega i campi di Galois alla cardinalità degli insiemi di interi:

DEFINIZIONE B.2. Per ogni intero, esprimibile come potenza di un primo, esiste esattamente un solo campo finito di p^n elementi, chiamato campo di Galois p^n :

$$(B.1.1) \quad \forall p^n \exists! \mathcal{GF}(p^n) : |\mathcal{GF}(p^n)| = p^n$$

Possiamo domandarci se l'insieme dei residui modulo p^n (\mathbb{Z}_{p^n}) sia un campo di Galois: esso non lo è, perché solo i suoi elementi primi relativi rispetto a p^n ammettono inverso. Usiamo la seguente procedura, che permette di costruire in generale un insieme che sia un campo $\mathcal{GF}(p^n)$ tramite l'impiego dei polinomi (avremmo potuto rappresentare il campo di Galois tramite qualsiasi simbolo di qualunque alfabeto).

Usiamo l'insieme dei residui modulo p , e l'insieme di tutti i polinomi nella variabile x , di qualunque grado, con coefficienti modulo p :

$$\mathbb{Z}_p, \quad \mathbb{Z}_p[x] = \sum_{i=0}^n a_i x^i \quad \forall a_i \in \mathbb{Z}_p$$

prendiamo un polinomio $P(x)$ di grado n , con coefficienti a_i in \mathbb{Z}_p , che sia irriducibile (impossibile da scomporre nel prodotto di polinomi di grado inferiore).

ESEMPIO B.2. Prendiamo $p = 2$, $n = 2$. Scriviamo allora $P(x) = x^2 + 1 \pmod{2}$

Notiamo che $P(x)$ è riducibile, infatti $x^2 + 1 \equiv (x + 1) \cdot (x + 1) \pmod{2}$.

Invece, possiamo usare il polinomio irriducibile $x^2 + x + 1$ per definire $\mathcal{GF}(4)$. Per provare che un polinomio sia riducibile o meno è necessario provare la divisione tra polinomi, tenendo presente che le operazioni sono modulo p , provando tutti i possibili divisori fino al grado $n/2$. \square

OSSERVAZIONE B.1. Adesso definiamo il campo di Galois p^n nel modo seguente:

$$(B.1.2) \quad \mathcal{GF}(p^n) = \mathbb{Z}_p[x] \pmod{P(x)}$$

Possiamo osservare un'analogia con l'insieme dei resti interi modulo p :

primo p	irriducibile $P(x)$
\mathbb{Z}_p	$\mathbb{Z}_p[x] \pmod{P(x)}$
residui della divisione per un primo p	residui della divisione per un polinomio <u>irriducibile</u> $P(x)$ di grado n
cardinalità p	cardinalità p^n

Un generico polinomio ottenuto secondo questa costruzione è al massimo di grado $n - 1$, essendo il resto di una divisione per un polinomio di grado n ; possiamo scrivere il polinomio $P(x)$ nella seguente forma:

$$P(x) = a_{n-1} \cdot x^{n-1} + a_{n-2} \cdot x^{n-2} + \dots + a_1 \cdot x + a_0$$

I possibili polinomi di questa forma sono p^n , dato che ogni singolo coefficiente è in modulo p , e si hanno in totale n coefficienti.

OSSERVAZIONE B.2. Qualunque polinomio appartenente a un campo di Galois ammette inverso. Prendiamo dunque $a(x) \in \mathcal{GF}(p^n)$, definito come descritto in questa sezione, l'inverso di $a(x)$ è l'elemento $a^{-1}(x) \in \mathcal{GF}(p^n)$ tale che

$$a^{-1}(x) \cdot a(x) \equiv 1 \pmod{P(x)}$$

Questo vale se $\text{MCD}(a(x), P(x)) = 1$, ma ciò è sicuramente vero perché $P(x)$ è definito irriducibile; se avessimo un polinomio composto (riducibile) al posto di $P(x)$, avremmo un'analogia con l'insieme \mathbb{Z}_n (n composto), nel quale solo gli elementi primi relativi rispetto a n hanno l'inverso.

OSSERVAZIONE B.3. Per definire un campo di Galois p^n abbiamo bisogno di un polinomio irriducibile di grado n ; tuttavia vi è più di un solo polinomio irriducibile, fissato il grado. Si verifica che, usando polinomi irriducibili diversi dello stesso grado, si ottiene lo stesso campo di Galois da entrambi: esso è uno e uno solo, da (B.1.1). Dal punto di vista algebrico, si ottengono due campi *isomorfi*, ovvero le relazioni biunivoche tra elementi di uno stesso insieme coincidono con quelle dell'altro insieme.

DEFINIZIONE B.3. Un campo di Galois può essere definito tramite i resti $R(x)$ che derivano dalla divisione dei polinomi di qualunque grado $\mathbb{Z}_p[x]$ per il polinomio irriducibile $P(x)$:

$$(B.1.3) \quad \mathcal{GF}(p^n) \doteq R(x) \equiv \mathbb{Z}_p[x] \pmod{P(x)}$$

Campo di Galois

B.2. Polinomi come elementi generatori

Come visto nell'Osservazione B.1, il grado massimo di $R(x)$ sarà $n - 1$, mentre i possibili polinomi di grado fino a $n - 1$ sono in totale p^n . Nella stessa Osservazione, abbiamo mostrato un'analogia tra l'insieme dei residui modulo p e i campi di Galois definiti come residui della divisione dei polinomi con coefficienti modulo p , per $P(x)$. Possiamo estendere questa analogia al concetto di radice primitiva (1.9.1), ovvero anche in $\mathbb{Z}_p[x] \pmod{P(x)}$ ci saranno dei polinomi $g(x)$, chiamati elementi generatori, tali che

$$g(x)^n \equiv 1 \pmod{P(x)}$$

Il minimo n per il quale si verifica la precedente condizione è chiamato ordine (1.9.1) del campo, e vale:

$$(B.2.1) \quad \text{ORD}(g(x)) = p^n - 1$$

Questo polinomio $g(x)$ sarà una radice primitiva del campo; il numero di radici primitive di un campo sarà determinato dal toziente dell'ordine, come $\varphi(p^n - 1)$

\mathbb{Z}_p	$\mathbb{Z}_p[x] \pmod{P(x)}$
$\text{ORD}(\alpha) = p - 1$	$\text{ORD}(g(x)) = p^n - 1$
$\varphi(p - 1)$	$\varphi(p^n - 1)$

OSSERVAZIONE B.4. Chiediamoci se esiste un caso in cui tutti gli elementi di un insieme \mathbb{Z}_p sono anche elementi generatori; dovrebbe valere $\varphi(p - 1) = p - 1$, ma questo è impossibile, poiché q è primo e $q - 1$ risulta pari.

Nel campo $\mathbb{Z}_p[x] \pmod{P(x)}$ invece deve valere $\varphi(p^n - 1) = p^n - 1$, e ciò è possibile poiché $p^n - 1$ è primo per alcuni n , a patto che valga $p = 2$ (per esempio, con $p = 2$ e $n = 5$, vale $p^n - 1 = 31$ e il campo $\mathcal{GF}(2^5)$ avrà tutti gli elementi che sono anche generatori del campo).

ESEMPIO B.3. Consideriamo il campo $\mathcal{GF}(256)$, ovvero $p = 2$ e $n = 8$; possiamo definire questo campo a partire da qualunque polinomio irriducibile $P(x)$ di grado 8, con i coefficienti modulo 2: prendiamo

$$P(x) = x^8 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$

Gli elementi del campo, resti della divisione con $P(x)$, avranno grado massimo 7; possiamo scriverli come

$$R(x) = b_7 \cdot x^7 + b_6 \cdot x^6 + \dots + b_1 \cdot x + b_0$$

I coefficienti di un polinomio $R(x) \in \mathcal{GF}(256)$ sono 8 e sono tutti in modulo 2 (valgono 0 o 1): essi possono essere rappresentati da un Byte, e l'algoritmo dell'AES usa questa rappresentazione per effettuare operazioni tra polinomi, all'interno di $\mathcal{GF}(256)$.

Il polinomio di $\mathcal{GF}(256)$ mostrato in questo esempio è quello utilizzato nel cifrario AES

B.3. Cardinalità dei polinomi irriducibili

Abbiamo già concluso che il numero di elementi di un campo di Galois p^n è proprio p^n ($|\mathcal{GF}(p^n)| = p^n$); per definire il campo è necessario un polinomio irriducibile $P(x)$ di grado n coi coefficienti modulo p . Ci chiediamo il numero di tali polinomi; indichiamo allora il numero di polinomi irriducibili con coefficienti modulo p e grado n come:

**Numero di
polinomi
irriducibili**

$$(B.3.1) \quad N_{irr}(p, n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1, i \mid n}^n \mu\left(\frac{n}{i}\right) \cdot p^i$$

La funzione $\mu()$ si chiama funzione di Möbius ed è definita nel modo seguente:

**Funzione di
Möbius**

$$(B.3.2) \quad \mu(n) = \begin{cases} 0 & n = \text{prodotto di primi, almeno uno ripetuto} \\ 1 & n = 1 \\ (-1)^k & n = \text{prodotto di } k \text{ primi distinti} \end{cases}$$

ESEMPIO B.4. *Prendiamo i polinomi con coefficienti in modulo 2 e grado 6: determinare il numero di polinomi irriducibili tra di essi.*

✓Sappiamo che il numero totale di polinomi con queste caratteristiche è $p^n = 2^6 = 64$; usiamo la formula (B.3.1):

$$\begin{aligned} N_{irr}(2, 6) &= \frac{1}{6} (\mu(6) \cdot 2^1 + \mu(3) \cdot 2^2 + \mu(2) \cdot 2^3 + \mu(1) \cdot 2^6) \\ &= \frac{1}{6} (2 - 2^2 - 2^3 + 2^6) = \frac{54}{6} = \boxed{9} \end{aligned}$$

Abbiamo usato nella sommatoria i valori da 0 a 6 che dividono 6, ovvero $i \in \{1, 2, 3, 6\}$. □

Indice analitico

- Campo, 61
- Carmichael, funzione di, 39
- Carmichael, numeri di, 48
- Cinese, teorema del resto, 13
- Cinese, teorema del resto esteso, 13
- Densità di interi primi, 49
- Euclide, algoritmo di, 9
- Euclide, algoritmo esteso di, 9
- Eulero, teorema di, 15
- Fermat, teorema piccolo di, 14
- Galois, campo di, 63
- Gruppo algebrico, 16
- Kerchoffs, principio di, 58
- Möbius, funzione di, 64
- Numeri primi, teorema, 7
- Polinomi irriducibili, numero, 64
- Radice primitiva, 17
- Radice quadrata, 18
- RSA, debolezza sulle cifre dei primi, 46
- Successione LFSR, 40
- Test primitività, 18
- Toziente, 15