Appunti di Probabilità e Statistica

Lorenzo Prosseda

a.a. 2018–2019

GFDL

Copyright © 2019 Lorenzo Prosseda. Permission is granted to copy, distribute and/or modify this document under the terms of the GNU Free Documentation License, Version 1.3 or any later version published by the Free Software Foundation; with no Invariant Sections, no Front-Cover Texts, and no Back-Cover Texts. A copy of the license is included in the file called "LICENSE".

Indice

CAPITOLO 1

Teoria della Probabilità

1.1. Spazio dei campioni

Definizione 1.1.1. Sia dato un esperimento *aleatorio* (impossibile prevederne risultato), i cui risultati siano rappresentati da $\omega \in \Omega$; chiamiamo l'insieme Ω:

- spazio campionario;
- spazio dei campioni;
- spazio degli eventi <u>elementari</u>;
- spazio degli esiti;

diciamo inoltre che Ω è relativo all'esperimento effettuato, e chiamiamo i suoi elementi ω *eventi <u>elementari</u>*.

1.2. Eventi

Definizione 1.2.1. I sotto-insiemi dello spazio campionario e le loro combinazioni (in termini di eventi elementari) tramite operatori logici di unione ($\cup$), intersezione ($\cap$) e negazione ($^{\mathrm{C}}$) sono chiamati *eventi* (non sono più elementari).

Osservazione 1.2.2. Gli eventi *elementari* sono rappresentati da sottoinsiemi di Ω di cardinalità 1: un evento elementare E è definito come $\{\omega_E\} \in \Omega \wedge |\{\omega_E\}| = 1$.

Definizione 1.2.3. Gli eventi E_i possono essere rappresentati con sottoinsiemi dello spazio campionario Ω, dunque essi formano una *famiglia* o *collezione* di sottoinsiemi di Ω, che indichiamo con $\mathscr{F}$.

Questo implica che un evento che faccia parte di questa famiglia di sottoinsiemi contenga lo spazio campionario ($E \in \mathscr{F} \implies E \subset \Omega$).

Diremo che si è *verificato* un evento E nel contesto di un esperimento aleatorio, se almeno uno degli esiti è contenuto in esso ($\omega \in E$).

Definizione 1.2.4. Dati due eventi E ed F, sono definite le operazioni di unione $E \cup F$ (gli eventi elementari in E o in F) e intersezione $E \cap F$ (gli eventi elementari presenti sia in E che in F).

- Gli eventi che non contengono alcun evento elementare sono chiamati *eventi vuoti* e si indicano con $\emptyset$. Se due eventi non hanno eventi elementari in comune ($E \cap F = \emptyset$), essi si dicono *disgiunti*.
- Per ogni evento $E \in \mathscr{F}$ è definito il complementare E^{C} come l'insieme degli eventi elementari di $\mathscr{F}$ che non stanno in E.
- Se tutti gli eventi elementari di un evento E sono anche in un evento F, diremo che E *è contenuto* in F ($E \subset F$); se vale anche l'inverso $E \supset F$ allora diremo che i due eventi sono *uguali* ($E \equiv F$).

Indichiamo l'unione di n eventi con $\bigcup_{k=1}^{n} E_k$ e l'intersezione di n eventi con $\bigcap_{k=1}^{n} E_k$.

Definizione 1.2.5. Sia Ω uno spazio campionario e $\mathscr{F}$ una famiglia di sottoinsiemi di Ω; diremo che $\mathscr{F}$ è un'*algebra di sottoinsiemi* di Ω se soddisfa le seguenti proprietà:

(1) $\Omega \in \mathscr{F}$;
(2) $E \in \mathscr{F} \implies E^{\mathrm{C}} \coloneqq \Omega \setminus E \in \mathscr{F}$;
(3) $E, F \in \mathscr{F} \implies \{E \cup F\} \in \mathscr{F}$.

DEFINIZIONE 1.2.6. Sia Ω uno spazio campionario e $\mathscr{F}$ una famiglia di sottoinsiemi di Ω; diremo che $\mathscr{F}$ è una *σ-algebra di sottoinsiemi* di Ω se soddisfa le seguenti proprietà:

(1) $\Omega \in \mathscr{F}$;
(2) $E \in \mathscr{F} \implies E^{\mathrm{C}} \coloneqq \Omega \backslash E \in \mathscr{F}$;
(3) $E_1, E_2, \ldots \in \mathscr{F} \implies \bigcup_{k=1}^{+\infty} E_k \in \mathscr{F}$.

DEFINIZIONE 1.2.7. La coppia di spazio campionario e famiglia di suoi sottoinsiemi (σ-algebra) $(\Omega, \mathscr{F})$ è chiamata *spazio probabilizzabile*.

1.3. Spazio di probabilità

DEFINIZIONE 1.3.1. Sia dato uno spazio probabilizabile $(\Omega, \mathscr{F})$; chiamiamo *probabilità* su $(\Omega, \mathscr{F})$ una funzione P su $\mathscr{F}$ tale che:

(1) $\forall E \in \mathscr{F} \,:\, P(E) \geq 0$;
(2) $P(\Omega) = 1$;
(3) $\forall h, k \,:\, h \neq k \implies \forall E \in \mathscr{F} \,:\, E_h \cap E_k = 0$ (σ-additività o *additività completa*).

La terna $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ si chiama *spazio di probabilità* (impostazione assiomatica).

PROPRIETÀ 1.3.2. Sia $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ uno spazio di probabilità; allora vale:

(1) $P(\varnothing) = 0$ (*evento impossibile*);
(2) $\forall h, k \,:\, h \neq k \implies \forall E \in \mathscr{F} \,:\, E_h \cap E_k = \varnothing \implies P(\bigcup_{k=1}^{n} E_k) = \sum_{k=1}^{n} P(E_k)$ (*additività finita*).

DIMOSTRAZIONE.

(1) $\forall k \in [1, n] \,:\, E_k \coloneqq \varnothing \implies \bigcup_{k=1}^{+\infty} E_k = \varnothing$, inoltre $E_1, \ldots, E_n$ è una successione di eventi disgiunti a coppie; per l'assioma (3) della Definizione **??** vale inoltre:

$$P(\varnothing) = P\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} E_k\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(\varnothing).$$

(2) Se $\forall k \in [n+1, \infty) \,:\, E_k = \varnothing$, allora $E_1, E_2, \ldots$ è una successione di eventi disgiunti a coppie, e vale $\bigcup_{k=1}^{+\infty} E_k = \bigcup_{k=1}^{n} E_k$; per l'assioma (3) della Definizione **??** vale inoltre:

$$P(\bigcup_{k=1}^{n} E_k) = (\bigcup_{k=1}^{+\infty} E_k) = \sum_{k=1}^{n} E_k + \underbrace{\cancel{\sum_{k=n+1}^{+\infty} E_k}}_{E_k = \varnothing} = \sum_{k=1}^{n} E_k. \qquad \square$$

1.4. Definizione assiomatica di Probabilità

DEFINIZIONE 1.4.1. Se assegnamo a ogni evento in uno spazio di probabilità $E_k \in (\Omega, \mathscr{F}, P)$ un valore $x = P(E_k)$, chiamiamo probabilità dell'evento E; esso deve rispettare i seguenti assiomi, dedotti dalla Definizione **??**:

I) $0 \leq P(E_k) \leq 1$;
II) $P(\Omega) = 1$;
III) se gli eventi dello spazio di probabilità sono disgiunti a coppie otteniamo:

$$\forall n \in [1, \infty) \,:\, P(\bigcup_{k=1}^{n} E_k) = \sum_{k=1}^{n} P(E_k).$$

1.5. Proprietà della funzione Probabilità

PROPRIETÀ 1.5.1. Sia $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ uno spazio di probabilità; su di esso possiamo osservare le seguenti proprietà:

(1) $E \in \mathscr{F} \implies P(E^{\mathrm{C}}) = 1 - P(E)$ (*probabilità del complementare*);
(2) $E \in \mathscr{F} \implies P(E) \leq 1$;
(3) $E, F \in \mathscr{F} \wedge F \subset E \implies P(E \backslash F) = P(E) - P(F)$;
(4) $E, F \in \mathscr{F} \wedge F \subset E \implies P(F) \leq P(E)$ (*monotonia*);

(5) $E, F \in \mathscr{F} \implies P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$ (*probabilità dell'unione*).

Dimostrazione.

(1) Osserviamo che, per l'assioma (2) della Definizione **??**, vale $\Omega = E \cup E^{\mathrm{C}}$ e sapendo che un evento e il suo complementare sono disgiunti:
$$1 = P(\Omega) = P(E) + P(E^{\mathrm{C}}) \implies P(E^{\mathrm{C}}) = 1 - P(E).$$
(2) Dalla precedente considerazione sappiamo che $P(E) = 1 - P(E^{\mathrm{C}})$; aggiungendo l'assioma (1) della Definizione **??** ($P(E^{\mathrm{C}}) \geq 0$) segue che deve valere $P(E) \leq 1$.

(3) Vale $F \subset E \implies E = (E \backslash F) \cup F$ da cui deduciamo, per l'assioma (2) della Proprietà **??**, la seguente scrittura:
$$P(E) = P(E \backslash F) + P(F) \implies P(E \backslash F) = P(E) - P(F).$$
(4) Dalla precedente ricaviamo immediatamente $P(E) = P(E \backslash F) + P(F)$ e $P(F) = P(E) - P(E \backslash F)$; sapendo dall'assioma (1) della Definizione **??** che tutti e tre i termini dell'uguaglianza sono positivi o al più nulli, abbiamo necessariamente $P(F) \leq P(E)$.

(5) Scriviamo l'unione disgiunta dei due eventi E ed F nel modo seguente:
$$E \cup F = (E \cap F^{\mathrm{C}}) \cup (E \cap F) \cup (E^{\mathrm{C}} \cap F).$$
Per il punto (2) della Proprietà **??** la probabilità dell'unione vale:
$$P(E \cup F) = P(E \cap F^{\mathrm{C}}) + P(E \cap F) + P(E^{\mathrm{C}} \cap F).$$
Riscriviamo la precedente come:
$$\begin{aligned} P(E \cup F) + P(E \cap F) &= \overbrace{P(E \cap F^{\mathrm{C}}) + P(E \cup F)}^{P(E)} + \overbrace{P(E \cup F) + P(E^{\mathrm{C}} \cap F)}^{P(F)} \\ &= P(E) + P(F). \end{aligned}$$
Per ottenere le semplificazioni evidenziate con le graffe abbiamo usato le proprietà delle operazioni tra eventi (§ **??**). □

1.6. Spazi finiti e numerabili

Proprietà 1.6.1. Sia Ω uno spazio campionario <u>numerabile</u> e $\{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$ una numerazione dei suoi punti (eventi elementari); scegliamo come σ-algebra $\mathscr{F}$ l'insieme di tutti i sottoinsiemi (*insieme delle parti*) dello spazio campionario $\mathscr{P}(\Omega)$; si ha che:

(1) Ogni probabilità $P(\omega_k)$ di un evento $E_k = \{\omega_k\} \in \mathscr{F}$ su uno spazio probabilizzabile $(\Omega, \mathscr{F})$ individua una successione di numeri reali $p_1, p_2, \ldots$ che soddisfano la Proprietà **??** se scriviamo che $\forall k \in [1, \infty)\ \ P(\omega_k) = p_k$;

(2) Data una successione $p_1, p_2, \ldots$ che soddisfa la Proprietà **??** esiste un'unica probabilità su $(\Omega, \mathscr{F})$ tale che $P(\omega_k) = p_k$ per ogni k; essa è data da:
$$\forall E \subset \Omega \,:\, P(E) = \sum_{k \,:\, \omega_k \in E} p_k.$$

Osservazione 1.6.2. Nel caso di Ω spazio campionario <u>finito</u> e numerabile, la Proprietà **??** continua a valere, rispetto alla cardinalità di Ω.

1.7. Probabilità condizionata

Definizione 1.7.1. Sia dato uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ e un evento $F \in \mathscr{F}$ tale che $P(F) > 0$; preso un qualsiasi altro evento $E \in \mathscr{F}$, si chiama *probabilità condizionata* dell'evento E dato il verificarsi di F:

$$P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}. \tag{1.7.1}$$

1.8. Formula delle probabilità totali

DEFINIZIONE 1.8.1. Consideriamo uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ e una partizione finita $F_1, \dots, F_n \in \mathscr{F}$ di Ω; valga inoltre $\bigcup_{k=1}^n F_k = \Omega$ e infine $\forall h, k \in [1, n] : F_h \cap F_k = \emptyset \wedge P(F_k) > 0$. Allora per qualunque evento $E \in \mathscr{F}$ la sua probabilità è definita come:

$$P(E) = \sum_{k=1}^{n} P(E|F_k) \cdot P(F_k). \tag{1.8.1}$$

DIMOSTRAZIONE. Prendiamo l'evento $E \in \mathscr{F}$; dalle considerazioni fatte sopra abbiamo la seguente implicazione:

$$\Omega = \bigcup_{k=1}^{n} F_k \wedge E \subset \Omega \implies E = E \cap \Omega = \bigcup_{k=1}^{n} (E \cap F_k).$$

Inoltre, poiché gli eventi $F_1, \dots, F_n$ sono disgiunti a coppie, la precedente $\bigcup_{k=1}^n (E \cap F_k)$ è un'unione disgiunta e applicando il punto (2) della Proprietà **??** otteniamo:

$$P(E) = \sum_{k=1}^{n} P(E \cap F_k) = \sum_{k=1}^{n} P(E|F_k) \cdot P(F_k).$$

Abbiamo così ottenuto la formula (**??**). □

OSSERVAZIONE 1.8.2. La formula delle probabilità totali è utile quando le condizioni di preparazione di un esperimento aleatorio sono anch'esse casuali, e determinano una partizione dello spazio di probabilità dell'esperimento.

1.9. Formula di Bayes

DEFINIZIONE 1.9.1. Consideriamo uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ e una partizione finita $F_1, \dots, F_n \in \mathscr{F}$ di Ω tale che $\forall k \in [1, n] : P(F_k) > 0$; se abbiamo un evento $E \in \mathscr{F}$ per il quale $P(E) > 0$ allora otteniamo:

$$P(F_h|E) = \frac{P(E|F_h) \cdot P(F_h)}{\sum_{k=1}^n P(E|F_k) \cdot P(F_k)} \qquad h = 1, \dots, n. \tag{1.9.1}$$

DIMOSTRAZIONE. Usando (**??**) possiamo scrivere:

$$P(F_h|E) = \frac{P(F_h \cap E)}{P(E)} = \frac{P(E|F_h) \cdot P(F_h)}{P(E)}.$$

Applicando al denominatore (**??**) otteniamo proprio la scrittura (**??**). □

OSSERVAZIONE 1.9.2. La formula di Bayes è utile quando possediamo informazioni a posteriori su un esperimento aleatorio e vogliamo determinare le condizioni entro le quali si sia verificato un certo evento.

1.10. Formula di moltiplicazione

DEFINIZIONE 1.10.1. Consideriamo uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ e una successione di eventi al suo interno $E_1, \dots, E_n \in \mathscr{F}$, per i quali valga $P(\bigcap_{k=1}^{n-1} E_k) > 0$; allora possiamo scrivere:

$$P(E_1 \cap \dots \cap E_n) = P(E_1) \cdot P(E_2|E_1) \cdot P(E_3|E_2 \cap E_1) \cdot \ldots \cdot P(E_n|E_1 \cap \dots \cap E_{n-1}). \tag{1.10.1}$$

DIMOSTRAZIONE. Dato che $(E_1 \cap \dots \cap E_{n-1}) \subset (E_1 \cap \dots \cap E_{n-2}) \subset \dots \subset E_1$ usando il punto (4) della Proprietà **??** vale:

$$0 < P(E_1 \cap \dots \cap E_{n-1}) \leq P(E_1 \cap \dots \cap E_{n-2}) \leq \dots \leq P(E_1).$$

Otteniamo quindi il seguente prodotto:

$$\begin{aligned} P(E_1 \cap \cdots \cap E_n) &= P(E_1) \cdot \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_1)} \cdot \frac{P(E_1 \cap E_2 \cap E_3)}{P(E_1 \cap E_2)} \cdot \ldots \cdot \frac{P(E_1 \cap \cdots \cap E_n)}{P(E_1 \cap \cdots \cap E_{n-1})} \\ &= P(E_1) \cdot P(E_2|E_1) \cdot P(E_3|E_2 \cap E_1) \cdot \ldots \cdot P(E_n|E_1 \cap \cdots \cap E_{n-1}). \end{aligned}$$

Si noti che abbiamo usato (**??**) per riscrivere il prodotto precedente, ottenendo (**??**). □

1.11. Eventi indipendenti

DEFINIZIONE 1.11.1. Sia $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ uno spazio di probabilità; gli eventi $E, F \in \mathscr{F}$ sono *indipendenti* se vale:

$$P(E \cup F) = P(E) \cdot P(F).$$

OSSERVAZIONE 1.11.2. Se due eventi E ed F, presi dallo stesso spazio di probabilità, sono indipendenti allora valgono le seguenti uguaglianze:

- $P(E|F) = P(E)$;
- $P(F|E) = P(F)$.

DEFINIZIONE 1.11.3. Sia $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ uno spazio di probabilità; diciamo che gli eventi $E_1, \ldots, E_n$ sono *indipendenti* se comunque preso un sottoinsieme $\{h_1, \ldots, h_k\} \subset \{1, \ldots, n\}$ con $k \geq 2$ vale la seguente uguaglianza:

$$P(E_{h_1} \cap \cdots \cap E_{h_k}) = P(E_{h_1}) \cdot \ldots \cdot P(E_{h_k}).$$

OSSERVAZIONE 1.11.4. Per testare l'indipendenza di m eventi, sarà necessario provare $2^m - m - 1$ uguaglianze (in dipendenza dalle possibili combinazioni di intersezioni tra gli eventi da testare).

DEFINIZIONE 1.11.5. Preso uno spazio di probabilità e considerata una successione dei suoi eventi, diremo che essa è costituita da eventi indipendenti se, comunque scelto un sottoinsieme finito di eventi dalla successione, esso è costituito da eventi indipendenti.

DEFINIZIONE 1.11.6. Consideriamo uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathscr{F}, P)$, una successione di eventi $A_1, \ldots, A_n$ e un evento F tale che $P(F) > 0$; gli eventi della successione si dicono *condizionatamente indipendenti* dato F se essi sono indipendenti rispetto alla probabilità $P(F)$.

1.12. Affidabilità dei sistemi

DEFINIZIONE 1.12.1. La probabilità che un componente di un sistema non si guasti durante il periodo di tempo in cui deve operare è detta *affidabilità* del componente; essa viene espressa rispetto all'interazione che i componenti hanno tra loro:

- **serie**: per garantire il funzionamento del sistema tutti i componenti collegati in serie devono funzionare correttamente; in questo caso vale

  $$r = r_1 \cdot \ldots \cdot r_k,$$

  per un sistema con k componenti in serie;
- **parallelo**: per garantire il funzionamento del sistema basta che almeno un componente funzioni correttamente; in questo caso vale

  $$r = 1 - (1 - r_1) \cdot \ldots \cdot (1 - r_k),$$

  per un sistema con k componenti in parallelo.

In entrambi i casi appena mostrati, r_i rappresenta l'affidabilità dell'i-esimo componente del sistema.

OSSERVAZIONE 1.12.2. Per analizzare problemi sull'affidabilità è conveniente scomporre un sistema complesso in sottosistemi che abbiano solo componenti in serie o solo in parallelo.

1.13. Prove di Bernoulli

DEFINIZIONE 1.13.1. Siano $n \in \mathbb{N}$ e $p \in (0,\,1)$; consideriamo il seguente spazio campionario:

$$\Omega \coloneqq \{(a_1,\,\dots,\,a_n)\,:\,a_k \in \{0,\,1\},\,k \in [1,\,n]\},$$

la σ-algebra $\mathscr{F} = \mathscr{P}(\Omega)$ e la funzione di probabilità:

$$\forall (a_1,\,\dots,\,a_n) \in \Omega\,:\,P(\{a_1,\,\dots,\,a_n\}) = p^{\left[\sum_{k=1}^n a_k\right]} \cdot (1-p)^{\left[n-\sum_{k=1}^n a_k\right]};$$

la terna $(\Omega,\,\mathscr{F},\,P)$ si chiama *spazio di probabilità di Bernoulli* oppure spazio di probabilità di n prove di Bernoulli.

PROPRIETÀ 1.13.2. Consideriamo uno spazio di probabilità di Bernoulli nel quale la probabilità di successo della singola prova è $p \in (0,\,1)$; la probabilità di osservare $k \leq n$ successi in una sequenza di $n \geq 1$ prove di Bernoulli in questo spazio è data da:

$$\binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}. \tag{1.13.1}$$

DIMOSTRAZIONE. Sia $(\Omega,\,\mathscr{F},\,P)$ uno spazio di probabilità di n prove Bernoulli e $B_k \in \mathscr{F}$ l'evento 'osserviamo k successi in n prove', ovvero:

$$B_k = \left\{(a_1,\,\dots,\,a_n) \in \Omega\,:\,\sum_{h=1}^n a_h = k\right\};$$

la probabilità di questo evento è definita come:

$$P(B_k) = \sum_{\omega \in B_k} P(\{\omega\}) = \sum_{\omega \in B_k} p^k(1-p)^{n-k} = |B_k|p^k(1-p)^{n-k}.$$

Osservando che $|B_k| = \binom{n}{k}$ (tutte le stringhe di n bit contenenti k zeri e $n-k$ uni) otteniamo l'equazione (**??**) ☐

OSSERVAZIONE 1.13.3. Gli eventi B_k che fissano k successi in n prove di Bernoulli hanno delle probabilità che corrispondono al modello binomiale p_k; possiamo affermare che, preso lo spazio campionario $\hat{\Omega} = \{0,\,\dots,\,n\}$ dell'esperimento che considera k successi in n prove, lo spazio di probabilità di Bernoulli induce su $\hat{\Omega}$ un modello binomiale di parametri n e p.

1.14. Serie geometrica

DEFINIZIONE 1.14.1 (Serie). Data una successione $\{a_n\}$, se sommiamo gli infiniti termini otteniamo una *serie*, definita come $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ (serie di a con n da 0 a infinito).

Si dice somma parziale n-esima di una serie $s_n = \sum_{i=0}^{\infty} a_i\, n \in \mathbb{N}$ (la serie $\sum_{i=0}^{\infty} a_n$ converge, diverge o è irregolare se la successione delle sue somme parziali converge, diverge o è irregolare).

Si dice somma di una serie il limite, se esiste finito, della successione delle sue somme parziali: $\lim_{n\to\infty} s_n = s$

Condizione <u>necessaria</u> (non sufficiente) affinché una serie converga è che il suo termine generale (a_n) tenda a 0

DEFINIZIONE 1.14.2 (Serie geometrica). Chiamiamo *geometrica* la serie col seguente termine generale:

$$\sum_{i=0}^n q^i \cdot \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \qquad q \neq 1.$$

La somma della serie con ragione $q \in (0,\,1)$ vale:

$$\sum_{i=0}^n q^i = \begin{cases} \frac{1}{1-q} & \text{se } |q| < 1; \\ +\infty & \text{se } q \geq 1; \\ \text{indeterminata} & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

CAPITOLO 2

Variabili Aleatorie

CAPITOLO 3

Vettori Aleatori

CAPITOLO 4

Distribuzioni notevoli