МИНИСТЕРСТВО ТРАНСПОРТА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное
образовательное
учреждение высшего образования
«Российский университет транспорта»

Кафедра «Высшая математика»

Е.В.Антонова, Е.Б. Арутюнян

Математика для самостоятельного изучения
Часть 5
Интегральное исчисление функций одной переменной
Функции нескольких переменных

Учебно-методическое пособие
для самостоятельной работы

Москва – 2021

МИНИСТЕРСТВО ТРАНСПОРТА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное
образовательное
учреждение высшего образования
«Российский университет транспорта»

Кафедра «Высшая математика»

Е.В.Антонова, Е.Б. Арутюнян

Математика для самостоятельного изучения
Часть 5
Интегральное исчисление функций одной переменной
Функции нескольких переменных

Учебно-методическое пособие
для студентов инженерных и информационных
направлений и специальностей

Москва – 2021

УДК 512
А 79

Антонова Е.В., Арутюнян Е.Б. Математика для самостоятельного изучения. Часть 5. Интегральное исчисление функций одной переменной. Функции нескольких переменных: Учебно-методическое пособие – М.: РУТ (МИИТ), 2021.
– 129 с.

Учебно-методическое пособие предназначено для организации самостоятельной работы студентов инженерных и информационных направлений и специальностей при изучении соответствующих разделов курса «Математика». Каждый раздел содержит изложение всех основных понятий и утверждений курса и вопросы для самоконтроля, а также набор заданий для индивидуальной самостоятельной работы (30 вариантов). Для каждого типа заданий приведен образец решения с подробными пояснениями. Пользуясь пособием, студент может самостоятельно ознакомиться с данным курсом. Пособие соответствует программе курсов «Математика» для студентов указанных направлений и специальностей.

Рецензент – заведующий кафедрой «Автоматика, телемеханика и связь на железнодорожном транспорте» РУТ (МИИТ) к.т.н., доцент А.А.Антонов

Часть V. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

1. Неопределенный интеграл

1.1.Первообразная и неопределенный интеграл

Определение 1. Функция $F(x)$ называется ***первообразной*** функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$, если на этом отрезке $f(x)=F'(x)$.

Примеры. 1)Поскольку $\left(\frac{x^4}{4}\right)'=x^3$ при любом x, то функция $\frac{x^4}{4}$ – первообразная функции x^3 на всей числовой прямой.

Проверьте, что функция $F(x)=x+7$ *является первообразной функции* $f(x)=1$ *при всех* x.

2)Поскольку $\left(\frac{-\cos 3x}{3}\right)'=\sin 3x$ при любом x, то функция $\frac{-\cos 3x}{3}$ – первообразная функции $\sin 3x$ на всей числовой прямой.

Проверьте, что функция $F(x)=\frac{-\cos 3x}{3}-13$ *является первообразной функции* $f(x)=\sin 3x$ *при всех* x.

3)Поскольку $(\ln x)'=\frac{1}{x}$ при $x>0$, то функция $\ln x$ – первообразная функции $\frac{1}{x}$ при $x>0$. Поскольку $(\ln(-x))'=\frac{1}{x}$

при $x<0$, то функция $\ln(-x)$ – первообразная функции $\frac{1}{x}$ при $x<0$. Отсюда получаем, что при всех $x\neq 0$ функция $\ln|x|$ – первообразная функции $\frac{1}{x}$.

Проверьте, что функция $F(x)=\frac{1}{x}+\sqrt{2}$ является первообразной функции $f(x)=\ln(3x)$ при $x>0$. •

Теорема 1. Если функция $f(x)$ имеет на отрезке $[a;b]$ первообразную $F(x)$, то она имеет на этом отрезке бесконечно много первообразных, причем любую из них можно записать в виде $F(x)+C$, где C – произвольная константа.

Доказательство. ▼ Поскольку $(F(x)+C)'=F'(x)=f(x)$, то любая функция вида $F(x)+C$ – первообразная функции $f(x)$. С другой стороны, если какая-нибудь функция $G(x)$ – первообразная функции $f(x)$, то $F'(x)=G'(x)$ на отрезке $[a;b]$. А тогда эти функции отличаются на константу: $G(x)=F(x)+C$. Теорема доказана ▲.

Определение 2. Множество всех первообразных функции $f(x)$ на данном отрезке называется ***неопределенным интегралом*** этой функции и обозначается $\int f(x)dx$.

Если $F(x)$ – одна из первообразных функции $f(x)$, то пишут $\int f(x)dx = F(x)+C$.

Объясните, почему $\int dx = x + C$; $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$; $\int xdx = \frac{x^2}{2} + C$.

Из определения сразу получаются два свойства неопределенного интеграла.

Теорема 2. $d(\int f(x)dx) = f(x)dx$.

Доказательство. ▼ Пусть $\int f(x)dx$ = F(x)+C. Тогда $d(\int f(x)dx) = d(\mathrm{F}(x)+\mathrm{C}) = \mathrm{F}'(x)dx = f(x)dx$, ч.т.д. ▲

Теорема 3. $\int dF(x)$ = F(x)+C.

Доказательство. ▼ $\int dF(x) = \int F'(x)dx$. Поскольку (F(x)+C)′= F′(x), то $\int dF(x)$ = F(x)+C, ч.т.д. ▲

1.2. Таблица неопределенных интегралов. Свойство линейности

Используя таблицу производных, составим следующую таблицу неопределенных интегралов.

1. $\int dx = x + \mathrm{C}$	2. $\int x^k dx = \frac{x^{k+1}}{k+1} + \mathrm{C}$, *если* $k \neq -1$
3. $\int \frac{dx}{x} = \ln\|x\| + \mathrm{C}$	4. $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + \mathrm{C}$
5. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left\|\frac{x-a}{x+a}\right\| + \mathrm{C}$	6. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + \mathrm{C}$
7. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left\|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right\| + \mathrm{C}$	8. $\int \sin x dx = -\cos x + \mathrm{C}$
9. $\int \cos x dx = \sin x + \mathrm{C}$	10. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg} x + \mathrm{C}$
11. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg} x + \mathrm{C}$	12. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + \mathrm{C}$
13. $\int shx dx = \mathrm{ch} x + \mathrm{C}$	14. $\int chx dx = \mathrm{sh} x + \mathrm{C}$

15. $\int \frac{dx}{ch^2 x}$ =th$x$+C	16. $\int \frac{dx}{sh^2 x}$ = –cth$x$+C

Проверьте справедливость каждого равенства в таблице, находя производную правой части.

Пользуясь таблицей интегралов, найдите следующие неопределенные интегралы:

1) $\int dx$ *; 2)* $\int x^3 dx$ *; 3)* $\int \frac{dx}{x}$ *; 4)* $\int 3^x dx$ *; 5)* $\int \sin x dx$ *;*

6) $\int \cos x dx$ *; 7)* $\int \frac{dx}{\sin^2 x}$ *; 8)* $\int \frac{dx}{\cos^2 x}$ *; 9)* $\int \frac{dx}{x^2 - 9}$ *;*

10) $\int \frac{dx}{x^2 + 9}$ *; 11)* $\int \frac{dx}{\sqrt{9 - x^2}}$ *; 12)* $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 9}}$.

Примеры. 1) Найдем $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \int x^{-\frac{1}{3}} dx$. Используем формулу (2) для $k = -\frac{1}{3}$: $\int x^{-\frac{1}{3}} dx = \frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1}$ +C= $\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}$ +C.

2) Найдем $\int \frac{dx}{x^2 + 16}$. Используем формулу (4) для a=4:

$$\int \frac{dx}{x^2 + 16} = \frac{1}{4} arctg \frac{x}{4} + C.$$

3) Найдем $\int \frac{dx}{x^2 - 16}$. Используем формулу (5) для a=4:

$$\int \frac{dx}{x^2 - 16} = \frac{1}{2 \cdot 4} \ln\left|\frac{x-4}{x+4}\right| + C = \frac{1}{8} \ln\left|\frac{x-4}{x+4}\right| + C.$$

4) Найдем $\int\frac{dx}{\sqrt{3-x^2}}$. Используем формулу (6) для $a=\sqrt{3}$:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{3-x^2}}=\arcsin\frac{x}{\sqrt{3}}+\text{C}.$$

5) Найдем $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-3}}$. Используем формулу (7) для $a=\sqrt{3}$:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-3}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2-3}\right|+\text{C}. \bullet$$

Следующее свойство неопределенного интеграла позволяет вычислять интегралы от линейных комбинаций табличных функций.

<u>Свойство линейности</u>. Если α, β – числа, $f(x)$ и $g(x)$ – функции, имеющие первообразные, то

$$\int(\alpha f(x)+\beta g(x))dx=\alpha\int f(x)dx+\beta\int g(x)dx.$$

Докажите свойство линейности, продифференцировав правую часть равенства.

<u>Примеры</u>. 1)Свойство линейности позволяет записать $\int\frac{x\sqrt{x}+x^2-5}{x^2\sqrt{x}}dx$ в виде $\int\frac{x\sqrt{x}}{x^2\sqrt{x}}dx+\int\frac{x^2}{x^2\sqrt{x}}dx-5\int\frac{1}{x^2\sqrt{x}}dx=$

$$=\int\frac{dx}{x}+\int x^{-\frac{1}{2}}dx-5\int x^{-\frac{5}{2}}dx=\ln|x|+\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}-5\frac{x^{-\frac{5}{2}+1}}{-\frac{5}{2}+1}+\text{C}=$$

$$=\ln|x|+2\sqrt{x}+\frac{10}{3x\sqrt{x}}+\text{C}.$$

2) $$\int\frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}=\int\frac{(\sin^2 x+\cos^2 x)dx}{\sin^2 x\cos^2 x}=\int\frac{\sin^2 xdx}{\sin^2 x\cos^2 x}+$$

$$+\int\frac{\cos^2 x dx}{\sin^2 x\cos^2 x}=\int\frac{dx}{\cos^2 x}+\int\frac{dx}{\sin^2 x}$$ =tg$x$–ctg$x$+C.•

2. Методы интегрирования

2.1. Замена переменной

Теорема 1. Пусть F(x) – первообразная функции f(x) на отрезке [a;b], а x=φ(t) – непрерывная на отрезке [α;β] и дифференцируемая на интервале (α;β) функция, принимающая значения на отрезке [a;b]. Тогда функция F(φ(t)) является первообразной функции f(φ(t))φ′(t) на отрезке [α;β].

Доказательство. ▼ По теореме о производной сложной функции (F(φ(t)))′= F′(φ(t))φ′(t). Поскольку F′(x)=f(x), получаем (F(φ(t)))′=f(φ(t))φ′(t), ч.т.д. ▲

Из теоремы 1 получаем: если ∫f(x)dx=F(x)+C, то $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = F(\varphi(x))+C$.

Объясните это равенство.

Примеры. 1) $$\int\frac{e^{arctgx}}{1+x^2}dx=\begin{bmatrix} t=arctgx \\ dt=\dfrac{1}{1+x^2}dx \\ dx=(1+x^2)dt \end{bmatrix}=$$

$$=\int\frac{e^t(1+x^2)dt}{1+x^2}=\int e^t dt=e^t+C=e^{arctgx}+C.$$

$$2)\int\frac{x^2}{x^6+9}dx=\left[\begin{array}{c} t=x^3 \\ dt=3x^2dx \\ dx=\dfrac{dt}{3x^2}\end{array}\right]=\int\frac{x^2}{t^2+9}\cdot\frac{dt}{3x^2}=\frac{1}{3}\int\frac{dt}{t^2+9}=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}arctg\frac{t}{3}+C=\frac{1}{9}\mathrm{arctg}\frac{x^3}{3}+C.\bullet$$

Из теоремы 1 вытекает так называемая теорема о линейной замене.

Теорема 2. Пусть $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$ и $a\neq 0$. Тогда функция $\frac{1}{a}F(ax+b)$ является первообразной функции $f(ax+b)$.

Докажите это утверждение, используя теорему 1.

Примеры. 1) $\int\frac{dx}{5x-3}=\frac{1}{5}\ln|5x-3|$, так как $\int\frac{dx}{x}=\ln|x|+C$.

2) $\int\frac{dx}{x-a}=\ln|x-a|+C.\bullet$

2.2. Интегрирование по частям

Теорема 3. Если функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы на отрезке $[a;b]$, то

$$\int u(x)dv(x)=u(x)v(x)-\int v(x)du(x).$$

Эта формула называется ***формулой интегрирования по частям.***

Доказательство. ▼ По формуле дифференциала произведения получаем: $d(uv)=vdu+udv$, откуда

$\int d(uv)=\int vdu+\int udv$, то есть $uv=\int vdu+\int udv$,

$\int udv = uv - \int vdu$, ч.т.д. ▲

Примеры. 1) Рассмотрим $\int x\sin xdx$. Пусть $x=u$, $du=dx$, тогда $\sin xdx=dv$, значит, $v=-\cos x$ (нам нужна только одна функция v(x)). Запишем это следующим образом:

$$\int x\sin xdx = \begin{bmatrix} u = x \\ du = dx \\ dv = \sin xdx \\ v = -\cos x \end{bmatrix} = -x\cos x - \int(-\cos x)dx =$$

$$= -x\cos x + \int \cos xdx = -x\cos x + \sin x + C .$$

2) Рассмотрим $\int \ln xdx$.

$$\int \ln xdx = \begin{bmatrix} u = \ln x \\ du = \frac{1}{x}dx \\ dv = dx \\ v = x \end{bmatrix} = x\ln x - \int x \cdot \frac{1}{x}dx = x\ln x - \int dx =$$

$$= x\ln x - x + C .$$ •

3. Интегрирование некоторых классов функций

3.1.Интегрирование рациональных функций

Рациональной функцией будем называть дробь вида $\frac{P(x)}{Q(x)}$, где P(x) и Q(x) – многочлены. Если степень числителя меньше степени знаменателя, то дробь называется ***правильной***; в противном случае – ***неправильной***. Всякая правильная дробь может быть представлена в виде суммы ***простейших дробей***; так называют дроби четырех типов: $\dfrac{A}{x-a}$; $\dfrac{A}{(x-a)^n}$, где n – натуральное число, не равное единице; $\dfrac{Ax+B}{x^2+px+q}$; $\dfrac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}$, где n – натуральное число, не равное единице. Здесь А, В, a, p, q – числа; квадратные трехчлены x^2+px+q не имеют действительных корней.

Для того, чтобы представить правильную дробь $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ в виде суммы простейших дробей, надо прежде всего разложить знаменатель на линейные и квадратичные множители. Каждому простому линейному множителю соответствует в сумме простейших дробей дробь первого типа. Каждому линейному множителю кратности k соответствует одна дробь первого типа и (k–1) дробей второго типа: с показателями от 2 до k. Аналогично обстоит дело и с квадратичными множителями. Коэффициенты простейших дробей находятся методом неопределенных коэффициентов.

Разложение рациональной дроби в сумму простейших дробей используется для интегрирования. А именно, если дробь неправильная, то сначала ее представляют в виде суммы многочлена и правильной дроби (то есть выделяют целую часть), а затем правильную дробь представляют в виде суммы простейших дробей. Тогда для интегрирования рациональной дроби достаточно уметь интегрировать простейшие дроби. Дроби первого и второго типов интегрируются в общем виде:

$$\int\frac{A}{x-a}dx = A\ln|x-a|+C\,;\quad \int\frac{A}{(x-a)^n}dx=\frac{A}{(1-n)(x-a)^{n-1}}+C\,.$$

Проверьте эти равенства с помощью дифференцирования.

Способы интегрирования дробей третьего и четвертого типа в дальнейшем будут показаны на примерах.

<u>Примеры</u>. 1) Проинтегрируем правильную дробь
$$\frac{x^3-2x^2-3x+4}{x^4-4x^3+4x^2}.$$

Разложим знаменатель на множители:
$x^4–4x^3+4x^2=x^2(x^2–4x+4)= x^2(x–2)^2$.

Значит, разложение дроби в сумму простейших содержит две дроби первого и две дроби второго типа:
$$\frac{x^3-2x^2-3x+4}{x^4-4x^3+4x^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{(x-2)}+\frac{D}{(x-2)^2}.$$

Приведем дроби в правой части к общему знаменателю и приравняем числители правой и левой частей:

$$x^3–2x^2–3x+4=\mathrm{A}x(x–2)^2+\mathrm{B}(x–2)^2+\mathrm{C}x^2(x–2)+\mathrm{D}x^2.$$

Это равенство должно выполняться при всех значениях x. Подставив четыре различных значения x, получим уравнения, связывающие коэффициенты.

При $x=0$: 4=4B;
при $x=2$: –2=4D;
при $x=1$: 0=A+B–C+D;
при $x= –1$: 4= –9A+9B–3C+D.
Отсюда B=1, D= –0,5, A=0,25, C=0,75.

Значит, $\dfrac{x^3-2x^2-3x+4}{x^4-4x^3+4x^2}=\dfrac{0{,}25}{x}+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{0{,}75}{(x-2)}-\dfrac{0{,}5}{(x-2)^2}$.

А тогда
$$\int\frac{x^3-2x^2-3x+4}{x^4-4x^3+4x^2}dx=0{,}25\ln|x|-\frac{1}{x}+0{,}75\ln|x–2|+\frac{0{,}5}{x-2}+C.$$

Объясните интегрирование.

2) Проинтегрируем неправильную дробь
$\dfrac{2x^3-13x^2+29x-20}{x^2-6x+11}$.

Сначала разделим с остатком числитель на знаменатель: $2x^3-13x^2+29x-20=2x(x^2-6x+11)-x^2+7x-20=$
$=2x(x^2-6x+11)-(x^2-6x+11)+x-9=$
$=(x^2-6x+11)(2x-1)+(x-9)$. Поэтому
$$\frac{2x^3-13x^2+29x-20}{x^2-6x+11}=\frac{(x^2-6x+11)(2x-1)+(x-9)}{x^2-6x+11}=$$
$$=(2x-1)+\frac{x-9}{x^2-6x+11}.$$

Полученная правильная дробь $\dfrac{x-9}{x^2-6x+11}$ – простейшая дробь третьего типа (*почему?*).

Покажем один из приемов интегрирования таких дробей. Сначала найдем производную знаменателя: $(x^2–6x+11)'=2x–6$.

Теперь запишем числитель дроби в виде A(2x–6)+B, получим: x–9=0,5(2x–6)–6 (объясните это равенство).

Тогда $\displaystyle\int\frac{x-9}{x^2-6x+11}dx=\int\frac{0{,}5(2x-6)-6}{x^2-6x+11}dx=$
$=\displaystyle 0{,}5\int\frac{(2x-6)dx}{x^2-6x+11}-6\int\frac{dx}{x^2-6x+11}$. Проинтегрируем каждое слагаемое отдельно.
$$0{,}5\int\frac{(2x-6)dx}{x^2-6x+11}=\begin{bmatrix}t=x^2-6x+11\\ dt=(2x-6)dx\end{bmatrix}=0{,}5\int\frac{dt}{t}=0{,}5\ln|t|+C=$$
$=0{,}5\ln(x^2-6x+11)+C$.

Объясните, почему в этом примере под знаком логарифма можно не писать знак модуля.

$$-6\int\frac{dx}{x^2-6x+11}=-6\int\frac{dx}{(x-3)^2+2}=\begin{bmatrix}t=x-3\\ dt=dx\end{bmatrix}=-6\int\frac{dt}{t^2+2}=$$

$$=-\frac{6}{\sqrt{2}}arctg\frac{t}{\sqrt{2}}+C=-3\sqrt{2}arctg\frac{x-3}{\sqrt{2}}.$$

Окончательно $\int\frac{2x^3-13x^2+29x-20}{x^2-6x+11}dx=$

$$=\int(2x-1)dx+\int\frac{x-9}{x^2-6x+11}dx=$$

$$=x^2-x+0{,}5\ln(x^2-6x+11)-3\sqrt{2}arctg\frac{x-3}{\sqrt{2}}+C.$$

Объясните это равенство.●

3.2.Интегрирование тригонометрических функций

Покажем на примерах некоторые способы интегрирования тригонометрических функций.

1. Замена *t*=sin*x* (*t*=cos*x*). Эта замена используется в случае, когда подынтегральная функция – произведение нечетной степени косинуса (синуса) и функции, зависящей только от синуса (косинуса).

Примеры.

1) $$\int\frac{\cos^3 xdx}{1+\sin^2 x}=\int\frac{\cos^2 x\cos xdx}{1+\sin^2 x}=\begin{bmatrix}t=\sin x\\ dt=\cos xdx\end{bmatrix}=\int\frac{(1-t^2)dt}{1+t^2}=$$

$$=-\int\frac{(t^2+1-2)dt}{1+t^2}=-\int dt+2\int\frac{dt}{1+t^2}=-t+2arctgt+C=$$

$$=-\sin x+2arctg(\sin x)+C.$$

2) $$\int\frac{\sin^3 xdx}{\cos x\cdot\sqrt[3]{\cos x}}=\int\frac{\sin^2 x\sin xdx}{\cos x\cdot\sqrt[3]{\cos x}}=\begin{bmatrix}t=\cos x\\ dt=-\sin xdx\end{bmatrix}=$$

$$= -\int \frac{(1-t^2)dt}{t\cdot\sqrt[3]{t}} = -\int \frac{dt}{t^{\frac{4}{3}}} + \int t^{\frac{2}{3}}dt = 3t^{-\frac{1}{3}} + \frac{3}{5}t^{\frac{5}{3}} + \mathrm{C} =$$

$$= \frac{3}{\sqrt[3]{\cos x}} + \frac{3}{5}\sqrt[3]{\cos^5 x} + \mathrm{C}.\bullet$$

2. <u>Использование формул понижения степени: $2\cos^2 x=1+\cos 2x$, $2\sin^2 x=1-\cos 2x$</u>. Эти формулы полезны, например, в тех случаях, когда подынтегральная функция – произведение четных степеней синуса и косинуса. Вместе с этими формулами бывают нужны также формулы преобразования произведений синусов и косинусов в суммы:

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta))$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta))$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta))$$

<u>Пример</u>.

$$\int \sin^2 x\cos^4 x dx = \frac{1}{4}\int (4\sin^2 x\cos^2 x)\cos^2 x dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int \sin^2 2x\cos^2 x dx = \frac{1}{4}\int \frac{1-\cos 4x}{2}\cdot\frac{1+\cos 2x}{2}dx =$$

$$= \frac{1}{16}\int (1-\cos 4x+\cos 2x-\cos 4x\cos 2x)dx =$$

$$= \frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\sin 4x + \frac{1}{32}\sin 2x - \frac{1}{16}\int \frac{1}{2}(\cos 6x+\cos 2x)dx =$$

$$= \frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\sin 4x + \frac{1}{32}\sin 2x - \frac{1}{192}\sin 6x - \frac{1}{64}\sin 2x + C =$$

$$= \frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\sin 4x + \frac{1}{64}\sin 2x - \frac{1}{192}\sin 6x + C\,.$$

Объясните преобразования и интегрирование.●

3. <u>Замена *t*=tg*x* (*t*=ctg*x*).</u> Эта замена также может использоваться в тех случаях, когда подынтегральная функция – произведение (или частное) четных степеней синуса и косинуса. Эта же замена удобна для интегрирования степеней тангенса или котангенса; при этом также применяют формулы: $tg^2x=\frac{1}{\cos^2 x}-1$, $ctg^2x=\frac{1}{\sin^2 x}-1$.

<u>Примеры</u>.

1) $\int\frac{\cos^2 x}{\sin^4 x}dx=\int\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x\sin^2 x}dx=\begin{bmatrix} t=ctgx \\ dt=-\frac{1}{\sin^2 x}\end{bmatrix}==-\int t^2dt=$

$=-\frac{t^3}{3}+\mathrm{C}=-\frac{ctg^3x}{3}+\mathrm{C}.$

2) $\int tg^7xdx=\int tg^5xtg^2xdx=\int tg^5x\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx=\begin{bmatrix} t=tgx \\ dt=\frac{dx}{\cos^2 x}\end{bmatrix}=$

$=\int t^5dt=\int tg^5xdx=\int t^5dt-\int tg^3xtg^2xdx=\int t^5dt-$

$-\int tg^3x\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx=\int t^5dt-\int t^3dt+\int tg^3xdx=\int t^5dt-$

$-\int t^3dt+\int tgxtg^2xdx=\int t^5dt-\int t^3dt+\int tgx\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx=$

$=\int t^5dt-\int t^3dt+\int tdt-\int\frac{\sin xdx}{\cos x}=$

$=\frac{t^6}{6}-\frac{t^4}{4}+\frac{t^2}{2}+\int\frac{d(\cos x)}{\cos x}=\frac{tg^6x}{6}-\frac{tg^4x}{4}+\frac{tg^2x}{2}+\ln|\cos x|+\mathrm{C}.$

Объясните интегрирование.

3) $\int ctg^6 xdx = \int ctg^4 xctg^2 xdx = \int ctg^4 x\left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1\right)dx =$

$= \begin{bmatrix} t = ctgx \\ dt = -\dfrac{dx}{\sin^2 x} \end{bmatrix} = -\int t^4 dt - \int ctg^4 xdx = -\int t^4 dt - \int ctg^2 xctg^2 xdx =$

$= -\int t^4 dt - \int ctg^2 x\left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1\right)dx = -\int t^4 dt + \int t^2 dt + \int ctg^2 xdx =$

$= -\int t^4 dt + \int t^2 dt + \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1\right)dx = -\frac{t^5}{5} + \frac{t^3}{3} - \mathrm{ctg}x - x + C =$

$= -\frac{ctg^5 x}{5} + \frac{ctg^3 x}{3} - \mathrm{ctg}x - x + C.$

Объясните интегрирование •

4. <u>Универсальная тригонометрическая замена.</u> Так называют подстановку $t = tg\frac{x}{2}$. При этом $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$.

<u>Пример</u>.

$$\int \frac{dx}{2\sin x + 3\cos x + 4} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{2 \cdot \frac{2t}{1+t^2} + 3 \cdot \frac{(1-t^2)}{1+t^2} + 4} =$$

$$= \int \frac{2dt}{4t + 3 - 3t^2 + 4 + 4t^2} = \int \frac{2dt}{t^2 + 4t + 7} = \int \frac{2dt}{(t+2)^2 + 3} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} arctg \frac{t+2}{\sqrt{3}} + C = \frac{2}{\sqrt{3}} arctg \frac{tg\frac{x}{2} + 2}{\sqrt{3}} + C.$$

Объясните интегрирование. •

3.3. Интегрирование иррациональных функций

Покажем на примерах некоторые способы интегрирования иррациональных функций.

1. Чтобы проинтегрировать рациональную функцию, зависящую от x и от нескольких дробных степеней двучлена: $(ax+b)^{\frac{m_1}{n_1}}$,..., $(ax+b)^{\frac{m_k}{n_k}}$, – используют замену $t=(ax+b)^{\frac{1}{n}}$, где n – наименьшее общее кратное чисел n_1, …, n_k.

Пример.

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^2}-\sqrt{2x+1}} = \int \frac{dx}{(2x+1)^{\frac{2}{3}}-(2x+1)^{\frac{1}{2}}} = \left[\begin{array}{l} t=(2x+1)^{\frac{1}{6}} \\ x=\frac{1}{2}(t^6-1) \\ dx=3t^5dt \end{array}\right]$$

$$=\int \frac{3t^5dt}{t^4-t^3} = \int \frac{3t^2dt}{t-1} = \int \frac{(3(t^2-1)+3)dt}{t-1} = 3\int (t+1)dt + 3\int \frac{dt}{t-1} =$$

$$=\frac{3t^2}{2}+3t+3\ln|t-1|+C=$$

$$=\frac{3\sqrt[3]{2x+1}}{2}+3\sqrt[6]{2x+1}+3\ln\left|\sqrt[6]{2x+1}-1\right|+C. \bullet$$

2. Интеграл вида $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ сводится к одному из табличных интегралов: $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$ или $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

Примеры.

1) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+5}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2+4}} = \ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+5}\right|$+C.

2) $\int \frac{dx}{\sqrt{-3x^2+4x-1}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-3(x^2-\frac{4}{3}x+\frac{4}{9})+\frac{4}{3}-1}} =$

$= \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{3}-3(x-\frac{2}{3})^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{3}\sqrt{\frac{1}{9}-(x-\frac{2}{3})^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin \frac{x-\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}}$ +C=

$= \frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin(3x-2)$ +C. •

3. Интеграл вида $\int \frac{(Ax+B)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ сводится к интегралу из предыдущего пункта следующим образом. Сначала числитель дроби записывается в виде $\alpha(d(ax^2+bx+c))+\beta dx$; тогда $\int \frac{(Ax+B)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \alpha \int \frac{d(ax^2+bx+c)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} + \beta \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} =$

$= 2\alpha \sqrt{ax^2+bx+c} + \beta \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$.

Объясните, почему $\int \frac{d(ax^2+bx+c)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = 2\sqrt{ax^2+bx+c}$.

<u>Примеры</u>.

1) $\int \frac{(5x-3)dx}{\sqrt{2x^2+8x+1}} = \left[\begin{array}{c} d(2x^2+8x+1) = (4x+8)dx \\ (5x-3)dx = \frac{5}{4}(4x+8)dx - 13dx \end{array} \right] =$

$= \frac{5}{4} \int \frac{(4x+8)dx}{\sqrt{2x^2+8x+1}} - 13 \int \frac{dx}{\sqrt{2x^2+8x+1}} =$

$$=\frac{5}{2}\sqrt{2x^2+8x+1}-13\int\frac{dx}{\sqrt{2(x^2+4x+4)-7}}=\frac{5}{2}\sqrt{2x^2+8x+1}-$$

$$-\frac{13}{\sqrt{2}}\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+0{,}5}\right|+C.$$

$$2)\int\frac{(3x+4)dx}{\sqrt{-x^2+6x-8}}=\left[\begin{array}{c} d(-x^2+6x-8)=(-2x+6)dx \\ (3x+4)dx=-\frac{3}{2}(-2x+6)dx+13dx \end{array}\right]=$$

$$=-\frac{3}{2}\int\frac{(-2x+6)dx}{\sqrt{-x^2+6x-8}}+13\int\frac{dx}{\sqrt{-x^2+6x-8}}=$$

$$=-3\sqrt{-x^2+6x-8}+13\int\frac{dx}{\sqrt{1-(x-3)^2}}=-3\sqrt{-x^2+6x-8}+$$

$+13\arcsin(x-3)+C.$•

4. Интеграл вида $\int\frac{dx}{(x-\alpha)\sqrt{ax^2+bx+c}}$ берется с помощью замены $t=\frac{1}{x-\alpha}$.

Примеры.

$$1)\int\frac{dx}{x\sqrt{5x^2-2x+1}}=\left[\begin{array}{l} t=\frac{1}{x} \\ dx=-\frac{dt}{t^2} \end{array}\right]=\int\frac{-\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{5}{t^2}-\frac{2}{t}+1}}=$$

$$=\int\frac{-dt}{\sqrt{(t-1)^2+4}}=-\ln\left|t-1+\sqrt{t^2-2t+5}\right|+C=$$

$$=-\ln\left|\frac{1-x+\sqrt{5x^2-2x+1}}{x}\right|+C.$$

2) $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{-x^2+2x+3}} = \begin{bmatrix} t = \frac{1}{x-1} \\ dx = -\frac{dt}{t^2} \end{bmatrix} = \int \frac{-\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{-(x-1)^2+4}} =$

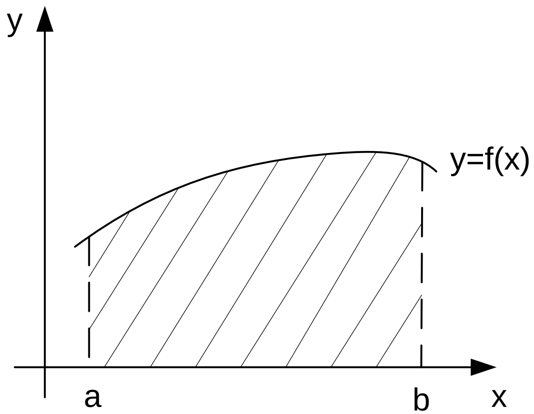
$$= \int \frac{-\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{-\left(\frac{1}{t}\right)^2+4}} = \int \frac{-dt}{\sqrt{4t^2-1}} = -0{,}5\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-0{,}25}} =$$

$$= -0{,}5\ln\left|t+\sqrt{t^2-0{,}25}\right| + C = -0{,}5\ln\left|\frac{2+\sqrt{-x^2+2x+3}}{2(x-1)}\right| + C. \bullet$$

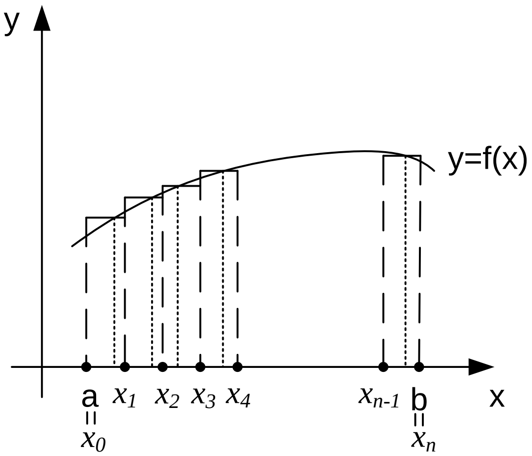
4. Определенный интеграл

4.1.Площадь криволинейной трапеции. Масса неоднородного стержня

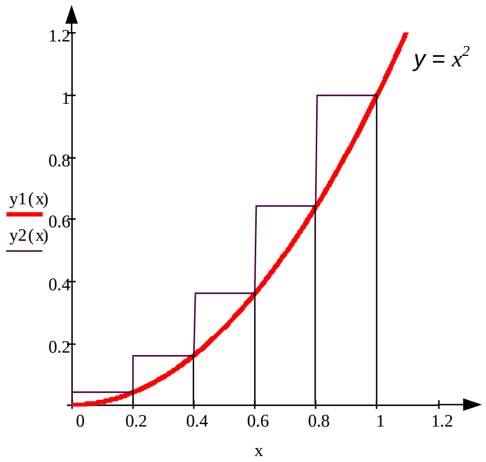
Рассмотрим криволинейную трапецию, ограниченную линиями: $x=a$, $x=b$, $y=f(x)$, $y=0$, где $a<b$, $f(x)\geq 0$.



Чтобы найти площадь криволинейной трапеции, разделим отрезок [*a*;*b*] на n равных частей, в каждом маленьком отрезке выберем точку и построим на нем прямоугольник, высота которого равна значению $f(x)$ в выбранной точке. Если площадь полученной ступенчатой фигуры при увеличении числа n стремится к некоторому числу S, то S естественно считать площадью криволинейной трапеции.



<u>Пример</u>. Пусть криволинейная трапеция ограничена линиями: $x=0$, $x=1$, $y=x^2$. Разделим отрезок [0;1] на n равных частей. На каждом отрезке $[\frac{k-1}{n};\frac{k}{n}]$, где $1 \le k \le n$, построим прямоугольник, высота которого равна $\left(\frac{k}{n}\right)^2$ (значению функции в правом конце отрезка).



Площадь полученной ступенчатой фигуры равна $\frac{1}{n}\left(\frac{1^2}{n^2}+\frac{2^2}{n^2}\ldots+\frac{(n-1)^2}{n^2}+\frac{n^2}{n^2}\right)=\frac{1}{n}\left(\frac{1^2+2^2+\ldots+(n-1)^2+n^2}{n^2}\right)$.

Используем формулу суммы квадратов первых n натуральных чисел: $1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Тогда S $=\frac{1}{n}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^2}\right)=\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$. При $n\to\infty$ предел этого выражения равен $\frac{1}{3}$ (*почему?*). Это число и считают площадью данной криволинейной трапеции.•

Аналогично можно определить массу тонкого стержня переменной линейной плотности: стержень делится на отрезки, в каждом из которых выбирается некоторая точка. Тогда масса стержня приближенно равна сумме произведений вида $\rho(x_k)\Delta x_k$, где $\rho(x_k)$ – значение плотности в выбранной точке, а Δx_k – длина соответствующего отрезка. Если при неограниченном увеличении числа отрезков эта сумма стремится к некоторому числу M, то M считают массой стержня.

4.2.Определение определенного интеграла

Пусть функция $f(x)$ ограничена на отрезке $[a;b]$. Разобьем этот отрезок на n частей точками $x_1, \ldots, x_{n-1}$. Получим разбиение отрезка: $a=x_0<x_1<\ldots<x_{n-1}<x_n=b$ (см. с.23). На каждом промежутке $[x_{k-1}; x_k]$, где $1\le k\le n$, выберем точку z_k. Обозначим $\Delta x_k=x_k-x_{k-1}$. Число $d=\max\limits_{1\le k\le n}\Delta x_k$ назовем ***диаметром разбиения***.

Рассмотрим сумму $S = f(z_1)\Delta x_1+f(z_2)\Delta x_2+\ldots+ f(z_n)\Delta x_n$; ее называют ***интегральной суммой*** данного разбиения.

Определение. Функция $f(x)$ называется ***интегрируемой на отрезке*** $[a;b]$, если при $d\to 0$ существует предел интегральных сумм, не зависящий от разбиения. Значение этого предела называется ***определенным интегралом функции*** $f(x)$ ***на отрезке*** $[a;b]$ и обозначается $\int\limits_a^b f(x)dx$.

Числа a и b называются соответственно ***нижним и верхним пределами интегрирования***.

Замечание. $\int\limits_a^b f(x)dx$ можно рассматривать и в том случае, когда $a<b$. Как видно из определения интегральной суммы, при этом все $\Delta x_k<0$, поэтому $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$.

Приведенные в пункте 4.1 примеры характеризуют ***геометрический и физический смысл определенного интеграла***: если $f(x)\ge 0$ на отрезке $[a;b]$, то $\int\limits_a^b f(x)dx$ – площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $x=a$,

$x=b$, $y=f(x)$, $y=0$; если $\rho(x)$ – переменная линейная плотность стержня, расположенного на отрезке $[a;b]$, то $\int_a^b \rho(x)dx$ – масса этого стержня.

4.3.Основные теоремы об определенном интеграле

Следующие две теоремы примем без доказательства.

Теорема 1. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то она интегрируема на этом отрезке.

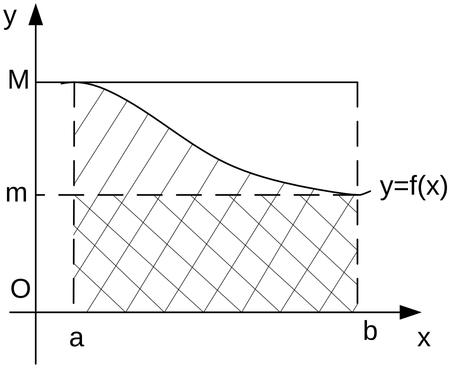
Теорема 2. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a;c]$ и на отрезке $[c;b]$, где $a<c<b$, то $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a;b]$, причем $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

Равенство $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ называют свойством ***аддитивности*** определенного интеграла.

Теорема 3 (о среднем значении). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то на этом отрезке существует такое число c, что $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$.

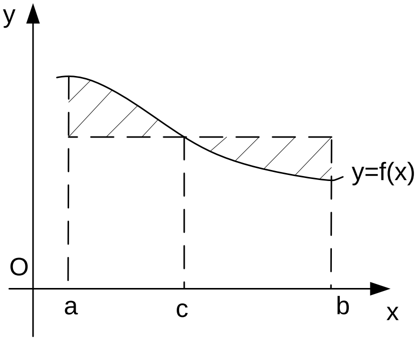
Доказательство. ▼ Пусть m и M – соответственно наименьшее и наибольшее значение функции на отрезке (*объясните, почему они обязательно достигаются*). Тогда для всякой интегральной суммы $S=\sum_{k=1}^{n} f(z_k)\Delta x_k$ справедливо неравенство: $\sum_{k=1}^{n} m\Delta x_k \le S \le \sum_{k=1}^{n} M\Delta x_k$.

Объясните, почему отсюда следует, что $m(b-a)\le S\le M(b-a)$.



А значит, $m(b-a) \le \int\limits_a^b f(x)dx \le M(b-a)$ (*почему?*), то есть число $\dfrac{\int\limits_a^b f(x)dx}{b-a}$ заключено между наименьшим значением m и наибольшим значением M функции $f(x)$. По теореме о промежуточном значении непрерывной на отрезке функции существует $c \in [a;b]$: $f(c) = \dfrac{\int\limits_a^b f(x)dx}{b-a}$, – ч.т.д. ▲

Значение $f(c)$ называется в этом случае ***средним значением функции f(x) на отрезке* [*a*;*b*]**. Геометрически теорема 3 означает, что если $f(x) \ge 0$ на отрезке $[a;b]$, то площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $x=a$, $x=b$, $y=f(x)$, $y=0$, равна площади прямоугольника, построенного на этом отрезке и имеющего высоту, равную значению функции в некоторой точке отрезка.



<u>5. Вычисление определенного интеграла</u>

<u>5.1.Существование первообразной для непрерывной функции</u>

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$. Тогда она интегрируема на любом отрезке $[a;x]$, если $x\in[a;b]$. Поэтому на отрезке $[a;b]$ можно определить функцию $\Phi(x)=\int\limits_a^x f(x)dx$ (ее называют ***интегралом с переменным верхним пределом***).

<u>Теорема 1</u>. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то функция $\Phi(x)=\int\limits_a^x f(x)dx$ дифференцируема на интервале $(a;b)$, причем $\Phi'(x)=f(x)$ при $x\in(a;b)$.

<u>Доказательство</u>. ▼ Рассмотрим приращение функции $\Phi(x)$: $\Delta\Phi=\int\limits_a^{x+\Delta x} f(x)dx-\int\limits_a^x f(x)dx$. Тогда по свойству аддитивности определенного интеграла $\Delta\Phi=\int\limits_x^{x+\Delta x} f(x)dx$. А по тео-

реме о среднем значении существует такое $c\in[x;x+\Delta x]$, что $\int\limits_x^{x+\Delta x} f(x)dx = f(c)\Delta x$. Отсюда $\frac{\Delta\Phi}{\Delta x} = f(c)$, $c\in[x;x+\Delta x]$. Тогда в силу непрерывности функции $f(x)$ $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\Phi}{\Delta x} = f(x)$ (*почему?*), ч.т.д. ▲

Следствие. Функция, непрерывная на отрезке, имеет на этом отрезке первообразную.

Запишите формулу этой первообразной для функции f(x), непрерывной на отрезке [a;b].

5.2.Формула Ньютона-Лейбница

Теорема 2. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и $\mathrm{F}(x)$ – ее первообразная, то $\int\limits_a^b f(x)dx = \mathrm{F}(b)-\mathrm{F}(a)$.

Доказательство. ▼ Функции $\mathrm{F}(x)$ и $\Phi(x)=\int\limits_a^x f(x)dx$ – первообразные функции $f(x)$. Значит, $\mathrm{F}(x)=\int\limits_a^x f(x)dx+\mathrm{C}$ (*почему?*). Подставим в это равенство $x=a$: $\mathrm{F}(a)=\int\limits_a^a f(x)dx+\mathrm{C}$. Теперь подставим $x=b$: $\mathrm{F}(b)=\int\limits_a^b f(x)dx+\mathrm{C}$. Отсюда $\mathrm{C}=\mathrm{F}(a)$ (*почему?*), $\mathrm{F}(b)=\int\limits_a^b f(x)dx+\mathrm{F}(a)$, $\int\limits_a^b f(x)dx=\mathrm{F}(b)-\mathrm{F}(a)$, ч.т.д. ▲

Разность $\mathrm{F}(b)-\mathrm{F}(a)$ обозначают $\mathrm{F}(x)\Big|_a^b$.

Пример. $\int x^2dx = \frac{x^3}{3}$ +C, значит, $\int_0^1 x^2dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 =$

$= \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}$.●

5.3.Свойства определенного интеграла

1. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a;b]$, α и β – числа, то $\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha\int_a^b f(x)dx + \beta\int_a^b g(x)dx$.

Это свойство называют ***свойством линейности***.

▼ Действительно, если F(x) и G(x) – первообразные соответственно функций $f(x)$ и $g(x)$, то по свойству линейности неопределенного интеграла αF(x)+βG(x) – первообразная функции α$f(x)$+β$g(x)$. По формуле Ньютона-Лейбница $\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx$ =(αF(x)+βG(x)) $\Big|_a^b$ =αF(x) $\Big|_a^b$ +βG(x)$\Big|_a^b$ = $= \alpha\int_a^b f(x)dx + \beta\int_a^b g(x)dx$, ч.т.д. ▲

2. Если функция $f(x)$ непрерывна и положительна на отрезке $[a;b]$, то $\int_a^b f(x)dx$ >0.

▼ Действительно, по теореме о среднем значении $\int_a^b f(x)dx$ =$f(c)(b–a)$, где $c\in[a;b]$. Значит, $f(c)$>0, а поэтому $\int_a^b f(x)dx$ >0, ч.т.д. ▲

3. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a;b]$, причем $f(x) \geq g(x)$, то $\int\limits_a^b f(x)dx \geq \int\limits_a^b f(x)dx$.

Докажите это утверждение, используя свойства **1** и **2**.

Пример. $\int\limits_{-2}^{1}(2x^3+3x-4)dx = (2\cdot\frac{x^4}{4}+3\cdot\frac{x^2}{2}-4x)\Big|_{-2}^{1} =$

$=(\frac{1^4}{2}+3\cdot\frac{1^2}{2}-4\cdot 1)-(\frac{(-2)^4}{2}+3\cdot\frac{(-2)^2}{2}-4\cdot(-2)) = -2-22 = -24.$●

5.4.Замена переменной в определенном интеграле

Используя правило замены переменной в неопределенном интеграле и формулу Ньютона-Лейбница, объясните следующее утверждение.

Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a;b]$, а $x=\varphi(t)$ – непрерывная на отрезке $[\alpha;\beta]$ и дифференцируемая на интервале $(\alpha;\beta)$ функция, принимающая значения на отрезке $[a;b]$, причем $\varphi(\alpha)=a$; $\varphi(\beta)=b$. Тогда

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Покажем, как оформляется замена переменной в определенном интеграле. Обратите внимание, что здесь не требуется возвращаться к старой переменной – достаточно поменять пределы интегрирования.

Примеры.1) $\int\limits_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \left[\begin{array}{l} x = a\sin t,\ t \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2} \right] \\ dx = a\cos t\,dt \\ x = 0 \Rightarrow t = 0,\ x = a \Rightarrow t = \dfrac{\pi}{2} \end{array} \right]$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t}\, a\cos t\,dt = a^2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2 t}\,\cos t\,dt = a^2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt\ .$$

Объясните последнее равенство: почему $\sqrt{1-\sin^2 t}$ =cost на отрезке $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$?

Далее $a^2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt = \dfrac{a^2}{2} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t)\,dt =$

$$= \frac{a^2}{2}\left(t + 0{,}5\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi a^2}{4}\ .$$

Заметим, что $\int\limits_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$ – это площадь четверти круга с центром в начале координат и радиусом *a*.

Объясните это утверждение и сделайте чертеж.

2) $\int\limits_{0,5}^{1,5} \dfrac{dx}{4x^2 - 4x + 5} = \int\limits_{0,5}^{1,5} \dfrac{dx}{4x^2 - 4x + 1 + 4} = \int\limits_{0,5}^{1,5} \dfrac{dx}{(2x-1)^2 + 4} =$

$$=\begin{bmatrix} 2x-1=t \\ dx=0{,}5dt \\ x=0{,}5\Rightarrow t=0 \\ x=1{,}5\Rightarrow t=2 \end{bmatrix}=\int_0^2 \frac{0{,}5dt}{(t+1)^2-2(t+1)+5}=\int_0^2 \frac{0{,}5dt}{t^2+4}=$$

$$=0{,}25\text{arctg}\,\frac{t}{2}\Big|_0^2=0{,}25(\text{arctg}1-\text{arctg}0)=\frac{\pi}{16}.\bullet$$

5.5.Интегрирование по частям в определенном интеграле

Используя правило интегрирования по частям в неопределенном интеграле и формулу Ньютона-Лейбница, объясните следующее утверждение.

Если функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы на отрезке $[a;b]$, то $\int_a^b udv=uv\Big|_a^b-\int_a^b vdu$.

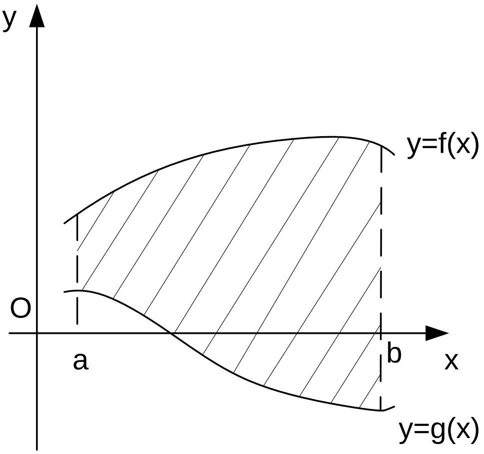
Пример. $$\int_1^2 xe^{2x}dx=\begin{bmatrix} u=x \\ du=dx \\ dv=e^{2x}dx \\ v=\frac{1}{2}e^{2x} \end{bmatrix}=\frac{1}{2}xe^{2x}\Big|_1^2-\frac{1}{2}\int_1^2 e^{2x}dx=$$

$$=\frac{1}{2}(2e^4-e^2)-\frac{1}{4}e^{2x}\Big|_1^2=e^4-\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{4}e^4+\frac{1}{4}e^2=\frac{3}{4}e^4-\frac{1}{4}e^2.\bullet$$

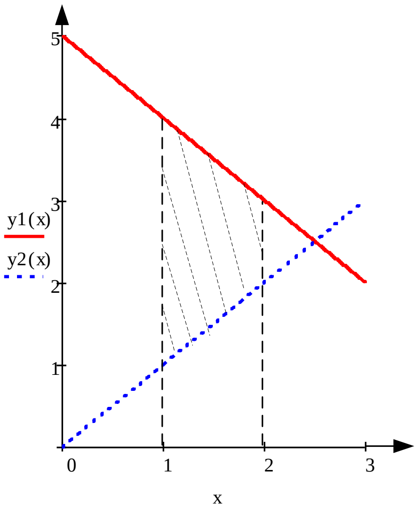
6. Геометрические и механические приложения определенного интеграла

6.1.Площадь плоской фигуры

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a;b]$, причем $f(x)\geq g(x)$. Тогда площадь фигуры, ограниченной линиями $x=a$, $x=b$, $y=f(x)$, $y=g(x)$, можно найти по формуле: S=$\int_a^b (f(x)-g(x))dx$. Это ***формула вычисления площади в декартовых координатах***.



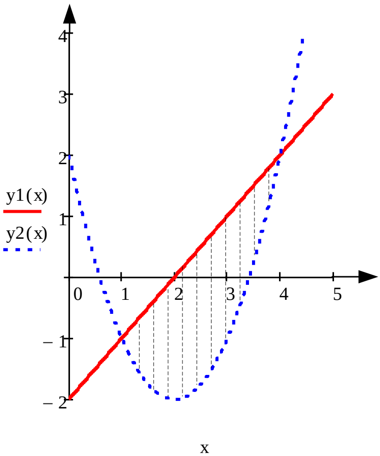
Примеры. 1) Найдем площадь фигуры, ограниченной линиями x=1, x=2, y=5–x, y=x.



На отрезке [1;2] имеем: $5–x>x$. Значит,

$$S=\int_1^2((5-x)-x)dx=\int_1^2(5-2x)dx=(5x-x^2)\Big|_1^2=6-4=2.$$

2) Найдем площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x–2$ и $y=x^2–4x+2$. Эти линии пересекаются при $x=1$ и $x=4$ (*почему?*).

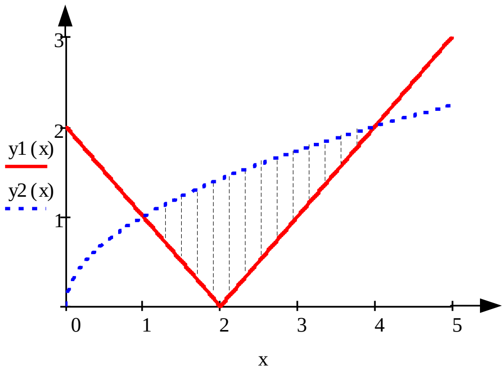


На отрезке [1;4] имеем: $x–2\geq x^2–4x+2$. Значит,

$$S=\int_1^4((x-2)-(x^2-4x+2))dx=\int_1^4(-x^2+5x-4)dx=$$

$$=\left(-\frac{x^3}{3}+\frac{5x^2}{2}-4x\right)\Big|_1^4=\left(-\frac{64}{3}+\frac{80}{2}-16\right)-\left(-\frac{1}{3}+\frac{5}{2}-4\right)=4,5.$$

3) Найдем площадь фигуры, ограниченной линиями $y=|x–2|$ и $y=\sqrt{x}$. Эти линии пересекаются при $x=1$ и $x=4$.



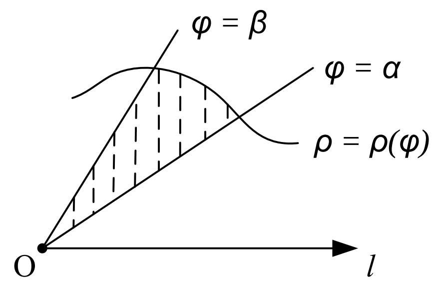
На отрезке [1;4] имеем: $\sqrt{x} \geq |x-2|$. Значит,

$$S=\int_1^4 (\sqrt{x}-|x-2|)dx=\int_1^2 (\sqrt{x}-(-x+2))dx+\int_2^4 (\sqrt{x}-(x-2))dx=$$

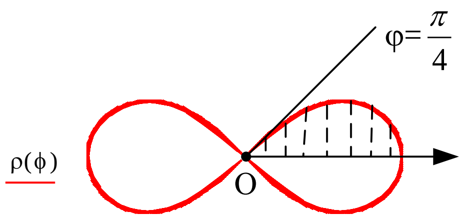
$$=\left(\frac{2x\sqrt{x}}{3}+\frac{x^2}{2}-2x\right)\Bigg|_1^2+\left(\frac{2x\sqrt{x}}{3}-\frac{x^2}{2}+2x\right)\Bigg|_2^4=\left(\frac{4\sqrt{2}}{3}+\frac{4}{2}-4\right)-$$

$$-\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{2}-2\right)+\left(\frac{16}{3}-\frac{16}{2}+8\right)-\left(\frac{4\sqrt{2}}{3}-\frac{4}{2}+4\right)=\frac{13}{6}.\bullet$$

Если фигура ограничена линией, заданной в полярных координатах: $\rho=\rho(\varphi)$, – и лучами $\varphi=\alpha$ и $\varphi=\beta$ ($\alpha<\beta$), то ее площадь можно найти по формуле: $S=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2(\varphi)d\varphi$. Это ***формула вычисления площади в полярных координатах***.



<u>Пример</u>. Найдем площадь фигуры, ограниченной линией $\rho^2=2\cos 2\varphi$ и лучами $\varphi=0$ и $\varphi=\dfrac{\pi}{4}$:



$$S=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\cos 2\varphi d\varphi = 0{,}5\sin 2\varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 0{,}5 \bullet$$

<u>6.2.Длина гладкой дуги</u>

Пусть дуга представляет собой часть графика функции $y=f(x)$, непрерывной на отрезке $[a;b]$ и имеющей на интервале $(a;b)$ непрерывную производную. Такая дуга называется ***гладкой***. Ее длину можно найти по формуле: $L=\int_a^b \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}dx$. Это ***формула вычисления длины дуги в декартовых координатах***.

Пример. Найдем длину части цепной линии y=ch$x$ при $0 \le x \le 1$.

$$L=\int_0^1 \sqrt{1+(shx)^2}\,dx=\int_0^1 chxdx=\text{sh}x\Big|_0^1=\text{sh}1=0{,}5(e-e^{-1}).\bullet$$

Пусть дуга задана параметрически: $x=x(t)$, $y=y(t)$, где $t\in[a;b]$, – причем функции $x(t)$ и $y(t)$ непрерывны на отрезке $[a;b]$ и имеют на интервале $(a;b)$ непрерывные производные. Тогда длину дуги можно найти по формуле: $L=\int_a^b \sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt$. Это ***формула вычисления длины дуги, заданной параметрически.***

Пример. Найдем длину части астроиды $x=\cos^3 t$, $y=\sin^3 t$ при $0\le t\le \frac{\pi}{2}$.

$$L=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\left(-3\cos^2 t\sin t\right)^2+\left(3\sin^2 t\cos t\right)^2}\,dt=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9\cos^4 t\sin^2 t+9\cos^2 t\sin^4 t}\,dt=3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 t\sin^2 t}\,dt=$$

$$=\frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2tdt=-\frac{3}{4}\cos 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=-\frac{3}{4}(-1-1)=1{,}5.$$

Объясните, почему в данном примере

$$\sqrt{\cos^2 t\sin^2 t}=\cos t\sin t=\frac{1}{2}\sin 2t.\bullet$$

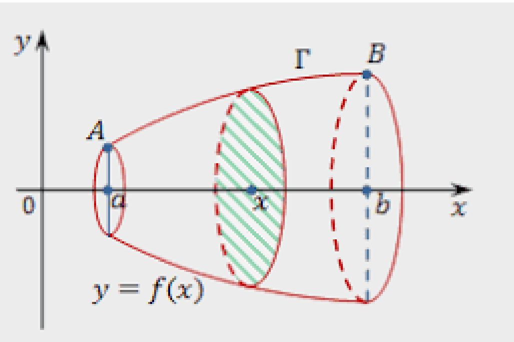
Пусть дуга задана в полярных координатах: $\rho=\rho(\varphi)$, $\varphi\in[\alpha;\beta]$, – причем функция $\rho(\varphi)$ непрерывна на отрезке $[\alpha;\beta]$ и имеет на интервале $(\alpha;\beta)$ непрерывную производную. Тогда длину дуги можно найти по формуле: $L=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\sqrt{(\rho(\varphi))^2+(\rho'(\varphi))^2}\,dt$. Это ***формула вычисления длины дуги в полярных координатах***.

Пример. Найдем длину части окружности $\rho=2\cos\varphi$ при $0\le\varphi\le\frac{\pi}{3}$. $L=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{3}}\sqrt{(2\cos\varphi)^2+(-2\sin\varphi)^2}\,d\varphi=2\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{3}}d\varphi=\frac{2\pi}{3}$.

Найдите длину той же дуги, используя школьную формулу длины дуги окружности.●

6.3.Объем тела

Рассмотрим тело, заключенное между плоскостями $x=a$ и $x=b$ $(a<b)$. Пусть $S(x)$ – площадь его сечения плоскостью, проходящей через точку x оси абсцисс перпендикулярно этой оси, причем функция $S(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$. Тогда объем тела можно найти по формуле: $V=\int\limits_{a}^{b}S(x)dx$.



В частности, для тела, полученного вращением криволинейной трапеции, ограниченной линиями $x=a$, $x=b$, $y=f(x)$, $y=0$ ($a<b$, $f(x)\geq 0$), около оси абсцисс, каждое сечение – круг радиуса $f(x)$. Значит, площадь сечения равна $\pi(f(x))^2$, поэтому ***формула объема тела вращения***: $V=\pi\int\limits_a^b (f(x))^2 dx$.

<u>Примеры</u>. 1) Рассмотрим пирамиду, высота которой представляет собой отрезок оси абсцисс от 0 до H, а основание лежит в плоскости yOz и имеет площадь S.

Площадь S(x) сечения, проходящего через точку x оси абсцисс перпендикулярно этой оси, равна $S\left(\frac{H-x}{H}\right)^2$ (*почему?*). Находим объем пирамиды:

$$V=\frac{S}{H^2}\int\limits_0^H (H^2-2Hx+x^2)dx=\frac{S}{H^2}\left(H^2x-\frac{2Hx^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^H=\frac{SH}{3}.$$

Мы получили известную формулу объема пирамиды: $V=\frac{1}{3}SH$.

2) Рассмотрим шар с центром в начале координат и радиусом R. Он представляет собой тело, полученное вращением полукруга, ограниченного линиями $x=-R$, $x=R$, $y=0$, $y=\sqrt{R^2-x^2}$, около оси абсцисс.

По формуле объема тела вращения получаем:

$V=\pi\int\limits_{-R}^{R}\left(R^2-x^2\right)dx=\pi\left(R^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-R}^{R}=\frac{4}{3}\pi R^3$. Мы получили известную формулу объема шара: $V=\frac{4}{3}\pi R^3$.

3) Рассмотрим конус, высота которого представляет собой отрезок оси абсцисс от 0 до H, а основание лежит в плоскости yOz и имеет радиус R. Он представляет собой

тело, полученное вращением треугольника, ограниченного линиями x=0, x=H, y=0, y=$\frac{R}{H}$(H–x), около оси абсцисс.

По формуле объема тела вращения получаем: V=π$\frac{R^2}{H^2}\int_0^H (H-x)^2 dx$=π$\frac{R^2}{H^2}\left(H^2x-\frac{2Hx^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^H=\frac{1}{3}\pi R^2 H$ – известная формула объема конуса.

Выведите эту формулу другим способом: аналогично первому примеру.●

7. Несобственные интегралы

7.1.Несобственный интеграл первого рода

Определение 1. Пусть для любого $c>a$ функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a;c]$. Если существует $\lim\limits_{c\to+\infty}\int_a^c f(x)dx$, то он называется ***несобственным интегралом первого рода*** функции $f(x)$ и обозначается $\int_a^{\infty} f(x)dx$. В этом случае также говорят, что интеграл $\int_a^{\infty} f(x)dx$ ***сходится***. Если указанный предел не существует, то интеграл ***расходится***.

Аналогично определяется несобственный интеграл первого рода $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$. Если оба интеграла $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$ и

$\int\limits_a^{\infty} f(x)dx$ сходятся, то говорят, что сходится интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int\limits_{a}^{\infty} f(x)dx$.

<u>Примеры</u>.

1) $\int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim\limits_{c\to+\infty} \int\limits_0^{c} \frac{dx}{1+x^2} = \lim\limits_{c\to+\infty} (\operatorname{arctg} c - \operatorname{arctg} 0) = \lim\limits_{c\to+\infty} \operatorname{arctg} c = \frac{\pi}{2}$.

Аналогично $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$. А это означает, что $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ тоже сходится и равен π.

2) $\int\limits_{-\infty}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \lim\limits_{a\to-\infty} \int\limits_{a}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \lim\limits_{a\to-\infty} \left(-\cos\frac{\pi}{2} + \cos a \right) = \lim\limits_{a\to-\infty} \cos a$.

Этот предел не существует (*почему?*), поэтому интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$ расходится.

3) $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^k} = \lim\limits_{c\to+\infty} \int\limits_1^{c} \frac{dx}{x^k} = \lim\limits_{c\to+\infty} \left(\frac{1}{(1-k)c^{k-1}} - \frac{1}{(1-k)} \right)$, если $k \neq 1$. Этот предел существует и равен $\frac{1}{k-1}$, если $k>1$. Если же $k<1$, то предел равен бесконечности – интеграл расходится. Интеграл $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x}$ тоже расходится: $\lim\limits_{c\to+\infty} \int\limits_1^{c} \frac{dx}{x} = \lim\limits_{c\to+\infty} (\ln c) = \infty$. Итак, интеграл $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^k}$ сходится тогда и только тогда, когда $k>1$.•

7.2.Несобственный интеграл второго рода

Определение 2. Пусть функция $f(x)$ не ограничена на отрезке $[a;b]$, но для любого $\varepsilon>0$ $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a;\ b-\varepsilon]$. Если существует $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$, то он называется ***несобственным интегралом второго рода*** функции $f(x)$ и обозначается $\int\limits_a^b f(x)dx$. В этом случае также говорят, что интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ ***сходится***. Если указанный предел не существует, то интеграл ***расходится***.

Аналогично определяется несобственный интеграл второго рода для функции $f(x)$, не ограниченной на отрезке $[a;b]$, но интегрируемой на отрезке $[a+\varepsilon;\ b]$ при любом $\varepsilon>0$.

Примеры.

1) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\big(\arcsin(1-\varepsilon)\big) = \frac{\pi}{2}$. Аналогично $\int\limits_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{-1+\varepsilon}^{0} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\big(-\arcsin(-1+\varepsilon)\big) = \frac{\pi}{2}$.

Поэтому $\int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pi$.

2) $\int\limits_2^4 \frac{2xdx}{\sqrt[3]{x^2-9}} = \int\limits_2^3 \frac{2xdx}{\sqrt[3]{x^2-9}} + \int\limits_3^4 \frac{2xdx}{\sqrt[3]{x^2-9}}$. Каждое слагаемое – несобственный интеграл второго рода. Рассмотрим первый из них:

$$\int_2^3 \frac{2xdx}{\sqrt[3]{x^2-9}} = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_2^{3-\varepsilon} \frac{2xdx}{\sqrt[3]{x^2-9}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{3}{2}\sqrt[3]{((3-\varepsilon)^2-9)^2} - \frac{3}{2}\sqrt[3]{25}\right) =$$

$= -\frac{3}{2}\sqrt[3]{25}$. Аналогично $\int_3^4 \frac{2xdx}{\sqrt[3]{x^2-9}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{3+\varepsilon}^4 \frac{2xdx}{\sqrt[3]{x^2-9}} =$

$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{3}{2}\sqrt[3]{49} - \frac{3}{2}\sqrt[3]{((3+\varepsilon)^2-9)^2}\right) = \frac{3}{2}\sqrt[3]{49}$. Значит, $\int_2^4 \frac{2xdx}{\sqrt[3]{x^2-9}} =$

$= \frac{3}{2}\sqrt[3]{49} - \frac{3}{2}\sqrt[3]{25}$.

3) $\int_0^1 \frac{dx}{x^k} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^k} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{(1-k)} - \frac{1}{(1-k)\varepsilon^{k-1}}\right)$, если $k\neq 1$. Этот предел существует и равен $\frac{1}{1-k}$, если $k<1$ (*почему?*). Если же $k>1$, то предел равен бесконечности – интеграл расходится. Интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{x}$ тоже расходится:

$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0}(-\ln\varepsilon) = \infty$. Итак, интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{x^k}$ сходится тогда и только тогда, когда $k<1$.●

7.3.Признаки сходимости несобственных интегралов

Примем без доказательства следующие признаки сходимости несобственных интегралов – так называемые ***признаки сравнения***.

1. Пусть для любого $c>a$ функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a;c]$, причем $0\le f(x)\le g(x)$ при $x\ge a$. Тогда, если интеграл $\int_a^\infty g(x)dx$ сходится, то и интеграл $\int_a^\infty f(x)dx$

сходится, а если интеграл $\int_a^{\infty} f(x)dx$ расходится, то и интеграл $\int_a^{\infty} g(x)dx$ расходится.

2. Пусть для любого $c>a$ функции $f(x)$ и $g(x)$ положительны и интегрируемы на отрезке $[a;c]$. Если существует $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}\neq 0$, то интегралы $\int_a^{\infty} f(x)dx$ и $\int_a^{\infty} g(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно.

<u>Следствие 1</u>. Если существует $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)x^k\neq 0$, то интеграл $\int_a^{\infty} f(x)dx$ сходится тогда и только тогда, когда $k>1$.

Объясните это утверждение.

3. Пусть для любого $\varepsilon>0$ функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a;\ b-\varepsilon]$, причем $0\le f(x)\le g(x)$ при $a\le x<b$. Тогда, если интеграл $\int_a^{b} g(x)dx$ сходится, то и интеграл $\int_a^{b} f(x)dx$ сходится, а если интеграл $\int_a^{b} f(x)dx$ расходится, то и интеграл $\int_a^{b} g(x)dx$ расходится.

4. Пусть для любого $\varepsilon>0$ функции $f(x)$ и $g(x)$ положительны и интегрируемы на отрезке $[a;\ b-\varepsilon]$. Если существует $\lim\limits_{x\to b}\dfrac{f(x)}{g(x)}\neq 0$, то интегралы $\int_a^{b} f(x)dx$ и $\int_a^{b} g(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно.

Следствие 2. Если существует $\lim\limits_{x\to b} f(x)(x-b)^k \neq 0$, то интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ сходится тогда и только тогда, когда $k<1$.

Объясните это утверждение.

Примеры. 1) Рассмотрим $\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{1+x^{10}}$. Поскольку $0<\frac{1}{1+x^{10}}<\frac{1}{x^{10}}$ при $x\geq 1$, а интеграл $\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x^{10}}$ сходится (так как показатель 10 больше 1), то по первому признаку сравнения исходный интеграл сходится.

2) Рассмотрим $\int\limits_0^1\frac{\ln(1+\sqrt[3]{x})dx}{e^{\sin x}-1}$. При $x\to 0$ подынтегральная функция эквивалентна дроби $\frac{\sqrt[3]{x}}{\sin x}$ (*почему?*), то есть эквивалентна дроби $\frac{\sqrt[3]{x}}{x}=\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}$, а интеграл $\int\limits_0^1\frac{dx}{x^{\frac{2}{3}}}$ сходится (так как показатель $\frac{2}{3}$ меньше 1). Тогда по четвертому признаку сравнения исходный интеграл сходится.

3) Рассмотрим $\int\limits_0^1\frac{\cos^2 x dx}{\sqrt[3]{1-x^2}}$. Если $0\leq x<1$, то $0\leq\frac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{1-x^2}}\leq\frac{1}{\sqrt[3]{1-x^2}}\leq\frac{1}{\sqrt[3]{1-x}}$. Интеграл $\int\limits_0^1\frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}}=-\int\limits_0^1\frac{dx}{(x-1)^{\frac{1}{3}}}$ сходится (так как показатель $\frac{1}{3}$ меньше 1). Значит, по третьему признаку сравнения исходный интеграл сходится.

4) Рассмотрим $\int_1^{\infty}\frac{(1+x^2)dx}{x^3}$. Поскольку при $x\to\infty$ подынтегральная функция эквивалентна дроби $\frac{1}{x}$, а интеграл $\int_0^1\frac{dx}{x}$ расходится, то по второму признаку сравнения исходный интеграл расходится.●

8. Задачи для самостоятельного решения

Задание 1. Найти неопределенные интегралы.

Вариант 1. **1.** $\int\frac{xdx}{7+x^2}$. **2.** $\int\frac{(x+18)dx}{x^2-4x-12}$. **3.** $\int(3-x)\cos xdx$. **4.** $\int\frac{x^3+4x^2+4x+2}{(x+1)^2(x^2+x+1)}dx$. **5.** $\int\frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos^4 x}}dx$.
Вариант 2. **1.** $\int\frac{dx}{\sin^2\frac{x}{5}}$. **2.** $\int\frac{(x+4)dx}{x^2-2x-8}$. **3.** $\int x\ln(1-3x)dx$. **4.** $\int\frac{x^3+4x^2+3x+2}{(x+1)^2(x^2+1)}dx$. **5.** $\int\frac{\cos xdx}{5+4\cos x}$.
Вариант 3. **1.** $\int\frac{dx}{\sqrt{5-x^2}}$. **2.** $\int\frac{(x+23)dx}{x^2+x-20}$. **3.** $\int xe^{-7x}dx$. 4. $\int\frac{2x^3+7x^2+7x-1}{(x+2)^2(x^2+x+1)}dx$. **5.** $\int\frac{\cos 2x}{\sqrt{3+4\sin 2x}}dx$.
Вариант 4.

1. $\int \frac{dx}{5x+3}$. **2.** $\int \frac{(x+12)dx}{x^2-x-6}$. **3.** $\int arctg\, 4x dx$. **4.** $\int \frac{2x^3+4x^2+2x-1}{(x+1)^2(x^2+2x+2)}dx$. **5.** $\int \frac{\sin x dx}{\sin x+1}$.
Вариант 5. **1.** $\int \sin(2-3x)dx$. **2.** $\int \frac{(x+19)dx}{x^2-2x-15}$. **3.** $\int \sqrt{x^3}\ln x dx$. 4. $\int \frac{x^3+6x^2+9x+6}{(x+1)^2(x^2+2x+2)}dx$. **5.** $\int \frac{\sin 3x}{\sqrt[3]{(3+2\cos 3x)^2}}dx$.
Вариант 6. **1.** $\int e^{\frac{1}{4}x-2}dx$. **2.** $\int \frac{(5x+6)dx}{x^2+4x-12}$. **3.** $\int x\sin 5x dx$. 4. $\int \frac{2x^3+11x^2+16x+10}{(x+2)^2(x^2+2x+3)}dx$. 5. $\int \frac{\sin^2 x dx}{1+\cos^2 x}$.
Вариант 7. **1.** $\int \frac{dx}{7+4x^2}$. **2.** $\int \frac{(5x-7)dx}{x^2-x-20}$. **3.** $\int (2x+5)\sin x dx$. **4.** $\int \frac{3x^3+6x^2+5x-1}{(x+1)^2(x^2+2)}dx$. **5.** $\int \frac{dx}{\sin^2 x(1-\cos x)}$.
Вариант 8. **1.** $\int \frac{dx}{\cos^2 2x}$. **2.** $\int \frac{5x dx}{x^2+x-6}$. **3.** $\int \frac{\ln x dx}{\sqrt{x}}$. **4.** $\int \frac{x^3+9x^2+21x+21}{(x+3)^2(x^2+3)}dx$. **5.** $\int \frac{\cos x dx}{2+\cos x}$.
Вариант 9. **1.** $\int \frac{x dx}{7+x^2}$. **2.** $\int \frac{(x+18)dx}{x^2-4x-12}$. **3.** $\int (3-x)\cos x dx$. **4.** $\int \frac{x^3+6x^2+8x+8}{(x+2)^2(x^2+4)}dx$. **5.** $\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x+\sin x}dx$.

Вариант 10. **1**. $\int \frac{dx}{\sin^2 \frac{x}{5}}$. **2**. $\int \frac{(x+4)dx}{x^2-2x-8}$. **3**. $\int x\ln(1-3x)dx$. **4**. $\int \frac{x^3+5x^2+12x+4}{(x+2)^2(x^2+4)}dx$. **5**. $\int \frac{\sin x dx}{(\sin x+1)^2}$.
Вариант 11. **1**. $\int \frac{dx}{\sqrt{5-x^2}}$. **2**. $\int \frac{(x+23)dx}{x^2+x-20}$. **3**. $\int xe^{-7x}dx$. **4**. $\int \frac{2x^3-4x^2-16x-12}{(x-1)^2(x^2+4x+5)}dx$. **5**. $\int \frac{1+\sin x}{(1-\sin x)^2}dx$.
Вариант 12. **1**. $\int \frac{dx}{5x+3}$. **2**. $\int \frac{(x+12)dx}{x^2-x-6}$. **3**. $\int arctg\,4x dx$. **4**. $\int \frac{-3x^3+13x^2-13x+1}{(x-2)^2(x^2-x+1)}dx$. **5**. $\int \frac{\sin x dx}{(1+\sin x+\cos x)^2}$.
Вариант 13. **1**. $\int \sin(2-3x)dx$. **2**. $\int \frac{(x+19)dx}{x^2-2x-15}$. **3**. $\int \sqrt{x^3}\ln x dx$. **4**. $\int \frac{x^3+2x^2+10x}{(x+1)^2(x^2-x+1)}dx$. **5**. $\int \frac{dx}{\sin^2 x(1+\cos x)}$.
Вариант 14. **1**. $\int e^{\frac{1}{4}x-2}dx$. 2. $\int \frac{(5x+6)dx}{x^2+4x-12}$. **3**. $\int x\sin 5x dx$. **4**. $\int \frac{3x^3+x+46}{(x-1)^2(x^2+9)}dx$. **5**. $\int \frac{\cos x dx}{(1-\cos x)^2}$.
Вариант 15. **1**. $\int \frac{dx}{7+4x^2}$. **2**. $\int \frac{(5x-7)dx}{x^2-x-20}$. **3**. $\int (2x+5)\sin x dx$.

4. $\int \frac{4x^3+24x^2+20x-28}{(x+3)^2(x^2+2x+2)}dx$. **5**. $\int \frac{\cos x dx}{1+\sin x-\cos x}$.
Вариант 16. **1**. $\int \frac{dx}{\cos^2 2x}$. **2**. $\int \frac{5x dx}{x^2+x-6}$. **3**. $\int \frac{\ln x dx}{\sqrt{x}}$. **4**. $\int \frac{2x^3+3x^2+3x+2}{(x^2+x+1)(x^2+1)}dx$. **5**. $\int \frac{\cos x dx}{1+\cos x+\sin x}$.
Вариант 17. **1**. $\int \frac{x dx}{7+x^2}$. **2**. $\int \frac{(x+18)dx}{x^2-4x-12}$. **3**. $\int (3-x)\cos x dx$. **4**. $\int \frac{x^3+x+1}{(x^2+x+1)(x^2+1)}dx$. **5**. $\int \frac{\cos x dx}{(1+\cos x-\sin x)^2}$.
Вариант 18. **1**. $\int \frac{dx}{\sin^2 \frac{x}{5}}$. **2**. $\int \frac{(x+4)dx}{x^2-2x-8}$. **3**. $\int x\ln(1-3x)dx$. **4**. $\int \frac{x^2+x+3}{(x^2+x+1)(x^2+1)}dx$. **5**. $\int \frac{\sin x dx}{(1+\cos x-\sin x)^2}$.
Вариант 19. **1**. $\int \frac{dx}{\sqrt{5-x^2}}$. **2**. $\int \frac{(x+23)dx}{x^2+x-20}$. **3**. $\int xe^{-7x}dx$. **4**. $\int \frac{2x^3+4x^2+2x+2}{(x^2+x+1)(x^2+x+2)}dx$. **5**. $\int \frac{\cos x-\sin x}{(1+\sin x)^2}dx$.
Вариант 20. **1**. $\int \frac{dx}{5x+3}$. **2**. $\int \frac{(x+12)dx}{x^2-x-6}$. **3**. $\int arctg\, 4x dx$. **4**. $\int \frac{2x^3+7x^2+7x+9}{(x^2+x+1)(x^2+x+2)}dx$. **5**. $\int \frac{dx}{\cos x(1-\cos x)}$.
Вариант 21.

1. $\int \sin(2-3x)dx$. **2.** $\int \frac{(x+19)dx}{x^2-2x-15}$. **3.** $\int \sqrt{x^3}\ln x dx$.

4. $\int \frac{4x^2+3x+4}{(x^2+x+1)(x^2+1)}dx$. **5.** $\int \frac{\cos x dx}{(1+\cos x+\sin x)^2}$.

Вариант 22.

1. $\int \frac{xdx}{7+x^2}$. **2.** $\int \frac{(x+18)dx}{x^2-4x-12}$. **3.** $\int (3-x)\cos x dx$.

4. $\int \frac{3x^3+4x^2+6x}{(x^2+x+1)(x^2+1)}dx$. **5.** $\int \frac{\cos^2 x dx}{(1+\cos x-\sin x)^2}$.

Вариант 23.

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{5-x^2}}$. **2.** $\int \frac{(x+23)dx}{x^2+x-20}$. **3.** $\int xe^{-7x}dx$.

4. $\int \frac{2x^2-x+1}{(x^2-x+1)(x^2+1)}dx$. **5.** $\int \frac{(1+\cos x)dx}{1+\cos x+\sin x}$.

Вариант 24.

1. $\int \frac{dx}{5x+3}$. **2.** $\int \frac{(x+12)dx}{x^2-x-6}$. 3. $\int arctg 4x dx$.

4. $\int \frac{x^3+x^2+1}{(x^2-x+1)(x^2+1)}dx$. **5.** $\int \frac{\cos x dx}{(1+\cos x)(1-\sin x)}$.

Вариант 25.

1. $\int \sin(2-3x)dx$. **2.** $\int \frac{(x+19)dx}{x^2-2x-15}$. **3.** $\int \sqrt{x^3}\ln x dx$.

4. $\int \frac{x^3+x+1}{(x^2-x+1)(x^2+1)}dx$. **5.** $\int \frac{dx}{\sin x(1-\sin x)}dx$.

Вариант 26.

1. $\int e^{\frac{1}{4}x-2}dx$. **2.** $\int \frac{(5x+6)dx}{x^2+4x-12}$. **3.** $\int x\sin 5x dx$.

4. $\int \frac{2x^3+2x+1}{(x^2-x+1)(x^2+1)}dx$. **5.** $\int \frac{dx}{(1+\sin x-\cos x)^2}$.

Вариант 27.

1. $\int \frac{dx}{7+4x^2}$. **2.** $\int \frac{(5x-7)dx}{x^2-x-20}$. **3.** $\int (2x+5)\sin x dx$. **4.** $\int \frac{x^3+2x^2+x+1}{(x^2+x+1)(x^2+1)}dx$. **5.** $\int \frac{\sin x dx}{1+\cos x+\sin x}$.
Вариант 28. **1.** $\int \frac{dx}{\cos^2 2x}$. **2.** $\int \frac{5x dx}{x^2+x-6}$. **3.** $\int \frac{\ln x dx}{\sqrt{x}}$. **4.** $\int \frac{x+4}{(x^2+x+2)(x^2+2)}dx$. **5.** $\int \frac{\cos x dx}{1+\cos x-\sin x}$.
Вариант 29. **1.** $\int \frac{x dx}{7+x^2}$. **2.** $\int \frac{(x+18)dx}{x^2-4x-12}$. 3. $\int (3-x)\cos x dx$. **4.** $\int \frac{2x^3+2x^2+2x+1}{(x^2+x+1)(x^2+1)}dx$. **5.** $\int \frac{1-\sin x}{\cos x(1+\cos x)}dx$.
Вариант 30. **1.** $\int \frac{dx}{\sin^2 \frac{x}{5}}$. **2.** $\int \frac{(x+4)dx}{x^2-2x-8}$. **3.** $\int x\ln(1-3x)dx$. **4.** $\int \frac{3x^3+7x^2+12x+6}{(x^2+x+3)(x^2+2x+3)}dx$. **5.** $\int \frac{\sin^2 x dx}{(1+\cos x+\sin x)^2}$.

Пример 1. *Найдем неопределенные интегралы.*

1. $\int \frac{x dx}{\sqrt{3-2x^2}}$. Используем замену переменной:

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{3-2x^2}} = \begin{bmatrix} t = 3-2x^2 \\ dt = -4x dx \\ x dx = -\frac{1}{4}dt \end{bmatrix} = \int \frac{-\frac{1}{4}dt}{\sqrt{t}} = -\frac{1}{4}\int t^{-\frac{1}{2}}dt =$$

$$=-\frac{1}{4}\left(\frac{t^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}\right)+C=-\frac{1}{2}\sqrt{t}+C=-\frac{1}{2}\sqrt{3-2x^2}+C.$$

2. $\int\frac{(x-13)dx}{x^2+12x+20}$. Требуется проинтегрировать правильную дробь.

1) Разложим знаменатель на множители. Для этого найдем корни уравнения $x^2+12x+20=0$: $\frac{D}{4}=36-20=16$, $\sqrt{D}=4$, $x_1=-6+4=-2$, $x_2=-6-4=-10$. Значит, знаменатель дроби имеет вид: $(x+2)(x+10)$. Таким образом, $\int\frac{(x-13)dx}{x^2+12x+20}=\int\frac{(x-13)dx}{(x+2)(x+10)}$.

2) Представим дробь $\frac{x-13}{(x+2)(x+10)}$ в виде суммы простейших дробей первого типа:

$\frac{x-13}{(x+2)(x+10)}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x+10}$, где A и B – неопределенные коэффициенты. Тогда $\frac{x-13}{(x+2)(x+10)}=\frac{A(x+10)+B(x+2)}{(x+2)(x+10)}$, $x-13=A(x+10)+B(x+2)$. Это равенство должно быть верным при любом значении *x*.

Например, при $x=-2$ получаем:

$-2-13=A(-2+10)+B(-2+2)$, $-15=8A$, $A=-\frac{15}{8}$.

При $x=-10$ получаем:

$-10-13=A(-10+10)+B(-10+2)$, $-23=-8B$, $B=\frac{23}{8}$.

Значит, $\dfrac{x-13}{(x+2)(x+10)}=-\dfrac{15}{8}\cdot\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{23}{8}\cdot\dfrac{1}{x+10}$.

3) Проинтегрируем полученную сумму дробей:

$$\int\frac{(x-13)dx}{x^2+12x+20}=-\frac{15}{8}\int\frac{dx}{x+2}+\frac{23}{8}\int\frac{dx}{x+10}=$$

$$=-\frac{15}{8}\ln|x+2|+\frac{23}{8}\ln|x+10|+C.$$

3. $\displaystyle\int\frac{x\cos x dx}{\sin^3 x}$. Используем формулу интегрирования по частям:

$$\int\frac{x\cos xdx}{\sin^3 x}=\left[\begin{array}{c} u=x \\ du=dx \\ dv=\dfrac{\cos xdx}{\sin^3 x}=\dfrac{d(\sin x)}{\sin^3 x} \\ v=\int dv=\int\dfrac{d(\sin x)}{\sin^3 x}=-\dfrac{1}{2\sin^2 x}\end{array}\right]=$$

$$=-\frac{x}{2\sin^3 x}+\int\frac{dx}{2\sin^2 x}=-\frac{x}{2\sin^3 x}-\frac{1}{2}ctgx+C.$$

4. $\displaystyle\int\frac{2x^3+3x^2+3x+2}{(x^2+x+1)(x^2+1)}dx$. Требуется проинтегрировать правильную дробь.

Знаменатель представляет собой произведение квадратных трехчленов с отрицательными дискриминантами. Поэтому дробь можно разложить в сумму простейших дробей третьего типа:

$\dfrac{2x^3+3x^2+3x+2}{(x^2+x+1)(x^2+1)}=\dfrac{Ax+B}{x^2+x+1}+\dfrac{Cx+D}{x^2+1}$. Тогда

$$\frac{2x^3+3x^2+3x+2}{(x^2+x+1)(x^2+1)}=\frac{(Ax+B)(x^2+1)+(Cx+D)(x^2+x+1)}{(x^2+x+1)(x^2+1)},$$

$2x^3+3x^2+3x+2=(Ax+B)(x^2+1)+(Cx+D)(x^2+x+1)$. Это равенство должно быть верным при любом значении *x*. Для этого коэффициенты при одинаковых степенях *x* должны быть одинаковы в левой и правой частях:

$$\begin{cases} 2=A+C \\ 3=B+C+D \\ 3=A+C+D \\ 2=B+D \end{cases}.$$

Решая эту систему, получим: D=1, B=1, C=1, A=1. Значит, $\dfrac{2x^3+3x^2+3x+2}{(x^2+x+1)(x^2+1)}=\dfrac{x+1}{x^2+x+1}+\dfrac{x+1}{x^2+1}$. Тогда

$$\int\frac{2x^3+3x^2+3x+2}{(x^2+x+1)(x^2+1)}dx=\int\frac{(x+1)dx}{x^2+x+1}+\int\frac{(x+1)dx}{x^2+1}=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{(2x+1)dx}{x^2+x+1}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+x+1}+\frac{1}{2}\int\frac{2xdx}{x^2+1}+\int\frac{dx}{x^2+1}=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{(2x+1)dx}{x^2+x+1}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}+\frac{1}{2}\int\frac{2xdx}{x^2+1}+\int\frac{dx}{x^2+1}=$$

$$=\frac{1}{2}\ln(x^2+x+1)+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+\operatorname{arctg}x+C$$

$$=\frac{1}{2}\ln(x^2+x+1)+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+\operatorname{arctg}x+C.$$

5. $\displaystyle\int\frac{\sin xdx}{5+3\sin x}$. Используем универсальную тригонометрическую подстановку:

$$\int \frac{\sin x dx}{5+3\sin x} = \begin{bmatrix} t = tg\,\dfrac{x}{2} \\ \sin x = \dfrac{2t}{1+t^2} \\ dx = \dfrac{2dt}{1+t^2} \end{bmatrix} = \int \frac{\dfrac{2t}{1+t^2} \cdot \dfrac{2dt}{1+t^2}}{5+3\cdot\dfrac{2t}{1+t^2}} =$$

$= \int \dfrac{4tdt}{(1+t^2)(5t^2+6t+5)} = \dfrac{4}{5}\int \dfrac{tdt}{(1+t^2)(t^2+\frac{6}{5}t+1)}$. Представим дробь $\dfrac{t}{(1+t^2)(t^2+\frac{6}{5}t+1)}$ в виде суммы простейших дробей:

$\dfrac{t}{(1+t^2)(t^2+\frac{6}{5}t+1)} = \dfrac{At+B}{1+t^2} + \dfrac{Ct+D}{t^2+\frac{6}{5}t+1}$. Тогда

$$\frac{t}{(1+t^2)(t^2+\frac{6}{5}t+1)} = \frac{(At+B)(t^2+\frac{6}{5}t+1)+(Ct+D)(t^2+1)}{(1+t^2)(t^2+\frac{6}{5}t+1)},$$

$t = (At+B)(t^2+\frac{6}{5}t+1)+(Ct+D)(t^2+1)$. Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях t:

$$\begin{cases} 0 = A + C \\ 0 = \dfrac{6}{5}A + B + D \\ 1 = A + \dfrac{6}{5}B + C \\ 0 = B + D \end{cases}.$$

Решая эту систему, получим: B=$\frac{5}{6}$, D=$-\frac{5}{6}$, A=0, C=0.

Значит, $\frac{t}{(1+t^2)(t^2+\frac{6}{5}t+1)}=\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{1+t^2}-\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{t^2+\frac{6}{5}t+1}$. Тогда

$$\frac{4}{5}\int\frac{tdt}{(1+t^2)(t^2+\frac{6}{5}t+1)}=\frac{2}{3}\int\frac{dt}{t^2+1}-\frac{2}{3}\int\frac{dt}{t^2+\frac{6}{5}t+1}=$$

$$=\frac{2}{3}\int\frac{dt}{t^2+1}-\frac{2}{3}\int\frac{dt}{(t+\frac{3}{5})^2+\frac{16}{25}}=$$

$$=\frac{2}{3}arctgt-\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{4}arctg(\frac{5t+3}{4})+C=\frac{x}{3}-\frac{5}{6}arctg\left(\frac{5tg\frac{x}{2}+3}{4}\right)+C.$$

Задание 2. Найти определенный интеграл.

Вариант 1. $\int\limits_2^7\frac{\sqrt{x+2}}{x}dx$	Вариант 2. $\int\limits_{-\frac{3}{4}}^0\frac{3xdx}{\sqrt{(x+1)^3}}$	Вариант 3. $\int\limits_0^1\frac{\sqrt{x}dx}{4-x}$
Вариант 4. $\int\limits_{-8}^0\frac{dx}{5-\sqrt[3]{x^2}}$	Вариант 5. $\int\limits_0^4\frac{dx}{\sqrt{x}-3}$	Вариант 6. $\int\limits_{-4}^1\frac{xdx}{\sqrt{(5-x)^3}}$
Вариант 7. $\int\limits_{-\frac{3}{4}}^0\frac{dx}{2-\sqrt{1+x}}$	Вариант 8. $\int\limits_{-1}^1\frac{dx}{8+\sqrt[3]{x^2}}$	Вариант 9. $\int\limits_2^7\frac{\sqrt{x+2}}{x}dx$
Вариант 10.	Вариант 11.	Вариант 12.

$\int_{-\frac{3}{4}}^{0} \frac{3xdx}{\sqrt{(x+1)^3}}$	$\int_{0}^{1} \frac{\sqrt{x}dx}{4-x}$	$\int_{-8}^{0} \frac{dx}{5-\sqrt[3]{x^2}}$
Вариант 13. $\int_{0}^{4} \frac{dx}{\sqrt{x}-3}$	Вариант 14. $\int_{-4}^{1} \frac{xdx}{\sqrt{(5-x)^3}}$	Вариант 15. $\int_{-\frac{3}{4}}^{0} \frac{dx}{2-\sqrt{1+x}}$
Вариант 16. $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{8+\sqrt[3]{x^2}}$	Вариант 17. $\int_{2}^{7} \frac{\sqrt{x+2}}{x}dx$	Вариант 18. $\int_{-\frac{3}{4}}^{0} \frac{3xdx}{\sqrt{(x+1)^3}}$
Вариант 19. $\int_{0}^{1} \frac{\sqrt{x}dx}{4-x}$	Вариант 20. $\int_{-8}^{0} \frac{dx}{5-\sqrt[3]{x^2}}$	Вариант 21. $\int_{0}^{4} \frac{dx}{\sqrt{x}-3}$
Вариант 22. $\int_{2}^{7} \frac{\sqrt{x+2}}{x}dx$	Вариант 23. $\int_{0}^{1} \frac{\sqrt{x}dx}{4-x}$	Вариант 24. $\int_{-8}^{0} \frac{dx}{5-\sqrt[3]{x^2}}$
Вариант 25. $\int_{0}^{4} \frac{dx}{\sqrt{x}-3}$	Вариант 26. $\int_{-4}^{1} \frac{xdx}{\sqrt{(5-x)^3}}$	Вариант 27. $\int_{-\frac{3}{4}}^{0} \frac{dx}{2-\sqrt{1+x}}$
Вариант 28. $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{8+\sqrt[3]{x^2}}$	Вариант 29. $\int_{2}^{7} \frac{\sqrt{x+2}}{x}dx$	Вариант 30. $\int_{-\frac{3}{4}}^{0} \frac{3xdx}{\sqrt{(x+1)^3}}$

Пример 2. *Найдем определенный интеграл* $\int_{-\frac{1}{2}}^{0} \frac{xdx}{2+\sqrt{2x+1}}$.

Используем замену переменной.

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{0}\frac{xdx}{2+\sqrt{2x+1}}=\left[\begin{array}{c}\sqrt{2x+1}=t\\ x=\dfrac{t^2-1}{2}\\ dx=tdt\\ x=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow t=0\\ x=0\Rightarrow t=1\end{array}\right]=\int_0^1\frac{\frac{t^2-1}{2}tdt}{2+t}=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{t^3-t}{2+t}dt\ .$$

Под интегралом неправильная дробь $\dfrac{t^3-t}{2+t}$. Выделим целую часть:

$$\frac{t^3-t}{2+t}=\frac{t^2(t+2)-2t^2-t}{t+2}=\frac{t^2(t+2)-2t(t+2)+3t}{t+2}=$$

$$=\frac{t^2(t+2)-2t(t+2)+3(t+2)-6}{t+2}=\frac{(t+2)(t^2-2t+3)-6}{t+2}=$$

$$=(t^2-2t+3)-\frac{6}{t+2}\ .$$

Значит, $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1\frac{t^3-t}{2+t}dt=\frac{1}{2}\int_0^1(t^2-2t+3-\frac{6}{t+2})dt=$

$$=\frac{1}{2}(\frac{t^3}{3}-t^2+3t-6\ln|t+2|)\Big|_0^1=\frac{1}{2}(\frac{1^3}{3}-1^2+3\cdot 1-6\ln|1+2|)-$$

$$-\frac{1}{2}(\frac{0^3}{3}-0^2+3\cdot 0-6\ln|0+2|)=\frac{7}{6}-3\ln 3+3\ln 2=\frac{7}{6}-3\ln\frac{3}{2}\ .$$

Задание 3. Найти несобственный интеграл.

Вариант 1. $\displaystyle\int_{-3}^{5}\frac{dx}{\sqrt[3]{x+3}}$	Вариант 2. $\displaystyle\int_{0}^{\infty}xe^{-x^2}dx$	Вариант 3. $\displaystyle\int_{0}^{\infty}\frac{dx}{x\ln^2 x}$
Вариант 4.	Вариант 5.	Вариант 6.

$\int_4^5 \frac{dx}{(x-4)^2}$	$\int_1^2 \frac{xdx}{x-1}$	$\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 tgxdx$
Вариант 7. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos xdx}{\sin^2 x}$	Вариант 8. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+5}$	Вариант 9. $\int_{-3}^5 \frac{dx}{\sqrt[3]{x+3}}$
Вариант 10. $\int_0^{\infty} xe^{-x^2}dx$	Вариант 11. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x\ln x}$	Вариант 12. $\int_4^5 \frac{dx}{(x-4)^2}$
Вариант 13. $\int_1^2 \frac{xdx}{x-1}$	Вариант 14. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 tgxdx$	Вариант 15. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos xdx}{\sin^2 x}$
Вариант 16. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+5}$	Вариант 17. $\int_{-3}^5 \frac{dx}{\sqrt[3]{x+3}}$	Вариант 18. $\int_0^{\infty} xe^{-x^2}dx$
Вариант 19. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x\ln^2 x}$	Вариант 20. $\int_4^5 \frac{dx}{(x-4)^2}$	Вариант 21. $\int_1^2 \frac{xdx}{x-1}$
Вариант 22. $\int_{-3}^5 \frac{dx}{\sqrt[3]{x+3}}$	Вариант 23. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x\ln^2 x}$	Вариант 24. $\int_4^5 \frac{dx}{(x-4)^2}$
Вариант 25. $\int_1^2 \frac{xdx}{x-1}$	Вариант 26. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 tgxdx$	Вариант 27. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos xdx}{\sin^2 x}$
Вариант 28. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+5}$	Вариант 29. $\int_{-3}^5 \frac{dx}{\sqrt[3]{x+3}}$	Вариант 30. $\int_0^{\infty} xe^{-x^2}dx$

Пример 3. *Найдем несобственный интеграл* $\int\limits_2^{\infty}\frac{xdx}{\sqrt{x^4+1}}$.

Дан несобственный интеграл первого типа. По определению $\int\limits_2^{\infty}\frac{xdx}{\sqrt{x^4+1}}=\lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_2^{b}\frac{xdx}{\sqrt{x^4+1}}$. Найдем $\int\limits_2^{b}\frac{xdx}{\sqrt{x^4+1}}$, используя замену переменной,

$$\int\limits_2^{b}\frac{xdx}{\sqrt{x^4+1}}=\begin{bmatrix} x^2=t \\ dt=2xdx \\ xdx=\frac{1}{2}dt \\ x=2\Rightarrow t=4 \\ x=b\Rightarrow t=b^2 \end{bmatrix}=\int\limits_4^{b^2}\frac{dt}{2\sqrt{t^2+1}}=\frac{1}{2}\ln(t+\sqrt{t^2+1})\Big|_4^{b^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\ln(b^2+\sqrt{b^4+1})-\frac{1}{2}\ln(4+\sqrt{16+1})=\frac{1}{2}\ln\frac{b^2+\sqrt{b^4+1}}{4+\sqrt{17}}.$$ Выражение под знаком логарифма стремится к бесконечности, значит, и сам логарифм стремится к бесконечности. Поэтому интеграл расходится.

Задание 4. Найти площадь фигуры, ограниченной данными линиями.

Вариант 1. $y=x^2\sqrt{8-x^2}$; $y=0$ $(0\le x\le 2\sqrt{2})$.	Вариант 2. $y=x^2$; $y=3x-2$.	Вариант 3. $x=\sqrt{e^y-1}$; $x=0$; $y=\ln 2$.
Вариант 4. $y=-x^2$; $y=-3x+2$.	Вариант 5. $y=x\sqrt{4-x^2}$; $y=0$ $(0\le x\le 2)$.	Вариант 6. $y=x^2$; $y=-3x+4$.
Вариант 7. $y=(x-2)^3$; $y=4x-8$.	Вариант 8. $y=-x^2$; $y=4x-5$.	Вариант 9. $y=x\sqrt{9-x^2}$; $y=0$ $(0\le x\le 3)$.

Вариант 10. $y = x^2$; $y = 2x+8$.	Вариант 11. $y = x^2\sqrt{4-x^2}$; $y=0$ $(0 \le x \le 2)$.	Вариант 12. $y = x^2$; $y = 4x+5$.
Вариант 13. $y=\sin^2 x\cos x$; $y=0$ $(0 \le x \le \frac{\pi}{2})$.	Вариант 14. $y = x^2$; $y = -3x+10$.	Вариант 15. $y=4-x^2$; $y=x^2-2x$.
Вариант 16. $y = -x^2$; $y = 4x-5$.	Вариант 17. $y=\frac{1}{x\sqrt{1+\ln x}}$; $y=0$; $x=1$; $x=e^3$.	Вариант 18. $y = -x^2$; $y = -6x-7$.
Вариант 19. $y=\arccos x$; $y=0$; $x=0$.	Вариант 20. $y = x^2$; $y = 2x+3$.	Вариант 21. $y=(x+1)^2$; $y^2=x+1$.
Вариант 22. $y = -x^2$; $y = -2x-3$.	Вариант 23. $y=2x-x^2+3$; $y=x^2-4x+3$.	Вариант 24. $y = x^2$; $y = 3x+4$.
Вариант 25. $y= x\sqrt{36-x^2}$; $y=0$ $(0 \le x \le 6)$.	Вариант 26. $y = -x^2$; $y = -3x-10$.	Вариант 27. $x=\arccos y$; $y=0$; $x=0$.
Вариант 28. $y = x^2$; $y = -3x+18$.	Вариант 29. $y=x\,\mathrm{arctg}\,x$; $y=0$; $x=\sqrt{3}$.	Вариант 30. $y = -x^2$; $y = -5x-6$.

Пример 4. *Найдем площадь фигуры, ограниченной линиями:* $y=x^2\cos x$; $y=0$ $(0 \le x \le \frac{\pi}{2})$.

На промежутке $[0; \frac{\pi}{2}]$ функция $y=x^2\cos x$ неотрицательна. Значит, площадь, ограниченная ее графиком и осью абсцисс, равна $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx$. Для нахождения этого интеграла используем интегрирование по частям.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx = \begin{bmatrix} u = x^2 \\ du = 2xdx \\ dv = \cos xdx \\ v = \sin x \end{bmatrix} = x^2 \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x \sin xdx =$$

$$= \frac{\pi^2}{4} \sin\frac{\pi}{2} - 0^2 \sin 0 - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x \sin xdx = \frac{\pi^2}{4} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x \sin xdx =$$

$$= \begin{bmatrix} u = 2x \\ du = 2dx \\ dv = \sin xdx \\ v = -\cos x \end{bmatrix} = \frac{\pi^2}{4} - (-2x \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} -2 \cos xdx) =$$

$$= \frac{\pi^2}{4} + 2 \cdot \frac{\pi}{2} \cos\frac{\pi}{2} - 2 \cdot 0 \cos 0 - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos xdx = \frac{\pi^2}{4} - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos xdx =$$

$$= \frac{\pi^2}{4} - 2\sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{4} - 2\sin\frac{\pi}{2} + 2\sin 0 = \frac{\pi^2}{4} - 2.$$

Задание 5. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Оx фигуры, ограниченной данными линиями.

Вариант 1. $y = 4 - x^2$; $y = 0$.	Вариант 2. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{2}$; $x = 0$; $y = 0$.	Вариант 3. $y^3 = x^2$; $y = x$.
Вариант 4. $y^2 = x$;	Вариант 5. $y^2 = (x-1)^3$;	Вариант 6. $x = \sqrt{1 - y^2}$;

$x^2 = y$.	$x = 2$.	$y = \sqrt{\frac{3}{2}x}$; $y = 0$.
Вариант 7. $y = \sin x$; $y = 0$ $(0 \le x \le \pi)$.	Вариант 8. $y^2 = 4x$; $x^2 = 4y$.	Вариант 9. $y = e^x$; $x = 0$; $x = 1$; $y = 0$.
Вариант 10. $x = y^2$; $8y = x^2$.	Вариант 11. $x^2 = \frac{4y}{3}$; $y = 3$.	Вариант 12. $y = 2x - x^2$; $y = 0$.
Вариант 13. $y = 4 - x^2$; $y = 0$.	Вариант 14. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{2}$; $x = 0$; $y = 0$.	Вариант 15. $y^3 = x^2$; $y = x$.
Вариант 16. $y^2 = x$; $x^2 = y$.	Вариант 17. $y^2 = (x-1)^3$; $x = 2$.	Вариант 18. $x = \sqrt{1 - y^2}$; $y = \sqrt{\frac{3}{2}x}$; $y = 0$.
Вариант 19. $y = \sin x$; $y = 0$ $(0 \le x \le \pi)$.	Вариант 20. $y^2 = 4x$; $x^2 = 4y$.	Вариант 21. $y = e^x$; $x = 0$; $x = 1$; $y = 0$.
Вариант 22. $x = y^2$; $8y = x^2$.	Вариант 23. $x^2 = \frac{4y}{3}$; $y = 3$.	Вариант 24. $y = 2x - x^2$; $y = 0$.
Вариант 25. $x = \sqrt{1 - y^2}$; $y = \sqrt{\frac{3}{2}x}$; $y = 0$.	Вариант 26. $y = 4 - x^2$; $y = 0$.	Вариант 27. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{2}$;; $x = 0$; $y = 0$.
Вариант 28. $y^3 = x^2$; $y = x$.	Вариант 29. $y^2 = x$; $x^2 = y$.	Вариант 30. $y^2 = (x-1)^3$; $x = 2$.

Пример 5. *Вычислим объем тела, полученного вращением вокруг оси Ох фигуры, ограниченной линиями: $(y-1)^2=x$, $x=0$, $y=2$.*

Выразим y из уравнения параболы $(y-1)^2=x$: $y=1\pm\sqrt{x}$. Линия $y=1-\sqrt{x}$ с прямыми $x=0$, $y=2$ не ограничивает никакой фигуры. Остается $y=1+\sqrt{x}$. Таким образом, вращается фигура, ограниченная сверху линией $y=2$, снизу – линией $y=1+\sqrt{x}$, слева и справа – прямыми $x=0$, $x=1$. Объем тела вращения – это разность объемов цилиндра, полученного вращением прямоугольника, ограниченного прямыми $x=0$, $x=1$, $y=0$, $y=2$, и тела, полученного вращением криволинейной трапеции, ограниченной прямыми $x=0$, $x=1$, $y=0$ и линией $y=1+\sqrt{x}$. Таким образом, этот объем – разность интегралов: $V=\pi\int_0^1 2^2\,dx-\pi\int_0^1(1+\sqrt{x})^2\,dx$.

Отсюда $V=\pi\int_0^1(4-1-2\sqrt{x}-x)dx=\pi\left(3x-\frac{4\sqrt{x^3}}{3}-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1=$

$=\pi\left(3-\frac{4}{3}-\frac{1}{2}\right)=\frac{7}{6}\pi$.

Часть VI. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

1. Основные понятия

Пусть $D\subseteq\mathbf{R}^n$. Отображение $f : D\to\mathbf{R}$ будем называть ***функцией n переменных***. Если $(x_1, x_2, ..., x_n)$ – элемент множества D, то его образ $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ – действительное число. Множество D – ***область определения*** функции f. Переменные $x_1, x_2, ..., x_n$ называют ***аргументами*** этой функции.

Примеры. 1) Формула равномерного движения S=vt задает пройденный путь как функцию двух переменных – скорости и времени: $S=f(v,t)$.

2) Закон Ома V=IR задает напряжение как функцию двух переменных – силы тока и сопротивления: $V=f(I,R)$.

3) Формула объема прямоугольного параллелепипеда $V=abc$ задает объем как функцию трех переменных – длины, ширины и высоты: $V=f(a,b,c)$. •

Если $f(x,y)$ – функция двух переменных, то область определения $D(f)$ – часть плоскости.

Примеры. 1) Пусть $f(x,y)=\sqrt{4-x^2-y^2}$. Тогда $D(f)$ состоит из всех точек (x,y), для которых $4-x^2-y^2\geq 0$. Эти точки составляют круг с центром в начале координат и радиусом 2. Таким образом, $D(f)$ – круг.

2) Пусть $f(x,y)=\dfrac{2x+y}{x-y}$. Тогда $D(f)$ состоит из всех точек (x,y), для которых $x-y\neq 0$. Эти точки составляют всю плоскость, кроме прямой $x=y$. Таким образом, $D(f)$ – вся плоскость без этой прямой.

3) Пусть $f(x,y)=\ln(x^2+y^2-1)$. Тогда $D(f)$ состоит из всех точек (x,y), для которых $x^2+y^2-1>0$. Эти точки составляют всю плоскость, кроме круга с центром в начале координат

и радиусом 1. Таким образом, D(f) – вся плоскость без этого круга. •

Если $f(x,y)$ – функция двух переменных, то поверхность $z = f(x,y)$ называют ***графиком*** этой функции, а линии на плоскости, заданные уравнениями вида $f(x,y)$=C, называют ***линиями уровня***.

<u>Примеры</u>. 1) Пусть $f(x,y)=\sqrt{4-x^2-y^2}$.

Область определения этой функции, как показано выше, – круг с центром в начале координат и радиусом 2.

График функции – поверхность $z = \sqrt{4-x^2-y^2}$, то есть полусфера: $x^2+y^2+z^2=4$, $z\geq 0$.

Рассмотрим линии уровня $\sqrt{4-x^2-y^2}$ = C.

Если 0≤C<2, то линии уровня – окружности с центром в начале координат и радиусом $\sqrt{4-C^2}$ (*почему?*).

Если C=2, то линия уровня состоит из одной точки – начала координат (*почему?*).

При C<0 или C>2 линии уровня не существуют (*почему?*).

2) Пусть $f(x,y)=x^2+y^2-1$.

Область определения этой функции – вся плоскость.

График функции – поверхность $z=x^2+y^2-1$, то есть параболоид вращения с вершиной в точке (0;0;–1) и осью вращения Oz.

Рассмотрим линии уровня x^2+y^2-1=C.

Если C>–1, то линии уровня – окружности с центром в начале координат и радиусом $\sqrt{1+C}$ (*почему?*).

Если C=–1, то линия уровня состоит из одной точки – начала координат (*почему?*).

При C<–1линии уровня не существуют (*почему?*).•

2. Предел и непрерывность

Пусть $\bar{a} \in \mathbf{R}^n$: $\bar{a} = (a_1, a_2, ..., a_n)$. Пусть $\varepsilon > 0$. Множество всех таких точек $\bar{y} \in \mathbf{R}^n$, для которых $|\bar{a} - \bar{y}| < \varepsilon$, будем называть ***ε-окрестностью*** точки $\bar{a}$; ε-окрестность точки $\bar{a}$ без самой этой точки будем называть ***проколотой ε-окрестностью*** точки $\bar{a}$. Например, если n=2, то ε-окрестность точки $\bar{a}$ – это открытый круг с центром $\bar{a}$ и радиусом ε, а проколотая ε-окрестность точки $\bar{a}$ – этот же круг без центра. Теперь понятия предела и непрерывности функции нескольких переменных можно определить так же, как для функции одной переменной.

Определение 1. Функция f нескольких переменных, определенная в некоторой проколотой окрестности точки $\bar{a}$, называется ***бесконечно малой при $\bar{x}$, стремящемся к $\bar{a}$*** (пишут: $\bar{x} \to \bar{a}$), если для любого положительного числа ε существует такая проколотая окрестность точки $\bar{a}$, что при всех $\bar{x}$, принадлежащих этой окрестности, $|f(\bar{x})| < \varepsilon$.

Свойства бесконечно малых функций нескольких переменных аналогичны свойствам бесконечно малых функций одной переменной. Сформулируйте их самостоятельно.

Определение 2. Число b называется ***пределом функции f($\bar{x}$) при $\bar{x} \to \bar{a}$***, если функция $f(\bar{x}) - b$ является бесконечно малой при $\bar{x} \to \bar{a}$. Обозначение: $b = \lim\limits_{\bar{x} \to \bar{a}} f(\bar{x})$.

Докажите, что если функция $f(\bar{x})$ – бесконечно малая при $\bar{x} \to \bar{a}$, то $\lim\limits_{\bar{x} \to \bar{a}} f(\bar{x}) = 0$.

Примеры. 1) Пусть $f(\bar{x})$=С – постоянная функция. Тогда для любой точки $\bar{a}$ функция $f(\bar{x})$–С является бесконечно малой при $\bar{x}\to\bar{a}$ (*почему?*). Значит, $\lim\limits_{\bar{x}\to\bar{a}} C$ =С.

2) Пусть $f(\bar{x})=x_1$ – первая координата точки $\bar{x}$. Тогда для любой точки $\bar{a}=(a_1,a_2,...,a_n)$ функция $f(\bar{x})-a_1$ является бесконечно малой при $\bar{x}\to\bar{a}$ (*почему?*). Значит, $\lim\limits_{\bar{x}\to\bar{a}} x_1 = a_1$. •

Свойства предела функции нескольких переменных аналогичны свойствам предела функции одной переменной. Сформулируем их в виде теорем, которые примем без доказательства.

Теорема 1 (о единственности предела). Если $\lim\limits_{\bar{x}\to\bar{a}} f(\bar{x})=b$ и $\lim\limits_{\bar{x}\to\bar{a}} f(\bar{x})=c$, то $c = b$.

Теорема 2 (об ограниченности функции, имеющей предел). Если функция имеет предел при $\bar{x}\to\bar{a}$, то она ограничена в некоторой проколотой окрестности точки $\bar{a}$.

Теорема 3 (о переходе к пределу в неравенстве). Если $\lim\limits_{\bar{x}\to\bar{a}} f(\bar{x})=b$ и $\lim\limits_{\bar{x}\to\bar{a}} g(\bar{x})=c$, причем $f(\bar{x})\le g(\bar{x})$ в некоторой проколотой окрестности точки $\bar{a}$, то $b\le c$.

Следствие. Если $\lim\limits_{\bar{x}\to\bar{a}} f(\bar{x})=b$, причем $f(\bar{x})\le 0$ в некоторой проколотой окрестности точки $\bar{a}$, то $b\le 0$. Если $\lim\limits_{\bar{x}\to\bar{a}} f(\bar{x})=b$, причем $f(\bar{x})\ge 0$ в некоторой проколотой окрестности точки $\bar{a}$, то $b\ge 0$.

Теорема 4 (о промежуточной функции). Если $\lim\limits_{\bar{x}\to\bar{a}} f(\bar{x})=b$ и $\lim\limits_{\bar{x}\to\bar{a}} g(\bar{x})=b$, причем $f(\bar{x})\le h(\bar{x})\le g(\bar{x})$ в некоторой проколотой окрестности точки $\bar{a}$, то $\lim\limits_{\bar{x}\to\bar{a}} h(\bar{x})=b$.

Теорема 5 (об арифметических операциях).
1) Если $\lim\limits_{\bar{x}\to\bar{a}} f(\bar{x})=b$ и $\lim\limits_{\bar{x}\to\bar{a}} g(\bar{x})=c$, то $\lim\limits_{\bar{x}\to\bar{a}}(f(\bar{x})+g(\bar{x}))=b+c$.

2) Если $\lim\limits_{\bar{x}\to\bar{a}} f(\bar{x})=b$ и $\lim\limits_{\bar{x}\to\bar{a}} g(\bar{x})=c$, то $\lim\limits_{\bar{x}\to\bar{a}}(f(\bar{x})g(\bar{x}))=bc$.

<u>Следствие</u>. Если $\lim\limits_{\bar{x}\to\bar{a}} f(\bar{x})=b$, то $\lim\limits_{\bar{x}\to\bar{a}} Cf(\bar{x})=Cb$.

Докажите это следствие.

3) Если $\lim\limits_{\bar{x}\to\bar{a}} f(\bar{x})=b$, причем $b\neq 0$, то $\lim\limits_{\bar{x}\to\bar{a}}\dfrac{1}{f(\bar{x})}=\dfrac{1}{b}$.

<u>Следствие</u>. Если $\lim\limits_{\bar{x}\to\bar{a}} f(\bar{x})=b$ и $\lim\limits_{\bar{x}\to\bar{a}} g(\bar{x})=c$, причем $c\neq 0$, то $\lim\limits_{\bar{x}\to\bar{a}}\dfrac{f(\bar{x})}{g(\bar{x})}=\dfrac{b}{c}$.

Докажите это следствие.

<u>Примеры</u>.

Будем обозначать $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ через $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$.

1) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 1}}\dfrac{x^2+y^3}{2x-3y}=\dfrac{2^2+1^3}{2\cdot 2-3\cdot 1}=5.$

2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\ln(1+2xy)}{\sin 3xy}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{2xy}{3xy}=\dfrac{2}{3}$. Мы воспользовались здесь эквивалентностями: $\ln(1+\alpha)\sim\alpha$ и $\sin\alpha\sim\alpha$ при $\alpha\to 0$.

3) Покажем, что $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ не существует. Предположим сначала, что точка (x,y) приближается к точке (0;0) по прямой $y=x$. Тогда $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{x^2+y^2}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2}{x^2+x^2}=\dfrac{1}{2}$. Если же прямую $y=x$ заменить прямой $y=-x$, то получим $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{x^2+y^2}=$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{-x^2}{x^2+(-x)^2}=-\dfrac{1}{2}$. Поскольку $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ не может иметь двух различных значений, то он не существует.

4) Для вычисления $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}$ воспользуемся полярными координатами: пусть $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$. Тогда $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}=$ $\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{\rho^4\cos^2\varphi\sin^2\varphi}{\rho^2}=\lim\limits_{\rho\to 0}\rho^2\cos^2\varphi\sin^2\varphi$; $0\le\rho^2\cos^2\varphi\sin^2\varphi\le\rho^2$ при любом φ; $\lim\limits_{\rho\to 0}\rho^2=0$; значит, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}=0$.•

Определение 3. Функция $f(\bar{x})$, определенная в некоторой окрестности точки $\bar{a}$, называется ***непрерывной в точке*** $\bar{a}$, если $\lim\limits_{\bar{x}\to\bar{a}} f(\bar{x})=f(\bar{a})$.

Перечислим свойства непрерывных функций нескольких переменных.

Теорема 6 (о локальной ограниченности). Если функция непрерывна в точке, то она ограничена в некоторой окрестности этой точки.

Теорема 7 (о сохранении знака). Если функция $f(\bar{x})$ непрерывна в точке $\bar{a}$ и $f(\bar{a})>0$ (или $f(\bar{a})<0$), то $f(\bar{x})>0$ (соответственно $f(\bar{x})<0$) в некоторой окрестности точки $\bar{a}$.

Теорема 8 (об арифметических операциях). Если функции $f(\bar{x})$ и $g(\bar{x})$ непрерывны в точке $\bar{a}$, то функции $f(\bar{x})+g(\bar{x})$ и $f(\bar{x})g(\bar{x})$ непрерывны в точке $\bar{a}$. Если, кроме того, $g(\bar{a})\ne 0$, то и функция $\dfrac{f(\bar{x})}{g(\bar{x})}$ непрерывна в точке $\bar{a}$.

Теорема 9 (о непрерывности сложной функции двух переменных). Пусть функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ непрерывны в точке (x_o,y_o), а функция $f(u,v)$ непрерывна в точке (u_o,v_o), где $u_o=u(x_o,y_o)$, $v_o=v(x_o,y_o)$. Тогда функция $f(u(x,y),v(x,y))$ непрерывна в точке (x_o,y_o).

<u>Замечание 1.</u> Рассмотрим функцию двух переменных $f(x,y)$. Рассмотрим точки (x_0,y_0) и $(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)$. Разность $f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$ обозначим Δf и будем называть **приращением функции** в точке (x_0,y_0). При фиксированной точке (x_0,y_0) приращение будет функцией от Δx и Δy (то есть от **приращений аргументов**). Из определения непрерывности следует, что функция $f(x,y)$ непрерывна в точке (x_0,y_0) тогда и только тогда, когда в этой точке $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \Delta f(\Delta x,\Delta y)=0$ (то есть приращение функции в этой точке является бесконечно малой при $\Delta x\to 0$ и $\Delta y\to 0$).

<u>Пример</u>. Пусть $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, \text{ если } x\neq 0 \text{ или } y\neq 0\\ 0, \text{ если } x=0 \text{ и } y=0\end{cases}$.

Тогда приращение функции в точке (0;0) имеет вид: $\Delta f=\dfrac{\Delta x\Delta y}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$. Как показано в примере выше, при $\Delta x\to 0$ и $\Delta y\to 0$ эта функция не имеет предела. Значит, функция $f(x,y)$ не является непрерывной в точке (0;0).•

<u>Замечание 2.</u> Кроме приращения Δf, для функции двух переменных рассматривают так называемые ***частные приращения*** по x и по y: $\Delta_x f = f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)$ и $\Delta_y f = f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$. Первое из них является функцией только от Δx, а второе – только от Δy. Аналогично можно определить частные приращения и для функции любого числа переменных.

3. Дифференциальное исчисление функций двух переменных

3.1. Дифференцируемость функции в точке

Определение 1. Функция двух переменных $f(x,y)$, определенная в некоторой окрестности точки (x_0,y_0), называется ***дифференцируемой*** в этой точке, если приращение функции в этой точке можно представить в виде:

$\Delta f = \mathrm{A}\Delta x+\mathrm{B}\Delta y+\alpha(\Delta x,\Delta y)\Delta x+\beta(\Delta x,\Delta y)\Delta y$, где A и B – числа, а $\alpha(\Delta x,\Delta y)$ и $\beta(\Delta x,\Delta y)$ – бесконечно малые функции при $\Delta x\to 0$ и $\Delta y\to 0$. Главную линейную часть этого выражения – сумму $\mathrm{A}\Delta x+\mathrm{B}\Delta y$ – называют ***дифференциалом*** функции $f(x,y)$ в точке (x_0,y_0) и обозначают $\mathrm{d}f$.

Из этого определения следует, что если функция $f(x,y)$ дифференцируема в точке (x_0,y_0), то в этой точке при $\Delta y=0$ будет $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}=\mathrm{A}+\alpha(\Delta x,0)$, то есть $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}=\mathrm{A}+\alpha(\Delta x,0)$ (*почему?*). Если же $\Delta x=0$, $\dfrac{\Delta f}{\Delta y}=\mathrm{B}+\beta(0,\Delta y)$, то есть $\dfrac{\Delta_y f}{\Delta y}=\mathrm{B}+\beta(0,\Delta y)$.

Докажите что тогда существуют пределы: $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta_x f}{\Delta x}=A$ *и* $\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{\Delta_y f}{\Delta y}=B$.

Определение 2. Пусть функция $f(x,y)$ определена в некоторой окрестности точки (x_0,y_0). Если в этой точке существует $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta_x f}{\Delta x}$, то он называется ***частной производной по x*** данной функции в данной точке и обозначается $\dfrac{\partial f}{\partial x}$. Аналогично $\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{\Delta_y f}{\Delta y}=\dfrac{\partial f}{\partial y}$ – ***частная производная по y***. Таким же образом определяются частные производные для функции любого числа переменных.

Итак, справедлива следующая теорема.

Теорема 1 (необходимое условие дифференцируемости функции в точке). Если функция $f(x,y)$ дифференцируема в точке (x_0,y_0), то в этой точке существуют частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

Замечание. Значит, $\mathrm{d}f = \dfrac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \dfrac{\partial f}{\partial y}\Delta y$. Так же, как для функций одной переменной, можно показать, что $\mathrm{d}x=\Delta x$ и $\mathrm{d}y=\Delta y$, то есть $\mathrm{d}f = \dfrac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \dfrac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y$.

Теорема 2 (непрерывность дифференцируемой функции). Если функция $f(x,y)$ дифференцируема в точке (x_0,y_0), то она непрерывна в этой точке.

Доказательство. Поскольку для дифференцируемой функции $\Delta f = \mathrm{A}\Delta x+\mathrm{B}\Delta y+\alpha(\Delta x,\Delta y)\Delta x+\beta(\Delta x,\Delta y)\Delta y$, где A и B – числа, а $\alpha(\Delta x,\Delta y)$ и $\beta(\Delta x,\Delta y)$ – бесконечно малые при $\Delta x\to 0$ и $\Delta y\to 0$, то Δf является бесконечно малой при $\Delta x\to 0$ и $\Delta y\to 0$. А значит, согласно замечанию 1 из предыдущего пункта, функция $f(x,y)$ непрерывна в точке (x_0,y_0), ч.т.д.

Примеры. 1)Пусть $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$. Эта функция непрерывна на всей плоскости и, в частности, в точке (0;0). Приращение $\Delta_x f$ в этой точке равно $\sqrt{(\Delta x)^2}$, то есть $|\Delta x|$. Поэтому отношение $\Delta_x f$ к Δx равно 1 или –1 в зависимости от знака Δx, и предел этого отношения при $\Delta x\to 0$ не существует. Отсутствие частной производной по x означает, что функция не дифференцируема в точке (0;0). Таким образом, непрерывность является необходимым, но не достаточным условием дифференцируемости.

2)Пусть $f(x,y) = x^3y+\sin(x^2+\sqrt{y})+\mathrm{tg}x+\ln y$. Найдем частные производные этой функции. Поскольку при вычислении частной производной по одному из аргументов другой аргумент не меняется, то достаточно найти обычную производную, считая второй аргумент константой.

Тогда $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y+\cos(x^2+\sqrt{y})\cdot(2x+0)+\frac{1}{\cos^2 x}+0=$

$=3x^2y+2x\cos(x^2+\sqrt{y})+\frac{1}{\cos^2 x}$;

$\frac{\partial f}{\partial y} = x^3+\cos(x^2+\sqrt{y})\frac{1}{2\sqrt{y}}+\frac{1}{y}$ (*объясните это равенство*).

3)Пусть $f(x,y)=\frac{x}{y}$. Найдем дифференциал этой функции в точке (2;1), если $dx=0{,}1$, $dy=-0{,}2$. Имеем: $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{y}$, $\frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{x}{y^2}$. Значит, в данной точке $\frac{\partial f}{\partial x}=1$, $\frac{\partial f}{\partial y}=-2$. Поэтому $df=1\cdot 0{,}1+(-2)(-0{,}2)=0{,}5$.

4)Пусть $\frac{\partial f}{\partial x}=6x^5y^2+\frac{1}{x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}=2x^6y+\cos y$. Тогда функцию $f(x,y)$ можно найти как первообразную функции $6x^5y^2+\frac{1}{x}$, считая сначала y постоянным.

Получим, что $f(x,y)=\int(6x^5y^2+\frac{1}{x})dx = x^6y^2+\ln|x|+C$; только C здесь – не константа, а некоторая функция, не зависящая от x, то есть C=C(y). Если $f(x,y)= x^6y^2 + \ln|x| + C(y)$, то $\frac{\partial f}{\partial y}=2x^6y+C'(y)$, поэтому $2x^6y+C'(y)=2x^6y+\cos y$, $C'(y)=\cos y$, $C(y)=\sin y+C$, где C – уже обыкновенная константа. Итак, $f(x,y)= x^6y^2+\ln|x|+\sin y+C$. Мы нашли функцию по ее частным производным.

В дальнейшем будет показано, что эта задача разрешима не всегда: частные производные нельзя задавать произвольно.

5)Уравнение F(x,y)=0 неявно задает y как функцию x. Пусть функция F дифференцируема; будем для краткости обозначать $\frac{\partial F}{\partial x}$ и $\frac{\partial F}{\partial y}$ соответственно F'_x и F'_y. Можно показать, что если $F'_y \neq 0$, то функция $y(x)$ дифференцируема и

$$y'(x) = -\frac{F'_x}{F'_y}.$$

Покажите, что для функции y(x), неявно заданной уравнением $\cos(x+y)+y=0$,

$$y'(x) = \frac{\sin(x+y)}{1-\sin(x+y)}.$$

Точно так же уравнение F(x,y,z)=0 неявно задает z как функцию x и y. Можно показать, что если функция F дифференцируема, причем $F'_z \neq 0$, то функция $z(x,y)$ дифференцируема, $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z}$ и $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z}$.

Покажите, что для функции z(x,y), неявно заданной уравнением $x+y+z-xyz=0$, $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{1-yz}{1-xy}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{1-xz}{1-xy}$. •

3.2. Достаточное условие дифференцируемости

Пример. Пусть $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2}, \text{ если } x\neq 0 \text{ или } y\neq 0\\ 0, \text{ если } x=0 \text{ и } y=0\end{cases}$.

Как было показано выше, эта функция не является непрерывной в точке (0;0), а следовательно, не дифференцируема в этой точке (*почему?*). С другой стороны, частные приращения функции в точке (0;0) равны нулю, а значит, обе частные производные равны нулю. Таким образом, существование частных производных не является достаточным условием дифференцируемости. •

Теорема 3 (достаточное условие дифференцируемости функции в точке). Если функция $f(x,y)$ имеет в точке (x_0,y_0) непрерывные частные производные, то она дифференцируема в этой точке.

Доказательство. $\Delta f=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=$
$=(f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0+\Delta x,y_0))+(f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0))$.

Пусть $u(y)=f(x_0+\Delta x,y)$, $v(x)=f(x,y_0)$. Тогда $u'(y)=f'_y(x_0+\Delta x,y)$, $v'(x)=f'_x(x,y_0)$. Применив к функциям $u(y)$ и $v(x)$ теорему Лагранжа, получим:
$\Delta f=\Delta u+\Delta v=f'_y(x_0+\Delta x,c_1)\Delta y+f'_x(c_2,y_0)\Delta x$, где c_1 лежит между y_0 и $y_0+\Delta y$, а c_2 – между x_0 и $x_0+\Delta x$. Поскольку f'_y и f'_x непрерывны в точке (x_0,y_0), то $f'_y(x_0+\Delta x,c_1)=$

$= f'_y\,(x_0,y_0)+\beta(\Delta x,\Delta y)$ и $f'_x\,(c_2,y_0)= f'_x\,(x_0,y_0)+\alpha(\Delta x,\Delta y)$, где $\alpha(\Delta x,\Delta y)$ и $\beta(\Delta x,\Delta y)$ – бесконечно малые при $\Delta x\to 0$ и $\Delta y\to 0$. Значит,

$\Delta f=(f'_y\,(x_0,y_0)+\beta(\Delta x,\Delta y))\Delta y+(f'_x\,(x_0,y_0)+\alpha(\Delta x,\Delta y))\Delta x=$

$= f'_x\,(x_0,y_0)\Delta x+ f'_y\,(x_0,y_0)\Delta y+\alpha(\Delta x,\Delta y)\Delta x+\beta(\Delta x,\Delta y)\Delta y$, то есть $f(x,y)$ дифференцируема в точке (x_0,y_0), ч.т.д.

3.3. Применение дифференциала

1°. Так же, как для функции одной переменной, дифференциал функции двух переменных можно использовать для приближенных вычислений:

$$f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y) \approx f(x_0,y_0) + f'_x(x_0,y_0)\,\Delta x+ f'_y(x_0,y_0)\,\Delta y. \quad (*)$$

Пример. Найдем приближенно $\sqrt{1{,}03^2+1{,}98^3}$. Это число является значением функции $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^3}$ при $x=1{,}03$, $y=1{,}98$. Поскольку $1{,}03=1+0{,}03$, $1{,}98=2-0{,}02$, то $\sqrt{1{,}03^2+1{,}98^3}=f(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)$, где $x_0=1$, $y_0=2$, $\Delta x=0{,}03$, $\Delta y=-0{,}02$, $f(x_0,y_0)=\sqrt{1^2+2^3}=3$. Так как $f'_x(x,y)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^3}}$ и $f'_y(x,y)=\dfrac{3y^2}{2\sqrt{x^2+y^3}}$, то $f'_x(x_0,y_0)=\dfrac{1}{3}$ и $f'_y(x_0,y_0)=2$.

Подставляя найденные значения в формулу (*), получим:

$\sqrt{1{,}03^2+1{,}98^3}\approx 3+\dfrac{1}{3}\cdot 0{,}03+2\cdot(-0{,}02)=2{,}97.$ •

2°. Рассмотрим поверхность $z = f(x,y)$, где функция $f(x,y)$ дифференцируема в некоторой окрестности точки (x_0,y_0). Можно доказать (мы этого делать не будем), что уравнение касательной плоскости к поверхности в точке (x_0,y_0,z_0), где $z_0= f(x_0,y_0)$, имеет вид:

$$z-z_0= f'_x(x_0,y_0)\,(x-x_0)+ f'_y(x_0,y_0)\,(y-y_0).$$

Таким образом, нормальный вектор касательной плоскости имеет координаты ($f'_x(x_0, y_0)$; $f'_y(x_0, y_0)$; –1). Отсюда получаем уравнение нормали к поверхности в точке (x_0,y_0,z_0), где $z_0= f(x_0,y_0)$:

$$\frac{x-x_0}{f'_x(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{f'_y(x_0,y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}.$$

Замечание. Если поверхность задана уравнением $F(x,y,z)=0$, причем функция $F(x,y,z)$ дифференцируема в некоторой окрестности точки (x_0,y_0,z_0), то уравнения касательной плоскости и нормали в этой точке приобретают вид:

$$F'_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F'_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F'_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0;$$

$$\frac{x-x_0}{F'_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F'_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F'_z(x_0,y_0,z_0)}.$$

Покажите, что уравнение касательной плоскости к сфере $x^2+y^2+z^2-16=0$ в точке $(2,2,2\sqrt{2})$ имеет вид: $x+y+\sqrt{2}z-8=0$, а уравнение нормали имеет вид: $\frac{x-2}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$.

3.4. Дифференцирование сложной функции

Следующую теорему примем без доказательства.

Теорема 4 (о дифференцировании сложной функции). Пусть функции $u=u(x,y)$ и $v=v(x,y)$ имеют непрерывные частные производные в некоторой окрестности точки (x_0,y_0), а функция $z=f(u,v)$ – в некоторой окрестности точки (u_0,v_0), где $u_o=u(x_o,y_o)$, $v_o=v(x_o,y_o)$. Тогда сложная функция $z(x,y)=f(u(x,y),v(x,y))$ дифференцируема в точке (x_0,y_0), причем $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}$.

Примеры. 1) Пусть $z=u^2+v^3$, $u=\sqrt[3]{xy}$, $v=\sqrt[5]{\frac{x}{y}}$. Тогда по формулам теоремы 4 получаем: $\frac{\partial z}{\partial x}=2u\cdot\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{y}{x^2}}+3v^2\cdot\frac{1}{5\sqrt[5]{x^4y}}$,

$\frac{\partial z}{\partial y}=2u\cdot\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{x}{y^2}}-3v^2\cdot\frac{1}{5}\sqrt[5]{\frac{x}{y^6}}$. Подставляя выражения для u и v, получим:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2\sqrt[3]{xy}\cdot\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{y}{x^2}}+3\sqrt[5]{\frac{x^2}{y^2}}\cdot\frac{1}{5\sqrt[5]{x^4y}}=\frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{y^2}{x}}+\frac{3}{5\sqrt[5]{x^2y^3}};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=2\sqrt[3]{xy}\cdot\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{x}{y^2}}-3\sqrt[5]{\frac{x^2}{y^2}}\cdot\frac{1}{5}\sqrt[5]{\frac{x}{y^6}}=\frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{x^2}{y}}-\frac{3}{5}\sqrt[5]{\frac{x^3}{y^8}}.$$

2) Пусть $z=\ln t$, $t=\sin x+\cos y$. Тогда по формулам теоремы 4 получаем: $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{dz}{dt}\cdot\frac{\partial t}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{dz}{dt}\cdot\frac{\partial t}{\partial y}$, то есть $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{t}\cdot\cos x=$ $=\frac{\cos x}{\sin x+\cos y}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{1}{t}\cdot\sin y=\frac{-\sin y}{\sin x+\cos y}$.●

3.5. Производная по направлению. Градиент

Определение 3. Пусть функция $z=f(x,y)$ определена в некоторой окрестности точки $P_0(x_0,y_0)$, l – луч с началом в точке P_0, точка $P(x,y)$ принадлежит l. Длину отрезка P_0P обозначим Δl, разность $f(x,y)-f(x_0,y_0)$ обозначим Δf. Если существует $\lim\limits_{\Delta l\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta l}$, то он называется ***производной функции f(x,y) по направлению l*** в точке P_0 и обозначается $\frac{\partial f}{\partial l}$.

Замечание. Частные производные $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ можно тогда рассматривать как производные по направлениям Оx и Оy соответственно.

Теорема 5. Если функция $z=f(x,y)$ имеет в некоторой окрестности точки (x_0,y_0) непрерывные частные производные, то в этой точке функция имеет производную по любому направлению, причем $\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta$ (где α и β – углы направления l с осями Оx и Оy соответственно).

Доказательство. Запишем Δf в виде $f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0+\Delta y)+f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=\Delta_x f(x_0,y_0+\Delta y)+\Delta_y f(x_0,y_0)$. Тогда $\frac{\Delta f}{\Delta l}=\frac{\Delta_x f(x_0,y_0+\Delta y)}{\Delta l}+\frac{\Delta_y f(x_0,y_0)}{\Delta l}$. Заметим, что $\Delta l=\frac{\Delta x}{\cos\alpha}$ $=\frac{\Delta y}{\cos\beta}$, т.е. $\frac{\Delta f}{\Delta l}=\frac{\Delta_x f(x_0,y_0+\Delta y)}{\Delta x}\cos\alpha+\frac{\Delta_y f(x_0,y_0)}{\Delta y}\cos\beta$.

Поскольку $\Delta l\to 0$ тогда и только тогда, когда $\Delta x\to 0$ и $\Delta y\to 0$, то $\lim\limits_{\Delta l\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta l}=\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta_x f(x_0,y_0+\Delta y)}{\Delta x}\cos\alpha+\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y f(x_0,y_0)}{\Delta y}\cos\beta$.

Так как функция дифференцируема в окрестности точки (x_0,y_0), то это равенство можно переписать так: $\lim\limits_{\Delta l\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta l}=$ $=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0+\Delta y)\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\cos\beta$. Используя непрерывность частной производной $\frac{\partial f}{\partial x}$, окончательно получаем: $\lim\limits_{\Delta l\to 0}\dfrac{\Delta f}{\Delta l}=\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cos\alpha+\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\cos\beta$, то есть $\dfrac{\partial f}{\partial l}(x_0,y_0)=\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cos\alpha+\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\cos\beta$, ч.т.д.

Определение 4. Если функция $z=f(x,y)$ имеет в точке (x_0,y_0) частные производные, то ***градиентом функции*** в этой точке называется вектор grad$f=(\dfrac{\partial f}{\partial x},\dfrac{\partial f}{\partial y})$.

Замечание. Пусть $\vec{l}=(\cos\alpha,\cos\beta)$ – орт направления l. Тогда из теоремы 5 получаем, что $\dfrac{\partial f}{\partial l}=\mathrm{grad}f\,\vec{l}$.

Покажите, испольхуя неравенство Коши-Буняковского, что производная по направлению будет максимальной (равной модулю градиента), если векторы grad$f$ и $\vec{l}$ – сонаправленные.

Таким образом, направление градиента – это напраление наибольшей скорости изменения функции.

3.6. Частные производные высших порядков

Определение 5. Пусть функция $z=f(x,y)$ имеет в некоторой окрестности точки (x_0,y_0) частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial f}{\partial y}$. Тогда частные производные этих функций называются ***вторыми частными производными функции f(x,y)***.

Частных производных второго порядка существует, вообще говоря, четыре:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial x},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial y},\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)}{\partial x},\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)}{\partial y}.$$

Аналогично определяются частные производные третьего, четвертого и других порядков.

Пример. 1) Для функции $f(x,y)=x^2y^3$ найдем $\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}$:

$\frac{\partial f}{\partial x}=2xy^3$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=6xy^2$, $\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}=12xy$.

2) Для функции $f(x,y)=\sin(x^2+y^3)$ найдем $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$:

$\frac{\partial f}{\partial x}=\cos(x^2+y^3)\cdot 2x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-2x\sin(x^2+y^3)\cdot 3y^2=-6xy^2\sin(x^2+y^3)$;

$\frac{\partial f}{\partial y}=\cos(x^2+y^3)\cdot 3y^2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=-3y^2\sin(x^2+y^3)\cdot 2x=-6xy^2\sin(x^2+y^3)$.•

В рассмотренном примере смешанные частные производные второго порядка $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ совпали. Следующая теорема, которую мы примем без доказательства, указывает достаточное условие такого совпадения.

Теорема 6. Если функция $f(x,y)$ имеет в некоторой точке непрерывные частные производные второго порядка, то в этой точке $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$.

4. Исследование функций двух переменных на экстремум

4.1. Максимум и минимум функции двух переменных

Определение 1. Пусть функция $z=f(x,y)$ определена в некоторой окрестности точки (x_0,y_0) и непрерывна в этой точке. Если существует окрестность точки (x_0,y_0), в которой $f(x,y)<f(x_0,y_0)$, то эта точка называется ***точкой максимума*** данной функции; если существует окрестность точки (x_0,y_0), в которой $f(x,y)>f(x_0,y_0)$, то эта точка называется ***точкой минимума*** данной функции. Если (x_0,y_0) – точка максимума или точка минимума, то она называется ***точкой экстремума***.

Примеры.1)Пусть $f(x,y)=(x-2)^2+(y+1)^2$. Тогда $f(2,-1)=0$, а во всех других точках $f(x,y)>0$. Значит, $(2,-1)$ – точка минимума данной функции.

2)Пусть $f(x,y)=0,5-\sin(x^2+y^2)$. Тогда $f(0,0)=0,5$. Если же $0<x^2+y^2<\pi$, то $\sin(x^2+y^2)>0$, поэтому $f(x,y)<0,5$. Мы нашли окрестность точки (0;0), в которой $f(x,y)<f(0,0)$. Значит, (0,0) – точка максимума данной функции.•

Теорема 1 (необходимое условие экстремума). Если (x_0,y_0) – точка экстремума функции $f(x,y)$, дифференцируемой в (x_0,y_0), то в этой точке $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=0$.

Доказательство. Рассмотрим функцию $u(x)=f(x,y_0)$. Тогда x_0 – точка экстремума этой функции, значит, $u'(x_0)=0$. Это означает, что $f_x'(x_0,y_0)=0$. Аналогично получим, что $f_y'(x_0,y_0)=0$. Теорема доказана.

Примеры.1)Пусть $f(x,y)=(x-2)^2+(y+1)^2$. В предыдущем примере мы видели, что $(2,-1)$ – точка минимума этой функции. В этой точке $\frac{\partial f}{\partial x}=2x-4=0$ и $\frac{\partial f}{\partial y}=2y+2=0$.

2)Пусть $f(x,y)=0,5-\sin(x^2+y^2)$. В предыдущем примере мы видели, что (0,0) – точка максимума этой функции. В этой точке $\frac{\partial f}{\partial x}=-2x\cos(x^2+y^2)=0$ и $\frac{\partial f}{\partial y}=-2y\cos(x^2+y^2)=0$.

3) Пусть $f(x,y)=x^2-y^2$. Тогда $\frac{\partial f}{\partial x}=2x$ и $\frac{\partial f}{\partial y}=-2y$. Обе производные равны нулю в точке (0;0). Но эта точка не является точкой экстремума. Действительно, $f(0,0)=0$. Возьмем произвольную ε-окрестность точки (0,0). Тогда в этой окрестности находятся точки (0,5ε;0) и (0;0,5ε). В одной из них функция положительна: $f(0,5\varepsilon;0)=0,25\varepsilon^2>0$. В другой функция отрицательна: $f(0;0,5\varepsilon)=-0,25\varepsilon^2<0$.

Значит, в любой окрестности точки (0,0) есть точки, в которых $f(x,y)>f(x_0,y_0)$ (поэтому (0,0) – не точка максимума), и точки, в которых $f(x,y)<f(x_0,y_0)$ (поэтому (0,0) – не точка минимума). Таким образом, хотя в точке (0,0) частные производные равны нулю, она не является точкой экстремума. Это значит, что условие равенства нулю частных производных является хотя и необходимым, но не достаточным условием экстремума. •

Достаточное условие экстремума примем без доказательства.

<u>Теорема 2 (достаточное условие экстремума)</u>. Пусть функция $f(x,y)$ имеет в некоторой окрестности точки (x_0,y_0) непрерывные частные производные второго порядка. Пусть $f_x'(x_0,y_0)=f_y'(x_0,y_0)=0$. Обозначим $A=f_{xx}''(x_0,y_0)$, $B=f_{xy}''(x_0,y_0)$, $C=f_{yy}''(x_0,y_0)$, $\Delta=AC-B^2$. Тогда, если $\Delta>0$ и $A<0$, то (x_0,y_0) – точка максимума; если $\Delta>0$ и $A>0$, то (x_0,y_0) – точка минимума; если $\Delta<0$, то (x_0,y_0) не является точкой экстремума.

Замечание. Если $\Delta=0$, то сделать вывод о наличии экстремума нельзя; требуется дополнительное исследование.

Рассмотрим примеры исследования функции двух переменных на экстремум.

Примеры.

1)Пусть $f(x,y)=x^3+y^3-3xy$. Тогда $f_x'(x,y)=3x^2-3y$, $f_y'(x,y)=3y^2-3x$. Система $3x^2-3y=0$, $3y^2-3x=0$ имеет два решения: (0,0) и (1,1). $f_{xx}''(x,y)=6x$, $f_{xy}''(x,y)=-3$, $f_{yy}''(x,y)=6y$.

В точке (0,0) имеем: $A=0$, $B=-3$, $C=0$, $\Delta=-9<0$. По теореме 2 точка (0,0) не является точкой экстремума.

В точке (1,1) имеем: $A=6>0$, $B=-3$, $C=6$, $\Delta=27>0$. По теореме 2 точка (1,1) является точкой минимума.

Итак, данная функция имеет одну точку экстремума – точка (1,1) является точкой минимума.

2)Пусть $f(x,y)=x^2-y^2$. Тогда $f_x'(x,y)=2x$, $f_y'(x,y)=-2y$. Система $2x=0$, $-2y=0$ имеет одно решение: (0,0). $f_{xx}''(x,y)=2$, $f_{xy}''(x,y)=0$, $f_{yy}''(x,y)=-2$.

В точке (0,0) имеем: $A=2$, $B=0$, $C=-2$, $\Delta=-4<0$. По теореме 2 точка (0,0) не является точкой экстремума.

Итак, данная функция не имеет точек экстремума.•

4.2. Наибольшее и наименьшее значение непрерывной функции двух переменных на замкнутом ограниченном множестве

Как известно, если функция одной переменной непрерывна на отрезке, то она принимает на этом отрезке наибольшее и наименьшее значения. То же относится и к функции двух переменных, непрерывной на замкнутом ограниченном подмножестве плоскости. Если функция дифференцируема, то ее наибольшее и наименьшее значения можно найти следующим образом.

1)Находим внутренние точки данного множества, в которых частные производные функции равны нулю, и значения функции в этих точках.

2)Находим наибольшее и наименьшее значения функции на границе данного множества.

3)Сравниваем значения, найденные в первом и втором пунктах, и выбираем из них наибольшее и наименьшее.

Пример. Найдем наибольшее и наименьшее значения функции $f(x,y)=x^3+y^3-3xy$ на трапеции, ограниченной прямыми: $x=-1$, $x=2$, $y=-1$, $y=3-x$.

В предыдущем пункте мы нашли точки, в которых частные производные данной функции равны нулю: (0,0) и (1,1). Обе эти точки лежат внутри трапеции. Значения функции в этих точках равны 0 и –1.

Граница трапеции состоит из четырех отрезков: AB, BC, CD и DA, – где A(–1,4), B(2,1), C(2,–1), D(–1,–1).

На отрезке AB имеем: $f(x,y)=x^3+(3-x)^3-3x(3-x)=$
$=12x^2-36x+27$, $-1\le x\le 2$.

> *Проверьте, что наибольшее и наименьшее значения этой функции на отрезке [–1;2] равны соответственно 75 (при $x=-1$) и 0 (при $x=1{,}5$).*

На отрезке BC имеем: $f(x,y)=8+y^3-6y$, $-1\le y\le 1$.

> *Проверьте, что наибольшее и наименьшее значения этой функции на отрезке [–1;1] равны соответственно 13 (при $y=-1$) и 3 (при $y=1$).*

На отрезке CD имеем: $f(x,y)=x^3-1+3x$, $-1\le x\le 2$.

Проверьте, что наибольшее и наименьшее значения этой функции на отрезке [–1;2] равны соответственно 13 (при $x=2$) и –5 (при $x=-1$).

На отрезке DA имеем: $f(x,y)=-1+y^3+3y$, $-1\le y\le 4$.

Проверьте, что наибольшее и наименьшее значения этой функции на отрезке [–1;4] равны соответственно 75 (при $y=4$) и –5 (при $y=-1$).

Сравнивая найденные значения, видим, что наибольшее значение функции на данном множестве равно 75 (при $x=-1$, $y=4$), а наименьшее значение –5 (при $x=-1$, $y=-1$).•

4.3. Условный экстремум функции двух переменных

Определение 2. Пусть функция $z=f(x,y)$ определена в некоторой окрестности точки (x_0,y_0) и непрерывна в этой точке. Пусть точка (x_0,y_0) удовлетворяет некоторому ***уравнению связи*** $\varphi(x,y)=0$. Если существует окрестность точки (x_0,y_0), в которой для всех (x,y), удовлетворяющих уравнению связи, $f(x,y)<f(x_0,y_0)$, то эта точка называется ***точкой условного максимума*** данной функции; аналогично определяется ***точка условного минимума***. Если (x_0,y_0) – точка условного максимума или условного минимума, то она называется ***точкой условного экстремума***.

Примем без доказательства следующие теоремы об условном экстремуме.

Теорема 3 (необходимое условие условного экстремума). Пусть (x_0,y_0) – точка условного экстремума функции $f(x,y)$, дифференцируемой в (x_0,y_0), при уравнении связи $\varphi(x,y)=0$. Тогда существует такое число λ, что $F_x'(x_0,y_0,\lambda)=$ $=F_y'(x_0,y_0,\lambda)=0$, где $F(x,y,\lambda)=f(x,y)-\lambda\varphi(x,y)$ – так называемая ***функция Лагранжа***.

Теорема 4 (достаточное условие условного экстремума). Пусть для функции $f(x,y)$, дифференцируемой в (x_0,y_0), $\varphi(x_0,y_0)=0$ и существует такое число λ, что $F_x'(x_0,y_0,\lambda)=$ $=F_y'(x_0,y_0,\lambda)=0$, где $F(x,y,\lambda)$ – функция Лагранжа. Пусть $\Delta=F_{xx}''(x_0,y_0,\lambda)(\varphi_y'(x_0,y_0))^2-2F_{xy}''(x_0,y_0,\lambda)\varphi_x'(x_0,y_0)\varphi_y'(x_0,y_0)+$ $+F_{yy}''(x_0,y_0,\lambda)(\varphi_x'(x_0,y_0))^2$. Тогда, если $\Delta>0$ (соответственно $\Delta<0$), то (x_0,y_0) – точка условного минимума (соответственно максимума) функции $f(x,y)$ при уравнении связи $\varphi(x,y)=0$.

Пример. Найдем стороны x и y прямоугольника наибольшей площади, вписанного в окружность радиуса R. Для этого надо найти точку условного максимума функции $f(x,y)=xy$, если $\varphi(x,y)=0$, где $\varphi(x,y)=x^2+y^2-4R^2$.

Функция Лагранжа: $F(x,y,\lambda)=xy-\lambda(x^2+y^2-4R^2)$, $F_x'(x,y,\lambda)=y-2\lambda x$, $F_y'(x,y,\lambda)=x-2\lambda y$. Из теоремы 3 следует, что для нахождения точек условного экстремума надо прежде всего найти решения системы:

$$y-2\lambda x=0,\ x-2\lambda y=0,\ x^2+y^2-4R^2=0.$$

Решая ее, находим: $x^2=y^2=2R^2$. Отсюда получаем стороны прямоугольника: $x=y=R\sqrt{2}$ – и $\lambda=0{,}5$. Проверим, выполняется ли для точки $(R\sqrt{2};R\sqrt{2})$ условие теоремы 4. Имеем: $F_{xx}''(x,y,\lambda)=-2\lambda$, $F_{xy}''(x,y,\lambda)=1$, $F_{yy}''(x,y,\lambda)=-2\lambda$, $\varphi_x'(x,y)=2x$, $\varphi_y'(x,y)=2y$. Значит, при $x=y=R\sqrt{2}$, $\lambda=0{,}5$ имеем $\Delta= -2\lambda(2y)^2-2\cdot1\cdot2x\cdot2y-2\lambda(2x)^2 = -8R^2-16R^2-8R^2<0$. По теореме 4 получаем, что $(R\sqrt{2};R\sqrt{2})$ – точка условного максимума. Значит, прямоугольник наибольшей площади, вписанный в окружность, – это квадрат.•

5.Двойные интегралы

5.1.Определение двойного интеграла

Пусть $D \subseteq \mathbf{R}^2$ – замкнутая область, ограниченная непрерывной кривой. Пусть $f(x,y)$ – функция, заданная и ограниченная на D. Пусть $D = D_1 \cup D_2 \cup \ldots \cup D_n$, где $D_1, D_2, \ldots D_n$ – области, не имеющие общих внутренних точек. Обозначим через S_k площадь области D_k, а через d_k – ее диаметр (наибольшее расстояние между точками данного множества). Набор $D_1, D_2, \ldots, D_n$ назовем ***разбиением*** области D. Пусть $d = \max\limits_{1 \le k \le n} d_k$ – ***диаметр разбиения***. В каждой области D_k выберем точку (x_k, y_k) и составим ***интегральную сумму, соответствующую данному разбиению***:

$$S = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k) \cdot S_k .$$

Определение. Если существует предел интегральных сумм при $d \to 0$, не зависящий от разбиения, то функция $f(x,y)$ называется ***интегрируемой*** в области D, а предел интегральных сумм называется ***двойным интегралом*** функции $f(x,y)$ по области D и обозначается $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$.

Примем без доказательства следующие утверждения.

1°. Если функция $f(x,y)$ непрерывна в области D, то она интегрируема в этой области.

2°. Пусть в плоскости $\mathbf{R}^2$ область D занята неоднородной пластиной, точечная плотность которой в точке (x,y) равна $\rho(x,y)$. Тогда масса этой пластины равна $\iint\limits_D \rho(x,y)dxdy$ (***физический смысл двойного интеграла***).

3°. Пусть $D \subseteq D(f)$, где $f(x,y)$ – неотрицательная функция. Тогда объем цилиндрического бруса, ограниченного снизу областью D, а сверху – поверхностью $z = f(x,y)$, равен

$\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ (***геометрический смысл двойного интеграла***).

5.2.Свойства двойного интеграла

1°. $\iint\limits_D dxdy$ равен площади области D.

Доказательство. ▼ Составим интегральную сумму для функции $f(x,y)=1$. Тогда эта сумма равна сумме площадей областей D_k, то есть равна площади области D. Значит, все интегральные суммы одинаковы, поэтому их предел тоже равен площади области D, ч.т.д. ▲

2°. $\iint\limits_D \lambda f(x,y)dxdy = \lambda \iint\limits_D f(x,y)dxdy$.

Доказательство. ▼ Каждая интегральная сумма для функции $\lambda f(x,y)$ получается из интегральной суммы для функции $f(x,y)$ умножением на λ. Значит, и предел интегральных сумм для первой функции равен пределу интегральных сумм для второй функции, умноженному на λ, то есть $\iint\limits_D \lambda f(x,y)dxdy = \lambda \iint\limits_D f(x,y)dxdy$), ч.т.д. ▲

3°. $\iint\limits_D (f_1(x,y) + f_2(x,y))dxdy = \iint\limits_D f_1(x,y)dxdy + \iint\limits_D f_2(x,y)dxdy$.

Доказательство. ▼ Каждая интегральная сумма для функции $f_1(x,y)+f_2(x,y)$ является суммой интегральных сумм для функций $f_1(x,y)$ и $f_2(x,y)$. Значит, и предел интегральных сумм для первой функции равен сумме пределов интегральных сумм для функций $f_1(x,y)$ и $f_2(x,y)$, то есть $\iint\limits_D (f_1(x,y) + f_2(x,y))dxdy = \iint\limits_D f_1(x,y)dxdy + \iint\limits_D f_2(x,y)dxdy$,

ч.т.д. ▲

Свойства 2° и 3° – это ***свойства линейности*** двойного интеграла.

4°. Если функция $f(x,y)$ интегрируема и неотрицательна в области D, то ее интеграл по этой области – неотрицательное число.

<u>Доказательство.</u> ▼ В любой интегральной сумме каждое слагаемое неотрицательно (неотрицательное значение функции умножается на положительное число – площадь области D_k). Значит, и предел интегральных сумм – число неотрицательное, ч.т.д.▲

5°. Если функции $f(x,y)$ и $g(x,y)$ интегрируемы в области D, причем $f(x,y)\geq g(x,y)$, то $\iint\limits_D f(x,y)dxdy \geq \iint\limits_D g(x,y)dxdy$.

Докажите это свойство, используя предыдущее утверждение.

6°. ***Аддитивность двойного интеграла.*** Если область D разбита на две области D_1 и D_2, не имеющие общих внутренних точек, и функция $f(x,y)$ интегрируема в каждой из этих двух областей, то эта функция интегрируема и в области D и $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy$.

Это утверждение примем без доказательства.

7°. ***Теорема о среднем***. Если функция $f(x,y)$ непрерывна в области D, то существует точка $(c,d)\in D$ такая, что $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = f(c,d)\cdot S$, где S – площадь области D.

Это утверждение примем без доказательства.

Отметим, что число $f(c,d)$ называется ***средним значением*** данной функции в данной области.

5.3.Вычисление двойного интеграла

Пусть D – криволинейная трапеция, ограниченная линиями $x=a$, $x=b$, $y=g(x)$, $y=h(x)$, где $g(x)\le h(x)$ при $x\in[a;b]$ (так называемая ***криволинейная трапеция I типа***). Пусть $f(x,y)$ – неотрицательная непрерывная на D функция. Рассмотрим цилиндрический брус с основанием D, ограниченный сверху поверхностью $z= f(x,y)$. Пересечем этот брус плоскостью $x = t$ и обозначим через S(t) площадь сечения. Тогда объем бруса равен $\int_a^b S(t)dt$ (*почему?*).

Теперь спроецируем сечение на плоскость yOz. Получим криволинейную трапецию, ограниченную линиями: $y=g(t)$, $y=h(t)$, $z=0$, $z=f(t,y)$. Значит, S(t)= $\int_{g(t)}^{h(t)} f(t,y)dy$. Итак, объем бруса равен $\int_a^b\left(\int_{g(t)}^{h(t)} f(t,y)dy\right)dt$, или $\int_a^b\left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dy\right)dx$. Но этот объем также равен двойному интегралу функции $f(x,y)$ по области D (*почему?*). Итак, для криволинейной трапеции I типа и для неотрицательной функции $f(x,y)$ мы получили формулу:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b\left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dy\right)dx. \qquad (1)$$

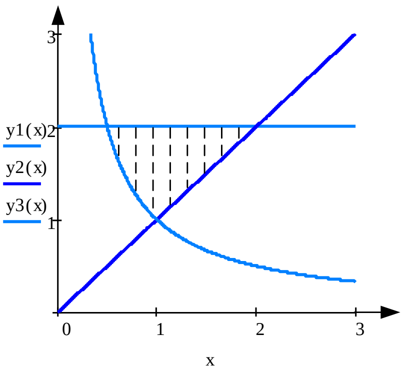
Отметим, что эта формула справедлива для любой функции, непрерывной на криволинейной трапеции I типа.

Замечания. 1) Для ***криволинейной трапеции II типа*** (ограниченной линиями $y=c$, $y=d$, $x=g(y)$, $x=h(y)$, где $g(y)\le h(y)$ при $y\in[c;d]$) формула (1) видоизменяется так:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d \left(\int_{g(y)}^{h(y)} f(x,y)dx \right) dy. \quad (2)$$

2) При вычислении «внутреннего» интеграла та переменная, по которой интегрирование не ведется, считается константой.

<u>Примеры.</u> 1) Вычислим двойной интеграл $\iint_D (x^2+y^2)dxdy$, где область D ограничена линиями $y=2$, $y=x$, $xy=1$. Изобразим область D на координатной плоскости.



Линии $y=x$ и $xy=1$ пересекаются в точке (1;1), линии $y=x$ и $y=2$ – в точке (2;2), а линии $y=2$ и $xy=1$ – в точке (0,5;2). Поэтому область D – объединение двух криволинейных трапеций I типа: D_1 (ограничена линиями $x=0{,}5$, $x=1$, $y=\frac{1}{x}$ и $y=2$) и D_2 (ограничена линиями $x=1$, $x=2$, $y=x$ и $y=2$).

Значит, $\iint_D (x^2+y^2)dxdy = \iint_{D_1} (x^2+y^2)dxdy + \iint_{D_2} (x^2+y^2)dxdy$ (*почему?*).

Поскольку $\frac{1}{x} \leq 2$ при $x \in [0,5;1]$, то для первой криволинейной трапеции получаем:

$$\iint\limits_{D_1} (x^2 + y^2)dxdy = \int\limits_{0,5}^{1} \left(\int\limits_{\frac{1}{x}}^{2} (x^2 + y^2)dy \right) dx = \int\limits_{0,5}^{1} \left(\int\limits_{\frac{1}{x}}^{2} (x^2 + y^2)dy \right) dx =$$

$$\int\limits_{0,5}^{1} \left((x^2 y + \frac{y^3}{3})_{y=\frac{1}{x}}^{y=2} \right) dx = \int\limits_{0,5}^{1} \left((2x^2 + \frac{8}{3}) - (x^2 \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3}) \right) dx =$$

$$= \int\limits_{0,5}^{1} \left((2x^2 + \frac{8}{3}) - (x^2 \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3}) \right) dx = \int\limits_{0,5}^{1} \left(2x^2 - x - \frac{1}{3x^3} + \frac{8}{3} \right) dx =$$

$$= \left(\frac{2}{3}x^3 - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{6x^2} + \frac{8}{3}x \right) \Bigg|_{0,5}^{1} =$$

$$= \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{8}{3} \right) - \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{8} + \frac{2}{3} + \frac{4}{3} \right) = \frac{25}{24}.$$

Аналогично, поскольку $x \leq 2$ при $x \in [1;2]$, то для второй криволинейной трапеции получаем:

$$\iint\limits_{D_2} (x^2 + y^2)dxdy = \int\limits_{1}^{2} \left(\int\limits_{x}^{2} (x^2 + y^2)dy \right) dx = \int\limits_{1}^{2} \left((x^2 y + \frac{y^3}{3})_{y=x}^{y=2} \right) dx =$$

$$= \int\limits_{1}^{2} \left((2x^2 + \frac{8}{3}) - (x^3 + \frac{x^3}{3}) \right) dx = \left(\frac{2}{3}x^3 - \frac{x^4}{3} + \frac{8}{3}x \right) \Bigg|_{1}^{2} =$$

$$= \left(\frac{16}{3} - \frac{16}{3} + \frac{16}{3} \right) - \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3} + \frac{8}{3} \right) = \frac{7}{3}.$$

Итак, $\iint\limits_{D} (x^2 + y^2)dxdy = \frac{25}{24} + \frac{7}{3} = \frac{27}{8}$.

Заметим, что область D можно рассматривать как криволинейную трапецию второго типа, ограниченную линиями y=1, y=2, $x=\dfrac{1}{y}$ и $x=y$. Поскольку $\dfrac{1}{y}\le y$ при $y\in[1;2]$, то

$$\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy=\int_1^2\left(\int_{\frac{1}{y}}^{y}(x^2+y^2)dx\right)dy=\int_1^2\left((y^2x+\frac{x^3}{3})\Big|_{x=\frac{1}{y}}^{x=y}\right)dy=$$

$$=\int_1^2\left((y^3+\frac{y^3}{3})-(y^2\cdot\frac{1}{y}+\frac{1}{3y^3})\right)dy=\left(\frac{y^4}{3}-\frac{y^2}{2}+\frac{1}{6y^2}\right)\Bigg|_1^2=$$

$$=\left(\frac{16}{3}-\frac{4}{2}+\frac{1}{24}\right)-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right)=\frac{27}{8}.$$

2) Найдем объем тела, ограниченного координатными плоскостями, круговым цилиндром $x^2+y^2=R^2$ и гиперболическим параболоидом $z=xy$, где $x\ge 0$, $y\ge 0$, $z\ge 0$. Это тело представляет собой цилиндрический брус, основанием которого является область D – четверть круга в плоскости $x0y$ ($x^2+y^2=R^2$, где $x\ge 0$, $y\ge 0$), а сверху его ограничивает поверхность $z=xy$. Значит, объем этого цилиндрического бруса равен $\iint\limits_D xydxdy$. Область D представляет собой криволинейную трапецию I типа, ограниченную линиями x=0, x=R, y=0, $y=\sqrt{R^2-x^2}$. Значит, $\iint\limits_D xydxdy=\int_0^R\left(\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}}xydy\right)dx=$

$$\int_0^R\left(\frac{xy^2}{2}\Bigg|_{y=0}^{y=\sqrt{R^2-x^2}}\right)dx=\int_0^R\left(\frac{x(R^2-x^2)}{2}\right)dx=\left(\frac{x^2R^2}{4}-\frac{x^4}{8}\right)\Bigg|_0^R=\frac{R^4}{8}.\bullet$$

5.4.Вычисление двойного интеграла в полярных координатах

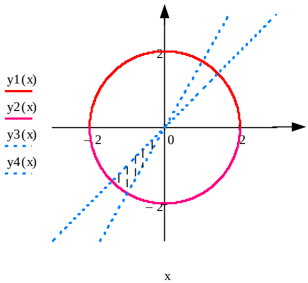
В некоторых случаях бывает удобно пользоваться следующей формулой, которую мы примем без доказательства:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_D f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\rho d\varphi$$

Если область D ограничена лучами $\varphi=\alpha$, $\varphi=\beta$ ($\alpha<\beta$) и линиями $\rho=\rho_1(\varphi)$ и $\rho=\rho_2(\varphi)$, где $\rho_1(\varphi)\le\rho_2(\varphi)$ при $\alpha\le\varphi\le\beta$, то это равенство переписывается в виде:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_\alpha^\beta \left(\int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\rho \right) d\varphi .$$

<u>Пример</u>. Вычислим $\iint\limits_D (1-x-2y)dxdy$, где D – сектор круга $x^2+y^2\le4$, лежащий в III четверти между прямыми $y=x$ и $y=x\sqrt{3}$. Для этого заметим, что в третьей четверти на луче прямой $y=x$ угол $\varphi= -\pi+\text{arctg}1= -\frac{3\pi}{4}$, а на луче прямой $y=x\sqrt{3}$ угол $\varphi= -\pi+\text{arctg}\sqrt{3} = -\frac{2\pi}{3}$. Область D ограничена этими лучами и линиями $\rho=0$ и $\rho=2$.



$$\iint\limits_D (1-x-2y)dxdy = \int\limits_{-\frac{3\pi}{4}}^{-\frac{2\pi}{3}} \left(\int\limits_0^2 (1-\rho\cos\varphi - 2\rho\sin\varphi)\rho d\rho \right) d\varphi =$$

$$= \int_{-\frac{3\pi}{4}}^{-\frac{2\pi}{3}} \left(\frac{\rho^2}{2} - \frac{\rho^3}{3}\cos\varphi - 2\frac{\rho^3}{3}\sin\varphi \Bigg|_{\rho=0}^{\rho=2} \right) d\varphi =$$

$$= \int_{-\frac{3\pi}{4}}^{-\frac{2\pi}{3}} \left(2 - \frac{8}{3}\cos\varphi - \frac{16}{3}\sin\varphi \right) d\varphi = \left(2\varphi - \frac{8}{3}\sin\varphi + \frac{16}{3}\cos\varphi\right)\Bigg|_{-\frac{3\pi}{4}}^{-\frac{2\pi}{3}} =$$

$$= \frac{\pi}{6} + \frac{4(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{3} - \frac{8}{3}. \bullet$$

<u>6.Тройные интегралы</u>

Пусть $V \subseteq \mathbf{R}^3$ – замкнутая область, ограниченная непрерывной поверхностью. Пусть $f(x,y,z)$ – функция, заданная и ограниченная на V. Пусть $V = V_1 \cup V_2 \cup \ldots \cup V_n$, где $V_1, V_2, \ldots, V_n$ – области, не имеющие общих внутренних точек. Обозначим через v_k объем области V_k, а через d_k – ее диаметр. Пусть $d = \max\limits_{1 \le k \le n} d_k$ – ***диаметр разбиения*** $V_1, V_2, \ldots V_n$. В каждой области V_k выберем точку (x_k, y_k, z_k) и составим ***интегральную сумму, соответствующую данному разбиению***: $S = \sum\limits_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k) \cdot v_k$.

<u>Определение.</u> Если существует предел интегральных сумм при $d \to 0$, не зависящий от разбиения, то функция $f(x,y,z)$ называется *интегрируемой* в области V, а предел интегральных сумм называется ***тройным интегралом*** функции $f(x,y,z)$ по области V и обозначается $\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$.

Следующие утверждения примем без доказательства.

1°. Если функция $f(x,y,z)$ непрерывна в области V, то она интегрируема в этой области.

2^o. Пусть область V заполняет неоднородное тело, точечная плотность которого в точке (x,y,z) равна $\rho(x,y,z)$. Тогда масса этого тела равна $\iiint\limits_V \rho(x,y,z)dxdydz$ (***физический смысл тройного интеграла***).

3^o. $\iiint\limits_V dxdydz$ равен объему области V (***геометрический смысл тройного интеграла***).

Сформулируйте свойства тройного интеграла, аналогичные свойствам 2-7 двойного интеграла.

Пусть область V ограничена гладкими поверхностями $z=\varphi(x,y)$ и $z=\psi(x,y)$, где $(x,y)\in D$ (проекция области V на плоскость $x0y$), причем $\varphi(x,y)\le\psi(x,y)$ при $(x,y)\in D$. Тогда $\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iint\limits_D \left(\int\limits_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z)dz \right) dxdy$, то есть вычисление тройного интеграла сводится к вычислению двойного и определенного интеграла.

<u>Пример</u>. 1) Вычислим $\iiint\limits_V z^2 dxdydz$, где область V ограничена параболоидом $z=x^2+y^2$ и плоскостью $z=1$.

Проекция D этой области на плоскость $x0y$ – круг $x^2+y^2\le1$. Поэтому $\iiint\limits_V z^2 dxdydz = \iint\limits_D \left(\int\limits_{x^2+y^2}^{1} z^2 dz \right) dxdy =$ $\iint\limits_D \left(\frac{z^3}{3}\Big|_{x^2+y^2}^{1} \right) dxdy = = \iint\limits_D \left(\frac{1}{3} - \frac{(x^2+y^2)^3}{3} \right) dxdy$. Перейдем к полярным координатам:

$$\iint_D \left(\frac{1}{3}-\frac{(x^2+y^2)^3}{3}\right)dxdy=\int_0^{2\pi}\left(\int_0^1\left(\frac{1}{3}-\frac{\rho^6}{3}\right)\rho d\rho\right)d\varphi=$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(\left(\frac{\rho^2}{6}-\frac{\rho^8}{24}\right)\Bigg|_0^1\right)d\varphi = \int_0^{2\pi}\frac{1}{8}d\varphi = \frac{\pi}{4}.$$

2) Вычислим $\iiint_V xdxdydz$, где V – тетраэдр, ограниченный координатными плоскостями и плоскостью $2x+2y+z-6=0$.

Проекция D этого тетраэдра на плоскость $x0y$ – треугольник OAB, где O – начало координат; уравнение прямой AB: $x+y-3=0$, A(3;0;0), B(0;3;0).

Поэтому $\iiint_V xdxdydz = \iint_D\left(\int_0^{6-2x-2y} xdz\right)dxdy =$

$$=\iint_D \left(x(6-2x-2y)\right)dxdy = \int_0^3\left(\int_0^{3-x} x(6-2x-2y)dy\right)dx=$$

$$=\int_0^3\left(\left(6xy-2x^2y-xy^2\right)\Big|_{y=0}^{y=3-x}\right)dx=$$

$$=\int_0^3\left(\left(6x(3-x)-2x^2(3-x)-x(3-x)^2\right)\right)dx=$$

$$=\int_0^3\left(x^3-6x^2+9x\right)dx=\left(\frac{x^4}{4}-2x^3+\frac{9x^2}{2}\right)\Bigg|_0^3=\frac{27}{4}.\bullet$$

7.Криволинейные интегралы

7.1.Криволинейный интеграл I рода

Пусть функция $f(x,y)$ определена и непрерывна во всех точках гладкой дуги L=AB, заданной уравнением

y=φ(x), где $a \le x \le b$. Рассмотрим разбиение этой дуги точками $A_0, A_1, \ldots, A_n$, где $A_0 = A$, $A_n = B$. Пусть Δs_k – длина дуги $A_{k-1}A_k$, $d = \max\limits_{1 \le k \le n} \Delta s_k$ – диаметр разбиения. Выберем на каждой дуге $A_{k-1}A_k$ точку (x_k, y_k). Сумма $\sum\limits_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\,\Delta s_k$ называется ***интегральной суммой I рода***.

<u>Определение</u>. Если существует предел интегральных сумм I рода при $d \to 0$, не зависящий от разбиения, то этот предел называется ***криволинейным интегралом I рода*** функции $f(x,y)$ по дуге L и обозначается $\int\limits_L f(x, y)ds$.

Можно доказать, что криволинейный интеграл I рода равен определенному интегралу $\int\limits_a^b f(x, \varphi(x))\sqrt{1 + (\varphi'(x))^2}\,dx$.

Если же кривая L задана параметрически уравнениями $x=x(t)$, $y=y(t)$, $\alpha \le t \le \beta$, то криволинейный интеграл I рода равен $\int\limits_\alpha^\beta f(x(t), y(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt$.

Если дуга L имеет линейную плотность $f(x,y)>0$, то масса этой дуги равна $\int\limits_L f(x, y)ds$ (***физический смысл криволинейного интеграла I рода***).

Примем без доказательства свойства ***аддитивности*** и ***линейности*** криволинейного интеграла I рода.

1°. Если дуга L является объединением дуг L_1 и L_2, имеющих не более одной общей точки, и существуют $\int\limits_{L_1} f(x, y)ds$ и $\int\limits_{L_2} f(x, y)ds$, то существует и $\int\limits_L f(x, y)ds$, равный их сумме.

2°. $\int\limits_L (f_1(x, y) + f_2(x, y))ds = \int\limits_L f_1(x, y)ds + \int\limits_L f_2(x, y)ds$.

3°. $\int\limits_L \lambda f(x,y)ds = \lambda \int\limits_L f(x,y)ds$.

Важным свойством криволинейного интеграла I рода является его ***независимость от направления интегрирования***:

4°. $\int\limits_{\cup AB} f(x,y)ds = \int\limits_{\cup BA} f(x,y)ds$.

7.2.Определение и свойства криволинейного интеграла II рода

Пусть функции P(x,y) и Q(x,y) определены и непрерывны во всех точках гладкой дуги AB, заданной уравнением $y=\varphi(x)$, где $a \le x \le b$. Рассмотрим разбиение этой дуги точками A_0, A_1, …, A_n, где A_0=A, A_n=B. Обозначим через Δx_k и Δy_k проекции дуги $A_{k-1}A_k$ на ось абсцисс и ось ординат соответственно и выберем на каждой дуге $A_{k-1}A_k$ точку (x_k,y_k). Сумма $\sum\limits_{k=1}^{n}(P(x_k,y_k)\Delta x_k + Q(x_k,y_k)\Delta y_k)$ называется ***интегральной суммой II рода***.

Определение. Если существует предел интегральных сумм II рода при $\max(\Delta x_k) \to 0$ и $\max(\Delta y_k) \to 0$, не зависящий от разбиения, то этот предел называется ***криволинейным интегралом II рода*** и обозначается $\int\limits_{\cup AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$.

Если плоская гладкая дуга AB находится в поле действия переменной силы $\vec{F}(x,y) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$, то работа этой силы при перемещении материальной точки по дуге AB равна $\int\limits_{\cup AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ (***физический смысл криволинейного интеграла II рода***).

Примем без доказательства свойства криволинейного интеграла II рода.

1°. $\int\limits_{\cup AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{\cup AB} P(x,y)dx + \int\limits_{\cup AB} Q(x,y)dy$.

2°. Если дуга L является объединением дуг L_1 и L_2, имеющих не более одной общей точки, и существуют $\int\limits_{L_1} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ и $\int\limits_{L_2} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$, то существует и $\int\limits_{L} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$, равный их сумме (свойство ***аддитивности***).

3°. Важным свойством криволинейного интеграла II рода является его ***зависимость от направления интегрирования***: $\int\limits_{\cup AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = -\int\limits_{\cup BA} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$.

Замечание. Последнее свойство проще всего понять, используя физический смысл криволинейного интеграла II рода: при движении по дуге в противоположных направлениях одна и та же сила совершает противоположную по знаку работу.

Докажите следующие утверждения:

– если AB – отрезок, параллельный оси абсцисс, то $\int\limits_{\cup AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{\cup AB} P(x,y)dx$*;*

– если AB – отрезок, параллельный оси ординат, то $\int\limits_{\cup AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{\cup AB} Q(x,y)dy$.

7.3.Вычисление криволинейного интеграла II рода

Пусть функции P(x,y) и Q(x,y) определены и непрерывны во всех точках гладкой дуги AB, заданной уравнением $y=\varphi(x)$, где $a \le x \le b$. Тогда

$$\int\limits_{\cup AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy \;=\; \int\limits_{\cup AB} P(x,\varphi(x))dx + Q(x,\varphi(x))\varphi'(x)dx$$

(мы заменили y на $\varphi(x)$), и значит,

$$\int\limits_{\cup AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_a^b (P(x,\varphi(x)) + Q(x,\varphi(x))\varphi'(x))dx\,.$$

Аналогично, если дуга АВ задана уравнением $x = \psi(y)$, где $c \le y \le d$, получаем формулу:

$$\int\limits_{\cup AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_a^b (P(\psi(y),y)\psi'(y) + Q(\psi(y),y))dy\,.$$

Наконец, если дуга АВ задана параметрически: $x=x(t)$, $y=y(t)$, $\alpha \le t \le \beta$, – то

$$\int\limits_{\cup AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_\varepsilon^\beta (P(x(t),y(t))x'(t) + Q(x(t),y(t))y'(t))dt\,.$$

<u>Примеры</u>. 1) Найдем $\int\limits_{\cup AB} 2xydx + x^2dy$ в двух случаях: а) дуга АВ – часть параболы $y=x^2$, $0 \le x \le 2$; б) дуга АВ – часть параболы $x=\frac{1}{8}y^2$, $0 \le y \le 4$.

а) $\int\limits_{\cup AB} 2xydx + x^2dy = \int\limits_0^2 (2x \cdot x^2 + x^2 \cdot 2x)dx = \int\limits_0^2 4x^3dx \;= x^4\Big|_0^2 = 16.$

б) $\int\limits_{\cup AB} 2xydx + x^2dy = \int\limits_0^4 (2 \cdot \frac{1}{8}y^2 \cdot y \cdot \frac{1}{8} \cdot 2y + \left(\frac{1}{8}y^2\right)^2)dy =$

$= \int\limits_0^4 \frac{5}{64}y^4dy \;=\; \frac{1}{64}y^5\Big|_0^4 = 16.$

2) Найдем $\int\limits_{\cup AB} ydx - xdy$, где дуга АВ – единичная окружность с центром в начале координат. Для этого зададим

окружность параметрически: $x=\cos t$, $y=\sin t$, $0\le t\le 2\pi$. Тогда

$$\int\limits_{\cup AB} ydx - xdy = \int\limits_0^{2\pi}(\sin t(-\sin t) - \cos t\cos t)dt = -\int\limits_0^{2\pi} dt = -2\pi.$$

3) Пусть в плоскости $x0y$ действует сила $\vec{F}(x,y) = xy\vec{i} + (x-y)\vec{j}$. Найдем работу этой силы при перемещении из точки A(1;0) в точку B(2;3), если путь представляет собой: а) отрезок AB; б) ломаную ACB, где C(2;0).

а) Работа равна $\int\limits_{\cup AB} xydx + (x-y)dy$. Найдем уравнение отрезка AB: $\dfrac{x-1}{2-1} = \dfrac{y-0}{3-0}$, $1\le x\le 2$, то есть $y=3x-3$, $1\le x\le 2$. Значит, $\int\limits_{\cup AB} xydx + (x-y)dy = \int\limits_1^2 (x(3x-3) + (x-(3x-3))\cdot 3)dx =$

$$= \int\limits_1^2 (3x^2 - 9x + 9)dx = \left.(x^3 - 9\frac{x^2}{2} + 9x)\right|_1^2 = 8\text{–}5{,}5 = 2{,}5.$$

б) Работа равна $\int\limits_{\cup AB} xydx + (x-y)dy$. Воспользуемся аддитивностью криволинейного интеграла II рода:

$$\int\limits_{\cup AB} xydx + (x-y)dy = \int\limits_{L_1} xydx + (x-y)dy + \int\limits_{L_2} xydx + (x-y)dy,$$

где L_1 – отрезок AC, L_2 – отрезок CB. Уравнение отрезка AC: $y=0$, $1\le x\le 2$; уравнение отрезка CB: $x=2$, $0\le y\le 3$. Так как отрезок AC параллелен оси абсцисс, то $\int\limits_{AC} xydx + (x-y)dy =$

$= \int\limits_{AC} xydx$. Значит, работа на отрезке AC равна $\int\limits_1^2 x\cdot 0dx = 0$.

Аналогично $\int\limits_{CB} xydx + (x-y)dy = \int\limits_{CB} (x-y)dy$, то есть работа на участке СВ равна $\int_0^3 (2-y)dy = (2y - \frac{y^2}{2})\Big|_0^3$ = 1,5.•

Замечание. В приведенном примере работа силового поля зависит не только от начального и конечного положения перемещаемой материальной точки, но и от пути перемещения.

7.4.Формула Грина

Рассмотрим область D, ограниченную гладкой замкнутой кривой L. Будем считать положительным такое направление обхода контура L, при котором область D остается слева.

Лемма 1. Пусть D – криволинейная трапеция, ограниченная прямыми *x*=*a*, *x*=*b* (*a*<*b*) и гладкими линиями *y*=*g*(*x*), *y*=*h*(*x*), где $g(x) \leqslant h(x)$ при $x \in [a;b]$ (***криволинейная трапеция I вида***), L – ее граница. Пусть функции P(*x*,*y*) и $\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)$ непрерывны в области D. Тогда $\iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = -\int\limits_L Pdx$.

Доказательство. ▼ $\iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \int_a^b dx \int_{g(x)}^{h(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy =$

$$\int_a^b (P(x,h(x)) - P(x,g(x))dx = -\int_a^b (P(x,g(x))dx + \int_a^b P(x,h(x))dx$$

$= -\int_a^b (P(x,g(x))dx - \int_b^a P(x,h(x))dx$. Так как интегралы $\int P(x,y)dx$ по вертикальным отрезкам контура равны нулю (*почему?*), то полученная разность противоположна интегралу по всему контуру, то есть равна $-\int\limits_L Pdx$, ч.т.д.▲

Лемма 2. Пусть D – криволинейная трапеция, ограниченная прямыми $y=c$, $y=d$ ($c<d$) и гладкими линиями $x=g(y)$, $x=h(y)$, где $g(y)\leqslant h(y)$ при $y\in[c;d]$ (***криволинейная трапеция II вида***), L–ее граница. Пусть функции $Q(x,y)$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$ непрерывны в области D. Тогда

$$\iint\limits_D \frac{\partial Q}{\partial x}dxdy = \int\limits_L Qdy .$$

Докажите лемму 2.

Следствие. Формулы из лемм 1 и 2 верны, если область D – объединение конечного числа криволинейных трапеций I и II вида, не имеющих общих внутренних точек.

Теорема 1. Пусть область D – объединение конечного числа криволинейных трапеций I и II вида, не имеющих общих внутренних точек, L – ее граница; функции $P(x,y)$, $Q(x,y)$, $\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$ непрерывны в области D. Тогда справедлива ***формула Грина*:**

$$\int\limits_L Pdx + Qdy = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy .$$

Докажите формулу Грина, используя леммы и следствие из них.

Пример. Вычислим с помощью формулы Грина $\int\limits_L (xy - x + \frac{1}{2}y^2 - y)dx + (xy + \frac{1}{2}x^2 - y)dy$, где L – граница области, ограниченной линиями $y=x^2-3x-2$, $y=x+3$. Здесь P(x,y)= $xy - x + \frac{1}{2}y^2 - y$, $\frac{\partial P}{\partial y}$ = $x+y-1$, Q(x,y)= $xy + \frac{1}{2}x^2 - y$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$=$y+x$. Значит, данный интеграл равен $\iint\limits_D dxdy$, где D – область, ограниченная линиями $y=x^2-3x-2$, $y=x+3$ (*почему?*), то есть равен площади этой области.

Найдите площадь области D и покажите, что данный интеграл равен 36.●

7.5.Условие независимости криволинейного интеграла II рода от пути интегрирования

Будем называть область D ***односвязной***, если любая замкнутая линия, содержащаяся в D, ограничивает область, полностью лежащую в D.

Теорема 2. Пусть функции P(x,y), Q(x,y), $\frac{\partial P}{\partial y}$ (x,y) и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ (x,y) непрерывны в односвязной области E. Тогда $\int\limits_L Pdx + Qdy$=0 для любой гладкой замкнутой кривой L$\subset$E тогда и только тогда, когда в любой внутренней точке области $\frac{\partial P}{\partial y}$ = $\frac{\partial Q}{\partial x}$.

Доказательство. ▼ ⇒ Пусть $\int\limits_L Pdx + Qdy$=0 для любой гладкой замкнутой кривой L$\subset$E. Докажем от противного, что в любой внутренней точке области $\frac{\partial P}{\partial y}$ = $\frac{\partial Q}{\partial x}$.

Пусть, например, $\frac{\partial P}{\partial y} < \frac{\partial Q}{\partial x}$ в некоторой внутренней точке $(x_0,y_0)\in$E. Тогда это неравенство выполняется в некотором круге D с центром в точке (x_0,y_0) (*почему?*). Если L – граница этого круга, то $\int\limits_L Pdx + Qdy = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy > 0$, что противоречит условию. К такому же противоречию приводит и предположение, что $\frac{\partial P}{\partial y} > \frac{\partial Q}{\partial x}$ в некоторой внутренней точке $(x_0,y_0)\in$E. Значит, в любой внутренней точке области $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

$\Leftarrow$ Пусть $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ в любой внутренней точке области E. Тогда по формуле Грина $\int\limits_L Pdx + Qdy = 0$ для любой гладкой замкнутой кривой L$\subset$E.

Теорема полностью доказана. ▲

Теорема 3. Пусть функции P(x,y), Q(x,y), $\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$ непрерывны в односвязной области E, A и B – фиксированные точки этой области. Тогда $\int\limits_L Pdx + Qdy$, где L – гладкая замкнутая кривая, соединяющая точки A и B, не зависит от L тогда и только тогда, когда в любой внутренней точке области $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

<u>Доказательство.</u> ▼ $\Rightarrow$ Пусть $\int\limits_L P\,dx + Q\,dy$, где L – гладкая замкнутая кривая, соединяющая точки A и B, не зависит от L. Соединим эти точки двумя гладкими кривыми L_1 и L_2. Тогда они образуют гладкий контур L, целиком лежащий в E. $\int\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$=0, так как интегралы по L_1 и по L_2 берутся с противоположными знаками. Значит, по теореме 2 в любой внутренней точке области
$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

$\Leftarrow$ Пусть в любой внутренней точке области $\frac{\partial P}{\partial y}$ = $\frac{\partial Q}{\partial x}$. Пусть точки A и B соединены двумя гладкими кривыми L_1 и L_2. Тогда они образуют гладкий контур L, целиком лежащий в E. Так как в любой внутренней точке области $\frac{\partial P}{\partial y}$ = $\frac{\partial Q}{\partial x}$, то $\int\limits_L Pdx + Qdy$=0 по теореме 2. Значит, интегралы по L_1 и по L_2 равны.

Теорема полностью доказана.▲

<u>Пример</u>. Рассмотрим $\int\limits_L 2xydx + x^2dy$, где кривая L задана формулами $x=t\cos^2 t$, $y=t(\cos t+1)$, $0 \leqslant t \leqslant \pi$. Здесь $P(x,y)=2xy$, $\frac{\partial P}{\partial y}=2x$, $Q(x,y)=x^2$, $\frac{\partial Q}{\partial x}=2x$, то есть $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ при всех (x,y). Значит, интеграл не зависит от пути интегрирования. Кривая L соединяет точки (0,0) и (0,π). Заменим ее отрезком оси абсцисс от 0 до π: $\int\limits_L 2xydx + x^2dy = \int\limits_0^{\pi} 0dx$ =0.●

7.6. Восстановление функции по полному дифференциалу

Выражение $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ будем называть ***полным дифференциалом***, если существует функция $z(x,y)$ (называемая ***первообразной*** полного дифференциала) такая, что $dz=P(x,y)dx+Q(x,y)dy$.

Теорема 4. Пусть функции $P(x,y)$, $Q(x,y)$, $\dfrac{\partial P}{\partial y}(x,y)$ и $\dfrac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$ непрерывны в односвязной области E. Тогда выражение $Pdx+Qdy$ является полным дифференциалом тогда и только тогда, когда в любой внутренней точке области $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

Доказательство. ▼ $\Rightarrow$ Пусть $dz=Pdx+Qdy$. Тогда в любой внутренней точке области $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

Так как P, Q, $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ непрерывны в области E, то смешанные вторые частные производные равны; то есть в любой внутренней точке области $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

$\Leftarrow$Пусть в любой внутренней точке области $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

Фиксируем $A(x_0,y_0)\in E$. Пусть $M(x,y)\in E$ – произвольная точка. Тогда $\int\limits_L Pdx+Qdy$, где кривая L соединяет точки A и M, не зависит от пути (*почему?*), то есть является функцией x и y. Обозначим ее $v(x,y)$ и найдем частные производные этой функции.

1°. $v(x,y) = \int\limits_L Pdx + Qdy$.

2°. $v(x+\Delta x,y) = \int\limits_L Pdx + Qdy + \int\limits_{L_1} Pdx + Qdy$, где L_1 соединяет точки M(x,y) и N($x+\Delta x,y$).

3°. $\Delta_x v = \int\limits_{L_1} Pdx + Qdy = \int\limits_{L_1} Pdx = \int\limits_x^{x+\Delta x} Pdx = P(c,y)\Delta x$ (по теореме о среднем).

4°. $\dfrac{\Delta_x v}{\Delta x} = P(c,y)$.

5°. $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{\Delta_x v}{\Delta x} = P(x,y)$ (так как функция P(x,y) непрерывна), значит, $\dfrac{\partial v}{\partial x} = P(x, y)$.

Докажите тем же способом, что $\dfrac{\partial v}{\partial y} = Q(x, y)$.

Значит, $Pdx+Qdy=dv$ – полный дифференциал.

Теорема доказана полностью.▲

<u>Пример</u>. Докажем, что выражение $(2x\cos y - y^2\sin x)dx + (2y\cos x - x^2\sin y)dy$ является полным дифференциалом. Здесь $P(x,y)=2x\cos y - y^2\sin x$, $\dfrac{\partial P}{\partial y} = -2x\sin y - 2y\sin x$,

$Q(x,y)=2y\cos x - x^2\sin y$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = -2y\sin x - 2x\sin y$, то есть $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

Значит, данное выражение является полным дифференциалом. Найдем его первообразную $z(x,y)$:

$z(x,y)= \int\left(2x\cos y - y^2\sin x\right)dx = x^2\cos y+y^2\cos x+C(y)$. Тогда $\frac{\partial z}{\partial y} = -x^2\sin y+2y\cos x+C'(y)$. Но $\frac{\partial z}{\partial y} =Q(x,y)=2y\cos x-x^2\sin y$, значит, $C'(y)=0$, $C(y)=C$. Значит, $z(x,y) = x^2\cos y+y^2\cos x+C$.•

8. Задачи для самостоятельного решения

Задание 1. Найти первые и вторые частные производные функции $f(x.y)$.

Вариант 1.	$f(x.y)=2x^3+6xy^2-30x-24y$
Вариант 2.	$f(x.y)=x^3-y^2$
Вариант 3.	$f(x.y)=6x^2y+2y^3-24x-30y$
Вариант 4.	$f(x.y)=x^3-8y^3-6xy+1$
Вариант 5.	$f(x.y)=x^3-xy^2+3x^2+y^2-1$
Вариант 6.	$f(x.y)=x^2y-\frac{1}{3}y^3+2x^2+3y^2-1$
Вариант 7.	$f(x.y)=x^3+6xy+3y^2-18x-18y$
Вариант 8.	$f(x.y)=x^2y-y^3-x^2-3y^2+3$
Вариант 9.	$f(x.y)=3x^2-6xy-y^3-12x+12y$
Вариант 10.	$f(x.y)=2x^3-xy^2+5x^2+y^2$
Вариант 11.	$f(x.y)=x^2y-2y^3-x^2-5y^2$
Вариант 12.	$f(x.y)=2x^3+y^2+6xy+12x$
Вариант 13.	$f(x.y)=8x^3-y^3-12xy-1$
Вариант 14.	$f(x.y)=2x^3-12x^2y+16y^3-9x^2$
Вариант 15.	$f(x.y)=-8x^3+6xy^2+y^3+9y^2$
Вариант 16.	$f(x.y)=-\frac{1}{2}x^2+8xy-y^3-13x-12y$

Вариант 17.	$f(x.y) = 2x^2 + 3xy + 2y^3 + 5x$
Вариант 18.	$f(x.y) = x^3 - 5xy + 5y^2 + 7x - 15y$
Вариант 19.	$f(x.y) = 2x^2 - 5xy + 2y^3 - 3x + 4y$
Вариант 20.	$f(x.y) = 3x^2 + 10xy + 6y^3 + 2x + 2y - 1$
Вариант 21.	$f(x.y) = 3x^3 + 7xy - \frac{7}{2}y^2 - 60x + 7y + 2$
Вариант 22.	$f(x.y) = x^2 y - \frac{1}{3}y^3 + 2x^2 + 3y^2 - 1$
Вариант 23.	$f(x.y) = x^3 + 6xy + 3y^2 - 18x - 18y$
Вариант 24.	$f(x.y) = x^2 y - y^3 - x^2 - 3y^2 + 3$
Вариант 25.	$f(x.y) = 3x^2 - 6xy - y^3 - 12x + 12y$
Вариант 26.	$f(x.y) = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2$
Вариант 27.	$f(x.y) = x^2 y - 2y^3 - x^2 - 5y^2$
Вариант 28.	$f(x.y) = 2x^3 + y^2 + 6xy + 12x$
Вариант 29.	$f(x.y) = 8x^3 - y^3 - 12xy - 1$
Вариант 30.	$f(x.y) = 2x^3 - 12x^2 y + 16y^3 - 9x^2$

Пример 1. *Найдем первые и вторые частные производные функции* $f(x.y) = \sqrt{x}\sin\frac{y}{x}$.

Чтобы найти $\frac{\partial f}{\partial x}$, считаем, что y=*const*. Получаем:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (\sqrt{x})'\sin\frac{y}{x} + \sqrt{x}(\sin\frac{y}{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}\sin\frac{y}{x} + \sqrt{x}\cos\frac{y}{x}(\frac{y}{x})' =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}}\sin\frac{y}{x} + \sqrt{x}\cos\frac{y}{x}(-\frac{y}{x^2}) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\sin\frac{y}{x} - \frac{y}{x\sqrt{x}}\cos\frac{y}{x}.$$

Чтобы найти $\frac{\partial f}{\partial y}$, считаем, что x=*const*. Получаем:

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\sqrt{x}(\sin\frac{y}{x})'=\sqrt{x}\cos\frac{y}{x}(\frac{y}{x})'=\sqrt{x}\cos\frac{y}{x}(\frac{1}{x})=\frac{1}{\sqrt{x}}\cos\frac{y}{x}.$$

Теперь найдем производные второго порядка. Находим $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, для этого надо от функции $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{2\sqrt{x}}\sin\frac{y}{x}-\frac{y}{x\sqrt{x}}\cos\frac{y}{x}$ взять производную по x. Считаем $y=const$: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=$

$$=-\frac{1}{4x\sqrt{x}}\sin\frac{y}{x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}\cos\frac{y}{x}(-\frac{y}{x^2})+\frac{3y}{2x^2\sqrt{x}}\cos\frac{y}{x}+\frac{y}{x\sqrt{x}}\sin\frac{y}{x}(-\frac{y}{x^2})=$$

$$=-\frac{1}{4x\sqrt{x}}\sin\frac{y}{x}-\frac{y}{2x^2\sqrt{x}}\cos\frac{y}{x}+\frac{3y}{2x^2\sqrt{x}}\cos\frac{y}{x}-\frac{y^2}{x^3\sqrt{x}}\sin\frac{y}{x}=$$

$$=-\frac{1}{4x\sqrt{x}}\sin\frac{y}{x}+\frac{y}{x^2\sqrt{x}}\cos\frac{y}{x}-\frac{y^2}{x^3\sqrt{x}}\sin\frac{y}{x}.$$

Находим $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$, для этого надо от функции $\frac{\partial f}{\partial x}=$ $=\frac{1}{2\sqrt{x}}\sin\frac{y}{x}-\frac{y}{x\sqrt{x}}\cos\frac{y}{x}$ взять производную по y. Считаем $x=const$: $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{1}{2\sqrt{x}}\cos\frac{y}{x}\cdot\frac{1}{x}-\frac{1}{x\sqrt{x}}\cos\frac{y}{x}+\frac{y}{x\sqrt{x}}\sin\frac{y}{x}\cdot\frac{1}{x}=$

$$=\frac{1}{2x\sqrt{x}}\cos\frac{y}{x}-\frac{1}{x\sqrt{x}}\cos\frac{y}{x}+\frac{y}{x^2\sqrt{x}}\sin\frac{y}{x}=-\frac{1}{2x\sqrt{x}}\cos\frac{y}{x}+\frac{y}{x^2\sqrt{x}}\sin\frac{y}{x}.$$

Находим $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$, для этого надо от функции $\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{1}{\sqrt{x}}\cos\frac{y}{x}$ взять производную по x. Считаем $y=const$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=-\frac{1}{2x\sqrt{x}}\cos\frac{y}{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\sin\frac{y}{x}\cdot(-\frac{y}{x^2})=-\frac{1}{2x\sqrt{x}}\cos\frac{y}{x}+\frac{y}{x^2\sqrt{x}}\sin\frac{y}{x}.$$

Заметим, что в этом примере $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$.

Находим $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, для этого надо от функции $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{x}} \cos \frac{y}{x}$ взять производную по y. Считаем $x = const$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\frac{1}{\sqrt{x}} \sin \frac{y}{x} \cdot \frac{1}{x} = -\frac{1}{x\sqrt{x}} \sin \frac{y}{x}.$$

Задание 2. Исследовать на экстремум функцию $f(x.y)$.

Вариант 1.	$f(x,y) = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5$
Вариант 2.	$f(x,y) = 1 + 15x - 2x^2 - xy - 2y^2$
Вариант 3.	$f(x,y) = 1 + 6x - x^2 - xy - y^2$
Вариант 4.	$f(x,y) = x^3 + y^2 - 6xy - 39x + 18y + 20$
Вариант 5.	$f(x,y) = 2x^3 + 2y^3 - 6xy + 5$
Вариант 6.	$f(x,y) = 3x^3 + 3y^3 - 9xy + 10$
Вариант 7.	$f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + x - y + 1$
Вариант 8.	$f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 6x - 9y$
Вариант 9.	$f(x,y) = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5$
Вариант 10.	$f(x,y) = 1 + 15x - 2x^2 - xy - 2y^2$
Вариант 11.	$f(x,y) = 1 + 6x - x^2 - xy - y^2$
Вариант 12.	$f(x,y) = x^3 + y^2 - 6xy - 39x + 18y + 20$
Вариант 13.	$f(x,y) = 2x^3 + 2y^3 - 6xy + 5$
Вариант 14.	$f(x,y) = 3x^3 + 3y^3 - 9xy + 10$
Вариант 15.	$f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + x - y + 1$
Вариант 16.	$f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 6x - 9y$
Вариант 17.	$f(x,y) = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5$
Вариант 18.	$f(x,y) = 1 + 15x - 2x^2 - xy - 2y^2$
Вариант 19.	$f(x,y) = 1 + 6x - x^2 - xy - y^2$
Вариант 20.	$f(x,y) = x^3 + y^2 - 6xy - 39x + 18y + 20$
Вариант 21.	$f(x,y) = 2x^3 + 2y^3 - 6xy + 5$
Вариант 22.	$f(x,y) = 3x^3 + 3y^3 - 9xy + 10$
Вариант 23.	$f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + x - y + 1.$
Вариант 24.	$f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 6x - 9y$

Вариант 25.	$f(x,y) = x^3 + 8y^3 – 6xy + 5$
Вариант 26.	$f(x,y) = 1 + 15x – 2x^2 – xy – 2y^2$
Вариант 27.	$f(x,y) = 1 + 6x – x^2 – xy – y^2$
Вариант 28.	$f(x,y) = x^3 + y^2 – 6xy – 39x + 18y + 20$
Вариант 29.	$f(x,y) = 2x^3 + 2y^3 – 6xy + 5$
Вариант 30.	$f(x,y) = 3x^3 + 3y^3 – 9xy + 10$

Пример 2. *Исследуем на экстремум функцию* $f(x.y) = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2$.

1) Находим $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6x^2 - y^2 + 10x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -2xy + 2y.$$

2) Решаем систему: $\begin{cases} 6x^2 - y^2 + 10x = 0 \\ -2xy + 2y = 0 \end{cases}$.

$$\begin{cases} 6x^2 - y^2 + 10x = 0 \\ 2y(-x+1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 6x^2 - y^2 + 10x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 6x^2 - y^2 + 10x = 0 \\ x = 1 \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 6x^2 + 10x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} y^2 = 16 \\ x = 1 \end{cases} \end{array} \right. .$$

Получаем 4 точки, в которых частные производные равны нулю: $M_1(0;0)$, $M_2(-\frac{5}{3};0)$, $M_3(1;-4)$, $M_4(1;4)$.

3) Находим $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x + 10, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -2y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2x + 2.$$

4) В каждой из найденных в пункте (2) точек находим A, B, C и Δ.

В точке $M_1(0;0)$: А=$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=12x+10$=10,

В=$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}=-2y$=0, С=$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-2x+2$=2, Δ=АС–В^2=20.

Δ>0. А>0 – значит, $M_1(0;0)$ – точка минимума.

В точке $M_2(-\frac{5}{3};0)$: А=$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=12x+10=-10$,

В=$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}=-2y$=0, С=$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-2x+2=\frac{16}{3}$, Δ=АС–В^2=$-\frac{160}{3}$.

Δ<0 – значит, $M_2(-\frac{5}{3};0)$ не является точкой экстремума.

В точке $M_3(1;-4)$: А=$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=12x+10=22$,

В=$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}=-2y$=8, С=$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-2x+2$=0, Δ=АС–В^2=$-64$.

Δ<0 – значит, $M_3(1;-4)$ не является точкой экстремума.

В точке $M_4(1;4)$: А=$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=12x+10=22$,

В=$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}=-2y=-8$, С=$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-2x+2$=0, Δ=АС–В^2=$-64$.

Δ<0 – значит, $M_4(1;4)$ не является точкой экстремума.

5) Находим значение функции в найденных точках экстремума.

$M_1(0;0)$ – точка минимума,

$f(0,0)=2\cdot 0^3-0\cdot 0^2+5\cdot 0^2+0^2=0$.

Ответ: функция имеет в точке (0;0) минимум, равный 0.

Задание 3. Изменить порядок интегрирования.

Вариант 1. $\int_{-1}^{0} dx \int_{-8x^3}^{-2x+6} f(x,y)dy$	Вариант 2. $\int_{0}^{1} dy \int_{-4y-4}^{-8y^3} f(x,y)dx$
Вариант 3. $\int_{0}^{1} dx \int_{8x^3}^{4x+4} f(x,y)dy$	Вариант 4. $\int_{-1}^{0} dy \int_{2y-6}^{8y^3} f(x,y)dx$
Вариант 5. $\int_{-1}^{0} dx \int_{4x-4}^{8x^3} f(x,y)dy$	Вариант 6. $\int_{0}^{1} dy \int_{8y^3}^{2y+6} f(x,y)dx$
Вариант 7. $\int_{0}^{1} dx \int_{-2x-6}^{-8x^3} f(x,y)dy$	Вариант 8. $\int_{-1}^{0} dy \int_{-8y^3}^{-4y+4} f(x,y)dx$
Вариант 9. $\int_{-1}^{0} dx \int_{-8x^3}^{-2x+6} f(x,y)dy$	Вариант 10. $\int_{0}^{1} dy \int_{-4y-4}^{-8y^3} f(x,y)dx$
Вариант 11. $\int_{0}^{1} dx \int_{8x^3}^{4x+4} f(x,y)dy$	Вариант 12. $\int_{-1}^{0} dy \int_{2y-6}^{8y^3} f(x,y)dx$
Вариант 13. $\int_{-1}^{0} dx \int_{4x-4}^{8x^3} f(x,y)dy$	Вариант 14. $\int_{0}^{1} dy \int_{8y^3}^{2y+6} f(x,y)dx$
Вариант 15. $\int_{0}^{1} dx \int_{-2x-6}^{-8x^3} f(x,y)dy$	Вариант 16. $\int_{-1}^{0} dy \int_{-8y^3}^{-4y+4} f(x,y)dx$
Вариант 17. $\int_{-1}^{0} dx \int_{-8x^3}^{-2x+6} f(x,y)dy$	Вариант 18. $\int_{0}^{1} dy \int_{-4y-4}^{-8y^3} f(x,y)dx$
Вариант 19. $\int_{0}^{1} dx \int_{8x^3}^{4x+4} f(x,y)dy$	Вариант 20. $\int_{-1}^{0} dy \int_{2y-6}^{8y^3} f(x,y)dx$
Вариант 21. $\int_{-1}^{0} dx \int_{4x-4}^{8x^3} f(x,y)dy$	Вариант 22. $\int_{0}^{1} dx \int_{-4x-4}^{-8x^3} f(x,y)dy$

Вариант 23. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{8y^3}^{4y+4} f(x,y)dx$	Вариант 24. $\int\limits_{-1}^0 dx \int\limits_{2x-6}^{8x^3} f(x,y)dy$
Вариант 25. $\int\limits_{-1}^0 dy \int\limits_{4y-4}^{8y^3} f(x,y)dx$	Вариант 26. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{8x^3}^{2x+6} f(x,y)dy$
Вариант 27. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-2y-6}^{-8y^3} f(x,y)dx$	Вариант 28. $\int\limits_{-1}^0 dx \int\limits_{-8x^3}^{-4x+4} f(x,y)dy$
Вариант 29. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{8y^3}^{4y+4} f(x,y)dx$	Вариант 30. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{-4x-4}^{-8x^3} f(x,y)dy$

Пример 3. *Изменим порядок интегрирования в повторном интеграле:* $\int\limits_{-2}^{-\sqrt{3}} dx \int\limits_0^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy + \int\limits_{-\sqrt{3}}^0 dx \int\limits_0^{2-\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy$.

Область интегрирования построена на отрезке [–2;0] оси *Ox*.

При этом при $-2 \le x \le -\sqrt{3}$ область ограничена сверху дугой окружности с центром в точке (0;0) и радиусом 2 (соединяющей точки (–2;0) и ($-\sqrt{3}$; 1)), а при $-\sqrt{3} \le x \le 0$ – дугой окружности с центром в точке (0;2) и радиусом 2 (соединяющей точки ($-\sqrt{3}$;1) и (0;0)). На первой дуге $x = -\sqrt{4-y^2}$, где $0 \le y \le 1$. На второй дуге $x = -\sqrt{4y-y^2}$, где $0 \le y \le 1$. При $0 \le y \le 1$ первая дуга лежит левее второй.

Таким образом, в данной области *y* меняется от 0 до 1, а *x* при каждом значении *y* меняется от $-\sqrt{4-y^2}$ до $-\sqrt{4y-y^2}$. Получаем:

$$\int_{-2}^{-\sqrt{3}} dx \int_{0}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy + \int_{-\sqrt{3}}^{0} dx \int_{0}^{2-\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy = \int_{0}^{1} dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{-\sqrt{4y-y^2}} f(x,y)dx .$$

Задание 4. Найти двойной интеграл по области D, ограниченной данными линиями.

Вариант 1. $\iint\limits_D (12x^2y^2+16x^3y^3)dxdy$; D: $x = 1$, $y = x^2$, $y = -\sqrt{x}$.	Вариант 2. $\iint\limits_D (9x^2y^2+48x^3y^3)dxdy$; D: $x = 1$, $y = -x^2$, $y = \sqrt{x}$.
Вариант 3. $\iint\limits_D (36x^2y^2-96x^3y^3)dxdy$; D: $x = 1$, $y = -x^3$, $y = \sqrt[3]{x}$.	Вариант 4. $\iint\limits_D (18x^2y^2+32x^3y^3)dxdy$; D: $x = 1$, $y = x^3$, $y = -\sqrt[3]{x}$.
Вариант 5. $\iint\limits_D (27x^2y^2+48x^3y^3)dxdy$; D: $x = 1$, $y = x^2$, $y = -\sqrt[3]{x}$.	Вариант 6. $\iint\limits_D (18x^2y^2+32x^3y^3)dxdy$; D: $x = 1$, $y = -x^2$, $y = \sqrt[3]{x}$.
Вариант 7. $\iint\limits_D (18x^2y^2+32x^3y^3)dxdy$; D: $x = 1$, $y = x^3$, $y = -\sqrt{x}$.	Вариант 8. $\iint\limits_D (27x^2y^2+48x^3y^3)dxdy$; D: $x = 1$, $y = -x^3$, $y = \sqrt{x}$.
Вариант 9. $\iint\limits_D (4xy+3x^2y^2)dxdy$; D: $x = 1$, $y = x^2$, $y = -\sqrt{x}$.	Вариант 10. $\iint\limits_D (12xy+9x^2y^2)dxdy$; D: $x = 1$, $y = -x^2$, $y = \sqrt{x}$.
Вариант 11. $\iint\limits_D (8xy+9x^2y^2)dxdy$; D: $x = 1$, $y = -x^3$, $y = \sqrt[3]{x}$.	Вариант 12. $\iint\limits_D (24xy+18x^2y^2)dxdy$; D: $x = 1$, $y = x^3$, $y = -\sqrt[3]{x}$.
Вариант 13.	Вариант 14.

$\iint\limits_D (12xy + 27x^2y^2)dxdy$; D: $x = 1, y = x^2, y = -\sqrt[3]{x}$.	$\iint\limits_D (8xy + 18x^2y^2)dxdy$; D: $x = 1, y = -x^2, y = \sqrt[3]{x}$.
Вариант 15. $\iint\limits_D (\frac{4}{5}xy + \frac{9}{11}x^2y^2)dxdy$; D: $x = 1, y = x^3, y = -\sqrt{x}$.	Вариант 16. $\iint\limits_D (\frac{4}{5}xy + 9x^2y^2)dxdy$; D: $x = 1, y = -x^3, y = \sqrt{x}$.
Вариант 17. $\iint\limits_D (24xy - 48x^3y^3)dxdy$; D: $x = 1, y = x^2, y = -\sqrt{x}$.	Вариант 18. $\iint\limits_D (6xy + 24x^3y^3)dxdy$; D: $x = 1, y = -x^2, y = \sqrt{x}$.
Вариант 19. $\iint\limits_D (4xy + 16x^3y^3)dxdy$; D: $x = 1, y = -x^3, y = \sqrt[3]{x}$.	Вариант 20. $\iint\limits_D (4xy + 16x^3y^3)dxdy$; D: $x = 1, y = x^3, y = -\sqrt[3]{x}$.
Вариант 21. $\iint\limits_D (44xy + 16x^3y^3)dxdy$; D: $x = 1, y = x^2, y = -\sqrt[3]{x}$.	Вариант 22. $\iint\limits_D (4xy + 176x^3y^3)dxdy$; D: $x = 1, y = -x^2, y = \sqrt[3]{x}$.
Вариант 23. $\iint\limits_D (xy - 4x^3y^3)dxdy$; D: $x = 1, y = x^3, y = -\sqrt{x}$.	Вариант 24. $\iint\limits_D (4xy + 176x^3y^3)dxdy$; D: $x = 1, y = -x^3, y = \sqrt{x}$.
Вариант 25. $\iint\limits_D (6x^2y^2 + \frac{25}{3}x^4y^4)dxdy$; D: $x = 1, y = x^2, y = -\sqrt{x}$.	Вариант 26. $\iint\limits_D (9x^2y^2 + 25x^4y^4)dxdy$; D: $x = 1, y = -x^2, y = \sqrt{x}$.
Вариант 27. $\iint\limits_D (3x^2y^2 + \frac{50}{3}x^4y^4)dxdy$; D: $x = 1, y = -x^3, y = \sqrt[3]{x}$.	Вариант 28. $\iint\limits_D (9x^2y^2 + 25x^4y^4)dxdy$; D: $x = 1, y = x^3, y = -\sqrt[3]{x}$.

Вариант 29.	Вариант 30.
$\iint\limits_D (54x^2y^2+150x^4y^4)dxdy$; D: $x = 1, y = x^2, y = -\sqrt[3]{x}$.	$\iint\limits_D (xy-9x^5y^5)dxdy$; D: $x = 1, y = -x^2, y = \sqrt[3]{x}$.

Пример 4. *Найдем двойной интеграл* $\iint\limits_D y^2xdxdy$, *где область D ограничена линиями* $x^2+y^2=4$ *и* $x+y-2=0$.

Область D – часть круга $x^2+y^2\le 4$, отсеченная прямой $x+y-2=0$. Прямая и окружность пересекаются в точках (0;2) и (2;0). Таким образом, в данной области x меняется от 0 до 2, а y при каждом значении x меняется от $2-x$ до $\sqrt{4-x^2}$.

Значит, $\iint\limits_D y^2xdxdy=\int\limits_0^2 dx\int\limits_{2-x}^{\sqrt{4-x^2}} y^2xdy=\int\limits_0^2 dx\left(x\int\limits_{2-x}^{\sqrt{4-x^2}} y^2dy\right)=$

$$=\int\limits_0^2 xdx\left(\frac{y^3}{3}\Bigg|_{2-x}^{\sqrt{4-x^2}}\right)=\int\limits_0^2\frac{x}{3}\left((\sqrt{4-x^2})^3-(2-x)^3\right)dx=$$

$=\frac{1}{3}\int\limits_0^2 x(\sqrt{4-x^2})^3dx-\frac{1}{3}\int\limits_0^2 x(2-x)^3dx$. Найдем каждый интеграл отдельно.

$$\frac{1}{3}\int\limits_0^2 x(\sqrt{4-x^2})^3dx=\begin{bmatrix} t=4-x^2 \\ dt=-2xdx \\ x=0\Rightarrow t=4 \\ x=2\Rightarrow t=0\end{bmatrix}=\frac{1}{3}\int\limits_4^0 t^{\frac{3}{2}}(-\frac{dt}{2})=-\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}\Bigg|_4^0=$$

$$=-\frac{1}{15}(0^{\frac{5}{2}}-4^{\frac{5}{2}})=-\frac{1}{15}(-32)=\frac{32}{15}.$$

$$-\frac{1}{3}\int_0^2 x(2-x)^3dx=\left[\begin{array}{c} t=2-x \\ dt=-dx \\ x=0\Rightarrow t=2 \\ x=2\Rightarrow t=0 \end{array}\right]=\frac{1}{3}\int_2^0 (2-t)t^3dt=$$

$$=\frac{1}{3}\int_2^0 (2t^3-t^4)dt=\frac{1}{3}\left(\frac{t^4}{2}-\frac{t^5}{5}\right)\Bigg|_2^0=0-\frac{1}{3}\left(\frac{2^4}{2}-\frac{2^5}{5}\right)=-\frac{1}{3}\left(8-\frac{32}{5}\right)=$$

$$=-\frac{8}{15}.$$

Окончательно получаем: $\iint\limits_D y^2xdxdy=\frac{32}{15}-\frac{8}{15}=\frac{8}{5}$.

Задание 5. Найти с помощью полярных координат двойной или повторный интеграл.

Вариант 1. $\iint\limits_D dxdy$; D – пересечение кругов $x^2+y^2\le 2x$ и $x^2+y^2\le 4y$.	Вариант 2. $\int\limits_0^2 dx\int\limits_0^{\sqrt{4-x^2}}dy$.
Вариант 3. $\int\limits_0^3 dx\int\limits_0^{\sqrt{9-x^2}}\ln(1+x^2+y^2)dy$.	Вариант 4. $\iint\limits_D dxdy$,D – меньший из сегментов, на которые прямая $x+y=2$ разбивает круг $x^2+y^2\le 4$.
Вариант 5. $\int\limits_1^4 dy\int\limits_0^{\sqrt{4y-y^2}}dx$.	Вариант 6. $\iint\limits_D\sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}dxdy$, D: $x^2+y^2\le 1, x\ge 0, y\ge 0$.
Вариант 7.	Вариант 8.

$\iint\limits_D dxdy$, D ограничена линиями $x^2+y^2=4x$, $x^2+y^2=8x$, $y=x$, $y=2x$.	$\int\limits_0^3 dx \int\limits_0^{\sqrt{9-x^2}} (x^2+y^2)dy$
Вариант 9. $\iint\limits_D dxdy$; D – пересечение кругов $x^2+y^2 \le 4x$ и $x^2+y^2 \le 2y$.	Вариант 10. $\int\limits_0^2 dy \int\limits_0^{\sqrt{4-y^2}} dx$.
Вариант 11. $\int\limits_0^3 dy \int\limits_0^{\sqrt{9-y^2}} \ln(1+x^2+y^2)dx$.	Вариант 12. $\iint\limits_D dxdy$, D – больший из сегментов, на которые прямая $x+y=2$ разбивает круг $x^2+y^2 \le 4$.
Вариант 13. $\int\limits_1^4 dx \int\limits_0^{\sqrt{4x-x^2}} dy$.	Вариант 14. $\iint\limits_D \sqrt{\frac{4-x^2-y^2}{4+x^2+y^2}}dxdy$, D: $x^2+y^2 \le 4, x \ge 0, y \ge 0$.
Вариант 15. $\iint\limits_D dxdy$, D ограничена линиями $x^2+y^2=4y$, $x^2+y^2=8y$, $y=x$, $y=0{,}5x$.	Вариант 16. $\int\limits_0^4 dx \int\limits_0^{\sqrt{16-x^2}} (x^2+y^2)dy$.
Вариант 17. $\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy$; D: $x^2+y^2 \le R^2$, $y \le 0$.	Вариант 18. $\iint\limits_D e^{x^2+y^2}dxdy$; D: $x^2+y^2 \le 1$, $x \ge 0$, $y \ge 0$.
Вариант 19. $\iint\limits_D e^{x^2+y^2}dxdy$; D: $x^2+y^2 \le R^2$.	Вариант 20. $\iint\limits_D \sqrt{1-x^2-y^2}dxdy$; D: $x^2+y^2 \le x$.
Вариант 21.	Вариант 22.

$\iint\limits_D \sqrt{\dfrac{9-x^2-y^2}{9+x^2+y^2}}dxdy$; D: $x^2+y^2 \le 9, x \le 0, y \ge 0$.	$\iint\limits_D \dfrac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2}dxdy$; D: $1 \le x^2+y^2 \le e^2$
Вариант 23. $\int\limits_0^R dx \int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2}} dy$.	Вариант 24. $\int\limits_{\frac{R}{2}}^{2R} dy \int\limits_0^{\sqrt{2Ry-y^2}} dx$.
Вариант 25. $\int\limits_0^R dx \int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2}} (x^2+y^2)dy$.	Вариант 26. $\int\limits_0^{\frac{R}{\sqrt{1+R^2}}} dx \int\limits_0^{Rx} \dfrac{xdy}{y}$.
Вариант 27. $\int\limits_{\frac{R}{\sqrt{1+R^2}}}^{R} dx \int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \dfrac{ydy}{x}$.	Вариант 28. $\int\limits_0^R dx \int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \ln(1+x^2+y^2)dy$
Вариант 29. $\iint\limits_D (6-2x-3y)dxdy$; D: $x^2+y^2 \le 9$.	Вариант 30. $\iint\limits_D \sqrt{36-x^2-y^2}dxdy$; D: $x^2+y^2 \le 6x$.

Пример 5. *Найдем с помощью полярных координат двойной интеграл* $\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy$, *где D – круг, ограниченный окружностью* $x^2+y^2=2x$.

Уравнение данной окружности перепишем в виде: $x^2+y^2=2x$. Поэтому центр круга – точка (1;0), а радиус равен 1. Если φ – полярный угол для точки, лежащей в этом круге, то $-\dfrac{\pi}{2} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$. При каждом значении φ полярный радиус ρ меняется от 0 до 2cosφ. Поэтому по формуле перехода к полярным координатам получаем:

$$\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{2\cos\varphi} \rho^2 \rho d\rho = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \left(\frac{\rho^4}{4} \Bigg|_0^{2\cos\varphi} \right) =$$

$$= \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4\cos^4\varphi d\varphi = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2\varphi)^2 d\varphi = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1+2\cos 2\varphi + \cos^2 2\varphi) d\varphi$$

$$= \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1+2\cos 2\varphi + \frac{1+\cos 4\varphi}{2}) d\varphi = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\frac{3}{2} + 2\cos 2\varphi + \frac{\cos 4\varphi}{2}) d\varphi$$

$$= \left(\frac{3}{2}\varphi + \sin 2\varphi + \frac{\sin 4\varphi}{8} \right) \Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{\pi}{2} + \sin\pi + \frac{\sin 2\pi}{8} \right) -$$

$$- \left(\frac{3}{2} \cdot (-\frac{\pi}{2}) + \sin(-\pi) + \frac{\sin(-2\pi)}{8} \right) = \frac{3\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} = \frac{3\pi}{2}.$$

Задание 6. Проверить, что выражение du является полным дифференциалом, и найти функцию u(x,y).

Вариант 1. du = (2cos$x$+cos$y$)dx + + (sin$y$ – $x$sin$y$)dy	Вариант 2. du = $2xy^3$dx +$3x^2y^2$dy
Вариант 3. du = (x + $3y^2$)dx+(6xy – y^2)dy	Вариант 4. du = ($3x^2$ + 2$x$sin$y$)dx + + (y + x^2cos$y$)dy
Вариант 5. du = ($3x^2$ + $6y^2$ – 2y)dx + + (12xy – $12y^2$ – 2x)dy	Вариант 6. du = (2x + 5y)dx + (5x – 6y)dy

Вариант 7. $du = (6x - 2y)dx + (1 - 2x)dy$	Вариант 8. $du = 2xydx + x^2dy$
Вариант 9. $du=(2x + y)dx + (x - 2y - 3)dy$	Вариант 10. $du = x\sin 2y dx + x^2\cos 2y dy$
Вариант 11. $du = \dfrac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$	Вариант 12. $du = (x + \ln y)dx + (\dfrac{x}{y} + \sin y)dy$
Вариант 13. $du = (y - 2x)dx + (x + y)dy$	Вариант 14. $du = (1 - \dfrac{1}{x^2})dx + (2 + \dfrac{1}{y})dy$
Вариант 15. $du = (y^2 - 1)dx + (2xy + 3y)dy$	Вариант 16. $du = (\sin 2y - y\,\mathrm{tg}x)dx +$ $+ (2x\cos 2y + \ln\cos x + 2y)dy$
Вариант 17. $du = (y - \dfrac{\sin^2 y}{x^2})dx +$ $+ (x + \dfrac{\sin 2y}{x} + 1)dy$	Вариант 18. $du = x\sqrt{\dfrac{y}{x^2+1}}dx + \dfrac{1+\sqrt{x^2+1}}{2\sqrt{y}}dy$
Вариант 19. $du=(\ln y - \cos 2x)dx + (\dfrac{x}{y} + x)dy$	Вариант 20. $du = (-x + 7y)dx + (7x + 3y)dy$
Вариант 21. $du = \left(4 - \dfrac{y^2}{x^2}\right)dx + \dfrac{2y}{x}dy$	Вариант 22. $du = 3x^2e^y\, dx + (x^3e^y - 1)dy$
Вариант 23. $du = e^{-y}dx + (1 - xe^{-y})dy$	Вариант 24. $du=2x\cos^2 y dx+(2y - x^2\sin 2y)dy$
Вариант 25. $du=(3x^2+6xy^2)dx+(6x^2y+4y^3)dy$	Вариант 26. $du = (y^3e^x - 1)dx + 3y^2e^x\, dy$
Вариант 27. $du= (2x - y^2\sin 2x)dx + 2y\cos^2 x dy$	Вариант 28. $du = (1 - ye^{-x})dx + e^{-x}dy$
Вариант 29. $du=(3x^2+2y)dx+(2x-3)dy$	Вариант 30. $du=(x\cos 2y+1)dx - x^2\sin 2y dy$

Пример 6. *Проверим, что выражение* $du = (3x^2y - 2x^3 + y^3)dx - (2y^3 - 3xy^2 - x^3)dy$ *является полным дифференциалом, и найдем функцию u(x,y).*

Здесь $du = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$, где $P(x,y) = 3x^2y - 2x^3 + y^3$, $Q(x,y) = -2y^3 + 3xy^2 + x^3$. Проверим, что $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$: $\frac{\partial P}{\partial y} = 3x^2 + 3y^2$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = 3y^2 + 3x^2 = \frac{\partial P}{\partial y}$. Значит, $du = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ – полный дифференциал.

Найдем функцию u(x,y):
$u(x,y) = \int (3x^2y - 2x^3 + y^3)dx = x^3y - \frac{x^4}{2} + y^3x + C(y)$. Значит, $\frac{\partial u}{\partial y} = x^3 + 3y^2x + C'(y)$. Поскольку $\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y)$, получаем: $x^3 + 3y^2x + C'(y) = -2y^3 + 3xy^2 + x^3$, то есть $C'(y) = -2y^3$, $C(y) = -\frac{y^4}{2} + C$. Итак, $u(x,y) = x^3y - \frac{x^4}{2} + y^3x - \frac{y^4}{2} + C$.

Учебно-методическое издание

Антонова Елена Вячеславовна
Арутюнян Елена Бабкеновна

Математика для самостоятельного изучения
Часть 5
Интегральное исчисление функций
одной переменной
Функции нескольких переменных

Учебно-методическое пособие

Изд. № 190-21