

Geometria este arta de a raționa
corect pe figuri incorecte

Henri Poincaré

Introducere

Geometria euclidiană este cea mai veche formalizare a geometriei, și în același timp cea mai familiară și mai folosită în viața de zi cu zi. Denumirea provine de la Euclid (aprox. 325 - 265 î.Hr.), cel care a prezentat-o sistematic pentru prima dată în Grecia antică. Geometria euclidiană este un ansamblu de leme, corolare, teoreme și demonstrații, care folosește doar patru noțiuni fundamentale: punct, dreaptă, plan și spațiu, și care se bazează pe cinci axiome, enunțate de Euclid în monumentală sa lucrare *Elementele*.

Această lucrare este, după Biblie, probabil cea mai tradusă carte din lume și, de mai bine de 2.000 de ani, își păstrează neștirbită valoarea. Euclid, prin definițiile și axiomele sale pune, de fapt, o importantă piatră de temelie la structurarea raționamentului științific. În numai cinci axiome el pune bazele geometriei, pe care noi acum o numim geometrie euclidiană. Sunt de ajuns cinci adevăruri evidente, pentru a construi o întreagă lume matematică.

Geometria euclidiană se sprijină în mod esențial pe desene geometrice, apelează preponderent în rezolvarea problemelor la construcții auxiliare care pot fi reduse la operații efectuate cu rigla și compasul și la considerații vizuale sintetice.

În prezentul volum, prin figură sau configurație geometrică vom înțelege o submulțime a planului euclidian. Materialul este organizat în două părți, care acoperă cursurile Geometrie 1 și Geometrie 3, pentru perfecționarea profesorilor, pe care autorul le-a predat în cadrul programului de masterat didactic de la Facultatea de Matematică și Informatică a Universității Babeș - Bolyai.

Partea I se intitulează "Geometria configurațiilor remarcabile" și cuprinde patru capitole : geometria triunghiului, geometria cercului, geometria patrulaterului, probleme de extrem în geometria plană. În această parte sunt prezentate proprietăți fundamentale ale configurațiilor plane standard definite de puncte, drepte și cercuri. Partea II, "Metode ale geometriei euclidiene", este organizată în trei capitole după cum urmează : metoda calculului vectorial, metoda transformărilor geometrice, metoda numerelor complexe.

Lucrarea este utilă pentru profesorii de matematică și poate deschide perspectiva unor aplicații interesante și abordări noi în numeroase probleme pentru concursuri școlare, care implică aprofundarea cunoștințelor de geometrie și dezvoltarea capacităților rezolutiv-aplicative ale elevilor.

Autorul

Cuprins

I	Geometria configurațiilor plane remarcabile	9
1	Geometria triunghiului	11
1.1	Planul euclidian: construcție și notații utilizate	11
1.2	Triunghiuri asemenea	13
1.3	Grupul asemănărilor planului. Configurații asemenea	19
1.4	Linii și puncte importante în triunghi	20
1.5	Teoremele lui Menelaus și Ceva. Aplicații	23
1.5.1	Teorema lui Menelaus	23
1.5.2	Teorema lui Ceva. Forma metrică și trigonometrică	25
1.5.3	Concurența unor linii importante în triunghi	28
1.5.4	Punctul lui Gergonne și adjuncele sale	29
1.5.5	Punctul lui Nagel și adjuncele sale	31
1.5.6	Punctul lui Lemoine	33
1.6	Dreapta Euler a triunghiului	35
1.7	Relații metrice în triunghi	36
1.8	Lema lui Carnot și aplicații	45
1.9	Dreapta antiotică a unui triunghi. Axa lui Lemoine	50
1.10	Teorema lui Desargues	53
1.11	Aria triunghiului podar. Dreapta lui Simson	55
1.12	Exerciții și probleme	57
2	Geometria cercului	59
2.1	Puterea punctului față de cerc	59
2.2	Cercul celor nouă puncte al unui triunghi	65
2.3	Dreapta ortică a triunghiului	69
2.4	Cercurile lui Lemoine	70
2.5	Cercul lui Apollonius	72
2.6	Cercuri și puncte remarcabile asociate unui triunghi	74
2.6.1	Punctul lui Spieker	74

2.6.2	Cercurile lui Carnot	76
2.6.3	Cercul și punctul lui Fuhrmann	83
2.6.4	Punctul lui Coșniță	85
2.7	Exerciții și probleme	88
3	Geometria patrulaterului	91
3.1	Definiții. Patrulare particulare	91
3.2	Patrulaterul înscrisibil	93
3.3	Inegalitatea lui Ptolemeu. Teoremele lui Ptolemeu	96
3.4	Relații metrice în patrulater	100
3.5	Centrul de greutate al unui patrulater	105
3.6	Patrulaterul complet	108
3.7	Patrulaterul circumscriptibil	111
3.8	Teorema lui Menelaus pentru patrulater	115
3.9	Exerciții și probleme	116
4	Probleme de extrem în geometria plană	119
4.1	Proprietatea de minim a patrulaterului convex	119
4.2	Proprietatea de minim a triunghiului ortic	120
4.3	Proprietăți de extrem pentru centrul de greutate al unui triunghi	121
4.4	O proprietate de extrem a centrului cercului înscris	125
4.5	O proprietate de extrem a ortocentrului	126
4.6	O proprietate de extrem a centrului cercului circumscris	128
4.7	O proprietate de extrem a punctului lui Lemoine	130
4.8	Punctul Fermat-Toricelli al unui triunghi	132
4.9	Inegalitatea Erdős-Mordell și aplicații	133
4.10	Inegalitățile lui Blundon	143
4.10.1	Demonstrația geometrică	143
4.10.2	Geometria configurației Blundon	148
4.10.3	Forma tare a inegalităților lui Blundon	151
4.10.4	Versiunea duală a inegalităților lui Blundon	153
4.11	Exerciții și probleme	159

II	Metode ale geometriei euclidiene	161
1	Metoda calculului vectorial	163
1.1	Vectori liberi și operații	163
1.2	Vector de poziție	166
1.3	Vectorii de poziție ai punctelor remarcabile în triunghi. Aplicații . .	168
1.4	Produs scalar	175
1.5	Baricentre. Teorema lui Lagrange	181
1.6	Invarianții simetrici ai triunghiului. Calculul unor distanțe remarcabile	188
1.7	Produsul vectorial și produsul mixt	195
1.8	Exerciții și probleme	200
2	Metoda transformărilor geometrice	203
2.1	Grupul izometriilor planului euclidian	204
2.2	Translația	206
2.3	Simetrii	210
2.3.1	Simetria centrală	210
2.3.2	Simetria axială	212
2.4	Rotația	215
2.5	Clasificarea izometriilor planului euclidian	220
2.6	Omotetia	222
2.6.1	Definiție și proprietăți	222
2.6.2	Omotetiile configurațiilor geometrice elementare	228
2.6.3	Demonstrarea unor teoreme clasice folosind omotetia	231
2.6.4	Omotetia spiralată	232
2.6.5	Aplicații ale omotetiei spiralate	239
2.7	Inversiunea	243
2.8	Exerciții și probleme	248
3	Metoda numerelor complexe	251
3.1	Dreapta în planul complex	252
3.1.1	Dreapta determinată de două puncte	253
3.1.2	Perpendiculara dintr-un punct pe o dreaptă	255
3.2	Cercul în planul complex	256
3.3	Coliniaritate și asemănare	258
3.4	Produsul real pentru două numere complexe	261

3.4.1	Coordonate baricentrice în planul complex	264
3.4.2	Formula distanței în coordonate baricentrice	267
3.5	Produsul complex pentru două numere complexe	269
3.5.1	Afixul punctului cevian	272
3.5.2	Afixele punctelor remarcabile în triunghi	274
3.5.3	Distanțele OI, OI_a, OI_b, OI_c și ON, ON_a, ON_b, ON_c . Teorema lui Feuerbach	282
3.5.4	Distanțele HI și GI . Inegalitățile lui Gerretsen	288
3.5.5	Formula ariei în coordonate baricentrice	291
3.6	Transformări geometrice ale planului complex	294
3.7	Izometriile planului complex	297
3.7.1	Translația	297
3.7.2	Simetria centrală	299
3.7.3	Simetria axială	301
3.7.4	Rotația	303
3.7.5	Expresia analitică a izometriilor planului complex	306
3.8	Transformări neizometrice ale planului complex	307
3.8.1	Omotetia	307
3.8.2	Omotetia spiralată	310
3.8.3	Asemănarea	315
3.8.4	Inversiunea	321
3.8.5	Omografia	330
3.9	Exerciții și probleme	336
	Bibliografie	336
	Index	343

Partea I

Geometria configurațiilor plane remarcabile

Geometria triunghiului

1

1.1 Planul euclidian: construcție și notații utilizate

În celebra carte *Elementele*, matematicianul grec din Alexandria, Euclid realizează în secolul al IV-lea î.Hr. prima construcție matematică riguroasă a geometriei. Metoda lui Euclid constă în utilizarea unui număr mic de proprietăți (numite *axiome*) și apoi obținerea prin demonstrație a unei multitudini de *propoziții* și *teoreme*, unele cunoscute cu mult timp înainte. Această construcție a unei teorii matematice a fost prima operă monumentală care a arătat cum pot fi aranjate proprietățile într-un sistem comprehensiv, deductibil și logic, marcând evoluția gândirii umane pentru o lungă perioadă de timp. *Elementele* conține 13 părți, numite cărți. Cărțile I-IV și VI construiesc geometria plană, V și VII-X abordează teoria numerelor într-o manieră geometrică, iar XI-XIII prezintă geometria în spațiu.

Cunoscută astăzi sub numele de *geometrie euclidiană*, aceasta este o colecție de leme, propoziții, teoreme, corolare și demonstrații, care folosește doar patru noțiuni fundamentale: punct, dreaptă, plan și spațiu, și care se bazează pe cinci axiome.

Începând cu secolul al XVIII-lea s-au dezvoltat alte formalizări ale geometriei care nu acceptă una sau mai multe din axiomele lui Euclid, acestea purtând numele de *geometrii neeuclidiene*. Acestea au ilustrat limitele lucrării lui Euclid, în special în ceea ce privește unicitatea geometriei construite. În secolul al XIX-lea, N. Lobachevski și J. Bolyai stabilesc că există și alte geometrii în care postulatul paralelelor poate fi negat, luând astfel naștere *geometria eliptică* (printr-un punct exterior unei drepte nu se poate duce nici o paralelă la acea dreaptă) și *geometria hiperbolică* (printr-un punct exterior unei drepte există o infinitate de drepte paralele cu acea dreaptă).

Construcția lui Euclid a avut unele deficiențe care au fost corectate prin introducerea unor sisteme axiomatice satisfăcătoare din punct de vedere logic: D. Hilbert (1899), V.F. Kagan (1902), F. Schur (1909), H. Weyl (1918), G.D. Birkhoff (1932). Toate aceste axiomatizări au la bază puncte de plecare diferite, adică noțiuni primare

și axiome aferente diferite, conduc în esență la același rezultat: geometria euclidiană.

Restructurarea predării geometriei prin introducerea noilor rezultate a fost un proces lent deoarece niciuna dintre aceste axiomatizări nu se pretează direct procesului didactic. Tendințele de simplificare pot fi împărțite în două mari grupe. Într-o grupă intră axiomatizările care utilizează proprietățile numerelor reale încă de la început, fie pentru a defini o distanță (G.D. Birkhoff, A.N. Kolmogorov), fie pentru a introduce o structură de spațiu vectorial (H. Weyl, J. Dieudonné). La noi în țară această tendință s-a concretizat prin manualele de geometrie pentru clasele a IX-a și a X-a publicate după 1980 de un colectiv de autori clujean grupat în jurul lui F. Radó, fost profesor la universitatea noastră.

În a doua grupă intră axiomatizările care pornesc de la noțiuni primare tradiționale (punct, dreaptă, plan) asamblate prin axiome de natură geometrică, construindu-se în final structura vectorială a planului și a spațiului (D. Hilbert, R. Brisac, A. Doneddu). La noi în țară această tendință s-a manifestat prin manualele pentru clasele a IX-a și a X-a publicate înainte de 1980 de către C. Teleman, fost profesor la Universitatea din București.

Fiecare dintre aceste tendințe de simplificare are avantaje și dezavantaje. Vom prezenta pe scurt sistemul axiomatic al lui D. Hilbert. Acesta a preluat critic axiomatica lui Euclid, a completat și definitivat lista noțiunilor și relațiilor primare, iar proprietățile acestora le-a prescris într-un sistem de axiome enunțate explicit. Lucrarea fundamentală a lui D. Hilbert este "Grundlagen der Geometrie", a fost publicată în 1899 și este o continuare a ideilor emanate din "Elementele" lui Euclid. În această lucrare este formalizată partea specifică a sistemului axiomatic: noțiunile și relațiile primare sunt simboluri abstracte care se înșiră în formule după reguli precise, iar axiomele sunt propoziții care prescriu proprietățile pe care dorim să le aibă aceste simboluri. Deducerea noțiunilor, relațiilor și teoremelor se face ca și la Euclid prin utilizarea regulilor de definiție și de demonstrație din logica clasică. Construcția astfel obținută constituie un sistem axiomatic semiformalizat.

Noțiunile primare pentru această teorie axiomatică sunt: punctul, dreapta, planul. Ansamblul punctelor și dreptelor formează planul geometric studiat. Notăm punctele cu litere mari: A, B, C, \dots și mulțimea tuturor punctelor cu \mathcal{P} , reprezentând *planul euclidian*. Dreptele se notează cu litere mici: a, b, c, \dots

Relațiile primare sunt în număr de patru și se introduc pe parcursul construcției teoriei axiomatice. Acestea sunt următoarele:

- apartenența unui punct la o dreaptă, notată $A \in d$ (dacă relația nu are loc notăm $A \notin d$);

• relația ”între”, notată $A - B - C$ (punctele A, B, C sunt coliniare iar B este situat între A și C);

- relația de congruență a două segmente neorientate, notată \equiv ;
- relația de congruență a două unghiuri neorientate, notată \cong .

Axiomele acestui sistem sunt în număr de 20 și sunt grupate în cinci grupe, după cum urmează:

I. Axiomele de incidență sau apartenență (8 axiome)

II. Axiomele de ordine (4 axiome)

III. Axiomele de congruență (5 axiome)

IV. Axiomele de continuitate (2 axiome)

V. Axioma paralelelor (1 axiomă).

Teoria axiomatice construită astfel se numește *geometrie euclidiană* iar structura matematică obținută este *planul euclidian*.

Pe lângă notațiile menționate mai sus, pe parcursul acestei părți mai utilizăm următoarele notații.

- AB , dreapta determinată de punctele distincte $A, B \in \mathcal{P}$
- $[AB]$, semidreapta închisă cu extremitatea A , care conține punctul B
- $[AB]$, segmentul închis determinat de $A, B \in \mathcal{P}$.
- $|AB|$, lungimea segmentului $[AB]$. Dacă nu există pericol de confuzie, utilizăm notația AB .

• \widehat{AOB} sau $\sphericalangle AOB$, unghiul cu laturile $[OA]$, $[OB]$ și vârful O .

• $S[ABC]$, aria triunghiului ABC .

• \equiv indică congruența segmentelor, unghiurilor sau a triunghiurilor. Presupunem cunoscute cazurile de congruență triunghiurilor.

Alte notații utilizate vor fi precizate pe parcursul lucrării.

1.2 Triunghiuri asemenea

Fiind date trei puncte necoliniare distincte $A, B, C \in \mathcal{P}$, figura geometrică dată de reuniunea segmentelor închise $[AB]$, $[BC]$, $[CA]$, se numește *triunghi*. Folosim notația $\triangle ABC$. Menționăm faptul că această configurație este una dintre figurile poligonale fundamentale ale geometriei.

Teorema 1.2.1. (Thales) Se consideră un unghi $\widehat{EOE'}$ și punctele $A \in (OE, A' \in (OE'$. Atunci avem $AA' \parallel EE'$ dacă și numai dacă

$$\frac{OA}{OE} = \frac{OA'}{OE'}.$$

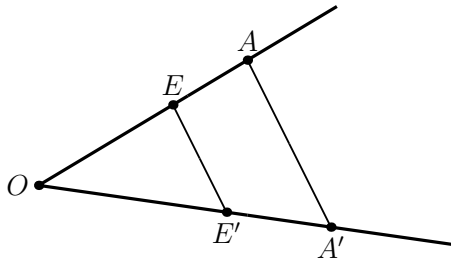


Figura 1.1

Demonstrație. Se bazează pe axiomele de continuitate. □

Definiția 1.2.2. Fie triunghiurile ABC și $A'B'C'$. Triunghiurile ABC și $A'B'C'$ sunt asemenea dacă sunt verificate următoarele proprietăți:

- au unghiurile corespunzătoare congruente:

$$\widehat{A} \equiv \widehat{A'}, \widehat{B} \equiv \widehat{B'}, \widehat{C} \equiv \widehat{C'}$$

- au laturile corespunzătoare omoloage proporționale:

$$\frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'} = \frac{AB}{A'B'} = k,$$

unde k este raportul de asemănare.

În această situație folosim notația $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

Teorema 1.2.3. Relația de asemănare ” \sim ” este o relație de echivalență pe mulțimea triunghiurilor din planul euclidian.

Aceasta înseamnă că relația ” \sim ” este:

- reflexivă, adică fiecare triunghi este asemenea cu el însuși
- simetrică, adică din $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ rezultă $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$;

- tranzitivă, adică

$$\left. \begin{array}{l} \triangle ABC \sim \triangle A'B'C' \text{ și} \\ \triangle A'B'C' \sim \triangle A''B''C'' \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A''B''C''$$

Clasa de echivalență a triunghiului ABC , care reprezintă mulțimea tuturor triunghiurilor asemenea cu el, se mai numește *clasa de asemănare a triunghiului ABC* .

Teorema 1.2.4. (teorema fundamentală a asemănării) Fie triunghiul ABC și $D \in AB$ un punct arbitrar. Paralela prin D la BC intersectează dreapta AC în E . Atunci $\triangle ABC \sim \triangle ADE$.

Demonstrație. Considerăm următoarele cazuri.

Cazul 1. $D \in (AB)$, deci avem ordinea $A - D - B$.

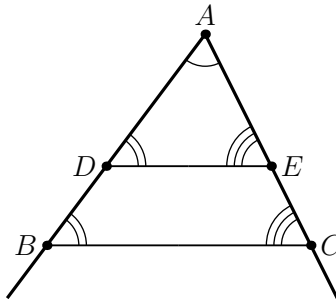


Figura 1.2

Considerând unghiul \widehat{BAC} , punctele $D \in (AB)$, $E \in (AC)$ cu $DE \parallel BC$ și aplicând teorema lui Thales rezultă relația

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} \quad (1)$$

Avem dreptele paralele DE și BC tăiate de secantele AB și AC , rezultă că unghiurile corespundente sunt congruente, prin urmare

$$\widehat{A} \equiv \widehat{A}, \widehat{D} \equiv \widehat{B}, \widehat{E} \equiv \widehat{C}.$$

Fie punctul $D' \in (BC)$ astfel încât $DD' \parallel AC$.

Avem unghiul \widehat{ABC} , $D \in (BA)$, $D' \in (BC)$ și $DD' \parallel AC$. Din teorema lui Thales și din faptul că $DD'CE$ este paralelogram rezultă relațiile

$$\frac{D'C}{DA} = \frac{BC}{BA}, \quad \frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} \quad (2)$$

Din (1) și (2) rezultă

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC},$$

prin urmare se verifică și a doua condiție din definiția asemănării triunghiurilor.

Cazul 2. $B \in (AD)$, adică avem ordinea $A - B - D$.

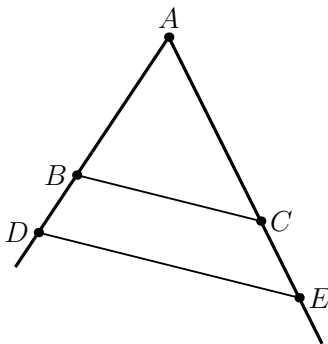


Figura 1.3

Această situație se reduce la Cazul 1, deoarece facem raționamentul pentru punctul B (în loc de D) și folosim proprietatea de simetrie a relației de asemănare.

Cazul 3. $A \in (BD)$, deci avem ordinea $B - A - D$ și $DE \parallel BC$.

Fie D' simetricul lui D în raport cu A și E' simetricul lui E în raport cu A .

Dacă $D' \in (AB)$ rezultă $E' \in (AC)$ și $\triangle ADE \equiv \triangle AD'E'$ (L.U.L.).

Prin urmare $DE \parallel D'E'$, deoarece sunt determinate unghiuri alterne interne congruente, deci $D'E' \parallel BC$. Aplicând Cazul 1, rezultă $\triangle AD'E' \sim \triangle ABC$.

Dacă avem $B \in (AD')$, atunci putem aplica Cazul 2. □

În continuare prezentăm condițiile minimale asupra elementelor celor două triunghiuri care asigură asemănarea acestora. Acestea sunt cunoscute sub numele de cazurile de asemănare ale triunghiurilor.

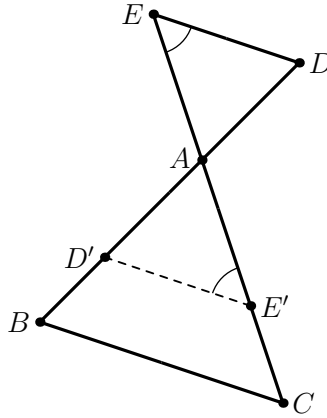


Figura 1.4

Cazurile de asemănare ale triunghiurilor

Teorema 1.2.5. (cazul UU) Fie triunghiurile ABC , $A'B'C'$. Dacă două dintre relațiile

$$\widehat{A} \equiv \widehat{A'}, \widehat{B} \equiv \widehat{B'}, \widehat{C} \equiv \widehat{C'}$$

au loc, atunci $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

Demonstrație. Presupunem $\widehat{A} \equiv \widehat{A'}$, $\widehat{B} \equiv \widehat{B'}$.

Fie punctul $D \in (A'B')$ astfel încât $A'D = AB$. Fie $DE \parallel B'C'$, unde $E \in A'C'$.

Din teorema fundamentală a asemănării rezultă $\triangle A'DE \sim \triangle A'B'C'$, deci avem

$$\widehat{D} \equiv \widehat{B'} \quad \text{și} \quad \frac{A'D}{A'B'} = \frac{A'E}{A'C'}.$$

Avem $\triangle A'DE \equiv \triangle ABC$ (cazul de congruență U.L.U.), deci $A'E = AC$ și prin urmare $\triangle A'DE \sim \triangle ABC$. Rezultă astfel

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'.$$

□

Teorema 1.2.6. (cazul LUL) Fie triunghiurile ABC , $A'B'C'$. Dacă $\widehat{A} \equiv \widehat{A'}$, $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$, atunci $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$. Prin urmare, unghiuri corespunzătoare congruente între perechi de laturi proporționale implică asemănarea triunghiurilor.

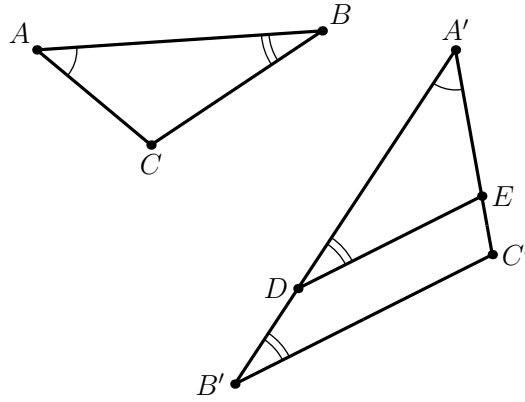


Figura 1.5

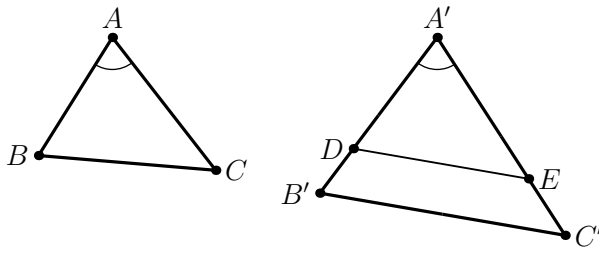


Figura 1.6

Demonstrație. Construim punctele $D \in (A'B')$ cu $A'D = AB$ și $E \in (A'C')$ cu $A'E = AC$.

Avem $\triangle A'DE \equiv \triangle ABC$ (cazul de congruență L.U.L.). Din teorema lui Thales rezultă $DE \parallel B'C'$. Din teorema fundamentală a asemănării obținem $\triangle A'DE \sim \triangle A'B'C'$, deci $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$. \square

Teorema 1.2.7. (Cazul LLL) Fie triunghiurile ABC , $A'B'C'$. Dacă avem

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'},$$

atunci $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

Demonstrație. Construim punctele $D \in (A'B')$ cu $A'D = AB$ și $E \in (A'C')$ cu $A'E = AC$.

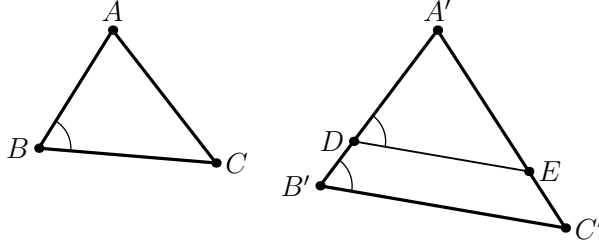


Figura 1.7

Din teorema lui Thales rezultă $DE \parallel B'C'$. Din teorema fundamentală a asemănării obținem $\triangle A'DE \sim \triangle A'B'C'$. Prin urmare

$$\left. \begin{aligned} \frac{A'D}{A'B'} &= \frac{A'E}{A'C'} = \frac{DE}{B'C'} \\ \frac{A'D}{A'B'} &= \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} \end{aligned} \right\} \Rightarrow DE = BC,$$

deci obținem $\triangle A'DE \equiv \triangle ABC$ (cazul de congruență L.L.L.).

Rezultă astfel $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$. □

1.3 Grupul asemănarilor planului. Configurații asemenea

Noțiunea de asemănare a triunghiurilor este o componentă importantă a geometriei euclidiene, având multiple aplicații în studiul diferitelor configurații geometrice. În acest paragraf vom defini asemănarea ca o transformare a planului euclidian, fapt ce ne va permite să descriem riguros asemănarea figurilor geometrice.

Definiția 1.3.1. Fie $k > 0$ un număr real. Transformarea $A_k : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ se numește *asemănare de raport k* , dacă este surjectivă și pentru orice două puncte $M, N \in \mathcal{P}$ are loc relația

$$M'N' = k \cdot MN, \quad (3)$$

unde $M' = A_k(M)$, $N' = A_k(N)$.

Proprietățile algebrice ale acestei transformări sunt următoarele.

1) Orice asemănare este o transformare bijectivă. Inversa asemănării A_k este

$$A_k^{-1} = A_{1/k}.$$

2) Pentru orice numere reale $k, k' > 0$ are loc relația $A_k \circ A_{k'} = A_{kk'}$.

3) Mulțimea asemănărilor planului \mathcal{P} nu este vidă, deoarece pentru $k = 1$ aplicația identică $1_{\mathcal{P}}$ verifică definiția de mai sus. Mai mult, în cazul $k = 1$ conține izometriile planului.

4) Menționăm faptul că din relația (3) rezultă surjectivitatea aplicației A_k , dar demonstrația acestei implicații este complicată.

5) Mulțimea asemănărilor lui \mathcal{P} formează un grup în raport cu operația de compunere. Acest grup se notează cu $(\mathcal{A}(\mathcal{P}), \circ)$ și este izomorf cu (\mathbb{R}_+^*, \cdot) , grupul multiplicativ al numerelor reale strict pozitive, aplicația $A_k \rightarrow k$ fiind un izomorfism în acest sens.

Proprietățile geometrice ale asemănărilor sunt următoarele.

1) Orice asemănare transformă un segment într-un segment, o semidreaptă într-o semidreaptă, o dreaptă într-o dreaptă.

2) Orice triunghi este transformat printr-o asemănare într-un triunghi asemenea cu el.

3) Asemănarea A_k transformă cercul $\mathcal{C}(O, R)$ în cercul $\mathcal{C}(O, kR)$.

4) Relația "între" a punctelor din planul euclidian este invariantă prin asemănări.

Demonstrație. Fie asemănarea A_k și A, B, C trei puncte coliniare distincte cu proprietatea că B este între A și C . Considerăm punctele $A' = A_k(A)$, $B' = A_k(B)$, $C' = A_k(C)$. Deoarece B este între A și C , avem $AC = AB + BC$. Rezultă $k \cdot AC = k \cdot AB + k \cdot BC$, adică $A'C' = A'B' + B'C'$ și prin urmare obținem că A', B', C' sunt coliniare iar B' este între A' și C' . \square

5) Măsura unghiurilor este invariantă prin asemănări, adică asemănările sunt transformări ale planului euclidian care conservă măsura unghiurilor.

Definiția 1.3.2. Numim *configurație* geometrică orice submulțime \mathcal{F} a planului euclidian.

Două configurații \mathcal{F} și \mathcal{F}' sunt *asemenea* dacă \mathcal{F}' se obține din \mathcal{F} printr-o asemănare a planului euclidian.

Descrierea analitică a asemănărilor și legătura cu izometriile planului \mathcal{P} este prezentată în Partea a II-a a acestei cărți cu ajutorul numerelor complexe.

1.4 Linii și puncte importante în triunghi

Encyclopedia of Triangle Centers (ETC) este o listă online deschisă a punctelor importante asociate unui triunghi (numite și *centre* ale triunghiului). Fiecare astfel

de punct este definit prin cel puțin o proprietate geometrică. ETC este menținută și actualizată de către Clark Kimberling, profesor la Universitatea din Evansville, SUA. Deși aparent triunghiul este configurația geometrică cea mai simplă, definită doar de trei puncte necoliniare, geometria ei este extrem de bogată, astfel că în martie 2016, ETC identifica 9717 centre mai mult sau mai puțin importante. Fiecare punct din ETC este indexat cu un număr, folosind notația $X(n)$, $n = 1, 2, \dots$

Mediatoarea unui segment $[AB]$ este dreapta perpendiculară pe segment în mijlocul acestuia.

Mediatoarea este locul geometric al punctelor din plan egal depărtate de capetele segmentului.

Triunghiul ABC are 3 mediatoare corespunzătoare segmentelor definite de laturile acestuia.

Propoziția 1.4.1. *Mediatoarele unui triunghi sunt concurente într-un punct care este centrul cercului circumscris triunghiului și este notat cu O .*

Punctul O este centrul $X(3)$ al triunghiului în lista punctelor remarcabile conținută în ETC.

Raza cercului circumscris triunghiului se notează cu R .

Bisectoarea unui unghi \widehat{AVB} este semidreapta care împarte unghiul în două părți congruente.

Bisectoarea este locul geometric al punctelor egal depărtate de laturile unghiului.

Triunghiul ABC are 3 bisectoare interioare (interne), corespunzătoare celor trei unghiuri determinate de dreptele de suport ale laturilor.

Propoziția 1.4.2. *Bisectoarele interioare ale unui triunghi sunt concurente într-un punct numit centrul cercului înscris în triunghi și notat cu I .*

Raza cercului înscris triunghiului se notează cu r . Punctul I este centrul $X(1)$ al triunghiului în lista prezentată în ETC.

Folosim următoarele notații standard pentru lungimile bisectoarelor : l_a, l_b, l_c .

Bisectoarele exterioare ale unui triunghi sunt bisectoarele unghiurilor exterioare.

Propoziția 1.4.3. *Două bisectoare exterioare și o bisectoare interioară sunt concurente în centrul cercului exînscriș triunghiului corespunzător vârfului din care pleacă bisectoarea interioară. Acesta este tangent la o latură și la prelungirile celorlalte două laturi ale triunghiului.*

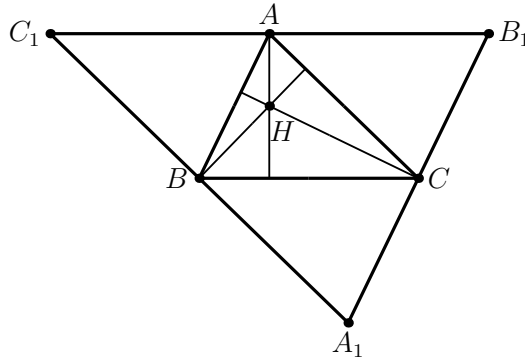


Figura 1.8

Se notează cu I_a, I_b, I_c centrul cercului exînscribit tangent laturii $[BC]$, $[CA]$, respectiv $[AB]$. Razele celor trei cercuri exînscrise se notează cu r_a, r_b, r_c .

Se numește *înălțime* a triunghiului segmentul determinat de un vârf și piciorul perpendicularei dusă din acesta pe latura opusă.

Propoziția 1.4.4. *Cele trei înălțimi sunt concurente într-un punct H numit ortocentrul triunghiului.*

Demonstrație. Prin vârfurile triunghiului ducem paralele la laturile opuse și obținem triunghiul $A_1B_1C_1$. Înălțimile triunghiului ABC sunt mediatoarele triunghiului $A_1B_1C_1$, despre care știm deja că sunt concurente. Mai mult, am obținut că ortocentrul H al triunghiului ABC este centrul cercului circumscris triunghiului $A_1B_1C_1$. □

Triunghiul $A_1B_1C_1$ utilizat în demonstrația de mai sus se numește *triunghiul anticomplementar* al triunghiului ABC .

Punctul H este centrul $X(4)$ din lista prezentată în ETC.

Notățiile standard pentru lungimile înălțimilor sunt h_a, h_b, h_c .

Se numește *mediană* a triunghiului segmentul care unește un vârf cu mijlocul laturii opuse.

Propoziția 1.4.5. *Cele trei mediane sunt concurente într-un punct G , numit centrul de greutate al triunghiului.*

Demonstrație. Fie A_1, B_1, C_1 mijloacele laturilor $[BC]$, $[CA]$, respectiv $[AB]$, ale triunghiului ABC .

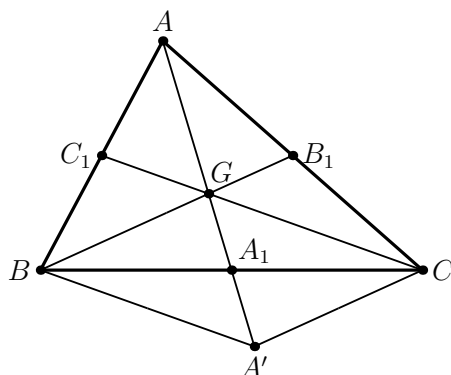


Figura 1.9

Considerăm $\{G\} = BB_1 \cap CC_1$. Arătăm că AG este mediana din A , adică A_1 este mijlocul lui $[BC]$. Pe dreapta AG considerăm punctul A' astfel încât $AG = GA'$. Avem că $[GC_1]$ este linie mijlocie în triunghiul ABA' deci $CG \parallel BA'$. Analog GB_1 este linie mijlocie în triunghiul ACA' deci obținem $BG \parallel CA'$. Rezultă astfel că $BGCA'$ este paralelogram, deci diagonalele sale se înjumătățesc, adică AG trece prin mijlocul A_1 al lui $[BC]$. \square

Cu notațiile de mai sus, au loc relațiile

$$\frac{GA}{GA_1} = \frac{GB}{GB_1} = \frac{GC}{GC_1} = 2,$$

deci punctul G se află situat pe fiecare mediană la $1/3$ față de bază și $2/3$ față de vârf.

Remarcăm faptul că punctul G este centrul $X(2)$ în lista dată în ETC.

Notațiile standard pentru lungimile medianelor sunt m_a, m_b, m_c .

1.5 Teoremele lui Menelaus și Ceva. Aplicații

1.5.1 Teorema lui Menelaus

Menelaus din Alexandria (70-140 e.n.) a fost un matematician și astronom grec care a activat la Roma și a continuat studiul geometriei început de predecesorii săi. El

a demonstrat următoarea teoremă referitoare la coliniarietatea a trei puncte situate pe laturile unui triunghi sau prelungirile acestora.

Teorema 1.5.1. (teorema directă a lui Menelaus) *Fie triunghiul ABC și o transversală d care intersectează laturile sau prelungirile acestora în punctele A_1, B_1, C_1 . Atunci are loc relația:*

$$\frac{A_1B}{A_1C} \cdot \frac{B_1C}{B_1A} \cdot \frac{C_1A}{C_1B} = 1. \quad (4)$$

Demonstrație. Proiectăm vârfurile triunghiului ABC pe transversală în punctele A', B', C' .

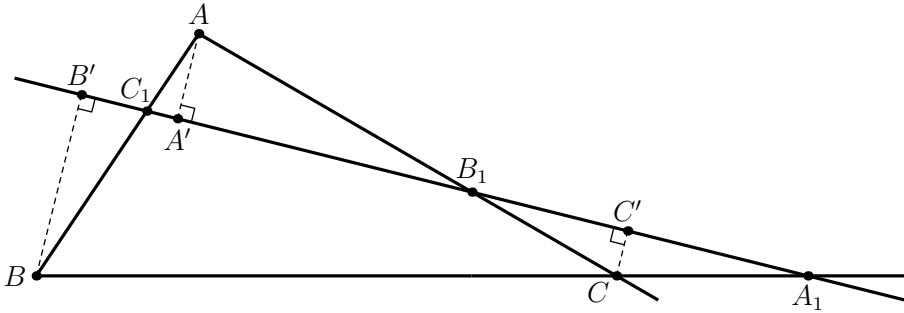


Figura 1.10

Avem

$$\triangle A_1C'C \sim \triangle A_1B'B \Rightarrow \frac{A_1B}{A_1C} = \frac{BB'}{CC'}$$

$$\triangle B_1C'C \sim \triangle B_1A'A \Rightarrow \frac{B_1C}{B_1A} = \frac{CC'}{AA'}$$

$$\triangle C_1A'A \sim \triangle C_1B'B \Rightarrow \frac{C_1A}{C_1B} = \frac{AA'}{BB'}.$$

Prin înmulțirea celor trei relații obținem

$$\frac{A_1B}{A_1C} \cdot \frac{B_1C}{B_1A} \cdot \frac{C_1A}{C_1B} = 1. \quad \square$$

Teorema 1.5.2. (reciproca teoremei lui Menelaus) *Fie triunghiul ABC și trei puncte A_1, B_1, C_1 situate pe laturile sau prelungirile laturilor BC, CA, AB , astfel încât are loc relația (4). Atunci punctele A_1, B_1, C_1 sunt coliniare.*

Demonstrație. Fie $B_1C_1 \cap BC = \{A_2\}$. Trebuie să demonstrăm că $A_2 = A_1$.

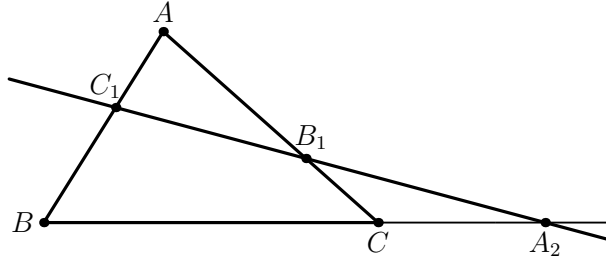


Figura 1.11

Din teorema lui Menelaus, aplicată triunghiului ABC cu transversala $C_1 - B_1 - A_2$, rezultă

$$\frac{A_2B}{A_2C} \cdot \frac{B_1C}{B_1A} \cdot \frac{C_1A}{C_1B} = 1.$$

Folosind relația (4) obținem

$$\frac{A_2B}{A_2C} = \frac{A_1B}{A_1C},$$

deci $A_2 = A_1$, prin urmare punctele A_1, B_1, C_1 sunt coliniare. \square

1.5.2 Teorema lui Ceva. Forma metrică și trigonometrică

Se numește *ceviană* a triunghiului orice semidreaptă având originea într-un vârf al triunghiului. Denumirea provine de la Giovanni Ceva care a publicat în anul 1678 în lucrarea "De lineis rectis" următorul rezultat referitor la concurența a trei ceviane. Proprietatea a fost cunoscută și demonstrată mult mai devreme de către Yusuf Al-Mutaman ibn Hud, rege al Zaragozei în secolul al XI-lea.

Teorema 1.5.3. (teorema directă a lui Ceva) *Considerăm cevianele concurente AA_1, BB_1, CC_1 , unde punctele A_1, B_1, C_1 sunt situate pe laturile triunghiului sau prelungirile acestora. Atunci are loc relația:*

$$\frac{A_1B}{A_1C} \cdot \frac{B_1C}{B_1A} \cdot \frac{C_1A}{C_1B} = 1. \quad (5)$$

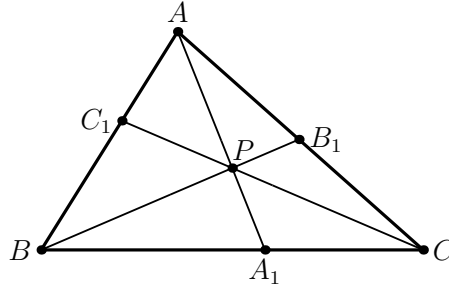


Figura 1.12

Demonstrație. Fie P punctul de concurență al celor trei ceviane considerate. Din teorema lui Menelaus aplicată în triunghiul ABA_1 cu transversala $C_1 - P - C$ obținem

$$\frac{C_1A}{C_1B} \cdot \frac{CB}{CA_1} \cdot \frac{PA_1}{PA} = 1. \quad (6)$$

Din teorema lui Menelaus aplicată în triunghiul ACA_1 cu transversala $B_1 - P - B$ rezultă

$$\frac{B_1C}{B_1A} \cdot \frac{PA}{PA_1} \cdot \frac{BA_1}{BC} = 1. \quad (7)$$

Înmulțim (6) și (7) și obținem relația de demonstrat. \square

Teorema 1.5.4. (reciproca teoremei lui Ceva) Fie triunghiul ABC și punctele A_1 , B_1 , C_1 situate pe laturile triunghiului sau prelungirile acestora astfel încât are loc relația (5). Atunci cevianele AA_1 , BB_1 , CC_1 sunt concurente.

Demonstrație. Fie $BB_1 \cap CC_1 = \{P\}$ și $AP \cap BC = \{A_2\}$ (a se urmări Figura 1.12). Din teorema lui Ceva aplicată cevienelor concurente AA_2 , BB_1 , CC_1 , rezultă

$$\frac{A_2B}{A_2C} \cdot \frac{B_1C}{B_1A} \cdot \frac{C_1A}{C_1B} = 1.$$

Ținând seama de relația (5) obținem

$$\frac{A_1B}{A_1C} = \frac{A_2B}{A_2C}.$$

Din principiul de unicitate al punctului care împarte un segment într-un raport dat, rezultă $A_1 = A_2$, deci cevianele AA_1 , BB_1 , CC_1 sunt concurente. \square

În cazul în care cunoaștem unghiurile formate de cevienele AA_1 , BB_1 , CC_1 cu laturile triunghiului, putem transforma expresia $\frac{A_1B}{A_1C} \cdot \frac{B_1C}{B_1A} \cdot \frac{C_1A}{C_1B}$ astfel. Notăm $\alpha_1 = \widehat{A_1AB}$, $\alpha_2 = \widehat{A_1AC}$, $\beta_1 = \widehat{B_1BC}$, $\beta_2 = \widehat{B_1BA}$, $\gamma_1 = \widehat{C_1CA}$, $\gamma_2 = \widehat{C_1CB}$. Fie $x = \widehat{AA_1C}$, $x' = \widehat{AA_1B}$ și a, b, c lungimile laturilor triunghiului.

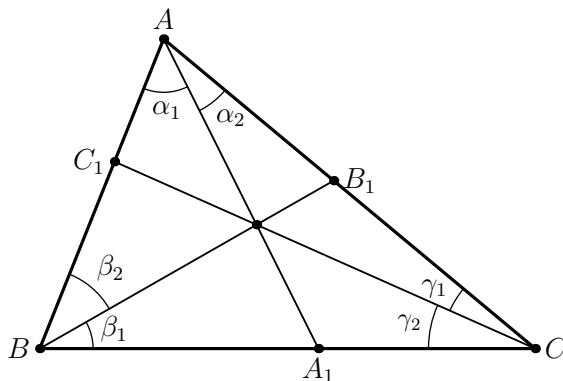


Figura 1.13

Aplicăm teorema sinusurilor în triunghiul AA_1C și obținem

$$\frac{A_1C}{\sin \alpha_2} = \frac{b}{\sin x}.$$

Aplicăm teorema sinusurilor în triunghiul AA_1B și găsim

$$\frac{A_1B}{\sin \alpha_1} = \frac{c}{\sin x'}.$$

Prin urmare

$$\frac{A_1B}{A_1C} = \frac{c}{b} \cdot \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} \cdot \frac{\sin x}{\sin x'}.$$

Pe de altă parte, avem $x' = 180^\circ - x$, deci $\sin x = \sin x'$.

Rezultă astfel

$$\frac{A_1B}{A_1C} = \frac{c}{b} \cdot \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2}.$$

Analog obținem relațiile

$$\frac{B_1C}{B_1A} = \frac{a}{c} \cdot \frac{\sin \beta_1}{\sin \beta_2} \quad \text{și} \quad \frac{C_1A}{C_1B} = \frac{b}{a} \cdot \frac{\sin \gamma_1}{\sin \gamma_2}.$$

Înmulțim relațiile obținute și găsim

$$\frac{A_1B}{A_1C} \cdot \frac{B_1C}{B_1A} \cdot \frac{C_1A}{C_1B} = \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} \cdot \frac{\sin \beta_1}{\sin \beta_2} \cdot \frac{\sin \gamma_1}{\sin \gamma_2}.$$

Teorema 1.5.5. (variantea trigonometrică a teoremei lui Ceva) *Cu notațiile de mai sus, cevienle AA_1 , BB_1 , CC_1 sunt concurente dacă și numai dacă are loc relația*

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} \cdot \frac{\sin \beta_1}{\sin \beta_2} \cdot \frac{\sin \gamma_1}{\sin \gamma_2} = 1. \quad (8)$$

În cazul în care cevienle AA_1 , BB_1 , CC_1 sunt concurente în punctul P , triunghiul $A_1B_1C_1$ se numește *triunghiul cevian* al lui P în raport cu triunghiul ABC .

1.5.3 Concurența unor linii importante în triunghi

Reciproca teoremei lui Ceva, în forma metrică sau trigonometrică, este un instrument deosebit de util în demonstrarea concurenței unor cevienle în triunghi.

Aplicația 1.5.6. (concurența înălțimilor)

Cu notațiile de mai sus, în cazul înălțimilor avem $\alpha_1 = \gamma_2$, $\beta_1 = \alpha_2$, $\gamma_1 = \beta_2$, deci relația (8) se verifică în mod evident. Aplicând forma trigonometrică a teoremei lui Ceva obținem că înălțimile AA_1 , BB_1 , CC_1 sunt concurente.

Triunghiul cevian al ortocentrului H se numește *triunghiul ortic* al triunghiului ABC .

Aplicația 1.5.7. (concurența bisectoarelor) Aplicând teorema bisectoarei avem relațiile

$$\frac{A_1B}{A_1C} = \frac{c}{b}, \quad \frac{B_1C}{B_1A} = \frac{a}{c}, \quad \frac{C_1A}{C_1B} = \frac{b}{a},$$

care prin înmulțire conduc la

$$\frac{A_1B}{A_1C} \cdot \frac{B_1C}{B_1A} \cdot \frac{C_1A}{C_1B} = \frac{c}{b} \cdot \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{a} = 1.$$

Aplicând reciproca teoremei lui Ceva, rezultă că bisectoarele sunt concurente.

Proprietatea este evidentă dacă aplicăm forma trigonometrică a teoremei lui Ceva, deoarece avem $\alpha_1 = \alpha_2$, $\beta_1 = \beta_2$, $\gamma_1 = \gamma_2$.

Triunghiul cevian al centrului cercului înscris I se numește *triunghiul de contact* al triunghiului ABC .

Aplicația 1.5.8. (concurența medianelor) Este evidentă.

Triunghiul cevian al centrului de greutate G poartă numele de *triunghiul median* al triunghiului ABC .

1.5.4 Punctul lui Gergonne și adjuncțele sale

Următorul punct remarcabil este atribuit lui Joseph Diaz Gergonne (1771-1859), matematician francez cu multiple contribuții în geometrie.

Teorema 1.5.9. (punctul lui Gergonne) Cevienele determinate de punctele de tangență ale cercului înscris cu laturile triunghiului sunt concurente într-un punct Γ .

Demonstrație. Fie A', B', C' cele trei puncte de tangență din enunț.

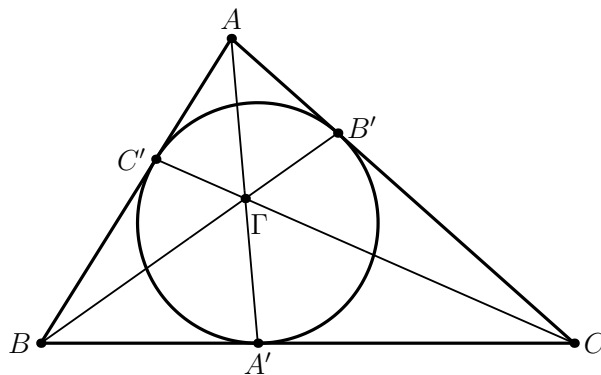


Figura 1.14

Avem $AC' = AB'$, $BA' = BC'$, $CA' = CB'$, conform proprietății tangentelor duse dintr-un punct exterior. Prin urmare

$$\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = 1,$$

deci rezultă că AA', BB', CC' sunt concurente, aplicând reciproca teoremei lui Ceva.

□

Observația 1.5.10. Putem calcula lungimile segmentelor determinate de punctele de tangență A', B', C' pe laturile triunghiului astfel. Fie $x = AB', y = BC'$ și $z = CA'$. Avem relațiile evidente

$$y + z = a, z + x = b, x + y = c. \quad (9)$$

Adunăm aceste relații și obținem

$$2(x + y + z) = a + b + c,$$

deci

$$x + y + z = \frac{1}{2}(a + b + c) = s,$$

adică

$$x = s - a, y = s - b, z = s - c.$$

Reciproc, dacă $a, b, c > 0$ sunt numere reale astfel încât există numerele reale pozitive x, y, z cu proprietatea că

$$a = y + z, b = z + x, c = x + y,$$

atunci a, b, c sunt laturile unui triunghi. Mai mult, x, y, z sunt lungimile segmentelor determinate de punctele de tangență ale cercului înscris în triunghi cu laturile acestuia.

Aplicația $(a, b, c) \rightarrow (x, y, z)$, unde x, y, z verifică sistemul (9), se numește transformarea Ravi a triunghiului ABC .

Punctul Γ se numește *punctul lui Gergonne* al triunghiului și este centrul $X(7)$ din lista prezentată în ETC.

Considerăm cercul exînscribit tangent laturii $[BC]$ a triunghiului în punctul A' și prelungirilor laturilor $[AB]$ și $[AC]$ în A_1 , respectiv A_2 (a se vedea Figura 1.15). Cevienele AA', BA_2, CA_1 sunt concurente într-un punct notat Γ_a care poartă numele de *adjunctul* lui Γ relativ la latura $[BC]$ a triunghiului. Într-adevăr, să verificăm concurența celor trei ceviane folosind reciproca teoremei lui Ceva. Cu notațiile de mai sus avem $A'B = s - c, A'C = s - b$ și $A_1A = A_1B + BA = BA' + BA = s - c + c = s = A_2A$. Atunci, obținem

$$\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{A_2C}{A_2A} \cdot \frac{A_1A}{A_1B} = \frac{s - c}{s - b} \cdot \frac{s - b}{s} \cdot \frac{s}{s - c} = 1,$$

de unde rezultă proprietatea enunțată.

În mod analog se definesc punctele adjuncte Γ_b și Γ_c .

1.5.5 Punctul lui Nagel și adjuncțele sale

Teorema 1.5.11. (punctul lui Nagel) *Cevienele determinate de punctele de tangență ale cercurilor exînscrie la laturile triunghiului sunt concurente într-un punct notat N .*

Demonstrație. Fie A' , A_1 , A_2 , punctul de tangență al cercului exînscriu de centru I_a cu latura $[BC]$, respectiv cu dreptele AB și AC . Fie $y = A'B$ și $z = A'C$. Avem $y + z = a$ și $c + y = b + z$, deoarece $AA_1 = AA_2$. Obținem sistemul

$$\begin{cases} y + z = a \\ y - z = b - c \end{cases}$$

de unde găsim

$$y = \frac{1}{2}(a + b - c) = s - c, \quad z = s - b.$$

Prin urmare, avem

$$\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = \frac{s-c}{s-b} \cdot \frac{s-a}{s-c} \cdot \frac{s-b}{s-a} = 1,$$

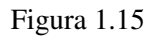
deci AA' , BB' , CC' sunt concurente, conform teoremei reciproce a lui Ceva. \square

Punctul N se numește *punctul lui Nagel* al triunghiului și este centrul $X(8)$ din lista prezentată în ETC. Denumirea acestui punct este dată după numele lui C.H. von Nagel (1803-1882), matematician german, autor al cărții "The Development of Modern Triangle Geometry".

Observația 1.5.12. Punctul de tangență al cercului înscris și punctul de tangență al cercului exînscriu la o latură a triunghiului sunt simetrice în raport cu mijlocul laturii, deci ele sunt *izotomic conjugate* în raport cu segmentul care definește latura respectivă. Această proprietate arată faptul că punctele Γ și N sunt izotomice.

Considerăm cercul exînscriu tangent laturii $[BC]$ a triunghiului în punctul A' și prelungirilor laturilor $[AB]$ și $[AC]$ în A_1 , respectiv A_2 . Fie A'' punctul de tangență al cercului înscris triunghiului cu latura $[BC]$ și B_1, B_2, C_1, C_2 punctele de tangență ale cercurilor exînscrie corespunzătoare laturilor $[AC]$ și $[AB]$ cu prelungirile laturilor, ca în Figura 1.15.

Cevienele AA'' , BC_1, CB_2 sunt concurente într-un punct notat N_a , care poartă numele de *adjunctul* lui N relativ la latura $[BC]$ a triunghiului. Într-adevăr, să



verificăm concurența celor trei ceviane folosind reciproca teoremei lui Ceva. Cu notațiile de mai sus avem $A''B = s-b$, $A''C = s-c$ și $B_2A = AB' = s-c$, $C_1A =$

$AC' = s - b$. Atunci, obținem

$$\frac{A''B}{A''C} \cdot \frac{C_1C}{C_1A} \cdot \frac{B_2A}{B_2B} = \frac{s-b}{s-c} \cdot \frac{s-b+b}{s-b} \cdot \frac{s-c}{s-c+c} = \frac{s-b}{s-c} \cdot \frac{s}{s-b} \cdot \frac{s-c}{s} = 1,$$

ceea ce demonstrează proprietatea enunțată.

În mod analog se definesc punctele adjuncte N_b și N_c ale punctului lui Nagel N , relativ la laturile $[CA]$, $[AB]$ ale triunghiului ABC .

1.5.6 Punctul lui Lemoine

Definiția 1.5.13. Fie triunghiul ABC . Cevienele AX , AY se numesc *izogonale* dacă ele sunt simetrice în raport cu bisectoarea unghiului A , adică are loc relația $\widehat{XAA'} \equiv \widehat{YAA'}$.

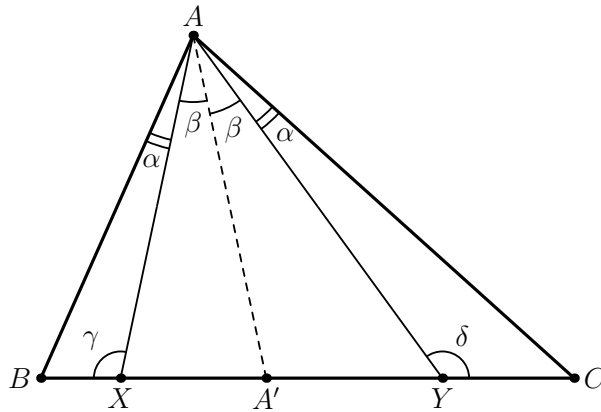


Figura 1.16

Următorul rezultat este atribuit lui Jakob Steiner (1796-1863), matematician elvețian cu lucrări deosebit de importante în domeniul geometriei.

Teorema 1.5.14. (teorema lui Steiner) Dacă AX , AY sunt ceviane izogonale atunci are loc relația:

$$\frac{XB}{XC} \cdot \frac{YB}{YC} = \frac{AB^2}{AC^2}.$$

Demonstrație. Fie $\alpha = \widehat{BAX} = \widehat{CAY}$, $\beta = \widehat{XAA'} = \widehat{YAA'}$, unde A' este piciorul bisectoarei din A . Aplicând teorema sinusurilor în $\triangle AXB$, obținem

$$\frac{XB}{XC} = \frac{AB \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma}}{AC \cdot \frac{\sin(\alpha + 2\beta)}{\sin(\pi - \gamma)}} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha + 2\beta)},$$

unde $\gamma = \widehat{AXB}$.

Analog, obținem

$$\frac{YB}{YC} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{\sin(\alpha + 2\beta)}{\sin \alpha},$$

de unde prin înmulțire rezultă relația de demonstrat. \square

Teorema 1.5.15. Fie (AX, AX') , (BY, BY') , (CZ, CZ') perechi de ceviane izogonale. Atunci AX , BY , CZ sunt concurente dacă și numai dacă AX' , BY' , CZ' sunt concurente.

Demonstrația 1. Utilizând teorema lui Steiner obținem relațiile

$$\frac{XB}{XC} \cdot \frac{X'B}{X'C} = \frac{AB^2}{AC^2}, \quad \frac{YC}{YA} \cdot \frac{Y'C}{Y'A} = \frac{BC^2}{BA^2}, \quad \frac{ZA}{ZB} \cdot \frac{Z'A}{Z'B} = \frac{CA^2}{CB^2}.$$

Prin înmulțirea acestor relații obținem

$$\left(\frac{XB}{XC} \cdot \frac{YC}{YA} \cdot \frac{ZA}{ZB} \right) \left(\frac{X'B}{X'C} \cdot \frac{Y'C}{Y'A} \cdot \frac{Z'A}{Z'B} \right) = 1,$$

de unde concluzia rezultă aplicând teorema reciprocă a lui Ceva.

Demonstrația 2. Această demonstrație nu utilizează teorema lui Steiner. Fie $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2$ unghiurile formate de cevianele AX, BY, CZ cu laturile triunghiului și $\alpha'_1, \alpha'_2, \beta'_1, \beta'_2, \gamma'_1, \gamma'_2$ unghiurile formate de cevianele AX', BY', CZ' cu laturile triunghiului, considerate ca în forma trigonometrică a teoremei lui Ceva. Deoarece perechile de ceviane sunt izogonale, avem relațiile $\alpha_1 = \alpha'_2, \alpha_2 = \alpha'_1, \beta_1 = \beta'_2, \beta_2 = \beta'_1, \gamma_1 = \gamma'_2, \gamma_2 = \gamma'_1$. Prin urmare, obținem

$$\left(\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} \cdot \frac{\sin \beta_1}{\sin \beta_2} \cdot \frac{\sin \gamma_1}{\sin \gamma_2} \right) \left(\frac{\sin \alpha'_1}{\sin \alpha'_2} \cdot \frac{\sin \beta'_1}{\sin \beta'_2} \cdot \frac{\sin \gamma'_1}{\sin \gamma'_2} \right) = 1,$$

și concluzia se obține din forma trigonometrică a teoremei lui Ceva. \square

Definiția 1.5.16. *Simediana* dintr-un vârf al triunghiului este ceviana izogonală mediane corespunzătoare vârfului respectiv.

Din teorema de mai sus rezultă că, cele trei simediane ale triunghiului sunt concurente într-un punct L , numit *punctul lui Lemoine* al triunghiului. Acesta se mai numește *punctul simedian* al triunghiului și este centrul $X(6)$ din ETC. Denumirea provine de la numele lui Émile Michel Hyacinthe Lemoine (1840-1912), inginer și geometru francez cu contribuții deosebite în geometria modernă a triunghiului.

1.6 Dreapta Euler a triunghiului

Leonhard Euler (1707-1783), matematician și fizician elvețian, este considerat unul dintre cei mai mari savanți multilaterali ai omenirii și unul dintre părinții matematicii moderne. Lui i se atribuie următorul rezultat remarcabil în geometria triunghiului.

Teorema 1.6.1. (dreapta lui Euler) *În orice triunghi ABC , punctele O, G, H sunt coliniare și are loc relația $\frac{OG}{GH} = \frac{1}{2}$.*

Demonstrație. Fie A' piciorul mediane corespunzătoare vârfului A al triunghiului.

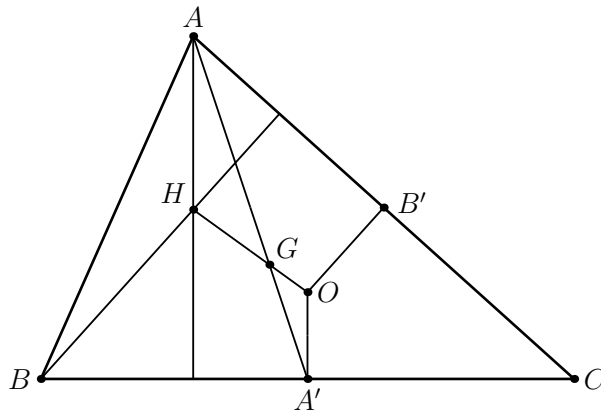


Figura 1.17

Pe semidreapta $[OG$ considerăm punctul P cu proprietatea că avem relația

$$\frac{OG}{GP} = \frac{1}{2}.$$

Arătăm că în aceste condiții rezultă $P = H$. Din relațiile

$$\frac{OG}{GP} = \frac{GA'}{GA} = \frac{1}{2} \quad \text{și} \quad \widehat{OGA'} \equiv \widehat{PGA'}$$

rezultă $\triangle OGA' \sim \triangle PGA'$. Prin urmare, obținem $\widehat{OA'G} \equiv \widehat{PAG}$.

Din $OA' \parallel AP$ și $OA' \perp BC$, rezultă $AP \perp BC$, deci P aparține înălțimii din A .

Analog demonstrăm că P aparține înălțimii din B , adică în mod necesar $P = H$. \square

1.7 Relații metrice în triunghi

Următorul rezultat de natură metrică este atribuit matematicianului scoțian Matthew Stewart (1717-1785).

Teorema 1.7.1. (relația lui Stewart) Fie triunghiul ABC și D un punct situat pe latura $[BC]$. Atunci are loc relația

$$AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot DB + AD^2 \cdot BC = DB \cdot DC \cdot BC.$$

Demonstrație. Fie $\varphi = \widehat{ADB}$. În triunghiul ADB aplicăm teorema cosinusului

$$\cos \varphi = \frac{AD^2 + DB^2 - AB^2}{2 \cdot AD \cdot DB} \quad (10)$$

În triunghiul ADC avem $\widehat{ADC} = 180^\circ - \varphi$, aplicăm teorema cosinusului și obținem

$$-\cos \varphi = \frac{AD^2 + DC^2 - AC^2}{2 \cdot AD \cdot DC}. \quad (11)$$

Prin adunarea relațiilor (10) și (11), rezultă

$$\frac{AD^2 + DB^2 - AB^2}{2 \cdot AD \cdot DB} + \frac{AD^2 + DC^2 - AC^2}{2 \cdot AD \cdot DC} = 0,$$

deci

$$DC \cdot (AD^2 + DB^2 - AB^2) + DB \cdot (AD^2 + DC^2 - AC^2) = 0,$$

ceea ce este echivalent cu

$$(DC + DB) \cdot AD^2 + DC \cdot DB^2 + DB \cdot DC^2 - DC \cdot AB^2 - DB \cdot AC^2 = 0,$$

adică

$$\underbrace{(DC + DB)}_{BC} \cdot AD^2 + DB \cdot DC \cdot \underbrace{(DB + DC)}_{BC} - DC \cdot AB^2 - DB \cdot AC^2 = 0,$$

prin urmare avem

$$DB \cdot DC \cdot BC = AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot DB - AD^2 \cdot BC. \quad \square$$

Observația 1.7.2. Relația lui Stewart este utilă atunci când dorim să calculăm lungimea unei ceviențe și cunoaștem poziția punctului D pe latura $[BC]$, dată de raportul în care punctul D împarte segmentul $[BC]$. Într-adevăr, cu notația standard pentru lungimiile laturilor triunghiului, relația lui Stewart se scrie sub forma $AD^2 \cdot a = b^2 \cdot DB + c^2 \cdot DC - DB \cdot DC \cdot a$. Prin urmare

$$\begin{aligned} AD^2 &= \frac{b^2 \cdot DB + c^2 \cdot DC}{a} - DB \cdot DC = \frac{b^2 \cdot DB + c^2 \cdot DC}{DB + DC} - DC^2 \cdot \frac{DB}{DC} = \\ &= \frac{kb^2 + c^2}{k+1} - k \frac{a^2}{(k+1)^2} = -\frac{k}{(k+1)^2} a^2 + \frac{k}{k+1} b^2 + \frac{1}{k+1} c^2, \end{aligned} \quad (12)$$

unde am notat $k = \frac{DB}{DC}$ și am folosit relația imediată $DC = \frac{a}{k+1}$.

Aplicația 1.7.3. (teorema medianei) Are loc relația

$$m_a^2 = \frac{1}{4}[2(b^2 + c^2) - a^2]$$

Într-adevăr, folosind formula (12) pentru $k = 1$ obținem imediat formula care dă lungimea medianei.

Aplicația 1.7.4. (lungimea bisectoarei) Fie D piciorul bisectoarei din A a triunghiului ABC . Are loc formula

$$l_a^2 = \frac{4bc}{(b+c)^2} s(s-a), \quad (13)$$

unde s este semiperimetrul triunghiului, adică $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$.

Din teorema bisectoarei avem $\frac{DB}{DC} = \frac{c}{b}$. Aplicând relația (12) pentru $k = \frac{c}{b}$, rezultă

$$\begin{aligned} l_a^2 &= \frac{b^2c + bc^2}{b+c} - \frac{a^2bc}{(b+c)^2} = \frac{bc}{(b+c)^2} [(b+c)^2 - a^2] = \\ &= \frac{bc}{(b+c)^2} (a+b+c)(b+c-a) = \frac{4bc}{(b+c)^2} s(s-a). \end{aligned}$$

Observația 1.7.5. O altă cale de a determina lungimea unei cevienے din vârful A al triunghiului, atunci când poziția cevienے este definită de unghiul $\alpha = \widehat{BAD}$, este următoarea. Evident, avem descompunerea areorală

$$S[ABC] = S[ABD] + S[ADC],$$

adică

$$\frac{bc \cdot \sin A}{2} = \frac{c \cdot AD \cdot \sin \alpha}{2} + \frac{b \cdot AD \sin(A - \alpha)}{2},$$

de unde rezultă imediat

$$AD = \frac{bc \sin A}{c \sin \alpha + b \sin(A - \alpha)}. \quad (14)$$

În formula (14), în cazul bisectoarei avem $\alpha = \frac{A}{2}$ și obținem

$$l_a = \frac{bc \sin A}{c \sin \frac{A}{2} + b \sin \frac{A}{2}} = \frac{2bc}{b+c} \cos \frac{A}{2}.$$

Pe de altă parte, ținând seama de formula (13), rezultă imediat $\cos^2 \frac{A}{2} = \frac{s(s-a)}{bc}$, deci am obținut o altă demonstrație pentru binecunoscuta formulă

$$\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}.$$

Aplicația 1.7.6. (lungimea înălțimii) Are loc formula

$$h_a = \frac{2}{a} \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \quad (15)$$

unde s este semiperimetrul triunghiului. Presupunem că unghiurile \widehat{ABC} și \widehat{ACB} sunt ascuțite, deci piciorul D al înălțimii din A este situat în interiorul segmentului $[BC]$. Din relația $\cos B = \frac{BD}{AB}$, rezultă

$$DB = c \cdot \cos B = c \cdot \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2ac} = \frac{1}{2a}(a^2 + c^2 - b^2).$$

Prin urmare

$$\begin{aligned} DC &= a - DB = a - \frac{1}{2a}(a^2 + c^2 - b^2) = \frac{1}{2a}(2a^2 - a^2 - c^2 + b^2) \\ &= \frac{1}{2a}(a^2 + b^2 - c^2). \end{aligned}$$

Obținem astfel

$$\begin{aligned} h_a^2 &= c^2 - BD^2 = c^2 - \frac{1}{4a^2}(a^2 + c^2 - b^2)^2 = \frac{1}{4a^2}(4a^2c^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2) \\ &= \frac{1}{4a^2}[(2ac + a^2 - b^2 + c^2)(2ac - a^2 - c^2 + b^2)] \\ &= \frac{1}{4a^2}[(a + c)^2 - b^2][b^2 - (a - c)^2] \\ &= \frac{1}{4a^2}(a + b + c)(a + c - b)(a + b - c)(b + c - a) \\ &= \frac{1}{4a^2} \cdot 2s \cdot 2(s - a) \cdot 2(s - b) \cdot 2(s - c) \\ &= \frac{4}{a^2}s(s - b)(s - a)(s - c). \end{aligned}$$

Observația 1.7.7. 1) Din formula de calcul pentru lungimea înălțimii rezultă formula lui Heron pentru aria triunghiului ABC , adică

$$S[ABC] = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{a}{2} \cdot \frac{2}{a} \sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)} = \sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)}.$$

2) Evident avem

$$S[ABC] = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{bc \sin A}{2} = bc \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} = bc \sqrt{\frac{s(s - a)}{bc}} \sin \frac{A}{2},$$

unde am folosit formula obținută pentru $\cos \frac{A}{2}$. Ținând seama de (15) rezultă formula

$$\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}.$$

Aplicația 1.7.8. (lungimea izogonalei unei ceviane) Fie triunghiul ABC , ceviana $[AD]$ și $[AD']$ izogonală acesteia. Presupunem ca poziția ceviane $[AD]$ este determinată de unghiul $\alpha = \widehat{BAD}$ și considerăm $u = \frac{\sin(A-\alpha)}{\sin \alpha}$. Aplicând formula (14) pentru ceviana izogonală $[AD']$ cu unghiul $\widehat{BAD'} = A - \alpha$, avem

$$AD = \frac{bc \sin A}{c \sin(A - \alpha) + b \sin \alpha},$$

deci obținem imediat

$$AD' = \frac{b + uc}{ub + c} AD.$$

Aplicația 1.7.9. (lungimea simedianei) Prin aplicarea teoremei sinusurilor în triunghiurile $AD'C$ și $AD'B$ obținem $u = \frac{\sin(A-\alpha)}{\sin \alpha} = \frac{b}{c}$, deci avem

$$s_a = \frac{b + uc}{ub + c} m_a = \frac{b + \frac{b}{c}c}{\frac{b}{c}b + c} m_a = \frac{2bc}{b^2 + c^2} m_a,$$

unde prin s_a am notat lungimea simedianei corespunzătoare vârfului A al triunghiului. Din aceasta formulă, deoarece avem $2bc \leq b^2 + c^2$, rezultă că pentru orice triunghi are loc inegalitatea $s_a \leq m_a$, cu egalitate dacă și numai dacă triunghiul este echilateral.

Teorema 1.7.10. În orice triunghi ABC , distanța dintre punctele O și G este dată de formula

$$OG^2 = R^2 - \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2), \quad (16)$$

unde R este raza cercului circumscris triunghiului.

Demonstrație. Fie A' mijlocul laturii $[BC]$. În triunghiul AOA' aplicăm relația lui Stewart pentru $G \in (AA')$ și obținem

$$AO^2 \cdot GA' - OG^2 \cdot AA' + A'O^2 \cdot GA = GA' \cdot GA \cdot AA',$$

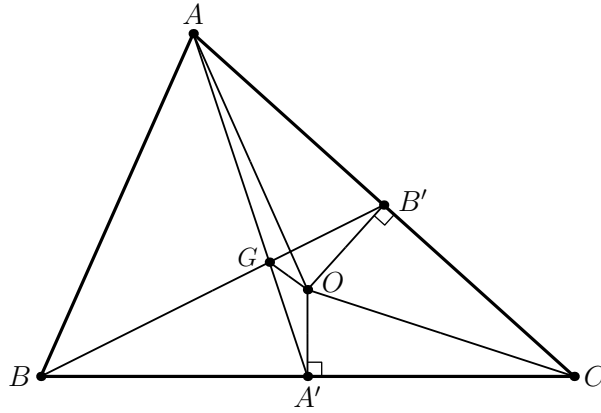


Figura 1.18

adică

$$R^2 \cdot \frac{1}{3} \cdot m_a - OG^2 \cdot m_a + A'O^2 \cdot \frac{2}{3} \cdot m_a = \frac{1}{3} \cdot m_a \cdot \frac{2}{3} \cdot m_a \cdot m_a,$$

deci

$$\frac{1}{3} \cdot R^2 - OG^2 + \frac{2}{3} \cdot A'O^2 = \frac{2}{9} \cdot m_a^2.$$

În triunghiul $OA'C$, dreptunghic în A' , avem

$$\cos \widehat{A'OC} = \cos A = \frac{OA'}{R},$$

deci $OA' = R \cdot \cos A$. Rezultă

$$A'O^2 = R^2 - \frac{a^2}{4},$$

deci

$$\begin{aligned} OG^2 &= \frac{1}{3}R^2 + \frac{2}{3}\left(R^2 - \frac{a^2}{4}\right) - \frac{2}{9}m_a^2 \\ &= R^2 - \frac{1}{6}a^2 - \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{4}[2(b^2 + c^2 - a^2)] \\ &= R^2 - \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2). \end{aligned}$$

□

Observația 1.7.11. 1) Din formula demonstrată în Teorema 1.7.10 și din faptul că $OG^2 \geq 0$, rezultă

$$a^2 + b^2 + c^2 \leq 9R^2,$$

cu egalitate dacă și numai dacă $O = G$, adică triunghiul ABC este echilateral.

2) Punctele O, G, H sunt coliniare (dreapta lui Euler) și are loc relația

$$OH = 3 \cdot OG.$$

Rezultă astfel

$$OH^2 = 9 \cdot OG^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2).$$

Teorema 1.7.12. (formula lui Euler) Dacă O este centrul cercului circumscris triunghiului ABC , R raza cercului circumscris și r raza cercului înscris în acest triunghi, atunci

$$OI^2 = R^2 - 2Rr. \quad (17)$$

Demonstrație. Fie A'' al doilea punct de intersecție al dreptei AI cu cercul circumscris triunghiului ABC . Din puterea punctului I față de cercul circumscris triunghiului ABC , avem $IA \cdot IA'' = R^2 - OI^2$, adică

$$OI^2 = R^2 - IA \cdot IA''. \quad (18)$$

În triunghiul dreptunghic AC_1I , unde C_1 este punctul de tangență al cercului înscris cu latura $[AB]$, avem

$$AI = \frac{r}{\sin \frac{A}{2}}. \quad (19)$$

Pe de altă parte, avem

$$m(\widehat{BIA''}) = m(\widehat{IAB}) + m(\widehat{IBA}) = \frac{1}{2}(m(\widehat{A}) + m(\widehat{B}))$$

și

$$\begin{aligned} m(\widehat{IBA''}) &= \frac{1}{2}m(\widehat{B}) + m(\widehat{CBA''}) = \frac{1}{2}m(\widehat{B}) + m(\widehat{A''AC}) \\ &= \frac{1}{2}(m(\widehat{B}) + m(\widehat{A})), \end{aligned}$$

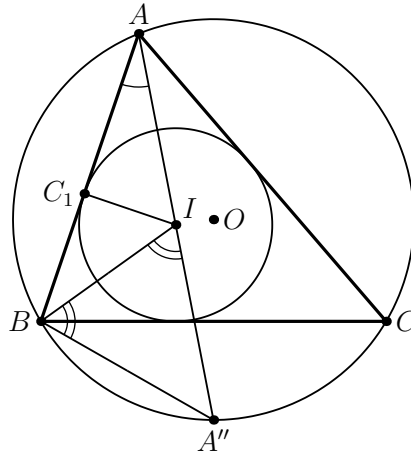


Figura 1.19

deci triunghiul $BA''I$ este isoscel cu $IA'' = BA''$.

Din teorema sinusurilor în triunghiul ABA'' , rezultă $BA'' = 2R \sin \frac{A}{2}$, deci avem $IA'' = 2R \sin \frac{A}{2}$. Ținând seama de (18) și (19), obținem relația de demonstrat. \square

Observația 1.7.13. 1) Deoarece $OI^2 \geq 0$, rezultă $R^2 \geq 2Rr$, adică $R \geq 2r$, relație cunoscută sub numele de *inegalitatea lui Euler*.

2) Egalitatea $R = 2r$ are loc dacă și numai dacă triunghiul ABC este echilateral.

3) Relația lui Euler mai poate fi scrisă sub forma

$$\frac{1}{R - OI} + \frac{1}{R + OI} = \frac{1}{r}.$$

Teorema 1.7.14. (relația lui Van Aubel) În triunghiul ABC , AA' , BB' , CC' sunt ceviane concurente în punctul P . Are loc relația

$$\frac{AP}{PA'} = \frac{AB'}{B'C} + \frac{AC'}{C'B}. \quad (20)$$

Demonstrație. În triunghiul $AA'C$, punctele B' , P , B sunt coliniare. Aplicăm teorema lui Menelaus și obținem

$$\frac{AB'}{B'C} \cdot \frac{BC}{BA'} \cdot \frac{PA'}{PA} = 1 \quad \text{deci} \quad \frac{AP}{PA'} \cdot \frac{BA'}{BC} = \frac{AB'}{B'C}. \quad (21)$$

În triunghiul $AA'B$, punctele C', P, C sunt coliniare. Aplicăm teorema lui Menelaus și rezultă

$$\frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BC}{CA'} \cdot \frac{PA'}{PA} = 1 \quad \text{deci} \quad \frac{AP}{PA'} \cdot \frac{CA'}{BC} = \frac{AC'}{C'B}. \quad (22)$$

Din (21) și (22) prin adunare, obținem

$$\frac{AP}{PA'} \underbrace{\left(\frac{PA'}{BC} + \frac{CA'}{BC} \right)}_{=1} = \frac{AB}{B'C} + \frac{AC'}{C'B}. \quad \square$$

Aplicația 1.7.15. În triunghiul ABC , AA' , BB' , CC' sunt ceviane concurente în P . Atunci are loc inegalitatea

$$\frac{AP}{PA'} + \frac{BP}{PB'} + \frac{CP}{PC'} \geq 6,$$

cu egalitate dacă și numai dacă P este centrul de greutate al triunghiului.

Aplicăm relația lui Van Aubel și vom găsi sume de forma $x + \frac{1}{x}$, după regrupări convenabile ale termenilor. Aplicăm apoi inegalitatea

$$x + \frac{1}{x} \geq 2.$$

Aplicația 1.7.16. În triunghiul ABC , AA' , BB' , CC' sunt ceviane concurente în P . Are loc inegalitatea

$$\frac{AP}{PA'} \cdot \frac{BP}{PB'} \cdot \frac{CP}{PC'} \geq 8.$$

Aplicăm relația lui Van Aubel și inegalitatea $x + y \geq 2\sqrt{xy}$.

Prin înmulțire rezultă

$$\prod \left(\frac{AB'}{B'C} + \frac{AC'}{C'B} \right) \geq \prod 2\sqrt{\frac{AB'}{B'C} \cdot \frac{AC'}{C'B}} = 8,$$

cu egalitate dacă și numai dacă P este centrul de greutate al triunghiului.

1.8 Lema lui Carnot și aplicații

În acest paragraf vom demonstra un criteriu de concurență a trei drepte perpendiculare pe laturile unui triunghi, instrument deosebit de util în rezolvarea multor probleme.

Lema 1.8.1. Fie A, B, C, D patru puncte în plan. Atunci $AC \perp BD$ dacă și numai dacă

$$AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2.$$

Demonstrația 1. Fie X proiecția lui B pe AC și Y proiecția lui D pe AC .

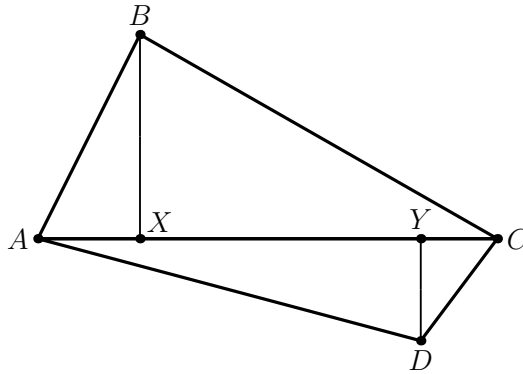


Figura 1.20

Avem

$$AB^2 = BX^2 + XC^2, \quad BC^2 = BX^2 + XC^2, \quad CD^2 = CY^2 + DY^2, \quad AD^2 = AY^2 + DY^2.$$

Dacă $AC \perp BD$, atunci $X = Y$, deci are loc relația din enunț.

Reciproc, din relația din enunț și cele patru relații de mai sus, obținem

$$AX^2 + CY^2 = AY^2 + CX^2. \quad (23)$$

Cazul 1. $X \in [AC]$. Relația (23) este echivalentă cu

$$AX^2 - CX^2 = AY^2 - CY^2,$$

deci

$$(AX - CX)(AX + CX) = (AY - CY)(AY + CY).$$

Dacă $Y \in [AC]$, rezultă $AX + CX = AY + CY$, și relația de mai sus devine după simplificare

$$AX - CX = AY - CY.$$

Deoarece $AX + CX = AY + CY$, rezultă $2AX = 2AY$, deci $AX = AY$, adică $X = Y$ și prin urmare $AC \perp BD$.

Cazul 2. $Y \notin [AC]$ și C este situat între A și Y .

Avem $AY - CY = AC$, deci relația

$$(AX - CX)(AX + CX) = (AY - CY)(AY + CY)$$

devine

$$AX - CX = AY + CY.$$

Ultima relație este imposibilă deoarece, în acest caz

$$AX - CX < AC \quad \text{și} \quad AY + CY > AC.$$

Cazul 3. $X, Y \notin [AC]$. Procedăm ca în cazurile de mai sus.

Demonstrația 2. Vom da o altă demonstrație pentru implicația " \Leftarrow ". Arătăm că locul geometric al punctelor M din plan care verifică relația

$$AB^2 + MD^2 = AD^2 + MB^2$$

este dreapta perpendiculară pe BD care conține punctele A și C . Evident, punctele A și C aparțin locului geometric.

Fie M' proiecția lui M pe dreapta BD . Dacă $M' \in [BD]$, relația de definiție a locului geometric devine

$$MB^2 - MD^2 = AB^2 - AD^2,$$

adică

$$M'B^2 - M'D^2 = AB^2 - AD^2,$$

deci

$$(M'B + M'D)(M'B - M'D) = AB^2 - AD^2.$$

Rezultă astfel

$$M'B - M'D = \frac{AB^2 - AD^2}{BD},$$

adică

$$M'B - (BD - M'B) = \frac{AB^2 - AD^2}{BD},$$

prin urmare

$$M'B = \frac{1}{2} \left(\frac{AB^2 - AD^2}{BD} + BD \right) = \text{constant}.$$

Obținem astfel că punctul M' este fix, deci M aparține perpendicularei din A pe BD . Dacă $M' \notin [BD]$, să presupunem, de exemplu, că $B \in [M'D]$. Relația

$$(M'B + M'D)(M'B - M'D) = AB^2 - AD^2$$

devine

$$2M'B = \frac{AD^2 - AB^2}{BD} - BD,$$

adică

$$M'B = \frac{1}{2} \left(\frac{AD^2 - AB^2}{BD} - BD \right) = \text{constant},$$

de unde concluzia. □

Următorul criteriu de concurență a fost descoperit de către matematicianul francez Lazare Nicolas Marguerite Carnot (1753-1823), autorul celebrei cărți "Géométrie de position", publicată în anul 1803.

Teorema 1.8.2. (lema lui Carnot) Fie A_1, B_1, C_1 puncte arbitrare pe BC, CA, AB în triunghiul ABC . Următoarele afirmații sunt echivalente:

- 1) Perpendicularele din A_1, B_1, C_1 pe BC, CA, AB sunt concurente.
- 2) Are loc relația

$$A_1B^2 - A_1C^2 + B_1C^2 - B_1A^2 + C_1A^2 - C_1B^2 = 0.$$

Demonstrație. Implicația 1) \Rightarrow 2) este evidentă. Reciproc, fie O punctul de intersecție al perpendicularelor în A_1 și B_1 . Arătăm că $OC_1 \perp AB$.

Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiurile OA_1B și OA_1C obținem relația

$$A_1B^2 - A_1C^2 = BO^2 - CO^2.$$

La fel, aplicând teorema lui Pitagora în triunghiurile OB_1C și OB_1A avem

$$B_1C^2 - B_1A^2 = CO^2 - AO^2.$$

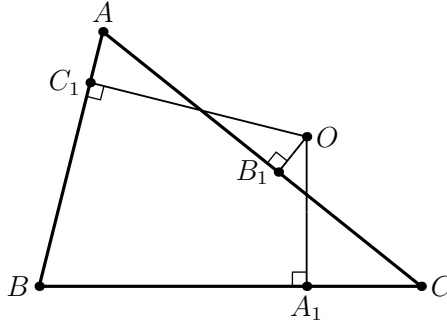


Figura 1.21

Rezultă astfel

$$A_1B^2 - A_1C^2 + B_1C^2 - B_1A^2 = BO^2 - AO^2.$$

Combinând cu relația

$$A_1B^2 - A_1C^2 + B_1C^2 - B_1A^2 + C_1A^2 - C_1B^2 = 0$$

scrisă sub forma

$$A_1B^2 - A_1C^2 + B_1C^2 - B_1A^2 = C_1B^2 - C_1A^2,$$

obținem

$$BO^2 - AO^2 = C_1B^2 - C_1A^2, \quad \text{deci} \quad BO^2 + C_1A^2 = C_1B^2 + AO^2.$$

Aplicând Lema 1.8.1 rezultă $AB \perp OC_1$, deci concluzia. \square

Teorema 1.8.3. (a triunghiurilor ortologice) Fie ABC și DEF două triunghiuri în plan. Perpendicularele din A, B, C pe laturile EF, FD, DE sunt concurente dacă și numai dacă perpendicularele din D, E, F pe laturile BC, CA, AB sunt concurente.

Demonstrație. Fie D_1, E_1, F_1 proiecțiile punctelor D, E, F pe BC, CA, AB și A_1, B_1, C_1 proiecțiile punctelor A, B, C pe EF, FD, DE .

Aplicând teorema lui Pitagora obținem următoarele relații

$$A_1E^2 - A_1F^2 = AE^2 - AF^2,$$

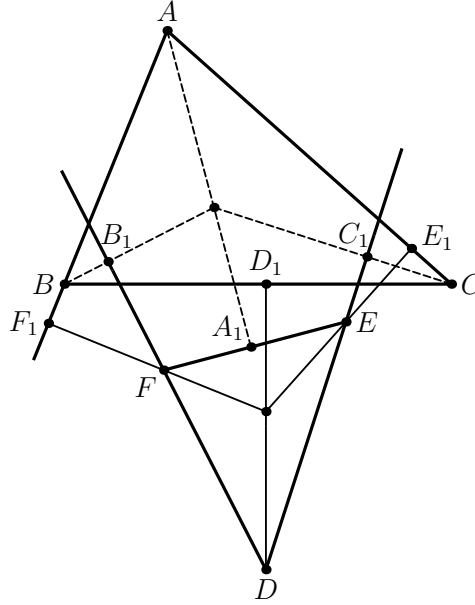


Figura 1.22

$$B_1F^2 - B_1D^2 = BF^2 - BD^2,$$

$$C_1D^2 - C_1E^2 = CD^2 - CE^2.$$

Prin adunarea celor trei relații de mai sus rezultă

$$\begin{aligned} A_1E^2 - A_1F^2 + B_1F^2 - B_1D^2 + C_1D^2 - C_1E^2 \\ = AE^2 - AF^2 + BF^2 - BD^2 + CD^2 - CE^2. \end{aligned}$$

În mod similar obținem

$$\begin{aligned} F_1A^2 - F_1B^2 + E_1C^2 - E_1A^2 + D_1B^2 - D_1C^2 \\ = FA^2 - FB^2 + EC^2 - EA^2 + DB^2 - DA^2. \end{aligned}$$

Din ultimele două relații rezultă

$$A_1E^2 - A_1F^2 + B_1F^2 - B_1D^2 + C_1D^2 - C_1E^2$$

$$= -(F_1A^2 - F_1B^2 + E_1C^2 - E_1A^2 + D_1B^2 - D_1C^2).$$

Prin urmare, din lema lui Carnot avem că perpendicularele din A, B, C pe laturile EF, DF, DE sunt concurente dacă și numai dacă

$$A_1E^2 - A_1F^2 + B_1F^2 - B_1D^2 + C_1D^2 - C_1E^2 = 0$$

relație care are loc dacă și numai dacă

$$F_1A^2 - F_1B^2 + E_1C^2 - E_1A^2 + D_1B^2 - D_1C^2 = 0$$

ceea ce din nou din lema lui Carnot, revine la concurența perpendicularelor din D, E, F pe laturile BC, CA, AB . \square

Cele două triunghiuri situate în poziția din Teorema 1.8.3 se numesc *ortologice*. Următoarele două aplicații scot în evidență perechi standard de triunghiuri ortologice.

Aplicația 1.8.4. Triunghiul ABC și triunghiul său ortic $A'B'C'$ sunt ortologice, deoarece perpendicularele din A', B', C' pe BC, CA, AB sunt concurente în ortocentrul H al triunghiului ABC . Din Teorema 1.8.3 rezultă că și perpendicularele din A, B, C pe laturile corespunzătoare ale triunghiului ortic sunt concurente.

Aplicația 1.8.5. Fie I_a, I_b, I_c centrele cercurilor exînscrise ale unui triunghi ABC . Perpendicularele duse din I_a, I_b, I_c pe laturile BC, CA, AB ale triunghiului sunt concurente.

Avem

$$\widehat{IAI_c} \equiv \widehat{IAI_b} \equiv \widehat{IBI_c} \equiv \widehat{IBI_a} \equiv \widehat{ICI_a} \equiv \widehat{ICI_b} = 90^\circ,$$

deci perpendicularele din A, B, C pe laturile I_bI_c, I_cI_a, I_aI_b sunt concurente în I , centrul cercului înscris în triunghiul ABC . Aplicând Teorema 1.8.3, obținem că și perpendicularele din I_a, I_b, I_c pe BC, CA, AB sunt concurente. Prin urmare, triunghiurile ABC și $I_aI_bI_c$ sunt ortologice.

1.9 Dreapta antiortică a unui triunghi. Axa lui Lemoine

Următoarele două rezultate sunt aplicații directe ale teoremei lui Menelaus.

Teorema 1.9.1. (dreapta antiortică) *Notăm cu A', B', C' punctele de intersecție ale bisectoarelor exterioare din A, B, C cu laturile opuse ale triunghiului neisoscel ABC . Atunci punctele A', B', C' sunt coliniare.*

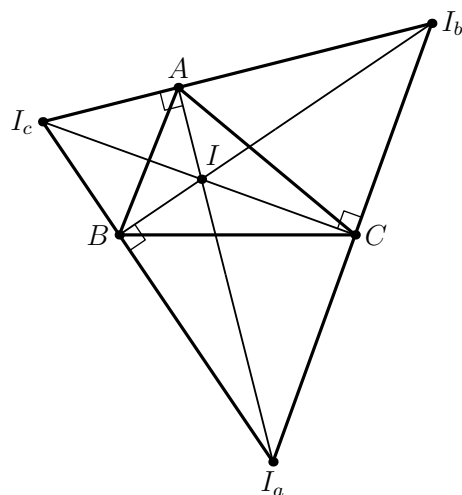


Figura 1.23

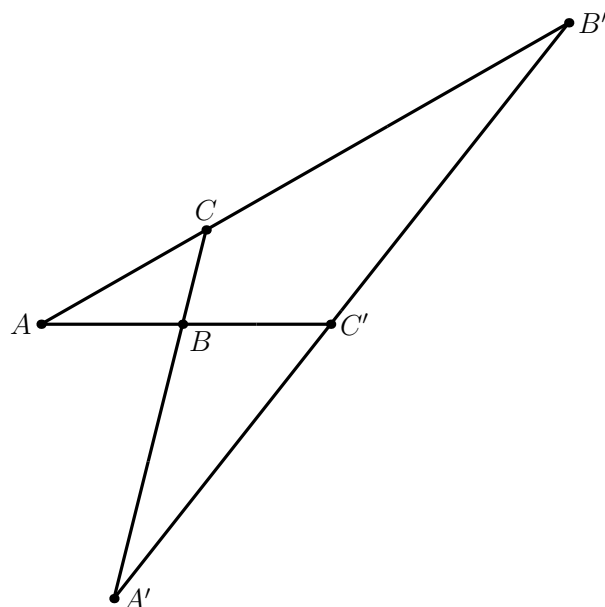


Figura 1.24

Demonstrație.

Din teorema bisectoarei exterioare rezultă relațiile

$$\frac{A'B}{A'C} = \frac{AB}{AC}, \quad \frac{B'C}{B'A} = \frac{BC}{BA}, \quad \frac{C'A}{C'B} = \frac{CA}{CB}.$$

Din reciproca teoremei lui Menelaus, avem

$$\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{BC}{BA} \cdot \frac{CA}{CB} = 1$$

rezultă că punctele A', B', C' sunt coliniare. \square

Dreapta determinată de punctele A', B', C' se numește *dreapta antiotică* a triunghiului ABC .

Teorema 1.9.2. (axa lui Lemoine) *Tangentele în A, B, C la cercul circumscris triunghiului neisoscel ABC intersectează laturile opuse în A', B', C' . Atunci punctele A', B', C' sunt coliniare.*

Demonstrație. Triunghiurile $A'AB$ și $A'AC$ sunt asemenea, deci avem

$$\frac{A'B}{AA'} = \frac{AB}{AC} = \frac{AA'}{A'C},$$

adică

$$\frac{A'B}{AA'} \cdot \frac{AA'}{A'C} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2.$$

Analog obținem

$$\frac{B'C}{B'A} = \left(\frac{BC}{BA}\right)^2 \quad \text{și} \quad \frac{C'A}{C'B} = \left(\frac{CA}{CB}\right)^2.$$

Din reciproca teoremei lui Menelaus, deoarece avem

$$\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2 \cdot \left(\frac{BC}{BA}\right)^2 \cdot \left(\frac{CA}{CB}\right)^2 = 1,$$

rezultă proprietatea din enunț. \square

Dreapta determinată de punctele A', B', C' poartă numele de *axa lui Lemoine* a triunghiului ABC .

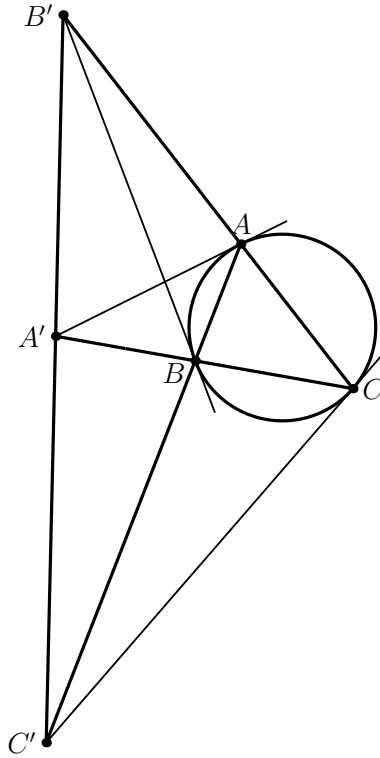


Figura 1.25

1.10 Teorema lui Desargues

Următorul rezultat a fost descoperit de către Gérard Desargues (1593-1662), inginer și matematician francez cu contribuții fundamentale la studiul geometriei sintetice proiective.

Teorema 1.10.1. (teorema lui Desargues) *Considerăm două triunghiuri ABC și $A'B'C'$. Următoarele afirmații sunt echivalente:*

- a) dreptele AA' , BB' , CC' sunt concurente;*
- b) punctele α, β, γ sunt coliniare, unde*

$$\{\alpha\} = BC \cap B'C', \quad \{\beta\} = AC \cap A'C', \quad \{\gamma\} = AB \cap A'B'.$$

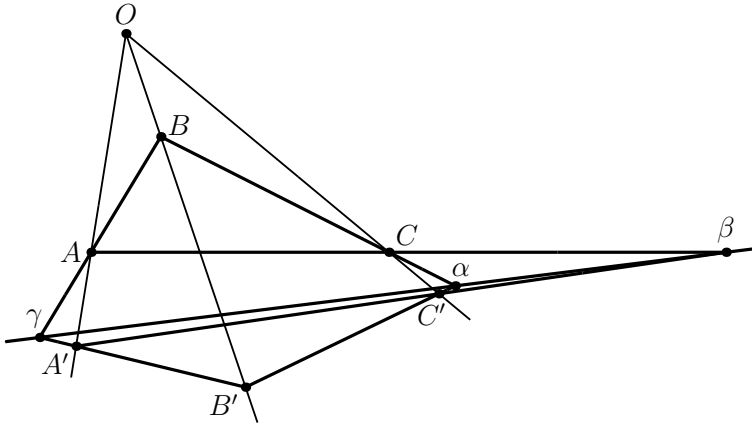


Figura 1.26

Demonstrație. Demonstrăm implicația a) \Rightarrow b).

În triunghiul OAB cu secanta γ, A', B' , din teorema directă a lui Menelaus, avem

$$\frac{\gamma A}{\gamma B} \cdot \frac{B'B}{B'O} \cdot \frac{A'O}{A'A} = 1.$$

În triunghiul OBC cu secanta α, C', B' , avem

$$\frac{\alpha B}{\alpha C} \cdot \frac{C'C}{C'O} \cdot \frac{B'O}{B'B} = 1.$$

În triunghiul OAC cu secanta β, C', A' , obținem

$$\frac{\beta C}{\beta A} \cdot \frac{A'A}{A'O} \cdot \frac{C'O}{C'C} = 1.$$

Prin urmare

$$\frac{\gamma A}{\gamma B} \cdot \frac{B'B}{B'O} \cdot \frac{A'O}{A'A} \cdot \frac{\alpha B}{\alpha C} \cdot \frac{C'C}{C'O} \cdot \frac{B'O}{B'B} \cdot \frac{\beta C}{\beta A} \cdot \frac{A'A}{A'O} \cdot \frac{C'O}{C'C} = 1,$$

adică

$$\frac{\gamma A}{\gamma B} \cdot \frac{\alpha B}{\alpha C} \cdot \frac{\beta C}{\beta A} = 1,$$

deci punctele α, β, γ sunt coliniare, conform reciprocei teoremei lui Menelaus.

Pentru implicația $b) \Rightarrow a)$ considerăm triunghiurile $\gamma AA'$ și $\alpha CC'$ și observăm că avem

$$AC \cap \alpha\gamma \cap A'C' = \{\beta\}.$$

Din implicația $a) \Rightarrow b)$ rezultă că punctele B', B, O sunt coliniare, unde $\{O\} = AA' \cap CC'$, deci dreptele AA', BB', CC' sunt concurente. \square

1.11 Aria triunghiului podar. Dreapta lui Simson

Teorema 1.11.1. (Euler) *Dacă P_1, P_2, P_3 sunt proiecțiile unui punct P din planul unui triunghi ABC pe laturile $[BC], [CA]$, respectiv $[AB]$, atunci are loc formula*

$$S[P_1P_2P_3] = \frac{|OP^2 - R^2|}{4R^2} \cdot S[ABC], \quad (24)$$

unde R este raza cercului circumscris triunghiului ABC iar O este centrul cercului circumscris acestui triunghi.

Demonstrație. Presupunem că punctul P este situat în interiorul cercului circumscris triunghiului ABC . Avem

$$S[P_1P_2P_3] = \frac{1}{2} \cdot P_1P_3 \cdot P_2P_3 \cdot \sin(\widehat{P_1P_2P_3}).$$

Deoarece patrulaterul AP_3PP_2 este inscriptibil în cercul de diametru $[AP]$, deducem că

$$P_2P_3 = AP \cdot \sin A \quad \text{și} \quad P_1P_3 = BP \cdot \sin B,$$

deci obținem

$$S[P_1P_2P_3] = \frac{1}{2} \cdot AP \cdot PB \cdot \sin A \cdot \sin B \cdot \sin P_3 \quad (25)$$

Fie Q punctul de intersecție dintre dreapta AP și cercul circumscris triunghiului ABC . Avem

$$m(\widehat{PP_3P_2}) = m(\widehat{PAP_2}) = m(\widehat{QAC}) = m(\widehat{CBQ});$$

$$m(\widehat{PP_3P_1}) = m(\widehat{PBP_1}), \quad m(\widehat{P_2P_3P_1}) = m(\widehat{PBQ}) = m(\widehat{PQB}) = m(\widehat{BCA}).$$

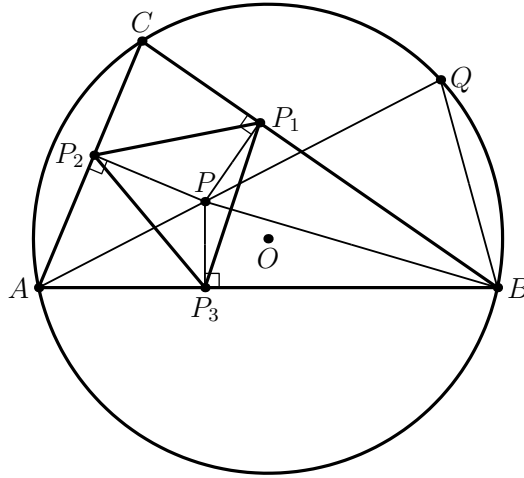


Figura 1.27

Ținând seama de aceste ultime două egalități și de teorema sinusului în triunghiul PQB rezultă

$$PB = \frac{PQ \cdot \sin C}{\sin P_3}$$

și înlocuind în relația (25) avem

$$\begin{aligned} S[P_1P_2P_3] &= \frac{1}{2} \cdot AP \cdot PQ \cdot x = \frac{1}{4R^2} \cdot 2R^2 \cdot x \cdot AP \cdot AQ \\ &= \frac{S[ABC]}{4R^2} \cdot AP \cdot PQ = \frac{S[ABC]}{4R^2} \cdot (R^2 - OP^2), \end{aligned}$$

unde $x = \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C$, pentru că produsul $AP \cdot PQ$ reprezintă puterea punctului P față de cerc. Cu aceasta proprietatea este demonstrată. \square

Următorul rezultat este atribuit de mulți autori matematicianului scoțian Robert Simson (1687-1768). Acesta a pregătit o ediție a cărții "Elementele" a lui Euclid, ediție utilizată mult timp ca text de bază în studiul geometriei. Se pare că rezultatul a fost publicat pentru prima oară în 1797 de către matematicianul scoțian William Wallace (1768-1843), fapt pentru care proprietatea este prezentată în multe surse bibliografice sub numele de *dreapta Simson-Wallace*.

Teorema 1.11.2. (dreapta lui Simson) Fie ABC un triunghi oarecare și P un punct în plan. Proiecțiile punctului P pe laturile triunghiului sunt trei puncte coliniare dacă și numai dacă P este situat pe cercul circumscris triunghiului.

Demonstrație. Cele trei proiecții P_1, P_2, P_3 sunt coliniare dacă și numai dacă triunghiul podar al punctului P este degenerat, adică dacă și numai dacă avem $S[P_1 P_2 P_3] = 0$. Concluzia rezultă din formula (24). \square

În cazul în care punctul P este situat pe cercul circumscris triunghiului, dreapta determinată de proiecțiile sale pe laturile triunghiului se numește *dreapta lui Simson* a lui P în raport cu triunghiul ABC .

Matematicianul irlandez, George Salmon (1819-1904), cu contribuții importante în geometria analitică și geometria suprafețelor, a observat următoarea aplicație a dreptei lui Simson.

Teorema 1.11.3. (Salmon) Fie ABC un triunghi oarecare și P un punct situat pe cercul circumscris. Cercurile de diametre $[PA], [PB], [PC]$, se taie două câte două în trei puncte coliniare.

Demonstrație. Cele trei puncte de intersecție sunt proiecțiile punctului P pe laturile triunghiului ABC , deci ele sunt situate pe dreapta lui Simson a lui P în raport cu triunghiul ABC . \square

1.12 Exerciții și probleme

1. a) Demonstrați că într-un triunghi, simetricele ortocentrului față de laturi sunt situate pe cercul circumscris triunghiului.
b) Demonstrați că într-un triunghi, simetricele ortocentrului față de mijloacele laturilor sunt situate pe cercul circumscris triunghiului.
2. Fie ABC un triunghi și D un punct situate pe mediana din vârful A . Arătați că dacă $\widehat{BDC} = 180^\circ - \widehat{BAC}$, atunci are loc relația

$$AB \cdot CD = AC \cdot BD.$$

3. Fie ABC un triunghi, I centrul cercului înscris și G centrul de greutate. Dacă lungimile laturilor triunghiului sunt 3, 5, 7, determinați lungimea segmentului $[IG]$.

4. Fie ABC un triunghi și A_1, B_1, C_1 picioarele înălțimilor sale. Demonstrați că perpendicularele din A, B, C pe dreptele B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 sunt concurente în centrul cercului circumscris triunghiului.
5. În triunghiul ABC , bisectoarele unghiurilor $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}$ intersectează cercul circumscris în punctele A', B', C' . Demonstrați că centrul cercului înscris triunghiului ABC este ortocentrul triunghiului $A'B'C'$.
6. În triunghiul ABC , bisectoarea unghiului \widehat{A} intersectează cercul circumscris în punctul A_1 . Demonstrați că A_1 este centrul cercului circumscris triunghiului BCI , unde I este centrul cercului înscris în triunghiul ABC .
7. Fie triunghiul ABC și I centrul cercului său înscris. Determinați măsura unghiului \widehat{BIC} în funcție de unghiul \widehat{BAC} .
8. Punctele A_1, B_1, C_1 sunt mijloacele laturilor $[BC], [CA], [AB]$ ale triunghiului ABC . Arătați că dacă punctul M satisface relațiile

$$\frac{AM}{A_1M} = \frac{BM}{B_1M} = \frac{CM}{C_1M} = 2,$$

atunci M este centrul de greutate al triunghiului.

9. Un triunghi neisoscele ABC cu centrul cercului înscris I și centrul de greutate G are lungimile laturilor a, b, c . Demonstrați că $IG \perp BC$ dacă și numai dacă $b + c = 3a$.
10. Fie triunghiul oarecare ABC . Considerăm punctele exterioare triunghiului D, E, F astfel încât triunghiurile BDC, CEA, AFB sunt isoscele. Să se demonstreze că perpendicularele din A, B, C pe dreptele EF, FD, DE sunt concurente.

Geometria cercului

2

2.1 Puterea punctului față de cerc

Un *cerc* este locul geometric al tuturor punctelor din planul euclidian \mathcal{P} situate la distanța dată R de un punct fixat O , numit *centrul* cercului. Distanța R din această definiție se numește *raza* cercului. Vom folosi notația $\mathcal{C}(O, R)$ pentru a nota cercul de centru O și rază R .

Propoziția 2.1.1. *Fie P un punct exterior cercului $\mathcal{C}(O, R)$ și fie a o dreaptă care trece prin punctul P și intersectează cercul în punctele M și N . Atunci produsul $PM \cdot PN$ este constant.*

Demonstrație.

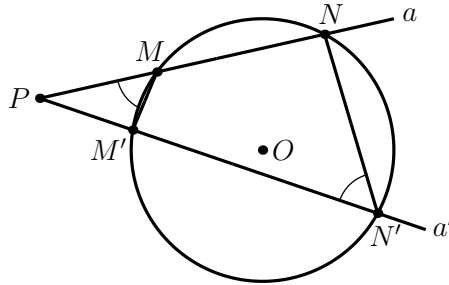


Figura 2.1

Fie a' o altă dreaptă care trece prin P și intersectează cercul în punctele M' și N' . Avem $\triangle PNM \sim \triangle P'N'$, pentru că $\widehat{P} = \widehat{P}$,

$$\widehat{PMM'} \equiv \widehat{PN'N}, m(\widehat{PN'N}) = \frac{1}{2}m(\widehat{M'MN}), m(\widehat{PNM'}) = 180^\circ - m(\widehat{M'MN})$$

și

$$m(\widehat{M'MN}) = \frac{1}{2}m(\widehat{M'N'N}) = \frac{1}{2}(360^\circ - m(\widehat{M'MN})) = 180^\circ - m(\widehat{PN'N}),$$

deci

$$m(\widehat{PMM'}) = 180^\circ - (180^\circ - m(\widehat{PN'N})) = m(\widehat{PN'N}).$$

Rezultă astfel

$$\frac{PM}{PN'} = \frac{PM'}{PN} = \frac{MM'}{N'N}, \quad \text{adică} \quad PM \cdot PN = PN' \cdot PM',$$

prin urmare $PN \cdot PM$ are aceeași valoare indiferent de poziția dreptei a . □

Observația 2.1.2. Considerăm o poziție particulară a dreptei a care trece prin P și anume $a^* = PO$ și fie M^*, N^* punctele de intersecție ale lui a^* cu cercul.

Notăm $d = PO$ și avem

$$PM \cdot PN = PM^* \cdot PN^* = (d - R)(d + R) = d^2 - R^2.$$

Propoziția 2.1.3. Fie P un punct în interiorul cercului $C(O, R)$ și a o secantă variabilă care intersectează cercul în punctele M și N . Atunci produsul $PM \cdot PN$ este constant.

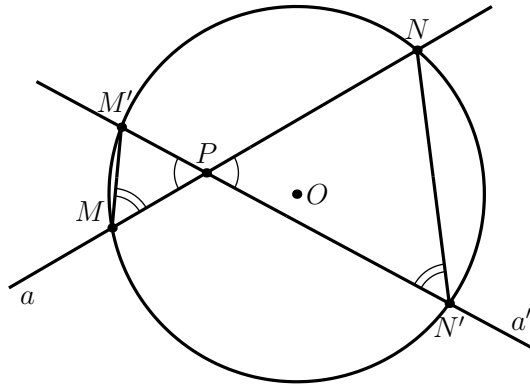


Figura 2.2

Demonstrație. Observăm că $\triangle PMM' \sim \triangle PN'N$, deoarece avem

$$\widehat{MPM'} \equiv \widehat{NPN'} \quad \text{și} \quad m(\widehat{M'MP}) = m(\widehat{NN'P}) = \frac{1}{2}m(\widehat{M'N}).$$

Rezultă astfel

$$\frac{PM}{PN'} = \frac{PM'}{PN} = \frac{MM'}{N'N}, \quad \text{deci} \quad PM \cdot PN = PM' \cdot PN. \quad \square$$

Observația 2.1.4. Considerăm poziția particulară a lui a , dreapta a^* , adică un diametru, care intersectează cercul în punctele M^* și N^* .

Notăm $PO = d$ și avem

$$PM \cdot PN = PM^* \cdot PN^* = (R - d)(R + d) = R^2 - d^2.$$

Definiția 2.1.5. Numărul notat cu $\rho_P = d^2 - R^2$ se numește *puterea punctului P față de cercul $\mathcal{C}(O, R)$* . Puterea lui P este pozitivă dacă P este în exterior și negativă dacă P este în interiorul cercului. Prin convenție se consideră că puterea unui punct de pe cerc este zero.

Teorema 2.1.6. *Locul geometric al punctelor din plan care au aceeași putere față de două cercuri neconcentrice $\mathcal{C}(O_1, R_1)$, $\mathcal{C}(O_2, R_2)$, este o dreaptă perpendiculară pe linia centrelor O_1O_2 , numită axa radicală a cercurilor.*

Demonstrație. Avem $\rho_{M_1} = \rho_{M_2}$ dacă și numai dacă $MO_1^2 - R_1^2 = MO_2^2 - R_2^2$, adică

$$MO_1^2 - MO_2^2 = R_1^2 - R_2^2.$$

Deci problema revine la a găsi locul geometric al punctelor din plan pentru care diferența pătratelor distanțelor la două puncte fixe este constantă.

Fie O mijlocul segmentului $[O_1O_2]$ și P proiecția lui M pe dreapta O_1O_2 . Din Teorema lui Pitagora generalizată aplicată în $\triangle MO_1O$, $\triangle MO_2O$, avem relațiile

$$MO_1^2 = MO^2 + OO_1^2 - 2OO_1 \cdot PO \quad \text{și} \quad MO_2^2 = MO^2 + OO_2^2 + 2OO_2 \cdot PO,$$

prin urmare

$$MO_1^2 - MO_2^2 = -4OO_1 \cdot PO = -2O_1O_2 \cdot PO = R_1^2 - R_2^2.$$

Rezultă astfel PO constant, deci locul geometric al lui M este o dreaptă perpendiculară pe dreapta O_1O_2 . \square

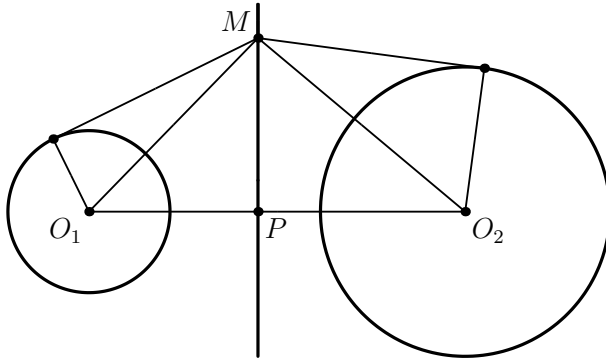


Figura 2.3

Observația 2.1.7. Dacă cercurile sunt secante atunci axa radicală este coarda lor comună. Fie AB dreapta determinată de punctele de intersecție A, B și $M \in AB$.

Într-adevăr, scriind puterea lui M față de cercul $\mathcal{C}(O_1, R_1)$, avem

$$MA_1 \cdot MB_1 = MA \cdot MB,$$

iar față de cercul $\mathcal{C}(O_2, R_2)$ obținem $MA_2 \cdot MB_2 = MA \cdot MB$, de unde avem

$$MA_1 \cdot MB_1 = MA_2 \cdot MB_2.$$

Observația 2.1.8. Dacă avem trei cercuri care admit două câte două o axă radicală și au centrele necoliniare, atunci cele trei axe radicale sunt concurente într-un punct numit *centrul radical* al cercurilor considerate. În cazul în care centrele cercurilor sunt coliniare atunci, cele trei axe radicale sunt paralele.

Aplicația 2.1.9. Fie ABC un triunghi oarecare și $\mathcal{C}(O, R)$ un cerc care intersectează laturile BC, CA, AB în punctele $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$.

Atunci dreptele AA_1, BB_1, CC_1 sunt concurente dacă și numai dacă dreptele AA_2, BB_2, CC_2 sunt concurente.

Scriem puterea vârfurilor A, B și C față de cercul $\mathcal{C}(O, R)$ și avem

$$AB_1 \cdot AB_2 = AC_1 \cdot AC_2 \quad \text{adică} \quad \frac{C_1A}{B_1A} = \frac{B_2A}{C_2A},$$

$$BA_1 \cdot BA_2 = BC_1 \cdot BC_2 \quad \text{adică} \quad \frac{A_1B}{C_1B} = \frac{C_2B}{A_2B},$$

$$CA_1 \cdot CA_2 = CB_2 \cdot CB_1 \quad \text{deci} \quad \frac{B_1C}{A_1C} = \frac{A_2C}{B_2C}.$$

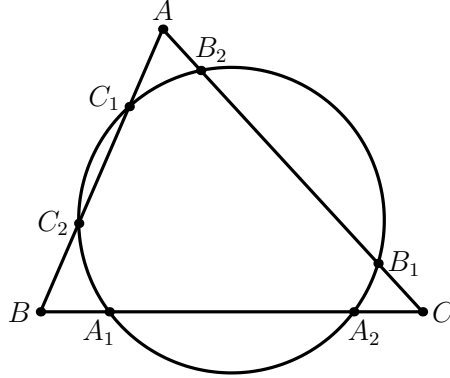


Figura 2.4

Înmulțim membru cu membru cele trei relații de mai sus și obținem relația

$$\frac{A_1B}{A_1C} \cdot \frac{B_1C}{B_1A} \cdot \frac{C_1A}{C_1B} = \frac{A_2C}{A_2B} \cdot \frac{C_2B}{C_2A} \cdot \frac{B_2A}{B_2C}.$$

Dreptele AA_1 , BB_1 , CC_1 fiind concurente, rezultă că produsul din membrul stâng este egal cu 1 (Teorema lui Ceva), deci produsul din membrul drept va fi egal cu 1. Atunci dreptele AA_2 , BB_2 , CC_2 sunt concurente, conform reciprocei teoremei lui Ceva.

Observația 2.1.10. Un exemplu clasic care se încadrează în configurația de mai sus este dat de înălțimile triunghiului și medianele triunghiului, cercul corespunzător fiind cercul celor nouă puncte.

Aplicația 2.1.11. Se dă un triunghi oarecare ABC și fie $A_0 \in [BC]$. Cercul circumscris triunghiului ABA_0 , notat $\mathcal{C}(A, B, A_0)$, intersectează dreapta AC în punctele A și B_0 . Fie

$$\mathcal{C}(B, C, B_0) \cap AB = \{B, C_0\},$$

$$\mathcal{C}(C, A, C_0) \cap BC = \{C, A_1\},$$

$$\mathcal{C}(A, B, A_1) \cap AC = \{A, B_1\},$$

$$\mathcal{C}(B, C, B_1) \cap AB = \{B, C_1\}.$$

a) Atunci

$$\mathcal{C}(A, C, C_1) \cap BC = \{C, A_0\}.$$

b) Dacă A_0 este piciorul înălțimii din A , atunci A_1 coincide cu A_0 .

Scriem puterea punctului C față de cercul $\mathcal{C}(A, B, A_0)$ și obținem relațiile

$$CA_0 \cdot CB = CB_0 \cdot CA \quad (1)$$

$$AB_0 \cdot AC = AC_0 \cdot AB \quad (2)$$

$$BC_0 \cdot BA = BA_1 \cdot BC \quad (3)$$

$$CA_1 \cdot CB = CB_1 \cdot CA \quad (4)$$

$$AB_1 \cdot AC = AC_1 \cdot AB \quad (5)$$

Vom arăta că $BC_1 \cdot BA = BA_0 \cdot BC$. Avem, ținând seama de relațiile (5), (4), (3), (1) în această ordine,

$$\begin{aligned} BC_1 \cdot BA &= (BA - C_1A) \cdot BA = BA^2 - C_1A \cdot BA \\ &= BA^2 - AB_1 \cdot AC = BA^2 - (AC - B_1C) \cdot AC = BA^2 - AC^2 + B_1C \cdot AC \\ &= BA^2 - AC^2 + CB \cdot A_1C = BA^2 - AC^2 + (CB - A_1B) \cdot CB \\ &= BA^2 - AC^2 + CB^2 - CB \cdot A_1B = BA^2 - AC^2 + CB^2 - BC_0 \cdot BA \\ &= BA^2 - AC^2 + CB^2 - (BA - C_0A) \cdot BA = BA^2 - AC^2 + CB^2 - BA^2 + C_0A \cdot BA \\ &= -AC^2 + CB^2 + AB_0 \cdot AC = -AC^2 + CB^2 + (AC - B_0C) \cdot AC \\ &= -AC^2 + CB^2 + AC^2 - B_0C \cdot AC = CB^2 - CA_0 \cdot CB \\ &= CB \cdot (CB - CA_0) = CB \cdot A_0B, \end{aligned}$$

prin urmare

$$BC_1 \cdot BA = BA_0 \cdot BC, \quad \text{adică} \quad \frac{BA_0}{BA} = \frac{BC_1}{BC}.$$

Observăm că \widehat{ABC} este unghi comun triunghiurilor BAC , BA_0C_1 , deci avem $\triangle BAC \sim \triangle BA_0C_1$, și prin urmare A_0C_1 este antiparalelă la AC , deci patrulaterul AC_1A_0C este inscriptibil. Rezultă astfel că avem

$$\mathcal{C}(A, C, C_1) \cap BC = \{C, A_0\},$$

adică construcția se încheie la al șaselea cerc.

2.2 Cercul celor nouă puncte al unui triunghi

Am văzut deja că având un triunghi ABC , putem asocia acestuia imediat câteva cercuri: cercul circumscris triunghiului (de centru O și rază R), cercul înscris în triunghi (de centru I și rază r), cercurile exînscrise (de centre I_a, I_b, I_c și raze r_a, r_b, r_c). În continuare vom evidenția un cerc asociat triunghiului care joacă un rol central în geometria triunghiului.

Teorema 2.2.1. (cercul lui Euler) *Mijloacele laturilor, picioarele înălțimilor și mijloacele segmentelor determinate de vârfuri și ortocentru sunt nouă puncte conciclice, situate pe un cerc, cu centrul în O_9 , mijlocul segmentului OH , de rază $\frac{R}{2}$.*

Demonstrație.

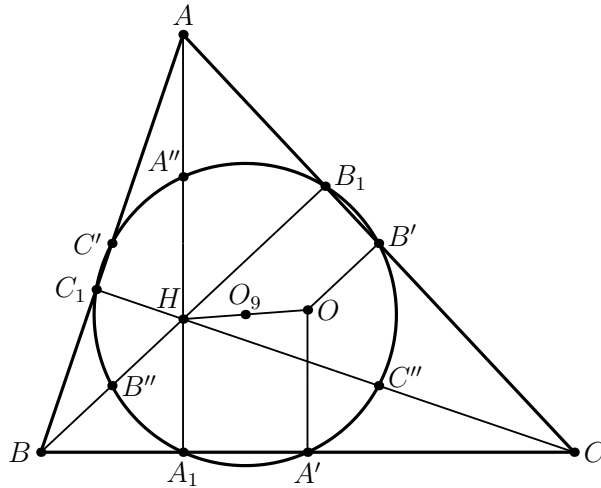


Figura 2.5

Fie A', B', C' mijloacele laturilor, A_1, B_1, C_1 picioarele înălțimilor și A'', B'', C'' mijloacele segmentelor $[AH]$, $[BH]$, $[CH]$. A'', B'', C'' se mai numesc *punctele euleriene* ale triunghiului ABC .

Considerăm triunghiul $A'B'C'$, triunghiul median al triunghiului ABC .

- Arătăm că $A_1 \in \mathcal{C}(A'B'C')$. Patrulaterul $A_1A'B'C'$ este trapez ($A_1A \parallel B'C'$) în care $A'B' = \frac{1}{2}AB$ (deoarece $A'B'$ este linie mijlocie) și $A_1C' = \frac{1}{2}AB$ (ca

mediană din vârful drept în $\triangle AA_1B$). Rezultă că $A_1A'B'C'$ este trapez isoscel, deci $A_1A'B'C'$ este inscriptibil, adică avem $A_1 \in \mathcal{C}(A'B'C')$.

Analog rezultă $B_1, C_1 \in \mathcal{C}(A'B'C')$.

Considerăm triunghiul $A_1B_1C_1$, triunghiul ortic al triunghiului ABC .

• Arătăm că $A'' \in \mathcal{C}(A_1B_1C_1)$. Patrulaterul $A_1B_1A''C_1$ este inscriptibil.

Știm că B_1C_1 antiparalelă la BC și patrulaterul BCB_1C_1 este inscriptibil într-un semicerc de diametru BC

Pentru a arăta că patrulaterul $A_1B_1A''C_1$ este inscriptibil, observăm că

$$\left. \begin{array}{l} A_1C_1 \text{ antiparalelă la } AC \\ A_1B_1 \text{ antiparalelă la } AB \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{A} = \widehat{C_1A_1B} = \widehat{B_1A_1C},$$

deci

$$\widehat{C_1A_1B_1} = 180^\circ - 2\widehat{A}.$$

Unghiurile $\widehat{C_1A''H}$, $\widehat{HA''B_1}$ sunt exterioare triunghiurilor AC_1A'' , $AA''B_1$. În plus triunghiurile AC_1A'' , $AA''B_1$ sunt isoscele, deci avem $A''C_1 = A''A$ și $AA'' = A''B_1$. Obținem

$$\widehat{B_1A''C_1} = \widehat{A''_1} + \widehat{A''_2} = 2\widehat{A_1} + 2\widehat{A_2} = 2(\widehat{A_1} + \widehat{A_2}) = 2\widehat{A}.$$

În final, găsim

$$\widehat{C_1A_1B_1} + \widehat{C_1A''C_1} = 180^\circ - 2\widehat{A} + 2\widehat{A} = 180^\circ,$$

deci patrulaterul $A_1B_1A''C_1$ este inscriptibil și deci $A'' \in \mathcal{C}(A_1B_1C_1)$.

Analog se arată că $B'', C'' \in \mathcal{C}(A_1B_1C_1)$.

Înălțimile triunghiului ABC sunt bisectoarele triunghiului ortic $A_1B_1C_1$. Rezultă că ortocentrul H al triunghiului ABC este centrul cercului înscris în triunghiul $A_1B_1C_1$.

Patrulateralele $A_1A'OH$, $B_1B'OH$ sunt trapeze dreptunghice cu latura comună OH . Liniile mijlocii se intersectează în mijlocul segmentului OH . Pe de altă parte, cele două linii mijlocii sunt mediatoarele corzilor A_1A' , B_1B' în cercul lui Euler, deci ele se intersectează în centrul cercului. Deci centrul cercului se găsește în mijlocul segmentului OH .

Evident avem $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$, cu raportul de asemănare $\frac{1}{2}$. Rezultă că raza cercului circumscris triunghiului $A'B'C'$ este $\frac{1}{2}R$. Cercul circumscris triunghiului $A'B'C'$ coincide cu cercul lui Euler, deci raza cercului lui Euler este $\frac{1}{2}R$. \square

Menționăm că punctul O_9 este centrul $X(5)$ în ETC.

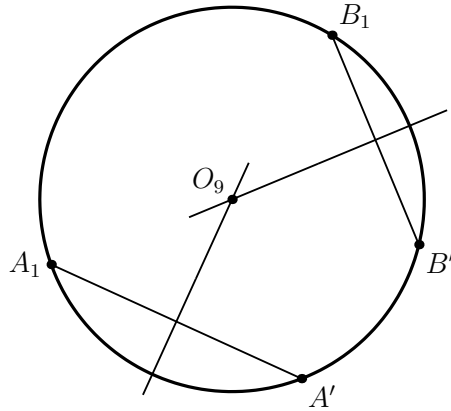


Figura 2.6

Observația 2.2.2. Segmentele $[A_1A'']$, $[B_1B'']$, $[C_1C'']$ sunt diametre în cercul Euler, deci dreptele A_1A'' , B_1B'' , C_1C'' sunt concurente în mijlocul segmentului OH , adică în centrul O_9 al cercului lui Euler.

Propoziția 2.2.3. Fie H ortocentrul triunghiului ABC . Triunghiurile ABC , BHC , CHA , AHB au același cerc al lui Euler.

Demonstrație. Considerând $A_1B_1C_1$, triunghiul ortic al triunghiului ABC , avem că punctele A_1 , B_1 , C_1 aparțin cercului lui Euler.

În triunghiul BHC avem $HA_1 \perp BC$, $BC_1 \perp HC$, $CB_1 \perp HB$, deci triunghiul BHC are același triunghi ortic $A_1B_1C_1$ cu triunghiul ABC .

Analog procedăm pentru celelalte triunghiuri. □

Propoziția 2.2.4. Dacă H este ortocentrul triunghiului ABC , atunci dreptele lui Euler ale triunghiurilor AHC , AHB , BHC sunt concurente.

Demonstrație. Fie OH dreapta lui Euler a triunghiului ABC . Am văzut că $O_9 \in OH$, deci O_9 este centrul celor patru cercuri ale lui Euler, prin urmare O_9 este punctul în care dreptele lui Euler sunt concurente. □

Propoziția 2.2.5. Diametrele cercului lui Euler al triunghiului ABC care trec prin punctele euleriene sunt mediatoarele triunghiului ortic corespunzător triunghiului ABC .

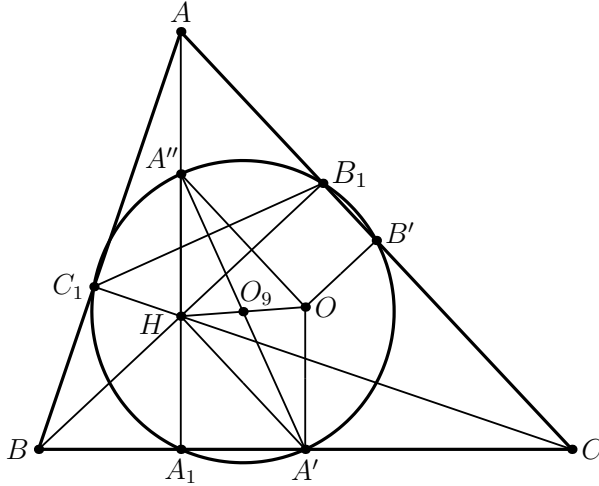


Figura 2.7

Demonstrație. Știm că O_9 este mijlocul segmentului $[OH]$. În plus $[A''A']$ este diametru în cercul lui Euler. Patrulaterul $HA''OA'$ este paralelogram, deci avem $[OA'] \equiv [A''H]$ și $OA' \parallel A''H$. Rezultă că $[A''A] \equiv [OA']$ și $A''A \parallel OA'$, deci $AA''A'O$ este paralelogram, prin urmare $A''A' \parallel OA$.

Pe de altă parte, în triunghiul isoscel AOC avem $\widehat{AOC} \equiv 2\widehat{B}$, deci

$$\widehat{OAB'} = \frac{180^\circ - 2\widehat{B}}{2} = 90^\circ - \widehat{B}.$$

Evident avem $\triangle AB_1C_1 \sim \triangle ABC$. Deoarece AO este înălțime în triunghiul AB_1C_1 , rezultă că $AO \perp B_1C_1$. Cum $AO \parallel A'A''$, obținem $A'A'' \perp B_1C_1$. Cum $A'A''$ este diametru perpendicular pe coarda $[B_1C_1]$, obținem că $A'A''$ este mediatoarea segmentului $[B_1C_1]$. \square

Propoziția 2.2.6. *Tangentele în punctele euleriene la cercul lui Euler al triunghiului ABC sunt antiparalele cu laturile triunghiului ABC .*

Demonstrație. Diametrul $[A'A'']$ este perpendicular pe tangenta în A'' . Pe de altă parte, am văzut că $A'A'' \perp B_1C_1$, deci obținem că tangenta în A'' este paralelă cu B_1C_1 . Cum B_1C_1 este antiparalelă la BC , rezultă proprietatea din enunț. \square

Propoziția 2.2.7. Fie A_a, B_b, C_c mijloacele segmentelor AO, BO, CO . Centrul cercului lui Euler O_9 al triunghiului ABC este ortocentrul triunghiului $A_aB_bC_c$.

Demonstrație.

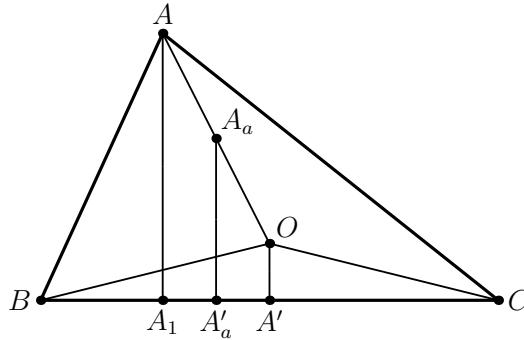


Figura 2.8

Fie $AA_1 \perp BC$ și ducem $A_aA'_a \parallel AA_1$. Evident, A'_a este mijlocul segmentului $[A_1A']$, unde A' este mijlocul lui $[BC]$. Punctele A_1, A' sunt situate pe cercul lui Euler, deci $A_aA'_a$ trece prin centrul O_9 al acestui cerc.

Analog arătăm că $B_bB'_b$ și $C_cC'_c$ conțin punctul O_9 .

Pe de altă parte, evident $A_aA'_a, B_bB'_b, C_cC'_c$ sunt dreptele de suport ale înălțimilor triunghiului $A_aB_bC_c$, deci proprietatea din enunț este demonstrată. \square

2.3 Dreapta ortică a triunghiului

Teorema 2.3.1. (dreapta ortică) Notăm cu A_1, B_1, C_1 picioarele înălțimilor din A, B , respectiv C și cu A_2, B_2, C_2 intersecțiile dreptelor B_1C_1, A_1C_1, B_1C_1 cu laturile triunghiului neisoscel și nedreptunghic ABC . Atunci punctele A_2, B_2, C_2 sunt coliniare și dreapta determinată de ele se numește dreapta ortică a triunghiului.

Demonstrație. Considerăm \mathcal{C} și \mathcal{C}_1 cercurile circumscrise triunghiurilor ABC și $A_1B_1C_1$. Puterile punctului A_2 față de cele două cercuri sunt $A_2B \cdot A_2C$ și $A_2B_1 \cdot A_2C_1$.

Deoarece patrulaterul BCB_1C_1 este inscriptibil, rezultă egalitatea celor două puteri, deci A_2 este situat pe axa radicală a celor două cercuri.

Analog procedăm pentru punctele B_2, C_2 . \square

Observația 2.3.2. Cercul circumscris triunghiului $A_1B_1C_1$ este cercul lui Euler având centrul O_9 la mijlocul lui OH . Deoarece axa radicală a două cercuri este perpendiculară pe dreapta determinată de centrele lor rezultă că dreapta ortică este perpendiculară pe OH , dreapta Euler a triunghiului.

2.4 Cercurile lui Lemoine

Teorema 2.4.1. (primul cerc al lui Lemoine) Paralelele duse prin K (punctul lui Lemoine) la laturile triunghiului taie laturile în 6 puncte conciclice, cercul rezultat numindu-se primul cerc al lui Lemoine.

Demonstrație.

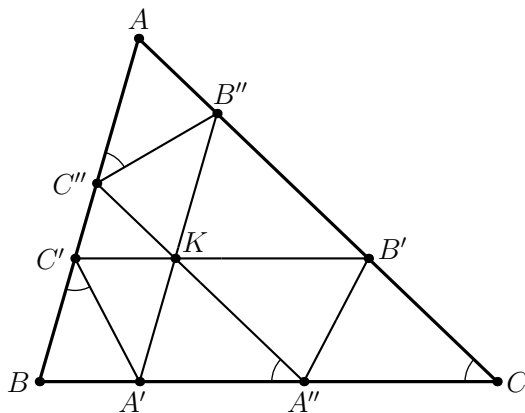


Figura 2.9

Construim prin K paralelele $B'C' \parallel BC$, $A'B'' \parallel AB$, $A''C'' \parallel AC$. Deoarece $KC'' \parallel AB''$, $KB'' \parallel AC''$ rezultă că $AB''KC''$ este paralelogram.

Analog avem că patrulateralele $BA'KC'$ și $A'KB'C$ sunt paralelograme.

Mijloacele diagonalelor acestor paralelograme se află pe simedianele AK , BK , CK ale triunghiului ABC .

Din proprietatea de loc geometric a simedianei: *Simediana unui vârf este locul geometric al mijloacelor antiparalelelor la latura opusă*, rezultă că $C''B''$, $C'A'$ și $B'A''$ sunt antiparalele la BC , AC , AB .

Din faptul că $A'C'$ este antiparalelă la AC , obținem $\widehat{BC'A'} \equiv \widehat{C}$, iar din $C''A'' \parallel AC$ obținem $\widehat{C} \equiv \widehat{BA''C''}$, de unde avem $\widehat{BC'A'} \equiv \widehat{A'A''C''}$. Prin urmare $A'A''C''C'$ este patrulater inscriptibil.

Fie \mathcal{C} cercul circumscris patrulaterului $A'A''C''C'$. Deoarece $C'C'' \parallel A'B''$ și $\widehat{AC''B''} \equiv \widehat{ACB} \equiv \widehat{BC'A'}$, avem că $C'C''B''A'$ este trapez isoscel, deci $C'C''B''A'$ este inscriptibil, adică $B'' \in \mathcal{C}$.

Analog, din faptul că $C'B'A''A'$ este inscriptibil, rezultă $B' \in \mathcal{C}$.

Prin urmare, cercul \mathcal{C} conține punctele $A', A'', B', B'', C', C''$. □

Teorema 2.4.2. (al doilea cerc al lui Lemoine) *Antiparalelele duse prin K la laturi sunt diametrele unui cerc numit al doilea cerc al lui Lemoine.*

Demonstrație.

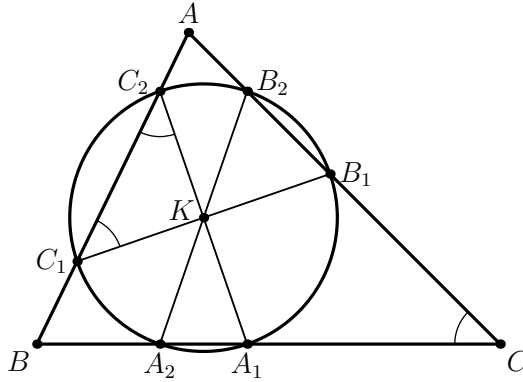


Figura 2.10

Fie C_1B_1 , A_2B_2 , A_1C_2 antiparalelele la BC , AB , AC . Din proprietatea de caracterizare a simedianei rezultă că punctul K este mijlocul segmentelor $[A_1C_2]$, $[C_1B_1]$, $[A_2B_2]$.

Deoarece A_1C_2 este antiparalelă la AC , rezultă $\widehat{KC_2C_1} \equiv \widehat{C}$. La fel, B_1C_1 antiparalelă la BC , deci $\widehat{KC_1C_2} \equiv \widehat{C}$. Obținem astfel $\widehat{KC_2C_1} \equiv \widehat{KC_1C_2}$, deci $KC_2 = KC_1$, prin urmare avem $B_1C_1 = 2C_1K = 2C_2K = C_2A_1$.

Analog arătăm că $C_1B_1 = A_2B_2$, deci K este centrul cercului ce trece prin punctele $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$. □

2.5 Cercul lui Apollonius

Teorema 2.5.1. (cercul lui Apollonius) Pentru triunghiul neisoscel ABC , locul geometric al punctelor M din plan cu proprietatea că $\frac{MB}{MC} = \frac{AB}{AC}$, este un cerc numit cercul lui Apollonius al laturii BC .

Demonstrație.

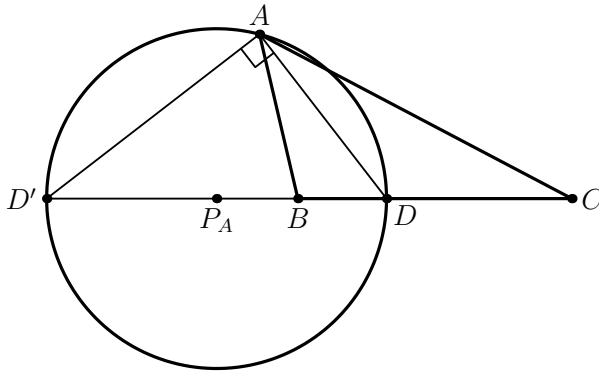


Figura 2.11

Construim bisectoarea interioară $[AD$ a unghiului BAC și bisectoarea exterioară $[AD'$, unde $D, D' \in BC$. Aplicăm teorema bisectoarea și obținem

$$\frac{AB}{AC} = \frac{DB}{DC} = \frac{D'B}{D'C},$$

deci punctele D și D' aparțin locului geometric.

Dacă M este un punct al locului geometric, atunci avem

$$\frac{MB}{MC} = \frac{AB}{AC} = \frac{DB}{DC} = \frac{D'B}{D'C}.$$

Conform reciprocei teoremei bisectoarei, rezultă că $[MD$ și $[MD'$ sunt bisectoarele interioară, respectiv exterioară în triunghiul MBC , deci avem $MD \perp MD'$.

Cum punctele D, D' sunt fixate, rezultă că M parcurge cercul de diametru $[DD']$, numit cercul lui Apollonius al laturii BC , cu centrul P_A , unde P_A este mijlocul lui $[DD']$. \square

Observația 2.5.2. Analog putem construi cercurile lui Apollonius ale laturilor AB și AC .

Teorema 2.5.3. *Cercurile lui Apollonius taie ortogonal cercul circumscris triunghiului după simediane.*

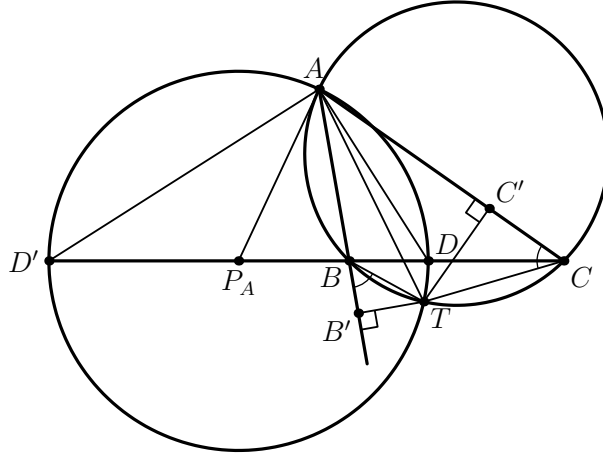


Figura 2.12

Fie \mathcal{C}_A cercul lui Apollonius al laturii BC și \mathcal{C} cercul circumscris triunghiului ABC .

Fie $\mathcal{C}_A \cap \mathcal{C} = \{T\}$, al doilea punct de intersecție al celor două cercuri.

Construim punctele B' și C' astfel: $TB' \perp AB$, $B' \in AB$ și $TC' \perp AC$, $C' \in AC$.

Patrulaterul $ABTC$ este inscriptibil, deci $\widehat{B'BT} \equiv \widehat{C'CT}$. Prin urmare avem $\triangle B'BT \sim \triangle C'CT$, adică

$$\frac{B'T}{C'T} = \frac{BT}{CT} = \frac{AB}{AC}.$$

Obținem astfel că

$$\frac{B'T}{AB} = \frac{C'T}{AC},$$

deci AT este simediana din A a triunghiului.

Din teorema precedentă rezultă că AP_A este tangentă la cercul \mathcal{C} , deci cercurile \mathcal{C}_A și \mathcal{C} sunt ortogonale. \square

2.6 Cercuri și puncte remarcabile asociate unui triunghi

2.6.1 Punctul lui Spieker

Theodor Spieker (1828-1908), a fost un matematician german care a adus contribuții remarcabile în geometria euclidiană. Printre altele, el a introdus și studiat un punct care astăzi îi poartă numele.

Centrul cercului înscris în triunghiul median al unui triunghi ABC se numește *punctul lui Spieker* al triunghiului ABC . Acest punct este notat cu S_p și este centrul $X(10)$ în ETC. Cercul înscris în triunghiul median se numește *cercul lui Spieker*.

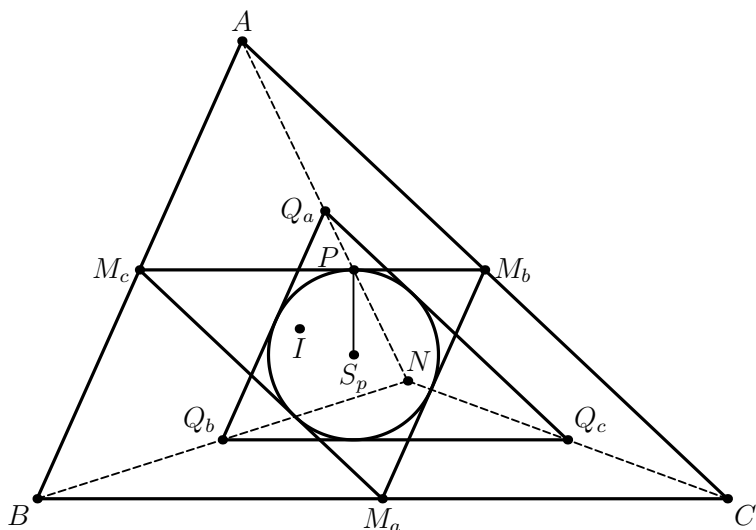


Figura 2.13

Raza cercului lui Spieker, notată cu r_s , este egală cu jumătate din lungimea razei cercului înscris în triunghiul ABC . Într-adevăr, triunghiul ABC este asemenea cu triunghiul său median cu raportul de asemănare $\frac{1}{2}$, de unde rezultă proprietatea enunțată. Prezentăm mai jos câteva proprietăți ale acestui punct.

Teorema 2.6.1. Fie Q_A, Q_B, Q_C mijloacele segmentelor AN, BN respectiv CN , unde N este punctul lui Nagel al triunghiului ABC . Triunghiurile median $M_a M_b M_c$ și $Q_A Q_B Q_C$ sunt congruente.

Demonstrație. Deoarece $[M_a M_b] \equiv [Q_A Q_B](= c/2)$, $[M_b M_c] \equiv [Q_B Q_C](= a/2)$ și $[M_c M_a] \equiv [Q_C Q_A](= b/2)$, rezultă că triunghiurile $M_a M_b M_c$ și $Q_A Q_B Q_C$ sunt congruente. \square

Teorema 2.6.2. *Punctele de contact dintre cercul lui Spieker al triunghiului ABC cu laturile triunghiului median sunt intersecțiile acestor laturi cu AN, BN, CN , unde N este punctul lui Nagel al triunghiului ABC .*

Demonstrație. Fie P punctul de tangență dintre latura $M_b M_c$ cu cercul lui Spieker al triunghiului ABC și $\{D\} = AN \cap BC$. Ținând cont că lungimile laturilor triunghiului median $M_a M_b M_c$ sunt $\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}$ și că P este un punct de contact al cercului înscris în triunghiul $M_a M_b M_c$ rezultă $M_c P = \frac{p-c}{2} = \frac{BD}{2}$ și cum $M_c P \parallel BD$ rezultă $P \in BD$. \square

Teorema 2.6.3. *Paralelele duse prin mijloacele M_a, M_b, M_c ale laturilor BC, CA , respectiv AB ale triunghiului ABC la bisectoarele interioare ale unghiurilor A, B, C sunt concurente în punctul lui Spieker al triunghiului ABC .*

Demonstrație. Deoarece $M_a M_b \parallel AB, M_a M_c \parallel AC$, iar AI este bisectoarea unghiului A , rezultă că paralela prin M_a la AI este bisectoarea interioară a unghiului $M_c M_a M_b$. Analog se arată că paralelele considerate sunt bisectoarele interioare ale triunghiului median, deci concurente în punctul lui Spieker al triunghiului ABC . \square

Teorema 2.6.4. *Punctul lui Spieker al triunghiului ABC este mijlocul segmentului $[IN]$, deci este situat pe dreapta lui Nagel a triunghiului.*

Demonstrație. Fie $M_a M_b M_c$ triunghiul median al triunghiului ABC .

Dacă $IG = 2x$, atunci, conform aplicației precedente, $GN = 4x, IN = 6x$. Fie S_P mijlocul segmentului IN . Avem: $IS_P = 3x = S_P N$ și $GS_P = x$. Deoarece $G \in IS_P$ și $IG = 2x = 2GS_P$, iar $AG = 2GM_a$ rezultă $\frac{AG}{GM_a} = \frac{IG}{GS_P} = 2$ și cum $\angle IGA \equiv \angle S_P G M_a$ avem că triunghiurile AGI și $M_a G S_P$ sunt asemenea, deci $AI \parallel S_P M_a$. Dar $AB \parallel M_a M_b, AC \parallel M_a M_c$, iar AI este bisectoarea unghiului BAC , deci și $M_a S_P$ este bisectoarea unghiului $M_c M_a M_b$. Analog se arată că punctul S_P aparține bisectoarelor unghiurilor $M_a M_b M_c$ și $M_b M_c M_a$, deci punctul lui Spieker S_P este mijlocul segmentului IN . \square

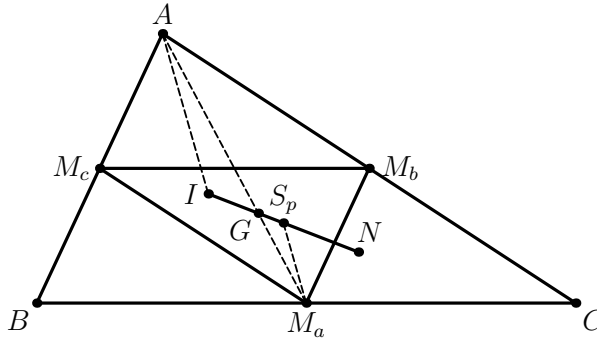


Figura 2.14

2.6.2 Cercurile lui Carnot

Fie H ortocentrul triunghiului ABC și O_a, O_b, O_c centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor BCH, ACH, ABH . Triunghiul $O_a O_b O_c$ se numește *triunghiul lui Carnot*, iar cercurile circumscrise triunghiurilor BHC, AHC, AHB se numesc *cercurile lui Carnot*. Aceste cercuri se notează cu τ_a, τ_b, τ_c .

Teorema 2.6.5. *Cercurile lui Carnot ale triunghiului ABC sunt congruente cu cercul circumscris triunghiului ABC .*

Demonstrație. Fie A', B', C' mijloacele segmentelor $[AH], [BH], [CH]$, H_a, H_b, H_c picioarele înălțimilor triunghiului ABC , O centrul cercului circumscris triunghiului ABC și O'_a simetricul lui O față de BC .

Atunci, $AH = OO'_a$ și $AH \parallel OO'_a$ de unde rezulta că patrulaterul $OO_a H A$ este paralelogram. Deci, $HO'_a = OA = R$ și cum $OCO_a B$ este romb rezultă că

$$O'_a C = O'_a B = OC = OB = R.$$

Din relațiile de mai sus rezultă,

$$O'_a C = O'_a B = OC = O'_a H = R = R,$$

deci O'_a este centrul cercului circumscris triunghiului BHC , adică O'_a coincide cu O_a . Analog obținem că O_b și O_c sunt simetricile lui O în raport cu laturile AC , respectiv AB . Cercul circumscris triunghiului BHC este congruent cu cercul circumscris

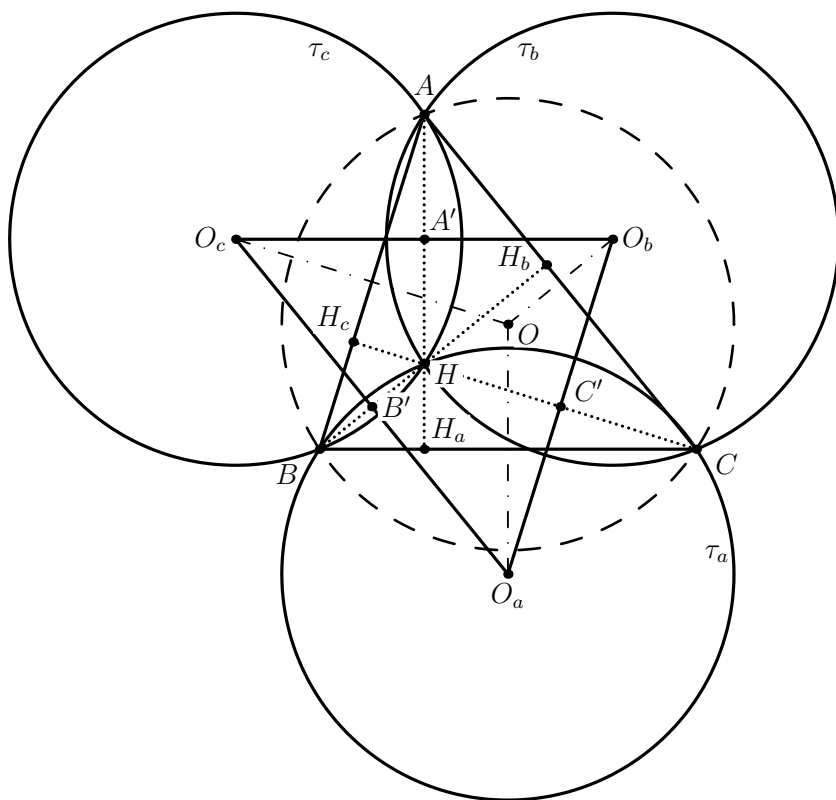


Figura 2.15

triunghiului ABC . Analog, cercurile circumscrise triunghiurilor AHC și AHB sunt congruente cu cercul circumscris triunghiului ABC . \square

Din demonstrația teoremei de mai sus rezultă următoarele proprietăți.

- 1) Laturile triunghiului lui Carnot conțin punctele euleriene ale triunghiului ABC .
- 2) Distanțele de la centrul cercului circumscris triunghiului ABC la centrele O_a, O_b, O_c ale cercurilor lui Carnot sunt egale cu AH, BH , respectiv CH .
- 3) Centrele cercurilor lui Carnot sunt simetricele centrului cercului circumscris O al triunghiului ABC față de laturile triunghiului.

Teorema 2.6.6. *Triunghiurile $O_aO_bO_c$ și ABC sunt congruente.*

Demonstrație. Cum BO_aCO și $AOCO_b$ sunt romburi rezultă că $BO_a \parallel OC \parallel AO_b$

și $BO_a = OC = AO_b = R$, deci patrulaterul ABO_aO_b este paralelogram, adică $AB = O_aO_b$. Analog obținem $AC = O_aO_c$ și $BC = O_bO_c$, deci triunghiurile $O_aO_bO_c$ și ABC sunt congruente. \square

Teorema 2.6.7. *Triunghiurile $O_aO_bO_c$ și ABC au același cerc al lui Euler și aceeași dreaptă a lui Euler.*

Demonstrație. În $O_aO_bO_c$, punctul O este ortocentrul său, iar H este centrul cercului circumscris, deci are aceeași dreaptă Euler cu triunghiul ABC și evident același cerc al lui Euler. \square

Teorema 2.6.8. *Fie H ortocentrul triunghiului ABC , τ_a, τ_b, τ_c cercurile lui Carnot corespunzătoare triunghiului ABC , iar A_b și A_c al doilea punct de intersecție dintre cercul τ_a cu laturile AC respectiv AB . Analog se definesc punctele B_c și B_a , respectiv C_a și C_b determinate de intersecțiile cercurilor τ_b , respectiv τ_c cu laturile corespunzătoare ale triunghiului ABC . Ortocentrul triunghiului este centrul cercurilor circumscrise triunghiurilor $AA_bA_c, BB_cB_a, CC_aC_b$.*

Demonstrație. Avem

$$m(\sphericalangle HAH_c) = 90^\circ - m(\sphericalangle H_cHA) = 90^\circ - m(\sphericalangle H_aHC) = m(\sphericalangle H_cHA).$$

În cercul τ_a avem

$$m(\sphericalangle BH_cH) = m(\sphericalangle HCB) = \frac{1}{2}m(\widehat{BH}).$$

Din aceste două relații rezultă $\sphericalangle HAB \equiv \sphericalangle AA_cH$ deci triunghiul AHA_c este isoscel, de unde obținem $AH = HA_c$. Analog se arată că $AH = HA_b$. Din aceste relații rezultă

$$AH = HA_c = HA_b,$$

deci H este centrul cercului circumscris triunghiului AA_bA_c . Analog se arată ca H este centrul cercului circumscris triunghiurilor BB_cB_a și CC_aC_b . \square

Teorema 2.6.9. *Fie O_a centrul cercului Carnot τ_a și $H_aH_bH_c$ triunghiul ortic al triunghiului ABC . Atunci $BO_a \perp H_aH_b$ și $CO_a \perp H_aH_c$.*

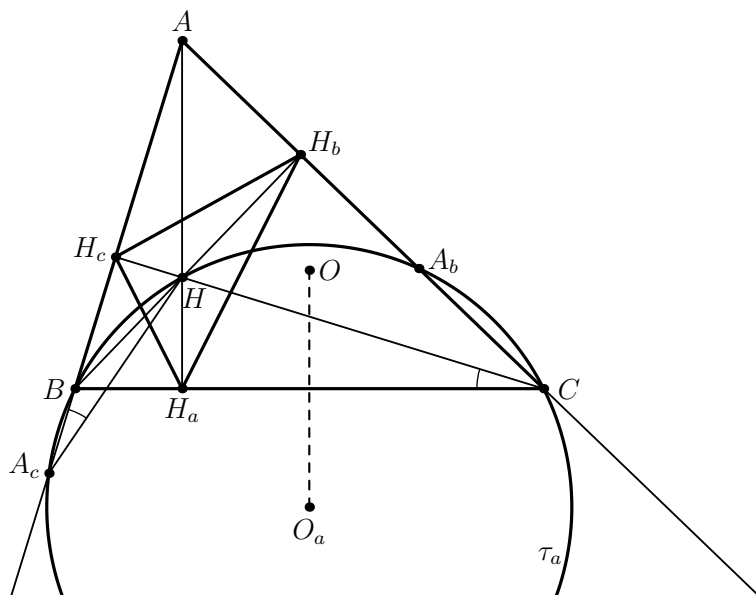


Figura 2.16

Demonstrație. Dacă O este centrul cercului circumscris triunghiului ABC , atunci $OC \perp H_aH_b$ (vezi Figura 2.16). Patrulaterul $BOCO_a$ fiind un romb, datorită faptului ca O_a este simetricul lui O față de BC , rezultă $BO \parallel OC$. Din aceste relații rezultă că $BO_a \perp H_aH_b$. Analog, se arată că $CO_a \perp H_aH_c$. \square

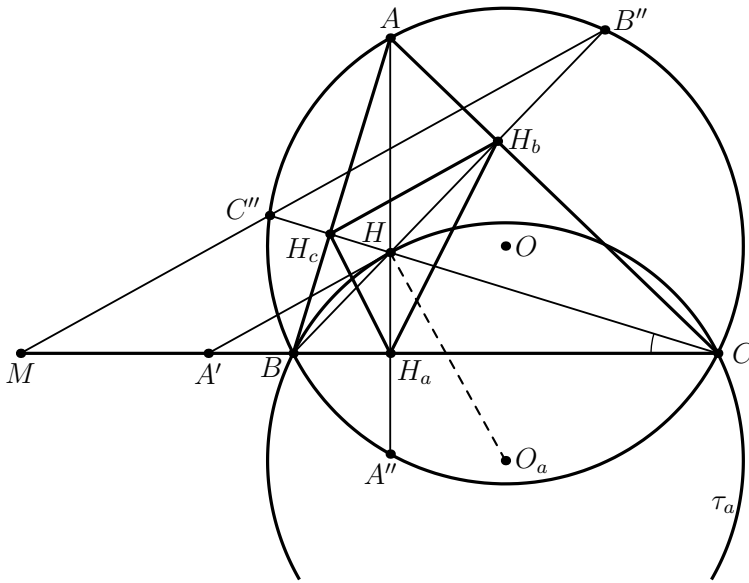
Analog se arată că au loc relațiile

$$AO_b \perp H_bH_a, CO_b \perp H_bH_c, AO_c \perp H_cH_a, BO_c \perp H_cH_b.$$

Teorema 2.6.10. *Tangentele duse în ortocentrul H al unui triunghi ABC la cercurile lui Carnot intersectează laturile BC , CA , respectiv AB ale triunghiului în trei puncte coliniare.*

Demonstrație. Fie A' , B' , C' punctele determinate de intersecțiile dintre tangentele în ortocentrul H al triunghiului ABC și laturile triunghiului, iar A'' , B'' , C'' al doilea punct de intersecție dintre dreptele AH , BH , CH cu cercul circumscris triunghiului. Avem

$$m(\angle BCC'') = m(\angle BB''C'') = \frac{1}{2}m(\widehat{BH})$$

$$\frac{A'B}{MA'} = \frac{BH}{HB''} \quad \text{si} \quad \frac{A'C}{MA'} = \frac{HC}{HC''},$$
$$\frac{A'B}{A'C} = \frac{BH}{HC} \cdot \frac{HC''}{HB''}.$$


Analog, se arată că au loc relațiile

$$\frac{B'C}{B'A} = \frac{CH}{HA} \cdot \frac{HA''}{HC''} \quad \text{si} \quad \frac{C'A}{C'B} = \frac{AH}{HB} \cdot \frac{HB''}{HA''}.$$

Atunci rezultă $\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = 1$, deci punctele A', B', C' sunt coliniare, conform reciprocei teoremei lui Menelaus. \square

Teorema 2.6.11. Fie $C_a C_b C_c$ triunghiul de contact al triunghiului ABC . Ortocentrele triunghiurilor $AC_b C_c$, $BC_a C_c$, $CC_a C_b$ sunt centrele cercurilor Carnot ale triunghiului.

Demonstrație. Fie $C_c C'_c$ și $C_b C'_b$ înălțimi în triunghiul $AC_b C_c$ și H_1 ortocentrul triunghiului $AC_b C_c$. Atunci $C'_c C'_c \parallel IC_b$ și $C_b C'_b \parallel IC_c$, deci patrulaterul $IC_b H_1 C_c$ este paralelogram.

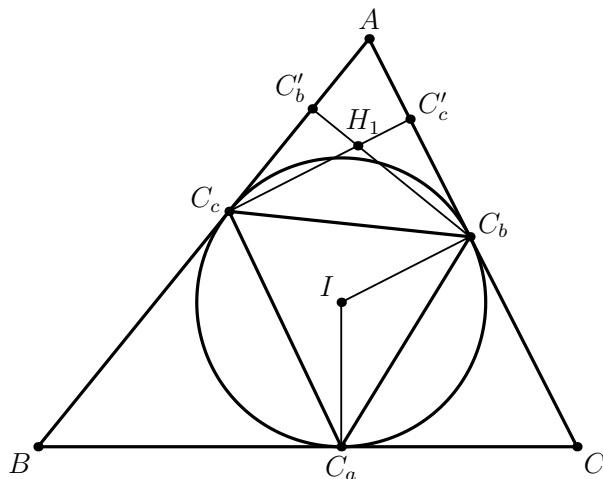


Figura 2.18

Cum $IC_c = IC_b$ rezultă că patrulaterul $IC_b H_1 C_c$ este romb, deci H_1 este simetricul centrului cercului circumscris triunghiului de contact față de latura $C_b C_c$, ceea ce arată că H_1 este centrul cercului Carnot corespunzător laturii BC . Analog se arată că ortocentrele triunghiurilor $BC_a C_c$ și $CC_a C_b$ sunt centrele cercurilor Carnot corespunzătoare laturilor CA respectiv AB . \square

Teorema 2.6.12. Fie I centrul cercului înscris în triunghiul ABC și $H_a H_b H_c$ triunghiul său ortic. Centrele cercurilor înscrise în triunghiurile $AH_b H_c$, $BH_c H_a$, $CH_a H_b$ sunt centrele cercurilor Carnot corespunzătoare triunghiului de contact $C_a C_b C_c$ al triunghiului ABC .

Demonstrație. Fie M proiecția lui B pe bisectoarea CI și $\{A_1\} = H_c M \cup AI$. Avem

$$\angle AH_c H_b \equiv \angle ACB \text{ și } \angle MH_c A \equiv \angle MCB (= \frac{1}{2}m(\angle ACB)),$$

deoarece patrulateralele H_cH_bCB și H_cMCB sunt inscriptibile.

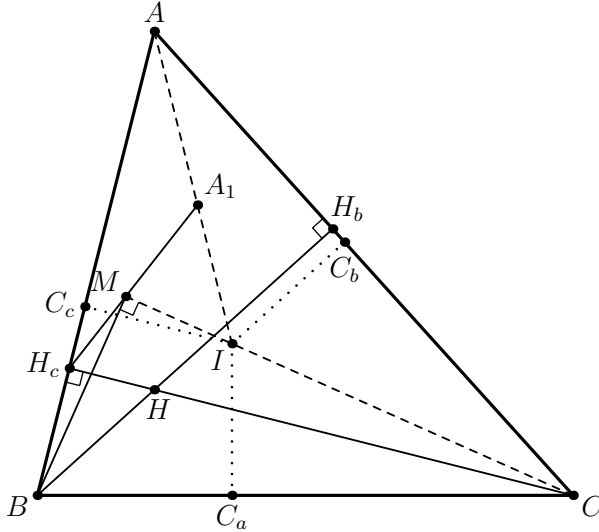


Figura 2.19

Rezultă că

$$m(\angle AH_cA_1) = m(\angle AH_cM) = \frac{1}{2}m(\angle AH_cH_b),$$

deci H_cA_1 este bisectoarea unghiului $\angle AH_cH_b$. Cum AA_1 este bisectoarea unghiului A a triunghiului ABC , rezultă că A_1 este centrul cercului înscris în triunghiul AH_cH_b . Dar

$$m(\angle IA_1M) = m(\angle A_1AH_c) + m(\angle A_1H_cA) = \frac{1}{2}m(\angle A) + \frac{1}{2}m(\angle C)$$

și

$$m(\angle MIA_1) = m(\angle MIA) = m(\angle IAC) + m(\angle ICA) = \frac{1}{2}m(\angle A) + \frac{1}{2}m(\angle C),$$

de unde rezultă că

$$\angle IA_1M \equiv \angle MIA_1.$$

Arătăm că punctul M aparține dreptei C_cC_b . Fie $\{M_1\} = CI \cap C_cC_b$. Avem

$$m(\angle BICM_1) = \frac{1}{2}m(\angle B) + \frac{1}{2}m(\angle C),$$

ca unghi exterior triunghiului BIC , deci $m(\angle BICM_1) = 90^\circ - \frac{1}{2}m(\angle A)$. Patrulaterul IC_cAC_b este inscriptibil, deci $m(\angle IC_cC_b) = \frac{1}{2}m(\angle A)$, de unde $m(\angle BCM_1) = 90^\circ + \frac{1}{2}m(\angle A)$. Astfel,

$$m(\angle BC_cM_1) + m(\angle MIB) = 180^\circ,$$

adică patrulaterul BC_cM_1I este inscriptibil, deci

$$m(\angle BM_1I) = m(\angle BC_cI) = 90^\circ,$$

de unde rezultă că M_1 este proiecția lui B pe bisectoarea unghiului C , adică $M_1 = M$. Deoarece $AI \perp C_bC_c$, $M \in C_bC_c$ și triunghiul MA_1I este isoscel, rezultă că punctele A_1 și I sunt simetrice față de latura C_cC_b , deci A_1 este centrul cercului Carnot corespunzător laturii C_cC_b a triunghiului de contact. \square

2.6.3 Cercul și punctul lui Fuhrmann

Geometrul german Wilhelm Fuhrmann (1833-1904) a studiat o configurație geometrică importantă care generează un triunghi, un cerc și un punct care astăzi i-au preluat numele. Fie \mathcal{C} cercul circumscris triunghiului ABC și O centrul acestuia. Se numește *triunghiul lui Fuhrmann* al triunghiului ABC , triunghiul $F_AF_BF_C$ ale carui vârfuri sunt simetricele mijloacelor arcelor \widehat{BC} , \widehat{CA} , \widehat{AB} , considerate în cercul \mathcal{C} , față de laturile triunghiului. Cercul circumscris triunghiului lui Fuhrmann se numește *cercul lui Fuhrmann* al triunghiului. Centrul cercului lui Fuhrmann poartă numele de *punctul lui Fuhrmann* al triunghiului ABC și se notează cu F . Fie A' , B' , C' mijloacele arcelor \widehat{BC} , \widehat{CA} , respectiv \widehat{AB} , și M_a , M_b , M_c mijloacele laturilor triunghiului.

Evident, dreptele $A'F_A$, $B'F_B$, $C'F_C$ sunt concurente în O , centrul cercului circumscris triunghiului ABC .

Teorema 2.6.13. *Triunghiul ABC și triunghiul Fuhrmann al său sunt ortologice.*

Demonstrație. Deoarece avem $F_AA' \perp BC$, $F_BB' \perp CA$, $F_CC' \perp AB$ și dreptele F_AA' , F_BB' , F_CC' sunt concurente în centrul cercului circumscris triunghiului ABC , rezultă că triunghiul $F_AF_BF_C$ este ortologic cu triunghiul ABC . \square

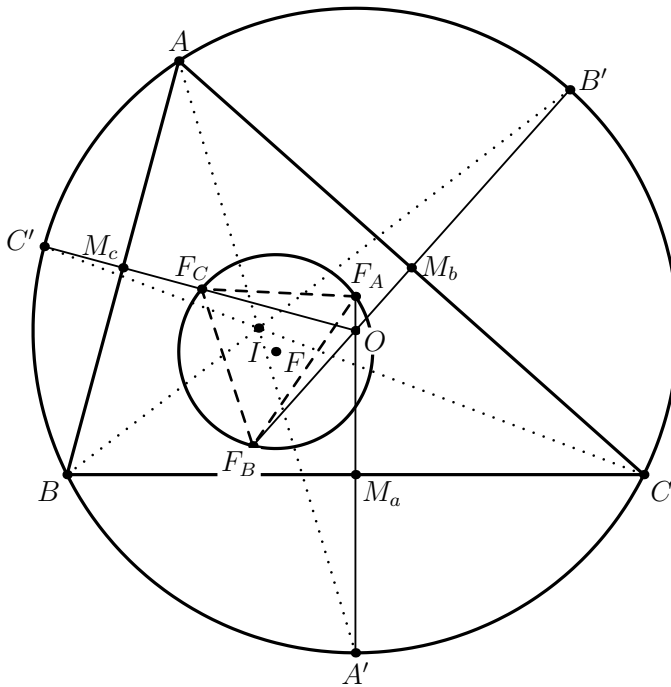


Figura 2.20

Deoarece relația de ortologie dintre două triunghiuri este simetrică rezultă, conform proprietății precedente, că perpendicularele duse din A, B și C pe laturile $F_B F_C, F_C F_A$ respectiv $F_A F_B$ ale triunghiului Fuhrmann sunt concurente.

Teorema 2.6.14. Fie $F_A F_B F_C$ triunghiul lui Fuhrmann corespunzător triunghiului ABC . Cercurile circumscrise triunghiurilor $F_A B C, F_B C A, F_C A B$ sunt concurente în ortocentrul H al triunghiului ABC .

Demonstrație. Simetricul H_A al ortocentrului H față de BC aparține cercului circumscris triunghiului.

Deoarece patruleterele $BH F_A C$ și $BH_A A' C$ sunt congruente, iar $BH_A A' C$ este inscriptibil rezultă că și patruleterul $BH F_A C$ este inscriptibil. Prin urmare punctul H aparține cercului circumscris triunghiului $F_A B C$. Analog se arată că H aparține cercurilor circumscrise triunghiurilor $F_B C A$ și $F_C A B$. \square

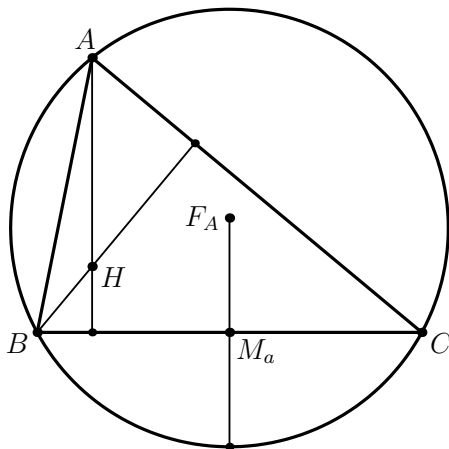


Figura 2.21

2.6.4 Punctul lui Coșniță

Cezar Coșniță (1910-1962) a fost un matematician roman și profesor la Universitatea Politehnica din București care a demonstrat următoarea teoremă, care astăzi îi poartă numele, și care este legată de o configurație geometrică importantă asociată unui triunghi.

Teorema 2.6.15. Fie O centrul cercului circumscris unui triunghi ABC și X, Y, Z centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor BOC, COA , respectiv AOB . Dreptele AX, BY și CZ sunt concurente.

Demonstrație. Fie $\{A_1\} = AX \cap BC$, $\{B_1\} = BY \cap CA$, $\{C_1\} = CZ \cap AB$.

Deoarece

$$m(\angle BOX) = m(\angle OCX) = \frac{1}{2}m(\angle BOC) = m(\angle A),$$

rezultă $m(\angle OBC) = 90^\circ - m(\angle BOX) = 90^\circ - m(\angle A)$ și

$$m(\angle CBX) = m(\angle BCX) = m(\angle A) - m(\angle OBC) = 2m(\angle A) - 90^\circ = \alpha.$$

Analog, $m(\angle ACY) = 2m(\angle B) - 90^\circ = \beta$ și $m(\angle AZB) = 2(\angle C) - 90^\circ = \gamma$.

Avem:

$$\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{S[ABX]}{S[ACX]} = \frac{\frac{1}{2} \cdot AB \cdot BX \cdot \sin(B + \alpha)}{\frac{1}{2} \cdot AC \cdot CX \cdot \sin(C + \alpha)} = \frac{AB \sin(B + \alpha)}{AC \sin(C + \alpha)}$$

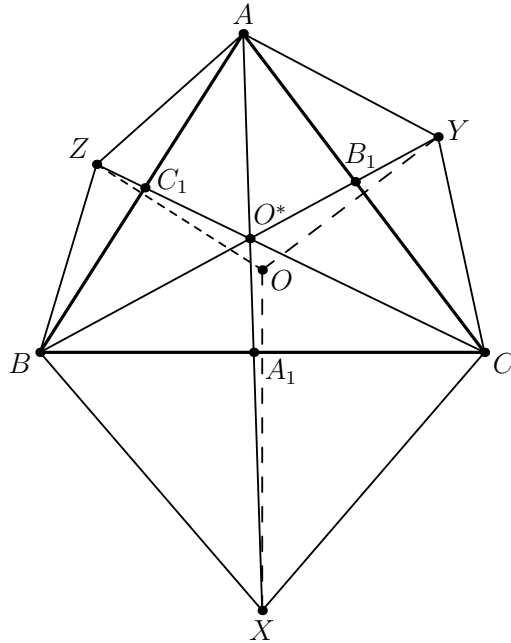


Figura 2.22

sau

$$\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{AB \cdot \cos(C - A)}{AC \cdot \cos(B - A)}.$$

Analog obținem

$$\frac{CB_1}{B_1A} = \frac{CB \cdot \cos(A - B)}{BA \cdot \cos(C - B)} \text{ și } \frac{C_1A}{C_1B} = \frac{CA \cdot \cos(B - C)}{CB \cdot \cos(A - C)}.$$

Ținând seama de paritatea funcției \cos , prin înmulțire rezultă imediat relația $\frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} \cdot \frac{C_1A}{C_1B} = 1$. Aplicând reciproca teoremei lui Ceva obținem că dreptele AX , BY și CZ sunt concurente. \square

Punctul de concurență al dreptelor AX , BY și CZ se numește *punctul lui Coșniță* al triunghiului ABC și este notat cu O^* . Deși descoperit relativ târziu, rezultat publicat în anul 1941, acest punct are proprietăți importante și este centrul $X(54)$ din ETC. Triunghiul XYZ se numește *triunghiul lui Coșniță* asociat triunghiului ABC . Dreptele AX , BY , CZ se numesc *dreptele lui Coșniță*.

Teorema 2.6.16. Raza R_A^* a cercului circumscris triunghiului BOC este egală cu $\frac{R}{2 \cos A}$.

Demonstrație. Triunghiul BOC fiind isoscel, avem:

$$R_A^* = XO = \frac{R \cdot R \cdot a}{4 \cdot S[BOC]} = \frac{R^2 \cdot a}{4 \cdot \frac{R^2 \cdot \sin 2A}{2}} = \frac{a}{2 \sin 2A} = \frac{2R \sin A}{2 \sin A \cos A} = \frac{R}{2 \cos A}.$$

□

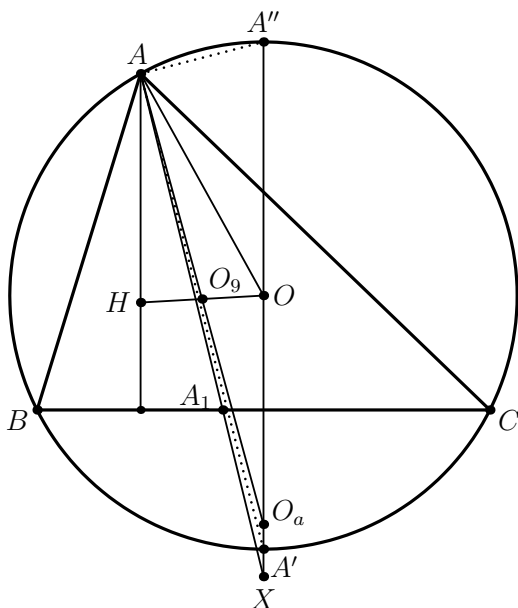


Figura 2.23

Teorema 2.6.17. Într-un triunghi ABC , punctul lui Coșniță O^* și centrul cercului lui Euler O_9 sunt izogonal conjugate.

Demonstrație. Fie A' și A'' punctele de intersecție dintre bisectoarele interioară și exterioară a unghiului $\sphericalangle A$ cu cercul circumscris triunghiului ABC și O_a centrul cercului circumscris triunghiului BHC . Deoarece patrulaterul AHO_aO este paralelogram (vezi observațiile de după Teorema 2.6.6), rezultă că punctele A, O_9, O_a sunt coliniare.

Fie X centrul cercului circumscris triunghiului BOC . Din Teorema 2.6.16 avem $OX = \frac{R}{2\cos A}$. În plus, $XA' = XO - R$ și $OO_a = AH = 2R\cos A$. Atunci,

$$\frac{A''O_a}{A''X} = \frac{A'O_a}{A'X} = 2R\cos A,$$

și cum $m(\angle A'AA'') = 90^\circ$, rezultă că dreptele AA' și AA'' sunt bisectoarele unghiurilor $\angle XAO_a$, respectiv $\angle O_aAP$, unde $P \in (BA \setminus [AB])$. Prin urmare $\angle XAA' \equiv \angle A'AO_a$ sau $\angle XAA' \equiv \angle A'AO_9$, adică dreptele AX și AO_9 sunt izogonale. Analog se arată că dreptele BY și BO_9 sunt izogonale, deci punctul lui Coșniță O^* și centrul cercului lui Euler O_9 sunt izogonal conjugate. \square

2.7 Exerciții și probleme

1. Fie P un punct situat pe coarda comună a două cercuri secante. Considerăm corzile KM și LN care trec prin P și sunt situate în cercuri diferite. Arătați că punctele K, L, M, N sunt conciclice.
2. Linia mijlocie a triunghiului ABC intersectează cercul circumscris triunghiului în punctele M și N . Să se determine lungimea segmentului $[MN]$ în funcție de lungimile laturilor triunghiului ABC .
3. Fie A_1 piciorul bisectoarei unghiului \widehat{BAC} în triunghiul ABC . Cercurile circumscrise triunghiurilor AA_1B și AA_1C intersectează laturile AC și AB în punctele M respectiv N . Demonstrați că $BN = CM$.
4. Fie A și B două puncte fixe situate pe diametrul cercului $\mathcal{C}(O, R)$ astfel încât $AO = BO$. Fie M și N două puncte arbitrare situate pe cerc, în același semiplan determinat de dreapta AB astfel încât $AM \parallel BN$. Să se arate că produsul $AM \cdot BN$ este constant.
5. Două cercuri se intersectează în punctele A și B și au tangenta comună MN . Demonstrați că dreapta AB trece prin mijlocul segmentului $[MN]$.
6. Fie P un punct exterior unui cerc și PA tangenta la cerc. Fie $[BC]$ coarda paralelă cu PA . Dreptele PB și PC intersectează din nou cercul în K respectiv L . Demonstrați că dreapta KL trece prin mijlocul lui $[PA]$.

-
7. Fiind dat un cerc \mathcal{C} și punctele A, B situate în exterior, considerăm o dreaptă variabilă prin A care intersectează cercul în M și N . Arătați că cercurile circumscrise triunghiurilor BMN au un punct comun, diferit de B .
 8. Fie $ABCD$ un paralelogram cu $AC > BD$. Fie $M \in AC$ astfel încât patrulaterul $BCDM$ este inscriptibil. Să se demonstreze că BD este tangenta comună a cercurilor circumscrise triunghiurilor ABM și ADM .
 9. Să se demonstreze că într-un triunghi ABC , dreptele O_0G și AI sunt perpendiculare dacă și numai dacă $\hat{A} = \frac{\pi}{3}$.
 10. Considerăm cercurile $\mathcal{C}(O, R)$ și $\mathcal{C}(O', R')$ astfel încât $O \in \mathcal{C}(O', R')$. Tangentele comune la aceste două cercuri intersectează $\mathcal{C}(O', R')$ în A și B . Demonstrați că AB este tangentă la $\mathcal{C}(O, R)$.

Geometria patrulaterului

3

3.1 Definiții. Patrulatere particulare

Patrulaterul este configurația geometrică plană definită de o linie poligonală închisă formată din patru segmente. Avem astfel că patrulaterul $ABCD$ este reuniunea segmentelor

$$[AB] \cup [BC] \cup [CD] \cup [DA],$$

unde A, B, C, D sunt puncte distincte în plan.

Elementele care definesc patrulaterul $ABCD$ sunt următoarele:

- A, B, C, D – vârfurile patrulaterului;
- $[AB], [BC], [CD], [DA]$ – laturile patrulaterului;
- $[AC], [BD]$ – diagonalele patrulaterului;
- $\widehat{ABC}, \widehat{BCD}, \widehat{CDA}, \widehat{DAB}$ – unghiurile patrulaterului.

O primă clasificare a patrulaterelor este dată de proprietatea de a avea sau nu puncte de autointersecție. În prima situație patrulatele se numesc *complexe* iar în a doua situație se numesc *simple*. Pe parcursul acestei lucrări vom studia doar patrulaterul simplu.

Definiția 3.1.1. Spunem că patrulaterul $ABCD$ este *convex* dacă dreptele suport ale laturilor nu intersectează nici una din celelalte laturi. Un patrulater care nu este convex se numește *concav*.

Patrulatere particulare

1) *Trapezul* este patrulaterul convex cu două laturi opuse paralele. Dacă avem trapezul $ABCD$ cu $AB \parallel CD$, atunci segmentele $[AB], [CD]$ se numesc *baze*. Segmentul determinat de dreapta perpendiculară pe baze este *înălțimea* trapezului.

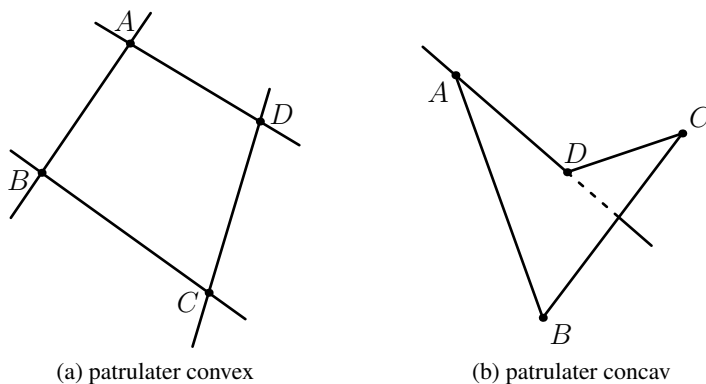


Figura 3.1

2) *Paralelogramul* este patrulaterul convex cu laturile opuse paralele două câte două.

Dintre paralelogramele particulare frecvent întâlnite în rezolvări de probleme, avem:

- dreptunghiul: paralelogramul cu un unghi drept;
- romb: paralelogramul cu toate laturile congruente;
- pătratul: dreptunghiul cu toate laturile congruente.

Dacă patrulaterul $ABCD$ nu este trapez considerăm $AB \cap CD = \{E\}$ și $BC \cap DA = \{F\}$. În acest caz spunem că am completat patrulaterul și obținem trei diagonale: AC , BD , EF .

Vom folosi notația: $ABCD; EF$, pentru patrulaterul completat din $ABCD$.

Definiția 3.1.2. Segmentul care unește mijloacele a două laturi opuse sau mijloacele diagonalelor se numește *bimediană*.

Cele trei bimediane sunt concurente într-un punct G numit *centrul de greutate* al patrulaterului. Acesta este mijlocul celor trei bimediane, proprietate care rezultă imediat considerând paralelogramele determinate de mijloacele laturilor patrulaterului, respectiv doua mijloace de laturi opuse și mijloacele diagonalelor.

Definiția 3.1.3. 1) Patrulaterul $ABCD$ este *inscriptibil* dacă vârfurile sale sunt situate pe un cerc.

2) Patrulaterul $ABCD$ este *circumscribibil* dacă există un cerc tangent la fiecare din cele patru laturi ale sale.

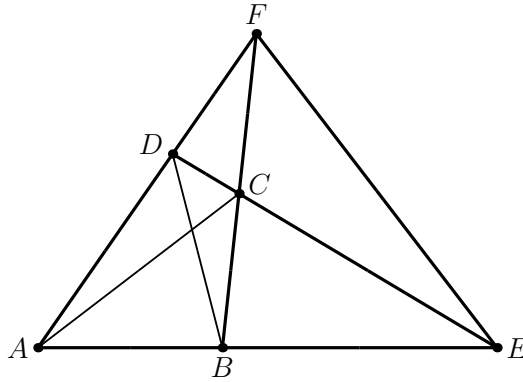


Figura 3.2

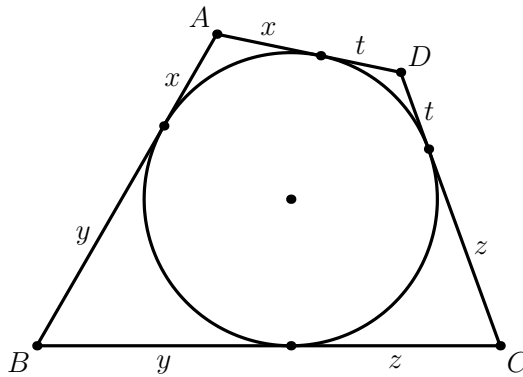


Figura 3.3

Observația 3.1.4. 1) Patrulaterul $ABCD$ este inscriptibil dacă și numai dacă avem $\widehat{BAD} + \widehat{BCD} = 180^\circ$.

2) Avem că patrulaterul $ABCD$ este circumscriptibil dacă și numai dacă are loc relația $AB + CD = BC + AD$.

3.2 Patrulaterul inscriptibil

Un patrulater este inscriptibil dacă și numai dacă mediatoarele laturilor sunt concurente. Evident, este suficient doar ca trei mediatoare să fie concurente.

Punctul de intersecție este centrul cercului circumscris.

Această proprietate rezultă din proprietatea de loc geometric a mediatoarei unui segment.

Numim *antimediatoare* a unei laturi a patrulaterului convex $ABCD$, dreapta care trece prin mijlocul acelei laturi și este perpendiculară pe latura opusă ei.

Teorema 3.2.1. *Patrulaterul convex $ABCD$ este inscriptibil dacă și numai dacă antimediatoarele laturilor sale sunt concurente.*

Demonstrație. " \Rightarrow " Fie A', C' mijloacele laturilor $[AD]$ și $[BC]$ și $A'A'' \perp BC$, $C'C'' \perp AD$, unde $A'' \in BC$, $C'' \in AD$.

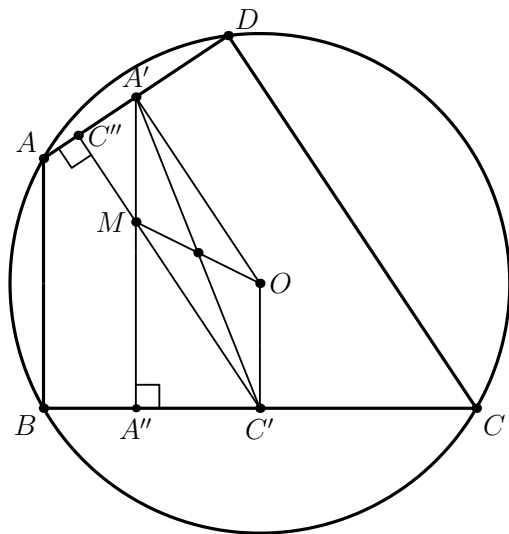


Figura 3.4

Considerăm O centrul cercului circumscris patrulaterului, OA' mediatoarea segmentului $[AD]$ și OC' mediatoarea segmentului $[BC]$.

Avem că $A'MC'O$ este paralelogram ($A'A'' \parallel OC'$, $C'C'' \parallel OA'$), deci M este simetricul lui O față de mijlocul bimediane $[A'C']$.

În mod analog, considerând antimediatoarele $[B'B'']$ și $[D'D'']$ obținem că intersecția lor este simetricul lui O față de mijlocul bimediane $[B'D']$. Dar bimedianele se înjumătățesc, intersectându-se în centrul de greutate al patrulaterului, deci cele patru antimediatoare sunt concurente în punctul M .

" \Leftarrow " În demonstrație vom folosi o proprietate care leagă mediatoarea unei laturi și antimediatorea laturii opuse.

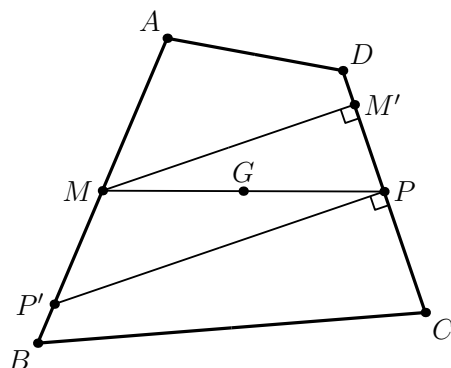


Figura 3.5

Fie M mijlocul lui $[AB]$, P mijlocul lui $[CD]$, G mijlocul lui $[MP]$ (centrul de greutate al patrulaterului), $MM' \parallel PP'$ ($MM' \perp CD$, $PP' \perp CD$).

Deoarece $MG \equiv GP$, rezultă că simetrica antimediatorei MM' față de G este mediatoarea laturii opuse.

Dacă patru drepte sunt concurente, atunci transformatele lor printr-o simetrie centrală sunt de asemenea concurente. În concluzie, dacă antimediatorele laturilor sunt concurente, atunci mediatoarele laturilor sunt concurente, deci patrulaterul este inscriptibil. \square

Dacă patrulaterul $ABCD$ este inscriptibil, punctul de intersecție al antimediatorelor laturilor sale se numește *anticentrul* sau *punctul lui Mathot* al patrulaterului.

Observația 3.2.2. 1) În Teorema 3.2.1 este suficient să considerăm doar trei antimediatore.

2) Din demonstrația Teoremei 3.2.1 rezultă faptul că punctul lui Mathot este simetricul centrului cercului circumscris patrulaterului față de centrul de greutate al acestuia.

3) Folosind faptul că bimediana determinată de mijloacele diagonalelor se înjumătățește în G , putem adăuga și proprietatea: prin punctul lui Mathot trec și perpendicularele duse din mijlocul unei diagonale pe cealaltă diagonală.

3.3 Inegalitatea lui Ptolemeu. Teoremele lui Ptolemeu

Teorema 3.3.1. (inegalitatea lui Ptolemeu) În patrulaterul convex $ABCD$ are loc inegalitatea:

$$AC \cdot BD \leq AB \cdot CD + AD \cdot BC. \quad (1)$$

Demonstrație.

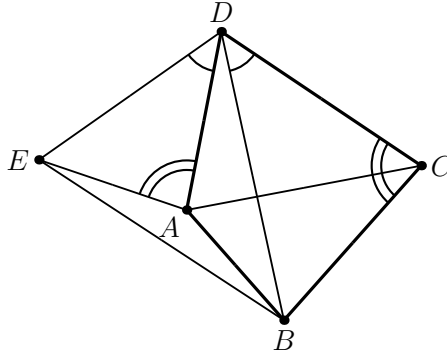


Figura 3.6

Construim triunghiul ADE astfel încât

$$\begin{cases} \widehat{EDA} \equiv \widehat{BDC} \\ \widehat{EAD} \equiv \widehat{BCD} \end{cases}$$

Din construcție, avem $\triangle EAD \sim \triangle BCD$, deci

$$\frac{ED}{BD} = \frac{AD}{DC} = \frac{EA}{BC} \quad \text{deci obținem} \quad \frac{ED}{AD} = \frac{BD}{DC}. \quad (2)$$

Rezultă $\triangle EDB \sim \triangle ADC$, deoarece avem

$$\begin{cases} \widehat{EDB} \equiv \widehat{ADC} \\ \frac{ED}{AD} = \frac{DB}{DC} \end{cases} \quad \text{prin urmare} \quad \frac{ED}{AD} = \frac{DB}{DC} = \frac{EB}{AC}.$$

Obținem astfel

$$EA = \frac{AD \cdot BC}{DC}, \quad EB = \frac{DB \cdot AC}{DC}$$

În triunghiul EAB aplicăm inegalitatea triunghiului și obținem

$$EB \leq EA + AB \Rightarrow \frac{DB \cdot AC}{DC} \leq \frac{AD \cdot BC}{DC} + AB,$$

prin urmare

$$AC \cdot DB \leq AB \cdot CD + AD \cdot BC.$$

□

Observația 3.3.2. Avem egalitate în (2) dacă și numai dacă are loc relația

$$EB = EA + AB,$$

adică punctele E, A, B sunt coliniare.

Această proprietate este echivalentă cu

$$\widehat{BCD} \equiv \widehat{DAE} \text{ și } E \in AB, \text{ deci } \widehat{BCD} + \widehat{DAB} = 180^\circ,$$

prin urmare $ABCD$ este patrulater inscriptibil, proprietate cunoscută și sub denumirea de prima teoremă a lui Ptolemeu.

Obținem astfel, următorul criteriu de inscriptibilitate:

Teorema 3.3.3. (prima teoremă a lui Ptolemeu) *Patrulaterul convex $ABCD$ este inscriptibil dacă și numai dacă are loc relația*

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC. \quad (3)$$

Următorul rezultat generalizează inegalitatea lui Ptolemeu.

Teorema 3.3.4. (relația lui Bretschneider) *În patrulater convex $ABCD$ are loc relația:*

$$AC^2 \cdot BD^2 = AB^2 \cdot CD^2 + BC^2 \cdot DA^2 - 2AB \cdot CD \cdot BC \cdot DA \cdot \cos(\widehat{A} + \widehat{C}). \quad (4)$$

Demonstrație. Folosim construcția din demonstrația inegalității lui Ptolemeu și avem

$$EA = \frac{AD \cdot BC}{DC}, \quad EB = \frac{DB \cdot AC}{DC}.$$

În triunghiul EAB avem relația $\widehat{EAB} = 360^\circ - \widehat{A} - \widehat{C}$. Aplicăm teorema cosinusului și obținem

$$EB^2 = EA^2 + AB^2 - 2EA \cdot AB \cdot \cos \widehat{EAB} = EA^2 + AB^2 - 2EA \cdot AB \cdot \cos(\widehat{A} + \widehat{C}).$$

Rezultă astfel

$$\frac{BD^2 \cdot AC^2}{DC^2} = \frac{AD^2 \cdot BC^2}{DC^2} + AB^2 - 2 \cdot \frac{AD \cdot BC}{DC} \cdot AB \cdot \cos(\widehat{A} + \widehat{C}),$$

adică

$$AC^2 \cdot BD^2 = AD^2 \cdot BC^2 + AB^2 \cdot CD^2 - 2AB \cdot CD \cdot AD \cdot BC \cdot \cos(\widehat{A} + \widehat{C}).$$

□

Observația 3.3.5. 1) Din relația (4) obținem, ținând seama că $|\cos(\widehat{A} + \widehat{C})| \leq 1$,

$$\begin{aligned} AC^2 \cdot BD^2 &\leq AB^2 \cdot CD^2 + BC^2 \cdot DA^2 + 2AB \cdot BC \cdot CD \cdot DA \cdot |\cos(\widehat{A} + \widehat{C})| \\ &\leq AB^2 \cdot CD^2 + BC^2 \cdot DA^2 + 2AB \cdot BC \cdot CD \cdot DA = (AB \cdot CD + BC \cdot DA)^2 \end{aligned}$$

deci

$$AC \cdot BD \leq AB \cdot CD + BC \cdot DA,$$

adică inegalitatea lui Ptolemeu.

2) Patrulaterul $ABCD$ este inscriptibil dacă și numai dacă $\widehat{A} + \widehat{C} = 180^\circ$, adică $\cos(\widehat{A} + \widehat{C}) = -1$. Rezultă astfel

$$AC^2 \cdot BD^2 = AB^2 \cdot CD^2 + BC^2 \cdot DA^2 + 2AB \cdot BC \cdot CD \cdot DA,$$

adică

$$AC \cdot BD = BC \cdot DA + AB \cdot CD,$$

deci $ABCD$ este inscriptibil dacă și numai dacă are loc relația lui Ptolemeu.

Teorema 3.3.6. (a doua teoremă a lui Ptolemeu) *Patrulaterul convex $ABCD$ este inscriptibil dacă și numai dacă are loc relația*

$$\frac{AC}{BD} = \frac{AB \cdot AD + CB \cdot CD}{BA \cdot BC + DA \cdot DC}. \quad (5)$$

Demonstrație. Presupunem că patrulaterul $ABCD$ este inscriptibil în cercul de rază R . Avem

$$S[ABCD] = S[ADB] + S[BDC] = \frac{AD \cdot DB \cdot AB}{4R} + \frac{BD \cdot DC \cdot BC}{4R}$$

și

$$S[ABCD] = S[ABC] + S[ACD] = \frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4R} + \frac{AC \cdot AD \cdot DC}{4R},$$

de unde obținem

$$\frac{BD}{4R}(AD \cdot AB + DC \cdot BC) = \frac{AC}{4R}(AB \cdot BC + AD \cdot CD),$$

relație care ne conduce la (5).

Reciproc, să presupunem că patrulaterul $ABCD$ nu este inscriptibil. Dacă avem $\widehat{A} + \widehat{C} > 180^\circ$, atunci $\frac{\widehat{A} + \widehat{C}}{2} > 90^\circ$. Pe de altă parte avem $\left| \frac{\widehat{A} - \widehat{C}}{2} \right| < 90^\circ$, deci obținem

$$\cos \widehat{A} + \cos \widehat{C} = 2 \cos \frac{\widehat{A} + \widehat{C}}{2} \cos \frac{\widehat{A} - \widehat{C}}{2} < 0.$$

Aplicăm teorema cosinusului în triunghiurile DAB , DCB și obținem

$$\frac{d^2 + a^2 - f^2}{2ad} + \frac{c^2 + b^2 - f^2}{2cb} < 0,$$

adică

$$bc(a^2 + d^2) + ad(b^2 + c^2) < f^2(ad + bc), \quad (6)$$

unde $a = AB$, $b = BC$, $c = CD$, $d = DA$, $e = AC$, $f = BD$.

Un calcul simplu arată că inegalitatea (6) este echivalentă cu

$$(ac + bd)(ab + cd) < f^2(ad + bc). \quad (7)$$

Din inegalitatea lui Ptolemeu avem $ef < ac + bd$, relație care înmulțită cu $ab + cd$, ne conduce la

$$ef(ab + cd) < (ac + bd)(ab + cd),$$

de unde, ținând seama de (7), obținem

$$ef(ab + cd) < (ac + bd)(ab + cd) < f^2(ad + bc).$$

Prin urmare, are loc inegalitatea

$$\frac{e}{f} < \frac{ad + bc}{ab + cd}.$$

Procedând analog în cazul $\widehat{A} + \widehat{C} < 180^\circ$, obținem inegalitatea

$$\frac{e}{f} > \frac{ad + bc}{ab + cd}.$$

Rezultă că dacă patrulaterul $ABCD$ nu este inscriptibil, atunci nu are loc relația (6) și demonstrația este completă. \square

3.4 Relații metrice în patrulater

Teorema 3.4.1. (relația lui Euler) Fie M, N mijloacele diagonalelor patrulaterului convex $ABCD$. Atunci are loc relația:

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + 4MN^2. \quad (8)$$

Demonstrație.

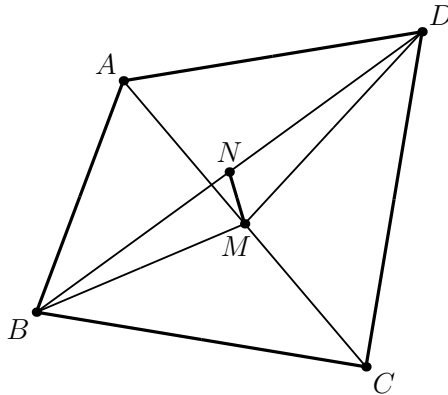


Figura 3.7

În triunghiul BMD , segmentul $[MN]$ este mediană. Din teorema medianei avem succesiv

$$\begin{aligned} 4MN^2 &= 2(BM^2 + DM^2) - BD^2 \\ &= \frac{2}{4}(2(AB^2 + BC^2) - AC^2 + 2(CD^2 + DA^2) - AC^2) - BD^2 \\ &= AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 - AC^2 - BD^2, \end{aligned}$$

prin urmare

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + 4MN^2. \quad \square$$

Corolarul 3.4.2. *Patrulaterul $ABCD$ este paralelogram dacă și numai dacă are loc relația*

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2.$$

Demonstrație. Patrulaterul $ABCD$ este paralelogram dacă și numai dacă diagonalele sale se înjumătățesc, adică $MN = 0$, ceea ce combinat cu relația lui Euler ne conduce la concluzia dorită. \square

Teorema 3.4.3. (relația lui Leibniz) *Fie G centrul de greutate al patrulaterului $ABCD$. Pentru orice punct $X \in \mathcal{P}$ are loc relația:*

$$XA^2 + XB^2 + XC^2 + XD^2 = 4XG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2. \quad (9)$$

Demonstrație. Aplicând teorema medianei în triunghiul $XE F$ avem

$$\begin{aligned} 4XG^2 &= 2(XF^2 + XE^2) - EF^2 \\ &= 2\left(\frac{2(XA^2 + XC^2) - AC^2}{4} + \frac{2(XB^2 + XD^2) - BD^2}{4}\right) - EF^2 \\ &= XA^2 + XB^2 + XC^2 + XD^2 - \left(\frac{AC^2}{2} + \frac{BD^2}{2} + EF^2\right). \end{aligned} \quad (10)$$

Deoarece $[GE]$ este mediană în triunghiul BGD , avem relația

$$GE^2 = \frac{2(GB^2 + GD^2) - BD^2}{4}.$$

Cum $[GF]$ este mediană în triunghiul AGC , obținem

$$GF^2 = \frac{2(GA^2 + GC^2) - AC^2}{4}.$$

Prin urmare

$$GE^2 + GF^2 = \frac{1}{2}(GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2) - \frac{1}{4}(AC^2 + BD^2).$$

Pe de altă parte, avem

$$GE = GF = \frac{EF}{2}, \quad \text{deci} \quad GE^2 + GF^2 = \frac{2EF^2}{4}.$$

Obținem astfel

$$\frac{1}{2}EF^2 = \frac{1}{2}(GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2) - \frac{1}{4}(AC^2 + BD^2),$$

prin urmare

$$GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2 = EF^2 + \frac{1}{2}(AC^2 + BD^2). \quad (11)$$

Din relațiile (10) și (11) rezultă (9). \square

Propoziția 3.4.4. *Fie un număr real fixat k . Locul geometric al punctelor $M \in \mathcal{P}$ pentru care are loc relația*

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = k^2,$$

este un cerc, un punct sau mulțimea vidă.

Demonstrație. Considerăm funcția $f : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin $f(X) = XA^2 + XB^2 + XC^2 + XD^2$. Din teorema lui Leibniz rezultă

$$f(X) = 4XG^2 + f(G).$$

Dacă $f(M) = k^2$ atunci din relația $4MG^2 + f(G) = k^2$ obținem

$$MG^2 = \frac{k^2 - f(G)}{4}.$$

Avem de considerat următoarele cazuri.

- 1) Dacă $k^2 < f(G)$, atunci locul geometric este \emptyset .
- 2) Dacă $k^2 = f(G)$, atunci $MG = 0$, adică $M = G$, atunci locul geometric este $\{G\}$.
- 3) Dacă $k^2 > f(G)$, atunci locul geometric este cercul $\mathcal{C} \left(G, \sqrt{\frac{k^2 - f(G)}{4}} \right)$. \square

Teorema 3.4.5. (formula lui Arhimede) Fie $ABCD$ un patrulater convex $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, și $s = \frac{1}{2}(a + b + c + d)$ semiperimetrul acestuia.

Atunci are loc formula:

$$S[ABCD] = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcd \cos^2 \left(\frac{B+D}{2} \right)}. \quad (12)$$

Demonstrație. Descompunem patrulaterul în două triunghiuri după diagonala $[AC]$ și avem

$$S[ABCD] = S[ABC] + S[ACD] = \frac{1}{2}ab \sin B + \frac{1}{2}cd \sin D,$$

de unde prin ridicare la pătrat obținem

$$16S^2[ABCD] = 4a^2b^2 \sin^2 B + 4c^2d^2 \sin^2 D + 8abcd \sin B \sin D. \quad (13)$$

În $\triangle ABC$, $\triangle ADC$ aplicăm teorema cosinusului și găsim

$$AC^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos B = c^2 + d^2 - 2cd \cos D,$$

deci

$$a^2 + b^2 - c^2 - d^2 = 2ab \cos B - 2cd \cos D.$$

Prin urmare

$$(a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 = 4a^2b^2 \cos^2 B + 4c^2d^2 \cos^2 D - 8abcd \cos B \cos D \quad (14)$$

Adunăm relațiile (13) și (14) și obținem:

$$\begin{aligned} 16S^2[ABCD] + (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 &= 4a^2b^2(\underbrace{\cos^2 B + \sin^2 B}_{=1}) \\ &\quad + 4c^2d^2(\underbrace{\cos^2 D + \sin^2 D}_{=1}) - 8abcd(\cos B \cos D - \sin B \sin D) \\ &= 4a^2b^2 + 4c^2d^2 - 8abcd \cos(B + D). \end{aligned}$$

Rezultă astfel

$$16S^2[ABCD] = -(a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 + 4a^2b^2 + 4c^2d^2 - 8abcd \cos(B + D)$$

$$\begin{aligned}
&= -(a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 + (2ab + 2cd)^2 - 8abcd - 8abcd \cos(B + D) \\
&= -(a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 + (2ab + 2cd)^2 - 8abcd(1 + \cos(B + D)) \\
&= -(a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 + (2ab + 2cd)^2 - 16abcd \cos^2 \frac{B + D}{2}. \quad (15)
\end{aligned}$$

Observăm că avem

$$\begin{aligned}
&(2ab + 2cd)^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 \\
&= (2ab + 2cd + a^2 + b^2 - c^2 - d^2)(2ab + 2cd - a^2 - b^2 + c^2 - d^2) \\
&= [(2ab + a^2 + b^2) - (c^2 + d^2 - 2cd)][(2cd + c^2 + d^2) - (a^2 + b^2 - 2ab)] \\
&= [(a + b)^2 - (c - d)^2][(c + d)^2 - (a - b)^2] \\
&= (a + b + c - d)(a + b - c + d)(a - b + c + d)(-a + b + c + d) \\
&= 16(s - a)(s - b)(s - c)(s - d).
\end{aligned}$$

Înlocuind în (15), obținem

$$16S^2[ABCD] = 16(s - a)(s - b)(s - c)(s - d) - 16abcd \cos^2 \frac{B + D}{2},$$

prin urmare

$$S[ABCD] = \sqrt{(s - a)(s - b)(s - c)(s - d) - abcd \cos^2 \left(\frac{B + D}{2} \right)}.$$

□

Corolarul 3.4.6. *Dintre toate patrulaterele de laturi a, b, c, d , aria maximă o are patrulaterul inscriptibil.*

Demonstrație. Într-adevăr, avem

$$-abcd \cos^2 \frac{B + D}{2} \leq 0, \quad \text{deci} \quad S[ABCD] \leq \sqrt{(s - a)(s - b)(s - c)(s - d)}.$$

Maximul se atinge dacă și numai dacă

$$\cos \frac{B + D}{2} = 0, \quad \text{adică} \quad B + D = 180^\circ,$$

ceea ce este echivalent cu faptul că patrulaterul $ABCD$ este inscriptibil.

□

3.5 Centrul de greutate al unui patrulater

*Mediane*le unui patrulater sunt segmentele care unesc vârfurile patrulaterului cu centrele de greutate ale triunghiurilor opuse. Un patrulater are astfel patru mediane.

Am văzut că bimedianele unui patrulater sunt segmentele care unesc mijloacele laturilor opuse și mijloacele diagonalelor. Bimedianele sunt concurente într-un punct G situat la mijlocul fiecăreia dintre ele, numit centrul de greutate al patrulaterului.

Propoziția 3.5.1. 1) *Medianele unui patrulater sunt concurente în centrul de greutate G al patrulaterului.*

2) *Are loc relația:*

$$\frac{GG_1}{GD} = \frac{GG_2}{GC} = \frac{GG_3}{GA} = \frac{GG_4}{GB} = \frac{1}{3},$$

unde G_1, G_2, G_3, G_4 sunt centrele de greutate ale triunghiurilor ABC, ABD, BCD, ACD .

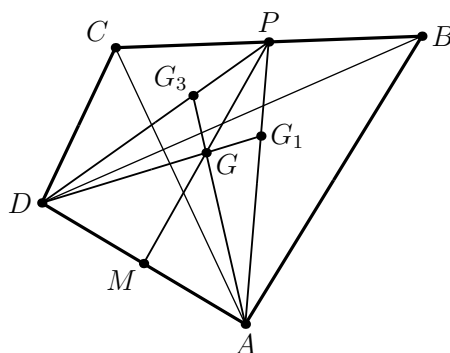


Figura 3.8

Demonstrație. 1) Aplicăm reciproca teoremei lui Ceva în triunghiul PAD . Avem

$$\frac{MA}{MD} \cdot \frac{G_3D}{G_3P} \cdot \frac{G_1P}{G_1C} = 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 1,$$

deci dreptele PM, AG_2, DG_1 sunt concurente.

Fie X punctul de concurență a dreptelor PM, AG_2, DG_1 .

Aplicăm teorema lui Menelaus în $\triangle PMA$ cu punctele D, X, G_1 . Avem

$$\frac{DM}{DA} \cdot \frac{G_1A}{G_1P} \cdot \frac{XP}{XM} = 1,$$

adică

$$\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{XP}{XM} = 1, \quad \text{prin urmare} \quad \frac{XP}{XM} = 1.$$

Rezultă astfel $X \equiv G$.

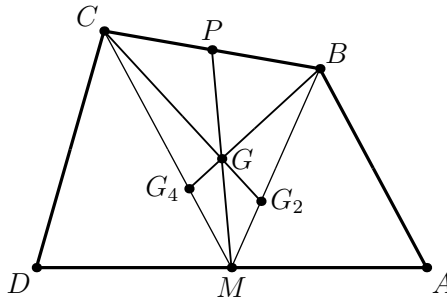


Figura 3.9

2) În $\triangle BG_2C$ cu punctele P, G, M aplicăm teorema lui Menelaus. Avem

$$\frac{PB}{PC} \cdot \frac{GC}{GG_2} \cdot \frac{MG_2}{MB} = 1,$$

deci

$$1 \cdot \frac{GC}{GG_2} \cdot \frac{1}{3} = 1 \quad \text{adică} \quad \frac{GG_2}{GC} = \frac{1}{3}.$$

□

Lungimile bimedianelor

Fie $ABCD$ un patrulater. Notăm mijloacele laturilor $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$ cu M, N, P, Q și mijloacele diagonalelor $[AC]$ și $[BD]$ cu E și F .

Notăm:

$$AB = a, \quad BC = b, \quad CD = c, \quad DA = d, \quad AC = e, \quad BD = f.$$

Au loc relațiile:

$$1) a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = e^2 + f^2 + 4EF^2 \text{ (Euler)}$$

$$2) e^2 + f^2 + b^2 + d^2 = a^2 + c^2 + 4MP^2, e^2 + f^2 + a^2 + c^2 = b^2 + d^2 + 4NQ^2.$$

1) Segmentul EF este mediană în $\triangle BED$. Aplicăm teorema medianei:

$$EF^2 = \frac{2(ED^2 + EB^2) - BD^2}{4}$$

$$4EF^2 = 2 \left(\frac{2(DC^2 + DA^2) - AC^2}{4} + \frac{2(AB^2 + BC^2) - AC^2}{4} \right) - BD^2,$$

deci

$$4EF^2 = c^2 + d^2 - \frac{e^2}{2} + a^2 + b^2 - \frac{e^2}{2} - f^2,$$

adică

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = e^2 + f^2 + 4EF^2.$$

2) Procedăm în mod analog pentru a demonstra relațiile de la 2).

Consecințe

a) Un patrulater este paralelogram dacă și numai dacă suma pătratelor laturilor este egală cu suma pătratelor lungimilor diagonalelor. Într-adevăr, dacă $ABCD$ este paralelogram, atunci $EF = 0$, adică avem

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = e^2 + f^2.$$

b) Pentru orice patrulater $ABCD$, are loc inegalitatea

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq e^2 + f^2,$$

cu egalitatea dacă și numai dacă $ABCD$ este paralelogram.

c) Au loc relațiile

$$1) 2(MP^2 + NQ^2) = e^2 + f^2;$$

$$2) 2(MP^2 - NQ^2) = (b^2 + d^2) - (a^2 + c^2);$$

$$3) e^2 + f^2 + b^2 + d^2 > a^2 + c^2; e^2 + f^2 + a^2 + c^2 > b^2 + d^2.$$

Propoziția 3.5.2. Fie $ABCD$ patrulater convex. Atunci sunt echivalente afirmațiile:

a) patrulaterul este ortodiagonal (adică diagonalele sunt perpendiculare);

b) $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$;

c) bimedianele laturilor opuse sunt congruente.

Demonstrație. Notăm mijloacele laturilor $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$ cu M , N , P , Q .

"a) \Leftrightarrow b)" Fie I punctul de intersecție al diagonalelor și $\alpha = \angle AIB$. Avem

$$a^2 = AI^2 + BI^2 - 2AI \cdot BI \cos \alpha, \quad b^2 = BI^2 + CI^2 + 2BI \cdot CI \cos \alpha,$$

$$c^2 = CI^2 + DI^2 - 2CI \cdot DI \cos \alpha, \quad d^2 = DI^2 + AI^2 + 2DI \cdot AI \cos \alpha,$$

prin urmare relația $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$ este echivalentă cu

$$(AI \cdot BI + BI \cdot CI + CI \cdot DI + DI \cdot AI) \cos \alpha = 0,$$

adică cu $\alpha = 90^\circ$.

"b) \Leftrightarrow c)" Folosind relația

$$2(MP^2 - NQ^2) = (b^2 + d^2) - (a^2 + c^2),$$

de mai sus, obținem că $MP = NQ$ dacă și numai dacă avem $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$. \square

3.6 Patrulaterul complet

Teorema 3.6.1. (dreapta Newton-Gauss) Fie $ABCD$ un patrulater convex cu laturile opuse neparalele. Notăm $AB \cap CD = \{E\}$ și $AD \cap BC = \{F\}$. Atunci mijloacele M , N , P ale segmentelor $[AC]$, $[BD]$ și $[EF]$ sunt coliniare.

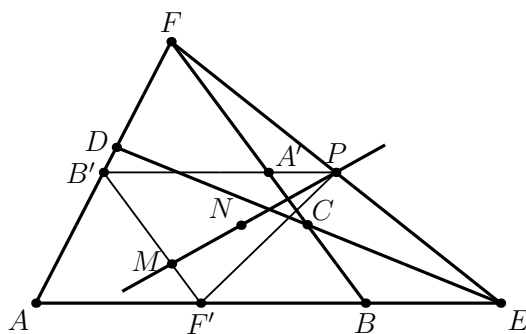


Figura 3.10

Demonstrație. Fie A' , B' , F' mijloacele segmentelor $[FB]$, $[FA]$ și $[AB]$.

În triunghiul ABF aplicăm teorema lui Menelaus cu punctele E, C, D coliniare. Obținem astfel

$$\frac{EB}{EA} \cdot \frac{DA}{DF} \cdot \frac{CF}{CB} = 1 \quad \text{adică} \quad \frac{\frac{EB}{2}}{\frac{EA}{2}} \cdot \frac{\frac{DA}{2}}{\frac{DF}{2}} \cdot \frac{\frac{CF}{2}}{\frac{CB}{2}} = 1. \quad (16)$$

Avem relațiile

$$\begin{aligned} \frac{EB}{2} &= PA', & \frac{EA}{2} &= PB', & \frac{DA}{2} &= NF, \\ \frac{DF}{2} &= NA', & \frac{CF}{2} &= MB, & \frac{CB}{2} &= MF. \end{aligned}$$

Relația (16) devine

$$\frac{PA'}{PB'} \cdot \frac{MB'}{MF'} \cdot \frac{NF'}{NA'} = 1,$$

adică punctele M, N, P sunt coliniare din reciproca teoremei lui Menelaus, aplicată în triunghiul $F'CB'$ cu punctele M, N, P . \square

Patrulaterul $ABCD$ împreună cu punctele E și F se numește *patrulater complet*. Dreapta determinată de punctele M, N, P este *dreapta Newton-Gauss* a patrulaterului.

Observația 3.6.2. Am ținut cont în cadrul demonstrației de faptul că punctele P, A' și B' sunt coliniare, punctele B', M și F' sunt coliniare și punctele F', N și C sunt coliniare, deoarece PB' este linie mijlocie în triunghiul FAE .

Teorema 3.6.3. (teorema patrulaterului complet) Fie patrulaterul complet $ABCD$: E, F și fie O și Q intersecțiile diagonalei AC cu celelalte două diagonale, $O \in BD$, $Q \in EF$. Atunci are loc relația:

$$\frac{OA}{OC} = \frac{QA}{QC}.$$

Demonstrație. Folosim teorema lui Menelaus în diferite triunghiuri care apar în această configurație.

În triunghiul ACE , punctele B, O, D sunt coliniare. Aplicăm teorema lui Menelaus și avem

$$\frac{OA}{OC} \cdot \frac{DC}{DE} \cdot \frac{BE}{BA} = 1, \quad \text{deci} \quad \frac{OA}{OC} = \frac{DE}{DC} \cdot \frac{BA}{BE}.$$

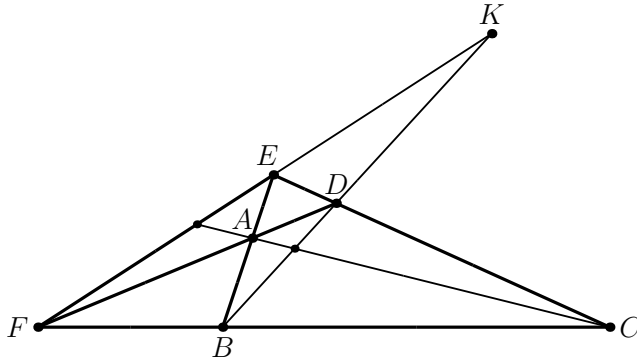


Figura 3.11

În triunghiul ACB , punctele F, Q, E sunt coliniare. Aplicăm teorema lui Menelaus și obținem

$$\frac{QA}{QC} \cdot \frac{FC}{FB} \cdot \frac{EB}{EA} = 1, \quad \text{adică} \quad \frac{QA}{QC} = \frac{FB}{FC} \cdot \frac{EA}{EB}.$$

Rezultă că

$$\frac{OA}{OC} = \frac{QA}{QC} \quad \text{dacă și numai dacă} \quad \frac{DE}{DC} \cdot \frac{BA}{BE} = \frac{FB}{FC} \cdot \frac{EA}{EB},$$

adică

$$\frac{DE}{DC} \cdot \frac{BA}{EA} \cdot \frac{FC}{FB} = 1, \quad \text{deci} \quad \frac{DE}{DC} \cdot \frac{FC}{FB} \cdot \frac{AB}{AE} = 1,$$

ultima relație fiind adevărată datorită teoremei lui Menelaus în triunghiul BCE cu transversala $F - A - D$. \square

Definiția 3.6.4. Fie A, B, C, D patru puncte coliniare. Dacă are loc relația

$$\frac{AC}{AD} = \frac{BC}{BD},$$

atunci spunem că punctele A și B sunt *conjugate armonice* în raport cu punctele C și D .

Evident punctele A, B sunt conjugate armonice în raport cu C, D dacă și numai dacă punctele C, D sunt conjugate armonice în raport cu A, B .

Observația 3.6.5. Teorema patrulaterului complet poate fi reformulată astfel: Într-un patrulater complet orice diagonală intersectează celelalte două diagonale în puncte care sunt conjugate armonic în raport cu vârfurile patrulaterului situate pe acea diagonală. Cu notațiile

$$\{O\} = AC \cap BD, \quad \{Q\} = AC \cap EF, \quad \{R\} = BD \cap EF,$$

avem următoarele proprietăți:

O, Q sunt conjugate armonic în raport cu A, C ;

O, R sunt conjugate armonic în raport cu B, D ;

Q, R sunt conjugate armonic în raport cu E, F .

3.7 Patrulaterul circumscriptibil

Patrulaterul în care se poate înscrie un cerc tangent la laturi se numește *circumscriptibil*.

Teorema 3.7.1. *Un patrulater este circumscriptibil dacă și numai dacă bisectoarele unghiurilor sale sunt concurente.*

Demonstrație. "⇒" Cum raza este perpendiculară pe tangentă în punctul de contact al acesteia cu cercul, rezultă că centrul cercului înscris este egal depărtat de laturile unghiului, deci se găsește pe bisectoarea aceluia unghi. În concluzie bisectoarele sunt concurente.

"⇐" Dacă există un punct de intersecție al bisectoarelor unghiurilor patrulaterului, atunci acesta este egal depărtat de toate laturile, deci putem construi un cerc ce are centrul în acest punct, iar laturile să fie tangente acestuia. \square

Teorema 3.7.2. (teorema lui Pithot) *Un patrulater $ABCD$ este circumscriptibil dacă și numai dacă sumele lungimilor laturilor opuse sunt egale, adică dacă și numai dacă are loc relația*

$$AB + CD = BC + AD.$$

Demonstrație. "⇒" Avem relațiile evidente

$$[AA'] \equiv [AD'], \quad [DD'] \equiv [DC'], \quad [CC'] \equiv [CB'], \quad [BB'] \equiv [BA'],$$

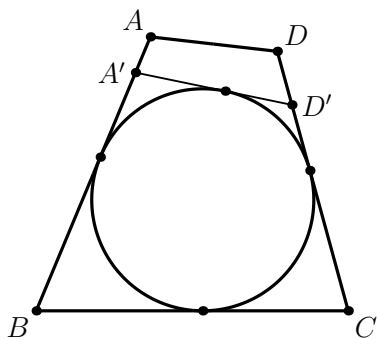


Figura 3.12

deci obținem

$$AD' + DD' + BB' + B'C = AA' + DC' + BA' + CC',$$

adică $AD + BC = BA + DC$.

” \Leftarrow ” Construim $A'BCD'$ patrulater circumscriptibil. Din implicația demonstrată mai sus avem

$$A'D' + BC = A'B + D'C. \quad (17)$$

Folosind relația din ipoteză $AD + BC = AB + DC$, obținem prin scădere

$$A'D' - AD = \pm AA' \pm DD'.$$

Dacă avem $A'D' - AD = AA' + DD'$, rezultă

$$A'D' = AA' + DD' + AD,$$

deci

$$AD = AA' + DD' + A'D'.$$

Prin urmare $AA'D'D$ este un patrulater convex degenerat, deci $[AD] = [A'D']$, adică cercul înscris este tangent la $[AD]$. \square

Teorema 3.7.3. (dreapta lui Newton) Într-un patrulater circumscriptibil bimediana determinată de mijloacele diagonalelor trece prin centrul cercului înscris (adică dreapta Newton-Gauss a patrulaterului trece prin centrul cercului înscris).

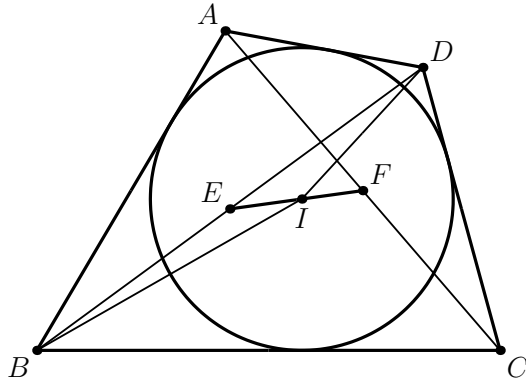


Figura 3.13

Demonstrație. Avem

$$S[IAB] + S[IDC] = \frac{S[ABCD]}{2}.$$

Notăm raza cercului înscris patrulaterului cu r și avem:

$$S[ABCD] = S[IAB] + S[IBC] + S[IDC] + S[IAD] = \frac{r}{2}(AB + BC + CD + DA).$$

Din teorema lui Pithot rezultă $BC + DA = AB + CD$, deci

$$S[ABCD] = 2 \cdot \frac{AB + CD}{2} \cdot r + 2S[IAB] + 2S[IDC],$$

prin urmare $I \in EF$, deci punctele I, E, F sunt coliniare. □

Teorema 3.7.4. (punctul lui Newton) Într-un patrulater circumscriptibil dreptele ce unesc punctele de tangență ale laturilor opuse cu cercul înscris și diagonalele sunt concurente.

Demonstrație. Fie $\{E\} = AC \cap B'D'$.

În triunghiurile AED' și $EB'C$ avem

$$m(\widehat{AED'}) = m(\widehat{B'EC}) \quad \text{și} \quad m(\widehat{AD'E}) = m(\widehat{EB'B}) = 180^\circ - m(\widehat{EB'C}).$$

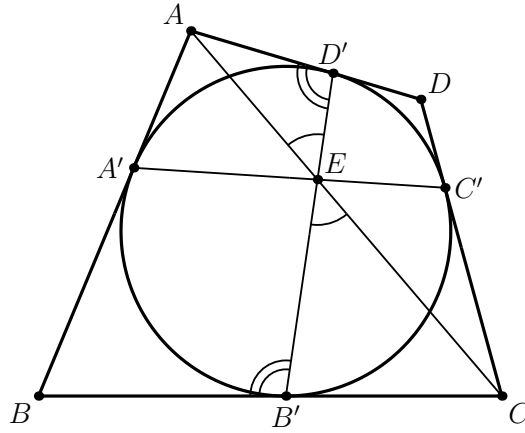


Figura 3.14

Aplicăm teorema sinusurilor în triunghiurile AED' și $EB'C$ și obținem

$$\frac{AD'}{\sin \widehat{AED'}} = \frac{AE}{\sin \widehat{AD'E}} \quad \text{sau} \quad \frac{AD'}{AE} = \frac{\sin \widehat{AED'}}{\sin \widehat{ADE}},$$

$$\frac{B'C}{\sin \widehat{B'EC}} = \frac{EC}{\sin \widehat{EB'C}} \quad \text{sau} \quad \frac{B'C}{EC} = \frac{\sin \widehat{B'EC}}{\sin \widehat{EB'C}}.$$

Cum $\sin(180^\circ - \widehat{EB'C}) = \sin \widehat{AD'E}$, rezultă

$$\frac{AD'}{AE} = \frac{B'C}{EC} \quad \text{sau} \quad \frac{AE}{EC} = \frac{AD'}{CB'}.$$

Notăm $\{E'\} = A'C' \cap AC$. Analog obținem că

$$\frac{AE'}{E'C} = \frac{AA'}{CC'}, \quad AA' = AD', \quad CB' = CC',$$

deci

$$\frac{AE'}{E'C} = \frac{AD'}{CB'}.$$

Rezultă astfel

$$\frac{AE}{EC} = \frac{AE'}{E'C}$$

și $E, E' \in AC$, prin urmare $E = E'$, deci AC trece prin punctul de intersecție al segmentelor $[A'C']$ și $[B'D']$.

Analog procedăm pentru BD . □

Punctul de concurență din teorema de mai sus se numește *punctul lui Newton* al patrulaterului.

3.8 Teorema lui Menelaus pentru patrulater

Teorema 3.8.1. (teorema lui Menelaus pentru patrulatere convexe) Fie $ABCD$ patrulater convex, d o dreaptă care nu trece prin vârfurile patrulaterului și care intersectează laturile $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$, sau prelungirile acestora, în punctele M, N, P, Q . Atunci are loc relația

$$\frac{MA}{MB} \cdot \frac{NB}{NC} \cdot \frac{PC}{PD} \cdot \frac{QD}{QA} = 1.$$

Demonstrație. Presupunem că dreapta d nu este paralelă cu AC și fie $\{R\} = d \cap AC$. În triunghiul ABC punctele N, M, R sunt coliniare. Aplicăm teorema lui Menelaus și obținem relația

$$\frac{MA}{MB} \cdot \frac{NB}{NC} \cdot \frac{RC}{RA} = 1 \tag{18}$$

În triunghiul ACD punctele Q, P, R sunt coliniare și prin aplicarea teoremei lui Menelaus obținem

$$\frac{PC}{PD} \cdot \frac{QD}{QA} \cdot \frac{RA}{RC} = 1 \tag{19}$$

Înmulțim relațiile (18) și (19) și obținem:

$$\frac{MA}{MB} \cdot \frac{NB}{NC} \cdot \frac{PC}{PD} \cdot \frac{QD}{QA} = 1,$$

ceea ce ne-am propus să demonstrăm. □

Observația 3.8.2. Nu se cunoaște o reciprocă a teoremei lui Menelaus pentru patrulater.

3.9 Exerciții și probleme

1. Fie $ABCD$ un trapez neisoscel cu bazele $[AB]$ și $[CD]$. Demonstrați relația

$$\frac{AC^2 - BD^2}{AD^2 - BC^2} = \frac{AB + CD}{AB - CD}.$$

2. Fie $ABCD$ un trapez cu bazele $[AB]$ și $[CD]$. Demonstrați că dacă $(AB + CD)^2 = BD^2 + CD^2$, atunci trapezul este ortodiagonal.
3. Hexagonul $ABCDEF$ este înscris într-un cerc. Lungimea laturii $[AB]$ este 31 iar toate celelalte laturi sunt de lungime 81. Determinați suma lungimilor diagonalelor din vârful A ale hexagonului.
4. Punctul P este situat pe arcul mic CD al cercului circumscris pătratului $ABCD$. Demonstrați ca $PA + PB = k(PC + PD)$, unde k este o constantă independentă de punctul P .
5. Fie $ABCD$ un patrulater convex și M, N, P, Q mijloacele laturilor $[AB], [BC], [CD], [DA]$. Demonstrați relația $AC^2 + BD^2 = 2(QN^2 + MP^2)$.
6. Fie $ABCD$ un patrulater înscris într-un cerc de centru O cu proprietatea că $AB = AD$. Dacă $BC \cap AO = \{M\}$ și $DC \cap AO = \{N\}$, demonstrați că are loc relația $\frac{MC}{MB} = \frac{NC}{NB}$.
7. Fie M un punct situat pe cercul circumscris patrulaterului $ABCD$ și A', B', C', D' proiecțiile lui M pe AB, BC, CD , respectiv DA . Demonstrați că:
- (i) dreptele $A'B', C'D', AC$ sunt concurente;
 - (ii) dreptele $B'C', D'A', BD$ sunt concurente.
8. Fie $ABCD$ un patrulater inscriptibil și ortodiagonal, cu lungimile laturilor a, b, c, d . Dacă O este punctul de intersecție al diagonalelor patrulaterului și $\rho(O)$ este puterea lui O față de cercul circumscris, atunci are loc relația

$$\rho(O) = \frac{2abcd}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}.$$

-
9. Două cercuri sunt tangente exterior în punctul T și pe tangenta comună în T se consideră punctele arbitrare A și B . Tangentele din A și B la cele două cercuri se intersectează în C și D . Demonstrați că patrulaterul $ABCD$ este circumscriptibil.
10. Fie $ABCD$ un patrulater convex, $AC \cap BD = \{O\}$ și M, N, P, Q proiecțiile punctului O pe laturile AB, BC, CA , respectiv DA . Demonstrați că patrulaterul $ABCD$ este inscriptibil dacă și numai dacă patrulaterul $MNPQ$ este circumscriptibil.

Probleme de extrem în geometria plană

4

4.1 Proprietatea de minim a patrulaterului convex

Teorema 4.1.1. (proprietatea de minim a patrulaterului convex) Fie $ABCD$ un patrulater convex și O punctul de intersecție al diagonalelor. Atunci O este unicul punct din planul patrulaterului cu proprietatea că suma distanțelor la vârfurile patrulaterului este minimă.

Demonstrație. Presupunem că $P \neq O$ și arătăm că

$$PA + PB + PC + PD > OA + OB + OC + OD.$$

În $\triangle PAC$, aplicăm inegalitatea triunghiului și avem

$$PA + PC \geq AC.$$

În $\triangle PBD$, aplicăm inegalitatea triunghiului și obținem

$$PB + PD \geq BD.$$

Cel puțin una dintre inegalitățile de mai sus este strictă, deoarece $P \neq O$. Rezultă astfel

$$PA + PB + PC + PD > AC + BD = OA + OB + OC + OD,$$

deci

$$PA + PB + PC + PD > OA + OB + OC + OD.$$

□

4.2 Proprietatea de minim a triunghiului ortic

Triunghiul ortic asociat unui triunghi ABC este triunghiul determinat de picioarele înălțimilor.

Teorema 4.2.1. (teorema lui Fagnano) *Dintre toate triunghiurile care au vârfurile pe laturile unui triunghi ascuțitunghic ABC , triunghiul ortic are perimetrul minim.*

Demonstrație.

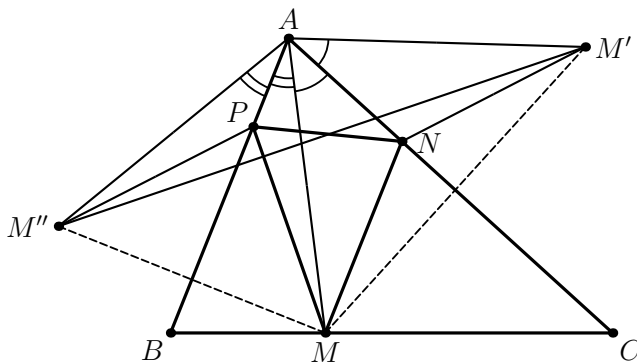


Figura 4.1

Vom arăta că $p_{\triangle MNP} \geq p_{\triangle M_1NP}$, unde M_1 este piciorul înălțimii din A . Fie M' simetricul lui M față de AC și M'' simetricul lui M față de AB . Avem $NM = NM'$, $PM = PM''$. Evident perimetrul triunghiului MNP este lungimea liniei frântă $M''PNM'$. Triunghiul $M'AM''$ este isoscel și $\widehat{M'AM''} = 2\hat{A}$. Observăm că

$$p_{\triangle MNP} = M'N + NP + PM'' \geq M'M''.$$

Determinăm poziția lui M pe BC astfel încât lungimea $M'M''$ să fie minimă. Din teorema cosinusului avem:

$$\begin{aligned} M'M''^2 &= AM'^2 + AM''^2 - 2AM' \cdot AM'' \cos 2A \\ &= 2AM^2 - 2AM^2 \cos 2A \\ &= 2AM^2(1 - \cos 2A) \\ &= 4AM^2 \sin^2 A, \end{aligned}$$

prin urmare $M'M'' = 2AM \sin A$. Rezultă astfel că $M'M''$ este minimă dacă și numai dacă AM este minimă, adică M este piciorul înălțimii din A . Obținem că $p_{\triangle MNP}$ este minim dacă și numai dacă M este piciorul înălțimii din A .

În mod analog, pentru vârful B , rezultă că N este piciorul înălțimii din B , iar pentru vârful C , P este piciorul înălțimii din C . \square

4.3 Proprietăți de extrem pentru centrul de greutate al unui triunghi

Teorema 4.3.1. *Fiind dat $\triangle ABC$, centrul său de greutate este singurul punct din plan care minimizează suma pătratelor la vârfurile triunghiului, adică avem*

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 \text{ minimă} \Leftrightarrow M = G.$$

Demonstrație. În primul rând arătăm că pentru orice punct M din planul triunghiului are loc relația

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2,$$

cunoscută sub numele de relația lui Leibniz.

Fie A' mijlocul segmentului $[BC]$. În triunghiul AMA' aplicăm teorema lui Stewart și avem

$$MA^2 \cdot GA' + MA'^2 \cdot GA - GA \cdot GA' \cdot AA' = MG^2 \cdot AA',$$

deci

$$MA^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot GA + MA'^2 \cdot GA - \frac{1}{2} \cdot GA^2 \cdot AA' = MG^2 \cdot AA'.$$

Obținem

$$MA^2 \cdot \frac{1}{3} \cdot AA' + MA'^2 \cdot \frac{2}{3} \cdot AA' - \frac{2}{9} \cdot AA'^3 = MG^2 \cdot AA',$$

adică

$$\frac{1}{3}MA^2 + \frac{2}{3}MA'^2 - \frac{2}{9}AA'^2 = MG^2.$$

În triunghiul BMC aplicăm teorema medianei și avem

$$MA'^2 = \frac{1}{4}[2(MB^2 + MC^2) - BC^2].$$

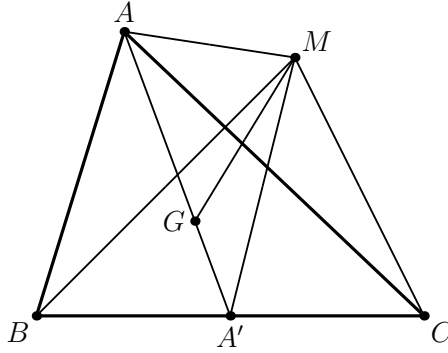


Figura 4.2

Folosind relația evidentă $AA' = \frac{3}{2}GA$, prin înlocuire găsim proprietatea dorită.

Din relația lui Leibniz avem:

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 \geq GA^2 + GB^2 + GC^2,$$

cu egalitate dacă și numai dacă $M = G$. □

Teorema 4.3.2. *Centrul de greutate este unicul punct din interiorul triunghiului care maximizează produsul distanțelor la laturi.*

Demonstrație. Fie M un punct arbitrar situat în interiorul triunghiului.

Avem

$$S = S[ABC] = S[AMB] + S[BMC] + S[CMA] = \frac{1}{2}(ad_A + bd_B + cd_C),$$

de unde prin aplicarea inegalității mediilor, rezultă

$$2S = ad_A + db_B + cd_C \geq 3\sqrt[3]{abc(d_Ad_Bd_C)},$$

adică

$$d_Ad_Bd_C \leq \frac{8S^3}{27abc}.$$

Avem egalitate dacă și numai dacă

$$ad_A = bd_B = cd_C,$$

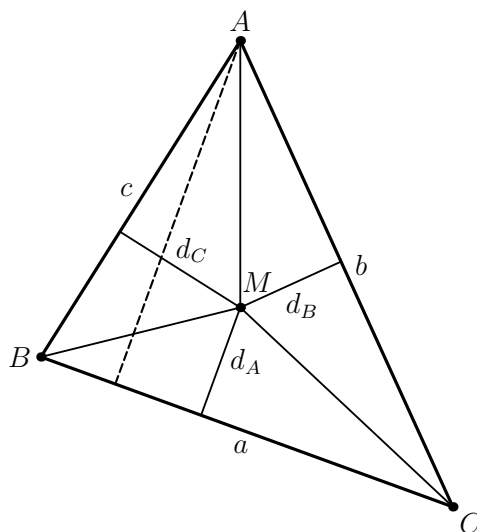


Figura 4.3

adică

$$S[AMB] = S[BMC] = S[CMA] = \frac{1}{3}S,$$

prin urmare $M = G$.

□

Teorema 4.3.3. Centrul de greutate al unui triunghi este acel punct din planul triunghiului care are proprietatea că realizează maximul ariei triunghiului său pedal.

Demonstrație. Vom nota

$$\frac{MD}{AD} = x, \quad \frac{ME}{BE} = y, \quad \frac{MF}{CF} = z.$$

Se știe că are loc relația $x + y + z = 1$, numită formula lui Gergonne.

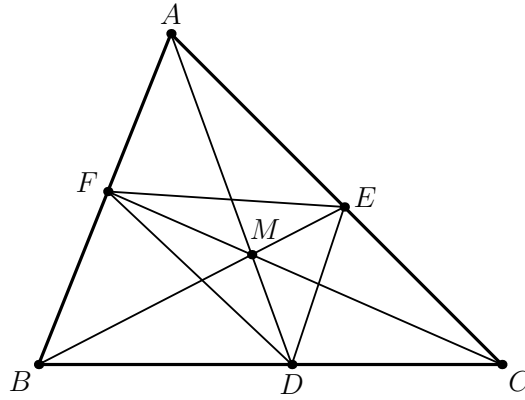


Figura 4.4

Avem

$$\begin{aligned}
 \frac{S[MDE]}{S[MAB]} &= \frac{\frac{1}{2}MD \cdot ME \cdot \sin \widehat{DME}}{\frac{1}{2}MA \cdot MB \cdot \sin \widehat{AMB}} = \frac{MD \cdot ME}{MA \cdot MB} = \frac{MD}{MA} \cdot \frac{ME}{MB} \\
 &= \frac{AD - AM}{AM} \cdot \frac{BE - BM}{BM} = \frac{1}{\frac{AD}{MD} - 1} \cdot \frac{1}{\frac{BE}{ME} - 1} \\
 &= \frac{1}{\frac{1}{x} - 1} \cdot \frac{1}{\frac{1}{y} - 1} = \frac{x}{1 - x} \cdot \frac{y}{1 - y} = \frac{xy}{(1 - x)(1 - y)},
 \end{aligned}$$

prin urmare

$$S[MDE] = \frac{xy}{(1 - x)(1 - y)} \cdot S[MAB], \quad (1)$$

$$\frac{S[MAB]}{S[ABC]} = \frac{\frac{1}{2}\text{dist}(M, AB) \cdot AB}{\frac{1}{2}\text{dist}(C, AB) \cdot AB} = \frac{\text{dist}(M, AB)}{\text{dist}(C, AB)} = \frac{MF}{CF} = z,$$

deci

$$S[MAB] = z \cdot S[ABC]. \quad (2)$$

Din relațiile (1) și (2) rezultă

$$S[MDE] = \frac{xyz}{(1-x)(1-y)} \cdot S[ABC].$$

Analog obținem

$$S[MFE] = \frac{xyz}{(1-y)(1-z)} \cdot S[ABC] \quad \text{și} \quad S[MDF] = \frac{xyz}{(1-x)(1-z)} \cdot S[ABC].$$

Deci

$$\begin{aligned} S[DEF] &= \frac{xyz}{(1-x)(1-y)(1-z)} (3-x-y-z) \cdot S[ABC] \\ &= \frac{2xyz}{(1-x)(1-y)(1-z)} \cdot S[ABC], \end{aligned}$$

pentru că $x + y + z = 1$. Dacă G este centrul de greutate al triunghiului ABC , atunci aria triunghiului său pedal este egală cu $\frac{1}{4}$ din aria triunghiului ABC . Deci trebuie să demonstrăm că

$$\frac{2xyz}{(1-x)(1-y)(1-z)} \leq \frac{1}{4} \Leftrightarrow (1-x)(1-y)(1-z) \geq 8xyz,$$

pentru $x, y, z \in (0, 1)$ cu $x + y + z = 1$. Avem

$$(1-x)(1-y)(1-z) = (y+z)(x+z)(x+y) \geq 2\sqrt{yz} \cdot 2\sqrt{xz} \cdot 2\sqrt{xy} = 8xyz,$$

unde am aplicat inegalitatea mediilor pentru două numere reale pozitive. \square

4.4 O proprietate de extrem a centrului cercului înscris

Teorema 4.4.1. Fie P un punct în interiorul unui triunghi ABC și D, E, F picioarele perpendicularelor duse din punctul P pe laturile $[BC]$, $[CA]$ respectiv $[AB]$. Minimul sumei $\frac{BC}{PD} + \frac{CA}{PE} + \frac{AB}{PF}$ se realizează atunci când punctul P este chiar centrul cercului înscris în triunghiul ABC .

Demonstrație. Fie S aria triunghiului ABC . Atunci

$$2S = BC \cdot PD + CA \cdot PE + AB \cdot PF.$$

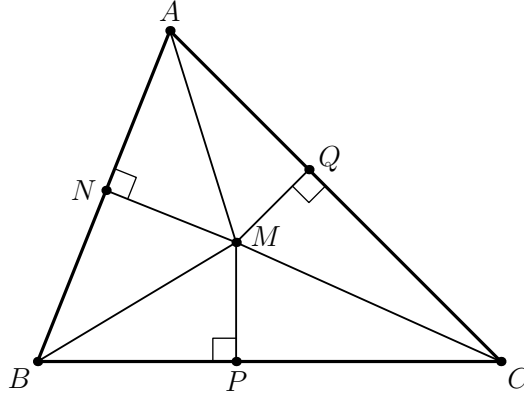


Figura 4.5

Conform inegalității Cauchy-Buniakowski-Schwarz avem

$$\left(\sqrt{\frac{BC}{PD}} \cdot \sqrt{BC \cdot PD} + \sqrt{\frac{CA}{PE}} \cdot \sqrt{CA \cdot PE} + \sqrt{\frac{AB}{PF}} \cdot \sqrt{AB \cdot PF} \right)^2 = (BC + CA + AB)^2.$$

Avem egalitate dacă

$$\frac{BC \cdot PD}{BC} = \frac{CA \cdot PE}{CA} = \frac{AB \cdot PF}{AB} \Leftrightarrow PD = PE = PF \Leftrightarrow P = I,$$

centrul cercului înscris în triunghiul ABC .

Minimul sumei din enunț va fi

$$\frac{(BC + CA + AB)^2}{2S} = \frac{4p^2}{2S} = \frac{2p^2}{S}.$$

□

4.5 O proprietate de extrem a ortocentrului

Teorema 4.5.1. Fie ABC un triunghi ascuțitunghic, M un punct în interiorul său, iar O_1, O_2, O_3 centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor MBC , MAC și MAB . Aria triunghiului $O_1O_2O_3$ este minimă atunci și numai atunci când punctul M este ortocentrul triunghiului ABC .

Demonstrație. Vom utiliza formula (24) din Teorema 1.11.1. pentru punctul M , situat în interiorul triunghiului. În condițiile din teorema noastră avem

$$\frac{R^2 - OM^2}{4R^2} = \frac{R^2}{4R^2} - \frac{OM^2}{4R^2} = \frac{1}{4} - \frac{OM^2}{4R^2} \leq \frac{1}{4} \Rightarrow S[P_1P_2P_3] \leq \frac{1}{4} \cdot S[ABC] \quad (3)$$

Fie $\{M_1\} = MA \cap O_2O_3$, $\{M_2\} = MB \cap O_1O_3$, $\{M_3\} = MC \cap O_1O_2$. Deoarece linia centrelor a două cercuri secante este perpendiculară pe coarda comună celor două cercuri și trece prin mijlocul ei, deducem că triunghiul $M_1M_2M_3$ este triunghiul podar al triunghiului $O_1O_2O_3$ corespunzător punctului M și

$$S[M_1M_2M_3] = \frac{1}{4} \cdot S[O_1O_2O_3],$$

pentru că avem $M_1M_2 = \frac{AB}{2}$, $M_2M_3 = \frac{BC}{2}$ și $M_1M_3 = \frac{AC}{2}$. Prin urmare

$$\frac{1}{4} \cdot S[ABC] = S[M_1M_2M_3] \leq \frac{1}{4} \cdot S[O_1O_2O_3], \quad \text{adică} \quad S[ABC] \leq S[O_1O_2O_3].$$

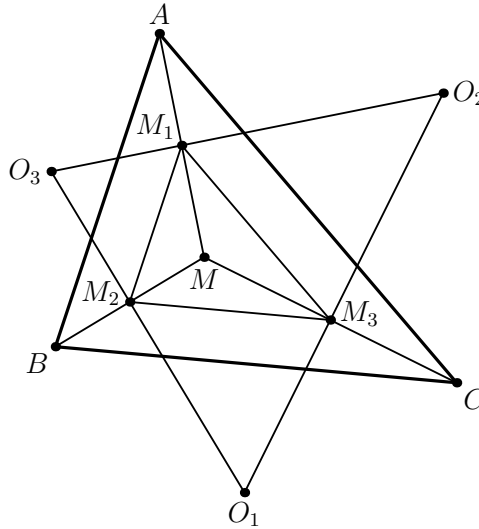


Figura 4.6

Egalitatea are loc dacă și numai dacă M este centrul cercului circumscris triunghiului $O_1O_2O_3$. În acest caz, punctele M_i , $i = 1, 2, 3$ sunt mijloacele laturilor triunghiului

$O_1O_2O_3$, deci $O_1O_2 \parallel AB \parallel M_1M_2$ și cum $MC \perp O_1O_2 \Rightarrow MC \perp AB$ rezultă că $[MC]$ este înălțime în triunghiul ABC . Analog se demonstrează că și $[MA]$ este tot înălțime în triunghiul ABC . Deci M va fi ortocentrul triunghiului ABC . \square

4.6 O proprietate de extrem a centrului cercului circumscris

Teorema 4.6.1. *Fie M un punct arbitrar în planul unui triunghi oarecare ABC și M_1, M_2, M_3 proiecțiile lui M pe dreptele BC, CA respectiv AB . Atunci suma $AM_3^2 + MB_1^2 + CM_2^2$ este minimă atunci când M coincide cu centrul cercului circumscris triunghiului ABC .*

Demonstrație. Notăm $MB_1 = x, CM_2 = y$ și $AM_3 = z$. Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiurile dreptunghice MM_1B și MM_1C obținem

$$\begin{aligned} MM_1^2 + BM_1^2 &= MB^2 \Rightarrow MM_1^2 = MB^2 - BM_1^2 \\ &\Rightarrow MM_1^2 = MB^2 - x^2 \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} MM_1^2 + CM_1^2 &= MC^2 \Rightarrow MM_1^2 = MC^2 - CM_1^2 \\ &\Rightarrow MM_1^2 = MC^2 - (BC - x)^2 \end{aligned} \quad (5)$$

Din relațiile (4) și (5) rezultă

$$MB^2 - x^2 = MC^2 - (BC - x)^2.$$

În mod asemănător se obține

$$\begin{aligned} MC^2 - y^2 &= MA^2 - (CA - y)^2 \\ MA^2 - z^2 &= MB^2 - (AB - z)^2. \end{aligned}$$

Prin adunarea acestor ultime trei egalități membru cu membru obținem

$$\begin{aligned} &MA^2 + MB^2 + MC^2 - x^2 - y^2 - z^2 \\ &= MA^2 + MB^2 + MC^2 - (BC - x)^2 - (AC - y)^2 - (AB - z)^2. \end{aligned}$$

Rezultă

$$(BC - x)^2 + (AC - y)^2 + (AB - z)^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

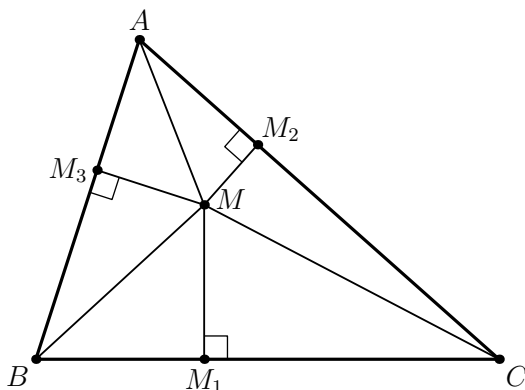


Figura 4.7

adică

$$BC^2 + AC^2 + AB^2 - 2x \cdot BC - 2y \cdot AC - 2z \cdot AB = 0.$$

Deci

$$x \cdot BC + y \cdot CA + z \cdot AB = \frac{1}{2}(AB^2 + BC^2 + CA^2) \quad (6)$$

Aplicând inegalitatea Cauchy-Buniakowski-Schwarz obținem

$$(x^2 + y^2 + z^2)(BC^2 + CA^2 + AB^2) \geq (x \cdot BC + y \cdot CA + z \cdot AB)^2 \quad (7)$$

Din relațiile (6) și (7) rezultă

$$(x^2 + y^2 + z^2)(BC^2 + CA^2 + AB^2) \geq \frac{1}{4}(AB^2 + BC^2 + CA^2)^2.$$

Deci

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{1}{4}(AB^2 + BC^2 + CA^2).$$

Avem egalitate în cazul în care

$$\frac{x}{BC} = \frac{y}{CA} = \frac{z}{AB} = k.$$

Înlocuind în relația (8) rezultă

$$k(AB^2 + BC^2 + CA^2) = \frac{1}{2}(AB^2 + BC^2 + CA^2) \Rightarrow k = \frac{1}{2}$$

și cum $x = \frac{1}{2}BC = BM_1$ rezultă că M_1 este mijlocul lui $[BC]$. Analog se demonstrează că M_2 este mijlocul lui $[AC]$ iar M_3 este mijlocul lui $[AB]$, ceea ce dovedește faptul că M este centrul cercului circumscris triunghiului ABC . \square

4.7 O proprietate de extrem a punctului lui Lemoine

Teorema 4.7.1. Fie M un punct interior triunghiului ABC iar x, y, z distanțele de la M la laturile $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$ ale triunghiului ABC . Atunci minimul sumei $x^2 + y^2 + z^2$ se atinge când M coincide cu punctul lui Lemoine al triunghiului ABC .

Demonstrație. Vom presupune cunoscut faptul că în orice triunghi simedianele sunt concurente. Vom demonstra mai întâi următoarea:

Lemă. Dacă x, y, z sunt distanțele de la punctul lui Lemoine al triunghiului ABC (notat cu K) la laturile $[BC]$, $[AC]$ și $[AB]$, atunci

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$$

și reciproc, unde $a = BC$, $b = AC$ și $c = AB$.

Demonstrația lemei. Fie M un punct aflat pe simediana $[AD]$ și $B'C'$ antiparalela dusă prin punctul M la dreapta BC , $C' \in AB$, $B' \in AC$, $MN \perp AC'$, $N \in AB$, $MP \perp AB'$, $P \in AC$ iar $[AA']$ mediana corespunzătoare laturii BC .

$$\triangle AC'M \sim \triangle ACA' \Rightarrow \frac{C'M}{CA'} = \frac{AM}{AA'} \quad (8)$$

$$\triangle AB'M \sim \triangle ABA' \Rightarrow \frac{B'M}{BA'} = \frac{AM}{AA'} \quad (9)$$

Din relațiile (8) și (9) rezultă

$$\frac{C'M}{CA'} = \frac{B'M}{BA'}$$

și cum $CA' = BA' \Rightarrow C'M = B'M$ rezultă că M este mijlocul lui $[B'C']$.

$$S[AC'M] = S[AB'M] \Rightarrow AC' \cdot MN = AB' \cdot MP \Rightarrow \frac{MN}{MP} = \frac{AB'}{AC'} \quad (10)$$

$$\triangle AC'B' \sim \triangle ACB \Rightarrow \frac{AB'}{AC'} = \frac{AB}{AC} \quad (11)$$

Din relațiile (10) și (11) rezultă

$$\frac{MN}{MP} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{MN}{AB} = \frac{MP}{AC} \Rightarrow \frac{z}{c} = \frac{y}{b}.$$

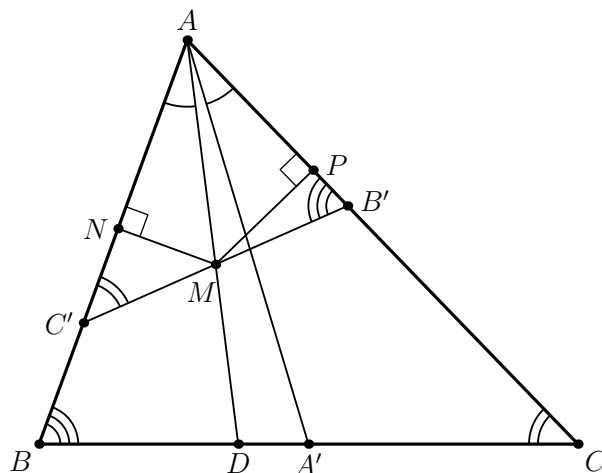


Figura 4.8

În mod asemănător se demonstrează că dacă punctul M se află pe simediana din B , atunci

$$\frac{z}{c} = \frac{x}{a}.$$

Deci dacă M se află pe simedianele din vârfurile A și B , adică este punctul lui Lemoine, atunci

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}.$$

Reciproc, fie M un punct în interiorul triunghiului ABC , $MN \perp AB$, $N \in AB$, $MP \perp AC$, $P \in AC$ astfel încât

$$\frac{MN}{AB} = \frac{MP}{AC},$$

adică

$$\frac{z}{c} = \frac{y}{b} \Rightarrow \frac{z}{y} = \frac{c}{b}.$$

Fie $B'C'$ antiparalela dusă prin M la dreapta BC , $C' \in AB$, $B' \in AC$

$$\triangle AB'C' \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{AB'}{AC'} \Rightarrow \frac{c}{b} = \frac{AB'}{AC'}.$$

Deci

$$\frac{z}{y} = \frac{AB'}{AC'} \Rightarrow y \cdot AB' = z \cdot AC' \Rightarrow S[AMC'] = S[AMB'] \Rightarrow MC' = MB'$$

rezultă că punctul M se află pe simediana din vârful A . Analog se demonstrează și că M se află pe simediana din B , deci M este punctul lui Lemoine al triunghiului ABC .

Vom demonstra în continuare, folosindu-ne de leamnă, proprietatea din teoremă.

Folosind identitatea lui Lagrange avem

$$(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) = (ax + by + cz)^2 + [(bx - ay)^2 + (cx - az)^2 + (cy - bz)^2] = (2S)^2[(bx - ay)^2 + (cx - az)^2 + (cy - bz)^2].$$

Acum este clar că suma $x^2 + y^2 + z^2$ este minimă atunci când paranteza pătrată din membrul drept are valoare minimă, adică

$$bx = ay, cx = az, cy = bz \Rightarrow \frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z},$$

adică punctul M coincide cu punctul lui Lemoine al triunghiului ABC (conform lemei de mai sus). Cu aceasta demonstrația este încheiată. \square

4.8 Punctul Fermat-Toricelli al unui triunghi

Teorema 4.8.1. (punctul Fermat-Toricelli) Fie ABC un triunghi cu unghiurile de mărime mai mici de 120° și M un punct în interiorul său. Atunci suma $MA + MB + MC$ este minimă dacă M este punctul lui Torricelli al triunghiului ABC (punctul din care toate laturile triunghiului se văd sub unghiuri de 120°).

Demonstrație. Vom construi în exteriorul triunghiului ABC triunghiurile echilaterale ABC_1 , ACB_1 și BCA_1 . Fie T punctul de intersecție al cercurilor circumscrise triunghiurilor ABC_1 și ACB_1 . Deoarece patrulateralele $ATBC_1$ și $ATCB_1$ sunt

inscriptibile rezultă $m(\widehat{ATB}) = m(\widehat{ATC}) = 120^\circ$, adică $m(\widehat{BTC}) = 120^\circ$, prin urmare $m(\widehat{BTC}) + m(\widehat{BA_1C}) = 180^\circ$. Deci patrulaterul $BTC A_1$ este inscriptibil, așadar punctul T se află pe cercul circumscris triunghiului BA_1C . Deci am demonstrat că există un punct unic T în planul triunghiului ABC (situat pe intersecția cercurilor circumscrise triunghiurilor AC_1B , ACB_1 și BCA_1) astfel încât

$$m(\widehat{ATB}) = m(\widehat{BTC}) = m(\widehat{ATC}) = 120^\circ.$$

Patrulaterul $BTC A_1$ este inscriptibil, deci

$$\widehat{A_1TC} \equiv \widehat{A_1BC} \Rightarrow m(\widehat{A_1TC}) = 60^\circ,$$

$$m(\widehat{ATA_1}) = m(\widehat{ATC}) + m(\widehat{A_1TC}) = 120^\circ + 60^\circ = 180^\circ.$$

Deducem că punctele A , T și A_1 sunt coliniare. Analog se arată că și punctele B , T , B_1 sunt coliniare și punctele C , T , C_1 sunt coliniare.

Aplicând teorema lui Ptolemeu în patrulaterul inscriptibil $BTC A_1$ obținem

$$BT + TC = TA_1 \Rightarrow AT + BT + CT = AT + TA_1 = AA_1.$$

Fie M un punct oarecare din planul triunghiului ABC . Cel puțin unul din patrulaterele MAB_1C , MBA_1C și MAC_1B este convex. Fie acesta MBA_1C . Aplicând inegalitatea lui Ptolemeu în acest patrulater obținem

$$MA_1 \cdot BC \leq MB \cdot A_1C + MC \cdot A_1B \Rightarrow MA_1 \leq MB + MC.$$

Deci

$$\begin{aligned} MA + MA_1 &\leq MA + MB + MC \Rightarrow AA_1 \leq MA + MA_1 \leq MA + MB + MC \\ &\Rightarrow TA + TB + TC \leq MA + MB + MC. \end{aligned}$$

În concluzie, T este punctul din planul triunghiului ABC pentru care suma $MA + MB + MC$ este minimă. \square

4.9 Inegalitatea Erdős-Mordell și aplicații

Următorul rezultat a fost propus de P. Erdős în 1935 și demonstrat de către L.J. Mordell în 1937.

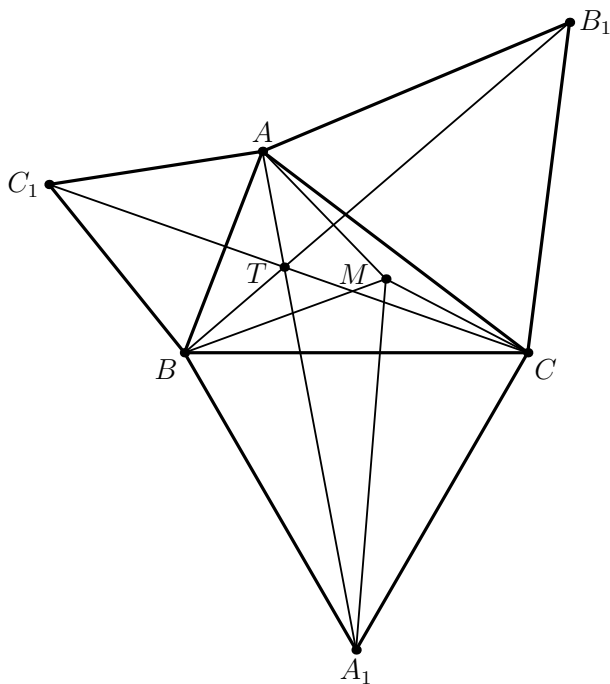


Figura 4.9

Teorema 4.9.1. Dacă P este un punct în interiorul triunghiului ABC , atunci are loc inegalitatea

$$PA + PB + PC \geq 2(PA_1 + PB_1 + PC_1),$$

unde A_1, B_1, C_1 sunt proiecțiile punctului P pe laturile BC, CA , respectiv AB ale triunghiului.

Demonstrația 1. Notăm cu a', b', c' lungimile segmentelor PA, PB, PC și cu x, y, z lungimile segmentelor PA_1, PB_1, PC_1 .

Din teorema cosinusului aplicată în triunghiul PB_1C_1 rezultă

$$B_1C_1 = \sqrt{y^2 + z^2 + 2yz \cos A}.$$

Cum patrulaterul AC_1PB_1 este inscriptibil rezultă $\widehat{AB_1C_1} = \widehat{APC_1}$. Deoarece

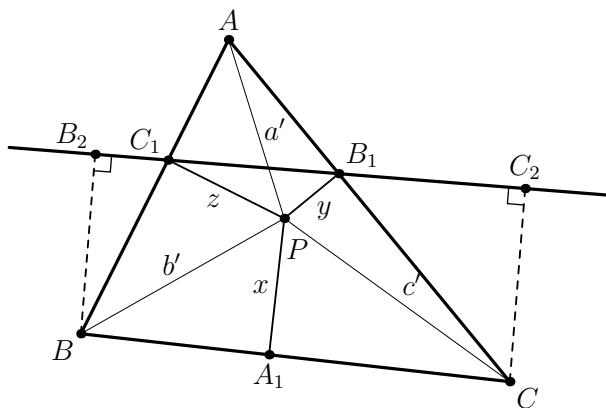


Figura 4.10

$\sin \widehat{APC_1} = \frac{AC_1}{AP}$, atunci

$$PA = a' = \frac{B_1C_1}{\sin A}$$

de unde

$$a' = \frac{\sqrt{y^2 + z^2 + 2yz \cos A}}{\sin A}.$$

Analog se arată că

$$b' = \frac{\sqrt{x^2 + z^2 + 2xz \cos B}}{\sin B}, \quad c' = \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + 2xy \cos C}}{\sin C},$$

de unde rezultă

$$\begin{aligned} PA + PB + PC = a' + b' + c' &= \frac{\sqrt{(y \sin C + z \sin B)^2 + (y \cos C - z \cos B)^2}}{\sin A} \\ &+ \frac{\sqrt{(z \sin A + x \sin C)^2 + (z \cos A - x \cos C)^2}}{\sin B} \\ &+ \frac{\sqrt{(x \sin B + y \sin A)^2 + (x \cos B - y \cos A)^2}}{\sin C} \end{aligned}$$

și de aici avem

$$a' + b' + c' \geq \frac{y \sin C + z \sin B}{\sin A} + \frac{z \sin A + x \sin C}{\sin B} + \frac{x \sin B + y \sin A}{\sin C},$$

adică

$$a' + b' + c' \geq y \left(\frac{\sin C}{\sin A} + \frac{\sin A}{\sin C} \right) + z \left(\frac{\sin B}{\sin A} + \frac{\sin A}{\sin B} \right) + x \left(\frac{\sin B}{\sin C} + \frac{\sin C}{\sin B} \right),$$

deci $a' + b' + c' \geq 2(x + y + z)$, unde am utilizat inegalitatea binecunoscută $\frac{u}{v} + \frac{v}{u} \geq 2$, $u, v > 0$. Evident, avem egalitate dacă și numai dacă triunghiul ABC este echilateral.

Demonstrația 2. Fie B_2 și C_2 proiecțiile punctelor B și C pe dreapta B_1C_1 . Avem

$$BC \geq B_2C_2 = B_2C_1 + C_1B_1 + B_1C_2.$$

Cum $\widehat{B_2C_1B} = \widehat{AC_1P} = \widehat{APB_1}$, rezultă că triunghiurile dreptunghice BB_2C_1 și AB_1P sunt asemenea, de unde obținem

$$B_2C_1 = PB_1 \cdot \frac{BC_1}{AP}$$

și analog se arată că

$$B_1C_2 = PC_1 \cdot \frac{B_1C}{AP}.$$

Cum patrulaterul AC_1PB_1 este inscriptibil, din prima teoremă a lui Ptolemeu, rezultă

$$AC_1 \cdot PB_1 + AB_1 \cdot PC_1 = AP \cdot B_1C_1,$$

de unde obținem relația

$$B_1C_1 = AC_1 \cdot \frac{PB_1}{AP} + AB_1 \cdot \frac{PC_1}{AP}. \quad (12)$$

Rezultă astfel

$$BC \geq BC_1 \cdot \frac{PB_1}{AP} + AC_1 \cdot \frac{PB_1}{AP} + AB_1 \cdot \frac{PC_1}{AP} + B_1C \cdot \frac{PC_1}{AP},$$

de unde obținem

$$BC \cdot AP \geq PB_1 \cdot (BC_1 + C_1A) + PC_1 \cdot (AB_1 + B_1C).$$

Ultima inegalitate este echivalentă cu $BC \cdot AP \geq PB_1 \cdot AB + PC_1 \cdot AC$, deci

$$PA \geq PB_1 \cdot \frac{AB}{BC} + PC_1 \cdot \frac{AC}{BC}. \quad (13)$$

În mod analog demonstrăm inegalitățile

$$PB \geq PA_1 \cdot \frac{BA}{AC} + PC_1 \cdot \frac{BC}{AC}, \quad PC \geq PA_1 \cdot \frac{AC}{AB} + PB_1 \cdot \frac{BC}{AB}. \quad (14)$$

Prin adunarea inegalităților (13) și (14), rezultă

$$\begin{aligned} PA + PB + PC &\geq \\ \left(\frac{AB}{AC} + \frac{AC}{AB}\right) \cdot PA_1 + \left(\frac{AB}{BC} + \frac{BC}{AB}\right) \cdot PB_1 + \left(\frac{AC}{BC} + \frac{BC}{AC}\right) \cdot PC_1 &\geq \\ 2(PA_1 + PB_1 + PC_1), \end{aligned}$$

adică inegalitatea din enunț. \square

Aplicația 4.9.2. Dacă triunghiul ABC este ascuțitunghic și H este ortocentrul triunghiului ABC , atunci $HA + HB + HC \geq 6r$, unde r este raza cercului înscris în triunghiul ABC .

Dacă triunghiul ABC este ascuțitunghic și P coincide cu ortocentrul H al triunghiului ABC , din inegalitatea lui Erdős-Mordell obținem

$$HA + HB + HC \geq 2(HA_1 + HB_1 + HC_1).$$

Dacă h_a, h_b, h_c sunt lungimile înălțimilor triunghiului ABC , inegalitatea de mai sus devine

$$HA + HB + HC \geq 2(h_a - HA + h_b - HB + h_c - HC)$$

adică

$$HA + HB + HC \geq \frac{2}{3}(h_a + h_b + h_c),$$

de unde se obține inegalitatea

$$HA + HB + HC \geq \frac{2}{3} \left(\frac{2S}{a} + \frac{2S}{b} + \frac{2S}{c} \right) = \frac{4S}{3} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right).$$

Aplicând inegalitatea

$$(u + v + w) \left(\frac{1}{u} + \frac{1}{v} + \frac{1}{w} \right) \geq 9, \quad u, v, w > 0$$

rezultă

$$HA + HB + HC \geq \frac{4S}{3} \cdot \frac{9}{a + b + c} = \frac{12S}{2p} = 6r,$$

deci $HA + HB + HC \geq 6r$.

Aplicația 4.9.3. Într-un triunghi ascuțitunghic ABC ,

$$\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}.$$

Dacă P coincide cu centrul cercului circumscris O al triunghiului ascuțitunghic ABC , avem

$$3R \geq 2(OA_1 + OB_1 + OC_1) = 2 \left[\sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}} + \sqrt{R^2 - \frac{b^2}{4}} + \sqrt{R^2 - \frac{c^2}{4}} \right],$$

adică

$$3R \geq \sqrt{4R^2 - a^2} + \sqrt{4R^2 - b^2} + \sqrt{4R^2 - c^2},$$

inegalitate echivalentă cu

$$3R \geq 2R(\cos A + \cos B + \cos C),$$

deci

$$\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}$$

(unde am ținut cont de $a = 2R \sin A$ și de relațiile analoage).

Aplicația 4.9.4. Dacă triunghiul ABC este ascuțitunghic și H este ortocentrul triunghiului, atunci $HA + HB + HC \leq 3R$.

Într-adevăr, avem

$$HA + HB + HC = 2R(\cos A + \cos B + \cos C) \leq 2R \cdot \frac{3}{2} = 3R,$$

unde am utilizat inegalitatea de la aplicația precedentă.

Aplicația 4.9.5. (inegalitatea lui Euler) În orice triunghi are loc inegalitatea $2r \leq R$.

Combinând inegalitățile de la Aplicațiile 4.9.2 și 4.9.4 obținem

$$6r \leq HA + HB + HC \leq 3R,$$

de unde rezultă concluzia.

Aplicația 4.9.6. Dacă I este centrul cercului înscris în triunghiul ABC , atunci

$$6r \leq AI + BI + CI \leq 4R - 2r.$$

Dacă P coincide cu centrul cercului înscris I al triunghiului ABC , atunci relația lui Erdős-Mordell devine

$$AI + BI + CI \geq 6r.$$

cu $AI = \frac{r}{\sin \frac{A}{2}}$ și analoagele, rezultă

$$\begin{aligned} AI + BI + CI &= r \left(\frac{1}{\sin \frac{A}{2}} + \frac{1}{\sin \frac{B}{2}} + \frac{1}{\sin \frac{C}{2}} \right) \\ &= r \left(\frac{\sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} + \sin \frac{C}{2} \cdot \sin \frac{A}{2}}{\sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2}} \right) \end{aligned}$$

Ținând cont că avem $\sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} = \frac{r}{4R}$ și de inegalitatea

$$xy + yz + zx \leq x^2 + y^2 + z^2, \quad x, y, z \in \mathbb{R}$$

rezultă

$$\begin{aligned} AI + BI + CI &\leq r \cdot \frac{4R}{r} \left(\sin^2 \frac{A}{2} + \sin^2 \frac{B}{2} + \sin^2 \frac{C}{2} \right) \\ &= 4R \left(\frac{1 - \cos A}{2} + \frac{1 - \cos B}{2} + \frac{1 - \cos C}{2} \right), \end{aligned}$$

de unde obținem

$$\begin{aligned} AI + BI + CI &\leq 2R[3 - (\cos A + \cos B + \cos C)] = \\ &= 3R \left(3 - 1 - 4 \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} \right), \end{aligned}$$

deci

$$AI + BI + CI \leq 2R \left(2 - \frac{r}{R} \right) = 4R - 2r.$$

Combinând cele două inegalități demonstrate, rezultă concluzia dorită.

Aplicația 4.9.7. Dacă G este centrul de greutate al triunghiului ABC , atunci

$$GA + GB + GC \geq 6r.$$

Dacă punctul P coincide cu centrul de greutate al triunghiului ABC , inegalitatea lui Erdős-Mordell devine

$$GA + GB + GC \geq 2(GA_1 + GB_1 + GC_1).$$

Ținând cont de faptul că $GA_1 = \frac{1}{3}h_a$ și de relațiile analoage avem

$$GA + GB + GC \geq \frac{2}{3}(h_a + h_b + h_c) = \frac{2}{3} \left(\frac{2S}{a} + \frac{2S}{b} + \frac{2S}{c} \right),$$

adică

$$GA + GB + GC \geq \frac{4S}{3} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq \frac{4S}{3} \cdot \frac{9}{a+b+c} = \frac{12S}{2p} = 6r.$$

Următorul rezultat generalizează rezultatul din Teorema 4.9.1.

Teorema 4.9.8. Fie P un punct arbitrar în planul triunghiului ABC și a', b', c' distanțele de la P la vârfurile A, B respectiv C și x, y, z distanțele de la P la laturile BC, CA , respectiv AB . Atunci

$$a' + b' + c' \geq \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b} \right) x + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c} \right) y + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) z,$$

cu egalitate dacă P este centrul cercului circumscris triunghiului ABC .

Demonstrație. Fie h_1 lungimea înălțimii duse din A pe latura BC . Avem

$$2S[ABC] = a \cdot h_1 = ax + by + cz.$$

Evident, $a' + x \geq h_1$ cu egalitate dacă și numai dacă punctul P aparține înălțimii din A . Avem $aa' + ax \geq ah_1 = ax + by + cz$, de unde $aa' \geq by + cz$.

Fie $AB'C'$ simetricul triunghiului ABC față de bisectoarea unghiului A . Atunci, aplicând inegalitatea obținută mai sus pentru triunghiul $AB'C'$ obținem $aa' \geq cy + bz$, adică

$$a' \geq \frac{c}{a}y + \frac{b}{a}z$$

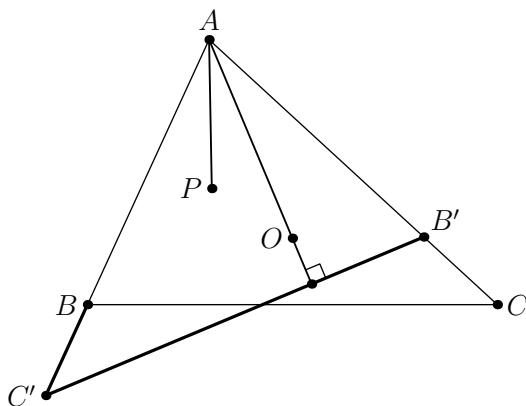


Figura 4.11

cu egalitate dacă punctul P aparține înălțimii din A a triunghiului $AB'C'$, dreaptă ce trece prin centrul cercului circumscris triunghiului ABC .

Analog, obținem relațiile

$$b' \geq \frac{a}{b}z + \frac{c}{b}x \quad \text{și} \quad c' \geq \frac{b}{c}x + \frac{a}{c}y.$$

Sumând inegalitățile obținute rezultă concluzia. □

Observația 4.9.9. Dacă P este un punct interior triunghiului ABC , $x, y, z > 0$, avem

$$a' + b' + c' \geq 2(x + y + z)$$

(unde am utilizat faptul că $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2, \forall a, b > 0$), care este inegalitatea lui Erdős-Mordell. Egalitatea are loc dacă $a = b = c$, adică dacă triunghiul ABC este echilateral și P este centrul cercului circumscris triunghiului ABC .

Teorema 4.9.10. (Barrow) Dacă P este un punct interior triunghiului ABC , atunci

$$PA + PB + PC \geq 2(PA' + PB' + PC'),$$

unde PA', PB', PC' sunt bisectoarele unghiurilor $\widehat{BPC}, \widehat{CPA}, \widehat{APB}$ ($A' \in (BC)$, $B' \in (AC)$, $C' \in (AB)$).

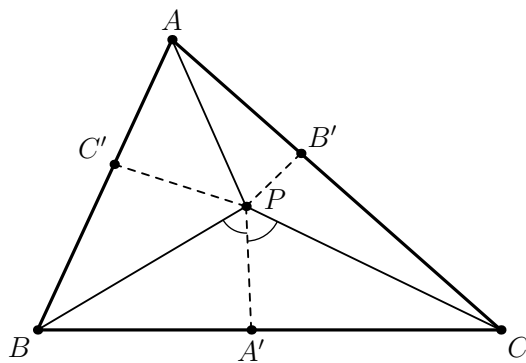


Figura 4.12

Demonstrație.

Notăm cu a, b, c lungimile segmentelor PA, PB respectiv PC și cu α, β, γ măsurile unghiurilor $\widehat{BPC}, \widehat{CPA}$, respectiv \widehat{APB} . Prin $S[XYZ]$ notăm aria triunghiului XYZ . Din $S[PBC] = S[PBA'] + S[PCA]$ rezultă

$$PB \cdot PC \cdot \sin \alpha = PB \cdot PA' \cdot \sin \frac{\alpha}{2} + PC \cdot PA' \cdot \sin \frac{\alpha}{2},$$

deci

$$PA' = \frac{2bc}{b+c} \cos \frac{\alpha}{2}.$$

Utilizând inegalitatea $\frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} \leq \sqrt{xy}$, $x, y > 0$, obținem $PA' \leq \sqrt{bc} \cos \frac{\alpha}{2}$ și

analoagele. Atunci

$$2(PA' + PB' + PC') \leq 2\sqrt{bc} \cos \frac{\alpha}{2} + 2\sqrt{ca} \cos \frac{\beta}{2} + 2\sqrt{ab} \cos \frac{\gamma}{2}.$$

Rămâne să demonstrăm că

$$a + b + c \geq 2\sqrt{bc} \cos \frac{\alpha}{2} + 2\sqrt{ca} \cos \frac{\beta}{2} + 2\sqrt{ab} \cos \frac{\gamma}{2}.$$

Deoarece $\alpha + \beta + \gamma = 2\pi$, rezultă

$$\cos \frac{\gamma}{2} = -\cos \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} \right) = -\cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} + \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2},$$

inegalitatea de mai sus fiind echivalentă cu

$$\left(\sqrt{a} \sin \frac{\beta}{2} - \sqrt{b} \sin \frac{\alpha}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{a} \cos \frac{\beta}{2} - \sqrt{b} \cos \frac{\alpha}{2} - \sqrt{c}\right)^2 \geq 0,$$

ceea ce este adevărat. Egalitatea se obține pentru $a = b = c$, adică dacă P este centrul cercului circumscris triunghiului. \square

4.10 Inegalitățile lui Blundon

Inegalitatea fundamentală a triunghiului a fost formulată pentru prima dată de către E. Rouché în anul 1851, ca răspuns la o problemă a lui Ramus referitoare la condițiile necesare și suficiente pentru ca trei numere reale pozitive R , r și s să fie invariante simetrice ai unui triunghi, mai precis R să fie raza cercului circumscris, r raza cercului înscris și s semiperimetrul triunghiului. Demonstrația completă a rezultatului sub forma a două inegalități, a fost demonstrat în 1965 de către W.J. Blundon, motiv pentru care acest rezultat mai este cunoscut în literatura de specialitate și sub numele de inegalitățile lui Blundon. În această secțiune vom prezenta o demonstrație geometrică pentru inegalitățile lui Blundon. Vom defini configurația Blundon a unui triunghi și vom determina elementele acesteia, cu scopul de a obține o formă întărită pentru aceste inegalități. În ultimul paragraf discutăm în detaliu o variantă duală a inegalităților lui Blundon.

4.10.1 Demonstrația geometrică

Considerăm triunghiul ABC și amintim următoarele două rezultate: punctele O, G, H sunt coliniare (dreapta lui Euler a triunghiului, Teorema 1.6.1), punctele I, G, N sunt coliniare (dreapta lui Nagel a triunghiului, Partea II – Teorema 1.3.11) și avem $OH = 3 \cdot OG$, $IN = 3 \cdot IG$. Urmatorul rezultat a fost demonstrat în 2012 în lucrarea [12].

Teorema 4.10.1. (Andrica-Barbu) *Presupunem că triunghiul ABC nu este echilateral. Are loc următoarea relație*

$$\cos \widehat{ION} = \frac{2R^2 + 10Rr - r^2 - s^2}{2(R - 2r)\sqrt{R^2 - 2Rr}}. \quad (15)$$

Demonstrație. Din $OH = 3 \cdot OG$ și $IN = 3 \cdot IG$ rezultă că triunghiurile OGI și HGN sunt asemenea și avem $OI \parallel NH$. Aplicăm relația lui Stewart în triunghiul ION și obținem

$$ON^2 \cdot GI + OI^2 \cdot NG - OG^2 \cdot NI = GI \cdot GN \cdot NI,$$

deci rezultă

$$ON^2 \cdot GI + OI^2 \cdot 2 \cdot GI - OG^2 \cdot 3 \cdot GI = 6 \cdot GI^3.$$

Această relație este echivalentă cu

$$ON^2 + 2 \cdot OI^2 - 3 \cdot OG^2 = 6 \cdot GI^2.$$

Prin utilizarea relațiilor

$$OG^2 = R^2 - \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2) \text{ (Teorema 1.7.10),}$$

$$OI^2 = R^2 - 2Rr \text{ (Teorema 1.7.12),}$$

$$ON = R - 2r \text{ (Partea II - Aplicația 1.6.11) și}$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2(s^2 - r^2 - 4Rr) \text{ (Partea II - Corolarul 1.6.2), obținem}$$

$$\begin{aligned} IG^2 &= \frac{1}{6}(ON^2 + 2 \cdot OI^2 - 3 \cdot OG^2) = \frac{1}{6} \left(\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} - 8Rr + 4r^2 \right) \\ &= \frac{1}{6} \left(\frac{2(s^2 - r^2 - 4Rr)}{3} - 8Rr + 4r^2 \right) = \frac{1}{9}(s^2 + 5r^2 - 16Rr). \end{aligned}$$

Aplicăm teorema cosinusului în triunghiul ION și avem

$$\begin{aligned} \cos \widehat{ION} &= \frac{ON^2 + OI^2 - NI^2}{2 \cdot ON \cdot OI} \\ &= \frac{(R - 2r)^2 + (R^2 - 2Rr) - (5r^2 + s^2 - 16Rr)}{2(R - 2r)\sqrt{R^2 - 2Rr}} \\ &= \frac{2R^2 + 10Rr - r^2 - s^2}{2(R - 2r)\sqrt{R^2 - 2Rr}} \end{aligned}$$

ceea ce trebuia demonstrat. □

Dacă triunghiul ABC este echilateral, atunci punctele I, O, N coincid, adică triunghiul ION degenerază până la un punct. În acest caz putem extinde formula (15) prin $\cos \widehat{ION} = 1$.

Teorema 4.10.2. (inegalitățile lui Blundon) *Condiția necesară și suficientă pentru existența triunghiului cunoscând elementele s , R și r este*

$$\begin{aligned} 2R^2 + 10Rr - r^2 - 2(R - 2r)\sqrt{R^2 - 2Rr} &\leq s^2 \\ &\leq 2R^2 + 10Rr - r^2 + 2(R - 2r)\sqrt{R^2 - 2Rr}. \end{aligned} \quad (16)$$

Demonstrație. Dacă $R = 2r$, atunci triunghiul trebuie să fie echilateral.

Dacă presupunem că $R - 2r \neq 0$, atunci inegalitățile (16) sunt consecințe directe a faptului că $-1 \leq \cos \widehat{ION} \leq 1$. \square

Triunghiurile echilaterale ne dau cazul trivial de egalitate în inegalitățile (16). Presupunem că nu avem triunghiuri echilaterale, adică avem $R - 2r \neq 0$. Notăm cu $\mathcal{T}(R, r)$ familia de triunghiuri care au ca R raza cercului circumscris și r raza cercului înscris.

Inegalitățile (16) scrise cu ajutorul razelor R și r , ne dau exact intervalul parcurs de semiperimetrul s a triunghiurilor din familia $\mathcal{T}(R, r)$. Avem

$$s_{min}^2 = 2R^2 + 10Rr - r^2 - 2(R - 2r)\sqrt{R^2 - 2Rr}$$

și

$$s_{max}^2 = 2R^2 + 10Rr - r^2 + 2(R - 2r)\sqrt{R^2 - 2Rr}.$$

Dacă fixăm O centrul cercului circumscris triunghiului și I centrul cercului înscris în triunghi astfel încât $OI = \sqrt{R^2 - 2Rr}$, atunci triunghiul din familia $\mathcal{T}(R, r)$ cu semiperimetrul minimal corespunde cazului în care $\cos \widehat{ION} = 1$, adică punctele I, O, N sunt coliniare și I, N aparțin aceleiași semidrepte cu originea în O . Considerând proprietatea binecunoscută, adică faptul că punctele O, G, H aparțin dreptei lui Euler a triunghiului, aceasta implică faptul că O, I, G trebuie să fie coliniare, deci în acest caz triunghiul ABC este isoscel.

În Figura 4.13 acest triunghi este notat cu $A_{min}B_{min}C_{min}$. De asemenea, triunghiul din familia $\mathcal{T}(R, r)$ care are semiperimetrul maximal corespunde cazului în care $\cos \widehat{ION} = -1$, adică punctele I, O, N sunt coliniare și O este situat între I și N . Utilizând din nou dreapta lui Euler a triunghiului, avem că triunghiul ABC este isoscel. În Figura 4.13 acesta este notat cu $A_{max}B_{max}C_{max}$. Observăm că $B_{min}C_{min} > B_{max}C_{max}$. Triunghiurile care fac parte din familia $\mathcal{T}(R, r)$ sunt "între" aceste două triunghiuri extreme (vezi Figura 4.13). Conform teoremei de

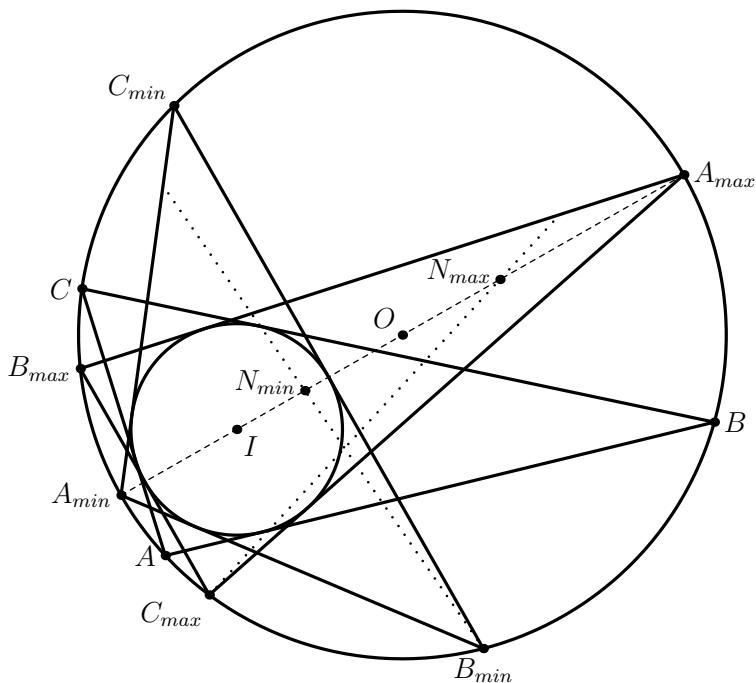


Figura 4.13

închidere a lui Poncelet, acestea sunt înscrise în cercul $\mathcal{C}(O; R)$ și laturile acestora sunt tangente la cercul $\mathcal{C}(I; r)$.

Din Teorema 4.10.1 rezultă că avem o problemă naturală și importantă de construcție a triunghiului ABC , cunoscând centrul cercului înscris I , centrul cercului circumscris O și punctul lui Nagel N . Știind că punctele I, G, N sunt coliniare și că determină dreapta lui Nagel a triunghiului, obținem centrul de greutate G pe segmentul IN astfel încât $IG = \frac{1}{3}IN$. Apoi, folosind dreapta lui Euler a triunghiului, obținem că ortocentrul H este pe semidreapta $(OG$ astfel încât $OH = 3 \cdot OG$.

Astfel am redus problema de construcție la faimoasa problemă de determinare a lui Euler, adică problema construcției unui triunghi cunoscând I , centrul cercului înscris, O centrul cercului circumscris și H ortocentrul.

Următoarea inegalitate este o consecință directă Teoremei 4.10.2. O demonstrație geometrică este prezentată în Secțiunea 3.5.4 din Partea a II-a.

Teorema 4.10.3. (inegalitatea lui Gerretsen) *În orice triunghi are loc inegalitatea*

$$s^2 \leq 4R^2 + 4Rr + 3r^2$$

Demonstrație. Folosind inegalitatea din dreapta a inegalităților lui Blundon, este suficient să demonstrăm că

$$2R^2 + 10Rr - r^2 + 2(R - 2r)\sqrt{R^2 - 2Rr} \leq 4R^2 + 4Rr + 3r^2.$$

Această inegalitate este echivalentă cu

$$2(R - 2r)\sqrt{R^2 - 2Rr} \leq 2R^2 - 6Rr + 4r^2,$$

deci cu

$$(R - 2r)\sqrt{R^2 - 2Rr} \leq (R - 2r)(R - r).$$

Deoarece din inegalitatea lui Euler avem $R \geq 2r$, după simplificare cu $R - 2r$ și ridicare la pătrat, ultima inegalitate se reduce la $0 \leq r^2$, ceea ce este evident.

Are loc egalitate, dacă și numai dacă are loc relația $R = 2r$, deci dacă și numai dacă triunghiul este echilateral. \square

Teorema 4.10.4. (inegalitatea slabă a lui Blundon) *În orice triunghi are loc inegalitatea*

$$s \leq 2R + (3\sqrt{3} - 4)r$$

Demonstrație. Prin ridicare la pătrat, inegalitatea din enunț este echivalentă cu

$$s^2 \leq 4R^2 + 4(3\sqrt{3} - 4)Rr + (43 - 24\sqrt{3})r^2.$$

Folosind inegalitatea lui Gerretsen, este suficient să arătăm că are loc inegalitatea

$$4R^2 + 4Rr + 3r^2 \leq 4R^2 + 4(3\sqrt{3} - 4)Rr + (45 - 24\sqrt{3})r^2.$$

Ultima inegalitate este echivalentă cu $0 \leq 4(3\sqrt{3} - 4)r(R - 2r)$, ceea ce este evident conform inegalității lui Euler.

Din nou, are loc egalitate dacă și numai dacă are loc relația $R = 2r$, deci dacă și numai dacă triunghiul este echilateral. \square

Combinând rezultatele obținute, găsim următorul sir de inegalități care conține partea dreaptă a inegalităților lui Blundon, inegalitatea lui Gerretsen și inegalitatea slabă a lui Blundon

$$s^2 \leq 2R^2 + 10Rr - r^2 + 2(R - 2r)\sqrt{R^2 - 2Rr} \leq 4R^2 + 4Rr + 3r^2 \leq (2R + (3\sqrt{3} - 4)r)^2.$$

4.10.2 Geometria configurației Blundon

Reamintim că $\mathcal{T}(R, r)$ notează familia tuturor triunghiurilor cu raza cercului circumscris R și raza cercului înscris r . Am văzut că inegalitățile (16) dau intervalul exact, în funcție de R și r , de variație a semiperimetrului s pentru triunghiurile din familia $\mathcal{T}(R, r)$. Mai exact, avem

$$s_{\min}^2 = 2R^2 + 10Rr - r^2 - 2(R - 2r)\sqrt{R^2 - 2Rr}$$

și

$$s_{\max}^2 = 2R^2 + 10Rr - r^2 + 2(R - 2r)\sqrt{R^2 - 2Rr}.$$

Triunghiurile din familia $\mathcal{T}(R, r)$ sunt situate ”între” două triunghiuri extremale $A_{\min}B_{\min}C_{\min}$ și $A_{\max}B_{\max}C_{\max}$ determinate de s_{\min} și s_{\max} . Aceste două triunghiuri sunt isoscele în raport cu vârfurile A_{\min} și A_{\max} . Într-adevăr, ținând seama de formula (15), triunghiurile din familia $\mathcal{T}(R, r)$, având semiperimetrul minim, corespund cazului de egalitate $\cos \widehat{ION} = 1$, adică punctele I, O, N sunt coliniare iar I și N sunt situate pe aceeași semidreaptă cu originea în O .

Fie G și H centrul de greutate, respectiv ortocentrul triunghiului ABC . Deoarece punctele O, G, H sunt coliniare fiind situate pe dreapta lui Euler, rezultă că punctele O, I, G trebuie să fie coliniare. Prin urmare, triunghiul ABC este isoscel. În mod analog, triunghiul din familia $\mathcal{T}(R, r)$ pentru care semiperimetrul este maxim corespunde cazului de egalitate $\cos \widehat{ION} = -1$, adică punctele I, O, N sunt coliniare iar O este situat între I și N . Folosind din nou dreapta lui Euler obținem că triunghiul ABC este isoscel.

În continuare vom numi *configurația Blundon* a triunghiului ABC , configurația geometrică din Figura 4.13, unde punctele O și I sunt fixate.

Teorema 4.10.5. *Familia $\mathcal{T}(R, r)$ conține numai două triunghiuri isoscele, anume triunghiurile extremale $A_{\min}B_{\min}C_{\min}$ și $A_{\max}B_{\max}C_{\max}$.*

Demonstrație. Triunghiul ABC din familia $\mathcal{T}(R, r)$ este isoscel cu $AB = AC$ dacă și numai dacă dreapta OI este perpendiculară pe BC . Deoarece $B_{\min}C_{\min}$ și $B_{\max}C_{\max}$ sunt perpendiculare pe OI , rezultă concluzia. \square

În continuare vom determina elementele triunghiurilor isoscele $A_{\min}B_{\min}C_{\min}$ și $A_{\max}B_{\max}C_{\max}$.

Observăm că avem $A_{\min}D = R - OD = R - (OI - r)$, prin urmare

$$A_{\min}D = h_{\min} = R + r - OI = R + r - \sqrt{R^2 - 2Rr} \quad (17)$$

În mod analog obținem

$$A_{\max}E = h_{\max} = R + r + OI = R + r + \sqrt{R^2 - 2Rr} \quad (18)$$

Observație. Deoarece avem $OD \geq 0$, rezultă $OI \geq r$ și deci obținem

$$R \geq r(1 + \sqrt{2}), \quad (19)$$

adică

$$r \leq (\sqrt{2} - 1)R.$$

Aceasta este o demonstrație geometrică foarte scurtă inegalității lui A.Emmerich [66], care are loc pentru orice triunghi neascuțitunghic.

Considerăm $a_m = B_{\min}C_{\min}$, $b_m = A_{\min}B_{\min} = A_{\min}C_{\min}$ și fie $K_m = \frac{a_m \cdot h_{\min}}{2}$ aria triunghiului $A_{\min}B_{\min}C_{\min}$. Avem

$$R = \frac{a_m b_m^2}{4K_m} = \frac{b_m^2}{2h_{\min}},$$

prin urmare

$$2Rh_{\min} = b_m^2 = h_{\min}^2 + \frac{a_m^2}{4},$$

deci obținem

$$a_m^2 = 4h_{\min}(2R - h_{\min}). \quad (20)$$

Din relațiile (17) și (20) rezultă

$$a_m^2 = 4r \left(2R - r + 2\sqrt{R^2 - 2Rr} \right). \quad (21)$$

Fie $a_M = B_{\max}C_{\max}$, $b_M = A_{\max}B_{\max} = A_{\max}C_{\max}$, $K_M = \frac{a_M \cdot h_{\max}}{2}$ aria triunghiului $A_{\max}B_{\max}C_{\max}$. Avem

$$R = \frac{a_M b_M^2}{4K_M} = \frac{b_M^2}{2h_{\max}},$$

deci

$$2Rh_{\max} = b_M^2 = h_{\max}^2 + \frac{a_M^2}{4}.$$

De aici se obține

$$a_M^2 = 4h_{\max}(2R - h_{\max}) \quad (22)$$

Din relațiile (18) și (22) rezultă

$$a_M^2 = 4r \left(2R - r - 2\sqrt{R^2 - 2Rr} \right). \quad (23)$$

Combinând relațiile (21) și (23) obținem

$$a_m^2 + a_M^2 = 8r(2R - r) \text{ și } a_m a_M = 4r\sqrt{r^2 + 4Rr}.$$

Din relațiile (21) și (23) se obține inegalitatea $a_M < a_m$. De asemenea, avem

$$\cos A_{\min} = 2 \cos^2 \frac{A_{\min}}{2} - 1 = 2 \cdot \frac{h_{\min}^2}{b_m^2} - 1 = \frac{h_{\min}}{R} - 1 \quad (24)$$

și analog

$$\cos A_{\max} = 2 \cos^2 \frac{A_{\max}}{2} - 1 = 2 \cdot \frac{h_{\max}^2}{b_m^2} - 1 = \frac{h_{\max}}{R} - 1. \quad (25)$$

Teorema 4.10.6. *Au loc următoarele relații :*

$$\sin \frac{A_{\max}}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{2r}{R}} \quad (26)$$

și

$$\sin \frac{A_{\min}}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{2r}{R}} \quad (27)$$

Demonstrație. Folosind formulele (25) și (18), putem să scriem succesiv

$$\begin{aligned} \sin^2 \frac{A_{\max}}{2} &= \frac{1 - \cos A_{\max}}{2} = \frac{2 - \frac{h_{\max}}{R}}{2} = 1 - \frac{h_{\max}}{2R} = 1 - \frac{R + r + \sqrt{R^2 - 2Rr}}{2R} = \\ &= \frac{R - r - \sqrt{R^2 - 2Rr}}{2R} = \frac{2R^2 - 2Rr - 2R\sqrt{R^2 - 2Rr}}{4R^2} = \left(\frac{R - \sqrt{R^2 - 2Rr}}{2R} \right)^2, \end{aligned}$$

și obținem astfel formula (26).

În mod analog, folosind relațiile (24) și (17), obținem

$$\begin{aligned}\sin^2 \frac{A_{\min}}{2} &= \frac{1 - \cos A_{\min}}{2} = \frac{2 - \frac{h_{\min}}{R}}{2} = 1 - \frac{h_{\min}}{2R} = 1 - \frac{R + r - \sqrt{R^2 - 2Rr}}{2R} = \\ &= \frac{R - r + \sqrt{R^2 - 2Rr}}{2R} = \frac{2R^2 - 2Rr + 2R\sqrt{R^2 - 2Rr}}{4R^2} = \left(\frac{R + \sqrt{R^2 - 2Rr}}{2R} \right)^2,\end{aligned}$$

deci rezultă formula (27). \square

Rezultatele conținute în Teorema 4.10.5 și Teorema 4.10.6 clarifică cu demonstrații diferite rezultatele din lucrarea [92].

4.10.3 Forma tare a inegalităților lui Blundon

Pentru început demonstrăm un rezultat auxiliar util în obținerea rezultatului principal.

Lema 4.10.7. *Fie P un punct situat în interiorul cercului $\mathcal{C}(O; R)$. Dacă $P \neq O$, atunci funcția $A \mapsto PA$ este strict crescătoare pe semicercul $\widehat{M_0 M_1}$, unde punctele M_0, M_1 sunt date de intersecția dreptei OP cu cercul \mathcal{C} astfel încât $P \in (OM_0)$.*

Demonstrație. Fără a restrânge generalitatea, putem presupune că punctul O este originea sistemului de coordonate xOy și că punctul P este situat pe semi-axa pozitivă. Cu aceste ipoteze avem $P(x_0, 0)$, $x_0 > 0$, $A(R \cos t, R \sin t)$, $t \in [0, \pi]$, și

$$PA^2 = (R \cos t - x_0)^2 + (R \sin t)^2 = R^2 + x_0^2 - 2Rx_0 \cos t.$$

Deoarece funcția \cos este strict descrescătoare pe intervalul $[0, \pi]$ și $x_0 > 0$, obținem că funcția $A \mapsto PA^2$ este strict crescătoare, și proprietatea este astfel demonstrată. \square

Teorema 4.10.8. *În configurația Blundon, funcția $A \mapsto \angle BAC$ este strict crescătoare pe semicercul $\widehat{A_{\max} A_{\min}}$.*

Demonstrație. Avem $\sin \frac{A}{2} = \frac{r}{IA}$. Din Lema 4.10.5 cu $P = I$, rezultă că funcția $A \mapsto IA$ este strict descrescătoare pe semicercul $\widehat{A_{\max} A_{\min}}$. Prin urmare, pentru două puncte $A_1, A_2 \in \widehat{A_{\max} A_{\min}}$, avem $IA_1 > IA_2$, deci $\sin \frac{A_1}{2} = \frac{r}{IA_1} < \frac{r}{IA_2} = \sin \frac{A_2}{2}$, și se obține $\angle B_1 A_1 C_1 < \angle B_2 A_2 C_2$. \square

Din teorema sinusurilor, pentru un triunghi din familia $\mathcal{T}(R, r)$, avem $a = 2R \sin A$. Folosind relația $r = (s - a) \tan \frac{A}{2}$ obținem

$$s = \frac{r + a \tan \frac{A}{2}}{\tan \frac{A}{2}}.$$

Pe de altă parte, din relațiile $bc = \frac{4rRs}{a}$ și $b + c = 2s - a$, rezultă că numerele b, c sunt rădăcinile ecuației pătratice

$$x^2 - (2s - a)x + \frac{4rRs}{a} = 0,$$

adică avem

$$b, c = \frac{2s - a \pm \sqrt{4s^2 - 4as + a^2 - \frac{16rRs}{a}}}{2}.$$

Aceste calcule arată că un triunghi din familia $\mathcal{T}(R, r)$ este perfect determinat până la o congruență de unghiul A . Astfel obținem

Corolarul 4.10.9. *Distribuția triunghiurilor din familia $\mathcal{T}(R, r)$ este în perechi $(ABC, A'B'C')$ cu proprietatea că triunghiurile ABC și $A'B'C'$ sunt congruente și simetrice în raport cu diametrul OI al cercului circumscris.*

Corolarul 4.10.10. *În configurația Blundon, funcția $A \mapsto BC$ este strict crescătoare pe arcul $\widehat{A_{\max}A_0}$, și strict descrescătoare pe arcul $\widehat{A_0A_{\min}}$, unde A_0 este punctul situat pe semicercul $\widehat{A_{\max}A_{\min}}$ astfel ca $\angle B_0A_0C_0 = \frac{\pi}{2}$.*

Teorema 4.10.11. (Andrica-Barbu, forma tare a inegalităților lui Blundon) *În configurația Blundon, funcția $A \mapsto s(A)$, este strict descrescătoare pe arcul $\widehat{A_{\max}B_{\min}}$, unde $s(A)$ notează semiperimetrul triunghiului ABC . Prin urmare, au loc inegalitățile*

$$s(A_{\max}) \geq s(A) \geq s(A_{\min}).$$

Demonstrație. Evident, avem $s(A_{\max}) = s_{\max} = \text{semiperimetrul triunghiului}$

$$A_{\max}B_{\max}C_{\max} \text{ și } s(A_{\min}) = s_{\min} = \text{semiperimetrul triunghiului } A_{\min}B_{\min}C_{\min}.$$

Când vârful A se mișcă pe arcul $\widehat{A_{\max}B_{\min}}$ de la A_{\max} la B_{\min} , unghiul $\angle ION$ descrește strict de la π la 0, adică funcția $A \mapsto \angle ION$ este strict descrescătoare. Presupunem că avem ordinea $A_{\max}, A_1, A_2, B_{\min}$. Din formula (15) obținem $s^2(A_1) > s^2(A_2)$, ceea ce demonstrează concluzia. \square

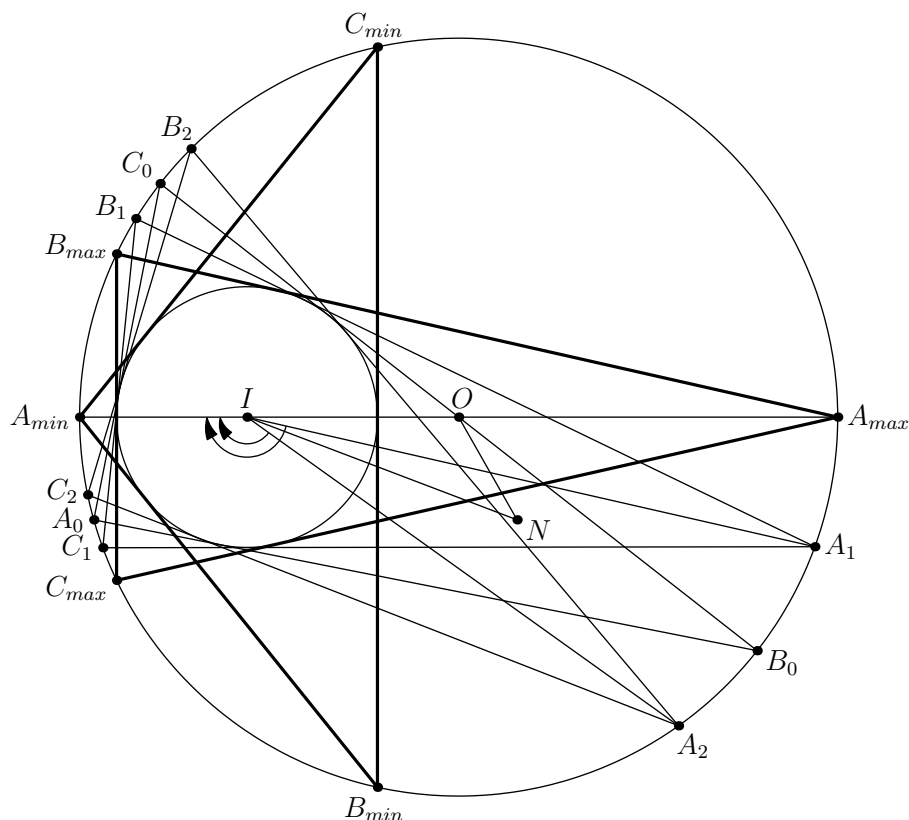


Figura 4.14

Aria $S(A)$ a triunghiului ABC este o funcție de unghiul A a triunghiului, definită prin formula $S(A) = rs(A)$. Ca o consecință a Teoremei 4.10.11 obținem următoarea variantă tare a rezultatului din [84], Teorema 1.

Corolarul 4.10.12. *În configurația Blundon, funcția $A \mapsto S(A)$, este strict descrescătoare pe arcul $\widehat{A_{\max}B_{\min}}$, unde $S(A)$ reprezintă aria triunghiului ABC .*

4.10.4 Versiunea duală a inegalităților lui Blundon

În această secțiune considerăm triunghiul ABC cu centrul cercului circumscris O , centrul cercului înscris I și centrele cercurilor exînscrise I_a, I_b, I_c și N_a, N_b, N_c

adjunctele punctului lui Nagel N . Fie s, R, r, r_a, r_b, r_c semiperimetrul, raza cercului circumscris, raza cercului înscris și razele cercurilor exînscrie ale triunghiului ABC . Știm că punctele N_a, G, I_a sunt coliniare și avem că $N_a I_a = 3 \cdot G I_a$. Proprietățile similare sunt valabile și pentru punctele N_b, G, I_b și N_c, G, I_c .

Următoarele relații sunt asemănătoare cu cele obținute pentru distanțele OI și ON :

$$OI_a^2 = R^2 + 2Rr_a, \quad OI_b^2 = R^2 + 2Rr_b, \quad OI_c^2 = R^2 + 2Rr_c$$

și

$$ON_a = R + 2r_a, \quad ON_b = R + 2r_b, \quad ON_c = R + 2r_c,$$

a se vedea paragraful 3.53 din Partea a II-a a cărții. Următorul rezultat este publicat în lucrarea [12].

Teorema 4.10.13. (Andrica-Barbu) *Are loc următoarea relație*

$$\cos \widehat{I_a O N_a} = \frac{R^2 - 3Rr_a - r_a^2 - \alpha}{(R + 2r_a)\sqrt{R^2 + 2Rr_a}}, \quad (28)$$

$$\text{unde } \alpha = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}.$$

Demonstrație. Știm că punctele N_a, G, I_a sunt coliniare și avem că

$$N_a I_a = 3 \cdot G I_a, \quad ON_a = R + 2r_a, \quad OI_a = R^2 + 2Rr_a.$$

Aplicând teorema lui Stewart în triunghiul $I_a O N_a$ rezultă

$$ON_a^2 \cdot G I_a + OI_a^2 \cdot N_a G - OG^2 \cdot N_a I_a = G I_a \cdot G N_a \cdot N_a I_a,$$

și de aici obținem

$$ON_a^2 \cdot G I_a + OI_a^2 \cdot 2 \cdot G I_a - OG^2 \cdot 3 \cdot G I_a = 6 \cdot G I_a^3.$$

Folosind relația $N_a I_a = 3 \cdot G I_a$ rezultă

$$\begin{aligned} I_a N_a^2 &= 9 \cdot G I_a^2 \\ &= \frac{3}{2} \left(\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} + 8Rr_a + 4r_a^2 \right) \\ &= \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} + 12Rr_a + 6r_a^2 \\ &= 2\alpha + 12Rr_a + 6r_a^2. \end{aligned}$$

Din teorema cosinusului aplicată în triunghiul I_aON_a rezultă că avem

$$\begin{aligned}\cos \widehat{I_aON_a} &= \frac{OI_a^2 + ON_a^2 - I_aN_a^2}{2 \cdot OI_a \cdot ON_a} \\ &= \frac{R^2 + 2Rr_a + (R + 2r_a)^2 - I_aN_a^2}{2 \cdot OI_a \cdot ON_a} \\ &= \frac{R^2 - 3Rr_a - r_a^2 - \alpha}{(R + 2r_a)\sqrt{R^2 + 2Rr_a}}\end{aligned}$$

și astfel relația este demonstrată.

Au loc relațiile analoage pentru $\cos \widehat{I_bON_b}$ și $\cos \widehat{I_cON_c}$. □

Următorul rezultat reprezintă o versiune duală pentru inegalitățile lui Blundon.

Teorema 4.10.14. (Andrica-Barbu) *Au loc următoarele inegalități*

$$0 \leq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4} \leq R^2 - 3Rr_a - r_a^2 + (R + 2r_a)\sqrt{R^2 + 2Rr_a}. \quad (29)$$

Demonstrație. Pentru început, vom proceda la fel ca în demonstrația Teoremei 4.10.4, adică folosind inegalitățile $-1 \leq \cos \widehat{I_aON_a} \leq 1$, obținem

$$\begin{aligned}R^2 - 3Rr_a - r_a^2 - (R + 2r_a)\sqrt{R^2 + 2Rr_a} &\leq \alpha \\ &\leq R^2 - 3Rr_a - r_a^2 + (R + 2r_a)\sqrt{R^2 + 2Rr_a}.\end{aligned}$$

Este evident că avem

$$R^2 = R\sqrt{R^2} \leq (R + 2r_a)\sqrt{R^2 + 2Rr_a} \leq 3Rr_a + r_a^2 + (R + 2r_a)\sqrt{R^2 + 2Rr_a},$$

aceasta fiind expresia din partea stângă a inegalității precedente, și care este negativă întotdeauna. Pe de altă parte avem că $\alpha \geq 0$. Inegalitatea din partea dreaptă a relației (29) rezultă din inegalitatea $\cos \widehat{I_aON_a} \leq 1$, unde valoarea $\cos \widehat{I_aON_a}$ este dată de formula (28) în Teorema 4.10.13. Analog procedăm pentru r_b și r_c . □

Notăm cu $\mathcal{T}(R, r_a)$ familia tuturor triunghiurilor care au raza cercului circumscris R și raza cercului exînscriș r_a . Inegalitățile din (29) scrise în termenii R și r_a ne dau intervalul exact pentru α , pentru triunghiurile din familia $\mathcal{T}(R, r_a)$.

Avem că $\alpha_{\min} = 0$ și $\alpha_{\max} = R^2 - 3Rr_a - r_a^2 + (R + 2r_a)\sqrt{R^2 + 2Rr_a}$.

Dacă fixăm pe O centrul cercului circumscris și I_a centrul cercului exînscriș astfel încât $OI_a = \sqrt{R^2 + 2Rr_a}$, atunci triunghiurile din familia $\mathcal{T}(R, r_a)$ cu α minimal

sunt degenerate până la un punct și acestea corespund punctelor de intersecție a cercurilor.

În Figura 4.15 aceste puncte sunt notate cu A'_{min} și A''_{min} . De asemenea, triunghiul din familia $\mathcal{T}(R, r_a)$ cu α maximal corespunde cazului de egalitate $\cos \widehat{I_a O N_a} = -1$, adică punctele I_a, O, N_a sunt coliniare, iar O se află între I_a și N_a .

Utilizând din nou dreapta lui Euler pentru triunghi, avem că triunghiul ABC este isoscel. Figura 4.15 prezintă configurația geometrică standard cu privire la triunghiurile extreme. De asemenea, în Figura 4.15 sunt prezentate alte două triunghiuri degenerate, adică triunghiurile isoscele $A'_{min} B'$ și $A''_{min} B''$ definite de intersecțiile tangentelor în punctele A'_{min} și A''_{min} la cercul $\mathcal{C}(I_a, r_a)$ cu cercul $\mathcal{C}(I, r)$.

Din Teorema 4.10.13 rezultă că este o problemă de construcție a triunghiului ABC , cunoscând centrul cercului exînscriș I_a , centrul cercului înscris O și punctul adjunct al lui Nagel, N_a . Știm că punctele I_a, G, N_a sunt coliniare, astfel încât centrul de greutate G se află pe segmentul $[I_a N_a]$ și $I_a G = \frac{1}{3} I_a N_a$.

Apoi, cu ajutorul dreptei lui Euler, găsim ortocentrul H pe semidreapta $(OG$ astfel încât $OH = 3 \cdot OG$. Am redus, din nou, problema construcției la faimoasa problemă de determinare a lui Euler: construcția triunghiului ABC cunoscând centrul cercului înscris I , centrul cercului circumscris O și ortocentrul H .

Observația 4.10.15. 1) Putem să exprimăm pe α în funcție de s, R, r_a . În acest sens demonstrăm mai întâi relația

$$ab + bc + ca = \frac{s^6 + r_a(4R + 3r_a)s^4 + r_a^2(3r_a^2 - 16R^2)s^2 + r_a^2(r_a - 4R)}{(s^2 + r_a^2)^2}. \quad (30)$$

Într-adevăr, avem $\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{r_a}{2}$, deci putem rescrie

$$\begin{aligned} \sin A &= 2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} = \frac{2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}}{\sin^2 \frac{A}{2} + \cos^2 \frac{A}{2}} \\ &= \frac{2 \operatorname{tg} \frac{A}{2}}{\operatorname{tg}^2 \frac{A}{2} + 1} = \frac{2 \cdot \frac{r_a}{s}}{\frac{r_a^2}{s^2} + 1} = \frac{2ras}{r_a^2 + s^2}. \end{aligned}$$

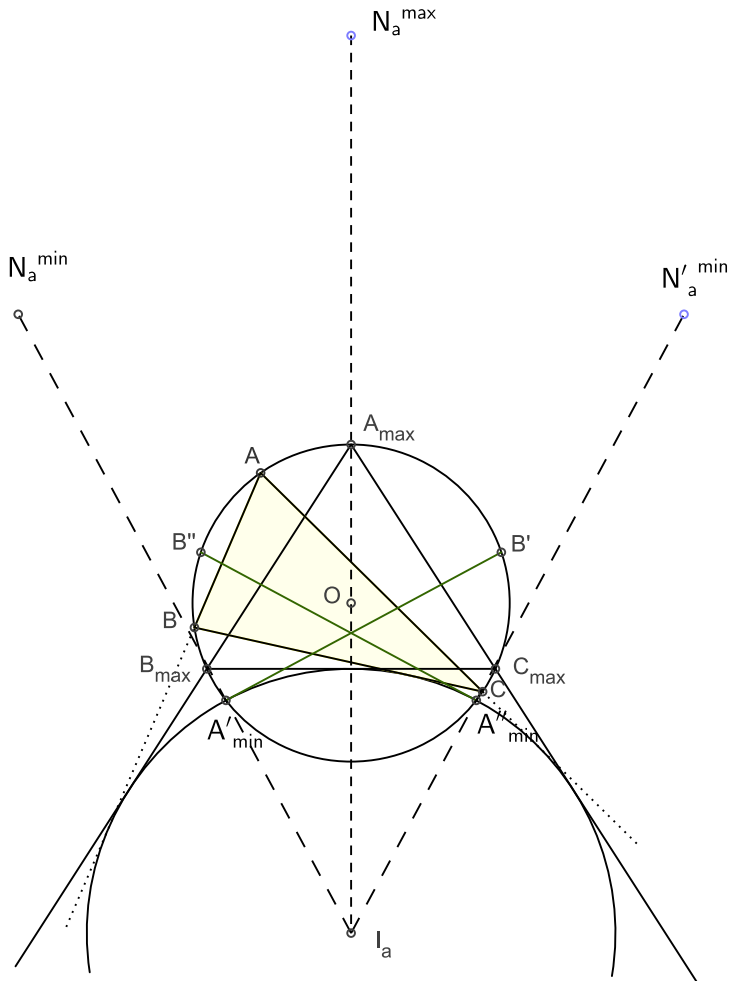


Figura 4.15

Avem că

$$a = 2R \cdot \sin A = \frac{4Rr_a s}{r_a^2 + s^2}.$$

Dacă notăm cu S aria triunghiului ABC , din $\frac{abc}{4R} = S = (s - a)r_a$, avem că

$$\begin{aligned} bc &= \frac{4(s - a)Rr_a}{a} = 4Rr_a \left(\frac{s}{a} - 1 \right) \\ &= 4Rr_a \cdot \frac{r_a^2 + s^2 - 4Rr_a}{4Rr_a} = r_a^2 + s^2 - 4Rr_a. \end{aligned}$$

Combinând aceste formule obținem

$$\begin{aligned} ab + bc + ca &= a(b + c) + bc \\ &= a(2s - a) + bc \\ &= \frac{4Rr_a s}{r_a^2 + s^2} \left(2s - \frac{4Rr_a s}{r_a^2 + s^2} \right) + r_a^2 - s^2 - 4Rr_a \\ &= \frac{s^6 + r_a(4R + 3r_a)s^4 + r_a^2(3r_a^2 - 16R^2)s^2 + r_a^5(r_a - 4R)}{(s^2 + r_a^2)^2}. \end{aligned}$$

Acum este ușor să scriem pe α cu ajutorul invariantilor s, R, r_a . Avem

$$\begin{aligned} 4\alpha &= a^2 + b^2 + c^2 \\ &= (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca) \\ &= 4s^2 - 2 \cdot \frac{s^6 + r_a(R + 3r_a)s^4 + r_a^2(3r_a^2 - 16R^2)s^2 + r_a^5(r_a - 4R)}{(s^2 + r_a^2)^2} \\ &= \frac{2[s^6 - r_a(4R - r_a)s^4 + r_a^2(16R^2 - r_a^2)s^2 - r_a^5(r_a - 4R)]}{(s^2 + r_a^2)^2} \end{aligned} \quad (31)$$

2) Formula (31) exprimă pe α ca o funcție complicată de s, R și r_a , deci, pentru a avea o dualitate între formulele (15) și (28) trebuie să exprimăm $\widehat{I\hat{O}N}$ în funcție de α, R, r . În aceste condiții, din formula $a^2 + b^2 + c^2 = 2(s^2 - r^2 - 4Rr)$ obținem $s^2 = 2\alpha + 4Rr + r^2$. Înlocuind în formula (15) obținem

$$\begin{aligned} \cos \widehat{I\hat{O}N} &= \frac{2R^2 + 10Rr - r^2 - s^2}{2(R - 2r)\sqrt{R^2 - 2Rr}} \\ &= \frac{2R^2 + 10Rr - r^2 - 2\alpha - 4Rr - r^2}{2(R - 2r)\sqrt{R^2 - 2Rr}} \\ &= \frac{2R^2 + 6Rr - 2r^2 - 2\alpha}{2(R - 2r)\sqrt{R^2 - 2Rr}}. \end{aligned}$$

Prin urmare, obținem

$$\cos \widehat{ION} = \frac{R^2 + 3Rr - r^2 - \alpha}{(R - 2r)\sqrt{R^2 - 2Rr}}. \quad (32)$$

Transformarea formală $r \rightarrow -r_a$ ne dă dualitatea dintre formulele (32) și (28). Vom găsi transformări formale de dualitate similare pentru relațiile referitoare la r_a, r_b .

4.11 Exerciții și probleme

1. Să se demonstreze că maximul ariei unui triunghi cu vârfurile pe laturile unui paralelogram este egal cu jumătate din aria paralelogramului.
2. Suma distanțelor unui punct la două vârfuri alăturate ale unui pătrat este a . Să se afle valoarea maximă a sumei distanțelor acelui punct la celelalte două vârfuri ale pătratului.
3. Fie un unghi xOy iar P un punct în interiorul său. Să se ducă prin P o dreaptă care să formeze cu laturile unghiului un triunghi de arie minimă.
4. Se consideră un segment $[AB]$ pe care se ia un punct mobil M și se construiesc de aceeași parte a segmentului triunghiurile echilaterale AMC și BMD . Să se determine poziția punctului M astfel încât aria triunghiului DMC să fie maximă.
5. Să se înscrie într-un triunghi dat un dreptunghi de arie maximă.
6. Pe laturile unui patrulater convex $ABCD$ se consideră punctele $A_1 \in [AB], B_1 \in [BC], C_1 \in [CD], D_1 \in [DA]$ astfel încât

$$\frac{AB}{AA_1} = \frac{BC}{BB_1} = \frac{CD}{CC_1} = \frac{DA}{DD_1} = k > 0.$$

Determinați valoarea lui k pentru care aria patrulaterului $A_1B_1C_1D_1$ este minimă.

7. În triunghiul oarecare ABC se consideră punctele $P, Q \in [BC]$ astfel încât cevielele AP și AQ sunt izogonale. Stabiliți poziția punctelor P și Q pentru care suma $\frac{1}{AP} + \frac{1}{AQ}$ să fie maximă.

8. Demonstrați că maximul produsului lungimilor laturilor unui patrulater înscris într-un cerc de rază R este $4R^4$.
9. Fiind dat un triunghi oarecare ABC , să se determine valoarea minimă a sumei distanțelor la vârfuri pentru un punct situat pe o mediană triunghiului.
10. Fie ABC un triunghi oarecare, $[AA']$, $[BB']$, $[CC']$ bisectoarele sale și I intersecția lor. Să se determine valoarea minimă a expresiei

$$\frac{AI}{IA'} + \frac{BI}{IB'} + \frac{CI}{IC'}.$$

Partea II

Metode ale geometriei euclidiene

Metoda calculului vectorial

1

1.1 Vectori liberi și operații

Pe lângă noțiunile cu care operează matematica, create prin abstractizare în urma observației mediului înconjurător (de ex. noțiunile geometrice) sau a cercetării cantitative și calitative a fenomenelor naturii (de ex. noțiunea de număr) în matematică există și elemente preluate din alte științe. Noțiunea de vector, introdusă de fizică a fost studiată și dezvoltată, creându-se calculul vectorial, devenit un instrument util atât pentru matematică, cât și pentru fizică. Mărimile fizice sunt în general reprezentabile prin vectori (de ex. forța, viteza).

În examinarea fenomenelor din natură se întâlnesc două tipuri de mărimi:

1. *mărimi scalare* (temperatura, lungimea, timpul, volumul, densitatea, aria) care se pot caracteriza printr-un număr (ce se măsoară cu o anumită unitate de măsură);
2. *mărimi vectoriale* (forța, viteza, accelerația) pentru a căror caracterizare nu este suficientă măsura lor, ci este necesară cunoașterea direcției și sensului în care ele acționează.

Am văzut în Partea I că planul euclidian \mathcal{P} se definește axiomat utilizând două sisteme de axiome: sistemul lui Hilbert care conține 5 grupe de axiome sau sistemul lui Birkhoff, care este un sistem axiomat de natură metrică.

Planul euclidian \mathcal{P} este o mulțime de puncte. O pereche de puncte $(A, B) \in \mathcal{P} \times \mathcal{P}$ se numește *segment orientat*.

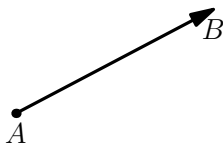


Figura 1.1

Punctul A este *originea*, iar B este *extremitatea* segmentului orientat.

Segmentele orientate se mai numesc *vectori legați*. Notăm, pentru simplitate, vectorul legat (A, B) cu \overrightarrow{AB} și îl numim vector legat în A . Elementele care definesc un vector legat sunt următoarele:

- direcția: AB
- sensul: de la A la B
- lungimea (norma): $|\overrightarrow{AB}|$ este lungimea euclidiană a segmentului $[AB]$

Definiția 1.1.1. Vectorii legați $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ se numesc *echivalenți* dacă segmentele $[AD]$ și $[BC]$ au același mijloc. Acest lucru revine la faptul că patrulaterul $ABCD$ este paralelogram.

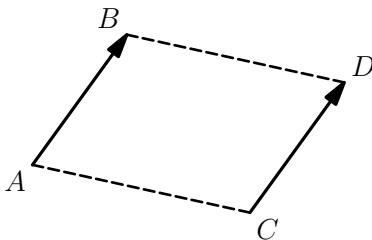


Figura 1.2

În acest caz folosim notația $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$.

Relația " \sim " este o relație de echivalență pe mulțimea vectorilor legați din planul euclidian \mathcal{P} . Această proprietate înseamnă că relația " \sim " este:

- reflexivă: orice vector legat este echivalent cu el însuși, adică avem $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{AB}$;
- simetrică: $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD} \Rightarrow \overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{AB}$;
- tranzitivă: $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{EF} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{EF}$

Definiția 1.1.2. Mulțimea claselor de echivalență în raport cu relația " \sim " definită mai sus poartă numele de *mulțimea vectorilor liberi* din plan.

Notăm cu V_2 mulțimea tuturor vectorilor liberi din plan euclidian.

Aceste noțiuni rămân valabile și pentru spațiul euclidian 3-dimensional și notăm cu V_3 mulțimea tuturor vectorilor liberi din spațiu.

În continuare vom nota elementele lui V_2 cu litere mici \vec{a}, \vec{b}, \dots , și vom reaminti două operații importante cu vectori liberi.

Adunarea. Pentru doi vectori liberi \vec{v}_1, \vec{v}_2 , definim *suma* lor ca fiind $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{v}$, unde \vec{v} este vectorul liber definit astfel: dacă $\vec{AB} \in \vec{v}_1$, $\vec{BC} \in \vec{v}_2$, atunci $\vec{AC} \in \vec{v}$.

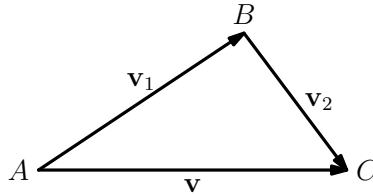


Figura 1.3

Adunarea vectorilor liberi este o operație internă $V_2 \times V_2 \rightarrow V_2$ iar $(V_2, +)$ este un grup abelian cu elementul neutru $\vec{0}$, unde $\vec{0}$ este vectorul liber nul, adică vectorul liber reprezentat de \vec{AA} , unde $A \in \mathcal{P}$. Dacă vectorul \vec{v} este reprezentat de $\vec{AB} \in \vec{v}$, atunci opusul său $-\vec{v}$ este reprezentat de \vec{BA} .

Înmulțirea cu scalari reali este operația $\mathbb{R} \times V_2 \rightarrow V_2$, $(\alpha, \vec{a}) \mapsto \alpha \vec{a}$, unde $\vec{a} \in V_2$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$, iar vectorul $\alpha \cdot \vec{a} \in V_2$ este definit de următoarele elemente:

- $\alpha \cdot \vec{a}$ are direcția lui \vec{a} ;
- $\alpha \cdot \vec{a}$ are sensul lui \vec{a} dacă $\alpha > 0$ și sensul lui $-\vec{a}$ dacă $\alpha < 0$;
- $|\alpha \vec{a}| = |\alpha| \cdot |\vec{a}|$;
- dacă $\alpha = 0$, atunci avem $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$.

Exemplul 1.1.3. În Figura 1.4 sunt reprezentați vectorii \vec{a} , $-3\vec{a}$.

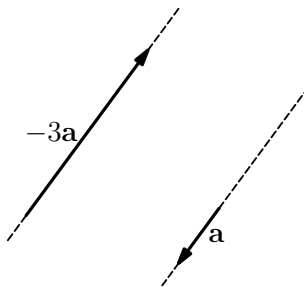


Figura 1.4

Au loc următoarele proprietăți ale înmulțirii cu scalari:

- $(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$ (distributivitatea față de adunarea scalarilor)

- $\alpha(\bar{a} + \bar{b}) = \alpha\bar{a} + \alpha\bar{b}$ (distributivitatea față de adunarea vectorilor)
- $\alpha(\beta\bar{a}) = (\alpha\beta)\bar{a}$
- $1 \cdot \bar{a} = \bar{a}$
- $0 \cdot \bar{a} = \bar{0}$,

pentru orice $\bar{a}, \bar{b} \in V_2$ și orice scalari $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Teorema 1.1.4. *În raport cu operațiile de adunare și înmulțire cu scalari reali $(V_2, +, \cdot)$ este spațiu vectorial real.*

Definiția 1.1.5. Vectorii $\bar{v}_1, \bar{v}_2 \in V_2$ sunt *paraleli*, notat $\bar{v}_1 \parallel \bar{v}_2$, dacă au aceeași direcție.

Evident avem:

- 1) $\bar{v}_1 \parallel \bar{v}_2$ dacă și numai dacă există $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel încât $\bar{v}_1 = \alpha \cdot \bar{v}_2$.
- 2) Dacă $\bar{v}_1 \nparallel \bar{v}_2$ atunci relația $\alpha_1 \bar{v}_1 = \alpha_2 \bar{v}_2$ are loc dacă și numai dacă $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

Definiția 1.1.6. Orice vector liber de lungime 1 se numește *versor*.

1.2 Vector de poziție

Considerăm punctul O fixat în planul euclidian. Pentru orice punct $M \in \mathcal{P}$, vectorul \overrightarrow{OM} se numește *vectorul de poziție* al lui M relativ la punctul O . Atunci când subînțelegem punctul O , acest vector se mai notează \bar{r}_M .

Aplicația $M \mapsto \bar{r}_M$ realizează o bijecție de la mulțimea punctelor planului euclidian \mathcal{P} la mulțimea vectorilor liberi.

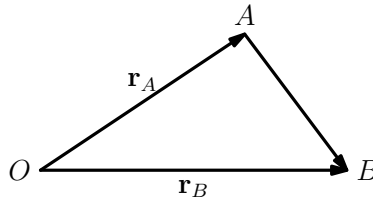


Figura 1.5

Pentru două puncte $A, B \in \mathcal{P}$ avem $\bar{r}_A + \overrightarrow{AB} = \bar{r}_B$, deci obținem relația $\overrightarrow{AB} = \bar{r}_B - \bar{r}_A$.

Proprietăți geometrice

1) Vectorul de poziție al unui punct care împarte un segment dat într-un raport dat se determină astfel.

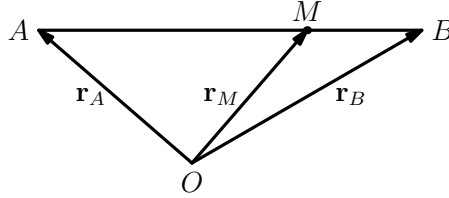


Figura 1.6

Presupunem că avem relația vectorială $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$, unde k este un număr real nenul și $k \neq 0, 1$. În acest caz k este raportul în care punctul M împarte segmentul $[AB]$. Avem

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} = -\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = -k\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB} = (1 - k)\overrightarrow{MB},$$

și $\bar{r}_M = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} = \bar{r}_A + \overrightarrow{AM}$. Folosind relația $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$, obținem

$$\bar{r}_M = \bar{r}_A + \overrightarrow{AM} = \bar{r}_A - \overrightarrow{MA} = \bar{r}_A - k\overrightarrow{MB} = \bar{r}_A - k(\bar{r}_B - \bar{r}_M)$$

adică

$$\bar{r}_M = \frac{\bar{r}_A - k\bar{r}_B}{1 - k}. \quad (1)$$

Observația 1.2.1. Relația vectorială $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$ conține și situațiile în care punctul M nu este interior segmentului $[AB]$. În aceste situații avem $M \notin [AB]$ dacă și numai dacă $k > 0$.

2) Condiția de coliniaritate a trei puncte se obține din formula (1) astfel.

Punctele distincte A, M și B sunt coliniare dacă și numai dacă punctul M împarte segmentul AB într-un raport, ceea ce revine la faptul că există un număr real $k, k \neq 1$, astfel încât vectorul de poziție al lui \bar{r}_M este

$$\bar{r}_M = \frac{\bar{r}_A - k \cdot \bar{r}_B}{1 - k}.$$

Ultima relație este echivalentă cu faptul că există $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^*$, cu proprietatea că

$$\alpha \cdot \bar{r}_M + \beta \cdot \bar{r}_A + \gamma \cdot \bar{r}_B = 0.$$

În acest caz spunem că vectorii de poziție $\bar{r}_A, \bar{r}_B, \bar{r}_M$ sunt liniar dependenți.

1.3 Vectorii de poziție ai punctelor remarcabile în triunghi. Aplicații

Propoziția 1.3.1. Fie ABC un triunghi oarecare și punctele $A' \in BC$, $B' \in CA$. Dacă λ și μ sunt rapoartele în care A' și B' împart segmentele $[BC]$ și $[CA]$, $\lambda, \mu \neq 0, 1$, cu $\lambda\mu - \lambda + 1 \neq 0$, atunci cevienele AA' și BB' au un punct comun de intersecție M și avem

$$\bar{r}_M = \frac{1}{\lambda\mu - \lambda + 1}(\lambda\mu\bar{r}_A + \bar{r}_B - \lambda\bar{r}_C). \quad (2)$$

Demonstrație. Cu ajutorul teoremei lui Thales se arată imediat că avem $\lambda\mu - \lambda + 1 = 0$ dacă și numai dacă $AA' \parallel BB'$. Prin urmare, din ipoteza $\lambda\mu - \lambda + 1 \neq 0$ rezultă că dreptele AA' și BB' au un punct comun de intersecție. Din faptul că λ și μ sunt rapoartele în care punctele A' și B' împart segmentele $[BC]$ și $[CA]$, rezultă că avem

$$\bar{r}_{A'} = \frac{1}{1-\lambda}\bar{r}_B - \frac{\lambda}{1-\lambda}\bar{r}_C, \quad \bar{r}_{B'} = \frac{1}{1-\mu}\bar{r}_C - \frac{\mu}{1-\mu}\bar{r}_A.$$

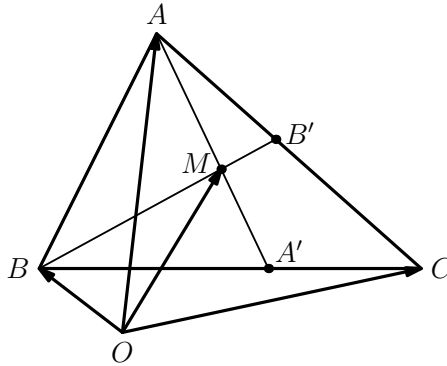


Figura 1.7

Ținând cont de aceste relații, ecuațiile vectoriale ale cevienelor AA' și BB' ,

$$AA' : \bar{r} = \bar{r}_A + u(\bar{r}_{A'} - \bar{r}_A), \quad BB' : \bar{r} = \bar{r}_B + v(\bar{r}_{B'} - \bar{r}_B)$$

se scriu sub forma

$$AA' : \bar{r} = (1-u)\bar{r}_A + \frac{u}{1-\lambda}\bar{r}_B - \frac{\lambda u}{1-\lambda}\bar{r}_C, \quad (3)$$

$$BB' : \bar{r} = (1 - v)\bar{r}_B + \frac{v}{1 - \mu}\bar{r}_C - \frac{\mu v}{1 - \mu}\bar{r}_A. \quad (4)$$

Vectorul \bar{r}_M asociat punctului M de intersecție se obține din (3) sau (4) pentru u sau v luat dintr-o soluție (u, v) a sistemului liniar de ecuații obținut prin identificarea coeficienților

$$1 - u = -\frac{\mu v}{1 - \mu}, \quad \frac{u}{1 - \lambda} = 1 - v, \quad -\frac{\lambda u}{1 - \lambda} = \frac{v}{1 - \mu}. \quad (5)$$

Găsim cu ușurință, ca soluție a sistemului (5) perechea (u, v) cu

$$u = \frac{1 - \lambda}{\lambda\mu - \lambda + 1}, \quad v = \frac{\lambda\mu - \lambda}{\lambda\mu - \lambda + 1}. \quad (6)$$

După înlocuirea lui u sau v din (6) în (3) sau (4), obținem pentru \bar{r}_M reprezentarea (2). \square

Aplicația 1.3.2. (centrul de greutate) Dacă AA' și BB' sunt mediane, atunci avem $\lambda = \mu = -1$ și din formula (2) găsim

$$\bar{r}_G = \frac{1}{3}(\bar{r}_A + \bar{r}_B + \bar{r}_C).$$

Aplicația 1.3.3. (centrul cercului înscris) Dacă AA' și BB' sunt bisectoare interioare, atunci M coincide cu I , centrul cercului înscris în triunghiul ABC . Din teorema bisectoarei interioare avem

$$\lambda = -\frac{c}{b}, \quad \mu = -\frac{a}{c},$$

unde a, b, c sunt lungimile laturilor triunghiului ABC . Aplicând formula (2) rezultă

$$\bar{r}_I = \frac{1}{a + b + c}(a \cdot \bar{r}_A + b \cdot \bar{r}_B + c \cdot \bar{r}_C), \quad (3)$$

Aplicația 1.3.4. (centrale cercurilor exînscrie) Dacă AA' este bisectoarea interioară și BB' bisectoarea exterioară, atunci M coincide cu I_a , centrul cercului exînscriu corespunzător laturii $[BC]$ a triunghiului. Din teorema bisectoarei interioare avem $\lambda = -\frac{c}{b}$, iar din teorema bisectoarei exterioare rezultă $\mu = \frac{a}{c}$. Prin înlocuire în formula (2) obținem

$$\bar{r}_{I_a} = \frac{1}{-a + b + c}(-a \cdot \bar{r}_A + b \cdot \bar{r}_B + c \cdot \bar{r}_C). \quad (4)$$

Analog, se obține

$$\bar{r}_{I_b} = \frac{1}{a - b + c}(a \cdot \bar{r}_A - b \cdot \bar{r}_B + c \cdot \bar{r}_C),$$

$$\bar{r}_{I_c} = \frac{1}{a + b - c}(a \cdot \bar{r}_A + b \cdot \bar{r}_B - c \cdot \bar{r}_C).$$

Aplicația 1.3.5. (ortocentrul) Dacă AA' și BB' sunt înălțimi, atunci M coincide cu H , ortocentrul triunghiului. Presupunem că triunghiul ABC este ascuțitunghic și obținem $\lambda = -\frac{\operatorname{tg} C}{\operatorname{tg} B}$ și $\mu = -\frac{\operatorname{tg} A}{\operatorname{tg} C}$. Din formula (2) rezultă imediat

$$\bar{r}_H = \frac{1}{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C}(\operatorname{tg} A \cdot \bar{r}_A + \operatorname{tg} B \cdot \bar{r}_B + \operatorname{tg} C \cdot \bar{r}_C), \quad (5)$$

formulă care este complicat de utilizat în aplicații.

Aplicația 1.3.6. (punctul lui Gergonne) În cazul în care A' și B' sunt punctele de tangență ale cercului înscris cu laturile $[BC]$ și $[CA]$ ale triunghiului, atunci M este punctul lui Gergonne Γ . În acest caz avem $\lambda = -\frac{s-b}{s-c}$ și $\mu = -\frac{s-c}{s-a}$. Un calcul simplu în formula (2) ne conduce la vectorul de poziție

$$\bar{r}_\Gamma = \frac{1}{\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s-b} + \frac{1}{s-c}} \left(\frac{1}{s-a} \bar{r}_A + \frac{1}{s-b} \bar{r}_B + \frac{1}{s-c} \bar{r}_C \right). \quad (6)$$

Aplicația 1.3.7. (punctul lui Nagel) Dacă A' și B' sunt punctele de tangență ale cercurilor exînscrise cu laturile $[BC]$ și $[CA]$, atunci M este punctul lui Nagel N . În această situație avem $\lambda = -\frac{s-c}{s-b}$ și $\mu = -\frac{s-a}{s-c}$, deci aplicând formula (2) obținem după un calcul simplu

$$\bar{r}_N = \frac{1}{s}[(s-a) \cdot \bar{r}_A + (s-b) \cdot \bar{r}_B + (s-c) \cdot \bar{r}_C]. \quad (7)$$

Aplicația 1.3.8. (punctul lui Lemoine) Dacă AA' și BB' sunt simediane, atunci M devine punctul lui Lemoine K al triunghiului ABC . Din teorema lui Steiner (Teorema 1.5.4, Partea I) rezultă că avem $\lambda = -\frac{c^2}{b^2}$ și $\mu = -\frac{a^2}{c^2}$, iar din formula (2) obținem

$$\bar{r}_K = \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2}(a^2 \cdot \bar{r}_A + b^2 \cdot \bar{r}_B + c^2 \cdot \bar{r}_C). \quad (8)$$

Teorema 1.3.9. (relația lui Sylvester) Fie triunghiul ABC cu ortocentrul H și centrul cercului circumscris O . Are loc relația

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH}. \quad (9)$$

Demonstrație. Fie O' simetricul lui O față de AC și M punctul din plan pentru care avem

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM}.$$

Rezultă $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BM}$. Paralelogramul $OCO'A$ este romb și deci avem $OO' \perp AC$. Dar $\overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$, deci în mod necesar $\overrightarrow{BM} \perp \overrightarrow{AC}$. Analog arătăm că $\overrightarrow{CM} \perp \overrightarrow{AB}$, prin urmare $M = H$, adică are loc relația din enunț. \square

Teorema 1.3.10. (dreapta lui Euler) În orice triunghi punctele O, G, H sunt coliniare în această ordine și are loc relația $OH = 3OG$.

Demonstrație. O demonstrație sintetică a fost dată în Teorema 1.6.1 din Partea I a acestei cărți. Prezentăm acum demonstrația vectorială. Raportăm vectorii de poziție la punctul O , centrul cercului circumscris triunghiului. Avem

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$$

și din relația lui Sylvester $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$, deci $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$. Prin urmare, punctele O, G, H sunt coliniare și avem $OH = 3OG$. \square

Teorema 1.3.11. (dreapta lui Nagel) În orice triunghi punctele I, G, N sunt coliniare în această ordine și avem $IN = 3IG$.

Demonstrație. Raportăm vectorii de poziție la punctul I și aplicăm formula (7). Obținem

$$\begin{aligned} \overrightarrow{IN} &= \frac{1}{s}[(s-a) \cdot \overrightarrow{IA} + (s-b) \cdot \overrightarrow{IB} + (s-c) \cdot \overrightarrow{IC}] \\ &= \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} - \frac{2}{a+b+c}(a \cdot \overrightarrow{IA} + b \cdot \overrightarrow{IB} + c \cdot \overrightarrow{IC}) \\ &= 3\overrightarrow{IG}, \end{aligned}$$

unde am folosit faptul că din formula (3) rezultă relația $a \cdot \overrightarrow{IA} + b \cdot \overrightarrow{IB} + c \cdot \overrightarrow{IC} = \vec{0}$. Rezultă astfel că punctele I, G, N sunt coliniare și are loc relația $IN = 3IG$. \square

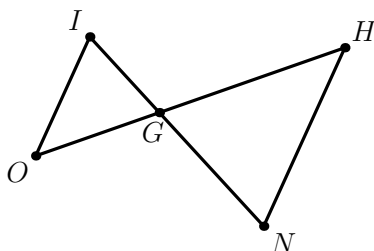


Figura 1.8

Combinând rezultatele conținute în cele două teoreme de mai sus obținem următoarea configurație care joacă un rol fundamental în geometria triunghiului, în care avem $OI \parallel NH$.

Aplicația 1.3.12. Fie triunghiul ABC oarecare și A', B', C' punctele de contact ale cercului înscris cu laturile triunghiului. Să se demonstreze că are loc relația

$$a \cdot \overline{AA'} + b \cdot \overline{BB'} + c \cdot \overline{CC'} = \vec{0},$$

unde a, b, c lungimile laturilor triunghiului.

Într-adevăr, am văzut în Aplicația 1.3.6 că raportul în care punctul A' împarte segmentul $[BC]$ este $-\frac{s-b}{s-c}$. Aplicând formula (1) obținem

$$\overline{AA'} = \vec{r}_{A'} - \vec{r}_A = \frac{\vec{r}_B + \frac{s-b}{s-c} \cdot \vec{r}_C}{1 + \frac{s-b}{s-c}} - \vec{r}_A = \frac{1}{a} [-a \cdot \vec{r}_A + (s-c) \cdot \vec{r}_B + (s-b) \cdot \vec{r}_C],$$

deci avem

$$a \cdot \overline{AA'} = -a \cdot \vec{r}_A + (s-c) \cdot \vec{r}_B + (s-b) \cdot \vec{r}_C.$$

Analog obținem relațiile

$$b \cdot \overline{BB'} = (s-c) \cdot \vec{r}_A - b \cdot \vec{r}_B + (s-a) \cdot \vec{r}_C,$$

$$c \cdot \overline{CC'} = (s-b) \cdot \vec{r}_A + (s-a) \cdot \vec{r}_B - c \cdot \vec{r}_C.$$

Prin adunarea celor trei relații rezultă proprietatea de demonstrat.

Observația 1.3.13. Dacă raportăm vectorii de poziție la punctul I , relația (10) se poate scrie sub forma

$$\begin{aligned} a \cdot \overline{AA'} &= -(a \cdot \overline{IA} + b \cdot \overline{IB} + c \cdot \overline{IC}) + (s + b - c) \cdot \overline{IB} + (s - b + c) \cdot \overline{IC} \\ &= (s + b - c) \cdot \overline{IB} + (s - b + c) \cdot \overline{IC}, \end{aligned}$$

deoarece avem relația $a \cdot \overline{IA} + b \cdot \overline{IB} + c \cdot \overline{IC} = \vec{0}$.

Teorema 1.3.14. (dreapta lui Newton-Gauss) Într-un patrulater complet $ABCD$, mijloacele diagonalelor sunt coliniare.

Demonstrație. O demonstrație sintetică a fost dată în paragraful 3.6 în Partea I. În continuare prezentăm demonstrația vectorială care utilizează Propoziția 1.3.1. Fie M, N, P mijloacele diagonalelor $[AC]$, $[BD]$, respectiv $[EF]$, ale patrulaterului considerat.

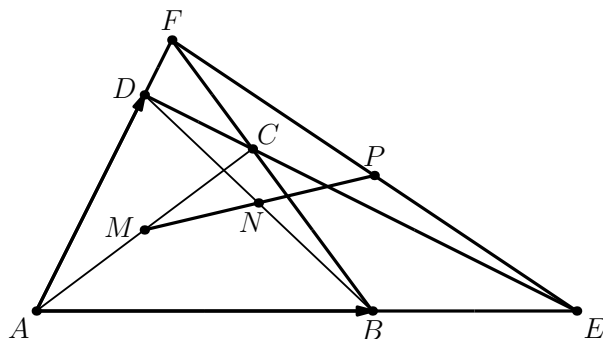


Figura 1.9

Considerând vectorii

$$\overline{AB} = \vec{u}, \quad \overline{AD} = \vec{v},$$

avem

$$\overline{AE} = p \cdot \vec{u}, \quad \overline{AF} = q \cdot \vec{v},$$

unde p, q sunt numere reale.

Avem că M, N, P sunt coliniare dacă și numai dacă vectorii \overline{PM} , \overline{PN} sunt coliniari, adică există $\lambda \in \mathbb{R}^*$ astfel încât are loc relația $\overline{PM} = \lambda \cdot \overline{PN}$.

Observăm că

$$\overline{PN} = \overline{AN} - \overline{AP} = \frac{1}{2}(\overline{u} + \overline{v}) - \frac{1}{2}(p \cdot \overline{u} + q \cdot \overline{v}) = \frac{1}{2}[(1-p)\overline{u} + (1-q)\overline{v}].$$

În plus, avem $\overline{PM} = \overline{AM} - \overline{AP}$ și $\overline{AM} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{r}_C$, unde am raportat vectorii de poziție la punctul A .

Deoarece avem $\{C\} = BF \cap DE$, scriem ecuațiile vectoriale ale dreptelor BF și DE și obținem

$$BF : \overline{r}_Q = (1 - \alpha)\overline{r}_B + \alpha \cdot \overline{r}_F,$$

adică

$$\overline{r}_Q = (1 - \alpha)\overline{u} + \alpha q \cdot \overline{v},$$

și

$$DE : \overline{r}_S = (1 - \beta)\overline{r}_D + \beta \cdot \overline{r}_E,$$

deci

$$\overline{r}_S = (1 - \beta)\overline{v} + \beta p \cdot \overline{u}.$$

Deoarece punctul C este comun celor două drepte, rezultă că există numerele reale α și β astfel încât $\overline{r}_Q = \overline{r}_S = \overline{r}_C$, prin urmare

$$\begin{cases} 1 - \alpha = \beta p \\ 1 - \beta = \alpha q. \end{cases}$$

Obținem $\alpha = 1 - \beta p$, deci $1 - \beta = q - \beta pq$ și $1 - q = \beta(1 + pq)$.

Rezultă astfel

$$\beta = \frac{1 - q}{1 - pq} = \frac{q - 1}{pq - 1} \quad \text{și} \quad \alpha = \frac{1 - p}{1 - pq} = \frac{p - 1}{pq - 1}.$$

Deci

$$\overline{r}_C = \left(1 - \frac{p - 1}{pq - 1}\right)\overline{u} + \frac{q(p - 1)}{pq - 1} \cdot \overline{v} = \frac{p(q - 1)}{pq - 1} \cdot \overline{u} + \frac{q(p - 1)}{pq - 1} \cdot \overline{v},$$

și

$$\overline{AM} = \frac{1}{2(pq - 1)}[p(q - 1)\overline{u} + q(p - 1)\overline{v}].$$

În final găsim

$$\begin{aligned}
 \overline{PM} &= \frac{1}{2} \left[\frac{p(q-1)}{pq-1} \cdot \bar{u} + \frac{q(p-1)}{pq-1} \cdot \bar{v} - p\bar{u} - q\bar{v} \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left[\frac{q-p-p^2q+p}{pq-1} \cdot \bar{u} + \frac{pq(1-q)}{pq-1} \cdot \bar{v} \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left[\frac{pq(1-p)}{pq-1} \cdot \bar{u} + \frac{pq(1-q)}{pq-1} \cdot \bar{v} \right] \\
 &= \frac{pq}{2(pq-1)} [(1-p)\bar{u} + (1-q)\bar{v}] = \lambda \overline{PN},
 \end{aligned}$$

unde $\lambda = \frac{pq}{pq-1}$, adică punctele M, N, P sunt coliniare. \square

1.4 Produs scalar

Dacă vectorii liberi \bar{v}_1 și \bar{v}_2 sunt reprezentați de vectorii legați $\overrightarrow{OA_1}$ și $\overrightarrow{OA_2}$, definim unghiul (\bar{v}_1, \bar{v}_2) format de cei doi vectori ca fiind $\widehat{A_1OA_2}$, unde nu considerăm un sens de măsurare.

Aplicația

$$V_2 \times V_2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (\bar{v}_1, \bar{v}_2) \mapsto |\bar{v}_1| \cdot |\bar{v}_2| \cdot \cos(\widehat{\bar{v}_1, \bar{v}_2}),$$

definită prin

$$\bar{v}_1 \cdot \bar{v}_2 = |\bar{v}_1| \cdot |\bar{v}_2| \cdot \cos(\widehat{\bar{v}_1, \bar{v}_2}),$$

poartă numele de *produs scalar* iar numărul real $\bar{v}_1 \cdot \bar{v}_2$ este produsul scalar al vectorilor \bar{v}_1 și \bar{v}_2 .

Au loc următoarele proprietăți, ale căror demonstrații rezultă imediat din definiția produsului scalar :

- 1) $\bar{0} \cdot \bar{v} = 0$;
- 2) $\bar{v}_1 \cdot \bar{v}_2 = \bar{v}_2 \cdot \bar{v}_1$ (comutativitate) ;
- 3) Dacă $\bar{v}_1, \bar{v}_2 \neq \bar{0}$ atunci avem $\bar{v}_1 \cdot \bar{v}_2 = 0$ dacă și numai dacă $\bar{v}_1 \perp \bar{v}_2$;
- 4) **(inegalitatea Cauchy-Buniakovski-Schwarz)** Are loc inegalitatea

$$|\bar{v}_1 \cdot \bar{v}_2| \leq |\bar{v}_1| \cdot |\bar{v}_2|,$$

cu egalitate dacă și numai dacă vectorii \bar{v}_1, \bar{v}_2 sunt coliniari.

Demonstrație. Inegalitatea

$$(\bar{v}_1 + t\bar{v}_2) \cdot (\bar{v}_1 + t\bar{v}_2) = |\bar{v}_1 + t\bar{v}_2|^2 \geq 0$$

are loc pentru orice $t \in \mathbb{R}$. Prin urmare, avem

$$|\bar{v}_1|^2 + 2(\bar{v}_1 \cdot \bar{v}_2) \cdot t + |\bar{v}_2|^2 \cdot t^2 \geq 0,$$

deci în mod necesar

$$\Delta = 4(\bar{v}_1 \cdot \bar{v}_2)^2 - 4|\bar{v}_1|^2 \cdot |\bar{v}_2|^2 \leq 0,$$

ceea ce reprezintă inegalitatea de demonstrat. \square

O justificare geometrică directă pentru inegalitatea de mai sus se obține din formula de definiție a produsului scalar și din inegalitatea $|\cos(\widehat{\bar{v}_1, \bar{v}_2})| \leq 1$.

5) (distributivitatea produsului scalar față de adunare) Pentru orice vectori liberi $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{v}$ are loc relația

$$\bar{v} \cdot (\bar{u}_1 + \bar{u}_2) = \bar{v} \cdot \bar{u}_1 + \bar{v} \cdot \bar{u}_2.$$

$$6) (\lambda \bar{v}_1) \cdot \bar{v}_2 = \bar{v}_1 \cdot (\lambda \bar{v}_2) = \lambda(\bar{v}_1 \cdot \bar{v}_2), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

$$7) |\bar{v}| = \sqrt{\bar{v} \cdot \bar{v}}.$$

Observația 1.4.1. 1) Din proprietățile de mai sus rezultă că produsul scalar este o aplicație $V_2 \times V_2 \rightarrow \mathbb{R}$ care este biliniară, adică este liniară în fiecare argument.

2) Toate proprietățile produsului scalar pentru vectorii din plan rămân valabile și pentru vectorii din spațiu.

3) Considerând planul euclidian raportat la reperul cartezian standard xOy , notăm cu \bar{i} și \bar{j} versorii axelor de coordonate Ox , respectiv Oy . Atunci $\{\bar{i}, \bar{j}\}$ este o bază ortonormată a spațiului vectorial V_2 , adică au loc relațiile

$$\bar{i} \cdot \bar{i} = 1, \quad \bar{j} \cdot \bar{j} = 1, \quad \bar{i} \cdot \bar{j} = \bar{j} \cdot \bar{i} = 0.$$

În mod analog, raportând spațiul euclidian la reperul $Oxyz$ și considerând versorii $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ ai axelor de coordonate, obținem baza ortonormată $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ și avem produsele scalare ale vectorilor din bază date în următorul tabel

\cdot	\bar{i}	\bar{j}	\bar{k}
\bar{i}	1	0	0
\bar{j}	0	1	0
\bar{k}	0	0	1

4) (**expresia analitică a produsului scalar**) a) Dacă avem $\bar{u}_1(\alpha_1, \beta_1), \bar{u}_2(\alpha_2, \beta_2)$, adică $\bar{u}_1 = \alpha_1 \bar{i} + \beta_1 \bar{j}$ și $\bar{u}_2 = \alpha_2 \bar{i} + \beta_2 \bar{j}$, atunci

$$\bar{u}_1 \cdot \bar{u}_2 = \alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2.$$

b) Analog, dacă $\bar{u}_1(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1), \bar{u}_2(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$, atunci obținem

$$\bar{u}_1 \cdot \bar{u}_2 = \alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 + \gamma_1 \gamma_2.$$

Aplicația 1.4.2. Se consideră cercul $\mathcal{C}(O, R)$ și $[AB]$ un diametru al său. Atunci pentru orice punct $P \in \mathcal{P}$ are loc formula:

$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \rho_P,$$

unde ρ_P este puterea punctului P față de cercul $\mathcal{C}(O, R)$.

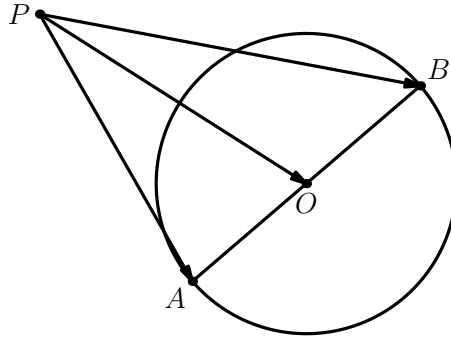


Figura 1.10

Într-adevăr, avem $\overline{PA} = \overline{PO} + \overline{OA}$ și $\overline{PB} = \overline{PO} + \overline{OB}$. Calculând produsul scalar obținem

$$\begin{aligned} \overline{PA} \cdot \overline{PB} &= (\overline{PO} + \overline{OA}) \cdot (\overline{PO} + \overline{OB}) \\ &= PO^2 + \overline{PO} \cdot \overline{OB} + \overline{OA} \cdot \overline{PO} + \overline{OA} \cdot \overline{OB} \\ &= PO^2 + \overline{PO} \cdot (\overline{OB} + \overline{OA}) - R^2 \\ &= PO^2 - R^2 = \rho_P. \end{aligned}$$

Teorema 1.4.3. (Euler) Dacă O, M, N, P sunt patru puncte în plan, atunci are loc relația

$$\overline{OM} \cdot \overline{NP} + \overline{ON} \cdot \overline{PM} + \overline{OP} \cdot \overline{MN} = 0. \quad (10)$$

Demonstrație. Într-adevăr, folosind proprietățile produsului scalar, avem

$$\begin{aligned}\overline{OM} \cdot \overline{NP} + \overline{ON} \cdot \overline{PM} + \overline{OP} \cdot \overline{MN} &= \overline{OM} \cdot (\overline{OP} - \overline{ON}) + \overline{ON} \cdot (\overline{OM} - \overline{OP}) + \\ &\quad \overline{OP} \cdot (\overline{ON} - \overline{PM}) = \overline{OM} \cdot \overline{OP} - \overline{OM} \cdot \overline{ON} + \overline{ON} \cdot \overline{OM} - \\ &\quad \overline{ON} \cdot \overline{OP} + \overline{OP} \cdot \overline{ON} - \overline{OP} \cdot \overline{OM} = 0.\end{aligned}$$

□

Aplicația 1.4.4. (concurența înălțimilor unui triunghi) În orice triunghi ABC înălțimile $[AA']$, $[BB']$, $[CC']$ sunt concurente.

Într-adevăr, considerând punctul H de intersecție al înălțimilor $[BB']$ și $[CC']$, din relația lui Euler aplicată pentru punctele H, A, B, C , obținem

$$\overline{HA} \cdot \overline{BC} + \overline{HB} \cdot \overline{CA} + \overline{HC} \cdot \overline{AB} = 0.$$

Din $HB \perp CA$ și $HC \perp AB$, rezultă $\overline{HB} \cdot \overline{CA} = \overline{HC} \cdot \overline{AB} = 0$, deci $\overline{HA} \cdot \overline{BC} = 0$. Prin urmare avem $HA \perp BC$, adică H aparține și înălțimii AA' .

Prezentăm în continuare o demonstrație vectorială pentru teorema triunghiurilor ortologice (Partea I, Teorema 1.8.3).

Teorema 1.4.5. (a triunghiurilor ortologice) Fiind date două triunghiuri ABC și $A'B'C'$ situate în același plan dispuse astfel încât perpendicularele din A, B, C pe laturile $B'C', C'A', A'B'$ sunt concurente, atunci și perpendicularele din A', B', C' respectiv pe laturile BC, CA, AB sunt concurente.

Demonstrație. Notăm cu O punctul de concurență al perpendicularelor din A, B, C pe laturile triunghiului $A'B'C'$ și cu O' punctul de intersecție al perpendicularelor din A' și B' respectiv pe BC și AC . Se demonstrează imediat, folosind descompuneri de forma $\overline{B'C'} = \overline{O'C'} - \overline{O'B'}$, etc., relația

$$\overline{OA} \cdot \overline{B'C'} + \overline{OB} \cdot \overline{C'A'} + \overline{OC} \cdot \overline{A'B'} + \overline{O'A'} \cdot \overline{BC} + \overline{O'B'} \cdot \overline{CA} + \overline{O'C'} \cdot \overline{AB} = 0.$$

Din condițiile date în enunț avem

$$\overline{OA} \cdot \overline{B'C'} = 0, \quad \overline{O'A'} \cdot \overline{BC} = 0, \quad \overline{OB} \cdot \overline{C'A'} = 0, \quad \overline{O'B'} \cdot \overline{CA} = 0, \quad \overline{OC} \cdot \overline{A'B'} = 0$$

și deci găsim $\overline{O'C'} \cdot \overline{AB} = 0$, adică $O'C'$ este perpendiculară pe AB . □

Observația 1.4.6. Triunghiurile ABC , $A'B'C'$ situate în același plan sunt ortologice dacă și numai dacă are loc relația

$$\overline{OA'} \cdot \overline{BC} + \overline{OB'} \cdot \overline{CA} + \overline{OC'} \cdot \overline{AB} = 0,$$

unde O este un punct arbitrar din planul triunghiurilor.

Într-adevăr, presupunând că perpendicularele din A' , B' , C' pe BC , AB , CA sunt concurente în M , obținem

$$\overline{MA'} \cdot \overline{BC} + \overline{MB'} \cdot \overline{CA} + \overline{MC'} \cdot \overline{AB} = 0.$$

Dacă O este un punct arbitrar din plan, relația de mai sus devine

$$(\overline{OA'} - \overline{OM}) \cdot \overline{BC} + (\overline{OB'} - \overline{OM}) \cdot \overline{CA} + (\overline{OC'} - \overline{OM}) \cdot \overline{AB} = 0,$$

sau

$$\overline{OA'} \cdot \overline{BC} + \overline{OB'} \cdot \overline{CA} + \overline{OC'} \cdot \overline{AB} = 0.$$

Reciproc, dacă relația are loc pentru orice punct din plan, luăm pentru O punctul de intersecție al perpendicularelor din A' și B' respectiv pe BC și CA . Cum $\overline{OA'} \cdot \overline{BC} = 0$, $\overline{OB'} \cdot \overline{CA} = 0$ obținem $\overline{OC'} \cdot \overline{AB} = 0$, deci cele trei perpendiculare sunt concurente în O .

Teorema 1.4.7. (teorema ortopolului) Fie d o dreaptă în planul triunghiului ABC și A' , B' , C' , respectiv, proiecțiile vârfurilor A , B , C pe dreapta d . Perpendicularele din A' , B' , C' , respectiv pe BC , CA , AB sunt concurente într-un punct ω , numit ortopolul dreptei d față de triunghiul ABC .

Demonstrație. Fie ω punctul de intersecție al perpendicularelor din B' , C' , respectiv, pe dreptele CA , AB . Vom arăta că $\omega A' \perp BC$. Aplicând relația lui Euler demonstrată mai sus, pentru punctele ω , A' , B' , C' , obținem:

$$\overline{\omega A'} \cdot \overline{B'C'} + \overline{\omega B'} \cdot \overline{C'A'} + \overline{\omega C'} \cdot \overline{A'B'} = 0.$$

Cum

$$\begin{aligned} \overline{BC} &= \overline{BB'} + \overline{B'C'} + \overline{C'C}, & \overline{CA} &= \overline{CC'} + \overline{C'A'} + \overline{A'A}, \\ \overline{AB} &= \overline{AA'} + \overline{A'B'} + \overline{B'B} \end{aligned}$$

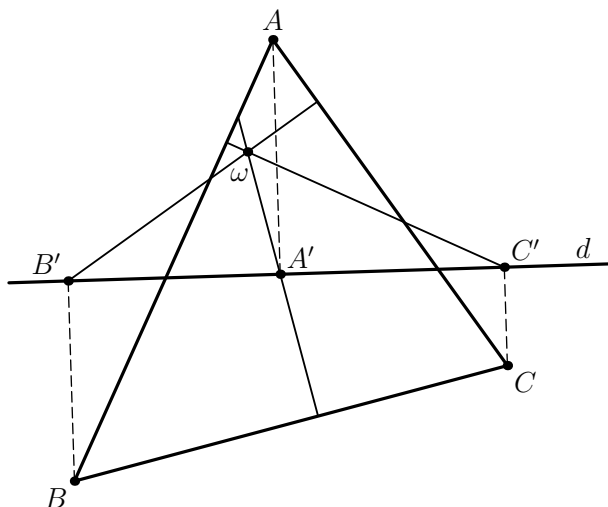


Figura 1.11

avem:

$$\begin{aligned}
 & \overline{\omega A'} \cdot \overline{BC} + \overline{\omega B'} \cdot \overline{CA} + \overline{\omega C'} \cdot \overline{AB} \\
 = & \overline{\omega A'} \cdot (\overline{BB'} + \overline{B'C'} + \overline{C'C}) + \overline{\omega B'} \cdot (\overline{CC'} + \overline{C'A'} + \overline{A'A}) + \overline{\omega C'} \cdot (\overline{AA'} + \overline{A'B'} + \overline{B'B}) \\
 = & \overline{\omega A'} \cdot \overline{BB'} + \overline{\omega B'} \cdot \overline{CC'} + \overline{\omega C'} \cdot \overline{AA'} + \overline{A'A} \cdot (\overline{\omega B'} - \overline{\omega C'}) \\
 & + \overline{B'B} \cdot (\overline{\omega C'} - \overline{\omega A'}) + \overline{C'C} \cdot (\overline{\omega A'} - \overline{\omega B'}) \\
 = & \overline{\omega A'} \cdot \overline{B'C'} + \overline{\omega B'} \cdot \overline{C'A'} + \overline{\omega C'} \cdot \overline{A'B'} + \overline{A'A} \cdot \overline{C'B'} + \overline{B'B} \cdot \overline{A'C'} + \overline{C'C} \cdot \overline{B'A'}.
 \end{aligned}$$

Folosind ipoteza avem $AA' \perp C'B'$, $B'B \perp A'C'$, $C'C \perp B'A'$, deci

$$\overline{\omega A'} \cdot \overline{BC} + \overline{\omega B'} \cdot \overline{CA} + \overline{\omega C'} \cdot \overline{AB} = \overline{\omega A'} \cdot \overline{B'C'} + \overline{\omega B'} \cdot \overline{C'A'} + \overline{\omega C'} \cdot \overline{A'B'} = 0,$$

unde am ținut seama de relația lui Euler pentru punctele ω, A', B', C' . Din construcția punctului ω avem $\overline{\omega B'} \cdot \overline{CA} = 0$, $\overline{\omega C'} \cdot \overline{AB} = 0$, deci din relația de mai sus obținem $\overline{\omega A'} \cdot \overline{BC} = 0$, adică $\omega A' \perp BC$. \square

Aplicația 1.4.8. Fie H ortocentrul triunghiului ascuțitunghic ABC . Pe semidreptele $(HA, (HB, (HC$ considerăm punctele A', B', C' cu $HA' = BC$, $HB' = CA$, $HC' = AB$. Laturile triunghiului $A'B'C'$ sunt perpendiculare pe medianele triunghiului ABC .

Definiția 1.5.1. Fie $S = \{A_1(m_1), \dots, A_n(m_n)\}$ sistemul de puncte cu masele m_1, \dots, m_n . Se numește *baricentrul* sistemului S unicul punct G din plan, care satisface condiția:

$$\sum_{k=1}^n m_k \cdot \overrightarrow{GA_k} = \vec{0}.$$

Dacă G este baricentrul sistemului $S = \{A_1(m_1), \dots, A_n(m_n)\}$, atunci pentru orice punct M din plan are loc relația

$$m \cdot \overrightarrow{MG} = \sum_{k=1}^n m_k \cdot \overrightarrow{MA_k}. \quad (11)$$

Într-adevăr, înmulțind relația $\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MA_k} + \overrightarrow{A_kG}$ cu m_k , $k = 1, 2, \dots, n$, prin adunare obținem (11).

Teorema 1.5.2. (teorema lui Lagrange) Fie sistemul S de puncte $A_1(m_1), \dots, A_n(m_n)$ cu baricentrul G . Atunci pentru orice punct M din plan are loc relația:

$$\sum_{i=1}^n m_i \cdot MA_i^2 = m \cdot MG^2 + \sum_{i=1}^n m_i \cdot GA_i^2, \quad (12)$$

unde $m = m_1 + \dots + m_n$ este masa totală a sistemului.

Demonstrație. Pentru punctul arbitrar M avem

$$\overrightarrow{MA_i} = \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Folosind proprietățile produsului scalar obținem

$$MA_i^2 = \overrightarrow{MA_i} \cdot \overrightarrow{MA_i} = MG^2 + 2 \cdot \overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{GA_i} + GA_i^2,$$

relație care înmulțită cu m_i ne conduce la

$$m_i \cdot MA_i^2 = m_i \cdot MG^2 + 2 \cdot \overrightarrow{MG} \cdot (m_i \cdot \overrightarrow{GA_i}) + m_i \cdot GA_i^2, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Prin adunarea celor n relații de mai sus și ținând seama de definiția baricentrului G , obținem relația de demonstrat. \square

Definiția 1.5.3. Cu notațiile din teoremă, expresia

$$I_S^2(M) = \sum_{i=1}^n m_i \cdot MA_i^2$$

se numește *momentul de inerție* al punctului M în raport cu sistemul S .

Această noțiune este preluată din mecanică și prin intermediul ei teorema lui Lagrange poate fi reformulată astfel: pentru orice punct M din plan are loc relația

$$I_S^2 = I_S^2(G) + m \cdot MG^2,$$

unde $m = m_1 + \dots + m_n \neq 0$ este masa totală a sistemului.

Corolarul 1.5.4. 1) Dacă sistemul S are masa totală pozitivă, atunci are loc inegalitatea:

$$\sum_{i=1}^n m_i \cdot MA_i^2 \geq \sum_{i=1}^n m_i \cdot GA_i^2,$$

cu egalitate dacă și numai dacă $M = G$.

2) Dacă sistemul S are masa negativă, atunci are loc inegalitatea

$$\sum_{i=1}^n m_i \cdot MA_i^2 \leq \sum_{i=1}^n m_i \cdot GA_i^2,$$

cu egalitate dacă și numai dacă $M = G$.

Aceasta înseamnă că baricentrul sistemului este unicul punct din plan care realizează minimul funcției moment de inerție dacă avem $m > 0$ și maximul funcției moment de inerție dacă $m < 0$.

Cazuri particulare

1) Pentru $n = 3$, considerăm punctele A, B, C ca fiind vârfurile triunghiului ABC și asociem masele $m_A = m_B = m_C = 1$

Baricentrul sistemului $\{A(1), B(1), C(1)\}$ satisface condiția

$$\overline{GA} + \overline{GB} + \overline{GC} = \vec{0},$$

adică G este centrul de greutate al triunghiului.

Teorema lui Lagrange devine în acest caz

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2,$$

relație numită și formula lui Leibniz.

Pe de altă parte, folosind teorema medianei avem

$$GA^2 = \frac{4}{9}m_a^2 = \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{4}[2(b^2 + c^2) - a^2],$$

adică

$$GA^2 + GB^2 + GC^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2).$$

Formula lui Leibniz devine

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2),$$

prin urmare, pentru orice punct M din planul triunghiului avem inegalitatea

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 \geq \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2),$$

cu egalitate dacă și numai dacă $M = G$.

2) Dacă în formula lui Leibniz alegem $MA = MB = MC = R$, adică M este centrul cercului circumscris triunghiului, obținem

$$3R^2 = 3OG^2 + \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2),$$

adică

$$OG^2 = R^2 - \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2),$$

formulă demonstrată sintetic în Teorema 1.7.10 din Partea I.

Observația 1.5.5. Are loc inegalitatea $a^2 + b^2 + c^2 \leq 9R^2$, cu egalitate dacă și numai dacă $O = G$, adică triunghiul ABC este echilateral.

Lema 1.5.6. Pentru orice punct P din interiorul triunghiului ABC are loc relația:

$$S[BPC] \cdot \overline{PA} + S[CPA] \cdot \overline{PB} + S[APB] \cdot \overline{PC} = \vec{0}, \quad (13)$$

adică orice P din interiorul triunghiului ABC este baricentrul sistemului:

$$S_P = \{A(S[BPC]), B(S[CPA]), C(S[APB])\}.$$

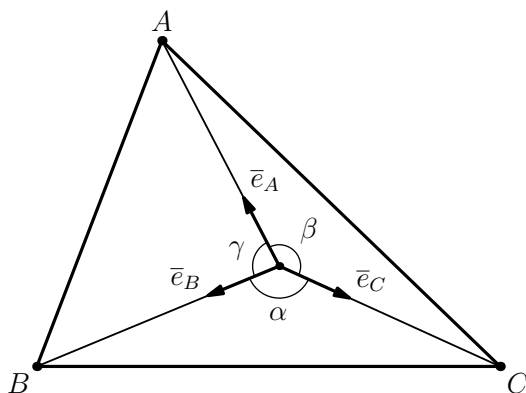


Figura 1.13

Demonstrație. Fie \bar{e}_A , \bar{e}_B și \bar{e}_C versorii având aceeași direcție cu \overline{PA} , \overline{PB} , respectiv \overline{PC} , fie $\alpha = \widehat{BPC}$, $\beta = \widehat{CPA}$ și $\gamma = \widehat{APB}$.

Relația de demonstrat se mai scrie

$$\frac{PB \cdot PC \sin \alpha}{2} \cdot \overline{PA} + \frac{PC \cdot PA \sin \beta}{2} \cdot \overline{PB} + \frac{PB \cdot PA \sin \gamma}{2} \cdot \overline{PC} = \vec{0}.$$

Cum $\overline{PA} = PA \cdot \bar{e}_A$, $\overline{PB} = PB \cdot \bar{e}_B$ și $\overline{PC} = PC \cdot \bar{e}_C$ rezultă că relația de demonstrat se reduce la

$$\bar{e}_A \sin \alpha + \bar{e}_B \sin \beta + \bar{e}_C \sin \gamma = \vec{0}.$$

Considerând triunghiul $A_1B_1C_1$ cu laturile paralele cu PC , PA și PB și folosind în acest triunghi teorema sinusurilor, avem $A_1B_1 = 2R \sin \gamma$ sau $\overline{A_1B_1} = 2R \bar{e}_3 \sin \gamma$ și analoagele, unde R este raza cercului circumscris. Rezultă astfel

$$\vec{0} = \overline{A_1B_1} + \overline{B_1C_1} + \overline{C_1A_1} = 2R(\bar{e}_A \sin \alpha + \bar{e}_B \sin \beta + \bar{e}_C \sin \gamma).$$

□

Exemplul 1.5.7. 1) Dacă $P = I$, centrul cercului înscris triunghiului, avem

$$S[BIC] = \frac{1}{2}ar, \quad S[CIA] = \frac{1}{2}br, \quad S[AIB] = \frac{1}{2}cr,$$

unde r este raza cercului înscris.

Relația (13) este echivalentă cu

$$a \cdot \overline{IA} + b \cdot \overline{IB} + c \cdot \overline{IC} = \overline{0},$$

adică I este baricentrul sistemului $S = \{A(a), B(b), C(c)\}$.

Astfel relația lui Lagrange devine

$$a \cdot MA^2 + b \cdot MB^2 + c \cdot MC^2 = 2s \cdot MI^2 + a \cdot IA^2 + b \cdot IB^2 + c \cdot IC^2,$$

unde M este un punct arbitrar în plan. Ținând seama de formulele

$$\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}, \quad \cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$$

obținem

$$\sin \frac{A}{2} = \frac{r}{IA}, \quad \text{deci} \quad IA^2 = \frac{r^2}{\sin^2 \frac{A}{2}}.$$

Prin urmare

$$IA^2 = \frac{r^2}{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}} = \frac{\frac{s^2}{s^2} \cdot bc}{(s-b)(s-c)} = \frac{(s-a)bc}{s},$$

și prin adunare obținem

$$\sum_{cyc} a \cdot IA = \sum_{cyc} \frac{(s-a)abc}{s} = \frac{abc}{s} \sum_{cyc} (s-a) = \frac{abc}{s} (3s - 2s) = abc.$$

Rezultă că avem relația

$$a \cdot MA^2 + b \cdot MB^2 + c \cdot MC^2 = 2s \cdot MI^2 + abc.$$

Obținem că pentru orice punct M din planul triunghiului ABC are loc inegalitatea

$$a \cdot MA^2 + b \cdot MB^2 + c \cdot MC^2 \geq abc,$$

cu egalitate dacă și numai dacă $M = I$.

Pentru $M = O$, obținem

$$R^2 \cdot 2s = 2s \cdot OI^2 + abc.$$

Deoarece $S[ABC] = \frac{abc}{4R}$, din relația de mai sus rezultă

$$OI^2 = R^2 - \frac{abc}{2s} = R^2 - \frac{1}{2s} \cdot 4RS = R^2 - 2R \cdot \frac{S}{s} = R^2 - 2Rr,$$

relație cunoscută ca formula lui Euler și demonstrată sintetic în Teorema 1.7.12 din Partea I.

Evident, avem $R \geq 2r$ inegalitatea lui Euler cu egalitate numai pentru triunghiul echilateral.

Exemplul 1.5.8. Să considerăm $P = O$ centrul cercului circumscris triunghiului. Avem

$$S[BOC] = \frac{1}{2}R^2 \sin 2A.$$

Centrul cercului circumscris este baricentrul sistemului S_O , unde

$$S_0 = \{A(\sin 2A), B(\sin 2B), C(\sin 2C)\}.$$

Formula lui Lagrange devine:

$$\begin{aligned} \sum_{cyc} MA^2 \cdot \sin 2A &= (\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C) \cdot MO^2 \\ &\quad + (\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C) \cdot R^2, \end{aligned}$$

pentru orice punct M din planul triunghiului. Observăm că avem

$$\begin{aligned} \sum_{cyc} \sin 2A &= 2 \sin(A + B) \cdot \cos(A - B) + 2 \sin C \cdot \cos C \\ &= 2 \sin(\pi - C) \cdot \cos(A - B) + 2 \sin C \cdot \cos C \\ &= 2 \sin C \cdot \cos(A - B) + 2 \sin C \cdot \cos C \\ &= 2 \sin C \cdot 2 \cos \frac{A + C - B}{2} \cdot \cos \frac{A - (B + C)}{2} \\ &= 4 \sin C \cdot \cos \frac{\pi - 2B}{2} \cdot \cos \frac{2A - \pi}{2} \\ &= 4 \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C = \frac{1}{2R^3} \cdot abc = \frac{2}{R^2} \cdot S = \frac{2sr}{R^2}. \end{aligned}$$

Prin urmare, obținem formula

$$\sum_{cyc} MA^2 \cdot \sin 2A = \frac{2sr}{R^2} \cdot MO^2 + 2sr.$$

Rezultă astfel că pentru orice punct M din planul triunghiului are loc inegalitatea

$$MA^2 \cdot \sin 2A + MB^2 \cdot \sin 2B + MC^2 \cdot \sin 2C \geq 2sr,$$

cu egalitate dacă și numai dacă $M = O$.

1.6 Invarianții simetrici ai triunghiului. Calculul unor distanțe remarcabile

Fie triunghiul ABC cu lungimile laturilor a, b, c , semiperimetrul $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$, r raza cercului înscris și R raza cercului circumscris. Numerele s, r, R poartă numele de *invarianți simetrici* ai triunghiului ABC .

Teorema 1.6.1. *Numerele a, b, c sunt rădăcinile ecuației cubice*

$$t^3 - 2st^2 + (s^2 + r^2 + 4Rr)t - 4sRr = 0. \quad (14)$$

Demonstrație. Să arătăm că a satisface ecuația. Avem

$$a = 2R \sin A = 4R \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} \quad \text{și} \quad s - a = r \operatorname{ctg} \frac{A}{2} = r \frac{\cos \frac{A}{2}}{\sin \frac{A}{2}}.$$

Prin urmare

$$\cos^2 \frac{A}{2} = \frac{a(s-a)}{4Rr} \quad \text{și} \quad \sin^2 \frac{A}{2} = \frac{ar}{4R(s-a)}.$$

Din formula $\cos^2 \frac{A}{2} + \sin^2 \frac{A}{2} = 1$ rezultă că

$$\frac{a(s-a)}{4Rr} + \frac{ar}{4R(s-a)} = 1,$$

adică

$$a^3 - 2sa^2 + (s^2 + r^2 + 4Rr)a - 4sRr = 0.$$

Putem arăta analog că b și c sunt rădăcinile ecuației de mai sus. \square

Din Teorema 1.6.1, prin utilizarea relațiilor dintre rădăcini și coeficienți, rezultă formulele

$$a + b + c = 2s,$$

$$ab + bc + ca = s^2 + r^2 + 4Rr,$$

$$abc = 4sRr.$$

Corolarul 1.6.2. În orice triunghi ABC , au loc următoarele formule

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2(s^2 - r^2 - 4Rr),$$

$$a^3 + b^3 + c^3 = 2s(s^2 - 3r^2 - 6Rr).$$

Demonstrație. Avem succesiv

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &= (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca) = 4s^2 - 2(s^2 + r^2 + 4Rr) \\ &= 2s^2 - 2r^2 - 8Rr = 2(s^2 - r^2 - 4Rr). \end{aligned}$$

Pentru a demonstra a doua egalitate, putem scrie

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + c^3 &= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) + 3abc \\ &= 2s(2s^2 - 2r^2 - 8Rr - s^2 - r^2 - 4Rr) + 12sRr = 2s(s^2 - 3r^2 - 6Rr). \quad \square \end{aligned}$$

Corolarul 1.6.3. Numerele $s - a$, $s - b$, $s - c$ sunt rădăcinile ecuației cubice

$$u^3 - su^2 + r(4R + r)u - sr^2 = 0. \quad (15)$$

Demonstrație. Facem substituția $t = s - u$ și ecuația din Teorema 1.6.1 se transformă în ecuația (15). Deoarece avem $a = s - (s - a)$, $b = s - (s - b)$, $c = s - (s - c)$, obținem că rădăcinile ecuației (2) sunt $s - a$, $s - b$, $s - c$. \square

Teorema 1.6.4. Numerele $\cos A$, $\cos B$, $\cos C$ sunt rădăcinile ecuației cubice

$$4R^2t^3 - 4R(R + r)t^2 + (s^2 + 4R^2 - r^2)t + (2R + r)^2 - s^2 = 0.$$

Demonstrație. Arătăm că numărul $\cos A$ verifică ecuația din enunț.

Din relația $\cos^2 \frac{A}{2} = \frac{a(s-a)}{4Rr}$, obținem

$$\begin{aligned} 1 + \cos A &= \frac{a(s-a)}{2Rr} = \frac{(a-s+s)(s-a)}{2Rr} = \frac{s(s-a) - (s-a)^2}{2Rr} \\ &= \frac{s}{2R} \sqrt{\frac{1+\cos A}{1-\cos A}} - \frac{r}{2R} \cdot \frac{1+\cos A}{1-\cos A}, \end{aligned}$$

unde am folosit relația $s-a = r \operatorname{ctg} \frac{A}{2} = r \sqrt{\frac{1+\cos A}{1-\cos A}}$. Rezultă astfel

$$1 + \cos A + \frac{r}{2R} \cdot \frac{1+\cos A}{1-\cos A} = \frac{s}{2R} \sqrt{\frac{1+\cos A}{1-\cos A}},$$

de unde prin ridicare la pătrat găsim

$$(1 + \cos A)^2 + \frac{r}{R} \cdot \frac{(1 + \cos A)^2}{1 - \cos A} + \frac{r^2}{4R^2} \cdot \frac{(1 + \cos A)^2}{(1 - \cos A)^2} = \frac{s^2}{4R^2} \cdot \frac{1 + \cos A}{1 - \cos A},$$

adică

$$1 + \cos A + \frac{r}{R} \cdot \frac{1 + \cos A}{1 - \cos A} + \frac{r^2}{4R^2} \cdot \frac{1 + \cos A}{(1 - \cos A)^2} = \frac{s^2}{4R^2} \cdot \frac{1}{1 - \cos A}.$$

Ultima relație este echivalentă cu

$$(1 - \cos^2 A)(1 - \cos A) + \frac{r}{R}(1 - \cos^2 A) + \frac{r^2}{4R^2}(1 + \cos A) = \frac{s^2}{4R^2}(1 - \cos A),$$

ceea ce ne conduce imediat la relația

$$4R^2 \cos^3 A - 4R(R+r) \cos^2 A + (s^2 + 4R^2 - r^2) \cos A + (2R+r)^2 - s^2 = 0. \quad \square$$

Din Teorema 1.6.4, utilizând relațiile dintre rădăcini și coeficienți, rezultă formulele

$$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + \frac{r}{R},$$

$$\cos A \cos B + \cos B \cos C + \cos C \cos A = \frac{s^2 + 4R^2 - r^2}{4R^2},$$

$$\cos A \cos B \cos C = \frac{s^2 - (2R+r)^2}{4R^2}.$$

Corolarul 1.6.5. 1) *Triunghiul ABC este ascuțitunghic dacă și numai dacă $s > 2R + r$.*

2) *Triunghiul ABC este dreptunghic dacă și numai dacă are loc relația $s = 2R + r$.*

3) *Triunghiul ABC este obtuzunghic dacă și numai dacă $s < 2R + r$.*

Un calcul simplu ne conduce la identitățile

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = \frac{1}{4R^2}(-4R^2 - 2s^2 + 3r^2 + 8Rr),$$

$$\frac{1}{\cos A} + \frac{1}{\cos B} + \frac{1}{\cos C} = \frac{s^2 + 4R^2 - r^2}{s^2 - (2R + r)^2},$$

ultima având loc în orice triunghi care nu este dreptunghic.

Teorema 1.6.6. *Fie S sistemul de puncte $A_1(m_1), \dots, A_n(m_n)$ cu baricentrul G . Pentru orice punct din plan are loc relația*

$$m \sum_{i=1}^n m_i \cdot MA_i^2 = m^2 \cdot MG^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} m_i m_j A_i A_j^2, \quad (16)$$

unde $m = m_1 + \dots + m_n$ este masa totală a sistemului.

Demonstrație. Observăm că dacă P este un punct arbitrar, ținând seama de proprietățile produsului scalar avem

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i, j \leq n} m_i m_j A_i A_j^2 &= \sum_{1 \leq i, j \leq n} m_i m_j |\overline{A_i A_j}|^2 = \sum_{1 \leq i, j \leq n} m_i m_j |\overline{A_i P} + \overline{P A_j}|^2 \\ &= \sum_{1 \leq i, j \leq n} m_i m_j (\overline{A_i P} + \overline{P A_j}) \cdot (\overline{A_i P} + \overline{P A_j}) \\ &= \sum_{1 \leq i, j \leq n} m_i m_j (PA_i^2 + PA_j^2 - 2\overline{P A_i} \cdot \overline{P A_j}) \\ &= \sum_{1 \leq i, j \leq n} m_i m_j (PA_i^2 + PA_j^2) - 2 \sum_{1 \leq i, j \leq n} m_i m_j \cdot \overline{P A_i} \cdot \overline{P A_j} \\ &= 2m \sum_{k=1}^n m_k \cdot PA_k^2 - 2 \left| \sum_{k=1}^n m_k \cdot \overline{P A_k} \right|^2. \end{aligned}$$

Considerând $P = G$, baricentrul sistemului, avem $\sum_{k=1}^n m_k \cdot \overline{PA_k} = \bar{0}$, deci obținem

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} m_i m_j A_i A_j^2 = 2m \sum_{k=1}^n m_k \cdot GA_k^2,$$

relație echivalentă cu

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} m_i m_j A_i A_j^2 = m \sum_{k=1}^n m_k \cdot GA_k^2. \quad (17)$$

Pe de altă parte, din formula (12), rezultă

$$n \sum_{k=1}^n m_k \cdot MA_k^2 = m^2 \cdot MG^2 + m \sum_{k=1}^n m_k \cdot GA_k^2,$$

și formula (16) este astfel demonstrată. \square

Corolarul 1.6.7. *Dacă punctele $A_1(m_1), \dots, A_n(m_n)$ sunt situate pe un cerc de centru O și rază R , atunci are loc relația*

$$OG^2 = R^2 - \frac{1}{m^2} \sum_{1 \leq i < j \leq n} m_i m_j A_i A_j^2. \quad (18)$$

Formula (18) este extrem de utilă pentru calculul unor distanțe remarcabile în geometria euclidiană.

Aplicația 1.6.8. (distanța OG pentru patrulaterul inscriptibil) Presupunem că $ABCD$ este un patrulater inscriptibil în cercul de centru O și rază R , și că a, b, c, d, e, f sunt lungimile laturilor AB, BC, CD, DA , respectiv ale diagonalelor AC și BD . Considerând masele m_1, m_2, m_3, m_4 ca fiind unitare, formula (18) devine

$$OG^2 = R^2 - \frac{1}{16}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2). \quad (19)$$

Pe de altă parte, din cele două teoreme ale lui Ptolemeu rezultă imediat relațiile

$$e^2 = \frac{(ad + bc)(ac + bd)}{ab + cd} \quad \text{și} \quad f^2 = \frac{(ab + cd)(ac + bd)}{ad + bc},$$

deci distanța OG se calculează în funcție de R, a, b, c, d .

În cazul $n = 3$, avem sistemul $A_1(m_1), A_2(m_2), A_3(m_3)$, adică triunghiul $A_1A_2A_3$ la care am atașat masele m_1, m_2, m_3 în vârfuri. Formula (18) devine

$$OG^2 = R^2 - \frac{1}{m^2}(m_1m_2A_1A_2^2 + m_1m_3A_1A_3^2 + m_2m_3A_2A_3^2), \quad (20)$$

unde G este baricentrul sistemului, $m = m_1 + m_2 + m_3$ este masa totală și R este raza cercului circumscris triunghiului. Considerând diferite mase m_1, m_2, m_3 putem calcula distanțe între O și puncte remarcabile ale triunghiului, obținând formula în termeni dați de invarianții simetrici.

Aplicația 1.6.9. (distanța OI) Considerând sistemul $A(a), B(b), C(c)$, baricentrul acestuia este I , centrul cercului înscris în triunghiul ABC . Din formula (20) avem

$$\begin{aligned} OI^2 &= R^2 - \frac{1}{4s^2}(abc^2 + cab^2 + bca^2) = R^2 - \frac{abc(a + b + c)}{4s^2} \\ &= R^2 - \frac{abc}{2s} = R^2 - \frac{4sRr}{2s} = R^2 - 2Rr, \end{aligned}$$

unde am folosit relația $abc = 4sRr$ care rezultă din ecuația (14). Aceasta este formula lui Euler, demonstrată în Exemplul 1.5.7 direct din formula lui Lagrange.

Aplicația 1.6.10. (distanța $O\Gamma$) Considerăm sistemul

$$A\left(\frac{1}{s-a}\right), B\left(\frac{1}{s-b}\right), C\left(\frac{1}{s-c}\right)$$

și din formula (6) rezultă că baricentrul acestuia este punctul lui Gergonne al triunghiului. Folosind Corolarul 1.6.3 obținem

$$\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s-b} + \frac{1}{s-c} = \frac{r(4R+r)}{sr^2} = \frac{4R+r}{sr},$$

iar din formula (20) rezultă

$$O\Gamma^2 = R^2 - \frac{s^2r^2}{(4R+r)^2} \sum_{cyc} \frac{c^2}{(s-a)(s-b)}.$$

Pentru a evalua suma ciclică din această formulă, observăm că

$$\begin{aligned}
 \sum_{cyc} \frac{c^2}{(s-a)(s-b)} &= \frac{1}{(s-a)(s-b)(s-c)} \sum_{cyc} c^2(s-c) \\
 &= \frac{1}{sr^2} [s(a^2 + b^2 + c^2) - (a^3 + b^3 + c^3)] \\
 &= \frac{1}{sr^2} [2s(s^2 - r^2 - 4Rr) - 2s(s^2 - 3r^2 - 6Rr)] \\
 &= \frac{4(R+r)}{r},
 \end{aligned}$$

unde am folosit formulele din Corolarul 1.6.2. Obținem astfel

$$O\Gamma^2 = R^2 - \frac{4s^2r(R+r)}{(4R+r)^2}. \quad (21)$$

Aplicația 1.6.11. (distanța ON) Considerăm sistemul $A(s-a), B(s-b), C(s-c)$. Din formula (7) rezultă că baricentrul acestuia este punctul lui Nagel al triunghiului. Masa totală a sistemului este $(s-a) + (s-b) + (s-c) = s$, deci din formula (20) obținem

$$ON^2 = R^2 - \frac{1}{s^2} \sum_{cyc} (s-a)(s-b)c^2.$$

Observăm că avem

$$\begin{aligned}
 \sum_{cyc} (s-a)(s-b)c^2 &= \sum_{cyc} (s-a)(s-b)(s-c-s)^2 \\
 &= \sum_{cyc} (s-a)(s-b)[(s-c)^2 - 2(s-c)s + s^2] \\
 &= (s-a)(s-b)(s-c) \sum_{cyc} (s-c) - 6s(s-a)(s-b)(s-c) + s^2 \sum_{cyc} (s-a)(s-b) \\
 &= -5s(s-a)(s-b)(s-c) + s^2r(4R+r) \\
 &= -5s^2r^2 + s^2r(4R+r) = 4Rrs^2 - 4s^2r^2 = 4rs^2(R-r),
 \end{aligned}$$

deci

$$ON^2 = R^2 - \frac{1}{s^2} \cdot 4rs^2(R-r) = R^2 - 4Rr + 4r^2 = (R-2r)^2.$$

Rezultă astfel formula remarcabilă

$$ON = R - 2r, \quad (22)$$

care dă interpretarea geometrică pentru inegalitatea lui Euler $R \geq 2r$.

Aplicația 1.6.12. (distanța OK) Din formula (8) rezultă că punctul lui Lemoine al triunghiului este baricentrul sistemului $A(a^2), B(b^2), C(c^2)$. Aplicând formula (20) obținem

$$OK^2 = R^2 - \frac{1}{(a^2 + b^2 + c^2)^2} \sum_{cyc} a^2 b^2 c^2 = R^2 - 3 \left(\frac{abc}{a^2 + b^2 + c^2} \right)^2. \quad (23)$$

1.7 Produsul vectorial și produsul mixt

Definiția 1.7.1. Aplicația $\times : V_3 \times V_3, (\bar{a}, \bar{b}) \mapsto \bar{a} \times \bar{b}$, unde vectorul $\bar{a} \times \bar{b}$ este definit de următoarele elemente, poartă numele de *produs vectorial*:

- 1) direcția lui $\bar{a} \times \bar{b}$ este perpendiculară pe planul determinat de vectorii \bar{a} și \bar{b} ;
- 2) sensul lui $\bar{a} \times \bar{b}$ este dat de regula burghiului (numită și regula mâinii drepte);
- 3) lungimea lui $\bar{a} \times \bar{b}$ este aria paralelogramului construit pe $\bar{a} \times \bar{b}$.

Dacă \bar{a}, \bar{b} sunt coliniari, atunci avem $\bar{a} \times \bar{b} = \bar{0}$.

Au loc următoarele proprietăți care rezultă imediat din definiție.

- 1) $\bar{a} \times \bar{b} = -\bar{b} \times \bar{a}$ (anticomutativitate).
- 2) $\bar{a} \times (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} \times \bar{b} + \bar{a} \times \bar{c}$ (distributivitate față de adunare).
- 3) Are loc relația $|\bar{a} \times \bar{b}| = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \sin(\widehat{(\bar{a}, \bar{b})})$, deoarece $|\bar{a} \times \bar{b}|$ este aria paralelogramului construit pe vectorii \bar{a} și \bar{b} .

- 4) **(Lagrange)** Are loc relația:

$$|\bar{a} \times \bar{b}|^2 + (\bar{a} \cdot \bar{b})^2 = |\bar{a}|^2 \cdot |\bar{b}|^2.$$

5) Dacă raportăm spațiul euclidian la sistemul standard de axe ortogonale cu versorii $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ și avem $\bar{a}(x_1, y_1, z_1), \bar{b}(x_2, y_2, z_2)$, atunci expresia produsului vectorial $\bar{a} \times \bar{b}$ este dată de următoarea formulă

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

Produsele vectoriale ale vectorilor $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ sunt date de următorul tabel

\times	\bar{i}	\bar{j}	\bar{k}
\bar{i}	$\bar{0}$	\bar{k}	$-\bar{j}$
\bar{j}	$-\bar{k}$	$\bar{0}$	\bar{i}
\bar{k}	\bar{j}	$-\bar{i}$	$\bar{0}$

Definiția 1.7.2. *Produsul mixt* a trei vectori este aplicația $V_3 \times V_2 \times V_3 \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin

$$(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = (\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c}.$$

Au loc următoarele proprietăți care se obțin imediat din definiția produsului mixt.

- 1) $|(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})|$ este volumul paralelipipedului construit pe vectorii $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$.
- 2) Dacă spațiul euclidian este raportat la sistemul ortonormat drept cu versorii $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ și $\bar{a}(x_1, y_1, z_1), \bar{b}(x_2, y_2, z_2), \bar{c}(x_3, y_3, z_3)$, atunci produsul mixt are expresia:

$$(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

- 3) Produsul mixt este o aplicație multiliniară $V_3 \times V_3 \times V_3 \rightarrow \mathbb{R}$, adică are loc liniaritatea în fiecare argument.

Teorema 1.7.3. (aria triunghiului pedal) Fie ABC un triunghi oarecare și punctele $A' \in BC, B' \in CA, C' \in AB$, care împart segmentele $[BC], [CA], [AB]$ în rapoartele $k_1, k_2, k_3 \neq 0, 1$. Are loc formula

$$S[A'B'C'] = \left| \frac{1 - k_1 k_2 k_3}{(1 - k_1)(1 - k_2)(1 - k_3)} \right| S[ABC]. \quad (24)$$

Demonstrație. Avem $\overline{A'B} = k_1 \cdot \overline{A'C}$, $\overline{B'C} = k_2 \cdot \overline{B'A}$, $\overline{C'A} = k_3 \cdot \overline{C'B}$ și aria triunghiului pedal $A'B'C'$ este $S[A'B'C'] = \frac{1}{2} |\overline{A'B'} \times \overline{A'C'}|$. Obținem imediat vectorii de poziție ai punctelor A', B', C' , dacă ne raportăm la vârful A al triunghiului ABC

$$\overline{AA'} = \frac{1}{1 - k_1} \overline{AB} - \frac{k_1}{1 - k_1} \overline{AC}, \quad \overline{AB'} = \frac{1}{1 - k_2} \overline{AC}, \quad \overline{AC'} = -\frac{k_3}{1 - k_3} \overline{AB}.$$

Putem scrie, ținând seama de proprietățile produsului vectorial

$$\begin{aligned}
 \overline{A'B'} \times \overline{A'C'} &= (\overline{A'A} + \overline{AB'}) \times (\overline{A'A} + \overline{AC'}) = -\overline{AA'} \times \overline{AC'} + \overline{AA'} \times \overline{AB'} + \\
 &+ \overline{AB'} \times \overline{AC'} = \left(\frac{1}{1-k_1} \overline{AB} - \frac{k_1}{1-k_1} \overline{AC} \right) \times \frac{k_3}{1-k_3} \overline{AB} + \\
 &+ \left(\frac{1}{1-k_1} \overline{AB} - \frac{k_1}{1-k_1} \overline{AC} \right) \times \frac{1}{1-k_2} \overline{AC} - \\
 &- \frac{k_3}{(1-k_2)(1-k_3)} \overline{AC} \times \overline{AB} = \frac{k_1 k_3}{(1-k_1)(1-k_3)} \overline{AB} \times \overline{AC} + \\
 &+ \frac{1}{(1-k_1)(1-k_2)} \overline{AB} \times \overline{AC} + \frac{k_3}{(1-k_2)(1-k_3)} \overline{AB} \times \overline{AC} = \\
 &= \frac{1-k_1 k_2 k_3}{(1-k_1)(1-k_2)(1-k_3)} \overline{AB} \times \overline{AC},
 \end{aligned}$$

de unde se obține formula din enunț prin considerarea lungimii vectorilor în ambele părți ale relației obținute. \square

Observația 1.7.4. 1) Punctele A', B', C' sunt coliniare dacă și numai dacă avem $S[A'B'C'] = 0$. Folosind formula (24), obținem că $S[A'B'C'] = 0$ dacă și numai dacă are loc relația $k_1 k_2 k_3 = 1$, adică regăsim teorema lui Menelaus, demonstrată sintetic în Partea I, Teoremele 1.5.1 și 1.5.2. Prin urmare, formula (24) reprezintă o măsură a abaterii punctelor $A' \in BC$, $B' \in CA$, $C' \in AB$, de la coliniaritate.

2) Dacă AA', BB', CC' sunt ceviane concurente în punctul P , triunghiul $A'B'C'$ se numește *triunghiul pedal* al lui P în raport cu triunghiul ABC . Notăm pentru simplitate cu S_P aria triunghiului $A'B'C'$.

Aplicația 1.7.5. (aria triunghiului pedal al lui I) Fie triunghiul ABC cu lungimile laturilor a, b, c și I centrul cercului înscris. În acest caz avem că AA', BB', CC' sunt bisectoarele interioare ale triunghiului ABC și $k_1 = -\frac{c}{b}$, $k_2 = -\frac{a}{c}$, $k_3 = -\frac{b}{a}$. Aplicând formula (24) obținem

$$S_I = \frac{2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} S[ABC]. \quad (25)$$

Teorema 1.7.6. Fie ABC un triunghi oarecare și cevianele AA_1, BB_1, CC_1 , unde punctele $A_1 \in BC$, $B_1 \in CA$, $C_1 \in AB$, împart segmentele $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$ în rapoartele $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \neq 1$. Atunci:

1) Se poate forma un triunghi cu segmentele $[AA_1]$, $[BB_1]$, $[CC_1]$, dacă și numai dacă $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$.

2) Presupunem că $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha$ și considerăm S_α aria triunghiului format cu segmentele $[AA_1]$, $[BB_1]$, $[CC_1]$. Are loc formula

$$S_\alpha = \frac{\alpha^2 - \alpha + 1}{(\alpha - 1)^2} S[ABC]. \quad (26)$$

Demonstrație. 1) Raportându-ne la vârful A al triunghiului ABC , vectorii de poziție ai punctelor A_1, B_1, C_1 sunt dați de

$$\overrightarrow{AA_1} = \frac{1}{1 - \alpha_1} \overrightarrow{AB} - \frac{\alpha_1}{1 - \alpha_1} \overrightarrow{AC}, \quad \overrightarrow{AB_1} = \frac{1}{1 - \alpha_2} \overrightarrow{AC}, \quad \overrightarrow{AC_1} = -\frac{\alpha_3}{1 - \alpha_3} \overrightarrow{AB},$$

deci obținem

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} &= \overrightarrow{AA_1} + (\overrightarrow{AB_1} - \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AC_1} - \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{1 - \alpha_1} \overrightarrow{AB} - \\ &\frac{\alpha_1}{1 - \alpha_1} \overrightarrow{AC} + \frac{1}{1 - \alpha_2} \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} - \frac{\alpha_3}{1 - \alpha_3} \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \\ &\left(\frac{1}{1 - \alpha_1} - \frac{1}{1 - \alpha_3} \right) \overrightarrow{AB} + \left(\frac{\alpha_2}{1 - \alpha_2} - \frac{\alpha_1}{1 - \alpha_1} \right) \overrightarrow{AC}. \end{aligned}$$

Prin urmare, avem $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \vec{0}$ dacă și numai dacă numerele $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ verifică sistemul

$$\frac{1}{1 - \alpha_1} = \frac{1}{1 - \alpha_3}, \quad \frac{\alpha_1}{1 - \alpha_1} = \frac{\alpha_2}{1 - \alpha_2},$$

adică $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$.

2) Avem $S_\alpha = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AA_1} \times \overrightarrow{BB_1}|$ și

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AA_1} \times \overrightarrow{BB_1} &= \overrightarrow{AA_1} \times (\overrightarrow{AB_1} - \overrightarrow{AB}) = \\ &\left(\frac{1}{1 - \alpha} \overrightarrow{AB} - \frac{\alpha}{1 - \alpha} \overrightarrow{AC} \right) \times \left(\frac{1}{1 - \alpha} \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} \right) = \\ &\frac{1}{(1 - \alpha)^2} \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} - \frac{\alpha}{1 - \alpha} \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \frac{\alpha^2 - \alpha + 1}{(1 - \alpha)^2} \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}, \end{aligned}$$

de unde prin trecere la module se vectori obținem formula dorită. \square

Observația 1.7.7. Construcția triunghiului cu laturile egale cu segmentele $[AA_1]$, $[BB_1]$, $[CC_1]$ se poate realiza geometric astfel. Fie $A_1M \parallel BB_1$ astfel încât patrulaterul BA_1MB_1 este paralelogram.

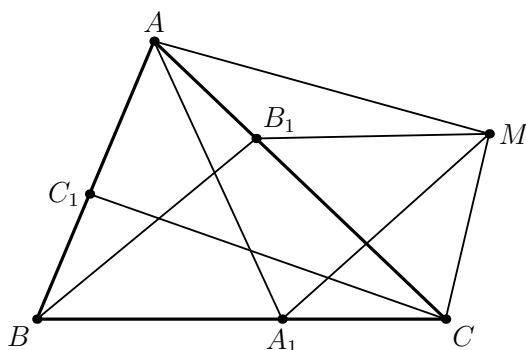


Figura 1.14

Triunghiul AA_1M este triunghiul căutat, deoarece se arată ușor că și patrulaterul $AMCC_1$ este paralelogram.

Aplicația 1.7.8. Fie triunghiul ABC cu medianele $[AA_1]$, $[BB_1]$, $[CC_1]$. Punctele $A_1 \in BC$, $B_1 \in CA$, $C_1 \in AB$, împart segmentele $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$ în rapoartele $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = -1$. Rezultă că se poate forma un triunghi cu medianele triunghiului ABC și aria acestui triunghi este $\frac{3}{4}$ din aria lui ABC .

Aplicația 1.7.9. Presupunem că $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha$ și considerăm triunghiul format cu segmentele $[AA_1]$, $[BB_1]$, $[CC_1]$. Acest triunghi are aria minimă dacă și numai dacă punctele A_1, B_1, C_1 sunt mijloacele laturilor $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$ ale triunghiului ABC . Într-adevăr, aplicând formula (26) avem

$$\frac{\alpha^2 - \alpha + 1}{(\alpha - 1)^2} \geq \frac{3}{4},$$

inegalitate care este echivalentă cu $(\alpha + 1)^2 \geq 0$, de unde rezultă proprietatea enunțată. În plus, considerând funcția

$$f(\alpha) = \frac{\alpha^2 - \alpha + 1}{(\alpha - 1)^2}, \alpha \neq 1,$$

un calcul simplu ne conduce la

$$f'(\alpha) = -\frac{\alpha + 1}{(\alpha - 1)^2},$$

deci din formula (26) rezultă că funcția S_α este strict descrescătoare pe intervalele $(-\infty, -1]$, $(1, \infty)$ și strict crescătoare pe intervalul $[-1, 1]$, punctul $\alpha = -1$ fiind punct de minim global al lui S_α .

1.8 Exerciții și probleme

1. Fie triunghiul ABC și P un punct situat în interiorul său. Să se demonstreze că dacă există un punct M în planul triunghiului pentru care

$$3\overline{MP} = \overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC},$$

atunci P coincide cu centrul de greutate al triunghiului ABC .

2. Se consideră cercul de centru O și un punct oarecare M în interiorul acestuia. Prin M se duc coardele perpendiculare $[AB]$ și $[CD]$. Să se arate că

$$\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} + \overline{MD} = 2\overline{MO}.$$

3. Fie $ABCDE$ un pentagon înscris într-un cerc. Notăm cu H_1, H_2, H_3, H_4 ortocentrele triunghiurilor ABC, BCD, CDE , respectiv ACE . Să se demonstreze că patrulaterul $H_1H_2H_3H_4$ este paralelogram.
4. Fie $ABCD$ un patrulater înscritibil și H_1, H_2, H_3, H_4 ortocentrele triunghiurilor BCD, CDA, DAB respectiv ABC . Să se demonstreze că patrulaterul $ABCD$ este congruent cu patrulaterul $H_1H_2H_3H_4$.
5. Fie $\bar{r}_A, \bar{r}_B, \bar{r}_C$ vectorii de poziție ai vârfurilor triunghiului ABC , iar a, b, c lungimile laturilor BC, CA respectiv AB . Să se demonstreze că dacă

$$(b + c - 2a)\bar{r}_A + (c + a - 2b)\bar{r}_B + (a + b - 2c)\bar{r}_C = \bar{0},$$

atunci triunghiul ABC este echilateral.

6. Fie K, L, M, N mijloacele laturilor $[AB], [BC], [CD], [DA]$ ale patrulaterului convex $ABCD$. Să se demonstreze că au loc relațiile

$$AB^2 + CD^2 - AD^2 - BC^2 = 2(LN^2 - KM^2) = 2AC \cdot BD \cos \varphi,$$

unde $\varphi = (\widehat{AC, BD})$.

7. Fie a, b, c, d lungimile laturilor patrulaterului convex $ABCD$ și d_1, d_2 lungimile diagonalelor sale. Arătați că aria patrulaterului se poate exprima prin formulele

$$\begin{aligned} S[ABCD] &= \frac{1}{4} \sqrt{4d_1^2 d_2^2 - (a^2 + c^2 - b^2 - d^2)^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{d_1^2 d_2^2 - (LN^2 - KM^2)^2} \\ &= \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \varphi, \end{aligned}$$

unde notațiile sunt cele din problema precedentă.

8. Să se demonstreze formula $OI_a^2 = R^2 + 2Rr_a$, unde I_a este centrul cercului exînscribit tangentei $[BC]$ a triunghiului ABC iar r_a este raza acestuia.
9. Demonstrați că oricare ar fi 5 vectori, putem alege doi astfel încât suma lungimilor acestor vectori să fie mai mică sau egală cu suma lungimilor celorlalți 3 vectori.
10. Pe cercul de centru O se iau punctele A_1, A_2, \dots, A_n astfel încât

$$\overline{OA_1} + \overline{OA_2} + \dots + \overline{OA_n} = \vec{0}.$$

Demonstrați că pentru orice punct M din plan avem

$$MA_1 + MA_2 + \dots + MA_n \geq nR,$$

unde R este raza cercului.

Metoda transformărilor geometrice

2

În cele ce urmează, considerăm planul euclidian \mathcal{P} cu structurile geometrice definite prin sistemul axiomatic al lui Hilbert sau Birkhoff, descrise în paragraful 1.1 din Partea I.

O funcție bijectivă $f : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ se numește *transformare geometrică* a planului \mathcal{P} . Notând cu $\mathcal{T}(\mathcal{P})$ mulțimea tuturor transformărilor geometrice ale lui \mathcal{P} , se constată imediat că $(\mathcal{T}(\mathcal{P}), \circ)$ este un grup cu elementul neutru $1_{\mathcal{P}}$, numit *grupul transformărilor geometrice* ale planului euclidian. Dacă $f \in \mathcal{T}(\mathcal{P})$, atunci f^{-1} este *transformarea inversă* a lui f . De asemenea, dacă $M \in \mathcal{P}$, punctul $M' = f(M) \in \mathcal{P}$ se numește *transformatul* lui M prin f . Dacă avem o configurație $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}$, atunci $\mathcal{F}' = f(\mathcal{F})$ este *transformata* lui \mathcal{F} prin f .

În anul 1872, matematicianul german Felix Klein în lecția inaugurală ținută cu ocazia numirii sale ca profesor la Universitatea din Erlangen a propus un nou principiu care arată că diferitele sisteme geometrice cunoscute la acea vreme pot fi înțelese, concepute și interpretate ca teorii ale invarianților unor grupuri de transformări. Felix Klein a formulat în lecția sa un program de cercetare a geometriei cunoscut sub numele de "Programul de la Erlangen".

Obiectivele pe care le avem în vedere când rezolvăm o problemă cu ajutorul unei transformări geometrice sunt următoarele:

- construirea imaginii unui punct prin transformarea respectivă;
- dacă \mathcal{F}' este transformata configurației \mathcal{F} , determinarea punctelor $M' \in \mathcal{F}'$ și $M \in \mathcal{F}$ care se corespund prin transformare;
- construirea imaginii unei configurații prin transformarea utilizată;
- determinarea elementelor și proprietăților geometrice care definesc și caracterizează transformarea.

Deoarece grupul $(\mathcal{T}(\mathcal{P}), \circ)$ este prea "mare", este necesar să considerăm transformări concrete ale planului \mathcal{P} definite prin proprietăți geometrice cu caracter mai special, punând astfel în evidență subgrupuri ale lui $\mathcal{T}(\mathcal{P})$.

2.1 Grupul izometriilor planului euclidian

În acest paragraf prezentăm o transformare geometrică a planului \mathcal{P} în definirea căreia structura metrică a lui \mathcal{P} este esențială.

Transformarea $f : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ care satisface condiția

$$|f(A)f(B)| = |AB|,$$

pentru orice puncte $A, B \in \mathcal{P}$, se numește *izometrie* a planului euclidian \mathcal{P} .

Observația 2.1.1. Formal am putea relaxa condiția din această definiție la următoarele două proprietăți:

- f este surjectivă;
- f conservă distanțele, adică $|f(A)f(B)| = |AB|$, $\forall A, B \in \mathcal{P}$.

Însă din aceste două proprietăți rezultă injectivitatea lui f . Într-adevăr, din $f(A) = f(B)$, rezultă $0 = |f(A)f(B)| = |AB|$, deci $A = B$.

Notăm $Izo(\mathcal{P})$ mulțimea tuturor izometriilor planului euclidian \mathcal{P} .

Teorema 2.1.2. $(Izo(\mathcal{P}), \circ)$ este un subgrup al grupului de transformări $(\mathcal{T}(\mathcal{P}), \circ)$, numit grupul izometriilor planului euclidian.

Demonstrație. Din definiția de mai sus am văzut că $Izo(\mathcal{P}) \subset \mathcal{T}(\mathcal{P})$. Evident avem $1_{\mathcal{P}} \in Izo(\mathcal{P})$, ceea ce revine la egalitatea $|AB| = |AB|$.

Dacă $f, g \in Izo(\mathcal{P})$, atunci avem $g \circ f \in Izo(\mathcal{P})$. Într-adevăr, pentru orice $A, B \in \mathcal{P}$, avem

$$|(g \circ f)(A)(g \circ f)(B)| = |g(f(A))g(f(B))| = |f(A)f(B)| = |AB|.$$

Pentru $f \in Izo(\mathcal{P})$, rezultă $f^{-1} \in Izo(\mathcal{P})$, adică pentru orice $A, B \in \mathcal{P}$, are loc relația

$$|f^{-1}(A)f^{-1}(B)| = |AB|.$$

Într-adevăr, utilizând definiția izometriei putem scrie

$$|AB| = |f(f^{-1}(A))f(f^{-1}(B))| = |f^{-1}(A)f^{-1}(B)|$$

□

Am menționat deja în paragraful 1.3 din Partea I că izometriile sunt asemănări particulare ale planului euclidian, de raport $k = 1$. Mai mult, $(Izo(\mathcal{P}), \circ)$ este un subgrup al grupului $(\mathcal{A}(\mathcal{P}), \circ)$ al asemănărilor planului. Prin urmare, proprietățile geometrice ale asemănărilor au loc și pentru izometrii: un segment este transformat într-un segment, o semidreaptă într-o semidreaptă, o dreaptă într-o dreaptă, un triunghi într-un triunghi congruent cu el, un cerc într-un cerc de aceeași rază, măsura unghiurilor este invariantă, etc.

Punctul $A \in \mathcal{P}$ se numește *punct fix* pentru izometria $f \in Izo(\mathcal{P})$ dacă $f(A) = A$. Dreapta $d \subset \mathcal{P}$ se numește *dreaptă fixă* pentru f dacă $f(d) = d$. Determinarea punctelor fixe ale unei izometrii reprezintă un pas important în clasificarea acestor transformări.

Teorema 2.1.3. *Mulțimea punctelor fixe ale unei izometrii $f \in Izo(\mathcal{P})$ poate fi:*

1) mulțimea vidă; 2) un punct; 3) o dreaptă; 4) planul \mathcal{P} .

Demonstrație. Presupunem că f are puncte fixe. Dacă f are un singur punct fix ne situăm în cazul 2) și nu avem ce să demonstrăm. Să presupunem că f are cel puțin două puncte fixe. Fie A și B două puncte diferite ale lui f . Considerăm $d = AB$ și ținând seama că f transformă dreapta d în dreapta $f(A)f(B)$ și că $f(A) = A$, $f(B) = B$, obținem că $f(d) = d$. Fie $C \in d$, un punct oarecare. Presupunem că avem $C \in (AB)$. Cum f păstrează relația "între", avem $f(C) \in (AB)$. Deoarece $|AC| = |f(A)f(C)| = |Af(C)|$, rezultă că în mod necesar $f(C) = C$. Cazurile în care $C \notin (AB)$ se tratează în mod analog. Prin urmare avem $f(C) = C$, pentru orice punct $C \in d$.

Să presupunem acum că A, B, C sunt trei puncte fixe necoliniare ale lui f . Din cele demonstrate mai sus, rezultă că punctele situate pe dreptele AB , BC și CA sunt fixe pentru f . Fie $M \in \mathcal{P}$ un punct oarecare și $N \in (BC)$. Dreapta MN intersectează AB sau AC . Presupunem că avem $MN \cap AB = \{P\}$, deci avem $f(N) = N$ și $f(P) = P$. Prin urmare, toate punctele situate pe NP sunt fixe, adică $f(M) = M$. \square

O configurație $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}$ se numește *configurație fixă sau invariantă* în raport cu izometria $f \in Izo(\mathcal{P})$ dacă $f(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$. Dacă $f(A) = A$ pentru orice punct $A \in \mathcal{F}$, atunci \mathcal{F} este o configurație *fixă punct cu punct* pentru f .

Dacă \mathcal{F}_1 și \mathcal{F}_2 sunt configurații fixe în raport cu izometria f , atunci avem

$$f(\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2) = f(\mathcal{F}_1) \cap f(\mathcal{F}_2) = \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$$

și

$$f(\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2) = f(\mathcal{F}_1) \cup f(\mathcal{F}_2) = \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$$

deoarece f este bijectivă și $f(\mathcal{F}_1) = \mathcal{F}_1$, $f(\mathcal{F}_2) = \mathcal{F}_2$. Prin urmare, intersecția și reuniunea a două configurații fixe în raport cu f , sunt configurații fixe pentru f .

Izometria $f : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ este *involuție* dacă $f \circ f = 1_{\mathcal{P}}$. Evident, în acest caz avem, $f = f^{-1}$.

Teorema 2.1.4. *Orice izometrie involutivă are cel puțin un punct fix.*

Demonstrație. Dacă $f = 1_{\mathcal{P}}$ proprietatea este evidentă. Presupunem că $f \neq 1_{\mathcal{P}}$, adică există un punct $A \in \mathcal{P}$ cu proprietatea că $A \neq f(A) = B$. Deoarece f este involuție, rezultă că $f(B) = f(f(A)) = A$. Prin urmare $f([AB]) = [AB]$ și deci mijlocul segmentului $[AB]$ este punct fix al lui f . \square

Definiția 2.1.5. Un *triunghi orientat* ABC este triplet orientat de puncte necoliniare A, B, C .

În acest caz este precizat primul vârf, al doilea vârf, respectiv al treilea vârf al triunghiului iar sensul în care se parcurge conturul triunghiului este dat de ordinea în care sunt scrise vârfurile lui. Evident un triunghi ABC admite două orientări, anume A, B, C sau A, C, B .

O izometrie f a planului euclidian se numește *izometrie de genul 1* (sau *deplasare*) dacă f păstrează orientarea oricărui triunghi din planul \mathcal{P} . În cazul în care f schimbă orientarea oricărui triunghi din planul \mathcal{P} , atunci f se numește *izometrie de genul 2* (sau *antideplasare*).

În paragraful 2.5 vom clasifica izometriile planului euclidian utilizând izometrii concrete, așa că vom putea preciza cu ușurință proprietățile acestora: elemente invariante și gen.

2.2 Translația

Considerăm $\bar{v} \in V_2$, un vector liber fixat. Aplicația $T_{\bar{v}} : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$, $T_{\bar{v}}(A) = B$, unde $\overline{AB} = \bar{v}$, se numește *translație de vector* \bar{v} .

Au loc următoarele proprietăți:

- 1) $T_{\bar{0}} = 1_{\mathcal{P}}$, deci translația de vector nul este aplicația identică a planului.

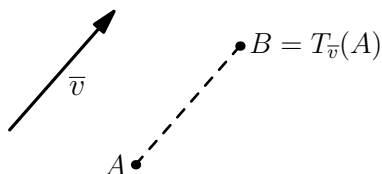


Figura 2.1

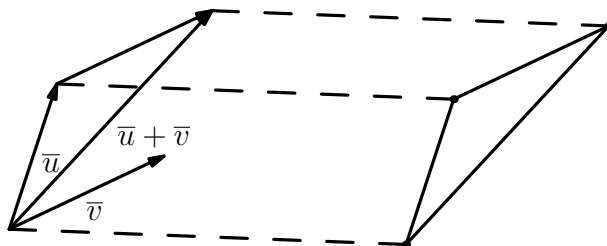


Figura 2.2

2) $T_{\vec{u}} \circ T_{\vec{v}} = T_{\vec{v}} \circ T_{\vec{u}} = T_{\vec{u} + \vec{v}}$.

Într-adevăr, avem relația $T_{\vec{v}}(T_{\vec{u}}(A)) = T_{\vec{v} + \vec{u}}(A)$.

3) Translația $T_{\vec{v}}$ este bijectivă și avem $T_{\vec{v}}^{-1} = T_{-\vec{v}}$.

4) Orice translație este o izometrie a planului euclidian.

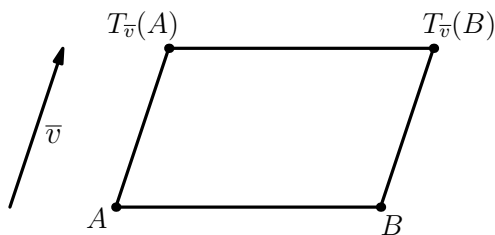


Figura 2.3

Într-adevăr, din faptul că $ABT_{\vec{v}}(B)T_{\vec{v}}(A)$ este paralelogram, rezultă $|AB| = |T_{\vec{v}}(A)T_{\vec{v}}(B)|$.

5) Translațiile sunt izometrii de genul 1 ale planului, adică păstrează orientarea

triunghiurilor.

- 6) Translațiile de vector nenul nu au puncte fixe.
- 7) Dreptele paralele cu direcția vectorului liber nenul \bar{v} sunt invariante în raport cu translația $T_{\bar{v}}$.

Teorema 2.2.1. *Mulțimea $\mathcal{T}(\mathcal{P})$ a translațiilor planului euclidian în raport cu operația de compunere a aplicațiilor este un grup izomorf cu grupul vectorilor liberi $(V_2, +)$.*

Demonstrație. Considerăm funcția $F : \mathcal{T}(\mathcal{P}) \rightarrow V_2$, unde $F(T_{\bar{v}}) = \bar{v}$. Evident, funcția F este o bijecție și satisface condiția de morfism de grupuri, adică avem $F(T_{\bar{u}} \circ T_{\bar{v}}) = F(T_{\bar{u}}) + F(T_{\bar{v}})$, conform proprietății 2) de mai sus. \square

Teorema 2.2.2. *O izometrie a planului \mathcal{P} este o translație dacă și numai dacă transformă orice semidreaptă într-o semidreaptă având aceeași orientare.*

Demonstrație. Două semidrepte au aceeași orientare dacă sunt paralele și situate de aceeași parte a dreptei determinată de originile lor. Fie $f : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ o izometrie care transformă orice semidreaptă într-o semidreaptă cu aceeași orientare. Fie $A \in \mathcal{P}$ și $A' = f(A)$. Pentru orice punct $M \in \mathcal{P}$, $M \neq A$, izometria f transformă semidreapta $[AM]$ într-o semidreaptă cu originea în A' , având aceeași orientare.

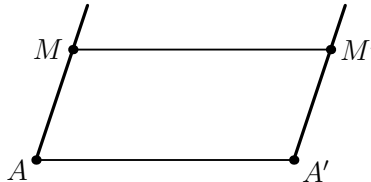


Figura 2.4

Dacă $M' = f(M)$, punctul M' aparține acestei semidrepte și avem $|AM| = |f(A)f(M)| = |A'M'|$. Considerăm translația $T_{\bar{v}}$, unde $\bar{v} = \overrightarrow{AA'}$. Evident $T_{\bar{v}}([AM]) = [A'M']$ și $|T_{\bar{v}}(A)T_{\bar{v}}(M)| = |A'M'|$, deci avem $f(M) = T_{\bar{v}}(M)$. Prin urmare, $f = T_{\bar{v}}$. \square

Exemplul 2.2.3. Se consideră două cercuri de rază R , tangente în punctul K . Pe fiecare din cercuri luăm punctele A și B astfel încât $m(\widehat{AKB}) = 90^\circ$. Atunci $AB = 2R$.

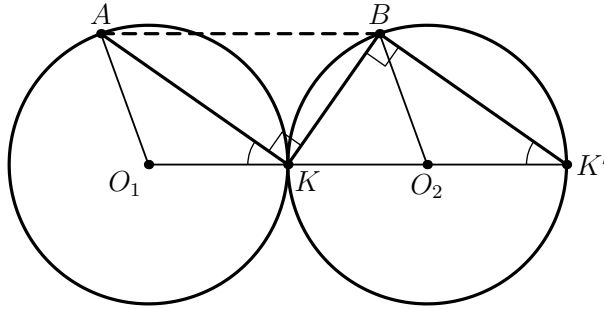


Figura 2.5

Considerăm translația $T_{\overline{O_1O_2}}$ și observăm că punctul O_1 se transformă în O_2 . Fie $K' = T_{\overline{O_1O_2}}(K)$. Observăm că avem $\triangle AO_1K \equiv \triangle BO_2K'$. Din $AK \parallel BK'$ rezultă $[AK] \equiv [BK']$, deci punctul A se transformă în B și avem $AB = 2R$ și $AB \parallel O_1O_2$.

Exemplul 2.2.4. În interiorul unui pătrat $ABCD$ se consideră un punct M . Să se demonstreze că putem construi un patrulater convex cu diagonalele perpendiculare și cu lungimile laturilor egale cu AM , BM , CM , DM .

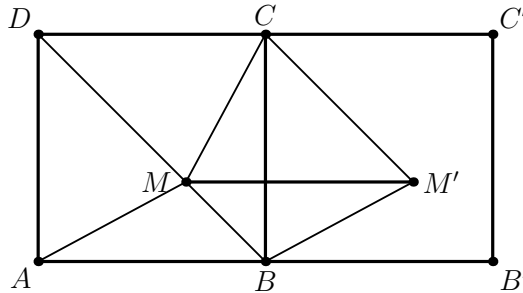


Figura 2.6

Prin translația $T_{\overline{AB}}$ avem următoarele transformări de puncte

$$A \rightarrow B, \quad B \rightarrow B', \quad D \rightarrow C, \quad C \rightarrow C', \quad M \rightarrow M'$$

prin urmare $MBM'C$ este pătratul căutat.

Evident, diagonalele $[CB]$, $[MM']$ sunt perpendiculare și egale.

2.3 Simetrii

2.3.1 Simetria centrală

Definiția 2.3.1. Fie $A \in \mathcal{P}$ fixat. Transformarea $s_A : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$, $s_A(X) = X'$, unde X' este simetricul lui X față de A se numește *simetrie centrală* de centru A .

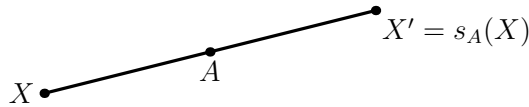


Figura 2.7

Proprietăți

1) Simetriile centrale sunt transformări involutive ale planului euclidian, adică verifică relația $s_A \circ s_A = 1_{\mathcal{P}}$.

În particular, orice simetrie centrală este o funcție bijectivă.

2) Are loc relația $s_B \circ s_A = T_{2\overline{AB}}$, adică prin compunerea a două simetrii de centre diferite obținem o translație.

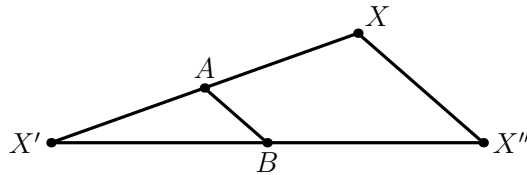


Figura 2.8

Într-adevăr, dacă $X' = s_A(X)$ și $X'' = s_B(X')$, atunci în triunghiul $X'XX''$, AB este linie mijlocie, prin urmare avem $X'' = T_{2\overline{AB}}(X)$.

3) Orice simetrie centrală este o izometrie.

Presupunem că $X \rightarrow X'$ și $Y \rightarrow Y'$. Din congruența $\triangle AXY \equiv \triangle AX'Y'$ (*L.U.L.*), rezultă $|XY| = |X'Y'| = |s_A(X)s_A(Y)|$, adică s_A este o izometrie.

4) Simetriile centrale sunt izometrii de genul 1, adică păstrează orientarea triunghiurilor.

5) Singurul punct fix al unei simetrii centrale este centrul acesteia.

Exemplul 2.3.2. Punctul A se transformă printr-o simetrie centrală de centru O_1 în punctul A_1 . Punctul A_1 se transformă printr-o simetrie centrală de centru O_2 în punctul A_2 . Punctul A_2 se transformă printr-o simetrie centrală de centru O_3 în punctul A_3 . Punctul A_3 se transformă printr-o simetrie centrală de centru O_1 în punctul A_4 . Punctul A_4 se transformă printr-o simetrie centrală de centru O_2 în punctul A_5 . Punctul A_5 se transformă printr-o simetrie centrală de centru O_3 în punctul A_6 . Să se arate că $A_6 = A$.

Considerând s_{O_1} , s_{O_2} , s_{O_3} , cele trei simetrii centrale, ținând seama de proprietatea 2) avem

$$\begin{aligned}(s_{O_3} \circ s_{O_2}) \circ (s_{O_1} \circ s_{O_3}) \circ (s_{O_2} \circ s_{O_1}) &= T_{2\overline{O_2O_3}} \circ T_{2\overline{O_3O_1}} \circ T_{2\overline{O_1O_2}} \\ &= T_{2\overline{O_2O_3} + 2\overline{O_3O_1} + 2\overline{O_1O_2}} = T_{\vec{0}} = 1_P.\end{aligned}$$

Exemplul 2.3.3. În orice triunghi ABC are loc inegalitatea:

$$m_a < \frac{1}{2}(AB + AC),$$

unde m_a este mediana din vârful A al triunghiului.

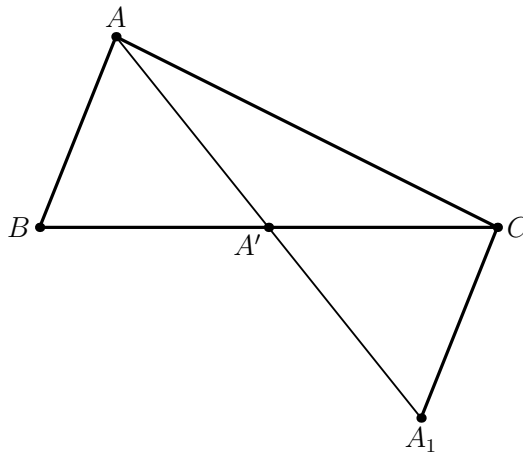


Figura 2.9

Fie A' mijlocul laturii $[BC]$ și $s_{A'}$ simetria centrală de centru A' . Considerăm $A_1 = s_{A'}(A)$. În triunghiul AA_1C avem $A_1C = AB$. Aplicând inegalitatea triunghiului avem $AA_1 < AC + CA_1$, adică $2m_a < AC + AB$, ceea ce trebuia demonstrat.

Exemplul 2.3.4. Simetricele ortocentrului H al triunghiului ABC în raport cu mijloacele laturilor triunghiului se găsesc pe cercul circumscris triunghiului.

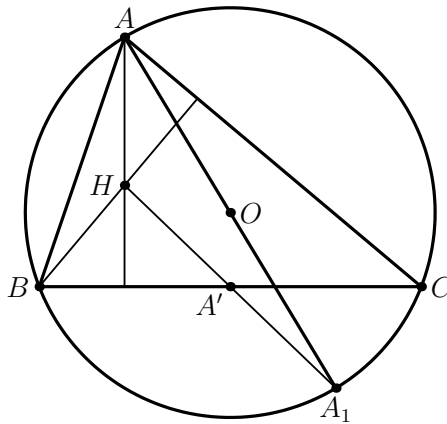


Figura 2.10

Fie A' mijlocul laturii BC și A_1 punctul diametral opus lui A în cercul circumscris triunghiului. Observăm că

$$\left. \begin{array}{l} A_1C \perp AC \\ BH \perp AC \end{array} \right\} \Rightarrow A_1C \parallel BH$$

și

$$\left. \begin{array}{l} A_1B \perp AB \\ CH \perp AB \end{array} \right\} \Rightarrow A_1B \parallel CH,$$

prin urmare BA_1CH este paralelogram, adică $A_1 = s_{A'}(H)$.

2.3.2 Simetria axială

Fie $d \subset \mathcal{P}$ dreaptă fixă. Aplicația $s_d : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$, $s_d(X) = X'$, unde X' este simetricul lui X față de dreapta d , se numește *simetrie axială* de axă d .

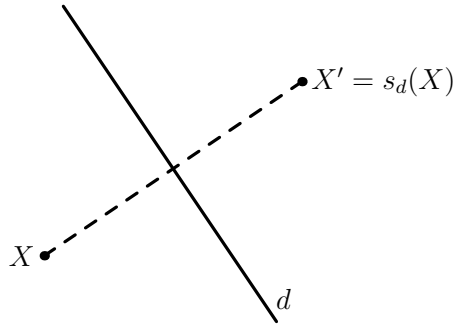


Figura 2.11

Proprietăți

1) Orice simetrie axială s_d este o transformare involutivă a planului, adică are loc relația $s_d \circ s_d = 1_{\mathcal{P}}$. În particular, rezultă că s_d este o aplicație bijectivă.

2) Dacă $d_1 \parallel d_2$, atunci are loc relația $s_{d_1} \circ s_{d_2} = T_{2\vec{v}}$, unde $T_{\vec{v}}$ transformă dreapta d_2 în dreapta d_1 și $\vec{v} \perp d_1$.

3) Orice simetrie axială este o izometrie.

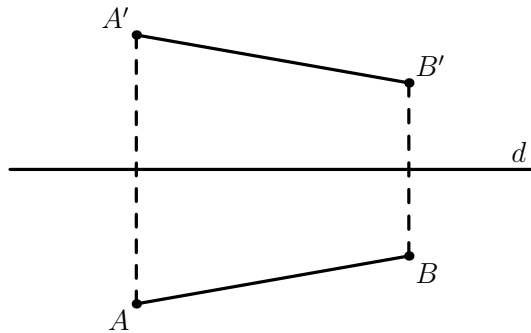


Figura 2.12

Într-adevăr, dacă $A, B \in \mathcal{P}$ și $A' = s_d(A)$, $B' = s_d(B)$, atunci patrulaterul $ABB'A'$ este trapez cu axa de simetrie d , deci va fi trapez isoscel. Rezultă $A'B' = AB$, adică s_d este o izometrie.

4) Simetriile axiale sunt izometrii de genul 2 ale planului euclidian, adică inversează orientarea triunghiurilor.

5) Toate punctele dreptei d sunt puncte fixe ale simetriei axiale s_d și acestea sunt singurele puncte fixe ale acesteia.

6) Dreapta d este fixă punct cu punct pentru s_d .

Exemplul 2.3.5. Fie d_1, d_2 două drepte din plan și d_3 dreapta dată de $d_3 = s_{d_1}(d_2)$. Are loc relația $s_{d_3} = s_{d_1} \circ s_{d_2} \circ s_{d_1}$.

Considerăm următoarele două cazuri.

Cazul 1. $d_1 \parallel d_2$. Pentru $X \in \mathcal{P}$, considerăm $X' = s_{d_1}(X)$, $X'' = s_{d_2}(X')$, $X''' = s_{d_1}(X'')$ și rezultă imediat că $X''' = s_{d_3}(X)$.

Cazul 2. Dacă avem $d_1 \nparallel d_2$, atunci $XX'X''X'''$ este trapez isoscel și d_1 este axa de simetrie a acestuia.

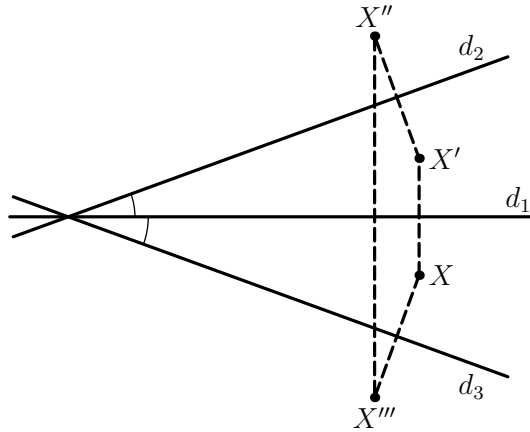


Figura 2.13

Exemplul 2.3.6. Se consideră patrulaterul convex $ABCD$. Să se arate că aria sa este mai mică sau egală decât $\frac{1}{2}(AB \cdot CD + AD \cdot BC)$.

Fie d mediatoarea segmentului AC și s_d simetria axială de axă d . Avem $C \rightarrow A$

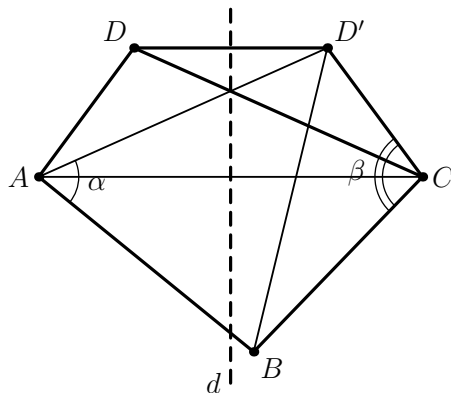


Figura 2.14

și considerăm că $D \rightarrow D'$. Rezultă

$$\begin{aligned}
 S[ABCD] &= S[ABCD'] = S[BAD'] + S[BCD'] \\
 &= \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AD' \cdot \underbrace{\sin \alpha}_{\leq 1} + \frac{1}{2} \cdot BC \cdot CD' \cdot \underbrace{\sin \beta}_{\leq 1} \\
 &= \frac{1}{2} (AB \cdot AD' + BC \cdot CD'),
 \end{aligned}$$

și proprietatea este demonstrată, deoarece $AD' = CD$ și $CD' = AD$.

Exemplul 2.3.7. Simetricile ortocentrului H al unui triunghi ABC în raport cu laturile triunghiului sunt situate pe cercul circumscris triunghiului.

Fie A' simetricul lui H față de dreapta BC și A_1 piciorul înălțimii din A . Triunghiul $A'BH$ este isoscel și avem $m(\widehat{BA'H}) = m(\widehat{AHB_1}) = 90^\circ - m(\widehat{CAA_1}) = m(\widehat{BCA})$. Prin urmare, patrulaterul $ABA'C$ este inscriptibil, adică A' aparține cercului circumscris triunghiului ABC (Figura 2.15).

2.4 Rotația

Considerăm $O \in \mathcal{P}$, un punct fixat și $t \geq 0$, un număr real.

Aplicația $R_{O,t} : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ dată prin $R_{O,t}(X) = X'$, unde punctul X' este definit de condițiile:

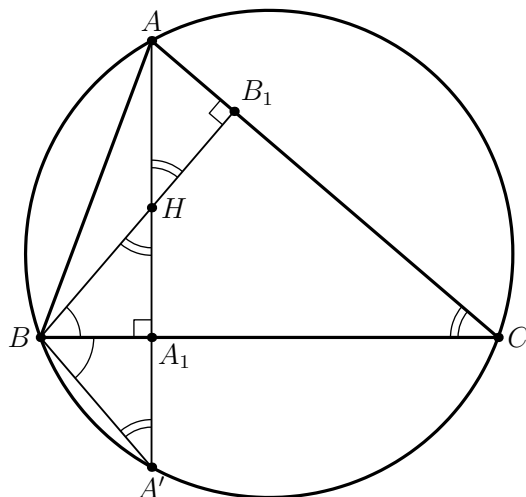


Figura 2.15

$$1) |OX| = |OX'|;$$

$$2) m(\widehat{XOX'}) = t;$$

se numește rotație de centru O și unghi t .

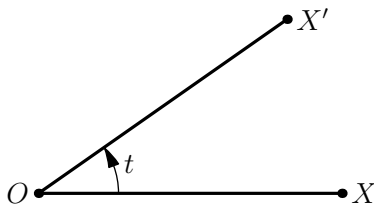


Figura 2.16

Convenim că în cazul $t \geq 0$, unghiurile se măsoară în sens direct trigonometric.

Putem considera rotațiile $R_{O,t}$, $t \in \mathbb{R}$ cu convenția că dacă $t < 0$, unghiurile se măsoară în sens invers trigonometric.

Au loc următoarele proprietăți:

- 1) $R_{O,0} = 1_{\mathcal{P}}$, deci rotația de unghi nul este aplicația identică a planului;
- 2) $R_{O,t_1} \circ R_{O,t_2} = R_{O,t_1+t_2}$, $\forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}$;
- 3) $R_{O,\pi} = s_O$, adică rotația de unghi π este simetria centrală de centru O .

4) Dacă două drepte d_1 și d_2 se intersectează în punctul O , atunci avem $s_{d_2} \circ s_{d_1} = R_{O,2t}$, unde t este unghiul format de cele două drepte. Reciproc, orice rotație se descompune într-un produs de două simetrii axiale cu axele concurente în centrul rotației.

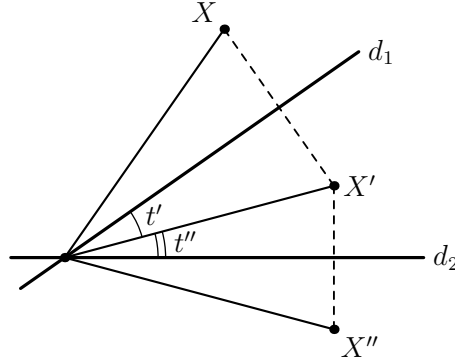


Figura 2.17

Într-adevăr, pentru un punct $X \in \mathcal{P}$, considerăm $X' = s_{d_1}(X)$ și $X'' = s_{d_2}(X')$. Avem $|OX| = |OX'| = |OX''|$ și $t' + t'' = t$, prin urmare $t' + t' + t'' + t'' = 2t$, deci obținem $X'' = R_{O,2t}(X)$.

5) Orice rotație este o izometrie de genul 1 a planului euclidian, adică păstrează orientarea triunghiurilor. Într-adevăr, să considerăm rotația $R_{O,t}$ și punctele $A, B \in \mathcal{P}$. Dacă $A' = R_{O,t}(A)$, $B' = R_{O,t}(B)$, adică $A \rightarrow A'$, $B \rightarrow B'$, atunci $|AB| = |A'B'|$, din congruența triunghiurilor AOB și $A'OB'$.

6) Unicul punct fix pentru rotația $R_{O,t}$, $t \neq 0$, este centrul O .

Mulțimea $\mathcal{R}_O(\mathcal{P})$ a tuturor rotațiilor planului euclidian \mathcal{P} de centru O , în raport cu operația de compunere, este un subgrup al lui $\text{Iso}(\mathcal{P})$, izomorf cu $(\mathbb{R}, +)$, adică avem

$$(\mathcal{R}_O(\mathcal{P}), \circ) \simeq (\mathbb{R}, +).$$

Izomorfismul dintre cele două grupuri este dat de aplicația $R_{O,t} \mapsto t$.

Grupul $\mathcal{R}_O(\mathcal{P})$ conține subgrupuri finite comutative de orice ordin $n \geq 2$. Într-adevăr, notând $t_k = \frac{2k\pi}{n}$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, se verifică ușor că mulțimea $\{R_{O,t_0}, R_{O,t_1}, \dots, R_{O,t_{n-1}}\}$ este un subgrup al grupului $(\mathcal{R}_O(\mathcal{P}), \circ)$.

În aplicații putem reduce unghiul de rotație modulo 2π .

7) Dacă o configurație \mathcal{F} este invariantă în raport cu rotația $R_{O,t}$ unde $t = \frac{2\pi}{n}$, atunci spunem că \mathcal{F} admite o *simetrie de ordin n* . Centrul rotației se numește *centrul simetriei* de ordinul n . Exemple de configurații care admit simetrie de ordin n sunt poligoanele regulate cu n laturi. În acest caz centrul simetriei de ordin n este centrul cercului circumscris poligonului.

Aplicația 2.4.1. Se consideră triunghiul ABC pe laturile căruia se construiesc în exterior triunghiurile echilaterale A_1BC , B_1AC , C_1AB . Atunci au loc următoarele proprietăți:

- 1) $|AA_1| = |BB_1| = |CC_1|$;
- 2) dreptele AA_1, BB_1, CC_1 sunt concurente.

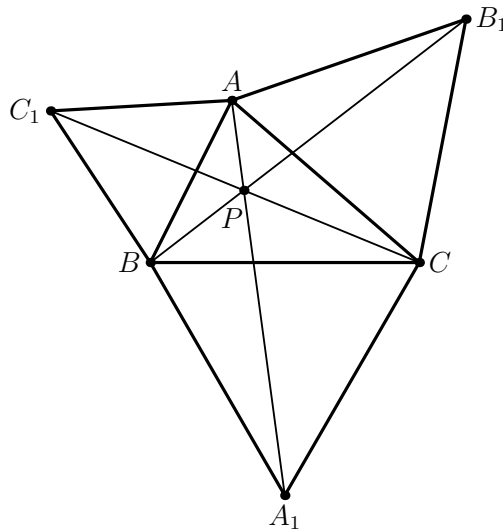


Figura 2.18

1) Prin rotația $R_{C, -\frac{\pi}{3}}$ avem următoarele transformări $A \rightarrow B_1$, $A_1 \rightarrow B$ prin urmare segmentul $[AA_1]$ se transformă în $[BB_1]$.

Cum rotația este o izometrie obținem $|AA_1| = |BB_1|$.

Considerăm $R_{B, \frac{\pi}{3}}$ și procedăm analog pentru a arăta că $|AA_1| = |CC_1|$.

2) Considerăm punctul $\{P\} = AA_1 \cap BB_1$ și observăm că avem $\widehat{BPC} = \frac{2\pi}{3}$. Rezultă că $BPCA_1$ este patrulater inscriptibil.

Analog $BPAC_1$ este patrulater inscriptibil, prin urmare avem $\widehat{BPC_1} = \frac{\pi}{3}$, deci punctele C, P, C' sunt coliniare.

Aplicația 2.4.2. (configurația lui Napoleon) Se consideră triunghiul ABC . Se construiesc spre exterior triunghiurile echilaterale A_1BC, B_1AC, C_1AB . Centrele de greutate O_A, O_B, O_C ale acestor triunghiuri formează un triunghi echilateral.

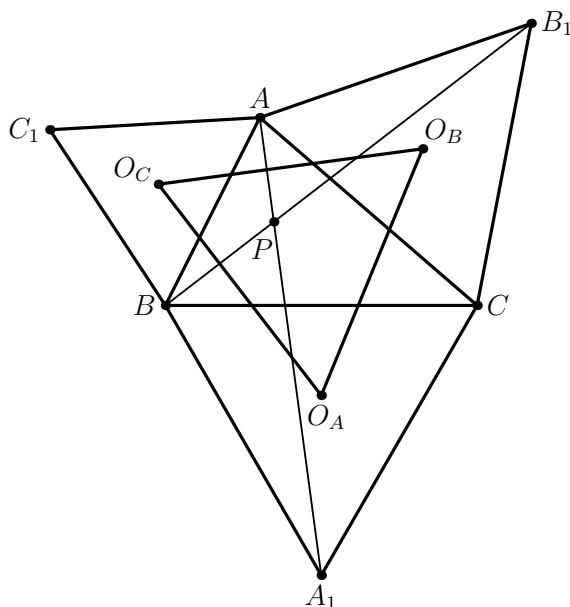


Figura 2.19

Observăm că $AP \perp O_BP_C$ iar prin rotația $R_{C, -\frac{\pi}{3}}$ avem $BP \perp O_AO_C$. Rezultă că $APCB_1$ este patrulater inscriptibil în cercul de centru O_B , deci $O_BA = O_BP$.

Procedăm analog pentru patrulaterul $APBC_1$. Prin urmare AO_CPO_B este un deltoid.

Într-un deltoid diagonalele sunt perpendiculare, deci avem $AP \perp O_CO_B$. Prin urmare triunghiul $O_AO_BO_C$ este echilateral.

Observația 2.4.3. Punctul P de intersecție al dreptelor AA_1, BB_1, CC_1 este unicul punct din planul triunghiului ABC din care laturile triunghiului se văd sub același unghi de 120° .

Aplicația 2.4.4. (punctul Fermat-Toricelli) În interiorul unui triunghi ABC ascuțitunghic să se determine un punct P cu proprietatea că suma distanțelor sale la vârfurile triunghiului este minimă.

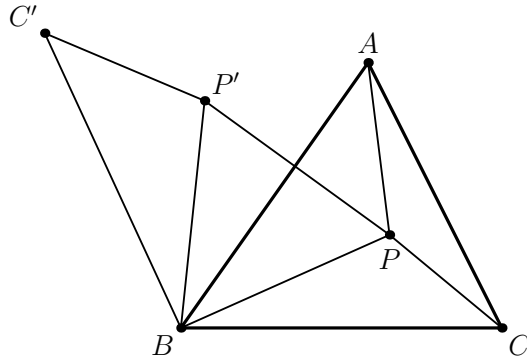


Figura 2.20

Fie P punctul cu proprietatea că suma $|PA| + |PB| + |PC|$ este minimă. Prin rotația $R_{B, \frac{\pi}{3}}$, obținem $A \rightarrow C'$, $P \rightarrow P'$, $[PA] \rightarrow [P'C']$ și triunghiul PBP' este echilateral. Rezultă că $|PA| + |PB| + |PC| = |C'P'| + |P'P| + |PC|$ este minimă dacă și numai dacă punctele C', P', P sunt coliniare.

2.5 Clasificarea izometriilor planului euclidian

Teorema 2.5.1. *Orice izometrie este o compunere dintre o translație, o rotație și, posibil, o simetrie axială.*

Demonstrație. Vom utiliza următorul rezultat auxiliar.

Lema 2.5.2. (de determinare a unei izometrii) *Fie $f_1, f_2 : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ două izometrii. Dacă pentru trei puncte necoliniare A, B, C avem:*

$$f_1(A) = f_2(A), f_1(B) = f_2(B), f_1(C) = f_2(C),$$

atunci $f_1 = f_2$.

Demonstrația lemei. Considerăm izometria $f = f_1^{-1} \circ f_2$ și avem

$$f(A) = (f_1^{-1} \circ f_2)(A) = f_1^{-1}(f_2(A)) = f_1^{-1}(f_1(A)) = A,$$

și în mod analog $f(B) = B$, $f(C) = C$. Prin urmare f are trei puncte fixe necoliniare A, B, C . Din Teorema 2.1.3 rezultă că avem $f = 1_{\mathcal{P}}$, deci $f_1 = f_2$. \square

Pentru demonstrația teoremei considerăm $f : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ o izometrie și ABC un triunghi nedegenerat. Presupunem că $A' = f(A)$, $B' = f(B)$, $C' = f(C)$, deci avem $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$.

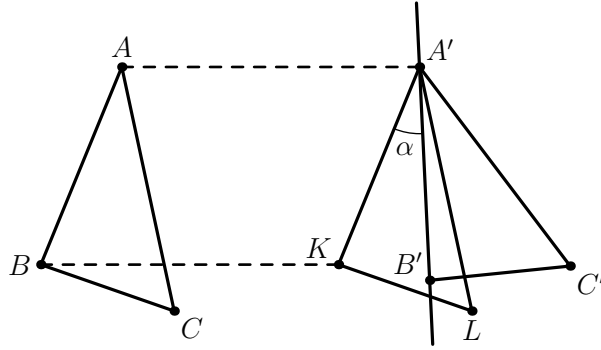


Figura 2.21

Considerăm translația $T_{\overline{AA'}}$ și există următoarele două situații posibile:

Cazul 1. Punctele C' și $T_{\overline{AA'}}(C)$ sunt situate în același semiplan determinat de dreapta $A'B'$. Presupunem că

$$T_{\overline{AA'}}(B) = K, \quad T_{\overline{AA'}}(C) = L.$$

Considerăm rotația $R_{A', \alpha}$, unde $\alpha = m(\widehat{KA'B'})$, și avem $K \rightarrow B'$, $L \rightarrow C'$. Rezultă că triunghiul ABC se transformă în triunghiul $A'B'C'$ prin izometria $R_{A', \alpha} \circ T_{\overline{AA'}}$. Din Lema 2.5.2 obținem

$$f = R_{A', \alpha} \circ T_{\overline{AA'}}.$$

Cazul 2. Punctele C' și $T_{\overline{AA'}}(C)$ sunt situate în semiplane opuse determinate de dreapta $A'B'$.

În acest caz avem

$$C' = (S_{A'B'} \circ R_{A', \alpha} \circ T_{\overline{AA'}})(C),$$

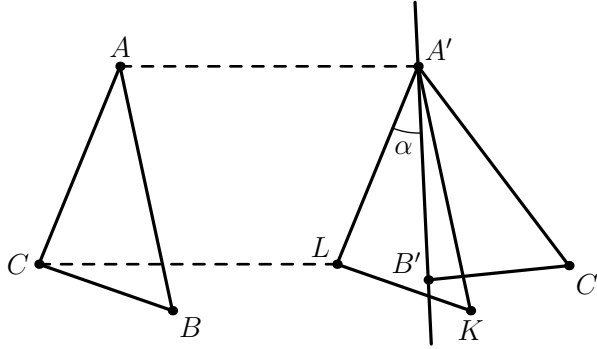


Figura 2.22

prin urmare din Lema 2.5.2 rezultă

$$f = S_{A'B'} \circ R_{A', \alpha} \circ T_{\overline{AA'}}.$$

□

Observația 2.5.3. În cazul în care izometria f este de genul 1, adică f păstrează orientarea triunghiurilor, atunci f este compunerea dintre o rotație și o translație.

În cazul în care izometria f este de genul 2, atunci ea este compunerea dintre o simetrie axială, o rotație și o translație.

2.6 Omotetia

2.6.1 Definiție și proprietăți

Din categoria transformărilor neizometrice ale planului euclidian vom prezenta în continuare omotetia.

Considerăm punctul $O \in \mathcal{P}$ fixat și $k \in \mathbb{R}^*$, un număr real nenul.

Transformarea $H_{O,k} : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$, $H_{O,k}(X) = X'$, unde sunt satisfăcute următoarele proprietăți geometrice:

- 1) punctele O, X, X' sunt coliniare;
- 2) avem $\overline{OX'} = k \cdot \overline{OX}$,

se numește *omotetie de centru O și raport k* .

- Dacă avem $k > 0$, punctele O, X, X' sunt așezate ca în Figura 2.23.
- În situația $k < 0$, punctele O, X, X' sunt așezate ca în Figura 2.24.

Au loc următoarele proprietăți algebrice, care rezultă imediat din definiție:

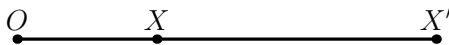


Figura 2.23



Figura 2.24

- 1) $H_{O,1} = 1_P$;
- 2) $H_{O,k} \circ H_{O,k'} = H_{O,k \cdot k'}$;
- 3) transformarea $H_{O,k}$ este bijectivă și avem $H_{O,k}^{-1} = H_{O,\frac{1}{k}}$.
- 4) $H_{O,-1} = S_O$, simetria centrală de centru O ;

Omotetia transformă o configurație geometrică \mathcal{F} într-o configurație \mathcal{F}' asemenea cu ea. În acest caz configurațiile \mathcal{F} și \mathcal{F}' se numesc *omotetice*. Pentru configurațiile geometrice simple (dreaptă, segment, cerc) vom prezenta demonstrații geometrice detaliate în paragraful următor.

Teorema 2.6.1. Fie $X' = f(X)$, $f : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ o funcție astfel încât pentru orice puncte M și $N \in \mathcal{P}$ să avem $\overline{M'N'} = k \cdot \overline{MN}$, unde k este un număr real nenul. Atunci:

1. pentru $k = 1$, f este o translație;
2. pentru $k \neq 1$, f este o omotetie.

Demonstrație. Vom arăta mai întâi că aplicația f este bijectivă, adică este o transformare a planului euclidian. Pentru aceasta vom demonstra că f este injectivă și surjectivă.

1) **Injectivitatea.** Deoarece $\overline{M'N'} = \overline{0} \Leftrightarrow k \cdot \overline{MN} = \overline{0} \Leftrightarrow \overline{MN} = \overline{0}$, atunci, dacă $M' \neq N'$ rezultă $M \neq N$, deci f este injectivă.

2) **Surjectivitatea.** Fie $P \in \mathcal{P}$ un punct arbitrar. Atunci, pentru orice punct $M \neq P$, există un punct N astfel încât $\overline{PM'} = k \cdot \overline{NM}$. Dar, din ipoteză avem că $\overline{M'N'} = k \cdot \overline{MN}$. Din cele două relații rezultă $\overline{PM'} = \overline{N'M'}$, adică $P = N' = f(N)$, prin urmare funcția f este surjectivă.

Din 1) și 2) rezultă că f este bijectivă, adică este o transformare a planului euclidian.

Dacă pentru orice puncte M și $N \in \mathcal{P}$ segmentele $[MN]$ și $[f(M)f(N)]$ sunt congruente, iar semidreptele (MN) și $(f(M)f(N))$ au aceeași orientare, atunci f este o translație deoarece segmentele $[Mf(M)]$ și $[Nf(N)]$ sunt congruente și paralele, iar semidreptele (MN) și $(f(M)f(N))$ au aceeași orientare.

Dacă pentru orice puncte M și $N \in \mathcal{P}$ segmentele $[MN]$ și $[f(M)f(N)]$ nu sunt congruente, atunci dreptele $Mf(M)$ și $Nf(N)$ se intersectează într-un punct O .

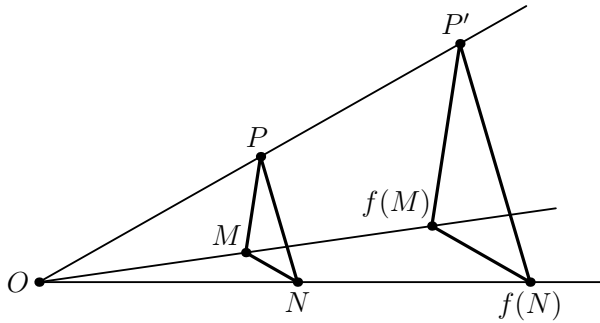


Figura 2.25

Considerăm omotetia de centru O care transformă punctul M în punctul $f(M)$. Construim punctul P' care corespunde prin această omotetie unui punct P oarecare. Rezultă că segmentele $[MP]$ și $[f(M)P']$ sunt paralele și avem

$$\frac{f(M)P'}{MP} = \frac{Of(M)}{OM} = \frac{f(M)f(N)}{MN}.$$

Semidreptele (MP) și $(f(M)P')$ vor avea aceeași orientare sau orientări opuse după cum semidreptele (MN) și $(f(M)f(N))$ au aceeași orientare sau orientări opuse. Rezultă că punctul P' coincide cu punctul $f(P)$ și deci f este omotetie. \square

Teorema 2.6.2. *Mulțimea omotetiilor de același centru, împreună cu compunerea, formează un grup comutativ izomorf cu grupul multiplicativ al numerelor reale nenule.*

Demonstrație. Notăm cu $\mathcal{H}_O = \{H_{O,k} : k \in \mathbb{R}, k \neq 0\}$ mulțimea omotetiilor de același centru O . Vom demonstra că mulțimea \mathcal{H}_O împreună cu operația de compunere, (\mathcal{H}_O, \circ) este grup abelian. Asociativitatea se verifică în mod evident, omotetiile fiind transformări ale planului. Aplicația identică a planului este omotetia $H_{O,1}$, adică $1_P = H_{O,1}$ și pentru orice $H_{O,k} \in \mathcal{H}_O$ avem relația

$$H_{O,k} \circ H_{O,1} = H_{O,1} \circ H_{O,k} = H_{O,k}.$$

Orice element din mulțimea \mathcal{H}_O este simetrizabil (inversabil). Am menționat mai sus că orice omotetie $H_{O,k}$ este bijectivă, deci este inversabilă, inversa omotetiei $H_{O,k}$

fiind omotetia $H_{O, \frac{1}{k}}$. Fie $H_{O,k}, H_{O,k'} \in \mathcal{H}_O$. Se arată imediat că are loc egalitatea

$$H_{O,k} \circ H_{O,k'} = H_{O,k'} \circ H_{O,k} = H_{O,k \cdot k'}.$$

Cum înmulțirea numerelor reale este comutativă, rezultă relația dorită, deci compunerea omotetiilor din mulțimea \mathcal{H}_O este comutativă. Obținem astfel că (\mathcal{H}_O, \circ) este grup abelian.

Fie aplicația $\Phi : \mathcal{H}_O \rightarrow \mathbb{R}^*$, care asociază unei omotetii oarecare $H_{O,k} \in \mathcal{H}_O$ numărul real k , cu $k \neq 0$, adică $\Phi(H_{O,k}) = k$, raportul omotetiei. Vom demonstra că Φ este izomorfism între grupurile (\mathcal{H}_O, \circ) și (\mathbb{R}^*, \cdot) .

Evident funcția Φ este bijectivă, deoarece fiecărui număr real $k \in \mathbb{R}, k \neq 0$ îi corespunde o omotetie unică $H_{O,k} \in \mathcal{H}_O$. În plus, are loc egalitatea

$$\Phi(H_{O,k} \circ H_{O,k'}) = \Phi(H_{O,k}) \cdot \Phi(H_{O,k'}).$$

Într-adevăr, avem

$$\Phi(H_{O,k} \circ H_{O,k'}) = \Phi(H_{O,k \cdot k'}) = k \cdot k' = \Phi(H_{O,k}) \cdot \Phi(H_{O,k'}),$$

prin urmare, rezultă că funcția $\Phi : \mathcal{H}_O \rightarrow \mathbb{R}^*$ este un izomorfism între grupurile (\mathcal{H}_O, \circ) și (\mathbb{R}^*, \cdot) . \square

Teorema 2.6.3. Fie $H_{O,k}$ și $H_{O',k'}$ două omotetii de centre O , respectiv O' și rapoarte k , respectiv k' . Atunci, compunerea $H_{O,k} \circ H_{O',k'}$ este

- o omotetie de raport $k \cdot k'$ și cu centrul pe dreapta OO' , în cazul $k \cdot k' \neq 1$;
- o translație, în cazul $k \cdot k' = 1$.

Demonstrație. Fie \mathcal{F} o configurație geometrică oarecare, care se transformă prin omotetia $H_{O,k}$ în configurația geometrică \mathcal{F}' , iar configurația geometrică \mathcal{F}' se transformă prin omotetia $H_{O',k'}$ în configurația geometrică \mathcal{F}'' . Presupunem că A', B', C' sunt omoteticele punctelor distincte și necoliniare $A, B, C \in \mathcal{F}$ prin $H_{O,k}$ și că A'', B'', C'' sunt omoteticele punctelor A', B', C' prin $H_{O',k'}$. Configurațiile geometrice \mathcal{F} și \mathcal{F}'' sunt omotetice sau congruente. Prin omotetia $H_{O,k}$ orice vector \overline{AB} se transformă într-un vector $\overline{A'B'}$ astfel încât $\overline{A'B'} = k \cdot \overline{AB}$, iar prin omotetia $H_{O',k'}$ vectorul $\overline{A'B'}$ se transformă în vectorul $\overline{A''B''}$ astfel încât $\overline{A''B''} = k' \cdot \overline{A'B'}$. Obținem astfel că $\overline{A''B''} = k' \cdot (k \cdot \overline{AB}) = kk' \cdot \overline{AB}$. Această egalitate are loc pentru orice vector \overline{AB} . Astfel, ținând seama de Teorema 2.6.1, configurațiile geometrice \mathcal{F} și \mathcal{F}'' sunt omotetice cu coeficientul de omotetie $k \cdot k'$.

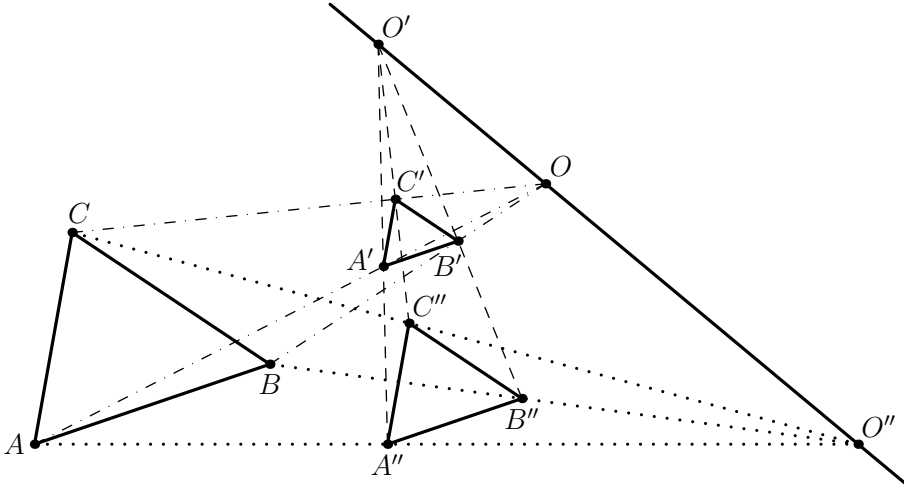


Figura 2.26

1. Dacă avem $k \cdot k' = 1$, atunci $\overline{A''B''} = \overline{AB}$ și deci în acest caz compunerea $H_{O,k} \circ H_{O',k'}$ este o translație de vector $\overline{OO'}$.
2. Să presupunem că avem $k \cdot k' \neq 1$.

Știm că o dreaptă care trece prin centrul O al omotetiei $H_{O,k}$ este invariantă în raport cu omotetia $H_{O,k}$, adică omotetica dreptei respective este dreapta însăși, deci trece prin punctul O . Cum omotetia $H_{O,k}$ păstrează coliniaritatea punctelor, rezultă că toate dreptele invariante în raport cu omotetia $H_{O,k}$ sunt dreptele care trec prin O și numai ele sunt invariante prin $H_{O,k}$. Deci, singura dreaptă invariantă în raport cu compunerea $H_{O,k} \circ H_{O',k'}$ este dreapta OO' , iar dacă $H_{O,k} \circ H_{O',k'}$ este omotetie, atunci centrul ei O'' este situat pe dreapta OO' .

În continuare vom determina poziția punctului O'' pe dreapta OO' . Avem că:

$$H_{O'',kk'}(O'') = O'' \Leftrightarrow (H_{O',k'} \circ H_{O,k})(O'') = O'' \Leftrightarrow H_{O',k'}(H_{O,k}(O'')) = O''.$$

Fie $O''' = H_{O,k}(O'')$. Din relațiile de mai sus, obținem că:

$$H_{O',k'}(O''') = O''.$$

Relația $O''' = H_{O,k}(O'')$ este echivalentă cu $\overline{OO'''} = k \cdot \overline{OO''}$.

Obținem astfel că $\overline{O'O''} = k' \cdot \overline{O'O'''} \text{ adică } \overline{O'O''} = \frac{1}{k'} \cdot \overline{O'O'''}$.

Deoarece $\overline{OO''} = \overline{OO'} + \overline{O'O''}$, pe baza relațiilor de mai sus obținem:

$$k \cdot \overline{OO''} = \overline{OO'} + \frac{1}{k'} \cdot \overline{O'O''}. \quad (2.1)$$

Cum $\overline{OO''} = \overline{OO'} + \overline{O'O''}$, folosind relația (2.1), avem succesiv:

$$\begin{aligned} k \cdot (\overline{OO'} + \overline{O'O''}) &= \overline{OO'} + \frac{1}{k'} \cdot \overline{O'O''} \Leftrightarrow \\ kk' \cdot (\overline{OO'} + \overline{O'O''}) &= k' \cdot \overline{OO'} + \overline{O'O''} \Leftrightarrow \\ kk' \cdot \overline{OO'} + kk' \cdot \overline{O'O''} &= k' \cdot \overline{OO'} + \overline{O'O''} \Leftrightarrow \\ (kk' - k') \cdot \overline{OO'} &= (1 - kk') \cdot \overline{O'O''} \Leftrightarrow \\ \overline{O'O''} &= \frac{kk' - k'}{1 - kk'} \cdot \overline{OO'} \Leftrightarrow \overline{O'O} + \overline{OO''} = \frac{kk' - k'}{1 - kk'} \cdot \overline{OO'} \Leftrightarrow \\ -\overline{OO'} + \overline{OO''} &= \frac{kk' - k'}{1 - kk'} \cdot \overline{OO'} \Leftrightarrow \overline{OO''} = \overline{OO'} + \frac{kk' - k'}{1 - kk'} \overline{OO'} \Leftrightarrow \\ \overline{OO''} &= (1 + \frac{kk' - k'}{1 - kk'}) \cdot \overline{OO'} \Leftrightarrow \overline{OO''} = \frac{1 - k'}{1 - kk'} \cdot \overline{OO'}, \end{aligned}$$

adică O'' este un punct fix pe dreapta OO' . Evident, avem următoarele situații :

1. Dacă $0 < \frac{1-k'}{1-kk'} < 1$, atunci punctul O'' este situat între punctele O și O' .
2. Dacă $\frac{1-k'}{1-kk'} > 1$, atunci punctul O' este situat între punctele O și O'' .

În cazul $k \cdot k' \neq 1$, pentru a construi centrul omotetiei $H_{O',k'} \circ H_{O,k}$ este suficient să cunoaștem pozițiile centrelor O și O' ale omotetiilor $H_{O,k}$ și $H_{O',k'}$, precum și pozițiile a trei puncte M , $M' = H_{O,k}(M)$, $M'' = H_{O',k'}(M')$. Prin urmare avem relațiile $\overline{OM'} = k \cdot \overline{OM}$ și $\overline{O'M''} = k' \cdot \overline{O'M'}$.

Considerăm cazul $k, k' > 1$. Atunci, $OM' = k \cdot OM$ și $O'M'' = k' \cdot O'M'$. Fie $\{X\} = MM'' \cap OO'$ și $Y \in OO'$ astfel încât $M'Y \parallel M''X$. Atunci, conform teoremei lui Thales, avem

$$\frac{O'Y}{O'X} = \frac{O'M'}{O'M''} = \frac{O'M'}{k' \cdot O'M'} = \frac{1}{k'} \Rightarrow O'Y = \frac{O'X}{k'} \quad (2.2)$$

și

$$\frac{OX}{OY} = \frac{OM}{OM'} = \frac{OM}{k \cdot OM} = \frac{1}{k} \Rightarrow OY = k \cdot OX \quad (2.3)$$

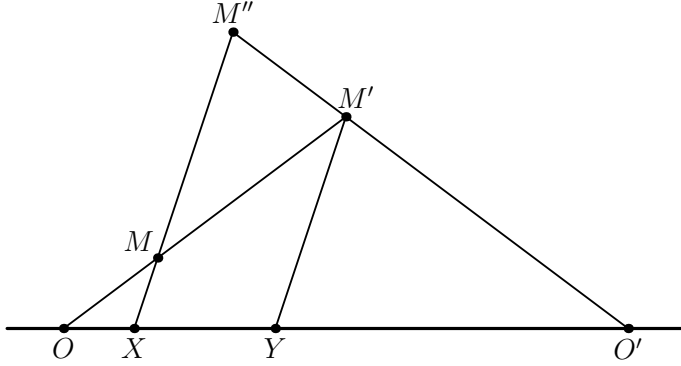


Figura 2.27

Cum $X, Y \in OO'$ rezultă $OO' = OX + XO' = OY + YO'$. Folosind și relațiile (2.2) și (2.3) obținem

$$\begin{aligned} OX + O'X &= k \cdot OX + \frac{O'X}{k'} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{k'} - 1\right) \cdot O'X = (1 - k) \cdot OX \Leftrightarrow \\ (1 - k') \cdot O'X &= (1 - k) \cdot k' \cdot OX \Leftrightarrow \frac{OX}{O'X} = \frac{k' - 1}{k'(k - 1)}, \end{aligned}$$

deci X este un punct fix pe axa de omotetrie. De asemenea, avem că

$$\frac{XM''}{XM} = \frac{XM''}{YM'} \cdot \frac{YM'}{XM} = \frac{M''O'}{M'O'} \cdot \frac{M'O}{MO} = \frac{k' \cdot O'M'}{O'M'} \cdot \frac{k \cdot OM}{OM} = kk',$$

prin urmare X este centrul omotetiei $H_{O',k'} \circ H_{O,k}$. □

2.6.2 Omotetiile configurațiilor geometrice elementare

Următoarele proprietăți geometrice simple sunt deosebit de utile în aplicații concrete.

Propoziția 2.6.4. *Omotetica unei drepte care nu trece prin centrul omotetiei este o dreaptă paralelă cu ea, adică omotetia pastrează paralelismul. Formal, dacă avem dreapta $d \subset \mathcal{P}$ și $O \notin d$, atunci $H_{O,k}(d) = d', d' \parallel d$.*

Demonstrație. Fie $O \in \mathcal{P}$. Considerăm omotetia al cărui centru este punctul O și având raportul $k > 0$ (analog se face demonstrația și pentru $k < 0$). Vom arăta

că punctele unei drepte d au transformatele prin aceasta omotetie în puncte situate pe o dreaptă d' , cu $d' \parallel d$. Fie A și C două puncte fixate pe dreapta d și $B \in d$ un

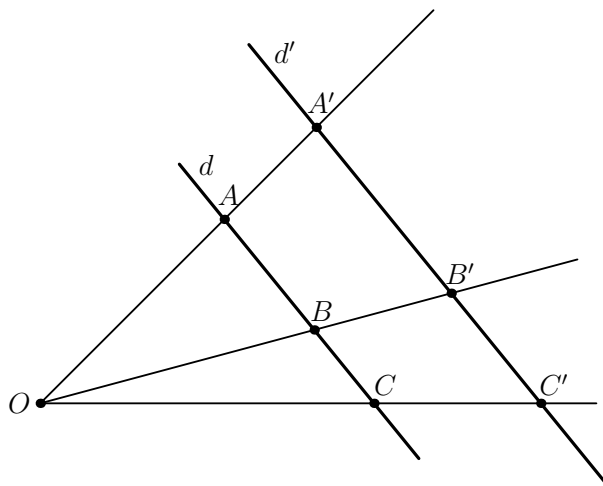


Figura 2.28

punct variabil. Fie A' , B' , C' transformatele acestora prin omotetia considerată, adică, $A' = H_{O,k}(A)$, $B' = H_{O,k}(B)$, $C' = H_{O,k}(C)$. Avem, că în propoziția 2.1.15, $A'B' \parallel AB = d$, $C'B' \parallel CB = d$, $A'C' \parallel AC = d$. Din unicitatea paralelei duse printr-un punct la dreapta dată d , rezultă că $B' = H_{O,k}(B)$ aparține dreptei $d' = A'C'$. Deoarece $OA' = k \cdot OA$, $OB' = k \cdot OB$, $OC' = k \cdot OC$, avem că $\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{OC'}{OC}$. De aici rezultă că dreptele $A'B'$ și $A'C'$ sunt paralele cu d , deci coincid. Punctele A' , B' , C' se află pe o dreaptă d' paralela cu d . \square

Observația 2.6.5. În cazul în care dreapta d trece prin centrul omotetiei, atunci ea este invariantă la omotetie.

Propoziția 2.6.6. Omoteticul unui segment este un segment paralel cu el. Formal, are loc relația $H_{O,k}([AB]) = [A'B']$, unde $A'B' \parallel AB$ și avem $|A'B'| = k \cdot |AB|$.

Demonstrație. Într-adevar, $OM' = |k| \cdot OM$ și $ON' = |k| \cdot ON$. Scăzând membru cu membru aceste relații obținem: $OM' - ON' = |k| \cdot (OM - ON)$, adică $M'N' = |k| \cdot MN$, ceea ce înseamnă că $MN \parallel M'N'$. Fie $O, M, N \in \mathcal{P}$ și $k \in \mathbb{R}, k \neq 0$. Considerăm omotetia $H_{O,k}$ și fie $M' = H_{O,k}(M)$ și $N' = H_{O,k}(N)$. Atunci, $|M'N'| = |k| \cdot |MN|$ și $MN \parallel M'N'$.

Fie X un punct pe segmentul $[MN]$ și fie $X' = H_{O,k}(X)$. Atunci $|OX'| = |k| \cdot |OX|$, și avem:

$$|M'X'| + |X'N'| = |k| \cdot |MX| + |k| \cdot |XN| = |k| \cdot (|MX| + |XN|)$$

Cum $X \in [MN]$, rezultă că $|MX| + |XN| = |MN|$. Atunci, din ultimele două relații obținem:

$$|M'X'| + |X'N'| = |k| \cdot |MN| = |M'N'|,$$

adică punctul X' este pe segmentul $[M'N']$ și, deci, omoteticul segmentului $[MN]$ este inclus în segmentul $[M'N']$, $H_{O,k}([MN]) \subseteq [M'N']$. Ținând cont de bijectivitatea omotetiei, rezultă că orice punct al segmentului $[M'N']$ este imaginea unui punct al segmentului $[MN]$, deci avem și incluziunea inversă. \square

Propoziția 2.6.7. *Omoteticul unui cerc de rază r este un cerc de rază $|k| \cdot r$, unde k este raportul omotetiei.*

Demonstrație. Considerăm un cerc C de centru M și rază r și N un punct oarecare pe acest cerc, deci $MN = r$. Fie O un punct oarecare din plan și $H_{O,k}$ omotetia de centru O și raport k . Fie $M' = H_{O,k}(M)$ și $N' = H_{O,k}(N)$. Atunci, $OM' = |k| \cdot OM$ și O ,

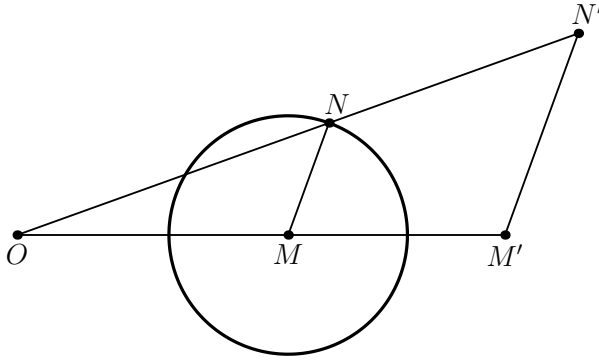


Figura 2.29

M, M' sunt coliniare. Prin urmare punctul M' este un punct fixat în plan (nu depinde de poziția punctului N). De asemenea, $H_{O,k}([MN]) = M'N'$, unde $M'N' \parallel MN$ și $|M'N'| = |k| \cdot |MN|$. Rezultă că $|M'N'| = |k| \cdot |MN| = |k| \cdot r$. În consecință,

punctul $N' = H_{O,k}(N)$ se află la distanța constantă de punctul M' , deci atunci când punctul N parcurge cercul C , omoteticul N' parcurge un cerc de centru M' și raza $|k| \cdot r$. \square

Observația 2.6.8. 1) Centrele a două cercuri omotetice se corespund prin omotetia considerată.

2) Fiind date două cercuri neegale și neconcentrice, există exact două omotetii (una directă, cealaltă inversă) care să ducă un cerc în celalalt. Dacă cercurile sunt concentrice, atunci avem o singură omotetie. În plus, centrele celor două omotetii sunt

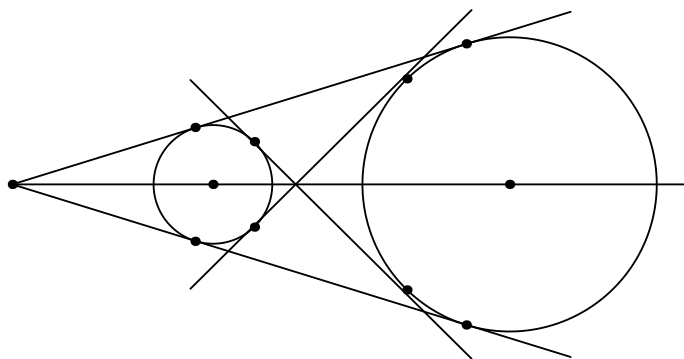


Figura 2.30

în punctele care împart segmentul ce unește centrele cercurilor într-un raport egal cu raportul razelor. Dacă cercurile sunt exterioare, atunci omotetia directă are centrul în punctul de intersecție al tangențelor exterioare, iar omotetia inversă are centrul în punctul de intersecție al tangențelor interioare.

2.6.3 Demonstrarea unor teoreme clasice folosind omotetia

Deoarece omotetia concentrează proprietăți de asemănare și relații cu rapoarte și unghiuri, utilizarea ei poate simplifica substanțial unele demonstrații sau rezolvări de probleme.

Aplicația 2.6.9. (dreapta Euler a unui triunghi) În orice triunghi ABC , punctele O, G, H sunt coliniare și avem $OH = 3 \cdot OG$.

Considerăm A', B', C' mijloacele laturilor $[BC], [CA]$, respectiv $[AB]$, și A_1, B_1, C_1 picioarele înălțimilor din A, B, C .

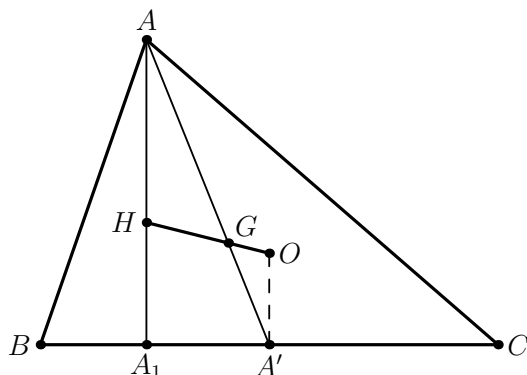


Figura 2.31

Considerăm omotetia $H_{G,-2}$ și avem $A' \rightarrow A$. În plus, dreapta OA' se transformă în AA_1 și dreapta OB' se transformă în BB_1 . Prin urmare, O se transformă în H , deci punctele O, G, H sunt coliniare.

Aplicația 2.6.10. (cercul Euler al unui triunghi) Mijloacele laturilor, picioarele înălțimilor și mijloacele segmentelor determinate de ortocentru și vârfuri sunt nouă puncte situate pe un cerc, numit *cercul lui Euler*.

Fie A', B', C' mijloacele laturilor, A_1, B_1, C_1 picioarele înălțimilor și A_2, B_2, C_2 mijloacele segmentelor $[AH], [BH], [CH]$ (punctele euleriene) ale triunghiului ABC . Fie A_3, B_3, C_3 intersecțiile înălțimilor cu cercul circumscris triunghiului. Se știe că punctele A_3, B_3, C_3 sunt simetricele lui H față de A_1, B_1 , respectiv C_1 .

Considerăm omotetia $H_{H,\frac{1}{2}}$. Avem următoarele transformări de puncte $A_3 \rightarrow A_1$, $A'' \rightarrow A'$, $A \rightarrow A_2$, unde A'', B'', C'' sunt intersecțiile dreptelor HA', HB', HC' cu cercul circumscris. Aceste puncte sunt simetricele lui H față de A', B' , respectiv C' . Deoarece cercul circumscris se transformă într-un cerc, rezultă că cele nouă puncte sunt conciclice. Mai mult, avem $O \rightarrow O_9$ și raza cercului lui Euler este $\frac{R}{2}$.

2.6.4 Omotetia spiralată

Numim *omotetie spiralată* transformarea geometrică obținută prin compunerea dintre o omotetie și o rotație de același centru.

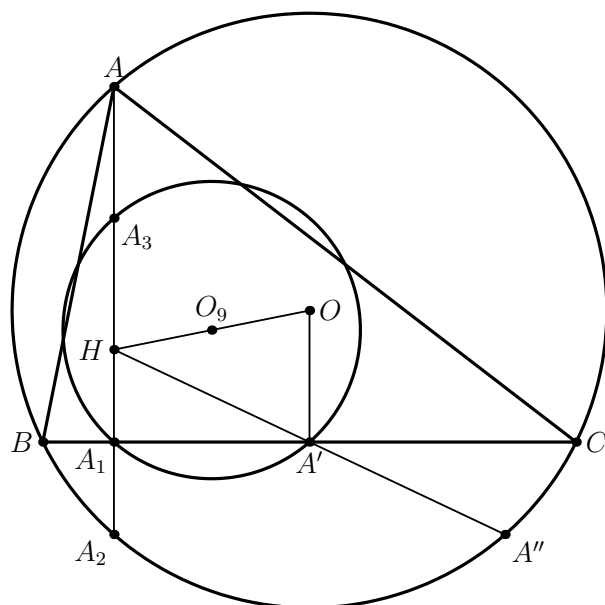


Figura 2.32

Observația 2.6.11. 1) Elementele care caracterizează omotetia spiralată sunt: O - centrul comun al omotetiei și rotației, k - raportul omotetiei și t - unghiul de rotație.

2) Compunerea elementelor omotetiei spiralate este comutativă. Atât omotetia, cât și rotația sunt cazuri particulare ale omotetiei spiralate. Pentru omotetie, unghiul de rotație este 0. Pentru rotație, raportul omotetiei este 1.

3) Raportul omotetiei spiralate poate fi pozitiv sau negativ, ca și în cazul omotetiei simple. Fără a restrânge generalitatea, vom considera în cele ce urmează că raportul omotetiei spiralate este pozitiv.

4) Omotetia spiralată este determinată de trei puncte necoliniare și de imaginile acestora.

5) Există numai două omotetii spiralate (una directă și una inversă) care duc o pereche de puncte A și B din planul euclidian în altă pereche de puncte A' , B' (unde $A \neq B$, $A' \neq B'$, iar A' și B' sunt imaginile punctelor A și B prin omotetia spiralată).

Prezentăm în continuare principalele proprietăți ale omotetiei spiralate.

1. Omotetia spiralată are un singur punct fix, anume centrul comun al omotetiei și

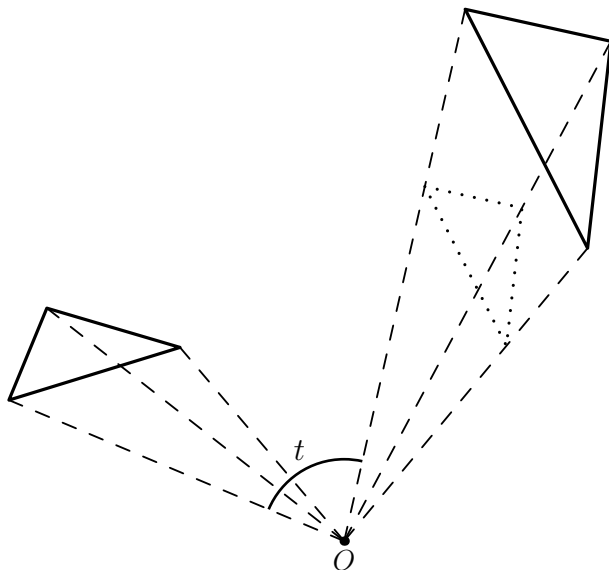


Figura 2.33

rotației.

2. Omotetia spiralată conservă orientarea poligoanelor, adică dacă un poligon este parcurs în sensul acelor de ceasornic, atunci și imaginea lui prin omotetia spiralată va fi, de asemenea, parcursă în sensul acelor de ceasornic
3. Omotetia spiralată conservă unghiurile.
4. Omotetia spiralată transformă drepte paralele în drepte paralele.
5. Omotetia spiralată transformă un segment într-un segment.
6. Omotetia spiralată transformă un poligon într-un poligon asemenea cu cel dat.
7. Omotetia spiralată transformă un cerc într-un alt cerc.
8. Compunerea a două omotetii spirale nu este, în general, comutativă. Două omotetii spirale care au același centru comută între ele.
9. Prin compunerea a două omotetii spirale obținem o omotetie spiralată (în general) sau o translație (în particular).

Propoziția 2.6.12. Fie punctele distincte A, B, A_1, B_1, P astfel încât P este punctul de intersecție al dreptelor AB și A_1B_1 . Atunci al doilea punct de intersecție al cercurilor circumscrise triunghiurilor PAA_1 și PBB_1 este centrul omotetiei spiralete care transformă punctele A și B în punctele A_1 și B_1 , iar această omotetie spiralată este unică.

Demonstrație. Notăm cu C_1 cercul circumscris triunghiului PAA_1 și cu C_2 cercul circumscris triunghiului PBB_1 . Fie O al doilea punct de intersecție al cercurilor

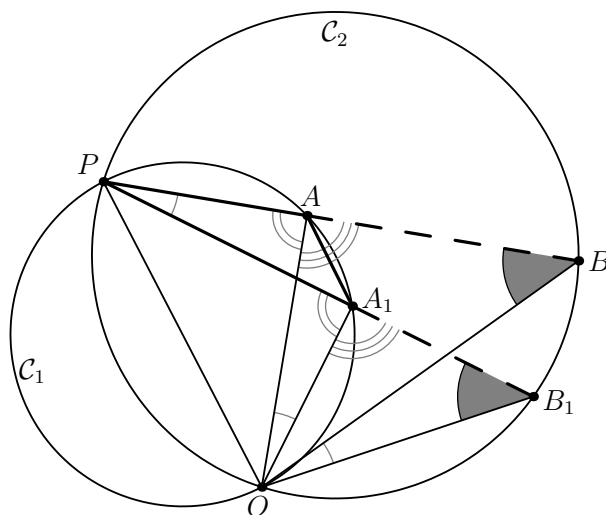


Figura 2.34

circumscrise triunghiurilor PAA_1 și PBB_1 . Atunci, $O \in C_1$ și $O \in C_2$. Cum C_1 este cercul circumscris triunghiului PAA_1 , rezultă că $P, A, A_1 \in C_1$. Rezultă astfel că punctele O, P, A, A_1 sunt conciclice, deci patrulaterul $OPAA_1$ este inscriptibil. Atunci,

$$m(\widehat{PA_1A}) = m(\widehat{AOA_1}) = m\left(\frac{\widehat{AA_1}}{2}\right)$$

și

$$m(\widehat{PAO}) = m(\widehat{PA_1O}) = m\left(\frac{\widehat{PO}}{2}\right).$$

Cum $\{P\} = AP \cap A_1B_1$, rezultă că $A \in PB$, adică $m(\widehat{PAB}) = 180^\circ$ ceea ce este echivalent cu $m(\widehat{PAO}) + m(\widehat{OAB}) = 180^\circ$.

Analog se arată că $m(\widehat{PA_1O}) + m(\widehat{OA_1B_1}) = 180^\circ$ (7). Din aceste relații rezultă că $\widehat{PA_1O} = \widehat{OA_1B_1}$. Cum \mathcal{C}_2 este cercul circumscris triunghiului PBB_1 , rezultă că $P, B, B_1 \in \mathcal{C}_2$. Rezultă astfel că punctele O, P, B, B_1 sunt conciclice, deci patrulaterul $OPBB_1$ este inscriptibil. Atunci,

$$m(\widehat{BPB_1}) = m(\widehat{BOB_1}) = m(\frac{\widehat{BB_1}}{2})$$

și

$$m(\widehat{PBO}) = m(\widehat{PB_1O}) = m(\frac{\widehat{PO}}{2}).$$

Cum $A \in PB$ și $A_1 \in PB_1$, obținem că $m(\widehat{ABO}) = m(\widehat{AB_1O})$. Prin urmare triunghiurile OAB și OA_1B_1 sunt asemenea, deci sunt omotetice, adică există o omotetie de centru O între cele două triunghiuri. Cum $A \in PB$ și $A_1 \in PB_1$, rezultă că $m(\widehat{BPB_1}) = m(\widehat{AOA_1})$. De aici obținem că are loc relația $m(\widehat{AOA_1}) = m(\widehat{BOB_1})$, deci segmentul $[A'B']$ se obține prin rotația de centru O a segmentului $[AB]$ cu unghiul $\widehat{AOA_1} = \widehat{BOB_1}$. Prin urmare, punctul O este centrul omotetiei spiralate care transformă segmentul $[AB]$ în segmentul $[A'B']$.

Fie O centrul omotetiei spiralate care transformă segmentul $[AB]$ în segmentul $[A'B']$. Atunci, triunghiurile OAB și OA_1B_1 sunt omotetice, deci sunt asemenea. De aici rezultă relațiile $m(\widehat{ABO}) = m(\widehat{AB_1O})$ și $m(\widehat{OAB}) = m(\widehat{OA_1B_1})$. Obținem astfel că $m(\widehat{PAO}) = m(\widehat{PA_1O})$, adică patrulaterul $OPAA_1$ este inscriptibil, deci $O \in \mathcal{C}_1$. Combinând aceste proprietăți cu faptul că $\{P\} = AP \cap A_1B_1$, rezultă că patrulaterul $OPBB_1$ este inscriptibil, deci $O \in \mathcal{C}_2$. Prin urmare, punctul O este al doilea punct de intersecție al cercurilor circumscrise triunghiurilor PAA_1 și PBB_1 , și concluzia rezultă. \square

Observația 2.6.13. Considerăm cazul în care cercurile \mathcal{C}_1 și \mathcal{C}_2 sunt tangente (adică au în comun doar punctul P). Atunci, punctele A, B și A', B' sunt omotetice prin omotetia de centru P și raport $k = 1$, deci segmentele $[AB]$ și $[A'B']$ se corespund printr-o omotetie spiralată cu centrul în P .

Propoziția 2.6.14. Centrul omotetiei spiralate care duce segmentul $[AB]$ în segmentul $[BC]$ este al doilea punct de intersecție al cercului care trece prin punctul A și este tangent dreptei BC în B cu cercul care trece prin punctul C și este tangent dreptei AB în B .

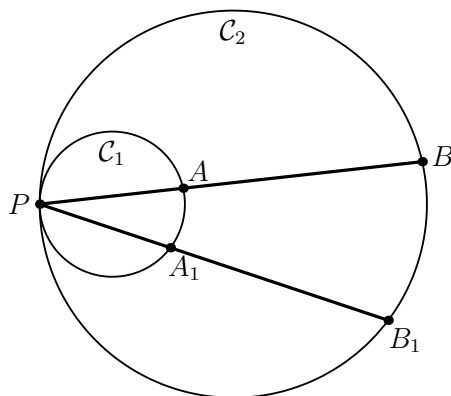


Figura 2.35

Demonstrație. Notăm cu \mathcal{C}_1 cercul care trece prin punctul A și este tangent dreptei BC în B și cu \mathcal{C}_2 cercul care trece prin punctul C și este tangent dreptei AB în B . Fie O al doilea punct de intersecție al cercurilor \mathcal{C}_1 și \mathcal{C}_2 . Atunci avem $O \in \mathcal{C}_1$ și $O \in \mathcal{C}_2$. Din ipoteză avem că punctele $A, B \in \mathcal{C}_1$ și atunci, rezultă că punctele A, B, O sunt conciclice. Fie E un punct oarecare de pe arcul \widehat{OB} al cercului \mathcal{C}_1 și F un punct arbitrar de pe arcul \widehat{OB} al cercului \mathcal{C}_2 . Obținem astfel relația

$$m(\widehat{OAB}) = m\left(\frac{\widehat{OEB}}{2}\right).$$

Cum dreapta BC este tangentă la cercul \mathcal{C}_1 în punctul B , rezultă că

$$m(\widehat{OBC}) = m\left(\frac{\widehat{OEB}}{2}\right),$$

prin urmare avem $m(\widehat{OAB}) = m(\widehat{OBC})$. Analog se demonstrează că avem $m(\widehat{OBA}) = m(\widehat{OCB})$.

Din relațiile de mai sus, rezultă că triunghiurile OAB și OBC sunt asemenea, deci sunt omotetice, printr-o omotetie de centru O , care duce segmentul $[AB]$ în segmentul $[BC]$. De asemenea, obținem că $m(\widehat{AOB}) = m(\widehat{BOC})$, adică $[BC]$ este imaginea lui $[AB]$ printr-o rotație de centru O și unghi \widehat{AOB} .

Prin urmare, $[BC]$ este imaginea lui $[AB]$ printr-o omotetie spiralată de centru O . Deci O este centrul omotetiei spiralate care duce segmentul $[AB]$ în segmentul

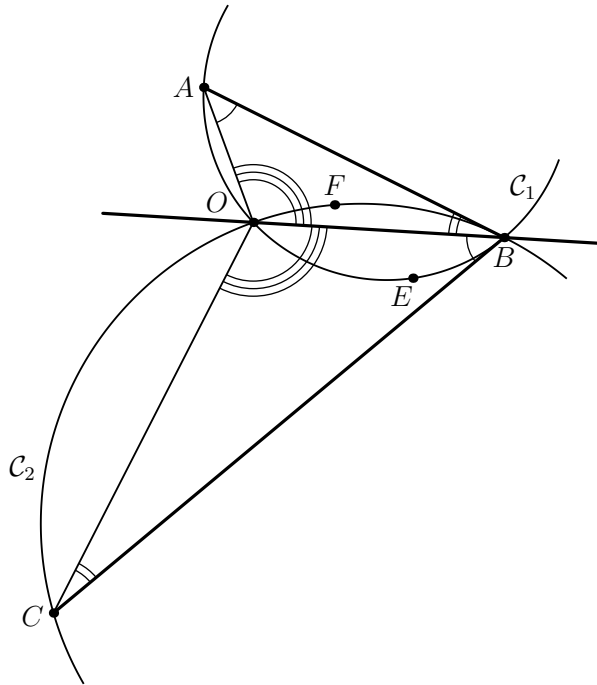


Figura 2.36

$[BC]$. Fie O centrul omotetiei spiralate care duce segmentul $[AB]$ în segmentul $[BC]$. Atunci, triunghiul OAB este omotetic cu triunghiul OBC printr-o omotetie de centru O și $m(\widehat{AOB}) = m(\widehat{BOC})$. Rezultă astfel că triunghiurile OAB și OBC sunt asemenea și avem relațiile $m(\widehat{OAB}) = m(\widehat{OBC})$ și $m(\widehat{OBA}) = m(\widehat{OCB})$. Din ipoteză avem că dreapta BC este tangentă în punctul B la cercul care trece prin A , adică la C_1 , prin urmare punctul O aparține cercului C_1 . Tot din ipoteza avem că cercul care trece prin punctul C este tangent dreptei AB în B . Rezultă astfel că punctul O aparține cercului C_2 . În concluzie, $O \in C_1 \cap C_2$, ceea ce trebuia demonstrat. \square

Propoziția 2.6.15. Centrul omotetiei spiralate care transformă segmentul $[AB]$ în segmentul $[A_1B_1]$ coincide cu centrul omotetiei spiralate care transformă segmentul $[AA_1]$ în segmentul $[BB_1]$.

Demonstrație. Fie O centrul omotetiei spiralate care duce segmentul $[AB]$ în segmentul $[A_1B_1]$. Atunci, triunghiurile OAB și OA_1B_1 sunt omotetice, deci sunt asemenea.

De aici rezultă că $m(\widehat{AOB}) = m(\widehat{A_1OB_1})$ și

$$\frac{OA}{OA_1} = \frac{OB}{OB_1} \Leftrightarrow \frac{OA}{OB} = \frac{OA_1}{OB_1}.$$

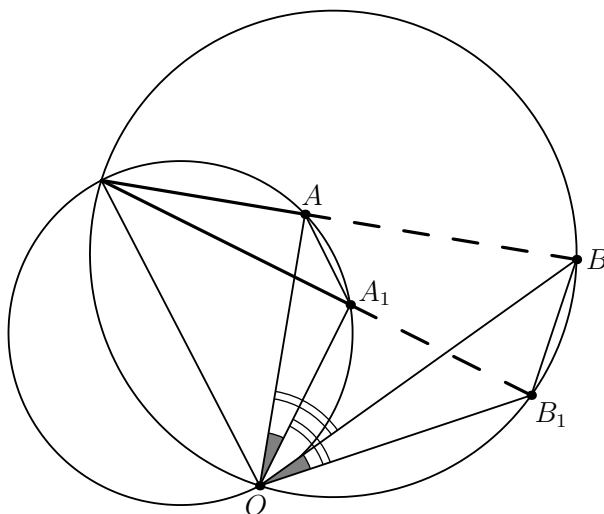


Figura 2.37

Dar avem $m(\widehat{AOB}) = m(\widehat{AOA_1}) + m(\widehat{A_1OB})$ și $m(\widehat{A_1OB_1}) = m(\widehat{A_1OB}) + m(\widehat{BOB_1})$. Din aceste relații, rezultă $m(\widehat{AOA_1}) = m(\widehat{BOB_1})$. Obținem astfel că triunghiurile OAA_1 și OBB_1 sunt asemenea, deci ele sunt omotetice printr-o omotetie de centru O . De asemenea, dreapta OA trece în dreapta OB printr-o rotație de centru O și unghi \widehat{AOB} , iar dreapta OA_1 trece în dreapta OB_1 printr-o rotație de centru O și unghi $\widehat{A_1OB_1}$, care este congruent cu \widehat{AOB} , deci triunghiul OAA_1 se rotește în jurul punctului O cu unghiul $\widehat{AOB} = \widehat{A_1OB_1}$. Din aceste observații, rezultă că O este și centrul omotetiei spiralate care transformă segmentul $[AA_1]$ în segmentul $[BB_1]$, ceea ce trebuia demonstrat. \square

2.6.5 Aplicații ale omotetiei spiralate

Aplicația 2.6.16. (punctul lui Miquel al unui patrulater) Patru drepte secante formează un patrulater complet. Atunci cercurile circumscrise celor patru triunghiuri formate au un punct comun, numit punctul lui Miquel al patrulaterului.

Demonstrație. Notăm cu C punctul de intersecție al dreptelor AB , DE și cu F punctul de intersecție al dreptelor AE , DB .

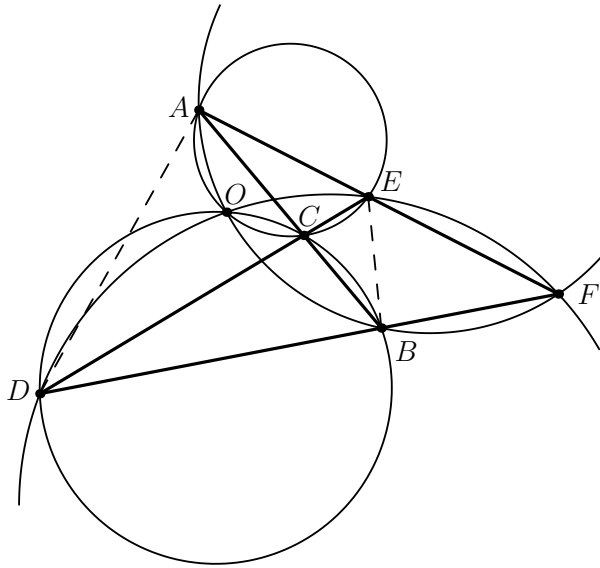


Figura 2.38

Aplicând Propoziția 2.6.12, centrul omotetiei spirale care duce segmentul $[AB]$ în segmentul $[DE]$, este al doilea punct de intersecție al cercurilor circumscrise triunghiurilor CAE și CDB . Analog obținem că, centrul omotetiei spirale care duce segmentul $[AE]$ în segmentul $[DB]$ este al doilea punct de intersecție al cercurilor circumscrise triunghiurilor FAB și FDE . Conform Propoziției 2.6.15, centrul omotetiei spirale care transformă segmentul $[AB]$ în segmentul $[DE]$ coincide cu centrul omotetiei spirale care transformă segmentul $[AE]$ în segmentul $[DE]$. Din aceste observații, rezultă că cele patru cercuri se intersectează într-un punct. \square

Aplicația 2.6.17. Fie două cercuri \mathcal{C}_1 și \mathcal{C}_2 care se intersectează în punctele M și N . Prin M ducem o dreaptă d care mai taie cercurile \mathcal{C}_1 și \mathcal{C}_2 în A și B . Pe segmentul $[AB]$ construim triunghiul ABC asemenea cu un triunghi dat. Considerând dreapta d mobilă, sa se găsească locul geometric al punctului C .

Demonstrație. Fie E un punct pe arcul \widehat{MN} al cercului \mathcal{C}_1 și F un punct pe arcul \widehat{MN} al cercului \mathcal{C}_2 . Cum $M \in [AB]$ avem relația $m(\widehat{NAB}) = m(\widehat{NAM}) = m(\frac{\widehat{MEN}}{2})$.

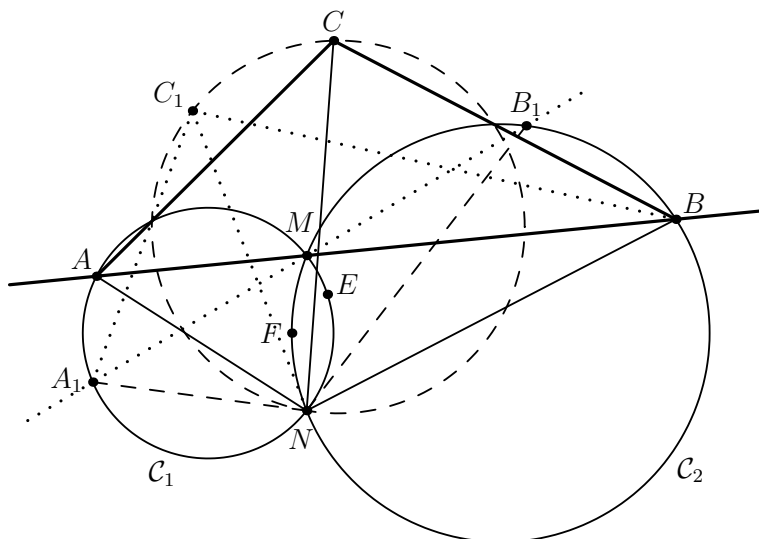


Figura 2.39

Analog, deoarece $M \in [AB]$, obținem $m(\widehat{NBA}) = m(\widehat{NBM}) = m(\frac{\widehat{MFN}}{2})$. Cum cercurile secante \mathcal{C}_1 și \mathcal{C}_2 sunt fixe, rezultă că și punctele lor de intersecție sunt fixe, deci arcele \widehat{MEN} și \widehat{MFN} sunt fixe, adică avem $m(\frac{\widehat{MEN}}{2}) = \text{constant}$ și $m(\frac{\widehat{MFN}}{2}) = \text{constant}$.

Rezultă astfel că $m(\widehat{NAM}) = \text{constant}$ și $m(\widehat{NBA}) = \text{constant}$. În triunghiul ANB , avem că $m(\widehat{ANB}) + m(\widehat{NAB}) + m(\widehat{NBA}) = 180^\circ$, de unde rezultă că $m(\widehat{ANB}) = 180^\circ - m(\widehat{NAB}) - m(\widehat{NBA})$. Din aceste relații, rezultă că $\widehat{ANB} = \text{constant}$, deci nu depinde de dreapta d .

Dacă rotim dreapta d cu un unghi oarecare, aceasta va intersecta cercurile C_1 și C_2 în două puncte arbitrare, A_1 și B_1 . Ca și mai sus, se arată că $m(\widehat{NA_1B_1}) = m(\widehat{NAB}) = m(\frac{\widehat{MEN}}{2}) = \text{constant}$ și că $m(\widehat{NB_1A_1}) = m(\widehat{NBA}) = m(\frac{\widehat{MFN}}{2}) = \text{constant}$, deci $\widehat{A_1NB_1} = \widehat{ANB} = \text{constant}$. De aici rezultă că triunghiurile ANB și A_1NB_1 sunt asemenea și că nu depind de dreapta d . Cum punctele A_1 și B_1 sunt arbitrare, rezultă că toate triunghiurile ANB sunt asemenea și nu depind de dreapta d , deci raportul NA/AB nu depinde de poziția dreptei d . Cum triunghiul ABC este asemenea cu un triunghi dat, înseamnă că măsurile unghiurilor $m(\widehat{BAC})$, $m(\widehat{ABC})$,

$m(\widehat{ACB})$ sunt constante și nu depind de dreapta d și raportul AC/AB este constant. Avem că $m(\widehat{NAC}) = m(\widehat{NAB}) + m(\widehat{BAC})$ și deci rezultă că $m(\widehat{NAC}) = \text{constant}$, deci nu depinde de dreapta d . Dar, $\frac{NA}{AC} = \frac{NA}{AB} \cdot \frac{AB}{AC} =$ și deci rezultă că raportul $\frac{NA}{AC} = \text{constant}$ și prin urmare nu depinde de poziția dreptei d . Obținem astfel că toate triunghiurile ANC sunt asemenea. Prin urmare unghiul \widehat{ANC} nu depinde de dreapta d , iar raportul NC/NA este constant. În plus, rezultă că toate triunghiurile ANC sunt omotetice, printr-o omotetie de centru N și raport $\frac{NA}{AC}$. Din relațiile de mai sus, rezultă că punctul C se obține din punctul A prin omotetia spiralată de centru N , unghi \widehat{ANC} și raport NC/NA .

Cum punctul A este mobil pe cercul \mathcal{C}_1 și o omotetie spiralată transformă un cerc tot într-un cerc, rezultă că locul geometric al punctelor C este un cerc. \square

Aplicația 2.6.18. Fie pătratul $ABCD$ și punctele P și Q pe laturile AB și BC astfel încât $BP = BQ$. Fie H piciorul perpendicularei duse din B pe PC . Arătați că $\widehat{DHQ} = 90^\circ$.

Demonstrație. Deoarece $BH \perp PC$, rezultă $m(\widehat{BHP}) = m(\widehat{CHB}) = 90^\circ$, prin urmare avem $m(\widehat{HCB}) + m(\widehat{HBC}) = 90^\circ$. Din ipoteza că $ABCD$ este pătrat rezultă că $m(\widehat{ABC}) = 90^\circ$. Din faptul că $P \in [AB]$ și $Q \in [BC]$ obținem că $m(\widehat{PBC}) = 90^\circ$, deci avem $m(\widehat{HBP}) + m(\widehat{HBC}) = 90^\circ$ și prin urmare, $m(\widehat{HCB}) = m(\widehat{HBP})$.

Din aceste relații, rezultă că triunghiurile BHC și PHB sunt asemenea, deci omotetice, printr-o omotetie de centru H și raport PB/BC . Rezultă astfel că triunghiul BHC se transformă în triunghiul PHB printr-o omotetie spiralată de centru H , raport PB/BC și unghi de 90° .

Prin aceasta omotetie spiralată, punctul B se transformă în punctul P și punctul C se transformă în punctul B . Din ipoteză avem că $[PB] \equiv [BQ]$ și că $ABCD$ este pătrat, deci obținem $[BC] \equiv [CD]$. Prin urmare, triunghiul BHC se transformă în triunghiul PHB prin omotetia spiralată de centru H , raport BQ/CD și unghi de 90° . Din aceste relații rezultă că punctul D se transformă în punctul Q prin omotetia spiralată de centru H , raport BQ/CD și unghi de 90° , adică avem $m(\widehat{DHQ}) = 90^\circ$, ceea ce trebuia demonstrat. \square

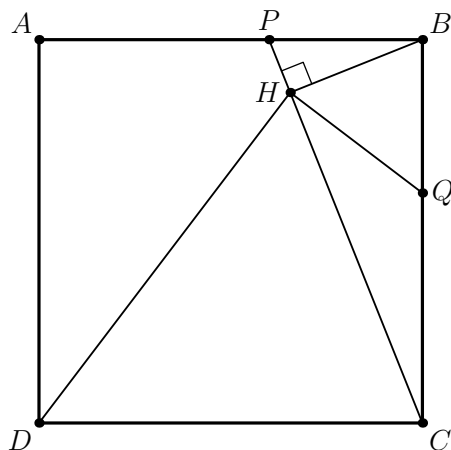


Figura 2.40

2.7 Inversiunea

A doua transformare neizometrică a planului euclidian cu numeroase aplicații, este inversiunea.

Considerăm punctul $O \in \mathcal{P}$ fixat și numărul real $r > 0$.

Aplicația $I_{O,r} : \mathcal{P} - \{O\} \rightarrow \mathcal{P}$, $I_{O,r}(X) = X'$, unde au loc următoarele proprietăți geometrice:

- 1) $X' \in (OX)$;
- 2) este verificată relația $OX \cdot OX' = r^2$,

se numește *inversiune de pol O și putere r* .

Punctul X' este inversul punctului X prin inversiunea $I_{O,r}$.

Fie inversiunea $I_{O,r}$. Atunci au loc următoarele proprietăți:

- 1) $I_{O,r} \circ I_{O,r} = 1_{\mathcal{P} - \{O\}}$ (inversiunea este o transformare involutivă a planului).
- 2) Dacă $d \subset \mathcal{P}$ și $O \in d$, atunci $I_{O,r}(d) = d$, adică dreptele care trec prin pol sunt invariante prin inversiune.

3) Dacă dreapta $d \subset \mathcal{P}$ și $O \notin d$, atunci ea se transformă într-un cerc care trece prin O , care are diametrul prin O perpendicular pe d .

Demonstrație. Considerăm punctele $X, Y \in d$ și $X' = I_{O,r}(X)$, $Y' = I_{O,r}(Y)$, inversele acestora.

Din relațiile $OX \cdot OX' = r^2$, $OY \cdot OY' = r^2$, rezultă $OX \cdot OX' = OY \cdot OY'$, deci

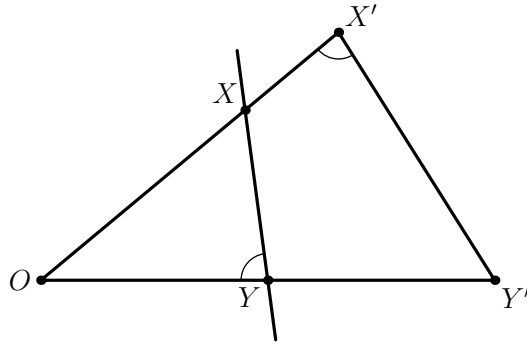


Figura 2.41

avem

$$\Rightarrow \frac{OX}{OY'} = \frac{OY}{OX'}.$$

Prin urmare $\triangle OXY \sim \triangle OY'X'$ (triunghiurile sunt invers asemenea).

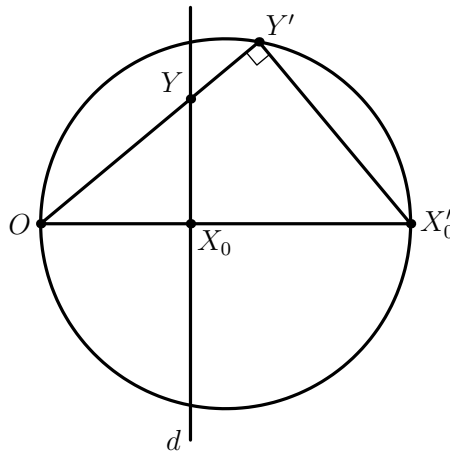


Figura 2.42

Ducem $OX_0 \perp d$, $X_0 \in d$ și considerăm X'_0 inversul lui X_0 , adică $X'_0 = I_{O,r}(X_0)$. Punctul X'_0 este fix și triunghiul $OY'X'_0$ este dreptunghic în Y' implică faptul că Y' este situat pe cercul de diametru $[OX'_0]$.

4) Orice cerc \mathcal{C} care trece prin polul O se transformă prin inversiune într-o dreaptă paralelă cu tangenta în O la \mathcal{C} .

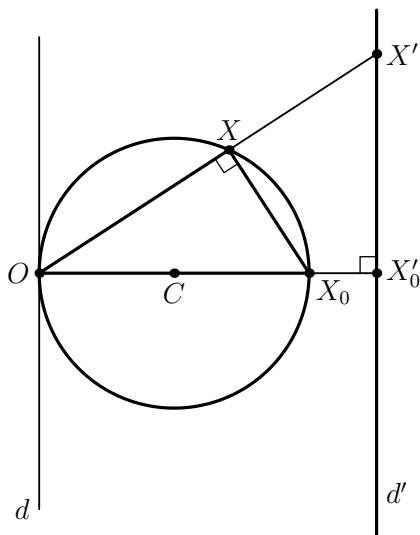


Figura 2.43

Fie X_0 punctul diametral opus lui O și X'_0 inversul lui X_0 . Fie $X \in \mathcal{C}$, $X \neq O$, $X' = I_{O,r}(X)$, rezultă că avem $X'X'_0 \perp OX'_0$. Rezultă că cercul fără pol se transformă în dreapta $d' \perp OX'_0$ în X'_0 , evident paralelă cu tangenta în O la cercul \mathcal{C} .

5) Orice cerc \mathcal{C} care nu trece prin pol se transformă într-un cerc.

Fie C centrul cercului \mathcal{C} și $OC \cap \mathcal{C} = \{A, B\}$.

Fie $A' = I_{O,r}(A)$ și $B' = I_{O,r}(B)$. Din faptul că $\widehat{AXB} \equiv \widehat{A'X'B'} \equiv 90^\circ$ și punctele A', B' sunt fixe, rezultă că punctul X' descrie cercul de diametru $[A'B']$.

6) **(Cercul de inversiune)** Există un cerc care este invariant prin inversiunea de pol O și putere r , acesta este cercul $\mathcal{C}(O, r)$. Într-adevăr, fie $X \in \mathcal{C}(O, r)$ și X' inversul său. Din relația $OX \cdot OX' = r^2$, rezultă $OX' = r$ obținem $X' = X$ și proprietatea este demonstrată.

7) **(Lungimea segmentelor)** Fie inversiunea $I_{O,r}$ și punctele A, B fixate. Considerăm inversele punctelor A și B , adică $A' = I_{O,r}(A)$, $B' = I_{O,r}(B)$.

Din relațiile

$$\frac{OA}{OB'} = \frac{OB}{OA'} = \frac{AB}{A'B'},$$

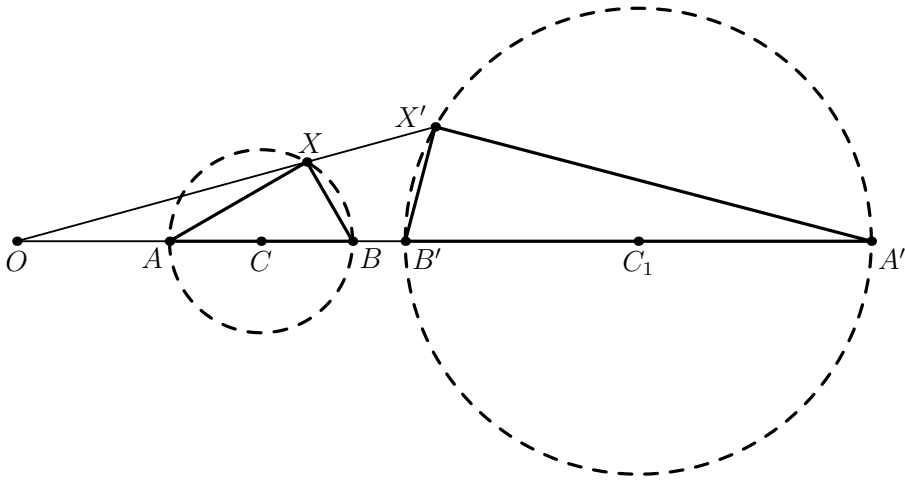


Figura 2.44

obținem

$$A'B' = \frac{OB'}{OA} \cdot AB = \frac{r^2}{OA \cdot OB} \cdot AB.$$

Prin urmare, avem

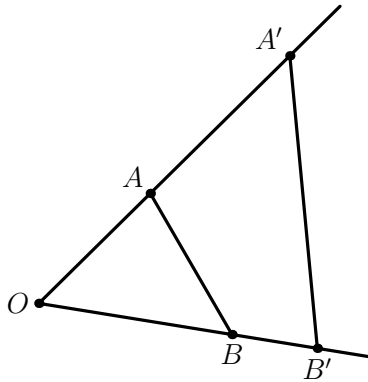


Figura 2.45

$$A'B' = \frac{r^2}{OA \cdot OB} \cdot AB.$$

8) Fie $\mathcal{C}(C, R)$, $\mathcal{C}'(C', R')$ și $O \notin \mathcal{C}$. Dacă $[AB]$ este diametru în cercul $\mathcal{C}(C, R)$ și A', B' sunt inversele punctelor A, B prin inversiunea $I_{O,r}$, din relația

$$A'B' = \frac{r^2}{OA \cdot OB} \cdot AB,$$

unde r este puterea inversiunii, rezultă

$$2R' = \frac{r^2}{OA \cdot OB} \cdot 2R,$$

adică

$$R' = \frac{r^2}{OA \cdot OB} \cdot R = \frac{r^2}{\rho_{\mathcal{C}}(O)} \cdot R,$$

deci

$$R' = \frac{r^2}{\rho_{\mathcal{C}}(O)} \cdot R.$$

Aplicația 2.7.1. (inegalitatea lui Ptolemeu) Pentru orice patru puncte distincte A, B, C, D din planul euclidian are loc inegalitatea:

$$AC \cdot BD \leq AB \cdot CD + BC \cdot AD.$$

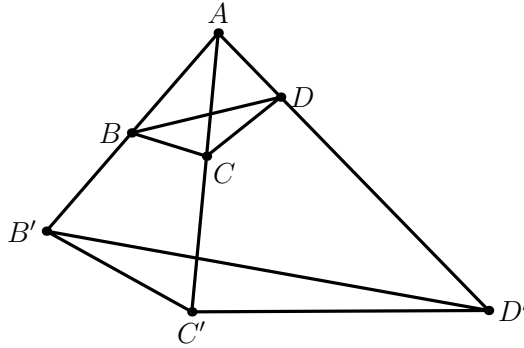


Figura 2.46

Prin inversiunea $I_{A,r}$, considerăm $B' = I_{A,r}(B)$, $C' = I_{A,r}(C)$, $D' = I_{A,r}(D)$. Atunci avem relațiile

$$B'C' = \frac{r^2}{AB \cdot AC} \cdot BC, \quad C'D' = \frac{r^2}{AC \cdot AD} \cdot CD, \quad B'D' = \frac{r^2}{AB \cdot AD} \cdot BD.$$

În triunghiul $B'C'D'$ aplicăm inegalitatea triunghiului și obținem $B'D' \leq B'C' + C'D'$. Prin urmare

$$\frac{r^2}{AB \cdot AD} \cdot BD \leq \frac{r^2}{AB \cdot AC} \cdot BC + \frac{r^2}{AC \cdot AD} \cdot CD,$$

adică

$$AC \cdot BD \leq AB \cdot CD + BC \cdot AD.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă triunghiul $B'C'D'$ este degenerat, adică punctele B', C', D' sunt coliniare. În acest caz cercul circumscris triunghiului BCD se transformă într-o dreaptă, prin urmare $A \in \mathcal{C}(\triangle BCD)$, adică patrulaterul $ABCD$ este inscriptibil.

2.8 Exerciții și probleme

1. Considerăm două cercuri \mathcal{C}_1 și \mathcal{C}_2 și dreapta l . Construim dreapta l_1 paralelă cu l , care să intersecteze cele două cercuri și să formeze coarde egale.
2. În trapezul $ABCD$, cu $BC \parallel AD$, fie M punctul de intersecție al bisectoarelor unghiurilor A și B , iar N punctul de intersecție al bisectoarelor unghiurilor C și D . Demonstrați că

$$2 \cdot MN = |AB + CD - BC - AD|.$$

3. Construim un poligon cu $m = 2n + 1$ laturi, cunoscându-se mijloacele laturilor sale.
4. Un cerc intersectează laturile BC, CA, AB ale triunghiului ABC în punctele A_1 și A_2, B_1 și B_2, C_1 și C_2 . Demonstrați că dacă perpendicularele pe laturile triunghiului în A_1, B_1 și C_1 sunt concurente, atunci și perpendicularele în A_2, B_2 și C_2 sunt concurente.
5. Fie a, b, c trei drepte paralele. Construim un triunghi echilateral ABC astfel încât $A \in a, B \in b, C \in c$.
6. Fie ABC un triunghi echilateral și M un punct în planul său.
 - a) Să se demonstreze că dacă $M \notin C(A, B, C)$, se poate forma un triunghi cu segmentele MA, MB, MC .

b) Să se arate că dacă $M \in C(A, B, C)$ atunci unul din segmentele MA, MB, MC are lungimea egală cu suma laturilor celorlalte două.

7. Fie triunghiul ABC și AD bisectoarea unghiului A , DB' și DC' perpendicularele din D pe AC și AB . Fie M un punct pe $B'C'$ și $DM \perp BC$. Demonstrați că M se află pe mediana AA_1 .
8. Fie AA_1, BB_1, CC_1 mediane în triunghiul ABC , concurente în G și P un punct arbitrar. Dacă notăm l_a dreapta paralelă cu PA_1 ce trece prin A , l_b dreapta paralelă cu PB_1 ce trece prin B și l_c dreapta paralelă cu PC_1 ce trece prin C , demonstrați:
- a) dreptele l_a, l_b, l_c sunt concurente în Q ;
- b) punctul G aparține lui PA și mai mult,

$$\frac{PG}{GQ} = \frac{1}{2}.$$

9. Fie H ortocentrul triunghiului ABC și un punct M diferit de H . Fie D, E, F proiecțiile ortogonale ale lui H pe dreptele AM, BM , respectiv CM și $\{S\} = HD \cap BC$, $\{T\} = HE \cap CA$, $\{U\} = HF \cap AB$. Să se demonstreze că punctele S, T, U sunt coliniare.
10. Se notează D, E, F punctele de tangență ale cercului înscris într-un triunghi ABC cu laturile BC, CA respectiv AB și cu X, Y, Z mijloacele segmentelor EF, FD și DE . Să se demonstreze că centrele cercurilor ABC, XYZ și centrul cercului înscris în triunghiul ABC sunt trei puncte coliniare.

Metoda numerelor complexe

3

Elementul fundamental al geometriei euclidiene este punctul iar obiectele de studiu sunt configurațiile de puncte. Studiul configurațiilor și a relațiilor dintre acestea în spiritul "Elementelor" lui Euclid reprezintă *metoda geometrică* pură sau *metoda sintetică*. Am văzut că putem asocia unui punct vectorul său de poziție raportat la o origine fixată, idee care stă la baza *metodei vectoriale* de studiu a planului euclidian. Urmând același principiu, *metoda analitică* asociază unui punct din plan coordonatele sale într-un reper cartezian fixat. O variantă deosebit de utilă a acestei metode utilizează o singură coordonată pentru puncte, aceasta fiind dată de un număr complex.

Se consideră mulțimea numerelor complexe ca fiind

$$\mathbb{C} = \{z = x + iy : x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Orice număr complex z este determinat de perechea $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, x fiind partea reală iar y partea imaginară.

Numărului complex z îi asociem punctul $M(x, y)$, notat uneori cu $M(z)$. Punctul M se numește imaginea geometrică a numărului complex z , iar numărul complex z se numește afixul punctului M .

Planul $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ în care se fixează un reper cartezian ale cărui puncte se identifică cu numerele complexe $z = x + iy \in \mathbb{C}$ prin funcția bijectivă $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $\varphi(M) = z$ se numește *planul complex*.

Numim *configurație geometrică* orice mulțime de puncte $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{C}$. Evident, acestea sunt configurațiile planului euclidian descrise în limbajul numerelor complexe.

Presupunem că punctele M_1, M_2 au afixe z_1, z_2 . Distanța euclidiană între M_1 și M_2 se exprimă în limbajul numerelor complexe prin

$$M_1 M_2 = |z_2 - z_1|.$$

3.1 Dreapta în planul complex

Propoziția 3.1.1. *Ecuția unei drepte în planul complex este*

$$\bar{\alpha} \cdot \bar{z} + \alpha \cdot z + \beta = 0$$

unde $\alpha \in \mathbb{C}^*$, $\beta \in \mathbb{R}$ și $z = x + iy \in \mathbb{C}$.

Demonstrație. Pornim de la ecuația dreptei în reperul cartezian

$$Ax + By + C = 0 \quad (1)$$

unde $A, B, C \in \mathbb{R}$, cu $A^2 + B^2 \neq 0$.

Din $z = x + iy$, deducem că $x = \frac{z + \bar{z}}{2}$ și $y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$. Înlocuind în (1) obținem

$$A \frac{z + \bar{z}}{2} - Bi \frac{z - \bar{z}}{2} + C = 0$$

sau echivalent

$$\bar{z} \left(\frac{A + Bi}{2} \right) + z \left(\frac{A - Bi}{2} \right) + C = 0.$$

Notăm $\alpha = \frac{A - Bi}{2}$, $\beta = C \in \mathbb{R}$, și obținem ecuația din enunț. \square

Observația 3.1.2. 1) În cazul ecuației axei reale au loc relațiile $\alpha + \bar{\alpha} = 0$ și $\beta = 0$.

Într-adevăr, punând condiția ca 0 și 1 să aparțină dreptei obținem

$$\begin{cases} \beta = 0 \\ \alpha + \bar{\alpha} + \beta = 0 \end{cases}$$

adică $\alpha + \bar{\alpha} = 0$.

2) Dacă $\alpha = \bar{\alpha}$ atunci $B = 0$, deci dreapta este paralelă cu axa imaginară. Dacă $\alpha \neq \bar{\alpha}$, coeficientul unghiular al dreptei se obține ca fiind

$$m = -\frac{A}{B} = \frac{\alpha + \bar{\alpha}}{\frac{\alpha - \bar{\alpha}}{i}} = \frac{\alpha + \bar{\alpha}}{\alpha - \bar{\alpha}} i.$$

Propoziția 3.1.3. Fie dreptele d_1 și d_2 de ecuații

$$\overline{\alpha_1} \cdot \bar{z} + \alpha_1 \cdot z + \beta_1 = 0, \quad \overline{\alpha_2} \cdot \bar{z} + \alpha_2 \cdot z + \beta_2 = 0.$$

Atunci dreptele d_1 și d_2 sunt:

- 1) paralele dacă și numai dacă $\frac{\overline{\alpha_1}}{\alpha_1} = \frac{\overline{\alpha_2}}{\alpha_2}$;
- 2) perpendiculare dacă și numai dacă $\frac{\overline{\alpha_1}}{\alpha_1} + \frac{\overline{\alpha_2}}{\alpha_2} = 0$;
- 3) concurente dacă și numai dacă $\frac{\overline{\alpha_1}}{\alpha_1} \neq \frac{\overline{\alpha_2}}{\alpha_2} = 0$.

Demonstrație. Se demonstrează pe baza condițiilor de paralelism, perpendicularitate și concurență a coeficientului unghiular din reperul cartezian. \square

Numărul $m_d = -\frac{\overline{\alpha}}{\alpha}$ se numește *coeficientul complex* al dreptei d de ecuație

$$\overline{\alpha} \cdot \bar{z} + \alpha \cdot z + \beta = 0.$$

Acesta joacă un rol esențial în stabilirea poziției relative a două drepte în plan.

3.1.1 Dreapta determinată de două puncte

Propoziția 3.1.4. Ecuația dreptei determinată de punctele $P_1(z_1)$ și $P_2(z_2)$ este

$$\begin{vmatrix} z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 & \bar{z}_2 & 1 \\ z & \bar{z} & 2 \end{vmatrix} = 0. \quad (2)$$

Demonstrație. Pornim de la ecuația dreptei determinată de punctele $P_1(x_1, y_1)$ și $P_2(x_2, y_2)$ în reperul cartezian xOy și avem

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Folosind numere complexe, obținem

$$\begin{vmatrix} \frac{z_1 + \bar{z}_1}{2} & \frac{z_1 - \bar{z}_1}{2i} & 1 \\ \frac{z_2 + \bar{z}_2}{2} & \frac{z_2 - \bar{z}_2}{2i} & 1 \\ \frac{z + \bar{z}}{2} & \frac{z - \bar{z}}{2i} & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

echivalent cu

$$\frac{1}{4i} \begin{vmatrix} z_1 + \bar{z}_1 & z_1 - \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 + \bar{z}_1 & z_2 - \bar{z}_2 & 1 \\ z + \bar{z} & z - \bar{z} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Obținem astfel ecuația

$$\begin{vmatrix} z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 & \bar{z}_2 & 1 \\ z & \bar{z} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

□

Observația 3.1.5. 1) Punctele $M_1(z_1)$, $M_2(z_2)$, $M_3(z_3)$ sunt coliniare dacă și numai dacă

$$\begin{vmatrix} z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 & \bar{z}_2 & 1 \\ z_3 & \bar{z}_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

2) Coeficientul unghiular complex al dreptei determinată de punctele de afixe z_1 și z_2 este

$$m = \frac{z_2 - z_1}{\bar{z}_2 - \bar{z}_1}.$$

Într-adevăr, dezvoltând determinantul în ecuația (2) obținem

$$\bar{z}(z_2 - z_1) - z(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) + z_1 \cdot \bar{z}_2 - z_2 \cdot \bar{z}_1 = 0,$$

și aplicând definiția coeficientului unghiular, rezultă

$$m = \frac{z_2 - z_1}{\bar{z}_2 - \bar{z}_1}.$$

3.1.2 Perpendiculara dintr-un punct pe o dreaptă

Propoziția 3.1.6. Fie $d : \bar{\alpha} \cdot \bar{z} + \alpha \cdot z + \beta = 0$ o dreaptă și $P_0(z_0)$ un punct. Ecuația dreptei perpendiculare pe d care trece prin $P_0(z_0)$ este

$$z - z_0 = \frac{\bar{\alpha}}{\alpha}(\bar{z} - \bar{z}_0). \quad (3)$$

Demonstrație. Folosind reperul cartezian xOy , dreapta d' care trece prin P_0 și este perpendiculară pe d are ecuația

$$y - y_0 = m_{d'}(x - x_0),$$

unde coeficientul unghiular este dat de condiția de perpendicularitate $m_{d'} = -\frac{1}{m_d}$.

Folosind Observația 3.1.2.2) obținem $m_{d'} = -\frac{1}{i} \cdot \frac{\alpha - \bar{\alpha}}{\alpha + \bar{\alpha}}$. Înlocuind în ecuația (3) rezultă

$$\frac{z - \bar{z}}{2i} - \frac{z_0 - \bar{z}_0}{2i} = i \frac{\alpha - \bar{\alpha}}{\alpha + \bar{\alpha}} \left(\frac{z + \bar{z}}{2} - \frac{z_0 + \bar{z}_0}{2} \right).$$

Efectuând calculele obținem

$$\alpha(z - z_0) = \bar{\alpha}(\bar{z} - \bar{z}_0), \quad \text{adică} \quad z - z_0 = \frac{\bar{\alpha}}{\alpha}(\bar{z} - \bar{z}_0). \quad \square$$

Propoziția 3.1.7. Fie $d : \bar{\alpha} \cdot \bar{z} + \alpha \cdot z + \beta = 0$ o dreaptă și $P_0(z_0)$ un punct. Piciorul perpendicularei d' duse din P_0 pe d are afixul

$$z = \frac{\alpha \cdot z_0 - \bar{\alpha} \cdot \bar{z}_0 - \beta}{2\alpha}. \quad (4)$$

Demonstrație. Punctul căutat de afix z aparține celor două drepte d și d' , adică este verificat sistemul

$$\begin{cases} \bar{\alpha} \cdot \bar{z} + \alpha \cdot z + \beta = 0 \\ \alpha(z - z_0) = \bar{\alpha}(\bar{z} - \bar{z}_0). \end{cases}$$

Din prima ecuație avem

$$\bar{z} = \frac{-\alpha z - \beta}{\bar{\alpha}}.$$

Înlocuind \bar{z} în a doua ecuație, obținem

$$z = \frac{\alpha \cdot z_0 - \bar{\alpha} \cdot \bar{z}_0 - \beta}{2\alpha}. \quad \square$$

Observația 3.1.8. Distanța de la punctul $P_0(z_0)$ la dreapta d este P_0P , unde $P(z)$ este piciorul perpendicularei duse din P_0 pe d . Aplicând formula (4), obținem

$$\begin{aligned} P_0P = |z - z_0| &= \left| \frac{\alpha \cdot z_0 - \bar{\alpha} \cdot \bar{z}_0 - \beta}{2\alpha} - z_0 \right| = \left| \frac{\alpha \cdot z_0 + \bar{\alpha} \cdot \bar{z}_0 + \beta}{2\alpha} \right| \\ &= \frac{|\alpha \cdot z_0 + \bar{\alpha} \cdot \bar{z}_0 + \beta|}{2|\alpha|}. \end{aligned}$$

3.2 Cercul în planul complex

Propoziția 3.2.1. Ecuația generală a unui cerc în planul complex este

$$z \cdot \bar{z} + \alpha \cdot z + \bar{\alpha} \cdot \bar{z} + \beta = 0, \quad (5)$$

unde $\alpha \in \mathbb{C}$ și $\beta \in \mathbb{R}$.

Demonstrație. Pornim de la ecuația generală a unui cerc în reperul cartezian xOy

$$x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0,$$

unde $m, n, p \in \mathbb{R}$ și $p < \frac{m^2 + n^2}{4}$. Din $x = \frac{z + \bar{z}}{2}$ și $y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$, avem

$$|z|^2 + m \frac{z + \bar{z}}{2} + n \frac{z - \bar{z}}{2i} + p = 0,$$

adică

$$z \cdot \bar{z} + z \frac{m - ni}{2} + \bar{z} \frac{m + ni}{2} + p = 0.$$

Notăm $a = \frac{m - ni}{2} \in \mathbb{C}$ și $\beta = p \in \mathbb{R}$ și obținem ecuația (5). □

Raza cercului definit de ecuația (5) este

$$r = \sqrt{\frac{m^2}{4} + \frac{n^2}{4} - p} = \sqrt{\alpha \cdot \bar{\alpha} - \beta}.$$

În acest caz ecuația cercului este echivalentă cu

$$(\bar{z} + \alpha)(z + \bar{\alpha}) = r^2.$$

Notând $\gamma = -\bar{\alpha} = -\frac{m}{2} - \frac{n}{2}i$, se obține ecuația cercului cu centrul în γ și de rază r :

$$(\bar{z} - \bar{\gamma})(z - \gamma) = r^2,$$

ceea ce este echivalent cu $|z - \gamma| = r$.

Propoziția 3.2.2. *Fie un punct $P_0(z_0)$ și cercul de ecuație*

$$z \cdot \bar{z} + \alpha \cdot z + \bar{\alpha} \cdot \bar{z} + \beta = 0,$$

unde $\alpha \in \mathbb{C}$ și $\beta \in \mathbb{R}$. Puterea punctului P_0 față de cerc este dată de

$$\rho(z_0) = z_0 \cdot \bar{z}_0 + \alpha \cdot z_0 + \bar{\alpha} \cdot \bar{z}_0 + \beta.$$

Demonstrație. Am văzut că $O(-\bar{\alpha})$ este centrul cercului. Puterea lui P_0 față de cerc este definită ca $\rho(z_0) = OP_0^2 - r^2$. În cazul de față avem

$$\begin{aligned} \rho(z_0) &= OP_0^2 - r^2 = |z_0| + |\bar{\alpha}|^2 - r^2 \\ &= (z_0 + \bar{\alpha})(\bar{z}_0 + \alpha) - (\alpha \cdot \bar{\alpha} - \beta) \\ &= z_0 \cdot \bar{z}_0 + \alpha \cdot z_0 + \bar{\alpha} \cdot \bar{z}_0 + \beta, \end{aligned}$$

ceea ce trebuia demonstrat. □

Axa radicală a două cercuri este locul geometric al punctelor care au aceeași putere față de ambele cercuri.

Propoziția 3.2.3. *Axa radicală a două cercuri este o dreaptă.*

Demonstrație. Fie cercurile de ecuații

$$z \cdot \bar{z} + \alpha_1 \cdot z + \bar{\alpha}_1 \cdot \bar{z} + \beta_1 = 0, \quad z \cdot \bar{z} + \alpha_2 \cdot z + \bar{\alpha}_2 \cdot \bar{z} + \beta_2 = 0.$$

Condiția ca punctul de afix z să aparțină axei radicale este

$$z \cdot \bar{z} + \alpha_1 \cdot z + \bar{\alpha}_1 \cdot \bar{z} + \beta_1 = z \cdot \bar{z} + \alpha_2 \cdot z + \bar{\alpha}_2 \cdot \bar{z} + \beta_2,$$

echivalent cu

$$(\alpha_1 - \alpha_2)z + (\bar{\alpha}_1 - \bar{\alpha}_2)\bar{z} + \beta_1 - \beta_2 = 0,$$

ceea ce reprezintă ecuația unei drepte. □

3.3 Coliniaritate și asemănare

Spunem că un triunghi este orientat, dacă este specificată ordinea vârfurilor sale. Triunghiul este orientat pozitiv sau direct, dacă vârfurile sale sunt orientate în sens trigonometric. În caz contrar spunem că triunghiul este negativ orientat.

Considerăm două puncte distincte $M_1(z_1)$ și $M_2(z_2)$. Unghiul $\widehat{M_1OM_2}$ este orientat direct dacă și numai dacă punctele M_1 și M_2 sunt asezate în sens direct trigonometric (Figura 3.1).

Propoziția 3.3.1. Măsura unghiului orientat direct $\widehat{M_1OM_2}$ este $\arg \frac{z_2}{z_1}$.

Demonstrație. Considerăm cazurile:

a) Triunghiul M_1OM_2 este negativ orientat, atunci avem

$$\widehat{M_1OM_2} = \widehat{xOM_2} - \widehat{xOM_1} = \arg z_2 - \arg z_1 = \arg \frac{z_2}{z_1}.$$

b) Triunghiul M_1OM_2 este orientat pozitiv (Figura 3.1), atunci obținem

$$\widehat{M_1OM_2} = 2\pi - \widehat{M_2OM_1} = 2\pi - \arg \frac{z_1}{z_2} = \arg \frac{z_2}{z_1}. \quad \square$$

Teorema 3.3.2. Fie trei puncte distincte $M_1(z_1)$, $M_2(z_2)$, $M_3(z_3)$. Măsura unghiului orientat $\widehat{M_2M_1M_3}$ este $\arg \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}$.

Demonstrație. Translația cu $-z_1$ transformă punctele M_1, M_2, M_3 în O, M'_2, M'_3 cu afixele $0, z_2 - z_1, z_3 - z_1$. Prin translație, se conservă măsura unghiurilor, deci are loc $\widehat{M_2M_1M_3} \equiv \widehat{M'_2OM'_3}$. Folosind propoziția anterioară obținem

$$\widehat{M'_2OM'_3} = \arg \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}. \quad (6)$$

□

Propoziția 3.3.3. Punctele M_1, M_2, M_3 sunt coliniare dacă și numai dacă afixele lor satisfac relația

$$\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} \in \mathbb{R}^*.$$

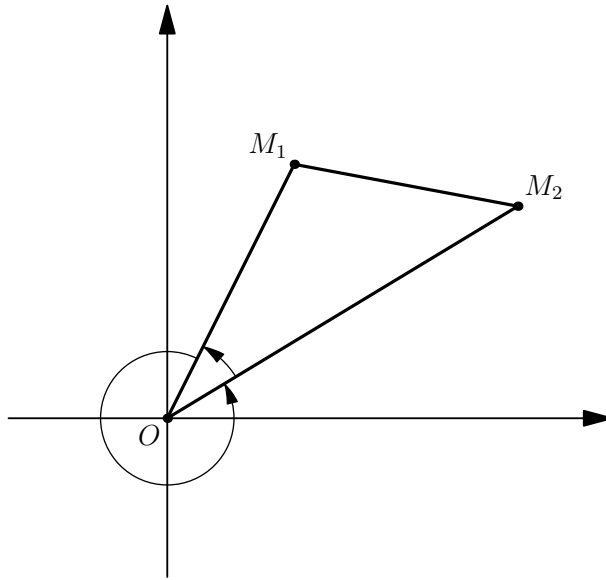


Figura 3.1

Demonstrație. Coliniaritatea punctelor M_1, M_2, M_3 este echivalentă cu $\widehat{M_2 M_1 M_3} \in \{0, \pi\}$. Rezultă că $\arg \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} \in \{0, \pi\}$, ceea ce este echivalent cu $\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} \in \mathbb{R}^*$. \square

Propoziția 3.3.4. *Triunghiurile $A_1 A_2 A_3$ și $B_1 B_2 B_3$ sunt asemenea, având aceeași orientare, dacă și numai dacă afixele vârfurilor satisfac relația*

$$\frac{a_2 - a_1}{a_3 - a_1} = \frac{b_2 - b_1}{b_3 - b_1}. \quad (7)$$

Demonstrație. Triunghiurile $A_1 A_2 A_3$ și $B_1 B_2 B_3$ sunt asemenea dacă și numai dacă $\frac{A_1 A_2}{A_1 A_3} = \frac{B_1 B_2}{B_1 B_3}$ și $\widehat{A_3 A_1 A_2} \equiv \widehat{B_3 B_1 B_2}$. Echivalent, exprimând cu numere complexe, avem relațiile

$$\left| \frac{a_2 - a_1}{a_3 - a_1} \right| = \left| \frac{b_2 - b_1}{b_3 - b_1} \right| \quad \text{și} \quad \arg \frac{a_3 - a_1}{a_2 - a_1} = \arg \frac{b_3 - b_1}{b_2 - b_1}.$$

Rezultă astfel relația $\frac{a_2 - a_1}{a_3 - a_1} = \frac{b_2 - b_1}{b_3 - b_1}$. \square

Observația 3.3.5. Relația (7) se poate rescrie cu ajutorul determinanților sub forma

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Propoziția 3.3.6. *Triunghiurile $A_1A_2A_3$ și $B_1B_2B_3$ sunt asemenea, având orientări diferite, dacă și numai dacă afixele vârfurilor satisfac relația*

$$\frac{a_2 - a_1}{a_3 - a_1} = \frac{\overline{b_2} - \overline{b_1}}{\overline{b_3} - \overline{b_1}}.$$

Demonstrație. Simetricile punctelor B_1, B_2, B_3 față de axa reală sunt punctele $M_1(\overline{b_1}), M_2(\overline{b_2}), M_3(\overline{b_3})$. Triunghiurile $B_1B_2B_3$ și $M_1M_2M_3$ sunt asemenea și au orientare opusă. Rezultă că triunghiurile $A_1A_2A_3$ și $M_1M_2M_3$ sunt asemenea și au aceeași orientare. Concluzia rezultă folosindu-ne de propoziția anterioară. \square

Aplicația 3.3.7. Presupunem că z_1, z_2, z_3 sunt afixele vârfurilor triunghiului $A_1A_2A_3$. Următoarele afirmații sunt echivalente:

- (a) triunghiul $A_1A_2A_3$ este echilateral;
- (b) $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| = |z_3 - z_1|$;
- (c) are loc relația $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1$;
- (d) are loc relația

$$\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2};$$

- (e) are loc relația

$$\frac{1}{z - z_1} + \frac{1}{z - z_2} + \frac{1}{z - z_3} = 0,$$

unde $z = \frac{1}{3}(z_1 + z_2 + z_3)$;

- (f) are loc relația $(z_1 + \varepsilon z_2 + \varepsilon^2 z_3)(z_1 + \varepsilon^2 z_2 + \varepsilon z_3) = 0$, unde

$$\varepsilon = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3};$$

- (g) are loc relația

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ z_2 & z_3 & z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Într-adevăr, triunghiul $A_1A_2A_3$ este echilateral dacă și numai dacă $\triangle A_1A_2A_3 \sim \triangle A_2A_3A_1$, având aceeași orientare, ceea ce conform Observației 3.3.5 revine la relația (g). Prin urmare, avem (a) \Leftrightarrow (g). Calculând determinantul de la (g), obținem

$$\begin{aligned} 0 &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ z_2 & z_3 & z_1 \end{vmatrix} = z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1 - (z_1^2 + z_2^2 + z_3^2) \\ &= -(z_1 + \varepsilon z_2 + \varepsilon^2 z_3)(z_1 + \varepsilon^2 z_2 + \varepsilon z_3), \end{aligned}$$

deci avem (g) \Leftrightarrow (c) \Leftrightarrow (f). Un calcul algebric simplu arată că avem (d) \Leftrightarrow (c) și (c) \Leftrightarrow (e). În plus, echivalența (a) \Leftrightarrow (b) este evidentă.

3.4 Produsul real pentru două numere complexe

Noțiunea de produs scalar pentru doi vectori este binecunoscută și s-a prezentat în Secțiunea 1.4. În cele ce urmează, vom adapta acest concept pentru numere complexe. Vom vedea că folosirea acestui produs simplifică în mod considerabil soluția multor probleme cu caracter metric.

Definiția 3.4.1. Fie a și b două numere complexe. Se numește *produs real* al numerelor complexe a și b numărul dat de relația

$$a \cdot b = \frac{1}{2}(\bar{a}b + a\bar{b}).$$

Este ușor de verificat faptul că

$$\overline{a \cdot b} = \frac{1}{2}(a\bar{b} + \bar{a}b) = a \cdot b,$$

deci $a \cdot b$ este un număr real, fapt care justifică numele acestui produs.

Fie $A(a)$, $B(b)$ puncte în planul complex și fie $\theta = \widehat{(\overline{OA}, \overline{OB})}$ unghiul dintre vectorii \overline{OA} și \overline{OB} . Următoarea relație are loc:

$$a \cdot b = |a| \cdot |b| \cdot \cos \theta = \overline{OA} \cdot \overline{OB}.$$

Într-adevăr, considerând forma trigonometrică a lui a și b , avem

$$a = |a|(\cos t_1 + i \sin t_1), \quad b = |b|(\cos t_2 + i \sin t_2),$$

prin urmare

$$\begin{aligned}
 a \cdot b &= \frac{1}{2}(\bar{a}b + a\bar{b}) \\
 &= \frac{1}{2}|a| \cdot |b|[\cos(t_1 - t_2) - i \sin(t_1 - t_2) + \cos(t_1 - t_2) + i \sin(t_1 - t_2)] \\
 &= |a| \cdot |b| \cdot \cos(t_1 - t_2) = |a| \cdot |b| \cdot \cos \theta = \overline{OA} \cdot \overline{OB}.
 \end{aligned}$$

Următoarele proprietăți sunt ușor de verificat.

Propoziția 3.4.2. *Oricare ar fi numerele complexe a, b, c și z au loc următoarele relații:*

- 1) $a \cdot a = |a|^2$;
- 2) $a \cdot b = b \cdot a$ (produsul real este comutativ);
- 3) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ (produsul real este distributiv față de adunare);
- 4) $(\alpha a) \cdot b = \alpha(a \cdot b)$, oricare ar fi $\alpha \in \mathbb{R}$;
- 5) $a \cdot b = 0$ dacă și numai dacă $OA \perp OB$, unde A are coordonata a și B are coordonata b ;
- 6) $(az) \cdot (bz) = |z|^2(a \cdot b)$.

Observația 3.4.3. Presupunem că A și B sunt două puncte ale căror afixe sunt a și respectiv b . Atunci produsul real $a \cdot b$ este egal cu puterea originii față de cercul de diametru AB .

Într-adevăr, fie $M \left(\frac{a+b}{2} \right)$ mijlocul segmentului $[AB]$, deci centrul acestui cerc, și fie $r = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}|a-b|$ raza acestui cerc. Atunci puterea originii față de cerc este

$$\begin{aligned}
 OM^2 - r^2 &= \left| \frac{a+b}{2} \right|^2 - \left| \frac{a-b}{2} \right|^2 = \frac{(a+b)(\bar{a}+\bar{b})}{4} - \frac{(a-b)(\bar{a}-\bar{b})}{4} \\
 &= \frac{a\bar{b} + b\bar{a}}{2} = a \cdot b,
 \end{aligned}$$

ceea ce ne-am propus să demonstrăm.

Propoziția 3.4.4. *Fie $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$ și $D(d)$ patru puncte distincte. Următoarele afirmații sunt echivalente:*

- 1) $AB \perp CD$;
- 2) $(b-a) \cdot (c-d) = 0$;
- 3) $\frac{b-a}{d-c} \in i\mathbb{R}^*$ (echivalent cu $\operatorname{Re} \left(\frac{b-a}{d-c} \right) = 0$).

Demonstrație. Considerăm punctele $M(b-a)$ și $N(d-c)$ astfel încât $OABM$ și $OCDN$ sunt paralelograme. Atunci avem $AB \perp CD$ dacă și numai dacă $OM \perp ON$. Aceasta înseamnă că $m \cdot n = (b-a) \cdot (d-c) = 0$, folosind proprietatea 5) a produsului real. Echivalența $2) \Leftrightarrow 3)$ reiese imediat din definiția produsului real. \square

Teorema 3.4.5. (lema lui Sylvester) Fie centrul cercului circumscris triunghiului ABC originea planului complex. Dacă a, b, c sunt afixele vârfurilor A, B, C , atunci ortocentrul H are afixul $h = a + b + c$.

Demonstrație. Varianta vectorială a acestui rezultat a fost demonstrată în Teorema 1.3.9. Folosind produsul real al numerelor complexe, ecuațiile înălțimilor AA', BB', CC' are triunghiului sunt

$$AA' : (z-a) \cdot (b-c) = 0, \quad BB' : (z-b) \cdot (c-a) = 0, \quad CC' : (z-c) \cdot (a-b) = 0.$$

Vom arăta că punctul de coordonată $h = a + b + c$ aparține fiecărei dintre cele trei înălțimi.

Într-adevăr, avem că $(h-a) \cdot (b-c) = 0$ dacă și numai dacă $(b+c) \cdot (b-c) = 0$. Ultima relație este echivalentă cu $b \cdot b - c \cdot c = 0$ sau $|b|^2 = |c|^2$. Similar, $H \in BB'$ și $H \in CC'$, deci demonstrația este încheiată. \square

Observația 3.4.6. Dacă numerele a, b, c, o, h sunt afixele vârfurilor triunghiului ABC , ale centrului cercului circumscris triunghiului O și respectiv ale ortocentrului H , atunci $h = a + b + c - 2o$. Într-adevăr, luând A' ca fiind diametral opus punctului A pe cercul circumscris triunghiului ABC , patrulaterul $HBA'C$ este paralelogram. Dacă $M = HA' \cap BC$, atunci

$$z_M = \frac{b+c}{2} = \frac{z_H + z_{A'}}{2} = \frac{z_H + 2o - a}{2},$$

de unde reiese că $z_H = a + b + c - 2o$.

Prezentăm în continuare o demonstrație cu ajutorul produsului real pentru Lema 1.8.1 din Partea I.

Aplicația 3.4.7. Fie A, B, C, D patru puncte în plan. Atunci $AC \perp BD$ dacă și numai dacă

$$AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2.$$

Folosind proprietățile produsului real al numerelor complexe, obținem

$$AB^2 + CD^2 = BC^2 + DA^2$$

dacă și numai dacă

$$(b - a) \cdot (b - a) + (d - c) \cdot (d - c) = (c - b) \cdot (c - b) + (a - d) \cdot (a - d).$$

După calcule simple obținem

$$a \cdot b + c \cdot d = b \cdot c + d \cdot a,$$

și în final

$$(c - a) \cdot (d - b) = 0,$$

ceea ce este echivalent cu $AC \perp BD$, conform Propoziției 3.4.4.

3.4.1 Coordonate baricentrice în planul complex

Considerăm punctele distincte $A(a)$ și $B(b)$. Punctul $M(z)$ situat pe dreapta AB împarte segmentul $[AB]$ în raportul $k \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$, dacă are loc relația vectorială $\overrightarrow{MA} = k \cdot \overrightarrow{MB}$. În limbajul numerelor complexe, această relație se scrie sub forma $a - z = k(b - z)$, adică $(1 - k)z = a - kb$. Obținem astfel

$$z = \frac{a - kb}{1 - k}.$$

Observăm că pentru $k < 0$, punctul M este situat pe segmentul (AB) . Pentru $k \in (0, 1)$, atunci avem ordinea $M - A - B$, iar pentru $k > 1$, avem ordinea $A - B - M$.

În cazul $k = -1$, obținem afixul mijlocului segmentului $[AB]$ ca fiind $z_M = \frac{a + b}{2}$.

Aplicația 3.4.8. Fie $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$ puncte distincte necoliniare. Mijlocul M al segmentului $[AB]$ are afixul $z_M = \frac{a + b}{2}$. Centrul de greutate G al triunghiului ABC împarte mediana $[CM]$ în raportul $k = -2$, deci afixul punctului G este

$$z_G = \frac{c + 2z_M}{1 + 2} = \frac{a + b + c}{3}.$$

Considerăm triunghiul ABC și fie α, β, γ lungimile laturilor $[BC]$, $[CA]$, respectiv $[AB]$.

Teorema 3.4.9. *Fie a, b, c afixele vârfurilor A, B, C și fie P un punct din planul triunghiului. Dacă z_P este afixul lui P , atunci există și sunt unice numerele reale μ_a, μ_b, μ_c astfel încât*

$$z_P = \mu_a a + \mu_b b + \mu_c c \quad \text{și} \quad \mu_a + \mu_b + \mu_c = 1.$$

Demonstrație. Presupunem că P se află în interiorul triunghiului ABC și considerăm punctul A' astfel încât $AP \cap BC = A'$. Fie $k_1 = \frac{PA}{PA'}$, $k_2 = \frac{A'B}{A'C}$ și observăm că avem

$$z_P = \frac{a + k_1 z_{A'}}{1 + k_1}, \quad z_{A'} = \frac{b + k_2 c}{1 + k_2}.$$

Deci în acest caz putem scrie

$$z_P = \frac{1}{1 + k_1} a + \frac{k_1}{(1 + k_1)(1 + k_2)} b + \frac{k_1 k_2}{(1 + k_1)(1 + k_2)} c.$$

În plus, dacă considerăm

$$\mu_a = \frac{1}{1 + k_1}, \quad \mu_b = \frac{k_1}{(1 + k_1)(1 + k_2)}, \quad \mu_c = \frac{k_1 k_2}{(1 + k_1)(1 + k_2)},$$

avem

$$\begin{aligned} \mu_a + \mu_b + \mu_c &= \frac{1}{1 + k_1} + \frac{k_1}{(1 + k_1)(1 + k_2)} + \frac{k_1 k_2}{(1 + k_1)(1 + k_2)} \\ &= \frac{1 + k_1 + k_2 + k_1 k_2}{(1 + k_1)(1 + k_2)} = 1. \end{aligned}$$

Procedăm în mod analog atunci când punctul P este situat în exteriorul triunghiului ABC . Dacă punctul P este situat pe dreapta suport a uneia dintre laturile triunghiului ABC , atunci avem

$$z_P = \frac{1}{1 + l} b + \frac{k}{1 + k} c = 0 \cdot a + \frac{1}{1 + k} b + \frac{k}{1 + k} c,$$

unde $k = \frac{PB}{PC}$.

□

Numerele reale μ_a, μ_b, μ_c se numesc *coordonatele baricentrice absolute* ale lui P relativ la triunghiul ABC .

Semnele numerelor μ_a, μ_b, μ_c depind de regiunea din plan în care este situat punctul P . Triunghiul ABC determină șapte astfel de regiuni așa cum reiese din figura de mai jos.

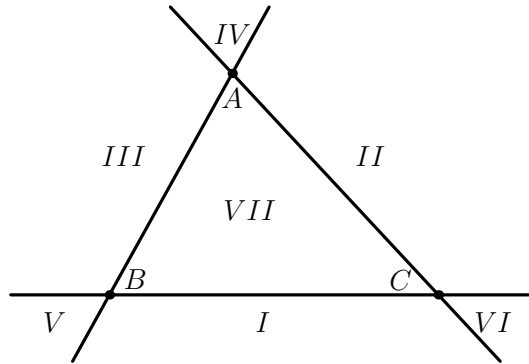


Figura 3.2

În tabelul de mai jos sunt date semnele numerelor μ_a, μ_b, μ_c în funcție de regiunea în care se găsește punctul P .

	I	II	III	IV	V	VI	VII
μ_a	-	+	+	+	-	-	+
μ_b	+	-	+	-	+	-	+
μ_c	+	+	-	-	-	+	+

În cazul în care punctul P este situat pe una din laturi, semnele numerelor μ_a, μ_b, μ_c sunt:

- $(0, +, +)$, $(0, -, +)$ sau $(0, +, -)$, dacă $P \in (BC)$,
- $(+, 0, +)$, $(-, 0, +)$ sau $(+, 0, -)$, dacă $P \in (AC)$,
- $(+, +, 0)$, $(-, +, 0)$ sau $(+, -, 0)$, dacă $P \in (AB)$.

În cazul în care punctul P este situat în unul din vârfurile triunghiului, semnele numerelor μ_a, μ_b, μ_c sunt:

- $(+, 0, 0)$ dacă P coincide cu A ,
- $(0, +, 0)$ dacă P coincide cu B ,
- $(0, 0, +)$ dacă P coincide cu C .

3.4.2 Formula distanței în coordonate baricentrice

În cele ce urmează, în vederea simplificării scrierii, reamintim simbolul utilizat pentru suma ciclică. Un exemplu de astfel de sumă este

$$\sum_{cyc} f(x_1, x_2, x_3) = f(x_1, x_2, x_3) + f(x_2, x_3, x_1) + f(x_3, x_1, x_2).$$

Teorema 3.4.10. *În planul triunghiului ABC , considerăm punctele P_1 și P_2 cu afixele z_{P_1} respectiv z_{P_2} . Dacă $z_{P_k} = \alpha_k a + \beta_k b + \gamma_k c$, unde $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k$ sunt numere reale, $k = 1, 2$, atunci*

$$P_1 P_2^2 = (\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 - \alpha_1 - \beta_1 - \gamma_1)^2 R^2 - \sum_{cyc} (\alpha_2 - \alpha_1)(\beta_2 - \beta_1)\gamma^2. \quad (8)$$

Demonstrație. Fixăm originea planului complex în centrul O al cercului circumscris triunghiului ABC . Folosind proprietățile produsului real avem

$$\begin{aligned} P_1 P_2^2 &= |z_{P_2} - z_{P_1}|^2 = |(\alpha_2 - \alpha_1)a + (\beta_2 - \beta_1)b + (\gamma_2 - \gamma_1)c|^2 \\ &= \sum_{cyc} (\alpha_2 - \alpha_1)^2 a \cdot a + 2 \sum_{cyc} (\alpha_2 - \alpha_1)(\beta_2 - \beta_1)a \cdot b \\ &= \sum_{cyc} (\alpha_2 - \alpha_1)^2 R^2 + 2 \sum_{cyc} (\alpha_2 - \alpha_1)(\beta_2 - \beta_1) \left(R^2 - \frac{\gamma^2}{2} \right) \\ &= (\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 - \alpha_1 - \beta_1 - \gamma_1)^2 R^2 - \sum_{cyc} (\alpha_2 - \alpha_1)(\beta_2 - \beta_1)\gamma^2. \end{aligned}$$

□

Corolarul 3.4.11. *În planul triunghiului ABC , considerăm punctele P_1 și P_2 cu afixele z_{P_1} respectiv z_{P_2} . Dacă $z_{P_k} = \alpha_k a + \beta_k b + \gamma_k c$, unde $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k$ sunt numere reale astfel încât $\alpha_k + \beta_k + \gamma_k = 1, k = 1, 2$, atunci*

$$P_1 P_2^2 = - \sum_{cyc} (\alpha_2 - \alpha_1)(\beta_2 - \beta_1)\gamma^2.$$

Demonstrație. În acest caz particular avem $\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 = 1$, deci formula (8) se reduce la formula din enunț. □

Teorema 3.4.12. *Punctele $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ sunt situate pe laturile BC, CA, AB ale triunghiului ABC astfel încât dreptele AA_1, BB_1, CC_1 se întâlnesc în punctul P_1 și dreptele AA_2, BB_2, CC_2 se întâlnesc în punctul P_2 . Dacă*

$$\frac{BA_k}{A_kC} = \frac{p_k}{n_k}, \quad \frac{CB_k}{B_kA} = \frac{m_k}{p_k}, \quad \frac{AC_k}{C_kB} = \frac{n_k}{m_k}, \quad k = 1, 2,$$

unde m_k, n_k, p_k sunt numere reale nenule, $k = 1, 2$ și $S_k = m_k + n_k + p_k$, $k = 1, 2$, atunci

$$P_1P_2^2 = \frac{1}{S_1^2S_2^2} \left[S_1S_2 \sum_{cyc} (n_1p_2 + p_1n_2)\alpha^2 - S_1^2 \sum_{cyc} n_2p_2\alpha^2 - S_2^2 \sum_{cyc} n_1p_1\alpha^2 \right].$$

Demonstrație. Afixele punctelor P_1 și P_2 sunt

$$z_{P_k} = \frac{m_k a + n_k b + p_k c}{m_k + n_k + p_k}, \quad k = 1, 2.$$

Reiese că în acest caz, coordonatele baricentrice absolute ale punctelor P_1 și P_2 sunt date de

$$\alpha_k = \frac{m_k}{m_k + n_k + p_k} = \frac{m_k}{S_k}, \quad \beta_k = \frac{n_k}{m_k + n_k + p_k} = \frac{n_k}{S_k},$$

$$\gamma_k = \frac{p_k}{m_k + n_k + p_k} = \frac{p_k}{S_k}, \quad k = 1, 2.$$

Înlocuind în relația (8), obținem

$$\begin{aligned} P_1P_2^2 &= - \sum_{cyc} \left(\frac{n_2}{S_2} - \frac{n_1}{S_1} \right) \left(\frac{p_2}{S_2} - \frac{p_1}{S_1} \right) \alpha^2 \\ &= - \frac{1}{S_1^2S_2^2} \sum_{cyc} (S_1n_2 - S_2n_1)(S_1p_2 - S_2p_1)\alpha^2 \\ &= - \frac{1}{S_1^2S_2^2} \sum_{cyc} [S_1^2n_2p_2 + S_2^2n_1p_1 - S_1S_2(n_1p_2 + n_2p_1)]\alpha^2 \\ &= - \frac{1}{S_1^2S_2^2} \left[S_1S_2 \sum_{cyc} (n_1p_2 + n_2p_1)\alpha^2 - S_1^2 \sum_{cyc} n_2p_2\alpha^2 - S_2^2 \sum_{cyc} n_1p_1\alpha^2 \right], \end{aligned}$$

și relația dorită are loc. □

Corolarul 3.4.13. Pentru numerele reale $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k$, cu $\alpha_k + \beta_k + \gamma_k = 1$, $k = 1, 2$, următoarea inegalitate are loc:

$$\sum_{cyc} (\alpha_2 - \alpha_1)(\beta_2 - \beta_1)\gamma^2 \leq 0,$$

cu egalitate dacă și numai dacă $\alpha_1 = \alpha_2$, $\beta_1 = \beta_2$, $\gamma_1 = \gamma_2$.

Corolarul 3.4.14. Pentru numerele reale nenule m_k, n_k, p_k , $k = 1, 2$, cu $S_k = m_k + n_k + p_k$, $k = 1, 2$, lungimile α, β, γ ale laturilor triunghiului ABC satisfac inegalitatea

$$\sum_{cyc} (n_1 p_2 + p_1 n_2)^2 \geq \frac{S_1}{S_2} \sum_{cyc} n_2 p_2 \alpha^2 + \frac{S_2}{S_1} \sum_{cyc} n_1 p_1 \alpha^2,$$

cu egalitate dacă și numai dacă $\frac{p_1}{n_1} = \frac{p_2}{n_2}$, $\frac{m_1}{p_1} = \frac{m_2}{p_2}$, $\frac{n_1}{m_1} = \frac{n_2}{m_2}$.

3.5 Produsul complex pentru două numere complexe

Produsul vectorial a doi vectori este un concept central în algebra vectorială, cu numeroase aplicații în diferite ramuri ale matematicii și ale științei. În ceea ce urmează, vom adapta acest produs în cazul numerelor complexe. Această nouă interpretare are multe avantaje în rezolvarea problemelor care implică aria sau coliniaritatea.

Definiția 3.5.1. Fie a și b două numere complexe. Numărul complex

$$a \times b = \frac{1}{2}(\bar{a}b - a\bar{b})$$

se numește *produsul complex* al numerelor a și b .

Se observă că

$$a \times b + \overline{a \times b} = \frac{1}{2}(\bar{a}b - a\bar{b}) + \frac{1}{2}(a\bar{b} - \bar{a}b) = 0,$$

deci avem $\operatorname{Re}(a \times b) = 0$, ceea ce justifică denumirea acestui produs.

Fie $A(a)$, $B(b)$ puncte în planul complex și fie $\theta = \widehat{(\overline{OA}, \overline{OB})}$ unghiul dintre vectorii \overline{OA} și \overline{OB} . Următoarea relație are loc:

$$a \times b = \varepsilon i \cdot |a| \cdot |b| \cdot \sin \theta,$$

unde

$$\varepsilon = \begin{cases} -1, & \text{dacă triunghiul } OAB \text{ este pozitiv orientat} \\ +1, & \text{dacă triunghiul } OAB \text{ este negativ orientat.} \end{cases}$$

Într-adevăr, dacă $a = |a| \cdot (\cos t_1 + i \sin t_1)$, $b = |b| \cdot (\cos t_2 + i \sin t_2)$, atunci

$$a \times b = i \cdot |a| \cdot |b| \cdot \cos(-t_1 + t_2) = \varepsilon i \cdot |a| \cdot |b| \cdot \sin \theta.$$

Legătura dintre produsul real și produsul complex este dată de următoarea relație de tip Lagrange:

$$|a \cdot b|^2 + |a \times b|^2 = |a|^2 \cdot |b|^2.$$

Următoarele proprietăți sunt ușor de verificat.

Propoziția 3.5.2. Oricare ar fi numerele complexe a, b, c au loc următoarele proprietăți:

1) $a \times b = 0$ dacă și numai dacă $a = 0$ sau $b = 0$, sau $a \times b \neq 0$ și $a = \lambda b$, unde λ este un număr real;

2) $a \times b = -b \times a$ (produsul complex este anticomutativ);

3) $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$ (produsul complex este distributiv față de adunare);

4) $\alpha(a \times b) = (\alpha a) \times b = a \times (\alpha b)$, pentru orice scalar α real;

5) Dacă $A(a)$ și $B(b)$ sunt puncte distincte, diferite de origine, atunci $a \times b = 0$ dacă și numai dacă punctele O, A și B sunt coliniare.

Observația 3.5.3. a) Fie $A(a)$ și $B(b)$ două puncte distincte ale planului complex, diferite de origine. Produsul complex al numerelor a și b are următoarea interpretare geometrică:

$$a \times b = \begin{cases} 2i \cdot S[AOB], & \text{dacă triunghiul } OAB \text{ este pozitiv orientat} \\ -2i \cdot S[AOB], & \text{dacă triunghiul } OAB \text{ este negativ orientat} \end{cases}$$

unde $S[AOB]$ reprezintă aria triunghiului determinat de punctele A, O și B .

Într-adevăr, dacă triunghiul OAB este pozitiv (direct) orientat, atunci

$$\begin{aligned} 2i \cdot S[OAB] &= i \cdot OA \cdot OB \cdot \sin(\widehat{AOB}) \\ &= i \cdot |a| \cdot |b| \cdot \sin\left(\arg \frac{b}{a}\right) = i \cdot |a| \cdot |b| \cdot \operatorname{Im}\left(\frac{b}{a}\right) \cdot \frac{|a|}{|b|} \\ &= \frac{1}{2} \cdot |a|^2 \left(\frac{b}{a} - \frac{\bar{b}}{\bar{a}}\right) = \frac{1}{2}(\bar{a}b - a\bar{b}) = a \times b. \end{aligned}$$

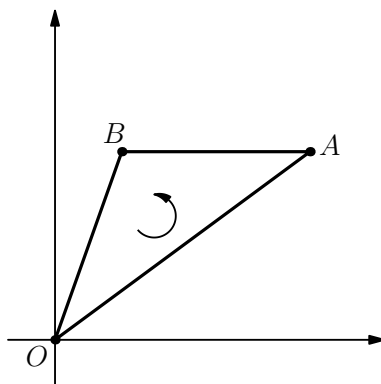


Figura 3.3

În celălalt caz, observăm că triunghiul OBA este pozitiv orientat, deci

$$2i \cdot S[OBA] = b \times a = -a \times b.$$

b) Fie $A(a)$, $B(b)$ și $C(c)$ trei puncte din planul complex. Produsul complex ne permite să obținem următoarea formulă pentru aria triunghiului ABC :

$$S[ABC] = \begin{cases} \frac{1}{2i}(a \times b + b \times c + c \times a), & \text{dacă triunghiul este pozitiv orientat} \\ -\frac{1}{2i}(a \times b + b \times c + c \times a), & \text{dacă triunghiul este negativ orientat.} \end{cases}$$

În plus, printr-un calcul simplu, reiese că

$$S[ABC] = \frac{1}{2} \text{Im}(\bar{a}b + \bar{b}c + \bar{c}a)$$

dacă triunghiul ABC este pozitiv orientat.

Pentru a demonstra această formulă, translatăm punctele A , B și C cu vectorul $-c$. Imaginile punctelor A , B și C prin această translație sunt punctele A' , B' și O ale căror coordonate sunt $a - c$, $b - c$ și respectiv 0 . Triunghiurile ABC și $A'B'O$

sunt congruente, cu aceeași orientare. Dacă ABC este pozitiv orientat, atunci

$$\begin{aligned} S[ABC] &= S[OA'B'] = \frac{1}{2}((a-c) \times (b-c)) \\ &= \frac{1}{2i}((a-c) \times b - (a-c) \times c) = \frac{1}{2i}(c \times (a-c) - b \times (a-c)) \\ &= \frac{1}{2i}(c \times a - c \times c - b \times a + b \times c) = \frac{1}{2i}(a \times b + b \times c + c \times a), \end{aligned}$$

adică formula de demonstrat.

Cazul în care triunghiul este negativ orientat se tratează analog.

Propoziția 3.5.4. *Fie punctele $A(a)$, $B(b)$ și $C(c)$ distincte. Următoarele afirmații sunt echivalente:*

- 1) *Punctele A, B, C sunt coliniare;*
- 2) $(b-a) \times (c-a) = 0$;
- 3) $a \times b + b \times c + c \times a = 0$.

Demonstrație. Punctele A, B și C sunt coliniare dacă și numai dacă $S[ABC] = 0$, adică $a \times b + b \times c + c \times a = 0$. Această ultimă relație poate fi scrisă sub forma $(b-a) \times (c-a) = 0$. \square

Propoziția 3.5.5. *Fie $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$ și $D(d)$ patru puncte, oricare trei dintre ele nefiind coliniare. Atunci $AB \parallel CD$ dacă și numai dacă $(b-a) \times (d-c) = 0$.*

Demonstrație. Alegem punctele $M(m)$ și $N(n)$ astfel încât $OABM$ și $OCDN$ sunt paralelograme. Atunci $m = b-a$ și $n = d-c$. Dreptele AB și CD sunt paralele dacă și numai dacă punctele O, M, N sunt coliniare. Folosind proprietatea 5 din Propoziția 3.5.2, aceasta este echivalentă cu $0 = m \times n = (b-a) \times (d-c)$. \square

3.5.1 Afixul punctului cevian

Următorul rezultat este deosebit de util pentru determinarea afixelor unor puncte remarcabile în triunghi.

Teorema 3.5.6. *Considerăm punctele A', B', C' pe dreptele de suport ale laturilor $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$ ale triunghiului ABC astfel încât AA', BB', CC' se intersectează în punctul Q . Fie $-\frac{p}{n}, -\frac{m}{p}, -\frac{n}{m}$ rapoartele în care punctele A', B', C' împart*

segmentele $[BC]$, $[CA]$, respectiv $[AB]$. Dacă a, b, c sunt afixele vîrfurilor A, B respectiv C , atunci afixul punctului Q este

$$q = \frac{ma + nb + pc}{m + n + p}. \quad (9)$$

Demonstrație. Afixele punctelor A', B', C' sunt $a' = \frac{nb + pc}{n + p}$, $b' = \frac{ma + pc}{m + p}$ respectiv $c' = \frac{ma + nb}{m + n}$. Fie Q punctul de afix $q = \frac{ma + nb + pc}{m + n + p}$. Vom demonstra că AA', BB', CC' se intersectează în Q . Punctele A, Q, A' sunt coliniare dacă și numai dacă $(q - a) \times (a' - a) = 0$. Această relație este echivalentă cu

$$\left(\frac{ma + nb + pc}{m + n + p} - a \right) \times \left(\frac{nb + pc}{n + p} - a \right) = 0,$$

sau

$$(nb + pc - (n + p)a) \times (nb + pc - (n + p)a) = 0,$$

ceea ce este evident din definiția produsului complex.

În același mod se arată că punctul Q se găsește pe dreptele BB' și CC' , deci demonstrația este completă. \square

Considerând în formula (2) din Propoziția 1.3.1, $\lambda = -\frac{p}{n}$ și $\mu = -\frac{m}{p}$, obținem vectorul de poziție al punctului Q

$$\bar{r}_Q = \frac{1}{\lambda\mu - \lambda + 1}(\lambda\mu\bar{r}_A + \bar{r}_B - \lambda\bar{r}_C) = \frac{1}{m + n + p}(m\bar{r}_A + n\bar{r}_B + p\bar{r}_C),$$

adică formula (9) exprimată în limbaj vectorial.

Corolarul 3.5.7. (afixul punctului izogonal) Considerăm punctele A', B', C' pe laturile BC, CA, AB sau prelungirile acestora, ale triunghiului astfel încât cevienele AA', BB', CC' se intersectează în punctul Q . Fie $-\frac{p}{n}, -\frac{m}{p}, -\frac{n}{m}$, rapoartele în care punctele A', B', C' împart segmentele $[BC], [CA]$, respectiv $[AB]$. Dacă a, b, c sunt afixele punctelor A, B, C , atunci afixul izogonalului Q' al lui Q este

$$q' = \frac{\frac{\alpha^2}{m}a + \frac{\beta^2}{n}b + \frac{\gamma^2}{p}c}{\frac{\alpha^2}{m} + \frac{\beta^2}{n} + \frac{\gamma^2}{p}}, \quad (10)$$

unde α, β, γ notează lungimile laturilor $[BC]$, $[CA]$, respectiv $[AB]$ ale triunghiului ABC .

Demonstrație. Fie punctele A'', B'', C'' pe laturile BC, CA, AB ale triunghiului astfel încât AA'', BB'', CC'' sunt izogonalele cevienelor AA', BB', CC' . Din Teorema 1.5.15, Partea I, rezultă că cevienele AA'', BB'', CC'' sunt concurente în Q' , izogonalul lui Q . Aplicând teorema lui Steiner (Teorema 1.5.14, Partea I), obținem că rapoartele în care A'', B'', C'' împart segmentele $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$ sunt $-\frac{p''}{n''}, -\frac{m''}{p''}, -\frac{n''}{m''}$, unde

$$p'' = \frac{\gamma^2}{p}, \quad n'' = \frac{\beta^2}{n}, \quad m'' = \frac{\alpha^2}{m}$$

și rezultatul din enunț se obține utilizând formula (9). □

3.5.2 Afixele punctelor remarcabile în triunghi

1. Centrul de greutate

Dacă $Q = G$, centrul de greutate al triunghiului ABC , avem $m = n = p$. Atunci obținem că afixul punctului G este

$$z_G = \frac{a + b + c}{3}.$$

2. Centrul cercului înscris și centrele cercurilor exînscrise

Presupunem că lungimile laturilor triunghiului ABC sunt $BC = \alpha$, $CA = \beta$, $AB = \gamma$. Dacă $Q = I$, centrul cercului înscris în triunghiul ABC atunci, folosind teorema bisectoarei interioare, obținem că rapoartele în care picioarele bisectoarelor împart laturile $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$ sunt

$$-\frac{\gamma}{\beta}, \quad -\frac{\alpha}{\gamma}, \quad -\frac{\beta}{\alpha}.$$

Așadar, afixul punctului I este

$$z_I = \frac{\alpha a + \beta b + \gamma c}{\alpha + \beta + \gamma} = \frac{1}{2s}(\alpha a + \beta b + \gamma c),$$

unde $s = \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma)$ este semiperimetrul triunghiului.

Dacă I_a este centrul cercului exînscribit tangent laturii $[BC]$ atunci, picioarele bisectoarelor care definesc acest punct (una interioară și două exterioare) împart laturile $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$ în rapoartele

$$-\frac{\gamma}{\beta}, \quad -\frac{-\alpha}{\gamma}, \quad -\frac{\beta}{-\alpha}.$$

Obținem că afixul punctului I_a este

$$z_{I_a} = \frac{-\alpha a + \beta b + \gamma c}{-\alpha + \beta + \gamma} = \frac{1}{2(s - \alpha)}(-\alpha a + \beta b + \gamma c).$$

Analog obținem că afixe punctelor I_b și I_c sunt date de

$$z_{I_b} = \frac{\alpha a - \beta b + \gamma c}{\alpha - \beta + \gamma} = \frac{1}{2(s - \beta)}(\alpha a - \beta b + \gamma c),$$

$$z_{I_c} = \frac{\alpha a + \beta b - \gamma c}{\alpha + \beta - \gamma} = \frac{1}{2(s - \gamma)}(\alpha a + \beta b - \gamma c).$$

3. Ortocentrul

Dacă $Q = H$, ortocentrul triunghiului ABC , obținem că rapoartele în care picioarele înălțimilor împart laturile $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$ sunt

$$-\frac{\operatorname{tg} C}{\operatorname{tg} B}, \quad -\frac{\operatorname{tg} A}{\operatorname{tg} C}, \quad -\frac{\operatorname{tg} B}{\operatorname{tg} A}.$$

Reiese că $m = \operatorname{tg} A$, $n = \operatorname{tg} B$, $p = \operatorname{tg} C$ și deci afixul punctului H este dat de

$$z_H = \frac{(\operatorname{tg} A)a + (\operatorname{tg} B)b + (\operatorname{tg} C)c}{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C}.$$

Formula anterioară poate fi extinsă la cazul limită în care triunghiul ABC este dreptunghic. Într-adevăr, presupunem că $A \rightarrow \frac{\pi}{2}$. Atunci $\operatorname{tg} A \rightarrow \pm\infty$ și $\frac{(\operatorname{tg} B)b + (\operatorname{tg} C)c}{\operatorname{tg} A} \rightarrow 0$, $\frac{\operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C}{\operatorname{tg} A} \rightarrow 0$. În acest caz, $z_H = a$, adică ortocentrul triunghiului ABC coincide cu vârful A al triunghiului.

4. Punctul lui Gergonne și adjunțele sale

Punctul Γ al lui Gergonne este intersecția cevienelor AA' , BB' , CC' , unde A' , B' , C' sunt punctele de tangență ale cercului înscris cu laturile BC , CA , respectiv AB . Atunci rapoartele în care punctele A' , B' , C' împart segmentele $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$ sunt

$$-\frac{\frac{1}{s-\gamma}}{\frac{1}{s-\beta}}, \quad -\frac{\frac{1}{s-\alpha}}{\frac{1}{s-\gamma}}, \quad -\frac{\frac{1}{s-\beta}}{\frac{1}{s-\alpha}},$$

și afixul z_Γ se obține din Teorema 3.5.6, adică

$$z_\Gamma = \frac{r_\alpha a + r_\beta b + r_\gamma c}{r_\alpha + r_\beta + r_\gamma}.$$

Aici $r_\alpha, r_\beta, r_\gamma$ reprezintă razele celor trei cercuri exînscrise triunghiului. Nu este dificil de arătat că următoarele formule au loc:

$$r_\alpha = \frac{S}{s-\alpha}, \quad r_\beta = \frac{S}{s-\beta}, \quad r_\gamma = \frac{S}{s-\gamma},$$

unde $S = S[ABC]$ și $s = \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma)$.

În paragraful 1.5.4 din Partea I au fost definite adjunțele $\Gamma_a, \Gamma_b, \Gamma_c$ ale punctului lui Gergonne. Pentru punctul Γ_a , rapoartele în care A' , A_2 , A_1 împart segmentele $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$ sunt

$$-\frac{\frac{1}{s-\gamma}}{\frac{1}{s-\beta}}, \quad -\frac{\frac{1}{s}}{\frac{1}{s-\gamma}}, \quad -\frac{\frac{1}{s-\beta}}{\frac{1}{s}},$$

ceea ce ne conduce imediat la formula

$$z_{\Gamma_a} = \frac{-ra + r_\beta b + r_\gamma c}{-r + r_\beta + r_\gamma}.$$

În mod analog obținem

$$z_{\Gamma_b} = \frac{r_\alpha a - rb + r_\gamma c}{r_\alpha - r + r_\gamma}, \quad z_{\Gamma_c} = \frac{r_\alpha a + r_\beta b - rc}{r_\alpha + r_\beta - r}.$$

5. Punctul lui Lemoine

Punctul K al lui Lemoine este intersecția simedianelor triunghiului (simediana este simetrica medianei față de bisectoare, adică izogonală medianei). Folosind notațiile și formula (10) din Corolarul 3.5.7 pentru $m = n = p$, obținem afixul lui K

$$z_K = \frac{\alpha^2 a + \beta^2 b + \gamma^2 c}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}.$$

6. Punctul lui Nagel și adjuncele sale

Punctul N al lui Nagel este intersecția cevienelor AA' , BB' , CC' , unde A' , B' , C' sunt punctele de tangență ale cercurilor exînscrie cu laturile $[BC]$, $[CA]$, respectiv $[AB]$ ale triunghiului. Rapoartele în care punctele A' , B' , C' împart segmentele $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$ sunt

$$-\frac{s-\gamma}{s-\beta}, \quad -\frac{s-\alpha}{s-\gamma}, \quad -\frac{s-\beta}{s-\alpha},$$

și Teorema 3.5.6 ne conduce la afixul z_N al punctului N al lui Nagel:

$$\begin{aligned} z_N &= \frac{(s-\alpha)a + (s-\beta)b + (s-\gamma)c}{(s-\alpha) + (s-\beta) + (s-\gamma)} \\ &= \frac{1}{s}[(s-\alpha)a + (s-\beta)b + (s-\gamma)c] \\ &= \left(1 - \frac{\alpha}{s}\right)a + \left(1 - \frac{\beta}{s}\right)b + \left(1 - \frac{\gamma}{s}\right)c. \end{aligned}$$

Ținând seama de formula (10), obținem că izogonalul N' al punctului lui Nagel are afixul

$$z_{N'} = \frac{\frac{\alpha^2}{s-\alpha}a + \frac{\beta^2}{s-\beta}b + \frac{\gamma^2}{s-\gamma}c}{\frac{\alpha^2}{s-\alpha} + \frac{\beta^2}{s-\beta} + \frac{\gamma^2}{s-\gamma}}.$$

Presupunem că cercul exînscriș tangent laturii $[BC]$ a triunghiului în punctul A' și prelungirilor laturilor $[AB]$ și $[AC]$ în A_1 , respectiv A_2 . Fie A'' punctul de tangență al cercului înscris triunghiului cu latura $[BC]$ și B_1, B_2, C_1, C_2 punctele de tangență ale cercurilor exînscriș corespunzătoare laturilor $[AC]$ și $[AB]$ cu prelungirile laturilor, ca în (a se vedea Figura 1.15 din Partea I).

Folosind reciproca teoremei lui Ceva am demonstrat că cevienele AA'' , BC_1 , CB_2 sunt concurente într-un punct notat N_a , care poartă numele de adjunctul lui N relativ la latura $[BC]$ a triunghiului.

Rapoartele în care punctele A'' , C_1 , B_1 împart segmentele $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$ sunt

$$-\frac{s-\beta}{s-\gamma}, \quad \frac{-s}{s-\beta}, \quad \frac{s-\gamma}{-s},$$

ceea ce, prin aplicarea formulei (9), ne conduce la

$$z_{N_a} = \frac{sa - (s-\gamma)b - (s-\beta)c}{s-\alpha} = r_\alpha \left(\frac{1}{r}a - \frac{1}{r_\gamma}b - \frac{1}{r_\beta}c \right).$$

În mod analog se obțin și afixe punctelor N_b , N_c

$$z_{N_b} = \frac{-(s-\gamma)a + sb - (s-\alpha)c}{s-\beta} = r_\beta \left(-\frac{1}{r_\gamma}a + \frac{1}{r}b - \frac{1}{r_\alpha}c \right),$$

$$z_{N_c} = \frac{-(s-\beta)a - (s-\alpha)b + sc}{s-\gamma} = r_\gamma \left(-\frac{1}{r_\beta}a - \frac{1}{r_\alpha}b + \frac{1}{r}a \right).$$

7. Centrul cercului circumscris

Centrul cercului circumscris O al triunghiului ABC este izogonalul ortocentrului, deci aplicând formula (10) obținem

$$z_O = \frac{\alpha^2 \operatorname{ctg} A \cdot a + \beta^2 \operatorname{ctg} B \cdot b + \gamma^2 \operatorname{ctg} C \cdot c}{\alpha^2 \operatorname{ctg} A + \beta^2 \operatorname{ctg} B + \gamma^2 \operatorname{ctg} C},$$

formulă care este dificil de utilizat în aplicații.

Aplicația 3.5.8. (dreapta lui Euler) În orice triunghi ABC punctele O , G , H sunt coliniare și avem $OH = 3 \cdot OG$.

Fără a restrânge generalitatea, putem presupune că originea planului complex este în O , centrul cercului circumscris triunghiului. Astfel avem $z_O = 0$, $z_G = \frac{1}{3}(a+b+c)$, $z_H = a+b+c$, unde am folosit lema lui Sylvester pentru afixul lui H (Teorema 3.4.5). Aplicând Propoziția 3.5.4 avem $(z_G - z_O) \times (z_H - z_O) = z_G \times z_H = 0$, deci punctele O , G , H sunt coliniare și $OH = 3 \cdot OG$.

Aplicația 3.5.9. (dreptele lui Nagel) 1) În orice triunghi ABC punctele I, G, N sunt coliniare și avem $IN = 3 \cdot IG$.

2) În orice triunghi ABC tripletele I_a, G, N_a și I_b, G, N_b și I_c, G, N_c sunt formate din puncte coliniare și au loc relațiile

$$I_a N_a = 3 \cdot I_a G, \quad I_b N_b = 3 \cdot I_b G, \quad I_c N_c = 3 \cdot I_c G.$$

Pentru prima proprietate, avem $z_I = \frac{\alpha}{2s}a + \frac{\beta}{2s}b + \frac{\gamma}{2s}c$, $z_G = \frac{1}{2}(a + b + c)$,

$$z_N = \left(1 - \frac{\alpha}{s}\right)a + \left(1 - \frac{\beta}{s}\right)b + \left(1 - \frac{\gamma}{s}\right)c,$$

prin urmare obținem

$$(z_G - z_I) \times (z_N - z_I) = (z_G - z_I) \times [3(z_G - z_I)] = 0,$$

unde am ținut seama de proprietățile produsului complex. Proprietatea rezultă din Propoziția 3.5.4.

Pentru a demonstra proprietatea 2), avem

$$\begin{aligned} z_{N_a} - z_{I_a} &= \frac{sa - (s - \gamma)b - (s - \beta)c}{s - \alpha} - \frac{-\alpha a + \beta b + \gamma c}{2(s - \alpha)} \\ &= \frac{(2s + \alpha)a + (-\alpha - 2\beta + \gamma)b + (-\alpha + \beta - 2\gamma)c}{2(s - \alpha)} \end{aligned}$$

și

$$\begin{aligned} z_G - z_{I_a} &= \frac{a + b + c}{3} - \frac{-\alpha a + \beta b + \gamma c}{2(s - \alpha)} \\ &= \frac{(2s + \alpha)a + (-\alpha - 2\beta + \gamma)b + (-\alpha + \beta - 2\gamma)c}{6(s - \alpha)}, \end{aligned}$$

prin urmare $z_{N_a} - z_{I_a} = 3(z_G - z_{I_a})$. Obținem astfel

$$(z_G - z_{I_a}) \times (z_{N_a} - z_{I_a}) = (z_G - z_{I_a}) \times [3(z_G - z_{I_a})] = 0,$$

unde am ținut seama din nou de proprietățile produsului complex. Prin urmare, punctele I_a, G, N_a sunt coliniare și avem $I_a N_a = 3 \cdot I_a G$.

Analog demonstrăm proprietatea pentru tripletele I_b, G, N_b și I_c, G, N_c .

8. Punctul lui Spieker

Centrul cercului înscris în triunghiul median al triunghiului ABC poartă numele de punctul lui Spieker al triunghiului și se notează cu S_p . Acest punct a fost studiat cu metode sintetice în paragraful 2.6.1 din Partea I. Fie $A'B'C'$ triunghiul median al triunghiului ABC . Presupunem că lungimile laturilor triunghiului ABC sunt $BC = \alpha$, $CA = \beta$, $AB = \gamma$ și că afixele vîrfurilor A, B, C sunt a, b, c . Lungimile laturilor triunghiului median sunt $B'C' = \frac{\alpha}{2}$, $C'A' = \frac{\beta}{2}$, $A'B' = \frac{\gamma}{2}$. Vîrfurile triunghiului median au afixele

$$z_{A'} = \frac{b+c}{2}, \quad z_{B'} = \frac{c+a}{2}, \quad z_{C'} = \frac{a+b}{2}.$$

Rezultă că afixul punctului lui Spieker este

$$z_{S_p} = \frac{\frac{\alpha}{2}z_{A'} + \frac{\beta}{2}z_{B'} + \frac{\gamma}{2}z_{C'}}{\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}} = \frac{1}{2s} \left(\alpha \frac{b+c}{2} + \beta \frac{c+a}{2} + \gamma \frac{a+b}{2} \right),$$

formulă care poate fi scrisă sub forma echivalentă

$$z_{S_p} = \frac{1}{4s} [(2s - \alpha)a + (2s - \beta)b + (2s - \gamma)c].$$

Aplicația 3.5.10. În orice triunghi ABC , punctul lui Spieker S_p este mijlocul segmentului $[IN]$.

Într-adevăr, folosind afixele punctelor I și N , avem

$$z_I + z_N = \frac{1}{2s}(\alpha a + \beta b + \gamma c) + \left(1 - \frac{\alpha}{s}\right)a + \left(1 - \frac{\beta}{s}\right)b + \left(1 - \frac{\gamma}{s}\right)c = 2z_{S_p},$$

de unde rezultă proprietatea enunțată.

Aplicația 3.5.11. (centrul de greutate al perimetrului unui triunghi) Presupunem ca triunghiul ABC are laturile formate din trei bare de mase omogene. Centrul de greutate al corpului astfel obținut este punctul lui Spieker S_p al triunghiului.

Pentru a demonstra această proprietate, observăm ca masele barelor de pe laturile triunghiului $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$ sunt α, β, γ . Concentrăm masele α, β, γ în mijloacele A', B' , respectiv C' ale triunghiului. Evident, centrul de greutate căutat este baricentrul sistemului $A'(\alpha), B'(\beta), C'(\gamma)$. Rezultă că afixul punctului căutat este

$$\frac{\alpha z_{A'} + \beta z_{B'} + \gamma z_{C'}}{\alpha + \beta + \gamma} = z_{S_p},$$

de unde rezultă proprietatea de mai sus.

8. Punctul lui Fuhrmann

Reamintim că triunghiul lui Fuhrmann al triunghiului ABC este triunghiul $F_AF_BF_C$ ale carui vârfuri sunt simetricele mijloacelor arcelor \widehat{BC} , \widehat{CA} , \widehat{AB} , considerate în cercul C circumscris triunghiului, față de laturile triunghiului. Cercul circumscris triunghiului lui Fuhrmann se numește cercul lui Fuhrmann al triunghiului. Centrul cercului lui Fuhrmann poartă numele de punctul lui Fuhrmann al triunghiului ABC și se notează cu F . Fie A', B', C' mijloacele arcelor \widehat{BC} , \widehat{CA} , respectiv \widehat{AB} , și M_a, M_b, M_c mijloacele laturilor $[BC]$, $[CA]$, respectiv $[AB]$ ale triunghiului. În continuare vom determina afixul punctului F al Fuhrmann. Se știe că mijlocul A' al arcului \widehat{BC} este mijlocul segmentului $[II_a]$, prin urmare avem $z_{A'} = \frac{z_I + z_{I_a}}{2}$. Cum M_a este mijlocul segmentului $[A'F_A]$, rezultă

$$z_{F_A} = 2z_{M_a} - z_{A'} = z_B + z_C - \frac{z_I + z_{I_a}}{2}.$$

În mod analog obținem

$$z_{F_B} = z_C + z_A - \frac{z_I + z_{I_b}}{2}, \quad z_{F_C} = z_A + z_B - \frac{z_I + z_{I_c}}{2}.$$

Prin urmare, centrul de greutate G_F al triunghiului lui Fuhrmann $F_AF_BF_C$ are afixul

$$z_{G_F} = \frac{z_{F_A} + z_{F_B} + z_{F_C}}{3} = \frac{(4s - \alpha)a + (4s - \beta)b + (4s - \gamma)a}{6s}.$$

Deoarece I este ortocentrul triunghiului $F_AF_BF_C$, conform dreptei lui Euler aplicate acestui triunghi, avem că punctele F, G_F, I sunt coliniare în această ordine și avem $IG_F = 2G_FI$, prin urmare $z_{G_F} = \frac{z_I + 2z_F}{3}$. Rezultă astfel că afixul punctului F este dat de formula

$$z_F = \frac{(2s - \alpha)a + (2s - \beta)b + (2s - \gamma)a}{2s}.$$

Aplicația 3.5.12. (poziția punctului lui Fuhrmann) Punctul lui Fuhrmann corespunzător triunghiului ABC este mijlocul segmentului $[HN]$, unde H și N sunt ortocentrul, respectiv punctul lui Nagel al triunghiului.

Într-adevăr, considerând originea planului complex în centrul cercului circumscris triunghiului ABC , avem $z_H = a + b + c$. Pe de altă parte avem formulele

$$z_N = \frac{(s - \alpha)a + (s - \beta)b + (s - \gamma)a}{s}, \quad z_F = \frac{(2s - \alpha)a + (2s - \beta)b + (2s - \gamma)a}{2s},$$

ceea ce ne conduce la relația $\frac{z_H + z_N}{2} = z_F$ și proprietatea enunțată este demonstrată.

Aplicația 3.5.13. Într-un triunghi ABC , punctele H și N sunt diametral opuse în cercul lui Fuhrmann corespunzător triunghiului.

Un calcul simplu arată că avem $|z_H - z_F| = |z_N - z_F| = |z_{F_A} - z_F|$, deci $HF = NF = FF_A$. Rezultă astfel că punctele H și N sunt situate pe cercul lui Fuhrmann. Cum centrul cercului lui Fuhrmann F este mijlocul segmentului $[HN]$, obținem rezultatul dorit.

3.5.3 Distanțele OI, OI_a, OI_b, OI_c și ON, ON_a, ON_b, ON_c . Teorema lui Feuerbach

Distanțele OI și ON au fost deja calculate folosind metoda vectorială în Aplicațiile 1.6.7 și 1.6.9. Vom face în continuare calculele cu ajutorul numerelor complexe. În acest sens presupunem centrul cercului circumscris triunghiului ABC ca fiind originea planului complex, a, b, c afixele vârfurilor iar α, β, γ lungimile laturilor $[BC], [CA], [AB]$.

Lema 3.5.14. *Au loc următoarele relații:*

$$a \cdot b = R^2 - \frac{\gamma^2}{2}, \quad b \cdot c = R^2 - \frac{\alpha^2}{2}, \quad c \cdot a = R^2 - \frac{\beta^2}{2}.$$

Demonstrație. Folosind proprietățile produsului real avem

$$\begin{aligned} \gamma^2 &= |a - b|^2 = (a - b) \cdot (a - b) = a^2 - 2a \cdot b + b^2 = |a|^2 + |b|^2 - 2a \cdot b \\ &= 2R^2 - 2a \cdot b, \end{aligned}$$

ceea ce ne conduce la prima formulă. Analog obținem celelalte două formule. \square

Teorema 3.5.15. (Euler) *Au loc următoarele proprietăți:*

1) *distanța dintre centrul cercului circumscris și centrul cercului înscris este dată de formula*

$$OI^2 = R^2 - 2Rr;$$

2) *distanțele dintre centrul cercului circumscris și centrele cercurilor exînscrise sunt date de formulele*

$$OI_a^2 = R^2 + 2Rr_a, \quad OI_b^2 = R^2 + 2Rr_b, \quad OI_c^2 = R^2 + 2Rr_c.$$

Demonstrație. 1) Afixul centrului cercului înscris este

$$z_I = \frac{\alpha}{2s}a + \frac{\beta}{2s}b + \frac{\gamma}{2s}c,$$

deci putem scrie

$$\begin{aligned} OI^2 = |z_I|^2 &= \left(\frac{\alpha}{2s}a + \frac{\beta}{2s}b + \frac{\gamma}{2s}c \right) \cdot \left(\frac{\alpha}{2s}a + \frac{\beta}{2s}b + \frac{\gamma}{2s}c \right) = \\ &= \frac{1}{4s^2}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)R^2 + 2\frac{1}{4s^2} \sum_{cyc} (\alpha\beta)a \cdot b. \end{aligned}$$

Folosind relațiile din Lema 3.5.14 obținem

$$\begin{aligned} OI^2 &= \frac{1}{4s^2}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)R^2 + \frac{2}{4s^2} \sum_{cyc} \alpha\beta \left(R^2 - \frac{\gamma^2}{2} \right) = \\ &= \frac{1}{4s^2}(\alpha + \beta + \gamma)^2 R^2 - \frac{1}{4s^2} \sum_{cyc} \alpha\beta\gamma^2 = R^2 - \frac{1}{4s^2} \alpha\beta\gamma(\alpha + \beta + \gamma) = R^2 - \frac{1}{2s} \alpha\beta\gamma \\ &= R^2 - 2 \frac{\alpha\beta\gamma}{4S} \cdot \frac{S}{s} = R^2 - 2Rr, \end{aligned}$$

unde am utilizat formulele binecunoscute $R = \frac{\alpha\beta\gamma}{4S}$ și $r = \frac{S}{s}$, S fiind aria triunghiului ABC .

2) Afixul centrului cercului exînscriș I_a este

$$z_{I_a} = \frac{-\alpha}{2(s-\alpha)}a + \frac{\beta}{2(s-\alpha)}b + \frac{\gamma}{2(s-\alpha)}c,$$

deci putem scrie

$$\begin{aligned}
 OI^2 &= |z_{I_a}|^2 = \\
 &= \left(\frac{-\alpha}{2(s-\alpha)}a + \frac{\beta}{2(s-\alpha)}b + \frac{\gamma}{2(s-\alpha)}c \right) \cdot \left(\frac{-\alpha}{2(s-\alpha)}a + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\beta}{2(s-\alpha)}b + \frac{\gamma}{2(s-\alpha)}c \right) = \frac{1}{4(s-\alpha)^2}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)R^2 + \\
 &\quad + \frac{2}{4(s-\alpha)^2}[-(\alpha\beta)a \cdot b - (\alpha\gamma)a \cdot c + (\beta\gamma)b \cdot c] = \\
 &= \frac{1}{4(s-\alpha)^2}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)R^2 + \frac{2}{4(s-\alpha)^2} \left[-(\alpha\beta) \left(R^2 - \frac{\gamma^2}{2} \right) - \right. \\
 &\quad \left. - (\alpha\gamma) \left(R^2 - \frac{\beta^2}{2} \right) + (\beta\gamma) \left(R^2 - \frac{\alpha^2}{2} \right) \right] = \\
 &= \frac{1}{4(s-\alpha)^2}(-\alpha + \beta + \gamma)^2 + \frac{1}{4(s-\alpha)^2}(\alpha\beta\gamma^2 + \alpha\beta^2\gamma - \alpha^2\beta\gamma) = \\
 &= R^2 + \frac{2}{4(s-\alpha)^2}\alpha\beta\gamma(s-\alpha) = R^2 + 2\frac{\alpha\beta\gamma}{4S} \cdot \frac{S}{s-\alpha} = R^2 + 2Rr_a.
 \end{aligned}$$

În mod analog demonstrăm și ultimele două formule. □

Teorema 3.5.16. *Dacă N este punctul lui Nagel și N_a, N_b, N_c sunt adjuncțele sale în triunghiul ABC , atunci :*

1) *distanța dintre centrul cercului circumscris O și N este dată de formula $ON = R - 2r$;*

2) *au loc formulele $ON_a = R + 2r_a, ON_b = R + 2r_b, ON_c = R + 2r_c$.*

Demonstrație. 1) Afixul punctului lui Nagel al triunghiului este

$$z_N = \left(1 - \frac{\alpha}{s}\right)a + \left(1 - \frac{\beta}{s}\right)b + \left(1 - \frac{\gamma}{s}\right)c,$$

prin urmare avem

$$\begin{aligned}
 ON^2 &= |z_N|^2 = z_N \cdot z_N = R^2 \sum_{cyc} \left(1 - \frac{\alpha}{s}\right)^2 + 2 \sum_{cyc} \left(1 - \frac{\alpha}{s}\right) \left(1 - \frac{\beta}{s}\right) a \cdot b \\
 &= R^2 \sum_{cyc} \left(1 - \frac{\alpha}{s}\right)^2 + 2 \sum_{cyc} \left(1 - \frac{\alpha}{s}\right) \left(1 - \frac{\beta}{s}\right) \left(R^2 - \frac{\gamma^2}{2}\right) \\
 &= R^2 \left(3 - \frac{\alpha + \beta + \gamma}{s}\right)^2 - \sum_{cyc} \left(1 - \frac{\alpha}{s}\right) \left(1 - \frac{\beta}{s}\right) \gamma^2 \\
 &= R^2 - \sum_{cyc} \left(1 - \frac{\alpha}{s}\right) \left(1 - \frac{\beta}{s}\right) \gamma^2 = R^2 - E.
 \end{aligned}$$

Pentru a evalua expresia E observăm că avem

$$\begin{aligned}
 E &= \sum_{cyc} \left(1 - \frac{\alpha + \beta}{s} + \frac{\alpha\beta}{s^2}\right) \gamma^2 = \sum_{cyc} \gamma^2 - \frac{1}{s} \sum_{cyc} (\alpha + \beta) \gamma^2 + \frac{1}{s^2} \sum_{cyc} \alpha\beta\gamma^2 \\
 &= \sum_{cyc} \gamma^2 - \frac{1}{s} \sum_{cyc} (2s - \gamma) \gamma^2 + \frac{2\alpha\beta\gamma}{s} = - \sum_{cyc} \alpha^2 + \frac{1}{s} \sum_{cyc} \alpha^3 + 8 \frac{\alpha\beta\gamma}{4S} \cdot \frac{S}{s} \\
 &= - \sum_{cyc} \alpha^2 + \frac{1}{s} \sum_{cyc} \alpha^2 + 8Rr.
 \end{aligned}$$

Aplicând Corolarul 1.6.2, obținem

$$E = -2(s^2 - r^2 - 4Rr) + 2(s^2 - 3r^2 - 6Rr) + 8Rr = -4r^2 + 4Rr,$$

ceea ce ne conduce la rezultatul final.

2) Următoarea demonstrație pentru această proprietate apare în lucrarea [21]. Afixul punctului adjunct al lui Nagel N_a al triunghiului este

$$z_{N_a} = \frac{sa - (s - \gamma)b - (s - \beta)c}{s - \alpha},$$

deci avem

$$ON_a^2 = |z_{N_a}|^2 = z_{N_a} \cdot z_{N_a} = \frac{R^2}{(s - \alpha)^2} [s^2 + (s - \beta)^2 + (s - \gamma)^2]$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2}{(s-\alpha)^2} [-s(s-\gamma)a \cdot b - s(s-\beta)a \cdot c + (s-\beta)(s-\gamma)b \cdot c] \\
& = \frac{R^2}{(s-\alpha)^2} [s^2 + (s-\beta)^2 + (s-\gamma)^2] \\
& + \frac{2}{(s-\alpha)^2} \left[-s(s-\gamma) \left(R^2 - \frac{\gamma^2}{2} \right) - s(s-\beta) \left(R^2 - \frac{\beta^2}{2} \right) + \right. \\
& \quad \left. + (s-\beta)(s-\gamma) \left(R^2 - \frac{\alpha^2}{2} \right) \right] \\
& = \frac{R^2}{(s-\alpha)^2} [-s + (s-\beta) + (s-\gamma)]^2 \\
& + \frac{1}{(s-\alpha)^2} [-(s-\beta)(s-\gamma)\alpha^2 + s(s-\beta)\beta^2 + s(s-\gamma)\gamma^2] \\
& = R^2 + r_a^2 \left(-\frac{\alpha^2}{r_b r_c} + \frac{\beta^2}{r r_b} + \frac{\gamma^2}{r r_c} \right) = R^2 + r_a^2 E'.
\end{aligned}$$

În continuare vom demonstra relația

$$E' = -\frac{\alpha^2}{r_b r_c} + \frac{\beta^2}{r r_b} + \frac{\gamma^2}{r r_c} = \frac{4R}{r_a} + 4.$$

Folosind formulele

$$r = 4R \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}, \quad r_a = 4R \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2},$$

și transformări trigonometrice simple, obținem succesiv

$$\begin{aligned}
E' &= \frac{4}{\sin A \sin B \sin C} \left(-\sin^2 \frac{A}{2} \sin A + \cos^2 \frac{B}{2} \sin B + \cos^2 \frac{C}{2} \sin C \right) \\
&= \frac{2}{\sin A \sin B \sin C} [-(1 - \cos A) \sin A + (1 + \cos B) \sin B + (1 + \cos C) \sin C] \\
&= \frac{2(\sin B + \sin C - \sin A)}{\sin A \sin B \sin C} + \frac{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C}{\sin A \sin B \sin C} \\
&= \frac{8 \cos \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}{\sin A \sin B \sin C} + \frac{\sin A \sin B \sin C}{\sin A \sin B \sin C} = \frac{1}{\sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}} + 4 = \frac{4R}{r_a} + 4.
\end{aligned}$$

Obținem astfel

$$ON_a^2 = R^2 + r_a^2 \left(\frac{4R}{r_a} + 4 \right) = (R + 2r_a)^2,$$

deci relația $ON_a = R + 2r_a$. Celelalte două relații se demonstrează în mod analog. \square

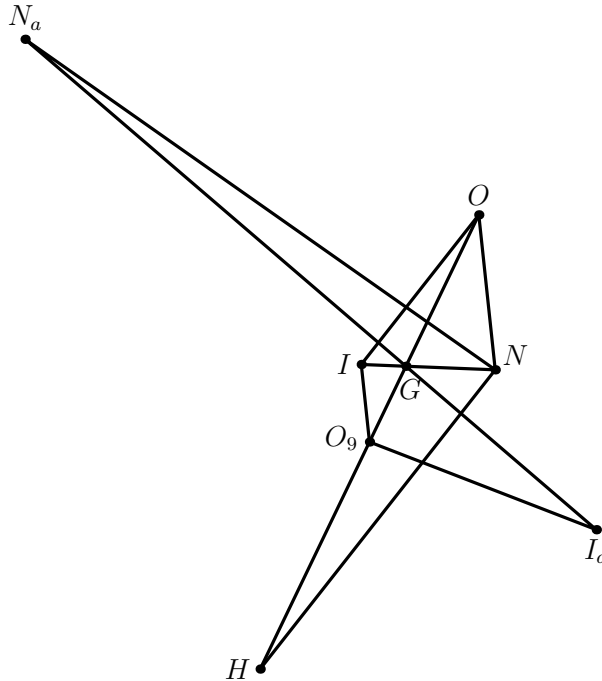


Figura 3.4

Teorema 3.5.17. (Feuerbach) 1) În orice triunghi cercul înscris este tangent interior cercului celor nouă puncte.

2) Cele trei cercuri exînscrise triunghiului sunt tangente exterior cercului celor nouă puncte.

Demonstrație. 1) Folosim configurația din Figura 3.4, în care observăm că

$$\frac{1}{2} = \frac{GI}{GN} = \frac{GO_9}{GO}.$$

Obținem că triunghiurile GIO_9 și GNO sunt asemenea, deci avem $IO_9 \parallel ON$ și $IO_9 = \frac{1}{2}ON$. Ținând seama de Teorema 3.5.16 rezultă $IO_9 = \frac{1}{2}(R - 2r) = \frac{1}{2}R - r$, deci cercul înscris este tangent interior cercului celor nouă puncte al triunghiului.

2) În aceeași configurație, avem

$$\frac{1}{2} = \frac{GI_a}{GN_a} = \frac{GO_9}{GO}.$$

Din Teorema 3.5.16 rezultă $I_aO_9 = \frac{1}{2}(R + 2r_a) = \frac{1}{2}R + r_a$, deci cercul exînscriș de centru I_a este tangent exterior cercului celor nouă puncte al triunghiului. \square

Punctul de tangență al cercului înscris cu cercul celor nouă puncte este notat cu F_0 . Punctele de tangență ale cercurilor exînscrișe de centre I_a, I_b, I_c sunt notate cu F_a, F_b, F_c . Punctele F_0, F_a, F_b, F_c se numesc *punctele lui Feuerbach* ale triunghiului.

3.5.4 Distanțele HI și GI . Inegalitățile lui Gerretsen

Teorema 3.5.18. *Au loc relațiile*

- 1) $GI^2 = \frac{1}{9}(s^2 + 5r^2 - 16Rr)$;
- 2) $HI^2 = 4R^2 + 4Rr + 3r^2 - s^2$.

Demonstrație. Afixele punctelor G, H, I sunt

$$z_G = \frac{1}{3}a + \frac{1}{3}b + \frac{1}{3}c, \quad z_I = \frac{\alpha}{2s}a + \frac{\beta}{2s}b + \frac{\gamma}{2s}c, \quad z_H = a + b + c,$$

unde am presupus că originea planului complex este în O , centrul cercului circumscris triunghiului ABC .

1) Aplicăm Corolarul 3.4.11 și obținem

$$\begin{aligned} GI^2 &= - \sum_{cyc} \left(\frac{\alpha}{2s} - \frac{1}{3} \right) \left(\frac{\beta}{2s} - \frac{1}{3} \right) \gamma^2 = - \frac{1}{36s^2} \sum_{cyc} (3\alpha - 2s)(3\beta - 2s)\gamma^2 \\ &= - \frac{1}{36s^2} \sum_{cyc} [9\alpha\beta - 6s(\alpha + \beta) + 4s^2]\gamma^2 = - \frac{1}{36s^2} \sum_{cyc} [9\alpha\beta - 6s(2s - \gamma) + 4s^2]\gamma^2 \\ &= - \frac{1}{36s^2} \sum_{cyc} (9\alpha\beta - 8s^2 + 6s\gamma)\gamma^2 = - \frac{1}{4s^2} \sum_{cyc} \alpha\beta\gamma^2 + \frac{2}{9} \sum \gamma^2 - \frac{1}{6s} \sum \gamma^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{\alpha\beta\gamma}{4s^2} \sum_{cyc} \gamma + \frac{2}{9} \sum_{cyc} \gamma^2 - \frac{1}{6s} \sum_{cyc} \gamma^3 \\
&= -\frac{4sRr}{4s^2} \cdot 2s + \frac{2}{9} \cdot 2(s^2 - r^2 - 4Rr) - \frac{1}{6s} \cdot 2s(s^2 - 3r^2 - 6Rr) \\
&= -2Rr + \frac{4}{9}(s^2 - r^2 - 4Rr) - \frac{1}{3}(s^2 - 3r^2 - 6Rr) \\
&= \frac{1}{9}(-18Rr + 4s^2 - 4r^2 - 14Rr - 3s^2 + 9r^2 + 18Rr) \\
&= \frac{1}{9}(s^2 + 5r^2 - 14Rr),
\end{aligned}$$

unde am folosit relațiile

$$\begin{aligned}
\alpha + \beta + \gamma &= 2s, & \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 &= 2(s^2 - r^2 - 4Rr), \\
\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 &= 2s(s^2 - 3r^2 - 6Rr), & \alpha\beta\gamma &= 4sRr.
\end{aligned}$$

2) Prin aplicarea Teoremei 3.4.10 obținem

$$\begin{aligned}
HI^2 &= 4R^2 - \sum_{cyc} \left(\frac{\alpha}{2s} - 1 \right) \left(\frac{\beta}{2s} - 1 \right) \gamma^2 = 4R^2 - \frac{1}{4s^2} \sum_{cyc} (\alpha - 2s)(\beta - 2s)\gamma^2 \\
&= 4R^2 - \frac{1}{4s^2} \sum_{cyc} [\alpha\beta - 2s(\alpha + \beta) + 4s^2]\gamma^2 \\
&= 4R^2 - \frac{1}{4s^2} \sum_{cyc} [\alpha\beta - 2s(2s - \gamma) + 4s^2]\gamma^2 \\
&= 4R^2 - \frac{1}{4s^2} \sum_{cyc} (\alpha\beta\gamma^2 + 2s\gamma^3) = 4R^2 - \frac{\alpha\beta\gamma}{4s^2} \sum_{cyc} \gamma - \frac{1}{2s} \sum_{cyc} \gamma^3 \\
&= 4R^2 - \frac{4sRr}{4s^2} \cdot 2s - \frac{1}{2s} \cdot 2s(s^2 - 3r^2 - 6Rr) \\
&= 4R^2 - 2Rr - s^2 + 3r^2 + 6Rr = 4R^2 + 4Rr + 3r^2 - s^2.
\end{aligned}$$

□

Teorema 3.5.19. (inegalitatea lui Gerretsen) În orice triunghi ABC au loc inegalitățile

$$16Rr - 5r^2 \leq s^2 \leq 4R^2 + 4Rr + 3r^2.$$

Demonstrație. Deoarece $GI^2 \geq 0$, din Teorema 3.5.18.1) rezultă $s^2 \geq 16Rr - 5r^2$, cu egalitate dacă și numai dacă triunghiul ABC este echilateral. Din $HI^2 \geq 0$, obținem $s^2 \leq 4R^2 + 4Rr + 3r^2$. De asemenea avem egalitate dacă și numai dacă triunghiul ABC este echilateral. \square

Aplicația 3.5.20. (forma trigonometrică a inegalității lui Gerretsen) În orice triunghi ABC are loc inegalitatea

$$(1 - \cos A)(1 - \cos B)(1 - \cos C) \geq \cos A \cos B \cos C.$$

Din Teorema 1.6.4, rezultă că polinomul

$$P(t) = 4R^2t^3 - 4R(R+r)t^2 + (s^2 + r^2 - 4R^2)t + (2R+r)^2 - s^2$$

are rădăcinile $\cos A$, $\cos B$, $\cos C$, deci avem descompunerea

$$P(t) = 4R^2(t - \cos A)(t - \cos B)(t - \cos C).$$

Rezultă astfel

$$\begin{aligned} P(1) &= 4R^2(1 - \cos A)(1 - \cos B)(1 - \cos C) \\ &= 4R^2 - 4R(R+r) + s^2 + r^2 - 4R^2 + (2R+r)^2 - s^2 = 2r^2. \end{aligned}$$

În plus avem relația

$$\cos A \cos B \cos C = \frac{s^2 - (2R+r)^2}{4R^2},$$

deci obținem

$$\begin{aligned} (1 - \cos A)(1 - \cos B)(1 - \cos C) - \cos A \cos B \cos C &= \frac{P(1)}{4R^2} - \frac{s^2 - (2R+r)^2}{4R^2} \\ &= \frac{1}{4R^2}(4R^2 + 4Rr + 3r^2 - s^2) \geq 0, \end{aligned}$$

conform inegalității din dreapta din Teorema 3.5.19.

Aplicația 3.5.21. În orice triunghi ABC are loc inegalitatea

$$\left(1 - \sin \frac{A}{2}\right) \left(1 - \sin \frac{B}{2}\right) \left(1 - \sin \frac{C}{2}\right) \geq \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}.$$

Pentru demonstrație, aplicăm inegalitatea din Aplicația 3.5.20 pentru triunghiul cu unghiurile $\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}$, $\frac{\pi}{2} - \frac{B}{2}$, $\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}$.

Aplicația 3.5.22. În orice triunghi ascuțitunghic ABC are loc inegalitatea

$$(1 + \cos 2A)(1 + \cos 2B)(1 + \cos 2C) \geq -\cos 2A \cos 2B \cos 2C.$$

Aplicăm inegalitatea din Aplicația 3.5.20 pentru triunghiul ortic al triunghiului ABC cu unghiurile $\pi - 2A, \pi - 2B, \pi - 2C$.

3.5.5 Formula ariei în coordonate baricentrice

Considerăm triunghiul ABC cu a, b, c afixele vârfurilor sale. Fie α, β, γ lungimile laturilor $[BC], [CA]$ și $[AB]$.

Teorema 3.5.23. (teorema lui Bottema) Fie $P_j(z_{P_j}), j = 1, 2, 3$, trei puncte în planul triunghiului ABC , cu $z_{P_j} = \alpha_j a + \beta_j b + \gamma_j c$, unde $\alpha_j, \beta_j, \gamma_j$ sunt coordonatele baricentrice ale lui P_j . Dacă triunghiurile ABC și $P_1 P_2 P_3$ au aceeași orientare, atunci

$$\frac{S[P_1 P_2 P_3]}{S[ABC]} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}.$$

Demonstrație. Presupunem că triunghiurile ABC și $P_1 P_2 P_3$ sunt pozitiv orientate. Dacă O reprezintă originea planului complex, atunci produsul complex poate fi scris

$$\begin{aligned} 2S[P_1 O P_2] &= z_{P_1} \times z_{P_2} = (\alpha_1 a + \beta_1 b + \gamma_1 c) \times (\alpha_2 a + \beta_2 b + \gamma_2 c) \\ &= (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1) a \times b + (\beta_1 \gamma_2 - \beta_2 \gamma_1) b \times c + (\gamma_1 \alpha_2 - \gamma_2 \alpha_1) c \times a \\ &= \begin{vmatrix} a \times b & b \times c & c \times a \\ \gamma_1 & \alpha_1 & \beta_1 \\ \gamma_2 & \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a \times b & b \times c & 2iS[ABC] \\ \gamma_1 & \alpha_1 & 1 \\ \gamma_2 & \alpha_2 & 1 \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

deoarece avem $\alpha_j + \beta_j + \gamma_j = 1, j = 1, 2, 3$.

Analog obținem

$$\begin{aligned} 2iS[P_2 O P_3] &= \begin{vmatrix} a \times b & b \times c & 2iS[ABC] \\ \gamma_2 & \alpha_2 & 1 \\ \gamma_3 & \alpha_3 & 1 \end{vmatrix}, \\ 2iS[P_3 O P_1] &= \begin{vmatrix} a \times b & b \times c & 2iS[ABC] \\ \gamma_3 & \alpha_3 & 1 \\ \gamma_1 & \alpha_1 & 1 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Presupunând că originea O este situată în interiorul triunghiului $P_1P_2P_3$, rezultă că avem

$$\begin{aligned}
 S[P_1P_2P_3] &= S[P_1OP_2] + S[P_2OP_3] + S[P_3OP_1] \\
 &= \frac{1}{2i}(\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_3 - \alpha_1)a \times b \\
 &\quad - \frac{1}{2i}(\gamma_1 - \gamma_2 + \gamma_2 - \gamma_3 + \gamma_3 - \gamma_1)b \times c \\
 &\quad + (\gamma_1\alpha_2 - \gamma_2\alpha_1 + \gamma_2\alpha_3 - \gamma_3\alpha_2 + \gamma_3\alpha_1 - \gamma_1\alpha_3)S[ABC] \\
 &= (\gamma_1\alpha_2 - \gamma_2\alpha_1 + \gamma_2\alpha_3 - \gamma_3\alpha_2 + \gamma_3\alpha_1 - \gamma_1\alpha_3)S[ABC] \\
 &= S[ABC] \begin{vmatrix} 1 & \gamma_1 & \alpha_1 \\ 1 & \gamma_2 & \alpha_2 \\ 1 & \gamma_3 & \alpha_3 \end{vmatrix} = S[ABC] \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix},
 \end{aligned}$$

deci s-a obținut formula dorită. \square

Corolarul 3.5.24. Considerăm triunghiul ABC și punctele A_1, B_1, C_1 situate respectiv pe dreptele BC, CA, AB astfel încât

$$\frac{A_1B}{A_1C} = k_1, \quad \frac{B_1C}{B_1A} = k_2, \quad \frac{C_1A}{C_1B} = k_3.$$

Dacă $AA_1 \cap BB_1 = \{P_1\}$, $BB_1 \cap CC_1 = \{P_2\}$ și $CC_1 \cap AA_1 = \{P_3\}$ atunci

$$\frac{S[P_1P_2P_3]}{S[ABC]} = \frac{(1 - k_1k_2k_3)^2}{(1 + k_1 + k_1k_2)(1 + k_2 + k_2k_3)(1 + k_3 + k_3k_1)}.$$

Demonstrație. Aplicând binecunoscuta teoremă a lui Menelaus triunghiului AA_1B , obținem că

$$\frac{C_1A}{C_1B} \cdot \frac{CB}{CA_1} \cdot \frac{P_3A_1}{P_3A} = 1.$$

Deci

$$\frac{P_3A}{P_3A_1} = \frac{C_1A}{C_1B} \cdot \frac{CB}{CA_1} = k_3(1 + k_1).$$

Afixul punctului P_3 este dat de

$$z_{P_3} = \frac{a + k_3(1 + k_1)z_{A_1}}{1 + k_3(1 + k_1)} = \frac{a + k_3(1 + k_1)\frac{b+k_1c}{1+k_1}}{1 + k_3 + k_3k_1} = \frac{a + k_3b + k_3k_1c}{1 + k_3 + k_3k_1}.$$

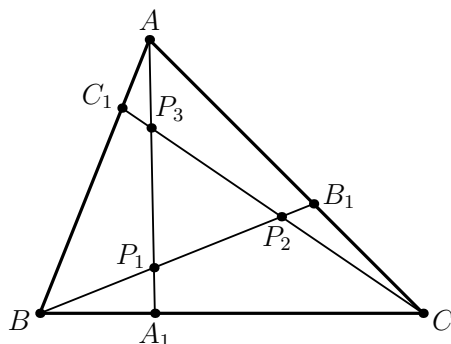


Figura 3.5

În mod analog, avem că

$$z_{P_1} = \frac{k_1 k_2 a + b + k_1 c}{1 + k_1 + k_1 k_2} \quad \text{și} \quad z_{P_3} = \frac{k_2 a + k_2 k_3 b + c}{1 + k_2 + k_2 k_3}.$$

Triunghiurile ABC și $P_1 P_2 P_3$ au aceeași orientare, deci aplicând formula din teorema anterioară obținem

$$\begin{aligned} \frac{S[P_1 P_2 P_3]}{S[ABC]} &= \frac{1}{(1 + k_1 + k_1 k_2)(1 + k_2 + k_2 k_3)(1 + k_3 + k_3 k_1)} \begin{vmatrix} k_1 k_2 & 1 & k_1 \\ k_2 & k_2 k_3 & 1 \\ 1 & k_3 & k_3 k_1 \end{vmatrix} \\ &= \frac{(1 - k_1 k_2 k_3)^2}{(1 + k_1 + k_1 k_2)(1 + k_2 + k_2 k_3)(1 + k_3 + k_3 k_1)}. \quad \square \end{aligned}$$

Fie A_j, B_j, C_j puncte de pe dreptele BC, CA , respectiv AB , astfel încât

$$\frac{BA_j}{A_j C} = \frac{p_j}{n_j}, \quad \frac{CB_j}{B_j A} = \frac{m_j}{p_j}, \quad \frac{AC_j}{C_j B} = \frac{n_j}{m_j}, \quad j = 1, 2, 3.$$

Corolarul 3.5.25. Dacă P_j este punctul de intersecție al cevienelor AA_j, BB_j, CC_j , $j = 1, 2, 3$ și triunghiurile $ABC, P_1 P_2 P_3$ au aceeași orientare, atunci

$$\frac{S[P_1 P_2 P_3]}{S[ABC]} = \frac{1}{S_1 S_2 S_3} \begin{vmatrix} m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \\ m_3 & n_3 & p_3 \end{vmatrix},$$

unde $S_j = m_j + n_j + p_j$, $j = 1, 2, 3$.

Demonstrație. În termenii afixelor vârfurilor triunghiului, afixe punctelor P_j sunt

$$z_{P_j} = \frac{m_j a + n_j b + p_j c}{m_j + n_j + p_j} = \frac{1}{S_j}(m_j a + n_j b + p_j c), \quad j = 1, 2, 3,$$

și formula rezultă din Teorema 3.5.23. □

Corolarul 3.5.26. În triunghiul ABC , fie cevielele AA' , BB' și CC' astfel încât

$$\frac{A'B}{AC} = m, \quad \frac{B'C}{B'A} = n, \quad \frac{C'A}{C'B} = p.$$

Atunci are loc următoarea formulă

$$\frac{S[A'B'C']}{S[ABC]} = \frac{1 + mnp}{(1 + m)(1 + n)(1 + p)}.$$

Demonstrație. Se observă că punctele A' , B' , C' au afixe date prin

$$z_{A'} = \frac{1}{1 + m}b + \frac{m}{1 + m}c, \quad z_{B'} = \frac{1}{1 + n}c + \frac{n}{1 + n}a, \quad z_{C'} = \frac{1}{1 + p}a + \frac{p}{1 + p}b.$$

Aplicând Teorema 3.5.23 obținem

$$\frac{S[A'B'C']}{S[ABC]} = \frac{1}{(1 + m)(1 + n)(1 + p)} \begin{vmatrix} 0 & 1 & m \\ n & 0 & 1 \\ 1 & p & 0 \end{vmatrix} = \frac{1 + mnp}{(1 + m)(1 + n)(1 + p)}.$$

□

3.6 Transformări geometrice ale planului complex

O funcție bijectivă $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ se numește *transformare geometrică* a planului complex. Dacă $M \in \mathbb{C}$, atunci punctul $M' = f(M)$ se numește *transformatul* lui M prin f . Dacă $\mathcal{F} \subset \mathbb{C}$ este o configurație geometrică, atunci $\mathcal{F}' = f(\mathcal{F})$ este configurația transformată prin f .

Transformarea geometrică $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ este *involutivă* dacă verifică relația $f \circ f = 1_{\mathbb{C}}$, unde $1_{\mathbb{C}}$ este aplicația identică a planului complex.

Numărul complex z_0 se numește *punct fix* pentru transformarea f , dacă $f(z_0) = z_0$. Configurația $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{C}$ este *invariantă* în raport cu transformarea f , dacă $f(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$. În cazul în care avem $f(z) = z$, pentru orice număr complex $z \in \mathcal{F}$, atunci \mathcal{F} este *fixă punct cu punct* pentru f .

Exemplul 3.6.1. Fie $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$. Aplicația $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, definită prin $f(z) = az + b$, este bijectivă, deci este o transformare geometrică a planului complex. Referitor la mulțimea punctelor fixe ale lui f , avem următoarele situații.

- 1) Pentru $a \neq 1$, $b \in \mathbb{C}$, transformarea f are un unic punct fix, anume $z_0 = \frac{b}{1-a}$.
- 2) Pentru $a = 1$, $b = 0$, avem $f = 1_{\mathbb{C}}$, adică orice număr complex este punct fix pentru f .
- 3) Pentru $a = 1$, $b \neq 0$, transformarea f nu are puncte fixe.

Propoziția 3.6.2. Fie transformarea geometrică $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = a\bar{z} + b$, $a \in \mathbb{C}^*$ și $b \in \mathbb{C}$. Au loc următoarele proprietăți:

- 1) Dacă $|a| \neq 1$, transformarea f are un singur punct fix, anume $z_0 = \frac{a\bar{b} + b}{1 - |a|^2}$.
- 2) Dacă $|a| = 1$, $\operatorname{Re}(a) \neq 1$ și $\operatorname{Im}(a\bar{b} + b) = 0$, atunci f are o infinitate de puncte fixe, date de

$$z_0 = \frac{\operatorname{Re}(b) + y_0 \cdot \operatorname{Im}(a)}{1 - \operatorname{Re}(a)} + iy_0, \quad y_0 \in \mathbb{R}.$$

3) Dacă $|a| = 1$, $\operatorname{Re}(a) \neq 1$ și $\operatorname{Im}(a\bar{b} + b) \neq 0$, transformarea f nu are puncte fixe.

4) Dacă $|a| = 1$, $\operatorname{Re}(a) = 1$, $\operatorname{Im}(a) = 0$ și $\operatorname{Re}(b) \neq 0$, transformarea f nu are puncte fixe.

5) Dacă $|a| = 1$, $\operatorname{Re}(a) = 1$, $\operatorname{Im}(a) = 0$, $\operatorname{Re}(b) = 0$ și $\operatorname{Im}(b) \neq 0$, transformarea f are o infinitate de puncte fixe, anume

$$z_0 = x_0 + i \frac{\operatorname{Im}(b)}{2}, \quad x_0 \in \mathbb{R}.$$

6) Dacă $|a| = 1$, $\operatorname{Re}(a) = 1$, $\operatorname{Im}(a) = \operatorname{Re}(b) = \operatorname{Im}(b) = 0$, atunci transformarea f are o infinitate de puncte fixe, anume $z_0 = x_0 \in \mathbb{R}$.

Demonstrație. 1) Dacă z_0 este punct fix pentru f , atunci avem $a\bar{z}_0 + b = z_0$. Conjugăm relația anterioară și obținem sistemul

$$\begin{cases} a\bar{z}_0 - z_0 = -b \\ -\bar{z}_0 + \bar{a}z_0 = -\bar{b}. \end{cases}$$

Sistemul are soluție unică dacă și numai dacă avem

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & -1 \\ -1 & \bar{a} \end{vmatrix} = a\bar{a} - 1 = |a|^2 - 1 \neq 0,$$

situație în care găsim

$$z_0 = \frac{a\bar{b} + b}{1 - |a|^2}.$$

2) Notăm $a = a_1 + ia_2$, $b = b_1 + ib_2$ și $z_0 = x_0 + iy_0$. Din condiția de punct fix, $a\bar{z}_0 + b = z_0$, obținem $(a_1 + ia_2)(x_0 - iy_0) + b_1 + ib_2 = x_0 + iy_0$, adică sistemul

$$\begin{cases} x_0(a_1 - 1) + a_2y_0 = -b_1 \\ a_2x_0 + (a_1 + 1)y_0 = -b_2. \end{cases}$$

Dacă $a_1 \neq 1$ și $-a_1b_2 + b_2 + a_2b_1 = \text{Im}(a\bar{b} + b) = 0$, atunci transformarea f are o infinitate de puncte fixe, anume

$$z_0 = \frac{\text{Re}(b) + y_0 \cdot \text{Im}(a)}{1 - \text{Re}(a)} + iy_0, \quad y_0 \in \mathbb{R}.$$

Restul afirmațiilor se demonstrează analog. □

Exemplul 3.6.3. 1) Transformarea $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = 2i \cdot \bar{z} + 3 + i$ are un singur punct fix, anume

$$z_0 = \frac{2i(3 - i) + 3 + i}{1 - |2i|^2} = \frac{7i + 5}{-3},$$

deoarece $a = |2i| = 2 \neq 1$.

2) Fie $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\bar{z} - \frac{\sqrt{3}}{3} + i$. Au loc relațiile

$$|a| = 1, \quad \text{Re } a = \frac{1}{2} \neq 1, \quad \text{Im}(a\bar{b} + b) = -\frac{1}{2} + 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 0.$$

Rezultă că f are o infinitate de puncte fixe, anume $z_0 = -\frac{2\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3}y_0 + iy_0$, cu $y_0 \in \mathbb{R}$.

3) Transformarea $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = \left(\frac{1}{3} + \frac{2\sqrt{2}}{3}i\right) \cdot \bar{z} + i$ nu are niciun punct fix, pentru că avem

$$|a| = 1, \quad \operatorname{Re} a = \frac{1}{3} \neq 0, \quad \operatorname{Im}(a\bar{b} + b) = \frac{2 - 2\sqrt{2}}{3} \neq 0.$$

4) Transformarea $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = \bar{z} + 2 - i$ nu are puncte fixe, pentru că avem

$$|a| = 1, \quad \operatorname{Re} a = 1, \quad \operatorname{Im} a = 0, \quad \operatorname{Re} b \neq 0.$$

5) Transformarea $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = \bar{z} + 9i$. Avem

$$|a| = 1, \quad \operatorname{Re} a = 1, \quad \operatorname{Im} a = 0, \quad \operatorname{Re} b = 0, \quad \operatorname{Im} b \neq 0,$$

deci transformarea admite o infinitate de puncte fixe, anume $z_0 = x_0 + \frac{9}{2}i$, unde $x_0 \in \mathbb{R}$.

6) Transformarea $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = \bar{z}$ are o infinitate de puncte fixe $z_0 = x_0 \in \mathbb{R}$, pentru că

$$|a| = 1, \quad \operatorname{Re} a = 1, \quad \operatorname{Im} a = \operatorname{Re} b = \operatorname{Im} b = 0.$$

3.7 Izometriile planului complex

Scopul acestui paragraf este de a relua în limbajul numerelor complexe studiul transformărilor geometrice ale planului care conservă distanțele. Am văzut în paragraful 2.1 că acestea formează un grup, în raport cu operația de compunere a aplicațiilor, numit grupul izometriilor planului. Prin identificarea planului euclidian cu planul complex avem posibilitatea să lucrăm direct cu forma analitică a izometriilor particulare, fapt ce simplifică semnificativ studiul unor configurații geometrice.

3.7.1 Translația

Fie $z_0 \in \mathbb{C}$. Aplicația $t_{z_0} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $t_{z_0}(z) = z + z_0$ se numește *translația* cu numărul complex z_0 a planului complex.

Ținând seama de interpretarea geometrică a adunării a două numere complexe, avem următoarea reprezentare pentru imaginea geometrică a lui $t_z(z)$. În Figura 3.6, $OM_0M'M$ este paralelogram cu OM' una dintre diagonalele sale. Astfel, funcția t_{z_0} corespunde în planul complex \mathbb{C} translației $T_{\overline{OM_0}}$ de vector $\overline{OM_0}$ din planul euclidian.

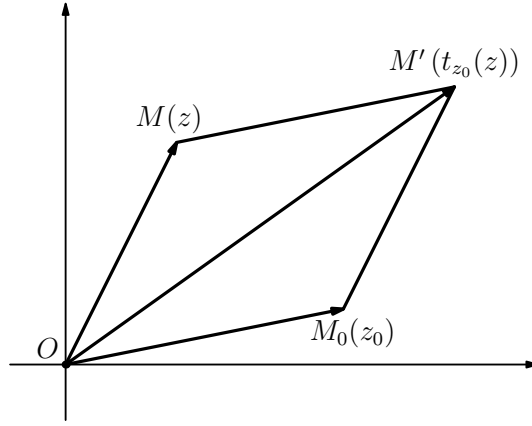


Figura 3.6

Propoziția 3.7.1. (\mathcal{T}, \circ) este grup abelian, unde \mathcal{T} este mulțimea tuturor translațiilor planului complex.

Demonstrație. Compunerea a două translații t_{z_1} și t_{z_2} este o translație, deoarece avem

$$(t_{z_1} \circ t_{z_2})(z) = t_{z_1}(z_2 + z) = z_1 + z_2 + z = t_{z_1+z_2}(z).$$

Ținând cont de relația $t_{z_1} \circ t_{z_2} = t_{z_1+z_2}$, asociativitatea și comutativitatea sunt evidente, elementul neutru este t_0 , iar inversul translației t_{z_0} este t_{-z_0} . \square

Translația $t_{z_0} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $t_{z_0}(z) = z + z_0$, cu $z_0 \neq 0$, nu are puncte fixe. Într-adevăr, avem $t_{z_0}(z) = z$ dacă și numai dacă $z + z_0 = z$, deci $z_0 = 0$, contradicție.

Propoziția 3.7.2. O dreaptă d este invariata de translația t_{z_0} dacă și numai dacă $d \parallel OM_0$, unde M_0 are afixul z_0 .

Demonstrație. Dreapta de ecuație $\bar{\alpha} \cdot \bar{z} + \alpha \cdot z + \beta = 0$ este invariata de t_{z_0} dacă prin transformarea $z' = z + z_0$, adică $z = z' - z_0$, ecuația sa nu se modifică. Avem

$$\bar{\alpha}(\overline{z'} - \overline{z_0}) + \alpha \cdot (z' - z_0) + \beta = 0,$$

ceea ce este echivalent cu

$$(\bar{\alpha} \cdot \overline{z'} + \alpha \cdot z' + \beta) - \bar{\alpha} \cdot \overline{z_0} - \alpha \cdot z_0 = 0.$$

Dreapta coincide cu dreapta inițială dacă și numai dacă are loc relația

$$-\bar{\alpha} \cdot z_0 - \alpha \cdot z_0 = 0,$$

de unde obținem $-\frac{\bar{\alpha}}{\alpha} = \frac{z_0}{\bar{z}_0}$. Prin urmare avem $m_d = m_{OM_0}$, adică $d \parallel OM_0$. \square

Nu există cercuri invariante în raport cu translația t_{z_0} , unde $z_0 \neq 0$, deoarece ca cercul $z \cdot \bar{z} + \alpha \cdot z + \bar{\alpha} \cdot \bar{z} + \beta = 0$ să fie invariant prin t_{z_0} trebuie ca $\alpha - \bar{\alpha} z_0 = \alpha \Leftrightarrow z_0 = 0$, imposibil.

3.7.2 Simetria centrală

Aplicația $s_0 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $s_0(z) = -z$ se numește *simetria centrală* cu centrul în originea planului complex.

Punctul $M'(s_0(z))$ este simetricul punctului $M(z)$ în raport cu originea, deoarece avem $\frac{s_0(z) + z}{2} = \frac{-z + z}{2} = 0$.

Definiția 3.7.3. Fie $z_0 \in \mathbb{C}$ un număr complex. Aplicația $s_{z_0} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $s_{z_0}(z) = 2z_0 - z$ se numește *simetria centrală* de centru $M_0(z_0)$ a planului complex.

Punctul $M'(s_{z_0}(z))$ este simetricul punctului $M(z)$ în raport cu punctul $M_0(z_0)$, centrul simetriei (Figura 3.7), deoarece avem $\frac{s_{z_0}(z) + z}{2} = \frac{2z_0 - z + z}{2} = z_0$.

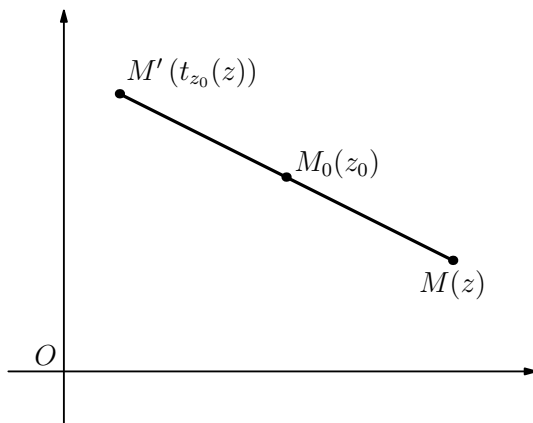


Figura 3.7

Propoziția 3.7.4. *O dreaptă este invariată de simetria centrală dacă și numai dacă dreapta trece prin centrul simetriei.*

Demonstrație. Fie dreapta d de ecuație $\bar{\alpha} \cdot \bar{z} + \alpha \cdot z + \beta = 0$. Dreapta d este fixă (dar nu punct cu punct) în raport cu simetria de centru z_0 , dacă și numai dacă după transformarea $z' = 2z_0 - z$, adică $z = 2z_0 - z'$, dreapta are aceeași ecuație în z' . Avem

$$\bar{\alpha}(2\bar{z}_0 - \bar{z}') + \alpha(2z_0 - z') + \beta = 0,$$

dacă și numai dacă

$$-\bar{\alpha} \cdot \bar{z}' - \alpha \cdot z' + 2\bar{\alpha} \cdot \bar{z}_0 + 2\alpha \cdot z_0 + \beta = 0,$$

adică

$$2\bar{\alpha} \cdot \bar{z}_0 + 2\alpha \cdot z_0 + \beta = -\beta,$$

deci

$$\bar{\alpha} \cdot z_0 + \alpha \cdot z_0 + \beta = 0.$$

Ultima relație arată că $z_0 \in d$. □

Propoziția 3.7.5. *Un cerc este invariabil de o simetrie centrală dacă și numai dacă centrul său coincide cu centrul de simetrie.*

Demonstrație. Fie cercul de ecuație $z \cdot \bar{z} + \alpha \cdot z + \bar{\alpha} \cdot \bar{z} + \beta = 0$. Cercul este invariabil, dacă și numai dacă prin transformarea $z' = 2z_0 - z$ cercul are aceeași ecuație în z' . Avem

$$(2z_0 - z')(2\bar{z}_0 - \bar{z}') + \alpha(2z_0 - z') + \bar{\alpha}(2\bar{z}_0 - \bar{z}') + \beta = 0.$$

Efectuând calculele, obținem că $-\alpha - 2\bar{z}_0 = 0$, deci $z_0 = -\bar{\alpha}$.

Ținând cont că $-\bar{\alpha}$ este centrul cercului, rezultă că centrul simetriei z_0 coincide cu centrul cercului. □

Propoziția 3.7.6. *Compunerea a două simetrii centrale este o translație. Reciproc, orice translație poate fi scrisă ca și compunerea a două simetrii centrale, din care una dintre ele este de centru arbitrar.*

Demonstrație. Fie simetriile $s_{z_1} = 2z_1 - z$ și $s_{z_2} = 2z_2 - z$. Avem

$$(s_{z_1} \circ s_{z_2})(z) = s_{z_1}(s_{z_2}(z)) = s_{z_1}(2z_2 - z) = 2z_1 - 2z_2 + z = t_{2z_1 - 2z_2}(z).$$

Fie translația t_{z_0} și $z_1 \in \mathbb{C}$ arbitrar. Relația $s_{z_1} \circ s_{z_2} = t_{z_0}$ implică $2z_1 - 2z_2 = z_0$, deci $z_2 = \frac{2z_1 - z_0}{2}$. Așadar putem alege simetria centrală s_{z_2} cu centrul $z_2 = \frac{2z_1 - z_0}{2}$ astfel încât $s_{z_1} \circ s_{z_2} = t_{z_0}$. □

3.7.3 Simetria axială

Aplicația $s : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $s(z) = \bar{z}$ se numește *simetria axială* în raport cu axa reală.

Punctul $M'(\bar{z})$ este simetricul lui $M(z)$ în raport cu axa reală.

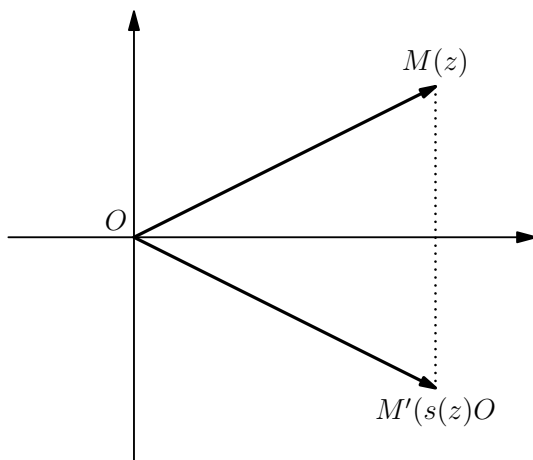


Figura 3.8

Definiția 3.7.7. Fie dreapta $d : \bar{\alpha} \cdot \bar{z} + \alpha \cdot z + \beta = 0$.

Aplicația $s_d : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $s_d(z) = -\frac{\bar{\alpha}}{\alpha} \cdot \bar{z} - \frac{\beta}{\alpha}$ se numește *simetria* în raport cu dreapta d a planului complex.

Afixul piciorului perpendicularei din punctul $M_0(z_0)$ este, conform Propoziției 3.1.7:

$$z_M = \frac{\alpha \cdot z_0 - \bar{\alpha} \cdot \bar{z}_0 - \beta}{2\alpha}.$$

Verificăm dacă într-adevăr $M(z_M)$ este mijlocul segmentului cu capetele $M(z_0)$ și $M'(s_d(z_0))$:

$$\frac{z_0 + s_d(z_0)}{2} = \frac{z_0 - \frac{\bar{\alpha}}{\alpha} \cdot \bar{z}_0 - \frac{\beta}{\alpha}}{2} = \frac{\alpha \cdot z_0 - \bar{\alpha} \cdot \bar{z}_0 - \beta}{2\alpha} = z_M.$$

Definiția simetriei axiale este în acord cu definiția simetriei în raport cu o dreaptă oarecare. Într-adevăr, știm că în ecuația axei reale are loc relația $\alpha + \bar{\alpha} = 0$, adică

$\alpha = -\bar{\alpha}$ și aplicând definiția simetriei în raport cu o dreaptă avem

$$s_d(z) = -\frac{-\alpha}{\alpha}\bar{z} = \bar{z} = s(z).$$

Propoziția 3.7.8. *Simetria în raport cu o dreaptă este involutivă.*

Demonstrație. Avem

$$\begin{aligned} (S_d \circ s_d)(z) &= s_d\left(-\frac{\bar{\alpha}}{\alpha} \cdot \bar{z} - \frac{\beta}{\alpha}\right) = -\frac{\bar{\alpha}}{\alpha} \overline{\left(-\frac{\bar{\alpha}}{\alpha} \cdot \bar{z} - \frac{\beta}{\alpha}\right)} - \frac{\beta}{\alpha} \\ &= -\frac{\bar{\alpha}}{\alpha} \left(-\frac{\alpha}{\bar{\alpha}} \cdot z - \frac{\bar{\beta}}{\bar{\alpha}}\right) - \frac{\beta}{\alpha} = z + \frac{\beta}{\alpha} - \frac{\beta}{\alpha} = z = 1_{\mathbb{C}}(z). \end{aligned} \quad \square$$

Propoziția 3.7.9. *Orice punct al dreptei $d : \bar{\alpha} \cdot \bar{z} + \alpha \cdot z + \beta = 0$ este punct fix pentru simetria s_d .*

Demonstrație. Din ecuația lui d , avem $\bar{z} = \frac{-\alpha}{\bar{\alpha}}z + \frac{-\beta}{\bar{\alpha}}$, prin urmare

$$s_d(z_0) = -\frac{\bar{\alpha}}{\alpha} \cdot \bar{z}_0 - \frac{\beta}{\alpha} z_0 = -\frac{\bar{\alpha}}{\alpha} \left(\frac{-\alpha}{\bar{\alpha}} z_0 + \frac{-\beta}{\bar{\alpha}}\right) - \frac{\beta}{\alpha} z_0 = z_0 + \frac{\beta}{\alpha} z_0 - \frac{\beta}{\alpha} z_0 = z_0.$$

Am folosit faptul că $\bar{\bar{\beta}} = \beta$, deoarece $\beta \in \mathbb{R}$.

Propoziția 3.7.10. *Orice dreaptă d' perpendiculară pe dreapta d este fixă pentru simetria s_d , dar nu punct cu punct.*

Demonstrație. Conform Propoziției 3.1.6 ecuația lui d' perpendiculară pe d , care trece prin z_0 este

$$d' : z - z_0 = \frac{\bar{\alpha}}{\alpha}(\bar{z} - \bar{z}_0).$$

Arătăm că $z' \in d'$ dacă și numai dacă $s_d(z') \in d'$. Într-adevăr, avem

$$\begin{aligned} s_d(z') \in d' &\Leftrightarrow -\frac{\bar{\alpha}}{\alpha} \bar{z}' - \frac{\beta}{\alpha} \in d' \Leftrightarrow -\frac{\bar{\alpha}}{\alpha} \bar{z}' - \frac{\beta}{\alpha} - z_0 = \frac{\bar{\alpha}}{\alpha} \left(-\frac{\alpha}{\bar{\alpha}} \cdot z' - \frac{\beta}{\bar{\alpha}} - \bar{z}_0\right) \\ &\Leftrightarrow z' - z_0 = \frac{\bar{\alpha}}{\alpha}(\bar{z}' - \bar{z}_0) \Leftrightarrow z' \in d'. \end{aligned} \quad \square$$

3.7.4 Rotația

Fie $\varepsilon = \cos \alpha + i \sin \alpha$ un număr complex de modul 1 și $z_0 \in \mathbb{C}$. Aplicația

$$r_{z_0, \alpha} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad r_{z_0, \alpha}(z) = \varepsilon(z - z_0) + z_0$$

se numește *rotația* de centru z_0 și unghi α .

Dacă $z_0 = 0$ atunci rotația $r_\alpha(z) = \varepsilon z$ este rotația cu centrul în origine.

Fie M_0 imaginea punctului z_0 , M imaginea lui z , iar M' este imaginea lui $z' = r_{z_0, \alpha}(z)$. Considerăm punctul M_1 astfel încât figura OM_0MM_1 este paralelogram. Atunci afixul lui M_1 , adică z_1 satisface relația $z_1 + z_0 = z + 0$. Rezultă că $z_1 = z - z_0$. Considerăm punctul M'_1 astfel încât figura $OM_0M'_1M'_1$ să fie paralelogram. Așadar afixul lui M'_1 este $\varepsilon(z - z_0)$ deoarece are loc $\widehat{MM_0M'_1} \equiv \widehat{M_1OM'_1} = \alpha$. Rezultă că afixul z' al punctului M' satisface condiția

$$z' + 0 = \varepsilon(z - z_0) + z_0.$$

Propoziția 3.7.11. *Compunerea dintre două rotații de același centru $O(z_0)$ și unghiuri $\alpha_1 = \arg \varepsilon_1$, respectiv $\alpha_2 = \arg \varepsilon_2$, este o rotație de centru $O(z_0)$ și de unghi $\alpha_1 + \alpha_2$.*

Demonstrație. Compunerea rotațiilor r_{z_0, α_1} și r_{z_0, α_2} este

$$(r_{z_0, \alpha_1} \circ r_{z_0, \alpha_2})(z) = r_{z_0, \alpha_1}(\varepsilon_2 z - \varepsilon_2 z_0 + z_0) = \varepsilon_1 \varepsilon_2 (z - z_0) + z_0 = r_{z_0, \alpha_1 + \alpha_2}(z).$$

□

Evident, compunerea a două rotații de același centru este comutativă.

Teorema 3.7.12. *Compunerea dintre două rotații de centre diferite $O_1(z_1)$, respectiv $O_2(z_2)$ și unghiuri $\alpha_1 = \arg \varepsilon_1$, respectiv $\alpha_2 = \arg \varepsilon_2$, este o translație sau o rotație.*

Demonstrație. Cele două rotații sunt

$$r_{z_1, \alpha_1}(z) = \varepsilon_1(z - z_1) + z_1 \quad \text{și} \quad r_{z_2, \alpha_2}(z) = \varepsilon_2(z - z_2) + z_2.$$

Compunerea lor este

$$(r_{z_1, \alpha_1} \circ r_{z_2, \alpha_2})(z) = \varepsilon_1[\varepsilon_2(z - z_2) + z_2 - z_1] + z_1 = \varepsilon_1 \varepsilon_2 z - \varepsilon_1 \varepsilon_2 z_2 + \varepsilon_1 z_2 - \varepsilon_1 z_1 + z_1.$$

Distingem cazurile următoare.

1) Dacă $\varepsilon_1 \varepsilon_2 = 1$ rezultă că avem

$$(r_{z_1, \alpha_1} \circ r_{z_2, \alpha_2})(z) = z - z_2 + \varepsilon_1(z_2 - z_1) + z_1 = z + (\varepsilon_1 - 1)(z_2 - z_1) = t_{(\varepsilon_1 - 1)(z_2 - z_1)}(z).$$

2) Dacă $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \neq 1$ compunerea rotațiilor este o rotație r_{z_3, α_3} , al cărei centru z_3 și unghi α_3 vor fi identificați din relația $r_{z_1, \alpha_1} \circ r_{z_2, \alpha_2} = r_{z_3, \alpha_3}$, adică

$$\varepsilon_1 \varepsilon_2 z - \varepsilon_1 \varepsilon_2 z_2 + \varepsilon_1 z_2 - \varepsilon_1 z_1 + z_1 = \varepsilon_3 z - \varepsilon_3 z_3 + z_3.$$

Rezultă că

$$\varepsilon_3 = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \quad \text{și} \quad z_3 = \frac{(1 - \varepsilon_1)z_1 + \varepsilon_1(1 - \varepsilon_2)z_2}{1 - \varepsilon_1 \varepsilon_2}.$$

□

Observația 3.7.13. 1) Compunerea dintre două rotații de centre diferite și unghiuri diferite nu este comutativă.

2) Compunerea dintre două rotații de centre diferite și același unghi nu este comutativă.

Teorema 3.7.14. (invarianții rotației). O rotație $r_{z_0, \alpha}$ de centru $O(z_0)$ și unghi $\alpha = \arg \varepsilon$, unde $\varepsilon \neq \pm 1$, are ca invarianți:

- a) punctul $O(z_0)$;
- b) cercurile de centru $O(z_0)$.

Demonstrație. a) Un punct z' este fix pentru rotație, dacă avem $r_{z_0, \varepsilon}(z') = z'$, adică $\varepsilon(z' - z_0) + z_0 = z'$, deci $z'(\varepsilon - 1) = z_0(\varepsilon - 1)$, prin urmare $z' = z_0$.

b) Demonstrație pentru cazul în care $z_0 = 0$, adică arătăm că cercurile invariante rotației cu centrul în origine $r_\varepsilon(z) = \varepsilon z$ sunt cercurile cu centrul în origine. Ecuația unui cerc în planul complex este

$$z \cdot \bar{z} + \alpha \cdot z + \bar{\alpha} \cdot \bar{z} + \beta = 0.$$

Transformatul punctului z este $z' = \varepsilon z$, de unde $z = \frac{z'}{\varepsilon} = \bar{\varepsilon} z'$. Rezultă că ecuația cercului transformat este

$$z' \cdot \bar{z'} + \alpha \cdot \bar{\varepsilon} \cdot z' + \bar{\alpha} \cdot \varepsilon \cdot \bar{z'} + \beta = 0.$$

Cercul transformat coincide cu cercul inițial doar în cazul în care $\alpha = 0$. În acest caz cercul inițial are ecuația

$$z \cdot \bar{z} + \beta = 0, \quad \beta < 0,$$

adică este un cerc cu centrul în origine. \square

Propoziția 3.7.15. *Nu există nicio dreaptă a planului complex invariantă în raport cu rotația $r_{z_0, \arg \varepsilon}$, unde $\varepsilon \neq \pm 1$.*

Demonstrație. Demonstrație pentru cazul în care rotația este cu centrul în origine, adică $r_\varepsilon(z) = \varepsilon z$. Așadar, $z' = \varepsilon z$ este transformatul punctului z . Ecuația unei drepte în planul complex este

$$\alpha \cdot z + \bar{\alpha} \cdot \bar{z} + \beta = 0.$$

Ținând cont că $z = \frac{z'}{\varepsilon} = \bar{\varepsilon} z'$ dreapta transformată are ecuația

$$\alpha \cdot \bar{\varepsilon} \cdot z' + \bar{\alpha} \cdot \varepsilon \cdot \bar{z}' + \beta = 0,$$

care coincide cu dreapta inițială doar în cazul în care $\alpha = 0$. \square

Teorema 3.7.16. *Fie dreptele a și b concurente în punctul O de afix z_0 . Fie $\alpha = \widehat{(a, b)}$ unghiul de rotație care transformă pe a în b . Atunci $s_b \circ s_a = r_{z_0, 2\alpha}$. Reciproc, orice rotație $r_{z_0, 2\alpha} = s_b \circ s_a$, unde dreptele a și b sunt concurente în $O(z_0)$, dreapta a este aleasă arbitrar, iar $\widehat{(a, b)} = \alpha$.*

Demonstrație. Considerăm simetriile axiale

$$s_a(z) = -\frac{\bar{\alpha}_1}{\alpha_1} \cdot \bar{z} - \frac{\beta_1}{\alpha_1}, \quad s_b(z) = -\frac{\bar{\alpha}_2}{\alpha_2} \cdot \bar{z} - \frac{\beta_2}{\alpha_2}.$$

Pentru că $z_0 \in a, b$ rezultă că

$$\alpha_1 \cdot \bar{z}_0 + \alpha_1 \cdot z_0 + \beta_1 = 0, \quad \alpha_2 \cdot \bar{z}_0 + \alpha_2 \cdot z_0 + \beta_2 = 0.$$

Ținând cont de relațiile de mai sus, după calcule avem

$$(s_b \circ s_a)(z) = \frac{\bar{\alpha}_2 \cdot \alpha_1}{\alpha_2 \cdot \bar{\alpha}_1} (z - z_0 + z_0 = r_{z_0, \varepsilon}(z)).$$

Dacă $\arg \alpha_1 > \arg \alpha_2$ are loc

$$\arg \varepsilon = \arg \frac{\bar{\alpha}_2 \cdot \alpha_1}{\alpha_2 \cdot \bar{\alpha}_1} = 2(\arg \alpha_1 - \arg \alpha_2) = 2 \arg \alpha_1 \cdot \bar{\alpha}_2 = 2\widehat{(a, b)}. \quad \square$$

3.7.5 Expresia analitică a izometriilor planului complex

O transformare geometrică $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ se numește izometrie dacă păstrează distanța, adică pentru orice $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ avem

$$|f(z_1) - f(z_2)| = |z_1 - z_2|.$$

Teorema 3.7.17. *Translațiile, simetriile și rotațiile sunt izometrii ale planului complex.*

Demonstrație. Pentru o translație t_{z_0} are loc

$$|t_{z_0}(z_1) - t_{z_0}(z_2)| = |(z_1 + z_0) - (z_2 + z_0)| = |z_1 - z_2|.$$

Pentru simetria s față de axa reală și analog față de un punct avem

$$|s(z_1) - s(z_2)| = |\bar{z}_1 - \bar{z}_2| = |\overline{z_1 - z_2}| = |z_1 - z_2|.$$

Pentru rotația r_a avem

$$|r_a(z_1) - r_a(z_2)| = |az_1 - az_2| = |a| \cdot |z_1 - z_2| = |z_1 - z_2|,$$

deoarece $|a| = 1$. □

Mulțimea $Izo(\mathbb{C})$ a tuturor izometriilor planului complex, cu operația de compunere, formează un grup. Grupul (\mathcal{T}, \circ) al translațiilor planului complex este subgrup al lui $Izo(\mathbb{C})$.

Teorema 3.7.18. *Orice izometrie a planului complex este o funcție $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, cu $f(z) = az + b$ sau $f(z) = a\bar{z} + b$, unde $a, b \in \mathbb{C}$, cu $|a| = 1$.*

Demonstrație. Fie $b = f(0)$, $c = f(1)$ și $a = c - b$. Atunci avem

$$|a| = |c - b| = |f(1) - f(0)| = |1 - 0| = 1.$$

Considerăm funcția $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, definită prin $g(z) = az + b$. Se arată ușor că g este o izometrie, cu $g(0) = b = f(0)$ și $g(1) = a + b = c = f(1)$. $h = g^{-1}$ este o izometrie, cu 0 și 1 puncte fixe. Din definiția lui h , rezultă că orice număr real este punct fix pentru h , așadar $h = 1_{\mathbb{C}}$ sau $h = s$, simetria față de axa reală. □

Rezultatul anterior ne arată că orice izometrie a planului complex este compunerea unei rotații cu o translație sau compunerea unei rotații cu o simetrie centrală cu centrul în origine și o translație.

3.8 Transformări neizometrice ale planului complex

3.8.1 Omotetia

Fie $z_0 \in \mathbb{C}$ fixat și $k \in \mathbb{R}^*$ un număr real. Se numește *omotetie* de centru z_0 și raport k aplicația:

$$h_{z_0, k} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad h_{z_0, k} = k(z - z_0) + z_0.$$

Punctul $M'(z')$ se numește *omoteticul* lui $M(z)$, dacă $z' = h_{z_0, k}(z)$.

Observația 3.8.1. (cazuri particulare ale omotetiei)

1. Dacă $z_0 = 0$, aplicația $h_{0, k}$ este omotetia cu centrul în origine și raport k .
2. Pentru $k = 1$, obținem $h_{z_0, 1}(z) = z = 1_{\mathbb{C}}(z)$, unde $1_{\mathbb{C}}$ este transformarea identică a planului complex.
3. Dacă avem $k = -1$, atunci $h_{z_0, -1}(z) = 2z_0 - z = s_{z_0}(z)$ caz în care omotetia coincide cu simetria de centru z_0 .

Teorema 3.8.2. (punctele fixe ale omotetiei) Dacă avem $k \neq 1$, adică omotetia diferă de $1_{\mathbb{C}}$, atunci singurul punct fix al omotetiei $h_{z_0, k}$ este punctul z_0 , centrul omotetiei.

Demonstrație. Condiția ca $z_1 \in \mathbb{C}$ să fie punct fix al omotetiei este $z_1 = h_{z_0, k}(z_1)$, adică $z_1 = k(z_1 - z_0) + z_0$, deci $(k - 1)(z_1 - z_0) = 0$ și obținem $z_1 = z_0$. \square

Teorema 3.8.3. Fiind dată o omotetie de centru z_0 și un punct $z \in \mathbb{C}$ cu $z \neq z_0$, punctele $M(z)$, $M_0(z_0)$ și $M'(z')$, unde z' este omoteticul lui z , sunt coliniare.

Demonstrație. Condiția de coliniaritate revine la $\frac{z' - z_0}{z - z_0} \in \mathbb{R}^*$. Avem

$$\frac{z' - z_0}{z - z_0} = \frac{k(z - z_0) + z_0 - z_0}{z - z_0} = k \in \mathbb{R}^*,$$

deci punctele M , M_0 , M' sunt coliniare. \square

Observația 3.8.4. 1) Dacă avem $k > 0$, atunci $M' \in (M_0M)$. Dacă avem $k < 0$, atunci $M_0 \in [M'M]$.

2) Are loc egalitatea $|M_0M'| = |k| \cdot |M_0M|$, deoarece

$$|M_0M'| = |k(z - z_0) + z_0 - z_0| = |k| \cdot |z - z_0| = |k| \cdot |M_0M|.$$

Teorema 3.8.5. (dreptele invariante ale omotetiei) *Dreptele invariante ale omotetiei $h_{z_0, k}$ sunt dreptele care trec prin centrul omotetiei z_0 .*

Demonstrație. Fie dreapta d de ecuație $\bar{\alpha} \cdot \bar{z} + \alpha \cdot z + \beta = 0$. Fie z' omoteticul lui z , adică $z' = k(z - z_0) + z_0$. Așadar, $z = \frac{1}{k}(z' - z_0) + z_0$. Ecuația dreptei transformate este:

$$\bar{\alpha} \cdot \bar{z}' - \bar{\alpha} \cdot \bar{z}_0 + k \cdot \bar{\alpha} \cdot \bar{z}_0 + \alpha \cdot z' - \alpha \cdot z_0 + \alpha \cdot k \cdot z_0 + \beta \cdot k = 0.$$

Pentru ca d să fie invariantă trebuie ca

$$-\bar{\alpha} \cdot \bar{z}_0 + k \cdot \bar{\alpha} \cdot \bar{z}_0 - \alpha \cdot z_0 + \alpha \cdot k \cdot z_0 + \beta \cdot k = \beta$$

cea ce este echivalent cu $(\alpha \cdot \bar{z}_0 + \alpha \cdot z_0 + \beta)(k - 1) = 0$ adică avem $z_0 \in d$. \square

Teorema 3.8.6. *Fie $h_{z_0, k}$ omotetia de centru $M_0(z_0)$ și raport k iar $A(a)$ și $B(b)$ două puncte distincte în planul complex. Dacă $A'(a') = h_{z_0, k}(a)$ și $B'(b') = h_{z_0, k}(b)$ sunt omoteticile punctelor A și B atunci au loc proprietățile:*

- 1) $AB \parallel A'B'$;
- 2) $h_{z_0, k}([AB]) = [A'B']$ este un segment;
- 3) $|A'B'| = |k| \cdot |AB|$.

Demonstrație. 1) Conform Observației 3.8.4.2), avem că

$$M_0A' = |k| \cdot M_0A \quad \text{și} \quad M_0B' = |k| \cdot M_0B.$$

Rezultă

$$\frac{M_0A'}{M_0A} = \frac{M_0B'}{M_0B}, \quad \text{deci} \quad A'B' \parallel AB.$$

2) Avem

$$\begin{aligned} M' \in (A'B') &\Leftrightarrow |a' - b'| = |a' - m'| + |m' - b'| \Leftrightarrow \\ |k(a - z_0) + z_0 - k(b - z_0) - z_0| &= |k(a - z_0) + z_0 - k(m - z_0) - z_0| \\ &+ |k(m - z_0) + z_0 - k(b - z_0) - z_0| \Leftrightarrow \\ |a - b| &= |a - m| + |m - b| \Leftrightarrow M \in (AB). \end{aligned}$$

3) Observăm că

$$|A'B'| = |k(a - z_0) + z_0 - k(b - z_0) - z_0| = |k| \cdot |a - b| = |k| \cdot |AB|. \quad \square$$

Teorema 3.8.7. *Imaginea unei drepte d care nu trece prin centrul omotetiei $h_{z_0,k}$ este o dreaptă d' paralelă cu d care nu trece prin centrul omotetiei.*

Demonstrație. Fie dreapta d de ecuația $\bar{\alpha} \cdot \bar{z} + \alpha \cdot z + \beta = 0$. Dreapta d' obținută prin transformarea $z' = k(z - z_0) + z_0$ are ecuația

$$\bar{\alpha} \cdot \bar{z} - \bar{\alpha} \cdot \bar{z}_0 + k \cdot \bar{\alpha} \cdot \bar{z}_0 + \alpha \cdot z - \alpha \cdot z_0 + \alpha \cdot k \cdot z_0 + \beta \cdot k = 0.$$

Coeficientul unghiular al lui d' este $m_{d'} = -\frac{\bar{\alpha}}{\alpha} = m_d$.

Verificăm dacă $M_0(z_0)$ aparține dreptei d' și avem

$$\bar{\alpha} \cdot \bar{z}_0 - \bar{\alpha} \cdot \bar{z}_0 + k \cdot \bar{\alpha} \cdot \bar{z}_0 + \alpha \cdot z_0 - \alpha \cdot z_0 + \alpha \cdot k \cdot z_0 + \beta \cdot k = k(\bar{\alpha} \cdot \bar{z}_0 + \alpha \cdot z_0 + \beta) \neq z_0$$

deoarece $k \neq 0$ și M nu aparține lui d . Așadar, z_0 nu verifică ecuația dreptei d' . \square

Teorema 3.8.8. *Prin omotetia $h_{z_0,k}$ un cerc se transformă într-un cerc.*

Demonstrație. Considerăm un cerc de rază R și fie M un punct oarecare de pe cerc. Arătăm că omoteticul lui M , adică M' se află pe cercul cu centrul în O' , omoteticul lui O , și rază $R' = |k| \cdot R$. Conform Teoremei 3.8.6, avem că $O'M' = |k| \cdot OM = |k| \cdot R$. Așadar, M' se află la distanță constantă de O' , deci se află pe cercul cu centrul în O' și raza $|k| \cdot R$. \square

Teorema 3.8.9. *Fie $z_0 \in \mathbb{C}$ și $\mathcal{H} = \{h_{z_0,k} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : h_{z_0,k}(z) = k(z - z_0) + z_0, k \in \mathbb{R}^*\}$, mulțimea tuturor omotetiilor cu centrul în z_0 . (\mathcal{H}, \circ) este un grup abelian izomorf cu (\mathbb{R}^*, \cdot) .*

Demonstrație. Compunerea a două omotetii cu centrul în z_0 este o omotetie cu centrul în z_0 . Fie $h_{z_0,k_1}, h_{z_0,k_2} \in \mathcal{H}$. Avem

$$(h_{z_0,k_1} \circ h_{z_0,k_2})(z) = k_1[k_2(z - z_0) + z_0 - z_0] = k_1k_2(z - z_0) + z_0 = h_{z_0,k_1k_2}(z) \in \mathcal{H}.$$

Comutativitatea este evidentă, asociativitatea rezultă din asociativitatea compunerii funcțiilor în general. Elementul neutru este transformarea identică $1_{\mathbb{C}} = h_{z_0,1}$. Se observă imediat că oricare ar fi $h_{z_0,k} \in \mathcal{H}$, avem

$$h_{z_0,k} \circ h_{z_0,k^{-1}} = h_{z_0,k \cdot k^{-1}} = h_{z_0,1} = 1_{\mathbb{C}}.$$

Așadar $h_{z_0,k}$ este inversabilă cu inversa $h_{z_0,k^{-1}}$.

Izomorfismul dintre grupurile (\mathcal{H}, \circ) și (\mathbb{R}^*, \cdot) este definit de aplicația $h_{z_0,k} \mapsto k$. \square

Aplicația 3.8.10. Fie M un punct în interiorul triunghiului echilateral ABC și fie M_1, M_2, M_3 picioarele perpendicularelor duse din M pe laturile BC, CA, AB . Aflați locul geometric al centrului de greutate al triunghiului $M_1M_2M_3$.

Fie $1, \varepsilon, \varepsilon^2$ afixele punctelor A, B, C , unde $\varepsilon = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$. Deoarece triunghiul ABC este echilateral, avem că $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0, \varepsilon^3 = 1$. Dacă m, m_1, m_2, m_3 sunt afixele punctelor M, M_1, M_2, M_3 , atunci avem

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{1}{2}(1 + \varepsilon + m - \varepsilon \cdot \overline{m}), \\ m_2 &= \frac{1}{2}(\varepsilon + \varepsilon^2 + m - \overline{m}), \\ m_3 &= \frac{1}{2}(\varepsilon^2 + 1 + m - \varepsilon^2 \cdot \overline{m}). \end{aligned}$$

Fie g coordonata centrului de greutate al triunghiului $M_1M_2M_3$. Atunci avem

$$g = \frac{1}{3}(m_1 + m_2 + m_3) = \frac{1}{6}(2(1 + \varepsilon + \varepsilon^2) + 3m - \overline{m}(1 + \varepsilon + \varepsilon^2)) = \frac{m}{2},$$

de unde $OG = \frac{1}{2}OM$.

Locul geometric al lui G este interiorul triunghiului obținut din ABC printr-o omotetie de centru O și raport $\frac{1}{2}$. Altfel spus, vârfurile acestui triunghi au afixele $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\varepsilon, \frac{1}{2}\varepsilon^2$.

3.8.2 Omotetia spiralată

Fie $z_0, \alpha \in \mathbb{C}$. Se numește *omotetie spiralată* de centru z_0 și raport $|\alpha|$ aplicația

$$f_{z_0, \alpha} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad f_{z_0, \alpha}(z) = z_0 + \alpha(z - z_0).$$

Omotetia spiralată cu centrul în origine este de forma $f_\alpha(z) = \alpha z$.

Propoziția 3.8.11. *Omotetia spiralată este compunerea dintre o rotație de centru z_0 și unghi $\arg \alpha$ și omotetia de centru z_0 și raport $|\alpha|$.*

Demonstrație. Fie $\alpha = r(\cos \theta + i \sin \theta)$. Rotația de centru z_0 și unghi $\arg \alpha$ este

$$r_{z_0, \theta}(z) = (\cos \theta + i \sin \theta)(z - z_0) + z_0.$$

Omotetia de centru z_0 și raport $|\alpha|$ este definită de $h_{z_0,r}(z) = r(z - z_0) + z_0$. Atunci avem

$$\begin{aligned} r_{z_0,\theta} \circ h_{z_0,r}(z) &= (\cos \theta + i \sin \theta)[r(z - z_0) + z_0 - z_0] + z_0 \\ &= z_0 + r(\cos \theta + i \sin \theta)(z - z_0) \\ &= z_0 + \alpha(z - z_0) = f_{z_0,\alpha}(z). \end{aligned}$$

□

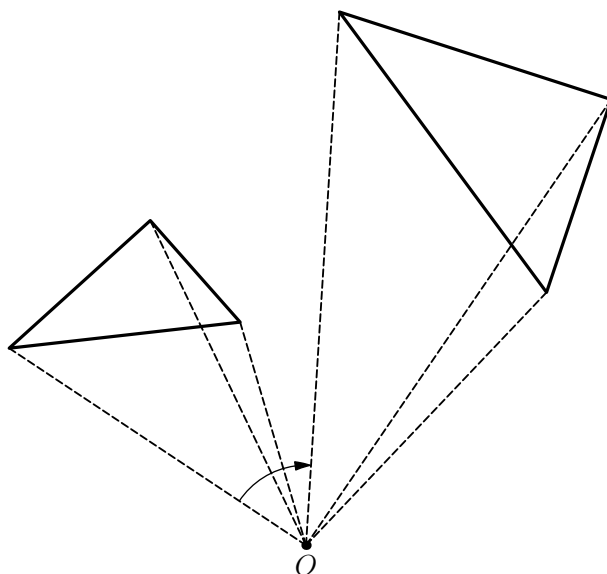


Figura 3.9

Propoziția 3.8.12. Fie A, B, C, D patru puncte distincte în plan, astfel încât $ABCD$ nu este paralelogram. Atunci există o unică omotetie spiralată care transformă pe A în B și pe C în D .

Demonstrație. Fie a, b, c, d afixele celor patru puncte. Dacă $ABCD$ ar fi paralelogram, ar însemna că diagonalele se înjumătățesc, adică $\frac{a+d}{2} = \frac{b+c}{2}$. Deoarece $ABCD$ nu este paralelogram, rezultă că avem $a - b - c + d \neq 0$. Faptul că A se transformă

în C și B în D este echivalent cu sistemul

$$\begin{cases} z_0 + \alpha(a - z_0) = c \\ z_0 + \alpha(b - z_0) = d. \end{cases}$$

Rezolvând sistemul obținem soluția unică

$$\alpha = \frac{c - a}{a - b}, \quad z_0 = \frac{ad - bc}{a - b - c + d}.$$

□

Lema 3.8.13. Fie A, B, C, D patru puncte în plan astfel încât AC nu este paralelă cu BD . Fie X intersecția dreptelor AC și BD . Fie O celălalt punct de intersecție al cercurilor circumscrise triunghiurilor ABX și CDX . Atunci O este centrul omotetiei spiralate unice care transformă pe A în C și pe B în D .

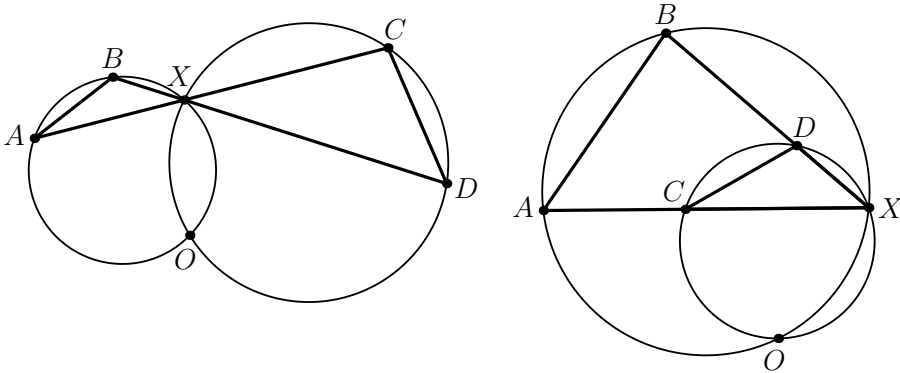


Figura 3.10

Demonstrație. În demonstrație folosim unghiuri orientate modulo π pentru a descrie toate situațiile. Notăm cu $\angle(l_1, l_2)$ unghiul rotației care transformă pe l_1 în l_2 . Punctele A, B, X, O sunt conciclice, deci avem

$$\angle(OA, AX) = \angle(OB, BX) \Rightarrow \angle(OA, AC) = \angle(OB, BD).$$

Analog, punctele D, C, X, O sunt conciclice, așadar

$$\angle(OC, CX) = \angle(OD, DX) \Rightarrow \angle(OC, CA) = \angle(OD, DB).$$

Rezultă că triunghiurile AOC și BOD sunt asemenea și au aceeași orientare. Considerând O originea planului complex și a, b, c, d afixele punctelor A, B, C, D , asemănarea de triunghiuri este echivalentă cu $\frac{c}{a} = \frac{b}{d}$. Omotetia spiralată cu centrul în O este dată de $f_{\frac{c}{a}}(z) = \frac{c}{a} \cdot z = \frac{d}{b} \cdot z$. Rezultă că $f_{\frac{c}{a}}(a) = c$, $f_{\frac{c}{a}}(b) = d$. \square

Dacă O este centrul omotetiei spiralate care transformă pe A în C și pe B în D , atunci O este centrul omotetiei spiralate care transformă pe A în B și pe C în D .

Am arătat anterior că $\frac{c}{a} = \frac{d}{b}$, ceea ce este echivalent cu $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$. Astfel, omotetia spiralată cu centrul în origine

$$f_{\frac{b}{a}}(z) = \frac{b}{a} \cdot z = \frac{d}{c} \cdot z$$

verifică relațiile $f(a) = b$ și $f(c) = d$.

Lema 3.8.14. *Fie punctele A, B, C coliniare. Imaginile lor A', B', C' printr-o omotetie spiralată sunt coliniare și se păstrează rapoartele între segmente, deci avem $\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}$.*

Demonstrație. Fie a, b, c afixele punctelor A, B, C . Fie omotetia spiralată $f_p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f_p(z) = pz$, $p \in \mathbb{C}$. Afixele imaginilor punctelor a, b, c sunt pa, pb, pc . Avem că punctele A, B, C sunt coliniare dacă și numai dacă $\frac{a-b}{c-b} \in \mathbb{R}^*$. Rezultă că $\frac{pa-pb}{pc-pb} \in \mathbb{R}^*$, adică punctele de afixe pa, pb, pc sunt coliniare. Mai mult, avem

$$\frac{A'B'}{A'C'} = \left| \frac{pa-pb}{pa-pc} \right| = \frac{|a-b|}{|a-c|} = \frac{AB}{AC}. \quad \square$$

Aplicația 3.8.15. Fie triunghiurile AB_1C_1 , AB_2C_2 și AB_3C_3 asemenea. Dacă punctele B_1, B_2, B_3 sunt coliniare atunci și punctele C_1, C_2, C_3 sunt coliniare.

Fie A originea planului complex. Asemănarea de triunghiuri se rescrie cu numere complexe

$$\frac{c_1}{b_1} = \frac{c_2}{b_2} = \frac{c_3}{b_3}.$$

Considerăm omotetia spiralată cu centrul în A :

$$f_{\frac{c_1}{b_1}}(z) = \frac{c_1}{b_1} \cdot z.$$

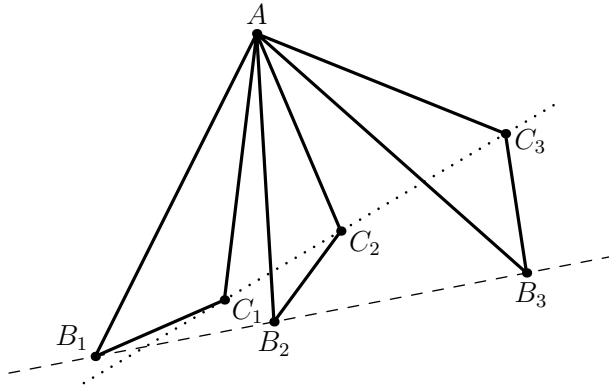


Figura 3.11

Are loc

$$f_{\frac{c_1}{b_2}}(b_1) = c_1, \quad f_{\frac{c_1}{b_2}}(b_2) = c_2, \quad f_{\frac{c_1}{b_2}}(b_3) = c_3.$$

Cum punctele B_1, B_2, B_3 sunt coliniare, rezultă pe baza Lemei 3.8.14 că și punctele C_1, C_2, C_3 sunt coliniare.

Aplicația 3.8.16. Fie triunghiul ABC echilateral. Se consideră punctele $M \in AB$ și $P \in CB$ astfel încât $MP \parallel AC$. Punctul D este centrul de greutate al triunghiului MBP și E este mijlocul lui PA . Aflați unghiurile triunghiului DEC .

Considerăm originea planului complex în D . Fie a, b, c, m, p afixele punctelor A, B, C, M, P . Fie H și K mijloacele segmentelor MP și BP . Considerăm omotetia spiralată definită de

$$f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad f(z) = \frac{h}{p} \cdot z.$$

Deoarece D este centrul de greutate al triunghiului MBP , B se obține prin rotația cu 120° a lui P , adică avem

$$b = p\varepsilon, \quad \varepsilon = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}.$$

$$\text{Avem } f(p) = h \text{ și } f(b) = \frac{h}{p} \cdot b = \frac{h \cdot \varepsilon \cdot p}{p} = h \cdot \varepsilon = k.$$

Fie E' astfel încât $f(c) = e'$. Cum punctele B, P, C sunt coliniare, conform Lemei

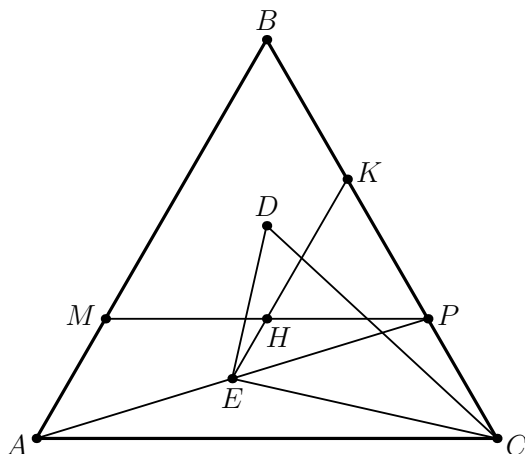


Figura 3.12

3.8.14, rezultă că punctele K, H, E' sunt coliniare astfel încât $\frac{BC}{BP} = \frac{KE'}{KH}$. Dar K, H, E sunt coliniare și $\frac{KE}{KH} = \frac{AB}{BM} = \frac{BC}{BP}$, așadar $\frac{KE'}{KH} = \frac{KE}{KH}$. Rezultă că $E' = E$, adică $f(c) = e$. Rezultă că \widehat{EDC} este $\arg \frac{h}{p} = 60^\circ$ și $\frac{DE}{DC} = \left| \frac{h}{p} \right| = \frac{1}{2}$. Triunghiul CDE este dreptunghic cu unghiurile $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$.

3.8.3 Asemănarea

O aplicație $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ se numește *asemănare* de raport $k \in \mathbb{R}_+^*$, dacă

$$|f(z_1) - f(z_2)| = k \cdot |z_1 - z_2|, \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$

Dacă avem $k = 1$, asemănarea devine izometrie.

Dacă înlocuim în definiția asemănării numerele complexe z_1, z_2 cu imaginile lor geometrice A, B obținem

$$A'B' = k \cdot AB, \forall A, B \in \mathcal{P}.$$

Lema 3.8.17. Fie $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ o izometrie cu $f(0) = 0$ și $f(1) = 1$. Atunci $f(z) = z$ sau $f(z) = \bar{z}$.

Demonstrație. Folosim faptul că f fixează pe 0 și 1 și obținem relațiile

$$|f(z)| = |z|, \quad |f(z) - 1| = |z - 1|.$$

În relația a doua folosim faptul că $|w|^2 = w \cdot \bar{w}$, $\forall w \in \mathbb{C}$. Obținem

$$(f(z) - 1) \cdot \overline{(f(z) - 1)} = (z - 1) \cdot \overline{(z - 1)},$$

adică

$$f(z) \cdot \overline{(f(z))} - f(z) - \overline{f(z)} + 1 = z \cdot \bar{z} - z - \bar{z} + 1,$$

deci

$$|f(z)|^2 - f(z) - \overline{f(z)} = |z|^2 - z - \bar{z}.$$

Folosind faptul că $|f(z)| = |z|$ obținem că $f(z) + \overline{f(z)} = z + \bar{z}$, adică obținem $\operatorname{Re} f(z) = \operatorname{Re} z$. Din nou, folosind prima relație, obținem că $\operatorname{Im} f(z) = \pm \operatorname{Im} z$, așadar $f(z) = z$ sau $f(z) = \bar{z}$. \square

Teorema 3.8.18. (expresia analitică a asemănării) *Orice asemănare a planului complex de raport k are una din formele: $f(z) = az + b$ sau $f(z) = a\bar{z} + b$, cu $a, b \in \mathbb{C}$ și $|a| = k$.*

Demonstrație. Fie f o asemănare a planului complex de raport k . Considerăm $a, b \in \mathbb{C}$ definite prin

$$a = f(1) - f(0), \quad b = f(0).$$

Se observă că avem

$$|a| = |f(1) - f(0)| = k \cdot |1 - 0| = k.$$

Considerăm funcția g definită prin

$$g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad g(z) = \frac{f(z) - b}{a}.$$

Arătăm că g este o izometrie cu 0 și 1 puncte fixe. Pentru $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, avem

$$\begin{aligned} |g(z_1) - g(z_2)| &= \left| \frac{f(z_1) - b - f(z_2) + b}{a} \right| = \frac{1}{|a|} \cdot |f(z_1) - f(z_2)| \\ &= \frac{1}{k} \cdot k \cdot |z_1 - z_2| = |z_1 - z_2|. \end{aligned}$$

În plus

$$g(0) = \frac{f(0) - f(0)}{f(1) - f(0)} = 0 \quad \text{și} \quad g(1) = \frac{f(1) - f(0)}{f(1) - f(0)} = 1.$$

Aplicând Lema 3.8.17 funcției g , obținem $g(z) = z$ sau $g(z) = \bar{z}$. Rezultă din definiția lui g că $f(z) = az + b$ sau $f(z) = a\bar{z} + b$ cu $|a| = k$. \square

Asemănările planului complex de forma $f(z) = az + b$, se numesc *transformări afine de speța 1*, iar asemănările de forma $g(z) = a\bar{z} + b$ poartă numele de *transformări afine de speța 2*, unde $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$.

Teorema 3.8.19. (descompunerea transformărilor afine de speța 1) *Se consideră asemănarea $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = az + b$, $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$. Au loc următoarele afirmații:*

1) *Dacă $z_0 \in \mathbb{C}$ este punct fix pentru f , atunci are loc descompunerea*

$$f = h_{z_0, |a|} \circ r_{z_0, \arg \frac{a}{|a|}}.$$

2) *Dacă $z_0 \in \mathbb{C}$ nu este punct fix pentru f , atunci are loc descompunerea*

$$f = t_{v_0 - z_0} \circ h_{z_0, |a|} \circ r_{z_0, \arg \frac{a}{|a|}} = h_{z'_0, |a|} \circ r_{z_0, \arg \frac{a}{|a|}},$$

$$\text{unde } v_0 = f(z_0) \text{ și } z'_0 = \frac{v_0 - |a|z_0}{1 - |a|}.$$

Demonstrație. 1) Avem

$$\begin{aligned} \left(h_{z_0, |a|} \circ r_{z_0, \arg \frac{a}{|a|}} \right) (z) &= h_{z_0, |a|} \left[\frac{a}{|a|} (z - z_0) + z_0 \right] \\ &= |a| \left[\frac{a}{|a|} (z - z_0) + z_0 - z_0 \right] + z_0 \\ &= a(z - z_0) + z_0 = az + b, \end{aligned}$$

deoarece $az_0 + b = z_0$.

2) Observăm că

$$\begin{aligned} \left(t_{v_0 - z_0} \circ h_{z_0, |a|} \circ r_{z_0, \arg \frac{a}{|a|}} \right) (z) &= t_{v_0 - z_0} \left[h_{z_0, |a|} \left(\frac{a}{|a|} (z - z_0) + z_0 \right) \right] \\ &= t_{v_0 - z_0} [a(z - z_0) + z_0] \\ &= az - az_0 + z_0 + v_0 - z_0 \\ &= az - az_0 + az_0 + b = az + b. \end{aligned}$$

Din egalitatea $t_{v_0-z_0} \circ h_{z_0,|a|} = h_{z'_0,|a|}$, se determină z_1 și k . Obținem

$$(t_{v_0-z_0} \circ h_{z_0,|a|})(z) = h_{z'_0,|a|}(z) \Leftrightarrow |a|(z - z_0) + z_0 + v_0 - z_0 = k(z - z_1) + z_1 \Leftrightarrow$$

$$k = |a| \quad \text{și} \quad z'_0 = \frac{v_0 - |a|z_0}{1 - |a|}. \quad \square$$

Corolarul 3.8.20. (descompunerea izometriilor de speța 1) *Se consideră izometria de speța 1, $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = az + b$, unde $|a| = 1$. Au loc afirmațiile:*

1) *Dacă $z_0 \in \mathbb{C}$ este punct fix pentru f , atunci $f = r_{z_0, \arg a}$.*

2) *Dacă $z_0 \in \mathbb{C}$ nu este punct fix pentru f , atunci $f = t_{v_0-z_0} \circ r_{z_0, \arg a} = r_{z'_0, \arg a}$,*

unde $v_0 = f(z_0)$ și $z'_0 = \frac{v_0 - az_0}{1 - a}$.

Demonstrație. Deoarece $h_{z_0,|a|} = 1_{\mathbb{C}}$, cele două afirmații se obțin imediat din teorema anterioară. Din egalitatea

$$(t_{v_0-z_0} \circ r_{z_0, \arg a})(z) = r_{z'_0, \arg a}(z),$$

avem

$$a(z - z_0) + z_0 + v_0 - z_0 = \varepsilon(z - z'_0) + z'_0 \Leftrightarrow$$

$$\varepsilon = a \quad \text{și} \quad z'_0 = \frac{v_0 - az_0}{1 - a}. \quad \square$$

Corolarul 3.8.21. (Chasles) *Orice izometrie de speța 1 a planului complex este sau translație sau rotație sau simetrie centrală.*

Demonstrație. Dacă $a = 1$, $f(z) = az + b$ este translație, iar dacă $a \neq 1$, $|a| = 1$ rezultă că f are un singur punct fix și este o rotație sau o simetrie centrală dacă avem $a = -1$. \square

Corolarul 3.8.22. *Orice izometrie de speța 1 este compunerea a două simetrii axiale.*

Demonstrație. Este imediată. \square

Teorema 3.8.23. *Orice asemănare de speța 1 este sau o izometrie sau o omotetie sau compunerea dintre o omotetie de centru $O(z_0)$ oarecare și o rotație de centru $O(z_0)$ care nu este simetrie centrală.*

Demonstrație. Considerăm asemănarea de speța 1, $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = az + b$, $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$.

Cazul 1. Dacă $|a| = 1$, atunci asemănările de speța 1 sunt izometrii.

Cazul 2. Dacă $a \in \mathbb{R} - \{\pm 1\}$, asemănările au un punct fix z_0 și conform teoremei anterioare, au forma

$$\begin{aligned} f &= h_{z_0, a} \circ r_{z_0, 1} = h_{z_0, a} \circ 1_{\mathbb{C}} = h_{z_0, a}, \text{ dacă } a \in \mathbb{R}_+^* - 1 \text{ și} \\ f &= h_{z_0, -a} \circ s_{z_0} = h_{z_0, a}, \text{ dacă } a \in \mathbb{R}_-^* - 1. \end{aligned}$$

Cazul 3. Dacă $|a| \neq 1$ și $a \notin \mathbb{R}$, asemănările de speța 1 au un punct fix z_0 și au forma

$$f = h_{z_0, |a|} \circ r_{z_0, \arg \frac{a}{|a|}},$$

deci sunt compunerea dintre o omotetie de centru z_0 și raport $|a|$ și o rotație de centru z_0 și unghi $\arg \frac{a}{|a|}$. \square

Teorema 3.8.24. (descompunerea transformărilor afine de speța 2) *Se consideră asemănarea $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = a\bar{z} + b$, $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$. Au loc următoarele afirmații:*

1) Dacă $z_0 \in \mathbb{C}$ este punct fix pentru f , atunci are loc descompunerea

$$f = h_{z_0, |a|} \circ s_{z_0, \frac{a}{|a|}}.$$

2) Dacă $z_0 \in \mathbb{C}$ nu este punct fix pentru f , atunci are loc descompunerea

$$f = t_{v_0 - z_0} \circ h_{z_0, |a|} \circ s_{z_0, \frac{a}{|a|}} = h_{z'_0, |a|} \circ r_{z_0, \arg \frac{a}{|a|}},$$

unde $v_0 = f(z_0) \neq z_0$ și $z'_0 = \frac{v_0 - |a|z_0}{1 - |a|}$ și $s_{z_0, \frac{a}{|a|}}$ reprezintă simetria în raport cu dreapta ce trece prin punctul $M_0(z_0)$ și are coeficientul unghiular complex $\varepsilon = \frac{a}{|a|}$.

Demonstrație. 1) Avem

$$\begin{aligned} \left(h_{z_0, |a|} \circ s_{z_0, \frac{a}{|a|}} \right) (z) &= h_{z_0, |a|} \left[\frac{a}{|a|} (\bar{z} - \bar{z}_0) + z_0 \right] = |a| \left[\frac{a}{|a|} (\bar{z} - \bar{z}_0) \right] + z_0 \\ &= a\bar{z} - a\bar{z}_0 + z_0 = a\bar{z} + b. \end{aligned}$$

2) Observăm că

$$\begin{aligned} \left(t_{v_0 - z_0} \circ h_{z_0, |a|} \circ s_{z_0, \frac{a}{|a|}} \right) (z) &= t_{v_0 - z_0} [a(\bar{z} - \bar{z}_0) + z_0] \\ &= a\bar{z} - a\bar{z}_0 + z_0 + a\bar{z}_0 + b - z_0 = a\bar{z} + b. \end{aligned}$$

\square

Corolarul 3.8.25. Se consideră izometria de speța 2, $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = a\bar{z} + b$, unde $|a| = 1$. Au loc afirmațiile:

1) Dacă $z_0 \in \mathbb{C}$ este punct fix pentru f , atunci $f = s_{z_0, a}$.

2) Dacă $z_0 \in \mathbb{C}$ nu este punct fix pentru f , atunci $f = t_{v_0 - z_0} \circ s_{z_0, a}$, unde $v_0 = f(z_0)$ și $z'_0 = \frac{v_0 - az_0}{1 - a}$.

Demonstrație. Deoarece $h_{z_0, |a|} = 1_{\mathbb{C}}$, cele două afirmații se obțin imediat din teorema anterioară. \square

Corolarul 3.8.26. Orice izometrie de speța 2 a planului complex este sau o simetrie axială sau compunerea a trei simetrii axiale.

Demonstrație. Este imediată utilizând Corolarul 3.8.25. \square

Teorema 3.8.27. Orice asemănare de speța 2 este sau o izometrie sau compunerea dintre o omotetie de centru $O(z_0)$ oarecare și o simetrie axială în raport cu o dreaptă ce trece prin $O(z_0)$.

Demonstrație. Considerăm asemănarea de speța 2, $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = a\bar{z} + b$, $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$. Distingem următoarele situații.

Cazul 1. Dacă $|a| = 1$, atunci asemănările de speța 1 sunt izometrii.

Cazul 2. Dacă $a \in \mathbb{R} - \{\pm 1\}$, rezultă că f are un singur punct fix z_0 și conform teoremei anterioare, au forma

$$f = h_{z_0, a} \circ s_{z_0, 1} \text{ dacă } a > 0 \text{ și}$$

$$f = h_{z_0, -a} \circ s_{z_0, -1} = h_{z_0, a} \circ s_{z_0, 1} \text{ dacă } a < 0.$$

În consecință, în acest caz f este compunerea dintre o omotetie de centru $O(z_0)$ și o simetrie axială în raport cu o dreaptă incidentă cu $O(z_0)$.

Cazul 3. Dacă $|a| \neq 1$ și $a \notin \mathbb{R}$, asemănările de speța 2 au un singur punct fix z_0 și au forma

$$f = h_{z_0, |a|} \circ s_{z_0, \arg \frac{a}{|a|}},$$

deci sunt compunerea dintre o omotetie de centru z_0 și raport $|a|$ și o simetrie în raport cu o dreaptă ce trece prin z_0 și are coeficientul unghiular complex $\frac{a}{|a|}$. \square

Aplicația 3.8.28. Transformarea $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = (1 + i)z + 1$ este asemănare de speța 1 și are punctul fix $z_0 = i$. Avem astfel descompunerea

$$f_3 = h_{i, \sqrt{2}} \circ r_{i, 45^\circ}.$$

3.8.4 Inversiunea

Fie $p \in \mathbb{C}$ un număr complex fixat și $k \in \mathbb{R}^*$. Se numește inversiune de pol $P(p)$ și putere k aplicația $i_{p,k} : \mathbb{C} - \{p\} \rightarrow \mathbb{C} - \{p\}$ care asociază fiecărui număr complex z , un număr $z' = i_{p,k}(z) \in \mathbb{C}$ astfel încât

- 1) $Z' \in (PZ)$ dacă avem $k > 0$ și $Z' \in (PZ^*)$ dacă avem $k < 0$;
- 2) $PZ \cdot PZ' = |k|$,

unde P, Z, Z' sunt imaginile numerelor p, z, z' , iar Z^* este simetricul lui Z în raport cu punctul P .

Punctul $Z'(z')$ poartă denumirea de inversul punctului $Z(z)$.

Teorema 3.8.29. *Fie $p \in \mathbb{C}$ un număr complex fixat și k un număr real. Inversiunea de pol $P(p)$ și putere k este dată de*

$$i_{p,k} : \mathbb{C} - \{p\} \rightarrow \mathbb{C} - \{p\}, \quad i_{p,k}(z) = p + \frac{k}{z - p}.$$

Demonstrație. Se utilizează echivalența $Z' \in (PZ) \Leftrightarrow \frac{z' - p}{z - p} \in \mathbb{R}_+^*$. Avem cazurile:

- 1) $k > 0$. Verificăm cele două condiții din ipoteză

$$z' = p + \frac{k}{z - p} \Rightarrow \frac{z' - p}{z - p} = \frac{p + \frac{k}{z - p} - p}{z - p} = \frac{k}{|z - p|^2} \in \mathbb{R}_+^* \Rightarrow Z' \in (PZ)$$

$$PZ \cdot PZ' = |z - p| \cdot |z' - p| = |z - p| \cdot \frac{|z - p|}{1} = |k|.$$

2) $k < 0$. Deoarece Z are afixul z rezultă că Z^* , simetricul lui Z în raport cu P are afixul $2p - z$.

$$\frac{z' - p}{z^* - p} = \frac{p + \frac{k}{z - p} - p}{-z + p} = \frac{-k}{|z - p|^2} \in \mathbb{R}_+^* \Rightarrow Z' \in (PZ^*)$$

$$PZ \cdot PZ' = |z - p| \cdot |z' - p| = |z - p| \cdot \frac{|k|}{|z - p|} = |k|.$$

□

Pentru $k < 0$ inversiunea de pol p și putere k este compunerea dintre simetria de centru p și inversiunea de pol p și putere $-k$. În consecință $i_{p,k} = s_p \circ i_{p,-k}$.

$$\begin{aligned} i_{p,k}(z) &= (s_p \circ i_{p,-k})(z) = s_p(i_{p,-k}(z)) = s_p\left(p - \frac{k}{z-p}\right) \\ &= 2p - p + \frac{k}{z-p} = p + \frac{k}{z-p}. \end{aligned}$$

Așadar, este suficient să tratăm din punct de vedere teoretic numai inversiunile de putere pozitivă.

Propoziția 3.8.30. *Orice inversiune este o transformare involutivă, adică avem*

$$i_{p,k} \circ i_{p,k} = 1_{\mathbb{C}-\{p\}}.$$

Demonstrație. Într-adevăr, avem

$$\begin{aligned} (i_{p,k} \circ i_{p,k})(z) &= i_{p,k}(i_{p,k}(z)) = i_{p,k}\left(p + \frac{k}{z-p}\right) \\ &= p + \frac{k}{p + \frac{k}{z-p} - p} = p + z - p = z = 1_{\mathbb{C}-\{p\}}. \end{aligned} \quad \square$$

Propoziția 3.8.31. *Mulțimea punctelor fixe ale inversiunii de pol p și putere $k > 0$, coincide cu cercul de centru $P(p)$ și rază \sqrt{k} .*

Demonstrație. Un număr $z_0 \in \mathbb{C}$ este fix pentru inversiunea de pol p și puterea $k > 0$ dacă

$$i_{p,k}(z_0) = z_0 \Leftrightarrow p + \frac{k}{z_0 - p} = z_0 \Leftrightarrow (z_0 - p)\overline{(z_0 - p)} = k \Leftrightarrow |z_0 - p|^2 = k.$$

Deci locul geometric al punctelor fixe ale inversiunii este cercul de centru $P(p)$ și rază \sqrt{k} . Vom nota acest cerc prin $C_i(P(p), \sqrt{|k|})$ și îl numim *cercul de inversiune* sau *cercul inversiunii*. \square

Pentru $k < 0$, cercul $C_i(P(p), \sqrt{k})$ este un cerc invariant fix, dar nu punct cu punct, deoarece fiecare punct al său se transformă în punctul diametral opus.

$$i_{p,k}(z_0) = z_0 \Leftrightarrow p + \frac{k}{z_0 - p} = z_0 \Leftrightarrow |z_0 - p|^2 = k < 0 \text{ imposibil.}$$

Prin urmare această inversiune nu are niciun punct fix.

$$i_{p,k}(z_0) = s_p(z_0) \Leftrightarrow p + \frac{k}{z_0 - p} = 2p - z_0 \Leftrightarrow \frac{k}{z_0 - p} = p - z_0 \Leftrightarrow |z_0 - p|^2 = -k > 0.$$

Deci cercul $C_i(P(p), \sqrt{|k|})$ este invariant, fiecare punct al său trecând în punctul diametral opus.

Teorema 3.8.32. Fie $i_{p,k}$ o inversiune de pol $P(p)$ și putere $k > 0$, iar C_i cercul inversiunii. Atunci au loc afirmațiile:

- 1) $Z(z) \in C_i \Rightarrow Z'(z') \in C_i$;
- 2) $Z(z) \in \text{Ext } C_i \Rightarrow Z'(z') \in \text{Int } C_i$, unde $\{Z'\} = PZ \cap T_1T_2$, iar T_1, T_2 sunt punctele în care tangentele din punctul Z la cercul de inversiune intersectează acest cerc;
- 3) $Z(z) \in \text{Int } C_i \Rightarrow Z'(z') \in \text{Ext } C_i$, unde Z' este punctul de intersecție al dreptei PZ cu tangenta la cercul de inversiune în unul dintre punctele de intersecție ale cercului de inversiune cu dreapta perpendiculară în Z pe dreapta PZ .

Demonstrație. 1) Rezultă pe baza Propoziției 3.8.31.

$$2) Z(z) \in \text{Ext } C_i \Leftrightarrow |z - p| > \sqrt{k} \Leftrightarrow |z' - p| < \sqrt{k} \Leftrightarrow Z' \in \text{Int } C_i.$$

Deoarece $PZ \cdot PZ' = k \Leftrightarrow PZ \cdot PZ' = PT_1^2 \Leftrightarrow \{Z'\} = PZ \cap T_1T_2$, din reciproca teoremei catetei deoarece $Z' \in (PZ)$.

3) Deoarece $PZ \cdot PZ' = k = PT_1^2$ și $Z' \in \text{Ext } C_i$, rezultă că Z' este intersecția dreptei PZ cu tangenta la cercul de inversiune. \square

Propoziția 3.8.33. Dreptele care trec prin polul inversiunii sunt drepte invariante față de inversiune.

Demonstrație. Alegem reperul cartezian cu originea în polul inversiunii și atunci o dreaptă oarecare prin pol are ecuația $\bar{\alpha} \cdot \bar{z} + \alpha \cdot z = 0$. Prin inversiunea $z' = i(z) = \frac{k}{\bar{z}}$, această dreaptă se transformă în dreapta $\bar{\alpha} \cdot \overline{kz'} + \alpha \cdot \overline{kz'} = 0$ sau $\bar{\alpha} \cdot \bar{z}' + \alpha \cdot z' = 0$, ecuație ce reprezintă aceeași dreaptă. \square

Propoziția 3.8.34. Cercurile cu centrul în polul de inversiune sunt transformate prin inversiune în cercuri cu centrul în polul de inversiune.

Demonstrație. Considerăm că polul inversiunii coincide cu originea reperului cartezian. Ecuația unui cerc cu centrul în $p = 0$ este $z \cdot \bar{z} = r^2$ (deoarece $-\bar{\alpha} = 0$). Prin inversiunea $z' = i(z) = \frac{k}{\bar{z}}$ cercul se transformă astfel: $\frac{k}{z'} \cdot \frac{k}{\bar{z}'} = r^2$ sau $\bar{z}' \cdot z' = \left(\frac{k}{r}\right)^2$ care reprezintă ecuația unui cerc cu centrul în polul de inversiune. \square

Propoziția 3.8.35. *Prin inversiune orice cerc care conține polul de inversiune se transformă într-o dreaptă care nu conține polul de inversiune și este perpendiculară pe diametrul cercului care trece prin polul de inversiune.*

Demonstrație. Se alege un reper cartezian cu originea în polul inversiunii, adică $P(p)$ coincide cu $O(0)$. Un cerc oarecare ce trece prin pol are ecuația $z \cdot \bar{z} \cdot \bar{\alpha} \cdot \bar{z} + \alpha \cdot z = 0$ și centrul de afix $-\bar{\alpha}$. Diametrul cercului are coeficientul unghiular complex

$$m_1 = \frac{z_2 - z_1}{\bar{z}_2 - \bar{z}_1} = \frac{-\bar{\alpha}}{-\alpha} = \frac{\bar{\alpha}}{\alpha}.$$

Prin inversiunea $z' = i(z) = \frac{k}{\bar{z}}$, cercul se transformă în dreaptă

$$\bar{\alpha} \cdot k \cdot \bar{z}' + \alpha \cdot k \cdot z' + k^2 = 0$$

care nu conține polul de inversiune. Această dreaptă are coeficientul unghiular complex $m_2 = -\frac{\bar{\alpha}}{\alpha}$. În consecință diametrul cercului este perpendicular pe dreaptă. \square

Propoziția 3.8.36. *Prin inversiune, orice dreaptă care nu trece prin polul de inversiune se transformă într-un cerc care conține polul de inversiune, iar diametrul acestui cerc este perpendicular pe dreaptă.*

Demonstrație. Decurge din teorema anterioară pentru că inversiunea este o transformare involutivă. \square

Propoziția 3.8.37. *Prin inversiune un cerc care nu trece prin polul de inversiune se transformă într-un cerc care nu trece prin polul de inversiune.*

Demonstrație. Se consideră un reper cartezian cu originea în polul de inversiune. Un cerc ce nu trece prin pol are ecuația

$$\alpha \cdot k \cdot z' + \bar{\alpha} \cdot \bar{z} + \alpha \cdot z + \beta = 0$$

cu $\beta \neq 0$. Prin inversiunea $z' = \frac{k}{\bar{z}}$ ecuația cercului devine

$$k^2 + \alpha \cdot k \cdot z' + \bar{\alpha} \cdot k \cdot \bar{z}' + \beta \cdot \bar{z}' \cdot z' = 0$$

care reprezintă ecuația unui cerc ce nu trece prin polul de inversiune. \square

Propoziția 3.8.38. *Inversiunea de putere pozitivă invariază cercurile ortogonale cercului de inversiune.*

Demonstrație. Considerăm originea reperului cartezian în polul inversiunii. Cercul inversiunii de pol $O(0)$ și putere $k > 0$ are ecuația $z \cdot \bar{z} = k$.

Două cercuri sunt ortogonale dacă $\beta_1 + \beta_2 = \alpha_1 \cdot \bar{\alpha}_2 + \bar{\alpha}_1 \cdot \alpha_2$. Deoarece $\alpha_1 = 0$ și $\bar{\alpha}_1 = 0$ rezultă $\beta_1 + \beta_2 = 0$, de unde $\beta_2 = -k$ așa că un cerc ortogonal cercului de inversiune are ecuația

$$z \cdot \bar{z} + \alpha_2 \cdot z + \alpha_2 \cdot \bar{z} + k = 0.$$

Prin inversiunea $i(z) = \frac{k}{\bar{z}} = z'$ acest cerc este transformat în

$$z' \cdot \bar{z}' + \alpha_2 \cdot z' + \alpha_2 \cdot \bar{z}' + k = 0,$$

deci în el însuși. \square

Propoziția 3.8.39. *Fie o inversiune de putere pozitivă, A un punct în plan nesituat pe cercul de inversiune și un cerc care trece prin A . Cercul este ortogonal cu cercul de inversiune dacă și numai dacă inversul lui A este pe cerc.*

Demonstrație. Alegem un reper cartezian cu originea în polul P și axa reală PA . Notăm cu a afixul lui A . Atunci $\frac{k}{a}$ este afixul inversului lui A , notat cu A' . Ecuația cercului este

$$z \cdot \bar{z} + \alpha_2 \cdot z + \alpha_1 \cdot \bar{z} + \beta_2 = 0.$$

Punând condiția ca punctul A să fie pe cerc avem $a^2 + a(\alpha_2 + \bar{\alpha}_2) + \beta_2 = 0$. Cercul este ortogonal cu cercul de inversiune de ecuație $z \cdot \bar{z} - k = 0$ dacă

$$\beta_1 + \beta_2 = \alpha_1 \cdot \bar{\alpha}_2 + \bar{\alpha}_1 \cdot \alpha_2,$$

deci $\beta_2 - k = 0$, rezultă

$$\beta_2 = k \Rightarrow a^2 + a(\alpha_2 + \overline{\alpha_2}) + k = 0 \Rightarrow 1 + \frac{1}{a}(\alpha_2 + \overline{\alpha_2}) + \frac{k}{a^2} = 0 \Rightarrow$$

$$k + \frac{k}{a}(\alpha_2 + \overline{\alpha_2}) + \frac{k^2}{a^2} = 0,$$

rezultă că $A' \left(\frac{k}{a} \right)$ se află pe cerc.

Reciproc, dacă punctele $A' \left(\frac{k}{a} \right)$ și $A(a)$ sunt pe cerc au loc relațiile

$$a^2 + a(\alpha_2 + \overline{\alpha_2}) + \beta_2 = 0 \quad \text{și} \quad k + \frac{k}{a}(\alpha_2 + \overline{\alpha_2}) + \frac{k^2}{a^2} = 0 \Rightarrow$$

$$\alpha_2 + \overline{\alpha_2} = -a - \frac{k}{a} \Rightarrow a^2 + \left(-a - \frac{k}{a} \right) a + \beta_2 = 0 \Rightarrow$$

$$\beta_2 = k \Rightarrow \beta_1 + \beta_2 = \alpha_1 \cdot \overline{\alpha_2} + \overline{\alpha_1} \cdot \alpha_2,$$

rezultă că cercurile sunt ortogonale. □

Propoziția 3.8.40. *Dacă cercul $C'(W', R')$ este imaginea cercului $C(W, R)$ prin inversiunea de pol p și putere k , atunci are loc relația*

$$R' = \frac{k}{\rho(p)} \cdot R$$

unde $\rho(p)$ este puterea polului față de cercul $C(W, R)$.

Demonstrație. Se ia un reper cartezian cu originea în polul inversiunii. Cercul $C(W, R)$ are ecuația

$$z \cdot \bar{z} + \alpha \cdot z + \overline{\alpha} \cdot \bar{z} + \beta = 0.$$

Prin inversiunea $i(z) = \frac{k}{\bar{z}} = z'$ el se transformă în cercul de ecuație

$$k^2 + \alpha \cdot k \cdot z' + \overline{\alpha} \cdot k \cdot \bar{z}' + \beta \cdot \bar{z}' \cdot z' = 0.$$

Deci avem $\alpha' = \frac{\alpha \cdot k}{\beta}$ și $\beta' = \frac{k^2}{\beta}$. Prin urmare

$$R' = \sqrt{\alpha' \cdot \overline{\alpha'} - \beta'} = \sqrt{\frac{\alpha \cdot k}{\beta} \cdot \frac{\overline{\alpha} \cdot k}{\bar{\beta}} - \frac{k^2}{\beta}} = \frac{k}{|\beta|} \sqrt{\alpha \cdot \overline{\alpha} - \beta} = \frac{k}{\rho(p)} \cdot R. \quad \square$$

Propoziția 3.8.41. Dacă $a' = i_{p,k}(a)$ și $b' = i_{p,k}(b)$, atunci are loc egalitatea

$$d(a', b') = k \cdot \frac{d(a, b)}{d(p, a) \cdot d(p, b)}.$$

Demonstrație. Dacă vom considera originea planului complex în polul p al inversiunii avem

$$d(a', b') = |a' - b'| = \left| \frac{k}{\bar{a}} - \frac{k}{\bar{b}} \right| = k \cdot \frac{|\bar{a} - \bar{b}|}{|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|} = k \cdot \frac{|a - b|}{|a| \cdot |b|} = k \cdot \frac{d(a, b)}{d(p, a) \cdot d(p, b)}. \quad \square$$

În scrierea echivalentă cu imaginile numerelor complexe corespunzătoare formula este

$$A'B' = k \cdot \frac{AB}{PA \cdot PB}.$$

Teorema 3.8.42. Inversiunea păstrează biraportul a patru puncte conciclice sau coliniare.

Demonstrație. Fie $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$, $D(d)$ cele patru puncte conciclice sau coliniare. Biraportul lor este definit prin

$$(a, b, c, d) = \frac{c - b}{a - b} : \frac{c - d}{a - d}$$

care este un număr real în ambele situații enunțate în teoremă. Transformatele acestor puncte $A'(a')$, $B'(b')$, $C'(c')$, $D'(d')$ au biraportul

$$\begin{aligned} (a', b', c', d') &= \frac{c' - b'}{a' - b'} : \frac{c' - d'}{a' - d'} = \frac{k(\bar{b} - \bar{c})}{\bar{b} \cdot \bar{c}} \cdot \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{k(\bar{b} - \bar{a})} \cdot \frac{k(\bar{d} - \bar{a})}{\bar{d} \cdot \bar{a}} \cdot \frac{\bar{d} \cdot \bar{c}}{k(\bar{d} - \bar{c})} \\ &= \frac{\bar{b} - \bar{c}}{\bar{b} - \bar{a}} \cdot \frac{\bar{d} - \bar{a}}{\bar{d} - \bar{c}} = \frac{\overline{c - b}}{\overline{a - b}} : \frac{\overline{c - d}}{\overline{a - d}} = \overline{(a, b, c, d)} = (a, b, c, d). \quad \square \end{aligned}$$

Teorema 3.8.43. Măsura unghiului a două cercuri secante care nu trec prin pol este egală cu măsura unghiului cercurilor obținute prin inversiune.

Demonstrație. Se consideră un reper cartezian cu originea în polul $P(p)$. Două cercuri secante care nu trec prin pol au ecuațiile

$$\begin{aligned} z \cdot \bar{z} + \alpha_1 \cdot z + \alpha_1 \cdot \bar{z} + \beta_1 &= 0 \text{ respectiv} \\ z \cdot \bar{z} + \alpha_2 \cdot z + \alpha_2 \cdot \bar{z} + \beta_2 &= 0, \end{aligned}$$

iar măsura unghiului lor este dată de formula

$$\cos \theta = \frac{|\beta_1 + \beta_2 - (\alpha_1 \cdot \alpha_2 + \overline{\alpha_1} \cdot \alpha_2)|}{2r_1 \cdot r_2}$$

unde r_1, r_2 sunt razele celor două cercuri.

Cercurile transformate prin inversiunea $i(z) = \frac{k}{\bar{z}} = z'$ au ecuațiile

$$k^2 + \alpha_1 \cdot k \cdot z' + \overline{\alpha_1} \cdot k \cdot \bar{z}' + \beta_1 \cdot \bar{z}' \cdot z' = 0 \text{ respectiv}$$

$$k^2 + \alpha_2 \cdot k \cdot z' + \overline{\alpha_2} \cdot k \cdot \bar{z}' + \beta_2 \cdot \bar{z}' \cdot z' = 0$$

și calculând măsura unghiurilor lor obținem

$$\cos \theta' = \frac{|\beta'_1 + \beta'_2 - (\alpha_1 \cdot \alpha_2 + \overline{\alpha_1} \cdot \alpha_2)|}{2r_1 \cdot r_2} = \frac{|\beta_1 + \beta_2 - (\alpha_1 \cdot \overline{\alpha_2} + \overline{\alpha_1} \cdot \alpha_2)|}{2r_1 \cdot r_2} = \cos \theta,$$

de unde rezultă concluzia. \square

Teorema 3.8.44. *Măsura unghiului format de un cerc care trece prin pol și o dreaptă care nu trece prin pol, secantă cu cercul, este egală cu măsura unghiului dintre figurile geometrice obținute prin inversiune.*

Demonstrație. Considerăm că polul $P(p)$ coincide cu originea $O(0)$. Un cerc care trece prin pol are ecuația $z \cdot \bar{z} \cdot \overline{\alpha_2} \cdot \bar{z} + \alpha_2 \cdot z = 0$, iar dreapta care nu trece prin pol și este secantă cu cercul, ecuația $\overline{\alpha_1} \cdot \bar{z} + \alpha_1 \cdot z + \beta_1 = 0$. Cercul se transformă prin inversiune în dreapta $k^2 + \alpha_2 \cdot k \cdot z' + \overline{\alpha_2} \cdot k \cdot \bar{z}' = 0$ care nu trece prin pol, iar dreapta în cercul $\alpha_1 \cdot k \cdot z' + \overline{\alpha_1} \cdot k \cdot \bar{z}' + \beta_1 \cdot \bar{z}' \cdot z' = 0$ care trece prin pol. Măsura unghiului lor este θ' dată de formula

$$\cos \theta' = \frac{\left| k^2 - \left(\frac{\alpha_2 \cdot \overline{\alpha_1} \cdot k^2}{\beta_1} + \frac{\alpha_1 \cdot \overline{\alpha_2} \cdot k^2}{\beta_1} \right) \right|}{2 \sqrt{\frac{\alpha_1 \cdot \overline{\alpha_1} \cdot k^2}{\beta_1^2}} \cdot \sqrt{\alpha_2 \cdot \overline{\alpha_2} \cdot k^2}} = \frac{|\beta_1 - (\alpha_2 \cdot \overline{\alpha_1} + \overline{\alpha_2} \cdot \alpha_1)|}{2 \sqrt{\alpha_1 \cdot \overline{\alpha_1}} \cdot \sqrt{\alpha_2 \cdot \overline{\alpha_2}}} = \cos \theta,$$

unde θ este măsura unghiului între figurile netransformate. \square

Are loc o teoremă generală, anume

Teorema 3.8.45. *Măsura unghiului a două curbe secante este egală cu măsura unghiului curbelor transformate.*

Deoarece inversiunea păstrează măsura unghiurilor curbilor secante aceasta este o transformare conformă. Nu insistăm asupra demonstrației acestei teoreme.

Aplicația 3.8.46. Considerăm triunghiul ABC și A_1, A_2, \dots, A_{n-1} pe latura BC cu proprietatea că

$$\widehat{BAA_1} \equiv \widehat{A_1AA_2} \equiv \widehat{AA_2A_3} \equiv \dots \equiv \widehat{A_{n-1}AC}.$$

Atunci are loc

$$\frac{BA_1}{AB \cdot AA_1} = \frac{A_1A_2}{AA_1 \cdot AA_2} = \frac{A_2A_3}{AA_2 \cdot AA_3} = \dots = \frac{A_{n-1}C}{AA_{n-1} \cdot AC}.$$

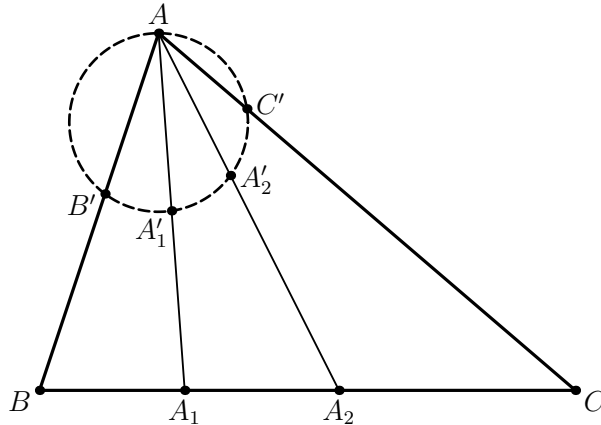


Figura 3.13 – (cazul $n = 3$)

Fie $i_{A,k}$ inversiunea de pol A și putere $k > 0$. Fie B', A'_i, C' imaginile punctelor B, A_i, C prin $i_{A,k}$. Punctele B, A_i, C se află pe o dreaptă care nu trece prin A , deci B', A'_i, C' se află pe un cerc cu centrul în A . Din egalitatea de unghiuri din ipoteză rezultă egalitatea de corzi:

$$B'A'_1 = A'_1A'_2 = A'_2A'_3 = \dots = A'_{n-1}C'.$$

Aplicând Propoziția 3.8.41, obținem

$$B'A'_1 = k \cdot \frac{BA_1}{AB \cdot AA_1}, \quad A'_1A'_2 = k \cdot \frac{A_1A_2}{AA_1 \cdot AA_2}, \dots, \quad A'_{n-1}C' = k \cdot \frac{A_{n-1}C}{AA_{n-1} \cdot AC}.$$

Ținând seama de egalitatea de corzi, rezultă concluzia.

Aplicația 3.8.47. Un cerc de centru O_1 este tangent în A la dreapta d și tangent exterior în B la un al doilea cerc de centru O_2 . Dreapta AB intersectează cercul O_2 în C . Să se arate că $CO_2 \perp d$.

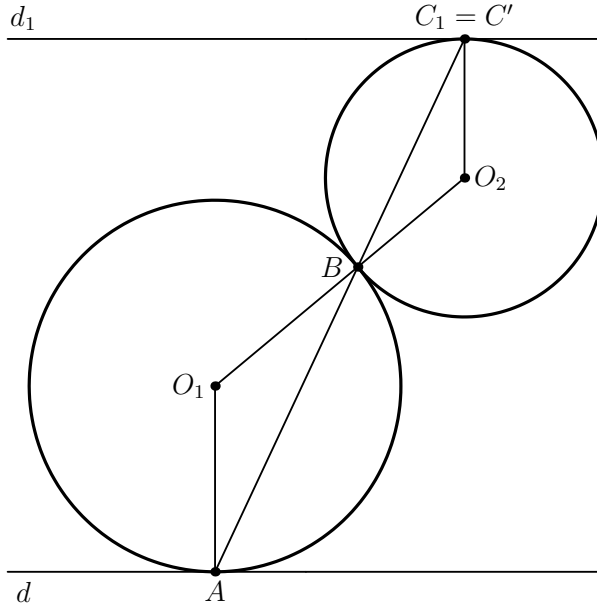


Figura 3.14

Fie $k > 0$ astfel încât $C(A, \sqrt{k})$ să fie ortogonal cu cercul C_2 cu centrul în O_2 . Considerăm inversiunea $i_{A,k}$. Pe baza Propoziției 3.8.38 rezultă că cercul C_2 este invariabil de $i_{A,k}$. Cercul C_1 cu centrul în O_1 se transformă în dreapta d_1 , care este tangentă cercului C_2 în C' (pentru că inversiunea este o transformare conformă). Mai mult, pe baza Propoziției 3.8.35 rezultă că $AO_1 \perp d_1$, deci $C'O_2 \parallel AO_1$, de unde $C'O_2 \perp d$. Cum $i_{A,k}(B) = C'$ rezultă că $C' \in AB$, deci $C' = C$.

3.8.5 Omografia

Funcția $f : \mathbb{C} - \left\{-\frac{d}{c}\right\} \rightarrow \mathbb{C} - \left\{\frac{a}{c}\right\}$, $f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$, unde $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ și $r = ad - bc \neq 0$ se numește *funcție omografică* sau *omografie*.

Dacă $r = 0$, atunci $f(z) = \frac{a}{c}$, deci planul complex se transformă într-un singur punct, ceea ce nu prezintă interes teoretic.

Teorema 3.8.48. *Omografia este o funcție bijectivă.*

Demonstrație. Omografia este surjectivă deoarece oricare ar fi $z' \in \mathbb{C} - \left\{\frac{a}{c}\right\}$, ecuația $z' = \frac{az + b}{cz + d}$ are soluția $z = \frac{-dz' + b}{cz' - a} \in \mathbb{C} - \left\{-\frac{d}{c}\right\}$.

Omografia este injectivă deoarece pentru orice $z_1, z_2 \in \mathbb{C} - \left\{-\frac{d}{c}\right\}$ pentru care

$$f(z_1) = f(z_2) \Rightarrow \frac{az_1 + b}{cz_1 + d} = \frac{az_2 + b}{cz_2 + d} \Rightarrow (z_1 - z_2)(ad - bc) = 0 \Rightarrow z_1 = z_2. \quad \square$$

Orice omografie admite o inversă $f^{-1} : \mathbb{C} - \left\{\frac{a}{c}\right\} \rightarrow \mathbb{C} - \left\{-\frac{d}{c}\right\}$ de forma

$$f^{-1}(z) = \frac{-dz + b}{cz - a}.$$

Teorema 3.8.49. *Omografia $f : \mathbb{C} - \left\{-\frac{d}{c}\right\} \rightarrow \mathbb{C} - \left\{\frac{a}{c}\right\}$, de forma $f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ este involutivă dacă și numai dacă $a + d = 0$.*

Demonstrație. Omografia f este involutivă dacă și numai dacă

$$(f \circ f)(z) = 1_{\mathbb{C}}(z), \quad \forall z \in \mathbb{C} - \left\{-\frac{d}{c}\right\} \Leftrightarrow (a + d)[cz^2 - (a - d)z - b] = 0$$

oricare ar fi $z \in \mathbb{C} - \left\{-\frac{d}{c}\right\} \Leftrightarrow a + d = 0. \quad \square$

O omografie involutivă are forma

$$f : \mathbb{C} - \left\{-\frac{d}{c}\right\} \rightarrow \mathbb{C} - \left\{\frac{a}{c}\right\}, \quad f(z) = \frac{az + b}{cz - a}.$$

Teorema 3.8.50. *Compunerea a două omografii este o omografie.*

Demonstrație. Fie omografiile

$$f_1 : \mathbb{C} - \left\{ -\frac{d_1}{c_1} \right\} \rightarrow \mathbb{C} - \left\{ \frac{a_1}{c_1} \right\}, \quad f_1(z) = \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1},$$

$$f_2 : \mathbb{C} - \left\{ -\frac{d_2}{c_2} \right\} \rightarrow \mathbb{C} - \left\{ \frac{a_2}{c_2} \right\}, \quad f_2(z) = \frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2}.$$

Atunci

$$f_1 \circ f_2 : \mathbb{C} - \left\{ -\frac{c_1 b_2 + d_1 d_2}{c_1 a_2 + d_1 c_2} \right\} \rightarrow \mathbb{C} - \left\{ \frac{a_1 a_2 + b_1 c_2}{c_1 a_2 + d_1 c_2} \right\},$$

$$(f_1 \circ f_2)(z) = \frac{(a_1 a_2 + b_1 c_2)z + a_2 b_2 + b_1 d_2}{(c_1 a_2 + d_1 c_2)z + c_1 b_2 + d_1 d_2}.$$

□

Dacă asociem omografiilor f_1 și f_2 matricile formate cu coeficienții lor

$$M_{f_1} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} \quad \text{și} \quad M_{f_2} = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}$$

atunci compunerea $f_1 \circ f_2$ are matricea $M_{f_1} \cdot M_{f_2}$.

Inversa omografiei $f : \mathbb{C} - \left\{ -\frac{d}{c} \right\} \rightarrow \mathbb{C} - \left\{ \frac{a}{c} \right\}$ are matricea

$$M_{f^{-1}} = \begin{bmatrix} -d & b \\ c & -a \end{bmatrix}$$

care este egală cu $-rM^{-1}$, unde M este matricea omografiei f .

Teorema 3.8.51. *Mulțimea omografiilor înzestrată cu operația de compunere a funcțiilor formează o structură de grup.*

Demonstrație. Reiese din rezultatele anterioare. □

Teorema 3.8.52. *O omografie $f : \mathbb{C} - \left\{ -\frac{d}{c} \right\} \rightarrow \mathbb{C} - \left\{ \frac{a}{c} \right\}$, poate avea două puncte fixe sau un punct fix sau niciun punct fix.*

Demonstrație. Un punct $z_0 \in \mathbb{C} - \left\{ -\frac{d}{c} \right\}$ este fix pentru omografie dacă și numai dacă

$$f(z_0) = z_0 \Leftrightarrow z_0 = \frac{az_0 + b}{cz_0 + d} \Leftrightarrow cz_0^2 + (d - a)z_0 - b = 0,$$

discriminantul acestei ecuații fiind

$$\Delta = (d - a)^2 + 4ac = (a + d)^2 - 4(ad - bc).$$

Se disting următoarele cazuri:

- 1) $c \neq 0$ și $\Delta \neq 0$, atunci omografia are două puncte fixe distincte;
- 2) $c \neq 0$ și $\Delta = 0$, când omografia are două puncte fixe confundate;
- 3) $c = 0$ și $a \neq d$, când omografia are un singur punct fix, celălalt putând fi conceput la ∞ ;
- 4) $c \neq 0$ și $a = d$, situație în care omografia nu are niciun punct fix dar se poate concepe că ambele puncte fixe sunt confundate la ∞ . \square

Teorema 3.8.53. *Prin omografie o dreaptă este transformată într-o dreaptă sau într-un cerc.*

Demonstrație. Se consideră dreapta de ecuație $\bar{\alpha} \cdot \bar{z} + \alpha \cdot z + \beta = 0$. Prin omografia $z' = \frac{az + b}{cz + d}$ ecuația acestei drepte devine

$$\bar{\alpha} \cdot \frac{-\bar{d} \cdot \bar{z}' + \bar{b}}{\bar{c} \cdot \bar{z}' - \bar{a}} + \alpha \cdot \frac{-dz' + b}{cz' - a} + \beta = 0$$

iar după efectuarea calculelor se ajunge la

$$A \cdot z' \cdot \bar{z}' + B \cdot z' + \bar{B} \cdot \bar{z}' + C = 0,$$

unde

$$A = -\bar{\alpha} \cdot c \cdot \bar{d} - \alpha \cdot \bar{c} \cdot d + \beta \cdot c \cdot \bar{c} \in \mathbb{R}$$

$$B = \bar{\alpha} \cdot \bar{b} \cdot c + \alpha \cdot \bar{a} \cdot d - \beta \cdot \bar{a} \cdot c$$

$$\bar{B} = \alpha \cdot b \cdot \bar{c} + \bar{\alpha} \cdot a \cdot \bar{d} - \beta \cdot a \cdot \bar{c}$$

$$C = -\bar{\alpha} \cdot a \cdot \bar{b} - \alpha \cdot \bar{a} \cdot b + \beta \cdot a \cdot \bar{a} \in \mathbb{R}.$$

Dacă avem $A = 0$, atunci dreapta se transformă într-o dreaptă, iar dacă $A \neq 0$, dreapta se transformă într-un cerc. \square

Teorema 3.8.54. *Prin omografie un cerc este transformat într-o dreaptă sau într-un cerc.*

Demonstrație. Considerăm cercul de ecuație $z \cdot \bar{z} + \alpha \cdot z + \bar{\alpha} \cdot \bar{z} + \beta = 0$. Prin omografia $z' = \frac{az+b}{cz+d}$ ecuația cercului devine

$$\frac{-d \cdot z' + b}{c \cdot z' - a} \cdot \frac{-\bar{d} \cdot \bar{z}' + \bar{b}}{\bar{c} \cdot \bar{z}' - \bar{a}} + \bar{\alpha} \cdot \frac{-\bar{d} \cdot \bar{z}' + \bar{b}}{\bar{c} \cdot \bar{z}' - \bar{a}} + \alpha \cdot \frac{-dz' + b}{cz' - a} + \beta = 0,$$

adică

$$A_1 \cdot z' \cdot \bar{z}' + B_1 \cdot z' + \bar{B}_1 \cdot \bar{z}' + C_1 = 0,$$

unde

$$A_1 = d \cdot \bar{d} - \bar{\alpha} \cdot c \cdot \bar{d} - \alpha \cdot \bar{c} \cdot d + \beta \cdot c \cdot \bar{c} \in \mathbb{R}$$

$$B_1 = -\bar{b} \cdot d + \alpha \cdot \bar{a} \cdot d + \bar{\alpha} \cdot \bar{b} \cdot c - \beta \cdot \bar{a} \cdot c$$

$$\bar{B}_1 = -b \cdot \bar{d} + \bar{\alpha} \cdot a \cdot \bar{d} + \alpha \cdot b \cdot \bar{c} - \beta \cdot a \cdot \bar{c}$$

$$C_1 = b \cdot \bar{b} - \bar{\alpha} \cdot a \cdot \bar{b} - \alpha \cdot \bar{a} \cdot b + \beta \cdot a \cdot \bar{a} \in \mathbb{R}.$$

Dacă $A_1 = 0$, cercul se transformă într-o dreaptă, iar dacă $A_1 \neq 0$, cercul se transformă în cerc. \square

Teorema 3.8.55. *Omografia păstrează biraportul a patru puncte.*

Demonstrație. Fie z_1, z_2, z_3, z_4 patru puncte și z'_1, z'_2, z'_3, z'_4 transformatele lor prin omografia $z' = \frac{az+b}{cz+d}$. Biraportul celor patru puncte z_1, z_2, z_3, z_4 este

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2} : \frac{z_3 - z_4}{z_1 - z_4}.$$

Imaginile prin omografie au biraportul

$$(z'_1, z'_2, z'_3, z'_4) = \frac{z'_3 - z'_2}{z'_1 - z'_2} : \frac{z'_3 - z'_4}{z'_1 - z'_4}.$$

Se calculează prima fracție

$$\frac{z'_3 - z'_2}{z'_1 - z'_2} = \frac{\frac{az_3+b}{cz_3+d} - \frac{az_2+b}{cz_2+d}}{\frac{az_1+b}{cz_1+d} - \frac{az_2+b}{cz_2+d}} = \frac{(z_3 - z_2)(ad - bc)}{(z_1 - z_2)(ad - bc)} = \frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2}.$$

A doua fracție se calculează analog înlocuind z'_2 cu z'_4 . Astfel obținem

$$(z'_1, z'_2, z'_3, z'_4) = (z_1, z_2, z_3, z_4). \quad \square$$

Fiind date trei puncte $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C} - \left\{-\frac{d}{c}\right\}$ distincte două câte două și transformatele lor $z'_1, z'_2, z'_3 \in \mathbb{C} - \left\{-\frac{a}{c}\right\}$ prin omografia $z' = \frac{az+b}{cz+d}$, cu a, b, c, d necunoscute, se poate determina omografia folosind invarianța biraportului, punând condiția că pentru orice $z \in \mathbb{C} - \left\{-\frac{d}{c}\right\}$ și transformatul său $z' \in \mathbb{C} - \left\{-\frac{a}{c}\right\}$ biraportul rămâne invariant, adică

$$\frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2} : \frac{z_3 - z}{z_1 - z} = \frac{z'_3 - z'_2}{z'_1 - z'_2} : \frac{z'_3 - z'}{z'_1 - z'}.$$

Exprimând $z' = f(z)$ din egalitatea de mai sus, obținem omografia căutată.

Teorema 3.8.56. (descompunerea omografiilor) *Omografia definită prin*

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d},$$

cu $a, b, c, d \in \mathbb{C}^*$ se poate scrie sub forma $f = f_1 \circ f_2 \circ f_3 \circ f_4$, unde

$$f_1(z) = z + \frac{a}{c}, \quad f_2(z) = -\frac{r}{c^2} \cdot z, \quad f_3(z) = \frac{1}{z}, \quad f_4(z) = z + \frac{d}{c}.$$

Demonstrație. Transformatul z' al lui z prin omografie se poate scrie astfel

$$z' = \frac{a}{c} - \frac{r}{c^2} \cdot \frac{1}{z + \frac{d}{c}}, \quad r = ad - bc. \quad \square$$

Observația 3.8.57. Funcția f_1 este o translație, f_2 este compunerea unei omotetii cu o rotație (omotetie spiralată), f_3 este compunerea unei inversiuni cu o simetrie în raport cu axa reală, iar f_4 este o translație.

3.9 Exerciții și probleme

1. Fie M, N, P, Q, R, S mijloacele laturilor $[AB], [BC], [CD], [DE], [EF], [FA]$ ale unui hexagon. Demonstrați că are loc relația $RN^2 = MQ^2 + PS^2$ dacă și numai dacă $MQ \perp PS$.
2. Considerăm triunghiurile asemenea ABC și $A'B'C'$, având aceeași orientare. Demonstrați că se poate forma un triunghi cu segmentele de lungimi $AA' \cdot BC, BB' \cdot CA, CC' \cdot AB$.
3. Pe laturile unui paralelogram se construiesc spre exterior pătrate. Să se arate că, centrele acestor pătrate sunt vârfurile unui pătrat.
4. Pe laturile $[AB]$ și $[BC]$ ale triunghiului ABC se construiesc spre exterior triunghiurile echilaterale ABN și ACM . Dacă P, Q, R sunt mijloacele segmentelor $[BC], [AM], [AN]$, arătați că triunghiul PQR este echilateral.
5. Fie $ABCD$ un pătrat cu lungimea laturii egală cu a și P un punct pe cercul înscris pătratului. Să se calculeze $PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2$.
6. Fie G centrul de greutate al patrulaterului $ABCD$. Demonstrați că dacă dreptele GA și GD sunt perpendiculare, atunci $[AD]$ este congruent cu bimediana laturilor $[AD]$ și $[BC]$.
7. Fie triunghiurile echilaterale OAB, OCD și OEF . Să se demonstreze că mijloacele segmentelor $[BC], [DE]$ și $[FA]$ sunt vârfurile unui triunghi echilateral.
8. Fie $A_1A_2A_3A_4$ un patrulater înscritibil și H_1, H_2, H_3, H_4 ortocentrele triunghiurilor $A_2A_3A_4, A_1A_3A_4, A_1A_2A_4$, respectiv $A_1A_2A_3$. Să se demonstreze că patrulateralele $A_1A_2A_3A_4$ și $H_1H_2H_3H_4$ sunt congruente.
9. Fie $ABCDE$ un pentagon convex pentru care

$$\widehat{BAC} = \widehat{CAD} = \widehat{DAE}, \quad \widehat{CBA} = \widehat{DCA} = \widehat{EDA}.$$

Diagonalele BD și CE se intersectează în P . Arătați că AP trece prin mijlocul laturii CD .

10. În triunghiul ABC , $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Fie O un punct în interiorul triunghiului astfel încât $\widehat{AOB} = \widehat{BOC} = \widehat{COA}$. Punctele D și E sunt mijloacele laturilor AB și AC . Arătați că punctele A, D, O, E sunt conciclice.

Bibliografie

- [1] Albu, A.C., Rado, F., Obadeanu, V., Popescu, I.P., Smaranda, D. – *Geometrie. Pentru perfecționarea profesorilor*, Editura Didactică și Pedagogică, R.A., București, 1983.
- [2] Andreescu, T., Andrica, D. – *360 Problems for Mathematical Contests*, GIL Publishing House, 2003.
- [3] Andreescu, T., Andrica, D. – *Complex Numbers from A to...Z*, Second Edition, Birkhäuser, 2014.
- [4] Andreescu, T., Korsky, S., Pohoăț, C. – *Lemmas in Olympiad Geometry*, XYZ Press, 2016.
- [5] Andreescu, T., Mushkarov, O., Stoyanov, L. – *Geometric Problems on Maxima and Minima*, Birkhäuser, 2005.
- [6] Andreescu, T., Pohoăț, C. – *110 Geometry Problems for the International Mathematical Olympiad*, XYZ Press, 2014.
- [7] Andreescu, T., Rolinek, M., Tkadlec, J. – *106 Geometry Problems. From the Awesome Math Summer Program*, XYZ Press, 2013.
- [8] Andreescu, T., Rolinek, M., Tkadlec, J. – *107 Geometry Problems. From the Awesome Math Summer Program*, XYZ Press, 2013.
- [9] Andrica, D. – *Three proofs to an interesting property of cyclic quadrilaterals*, International Journal of Geometry, Vol.2(2013), No.1, 6 pages.
- [10] Andrica, D. – *The extremum of a function defined on the Euclidean plane*, International Journal of Geometry, Vol.3(2014), 2, 20-24.
- [11] Andrica, D., Agratini, O., Bișboacă, N., Lobonț, Ghe., Ursu, S. – *MATEMATICĂ. Manual pentru clasa a X-a MI*, Editura Studium, Cluj-Napoca, 2000.
- [12] Andrica, D., Barbu, C. – *A geometric proof of Blundon's Inequalities*, Math. Inequal. Appl., **15** 2(2012), 361-370.

-
- [13] Andrica, D., Barbu, C., Lupescu, A. – *Note on the adjoint Spieker points*, International Journal of Geometry, Vol. **6**(2017), 61-66.
- [14] Andrica, D., Barbu, C., Piscoran, L. – *The geometric proof to a sharp version of Blundon's inequalities*, Journal of Mathematical Inequalities, **10** (4) (2016), 1137-1143.
- [15] Andrica, D., Bişboacă, N. – *Numere complexe. Probleme rezolvate din manualele alternative*, Editura Millenium, Alba Iulia, 2000.
- [16] Andrica, D., Bogdan, I. – *O formulă pentru arii cu ajutorul numerelor complexe*, Revista de Matematică Transilvania, **3**(1999), 314-324.
- [17] Andrica, D., Duca, D., Purdea, I., Pop, I. – *Matematica de bază*, Ediția a V-a revăzută și completată, Editura Studium, Cluj-Napoca, 2004.
- [18] Andrica, D., Feng, Z. – *On a geometric inequality involving medians*, Simpoziul Național de Geometrie "Gheorghe Țițeica", pag. 21-29, Bacău, 24-27 martie, 2011, Mocanu, M., Berceanu, B., Barbu, C., Coordonatori, Editura Docucenter, Bacău, 2011.
- [19] Andrica, D., Magdaș, C., Jecan, E. – *Geometrie clasele IX-X, pentru grupele de excelență*, Editura Studia, Cluj-Napoca, 2010.
- [20] Andrica, D., Marinescu, D.St., – *New Interpolation Inequalities to Euler's $R \geq 2r$* , Forum Geometricorum, Volume **17**(2017), 149-156.
- [21] Andrica, D., Nguyen, K.L. – *A note on the Nagel and the Gergonne points*, Creative Math. and Inf **17**(2008), 127-136.
- [22] Andrica, D., Țoapan, L. – *Analytic Geometry*, Cluj University Press, Cluj-Napoca, 2004.
- [23] Andrica, D., Țoapan, L., Talbi, M. – *Continuous training for mathematical contests and olympiads 2010-2011*, King Saud University, Riyadh, 2011.
- [24] Andrica, D., Varga, C., Văcărețu, D. – *Teme și probleme alese de geometrie*, Editura PLUS, București, 2002.
- [25] Andrica, D., Salama, T., – *Geometry*, AlKhuraiji House, Riyadh, 2013 (limba arabă).

-
- [26] Barbu, C. – *Teoreme fundamentale din geometria triunghiului*, Editura Unique, Bacău, 2008.
- [27] Bişboacă, N. – *Transformări geometrice în planul complex*, Editura Millenium, Alba Iulia, 2004.
- [28] Boju, V., Funar, L. – *The Math Problems*, Birkhäuser, Boston, Basel, Berlin, 2007.
- [29] Borş, C., Borş, D. – *Numere complexe*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1962.
- [30] Boskoff, W.-G., Vajiac, A. – *Discovering Geometry: An Axiomatic Approach*, Editura MATRIX ROM, Bucureşti, 2011.
- [31] Brânzei, D., Aniţa, S., Aniţa, A. – *Competenţă şi performanţă în geometrie, Vol.1, Relaţii metrice*, Editura Minied, Iaşi, 1992.
- [32] Brânzei, D., Aniţa, S., Aniţa, A. – *Competenţă şi performanţă în geometrie, Vol.2, Funcţii geometrice*, Editura Minied, Iaşi, 1992.
- [33] Brânzei, D., Aniţa, S., Cocea, C. – *Planul şi spaţiul euclidian*, Editura Academiei, Bucureşti, 1986.
- [34] Brânzei, D., Mortici, C. – *Metoda inversiunii în Geometrie*, Editura PLUS, Bucureşti, 2001.
- [35] Brânzei, D., Onofraş, E., Aniţa, S., Isvoranu, Ghe. – *Bazele raţionamentului geometric*, Editura Academiei, Bucureşti, 1983.
1952.
- [36] Chirciu, M. – *Inegalităţi geometrice de la iniţiere la performanţă*, Editura Paralela 45, Piteşti, 2015.
- [37] Chiriac, L. – *Competitive Geometry*, Editura Prut International, Chişinău, 2009.
- [38] Coşniţă, C. – *Teme şi probleme alese de matematici*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1958.
- [39] Court, N.A. – *College Geometry. An Introduction to the Modern Geometry of the Triangle and the Circle*, Harper and Row, Publishers, Inc., New York, Evanstone, San Francisco, London, 1976.

- [40] Coxeter, H.S.M., Greitzer, S.L. – *Geometry Revisited*, Mathematical Association of America, Washington, DC, 1967.
- [41] Dincă, M., Chiriță, M. – *Numere complexe în matematica de liceu*, Editura All Educațional, București, 1996.
- [42] Drăgan, M., Maftai, I.V., Rădulescu, S. – *Inegalități matematice. Tehnici și metode de demonstrație și rafinare*, Editura Didactică și Pedagogică, R.A., București, 2012.
- [43] Duican, L., Duican, I. – *Transformări geometrice. Culegere de probleme*, Editura Științifică și Enciclopedică, București, 1987.
- [44] Efremov, D. – *Noua geometrie a triunghiului*, Editura GIL, Zalău, 2010.
- [45] Engel, A. – *Probleme de matematică-strategii de rezolvare*, Editura GIL, Zalău, 2006.
- [46] Eves, H. – *A Survey of Geometry*, ediție revizuită, Allyn and Bacon, Boston, 1972.
- [47] Hadamard, J. – *Lecții de geometrie elementară*, vol.I,II, Editura Tehnică, București, 1961.
- [48] Hadârcă, I.T. – *Pagini de geometrie sintetică*, Editura Vivaldi, București, 2015.
- [49] Hahn, L. – *Complex Numbers and Geometry*, The Mathematical Association of America, 1994.
- [50] Hardy, G. H., Wright, E. M. – *An Introduction to the Theory of Numbers*, ediția a patra, Oxford University Press, Oxford, 1960.
- [51] Hartshorn, R. – *Geometry: Euclid and Beyond*, Springer-Verlag, New York, 2000.
- [52] Honsberger, R. – *Episodes in Nineteenth and Twentieth Century Euclidean Geometry*, The Mathematical Association of America, 1995.
- [53] Iacob, C. – *Matematică aplicată și mecanică*, Editura Academiei, București, 1989.

-
- [54] Ivănescu, I. – *Probleme de extrem în geometrie*, Editura Grapho, Bacău, 2012.
- [55] Ivanov, A., Teleucă, M. – *Probleme de geometrie competitivă*, Editura GIL, Zalău, 2009.
- [56] Johnson, R.A. – *Advanced Euclidean Geometry*, 1925, Dover reprint.
- [57] Lalescu, T. – *Geometria triunghiului*, Editura Tineretului, București, 1958.
- [58] Lee, J.M. – *Axiomatic Geometry*, American Mathematical Society, 2013.
- [59] Louridas, S.E., Rassias, M.Th. – *Problem-Solving and Selected Topics in Euclidean Geometry: In the Spirit of the Mathematical Olympiads*, Springer, New York, 2013.
- [60] Mihalca, D., Chițescu, I., Ghitiță, M. – *Geometria patrulaterului. Teoreme și probleme*, Editura Teora, București, 1998.
- [61] Megan, M., Birăuș, S., Noaghi, S., Neamțu, M.Șt. – *Algebră, geometrie plană și analiză matematică*, Editura Mirton, Timișoara, 2006.
- [62] Mihăileanu, N.N. – *Complemente de geometrie sintetică*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1965.
- [63] Mihăileanu, N.N. – *Lecții complementare de geometrie*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1976.
- [64] Mihăileanu, N.N. – *Utilizarea numerelor complexe în geometrie*, Editura Tehnică, București, 1968.
- [65] Mihăilescu, C. – *The Geometry of Remarkable Elements : Points, Lines, and Circles*, Andreescu, T., Andrica, D., Blaga, P., Brâzei, D., Eds., XYZ Press, 2016.
- [66] Mitrović, D.S., Pečarić, J.E., Volenec, V. – *Recent advances in geometric inequalities*, Kluwer Acad. Publ., Amsterdam, 1989.
- [67] Modenov, P.S. – *Problems in Geometry*, MIR Moscow, 1981.
- [68] Moise, E.E. – *Elementary Geometry from an Advanced Standpoint*, ediția a treia, Addison-Wesley, 1990.

- [69] Moise, E.E., Downs Jr., F.L. – *Geometrie*, Editura didactică și pedagogică, București, 1983.
- [70] Neacșu, M., Neacșu, A., Neacșu, C. – *Minime și maxime în geometria elementară*, Editura Timpul, Reșița, 1996.
- [71] Nicolescu, L., Boskoff, W. – *Probleme practice de geometrie*, Editura Tehnică, București, 1990.
- [72] Nicolescu, L., col. – *Metode de rezolvare a problemelor de geometrie*, Editura Universității București, 1998.
- [73] Nicula, V. – *Numere complexe. Probleme și exerciții pentru clasa a X-a*, Editura Scorpion 7, 1993.
- [74] Nicula, V., Pohoța, C. – *Diviziune armoniă*, Editura GIL, Zalău, 2007.
- [75] Onișor, I. – *Transformări geometrice. Omotetia și inversiunea*, Biblioteca SSMR, Editura MATRIX ROM, București, 2009.
- [76] Onișor, I. – *170 de probleme de geometrie*, Editura MATRIX ROM, București, 2012.
- [77] Panaitopol, L., Panaitopol, M.E. – *Probleme calitative în geometria plană*, Editura GIL, Zalău, 1996.
- [78] Panaitopol, M.E., Panaitopol, L. – *Probleme de geometrie rezolvate trigonometric*, Editura GIL, Zalău, 1994.
- [79] Pimsner, M., Popa, S. – *Probleme de geometrie elementară*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1979.
- [80] Pinte, C. – *Geometrie*, Presa Universitară Clujeană, 2001.
- [81] Pop, O.T., Minculete, N., Bencze, M. – *An introduction to quadrilateral geometry*, Editura Didactică și Pedagogică, R.A., București, 2013.
- [82] Popescu, G.P., Maței, I.V., Diaz-Barrero, J.L., Dincă, M. – *Inegalități matematice. Modele inovatoare*, Editura Didactică și Pedagogică, R.A., București, 2007.
- [83] Posamentier, A.S. – *Advanced Euclidean Geometry*, Key College Publishing, 2002.

-
- [84] Radic, M. – *Extreme Areas of Triangles in Poncelet's Closure Theorem*, Forum Geometricorum, Volume 4(2004), 23-26.
- [85] Sachelarie, D. – *Geometria triunghiului. Anul 2000*, Editura MATRIX ROM, București, 2000.
- [86] Sălăgean, Gr.S. – *Geometria planului complex*, Editura Promedia-Plus, Cluj Napoca, 1997.
- [87] Schwerdtfeger, H. – *Geometry of Complex Numbers*, University of Toronto Press, Toronto, 1962.
- [88] Smaranda, D., Soare, N. – *Transformări geometrice*, Editura Academiei R.S.R., București, 1988.
- [89] Sossinsky, A.B. – *Geometries*, American Mathematical Society, 2012.
- [90] Țițeica, Gh. – *Probleme de geometrie*, Editura Tehnică, București, 1981.
- [91] Vodă, Gh. – *Vraja geometriei demodate*, Editura Albatros, București, 1983.
- [92] Wu, S-H., Chu, Y-M. – *Geometric interpretation of Blundon's inequality and Ciamberlini's inequality*, Journal of Inequalities and Applications (2014), 2014: 381.
- [93] Yaglom, I.M. – *Geometric Transformations I*, The Mathematical Association of America, 1962.
- [94] Yaglom, I.M. – *Geometric Transformations II*, The Mathematical Association of America, 1968.
- [95] Yaglom, I.M. – *Geometric Transformations III*, The Mathematical Association of America, 1973.
- [96] Yaglom, I.M. – *Complex Numbers in Geometry*, Academic Press, New York, 1968.

Index

- a doua teoremă a lui Ptolemeu, 98
- afixul punctului cevian, 272
- afixul punctului izogonal, 273
- al doilea cerc al lui Lemoine, 71
- anticentrul patrulaterului, 95
- antimediatoare, 94
- aria triunghiului pedal, 123
- aria triunghiului podar, 55
- asemănare de raport k , 19
- axă radicală, 61
- axa lui Lemoine, 52
- axiomă, 3

- baricentru, 182
- bimediană, 92
- Birkhoff, G.D., 11
- bisectoare, 21
- bisectoare exterioară, 21
- Blundon, W.J., 143
- Bolyai, J., 11

- cazurile de asemănare ale triunghiurilor, 16
- centrul cercului înscris în triunghi, 21
- centrul cercului circumscris triunghiului, 21
- centrul cercului exînscriș triunghiului, 21
- centrul de greutate, 22
- centrul de greutate al patrulaterului, 92
- centrul de greutate al perimetrului, 280
- centrul radical, 62
- cercul de inversiune, 322
- cercul lui Apollonius, 72
- cercul lui Euler, 65
- cercul lui Fuhrmann, 83
- cercurile lui Carnot, 76
- Ceva, G., 25
- ceviană, 25
- ceviene izogonale, 33
- clasificarea izometriilor planului, 205
- Coșniță, C., 86
- configurația Blundon, 143
- configurație geometrică, 3
- configurația lui Napoleon, 219
- configurație fixă, 205
- configurație fixă punct cu punct, 205
- coordonate baricentrice, 267

- descompunerea omografiilor, 335
- descompunerea transformărilor afine de speța 1, 317
- descompunerea transformărilor afine de speța 2, 319
- Dieudonné, J., 12
- dreaptă fixă, 205
- dreapta antiortică, 50
- dreapta lui Euler, 35
- dreapta lui Nagel, 75
- dreapta lui Newton, 112
- dreapta lui Simpson, 57
- dreapta Newton-Gauss, 108
- dreapta ortică, 69
- dreptele lui Coșniță, 86

- Elementele, 3

- Encyclopedia of Triangle Centers (ETC), înălțime, 22
 20
 Erdős, P., 133
 Euclid, 3
 Euler, L., 35

 forma tare a inegalităților lui Blundon, 152
 forma trigonometrică a inegalității lui Gerretsen, 290
 formula lui Arhimede, 103
 formula lui Euler, 42
 Fuhrmann, W., 83
 funcție omografică, 330

 geometrie eliptică, 11
 geometrie euclidiană, 11
 geometrie hiperbolică, 11
 Gergonne, J.D., 29
 grupul asemănărilor planului, 19
 grupul izometriilor, 204

 Hilbert, D., 11

 inegalitățile lui Blundon, 143
 inegalitatea Erdős-Mordell, 133
 inegalitatea lui Euler, 43
 inegalitatea lui Gerretsen, 147
 inegalitatea lui Ptolemeu, 96
 inegalitatea slabă a lui Blundon, 147
 invarianții rotației, 304
 invarianții simetrici ai triunghiului, 188
 inversiune, 243
 involuție, 206
 izometrie, 204
 izometrie de genul 1, 206
 izometrie de genul 2, 206

 Kagan, V.F., 11
 Klein, F., 203
 Kolmogorov, A.N., 12

 lema lui Carnot, 47
 Lemoine, É.M.H., 35
 Lobacevski, N., 11
 lungimea înălțimii, 38
 lungimea bisectoarei, 37
 lungimea izogonalei unei cevien, 40
 lungimea simedianei, 40

 mediană, 22
 medianele unui patrulater, 105
 mediatoare, 21
 Menelaus din Alexandria, 23
 moment de inerție, 183
 Mordell, L.J., 133

 Nagel, C.H. von, 31
 noțiuni primare, 11

 omotetie, 222
 omotetie spiralată, 232
 ortocentrul triunghiului, 22

 patrulater circumscriptibil, 92
 patrulater complet, 109
 patrulater inscriptibil, 92
 planul complex, 251
 prima teoremă a lui Ptolemeu, 97
 primul cerc al lui Lemoine, 70
 produs complex, 269
 produs mixt, 196
 produs real, 261
 produs scalar, 175

-
- produs vectorial, 195
 Programul de la Erlangen, 203
 proprietatea de minim a patrulaterului convex, 119
 punct fix, 205
 puncte conjugate armonice, 110
 puncte izotomic conjugate, 31
 punctele euleriene, 65
 punctele lui Feuerbach, 288
 punctul Fermat-Toricelli, 132
 punctul lui Coșniță, 87
 punctul lui Fuhrmann, 83
 punctul lui Gergonne, 29
 punctul lui Lemoine, 35
 punctul lui Miquel al unui patrulater, 239
 punctul lui Nagel, 31
 punctul lui Newton, 113
 punctul lui Spieker, 74
 puterea punctului față de cerc, 42
 Radó, F., 12
 raport de asemănare, 14
 reciproca teoremei lui Ceva, 26
 reciproca teoremei lui Menelaus, 24
 relații primare, 12
 relația “între”, 13
 relația de congruență, 13
 relația lui Bretschneider, 97
 relația lui Euler, 100
 relația lui Leibniz, 101
 relația lui Stewart, 36
 relația lui Sylvester, 171
 relația lui Van Aubel, 43
 rotație, 216
 Rouché, E., 143
 Salmon, G., 57
 Schur, F., 11
 segment orientat, 163
 simediană, 35
 simetrie axială, 212
 simetrie centrală, 210
 simetrie de ordin n , 218
 Simson, R., 56
 sistem axiomatic, 163
 sistem de puncte, 181
 Spieker, Th., 74
 Steiner, J., 33
 Stewart, M., 36
 Teleman, C., 12
 teorema directă a lui Ceva, 25
 teorema directă a lui Menelaus, 24
 teorema fundamentală a asemănării, 15
 teorema lui Bottema, 291
 teorema lui Desargues, 53
 teorema lui Fagnano, 120
 teorema lui Feuerbach, 282
 teorema lui Lagrange, 182
 teorema lui Menelaus pentru patrulatere convexe, 115
 teorema lui Pithot, 111
 teorema lui Steiner, 33
 teorema medianei, 37
 teorema ortopolului, 179
 teorema patrulaterului complet, 109
 Thales, 14
 transformare geometrică, 203
 transformarea Ravi, 30
 translație, 206
 triunghi, 13
 triunghi orientat, 206
 triunghiul anticomplementar, 22

-
- triunghiul cevian, 28
 - triunghiul de contact, 29
 - triunghiul lui Carnot, 76
 - triunghiul lui Coșniță, 86
 - triunghiul lui Fuhrmann, 83
 - triunghiul median, 29
 - triunghiul ortic, 28
 - triunghiuri asemenea, 14
 - triunghiuri ortologice, 50

 - varianta trigonometrică a teoremei lui Ceva,
28
 - vector de poziție, 166
 - vector legat, 164
 - vector liber, 164
 - versiunea duală a inegalităților lui Blun-
don, 143
 - versor, 166

 - Weyl, H., 11