ECUAŢII DIFERENŢIALE DE ORDINUL ÎNTÂI

ALGEBRĂ LINIARĂ, GEOMETRIE ANALITICĂ ŞI DIFERENŢIALĂ
CURSUL 12

O **ecuaţie diferenţială de ordinul întâi** este o ecuaţie de forma $F(x, y, y') = 0$, unde $F : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, D este un domeniu, $y = y(x)$ este funcţia necunoscută şi $y = y'(x) = \frac{dy}{dx}$ este derivata de ordinul întâi a acesteia.

O funcţie $\phi : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se numeşte **soluţie** pentru ecuaţia diferenţială $F(x, y, y') = 0$ dacă:

- ϕ este derivabilă pe I;
- $F(x, \phi(x), \phi'(x)) = 0$, pentru orice $x \in I$.

Graficul soluţiei se numeşte **curbă integrală.**

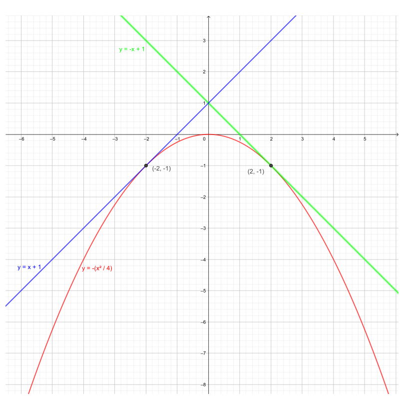
Soluţia generală a ecuaţiei $F(x, y, y') = 0$ este o familie de soluţii $y = \phi(x, C)$, unde C este o constantă reală arbitrară.

Pentru valori particulare ale constantei se obţin **soluţii particulare**.

Soluţia singulară a ecuaţiei este soluţia care nu se poate obţine din soluţia generală, prin particularizarea constantei.

Exemplu. Soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale $y = xy' + y'^2$ este $y = xC + C^2$, unde $C \in \mathbb{R}$ este o constantă. Din forma soluţiei obţinem curbele integrale reprezintă familii de drepte.

Alegem valorile $C = 1$ şi $C = -1$ şi obţinem soluţiile particulare $y = x + 1$, respectiv $y = -x + 1$.



De remarcat faptul că $y = -\frac{x^2}{4}$ verifică ecuaţia diferenţială. Într-adevăr,

$$-\frac{x^2}{4} = x \cdot \left(-\frac{x^2}{4}\right)' + \left[\left(-\frac{x^2}{4}\right)'\right]^2 \Leftrightarrow -\frac{x^2}{4} = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{4},$$

deci $y = -\frac{x^2}{4}$ este soluţie pentru ecuaţia diferenţială. Mai mult, soluţia este singulară, iar curba integrală este o parabolă.

- O ecuaţie de forma $y' = f(x, y)$, unde $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ este o funcţie continuă, se numeşte **ecuaţie diferenţială de ordinul întâi sub forma normală.**

- A rezolva **problema Cauchy**
$$P.C. : \begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}, \ (x_0, y_0) \in D,$$
constă în a determina o soluţie ϕ a ecuaţiei ce verifică $\phi(x_0) = y_0$.

1. Ecuaţii diferenţiale de forma $y' = f(x, y)$

1. **Ecuaţii cu variabile separabile (E.V.S.)**
Forma generală:
$$y' = f(x) \cdot g(y)$$
Metoda de rezolvare:
- Dacă $g(y) \neq 0$, pentru orice y, atunci din $y' = \frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$ se separă variabilele şi rezultă
$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx.$$
Prin integrare obţinem soluţia generală
$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C,$$
unde C este o constantă reală.
- Daca există y_0 astfel încât $g(y_0) = 0$, atunci $y = y_0$ este soluţie singulară.

Exemplu. Să se rezolve ecuaţia diferenţială:
$$(1 + x^2)yy' + x(1 + y^2) = 0.$$
Avem:
$$(1 + x^2)y\frac{dy}{dx} = -x(1 + y^2) \Leftrightarrow \frac{y}{1 + y^2}dy = -\frac{x}{1 + x^2}dx.$$
Cum $1 + y^2 \neq 0$, pentru orice y, integrăm:
$$\int \frac{y}{1 + y^2}dy = -\int \frac{x}{1 + x^2}dx \Leftrightarrow \frac{1}{2}\ln(1 + y^2) = -\frac{1}{2}\ln(1 + x^2) + C$$
Soluţia generală este: $\frac{1}{2}\ln(1 + y^2) = -\frac{1}{2}\ln(1 + x^2) + C$

Observaţie. Dacă prelucrăm soluţia generală, obţinem:
$$\ln\sqrt{1 + y^2} = -\ln\sqrt{1 + x^2} + \ln|C|,$$
deci
$$\sqrt{1 + y^2} = \frac{C}{\sqrt{1 + x^2}}, C > 0$$

Soluţia generală este

$$1 + y^2 = \frac{C}{1 + x^2}$$

2. **Ecuaţii omogene**

Forma generală:

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

Metoda de rezolvare:

- Facem schimbarea de funcţie $z = \frac{y}{x}$, $z = z(x)$. Atunci $y = xz$ şi prin derivare obţinem $y' = z + xz'$;
- Înlocuim în ecuaţie şi obţinem o EVS.

Observaţie. Avem $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$, deci $z + xz' = f(z)$, adică $z' = \frac{f(z)-z}{x}$ (EVS). Dacă există z_0 astfel încât $f(z_0) = z_0$, atunci $z = z_0$ este soluţie singulară pentru EVS, deci $y = xz_0$ este soluţie singulară.

Exemplu. Să se rezolve problema Cauchy:

$$PC : \begin{cases} x^2 + 3y^2 = 2xyy' \\ y(1) = 2 \end{cases}, x > 0$$

Prelucrăm ecuaţia diferenţială

$$x^2 + 3y^2 = 2xyy' | : x^2 \neq 0 \Leftrightarrow 1 + 3\left(\frac{y}{x}\right)^2 = \frac{y}{x} \cdot y'$$

deci este o ecuaţie omogenă.

Rezolvăm ecuaţia omogenă $1 + 3\left(\frac{y}{x}\right)^2 = 2\frac{y}{x} \cdot y'$ astfel:

Pas 1: Facem schimbarea de funcţie $z = \frac{y}{x}, z = z(x)$. Deci $y = xz$ şi prin derivare în raport cu x obţinem $y' = z + xz'$.

Pas 2: Înlocuim în ecuaţie:

$$1 + 3z^2 = 2z(z + xz') \Leftrightarrow 1 + z^2 = 2xzz' \qquad (EVS)$$

Pas 3: Rezolvăm EVS:

$$1 + z^2 = 2xz\frac{dz}{dx} \Leftrightarrow \frac{z}{1 + z^2}dz = 2\frac{dx}{x}$$

Integrăm

$$\int \frac{z}{1 + z^2}dz = 2\int \frac{dx}{x} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\ln(1 + z^2) = 2\ln|x| + \ln|C|, C \in \mathbb{R},$$

deci obţinem soluţia generală a EVS de forma:

$$\sqrt{1 + z^2} = Cx^2, C > 0$$

Revenim la notaţie $z = \frac{y}{x}$ şi obţinem:

$$\sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}} = Cx^2,$$

deci

$$\sqrt{x^2 + y^2} = Cx^3, C > 0.$$

Pas 4: Soluţia generală a ecuaţiei omogene este

$$\sqrt{x^2+y^2} = Cx^3, C > 0.$$

Pentru a determina soluţia problemei Cauchy, înlocuim condiţia iniţială $y(1) = 2$ în soluţia generală:

$$\sqrt{1^2+2^2} = C \cdot 1^3$$

deci $C = \sqrt{5}$. Soluţia problemei Cauchy este:

$$\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{5} \cdot x^3$$

3. **Ecuaţii reductibile la ecuaţii omogene**

Forma generală:

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right), a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Metoda de rezolvare:

- Dacă $c_1 = c_2 = 0$, atunci ecuaţia devine

  $$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y}{a_2x + b_2y}\right)$$

  deci este o ecuaţie omogenă, prin urmare facem schimbarea de funcţie $z = \frac{y}{x}$, $z = z(x)$.

- Dacă $c_1^2 + c_2^2 \neq 0$ şi sistemul

  $$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$

  admite soluţia unică (x_0, y_0), atunci facem schimbarea de funcţie şi de variabilă $\begin{cases} u = x - x_0 \\ v = y - y_0 \end{cases}$

  Atunci $du = dx,\ dv = dy$ şi $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dv}{du} = v'$, unde $v = v(u)$. Înlocuim în ecuaţie şi obţinem:

  $$v' = f\left(\frac{A_1u + B_1v}{A_2u + B_2v}\right),$$

  adică o ecuaţie omogenă. Pentru a rezolva ecuaţia omogenă facem schimbarea de funcţie $z = \frac{v}{u}$, $z = z(u)$.

- Dacă $c_1^2 + c_2^2 \neq 0$ şi sistemul

  $$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$

  nu admite soluţie unică, adică $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = k'$, atunci facem schimbarea de funcţie

  $$z = a_1x + b_1y,\ z = z(x).$$

  Derivăm relaţia în raport cu x şi obţinem $z' = a_1 + b_1y'$. Înlocuim în ecuaţia iniţială şi obţinem o EVS.

Exemplu. Să se rezolve ecuaţia diferenţială

$$y' = \frac{x-y+1}{x+y-3}, \ x+y-3 \neq 0.$$

Pas 1: Observăm că sistemul

$$\begin{cases} x-y+1=0 \\ x+y-3=0 \end{cases}$$

admite soluţia $x_0 = 1$, $y_0 = 2$, deci facem schimbarea de funcţie şi de variabilă

$$\begin{cases} u = x-1 \\ v = y-2 \end{cases}$$

Avem $x = u+1$, $y = v+2$, $dx = du$, $dy = dv$ şi $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dv}{du} = v'$, unde $v = v(u)$. Înlocuim în ecuaţia

$$y' = \frac{x-y+1}{x+y-3}$$

şi obţinem

$$v' = \frac{(u+1)-(v+2)+1}{(u+1)+(v+2)-3} = \frac{u-v}{u+v} = \frac{1-\frac{v}{u}}{1+\frac{v}{u}},$$

adică o ecuaţie omogenă.

Pas 2: Rezolvăm ecuaţia omogenă

$$v' = \frac{1-\frac{v}{u}}{1+\frac{v}{u}},$$

deci facem schimbarea de funcţie $z = \frac{v}{u}$, $z = z(u)$.

Atunci $v = z \cdot u$, iar prin derivare în raport cu u obţinem $v' = z + uz'$. Înlocuim în ecuaţie:

$$z + uz' = \frac{1-z}{1+z},$$

adică

$$uz' = \frac{1-z}{1+z} - z = \frac{1-2z-z^2}{1+z}$$

Am obţinut o EVS.

Pas 3: Rezolvăm EVS:

$$uz' = \frac{1-2z-z^2}{1+z}.$$

Dacă $1-2z-z^2 \neq 0$, adică $z \neq -1 \pm \sqrt{2}$, avem:

$$u\frac{dz}{du} = \frac{1-2z-z^2}{1+z} \Leftrightarrow \frac{z+1}{1-2z-z^2}dz = \frac{1}{u}du$$

Integrăm

$$\int \frac{z+1}{1-2z-z^2}dz = \int \frac{1}{u}du \Leftrightarrow -\frac{1}{2}\int \frac{-2-2z}{1-2z-z^2}dz = \int \frac{1}{u}du$$

şi obţinem

$$-\frac{1}{2}\ln|1-2z-z^2| = \ln|u| + \ln|C|,$$

deci soluţia generală a EVS este:

$$\frac{1}{\sqrt{|1-2z-z^2|}} = C|u|, C > 0$$

În plus, $z = -1 \pm \sqrt{2}$ sunt soluţii singulare ale EVS.

Pas 4: Avem

$$z = \frac{v}{u} = \frac{y-2}{x-1}.$$

Înlocuim în soluţia generală a EVS

$$\frac{1}{\sqrt{|1-2z-z^2|}} = C|u|, C > 0$$

şi obţinem soluţia generală a ecuaţiei iniţiale este

$$\frac{1}{\sqrt{\left|1-2\cdot\frac{y-2}{x-1}-\left(\frac{y-2}{x-1}\right)^2\right|}} = C|x-1| \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{\sqrt{|(x-1)^2-2(y-2)(x-1)-(y-2)^2|}} = C$$

4. **Ecuaţii liniare de ordinul întâi**

Forma generală:

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

unde P, Q sunt funcţii continue pe intervalul real I.

Dacă $Q(x) = 0$, pentru orice $x \in I$, atunci ecuaţia $y' + P(x)y = 0$ este o EVS.

Metoda de rezolvare:

Teoremă 1.1. *Soluţia generală a ecuaţiei liniare $y' + P(x)y = Q(x)$ este de forma*

$$y = y_o + y_p,$$

unde y_o este soluţie pentru ecuaţia liniară omogenă $y' + P(x)y = 0$ şi y_p este o soluţie particulară pentru ecuaţia liniară neomogenă

$$y' + P(x)y = Q(x).$$

Pas 1: Determinăm soluţie pentru ecuaţia omogenă (EVS)

$$y' + P(x)y = 0.$$

Avem

$$\frac{dy}{dx} = -P(x)y \Leftrightarrow \frac{1}{y}dy = -P(x)dx$$

şi integrăm

$$\int \frac{1}{y}dy = -\int P(x)dx.$$

Obţinem $\ln|y| = -\int P(x)dx + C$, deci

$$|y| = e^{-\int P(x)dx + C} = e^{-\int P(x)dx} \cdot e^C.$$

Soluţia generală a ecuaţiei omogene (EVS) este

$$y_o = C \cdot e^{-\int P(x)dx}.$$

Pas 2: Căutăm soluţie particulară pentru ecuaţia liniară neomogenă $y' + P(x)y = Q(x)$ prin *metoda variaţiei constantei* (MVC). Trebuie să determinăm o soluţie de forma soluţiei care s-a obţinut pentru ecuaţia liniară omogenă în care constanta C este o funcţie ce depinde de x, $C(x)$.

Prin urmare, căutăm $C(x)$ astfel încât

$$y = C(x) \cdot e^{-\int P(x)dx}$$

este soluţie pentru ecuaţia $y' + P(x)y = Q(x)$. Înlocuim soluţia în ecuaţie:

$$\left(C(x) \cdot e^{-\int P(x)dx}\right)' + P(x)C(x) \cdot e^{-\int P(x)dx} = Q(x) \Leftrightarrow$$

$$C'(x) \cdot e^{-\int P(x)dx} + C(x)\left(e^{-\int P(x)dx}\right)' + P(x)C(x) \cdot e^{-\int P(x)dx} = Q(x) \Leftrightarrow$$

$$C'(x) \cdot e^{-\int P(x)dx} - C(x)P(x)e^{-\int P(x)dx} + P(x)C(x) \cdot e^{-\int P(x)dx} = Q(x)$$

Obţinem

$$C'(x) = Q(x)e^{\int P(x)dx}$$

şi prin integrare găsim

$$C(x) = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + K, K \in \mathbb{R}.$$

Atunci, cum

$$y = C(x) \cdot e^{-\int P(x)dx},$$

avem soluţia generală a ecuaţiei liniare este

$$y = C(x) \cdot e^{-\int P(x)dx} = \left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + K\right) \cdot e^{-\int P(x)dx}$$

De remarcat faptul că soluţia generală poate fi scrisă sub forma

$$y = K \cdot e^{-\int P(x)dx} + \left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx\right) \cdot e^{-\int P(x)dx} = y_o + y_p$$

Exemplu. Să se rezolve ecuaţia diferenţială

$$y' = -\frac{2}{x}y + x^3, \ x > 0.$$

Ecuaţia poate fi scrisă sub forma

$$y' + \frac{2}{x}y = x^3,$$

deci este o ecuaţie liniară în care $P(x) = \frac{2}{x}$ şi $Q(x) = x^3$.

Soluţia generală a ecuaţiei liniare este

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left(K + \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx\right)$$

Înlocuim $P(x)=\frac{2}{x}$ şi $Q(x)=x^3$ şi obţinem:

$$y=e^{-\int P(x)dx}\left(K+\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx\right)\Leftrightarrow$$

$$y=e^{-\int \frac{2}{x}dx}\left(K+\int x^3e^{\int \frac{2}{x}dx}dx\right)\Leftrightarrow$$

$$y=e^{-2\ln|x|}\left(K+\int x^3e^{2\ln|x|}dx\right)\Leftrightarrow y=\frac{1}{x^2}\left(K+\int x^3\cdot x^2dx\right),$$

deci soluţia generală este

$$y=\frac{1}{x^2}\left(K+\frac{x^6}{6}\right),K\in\mathbb{R}.$$

5. **Ecuaţii de tip Bernoulli**

Forma generală:

$$y'+P(x)y=Q(x)y^\alpha,\alpha\in\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$$

unde P,Q sunt funcţii continue pe intervalul real I.

- Dacă $\alpha=0$, atunci ecuaţia devine $y'+P(x)y=Q(x)$ (ecuaţie liniară).
- Dacă $\alpha=1$, atunci ecuaţia devine $y'+P(x)y=Q(x)y$, adică $y'+(P(x)-Q(x))y=0$ (EVS).

Metoda de rezolvare:

- Se face schimbarea de funcţie $z=y^{1-\alpha}$, $z=z(x)$, deci $y=z^{\frac{1}{1-\alpha}}$ şi $y'=\frac{1}{1-\alpha}z^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}z'$.
- Înlocuim în ecuaţie y şi y' şi obţinem o ecuaţie liniară neomogenă.

Exemplu. Să se rezolve ecuaţia diferenţială

$$xy'-2x^2\sqrt{y}=4y,\ x\neq 0.$$

Ecuaţia diferenţială poate fi scrisă sub forma:

$$xy'-4y=2x^2y^{\frac{1}{2}},\ x\neq 0$$

deci este o ecuaţie de tip Bernoulli cu $\alpha=\frac{1}{2}$.

Pas 1: Facem schimbarea de funcţie $z=y^{\frac{1}{2}}$, $z=z(x)$. Atunci $y=z^2$ şi, prin derivare în raport cu x, obţinem $y'=2zz'$. Înlocuim în ecuaţie y şi y'.

Avem

$$xy'-4y=2x^2y^{\frac{1}{2}},\ x\neq 0$$

deci

$$x\cdot 2zz'-4z^2=2x^2(z^2)^{\frac{1}{2}}|:z\neq 0,$$

echivalent cu

$$2xz'-4z=2x^2|:2x\neq 0$$

Ecuaţia diferenţială devine

$$z'-\frac{2}{x}z=x,$$

deci este o ecuaţie liniară neomogenă cu $P(x)=-\frac{2}{x}$, $Q(x)=x$.

Pas 2: Rezolvăm ecuaţia liniară

$$z' - \frac{2}{x}z = x,$$

unde $P(x) = -\frac{2}{x}$, $Q(x) = x$. Soluţia generală a ecuaţiei liniare este

$$z = e^{-\int P(x)dx}\left(K + \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx\right).$$

Înlocuim:

$$z = e^{-\int -\frac{2}{x}dx}\left(K + \int xe^{\int -\frac{2}{x}dx}dx\right) \Leftrightarrow$$

$$z = e^{2\ln|x|}\left(K + \int xe^{-2\ln|x|}dx\right)$$

Oţinem:

$$z = x^2\left(K + \int x \cdot \frac{1}{x^2}dx\right),$$

deci

$$z = x^2(K + \ln|x|), K \in \mathbb{R}$$

Pas 3: Soluţia generală a ecuaţiei liniare este

$$z = x^2(K + \ln|x|), K \in \mathbb{R}.$$

Pas 4: Soluţia generală a ecuaţiei Bernoulli este

$$\sqrt{y} = x^2(K + \ln|x|), K \in \mathbb{R},$$

echivalent cu

$$y = x^4(K + \ln|x|)^2, K \in \mathbb{R}.$$

6. **Ecuaţii de tip Riccati**

Forma generală:

$$y' = P(x)y^2 + Q(x)y + H(x)$$

unde P, Q, H sunt funcţii continue pe intervalul real I. Acest tip de ecuaţie poate fi rezolvată dacă se cunoaşte o soluţie particulară, y_p.

Metoda de rezolvare:

- Se face schimbarea de funcţie $u = y - y_p$, $u = u(x)$, unde y_p este o soluţie particulară dată. Atunci $y = u + y_p$ şi $y' = u' + y_p'$.
- Înlocuim y, y' în ecuaţie şi obţinem o ecuaţie de tip Bernoulli.

Exemplu. Să se rezolve ecuaţia de tip Riccati:

$$3y' + y^2 + \frac{2}{x^2} = 0,\ x > 0$$

ştiind că $y_p = \frac{1}{x}$ este o soluţie particulară

Pas 1: Ecuaţia poate fi scrisă sub forma:

$$y' = -\frac{1}{3}y^2 - \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{x^2}.$$

Verificăm dacă $y_p = \frac{1}{x}$ este soluţie particulară, adică

$$y_p' = -\frac{1}{3}y_p^2 - \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{x^2}.$$

Într-adevăr, avem

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^2 - \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{x^2},$$

echivalent cu

$$-\frac{1}{x^2} = -\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^2 - \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{x^2}.$$

Pas 2: Facem schimbarea de funcţie $u = y - y_p$, adică $u = y - \frac{1}{x}$, $u = u(x)$. Obţinem $y = u + \frac{1}{x}$ şi $y' = u' - \frac{1}{x^2}$. Înlocuim $y,\ y'$ în ecuaţia Riccati:

$$y' = -\frac{1}{3}y^2 - \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{x^2}$$

şi obţinem

$$u' - \frac{1}{x^2} = -\frac{1}{3}\left(u + \frac{1}{x}\right)^2 - \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{x^2}.$$

Prelucrăm relaţia:

$$u' - \frac{1}{x^2} = -\frac{1}{3}\left(u^2 + 2u\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) - \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{x^2},$$

deci

$$u' = -\frac{1}{3}u^2 - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x}u.$$

Am obţinut

$$u' + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x}u = -\frac{1}{3}u^2,$$

adică o ecuaţie Bernoulli cu $\alpha = 2$.

Pas 3: Rezolvăm ecuaţia Bernoulli cu $\alpha = 2$:

$$u' + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x}u = -\frac{1}{3}u^2.$$

Facem schimbarea de funcţie $z = u^{1-\alpha} = u^{-1}$, $z = z(x)$, deci $u = \frac{1}{z}$ şi $u' = -\frac{1}{z^2}z'$. Înlocuim $u,\ u'$ în ecuaţia Bernoulli:

$$u' + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x}u = -\frac{1}{3}u^2 \Leftrightarrow$$

$$-\frac{1}{z^2}z' + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x}\frac{1}{z} = -\frac{1}{3}\frac{1}{z^2} | \cdot -z^2,$$

echivalent cu

$$z' - \frac{2}{3x}z = \frac{1}{3},$$

adică am obţinut o ecuaţie liniară neomogenă.

Pas 4: Rezolvăm ecuaţia liniară neomogenă

$$z' - \frac{2}{3x}z = \frac{1}{3},$$

unde $P(x) = -\frac{2}{3x}$, $Q(x) = \frac{1}{3}$. Soluţia generală a ecuaţiei liniare este

$$z = e^{-\int P(x)dx}\left(K + \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx\right).$$

Obţinem:

$$z = e^{-\int -\frac{2}{3x}dx}\left(K + \int \frac{1}{3}e^{\int -\frac{2}{3x}dx}dx\right) \Leftrightarrow$$

$$z = e^{\frac{2}{3}\ln|x|}\left(K + \int \frac{1}{3}e^{-\frac{2}{3}\ln|x|}dx\right) \Leftrightarrow$$

$$z = \sqrt[3]{x^2}\left(K + \int \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}dx\right) \Leftrightarrow$$

Obţinem că

$$z = \sqrt[3]{x^2}\left(K + \frac{1}{3}\frac{x^{-\frac{2}{3}+1}}{-\frac{2}{3}+1}\right).$$

Pas 5: Soluţia generală a ecuaţiei liniare este:

$$z = \sqrt[3]{x^2}(K + \sqrt[3]{x}).$$

Pas 6: Soluţia generală a ecuaţiei Bernoulli este:

$$u = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}(K + \sqrt[3]{x})}.$$

Pas 7: Soluţia generală a ecuaţiei Riccati este:

$$y - \frac{1}{x} = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}(K + \sqrt[3]{x})}.$$

7. **Ecuaţii cu diferenţiale totale exacte. Factor integrant**

Definiţie 1.1. O ecuaţie de forma $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$, unde P, Q sunt funcţii continue pe $U \subset \mathbb{R}^2$, se numeşte **cu diferenţială totală exactă** dacă există funcţia $F : U \to \mathbb{R}^2$ continuă cu derivate parţiale continue astfel încât $\frac{\partial F}{\partial x} = P(x,y)$ şi $\frac{\partial F}{\partial y} = Q(x,y)$.

În acest caz, ecuaţia $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ este echivalentă cu $dF = 0$, adică F este o funcţie constantă.

Forma generală: Dacă P, Q sunt funcţii continue cu derivate paţiale continue şi are loc relaţia

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

atunci ecuaţia

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

este o ecuaţie cu diferenţiale totale exacte (EDTE).

Metoda de rezolvare:

- A rezolva o EDTE înseamnă a determina funcţia $F : U \to \mathbb{R}$ astfel încât $dF = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$.
- Soluţia generală este $F(x,y) = C$, unde C este o constantă.
- Funcţia F se determină din formula:

$$F(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(t,y_0)dt + \int_{y_0}^{y} Q(x,t)dt,$$

unde (x_0, y_0) este un punct fixat în domeniul U.

Exemplu. Să se verifice dacă este o EDTE şi să se rezolve ecuaţia:

$$(y^2 - x^2)dx + 2xydy = 0.$$

Avem $P(x,y) = y^2 - x^2$, $Q(x,y) = 2xy$, $P, Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Ecuaţia este o EDTE deoarece

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2y = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Metoda 1: Determinăm funcţia F din formula

$$F(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(t,y_0)dt + \int_{y_0}^{y} Q(x,t)dt,$$

unde alegem $(x_0, y_0) = (0,0)$. Avem:

$$F(x,y) = \int_{0}^{x} P(t,0)dt + \int_{0}^{y} Q(x,t)dt = \int_{0}^{x} -t^2 dt + \int_{0}^{y} 2xtdt =$$

$$= -\frac{x^3}{3} + xy^2.$$

Soluţia generală a EDTE este $F(x,y) = C$, adică

$$-\frac{x^3}{3} + xy^2 = C, \; C \in \mathbb{R}$$

Metoda 2: Determinăm funcţia F astfel încât $\frac{\partial F}{\partial x} = P(x,y)$ şi $\frac{\partial F}{\partial y} = Q(x,y)$, adică $\frac{\partial F}{\partial x} = y^2 - x^2$ şi $\frac{\partial F}{\partial y} = 2xy$.

Din $\frac{\partial F}{\partial y} = 2xy$ integrăm în raport cu y şi obţinem:

$$F(x,y) = xy^2 + f(x).$$

Avem $\frac{\partial F}{\partial x} = y^2 - x^2$ şi, din relaţia anterioară, $\frac{\partial F}{\partial x} = y^2 + f'(x)$, deci

$$y^2 - x^2 = y^2 + f'(x),$$

de unde obţinem:

$$f'(x) = -x^2.$$

Integrăm în raport cu x şi rezultă $f(x) = -\frac{x^3}{3} + K$, $K \in \mathbb{R}$. Deci

$$F(x,y) = xy^2 + f(x) = xy^2 - \frac{x^3}{3} + K,$$

iar soluţia generală a EDTE este $F(x,y) = C$, adică $xy^2 - \frac{x^3}{3} = C$.

Definiţie 1.2. Se numeşte **factor integrant** pentru ecuaţia $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ o funcţie $\mu : U \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ astfel încât

$$\mu(x,y)P(x,y)dx + \mu(x,y)Q(x,y)dy = 0$$

este o EDTE.

Pentru că $\mu(x,y)P(x,y)dx + \mu(x,y)Q(x,y)dy = 0$ este o EDTE, avem:

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu P) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu Q),$$

adică

$$\frac{\partial \mu}{\partial y}P + \mu\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial x}Q + \mu\frac{\partial Q}{\partial x}$$

echivalent cu

$$\mu\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = \frac{\partial \mu}{\partial y}P - \frac{\partial \mu}{\partial x}Q$$

Distingem următoarele cazuri:

- Dacă
$$\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = h(x),$$
atunci factorul integrant se caută de forma $\mu = \mu(x)$
- Dacă
$$\frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = h(y),$$
atunci factorul integrant se caută de forma $\mu = \mu(y)$.

Metoda de rezolvare:

- Se determină factorul integrant μ;
- Se rezolvă EDTE $\mu(x,y)P(x,y)dx + \mu(x,y)Q(x,y)dy = 0$.

Exemplu. Să se determine soluţia generală a ecuaţiei

$$(x^2 + y^2 + 2x)dx + 2ydy = 0,$$

ştiind că admite un factor integrant de forma $\mu = \mu(x)$.

Ecuaţia nu este o EDTE deoarece

$$\frac{\partial}{\partial y}(x^2 + y^2 + 2x) = 2y,\ \frac{\partial}{\partial x}(2y) = 0,\ 2y \neq 0.$$

Deci există factorul integrant $\mu = \mu(x)$ astfel încât ecuaţia

$$\mu(x)(x^2 + y^2 + 2x)dx + 2\mu(x)ydy = 0$$

este o EDTE.

Pas 1: Determinăm factorul integrant.

$$\mu(x)(x^2 + y^2 + 2x)dx + 2\mu(x)ydy = 0$$

este o EDTE, înseamnă că

$$\frac{\partial}{\partial y}\big(\mu(x)(x^2+y^2+2x)\big)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu(x)2y\right),$$

adică

$$2y\mu(x)=2y\mu'(x).$$

Obţinem ecuaţia $\mu'(x)=\mu(x)$ (EVS), deci

$$\frac{d\mu}{dx}=\mu \Leftrightarrow \frac{d\mu}{\mu}=dx$$

Soluţia generală a EVS este $\ln|\mu|=x+K$, deci $\mu=Ke^x$, $K\in\mathbb{R}^*$. Alegem $K=1$ deci factorul integrant este $\mu=e^x$.

Pas 2: Rezolvăm EDTE:

$$\mu(x)(x^2+y^2+2x)dx+2\mu(x)ydy=0\Leftrightarrow e^x(x^2+y^2+2x)dx+2e^xydy=0.$$

Notăm $P(x,y)=e^x(x^2+y^2+2x)$, $Q(x,y)=2e^xy$. Soluţia generală a EDTE este $F(x,y)=C$, unde F se determină din formula

$$F(x,y)=\int_{x_0}^{x}P(t,y_0)dt+\int_{y_0}^{y}Q(x,t)dt.$$

Alegem $(x_0,y_0)=(0,0)$ şi avem:

$$F(x,y)=\int_0^x P(t,0)dt+\int_0^y Q(x,t)dt=$$

$$=\int_0^x e^t(t^2+2t)dt+\int_0^y 2e^xtdt.$$

Rezultă că

$$F(x,y)=e^x(x^2+2x)-\int_0^x e^t(2t+2)dt+\int_0^y 2e^xtdt=$$

$$=e^x(x^2+2x)-2xe^x+\int_0^x 2e^tdt-2e^x+2+2e^xy=$$

$$=e^x(x^2+2x)-2xe^x+2e^x-2-2e^x+2+2e^xy=$$

$$=e^x(x^2+y^2).$$

Soluţia generală a EDTE este $F(x,y)=C$, adică

$$e^x(x^2+y^2)=C.$$

2. Ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi sub formă implicită $F(x, y, y') = 0$

1.**Ecuaţii de tip Clairaut**

Forma generală $y = xy' + g(y')$.

Metoda de rezolvare:

- Se notează $y' = p$, $p = p(x)$. Înlocuim în ecuaţie şi obţinem $y = xp + g(p)$.
- Derivăm în raport cu x ecuaţia $y = xp+g(p)$ şi obţinem $y' = p+xp'+g'(p)p'$. Cum $y' = p$ rezultă că

$$p'(x + g'(p)) = 0.$$

Distingem două cazuri:

Caz 1: Dacă $p' = 0$, atunci $p = C$, deci $y' = C$. Integrăm în raport cu x şi obţinem $y = Cx + C_1$. Cum $y = xy' + g(y')$, rezultă că $xC + C_1 = xC + g(C)$, deci $C_1 = g(C)$.

Soluţia generală este

$$y = xC + g(C), C \in \mathbb{R}.$$

Caz 2: Dacă $g'(p) + x = 0$, atunci obţinem soluţia singulară sub formă parametrică

$$\begin{cases} x = -g'(p) \\ y = -pg'(p) + g(p) \end{cases}$$

Exemplu. Să se rezolve ecuaţia Clairaut

$$y = xy' + y'^2.$$

Facem substituţia $y' = p$, $p = p(x)$. Înlocuim în ecuaţie şi obţinem

$$y = xp + p^2.$$

Derivăm relaţia în raport cu x:

$$y' = p + xp' + 2pp',$$

iar cum $y' = p$ găsim

$$p = p + p'(x + 2p) \Leftrightarrow p'(x + 2p) = 0.$$

Distingem două cazuri:

Caz 1: Dacă $p' = 0$, atunci $p = C$, deci $y' = C$. Găsim că $y = Cx + C_1$. Înlocuim în ecuaţia Clairaut

$$y = xy' + y'^2 \Leftrightarrow Cx + C_1 = xC + C^2,$$

deci $C_1 = C^2$, iar soluţia generală a ecuaţiei Clairaut este

$$y = xC + C^2, C \in \mathbb{R}.$$

Caz 2: Dacă $x + 2p = 0$, atunci obţinem $x = -2p$. Înlocuim în $y = xp + p^2$ şi obţinem soluţia singulară

$$\begin{cases} x = -2p \\ y = -p^2 \end{cases}$$

Putem să eliminăm parametrul din soluţia singulară şi obţinem soluţia singulară sub forma $y = -\frac{x^2}{4}$.

2.**Ecuaţii de tip Lagrange**

Forma generală $y = xf(y') + g(y'),\ f(y') \neq y'$.

Metoda de rezolvare:

- Se notează $y' = p$, $p = p(x)$. Înlocuim în ecuaţie şi obţinem $y = xf(p) + g(p)$.
- Derivăm în raport cu x ecuaţia $y = xf(p) + g(p)$ şi obţinem $y' = f(p) + xf'(p)p' + g'(p)p'$. Cum $y' = p$ rezultă că
$$p'(xf'(p) + g'(p)) = p - f(p)$$
echivalent cu
$$p' = \frac{dp}{dx} = \frac{p - f(p)}{xf'(p) + g'(p)}.$$
Distingem două cazuri:

Caz 1: Dacă $p - f(p) \neq 0$, atunci inversăm rolul variabilelor: din $p = p(x)$ considerăm $x = x(p)$. Atunci:
$$x' = \frac{dx}{dp} = \frac{xf'(p) + g'(p)}{p - f(p)}.$$
Ecuaţia obţinută este o ecuaţie liniară neomogenă:
$$x' - \frac{f'(p)}{p - f(p)}x = \frac{g'(p)}{p - f(p)}$$
în care $P(p) = -\frac{f'(p)}{p-f(p)}$ şi $Q(p) = \frac{g'(p)}{p-f(p)}$. Determinăm soluţia $x = \phi(p, C)$ pentru ecuaţia liniară neomogenă, iar soluţia generală pentru ecuaţia Lagrange este scrisă sub formă parametrică:
$$\begin{cases} x = \phi(p, C) \\ y = \phi(p, C) \cdot f(p) + g(p) \end{cases}$$
Caz 2: Dacă există un p_0 astfel încât $f(p_0) = p_0$, atunci obţinem soluţii singulare
$$y = xf(p_0) + g(p_0).$$
Observaţie.
- Dacă $\lim\limits_{p \to p_0} \phi(p, C) = \pm\infty$, atunci obţinem soluţie singulară.
- Dacă $\lim\limits_{p \to p_0} \phi(p, C) \in \mathbb{R}$, atunci obţinem soluţie particulară.

Exemplu. Să se rezolve ecuaţia Lagrange:
$$y = xy'^2 + y'^3.$$
Notăm $y' = p$, $p = p(x)$. Înlocuim în ecuaţie şi obţinem $y = xp^2 + p^3$. Derivăm relaţia în raport cu x:
$$y' = p^2 + x \cdot 2pp' + 3p^2p',$$
iar cum $y' = p$ avem:
$$p'(2xp + 3p^2) = p - p^2,$$
echivalent cu
$$p' = \frac{dp}{dx} = \frac{p - p^2}{2xp + 3p^2}.$$

Caz 1: Dacă $p - p^2 \neq 0$, adică $p \neq 0$ şi $p \neq 1$, atunci inversăm rolul variabilelor. Din

$$p'(2xp + 3p^2) = p - p^2$$

considerăm $x = x(p)$, deci

$$x' = \frac{dx}{dp} = \frac{2p}{p-p^2}x + \frac{3p^2}{p-p^2}.$$

Rezolvăm ecuaţia liniară neomogenă

$$x' + \frac{2}{p-1}x = \frac{3p}{1-p},$$

în care $P(p) = \frac{2}{p-1}$, $Q(p) = \frac{3p}{1-p}$.

Soluţia generală a ecuaţiei liniare este:

$$x = e^{-\int P(p)dp}\left(K + \int Q(p)e^{\int P(p)dp}dp\right).$$

Obţinem:

$$x = e^{-\int \frac{2}{p-1}dp}\left(K + \int \frac{3p}{1-p}e^{\int \frac{2}{p-1}dp}dp\right) \Leftrightarrow$$
$$x = e^{-2\ln|p-1|}\left(K + \int \frac{3p}{1-p}e^{2\ln|p-1|}dp\right) \Leftrightarrow$$
$$x = \frac{1}{(p-1)^2}\left(K + \int \frac{3p}{1-p}(p-1)^2dp\right) \Leftrightarrow$$

Rezultă că

$$x = \frac{1}{(p-1)^2}\left(K + \int 3p(p-1)dp\right) \Leftrightarrow$$
$$x = \frac{1}{(p-1)^2}\left(K - p^3 + \frac{3p^2}{2}\right)$$

Soluţia generală a ecuaţiei liniare este:

$$x = \frac{1}{(p-1)^2}\left(K - p^3 + \frac{3p^2}{2}\right)$$

Soluţia generală a ecuaţiei Lagrange este:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{(p-1)^2}\left(K - p^3 + \frac{3p^2}{2}\right) \\ y = xp^2 + p^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{(p-1)^2}\left(K - p^3 + \frac{3p^2}{2}\right) \\ y = \frac{p^2}{(p-1)^2}\left(K - p^3 + \frac{3p^2}{2}\right) + p^3 \end{cases}$$

Caz 2: Dacă $p = 0$, atunci $y = 0$ şi este soluţie particulară (se obţine pentru $K = 0$).

Dacă $p = 1$, atunci $y = x + 1$ este soluţie singulară.