ECUAŢII DIFERENŢIALE DE ORDIN SUPERIOR. SISTEME DE ECUAŢII DIFERENŢIALE

ALGEBRĂ LINIARĂ, GEOMETRIE ANALITICĂ ŞI DIFERENŢIALĂ
CURSUL 13

1. Ecuaţii diferenţiale de ordin superior

O ecuaţie diferenţială de ordin n este o ecuaţie de forma

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

unde $y = y(x)$ este o funcţie necunoscută.

Ecuaţii liniare cu coeficienţi constanţi:

• Forma generală: $a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = b(x)$, cu $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$.

• Metoda de rezolvare:

Pas 1: Se determină soluţie pentru ecuaţia omogenă

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = 0.$$

Pentru aceasta, se determină un sistem fundamental de soluţii, adică se caută soluţii de forma $y = e^{rx}$. Daca înlocuim în ecuaţie y şi derivatele sale şi împărţim prin e^{rx} ecuaţia, obţinem:

$$a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \cdots + a_{n-1} r + a_n = 0$$

numită ecuaţie caracteristică.

Determinăm rădăcinile ecuaţiei caracteristice şi în funcţie de ele avem:

- dacă ecuaţia are toate rădăcinile reale distincte $r_1, \dots, r_n$, atunci sistem fundamental de soluţii pentru ecuaţia omogenă este

$$\{\phi_1 = e^{r_1 x}, \phi_2 = e^{r_2 x}, \dots, \phi_n = e^{r_n x}\}.$$

  Soluţia pentru ecuaţia omogenă este $y_o = C_1\phi_1 + \cdots + C_n\phi_n$, $C_1, \dots, C_n \in \mathbb{R}$.
- dacă ecuaţia are toate rădăcinile reale, nu toate distincte. Fie r rădăcină cu multiplicitatea k. Atunci acestei rădăcini îi corespund în sistemul fundamental de soluţii funcţiile

$$\{\phi_1 = e^{rx}, \phi_2 = xe^{rx}, \dots, \phi_k = x^{k-1}e^{rx}\}.$$

- dacă ecuaţia are rădăcini complexe simple. Fie $r = a + bi$ rădăcină complexă simplă (şi $a - bi$ este rădăcină). Atunci, pentru această rădăcină, în sistemul fundamental de soluţii avem

$$\{\phi_1 = e^{ax}\cos(bx), \phi_2 = e^{ax}\sin(bx)\}.$$

- dacă ecuaţia are şi rădăcini complexe multiple. Fie $r = a + bi$ rădăcină complexă cu multiplicitatea k (şi $a - bi$ este rădăcină complexă cu multiplicitatea k). Atunci, pentru acestea, în sistemul fundamental de soluţii, avem funcţiile

$$\{\phi_1 = e^{ax}\cos(bx), \phi_2 = e^{ax}\sin(bx),$$
$$\phi_3 = xe^{ax}\cos(bx), \phi_4 = xe^{ax}\sin(bx), \dots,$$
$$\dots, \phi_{2k-1} = x^{k-1}e^{ax}\cos(bx), \phi_{2k} = x^{k-1}e^{ax}\sin(bx)\}.$$

Pas 2: Se determină soluţie pentru ecuaţia neomogenă

$$a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_ny = b(x)$$

prin metoda variaţiei constantelor. Pentru aceasta, dacă

$$y_o = C_1\phi_1 + \cdots + C_n\phi_n,\ C_1, \dots, C_n \in \mathbb{R}$$

este soluţie pentru ecuaţia omogenă, atunci se consideră soluţie (particulară) pentru ecuaţia neomogenă de forma

$$y_p = C_1(x)\phi_1 + \cdots + C_n(x)\phi_n.$$

Funcţiile $C_1(x), \dots, C_n(x)$ se determină rezolvând sistemul Cramer în formă matriceală

$$\begin{pmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \dots & \phi_n \\ \phi_1' & \phi_2' & \dots & \phi_n' \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \phi_1^{(n-1)} & \phi_2^{(n-1)} & \dots & \phi_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1'(x) \\ C_2'(x) \\ \vdots \\ C_n'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \frac{b(x)}{a_0} \end{pmatrix}$$

şi integrând funcţiile $C_1'(x), \dots, C_n'(x)$ în raport cu x.

Pas 3: Soluţia generală pentru ecuaţia neomogenă

$$a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_ny = b(x)$$

este $y = y_o + y_p$.

Exemplu. Să se integreze:

(a) $y^{(3)} + y'' - 4y' - 4y = 0$

(b) $y^{(3)} - y = 0$.

Soluţie: Avem ecuaţia caracteristică $r^3 + r^2 - 4r - 4 = 0$, adică

$$r^2(r+1) - 4(r+1) = 0 \Leftrightarrow (r+1)(r-2)(r+2) = 0.$$

Ecuaţia caracteristică are rădăcinile $r_1 = -1$, $r_2 = 2$, $r_3 = -2$ reale distincte. Deci sistem fundamental de soluţii este $\{\phi_1 = e^{-x}, \phi_2 = e^{2x}, \phi_3 = e^{-2x}\}$. Soluţia pentru ecuaţia omogenă este

$$y_o = C_1e^{-x} + C_2e^{2x} + C_3e^{-2x}.$$

Pentru (b) avem ecuaţia caracteristică $r^3 - 1 = 0$, adică

$$(r-1)(r^2 + r + 1) = 0.$$

Ecuaţia caracteristică are rădăcinile $r_1 = 1$ rădăcină reală simplă, $r_2 = -1/2 \pm i\sqrt{3}/2$ complexă simplă. Deci în sistemul fundamental de soluţii avem pentru $r_1 = 1$ funcţia $\phi_1 = e^x$, pentru $r_2 = -1/2 \pm i\sqrt{3}/2$ funcţiile $\phi_2 = e^{\frac{-1}{2}x}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}x)$, $\phi_3 = e^{\frac{-1}{2}x}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}x)$.

Soluţia pentru ecuaţia omogenă este

$$y_o = C_1 e^x + C_2 e^{\frac{-1}{2}x}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}x) + C_3 e^{\frac{-1}{2}x}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}x).$$

$\square$

Exemplu. Să se rezolve ecuaţia

$$y^{(2)} + 4y = \frac{1}{\cos 2x}.$$

Soluţie: **Pas 1:** Se determină soluţie pentru ecuaţia omogenă

$$y^{(2)} + 4y = 0.$$

Ecuaţia caracteristică este $r^2 + 4 = 0$ şi are rădăcinile complexe $r = \pm 2i$. Sistem fundamental de soluţii pentru ecuaţia omogenă este $\{\phi_1 = e^{0\cdot x}\cos(2x), \phi_2 = e^{0\cdot x}\sin(2x)\} = \{\phi_1 = \cos(2x), \phi_2 = \sin(2x)\}$, deci soluţia pentru ecuaţia omogenă este

$$y_o = C_1\cos(2x) + C_2\sin(2x),\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Pas 2: Se determină soluţie pentru ecuaţia neomogenă

$$y^{(2)} + 4y = \frac{1}{\cos 2x}.$$

Căutăm soluţie particulară de forma

$$y_p = C_1(x)\cos(2x) + C_2(x)\sin(2x).$$

Pentru a determina $C_1(x), C_2(x)$, rezolvăm sistemul Cramer

$$\begin{pmatrix} \phi_1 & \phi_2 \\ \phi_1' & \phi_2' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1'(x) \\ C_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{b(x)}{a_0} \end{pmatrix}$$

adică

$$\begin{pmatrix} \cos(2x) & \sin(2x) \\ -2\sin(2x) & 2\cos(2x) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1'(x) \\ C_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\cos(2x)} \end{pmatrix}$$

Avem

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos(2x) & \sin(2x) \\ -2\sin(2x) & 2\cos(2x) \end{vmatrix} = 2,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & \sin(2x) \\ \frac{1}{\cos(2x)} & 2\cos(2x) \end{vmatrix} = \frac{-\sin(2x)}{\cos(2x)},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \cos(2x) & 0 \\ -2\sin(2x) & \frac{1}{\cos(2x)} \end{vmatrix} = 1.$$

Deci

$$C_1'(x) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-\sin(2x)}{2\cos(2x)},\ C_2'(x) = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{1}{2}.$$

Obţinem

$$C_1(x) = \int \frac{-\sin(2x)}{2\cos(2x)}dx = \frac{1}{4}\ln(\cos(2x)) + K_1$$

$$C_2(x) = \int \frac{1}{2} dx = \frac{1}{2}x + K_2.$$

Pas 3: Rezultă că soluţie pentru ecuaţia neomogenă este

$$y = C_1(x)\cos(2x) + C_2(x)\sin(2x) = \left(\frac{1}{4}\ln(\cos(2x)) + K_1\right)\cos(2x) +$$

$$+\left(\frac{1}{2}x + K_2\right)\sin(2x) =$$

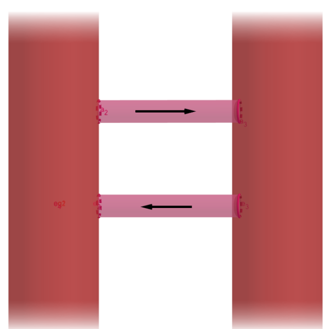
$$= \underbrace{(K_1\cos(2x) + K_2\sin(2x))}_{y_o} + \underbrace{\left(\frac{1}{4}\ln(\cos(2x))\cos(2x) + \frac{1}{2}x\sin(2x)\right)}_{y_p} =$$

$$= y_o + y_p$$

□

2. Sisteme de ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi liniare

Exemplu. Se consideră două rezervoare T_1 şi T_2 ce conţin iniţial $100l$ fiecare. În T_1 apa este pură, iar în T_2 s-au dizolvat $150kg$ de fertilizator. Presupunem că lichidul circulă între cele două rezervoare cu viteza de $2l/min$ şi că este amestecat permanent pentru a păstra omogenitatea soluţiei. Astfel, cantităţile de fertilizator $y_1(t)$ din T_1 şi $y_2(t)$ din T_2 se modifică în timp. Cât timp trebuie să circule lichidul între cele două rezervoare astfel încât T_1 să conţină jumătate din cantitatea de fertilizator rămasă în T_2?



Pentru fiecare rezervor, variaţia cantităţii de fertilizator este egală cu diferenţa dintre cantitatea care intră în rezervor şi cantitatea care iese din rezervor. Obţinem:

$$\begin{cases} y_1'(t) = \frac{2}{100}y_2 - \frac{2}{100}y_1 \\ y_2'(t) = \frac{2}{100}y_1 - \frac{2}{100}y_2 \end{cases}$$

Iniţial ($t = 0$), avem $y_1(0) = 0$, $y_2(0) = 150$.

Trebuie să determinăm t astfel încât T_1 conţine 1/3 din cantitatea iniţială de fertilizator, adică $50kg$ de fertilizator.

Definiţie 2.1. Un sistem de forma

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n + b_1(x) \\ y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{2n}y_n + b_2(x) \\ \vdots \\ y_n' = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \cdots + a_{nn}y_n + b_n(x) \end{cases},$$

unde y_i sunt funcţii necunoscute, x este variabila independentă, $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $b_i : J \to \mathbb{R}$ sunt funcţii continue, se numeşte **sistem de ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi liniare cu coeficienţi constanţi.**

Sistemul poate fi scris sub forma echivalentă $Y' = A \cdot Y + B(x)$, unde $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$Y = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}, \; B(x) = \begin{pmatrix} b_1(x) \\ \vdots \\ b_n(x) \end{pmatrix}$$

A se numeşte matricea coeficienţilor, $B(x)$ se numeşte coloana termenilor liberi.

Definiţie 2.2. Se numeşte **soluţie** a sistemului o pereche ordonată $y_1, \ldots, y_n$ de funcţii derivabile cu derivata continuă ce verifică sistemul.

Definiţie 2.3.
- Un sistem de forma $Y' = A \cdot Y$ se numeşte **sistem liniar omogen**.
- Un sistem de forma $Y' = A \cdot Y + B(x)$ astfel încât $B(x) \neq \mathbb{O}_{n,1}$ se numeşte **sistem liniar neomogen**.
- A rezolva problema Cauchy înseamnă a găsi o soluţie $y_1, \ldots, y_n$ pentru care

  $$y_1(x_0) = y_1^0, \; y_2(x_0) = y_2^0, \ldots, y_n(x_0) = y_n^0,$$

  unde $x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0$ sunt date iniţial.

Sisteme liniare omogene:

Definiţie 2.4.
- Soluţia generală a sistemului liniar omogen $Y' = A \cdot Y$ este

  $$Y = C_1\phi_1 + C_2\phi_2 + \ldots + C_n\phi_n,$$

  unde $C_1, \ldots, C_n$ sunt constante reale, $\phi_1, \ldots, \phi_n$ este un sistem fundamental de soluţii,

  $$\phi_1 = \begin{pmatrix} y_{11}(x) \\ \vdots \\ y_{n1}(x) \end{pmatrix}, \phi_2 = \begin{pmatrix} y_{12}(x) \\ \vdots \\ y_{n2}(x) \end{pmatrix}, \ldots, \phi_n = \begin{pmatrix} y_{1n}(x) \\ \vdots \\ y_{nn}(x) \end{pmatrix}$$

- $\phi_1, \ldots, \phi_n$ este un sistem fundamental de soluţii dacă şi numai dacă

  $$W(x, \phi_1, \ldots, \phi_n) = \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{vmatrix} \neq 0, \; \forall x$$

Ne propunem să determinăm un sistem fundamental de soluţii pentru sistemul liniar omogen $Y' = AY$ pentru cazul $n = 3$:

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3 \\ y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3 \\ y_3' = a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3 \end{cases}$$

Reamintim că pentru ecuaţia diferenţială $y' = ay$, soluţia generală este de forma $y = Ke^{ax}$, unde K este o constantă reală. Prin analogie, căutăm soluţii penstru sistemul liniar omogen $Y' = AY$ de forma

$$y_1 = u_1e^{\lambda x}, y_2 = u_2e^{\lambda x}, y_3 = u_3e^{\lambda x}.$$

Atunci

$$y_1' = \lambda u_1e^{\lambda x}, y_2' = \lambda u_2e^{\lambda x}, y_3' = \lambda u_3e^{\lambda x},$$

iar înlocuind în sistem, obţinem:

$$\begin{cases} \lambda u_1e^{\lambda x} = a_{11}u_1e^{\lambda x} + a_{12}u_2e^{\lambda x} + a_{13}u_3e^{\lambda x} \\ \lambda u_2e^{\lambda x} = a_{21}u_1e^{\lambda x} + a_{22}u_2e^{\lambda x} + a_{23}u_3e^{\lambda x} \\ \lambda u_3e^{\lambda x} = a_{31}u_1e^{\lambda x} + a_{32}u_2e^{\lambda x} + a_{33}u_3e^{\lambda x} \end{cases}$$

Scris matriceal, sistemul este $\lambda Y = A \cdot Y$, echivalent cu

$$(A - \lambda I_3) \cdot Y = \mathbb{O}_{3,1}.$$

Pentru ca sistemul să admită soluţii nenule, trebuie ca $\det(A - \lambda I_3) = 0$, adică λ să fie valoare proprie pentru A. Ecuaţia

$$\det(A - \lambda I_3) = 0$$

se numeşte **ecuaţie caracteristică**, iar soluţiile ei sunt **valori proprii**.

În funcţie de soluţiile ecuaţiei caracteristice, distingem următoarele cazuri:

Caz 1: Dacă $\lambda = a$ este soluţie reală simplă, atunci

$$\begin{cases} y_1 = u_1e^{ax} \\ y_2 = u_2e^{ax} \\ y_3 = u_3e^{ax} \end{cases}$$

Înlocuim în sistemul $Y' = AY$ şi determinăm u_1, u_2, u_3. În acest caz, în sistemul fundamental de soluţii avem

$$\phi = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \cdot e^{ax}.$$

De remarcat că (u_1, u_2, u_3) resprezintă un vector propriu corespunzător valorii proprii $\lambda = a$

Caz 2: Dacă $\lambda = a$ este soluţie reală dublă, atunci

$$\begin{cases} y_1 = (u_1 + v_1x)e^{ax} \\ y_2 = (u_2 + v_2x)e^{ax} \\ y_3 = (u_3 + v_3x)e^{ax} \end{cases}$$

Înlocuim $y_1, y_2, y_3, y_1', y_2', y_3'$ în sistemul $Y' = AY$ şi determinăm $u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3$.
În acest caz obţinem

$$\begin{pmatrix} u_1 + v_1 x \\ u_2 + v_2 x \\ u_3 + v_3 x \end{pmatrix} \cdot e^{ax} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \cdot e^{ax} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \cdot xe^{ax},$$

deci în sistemul fundamental de soluţii avem

$$\phi_1 = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \cdot e^{ax}, \ \phi_2 = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \cdot xe^{ax}$$

Caz 3: Dacă $\lambda = a$ este soluţie reală triplă, atunci

$$\begin{cases} y_1 = (u_1 + v_1 x + w_1 x^2) e^{ax} \\ y_2 = (u_2 + v_2 x + w_2 x^2) e^{ax} \\ y_3 = (u_3 + v_3 x + w_3 x^2) e^{ax} \end{cases}$$

Înlocuim $y_1, y_2, y_3, y_1', y_2', y_3'$ în sistemul $Y' = AY$ şi determinăm $u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3, w_1, w_2, w_3$.
În acest caz obţinem

$$\begin{pmatrix} u_1 + v_1 x + w_1 x^2 \\ u_2 + v_2 x + w_2 x^2 \\ u_3 + v_3 x + w_3 x^2 \end{pmatrix} \cdot e^{ax} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \cdot e^{ax} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \cdot xe^{ax} + \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \cdot x^2 e^{ax},$$

deci în sistemul fundamental de soluţii avem

$$\phi_1 = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \cdot e^{ax}, \ \phi_2 = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \cdot xe^{ax}, \ \phi_3 = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \cdot x^2 e^{ax}$$

Caz 4: Dacă $\lambda = a \pm bi$ este soluţie complexă, atunci

$$\begin{cases} y_1 = (u_1 \cos(bx) + v_1 \sin(bx)) e^{ax} \\ y_2 = (u_2 \cos(bx) + v_2 \sin(bx)) e^{ax} \\ y_3 = (u_3 \cos(bx) + v_3 \sin(bx)) e^{ax} \end{cases}$$

Înlocuim $y_1, y_2, y_3, y_1', y_2', y_3'$ în sistemul $Y' = AY$ şi determinăm $u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3$.
În sistemul fundamental de soluţii avem

$$\phi_1 = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \cdot \cos(bx) \cdot e^{ax}, \ \phi_2 = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \cdot \sin(bx) \cdot e^{ax}.$$

Exemplu. Să se rezolve sistemul liniar omogen:

$$\begin{cases} y_1' = y_1 - y_3 \\ y_2' = y_1 \\ y_3' = y_1 - y_2 \end{cases}$$

Soluţie: Sistemul poate fi scris sub formă matriceală

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow Y' = A \cdot Y$$

Ecuaţia caracteristică este

$$\det(A - \lambda I_3) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 1 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)(\lambda^2+1) = 0.$$

Valorile proprii sunt $\lambda_1 = 1$, rădăcină reală simplă, $\lambda_{2,3} = \pm i$.

Pentru $\lambda_1 = 1$ (rădăcină reală simplă), căutăm

$$\begin{cases} y_1 = u_1 e^{1\cdot x} \\ y_2 = u_2 e^{1\cdot x} \\ y_3 = u_3 e^{1\cdot x} \end{cases}$$

Înlocuim în sistemul $Y' = AY$ şi obţinem:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \cdot e^x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \cdot e^x,$$

deci, dacă înmulţim cu e^{-x}, obţinem:

$$(A - I_3) \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

echivalent cu sistemul de ecuaţii liniare:

$$\begin{cases} u_3 = 0 \\ u_1 - u_2 = 0 \\ u_1 - u_2 - u_3 = 0 \end{cases}$$

Soluţia sistemului este $u_1 = \alpha,\ u_2 = \alpha,\ u_3 = 0$, deci

$$Y = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \cdot e^x = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot e^x.$$

În sistemul fundamental de soluţii avem

$$\phi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot e^x.$$

Pentru $\lambda_{2,3} = 0 \pm i$ (rădăcini complexe), căutăm

$$\begin{cases} y_1 = (u_1 \cos x + v_1 \sin x) e^{0\cdot x} \\ y_2 = (u_2 \cos x + v_2 \sin x) e^{0\cdot x} \\ y_3 = (u_3 \cos x + v_3 \sin x) e^{0\cdot x} \end{cases}$$

Înlocuim în sistemul $Y' = AY$ şi obţinem:

$$\begin{cases} -u_1 \sin x + v_1 \cos x = (u_1 \cos x + v_1 \sin x) - (u_3 \cos x + v_3 \sin x) \\ -u_2 \sin x + v_2 \cos x = u_1 \cos x + v_1 \sin x \\ -u_3 \sin x + v_3 \cos x = (u_1 \cos x + v_1 \sin x) - (u_2 \cos x + v_2 \sin x) \end{cases}$$

Ajungem la sistemul de ecuaţii liniare:

$$\begin{cases} -u_1 = v_1 - v_3 \\ v_1 = u - 1 - u_3 \\ -u_2 = v_1 \\ v_2 = u_1 \\ -u_3 = v_1 - v_2 \\ v_3 = u - 1 - u_2 \end{cases}$$

Soluţia acestui sistem este: $v_1 = \alpha$, $v_2 = \beta$, $u_1 = \beta$, $u_2 = -\alpha$, $u_3 = \beta - \alpha$, $v_3 = \alpha + \beta$, deci

$$Y = \begin{pmatrix} (u_1 \cos x + v_1 \sin x)e^{0\cdot x} \\ (u_2 \cos x + v_2 \sin x)e^{0\cdot x} \\ (u_3 \cos x + v_3 \sin x)e^{0\cdot x} \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} \sin x \\ -\cos x \\ \sin x - \cos x \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \\ \sin x + \cos x \end{pmatrix}.$$

Prin urmare, în sistemul fundamental de soluţii avem:

$$\phi_2 = \begin{pmatrix} \sin x \\ -\cos x \\ \sin x - \cos x \end{pmatrix}, \ \phi_3 = \begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \\ \sin x + \cos x \end{pmatrix}.$$

Soluţia generală a sistemului este

$$Y = C_1\phi_1 + C_2\phi_2 + C_3\phi_3, \ C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R},$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot e^x + C_2 \begin{pmatrix} \sin x \\ -\cos x \\ \sin x - \cos x \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \\ \sin x + \cos x \end{pmatrix}$$

□

Observaţie. Într-adevăr, se verifică imediat faptul că $\{\phi_1, \phi_2, \phi_3\}$ este un sistem fundamental de soluţii, deoarece:

$$\begin{vmatrix} e^x & \sin x & \cos x \\ e^x & -\cos x & \sin x \\ 0 & \sin x - \cos x & \sin x + \cos x \end{vmatrix} \neq 0, \ \forall x.$$

Sisteme liniare neomogene:

Teoremă 2.1. *Soluţia generală a sistemului liniar neomeogen $Y' = AY + B(x)$ este de forma $Y = Y_o + Y_p$, unde Y_o este soluţie pentru sistemul liniar omogen $Y' = AY$ şi Y_p este o soluţie particulară pentru sistemul liniar neomogen.*

Soluţia particulară se obţine prin **metoda variaţiei constantelor (MVC)** astfel:

- Dacă $Y_o = C_1\phi_1 + \ldots + C_n\phi_n$, unde $C_1, \ldots, C_n \in \mathbb{R}$, este soluţie pentru sistemul liniar omogen, atunci se caută $C_1(x), \ldots, C_n(x)$ astfel încât $Y = C_1(x)\phi_1 + \ldots + C_n(x)\phi_n$ să fie soluţie pentru sistemul neomogen.
- Înlocuim Y şi Y' în sistem şi obţinem sistem în formă matriceală:

$$[\phi_1 \ \ldots \ \phi_n] \cdot \begin{pmatrix} C_1'(x) \\ \vdots \\ C_n'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1(x) \\ \vdots \\ b_n(x) \end{pmatrix}.$$

  Rezolvăm sistemul Cramer şi obţinem $C_i'(x) = f_i(x)$, iar prin integrare avem $C_i(x) = \int f_i(x)dx + k_i$.
- Soluţia generală a sistemului neomogen este

$$Y = C_1(x)\phi_1 + \ldots + C_n(x)\phi_n = Y_o + Y_p.$$

Exemplu. Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} y_1' = y_2 + x \\ y_2' = y_1 + e^x \end{cases}$$

Sistemul poate fi scris sub formă matriceală

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ e^x \end{pmatrix} \Leftrightarrow Y' = A \cdot Y + B(x)$$

Soluţie: **Pas 1** Determinăm soluţie pentru sistemul omogen $Y' = AY$:
Ecuaţia caracteristică este

$$\det(A - \lambda I_2) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 1 = 0.$$

Valorile proprii sunt $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, rădăcini reale simple.
Pentru $\lambda_1 = 1$ (rădăcină reală simplă), căutăm

$$\begin{cases} y_1 = u_1 e^{1\cdot x} \\ y_2 = u_2 e^{1\cdot x} \end{cases}$$

Înlocuim în sistemul $Y' = AY$ şi obţinem:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \cdot e^x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \cdot e^x,$$

deci, dacă înmulţim cu e^{-x}, obţinem:

$$(A - I_2) \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

echivalent cu sistemul de ecuaţii liniare:

$$\begin{cases} -u_1 + u_2 = 0 \\ \ \ u_1 - u_2 = 0 \end{cases}$$

Soluţia sistemului este $u_1 = \alpha,\ u_2 = \alpha$, deci

$$Y = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \cdot e^x = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^x.$$

În sistemul fundamental de soluţii avem

$$\phi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^x.$$

Pentru $\lambda_2 = -1$ (rădăcină reală simplă), căutăm

$$\begin{cases} y_1 = v_1 e^{-1\cdot x} \\ y_2 = v_2 e^{-1\cdot x} \end{cases}$$

Înlocuim în sistemul $Y' = AY$ şi obţinem:

$$-\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \cdot e^{-x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \cdot e^{-x},$$

deci, dacă înmulţim cu e^x, obţinem:

$$(A + I_2) \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

echivalent cu sistemul de ecuaţii liniare:

$$\begin{cases} v_1 + v_2 = 0 \\ v_1 + v_2 = 0 \end{cases}$$

Soluţia sistemului este $v_1 = -\alpha,\ v_2 = \alpha$, deci

$$Y = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \cdot e^{-x} = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{-x}.$$

În sistemul fundamental de soluţii avem

$$\phi_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{-x}.$$

Soluţia generală a sistemului este

$$Y = C_1\phi_1 + C_2\phi_2,\ C_1, C_2 \in \mathbb{R},$$
$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^x + C_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{-x}.$$

Pas 2 Căutăm soluţie particulară pentru sistemul liniar neomogen prin MVC astfel:

considerăm $C_1 = C_1(x), C_2 = C_2(x)$ astfel încât

$$Y = C_1(x)\phi_1 + C_2(x)\phi_2$$

este soluţie pentru sistemul neomogen. Înlocuim în sistem şi obţinem:

$$\begin{pmatrix} e^x & -e^{-x} \\ e^x & e^{-x} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1'(x) \\ C_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ e^x \end{pmatrix}$$

Sistemul este Cramer, deci avem:

$$\Delta = \begin{vmatrix} e^x & -e^{-x} \\ e^x & e^{-x} \end{vmatrix} = 2$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} x & -e^{-x} \\ e^x & e^{-x} \end{vmatrix} = xe^x - 1$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} e^x & x \\ e^x & e^x \end{vmatrix} = e^{2x} - xe^x,$$

prin urmare

$$C_1'(x) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{1}{2}(xe^{-x} + 1),$$

$$C_2'(x) = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{1}{2}(e^{2x} - xe^x).$$

Integrăm:

$$C_1(x) = \frac{1}{2}\int (xe^{-x} + 1)dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\int (-x)e^{-x}dx =$$

$$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}xe^{-x} + \frac{1}{2}\int e^{-x}dx =$$

$$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}xe^{-x} - \frac{1}{2}e^{-x} + k_1$$

$$C_2(x) = \frac{1}{2}\int (e^{2x} - xe^x)dx = \frac{1}{4}e^{2x} - \frac{1}{2}\int xe^x dx =$$

$$= \frac{1}{4}e^{2x} - \frac{1}{2}xe^x + \frac{1}{2}\int e^x dx =$$

$$= \frac{1}{4}e^{2x} - \frac{1}{2}xe^x + \frac{1}{2}e^x + k_2.$$

Soluţia generală a sistemului liniar neomogen este:

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = C_1(x)\phi_1 + C_2(x)\phi_2 =$$

$$= (\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}xe^{-x} - \frac{1}{2}e^{-x} + k_1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^x +$$

$$+(\frac{1}{4}e^{2x} - \frac{1}{2}xe^x + \frac{1}{2}e^x + k_2) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{-x},$$

echivalent cu

$$\begin{cases} y_1 = (\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}xe^{-x} - \frac{1}{2}e^{-x} + k_1)e^x - (\frac{1}{4}e^{2x} - \frac{1}{2}xe^x + \frac{1}{2}e^x + k_2)e^{-x} \\ y_2 = (\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}xe^{-x} - \frac{1}{2}e^{-x} + k_1)e^x + (\frac{1}{4}e^{2x} - \frac{1}{2}xe^x + \frac{1}{2}e^x + k_2)e^{-x} \end{cases}$$

$\square$

Observaţie.

$$Y = C_1(x)\phi_1 + C_2(x)\phi_2 =$$

$$= (\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}xe^{-x} - \frac{1}{2}e^{-x} + k_1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^x +$$

$$+(\frac{1}{4}e^{2x} - \frac{1}{2}xe^x + \frac{1}{2}e^x + k_2) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{-x} =$$

$$= \underbrace{k_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^x + k_2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{-x}}_{Y_o} +$$

$$+ \underbrace{\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}xe^{-x} - \frac{1}{2}e^{-x}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^x + \left(\frac{1}{4}e^{2x} - \frac{1}{2}xe^x + \frac{1}{2}e^x\right) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-x}}_{Y_p}.$$

Fie sistemul

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n + b_1(x) \\ y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{2n}y_n + b_2(x) \\ \vdots \\ y_n' = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \cdots + a_{nn}y_n + b_n(x) \end{cases}$$

Metoda eliminării: se derivează de $n-1$ ori prima ecuaţie şi de $n-2$ ori celelalte ecuaţii. Se elimină între ecuaţiile obţinute şi ecuaţiile sistemului $y_2, \ldots, y_n$ şi derivatele lor. Se obţine astfel o ecuaţie liniară cu coeficienţi constanţi de ordin n în y_1. Se determină y_1 în funcţie de n constante. Funcţiile $y_2, \ldots, y_n$ se determină din ecuaţiile sistemului şi ecuaţiile obţinute prin derivare.

Exemplu. Să se rezolve sistemul

$$(a) \begin{cases} y_1'(x) = & -3y_1 - y_2 \\ y_2'(x) = & y_1 - y_2 \end{cases} \qquad (b) \begin{cases} y_1'(x) = & 4y_1 + y_2 - 36x \\ y_2'(x) = & -2y_1 + y_2 - 2e^x \end{cases}$$

Soluţie: Pentru sistemul

$$(a) \begin{cases} y_1'(x) = & -3y_1 - y_2 \\ y_2'(x) = & y_1 - y_2 \end{cases}$$

avem $n = 2$, deci derivăm prima ecuaţie o dată (de n-1=2-1=1 ori) şi a doua o lăsăm nederivată (n-2=0). Deci obţinem sistemul:

$$\begin{cases} y_1''(x) = & -3y_1' - y_2' \\ y_1'(x) = & -3y_1 - y_2 \\ y_2'(x) = & y_1 - y_2 \end{cases}$$

Eliminăm y_2 şi y_2'. Avem $y_1''(x) = -3y_1' - y_2'$ şi înlocuim y_2' din a treia ecuaţie. Deci

$$y_1''(x) = -3y_1' - y_2' = -3y_1' - y_1 + y_2.$$

Înlocuim y_2 din a doua ecuaţie $y_2 = -3y_1 - y_1'$ şi obţinem

$$y_1''(x) = -3y_1' - y_1 + y_2 = -3y_1' - y_1 - 3y_1 - y_1' = -4y_1' - 4y_1.$$

Ajungem la ecuaţia liniară omogenă de ordin doi

$$y_1'' + 4y_1' + 4y_1 = 0.$$

Ecuaţia caracteristică este $r^2 + 4r + 4 = 0$ adică $(r+2)^2 = 0$ şi are rădăcina $r = -2$ reală cu multiplicitatea 2. Sistem fundamental de soluţii este $\phi_1 = e^{-2x}, \phi_2 = xe^{-2x}$, deci soluţia este

$$y_1 = C_1e^{-2x} + C_2xe^{-2x}.$$

Dar

$$\begin{gathered}y_2 = -3y_1 - y_1' = -3(C_1e^{-2x} + C_2xe^{-2x}) - \\ -(-2C_1e^{-2x} + C_2e^{-2x} - 2C_2xe^{-2x})\end{gathered}$$

deci

$$y_2 = e^{-2x}(-C_1 - C_2 - C_2x).$$

Soluţia sistemului este

$$\begin{cases} y_1 = C_1e^{-2x} + C_2xe^{-2x} \\ y_2 = e^{-2x}(-C_1 - C_2 - C_2x) \end{cases}$$

□

3. Sisteme de ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi neliniare

Definiţie 3.1. Un sistem de ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi neliniare este un sistem de forma:

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ \vdots \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{cases},$$

unde $y_i = y_i(x), x \in I$ sunt funcţii necunoscute şi $f_i : I \times D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$, $I \subset \mathbb{R}$ sunt funcţii continue.

Definiţie 3.2. Un sistem simetric este un sistem de forma:

$$\frac{dy_1}{f_1(x, y_1, \ldots, y_n)} = \frac{dy_2}{f_2(x, y_1, \ldots, y_n)} = \ldots = \frac{dy_n}{f_n(x, y_1, \ldots, y_n)},$$

unde funcţiile continue $f_1, \ldots, f_n$ nu sunt simultan nule.

Observaţie. Un sistem simetric poate fi transformat într-un sistem de $n-1$ ecuaţii cu $n-1$ necunoscute astfel:

$$\begin{cases} \frac{dy_2}{dy_1} = \frac{f_2}{f_1} \\ \frac{dy_3}{dy_1} = \frac{f_3}{f_1} \\ \vdots \\ \frac{dy_n}{dy_1} = \frac{f_n}{f_1} \end{cases}$$

Metoda de rezolvare a sistemelor simetrice

Fie sistemul simetric

$$\frac{dy_1}{f_1(x, y_1, \ldots, y_n)} = \frac{dy_2}{f_2(x, y_1, \ldots, y_n)} = \ldots = \frac{dy_n}{f_n(x, y_1, \ldots, y_n)},$$

- considerăm y_1 variabila independentă şi transformăm sistemul în

$$\begin{cases} \frac{dy_2}{dy_1} = \frac{f_2}{f_1} \\ \frac{dy_3}{dy_1} = \frac{f_3}{f_1} \\ \vdots \\ \frac{dy_n}{dy_1} = \frac{f_n}{f_1} \end{cases}$$

- rezolvăm sistemul şi obţinem soluţia $y_i = \phi_i(y_1, C_1, \ldots, C_{n-1})$.
- rezolvăm în raport cu $C_1, \ldots, C_{n-1}$ şi obţinem $C_i = \Phi_i(y_1, \ldots, y_n)$, $1 \leq i \leq n-1$.

Definiţie 3.3. O relaţie de forma $C = \Phi(y_1, \ldots, y_n)$ se numeşte **integrală primă a sistemului**.

Integralele prime se obţin prin **metoda combinaţiilor integrabile:**

Definiţie 3.4. Un sistem de funcţii $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ care verifică:

(1) $\lambda_1 dy_1 + \lambda_2 dy_2 + \ldots + \lambda_n dy_n = d\Phi$;
(2) $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \ldots + \lambda_n f_n = 0$,

pentru orice $y_1, \ldots, y_n$ se numeşte **combinaţie integrabilă**. Funcţia Φ este integrală primă a sistemului.

Observaţie. Pentru a rezolva sistemul simetric

$$\frac{dy_1}{f_1(x, y_1, \ldots, y_n)} = \frac{dy_2}{f_2(x, y_1, \ldots, y_n)} = \ldots = \frac{dy_n}{f_n(x, y_1, \ldots, y_n)},$$

trebuie să obţinem $n-1$ integrale prime.

Exemplu. Să se rezolve sistemul simetric:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z(x-y)},$$

Soluţie: Pentru a rezolva sistemul trebuie să obţinem două integrale prime:

Pentru prima combinaţie integrabilă avem:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} \Leftrightarrow \int \frac{dx}{x} = \int \frac{dy}{y} \Leftrightarrow \ln|x| = \ln|y| + \ln|C_1|,$$

deci prima integrală primă este $x = C_1 y$, $C_1 \in \mathbb{R}$.

Pentru a doua combinaţie integrabilă avem:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z(x-y)}$$

echivalent cu

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{\frac{dz}{z}}{x-y} = \frac{dx - dy - \frac{dz}{z}}{x - y - (x-y)} = \frac{dx - dy - \frac{dz}{z}}{0}.$$

Obţinem imediat că $dx - dy - \frac{dz}{z} = 0$. De remarcat faptul că

$$0 = dx - dy - \frac{dz}{z} = d(x - y - \ln|z|),$$

deci $x - y - \ln|z| = C_2$, adică am găsit a doua integrală primă.

Soluţia sistemului simetric

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z(x-y)}$$

este

$$\begin{cases} x = C_1 y \\ x - y - \ln|z| = C_2 \end{cases}$$

$\square$

Exemplu. Să se rezolve sistemul simetric:

$$\frac{dx}{x(y-z)} = \frac{dy}{y(z-x)} = \frac{dz}{z(x-y)},$$

Soluţie: Căutăm două integrale prime:

Pentru prima integrală primă avem:

$$\frac{dx}{x(y-z)} = \frac{dy}{y(z-x)} = \frac{dz}{z(x-y)} = \frac{dx+dy+dz}{x(y-z)+y(z-x)+z(x-y)} = \frac{dx+dy+dz}{0},$$

deci $dx + dy + dz = 0$.

Obţinem

$$0 = dx + dy + dz = d(x + y + z),$$

deci $x + y + z = C_1$.

Pentru a doua integrală primă avem:

$$\frac{\frac{dx}{x}}{y-z} = \frac{\frac{dy}{y}}{z-x} = \frac{\frac{dz}{z}}{x-y} = \frac{\frac{dx}{x}+\frac{dy}{y}+\frac{dz}{z}}{y-x+z-x+x-y} = \frac{\frac{dx}{x}+\frac{dy}{y}+\frac{dz}{z}}{0},$$

deci $\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} + \frac{dz}{z} = 0$. Rezultă că

$$0 = \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} + \frac{dz}{z} = d(\ln|x| + \ln|y| + |\ln|z|),$$

deci $xyz = C_2$, a doua integrală primă

Soluţia sistemului simetric

$$\frac{dx}{x(y-z)} = \frac{dy}{y(z-x)} = \frac{dz}{z(x-y)}$$

este

$$\begin{cases} x + y + z = C_1 \\ xyz = C_2 \end{cases}$$

$\square$