Mathematik ABI Zusammenfassung

Jannis Müller, Robin Rausch

28 April 2021

Inhaltsverzeichnis

1 Zahlenmengen **3**

2 Binomische Formeln **3**

3 Potenzen und Wurzeln **3**

4 Funktionen und zugehörige Gleichungen **3**

5 Vektorgeometrie **4**

5.1 Vektorarten . . . 4
5.1.1 Der Nullvektor . . . 4
5.1.2 Der Verbindungsvektor . . . 4
5.1.3 Der Ortsvektor . . . 5
5.2 Rechnen mit Vektoren . . . 5
5.2.1 Die Addition von Vektoren . . . 5
5.2.2 Die Skalare Multiplikation von Vektoren . . . 5
5.2.3 Das Skalarprodukt . . . 5
5.2.4 Das Kreuzprodukt . . . 6
5.3 Eigenschaften von Vektoren . . . 6
5.3.1 Die Länge eines Vektors . . . 6
5.3.2 Parallelität zweier Vektoren . . . 7
5.4 Geraden im Raum . . . 7
5.4.1 Aufbau von Geraden . . . 7
5.4.2 Gerade aus zwei Punkten bilden . . . 7
5.4.3 Lage von Geraden zueinander . . . 8
5.4.4 Abstand zwischen Punkt und Gerade . . . 8
5.4.5 Abstand zwischen Gerade und Gerade . . . 9
5.5 Ebenen . . . 9
5.5.1 Normalenvektor einer Ebene . . . 9
5.5.2 Parameterform . . . 9
5.5.3 Koordinatenform . . . 9
5.5.4 Normalenform . . . 10
5.5.5 Parameterform in Koordinatenform . . . 10
5.5.6 Normalenform in Koordinatenform . . . 10
5.5.7 Koordinatenform in Parameterform . . . 10
5.6 Lage von Ebenen . . . 10
5.6.1 Ebenen, parallel zur X1-X2-Ebene . . . 10
5.6.2 Ebenen, parallel zur X1-X3-Ebene . . . 11
5.6.3 Lage von 2 Ebenen zueinander . . . 11
5.6.4 Lage von Gerade und Ebene zueinander . . . 11
5.6.5 Lage von 3 Ebenen zueinander . . . 11
5.7 Abstände mit Ebenen . . . 11
5.7.1 Abstand Punkt Ebene . . . 11
5.7.2 Schnittgerade zweier Ebenen . . . 12
5.7.3 Schnittpunkt Gerade-Ebene . . . 12

6 Analysis **13**

6.1 Intervalle . . . 13
6.2 Differenzenquotient . . . 13
6.3 Differenzialquotient . . . 13
6.4 Ableitungsregeln . . . 13
6.5 Integrationsregeln . . . 13
6.6 Besondere Punkte . . . 13
6.6.1 Die NEW-Regel . . . 14
6.7 Krümmung und Monotonie . . . 14
6.8 Das Integral . . . 14
6.9 Flächeninhalt zwischen zwei Funktionen . . . 14
6.10 Fläche ins Unendliche (e-Funktionen) . . . 14

7 Wahrscheinlichkeitsrechnung **15**

7.1 Definition einer Menge . . . 15
7.2 Mengenoperationen . . . 15
7.3 Grundbegriffe . . . 15
7.4 Wahrscheinlichkeit . . . 15
7.5 Baumdiagramm . . . 16
7.6 Binomialverteilung . . . 16
7.7 Erwartungswert . . . 17
7.8 Unabhängigkeit zweier Ereignisse . . . 17
7.9 Weiterführende Begriffe . . . 17
7.9.1 Varianz . . . 17
7.9.2 Sigma-Regeln . . . 17
7.9.3 Standardabweichung . . . 17
7.9.4 Vertrauensintervall . . . 17

8 Epilog **17**

1 Zahlenmengen

$\mathbb{N} = \{0; 1; 2; \ldots\}$	natürliche Zahlen	$\mathbb{N}^* = \mathbb{N}\backslash\{0\}$
$\mathbb{Z} = \{\ldots -2; -1; 0; 1; \ldots\}$	ganze Zahlen	$\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z}\backslash\{0\}$
$\mathbb{R}$	reelle Zahlen	$\mathbb{R}^* = \mathbb{R}\backslash\{0\}$
$\mathbb{R}_+ = \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge x \geq 0\}$	nicht negativ reelle Zahlen	$\mathbb{R}_+^* = \mathbb{R}_+\backslash\{0\}$

2 Binomische Formeln

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $\qquad$ $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ $\qquad$ $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

3 Potenzen und Wurzeln

mit $a, b \in \mathbb{R}_+^*$; $n \in \mathbb{N}\backslash\{0; 1\}$; $r, s \in \mathbb{R}$

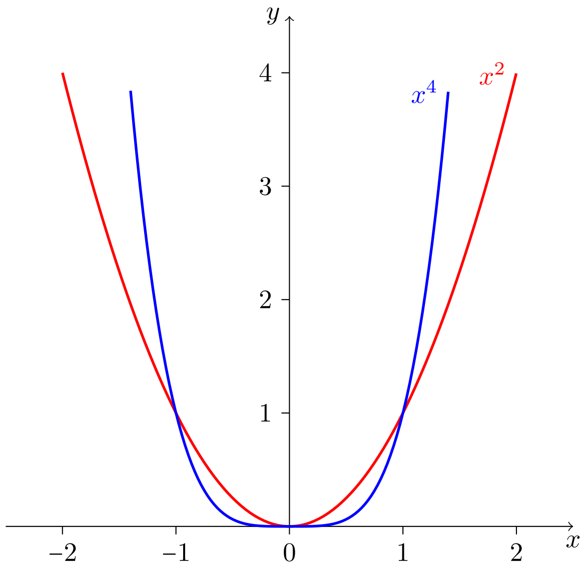
$$a^r \cdot a^s = a^{r+s} \qquad \frac{a^r}{a^s} = a^{r-s} \qquad a^r \cdot b^r = (ab)^r \qquad \frac{a^r}{b^r} = \left(\frac{a}{b}\right)^r$$

$$a^{-r} = \frac{1}{a^r} \qquad a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \qquad \left(a^r\right)^s = a^{r \cdot s} \qquad a^0 = 1$$

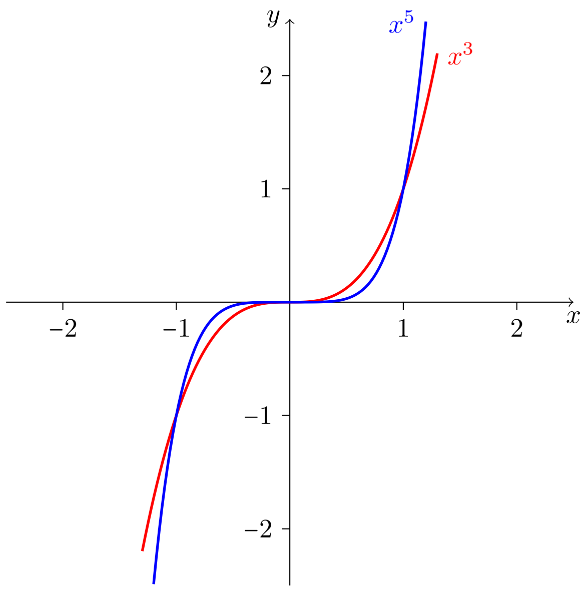
4 Funktionen und zugehörige Gleichungen

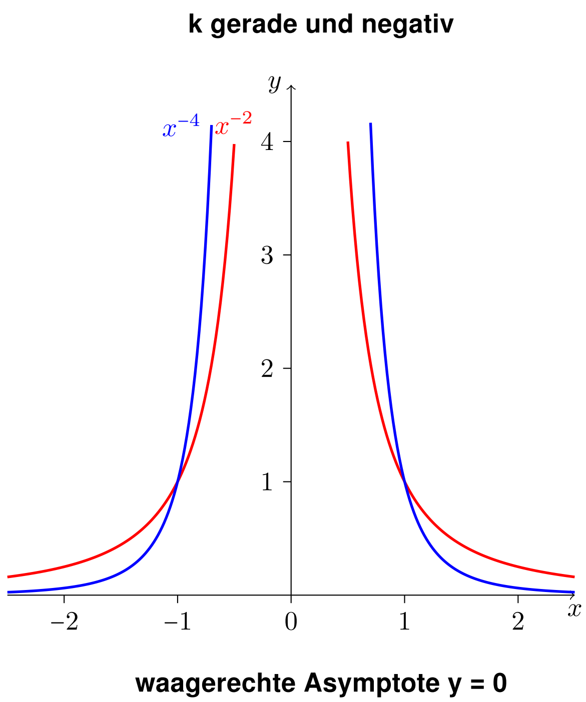
Potenzfunktion mit $f(x) = x^k$ mit $k \in \mathbb{Z}^*$

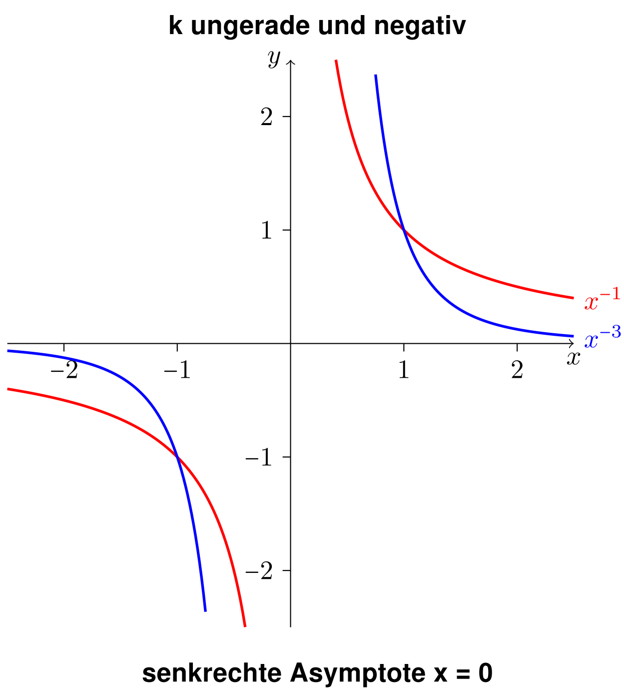
k gerade und positiv



k ungerade und positiv







5 Vektorgeometrie

5.1 Vektorarten

5.1.1 Der Nullvektor

Der Nullvektor besitzt immer die Länge 0LE (Längen Einheiten). Er ist im eigentlichen Sinne kein richtiger Vektor, da die Richtung undefiniert ist.

$$\overrightarrow{n_0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

5.1.2 Der Verbindungsvektor

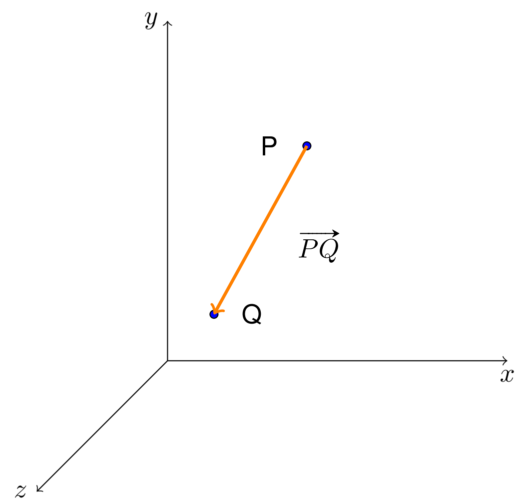
Der Verbindungsvektor ist ein Vektor zwischen zwei Punkten.

$$P(1|1|1); Q(3|4|3)$$

Die Differenz der Koordinaten der Ortsvektoren liefert die Zielkoordinate. Hier:

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

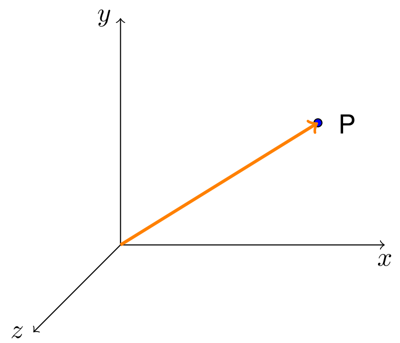
$$\rightsquigarrow \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$



5.1.3 Der Ortsvektor

Der Ortsvektor ist ein Vektor vom Ursprung des Koordinatensystems zu einem beliebigen Punkt.

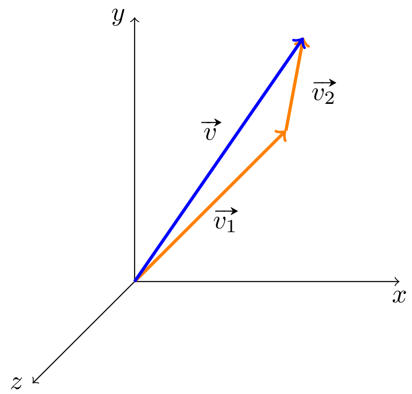
$$P(3|2|1) \rightsquigarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$



5.2 Rechnen mit Vektoren

5.2.1 Die Addition von Vektoren

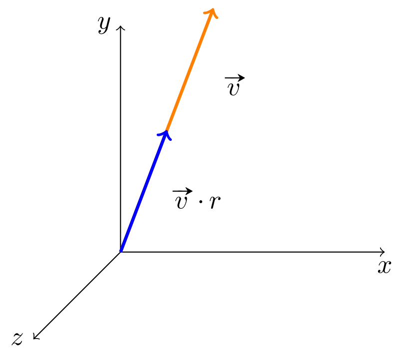
$$\vec{v} = \vec{v_1} + \vec{v_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$



5.2.2 Die Skalare Multiplikation von Vektoren

Beim skalaren Multiplizieren multipliziert man einen Vektor mit dem sogenannten Skalar. Hierbei ändert sich die Länge des Vektors, wobei die Richtung gleich bleibt.

$$\vec{v} = \vec{v_1} \cdot r = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$



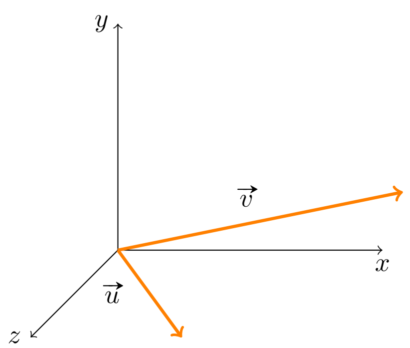
5.2.3 Das Skalarprodukt

Mit dem Skalarprodukt kann man zwei Vektoren auf ihre Orthogonalität prüfen. Zwei Vektoren stehen orthogonal zueinander, wenn ihr Skalarprodukt 0 ergibt.

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = 3 \cdot 2 + 0 \cdot 0 + (-2) \cdot 3 = \mathbf{0}$$

$\rightsquigarrow$ Die Vektoren stehen orthogonal zueinander!

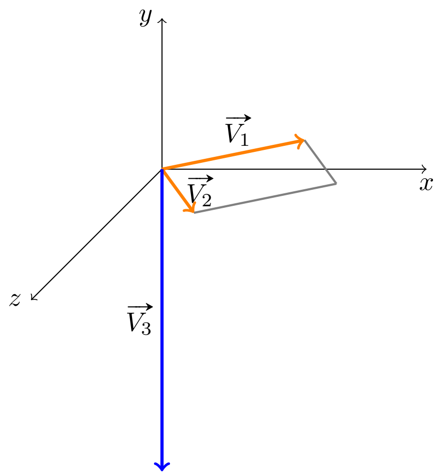


5.2.4 Das Kreuzprodukt

Durch das Berechnen des Kreuzproduktes zweier Vektoren $(V_1; V_2)$ erhält man einen dritten Vektor (V_3), welcher orthogonal auf den anderen Beiden $(V_1; V_2)$ steht. Die Länge des neu entstandenen Vektors (V_3) gibt außerdem den Flächeninhalt des durch V_1 und V_2 aufgespannten Parallelogramms an.

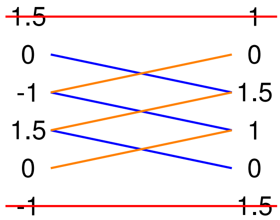
$$\vec{V_3} = \vec{V_1} \times \vec{V_2} = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1.5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \cdot 1.5 - (-1) \cdot 0 \\ -1 \cdot 1 - 1.5 \cdot 1.5 \\ 1.5 \cdot 0 - 0 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$



Der Vektor V_3 ist 4 LE lang, was bedeutet, dass das aufgespannte Parallelogramm durch V_1 und V_2 eine Fläche von 4 FE umschließt. $V_3 \perp V_1; V_2$

Eselsbrücke zum Bilden des Kreuzproduktes:



Erklärung:
Es werden zunächst beide Vektoren zwei mal untereinander geschrieben. Die erste und letzte Zeile der Tabelle darf nicht beachtet werden und wird somit gestrichen. Die Kreuzverbindungen stellen die Multiplikation der miteinander verbundenen Werte dar.

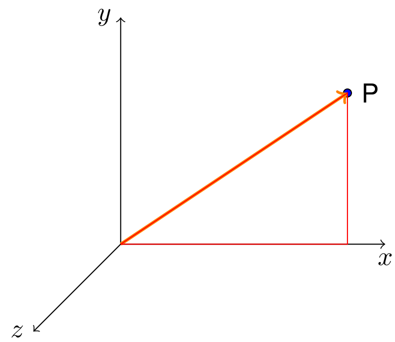
5.3 Eigenschaften von Vektoren

5.3.1 Die Länge eines Vektors

Die Länge eines Vektors wird mit Hilfe des Satz des Pythagoras berechnet:

$$|\vec{v}| = \left| \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{3^2 + 2^2 + 0^2}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{13}$$



Möchte man einen Vektor auf eine gewünschte Länge bringen, erfordert dies die Ist-Länge zu kennen, um den Vektor auf die gewünschte Soll-Länge strecken oder stauchen zu können:

$$\vec{u} = \frac{\text{Soll-Länge}}{\text{Ist-Länge}} \cdot \vec{v}$$

$$\vec{u} = \frac{3}{\sqrt{13}} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{\sqrt{13}} \\ \frac{6}{\sqrt{13}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

5.3.2 Parallelität zweier Vektoren

Vektoren sind parallel, wenn sie Vielfache sind.

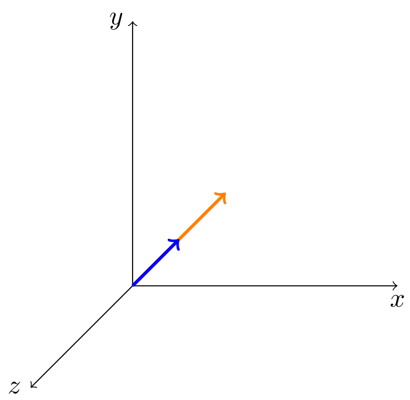
$$\vec{v_1} \cdot a = \vec{v_2}$$

$$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{v_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot 2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$a = 2$$

Die Vektoren sind parallel.

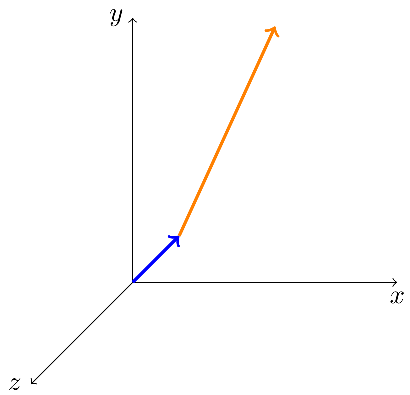


5.4 Geraden im Raum

5.4.1 Aufbau von Geraden

Geraden bestehen aus einem Stützvektor, einem streck/stauch Faktor und einem Richtungsvektor:

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0.5 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$



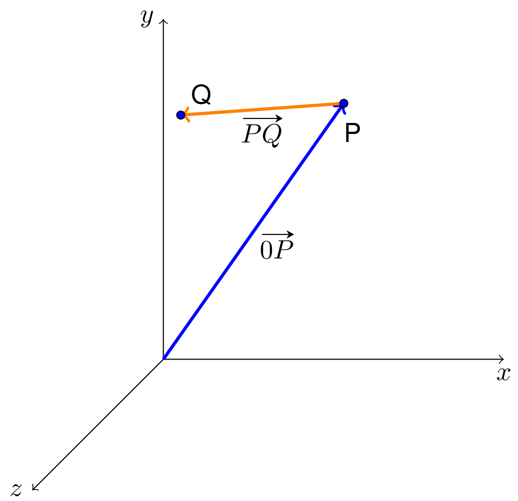
Um eine Geradengleichung ermitteln zu können werden entweder zwei auf der Gerade liegende Punkte, oder ein Stützpunkt mit einem Richtungsvektor benötigt.

5.4.2 Gerade aus zwei Punkten bilden

$$P(2|3|-1) \qquad Q(1|4|2)$$

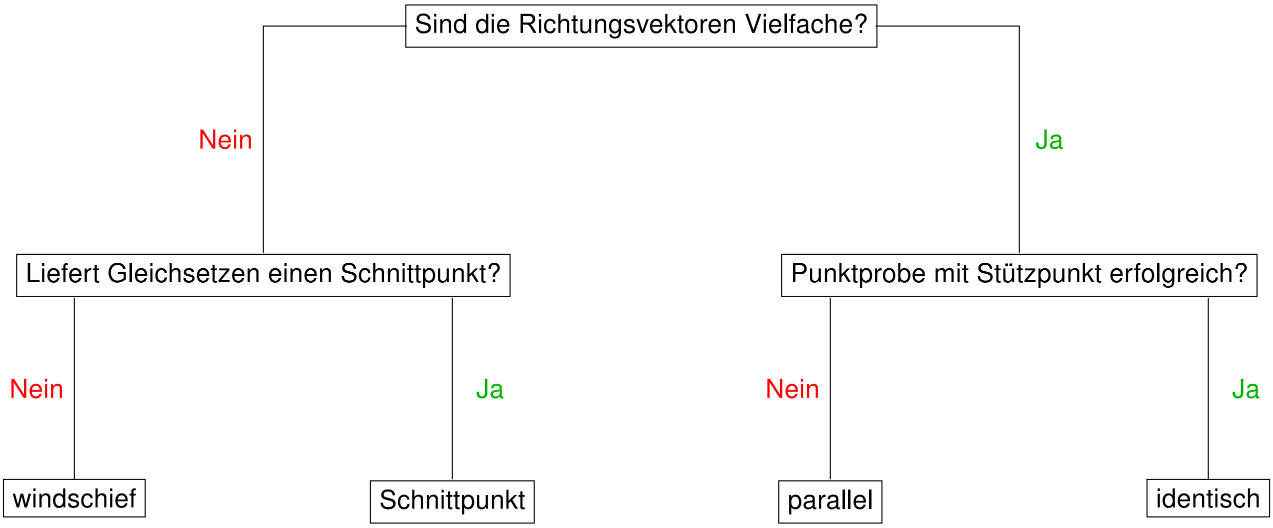
$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 1-2 \\ 4-3 \\ 2-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{0P} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$g : \vec{x} = \overrightarrow{0P} + r \cdot \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$



5.4.3 Lage von Geraden zueinander

Zur Bestimmung der Lage zweier Geraden gibt es folgendes Kochrezept:



Beispiel:
Untersuche $g_1\vec{x}$ und $g_2\vec{x}$ auf eventuell gemeinsame Punkte

$$g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Prüfen auf Vielfache:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow a = -3$$

Punktprobe:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow s = 1$$

Die Geraden sind identisch, da die Richtungsvektoren vielfache sind, und der Stützvektor von $g_1\vec{x}$ auf $g_2\vec{x}$ liegt.

5.4.4 Abstand zwischen Punkt und Gerade

Der Abstand zwischen einer Gerade und einem Punkt lässt sich in 4 Schritten berechnen:

1. Einen allgemeinen Punkt der Geraden erstellen

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -0.5 \end{pmatrix} \qquad P(2|0|3)$$

$$\rightsquigarrow G(2-3r|-1|3-0.5r)$$

2. Verbindungsvektor vom allgemeinen Punkt zum Punkt

$$\overrightarrow{GP} = \begin{pmatrix} 2-(2-3r) \\ 0-(-1) \\ 3-(3-0.5r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3r \\ 1 \\ 0.5r \end{pmatrix}$$

3. Skalarprodukt zwischen dem Verbindungsvektor Punkt-Gerade und dem Richtungsvektor der Gerade

$$0 = \overrightarrow{GP} \cdot \vec{u} = 3r \cdot (-3) + 1 \cdot 0 + 0.5r \cdot (-0.5) = -\frac{37}{4}r \rightsquigarrow r = 0$$

4. Die Länge des Verbindungsvektors Punkt-Gerade errechnen

$$|\overrightarrow{GP}| = \sqrt{(3 \cdot 0)^2 + 1^2 + (0.5 \cdot 0)^2} = 1$$

$\rightsquigarrow$ Der Abstand zwischen Punkt P und der Geraden $g : \vec{x}$ beträgt 1 LE

5.4.5 Abstand zwischen Gerade und Gerade

Zur Berechnung des Abstandes zweier windschiefen Geraden benötigt man folgende Formel:

$$d = \left| \frac{(\vec{q} - \vec{p}) \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|} \right|$$

$\vec{q}$ = Stützvektor Gerade 1
$\vec{p}$ = Stützvektor Gerade 2
$\vec{n}$ = Vektor der senkrecht auf $\vec{q}$ und $\vec{p}$ steht

Beispiel:
Berechnen Sie den Abstand zwischen $g_1 : \vec{x}$ und $g_2 : \vec{x}$

$$g_1 : \vec{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\vec{p}} + r \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\vec{u}} \qquad g_2 : \vec{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\vec{q}} + s \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{v}}$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$d = \left| \frac{\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}{\left| \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right|} \right| = \left| \frac{0 - 1 + 0}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} \right| = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$\rightsquigarrow$ Der Abstand zwischen beiden Geraden beträgt $\frac{1}{\sqrt{3}}$ LE

5.5 Ebenen

5.5.1 Normalenvektor einer Ebene

Der Normalenvektor einer Ebene wird gebildet aus dem Kreuzprodukt der Spannvektoren. Der steht senkrecht auf der Ebene, seine Länge beschreibt jedoch nur die Fläche des aufgespannten Parallelogramms und nicht die Fläche der Ebene.

$$E : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

5.5.2 Parameterform

Die Ebene besteht aus einem Stützvektor, zwei streck/stauch Faktoren, und zwei Spannvektoren, welche die Ebene aufspannen:

$$E : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -15 \\ 1 \\ 42 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}$$

5.5.3 Koordinatenform

Die Koordinatenform ist wie eine Gleichung aufgebaut und zeigt die jeweiligen Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen:

$$E : ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$$

Die Werte a;b;c sind die Werte des Normalenvektors, welcher senkrecht auf der Ebene steht:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

5.5.4 Normalenform

Die Normalenform besteht aus dem Normalenvektor einer Ebene und aus einem Punkt oder Stützvektor:

$$[\vec{x} - \vec{p}] \cdot \vec{n} = 0 \qquad \longrightarrow \text{Beispiel} \longrightarrow \qquad \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix} = 0$$

5.5.5 Parameterform in Koordinatenform

$$E: \vec{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{p}} + r \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}}_{\vec{u}} + s \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{v}}$$

1. Kreuzprodukt der Spannvektoren bilden:

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

2. In die Koordinatenform bringen

$$E: 4x_1 + 3x_2 - \frac{3}{2}x_3 = d$$

3. Punkt einsetzen

$$4 \cdot 2 + 3 \cdot 0 + (-\frac{3}{2}) \cdot 1 = 6.5 \qquad \rightsquigarrow \qquad E: 4x_1 + 3x_2 - \frac{3}{2}x_3 = 6.5$$

5.5.6 Normalenform in Koordinatenform

$$\left[\vec{x} - \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\vec{p}}\right] \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix}}_{\vec{n}} = 0$$

$$\rightsquigarrow 3x_1 + 8x_2 + 5x_3 = d$$

$\vec{p}$ einsetzen: $3 \cdot 1 + 8 \cdot 2 + 5 \cdot 3 = 34$

$$\rightsquigarrow 3x_1 + 8x_2 + 5x_3 = 34$$

5.5.7 Koordinatenform in Parameterform

Um von der Koordinatenform auf die Parameterform zu wechseln, bedarf es drei beliebige Punkte auf dieser Ebene.

$$E: 3x_1 + 8x_2 + 5x_3 = 34$$

Am Besten eignen sich hierfür die drei Achsenschnittpunkte:

$$\rightsquigarrow P_1\left(\frac{34}{3}\middle|0\middle|0\right); P_2\left(0\middle|\frac{34}{8}\middle|0\right); P_3\left(0\middle|0\middle|\frac{34}{5}\right)$$

Mit diesen Punkten können nun zwei Spannvektoren und ein Stützvektor erstellt werden.

5.6 Lage von Ebenen

5.6.1 Ebenen, parallel zur X1-X2-Ebene

Bei der Koordinatenform & Normalenform muss der Normalenvektor für x_1 und x_2 0 sein. Außerdem darf der Stützpunkt nicht auf der x_1x_2-Ebene liegen:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}$$

Die Spannvektoren müssen bei der Parameterform $x_3 = 0$ sein. Hierbei darf der Stützvektor ebenfalls nicht auf der x_1x_2-Ebene liegen, da sie sonst identisch wären.

5.6.2 Ebenen, parallel zur X1-X3-Ebene

Koordinaten und Normalenform: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$

Spannvektoren bei Parametern: $\vec{u}/\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ b \end{pmatrix}$

5.6.3 Lage von 2 Ebenen zueinander

1. Fall: Die Ebenen sind parallel
   $\rightsquigarrow$ Abstandsberechnung möglich
2. Fall: Die Ebenen schneiden sich wobei eine Schnittgerade entsteht.
   $\rightsquigarrow$ Schnittgerade kann bestimmt werden
3. Fall: Die Ebenen sind identisch

5.6.4 Lage von Gerade und Ebene zueinander

1. Fall: Die Gerade verläuft parallel zur Ebene
   $\rightsquigarrow$ Abstandsberechnung möglich
2. Fall: Die Gerade schneidet die Ebene
   $\rightsquigarrow$ Schnittpunkt berechnen
3. Fall: Die Gerade verläuft in der Ebene

5.6.5 Lage von 3 Ebenen zueinander

1. Fall: Alle Ebenen schneiden sich nur in einem Punkt
   $\rightsquigarrow$ Schnittpunkt berechnen
2. Fall Es entsteht eine Schnittgerade
   $\rightsquigarrow$ Schnittgerade kann bestimmt werden
3. Fall: Es schneiden sich an keiner Stelle alle drei Ebenen.

5.7 Abstände mit Ebenen

5.7.1 Abstand Punkt Ebene

Der Abstand Punkt-Ebene kann außerdem verwendet werden wenn:

1. Gerade und Ebene parallel sind
2. Ebene und Ebene parallel sind

Anwendung:

$$E : ax_1 + bx_2 + cx_3 = d \qquad P(p_1|p_2|p_3)$$

$$d_{EP} = \frac{|ap_1 + bp_2 + cp_3 - d|}{|\vec{n}|}$$

Beispiel:

$$E : 3x_1 - 4x_2 = -2 \qquad P(2|-1|3)$$

$$d_{EP} = \left|\frac{6+4+2}{\sqrt{9+16}}\right| = \frac{12}{5}$$

5.7.2 Schnittgerade zweier Ebenen

1. Schritt: Ebenen in Koordinatenform übertragen
2. Schritt: $x_1 = t$ setzen
   Beispiel:

$$E_1 : 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 6$$

$$E_2 : x_1 - x_2 + 4x_3 = 7$$

$$\begin{aligned} I \quad & 2t - 3x_2 + 4x_3 = 6 \\ II \quad & t - x_2 + 4x_3 = 7 \end{aligned}$$

3. Schritt: $I - II$

$$\begin{aligned} I \quad & 2t - 3x_2 + 4x_3 = 6 \\ II \quad & t - x_2 + 4x_3 = 7 \\ & t - 2x_2 = -1 \end{aligned}$$

$$\rightsquigarrow x_2 = \frac{t+1}{2}$$

4. Schritt: x_2 in II einsetzen für x_3

$$II \quad t - (\frac{t+1}{2}) + 4x_3 = 7$$

$$\rightsquigarrow x_3 = \frac{15}{8} - \frac{t}{8}$$

5. Schritt: Gerade Erstellen

$$\begin{aligned} 0 + t &= x_1 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t &= x_2 \\ \frac{15}{8} + t \cdot (-\frac{1}{8}) &= x_3 \end{aligned}$$

$$\rightsquigarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{15}{8} \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

5.7.3 Schnittpunkt Gerade-Ebene

1. Schritt: Gerade in die Ebene einsetzen

$$E : 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 10$$

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

2. Schritt: r berechnen

$$\begin{aligned} \rightsquigarrow 2 \cdot (1 + 2r) - 2 + 3(3 + 3r) &= 10 \\ 9 - 5r &= 10 \\ r &= -\frac{1}{5} \end{aligned}$$

3. Schritt: r in die Gerade einsetzen

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \left(-\frac{1}{5}\right) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{2}{5} \\ 2 \\ 3 + \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

4. Schritt: In die Punkt-Form bringen

$$P\left(\frac{3}{5} \middle| 2 \middle| \frac{18}{51}\right)$$

6 Analysis

6.1 Intervalle

$$
\begin{aligned}
[a;b] &\mathrel{\widehat{=}} a \le x \le b \\
[a;b) &\mathrel{\widehat{=}} a \le x < b \\
(a;b] &\mathrel{\widehat{=}} a < x \le b \\
(a;b) &\mathrel{\widehat{=}} a < x < b
\end{aligned}
$$

6.2 Differenzenquotient

Der Differenzenquotient beschreibt die durchschnittliche Steigung in einem definierten Intervall.

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

6.3 Differenzialquotient

Der Differenzialquotient beschreibt die momentane Steigung an einer definierten Stelle.

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

6.4 Ableitungsregeln

$f(x)$	$f'(x)$
x^n	nx^{n-1}
$4x^2+x-32$	$8x+1$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\sqrt{x}$	$0.5x^{-0.5}$
$3x^{-1}$	$-3x^{-2}$
e^x	e^x
$\frac{1}{x+1}$	$\frac{-1}{(x+1)^2}$
$\sin(x^2)$	$\cos(x^2)\cdot 2x$
$u(v(x))$	$u'(v(x))\cdot v'(x)$
$u(x)\cdot v(x)$	$u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)$
e^{3x^2}	$e^{3x^2}\cdot 6x$

6.5 Integrationsregeln

$f(x)$	$F(x)$
x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$
$4x^2+x-32$	$\frac{4}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-32x+c$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$
$\sqrt{x}$	$\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$
$3x^{-1}$	$3\cdot\ln(x)$
e^x	e^x
$\frac{1}{x+1}$	$\ln(1+x)$
$u(ax+b)$	$U(ax+b)\cdot\frac{1}{b}$
$u(v(x))$	*nicht relevant*
$u(x)\cdot v(x)$	*nicht relevant*
e^{3x^2}	*nicht relevant*

6.6 Besondere Punkte

Punkt	**Beschreibung**	**Berechnung**
Hochpunkt	lokales Maximum	$f'(x)=0;\quad f''(x)<0$
Tiefpunkt	lokales Minimum	$f'(x)=0;\quad f''(x)>0$
Wendepunkt	keine Krümmung	$f''(x)=0;\quad f'''(x)\neq 0$
Sattelpunkt	keine Krümmung, keine Steigung	$f'(x)=0;\quad f''(x)=0;\quad f'''(x)\neq 0$

6.6.1 Die NEW-Regel

N - Nullstellen
E - Extrempunkte
W - Wendestellen

$F(x)$	N	E	W		
$f(x)$		N	E	W	
$f'(s)$			N	E	W

6.7 Krümmung und Monotonie

$f'(x) \hat{=}$ Steigung

$f''(x) \hat{=}$ Krümmung

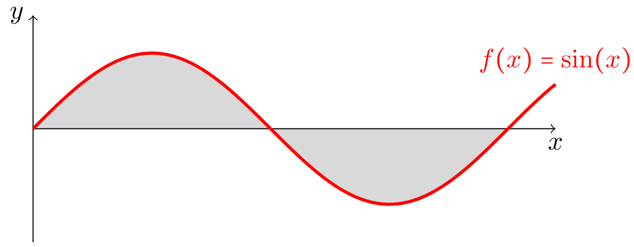
- Ist $f(x)$ *monoton steigend*, so ist $f'(x) \geq 0$
- Ist $f(x)$ *monoton fallend*, so ist $f'(x) \leq 0$
- Ist $f(x)$ *nach rechts gekrümmt*, so ist $f''(x) \leq 0$
- Ist $f(x)$ *nach links gekrümmt*, so ist $f''(x) \geq 0$

6.8 Das Integral

Das Integral definiert die Fläche unter einer Kurve, in einem bestimmten Intervall.

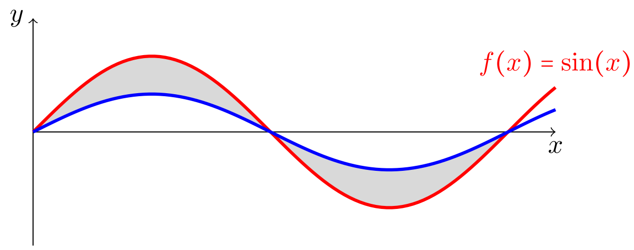
$$A = \int_a^b f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$$

Sollte die Kurve unter der x-Achse verlaufen, wird die Fläche negativ. Flächen oberhalb und unterhalb der x-Achse gleichen sich aus.



6.9 Flächeninhalt zwischen zwei Funktionen

$$A = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx$$



6.10 Fläche ins Unendliche (e-Funktionen)

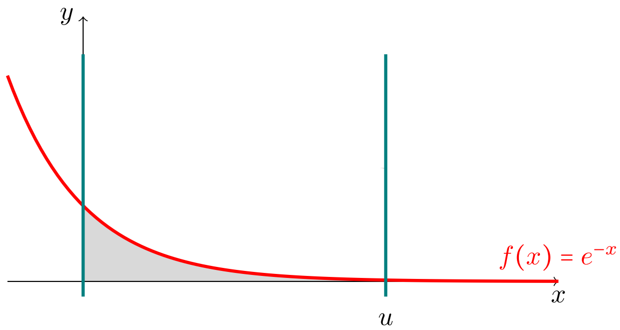
Um eine Fläche unter einer e-Funktion berechnen zu können, muss eine Variable u als Grenze eingesetzt werden.

$$A = \int_0^u f(x)\,dx$$

Beispiel:

$$A = \int_0^u \left(x + \frac{1}{2}\right)^{-1} dx = \left[ln\left(x + \frac{1}{2}\right)\right]_0^u$$

$$= ln\left(u + \frac{1}{2}\right) - ln\left(\frac{1}{2}\right)$$



Nun kann man u $\longrightarrow \infty$ laufen lassen:

$$\lim_{u \to \infty} \left(ln\left(u + \frac{1}{2}\right) - ln\left(\frac{1}{2}\right) \right) = \infty$$

Die Fläche ist unendlich groß

7 Wahrscheinlichkeitsrechnung

7.1 Definition einer Menge

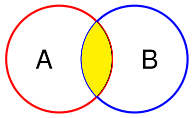
$$E = \{a; b; c; \dots\}$$

- $a\ b\ c$ sind die Elemente, alles zusammen ist die Ergebnismenge
- kein Element kann doppelt vorkommen
- $a \in M \longrightarrow$ *gehört zu / Element von*
- $a \notin M \longrightarrow$ *gehört nicht zu / kein Element von*

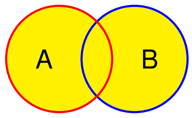
7.2 Mengenoperationen

$A = \{1; 2; 3\}$ $B = \{2; 3; 4\}$

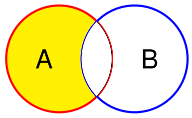
1. Schnittmenge $A \cap B = \{2; 3\}$



2. Vereinigungsmenge $A \cup B = \{1; 2; 3; 4\}$



3. Differenzmenge $A \setminus B = \{1\}$



7.3 Grundbegriffe

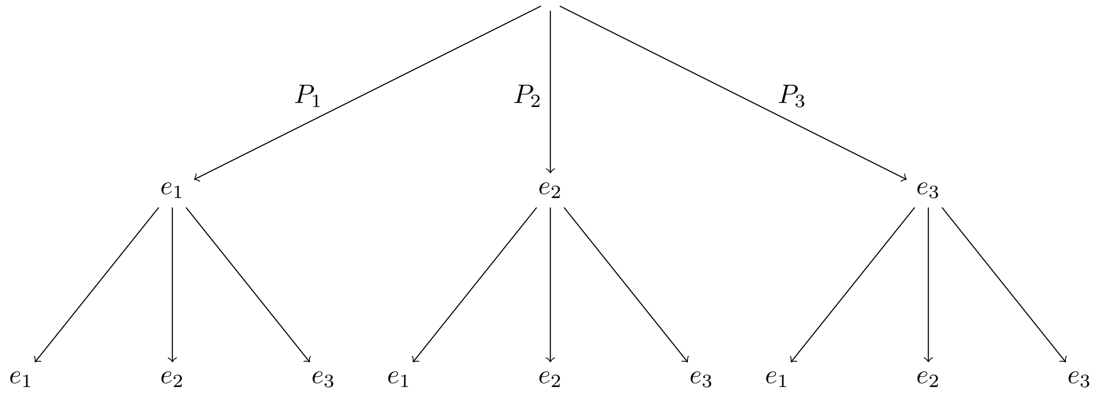
Erwartungswert	Der Wert, der bei *häufiger (min: 30 Durchführungen)* Durchführung im Mittel angenommen wird. Muss $\notin$ der Ergebnismenge sein.
LaPlace Experiment	Zufallsexperiment, bei dem alle Wahrscheinlichkeiten *gleich verteilt* sind. *Beispiel: fairer, handelsüblicher Würfel*
Ereignis	Ein Ereignis ist eine Teilmenge der Ergebnismenge, kann also kein, eines oder mehrere Ergebnisse beinhalten.
Ergebnismenge	Ist die Zusammenfassung aller möglichen Ergebnisse eines Zufallsexperimentes.
Zufallsexperiment	Ein Experiment ist zufällig, wenn das Ergebnis mit aktuellen Methoden/Wissen nicht ausreichend gut vorhersehbar ist. Ein Zufallsexperiment besitzt eine Ergebnismenge mit *mindestens* zwei Elementen.

7.4 Wahrscheinlichkeit

$P(e)$ Wahrscheinlichkeit des Ergebnisses *e*

1. $P(e) \geq 0$
2. $P(e_1 \vee e_2) = P(e_1) + P(e_2)$
3. $P(e) = 1$

7.5 Baumdiagramm



$P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 = 1$

1. Durchführung

2. Durchführung

Die Ergebnismenge setzt sich aus den Ergebnissen e_n zusammen.

7.6 Binomialverteilung

1. n über k Regeln und Beispiele

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

$$0! = 1$$

Beispiel:

$$\binom{7}{2} = \frac{7!}{(7-2)! \cdot 2!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{42}{2} = 21$$

Regeln:

$$\binom{n}{n-1} = n \qquad \binom{n}{1} = n$$

$$\binom{n}{n} = 1 \qquad \binom{n}{0} = 1$$

2. Binomialverteilung
Eine Zufallsvariable X ist nur dann Binomialverteilt wenn... (es müssen a und b zutreffen!)

(a) es genau 2 unterschiedliche Ausgänge gibt

(b) die Wahrscheinlichkeiten gleich bleiben

wenn...

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

$$P(X \leq k) = P(x = 0) + P(x = 1) + \cdots + P(x = k)$$

7.7 Erwartungswert

$$E(X) = x_1 \cdot P(x = x_1) + x_2 \cdot P(x = x_2) + \dots + P(x = x_n) \cdot x_n$$

Ein Zufallsexperiment ist nur dann fair, wenn nach Abzug des Einsatzes der Erwartungswert 0 ergibt!

Beispiel:

x	1	2	3	4	5	6
$P(x = x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$

$$\begin{aligned} \rightsquigarrow E(X) &= 1 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{1}{9} + 4 \cdot \frac{1}{9} + 5 \cdot \frac{1}{18} + 6 \cdot \frac{1}{18} \\ &= \frac{43}{18} \approx 2,4 \end{aligned}$$

7.8 Unabhängigkeit zweier Ereignisse

Zwei Ereignisse sind unabhängig voneinander wenn gilt:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

7.9 Weiterführende Begriffe

7.9.1 Varianz

Die Varianz gibt die Streuung um den Erwartungswert an.

$$Var(X) = (x_1 - E(X))^2 \cdot p_1 + \dots + (x_n - E(X))^2 \cdot p_n$$

7.9.2 Sigma-Regeln

Liefern eine Intervall um den Erwartungswert, in Abhängigkeit von der Standardabweichung, in dem eine gewisse Prozentzahl an möglichen Ergebnissen liegt. *Siehe Formelsammlung*

7.9.3 Standardabweichung

$$\sigma = \sqrt{Var(x)}$$

7.9.4 Vertrauensintervall

Zu einer gegebenen Vertrauenswahrscheinlichkeit werden die Intervallsgrenzen berechnet, in denen die möglichen Ergebnisse liegen. *Siehe Formelsammlung*

8 Epilog

Diese Zusammenfassung wurde erstellt von Jannis Müller in Zusammenarbeit mit Robin Rausch. Viele der fachlichen Inhalte stammen von ihm, ich möchte ihm für die Bereitstellung der Inhalte danken. Grafiken sowie sonstige Darstellungen und Formatierungen wurden durch mich, Jannis Müller, vorgenommen.
Für fachliche Richtigkeit, sowie sonstige Fehler übernehmen die Autoren keine Gewähr. Es liegt in der Verantwortung des Lesers, sich über die Richtigkeit der hier präsentierten Informationen zu informieren.
Fehler sind den Autoren unverzüglich zu melden!