Zusammenfassung - Algorithmen für planare Graphen

Julian Shen

14. Juni 2023

1 Einführung

Definition: **Graph** ist ein Tupel $G = (V, E)$ mit endliche Knotenmenge V und endliche Kantenmenge E

- Kante $e \in E$ hat Form $e = uv$ mit $u, v \in V$.
- $uv = vu \to$ Graphen **ungerichtet**
- $e = uu$ ist erlaubt $\to$ **Schlinge**
- Auch $e = uv$ und $e' = uv$ erlaubt mit $e \neq e' \to$ **Mehrfachkante**
- **Einfacher Graph** $\iff$ ohne Schlingen und Mehrfachkanten
- **Zusammenhängend** $\iff$ ein Weg zwischen je zwei Knoten

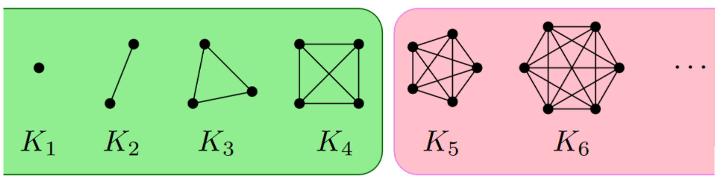
Definition: Eine **Zeichnung** von $G = (V, E)$ bildet diesen so auf $\mathbb{R}^2$ ab, dass

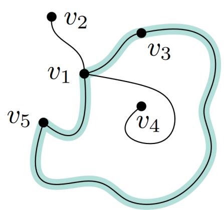
1. Knoten Punkte in der Ebene sind, d.h. $V \subset \mathbb{R}^2$
2. Kante $e = uv$ ist injektive, stetige Kurve von u nach v, d.h. $\gamma_e \colon [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ mit
   - $\gamma_e(0) = u$ und $\gamma_e(1) = v$
   - $\gamma_e(0) \notin V$ für alle $0 < t < 1$

- Zeichnung heißt **kreuzungsfrei** bzw. **planar** wenn für je zwei Kanten e, e' und $0 < t, t' < 1$ gilt: $\gamma_e(t) \neq \gamma_e(t')$
- Graph heißt **planar**, wenn er mindestens eine kreuzungsfreie Zeichnung besitzt

Definition: Für $n \in \mathbb{N}$ ist der **vollständige Graph** K_n

- $V(K_n) = \{v_1, \ldots, v_n\}$
- $E(K_n) = \{v_i v_j \mid v_i, v_j \in V, i \neq j\}$





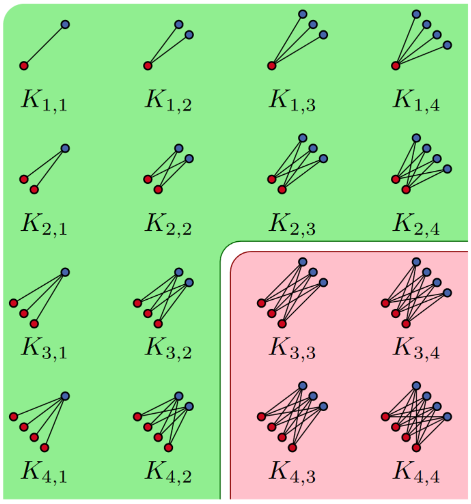
Lemma: Graph K_5 ist nicht planar

Beweis: Betrachte beliebige Zeichnung von K_5

- Betrachte v_1 und seine 4 ausgehenden Kanten
- O.B.d.A. Kanten kreuzungsfrei zu v_2, v_3, v_4, v_5 in zyklischer Reihenfolge um v_1
- Kanten v_1v_3, v_3v_5, v_5v_1 bilden geschlossene Kurve in $\mathbb{R}^2$ die v_2 und v_4 trennt $\implies$ v_2v_4 kann nicht kreuzungsfrei gezeichnet sein

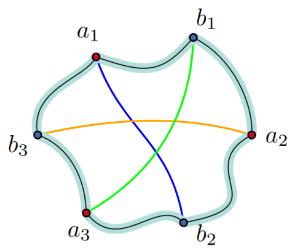
Definition: Für $m, n \in \mathbb{N}$ ist der vollständig bipartite Graph $K_{m,n}$

- $V(K_{m,n}) = \{a_1, \ldots, a_m\} \cup \{b_1, \ldots, b_n\}$
- $E(K_{m,n}) = \{a_i b_j \mid i \in \{1, \ldots, m\}, j \in \{1, \ldots, n\}\}$



Lemma: Graph $K_{3,3}$ ist nicht planar

Beweis: Betrachte beliebige Zeichnung von $K_{3,3}$



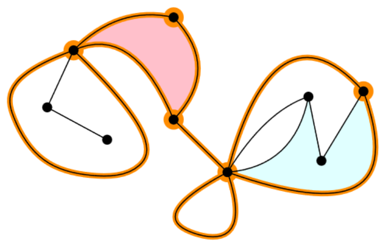
- Kreis $a_1 b_1 a_2 b_2 a_3 b_3$ im Graphen bildet eine geschlossene Kurve in $\mathbb{R}^2$
- Jede Kante von $a_1 b_2, a_2 b_3, a_3 b_1$ liegt komplett innerhalb oder komplett außerhalb dieser Kurve

  $\implies$ mindestens zwei liegen auf der gleichen Seite

  $\implies$ diese zwei kreuzen sich

Definitionen: Für eine feste planare Zeichnung eines planaren Graphen definiere:

- **Facetten**: Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{R}^2$ nach Entfernen aller Knoten und Kanten $\implies$ Es gibt genau eine **äußere Facette** und mehrere **innere Facetten**
- **Äußere Knoten** sind die, die inzident zur äußeren Facette sind
- **Innere Knoten** sind die übrigen Knoten
- **Äußere Kanten** sind die, die komplett im Rand der äußeren Facette liegen
- **Innere Kanten** sind die übrigen Kanten



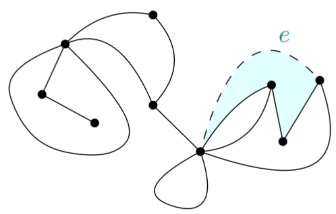
$n = 9$ Knoten (5 äußere, 4 innere)
$m = 14$ Kanten (8 äußere, 6 innere)
$f = 7$ Facetten (1 äußere, 6 innere)

Satz von Euler: Sei G ein zusammenhängender Graph mit einer planaren Zeichnung mit n Knoten, m Kanten und f Facetten. Dann gilt

$$n - m + f = 2$$

Beweis: Beweise $m - (f - 1) = n - 1$, woraus die Behauptung folgt. Führe dafür eine Induktion nach $f - 1$, der Anzahl der inneren Facetten, durch.

- I.A.: $f - 1 = 0$, d.h. keine innere Facette $\to$ G ist ein Baum, also kreisfrei und zusammenhängend $\to m = n - 1$
- I.S.: $f - 1 \geq 1$, d.h. min. eine innere Facette
  - Sei e eine Kante zwischen äußerer und innerer Facette $\to G' = G - e$ ist zusammenhängend $\to$ In G' gilt $n' = n, m' = m - 1, f' = f - 1$
  - Mit I.V. folgt: $m' - (f' - 1) = n' - 1 \Leftrightarrow m - 1 - (f - 1 - 1) = n - 1 \Leftrightarrow m - (f - 1) = n - 1$



Korollar aus Euler-Formel: Sei G ein planarer, einfacher Graph mit $n \geq 3$ Knoten, m Kanten, und kleinstem vorkommenden Knotengrad $\delta(G)$. Dann gilt

$$m \leq 3n - 6 \qquad \text{und} \qquad \delta(G) \leq 5$$

Beide Ungleichungen sind bestmöglich.

Beweis: $m \leq 3n - 6$

- O.B.d.A. G ist zusammenhängend, da man Kanten einfügen kann bis er das ist
- Jede Facette ist berandet von min. 3 Kantenseiten, da $n \geq 3$
- Jede Kantenseite in genau eine Facette
- Jede Kante hat genau 2 Seiten

$\Longrightarrow$ $3f \leq$ Anzahl der Seiten-Facetten-Inzidenzen $= 2m$

$\Longrightarrow$ $3(2 + m - n) \leq 2m \implies m \leq 3n - 6$ (mit Euler-Formel)

Beweis: $\delta(G) \leq 5$

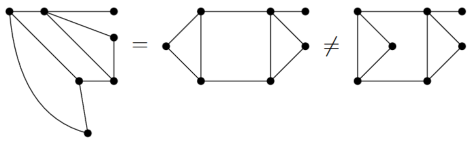
- Jede Kante hat genau 2 inzidente Knoten
- Jeder Knoten v hat genau $\deg(v)$ inzidente Kanten
- Für jeden Knoten v gilt $\deg(v) \geq \delta(G)$

$\Longrightarrow$ $2m =$ Anzahl der Knoten-Kanten-Inzidenzen $= \sum_{v \in V(G)} \deg(v) \geq \delta(G) \cdot n$

$\Longrightarrow$ $2(3n - 6) \geq 2m \geq \delta(G) \cdot n \implies \delta(G) \leq 6 - 12/n$

2 Einbetten und Dualisieren

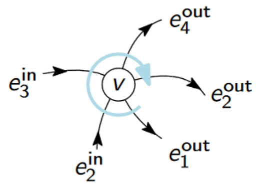
Einbettung = Äquivalenzklasse von planaren Zeichnungen

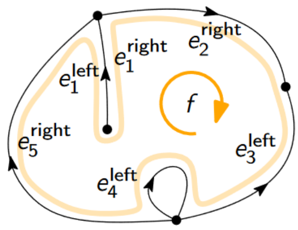


Definition: Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph mit einer planaren Zeichnung. Die **(kombinatorische) Einbettung** ist

- für jeden Knoten v die zyklische (cw = „clockwise“) Reihenfolge der inzidenten Halbkanten an v
- für jede Facette f die zykl. (cw) Reihenfolge der inzidenten Kantenseiten an f

Betrachte dafür beliebige Orientierung der Kanten und man erhält Halbkanten e^{in} und e^{out} sowie Kantenseiten e^{left} und e^{right} von e

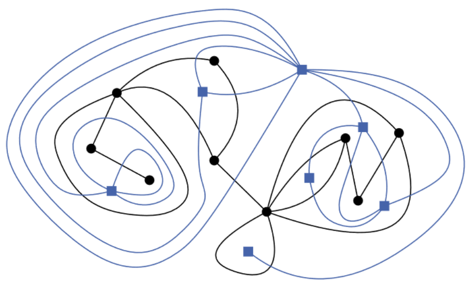




Alle Zeichnungen mit der gleichen Einbettung sind äquivalent.

Definition: Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph mit einer festen Einbettung und Facettenmenge F. Der **Dualgraph** $G^* = (V^*, E^*)$ ist

- $V^* = F$, das heißt, $f \in F \mapsto v_f \in V^*$
- für jede Kante $e \in E$ läuft die duale Kante e^* zwischen der Facette an e^{left} und der an e^{right}



Die Einbettung des **Primalgraphen** $G = (V, E)$ induziert eine Einbettung des **Dualgraphen** $G^* = (V^*, E^*)$:

primal	dual
$f \in F$	$v_f = f \in V^* = F$
e^{left}, e^{right}	$(e^*)^{out}, (e^*)^{in}$
$v \in V$	$f_v = v \in F^*$
e Brücke	e^* Schlinge
e Schlinge	e^* Brücke

Bemerkungen:

- Der Dualgraph G^* ist immer zusammenhängend
- Falls G zusammenhängend ist, gilt $G = (G^*)^*$
- Für jede Einbettung von G und jede Facette f gibt es eine planare Zeichnung mit dieser Einbettung und f als äußere Facette

3 Graphfärbung

Definition: Sei $G = (V, E)$ ein Graph, $k \in \mathbb{N}$. Eine ***k*-Färbung** von G ist eine Abbildung $c\colon V \to \{1, 2, \ldots, k\}$, sodass $c(u) \neq c(v)$ für jede Kante $uv \in E$

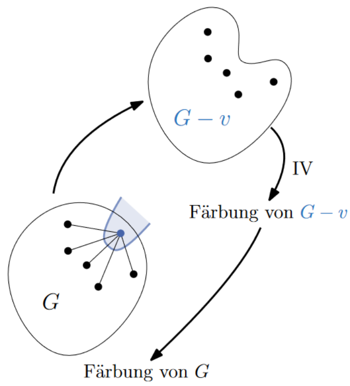
- Kleinstes k, für das so eine k-Färbung existiert, heißt **chromatische Zahl $\chi(G)$**
- Bei Färbungen nehmen wir Graphen implizit als schlingenfrei an

Frage: Was ist die größte chromatische Zahl die ein planarer Graph annehmen kann, d.h. was ist $\chi_{\text{planar}} := \max\{\chi(G) \mid G \text{ planar}\}$?

Lemma: $\chi_{\text{planar}} \leq 6$

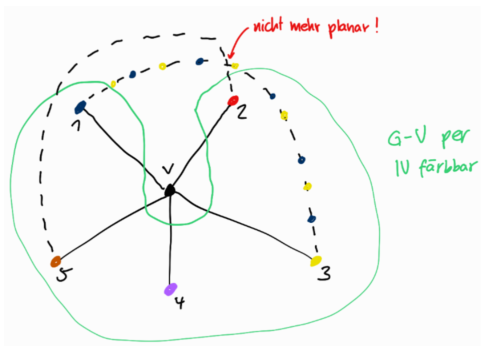
Beweis: Führe Induktion über $|V|$

- I.A.: $|V| \leq 6$: Man erhält eine Färbung, indem jeder Knoten eine eigene Farbe bekommt
- I.S.: $|V| > 6$
  - Nach Euler-Formel gibt es $v \in V$ mit $\deg(v) \leq 5$
  - Nach I.V. gibt es 6-Färbung von $G \setminus v$
  - Nachbarn von v in $G \setminus v$ decken höchstens fünf Farben ab $\to$ Färbe v in verbleibender Farbe



Lemma: $\chi_{\text{planar}} \leq 5$

Beweis: Induktion analog zum oberen Beweis



I.S.:

- Nach Euler-Formel gibt es $v \in V$ mit $\deg(v) \leq 5$
- Nach I.V. gibt es 5-Färbung von $G \setminus v$
- Betrachte Teilgraph, der nur blau-gelbe Knoten enthält:

- Fall 1: 1 und 3 liegen in unterschiedlichen Zusammenhangskomponenten

  $\rightarrow$ Tausche in einer Zusammenhangskomponente alle blauen durch gelbe und alle gelben Knoten durch blaue aus $\rightarrow$ Farbe wird für v frei

- Fall 2 (siehe Bild): 1 und 3 liegen in der selben Zusammenhangskomponente. Für rot-lila-Teilgraph können 2 und 4 nicht in der selben Zusammenhangskomponente liegen, da Graph sonst nicht mehr planar wäre

  $\rightarrow$ Farbe wird für v frei

Definition: Sei $G = (V, E)$ ein einfacher Graph. Sei $L\colon V \to 2^{\mathbb{N}}$ eine Listenzuweisung, d.h. $L(v)$ ist Menge von Zahlen / Farben. Eine ***L*-Listenfärbung** von G ist eine Knotenfärbung c mit

- $c(v) \in L(v)$ für jeden Knoten $v \in V$
- $c(u) \neq c(v)$ für jede Kante $uv \in E$

G heißt ***k*-listenfärbbar** wenn für jede Listenzuweisung L mit $|L(v)| \geq k$ für jeden Knoten $v \in V$ eine L-Listenfärbung von G existiert.

- Kleinstes k, für das G k-listenfärbbar ist, heißt **listenchromatische Zahl $\chi_{\text{list}}(G)$**

Beweisskizze zu Listenfärbungen:

- $\chi_{\text{list}}(G) > k$: $\exists$ Listen $L \quad \nexists$ L-Listenfärbung
- $\chi_{\text{list}}(G) \leq k$: $\forall$ Listen $L \quad \exists$ L-Listenfärbung

Lemma: Für jeden planaren Graphen gilt $\chi_{\text{list}}(G) \leq 6$

Beweis: Die gleiche Argumentation wie für $\chi_{\text{planar}} \leq 6$ funktioniert

Beobachtung: Für jeden Graphen G gilt $\chi_{\text{list}}(G) \geq \chi(G)$

Beweis:

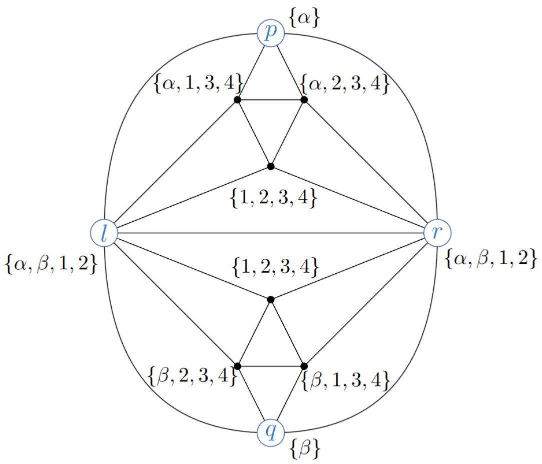
- Setze $L(v) = \{1, \ldots, k\}$ für jeden Knoten v
- Dann sind L-Listenfärbungen genau k-Knotenfärbungen $\implies \chi(G) \leq \chi_{\text{list}}(G)$

Satz von Voigt: Es gibt einen planaren Graphen mit $\chi_{\text{list}}(G) \geq 5$

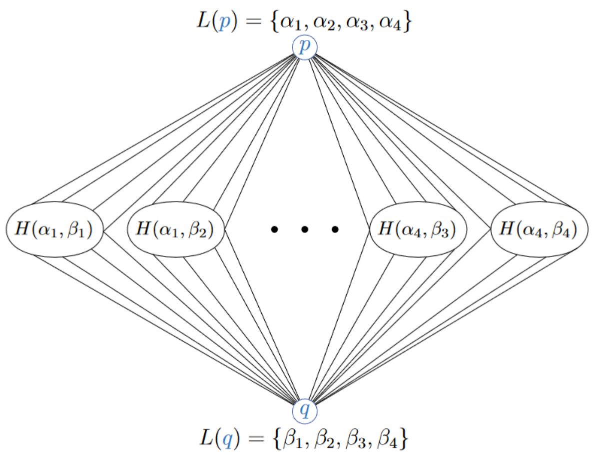
Beweis: Konstruiere einen planaren Graphen G mit Listenzuweisung L, sodass

- $|L(v)| = 4$ für jeden Knoten v
- keine L-Listenfärbung von G existiert

Betrachte dazu folgendes Gadget $H(\alpha, \beta)$:



Dieses Gadget ist nicht färbbar. Konstruiere nun aus 16 Gadgets den folgenden Graphen:



Dieser ist nicht L-listenfärbbar, denn für jede Färbung c ist Gadget $H(c(p), c(q))$ nicht färbbar.

Weitere Sätze und Beobachtungen:

- Für jeden planaren Graphen gilt $\chi_{\text{list}}(G) \leq 5$ (**Satz von Thomassen**)

  $\implies$ Mit obigem Satz folgt $\max\{\chi_{\text{list}}(G) \mid G \text{ planar}\} = 5$

- Es gibt einen planaren Graphen mit $\chi(G) \geq 4$
- Für jeden planaren Graphen G gilt $\chi(G) \leq 4$ (**4-Farben-Satz**)

  $\implies$ $\chi_{\text{planar}} = 4$

Ziel: Beweise $\chi_{\text{planar}} \leq 5$ mit einer stärkeren Aussage

Satz: Sei $G = (V, E)$ ein planarer Graph mit:

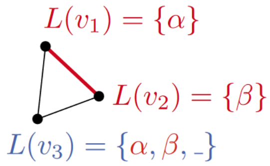
- jede innere Facette ist ein Dreieck
- äußere Facette ist ein einfacher Kreis C

Seien v_1, v_2 zwei aufeinanderfolgende Knoten auf C und L eine Listenzuweisung mit:

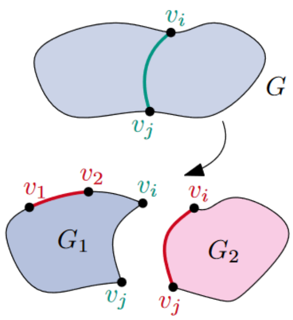
- $|L(v)| = 5$ für $v \in V \setminus C$
- $|L(v)| = 3$ für $v \in C \setminus \{v_1, v_2\}$
- $L(v_1) = \alpha, L(v_2) = \beta$ mit $\alpha \neq \beta$

Dann gibt es eine L-Listenfärbung von G.

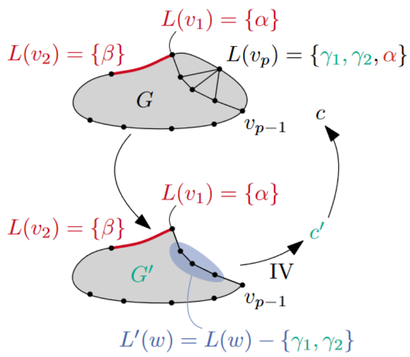
Beweis: Führe Induktion über $|V|$



- I.A.: $|V| = 3$. Wähle $c(v_3) \in L(v_3) \setminus \{\alpha, \beta\}$
- I.S.: $|V| \geq 4$. Betrachte nun 2 Fälle:
  - <u>Fall 1</u>: C hat eine Sehne $e = v_i v_j$. Zerteile G entlang e in zwei Graphen G_1, G_2. O.B.d.A liegt $v_1 v_2$ in G_1. Nach IV gibt es eine Färbung c_1 von G_1. Sei $c_1(v_i) = \alpha'$ und $c_1(v_j) = \beta'$. Wende IV auf G_2 an mit Listen $\{\alpha'\}$ für v_i und $\{\beta'\}$ für v_j. $\rightarrow$ Färbung c_2 von G_2 $\rightarrow$ Da c_1 und c_2 an der Sehne $v_i v_j$ übereinstimmen, erhalten wir eine Färbung von G.



  - <u>Fall 2</u>: C hat keine Sehne. Betrachte Nachbarn $v_p \neq v_2$ von v_1 auf C. Lösche v_p auf G und erhalte G'. G' hat einfachen Kreis als äußere Facette, da v_p keine inzidente Sehne hat. Seien γ_1, γ_2 zwei Farben aus $L(v_p) \setminus \{\alpha\}$. Für jeden inneren Nachbarn w von v_p definiere $L'(w) = L(w) \setminus \{\gamma_1, \gamma_2\}$ und $L'(v) = L(v)$ für jeden anderen Knoten v. Nach IV gibt es L'-Listenfärbung von G', sodass kein innerer Nachbar von v_p die Farbe γ_1 oder γ_2 hat. Wähle $c(v_p) \in \{\gamma_1, \gamma_2\} \setminus c'(v_{p-1})$ und erhalte somit eine L-Listenfärbung c von G.



Bemerkung: Für jeden beliebigen planaren Graphen G lassen sich Kanten und Knoten hinzufügen sowie Farben aus Listen entfernen, sodass der neue Graph G' den Anforderungen des obigen Satzes entspricht. Damit wurde die Aussage $\chi(G) \leq \chi_{\text{list}(G)} \leq 5$ für jeden planaren Graphen G bewiesen.

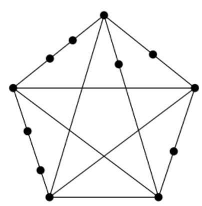
4 Unterteilungen und Minoren

Definition: Sei $G = (V, E)$ ein Graph, $e = uv$ eine Kante. Dann ist die **Unterteilung von *e* in *G*** der Graph $G \circ e = (V', E')$ mit

- $V' = V + \{w\}$
- $E' = (E \setminus \{uv\}) + \{uw, vw\}$

Beobachtung: G planar $\iff$ $G \circ e$ planar

Definition: Graph G ist eine **Unterteilung von *H*** wenn $G = ((H \circ e_1) \circ e_2) \cdots) \circ e_k$. Wir sagen auch G ist ***H*-Unterteilung**. Graph G **enthält eine *H*-Unterteilung**, wenn ein Teilgraph $G' \subseteq G$ eine H-Unterteilung ist.



K_5-Unterteilung

Beobachtung:

- K_5- und $K_{3,3}$-Unterteilungen sind nicht-planar
- Jeder Graph der eine K_5 oder $K_{3,3}$-Unterteilung enthält, ist nicht planar

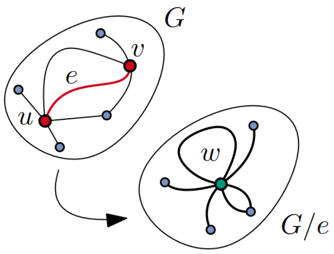
Satz von Kuratowski: G ist planar $\iff$ G enthält keine K_5- oder $K_{3,3}$-Unterteilung

Beweis: „⇒“ folgt aus obiger Beobachtung. Die Rückrichtung ist komplizierter und beweisen wir später.

Definition: Sei $G = (V, E)$ ein Graph, $e = uv$ eine Kante. Der Graph $G/e = (V', E')$ ist der Graph, der durch Kontrahieren der Kante $\boldsymbol{e}$ entsteht, genauer:

- $V' = V \setminus \{u, v\} + \{w\}$
- $E' = E(G - u - v) \cup \{wa \mid au \in E \text{ oder } av \in E\}$

Diesen Prozess nennt man auch **Kantenkontraktion**. Dabei können Multikanten und Schlaufen entstehen.



Definition: Graph H ist **Minor von $\boldsymbol{G}$**, wenn H aus G durch eine Folge von Kantenkontraktionen entsteht, also $H = ((G/e_1)/e_2 \cdots)/e_k$. Wir sagen dann auch: G ist ein **$\boldsymbol{H}$-Minor** (H ist der kleinere Graph, G der Größere).

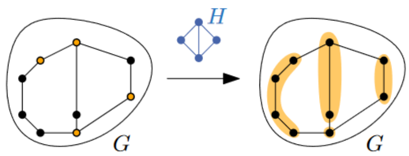
Beobachtung:

- G planar $\implies$ G/e planar
- G enthält K_5- oder $K_{3,3}$-Minor $\implies$ G nicht planar

Satz von Wagner: G planar $\iff$ G enthält keinen K_5- oder $K_{3,3}$-Minor

Lemma: G enthält H-Unterteilung $\implies$ G enthält H-Minor

Beweis: Kontrahiere durch Unterteilung entstandene Knoten zu ursprünglich adjazenten Knoten.



Es sind also äquivalent:

1. G ist nicht planar
2. G enthält K_5- oder $K_{3,3}$-Minor
3. G enthält K_5- oder $K_{3,3}$-Unterteilung

(3) $\implies$ (2) $\implies$ (1) wurde schon bewiesen, (1) $\implies$ (2) $\implies$ (3) müssen wir noch beweisen. Wir beginnen mit (1) $\implies$ (2).

Beweis von Wagner: Es muss nur noch die Rückrichtung beweisen werden. Sei hierfür G ein nicht-planarer Graph. Wir müssen einen K_5- oder $K_{3,3}$-Minor in G finden. O.B.d.A. sei G sogar minimal nicht-planar, d.h.

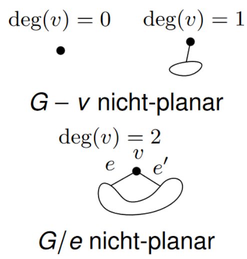
- $G - v$ ist planar für jeden Knoten $v \in V$
- $G - e$ ist planar für jede Kante $e \in E$
- G/e ist planar für jede Kante $e \in E$

Beweise zunächst folgendes Lemma:

Lemma: Sei G minimal nicht-planar, $xy \in E(G)$. Dann ist $G - x - y$ ein Kreis.

Beweis: Da G minimal nicht-planar ist,

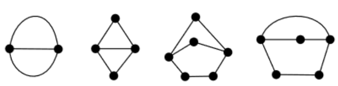
- ist G zusammenhängend, da ansonsten Knoten aus einer Zusammenhangskomponente gelöscht werden könnte
- ist $\deg(v) \geq 3$ für jeden Knoten $v \in V(G)$, denn Knoten von Grad 0 und 1 tragen nichts zur Nicht-Planarität bei, können also gelöscht werden ohne die Nicht-Planarität zu verlieren. Für einen Knoten v von Grad 2 mit Kanten e, e' bleibt G/e nicht-planar. Wäre G/e planar, so muss wegen $G = (G/e) \circ e'$ bereits G planar sein. Widerspruch.



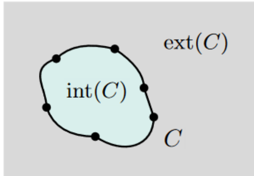
Das Lemma wird nun anhand von 3 Behauptungen bewiesen.

1. Behauptung: $G - x - y$ enthält kein Θ.

Theta-Graphen sind Unterteilungen des Graphen mit zwei Knoten und drei parallelen Kanten.



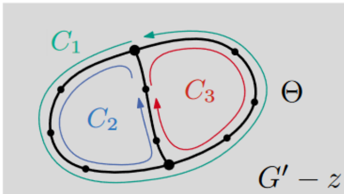
Notation: Für einen Kreis C in einer planaren Zeichnung erhält man eine geschlossene **Jordankurve**, die die Ebene in zwei Komponenten unterteilt:



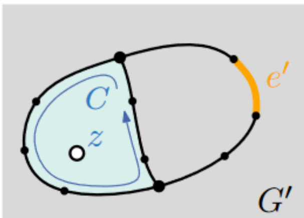
- int(C), das Innere von C
- ext(C) , das Äußere von C

Beweis von Behauptung 1:

- Angenommen $G - x - y$ enthält ein Θ.
- $G' := G/xy$ ist planar mit Kante xy zu Knoten z kontrahiert.
- $G' - z = G - x - y$ ist ebenfalls planar.
- Zeichnung von G' enthält ein Θ und das Θ hat 3 Kreise:

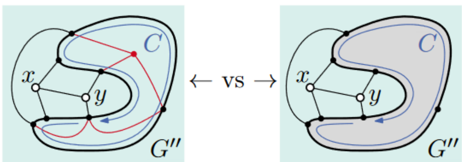


- Betrachte Kreis C im Θ, sodass Knoten z auf einer Seite von C und eine Kante $e' \in E(\Theta)$ auf der anderen Seite von C liegt.
- Wähle Θ und C so, dass die Seite von C mit z inklusionsminimal ist, d.h. es gibt kein anderes Θ mit Kreis C, was z enthält und ein kleineres Inneres hat
- O.B.d.A. gilt $z \in \text{int}(C)$ und $e' \in \text{ext}(C)$



- Betrachte $G'' = G - \text{ext}(C)$.
- Da $e' \notin G''$ ist, wird mindestens eine Kante gelöscht, also ist G'' planar.
- Betrachte eine planare Zeichnung von G'' mit Kreis C.

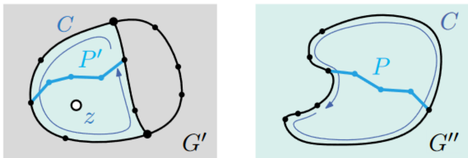
<u>Ziel</u>: Zeige, dass C eine Facette berandet, denn dann kann ext(C) in C eingesetzt werden, was aber eine planare Zeichnung von G wäre. ↯



- Betrachte Pfad P in G'', der auf verschiedenen Knoten von C startet und endet und ansonsten zu C disjunkt ist.
- P entspricht auch einem Pfad P' in G'.

Wenn $z \notin P'$:

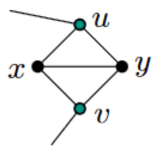
- Dann ist $C \cup P'$ ein Θ in $G - x - y$.
- Dieses Θ hat einen Kreis der z enthält, aber ein kleineres Inneres als C hat.
- Widerspruch zur Wahl von Θ und C.



Also liegt z auf P' und P muss x oder y enthalten. Also liegt jeder solche Pfad in der Zeichnung von G'' auf der Seite von C, die xy enthält.

$\implies$ C liegt im Rand einer Facette von G''

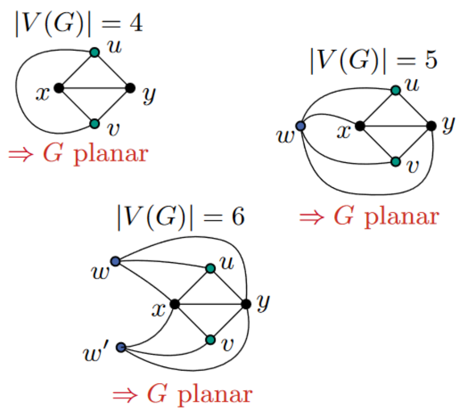
Damit ist *Behauptung 1* bewiesen.



2. Behauptung: $G - x - y$ enthält keine zwei Knoten vom Grad 1.

Beweis von Behauptung 2:

- Angenommen u, v sind zwei Knoten in $G - x - y$ mit Grad 1.
- Da $\deg(u), \deg(v) \geq 3$ in G, sind $ux, uy, vx, vy \in E(G)$ und u, v, x, y bilden ein Θ
- Nach Behauptung 1 hat jede Kante in G mindestens einen Endpunkt in u, v, x, y, um das Θ bei Kontraktion einer beliebigen Kante zu zerstören.
- Jedes $w \neq u, v, x, y$ ist zu u, v oder beiden benachbart, da $\deg(w) \geq 3$.
- Höchstens 2 Knoten außerhalb von u, v, x, y.



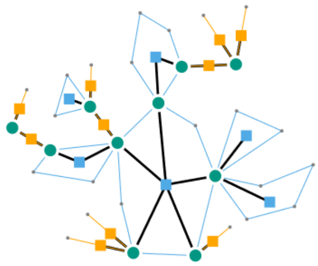
$\implies$ In allen Fällen ergibt sich ein Widerspruch zur Nicht-Planarität von G.

Damit ist *Behauptung 2* bewiesen.

Definition: Ein Graph enthält genau dann kein Θ, wenn jede Kante auf höchstens einem Kreis liegt. Solche Graphen nennt man **Kakteen**. Kakteen sind kantendisjunkte Vereinigungen von Kreisen und Brücken.

Definition: Der **Block-Cutvertex-Tree** eines zusammenhängenden Graphen G (hier ist G Kaktus) ist ein Baum T mit:

- $V(T) = \{$Artikulationspunkt in $G\} \cup \{$Kreise in $G\} \cup \{$Brücken in $G\}$
- $E(T) = \{vb \mid v$ Artikulationspunkt, b Brücke oder Kreis, v Knoten auf b in $G\}$

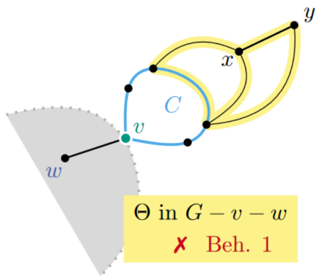


Behauptung 3: $G - x - y$ ist tatsächlich ein Kreis.

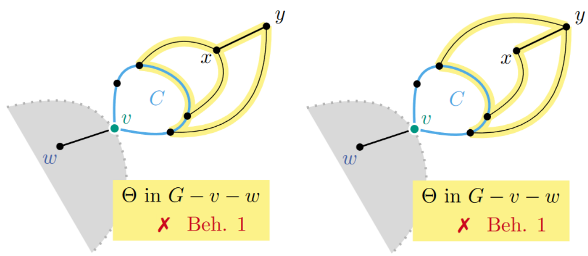
Beweis von Behauptung 3:

- Sei T Block-Cutvertex-Tree von $G - x - y$.
- Wenn $G - x - y$ keinen Artikulationspunkt enthält, ist $G - x - y$ ein Kreis (Beweis fertig) oder eine Kante. Dann gilt $|V(G)| \leq 4$, da G höchstens nur die Knoten x, y und die Endpunkte der Kante enthält $\implies$ G ist planar ↯
- Also gibt es Artikulationspunkte und $|T| \geq 2$.
- Also hat T mindestens 2 Blätter.
- Blätter im Block-Cutvertex-Tree sind entweder Brücken oder Kreise im ursprünglichen Graphen. Brücken führen immer zu Grad 1 Knoten. Nach Behauptung 2 gibt es ein Blatt in T, das in G ein Kreis C hat.
- Sei v der Artikulationspunkt in C, der C an den Graphen „klebt“.

- Jedes $u \in V(C) - v$ hat Grad 2 in $G - x - y$ (da Blatt im Cutvertex-Tree), aber mindestens Grad 3 in G.
- Also ist jedes u zu x oder y benachbart. u kann nicht zu beiden benachbart sein, da sonst $G - v - w$ ein Θ enthält.

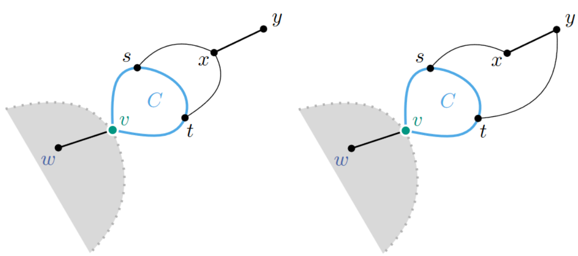


- Ebenso darf C nur Länge 3 haben, da sonst $G - v - w$ ebenso wieder ein Θ bildet.

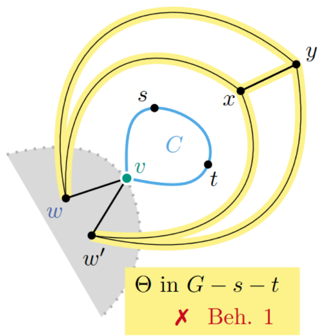


$\Rightarrow$ C hat Länge genau 3
$V(C) = \{v, s, t\}$

- Dann hat $C \cup \{x, y\}$ ein Θ in G.

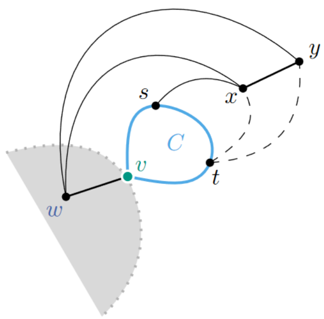


- Nach Behauptung 1 hat jede Kante mindestens einen Endpunkt im Θ.
- Jedes $w \in G - (C \cup \{x, y\})$ hat alle Nachbarn in $C \cup \{x, y\}$, sonst gäbe es eine Kante außerhalb des Θ. w muss genau die Nachbarschaft $\{x, y, v\}$ haben, denn w kann nicht zu s oder t benachbart sein, da diese Grad 2 haben.
- Würden zwei solche w, w' existieren, so wäre w, w', x, y ein Θ in $G - C$.

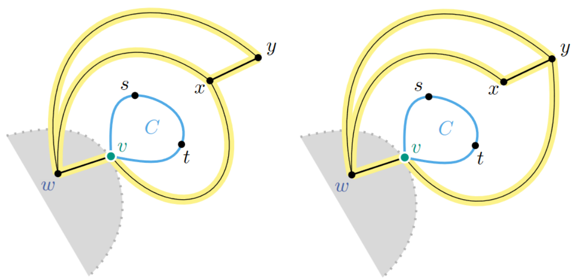


$\implies$ Also ist w der einzige Knoten in $G - (C \cup \{x, y\})$.

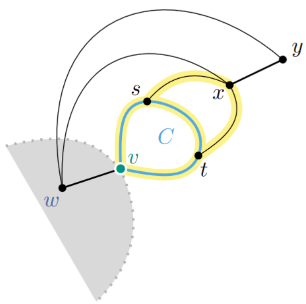
- O.B.d.A sei $sx \in E$. Es gilt entweder $ty \in E$ oder $tx \in E$.



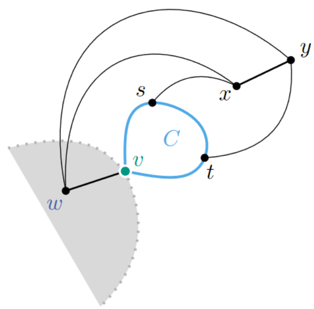
- Wir wissen, dass G nur die Knoten v, s, t, x, y, w besitzt.
- Wenn $vx \in E$ der $vy \in E$, dann gibt es ein Θ in $G - s - t$.



- Wenn $tx \in E$, dann gibt es ein Θ in $G - w - y$.



- Insgesamt wissen wir $vx \notin E, vy \notin E, tx \notin E, ty \in E, ws \notin E, wt \notin E$. Wir kennen also ganz G und G ist planar. Widerspruch.



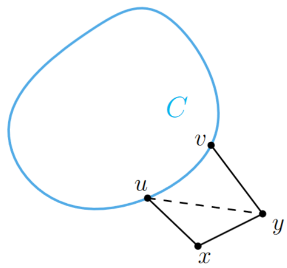
Damit sind *Behauptung 3* und das *Lemma* bewiesen.

Beweis von Wagner - Abschluss:

- Sei $xy \in E$ eine Kante und C der Kreis $G - x - y$.
- Sei $uv \in E$ eine Kante auf C mit $ux \in E$.

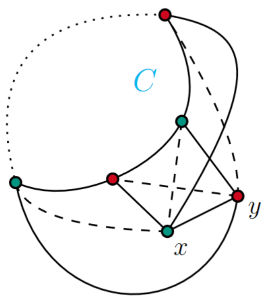
1. Fall: $uy \notin E$.

- $G - u - x$ ist ein Kreis, d.h. v muss Grad 2 haben, also ist $vy \in E$.



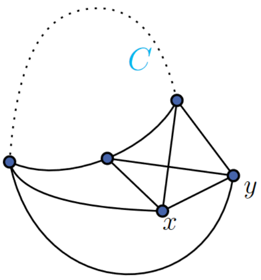
- Wenn $vx \in E$ dann hat $G - x - v$ einen Knoten u mit Grad 1. ↯

  $\implies vx \notin E$
- Analoge Argumente liefern: $N(x), N(y)$ sind auf C disjunkt und alternierend.
- $|C| \geq 4$ und wir finden einen $K_{3,3}$-Minor.



2. Fall: Jeder Knoten auf C ist zu x und y benachbart.

- $|C| \geq 3$. Wir finden einen K_5-Minor.



Damit ist der **Satz von Wagner** bewiesen.

Wir beweisen nun (2) $\implies$ (3).

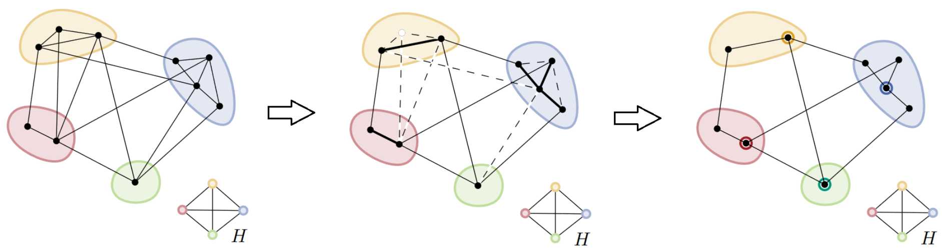
Lemma: Seien G, H Graphen. Maximaler Grad von H höchstens 3, d.h. $\Delta(H) \leq 3$. Dann sind äquivalent:

- G enthält H-Minor
- G enthält H-Unterteilung

Beweis: Die Richtung Unterteilung $\implies$ Minor wurde bereits gezeigt. Beweise nun also die Rückrichtung. In einem H-Minor finden wir H-Unterteilung.

- O.B.d.A ist ist jede Kontraktionsmenge ein Baum, sodass
  - jedes Blatt hat Nachbarn in anderer Menge,
  - zwischen je zwei Mengen ist maximal eine Kante

  Überflüssige Kanten können gelöscht werden.
- Wähle Knoten von maximalem Grad in jeder Menge.
- Dann bilden diese Bäume schon eine H-Unterteilung, da $\Delta(H) \leq 3$.

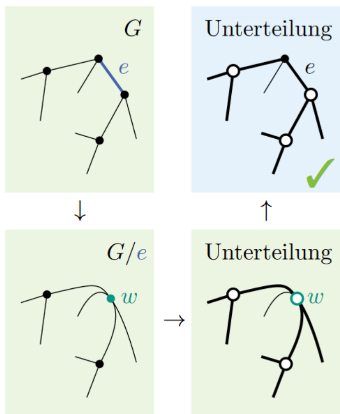


Beweis von Kuratowski: Es muss nur noch die Richtung G nicht planar $\implies$ G enthält eine K_5 oder $K_{3,3}$-Unterteilung bewiesen werden.

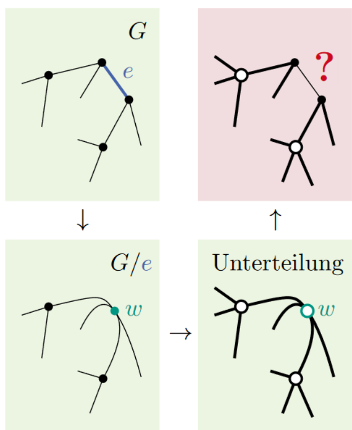
- Sei also G nicht planar. Wir müssen Unterteilung von $K_{3,3}$ oder K_5 finden.
- Nach Wagner gibt es einen $K_{3,3}$- oder K_5-Minor in G.
- Bei $K_{3,3}$-Minor, sind wir nach vorigem Lemma fertig.

Sonst: Induktion über Knotenzahl von G:

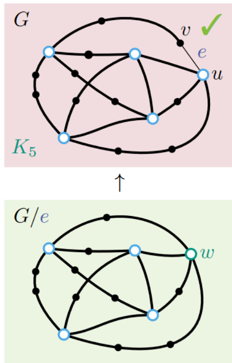
- I.A.: G muss mindestens 5 Knoten besitzen, um nicht-planar zu sein, und dort kommt auch nur K_5 in Frage.
- I.S.: Wenn es sich beim K_5-Minor um einen K_5-Teilgraph handelt, dann sind wir fertig. Andernfalls gibt es $e = uv$, sodass G/e immer noch einen K_5-Minor enthält. G/e ist also immer noch nicht-planar. Nach IV existiert eine $K_{3,3}$- oder K_5-Unterteilung in G/e. Sei w der Knoten, zu dem e kontrahiert wird.
  - Wenn w in der Unterteilung ein Unterteilungspunkt ist (also $\deg(w) = 2$), gibt es auch solch eine Unterteilung in G.
  - Wenn $\deg(w) = 3$ in Unterteilung, gibt es auch in G eine Unterteilung.



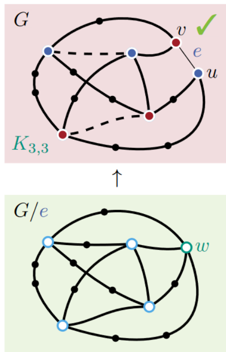
  - Also o.B.d.A. $\deg(w) = 4$ in K_5-Unterteilung in G/e.



- Betrachte die vier anderen Knoten von Grad 4.
- Sind mindestens drei davon zu u verbunden, finden wir wieder eine K_5-Unterteilung in G.



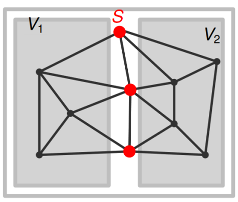
- Andernfalls sind zwei zu u und zwei zu v verbunden und wir finden eine $K_{3,3}$-Unterteilung in G.



Damit wurde der **Satz von Kuratowski** bewiesen.

5 Separatoren in planaren Graphen

Definition: Eine Menge $S \subset V$ heißt Separator von $G = (V, E)$, falls der durch $V \setminus S$ induzierte Subgraph von G unzusammenhängend ist.



Minimum-Balanced-Separator-Problem: Gegeben sei ein Graph $G = (V, E)$. Finde eine Partition von V in drei Mengen V_1, V_2 und S, wobei der Separator S minimale Kardinalität hat und V_1 von V_2 trennt mit $|V_1|, |V_2| \leq \alpha \cdot |V|$ und $\frac{1}{2} \leq \alpha < 1$ konstant.

- Separator soll also klein sein
- Separator soll etwa gleich große Teilgraphen erzeugen
- Problem ist NP-schwer

Planar-Separator-Theorem: Die Knotenmenge eines zusammenhängenden, planaren Graphen $G = (V, E)$, $n = |V| \geq 5$, kann so in drei Mengen $V_1, V_2, S \subseteq V$ partitioniert werden, dass

- $|V_1|, |V_2| \leq \frac{2}{3} \cdot n$
- S ist ein Separator, der V_1 von V_2 trennt
- $|S| \leq 4 \cdot \sqrt{n}$

Eine solche Partition kann in $\mathcal{O}(n)$ Zeit konstruiert werden.

Für den Beweis dieses Satzes benötigen wir folgendes Lemma.

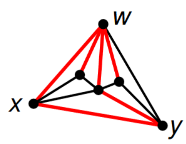
Lemma: Sei $G = (V, E)$ ein planarer, zusammenhängender Graph mit $n = |V| \geq 5$ und $T = (V, E(T))$ ein Spannbaum von G mit Wurzel w und Höhe h. Die Knotenmenge von G kann so in drei Mengen V_1, V_2 und S partitioniert werden, dass

- $|V_1|, |V_2| \leq \frac{2}{3} \cdot n$
- S ist ein Separator, der V_1 von V_2 trennt
- $|S| \leq 2 \cdot h + 1$

Eine solche Partition kann in $\mathcal{O}(n)$ Zeit konstruiert werden.

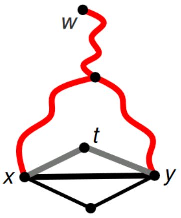
Beweis:

- Konstruiere eine Triangulierung von G. Nach Satz von Euler hat der neue Graph $3n - 6$ Kanten und $2n - 4$ Facetten.
- Spannbaum T von G ist Spannbaum des triangulierten Graphen
- In T induziert jede Nichtbaumkante $\{x, y\}$ einen Kreis $K_{x,y}$ mit $\leq 2 \cdot h + 1$ Knoten (maximal h Knoten in beide Richtungen + Wurzel)



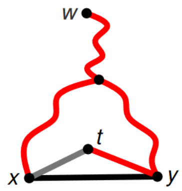
- Sei Inneres($K_{x,y}$) die Knoten, die innerhalb des Kreises, aber nicht auf dem Rand des Kreises liegen. Definiere Äußeres($K_{x,y}$) dementsprechend.
- Wähle Nichtbaumkante $\{x, y\}$ aus, wobei $|\text{Inneres}(K_{x,y})| \geq |\text{Äußeres}(K_{x,y})|$
- Wennn $|\text{Inneres}(K_{x,y})| \leq \frac{2}{3}n$, dann gilt das Lemma und wir sind fertig

- Sei also $|\text{Inneres}(K_{x,y})| < \frac{2}{3}n$, dann ist $|\text{Äußeres}(K_{x,y})| < \frac{1}{3}n$
- <u>Ziel</u>: Ersetze $\{x, y\}$ durch eine andere Nichtbaumkante, sodass das Innere kleiner wird und das Äußere nicht über $\frac{2}{3}n$ wächst
- Da Graph trianguliert, begrenzt Kante $\{x, y\}$ zwei Dreiecke, von denen eins im $\text{Inneres}(K_{x,y})$ liegt $\implies$ Dreieck $x\ y\ t$

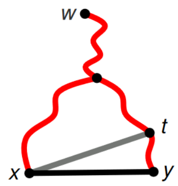


<u>Fall 1</u>: $\{x, t\}$ oder $\{t, y\}$ ist eine Baumkante. Ersetze $\{x, y\}$ durch $\{x, t\}$.

- Falls $t \notin K_{x,y}$:
  - $|\text{Äußeres}(K_{x,t})| = |\text{Äußeres}(K_{x,y})|$
  - $|\text{Inneres}(K_{x,t})| = |\text{Inneres}(K_{x,y})| - 1$

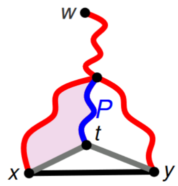


- Falls $t \in K_{x,y}$:
  - $|\text{Äußeres}(K_{x,t})| = |\text{Äußeres}(K_{x,y})| + 1$
  - $|\text{Inneres}(K_{x,t})| = |\text{Inneres}(K_{x,y})|$



<u>Fall 2</u>: $\{x, t\}$ und $\{t, y\}$ sind beides Nichtbaumkanten.

- Sei $|\text{Inneres}(K_{x,t})| \geq |\text{Inneres}(K_{t,y})|$. Ersetze $\{x, y\}$ durch $\{x, t\}$.



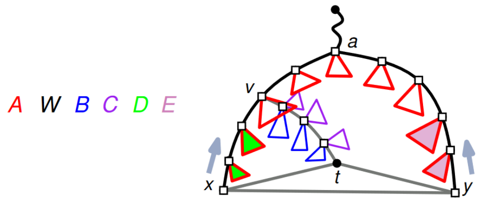
- $|\text{Äußeres}(K_{x,t})| \leq n - (|\text{Inneres}(K_{x,t})| + P) \leq n - \frac{1}{2}|\text{Inneres}(K_{x,y})| < n - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}n = \frac{2}{3}n$
- $|\text{Inneres}(K_{x,t})| \leq |\text{Inneres}(K_{x,y})| - 1$

In beiden Fällen verkleinern wir $|\text{Inneres}(K_{x,y})|$ und lassen $|\text{Äußeres}(K_{x,y})|$ klein genug. Dies kann nun so lange wiederholt werden, bis auch $|\text{Inneres}(K_{x,y})| \leq \frac{2}{3}n$ gilt.

$\implies$ Partition mit den gewünschten Eigenschaften lässt sich konstruieren. Wir müssen nun noch deren Implementation in linearer Laufzeit sicherstellen.

- Ersetzung einer Nichtbaumkante durch eine andere, welche die Anzahl der Dreiecke im Inneren reduziert $\implies$ Höchstens $2n - 4$ Schritte

- In Fall 1 können wir $|\text{Inneres}(K_{x,y})|$ und $|\text{Äußeres}(K_{x,y})|$ in $\mathcal{O}(1)$ berechnen
- Für Fall 2 muss entschieden werden, ob $|\text{Inneres}(K_{x,t})|$ oder $|\text{Inneres}(K_{t,y})|$ größer ist. Zeige, dass auch dieser Fall nur konstante Zeit benötigt mithilfe einer amortisierten Analyse.
- Führe dazu folgende Vorberechnung durch:
  - Durchlaufe T von den Blättern zur Wurzel
  - Speichere für jeden Knoten v und inzidente Baumkanten die Anzahl Knoten im Unterbaum links bzw. rechts der Kante
  - Dies kann einmalig in Linearzeit durchgeführt werden
- Laufe von x und y abwechselnd in Richtung Wurzel bis erstmals v, d.h. Weg von t zur Wurzel, erreicht wird.



- $|\text{Inneres}(K_{x,t})| = D + B$
- $|\text{Inneres}(K_{t,y})| = A - D - B - W$

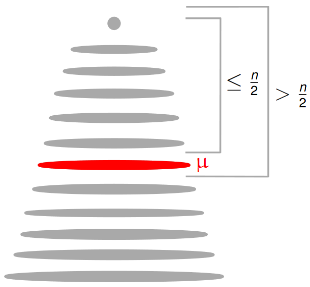
Die Anzahl der Operationen in einem Schritt ist proportional zu der Anzahl der Knoten in dem Teil von $K_{x,y}$, der nicht weiter betrachtet wird. Also ist auch Fall 2 in amortisiert konstanter Zeit implementierbar.

Damit ist auch die Laufzeit und somit das gesamte Lemma bewiesen.

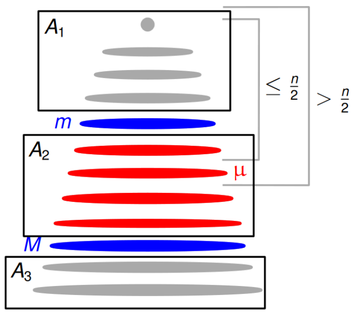
BFS-Lemma: Sei $T = (V, E(T))$ ein BFS-Baum von $G = (V, E)$. Für eine Nichtbaumkante $\{u, v\}$ gilt $|\text{level}(u) - \text{level}(v)| \leq 1$.

Beweis des Planar-Separator-Theorem:

- Konstruiere eine Triangulierung von G und ein BFS-Baum T mit beliebiger Wurzel
- Sei μ das Level mit der Eigenschaft:



- Wenn $|\text{level } \mu| \leq 4\sqrt{n}$, dann ist μ ein geeigneter Separator und wir sind fertig.
- Sei also $|\text{level } \mu| > 4\sqrt{n}$.
- Sei m das unterste Level oberhalb von μ und M das oberste Level unterhalb von μ mit $|S_m| \leq \sqrt{n}$ und $S_M \leq \sqrt{n}$.



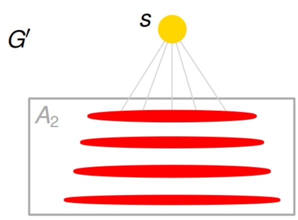
- Offensichtlich gilt $|A_1| \leq \frac{n}{2}$ und auch $|A_3| \leq \frac{n}{2}$, da schon $> \frac{n}{2}$ Knoten über μ

Fall 1: $|A_2| \leq \frac{2}{3}n$

- $S = \text{level } m \cup \text{level } M$ ist Separator
- $V_1 = \max\{A_1, A_2, A_3\}, |V_1| \leq \frac{2}{3}n$
- $V_2 = V \setminus (S \cup V_1), |V_2| < \frac{2}{3}n$
- Damit wurde ein geeigneter Separator gefunden und wir sind fertig

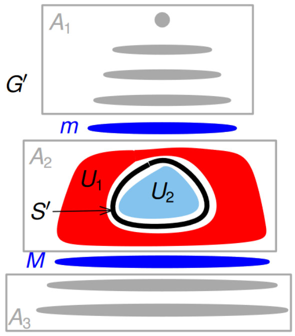
Fall 2: $|A_2| > \frac{2}{3}n$

- Verschmelze die Knoten in $A_1 \cup S_m$ zu einem Knoten s und entferne alle Knoten aus $S_M \cup A_3$. Dadurch entsteht ein neuer Graph G'.

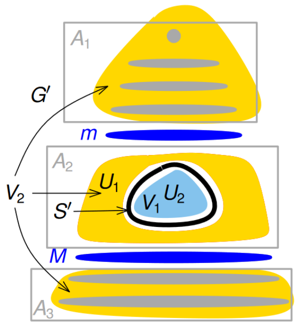


- BFS-Baum T induziert BFS-Baum T' in G'

- T' hat maximal Höhe $\sqrt{n}$, da $|V'| \leq n$ und durch die Wahl von m und M für jede Schicht S_i zwischen m und M $|S_i| > \sqrt{n}$ gilt
- Wende obiges Lemma auf G' und T' an und erhalte S', U_1, U_2



- Sei $S = S' \cup \text{level } m \cup \text{level } M$
- Nach dem Lemma folgt $|S'| \leq 2\sqrt{n} + 1$, also $|S| \leq 4\sqrt{n}$
- Sei $V_1 = \max\{U_1, U_2\}$. Nach dem Lemma gilt $|V_1| \leq \frac{2}{3}n$
- Weiterhin gilt $|V_1| + |S| > |V_1| + |S'| > \frac{1}{2} \cdot A_2$. Setzt man also $V_2 = V \setminus (S \cup V_1)$, dann gilt $|V_2| = n - |V_1| - |S| < n - \frac{1}{2} \cdot |A_2| < \frac{2}{3}n$



Auch hier findet man also einen geeigneten Separator, womit das **Planar-Separator-Theorem** bewiesen ist.

6 Matchings und Maximum Independent Set

`MAXIMUM INDEPENDENT SET`: Für $G = (V, E)$, finde eine **größte unabhängige Menge**. Also Knotenmenge $I \subseteq V$ mit $|I|$ maximal, sodass jede Kante in E höchstens einen Endpunkt in I hat.

Approximationsalgorithmus für `MAXIMUM INDEPENDENT SET`:

1. Zerkleinere den Graphen mit Planar Separator, bis Komponenten nur noch $\mathcal{O}(\log\log n)$ Knoten haben

2. Löse Komponenten mit Brute-Force in $\mathcal{O}(2^{\log\log n}) = \mathcal{O}(\log n)$ Zeit pro Komponente $\to \mathcal{O}(n \log n)$ Gesamtlaufzeit
3. Zusammenfügen ist disjunkte Vereinigung der Teillösungen (Kein Problem an Schnittpunkten, da Separator dazwischen)

Güte der Approximation:

- **Satz**: Wiederholtes Anwenden des planar Separators gibt Komponenten der Größe $\mathcal{O}(r)$ bei Separator-Gesamtgröße $\mathcal{O}(n/\sqrt{r})$

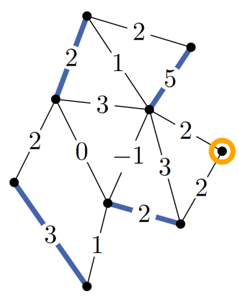
  ohne Beweis.
- Mit obigem Satz folgt Separator-Gesamtgröße $|S| \leq \mathcal{O}(n/\sqrt{\log\log n})$
- Für optimale Lösung $OPT(G)$ gilt $OPT(G) \geq n/4$ nach Vier-Farben-Satz
- Damit folgt:

$$\begin{aligned} OPT(G) - A(G) \leq |S| &\leq \mathcal{O}\left(\frac{n}{\sqrt{\log\log n}}\right) \\ \Rightarrow A(G) \geq OPT(G) &- \mathcal{O}\left(\frac{n}{\sqrt{\log\log n}}\right) \\ &\geq OPT(G) - \mathcal{O}\left(\frac{OPT(G)}{\sqrt{\log\log n}}\right) \\ &= OPT(G) \cdot \left(1 - \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{\log\log n}}\right)\right) \end{aligned}$$

  wobei $OPT(G) - A(G) \leq |S|$ gilt, da A für die Separatoren keine Lösungen berechnet und somit die Abweichung von der optimalen Lösung max. so groß ist wie die Kardinalität von S.

Definition:

- Kantenmenge M ist ein **Matching** wenn jeder Knoten zu höchstens einer Kante in M inzident ist.
- Wenn ein Knoten v zu einer Kante in M inzident ist, heißt v **gematcht**, ansonsten **ungematcht**.

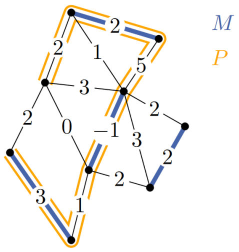


GEWICHTSMAXIMALES MATCHING:

- **Gegeben**: Graph $G = (V, E)$ und Gewichtsfunktion $w\colon E \to \mathbb{R}$
- **Gesucht**: Matching $M \subseteq E$ mit $w(M) = \sum_{e \in M} w(e)$ maximal

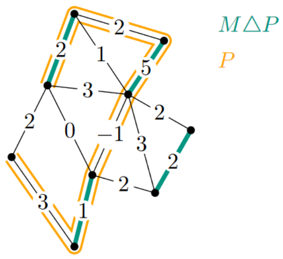
Definition: Sei $M \subseteq E$ Matching in $(G = (V, E), w)$. Ein M-alternierender Weg ist ein einfacher Pfad oder Kreis P in G, sodass

- sich Kanten von M und $E - M$ auf P abwechseln
- wenn P ein Pfad mit Endpunkt v und Kante e an v in P ist, dann ist $e \in M$ oder v ungematcht (verhindert, dass der Pfad verlängert werden kann)



Für Matching M und alternierenden Weg P ist auch $M \triangle P := (M - P) \cup (P - M)$ (**symm. Differenz**) ein Matching.

Dabei gilt $w(M \triangle P) - w(M) = w(P - M) - w(P \cap M)$



$$2 + 5 + 1 > 2 - 1 + 3$$
$$w(P - M) > w(P \cap M)$$

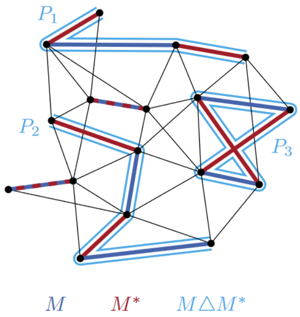
Defintion: Ein alternierender Weg heißt **erhöhend** wenn $w(M \triangle P) > w(M)$, also $w(P - M) > w(P \cap M)$.

Lemma: Sei M ein Matching in (G, w). Es sind äquivalent:

- M ist gewichtsmaximal
- Es gibt keinen erhöhenden alternierenden Weg bezüglich M

Beweis:

- „$\Rightarrow$“: Falls es zu M einen erhöhenden Weg gibt, so kann M natürlich nicht maximales Gewicht haben
- „$\Leftarrow$“:
  - Sei M nicht gewichtsmaximal, also gibt es Matching M^* mit $w(M^*) > w(M)$
  - Betrachte $M \triangle M^* = (M \cup M^*) \setminus (M \cap M^*)$



  - $M \triangle M^*$ hat nur Knoten vom Grad 1 oder 2, besteht also aus einfachen Kreisen und Wegen $P_1, \ldots, P_t$
  - Jedes P_i ist M-alternierender Weg
  - Es gilt $w(M^*) - w(M) = \sum_{i=1}^{t}(w(M^* - P_i) - w(M \cap P_i))$
  - Ein Summand ist positiv, da $w(M^*) - w(M) > 0$
  - Einer der P_i ist also erhöhend, mit $w(M^* \cap P_i) > w(P_i \cap M) \implies$ Es gibt also einen erhöhenden Weg. Widerspruch.