# Zusammenfassung - Algorithmen für planare Graphen

Julian Shen

27. April 2023

# 1 Einführung

**Definition**: **Graph** ist ein Tupel $G = (V, E)$ mit endliche Knotenmenge $V$ und endliche Kantenmenge $E$

- Kante $e \in E$ hat Form $e = uv$ mit $u, v \in V$.
- $uv = vu \to$ Graphen **ungerichtet**
- $e = uu$ ist erlaubt $\to$ **Schlinge**
- Auch $e = uv$ und $e' = uv$ erlaubt mit $e \neq e' \to$ **Mehrfachkante**
- **Einfacher Graph** $\iff$ ohne Schlingen und Mehrfachkanten
- **Zusammenhängend** $\iff$ ein Weg zwischen je zwei Knoten

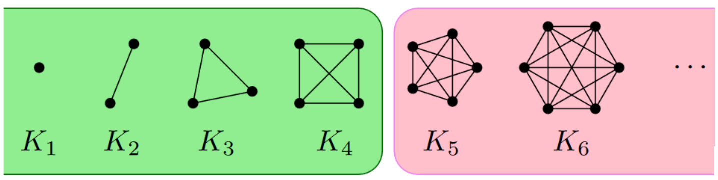
**Definition**: Eine **Zeichnung** von $G = (V, E)$ bildet diesen so auf $\mathbb{R}^2$ ab, dass

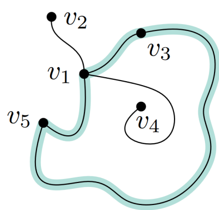
1. Knoten Punkte in der Ebene sind, d.h. $V \subset \mathbb{R}^2$
2. Kante $e = uv$ ist injektive, stetige Kurve von $u$ nach $v$, d.h. $\gamma_e \colon [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ mit
    - $\gamma_e(0) = u$ und $\gamma_e(1) = v$
    - $\gamma_e(0) \notin V$ für alle $0 < t < 1$

- Zeichnung heißt **kreuzungsfrei** bzw. **planar** wenn für je zwei Kanten $e, e'$ und $0 < t, t' < 1$ gilt: $\gamma_e(t) \neq \gamma_e(t')$
- Graph heißt **planar**, wenn er mindestens eine kreuzungsfreie Zeichnung besitzt

**Definition**: Für $n \in \mathbb{N}$ ist der **vollständige Graph** $K_n$

- $V(K_n) = \{v_1, \ldots, v_n\}$
- $E(K_n) = \{v_i v_j \mid v_i, v_j \in V, i \neq j\}$



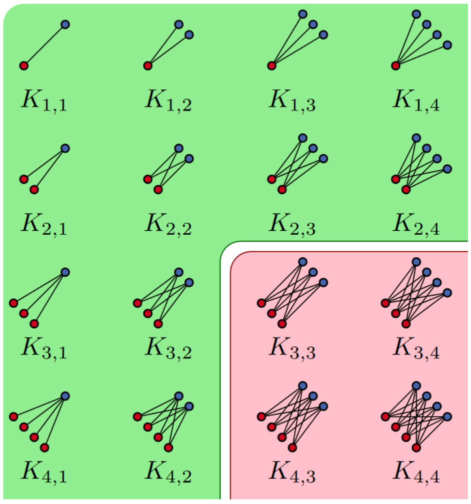

**Lemma**: Graph $K_5$ ist nicht planar

*Beweis*: Betrachte beliebige Zeichnung von $K_5$

- Betrachte $v_1$ und seine 4 ausgehenden Kanten
- O.B.d.A. Kanten kreuzungsfrei zu $v_2, v_3, v_4, v_5$ in zyklischer Reihenfolge um $v_1$
- Kanten $v_1 v_3, v_3 v_5, v_5 v_1$ bilden geschlossene Kurve in $\mathbb{R}^2$ die $v_2$ und $v_4$ trennt $\implies$ $v_2 v_4$ kann nicht kreuzungsfrei gezeichnet sein

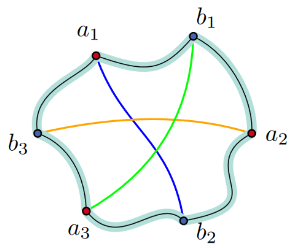
**Definition**: Für $m, n \in \mathbb{N}$ ist der vollständig bipartite Graph $K_{m,n}$

- $V(K_{m,n}) = \{a_1, \dots, a_m\} \cup \{b_1, \dots, b_n\}$
- $E(K_{m,n}) = \{a_i b_j \mid i \in \{1, \dots, m\}, j \in \{1, \dots, n\}\}$




**Lemma**: Graph $K_{3,3}$ ist nicht planar

*Beweis*: Betrachte beliebige Zeichnung von $K_{3,3}$



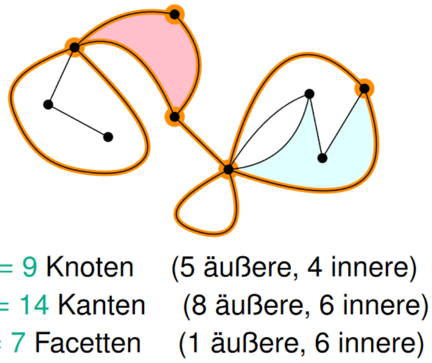

- Kreis $a_1 b_1 a_2 b_2 a_3 b_3$ im Graphen bildet eine geschlossene Kurve in $\mathbb{R}^2$
- Jede Kante von $a_1 b_2, a_2 b_3, a_3 b_1$ liegt komplett innerhalb oder komplett außerhalb dieser Kurve

  $\Longrightarrow$ mindestens zwei liegen auf der gleichen Seite

  $\Longrightarrow$ diese zwei kreuzen sich

**Definitionen**: Für eine feste planare Zeichnung eines planaren Graphen definiere:

- **Facetten**: Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{R}^2$ nach Entfernen aller Knoten und Kanten $\Longrightarrow$ Es gibt genau eine **äußere Facette** und mehrere **innere Facetten**
- **Äußere Knoten** sind die, die inzident zur äußeren Facette sind
- **Innere Knoten** sind die übrigen Knoten
- **Äußere Kanten** sind die, die komplett im Rand der äußeren Facette liegen
- **Innere Kanten** sind die übrigen Kanten

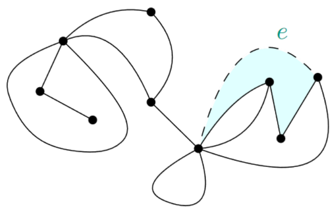



**Satz von Euler**: Sei $G$ ein zusammenhängender Graph mit einer planaren Zeichnung mit $n$ Knoten, $m$ Kanten und $f$ Facetten. Dann gilt

$$n - m + f = 2$$

*Beweis*: Beweise $m - (f - 1) = n - 1$, woraus die Behauptung folgt. Führe dafür eine Induktion nach $f - 1$, der Anzahl der inneren Facetten, durch.

- I.A.: $f - 1 = 0$, d.h. keine innere Facette $\to$ $G$ ist ein Baum, also kreisfrei und zusammenhängend $\to m = n - 1$
- I.S.: $f - 1 \geq 1$, d.h. min. eine innere Facette
  - Sei $e$ eine Kante zwischen äußerer und innerer Facette $\to G' = G \setminus e$ ist zusammenhängend $\to$ In $G'$ gilt $n' = n, m' = m - 1, f' = f - 1$
  - Mit I.V. folgt: $m' - (f' - 1) = n' - 1 \Leftrightarrow m - 1 - (f - 1 - 1) = n - 1 \Leftrightarrow m - (f - 1) = n - 1$




**Korollar aus Euler-Formel**: Sei $G$ ein planarer, einfacher Graph mit $n \geq 3$ Knoten, $m$ Kanten, und kleinstem vorkommenden Knotengrad $\delta(G)$. Dann gilt

$$m \leq 3n - 6 \qquad \text{und} \qquad \delta(G) \leq 5$$

Beide Ungleichungen sind bestmöglich.

*Beweis*: $m \leq 3n - 6$

- O.B.d.A. $G$ ist zusammenhängend, da man Kanten einfügen kann bis er das ist
- Jede Facette ist berandet von min. 3 Kantenseiten, da $n \geq 3$
- Jede Kantenseite in genau eine Facette
- Jede Kante hat genau 2 Seiten

$\implies$ $3f \leq$ Anzahl der Seiten-Facetten-Inzidenzen $= 2m$

$\implies$ $3(2 + m - n) \leq 2m \implies m \leq 3n - 6$ (mit Euler-Formel)

*Beweis*: $\delta(G) \leq 5$

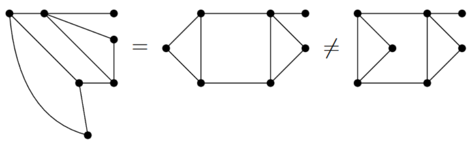
- Jede Kante hat genau 2 inzidente Knoten
- Jeder Knoten $v$ hat genau $\deg(v)$ inzidente Kanten
- Für jeden Knoten $v$ gilt $\deg(v) \geq \delta(G)$

$\implies$ $2m =$ Anzahl der Knoten-Kanten-Inzidenzen $= \sum_{v \in V(G)} \deg(v) \geq \delta(G) \cdot n$

$\implies$ $2(3n - 6) \geq 2m \geq \delta(G) \cdot n \implies \delta(G) \leq 6 - 12/n$

# 2 Einbetten und Dualisieren

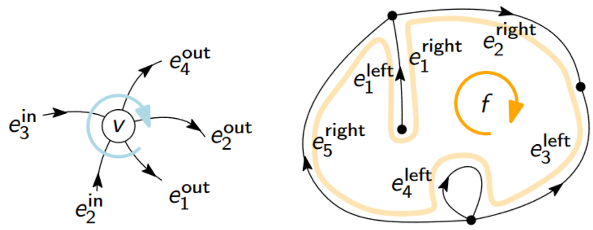
**Einbettung** = Äquivalenzklasse von planaren Zeichnungen



**Definition**: Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph mit einer planaren Zeichnung. Die **(kombinatorische) Einbettung** ist

- für jeden Knoten $v$ die zyklische (cw = „clockwise“) Reihenfolge der inzidenten Halbkanten an $v$
- für jede Facette $f$ die zykl. (cw) Reihenfolge der inzidenten Kantenseiten an $f$

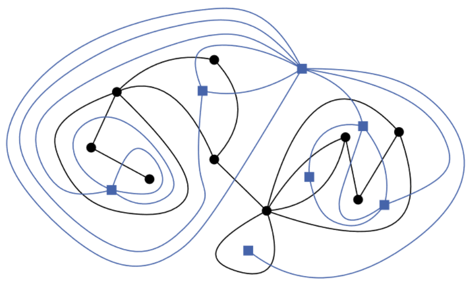
Betrachte dafür beliebige Orientierung der Kanten und man erhält Halbkanten $e^{\text{in}}$ und $e^{\text{out}}$ sowie Kantenseiten $e^{\text{left}}$ und $e^{\text{right}}$ von $e$




Alle Zeichnungen mit der gleichen Einbettung sind äquivalent.

**Definition**: Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph mit einer festen Einbettung und Facettenmenge $F$. Der **Dualgraph** $G^* = (V^*, E^*)$ ist

- $V^* = F$, das heißt, $f \in F \mapsto v_f \in V^*$
- für jede Kante $e \in E$ läuft die duale Kante $e^*$ zwischen der Facette an $e^{\text{left}}$ und der an $e^{\text{right}}$



Die Einbettung des **Primalgraphen** $G = (V, E)$ induziert eine Einbettung des **Dualgraphen** $G^* = (V^*, E^*)$:

| primal | dual |
|---|---|
| $f \in F$ | $v_f = f \in V^* = F$ |
| $e^{left}, e^{right}$ | $(e^*)^{out}, (e^*)^{in}$ |
| $v \in V$ | $f_v = v \in F^*$ |
| $e$ Brücke | $e^*$ Schlinge |
| $e$ Schlinge | $e^*$ Brücke |

**Bemerkungen**:

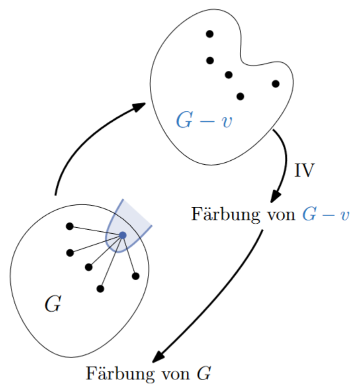
- Der Dualgraph $G^*$ ist immer zusammenhängend
- Falls $G$ zusammenhängend ist, gilt $G = (G^*)^*$
- Für jede Einbettung von $G$ und jede Facette $f$ gibt es eine planare Zeichnung mit dieser Einbettung und $f$ als äußere Facette

# 3 Graphfärbung

**Definition**: Sei $G = (V, E)$ ein Graph, $k \in \mathbb{N}$. Eine ***k*-Färbung** von $G$ ist eine Abbildung $c\colon V \to \{1, 2, \dots, k\}$, sodass $c(u) \neq c(v)$ für jede Kante $uv \in E$

- Kleinstes $k$, für das so eine $k$-Färbung existiert, heißt **chromatische Zahl** $\boldsymbol{\chi(G)}$
- Bei Färbungen nehmen wir Graphen implizit als schlingenfrei an

**Frage**: Was ist die größte chromatische Zahl die ein planarer Graph annehmen kann, d.h. was ist $\chi_{\text{planar}} := \max\{\chi(G) \mid G \text{ planar}\}$?



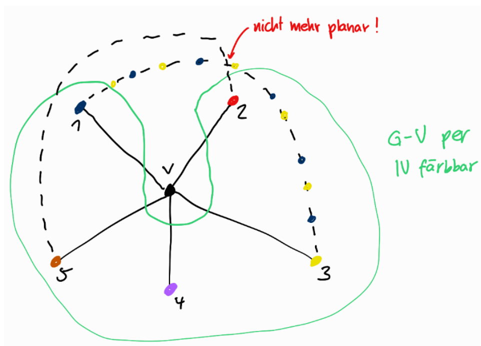

**Lemma**: $\chi_{\text{planar}} \leq 6$

*Beweis*: Führe Induktion über $|V|$

- I.A.: $|V| \leq 6$: Man erhält eine Färbung, indem jeder Knoten eine eigene Farbe bekommt
- I.S.: $|V| > 6$
  - Nach Euler-Formel gibt es $v \in V$ mit $\deg(v) \leq 5$
  - Nach I.V. gibt es 6-Färbung von $G \setminus v$
  - Nachbarn von $v$ in $G \setminus v$ decken höchstens fünf Farben ab $\to$ Färbe $v$ in verbleibender Farbe

**Lemma**: $\chi_{\text{planar}} \leq 5$

*Beweis*: Induktion analog zum oberen Beweis




I.S.:

- Nach Euler-Formel gibt es $v \in V$ mit $\deg(v) \leq 5$
- Nach I.V. gibt es 5-Färbung von $G \setminus v$
- Betrachte Teilgraph, der nur blau-gelbe Knoten enthält:

- **Fall 1**: 1 und 3 liegen in unterschiedlichen Zusammenhangskomponenten

  $\rightarrow$ Tausche in einer Zusammenhangskomponente alle blauen durch gelbe und alle gelben Knoten durch blaue aus $\rightarrow$ Farbe wird für $v$ frei

- **Fall 2** (siehe Bild): 1 und 3 liegen in der selben Zusammenhangskomponente. Für rot-lila-Teilgraph können 2 und 4 nicht in der selben Zusammenhangskomponente liegen, da Graph sonst nicht mehr planar wäre

  $\rightarrow$ Farbe wird für $v$ frei

**Definition**: Sei $G = (V, E)$ ein einfacher Graph. Sei $L\colon V \rightarrow 2^{\mathbb{N}}$ eine Listenzuweisung, d.h. $L(v)$ ist Menge von Zahlen / Farben. Eine ***L*-Listenfärbung** von $G$ ist eine Knotenfärbung $c$ mit

- $c(v) \in L(v)$ für jeden Knoten $v \in V$
- $c(u) \neq c(v)$ für jede Kante $uv \in E$

$G$ heißt ***k*-listenfärbbar** wenn für jede Listenzuweisung $L$ mit $|L(v)| \geq k$ für jeden Knoten $v \in V$ eine $L$-Listenfärbung von $G$ existiert.

- Kleinstes $k$, für das $G$ $k$-listenfärbbar ist, heißt **listenchromatische Zahl $\boldsymbol{\chi_{\text{list}}(G)}$**

**Beweisskizze zu Listenfärbungen**:

- $\chi_{\text{list}}(G) > k$: $\exists$ Listen $L \quad \nexists$ $L$-Listenfärbung
- $\chi_{\text{list}}(G) \leq k$: $\forall$ Listen $L \quad \exists$ $L$-Listenfärbung

**Lemma**: Für jeden planaren Graphen gilt $\chi_{\text{list}}(G) \leq 6$

*Beweis*: Die gleiche Argumentation wie für $\chi_{\text{planar}} \leq 6$ funktioniert

**Beobachtung**: Für jeden Graphen $G$ gilt $\chi_{\text{list}}(G) \geq \chi(G)$

*Beweis*:

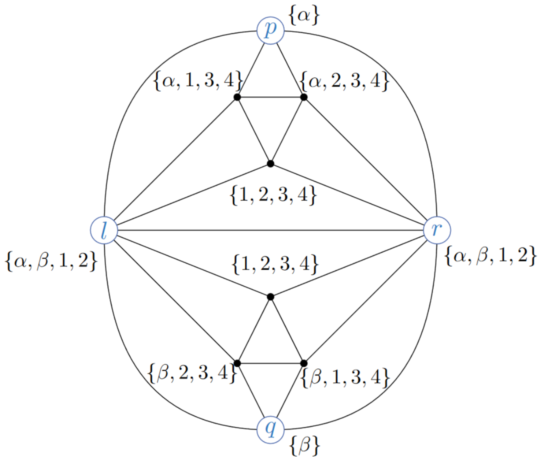
- Setze $L(v) = \{1, \ldots, k\}$ für jeden Knoten $v$
- Dann sind $L$-Listenfärbungen genau $k$-Knotenfärbungen $\implies \chi(G) \leq \chi_{\text{list}}(G)$

**Satz**: Es gibt einen planaren Graphen mit $\chi_{\text{list}}(G) \geq 5$

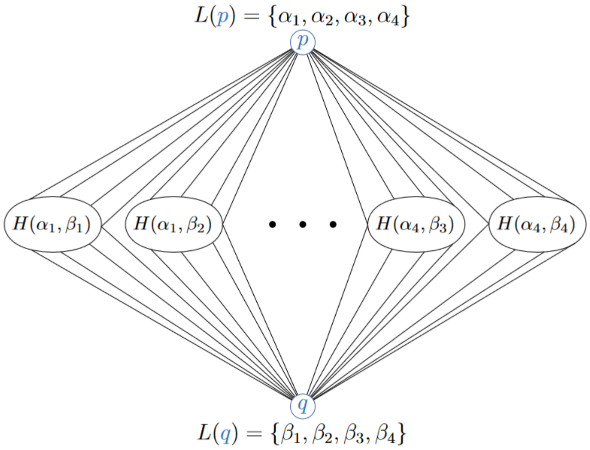
*Beweis*: Konstruiere einen planaren Graphen $G$ mit Listenzuweisung $L$, sodass

- $|L(v)| = 4$ für jeden Knoten $v$
- keine $L$-Listenfärbung von $G$ existiert

Betrachte dazu folgendes Gadget $H(\alpha, \beta)$:




Dieses Gadget ist nicht färbbar. Konstruiere nun aus 16 Gadgets den folgenden Graphen:




Dieser ist nicht $L$-listenfärbbar, denn für jede Färbung $c$ ist Gadget $H(c(p), c(q))$ nicht färbbar.

**Weitere Sätze und Beobachtungen**:

- Für jeden planaren Graphen gilt $\chi_{\text{list}}(G) \leq 5$

  $\Longrightarrow$ Mit obigem Satz folgt $\max\{\chi_{\text{list}}(G) \mid G \text{ planar}\} = 5$

- Es gibt einen planaren Graphen mit $\chi(G) \geq 4$
- Für jeden planaren Graphen G gilt $\chi(G) \leq 4$

  $\Longrightarrow$ $\chi_{\text{planar}} = 4$