

# **Zusammenfassung - Algorithmen für planare Graphen**

Julian Shen

28. Mai 2023

# 1 Einführung

**Definition: Graph** ist ein Tupel  $G = (V, E)$  mit endliche Knotenmenge  $V$  und endliche Kantenmenge  $E$

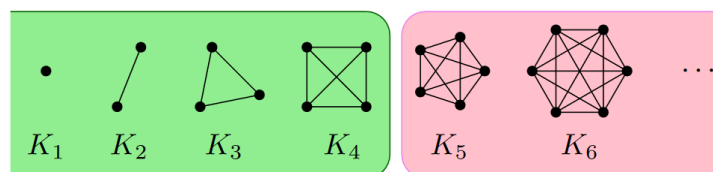
- Kante  $e \in E$  hat Form  $e = uv$  mit  $u, v \in V$ .
- $uv = vu \rightarrow$  Graphen **ungerichtet**
- $e = uu$  ist erlaubt  $\rightarrow$  **Schlinge**
- Auch  $e = uv$  und  $e' = uv$  erlaubt mit  $e \neq e' \rightarrow$  **Mehrfachkante**
- **Einfacher Graph**  $\iff$  ohne Schlingen und Mehrfachkanten
- **Zusammenhängend**  $\iff$  ein Weg zwischen je zwei Knoten

**Definition:** Eine **Zeichnung** von  $G = (V, E)$  bildet diesen so auf  $\mathbb{R}^2$  ab, dass

1. Knoten Punkte in der Ebene sind, d.h.  $V \subset \mathbb{R}^2$
  2. Kante  $e = uv$  ist injektive, stetige Kurve von  $u$  nach  $v$ , d.h.  $\gamma_e: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit
    - $\gamma_e(0) = u$  und  $\gamma_e(1) = v$
    - $\gamma_e(t) \notin V$  für alle  $0 < t < 1$
- Zeichnung heißt **kreuzungsfrei** bzw. **planar** wenn für je zwei Kanten  $e, e'$  und  $0 < t, t' < 1$  gilt:  $\gamma_e(t) \neq \gamma_{e'}(t')$
  - Graph heißt **planar**, wenn er mindestens eine kreuzungsfreie Zeichnung besitzt

**Definition:** Für  $n \in \mathbb{N}$  ist der **vollständige Graph**  $K_n$

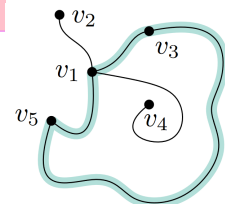
- $V(K_n) = \{v_1, \dots, v_n\}$
- $E(K_n) = \{v_i v_j \mid v_i, v_j \in V, i \neq j\}$



**Lemma:** Graph  $K_5$  ist nicht planar

*Beweis:* Betrachte beliebige Zeichnung von  $K_5$

- Betrachte  $v_1$  und seine 4 ausgehenden Kanten
- O.B.d.A. Kanten kreuzungsfrei zu  $v_2, v_3, v_4, v_5$  in zyklischer Reihenfolge um  $v_1$
- Kanten  $v_1 v_3, v_3 v_5, v_5 v_1$  bilden geschlossene Kurve in  $\mathbb{R}^2$  die  $v_2$  und  $v_4$  trennt  $\implies v_2 v_4$  kann nicht kreuzungsfrei gezeichnet sein



**Definition:** Für  $m, n \in \mathbb{N}$  ist der vollständig bipartite Graph  $K_{m,n}$

- $V(K_{m,n}) = \{a_1, \dots, a_m\} \cup \{b_1, \dots, b_n\}$
- $E(K_{m,n}) = \{a_i b_j \mid i \in \{1, \dots, m\}, j \in \{1, \dots, n\}\}$



**Lemma:** Graph  $K_{3,3}$  ist nicht planar

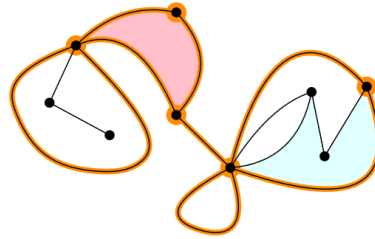
*Beweis:* Betrachte beliebige Zeichnung von  $K_{3,3}$

- Kreis  $a_1 b_1 a_2 b_2 a_3 b_3$  im Graphen bildet eine geschlossene Kurve in  $\mathbb{R}^2$
  - Jede Kante von  $a_1 b_2, a_2 b_3, a_3 b_1$  liegt komplett innerhalb oder komplett außerhalb dieser Kurve
- $\implies$  mindestens zwei liegen auf der gleichen Seite
- $\implies$  diese zwei kreuzen sich



**Definitionen:** Für eine feste planare Zeichnung eines planaren Graphen definiere:

- **Facetten:** Zusammenhangskomponenten von  $\mathbb{R}^2$  nach Entfernen aller Knoten und Kanten  $\implies$  Es gibt genau eine **äußere Facette** und mehrere **innere Facetten**
- **Äußere Knoten** sind die, die inzident zur äußeren Facette sind
- **Innere Knoten** sind die übrigen Knoten
- **Äußere Kanten** sind die, die komplett im Rand der äußeren Facette liegen
- **Innere Kanten** sind die übrigen Kanten



$n = 9$  Knoten    (5 äußere, 4 innere)  
 $m = 14$  Kanten    (8 äußere, 6 innere)  
 $f = 7$  Facetten    (1 äußere, 6 innere)

**Satz von Euler:** Sei  $G$  ein zusammenhängender Graph mit einer planaren Zeichnung mit  $n$  Knoten,  $m$  Kanten und  $f$  Facetten. Dann gilt

$$n - m + f = 2$$

*Beweis:* Beweise  $m - (f - 1) = n - 1$ , woraus die Behauptung folgt. Führe dafür eine Induktion nach  $f - 1$ , der Anzahl der inneren Facetten, durch.

- I.A.:  $f - 1 = 0$ , d.h. keine innere Facette  $\rightarrow G$  ist ein Baum, also kreisfrei und zusammenhängend  $\rightarrow m = n - 1$
- I.S.:  $f - 1 \geq 1$ , d.h. min. eine innere Facette
  - Sei  $e$  eine Kante zwischen äußerer und innerer Facette  $\rightarrow G' = G - e$  ist zusammenhängend  $\rightarrow$  In  $G'$  gilt  $n' = n, m' = m - 1, f' = f - 1$
  - Mit I.V. folgt:  $m' - (f' - 1) = n' - 1 \Leftrightarrow m - 1 - (f - 1 - 1) = n - 1 \Leftrightarrow m - (f - 1) = n - 1$



**Korollar aus Euler-Formel:** Sei  $G$  ein planarer, einfacher Graph mit  $n \geq 3$  Knoten,  $m$  Kanten, und kleinstem vorkommenden Knotengrad  $\delta(G)$ . Dann gilt

$$m \leq 3n - 6 \quad \text{und} \quad \delta(G) \leq 5$$

Beide Ungleichungen sind bestmöglich.

*Beweis:*  $m \leq 3n - 6$

- O.B.d.A.  $G$  ist zusammenhängend, da man Kanten einfügen kann bis er das ist
- Jede Facette ist berandet von min. 3 Kantenseiten, da  $n \geq 3$
- Jede Kantenseite in genau eine Facette
- Jede Kante hat genau 2 Seiten

$$\implies 3f \leq \text{Anzahl der Seiten-Facetten-Inzidenzen} = 2m$$

$$\implies 3(2 + m - n) \leq 2m \implies m \leq 3n - 6 \text{ (mit Euler-Formel)}$$

*Beweis:*  $\delta(G) \leq 5$

- Jede Kante hat genau 2 inzidente Knoten
- Jeder Knoten  $v$  hat genau  $\deg(v)$  inzidente Kanten
- Für jeden Knoten  $v$  gilt  $\deg(v) \geq \delta(G)$

$$\implies 2m = \text{Anzahl der Knoten-Kanten-Inzidenzen} = \sum_{v \in V(G)} \deg(v) \geq \delta(G) \cdot n$$

$$\implies 2(3n - 6) \geq 2m \geq \delta(G) \cdot n \implies \delta(G) \leq 6 - 12/n$$

## 2 Einbetten und Dualisieren

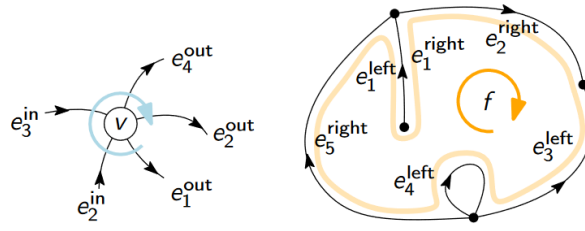
**Einbettung** = Äquivalenzklasse von planaren Zeichnungen



**Definition:** Sei  $G = (V, E)$  ein zusammenhängender Graph mit einer planaren Zeichnung. Die **(kombinatorische) Einbettung** ist

- für jeden Knoten  $v$  die zyklische (cw = „clockwise“) Reihenfolge der inzidenten Halbkanten an  $v$
- für jede Facette  $f$  die zykl. (cw) Reihenfolge der inzidenten Kantenseiten an  $f$

Betrachte dafür beliebige Orientierung der Kanten und man erhält Halbkanten  $e^{\text{in}}$  und  $e^{\text{out}}$  sowie Kantenseiten  $e^{\text{left}}$  und  $e^{\text{right}}$  von  $e$



Alle Zeichnungen mit der gleichen Einbettung sind äquivalent.

**Definition:** Sei  $G = (V, E)$  ein zusammenhängender Graph mit einer festen Einbettung und Facettenmenge  $F$ . Der **Dualgraph**  $G^* = (V^*, E^*)$  ist

- $V^* = F$ , das heißt,  $f \in F \mapsto v_f \in V^*$
- für jede Kante  $e \in E$  läuft die duale Kante  $e^*$  zwischen der Facette an  $e^{\text{left}}$  und der an  $e^{\text{right}}$



Die Einbettung des **Primalgraphen**  $G = (V, E)$  induziert eine Einbettung des **Dualgraphen**  $G^* = (V^*, E^*)$ :

primal	dual
$f \in F$	$v_f = f \in V^* = F$
$e^{\text{left}}, e^{\text{right}}$	$(e^*)^{\text{out}}, (e^*)^{\text{in}}$
$v \in V$	$f_v = v \in F^*$
$e$ Brücke	$e^*$ Schlinge
$e$ Schlinge	$e^*$ Brücke

**Bemerkungen:**

- Der Dualgraph  $G^*$  ist immer zusammenhängend
- Falls  $G$  zusammenhängend ist, gilt  $G = (G^*)^*$
- Für jede Einbettung von  $G$  und jede Facette  $f$  gibt es eine planare Zeichnung mit dieser Einbettung und  $f$  als äußere Facette

### 3 Graphfärbung

**Definition:** Sei  $G = (V, E)$  ein Graph,  $k \in \mathbb{N}$ . Eine  **$k$ -Färbung** von  $G$  ist eine Abbildung  $c: V \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ , sodass  $c(u) \neq c(v)$  für jede Kante  $uv \in E$

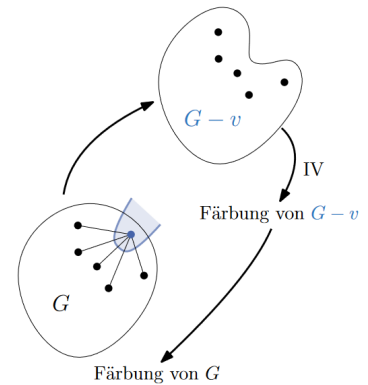
- Kleinstes  $k$ , für das so eine  $k$ -Färbung existiert, heißt **chromatische Zahl**  $\chi(G)$
- Bei Färbungen nehmen wir Graphen implizit als schlingenfrei an

**Frage:** Was ist die größte chromatische Zahl die ein planarer Graph annehmen kann, d.h. was ist  $\chi_{\text{planar}} := \max\{\chi(G) \mid G \text{ planar}\}$ ?

**Lemma:**  $\chi_{\text{planar}} \leq 6$

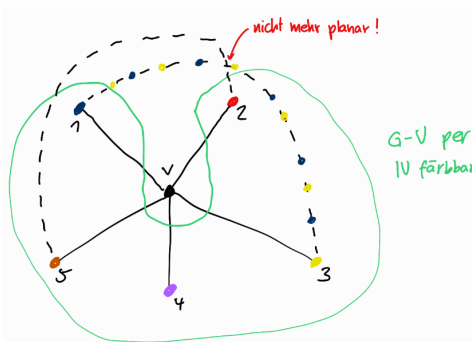
*Beweis:* Führe Induktion über  $|V|$

- I.A.:  $|V| \leq 6$ : Man erhält eine Färbung, indem jeder Knoten eine eigene Farbe bekommt
- I.S.:  $|V| > 6$ 
  - Nach Euler-Formel gibt es  $v \in V$  mit  $\deg(v) \leq 5$
  - Nach I.V. gibt es 6-Färbung von  $G \setminus v$
  - Nachbarn von  $v$  in  $G \setminus v$  decken höchstens fünf Farben ab  $\rightarrow$  Färbe  $v$  in verbleibender Farbe



**Lemma:**  $\chi_{\text{planar}} \leq 5$

*Beweis:* Induktion analog zum oberen Beweis



I.S.:

- Nach Euler-Formel gibt es  $v \in V$  mit  $\deg(v) \leq 5$
- Nach I.V. gibt es 5-Färbung von  $G \setminus v$
- Betrachte Teilgraph, der nur blau-gelbe Knoten enthält:

- Fall 1: 1 und 3 liegen in unterschiedlichen Zusammenhangskomponenten  
 → Tausche in einer Zusammenhangskomponente alle blauen durch gelbe und alle gelben Knoten durch blaue aus → Farbe wird für  $v$  frei
- Fall 2 (siehe Bild): 1 und 3 liegen in der selben Zusammenhangskomponente.  
 Für rot-lila-Teilgraph können 2 und 4 nicht in der selben Zusammenhangskomponente liegen, da Graph sonst nicht mehr planar wäre  
 → Farbe wird für  $v$  frei

**Definition:** Sei  $G = (V, E)$  ein einfacher Graph. Sei  $L: V \rightarrow 2^{\mathbb{N}}$  eine Listenzuweisung, d.h.  $L(v)$  ist Menge von Zahlen / Farben. Eine  **$L$ -Listenfärbung** von  $G$  ist eine Knotenfärbung  $c$  mit

- $c(v) \in L(v)$  für jeden Knoten  $v \in V$
- $c(u) \neq c(v)$  für jede Kante  $uv \in E$

$G$  heißt  **$k$ -listenfärbbar** wenn für jede Listenzuweisung  $L$  mit  $|L(v)| \geq k$  für jeden Knoten  $v \in V$  eine  $L$ -Listenfärbung von  $G$  existiert.

- Kleinstes  $k$ , für das  $G$   $k$ -listenfärbbar ist, heißt **listenchromatische Zahl**  $\chi_{\text{list}}(G)$

**Beweisskizze zu Listenfärbungen:**

- $\chi_{\text{list}}(G) > k: \exists \text{ Listen } L \quad \nexists L\text{-Listenfärbung}$
- $\chi_{\text{list}}(G) \leq k: \forall \text{ Listen } L \quad \exists L\text{-Listenfärbung}$

**Lemma:** Für jeden planaren Graphen gilt  $\chi_{\text{list}}(G) \leq 6$

*Beweis:* Die gleiche Argumentation wie für  $\chi_{\text{planar}} \leq 6$  funktioniert

**Beobachtung:** Für jeden Graphen  $G$  gilt  $\chi_{\text{list}}(G) \geq \chi(G)$

*Beweis:*

- Setze  $L(v) = \{1, \dots, k\}$  für jeden Knoten  $v$
- Dann sind  $L$ -Listenfärbungen genau  $k$ -Knotenfärbungen  $\implies \chi(G) \leq \chi_{\text{list}}(G)$

**Satz von Voigt:** Es gibt einen planaren Graphen mit  $\chi_{\text{list}}(G) \geq 5$

*Beweis:* Konstruiere einen planaren Graphen  $G$  mit Listenzuweisung  $L$ , sodass

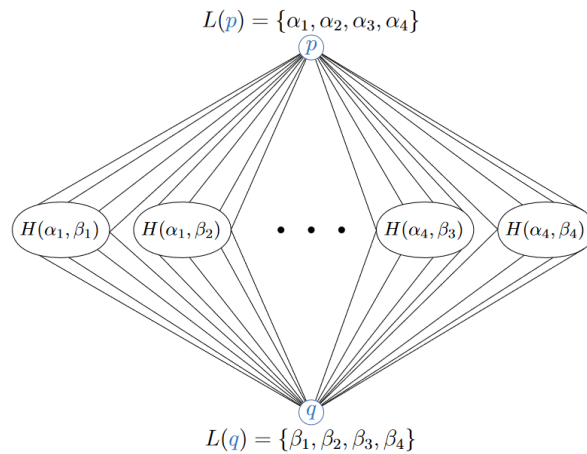
- $|L(v)| = 4$  für jeden Knoten  $v$
- keine  $L$ -Listenfärbung von  $G$  existiert

Betrachte dazu folgendes Gadget  $H(\alpha, \beta)$ :





Dieses Gadget ist nicht färbbar. Konstruiere nun aus 16 Gadgets den folgenden Graphen:



Dieser ist nicht  $L$ -listenfärbbar, denn für jede Färbung  $c$  ist Gadget  $H(c(p), c(q))$  nicht färbbar.

### Weitere Sätze und Beobachtungen:

- Für jeden planaren Graphen gilt  $\chi_{\text{list}}(G) \leq 5$  (**Satz von Thomassen**)  
 $\implies$  Mit obigem Satz folgt  $\max\{\chi_{\text{list}}(G) \mid G \text{ planar}\} = 5$
- Es gibt einen planaren Graphen mit  $\chi(G) \geq 4$
- Für jeden planaren Graphen  $G$  gilt  $\chi(G) \leq 4$  (**4-Farben-Satz**)  
 $\implies \chi_{\text{planar}} = 4$

**Ziel:** Beweise  $\chi_{\text{planar}} \leq 5$  mit einer stärkeren Aussage

**Satz:** Sei  $G = (V, E)$  ein planarer Graph mit:

- jede innere Facette ist ein Dreieck
- äußere Facette ist ein einfacher Kreis  $C$

Seien  $v_1, v_2$  zwei aufeinanderfolgende Knoten auf  $C$  und  $L$  eine Listenzuweisung mit:

- $|L(v)| = 5$  für  $v \in V \setminus C$
- $|L(v)| = 3$  für  $v \in C \setminus \{v_1, v_2\}$
- $L(v_1) = \alpha, L(v_2) = \beta$  mit  $\alpha \neq \beta$

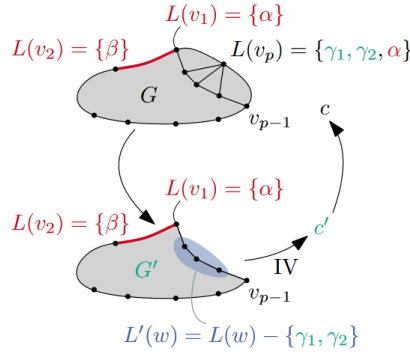
Dann gibt es eine  $L$ -Listenfärbung von  $G$ .

*Beweis:* Führe Induktion über  $|V|$

- I.A.:  $|V| = 3$ . Wähle  $c(v_3) \in L(v_3) \setminus \{\alpha, \beta\}$
- I.S.:  $|V| \geq 4$ . Betrachte nun 2 Fälle:
  - Fall 1:  $C$  hat eine Sehne  $e = v_i v_j$ . Zerteile  $G$  entlang  $e$  in zwei Graphen  $G_1, G_2$ . O.B.d.A liegt  $v_1 v_2$  in  $G_1$ . Nach IV gibt es eine Färbung  $c_1$  von  $G_1$ . Sei  $c_1(v_i) = \alpha'$  und  $c_1(v_j) = \beta'$ . Wende IV auf  $G_2$  an mit Listen  $\{\alpha'\}$  für  $v_i$  und  $\{\beta'\}$  für  $v_j$ .  $\rightarrow$  Färbung  $c_2$  von  $G_2 \rightarrow$  Da  $c_1$  und  $c_2$  an der Sehne  $v_i v_j$  übereinstimmen, erhalten wir eine Färbung von  $G$ .



- Fall 2:  $C$  hat keine Sehne. Betrachte Nachbarn  $v_p \neq v_2$  von  $v_1$  auf  $C$ . Lösche  $v_p$  auf  $G$  und erhalte  $G'$ .  $G'$  hat einfachen Kreis als äußere Facette, da  $v_p$  keine inzidente Sehne hat. Seien  $\gamma_1, \gamma_2$  zwei Farben aus  $L(v_p) \setminus \{\alpha\}$ . Für jeden inneren Nachbarn  $w$  von  $v_p$  definiere  $L'(w) = L(w) \setminus \{\gamma_1, \gamma_2\}$  und  $L'(v) = L(v)$  für jeden anderen Knoten  $v$ . Nach IV gibt es  $L'$ -Listenfärbung von  $G'$ , sodass kein innerer Nachbar von  $v_p$  die Farbe  $\gamma_1$  oder  $\gamma_2$  hat. Wähle  $c(v_p) \in \{\gamma_1, \gamma_2\} \setminus c'(v_{p-1})$  und erhalte somit eine  $L$ -Listenfärbung  $c$  von  $G$ .



**Bemerkung:** Für jeden beliebigen planaren Graphen  $G$  lassen sich Kanten und Knoten hinzufügen sowie Farben aus Listen entfernen, sodass der neue Graph  $G'$  den Anforderungen des obigen Satzes entspricht. Damit wurde die Aussage  $\chi(G) \leq \chi_{\text{list}}(G) \leq 5$  für jeden planaren Graphen  $G$  bewiesen.

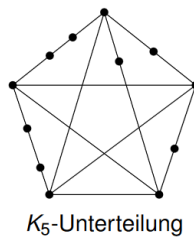
## 4 Unterteilungen und Minoren

**Definition:** Sei  $G = (V, E)$  ein Graph,  $e = uv$  eine Kante. Dann ist die **Unterteilung von  $e$  in  $G$**  der Graph  $G \circ e = (V', E')$  mit

- $V' = V + \{w\}$
- $E' = (E \setminus \{uv\}) + \{uw, vw\}$

**Beobachtung:**  $G$  planar  $\iff G \circ e$  planar

**Definition:** Graph  $G$  ist eine **Unterteilung von  $H$**  wenn  $G = ((H \circ e_1) \circ e_2) \cdots \circ e_k$ . Wir sagen auch  $G$  ist  **$H$ -Unterteilung**. Graph  $G$  **enthält eine  $H$ -Unterteilung**, wenn ein Teilgraph  $G' \subseteq G$  eine  $H$ -Unterteilung ist.



**Beobachtung:**

- $K_5$ - und  $K_{3,3}$ -Unterteilungen sind nicht-planar
- Jeder Graph der eine  $K_5$  oder  $K_{3,3}$ -Unterteilung enthält, ist nicht planar

**Satz von Kuratowski:**  $G$  ist planar  $\iff G$  enthält keine  $K_5$ - oder  $K_{3,3}$ -Unterteilung

*Beweis:* „ $\Rightarrow$ “ folgt aus obiger Beobachtung. Die Rückrichtung ist komplizierter und beweisen wir später.

**Definition:** Sei  $G = (V, E)$  ein Graph,  $e = uv$  eine Kante. Der Graph  $G/e = (V', E')$  ist der Graph, der durch Kontrahieren der Kante  $e$  entsteht, genauer:

- $V' = V \setminus \{u, v\} + \{w\}$
- $E' = E(G - u - v) \cup \{wa \mid au \in E \text{ oder } av \in E\}$

Diesen Prozess nennt man auch **Kantenkontraktion**. Dabei können Multikanten und Schleifen entstehen.



**Definition:** Graph  $H$  ist **Minor von  $G$** , wenn  $H$  aus  $G$  durch eine Folge von Kantenkontraktionen entsteht, also  $H = ((G/e_1)/e_2 \cdots)/e_k$ . Wir sagen dann auch:  $G$  ist ein  **$H$ -Minor** ( $H$  ist der kleinere Graph,  $G$  der Größere).

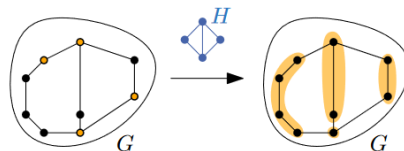
**Beobachtung:**

- $G$  planar  $\Rightarrow G/e$  planar
- $G$  enthält  $K_5$ - oder  $K_{3,3}$ -Minor  $\Rightarrow G$  nicht planar

**Satz von Wagner:**  $G$  planar  $\iff G$  enthält keinen  $K_5$ - oder  $K_{3,3}$ -Minor

**Lemma:**  $G$  enthält  $H$ -Unterteilung  $\Rightarrow G$  enthält  $H$ -Minor

*Beweis:* Kontrahiere durch Unterteilung entstandene Knoten zu ursprünglich adjazenten Knoten.



**Es sind also äquivalent:**

1.  $G$  ist nicht planar
2.  $G$  enthält  $K_5$ - oder  $K_{3,3}$ -Minor
3.  $G$  enthält  $K_5$ - oder  $K_{3,3}$ -Unterteilung

(3)  $\implies$  (2)  $\implies$  (1) wurde schon bewiesen, (1)  $\implies$  (2)  $\implies$  (3) müssen wir noch beweisen. Wir beginnen mit (1)  $\implies$  (2).

*Beweis von Wagner:* Es muss nur noch die Rückrichtung beweisen werden. Sei hierfür  $G$  ein nicht-planarer Graph. Wir müssen einen  $K_5$ - oder  $K_{3,3}$ -Minor in  $G$  finden. O.B.d.A. sei  $G$  sogar minimal nicht-planar, d.h.

- $G - v$  ist planar für jeden Knoten  $v \in V$
- $G - e$  ist planar für jede Kante  $e \in E$
- $G/e$  ist planar für jede Kante  $e \in E$

Beweise zunächst folgendes Lemma:

**Lemma:** Sei  $G$  minimal nicht-planar,  $xy \in E(G)$ . Dann ist  $G - x - y$  ein Kreis.

*Beweis:* Da  $G$  minimal nicht-planar ist,

- ist  $G$  zusammenhängend, da ansonsten Knoten aus einer Zusammenhangskomponente gelöscht werden könnte
- ist  $\deg(v) \geq 3$  für jeden Knoten  $v \in V(G)$ , denn Knoten von Grad 0 und 1 tragen nichts zur Nicht-Planarität bei, können also gelöscht werden ohne die Nicht-Planarität zu verlieren. Für einen Knoten  $v$  von Grad 2 mit Kanten  $e, e'$  bleibt  $G/e$  nicht-planar. Wäre  $G/e$  planar, so muss wegen  $G = (G/e) \circ e'$  bereits  $G$  planar sein. Widerspruch.



Das Lemma wird nun anhand von 3 Behauptungen bewiesen.

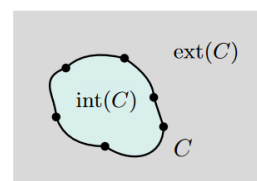
1. Behauptung:  $G - x - y$  enthält kein  $\Theta$ .

**Theta-Graphen** sind Unterteilungen des Graphen mit zwei Knoten und drei parallelen Kanten.



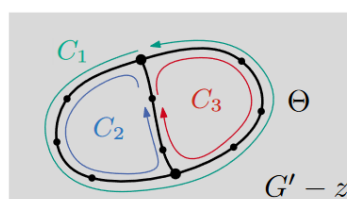
**Notation:** Für einen Kreis  $C$  in einer planaren Zeichnung erhält man eine geschlossene **Jordankurve**, die die Ebene in zwei Komponenten unterteilt:

- $\text{int}(C)$ , das Innere von  $C$
- $\text{ext}(C)$ , das Äußere von  $C$

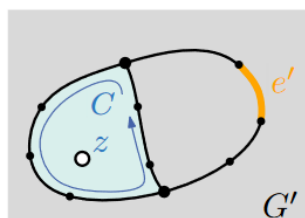


*Beweis von Behauptung 1:*

- Angenommen  $G - x - y$  enthält ein  $\Theta$ .
- $G' := G/xy$  ist planar mit Kante  $xy$  zu Knoten  $z$  kontrahiert.
- $G' - z = G - x - y$  ist ebenfalls planar.
- Zeichnung von  $G'$  enthält ein  $\Theta$  und das  $\Theta$  hat 3 Kreise:

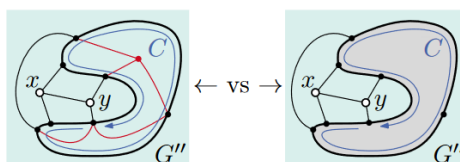


- Betrachte Kreis  $C$  im  $\Theta$ , sodass Knoten  $z$  auf einer Seite von  $C$  und eine Kante  $e' \in E(\Theta)$  auf der anderen Seite von  $C$  liegt.
- Wähle  $\Theta$  und  $C$  so, dass die Seite von  $C$  mit  $z$  inklusionsminimal ist, d.h. es gibt kein anderes  $\Theta$  mit Kreis  $C$ , was  $z$  enthält und ein kleineres Inneres hat
- O.B.d.A. gilt  $z \in \text{int}(C)$  und  $e' \in \text{ext}(C)$



- Betrachte  $G'' = G - \text{ext}(C)$ .
- Da  $e' \notin G''$  ist, wird mindestens eine Kante gelöscht, also ist  $G''$  planar.
- Betrachte eine planare Zeichnung von  $G''$  mit Kreis  $C$ .

Ziel: Zeige, dass  $C$  eine Facette berandet, denn dann kann  $\text{ext}(C)$  in  $C$  eingesetzt werden, was aber eine planare Zeichnung von  $G$  wäre. ⚡



- Betrachte Pfad  $P$  in  $G''$ , der auf verschiedenen Knoten von  $C$  startet und endet und ansonsten zu  $C$  disjunkt ist.
- $P$  entspricht auch einem Pfad  $P'$  in  $G'$ .

Wenn  $z \notin P'$ :

- Dann ist  $C \cup P'$  ein  $\Theta$  in  $G - x - y$ .
- Dieses  $\Theta$  hat einen Kreis der  $z$  enthält, aber ein kleineres Inneres als  $C$  hat.
- Widerspruch zur Wahl von  $\Theta$  und  $C$ .



Also liegt  $z$  auf  $P'$  und  $P$  muss  $x$  oder  $y$  enthalten. Also liegt jeder solche Pfad in der Zeichnung von  $G''$  auf der Seite von  $C$ , die  $xy$  enthält.

$\Rightarrow C$  liegt im Rand einer Facette von  $G''$

Damit ist *Behauptung 1* bewiesen.

2. Behauptung:  $G - x - y$  enthält keine zwei Knoten vom Grad 1.

*Beweis von Behauptung 2:*



- Angenommen  $u, v$  sind zwei Knoten in  $G - x - y$  mit Grad 1.
- Da  $\deg(u), \deg(v) \geq 3$  in  $G$ , sind  $ux, uy, vx, vy \in E(G)$  und  $u, v, x, y$  bilden ein  $\Theta$
- Nach Behauptung 1 hat jede Kante in  $G$  mindestens einen Endpunkt in  $u, v, x, y$ , um das  $\Theta$  bei Kontraktion einer beliebigen Kante zu zerstören.
- Jedes  $w \neq u, v, x, y$  ist zu  $u, v$  oder beiden benachbart, da  $\deg(w) \geq 3$ .
- Höchstens 2 Knoten außerhalb von  $u, v, x, y$ .



$\implies$  In allen Fällen ergibt sich ein Widerspruch zur Nicht-Planarität von  $G$ .

Damit ist *Behauptung 2* bewiesen.

**Definition:** Ein Graph enthält genau dann kein  $\Theta$ , wenn jede Kante auf höchstens einem Kreis liegt. Solche Graphen nennt man **Kakteen**. Kakteen sind kantendisjunkte Vereinigungen von Kreisen und Brücken.



**Definition:** Der **Block-Cutvertex-Tree** eines zusammenhängenden Graphen  $G$  (hier ist  $G$  Kaktus) ist ein Baum  $T$  mit:

- $V(T) = \{\text{Artikulationspunkt in } G\} \cup \{\text{Kreise in } G\} \cup \{\text{Brücken in } G\}$
- $E(T) = \{vb \mid v \text{ Artikulationspunkt, } b \text{ Brücke oder Kreis, } v \text{ Knoten auf } b \text{ in } G\}$



Behauptung 3:  $G - x - y$  ist tatsächlich ein Kreis.

*Beweis von Behauptung 3:*

- Sei  $T$  Block-Cutvertex-Tree von  $G - x - y$ .
- Wenn  $G - x - y$  keinen Artikulationspunkt enthält, ist  $G - x - y$  ein Kreis (Beweis fertig) oder eine Kante. Dann gilt  $|V(G)| \leq 4$ , da  $G$  höchstens nur die Knoten  $x, y$  und die Endpunkte der Kante enthält  $\implies G$  ist planar  $\nexists$
- Also gibt es Artikulationspunkte und  $|T| \geq 2$ .
- Also hat  $T$  mindestens 2 Blätter.
- Blätter im Block-Cutvertex-Tree sind entweder Brücken oder Kreise im ursprünglichen Graphen. Brücken führen immer zu Grad 1 Knoten. Nach Behauptung 2 gibt es ein Blatt in  $T$ , das in  $G$  ein Kreis  $C$  hat.
- Sei  $v$  der Artikulationspunkt in  $C$ , der  $C$  an den Graphen „klebt“.



- Jedes  $u \in V(C) - v$  hat Grad 2 in  $G - x - y$  (da Blatt im Cutvertex-Tree), aber mindestens Grad 3 in  $G$ .
- Also ist jedes  $u$  zu  $x$  oder  $y$  benachbart.  $u$  kann nicht zu beiden benachbart sein, da sonst  $G - v - w$  ein  $\Theta$  enthält.

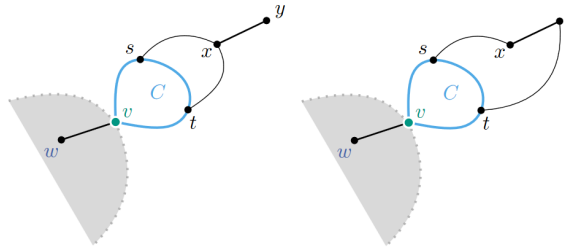


- Ebenso darf  $C$  nur Länge 3 haben, da sonst  $G - v - w$  ebenso wieder ein  $\Theta$  bildet.



$\Rightarrow C$  hat Länge genau 3  
 $V(C) = \{v, s, t\}$

- Dann hat  $C \cup \{x, y\}$  ein  $\Theta$  in  $G$ .



- Nach Behauptung 1 hat jede Kante mindestens einen Endpunkt im  $\Theta$ .
- Jedes  $w \in G - (C \cup \{x, y\})$  hat alle Nachbarn in  $C \cup \{x, y\}$ , sonst gäbe es eine Kante außerhalb des  $\Theta$ .  $w$  muss genau die Nachbarschaft  $\{x, y, v\}$  haben, denn  $w$  kann nicht zu  $s$  oder  $t$  benachbart sein, da diese Grad 2 haben.
- Würden zwei solche  $w, w'$  existieren, so wäre  $w, w', x, y$  ein  $\Theta$  in  $G - C$ .



$\Rightarrow$  Also ist  $w$  der einzige Knoten in  $G - (C \cup \{x, y\})$ .

- O.B.d.A sei  $sx \in E$ . Es gilt entweder  $ty \in E$  oder  $tx \in E$ .



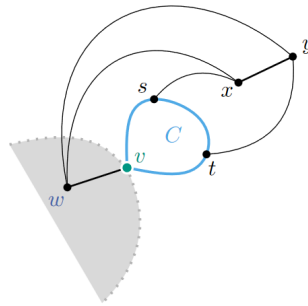
- Wir wissen, dass  $G$  nur die Knoten  $v, s, t, x, y, w$  besitzt.
- Wenn  $vx \in E$  oder  $vy \in E$ , dann gibt es ein  $\Theta$  in  $G - s - t$ .



- Wenn  $tx \in E$ , dann gibt es ein  $\Theta$  in  $G - w - y$ .



- Insgesamt wissen wir  $vx \notin E, vy \notin E, tx \notin E, ty \in E, ws \notin E, wt \notin E$ . Wir kennen also ganz  $G$  und  $G$  ist planar. Widerspruch.



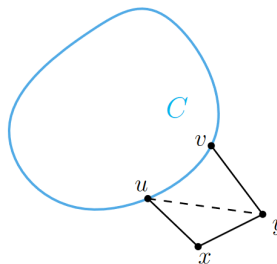
Damit sind *Behauptung 3* und das *Lemma* bewiesen.

*Beweis von Wagner - Abschluss:*

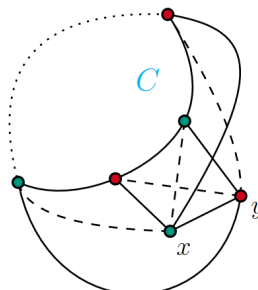
- Sei  $xy \in E$  eine Kante und  $C$  der Kreis  $G - x - y$ .
- Sei  $uv \in E$  eine Kante auf  $C$  mit  $ux \in E$ .

1. Fall:  $uy \notin E$ .

- $G - u - x$  ist ein Kreis, d.h.  $v$  muss Grad 2 haben, also ist  $vy \in E$ .



- Wenn  $vx \in E$  dann hat  $G - x - v$  einen Knoten  $u$  mit Grad 1.  $\nexists$   
 $\implies vx \notin E$
- Analoge Argumente liefern:  $N(x), N(y)$  sind auf  $C$  disjunkt und alternierend.
- $|C| \geq 4$  und wir finden einen  $K_{3,3}$ -Minor.



2. Fall: Jeder Knoten auf  $C$  ist zu  $x$  und  $y$  benachbart.

- $|C| \geq 3$ . Wir finden einen  $K_5$ -Minor.



Damit ist der **Satz von Wagner** bewiesen.

Wir beweisen nun  $(2) \implies (3)$ .

**Lemma:** Seien  $G, H$  Graphen. Maximaler Grad von  $H$  höchstens 3, d.h.  $\Delta(H) \leq 3$ . Dann sind äquivalent:

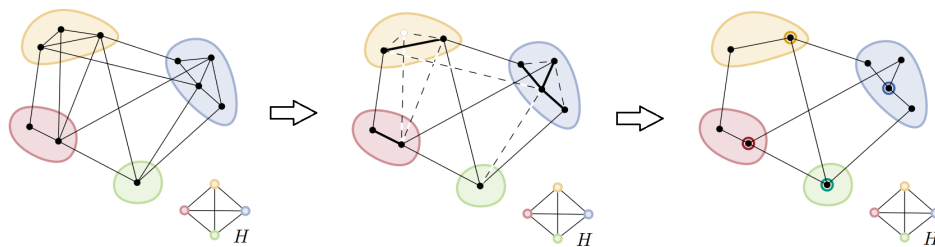
- $G$  enthält  $H$ -Minor
- $G$  enthält  $H$ -Unterteilung

*Beweis:* Die Richtung Unterteilung  $\implies$  Minor wurde bereits gezeigt. Beweise nun also die Rückrichtung. In einem  $H$ -Minor finden wir  $H$ -Unterteilung.

- O.B.d.A ist jede Kontraktionsmenge ein Baum, sodass
  - jedes Blatt hat Nachbarn in anderer Menge,
  - zwischen je zwei Mengen ist maximal eine Kante

Überflüssige Kanten können gelöscht werden.

- Wähle Knoten von maximalem Grad in jeder Menge.
- Dann bilden diese Bäume schon eine  $H$ -Unterteilung, da  $\Delta(H) \leq 3$ .



*Beweis von Kuratowski:* Es muss nur noch die Richtung  $G$  nicht planar  $\implies G$  enthält eine  $K_5$  oder  $K_{3,3}$ -Unterteilung bewiesen werden.

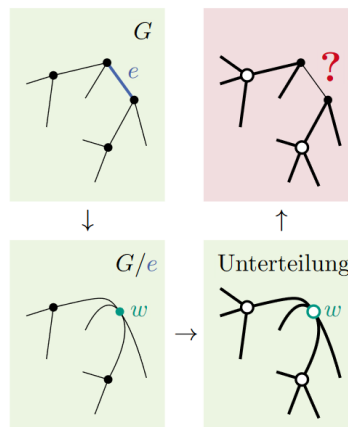
- Sei also  $G$  nicht planar. Wir müssen Unterteilung von  $K_{3,3}$  oder  $K_5$  finden.
- Nach Wagner gibt es einen  $K_{3,3}$ - oder  $K_5$ -Minor in  $G$ .
- Bei  $K_{3,3}$ -Minor, sind wir nach vorigem Lemma fertig.

Sonst: Induktion über Knotenzahl von  $G$ :

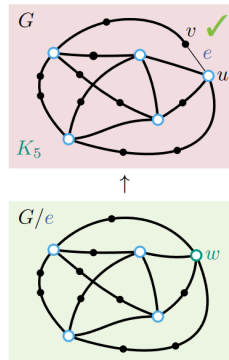
- I.A.:  $G$  muss mindestens 5 Knoten besitzen, um nicht-planar zu sein, und dort kommt auch nur  $K_5$  in Frage.
- I.S.: Wenn es sich beim  $K_5$ -Minor um einen  $K_5$ -Teilgraph handelt, dann sind wir fertig. Andernfalls gibt es  $e = uv$ , sodass  $G/e$  immer noch einen  $K_5$ -Minor enthält.  $G/e$  ist also immer noch nicht-planar. Nach IV existiert eine  $K_{3,3}$ - oder  $K_5$ -Unterteilung in  $G/e$ . Sei  $w$  der Knoten, zu dem  $e$  kontrahiert wird.
  - Wenn  $w$  in der Unterteilung ein Unterteilungspunkt ist (also  $\deg(w) = 2$ ), gibt es auch solch eine Unterteilung in  $G$ .
  - Wenn  $\deg(w) = 3$  in Unterteilung, gibt es auch in  $G$  eine Unterteilung.



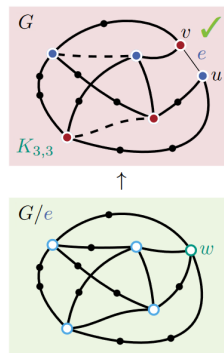
- Also o.B.d.A.  $\deg(w) = 4$  in  $K_5$ -Unterteilung in  $G/e$ .



- Betrachte die vier anderen Knoten von Grad 4.
- Sind mindestens drei davon zu  $u$  verbunden, finden wir wieder eine  $K_5$ -Unterteilung in  $G$ .



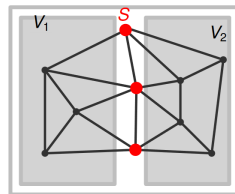
- Andernfalls sind zwei zu  $u$  und zwei zu  $v$  verbunden und wir finden eine  $K_{3,3}$ -Unterteilung in  $G$ .



Damit wurde der **Satz von Kuratowski** bewiesen.

## 5 Separatoren in planaren Graphen

**Definition:** Eine Menge  $S \subset V$  heißt Separator von  $G = (V, E)$ , falls der durch  $V \setminus S$  induzierte Subgraph von  $G$  unzusammenhängend ist.



**Minimum-Balanced-Separator-Problem:** Gegeben sei ein Graph  $G = (V, E)$ . Finde eine Partition von  $V$  in drei Mengen  $V_1, V_2$  und  $S$ , wobei der Separator  $S$  minimale Kardinalität hat und  $V_1$  von  $V_2$  trennt mit  $|V_1|, |V_2| \leq \alpha \cdot |V|$  und  $\frac{1}{2} \leq \alpha < 1$  konstant.

- Separator soll also klein sein
- Separator soll etwa gleich große Teilgraphen erzeugen
- Problem ist NP-schwer

**Planar-Separator-Theorem:** Die Knotenmenge eines zusammenhängenden, planaren Graphen  $G = (V, E)$ ,  $n = |V| \geq 5$ , kann so in drei Mengen  $V_1, V_2, S \subseteq V$  partitioniert werden, dass

- $|V_1|, |V_2| \leq \frac{2}{3} \cdot n$
- $S$  ist ein Separator, der  $V_1$  von  $V_2$  trennt
- $|S| \leq 4 \cdot \sqrt{n}$

Eine solche Partition kann in  $\mathcal{O}(n)$  Zeit konstruiert werden.

Für den Beweis dieses Satzes benötigen wir folgendes Lemma.

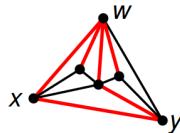
**Lemma:** Sei  $G = (V, E)$  ein planarer, zusammenhängender Graph mit  $n = |V| \geq 5$  und  $T = (V, E(T))$  ein Spannbaum von  $G$  mit Wurzel  $w$  und Höhe  $h$ . Die Knotenmenge von  $G$  kann so in drei Mengen  $V_1, V_2$  und  $S$  partitioniert werden, dass

- $|V_1|, |V_2| \leq \frac{2}{3} \cdot n$
- $S$  ist ein Separator, der  $V_1$  von  $V_2$  trennt
- $|S| \leq 2 \cdot h + 1$

Eine solche Partition kann in  $\mathcal{O}(n)$  Zeit konstruiert werden.

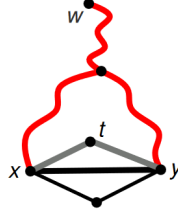
*Beweis:*

- Konstruiere eine Triangulierung von  $G$ . Nach Satz von Euler hat der neue Graph  $3n - 6$  Kanten und  $2n - 4$  Facetten.
- Spannbaum  $T$  von  $G$  ist Spannbaum des triangulierten Graphen
- In  $T$  induziert jede Nichtbaumkante  $\{x, y\}$  einen Kreis  $K_{x,y}$  mit  $\leq 2 \cdot h + 1$  Knoten (maximal  $h$  Knoten in beide Richtungen + Wurzel)



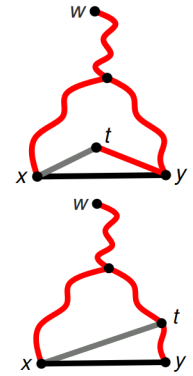
- Sei  $\text{Inneres}(K_{x,y})$  die Knoten, die innerhalb des Kreises, aber nicht auf dem Rand des Kreises liegen. Definiere  $\text{Äußeres}(K_{x,y})$  dementsprechend.
- Wähle Nichtbaumkante  $\{x, y\}$  aus, wobei  $|\text{Inneres}(K_{x,y})| \geq |\text{Äußeres}(K_{x,y})|$
- Wenn  $|\text{Inneres}(K_{x,y})| \leq \frac{2}{3}n$ , dann gilt das Lemma und wir sind fertig

- Sei also  $|\text{Inneres}(K_{x,y})| < \frac{2}{3}n$ , dann ist  $|\text{Äußeres}(K_{x,y})| < \frac{1}{3}n$
- Ziel: Ersetze  $\{x, y\}$  durch eine andere Nichtbaumkante, sodass das Innere kleiner wird und das Äußere nicht über  $\frac{2}{3}n$  wächst
- Da Graph trianguliert, begrenzt Kante  $\{x, y\}$  zwei Dreiecke, von denen eins im  $\text{Inneres}(K_{x,y})$  liegt  $\implies$  Dreieck  $x y t$



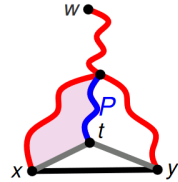
Fall 1:  $\{x, t\}$  oder  $\{t, y\}$  ist eine Baumkante. Ersetze  $\{x, y\}$  durch  $\{x, t\}$ .

- Falls  $t \notin K_{x,y}$ :
  - $|\text{Äußeres}(K_{x,t})| = |\text{Äußeres}(K_{x,y})|$
  - $|\text{Inneres}(K_{x,t})| = |\text{Inneres}(K_{x,y})| - 1$
- Falls  $t \in K_{x,y}$ :
  - $|\text{Äußeres}(K_{x,t})| = |\text{Äußeres}(K_{x,y})| + 1$
  - $|\text{Inneres}(K_{x,t})| = |\text{Inneres}(K_{x,y})|$



Fall 2:  $\{x, t\}$  und  $\{t, y\}$  sind beides Nichtbaumkanten.

- Sei  $|\text{Inneres}(K_{x,t})| \geq |\text{Inneres}(K_{t,y})|$ . Ersetze  $\{x, y\}$  durch  $\{x, t\}$ .



- $|\text{Äußeres}(K_{x,t})| \leq n - (|\text{Inneres}(K_{x,t})| + P) \leq n - \frac{1}{2}|\text{Inneres}(K_{x,y})| < n - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}n = \frac{2}{3}n$
- $|\text{Inneres}(K_{x,t})| \leq |\text{Inneres}(K_{x,y})| - 1$

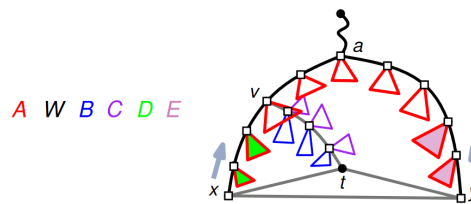
In beiden Fällen verkleinern wir  $|\text{Inneres}(K_{x,y})|$  und lassen  $|\text{Äußeres}(K_{x,y})|$  klein genug. Dies kann nun so lange wiederholt werden, bis auch  $|\text{Inneres}(K_{x,y})| \leq \frac{2}{3}n$  gilt.

$\implies$  Partition mit den gewünschten Eigenschaften lässt sich konstruieren. Wir müssen nun noch deren Implementation in linearer Laufzeit sicherstellen.

- Ersetzung einer Nichtbaumkante durch eine andere, welche die Anzahl der Dreiecke im Inneren reduziert  $\implies$  Höchstens  $2n - 4$  Schritte



- In Fall 1 können wir  $|\text{Inneres}(K_{x,y})|$  und  $|\text{Äußeres}(K_{x,y})|$  in  $\mathcal{O}(1)$  berechnen
- Für Fall 2 muss entschieden werden, ob  $|\text{Inneres}(K_{x,t})|$  oder  $|\text{Inneres}(K_{t,y})|$  größer ist. Zeige, dass auch dieser Fall nur konstante Zeit benötigt mithilfe einer amortisierten Analyse.
- Führe dazu folgende Vorberechnung durch:
  - Durchlaufe  $T$  von den Blättern zur Wurzel
  - Speichere für jeden Knoten  $v$  und inzidente Baumkanten die Anzahl Knoten im Unterbaum links bzw. rechts der Kante
  - Dies kann einmalig in Linearzeit durchgeführt werden
- Laufe von  $x$  und  $y$  abwechselnd in Richtung Wurzel bis erstmals  $v$ , d.h. Weg von  $t$  zur Wurzel, erreicht wird.



- $|\text{Inneres}(K_{x,t})| = D + B$
- $|\text{Inneres}(K_{t,y})| = A - D - B - W$

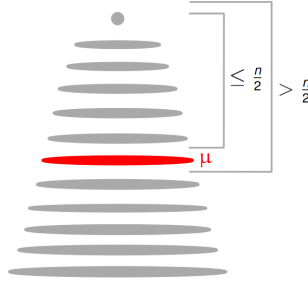
Die Anzahl der Operationen in einem Schritt ist proportional zu der Anzahl der Knoten in dem Teil von  $K_{x,y}$ , der nicht weiter betrachtet wird. Also ist auch Fall 2 in amortisiert konstanter Zeit implementierbar.

Damit ist auch die Laufzeit und somit das gesamte Lemma bewiesen.

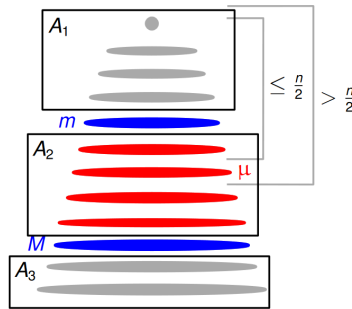
**BFS-Lemma:** Sei  $T = (V, E(T))$  ein BFS-Baum von  $G = (V, E)$ . Für eine Nichtbaumkante  $\{u, v\}$  gilt  $|\text{level}(u) - \text{level}(v)| \leq 1$ .

*Beweis des Planar-Separator-Theorem:*

- Konstruiere eine Triangulierung von  $G$  und ein BFS-Baum  $T$  mit beliebiger Wurzel
- Sei  $\mu$  das Level mit der Eigenschaft:



- Wenn  $|\text{level } \mu| \leq 4\sqrt{n}$ , dann ist  $\mu$  ein geeigneter Separator und wir sind fertig.
- Sei also  $|\text{level } \mu| > 4\sqrt{n}$ .
- Sei  $m$  das unterste Level oberhalb von  $\mu$  und  $M$  das oberste Level unterhalb von  $\mu$  mit  $|S_m| \leq \sqrt{n}$  und  $S_M \leq \sqrt{n}$ .



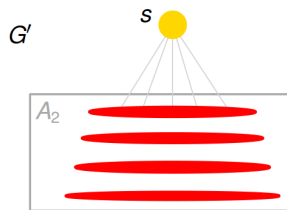
- Offensichtlich gilt  $|A_1| \leq \frac{n}{2}$  und auch  $|A_3| \leq \frac{n}{2}$ , da schon  $> \frac{n}{2}$  Knoten über  $\mu$

Fall 1:  $|A_2| \leq \frac{2}{3}n$

- $S = \text{level } m \cup \text{level } M$  ist Separator
- $V_1 = \max\{A_1, A_2, A_3\}, |V_1| \leq \frac{2}{3}n$
- $V_2 = V \setminus (S \cup V_1), |V_2| < \frac{2}{3}n$
- Damit wurde ein geeigneter Separator gefunden und wir sind fertig

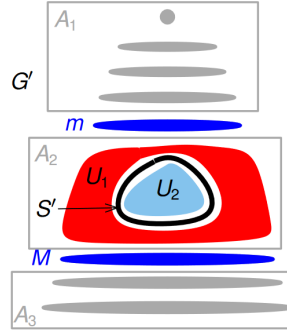
Fall 2:  $|A_2| > \frac{2}{3}n$

- Verschmelze die Knoten in  $A_1 \cup S_m$  zu einem Knoten  $s$  und entferne alle Knoten aus  $S_M \cup A_3$ . Dadurch entsteht ein neuer Graph  $G'$ .

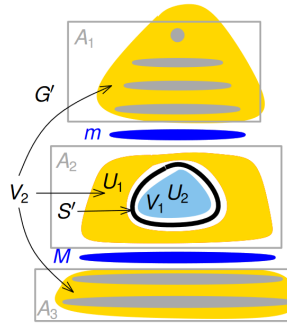


- BFS-Baum  $T$  induziert BFS-Baum  $T'$  in  $G'$

- $T'$  hat maximal Höhe  $\sqrt{n}$ , da  $|V'| \leq n$  und durch die Wahl von  $m$  und  $M$  für jede Schicht  $S_i$  zwischen  $m$  und  $M$   $|S_i| > \sqrt{n}$  gilt
- Wende obiges Lemma auf  $G'$  und  $T'$  an und erhalte  $S', U_1, U_2$



- Sei  $S = S' \cup \text{level } m \cup \text{level } M$
- Nach dem Lemma folgt  $|S'| \leq 2\sqrt{n} + 1$ , also  $|S| \leq 4\sqrt{n}$
- Sei  $V_1 = \max\{U_1, U_2\}$ . Nach dem Lemma gilt  $|V_1| \leq \frac{2}{3}n$
- Weiterhin gilt  $|V_1| + |S| > |V_1| + |S'| > \frac{1}{2} \cdot A_2$ . Setzt man also  $V_2 = V \setminus (S \cup V_1)$ , dann gilt  $|V_2| = n - |V_1| - |S| < n - \frac{1}{2} \cdot |A_2| < \frac{2}{3}n$



Auch hier findet man also einen geeigneten Separator, womit das **Planar-Separator-Theorem** bewiesen ist.