

# **Zusammenfassung - Algorithmen für planare Graphen**

Julian Shen

22. Mai 2023

# 1 Einführung

**Definition: Graph** ist ein Tupel  $G = (V, E)$  mit endliche Knotenmenge  $V$  und endliche Kantenmenge  $E$

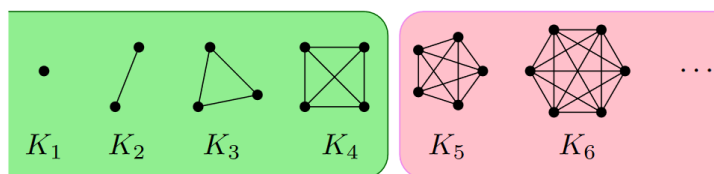
- Kante  $e \in E$  hat Form  $e = uv$  mit  $u, v \in V$ .
- $uv = vu \rightarrow$  Graphen **ungerichtet**
- $e = uu$  ist erlaubt  $\rightarrow$  **Schlinge**
- Auch  $e = uv$  und  $e' = uv$  erlaubt mit  $e \neq e' \rightarrow$  **Mehrfachkante**
- **Einfacher Graph**  $\iff$  ohne Schlingen und Mehrfachkanten
- **Zusammenhängend**  $\iff$  ein Weg zwischen je zwei Knoten

**Definition:** Eine **Zeichnung** von  $G = (V, E)$  bildet diesen so auf  $\mathbb{R}^2$  ab, dass

1. Knoten Punkte in der Ebene sind, d.h.  $V \subset \mathbb{R}^2$
  2. Kante  $e = uv$  ist injektive, stetige Kurve von  $u$  nach  $v$ , d.h.  $\gamma_e: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit
    - $\gamma_e(0) = u$  und  $\gamma_e(1) = v$
    - $\gamma_e(t) \notin V$  für alle  $0 < t < 1$
- Zeichnung heißt **kreuzungsfrei** bzw. **planar** wenn für je zwei Kanten  $e, e'$  und  $0 < t, t' < 1$  gilt:  $\gamma_e(t) \neq \gamma_{e'}(t')$
  - Graph heißt **planar**, wenn er mindestens eine kreuzungsfreie Zeichnung besitzt

**Definition:** Für  $n \in \mathbb{N}$  ist der **vollständige Graph**  $K_n$

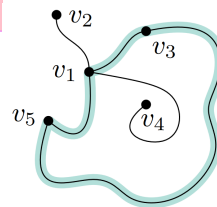
- $V(K_n) = \{v_1, \dots, v_n\}$
- $E(K_n) = \{v_i v_j \mid v_i, v_j \in V, i \neq j\}$



**Lemma:** Graph  $K_5$  ist nicht planar

*Beweis:* Betrachte beliebige Zeichnung von  $K_5$

- Betrachte  $v_1$  und seine 4 ausgehenden Kanten
- O.B.d.A. Kanten kreuzungsfrei zu  $v_2, v_3, v_4, v_5$  in zyklischer Reihenfolge um  $v_1$
- Kanten  $v_1 v_3, v_3 v_5, v_5 v_1$  bilden geschlossene Kurve in  $\mathbb{R}^2$  die  $v_2$  und  $v_4$  trennt  $\implies v_2 v_4$  kann nicht kreuzungsfrei gezeichnet sein



**Definition:** Für  $m, n \in \mathbb{N}$  ist der vollständig bipartite Graph  $K_{m,n}$

- $V(K_{m,n}) = \{a_1, \dots, a_m\} \cup \{b_1, \dots, b_n\}$
- $E(K_{m,n}) = \{a_i b_j \mid i \in \{1, \dots, m\}, j \in \{1, \dots, n\}\}$



**Lemma:** Graph  $K_{3,3}$  ist nicht planar

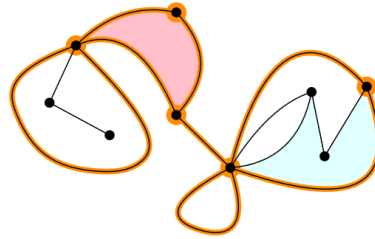
*Beweis:* Betrachte beliebige Zeichnung von  $K_{3,3}$

- Kreis  $a_1 b_1 a_2 b_2 a_3 b_3$  im Graphen bildet eine geschlossene Kurve in  $\mathbb{R}^2$
  - Jede Kante von  $a_1 b_2, a_2 b_3, a_3 b_1$  liegt komplett innerhalb oder komplett außerhalb dieser Kurve
- $\implies$  mindestens zwei liegen auf der gleichen Seite
- $\implies$  diese zwei kreuzen sich



**Definitionen:** Für eine feste planare Zeichnung eines planaren Graphen definiere:

- **Facetten:** Zusammenhangskomponenten von  $\mathbb{R}^2$  nach Entfernen aller Knoten und Kanten  $\implies$  Es gibt genau eine **äußere Facette** und mehrere **innere Facetten**
- **Äußere Knoten** sind die, die inzident zur äußeren Facette sind
- **Innere Knoten** sind die übrigen Knoten
- **Äußere Kanten** sind die, die komplett im Rand der äußeren Facette liegen
- **Innere Kanten** sind die übrigen Kanten



$n = 9$  Knoten    (5 äußere, 4 innere)  
 $m = 14$  Kanten    (8 äußere, 6 innere)  
 $f = 7$  Facetten    (1 äußere, 6 innere)

**Satz von Euler:** Sei  $G$  ein zusammenhängender Graph mit einer planaren Zeichnung mit  $n$  Knoten,  $m$  Kanten und  $f$  Facetten. Dann gilt

$$n - m + f = 2$$

*Beweis:* Beweise  $m - (f - 1) = n - 1$ , woraus die Behauptung folgt. Führe dafür eine Induktion nach  $f - 1$ , der Anzahl der inneren Facetten, durch.

- I.A.:  $f - 1 = 0$ , d.h. keine innere Facette  $\rightarrow G$  ist ein Baum, also kreisfrei und zusammenhängend  $\rightarrow m = n - 1$
- I.S.:  $f - 1 \geq 1$ , d.h. min. eine innere Facette
  - Sei  $e$  eine Kante zwischen äußerer und innerer Facette  $\rightarrow G' = G - e$  ist zusammenhängend  $\rightarrow$  In  $G'$  gilt  $n' = n, m' = m - 1, f' = f - 1$
  - Mit I.V. folgt:  $m' - (f' - 1) = n' - 1 \Leftrightarrow m - 1 - (f - 1 - 1) = n - 1 \Leftrightarrow m - (f - 1) = n - 1$



**Korollar aus Euler-Formel:** Sei  $G$  ein planarer, einfacher Graph mit  $n \geq 3$  Knoten,  $m$  Kanten, und kleinstem vorkommenden Knotengrad  $\delta(G)$ . Dann gilt

$$m \leq 3n - 6 \quad \text{und} \quad \delta(G) \leq 5$$

Beide Ungleichungen sind bestmöglich.

*Beweis:*  $m \leq 3n - 6$

- O.B.d.A.  $G$  ist zusammenhängend, da man Kanten einfügen kann bis er das ist
- Jede Facette ist berandet von min. 3 Kantenseiten, da  $n \geq 3$
- Jede Kantenseite in genau eine Facette
- Jede Kante hat genau 2 Seiten

$$\implies 3f \leq \text{Anzahl der Seiten-Facetten-Inzidenzen} = 2m$$

$$\implies 3(2 + m - n) \leq 2m \implies m \leq 3n - 6 \text{ (mit Euler-Formel)}$$

*Beweis:*  $\delta(G) \leq 5$

- Jede Kante hat genau 2 inzidente Knoten
- Jeder Knoten  $v$  hat genau  $\deg(v)$  inzidente Kanten
- Für jeden Knoten  $v$  gilt  $\deg(v) \geq \delta(G)$

$$\implies 2m = \text{Anzahl der Knoten-Kanten-Inzidenzen} = \sum_{v \in V(G)} \deg(v) \geq \delta(G) \cdot n$$

$$\implies 2(3n - 6) \geq 2m \geq \delta(G) \cdot n \implies \delta(G) \leq 6 - 12/n$$

## 2 Einbetten und Dualisieren

**Einbettung** = Äquivalenzklasse von planaren Zeichnungen



**Definition:** Sei  $G = (V, E)$  ein zusammenhängender Graph mit einer planaren Zeichnung. Die **(kombinatorische) Einbettung** ist

- für jeden Knoten  $v$  die zyklische (cw = „clockwise“) Reihenfolge der inzidenten Halbkanten an  $v$
- für jede Facette  $f$  die zykl. (cw) Reihenfolge der inzidenten Kantenseiten an  $f$

Betrachte dafür beliebige Orientierung der Kanten und man erhält Halbkanten  $e^{\text{in}}$  und  $e^{\text{out}}$  sowie Kantenseiten  $e^{\text{left}}$  und  $e^{\text{right}}$  von  $e$



Alle Zeichnungen mit der gleichen Einbettung sind äquivalent.

**Definition:** Sei  $G = (V, E)$  ein zusammenhängender Graph mit einer festen Einbettung und Facettenmenge  $F$ . Der **Dualgraph**  $G^* = (V^*, E^*)$  ist

- $V^* = F$ , das heißt,  $f \in F \mapsto v_f \in V^*$
- für jede Kante  $e \in E$  läuft die duale Kante  $e^*$  zwischen der Facette an  $e^{\text{left}}$  und der an  $e^{\text{right}}$



Die Einbettung des **Primalgraphen**  $G = (V, E)$  induziert eine Einbettung des **Dualgraphen**  $G^* = (V^*, E^*)$ :

primal	dual
$f \in F$	$v_f = f \in V^* = F$
$e^{\text{left}}, e^{\text{right}}$	$(e^*)^{\text{out}}, (e^*)^{\text{in}}$
$v \in V$	$f_v = v \in F^*$
$e$ Brücke	$e^*$ Schlinge
$e$ Schlinge	$e^*$ Brücke

**Bemerkungen:**

- Der Dualgraph  $G^*$  ist immer zusammenhängend
- Falls  $G$  zusammenhängend ist, gilt  $G = (G^*)^*$
- Für jede Einbettung von  $G$  und jede Facette  $f$  gibt es eine planare Zeichnung mit dieser Einbettung und  $f$  als äußere Facette

### 3 Graphfärbung

**Definition:** Sei  $G = (V, E)$  ein Graph,  $k \in \mathbb{N}$ . Eine  **$k$ -Färbung** von  $G$  ist eine Abbildung  $c: V \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ , sodass  $c(u) \neq c(v)$  für jede Kante  $uv \in E$

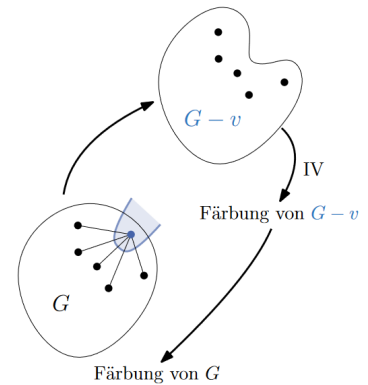
- Kleinstes  $k$ , für das so eine  $k$ -Färbung existiert, heißt **chromatische Zahl**  $\chi(G)$
- Bei Färbungen nehmen wir Graphen implizit als schlingenfrei an

**Frage:** Was ist die größte chromatische Zahl die ein planarer Graph annehmen kann, d.h. was ist  $\chi_{\text{planar}} := \max\{\chi(G) \mid G \text{ planar}\}$ ?

**Lemma:**  $\chi_{\text{planar}} \leq 6$

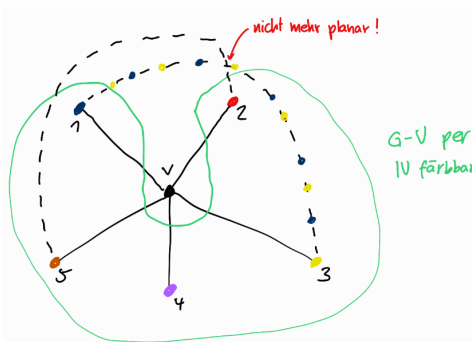
*Beweis:* Führe Induktion über  $|V|$

- I.A.:  $|V| \leq 6$ : Man erhält eine Färbung, indem jeder Knoten eine eigene Farbe bekommt
- I.S.:  $|V| > 6$ 
  - Nach Euler-Formel gibt es  $v \in V$  mit  $\deg(v) \leq 5$
  - Nach I.V. gibt es 6-Färbung von  $G \setminus v$
  - Nachbarn von  $v$  in  $G \setminus v$  decken höchstens fünf Farben ab  $\rightarrow$  Färbe  $v$  in verbleibender Farbe



**Lemma:**  $\chi_{\text{planar}} \leq 5$

*Beweis:* Induktion analog zum oberen Beweis



I.S.:

- Nach Euler-Formel gibt es  $v \in V$  mit  $\deg(v) \leq 5$
- Nach I.V. gibt es 5-Färbung von  $G \setminus v$
- Betrachte Teilgraph, der nur blau-gelbe Knoten enthält:

- Fall 1: 1 und 3 liegen in unterschiedlichen Zusammenhangskomponenten  
 → Tausche in einer Zusammenhangskomponente alle blauen durch gelbe und alle gelben Knoten durch blaue aus → Farbe wird für  $v$  frei
- Fall 2 (siehe Bild): 1 und 3 liegen in der selben Zusammenhangskomponente.  
 Für rot-lila-Teilgraph können 2 und 4 nicht in der selben Zusammenhangskomponente liegen, da Graph sonst nicht mehr planar wäre  
 → Farbe wird für  $v$  frei

**Definition:** Sei  $G = (V, E)$  ein einfacher Graph. Sei  $L: V \rightarrow 2^{\mathbb{N}}$  eine Listenzuweisung, d.h.  $L(v)$  ist Menge von Zahlen / Farben. Eine  **$L$ -Listenfärbung** von  $G$  ist eine Knotenfärbung  $c$  mit

- $c(v) \in L(v)$  für jeden Knoten  $v \in V$
- $c(u) \neq c(v)$  für jede Kante  $uv \in E$

$G$  heißt  **$k$ -listenfärbbar** wenn für jede Listenzuweisung  $L$  mit  $|L(v)| \geq k$  für jeden Knoten  $v \in V$  eine  $L$ -Listenfärbung von  $G$  existiert.

- Kleinstes  $k$ , für das  $G$   $k$ -listenfärbbar ist, heißt **listenchromatische Zahl**  $\chi_{\text{list}}(G)$

**Beweisskizze zu Listenfärbungen:**

- $\chi_{\text{list}}(G) > k: \exists$  Listen  $L \not\vdash L$ -Listenfärbung
- $\chi_{\text{list}}(G) \leq k: \forall$  Listen  $L \exists L$ -Listenfärbung

**Lemma:** Für jeden planaren Graphen gilt  $\chi_{\text{list}}(G) \leq 6$

*Beweis:* Die gleiche Argumentation wie für  $\chi_{\text{planar}} \leq 6$  funktioniert

**Beobachtung:** Für jeden Graphen  $G$  gilt  $\chi_{\text{list}}(G) \geq \chi(G)$

*Beweis:*

- Setze  $L(v) = \{1, \dots, k\}$  für jeden Knoten  $v$
- Dann sind  $L$ -Listenfärbungen genau  $k$ -Knotenfärbungen  $\implies \chi(G) \leq \chi_{\text{list}}(G)$

**Satz von Voigt:** Es gibt einen planaren Graphen mit  $\chi_{\text{list}}(G) \geq 5$

*Beweis:* Konstruiere einen planaren Graphen  $G$  mit Listenzuweisung  $L$ , sodass

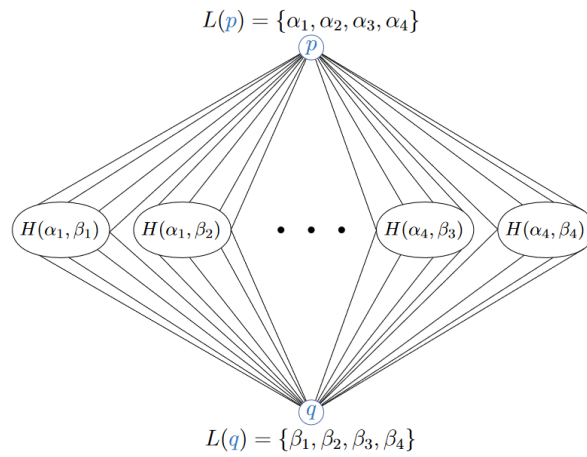
- $|L(v)| = 4$  für jeden Knoten  $v$
- keine  $L$ -Listenfärbung von  $G$  existiert

Betrachte dazu folgendes Gadget  $H(\alpha, \beta)$ :





Dieses Gadget ist nicht färbbar. Konstruiere nun aus 16 Gadgets den folgenden Graphen:



Dieser ist nicht  $L$ -listenfärbbar, denn für jede Färbung  $c$  ist Gadget  $H(c(p), c(q))$  nicht färbbar.

### Weitere Sätze und Beobachtungen:

- Für jeden planaren Graphen gilt  $\chi_{\text{list}}(G) \leq 5$  (**Satz von Thomassen**)  
 $\implies$  Mit obigem Satz folgt  $\max\{\chi_{\text{list}}(G) \mid G \text{ planar}\} = 5$
- Es gibt einen planaren Graphen mit  $\chi(G) \geq 4$
- Für jeden planaren Graphen  $G$  gilt  $\chi(G) \leq 4$  (**4-Farben-Satz**)  
 $\implies \chi_{\text{planar}} = 4$

**Ziel:** Beweise  $\chi_{\text{planar}} \leq 5$  mit einer stärkeren Aussage

**Satz:** Sei  $G = (V, E)$  ein planarer Graph mit:

- jede innere Facette ist ein Dreieck
- äußere Facette ist ein einfacher Kreis  $C$

Seien  $v_1, v_2$  zwei aufeinanderfolgende Knoten auf  $C$  und  $L$  eine Listenzuweisung mit:

- $|L(v)| = 5$  für  $v \in V \setminus C$
- $|L(v)| = 3$  für  $v \in C \setminus \{v_1, v_2\}$
- $L(v_1) = \alpha, L(v_2) = \beta$  mit  $\alpha \neq \beta$

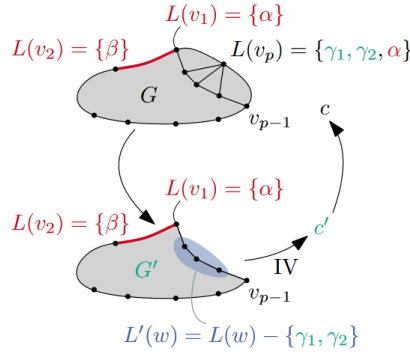
Dann gibt es eine  $L$ -Listenfärbung von  $G$ .

*Beweis:* Führe Induktion über  $|V|$

- I.A.:  $|V| = 3$ . Wähle  $c(v_3) \in L(v_3) \setminus \{\alpha, \beta\}$
- I.S.:  $|V| \geq 4$ . Betrachte nun 2 Fälle:
  - Fall 1:  $C$  hat eine Sehne  $e = v_i v_j$ . Zerteile  $G$  entlang  $e$  in zwei Graphen  $G_1, G_2$ . O.B.d.A liegt  $v_1 v_2$  in  $G_1$ . Nach IV gibt es eine Färbung  $c_1$  von  $G_1$ . Sei  $c_1(v_i) = \alpha'$  und  $c_1(v_j) = \beta'$ . Wende IV auf  $G_2$  an mit Listen  $\{\alpha'\}$  für  $v_i$  und  $\{\beta'\}$  für  $v_j$ .  $\rightarrow$  Färbung  $c_2$  von  $G_2 \rightarrow$  Da  $c_1$  und  $c_2$  an der Sehne  $v_i v_j$  übereinstimmen, erhalten wir eine Färbung von  $G$ .



- Fall 2:  $C$  hat keine Sehne. Betrachte Nachbarn  $v_p \neq v_2$  von  $v_1$  auf  $C$ . Lösche  $v_p$  auf  $G$  und erhalte  $G'$ .  $G'$  hat einfachen Kreis als äußere Facette, da  $v_p$  keine inzidente Sehne hat. Seien  $\gamma_1, \gamma_2$  zwei Farben aus  $L(v_p) \setminus \{\alpha\}$ . Für jeden inneren Nachbarn  $w$  von  $v_p$  definiere  $L'(w) = L(w) \setminus \{\gamma_1, \gamma_2\}$  und  $L'(v) = L(v)$  für jeden anderen Knoten  $v$ . Nach IV gibt es  $L'$ -Listenfärbung von  $G'$ , sodass kein innerer Nachbar von  $v_p$  die Farbe  $\gamma_1$  oder  $\gamma_2$  hat. Wähle  $c(v_p) \in \{\gamma_1, \gamma_2\} \setminus c'(v_{p-1})$  und erhalte somit eine  $L$ -Listenfärbung  $c$  von  $G$ .



**Bemerkung:** Für jeden beliebigen planaren Graphen  $G$  lassen sich Kanten und Knoten hinzufügen sowie Farben aus Listen entfernen, sodass der neue Graph  $G'$  den Anforderungen des obigen Satzes entspricht. Damit wurde die Aussage  $\chi(G) \leq \chi_{\text{list}}(G) \leq 5$  für jeden planaren Graphen  $G$  bewiesen.

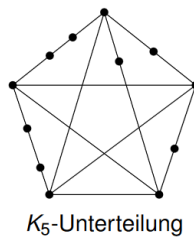
## 4 Unterteilungen und Minoren

**Definition:** Sei  $G = (V, E)$  ein Graph,  $e = uv$  eine Kante. Dann ist die **Unterteilung von  $e$  in  $G$**  der Graph  $G \circ e = (V', E')$  mit

- $V' = V + \{w\}$
- $E' = (E \setminus \{uv\}) + \{uw, vw\}$

**Beobachtung:**  $G$  planar  $\iff G \circ e$  planar

**Definition:** Graph  $G$  ist eine **Unterteilung von  $H$**  wenn  $G = ((H \circ e_1) \circ e_2) \cdots \circ e_k$ . Wir sagen auch  $G$  ist  **$H$ -Unterteilung**. Graph  $G$  **enthält eine  $H$ -Unterteilung**, wenn ein Teilgraph  $G' \subseteq G$  eine  $H$ -Unterteilung ist.



**Beobachtung:**

- $K_5$ - und  $K_{3,3}$ -Unterteilungen sind nicht-planar
- Jeder Graph der eine  $K_5$  oder  $K_{3,3}$ -Unterteilung enthält, ist nicht planar

**Satz von Kuratowski:**  $G$  ist planar  $\iff G$  enthält keine  $K_5$ - oder  $K_{3,3}$ -Unterteilung

*Beweis:* „ $\Rightarrow$ “ folgt aus obiger Beobachtung. Die Rückrichtung ist komplizierter und beweisen wir später.

**Definition:** Sei  $G = (V, E)$  ein Graph,  $e = uv$  eine Kante. Der Graph  $G/e = (V', E')$  ist der Graph, der durch Kontrahieren der Kante  $e$  entsteht, genauer:

- $V' = V \setminus \{u, v\} + \{w\}$
- $E' = E(G - u - v) \cup \{wa \mid au \in E \text{ oder } av \in E\}$

Diesen Prozess nennt man auch **Kantenkontraktion**. Dabei können Multikanten und Schleifen entstehen.



**Definition:** Graph  $H$  ist **Minor von  $G$** , wenn  $H$  aus  $G$  durch eine Folge von Kantenkontraktionen entsteht, also  $H = ((G/e_1)/e_2 \cdots)/e_k$ . Wir sagen dann auch:  $G$  ist ein  **$H$ -Minor** ( $H$  ist der kleinere Graph,  $G$  der Größere).

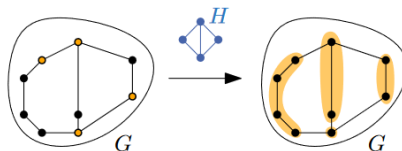
**Beobachtung:**

- $G$  planar  $\Rightarrow G/e$  planar
- $G$  enthält  $K_5$ - oder  $K_{3,3}$ -Minor  $\Rightarrow G$  nicht planar

**Satz von Wagner:**  $G$  planar  $\iff G$  enthält keinen  $K_5$ - oder  $K_{3,3}$ -Minor

**Lemma:**  $G$  enthält  $H$ -Unterteilung  $\Rightarrow G$  enthält  $H$ -Minor

*Beweis:* Kontrahiere durch Unterteilung entstandene Knoten zu ursprünglich adjazenten Knoten.



**Es sind also äquivalent:**

1.  $G$  ist nicht planar
2.  $G$  enthält  $K_5$ - oder  $K_{3,3}$ -Minor
3.  $G$  enthält  $K_5$ - oder  $K_{3,3}$ -Unterteilung

(3)  $\implies$  (2)  $\implies$  (1) wurde schon bewiesen, (1)  $\implies$  (2)  $\implies$  (3) müssen wir noch beweisen. Wir beginnen mit (1)  $\implies$  (2).

*Beweis von Wagner:* Es muss nur noch die Rückrichtung beweisen werden. Sei hierfür  $G$  ein nicht-planarer Graph. Wir müssen einen  $K_5$ - oder  $K_{3,3}$ -Minor in  $G$  finden. O.B.d.A. sei  $G$  sogar minimal nicht-planar, d.h.

- $G - v$  ist planar für jeden Knoten  $v \in V$
- $G - e$  ist planar für jede Kante  $e \in E$
- $G/e$  ist planar für jede Kante  $e \in E$

Beweise zunächst folgendes Lemma:

**Lemma:** Sei  $G$  minimal nicht-planar,  $xy \in E(G)$ . Dann ist  $G - x - y$  ein Kreis.