Zusammenfassung - Algorithmen für planare Graphen

Julian Shen

22. Mai 2023

1 Einführung

Definition: **Graph** ist ein Tupel $G = (V, E)$ mit endliche Knotenmenge V und endliche Kantenmenge E

- Kante $e \in E$ hat Form $e = uv$ mit $u, v \in V$.
- $uv = vu \rightarrow$ Graphen **ungerichtet**
- $e = uu$ ist erlaubt $\rightarrow$ **Schlinge**
- Auch $e = uv$ und $e' = uv$ erlaubt mit $e \neq e' \rightarrow$ **Mehrfachkante**
- **Einfacher Graph** $\iff$ ohne Schlingen und Mehrfachkanten
- **Zusammenhängend** $\iff$ ein Weg zwischen je zwei Knoten

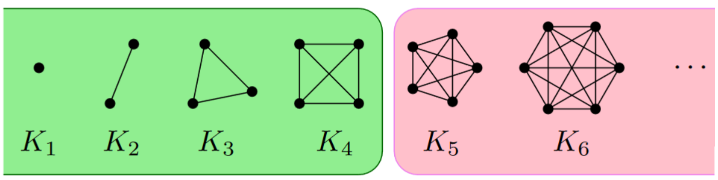
Definition: Eine **Zeichnung** von $G = (V, E)$ bildet diesen so auf $\mathbb{R}^2$ ab, dass

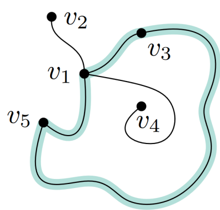
1. Knoten Punkte in der Ebene sind, d.h. $V \subset \mathbb{R}^2$
2. Kante $e = uv$ ist injektive, stetige Kurve von u nach v, d.h. $\gamma_e\colon [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit
    - $\gamma_e(0) = u$ und $\gamma_e(1) = v$
    - $\gamma_e(0) \notin V$ für alle $0 < t < 1$

- Zeichnung heißt **kreuzungsfrei** bzw. **planar** wenn für je zwei Kanten e, e' und $0 < t, t' < 1$ gilt: $\gamma_e(t) \neq \gamma_e(t')$
- Graph heißt **planar**, wenn er mindestens eine kreuzungsfreie Zeichnung besitzt

Definition: Für $n \in \mathbb{N}$ ist der **vollständige Graph** K_n

- $V(K_n) = \{v_1, \ldots, v_n\}$
- $E(K_n) = \{v_i v_j \mid v_i, v_j \in V, i \neq j\}$





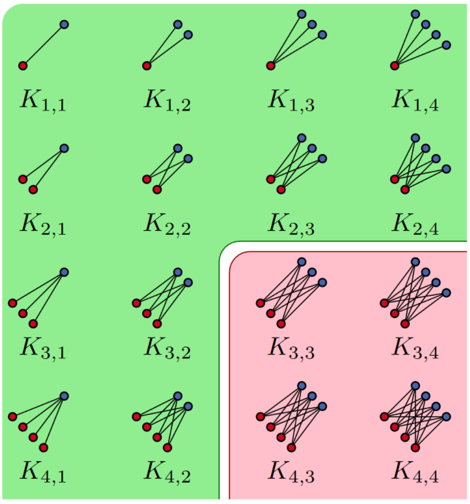
Lemma: Graph K_5 ist nicht planar

Beweis: Betrachte beliebige Zeichnung von K_5

- Betrachte v_1 und seine 4 ausgehenden Kanten
- O.B.d.A. Kanten kreuzungsfrei zu v_2, v_3, v_4, v_5 in zyklischer Reihenfolge um v_1
- Kanten v_1v_3, v_3v_5, v_5v_1 bilden geschlossene Kurve in $\mathbb{R}^2$ die v_2 und v_4 trennt $\implies$ v_2v_4 kann nicht kreuzungsfrei gezeichnet sein

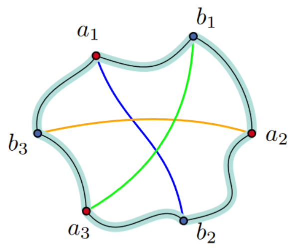
Definition: Für $m, n \in \mathbb{N}$ ist der vollständig bipartite Graph $K_{m,n}$

- $V(K_{m,n}) = \{a_1, \dots, a_m\} \cup \{b_1, \dots, b_n\}$
- $E(K_{m,n}) = \{a_i b_j \mid i \in \{1, \dots, m\}, j \in \{1, \dots, n\}\}$



Lemma: Graph $K_{3,3}$ ist nicht planar

Beweis: Betrachte beliebige Zeichnung von $K_{3,3}$



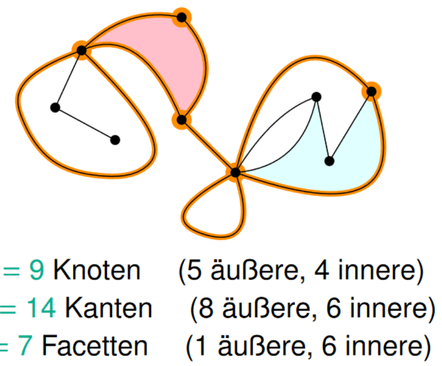
- Kreis $a_1 b_1 a_2 b_2 a_3 b_3$ im Graphen bildet eine geschlossene Kurve in $\mathbb{R}^2$
- Jede Kante von $a_1 b_2, a_2 b_3, a_3 b_1$ liegt komplett innerhalb oder komplett außerhalb dieser Kurve

  $\implies$ mindestens zwei liegen auf der gleichen Seite

  $\implies$ diese zwei kreuzen sich

Definitionen: Für eine feste planare Zeichnung eines planaren Graphen definiere:

- **Facetten**: Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{R}^2$ nach Entfernen aller Knoten und Kanten $\implies$ Es gibt genau eine **äußere Facette** und mehrere **innere Facetten**
- **Äußere Knoten** sind die, die inzident zur äußeren Facette sind
- **Innere Knoten** sind die übrigen Knoten
- **Äußere Kanten** sind die, die komplett im Rand der äußeren Facette liegen
- **Innere Kanten** sind die übrigen Kanten

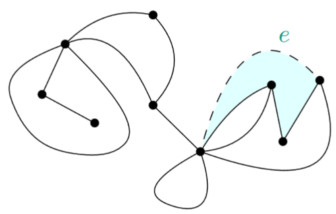


Satz von Euler: Sei G ein zusammenhängender Graph mit einer planaren Zeichnung mit n Knoten, m Kanten und f Facetten. Dann gilt

$$n - m + f = 2$$

Beweis: Beweise $m - (f - 1) = n - 1$, woraus die Behauptung folgt. Führe dafür eine Induktion nach $f - 1$, der Anzahl der inneren Facetten, durch.

- I.A.: $f - 1 = 0$, d.h. keine innere Facette $\to$ G ist ein Baum, also kreisfrei und zusammenhängend $\to$ $m = n - 1$
- I.S.: $f - 1 \geq 1$, d.h. min. eine innere Facette
  - Sei e eine Kante zwischen äußerer und innerer Facette $\to$ $G' = G - e$ ist zusammenhängend $\to$ In G' gilt $n' = n, m' = m - 1, f' = f - 1$
  - Mit I.V. folgt: $m' - (f' - 1) = n' - 1 \Leftrightarrow m - 1 - (f - 1 - 1) = n - 1 \Leftrightarrow m - (f - 1) = n - 1$



Korollar aus Euler-Formel: Sei G ein planarer, einfacher Graph mit $n \geq 3$ Knoten, m Kanten, und kleinstem vorkommenden Knotengrad $\delta(G)$. Dann gilt

$$m \leq 3n - 6 \qquad \text{und} \qquad \delta(G) \leq 5$$

Beide Ungleichungen sind bestmöglich.

Beweis: $m \leq 3n - 6$

- O.B.d.A. G ist zusammenhängend, da man Kanten einfügen kann bis er das ist
- Jede Facette ist berandet von min. 3 Kantenseiten, da $n \geq 3$
- Jede Kantenseite in genau eine Facette
- Jede Kante hat genau 2 Seiten

$\Longrightarrow$ $3f \leq$ Anzahl der Seiten-Facetten-Inzidenzen $= 2m$

$\Longrightarrow$ $3(2 + m - n) \leq 2m \implies m \leq 3n - 6$ (mit Euler-Formel)

Beweis: $\delta(G) \leq 5$

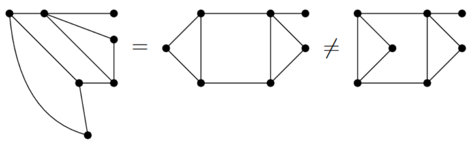
- Jede Kante hat genau 2 inzidente Knoten
- Jeder Knoten v hat genau $\deg(v)$ inzidente Kanten
- Für jeden Knoten v gilt $\deg(v) \geq \delta(G)$

$\Longrightarrow$ $2m =$ Anzahl der Knoten-Kanten-Inzidenzen $= \sum\limits_{v \in V(G)} \deg(v) \geq \delta(G) \cdot n$

$\Longrightarrow$ $2(3n - 6) \geq 2m \geq \delta(G) \cdot n \implies \delta(G) \leq 6 - 12/n$

2 Einbetten und Dualisieren

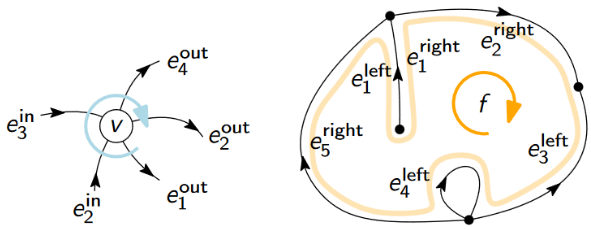
Einbettung = Äquivalenzklasse von planaren Zeichnungen



Definition: Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph mit einer planaren Zeichnung. Die **(kombinatorische) Einbettung** ist

- für jeden Knoten v die zyklische (cw = „clockwise") Reihenfolge der inzidenten Halbkanten an v
- für jede Facette f die zykl. (cw) Reihenfolge der inzidenten Kantenseiten an f

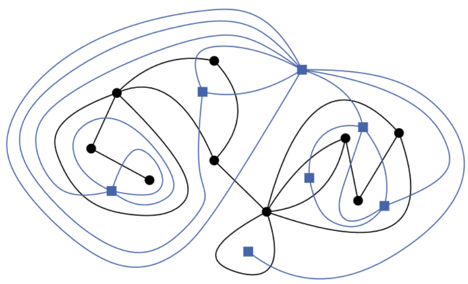
Betrachte dafür beliebige Orientierung der Kanten und man erhält Halbkanten e^{in} und e^{out} sowie Kantenseiten e^{left} und e^{right} von e



Alle Zeichnungen mit der gleichen Einbettung sind äquivalent.

Definition: Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph mit einer festen Einbettung und Facettenmenge F. Der **Dualgraph** $G^* = (V^*, E^*)$ ist

- $V^* = F$, das heißt, $f \in F \mapsto v_f \in V^*$
- für jede Kante $e \in E$ läuft die duale Kante e^* zwischen der Facette an e^{left} und der an e^{right}



Die Einbettung des **Primalgraphen** $G = (V, E)$ induziert eine Einbettung des **Dualgraphen** $G^* = (V^*, E^*)$:

primal	dual
$f \in F$	$v_f = f \in V^* = F$
e^{left}, e^{right}	$(e^*)^{out}, (e^*)^{in}$
$v \in V$	$f_v = v \in F^*$
e Brücke	e^* Schlinge
e Schlinge	e^* Brücke

Bemerkungen:

- Der Dualgraph G^* ist immer zusammenhängend
- Falls G zusammenhängend ist, gilt $G = (G^*)^*$
- Für jede Einbettung von G und jede Facette f gibt es eine planare Zeichnung mit dieser Einbettung und f als äußere Facette

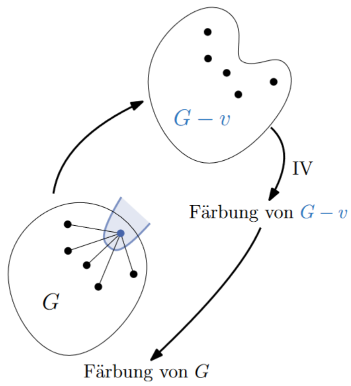
3 Graphfärbung

Definition: Sei $G = (V, E)$ ein Graph, $k \in \mathbb{N}$. Eine ***k*-Färbung** von G ist eine Abbildung $c\colon V \to \{1, 2, \dots, k\}$, sodass $c(u) \neq c(v)$ für jede Kante $uv \in E$

- Kleinstes k, für das so eine k-Färbung existiert, heißt **chromatische Zahl $\chi(G)$**
- Bei Färbungen nehmen wir Graphen implizit als schlingenfrei an

Frage: Was ist die größte chromatische Zahl die ein planarer Graph annehmen kann, d.h. was ist $\chi_{\text{planar}} := \max\{\chi(G) \mid G \text{ planar}\}$?

Lemma: $\chi_{\text{planar}} \leq 6$

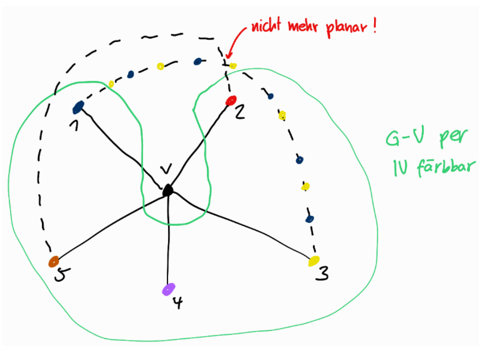


Beweis: Führe Induktion über $|V|$

- I.A.: $|V| \leq 6$: Man erhält eine Färbung, indem jeder Knoten eine eigene Farbe bekommt
- I.S.: $|V| > 6$
  - Nach Euler-Formel gibt es $v \in V$ mit $\deg(v) \leq 5$
  - Nach I.V. gibt es 6-Färbung von $G \setminus v$
  - Nachbarn von v in $G \setminus v$ decken höchstens fünf Farben ab $\to$ Färbe v in verbleibender Farbe

Lemma: $\chi_{\text{planar}} \leq 5$

Beweis: Induktion analog zum oberen Beweis



I.S.:

- Nach Euler-Formel gibt es $v \in V$ mit $\deg(v) \leq 5$
- Nach I.V. gibt es 5-Färbung von $G \setminus v$
- Betrachte Teilgraph, der nur blau-gelbe Knoten enthält:

- Fall 1: 1 und 3 liegen in unterschiedlichen Zusammenhangskomponenten

  $\rightarrow$ Tausche in einer Zusammenhangskomponente alle blauen durch gelbe und alle gelben Knoten durch blaue aus $\rightarrow$ Farbe wird für v frei

- Fall 2 (siehe Bild): 1 und 3 liegen in der selben Zusammenhangskomponente. Für rot-lila-Teilgraph können 2 und 4 nicht in der selben Zusammenhangskomponente liegen, da Graph sonst nicht mehr planar wäre

  $\rightarrow$ Farbe wird für v frei

Definition: Sei $G = (V, E)$ ein einfacher Graph. Sei $L\colon V \rightarrow 2^{\mathbb{N}}$ eine Listenzuweisung, d.h. $L(v)$ ist Menge von Zahlen / Farben. Eine ***L*-Listenfärbung** von G ist eine Knotenfärbung c mit

- $c(v) \in L(v)$ für jeden Knoten $v \in V$
- $c(u) \neq c(v)$ für jede Kante $uv \in E$

G heißt ***k*-listenfärbbar** wenn für jede Listenzuweisung L mit $|L(v)| \geq k$ für jeden Knoten $v \in V$ eine L-Listenfärbung von G existiert.

- Kleinstes k, für das G k-listenfärbbar ist, heißt **listenchromatische Zahl $\chi_{\text{list}}(G)$**

Beweisskizze zu Listenfärbungen:

- $\chi_{\text{list}}(G) > k$: $\exists$ Listen $L \quad \nexists$ L-Listenfärbung
- $\chi_{\text{list}}(G) \leq k$: $\forall$ Listen $L \quad \exists$ L-Listenfärbung

Lemma: Für jeden planaren Graphen gilt $\chi_{\text{list}}(G) \leq 6$

Beweis: Die gleiche Argumentation wie für $\chi_{\text{planar}} \leq 6$ funktioniert

Beobachtung: Für jeden Graphen G gilt $\chi_{\text{list}}(G) \geq \chi(G)$

Beweis:

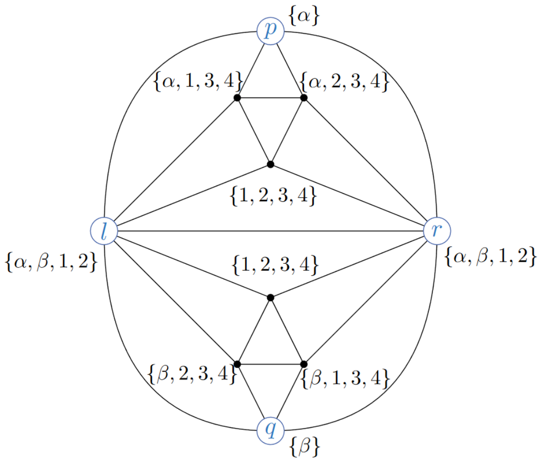
- Setze $L(v) = \{1, \ldots, k\}$ für jeden Knoten v
- Dann sind L-Listenfärbungen genau k-Knotenfärbungen $\implies \chi(G) \leq \chi_{\text{list}}(G)$

Satz von Voigt: Es gibt einen planaren Graphen mit $\chi_{\text{list}}(G) \geq 5$

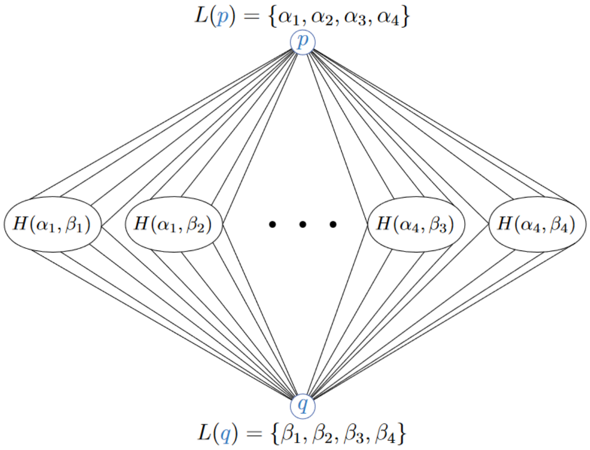
Beweis: Konstruiere einen planaren Graphen G mit Listenzuweisung L, sodass

- $|L(v)| = 4$ für jeden Knoten v
- keine L-Listenfärbung von G existiert

Betrachte dazu folgendes Gadget $H(\alpha, \beta)$:



Dieses Gadget ist nicht färbbar. Konstruiere nun aus 16 Gadgets den folgenden Graphen:



Dieser ist nicht L-listenfärbbar, denn für jede Färbung c ist Gadget $H(c(p), c(q))$ nicht färbbar.

Weitere Sätze und Beobachtungen:

- Für jeden planaren Graphen gilt $\chi_{\text{list}}(G) \leq 5$ (**Satz von Thomassen**)

  $\implies$ Mit obigem Satz folgt $\max\{\chi_{\text{list}}(G) \mid G \text{ planar}\} = 5$
- Es gibt einen planaren Graphen mit $\chi(G) \geq 4$
- Für jeden planaren Graphen G gilt $\chi(G) \leq 4$ (**4-Farben-Satz**)

  $\implies$ $\chi_{\text{planar}} = 4$

Ziel: Beweise $\chi_{\text{planar}} \leq 5$ mit einer stärkeren Aussage

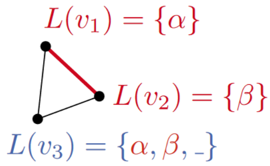
Satz: Sei $G = (V, E)$ ein planarer Graph mit:

- jede innere Facette ist ein Dreieck
- äußere Facette ist ein einfacher Kreis C

Seien v_1, v_2 zwei aufeinanderfolgende Knoten auf C und L eine Listenzuweisung mit:

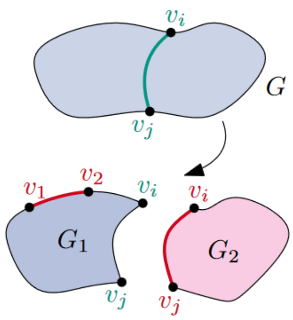
- $|L(v)| = 5$ für $v \in V \setminus C$
- $|L(v)| = 3$ für $v \in C \setminus \{v_1, v_2\}$
- $L(v_1) = \alpha, L(v_2) = \beta$ mit $\alpha \neq \beta$

Dann gibt es eine L-Listenfärbung von G.

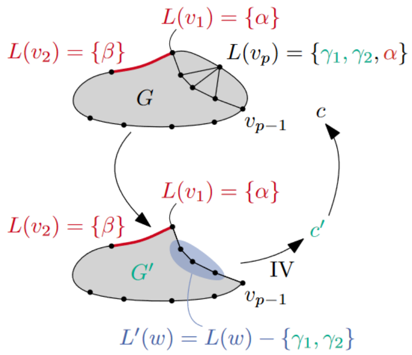


Beweis: Führe Induktion über $|V|$

- I.A.: $|V| = 3$. Wähle $c(v_3) \in L(v_3) \setminus \{\alpha, \beta\}$
- I.S.: $|V| \geq 4$. Betrachte nun 2 Fälle:
  - Fall 1: C hat eine Sehne $e = v_i v_j$. Zerteile G entlang e in zwei Graphen G_1, G_2. O.B.d.A liegt $v_1 v_2$ in G_1. Nach IV gibt es eine Färbung c_1 von G_1. Sei $c_1(v_i) = \alpha'$ und $c_1(v_j) = \beta'$. Wende IV auf G_2 an mit Listen $\{\alpha'\}$ für v_i und $\{\beta'\}$ für v_j. $\rightarrow$ Färbung c_2 von G_2 $\rightarrow$ Da c_1 und c_2 an der Sehne $v_i v_j$ übereinstimmen, erhalten wir eine Färbung von G.



  - Fall 2: C hat keine Sehne. Betrachte Nachbarn $v_p \neq v_2$ von v_1 auf C. Lösche v_p auf G und erhalte G'. G' hat einfachen Kreis als äußere Facette, da v_p keine inzidente Sehne hat. Seien γ_1, γ_2 zwei Farben aus $L(v_p) \setminus \{\alpha\}$. Für jeden inneren Nachbarn w von v_p definiere $L'(w) = L(w) \setminus \{\gamma_1, \gamma_2\}$ und $L'(v) = L(v)$ für jeden anderen Knoten v. Nach IV gibt es L'-Listenfärbung von G', sodass kein innerer Nachbar von v_p die Farbe γ_1 oder γ_2 hat. Wähle $c(v_p) \in \{\gamma_1, \gamma_2\} \setminus c'(v_{p-1})$ und erhalte somit eine L-Listenfärbung c von G.



Bemerkung: Für jeden beliebigen planaren Graphen G lassen sich Kanten und Knoten hinzufügen sowie Farben aus Listen entfernen, sodass der neue Graph G' den Anforderungen des obigen Satzes entspricht. Damit wurde die Aussage $\chi(G) \leq \chi_{\text{list}(G)} \leq 5$ für jeden planaren Graphen G bewiesen.

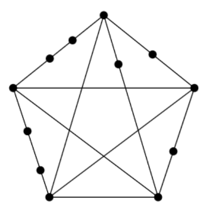
4 Unterteilungen und Minoren

Definition: Sei $G = (V, E)$ ein Graph, $e = uv$ eine Kante. Dann ist die **Unterteilung von *e* in *G*** der Graph $G \circ e = (V', E')$ mit

- $V' = V + \{w\}$
- $E' = (E \setminus \{uv\}) + \{uw, vw\}$

Beobachtung: G planar $\iff$ $G \circ e$ planar

Definition: Graph G ist eine **Unterteilung von *H*** wenn $G = ((H \circ e_1) \circ e_2) \cdots) \circ e_k$. Wir sagen auch G ist ***H*-Unterteilung**. Graph G **enthält eine *H*-Unterteilung**, wenn ein Teilgraph $G' \subseteq G$ eine H-Unterteilung ist.


K_5-Unterteilung

Beobachtung:

- K_5- und $K_{3,3}$-Unterteilungen sind nicht-planar
- Jeder Graph der eine K_5 oder $K_{3,3}$-Unterteilung enthält, ist nicht planar

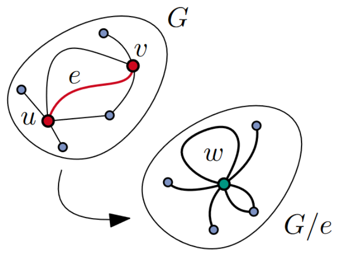
Satz von Kuratowski: G ist planar $\iff$ G enthält keine K_5- oder $K_{3,3}$-Unterteilung

Beweis: „⇒“ folgt aus obiger Beobachtung. Die Rückrichtung ist komplizierter und beweisen wir später.

Definition: Sei $G = (V, E)$ ein Graph, $e = uv$ eine Kante. Der Graph $G/e = (V', E')$ ist der Graph, der durch Kontrahieren der Kante $\boldsymbol{e}$ entsteht, genauer:

- $V' = V \setminus \{u, v\} + \{w\}$
- $E' = E(G - u - v) \cup \{wa \mid au \in E \text{ oder } av \in E\}$

Diesen Prozess nennt man auch **Kantenkontraktion**. Dabei können Multikanten und Schlaufen entstehen.



Definition: Graph H ist **Minor von $\boldsymbol{G}$**, wenn H aus G durch eine Folge von Kantenkontraktionen entsteht, also $H = ((G/e_1)/e_2 \cdots)/e_k$. Wir sagen dann auch: G ist ein **$\boldsymbol{H}$-Minor** (H ist der kleinere Graph, G der Größere).

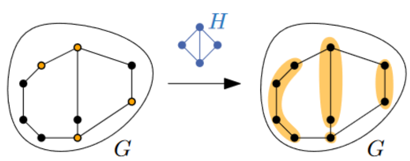
Beobachtung:

- G planar $\implies$ G/e planar
- G enthält K_5- oder $K_{3,3}$-Minor $\implies$ G nicht planar

Satz von Wagner: G planar $\iff$ G enthält keinen K_5- oder $K_{3,3}$-Minor

Lemma: G enthält H-Unterteilung $\implies$ G enthält H-Minor

Beweis: Kontrahiere durch Unterteilung entstandene Knoten zu ursprünglich adjazenten Knoten.



Es sind also äquivalent:

1. G ist nicht planar
2. G enthält K_5- oder $K_{3,3}$-Minor
3. G enthält K_5- oder $K_{3,3}$-Unterteilung

(3) $\implies$ (2) $\implies$ (1) wurde schon bewiesen, (1) $\implies$ (2) $\implies$ (3) müssen wir noch beweisen. Wir beginnen mit (1) $\implies$ (2).

Beweis von Wagner: Es muss nur noch die Rückrichtung beweisen werden. Sei hierfür G ein nicht-planarer Graph. Wir müssen einen K_5- oder $K_{3,3}$-Minor in G finden. O.B.d.A. sei G sogar minimal nicht-planar, d.h.

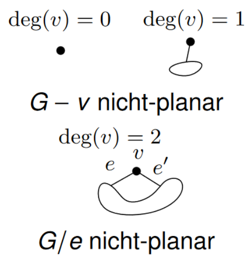
- $G - v$ ist planar für jeden Knoten $v \in V$
- $G - e$ ist planar für jede Kante $e \in E$
- G/e ist planar für jede Kante $e \in E$

Beweise zunächst folgendes Lemma:

Lemma: Sei G minimal nicht-planar, $xy \in E(G)$. Dann ist $G - x - y$ ein Kreis.

Beweis: Da G minimal nicht-planar ist,

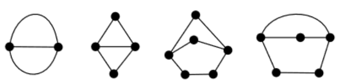
- ist G zusammenhängend, da ansonsten Knoten aus einer Zusammenhangskomponente gelöscht werden könnte
- ist $\deg(v) \geq 3$ für jeden Knoten $v \in V(G)$, denn Knoten von Grad 0 und 1 tragen nichts zur Nicht-Planarität bei, können also gelöscht werden ohne die Nicht-Planarität zu verlieren. Für einen Knoten v von Grad 2 mit Kanten e, e' bleibt G/e nicht-planar. Wäre G/e planar, so muss wegen $G = (G/e) \circ e'$ bereits G planar sein. Widerspruch.



Das Lemma wird nun anhand von 3 Behauptungen bewiesen.

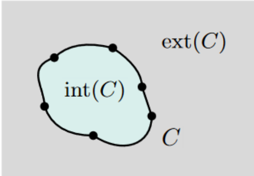
<u>1. Behauptung</u>: $G - x - y$ enthält kein Θ.

Theta-Graphen sind Unterteilungen des Graphen mit zwei Knoten und drei parallelen Kanten.



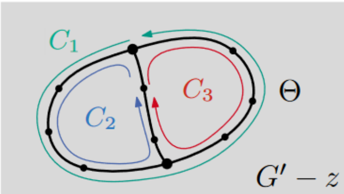
Notation: Für einen Kreis C in einer planaren Zeichnung erhält man eine geschlossene **Jordankurve**, die die Ebene in zwei Komponenten unterteilt:

- $\mathrm{int}(C)$, das Innere von C
- $\mathrm{ext}(C)$, das Äußere von C

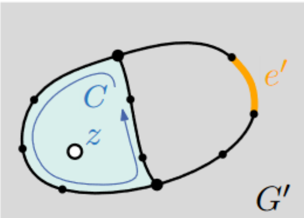


Beweis von Behauptung 1:

- Angenommen $G - x - y$ enthält ein Θ.
- $G' := G/xy$ ist planar mit Kante xy zu Knoten z kontrahiert.
- $G' - z = G - x - y$ ist ebenfalls planar.
- Zeichnung von G' enthält ein Θ und das Θ hat 3 Kreise:

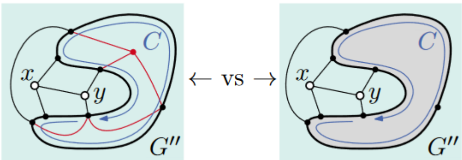


- Betrachte Kreis C im Θ, sodass Knoten z auf einer Seite von C und eine Kante $e' \in E(\Theta)$ auf der anderen Seite von C liegt.
- Wähle Θ und C so, dass die Seite von C mit z inklusionsminimal ist, d.h. es gibt kein anderes Θ mit Kreis C, was z enthält und ein kleineres Inneres hat
- O.B.d.A. gilt $z \in \mathrm{int}(C)$ und $e' \in \mathrm{ext}(C)$



- Betrachte $G'' = G - \mathrm{ext}(C)$.
- Da $e' \notin G''$ ist, wird mindestens eine Kante gelöscht, also ist G'' planar.
- Betrachte eine planare Zeichnung von G'' mit Kreis C.

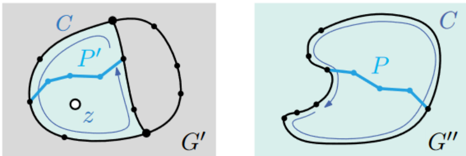
<u>Ziel</u>: Zeige, dass C eine Facette berandet, denn dann kann $\mathrm{ext}(C)$ in C eingesetzt werden, was aber eine planare Zeichnung von G wäre. ↯



- Betrachte Pfad P in G'', der auf verschiedenen Knoten von C startet und endet und ansonsten zu C disjunkt ist.
- P entspricht auch einem Pfad P' in G'.

Wenn $z \notin P'$:

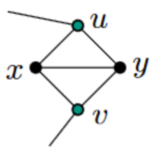
- Dann ist $C \cup P'$ ein Θ in $G - x - y$.
- Dieses Θ hat einen Kreis der z enthält, aber ein kleineres Inneres als C hat.
- Widerspruch zur Wahl von Θ und C.



Also liegt z auf P' und P muss x oder y enthalten. Also liegt jeder solche Pfad in der Zeichnung von G'' auf der Seite von C, die xy enthält.

$\implies$ C liegt im Rand einer Facette von G''

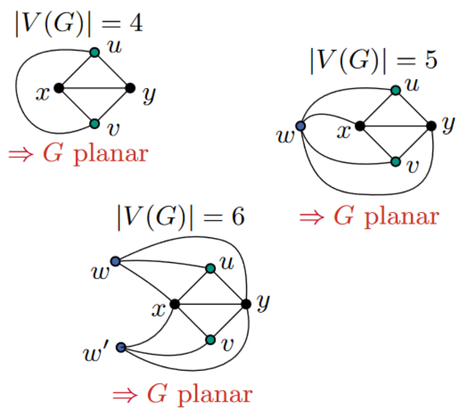
Damit ist *Behauptung 1* bewiesen.



2. Behauptung: $G - x - y$ enthält keine zwei Knoten vom Grad 1.

Beweis von Behauptung 2:

- Angenommen u, v sind zwei Knoten in $G - x - y$ mit Grad 1.
- Da $\deg(u), \deg(v) \geq 3$ in G, sind $ux, uy, vx, vy \in E(G)$ und u, v, x, y bilden ein Θ
- Nach Behauptung 1 hat jede Kante in G mindestens einen Endpunkt in u, v, x, y, um das Θ bei Kontraktion einer beliebigen Kante zu zerstören.
- Jedes $w \neq u, v, x, y$ ist zu u, v oder beiden benachbart, da $\deg(w) \geq 3$.
- Höchstens 2 Knoten außerhalb von u, v, x, y.



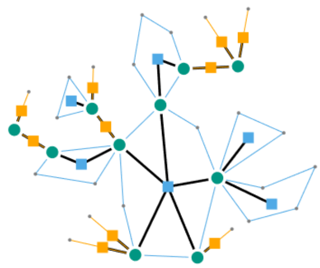
$\Longrightarrow$ In allen Fällen ergibt sich ein Widerspruch zur Nicht-Planarität von G.

Damit ist *Behauptung 2* bewiesen.

Definition: Ein Graph enthält genau dann kein Θ, wenn jede Kante auf höchstens einem Kreis liegt. Solche Graphen nennt man **Kakteen**. Kakteen sind kantendisjunkte Vereinigungen von Kreisen und Brücken.

Definition: Der **Block-Cutvertex-Tree** eines zusammenhängenden Graphen G (hier ist G Kaktus) ist ein Baum T mit:

- $V(T) = \{\text{Artikulationspunkt in } G\} \cup \{\text{Kreise in } G\} \cup \{\text{Brücken in } G\}$
- $E(T) = \{vb \mid v \text{ Artikulationspunkt}, b \text{ Brücke oder Kreis}, v \text{ Knoten auf } b \text{ in } G\}$



Behauptung 3: $G - x - y$ ist tatsächlich ein Kreis.

Beweis von Behauptung 3:

- Sei T Block-Cutvertex-Tree von $G - x - y$.
- Wenn $G - x - y$ keinen Artikulationspunkt enthält, ist $G - x - y$ ein Kreis (Beweis fertig) oder eine Kante. Dann gilt $|V(G)| \leq 4$, da G höchstens nur die Knoten x, y und die Endpunkte der Kante enthält $\Longrightarrow$ G ist planar ↯
- Also gibt es Artikulationspunkte und $|T| \geq 2$