

Zusammenfassung - Algorithmen für planare Graphen

Julian Shen

13. August 2023

1 Einführung

Definition: Graph ist ein Tupel $G = (V, E)$ mit endliche Knotenmenge V und endliche Kantenmenge E

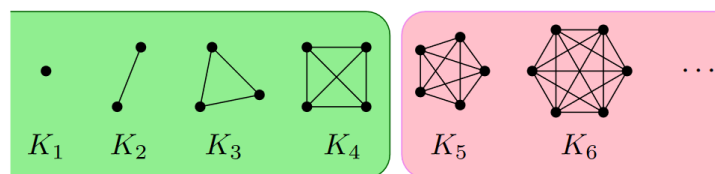
- Kante $e \in E$ hat Form $e = uv$ mit $u, v \in V$.
- $uv = vu \rightarrow$ Graphen **ungerichtet**
- $e = uu$ ist erlaubt \rightarrow **Schlinge**
- Auch $e = uv$ und $e' = uv$ erlaubt mit $e \neq e' \rightarrow$ **Mehrfachkante**
- **Einfacher Graph** \iff ohne Schlingen und Mehrfachkanten
- **Zusammenhängend** \iff ein Weg zwischen je zwei Knoten

Definition: Eine **Zeichnung** von $G = (V, E)$ bildet diesen so auf \mathbb{R}^2 ab, dass

1. Knoten Punkte in der Ebene sind, d.h. $V \subset \mathbb{R}^2$
 2. Kante $e = uv$ ist injektive, stetige Kurve von u nach v , d.h. $\gamma_e: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit
 - $\gamma_e(0) = u$ und $\gamma_e(1) = v$
 - $\gamma_e(t) \notin V$ für alle $0 < t < 1$
- Zeichnung heißt **kreuzungsfrei** bzw. **planar** wenn für je zwei Kanten e, e' und $0 < t, t' < 1$ gilt: $\gamma_e(t) \neq \gamma_{e'}(t')$
 - Graph heißt **planar**, wenn er mindestens eine kreuzungsfreie Zeichnung besitzt

Definition: Für $n \in \mathbb{N}$ ist der **vollständige Graph** K_n

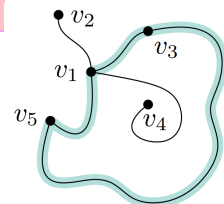
- $V(K_n) = \{v_1, \dots, v_n\}$
- $E(K_n) = \{v_i v_j \mid i, j \in \{1, \dots, n\}, i \neq j\}$



Lemma: Graph K_5 ist nicht planar

Beweis: Betrachte beliebige Zeichnung von K_5

- Betrachte v_1 und seine 4 ausgehenden Kanten
- O.B.d.A. Kanten kreuzungsfrei zu v_2, v_3, v_4, v_5 in zyklischer Reihenfolge um v_1
- Kanten $v_1 v_3, v_3 v_5, v_5 v_1$ bilden geschlossene Kurve in \mathbb{R}^2 die v_2 und v_4 trennt $\implies v_2 v_4$ kann nicht kreuzungsfrei gezeichnet sein



Definition: Für $m, n \in \mathbb{N}$ ist der $K_{m,n}$

- $V(K_{m,n}) = \{a_1, \dots, a_m\} \cup \{b_1, \dots, b_n\}$
- $E(K_{m,n}) = \{a_i b_j \mid i \in \{1, \dots, m\}, j \in \{1, \dots, n\}\}$



Lemma: Graph $K_{3,3}$ ist nicht planar

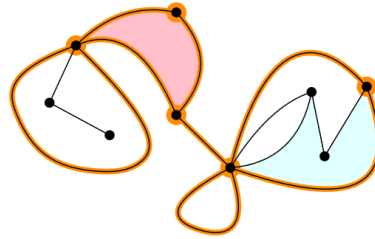
Beweis: Betrachte beliebige Zeichnung von $K_{3,3}$

- Kreis $a_1 b_1 a_2 b_2 a_3 b_3$ im Graphen bildet eine geschlossene Kurve in \mathbb{R}^2
 - Jede Kante von $a_1 b_2, a_2 b_3, a_3 b_1$ liegt komplett innerhalb oder komplett außerhalb dieser Kurve
- \implies mindestens zwei liegen auf der gleichen Seite
- \implies diese zwei kreuzen sich



Definitionen: Für eine feste planare Zeichnung eines planaren Graphen definiere:

- **Facetten:** Zusammenhangskomponenten von \mathbb{R}^2 nach Entfernen aller Knoten und Kanten \implies Es gibt genau eine **äußere Facette** und mehrere **innere Facetten**
- **Äußere Knoten** sind die, die inzident zur äußeren Facette sind
- **Innere Knoten** sind die übrigen Knoten
- **Äußere Kanten** sind die, die komplett im Rand der äußeren Facette liegen
- **Innere Kanten** sind die übrigen Kanten



$n = 9$ Knoten (5 äußere, 4 innere)
 $m = 14$ Kanten (8 äußere, 6 innere)
 $f = 7$ Facetten (1 äußere, 6 innere)

Satz von Euler: Sei G ein zusammenhängender Graph mit einer planaren Zeichnung mit n Knoten, m Kanten und f Facetten. Dann gilt

$$n - m + f = 2$$

Beweis: Beweise $m - (f - 1) = n - 1$, woraus die Behauptung folgt. Führe dafür eine Induktion nach $f - 1$, der Anzahl der inneren Facetten, durch.

- I.A.: $f - 1 = 0$, d.h. keine innere Facette $\rightarrow G$ ist ein Baum, also kreisfrei und zusammenhängend $\rightarrow m = n - 1$
- I.S.: $f - 1 \geq 1$, d.h. min. eine innere Facette
 - Sei e eine Kante zwischen äußerer und innerer Facette $\rightarrow G' = G - e$ ist zusammenhängend \rightarrow In G' gilt $n' = n, m' = m - 1, f' = f - 1$
 - Mit I.V. folgt: $m' - (f' - 1) = n' - 1 \Leftrightarrow m - 1 - (f - 1 - 1) = n - 1 \Leftrightarrow m - (f - 1) = n - 1$



Korollar aus Euler-Formel: Sei G ein planarer, einfacher Graph mit $n \geq 3$ Knoten, m Kanten, und kleinstem vorkommenden Knotengrad $\delta(G)$. Dann gilt

$$m \leq 3n - 6 \quad \text{und} \quad \delta(G) \leq 5$$

Beide Ungleichungen sind bestmöglich.

Beweis: $m \leq 3n - 6$

- O.B.d.A. G ist zusammenhängend, da man Kanten einfügen kann bis er das ist
- Jede Facette ist berandet von min. 3 Kantenseiten, da $n \geq 3$
- Jede Kantenseite in genau 1 Facette
- Jede Kante hat genau 2 Seiten

$$\implies 3f \leq \text{Anzahl der Seiten-Facetten-Inzidenzen} = 2m$$

$$\implies 3(2 + m - n) \leq 2m \implies m \leq 3n - 6 \text{ (mit Euler-Formel)}$$

Beweis: $\delta(G) \leq 5$

- Jede Kante hat genau 2 inzidente Knoten
- Jeder Knoten v hat genau $\deg(v)$ inzidente Kanten
- Für jeden Knoten v gilt $\deg(v) \geq \delta(G)$

$$\implies 2m = \text{Anzahl der Knoten-Kanten-Inzidenzen} = \sum_{v \in V(G)} \deg(v) \geq \delta(G) \cdot n$$

$$\implies 2(3n - 6) \geq 2m \geq \delta(G) \cdot n \implies \delta(G) \leq 6 - 12/n$$

2 Einbetten und Dualisieren

Einbettung = Äquivalenzklasse von planaren Zeichnungen



Definition: Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph mit einer planaren Zeichnung. Die **(kombinatorische) Einbettung** ist

- für jeden Knoten v die zyklische (cw = „clockwise“) Reihenfolge der inzidenten Halbkanten an v
- für jede Facette f die zykl. (cw) Reihenfolge der inzidenten Kantenseiten an f

Betrachte dafür beliebige Orientierung der Kanten und man erhält Halbkanten e^{in} und e^{out} sowie Kantenseiten e^{left} und e^{right} von e



Alle Zeichnungen mit der gleichen Einbettung sind äquivalent.

Definition: Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph mit einer festen Einbettung und Facettenmenge F . Der **Dualgraph** $G^* = (V^*, E^*)$ ist

- $V^* = F$, das heißt, $f \in F \mapsto v_f \in V^*$
- für jede Kante $e \in E$ läuft die duale Kante e^* zwischen der Facette an e^{left} und der an e^{right}



Die Einbettung des **Primalgraphen** $G = (V, E)$ induziert eine Einbettung des **Dualgraphen** $G^* = (V^*, E^*)$:

primal	dual
$f \in F$	$v_f = f \in V^* = F$
$e^{\text{left}}, e^{\text{right}}$	$(e^*)^{\text{out}}, (e^*)^{\text{in}}$
$v \in V$	$f_v = v \in F^*$
e Brücke	e^* Schlinge
e Schlinge	e^* Brücke

Bemerkungen:

- Der Dualgraph G^* ist immer zusammenhängend
- Falls G zusammenhängend ist, gilt $G = (G^*)^*$
- Für jede Einbettung von G und jede Facette f gibt es eine planare Zeichnung mit dieser Einbettung und f als äußere Facette

3 Graphfärbung

Definition: Sei $G = (V, E)$ ein Graph, $k \in \mathbb{N}$. Eine **k -Färbung** von G ist eine Abbildung $c: V \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$, sodass $c(u) \neq c(v)$ für jede Kante $uv \in E$

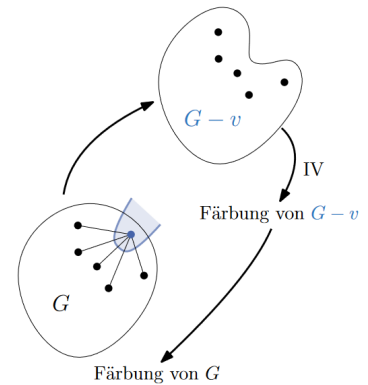
- Kleinstes k , für das so eine k -Färbung existiert, heißt **chromatische Zahl** $\chi(G)$
- Bei Färbungen nehmen wir Graphen implizit als schlingenfrei an

Frage: Was ist die größte chromatische Zahl die ein planarer Graph annehmen kann, d.h. was ist $\chi_{\text{planar}} := \max\{\chi(G) \mid G \text{ planar}\}$?

Lemma: $\chi_{\text{planar}} \leq 6$

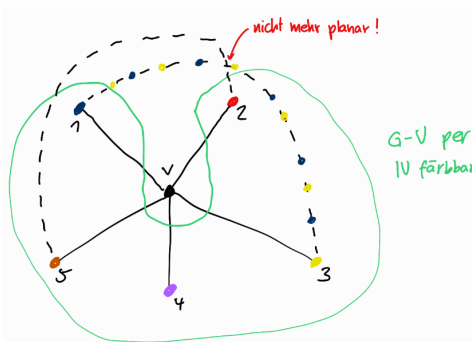
Beweis: Führe Induktion über $|V|$

- I.A.: $|V| \leq 6$: Man erhält eine Färbung, indem jeder Knoten eine eigene Farbe bekommt
- I.S.: $|V| > 6$
 - Nach Euler-Formel gibt es $v \in V$ mit $\deg(v) \leq 5$
 - Nach I.V. gibt es 6-Färbung von $G \setminus v$
 - Nachbarn von v in $G \setminus v$ decken höchstens fünf Farben ab \rightarrow Färbe v in verbleibender Farbe



Lemma: $\chi_{\text{planar}} \leq 5$

Beweis: Induktion analog zum oberen Beweis



I.S.:

- Nach Euler-Formel gibt es $v \in V$ mit $\deg(v) \leq 5$
- Nach I.V. gibt es 5-Färbung von $G \setminus v$
- Betrachte Teilgraph, der nur blau-gelbe Knoten enthält:

- Fall 1: 1 und 3 liegen in unterschiedlichen Zusammenhangskomponenten
 → Tausche in einer Zusammenhangskomponente alle blauen durch gelbe und alle gelben Knoten durch blaue aus → Farbe wird für v frei
- Fall 2 (siehe Bild): 1 und 3 liegen in der selben Zusammenhangskomponente.
 Für rot-braun-Teilgraph können 2 und 5 nicht in der selben Zusammenhangskomponente liegen, da Graph sonst nicht mehr planar wäre
 → Farbe wird für v frei

Definition: Sei $G = (V, E)$ ein einfacher Graph. Sei $L: V \rightarrow 2^{\mathbb{N}}$ eine Listenzuweisung, d.h. $L(v)$ ist Menge von Zahlen / Farben. Eine **L -Listenfärbung** von G ist eine Knotenfärbung c mit

- $c(v) \in L(v)$ für jeden Knoten $v \in V$
- $c(u) \neq c(v)$ für jede Kante $uv \in E$

G heißt **k -listenfärbbar** wenn für jede Listenzuweisung L mit $|L(v)| \geq k$ für jeden Knoten $v \in V$ eine L -Listenfärbung von G existiert.

- Kleinstes k , für das G k -listenfärbbar ist, heißt **listenchromatische Zahl** $\chi_{\text{list}}(G)$

Beweisskizze zu Listenfärbungen:

- $\chi_{\text{list}}(G) > k: \exists \text{ Listen } L \not\exists L\text{-Listenfärbung}$
- $\chi_{\text{list}}(G) \leq k: \forall \text{ Listen } L \exists L\text{-Listenfärbung}$

Lemma: Für jeden planaren Graphen gilt $\chi_{\text{list}}(G) \leq 6$

Beweis: Die gleiche Argumentation wie für $\chi_{\text{planar}} \leq 6$ funktioniert

Beobachtung: Für jeden Graphen G gilt $\chi_{\text{list}}(G) \geq \chi(G)$

Beweis:

- Setze $L(v) = \{1, \dots, k\}$ für jeden Knoten v
- Dann sind L -Listenfärbungen genau k -Knotenfärbungen $\implies \chi(G) \leq \chi_{\text{list}}(G)$

Satz von Voigt: Es gibt einen planaren Graphen mit $\chi_{\text{list}}(G) \geq 5$

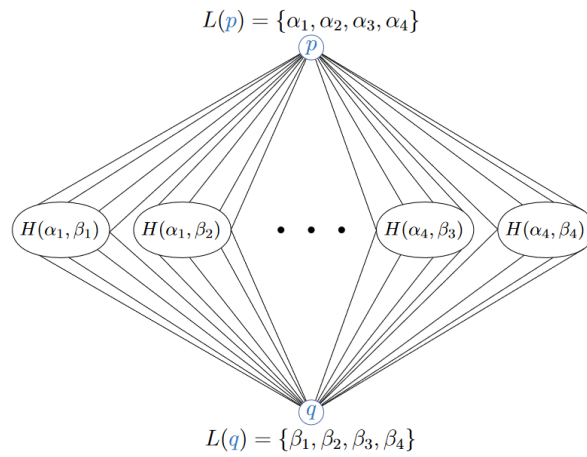
Beweis: Konstruiere einen planaren Graphen G mit Listenzuweisung L , sodass

- $|L(v)| = 4$ für jeden Knoten v
- keine L -Listenfärbung von G existiert

Betrachte dazu folgendes Gadget $H(\alpha, \beta)$:



Dieses Gadget ist nicht färbbar. Konstruiere nun aus 16 Gadgets den folgenden Graphen:



Dieser ist nicht L -listenfärbbar, denn für jede Färbung c ist Gadget $H(c(p), c(q))$ nicht färbbar.

Weitere Sätze und Beobachtungen:

- Für jeden planaren Graphen gilt $\chi_{\text{list}}(G) \leq 5$ (**Satz von Thomassen**)
 \implies Mit obigem Satz folgt $\max\{\chi_{\text{list}}(G) \mid G \text{ planar}\} = 5$
- Es gibt einen planaren Graphen mit $\chi(G) \geq 4$
- Für jeden planaren Graphen G gilt $\chi(G) \leq 4$ (**4-Farben-Satz**)
 $\implies \chi_{\text{planar}} = 4$

Ziel: Beweise $\chi_{\text{planar}} \leq 5$ mit einer stärkeren Aussage

Satz: Sei $G = (V, E)$ ein planarer Graph mit:

- jede innere Facette ist ein Dreieck
- äußere Facette ist ein einfacher Kreis C

Seien v_1, v_2 zwei aufeinanderfolgende Knoten auf C und L eine Listenzuweisung mit:

- $|L(v)| = 5$ für $v \in V \setminus C$
- $|L(v)| = 3$ für $v \in C \setminus \{v_1, v_2\}$
- $L(v_1) = \{\alpha\}, L(v_2) = \{\beta\}$ mit $\alpha \neq \beta$

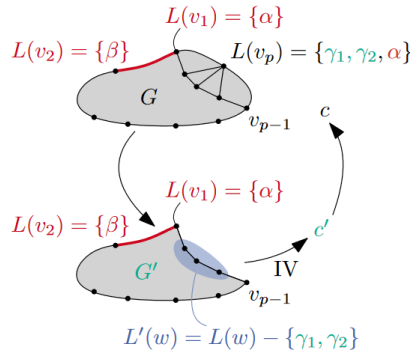
Dann gibt es eine L -Listenfärbung von G .

Beweis: Führe Induktion über $|V|$

- I.A.: $|V| = 3$. Wähle $c(v_3) \in L(v_3) \setminus \{\alpha, \beta\}$
- I.S.: $|V| \geq 4$. Betrachte nun 2 Fälle:
 - Fall 1: C hat eine Sehne $e = v_i v_j$. Zerteile G entlang e in zwei Graphen G_1, G_2 . O.B.d.A liegt $v_1 v_2$ in G_1 . Nach IV gibt es eine Färbung c_1 von G_1 . Sei $c_1(v_i) = \alpha'$ und $c_1(v_j) = \beta'$. Wende IV auf G_2 an mit Listen $\{\alpha'\}$ für v_i und $\{\beta'\}$ für v_j . \rightarrow Färbung c_2 von $G_2 \rightarrow$ Da c_1 und c_2 an der Sehne $v_i v_j$ übereinstimmen, erhalten wir eine Färbung von G .



- Fall 2: C hat keine Sehne. Betrachte Nachbarn $v_p \neq v_2$ von v_1 auf C . Lösche v_p auf G und erhalte G' . G' hat einfachen Kreis als äußere Facette, da v_p keine inzidente Sehne hat. Seien γ_1, γ_2 zwei Farben aus $L(v_p) \setminus \{\alpha\}$. Für jeden inneren Nachbarn w von v_p definiere $L'(w) = L(w) \setminus \{\gamma_1, \gamma_2\}$ und $L'(v) = L(v)$ für jeden anderen Knoten v . Nach IV gibt es L' -Listenfärbung von G' , sodass kein innerer Nachbar von v_p die Farbe γ_1 oder γ_2 hat. Wähle $c(v_p) \in \{\gamma_1, \gamma_2\} \setminus c'(v_{p-1})$ und erhalte somit eine L -Listenfärbung c von G .



Bemerkung: Für jeden beliebigen planaren Graphen G lassen sich Kanten und Knoten hinzufügen sowie Farben aus Listen entfernen, sodass der neue Graph G' den Anforderungen des obigen Satzes entspricht. Damit wurde die Aussage $\chi(G) \leq \chi_{\text{list}}(G) \leq 5$ für jeden planaren Graphen G bewiesen.

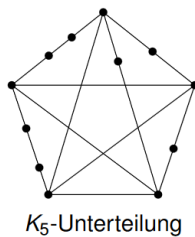
4 Unterteilungen und Minoren

Definition: Sei $G = (V, E)$ ein Graph, $e = uv$ eine Kante. Dann ist die **Unterteilung von e in G** der Graph $G \circ e = (V', E')$ mit

- $V' = V + \{w\}$
- $E' = (E - uv) + \{uw, vw\}$

Beobachtung: G planar $\iff G \circ e$ planar

Definition: Graph G ist eine **Unterteilung von H** wenn $G = ((H \circ e_1) \circ e_2) \cdots \circ e_k$. Wir sagen auch G ist **H -Unterteilung**. Graph G **enthält eine H -Unterteilung**, wenn ein Teilgraph $G' \subseteq G$ eine H -Unterteilung ist.



Beobachtung:

- K_5 - und $K_{3,3}$ -Unterteilungen sind nicht-planar
- Jeder Graph der eine K_5 oder $K_{3,3}$ -Unterteilung enthält, ist nicht planar

Satz von Kuratowski: G ist planar $\iff G$ enthält keine K_5 - oder $K_{3,3}$ -Unterteilung

Beweis: „ \Rightarrow “ folgt aus obiger Beobachtung. Die Rückrichtung ist komplizierter und beweisen wir später.

Definition: Sei $G = (V, E)$ ein Graph, $e = uv$ eine Kante. Der Graph $G/e = (V', E')$ ist der Graph, der durch **Kontrahieren der Kante e** entsteht, genauer:

- $V' = V - \{u, v\} + \{w\}$
- $E' = E(G - u - v) \cup \{wa \mid au \in E \text{ oder } av \in E\}$

Diesen Prozess nennt man auch **Kantenkontraktion**. Dabei können Multikanten und Schleifen entstehen.



Definition: Graph H ist **Minor von G** , wenn H aus G durch eine Folge von Kantenkontraktionen entsteht, also $H = ((G/e_1)/e_2 \cdots)/e_k$. Wir sagen dann auch: G ist ein **H -Minor** (H ist der kleinere Graph, G der Größere).

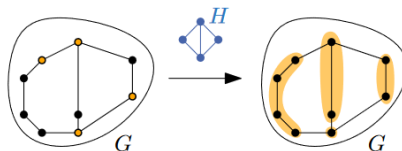
Beobachtung:

- G planar $\Rightarrow G/e$ planar
- G enthält K_5 - oder $K_{3,3}$ -Minor $\Rightarrow G$ nicht planar

Satz von Wagner: G planar $\iff G$ enthält keinen K_5 - oder $K_{3,3}$ -Minor

Lemma: G enthält H -Unterteilung $\Rightarrow G$ enthält H -Minor

Beweis: Kontrahiere durch Unterteilung entstandene Knoten zu ursprünglich adjazenten Knoten.



Es sind also äquivalent:

1. G ist nicht planar
2. G enthält K_5 - oder $K_{3,3}$ -Minor
3. G enthält K_5 - oder $K_{3,3}$ -Unterteilung

(3) \implies (2) \implies (1) wurde schon bewiesen, (1) \implies (2) \implies (3) müssen wir noch beweisen. Wir beginnen mit (1) \implies (2).

Beweis von Wagner: Es muss nur noch die Rückrichtung beweisen werden. Sei hierfür G ein nicht-planarer Graph. Wir müssen einen K_5 - oder $K_{3,3}$ -Minor in G finden. O.B.d.A. sei G sogar **minimal nicht-planar**, d.h.

- $G - v$ ist planar für jeden Knoten $v \in V$
- $G - e$ ist planar für jede Kante $e \in E$
- G/e ist planar für jede Kante $e \in E$

Beweise zunächst folgendes Lemma:

Lemma: Sei G minimal nicht-planar, $xy \in E(G)$. Dann ist $G - x - y$ ein Kreis.

Beweis: Da G minimal nicht-planar ist,

- ist G zusammenhängend, da ansonsten Knoten aus einer Zusammenhangskomponente gelöscht werden könnte
- ist $\deg(v) \geq 3$ für jeden Knoten $v \in V(G)$, denn Knoten von Grad 0 und 1 tragen nichts zur Nicht-Planarität bei, können also gelöscht werden ohne die Nicht-Planarität zu verlieren. Für einen Knoten v von Grad 2 mit Kanten e, e' bleibt G/e nicht-planar. Wäre G/e planar, so muss wegen $G = (G/e) \circ e'$ bereits G planar sein. Widerspruch.



Das Lemma wird nun anhand von 3 Behauptungen bewiesen.

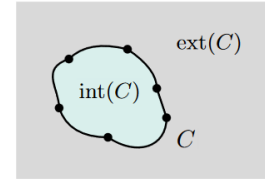
1. Behauptung: $G - x - y$ enthält kein Θ .

Theta-Graphen sind Unterteilungen des Graphen mit zwei Knoten und drei parallelen Kanten.



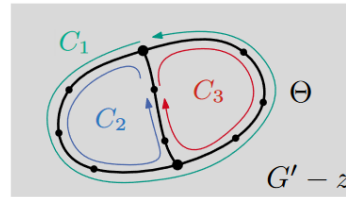
Notation: Für einen Kreis C in einer planaren Zeichnung erhält man eine **geschlossene Jordankurve**, die die Ebene in zwei Komponenten unterteilt:

- $\text{int}(C)$, das Innere von C
- $\text{ext}(C)$, das Äußere von C

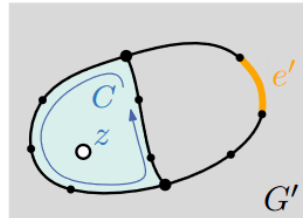


Beweis von Behauptung 1:

- Angenommen $G - x - y$ enthält ein Θ .
- $G' := G/xy$ ist planar mit Kante xy zu Knoten z kontrahiert.
- $G' - z = G - x - y$ ist ebenfalls planar.
- Zeichnung von G' enthält ein Θ und das Θ hat 3 Kreise:

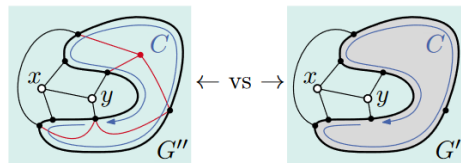


- Betrachte Kreis C im Θ , sodass Knoten z auf einer Seite von C und eine Kante $e' \in E(\Theta)$ auf der anderen Seite von C liegt.
- Wähle Θ und C so, dass die Seite von C mit z inklusionsminimal ist, d.h. es gibt kein anderes Θ mit Kreis C , was z enthält und ein kleineres Inneres hat.
- O.B.d.A. gilt $z \in \text{int}(C)$ und $e' \in \text{ext}(C)$.



- Betrachte $G'' = G - \text{ext}(C)$.
- Da $e' \notin G''$ ist, wird mindestens eine Kante gelöscht, also ist G'' planar.
- Betrachte eine planare Zeichnung von G'' mit Kreis C .

Ziel: Zeige, dass C eine Facette berandet, denn dann kann $\text{ext}(C)$ in C eingesetzt werden, was aber eine planare Zeichnung von G wäre. ⚡



- Betrachte Pfad P in G'' , der auf verschiedenen Knoten von C startet und endet und ansonsten zu C disjunkt ist.
- P entspricht auch einem Pfad P' in G' .

Wenn $z \notin P'$:

- Dann ist $C \cup P'$ ein Θ in $G - x - y$.
- Dieses Θ hat einen Kreis der z enthält, aber ein kleineres Inneres als C hat.
- Widerspruch zur Wahl von Θ und C .



Also liegt z auf P' und P muss x oder y enthalten. Also liegt jeder solche Pfad in der Zeichnung von G'' auf der Seite von C , die xy enthält.

$\Rightarrow C$ liegt im Rand einer Facette von G''

Damit ist *Behauptung 1* bewiesen.

2. Behauptung: $G - x - y$ enthält keine zwei Knoten vom Grad 1.

Beweis von Behauptung 2:



- Angenommen u, v sind zwei Knoten in $G - x - y$ mit Grad 1.
- Da $\deg(u), \deg(v) \geq 3$ in G , sind $ux, uy, vx, vy \in E(G)$ und u, v, x, y bilden ein Θ
- Nach Behauptung 1 hat jede Kante in G mindestens einen Endpunkt in u, v, x, y , um das Θ bei Kontraktion einer beliebigen Kante zu zerstören.
- Jedes $w \neq u, v, x, y$ ist zu u, v oder beiden benachbart, da $\deg(w) \geq 3$.
- Höchstens 2 Knoten außerhalb von u, v, x, y .



\implies In allen Fällen ergibt sich ein Widerspruch zur Nicht-Planarität von G .

Damit ist *Behauptung 2* bewiesen.

Definition: Ein Graph enthält genau dann kein Θ , wenn jede Kante auf höchstens einem Kreis liegt. Solche Graphen nennt man **Kakteen**. Kakteen sind kantendisjunkte Vereinigungen von Kreisen und Brücken.



Definition: Der **Block-Cutvertex-Tree** eines zusammenhängenden Graphen G (hier ist G Kaktus) ist ein Baum T mit:

- $V(T) = \{\text{Artikulationspunkt in } G\} \cup \{\text{Kreise in } G\} \cup \{\text{Brücken in } G\}$
- $E(T) = \{vb \mid v \text{ Artikulationspunkt, } b \text{ Brücke oder Kreis, } v \text{ Knoten auf } b \text{ in } G\}$



Behauptung 3: $G - x - y$ ist tatsächlich ein Kreis.

Beweis von Behauptung 3:

- Sei T Block-Cutvertex-Tree von $G - x - y$.
- Wenn $G - x - y$ keinen Artikulationspunkt enthält, ist $G - x - y$ ein Kreis (Beweis fertig) oder eine Kante. Dann gilt $|V(G)| \leq 4$, da G höchstens nur die Knoten x, y und die Endpunkte der Kante enthält $\implies G$ ist planar \nexists
- Also gibt es Artikulationspunkte und $|T| \geq 2$.
- Also hat T mindestens 2 Blätter.
- Blätter im Block-Cutvertex-Tree sind entweder Brücken oder Kreise im ursprünglichen Graphen. Brücken führen immer zu Grad 1 Knoten. Nach Behauptung 2 gibt es ein Blatt in T , das in G ein Kreis C ist.
- Sei v der Artikulationspunkt in C , der C an den Graphen „klebt“.

- Jedes $u \in V(C) - v$ hat Grad 2 in $G - x - y$ (da Blatt im Cutvertex-Tree), aber mindestens Grad 3 in G .
- Also ist jedes u zu x oder y benachbart. u kann nicht zu beiden benachbart sein, da sonst $G - v - w$ ein Θ enthält.

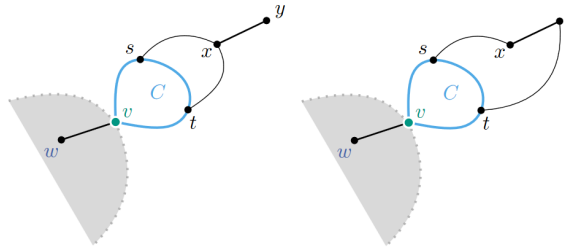


- Ebenso darf C nur Länge 3 haben, da sonst $G - v - w$ ebenso wieder ein Θ bildet.



$\Rightarrow C$ hat Länge genau 3
 $V(C) = \{v, s, t\}$

- Dann hat $C \cup \{x, y\}$ ein Θ in G .



- Nach Behauptung 1 hat jede Kante mindestens einen Endpunkt im Θ .
- Jedes $w \in G - (C \cup \{x, y\})$ hat alle Nachbarn in $C \cup \{x, y\}$, sonst gäbe es eine Kante außerhalb des Θ . w muss genau die Nachbarschaft $\{x, y, v\}$ haben, denn w kann nicht zu s oder t benachbart sein, da diese Grad 2 haben.
- Würden zwei solche w, w' existieren, so wäre w, w', x, y ein Θ in $G - C$.



\Rightarrow Also ist w der einzige Knoten in $G - (C \cup \{x, y\})$.

- O.B.d.A sei $sx \in E$. Es gilt entweder $ty \in E$ oder $tx \in E$.



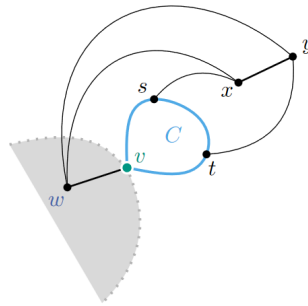
- Wir wissen, dass G nur die Knoten v, s, t, x, y, w besitzt.
- Wenn $vx \in E$ oder $vy \in E$, dann gibt es ein Θ in $G - s - t$.



- Wenn $tx \in E$, dann gibt es ein Θ in $G - w - y$.



- Insgesamt wissen wir $vx \notin E, vy \notin E, tx \notin E, ty \in E, ws \notin E, wt \notin E$. Wir kennen also ganz G und G ist planar. Widerspruch.



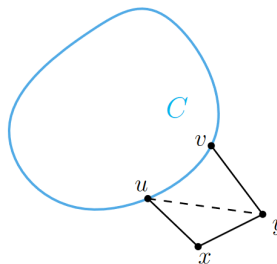
Damit sind *Behauptung 3* und das *Lemma* bewiesen.

Beweis von Wagner - Abschluss:

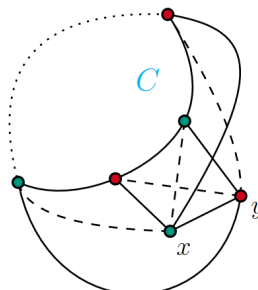
- Sei $xy \in E$ eine Kante und C der Kreis $G - x - y$.
- Sei $uv \in E$ eine Kante auf C mit $ux \in E$.

1. Fall: $uy \notin E$.

- $G - u - x$ ist ein Kreis, d.h. v muss Grad 2 haben, also ist $vy \in E$.



- Wenn $vx \in E$ dann hat $G - x - v$ einen Knoten u mit Grad 1. \nexists
 $\implies vx \notin E$
- Analoge Argumente liefern: $N(x), N(y)$ sind auf C disjunkt und alternierend.
- $|C| \geq 4$ und wir finden einen $K_{3,3}$ -Minor.



2. Fall: Jeder Knoten auf C ist zu x und y benachbart.

- $|C| \geq 3$. Wir finden einen K_5 -Minor.



Damit ist der **Satz von Wagner** bewiesen.

Wir beweisen nun $(2) \implies (3)$.

Lemma: Seien G, H Graphen. Maximaler Grad von H höchstens 3, d.h. $\Delta(H) \leq 3$. Dann sind äquivalent:

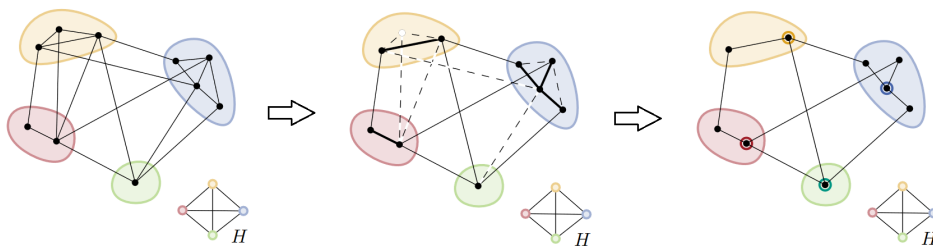
- G enthält H -Minor
- G enthält H -Unterteilung

Beweis: Die Richtung Unterteilung \implies Minor wurde bereits gezeigt. Beweise nun also die Rückrichtung. In einem H -Minor finden wir H -Unterteilung.

- O.B.d.A ist jede Kontraktionsmenge ein Baum, sodass
 - jedes Blatt hat Nachbarn in anderer Menge,
 - zwischen je zwei Mengen ist maximal eine Kante

Überflüssige Kanten können gelöscht werden.

- Wähle Knoten von maximalem Grad in jeder Menge.
- Dann bilden diese Bäume schon eine H -Unterteilung, da $\Delta(H) \leq 3$.



Beweis von Kuratowski: Es muss nur noch die Richtung G nicht planar $\implies G$ enthält eine K_5 oder $K_{3,3}$ -Unterteilung bewiesen werden.

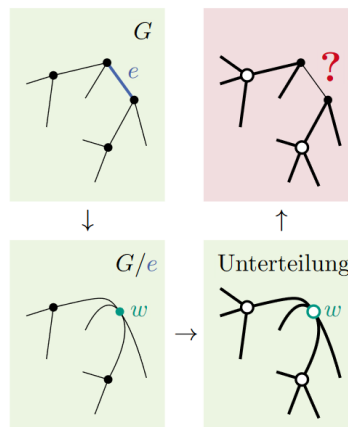
- Sei also G nicht planar. Wir müssen Unterteilung von $K_{3,3}$ oder K_5 finden.
- Nach Wagner gibt es einen $K_{3,3}$ - oder K_5 -Minor in G .
- Bei $K_{3,3}$ -Minor, sind wir nach vorigem Lemma fertig.

Sonst: Induktion über Knotenzahl von G :

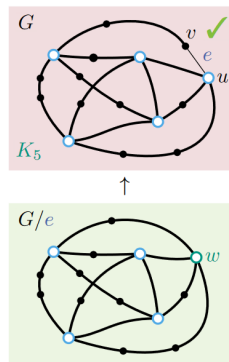
- I.A.: G muss mindestens 5 Knoten besitzen, um nicht-planar zu sein, und dort kommt auch nur K_5 in Frage.
- I.S.: Wenn es sich beim K_5 -Minor um einen K_5 -Teilgraph handelt, dann sind wir fertig. Andernfalls gibt es $e = uv$, sodass G/e immer noch einen K_5 -Minor enthält. G/e ist also immer noch nicht-planar. Nach IV existiert eine $K_{3,3}$ - oder K_5 -Unterteilung in G/e . Sei w der Knoten, zu dem e kontrahiert wird.
 - Wenn w in der Unterteilung ein Unterteilungspunkt ist (also $\deg(w) = 2$), gibt es auch solch eine Unterteilung in G .
 - Wenn $\deg(w) = 3$ in Unterteilung, gibt es auch in G eine Unterteilung.



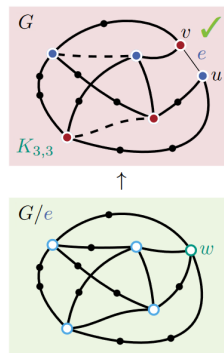
- Also o.B.d.A. $\deg(w) = 4$ in K_5 -Unterteilung in G/e .



- Betrachte die vier anderen Knoten von Grad 4.
- Sind mindestens drei davon zu u verbunden, finden wir wieder eine K_5 -Unterteilung in G .



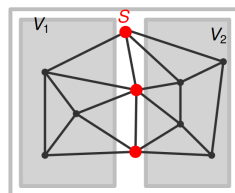
- Andernfalls sind zwei zu u und zwei zu v verbunden und wir finden eine $K_{3,3}$ -Unterteilung in G .



Damit wurde der **Satz von Kuratowski** bewiesen.

5 Separatoren in planaren Graphen

Definition: Eine Menge $S \subset V$ heißt Separator von $G = (V, E)$, falls der durch $V \setminus S$ induzierte Subgraph von G unzusammenhängend ist.



Minimum-Balanced-Separator-Problem: Gegeben sei ein Graph $G = (V, E)$. Finde eine Partition von V in drei Mengen V_1, V_2 und S , wobei der Separator S minimale Kardinalität hat und V_1 von V_2 trennt mit $|V_1|, |V_2| \leq \alpha \cdot |V|$ und $\frac{1}{2} \leq \alpha < 1$ konstant.

- Separator soll also klein sein
- Separator soll etwa gleich große Teilgraphen erzeugen
- Problem ist \mathcal{NP} -schwer

Planar-Separator-Theorem: Die Knotenmenge eines zusammenhängenden, planaren Graphen $G = (V, E)$, $n = |V| \geq 5$, kann so in drei Mengen $V_1, V_2, S \subseteq V$ partitioniert werden, dass

- $|V_1|, |V_2| \leq \frac{2}{3} \cdot n$
- S ist ein Separator, der V_1 von V_2 trennt
- $|S| \leq 4 \cdot \sqrt{n}$

Eine solche Partition kann in $\mathcal{O}(n)$ Zeit konstruiert werden.

Für den Beweis dieses Satzes benötigen wir folgendes Lemma.

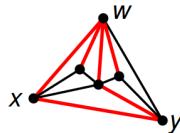
Lemma: Sei $G = (V, E)$ ein planarer, zusammenhängender Graph mit $n = |V| \geq 5$ und $T = (V, E(T))$ ein Spannbaum von G mit Wurzel w und Höhe h . Die Knotenmenge von G kann so in drei Mengen V_1, V_2 und S partitioniert werden, dass

- $|V_1|, |V_2| \leq \frac{2}{3} \cdot n$
- S ist ein Separator, der V_1 von V_2 trennt
- $|S| \leq 2 \cdot h + 1$

Eine solche Partition kann in $\mathcal{O}(n)$ Zeit konstruiert werden.

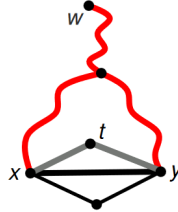
Beweis:

- Konstruiere eine Triangulierung von G . Nach Satz von Euler hat der neue Graph $3n - 6$ Kanten und $2n - 4$ Facetten.
- Spannbaum T von G ist Spannbaum des triangulierten Graphen
- In T induziert jede Nichtbaumkante $\{x, y\}$ einen Kreis $K_{x,y}$ mit $\leq 2 \cdot h + 1$ Knoten (maximal h Knoten in beide Richtungen + Wurzel)



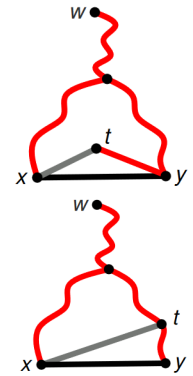
- Sei $\text{Inneres}(K_{x,y})$ die Knoten, die innerhalb des Kreises, aber nicht auf dem Rand des Kreises liegen. Definiere $\text{Äußeres}(K_{x,y})$ dementsprechend.
- Wähle Nichtbaumkante $\{x, y\}$ aus, wobei $|\text{Inneres}(K_{x,y})| \geq |\text{Äußeres}(K_{x,y})|$
- Wenn $|\text{Inneres}(K_{x,y})| \leq \frac{2}{3}n$, dann gilt das Lemma und wir sind fertig

- Sei also $|\text{Inneres}(K_{x,y})| > \frac{2}{3}n$, dann ist $|\text{Äußeres}(K_{x,y})| < \frac{1}{3}n$
- Ziel: Ersetze $\{x, y\}$ durch eine andere Nichtbaumkante, sodass das Innere kleiner wird und das Äußere nicht über $\frac{2}{3}n$ wächst
- Da Graph trianguliert, begrenzt Kante $\{x, y\}$ zwei Dreiecke, von denen eins im Inneren($K_{x,y}$) liegt \implies Dreieck $x y t$



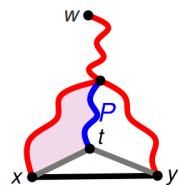
Fall 1: $\{x, t\}$ oder $\{t, y\}$ ist eine Baumkante, o.B.d.A sei $\{t, y\}$ eine Baumkante. Ersetze $\{x, y\}$ durch $\{x, t\}$.

- Falls $t \notin K_{x,y}$:
 - $|\text{Äußeres}(K_{x,t})| = |\text{Äußeres}(K_{x,y})|$
 - $|\text{Inneres}(K_{x,t})| = |\text{Inneres}(K_{x,y})| - 1$
- Falls $t \in K_{x,y}$:
 - $|\text{Äußeres}(K_{x,t})| = |\text{Äußeres}(K_{x,y})| + 1$
 - $|\text{Inneres}(K_{x,t})| = |\text{Inneres}(K_{x,y})|$



Fall 2: $\{x, t\}$ und $\{t, y\}$ sind beides Nichtbaumkanten.

- Sei $|\text{Inneres}(K_{x,t})| \geq |\text{Inneres}(K_{t,y})|$. Ersetze $\{x, y\}$ durch $\{x, t\}$.



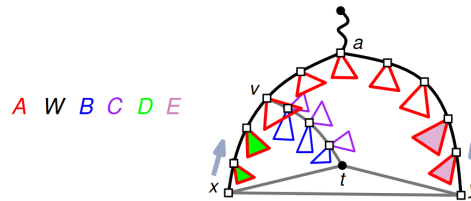
- $|\text{Äußeres}(K_{x,t})| \leq n - (|\text{Inneres}(K_{x,t})| + P) \leq n - \frac{1}{2}|\text{Inneres}(K_{x,y})| < n - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}n = \frac{2}{3}n$
- $|\text{Inneres}(K_{x,t})| \leq |\text{Inneres}(K_{x,y})| - 1$

In beiden Fällen verkleinern wir $|\text{Inneres}(K_{x,y})|$ und lassen $|\text{Äußeres}(K_{x,y})|$ klein genug. Dies kann nun so lange wiederholt werden, bis auch $|\text{Inneres}(K_{x,y})| \leq \frac{2}{3}n$ gilt.

\implies Partition mit den gewünschten Eigenschaften lässt sich konstruieren. Wir müssen nun noch deren Implementation in linearer Laufzeit sicherstellen.

- Triangulierung des Graphen in $\mathcal{O}(n)$ möglich \rightarrow Übung

- Ersetzung einer Nichtbaumkante durch eine andere, welche die Anzahl der Dreiecke im Inneren reduziert \implies Höchstens $2n - 4$ Schritte
- In Fall 1 können wir $|\text{Inneres}(K_{x,y})|$ und $|\text{Äußeres}(K_{x,y})|$ in $\mathcal{O}(1)$ berechnen
- Für Fall 2 muss entschieden werden, ob $|\text{Inneres}(K_{x,t})|$ oder $|\text{Inneres}(K_{t,y})|$ größer ist. Zeige, dass auch dieser Fall nur konstante Zeit benötigt mithilfe einer amortisierten Analyse.
- Führe dazu folgende Vorberechnung durch:
 - Durchlaufe T von den Blättern zur Wurzel
 - Speichere für jeden Knoten und inzidente Baumkanten die Anzahl Knoten im Unterbaum links bzw. rechts der Kante und markiere den Knoten
 - Dies kann einmalig in Linearzeit durchgeführt werden
- Laufe von t nach oben bis zum ersten markierten Knoten v und berechne die Anzahl der Knoten rechts und links des Weges
- Laufe von x und y abwechselnd in Richtung Wurzel bis erstmals v , d.h. Weg von t zur Wurzel, erreicht wird.



- $|\text{Inneres}(K_{x,t})| = D + B$
- $|\text{Inneres}(K_{t,y})| = A - D - B - W$

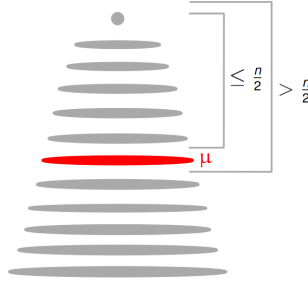
Die Anzahl der Operationen in einem Schritt ist proportional zu der Anzahl der Knoten in dem Teil von $K_{x,y}$, der nicht weiter betrachtet wird. Also ist auch Fall 2 in amortisiert konstanter Zeit implementierbar.

Damit ist auch die Laufzeit und somit das gesamte Lemma bewiesen.

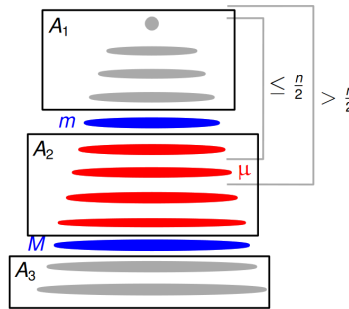
BFS-Lemma: Sei $T = (V, E(T))$ ein BFS-Baum von $G = (V, E)$. Für eine Nichtbaumkante $\{u, v\}$ gilt $|\text{level}(u) - \text{level}(v)| \leq 1$.

Beweis des Planar-Separator-Theorem:

- Konstruiere eine Triangulierung von G und ein BFS-Baum T mit beliebiger Wurzel
- Sei μ das Level mit der Eigenschaft:



- Wenn $|\text{level } \mu| \leq 4\sqrt{n}$, dann ist μ ein geeigneter Separator und wir sind fertig.
- Sei also $|\text{level } \mu| > 4\sqrt{n}$.
- Sei m das unterste Level oberhalb von μ und M das oberste Level unterhalb von μ mit $|\text{level } m| < \sqrt{n}$ und $|\text{level } M| < \sqrt{n}$.



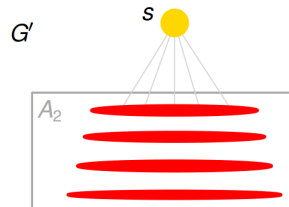
- Offensichtlich gilt $|A_1| \leq \frac{n}{2}$ und auch $|A_3| \leq \frac{n}{2}$, da schon $> \frac{n}{2}$ Knoten über μ

Fall 1: $|A_2| \leq \frac{2}{3}n$

- $S = \text{level } m \cup \text{level } M$ ist Separator
- $V_1 = \max\{A_1, A_2, A_3\}, |V_1| \leq \frac{2}{3}n$
- $V_2 = V \setminus (S \cup V_1), |V_2| \leq n - |V_1| \leq n - \frac{|V_2|}{2}$, da $|V_1| \geq \frac{|V_2|}{2}$, sonst wäre $|V_1|$ nicht maximal, da V_2 ein größeres A_i beinhaltet $\Rightarrow |V_2| \leq \frac{2}{3}n$
- Damit wurde ein geeigneter Separator gefunden und wir sind fertig

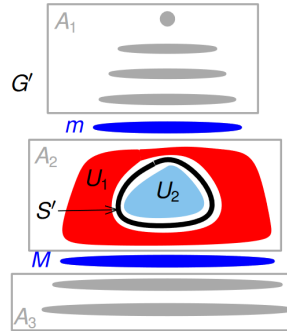
Fall 2: $|A_2| > \frac{2}{3}n$

- Verschmelze die Knoten in $A_1 \cup \text{level } m$ zu einem Knoten s und entferne alle Knoten aus $\text{level } M \cup A_3$. Dadurch entsteht ein neuer Graph $G' = (V', E')$.

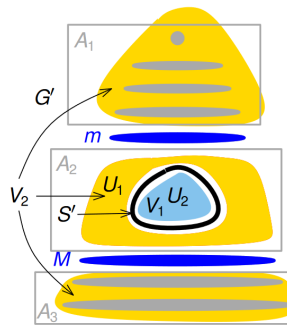


- BFS-Baum T induziert BFS-Baum T' in G'

- T' hat maximal Höhe \sqrt{n} , da $|V'| \leq n$ und durch die Wahl von m und M für jede Schicht S_i zwischen m und M $|S_i| \geq \sqrt{n}$ gilt
- Wende obiges Lemma auf G' und T' an und erhalte S', U_1, U_2



- Sei $S = S' \cup \text{level } m \cup \text{level } M$
- Nach dem Lemma folgt $|S'| \leq 2\sqrt{n} + 1$, also $|S| \leq 4\sqrt{n}$
- Sei $V_1 = \max\{U_1, U_2\}$. Nach dem Lemma gilt $|V_1| \leq \frac{2}{3}n$
- Weiterhin gilt $|V_1| + |S| > |V_1| + |S'| > \frac{1}{2} \cdot |A_2|$. Setzt man also $V_2 = V \setminus (S \cup V_1)$, dann gilt $|V_2| = n - |V_1| - |S| < n - \frac{1}{2} \cdot |A_2| < \frac{2}{3}n$



Auch hier findet man also einen geeigneten Separator, womit das **Planar-Separator-Theorem** bewiesen ist.

6 Matchings und Maximum Independent Set

MAXIMUM INDEPENDENT SET: Für $G = (V, E)$, finde eine **größte unabhängige Menge**. Also Knotenmenge $I \subseteq V$ mit $|I|$ maximal, sodass jede Kante in E höchstens einen Endpunkt in I hat.

Approximationsalgorithmus für MAXIMUM INDEPENDENT SET:

1. Zerkleinere den Graphen mit Planar Separator, bis Komponenten nur noch $\mathcal{O}(\log \log n)$ Knoten haben

2. Löse Komponenten mit Brute-Force in $\mathcal{O}(2^{\log \log n}) = \mathcal{O}(\log n)$ Zeit pro Komponente $\rightarrow \mathcal{O}(n \log n)$ Gesamtlaufzeit
3. Zusammenfügen ist disjunkte Vereinigung der Teillösungen (Kein Problem an Schnittpunkten, da Separator dazwischen)

Güte der Approximation:

- **Satz:** Wiederholtes Anwenden des planar Separators gibt Komponenten der Größe $\mathcal{O}(r)$ bei Separator-Gesamtgröße $\mathcal{O}(n/\sqrt{r})$

ohne Beweis.

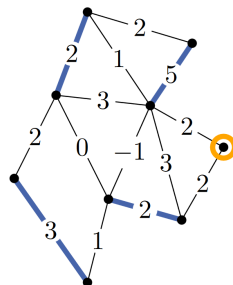
- Mit obigem Satz folgt Separator-Gesamtgröße $|S| \leq \mathcal{O}(n/\sqrt{\log \log n})$
- Für optimale Lösung $OPT(G)$ gilt $OPT(G) \geq n/4$ nach Vier-Farben-Satz
- Damit folgt:

$$\begin{aligned}
 OPT(G) - A(G) &\leq |S| \leq \mathcal{O}\left(\frac{n}{\sqrt{\log \log n}}\right) \\
 \Rightarrow A(G) &\geq OPT(G) - \mathcal{O}\left(\frac{n}{\sqrt{\log \log n}}\right) \\
 &\geq OPT(G) - \mathcal{O}\left(\frac{OPT(G)}{\sqrt{\log \log n}}\right) \\
 &= OPT(G) \cdot \left(1 - \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{\log \log n}}\right)\right)
 \end{aligned}$$

wobei $OPT(G) - A(G) \leq |S|$ gilt, da A für die Separatoren keine Lösungen berechnet und somit die Abweichung von der optimalen Lösung max. so groß ist wie die Kardinalität von S . Diese Approximation ist bestmöglich wenn $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$.

Definition:

- Kantenmenge M ist ein **Matching** wenn jeder Knoten zu höchstens einer Kante in M inzident ist.
- Wenn ein Knoten v zu einer Kante in M inzident ist, heißt v **gematcht**, ansonsten **ungematcht**.

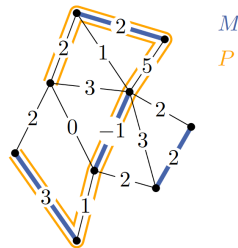


GEWICHTSMAXIMALES MATCHING:

- **Gegeben:** Graph $G = (V, E)$ und Gewichtsfunktion $w: E \rightarrow \mathbb{R}$
- **Gesucht:** Matching $M \subseteq E$ mit $w(M) = \sum_{e \in M} w(e)$ maximal

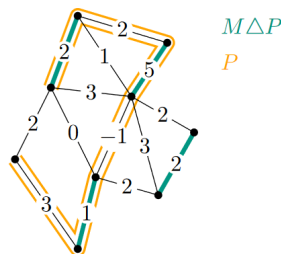
Definition: Sei $M \subseteq E$ Matching in $(G = (V, E), w)$. Ein **M-alternierender Weg** ist ein einfacher Pfad oder Kreis P in G , sodass

- sich Kanten von M und $E - M$ auf P abwechseln
- wenn P ein Pfad mit Endpunkt v und Kante e an v in P ist, dann ist $e \in M$ oder v ungematcht (verhindert, dass der Pfad verlängert werden kann)



Für Matching M und alternierenden Weg P ist auch $M \Delta P := (M - P) \cup (P - M)$ (**symmetrische Differenz**) ein Matching.

Dabei gilt $w(M \Delta P) - w(M) = w(P - M) - w(P \cap M)$, denn sowohl neues als auch altes Matching enthalten die Kanten, die nicht auf dem Pfad liegen. Dann ist die Differenz zwischen neuem und altem Matching nur die Kanten von $M \Delta P$ auf dem Pfad, was $P - M$ ist, und die Kanten von M auf dem Pfad, was $P \cap M$ ist.



$$2 + 5 + 1 > 2 - 1 + 3$$

$$w(P - M) > w(P \cap M)$$

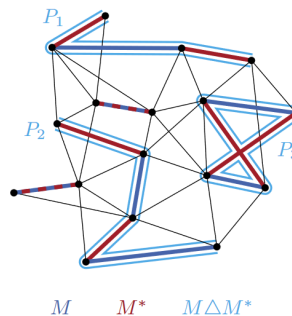
Defintion: Ein alternierender Weg heißt **erhöhend** wenn $w(M \Delta P) > w(M)$, also $w(P - M) > w(P \cap M)$.

Lemma: Sei M ein Matching in (G, w) . Es sind äquivalent:

- M ist gewichtsmaximal
- Es gibt keinen erhöhenden alternierenden Weg bezüglich M

Beweis:

- „ \Rightarrow “: Falls es zu M einen erhöhenden Weg gibt, so kann M natürlich nicht maximales Gewicht haben
- „ \Leftarrow “:
 - Sei M nicht gewichtsmaximal, also gibt es Matching M^* mit $w(M^*) > w(M)$
 - Betrachte $M \Delta M^* = (M \cup M^*) \setminus (M \cap M^*)$



- $M \Delta M^*$ hat nur Knoten vom Grad 1 oder 2, besteht also aus einfachen Kreisen und Wegen P_1, \dots, P_t
- Jedes P_i ist M -alternierender Weg
- Es gilt $w(M^*) - w(M) = \sum_{i=1}^t (w(M^* - P_i) - w(M \cap P_i))$
- Ein Summand ist positiv, da $w(M^*) - w(M) > 0$
- Einer der P_i ist also erhöhend, mit $w(M^* \cap P_i) > w(P_i \cap M) \implies$ Es gibt also einen erhöhenden Weg. Widerspruch.

Algorithmus für gewichtsmaximales Matching in planaren Graphen:

1. Falls $|V(G)| \leq 5$, finde gewichtsmaximales Matching durch Brute-Force
2. Falls $|V(G)| > 5$:
 - Finde $\frac{2}{3}$ -balancierten Separator S mit $|S| = \mathcal{O}(\sqrt{n})$
 - Berechne optimale Matchings auf allen Komponenten von $G' := G - S$
 - Sei M' die Vereinigung dieser optimalen Matchings. M' ist optimal für G'

3. Solange $S \neq \emptyset$:

- Wähle $v \in S$. Finde alternierenden Weg P in $G' + v$ mit Endpunkt v mit $w(P - M') - w(P \cap M')$ maximal
- Falls P erhöhend, ersetze M' durch $M \Delta P$
- Lösche v aus S
- Ersetze G' durch $G' + v$

Im Folgenden wollen wir die Korrektheit des Algorithmus beweisen und dessen Laufzeit bestimmen. Mit folgendem Lemma folgt die Korrektheit.

Lemma: Sei $G = (V, E)$ ein Graph, $v \in V$ ein Knoten, M ein gewichtsmaximales Matching in $G - v$.

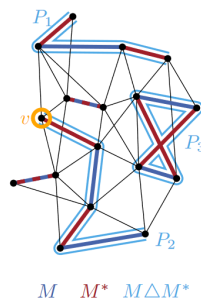
- M ist gewichtsmaximal in $G \iff$ Es ex. kein erhöhender Weg mit Endpunkt v

Wenn ein erhöhender Pfad P mit Endpunkt v und $M' = M \Delta P$ existiert, dann gilt:

- M' ist gewichtsmaximal in $G \iff$ Differenz $w(P - M) - w(P \cap M)$ ist maximal unter all solchen Pfaden mit Endpunkt v

Beweis - Teil 1:

- „ \Rightarrow “: Wenn es einen solchen erhöhenden Weg gäbe, dann kann M nicht gewichtsmaximal in G sein.
- „ \Leftarrow “:
 - Sei M nicht gewichtsmaximal in G , dann gibt es ein Matching M^* mit $w(M^*) > w(M)$
 - Betrachte Pfade und Kreise P_1, \dots, P_t in $M \Delta M^*$
 - Analog zum letzten Beweis gibt es P_i mit $w(M^* \cap P_i) > w(M \cap P_i)$
 - Wenn $v \notin P_i$, dann ist P_i erhöhend für M in $G - v \implies$ Widerspruch, da angenommen wurde, dass M optimales Matching für $G - v$ ist
 - Also ist $v \in P$. Da $v \notin M$, weil M Matching für $G - v$ ist, ist v ein Endpunkt von P_i



Beweis - Teil 2:

- „ \Rightarrow “: Klar. Wenn M' maximal ist, dann kann es keinen besseren Pfad geben.
- „ \Leftarrow “:
 - Sei nicht M' , sondern M^* gewichtsmaximal in G
 - Analog zu oben gibt es erhöhenden Pfad P in $M \Delta M^*$ mit v als Endpunkt (da nur Komponente mit v zu Verbesserung führen kann, weil andere Komponenten auch von M betrachtet wurden) und $w(M^*) - w(M) = w(P - M) - w(P \cap M)$
 - Da $w(M^*) - w(M) > w(M') - w(M)$ war Pfad für M' nicht maximal

Satz: Ein gewichtsmaximales Matching eines planaren Graphen mit n Knoten kann in $\mathcal{O}(n^{\frac{3}{2}} \log n)$ berechnet werden.

Beweis: Siehe Algorithmus für gewichtsmaximales Matching in planaren Graphen.

- 1. geht in $\mathcal{O}(1)$
- Finden eines $\frac{2}{3}$ -balancierten Separator in $\beta \cdot n$ Schritten
- Finden von $|S|$ erhöhenden Wegen mit Endpunkt v in $|S| \cdot \mathcal{O}(n \log n) \leq \gamma \cdot n^{\frac{3}{2}} \log n$ Schritten
- Sei $T(n)$ die worst-case Gesamtlaufzeit, dann ist

$$T(n) \leq T(n_1) + T(n_2) + \beta \cdot n + \gamma \cdot n^{\frac{3}{2}} \log n$$

wobei n_1, n_2 die Anzahl der Knoten der Teilgraphen nach dem Separieren ist

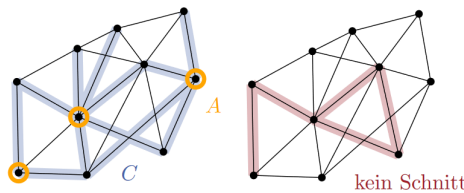
- Der Rest vom Beweis ist viel Mathe und nicht relevant für die Klausur

7 Mixed Max Cut

Definition: Ein Schnitt in $G = (V, E)$ ist eine Kantenmenge $C \subseteq E$, die von einer Knotenmenge $A \subseteq V$ folgendermaßen induziert wird:

$$C = \{uv \in E \mid |A \cap \{u, v\}| = 1\}$$

C enthält also genau die Kanten, die genau einen Endpunkt in A haben.



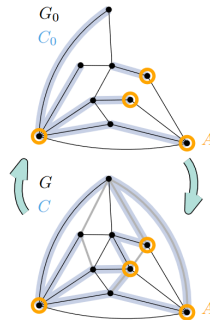
MIXED-MAX-CUT:

- **Gegeben:** Graph $G = (V, E)$ und Gewichtsfunktion $w: E \rightarrow \mathbb{R}$
- **Gesucht:** Schnitt $C \subseteq E$ mit $w(C) = \sum_{e \in C} w(e)$ maximal und $C \neq \emptyset$

Satz: MIXED-MAX-CUT ist auf planaren Graphen polynomiell lösbar.

Beweis: Gegeben einen Graphen $G_0 = (V, E_0)$ und $w: E_0 \rightarrow \mathbb{R}$.

1. Trianguliere G_0 zu $G = (V, E)$ und setze $w(e) = 0$ für jede Kante $e \in E \setminus E_0$



Beobachtung: Für Schnitt C in G und $C_0 = C \cap E_0$ in G_0 sind äquivalent:

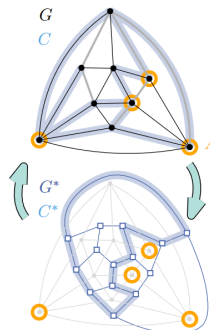
- $A \subseteq V$ induziert $C_0 \subseteq E_0$ in G_0
- $A \subseteq V$ induziert $C \subseteq E$ in G

Außerdem gilt $w(C_0) = w(C)$, also reicht es im Folgenden den triangulierten Graphen anzuschauen.

Achtung: $C_0 = \emptyset$ könnte gelten! Das wird später behoben.

2. Betrachte Dualgraph $G^* = (F, E^*)$ von $G = (V, E)$.

- Setze $w(e^*) = w(e)$ für alle $e \in E$
- G^* ist 3-regulär, d.h. jeder Knoten hat Grad 3
- Für jede Kantenmenge $C^* \subseteq E^*$ hat jeder Dualknoten 0, 1, 2 oder 3 inzidente Kanten in C^*



Definition: Kantenmenge $X \subseteq E^*$ heißt **gerade**, wenn jeder Knoten zu gerade vielen Kanten in X inzident ist.

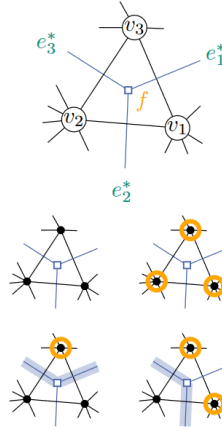
Lemma: Sei $G = (V, E)$ trianguliert, G^* zu G dual. Dann gilt:

$$C \subseteq E \text{ ist Schnitt} \iff C^* \subseteq E^* \text{ ist eine gerade Kantenmenge}$$

Außerdem ist $w(C) = w(C^*)$.

Beweis:

- „ \Rightarrow “: Sei $C \subseteq E$ Schnitt in G induziert von $A \subseteq V$. Sei $f \in V(G^*)$ und e_1^*, e_2^*, e_3^* seine drei inzidenten Kanten. Betrachte das zu f zugehöriges Dreieck v_1, v_2, v_3 in G .



- Ist $|A \cap \{v_1, v_2, v_3\}| = 0, 3$, dann $|C^* \cap \{e_1^*, e_2^*, e_3^*\}| = 0$
- Ist $|A \cap \{v_1, v_2, v_3\}| = 1, 2$, dann $|C^* \cap \{e_1^*, e_2^*, e_3^*\}| = 2$

Also ist C^* gerade.

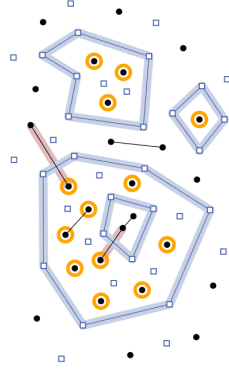
- „ \Leftarrow “: Sei $C^* \subseteq E^*$ eine gerade Kantenmenge in G^* . Dann hat jeder Dualknoten 0 oder 2 inzidente Kanten in C^* , also ist C^* eine disjunkte Vereinigung von Kreisen und isolierten Punkten C_1, \dots, C_k . Sei nun

$$A = \{v \in V \mid v \text{ ist im Inneren von ungerade vielen Kreisen}\}$$

Dann gilt:

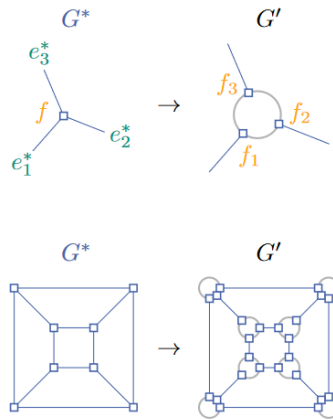
$$\begin{aligned} e \in E \text{ ist in } C & \\ \iff e^* \in C^* & \\ \iff e^* \in C_i \text{ für ein } i \in \{1, \dots, k\} & \\ \iff \text{Endpunkte von } e \text{ liegen auf verschiedenen Seiten von } C_i & \\ \iff \text{Genau einer der Endpunkte von } e \text{ ist in } A & \end{aligned}$$

Also ist C ein Schnitt und wird von A induziert.



Wir suchen jetzt also eine gewichtsmaximale gerade Kantenmenge C^* in G^* . Das heißt, jeder Knoten hat Grad 0 oder 2 in C^* .

3. Modifiziere $G^* = (F, E^*)$ zu $G' = (V', E')$ wie folgt:



Ursprüngliche Kanten behalten ihr Gewicht und neue Kanten erhalten Gewicht 0. G' ist wieder planar und 3-regulär.

Definition: Sei $k \in \mathbb{N}$ eine Zahl. Eine Kantenmenge $X \subseteq E$ heißt **k-Faktor**, wenn jeder Knoten zu genau k Kanten in X inzident ist.

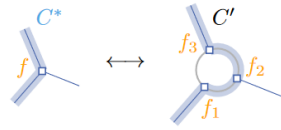
- 1-Faktoren heißen auch **perfekte Matchings**

Lemma:

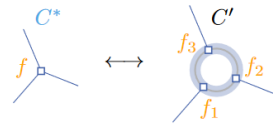
- Für jede gerade Menge $C^* \subseteq E^*$ ex. ein 2-Faktor $C' \subseteq E'$ mit $C' \cap E^* = C^*$
- Für jeden 2-Faktor $C' \subseteq E'$ ist $C^* = C' \cap E^*$ eine gerade Menge
- Es gilt $w(C') = w(C^*)$

Beweis:

1. Fall $f \in F$ hat zwei inzidente Kanten in C^* :



2. Fall $f \in F$ hat keine inzidente Kante in C^* :



Wir suchen jetzt also einen gewichtsmaximalen 2-Faktor C' in G' .

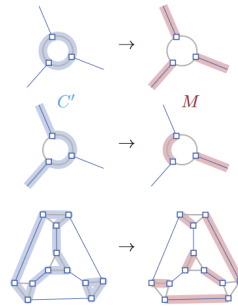
4. Betrachte 1-Faktoren (perfekte Matchings) statt 2-Faktoren.

- Da G' 3-regulär ist, ist das Komplement eines 2-Faktors C' in G' ein perfektes Matching M .

$$M = E' - C'$$

- 2-Faktor C' ist gewichtsmaximal genau dann, wenn das komplementäre perfekte Matching M gewichtsminimal ist

$$w(M) = w(E') - w(C')$$



Damit haben wir einen Algorithmus angegeben, der das Problem löst. Im Folgenden betrachten wir die Laufzeit.

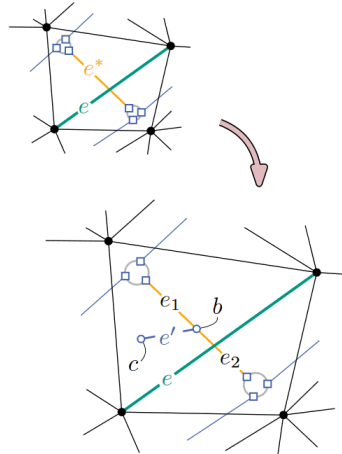
Satz: In planaren Graphen können gewichtsm minimale perfekte Matchings in $\mathcal{O}(n^{\frac{3}{2}} \log n)$ berechnet werden.

Beweis: Reduziere auf gewichtsm maximales Matching.

- $w'(e) := -w(e)$, d.h. maximal bezüglich $w' \iff$ minimal bezüglich w
- $w''(e) := W + w'(e)$ für großes $W > |V| \cdot \max_{e \in E'}(|w'(e)|)$, also hat max. Matching bzgl. w'' die größtmögliche Anzahl Kanten. Damit sind gewichtsm maximale Matchings bzgl. w'' perfekt.
- Max. Matchings bzgl. w'' entsprechen also genau den min. perfekten Matchings bezüglich w .
- Da MAX MATCHING in $\mathcal{O}(n^{\frac{3}{2}} \log n)$ ist, ist der Satz bewiesen.

Nun muss nur noch $C_0 \neq \emptyset$ sichergestellt werden.

- Für eine Kante $e \in E_0$ wollen wir erzwingen, dass $e \in C_0$
- Also soll e^* nicht in M sein:
 - Unterteile dafür e^* mit Knoten b und setze für die neu entstandenen Kanten e_1, e_2 die Gewichte $w(e_1) = w(e^*)$ und $w(e_2) = 0$
 - Füge Kante $e' = bc$ mit neuem Knoten c hinzu und setze $w(e') = 0$
 - Jedes perfekte Matching muss dann e' enthalten



- Um besten Schnitt zu erhalten, wiederholt man den Vorgang für jede Kante $e \in E_0$
- Wir erhalten Laufzeit $\mathcal{O}(n^{\frac{3}{2}} \log n) \cdot \mathcal{O}(n) = \mathcal{O}(n^{\frac{5}{2}} \log n)$. $\mathcal{O}(n^{\frac{3}{2}} \log n)$ ist aber möglich!

Damit ist der Beweis abgeschlossen. Es folgt eine Übersicht über den Algorithmus.

Eingabe: $G_0 = (V, E_0)$ planar.

1. ↓

Trianguliere zu $G = (V, E)$.

2. ↓

Dualisiere zu $G^* = (F, E^*)$.

3. ↓

Modifiziere zu $G' = (V', E')$.

4. ↘

Berechne ein gewichtsminimales perfektes Matching M in G' .

Ausgabe: $C_0 = C \cap E_0$ Mixed-Max-Cut in G_0 .

↑

$C = (C^*)^*$ Mixed-Max-Cut in G .

↑

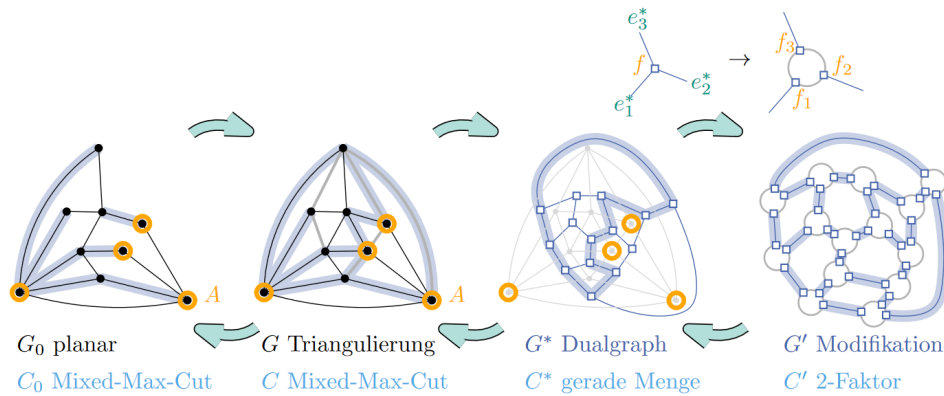
$C^* = C' \cap E^*$ gew.max. gerade Menge in G^*

↑

$C' = E' - M$ gew.max. 2-Faktor in G'

↗

Da alle Schritte bis auf Berechnung von M nur $\mathcal{O}(n)$ Zeit brauchen, ist MIXED-MAX-CUT in $\mathcal{O}(n^{\frac{3}{2}} \log n)$.



8 Flussnetzwerke und Maximum-Flow

Wir betrachten im Folgenden gerichtete Graphen $D = (V, A)$

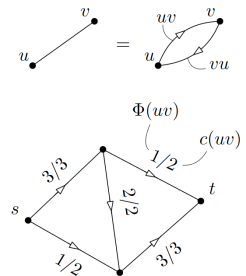
- Kante von u nach v heißt uv und es gilt $uv \neq vu$
- Wir nehmen an, dass $uv \in A \iff vu \in A$

Definition: Ein **Flussnetzwerk** ist ein 4-Tupel

$$(D = (V, A), c: A \rightarrow \mathbb{R}_{>0}, s \in V, t \in V)$$

wobei D wie oben, c jeder Kante ihre Kapazität zuordnet, s die Quelle und t die Senke darstellen. Die Kapazität einer Kante ist in beide Richtungen gleich, also

$$c(uv) = c(vu) \quad \forall uv \in A$$



Definition: Ein **s-t-Fluss** bezüglich eines Flussnetzwerkes ist eine Funktion $\Phi: A \rightarrow \mathbb{R}$, die jeder Kante uv ihren Fluss von u nach v zuordnet und Folgendes einhält:

- Flusserhaltung: $\sum_{uv \in A} \Phi(uv) = 0$ für jeden Knoten $u \neq s, t$
(Netto-Ausfluss aus u muss 0 sein, da Einfluss negativ gezählt wird)
- Zulässigkeit: $\Phi(uv) \leq c(uv)$ für alle $uv \in A$
- Antisymmetrie: $\Phi(uv) = -\Phi(vu)$ für alle $uv \in A$

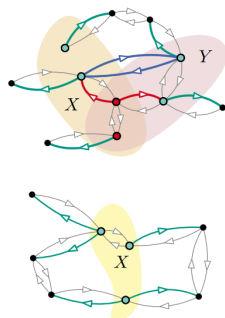
Der **Wert** von Φ ist der Netto-Ausfluss bei s : $\Phi(s) = \sum_{sv \in A} \Phi(sv) = -\Phi(t)$

MAXIMUM-FLOW: Gegeben ein Flussnetzwerk, finde einen maximalen s-t-Fluss. Im Allgemeinen in $\mathcal{O}(n^2)$, aber für planare Graphen geht es besser.

Notation: Für $X \subseteq V$ sei $\Phi(X) := \sum_{\substack{uv \in A \\ u \in X, v \notin X}} \Phi(uv)$ der Netto-Ausfluss aus X .

Also ist $\Phi(\{s\}) = \Phi(s)$ und $\Phi(\{v\}) = 0$ für alle $v \neq s, t$.

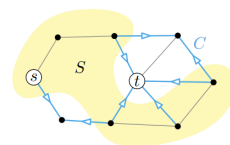
Beobachtung: Sind $X, Y \subseteq V$ disjunkt, so gilt $\Phi(X \cup Y) = \Phi(X) + \Phi(Y)$. Zerlegt man X in einelementige Mengen, so folgt $\Phi(X) = \sum_{u \in X} \Phi(u)$.



Definition: Ein **s-t-Schnitt** ist ein Schnitt $C \subseteq A$, induziert von einer Knotenmenge $S \subseteq V$ mit $s \in S, t \notin S$:

$$C := \{uv \in A \mid u \in S, v \notin S\}$$

Die **Kapazität** eines solchen Schnitts ist $c(C) := \sum_{e \in C} c(e)$.



Max-Flow-Min-Cut-Lemma: Für jeden s-t-Schnitt C und s-t-Fluss Φ gilt

$$\Phi(s) \leq c(C)$$

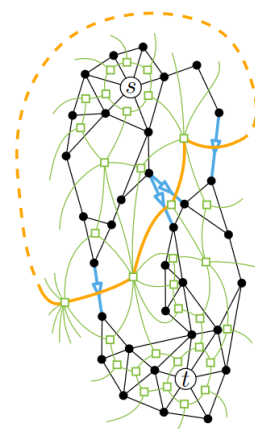
Beweis: $\Phi(s) = \sum_{v \in S} \Phi(\{v\}) = \Phi(S) = \sum_{e \in C} \Phi(e) \leq \sum_{e \in C} c(e) = c(C)$

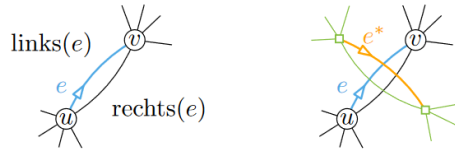
wobei die erste Gleichheit gilt, da $\Phi(\{v\}) = 0$ für alle $v \neq s$ ist.

Max-Flow-Min-Cut-Theorem: $\max \Phi(s) = \min c(C)$ *ohne Beweis.*

Im Folgenden reicht es also nach einen s-t-Schnitt mit minimaler Kapazität zu suchen. Da $c(e) > 0$ für jede Kante $e \in A$, reicht es inklusionsminimale s-t-Schnitte $C \subseteq A$ zu betrachten, also solche, die keinen s-t-Schnitt enthalten. Schnitte in D entsprechen Kreise im Dualgraphen.

Definition: Der **gerichtete Dualgraph** $D^* = (V^*, A^*)$ zu D : Für $e = uv$ in D sei $\text{links}(e)$ und $\text{rechts}(e)$ die links bzw. rechts von e liegende Facette, wenn man über e von u nach v geht. In D^* sei die Dualkante e^* von $\text{links}(e)$ nach $\text{rechts}(e)$ orientiert.





Definition: Ein **s - t -Kreis** ist ein einfacher gerichteter Kreis in D^* mit s auf der rechten und t auf der linken Seite.

Lemma: Sei $C \subseteq A$ eine Kantenmenge und $C^* \subseteq A^*$ die dazu duale Kantenmenge. Dann gilt:

$$C \text{ ist ein } s\text{-}t\text{-Schnitt} \iff C^* \text{ ist ein } s\text{-}t\text{-Kreis}$$

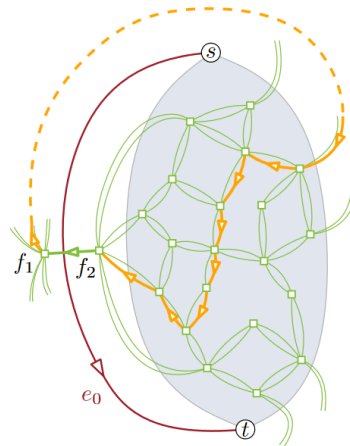
Wir setzen $l(e^*) := c(e)$ für alle $e \in A$ und interpretieren das als Länge der Dualkante e^* .

Es reicht also einen s - t -Kreis mit minimaler Länge zu finden.

Satz: Für planare Graphen mit s und t an einer gemeinsamen Facette, kann ein Max-Flow in Linearzeit gefunden werden.

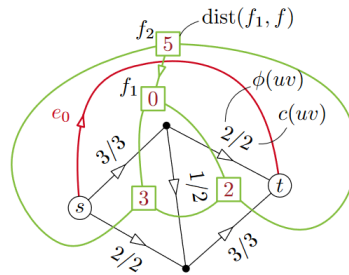
Beweis:

- O.B.d.A. liegen s und t an der äußeren Facette
- Jeder s - t -Kreis muss die äußere Facette f_0 als Dualknoten enthalten
- Füge neue Kante $e_0 = st$ mit Kapazität $c(e_0) = 0$ in äußere Facette ein
- Dies spaltet die äußere Facette f_0 in $f_1 = \text{rechts}(e_0)$ und $f_2 = \text{links}(e_0)$
- Das Resultat ist $D_+ = D + e_0$. Berechne Dual D_+^* mit $l(e^*) := c(e)$
- Berechne kürzesten Weg von f_1 nach f_2 : $\text{dist}(f_1, f_2) = \min c(C) = \max \Phi(s)$



- Berechne daraus einen maximalen Fluss Φ :

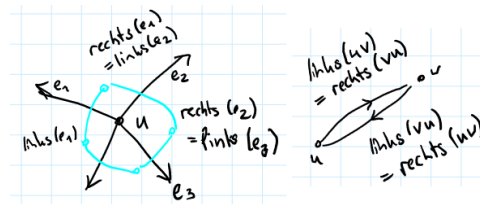
$$\Phi(e) := \text{dist}(f_1, \text{rechts}(e)) - \text{dist}(f_1, \text{links}(e))$$



- Überprüfe Eigenschaften eines Flusses:
 - Flusserhaltung: Für einen Knoten rechnet man im Kreis rechts – links, sodass sich rechts und links jeweils rauskürzen
 - Zulässigkeit: Eine Möglichkeit von f_1 nach $\text{rechts}(uv)$ zu gehen, ist, zuerst von f_1 nach $\text{links}(uv)$ und dann über die Kante $e^* = (uv)^*$ nach $\text{rechts}(uv)$ zu gehen. Also ist

$$\begin{aligned} \text{dist}(f_1, \text{rechts}(uv)) &\leq \text{dist}(f_1, \text{links}(uv)) + c(uv) \\ \iff \text{dist}(f_1, \text{rechts}(uv)) - \text{dist}(f_1, \text{links}(uv)) &\leq c(uv). \end{aligned}$$

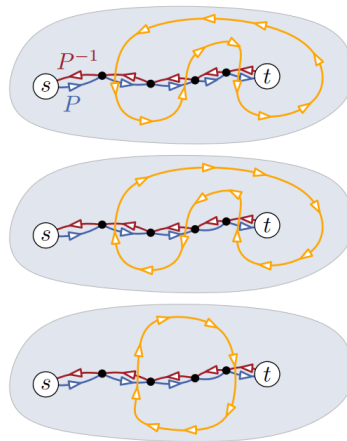
- Asymmetrie: Dies folgt aus $\text{links}(uv) = \text{rechts}(vu)$ bzw. $\text{links}(vu) = \text{rechts}(uv)$



- Damit ist der Satz bewiesen.

Betrachte nun den allgemeinen Fall, dass s und t an beliebigen Facetten liegen:

- Wähle einen gerichteten Pfad P von s nach t
- Sei $C^* \subseteq A^*$ ein gerichteter Kreis im Dualen und $C \subseteq A$ der entsprechende Schnitt im Primalen
- Ist C^* ein s - t -Kreis, dann gilt $|C^* \cap P^*| = |C^* \cap P^{*-1}| + 1$, d.h. der Kreis geht einmal mehr von links nach rechts als von rechts nach links
- Ist C^* ein t - s -Kreis, dann gilt $|C^* \cap P^*| = |C^* \cap P^{*-1}| - 1$
- Ansonsten gilt: $|C^* \cap P^*| = |C^* \cap P^{*-1}|$



- Verringert man alle Kapazitäten der Kanten auf P um α und erhöht alle Kapazitäten der Kanten auf P^{-1} um α , so wird
 - jeder s - t -Kreis um genau α kürzer,
 - jeder t - s -Kreis um genau α länger,
 - jeder andere Kreis weder länger noch kürzer
- Anfangs waren alle Kreislängen positiv. Wählt man $\alpha > 0$ groß genug, werden Kreise negative Länge bekommen, aber nur s - t -Kreise!
- Ein Kreis, der bei kleinstem α negative Länge bekommt, ist ein kürzester s - t -Kreis

Finde jetzt also maximales α so, dass noch keine negative Kreise entstehen.

Satz: Dieses maximale α kann in $\mathcal{O}(n \log n)$ bestimmt werden. *ohne Beweis.*

Korollar: MAX-FLOW in planaren Graphen kann in $\mathcal{O}(n \log n)$ berechnet werden.

9 Menger-Problem