

Zusammenfassung - Algorithmen für planare Graphen

Julian Shen

25. April 2023

1 Einführung

Definition: Graph ist ein Tupel $G = (V, E)$ mit endliche Knotenmenge V und endliche Kantenmenge E

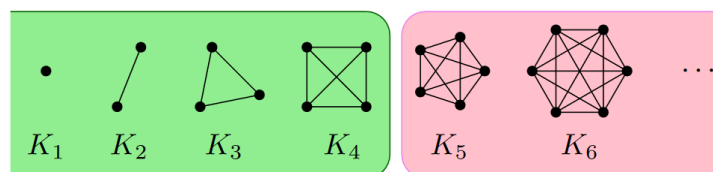
- Kante $e \in E$ hat Form $e = uv$ mit $u, v \in V$.
- $uv = vu \rightarrow$ Graphen **ungerichtet**
- $e = uu$ ist erlaubt \rightarrow **Schlinge**
- Auch $e = uv$ und $e' = uv$ erlaubt mit $e \neq e' \rightarrow$ **Mehrfachkante**
- **Einfacher Graph** \iff ohne Schlingen und Mehrfachkanten
- **Zusammenhängend** \iff ein Weg zwischen je zwei Knoten

Definition: Eine **Zeichnung** von $G = (V, E)$ bildet diesen so auf \mathbb{R}^2 ab, dass

1. Knoten Punkte in der Ebene sind, d.h. $V \subset \mathbb{R}^2$
 2. Kante $e = uv$ ist injektive, stetige Kurve von u nach v , d.h. $\gamma_e: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit
 - $\gamma_e(0) = u$ und $\gamma_e(1) = v$
 - $\gamma_e(t) \notin V$ für alle $0 < t < 1$
- Zeichnung heißt **kreuzungsfrei** bzw. **planar** wenn für je zwei Kanten e, e' und $0 < t, t' < 1$ gilt: $\gamma_e(t) \neq \gamma_{e'}(t')$
 - Graph heißt **planar**, wenn er mindestens eine kreuzungsfreie Zeichnung besitzt

Definition: Für $n \in \mathbb{N}$ ist der **vollständige Graph** K_n

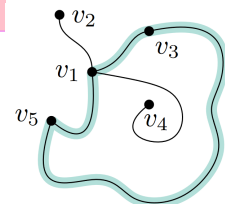
- $V(K_n) = \{v_1, \dots, v_n\}$
- $E(K_n) = \{v_i v_j \mid v_i, v_j \in V, i \neq j\}$



Lemma: Graph K_5 ist nicht planar

Beweis: Betrachte beliebige Zeichnung von K_5

- Betrachte v_1 und seine 4 ausgehenden Kanten
- O.B.d.A. Kanten kreuzungsfrei zu v_2, v_3, v_4, v_5 in zyklischer Reihenfolge um v_1
- Kanten $v_1 v_3, v_3 v_5, v_5 v_1$ bilden geschlossene Kurve in \mathbb{R}^2 die v_2 und v_4 trennt $\implies v_2 v_4$ kann nicht kreuzungsfrei gezeichnet sein



Definition: Für $m, n \in \mathbb{N}$ ist der vollständig bipartite Graph $K_{m,n}$

- $V(K_{m,n}) = \{a_1, \dots, a_m\} \cup \{b_1, \dots, b_n\}$
- $E(K_{m,n}) = \{a_i b_j \mid i \in \{1, \dots, m\}, j \in \{1, \dots, n\}\}$



Lemma: Graph $K_{3,3}$ ist nicht planar

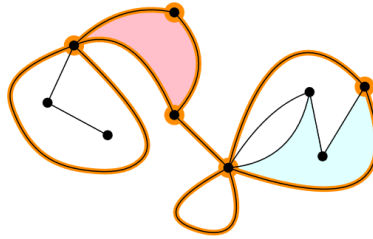
Beweis: Betrachte beliebige Zeichnung von $K_{3,3}$

- Kreis $a_1 b_1 a_2 b_2 a_3 b_3$ im Graphen bildet eine geschlossene Kurve in \mathbb{R}^2
 - Jede Kante von $a_1 b_2, a_2 b_3, a_3 b_1$ liegt komplett innerhalb oder komplett außerhalb dieser Kurve
- \implies mindestens zwei liegen auf der gleichen Seite
- \implies diese zwei kreuzen sich



Definitionen: Für eine feste planare Zeichnung eines planaren Graphen definiere:

- **Facetten:** Zusammenhangskomponenten von \mathbb{R}^2 nach Entfernen aller Knoten und Kanten \implies Es gibt genau eine **äußere Facette** und mehrere **innere Facetten**
- **Äußere Knoten** sind die, die inzident zur äußeren Facette sind
- **Innere Knoten** sind die übrigen Knoten
- **Äußere Kanten** sind die, die komplett im Rand der äußeren Facette liegen
- **Innere Kanten** sind die übrigen Kanten



$n = 9$ Knoten (5 äußere, 4 innere)
 $m = 14$ Kanten (8 äußere, 6 innere)
 $f = 7$ Facetten (1 äußere, 6 innere)

Satz von Euler: Sei G ein zusammenhängender Graph mit einer planaren Zeichnung mit n Knoten, m Kanten und f Facetten. Dann gilt

$$n - m + f = 2$$

Beweis: Beweise $m - (f - 1) = n - 1$, woraus die Behauptung folgt. Führe dafür eine Induktion nach $f - 1$, der Anzahl der inneren Facetten, durch.

- I.A.: $f - 1 = 0$, d.h. keine innere Facette $\rightarrow G$ ist ein Baum, also kreisfrei und zusammenhängend $\rightarrow m = n - 1$
- I.S.: $f - 1 \geq 1$, d.h. min. eine innere Facette
 - Sei e eine Kante zwischen äußerer und innerer Facette $\rightarrow G' = G \setminus e$ ist zusammenhängend \rightarrow In G' gilt $n' = n, m' = m - 1, f' = f - 1$
 - Mit I.V. folgt: $m' - (f' - 1) = n' - 1 \Leftrightarrow m - 1 - (f - 1 - 1) = n - 1 \Leftrightarrow m - (f - 1) = n - 1$



Korollar aus Euler-Formel: Sei G ein planarer, einfacher Graph mit $n \geq 3$ Knoten, m Kanten, und kleinstem vorkommenden Knotengrad $\delta(G)$. Dann gilt

$$m \leq 3n - 6 \quad \text{und} \quad \delta(G) \leq 5$$

Beide Ungleichungen sind bestmöglich.

Beweis: $m \leq 3n - 6$

- O.B.d.A. G ist zusammenhängend, da man Kanten einfügen kann bis er das ist
- Jede Facette ist berandet von min. 3 Kantenseiten, da $n \geq 3$
- Jede Kantenseite in genau eine Facette
- Jede Kante hat genau 2 Seiten

$$\implies 3f \leq \text{Anzahl der Seiten-Facetten-Inzidenzen} = 2m$$

$$\implies 3(2 + m - n) \leq 2m \implies m \leq 3n - 6 \text{ (mit Euler-Formel)}$$

Beweis: $\delta(G) \leq 5$

- Jede Kante hat genau 2 inzidente Knoten
- Jeder Knoten v hat genau $\deg(v)$ inzidente Kanten
- Für jeden Knoten v gilt $\deg(v) \geq \delta(G)$

$$\implies 2m = \text{Anzahl der Knoten-Kanten-Inzidenzen} = \sum_{v \in V(G)} \deg(v) \geq \delta(G) \cdot n$$

$$\implies 2(3n - 6) \geq 2m \geq \delta(G) \cdot n \implies \delta(G) \leq 6 - 12/n$$

2 Einbetten und Dualisieren

Einbettung = Äquivalenzklasse von planaren Zeichnungen



Definition: Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph mit einer planaren Zeichnung. Die **(kombinatorische) Einbettung** ist

- für jeden Knoten v die zyklische (cw = „clockwise“) Reihenfolge der inzidenten Halbkanten an v
- für jede Facette f die zykl. (cw) Reihenfolge der inzidenten Kantenseiten an f

Betrachte dafür beliebige Orientierung der Kanten und man erhält Halbkanten e^{in} und e^{out} sowie Kantenseiten e^{left} und e^{right} von e



Alle Zeichnungen mit der gleichen Einbettung sind äquivalent.

Definition: Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph mit einer festen Einbettung und Facettenmenge F . Der **Dualgraph** $G^* = (V^*, E^*)$ ist

- $V^* = F$, das heißt, $f \in F \mapsto v_f \in V^*$
- für jede Kante $e \in E$ läuft die duale Kante e^* zwischen der Facette an e^{left} und der an e^{right}



Die Einbettung des **Primalgraphen** $G = (V, E)$ induziert eine Einbettung des **Dualgraphen** $G^* = (V^*, E^*)$:

primal	dual
$f \in F$	$v_f = f \in V^* = F$
$e^{\text{left}}, e^{\text{right}}$	$(e^*)^{\text{out}}, (e^*)^{\text{in}}$
$v \in V$	$f_v = v \in F^*$
e Brücke	e^* Schlinge
e Schlinge	e^* Brücke

Bemerkungen:

- Der Dualgraph G^* ist immer zusammenhängend
- Falls G zusammenhängend ist, gilt $G = (G^*)^*$
- Für jede Einbettung von G und jede Facette f gibt es eine planare Zeichnung mit dieser Einbettung und f als äußere Facette