Zusammenfassung - Algorithmen für planare Graphen

Julian Shen

25. April 2023

1 Einführung

Definition: **Graph** ist ein Tupel $G = (V, E)$ mit endliche Knotenmenge V und endliche Kantenmenge E

- Kante $e \in E$ hat Form $e = uv$ mit $u, v \in V$.
- $uv = vu \to$ Graphen **ungerichtet**
- $e = uu$ ist erlaubt $\to$ **Schlinge**
- Auch $e = uv$ und $e' = uv$ erlaubt mit $e \neq e' \to$ **Mehrfachkante**
- **Einfacher Graph** $\iff$ ohne Schlingen und Mehrfachkanten
- **Zusammenhängend** $\iff$ ein Weg zwischen je zwei Knoten

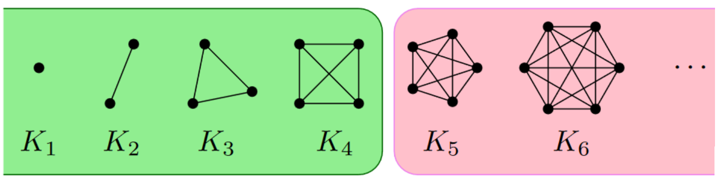
Definition: Eine **Zeichnung** von $G = (V, E)$ bildet diesen so auf $\mathbb{R}^2$ ab, dass

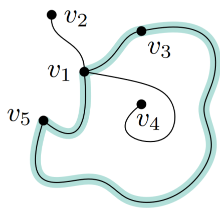
1. Knoten Punkte in der Ebene sind, d.h. $V \subset \mathbb{R}^2$
2. Kante $e = uv$ ist injektive, stetige Kurve von u nach v, d.h. $\gamma_e \colon [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ mit
   - $\gamma_e(0) = u$ und $\gamma_e(1) = v$
   - $\gamma_e(0) \notin V$ für alle $0 < t < 1$

- Zeichnung heißt **kreuzungsfrei** bzw. **planar** wenn für je zwei Kanten e, e' und $0 < t, t' < 1$ gilt: $\gamma_e(t) \neq \gamma_e(t')$
- Graph heißt **planar**, wenn er mindestens eine kreuzungsfreie Zeichnung besitzt

Definition: Für $n \in \mathbb{N}$ ist der **vollständige Graph** K_n

- $V(K_n) = \{v_1, \dots, v_n\}$
- $E(K_n) = \{v_i v_j \mid v_i, v_j \in V, i \neq j\}$





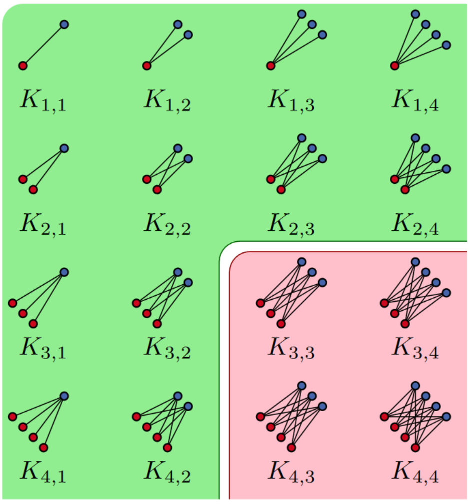
Lemma: Graph K_5 ist nicht planar

Beweis: Betrachte beliebige Zeichnung von K_5

- Betrachte v_1 und seine 4 ausgehenden Kanten
- O.B.d.A. Kanten kreuzungsfrei zu v_2, v_3, v_4, v_5 in zyklischer Reihenfolge um v_1
- Kanten v_1v_3, v_3v_5, v_5v_1 bilden geschlossene Kurve in $\mathbb{R}^2$ die v_2 und v_4 trennt $\implies$ v_2v_4 kann nicht kreuzungsfrei gezeichnet sein

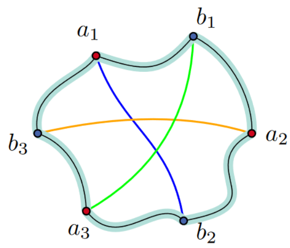
Definition: Für $m, n \in \mathbb{N}$ ist der vollständig bipartite Graph $K_{m,n}$

- $V(K_{m,n}) = \{a_1, \ldots, a_m\} \cup \{b_1, \ldots, b_n\}$
- $E(K_{m,n}) = \{a_i b_j \mid i \in \{1, \ldots, m\}, j \in \{1, \ldots, n\}\}$



Lemma: Graph $K_{3,3}$ ist nicht planar

Beweis: Betrachte beliebige Zeichnung von $K_{3,3}$



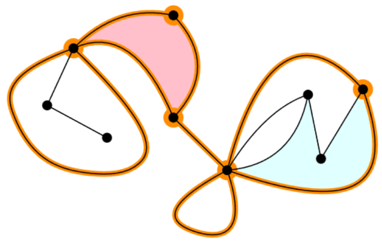
- Kreis $a_1 b_1 a_2 b_2 a_3 b_3$ im Graphen bildet eine geschlossene Kurve in $\mathbb{R}^2$
- Jede Kante von $a_1 b_2, a_2 b_3, a_3 b_1$ liegt komplett innerhalb oder komplett außerhalb dieser Kurve

  $\Longrightarrow$ mindestens zwei liegen auf der gleichen Seite

  $\Longrightarrow$ diese zwei kreuzen sich

Definitionen: Für eine feste planare Zeichnung eines planaren Graphen definiere:

- **Facetten**: Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{R}^2$ nach Entfernen aller Knoten und Kanten $\Longrightarrow$ Es gibt genau eine **äußere Facette** und mehrere **innere Facetten**
- **Äußere Knoten** sind die, die inzident zur äußeren Facette sind
- **Innere Knoten** sind die übrigen Knoten
- **Äußere Kanten** sind die, die komplett im Rand der äußeren Facette liegen
- **Innere Kanten** sind die übrigen Kanten



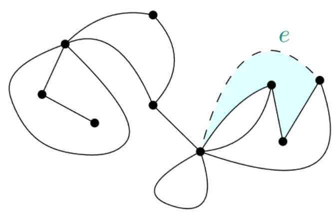
$n = 9$ Knoten (5 äußere, 4 innere)
$m = 14$ Kanten (8 äußere, 6 innere)
$f = 7$ Facetten (1 äußere, 6 innere)

Satz von Euler: Sei G ein zusammenhängender Graph mit einer planaren Zeichnung mit n Knoten, m Kanten und f Facetten. Dann gilt

$$n - m + f = 2$$

Beweis: Beweise $m - (f-1) = n - 1$, woraus die Behauptung folgt. Führe dafür eine Induktion nach $f - 1$, der Anzahl der inneren Facetten, durch.

- I.A.: $f - 1 = 0$, d.h. keine innere Facette $\to$ G ist ein Baum, also kreisfrei und zusammenhängend $\to$ $m = n - 1$
- I.S.: $f - 1 \geq 1$, d.h. min. eine innere Facette
  - Sei e eine Kante zwischen äußerer und innerer Facette $\to$ $G' = G \setminus e$ ist zusammenhängend $\to$ In G' gilt $n' = n, m' = m - 1, f' = f - 1$
  - Mit I.V. folgt: $m' - (f' - 1) = n' - 1 \Leftrightarrow m - 1 - (f - 1 - 1) = n - 1 \Leftrightarrow m - (f - 1) = n - 1$



Korollar aus Euler-Formel: Sei G ein planarer, einfacher Graph mit $n \geq 3$ Knoten, m Kanten, und kleinstem vorkommenden Knotengrad $\delta(G)$. Dann gilt

$$m \leq 3n - 6 \qquad \text{und} \qquad \delta(G) \leq 5$$

Beide Ungleichungen sind bestmöglich.

Beweis: $m \leq 3n - 6$

- O.B.d.A. G ist zusammenhängend, da man Kanten einfügen kann bis er das ist
- Jede Facette ist berandet von min. 3 Kantenseiten, da $n \geq 3$
- Jede Kantenseite in genau eine Facette
- Jede Kante hat genau 2 Seiten

$\implies 3f \leq$ Anzahl der Seiten-Facetten-Inzidenzen $= 2m$

$\implies 3(2 + m - n) \leq 2m \implies m \leq 3n - 6$ (mit Euler-Formel)

Beweis: $\delta(G) \leq 5$

- Jede Kante hat genau 2 inzidente Knoten
- Jeder Knoten v hat genau $\deg(v)$ inzidente Kanten
- Für jeden Knoten v gilt $\deg(v) \geq \delta(G)$

$\implies 2m =$ Anzahl der Knoten-Kanten-Inzidenzen $= \sum\limits_{v \in V(G)} \deg(v) \geq \delta(G) \cdot n$

$\implies 2(3n - 6) \geq 2m \geq \delta(G) \cdot n \implies \delta(G) \leq 6 - 12/n$