Zusammenfassung - Robotik

Julian Shen

31. Mai 2023

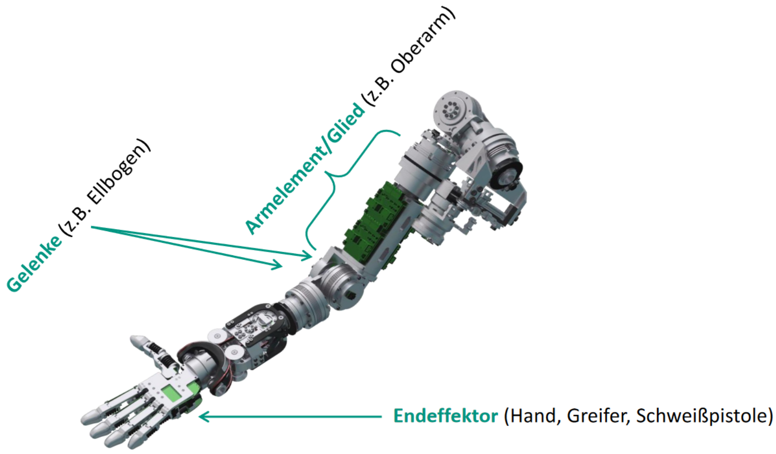
1 Mathematische Grundlagen

Kinematik ist die reine geometrische Beschreibung von Bewegung eines Manipulators oder Roboters. Das essentielle Konzept ist die **Position**.

Statik behandelt Kräfte und Momente, die sich auf einen ruhenden Mechanismus auswirken. Das essentielle Konzept ist die **Steifigkeit**.

Dynamik analysiert die Kräfte und Momente, die durch Bewegung und Beschleunigung eines Mechanismus und einer zusätzlichen Last entstehen.

Terminologie:



Kinematische Kette ist eine Menge an Gliedern, die durch Gelenke verbunden sind.

Freiheitsgrade (DoF) ist die Anzahl unabhängiger Parameter, die zur kompletten Spezifikation der Lage eines Objekts benötigt werden, z.B. Starrkörper hat in 2D 3 DoF und in 3D 6 DoF.

Starrkörperbewegungen werden durch zwei Eigenschaften charakterisiert:

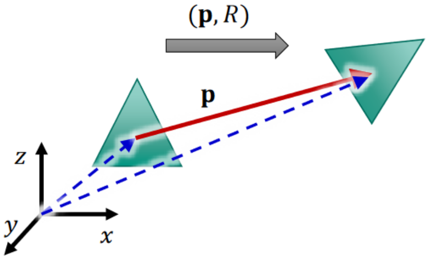
1. Distanz zweier beliebiger Punkte ist konstant
2. Orientierungen im Körper bleiben erhalten

SO(3) und SE(3):

- SO(3): **Spezielle Orthogonale Gruppe**, die **Rotationen** repräsentiert
- SE(3): **Spezielle Euklidische Gruppe**, die **Transformationen** repräsentiert
- Elemente aus SO(3) werden als reale 3×3 orthogonale Matrizen R (Zeilen- und Spaltenvektoren orthonormal) beschrieben und erfüllen

$$R^\top R = 1 \qquad \text{mit} \qquad \det(R) = 1$$

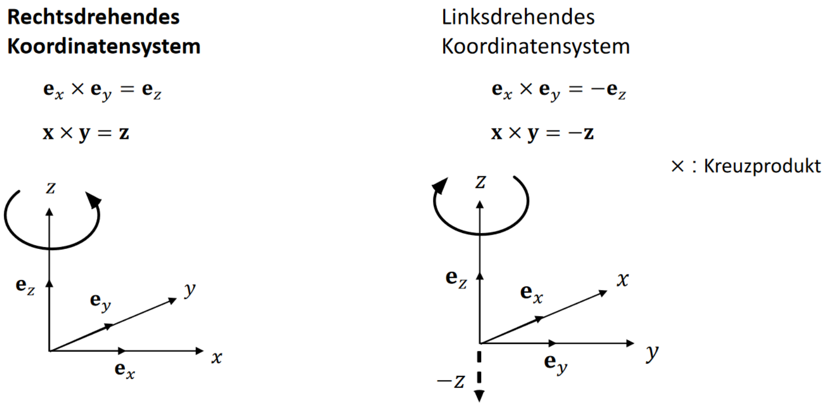
- Elemente aus SE(3) sind von der Form $(\mathbf{p}, R)$ mit $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$ und $R \in SO(3)$ und beschreiben Verknüpfungen von Rotationen und Translationen



Euklidischer Raum: Vektorraum $\mathbb{R}^3$ mit dem Skalarprodukt.

- Punkt **a** im euklidischen Raum wird durch Vielfache der Einheitsvektoren $\mathbf{e_x}, \mathbf{e_y}, \mathbf{e_z}$ beschrieben

- Wir benutzen **rechtsdrehende Koordinatensysteme**



Lineare Abbildungen (Transformationen), die den euklidischen Raum auf sich selbst abbilden, nennt man **Endomorphismen**:

$$\phi(\cdot) \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

- Endomorphismen können durch quadratische Matrizen repräsentiert werden:

$$\phi(\mathbf{a}) = A \cdot \mathbf{a}, \qquad A \in R^{3\times 3}$$

- A beschreibt einen Basiswechsel zwischen den originalen Basisvektoren $\mathbf{e_x}, \mathbf{e_y}, \mathbf{e_z}$ und den neuen Basisvektoren $\mathbf{e'_x}, \mathbf{e'_y}, \mathbf{e'_z}$:

$$A = (\mathbf{e'_x} \quad \mathbf{e'_y} \quad \mathbf{e'_z}) \cdot (\mathbf{e_x} \quad \mathbf{e_y} \quad \mathbf{e_z})^{-1}$$

Bijektive Endomorphismen nennt man **Isomorphismen**.

- Eigenschaften:
    1. Winkel bleiben erhalten
    2. Längen bleiben erhalten
    3. Händigkeit beleibt erhalten
- Eine spezielle Art von Isomorphismen ist die **Rotationsgruppe** SO(3)

Rotationsgruppe SO(3):

- SO(3) ist nicht kommutativ: $A \cdot B \cdot \mathbf{x} \neq B \cdot A \cdot \mathbf{x}$ mit $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ und $A, B \in \mathrm{SO}(3)$
- Für alle $R \in \mathrm{SO}(3)$ ist $R^{-1} = R^\top$, die Inverse kann also leicht berechnet werden

Rotationen in 2D:

- Rotation in der xy-Ebene um $(0,0)$ ist eine **lineare Transformation**
- **Rotationsmatrix**: $R_\alpha(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x}$ mit $RR^\top = R^\top R = I$ und $\det(R) = 1$
- Rotation um einen Punkt $\mathbf{c} \neq (0,0)$ ist keine lineare Transformation. Verschiebe dafür die Ebene um $-\mathbf{c}$, rotiere und verschiebe wieder um $+\mathbf{c}$ zurück:

$$R_{\mathbf{c},\alpha} = R_\alpha(\mathbf{x} - \mathbf{c}) + \mathbf{c} = R_\alpha(\mathbf{x}) + (-R_\alpha(\mathbf{c}) + \mathbf{c})$$

- $R_{\mathbf{c},\alpha}$ ist eine nichtlineare Transformation und heißt **affine Transformation**. Sie unterscheidet sich von R_α nur durch das Addieren einer Konstante

Rotationen in 3D:

- Eine 2D Rotation in der xy-Ebene ist eine 3D Rotation um die z-Achse:

$$R_{\mathbf{z},\alpha} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

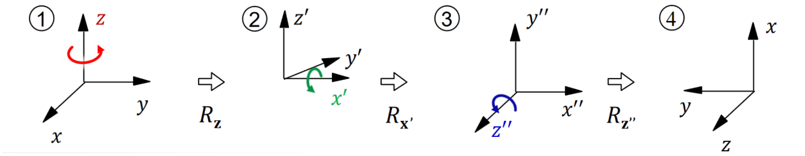
- Rotationen können verkettet werden: $\phi_{\mathbf{z},\gamma}\left(\phi_{\mathbf{y},\beta}\left(\phi_{\mathbf{x},\alpha}(\mathbf{a})\right)\right), \qquad \mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$

Probleme mit Rotationsmatrizen:

- **Redundanz**: Neun Werte für eine Rotationsmatrix
- Probleme im Bereich des maschinellen Lernens

Eulerwinkel:

- Es ist möglich jede Rotation durch drei Rotationen um jeweils eine Rotationsachse darzustellen
- **Euler-Konvention**: $\mathbf{z}\ \mathbf{x}'\ \mathbf{z}''$ (lokale Drehung, Drehung verändert Achsen) oder $\mathbf{x}\ \mathbf{y}\ \mathbf{z}$ (globale Drehung, Drehung um feste Achsen)
- Winkel α, β, γ sind **Eulerwinkel** und beschreiben den Grad der Drehungen



- **Vorteile**: Kompakter und aussagekräftiger als Rotationsmatrizen
- **Nachteile**:
  - Nicht eindeutig: In der Euler-Konvention $\mathbf{x}\ \mathbf{y}'\ \mathbf{z}''$ beschreiben die Eulerwinkel $(45°, -90°, 45°)$ und und $(30°, -90°, 60°)$ die gleiche Rotation
  - Nicht kontinuierlich: Kleine Änderung in der Orientierung können zu großen Änderungen der Eulerwinkel führen
  - **Gimbal Lock**: Bei bestimmten Winkeln werden zwei Achsen voneinander abhängig $\Rightarrow$ Ein Freiheitsgrad geht verloren

Bewertung der Darstellung von Orientierung mit 3×3-Matrizen:

- **Vorteil**: Vektor und Rotationsmatrix sind anschaulich $\Rightarrow$ übliche Form der Eingabe von Posen
- **Nachteil**: Darstellung als $(\mathbf{p}, R)$ mit $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$ und $R \in \mathrm{SO}(3)$ führt dazu, dass Translation und Rotation getrennt durchgeführt werden müssen

$\rightarrow$ **Ziel**: Geschlossene Darstellung von Rotation und Translation in einer Matrix

Affine Transformationen:

- Der **affine Raum** ist eine Erweiterung zum euklidischen Raum
- Beinhaltet Vektoren, die in **erweiterten, homogenen Koordinaten** ausgedrückt werden: $a = (a_x \quad a_y \quad a_z \quad h)^\top, h \in \{0, 1\}$, wobei a für $h = 0$ einen Ortsvektor und für $h = 1$ einen Richtungsvektor beschriebt
- Für Rotationsmatrix R und Translation $\mathbf{t}$ gilt nun:

$$\mathbf{b} = A \cdot \mathbf{x} + \mathbf{t} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^\top & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{t} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^\top & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ 1 \end{pmatrix}$$

womit also nun Translation und Rotation als eine allgemeine homogene 4×4-Matrix beschrieben werden kann:

$$T = \begin{pmatrix} R & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^\top & 1 \end{pmatrix}, \qquad T \in \mathrm{SE}(3) \text{ mit } \mathbf{t} \in \mathbb{R}^3 \text{ und } R \in \mathrm{SO}(3)$$

- Eine **Translationsmatrix**, die eine Verschiebung um $\mathbf{t} = (t_x \quad t_y \quad t_z)^\top$ beschreibt, ist demnach:

$$T_{\text{trans}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Es gilt $T^{-1} = \begin{pmatrix} R^\top & -R^\top \cdot \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^\top & 1 \end{pmatrix}$. Diese bildet $\mathbf{b} = R \cdot \mathbf{x} + \mathbf{t}$ wieder auf $\mathbf{x}$ ab
- **Interpretationen von homogenen** 4×4**-Matrizen**:
  - **Lagebeschreibung**: ${}^AP_B$ beschreibt die Lage des Koordinatensystems B relativ zum Koordinatensystem A
  - **Transformationsabbildung** zwischen Koordinatensystemen:

    $${}^AT_B \colon\ {}^BP \to {}^AP, \qquad {}^AP = {}^AT_B \cdot {}^BP$$

    transformiert Koordinatensystem B in Koordinatensystem A
  - **Transformationsoperator** innerhalb eines Koordinatensystems:

    $$T \colon\ {}^AP_1 \to {}^AP_2, \qquad {}^AP_2 = T \cdot {}^AP_1$$

    transformiert einen Punkt P_1 in einen Punkt P_2 innerhalb des Koordinatensystems A

  Beispiele 1/58-59
- Lagebeschreibungen können als Matrixprodukt verkettet werden, z.B.

$${}^{\text{BKS}}T_{O_3} = {}^{\text{BKS}}T_{O_1} \cdot {}^{O_1}T_{O_2} \cdot {}^{O_2}T_{O_3}$$

Quaternionen:

- Repräsentation ohne Nachteile von Rotationsmatrizen und Eulerwinkeln
- Menge der **Quaternionen** $\mathbb{H}$ ist definiert durch:

$$\mathbb{C} + \mathbb{C}j \qquad \text{mit } j^2 = -1 \text{ und } i \cdot j = -j \cdot i$$

  wobei i die imaginäre Einheit ist

- Ein Element $\mathbf{q} \in \mathbb{H}$ hat die Form:

$$\mathbf{q} = (a, \mathbf{u})^\top = a + u_1 i + u_2 j + u_3 k \qquad \text{mit } a \in \mathbb{R}, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^3 \text{ und } k = i \cdot j$$

- a heißt **Realteil** und $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)^\top$ heißt **Imaginärteil**
- **Rechenregeln**:

$$\boxed{\begin{array}{lllllll} i^2 & = & j^2 & = & k^2 & = \; i \cdot j \cdot k & = \; -1 \\ i \cdot j & = & -j \cdot i & = & k & \text{(nicht kommutativ!)} & \\ k \cdot i & = & -i \cdot k & = & j & & \end{array}}$$

- **Rechenoperationen**: Seien $\mathbf{q} = (a, \mathbf{u})^\top, \mathbf{r} = (b, \mathbf{v})^\top$ zwei Quaternionen
  - **Addition**: $\mathbf{q} + \mathbf{r} = (a + b, \mathbf{u} + \mathbf{b})^\top$
  - **Skalarprodukt**: $\langle \mathbf{q} \mid \mathbf{r} \rangle = a \cdot b + \langle \mathbf{v} \mid \mathbf{u} \rangle = a \cdot b + v_1 \cdot u_1 + v_2 \cdot u_2 + v_3 \cdot u_3$
  - **Multiplikation**: $\mathbf{q} \cdot \mathbf{r} = (a + u_1 i + u_2 j + u_3 k) \cdot (b + v_1 i + v_2 j + v_3 k)$
  - **Konjugierte** Quaternion: $\mathbf{q}^* = (a, -\mathbf{u})^\top$
  - **Norm**: $|\mathbf{q}| = \sqrt{\mathbf{q} \cdot \mathbf{q}^*} = \sqrt{\mathbf{q}^* \cdot \mathbf{q}} = \sqrt{a^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$
  - **Inverse**: $\mathbf{q}^{-1} = \dfrac{\mathbf{q}^*}{|\mathbf{q}|^2}$
- **Einheitsquaternion** $\mathbb{S}^3 = \{\mathbf{q} \in \mathbb{H} \mid \|q\|^2 = 1\}$
- Beschreibung eines Vektors $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$ als Quaternion $\mathbf{q}$: $\mathbf{q} = (0, \mathbf{p})^\top$
- Beschreibung eines Skalars $s \in \mathbb{R}^3$ als Quaternion $\mathbf{q}$: $\mathbf{q} = (s, \mathbf{0})^\top$
- Sei eine Rotation beschrieben durch eine Drehachse $\mathbf{a}$ mit $\mathbf{a} = 1$ und einen Drehwinkel θ, dann existiert hierfür eine Repräsentation als Quaternion: $\mathbf{q} = \left(\cos\frac{\theta}{2}, \mathbf{a} \sin\frac{\theta}{2}\right)$
- Ein Punkt $\mathbf{v}$ wird mit einer Quaternion $\mathbf{q}$ rotiert durch: $\mathbf{v'} = \mathbf{q}\mathbf{v}\mathbf{q}^{-\mathbf{1}} = \mathbf{q}\mathbf{v}\mathbf{q}^*$, wobei die letzte Gleichheit gilt, weil $\mathbf{q}$ ein Einheitsquaternion ist
- Verkettung von Rotationen $f \circ h$: $f(h(\mathbf{v})) = \mathbf{q}(\mathbf{r}\mathbf{v}\mathbf{r}^*)\mathbf{q}^*$

Beispiel 1/72

Bewertung von Quaternionen:

- **Vorteile**: Kompakt, Anschaulich, Kein Gimbal Lock, Verkettung möglich, Stetige Repräsentation
- **Nachteil**: Nur Beschreibung von Rotation, keine Translation

SLERP Interpolation:

- SLERP Interpolation von $\mathbf{q_1}$ nach $\mathbf{q_2}$ mit Parameter $t \in [0, 1]$:

$$\mathrm{SLERP}(\mathbf{q_1}, \mathbf{q_2}, t) = \frac{\sin((1-t)\cdot\theta)}{\sin\theta} \cdot \mathbf{q_1} + \frac{\sin(t\cdot\theta)}{\sin\theta} \cdot \mathbf{q_2} \qquad \text{mit } \langle \mathbf{q_1} \mid \mathbf{q_2} \rangle = \cos\theta$$

- Ergebnis: Rotation mit konstanter Winkelgeschwindigkeit
- **Problem**: Orientierungen in SO(3) werden durch Einheitsquaternionen doppelt abgedeckt, weil $\mathbf{q}$ und $-\mathbf{q}$ der gleichen Rotation entsprechen

  $\Rightarrow$ SLERP berechnet deshalb nicht immer die kürzeste Rotation. Es muss geprüft werden, ob die Rotation von $\mathbf{q_1}$ zu $\mathbf{q_2}$ oder $-\mathbf{q_1}$ zu $\mathbf{q_2}$ kürzer ist

Duale Quaternionen:

- Erlauben es auch Translationen zu berücksichtigen
- **Duale Zahlen** sind Zahlen der Form:

$$d = p + \varepsilon \cdot s, \quad \text{wobei } \varepsilon^2 = 0$$

  mit **Primärteil** p, **Sekundärteil** s

- **Rechenoperationen**: Seien $d_1 = p_1 + \varepsilon \cdot s_1$ und $d_2 = p_2 + \varepsilon \cdot s_2$ duale Zahlen
  - **Addition**: $d_1 + d_2 = p_1 + p_2 + \varepsilon \cdot (s_1 + s_2)$
  - **Multiplikation**: $d_1 \cdot d_2 = p_1 \cdot p_2 + \varepsilon \cdot (p_1 \cdot s_2 + p_2 \cdot s_1)$
- **Duale Quaternionen**:

$$DQ = (d_1, d_2, d_3, d_4), \qquad d_i = dp_i + \varepsilon \cdot ds_i$$

  - Primärteil dp_i enthält den Winkelwert $\theta/2$
  - Sekundärteil ds_i enthält die Translationsgröße $d/2$
- **Multiplikationstabelle für duale Einheitsquaternionen**:

$\cdot$	**1**	$\boldsymbol{i}$	$\boldsymbol{j}$	$\boldsymbol{k}$	$\boldsymbol{\varepsilon}$	$\boldsymbol{\varepsilon i}$	$\boldsymbol{\varepsilon j}$	$\boldsymbol{\varepsilon k}$
1	1	i	j	k	ε	εi	εj	εk
$\boldsymbol{i}$	i	-1	k	$-j$	εi	$-\varepsilon$	εk	$-\varepsilon j$
$\boldsymbol{j}$	j	$-k$	-1	i	εj	$-\varepsilon k$	$-\varepsilon$	εi
$\boldsymbol{k}$	k	j	$-i$	-1	εk	εj	$-\varepsilon i$	$-\varepsilon$
$\boldsymbol{\varepsilon}$	ε	εi	εj	εk	0	0	0	0
$\boldsymbol{\varepsilon i}$	εi	$-\varepsilon$	εk	$-\varepsilon j$	0	0	0	0
$\boldsymbol{\varepsilon j}$	εj	$-\varepsilon k$	$-\varepsilon$	εi	0	0	0	0
$\boldsymbol{\varepsilon k}$	εk	εj	$-\varepsilon i$	$-\varepsilon$	0	0	0	0

- Rotation um eine Achse $\mathbf{a}$ mit dem Winkel θ: $\mathbf{q_r} = \left(\cos\frac{\theta}{2}, \mathbf{a}\sin\frac{\theta}{2}\right) + \varepsilon \cdot (0,0,0,0)$
- Translation mit dem Vektor $\mathbf{t} = (t_x, t_y, t_z)$: $\mathbf{q_t} = (1,0,0,0) + \varepsilon \cdot (0, \frac{t_x}{2}, \frac{t_y}{2}, \frac{t_z}{2})$
- Kombination zu einer Transformation T: $\mathbf{q_T} = \mathbf{q_t}\mathbf{q_r}$
- Eine Transformation $\mathbf{q_T}$ wird auf einen Punkt $\mathbf{p}$ als duale Quaternion wie folgt angewendet: $\mathbf{p}' = \mathbf{q_T}\mathbf{p}\mathbf{q_T^*}$, mit $\mathbf{q_T^*} = (\mathbf{q_t}\mathbf{q_r})^* = \mathbf{q_r^*}\mathbf{q_t^*}$
- Konjugieren von $\mathbf{q} = \mathbf{p} + \varepsilon \cdot \mathbf{s}$: $\mathbf{q}^* = \mathbf{p}^* - \varepsilon \cdot \mathbf{s}^*$

Beispiel 1/83-85

Bewertung von dualen Quaternionen:

- **Vorteile**: Erlauben Lagebeschreibung und Transformationen, Geringere Redundanz (nur 8 statt 12 Werte bei homogener Matrix)
- **Nachteile**: Lage durch Angabe einer Dualquaternion zu beschreiben ist relativ schwierig, Komplexe Verarbeitungsvorschriften