

# **Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik - Zusammenfassung**

Julian Shen

3. Februar 2022

# 1 Grundbegriffe

## Definition: Ergebnisse und Ereignisse

- **Grundraum** ist eine nicht leere Menge  $\Omega \neq \emptyset$  und enthält alle möglichen **Ergebnisse** eines Zufallsexperiments
- **Ereignisse** sind Teilmengen  $A \subseteq \Omega$ , denen eine Wahrscheinlichkeit zugeordnet werden kann. Falls ein  $\omega$  Ergebnis ist, dann heißt  $\{\omega\}$  **Elementarereignis**

Ereignisse können durch Mengenoperationen logisch verknüpft werden:

- $A \cup B$ : Ereignis A oder B tritt ein („inklusives oder“)
- $A \cap B$ : Ereignis A und B treffen ein
- $A \setminus B$ : Ereignis A tritt ein, aber Ereignis B trifft nicht ein
- $B^c$ : Ereignis B trifft nicht ein
- $A \subseteq B$ : Wenn A eintritt, dann tritt auch B ein

Jedem Ereignis kann durch die **relative Häufigkeit** eine Wahrscheinlichkeit zugeordnet werden. Für  $n$  Wiederholungen und Ergebnisse  $\omega_1, \dots, \omega_n \in \Omega$  gilt:

$$\mathbb{P}_n(A) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{\{\omega_i \in A\}}$$

## Definition: Diskretes Wahrscheinlichkeitsmaß und Wahrscheinlichkeitsraum

Eine Abbildung  $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$  heißt **diskretes Wahrscheinlichkeitsmaß**, falls

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
- $\forall A_n \subseteq \Omega, n \in \mathbb{N}, \text{ disjunkt: } \mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)$  ( $\sigma$ -Additivität)
- es existiert eine abzählbare Menge  $\Omega_0 \subseteq \Omega$  mit  $\mathbb{P}(\Omega_0) = 1$

Dann heißt  $(\Omega, \mathbb{P})$  **diskreter Wahrscheinlichkeitsraum**.

## Rechenregeln für diskrete Wahrscheinlichkeitsräume

- $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$
- $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$
- $\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$
- $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

**Definition: Bernoulliverteilung**

Wahrscheinlichkeitsverteilung heißt Bernoulliverteilung  $Ber_p$  mit Erfolgswahrscheinlichkeit  $p$ , wenn:

- Grundraum  $\Omega = \{0, 1\}$
- $\mathbb{P}(1) = p$  für ein  $p \in [0, 1]$

Es gilt  $\mathbb{P}(\{0\}) = 1 - \mathbb{P}(\{1\}) = 1 - p$

**Definition: Gleichverteilung**

Das Wahrscheinlichkeitsmaß  $(\Omega, \mathbb{P})$  heißt Gleichverteilung oder **Laplace-Verteilung**  $U_A$  auf  $\Omega$ , falls

- $\Omega \neq \emptyset$  endlich
- $\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$ , für  $A \subseteq \Omega$

**Urnenmodelle/Fächermodelle**

Urnenmodell mit $n$ Kugeln und $k$ Ziehungen	mit Zurücklegen	ohne Zurücklegen	
mit Reihenfolge	$n^k$	$\frac{n!}{(n-k)!}$	unterscheidbare Murmeln
ohne Reihenfolge	$\binom{n+k-1}{k}$	$\binom{n}{k}$	ununterscheidbare Murmeln
	mit Mehrfachbelegung	ohne Mehrfachbelegung	Verteilung von $k$ Murmeln auf $n$ Fächer

Urnenmodelle ermöglichen es, die Wahrscheinlichkeiten zu bestimmen, falls von einer Gleichverteilung ausgegangen werden kann!

**Definition: Zähldichte**

Sei  $(\Omega, \mathbb{P})$  ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum. Dann wird die Funktion

$$f : \Omega \rightarrow [0, 1], f(\omega) = \mathbb{P}(\{\omega\})$$

**Wahrscheinlichkeitsfunktion** oder **Zähldichte** von  $\mathbb{P}$  genannt.

Diese besitzt folgende Eigenschaften:

- $\Omega_T := \{\omega \in \Omega \mid f(\omega) > 0\}$  ist abzählbar und heißt **Träger** von  $\mathbb{P}$  bzw. von  $f$
- $\sum_{\omega \in \Omega} f(\omega) = 1$

Die Zähldichte ist eindeutig!

### **Definition: Binomialverteilung**

Das Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mathbb{P} = \text{Bin}_{(n,p)}$  auf  $\{0, \dots, n\}$  mit der Zähldichte

$$f(k) = \binom{n}{k} p^k \cdot (1-p)^{n-k} \quad \forall k \in \{0, \dots, n\}$$

heißt **Binomialverteilung** mit Parametern  $n \in \mathbb{N}$  und  $p \in [0, 1]$ .

### **Definition: Geometrische Verteilung**

Das Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mathbb{P} = \text{Geo}_p$  auf  $\mathbb{N}_0$  mit der Zähldichte

$$f(k) = (1-p)^k \cdot p \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$$

heißt **geometrische Verteilung** mit Parameter  $p \in (0, 1]$ .

## 2 Bedingte Wahrscheinlichkeit und Unabhängigkeit

### Definition: Bedingte Wahrscheinlichkeit

Für  $(\Omega, \mathbb{P})$  diskreter Wahrscheinlichkeitsraum und  $A, B \in \Omega$  mit  $\mathbb{P}(B) > 0$  heißt

$$\mathbb{P}(A \mid B) := \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

die **bedingte Wahrscheinlichkeit** von A gegeben B.

### Multiplikationsformel

Seien  $A_1, \dots, A_n \subseteq \Omega$  Ereignisse mit  $\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) > 0$ , dann gilt

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2 \mid A_1) \cdot \mathbb{P}(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \cdots \mathbb{P}(A_n \mid A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})$$

Im Fall von  $n=2$  gilt:  $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(A \mid B)$

### Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit und Satz von Bayes

Sei  $(\Omega, \mathbb{P})$  ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum,  $I$  eine abzählbare Indexmenge,  $B_i \subseteq \Omega, i \in I$ , disjunkt mit  $\mathbb{P}(B_i) > 0$  und  $\bigcup_{i \in I} B_i = \Omega$  und  $A \subseteq \Omega$  beliebig.

- Es gilt der **Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit**:

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(A \mid B_i) \cdot \mathbb{P}(B_i)$$

- Falls  $\mathbb{P}(A) > 0$  und  $k \in I$ , dann gilt der **Satz von Bayes**:

$$\mathbb{P}(B_k \mid A) = \frac{\mathbb{P}(A \mid B_k) \cdot \mathbb{P}(B_k)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A \mid B_k) \cdot \mathbb{P}(B_k)}{\sum_{i \in I} \mathbb{P}(A \mid B_i) \cdot \mathbb{P}(B_i)}$$

### Definition: Stochastische Unabhängigkeit

Sei  $(\Omega, \mathbb{P})$  ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum. Zwei Ereignisse  $A, B \subseteq \Omega$  heißen **stochastisch unabhängig**, falls

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$$

Ereignisse  $A_1, \dots, A_n \subseteq \Omega$  heißen **stochastisch unabhängig**, wenn für jede Indexmenge  $I \subseteq \{1, \dots, n\}, I \neq \emptyset$ , gilt

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(A_i)$$

Achtung: Mehr als zwei Ereignisse  $A_1, \dots, A_n$  sind im Allgemeinen nicht stochastisch unabhängig, wenn nur  $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i)$  gilt! Gleiches gilt, wenn jeweils nur zwei der Ereignisse stochastisch unabhängig sind.

### 3 Zufallsvariablen und ihre Verteilungen

#### Definition: $S$ -wertige Zufallsvariable

Ist  $(\Omega, \mathbb{P})$  ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum und  $S \neq \emptyset$  eine beliebige Menge, so wird die Abbildung  $X : \Omega \rightarrow S$   **$S$ -wertige Zufallsvariable** genannt.

#### Definition: Verteilung

Ist  $X : \Omega \rightarrow S$  eine Zufallsvariable auf einem diskreten Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathbb{P})$ , dann wird durch

$$\mathbb{P}^X(B) := \mathbb{P}(X^{-1}(B)) \quad \forall B \subseteq S$$

ein Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mathbb{P}^X$  auf  $S$  definiert, welches Verteilung von  $X$  genannt wird.  $(S, \mathbb{P}^X)$  ist ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum. Notation für Urbilder:

- $\{X \in B\} := \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in B\} = X^{-1}(B)$
- $\{X = x\} := \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\} = X^{-1}(\{x\})$
- $\{X > x\} := \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) > x\} = X^{-1}((x, \infty))$

Zudem schreibt man  $\mathbb{P}(X \in B) := \mathbb{P}(\{X \in B\})$

#### Definition: Stochastische Unabhängigkeit von Zufallsvariablen

Sei  $(\Omega, \mathbb{P})$  ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum und  $S_i, i \in \{1, \dots, n\}$  nichtleere Zufallsvariablen. Zufallsvariablen  $X_i : \Omega \rightarrow S_i, i \in \{1, \dots, n\}$  heißen **stochastisch unabhängig**, wenn für beliebige  $B_i \subseteq S_i$  die Ereignisse  $\{X_1 \in B_1\}, \dots, \{X_n \in B_n\}$  stochastisch unabhängig sind.

Auch der Vektor  $(X_1, \dots, X_n) : \Omega \rightarrow S_1 \times \dots \times S_n$  ist eine Zufallsvariable mit Verteilung  $\mathbb{P}^{(X_1, \dots, X_n)}$  auf  $S_1 \times \dots \times S_n$ .

Bemerkung zur Schreibweise:  $(X_1 \in B_1, X_2 \in B_2) = (X_1 \in B_1) \cap (X_2 \in B_2)$

#### Satz für stochastisch unabhängige Zufallsvariablen

Es sind äquivalent:

- $X_1, \dots, X_n$  sind stochastisch unabhängig
- $\forall B_i \subseteq S_i : \mathbb{P}(X_i \in B_i \mid \forall 1 \leq i \leq n) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i \in B_i)$
- Bezeichne mit  $f_{X_i}$  die Zähldichte von  $\mathbb{P}^{X_i}$  auf  $S_i$ . Dann hat die Zähldichte  $f_{(X_1, \dots, X_n)}$  von  $\mathbb{P}^{(X_1, \dots, X_n)}$  die Form:  $f_{(X_1, \dots, X_n)}(t_1, \dots, t_n) = \prod_{i=1}^n f_{X_i}(t_i) \quad \forall t_i \in S_i$

### Definition: Hypergeometrischen Verteilung

Das Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mathbb{P} = \text{Hyp}_{(N,M,n)}$  auf  $\mathbb{N}_0$  gegeben durch die Zähldichte

$$\mathbb{P}^X(\{m\}) = \mathbb{P}(X = m) = \frac{\binom{M}{m} \cdot \binom{N-M}{n-m}}{\binom{N}{n}} \mathbb{1}_S(m) \quad \forall m \in \mathbb{N}_0$$

heißt **hypergeometrische Verteilung**.

### Zusammenhang hypergeometrische Verteilung und Binomialverteilung

- Die **hypergeometrische Verteilung**  $\text{Hyp}_{(N,M,n)}$  beschreibt die Anzahl der markierten Gegenstände bei  $n$ -maligem **Ziehen ohne Zurücklegen** aus  $N$  Gegenständen, von denen  $M$  markiert sind
- Die **Binomialverteilung**  $\text{Bin}_{(n,M/N)}$  beschreibt die Anzahl der markierten Gegenstände bei  $n$ -maligem **Ziehen mit Zurücklegen** aus  $N$  Gegenständen, von denen  $M$  markiert sind

Falls  $n \ll N$ , dann ist Ziehen mit oder ohne Zurücklegen fast identisch und daher  $\text{Hyp}_{(N,M,n)}(\{m\}) \approx \text{Bin}_{(n, \frac{M}{N})}(\{m\}) \quad \forall 0 \leq m \leq n$

### Poisson'scher Grenzwertsatz

Für eine große Anzahl an Experimenten  $n$  und eine kleine Erfolgswahrscheinlichkeit  $p$  kann  $\text{Bin}_{(n,p)}$  durch eine strukturell einfachere Verteilung approximiert werden:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Bin}_{(n,p)}(\{k\}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} =: \text{Poiss}_\lambda(\{k\}) \quad k \in \mathbb{N}_0$$

Das Wahrscheinlichkeitsmaß  $\text{Poiss}_\lambda$  heißt Poissonverteilung mit Parameter  $\lambda$ .

### Definition: Faltung

Sind  $X, Y$   $\mathbb{R}$ -wertige Zufallsvariablen auf einem diskreten Wahrscheinlichkeitsraum mit Zähldichten  $f_X$  von  $\mathbb{P}^X$  und  $f_Y$  von  $\mathbb{P}^Y$ , dann heißt

$$(f_X * f_Y)(z) = \sum_{x \in \mathbb{R}: f_X(x) > 0} f_X(x) \cdot f_Y(z - x) \quad \forall z \in \mathbb{R}$$

die **Faltung** von  $f_X$  und  $f_Y$ . Hierbei ist  $f_X * f_Y$  wieder eine Zähldichte mit Träger  $\Omega_T := \{z \in \mathbb{R} \mid \exists x, y \in \mathbb{R} : z = x + y, f_X(x) > 0, f_Y(y) > 0\}$  und die zugehörige diskrete Verteilung  $\mathbb{P}^X * \mathbb{P}^Y$  heißt **Faltung** von  $\mathbb{P}^X$  und  $\mathbb{P}^Y$ .



**Satz für die Faltung**

Sind  $X, Y$  unabhängige  $\mathbb{R}$ -wertige Zufallsvariablen auf einem diskreten Wahrscheinlichkeitsraum, so gilt

$$\mathbb{P}^X * \mathbb{P}^Y = \mathbb{P}^{X+Y}$$

## 4 Wahrscheinlichkeitsmaße auf $\mathbb{R}$

Kontinuierliche Ergebnisse lassen sich nicht mehr durch eine abzählbare Anzahl an Versuchsausgängen beschreiben. Wahrscheinlichkeiten kann man dann nur noch „gutartigen Mengen“ zuordnen, u.a.:

- Intervalle sind gutartig
- Komplemente gutartiger Mengen sind gutartig
- Abzählbare Vereinigungen gutartiger Mengen sind gutartig

Bezeichne nun mit  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$  das System aller „gutartigen“ Mengen.

### Definition: $\sigma$ -Algebra

Sei  $\Omega \neq \emptyset$  ein beliebiger Grundraum. Eine Menge  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$  heißt  **$\sigma$ -Algebra** auf  $\Omega$ , falls:

- $\emptyset, \Omega \in \mathcal{A}$
- $A \in \mathcal{A} \implies A^c \in \mathcal{A}$
- $A_n \in \mathcal{A} \forall n \in \mathbb{N} \implies \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$

$(\Omega, \mathcal{A})$  heißt dann **messbarer Raum**. Die Mengen  $A \in \mathcal{A}$  heißen **Ereignisse**.

### Definition: Borel- $\sigma$ -Algebra

Die **Borel- $\sigma$ -Algebra**  $\mathcal{B}$  auf  $\mathbb{R}$  beschreibt die kleinste  $\sigma$ -Algebra, welche alle Intervalle  $(a, b]$  für beliebige  $a, b \in \mathbb{R}$  enthält.

### Definition: Wahrscheinlichkeitsmaß und Wahrscheinlichkeitsraum

Sei  $(\Omega, \mathcal{A})$  ein Messraum mit Grundraum  $\Omega \neq \emptyset$  und  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{A}$ . Eine Abbildung  $\mathbb{P} : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$  heißt **Wahrscheinlichkeitsmaß** auf  $(\Omega, \mathcal{A})$ , falls

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
- $A_n \in \mathcal{A}, n \in \mathbb{N}, \text{ disjunkt} \implies \mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n)$  ( $\sigma$ -Additivität)

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  heißt dann **Wahrscheinlichkeitsraum**.

## Sätze und Definitionen für allgemeine Wahrscheinlichkeitsräume

Folgende Sätze und Definitionen übertragen sich sinngemäß, wobei als Ereignisse jeweils nur Mengen aus  $\mathcal{A}$  betrachtet werden:

- Rechenregeln für diskrete Wahrscheinlichkeitsmaße
- Bedingte Wahrscheinlichkeiten
- Satz von der Totalen Wahrscheinlichkeit und von Bayes
- Stochastische Unabhängigkeit von Ereignissen

Unterschied: Während diskrete Wahrscheinlichkeitsmaße  $\mathbb{P}$  vollständig durch die Zähldichte  $f(\omega) := \mathbb{P}(\{\omega\}), \omega \in \Omega$  bestimmt sind, ist dies für allgemeine Wahrscheinlichkeitsmaße falsch!

### Definition: Verteilungsfunktion

Ist  $\mathbb{P}$  ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ , so gilt für die durch

$$F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1], F(x) := \mathbb{P}((-\infty, x])$$

definierte **Verteilungsfunktion** von  $\mathbb{P}$ :

- $F$  ist monoton steigend
- $F$  ist rechtsseitig stetig
- $F(\infty) := \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1, F(-\infty) := \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$

Ist umgekehrt  $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  eine Funktion, die obige Punkte erfüllt, so existiert genau ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ , das  $F$  als Verteilungsfunktion besitzt. Für ein diskretes Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mathbb{P}$  ist die Verteilungsfunktion eine Treppenfunktion.

### Definition: Dichten

Sei  $\mathbb{P}$  ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ . Existiert eine integrierbare Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ , sodass

$$F(x) = \mathbb{P}((-\infty, x]) = \int_{-\infty}^x f(t) dt \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

so heißt  $f$  Dichte von  $\mathbb{P}$  bzw. von der zugehörigen Verteilungsfunktion  $F$ . Für  $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$  gilt dann

$$\mathbb{P}(A) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \cdot \mathbf{1}_A(x) dx =: \int_A f(x) dx$$

Umgekehrt ist jede integrierbare Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$  mit  $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 1$  Dichte eines Wahrscheinlichkeitsmaßes auf  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ , das durch obiges  $F$  eindeutig festgelegt ist. Falls eine Dichte existiert, ist  $F$  stetig.

Achtung: Dichten dürfen nicht mit Zähldichten verwechselt werden!

### Definition: Gleichverteilung

Für  $-\infty < a < b < \infty$  heißt das Wahrscheinlichkeitsmaß auf  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$  zur Dichte  $f := \frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{(a,b]}$  **Gleichverteilung**  $U_{(a,b]}$  auf  $(a, b]$  und für  $a \leq c < d \leq b$  gilt:  
 $U_{(a,b]}((c, d]) = \frac{d-c}{b-a}$ .

### Definition: Exponentialverteilung

Die **Exponentialverteilung**  $Exp_{\lambda}$  mit Parameter  $\lambda > 0$  ist gegeben durch die Dichte

$$f_{\lambda}(x) := \frac{1}{\lambda} e^{-x/\lambda} \cdot \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

Die Verteilungsfunktion ist gegeben durch  $F_{\lambda}(x) = 1 - e^{-x/\lambda}$ ,  $\forall x \geq 0$   
 und  $F_{\lambda}(x) = 0$  für alle  $x < 0$ .

Exponentialverteilungen beschreiben Lebensdauern von Dingen, die nicht altern, d.h. die Wahrscheinlichkeit noch  $y$  Jahre zu überleben, gegeben dass bereits  $x$  Jahre überlebt wurden, hängt nicht von  $x$  ab.

### Definition: Normalverteilung

Die **Normalverteilung**  $N_{(\mu, \sigma^2)}$  mit Parametern  $\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$  ist gegeben durch die Dichte

$$f(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right), \quad x \in \mathbb{R}$$

Die Verteilung  $N_{(0,1)}$  wird **Standardnormalverteilung** genannt. Die Verteilungsfunktion von  $N_{(0,1)}$  bezeichnet man mit

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt$$

Aufgrund der Symmetrie der Standardnormalverteilung zur y-Achse, gilt  $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ . Insbesondere ist  $\Phi(0) = \frac{1}{2}$ .

Für die Verteilungsfunktion der Normalverteilung  $N_{(\mu, \sigma^2)}$  gilt

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

Um Wahrscheinlichkeiten für eine beliebige Normalverteilung zu berechnen, genügt also die Verteilungsfunktion  $\Phi$  der Standardnormalverteilung:

$x$	$\Phi(x)$	$x$	$\Phi(x)$	$x$	$\Phi(x)$	$x$	$\Phi(x)$	$x$	$\Phi(x)$
0.00	0.5000	0.76	0.7764	1.52	0.9357	1.84	0.9671	2.28	0.9887
0.02	0.5080	0.78	0.7823	1.54	0.9382	1.86	0.9686	2.30	0.9893
0.04	0.5160	0.80	0.7881	1.56	0.9406	1.88	0.9699	2.32	0.9898
0.06	0.5239	0.82	0.7939	1.58	0.9429	1.90	0.9713	2.34	0.9904
0.08	0.5319	0.84	0.7995	1.60	0.9452	1.92	0.9726	2.36	0.9909
0.10	0.5398	0.86	0.8051	1.62	0.9474	1.94	0.9738	2.38	0.9913
0.12	0.5478	0.88	0.8106	1.64	0.9495	1.96	0.9750	2.40	0.9918
0.14	0.5557	0.90	0.8159	1.66	0.9515	1.98	0.9761	2.42	0.9922
0.16	0.5636	0.92	0.8212	1.68	0.9535	2.00	0.9772	2.44	0.9927
0.18	0.5714	0.94	0.8264	1.70	0.9554	2.02	0.9783	2.46	0.9931
0.20	0.5793	0.96	0.8315	1.72	0.9573	2.04	0.9793	2.48	0.9934
0.22	0.5871	0.98	0.8365	1.74	0.9591	2.06	0.9803	2.50	0.9938
0.24	0.5948	1.00	0.8413	1.76	0.9608	2.08	0.9812	2.52	0.9941
0.26	0.6026	1.02	0.8461	1.78	0.9625	2.10	0.9821	2.54	0.9945
0.28	0.6103	1.04	0.8508	1.80	0.9641	2.12	0.9830	2.56	0.9948
0.30	0.6179	1.06	0.8554	1.82	0.9656	2.14	0.9838	2.58	0.9951

### Lineare Transformation der Normalverteilung

Sei  $X$  eine Zufallsvariable mit  $X \sim N_{(\mu, \sigma^2)}$ , dann gilt für beliebige  $m \in \mathbb{R}, s > 0$ :

$$Y := m + sX \sim N_{(m+s\mu, s^2\sigma^2)}$$

Aus  $X \sim N_{(\mu, \sigma^2)}$  folgt  $\frac{X-\mu}{\sigma} \sim N_{(0,1)}$ .

### Definition: Zufallsvariable, Messbarkeit und Verteilung

Eine Zufallsvariable  $X$  ist nur noch definiert, wenn das Urbild von  $X$  eine „gutartige“ Menge ist.

Seien  $(\Omega, \mathcal{A})$ ,  $(S, \mathcal{C})$  messbare Räume und  $X : \Omega \rightarrow S$  eine Abbildung.  $X$  heißt  $S$ -wertige **Zufallsvariable**, falls  $X^{-1}(C) \in \mathcal{A}$  für alle  $C \in \mathcal{C}$  ist.

Man schreibt  $X : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (S, \mathcal{C})$  und sagt, dass  $X$   $(\mathcal{A}, \mathcal{C})$ -**messbar** ist. Die sogenannte **Verteilung** von  $X$  unter  $\mathbb{P}$  wird durch das Wahrscheinlichkeitsmaß

$$\mathbb{P}^X(C) := \mathbb{P}(X^{-1}(C)) = \mathbb{P}(X \in C), \quad C \in \mathcal{C}$$

auf  $(S, \mathcal{C})$  definiert.

### Definition: Verteilungsfunktion und Dichte von Zufallsvariablen

Sei  $X : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (S, \mathcal{C})$  eine  $\mathbb{R}$ -wertige Zufallsvariable auf dem Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ .

- Die Verteilungsfunktion der Verteilung  $\mathbb{P}^X$  von  $X$

$$F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1], \quad x \mapsto \mathbb{P}^X((-\infty, x]) = \mathbb{P}(X \leq x)$$

wird auch **Verteilungsfunktion** von  $X$  genannt.

- $X$  heißt **stetige Zufallsvariable**, falls  $F_X$  eine Dichte  $f_X$  besitzt:

$$\mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$f_X$  heißt dann auch **Dichte** von  $X$ .

### $k\sigma$ -Regeln für die Normalverteilung

Für  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  und alle  $t > 0$  gilt

$$\mathbb{P}(|X - \mu| \leq \sigma t) = 2 \cdot \Phi(t) - 1$$

und insbesondere

$$\mathbb{P}(|X - \mu| \leq k\sigma) = \begin{cases} 0,6827, & k = 1 \\ 0,9545, & k = 2 \\ 0,9973, & k = 3 \end{cases}$$

### Definition: Borel- $\sigma$ -Algebren auf $\mathbb{R}^n$

Borel- $\sigma$ -Algebren, Verteilungsfunktion und Dichten kann man analog auch für  $\Omega = \mathbb{R}^n$  definieren. Die **Borel- $\sigma$ -Algebra**  $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$  auf  $\mathbb{R}^n$  wird definiert als die kleinste  $\sigma$ -Algebra, die alle Rechteckmengen  $\bigtimes_{i=1}^n (a_i, b_i]$  mit  $-\infty < a_i < b_i < \infty$  für alle  $i \in \{1, \dots, n\}$  enthält.

### Definition: Multivariate Verteilungsfunktion

Ist  $\mathbb{P}$  ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n})$ , so wird die zugehörige **multivariate Verteilungsfunktion**  $F$  definiert durch

$$F(x_1, \dots, x_n) := \mathbb{P}\left(\bigtimes_{i=1}^n (-\infty, x_i]\right), \quad (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

**Definition: Dichten auf  $\mathbb{R}^n$** 

Sei  $\mathbb{P}$  ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n})$  mit multivariater Verteilungsfunktion  $F$ . Existiert eine Abbildung  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$ , sodass für alle  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$$F(x_1, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} f(t_1, \dots, t_n) dt_n \dots dt_2 dt_1$$

gilt, so heißt  $f$  **Dichte** von  $\mathbb{P}$  bzw. von  $F$ .

Es gilt dann  $\forall B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ :

$$\mathbb{P}(B) = \int_B f(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{1}_B(t_1, \dots, t_n) \cdot f(t_1, \dots, t_n) dt_n \dots dt_1$$

Insbesondere gilt für jede Dichte  $f$ :  $\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(t_1, \dots, t_n) dt_n \dots dt_1 = 1$

und für  $B = (a_1, b_1] \times \cdots \times (a_n, b_n]$ ,  $a_i < b_i$ :  $\mathbb{P}(B) = \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_n}^{b_n} f(t_1, \dots, t_n) dt_n \dots dt_1$ .

**Definition: Zufallsvektoren**

Ist  $(\Omega, \mathcal{A})$  ein messbarer Raum und  $X_i: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $1 \leq i \leq n$ , so gilt  $\forall 1 \leq i \leq n$ :

$$X = (X_1, \dots, X_n): \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ } (\mathcal{A}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n})\text{-messbar} \iff X_i: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ } (\mathcal{A}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})\text{-messbar}$$

In dem Fall wird  $X$  auch  $n$ -dimensionaler **Zufallsvektor** genannt. Die multivariate Verteilungsfunktion von  $\mathbb{P}^X$

$$F_X(x_1, \dots, x_n) := \mathbb{P}(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_n \leq x_n)$$

heißt **gemeinsame Verteilungsfunktion** von  $X_1, \dots, X_n$ . Besitzt  $F_X$  eine Dichte  $f_X$ , dann heißt  $X$  **stetig verteilt** und  $f_X$  heißt **gemeinsame Dichte** von  $X_1, \dots, X_n$ . Es gilt dann  $\mathbb{P}^X(B) = \mathbb{P}(X \in B) = \int_B f_X(t) dt$ ,  $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ .

**Definition: Randverteilungen**

Ist  $X = (X_1, \dots, X_n)$  ein Zufallsvektor auf  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ , so heißen die Verteilungen  $\mathbb{P}^{X_i}$  **Randverteilungen/Marginalverteilungen**. Die Verteilungsfunktion  $F_i$  von  $\mathbb{P}^{X_i}$  bzw.  $X_i$  berechnet sich wie folgt:

$$\begin{aligned} F_i(x) &= \mathbb{P}(X_1 < \infty, \dots, X_{i-1} < \infty, X_i \leq x, X_{i+1} < \infty, \dots, X_n < \infty) \\ &= F(\infty, \dots, \infty, x, \infty, \dots, \infty), \end{aligned}$$

wobei  $x$  an der  $i$ -ten Stelle steht.

### Satz über die Dichte einer Komponente eines Zufallsvektors

Besitzt die Zufallsvariable  $X = (X_1, \dots, X_n)$  eine gemeinsame Dichte  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$ , so hat  $X_i$  die Dichte  $f_i : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$  mit

$$f_i(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(t_1, \dots, t_{i-1}, x, t_{i+1}, \dots, t_n) dt_n \cdots dt_{i+1} dt_{i-1} \cdots dt_1$$

für alle  $x \in \mathbb{R}$ .

### Definition: Unabhängigkeit von Zufallsvariablen

Zufallsvariablen  $X_1, \dots, X_n : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$  heißen **stochastisch unabhängig**, wenn die Ereignisse  $\{X_1 \in B_1\}, \dots, \{X_n \in B_n\}$  für alle  $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$  stochastisch unabhängig sind.

### Satz für stochastisch unabhängige Zufallsvariablen

Für Zufallsvariablen  $X_i : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$  mit Verteilungsfunktionen  $F_{X_i}$  sind äquivalent:

- $X_1, \dots, X_n$  sind stochastisch unabhängig
- $\mathbb{P}(X_1 \in B_1, \dots, X_n \in B_n) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i \in B_i) \quad \forall B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$
- $\mathbb{P}(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i \leq x_i) = \prod_{i=1}^n F_{X_i}(x_i) \quad \forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$

Zufallsvariablen sind also genau dann unabhängig, wenn die Verteilungsfunktion ihrer gemeinsamen Verteilung das Produkt ihrer Verteilungsfunktionen ist.

### Dichten unabhängiger Zufallsvariablen

Seien  $X_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  für  $i \in \{1, \dots, n\}$  Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ . Falls alle Randverteilungen  $\mathbb{P}^{X_i}$  jeweils eine Dichte  $f_i$  besitzen, dann sind äquivalent:

- $X_1, \dots, X_n$  sind stochastisch unabhängig:
- $\mathbb{P}^{(X_1, \dots, X_n)}$  besitzt eine Dichte  $f$  gegeben durch  $f(x_1, \dots, x_n) := \prod_{i=1}^n f_i(x_i)$



## Blockungslemma

Seien  $X_{11}, X_{12}, \dots, X_{1n_1}, X_{21}, \dots, X_{2n_2}, \dots, X_{k1}, \dots, X_{kn_k}$  stochastisch unabhängige Zufallsvariablen und  $g_1 : \mathbb{R}^{n_1} \rightarrow \mathbb{R}, g_2 : \mathbb{R}^{n_2} \rightarrow \mathbb{R}, \dots, g_k : \mathbb{R}^{n_k} \rightarrow \mathbb{R}$  Funktionen. Dann sind auch die Zufallsvariablen

$$Y_1 := g_1(X_{11} \dots, X_{1n_1}), Y_2 := g_2(X_{21} \dots, X_{2n_2}), \dots, Y_k := g_k(X_{k1} \dots, X_{kn_k})$$

stochastisch unabhängig. Funktionen von disjunkten Blöcken unabhängiger Zufallsvariablen sind also wieder unabhängig.

## Definition: Faltung für Verteilungen mit Dichten

- Sind  $X, Y : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$  unabhängige Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  so wird die Verteilung  $\mathbb{P}^{X+Y}$  die **Faltung** von  $\mathbb{P}^X$  und  $\mathbb{P}^Y$  genannt. Schreibe dafür:  $\mathbb{P}^X * \mathbb{P}^Y$
- Besitzt  $X$  eine Dichte  $f_X$  und  $Y$  eine Dichte  $f_Y$ , so ist

$$f_X * f_Y(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x) dx, \quad z \in \mathbb{R}$$

eine Dichte von  $\mathbb{P}^X * \mathbb{P}^Y$ , d.h.  $f_{X+Y} = f_X * f_Y$

## Definition: Gamma-Verteilung

Die Zufallsvariable  $X$  hat eine **Gamma-Verteilung** mit Parametern  $\alpha > 0$  und  $\beta > 0$ , falls  $X$  die Dichte

$$f(t) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} e^{-\beta t} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(t), \quad t \in \mathbb{R}$$

mit Gamma-Funktion  $\Gamma(t) := \int_0^\infty x^{t-1} e^{-x} dx$ ,  $t > 0$  besitzt.

## Additionsgesetze

$X \sim$	$Y \sim$	$X + Y \sim$
$\text{Bin}_{m,p}$	$\text{Bin}_{n,p}$	$\text{Bin}_{m+n,p}$
$\text{Pois}_\lambda$	$\text{Pois}_\mu$	$\text{Pois}_{\lambda+\mu}$
$N_{\mu,\sigma^2}$	$N_{\nu,\tau^2}$	$N_{\mu+\nu,\sigma^2+\tau^2}$
$\Gamma_{\mu,\beta}$	$\Gamma_{\nu,\beta}$	$\Gamma_{\mu+\nu,\beta}$
$\text{Exp}_\lambda$	$\text{Exp}_\lambda$	$\Gamma_{2,\lambda}$

**Beachte:** In jedem Fall sind  $X$  und  $Y$  als stochastisch unabhängig vorausgesetzt.

## Verteilungsfunktion von Maximum und Minimum

Seien  $X_1, \dots, X_n$  stochastisch unabhängige Zufallsvariablen mit den Verteilungsfunktionen  $F_{X_1}, \dots, F_{X_n}$ . Dann gilt:

- $U := \max(X_1, \dots, X_n)$  besitzt die Verteilungsfunktion

$$F_U(t) = \prod_{j=1}^n F_{X_j}(t), \quad t \in \mathbb{R}$$

- $V := \min(X_1, \dots, X_n)$  besitzt die Verteilungsfunktion

$$F_V(t) = 1 - \prod_{j=1}^n (1 - F_{X_j}(t)), \quad t \in \mathbb{R}$$

## 5 Erwartungswerte und Momente von Zufallsvariablen

### Definition: Erwartungswert auf einem diskreten Wahrscheinlichkeitsraum

Der **Erwartungswert** einer  $\mathbb{R}$ -wertigen Zufallsvariable  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  auf einem diskreten Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathbb{P})$  ist definiert als:

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X] := \mathbb{E}[X] := \sum_{x \in X(\Omega)} x \cdot \mathbb{P}(X = x) = \sum_{x \in X(\Omega)} x \cdot \mathbb{P}^X(\{x\})$$

falls  $\sum_{x \in X(\Omega)} |x| \cdot \mathbb{P}(X = x) < \infty$ .  $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X]$  heißt auch **Mittelwert** von  $\mathbb{P}^X$ .

### Definition: Erwartungswert für stetige Zufallsvariablen

Der **Erwartungswert** einer stetigen Zufallsvariable  $X$  mit Dichte  $f_X$  wird definiert als:

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x) dx$$

falls  $\int_{-\infty}^{\infty} |x| \cdot f_X(x) dx < \infty$ .  $\mathbb{E}[X]$  heißt auch **Mittelwert** von  $\mathbb{P}^X$ .

### Transformationssatz

Sei  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  ein Wahrscheinlichkeitsraum,  $X : \Omega \rightarrow S$  eine diskrete/stetige Zufallsvariable mit (Zähl-)Dichte  $f_X$  und  $g : S \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion. Die Zufallsvariable  $g(X) = g \circ X$  besitzt genau dann einen endlichen Erwartungswert bzgl.  $\mathbb{P}$ , wenn  $g$  einen endlichen Erwartungswert bzgl.  $\mathbb{P}^X$  besitzt. In diesem Fall gilt:

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[g(X)] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}^X}[g] = \begin{cases} \sum_{x \in S} g(x) \cdot f_X(x) & \text{falls } X \text{ diskret} \\ \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f_X(x) dx & \text{falls } X \text{ stetig} \end{cases}$$

Der Transformationssatz gilt auch für Zufallsvariablen  $X, Y$  mit gemeinsamer Zähldichte  $f_{X,Y}$ , d.h.

$$\mathbb{E}[g(X, Y)] = \begin{cases} \sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{y \in Y(\Omega)} g(x, y) \cdot f_{X,Y}(x, y) & \text{falls } X, Y \text{ diskret} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) \cdot f_{X,Y}(x, y) dy \right) dx & \text{falls } X \text{ stetig} \end{cases}$$

### Rechenregeln für Erwartungswerte

Seien  $X, Y$  diskrete/stetige Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ , die Erwartungswerte besitzen. Dann gilt:

- $\mathbb{E}[aX + Y] = a \cdot \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$  für alle  $a \in \mathbb{R}$  (**Linearität**)
- Gilt  $X \leq Y$ , dann folgt  $\mathbb{E}[X] \leq \mathbb{E}[Y]$  (**Monotonie**)
- Wenn  $f_X$  symmetrisch zu  $x = a$  ist, dann gilt  $\mathbb{E}[X] = a$

### Siebformel von Sylvester-Poincaré

Seien  $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$  Ereignisse im einem diskreten Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ . Dann gilt:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{I \subseteq \{1, \dots, n\}, I \neq \emptyset} (-1)^{|I|+1} \cdot \mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)$$

### Darstellungsformel für nicht-negative Zufallsvariablen

Ist  $X$  eine  $\mathbb{N}_0$ -wertige oder  $\mathbb{R}_+$ -wertige Zufallsvariable, so gilt

$$\mathbb{E}[X] = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X \geq n) & \text{falls } X \text{ diskret} \\ \int_0^{\infty} \mathbb{P}(X \geq x) & \text{falls } X \text{ stetig} \end{cases}$$

### Multiplikationsformel für Erwartungswerte

Sind  $X$  und  $Y$  stochastisch unabhängige reellwertige Zufallsvariablen mit Erwartungswerten  $\mathbb{E}[X]$  und  $\mathbb{E}[Y]$ , so gilt

$$\mathbb{E}[X \cdot Y] = \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y]$$

Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht!

### Definition: Variation, Standardabweichung und Momente

- Existieren  $\mathbb{E}[X]$  und  $\mathbb{E}[X^2]$  so ist die **Varianz** von  $X$  durch

$$Var(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \begin{cases} \sum_{x \in X(\Omega)} (x - \mathbb{E}[X])^2 f_X(x) & \text{falls } X \text{ diskret} \\ \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mathbb{E}[X])^2 f_X(x) dx & \text{falls } X \text{ stetig} \end{cases}$$

definiert.  $\sqrt{Var(X)}$  heißt **Standardabweichung** von  $X$ .

- Für  $k \in \mathbb{N}$  heißt  $\mathbb{E}[X^k]$  das  **$k$ -te Moment von  $X$** . Dabei ist  $X^k : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch  $X^k(\omega) = (X(\omega))^k$

## Eigenschaften der Varianz

- $Var(a \cdot X + b) = a^2 \cdot Var(X)$  für alle  $a, b \in \mathbb{R}$ . Die Varianz ist nicht linear!
- $Var(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$ , also  $\mathbb{E}[X]^2 \leq \mathbb{E}[X^2]$ , da  $0 \leq Var(X)$
- $\mathbb{E}[(X - a)^2] = Var(X) + (\mathbb{E}[X] - a)^2$  für alle  $a \in \mathbb{R}$
- Die Minimalstelle der Funktion  $a \mapsto \mathbb{E}[(X - a)^2]$  ist  $a = \mathbb{E}[X]$

## Wichtige Beispiele

- Wenn  $X \sim Ber_p$  mit  $p \in [0, 1]$ , dann gilt  $\mathbb{E}[X] = p$  und  $Var(X) = p(1 - p)$
- Wenn  $X \sim Poiss_\lambda$ , dann gilt  $\mathbb{E}[X^2] = \lambda^2 + \lambda$  und  $Var(X) = \lambda$
- Wenn  $X \sim U([a, b])$  gleichverteilt, dann gilt  $\mathbb{E}[X^2] = \frac{b^2 + ab + a^2}{3}$  und  $Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$
- Wenn  $Y \sim N_{(0,1)}$ , dann gilt  $\mathbb{E}[Y] = 0$  und  $Var(Y) = 1$  sowie wegen  $X := \sigma Y + \mu \sim N_{(0,1)}$  folgt  $Var(X) = \sigma^2$

## Markov- und Chebyshev-Ungleichung

- **Markov-Ungleichung:**  $\mathbb{P}(|X| \geq c) \leq \frac{\mathbb{E}[|X|]}{c} \quad \forall c > 0$
- **Chebyshev-Ungleichung:**  $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| \geq c) \leq \frac{Var(X)}{c^2} \quad \forall c > 0$

## Definition: Kovarianz und Korrelation

Seien  $X$  und  $Y$  Zufallsvariablen.

$$Cov(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X]) \cdot (Y - \mathbb{E}[Y])] = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y]$$

heißt die **Kovarianz** von  $X$  und  $Y$ .

$$Corr(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{Var(X) \cdot Var(Y)}}$$

heißt **Korrelation** von  $X$  und  $Y$ , falls  $Var(X) > 0$  und  $Var(Y) > 0$ .  $X$  und  $Y$  heißen **unkorreliert**, falls  $Cov(X, Y) = 0$ .

Die Kovarianz ist bilinear, d.h.  $Cov(aX + b, cY + d) = ac \cdot Cov(X, Y)$ .

Zusätzlich gilt  $Cov(X, X) = Var(X)$ .

Ist  $Z$  eine weitere Zufallsvariable, so gilt  $Cov(X, Y + Z) = Cov(X, Y) + Cov(X, Z)$ . Jede unabhängige Zufallsvariable ist unkorreliert, umgekehrt aber nicht!

## Varianz von Summen von Zufallsvariablen

Für Zufallsvariablen  $X_1 \cdot X_n$  gilt:

$$Var(\sum_{i=1}^n X_i) = \sum_{i=1}^n Var(X_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} Cov(X_i, X_j)$$

Sind die Variablen unabhängig (oder schwächer: unkorreliert), so gilt insbesondere:

$$Var(\sum_{i=1}^n X_i) = \sum_{i=1}^n Var(X_i)$$

## Definition: Median einer Zufallsvariable

Neben dem Erwartungswert gibt es weitere Parameter, die „mittlere Werte“ einer Zufallsvariable beschreiben. Eine Zahl  $m(X)$  heißt **Median** von  $X$  bzw.  $\mathbb{P}^X$ , falls gilt:

$$\mathbb{P}(X \leq m(X)) \geq \frac{1}{2} \text{ und } \mathbb{P}(X \geq m(X)) \geq \frac{1}{2}$$

Mediane sind im Allgemeinen nicht eindeutig. Der Median ist ein **Lageparameter**, d.h. es gilt:  $m$  ist Median von  $X \iff am + b$  ist Median von  $aX + b$ .

## Definition: Quantil

Ein Quantil ist eine Verallgemeinerung des Medians. Für  $X$  mit Verteilungsfunktion  $F_X$  und  $0 < p < 1$  heißt

$$t_p := t_p(X) := F_X^{-1}(p) := \inf\{x \in \mathbb{R} : F_X(x) \geq p\}$$

**$p$ -Quantil** von  $F_X$  bzw.  $X$ .  $t_{1/2}$  heißt Median,  $t_{1/4}$  **unteres Quartil** und  $t_{3/4}$  **oberes Quartil**.

## 6 Grenzwertsätze

Oft betrachtet man Summen von  $n$  Zufallsvariablen von der Art  $\sum_{i=1}^n X_i$  für  $n \rightarrow \infty$ , die in der Regel nicht exakt berechenbar ist. Ziel: Finde eine gute Approximation dafür.

### Schwaches Gesetz der großen Zahlen

Seien  $X_i$  unkorrelierte Zufallsvariablen mit Erwartungswert  $\mathbb{E}[X_i]$  und es existiere  $M$ , sodass  $\text{Var}(X_i) \leq M < \infty$  für alle  $i \in \mathbb{N}$ . Dann gilt für alle  $\varepsilon > 0$ :

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{n} \left| \sum_{i=1}^n (X_i - \mathbb{E}[X_i]) \right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{M}{n\varepsilon^2} \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

### Definition: Stochastische Konvergenz

Seien  $Y, Y_n$   $\mathbb{R}$ -wertige Zufallsvariablen.  $Y_n$  **konvergiert stochastisch** gegen  $Y$ , falls

$$\forall \varepsilon > 0 : \quad \mathbb{P}(|Y_n - Y| \geq \varepsilon) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

Wir schreiben dafür  $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} Y$ .

### Asymptotische Verteilung

Für identische, unabhängige Zufallsvariablen  $(X_i)_{i \geq 1}$  mit  $\mathbb{E}[X_i] = \mu$  und  $\sigma^2 := \text{Var}(X_i)$  liefert das Gesetz der großen Zahlen den Grenzwert für die Partialsummen:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{\mathbb{P}} \mu \quad (n \rightarrow \infty).$$

Wie verhält sich die Verteilung von  $\sum_{i=1}^n X_i$  für  $n \rightarrow \infty$ ? Es gilt:

$$\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] = n\mu \quad \text{und} \quad \text{Var}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = n\sigma^2$$

Wir standardisieren nun mit  $S_n := \frac{1}{\sqrt{n\sigma^2}} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)$ , sodass  $\mathbb{E}[S_n] = 0$  und  $\text{Var}(S_n) = 1$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Das führt zum zentralen Grenzwertsatz.

### Zentraler Grenzwertsatz

Seien  $X_i$  identisch und unabhängig verteilte Zufallsvariablen, d.h.  $\mathbb{P}^{X_i} = \mathbb{P}^{X_1}$  mit  $\mathbb{E}[X_i] = \mu$  und  $\sigma^2 := \text{Var}(X_i)$ . Dann gilt für alle  $x \in \mathbb{R}$ :

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{\sqrt{n\sigma^2}} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu) \leq x\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Phi(x),$$

wobei  $\Phi$  die Standardnormalverteilung ist.

### Zentraler Grenzwertsatz von Moivre-Laplace

Ist  $Y_n$  eine  $\text{Bin}_{(n,p)}$ -verteilte Zufallsvariable mit  $p \in (0, 1)$  so gilt:

$$\mathbb{P}\left(a < \frac{Y_n - np}{\sqrt{np \cdot (1-p)}} \leq b\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Phi(b) - \Phi(a),$$



## 7 Statistik

### Unterteilung der Statistik

- Beschreibende (deskriptive) Statistik: Aussagen werden auf den betrachteten Daten getroffen
- Beurteilende (schließende, induktive) Statistik: Aus vorliegenden Daten werden Rückschlüsse auf allgemeine Gültigkeit getroffen.

### 7.1 Deskriptive Statistik

#### Definition: Stichprobe

Sei  $\mathcal{X}$  die Menge aller Beobachtungen in einem Zufallsexperiment. Bezeichne mit  $x_i \in \mathcal{X}$  das  $i$ -te Ergebnis, dann heißt  $x := (x_1, \dots, x_n)$  **Stichprobe** vom Umfang  $n \in \mathbb{N}$ .  $\mathcal{X}$  heißt **Stichprobenraum**.

#### Absolute und relative Häufigkeit

Für  $a \in \mathcal{X}$  und eine Stichprobe  $x$  ist die **absolute** bzw. **relative Häufigkeit** von  $a$  in  $x$  definiert durch

$$H_x(a) := \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{\{x_i=a\}} \quad \text{bzw.} \quad h_x(a) := \frac{H_x(a)}{n}$$

#### Definition: Merkmal

Die bei einem stochastischen Vorgang beobachtbaren Größen heißen **Merkmale**. Werte, die von Merkmalen angenommen werden können, heißen **Merkmalsausprägungen**.

#### Definition: Empirische Verteilungsfunktion

Die Funktion

$$F_n : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1], \quad t \mapsto F_n(t) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{\{x_i \leq t\}}$$

heißt **empirische Verteilungsfunktion** von  $x = (x_1, \dots, x_n)$ . Für ein diskretes Merkmal gilt  $F_n(t) = \sum_{a \leq t} h_x(a)$ .

## Definition: Histogramm

Das **Histogramm** ist definiert durch

$$\hat{f}_n^{hist} := \sum_{k=1}^K d_k \mathbb{1}_{(a_k, a_{k+1}]}(y), \quad \text{wobei}$$

- $d_k := \frac{n_k}{a_{k+1} - a_k}$  (Gewichtung nach Größe der Klasse)
- $n_k := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{\{a_k < x_i \leq a_{k+1}\}}$  (Relative Häufigkeit der Klasse)

## Kenngrößen

- $\bar{x} := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$  (**Stichproben-Mittel**)
- $s_x^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n-1} \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 - n \cdot \bar{x}^2 \right)$  (**Stichproben-Varianz**)
- $s_x := \sqrt{s_x^2}$  (**Stichprobenstandardabweichung**)
- $v_x := \frac{s_x}{\bar{x}}$  (**Stichprobenvariationskoeffizient**)
- Sei  $x_{()} := (x_{(1)}, \dots, x_{(n)})$  eine aufsteigend sortierte Stichprobe.

$$\tilde{x} := \begin{cases} x_{(\frac{n+1}{2})} & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ \frac{1}{2} \cdot (x_{(\frac{n}{2})} + x_{(\frac{n}{2}+1)}) & \text{falls } n \text{ gerade} \end{cases}$$

heißt **Stichprobenmedian**.

- Für  $p \in (0, 1)$  und  $k := \lfloor n \cdot p \rfloor$  heißt

$$\tilde{x}_p := \begin{cases} x_{(k+1)} & \text{falls } n \cdot p \notin \mathbb{N} \\ \frac{1}{2} \cdot (x_{(k)} + x_{(k+1)}) & \text{sonst} \end{cases}$$

das **Stichproben- $p$ -Quantil**.

- **Quartilsabstand:**  $\tilde{x}_{0,75} - \tilde{x}_{0,25}$ , **Stichprobenspannweite:**  $x_{(n)} - x_{(1)}$ ,  
**Mittlere absolute Abweichung:**  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x_i - \bar{x}|$
- Für  $\alpha \in [0, 0.5)$  und  $k := \lfloor n \cdot \alpha \rfloor$  ist  $\bar{x}_\alpha := \frac{1}{n-2 \cdot k} \cdot (x_{(k+1)} + \dots + x_{(n-k)})$  das  **$\alpha$ -getrimmte Stichprobenmittel**.

## Beschreibung zweidimensionaler Daten

Ein (**parametrisches**) **Regressionsmodell** versucht die Beobachtungen mit einer Regressionsfunktion  $f_\beta$  für ein geeignetes  $\beta \in \mathbb{R}^p$  möglichst gut zu beschreiben, d.h.  $y_i \approx f_\beta(x_i)$  für alle  $i = 1, \dots, n$ .

## Einfache lineare Regression

Die **Regressionsgerade**  $y = a^* + b^*x$  ist bestimmt durch  $a^*, b^*$  als Lösung von  $\min_{a, b \in \mathbb{R}} \sum_{i=1}^n (y_i - a - bx_i)^2$  (**Kleinste-Quadrate-Methode**). Lösung ist gegeben durch

$$b^* = \frac{\sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})(y_j - \bar{y})}{\sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})^2} \quad \text{und} \quad a^* = \bar{y} - b^*\bar{x}$$

Der (**empirische**) (**Pearson-**) **Korrelationskoeffizient** von  $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$  ist gegeben durch

$$r_{xy} = \frac{\frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})(y_j - \bar{y})}{s_x s_y} = \frac{\frac{1}{n-1} (\sum_{j=1}^n x_j \cdot y_j - n \cdot \bar{x} \bar{y})}{s_x s_y}$$

wobei  $s_k$  die Stichprobenstandardabweichung von  $k$  ist. Damit gilt  $b^* = r_{xy} \frac{s_y}{s_x}$ .

## Eigenschaften von $r_{xy}$

- Es gilt  $-1 \leq r_{xy} \leq 1$
- Je nachdem ob  $r_{xy}$  positiv oder negativ ist, liegt ein ansteigender oder fallender linearer Trend vor
- Bei linearen Datentransformationen der Form  $\tilde{x} = a \cdot x_j + b$ ,  $\tilde{y} = c \cdot y_j + d$  ändert sich  $r_{xy}$  nicht, d.h.  $r_{\tilde{x}\tilde{y}} = r_{xy}$

## 7.2 Induktive Statistik

### Definition: Statistisches Experiment

Ein messbarer Raum  $(\mathcal{X}, \mathcal{F})$  versehen mit einer Familie  $(\mathbb{P}_\vartheta)_{\vartheta \in \Theta}$  von Wahrscheinlichkeitsmaßen mit einer beliebigen **Parametermenge**  $\Theta \neq \emptyset$  heißt **statistisches Experiment** oder **statistisches Modell**. Zufallsvariablen auf  $(\mathcal{X}, \mathcal{F}, (\mathbb{P}_\vartheta)_{\vartheta \in \Theta})$  heißen **Beobachtung** oder **Statistik**.

### Definition: Unabhängige Stichprobe

Die Stichprobe  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  heißt als Realisierung eines Zufallsvektors  $X = (X_1, X_2, \dots, X_n) \in \mathcal{X}$  **unabhängige Stichprobe**, wenn alle  $X_i$  identisch und unabhängig verteilt sind. Hat diese Stichprobe eine Randverteilungsdichte  $X_1 \sim f_\vartheta$ , so ist der Stichprobenvektor verteilt mit  $f_\vartheta^n(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n f_i(x_i)$

Bemerkung: Kenngrößen wie  $\mathbb{E}_\vartheta$  oder  $Var_\vartheta$  von  $\mathbb{P}_\vartheta$  hängen von  $\vartheta$  ab.

Mit einer gegebenen Stichprobe sollen Aussagen über die zugrunde liegende Verteilung  $\mathbb{P}_\vartheta$  gemacht werden. Parameterschätzung, Hypothesentests und Konfidenzbereiche sind grundlegende Kategorien zur Untersuchung.

### Definition: Schätzer

Sei  $(\mathcal{X}, \mathcal{F}, (\mathbb{P}_\vartheta)_{\vartheta \in \Theta})$  ein statistisches Modell,  $\rho : \Theta \rightarrow \mathbb{R}^d$  ein  $d$ -dimensionaler Parameter. Ein **Schätzer** ist eine Abbildung  $\hat{\rho} : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^d$ . Gilt  $\mathbb{E}_\vartheta[\hat{\rho}] = \rho(\vartheta)$ , so heißt  $\hat{\rho}$  **unverzerrt** oder **erwartungstreu**.

### Definition: Verlust und Risiko

Eine Funktion  $l : \Theta \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_+$  heißt **Verlustfunktion**, falls  $l(\vartheta, \cdot)$  für alle  $\vartheta \in \Theta$  messbar ist. Der erwartete Verlust  $R(\vartheta, \hat{\rho}) := \mathbb{E}_\vartheta[l(\vartheta, \hat{\rho})]$  eines Schätzers  $\hat{\rho}$  heißt **Risiko**. Besonders wichtig ist der **quadratische Verlust**:  $l(\vartheta, r) = |r - \rho(\vartheta)|^2$ .

### Bias-Varianz-Zerlegung

Sei  $(\mathcal{X}, \mathcal{F}, (\mathbb{P}_\vartheta)_{\vartheta \in \Theta})$  ein statistisches Modell und  $\hat{\rho} : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^d$  ein Schätzer des Parameters  $\rho(\vartheta)$  mit  $\mathbb{E}_\vartheta[|\hat{\rho}|^2] < \infty$ . Dann gilt für den quadratischen Verlust:

$$\mathbb{E}_\vartheta[|\hat{\rho} - \rho(\vartheta)|^2] = Var_\vartheta(\hat{\rho}) + |\mathbb{E}_\vartheta[\hat{\rho}] - \rho(\vartheta)|^2$$

Der hintere Summand ist der **Bias**.

### Definitionen für asymptotische Eigenschaften von Schätzern

Seien  $X_1, \dots, X_n \sim \mathbb{P}_\vartheta$  eine i.i.d Stichprobe. Dann heißt eine Folge von Schätzern  $\hat{\rho} = \hat{\rho}(X_1, \dots, X_n)$  für den abgeleiteten Parameter  $\rho(\vartheta) \in \mathbb{R}$

- **asymptotisch konsistent**, falls  $\hat{\rho}_n \xrightarrow{\mathbb{P}_\vartheta} \rho(\vartheta)$  für  $n \rightarrow \infty$
- **asymptotisch erwartungstreu**, falls  $\mathbb{E}_\vartheta[\hat{\rho}_n] \rightarrow \rho(\vartheta)$  für  $n \rightarrow \infty$

- **asymptotisch normalverteilt**, falls  $\mathbb{E}_\vartheta[|\hat{\rho}_n|^2] < \infty$  und  $\mathbb{P}_\vartheta\left(\frac{\hat{\rho}_n - \mathbb{E}_\vartheta[\hat{\rho}_n]}{\sqrt{\text{Var}_\vartheta(\hat{\rho}_n)}} \leq t\right) \rightarrow \Phi(t)$  für  $n \rightarrow \infty$  und alle  $t \in \mathbb{R}$

Wir wollen im Folgenden Schätzer konstruieren.

## Empirische Maßzahlen

Schätze Maßzahlen durch deren empirisches Analogon einer unabh. Stichprobe:

$\rho(\vartheta)$	Schätzwert
$\mathbb{E}_\vartheta[X_1]$	$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j$
$\mathbb{E}_\vartheta[X_1^k]$	$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j^k$
$\text{Var}_\vartheta(X_1)$	$s_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})^2$
Median $t_{1/2}(X_1)$	empirischer Median $\tilde{x}$
Quantil $t_p(X_1)$	empirisches Quantil $\tilde{x}_p$
$\mathbb{P}_\vartheta(X_1 \in B)$	empirische Verteilung $\mathbb{P}_n(B)$

Für diese Schätzmethode braucht man kein parametrisches Modell.

## Erwartungstreue von empirischen Maßzahlen

Folgende Schätzer sind für eine unabhängige Stichprobe erwartungstreu:

- $\bar{X}_n := \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j$  erwartungstreu für  $\mathbb{E}_\vartheta[X_1]$
- $\mathbb{P}_n(B) := \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \{X_j \in B\}$  erwartungstreu für  $\mathbb{P}(X_1 \in B)$  für jede Borelmenge  $B \in \mathcal{B}_\mathbb{R}$
- $s_n^2(X_1, \dots, X_n) := \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (X_j - \bar{X}_n)^2$  erwartungstreu für  $\text{Var}_\vartheta(X_1)$

Mit dem zentralen Grenzwertsatz folgt die Konsistenz der obigen Werte.

## Momentenmethode

- Seien  $X_1, \dots, X_n$  i.i.d. verteilte Zufallsvariablen
- Gegeben Verteilung versuche die Parameter zu schätzen

- Bestimme die ersten  $k$  Momente  $m_k(\vartheta) := \mathbb{E}_\vartheta[X_1^k]$
- Schätze  $m_k(\vartheta)$  durch das  $k$ -te Stichprobenmoment  $\hat{m}_k(x) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j^k$
- **Momentenschätzer** ergibt sich durch Auflösen der Gleichungen  $m_k(\vartheta) = \hat{m}_k(x)$

**Definition: Maximum-Likelihood-Schätzer**

- Für eine feste Stichprobe  $x = (x_1, \dots, x_n)$  heißt  $\Theta \ni \vartheta \mapsto L_x(\vartheta) := \prod_{j=1}^n f_\vartheta(x_j)$  die **Likelihood-Funktion** zu  $x$ .
- Der Wert  $\hat{\vartheta} \in \Theta$  an dem  $L_x(\cdot)$  einen Maximalwert annimmt heißt **Maximum-Likelihood-Schätzwert** von  $\vartheta$  zu  $x$ . Der Schätzer  $\hat{\vartheta} : \mathcal{X} \rightarrow \Theta$  heißt **Maximum-Likelihood-Schätzer**.

Berechnung:

- Maximieren der Likelihood-Funktion ist äquivalent zur Maximierung der Loglikelihood-Funktion:  $l_x(\vartheta) := \sum_{i=1}^n \log f_\vartheta(x_i)$
- Finde Maximum durch die Ableitung.