Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik - Zusammenfassung

Julian Shen

26. Dezember 2021

1 Grundbegriffe

Definition: Ergebnisse und Ereignisse

- **Grundraum** ist eine nicht leere Menge $\Omega \neq \emptyset$ und enthält alle möglichen **Ergebnisse** eines Zufallsexperiments
- **Ereignisse** sind Teilmengen $A \subseteq \Omega$, denen eine Wahrscheinlichkeit zugeordnet werden kann. Falls ein ω Ergebnis ist, dann heißt $\{\omega\}$ **Elementarereignis**

Ereignisse können durch Mengenoperationen logisch verknüpft werden:

- $A \cup B$: Ereignis A oder B tritt ein („inklusives oder“)
- $A \cap B$: Ereignis A und B treffen ein
- $A \setminus B$: Ereignis A tritt ein, aber Ereignis B trifft nicht ein
- B^{C}: Ereignis B trifft nicht ein
- $A \subseteq B$: Wenn A eintritt, dann tritt auch B ein

Jedem Ereignis kann durch die **relative Häufigkeit** eine Wahrscheinlichkeit zugeordnet werden. Für n Wiederholungen und Ergebnisse $\omega_1, \dots, \omega_n \in \Omega$ gilt:

$$\mathbb{P}_n(A) := \tfrac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{\omega_i \in A\}}$$

Definition: Diskretes Wahrscheinlichkeitsmaß und Wahrscheinlichkeitsraum

Eine Abbildung $\mathbb{P} : \mathscr{P}(\Omega) \to [0,1]$ heißt **diskretes Wahrscheinlichkeitsmaß**, falls

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
- $\forall A_n \subseteq \Omega, n \in \mathbb{N}$, disjunkt: $\mathbb{P}(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_n)$ (σ-Additivität)
- es existiert eine abzählbare Menge $\Omega_0 \subseteq \Omega$ mit $\mathbb{P}(\Omega_0) = 1$

Dann heißt $(\Omega, \mathbb{P})$ **diskreter Wahrscheinlichkeitsraum**.

Rechenregeln für diskrete Wahrscheinlichkeitsräume

- $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$
- $\mathbb{P}(A^{\mathsf{C}}) = 1 - \mathbb{P}(A)$
- $\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$
- $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

Definition: Bernoulliverteilung

Wahrscheinlichkeitsverteilung heißt Bernoulliverteilung Ber_p mit Erfolgswahrscheinlichkeit p, wenn:

- Grundraum $\Omega = \{0, 1\}$
- $\mathbb{P}(1) = p$ für ein $p \in [0, 1]$

Es gilt $\mathbb{P}(\{0\}) = 1 - \mathbb{P}(\{1\}) = 1 - p$

Definition: Gleichverteilung

Das Wahrscheinlichkeitsmaß $(\Omega, \mathbb{P})$ heißt Gleichverteilung oder **Laplace-Verteilung** U_A auf Ω, falls

- $\Omega \neq \emptyset$ endlich
- $\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$, für $A \subseteq \Omega$

Urnenmodelle/Fächermodelle

Urnenmodell mit n Kugeln und k Ziehungen	mit Zurücklegen	ohne Zurücklegen	
mit Reihenfolge	n^k	$\frac{n!}{(n-k)!}$	unterscheidbare Murmeln
ohne Reihenfolge	$\binom{n+k-1}{k}$	$\binom{n}{k}$	ununterscheidbare Murmeln
	mit Mehrfachbelegung	ohne Mehrfachbelegung	Verteilung von k Murmeln auf n Fächer

Urnenmodelle ermöglichen es, die Wahrscheinlichkeiten zu bestimmen, falls von einer Gleichverteilung ausgegangen werden kann!

Definition: Zähldichte

Sei $(\Omega, \mathbb{P})$ ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum. Dann wird die Funktion

$$f : \Omega \to [0, 1], f(\omega) = \mathbb{P}(\{\omega\})$$

Wahrscheinlichkeitsfunktion oder **Zähldichte** von $\mathbb{P}$ genannt.

Diese besitzt folgende Eigenschaften:

- $\Omega_T \coloneqq \{\omega \in \Omega \mid f(\omega) > 0\}$ ist abzählbar und heißt **Träger** von $\mathbb{P}$ bzw. von f
- $\sum\limits_{\omega \in \Omega} f(\omega) = 1$

Die Zähldichte ist eindeutig!

Definition: Binomialverteilung

Das Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P} = Bin_{(n,p)}$ auf $\{0, \ldots, n\}$ mit der Zähldichte

$$f(k) = \tbinom{n}{k} p^k \cdot (1-p)^{n-k} \qquad \forall k \in \{0, \ldots, n\}$$

heißt **Binomialverteilung** mit Parametern $n \in \mathbb{N}$ und $p \in [0, 1]$.

Definition: Geometrische Verteilung

Das Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P} = Geo_p$ auf $\mathbb{N}_0$ mit der Zähldichte

$$f(k) = (1-p)^k \cdot p \qquad \forall k \in \mathbb{N}_0$$

heißt **geometrische Verteilung** mit Parameter $p \in (0, 1]$.

2 Bedingte Wahrscheinlichkeit und Unabhängigkeit

Definition: Bedingte Wahrscheinlichkeit

Für $(\Omega, \mathbb{P})$ diskreter Wahrscheinlichkeitsraum und $A, B \in \Omega$ mit $\mathbb{P}(B) > 0$ heißt

$$\mathbb{P}(A \mid B) := \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

die **bedingte Wahrscheinlichkeit** von A gegeben B.

Multiplikationsformel

Seien $A_1, \ldots, A_n \subseteq \Omega$ Ereignisse mit $\mathbb{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}) > 0$, dann gilt

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2 \mid A_1) \cdot \mathbb{P}(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \cdots \mathbb{P}(A_n \mid A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1})$$

Im Fall von n=2 gilt: $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(A \mid B)$

Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit und Satz von Bayes

Sei $(\Omega, \mathbb{P})$ ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum, I eine abzählbare Indexmenge, $B_i \subseteq \Omega, i \in I$, disjunkt mit $\mathbb{P}(B_i) > 0$ und $\bigcup\limits_{i \in I} B_i = \Omega$ und $A \subseteq \Omega$ beliebig.

- Es gilt der **Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit**:

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(A \mid B_i) \cdot \mathbb{P}(B_i)$$

- Falls $\mathbb{P}(A) > 0$ und $k \in I$, dann gilt der **Satz von Bayes**:

$$\mathbb{P}(B_k \mid A) = \frac{\mathbb{P}(A \mid B_k) \cdot \mathbb{P}(B_k)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A \mid B_k) \cdot \mathbb{P}(B_k)}{\sum\limits_{i \in I} \mathbb{P}(A \mid B_i) \cdot \mathbb{P}(B_i)}$$

Definition: Stochastische Unabhängigkeit

Sei $(\Omega, \mathbb{P})$ ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum. Zwei Ereignisse $A, B \subseteq \Omega$ heißen **stochastisch unabhängig**, falls

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$$

Ereignisse $A_1, \ldots, A_n \subseteq \Omega$ heißen **stochastisch unabhängig**, wenn für jede Indexmenge $I \subseteq \{1, \ldots, n\}, I \neq \emptyset$, gilt

$$\mathbb{P}(\bigcap_{i \in I} A_i) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(A_i)$$

Achtung: Mehr als zwei Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$ sind im Allgemeinen nicht stochastisch unabhängig, wenn nur $\mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)$ gilt! Gleiches gilt, wenn jeweils nur zwei der Ereignisse stochastisch unabhängig sind.

3 Zufallsvariablen und ihre Verteilungen

Definition: S-wertige Zufallsvariable

Ist $(\Omega, \mathbb{P})$ ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum und $S \neq \emptyset$ eine beliebige Menge, so wird die Abbildung $X : \Omega \to S$ **S-wertige Zufallsvariable** genannt.

Definition: Verteilung

Ist $X : \Omega \to S$ eine Zufallsvariable auf einem diskreten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathbb{P})$, dann wird durch

$$\mathbb{P}^X(B) \coloneqq \mathbb{P}(X^{-1}(B)) \qquad \forall B \subseteq S$$

ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}^X$ auf S definiert, welches Verteilung von X genannt wird. $(S, \mathbb{P}^X)$ ist ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum. Notation für Urbilder:

- $\{X \in B\} \coloneqq \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in B\} = X^{-1}(B)$
- $\{X = x\} \coloneqq \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\} = X^{-1}(\{x\})$
- $\{X > x\} \coloneqq \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) > x\} = X^{-1}((x, \infty))$

Zudem schreibt man $\mathbb{P}(X \in B) \coloneqq \mathbb{P}(\{X \in B\})$

Definition: Stochastische Unabhängigkeit von Zufallsvariablen

Sei $(\Omega, \mathbb{P})$ ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum und $S_i, i \in \{1, \dots, n\}$ nichtleere Zufallsvariablen. Zufallsvariablen $X_i : \Omega \to S_i, i \in \{1, \dots, n\}$ heißen **stochastisch unabhängig**, wenn für beliebige $B_i \subseteq S_i$ die Ereignisse $\{X_1 \in B_1\}, \dots, \{X_n \in B_n\}$ stochastisch unabhängig sind.

Auch der Vektor $(X_1, \dots, X_n) : \Omega \to S_1 \times \dots \times S_n$ ist eine Zufallsvariable mit Verteilung $\mathbb{P}^{(X_1,\dots,X_n)}$ auf $S_1 \times \dots \times S_n$.

Bemerkung zur Schreibweise: $(X_1 \in B_1, X_2 \in B_2) = (X_1 \in B_1) \cap (X_2 \in B_2)$

Satz für stochastisch unabhängige Zufallsvariablen

Es sind äquivalent:

- $X_1, \dots, X_n$ sind stochastisch unabhängig
- $\forall B_i \subseteq S_1 : \mathbb{P}(X_i \in B_i \; \forall 1 \leq i \leq n) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i \in B_i)$
- Bezeichne mit f_{X_i} die Zähldichte von $\mathbb{P}^{X_1}$ auf S_i. Dann hat die Zähldichte $f_{(X_1,\dots,X_n)}$ von $\mathbb{P}^{(X_1,\dots,X_n)}$ die Form: $f_{(X_1,\dots,X_n)}(t_1, \dots, t_n) = \prod\limits_{i=1}^{n} f_{X_i}(t_i) \qquad \forall t_i \in S_i$

Definition: Hypergeometrischen Verteilung

Das Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P} = Hyp_{(N,M,n)}$ auf $\mathbb{N}_0$ gegeben durch die Zähldichte

$$\mathbb{P}^X(\{m\}) = \mathbb{P}(X = m) = \frac{\binom{M}{m} \cdot \binom{N-M}{n-m}}{\binom{N}{n}} \mathbb{1}_S(m) \qquad \forall m \in \mathbb{N}_0$$

heißt **hypergeometrische Verteilung**.

Zusammenhang hypergeometrische Verteilung und Binomialverteilung

- Die **hypergeometrische Verteilung** $Hyp_{(N,M,n)}$ beschreibt die Anzahl der markierten Gegenstände bei n-maligem **Ziehen ohne Zurücklegen** aus N Gegenständen, von denen M markiert sind
- Die **Binomialverteilung** $Bin_{(n,M/N)}$ beschreibt die Anzahl der markierten Gegenstände bei n-maligem **Ziehen mit Zurücklegen** aus N Gegenständen, von denen M markiert sind

Falls $n \ll N$, dann ist Ziehen mit oder ohne Zurücklegen fast identisch und daher $Hyp_{(N,M,n)}(\{m\}) \approx Bin_{(n,\frac{M}{N})}(\{m\}) \qquad \forall 0 \leq m \leq n$

Poisson'scher Grenzwertsatz

Für eine große Anzahl an Experimenten n und eine kleine Erfolgswahrscheinlichkeit p kann $Bin_{(n,p)}$ durch eine strukturell einfachere Verteilung approximiert werden:

$$\lim_{n\to\infty} Bin_{(n,p)}(\{k\}) = \lim_{n\to\infty} \binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} =: Poiss_\lambda(\{k\}) \qquad k \in \mathbb{N}_0$$

Das Wahrscheinlichkeitsmaß $Poiss_\lambda$ heißt Poissonverteilung mit Parameter λ.

Definition: Faltung

Sind X, Y $\mathbb{R}$-wertige Zufallsvariablen auf einem diskreten Wahrscheinlichkeitsraum mit Zähldichten f_X von $\mathbb{P}^X$ und f_Y von $\mathbb{P}^Y$, dann heißt

$$(f_X * f_Y)(z) = \sum_{x\in\mathbb{R}: f_X(x)>0} f_X(x) \cdot f_Y(z-x) \qquad \forall z \in \mathbb{R}$$

die **Faltung** von f_X und f_Y. Hierbei ist $f_X * f_Y$ wieder eine Zähldichte mit Träger $\Omega_T := \{z \in \mathbb{R} \mid \exists x, y \in \mathbb{R} : z = x + y, f_X(x) > 0, f_Y(y) > 0\}$ und die zugehörige diskrete Verteilung $\mathbb{P}^X * \mathbb{P}^Y$ heißt **Faltung** von $\mathbb{P}^X$ und $\mathbb{P}^Y$.

Satz für die Faltung

Sind X, Y unabhängige $\mathbb{R}$-wertige Zufallsvariablen auf einem diskreten Wahrscheinlichkeitsraum, so gilt

$$\mathbb{P}^X * \mathbb{P}^Y = \mathbb{P}^{X+Y}$$

4 Wahrscheinlichkeitsmaße auf $\mathbb{R}$

Kontinuierliche Ergebnisse lassen sich nicht mehr durch eine abzählbare Anzahl an Versuchsausgängen beschreiben. Wahrscheinlichkeiten kann man dann nur noch „gutartigen Mengen“ zuordnen, u.a.:

- Intervalle sind gutartig
- Komplemente gutartiger Mengen sind gutartig
- Abzählbare Vereinigungen gutartiger Mengen sind gutartig

Bezeichne nun mit $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{P}(\Omega)$ das System aller „gutartigen“ Mengen.

Definition: $\boldsymbol{\sigma}$-Algebra

Sei $\Omega \neq \emptyset$ ein beliebiger Grundraum. Eine Menge $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{P}(\Omega)$ heißt **$\boldsymbol{\sigma}$-Algebra** auf Ω, falls:

- $\emptyset, \Omega \in \mathscr{A}$
- $A \in \mathscr{A} \implies A^{\mathsf{C}} \in \mathscr{A}$
- $A_n \in \mathscr{A}\ \forall n \in \mathbb{N} \implies \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathscr{A}$

$(\Omega, \mathscr{A})$ heißt dann **messbarer Raum**. Die Mengen $A \in \mathscr{A}$ heißen **Ereignisse**.

Definition: Borel-$\boldsymbol{\sigma}$-Algebra

Die **Borel-$\boldsymbol{\sigma}$-Algebra** $\mathscr{B}$ auf $\mathbb{R}$ beschreibt die kleinste σ-Algebra, welche alle Intervalle $(a, b]$ für beliebige $a, b \in \mathbb{R}$ enthält.

Definition: Wahrscheinlichkeitsmaß und Wahrscheinlichkeitsraum

Sei $(\Omega, \mathscr{A})$ ein Messraum mit Grundraum $\Omega \neq \emptyset$ und σ-Algebra $\mathscr{A}$. Eine Abbildung $\mathbb{P} : \mathscr{A} \to [0, 1]$ heißt Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega, \mathscr{A})$, falls

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
- $A_n \in \mathscr{A}, n \in \mathbb{N}$, disjunkt $\implies \mathbb{P}(\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \sum\limits_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n)$ (σ-Additivität)

$(\Omega, \mathscr{A}\mathbb{P})$ heißt dann **Wahrscheinlichkeitsraum**.

Sätze und Definitionen für allgemeine Wahrscheinlichkeitsräume

Folgende Sätze und Definitionen übertragen sich sinngemäß, wobei als Ereignisse jeweils nur Mengen aus $\mathscr{A}$ betrachtet werden:

- Rechenregeln für diskrete Wahrscheinlichkeitsmaße
- Bedingte Wahrscheinlichkeiten
- Satz von der Totalen Wahrscheinlichkeit und von Bayes
- Stochastische Unabhängigkeit von Ereignissen

Unterschied: Während diskrete Wahrscheinlichkeitsmaße $\mathbb{P}$ vollständig durch die Zähldichte $f(\omega) := \mathbb{P}(\{\omega\}), \omega \in \Omega$ bestimmt sind, ist dies für allgemeine Wahrscheinlichkeitsmaße falsch!

Definition: Verteilungsfunktion

Ist $\mathbb{P}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{R}, \mathscr{B}_{\mathbb{R}})$, so gilt für die durch

$$F : \mathbb{R} \to [0,1], F(x) := \mathbb{P}((-\infty, x])$$

definierte **Verteilungsfunktion** von $\mathbb{P}$:

- F ist monoton steigend
- F ist rechtsseitig stetig
- $F(\infty) := \lim\limits_{x\to\infty} F(x) = 1,\ F(-\infty) := \lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$

Ist umgekehrt $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ eine Funktion, die obige Punkte erfüllt, so existiert genau ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{R}, \mathscr{B}_{\mathbb{R}})$, das F als Verteilungsfunktion besitzt. Für ein diskretes Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ ist die Verteilungsfunktion eine Treppenfunktion.

Definition: Dichten

Sei $\mathbb{P}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{R}, \mathscr{B}_{\mathbb{R}})$. Existiert eine integrierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$, sodass

$$F(x) = \mathbb{P}((-\infty, x]) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

so heißt f Dichte von $\mathbb{P}$ bzw. von der zugehörigen Verteilungsfunktion F. Für $A \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}}$ gilt dann

$$\mathbb{P}(A) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \cdot \mathbb{1}_A(x)dx =: \int_A f(x)dx$$

Umgekehrt ist jede integrierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ mit $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 1$ Dichte eines Wahrscheinlichkeitsmaßes auf $(\mathbb{R}, \mathscr{B}_{\mathbb{R}})$, das durch obiges F eindeutig festgelegt ist. Falls eine Dichte existiert, ist F stetig.

Achtung: Dichten dürfen nicht mit Zähldichten verwechselt werden!

Definition: Gleichverteilung

Für $-\infty < a < b < \infty$ heißt das Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{R}, \mathscr{B}_{\mathbb{R}})$ zur Dichte $f := \frac{1}{b-a}\mathbb{1}_{(a,b]}$ **Gleichverteilung** $U_{(a,b]}$ auf $(a, b]$ und für $a \leq c < d \leq b$ gilt:
$U_{(a,b]}((c, d]) = \frac{d-c}{b-a}$.

Definition: Exponentialverteilung

Die **Exponentialverteilung** Exp_λ mit Parameter $\lambda > 0$ ist gegeben durch die Dichte

$$f_\lambda(x) := \tfrac{1}{\lambda}e^{-x/\lambda} \cdot \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x), \qquad x \in \mathbb{R}$$

Die Verteilungsfunktion ist gegeben durch $F_\lambda(x) = 1 - e^{-x/\lambda}, \qquad \forall x \geq 0$
und $F_\lambda(x) = 0$ für alle $x < 0$.

Exponentialverteilungen beschreiben Lebensdauern von Dingen, die nicht altern, d.h. die Wahrscheinlichkeit noch y Jahre zu überleben, gegeben dass bereits x Jahre überlebt wurden, hängt nicht von x ab.

Definition: Normalverteilung

Die **Normalverteilung** $N_{(\mu,\sigma^2)}$ mit Parametern $\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$ ist gegeben durch die Dichte

$$f(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot exp(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}), \qquad x \in \mathbb{R}$$

Die Verteilung $N_{(0,1)}$ wird **Standardnormalverteilung** genannt. Die Verteilungsfunktion von $N_{(0,1)}$ bezeichnet man mit

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2}dt$$

Aufgrund der Symmetrie der Standardnormalverteilung zur y-Achse, gilt
$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Insbesondere ist $\Phi(0) = \frac{1}{2}$.

Für die Verteilungsfunktion der Normalverteilung $N_{(\mu,\sigma^2)}$ gilt

$$F(x) = \Phi(\tfrac{x-\mu}{\sigma})$$

Um Wahrscheinlichkeiten für eine beliebige Normalverteilung zu berechnen, genügt also die Verteilungsfunktion Φ der Standardnormalverteilung:

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0.00	0.5000	0.76	0.7764	1.52	0.9357	1.84	0.9671	2.28	0.9887
0.02	0.5080	0.78	0.7823	1.54	0.9382	1.86	0.9686	2.30	0.9893
0.04	0.5160	0.80	0.7881	1.56	0.9406	1.88	0.9699	2.32	0.9898
0.06	0.5239	0.82	0.7939	1.58	0.9429	1.90	0.9713	2.34	0.9904
0.08	0.5319	0.84	0.7995	1.60	0.9452	1.92	0.9726	2.36	0.9909
0.10	0.5398	0.86	0.8051	1.62	0.9474	1.94	0.9738	2.38	0.9913
0.12	0.5478	0.88	0.8106	1.64	0.9495	1.96	0.9750	2.40	0.9918
0.14	0.5557	0.90	0.8159	1.66	0.9515	1.98	0.9761	2.42	0.9922
0.16	0.5636	0.92	0.8212	1.68	0.9535	2.00	0.9772	2.44	0.9927
0.18	0.5714	0.94	0.8264	1.70	0.9554	2.02	0.9783	2.46	0.9931
0.20	0.5793	0.96	0.8315	1.72	0.9573	2.04	0.9793	2.48	0.9934
0.22	0.5871	0.98	0.8365	1.74	0.9591	2.06	0.9803	2.50	0.9938
0.24	0.5948	1.00	0.8413	1.76	0.9608	2.08	0.9812	2.52	0.9941
0.26	0.6026	1.02	0.8461	1.78	0.9625	2.10	0.9821	2.54	0.9945
0.28	0.6103	1.04	0.8508	1.80	0.9641	2.12	0.9830	2.56	0.9948
0.30	0.6179	1.06	0.8554	1.82	0.9656	2.14	0.9838	2.58	0.9951

Definition: Zufallsvariable, Messbarkeit und Verteilung

Eine Zufallsvariable X ist nur noch definiert, wenn das Urbild von X eine „gutartige“ Menge ist.

Seien $(\Omega, \mathscr{A})$, $(S, \mathscr{C})$ messbare Räume und $X : \Omega \to S$ eine Abbildung. X heißt S-wertige **Zufallsvariable**, falls $X^{-1}(C) \in \mathscr{A}$ für alle $C \in \mathscr{C}$ ist.
Man schreibt $X : (\Omega, \mathscr{A}) \to (S, \mathscr{C})$ und sagt, dass X **$(\mathscr{A}, \mathscr{C})$-messbar** ist. Die sogenannte **Verteilung** von X unter $\mathbb{P}$ wird durch das Wahrscheinlichkeitsmaß

$$\mathbb{P}^X(C) := \mathbb{P}(X^{-1}(C)) = \mathbb{P}(X \in C), \qquad C \in \mathscr{C}$$

auf $(S, \mathscr{C})$ definiert.

Definition: Verteilungsfunktion und Dichte von Zufallsvariablen

Sei $X : (\Omega, \mathscr{A}) \to (S, \mathscr{C})$ eine $\mathbb{R}$-wertige Zufallsvariable auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

- Die Verteilungsfunktion der Verteilung $\mathbb{P}^X$ von X

  $$F_X : \mathbb{R} \to [0,1],\ x \mapsto \mathbb{P}^X((-\infty, x]) = \mathbb{P}(X \leq x)$$

  wird auch **Verteilungsfunktion** von X genannt.

- X heißt **stetige Zufallsvariable**, falls F_X eine Dichte f_X besitzt:

  $$\mathbb{P}(X \leq x) = \textstyle\int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

  f_X heißt dann auch **Dichte** von X.