Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik - Zusammenfassung

Julian Shen

26. Dezember 2021

1 Grundbegriffe

Definition: Ergebnisse und Ereignisse

- **Grundraum** ist eine nicht leere Menge $\Omega \neq \emptyset$ und enthält alle möglichen **Ergebnisse** eines Zufallsexperiments
- **Ereignisse** sind Teilmengen $A \subseteq \Omega$, denen eine Wahrscheinlichkeit zugeordnet werden kann. Falls ein ω Ergebnis ist, dann heißt $\{\omega\}$ **Elementarereignis**

Ereignisse können durch Mengenoperationen logisch verknüpft werden:

- $A \cup B$: Ereignis A oder B tritt ein („inklusives oder“)
- $A \cap B$: Ereignis A und B treffen ein
- $A \setminus B$: Ereignis A tritt ein, aber Ereignis B trifft nicht ein
- B^{C}: Ereignis B trifft nicht ein
- $A \subseteq B$: Wenn A eintritt, dann tritt auch B ein

Jedem Ereignis kann durch die **relative Häufigkeit** eine Wahrscheinlichkeit zugeordnet werden. Für n Wiederholungen und Ergebnisse $\omega_1, \dots, \omega_n \in \Omega$ gilt:

$$\mathbb{P}_n(A) \coloneqq \tfrac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{\omega_i \in A\}}$$

Definition: Diskretes Wahrscheinlichkeitsmaß

Eine Abbildung $\mathbb{P} : \mathscr{P}(\Omega) \to [0,1]$ heißt diskretes Wahrscheinlichkeitsmaß, falls

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
- $\forall A_n \subseteq \Omega, n \in \mathbb{N}$, disjunkt: $\mathbb{P}(\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_n)$ (σ-Additivität)
- es existiert eine abzählbare Menge $\Omega_0 \subseteq \Omega$ mit $\mathbb{P}(\Omega_0) = 1$

Dann heißt $(\Omega, \mathbb{P})$ **diskreter Wahrscheinlichkeitsraum**. Es gelten folgende Rechenregeln für diskrete Wahrscheinlichkeitsräume:

- $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$
- $\mathbb{P}(A^{\mathsf{C}}) = 1 - \mathbb{P}(A)$
- $\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$
- $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

Definition: Bernoulliverteilung

Wahrscheinlichkeitsverteilung heißt Bernoulliverteilung Ber_p mit Erfolgswahrscheinlichkeit p, wenn:

- Grundraum $\Omega = \{0, 1\}$
- $\mathbb{P}(1) = p$ für ein $p \in [0, 1]$

Es gilt $\mathbb{P}(\{0\}) = 1 - \mathbb{P}(\{1\}) = 1 - p$

Definition: Gleichverteilung

Das Wahrscheinlichkeitsmaß $(\Omega, \mathbb{P})$ heißt Gleichverteilung oder **Laplace-Verteilung** U_A auf Ω, falls

- $\Omega \neq \emptyset$ endlich
- $\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$, für $A \subseteq \Omega$

Urnenmodelle/Fächermodelle

Urnenmodell mit n Kugeln und k Ziehungen	mit Zurücklegen	ohne Zurücklegen	
mit Reihenfolge	n^k	$\frac{n!}{(n-k)!}$	unterscheidbare Murmeln
ohne Reihenfolge	$\binom{n+k-1}{k}$	$\binom{n}{k}$	ununterscheidbare Murmeln
	mit Mehrfachbelegung	ohne Mehrfachbelegung	Verteilung von k Murmeln auf n Fächer

Urnenmodelle ermöglichen es, die Wahrscheinlichkeiten zu bestimmen, falls von einer Gleichverteilung ausgegangen werden kann!

Definition: Zähldichte

Sei $(\Omega, \mathbb{P})$ ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum. Dann wird die Funktion

$$f : \Omega \to [0, 1], f(\omega) = \mathbb{P}(\{\omega\})$$

Wahrscheinlichkeitsfunktion oder **Zähldichte** von $\mathbb{P}$ genannt.

Diese besitzt folgende Eigenschaften:

- $\Omega_T \coloneqq \{\omega \in \Omega \mid f(\omega) > 0\}$ ist abzählbar und heißt **Träger** von $\mathbb{P}$ bzw. von f
- $\sum\limits_{\omega \in \Omega} f(\omega) = 1$

Die Zähldichte ist eindeutig!

Definition: Binomialverteilung

Das Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P} = Bin_{(n,p)}$ auf $\{0, \ldots, n\}$ mit der Zähldichte

$$f(k) = \tbinom{n}{k} p^k \cdot (1-p)^{n-k} \qquad \forall k \in \{0, \ldots, n\}$$

heißt **Binomialverteilung** mit Parametern $n \in \mathbb{N}$ und $p \in [0, 1]$.

Definition: Geometrische Verteilung

Das Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P} = Geo_p$ auf $\mathbb{N}_0$ mit der Zähldichte

$$f(k) = (1-p)^k \cdot p \qquad \forall k \in \mathbb{N}_0$$

heißt **geometrische Verteilung** mit Parameter $p \in (0, 1]$.

2 Bedingte Wahrscheinlichkeit und Unabhängigkeit

Definition: Bedingte Wahrscheinlichkeit

Für $(\Omega, \mathbb{P})$ diskreter Wahrscheinlichkeitsraum und $A, B \in \Omega$ mit $\mathbb{P}(B) > 0$ heißt

$$\mathbb{P}(A \mid B) := \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

die **bedingte Wahrscheinlichkeit** von A gegeben B.

Multiplikationsformel

Seien $A_1, \ldots, A_n \subseteq \Omega$ Ereignisse mit $\mathbb{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}) > 0$, dann gilt

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2 \mid A_1) \cdot \mathbb{P}(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \cdots \mathbb{P}(A_n \mid A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1})$$

Im Fall von n=2 gilt: $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(A \mid B)$

Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit und Satz von Bayes

Sei $(\Omega, \mathbb{P})$ ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum, I eine abzählbare Indexmenge, $B_i \subseteq \Omega, i \in I$, disjunkt mit $\mathbb{P}(B_i) > 0$ und $\bigcup\limits_{i \in I} B_i = \Omega$ und $A \subseteq \Omega$ beliebig.

- Es gilt der **Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit**:

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(A \mid B_i) \cdot \mathbb{P}(B_i)$$

- Falls $\mathbb{P}(A) > 0$ und $k \in I$, dann gilt der **Satz von Bayes**:

$$\mathbb{P}(B_k \mid A) = \frac{\mathbb{P}(A \mid B_k) \cdot \mathbb{P}(B_k)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A \mid B_k) \cdot \mathbb{P}(B_k)}{\sum\limits_{i \in I} \mathbb{P}(A \mid B_i) \cdot \mathbb{P}(B_i)}$$

Definition: Stochastische Unabhängigkeit

Sei $(\Omega, \mathbb{P})$ ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum. Zwei Ereignisse $A, B \subseteq \Omega$ heißen **stochastisch unabhängig**, falls

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$$

Ereignisse $A_1, \dots, A_n \subseteq \Omega$ heißen **stochastisch unabhängig**, wenn für jede Indexmenge $I \subseteq \{1, \dots, n\}, I \neq \emptyset$, gilt

$$\mathbb{P}(\bigcap_{i \in I} A_i) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(A_i)$$

Achtung: Mehr als zwei Ereignisse $A_1, \dots, A_n$ sind im Allgemeinen nicht stochastisch unabhängig, wenn nur $\mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)$ gilt! Gleiches gilt, wenn jeweils nur zwei der Ereignisse stochastisch unabhängig sind.