

Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik - Zusammenfassung

Julian Shen

25. Dezember 2021

1 Grundbegriffe

- **Grundraum** ist eine nicht leere Menge $\Omega \neq \emptyset$ und enthält alle möglichen **Ergebnisse** eines Zufallsexperiments
- **Ereignisse** sind Teilmengen $A \subseteq \Omega$, denen eine Wahrscheinlichkeit zugeordnet werden kann. Falls ein ω Ergebnis ist, dann heißt $\{\omega\}$ **Elementarereignis**

Ereignisse können durch Mengenoperationen logisch verknüpft werden:

- $A \cup B$: Ereignis A oder B tritt ein („inklusive oder“)
- $A \cap B$: Ereignis A und B treffen ein
- $A \setminus B$: Ereignis A tritt ein, aber Ereignis B trifft nicht ein
- B^C : Ereignis B trifft nicht ein
- $A \subseteq B$: Wenn A eintritt, dann tritt auch B ein

Jedem Ereignis kann durch die **relative Häufigkeit** eine Wahrscheinlichkeit zugeordnet werden. Für n Wiederholungen und Ergebnisse $\omega_1, \dots, \omega_n \in \Omega$ gilt:

$$\mathbb{P}_n(A) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{\{\omega_i \in A\}}$$

Definition: Diskretes Wahrscheinlichkeitsmaß

Eine Abbildung $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$ heißt diskretes Wahrscheinlichkeitsmaß, falls

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
- $\forall A_n \subseteq \Omega, n \in \mathbb{N}, \text{ disjunkt: } \mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)$ (σ -Additivität)
- es existiert eine abzählbare Menge $\Omega_0 \subseteq \Omega$ mit $\mathbb{P}(\Omega_0) = 1$

Dann heißt (Ω, \mathbb{P}) **diskreter Wahrscheinlichkeitsraum**. Es gelten folgende Rechenregeln für diskrete Wahrscheinlichkeitsräume:

- $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$
- $\mathbb{P}(A^C) = 1 - \mathbb{P}(A)$
- $\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$
- $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

Definition: Bernoulliverteilung

Wahrscheinlichkeitsverteilung heißt Bernoulliverteilung Ber_p mit Erfolgswahrscheinlichkeit p , wenn:

- Grundraum $\Omega = \{0, 1\}$
- $\mathbb{P}(1) = p$ für ein $p \in [0, 1]$

Es gilt $\mathbb{P}(\{0\}) = 1 - \mathbb{P}(\{1\}) = 1 - p$

Definition: Gleichverteilung

Das Wahrscheinlichkeitsmaß (Ω, \mathbb{P}) heißt Gleichverteilung oder **Laplace-Verteilung** U_A auf Ω , falls

- $\Omega \neq \emptyset$ endlich
- $\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$, für $A \subseteq \Omega$

Urnenmodelle/Fächermodelle

Urnenmodell mit n Kugeln und k Ziehungen	mit Zurücklegen	ohne Zurücklegen	
mit Reihenfolge	n^k	$\frac{n!}{(n-k)!}$	unterscheidbare Murmeln
ohne Reihenfolge	$\binom{n+k-1}{k}$	$\binom{n}{k}$	ununterscheidbare Murmeln
	mit Mehrfachbelegung	ohne Mehrfachbelegung	Verteilung von k Murmeln auf n Fächer

Urnenmodelle ermöglichen es, die Wahrscheinlichkeiten zu bestimmen, falls von einer Gleichverteilung ausgegangen werden kann!

Definition: Zähldichte

Sei (Ω, \mathbb{P}) ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum. Dann wird die Funktion

$$f : \Omega \rightarrow [0, 1], f(\omega) = \mathbb{P}(\{\omega\})$$

Wahrscheinlichkeitsfunktion oder **Zähldichte** von \mathbb{P} genannt.

Diese besitzt folgende Eigenschaften:

- $\Omega_T := \{\omega \in \Omega \mid f(\omega) > 0\}$ ist abzählbar und heißt **Träger** von \mathbb{P} bzw. von f
- $\sum_{\omega \in \Omega} f(\omega) = 1$

Die Zähldichte ist eindeutig!

Definition: Binomialverteilung

Das Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P} = \text{Bin}_{(n,p)}$ auf $\{0, \dots, n\}$ mit der Zähldichte

$$f(k) = \binom{n}{k} p^k \cdot (1-p)^{n-k} \quad \forall k \in \{0, \dots, n\}$$

heißt **Binomialverteilung** mit Parametern $n \in \mathbb{N}$ und $p \in [0, 1]$.

Definition: Geometrische Verteilung

Das Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P} = \text{Geo}_p$ auf \mathbb{N}_0 mit der Zähldichte

$$f(k) = (1-p)^k \cdot p \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$$

heißt **geometrische Verteilung** mit Parameter $p \in (0, 1]$.