- 研究背景と目的
- アーム型 LEGO 倒立振子の製作
- LEGO アームの PID 制御
- **アーム型 LEGO クレーンの振れ止め制御**
- アーム型 LEGO 倒立振子の目標値追従制御
- まとめ

アーム型 LEGO クレーンの振れ止め制御

- **非線形モデル**
- **振子のパラメータ同定**
  - 1 自由度振動系の特性に基づくパラメータ同定
  - 最小 2 乗法に基づくパラメータ同定
- **状態フィードバックによる振れ止め制御**
  - 設計モデル
  - 極配置法
  - 最適レギュレータ

学習できる内容の一例

アーム型 LEGO クレーンの振れ止め制御

- ▶ 非線形モデル
- ▶ 振子のパラメータ同定
  - ● 1 自由度振動系の特性に基づくパラメータ同定
  - ● 最小 2 乗法に基づくパラメータ同定
- ▶ 状態フィードバックによる振れ止め制御
  - ● 設計モデル
  - ● 極配置法
  - ● 最適レギュレータ

ラグランジュの
運動方程式

▶ 非線形モデル

非線形モデル

$$\alpha_1\ddot{\phi}_1 = -\beta_1\dot{\phi}_1 - \gamma_1\sin\phi_1 + v \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{アーム}$$

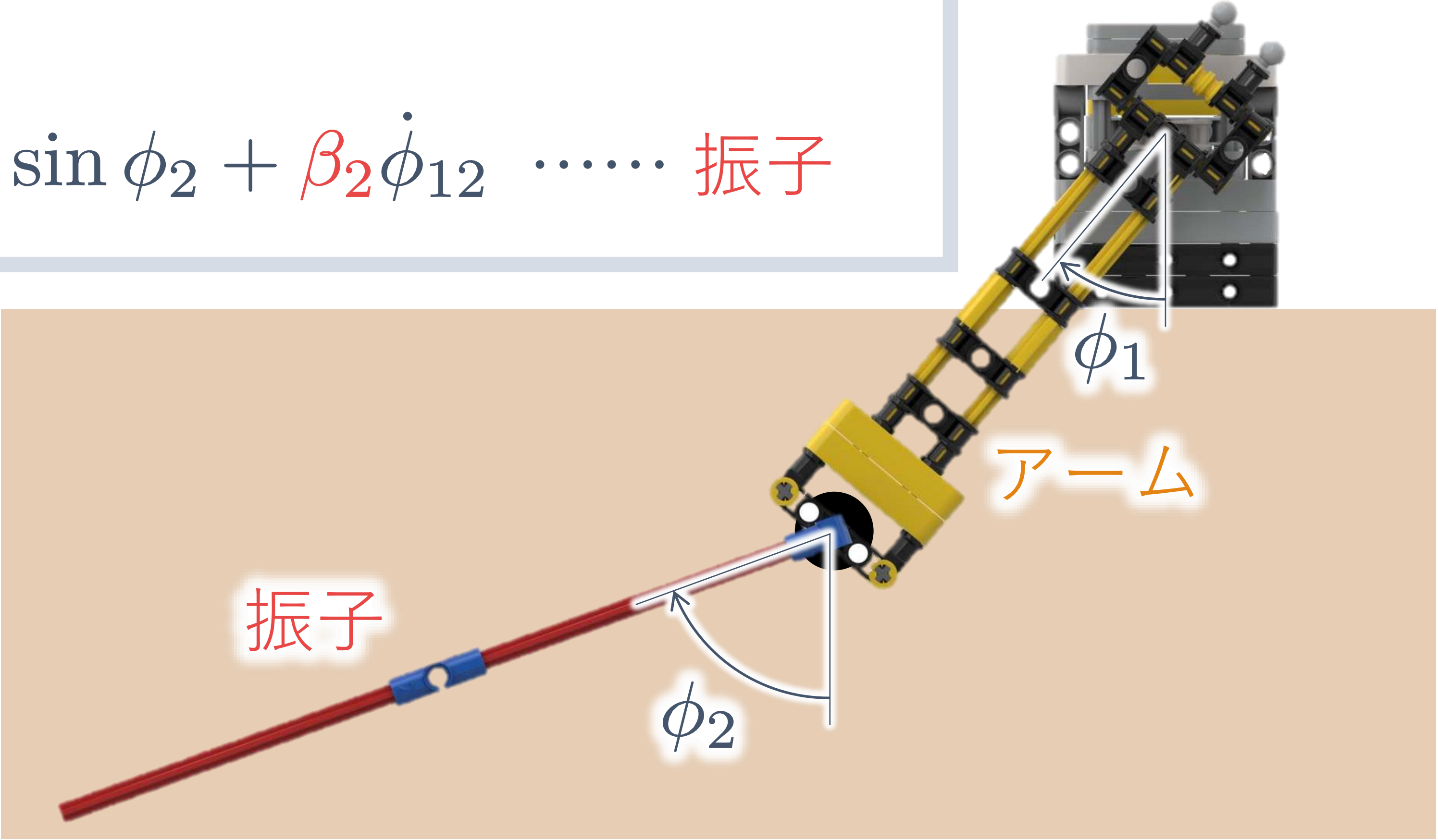
$$L_1\cos\phi_{12}\cdot\ddot{\phi}_1 + \alpha_2\ddot{\phi}_2 = L_1\dot{\phi}_1^2\sin\phi_{12} - g\sin\phi_2 + \beta_2\dot{\phi}_{12} \quad \cdots\cdots \text{振子}$$

$$\phi_{12} = \phi_1 - \phi_2$$

アーム（未知）
$\left\{\begin{array}{l}\alpha_1\\ \beta_1\\ \gamma_1\end{array}\right.$

振子（未知）
$\left\{\begin{array}{l}\alpha_2\\ \beta_2\end{array}\right.$

振子（既知）
$\left\{\begin{array}{l}L_1\\ g\end{array}\right.$



アーム型 LEGO クレーンの振れ止め制御

- 非線形モデル
- **振子のパラメータ同定**
  - 1 自由度振動系の特性に基づくパラメータ同定
  - 最小 2 乗法に基づくパラメータ同定
- 状態フィードバックによる振れ止め制御
  - 設計モデル
  - 極配置法
  - 最適レギュレータ

▶ 振子のパラメータ同定

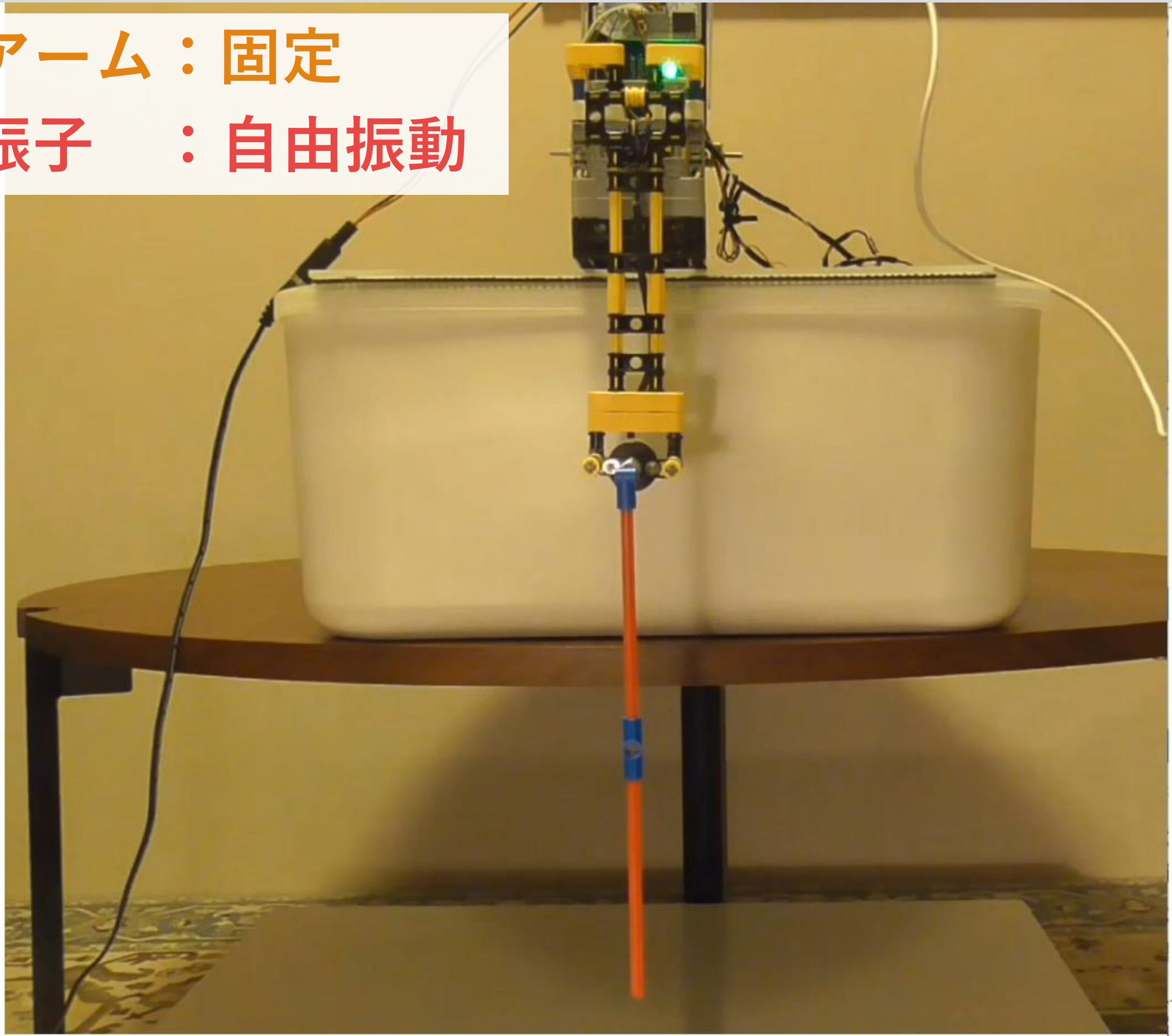
アーム：固定
振子　：自由振動

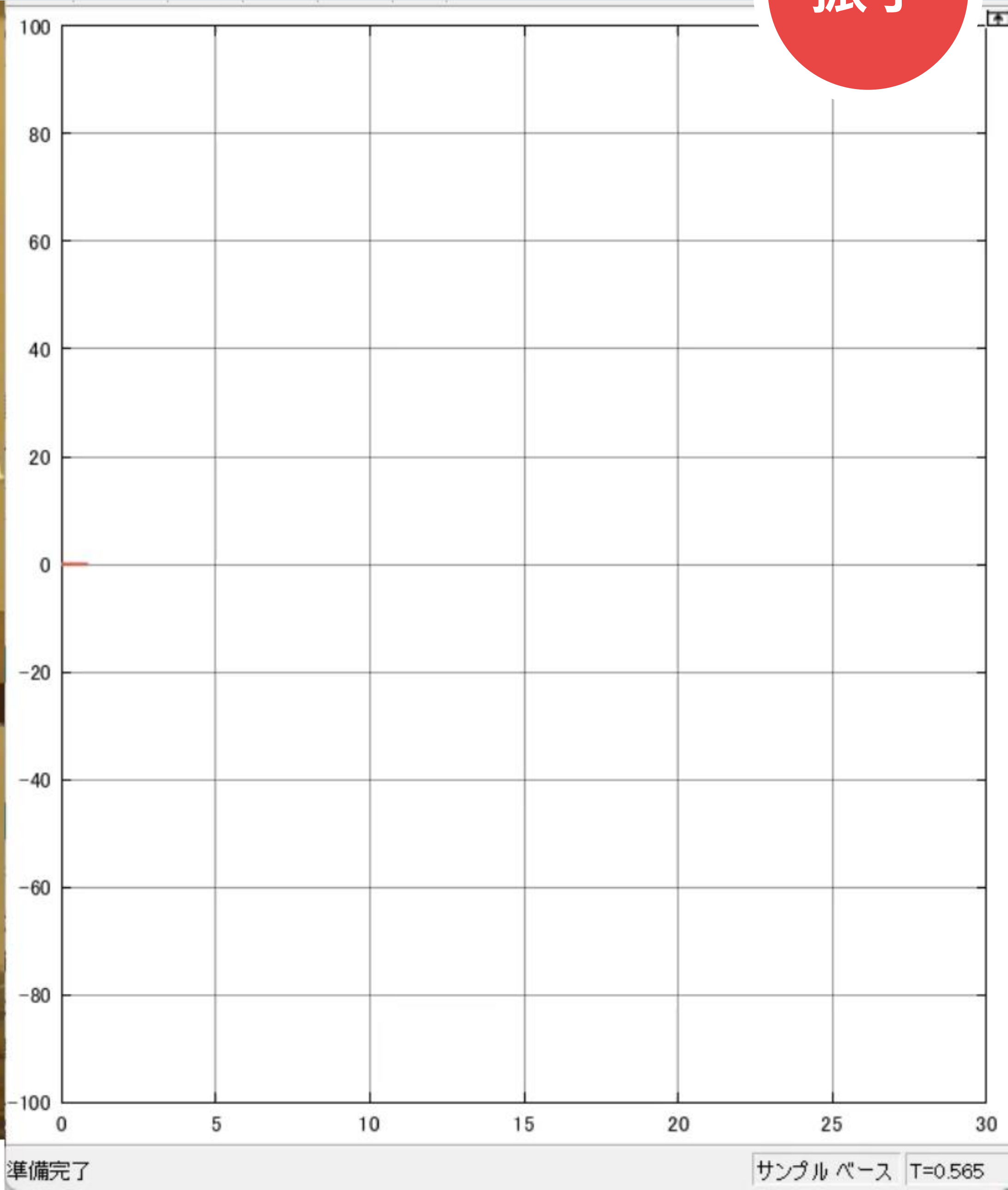
LEGO 部品で簡単に
アームを固定可能！

▶ 振子のパラメータ同定

振子

アーム：固定
振子　：自由振動





アーム型 LEGO クレーンの振れ止め制御

- 非線形モデル
- 振子のパラメータ同定
  - 1 自由度振動系の特性に基づくパラメータ同定
  - 最小 2 乗法に基づくパラメータ同定
- 状態フィードバックによる振れ止め制御
  - 設計モデル
  - 極配置法
  - 最適レギュレータ

1 自由度振動系の自由振動

● 1 自由度振動系の特性に基づくパラメータ同定

振子の非線形モデル

$$L_1 \cos\phi_{12} \cdot \ddot{\phi}_1 + \alpha_2 \ddot{\phi}_2 = L_1 \dot{\phi}_1^2 \sin\phi_{12} - g \sin\phi_2 + \beta_2(\dot{\phi}_1 - \dot{\phi}_2)$$

$\dot{\phi}_1 = \ddot{\phi}_1 = 0$ …… アーム：固定

$$\alpha_2 \ddot{\phi}_2 + \beta_2 \dot{\phi}_2 + g \sin\phi_2 = 0$$

$\sin\phi_2 \simeq \phi_2 \ (\phi_2 \simeq 0)$ …… 近似線形化（振子：真下近傍）

$$\ddot{\phi}_2 + 2\zeta_2 \omega_{n2} \dot{\phi}_2 + \omega_{n2}^2 \phi_2 = 0$$

…… 線形 1 自由度振動系

● 1 自由度振動系の特性に基づくパラメータ同定

振子のパラメータ同定

$$\left\{\begin{array}{l} T \\ \lambda \end{array}\right. \longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \omega_{\mathrm{n}2} \\ \zeta_2 \end{array}\right. \longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{array}\right.$$

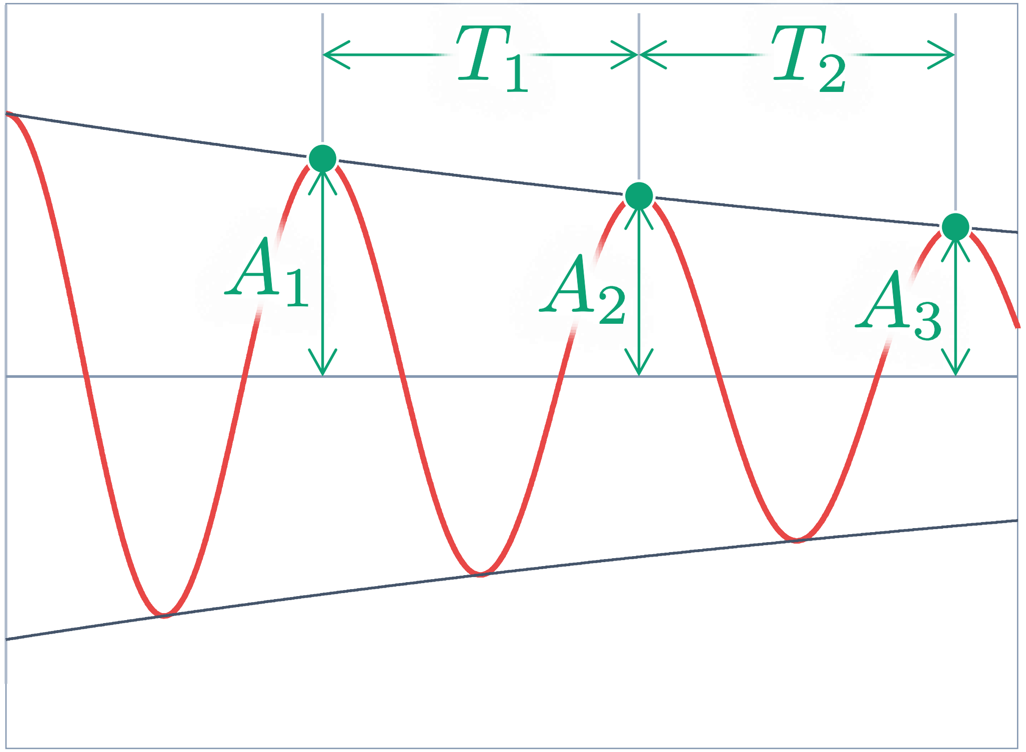
振動周期：一定

$$T = T_i \ (i = 1,\ 2,\ \ldots)$$

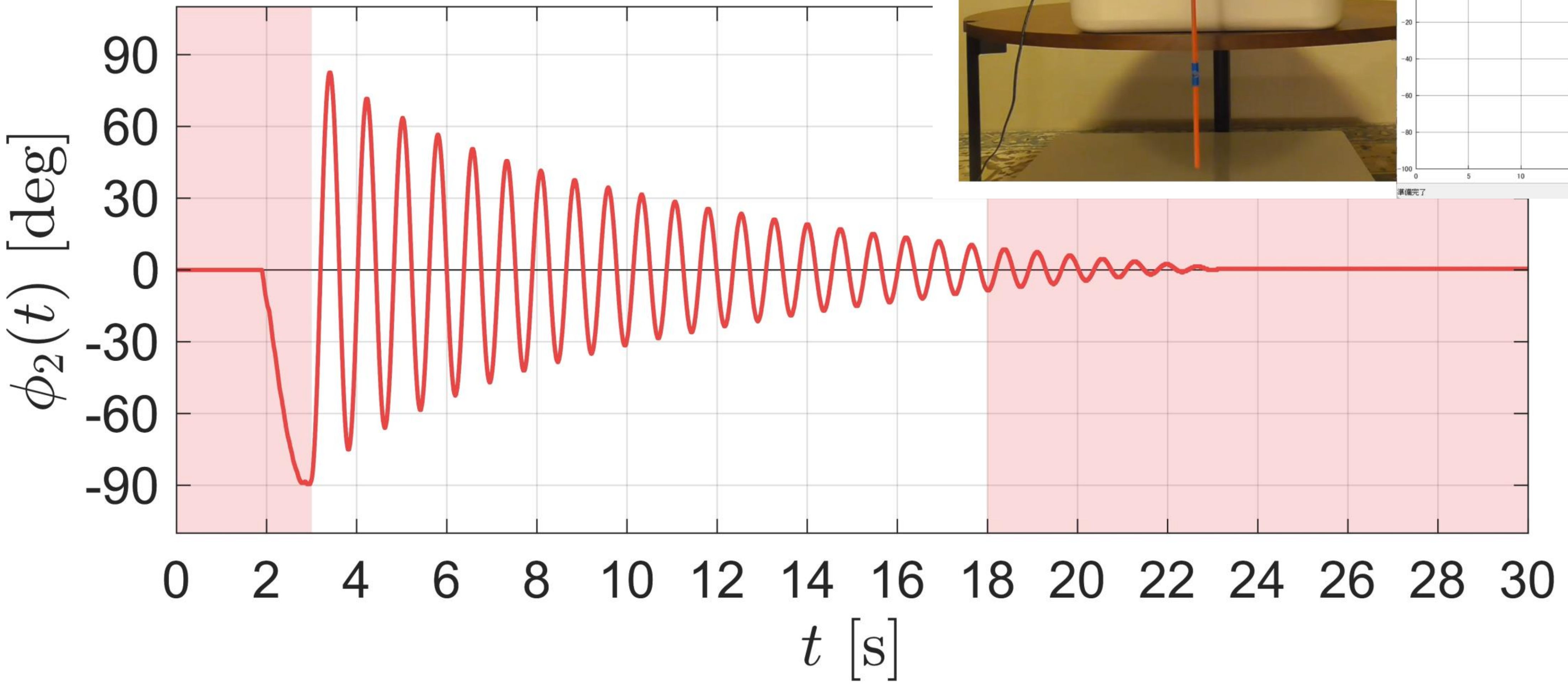
減衰率　：一定

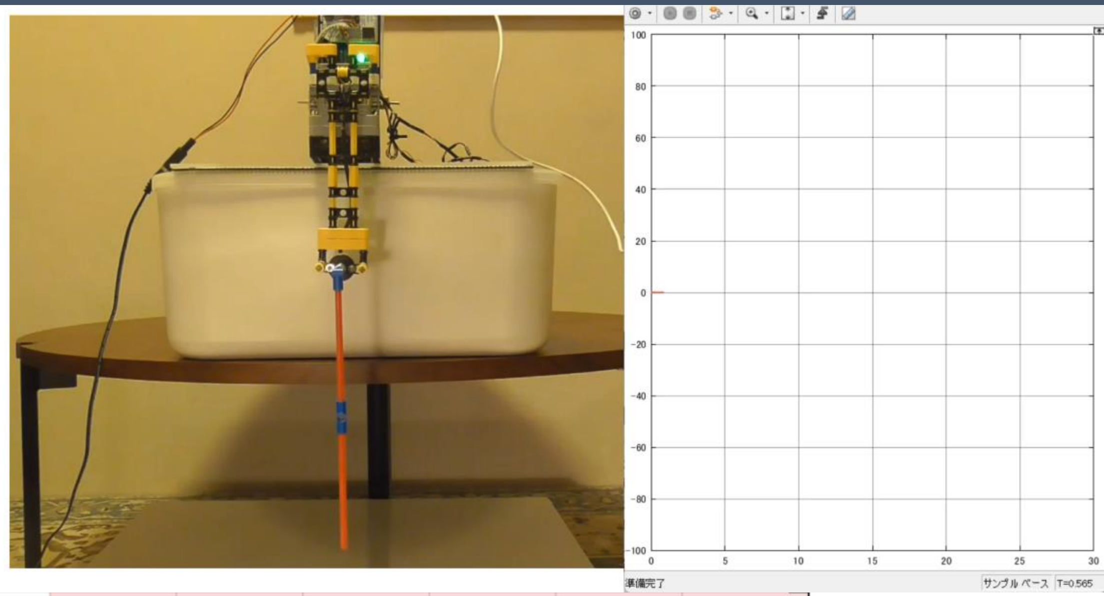
$$\lambda = \frac{A_{i+1}}{A_i} \ (i = 1,\ 2,\ \ldots)$$

1 自由度振動系の自由振動

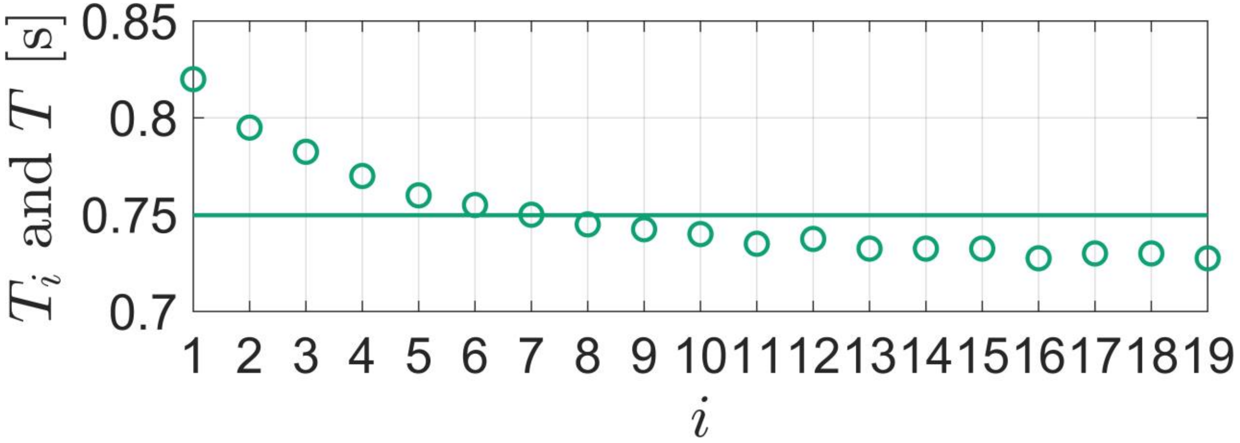


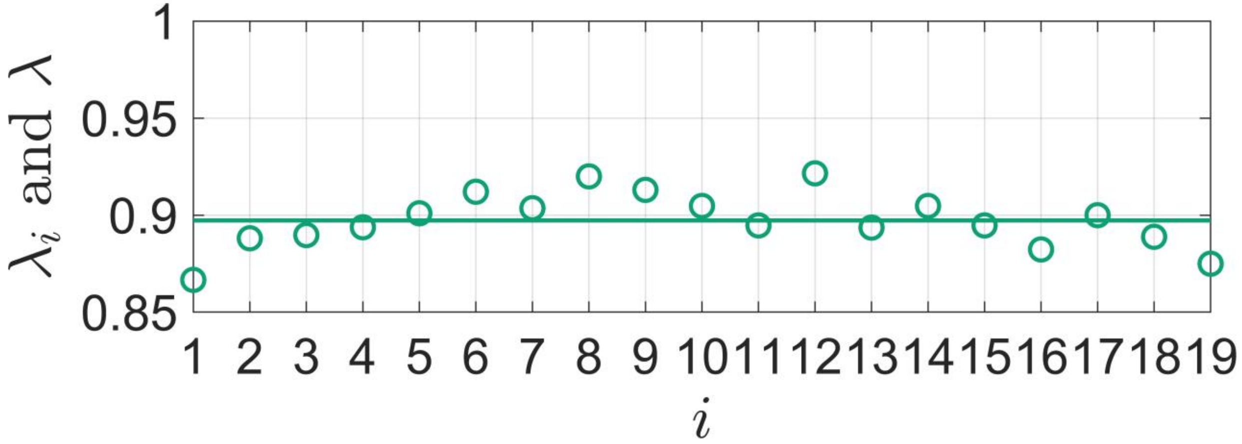
● 1 自由度振動系の特性に基づくパラメータ同定

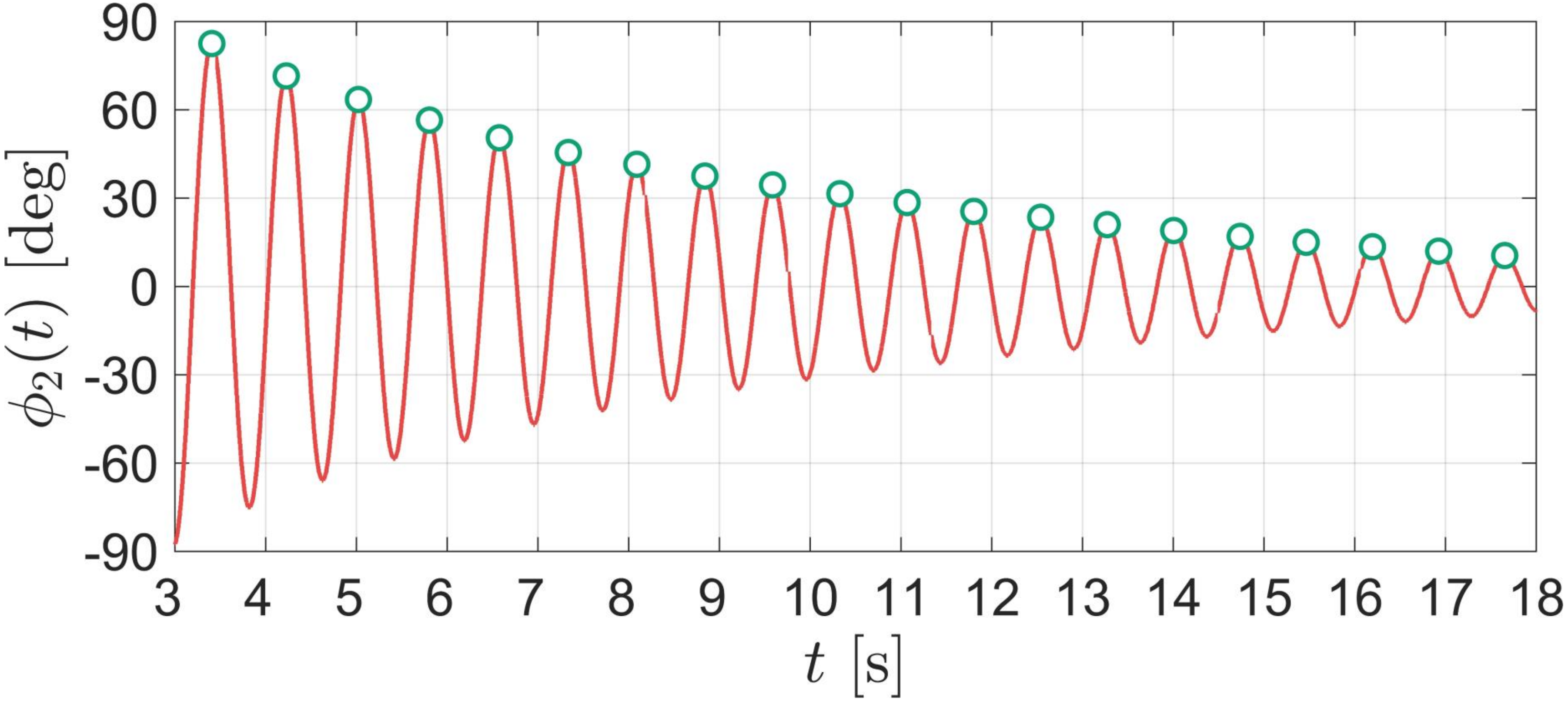




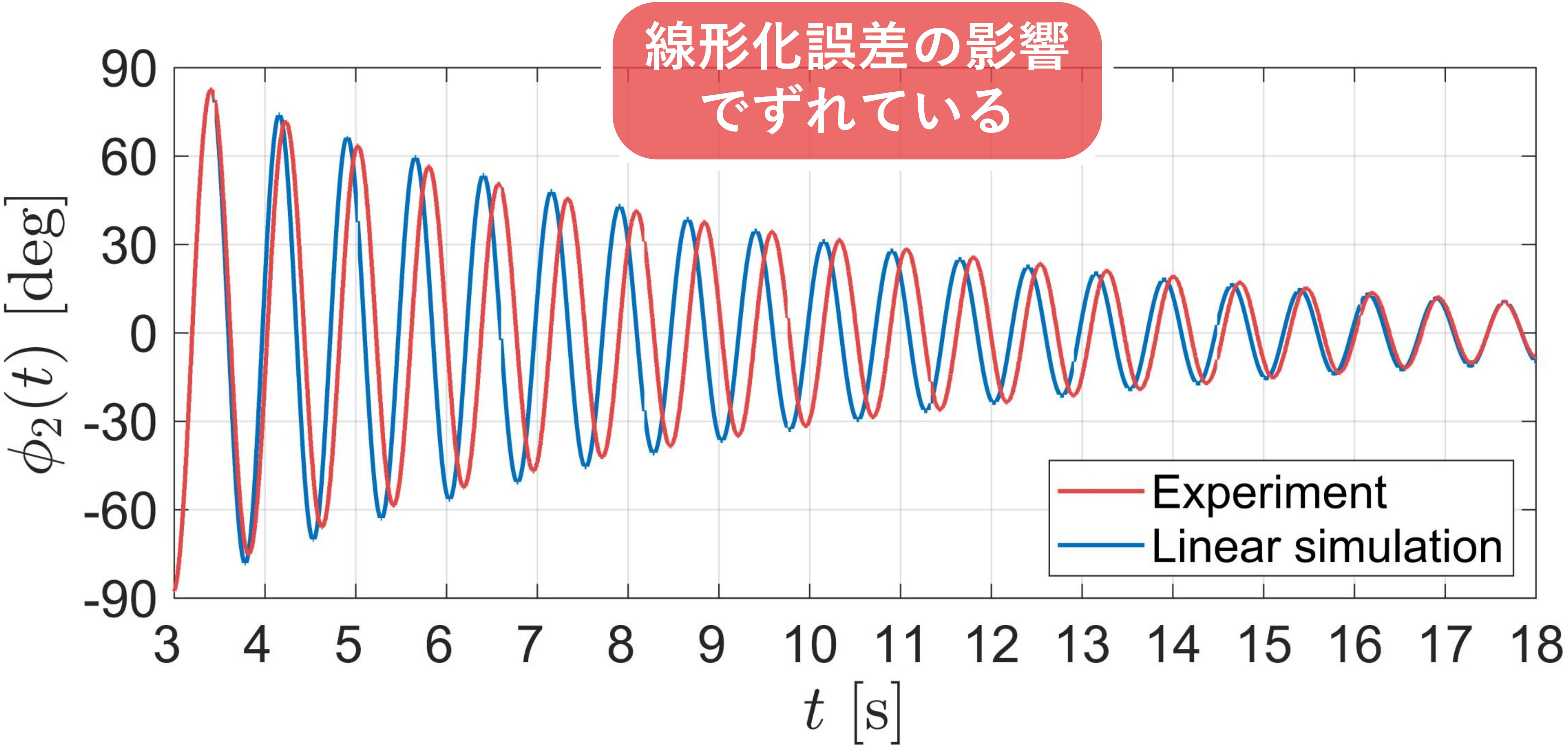
● 1 自由度振動系の特性に基づくパラメータ同定







● 1 自由度振動系の特性に基づくパラメータ同定



アーム型 LEGO クレーンの振れ止め制御

- ▶ 非線形モデル
- ▶ 振子のパラメータ同定
  - 1 自由度振動系の特性に基づくパラメータ同定
  - 最小 2 乗法に基づくパラメータ同定
- ▶ 状態フィードバックによる振れ止め制御
  - 設計モデル
  - 極配置法
  - 最適レギュレータ

最小 2 乗法

フィルタ処理

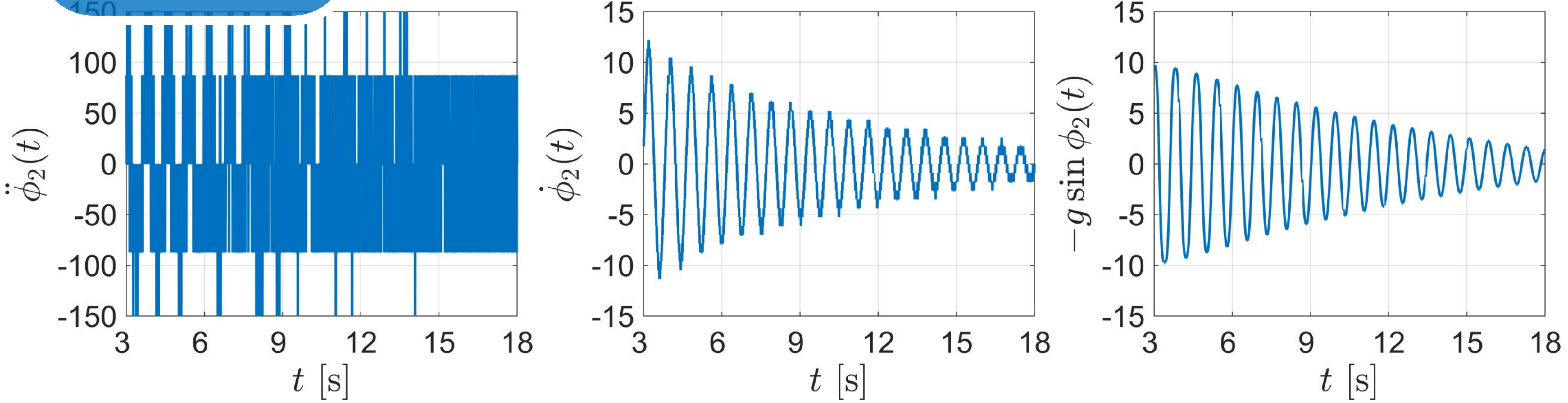
● 最小 2 乗法に基づくパラメータ同定

振子の非線形モデル（アーム：固定）

$$\alpha_2 \ddot{\phi}_2 + \beta_2 \dot{\phi}_2 + g \sin \phi_2(t) = 0$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} \ddot{\phi}_2(t) & \dot{\phi}_2(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = -g \sin \phi_2(t)$$

量子化誤差に起因する高周波成分



● 最小 2 乗法に基づくパラメータ同定

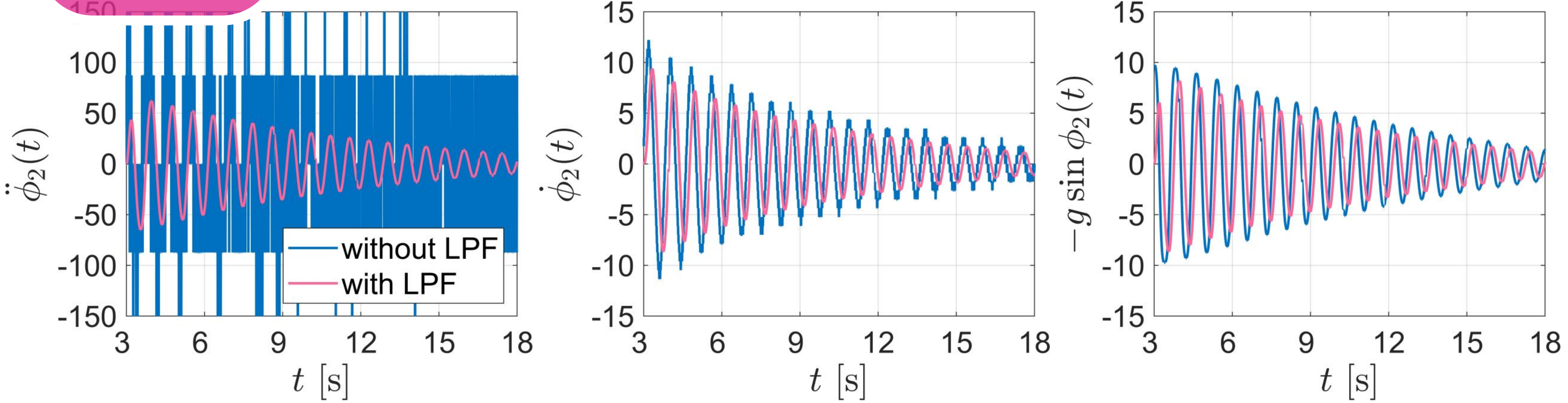
振子の非線形モデル（アーム：固定）

$$G_{\mathrm{f2}}(s) = \frac{1}{(1+T_{\mathrm{f2}}s)^3}$$

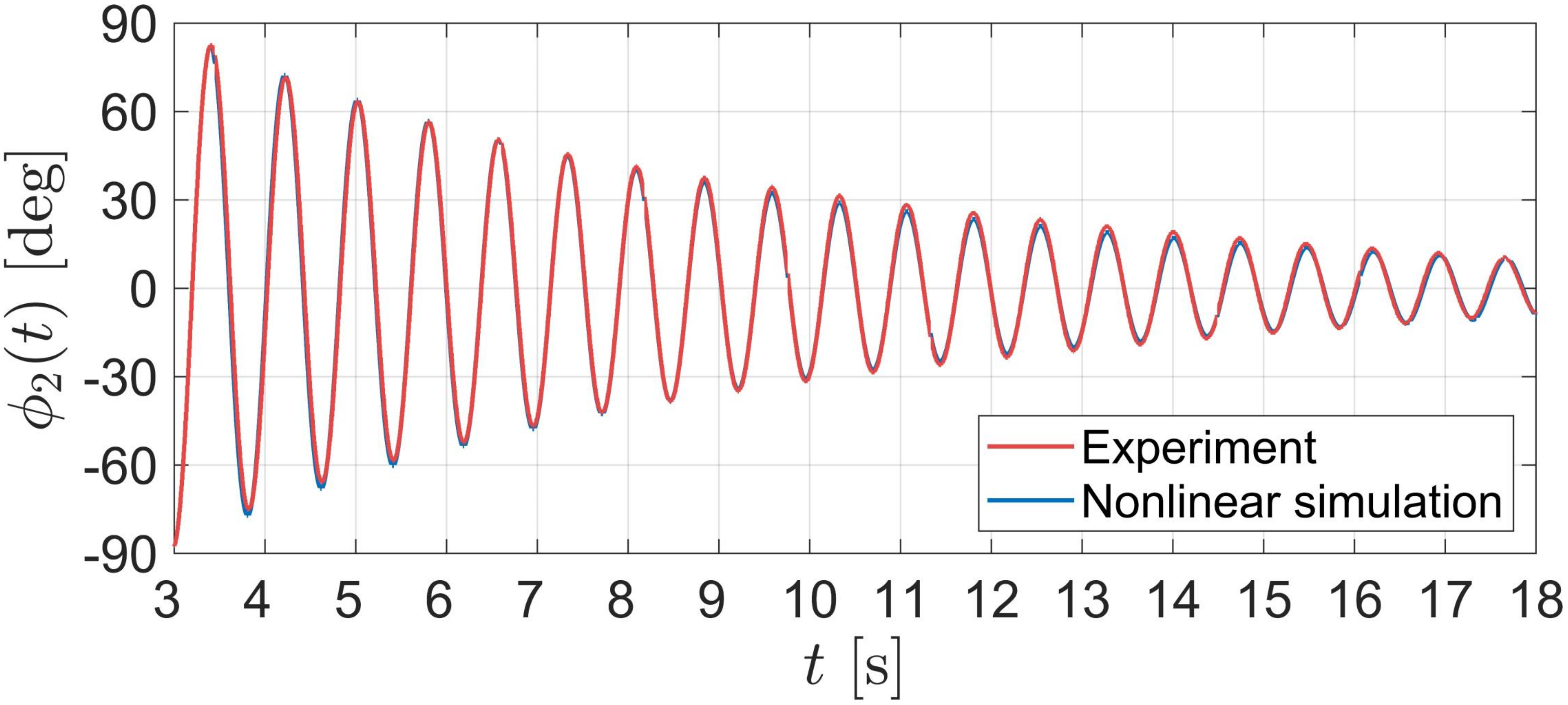
$$\alpha_2\ddot{\phi}_2 + \beta_2\dot{\phi}_2 + g\sin\phi_2(t) = 0$$

ローパスフィルタ

$$\rightarrow\quad G_{\mathrm{f2}}(s)\begin{bmatrix}\ddot{\phi}_2(t) & \dot{\phi}_2(t)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_2 \\ \beta_2\end{bmatrix} = G_{\mathrm{f2}}(s)(-g\sin\phi_2(t))$$



● 最小 2 乗法に基づくパラメータ同定



アーム型 LEGO クレーンの振れ止め制御

- 非線形モデル
- 振子のパラメータ同定
  - 1 自由度振動系の特性に基づくパラメータ同定
  - 最小 2 乗法に基づくパラメータ同定
- 状態フィードバックによる振れ止め制御
  - 設計モデル
  - 極配置法
  - 最適レギュレータ

● 設計モデル

非線形モデル

$$\alpha_1\ddot{\phi}_1 = -\beta_1\dot{\phi}_1 - \gamma_1\sin\phi_1 + v$$

$$L_1\cos\phi_{12}\cdot\ddot{\phi}_1 + \alpha_2\ddot{\phi}_2 = L_1\dot{\phi}_1^2\sin\phi_{12} - g\sin\phi_2 + \beta_2\dot{\phi}_{12}$$

$$\sin\phi_1 \simeq \phi_1 \qquad \cos\phi_{12} \simeq 1$$

$$\sin\phi_2 \simeq \phi_2 \qquad \dot{\phi}_1^2\sin\phi_{12} \simeq \dot{\phi}_1^2\phi_{12} \simeq 0$$

設計モデル (近似線形化モデル)

$$\alpha_1\ddot{\phi}_1 = -\beta_1\dot{\phi}_1 - \gamma_1\phi_1 + v$$

$$L_1\ddot{\phi}_1 + \alpha_2\ddot{\phi}_2 = -g\phi_2 + \beta_2(\dot{\phi}_1 - \dot{\phi}_2)$$

アーム：真下近傍
振　子：真下近傍
で近似線形化

● 設計モデル

設計モデル (近似線形化モデル)

$$\alpha_1 \ddot{\phi}_1 = -\beta_1 \dot{\phi}_1 - \gamma_1 \phi_1 + v$$

$$L_1 \ddot{\phi}_1 + \alpha_2 \ddot{\phi}_2 = -g\phi_2 + \beta_2(\dot{\phi}_1 - \dot{\phi}_2)$$

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \dot{\phi}_1 \\ \phi_2 \\ \dot{\phi}_2 \end{bmatrix}, \quad u = v$$

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}u$$

アーム型 LEGO クレーンの振れ止め制御

- 非線形モデル
- 振子のパラメータ同定
  - 1 自由度振動系の特性に基づくパラメータ同定
  - 最小 2 乗法に基づくパラメータ同定
- **状態フィードバックによる振れ止め制御**
  - 設計モデル
  - **極配置法**
  - 最適レギュレータ

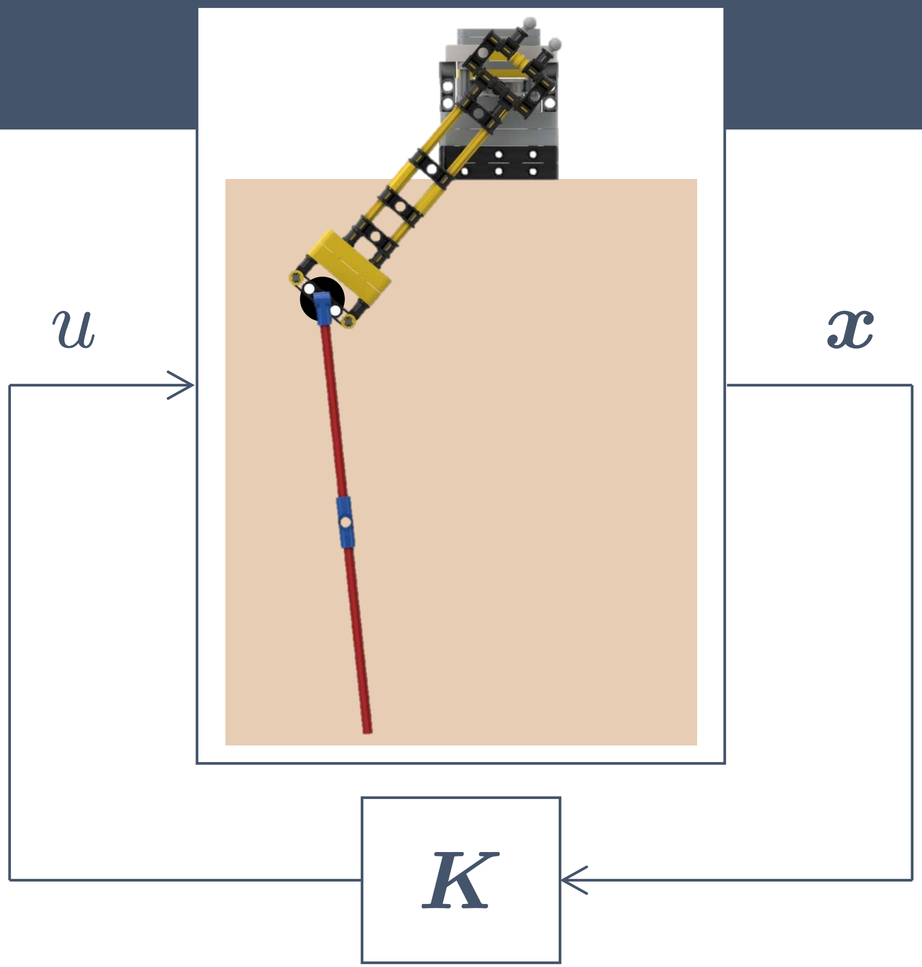
● 極配置法

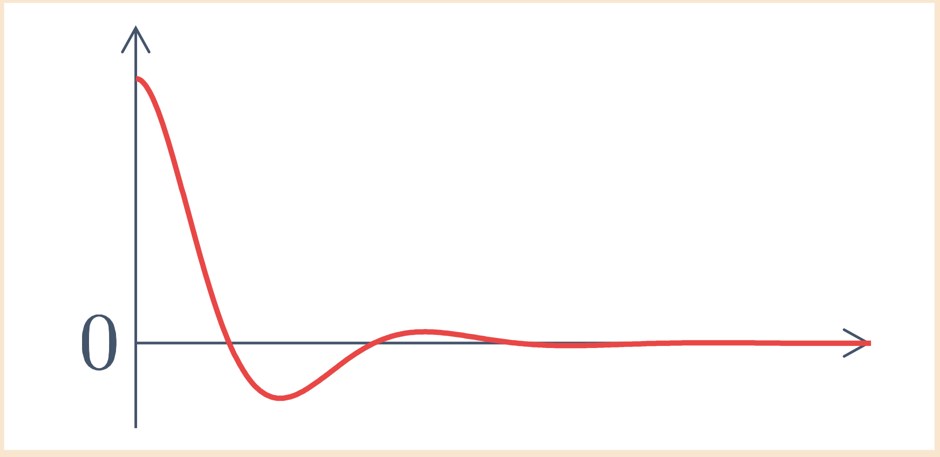
アーム型 LEGO クレーン

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

状態フィードバック形式のコントローラ

$$u = Kx$$





$t \to \infty$ で $x \to 0$ に制御！

レギュレータ制御

● 極配置法

アーム型 LEGO クレーン

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}u$$

状態フィードバック形式のコントローラ

$$u = \boldsymbol{K}\boldsymbol{x}$$

システム全体

$$\dot{\boldsymbol{x}} = (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{K})\boldsymbol{x}$$

$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{K}$ の**固有値 (極)**

$\alpha \pm \beta j$

が**指定した値**となるように

$\boldsymbol{K}$ を**設計！**

- 極の実部 α：収束性
- 極の虚部 β：振動周期

● 極配置法：初期値応答のシミュレーション結果

①：$-2 \pm 8j$（重解）
②：$-4 \pm 8j$（重解）
③：$-8 \pm 8j$（重解）

実部の値を**変化**

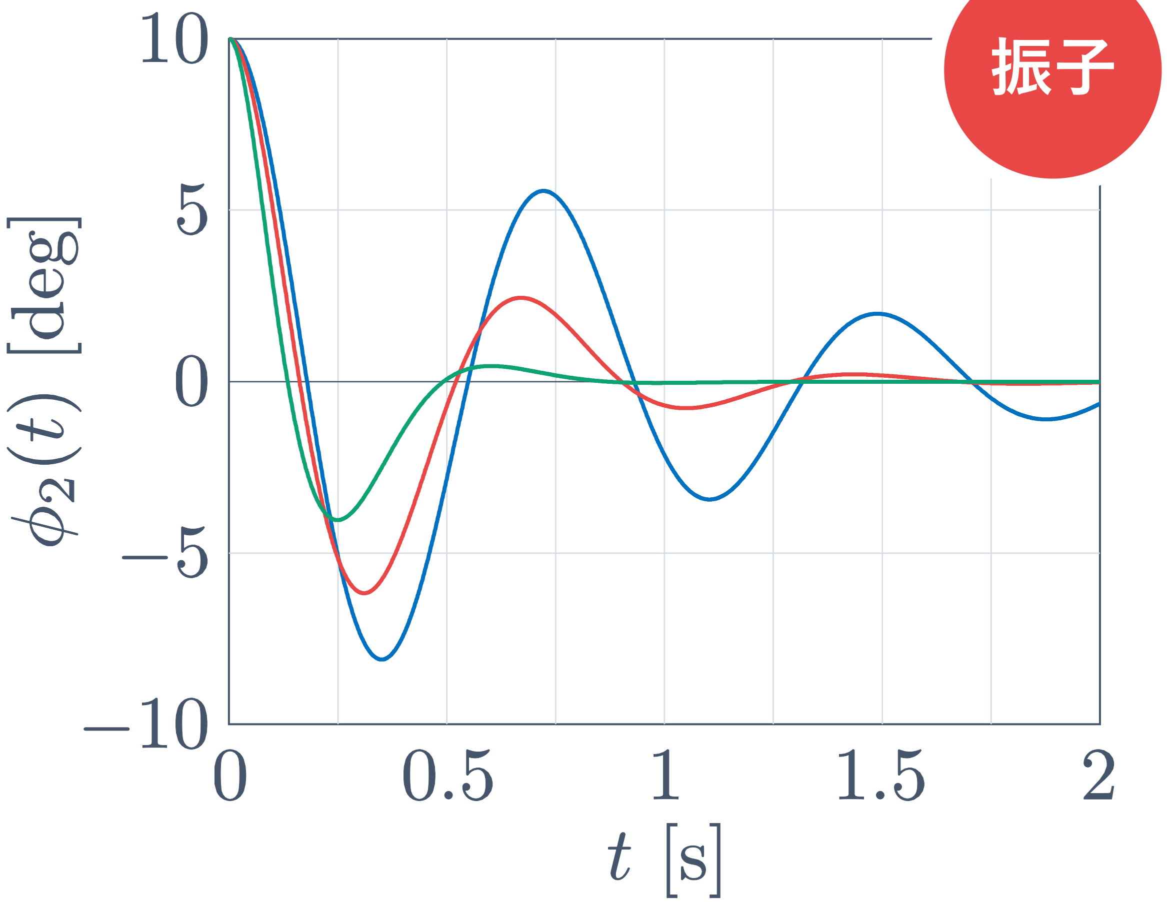
↓

負側に大きいほど
速く収束

虚部の値は**同じ**

↓

振動周期は
ほぼ**同じ**



● 極配置法：初期値応答のシミュレーション結果

①：$-2 \pm 0j$（重解）
②：$-4 \pm 0j$（重解）
③：$-8 \pm 0j$（重解）

実部の値を**変化**

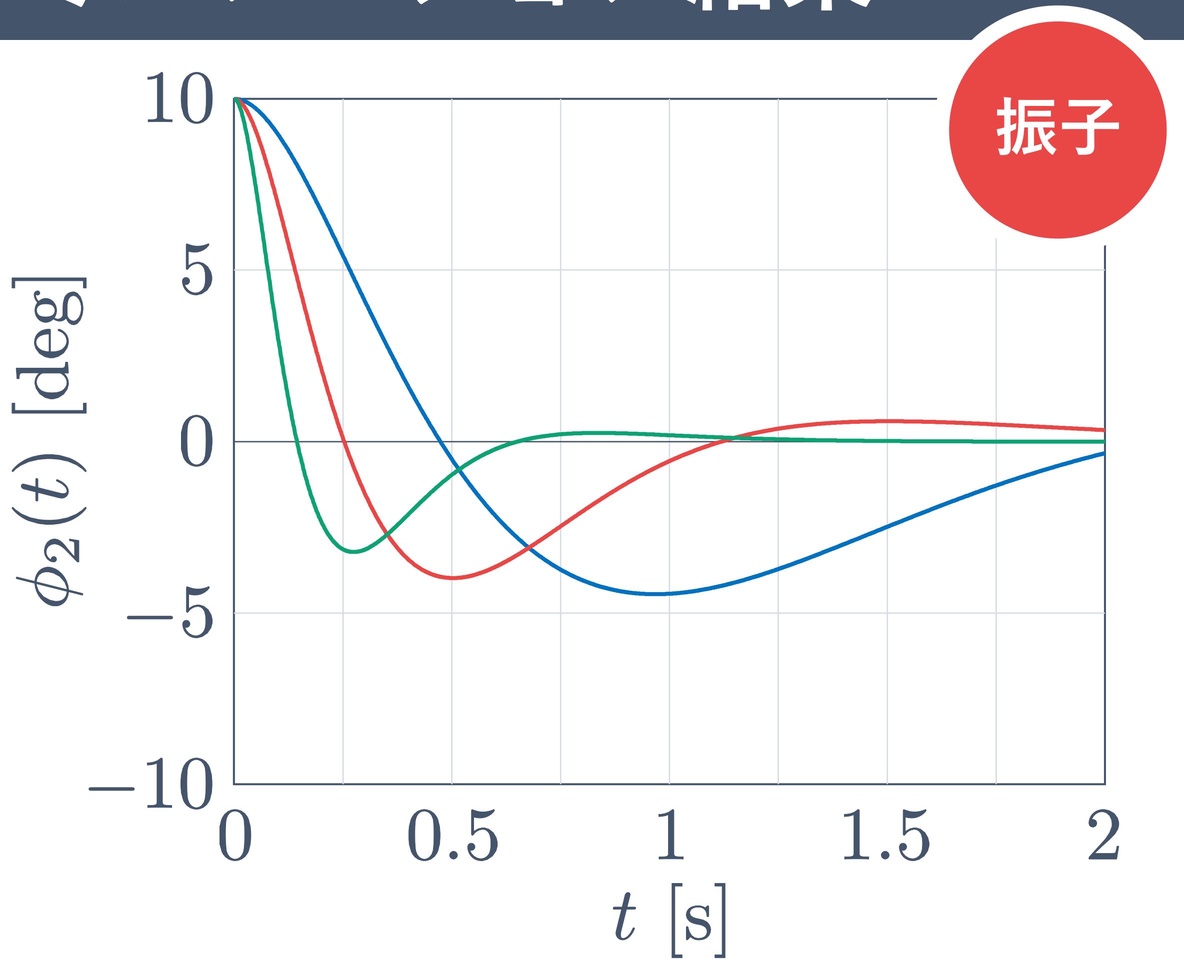
↓

負側に大きいほど
速く収束

虚部の値を **0**

↓

周期的な
振動を抑制



● 極配置法：初期値応答のシミュレーション結果

①：$-4 \pm 0j$ （重解）

②：$-4 \pm 4j$ （重解）

③：$-4 \pm 8j$ （重解）

実部の値は**同じ**

↓

収束の速さは

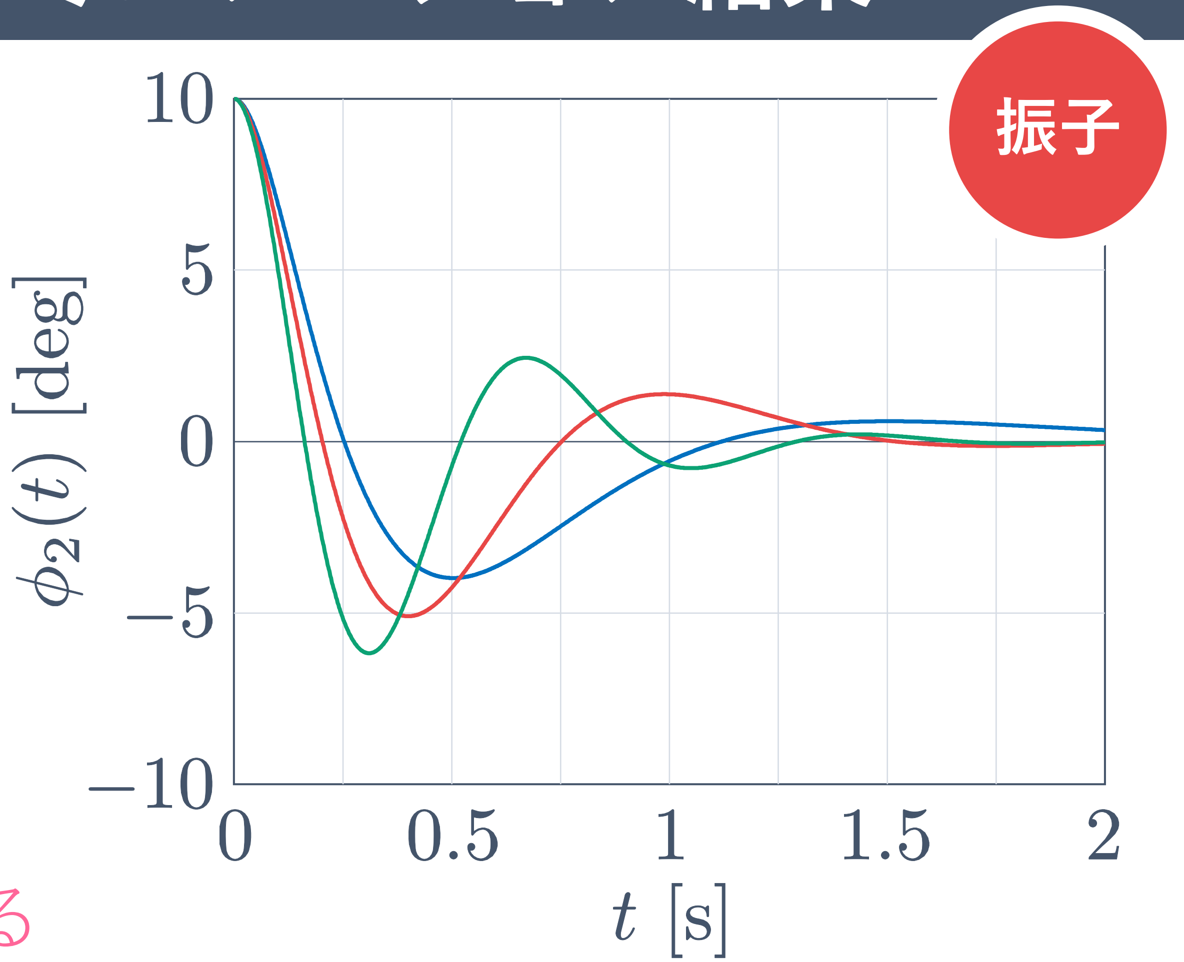
ほぼ**同じ**

虚部の値を**変化**

↓

大きいほど

振動周期が**短く**なる

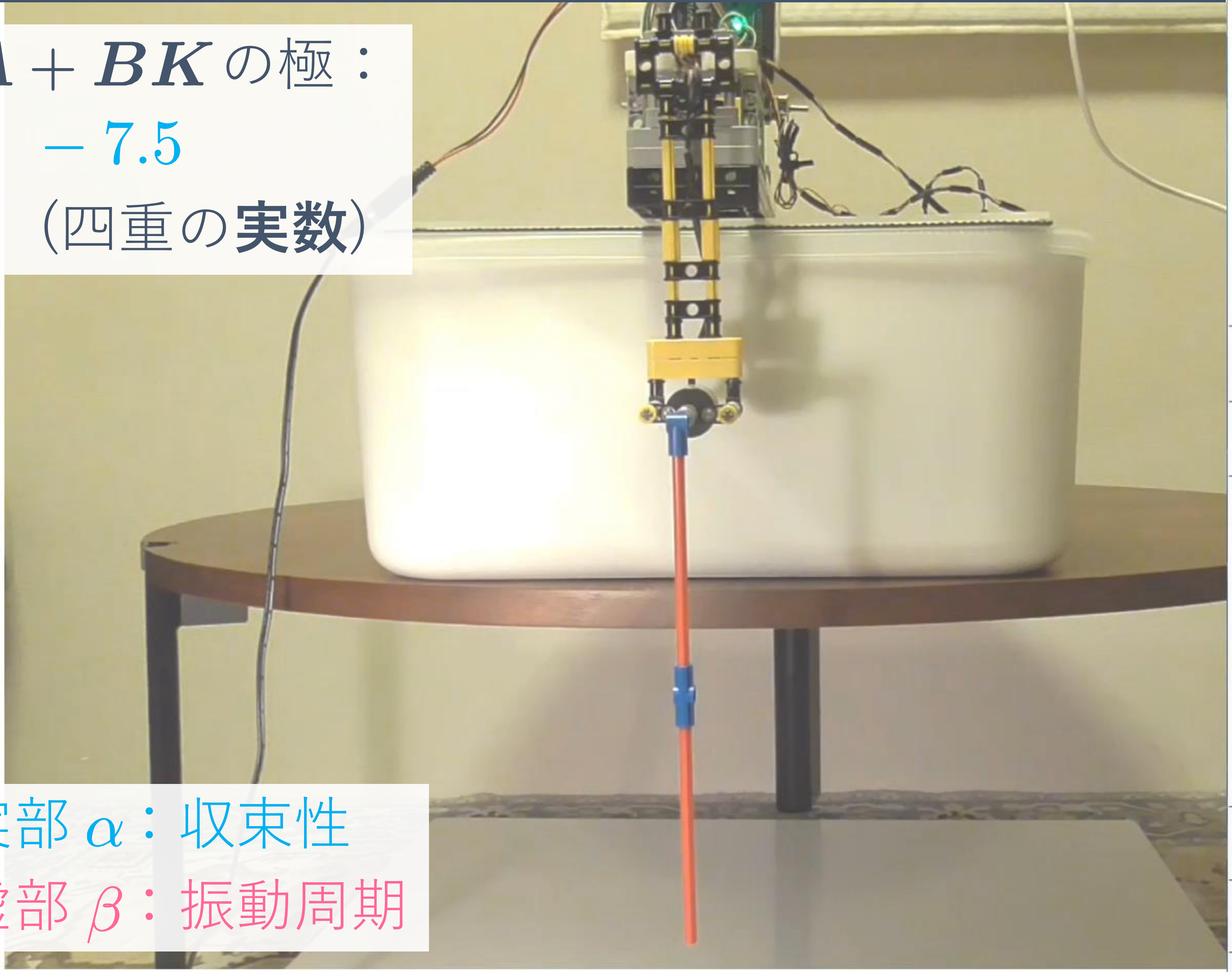


● 極配置法：実験結果

$A+BK$ の極：

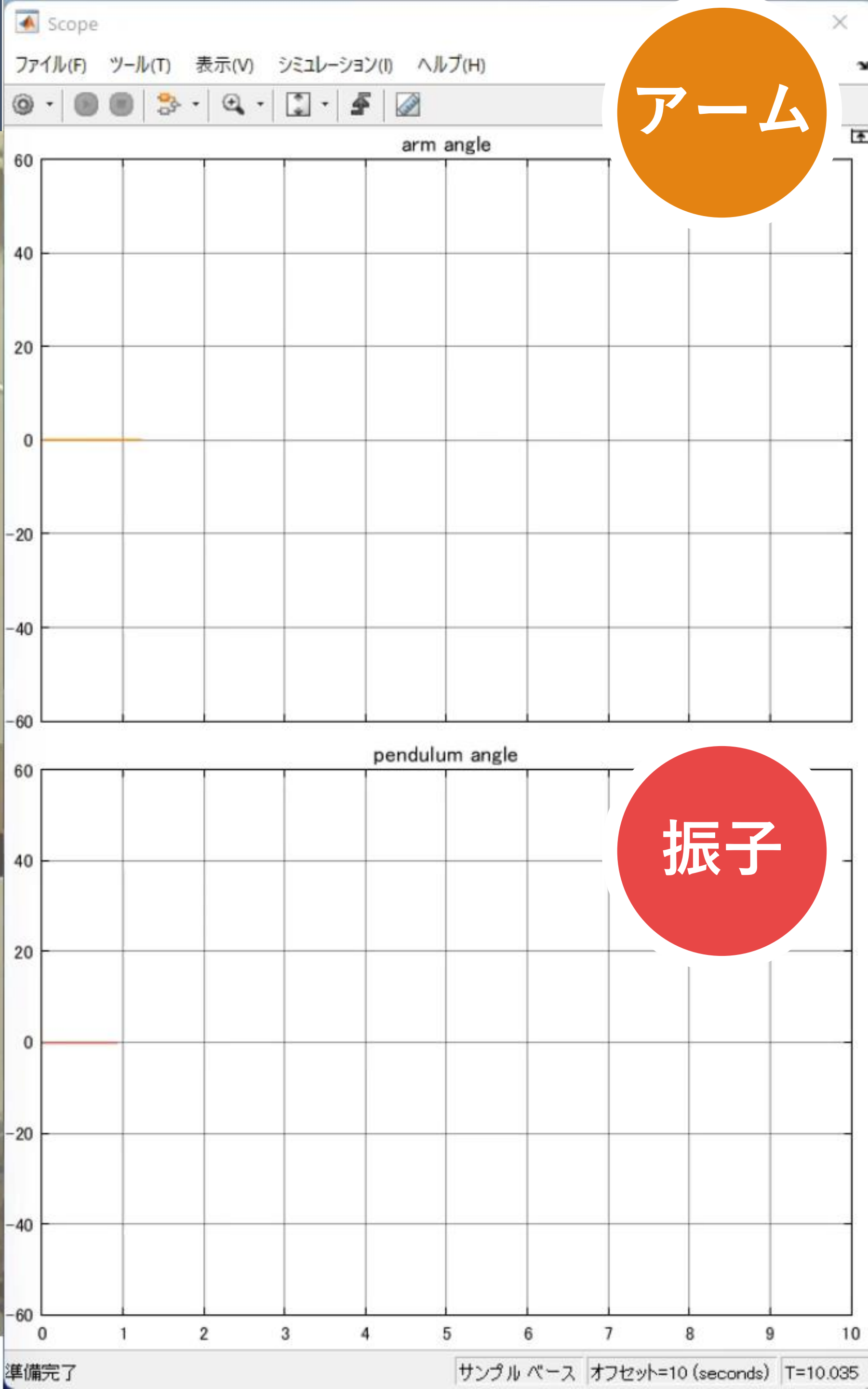
-7.5

(四重の**実数**)



実部 α：収束性

虚部 β：振動周期

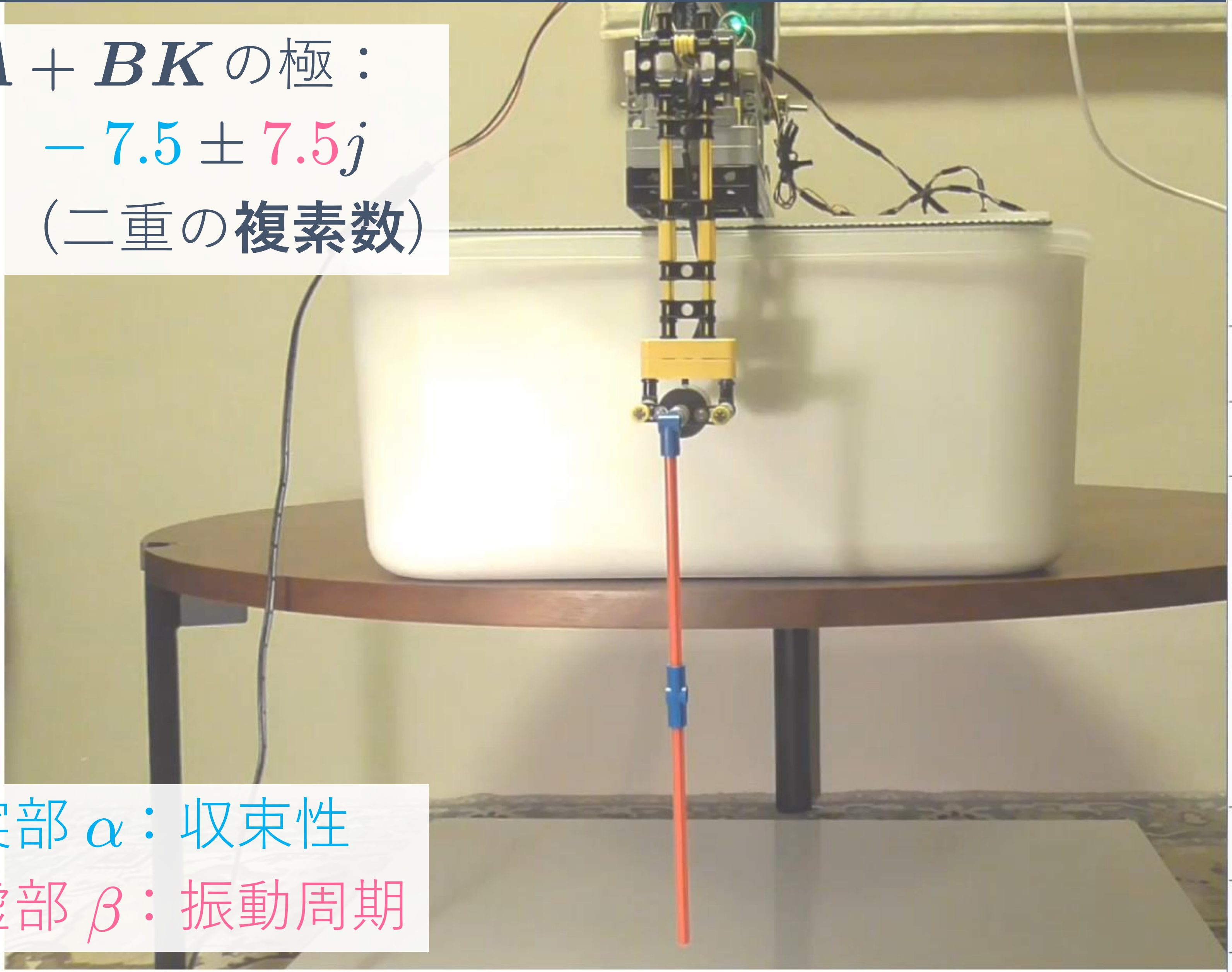


● 極配置法：実験結果

$A+BK$ の極：

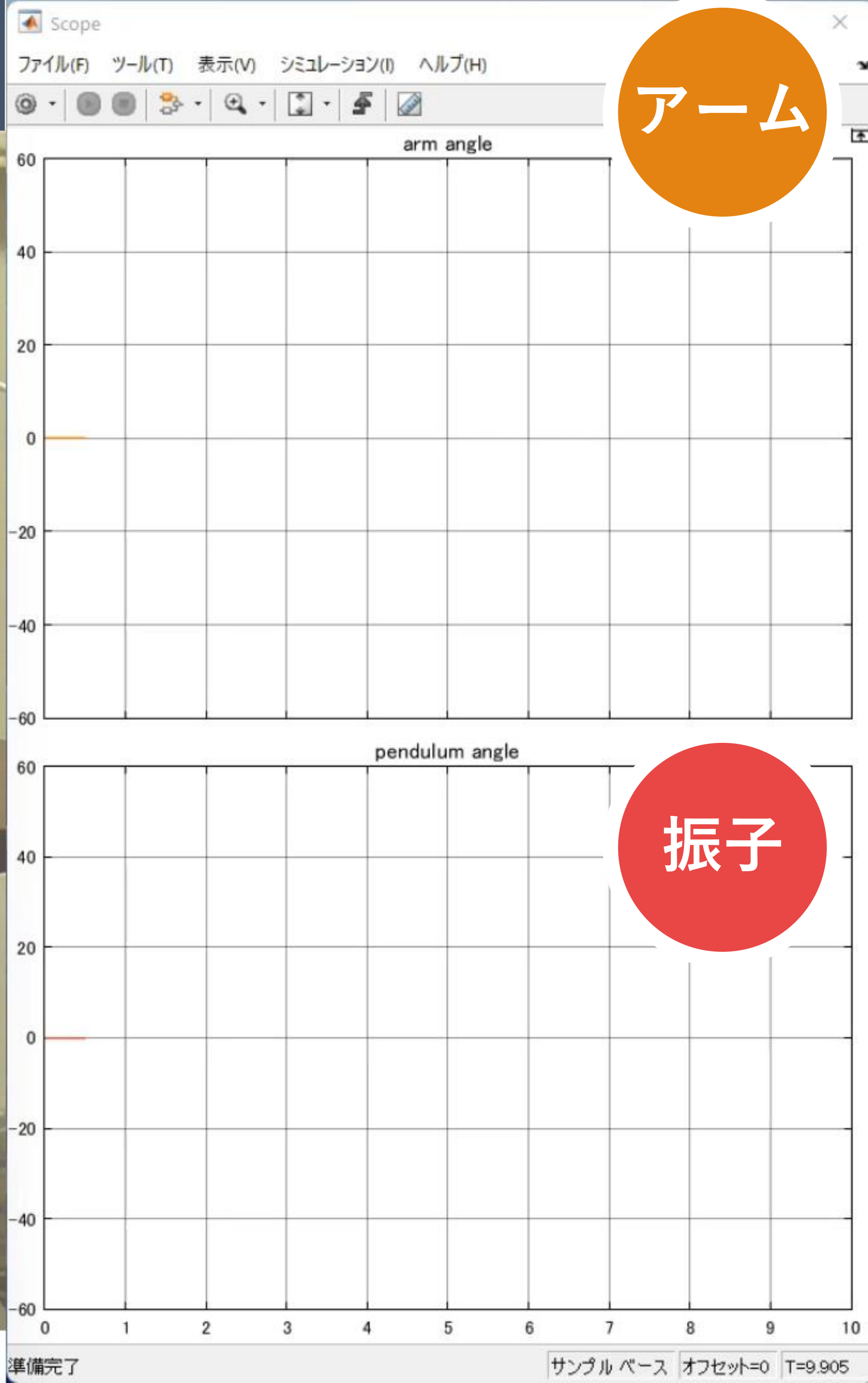
$-7.5 \pm 7.5j$

(二重の**複素数**)



実部 α：収束性

虚部 β：振動周期



アーム型 LEGO クレーンの振れ止め制御

- 非線形モデル
- 振子のパラメータ同定
  - 1 自由度振動系の特性に基づくパラメータ同定
  - 最小 2 乗法に基づくパラメータ同定
- 状態フィードバックによる振れ止め制御
  - 設計モデル
  - 極配置法
  - 最適レギュレータ

● 極配置法の問題点

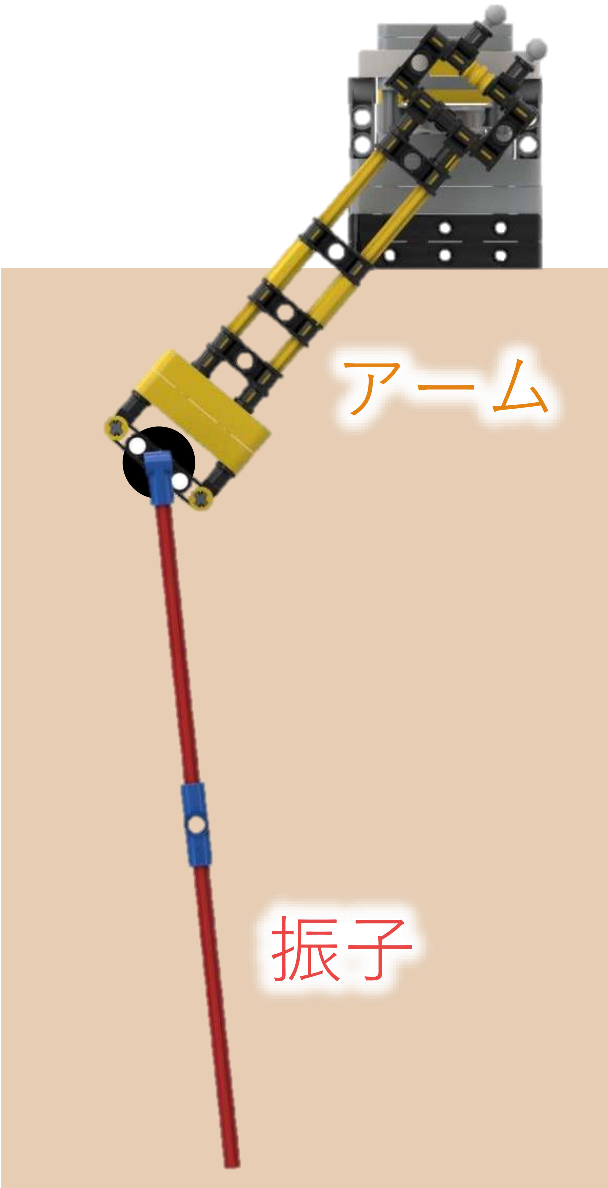
アーム角
振子角
} それぞれの収束性

↕ 関係が不明瞭

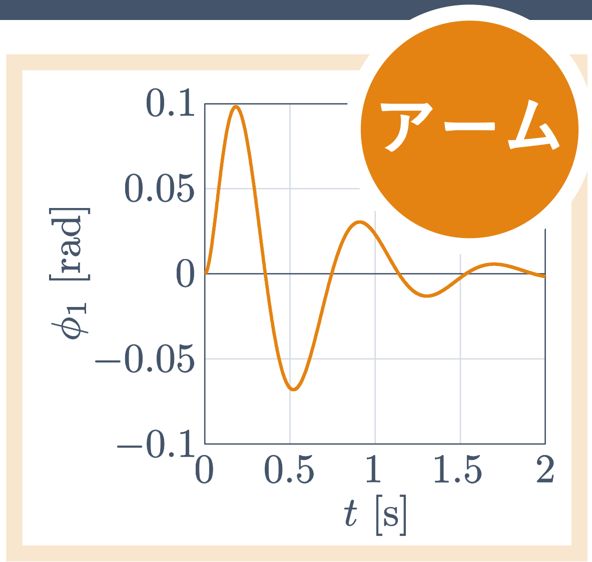
指定する**極の位置**

そこで、

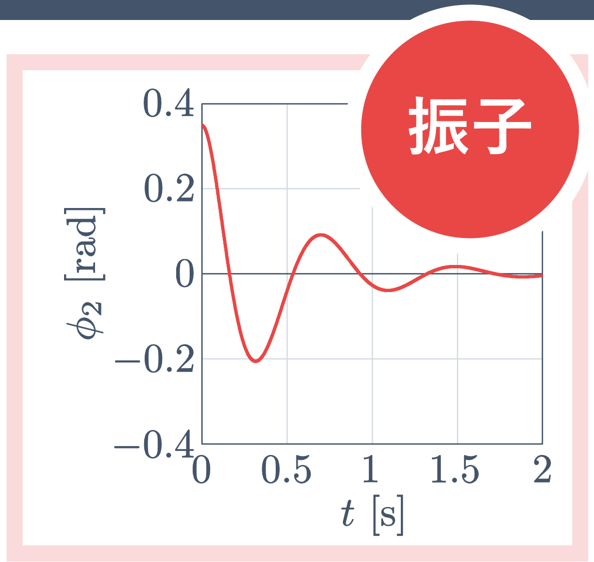
最適レギュレータにより**制御！**



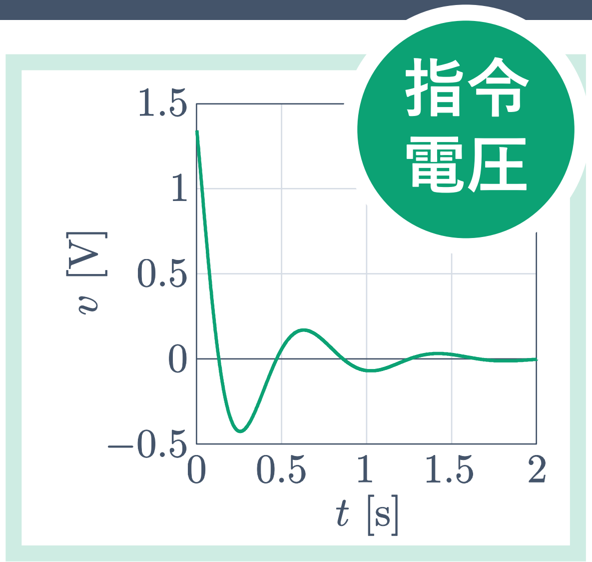
● 最適レギュレータ



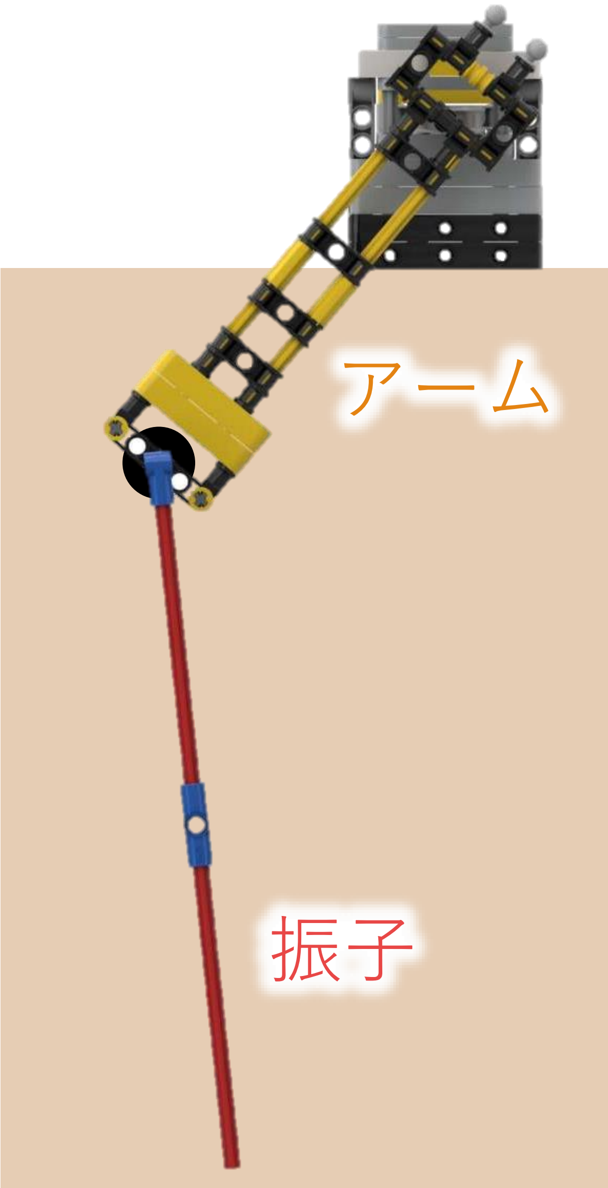
速く収束
させたい！



速く収束
させたい！

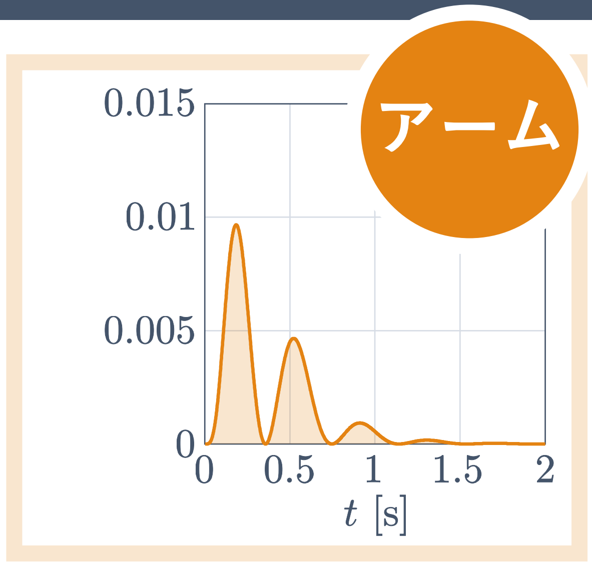


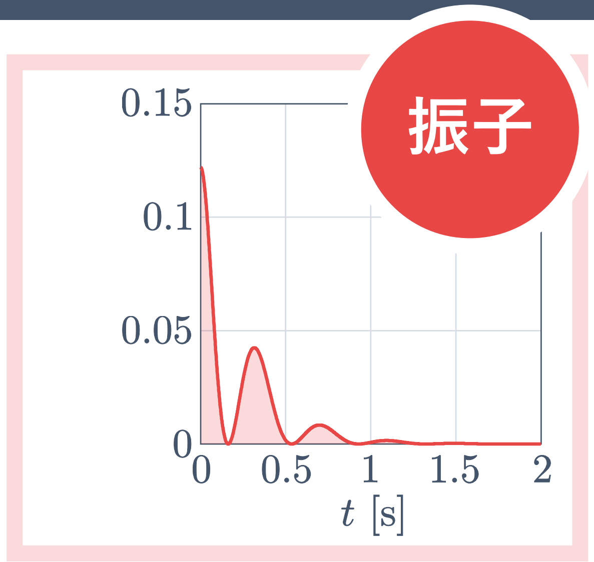
大きさを抑制
したい！

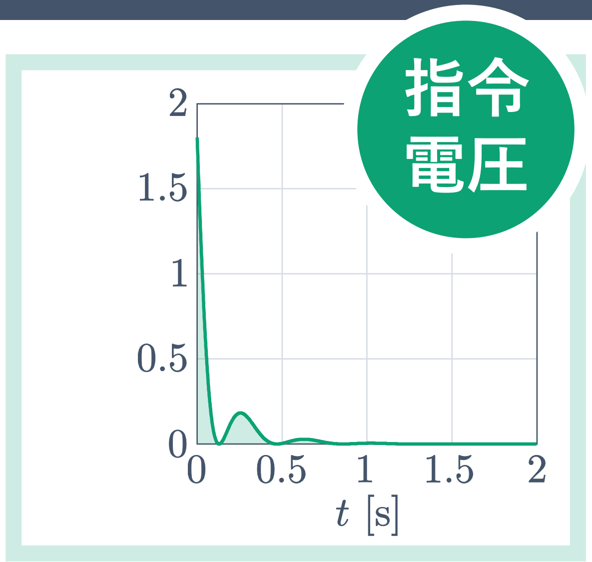


これらの要求を
定量的に評価するために …

● 最適レギュレータ







2 乗積分

$$\int_0^\infty \phi_1^2 \, \mathrm{d}t$$

を**小さく**する！

2 乗積分

$$\int_0^\infty \phi_2^2 \, \mathrm{d}t$$

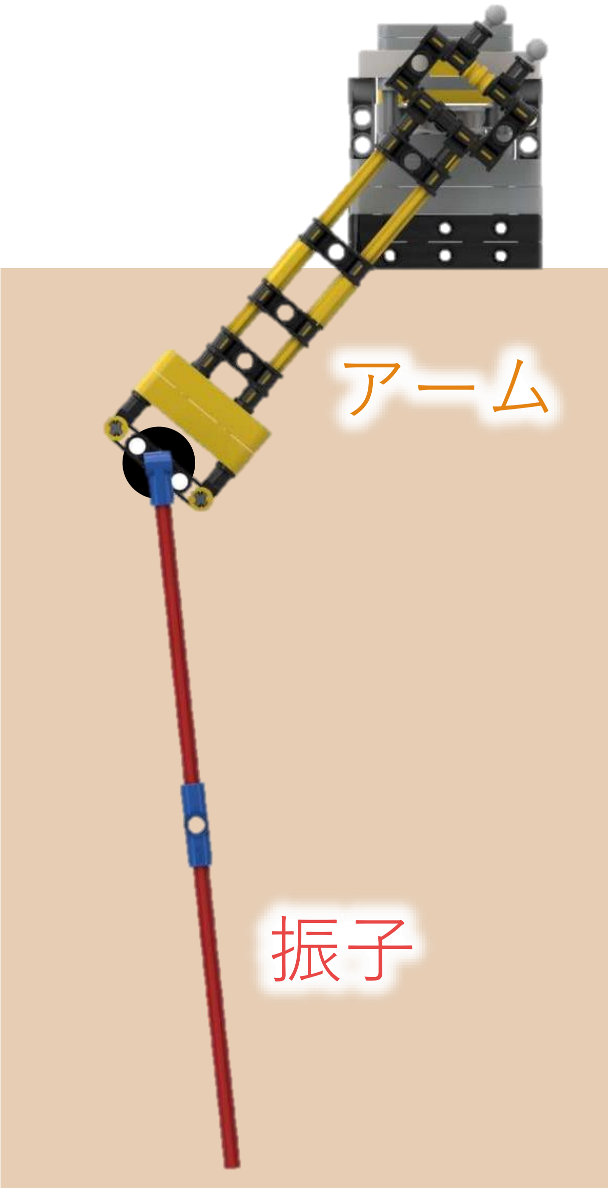
を**小さく**する！

2 乗積分

$$\int_0^\infty v^2 \, \mathrm{d}t$$

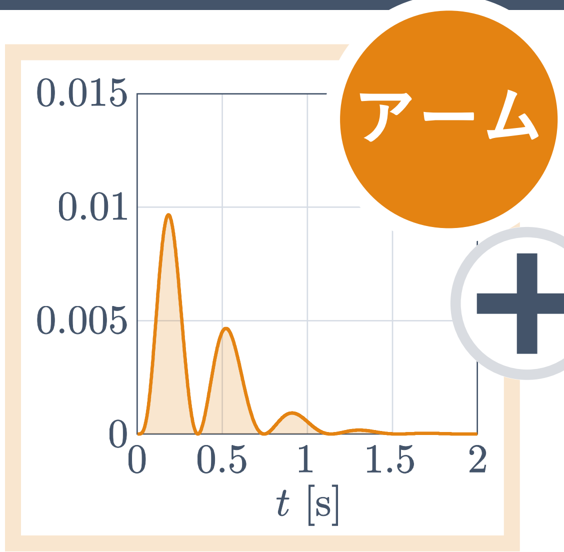
を**小さく**する！

これらの**重要度**を**反映**させるために …

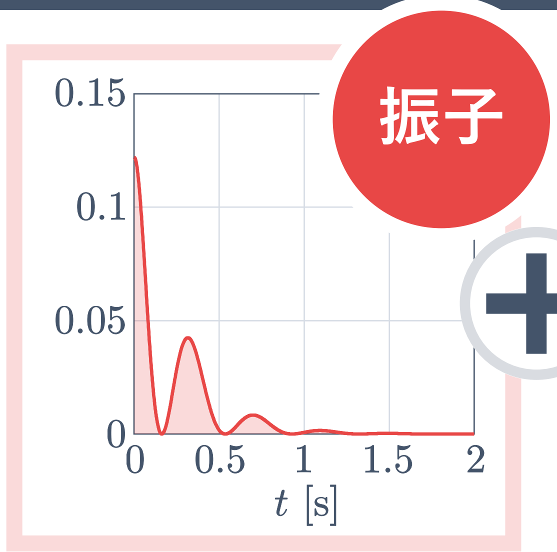


● 最適レギュレータ

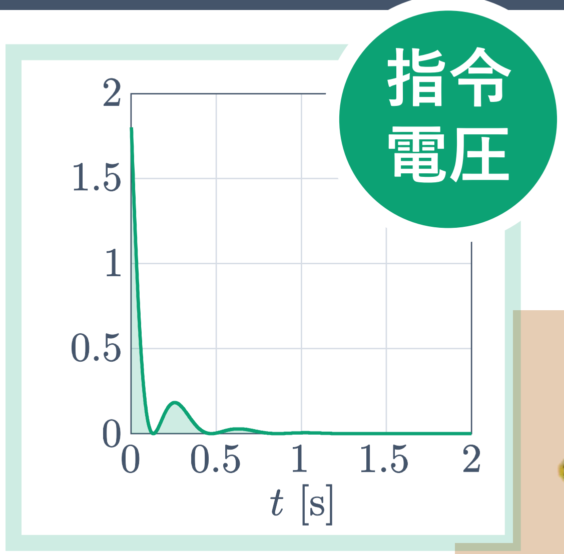
q_1

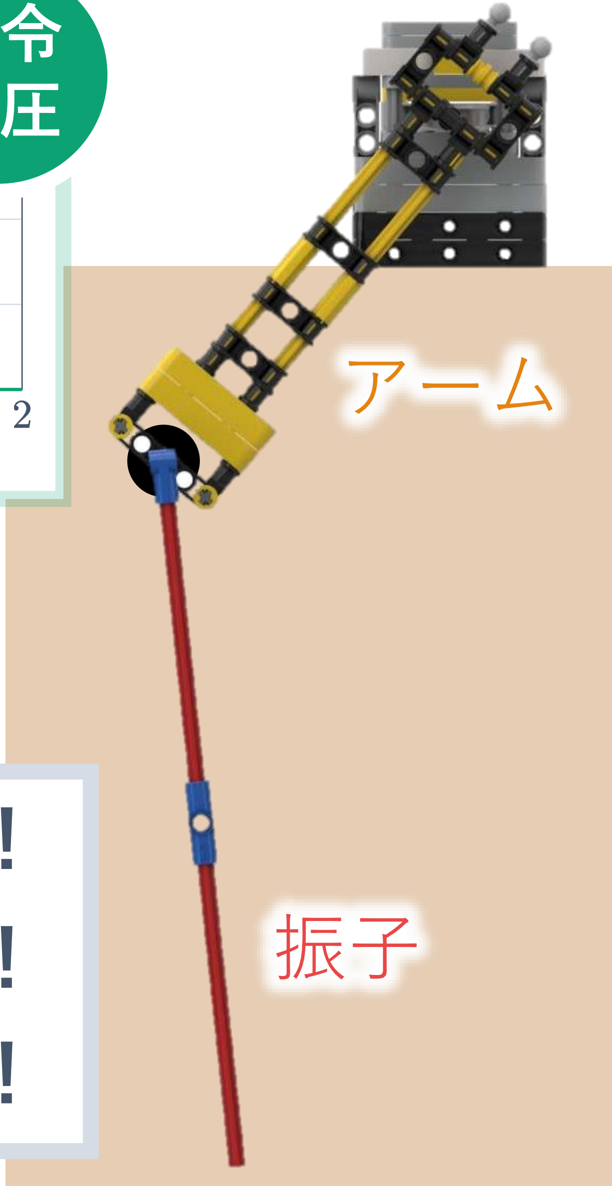


＋ q_3



＋ R

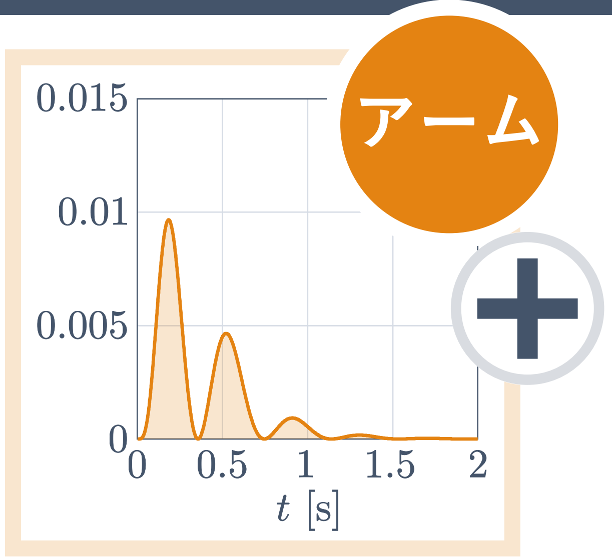




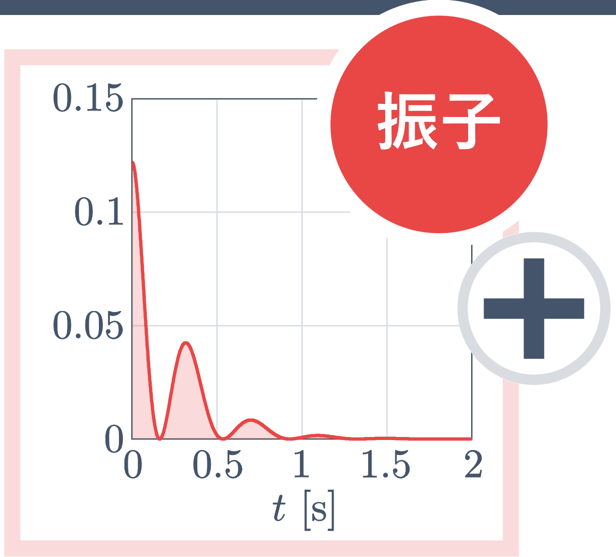
重みづけした 2 乗積分の総和を最小化！

- アーム角 ϕ_1 の収束を重視 ⟶ 重み q_1 を大きく！
- 振子角 ϕ_2 の収束を重視 ⟶ 重み q_3 を大きく！
- 指令電圧 v の抑制を重視 ⟶ 重み R を大きく！

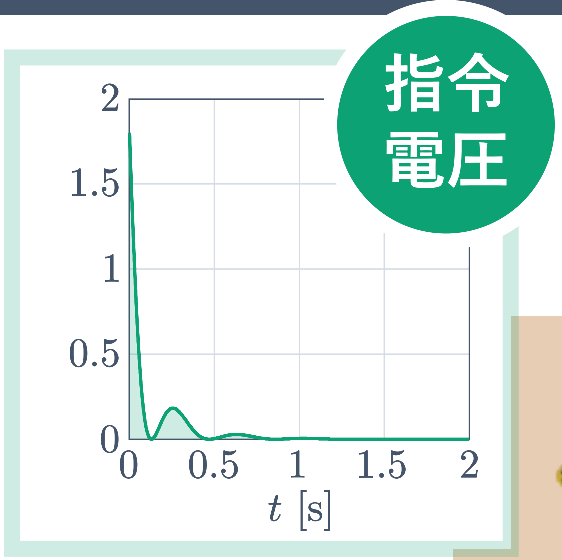
● 最適レギュレータ



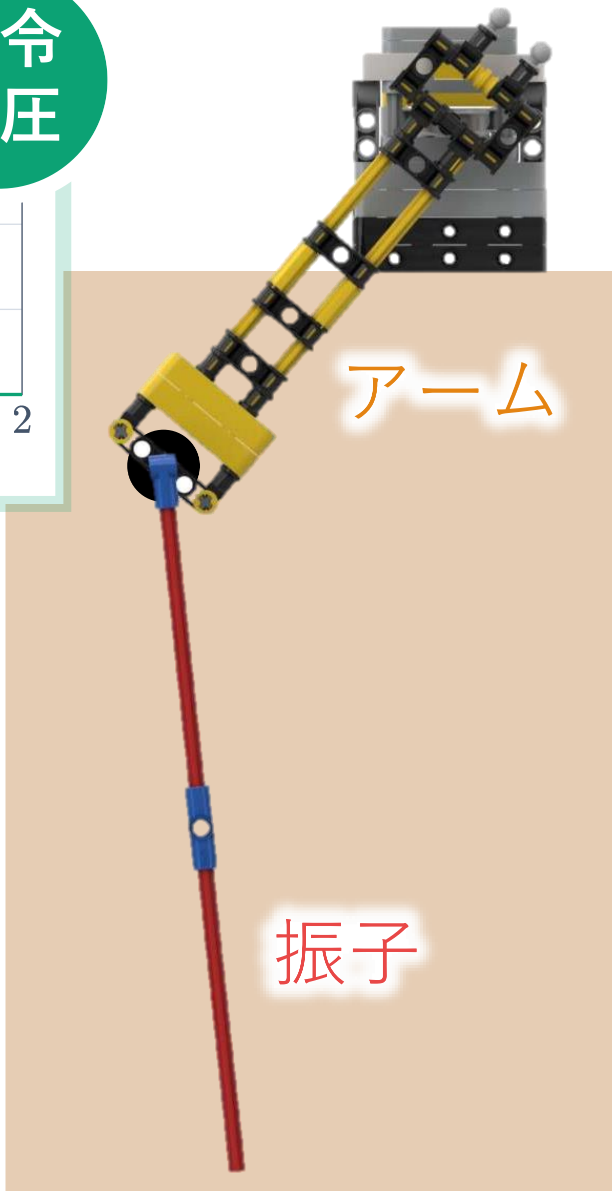
q_1 ＋



q_3 ＋



R



評価関数

$$J = q_1 \overbrace{\int_0^\infty \phi_1^2 \, \mathrm{d}t}^{\text{アーム}} + q_3 \overbrace{\int_0^\infty \phi_2^2 \, \mathrm{d}t}^{\text{振子}} + R \overbrace{\int_0^\infty v^2 \, \mathrm{d}t}^{\text{指令電圧}}$$

が最小となるように $\boldsymbol{K}$ を**設計！**

● 最適レギュレータ

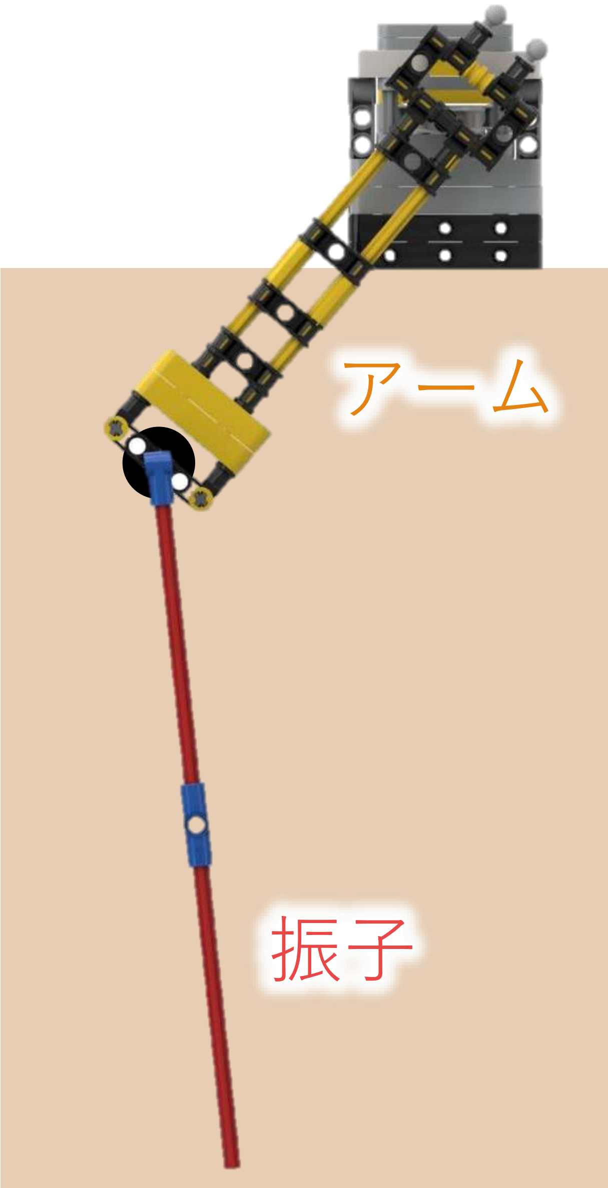
最適レギュレータ問題

以下の**評価関数** J **が最小**となるように $\boldsymbol{K}$ を**設計！**

$$J = \int_0^\infty (\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{Q} \boldsymbol{x} + R u^2)\,\mathrm{d}t$$

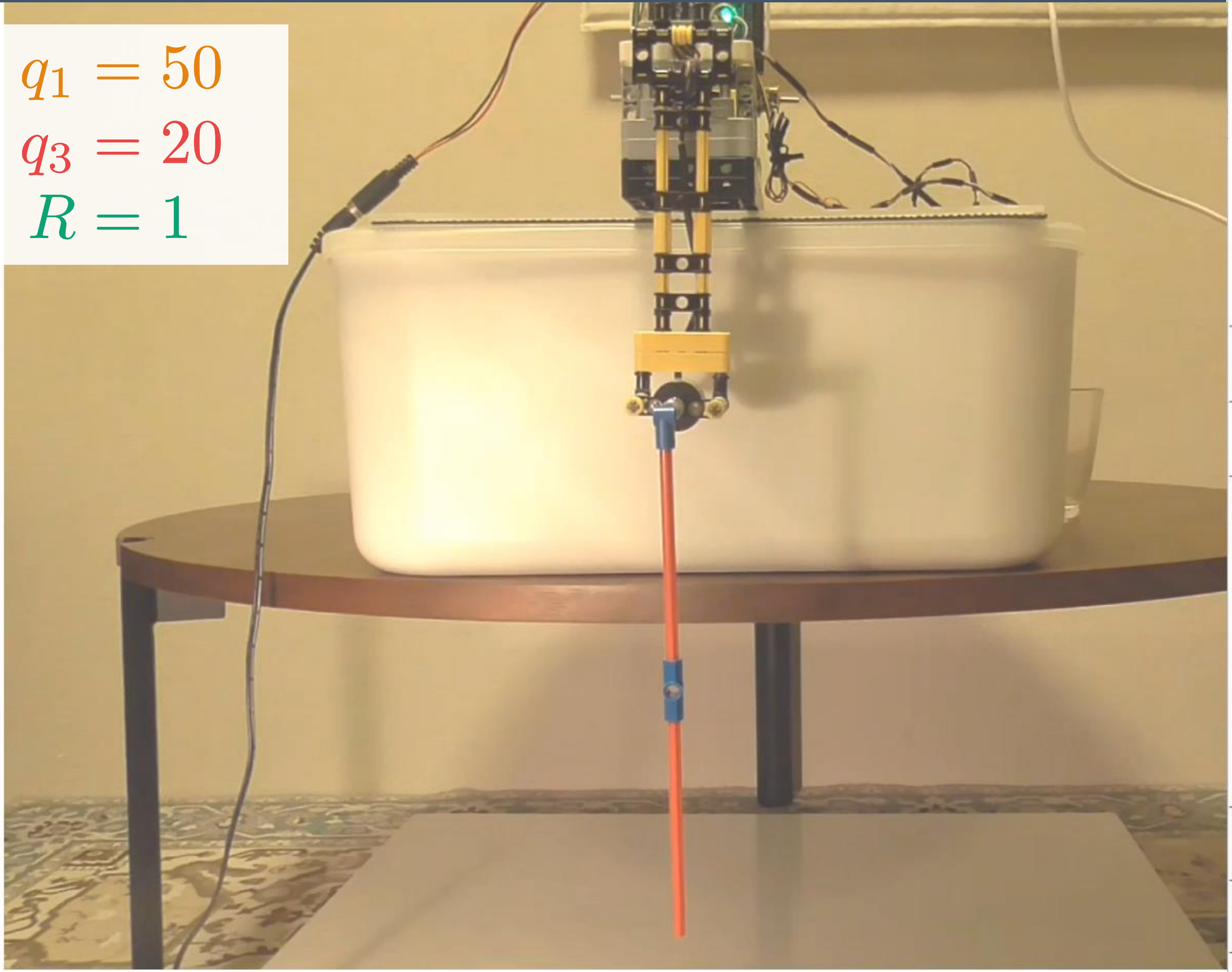
$$\boldsymbol{Q} = \mathrm{diag}\{q_1,\ 0,\ q_3,\ 0\}$$

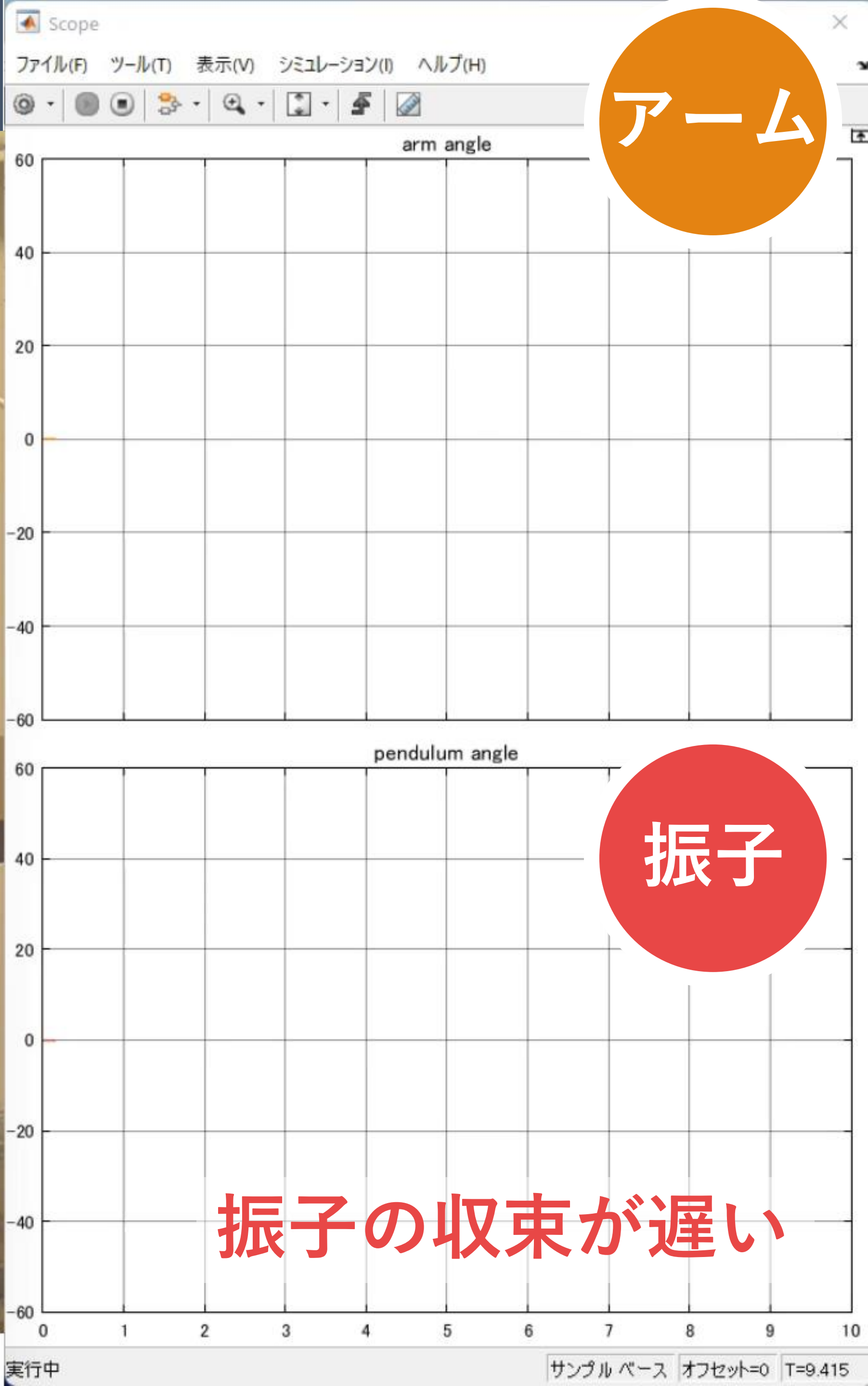
$$= q_1 \int_0^\infty \phi_1^2\,\mathrm{d}t + q_3 \int_0^\infty \phi_2^2\,\mathrm{d}t + R \int_0^\infty v^2\,\mathrm{d}t$$



● 最適レギュレータ

$q_1 = 50$
$q_3 = 20$
$R = 1$

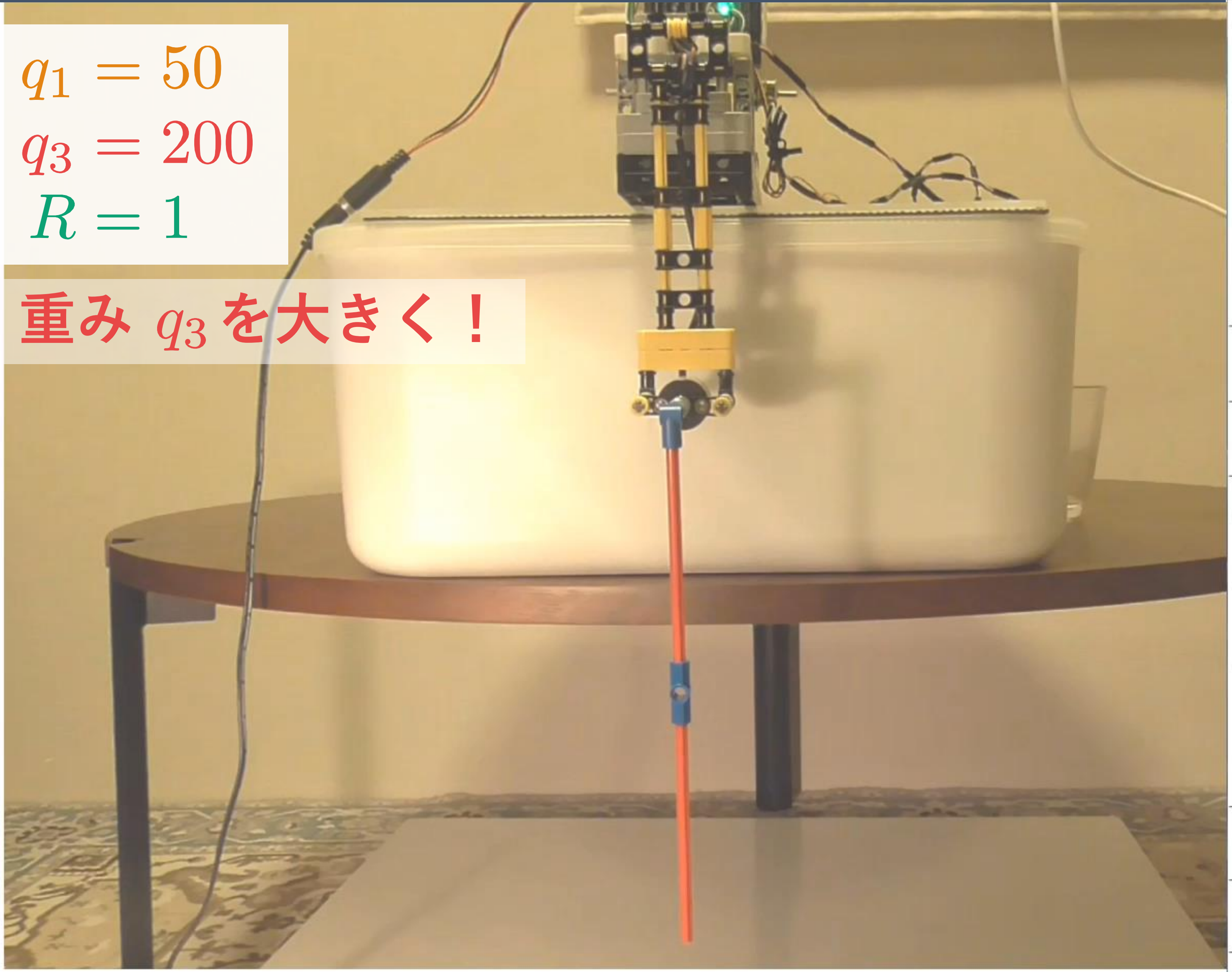


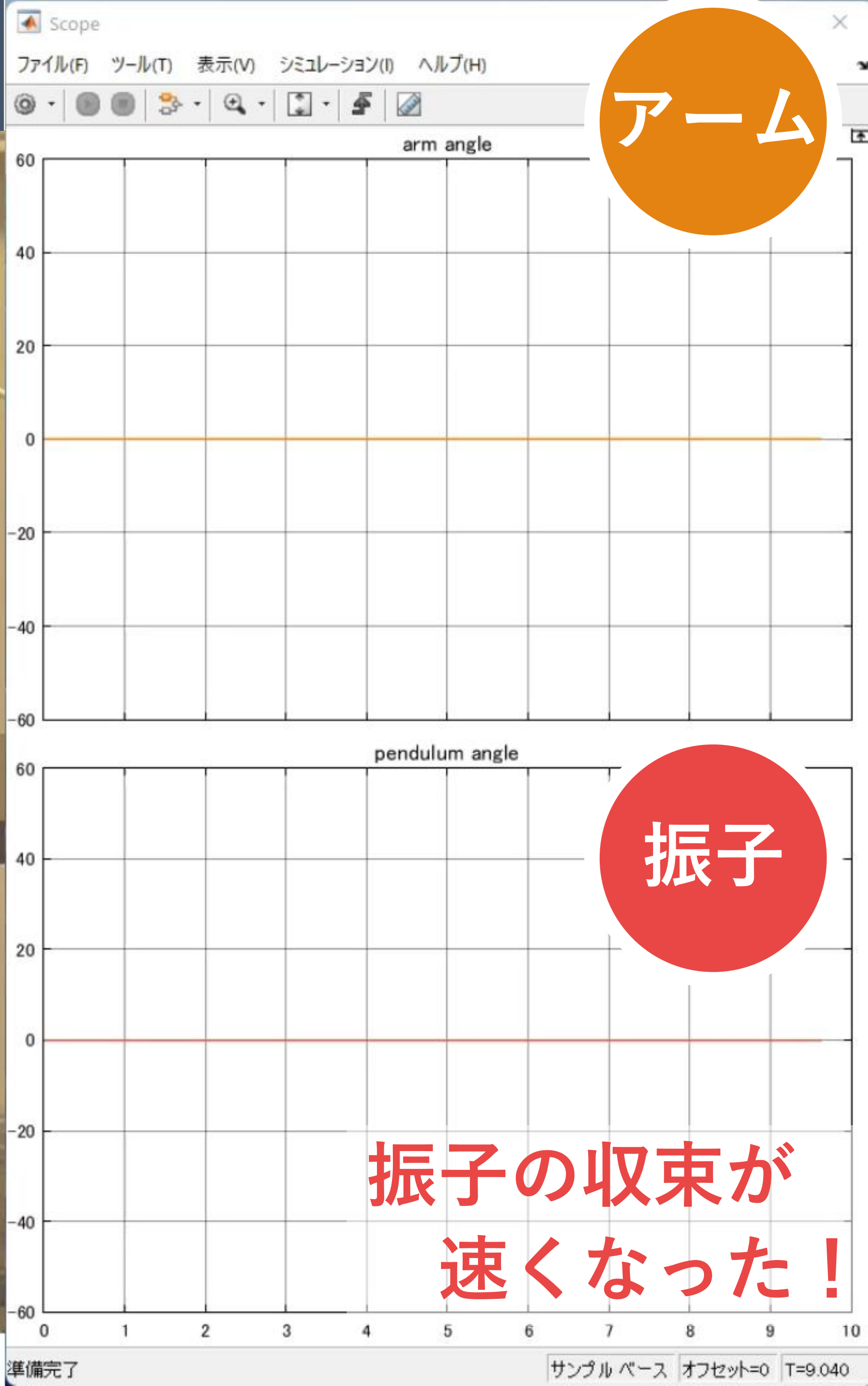


● 最適レギュレータ

$$q_1 = 50$$
$$q_3 = 200$$
$$R = 1$$

重み q_3 を大きく！





アーム

振子

振子の収束が速くなった！