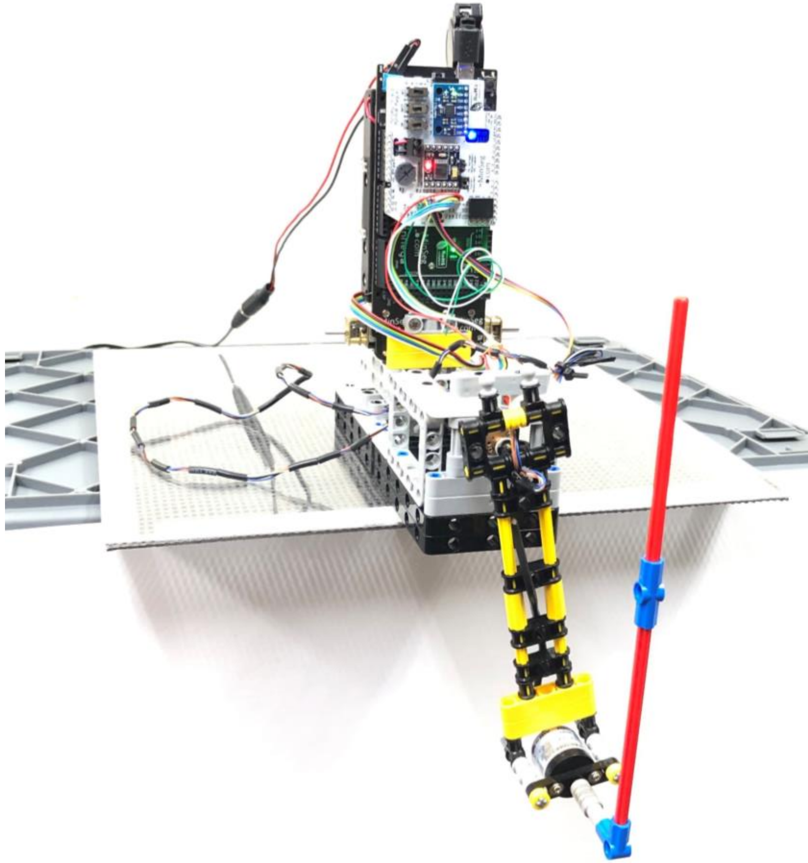
現代制御の学習

- クレーンの振れ止め制御
  - 設計モデル
  - 極配置法
  - 最適レギュレータ
- 倒立振子の安定化制御
  - 設計モデル
  - 倒立制御
  - 目標値追従制御

学習できる内容の一例



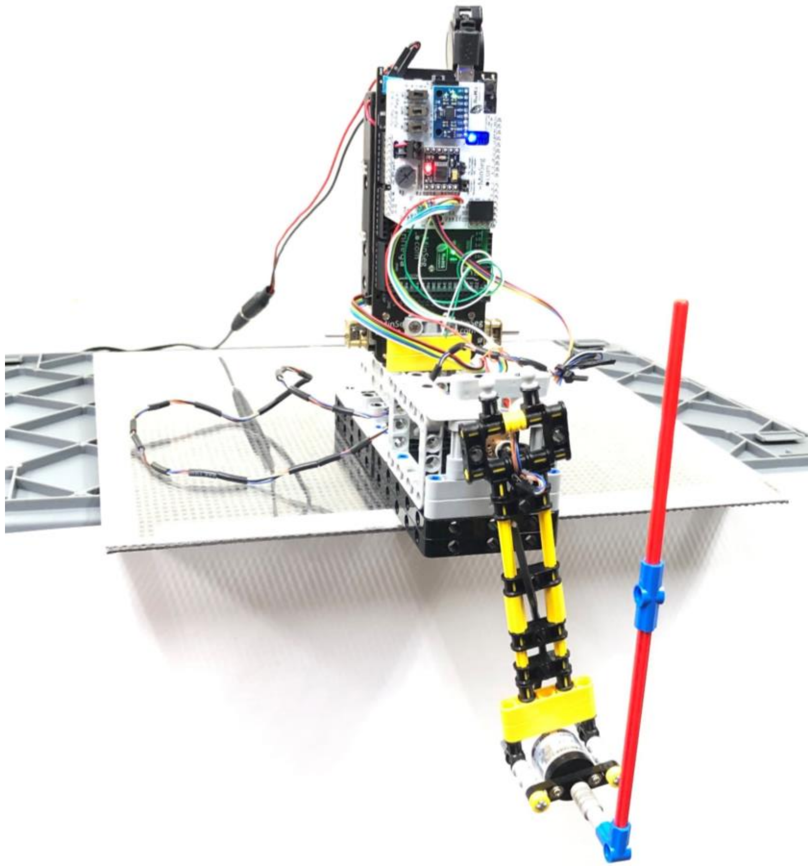
現代制御の学習

▶ クレーンの振れ止め制御

- **設計モデル**
- 極配置法
- 最適レギュレータ

▶ 倒立振子の安定化制御

- 設計モデル
- 倒立制御
- 目標値追従制御



● 設計モデル

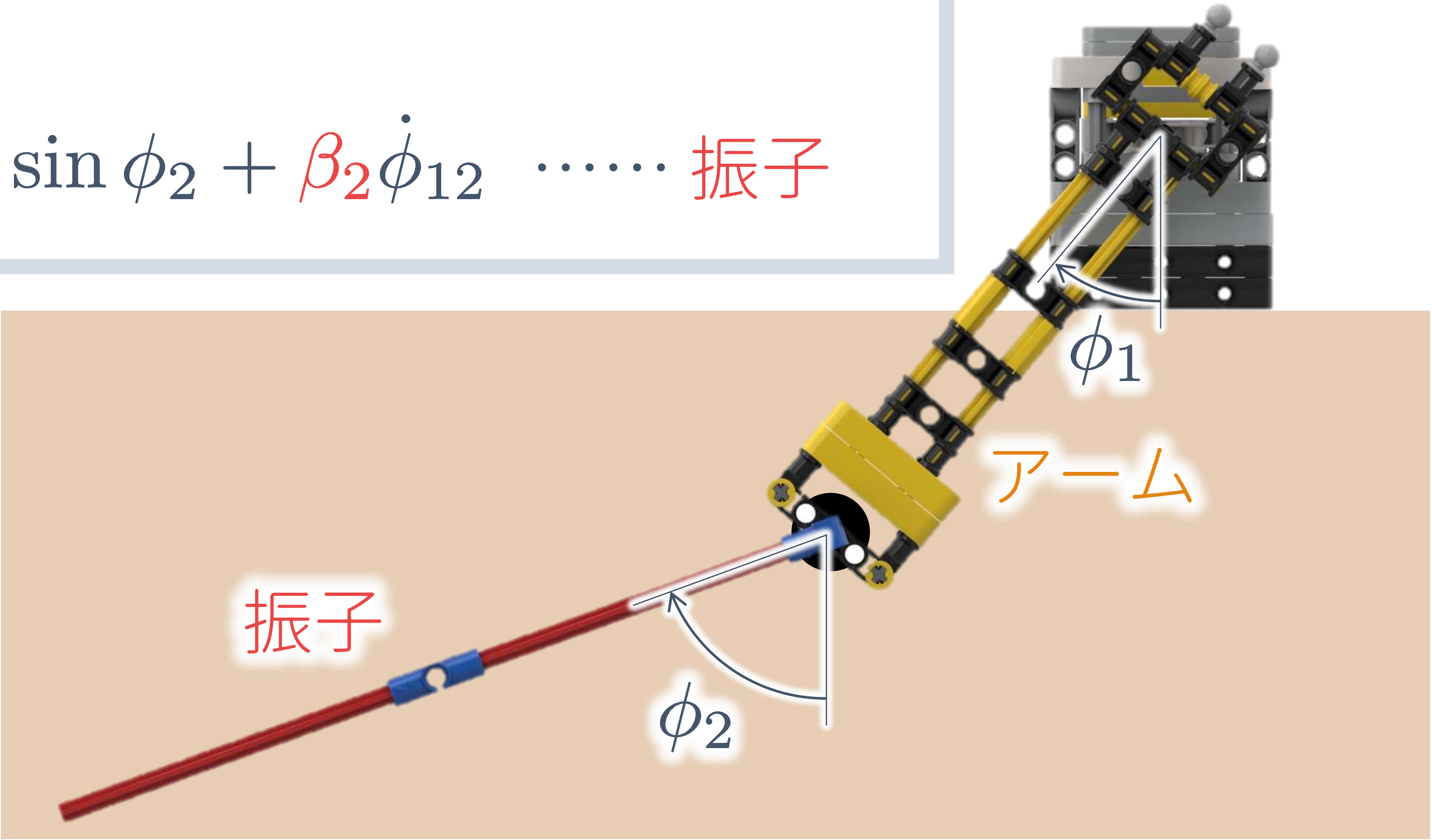
非線形モデル

$$\alpha_1 \ddot{\phi}_1 = -\beta_1 \dot{\phi}_1 - \gamma_1 \sin\phi_1 + v \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{アーム}$$

$$L_1 \cos\phi_{12} \cdot \ddot{\phi}_1 + \alpha_2 \ddot{\phi}_2 = L_1 \dot{\phi}_1^2 \sin\phi_{12} - g \sin\phi_2 + \beta_2 \dot{\phi}_{12} \quad \cdots\cdots \text{振子}$$

$$\phi_{12} = \phi_1 - \phi_2$$

アーム (未知)	振子 (未知)	振子 (既知)
$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} L_1 \\ g \end{array} \right.$



● 設計モデル

非線形モデル

$$\alpha_1 \ddot{\phi}_1 = -\beta_1 \dot{\phi}_1 - \gamma_1 \sin \phi_1 + v$$

$$L_1 \cos \phi_{12} \cdot \ddot{\phi}_1 + \alpha_2 \ddot{\phi}_2 = L_1 \dot{\phi}_1^2 \sin \phi_{12} - g \sin \phi_2 + \beta_2 \dot{\phi}_{12}$$

$$\sin \phi_1 \simeq \phi_1 \qquad \cos \phi_{12} \simeq 1$$

$$\sin \phi_2 \simeq \phi_2 \qquad \dot{\phi}_1^2 \sin \phi_{12} \simeq \dot{\phi}_1^2 \phi_{12} \simeq 0$$

設計モデル (近似線形化モデル)

$$\alpha_1 \ddot{\phi}_1 = -\beta_1 \dot{\phi}_1 - \gamma_1 \phi_1 + v$$

$$L_1 \ddot{\phi}_1 + \alpha_2 \ddot{\phi}_2 = -g \phi_2 + \beta_2 (\dot{\phi}_1 - \dot{\phi}_2)$$

アーム：真下近傍
振　子：真下近傍
で近似線形化

● 設計モデル

設計モデル (近似線形化モデル)

$$\alpha_1 \ddot{\phi}_1 = -\beta_1 \dot{\phi}_1 - \gamma_1 \phi_1 + v$$
$$L_1 \ddot{\phi}_1 + \alpha_2 \ddot{\phi}_2 = -g\phi_2 + \beta_2(\dot{\phi}_1 - \dot{\phi}_2)$$

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \dot{\phi}_1 \\ \phi_2 \\ \dot{\phi}_2 \end{bmatrix}, \quad u = v$$

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}u$$

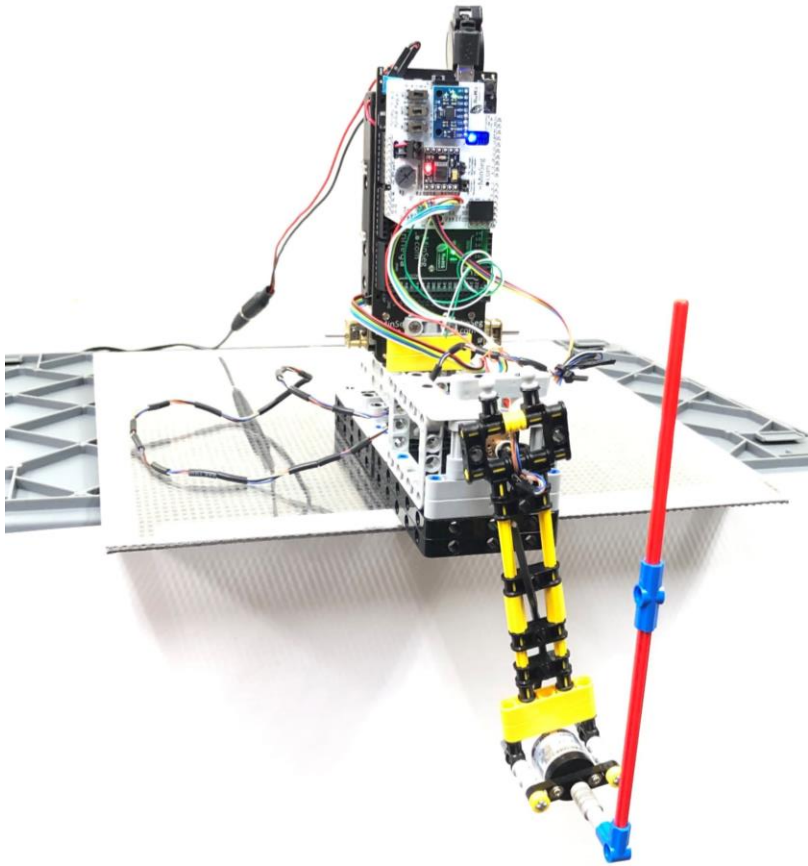
現代制御の学習

▶ クレーンの振れ止め制御

- 設計モデル
- **極配置法**
- 最適レギュレータ

▶ 倒立振子の安定化制御

- 設計モデル
- 倒立制御
- 目標値追従制御



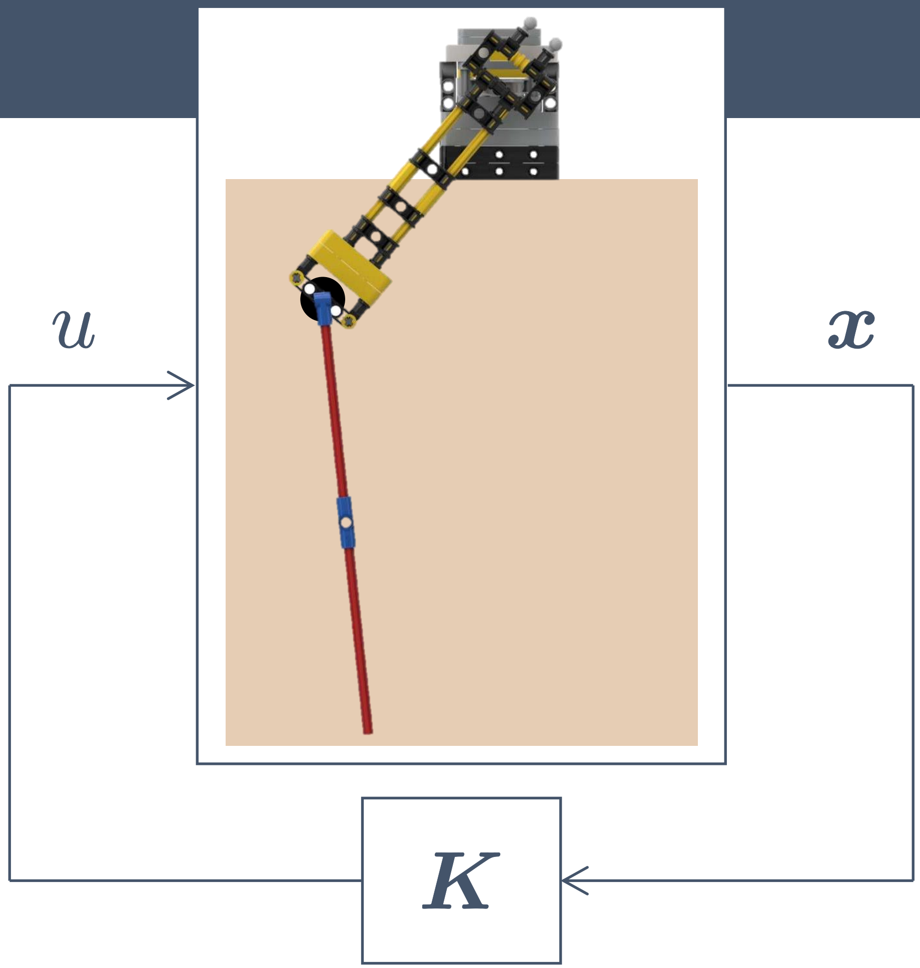
● 極配置法

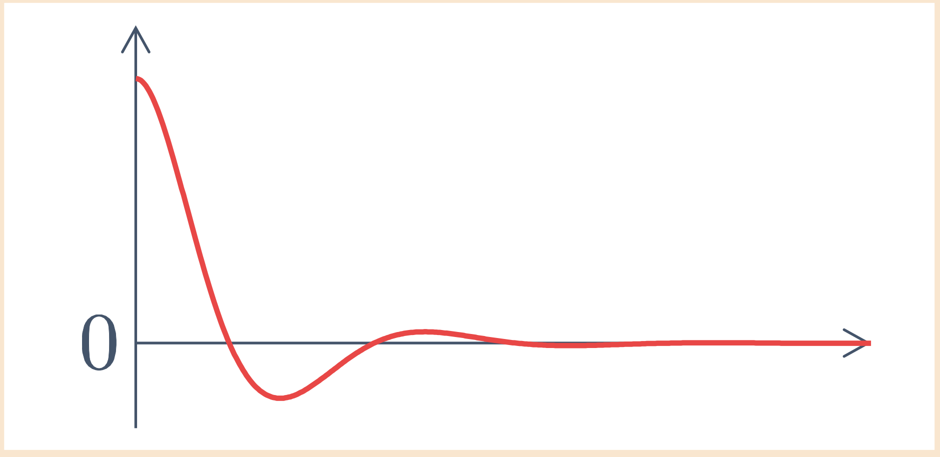
設計モデル

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

状態フィードバック形式のコントローラ

$$u = Kx$$





$t \to \infty$ で $x \to \mathbf{0}$ に制御！

レギュレータ制御

● 極配置法

設計モデル

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

状態フィードバック形式のコントローラ

$$u = Kx$$

システム全体

$$\dot{x} = (A + BK)x$$

$A+BK$ の固有値 (極)
$\alpha \pm \beta j$
が**指定した値**となるように
Kを設計！

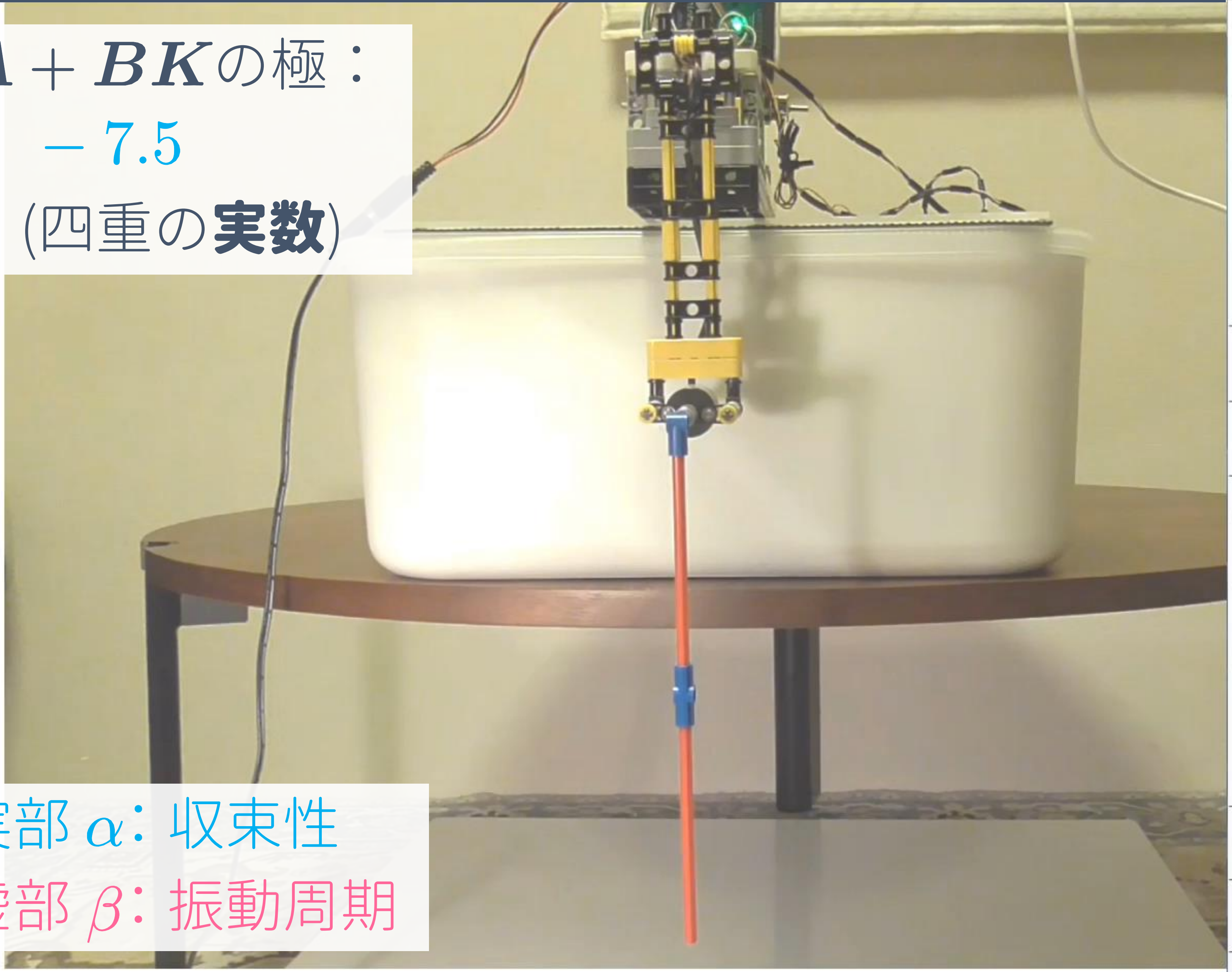
- 極の実部 α：収束性
- 極の虚部 β：振動周期

● 極配置法：実験結果

$A+BK$の極：

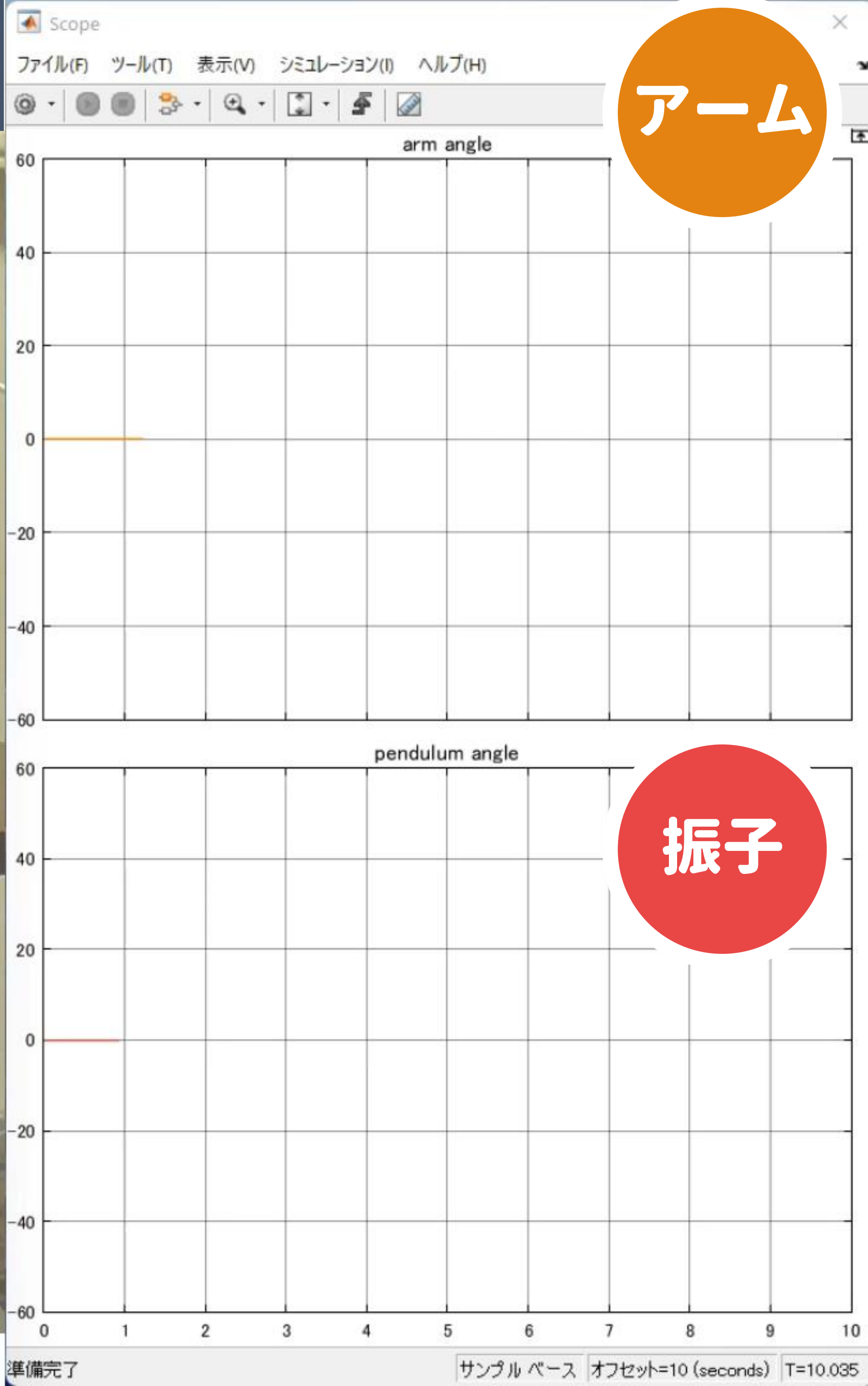
-7.5

(四重の**実数**)



実部 α: 収束性

虚部 β: 振動周期

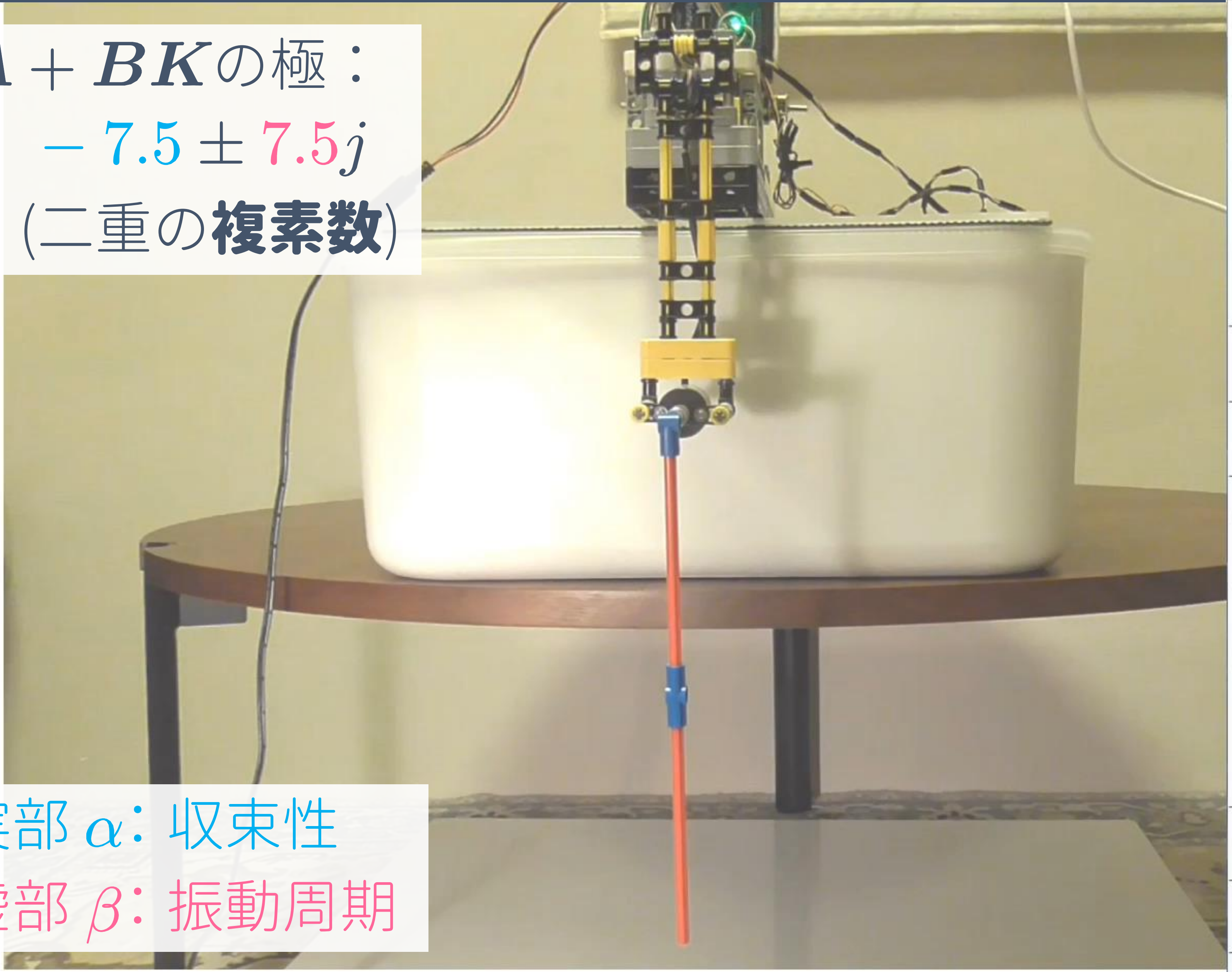


● 極配置法：実験結果

$A + BK$の極：

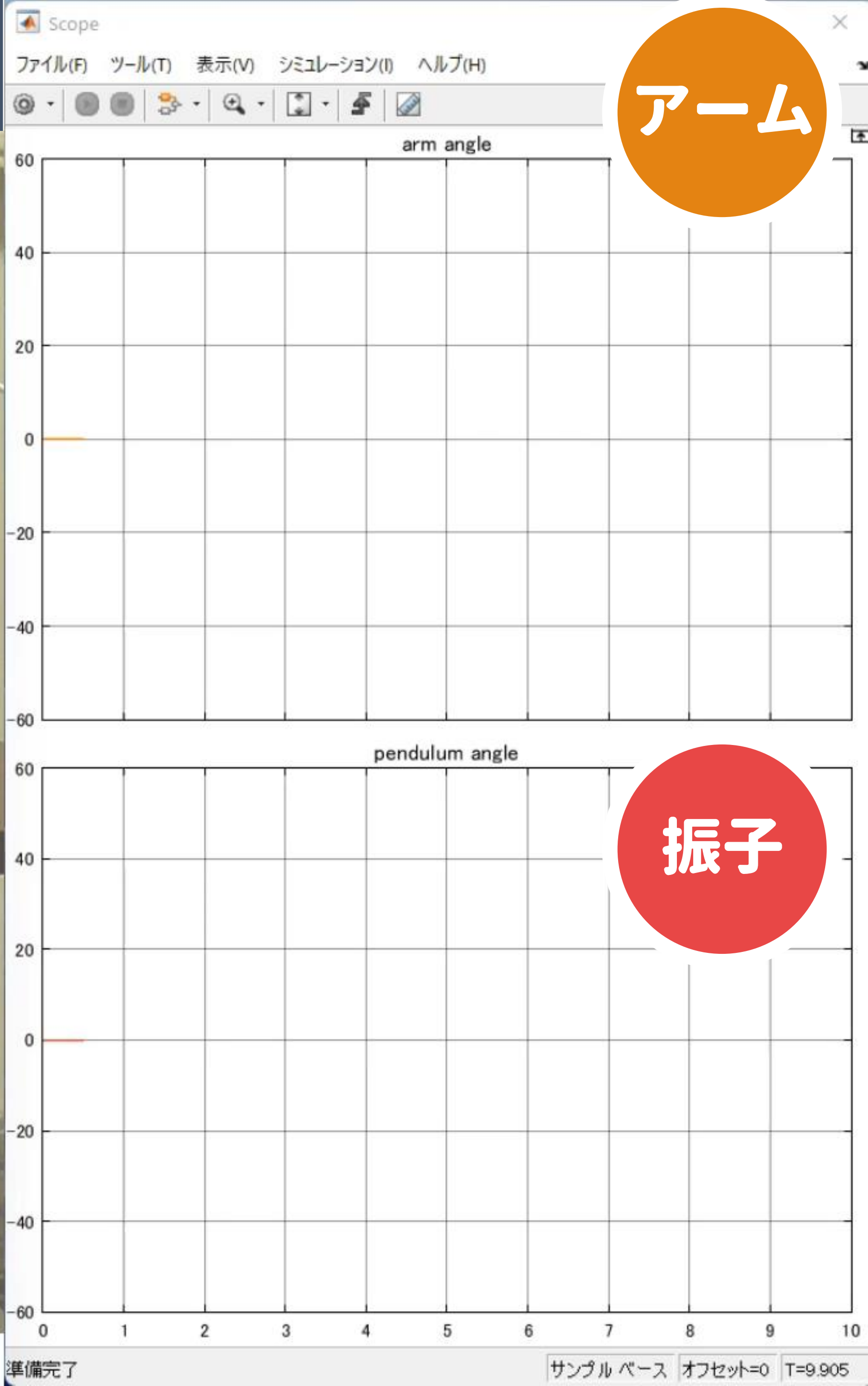
$-7.5 \pm 7.5j$

(二重の**複素数**)



実部 α: 収束性

虚部 β: 振動周期



アーム

振子

● 極配置法の問題点

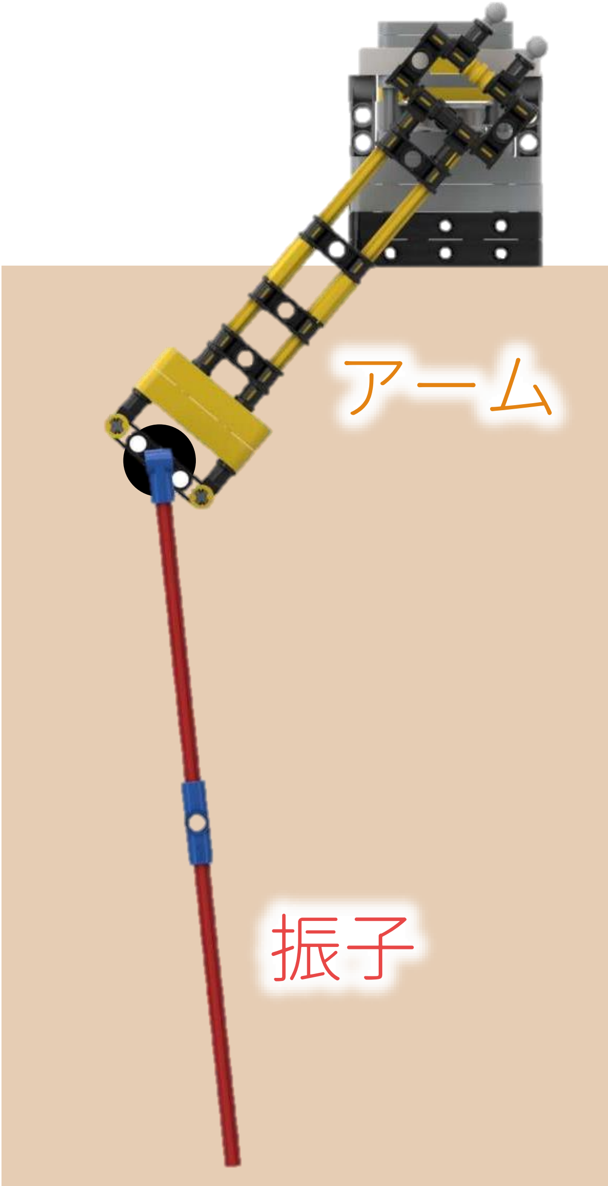
アーム角
振子角
それぞれの収束性

関係が不明瞭

指定する**極の位置**

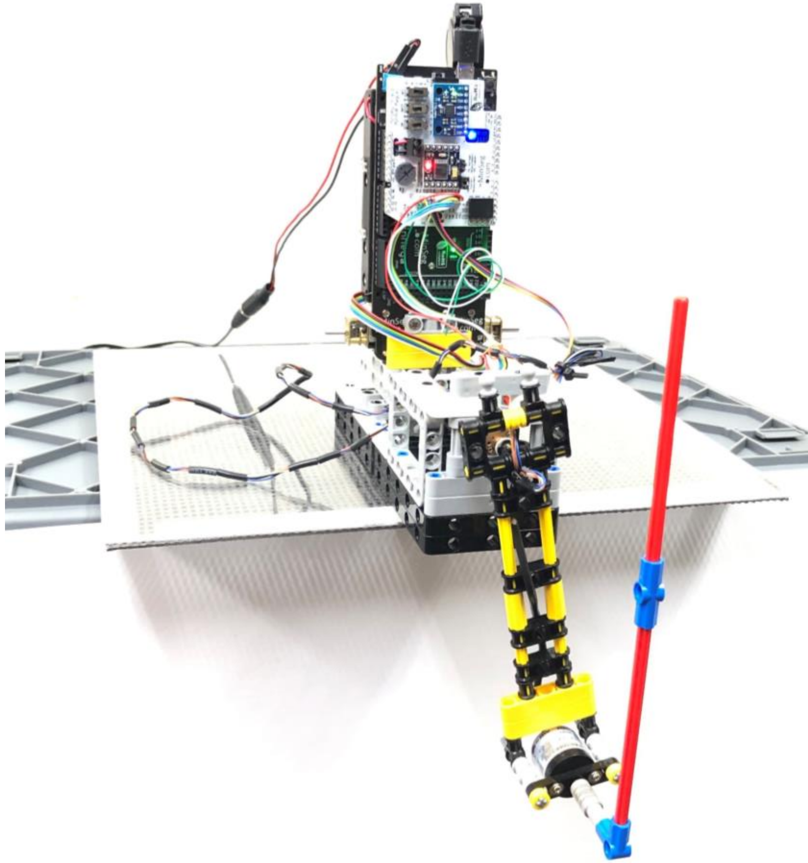
そこで、

最適レギュレータにより**制御！**

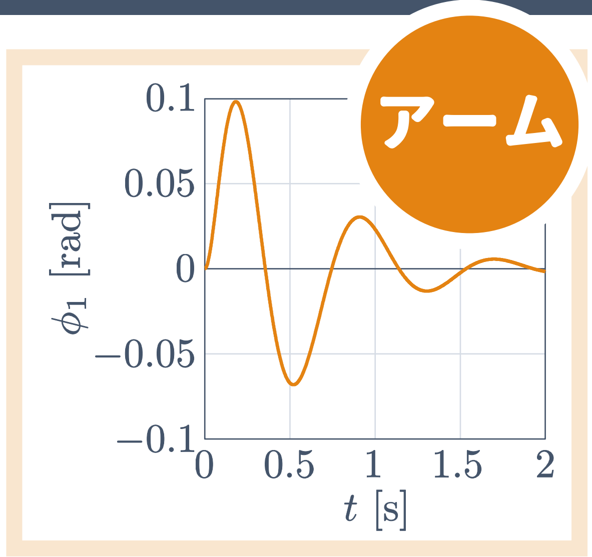


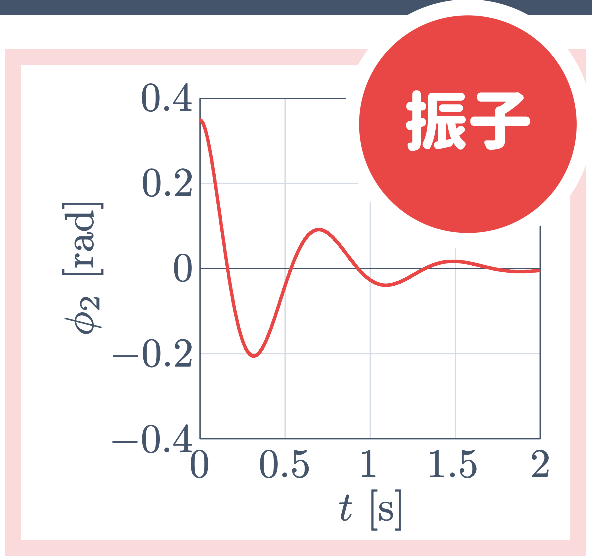
現代制御の学習

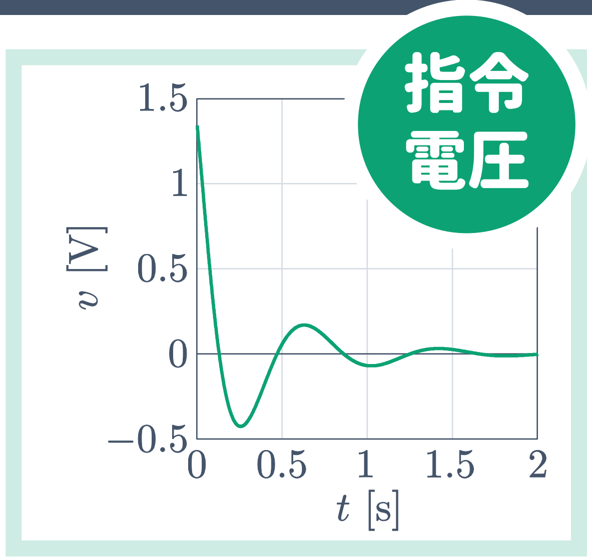
- **クレーンの振れ止め制御**
  - 設計モデル
  - 極配置法
  - **最適レギュレータ**
- 倒立振子の安定化制御
  - 設計モデル
  - 倒立制御
  - 目標値追従制御

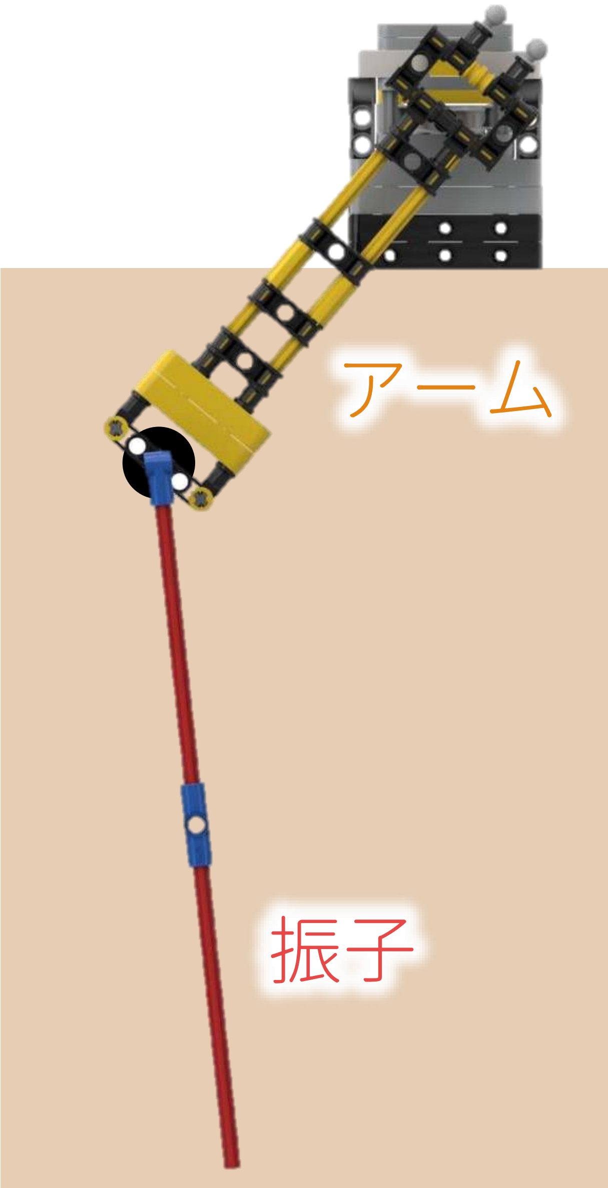


● 最適レギュレータ









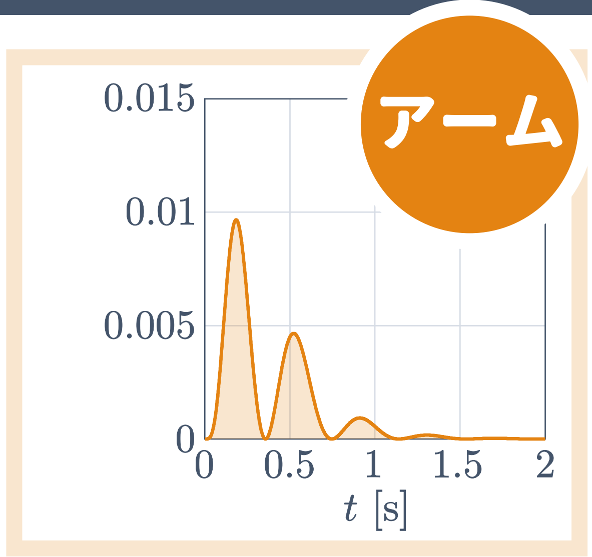
速く収束
させたい！

速く収束
させたい！

大きさを抑制
したい！

これらの要求を
定量的に評価するために…

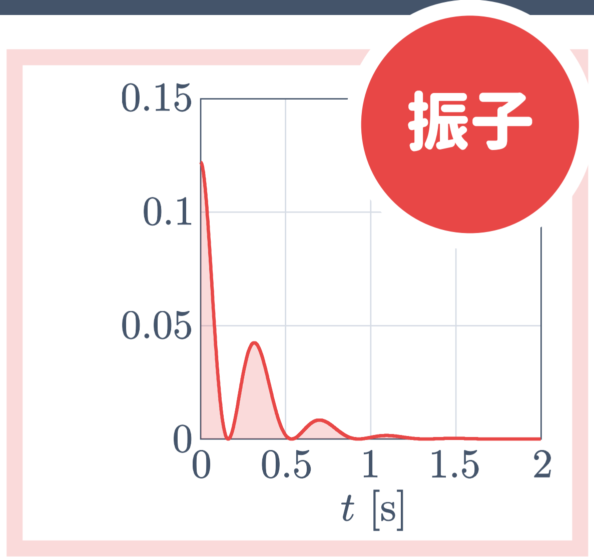
最適レギュレータ



2乗積分

$$\int_0^\infty \phi_1^2 \, \mathrm{d}t$$

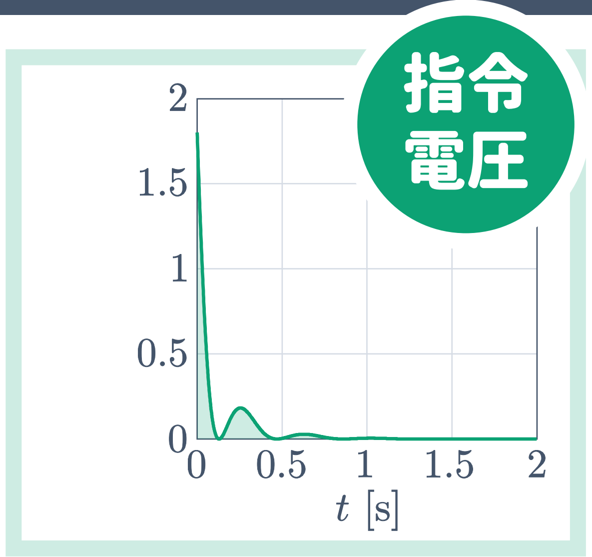
を**小さく**する！



2乗積分

$$\int_0^\infty \phi_2^2 \, \mathrm{d}t$$

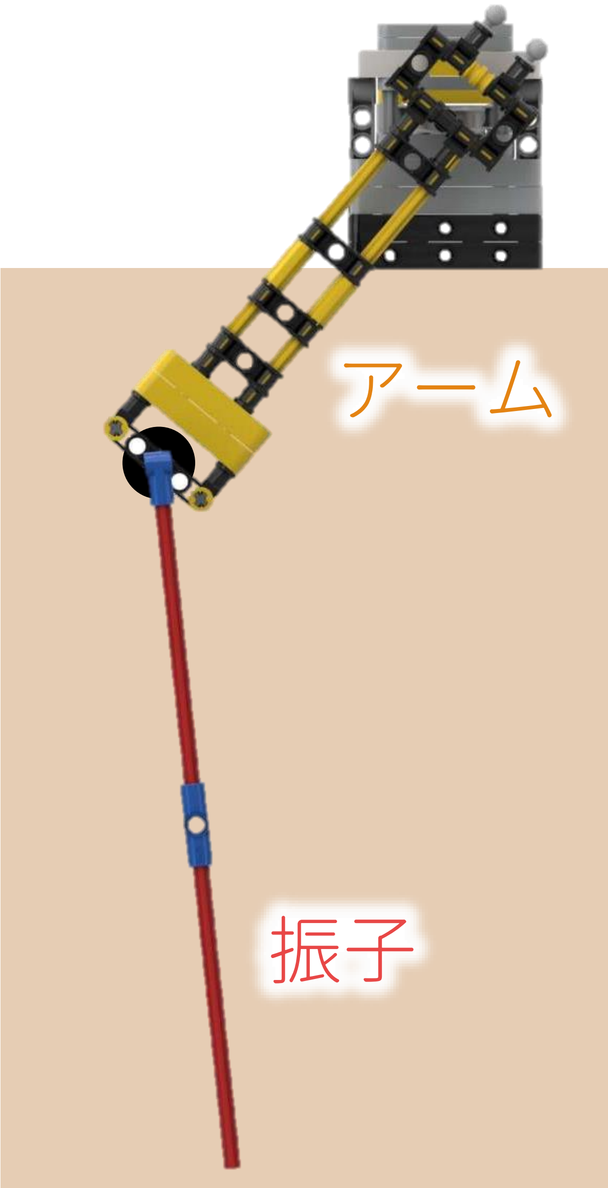
を**小さく**する！



2乗積分

$$\int_0^\infty v^2 \, \mathrm{d}t$$

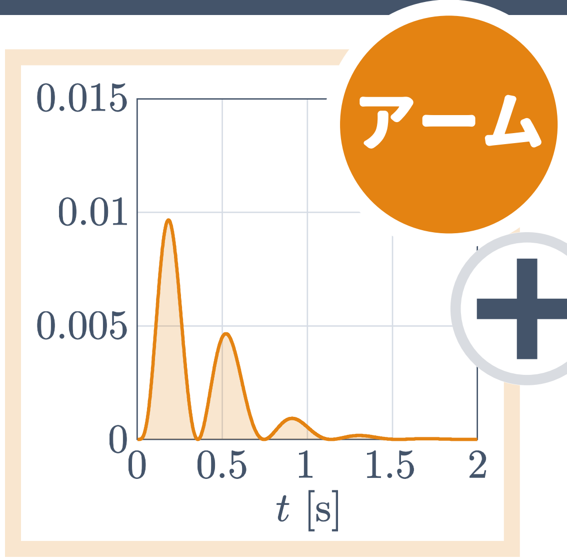
を**小さく**する！



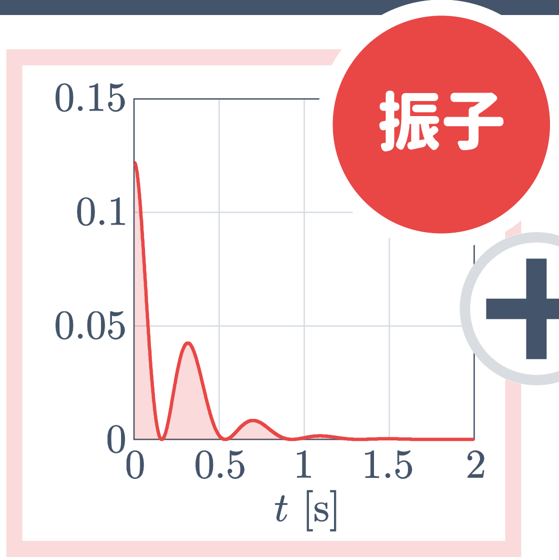
これらの**重要度**を**反映**させるために…

● 最適レギュレータ

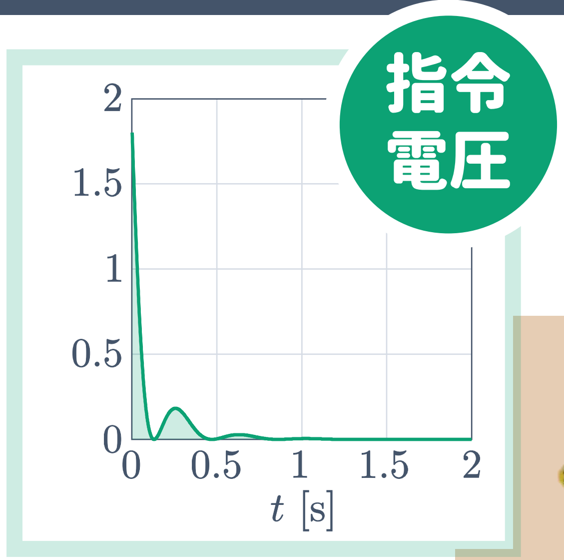
q_1

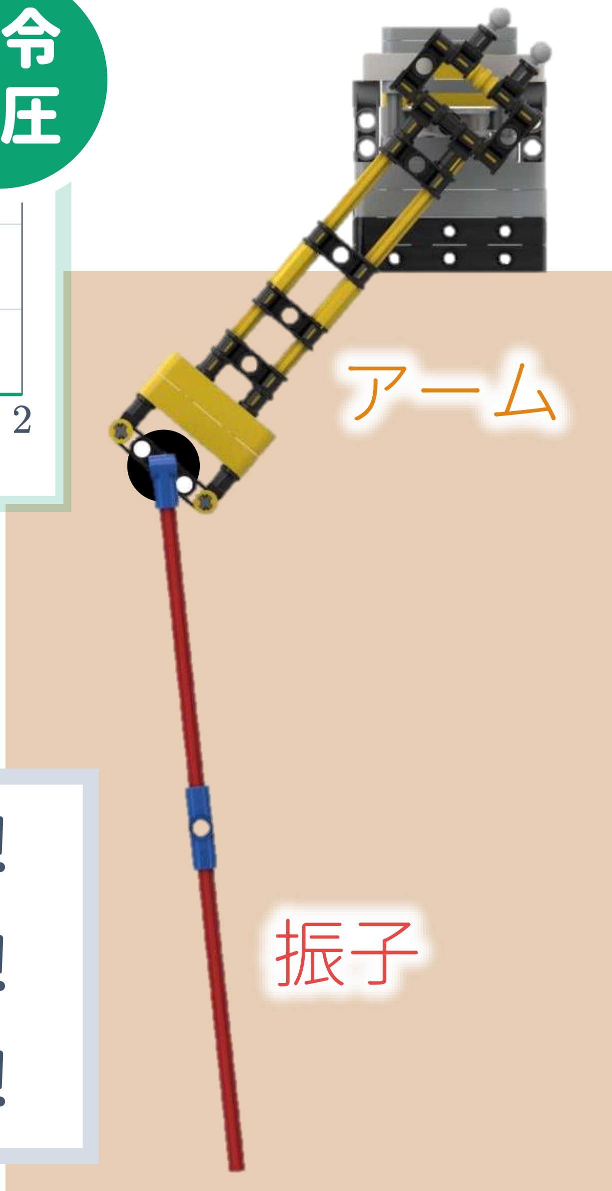


＋ q_3



＋ R



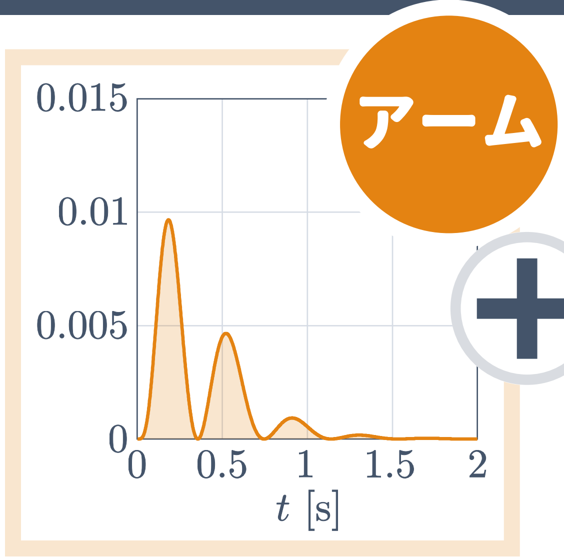


重みづけした 2 乗積分の総和を最小化！

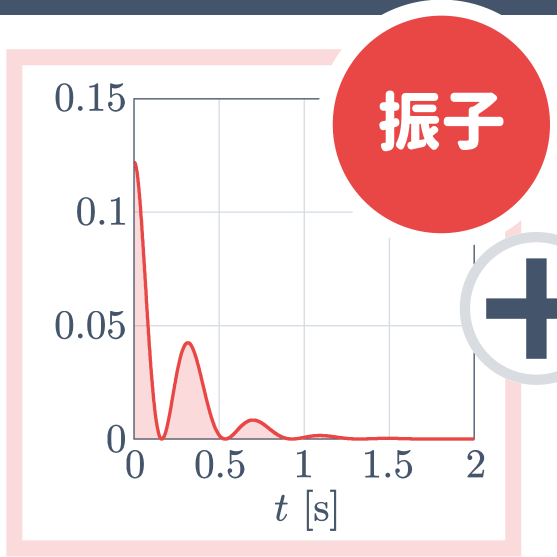
- アーム角 ϕ_1 の収束を重視 ➡ 重み q_1 を大きく！
- 振子角 ϕ_2 の収束を重視 ➡ 重み q_3 を大きく！
- 指令電圧 v の抑制を重視 ➡ 重み R を大きく！

● 最適レギュレータ

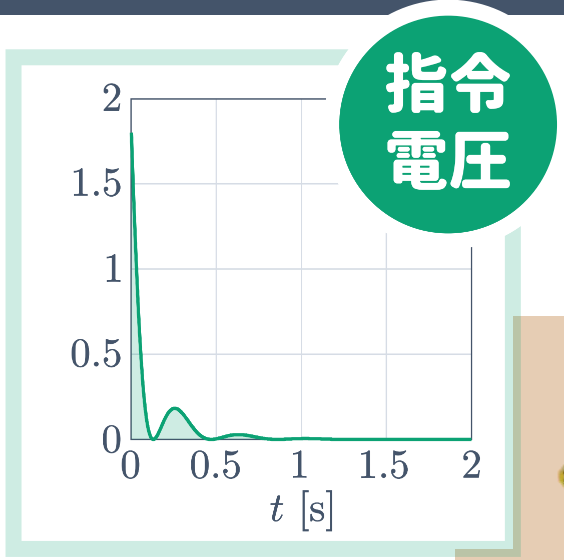
q_1

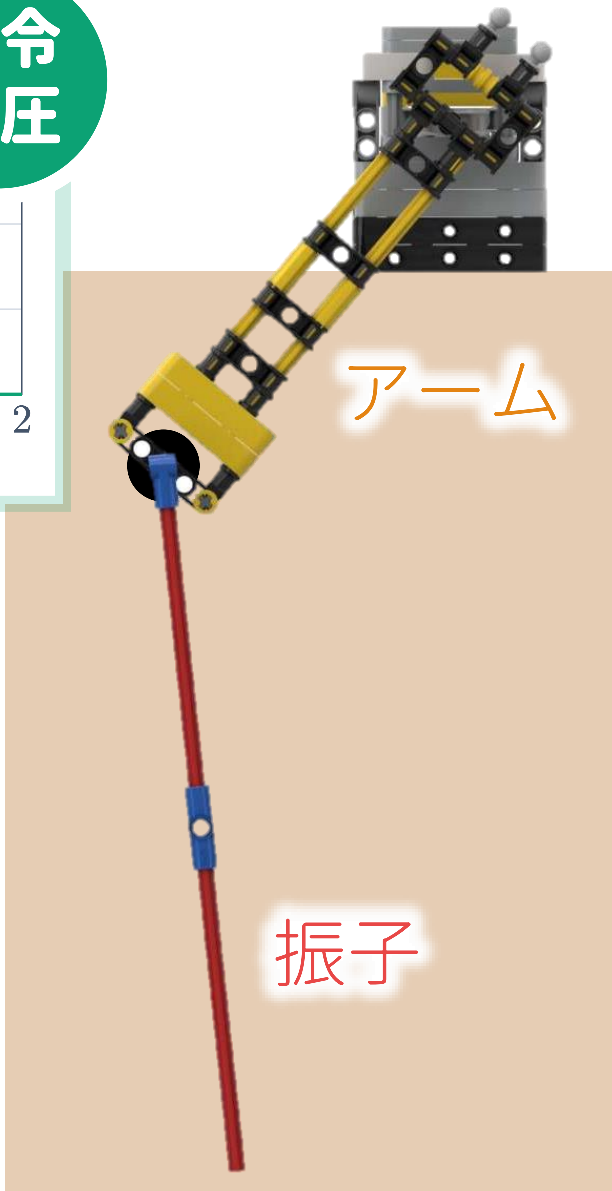


$+$ q_3



$+$ R





評価関数

アーム　振子　指令電圧

$$J = q_1 \int_0^{\infty} \phi_1^2 \,\mathrm{d}t + q_3 \int_0^{\infty} \phi_2^2 \,\mathrm{d}t + R \int_0^{\infty} v^2 \,\mathrm{d}t$$

が最小となるように $\boldsymbol{K}$ を設計！

● 最適レギュレータ

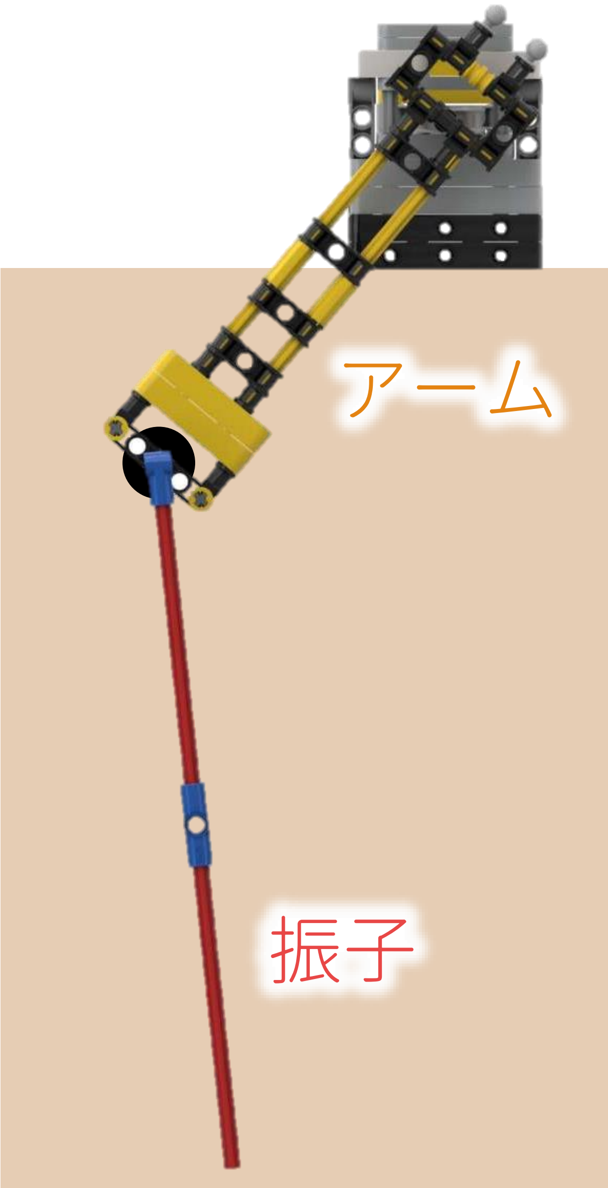
最適レギュレータ問題

以下の**評価関数** J **が最小**となるように $\boldsymbol{K}$ を設計！

$$J = \int_0^\infty (\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{Q} \boldsymbol{x} + R u^2)\,\mathrm{d}t$$

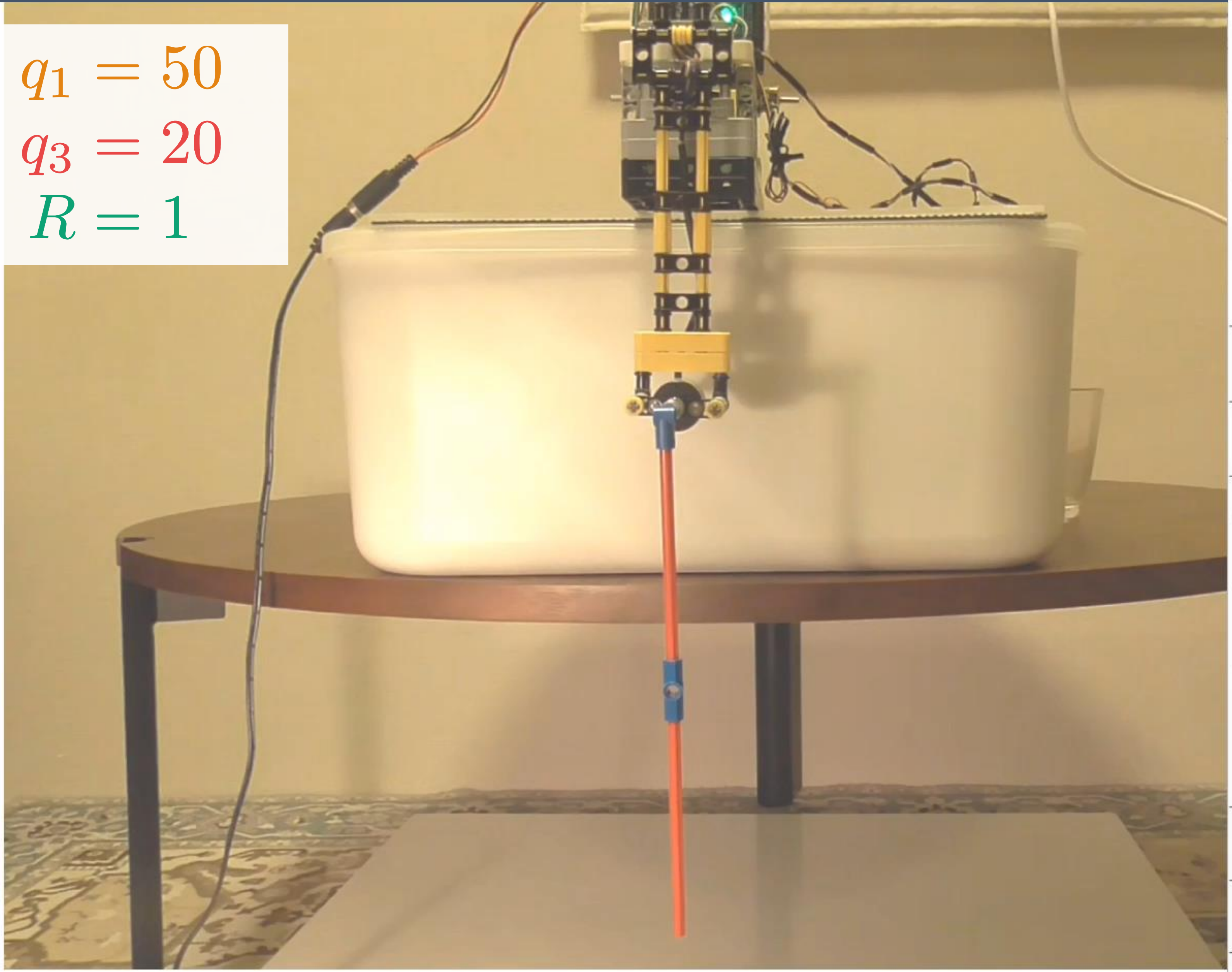
$$\boldsymbol{Q} = \mathrm{diag}\{q_1,\ 0,\ q_3,\ 0\}$$

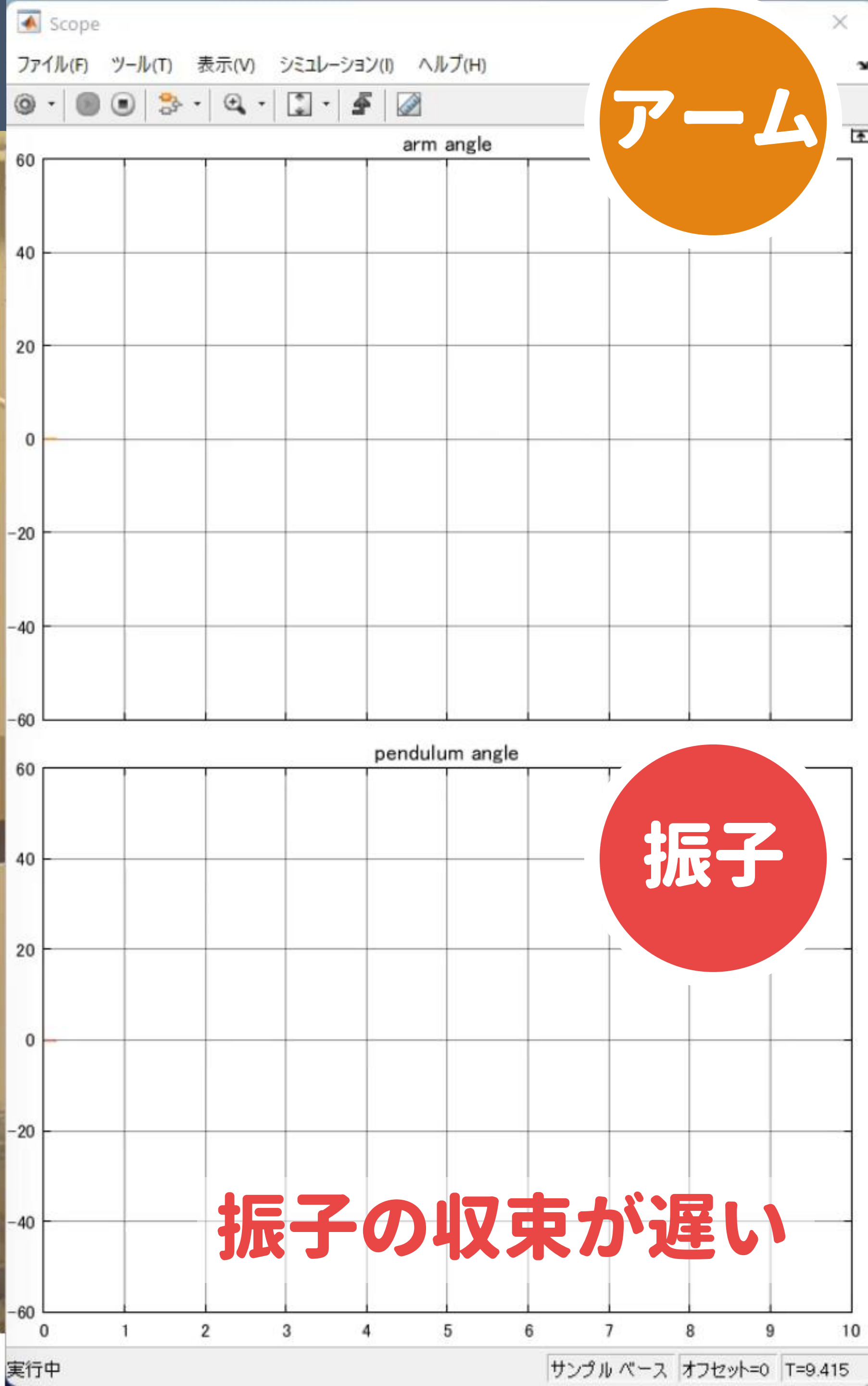
$$= q_1 \int_0^\infty \phi_1^2\,\mathrm{d}t + q_3 \int_0^\infty \phi_2^2\,\mathrm{d}t + R \int_0^\infty v^2\,\mathrm{d}t$$



● 最適レギュレータ

$$q_1 = 50$$
$$q_3 = 20$$
$$R = 1$$



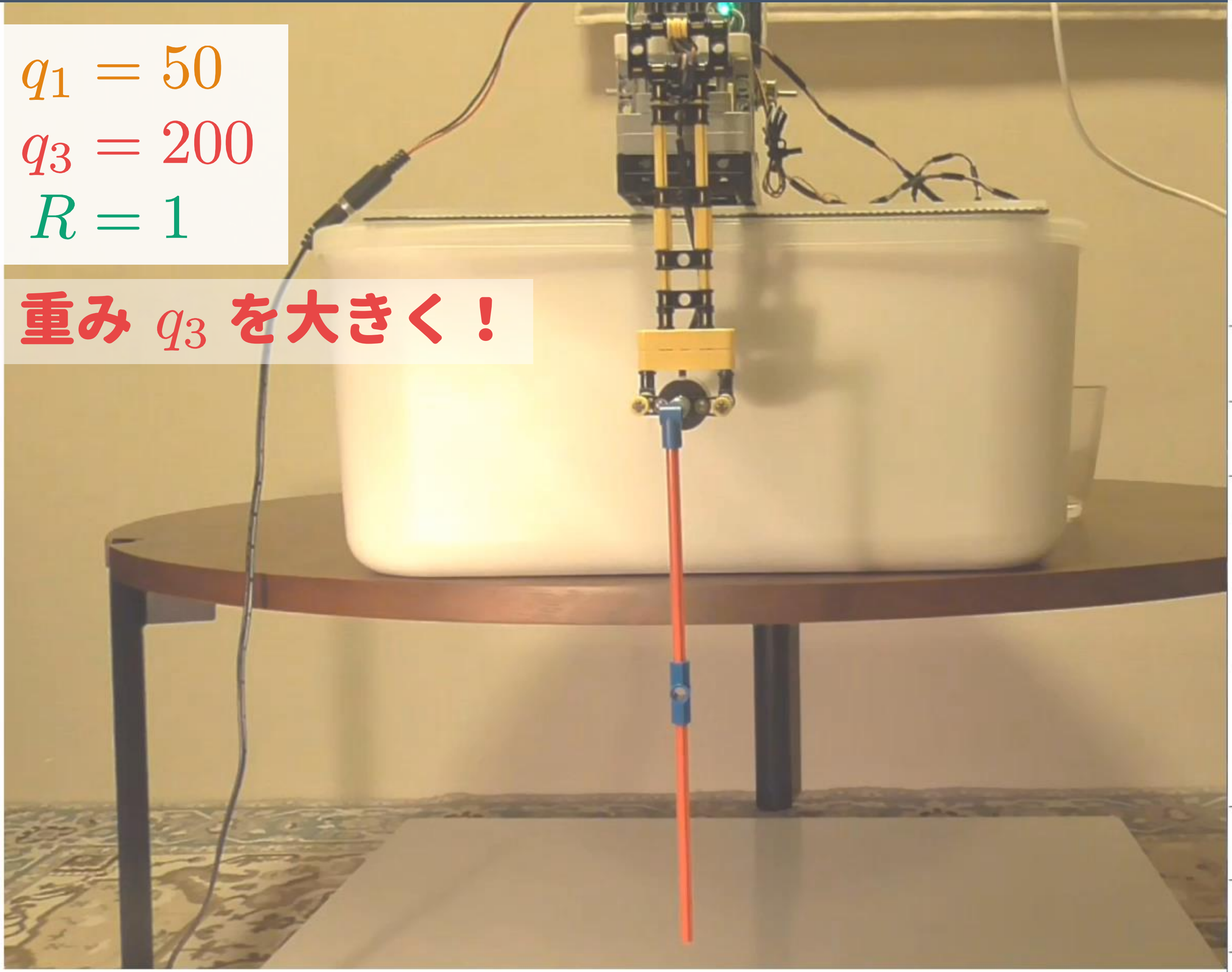


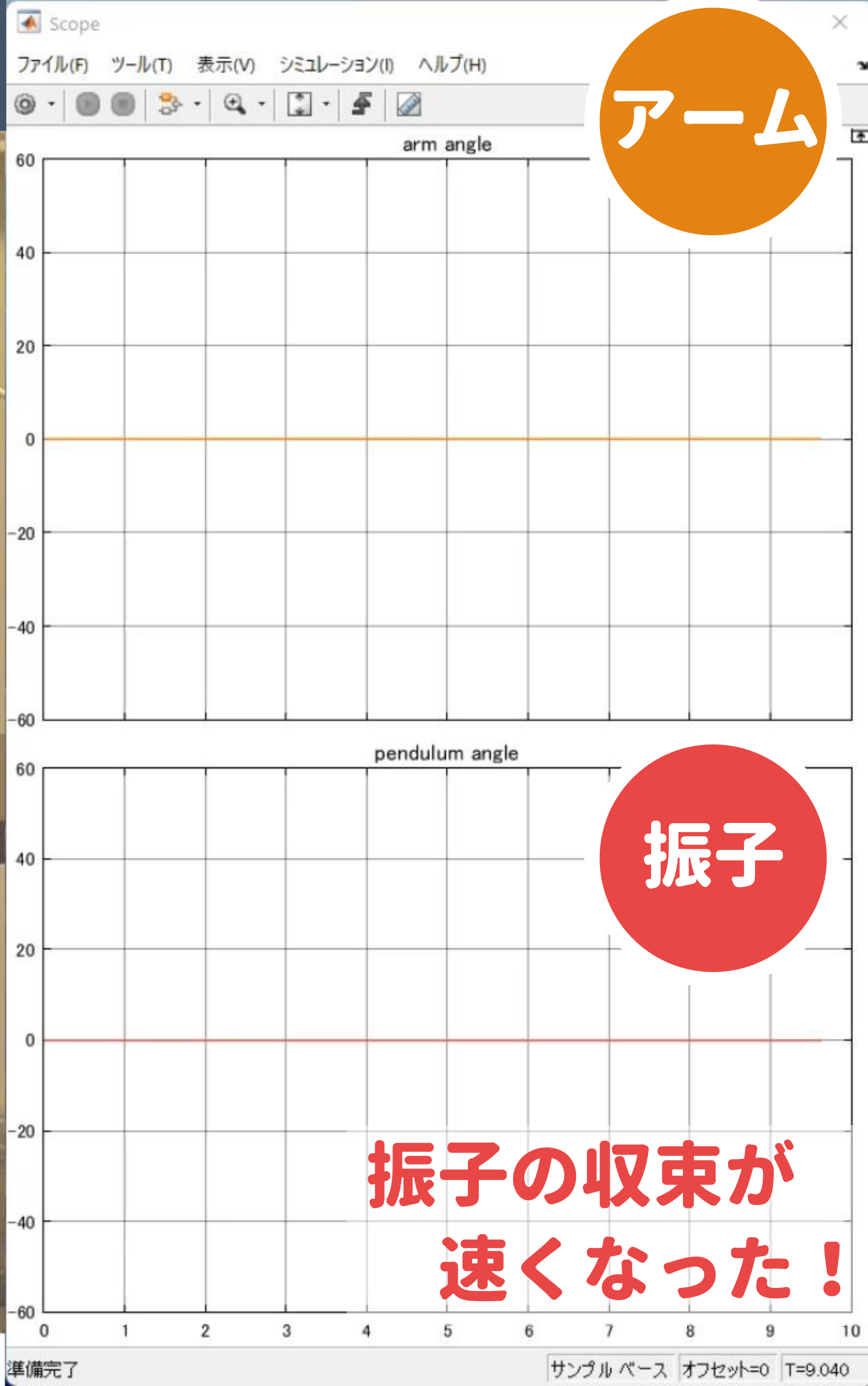
振子の収束が遅い

● 最適レギュレータ

$q_1 = 50$
$q_3 = 200$
$R = 1$

重み q_3 を大きく！



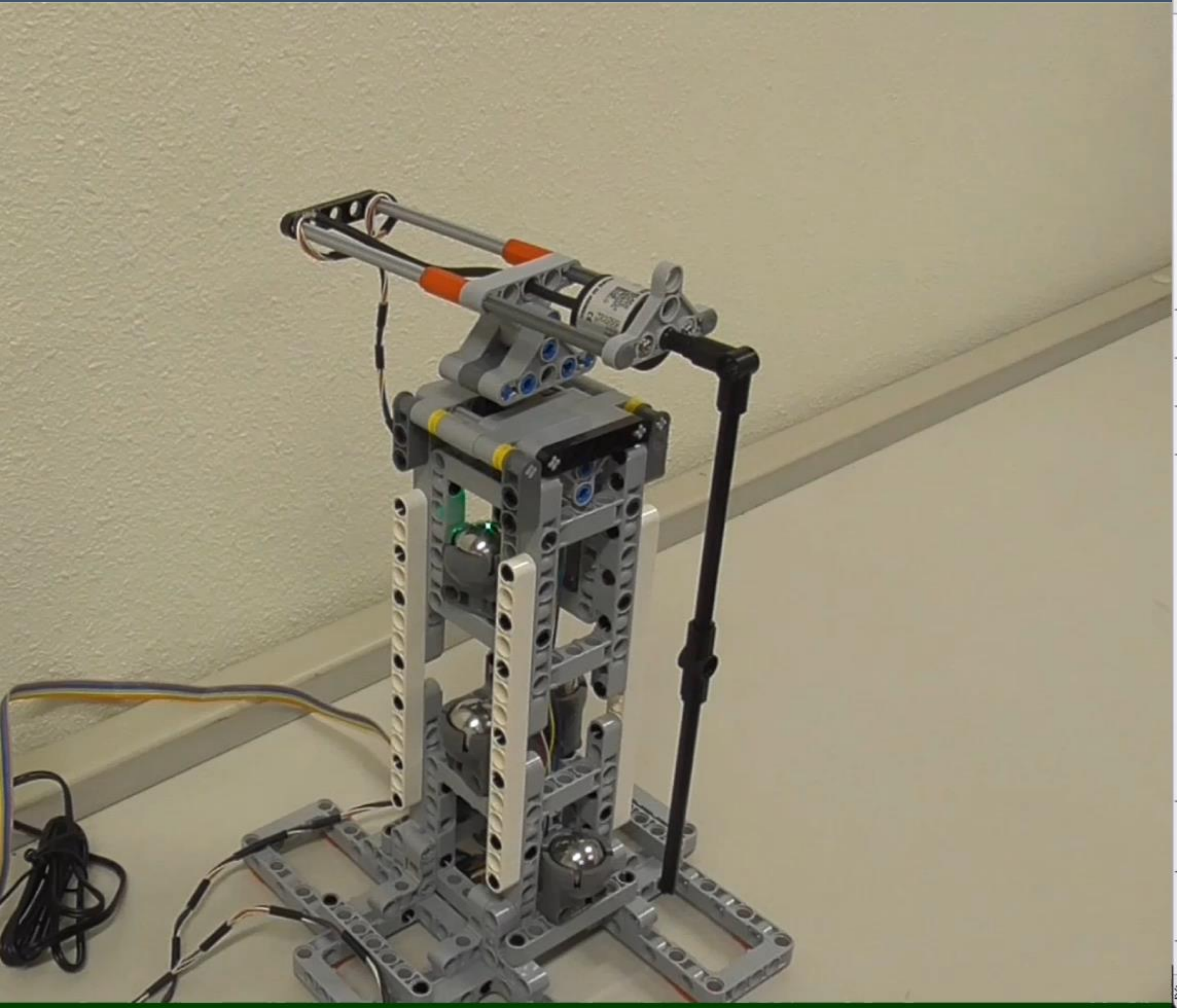


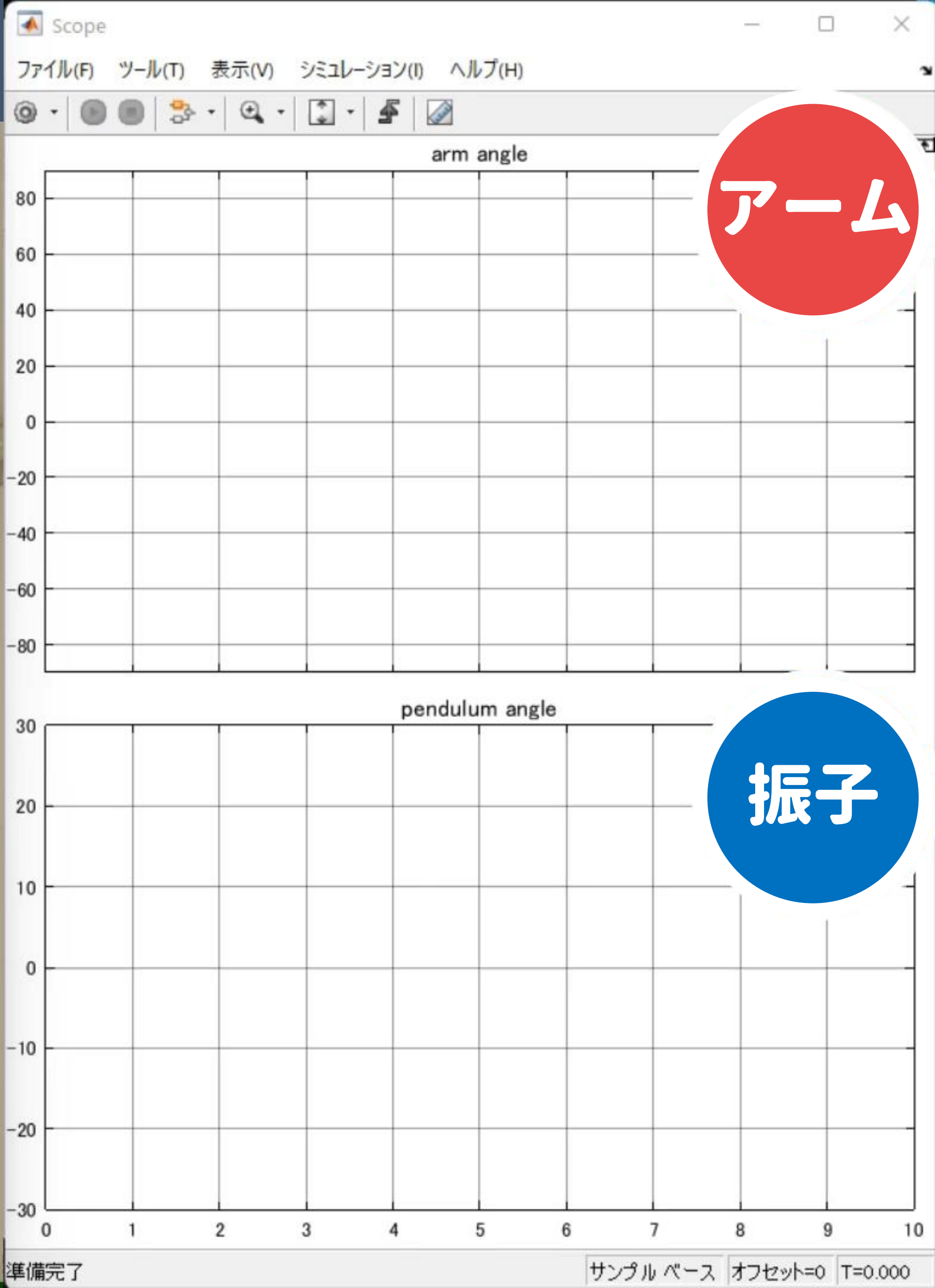
アーム

振子

振子の収束が
速くなった！

● 最適レギュレータ

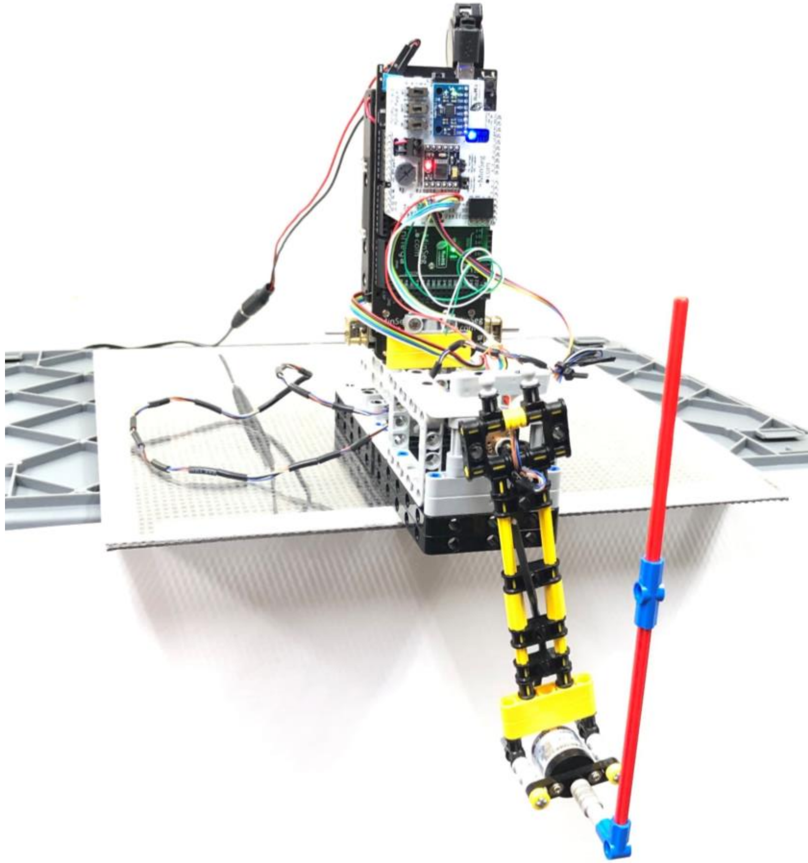




Scope
ファイル(F) ツール(T) 表示(V) シミュレーション(I) ヘルプ(H)
arm angle
80
60
40
20
0
-20
-40
-60
-80
アーム
pendulum angle
30
20
10
0
-10
-20
-30
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
振子
準備完了
サンプル ベース
オフセット=0
T=0.000

現代制御の学習

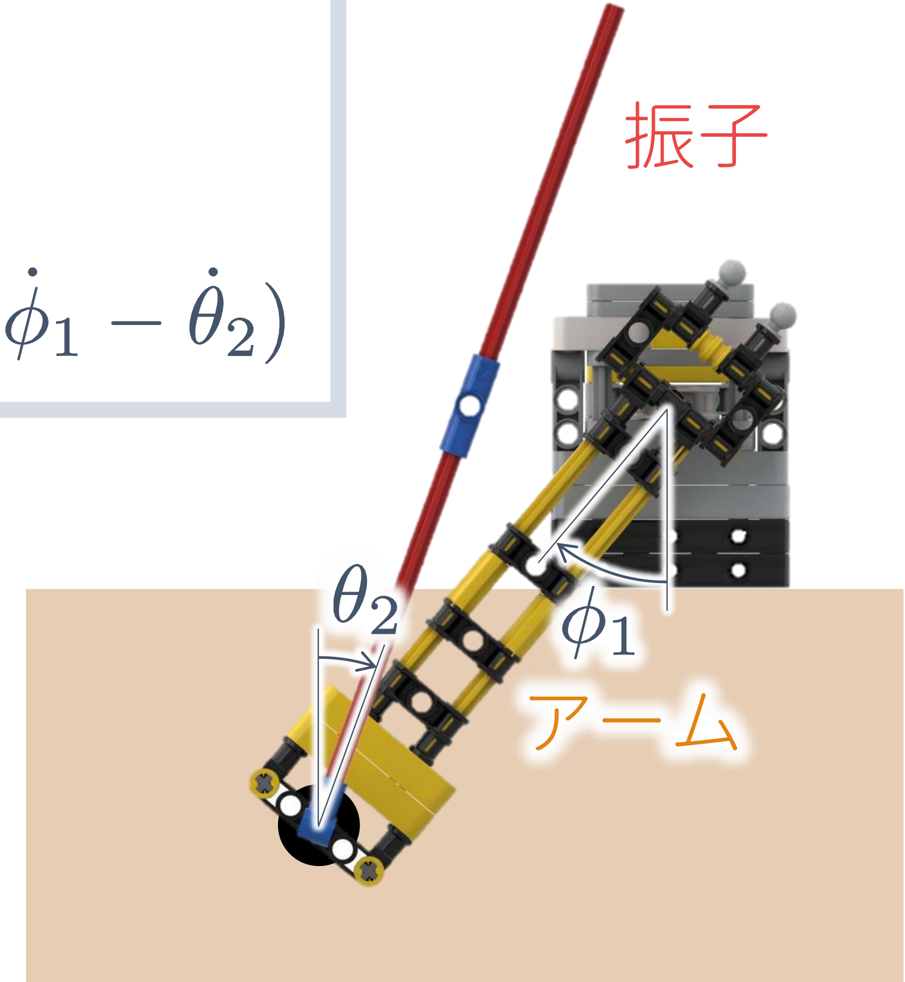
- ▶ クレーンの振れ止め制御
  - 設計モデル
  - 極配置法
  - 最適レギュレータ
- ▶ **倒立振子の安定化制御**
  - **設計モデル**
  - 倒立制御
  - 目標値追従制御



● 設計モデル

非線形モデル

$$
\begin{aligned}
\alpha_1\ddot{\phi}_1 &= -\beta_1\dot{\phi}_1 - \gamma_1\sin\phi_1 + v \\
-L_1\cos(\phi_1-\theta_2)\cdot\ddot{\phi}_1 + \alpha_2\ddot{\theta}_2 & \\
&= -L_1\dot{\phi}_1^2\sin(\phi_1-\theta_2) + g\sin\theta_2 + \beta_2(\dot{\phi}_1-\dot{\theta}_2)
\end{aligned}
$$



● 設計モデル

非線形モデル

$$
\begin{aligned}
\alpha_1 \ddot{\phi}_1 &= -\beta_1 \dot{\phi}_1 - \gamma_1 \sin\phi_1 + v \\
-L_1 \cos(\phi_1 - \theta_2) \cdot \ddot{\phi}_1 + \alpha_2 \ddot{\theta}_2 & \\
&= -L_1 \dot{\phi}_1^2 \sin(\phi_1 - \theta_2) + g \sin\theta_2 + \beta_2(\dot{\phi}_1 - \dot{\theta}_2)
\end{aligned}
$$

$$\sin\phi_1 \simeq \phi_1 \qquad \cos(\phi_1 - \theta_2) \simeq 1$$

$$\sin\theta_2 \simeq \theta_2 \qquad \dot{\phi}_1^2 \sin(\phi_1 - \theta_2) \simeq \dot{\phi}_1^2 (\phi_1 - \theta_2) \simeq 0$$

設計モデル (近似線形化モデル)

$$\alpha_1 \ddot{\phi}_1 = -\beta_1 \dot{\phi}_1 - \gamma_1 \phi_1 + v$$

$$-L_1 \ddot{\phi}_1 + \alpha_2 \ddot{\theta}_2 = g\theta_2 + \beta_2(\dot{\phi}_1 - \dot{\theta}_2)$$

アーム：真下近傍
振　子：真上近傍
で近似線形化

● 設計モデル

設計モデル (近似線形化モデル)

$$\alpha_1\ddot{\phi}_1 = -\beta_1\dot{\phi}_1 - \gamma_1\phi_1 + v$$

$$-L_1\ddot{\phi}_1 + \alpha_2\ddot{\theta}_2 = g\theta_2 + \beta_2(\dot{\phi}_1 - \dot{\theta}_2)$$

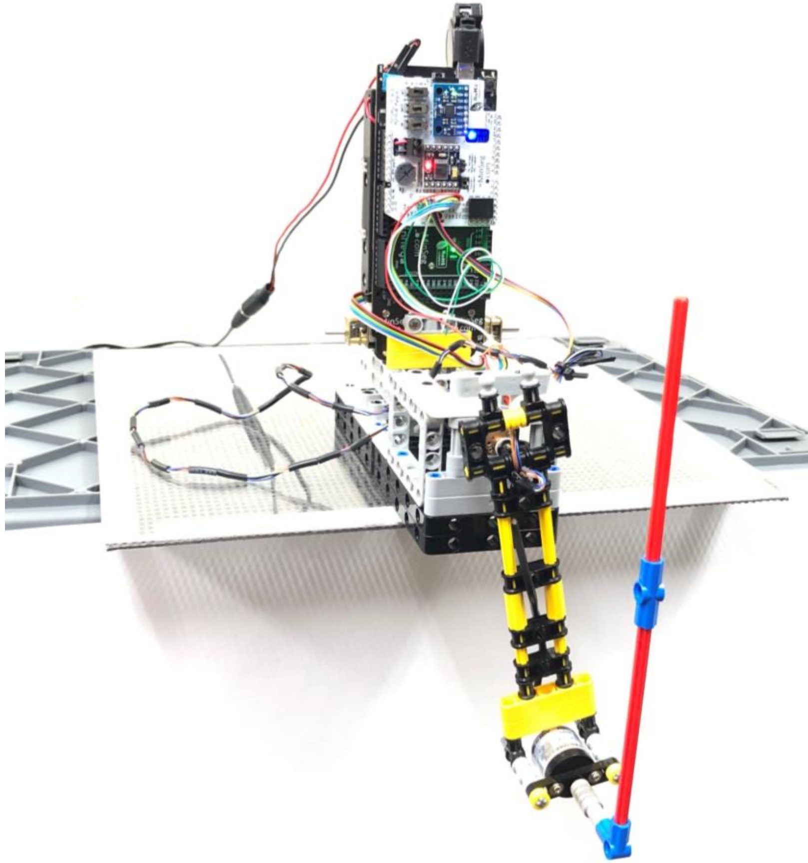
$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \dot{\phi}_1 \\ \theta_2 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}, \ u = v, \ y = \phi_1$$

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}u$$

振子の倒立を維持

現代制御の学習

- クレーンの振れ止め制御
  - 設計モデル
  - 極配置法
  - 最適レギュレータ
- **倒立振子の安定化制御**
  - 設計モデル
  - **倒立制御**
  - 目標値追従制御



● 倒立制御

設計モデル

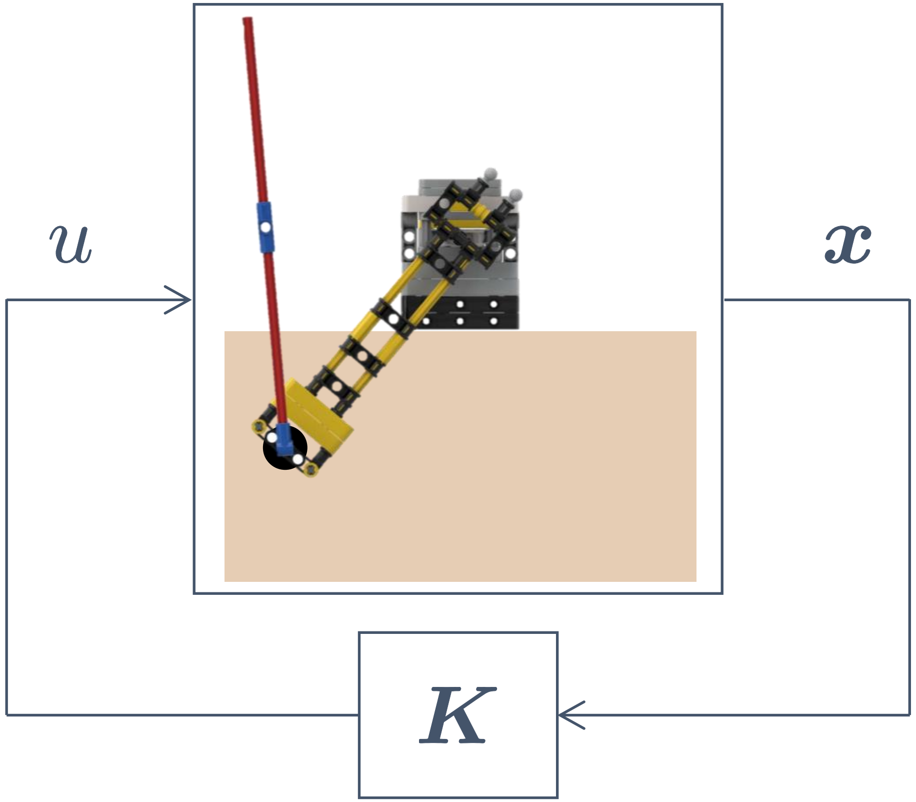
$$\dot{x} = Ax + Bu$$

状態フィードバック形式のコントローラ

$$u = Kx$$

最適レギュレータ

により設計！



$t \to \infty$ で $\boldsymbol{x} \to \mathbf{0}$ に制御！

レギュレータ制御

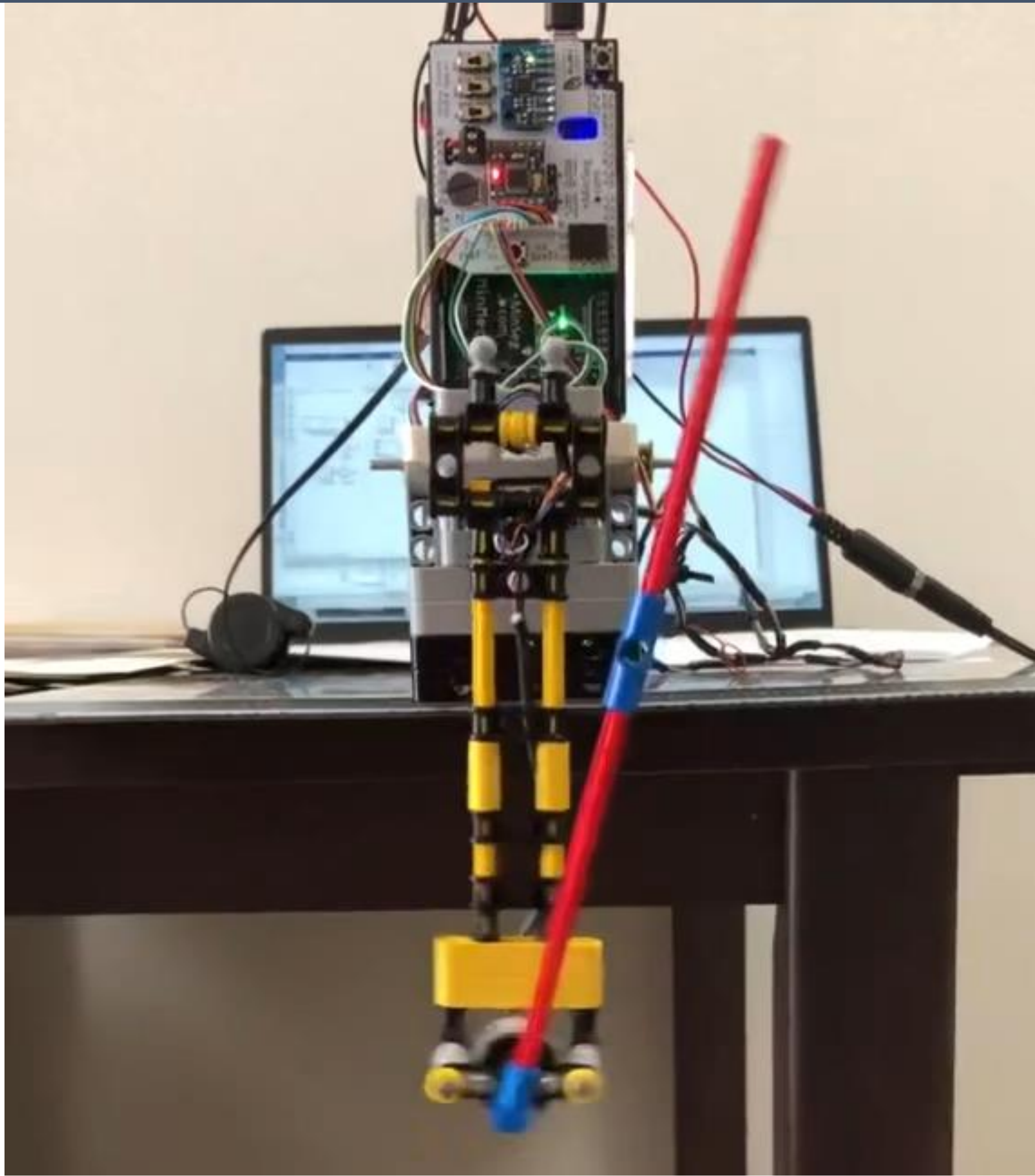
● 倒立制御

レギュレータ制御を実現！

ただし…

アームが真下から**ずれた位置**で**静止**

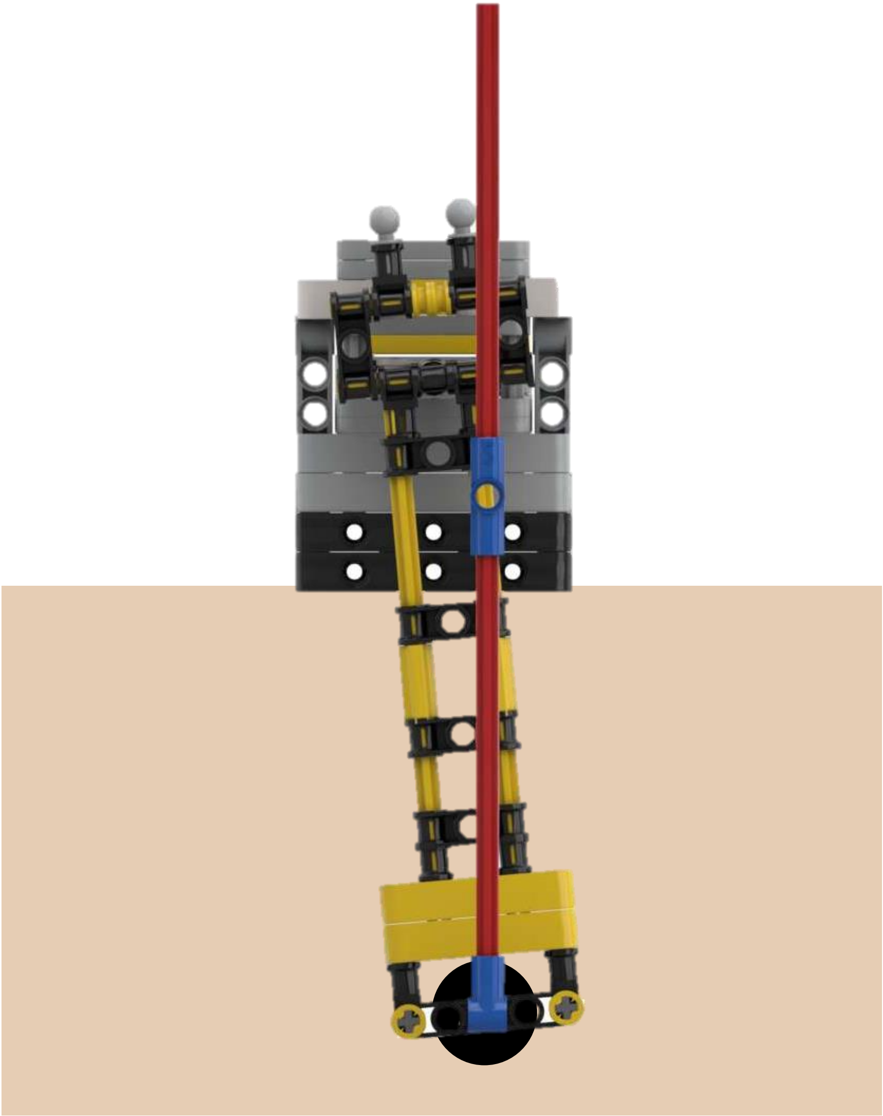
- 静止摩擦や動摩擦の影響
- ギヤのバックラッシュの影響



● レギュレータ制御の問題点

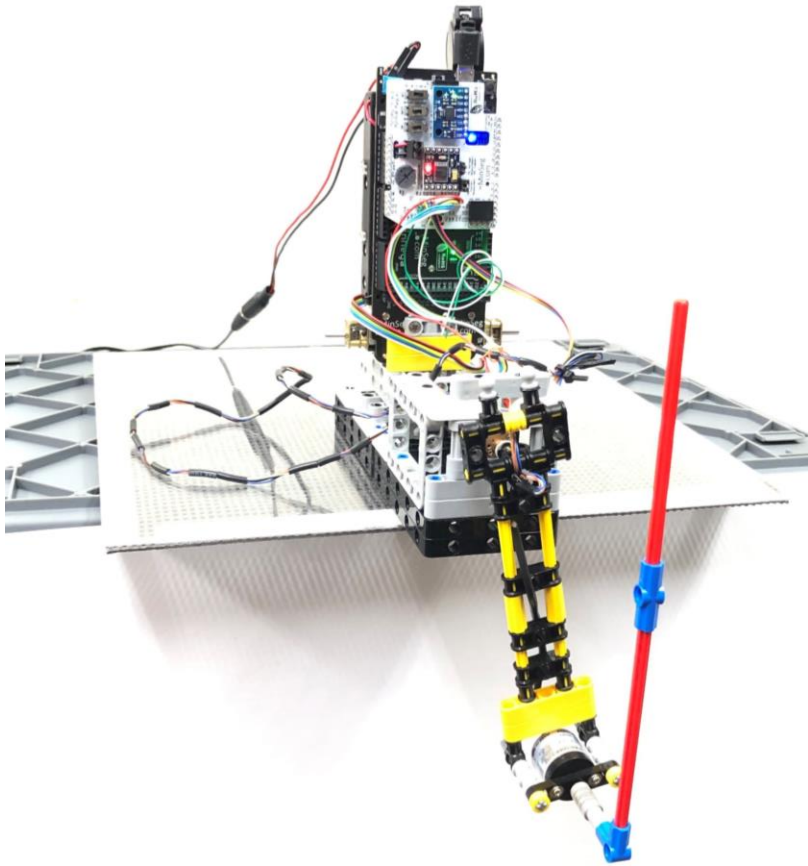
アームが真下から**ずれた**
位置で**静止**

そこで、
コントローラに**積分器**を
含ませることで対処！



現代制御の学習

- ▶ クレーンの振れ止め制御
  - 設計モデル
  - 極配置法
  - 最適レギュレータ
- ▶ **倒立振子の安定化制御**
  - 設計モデル
  - 倒立制御
  - **目標値追従制御**



● 設計モデル

設計モデル (近似線形化モデル)

$$\alpha_1\ddot{\phi}_1 = -\beta_1\dot{\phi}_1 - \gamma_1\phi_1 + v$$
$$-L_1\ddot{\phi}_1 + \alpha_2\ddot{\theta}_2 = g\theta_2 + \beta_2(\dot{\phi}_1 - \dot{\theta}_2)$$

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \dot{\phi}_1 \\ \theta_2 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}, \ u = v, \ y = \phi_1$$

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}u$$
$$y = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}$$

振子の倒立を維持したまま
アーム角を目標値に追従

● 積分型コントローラ

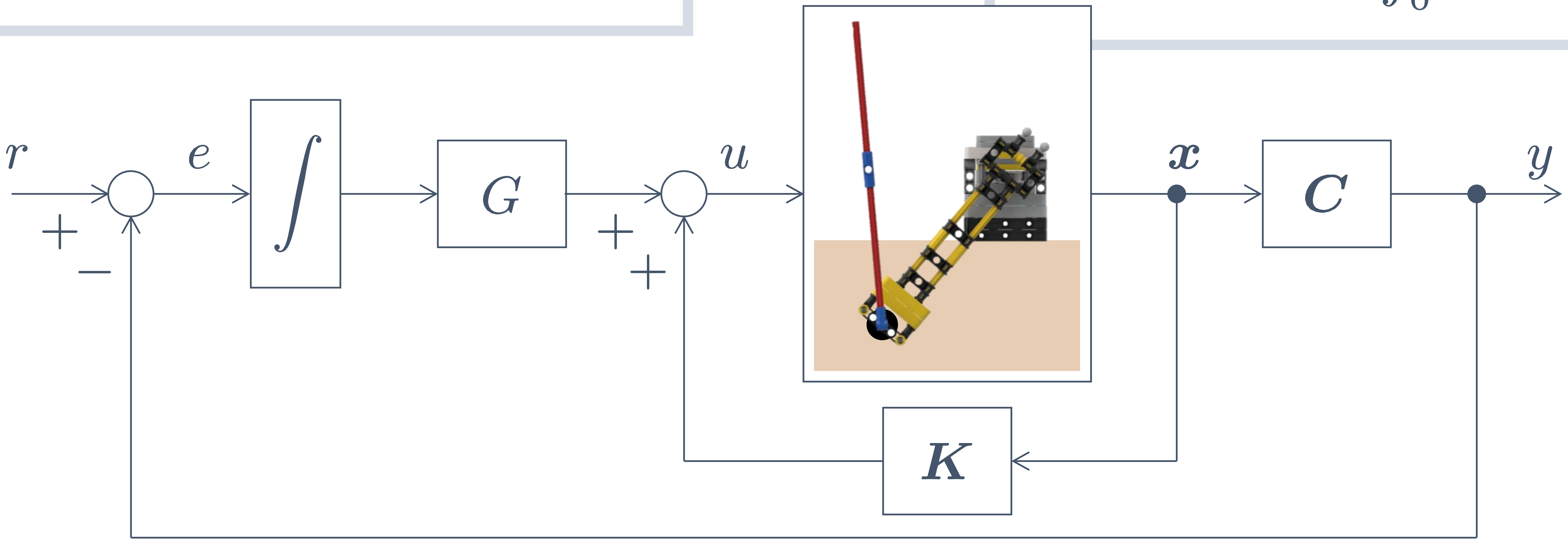
設計モデル

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx$$

偏差拡大系に対する最適レギュレータ

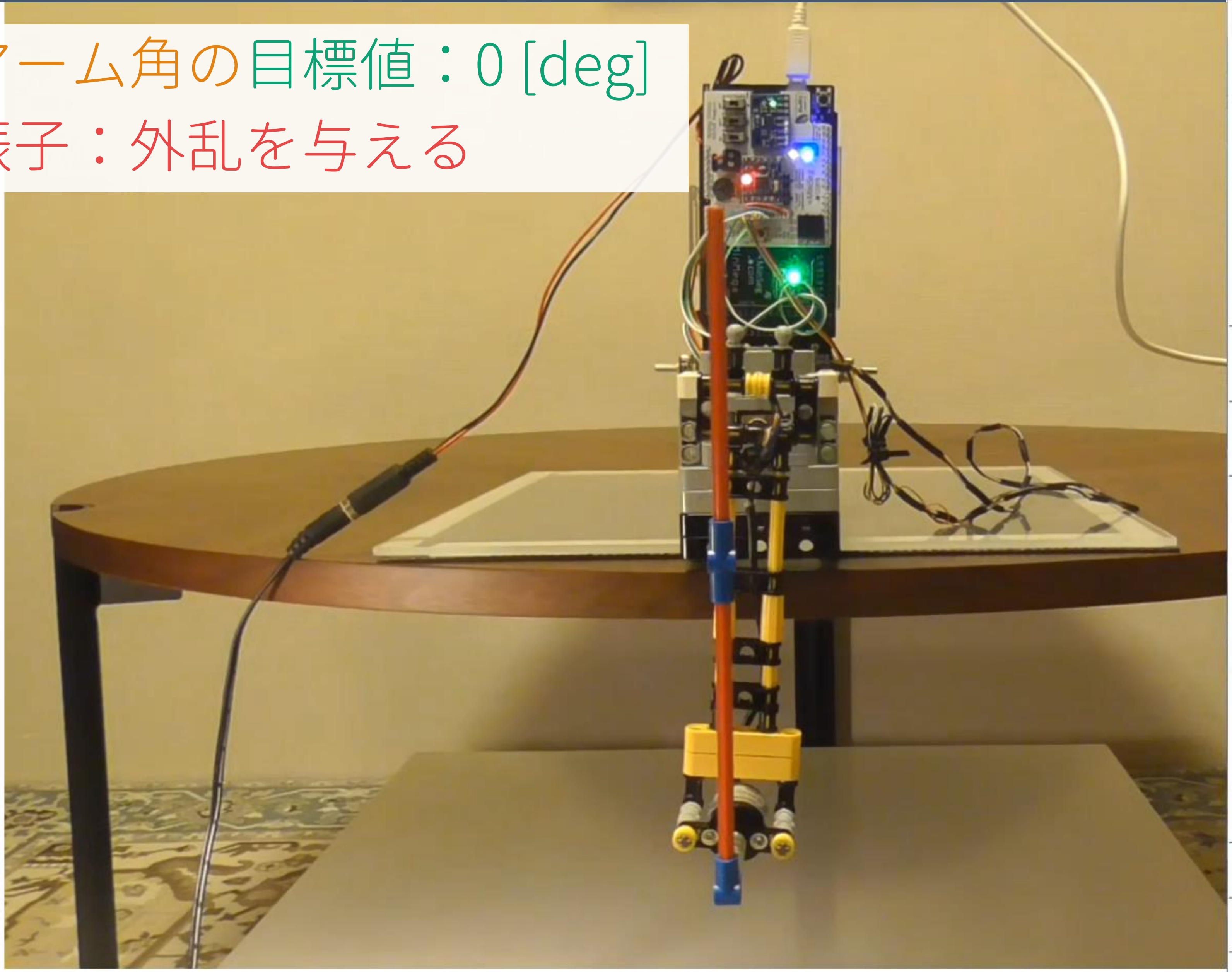
積分型コントローラ

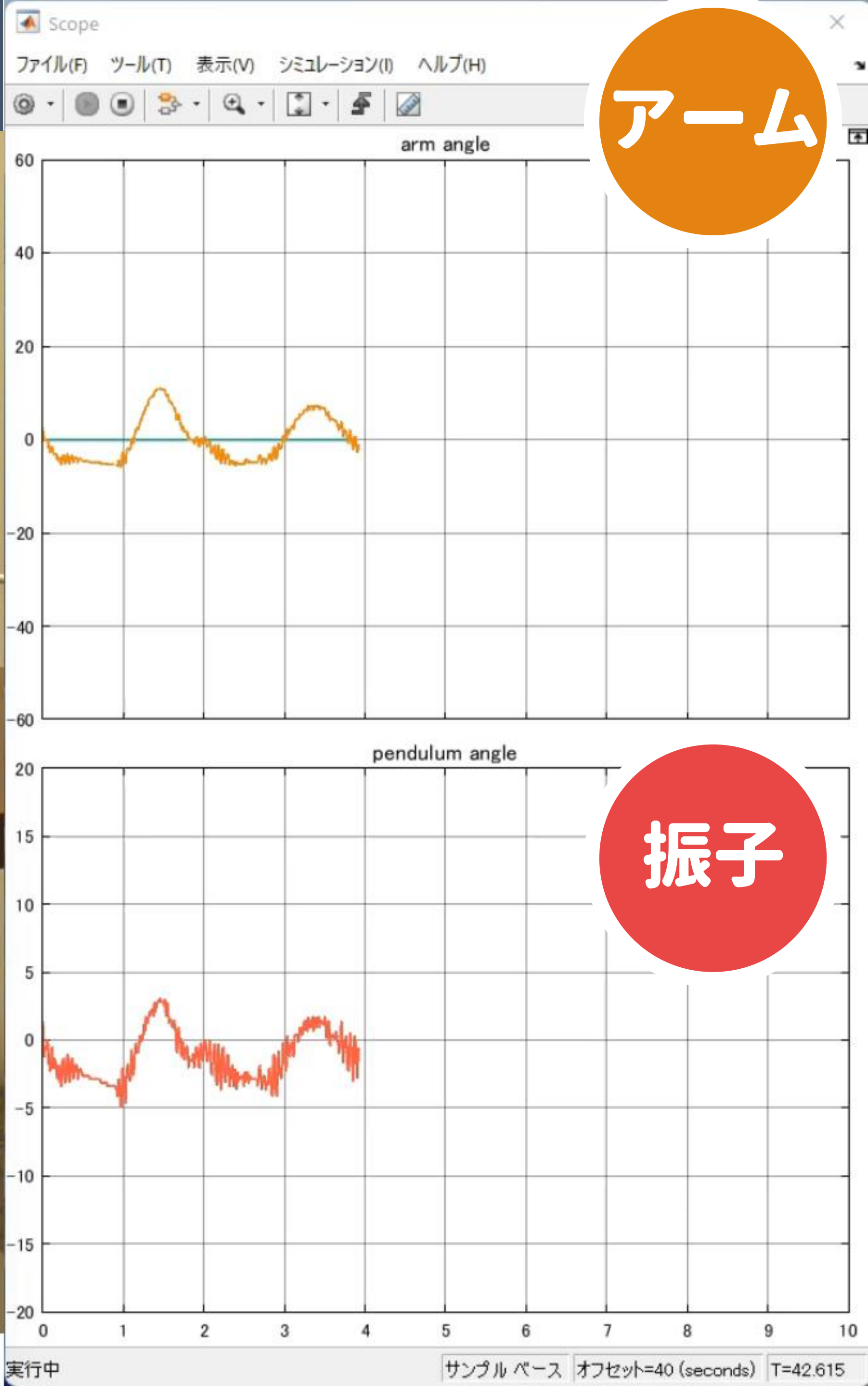
$$u = Kx + G\int_0^t e\,\mathrm{d}t$$



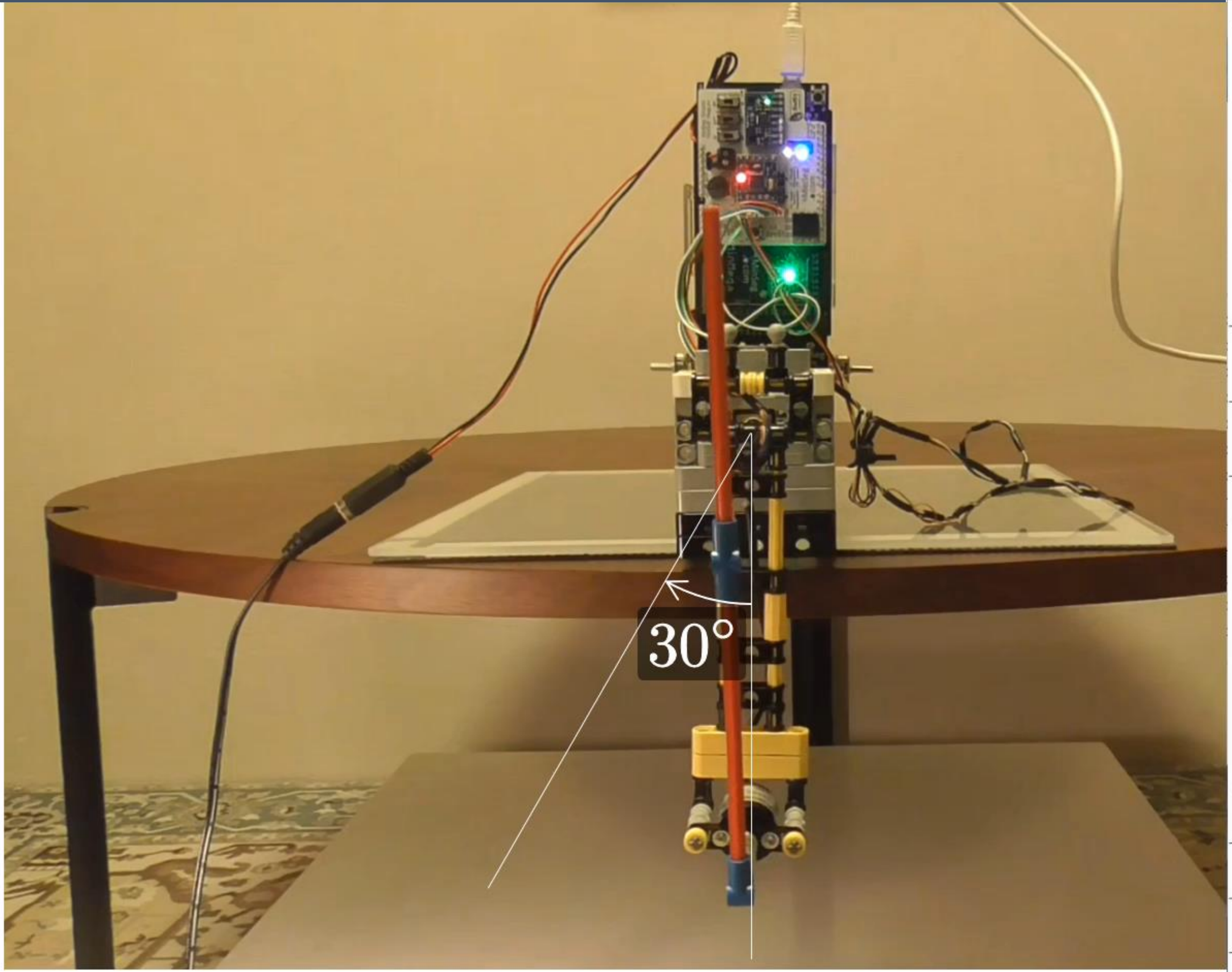
● 外乱応答

アーム角の目標値：0 [deg]
振子：外乱を与える



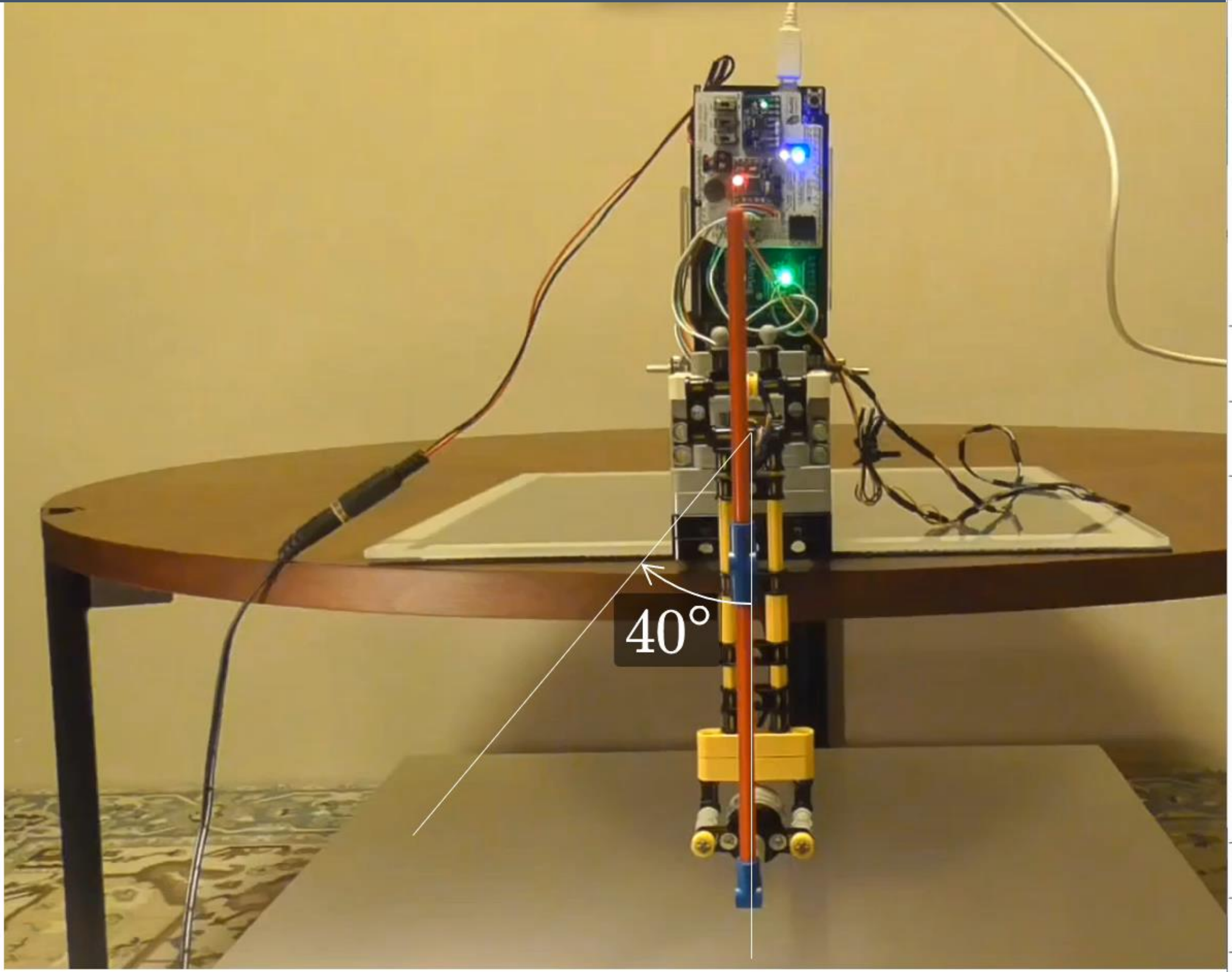


● 目標値応答


30°


Scope
ファイル(F) ツール(T) 表示(V) シミュレーション(I) ヘルプ(H)
アーム
arm angle
60
40
20
0
-20
-40
-60
アーム角の目標値：
0 [deg] と 30 [deg]
振子
pendulum angle
20
15
10
5
0
-5
-10
-15
-20
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
実行中
サンプル ベース
オフセット=10 (seconds)
T=16.670

● 目標値応答



アーム角の目標値：

0 [deg] と 40 [deg]

このスライドは終了です。