- はじめに
- LEGO倒立振子の製作
- PID制御の学習
- **モデリングの学習**
- 現代制御の学習
- アドバンスト制御の学習
- まとめ

モデリングの学習 (回転型倒立振子)

学習できる
内容の一例

- 数理モデル
- アームのパラメータ同定
  - 2次遅れ系の特性に基づく方法
  - 最小2乗法
- 振子のパラメータ同定
  - 1自由度振動系の特性に基づく方法
  - 最小2乗法

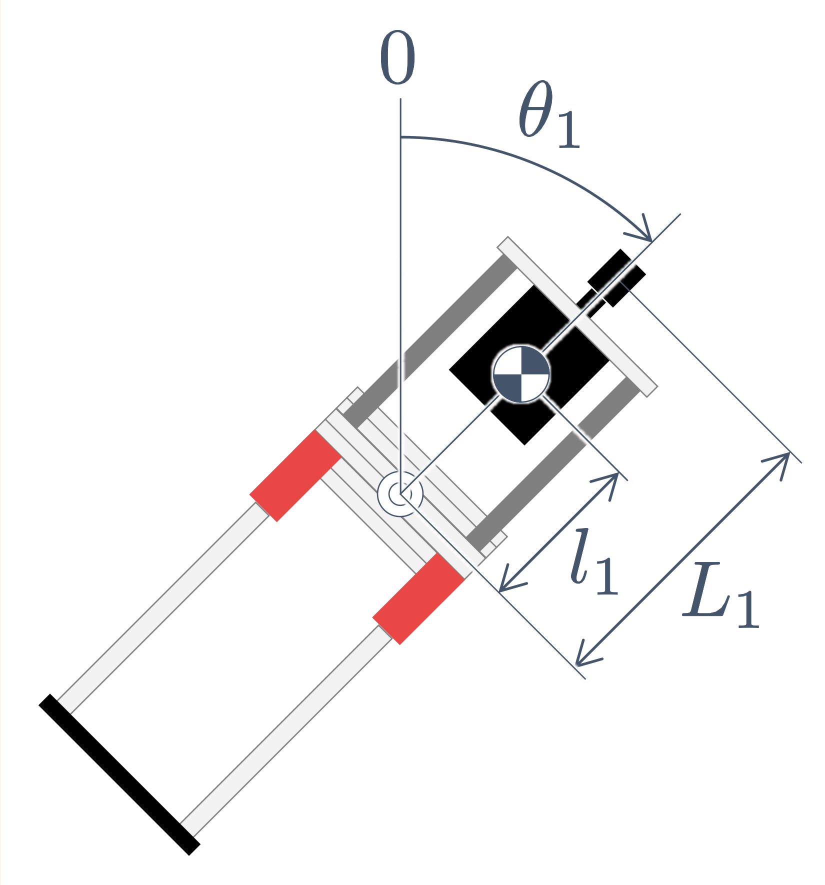
モデリングの学習 (回転型倒立振子)

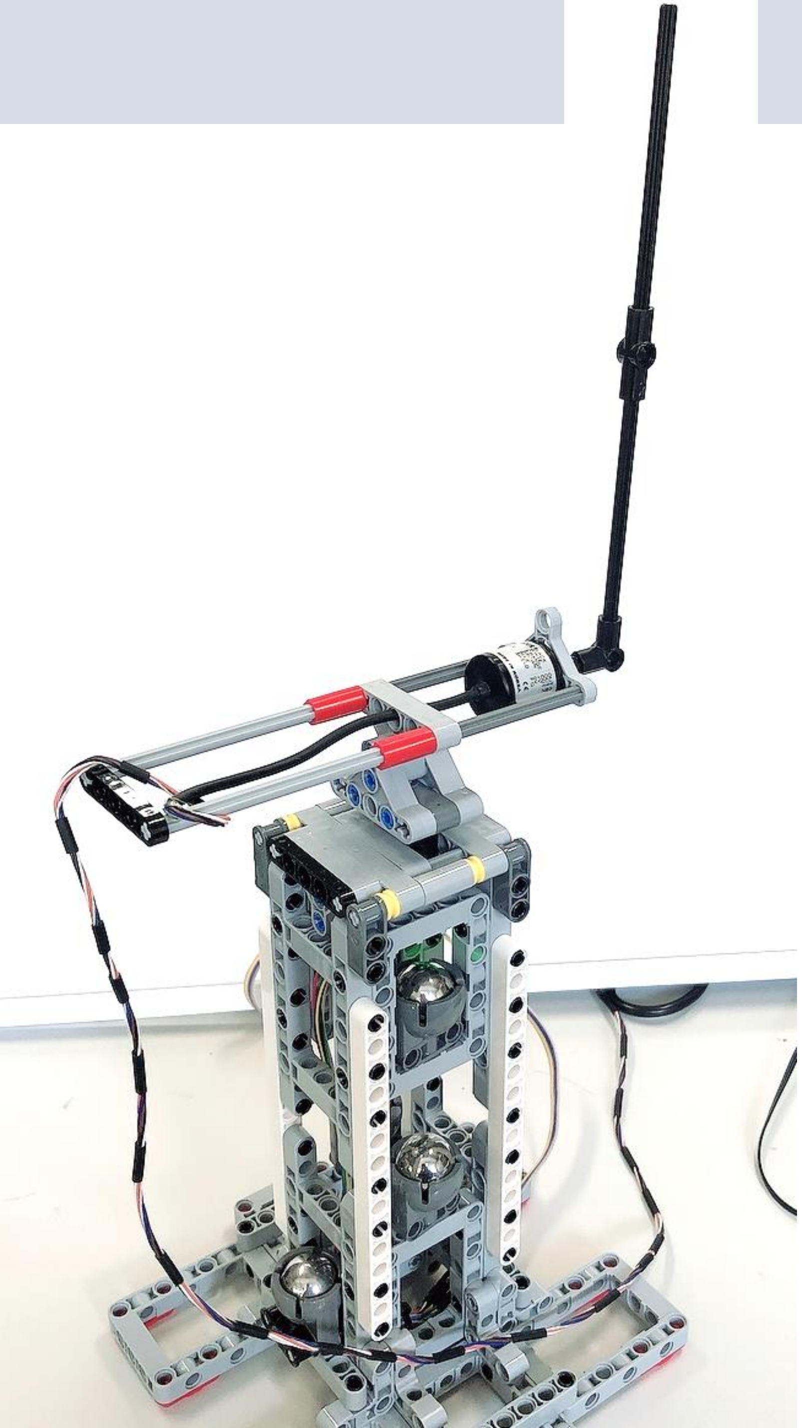
- ▶ **数理モデル**
- ▶ アームのパラメータ同定
  - ● 2次遅れ系の特性に基づく方法
  - ● 最小2乗法
- ▶ 振子のパラメータ同定
  - ● 1自由度振動系の特性に基づく方法
  - ● 最小2乗法

Lagrange 法
モデルの簡略化
パラメータ同定

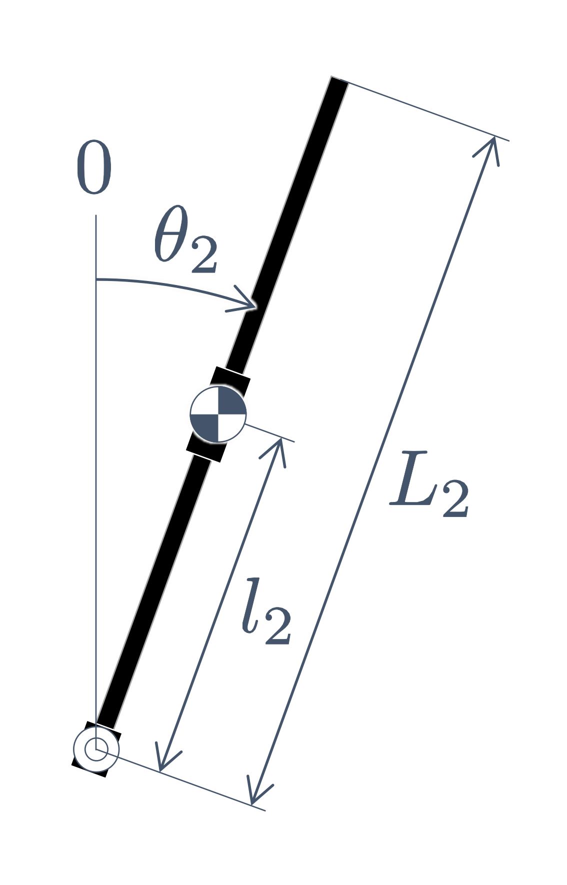
▶ 数理モデル

アーム (上面図)





振子 (正面図)



▶ 数理モデル

Lagrange の運動方程式

$$\left(J_1 + m_2 L_1^2 + J_2 \sin^2\theta_2\right)\ddot{\theta}_1 + m_2 L_1 l_2 \cos\theta_2 \cdot \ddot{\theta}_2$$
$$= \tau_1 - 2J_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \sin\theta_2 \cos\theta_2 + m_2 L_1 l_2 \dot{\theta}_2^2 \sin\theta_2 - c_1\dot{\theta}_1$$

アーム

$$m_2 L_1 l_2 \cos\theta_2 \cdot \ddot{\theta}_1 + J_2\ddot{\theta}_2$$
$$= J_2\dot{\theta}_1^2 \sin\theta_2 \cos\theta_2 + m_2 g l_2 \sin\theta_2 - c_2\dot{\theta}_2$$

振子

▶ 数理モデル

アーム駆動系の数理モデル

$$\left(J_1 + m_2 L_1^2 + J_2 \sin^2\theta_2\right)\ddot{\theta}_1 + m_2 L_1 l_2 \cos\theta_2 \cdot \ddot{\theta}_2$$
$$= \tau_1 - 2J_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \sin\theta_2\cos\theta_2 + m_2 L_1 l_2 \dot{\theta}_2^2 \sin\theta_2 - c_1\dot{\theta}_1$$

アーム

＋ ギヤード DC モータ

＋ モータドライバ

- ギヤの減速比が大
- 振子は軽量

振子がアームに
与える影響は小さい！

外乱

$$\ddot{\theta}_1 + a\dot{\theta}_1 = bv - d$$

指令電圧

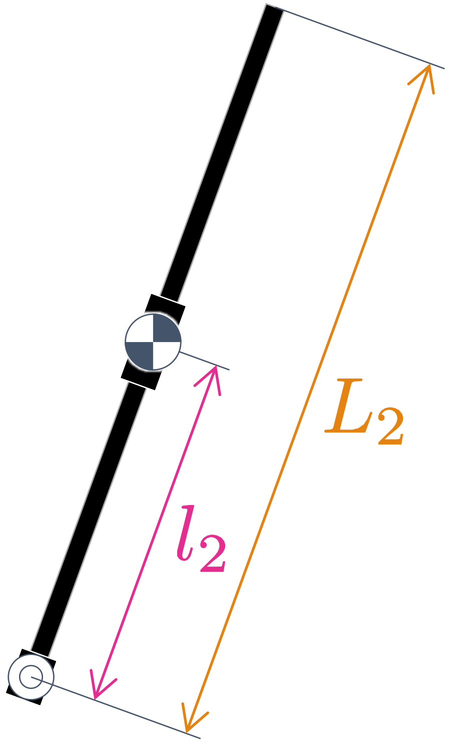
- 未知パラメータ
- 外乱：静止摩擦
  動摩擦
  振子の振動

▶ 数理モデル

振子の数理モデル

$$m_2 L_1 l_2 \cos\theta_2 \cdot \ddot{\theta}_1 + J_2 \ddot{\theta}_2 = J_2 \dot{\theta}_1^2 \sin\theta_2 \cos\theta_2 + m_2 g l_2 \sin\theta_2 - c_2 \dot{\theta}_2$$

- 既知パラメータ
- 既知パラメータ
  (振子を取り外せば測定可)
- 未知パラメータ



m_2 ：振子の質量

▶ 数理モデル

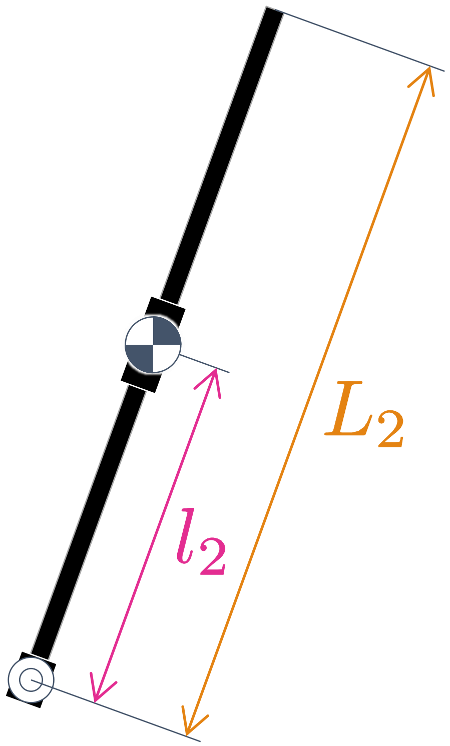
振子の数理モデル

$$
\begin{aligned}
m_2 L_1 l_2 \cos\theta_2 \cdot \ddot{\theta}_1 + J_2 \ddot{\theta}_2 \\
= J_2 \dot{\theta}_1^2 \sin\theta_2 \cos\theta_2 + m_2 g l_2 \sin\theta_2 - c_2 \dot{\theta}_2
\end{aligned}
$$

$$\alpha = \frac{J_2}{m_2 l_2}, \quad \beta = \frac{c_2}{m_2 l_2}$$

$$
\begin{aligned}
L_1 \cos\theta_2 \cdot \ddot{\theta}_1 + \alpha \ddot{\theta}_2 \\
= \alpha \dot{\theta}_1^2 \sin\theta_2 \cos\theta_2 + g \sin\theta_2 - \beta \dot{\theta}_2
\end{aligned}
$$

- 既知パラメータ
- 未知パラメータ



m_2：振子の質量

▶ 数理モデル

回転型倒立振子の数理モデル

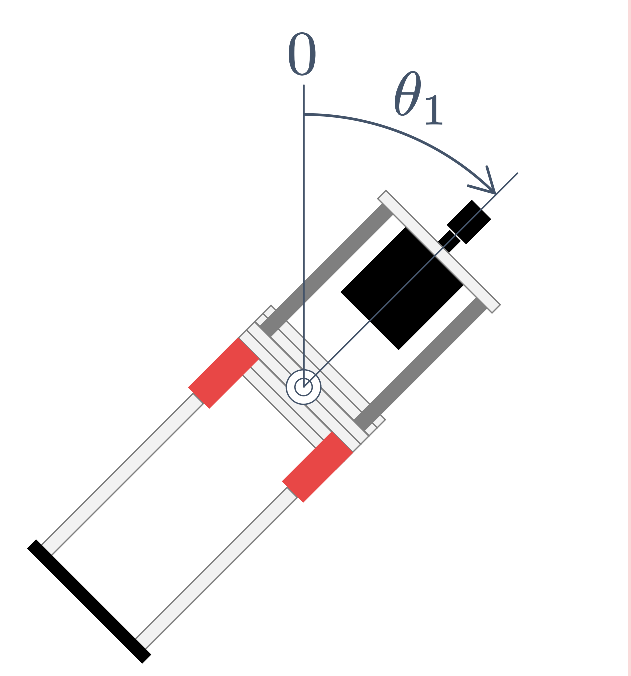
アーム

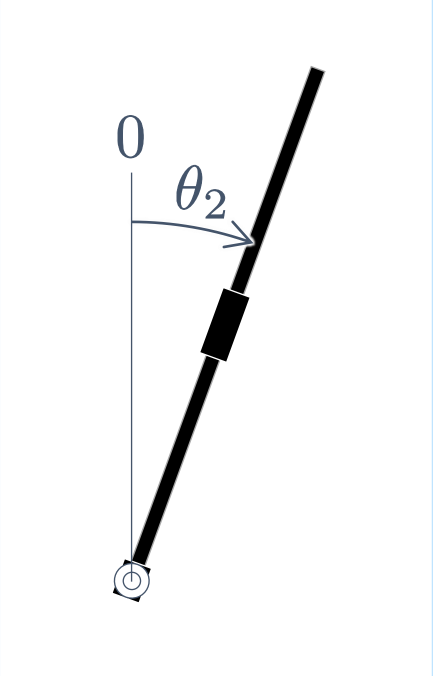
$$\ddot{\theta}_1 + a\dot{\theta}_1 = bv - d$$

振子

$$L_1 \cos\theta_2 \cdot \ddot{\theta}_1 + \alpha\ddot{\theta}_2 = \alpha\dot{\theta}_1^2 \sin\theta_2 \cos\theta_2 + g\sin\theta_2 - \beta\dot{\theta}_2$$

- 既知パラメータ
- 未知パラメータ
- 外乱 d ：静止摩擦
  動摩擦
  振子の振動





モデリングの学習 (回転型倒立振子)

- 数理モデル
- **アームのパラメータ同定**
  - 2 次遅れ系の特性に基づく方法
  - 最小 2 乗法
- 振子のパラメータ同定
  - 1 自由度振動系の特性に基づく方法
  - 最小 2 乗法

▶ アームのパラメータ同定

アームのPID制御で
説明したので**省略**します。

モデリングの学習 (回転型倒立振子)

- 数理モデル
- アームのパラメータ同定
  - 2次遅れ系の特性に基づく方法
  - 最小2乗法
- **振子のパラメータ同定**
  - **1自由度振動系の特性に基づく方法**
  - 最小2乗法

● 線形 1 自由度振動系

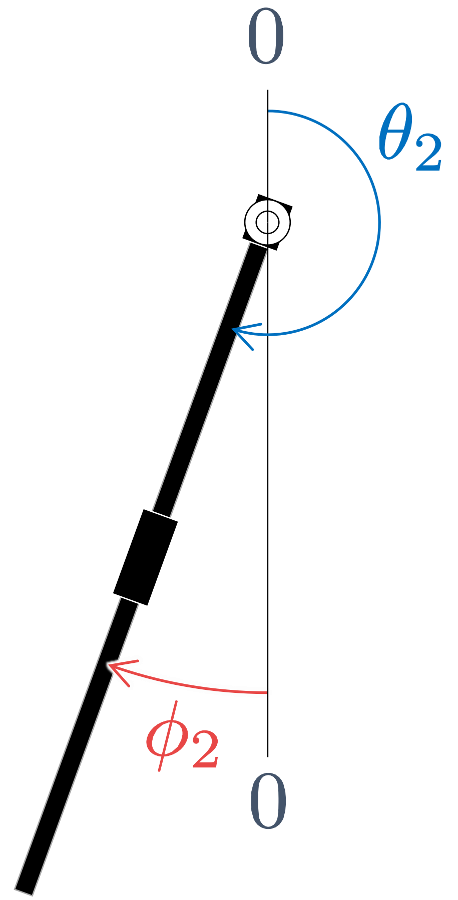
振子の数理モデル

$$L_1 \cos\theta_2 \cdot \ddot{\theta}_1 + \alpha\ddot{\theta}_2 = \alpha\dot{\theta}_1^2 \sin\theta_2 \cos\theta_2 + g\sin\theta_2 - \beta\dot{\theta}_2$$

振子角の基準を真下に変更

$$\theta_2 = \phi_2 + \pi$$

$$-L_1 \cos\phi_2 \cdot \ddot{\theta}_1 + \alpha\ddot{\phi}_2 = \alpha\dot{\theta}_1^2 \sin\phi_2 \cos\phi_2 - g\sin\phi_2 - \beta\dot{\phi}_2$$



● 線形 1 自由度振動系

振子の数理モデル：真下基準

$$
\begin{aligned}
-L_1 \cos\phi_2 \cdot \ddot{\theta}_1 + \alpha\ddot{\phi}_2 \\
= \alpha\dot{\theta}_1^2 \sin\phi_2\cos\phi_2 - g\sin\phi_2 - \beta\dot{\phi}_2
\end{aligned}
$$

アームを固定

$$\dot{\theta}_1 = \ddot{\theta}_1 = 0$$

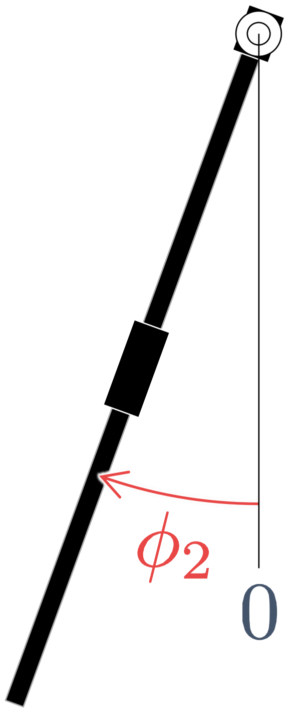
$$\alpha\ddot{\phi}_2 + \beta\dot{\phi}_2 + g\sin\phi_2 = 0$$

振子が真下の近傍で動作：**線形化**

$$\sin\phi_2 \simeq \phi_2$$

$$\alpha\ddot{\phi}_2 + \beta\dot{\phi}_2 + g\phi_2 = 0$$

2 階の
線形微分方程式



● 線形１自由度振動系

振子の数理モデル：真下基準

$$\alpha\ddot{\phi}_2 + \beta\dot{\phi}_2 + g\phi_2 = 0$$

２階の
線形微分方程式

$$\ddot{\phi}_2 + 2\zeta_2\omega_{\mathrm{n}2}\dot{\phi}_2 + \omega_{\mathrm{n}2}^2\phi_2 = 0$$

$$\begin{cases} 2\zeta_2\omega_{\mathrm{n}2} = \dfrac{\beta}{\alpha} \\ \omega_{\mathrm{n}2}^2 = \dfrac{g}{\alpha} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \dfrac{g}{\omega_{\mathrm{n}2}^2} \\ \beta = 2\zeta_2\omega_{\mathrm{n}2}\alpha \end{cases}$$

● 線形１自由度振動系

振子が真下の近傍では…

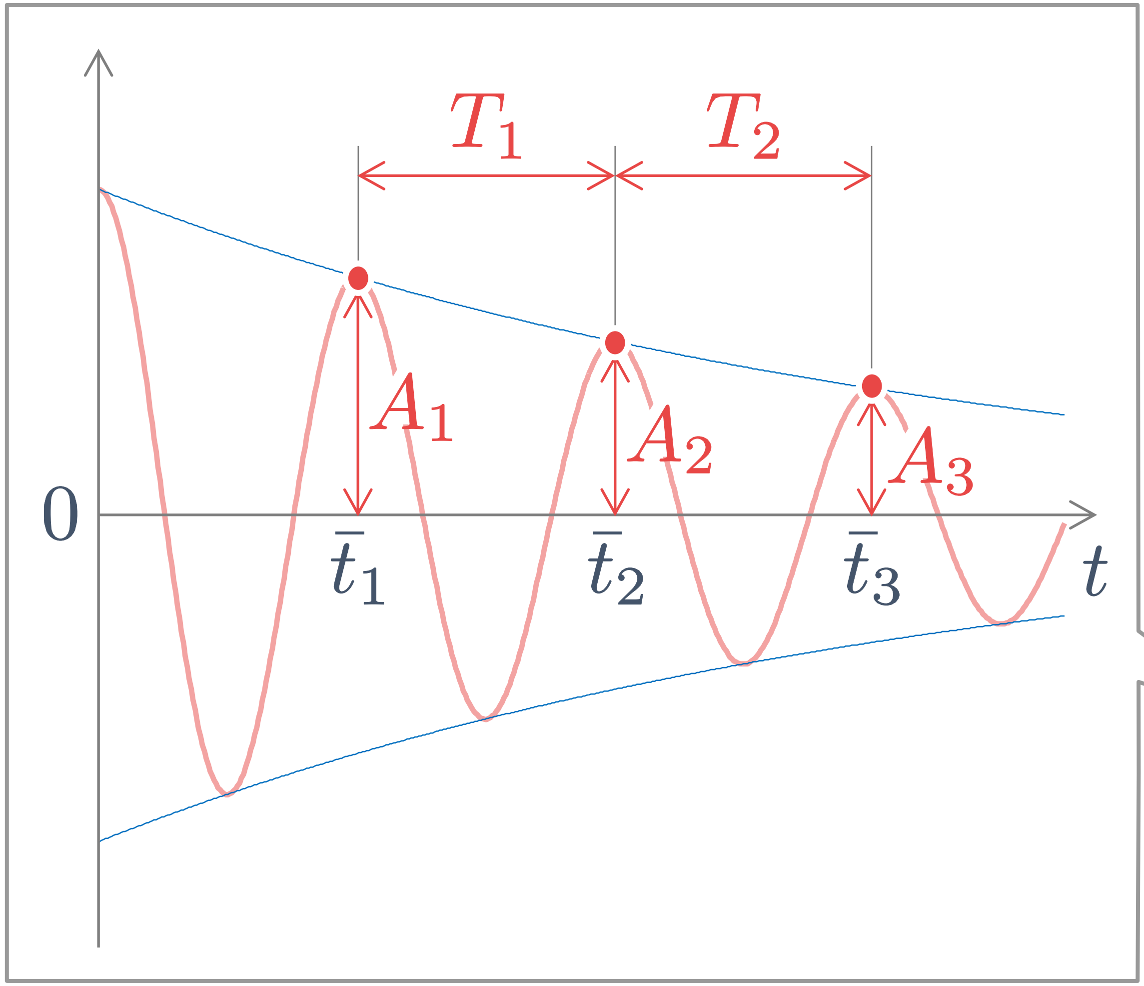
自由振動

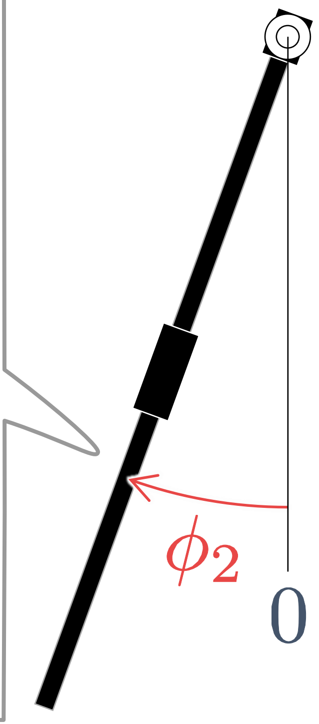
振動周期

$$T = T_i \quad : 一定$$

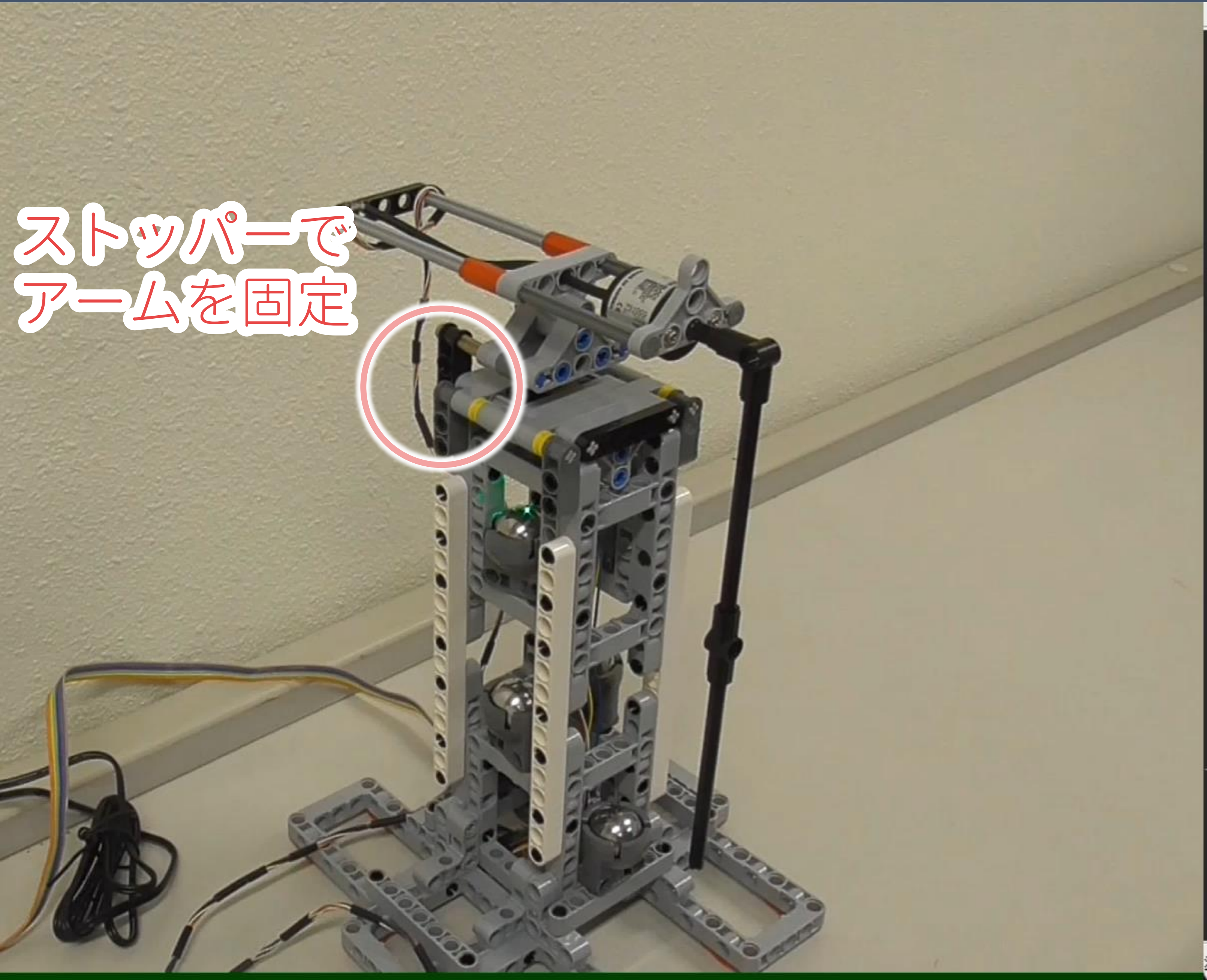
減衰率

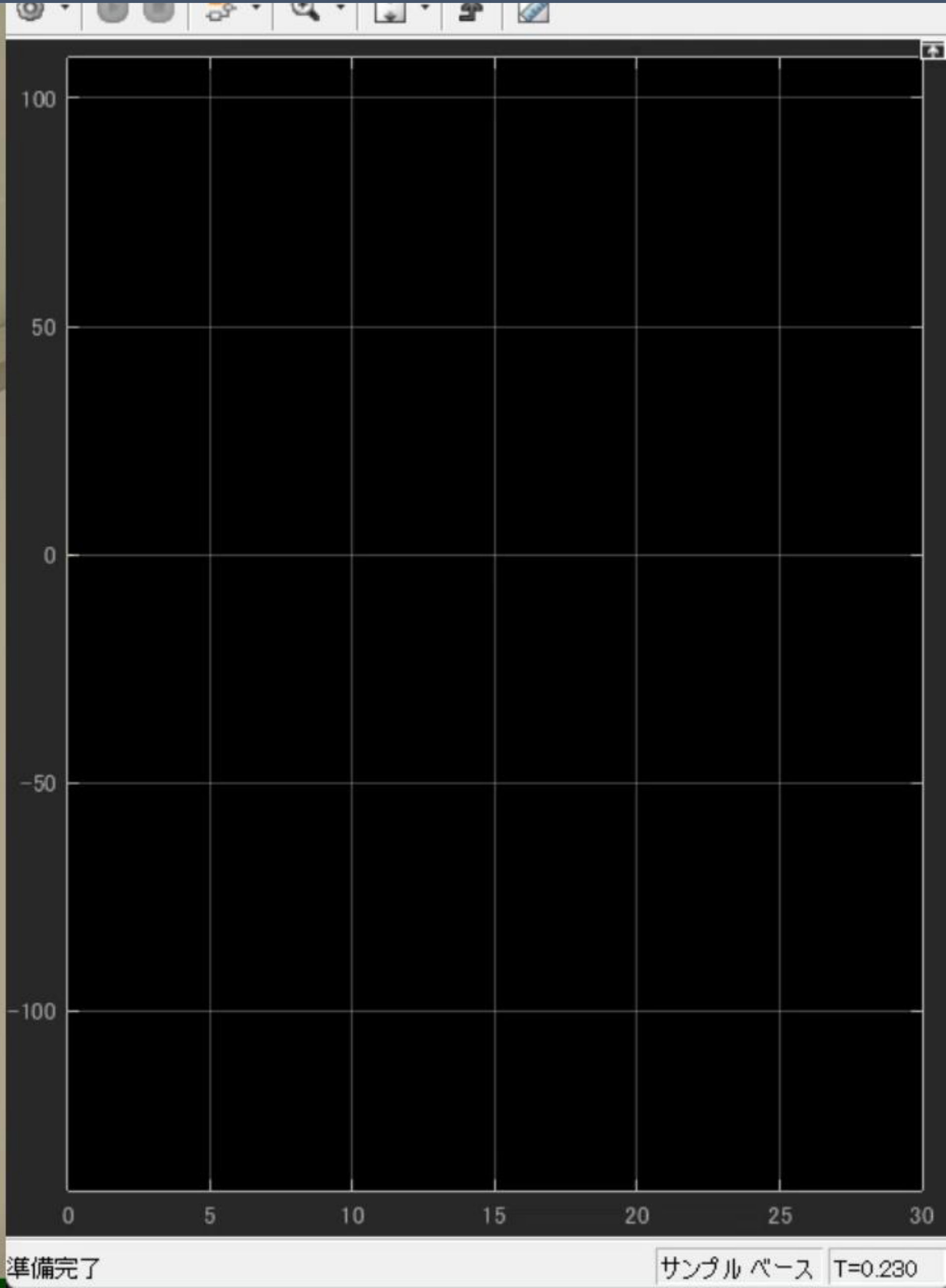
$$\lambda = \lambda_i = \frac{A_{i+1}}{A_i} \quad : 一定$$





● 線形１自由度振動系


ストッパーで
アームを固定

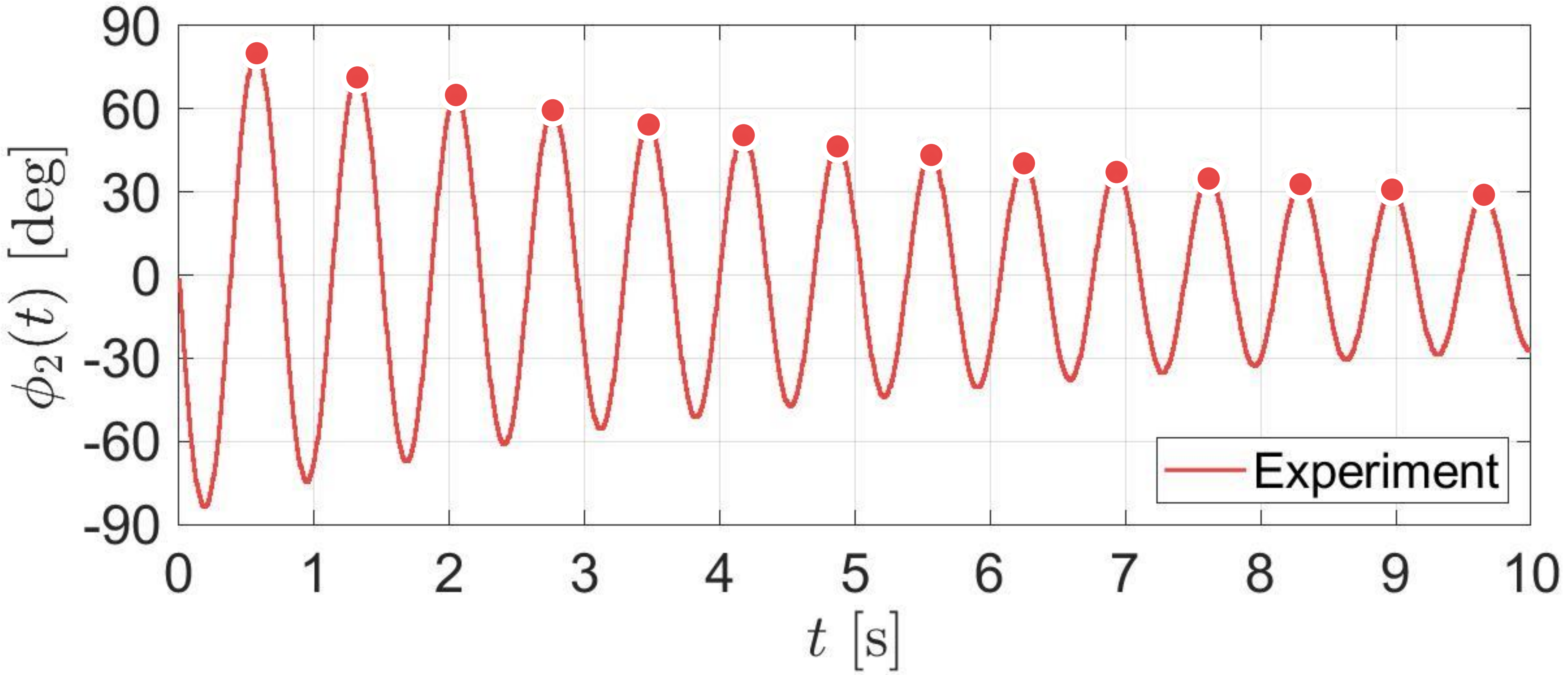

100
50
0
-50
-100
0
5
10
15
20
25
30
準備完了
サンプル ベース
T=0.230

● 線形 1 自由度振動系

$$\begin{cases} T = \dfrac{2\pi}{\omega_{\mathrm{n}2}\sqrt{1-\zeta_2^2}} \\ \lambda = e^{-\zeta_2 \omega_{\mathrm{n}2} T} \end{cases}$$

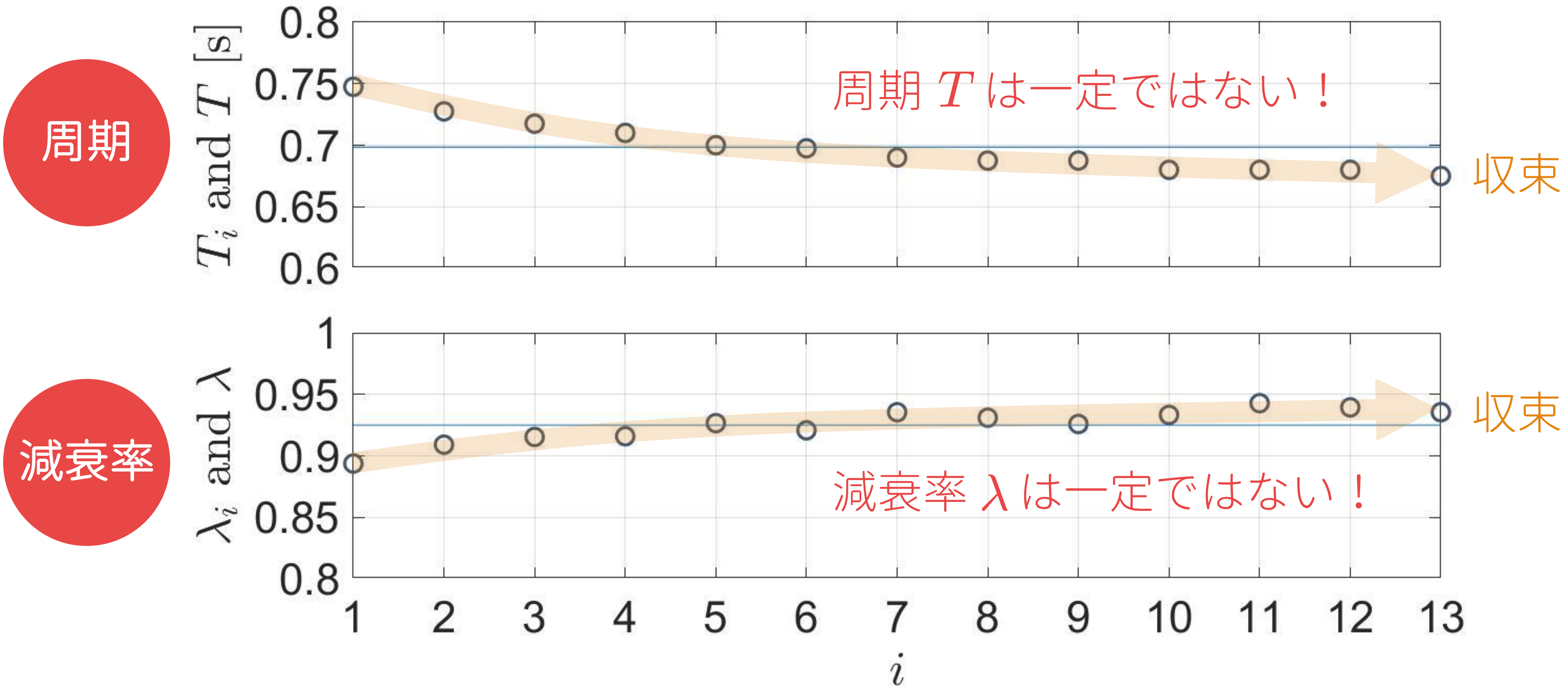
$$\begin{cases} \zeta_2 \\ \omega_{\mathrm{n}2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{g}{\omega_{\mathrm{n}2}^2} \\ \beta = 2\zeta_2 \omega_{\mathrm{n}2} \alpha \end{cases}$$



● 線形 1 自由度振動系

振子の**初期角度が大きい**ので …

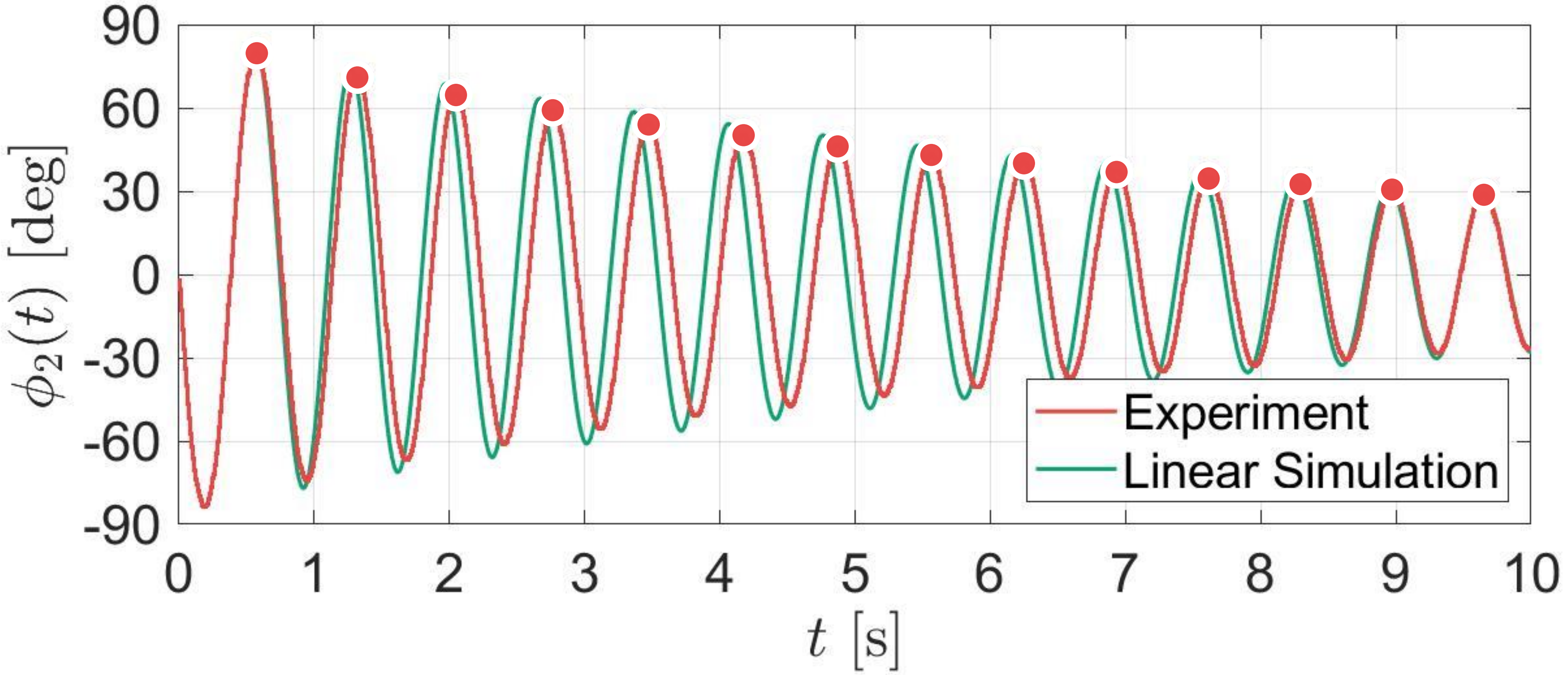


● 線形 1 自由度振動系

振子の**初期角度が大きい**ので …

実験結果と**線形シミュレーション結果**は**ずれる！**

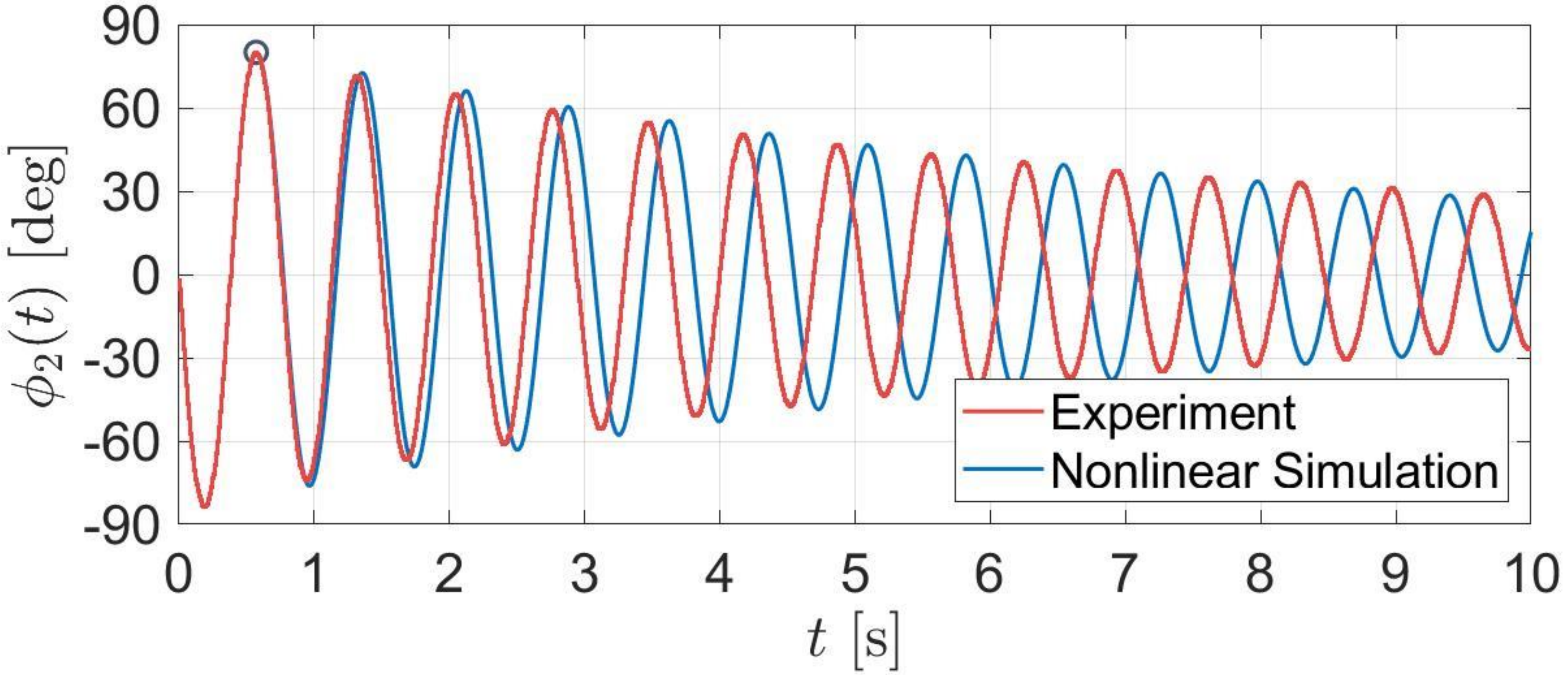
(平均的に一致)



● 線形 1 自由度振動系

振子の**初期角度が大きい**ので …

実験結果と**非線形シミュレーション結果**は**かなりずれる！**



そこで…

最小２乗法により

非線形モデルのままパラメータ同定

モデリングの学習 (回転型倒立振子)

- ▶ 数理モデル
- ▶ アームのパラメータ同定
  - 2次遅れ系の特性に基づく方法
  - 最小2乗法
- ▶ **振子のパラメータ同定**
  - 1自由度振動系の特性に基づく方法
  - **最小2乗法**

最小2乗法
数値微分
フィルタ処理

● 最小 2 乗法

振子の数理モデル：非線形モデル

$$\alpha\ddot{\phi}_2 + \beta\dot{\phi}_2 + g\sin\phi_2 = 0$$

2 階の
非線形微分方程式

$$\underbrace{\begin{bmatrix}\ddot{\phi}_2(t) & \dot{\phi}_2(t)\end{bmatrix}}_{M(t)}\underbrace{\begin{bmatrix}\alpha \\ \beta\end{bmatrix}}_{p} = \underbrace{-g\sin\phi_2(t)}_{N(t)}$$

● 最小２乗法

振子の数理モデル：非線形モデル

$$\begin{bmatrix} \ddot{\phi}_2(t) & \dot{\phi}_2(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = -g \sin \phi_2(t)$$

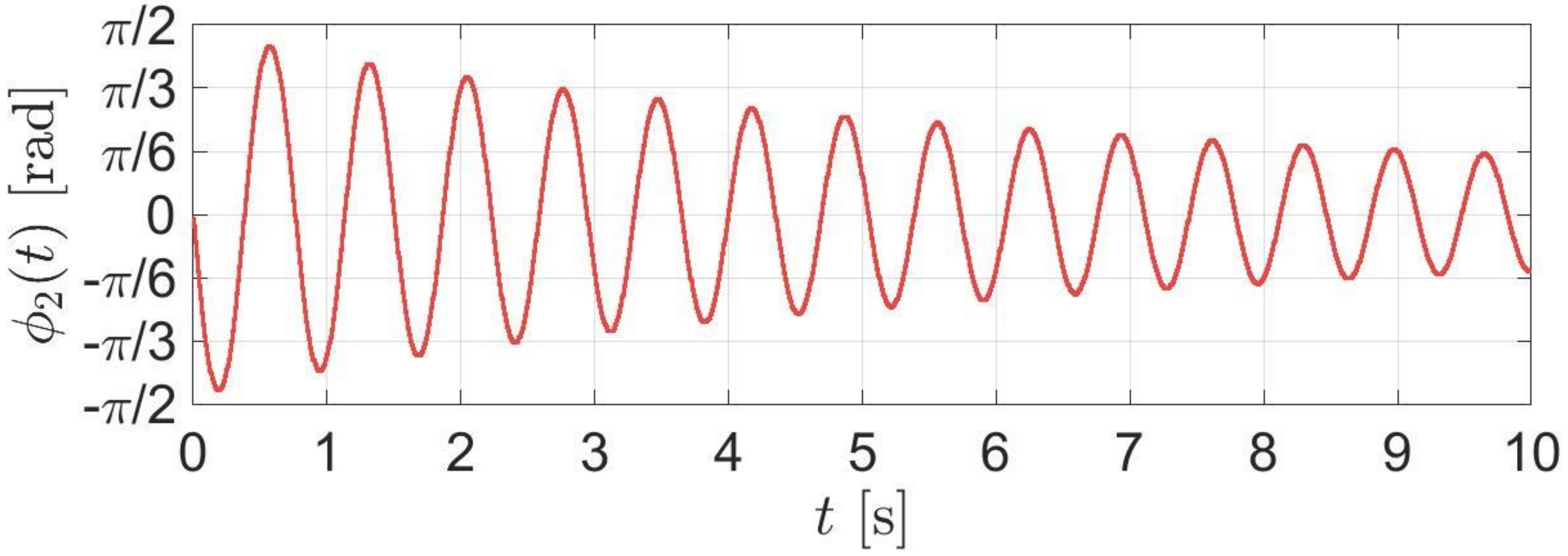
$$t = 0,\ h,\ \ldots,\ kh \ (h = 10\ [\mathrm{ms}])$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \ddot{\phi}_2[0] & \dot{\phi}_2[0] \\ \ddot{\phi}_2[1] & \dot{\phi}_2[1] \\ \vdots & \vdots \\ \ddot{\phi}_2[k] & \dot{\phi}_2[k] \end{bmatrix}}_{M_\mathrm{s}} \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}}_{p} = \underbrace{\begin{bmatrix} -g \sin \phi_2[0] \\ -g \sin \phi_2[1] \\ \vdots \\ -g \sin \phi_2[k] \end{bmatrix}}_{N_\mathrm{s}}$$

$$M_\mathrm{s}^\top M_\mathrm{s} p = M_\mathrm{s}^\top N_\mathrm{s}$$

$$p = (M_\mathrm{s}^\top M_\mathrm{s})^{-1} M_\mathrm{s}^\top N_\mathrm{s}$$

● 最小 2 乗法



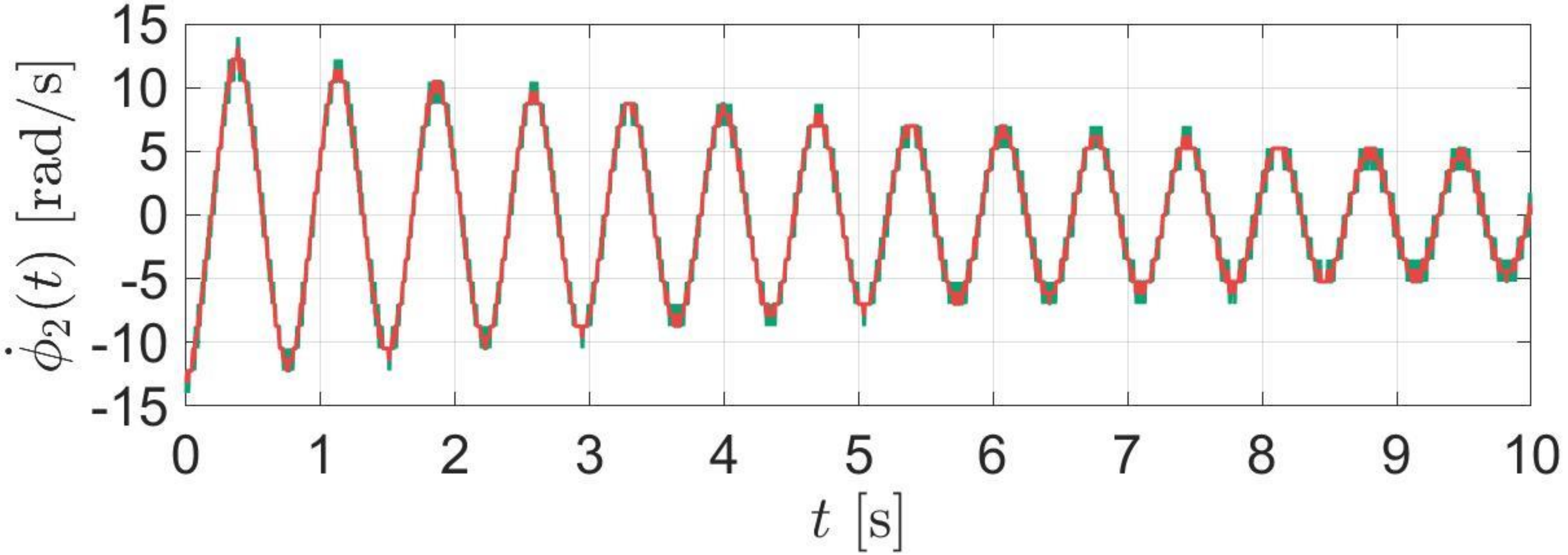
● 最小２乗法

後退差分近似 $\dot{\phi}_2[n] = \dfrac{\phi_2[n] - \phi_2[n-1]}{h}$

中心差分近似 $\dot{\phi}_2[n] = \dfrac{\phi_2[n+1] - \phi_2[n-1]}{2h}$

角速度

……**チャタリングを軽減**するために**オフライン**で算出



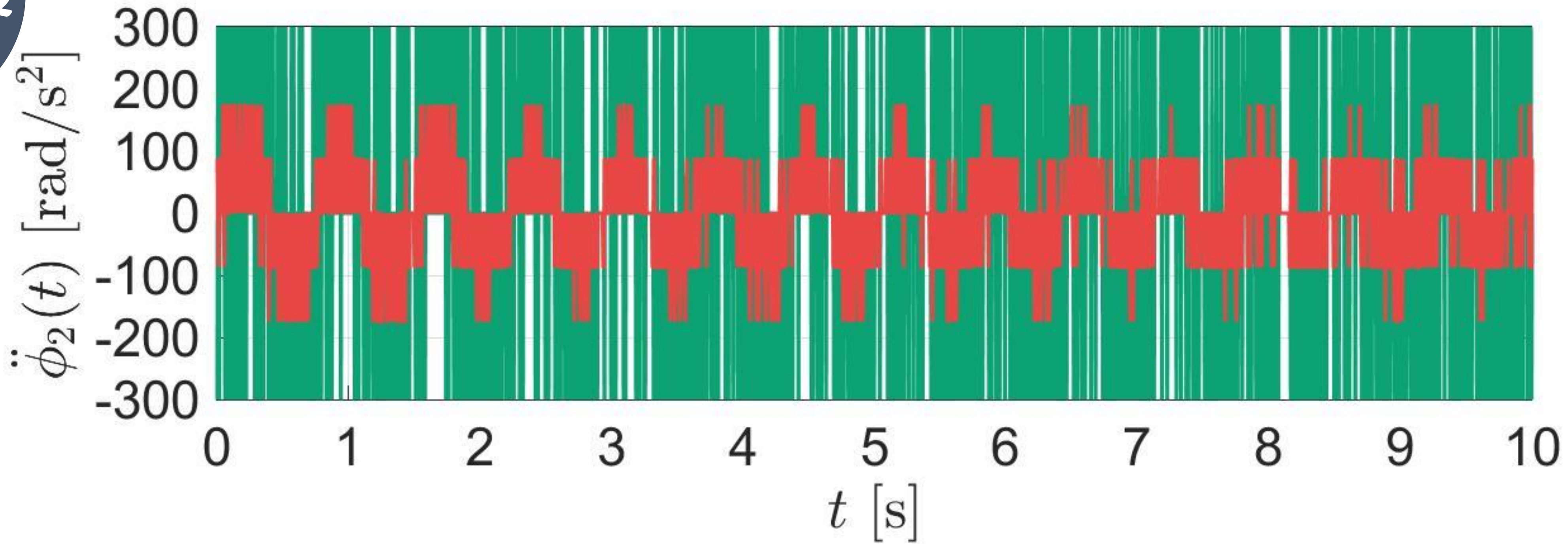
● 最小 2 乗法

後退差分近似 $\ddot{\phi}_2[n] = \dfrac{\dot{\phi}_2[n] - \dot{\phi}_2[n-1]}{h}$

中心差分近似 $\ddot{\phi}_2[n] = \dfrac{\dot{\phi}_2[n+1] - \dot{\phi}_2[n-1]}{2h}$

角加速度

……**チャタリングを軽減**するために**オフライン**で算出



● 最小 2 乗法

$$\begin{bmatrix} M_{\mathrm{f1}}(t) & M_{\mathrm{f2}}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = N_{\mathrm{f}}(t), \quad \begin{cases} M_{\mathrm{f1}}(t) = G_{\mathrm{f}}(s)\ddot{\phi}_2(t) \\ M_{\mathrm{f2}}(t) = G_{\mathrm{f}}(s)\dot{\phi}_2(t) \\ N_{\mathrm{f}}(t) = G_{\mathrm{f}}(s)\big(-g \sin \phi_2(t)\big) \end{cases}$$

$$G_{\mathrm{f}}(s) = \frac{1}{(1 + T_{\mathrm{f}} s)^3}$$

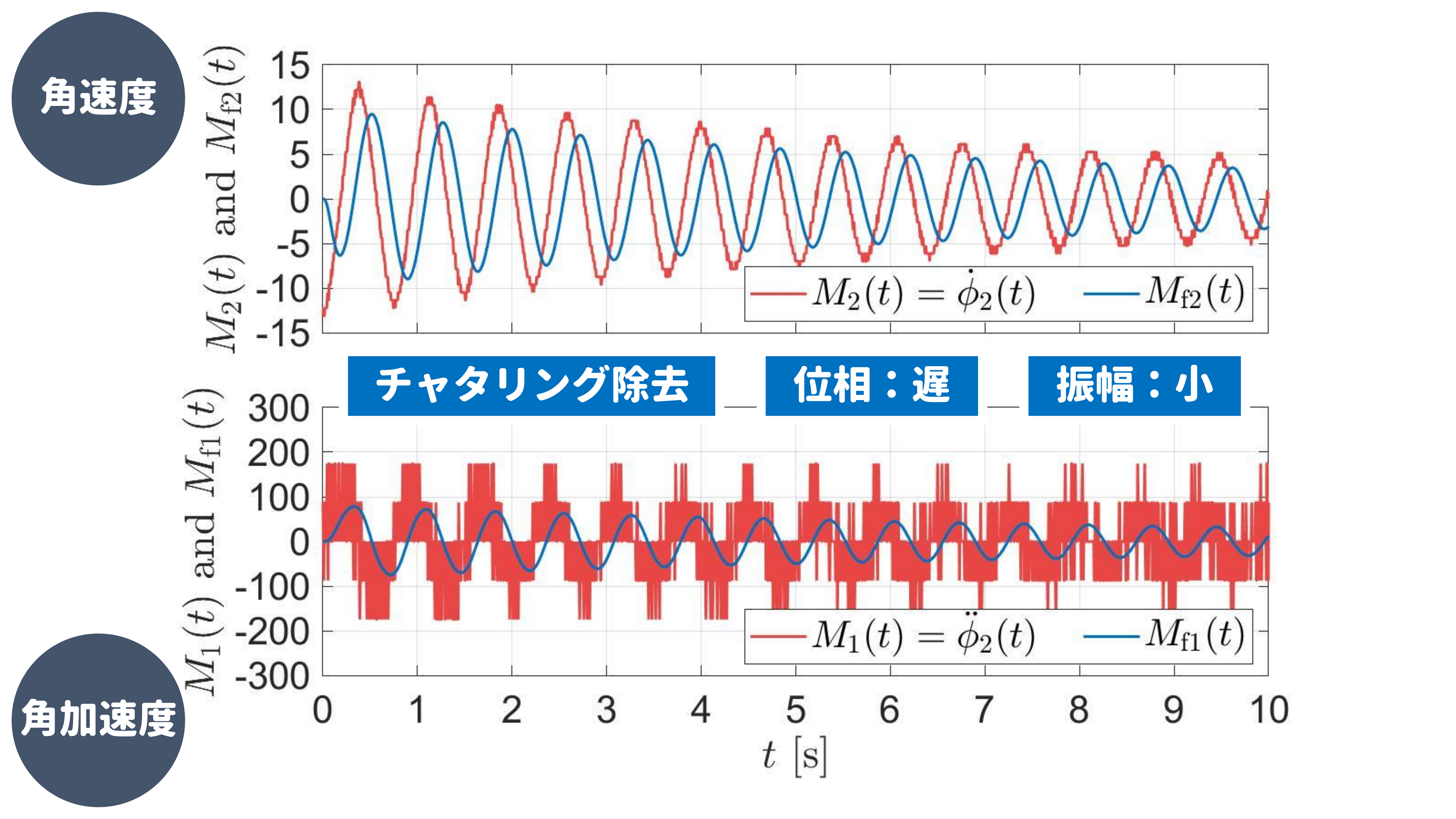
3 次の LPF

$$t = 0,\ h,\ \ldots,\ kh \ \ (h = 10\ [\mathrm{ms}])$$

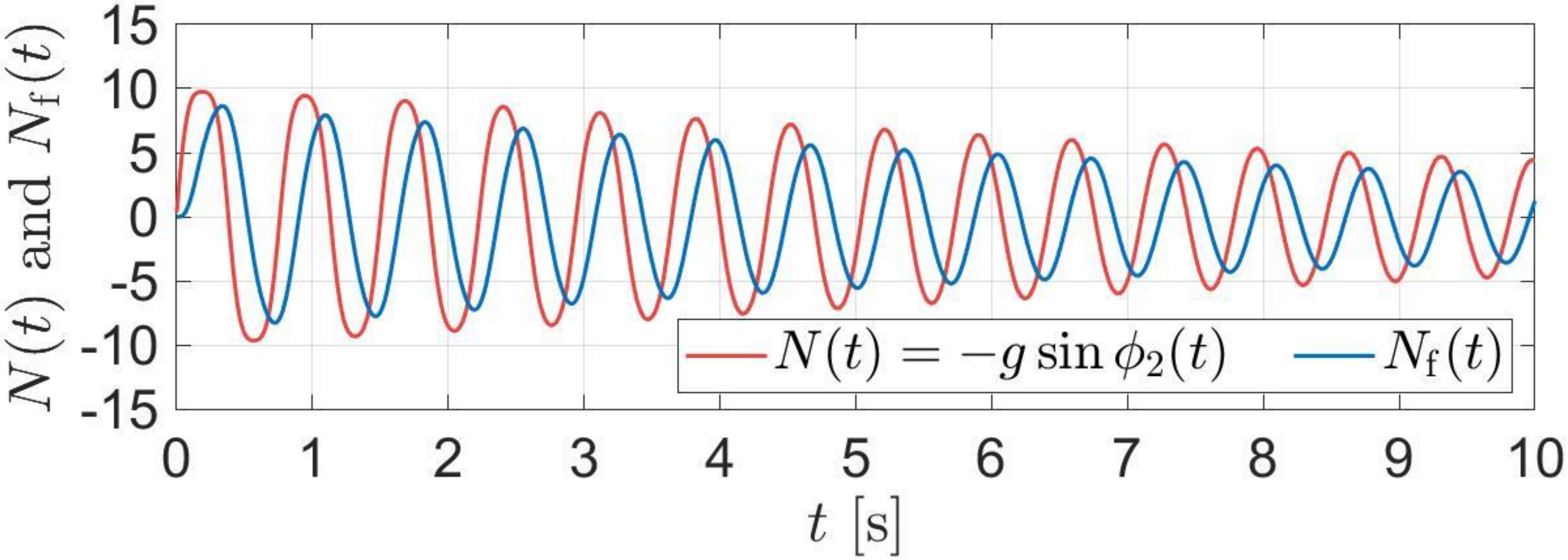
$$\underbrace{\begin{bmatrix} M_{\mathrm{f1}}[0] & M_{\mathrm{f2}}[0] \\ M_{\mathrm{f1}}[1] & M_{\mathrm{f2}}[1] \\ \vdots & \vdots \\ M_{\mathrm{f1}}[k] & M_{\mathrm{f2}}[k] \end{bmatrix}}_{M_{\mathrm{fs}}} \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}}_{p} = \underbrace{\begin{bmatrix} N_{\mathrm{f}}[0] \\ N_{\mathrm{f}}[1] \\ \vdots \\ N_{\mathrm{f}}[k] \end{bmatrix}}_{N_{\mathrm{fs}}}$$

$$M_{\mathrm{fs}}^{\top} M_{\mathrm{fs}}\, p = M_{\mathrm{fs}}^{\top} N_{\mathrm{fs}}$$

$$p = (M_{\mathrm{fs}}^{\top} M_{\mathrm{fs}})^{-1} M_{\mathrm{fs}}^{\top} N_{\mathrm{fs}}$$



角速度
角加速度
チャタリング除去
位相：遅
振幅：小
$M_2(t)$ and $M_{f2}(t)$
$M_2(t) = \dot{\phi}_2(t)$
$M_{f2}(t)$
$M_1(t)$ and $M_{f1}(t)$
$M_1(t) = \ddot{\phi}_2(t)$
$M_{f1}(t)$
t [s]



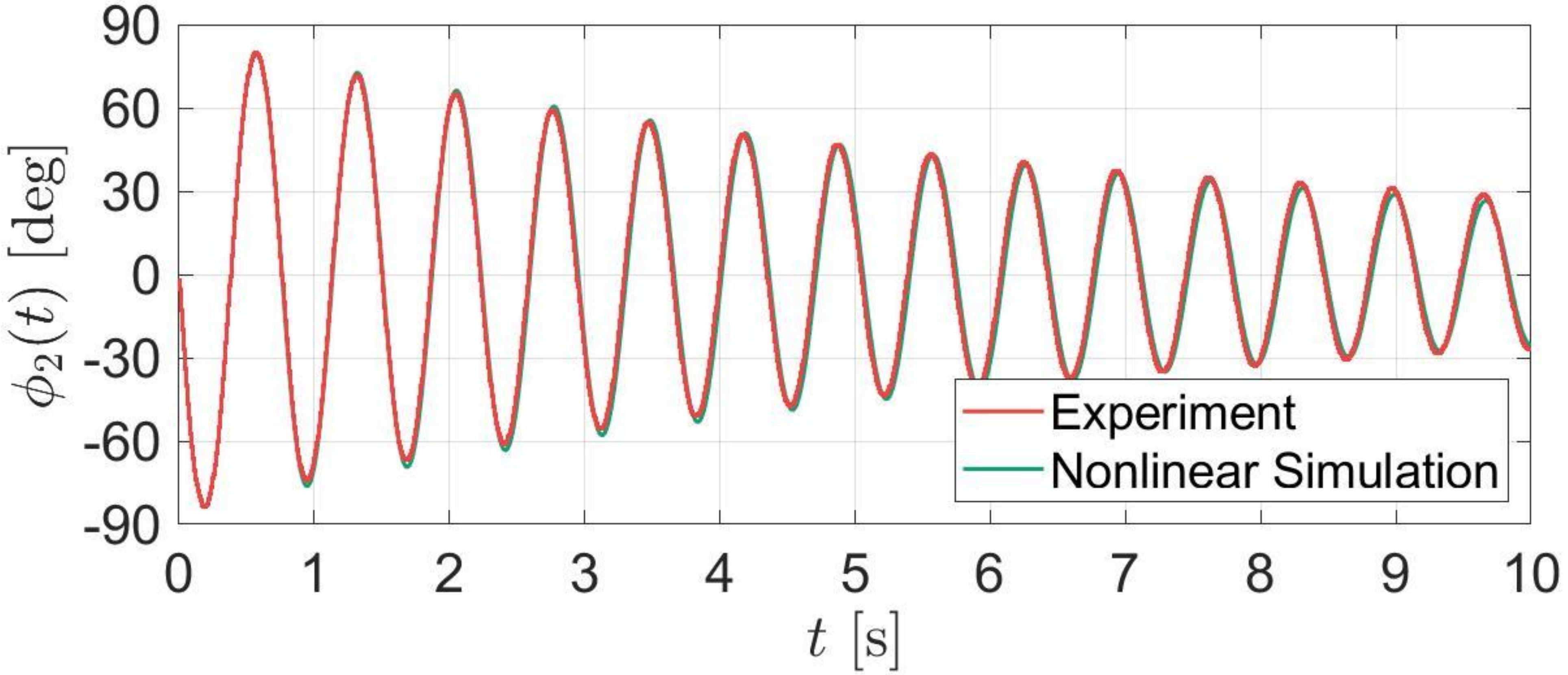
右辺も同じだけ位相を遅らせ、振幅を小さくする

$$\begin{bmatrix} M_{\mathrm{f1}}(t) & M_{\mathrm{f2}}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = N_{\mathrm{f}}(t), \quad \begin{cases} M_{\mathrm{f1}}(t) = G_{\mathrm{f}}(s)\ddot{\phi}_2(t) \\ M_{\mathrm{f2}}(t) = G_{\mathrm{f}}(s)\dot{\phi}_2(t) \\ N_{\mathrm{f}}(t) = G_{\mathrm{f}}(s)\big(-g\sin\phi_2(t)\big) \end{cases}$$

● 最小２乗法

振子の**初期角度が大きくても**…

実験結果と**非線形シミュレーション結果**は**ほぼ一致！**



このスライドは終了です。