

考えよう．そのために，ここでは，図 1.1 に示すように，まんじゅうを半径 1 の半球と考え，底面に水平な平面で 2 分割したときの体積が $V_1 = V_2$ となるような高さ x を求める．

半球を高さ x ($0 \leq x \leq 1$) で底面に水平に切ったときの断面積（半径 $r = \sqrt{1-x^2}$ の円の面積） S は

$$S = \pi r^2 = \pi(1-x^2) \quad (1.1)$$

であるから，まんじゅうの下部の体積 V_1 は

$$V_1 = \int_0^x S dx = \int_0^x \pi(1-x^2) dx = \pi \left[x - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^x = \pi \left(x - \frac{1}{3}x^3 \right) \quad (1.2)$$

である．一方，まんじゅう全体の体積 $V = V_1 + V_2$ は，半径 1 の球の体積の半分であるから，

$$V = \frac{4}{3}\pi \cdot 1^3 \times \frac{1}{2} = \frac{2}{3}\pi \quad (1.3)$$

である．したがって，まんじゅうの上下の部分の体積が 2 等分されるような高さ x は，

$$V_1 = \frac{1}{2}V \implies \pi \left(x - \frac{1}{3}x^3 \right) = \frac{1}{3}\pi \implies f(x) = x^3 - 3x + 1 = 0 \quad (1.4)$$

を解くことにより得られる．しかしながら，(1.4) 式は 3 次方程式であるため，解析的に解を求めることは容易ではない*2．

図 1.2 に示すように，直線ではなく曲線であるような関数 $y = f(x)$ を非線形関数と呼ぶ．一般に，非線形関数 $y = f(x)$ と x 軸 ($y = 0$) との交点，すなわち，nonlinear equation 非線形方程式

$$f(x) = 0 \quad (1.5)$$

の解 x を解析的に求めることは，例 1.1 で説明したように困難であることが多い．こ

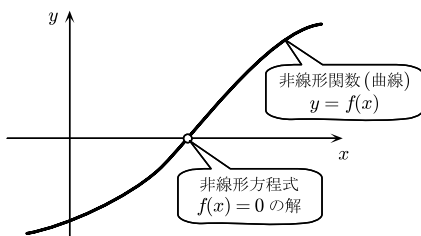


図 1.2 非線形関数 $y = f(x)$ と非線形方程式 $f(x) = 0$

*2 導出過程は非常に複雑であるため省略するが，実は，3 次方程式 (1.4) 式を解析的に解くことは可能である．(1.4) 式の厳密解は $x = 2\sin(\pi/18)$ ($= 0.347296 \dots$), $2\cos(2\pi/9)$ ($= 1.532088 \dots$), $-2\cos(\pi/9)$ ($= -1.879385 \dots$) となるが，これらの中で， $0 \leq x \leq 1$ であるのは唯一， $x = 2\sin(\pi/18)$ であり，これが“まんじゅう 2 等分の問題”の解である．

6.4 スプライン補間 (2)

6.3 節では自然な 3 次のスプライン補間の考え方を説明した. そこでは, 各区間での 3 次関数を (6.13) 式の形式で表現したため, $4n$ 個ものパラメータ $a_1, b_1, c_1, d_1, \dots, a_n, b_n, c_n, d_n$ を定める必要があり, 計算量がかなり多いという問題がある. ここでは, 定めるパラメータの数を $n-1$ 個に減らし, この問題に対処する.

$n+1$ 個の標本点 $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), \dots, P_{n+1}(x_{n+1}, y_{n+1})$ に対する 3 次のスプライン関数

$$y = f(x) = \begin{cases} f_1(x) & (x_1 \leq x \leq x_2) \\ f_2(x) & (x_2 \leq x \leq x_3) \\ \vdots & \\ f_n(x) & (x_n \leq x \leq x_{n+1}) \end{cases} \quad (6.28)$$

の 2 回微分

$$y'' = f''(x) = \begin{cases} f_1''(x) & (x_1 \leq x \leq x_2) \\ f_2''(x) & (x_2 \leq x \leq x_3) \\ \vdots & \\ f_n''(x) & (x_n \leq x \leq x_{n+1}) \end{cases} \quad (6.29)$$

は, 図 6.9 に示すように, 区間 $x_i \leq x \leq x_{i+1}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) では 2 個の点 (x_i, y_i'') , (x_{i+1}, y_{i+1}'') を通る直線 (1 次関数)

$$\begin{aligned} y'' - y_i'' &= \frac{y_{i+1}'' - y_i''}{x_{i+1} - x_i}(x - x_i) \\ \Rightarrow y'' &= f_i''(x) = y_i'' + \frac{y_{i+1}'' - y_i''}{h_i}(x - x_i) \\ &= \frac{x_{i+1} - x}{h_i}y_i'' + \frac{x - x_i}{h_i}y_{i+1}'', \quad h_i = x_{i+1} - x_i \end{aligned} \quad (6.30)$$

である. ただし, 条件 2 (標本点 $P_2(x_2, y_2), P_3(x_3, y_3), \dots, P_n(x_n, y_n)$ において, 2 回微分 $y'' = f''(x)$ が連続) より

$$y_{i+1}'' = f_i''(x_{i+1}) = f_{i+1}''(x_{i+1}), \quad y_i'' = f_i''(x_i) = f_{i-1}''(x_i)$$

である. (6.30) 式の両辺を 2 回, 積分すると,

$$y' = f_i'(x) = \int \left(\frac{x_{i+1} - x}{h_i}y_i'' + \frac{x - x_i}{h_i}y_{i+1}'' \right) dx$$

の大きさが 10^{-3} 以下となる分割数 n を求める Scilab プログラムを作成せよ。

7.5 数値積分の誤差

例 7.1 (p.134), 例 7.2 (p.137), 例 7.3 (p.139), 例 7.4 (p.143) では, 数値積分の誤差*2と分割数 n との関係が

- 区分求積法: 誤差 $|e_{left}|, |e_{right}|$ は $1/n$ に比例して小さくなる
 - 中点公式: 誤差 $|e_{mid}|$ は $1/n^2$ に比例して小さくなる
 - 台形公式: 誤差 $|e_{tr}|$ は $1/n^2$ に比例して小さくなる
 - シンプソンの公式: 誤差 $|e_{sim}|$ は $1/n^4$ に比例して小さくなる
- であることがいえた。ここでは, 台形公式 (7.21) 式を用いたときの誤差

$$e_{tr} = \underbrace{\int_a^b f(x)dx}_S - \underbrace{\frac{h}{2} \sum_{i=1}^n (y_{i+1} + y_i)}_{S_{tr}} \quad (7.31)$$

S (定積分: 厳密解) S_{tr} (数値積分)

が $1/n^2$ に比例して小さくなることを理論的に考察する。

まず, (2.20) 式に示したように, $x = \alpha$ 近傍における $f(x)$ のテイラー展開*3が

$$f(\alpha + h) = f(\alpha) + \frac{1}{1!} f'(\alpha)h + \frac{1}{2!} f''(\alpha)h^2 + \frac{1}{3!} f'''(\alpha)h^3 + \cdots \quad (7.32)$$

であることに注目する。(7.32) 式において $\alpha = x_i$ とすると, $\alpha + h = x_i + h = x_{i+1}$ より

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)h + \frac{1}{2!} f''(x_i)h^2 + \frac{1}{3!} f'''(x_i)h^3 + \cdots \quad (7.33)$$

であるから, 台形公式による数値積分 S_{tr} は

$$\begin{aligned} S_{tr} &= \frac{h}{2} \sum_{i=1}^n (y_i + y_{i+1}) = \frac{h}{2} \sum_{i=1}^n (f(x_i) + f(x_{i+1})) \\ &= \frac{h}{2} \sum_{i=1}^n \left\{ f(x_i) + \left(f(x_i) + f'(x_i)h + \frac{1}{2!} f''(x_i)h^2 + \frac{1}{3!} f'''(x_i)h^3 + \cdots \right) \right\} \\ &= \sum_{i=1}^n \left(hf(x_i) + \frac{h^2}{2} f'(x_i) + \frac{1}{2!} \frac{h^3}{2} f''(x_i) + \frac{1}{3!} \frac{h^4}{2} f'''(x_i) + \cdots \right) \quad (7.34) \end{aligned}$$

のように書き換えることができる。

一方, 区間 $x_1 = a \leq x \leq x_{n+1} = b$ における定積分 S は,

$$S = \int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \quad (7.35)$$

*2 数値積分の誤差のように, 無限の演算を有限回で打ち切ることにより生じる誤差を truncation error 打ち切り誤差と呼ぶ。

*3 テイラー展開については 2.3 節 (p.25) を参照すること。

$$\leq h^2 \frac{(b-a)f''_{max}}{12}, \quad h = \frac{b-a}{n} \quad (7.42)$$

である。また、7.1 節 (p.132) で説明した左端型区分求積法より

$$\underbrace{h \sum_{i=1}^n f''(x_i)}_{\text{左端型区分求積法による } y=f''(x) \text{ の数値積分}} \doteq \underbrace{\int_a^b f''(x) dx = [f'(x)]_a^b = f'(b) - f'(a)}_{y=f''(x) \text{ の定積分}} \quad (7.43)$$

が成立しているときは、

台形公式による数値積分の誤差 e_{tr}

$$e_{tr} \doteq -\frac{h^3}{12} \sum_{i=1}^n f''(x_i) \doteq -h^2 \frac{f'(b) - f'(a)}{12}, \quad h = \frac{b-a}{n} \quad (7.44)$$

のように近似することもできる。したがって、(7.42) 式あるいは (7.44) 式より、台形公式では誤差 $|e_{tr}|$ が $1/n^2$ に比例して小さくなることがいえ、分割数 n を 2 倍にすると誤差 $|e_{tr}|$ が $1/2^2 = 1/4$ に減少することがわかる。

同様の手順で、左端型区分求積法 (7.3) 式による数値積分の誤差 e_{left} と分割数 n の関係は

左端型区分求積法による数値積分の誤差 e_{left}

$$\begin{aligned} |e_{left}| &= \left| \overbrace{\int_a^b f(x) dx}^{S \text{ (定積分: 厳密解)}} - \overbrace{h \sum_{i=1}^n y_i}^{S_{left} \text{ (数値積分)}} \right| \doteq \frac{h^2}{2} \left| \sum_{i=1}^n f'(x_i) \right| \\ &\leq h \frac{(b-a)f'_{max}}{2}, \quad h = \frac{b-a}{n} \end{aligned} \quad (7.45)$$

あるいは

$$e_{left} \doteq \frac{h^2}{2} \sum_{i=1}^n f'(x_i) \doteq h \frac{f(b) - f(a)}{2}, \quad h = \frac{b-a}{n} \quad (7.46)$$

である。ただし、 f'_{max} は $a \leq x \leq b$ における $|f'(x)|$ の最大値である。したがって、左端型区分求積法による数値積分の誤差 $|e_{left}|$ が $1/n$ に比例して小さくなり、分割数 n を 2 倍にすると誤差 $|e_{left}|$ が $1/2$ に減少することがわかる。

中点公式 (7.19) 式による数値積分の誤差 e_{mid} と分割数 n の関係は

中点公式による数値積分の誤差 e_{mid}

$$|e_{mid}| = \left| \overbrace{\int_a^b f(x) dx}^{S \text{ (定積分: 厳密解)}} - \overbrace{h \sum_{i=1}^n f\left(x_i + \frac{h}{2}\right)}^{S_{mid} \text{ (数値積分)}} \right|$$

(2.20) 式と同様,

$$y(t+h) = y(t) + \frac{1}{1!} \frac{dy(t)}{dx} h + \frac{1}{2!} \frac{d^2 y(t)}{dx^2} h^2 + \cdots + \frac{1}{k!} \frac{d^k y(t)}{dx^k} h^k + \cdots \quad (8.31)$$

である. ここで,

$$\frac{d^k y(t)}{dx^k} \left(= \frac{d^k y(x)}{dx^k} \Big|_{x=t} \right) = y^{(k)}(t) \left(= \frac{d^k y(t)}{dt^k} \right)$$

であるから,

①: 1 次近似 (オイラー法での近似式 (8.20) 式)

$$\underbrace{y(t+h) = y(t) + y'(t)h + \frac{1}{2!} y''(t)h^2 + \cdots + \frac{1}{k!} y^{(k)}(t)h^k + \cdots}_{\text{②: 2 次近似}} \quad (8.32)$$

②: 2 次近似

が得られる. つまり, 8.2 節で説明したオイラー法は, テイラー展開に基づいて 1 次近似 ① を考えていることになる. 例 8.3 からわかるようにオイラー法は誤差が大きいので, ここでは, 近似の精度を向上させるために, ② に示したテイラー展開に基づく以下の 2 次近似を考える.

$$\begin{aligned} y(t+h) &\doteq y(t) + y'(t)h + \frac{1}{2} y''(t)h^2 = y(t) + f(t, y(t))h + \frac{1}{2} f'(t, y(t))h^2 \\ &= y(t) + \left(f(t, y(t)) + \frac{1}{2} f'(t, y(t))h \right) h \end{aligned} \quad (8.33)$$

(8.33) 式には微分 $f'(t, y(t))$ が含まれているため, それを直接用いるのは面倒である. そこで, ここで説明する **2 次のルンゲ・クッタ法** second order Runge-Kutta method では,

$$w_1 + w_2 = 1, \quad aw_2 = \frac{1}{2}, \quad bw_2 = \frac{1}{2} \quad (8.34)$$

を満足する適当なパラメータ w_1, w_2, a, b を考えると, 後述のように近似式

$$f(t, y(t)) + \frac{1}{2} f'(t, y(t))h \doteq w_1 k_1 + w_2 k_2 \quad (8.35)$$

$$\begin{cases} k_1 = f(t, y(t)) \\ k_2 = f(t+ah, y(t) + bk_1 h) \end{cases}$$

が成立することに注目し, 微分 $f'(t, y(t))$ を取り除く. このとき, (8.33) 式は

$$y(t+h) \doteq y(t) + (w_1 k_1 + w_2 k_2)h \quad (8.36)$$

であり, $t = t_n = nh, y_n = y(t_n)$ とすると,

2 次のルンゲ・クッタ法による漸化式

$$\begin{cases} k_1 = f(t_n, y_n) \\ k_2 = f(t_n + ah, y_n + bk_1 h) \\ y_{n+1} = y_n + (w_1 k_1 + w_2 k_2)h \end{cases} \quad (8.37)$$

が得られる.

つぎに, (8.35) 式の導出過程について説明する. 2 変数のテイラー展開^{*3}により, 2 変数の非線形関数を

$$\begin{aligned} f(t + \Delta t, y + \Delta y) &= f(t, y) + f_t(t, y)\Delta t + f_y(t, y)\Delta y \\ &\quad + \frac{1}{2!}(f_{tt}(t, y)\Delta t^2 + 2f_{ty}(t, y)\Delta t\Delta y + f_{yy}(t, y)\Delta y^2) + \cdots \\ &\doteq f(t, y) + f_t(t, y)\Delta t + f_y(t, y)\Delta y \end{aligned} \quad (8.38)$$

のように 1 次近似する. ただし, 偏微分を

$$f_t(t, y) = \frac{\partial f(t, y)}{\partial t}, \quad f_{ty}(t, y) = f_{yt}(t, y) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial f(t, y)}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f(t, y)}{\partial t} \right)$$

などのように記述した. (8.38) 式において, $\Delta t = ah$, $\Delta y = bk_1h$ ($k_1 = f(t, y)$) とすると, k_2 が

$$\begin{aligned} k_2 &= f(t + ah, y + bk_1h) \doteq f(t, y) + f_t(t, y)ah + f_y(t, y)bk_1h \\ &= f(t, y) + (af_t(t, y) + bf_y(t, y)f(t, y))h \end{aligned} \quad (8.39)$$

のように近似でき, その結果, (8.35) 式の右辺は次式となる.

$$\begin{aligned} w_1k_1 + w_2k_2 &\doteq w_1f(t, y) + w_2\{f(t, y) + (af_t(t, y) + bf_y(t, y)f(t, y))h\} \\ &= (w_1 + w_2)f(t, y) + w_2(af_t(t, y) + bf_y(t, y)f(t, y))h \end{aligned} \quad (8.40)$$

一方, t, y がそれぞれ dt, dy だけ変化したときの $f(t, y)$ の変化分 $df(t, y)$ を全微分^{total derivative}と呼び,

$$df(t, y) = \underbrace{\frac{\partial f(t, y)}{\partial t}dt}_{dt \text{ だけ変化したときの } f(t, y) \text{ の変化分}} + \underbrace{\frac{\partial f(t, y)}{\partial y}dy}_{dy \text{ だけ変化したときの } f(t, y) \text{ の変化分}} \quad (8.41)$$

となる. (8.41) 式の両辺を dt で割ると,

$$\begin{aligned} f'(t, y) &= \frac{df(t, y)}{dt} = \frac{\partial f(t, y)}{\partial t} \frac{dt}{dt} + \frac{\partial f(t, y)}{\partial y} \frac{dy}{dt} = f_t(t, y) + f_y(t, y)y'(t) \\ &= f_t(t, y) + f_y(t, y)f(t, y) \end{aligned} \quad (8.42)$$

となるから, (8.35) 式の左辺は

$$f(t, y) + \frac{1}{2}f'(t, y)h \doteq f(t, y) + \frac{1}{2}(f_t(t, y) + f_y(t, y)f(t, y))h \quad (8.43)$$

である. したがって, (8.40) 式と (8.43) 式とを一致させるためには, パラメータ w_1, w_2, a, b が (8.34) 式を満足すればよいことがわかる. パラメータの数が 4 個であるのに対して式の数 3 個であるから, (8.34) 式を満足するパラメータの組み合わせは無

*3 2 変数のテイラー展開については 2.6 節 (p.34) を参照すること.

数に存在するが、特に、以下のように選ぶことが多い。

■ホイン法

(8.34) 式を満足するように

$$w_1 = w_2 = \frac{1}{2}, \quad a = b = 1 \quad (8.44)$$

と選ぶと、(8.37) 式より以下の漸化式が得られる。

Heun method

ホイン法による漸化式

$$\begin{cases} k_1 = f(t_n, y_n) \\ k_2 = f(t_n + h, y_n + k_1 h) \\ y_{n+1} = y_n + \frac{(k_1 + k_2)h}{2} \end{cases} \quad (8.45)$$

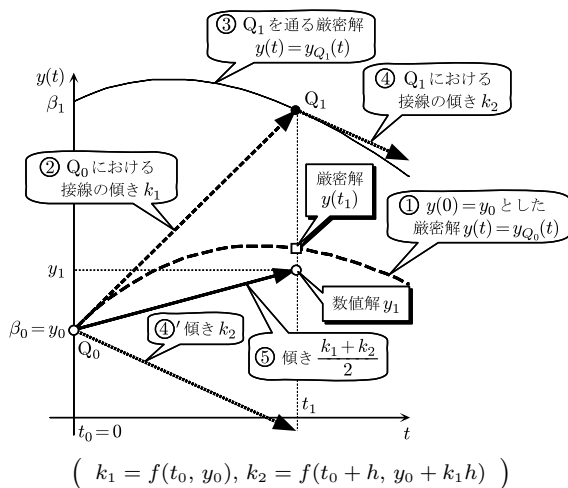


図 8.6 ホイン法

つまりホイン法では、図 8.6 に示すように、以下の手順で 1 階の常微分方程式 (8.1) 式の数値解 y_i を求めている。

- ① $Q_0(t_0, y_0)$ を通る常微分方程式

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(0) = \beta_0 \quad (8.46)$$

の厳密解を $y(t) = y_{Q_0}(t)$ とする。

- ② Q_0 における接線の傾き k_1 を

$$k_1 = y'_{Q_0}(t_0) = f(t_0, y_0) \quad (8.47)$$

により求め、接線方向に $t = t_1$ まで進んだ点を $Q_1(t_0 + h, y_0 + k_1 h)$ とする。

- ③ Q_1 を通る常微分方程式

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(0) = \beta_1 \quad (8.48)$$

の厳密解を $y(t) = y_{Q_1}(t)$ とする.

- ④ Q_1 における接線の傾き k_2 を次式により求める.

$$k_2 = y'_{Q_1}(t_1) = y'_{Q_1}(t_0 + h) = f(t_0 + h, y_0 + k_1 h) \quad (8.49)$$

- ⑤ オイラー法の漸化式 $y_1 = y_0 + f(t_0, y_0)h$ における $f(t_0, y_0)$ の代わりに, k_1 と k_2 との平均

$$\frac{k_1 + k_2}{2} = \frac{y'_{Q_0}(t_0) + y'_{Q_1}(t_1)}{2} \quad (8.50)$$

を用い, 数値解を $y_1 = y_0 + (k_1 + k_2)h/2$ とする.

- ⑥ 上の操作を繰り返すことで, y_2, y_3, \dots を順次, 求める.

■中点法

(8.34) 式を満足するように

$$w_1 = 0, w_2 = 1, a = b = \frac{1}{2} \quad (8.51)$$

と選ぶと, (8.37) 式より

midpoint method

中点法による漸化式

$$\begin{cases} k_1 = f(t_n, y_n) \\ k_2 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1 h}{2}\right) \\ y_{n+1} = y_n + k_2 h \end{cases} \quad (8.52)$$

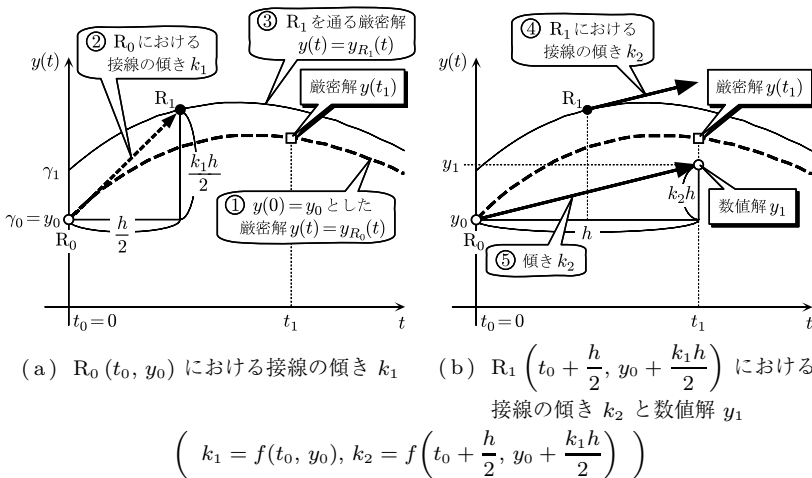
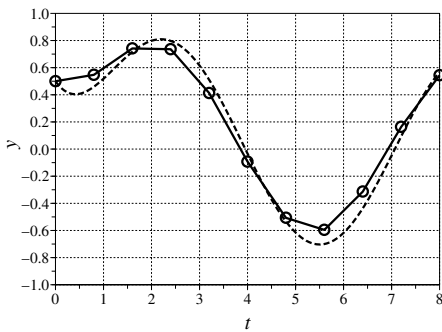


図 8.7 中点法

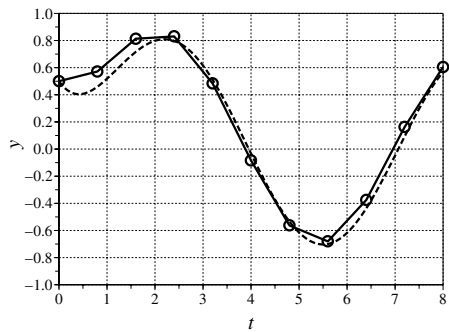
が得られる. つまり中点法では, 図 8.7 に示すように, 以下の手順で 1 階の常微分方程式 (8.1) 式の数値解 y_i を求めている.

“diff_heun.sce” の実行結果

time	Heun method	exact solution	error
t0 = 0.0	y0 = 5.000000e-001	y(t0) = 5.000000e-001	e(t0) = 0.000000e+000
t1 = 0.8	y1 = 5.469424e-001	y(t1) = 4.596537e-001	e(t1) = 8.728878e-002
t2 = 1.6	y2 = 7.416280e-001	y(t2) = 7.162831e-001	e(t2) = 2.534491e-002
t3 = 2.4	y3 = 7.357977e-001	y(t3) = 7.971464e-001	e(t3) = 6.134868e-002
t4 = 3.2	y4 = 4.133022e-001	y(t4) = 5.107225e-001	e(t4) = 9.742031e-002
t5 = 4.0	y5 = -9.247378e-002	y(t5) = -3.326380e-002	e(t5) = 5.920998e-002
t6 = 4.8	y6 = -5.070964e-001	y(t6) = -5.336020e-001	e(t6) = 2.650564e-002
t7 = 5.6	y7 = -5.958900e-001	y(t7) = -6.997184e-001	e(t7) = 1.038284e-001
t8 = 6.4	y8 = -3.137444e-001	y(t8) = -4.366563e-001	e(t8) = 1.229119e-001
t9 = 7.2	y9 = 1.636440e-001	y(t9) = 9.340486e-002	e(t9) = 7.023912e-002
t10 = 8.0	y10 = 5.443316e-001	y(t10) = 5.677646e-001	e(t10) = 2.343301e-002



(—○— : 数値解, ---- : 厳密解)



(—○— : 数値解, ---- : 厳密解)

図 8.8 “diff_heun.sce” の実行結果

図 8.9 “diff_midpoint.sce” の実行結果

一方，中点法の漸化式である (8.52) 式より (8.25) 式の数値解は

$$\left\{ \begin{array}{l} k_1 = f(t_0, y_0) = -y_0 + \sin t_0 = -0.5 + \sin 0 = -0.5 \\ k_2 = f\left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1 h}{2}\right) = -\left(y_0 + \frac{k_1 h}{2}\right) + \sin\left(t_0 + \frac{h}{2}\right) \\ \quad = -\left(0.5 + \frac{-0.5 \cdot 0.8}{2}\right) + \sin\left(0 + \frac{0.8}{2}\right) = 0.08941834 \\ y_1 = y_0 + k_2 h = 0.5 + 0.08941834 \cdot 0.8 = 0.5715347 \end{array} \right. \quad (8.58a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} k_1 = f(t_1, y_1) = -y_1 + \sin t_1 = -0.5715347 + \sin 0.8 = 0.1458214 \\ k_2 = f\left(t_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{k_1 h}{2}\right) = -\left(y_1 + \frac{k_1 h}{2}\right) + \sin\left(t_1 + \frac{h}{2}\right) \\ \quad = -\left(0.5715347 + \frac{0.1458214 \cdot 0.8}{2}\right) + \sin\left(0.8 + \frac{0.8}{2}\right) = 0.3021758 \\ y_2 = y_1 + k_2 h = 0.5715347 + 0.3021758 \cdot 0.8 = 0.8132753 \end{array} \right. \quad (8.58b)$$

のように順次，求まる．また，中点法により常微分方程式 (8.25) 式の数値解を求める Scilab プログラム “diff_midpoint.sce” (p.182) の実行結果を図 8.9 および以下に

示す.

“diff_midpoint.sce” の実行結果

time	midpoint method	exact solution	error
t0 = 0.0	y0 = 5.000000e-001	y(t0) = 5.000000e-001	e(t0) = 0.000000e+000
t1 = 0.8	y1 = 5.715347e-001	y(t1) = 4.596537e-001	e(t1) = 1.118810e-001
t2 = 1.6	y2 = 8.132754e-001	y(t2) = 7.162831e-001	e(t2) = 9.699227e-002
t3 = 2.4	y3 = 8.304776e-001	y(t3) = 7.971464e-001	e(t3) = 3.333117e-002
t4 = 3.2	y4 = 4.836906e-001	y(t4) = 5.107225e-001	e(t4) = 2.703188e-002
t5 = 4.0	y5 = -8.381750e-002	y(t5) = -3.326380e-002	e(t5) = 5.055370e-002
t6 = 4.8	y6 = -5.626900e-001	y(t6) = -5.336020e-001	e(t6) = 2.908791e-002
t7 = 5.6	y7 = -6.805898e-001	y(t7) = -6.997184e-001	e(t7) = 1.912857e-002
t8 = 6.4	y8 = -3.754338e-001	y(t8) = -4.366563e-001	e(t8) = 6.122251e-002
t9 = 7.2	y9 = 1.627694e-001	y(t9) = 9.340486e-002	e(t9) = 6.936451e-002
t10 = 8.0	y10 = 6.050021e-001	y(t10) = 5.677646e-001	e(t10) = 3.723749e-002

問題 8.2 問題 8.1 (p.161) で示した 1 階の常微分方程式 (8.29) 式が与えられたとき、以下の設問に答えよ。ただし、 $t_0 = 0$, $y_0 = 1$, $h = 1$ とする。

- (1) (8.29) 式の数値解 $y_1 = y(t_1)$, $y_2 = y(t_2)$ ($t_n = nh$) をホイン法により求めよ。
- (2) (8.29) 式の数値解 $y_1 = y(t_1)$, $y_2 = y(t_2)$ ($t_n = nh$) を中点法により求めよ。
- (3) (8.29) 式の数値解 $y_n = y(t_n)$ ($t_n = nh$, $n = 1, 2, \dots, 10$) をホイン法, 中点法により求める Scilab プログラムを作成せよ。

8.4 4 次のルンゲ・クッタ法 (1)

ここでは、さらなる精度の向上を目指して、テイラー展開に基づく 4 次近似

$$y(t+h) \doteq y(t) + \sum_{i=1}^4 \frac{1}{i!} y^{(i)}(t) h^i = y(t) + \left(\sum_{i=1}^4 \frac{1}{i!} f^{(i-1)}(t, y(t)) h^{i-1} \right) h \quad (8.59)$$

を考える。このとき、11 個の式

$$a_1 = b_{11}, \quad a_2 = b_{21} + b_{22}, \quad a_3 = b_{31} + b_{32} + b_{33} \quad (8.60a)$$

$$w_1 + w_2 + w_3 + w_4 = 1 \quad (8.60b)$$

$$w_2 a_1 + w_3 a_2 + w_4 a_3 = \frac{1}{2} \quad (8.60c)$$

$$\begin{cases} w_2 a_1^2 + w_3 a_2^2 + w_4 a_3^2 = \frac{1}{3} \\ w_3 a_1 b_{22} + w_4 (a_1 b_{32} + a_2 b_{33}) = \frac{1}{6} \end{cases} \quad (8.60d)$$

$$\begin{cases} w_2 a_1^3 + w_3 a_2^3 + w_4 a_3^3 = \frac{1}{4}, & w_3 a_1^2 b_{22} + w_4 (a_1^2 b_{32} + a_2^2 b_{33}) = \frac{1}{12} \\ w_4 a_1 b_{22} b_{33} = \frac{1}{24}, & w_3 a_1 a_2 b_{22} + w_4 a_3 (a_1 b_{32} + a_2 b_{33}) = \frac{1}{8} \end{cases} \quad (8.60e)$$

を満足する $w_1, w_2, w_3, w_4, a_1, a_2, a_3, b_{11}, b_{21}, b_{22}, b_{31}, b_{32}, b_{33}$ を用いると、近似式

$$\overbrace{\sum_{i=1}^4 \frac{1}{i!} f^{(i-1)}(t, y(t)) h^{i-1}}^{f(t, y(t)) + \frac{1}{2} f'(t, y(t)) h + \frac{1}{6} f''(t, y(t)) h^2 + \frac{1}{24} f'''(t, y(t)) h^3} \doteq w_1 k_1 + w_2 k_2 + w_3 k_3 + w_4 k_4 \quad (8.61)$$

$$\begin{cases} k_1 = f(t, y(t)) \\ k_2 = f(t + a_1 h, y(t) + b_{11} k_1 h) \\ k_3 = f(t + a_2 h, y(t) + (b_{21} k_1 + b_{22} k_2) h) \\ k_4 = f(t + a_3 h, y(t) + (b_{31} k_1 + b_{32} k_2 + b_{33} k_3) h) \end{cases}$$

が成立する ((8.60) 式の導出手順は後述の 8.5 節で示す). このとき, (8.59) 式は

$$y(t+h) \doteq y(t) + (w_1 k_1 + w_2 k_2 + w_3 k_3 + w_4 k_4)h \quad (8.62)$$

であり, $t = t_n = nh$, $y_n = y(t_n)$ とすると, 漸化式

4 次のルンゲ・クッタ法による漸化式

$$\left\{ \begin{array}{l} k_1 = f(t_n, y_n) \\ k_2 = f(t_n + a_1 h, y_n + b_{11} k_1 h) \\ k_3 = f(t_n + a_2 h, y_n + (b_{21} k_1 + b_{22} k_2) h) \\ k_4 = f(t_n + a_3 h, y_n + (b_{31} k_1 + b_{32} k_2 + b_{33} k_3) h) \\ y_{n+1} = y_n + (w_1 k_1 + w_2 k_2 + w_3 k_3 + w_4 k_4) h \end{array} \right. \quad (8.63)$$

が得られる。パラメータの数が 13 個であるのに対して式の数が 11 個であるから、(8.60) 式を満足するパラメータの組み合わせは無数に存在するが、特に、これらを

$$\begin{cases} w_1 = \frac{1}{6}, w_2 = \frac{1}{3}, w_3 = \frac{1}{3}, w_4 = \frac{1}{6}, a_1 = \frac{1}{2}, a_2 = \frac{1}{2}, a_3 = 1 \\ b_{11} = \frac{1}{2}, b_{21} = 0, b_{22} = \frac{1}{2}, b_{31} = 0, b_{32} = 0, b_{33} = 1 \end{cases} \quad (8.64)$$

のように選んだとき，漸化式は次式となる*4.

classic forth order Runge-Kutta method

4 次の古典的ルンゲ・クッタ法による漸化式

$$\left\{ \begin{array}{l} k_1 = f(t_n, y_n) \\ k_2 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1 h}{2}\right) \\ k_3 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2 h}{2}\right) \\ k_4 = f(t_n + h, y_n + k_3 h) \\ y_{n+1} = y_n + \frac{(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)h}{6} \end{array} \right. \quad (8.65)$$

*4 本書では，(8.63) 式と区別するために，古典的ルンゲ・クッタ法あるいは標準ルンゲ・クッタ法と呼ぶ。

t2 = 1.6	y2 = 7.178263e-001	y(t2) = 7.162831e-001	e(t2) = 1.543247e-003
t3 = 2.4	y3 = 7.963441e-001	y(t3) = 7.971464e-001	e(t3) = 8.023170e-004
t4 = 3.2	y4 = 5.087452e-001	y(t4) = 5.107225e-001	e(t4) = 1.977327e-003
t5 = 4.0	y5 = -3.462827e-002	y(t5) = -3.326380e-002	e(t5) = 1.364475e-003
t6 = 4.8	y6 = -5.331346e-001	y(t6) = -5.336020e-001	e(t6) = 4.674600e-004
t7 = 5.6	y7 = -6.974693e-001	y(t7) = -6.997184e-001	e(t7) = 2.249086e-003
t8 = 6.4	y8 = -4.338591e-001	y(t8) = -4.366563e-001	e(t8) = 2.797168e-003
t9 = 7.2	y9 = 9.512383e-002	y(t9) = 9.340486e-002	e(t9) = 1.718970e-003
t10 = 8.0	y10 = 5.673996e-001	y(t10) = 5.677646e-001	e(t10) = 3.649902e-004

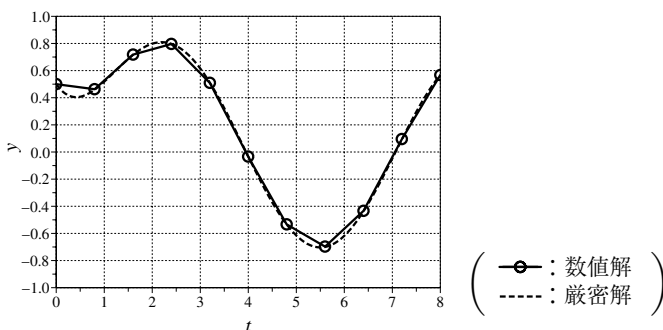


図 8.11 “diff_runge_kutta.sce” の実行結果

問題 8.3 問題 8.1 (p.161) で示した 1 階の常微分方程式 (8.29) 式が与えられたとき、以下の設問に答えよ。ただし、 $t_0 = 0$, $y_0 = 1$, $h = 1$ とする。

- (1) (8.29) 式の数値解 $y_1 = y(t_1)$, $y_2 = y(t_2)$ ($t_n = nh$) を 4 次の古典的ルンゲ・クッタ法により求めよ。
- (2) (8.29) 式の数値解 $y_n = y(t_n)$ ($t_n = nh$, $n = 1, 2, \dots, 10$) を 4 次の古典的ルンゲ・クッタ法により求める Scilab プログラムを作成せよ。

8.5 4 次のルンゲ・クッタ法 (2)

ここでは、8.3 節と同様の手順により、(8.60a) 式を満足しているときに (8.61) 式が成立するための条件式 (8.60b) ~ (8.60e) 式を導出する。

2 変数の非線形関数の 3 次近似は、テイラー展開により次式のようになる。

$$\begin{aligned}
 f(t + \Delta t, y + \Delta y) &\doteq f + f_t \Delta t + f_y \Delta y + \frac{1}{2!} (f_{tt} \Delta t^2 + 2f_{ty} \Delta t \Delta y + f_{yy} \Delta y^2) \\
 &\quad + \frac{1}{3!} (f_{ttt} \Delta t^3 + 3f_{tty} \Delta t^2 \Delta y + 3f_{tyy} \Delta t \Delta y^2 + f_{yyy} \Delta y^3)
 \end{aligned}
 \tag{8.67}$$

(8.60a) 式の $b_{11} = a_1$ を満足するとき、(8.67) 式において $\Delta t = a_1 h$, $\Delta y = b_{11} k_1 h$ ($k_1 = f(t, y)$) とすることで、 k_2 を次式のように近似できる。

$$\begin{aligned}
k_2 &= f\left(t + \overbrace{a_1 h}^{\Delta t}, y(t) + \overbrace{b_{11} k_1 h}^{\Delta y}\right) = f(t + a_1 h, y(t) + a_1 f h) \\
&\doteq f + a_1(f_t + f_y f)h + \frac{1}{2}a_1^2(f_{tt} + 2f_{ty}f + f_{yy}f^2)h^2 \\
&\quad + \frac{1}{6}a_1^3(f_{ttt} + 3f_{tty}f + 3f_{tyy}f^2 + f_{yyy}f^3)h^3 \\
&= f + \ell_1 h + \ell_2 h^2 + \ell_3 h^3 \tag{8.68}
\end{aligned}$$

$$\begin{cases} \ell_1 = a_1(f_t + f_y f), \ell_2 = \frac{1}{2}a_1^2(f_{tt} + 2f_{ty}f + f_{yy}f^2) \\ \ell_3 = \frac{1}{6}a_1^3(f_{ttt} + 3f_{tty}f + 3f_{tyy}f^2 + f_{yyy}f^3) \end{cases}$$

また, (8.60a) 式の $b_{21} + b_{22} = a_2$ を満足するとき, (8.67) 式において $\Delta t = a_2 h$, $\Delta y = (b_{21}k_1 + b_{22}k_2)h$ とすることで, k_3 を

$$\begin{aligned}
k_3 &= f(t + a_2 h, y(t) + (b_{21}k_1 + b_{22}k_2)h) \\
&\doteq f + [a_2 f_t + f_y \{b_{21}f + b_{22} \overbrace{(f + \ell_1 h + \ell_2 h^2 + \dots)}^{k_2}\}]h \\
&\quad + \frac{1}{2}[a_2^2 f_{tt} + 2a_2 f_{ty} \{b_{21}f + b_{22} \overbrace{(f + \ell_1 h + \dots)}^{k_2}\} \\
&\quad \quad + f_{yy} \{b_{21}f + b_{22} \overbrace{(f + \ell_1 h + \dots)}^{k_2}\}^2]h^2 \\
&\quad + \frac{1}{6}[a_2^3 f_{ttt} + 3a_2^2 f_{tty} \{b_{21}f + b_{22} \overbrace{(f + \dots)}^{k_2}\} \\
&\quad \quad + 3a_2 f_{tyy} \{b_{21}f + b_{22} \overbrace{(f + \dots)}^{k_2}\}^2 \\
&\quad \quad + f_{yyy} \{b_{21}f + b_{22} \overbrace{(f + \dots)}^{k_2}\}^3]h^3 \\
&\doteq f + m_1 h + m_2 h^2 + m_3 h^3 \tag{8.69}
\end{aligned}$$

$$\begin{cases} m_1 = a_2(f_t + f_y f) \\ m_2 = b_{22}\ell_1 f_y + \frac{1}{2}a_2^2(f_{tt} + 2f_{ty}f + f_{yy}f^2) \\ m_3 = b_{22}\ell_2 f_y + a_2 b_{22}\ell_1(f_{ty} + f_{yy}f) \\ \quad + \frac{1}{6}a_2^3(f_{ttt} + 3f_{tty}f + 3f_{tyy}f^2 + f_{yyy}f^3) \end{cases}$$

のように近似できる. 同様に, (8.60a) 式の $b_{31} + b_{32} + b_{33} = a_3$ を満足するとき, (8.67) 式において $\Delta t = a_3 h$, $\Delta y = (b_{31}k_1 + b_{32}k_2 + b_{33}k_3)h$ とすることで, k_4 を

$$\begin{aligned}
k_4 &= f(t + a_3 h, y(t) + (b_{31}k_1 + b_{32}k_2 + b_{33}k_3)h) \\
&\doteq f + n_1 h + n_2 h^2 + n_3 h^3 \tag{8.70}
\end{aligned}$$

$$\begin{cases} n_1 = a_3(f_t + f_y f) \\ n_2 = (b_{32}\ell_1 + b_{33}m_1)f_y + \frac{1}{2}a_3^2(f_{tt} + 2f_{ty}f + f_{yy}f^2) \\ n_3 = (b_{32}\ell_2 + b_{33}m_2)f_y + a_3(b_{32}\ell_1 + b_{33}m_1)(f_{ty} + f_{yy}f) \\ \quad + \frac{1}{6}a_3^3(f_{ttt} + 3f_{tty}f + 3f_{tyy}f^2 + f_{yyy}f^3) \end{cases}$$

のように近似できる．したがって，(8.61) 式の右辺は，

$$\begin{aligned} & w_1k_1 + w_2k_2 + w_3k_3 + w_4k_4 \\ & \quad \doteq (w_1 + w_2 + w_3 + w_4)f + (w_2\ell_1 + w_3m_1 + w_4n_1)h \\ & \quad \quad + (w_2\ell_2 + w_3m_2 + w_4n_2)h^2 + (w_2\ell_3 + w_3m_3 + w_4n_3)h^3 \\ & = p_0 + p_1h + p_2h^2 + p_3h^3 \tag{8.71} \\ p_0 & = (w_1 + w_2 + w_3 + w_4)f \\ p_1 & = (w_2a_1 + w_3a_2 + w_4a_3)(f_t + f_yf) \\ p_2 & = \frac{1}{2}(w_2a_1^2 + w_3a_2^2 + w_4a_3^2)(f_{tt} + 2f_{ty}f + f_{yy}f^2) \\ & \quad + \{w_3a_1b_{22} + w_4(a_1b_{32} + a_2b_{33})\}f_y(f_t + f_yf) \\ p_3 & = \frac{1}{6}(w_2a_1^3 + w_3a_2^3 + w_4a_3^3)(f_{ttt} + 3f_{tty}f + 3f_{tyy}f^2 + f_{yyy}f^3) \\ & \quad + \frac{1}{2}\{w_3a_1^2b_{22} + w_4(a_1^2b_{32} + a_2^2b_{33})\}f_y(f_{tt} + 2f_{ty}f + f_{yy}f^2) \\ & \quad + w_4a_1b_{22}b_{33}f_y^2(f_t + f_yf) \\ & \quad + \{w_3a_1a_2b_{22} + w_4a_3(a_1b_{32} + a_2b_{33})\}(f_t + f_yf)(f_{ty} + f_{yy}f) \end{aligned}$$

となる．一方，(8.42) 式と同様，

$$f'(t, y) = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}y' = f_t + f_yf \tag{8.72a}$$

$$f''(t, y) = \frac{\partial f'}{\partial t} + \frac{\partial f'}{\partial y}y' = f_{tt} + 2f_{ty}f + f_{yy}f^2 + f_y(f_t + f_yf) \tag{8.72b}$$

$$\begin{aligned} f'''(t, y) &= \frac{\partial f''}{\partial t} + \frac{\partial f''}{\partial y}y' \\ &= f_{ttt} + 3f_{tty}f + 3f_{tyy}f^2 + f_{yyy}f^3 + f_y(f_{tt} + 2f_{ty}f + f_{yy}f^2) \\ & \quad + f_y^2(f_t + f_yf) + 3(f_t + f_yf)(f_{ty} + f_{yy}f) \end{aligned} \tag{8.72c}$$

であるから，(8.61) 式の左辺は，

$$f(t, y(t)) + \frac{1}{2}f'(t, y(t))h + \frac{1}{6}f''(t, y(t))h^2 + \frac{1}{24}f'''(t, y(t))h^3$$

$$\begin{aligned}
&= f + \frac{1}{2}(f_t + f_y f)h + \left\{ \frac{1}{6}(f_{tt} + 2f_{ty}f + f_{yy}f^2) + \frac{1}{6}f_y(f_t + f_y f) \right\} h^2 \\
&\quad + \left\{ \frac{1}{24}(f_{ttt} + 3f_{tty}f + 3f_{tyy}f^2 + f_{yyy}f^3) + \frac{1}{24}f_y(f_{tt} + 2f_{ty}f + f_{yy}f^2) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{24}f_y^2(f_t + f_y f) + \frac{1}{8}(f_t + f_y f)(f_{ty} + f_{yy}f) \right\} h^3 \quad (8.73)
\end{aligned}$$

となる．したがって、(8.60a) 式を満足するとしたときに得られる (8.71) 式と (8.73) 式とが等しくなるための条件が (8.60b) ～ (8.60e) 式であることがわかる．ただし、

- (8.60b) 式：(8.71) 式と (8.73) 式の h に関する 0 次項が等しくなる条件
 - (8.60c) 式：(8.71) 式と (8.73) 式の h に関する 1 次項が等しくなる条件
 - (8.60d) 式：(8.71) 式と (8.73) 式の h に関する 2 次項が等しくなる条件
 - (8.60e) 式：(8.71) 式と (8.73) 式の h に関する 3 次項が等しくなる条件
- である．

8.6 高次の 1 階常微分方程式への拡張

これまでに説明した 1 次の 1 階常微分方程式の数値解法の結果は、容易に高次の場合に拡張可能である．たとえば、2 次の 1 階常微分方程式

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{bmatrix}}_{\mathbf{y}'(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} f_1(t, y_1(t), y_2(t)) \\ f_2(t, y_1(t), y_2(t)) \end{bmatrix}}_{\mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t))}, \quad \begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{1,0} \\ y_{2,0} \end{bmatrix} \quad (8.74)$$

を考える．このとき、 $t_n = nh$, $y_{1,n} = y_1(t_n)$, $y_{2,n} = y_2(t_n)$ とすると、オイラー法や 4 次の古典的ルンゲ・クッタ法による漸化式は以下ようになる．

オイラー法による漸化式

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y_{1,n+1} \\ y_{2,n+1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{y}_{n+1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} y_{1,n} \\ y_{2,n} \end{bmatrix}}_{\mathbf{y}_n} + \underbrace{\begin{bmatrix} f_1(t_n, y_{1,n}, y_{2,n})h \\ f_2(t_n, y_{1,n}, y_{2,n})h \end{bmatrix}}_{\mathbf{f}(t_n, \mathbf{y}_n)h} \quad (8.75)$$

4 次の古典的ルンゲ・クッタ法による漸化式

$$\underbrace{\begin{bmatrix} k_{11} \\ k_{12} \end{bmatrix}}_{\mathbf{k}_1} = \underbrace{\begin{bmatrix} f_1(t_n, y_{1,n}, y_{2,n}) \\ f_2(t_n, y_{1,n}, y_{2,n}) \end{bmatrix}}_{\mathbf{f}(t_n, \mathbf{y}_n)} \quad (8.76a)$$

著 者 略 歴

川田 昌克 (かわた・まさかつ)

1970 年 1 月 15 日生まれ
1992 年 立命館大学理工学部情報工学科卒業
1997 年 立命館大学大学院理工学研究科博士課程後期課程情報工学専攻修了
(博士 (工学) 取得)
1997 年 立命館大学理工学部電気電子系助手 (任期制)
1998 年 舞鶴工業高等専門学校電子制御工学科助手
2000 年 舞鶴工業高等専門学校電子制御工学科講師
2006 年 舞鶴工業高等専門学校電子制御工学科助教授
2007 年 舞鶴工業高等専門学校電子制御工学科准教授
現在に至る

著 書

「MATLAB/Simulink によるわかりやすい制御工学」(森北出版)

[商 標]

MATLAB は米国 the MathWorks 社の登録商標です。
Windows は米国 Microsoft 社の登録商標です。
MacOS は米国 Apple 社の登録商標です。
そのほか記載された製品名などは各社の商標または登録商標です。

Scilab で学ぶわかりやすい数値計算法

© 川田昌克 2008

2008 年 12 月 25 日 第 1 版第 1 刷発行
2010 年 2 月 15 日 第 1 版第 2 刷発行

【本書の無断転載を禁ず】

著 者 川田昌克

発 行 者 森北博巳


発 行 所 森北出版株式会社

東京都千代田区富士見 1-4-11 (〒102-0071)

電話 03-3265-8341 / FAX 03-3264-8709

<http://www.morikita.co.jp/>

日本書籍出版協会・自然科学書協会・工学書協会 会員

 <(社)出版者著作権管理機構 委託出版物>

落丁・乱丁本はお取替いたします

印刷/エーヴィス・製本/協栄
組版/ウルス

Printed in Japan/ISBN978-4-627-09611-0

◇本書のサポート情報などをホームページに掲載する場合があります。
下記のアドレスにアクセスしご確認ください。

<http://www.morikita.co.jp/support/>

■本書の無断複写は著作権法上での例外を除き禁じられています。
複写される場合は、そのつど事前に (社) 出版者著作権管理機構
(電話 03-3513-6969, FAX 03-3513-6979, e-mail: info@jcopy.or.jp)
の許諾を得てください。