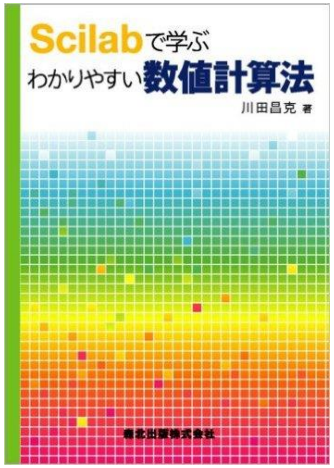
第 5 章

連立 1 次方程式の数値解法

― 反復法



消去法と反復法

連立 1 次方程式の数値解法

消去法（直接法）

- ガウスの消去法 …… 4.1 節
- 掃き出し法 …… 4.3 節

消去法の特徴

- 解が存在するのであれば，**確実に解が求まる**

- **計算負荷が高い**（多大なメモリ，計算時間が必要）

→ たとえば，拡大係数行列が疎行列（0 を多く含む行列）である場合，むだな演算をするので**計算効率が悪い**

消去法と反復法

連立 1 次方程式の数値解法

反復法　反復計算により数値解を求める

- ヤコビ法 …… 5.1 節
- ガウス=ザイデル法 …… 5.2 節
- SOR 法

反復法の特徴

- 消去法と比べると，**計算負荷が低い**
- 並列計算に適している

- 反復回数を増やしても数値解が**必ず厳密解に収束するわけではない**

→ ただし，**対角優位**な連立 1 次方程式なら **OK**

5.1　ヤコビ法

5.2　ガウス＝ザイデル法

5.3　反復計算が収束するための必要十分条件

ヤコビ法の考え方

3 元連立 1 次方程式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 & \cdots\cdots ① \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 & \cdots\cdots ② \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

- ① においては x_2, x_3 が与えられ，x_1 のみが**未知**であると考える

$$x_1 = \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3\right)$$

ヤコビ法の考え方

3 元連立 1 次方程式

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 & \cdots\cdots ① \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 & \cdots\cdots ② \\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 & \cdots\cdots ③
\end{cases}
$$

- ② においては x_1, x_3 が与えられ，x_2 のみが**未知**であると考える

$$
x_2 = \frac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3\right)
$$

ヤコビ法の考え方

3 元連立 1 次方程式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 & \cdots\cdots ① \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 & \cdots\cdots ② \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

- ③ においては x_1, x_2 が与えられ，x_3 のみが**未知**であると考える

$$x_3 = \frac{1}{a_{33}}\left(b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2\right)$$

ヤコビ法の考え方

3 元連立 1 次方程式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{a_{11}}\left(b_1 \phantom{- a_{21}x_1} - a_{12}x_2 - a_{13}x_3\right) \\ x_2 = \dfrac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}x_1 \phantom{- a_{12}x_2} - a_{23}x_3\right) \\ x_3 = \dfrac{1}{a_{33}}\left(b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2 \phantom{- a_{13}x_3}\right) \end{cases}$$

- 右辺における x_i が与えられ,
  左辺における x_i が**未知**であると考える

ヤコビ法の考え方

- 1 回目は x_i を適当に与える
- 2 回目以降の反復計算では，x_i を新たに x_i とする（$x_i \leftarrow x_i$）

反復計算

与えられた x_i に対して，

$$
\begin{cases}
x_1 = \dfrac{1}{a_{11}}\left(b_1 \phantom{- a_{21}x_1} - a_{12}x_2 - a_{13}x_3\right) \\
x_2 = \dfrac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}x_1 \phantom{- a_{12}x_2} - a_{23}x_3\right) \\
x_3 = \dfrac{1}{a_{33}}\left(b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2 \phantom{- a_{13}x_3}\right)
\end{cases}
$$

により x_i を計算

ヤコビ法の考え方

- 1 回目： $x_i^{(0)}$ を適当に与え，$k=0$ とする
- 2 回目以降：$k \leftarrow k+1$

反復計算

漸化式

$$
\begin{cases}
x_1^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{11}}\left(b_1 \phantom{{}-a_{21}x_1^{(k)}} - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)}\right) \\
x_2^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}x_1^{(k)} \phantom{{}-a_{12}x_2^{(k)}} - a_{23}x_3^{(k)}\right) \\
x_3^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{33}}\left(b_3 - a_{31}x_1^{(k)} - a_{32}x_2^{(k)} \phantom{{}-a_{13}x_3^{(k)}}\right)
\end{cases}
$$

ヤコビ法のアルゴリズム

n 元（n 変数）連立 1 次方程式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

ステップ 1

- 反復の初期値 $x_i^{(0)}$ を与え，$k = 0$ とする

ヤコビ法のアルゴリズム

ステップ 2

- 漸化式

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j\neq i,\ j=1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right) \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots\ ,\ n)$$

により $x_i^{(k+1)}$ を計算

$n = 3$ のときの漸化式

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j\neq i,\ j=1}^{3} a_{ij}x_j^{(k)}\right) \quad (i = 1,\ 2,\ 3)$$

ヤコビ法のアルゴリズム

ステップ 2

- 漸化式

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j\neq i,\ j=1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right)\ (i = 1,\ 2,\ \ldots\ ,\ n)$$

により $x_i^{(k+1)}$ を計算

$n = 3$ のときの漸化式

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{11}}\left(b_1 \phantom{- a_{21}x_1^{(k)}} - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)}\right) \\ x_2^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}x_1^{(k)} \phantom{- a_{12}x_2^{(k)}} - a_{23}x_3^{(k)}\right) \\ x_3^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{33}}\left(b_3 - a_{31}x_1^{(k)} - a_{32}x_2^{(k)} \phantom{- a_{13}x_3^{(k)}}\right) \end{cases}$$

ヤコビ法のアルゴリズム

ステップ3

- 収束条件

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}\left|x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}\right|}{\sum_{i=1}^{n}\left|x_i^{(k+1)}\right|} < \varepsilon$$ （ε は与えられた微小な正数）

を満足するのであれば，$x_i = x_i^{(k+1)}$ を数値解として反復計算を終了

そうでなければ，$k \leftarrow k+1$ としてステップ4へ進む

ヤコビ法のアルゴリズム

ステップ 4

- $k > k_{\max}$（$k_{\max}$：反復の最大回数）であれば，数値解が収束しないと判断し，反復計算を終了

  そうでなければ，ステップ 2 へ戻る

ヤコビ法っていつでも数値解が収束するわけではないんやなぁ
どんな場合に収束するんやろか

ヤコビ法が収束するための十分条件

ヤコビ法が収束するための十分条件

連立 1 次方程式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

が

対角優位

$$\frac{\displaystyle\sum_{j\neq i,\ j=1}^{n} |a_{ij}|}{|a_{ii}|} < 1 \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

であれば，**ヤコビ法による数値解**は**厳密解に収束**

ヤコビ法が収束するための十分条件

$n = 3$ のとき

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

$$\rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{b}}$$

対角優位

$$\frac{|a_{12}| + |a_{13}|}{|a_{11}|} < 1, \quad \frac{|a_{21}| + |a_{23}|}{|a_{22}|} < 1, \quad \frac{|a_{31}| + |a_{32}|}{|a_{33}|} < 1$$

ヤコビ法が収束するための十分条件

後 述

ヤコビ法の例題

例 5.1 (p. 88) Book

例：ヤコビ法

連立 1 次方程式

$$\begin{cases} 8x_1 - 1x_2 + 1x_3 = 25 \\ 1x_1 + 10x_2 + 2x_3 = -19 \\ -2x_1 + 1x_2 - 5x_3 = -3 \end{cases}$$

が**対角優位**であることを確認し，反復の初期値を

$$\boldsymbol{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

としたときの数値解を**ヤコビ法**により求める

ヤコビ法の例題

例：ヤコビ法

連立 1 次方程式

$$\begin{cases} 8x_1 - 1x_2 + 1x_3 = 25 \\ 1x_1 + 10x_2 + 2x_3 = -19 \\ -2x_1 + 1x_2 - 5x_3 = -3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -1 & 1 \\ 1 & 10 & 2 \\ -2 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 \\ -19 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

ヤコビ法の例題

例：ヤコビ法

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -1 & 1 \\ 1 & 10 & 2 \\ -2 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

対角優位の条件

$$\frac{|a_{12}| + |a_{13}|}{|a_{11}|} = \frac{|-1| + |1|}{|8|} = \frac{1}{4} < 1$$

$$\frac{|a_{21}| + |a_{23}|}{|a_{22}|} = \frac{|1| + |2|}{|10|} = \frac{3}{10} < 1$$

$$\frac{|a_{31}| + |a_{32}|}{|a_{33}|} = \frac{|-2| + |1|}{|-5|} = \frac{3}{5} < 1$$

を満足するので，**ヤコビ法**による数値解は厳密解に収束！

ヤコビ法の例題

例：ヤコビ法

漸化式

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{11}}\left(b_1 \phantom{- a_{21}x_1^{(k)}} - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)}\right) \\ x_2^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}x_1^{(k)} \phantom{- a_{12}x_2^{(k)}} - a_{23}x_3^{(k)}\right) \\ x_3^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{33}}\left(b_3 - a_{31}x_1^{(k)} - a_{32}x_2^{(k)} \phantom{- a_{13}x_3^{(k)}}\right) \end{cases}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -1 & 1 \\ 1 & 10 & 2 \\ -2 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

ヤコビ法の例題

例：ヤコビ法

漸化式

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \dfrac{1}{8}\left\{ 25 - (-1)x_2^{(k)} - 1x_3^{(k)} \right\} \\ x_2^{(k+1)} = \dfrac{1}{10}\left\{ -19 - 1x_1^{(k)} - 2x_3^{(k)} \right\} \\ x_3^{(k+1)} = \dfrac{1}{-5}\left\{ -3 - (-2)x_1^{(k)} - 1x_2^{(k)} \right\} \end{cases}$$

$$\boldsymbol{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ヤコビ法の例題

例：ヤコビ法

数値解

$$\boldsymbol{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{25}{8} \\ -\frac{19}{10} \\ \frac{3}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.125 \\ -1.9 \\ 0.6 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ x_3^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{45}{16} \\ -\frac{933}{400} \\ -\frac{103}{100} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.8125 \\ -2.3325 \\ -1.03 \end{bmatrix}$$

$$\vdots$$

ヤコビ法の例題

例：ヤコビ法

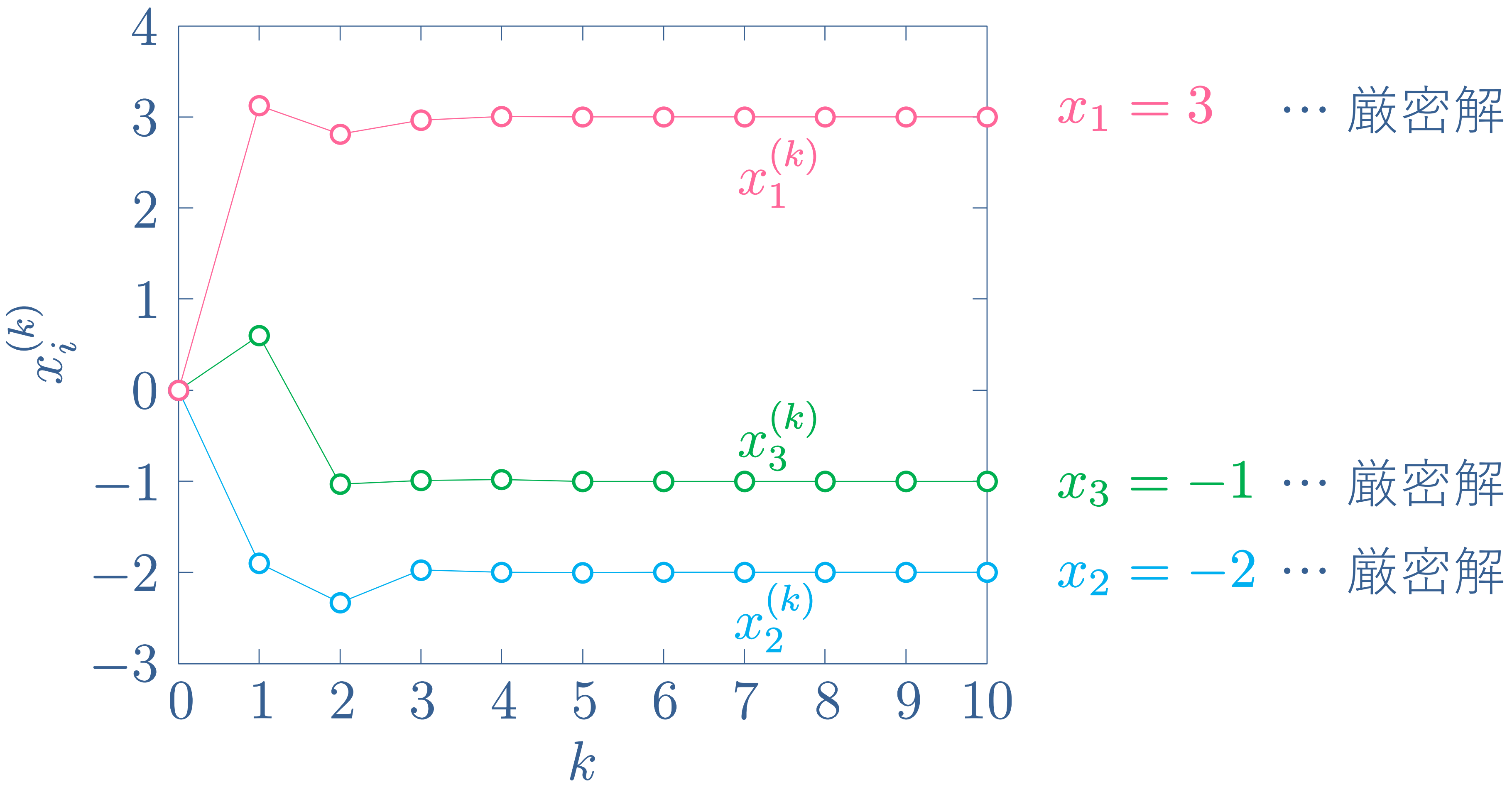
$\varepsilon = 10^{-5}$

```
x1( 0) = 0.000000      x2( 0) = 0.000000      x3( 0) = 0.000000
x1( 1) = 3.125000      x2( 1) = -1.900000     x3( 1) = 0.600000
x1( 2) = 2.812500      x2( 2) = -2.332500     x3( 2) = -1.030000
x1( 3) = 2.962188      x2( 3) = -1.975250     x3( 3) = -0.991500
x1( 4) = 3.002031      x2( 4) = -1.997919     x3( 4) = -0.979925
x1( 5) = 2.997751      x2( 5) = -2.004218     x3( 5) = -1.000396
x1( 6) = 2.999522      x2( 6) = -1.999696     x3( 6) = -0.999944
x1( 7) = 3.000031      x2( 7) = -1.999963     x3( 7) = -0.999748
x1( 8) = 2.999973      x2( 8) = -2.000053     x3( 8) = -1.000005
x1( 9) = 2.999994      x2( 9) = -1.999996     x3( 9) = -1.000000
x1(10) = 3.000000      x2(10) = -1.999999     x3(10) = -0.999997
```

$x_1 = 3$ … 厳密解　　$x_2 = -2$ … 厳密解　　$x_3 = -1$ … 厳密解

ヤコビ法の例題

例：ヤコビ法



ヤコビ法の宿題

問 5.1 (p. 90)
Book

宿題：ヤコビ法

連立 1 次方程式

$$\overbrace{\begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}}^{\boldsymbol{A}} \overbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}^{\boldsymbol{x}} = \overbrace{\begin{bmatrix} -4 \\ -5 \\ 2 \end{bmatrix}}^{\boldsymbol{b}}$$

が与えられたとき，

(1)　$\boldsymbol{A}$ が対角優位であることを示せ

(2)　反復の初期値を

$$\boldsymbol{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

としたとき，**ヤコビ法**により $\boldsymbol{x}^{(1)}, \boldsymbol{x}^{(2)}$ を求めよ

ガウス=ザイデル法の考え方

- 1 回目： $x_i^{(0)}$ を適当に与え， $k=0$ とする
- 2 回目以降： $k \leftarrow k+1$

反復計算

ヤコビ法の漸化式

$$
\begin{cases}
x_1^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{11}}\left(b_1 \qquad\qquad\qquad - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)}\right) \\
x_2^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}x_1^{(k)} \qquad\qquad\qquad - a_{23}x_3^{(k)}\right) \\
x_3^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{33}}\left(b_3 - a_{31}x_1^{(k)} - a_{32}x_2^{(k)} \qquad\qquad\qquad\right)
\end{cases}
$$

ガウス=ザイデル法の考え方

この時点ではすでに $x_1^{(k)}$ は $x_1^{(k+1)}$ に更新済

ヤコビ法の漸化式

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)}\right) \\ x_2^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k)}\right) \\ x_3^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{33}}\left(b_3 - a_{31}x_1^{(k)} - a_{32}x_2^{(k)}\right) \end{cases}$$

この時点ではすでに $x_2^{(k)}$ は $x_2^{(k+1)}$ に更新済

ガウス=ザイデル法の考え方

- 1 回目： $x_i^{(0)}$ を適当に与え，$k=0$ とする
- 2 回目以降：$k \leftarrow k+1$

反復計算

ガウス=ザイデル法の漸化式

$$
\begin{cases}
x_1^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)}\right) \\
x_2^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}x_1^{(k+1)} - a_{23}x_3^{(k)}\right) \\
x_3^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{33}}\left(b_3 - a_{31}x_1^{(k+1)} - a_{32}x_2^{(k+1)}\right)
\end{cases}
$$

ガウス=ザイデル法のアルゴリズム

- ガウス=ザイデル法のアルゴリズムは,
  ヤコビ法のアルゴリズムと**漸化式のみが異なる**

- ガウス=ザイデル法が収束するための十分条件は
  ヤコビ法と同じ（**対角優位**）

ガウス=ザイデル法のアルゴリズム

ステップ 2

- 漸化式

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{i>1,\ j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{i<n,\ j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right)$$

$$(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

により $x_i^{(k+1)}$ を計算

$n = 3$ のときの漸化式

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{11}}\left(b_1 \phantom{- a_{21}x_1^{(k+1)}} - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)}\right) \\ x_2^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}x_1^{(k+1)} \phantom{- a_{12}x_2^{(k)}} - a_{23}x_3^{(k)}\right) \\ x_3^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{33}}\left(b_3 - a_{31}x_1^{(k+1)} - a_{32}x_2^{(k+1)} \phantom{- a_{13}x_3^{(k)}}\right) \end{cases}$$

ガウス=ザイデル法の例題

例 5.2 (p. 92)
Book

例：ガウス=ザイデル法

連立 1 次方程式

$$\begin{cases} 8x_1 - 1x_2 + 1x_3 = 25 \\ 1x_1 + 10x_2 + 2x_3 = -19 \\ -2x_1 + 1x_2 - 5x_3 = -3 \end{cases}$$

に対し，反復の初期値を

$$\boldsymbol{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

としたときの数値解を**ガウス=ザイデル法**により求める

ガウス=ザイデル法の例題

例：ガウス=ザイデル法

連立 1 次方程式

$$\begin{cases} 8x_1 - 1x_2 + 1x_3 = 25 \\ 1x_1 + 10x_2 + 2x_3 = -19 \\ -2x_1 + 1x_2 - 5x_3 = -3 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -1 & 1 \\ 1 & 10 & 2 \\ -2 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 \\ -19 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

ガウス=ザイデル法の例題

例：ガウス=ザイデル法

漸化式

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{11}}\left(b_1 \phantom{- a_{21}x_1^{(k+1)}} - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)}\right) \\ x_2^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}x_1^{(k+1)} \phantom{- a_{12}x_2^{(k)}} - a_{23}x_3^{(k)}\right) \\ x_3^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{33}}\left(b_3 - a_{31}x_1^{(k+1)} - a_{32}x_2^{(k+1)} \phantom{- a_{13}x_3^{(k)}}\right) \end{cases}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -1 & 1 \\ 1 & 10 & 2 \\ -2 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

ガウス=ザイデル法の例題

例：ガウス=ザイデル法

漸化式

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \dfrac{1}{8}\left\{ 25 - (-1)x_2^{(k)} - 1x_3^{(k)} \right\} \\ x_2^{(k+1)} = \dfrac{1}{10}\left\{ -19 - 1x_1^{(k+1)} - 2x_3^{(k)} \right\} \\ x_3^{(k+1)} = \dfrac{1}{-5}\left\{ -3 - (-2)x_1^{(k+1)} - 1x_2^{(k+1)} \right\} \end{cases}$$

$$\boldsymbol{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ガウス=ザイデル法の例題

例：ガウス=ザイデル法

数値解

$$\boldsymbol{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{25}{8} \\ -\dfrac{177}{80} \\ \dfrac{437}{400} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.125 \\ -2.2125 \\ -1.0925 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ x_3^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{597}{200} \\ -\dfrac{99}{50} \\ -\dfrac{99}{100} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.985 \\ -1.98 \\ -0.99 \end{bmatrix}$$

$$\vdots$$

ガウス=ザイデル法の例題

例：ガウス=ザイデル法

$\varepsilon = 10^{-5}$

```
x1( 0) = 0.000000        x2( 0) = 0.000000        x3( 0) = 0.000000
x1( 1) = 3.125000        x2( 1) = -2.212500       x3( 1) = -1.092500
x1( 2) = 2.985000        x2( 2) = -1.980000       x3( 2) = -0.990000
x1( 3) = 3.001250        x2( 3) = -2.002125       x3( 3) = -1.000925
x1( 4) = 2.999850        x2( 4) = -1.999800       x3( 4) = -0.999900
x1( 5) = 3.000013        x2( 5) = -2.000021       x3( 5) = -1.000009
x1( 6) = 2.999999        x2( 6) = -1.999998       x3( 6) = -0.999999
```

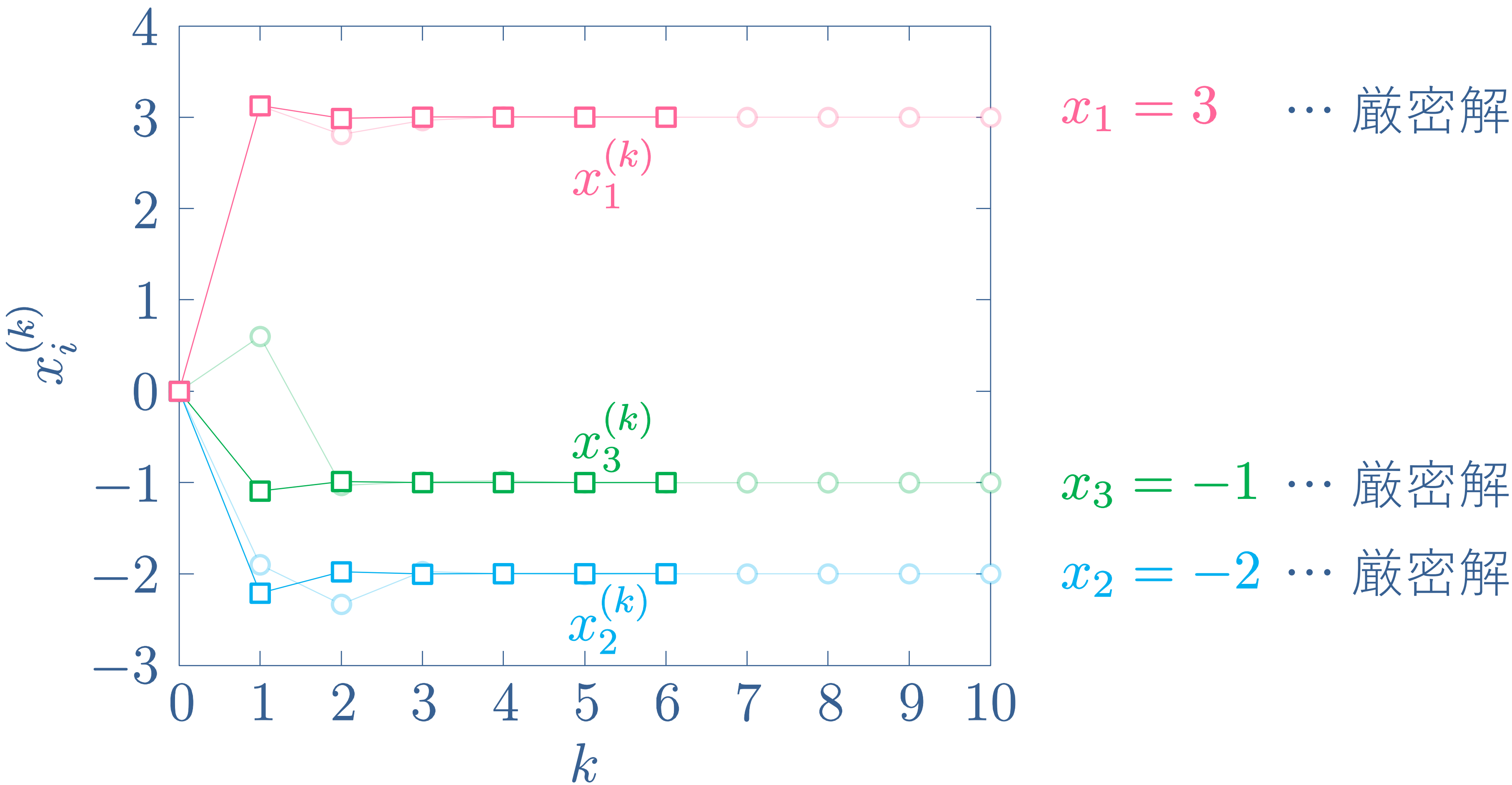
$x_1 = 3$ $\cdots$ 厳密解

$x_2 = -2$ $\cdots$ 厳密解

$x_3 = -1$ $\cdots$ 厳密解

ガウス=ザイデル法の例題

例：ガウス=ザイデル法



ガウス=ザイデル法の宿題

問 5.2 (p. 93)
Book

宿題：ガウス=ザイデル法

連立 1 次方程式

$$\overbrace{\begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}}^{\boldsymbol{A}} \overbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}^{\boldsymbol{x}} = \overbrace{\begin{bmatrix} -4 \\ -5 \\ 2 \end{bmatrix}}^{\boldsymbol{b}}$$

に対し，反復の初期値を

$$\boldsymbol{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

としたとき，**ガウス=ザイデル法**により $\boldsymbol{x}^{(1)}, \boldsymbol{x}^{(2)}$ を求めよ

5.1　ヤコビ法

5.2　ガウス＝ザイデル法

5.3　反復計算が収束するための必要十分条件

反復計算が収束するための必要十分条件

漸化式

ヤコビ法

$$\overbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}}^{\boldsymbol{A}} \overbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}^{\boldsymbol{x}} = \overbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}}^{\boldsymbol{b}}$$

$$\rightarrow \overbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}}^{\boldsymbol{D}} \overbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}^{\boldsymbol{x}} = \overbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}}^{\boldsymbol{b}} - \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 0 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{bmatrix}}^{\boldsymbol{E}} \overbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}^{\boldsymbol{x}}$$

$$\rightarrow \boldsymbol{D}\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{E}\boldsymbol{x}^{(k)}$$

$$\rightarrow \boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{q}\,, \quad \begin{cases} \boldsymbol{P} = -\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{q} = \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{b} \end{cases}$$

反復計算が収束するための必要十分条件

漸化式

ガウス=ザイデル法

$$\overbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}}^{\boldsymbol{D}} \overbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}^{\boldsymbol{x}} = \overbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}}^{\boldsymbol{b}} - \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}^{\boldsymbol{U}} \overbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}^{\boldsymbol{x}}$$

$$- \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{bmatrix}}^{\boldsymbol{L}} \overbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}^{\boldsymbol{x}}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{D}\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{U}\boldsymbol{x}^{(k)} - \boldsymbol{L}\boldsymbol{x}^{(k+1)}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{q}\,, \quad \begin{cases} \boldsymbol{P} = -(\boldsymbol{D}+\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{U} \\ \boldsymbol{q} = (\boldsymbol{D}+\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{b} \end{cases}$$

反復計算が収束するための必要十分条件

数値計算の誤差

$$\begin{cases} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{q} \\ \boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{q} \end{cases}$$

厳密解 $\boldsymbol{x}$ と数値解 $\boldsymbol{x}^{(k)}$ の誤差を

$$\boldsymbol{e}^{(k)} := \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^{(k)}$$

とすると,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}^{(k+1)} &= \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{q} - (\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{q}) \\ &= \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^{(k)}) \\ &= \boldsymbol{P}\boldsymbol{e}^{(k)} \end{aligned}$$

なので

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}^{(k+1)} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{e}^{(k)} \\ \boldsymbol{e}^{(k)} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{e}^{(k-1)} \\ \quad\vdots \\ \boldsymbol{e}^{(1)} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{e}^{(0)} \end{cases} \longrightarrow \begin{aligned} \boldsymbol{e}^{(k+1)} &= \boldsymbol{P}\boldsymbol{e}^{(k)} \\ &= \boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{P}\boldsymbol{e}^{(k-1)} = \boldsymbol{P}^2\boldsymbol{e}^{(k-1)} \\ &= \cdots \\ &= \boldsymbol{P}^k\cdot\boldsymbol{P}\boldsymbol{e}^{(0)} = \boldsymbol{P}^{k+1}\boldsymbol{e}^{(0)} \end{aligned}$$

反復計算が収束するための必要十分条件

数値計算の誤差

厳密解 $\boldsymbol{x}$ と数値解 $\boldsymbol{x}^{(k)}$ の誤差を

$$\mathbf{e}^{(k)} := \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^{(k)}$$

とすると，

$$\boxed{\mathbf{e}^{(k)} = \boldsymbol{P}^k \mathbf{e}^{(0)}}$$

$k \to \infty$ で $\mathbf{e}^{(k)} \to \mathbf{0}$ $(\boldsymbol{x}^{(k)} \to \boldsymbol{x})$ となるための条件は？

固有値，固有ベクトルを利用した対角化の操作を利用

反復計算が収束するための必要十分条件

固有値と固有ベクトル

$n \times n$ の正方行列 $\boldsymbol{P}$ に対して

固有値　　　：$\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$（スカラ）

……一般には複素数

固有ベクトル：$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$（$n$ 次元縦ベクトル）

……一般には複素ベクトル

固有値と固有ベクトルの定義

$$\boldsymbol{P}\boldsymbol{v} = \lambda \boldsymbol{v} \quad (\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}) \quad \Longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{c} \boldsymbol{P}\boldsymbol{v}_1 = \lambda_1 \boldsymbol{v}_1 \\ \boldsymbol{P}\boldsymbol{v}_2 = \lambda_2 \boldsymbol{v}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{P}\boldsymbol{v}_n = \lambda_n \boldsymbol{v}_n \end{array} \right.$$

$$\boldsymbol{v}_i = \begin{bmatrix} v_{i,1} \\ v_{i,2} \\ \vdots \\ v_{i,n} \end{bmatrix}$$

$(i = 1, 2, \ldots, n)$

反復計算が収束するための必要十分条件

対角化

$$\boldsymbol{S} := \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \boldsymbol{v}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{1,1} & v_{2,1} & v_{3,1} \\ v_{1,2} & v_{2,2} & v_{3,2} \\ v_{1,3} & v_{2,3} & v_{3,3} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\Lambda} := \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

とおくと

$$\begin{aligned} \boldsymbol{PS} &= \boldsymbol{P}\begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \boldsymbol{v}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{Pv}_1 & \boldsymbol{Pv}_2 & \boldsymbol{Pv}_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda_1\boldsymbol{v}_1 & \lambda_2\boldsymbol{v}_2 & \lambda_3\boldsymbol{v}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 v_{1,1} & \lambda_2 v_{2,1} & \lambda_3 v_{3,1} \\ \lambda_1 v_{1,2} & \lambda_2 v_{2,2} & \lambda_3 v_{3,2} \\ \lambda_1 v_{1,3} & \lambda_2 v_{2,3} & \lambda_3 v_{3,3} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} v_{1,1} & v_{2,1} & v_{3,1} \\ v_{1,2} & v_{2,2} & v_{3,2} \\ v_{1,3} & v_{2,3} & v_{3,3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \boldsymbol{v}_3 \end{bmatrix}\boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{S\Lambda} \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ $\boldsymbol{PS} = \boldsymbol{S\Lambda}$ $\Longrightarrow$ $\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{PS} = \boldsymbol{\Lambda}$ …… 対角化

$\Longrightarrow$ $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{S\Lambda S}^{-1}$

反復計算が収束するための必要十分条件

対角化

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{S}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{S}^{-1}$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{P}^2 = \boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{P} = \boldsymbol{S}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{S}^{-1}\cdot\boldsymbol{S}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{S}^{-1} = \boldsymbol{S}\boldsymbol{\Lambda}^2\boldsymbol{S}^{-1}$$

$$\boldsymbol{P}^3 = \boldsymbol{P}^2\cdot\boldsymbol{P} = \boldsymbol{S}\boldsymbol{\Lambda}^2\boldsymbol{S}^{-1}\cdot\boldsymbol{S}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{S}^{-1} = \boldsymbol{S}\boldsymbol{\Lambda}^3\boldsymbol{S}^{-1}$$

$$\vdots$$

$$\boldsymbol{P}^k = \boldsymbol{S}\boldsymbol{\Lambda}^k\boldsymbol{S}^{-1}$$

固有値と固有ベクトルを利用した k 乗の計算

$$\boldsymbol{P}^k = \boldsymbol{S}\boldsymbol{\Lambda}^k\boldsymbol{S}^{-1}$$

$$\boldsymbol{S} := \left[\begin{array}{c:c:c:c} v_{1,1} & v_{2,1} & \cdots & v_{n,1} \\ v_{1,2} & v_{2,2} & \cdots & v_{n,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{1,n} & v_{2,n} & \cdots & v_{n,n} \end{array}\right], \quad \boldsymbol{\Lambda} := \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

反復計算が収束するための必要十分条件

対角化

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{S\Lambda S}^{-1}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} \boldsymbol{P}^2 &= \boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{P} = \boldsymbol{S\Lambda S}^{-1}\cdot\boldsymbol{S\Lambda S}^{-1} = \boldsymbol{S\Lambda}^2\boldsymbol{S}^{-1} \\ \boldsymbol{P}^3 &= \boldsymbol{P}^2\cdot\boldsymbol{P} = \boldsymbol{S\Lambda}^2\boldsymbol{S}^{-1}\cdot\boldsymbol{S\Lambda S}^{-1} = \boldsymbol{S\Lambda}^3\boldsymbol{S}^{-1} \\ &\vdots \\ \boldsymbol{P}^k &= \boldsymbol{S\Lambda}^k\boldsymbol{S}^{-1} \end{aligned}$$

固有値と固有ベクトルを利用した k 乗の計算

$$\boldsymbol{P}^k = \boldsymbol{S\Lambda}^k\boldsymbol{S}^{-1}$$

$$\boldsymbol{S} := \begin{bmatrix} v_{1,1} & v_{2,1} & \cdots & v_{n,1} \\ v_{1,2} & v_{2,2} & \cdots & v_{n,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{1,n} & v_{2,n} & \cdots & v_{n,n} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\Lambda}^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n^k \end{bmatrix}$$

反復計算が収束するための必要十分条件

数値計算の誤差

厳密解 $\boldsymbol{x}$ と数値解 $\boldsymbol{x}^{(k)}$ の誤差： $\boldsymbol{e}^{(k)} := \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^{(k)}$

$$\boldsymbol{e}^{(k)} = \boldsymbol{P}^k \boldsymbol{e}^{(0)} = \boldsymbol{S}\boldsymbol{\Lambda}^k \boldsymbol{S}^{-1} \boldsymbol{e}^{(0)}$$

$$\boldsymbol{S} := \left[\begin{array}{c:c:c:c} v_{1,1} & v_{2,1} & \cdots & v_{n,1} \\ v_{1,2} & v_{2,2} & \cdots & v_{n,2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ v_{1,n} & v_{2,n} & \cdots & v_{n,n} \end{array}\right], \quad \boldsymbol{\Lambda}^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n^k \end{bmatrix}$$

$$|\lambda_i| < 1 \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

等価

$k \to \infty$ で $\boldsymbol{e}^{(k)} \to \boldsymbol{0} \ (\boldsymbol{x}^{(k)} \to \boldsymbol{x})$

必要十分条件

対角化の例題

例 5.3
(p. 96)
Book

例：固有値，固有ベクトルと対角化

正方行列

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

の固有値 λ，固有ベクトル $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ を求め，対角化する

$$\boldsymbol{P}\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$$

$\Longrightarrow$ $(\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{P})\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$

$\Longrightarrow$ $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ なので $\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{P}$ は逆行列を持たない

$|\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{P}| = 0$ …… 特性方程式

対角化の例題

例：固有値，固有ベクトルと対角化

特性方程式

$$|\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{P}| = \left|\lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\right| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda - 1)(\lambda - 3) = 0$$

の解 (固有値) $\lambda = 1,\ 3$

- 固有値 $\lambda = \lambda_1 = 1$ に対する固有ベクトル $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} v_{1,1} \\ v_{1,2} \end{bmatrix}$
- 固有値 $\lambda = \lambda_2 = 3$ に対する固有ベクトル $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} v_{2,1} \\ v_{2,2} \end{bmatrix}$

対角化の例題

例：固有値，固有ベクトルと対角化

- 固有値 $\lambda = \lambda_1 = 1$ に対する固有ベクトル $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} v_{1,1} \\ v_{1,2} \end{bmatrix}$

$$\boldsymbol{P}\boldsymbol{v}_1 = \lambda_1 \boldsymbol{v}_1 \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{1,1} \\ v_{1,2} \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} v_{1,1} \\ v_{1,2} \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} 2v_{1,1} + v_{1,2} = v_{1,1} \\ v_{1,1} + 2v_{1,2} = v_{1,2} \end{cases}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} v_{1,1} + v_{1,2} = 0 \\ v_{1,1} + v_{1,2} = 0 \end{cases}$$

$$\longrightarrow \boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} v_{1,1} \\ v_{1,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ -\alpha \end{bmatrix} \quad (\alpha \neq 0)$$

対角化の例題

例：固有値，固有ベクトルと対角化

- 固有値 $\lambda = \lambda_2 = 3$ に対する固有ベクトル $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} v_{2,1} \\ v_{2,2} \end{bmatrix}$

$$\boldsymbol{P}\boldsymbol{v}_2 = \lambda_2 \boldsymbol{v}_2 \quad \longrightarrow \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{2,1} \\ v_{2,2} \end{bmatrix} = 3 \cdot \begin{bmatrix} v_{2,1} \\ v_{2,2} \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \quad \begin{cases} 2v_{2,1} + \ \ v_{2,2} = 3v_{2,1} \\ \ \ v_{2,1} + 2v_{2,2} = 3v_{2,2} \end{cases}$$

$$\longrightarrow \quad \begin{cases} -v_{2,1} + v_{2,2} = 0 \\ \ \ v_{2,1} - v_{2,2} = 0 \end{cases}$$

$$\longrightarrow \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} v_{2,1} \\ v_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta \\ \beta \end{bmatrix} \ (\beta \neq 0)$$

対角化の例題

例：固有値，固有ベクトルと対角化

$$\boldsymbol{S} := \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\alpha & \beta \end{bmatrix} \Longrightarrow \boldsymbol{S}^{-1} = \frac{1}{2\alpha\beta}\begin{bmatrix} \beta & -\beta \\ \alpha & \alpha \end{bmatrix}$$

任意の $\alpha \neq 0,\ \beta \neq 0$ に対して

$$\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{P}\boldsymbol{S} = \frac{1}{2\alpha\beta}\begin{bmatrix} \beta & -\beta \\ \alpha & \alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\alpha & \beta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\Lambda}}$$

となるので，確かに対角化される

反復計算が収束するための必要十分条件の例題

例：ヤコビ法における固有値

例 5.4 (p. 97)
Book

連立 1 次方程式

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 8 & -1 & 1 \\ 1 & 10 & 2 \\ -2 & 1 & -5 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 25 \\ -19 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{P} = -\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{10} & 0 & -\frac{1}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 \end{bmatrix}$$

反復計算が収束するための必要十分条件の例題

例：ヤコビ法における固有値

$$\boldsymbol{P} = -\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{10} & 0 & -\frac{1}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 \end{bmatrix}$$

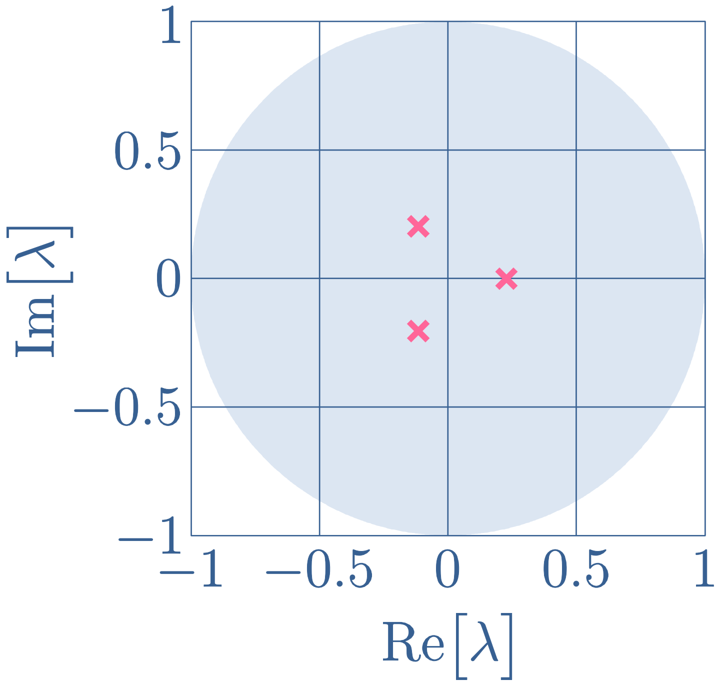
特性方程式 (3 次方程式)

$$|\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{P}| = \lambda^3 + \frac{1}{400}\lambda - \frac{1}{8} = 0$$

の解を数値的に求めると

$$\lambda = 0.2285,\ -0.1142 \pm 0.2041j$$

$\Rightarrow$ $|\lambda| < 1$



反復計算が収束するための必要十分条件の例題

例：ヤコビ法における固有値

MATLAB

```
>> D = [ 8  0  0
         0 10  0
         0  0 -5 ];
>> L = [ 0  0  0
         1  0  0
        -2  1  0 ];
>> U = [ 0 -1  1
         0  0  2
         0  0  0 ];
>> E = L + U;
>> P = -inv(D)*E
P =
         0    0.1250   -0.1250
   -0.1000         0   -0.2000
   -0.4000    0.2000         0
>> eig(P)
ans =
   0.2285 + 0.0000i
  -0.1142 + 0.2041i
  -0.1142 - 0.2041i
```

Scilab

```
--> D = [ 8  0  0
-->       0 10  0
-->       0  0 -5 ];
--> L = [ 0  0  0
-->       1  0  0
-->      -2  1  0 ];
--> U = [ 0 -1  1
-->       0  0  2
-->       0  0  0 ];
--> E = L + U;
--> P = -inv(D)*E
 P  =
    0.      0.125  - 0.125
  - 0.1     0.     - 0.2
  - 0.4     0.2      0.
--> spec(P)
 ans  =
    0.2284890
  - 0.1142445 + 0.2040966i
  - 0.1142445 - 0.2040966i
```

$$\lambda = 0.2285, \ -0.1142 \pm 0.2041j$$

反復計算が収束するための必要十分条件の例題

例：ガウス=ザイデル法における固有値

例 5.4 (p. 97)
Book

連立 1 次方程式

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 8 & -1 & 1 \\ 1 & 10 & 2 \\ -2 & 1 & -5 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 25 \\ -19 \\ -3 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{P} = -(\boldsymbol{D} + \boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \\ 0 & -\frac{1}{80} & -\frac{3}{16} \\ 0 & -\frac{21}{400} & \frac{1}{80} \end{bmatrix}$$

反復計算が収束するための必要十分条件の例題

例：ガウス=ザイデル法における固有値

$$\boldsymbol{P} = -(\boldsymbol{D}+\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \\ 0 & -\frac{1}{80} & -\frac{3}{16} \\ 0 & -\frac{21}{400} & \frac{1}{80} \end{bmatrix}$$

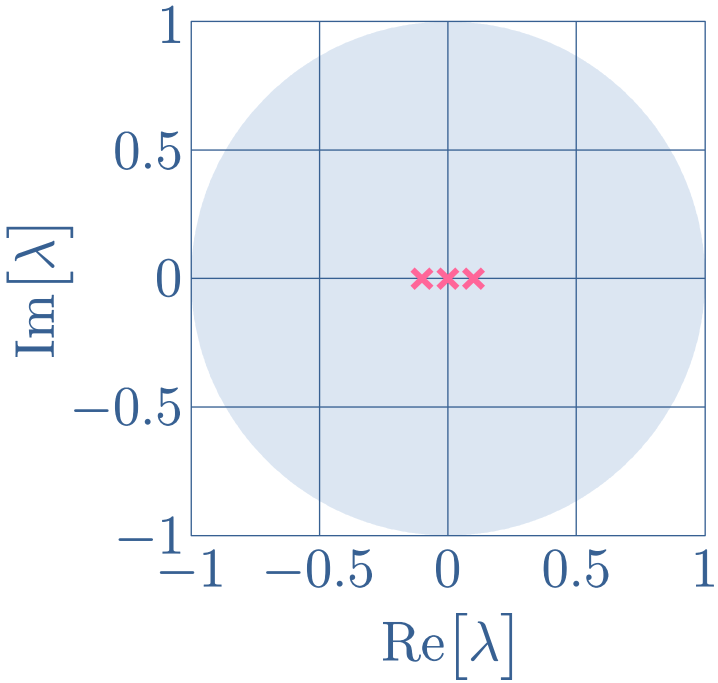
特性方程式 (3 次方程式)

$$|\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{P}| = \lambda^3 - \frac{1}{100}\lambda = 0$$

の解を求めると

$$\lambda = 0,\ \pm\frac{1}{10}$$

→ $|\lambda| < 1$



反復計算が収束するための必要十分条件の例題

例：ガウス=ザイデル法における固有値

MATLAB

```
>> D = [ 8  0  0
         0 10  0
         0  0 -5 ];
>> L = [ 0  0  0
         1  0  0
        -2  1  0 ];
>> U = [ 0 -1  1
         0  0  2
         0  0  0 ];
>> P = -inv(D + L)*U
P =
         0     0.1250   -0.1250
         0    -0.0125   -0.1875
         0    -0.0525    0.0125
>> eig(P)
ans =
         0
   -0.1000
    0.1000
```

Scilab

```
--> D = [ 8  0  0
-->        0 10  0
-->        0  0 -5 ];
--> L = [ 0  0  0
-->        1  0  0
-->       -2  1  0 ];
--> U = [ 0 -1  1
-->        0  0  2
-->        0  0  0 ];
--> P = -inv(D + L)*U
 P  =
    0.     0.125    - 0.125
    0.   - 0.0125   - 0.1875
    0.   - 0.0525     0.0125
--> spec(P)
 ans  =
    0
  - 0.1
    0.1
```

$$\lambda = 0,\ \pm\frac{1}{10}$$

反復計算が収束するための必要十分条件

注意点

- ここで求めた必要十分条件は，事前に固有値を数値的に求める必要があるので，実用的ではない
- **対角優位**によるチェックは計算負荷が小さいので，**十分条件**ではあるが，**実用上よく用いられる**

$\boldsymbol{A}$ が対角優位

$\xrightarrow{\text{十分条件}}$ $\boldsymbol{P}$ の固有値：$|\lambda| < 1$

$\xleftrightarrow{\text{必要十分条件}}$ 反復計算による数値誤差が 0 に収束

ヤコビ法と対角優位性

$\boldsymbol{A}$ が対角優位

$\longrightarrow$ $\boldsymbol{P}$ の固有値：$|\lambda| < 1$

十分条件

ヤコビ法と対角優位性

漸化式

ヤコビ法

$$\overbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}}^{\boldsymbol{A}} \overbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}^{\boldsymbol{x}} = \overbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}}^{\boldsymbol{b}}$$

$$\Rightarrow \overbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}}^{\boldsymbol{D}} \overbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}^{\boldsymbol{x}} = \overbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}}^{\boldsymbol{b}} - \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 0 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{bmatrix}}^{\boldsymbol{E}} \overbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}^{\boldsymbol{x}}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{D}\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{E}\boldsymbol{x}^{(k)}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{q}\,, \quad \begin{cases} \boldsymbol{P} = -\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{q} = \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{b} \end{cases}$$

ヤコビ法と対角優位性

$\boldsymbol{P}$ の固有値 λ と固有ベクトル $\boldsymbol{v}$ の関係

ヤコビ法

$$\boldsymbol{P}\boldsymbol{v}_i = \lambda \boldsymbol{v}_i\,,\ \boldsymbol{P} = -\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{E}$$

$$\Rightarrow -\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{E}\boldsymbol{v}_i = \lambda_i \boldsymbol{v}_i \Rightarrow -\boldsymbol{E}\boldsymbol{v}_i = \lambda_i \boldsymbol{D}\boldsymbol{v}_i$$

$$\Rightarrow -\overbrace{\begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 0 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{bmatrix}}^{\boldsymbol{E}} \overbrace{\begin{bmatrix} v_{i,1} \\ v_{i,2} \\ v_{i,3} \end{bmatrix}}^{\boldsymbol{v}_i} = \lambda \overbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}}^{\boldsymbol{D}} \overbrace{\begin{bmatrix} v_{i,1} \\ v_{i,2} \\ v_{i,3} \end{bmatrix}}^{\boldsymbol{v}_i}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -(a_{12}v_{i,2} + a_{13}v_{i,3}) = \lambda_i a_{11} v_{i,1} \\ -(a_{21}v_{i,1} + a_{23}v_{i,3}) = \lambda_i a_{22} v_{i,2} \\ -(a_{31}v_{i,1} + a_{32}v_{i,2}) = \lambda_i a_{33} v_{i,3} \end{cases}$$

ヤコビ法と対角優位性

$\boldsymbol{P}$ の固有値 λ と固有ベクトル $\boldsymbol{v}$ の関係

ヤコビ法

$$\begin{cases} -(a_{12}v_{i,2} + a_{13}v_{i,3}) = \lambda_i a_{11}v_{i,1} \\ -(a_{21}v_{i,1} + a_{23}v_{i,3}) = \lambda_i a_{22}v_{i,2} \\ -(a_{31}v_{i,1} + a_{32}v_{i,2}) = \lambda_i a_{33}v_{i,3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_i = -\frac{a_{12}v_{v2} + a_{13}v_{i,3}}{a_{11}v_{i,1}}$$

$$= -\frac{a_{21}v_{i,1} + a_{23}v_{i,3}}{a_{22}v_{i,2}}$$

$$= -\frac{a_{31}v_{i,1} + a_{32}v_{i,2}}{a_{33}v_{i,3}}$$

ヤコビ法と対角優位性

$\boldsymbol{P}$ の固有値 λ と固有ベクトル $\boldsymbol{v}$ の関係

ヤコビ法

固有ベクトル（複素ベクトル）

$$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} v_{i,1} \\ v_{i,2} \\ v_{i,3} \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{(i)} & |v_{i,1}| \text{ が最大} \\ \text{(ii)} & |v_{i,2}| \text{ が最大} \\ \text{(iii)} & |v_{i,3}| \text{ が最大} \end{array}\right\} \quad \text{いずれの場合も}$$

対角優位

$$\frac{|a_{12}| + |a_{13}|}{|a_{11}|} < 1, \quad \frac{|a_{21}| + |a_{23}|}{|a_{22}|} < 1, \quad \frac{|a_{31}| + |a_{32}|}{|a_{33}|} < 1$$

であれば, $|\lambda_i| < 1$ であることを示す

→ **ヤコビ法**による数値解は厳密解に収束

ヤコビ法と対角優位性

$\boldsymbol{P}$ の固有値 λ と固有ベクトル $\boldsymbol{v}$ の関係

ヤコビ法

(i) $|v_{i,1}|$ が最大であるとき： $\dfrac{|v_{i,2}|}{|v_{i,1}|} \leq 1, \; \dfrac{|v_{i,3}|}{|v_{i,1}|} \leq 1$

$$\lambda_i = -\frac{a_{12}v_{i,2} + a_{13}v_{i,3}}{a_{11}v_{i,1}}$$

$$\longrightarrow \quad |\lambda_i| = \frac{|a_{12}v_{i,2} + a_{13}v_{i,3}|}{|a_{11}v_{i,1}|} \leq \frac{|a_{12}||v_{i,2}| + |a_{13}||v_{i,3}|}{|a_{11}||v_{i,1}|}$$

$$= \frac{|a_{12}|\dfrac{|v_{i,2}|}{|v_{i,1}|} + |a_{13}|\dfrac{|v_{i,3}|}{|v_{i,1}|}}{|a_{11}|} \leq \frac{|a_{12}| + |a_{13}|}{|a_{11}|}$$

対角優位

$\dfrac{|a_{12}| + |a_{13}|}{|a_{11}|} < 1$ であれば $|\lambda_i| < 1$

$\longrightarrow$ **ヤコビ法**による数値解は厳密解に収束

ヤコビ法と対角優位性

$\boldsymbol{P}$ の固有値 λ と固有ベクトル $\boldsymbol{v}$ の関係

ヤコビ法

(ii) $|v_{i,2}|$ が最大であるとき： $\dfrac{|v_{i,1}|}{|v_{i,2}|} \leq 1, \ \dfrac{|v_{i,3}|}{|v_{i,2}|} \leq 1$

$$\lambda_i = -\frac{a_{21}v_{i,1} + a_{23}v_{i,3}}{a_{22}v_{i,2}}$$

$$\longrightarrow \quad |\lambda_i| = \frac{|a_{21}v_{i,1} + a_{23}v_{i,3}|}{|a_{22}v_{i,2}|} \leq \frac{|a_{21}||v_{i,1}| + |a_{23}||v_{i,3}|}{|a_{22}||v_{i,2}|}$$

$$= \frac{|a_{21}|\dfrac{|v_{i,1}|}{|v_{i,2}|} + |a_{23}|\dfrac{|v_{i,3}|}{|v_{i,2}|}}{|a_{22}|} \leq \frac{|a_{21}| + |a_{23}|}{|a_{22}|}$$

対角優位

$\dfrac{|a_{21}| + |a_{23}|}{|a_{22}|} < 1$ であれば $|\lambda_i| < 1$

→ **ヤコビ法**による数値解は厳密解に収束

ヤコビ法と対角優位性

$\boldsymbol{P}$ の固有値 λ と固有ベクトル $\boldsymbol{v}$ の関係

ヤコビ法

(iii) $|v_{i,3}|$ が最大であるとき： $\dfrac{|v_{i,1}|}{|v_{i,3}|} \leq 1, \ \dfrac{|v_{i,2}|}{|v_{i,3}|} \leq 1$

$$\lambda_i = -\frac{a_{31}v_{i,1} + a_{32}v_2}{a_{33}v_{i,3}}$$

$$\longrightarrow \quad |\lambda_i| = \frac{|a_{31}v_{i,1} + a_{32}v_{i,2}|}{|a_{33}v_{i,3}|} \leq \frac{|a_{31}||v_{i,1}| + |a_{32}||v_{i,2}|}{|a_{33}||v_{i,3}|}$$

$$= \frac{|a_{31}|\dfrac{|v_{i,1}|}{|v_{i,3}|} + |a_{32}|\dfrac{|v_{i,2}|}{|v_{i,3}|}}{|a_{33}|} \leq \frac{|a_{31}| + |a_{32}|}{|a_{33}|}$$

対角優位

$\dfrac{|a_{31}| + |a_{32}|}{|a_{33}|} < 1$ であれば $|\lambda_i| < 1$

$\longrightarrow$ **ヤコビ法**による数値解は厳密解に収束

ヤコビ法と対角優位性

$\boldsymbol{A}$ が対角優位

$\longrightarrow$ $\boldsymbol{P}$ の固有値：$|\lambda_i| < 1$

十分条件

$\longleftrightarrow$ 反復計算による数値誤差が 0 に収束

必要十分条件