

(a) ボード線図とベクトル軌跡

2次遅れ要素 (7.58) 式の周波数伝達関数 $P(j\omega)$ は, $\eta := \omega/\omega_n$ とおくと,

$$P(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{\omega_n^2 - \omega^2 + j(2\zeta\omega_n\omega)} = \frac{1}{1 - \eta^2 + j(2\zeta\eta)} \quad (7.60)$$

であるから, ゲイン $G_g(\omega)$, 位相差 $G_p(\omega)$ は

$$G_g(\omega) = |P(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + (2\zeta\eta)^2}} \text{ [倍]} \quad (7.61)$$

$$G_p(\omega) = \angle P(j\omega) = -\tan^{-1} \frac{2\zeta\eta}{1 - \eta^2} \text{ [deg]} \quad (7.62)$$

となる. (7.61), (7.62) 式より

(i) $0 < \eta = \omega/\omega_n \ll 1$ ($0 < \omega \ll \omega_n$) のとき :

$$G_g(\omega) \simeq 1 \text{ [倍]} \implies 20 \log_{10} G_g(\omega) \simeq 0 \text{ [dB]}$$

$$G_p(\omega) \simeq -\tan^{-1} 0 = 0 \text{ [deg]}$$

(ii) $\eta = \omega/\omega_n = 1$ ($\omega = \omega_n$) のとき :

$$G_g(\omega) = \frac{1}{2\zeta} \text{ [倍]} \implies 20 \log_{10} G_g(\omega) = 20 \log_{10} \frac{1}{2\zeta} \text{ [dB]}$$

$$G_p(\omega) = -\tan^{-1} \infty = -90 \text{ [deg]}$$

(iii) $\eta = \omega/\omega_n \gg 1$ ($\omega \gg \omega_n$) のとき :

$$G_g(\omega) \simeq \frac{1}{\eta^2} \text{ [倍]} \implies 20 \log_{10} G_g(\omega) \simeq -40 \log_{10} \eta \text{ [dB]}$$

$$G_p(\omega) \simeq -\tan^{-1} 0 = -180 \text{ [deg]}$$

であるから, 2次遅れ要素のボード線図は図 7.16 (a) ~ (c), ベクトル軌跡は図 7.16 (d) のようになる.

(b) ピーク角周波数 ω_p と共振ピーク M_p

$\omega = \omega_n$ 付近の周波数領域では, 減衰係数 ζ の値によって $G_g(\omega) > 1$ となる場合がある. この場合, $\omega = \omega_n$ 付近では正弦波入力 $u(t) = A \sin \omega t$ の振幅 A と比べて, (7.6) 式 (p. 137) に示した周波数応答 $y_{\text{app}}(t)$ の振幅

$$B(\omega) = AG_g(\omega) = \frac{A}{\sqrt{f(\eta)}}, \quad f(\eta) := (1 - \eta^2)^2 + (2\zeta\eta)^2 \quad (7.63)$$

の方が大きくなる ($B(\omega) > A$ となる) ため, 共振を生じる. ここでは, 共振が生じるような減衰係数 ζ の範囲を求めてみよう.

(7.63) 式の振幅 $B(\omega)$ が最大となるのは $f(\eta)$ が最小となるときである. $f(\eta)$ を η で微分すると,

$$\frac{df(\eta)}{d\eta} = 4\eta(\eta^2 + 2\zeta^2 - 1)$$

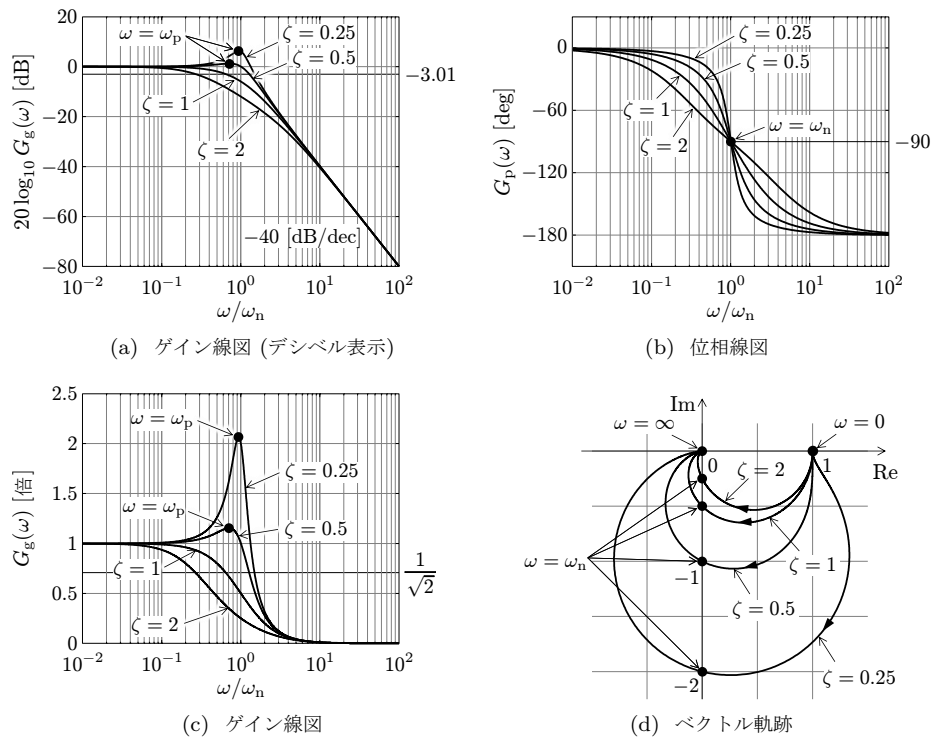


図 7.16 2 次遅れ要素のボード線図とベクトル軌跡

であるから、 $\frac{df(\eta)}{d\eta} = 0$ となるのは $\eta = 0, \pm\sqrt{1-2\zeta^2}$ である。そのため、 $\zeta > 0$ の大小により以下のように場合分けされる。

- **$0 < \zeta < 1/\sqrt{2}$ のとき** : $1 - 2\zeta^2 > 0$ なので、 $df(\eta)/d\eta = 0$ の三つの解は互いに異なる実数 $\eta = 0, \pm\eta_p$ であり、三つの極値を持つ。ただし、 $\eta_p = \sqrt{1-2\zeta^2}$ である。増減表は

η	\dots	$-\eta_p$	\dots	0	\dots	η_p	\dots
$\frac{df(\eta)}{d\eta}$	-	0	+	0	-	0	+
$f(\eta)$	\searrow	f_{\min}	\nearrow	1	\searrow	f_{\min}	\nearrow

となり、 $f(\eta)$ ($\eta > 0$) は $\eta = \eta_p$ で最小値

$$f_{\min} := f(\eta_p) = 4\zeta^2(1 - \zeta^2)$$

を持つ。ここで、 $0 < f_{\min} < 1$ となることに注意する。したがって、 $\eta = \omega/\omega_n$ と $f(\eta)$ の関係は、図 7.17 (a) のようになり、ピーク角周波数 ω_p ($= \omega_n \eta_p$) と共振ピーク M_p は

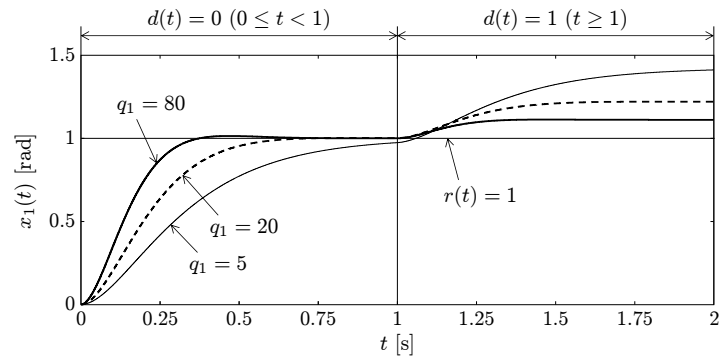


図 9.11 目標値からのフィードフォワードを利用した目標値追従

9.5.2 積分型サーボ制御

ここでは、外乱 $d(t)$ を考慮した可制御な制御対象

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(u(t) + d(t)) \\ y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \end{cases} \quad (9.73)$$

に対して、積分器を含ませたコントローラ

積分型コントローラ

$$u(t) = \mathbf{K}\mathbf{x}(t) + \mathbf{G}w(t), \quad w(t) := \int_0^t e(\tau) d\tau, \quad e(t) = r - y(t) \quad (9.74)$$

を用い、定値（もしくはステップ状に変化する）の目標値 $r(t)$ や外乱 $d(t)$ に対して、「 $t \rightarrow \infty$ 」で「 $e(t) \rightarrow 0$ 」を実現する。このときのフィードバック制御系を**積分型サー**

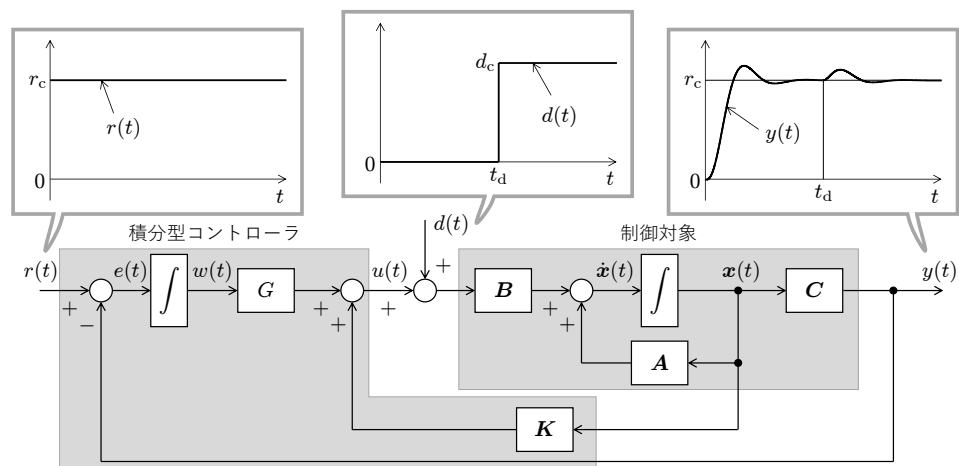


図 9.12 積分型サーボ系

B.5.2 数式処理における MATLAB 関数

関数名	使用例	説明
syms	syms x y	x, y を複素数のシンボリック変数として定義
	syms x y real	x, y を実数のシンボリック変数として定義
	syms x y positive	x, y を正数のシンボリック変数として定義
	syms x y integer	x, y を整数のシンボリック変数として定義
simplify	simplify(fx)	$f(x)$ を単純化
collect	collect(fx)	$f(x)$ をべき乗でまとめる
	collect(fx,x)	$f(x)$ を x に関するべき乗でまとめる
factor	factor(fx)	$f(x)$ を因数分解したときの因数
	prod(factor(fx))	$f(x)$ を因数分解
expand	expand(fx)	$f(x)$ の展開
subs	subs(fx,x,a)	$f(x)$ の x に a を代入 ($f(x) _{x=a}$)
limit	limit(fx,x,a)	極限 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$
fplot	fplot(fx)	グラフの描画
	fplot(fx,[xmin xmax])	グラフの描画 (横軸の範囲を指定)
laplace	Fs = laplace(ft)	$f(t)$ のラプラス変換 $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$
ilaplace	ft = ilaplace(Fs)	$F(s)$ の逆ラプラス変換 $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$
taylor	taylor(fx)	$f(x)$ の 5 次までのマクローリン展開
	taylor(fx,x,'Order',n)	$f(x)$ の n 次までのマクローリン展開
	taylor(fx,x,a)	$f(x)$ の $x = a$ における 5 次までのテイラー展開
	taylor(fx,x,a,'Order',n)	$f(x)$ の $x = a$ における n 次までのテイラー展開

B.5.3 制御工学に関連した MATLAB 関数

■ モデルの定義

関数名	使用例	説明
tf	sys = tf(num,den)	(B.1) 式の形式の伝達関数 $P(s)$ を定義
	sys = tf(sys)	(B.1) 式の形式の伝達関数 $P(s)$ に変換
	s = tf('s')	ラプラス演算子 s の定義
zpk	sys = zpk(z,p,K)	(B.2) 式の形式の伝達関数 $P(s)$ の定義
	sys = zpk(sys)	(B.2) 式の形式の伝達関数 $P(s)$ に変換
ss	sys = ss(A,B,C,D)	状態空間表現 (B.3) 式の定義
	sys = ss(sys)	状態空間表現 (B.3) 式に変換

$$P(s) = \frac{N(s)}{D(s)}, \quad \begin{cases} N(s) = b_m s^m + \cdots + b_1 s + b_0 \\ D(s) = a_n s^n + \cdots + a_1 s + a_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{num} = [b_m \cdots b_1 b_0] \\ \text{den} = [a_n \cdots a_1 a_0] \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

$$P(s) = \frac{k(s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{z} = [z_1 \ z_2 \ \cdots \ z_m] \\ \mathbf{p} = [p_1 \ p_2 \ \cdots \ p_n] \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \end{cases} \quad (\text{B.3})$$

関数名	使用例	説明
margin	margin(sys)	ボード線図の描画と安定余裕の表示
	[invL, Pm, wpc, wgc] = margin(sys) Gm = 20*log10(invL)	ゲイン余裕 G_m , 位相余裕 P_m , 位相交差角周波数 ω_{pc} , ゲイン交差角周波数 ω_{gc} の計算

■ PID コントローラの設計

関数名	使用例	説明
pidtune	sysC = piddtune(sysP,type)	制御対象のモデル sysP に対し, 形式を type とした PID コントローラの設計
	sysC = piddtune(sysP,type,wgc)	開ループ伝達関数のゲイン交差角周波数 ω_{gc} を指定
	sysC = piddtune(sysP,type,opts)	“piddtuneOptions”により位相余裕や, 目標値追従と外乱抑制のバランスを設定
pidTuner	pidTuner(sysP)	制御対象のモデル sysP に対し, PID コントローラを視覚的に設計

■ 状態空間表現に基づく解析

関数名	使用例	説明
initial	initial(sys,x0)	$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ に対する零入力応答 $\mathbf{y}(t)$ の描画 (時間指定なし)
	initial(sys,x0,t)	$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ に対する零入力応答 $\mathbf{y}(t)$ の描画 (時間指定あり)
	y = initial(sys,x0,t);	$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ に対する零入力応答 $\mathbf{y}(t)$ の計算
ctrb	Vc = ctrb(A,B)	可制御性行列 $\mathbf{V}_c = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \cdots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]$ の計算
obsv	Vo = obsv(A,C)	可制御性行列 $\mathbf{V}_o = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix}$ の計算

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{Ax}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{Cx}(t) \end{cases} \implies \text{sys} = \text{ss}(\mathbf{A}, [\], \mathbf{C}, [\]);$$

■ 状態空間表現に基づくコントローラ設計

関数名	使用例	説明
acker	K = - acker(A,B,p)	極配置法: 1 入力 n 次系の制御対象に対し, $\mathbf{A} + \mathbf{BK}$ の固有値を $\mathbf{p} = [p_1 \ p_2 \ \cdots \ p_n]$ とする $\mathbf{u}(t) = \mathbf{Kx}(t)$ を設計
place	K = - place(A,B,p)	極配置法: m 入力 n 次系の制御対象に対し, $\mathbf{A} + \mathbf{BK}$ の固有値を $\mathbf{p} = [p_1 \ p_2 \ \cdots \ p_n]$ とする $\mathbf{u}(t) = \mathbf{Kx}(t)$ を設計 (p_i の重複は m を超えてはならない)
lqr	K = - lqr(A,B,Q,R)	最適レギュレータ: 評価関数 $J = \int_0^\infty (\mathbf{x}(t)^\top \mathbf{Qx}(t) + \mathbf{u}(t)^\top \mathbf{Ru}(t))dt$ を最小化する $\mathbf{u}(t) = \mathbf{Kx}(t)$ を設計
care	P = care(A,B,Q,R)	リカッチ方程式 $\mathbf{PA} + \mathbf{A}^\top \mathbf{P} - \mathbf{PBR}^{-1}\mathbf{B}^\top \mathbf{P} + \mathbf{Q} = \mathbf{O}$ の解 $\mathbf{P} = \mathbf{P}^\top > 0$ を求める