

$$(Ms^2 + cs)y(s) = u(s) \implies y(s) = P(s)u(s), \quad P(s) = \frac{1}{Ms^2 + cs + k} \quad (1.37)$$

が得られる。

問題 1.6 図 1.15 に示す水平面を回転するアーム系を考える。ただし、 $\tau(t)$ は入力トルク、 $\tau_d(t)$ は粘性摩擦トルクである。また、軸まわりの慣性モーメントを J 、軸の粘性摩擦係数を c とする。入力 $u(t)$ 、出力 $y(t)$ を以下のように選んだとき、 $u(s)$ から $y(s)$ への伝達関数 $P(s)$ を求めよ。

- (1) $u(t) = \tau(t)$, $y(t) = \theta(t)$
- (2) $u(t) = \tau(t)$, $y(t) = \omega(t) = \dot{\theta}(t)$

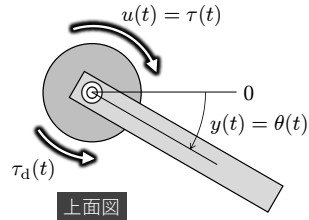


図 1.15 水平面を回転するアーム系

問題 1.7 図 1.16 に示す 2 慣性系は、台車 1 と台車 2 とがばねとダンパにより接続されており、台車 2 にはアクチュエータにより生成される力 $f_2(t)$ が加わっている。 $u(t) = f_2(t)$, $y(t) = z_2(t)$ としたとき、以下の設問に答えよ。ただし、台車自体の粘性摩擦は無視する。

- (1) 台車 1, 2 の運動方程式

$$F_i(t) = M_i \ddot{z}_i(t) \quad (i = 1, 2) \quad (1.38)$$

において、 $F_i(t)$ を $f_2(t)$, $f_s(t)$, $f_d(t)$ により表せ。

- (2) すべての初期値を 0 として (1.38) 式の両辺をラプラス変換し、 $z_1(s)$ を消去することで $u(s)$ から $y(s)$ への伝達関数 $P(s)$ を求めよ。

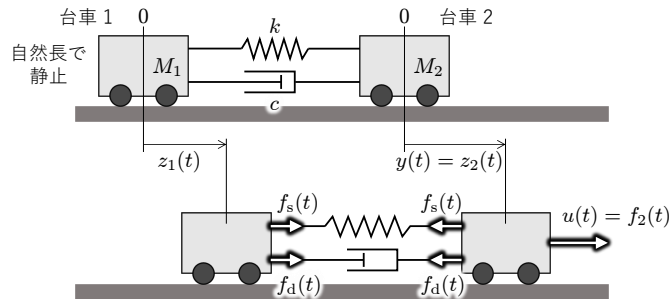


図 1.16 2 慣性系

これまでに示してきた例や問題のシステムは、数学モデルが線形微分方程式 (1.1) 式 (p. 7) で表現できる線形システムであった。そのため、システムの数学モデルを伝達関数表現で記述することができた。しかしながら、一般に、システムの微分方程式は非線形である。このような場合には、微分方程式の非線形項を近似的に線形化すれば、数学モデルを伝達関数表現で記述することができる。以下では、非線形なシステムの例として、鉛直面を回転するアーム系を考える。

```

13
14         if k >= 1 & k <= N      .....  $k \geq 1$  かつ  $k \leq N$  ならば  $h_{ij} = \alpha_k$ 
15             H(i,j) = alpha(k);
16         else                    .....  $k < 1$  もしくは  $k > N$  ならば  $h_{ij} = 0$ 
17             H(i,j) = 0;
18         end
19     end
20 end
21
22 H      ..... フルビッツ行列  $H = \begin{bmatrix} h_{11} & \cdots & h_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{n1} & \cdots & h_{nn} \end{bmatrix}$  の表示: (3.7) 式 (p. 51)
23
24 if mod(n,2) == 0      .....  $n$  を 2 で割った余りが 0 であれば ( $n$  が偶数であれば)
25     i_min = 3;      i_max = n - 1;       $i_{\min} = 3, i_{\max} = n - 1$ 
26 else                  ..... そうでなければ ( $n$  が奇数であれば),
27     i_min = 2;      i_max = n - 1;       $i_{\min} = 2, i_{\max} = n - 1$ 
28 end
29
30 flag = 0;      ..... “flag” の初期設定 (“flag = 0”)
31 for i = i_min:2:i_max      .....  $i = i_{\min}, i_{\min} + 2, \dots, i_{\max}$  として繰り返す
32     h = det(H(1:i,1:i));      ..... 主座小行列式  $H_i$  を計算して表示
33     str = ['H', num2str(i), '= h'];      ( $n$  が偶数:  $H_3, H_5, \dots, H_{n-1}$ )
34     eval(str)      ( $n$  が奇数:  $H_2, H_4, \dots, H_{n-1}$ )
35
36     if h <= 0      ..... 条件 B'' の判別 ( $H_i \leq 0$  なら “flag = 1” に設定)
37         flag = 1;
38     end
39 end
40
41 if flag == 0      ..... “flag = 0” なら条件 A, B'' を満足するので
42     fprintf(' 安定である %n');      「安定である」と表示
43 else              ..... “flag = 1” なら条件 A を満足するが条件 B'' を満足
44     fprintf(' 安定ではない');      しないので「安定ではない」と表示
45     fprintf(' ----> 条件 A を満足するが, 条件 B'' を満足しない %n');
46 end
47 else              .....  $\alpha_i = a_j$  ( $i = j + 1$ ) のうち一つでも負のものが含まれる場合,
48     fprintf(' 安定ではない');      条件 A を満足しないので「安定ではない」と表示
49     fprintf(' ----> 条件 A を満足しない %n');
50 end

```

33 行目では、関数 “num2str” により数字を文字列に変換している。たとえば、 $i = 2$ のとき、“str = ['H', num2str(i), '= h']” は文字列 “H2 = h” となる。そして、34 行目では、関数 “eval” により “H2 = h” (h の値を H2 に代入) を意味する str が MATLAB で実行される。たとえば、問題 3.3 (p. 54) の安定性は

M ファイル “hurwitz.m” の実行結果 (問題 3.3 (1))

```

>> sysP = tf([1 10],[1 1 4 30]);
>> [numP denP] = tfdata(sysP,'v');
>> hurwitz      ..... “hurwitz.m” の実行
H =
    1    30     0
    1     4     0
    0     1    30
H2 =
   -26
  安定ではない ----> 条件 A を満足するが, 条件 B'' を
満足しない

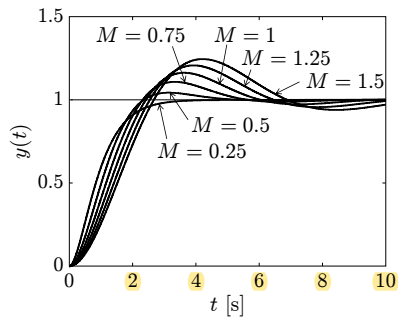
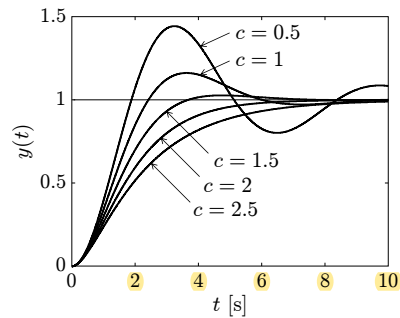
```

M ファイル “hurwitz.m” の実行結果 (問題 3.3 (2))

```

>> sysP = tf([1 3 2],[1 4 11 14 10]);
>> [numP denP] = tfdata(sysP,'v');
>> hurwitz      ..... “hurwitz.m” の実行
H =
     4    14     0     0
     1    11    10     0
     0     4    14     0
     0     1    11    10
H3 =
    260
  安定である

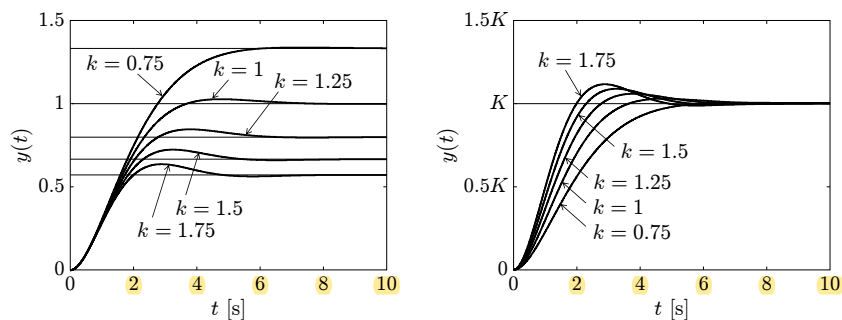
```

図 4.12 M のみを変化 ($c = 1, k = 1$)図 4.13 c のみを変化 ($M = 1, k = 1$)(b) ダンパ係数 c

ダンパ係数 c は減衰係数 ζ にのみ含まれ、両者は比例関係にあるので「 $c \rightarrow$ 大」とすることと「 $\zeta \rightarrow$ 大」とすることは等価である。つまり、「 $c \rightarrow$ 大」とする（粘性を高める）とオーバーシュートが小さくなり、 $c \geq 2\sqrt{kM}$ ($\zeta \geq 1$) となるとオーバーシュートは 0 になる。このように、**ダンパには振動を抑える効果があることがわかる**。一方で、ダンパ係数 c は固有角周波数 ω_n に含まれていないので、速応性にはほとんど関係しない。また、ダンパ係数 c はゲイン K にも含まれていないので、定常値 $y_\infty = K$ には関係しない。図 4.13 にダンパ係数 c を変化させたときの単位ステップ応答を示す。

(c) ばね係数 k

ばね係数 k は固有角周波数 ω_n 、減衰係数 ζ 、ゲイン K のすべてに含まれているので、速応性、安定度、定常値のいずれにも影響を与える。「 $k \rightarrow$ 大」とする（ばねを強くする）と、「 $\omega_n \rightarrow$ 大」となるので反応がはやくなり、「 $\zeta \rightarrow$ 小」となるのでオーバーシュート \tilde{A}_{\max} [%] が大きくなる。これは、ばねを強くすると位置変位 $y(t)$ に対して大きな力が加わるので、反応がはやくなるが、その分、行き過ぎてしまうので、安定度が低くなることを意味している。また、「 $K = 1/k \rightarrow$ 小 (0)」となるので定常値 $y_\infty = K$ は小さくなる。これは、ばねを強くすると反力が大きくなるため、台車の移動距離が小さくなることを意味している。図 4.14 にばね係数 k を変化させたときの単位ステップ応答を示す。

図 4.14 k のみを変化 ($M = 1, c = 1.5$)

$k_P = 4, k_I = 6, k_D = 1$ としたとき、I-PD 制御と PI-D 制御を比較した結果を図 6.12 に示す。ただし、 $r(t) = 1 (t \geq 1), d(t) = 1 (t \geq 5)$ である。積分ゲイン k_I の値が大きいため PI-D 制御では大きなオーバーシュートを生じている。それに対し、I-PD 制御ではステップ状に変化する目標値 $r(t)$ を目標値フィルタ (2 次遅れ要素)

$$C_{\text{ff}}(s) = \frac{6}{s^2 + 4s + 6} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}, \quad \begin{cases} \omega_n = \sqrt{6} \\ \zeta = \frac{2}{\sqrt{6}} \simeq 0.8165 \end{cases} \quad (6.31)$$

に通過させて滑らかにし、オーバーシュートを抑えている。ただし、I-PD 制御は PI-D 制御に比べて目標値応答の反応は遅い。一方、外乱応答は両者に違いはない。目標値 $r(t)$ がステップ状に変化した瞬間の入力 $u(t)$ をみると、PI-D 制御は $u(1) = k_P r(1) = 4$ が加わるが、I-PD 制御は $u(1) = 0$ であり、 $|u(t)|$ の最大値は I-PD 制御の方が小さい。そのため、I-PD 制御では、 $|u(t)|$ の最大値を PI-D 制御と同程度になるまで各動作のゲインを大きくすることで、目標値追従特性における速応性と外乱抑制特性を同時に改善することができる。

6.3 ジーグラ・ニコルスのパラメータ調整法

PID コントローラの三つのパラメータを決定する方法には様々なものが知られている。たとえば、実際の現場では、^{Ziegler}^{Nichols} ジーグラ・ニコルスの限界感度法やステップ応答法 (過渡応答法) といった経験に基づく調整法が古くから利用されている。

6.3.1 限界感度法

限界感度法では以下のようにしてパラメータ調整を行う。

限界感度法によるパラメータ調整

ステップ 1 ステップ状の目標値 $r(t) = r_c (t \geq 0)$ に対する P 制御の予備実験を行い、比例ゲイン k_P を小さな値から徐々に大きくする。そして、安定限界となる比例ゲイン (限界ゲイン) $k_P = k_{Pc}$ を調べる。安定限界では、図 6.13 に示すように、 $y(t)$ は収束も発散もしない持続振動となるので、このときの振動周期 (限界周期) T_c を調べる。

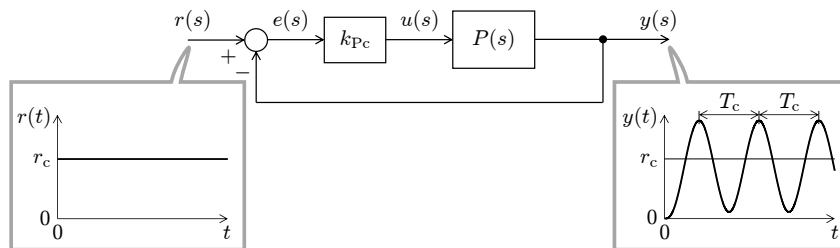


図 6.13 P 制御の持続振動と限界周期

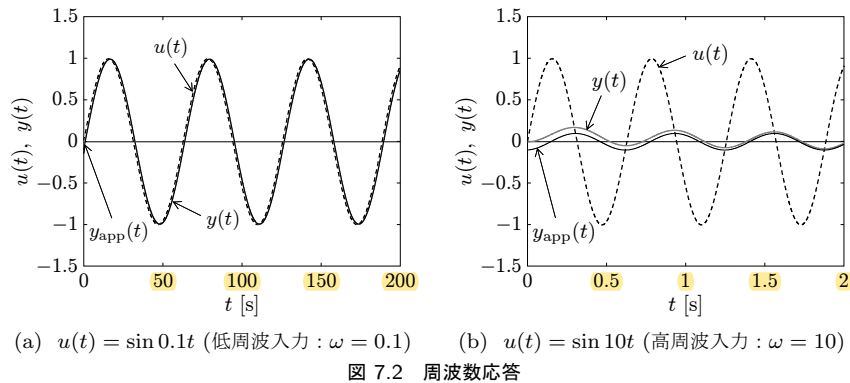


図 7.2 に $A = 1$, $\omega = 0.1, 10$ とした入力 $u(t)$, 出力 $y(t)$ およびその近似波形 $y_{app}(t)$ を示す. 図 7.2 からわかるように, ω が小さいときは $u(t)$ と $y(t)$ の振幅, 位相はほぼ同じであるが, ω が大きいときは $y(t)$ の振幅は小さくなり, 位相も大きく遅れる.

問題 7.1 不安定なシステム

$$y(s) = P(s)u(s), \quad P(s) = \frac{1}{s-1} \quad (7.12)$$

に入力 $u(t) = A \sin \omega t$ を加えたときの出力 $y(t)$ が (7.3) 式で近似できない理由を説明せよ.

7.1.2 周波数伝達関数とゲイン, 位相差の関係

例 7.1 のように, ラプラス変換を利用して振幅比や位相差を計算することは面倒である. そのため, 周波数伝達関数からゲイン, 位相差を求めることが多い.

伝達関数 $P(s)$ における s を $j\omega$ で置き換えた $P(j\omega)$ を周波数伝達関数という. 周波数伝達関数 $P(j\omega)$ は複素数であり, その実部 $\text{Re}[P(j\omega)]$ と虚部 $\text{Im}[P(j\omega)]$ を用いると, 付録 A.3 (p. 217) で説明するように, ゲイン $G_g(\omega)$ と位相差 $G_p(\omega)$ を

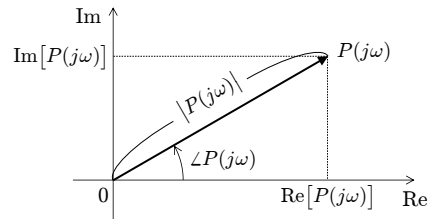


図 7.3 複素平面上の周波数伝達関数

ゲインと位相差

ゲイン $G_g(\omega) = |P(j\omega)| = \sqrt{\text{Re}[P(j\omega)]^2 + \text{Im}[P(j\omega)]^2} \quad (7.13)$

位相差 $G_p(\omega) = \angle P(j\omega) = \tan^{-1} \frac{\text{Im}[P(j\omega)]}{\text{Re}[P(j\omega)]} \quad (7.14)$

のように求めることができる^(注2). つまり, ゲイン $G_g(\omega)$, 位相差 $G_p(\omega)$ はそれぞれ

^(注2) MATLAB では, 関数 “bode” によってある角周波数 ω に対する $G_g(\omega)$, $G_p(\omega)$ を数値的に計算することができる. 使用例を 7.4.3 項 (p. 159) に示す.

- ω を 0 から ∞ まで変化させたときの $P(j(-\omega))$ (ω を 0 から $-\infty$ まで変化させたときの $P(j\omega)$)

は、実軸に関して対称である。そのため、ベクトル軌跡 (図 7.4 (b) の実線) および実軸に関して対称としたもの (図 7.4 (b) の破線) を描画すると、ナイキスト軌跡が得られる。

例 7.4 ベクトル軌跡

表 7.1 周波数伝達関数 $P(j\omega)$ の実部、虚部およびゲイン、位相差

ω [rad/s]	0	$\frac{1}{2}$	1	2	4	∞
$\text{Re}[P(j\omega)]$	1	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{17}$	0
$\text{Im}[P(j\omega)]$	0	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{4}{17}$	0
$ P(j\omega) $	1	$\frac{2}{\sqrt{5}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{5}}$	$\frac{1}{\sqrt{17}}$	0
$\angle P(j\omega)$ [deg]	0	-26.565	-45	-63.435	-75.964	-90

1 次遅れ要素 $P(s) = 1/(s+1)$ のベクトル軌跡を描画してみよう。例 7.2 (1) (p. 139) で示したように、 $P(j\omega)$ の実部、虚部およびゲイン、位相差はそれぞれ

$$\begin{cases} \text{Re}[P(j\omega)] = \frac{1}{1+\omega^2} \\ \text{Im}[P(j\omega)] = -\frac{\omega}{1+\omega^2} \end{cases}, \quad \begin{cases} G_g(\omega) = |P(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}} \\ G_p(\omega) = \angle P(j\omega) = -\tan^{-1}\omega \end{cases} \quad (7.37)$$

となる。いくつかの ω に対して (7.37) 式を計算すると、表 7.1 の結果が得られる。 $\alpha = \text{Re}[P(j\omega)]$, $\beta = \text{Im}[P(j\omega)]$ としたとき、表 7.1 に示した値は

$$\left(\alpha - \frac{1}{2}\right)^2 + \beta^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

を満足するので、ベクトル軌跡は図 7.5 のように中心 $(1/2, 0)$ 、半径 $1/2$ の半円となる (問題 7.8 (p. 149) 参照)。

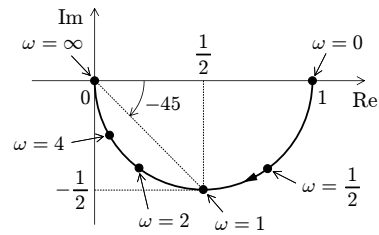


図 7.5 ベクトル軌跡

問題 7.5 むだ時間要素を含む以下の伝達関数 $P(s)$ のベクトル軌跡を描け。

(1) $P(s) = e^{-Ls}$ ($L > 0$) (2) $P(s) = \frac{e^{-Ls}}{1+Ts}$ ($L=1, T=1$)

7.2.2 ボード線図

^{Bode}
ボード線図 (注 4) は、様々な角周波数 ω [rad/s] に対するゲイン (入出力の振幅比) $G_g(\omega) = |P(j\omega)|$ [倍] を表す**ゲイン線図**と、入出力の位相差 $G_p(\omega) = \angle P(j\omega)$ [deg]

(注 4) MATLAB では、関数 “bode” によってボード線図を描画することができる。使用例を 7.4.2 項 (p. 158) に示す。

別条件より、フィードバック制御系が安定であるための条件は、ナイキスト軌跡が $(-1, 0)$ を周回しない (周回数が $N = n_p = 0$ である) ことである。つまり、 $k_P > 0$ なので交点 $(-k_P/8, 0)$ は左半平面にあり、

$$k_P > 0 \text{ かつ } -\frac{k_P}{8} > -1 \implies 0 < k_P < 8 \quad (8.4)$$

であるとき、フィードバック制御系は安定となる。

フルビッツの安定判別法

特性多項式は

$$\Delta(s) = (s+1)^3 + k_P = a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 \quad (8.5)$$

$$a_3 = 1, \quad a_2 = 3, \quad a_1 = 3, \quad a_0 = 1 + k_P$$

であるので、5.3.2 節 (p. 89) で説明したフルビッツの安定判別条件は以下のようになる。

条件 A $a_i > 0$ より $k_P > -1$ である。

条件 B'' フルビッツ行列の小行列式が

$$H_2 = \begin{vmatrix} a_2 & a_0 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1+k_P \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 8 - k_P > 0 \quad (8.6)$$

なので、 $k_P < 8$ である。

$k_P > 0$ および条件 A, B'' よりフィードバック制御系が安定となるのは $0 < k_P < 8$ のときであり、ナイキストの安定判別法の結果と一致する。

例 8.2 ナイキストの安定判別法

開ループ伝達関数

$$L(s) = P(s)C(s) = \frac{-s+6}{(s+4)(s-1)} \quad (8.7)$$

は $n_p = 1$ 個の不安定極を持つ。 $L(s)$ のナイキスト軌跡は

$$L(j\omega) = \frac{-3(3\omega^2+8) + j\omega(\omega^2-14)}{\omega^4+17\omega^2+16} \quad (8.8)$$

より図 8.3 のように 8 の字形となる。図 8.3 よりナイキスト軌跡は $(-1, 0)$ を反時計回りに $N = 1$ 回、周回するので、 $N = n_p$ である。したがって、図 8.1 のフィードバック制御系は安定である。

実際、特性多項式は

$$\begin{aligned} \Delta(s) &= (s+4)(s-1) - s + 6 \\ &= s^2 + 2s + 2 \end{aligned} \quad (8.9)$$

であるので、特性方程式 $\Delta(s) = 0$ の解は負の実数 $s = -1 \pm j$ となり、フィードバック制御系は安定となる。

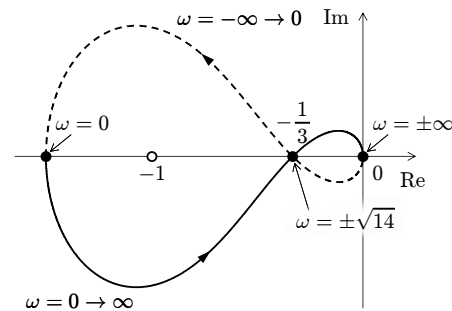


図 8.3 $L(s)$ のナイキスト軌跡

開ループ伝達関数 $L(s)$ が虚軸上に極を持つ場合、以下のように拡張することができる。

250 問題の解答

第3章の解答

- 問題 3.1 (1) 極は $s = -1, -2$ なので安定であり, $y_\infty = \frac{1}{2}$
 (2) 極は $s = 1, -2$ なので不安定 (3) 極は $s = 1 \pm j$ なので不安定
 (4) 極は $s = -1, -1 \pm j$ なので安定であり, $y_\infty = 1$

問題 3.2 $\zeta > 0$

- 問題 3.3 (1) 条件 A は満足するが, 条件 B'' を満足しない ($H_2 = -26 < 0$ となる) ので不安定
 (2) 条件 A を満足し, 条件 B'' も満足する ($H_3 = 260 > 0$ となる) ので安定

問題 3.4 $y(t) = 1 - e^{-2t} \left(\cos 3t + \frac{2}{3} \sin 3t \right), T_p = \frac{1}{3}\pi, A_{\max} = e^{-\frac{2}{3}\pi}, T = \frac{2}{3}\pi, \lambda = e^{-\frac{4}{3}\pi}$

問題 3.5 $y(t) = 1 + \frac{3}{2}e^{-t} - \frac{5}{2}e^{-3t}, T_p = \frac{1}{2} \log_e 5, A_{\max} = \frac{1}{\sqrt{5}}$

第4章の解答

- 問題 4.1 (1) $T = \frac{L}{R}, K = \frac{1}{R}$
 (2) $i(t) = K E_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} \right) = \frac{E_0}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right), i_\infty = \frac{E_0}{R}$
 (3) 「 $R \rightarrow$ 大」とすると「 $T \rightarrow 0$ 」となるので, 速応性が向上する (反応がはやくなる). 一方, 「 $L \rightarrow$ 大」とすると「 $T \rightarrow$ 大」となるので, 速応性が悪化する (反応が遅くなる).

問題 4.2 $R = 50 [\Omega], L = 0.2 [\text{H}]$ 問題 4.3 $0 < R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$

問題 4.4 (1) $K = y_\infty = 0.5, \xi = -\frac{1}{T_p} \log_e \frac{A_{\max}}{y_\infty} \simeq 0.80472, \omega_n = \sqrt{\xi^2 + \left(\frac{\pi}{T_p} \right)^2} \simeq 1.7649, \zeta = \frac{\xi}{\omega_n} \simeq 0.45595$
 (2) $k = \frac{1}{K} = 2, M = \frac{k}{\omega_n^2} \simeq 0.64206, c = 2\zeta\omega_n M \simeq 1.0334$

第5章の解答

問題 5.1 $G_{yr}(s) = \frac{P(s)(C_1(s) + C_2(s))}{1 + P(s)C_2(s)}, G_{er}(s) = 1 - G_{yr}(s) = \frac{1 - P(s)C_1(s)}{1 + P(s)C_2(s)}$

問題 5.2 $G_{vw}(s) = \frac{P(s)C_2(s)}{1 + P(s)C_2(s)}, G_{yr}(s) = \frac{P_1(s)C_1(s)P_2(s)C_2(s)}{1 + P_2(s)C_2(s)(1 + P_1(s)C_1(s))}$

- 問題 5.3 (1) 特性方程式の解は $s = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ であり, 正の実数を含むので内部安定ではない.
 (2) 特性方程式の解は $s = -1, \frac{-5 \pm \sqrt{3}j}{2}$ であり, 実部がすべて負なので内部安定である.
 (3) 特性方程式の解は $s = \pm 1, -2$ であり, 正の実数を含むので内部安定ではない.

問題 5.4 (1) $\frac{1}{2} < k_P < \frac{21}{2}$ (2) $0 < k_I < \frac{91}{32}$

問題 5.5 (1) $e_p = -\frac{1}{7}$ (2) $e_p = 0$

問題 5.6 (1) $y_s = \frac{2}{7}$ (2) $y_s = 0$