

- ベルトの伸び縮みや静止摩擦，動摩擦などの影響で，台車の最大ピーク値付近の応答は山がつぶれた形となっており，理想的な応答とは若干異なる．
- 振子のパラメータ同定において，非線形性の影響を無視している．

この問題に対処するため，ここでは，最小二乗法によるパラメータ同定^{4),9),10)}を行う．台車駆動系の線形微分方程式 (3.21) 式は

$$M_1(t)p_1 = N_1(t), \quad \begin{cases} M_1(t) = \begin{bmatrix} M_{1,1}(t) & M_{1,2}(t) \end{bmatrix} \\ \quad = \begin{bmatrix} -\dot{z}(t) & v(t) \end{bmatrix} \\ N_1(t) = \ddot{z}(t) \end{cases}, \quad p_1 = \begin{bmatrix} a_c \\ b_c \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

のように，未知パラメータ p_1 に関する線形代数方程式の形式で記述できる．一方，振子角の基準を真下 ($\theta(t) = \phi(t) + \pi$) とすると，振子系の非線形微分方程式 (3.7) 式は，

$$-m_p l_p \cos \phi(t) \cdot \ddot{z}(t) + (J_p + m_p l_p^2) \ddot{\phi}(t) = -\mu_p \dot{\phi}(t) - m_p g l_p \sin \phi(t) \quad (3.44)$$

となる．(3.44) 式を書き換えると，未知パラメータ p_2 に関する線形代数方程式

$$M_2(t)p_2 = N_2(t), \quad \begin{cases} M_2(t) = \begin{bmatrix} M_{2,1}(t) & M_{2,2}(t) \end{bmatrix} \\ \quad = \begin{bmatrix} \ddot{\phi}(t) & \dot{\phi}(t) \end{bmatrix} \\ N_2(t) = m_p l_p \cos \phi(t) \cdot \ddot{z}(t) \\ \quad - m_p l_p^2 \ddot{\phi}(t) - m_p g l_p \sin \phi(t) \end{cases}, \quad p_2 = \begin{bmatrix} J_p \\ \mu_p \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

となる．したがって，ある時刻 $t = t_1, t_2$ における $M_i(t), N_i(t)$ ($i = 1, 2$) の値が正確にわかっているのであれば，未知パラメータ p_i を

$$p_i = \begin{bmatrix} M_i(t_1) \\ M_i(t_2) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} N_i(t_1) \\ N_i(t_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{i,1}(t_1) & M_{i,2}(t_1) \\ M_{i,1}(t_2) & M_{i,2}(t_2) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} N_i(t_1) \\ N_i(t_2) \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

により同定できる．しかし， $M_i(t), N_i(t)$ の値には，量子化誤差，ノイズなどに起因する測定誤差が必ず含まれるため，(3.46) 式から p_i を定めるのは適切ではない．そこで，以下のように工夫を施す必要がある⁴⁾．

まず，測定誤差の影響を軽減するには， $M_i(t), N_i(t)$ の測定回数を，十分大きく選ぶ必要がある．ここでは，一定のサンプリング周期 t_s ごとに， $n+1$ 回測定したとする．本実験装置には位置 (角度) センサとしてロータリエンコーダが用いられており，台車の位置 $z[k]$ ，振子の角度 $\phi[k]$ が計測される．ここで， $f[k] := f(kt_s)$ ($k = 0, 1, \dots, n$) と記述した．これらの情報をもとに，オフラインで台車の速度 $\dot{z}[k]$ ，振子の角速度 $\dot{\phi}[k]$ を算出し，さらに， $\dot{z}[k], \dot{\phi}[k]$ をもとに台車の加速度 $\ddot{z}[k]$ ，振子の角加速度 $\ddot{\phi}[k]$ を算出する．ここでは，3点微分¹⁵⁾により，たとえば，台車の位置 $z[k]$ から速度 $\dot{z}[k]$ を

$$\dot{z}[0] = \frac{-3z[0] + 4z[1] - z[2]}{2t_s} \quad (3.47a)$$

で与えられる．パラメータを $a_c = 6.25$, $b_c = 4.36$, $k_P = 1$ とする．この状態空間モデルに対して，初期値を $x_0 = [1 \ 1]^\top$ としたときの零入力応答を $y_1(t)$ ，入力を正弦波

$$r(t) = 2 \sin t \quad (4.23)$$

としたときの零状態応答を $y_2(t)$ とおく．また，初期値を $x_0 = [1 \ 1]^\top$ ，入力を (4.23) 式の正弦波としたときの応答を $y_3(t)$ とおく．システムの線形性から任意の $t \geq 0$ に対して

$$y_3(t) = y_1(t) + y_2(t) \quad (4.24)$$

が成り立つ．MATLAB では，関数 “initial” により零入力応答が，関数 “lsim” により初期状態 $x(0) = x_0$ と入力 $u(t)$ が与えられたときの時間応答 ((4.20) 式) が計算できる．そこで，(4.24) 式の成立を確認するために以下の M ファイルを実行すると，図 4.5 の結果が得られる．

```
M ファイル “pic41_cdip_response.m”
1  cdip_para;                                ..... M ファイル “adip_para.m” の実行 ( $a_c$ ,  $b_c$  の値を定義)
2  % -----
3  kP = 1;                                    ..... 比例ゲイン  $k_P = 1$ 
4  % -----
5  A = [ 0      1                                ..... A, B, C, D の定義: (4.22) 式の係数
6        -bc*kP -ac ];
7  B = [ 0
8        1 ];
9  C = [ bc*kP  0 ];
10 D = 0;
11 G = ss(A,B,C,D);                            ..... 状態空間表現 (4.22) 式の定義
12 % -----
13 t = 0:0.01:10;                                ..... 時刻データの定義 ( $t = 0, 0.01, 0.02, \dots, 10$ )
14 % -----
15 x0 = [ 1; 1 ];                                ..... 初期状態  $x_0 = [1 \ 1]^\top$  の定義
16 y1 = initial(G,x0,t);                        ..... 零入力応答:  $y_1(t)$  ( $x(0) = x_0, r(t) = 0$ )
17 y2 = lsim(G,2*sin(t),t,[0; 0]);             ..... 零状態応答:  $y_2(t)$  ( $x(0) = 0, r(t) = 2 \sin t$ )
18 y3 = lsim(G,2*sin(t),t,x0);                 ..... 時間応答:  $y_3(t)$  ( $x(0) = x_0, r(t) = 2 \sin t$ )
19 % -----                                      $\Rightarrow y_3(t) = y_1(t) + y_2(t)$ 
20 figure(1);                                ..... Figure 1 を指定
21 plot(t,y1,'r--',t,y2,'g:',t,y3,'b');         .....  $y_1(t), y_2(t), y_3(t)$  の描画
22 xlabel('time [s]'); ylabel('position [m]')    ..... 横軸, 縦軸のラベル
23 legend('y1(t)','y2(t)','y3(t)')             ..... 凡例の表示
```

確かに (4.24) 式の性質，すなわち出力 $y_3(t)$ が零入力応答 $y_1(t)$ と零状態応答 $y_2(t)$ との和になっている様子がわかる．

状態空間表現は，非線形システムに対しても定義することができる．たとえば，台車型倒立振子の非線形モデル (3.22) 式に対する状態空間表現は以下のように定義される．すなわち，線形システムの場合と同様に $x_1(t) = z(t)$, $x_2(t) = \theta(t)$, $x_3(t) = \dot{z}(t)$, $x_4(t) = \dot{\theta}(t)$, $u(t) = v(t)$ とおき， $x(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ x_3(t) \ x_4(t)]^\top$ というベクトルを定義すれば，

74 第4章 システムの状態空間表現と安定性

P は正定なので、システムは安定であることがわかる。実際、上の行列 A の固有値を調べると、

```
>> eig(A)
ans =
-0.0220 + 1.8470i
-0.0220 - 1.8470i
-0.7737 + 1.5071i
-0.7737 - 1.5071i
-0.4085
```

..... A の固有値を求める
..... A の固有値の実部がすべて負であるので安定

となり、確かに安定であることがわかる。

最後に、台車を固定したときの振子（図 4.6 を参照）について、その線形化した状態空間表現の行列の固有値から安定性を判別してみよう。まず、図 4.8 のように、台車を固定したうえで $\theta = \pi$ の近傍で線形化する。(3.7) 式 (p.39) において、 $\ddot{z} \equiv 0$ 、 $\theta(t) = \phi(t) + \pi$ とした (3.44) 式 (p.50) を、 $\phi = 0$ の近傍で線形化することにより、真下近傍のモデル

$$(J_p + m_p l_p^2) \ddot{\phi}(t) = -\mu_p \dot{\phi}(t) - m_p g l_p \phi(t) \quad (4.39)$$

が得られる。このとき、状態空間表現は $x(t) = [\phi(t) \ \dot{\phi}(t)]^\top$ において

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{m_p g l_p}{J_p + m_p l_p^2} & -\frac{\mu_p}{J_p + m_p l_p^2} \end{bmatrix} x(t) \quad (4.40)$$

となる。(4.40) 式の右辺の行列の二つの固有値を λ_+ 、 λ_- とおくと、

$$\lambda_{\pm} = (-\zeta_p \pm \sqrt{\zeta_p^2 - 1}) \omega_{np} \quad (4.41)$$

となる。ここで、 ω_{np} と ζ_p はそれぞれ (3.36) 式で定義された固有角周波数と減衰係数、すなわち

$$\omega_{np} = \sqrt{\frac{m_p g l_p}{J_p + m_p l_p^2}}, \quad \zeta_p = \frac{\mu_p}{2\omega_{np}(J_p + m_p l_p^2)} \quad (4.42)$$

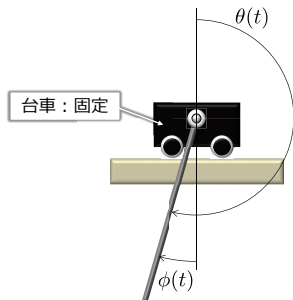


図 4.8 振子 (安定)

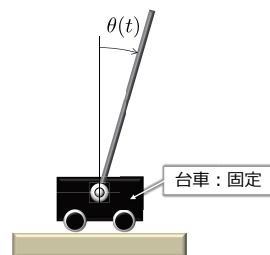


図 4.9 振子 (不安定)

である．(4.42) 式より ω_{np} と ζ_p はともに正であり，(4.41) 式より自励系 (4.40) 式の右辺の行列の固有値はともに負であることがわかる．したがって，定理 4.2 より，自励系 (4.40) 式は漸近安定であることがわかる．

一方，図 4.9 のように $\theta = 0$ の近傍で線形化したモデルは，

$$(J_p + m_p l_p^2) \ddot{\theta}(t) = -\mu_p \dot{\theta}(t) + m_p g l_p \theta(t) \quad (4.43)$$

で与えられ，状態空間表現は $x(t) = [\theta(t) \ \dot{\theta}(t)]^\top$ として，

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{m_p g l_p}{J_p + m_p l_p^2} & -\frac{\mu_p}{J_p + m_p l_p^2} \end{bmatrix} x(t) \quad (4.44)$$

で与えられる．このとき，(4.44) 式の右辺の行列の二つの固有値は

$$\lambda_{\pm} = (-\zeta_p \pm \sqrt{\zeta_p^2 + 1}) \omega_{np} \quad (4.45)$$

となり，固有値 λ_+ は必ず正となる．したがって，定理 4.2 より自励系 (4.44) 式は不安定であることがわかる．

第 4 章の参考文献

- 1) 井村順一：システム制御のための安定論，コロナ社 (2000)
- 2) 小郷 寛，美多 勉：システム制御理論入門，実教出版 (1979)
- 3) J. ラ サール，S. レフシェッツ 著 (山本 稔 訳)：リヤプノフの方法による安定性理論，産業図書 (1975)
- 4) E. D. Sontag: Mathematical Control Theory, 2nd Edition, Springer (1998) (available from http://www.sontaglab.org/FTPDIR/sontag_mathematical_control_theory_springer98.pdf)
- 5) J. C. Willems: The Behavioral Approach to Open and Interconnected Systems, IEEE Control Systems Magazine, Vol. 27, No. 6, pp. 46–99 (2007)

で表現される．このとき，外乱がない状態 ($d(t) = 0$) での定常偏差 e_∞ を求める． $e_d = 0$ なので，定常偏差 e_∞ は (6.6) 式より

$$e_\infty = e_r = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{r_0}{s + s\mathcal{P}(s)\mathcal{C}(s)} \quad (6.15)$$

となる．ここで，(6.7) 式と (6.13) 式より

$$\mathcal{P}(s)\mathcal{C}(s) = \frac{1}{s^2} \frac{K(k_P s + k_I)}{Ts + 1} \implies s\mathcal{P}(s)\mathcal{C}(s) = \frac{1}{s} \frac{K(k_P s + k_I)}{Ts + 1} \quad (6.16)$$

なので，(6.15) 式と (6.16) 式より

$$e_\infty = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{r_0 s(Ts + 1)}{Ts^3 + s^2 + Kk_P s + Kk_I} = 0 \quad (6.17)$$

を得る．比例ゲインを $k_P = 10$ ，積分ゲインを $k_I = 15$ ，目標位置の変化の割合を $r_0 = 0.1$ [m/s] としたときのシミュレーション結果を図 6.6 に示す．これよりランプ信号の目標値 (6.14) 式に対する定常偏差は $e_\infty = 0$ となることがわかる．

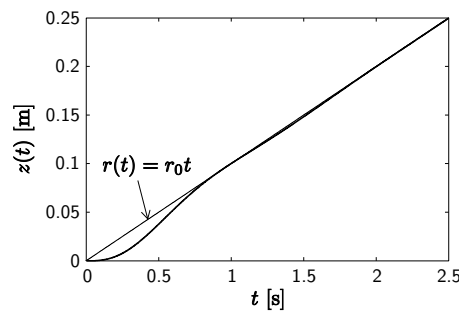


図 6.6 PI 制御 ($r(t) = r_0 t$, $d(t) = 0$)

例 6.1, 6.2 ではサーボ系の目的が達成されている．

- 例 6.1 の (6.11) 式より，ステップ信号の目標値 (6.9) 式に対するサーボ系の条件は『 $\mathcal{P}(s)\mathcal{C}(s)$ が $s = 0$ に極をもつ』であることがわかる．これは，定値信号に対してサーボ系を構成するには， $\mathcal{P}(s)\mathcal{C}(s)$ がステップ信号 (6.9) 式と同一因子 $1/s$ をもつ必要があることを指す．
- 例 6.2 の (6.16) 式より，ランプ信号の目標値 (6.14) 式に対するサーボ条件は『 $\mathcal{P}(s)\mathcal{C}(s)$ が $s = 0$ に極を二つもつ』ことである．すなわち，ランプ信号に対してサーボ系を構成するには， $\mathcal{P}(s)\mathcal{C}(s)$ がランプ信号 (6.14) 式と同一因子 $1/s^2$ をもつ必要がある．

以上より，外部信号（目標値）に対する定常偏差を 0 にするためには，制御系内部に外部信号のモデルと同一因子をもてばよい．このことを，内部に外部信号のモデルを含む

意味で内部モデル原理²⁾と呼ぶ。

ここまでの議論では、外部信号として目標値 $r(t)$ のみを考えたが、内部モデル原理の指す外部信号とは目標値 $r(t)$ だけでなく外乱 $d(t)$ も含んだものである。また、制御系を設計するうえでは、外部信号のモデルはコントローラ側にもたせる方が適切である。このことを例をとおして説明しよう。

例 6.3 $r(t) = r_0, d(t) = d_0$ とした台車駆動系の P 制御の定常偏差
(M ファイル "pic62_ex3_cart_p_step.m")

例 6.1 において、外乱 $d(t)$ としてステップ信号

$$d(t) = d_0 \quad (t \geq 0) \quad \Longleftrightarrow \quad d(s) = d_0 \times \frac{1}{s} = \frac{d_0}{s} \quad (6.18)$$

が加わった場合の定常偏差 e_∞ を求めてみよう。(6.6) 式より定常偏差 e_∞ は

$$e_\infty = \lim_{s \rightarrow 0} \left(\frac{r_0}{1 + \mathcal{P}(s)\mathcal{C}(s)} - \frac{d_0 \mathcal{P}(s)}{1 + \mathcal{P}(s)\mathcal{C}(s)} \right) \quad (6.19)$$

となる。ここで、(6.7) 式の $\mathcal{P}(s)$ に対して

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{\mathcal{P}(s)} = 0 \quad (6.20)$$

が成り立つ。したがって、(6.19) 式の分子分母を $\mathcal{P}(s)$ で割ったうえで、(6.8) 式と (6.20) 式を適用することで

$$e_\infty = - \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d_0}{\frac{1}{\mathcal{P}(s)} + \mathcal{C}(s)} = - \frac{d_0}{k_P} \quad (6.21)$$

を得る。比例ゲインを $k_P = 10$ 、目標位置を $r_0 = 0.5$ [m]、外乱を $d_0 = 3$ [V] としたときのシミュレーション結果を図 6.7 に示す。ただし、外乱 $d(t) = d_0$ は $t = 2.5$ [s] で加えた。(6.21) 式より定常偏差は $e_\infty = -d_0/k_P = -0.3$ [m] (制御量 $y(t)$ の

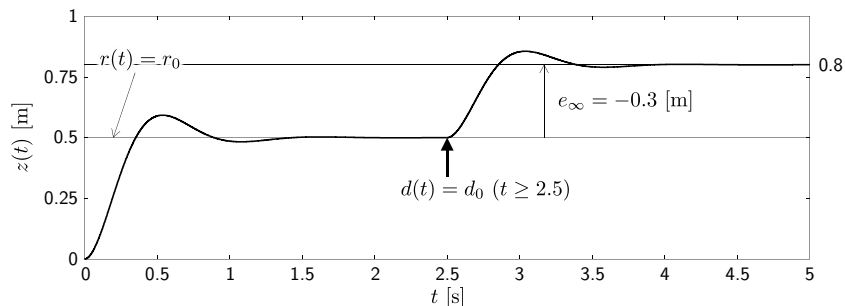


図 6.7 P 制御 ($r(t) = r_0$ ($t \geq 0$), $d(t) = d_0$ ($t \geq 2.5$))

6.3 状態空間表現からのアプローチ

ここでは状態空間表現に着目し、最適レギュレータに基づくサーボ系の構成方法について解説する^(注3)。伝達関数表現に基づく方法は文献3)を参照されたい。ここでは簡単のために1入力1出力系の制御対象を考える。可制御かつ可観測^(注4)な制御対象 Σ_P の状態空間表現が

外乱を考慮した制御対象の状態空間表現 (1 入力 1 出力)

$$\Sigma_P : \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B(u(t) + d(t)) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (6.22)$$

で与えられているとする。 $x(t) \in \mathbb{R}^n$ は n 次元の状態変数、 $y(t) \in \mathbb{R}$ は制御量、 $u(t) \in \mathbb{R}$ は操作量、 $d(t) \in \mathbb{R}$ は外乱である。また、追従すべき目標値 $r(t) \in \mathbb{R}$ および除去すべき外乱 $d(t)$ は定値 (ステップ信号) に限定する。6.2 節で説明した内部モデル原理から、サーボ系のコントローラは積分器を有する必要がある。コントローラ側の積分器は一般にサーボ補償器と呼ばれるものであり、その状態方程式は

$$\dot{w}(t) = e(t), \quad e(t) = r(t) - y(t) \quad (6.23)$$

で実現できる。補償器 (6.23) 式を制御対象 (6.22) 式に接続したものは拡大系と呼ばれ、状態 $\tilde{x}(t) = [x(t)^\top \ w(t)^\top]^\top$ を有する

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}(t) \\ \dot{w}(t) \end{bmatrix}}_{\tilde{\dot{x}}(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix}}_{\tilde{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix}}_{\tilde{x}(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}}_{\tilde{B}} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(t) + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} d(t) \quad (6.24a)$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} e(t) \\ w(t) \end{bmatrix}}_{\tilde{y}(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} -C & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\tilde{C}} \underbrace{\begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix}}_{\tilde{x}(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\tilde{D}} r(t) \quad (6.24b)$$

により記述することができる。拡大系だけではサーボ系の構成は終了していない。本章では、拡大系が内部安定化されるようなコントローラとして状態フィードバック

$$u(t) = K_1 x(t) + K_2 w(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix}}_{\tilde{K}} \underbrace{\begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix}}_{\tilde{x}(t)} \quad (6.25)$$

を追加することを考える。(6.25) 式は

(注3) 最適レギュレータに関しては、5.2.3 項 (p. 88) を参照されたい。

(注4) 可制御性については 5.1 節 (p. 76) を、可観測性については後述の 7.1 節 (p. 106) を参照されたい。

$$J = \int_0^\infty (q_1 e(t)^2 + q_2 w(t)^2 + Ru(t)^2) dt \quad (6.30)$$

としての意味を有することになる．第1項は追従偏差，第2項は積分補償，第3項は操作量の大きさの評価に対応する．また，評価関数 (6.30) 式を最小化する状態フィードバック (6.25) 式は (6.29) 式から求めることができる．

目標値 $r(t)$ や外乱 $d(t)$ がステップ信号 ($r(t) = r_0, d(t) = d_0$) であるときには， $r(t) = 0, d(t) = 0$ として設計された最適入力 (6.29) 式によりサーボ系が実現されていることを示すことができる． $r(t) = r_0, d(t) = d_0$ であるとき，(6.24a), (6.25) 式より

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}(t) \\ \dot{w}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + BK_1 & BK_2 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}(t) \\ w(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Bd_0 \\ r_0 \end{bmatrix} \quad (6.31)$$

であるから，定常値 $x_\infty := \lim_{t \rightarrow \infty} x(t), w_\infty := \lim_{t \rightarrow \infty} w(t)$ は

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + BK_1 & BK_2 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_\infty \\ w_\infty \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Bd_0 \\ r_0 \end{bmatrix} \quad (6.32)$$

を満足する．ここで， $\tilde{A} + \tilde{B}\tilde{K}$ の固有値の実部はすべて負なので， $\tilde{A} + \tilde{B}\tilde{K}$ は正則であり，

$$\begin{bmatrix} x_\infty \\ w_\infty \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} A + BK_1 & BK_2 \\ -C & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} Bd_0 \\ r_0 \end{bmatrix} \quad (6.33)$$

が得られる．したがって，定常偏差 e_∞ は

$$\begin{aligned} e_\infty &= r_0 - y_\infty = r_0 - Cx_\infty = r_0 - \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_\infty \\ w_\infty \end{bmatrix} \\ &= r_0 + \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A + BK_1 & BK_2 \\ -C & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} Bd_0 \\ r_0 \end{bmatrix} \\ &= r_0 + \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} A + BK_1 & BK_2 \\ -C & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A + BK_1 & BK_2 \\ -C & 0 \end{bmatrix}}_I \begin{bmatrix} Bd_0 \\ r_0 \end{bmatrix} \\ &= r_0 + \begin{bmatrix} 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Bd_0 \\ r_0 \end{bmatrix} = 0 \end{aligned} \quad (6.34)$$

であり， r_0, d_0 の大きさによらず定常偏差は $e_\infty = 0$ であることがいえる．

$$\Omega_0 = \{ \rho_0 \in \mathbb{R} \mid \underline{\rho}_0 \leq \rho_0 \leq \bar{\rho}_0 \}, \quad \underline{\rho}_0 = 0, \quad \bar{\rho}_0 = 1 - \cos(65\pi/180)$$

$$\Psi = \{ \dot{\rho} \in \mathbb{R} \mid \underline{\psi} \leq \dot{\rho} \leq \bar{\psi} \}, \quad \underline{\psi} = -0.75, \quad \bar{\psi} = 0.75$$

のように与える． $A(\rho), B(\rho), K(\rho)$ をそれぞれ $\tilde{A}(\rho), \tilde{B}(\rho), \tilde{K}(\rho)$ に置き換え，問題 (1.62) を解く．ただし， $X(\rho), L(\rho)$ は

$$X(\rho) = X_0 + \rho X_1 + \rho^2 X_2, \quad L(\rho) = L_0 + \rho L_1 + \rho^2 L_2$$

のように ρ に関する 2 次の行列多項式とする．このとき，

$$\dot{X}(\rho) = \dot{\rho} X_1 + 2\rho \dot{\rho} X_2$$

は $\dot{\rho}$ に関して線形である．また，パラメータの変動範囲を示す多項式を

$$g_1(\rho) = (\rho - \underline{\rho})(\bar{\rho} - \rho), \quad g_2(\rho_0) = (\rho_0 - \underline{\rho}_0)(\bar{\rho}_0 - \rho_0),$$

$$g_{a3}(\dot{\rho}) = \bar{\psi} - \dot{\rho}, \quad g_{b3}(\dot{\rho}) = \dot{\rho} - \underline{\psi}$$

とし，

$$S_{11}(\rho) = (I_5 \otimes z_1(\rho))^T Q_{11} (I_5 \otimes z_1(\rho)), \quad z_1(\rho) = [1 \ \rho]^T$$

$$S_{22}(\rho_0) = (I_5 \otimes z_2(\rho_0))^T Q_{22} (I_5 \otimes z_2(\rho_0)), \quad z_2(\rho_0) = [1 \ \rho_0]^T$$

$$\begin{cases} S_{31}(\rho) = (I_5 \otimes z_3(\rho))^T Q_{31} (I_5 \otimes z_3(\rho)) \\ S_{a33}(\rho) = (I_5 \otimes z_3(\rho))^T Q_{a33} (I_5 \otimes z_3(\rho)) \\ S_{b33}(\rho) = (I_5 \otimes z_3(\rho))^T Q_{b33} (I_5 \otimes z_3(\rho)) \end{cases}, \quad z_3(\rho) = [1 \ \rho \ \rho^2 \ \rho^3]^T$$

を用いて，(1.62) 式における $M_1(\rho), M_{211}(\rho_0), M_{311}(\rho, \dot{\rho})$ をそれぞれ次式とする．

$$M_1(\rho) = X(\rho) - g_1(\rho)S_{11}(\rho) - \varepsilon I_5$$

$$M_{211}(\rho_0) = X(\rho_0) - g_2(\rho_0)S_{22}(\rho_0) - \varepsilon I_5$$

$$M_{311}(\rho, \dot{\rho}) = \dot{X}(\rho) - (A(\rho)X(\rho) + B(\rho)L(\rho))^T - (A(\rho)X(\rho) + B(\rho)L(\rho)) \\ - g_1(\rho)S_{31}(\rho) - g_{a3}(\dot{\rho})S_{a33}(\rho) - g_{b3}(\dot{\rho})S_{b33}(\rho) - \varepsilon I_5$$

以上の準備のもとで問題 (1.62) を解くと， $\gamma = 236$ 程度まで可解であった (M ファイル “p2c15_ex7_adip_oc_gs_servo.m”)．設計されたゲインスケジューリングコントローラ

$$u(t) = \tilde{K}(\rho(t))\tilde{x}(t) = K_1(\rho(t))x(t) + K_2(\rho(t)) \int_0^t e(\tau) d\tau$$

$$\tilde{K}(\rho(t)) = L(\rho(t))X(\rho(t))^{-1} = [K_1(\rho(t)) \ K_2(\rho(t))]$$

のコントローラゲイン $K_1(\rho(t)), K_2(\rho(t))$ を図 1.16 に示す．ただし，比較のため，例 1.4 で示したアーム型倒立振子の線形化モデル (1.30) 式 (p. 146) に対して設計された最適レギュレータのコントローラゲイン