sample_lmi_ct.m

```
% sample_yalmip_default.m
% last modified: 2023/05/15 by Masakatsu KAWATA

plant                                           % アクロボットに対してシステム行列などを定義した M ファイルの実行
% -------------------------------------------
setlmis([])                                     % LMI の記述の初期化
gamma = lmivar(1, [1 0]);                       % 決定変数 gamma (ガンマ):スカラ ===> gammma を X, Z より前に定義
X     = lmivar(1, [n 1]);                       % 決定変数 X:n × n の対称行列
Z     = lmivar(2, [n m]);                       % 決定変数 Z:n × m の長方行列
% -------------------------------------------
lmi1 = newlmi;                                  % 現在記述されている LMI に識別子 lmi1 の LMI を追加 (-lmi1:正定)
lmiterm([-lmi1 1 1  X     ],  r,   1);          % (1,1) 要素に  r*X *1 を追加
lmiterm([-lmi1 1 2  X     ],  A,   1);          % (1,2) 要素に  A*X *1 を追加
lmiterm([-lmi1 1 2 -Z     ],  B2,  1);          % (1,2) 要素に B2*Z'*1 を追加 (lmiterm の -Z は Z' を意味する)
lmiterm([-lmi1 1 2  X     ], -c,   1);          % (1,2) 要素に -c*X *1 を追加
lmiterm([-lmi1 2 2  X     ],  r,   1);          % (2,2) 要素に  r*X *1 を追加
% -------------------------------------------
lmi2 = newlmi;                                  % 現在記述されている LMI に識別子 lmi2 の LMI を追加 (lmi2:負定)
lmiterm([ lmi2 1 1  X     ],  A,   1, 's');     % (1,1) 要素に   A*X *1 + ( A*X *1)' を追加
lmiterm([ lmi2 1 1 -Z     ],  B2,  1, 's');     % (1,1) 要素に  B2*Z'*1 + (B2*Z'*1)' を追加
lmiterm([ lmi2 1 2  0     ],  B1);              % (1,2) 要素に  B1 を追加・・・定数行例のみ
lmiterm([ lmi2 3 1  X     ],  C1,  1);          % (3,1) 要素に  C1*X *1 を追加
lmiterm([ lmi2 3 1 -Z     ],  D12, 1);          % (3,1) 要素に D12*Z'*1 を追加
lmiterm([ lmi2 3 2  0     ],  D11);             % (3,2) 要素に D11 を追加・・・定数行例のみ
lmiterm([ lmi2 2 2  gamma ], -1,   1);          % (2,2) 要素に -1*gamma*1 を追加
lmiterm([ lmi2 3 3  gamma ], -1,   1);          % (3,3) 要素に  1*gamma*1 を追加
% -------------------------------------------
lmisys = getlmis;                               % 定義された LMI を取得
% -------------------------------------------
cobj = zeros(1,decnbr(lmisys));                 % 決定変数の要素数を取得し,その長さの零ベクトル cobj を生成
cobj(1) = 1;                                    % cobj の 1 番目の要素を 1 に変更 (決定変数の 1 番目の要素は gamma)
% -------------------------------------------
[cost,xopt] = mincx(lmisys,cobj);               % 目的関数を E = gamma とした凸最適化問題を解く
% -------------------------------------------
gamma_opt  = dec2mat(lmisys,xopt,gamma)         % 得られた gamma の最適解 gamma_opt
X_opt = dec2mat(lmisys,xopt,X)                  % 得られた X の最適解 X_opt
Z_opt = dec2mat(lmisys,xopt,Z)                  % 得られた Z の最適解 Z_opt
% -------------------------------------------
K_opt = Z_opt'*inv(X_opt)                       % コントローラゲイン K_opt
```

説明

M ファイル sample_lmi_ct.m を実行するには,商用の Robust Control Toolbox が必要です.
この M ファイルは,plant.m で与えられた

- 重み関数

$$W_{\mathrm{t}}(s) = b_{\mathrm{t}2}s^2 + b_{\mathrm{t}1}s + b_{\mathrm{t}0},\ W_{\mathrm{s}}(s) = \frac{b_{\mathrm{s}}}{s} \tag{1}$$

  を利用して構成された一般化制御対象

$$\mathcal{S}: \begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}_1 w(t) + \boldsymbol{B}_2 u(t) \\ \boldsymbol{z}(t) = \boldsymbol{C}_1\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{D}_{11} w(t) + \boldsymbol{D}_{12} u(t) \end{cases} \tag{2}$$

- 円領域

$$(\alpha - c)^2 + \beta^2 < r^2 \tag{3}$$

に対して，以下の設計仕様を満足するコントローラ

$$\mathcal{K}: \ u(t) = \boldsymbol{K}\boldsymbol{x}(t) \tag{4}$$

を設計します．

(I) 極配置仕様

閉ループ極（$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{K}$ の固有値 $\lambda = \alpha + j\beta$）をすべて円領域 (3) 式に配置

(II) H_∞ 制御仕様

$$\|\boldsymbol{G}_{zw}(s)\|_\infty < \gamma \tag{5}$$

$$\boldsymbol{G}_{zw}(s) := \boldsymbol{C}_{\rm cl}\big(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}_{\rm cl}\big)^{-1}\boldsymbol{B}_1 + \boldsymbol{D}_{11}, \ \left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{A}_{\rm cl} := \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}_2\boldsymbol{K} \\ \boldsymbol{C}_{\rm cl} := \boldsymbol{C}_1 + \boldsymbol{D}_{12}\boldsymbol{K} \end{array} \right.$$

そのために，連立 LMI

$$\begin{bmatrix} r\boldsymbol{X} & \boldsymbol{A}_X - c\boldsymbol{X} \\ * & r\boldsymbol{X} \end{bmatrix} \succ 0 \tag{6}$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_X + \boldsymbol{A}_X^\top & \boldsymbol{B}_1 & * \\ * & -\gamma\boldsymbol{I} & * \\ \boldsymbol{C}_X & \boldsymbol{D}_{11} & -\gamma\boldsymbol{I} \end{bmatrix} \prec 0 \tag{7}$$

を満足する解

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}^\top \succ 0, \ \boldsymbol{Z}, \ \gamma > 0$$

が存在する範囲で線形目的関数 $E = \gamma > 0$ を最小化します (線形目的関数 $E = \gamma > 0$ を最小化する凸最適化問題)．ただし，

$$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{A}_X := \boldsymbol{A}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{B}_2\boldsymbol{Z}^\top \\ \boldsymbol{C}_X := \boldsymbol{C}_1\boldsymbol{X} + \boldsymbol{D}_{12}\boldsymbol{Z}^\top \end{array} \right.$$

です．そして，得られた解を用い，コントローラを

$$u(t) = \boldsymbol{K}\boldsymbol{x}(t), \ \boldsymbol{K} = \boldsymbol{Z}^\top\boldsymbol{X}^{-1}$$

のように決定します．

関数 `lmivar`

Robust Control Toolbox では，関数 `lmivar` により決定変数を定義します．

- γ：スカラ
- $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}^\top$：$n \times n$ の対称行列
- $\boldsymbol{Z}$：$n \times m$ の長方行列

```
gamma = lmivar(1, [1 0]);
X     = lmivar(1, [n 1]);
Z     = lmivar(2, [n m]);
```

関数 `lmiterm`

Robust Control Toolbox では，関数 `lmiterm` により LMI を表現します．LMI (6) 式の場合は

$$\begin{aligned} \boldsymbol{M}_1 &:= \begin{bmatrix} r\boldsymbol{X} & \boldsymbol{A}_X - c\boldsymbol{X} \\ * & r\boldsymbol{X} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} r\boldsymbol{X} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{B}_2\boldsymbol{Z}^\top - c\boldsymbol{X} \\ * & r\boldsymbol{X} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} r\cdot\boldsymbol{X}\cdot 1 & \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{X}\cdot 1 + \boldsymbol{B}_2\cdot\boldsymbol{Z}^\top\cdot 1 - c\cdot\boldsymbol{X}\cdot 1 \\ * & r\cdot\boldsymbol{X}\cdot 1 \end{bmatrix} \\ &\succ 0 \end{aligned}$$

```
11  lmi1 = newlmi;
12  lmiterm([-lmi1 1 1  X     ], r,   1);
13  lmiterm([-lmi1 1 2  X     ], A,   1);
14  lmiterm([-lmi1 1 2 -Z     ], B2,  1);
15  lmiterm([-lmi1 1 2  X     ], -c,  1);
16  lmiterm([-lmi1 2 2  X     ], r,   1);
```

のように記述することができます．行列 $\boldsymbol{M}_1$ が正定であるということを表すために，識別子にマイナスをつけて `-lim1` としています．

たとえば，12 行目は $\boldsymbol{M}_1$ の $(1,1)$ 要素「$r\boldsymbol{X}$」を記述したものです．そこでは，決定変数 $\boldsymbol{X}$ の左右に何がかけられているのかを明示した「$r\cdot X\cdot 1$」を

- lmiterm([-lmi1 1 1 X], r, 1);

のように表現しています．

また，13～15 行目は $\boldsymbol{M}_1$ の $(1,2)$ 要素「$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{Z}^\top-c\boldsymbol{X}$」を三つの部分「$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$」，「$\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{Z}^\top$」，「$-c\boldsymbol{X}$」に分割して記述したものです．このうち，11 行目について補足すると，「$\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{Z}^\top = \boldsymbol{B}_2 \cdot \boldsymbol{Z}^\top \cdot 1$」を

- lmiterm([-lmi1 1 2 -Z], B2, 1);

のように，転置 $\boldsymbol{Z}^\top$ を記述するために，決定変数にマイナスをつけた -Z で表現していることに注意してください．

実行結果

```
>> sample_lmi_ct

 Solver for linear objective minimization under LMI constraints

 Iterations   :    Best objective value so far

     1
     2
     3                   5.437626
     4                   2.514236
     5                   2.041024
     6                   2.041024
     7                   1.486270
     8                   1.267833
     9                   1.267833
    10                   1.043977
    11                   1.043977
    12                   1.043977
    13                   0.990801
    14                   0.990801
    15                   0.990801
    16                   0.990801
    17                   0.891910
    18                   0.891910
***                 new lower bound:     0.435641
    19                   0.821455
***                 new lower bound:     0.559121
    20                   0.821455
***                 new lower bound:     0.627175
    21                   0.786921
***                 new lower bound:     0.681904
    22                   0.783046
***                 new lower bound:     0.756416
    23                   0.777802
***                 new lower bound:     0.759309
    24                   0.777404
***                 new lower bound:     0.770019

 Result:  feasible solution of required accuracy
          best objective value:     0.777404
          guaranteed absolute accuracy:  7.39e-03
          f-radius saturation:  0.000% of R =  1.00e+09

gamma_opt =
    0.7774
X_opt =
   59.5818    4.6833 -148.2734  -20.4745   14.5430
    4.6833    1.5149   -7.1665   -4.9336    1.4158
 -148.2734   -7.1665  408.5814   51.0521  -30.8600
  -20.4745   -4.9336   51.0521   79.0075   -3.9719
```

```
   14.5430    1.4158  -30.8600   -3.9719    4.5519
Z_opt =
   -5.5435
   -2.4766
   12.4753
    3.8301
   -1.1345
K_opt =
    6.4336   -7.7029    1.7496   -0.2352   -6.7519
```