

plant.m

```

1  % plant.m
2  % last modified: 2023/05/15 by Masakatsu KAWATA
3
4  clear
5  format compact
6
7  % //////////////////////////////////////
8  % アクロボットのパラメータ
9  % //////////////////////////////////////
10 g = 9.81;          %% 重力加速度
11 m1 = 7.02e-001;    %% リンク 1 の質量
12 m2 = 1.40e-001;    %% リンク 2 の質量
13 % -----
14 L1 = 1.23e-001;    %% リンク 1 の全長
15 L2 = 2.35e-001;    %% リンク 2 の全長
16 l1 = 1.25e-002;    %% リンク 1 の軸から重心までの長さ
17 l2 = 1.60e-001;    %% リンク 2 の軸から重心までの長さ
18 % -----
19 Jg1 = 5.98e-003;    %% リンク 1 の重心まわりの慣性モーメント
20 c1 = 4.79e-003;    %% リンク 1 の粘性摩擦係数
21 Jg2 = 1.09e-003;    %% リンク 2 の重心まわりの慣性モーメント
22 % -----
23 a2s = 1.46e+001;    %% リンクおよびモータ、モータドライバの特性により定まる定数
24 c2s = 9.46e+001;
25 km = 2.90e+002;
26 % -----
27 a1 = Jg1 + m1*l1^2 + m2*L1^2;
28 a2 = Jg2 + m2*l2^2;
29 a3 = m2*L1*l2;
30 a4 = m1*g*l1 + m2*g*L1;
31 a5 = m2*g*l2;
32
33 % //////////////////////////////////////
34 % 重み
35 % //////////////////////////////////////
36 %  $W_t(p) = bt_2s^2 + bt_1s + bt_0$ 
37 bt0 = 1/10;
38 bt1 = 2/10;
39 bt2 = 1/10;
40
41 %  $W_s(p) = bs/s$ 
42 bs = 1;
43
44 % //////////////////////////////////////
45 % 一般可制御対象  $s$  の係数行列の定義
46 % //////////////////////////////////////
47 Ep = [ 1      0      0      0
48         0      1      0      0
49         0      0  a1+a2-2*a3  a2-a3
50         0      0  a2-a3    a2s ];
51 Ap = [ 0      0      1      0
52         0      0      0      1
53        a4-a5  -a5    -c1      0
54        -a5   -a5      0   -c2s ];
55 Bp = [ 0
56        0
57        0
58        km ];
59 % -----

```

```

60 Cp1 = [ 1 0 ];
61 Cp = [ Cp1 zeros(1,2) ];
62 % -----
63 Ct1 = [ bt0 0 ];
64 Ct2 = [ bt1 0 ];
65 Ct = [ Ct1 Ct2 ];
66 % -----
67 Ctd2 = [ bt2 0 ];
68 Ctd = [ zeros(1,2) Ctd2 ];
69 % -----
70
71 Ed = [ Ep zeros(4,1)
72        zeros(1,4) 1 ];
73 Ad = [ Ap zeros(4,1)
74        -Cp zeros(1,1) ];
75 B1d = [ zeros(4,1)
76         1 ];
77 B2d = [ Bp
78         0 ];
79 C11d = [ Ct 0
80          zeros(1,4) bs ];
81 C12d = [ Ctd 0
82          zeros(1,4) 0 ];
83
84 % -----
85 A = inv(Ed)*Ad;
86 B1 = inv(Ed)*B1d;
87 B2 = inv(Ed)*B2d;
88
89 C1 = C11d + C12d*A;
90 D11 = C12d*B1;
91 D12 = C12d*B2;
92
93 % //////////////////////////////////////
94 % 次数の定義
95 % //////////////////////////////////////
96 n = 5; % x の次数
97 q = 1; % w の次数
98 m = 1; % u の次数
99 p = 2; % z の次数
100
101 % //////////////////////////////////////
102 % 円領域の指定：中心 (c,0), 半径 r
103 % //////////////////////////////////////
104 c = -6;
105 r = 8;

```

説明

M ファイル `plant.m` は、図 1 に示すアクロボットに対して、

- 設計仕様を考えたときの一般化制御対象の係数行列
- 極配置仕様を考えたときの円領域

を与えるものです。

図 1 のアクロボットは、モータにより能動リンク (リンク 2) を回転させることで、受動リンク (リンク 1) の角度 $\theta_1(t)$ をその目標値 $r(t)$ に追従させることを目的としたシステムです。この動作は、体操競技の上水平支持 (うわすいへいしじ) に相当します。

アクロボットの非線形モデルは、

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_3 \cos \theta_2(t) & \alpha_2 - \alpha_3 \cos \theta_2(t) \\ \alpha_2 - \alpha_3 \cos \theta_2(t) & \alpha_{2s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1(t) \\ \ddot{\theta}_2(t) \end{bmatrix}$$

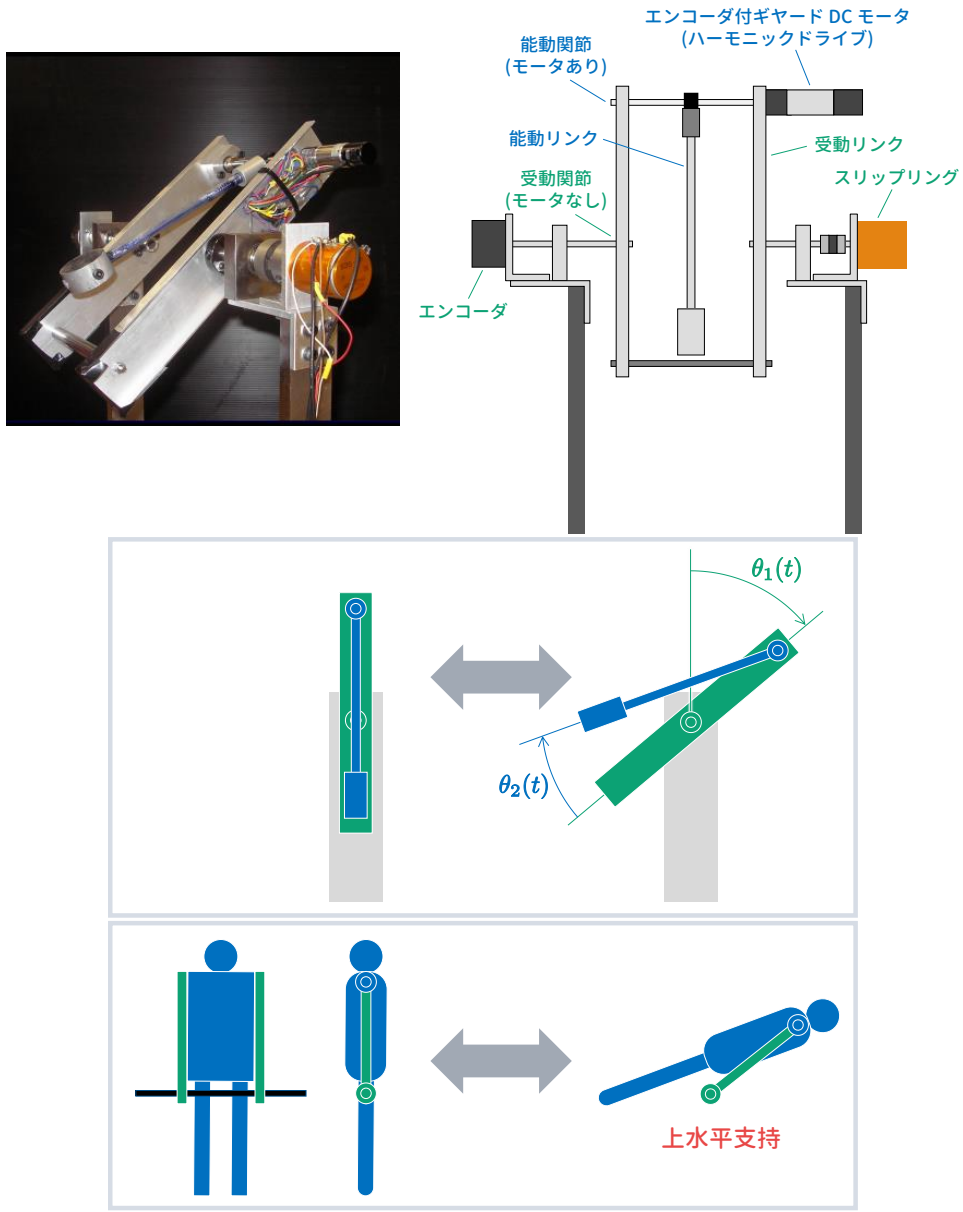


図 1 アクロボット

$$\begin{aligned}
 & + \begin{bmatrix} \alpha_3 (2\dot{\theta}_1(t)\dot{\theta}_2(t) + \dot{\theta}_2^2(t)) \sin \theta_2(t) \\ -\alpha_3 \dot{\theta}_1^2(t) \sin \theta_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\alpha_4 \sin \theta_1(t) + \alpha_5 \sin \theta_{12}(t) \\ \alpha_5 \sin \theta_{12}(t) \end{bmatrix} \\
 & + \begin{bmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_{2s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1(t) \\ \dot{\theta}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ k_m \end{bmatrix} v(t) \tag{1} \\
 & \begin{cases} \alpha_1 = J_{g1} + m_1 \ell_1^2 + m_2 L_1^2, \alpha_2 = J_{g2} + m_2 \ell_2^2, \\ \alpha_3 = m_2 L_1 \ell_2, \alpha_4 = m_1 g \ell_1 + m_2 g L_1, \alpha_5 = m_2 g \ell_2, \\ \theta_{12}(t) = \theta_1(t) + \theta_2(t) \end{cases}
 \end{aligned}$$

で与えられます。ただし、パラメータの意味については、M ファイルを参照してください。リンク 1 が真上、リンク 2

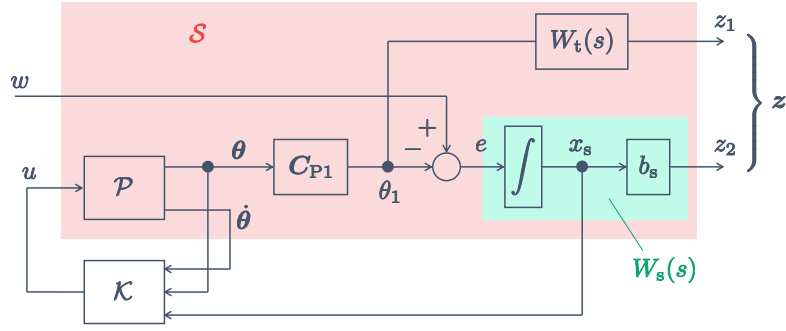


図 2 一般化制御対象 S

が真下で静止しているような平衡点を考え、(1) 式を 1 次近似線形化すると、

$$\begin{aligned} \mathcal{P} : \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E}_{P22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_P(t) \\ \dot{\boldsymbol{\theta}}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{A}_{P21} & \mathbf{A}_{P22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_P(t) \\ \boldsymbol{\theta}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_{P2} \end{bmatrix} u(t) \\ \mathbf{E}_{P22} &= \begin{bmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_3 & \alpha_2 - \alpha_3 \\ \alpha_2 - \alpha_3 & \alpha_{2s} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{P21} = \begin{bmatrix} \alpha_4 - \alpha_5 & -\alpha_5 \\ -\alpha_5 & -\alpha_5 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{A}_{P22} &= \begin{bmatrix} -c_1 & 0 \\ 0 & -c_{2s} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_{P2} = \begin{bmatrix} 0 \\ k_m \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\theta}(t) = \begin{bmatrix} \theta_1(t) \\ \theta_2(t) \end{bmatrix}, \quad u(t) = v(t) \end{aligned} \quad (2)$$

が得られます。この 1 次近似線形化モデル (2) 式に対して、積分型コントローラ

$$\mathcal{K} : u(t) = \mathbf{K}_P \mathbf{x}_P(t) + k_s x_s(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{K}_P & k_s \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{x}_P(t) \\ x_s(t) \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}(t)} \quad (3)$$

を設計することを考えます。ただし、

$$\mathbf{x}_P(t) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\theta}(t) \\ \dot{\boldsymbol{\theta}}(t) \end{bmatrix}, \quad x_s(t) = \int_0^t e(t) dt, \quad e = r - y, \quad (4)$$

$$\begin{aligned} y(t) = \theta_1(t) &= \mathbf{C}_{P1} \boldsymbol{\theta}(t) \quad (\mathbf{C}_{P1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}) \\ &= \mathbf{C}_P \mathbf{x}_P(t) \quad (\mathbf{C}_P = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{P1} & \mathbf{0} \end{bmatrix}) \end{aligned} \quad (5)$$

です。

コントローラの設計仕様としては、以下のものを考えます。

H_∞ 制御仕様

図 2 の制御系を構成したとき、 $w(t) = r(t)$ が

$$\mathbf{z}(t) = \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_t(s)\theta_1(t) \\ W_s(s)e(t) \end{bmatrix} \quad (6)$$

に与える影響を小さくするため、

$$\|\mathbf{G}_{zw}(s)\|_\infty < \gamma \quad (7)$$

を満足する $\gamma > 0$ を最小化します。ただし、

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{zw}(s) &:= \mathbf{C}_{cl}(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_{cl})^{-1}\mathbf{B}_1 + \mathbf{D}_{11}, \\ \begin{cases} \mathbf{A}_{cl} &:= \mathbf{A} + \mathbf{B}_2\mathbf{K} \\ \mathbf{C}_{cl} &:= \mathbf{C}_1 + \mathbf{D}_{12}\mathbf{K} \end{cases} \end{aligned} \quad (8)$$

であり、

$$W_t(s) = b_{t2}s^2 + b_{t1}s + b_{t0}, \quad W_s(s) = \frac{b_s}{s} \quad (9)$$

は重み関数, $s = d/dt$ は微分演算子です.

評価出力は次式のように書き換えることができます.

$$\begin{aligned}
z_1(t) &= W_t(s)\theta_1(t) = (b_{t2}s^2 + b_{t1}s + b_{t0})\theta_1(t) \\
&= b_{t2}\ddot{\theta}_1(t) + b_{t1}\dot{\theta}_1(t) + b_{t0}\theta_1(t) \\
&= \underbrace{\begin{bmatrix} b_{t0} & 0 \end{bmatrix}}_{C_{t1}} \underbrace{\begin{bmatrix} \theta_1(t) \\ \theta_2(t) \end{bmatrix}}_{\theta(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} b_{t1} & 0 \end{bmatrix}}_{C_{t2}} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1(t) \\ \dot{\theta}_2(t) \end{bmatrix}}_{\dot{\theta}(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{0}} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1(t) \\ \dot{\theta}_2(t) \end{bmatrix}}_{\dot{\theta}(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} b_{t2} & 0 \end{bmatrix}}_{C_{td2}} \underbrace{\begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1(t) \\ \ddot{\theta}_2(t) \end{bmatrix}}_{\ddot{\theta}(t)} \\
&= \underbrace{\begin{bmatrix} C_{t1} & C_{t2} \end{bmatrix}}_{C_t} \underbrace{\begin{bmatrix} \theta(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{bmatrix}}_{x_P(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & C_{td2} \end{bmatrix}}_{C_{td}} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\theta}(t) \\ \ddot{\theta}(t) \end{bmatrix}}_{\dot{x}_P(t)}
\end{aligned} \tag{10}$$

$$z_2(t) = W_s(s)e(t) = \frac{b_s}{s}e(t) = b_s x_s(t) \tag{11}$$

したがって, 一般化制御対象は

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}: \begin{cases} E_d \dot{x}(t) = A_d x(t) + B_{1d}w(t) + B_{2d}u(t) \\ z(t) = C_{11d}x(t) + C_{12d}\dot{x}(t) \end{cases} \\
x(t) = \begin{bmatrix} x_P(t) \\ x_s(t) \end{bmatrix}, \quad E_d = \begin{bmatrix} E_P & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}, \\
A_d = \begin{bmatrix} A_P & \mathbf{0} \\ -C_P & 0 \end{bmatrix}, \quad B_{1d} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad B_{2d} = \begin{bmatrix} B_P \\ 0 \end{bmatrix}, \\
C_{11d} = \begin{bmatrix} C_t & 0 \\ \mathbf{0} & b_s \end{bmatrix}, \quad C_{12d} = \begin{bmatrix} C_{td} & 0 \\ \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{12}$$

となり, さらに, これを書き換えると, 次式が得られます.

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}: \begin{cases} \dot{x}(t) = A x(t) + B_1 w(t) + B_2 u(t) \\ z(t) = C_1 x(t) + D_{11} w(t) + D_{12} u(t) \end{cases} \\
A = E_d^{-1} A_d, \quad B_1 = E_d^{-1} B_{1d}, \quad B_2 = E_d^{-1} B_{2d}, \\
C_1 = C_{11d} + C_{12d} E_d^{-1} A_d, \\
D_{11} = C_{12d} E_d^{-1} B_{1d}, \quad D_{12} = C_{12d} E_d^{-1} B_{2d}
\end{aligned} \tag{13}$$

H_∞ 制御仕様だけを考えると $\gamma > 0$ を最小化すると, コントローラのゲイン K が過大となり, 実用上, 好ましくありません. そこで, 以下の設計仕様も考えます.

極配置仕様

閉ループ極 ($A + B_2 K$ の固有値 $\lambda = \alpha + j\beta$) をすべて図 3 に示す円領域

$$(\alpha - c)^2 + \beta^2 < r^2$$

に配置します.

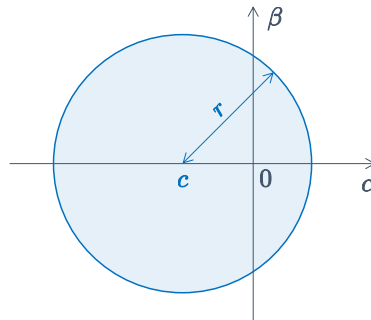


図 3 円領域