plant.m

```
% plant.m
% last modified: 2023/05/15 by Masakatsu KAWATA

clear
format compact

% ///////////////////////////////////////////////////////////////////////////
% アクロボットのパラメータ
% ///////////////////////////////////////////////////////////////////////////
g   = 9.81;         % 重力加速度
m1  = 7.02e-001;    % リンク 1 の質量
m2  = 1.40e-001;    % リンク 2 の質量
% --------------------------------------
L1  = 1.23e-001;    % リンク 1 の全長
L2  = 2.35e-001;    % リンク 2 の全長
l1  = 1.25e-002;    % リンク 1 の軸から重心までの長さ
l2  = 1.60e-001;    % リンク 2 の軸から重心までの長さ
% --------------------------------------
Jg1 = 5.98e-003;    % リンク 1 の重心まわりの慣性モーメント
c1  = 4.79e-003;    % リンク 1 の粘性摩擦係数
Jg2 = 1.09e-003;    % リンク 2 の重心まわりの慣性モーメント
% --------------------------------------
a2s = 1.46e+001;    % リンクおよびモータ，モータドライバの特性により定まる定数
c2s = 9.46e+001;
km  = 2.90e+002;
% --------------------------------------
a1 = Jg1 + m1*l1^2 + m2*L1^2;
a2 = Jg2 + m2*l2^2;
a3 = m2*L1*l2;
a4 = m1*g*l1 + m2*g*L1;
a5 = m2*g*l2;

% ///////////////////////////////////////////////////////////////////////////
% 重み
% ///////////////////////////////////////////////////////////////////////////
% Wt(p) = bt2*s^2 + bt1*s + bt0
bt0 = 1/10;
bt1 = 2/10;
bt2 = 1/10;

% Ws(p) = bs/s
bs  = 1;

% ///////////////////////////////////////////////////////////////////////////
% 一般可制御対象 S の係数行列の定義
% ///////////////////////////////////////////////////////////////////////////
Ep = [ 1     0      0          0
       0     1      0          0
       0     0  a1+a2-2*a3  a2-a3
       0     0    a2-a3      a2s  ];
Ap = [ 0     0      1          0
       0     0      0          1
     a4-a5  -a5    -c1         0
      -a5   -a5     0       -c2s ];
Bp = [ 0
       0
       0
       km ];
% --------------------------------------
```

```
Cp1 = [ 1  0 ];
Cp  = [ Cp1  zeros(1,2) ];
% -------------------------------------
Ct1  = [ bt0  0 ];
Ct2  = [ bt1  0 ];
Ct   = [ Ct1  Ct2 ];
% -------------------------------------
Ctd2 = [ bt2  0 ];
Ctd  = [ zeros(1,2)  Ctd2 ];
% -------------------------------------

Ed   = [ Ep         zeros(4,1)
         zeros(1,4)  1          ];
Ad   = [ Ap         zeros(4,1)
        -Cp         zeros(1,1) ];
B1d  = [ zeros(4,1)
         1         ];
B2d  = [ Bp
          0  ];
C11d = [ Ct         0
         zeros(1,4)  bs ];
C12d = [ Ctd        0
         zeros(1,4)  0 ];

% -------------------------------------
A   = inv(Ed)*Ad;
B1  = inv(Ed)*B1d;
B2  = inv(Ed)*B2d;

C1  = C11d + C12d*A;
D11 =        C12d*B1;
D12 =        C12d*B2;

% ///////////////////////////////////////////////////////////////////////
% 次数の定義
% ///////////////////////////////////////////////////////////////////////
n = 5;      % x の次数
q = 1;      % w の次数
m = 1;      % u の次数
p = 2;      % z の次数

% ///////////////////////////////////////////////////////////////////////
% 円領域の指定：中心 (c,0)，半径 r
% ///////////////////////////////////////////////////////////////////////
c = -6;
r =  8;
```

説明

M ファイル plant.m は，図 1 に示すアクロボットに対して，

- 設計仕様を考えたときの一般化制御対象の係数行列
- 極配置仕様を考えたときの円領域

を与えるものです．

図 1 のアクロボットは，モータにより能動リンク (リンク 2) を回転させることで，受動リンク (リンク 1) の角度 $\theta_1(t)$ をその目標値 $r(t)$ に追従させることを目的としたシステムです．この動作は，体操競技の上水平支持（うわすいへいしじ）に相当します．

アクロボットの非線形モデルは，

$$\begin{bmatrix} \alpha_1+\alpha_2-2\alpha_3\cos\theta_2(t) & \alpha_2-\alpha_3\cos\theta_2(t) \\ \alpha_2-\alpha_3\cos\theta_2(t) & \alpha_{2\mathrm{s}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1(t) \\ \ddot{\theta}_2(t) \end{bmatrix}$$

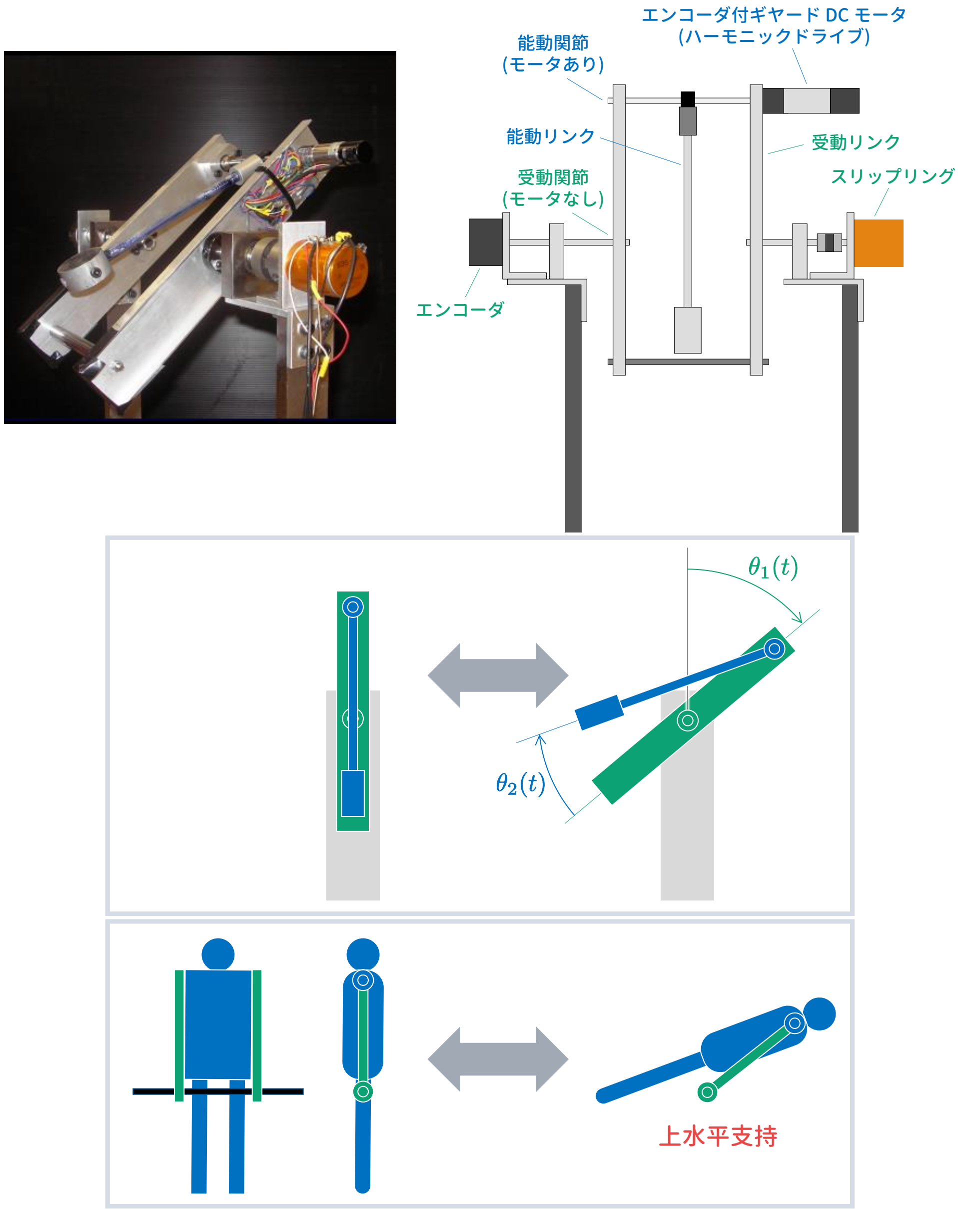

図 1　アクロボット

$$
\begin{aligned}
&+\begin{bmatrix} \alpha_3\big(2\dot{\theta}_1(t)\dot{\theta}_2(t)+\dot{\theta}_2^2(t)\big)\sin\theta_2(t) \\ -\alpha_3\dot{\theta}_1^2(t)\sin\theta_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\alpha_4\sin\theta_1(t)+\alpha_5\sin\theta_{12}(t) \\ \alpha_5\sin\theta_{12}(t) \end{bmatrix} \\
&+\begin{bmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_{2s} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1(t) \\ \dot{\theta}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ k_{\mathrm{m}} \end{bmatrix} v(t) \qquad (1) \\
&\begin{cases} \alpha_1 = J_{g1}+m_1\ell_1^2+m_2L_1^2,\ \ \alpha_2 = J_{g2}+m_2\ell_2^2, \\ \alpha_3 = m_2L_1\ell_2,\ \ \alpha_4 = m_1g\ell_1+m_2gL_1,\ \ \alpha_5 = m_2g\ell_2, \\ \theta_{12}(t) = \theta_1(t)+\theta_2(t) \end{cases}
\end{aligned}
$$

で与えられます．ただし，パラメータの意味については，M ファイルを参照してください．リンク 1 が真上，リンク 2

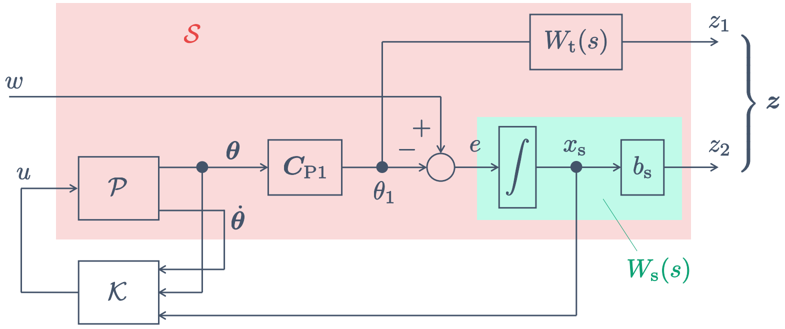

図 2　一般化制御対象 S

が真下で静止しているような平衡点を考え，(1) 式を 1 次近似線形化すると，

$$\mathcal{P}:\ \overbrace{\begin{bmatrix}\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{E}_{\rm P22}\end{bmatrix}}^{\boldsymbol{E}_{\rm P}}\overbrace{\begin{bmatrix}\dot{\boldsymbol{\theta}}(t)\\ \ddot{\boldsymbol{\theta}}(t)\end{bmatrix}}^{\dot{\boldsymbol{x}}_{\rm P}(t)}=\overbrace{\begin{bmatrix}\boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}\\ \boldsymbol{A}_{\rm P21} & \boldsymbol{A}_{\rm P22}\end{bmatrix}}^{\boldsymbol{A}_{\rm P}}\overbrace{\begin{bmatrix}\boldsymbol{\theta}(t)\\ \dot{\boldsymbol{\theta}}(t)\end{bmatrix}}^{\boldsymbol{x}_{\rm P}(t)}+\overbrace{\begin{bmatrix}\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{B}_{\rm P2}\end{bmatrix}}^{\boldsymbol{B}_{\rm P}}u(t) \tag{2}$$

$$\boldsymbol{E}_{\rm P22}=\begin{bmatrix}\alpha_1+\alpha_2-2\alpha_3 & \alpha_2-\alpha_3\\ \alpha_2-\alpha_3 & \alpha_{2\rm s}\end{bmatrix},\ \boldsymbol{A}_{\rm P21}=\begin{bmatrix}\alpha_4-\alpha_5 & -\alpha_5\\ -\alpha_5 & -\alpha_5\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}_{\rm P22}=\begin{bmatrix}-c_1 & 0\\ 0 & -c_{2\rm s}\end{bmatrix},\ \boldsymbol{B}_{\rm P2}=\begin{bmatrix}0\\ k_{\rm m}\end{bmatrix},\ \boldsymbol{\theta}(t)=\begin{bmatrix}\theta_1(t)\\ \theta_2(t)\end{bmatrix},\ u(t)=v(t)$$

が得られます．この 1 次近似線形化モデル (2) 式に対して，積分型コントローラ

$$\mathcal{K}:\ u(t)=\boldsymbol{K}_{\rm P}\boldsymbol{x}_{\rm P}(t)+k_{\rm s}x_{\rm s}(t)=\underbrace{\begin{bmatrix}\boldsymbol{K}_{\rm P} & k_{\rm s}\end{bmatrix}}_{\boldsymbol{K}}\underbrace{\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_{\rm P}(t)\\ x_{\rm s}(t)\end{bmatrix}}_{\boldsymbol{x}(t)} \tag{3}$$

を設計することを考えます．ただし，

$$\boldsymbol{x}_{\rm P}(t)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\theta}(t)\\ \dot{\boldsymbol{\theta}}(t)\end{bmatrix},\ x_{\rm s}(t)=\int_0^t e(t)dt,\ e=r-y, \tag{4}$$

$$\begin{aligned}y(t)=\theta_1(t)&=\boldsymbol{C}_{\rm P1}\boldsymbol{\theta}(t)\quad\left(\boldsymbol{C}_{\rm P1}=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\right)\\ &=\boldsymbol{C}_{\rm P}\boldsymbol{x}_{\rm P}(t)\quad\left(\boldsymbol{C}_{\rm P}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}_{\rm P1} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}\right)\end{aligned} \tag{5}$$

です．

コントローラの設計仕様としては，以下のものを考えます．

H_∞ 制御仕様　図 2 の制御系を構成したとき，$w(t)=r(t)$ が

$$\boldsymbol{z}(t)=\begin{bmatrix}z_1(t)\\ z_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}W_{\rm t}(s)\theta_1(t)\\ W_{\rm s}(s)e(t)\end{bmatrix} \tag{6}$$

に与える影響を小さくするため，

$$\|\boldsymbol{G}_{zw}(s)\|_\infty<\gamma \tag{7}$$

を満足する $\gamma>0$ を最小化します．ただし，

$$\boldsymbol{G}_{zw}(s):=\boldsymbol{C}_{\rm cl}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_{\rm cl})^{-1}\boldsymbol{B}_1+\boldsymbol{D}_{11},\quad\left\{\begin{array}{l}\boldsymbol{A}_{\rm cl}:=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{K}\\ \boldsymbol{C}_{\rm cl}:=\boldsymbol{C}_1+\boldsymbol{D}_{12}\boldsymbol{K}\end{array}\right. \tag{8}$$

であり，

$$W_{\rm t}(s)=b_{\rm t2}s^2+b_{\rm t1}s+b_{\rm t0},\ W_{\rm s}(s)=\frac{b_{\rm s}}{s} \tag{9}$$

は重み関数，$s = \mathrm{d}/\mathrm{d}t$ は微分演算子です．

評価出力は次式のように書き換えることができます．

$$
\begin{aligned}
z_1(t) &= W_\mathrm{t}(s)\theta_1(t) = \big(b_{\mathrm{t}2}s^2 + b_{\mathrm{t}1}s + b_{\mathrm{t}0}\big)\theta_1(t) \\
&= b_{\mathrm{t}2}\ddot{\theta}_1(t) + b_{\mathrm{t}1}\dot{\theta}_1(t) + b_{\mathrm{t}0}\theta_1(t) \\
&= \underbrace{\begin{bmatrix} b_{\mathrm{t}0} & 0 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{C}_{\mathrm{t}1}} \underbrace{\begin{bmatrix} \theta_1(t) \\ \theta_2(t) \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\theta}(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} b_{\mathrm{t}1} & 0 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{C}_{\mathrm{t}2}} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1(t) \\ \dot{\theta}_2(t) \end{bmatrix}}_{\dot{\boldsymbol{\theta}}(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{0}} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1(t) \\ \dot{\theta}_2(t) \end{bmatrix}}_{\dot{\boldsymbol{\theta}}(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} b_{\mathrm{t}2} & 0 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{C}_{\mathrm{td}2}} \underbrace{\begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1(t) \\ \ddot{\theta}_2(t) \end{bmatrix}}_{\ddot{\boldsymbol{\theta}}(t)} \\
&= \underbrace{\begin{bmatrix} \boldsymbol{C}_{\mathrm{t}1} & \boldsymbol{C}_{\mathrm{t}2} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{C}_\mathrm{t}} \underbrace{\begin{bmatrix} \boldsymbol{\theta}(t) \\ \dot{\boldsymbol{\theta}}(t) \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{x}_\mathrm{P}(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{C}_{\mathrm{td}2} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{C}_\mathrm{td}} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\theta}}(t) \\ \ddot{\boldsymbol{\theta}}(t) \end{bmatrix}}_{\dot{\boldsymbol{x}}_\mathrm{P}(t)}
\end{aligned} \tag{10}
$$

$$
z_2(t) = W_\mathrm{s}(s)e(t) = \frac{b_\mathrm{s}}{s}e(t) = b_\mathrm{s}x_\mathrm{s}(t) \tag{11}
$$

したがって，一般化制御対象は

$$
\mathcal{S}: \begin{cases} \boldsymbol{E}_\mathrm{d}\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}_\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}_{1\mathrm{d}}w(t) + \boldsymbol{B}_{2\mathrm{d}}u(t) \\ \boldsymbol{z}(t) = \boldsymbol{C}_{11\mathrm{d}}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{C}_{12\mathrm{d}}\dot{\boldsymbol{x}}(t) \end{cases} \tag{12}
$$

$$
\boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_\mathrm{P}(t) \\ x_\mathrm{s}(t) \end{bmatrix},\ \boldsymbol{E}_\mathrm{d} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{E}_\mathrm{P} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & 1 \end{bmatrix},
$$

$$
\boldsymbol{A}_\mathrm{d} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_\mathrm{P} & \boldsymbol{0} \\ -\boldsymbol{C}_\mathrm{P} & 0 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{B}_{1\mathrm{d}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ 1 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{B}_{2\mathrm{d}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{B}_\mathrm{P} \\ 0 \end{bmatrix},
$$

$$
\boldsymbol{C}_{11\mathrm{d}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{C}_\mathrm{t} & 0 \\ \boldsymbol{0} & b_\mathrm{s} \end{bmatrix},\ \boldsymbol{C}_{12\mathrm{d}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{C}_\mathrm{td} & 0 \\ \boldsymbol{0} & 0 \end{bmatrix}
$$

となり，さらに，これを書き換えると，次式が得られます．

$$
\mathcal{S}: \begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}_1 w(t) + \boldsymbol{B}_2 u(t) \\ \boldsymbol{z}(t) = \boldsymbol{C}_1\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{D}_{11}w(t) + \boldsymbol{D}_{12}u(t) \end{cases} \tag{13}
$$

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}_\mathrm{d}^{-1}\boldsymbol{A}_\mathrm{d},\ \boldsymbol{B}_1 = \boldsymbol{E}_\mathrm{d}^{-1}\boldsymbol{B}_{1\mathrm{d}},\ \boldsymbol{B}_2 = \boldsymbol{E}_\mathrm{d}^{-1}\boldsymbol{B}_{2\mathrm{d}}, \\
&\boldsymbol{C}_1 = \boldsymbol{C}_{11\mathrm{d}} + \boldsymbol{C}_{12\mathrm{d}}\boldsymbol{E}_\mathrm{d}^{-1}\boldsymbol{A}_\mathrm{d}, \\
&\boldsymbol{D}_{11} = \boldsymbol{C}_{12\mathrm{d}}\boldsymbol{E}_\mathrm{d}^{-1}\boldsymbol{B}_{1\mathrm{d}},\ \boldsymbol{D}_{12} = \boldsymbol{C}_{12\mathrm{d}}\boldsymbol{E}_\mathrm{d}^{-1}\boldsymbol{B}_{2\mathrm{d}}
\end{aligned}
$$

H_∞ 制御仕様だけを考えて $\gamma > 0$ を最小化すると，コントローラのゲイン $\boldsymbol{K}$ が過大となり，実用上，好ましくありません．そこで，以下の設計仕様も考えます．

極配置仕様

閉ループ極（$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}_2\boldsymbol{K}$ の固有値 $\lambda = \alpha + j\beta$）をすべて図 3 に示す円領域

$$
(\alpha - c)^2 + \beta^2 < r^2
$$

に配置します．

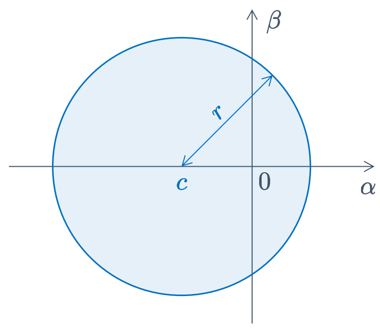

図 3　円領域