Nota de Estudo — Revisão de Newton-Raphson

Nota de Estudo — Revisão de Newton-Raphson

Autor: Fábio Magnani (fabio.magnani@ufpe.br)
Curso: Engenharia Mecânica - UFPE
Início do desenvolvimento: 31/08/2025
Primeira publicação: 08/09/2025
Versão Atual: v-2025-09-08-a (fase de teste técnico no Colab, teste didático-pedagógico com estudantes e início da revisão final de código/texto)

Objetivo

Revisar o Método de Newton-Raphson usando como exemplo um problema de trocador de calor de *Design of Thermal Systems*.

Referência

- Stoecker, W. F. *Design of Thermal Systems*, chap. 5, 3rd ed., McGraw-Hill, 1989.

Estrutura

- Enunciado do problema-exemplo (trocador de calor com condensação) e o seu modelo matemático.
- Análise de escala do problema-exemplo.
- Estudo paramétrico do problema-exemplo (U variável).
- Estudo paramétrico do problema-exemplo simplificado (U constante).

- Revisão do método de Newton-Raphson.
- Solução do problema-exemplo pelo método de Newton-Raphson.
- Discussões finais.
- Propostas de estudos adicionais.

Notação

- w: vazão mássica [kg/s]
- Q: potência térmica requerida [kW]
- $f(w)$: função resíduo usada no método de Newton-Raphson [kW]
- T_e, T_v: temperaturas de entrada da água e do vapor [°C]
- c_p: calor específico a pressão constante [kJ/(kg · K)]
- A: área efetiva de troca térmica [m^2]
- h: passo para a diferença finita à frente

Problema-exemplo

Enunciado físico: O trocador da Fig. 1 aquece água a partir da condensação de vapor. A água entra a $T_e = 30°\text{C}$, o vapor entra a $T_v = 50°\text{C}$, e o condensado sai também a 50°C. Queremos determinar a vazão mássica de água, w (kg/s), tal que o calor transferido seja $Q = 50\,\text{kW}$. A área de troca é $A = 1{,}4\,\text{m}^2$ e o coeficiente global de transferência de calor, baseado nessa área, é função de w:

$$\frac{1}{U} = \frac{0{,}0445}{w^{0{,}8}} + 0{,}185 \qquad [\text{m}^2\,\text{K/kW}].$$

Figura 1. Problema-exemplo: trocador de calor com condensação de vapor.

Pela 1a Lei aplicada ao lado frio, temos que:

$$Q = wc_p(T_s - T_e) \tag{2}$$

A **Equação do Trocador de Calor** é:

$$Q = UA\Delta T_{LM} = UA\frac{(T_v - T_s) - (T_v - T_e)}{\ln\frac{(T_v - T_s)}{(T_v - T_e)}} = UA\frac{(T_e - T_s)}{\ln\frac{(T_v - T_s)}{(T_v - T_e)}} \tag{3}$$

Comparando Eq.2 e Eq.3 vemos que:

$$wc_p(T_s - T_e) = -UA\frac{(T_s - T_e)}{\ln\frac{(T_v - T_s)}{(T_v - T_e)}} \implies \frac{(T_v - T_s)}{(T_v - T_e)} = e^{-\frac{UA}{wc_p}} \implies (T_v - T_s) = (T_v - T_e)e^{-\frac{UA}{wc_p}} \quad (4)$$

Ou:

$$(T_s - T_v) = -(T_v - T_e)e^{-\frac{UA}{wc_p}} + (T_e - T_e) \implies T_s = T_e + (T_v - T_e) - (T_v - T_e)e^{-\frac{UA}{wc_p}} \quad (5)$$

Que, finalmente, se transforma da **Equação do Trocador de Calor com Condensação** (*i.e.,* o lado quente opera com temperatura constante):

$$T_s = T_e + (T_v - T_e)\left(1 - e^{-UA/wc_p}\right) \quad (6)$$

Substituindo a Eq. 6 na Eq.2, temos:

$$Q = wc_p(T_v - T_e)\left(1 - e^{-UA/wc_p}\right) \quad (7)$$

Reescrevendo a Eq.1:

$$U = \frac{w}{0,0445w^{0,2} + 0,185w} \quad (8)$$

Substituindo a Eq.8 na Eq.7, chegamos no **modelo matemático** do problema-exemplo:

$$\boxed{Q = wc_p(T_v - T_e)\left[1 - e^{-\frac{A}{c_p(0,0445w^{0,2}+0,185w)}}\right]} \quad (9)$$

Enunciado matemático: determine o valor de w que satisfaça a Eq.9 para os valores de $Q = 50$ kW; $A = 1,4\text{m}^2$; $c_p = 4,2$ kJ/kg·K; $T_v = 50°\text{C}$ e $T_e = 30°\text{C}$.

Análise de escala do modelo matemático

Para facilitar a análise, podemos escrever a Eq.9 assim:

$$Q(w) = w\, c_p\, \Delta T\, [\, 1 - e^{-\xi}\,] \tag{10}$$

Com:

$$\Delta T = (T_v - T_e) \tag{11}$$

e

$$\xi(w) = \frac{A}{c_p\, (\, 0{,}0445\, w^{0{,}2} + 0{,}185\, w\,)} \tag{12}$$

Limite assintótico quando a vazão tende a zero

Quando a vazão tende a zero ($w \to 0$), vemos que $\xi \to \infty$ e, consequentemente, $(1 - e^{-\xi}) \to 1$. Temos, então, que:

$$w \to 0 \implies Q \to 0 \tag{13}$$

O que não nos ajuda muito. Vamos ver então o que acontece com a derivada de Q. Derivando a Eq. 10 em relação a w, alcançamos:

$$Q'(w) = c_p \Delta T (1 - e^{-\xi}) - \Delta T A e^{-\xi} \frac{0,0089 w^{0,2} + 0,185 w}{(0,0445 w^{0,2} + 0,185 w)^2} \tag{14}$$

Portanto, como o segundo termo envolve uma exponencial multiplicada por uma potência, e como a exponencial domina a potência, temos que o segundo termo tende a zero. Em outras palavras:

$$w \to 0 \implies Q' \to c_p \Delta T \tag{15}$$

Em outras palavras, quando a vazão é muito baixa, o calor é proporcional à vazão ($Q \propto w$). Logo, para uma primeira estimativa, linearizando a curva (usando $w \approx \dfrac{Q}{c_p\, \Delta T}$), podemos propor que a vazão para o fluxo $Q = 50$ kW pode ser estimada por $w = 50/(4,2 \cdot 20) = 0,595$ kg/s.

Limite assintótico quando a vazão tende ao infinito

Quando a vazão tende ao infinito ($w \to \infty$), temos que $w\, c_p\, \Delta T \to \infty$ ao mesmo tempo que $(1 - e^{-\xi}) \to 0$, e, por isso, precisamos de uma análise um pouco mais profunda. Primeiro, vemos que, quando a vazão cresce muito ($w \to \infty$), quem controla ξ é o termo $0,185w$. Então:

$$w \to \infty \;\Rightarrow\; \xi(w) \approx \frac{A}{0{,}185\, c_p}\, \frac{1}{w} \tag{16}$$

Lembrando que a Série de Taylor é dada por:

$$y(x) = y(a) + y'(a)(x-a) + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{y^{(k)}(a)}{k!}\,(x-a)^k \tag{17}$$

E aplicando-a ao termo $(1 - e^{-\xi})$, expandindo em torno de $\xi = 0$, obtemos:

$$1 - e^{-\xi} = \xi - \tfrac{\xi^2}{2} + O(\xi^3) \sim \xi \tag{18}$$

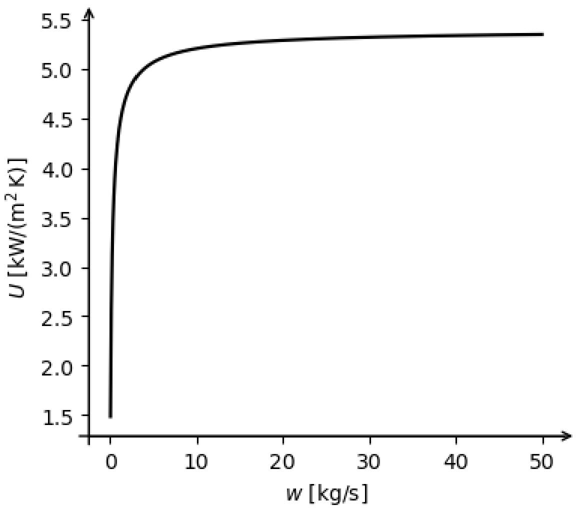
Logo:

$$w \to \infty \implies Q \to wc_p \Delta T \frac{A}{0,185 w c_p} \implies Q = \frac{A}{0,185} \Delta T \tag{19}$$

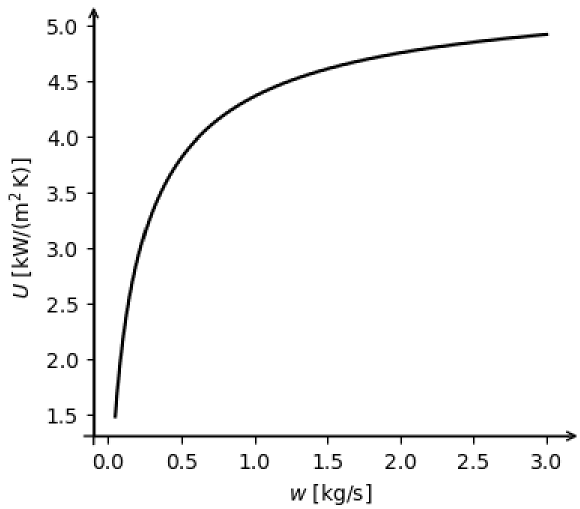
Então, quando a vazão cresce muito, podemos prever que a taxa de transferência de calor, Q, tende ao valor de $\frac{1{,}4}{0{,}185} 20 = 151,4$ kW.

Estudo Paramétrico 1 — influência de w em U, T_s e Q, considerando U variável

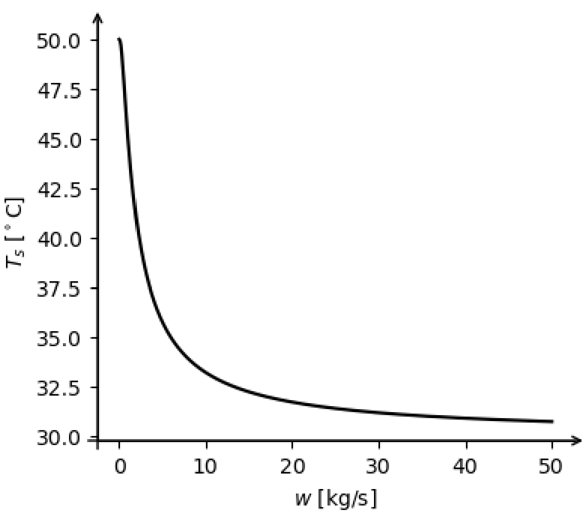
Vamos agora analisar numericamente como U (Eq.8), T_s (Eq.6) e Q (Eq. 7) se comportam em função de w.


5.5
5.0
4.5
4.0
3.5
3.0
2.5
2.0
1.5
U [kW/(m^2 K)]
0
10
20
30
40
50
w [kg/s]

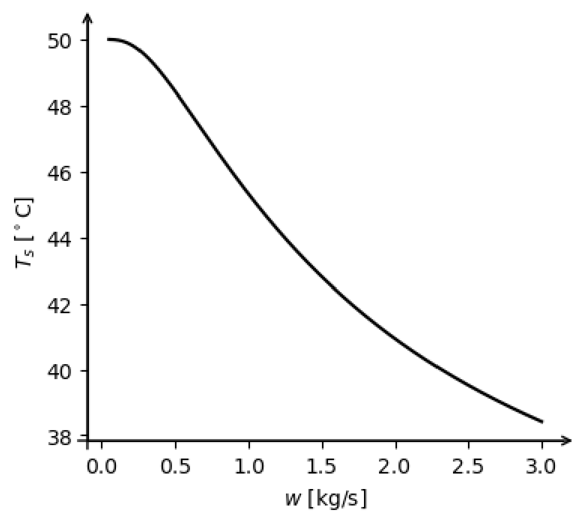
(a$_i$)


5.0
4.5
4.0
3.5
3.0
2.5
2.0
1.5
U [kW/(m^2 K)]
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
3.0
w [kg/s]

(a$_{ii}$)


50.0
47.5
45.0
42.5
40.0
37.5
35.0
32.5
30.0
T_s [$^\circ$C]
0
10
20
30
40
50
w [kg/s]

(b$_i$)


50
48
46
44
42
40
38
T_s [$^\circ$C]
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
3.0
w [kg/s]

(b$_{ii}$)

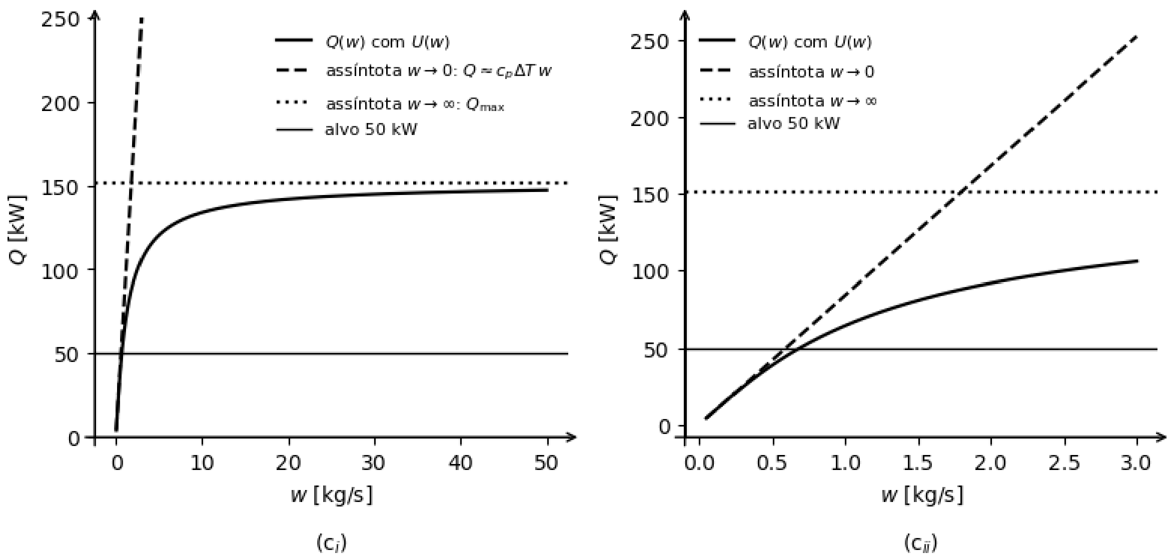


Figura 2. Comportamento de U, T_s e Q em função de w, considerando $U(w)$.

Os gráficos da Fig.2 são apresentados em duas colunas; a da esquerda com w variando em uma faixa maior [0 a 50], para enfatizar a assíntota para valores mais altos de w e também a forma total da curva; e a coluna da direita mostrando apenas a faixa mais próxima da raiz [0 a 3], o que nos permite tanto ver a raiz da equação ($w \approx 0,7$) quanto a assíntota para baixos valores de vazão.

Comportamento de $U(w)$

- Quando $w \to 0$, vimos que o termo em $w^{0,2}$ domina o denominador da Eq.8. Logo, $U(w) \sim \dfrac{1}{0{,}0445}\, w^{0,8}$ (*i.e.*, $U(w)$ cresce com lei de potência).
- Para $w \to \infty$, quem domina o denominador é o termo em w. Então, $U(w) \to \dfrac{1}{0{,}185} \approx 5{,}405\,\mathrm{kW/(m^2\,K)}$ (*i.e.*, $U(w)$ tende a um platô).
  Nas figuras 2(a_i) e 2(a_{ii}), esses dois comportamentos aparecem claramente, primeiro como o crescimento rápido em baixas vazões, e depois com a saturação para altas vazões.

Assíntotas de $Q(w)$ sobrepostas ao gráfico

- Quando $w \to 0$, $Q(w) \approx c_p\,\Delta T\,w$. Com os dados que temos, $c_p\,\Delta T = 4{,}2 \times 20 = 84\,\mathrm{kW/(kg/s)}$.
  A curva de Q coincide com essa reta muito perto de $w = 0$.

- Quando $w \to \infty$, $Q(w) \to Q_{\max}$, com $Q_{\max} = \dfrac{A}{0{,}185}\,\Delta T = \dfrac{1{,}4}{0{,}185} \times 20 \approx 151{,}35\,\mathrm{kW}$. No gráfico, essa é a linha horizontal que a curva de Q se aproxima por baixo.
  Nas figuras 2(b$_i$) e 2(b$_{ii}$), vemos como essas duas assíntotas explicam a curva geral de $Q(w)$, *i.e.*, crescimento quase linear no começo e saturação no fim.

Raiz provável para $Q = 50\,\mathrm{kW}$ em $w \approx 0{,}7$

- Como $50\,\mathrm{kW} \ll Q_{\max} \approx 151{,}35\,\mathrm{kW}$, a solução está bem antes da saturação.

- Visualmente, a interseção $Q(w) = 50$ ocorre em $w \approx 0{,}7\,\mathrm{kg/s}$, coerente com a aproximação linear $w \approx Q/(c_p \Delta T) = 50/84 \approx 0{,}595$ e com a solução numérica que veremos mais abaixo ($w \approx 0{,}693$).

- Interpretação: ainda estamos no regime quase linear ($Q \propto w$), então controlar Q via w é eficiente nesse ponto.

Temperatura de saída $T_s(w)$

- Para w pequeno: ξ grande, $1 - \exp(-\xi) \to 1 \Rightarrow T_s \approx T_v = 50°\mathrm{C}$ (a água quase atinge o vapor).

- Para w grande: ξ pequeno, $1 - \exp(-\xi) \sim \xi \propto 1/w \Rightarrow T_s \to T_e = 30°\mathrm{C}$ (tempo de residência curto).

Leitura de projeto

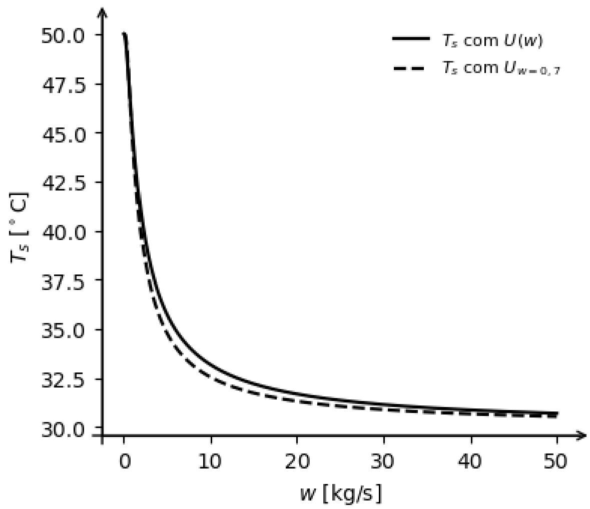
- As assíntotas dão duas informações chaves sem cálculo: inclinação inicial $84\,\mathrm{kW/(kg/s)}$ e capacidade máxima $\approx 151{,}35\,\mathrm{kW}$.

- O ponto de operação desejado ($50\,\mathrm{kW}$) fica muito abaixo do platô, com solução única e boa sensibilidade a w.

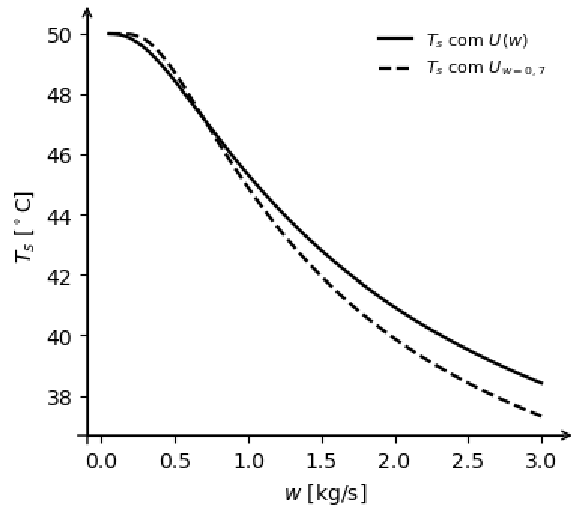
- Se, no futuro, o alvo se aproximar do platô, aumentar w trará ganhos marginais; seria mais efetivo atuar em A ou em ΔT.

Estudo Paramétrico 2 — influência de w em T_s e Q, considerando U constante.

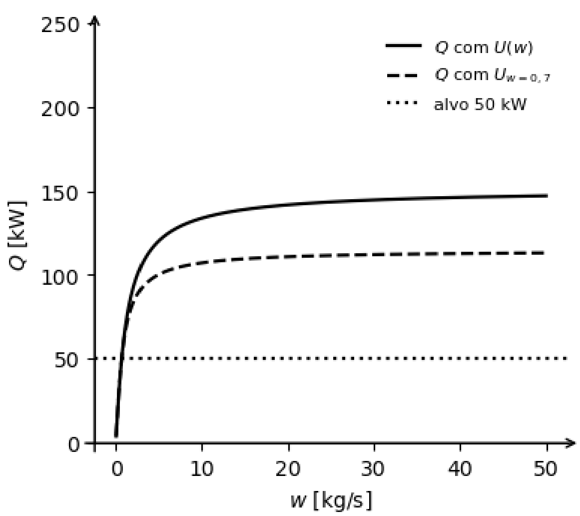
Neste estudo, faremos algo muito parecido com o estudo anterior. No entanto, vamos considerar U constante (avaliado em $w = 0,7$. Nosso objetivo é compreender os efeitos que U variável tem sobre o comportamento do trocador de calor.



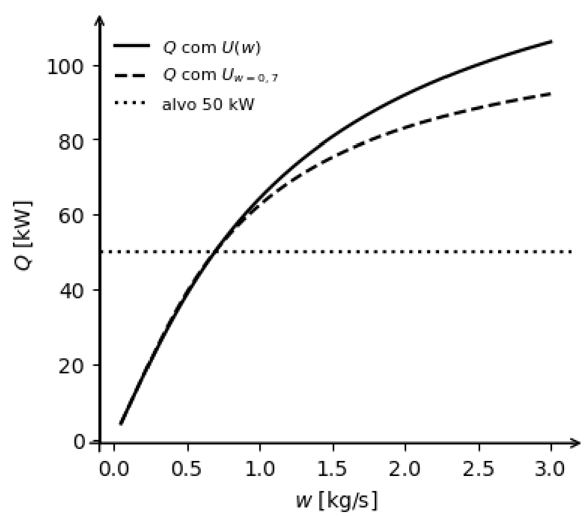
(a_i)



(a_{ii})



(b_i)



(b_{ii})

```
U(0.7) = 4.095096 kW/(m^2·K)
```

Figura 3. Comportamento de T_s e Q em função de w, considerando U constante.

Estudo Paramétrico 2 — comparação $U_{w=0,7}$ (constante) vs. $U(w)$ (variável)

Os resultados seguem o esperado. Com o coeficiente global de transferência de calor fixo em $U_{w=0,7}$, o modelo: - Superestima Q e T_s para $w < 0{,}7$, pois o $U(w)$ real é menor nessa faixa. - Subestima Q e T_s para $w > 0{,}7$, pois o $U(w)$ real cresce em direção ao platô 1/0,185.

Comparando ao modelo com $U(w)$, o erro próximo de $w \approx 0{,}7$ é pequeno. Se considerarmos toda a faixa de operação, o erro em T_s atinge cerca de $\sim 5\%$, enquanto o erro em Q pode chegar a $\sim 30\%$ em vazões altas; evidenciando a importância de usarmos $U(w)$ variavel se quisermos fazer análises globais.

Conclusão prática. Usar U constante é razoável para estudarmos o comportamento do trocador em torno do ponto onde U foi obtido. Já para investigar toda a faixa de vazão (ou operar longe de $w \approx 0{,}7$), o erro pode se tornar significativo; nesse caso, vamos preferir o modelo completo com $U(w)$.

Cálculo do valor de w que satisfaz a condição $Q = 50$ kW.

Agora que já analisamos o comportamento analítico e paramétrico da Equação do Trocador de Calor com Condensação (Eq.9), vamos voltar ao problema inicial, que é determinar o valor de w que satisfaça a condição de $Q = 50$ kW. Observando a Eq.9, percebemos que ela é implícita em w, quer dizer, não conseguimos isolar w de um lado da equação para podermos calcular o seu valor. A alternativa, então, é resolver essa equação por um método numérico.

Vamos escolher aqui o método de Newton-Raphson, por ser de rápida convergência, elegância analítica e simplicidade computacional; características que o tornaram o mais utilizado método para obtenção de raízes de equações.

Método de Newton–Raphson

Primeiro, vamos criar a função $f(w)$ a partir da Eq.9:

$$f(w) = Q - wc_p(T_v - T_e)\left[1 - e^{-\frac{A}{c_p(0{,}0445w^{0{,}2}+0{,}185w)}}\right] \tag{20}$$

Desta forma, o **problema matemático** pode ser enunciado como: encontre o valor de w que leva $f(w)$ a zero.

$$f(w) = 0 \tag{21}$$

Dedução geométrica do método de Newton-Raphson

Vamos supor que estamos procurando a raiz de:

$$y(x) = 0 \tag{22}$$

E digamos que podemos avaliar o valor da função $y(x)$ e sua derivada $y'(x)$ para qualquer valor de x. Uma alternativa seria percorrer todos os valores de x até encontrar o local onde $y(x) = 0$. Esse método é conhecido como **Busca Exaustiva**. O problema com ele é a demora para encontrar a outra solução. Existem outros métodos já vistos nos cursos de *Cálculo Numérico*, como o *Método da Bisseção*.

No método de *Newton-Raphson*, a pessoa começa a procura por um determinado valor inicial x_1 (esse valor em geral é arbitrado conhecendo a física do problema. No ponto x_1, avaliamos $y(x_1)$ e $y'(x_1)$. Nesse momento, fazemos a **aproximação** de que a função $y(x)$ é uma reta (ver a Fig.2), e então encontramos o valor de x_2 que faria com que y_2 fosse zero:

$$y'(x_1) = \left.\frac{dy}{dx}\right)_{x_1} = \frac{y(x_2) - y(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{0 - y(x_1)}{x_2 - x_1} \tag{23}$$

O que implica em:

$$x_2 = x_1 - \frac{y(x_1)}{y'(x_1)} \tag{24}$$

Figura 2. Esquema do método de Newton-Raphson (primeiro passo).

Mas logo percebemos que x_2 não é a raiz de $y(x)$, porque a curva não é uma reta (simplificação que fizemos para chegar à Eq.24) . No entanto, se tivermos escolhido um bom **valor inicial**, estaremos mais próximos da raiz. Fazemos então a mesma coisa no ponto 2, *i.e.*, avaliamos $y(x_2)$ e $y'(x_2)$, traçamos uma reta e rumamos para o ponto 3 (como pode ser visto na Fig 3):

$$x_3 = x_2 - \frac{y(x_2)}{y'(x_2)} \tag{24}$$

Figura 3. Esquema do método de Newton-Raphson (próximos passos).

Generalizando, o **Método de Newton-Raphson** é um processo iterativo que segue a seguinte relação até chegarmos o mais próximo o desejado da raiz:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{y(x_k)}{y'(x_k)} \tag{24}$$

O Método de Newton-Raphson é bastante poderoso. Quando ele converge para a raiz, ele converge rapidamente. Quando ele diverge, há algumas estratégias (*i.e.*, limitar os valores possíveis de x), mas vamos focar na mais simples e usual, que é iniciar com um valor inicial diferente.

Derivada numérica

Vemos na Eq.24 que é necessário calcular o valor da derivada. Isso pode ser feito de duas formas: derivada analítica, quando possível e fácil, ou então a partir de alguma aproximação numérica. A aproximação numérica mais comum é pelo método das diferenças finitas à frente, na qual aproximamos a derivada por diferenças simples:

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{y(x+h) - y(x)}{h} \approx \frac{y(x+h) - y(x)}{h} \tag{25}$$

Derivada analítica

Outra alternativa é calcular a derivada analítica. Para o problema exemplo deste *notebook*, temos que:

Sendo:

$$f(w) = Q - wc_p \Delta T \left[1 - e^{\xi}\right] \tag{26}$$

onde:

$$\xi(w) = -\frac{A}{c_p \left[\, a\, w^{0.2} + b\, w \,\right]} \tag{27}$$

com $a = 0,0445$ e $b = 0,185$; e com:

$$\Delta T = (T_v - T_e) \tag{28}$$

Então:

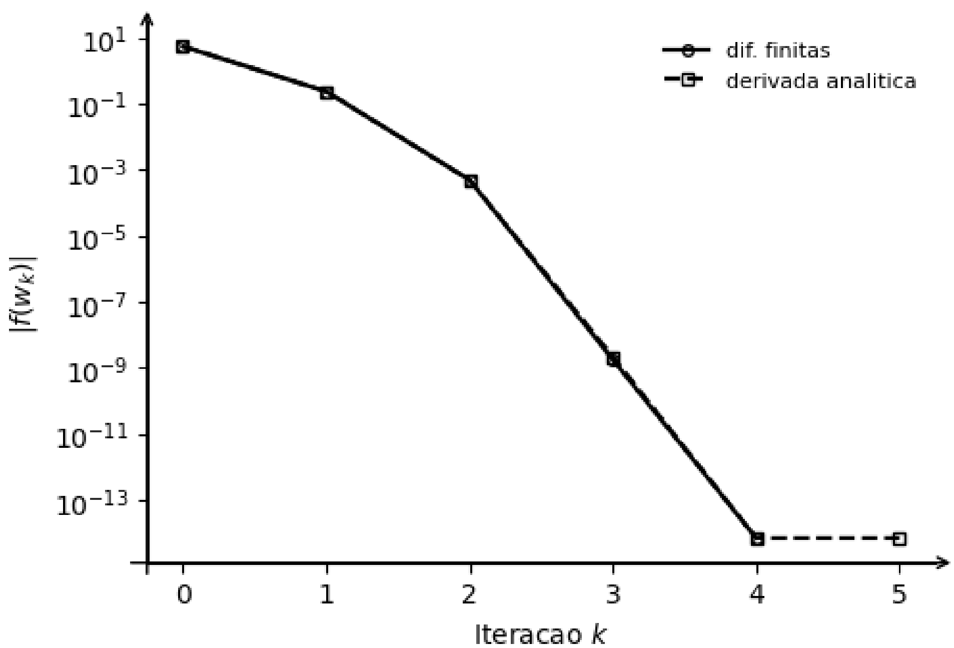
$$f'(w) = -c_p \Delta T \left[1 - e^{\xi} - we^{\xi}\xi'(w)\right]$$

Com:

$$\xi'(w) = \frac{A(0.2aw^{-0.8} + b)}{c_p\left[aw^{0.2} + bw\right]^2}$$

Essa expressão serve como referência para comparar com a versão numérica. Vamos agora encontrar a raiz da Eq.24 por Newton-Raphson, usando a derivada numérica (por diferenças finitas à frente) e a derivada analítica.

```
Newton (dif. finitas): w = 0.691871 kg/s, f(w) = -7.105427e-15 kW
Newton (derivada analitica): w = 0.691871 kg/s, f(w) = -7.105427e-15 kW
f'(w 0.691871): df=-5.368351e+01, analitica=-5.368356e+01, erro_rel=8.153e-07
```



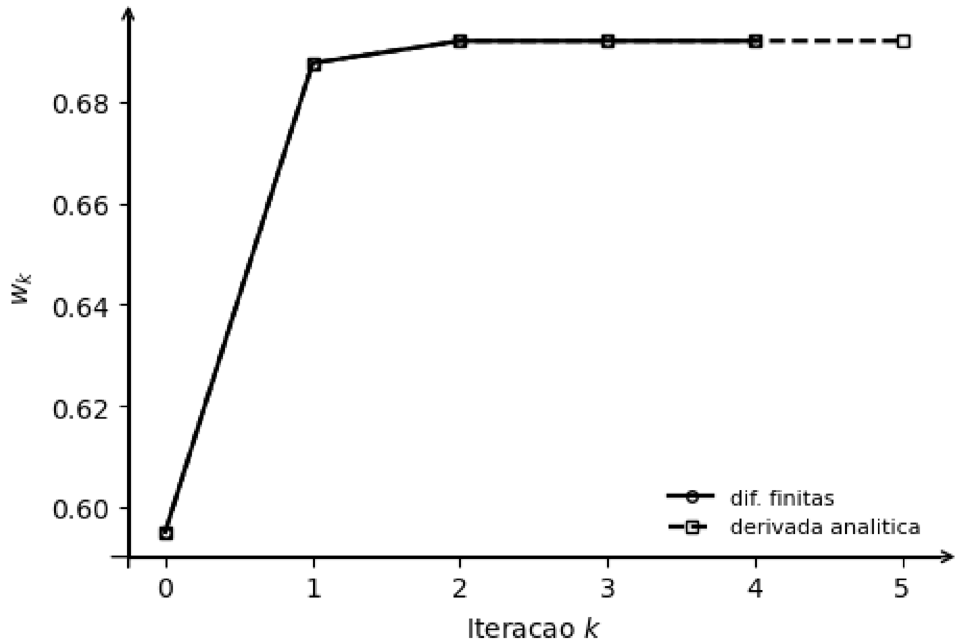


Figura 4. Convergência de $f(w)$ e w para cada iteração de Newton-Raphson.

Discussão dos Aspectos Numéricos

Comportamento de Newton–Raphson neste problema

Com o palpite simples

$$w_0 \approx \frac{Q}{c_p\,\Delta T},$$

as iterações convergiram de forma rápida e estável para a raiz w^*. Observou-se queda acentuada de $|f(w_k)|$ a cada passo e sequência w_k rapidamente estabilizada. A suavidade de

$$f(w) = Q - w\,c_p\,\Delta T\,[1 - \exp(\xi(w))], \qquad \xi(w) = -\frac{A}{c_p\,(a\,w^{0.2} + b\,w)},$$

no domínio visitado favoreceu esse comportamento.

Diferença entre as duas derivadas neste problema

A derivada analítica,

$$f'(w) = -c_p\,\Delta T\,[1 - \exp(\xi) - w\,\exp(\xi)\,\xi'(w)], \qquad \xi'(w) = \frac{A\,(0.2\,a\,w^{-0.8} + b)}{c_p\,[a\,w^{0.2} + b\,w]^2},$$

e a aproximação por diferença finita à frente,

$$f'(w) \approx \frac{f(w+h) - f(w)}{h},$$

levaram ao mesmo w^* e com número de iterações muito parecido. Aqui isso acontece porque f é suave e o passo h foi estável.

Comportamento de Newton–Raphson em geral

Newton–Raphson é muito rápido **quando** há bom palpite, f e f' são regulares perto da raiz e a direção de passo é confiável. Fora dessas condições, pode oscilar, divergir ou sair do domínio, o que pode necessitar de técnicas adicionais mais robustas.

Diferença entre as duas derivadas em geral

A derivada analítica reduz iterações e evita a sensibilidade à escolha de h; vale especialmente quando se busca tolerâncias finas ou quando avaliar f é caro. A diferença finita é universal e simples, mas equilibra erro de truncamento e arredondamento via h e pode reduzir a ordem efetiva de convergência.

> **Resumo final:** quando disponível, use $f'(w)$ analítica; quando não, diferença finita bem escolhida resolve. Primeiro faça funcionar, depois refine.

Discussão Final

Nesta *nota de estudo*, nós revisamos o **Método de Newton-Raphson** usando como exemplo um trocador de calor com condensação coeficiente global de transferência de calor (U) variando com a vazão (w). Seguimos os seguintes passos:

1. Construção do modelo matemático
2. Análise de assíntotas do modelo matemático nos limites de w
3. Análise paramétrica de como várias grandezas (*i.e.*, U, T_s e Q) variam com o aumento da vazão
4. Estudo da influência da variação de U com w em relação a um modelo com U constante
5. Revisão do Método de Newton Raphson
6. Cálculo numérico da derivada que usando a aproximação das diferenças finitas à frente

7. Cálculo analítico da derivada que aparece em Newton-Raphson

8. Análise do resultado obtido por Newton-Raphon

Desta forma, aproveitamos um exemplo real para revisar a construção de um modelo matemático, o estudo de suas assíntotas e do seu comportamento em função dos parâmetros, e finalmente encontramos a solução do problema utilizando um famoso método numérico.

Novos Exercícios Práticos

- Estimar $U(w)$ com correlações empíricas

- Estudar a influência de A, ΔT e c_p no comportamento do trocador de calor.
- Experimente outros valores iniciais de w para estudar a convergência de Newton-Raphson.
- Procure na literatura científica dados experimentais de *U(w)*, ajuste os dados por mínimos quadrados e refaça este estudo.
- Estime a perda de carga no trocador em função de w e estime os custos de bombeamento para cada condição.
- Faça uma propagação de incertezas dos parâmetros para W e para a raiz de *f(W)*.
- Implemente outros métodos e compare com o Newton-Raphson que vimos nesta *nota de estudo*

  - Clássicos (*e.g.*, Bisseção, Busca Exaustiva).

  - Newton-Raphson e variações (*e.g.*, Secante, Newton Amortecido, Newton *Safeguarded*).
  - Alternativos (*e.g.*, Ponto Fixo, *Regula Falsi*, Brent)

- Pesquise outros métodos de obtenção de raizes de funções.