

# Nota de Estudo — Compressão em Dois Estágios com *Intecooler* (Solução de Sistema Não-Linear)

## Nota de Estudo — Compressão em Dois Estágios com *Intecooler* (Solução de Sistema Não-Linear)

**Autor:** Fábio Magnani (fabio.magnani@ufpe.br)

**Curso:** Engenharia Mecânica - UFPE

**Início do desenvolvimento:** 29/09/2025

**Primeira publicação:** 06/10/2025

**Versão Atual:** v-2025-10-06-a (fase de teste técnico no Colab, teste didático-pedagógico com estudantes e início da revisão final de código/texto)

---

### Objetivo

Fazer a modelagem matemática e obter a solução de um processo de compressão em dois estágios com *intercooler*, Prob. 6-15 do Stoecker.

### Referência

- Stoecker, W. F. *Design of Thermal Systems*, chap. 6, 3rd ed., McGraw-Hill, 1989.

## Estrutura

- Introdução
- Modelo matemático
- Solução
- Estudo paramétrico (trabalhos futuros)
- Propriedades termodinâmicas reais (trabalhos futuros)
- Redução do número de equações (trabalhos futuros)
- Conclusão

## Notação

(em construção)

## Parâmetros

(em construção)

## Hipóteses simplificativas

- Regime permanente
- Gás perfeito e líquido incompressível com calor específico constante
- Equação do trocador na forma exponencial modificada

## Revisão

Em geral, temos à disposição três tipos de equação para usar:

- Leis de conservação (*e.g.*,: conservação da massa, conservação da energia)
- Relações entre as propriedades termodinâmicas
- Características dos equipamentos (*e.g.*, eficiência conhecida, alguma propriedade constante)

Figura 1. Compressão de ar em dois estágios com resfriamento intermediário (*intercooler*). (Prob. 6-15 do Stoecker).

## Enunciado do Problema

Um compressor de dois estágios com *intercooler* (Fig.01, Prob 6-15 do Stoecker) comprime ar seco de 100 kPa absolutos para 1200 kPa absolutos. Os seguintes dados valem para os componentes:

- **Taxa de deslocamento volumétrico (vazão teórica)**
  - Estágio baixo:  $0.2 \text{ m}^3/\text{s}$
  - Estágio alto:  $0.05 \text{ m}^3/\text{s}$
- **Eficiência volumétrica** (para cada compressor):  $\eta_v = (\dot{V}_{\text{real}}/\dot{V}_{\text{desl}})$ , onde  $\dot{V}_{\text{real}}$  é a vazão volumétrica medida na sucção e  $\dot{V}_{\text{desl}}$  é a taxa de deslocamento volumétrico (vazão teórica).
- **Para ambos os compressores**, a eficiência é:  $\eta = 1,04 - 0,04 (p_{\text{desc}}/p_{\text{suc}})^{1.4}$ .
- **Expoente politrópico**: O compressor de baixa pressão respeita a equação  $p_1 v_1^n = p_2 v_2^n$ , com  $n = 1.2$
- **Intercooler**: trocador de calor de contra-corrente, recebendo água a  $22^\circ\text{C}$  com vazão de  $0,09 \text{ kg/s}$ ; o coeficiente do trocador de calor é  $UA = 0.3 \text{ kW/K}$ .
- **Hipótese**: o ar comporta-se como gás perfeito com  $c_{p0}$  constante, a água comporta-se como líquido incompressível com  $c$  constante, e o trocador de calor é isobárico.

## Objetivo

Determinar as grandezas do sistema (por exemplo  $w$ ,  $p_i$ ,  $T_2$ ,  $T_3$ ) de acordo com os dados acima.

## Parâmetros

$$\dot{V}_{D,\text{baixa}} = 0,20 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$\dot{V}_{D,\text{alta}} = 0,05 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$n_{\text{baixa}} = 1,2$$

$$UA = 0,3 \text{ kW/K}$$

$$p_1 = 100 \text{ kPa}$$

$$T_1 = 26^\circ\text{C}$$

$$p_4 = 1200 \text{ kPa}$$

$$w_w = 0,09 \text{ kg/s}$$

$$T_{w,e} = 22^\circ\text{C}$$

$$R = 0,286 \text{ kJ/kg} \cdot \text{K}$$

$$c_{p,a} = 1,0 \text{ kJ/kg} \cdot \text{K}$$

$$c_w = 4,22 \text{ kJ/kg} \cdot \text{K}$$

---

## Incógnitas

- $w, \dot{Q}$
  - $v_1, v_2, v_3$
  - $p_i$
  - $T_2, T_3, T_{w,o}$
- 

## Equações

1. (Eficiência vol. comp. baixa)  $w = \frac{V_{D,baixa}}{v_1} \left[ 1,04 - 0,04 \left( \frac{p_i}{p_1} \right)^{1,4} \right]$
  2. (Gás perfeito)  $p_1 v_1 = R T_1$
  3. (Equação do compressor de baixa)  $p_1 v_1^{n_{baixa}} = p_i v_2^{n_{baixa}}$
  4. (Gás perfeito)  $p_i v_2 = R T_2$
  5. (1ª lei, lado quente do trocador, ar)  $\dot{Q} = w c_{p,a} (T_2 - T_3)$
  6. (1ª lei, lado frio do trocador, água)  $\dot{Q} = w_w c_w (T_{w,s} - T_{w,e})$
  7. (Equação do trocador, LMTD)  $(T_2 - T_{w,s}) = (T_3 - T_{w,e}) \exp \left[ \frac{(T_2 - T_{w,s}) - (T_3 - T_{w,e})}{\dot{Q}/UA} \right]$
  8. (Eficiência vol. comp. baixa)  $w = \frac{V_{D,alta}}{v_3} \left[ 1,04 - 0,04 \left( \frac{p_4}{p_i} \right)^{1,4} \right]$
  9. (Gás perfeito)  $p_i v_3 = R T_3$
- 

## Observação

Para eliminar problemas de logaritmo de número negativo e divisão por zero na equação tradicional do trocador, na 7a equação do sistema, trocamos a forma

$$\dot{Q} = UA \frac{(T_{qe} - T_{fs}) - (T_{qs} - T_{fe})}{\ln \left( \frac{(T_{qe} - T_{fs})}{(T_{qs} - T_{fe})} \right)}$$

por

$$(T_{qe} - T_{fs}) = (T_{qs} - T_{fe}) \exp \left[ \frac{(T_{qe} - T_{fs}) - (T_{qs} - T_{fe})}{\dot{Q}/UA} \right]$$

```

status = 1 | `gtol` termination condition is satisfied.
nfev = 205 | ||res||_2 = 1.4862197190246538e-14
x*_box = [1.80770093e-01 1.04685662e+01 8.55569000e-01 2.76571292e-01
 2.33855435e-01 3.87737254e+02 3.74954522e+02 3.17043581e+02
 3.22713365e+02]
res_box = [-5.55111512e-17 0.00000000e+00 -1.42108547e-14 0.00000000e+00
 1.77635684e-15 1.77635684e-15 3.55271368e-15 -2.77555756e-17
 0.00000000e+00]

```

## Discussão dos Resultados

**Condições resolvidas (SI):** - Vazão mássica de ar  $w$  **0,1808 kg/s** - Calor removido no intercooler  $Q$  **10,47 kW** - Pressão intermediária  $p_i$  **388 kPa** - Temperaturas do ar:  $T_2$  **375 K** ( 102 °C),  $T_3$  **317 K** ( 44 °C)  
 - Água:  $T_{w,e}$  = **295,15 K** (22 °C),  $T_{w,s}$  **322,7 K** ( 49,6 °C) - Volumes específicos:  $v_1$  **0,8556 m³/kg**,  $v_2$  **0,2766 m³/kg**,  $v_3$  **0,2339 m³/kg**

**Checks de consistência (todas atendidas a  $\sim 1e-14$ ):** - Estado (gás ideal):  $p_1 v_1 = R T_1$ ,  $p_i v_2 = R T_2$ ,  $p_i v_3 = R T_3$  - Balanço de energia do ar:  $Q = w \cdot c_p (T_2 - T_3) \rightarrow$  **10,47 kW** - Balanço no lado da água:  $Q = w_w c_w (T_{w,s} - T_{w,e}) \rightarrow$  **10,47 kW** - LMTD:  $\Delta T = T_2 - T_{w,s}$  **52,24 K**,  $\Delta T = T_3 - T_{w,e}$  **21,89 K**  
 $\Delta T_{lm} = (\Delta T - \Delta T) / \ln(\Delta T / \Delta T)$  **34,90 K**  
 $UA \cdot \Delta T_{lm} = 0,3 \times 34,90$  **10,47 kW = Q** - Vazões volumétricas (com eficiência volumétrica empírica):

$\_v,1 = 1,04 - 0,04 (p_i/p_1)^{1,4}$  **0,773**  
 $\_v,2 = 1,04 - 0,04 (p_4/p_i)^{1,4}$  **0,845**  
 $w = (Vd\_baixa/v_1) \_v,1 = (Vd\_alta/v_3) \_v,2 \rightarrow$  **0,1808 kg/s** em ambos os estágios

**Interpretação física:** -  $p_i$  acima da média geométrica. A média geométrica  $\sqrt{(p_1 p_4)}$  **346 kPa**. O resultado **388 kPa** desloca a razão para cima porque os deslocamentos são diferentes ( $Vd\_baixa = 0,20$  vs  $Vd\_alta = 0,05$  m³/s). Para compatibilizar as vazões, o modelo eleva  $p_i$  (aumenta a densidade na sucção do 2º estágio), o que reduz  $v_3$  e permite que o compressor de **menor deslocamento** entregue a mesma  $w$ . - **Intercooler efetivo, mas limitado por UA.**

Capacidades térmicas:

lado quente  $C_{hot} = w c_p$  **0,181 kW/K**, lado frio  $C_{cold} = w_w c_w$  **0,380 kW/K**.

Assim,  $C_{min} = C_{hot}$  e  $NTU = UA/C_{min}$  **1,66**,  $C_r = C_{min}/C_{max}$  **0,476**.

**Efetividade** =  $Q / (C_{min} (T_2 - T_{w,e}))$  **0,726**.

Isso explica por que  $T_3$  ( 44 °C) **não** cai até  $T_{w,e}$  (22 °C): o limite é o produto UA. - **Temperaturas e aproximações:**

Aproximação no frio (pinch frio)  $T_3 - T_{w,e}$  **21,9 K**; no quente  $T_2 - T_{w,s}$  **52,2 K**. Estes valores são coerentes com NTU moderado.

**Leituras úteis dos resultados:** - Aumentar **UA** ou **w\_w** (mantendo UA efetivo maior) reduziria  $T_3$  e  $T_{w,s}$ , elevando  $Q$ . - Se os deslocamentos fossem iguais,  $p_i$  tenderia à **média geométrica**; com deslocamentos distintos, o  $p_i$  ótimo se desloca para **balancear vazões**. - As curvas de eficiência volumétrica penalizam razões de compressão elevadas; isso também empurra  $p_i$  para um valor que equalize  $w$  em ambos os estágios.

### Conclusão:

O conjunto está **fechado e fisicamente consistente**: estados ideais satisfeitos, balanços de energia nos dois lados, LMTD igualando  $UA \cdot \Delta T_{lm}$  a  $Q$  e compatibilidade de vazões via deslocamentos e eficiências volumétricas. O intercooler é razoavelmente eficaz ( $\approx 0,73$ ), mas UA limita a aproximação à temperatura de entrada da água.

## Trabalhos Futuros

### 1. Estudo paramétrico

- Variar parâmetros de projeto para compreender sensibilidade e desempenho do sistema:
  - UA (efetividade térmica do intercooler)
  - Vazões volumétricas e razões de deslocamento ( $Vd_{baixa}$ ,  $Vd_{alta}$ )
  - Vazões mássicas de ar e água ( $w$ ,  $w_w$ )
  - Expoente politrópico e pressões intermediárias
- Automatizar a geração de gráficos ( $T_2$ ,  $T_3$ ,  $Q$ ,  $p_i$ ) em função desses parâmetros.

### 2. Propriedades termodinâmicas reais

- Substituir o gás ideal pelo **ar real** via **CoolProp** (funções **PropsSI**).
- Incluir correções de  $cp(T)$ , viscosidade e densidade em função da temperatura.
- Preparar versão compatível com **Google Colab**, incluindo:
  - Instalação automática do CoolProp (`!pip install CoolProp`)
  - Verificação de versão e exemplo de uso rápido (`PropsSI('D','T',300,'P',1e5,'Air')`)

### 3. Redução do número de equações

- Eliminar redundâncias:
  - Usar relações ideais para substituir variáveis intermediárias ( $v = RT/p$ ).
  - Integrar balanço de energia diretamente nas equações principais.
- Reduzir o sistema para **5–6 incógnitas** ( $w$ ,  $Q$ ,  $p_i$ ,  $T_2$ ,  $T_3$ ,  $T_{w,s}$ ) mantendo fechamento físico.
- Reescrever o modelo em forma vetorial compacta, com normalização das grandezas.

---

**Objetivo:** evoluir o modelo didático atual em direção a uma ferramenta paramétrica, realista e leve, pronta para uso interativo no *Colab* e integrada às futuras atividades do *EspiralLab*.