Nota de Estudo — Revisão de Perda de Carga

Nota de Estudo — Revisão de Perda de Carga

Autor: Fábio Magnani (fabio.magnani@ufpe.br)
Curso: Engenharia Mecânica - UFPE
Início do desenvolvimento: 21/08/2025
Primeira publicação: 26/08/2025
Versão Atual: v-2025-08-26-a (fase de teste técnico no Colab, teste didático-pedagógico com estudantes e início da revisão final de código/texto)

Objetivo

Revisar, de forma prática e geral, a partir de exemplos, o cálculo e a análise da perda de carga.

Estrutura

- Da 1ª Lei da Termodinâmica à Equação da Perda de Carga
- Cálculo da Perda de Carga
- Especificação do Problema-Exemplo
- Caso A: pressão desconhecida

- Caso B: vazão desconhecida
- Caso C: diâmetro desconhecido
- Caso D: redução do diâmetro e inclusão de uma nova perda
- Considerações finais

Observação

Para detalhes específicos, particularmente para os coeficientes de perda de carga de acessórios e rugosidades dos dutos, o estudante deve procurar as referências.

Referências

- Fox, McDonald, Pritchard & Mitchell. *Introdução à Mecânica dos Fluidos*, 9ª ed., LTC, 2018.
- Moran, Shapiro, Boettner & Bailey. *Princípios de Termodinâmica para Engenharia*, 8ª ed., LTC, 2018.

Notação

- u: energia interna específica [J/kg]

- h: entalpia específica [J/kg]

- ρ: massa específica [kg/m^3]

- v: volume específico [m^3/kg]

- μ: viscosidade dinâmica [Pa $\cdot$ s]

- h_L: perda de carga (energia mecânica específica dissipada) [J/kg]
- $h_{L,\text{maior}}$: perda de carga maior [J/kg]
- $h_{L,\text{menor}}$: perda de carga menor [J/kg]
- H_L: altura manométrica [m]

- f: fator de atrito (adimensional)
- K: coeficiente de perda localizada (adimensional)
- D: diâmetro [m]
- L: comprimento [m]
- L_e: comprimento equivalente [m]
- ϵ: rugosidade absoluta [m]
- ϵ/D: rugosidade relativa (adimensional)

- α: coeficiente de correção da energia cinética

- $\overline{V}$: velocidade média na seção [m/s]
- Q: vazão [m^3/s]

Observação sobre símbolos e unidades. Em Termodinâmica (TD), Transferência de Calor (TC), Mecânica dos Fluidos (MF) e Mecânica Geral (MG), é comum o mesmo símbolo representar grandezas diferentes. O caso clássico é h: - na TD: entalpia específica h [kJ/kg];
- na MF (pressão na forma de altura manométrica): altura de perda H_L [m];
- na MF (energia específica): perda por atrito h_L [m^2/s^2=J/kg=N $\cdot$ m/kg];
- na TC: coeficiente convectivo h_c [W/($\text{m}^2 \cdot$ K)]; - na MG: altura h [m].

Por isso, é bom definir bem o símbolo e a unidade. Quanto às unidades, a diferença entre essas sub-áreas é, em geral, de escala (tudo continua no SI): - em TD predominam múltiplos: kPa, kJ, kW;
- em MF/TC/MG muitos livros usam as unidades base: Pa, J, W.

Devemos ter cuidado também com os prefixos: 1 kPa = 10^3 Pa, 1 kJ = 10^3 J, 1 kW = 10^3 W. Neste notebook, vamos usar o SI internamente nos cálculos, *i.e.*, m, s, kg, Pa. Mas, nas saídas, podemos imprimir em mm, kPa, kJ, kW ou m^3/h quando for mais conveniente.

Da 1ª Lei da Termodinâmica à Equação da Perda de Carga

A 1ª Lei da Termodinâmica aplicada a um volume de controle genérico, é dada por:

$$\frac{dE_{vc}}{dt} = \sum_{\text{ent}} \dot{m} \left(h + \frac{\overline{V^2}}{2} + gz \right) - \sum_{\text{sai}} \dot{m} \left(h + \frac{\overline{V^2}}{2} + gz \right) + \sum \dot{Q} - \sum \dot{W}_s \tag{1}$$

Sabendo que:

$$h = u + pv \tag{2}$$

$$v = \frac{1}{\rho} \tag{3}$$

chegamos à:

$$\underbrace{\frac{dE_{vc}}{dt}}_{\text{variação da energia no V.C.}} = \underbrace{\left(\sum_{\text{ent}} \dot{m}u - \sum_{\text{sai}} \dot{m}u \right)}_{\substack{\text{variação da energia interna} \\ \text{entre as entradas e as saídas}}} + \underbrace{\sum_{\text{ent}} \dot{m} \left(\frac{p}{\rho} + \frac{\overline{V^2}}{2} + gz \right) - \sum_{\text{sai}} \dot{m} \left(\frac{p}{\rho} + \frac{\overline{V^2}}{2} + gz \right)}_{\substack{\text{variação de energia mecânica} \\ \text{entre as entradas e as saídas}}} + \underbrace{\sum \dot{Q} - \sum}_{\text{calor e trabal}} \tag{4}$$

Figura 1. Tubulação genérica.

Agora, se considerarmos o caso particular de uma tubulação (*i.e.*, apenas uma entrada e uma saída), em regime permanente ($dE_{vc}/dt = 0$), adiabática ($\sum \dot{Q} = 0$), sem transferência de trabalho ($\sum \dot{W}_s = 0$), e introduzirmos a perda de carga,

$$h_L = u_{out} - u_{in} \tag{5}$$

chegamos finalmente à **Equação da Perda de Carga**:

$$\boxed{\left(\frac{p}{\rho} + \alpha\frac{\overline{V}^2}{2} + gz\right)_1 - \left(\frac{p}{\rho} + \alpha\frac{\overline{V}^2}{2} + gz\right)_2 = h_L \quad (\geq 0)} \tag{6}$$

Na qual se vê, claramente, que a perda de carga total (h_L) representa a transformação de energia mecânica em energia interna devido às irreversibilidades.

Observação sobre o coeficiente de correção da energia cinética, α

Se olharmos a Eq. (3) em detalhes, veremos que houve a inclusão do coficiente α. Isso foi feito para levar em conta o fato que a velocidade média ($\overline{V}$ é ligada à vazão) ao quadrado é diferente da velocidade ao quadrado ($\overline{V^2}$ é relativa à energia cinética) média. A definição de α é:

$$\alpha = \frac{\overline{V^2}}{(\overline{V})^2} \tag{7}$$

e seus valores típicos são: - Escoamento laminar: $\alpha = 2$
- Escoamento turbulento: $\alpha = 1$
- Transição: usar correlações específicas

Cálculo da Perda de Carga

Perda de carga total

Comumente, dividimos a perda de carga total em dois grandes grupos: **perdas maiores** (*i.e.*, trechos retos da tubulação) e **perdas menores** (*e.g.*, válvulas, joelhos, entradas). Dividindo cada um desses grupos em subgrupos (*i.e.*, cada um dos trechos retos, cada um dos componentes), podemos escrever a perda de carga total como:

$$h_L = \sum h_{L,\text{maior}} + \sum h_{L,\text{menor}} \tag{8}$$

Perdas maiores

Nos trechos retos, as perdas de carga maiores são calculadas por

$$h_{L,\text{maior}} = f \, \frac{L}{D} \, \frac{\overline{V}^2}{2} \tag{9}$$

O coeficiente de atrito, f, é calculado por:

$$f = \frac{64}{Re} \qquad \text{(escoamento laminar)} \tag{10}$$

$$f = f(Re, \varepsilon/D) \qquad \text{(escoamento turbulento)} \tag{11}$$

A forma mais comum de calcular f para escoamento turbulento é usando a equação de **Colebrook** (coeficiente de atrito de Darcy):

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2\log_{10}\left(\frac{\varepsilon/D}{3.7} + \frac{2.51}{Re\sqrt{f}}\right) \tag{12}$$

Notamos que esta é uma equação implícita em f, o que significa que não podemos isolar f à esquerda. Ou, pensando do ponto de vista prático, temos que determinar f numericamente. Outra forma de se obter o coeficiente de atrito, f, é pelo Diagrama de Moody, um método bastante útil quando se resolve o problema com cálculos manuais.

Número de Reynolds

O Número de Reynolds é definido por:

$$Re = \frac{\rho \overline{V} D}{\mu} \tag{13}$$

Para escoamento interno em tubulações, o número de Reynolds caracteriza o tipo de escoamento:

- Escolamento laminar: $Re \lesssim 2300$
- Escoamento de transição: $2300 < Re < 4000$
- Escoamento Turbulento: $Re \gtrsim 4000$

Perdas menores

As perdas menores podem ser calculadas de duas formas diferentes, dependendo da forma com que são apresentadas nos artigos, manuais e catálogos:

- Por coeficiente de perda de carga, K:

$$h_{L,\text{menor}} = K \frac{\overline{V}^2}{2} \tag{14}$$

- Por comprimento equivalente, L_e:

$$h_{L,\text{menor}} = f \frac{L_e}{D} \frac{\overline{V}^2}{2} \tag{15}$$

Comparando as duas equações acima, percebe-se que há uma relação entre ambas:

$$K = f \frac{L_e}{D} \tag{16}$$

O comprimento equivalente significa que determinado acessório, *e.g.*, uma curva, provoca a mesma perda de carga que um trecho reto de tubulação com comprimento L_e.

Relação entre vazão, velocidade, diâmetro e área

Lembremos da relação entre vazão velocidade, diâmetro e área - pode ser útil nos cálculos:

$$Q = \frac{\overline{V}}{A} \tag{17}$$

$$A = \frac{\pi D^2}{4} \tag{18}$$

Perda de carga como altura manométrica

É comum definir a perda de carga em termos de altura manométrica:

$$H_L = \frac{h_L}{g} \tag{21}$$

Expressa desse jeito, fica mais fácil comparar o efeito da perda de carga com o elevação do fluido a uma certa altura.

O caso particular sem variação de energia cinética e potencial

Quando não há variação de energia cinética e potencial, a equaçao da perda de carga (Eq.6) fica mais simples:

$$\Delta p \approx \rho\, h_L \tag{19}$$

Por isso é comum as pessoas associarem a perda de carga à queda de pressão, não ao caso mais geral que vimos aqui, que é a perda de carga como transformação de energia mecânica em energia interna devido às irreversibilidades.

O caso geral quando há uma turbina ou bomba na linha

Quando há uma turbina ou uma bomba na linha, o balanço de energia também é modificado pelas suas presenças:

$$\left(\frac{p}{\rho} + \alpha\frac{\overline{V}^2}{2} + gz\right)_1 - \left(\frac{p}{\rho} + \alpha\frac{\overline{V}^2}{2} + gz\right)_2 - \frac{\Delta p_{\text{turb}}}{\rho} + \frac{\Delta p_{\text{bomba}}}{\rho} = h_L \tag{20}$$

Problema-Exemplo

O Problema-Exemplo apresentado nesta seção será usado no restante desta nota de estudo, nos Casos A-D, mudando alguns detalhes sucessivamente.

Figura 2. Esquema do Problema-Exemplo. No trecho 1-A há uma válvula gaveta, A-B é um trecho reto, B-C um joelho, e C-2 um novo trecho reto.

A Fig.2 mostra o exemplo de uma tubulação com dois trechos retos, uma válvula gaveta e um joelho em 90 graus. Vamos usar os seguintes dados:

- Fluido: água a 20°C $\quad \rightarrow \rho = 998$ kg/m^3, $\mu = 1{,}002 \times 10^{-3}$ Pa $\cdot$ s
- Tubulação: rugosidade absoluta (aço comercial) $\epsilon = 4{,}5 \times 10^{-5}$ m
- Trechos retos: $A \rightarrow B: \; L_{AB} = 40$ m; $\quad C \rightarrow 2: \; L_{C2} = 8$ m (trecho vertical, logo $\Delta z = +8$ m)

Ohando nas referências, encontramos os seguintes dados para as perdas menores:

- Válvula gaveta (entre 1 e A): método do comprimento equivalente com $(L_e/D)_{\text{gaveta}} = 8$ (aberta)

- Joelho 90° (entre B e C): método do comprimento equivalente com $(L_e/D)_{\text{joelho}} = 60$

Para este problema-exemplo, em que não há variação de energia cinética entre a entrada e a saída, e considerando duas perdas maiores e duas menores, a Equação de Perda de Carga (Eq.6) é:

$$\frac{(p_1 - p_2)}{\rho} - g(z_2 - z_1) = f\,\frac{\left(L_{AB} + L_{C2} + L_{e,gaveta} + L_{e,joelho}\right)}{D}\frac{\overline{V}^2}{2} \tag{21}$$

Em outras palavras, o lado esquerdo da equação diz que, na tubulação, haverá uma transformação de energia de pressão em energia potencial. Já o lado direito (perda de carga), diz que essa transformação, de uma energia mecânica em outra, não será completa.

Nos casos que se seguem, iremos sempre partir da hipótese (mais usual) de que o escoamento é turbulento. Isso significa resolver f por Colebrook e assumir $\alpha = 1$ (o que neste estudo não é necessário, pois não há variação de energia cinética). No entanto, após os cálculos, é necessário avaliar se a hipótese de escoamento turbulento estava correta.

Caso A — cálculo de Δp, com D e Q conhecidos

Objetivo. Determinar Δp entre as seções 1–2 de uma linha de mesmo diâmetro, com D e Q conhecidos, incluindo perdas maiores (dois trechos retos) e perdas menores (uma válvula gaveta e um joelho a 90°).

Dados específicos deste caso:
$>$ $D = 0{,}10$ m
$>$ $Q = 80$ m^3/h

Passos de cálculo:
$>$ Cálculo de Re e V
$>$ Cálculo do coeficiente de atrito f pela equação de Colebrook (método das substituições sucessivas)
$>$ Cálculo das perdas maiores e menores
$>$ Cálculo do Δp

```
Caso A | D = 0.100 m, Q = 80.0 m³/h, Δz = 8.0 m
V = 2.83 m/s   Re = 281813   f = 0.01801   eps/D = 0.00045
Perda gaveta:   h_L_L_e_gaveta = 0.58 m²/s²
Perda joelho:   h_L_L_e_joelho = 4.33 m²/s²
Perda AB:       h_L_L_AB = 28.83 m²/s²
```

```
Perda C2:        h_L_L_C2 = 5.77 m²/s²
Perdas totais:  h_L = 39.5 m²/s²  |  H_L = 4.0282 m
Δp =   (g Δz + h_L) = 1.177 bar  (117720 Pa)
Frações: gaveta=1.5%, joelho=10.9%, AB=73.0%, C2=14.6%
```

Discussão do Caso A

Resultado principal
- $V \simeq 2{,}83$ m/s, $Re \simeq 2{,}82 \times 10^5$ (turbulento), $f \simeq 0{,}0180$,
- $h_L \simeq 39{,}5\ \mathrm{m^2/s^2} \Rightarrow H_L = h_L/g \simeq 4{,}03$ m,
- $\dfrac{\Delta p}{\rho g} \simeq 8 + 4{,}03 = 12{,}03$ m ($\Delta p \approx 1{,}177$ bar)

Com $H_L \simeq 4{,}03$ m e $\Delta z = 8$ m $\Rightarrow$ atrito 33,5% do total (gravidade 66,5%).

Onde se perde energia mecânica
- As parcelas escalam como $h_{L,\bullet} = f\,(L_\bullet/D)\,V^2/2$ (trechos retos) e como $f\,(L_{e\bullet}/D)\,V^2/2$ (acessórios por comprimento equivalente).
- Com $L_{AB}/D = 400$, $L_{C2}/D = 80$, $L_{\mathrm{e,joelho}}/D = 60$, e $L_{\mathrm{e,gaveta}}/D = 8$, obtém-se $AB \sim 73\%$, $C2 \sim 15\%$, joelho $\sim 11\%$, gaveta $\sim 1{,}5\%$.

Comentários
- O termo comum $V^2/2$ revela porque aumentar Q penaliza fortemente o atrito.
- $V \propto Q/D^2$ e $h_L \propto f\,V^2 \Rightarrow$ para D fixo, dobrar Q quase quadruplica h_L (variação de f é lenta).
- A rugosidade relativa ε/D é pequena, logo f cai levemente com o aumento de Re; o “motor” do atrito aqui é V^2 e L/D.
- $V \approx 2{,}8$ m/s é típico/aceitável para água em linhas de processo; acima disso, ruído/erosão começam a ser preocupações.

Caso B — cálculo de Q, com Δp e D conhecidos

Objetivo. Determinar Q entre as seções 1–2 de uma linha de mesmo diâmetro, com D e Δp conhecidos, incluindo perdas maiores (dois trechos retos) e perdas menores (uma válvula gaveta e um joelho a 90°).

Dados específicos deste caso (exemplo):
$>$ $D = 0{,}10$ m
$>$ $\Delta p = \Delta p_{\text{caso A}}$ ($\approx 1{,}177$ bar)

Passos de cálculo:
$>$ Relacionar Δp com Q usando a equação $\Delta p(Q) = \rho\,(g\,\Delta z + h_L(Q))$
$>$ Usar o método da bisseção para determinar o valor de Q que satisfaz a relação acima

```
Caso B | D = 0.100 m, Δp = 1.177 bar  (117700 Pa), Δz = 8.0 m
V = 2.83 m/s   Re = 281736   f = 0.01801   eps/D = 0.00045
Perda gaveta:   h_L_L_e_gaveta = 0.58 m²/s²
Perda joelho:   h_L_L_e_joelho = 4.32 m²/s²
Perda AB:       h_L_L_AB = 28.82 m²/s²
Perda C2:       h_L_L_C2 = 5.76 m²/s²
Perdas totais:  h_L = 39.5 m²/s²  |  H_L = 4.0261 m
Q = 80.0 m³/h
Frações: gaveta=1.5%, joelho=10.9%, AB=73.0%, C2=14.6%
```

Discussão do Caso B

Resultado
Como o alvo de pressão e a geometria são os do Caso A, o algoritmo recupera $Q \approx 80$ $\mathbf{m}^3/\mathbf{h}$ (mesmos V, Re, f, h_L dentro do arredondamento). Isso era o esperado.

Como o código relaciona Δp e Q
- Explicitamos, da Equação da Perda de Carga para o Problema-Exemplo (Eq. 21): $\Delta p(Q) = \rho\,[\,g\,\Delta z + h_L(Q)\,]$.
- Para cada Q: determinamos $V = Q/A$, $Re = \rho V D/\mu$ e f por Colebrook (ou $64/Re$ se laminar) e
$h_L(Q) = f\Big(\sum \frac{L}{D} + \sum \frac{L_e}{D}\Big)\,\frac{V^2}{2}$ (mais os termos por K, se houver).
- A função erro residual $F(Q) = \Delta p(Q) - \Delta p_{\text{alvo}}$ é monotônica crescente (para D fixo), então a bisseção converge. Em outras palavras, quando o método determina o valor para o qual $F(Q) = 0$, significa que $\Delta p(Q) = \Delta p_{\text{alvo}}$. Isto é, determinamos o valor de Q que satisfaz a Eq. 21.

Bisseção — como escolher o intervalo e quando parar - Extremo à esquerda: usar $Q_{\min} > 0$ pequeno (evitar $Q = 0$). - Extremo à direita: usar um valor razoável/exagerado máximo para a velocidade (*e.g.*, $V_{\max} = 10$ m/s, entao usar $Q_{\max} = V_{\max} * A$
- Critério de parada: parar quando $|\Delta p(Q) - \Delta p_{\text{alvo}}| <$ tol ou quando o intervalo $(Q_{\max} - Q_{\min})$ ficar pequeno.

Caso C — cálculo de D, com Δp e Q conhecidos

Objetivo. Determinar D de uma linha de mesmo diâmetro, com Δp e Q conhecidos, incluindo **perdas maiores** (dois trechos retos) e **perdas menores** (uma válvula gaveta e um joelho a 90°).

Dados específicos deste caso (exemplo):
> $Q = 80$ m^3/h
> $\Delta p = \Delta p_{\text{caso A}}$ ($\approx$ 1,177 bar)

Passos de cálculo:
> Da Eq. 21, relacionar $\Delta p(D) = \rho\,(g\,\Delta z + h_L(D))$ com $h_L(D) = f(Re,\ \varepsilon/D)\left(\sum \frac{L}{D} + \sum \frac{L_e}{D}\right)\frac{V(D)^2}{2}$
> Para cada D, calcular A, $V(D) = Q/A$, $Re = \dfrac{\rho V D}{\mu}$ e então f (turbulento por Colebrook; laminar por $64/Re$)
> Resolver $\Delta p(D) = \Delta p_{\text{alvo}}$ por bisseção em D
> Com D encontrado, decompor as perdas (retos e acessórios) e conferir Δp

```
Caso C | Q = 80.0 m³/h, Δp = 1.177 bar  (117700 Pa), Δz = 8.0 m
V = 2.83 m/s   Re = 281783   f = 0.01801   eps/D = 0.00045
Perda gaveta:   h_L_L_e_gaveta = 0.58 m²/s²
Perda joelho:   h_L_L_e_joelho = 4.32 m²/s²
Perda AB:       h_L_L_AB = 28.82 m²/s²
Perda C2:       h_L_L_C2 = 5.76 m²/s²
Perdas totais:  h_L = 39.5 m²/s²  |  H_L = 4.0261 m
D = 0.100 m
Frações: gaveta=1.5%, joelho=10.9%, AB=73.0%, C2=14.6%
```

Discussão do Caso C

Resultado
Como Q e Δp vêm do Caso A, o algoritmo recupera $D \approx 0{,}10$ **m** (afinal, eram os mesmos V, Re, f, h_L). Novamente, era o resultado esperado.

Como o código relaciona Δp e D
- Da equação de perda de carga do Problema-Exemplo: $\Delta p(D) = \rho\,[\,g\,\Delta z + h_L(D)\,]$.
- Para cada D: calcula-se $A = \pi D^2/4$, $V(D) = Q/A$, $Re(D) = \rho V D/\mu$, f por Colebrook (ou $64/Re$ se laminar), e $h_L(D) = f(D)\left(\frac{\sum L + \sum L_e}{D}\right)\frac{V(D)^2}{2}$.
- Define-se o residual $G(D) = \Delta p(D) - \Delta p_{\text{alvo}}$. O método converge quando $G(D)$ tende a 0.

Bisseção — como escolher o intervalo e quando parar
- Extremo à esquerda: usar um $D_{\min}$ pequeno (velocidade alta), o que tende a dar $\Delta p(D_{\min}) \gg \Delta p_{\text{alvo}}$.
- Extremo à direita: usar um $D_{\max}$ grande (velocidade baixa). - Critério de parada: aceitar quando $|\Delta p(D) - \Delta p_{\text{alvo}}| <$ tol (em Pa) ou quando a largura do intervalo ficar pequena.

Caso D — cálculo de Δp com D menor e entrada em borda viva

Objetivo. Reavaliar Δp mantendo a geometria do Caso A, mas agora com **diâmetro menor** e **uma entrada em borda viva**.

Dados específicos deste caso:
$>$ $D = 0{,}08$ m (antes: 0,10 m)
$>$ $Q = 80$ m^3/h
$>$ Entrada em **borda viva**: coeficiente de perda $K_{\text{ent}} = 0{,}5$

Passos de cálculo (iguais ao Caso A, com um termo a mais):
$>$ Cálculo de V e Re
$>$ Cálculo de f (se turbulento, por Colebrook; se laminar, por $64/Re$)
$>$ Perdas maiores: $f\,(L/D)\,V^2/2$
$>$ Perdas menores por L_e: $f\,(L_e/D)\,V^2/2$ (gaveta $8D$, joelho $60D$)
$>$ **Nova perda de entrada:** $K_{\text{ent}}\,V^2/2$
$>$ $\Delta p = \rho\,(g\,\Delta z + h_L)$

```
Caso D | D = 0.080 m, Q = 80.0 m³/h, Δz = 8.0 m
V = 4.42 m/s   Re = 352266   f = 0.01837   eps/D = 0.0005625
Perda entrada (K=0.5): h_L_K_entrada = 4.89 m²/s²
Perda gaveta:   h_L_L_e_gaveta = 1.44 m²/s²
Perda joelho:   h_L_L_e_joelho = 10.77 m²/s²
Perda AB:       h_L_L_AB = 89.76 m²/s²
Perda C2:       h_L_L_C2 = 17.95 m²/s²
Perdas totais:  h_L = 124.8 m²/s²  |  H_L = 12.7264 m
Δp =   (g Δz + h_L) = 2.029 bar  (202850 Pa)
Frações: entrada=3.92%, gaveta=1.15%, joelho=8.63%, AB=71.92%, C2=14.38%
```

Discussão do Caso D

Nesta seção, vamos comparar os resultados do caso D com o caso A. Espera-se que o estudante já esteja familiarizado com os nomes das variáveis, estágio no qual as expressões matemáticas sucintas passam a falar muito mais do que parágrafos de texto.

Dados-base (mesma geometria $L_{AB} = 40\,\text{m}$, $L_{C2} = 8\,\text{m}$, água 20°C):
- Caso A: $D_A = 0{,}10\,\text{m}$, $Q = 80\,\text{m}^3/\text{h}$ (sem entrada);
$V_A = 2{,}83\,\text{m/s}$, $Re_A = 2{,}82 \times 10^5$, $f_A = 0{,}01801$,
$h_{L,A} = 39{,}50\,\text{m}^2/\text{s}^2$, $\Delta p_A = 1{,}177\,\text{bar}$.
- Caso D: $D_D = 0{,}08\,\text{m}$, $Q = 80\,\text{m}^3/\text{h}$, entrada $K = 0{,}5$;
$V_D = 4{,}42\,\text{m/s}$, $Re_D = 3{,}52 \times 10^5$, $f_D = 0{,}01837$,
$h_{L,D} = 124{,}80\,\text{m}^2/\text{s}^2$, $\Delta p_D = 2{,}029\,\text{bar}$.

Razões A → D (redução de diâmetro)

- Área: $A_D/A_A = (0{,}08/0{,}10)^2 = 0{,}64$.
- Velocidade: $V_D/V_A = (D_A/D_D)^2 = 1{,}5625$.
- Reynolds: $Re_D/Re_A = (V_D/V_A)(D_D/D_A) \approx 1{,}25$.
- Rugosidade relativa: $(\varepsilon/D)_D/(\varepsilon/D)_A = D_A/D_D = 1{,}25$.
- Trechos retos: $\left(\sum L/D\right)_D/\left(\sum L/D\right)_A = D_A/D_D = 1{,}25$.
- Acessórios por $L_e = kD$: $\sum L_e/D = \sum k = 68$ (invariável).

Consequência: V^2 cresce $\approx$ 2,44 vezes; $\sum L/D$ dos trechos retos cresce 1,25; f aumenta levemente ($\approx$ 2%).

Perdas e pressão (com e sem a entrada K)

- Só efeito de D (sem entrada, $K = 0$):
  $h_{L,D}^{(K=0)} = 119{,}92\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2 \;\Rightarrow\; h_{L,D}^{(K=0)}/h_{L,A} = 119{,}92/39{,}50 \approx 3{,}04$.
- Com a entrada $K = 0{,}5$ (Caso D completo):
  $h_{L,D}/h_{L,A} = 124{,}80/39{,}50 \approx 3{,}16$ (aumento de $\approx 216\%$ em h_L).
  Pressão: $1{,}177 \to 2{,}029\,\mathrm{bar}$ (aumento de $\approx 72{,}4\%$).
- Apenas a entrada no Caso D:
  $h_{L,\mathrm{ent}} = K\,V_D^2/2 = 4{,}89\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2$.
  Fração: $h_{L,\mathrm{ent}}/h_{L,D} \approx 3{,}92\%$.
  Incremento relativo em h_L (ligar K):
  $(h_{L,D} - h_{L,D}^{(K=0)})/h_{L,D}^{(K=0)} = (124{,}80 - 119{,}92)/119{,}92 \approx 4{,}07\%$.

Resumo: reduzir D para $0{,}08\,\mathrm{m}$ praticamente **triplica** as perdas por atrito; a entrada em borda viva adiciona mais $\sim 4\%$ em h_L dentro do Caso D.

Considerações Finais

Acabamos de revisar e exercitar o essencial: a conexão entre geometria, regime e perdas na equação de energia. Em termos práticos (para o problema-exemplo que estudamos, sem variação de energia cinética), $\Delta p = \rho\,(g\,\Delta z + h_L)$, com h_L construído a partir de f, de $\sum L/D$ e $\sum L_e/D$.

Em relação à sensibilidade, como $V = 4Q/(\pi D^2)$, então $h_L \sim f\left(\sum L/D + \sum L_e/D\right) Q^2/D^4$. Em outras palavras, a perda de carga escala com f^1, com L^1, com V^2, com Q^2 e com D^{-5}.

Atenção, nestes nossos exemplos não havia variação de energia cinética. Quando houver, é preciso adaptar a modelagem, o código e a análise usando a Eq.6 (caso geral).

Estudos propostos

(A) Novos casos — modificando este mesmo notebook

1. **Vazão alta:** $D = 0{,}10$ m, $Q = 100$ m^3/h, mesma geometria. Calcule Δp, H_L, partição de perdas.
2. **Diâmetro reduzido:** $D = 0{,}08$ m, $Q = 60$ m^3/h; adicionar mais 2 joelhos ($+120D$). Calcule Δp.
3. **Entrada em borda viva:** $D = 0{,}10$ m, $Q = 80$ m^3/h, $K_{\text{ent}} = 0{,}5$. Compare com o caso sem entrada.
4. **Rugosidade e temperatura:** Refaça o Caso A para aço novo ($\varepsilon = 1{,}5 \times 10^{-5}$ m) e para água a 50°C (nova μ). Compare f, h_L, Δp.
5. **Rampa descendente:** $D = 0{,}10$ m, $Q = 80$ m^3/h, $\Delta z = -5$ m. Calcule Δp (verifique se o atrito supera a gravidade).
6. **Quase laminar:** $D = 0{,}02$ m, $Q = 0{,}3$ m^3/h (água 20°C). Verifique $Re < 2300$ e use $f = 64/Re$. Calcule Δp.

(B) Novos notebooks completos — estudos mais amplos

1. **Curva do sistema $H_{\mathbf{sist}}(Q)$:** varra Q e plote $H_{\text{sist}} = \Delta z + H_L(Q)$; encontre a interseção com uma curva de bomba fornecida ($H_{\text{bomba}}(Q)$) — em notebook separado.
2. **Diâmetro econômico (CAPEX×OPEX):** para Q fixo e horizonte anual, estime energia $\propto \Delta p\, Q$ vs. custo do tubo (função de D). Encontre D ótimo.
3. **Traçado alternativo:** compare (i) $L_{AB} = 40$ m com 1 joelho; (ii) $L_{AB} = 32$ m com 4 joelhos. Mesmos D e Q. Discuta trade-offs.
4. **Linhas em paralelo:** dois ramais com $D_1 \neq D_2$ e comprimentos distintos. Para Δp comum, calcule o Q de cada ramal e o Q total.
5. **Rugosidade e temperatura (ampliado):** faça um "mapa" $f(Re, \varepsilon/D)$ variando $\mu(T)$ e ε; aplique ao Caso A.
6. **Variação de diâmetro entre as seções:** refaça com $D_1 \neq D_2$ ($1 \rightarrow 2$). Inclua no balanço o termo cinético $\alpha_2 \frac{V_2^2}{2} - \alpha_1 \frac{V_1^2}{2}$; para cada seção, calcule Re e adote α coerente (laminar $\alpha \approx 2$, turbulento $\alpha \approx 1$). Considere ainda K_c, K_e se houver contração/expansão. Avalie impacto em h_L, Δp e na partição de perdas.