RELATO DE EXPERIÊNCIA: ESTUDO DO CONDICIONAMENTO DE UMA MATRIZ

Allan de Sousa Soares – IFBA

INTRODUÇÃO

O objetivo do artigo é apresentar uma atividade desenvolvida visando o entendimento do número de condicionamento, uma medida associada à matriz de um sistema linear que pode nos auxiliar no estudo da magnitude de erros acarretados na solução por pequenas aproximações nos valores do mesmo. A experiência apresentada a seguir foi desenvolvida durante a disciplina Cálculo Numérico.

PENSADO A ATIVIDADE

Certa vez resolvi um probleminha simples que costuma ser modelado por meio de um sistema linear. O problema é o seguinte:

"Em um estacionamento há carros e motos. Sabe-se que há 40 veículos estacionados. Ao contar as rodas nota-se que perfazem um total de 140. Descubra as quantidades de cada veículo."

A resolução de tal problema é facilmente encontrada, resolvendo um simples sistema linear 2×2. De fato, se consideramos x como sendo o número de carros e y como sendo o número de motos podemos estabelecer as seguintes relações lineares:

$$\begin{cases} x + y = 40 \\ 4x + 2y = 140 \end{cases}$$

Quanto à primeira linha não há muito o que explicar. A segunda linha usa do fato de cada carro possuir exatamente 4 rodas e cada moto exatamente 2 rodas. A solução deste sistema nos leva a um total de 30 carros e 10 motos.

Então pensei em bolar um problema semelhante usando moedas de 5 e 10 centavos para tentar obter o peso de cada uma indiretamente usando a ideia do problema anterior. Foi então que me lembrei de duas balanças que tenho em casa, uma de precisão 0.1 g (B1) e uma de precisão1 g (B2). Antes pesquisei sobre o peso médio das moedas que seriam utilizadas. A seguinte tabela, no endereço eletrônico *https://www.bcb.gov.br/dinheiro-brasileiro/segunda-familia-moedas.html,* apresenta os pesos médios de moedas do tipo que usaremos.

Valor facial (R$)	Diâmetro (mm)	Peso (g)	Espessura (mm)	Borda	Material
0,01	17,00	2,43	1,65	Liso	Aço revestido de cobre
0,05	22,0	4,10	1,65	Liso	Aço revestido de cobre
0,10	20,0	4,80	2,23	Serrilhado	Aço revestido de bronze
0,25	25,0	7,55	2,25	Serrilhado	Aço revestido de bronze
0,50 (1998 a 2001)	23,0	9,25	2,85	legenda "Ordem e Progresso Brasil"	Cuproníquel
0,50 (2002 a 2001)	23,0	7,81	2,85	legenda "Ordem e Progresso Brasil"	Aço inoxidável
1,00	27,0	7,84	1,95	Serrilha intermitente	Cuproníequel (núcleo) e Alpaca (anel)
1,00	27,0	7,00	1,95	Serrilha intermitente	Aço inoxidável (núcleo) e aço revestido de bronze (anel)

Figura 1: Segunda família de moedas brasileiras

Em seguida, fui até um porquinho conseguir algumas moedas. Usando a balança de precisão 0.1 g obtive dez moedas de 5 centavos, todas pesando 4.1 g (nem todas as moedas de 5 centavos tinham esse peso, faz parte do mundo real) e outras dez moedas de 10 centavos, todas com peso 4.8 g. Os pesos tinham que ser aproximadamente iguais para que a mágica funcionasse – embora leves divergências pudessem enriquecer mais o estudo.

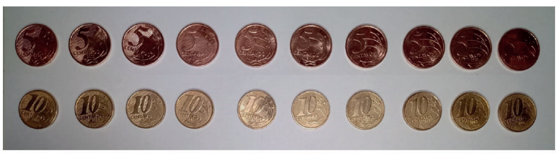

Figura 2: Moedas selecionadas

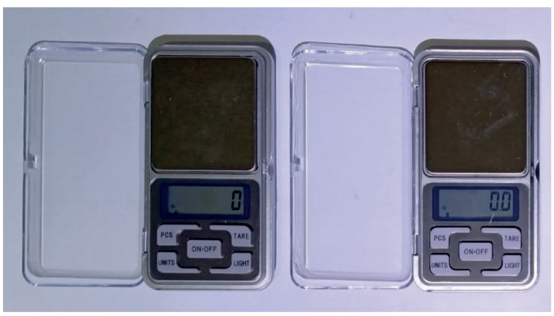

Figura 3: Balanças utilizadas

EM SALA

Em sala diante da turma mencionei o probleminha anterior, envolvendo carros e motos. Em seguida repeti as pesagens que já havia feito em casa. Estava um pouco ansioso, no mundo real as coisas nem sempre funcionam do mesmo jeito, sobre as mesmas condições (ou quase as mesmas). Pesei cada uma das moedas de 5 e 10 centavos para que todos pudessem ver. Então propus a eles dois sistemas S_1 e S_2 com o intuito de obtermos o peso das moedas:

$$S_1 = \begin{cases} 2x+6y=? \\ 7x+2y=? \end{cases} \text{ e } S_2 = \begin{cases} 9x+10y=? \\ 8x+9y=? \end{cases}$$

Sendo x a variável representando o peso da moeda de 5 centavos e y o da moeda de 10 centavos.

Entendida a atividade, procedemos para a próxima etapa, as pesagens.

Usando a balança com precisão de 0.1 g obtive os seguintes sistemas:

$$S_{1,B_1} = \begin{cases} 2x+6y=37.0 \\ 7x+2y=38.3 \end{cases} \text{ e } S_{2,B_1} = \begin{cases} 9x+10y=84.9 \\ 8x+9y=76.0 \end{cases}$$

E usando a balança com precisão de 1 g:

$$S_{1,B_2} = \begin{cases} 2x+6y=37 \\ 7x+2y=38 \end{cases} \text{ e } S_{2,B_2} = \begin{cases} 9x+10y=85 \\ 8x+9y=76 \end{cases}$$

A solução do sistema S_1 considerando os dados obtidos a partir de B_1 e B_2 foram:

$$s_{1,B_1} = (4.1, 4.8)^T \text{ e } s_{1,B_2} = (4.052631579, 4.815789474)^T$$

Notou-se algo esperado por todos, respostas próximas, dado o pequeno erro de aproximação (0.3 em 38), pelo menos, na opinião deles. Ninguém surpreso!

Contudo, a resolução do sistema S_2 considerando as duas pesagens causou certa estranheza.

$$s_{2,B_1} = (4.1, 4.8)^T \text{ e } s_{2,B_2} = (5,4)^T$$

Apesar do S_{2,B_2} ter sofrido um erro de aproximação menor (apenas 0.1 em 84.9) em relação a S_{2,B_1}, a divergência entre os valores das soluções mostrou-se significativa a ponto de apresentar uma solução na qual a relação de peso entre as moedas se inverteu. Para piorar, ao testar $(5,4)^T$ no sistema original, o resíduo é

$$\bar{r} = b - A_2 \cdot s_{2,B_2} = \begin{bmatrix} 84.9 \\ 76.0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 9 & 10 \\ 8 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.1 \\ 0 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

em que estamos indicando a matriz de coeficientes do segundo sistema como A_2. A plateia mal conseguia acreditar. Muitos refizeram as contas, outros solicitaram novas pesagens etc. *David Copperfield passava por isso todos os dias!*

EXPLICANDO ALGUNS PORQUÊS

Então, o que de fato ocorreu? Como explicar? Como pode uma diferença na aproximação tão “pequena” resultar em algo em uma solução tão discrepante? E, pior, no primeiro caso não ocorreu tal discrepância!

Algumas hipóteses foram levantadas pelos alunos. Uma delas foi a de que o peso das moedas tinha sido aproximado pela balança de 0.1 g, enquanto no site (mostrado no início do texto) os valores tinham duas casas após a vírgula.

Pedi então que gerassem os mesmos sistemas anteriores com os dados da tabela, realizando aproximações pertinentes, simulando uma balança de precisão menor para gerar o segundo sistema. Tudo se repetiu. Solicitei ainda que gerassem, a partir dos valores tabelados, novos sistemas, mudando a matriz dos coeficientes, com os dados da tabela até que se convencessem que o problema não estaria nos pesos das moedas, ou no processo de pesagem, mas havia algo de estranho relacionado aos coeficientes do sistema. Alguns alunos acharam soluções até mais discrepantes, como, por exemplo

$$S_{3,B_1^*} = \begin{cases} 10x+99y=516.2 \\ 1x+10y=52.1 \end{cases} \text{ e}$$

$$S_{3,B_2^*} = \begin{cases} 10x+99y=516 \\ 1x+10y=52 \end{cases}$$

Cujas soluções são, respectivamente,

$$s_{3,B_1}=(4.1,4.8)^T \text{ e } s_{3,B_2}=(12,4)^T$$

O '*' indica que foram simulados valores sem que ocorressem pesagens.

Na verdade, não há qualquer problema com as pesagens ou com o método de solução dos sistemas utilizados. A repetição deste experimento, certamente, na maioria dos casos acarretará resultados semelhantes se mantidas certas condições como as quantidades de moedas em cada pesagem – neste caso, tomam-se novas moedas mas mantém-se as relações dos coeficientes do sistema, por exemplo. A particularidade está exatamente na escolha dos coeficientes do sistema. Tal escolha pode fazer com que pequenas divergências como erros de medição, baixa precisão do instrumento de medida, bem como erro de calibração, aproximações indevidas, erros computacionais etc. produzam resultados tão divergentes. Ressaltamos que as balanças utilizadas estavam calibradas e quase sempre, entre algumas pesagens, confrontadas com um peso padrão de 20 g dividido em dois pesos de 10 g cada – são pesinhos que vieram junto com uma das balanças.

Percebeu-se que, mesmo tomando todos os cuidados com as medições e a resolução dos sistemas podemos ainda assim obter resultados que não condizem com os valores esperados. Isso se deve ao que chamamos de mau condicionamento de um sistema linear. Em resumo, o condicionamento de um sistema (na verdade de sua matriz dos coeficientes) é uma espécie de medida de propagação de erros. Por meio deste podemos estudar o impacto que alterações nos valores do sistema, mesmo que pequenas, podem acarretar em sua solução final. Vejamos um exemplo mais acentuado.

Considere o sistema

$$\begin{cases} x+1.001y=2.001 \\ 0.999x+y=1.999 \end{cases}$$

Este sistema tem solução exata $x=(1,1)^T$. De fato, $1+1.001\cdot 1=2.001$ e $0.999\cdot 1+1=1.999$. Estudaremos a seguir duas "perturbações" deste sistema, uma na matriz *A* (matriz dos coeficientes) e outra na matriz *b* (matriz dos termos independentes). Pois bem:

Consideremos o sistema a seguir com um dos coeficientes "levemente" modificado (veja o grifo):

$$\begin{cases} x+1.001y=2.001 \\ 0.99\underline{8}x+y=1.999 \end{cases}$$

Note que a solução exata do sistema perturbado é dada por $s=\ (0.000998004,1.998003992)^T$. Sem o conhecimento da solução $(1,1)^T$ do sistema original certamente seríamos tentados a calcular o resíduo $\bar{r}$ para verificarmos se $\bar{s}=\ (0.000998004,1.998003992)^T$ seria uma boa aproximação da solução exata *s* no sistema original. Pois bem, façamos as contas:

$$\bar{r}=b-A\bar{s}=$$

$$=\begin{bmatrix}2.001\\1.999\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & 1.001\\0.999 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0.000998004\\1.998003992\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}0\\-0.000000998\end{bmatrix}\approx\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

Notou o tamanho do problema? Poderíamos ter aceitado a "solução" $(0.000998004,1.998003992)^T$ no lugar de $(1,1)^T$!!! Embora a coisa pareça bem séria, acredite, pode ser algo de proporções dignas de filmes de ficção científica (recomendo o filme *Efeito Borboleta*). Pois bem, vejamos mais um exemplo.

Agora, consideremos o sistema a seguir com matriz *b* "levemente" modificada:

$$\begin{cases} x+1.001y=2.00\underline{0} \\ 0.999x+y=1.999 \end{cases}$$

Novamente, para nosso espanto, a solução exata deste sistema é dada por $s=(-999,1000)^T$ (acredite!). Analogamente ao caso anterior, calculemos o resíduo em relação à "aproximação" $\bar{s}=(-999,1000)^T$.

Pois bem:

$$\bar{r} = b - A\bar{s} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2.001 \\ 1.999 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1.001 \\ 0.999 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -999 \\ 1000 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0.001000000 \\ 0.000000000 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Onde queremos chegar com o exemplo acima? Imagine que seu instrumento de medida deveria registrar 2.001, mas registrou 2.000. Então, de algo "tão pequeno" assim, surgiu uma solução altamente divergente em relação ao sistema correto. Eu não colocaria a culpa no instrumento de medida, pelo menos não em um erro aparentemente pequeno e, certamente, corriqueiro. Até porque, como vimos, no primeiro sistema, mesmo com balanças de precisões diferentes tivemos respostas não muito divergentes entre si.

Agora, já cientes do problema que pequenas perturbações podem acarretar nas soluções de certos sistemas, podemos observar que, nos exemplos considerados, a matriz de coeficientes fica "próxima" de uma matriz singular. No caso em que ela é de fato singular sabemos que o sistema é impossível ou indeterminado. Assim, não é tão surpreendente que ocorram problemas para a obtenção das soluções quando estamos próximos, em algum sentido, da situação singular. Para formalizar e tonar precisa essa ideia introduz-se o conceito de condicionamento de uma matriz.

Definição 1. Seja A uma matriz quadrada de ordem n. Definiremos a norma de A, isto é, $||A||$, como sendo

$$\|A\| = \max\left\{ \sum_{j=1}^{n} | a_{ij} |; i = 1, \ldots, n \right\}$$

Agora, finalmente, a definição de número condicional de uma matriz A:

Definição 2. Seja $A_{n\times n}$ uma matriz tal que $\det(A) \neq 0$. Definimos o número condicional de A como sendo

$$Cond(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$$

Ocorre que um alto valor de condicional, em geral, indica que pequenas perturbações ocorridas nos coeficientes de um sistema podem acarretar em grandes divergências entre a resposta do sistema original e o sistema perturbado, embora o resíduo possa parecer pequeno. Uma cota inferior para *Cond(A)* é dada por 1. Condicionais próximas de 1 indicam um bom condicionamento, isto é, perturbações em seus coeficientes acarretarão em perturbações de igual ordem em sua resposta final.

Voltemos aos sistemas do início do nosso estudo. Note que suas matrizes dos coeficientes são dadas por:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 7 & 2 \end{bmatrix} \text{ e } A_2 = \begin{bmatrix} 9 & 10 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Além disso, suas inversas são dadas, respectivamente, por:

$$A_1^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{19} & -\frac{3}{19} \\ \frac{7}{38} & -\frac{1}{19} \end{bmatrix} \text{ e } A_2^{-1} = \begin{bmatrix} 9 & -10 \\ -8 & 9 \end{bmatrix}$$

Continuando, temos

$$Cond(A_1) = \|A_1\| \cdot \|A_1^{-1}\| = 9 \cdot \frac{9}{38} = 2.131578947$$

e

$$Cond(A_2) = \|A_2\| \cdot \|A_2^{-1}\| = 19 \cdot 19 = 361$$

Note que o condicional da matriz A_2 é significativamente maior que o da matriz A_1. Sendo assim, espera-se, de modo geral, que, haja divergências maiores, como de fato ocorreu, no segundo grupo de pesagens.

No caso do último sistema apresentado, temos:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1.001 \\ 0.999 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } A^{-1}=\begin{bmatrix} 1000000 & -1001000 \\ -999000 & 1000000 \end{bmatrix}$$

onde segue:

$$Cond(A)=\|A\|\cdot\|A^{-1}\|=2.001\cdot 2001000=4004001$$

que é muito maior que 1. Isso explica tudo!

O resultado a seguir estabelece cotas superiores e inferiores para o erro relativo ao resolvermos um sistema baseado em seu número condicional.

Teorema 3. Se $r=b-\bar{b}$ e $e=\bar{x}-\tilde{x}$, então

$$\frac{1}{Cond(A)}\cdot\frac{\|r\|}{\|b\|}\leq\frac{\|e\|}{\|x\|}\leq Cond(A)\cdot\frac{\|r\|}{\|b\|}$$

em que se considera um sistema da forma $Ax=b$.

Para mais informações sobre número condicional consulte ([1]; p. 523-531).

CONCLUSÃO

Após a atividade notou-se um aumento na percepção dos alunos quanto aos cuidados ao se utilizar um determinado método em situações de naturezas diferentes. Na situação dada inicialmente envolvendo carros e motos tínhamos coeficientes inteiros e soluções inteiras o que certamente nos livrou de respostas estranhas. Contudo, ao aplicarmos o mesmo método a uma situação envolvendo variáveis que assumem valores contínuos, de modo geral aproximados, as coisas podem mudar.

Ao final da atividade, quando confrontados com os valores médios, dados no início deste artigo, observaram que não se pode utilizar um método a todas as situações. Pelo menos não até conhecê-lo bem e entender suas hipóteses de uso. Foi observado que, mesmo coletando os dados de forma cuidadosa e fazendo os cálculos com bastante atenção, respostas contra-intuitivas foram obtidas.

Algo que parece ter motivado bastante os alunos foi o fato de ser um experimento com objetos reais. Nada de dados advindos da cabeça do professor ou de um livro em que tudo parece funcionar bem.

Uma expansão desta atividade consiste em usar balanças com precisões maiores como por exemplo, 0.01 g e 0.001 g. Neste último caso, as coisas ficam interessantes pois as moedas começam a apresentar divergências nos valores de seus pesos. Até mesmo com 0.01 g o valores obtidos não correspondem ao valor dado pelo site apresentado. O que consta no site é o valor médio do peso das moedas. Neste caso, talvez seja necessário recorrer também a conceitos da estatística.

SOBRE O AUTOR

Sou Allan de Sousa Soares, graduado em Licenciatura em Matemática pela Universidade Estadual Sudoeste da Bahia – UESB, Mestre em Matemática pela Universidade Federal de Minas Gerais – UFMG e também Mestre pelo Profmat-UESB. Sou professor do Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia da Bahia – IFBA. Atualmente busco usar a matemática para explorar o mundo real com experimentos, medições de grandezas físicas – não faltam equipamentos de medição aqui em casa rsrs – além de ser um entusiasta da programação em linguagem Python, entre outras coisas divertidas...

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] BURDEN, R. L., FAIRES, J. D. Análise Numérica. 10ª ed., São Paulo: Cengage Learning, 2015.

[2] POLYA, G. A. Arte de Resolver Problemas. Rio de Janeiro Interciência, 2006.

[3] SCHOENFELD, A. H. Heurísticas da sala de aula. In: KRULIK, S.; REYS, R. E. A Resolução de Problemas na matemática escolar. São Paulo: Atual, 1997.

[4] VEIGA, I. P. A. (Org.). Técnicas de ensino: por que não? Campinas-SP: Papirus Editora, 2007a.