REIHEN: Summiert man die Glieder einer Zahlenfolge, so erhält man eine Reihe.

Gegeben sei eine Folge (a_n)

1. (a_n) ist endlich: $\sum_{i=1}^{n} a_i$ heißt endliche Reihe.
2. (a_n) ist unendlich: $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ " unendliche Reihe.

Die Summe $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$ heißt die n-te Partialsumme der Folge.

ARITHMETISCHE REIHEN

Eine Reihe, die aus den ersten n Gliedern einer arithmetischen Folge gebildet wird, heißt eine (endliche) arithmetische Reihe.

Für die arithmetische Reihe gilt:

$$
\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d + \ldots + a_1 + (n-2)d + a_1 + (n-1)d = \\
+ \; & \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + (n-1)d + a_1 + (n-2)d + \ldots + a_1 + d + a_1 \\
\hline
& 2\sum_{i=1}^{n} a_i = \underbrace{2a_1 + (n-1)d + 2a_1 + (n-1)d + \ldots + 2a_1 + (n-1)d}_{n \text{ Summanden } [2a_1 + (n-1)d]}
\end{aligned}
$$

$$2 \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i = n \cdot [2a_1 + (n-1)d] \rightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$$

$$\rightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{n}{2}[a_1 + a_1 + (n-1)d] = \frac{n}{2}[a_1 + a_n]$$

Für die arithmetische Reihe gilt:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1) \cdot d] = \frac{n}{2}[a_1 + a_n]}$$

Beispiel: Bestimme die Summe einer arithmetischen Reihe mit 100 Gliedern; $a_1 = -15$ und $d = 3$.

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{n}{2}\left[2a_1 + (n-1)\cdot d\right] = \frac{100}{2}\left[2\cdot(-15) + (100-1)\cdot 3\right] = 13350$$

$n = 100$
$d = 3$
$a_1 = -15$

GEOMETRISCHE REIHEN

Eine Reihe, deren Gliedern eine geometrische Folge bilden, nennt man geometrische Reihe.

Für die geometrische Reihe gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_1\cdot q + a_1\cdot q^2 + \dots + a_1\cdot q^{n-2} + a_1\cdot q^{n-1}$$

$$-\quad q\cdot\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1\cdot q + a_1 q^2 + a_1\cdot q^3 + \dots + a_1\cdot q^{n-1} + a_1\cdot q^n$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i - q\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 - a_1\cdot q^n \rightarrow (1-q)\cdot\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1(1-q^n)$$

$$\rightarrow \boxed{\sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}} \quad \text{für } q \neq 1$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_1\cdot q + a_1\cdot q^2 + \dots + a_1 q^{n-1} = n\cdot a_1} \quad \text{für } q = 1$$

Beispiel: Bestimme die Summe einer geometrischen Reihe mit 100 Gliedern $a_1 = \frac{2}{3}$ $q = 1{,}2$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1-1{,}2^{100}}{1-1{,}2} = 276.059.911{,}733$$

Aufgabe: Ein Betrieb erhält den Auftrag, 14000 Nähmaschinen herzustellen. In der ersten Woche (5 Arbeitstage/Woche) können täglich 45 Stück produziert werden. Diese Stückzahl soll in den folgenden Wochen um 50 Einheiten je Woche erhöht werden.

- Nach wie vielen Wochen ist der Auftrag erfüllt?
- Wieviel Stück werden in der letzten Woche hergestellt?

Aufgabe. In einer Legende wird erzählt, dass der Erfinder des Schachspiels sich folgendes Ehrengeschenk ausbat: Für das erste der 64 Schachfelder ein Reiskorn, für das zweite zwei, für das dritte vier, usw. bis zum 64. Spielfeld.

- Wieviele Reiskörner hat sich der Erfinder ausgebeten?
- Wieviele Tonnen Reis hätte er bekommen müssen, wenn 50 Reiskörner = 1gr wiegen.

GRENZWERTE von FOLGEN

Bei unendlichen Zahlenfolgen (a_n) interessiert man sich für ihr Verhalten wenn „n" sehr groß wird.

Eine Zahl „g" heißt Grenzwert einer unendlichen Zahlenfolge (a_n), wenn fast alle Glieder der Folge in jeder (noch so kleinen) Umgebung von „g" liegen und außerhalb nur endlich viele.

Eine Folge, die einen Grenzwert besitzt, heißt „konvergent"

Man schreibt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$

Beispiele: • $a_n = 3+\frac{2}{n} \to \lim\limits_{n\to\infty}\left[3+\frac{2}{n}\right] = 3$

• $a_n = \frac{3+n+n^2}{n^2} \to \lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{3+n+n^2}{n^2}\right] = \lim\left[\frac{3}{n^2}+\frac{1}{n}+1\right] = 1$

• $a_n = \frac{n^2}{n+1} \to \lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{n^2}{n+1}\right] = \lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{n}{\frac{n}{n}+\frac{1}{n}}\right] = \lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{n}{1+0}\right] = \infty$

• $a_n = (-1)^n \to (a_n) = -1, 1, -1, 1, \dots$

Hier existiert kein Grenzwert!

Häufungspunkt ($\neq$ Grenzwert)

Eine Zahl „h" heißt Häufungspunkt einer unendlichen Zahlenfolge (a_n), wenn unendliche viele Glieder der Folge in jeder (noch so kleinen) Umgebung von „h" liegen.

Ein Grenzwert ist auch ein Häufungspunkt.

Ein Häufungspunkt muss nicht ein Grenzwert sein.

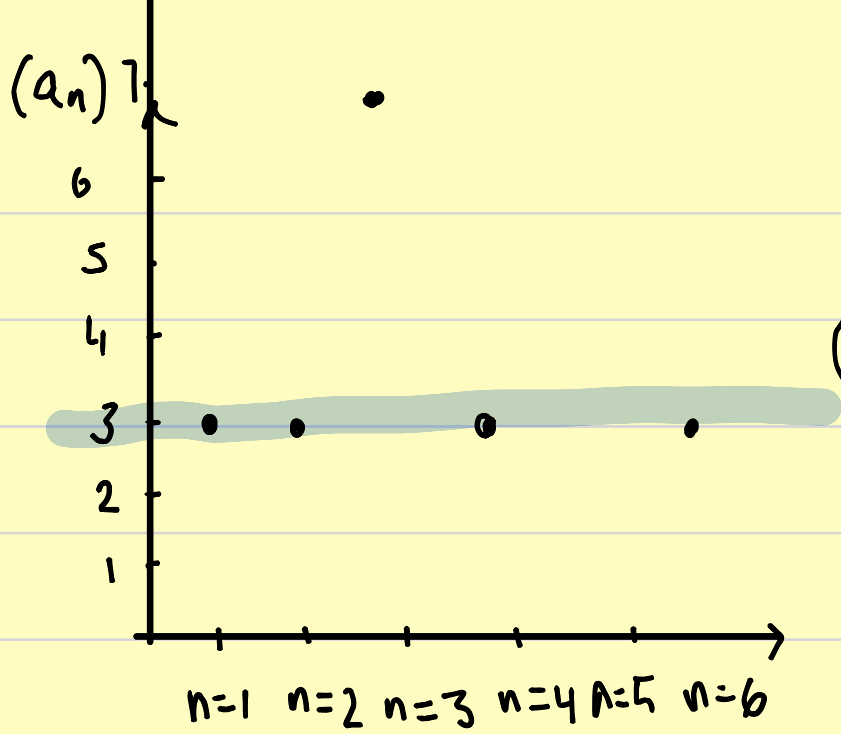
Beispiel: $(a_n) = \begin{cases} a_{2n} = 3 \\ a_{2n+1} = 2n+1 \end{cases}$

Bei allen geraden Gliedern der Folge hat die Folge den Wert 3.

" " ungeraden " " " " " " " " $2n+1$.

3 ist ein Häufungspunkt. Aber 3 ist kein Grenzwert.

" +

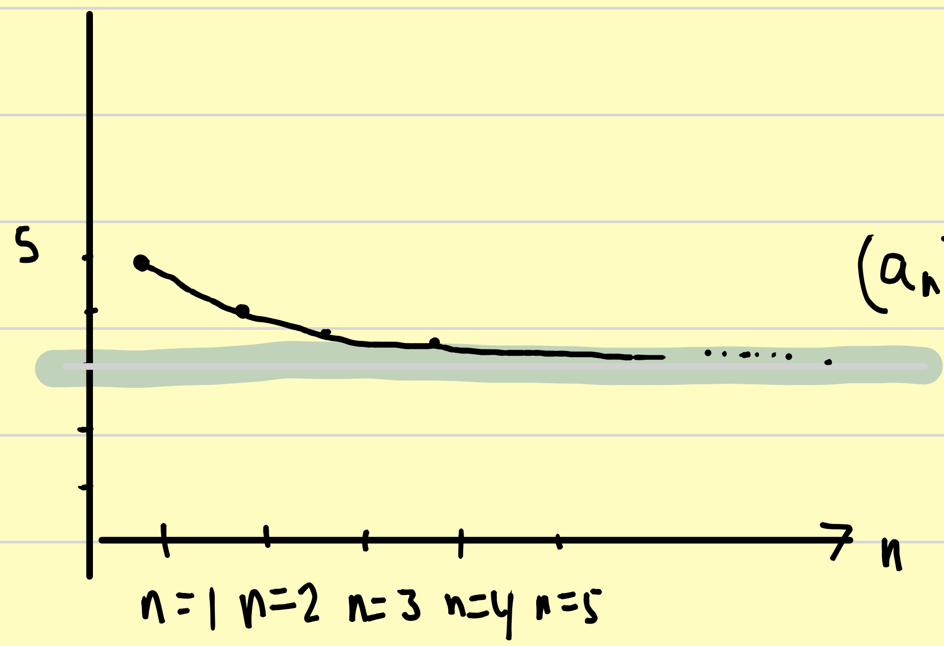


$$(a_n) = \begin{cases} a_{2n} = 3 \\ a_{2n+1} = 2n+1 \end{cases}$$

NICHT KONVERGENT

3 ist kein G

3 ist H



$$(a_n) = 3 + \frac{2}{n}$$

KONVERGENT

3 ist G

3 ist H

---

w^3.profH4.com