20251121_Mathematik1_B

Aufgabe 1: Umsatzmaximierung für eine SaaS-Lizenz (Preis-Absatz-Funktion)

Ein Unternehmen verkauft eine Cloud-Software im Abo.
Die Marktanalyse liefert die (vereinfachte) Preis-Absatz-Funktion

$$p(x) = 120 - 2x$$

mit

- $p(x)$: Preis pro Lizenz in €
- x: Absatzmenge in **Hundert Lizenzen** (z.B. $x = 1$ entspricht 100 Lizenzen).

Solange der Preis nicht negativ wird, gilt $0 \leq x \leq 60$.

(a) Stelle die Umsatzfunktion $R(x)$ auf.
(b) Bestimme die Absatzmenge x^*, bei der der Umsatz maximal ist.
(c) Welcher Preis sollte verlangt werden?

Aufgabe 2: Gewinnmaximierung eines Online-Shops

Ein Online-Shop für digitale Lernkarten hat

- Erlösfunktion $E(x) = 60x$ (in Hundert €)
- Kostenfunktion $K(x) = 3x^2 + 20$ (in Hundert €)

mit

- x: Anzahl Bestellungen pro Tag in **Hundert Stück** (z.B. $x = 2$ entspricht 200 Bestellungen).

(a) Bestimme die Gewinnfunktion $G(x)$.
(b) Ermittle die Absatzmenge x^*, bei der der Gewinn maximal ist.
(c) Wie hoch ist der maximale Gewinn?

Aufgabe 3: Optimale Anzahl Cloud-Server (Kostenminimum)

Eine Plattform betreibt ihre Anwendung in der Cloud.
Für x gemietete Server-Instanzen (z.B. Container, VMs) wird die **Gesamtkostenfunktion pro Stunde** modelliert als:

$$K(x) = \frac{500}{x} + 20x$$

mit

- $K(x)$ in € pro Stunde
- $x > 0$: Anzahl Server-Instanzen

Der erste Term $\frac{500}{x}$ beschreibt z.B. Wartezeit-/Performancekosten (wenige Server → hohe Wartezeiten → hohe Kosten).
Der zweite Term $20x$ sind die direkten Mietkosten.

Aufgabe:
Finde die Anzahl Server x^*, die die Kosten pro Stunde minimiert, und überprüfe mit der 2. Ableitung.

Aufgabe 4: Optimales Online-Werbebudget für eine App

Ein Start-up bewirbt seine App mit Online-Anzeigen.
Sei x das Werbebudget in **Tausend € pro Monat** ($x \geq 0$).

Die zusätzliche Umsatzsteigerung durch Werbung wird modelliert als

$$U(x) = 10\ln(x+1)$$

in Tausend €.

Das Werbebudget selbst verursacht Kosten x (ebenfalls in Tausend €).

Die **Netto-Gewinnfunktion** durch Werbung sei

$$P(x) = U(x) - x = 10\ln(x+1) - x$$

Aufgabe:
Finde das Werbebudget x^*, das $P(x)$ maximiert. Überprüfe mit der 2. Ableitung.

Aufgabe 5: Optimale Teamgröße in einem IT-Projekt (kubische Kostenfunktion)

In einem Softwareprojekt steigen Koordinationskosten überproportional mit der Teamgröße.
Die Gesamtkosten $K(x)$ (in Tausend €) werden modelliert als

$$K(x) = x^3 - 12x^2 + 36x + 100$$

mit

- x: Anzahl der Entwickler:innen (als kontinuierliche Variable, später runden),
- $x \geq 1$.

(a) Bestimme alle kritischen Punkte von $K(x)$.
(b) Klassifiziere diese mit Hilfe der 2. Ableitung (lokales Minimum / Maximum).
(c) Welche Teamgröße minimiert die Kosten?

---

1. $R(x) = \text{Umsatz} = \text{Preis} \cdot \text{Menge} = p(x) \cdot x = (120-2x)x = -2x^2+120x$

$\frac{dR(x)}{dx} = -4x+120 \Big|_{x=x_0} = 0 \rightarrow x_0 = \frac{120}{4} = 30$ Extremstelle

$\frac{d^2R(x)}{dx^2}\Big|_{x=x_0} = -4 < 0 \rightarrow x_0 = 30$ Maximum

Optimaler Umsatz $R(x_0) = -2 \cdot 30^2 + 120 \cdot 30 = 1800$

$R(x_0) = 180000$ €

Optimale Menge $x_0 = 30 \rightarrow 30 \cdot 100 = 3000$ Lizenzen

Optimaler Preis $p(x=x_0) = 120 - 2 \cdot 30 = 60$ €/Lizenz

Graphische Darstellung

---

2. $G(x) = E(x) - K(x) = 60x - (3x^2+20) = -3x^2+60x-20$

$\frac{dG(x)}{dx} = -6x+60 \Big|_{x=x_0} = 0 \rightarrow -6x_0+60 \stackrel{!}{=} 0 \rightarrow x_0 = 10$

$\frac{d^2G(x)}{dx^2}\Big|_{x=x_0} = -6 < 0 \rightarrow x_0$ ist ein Maximum

Maximaler Gewinn: $G(x=x_0) = -3x_0^2 + 60x_0 - 20 = 280$

$$G_{max} = 28000 \text{ €}$$

Der Shop sollte also 10 mal 100 Bestellungen (1000 Bestellungen), um einen Gewinn von 28000 € zu erzielen.

---

3. $K(x) = \frac{500}{x} + 20x \quad x>0$

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{-1}{x^2}}$$

$$\frac{dK(x)}{dx} = \frac{-500}{x^2} + 20 \Bigg|_{x=x_0} = 0 \quad \frac{-500}{x_0^2} = -20 \rightarrow x_0 = \sqrt{\frac{500}{20}} = \sqrt{25} = 5$$

$$\frac{d^2K(x)}{dx}\Bigg|_{x=x_0} = \frac{2\cdot 500}{x_0^3} = \frac{2\cdot 500}{125} = 8 > 0 \rightarrow x_0 = 5 \quad \text{Minimum } K(x_0)$$

Das Unternehmen sollte 5 Server betreiben.

Die Gesamtkosten sind $K(x=x_0) = \frac{500}{5} + 20.5 = 200 \text{ €}/\text{Std}$

---

4. $P(x) = U(x) - x = 10 \ln(x+1) - x$

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}}$$

$$\frac{dP(x)}{dx} = 10 \cdot \frac{1}{x+1} - 1 = \frac{10}{x+1} - 1 \Bigg|_{x=x_0} = 0 \rightarrow 10 = x_0 + 1 \rightarrow x_0 = 9$$

$$\frac{d^2P(x)}{dx^2}\Bigg|_{x=x_0} = \frac{-10}{(x+1)^2}\Bigg|_{x=x_0} = \frac{-10}{(9+1)^2} = \frac{-10}{100} = -0{,}1 < 0 \rightarrow \text{Maximum}$$

$$P(x=x_0) = 10 \ln(9+1) - 9 \cong 14.000 \text{ €}$$

Das Start-up sollte ca. 9000 €/Monat in Werbung investieren, um den Netto-Gewinnbeitrag zu maximieren.

4*. Übung. $U(x) = 10 \cdot \ln(2x+1)$

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left(\ln(2x+1)\right) = \frac{1}{2x+1} \cdot 2}$$

---

5. $K(x) = x^3 - 12x^2 + 36x + 100$

$$\frac{dK(x)}{dx} = 3x^2 - 24x + 36 \Big|_{x=x_0} = 0 \rightarrow x_0^2 - 8x_0 + 12 = 0$$

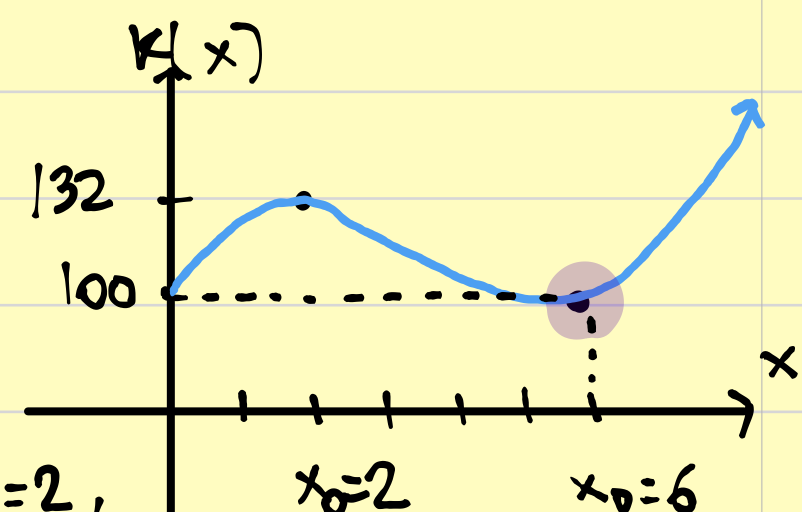
$$x_0 = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 4 \cdot 12}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{8 \pm 4}{2} = \begin{cases} x_{01} = 6 \\ x_{02} = 2 \end{cases}$$

Extreme

$$\frac{d^2K(x)}{dx^2}\Big|_{x_0} = 6x_0 - 24 = \begin{cases} x_{01}=6: \ 12 > 0 \rightarrow \text{MIN} \\ x_{02}=2: \ -12 < 0 \rightarrow \text{MAX} \end{cases}$$

$K(x=0) = 100$

$K(x=2) = 132$



Interpretation: bei kleinen Teams $x_{02} = 2$, sind die Kosten relativ hoch, weil das Projekt lange dauert → hohe Gesamtkosten.

Bis $x = 6$, sinken die Kosten, da mehr Entwickler die Arbeit beschleunigen.

Ab $x > 6$, steigen die Kosten wieder, da die Koordination und Kommunikationsaufwände stark zunehmen.