20240613_Regelungstechnik_BEL4

1. Gegeben wird ein Steuerungssystem, das durch die Differential gleichung $\ddot{y} + 3\dot{y} + y = u$ beschrieben wird. Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion und stellen Sie $y(t)$ wenn $u(t)$ die Sprungsignal ist.

$$\mathcal{L}\left[\ddot{y} + 3\dot{y} + y\right] = \mathcal{L}\left[u\right] \rightarrow \left[s^2 + 3s + 1\right] Y(s) = U(s)$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^2+3s+1}$$

$$s^2 + 3s + 1 = 0 \longrightarrow s = \frac{-3 \pm \sqrt{9-4}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2} = \begin{cases} -0'38 \\ -2'618 \end{cases}$$

$$G(s) = \frac{A}{s+0'38} + \frac{B}{s+2'618}$$

$$1 = A\left(s+2'618\right) + B\left(s+0'38\right)$$

$$s^* = -2'618 \longrightarrow 1 = B \cdot \left(-2'238\right) \rightarrow B = -0'44$$

$$s^* = -0'38 \longrightarrow 1 = A \cdot \left(2'238\right) \longrightarrow A = 0'44$$

$$G(s) = 0'44 \left[\frac{1}{s+0'38} - \frac{1}{s+2'618}\right] = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

$$U(s) = \frac{1}{s} \longrightarrow Y(s) = \frac{a}{s+0'38} + \frac{b}{s+2'618} + \frac{c}{s}$$

$$1 = a \cdot s \cdot \left(s+2'618\right) + b \cdot s \cdot \left(s+0'38\right) + c\left(s+0'38\right)\left(s+2'618\right)$$

$s^* = 0 \rightarrow 1 = c \cdot 0'38 \cdot 2'618 \rightarrow c = 1$

$s^* = -0'38 \rightarrow 1 = a \cdot (-0'38)(2'238) \rightarrow a = -1'176$

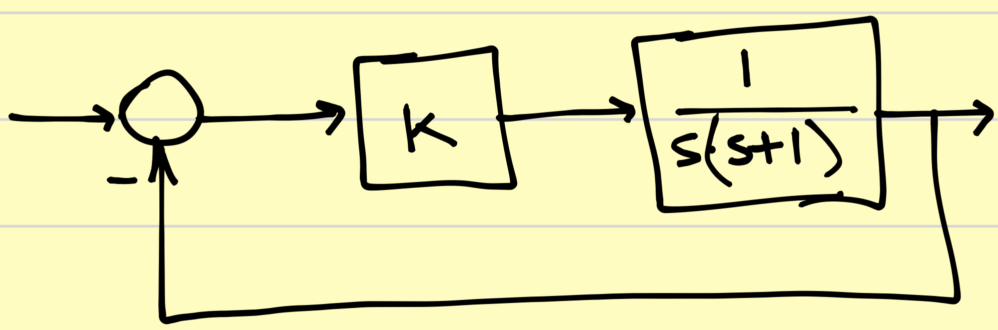
$s^* = -2'618 \rightarrow 1 = b(-2'618)(-2'238) \rightarrow b = 0'1706$

$$y(s) = \frac{-1'176}{s+0'38} + \frac{0'1706}{s+2'618} + \frac{1}{s}$$

$$\boxed{\mathcal{L}^{-1}(y(s)) = y(t) = 1 - 1'176\, e^{-0'38t} + 0'1706\, e^{-2'618t}}$$

---

2. Ein Regelkreis besteht aus einem Regler mit Übert. Funkt $K(s) = K$ und Strecke $G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$. Bestimmen Sie K damit das System an der Stabilitätsgrenze arbeitet.



$$H(s) = \frac{K \cdot \frac{1}{s(s+1)}}{1 + K \cdot \frac{1}{s(s+1)}} = \frac{K}{s(s+1) + K} =$$

$$= \frac{K}{s^2 + s + K}$$

$$s^2 + s + K = 0 \longrightarrow s^* = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4K}}{2}$$

$$\underset{(a)}{-1 + \sqrt{1-4K} > 0} \quad \& \quad \underset{(b)}{-1 - \sqrt{1-4K} > 0}$$

(a) $\sqrt{1-4k} > 1 \rightarrow 1-4k > 1 \rightarrow 4k < 0 \rightarrow \underline{k<0}$

(b) $-1-\sqrt{1-4k} > 0 \rightarrow -\sqrt{1-4k} > 1 \rightarrow \quad \underline{k<0}$

$\boxed{k<0}$

---

3. Für ein System mit Übertragungsfunktion $J(s) = \frac{20}{s(s+10)}$ soll die Freqrenzantwort (BODE) bestimmt werden.

$$J(s) = \frac{20}{s(s+10)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+10} = 2\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s+10}\right]$$

$$20 = A(s+10) + B \cdot s$$

$$\left.\begin{array}{l} s^* = 0 \rightarrow 20 = 10A \rightarrow A = 2 \\ s^* = -10 \rightarrow 20 = -10B \rightarrow B = -2 \end{array}\right\}$$

$$J(s) = 20 \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s+10}$$

$$J_1(s) = 20 \cdot \frac{1}{s} \rightarrow J_1(jw) = \frac{20}{jw} \cdot \frac{-jw}{-jw} = \frac{20 \cdot -jw}{w^2} = $$

$$= \frac{-20j}{w}$$

$$|J_1(jw)| = \frac{20}{w} \rightarrow |J_1(jw)|_{dB} = 20\log 20 - 20\log w$$

$$\angle J_1(jw) = \arctan\left[\frac{0}{-20/w}\right] = 0^\circ$$

$$J_2(s) = \frac{1}{s+10} \longrightarrow J_2(jw) = \frac{1}{10+jw} \cdot \frac{10-jw}{10-jw} =$$

$$= \frac{10-jw}{10^2+w^2}$$

$$|J_2(jw)| = \frac{1}{10^2+w^2} \cdot \sqrt{10^2+w^2} = \left(10^2+w^2\right)^{-1/2}$$

$$|J_2(jw)|_{dB} = -20 \cdot \frac{1}{2} \cdot \log\left(10^2+w^2\right)$$

$$\angle J_2(jw) = \arctan \frac{-w}{10}$$

$$w_{E2} = 10$$