Übung. Gegeben wird ein KPI-System mit 2 Kennzahlen. Durchlaufzeit (X) und Output (Y).

(9) a) bitte ermitteln Sie die Kovarianzmatrix nach Normierung

(9) b) bitte ermitteln Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Kov. Matrix und

(2) c) bitte interpretieren Sie die Ergebnisse.

DLZ(X) : [17, 14, 12, 13, 9, 7]

OUTPUT(Y): [200, 250, 270, 240, 310, 330]

$$KOV[X,Y] = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n-1} \qquad A = \begin{bmatrix} VAR[X] & KOV[X,Y] \\ KOV[X,Y] & VAR[Y] \end{bmatrix}$$

NORMIERUNG:

$$\bar{x} = \frac{17+14+12+13+9+7}{6} = 12$$

$$VAR[X] = \frac{(17-12)^2+(14-12)^2+(12-12)^2+(13-12)^2+(9-12)^2+(7-12)^2}{6-1} =$$

$$= \frac{5^2+2^2+1^2+(-3)^2+(-5)^2}{5} = \frac{63}{5} = 12'6$$

$$\sigma_X = \sqrt{VAR[X]} = 3'55$$

$$\bar{Y} = \frac{200+250+270+240+310+330}{6} = 266'67$$

$$VAR[Y] = \frac{(200-266'67)^2+(250-266'67)^2+(270-266'67)^2+(240-266'67)^2+(310-266'67)^2+(330-266'67)^2}{6-1} =$$

$$= 2266'67$$

$$\sigma_Y = \sqrt{VAR[Y]} = 47'61$$

NORMIEREN:

$$X^*: \left[\frac{17-12}{3'55}, \frac{14-12}{3'55}, 0, \frac{13-12}{3'55}, \frac{9-12}{3'55}, \frac{7-12}{3'55}\right]:$$

$$\left[1'41, 0'56, 0, 0'28, -0'845, -1'41\right]$$

$$Y^*: \left[\frac{200-266'67}{47'61}, \frac{250-266'67}{47'61}, \frac{270-266'67}{47'61}, \frac{240-266'67}{47'61}, \frac{310-266'67}{47'61}, \frac{330-266'67}{47'61}\right]:$$

$$\left[-1'4, -0'35, 0'07, -0'56, 0'91, 1'33\right]$$

$$A^* = \begin{bmatrix} VAR[X^*] & KOV[X^*, Y^*] \\ KOV[X^*, Y^*] & VAR[Y^*] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -0'994 \\ -0'994 & 1 \end{bmatrix}$$

$$KOV[X^*, Y^*] = \frac{\sum x_i^* \cdot y_i^*}{n-1} = \frac{1'41 \cdot (-1'4) + 0'56 \cdot (-0'35) + 0 \cdot 0'07 + 0'28 \cdot (-0'56) + (-0'845) \cdot 0'91 + (-1'41)(1'33)}{6-1}$$

$$\bar{x}^* = \bar{y}^* = 0$$

$$= \frac{-1'974 + (-0'196) + 0 + (-0'1568) + (-0'769) + (-1'875)}{5}$$

$$= -0'994$$

EIGENWERTE: $\det[A - \lambda I] = 0$

$$\det\left[\begin{bmatrix} 1 & -0'994 \\ -0'994 & 1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right] = 0 \rightarrow \det\begin{bmatrix} 1-\lambda & -0'994 \\ -0'994 & 1-\lambda \end{bmatrix} = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \underbrace{(1-\lambda)^2}_{\lambda^2-2\lambda+1} - 0'994^2 = 0 \longrightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 0'0119 = 0$$

$$\lambda = \frac{+2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 0'0119}}{2} = \begin{cases} \lambda_1 = 1'994 \\ \lambda_2 = 0'006 \end{cases}$$

✓

EIGENVEKTOREN:

$$A \cdot \vec{v_1} = \lambda_1 \cdot \vec{v_1} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -0'994 \\ -0'994 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{bmatrix} = 1'994 \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$\rightarrow \begin{matrix} v_{11} - 0'994\, v_{12} = 1'994\, v_{11} \\ -0'994\, v_{11} + v_{12} = 1'994\, v_{12} \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} v_{11} = -v_{12} \\ v_{11} = -v_{12} \end{matrix}$$

$$v_{11} = 1 \rightarrow v_{12} = -1 \rightarrow \vec{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \rightarrow \vec{v_1}^* = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$A \cdot \vec{v_2} = \lambda_2 \cdot \vec{v_2} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -0'994 \\ -0'994 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{bmatrix} = 0'006 \begin{bmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$\rightarrow \begin{matrix} v_{21} - 0'994\, v_{22} = 0'006\, v_{21} \\ -0'994\, v_{21} + v_{22} = 0'006\, v_{22} \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} v_{21} = v_{22} \\ v_{21} = v_{22} \end{matrix}$$

$$v_{21} = 1 \rightarrow v_{22} = 1 \rightarrow \vec{v_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \vec{v_2} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

✓

Interpretation. Die Eigenvektoren sind die Hauptkomponenten des Management Systems und können benutzt werden um mit weniger Aufwand den Prozeß zu steuern.

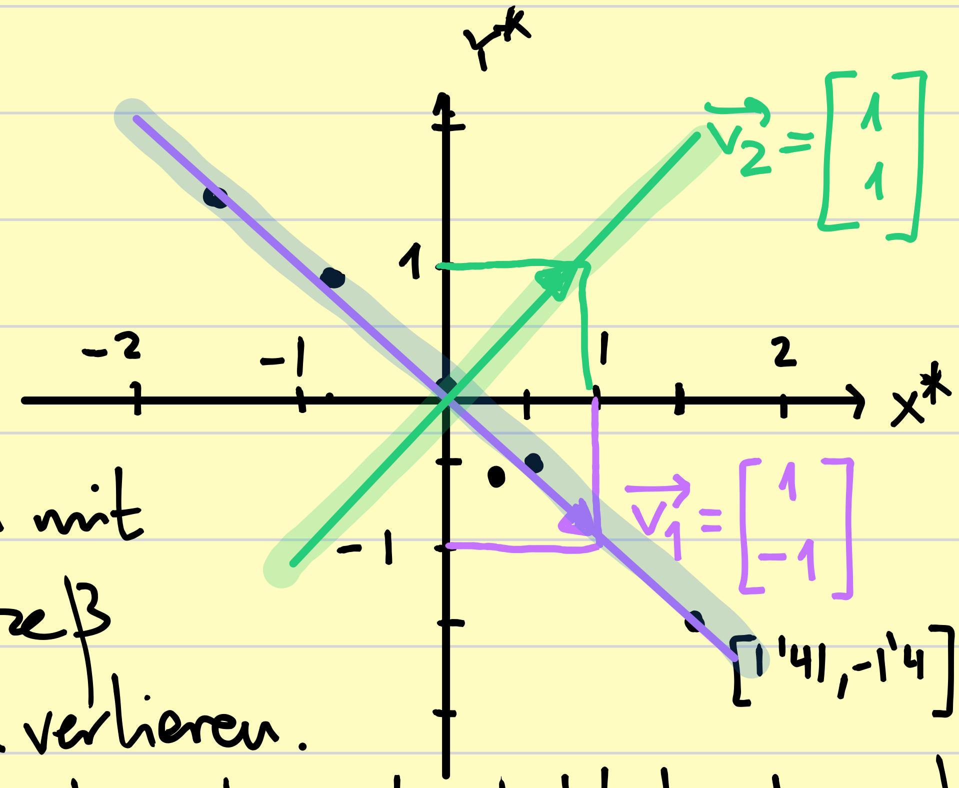
NORMIEREN:

$$x^*: \left[\frac{17-12}{3'55}, \frac{14-12}{3'55}, 0, \frac{13-12}{3'55}, \frac{9-12}{3'55}, \frac{7-12}{3'55}\right]:$$

$$\left[1'41, 0'56, 0, 0'28, -0'845, -1'41\right]$$

$$y^*: \left[\frac{200-266'67}{47'61}, \frac{250-266'67}{47'61}, \frac{270-266'67}{47'61}, \frac{240-266'67}{47'61}, \frac{310-266'67}{47'61}, \frac{330-266'67}{47'61}\right]:$$

$$\left[-1'4, -0'35, 0'07, -0'56, 0'91, 1'33\right]$$



- Eine Führungskraft kann mit dem KPI ($x^* - y^*$) den Prozeß steuern ohne Information zu verlieren.
- Wir haben den Management Aufwand erheblich reduziert.