ZINSRECHNUNG

- Zinsen sind das Entgelt für ein leihweise überlassenes Kapital
- Nachschüssige Zinsen sind die, die am Ende einer zeitlichen Periode fällig werden.

PARAMETER: p: Zinssatz

q: Zinsfaktor $\equiv q = 1 + \frac{p}{100}$

K_0: Anfangskapital

K_n: Endkapital (am Ende der n-ten Periode)

1) EINFACHE VEZINSUNG (EV). Bei einer EV werden in den einzelnen Perioden nur die Zinsen für das Anfangskapital gezahlt.

Z nach 1. Periode: $z_1 = K_0 \cdot \frac{p}{100}$

Z nach 2. Periode: $z_2 = K_0 \cdot \frac{p}{100} \cdot 2$

...

Z nach n. Periode: $z_n = K_0 \cdot \frac{p}{100} \cdot n$

Für das Endkapital K_n gilt: $K_n = K_0 + z_n = K_0 + K_0 \frac{p}{100} \cdot n$

$$\boxed{K_n = K_0 \left[1 + \frac{p}{100} \cdot n \right]}$$

Aufgabe: Ein Kapital soll in 10 Jahren bei 5% Zinsen 54000 € betragen. Wie hoch ist das Anfangskapital bei EV?

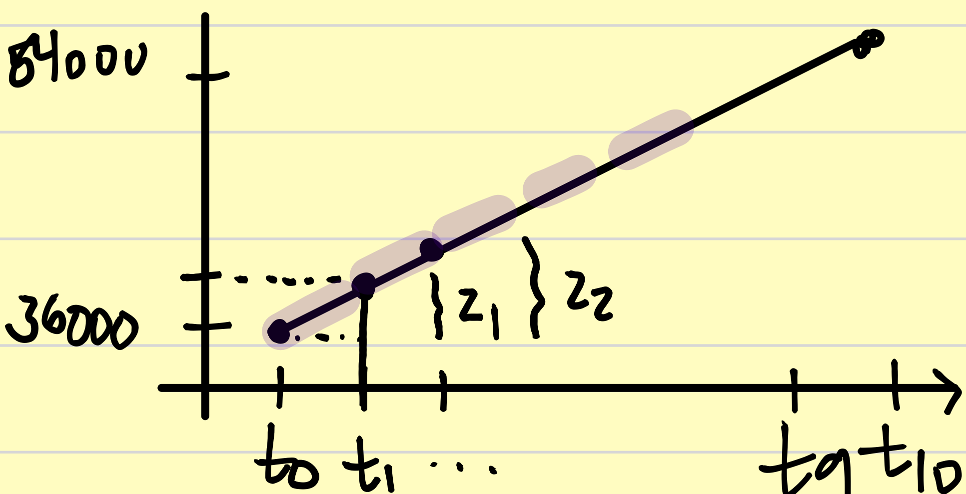
$$K_n = K_0\left[1+\frac{p}{100}\cdot n\right]$$

$n = 10$ (Anzahl Perioden)

$p = 5$ (Zinssatz)

$K_n = 54.000$ €

$$K_0 = \frac{54000}{1+\frac{5}{100}\cdot 10} = 36.000 \text{ €}$$



$$z_1 = K_0\cdot\frac{p}{100} = 36000\cdot\frac{5}{100} = 1800 \text{ €}$$

$$z_2 = K_0\cdot\frac{p}{100}\cdot 2 = 3600 \text{ €}$$

Die EV bildet eine Arythmetische Folge/Reihe.

Aufgabe: Eine Privatperson hat einem Freund für 5 Jahre 100000 € zu einem Zinssatz von 6% geliehen (EV). Wie hoch ist das Endkapital?

$$K_n = K_0\left[1+\frac{p}{100}\cdot n\right]$$

$K_0 = 100000$ € $\quad n = 5$

$p = 6$

$$K_n = 10^6\cdot\left[1+0{,}06\cdot 5\right] = 130000 \text{ €}$$

$$K_n = K_0\left[1+n\cdot\frac{p}{100}\right] \longrightarrow \frac{K_n}{K_0} = 1 + n\cdot p\cdot\frac{1}{100} \longrightarrow$$

$$\frac{K_n}{K_0} - 1 = \frac{n\cdot p}{100} \longrightarrow \boxed{n = \frac{100}{p}\left[\frac{K_n}{K_0} - 1\right]}$$

$$\boxed{p = \frac{100}{n}\left[\frac{K_n}{K_0} - 1\right]}$$

Aufgabe: wann verdoppelt sich ein Kapital K_0 bei 6% Jahreszinsen und EV?

$$K_n = 2K_0 = K_0\left[1+\frac{np}{100}\right]$$

$p = 6$

$n = ?$

$$\frac{2\cancel{K_0}}{\cancel{K_0}} = 1 + \frac{6n}{100} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow 2 - 1 = \frac{6n}{100} \longrightarrow n = \frac{100}{6} = 16{,}67\,J \simeq 17 \text{ Jahre}$$

---

2) Zinseszinsrechnung (ZZR). Bei der ZZR werden sowohl das K_0, als auch die Zinsen in der Perioden verzinst.

$$q = 1 + p/100$$

Anfangskapital : K_0

Kapital nach der 1. Periode: $K_1 = K_0 + \underbrace{K_0\cdot\frac{p}{100}}_{Z_1} = K_0 q$

Kapital nach der 2. Periode: $K_2 = K_1 + K_1\cdot\frac{p}{100} = K_0 q^2$

...

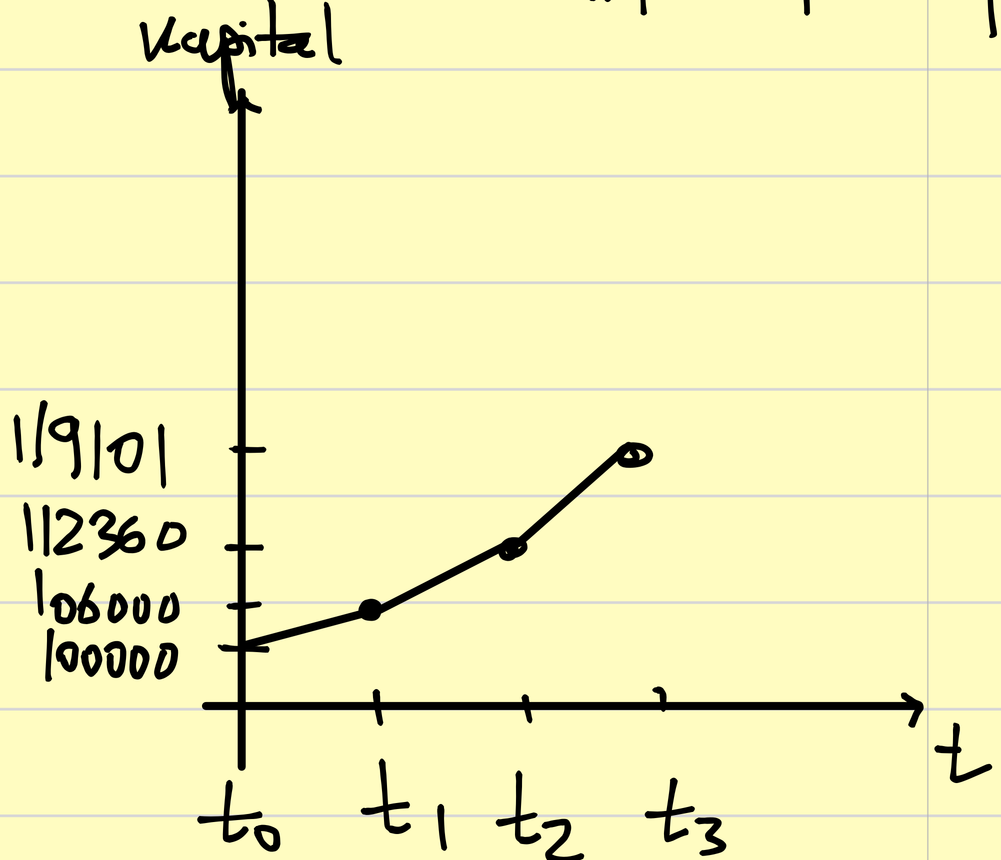
Kapital nach der n. Periode: $K_n = K_{n-1} + K_{n-1}\frac{p}{100} = K_0 q^n$

Beispiel:

$K_0 = 100000$

$p = 6 \to q = 1 + \frac{6}{100} = 1{,}06$

Wie entwickelt sich das Kapital bei einer ZZR?



$$K_1 = K_0 + K_0 \cdot \frac{p}{100} = K_0\left[1 + \frac{p}{100}\right] = K_0 q = 106000$$

$$K_2 = K_1 + K_1 \cdot \frac{p}{100} = K_1\left[1 + \frac{p}{100}\right] = K_0 q^2 = 112360$$

$$K_3 = K_2 + K_2 \cdot \frac{p}{100} = K_2\left[1 + \frac{p}{100}\right] = K_0 q^3 = 119101$$

...

$$\boxed{K_n = K_0 \cdot q^n} \equiv \text{ZZR} \equiv \text{GF/GR}$$

Die Bestimmung von K_0 bei gegebenem K_n, q & n bezeichnet man als BESTIMMUNG des BARWERTES oder DISKONTIERUNG bzw. Abzinsung des Kapitals.

$$K_n = K_0 \cdot q^n \longrightarrow \boxed{K_0 = \frac{K_n}{q^n}}$$

Beispiel: Daniela ist heute 20. Sie braucht 2000000 € auf dem Konto, wenn sie 65 wird, damit sie gut in die Rente geht. Sie kann das Geld heute bei einer Bank zu einem Zinssatz von 5% anlegen.
Wie viel Anfangskapital wäre bei einer ZZR heute notwendig?

$n = 65 - 20 = 45$
$p = 5 \longrightarrow q = 1{,}05$
$k_n = 2000000\,€ = 2 \cdot 10^6\,€$
$k_0 = ?$

$K_n = K_0 \cdot q^n \longrightarrow K_0 = \frac{K_n}{q^n}$

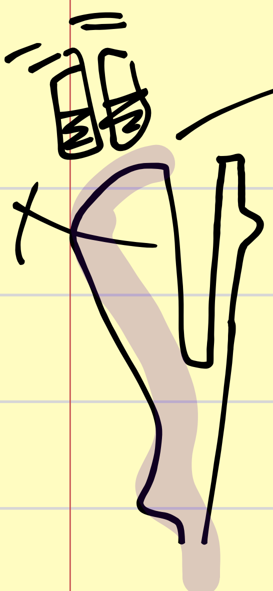
$K_0 = \frac{2 \cdot 10^6}{1{,}05^{45}} = 222593{,}02\,€$

Aufgabe: Florian kann in 5 Jahren einen Oldtimer mit Kaufpreis 7500 € für 10000 € verkaufen. Er könnte sein Geld (7500 €) alternativ für 11% Zinsen (ZZR) anlegen. Vergleichen Sie die Barwerte und geben Sie Florian eine Empfehlung.

- Was ist der Barwert von 7500 € HEUTE? $K_0 = 7500\,€$
- was ist der Barwert von 10000 € in 5 Jahren?

$$K_n = K_0 \cdot q^n \longrightarrow K_0 = \frac{K_n}{q^n} = \frac{10000}{1{,}11^5} = 5934\,€$$

Ich bräuchte HEUTE 5934 € um in 5 Jahre (bei einer ZZR mit p=11) 10000 € zu bekommen.



GELD ist eine Funktion von der Zeit

$$K_0 = \frac{K_n}{q^n} \rightarrow q^n = \frac{K_n}{K_0} \rightarrow n \log q = \log \frac{K_n}{K_0}$$

$$\rightarrow \boxed{n = \frac{\log \frac{K_n}{K_0}}{\log q}}$$

Aufgabe: wann verdoppelt sich ein K_0 bei 6% ZZR?

$$n = \frac{\log \frac{2K_0}{K_0}}{\log q} = \frac{\log 2}{\log 1{,}06} = 11{,}89 \simeq 12 \text{ Jahre}$$

RENTENRECHNUNG

Unter einer „Rente" versteht man gleichbleibende Zahlungen, die in regelmäßigen Abständen geleistet werden.

RENTE: (Parameter)

- r: RATE (einzelne Zahlungen · gleichbleibend)
- R_n: Rentenendwert (Gesamtwert einer Rente am Ende der Zahlungen)
- R_0: Rentenbarwert (Gesamtwert einer Rente am Anfang der Zahlungen)

q: Zinsfaktor (damit werden die Renten verzinst).

Ableitung der Berechnung R_n:

- Bei NACHSCHÜSSIGER RENTE (Zahlungen sind am Ende des Jahres fällig) wird die 1. Rate „r" am Ende des 1. Jahres gezahlt. Nach Ablauf von „n" Jahren ist die erste rate $(n-1)$ mal verzinst worden. Der Endwert der ersten Rate „r" am Ende der Laufzeit beträgt $r \cdot q^{n-1}$.

Jahr	Rate	Anzahl der Verzinsungen	Endwert der Rate
1	r	$n-1$	$r \cdot q^{n-1}$
2	r	$n-2$	$r \cdot q^{n-2}$
...			
$n-2$	r	2	$r \cdot q^2$
$n-1$	r	1	$r \cdot q^1$
n	r	0	$r \cdot q^0 = r$

$$R_n = \sum_{i=1}^{n} \text{Ratenendwerte}_i = r \cdot q^{n-1} + r \cdot q^{n-2} + \ldots + r \cdot q^2 + r \cdot q^1 + r$$

Geometrische Reihe: $\boxed{R_n = r \cdot \dfrac{q^n - 1}{q - 1}}$ Nachschüssige Rente (Zahlung am Ende)

Beispiel: Fr. Maier möchte ab dem 66. Lebensjahr zusätzlich zu Ihrer Rente 10 Jahre Lang über einen jährlichen Betrag von 6000€ verfügen (nachschüssig).

a) Wie hoch muss das Kapital am 66. Geburtstag sein, wenn sie einen Zinssatz von 3% unterstellt?

Gefragt wir nach dem Barwert der Zusatzrente zum 66. Geburtstag? (R_0)

$$R_n = r \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$R_0 = \frac{R_n}{q^n}$$

Es werden n Perioden gezahlt.

$$R_0 = \frac{1}{q^n} \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \cdot r$$

$q = 1'03 \quad r = 6000 \quad n = 10$

$$R_0 = \frac{1}{1'03^{10}} \cdot \frac{1'03^9}{0'03} \cdot 6000 = 51181'22 €$$

b) wie hoch ist der Endwert der Rente?

$$R_n = R_0 \cdot q^n = 51181'22 \cdot 1'03^{10} = 68783'3 €$$

c) Welche regelmäßigen jährlichen Einzahlungen muss sie leisten, wenn sie das Kapital in 15 Jahren zu 7% ansparen will?

Gefragt wird wie viel muss sie jährlich sparen wenn sie mit 66-15=51 Jahre zu 7% anfängt zu sparen.

$$R_n = r^* \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \rightarrow r^* = \frac{R_n(q-1)}{q^n - 1} = \frac{51181'22(1'07-1)}{1'07^{15}-1}$$

$$= 2036'74\,€$$