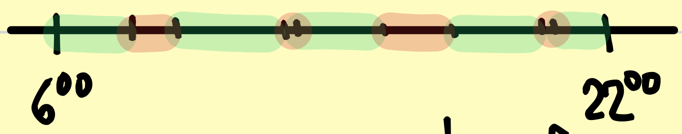
POISSON VERTEILUNG

Beispiel: Eine Maschine im Werk fällt ab und zu aus, und geht somit auf Störmodus.



Das Ereignis „Störung“ = X findet zufällig statt.
Dieses Ereignis ist „Poisson“ Verteilt.

Wenn die Anzahl Ereignisse in einer Periode durch $X(t)$ dargestellt wird, dann unterliegt die Zufallsvariabel $X(t)$ einen Poisson-Prozeß mit FREQUENZ (RATE) $\lambda > 0$ wenn:

1) $X(t=0) = 0$
2) Die Anzahl Ereignisse in zwei nicht überlappenden Intervale sind UNABHÄNGIG voneinander.

**das bedeutet der Prozeß hat kein GEDÄCHTNIS !! **

3) Die Anzahl Ereignisse sind Proportional zur Intervallänge.
4) Die W. von einem Ereignis ist sehr klein.

DEFINITION: $$\boxed{f(x) = P(X = x) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^{x}}{x!}} \quad (*)$$ $x = 0, 1, 2, 3, \ldots$

wenn $p \to 0$ & $n \to \infty$ in der BINOMIALVERTEILUNG, dann wird die BINOMIALVERTEILUNG zu einer POISSONVERTEILUNG.

Beispiel: Die Anzahl Ausfälle einer Maschine verfolgt eine Poisson-Verteilung mit $\lambda = 2'2$ im Monat.

a) Was ist die W. dafür, dass es zu keinem Ausfall in einem Monat kommt?

$$\left.\begin{array}{l} \lambda = 2'2 \\ X = 0 \text{ (kein Ausfall)} \end{array}\right\} P(X=0) = \frac{e^{-2'2} \cdot 2'2^{0}}{0!} = 0'1108$$

(*)

$$\boxed{(*)\ x! = x \cdot (x-1) \cdot (x-2) \cdot (x-3) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

b) Was ist die W. dafür, dass es zu genau einem Ausfall in einem Monat kommt?

$$\left.\begin{array}{l} \lambda = 2'2 \\ X = 1 \text{ (ein Ausfall)} \end{array}\right\} P(X=1) = \frac{e^{-2'2} \cdot 2'2^{1}}{1!} = 0'2438$$

c) Was ist die W. dafür, dass es mindestens 2 Ausfälle gibt?

$$\left.\begin{array}{l} \lambda = 2'2 \\ X \geq 2 \end{array}\right\} P(X \geq 2) = 1 - \left[P(X=0) + P(X=1) \right] = \ldots = 0'6454$$

$\square$ $\square$ $\square$ $\square$ ... $\Sigma = 1$

$X=0$ $X=1$ $X=2$ $X=3$

d) Was ist die W. dafür, dass es mindestens 3 Ausfälle gibt?

$$\left.\begin{array}{l}\lambda = 2{,}2\\ X \geq 3\end{array}\right\} P(X \geq 3) = 1 - \left[P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)\right] =$$

$$= 1 - \left[\underbrace{\frac{e^{-2{,}2} \cdot 2{,}2^0}{0!}}_{P(X=0)} + \underbrace{\frac{e^{-2{,}2} \cdot 2{,}2^1}{1!}}_{P(X=1)} + \underbrace{\frac{e^{-2{,}2} \cdot 2{,}2^2}{2!}}_{P(X=2)} \right] =$$

e) W. genau 4 Ausfälle in einem Monat?

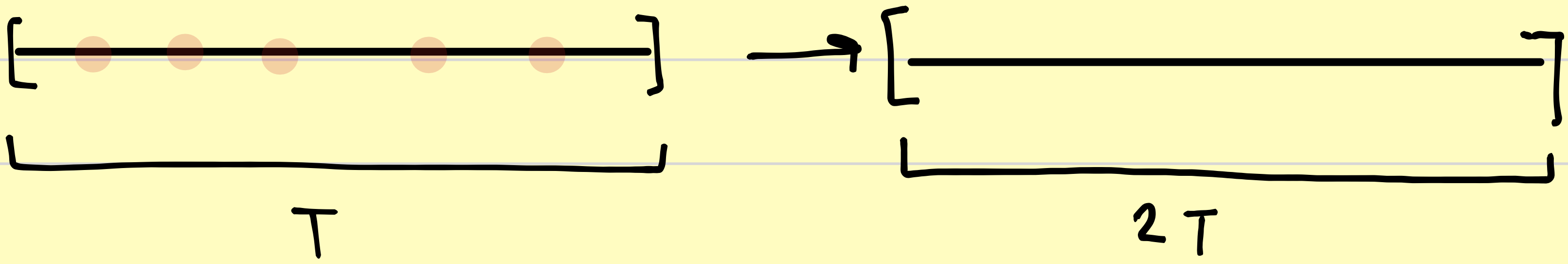
f) W. genau 3 Ausfälle in zwei Monaten?

g) W. genau 5 Ausfälle in drei Monaten?

Übung. Die Anzahl X von abgesetzten Notebooks in einer beliebigen Woche in einer Filiale lässt sich durch eine Poisson-Verteilung mit Frequenz $\lambda = 4$ beschreiben. Was ist die Varianz der Anzahl abgesetzten Notebooks in einer Woche?

$$\boxed{M_1(\text{Poisson}) = m_2(\text{Poisson}) = \lambda}$$

?



$\lambda = 5$ (Frequenz)

$\equiv$ 5 Ereignisse pro Periode T

$\equiv$ 5 Ereignisse / Zeiteinheit

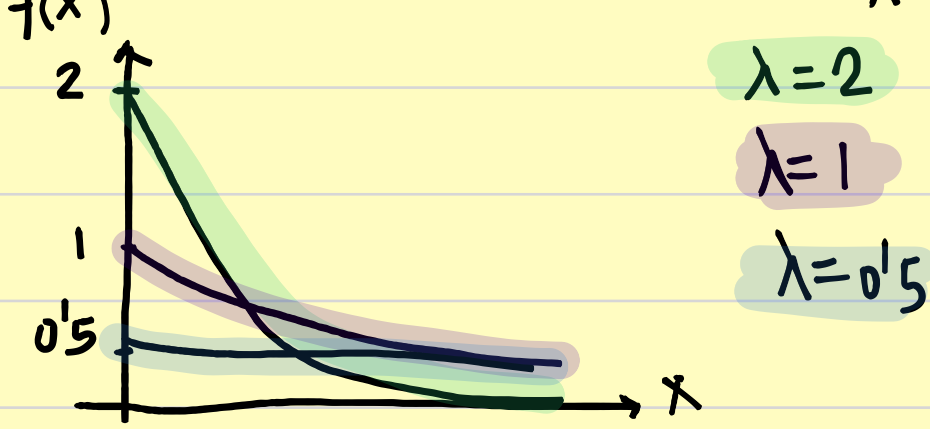
EXPONENTIELLE VERTEILUNG

Eine Variable X ist exponentiell verteilt, wenn die W. Dichte Funktion
$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \end{cases}$$

λ = Anzahl Ereignisse per Zeiteinheit im Poisson Prozeß: Rate

$$M_1(\text{EXPONENTIELL}) = \frac{1}{\lambda}$$

$$m_2(\text{EXPONENTIELL}) = \frac{1}{\lambda^2}$$



$$P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx = 1 - e^{-\lambda x}$$

$$P(X > x) = 1 - P(X \le x) = 1 - \left[1 - e^{-\lambda x}\right] = e^{-\lambda x}$$

Wenn die Zufallsereignisse eines Prozeßes unterliegen eine Poisson. Verteilung, dann die Zeit zwischen zwei nacheinander stattgefundene Ausfälle ist exponentiell verteilt.

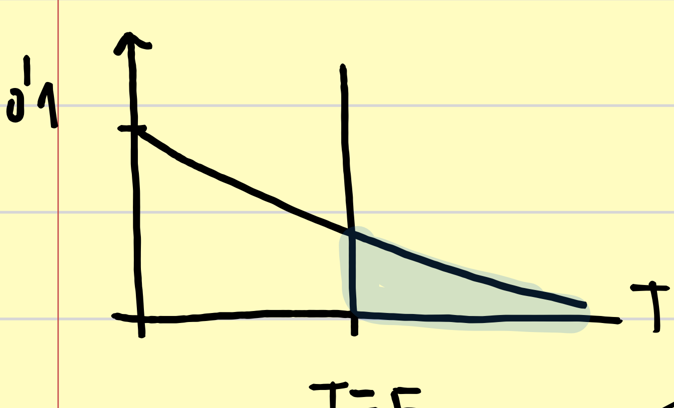
Beispiel: Die Zeit zwischen zwei Ausfällen einer Maschine ist exponentiell verteilt mit $\lambda = 0'1$.

a) Was ist die W. dafür, dass die Zeit zw. zwei Ausfällen größer 5 ist.

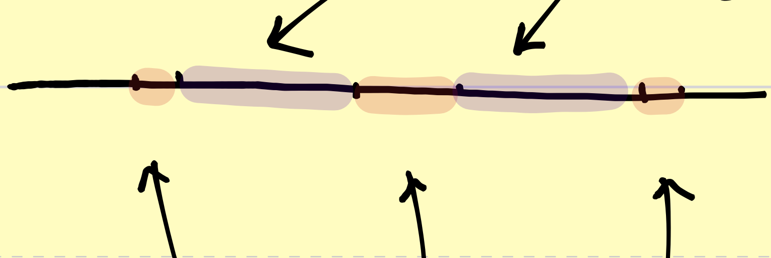
$$X = \frac{\#\text{Ausfälle}}{\text{ZeitEinheit}}$$

$$P(T > 5) = 1 - P(T < 5) = 1 - \left[1 - e^{-0'1 \cdot 5}\right] = e^{-0'5}$$

** T ist exponentiell verteilt **



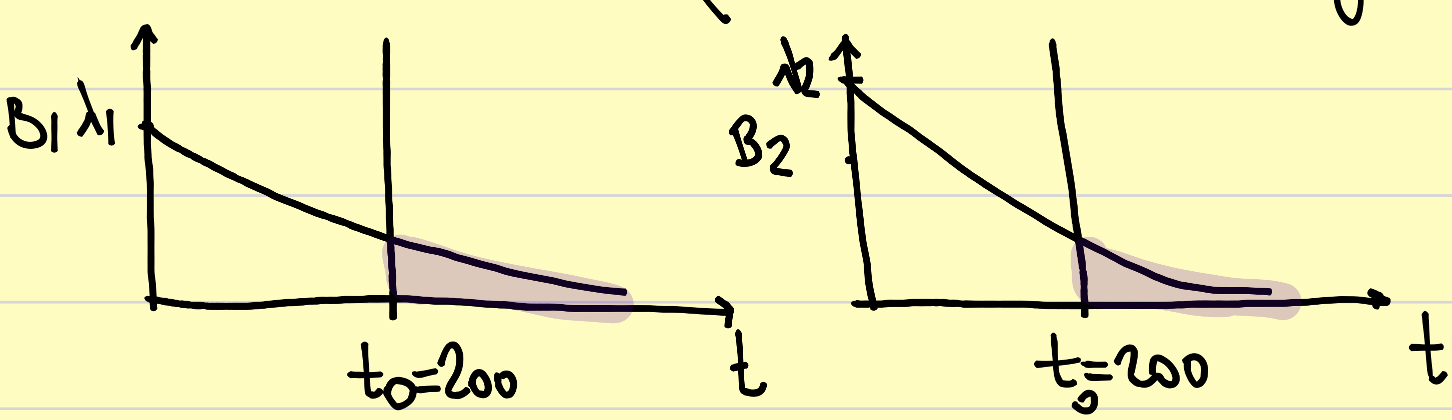
Zeit zw. Ereignisse Exponentiell verteilt.



Ereignisse X
Ausfällen sind
Poissonverteilt

Beispiel. Die Lebensdauer T_1 und T_2 zweier elektrischer Bauteile B_1 & B_2 seien exponentiell verteilt mit $\lambda_1 = \frac{1}{500}$ und $\lambda_2 = \frac{1}{300}$ (unabhängig voneinander).

a) Was ist die W. dafür, dass B_1 bzw B_2 den Zeitpunkt $t_0 = 200$ überleben? (wenn sie in $t=0$ eigesetzt wurden)



Ich schaue nach der Fläche RECHTS von $t_0=200$, weil ich die W. dafür dass er überlebt will!

$$P(T_1 \geq t_0 = 200) = 1 - P(T_1 < t_0 = 200) =$$
$$= 1 - \left[1 - e^{-\lambda_1 \cdot 200}\right] = e^{-\frac{200}{500}} = e^{-\frac{2}{5}}$$

$$P(T_2 \geq t_0 = 200) = 1 - P(T_2 < t_0 = 200) =$$
$$= 1 - \left[1 - e^{-\lambda_2 \cdot 200}\right] = e^{-\frac{200}{300}} = e^{-\frac{2}{3}}$$

b) Was ist die W. dafür, dass das jeweilige Bauteil nach erreichen von $t_0 = 200$ ohne Ausfall, NOCH 200 Std überlebt?

Gedachtnisloser Poisson. Prozeß

GEDÄCHTNISLOS!

$$P(200 \leq T_1 \leq 400) = P(T_1 > 200) = e^{-2/5}$$

$$P(200 \leq T_2 \leq 400) = P(T_2 > 200) = e^{-2/3}$$

WEIBULL · VERTEILUNG

- statistische Modellierung von industriellen Prozeßen.
- Die Parameter der Weibull.Verteilung können angepasst werden um eine Normal. bzw. Exponentiellverteilung zu generieren.
- Die Weibull. Verteilung ist eine 2 bzw. 3 parametrige Familie von Wahrscheinlichkeitsverteilungen.
- Die Weibullverteilung berücksichtigt die Vorgeschichte

→ GEDÄCHTNISBEHAFTET.

Definition: 1) SKALENPARAMETER $\frac{1}{\lambda} > 0$

LEBENSDAUER $\equiv T = \lambda$

2) FORMPARAMETER $K > 0$

In der Praxis $0'25 \leq k \leq 5$

Durch „K" lassen sich verschiedene speziellere Wahrscheinlichkeitsverteilungen realisieren:

$K = 1$ → EXPONENTIELLVERTEILUNG

$K \sim 3'602$ → NORMALVERTEILUNG

Definition:

W. Dichtefunktion:

$$f(x) = \lambda k (\lambda x)^{k-1} e^{-(\lambda x)^k}$$

Verteilung

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx = 1 - e^{-(\lambda x)^k}$$

$$M_1 = \frac{1}{\lambda} \cdot \Gamma\left(1 + \frac{1}{k}\right)$$

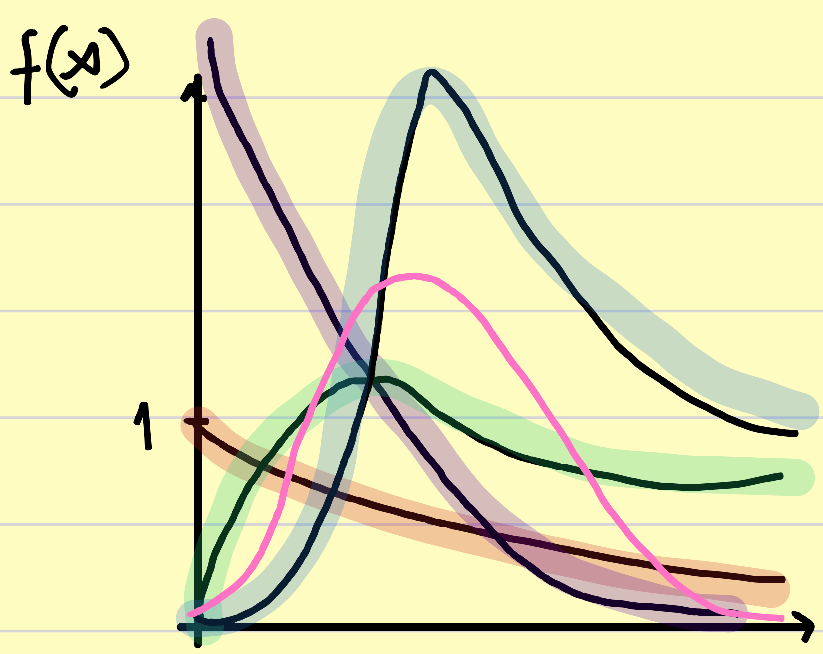
$$**\ \Gamma(a) = (a-1)! = (a-1)(a-2)(a-3)\ldots 3.2.1 \quad a \in \mathbb{N}$$

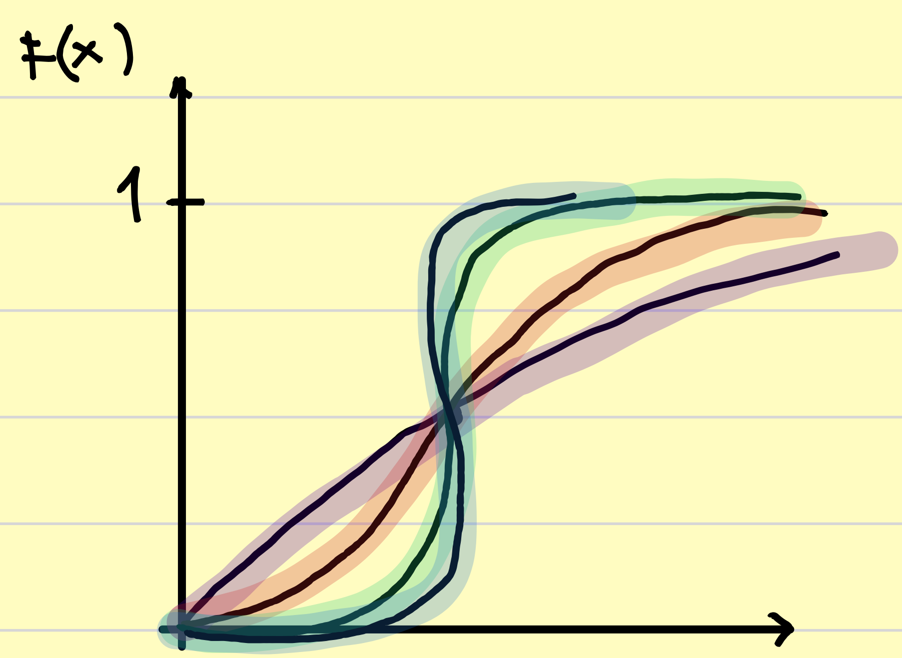
wenn $a \notin \mathbb{N}$ wird $\Gamma(a)$ gegeben.

$$m_2 = \frac{1}{\lambda^2}\left[\Gamma\left(1+\frac{2}{k}\right) - \left(\Gamma\left(1+\frac{1}{k}\right)\right)^2\right]$$

zB

$$\begin{array}{l} k=1: \\ \lambda=2: \end{array} \quad M_1 = \frac{1}{2}\Gamma\left(1+\frac{1}{1}\right) = \frac{1}{2}\Gamma(2) = \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2} = \frac{1}{\lambda}$$

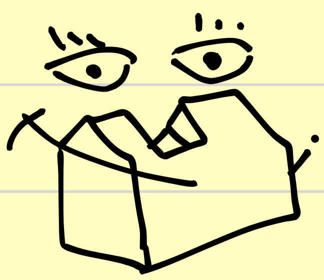


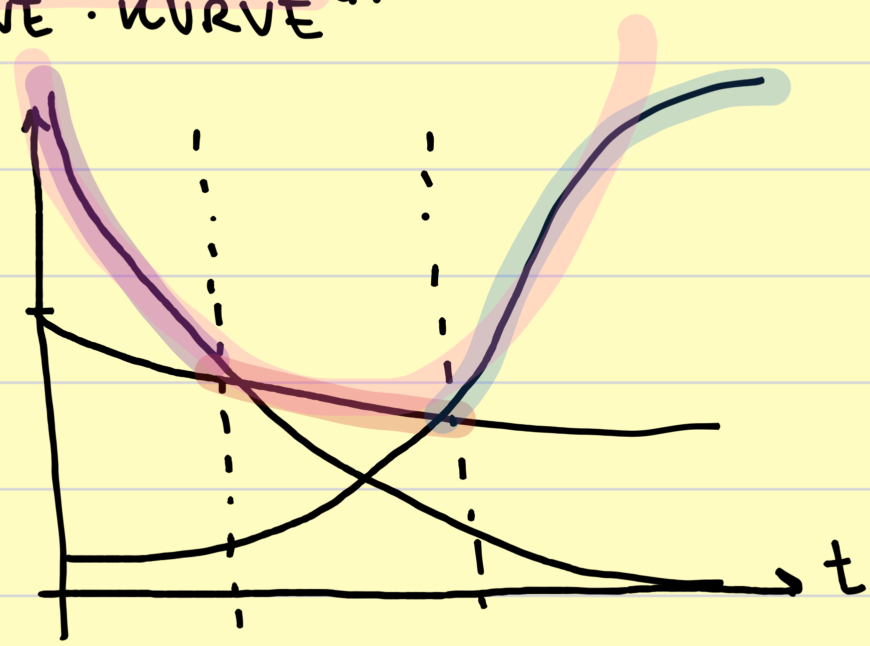


$k \sim 3'602$

$\lambda = 1$; $k = 0'5$ $k = 1$ $k = 1'5$ $k = 5$

Anwendung : unterschiedliche Ausfallursachen
.. BADEWANNE · KURVE ..





1) Frühausfallrate $k < 1$
2) Zufallsausfallrate $k = 1$
3) Ermüdungsausfallrate $k > 1$

FRÜH BETRIEB VERSCHLEIß

Übung. Die zufällige Lebensdauer X eines Motors entspricht in ihrer Verteilung einer Weibullverteilung mit $T = 0'1$ Jahre und $k = 2$.
Bestimmen Sie die W. dafür, dass:
a) der Motor fällt bereits im ersten Jahr aus.
b) der Motor arbeitet mindestens 10 Jahre.
c) der Motor arbeitet mehr als 5 Jahre aber höchstens 10.