20240318_Regelungstechnik_BEL4

Lösung mittels Laplace-Transformation.

$$L(x(t)) = x(s)$$

$$L(\dot{x}(t)) = s\,x(s)$$

$$L(\ddot{x}(t)) = s^2\,x(s)$$

$$\dots$$

$$L\left[\int x(t)\,dt\right] = \frac{1}{s}\,x(s)$$

$$T_1\,\dot{x}_a(t) + x_a(t) = K\,x_e(t) \xrightarrow{L} T_1\,s\,x_a(s) + x_a(s) = K\,x_e(s)$$

$$x_a(s) = \frac{K}{1+sT_1}\cdot x_e(s)$$

DEFINITION. ÜBERTRAGUNGSFUNKTION.

Allgemein ist das Verhältnis der Laplace-Transformierten Ausgangsgröße $x_a(s)$, zur Laplace-transformierten Eingangsgröße $x_e(s)$ als $G(s)$ = ÜBERTRAGUNGSFUNKTION definiert.

$$G(s) = \frac{x_a(s)}{x_e(s)} \qquad \frac{10}{5} = 2$$

$$G(s) = \frac{K}{1+sT_1} = \frac{x_a(s)}{x_e(s)}$$

$$x_e(s) \equiv \text{SPRUNGFUNKTION} \equiv x_e(s) = \frac{1}{s} \equiv x_e(t) = \begin{cases} 1 & t>0 \\ 0 & t\leq 0 \end{cases}$$

$$x_a(s) = \frac{1}{s}\cdot\frac{K}{1+sT_1} = \frac{A}{s} + \frac{B}{1+sT_1}$$

$$\frac{1}{s} \cdot \frac{K}{(1+sT_1)} = \frac{A(1+sT_1) + B \cdot s}{s(1+sT_1)} \equiv$$

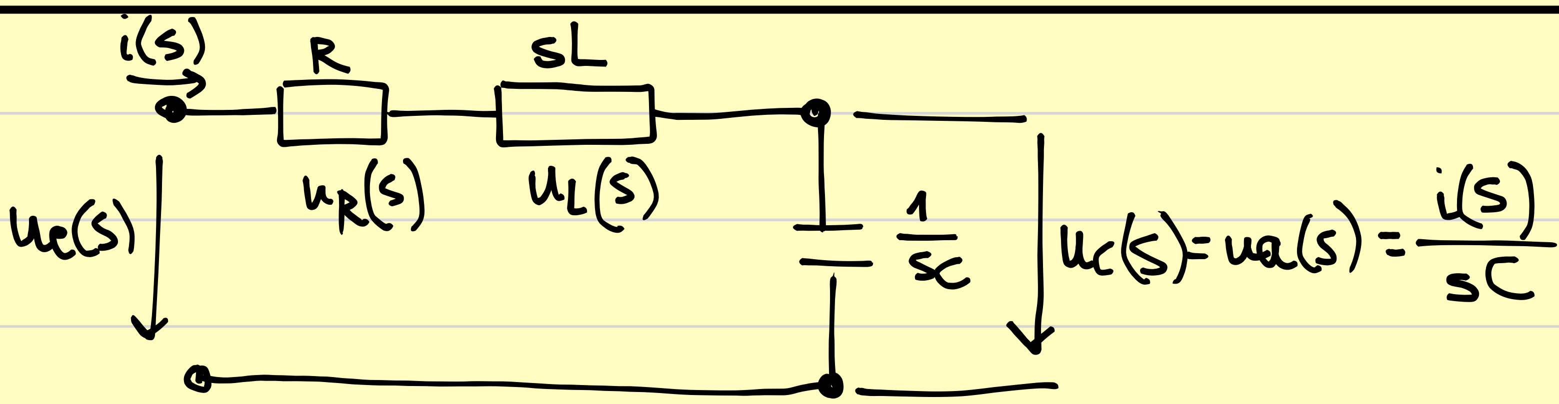
$$\equiv \quad K = A(1+sT_1) + Bs$$

$$s = 0 \longrightarrow K = A$$

$$s = \frac{-1}{T_1} \longrightarrow K = \frac{-B}{T_1} \longrightarrow B = -KT_1$$

$$x_a(s) = \frac{K}{s} - \frac{KT_1}{1+sT_1} \xrightarrow{L^{-1}} x_a(t) = K - KT_1 e^{-t/T_1} \quad ✓$$

Beispiel:



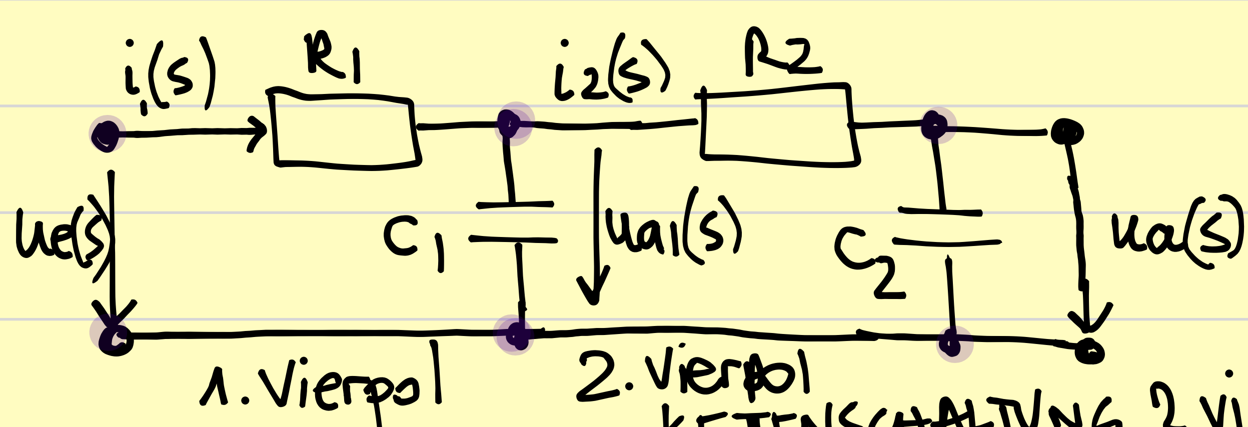
$$u_e(s) = u_R(s) + u_L(s) + u_a(s)$$ REIHENSCHWINGKREIS

$$u_e(s) = R\,i(s) + sL\,i(s) + u_a(s)$$

$$u_e(s) = RsC\,u_a(s) + sLsC\,u_a(s) + u_a(s)$$

$$G(s) = \frac{u_a(s)}{u_e(s)} = \frac{1}{s^2LC + sRC + 1}$$

Beispiel.



KETENSCHALTUNG 2 VIERPOLEN

Gegeben ist die Übertragungsfunktion:

$$G(s) = \frac{u_a(s)}{u_e(s)} = \frac{1}{s^2 T_1 T_2 + s(T_1 + T_2 + T_3) + 1}$$

$$T_1 = R_1 C_1 \quad T_2 = R_2 C_2 \quad T_3 = R_2 (C_1 + C_2)$$

Beispiel:

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 5s + 1}$$

$$s^2 + 5s + 1 = 0 \rightarrow s^* = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4}}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{21}}{2} = \begin{cases} -0'21 \\ -4'79 \end{cases}$$

$$s^2 + 5s + 1 = (s + 0'21)(s + 4'79)$$

$$G(s) = \frac{1}{(s + 0'21)(s + 4'79)} = \frac{A}{s + 0'21} + \frac{B}{s + 4'79}$$

$$1 = A(s + 4'79) + B(s + 0'21)$$

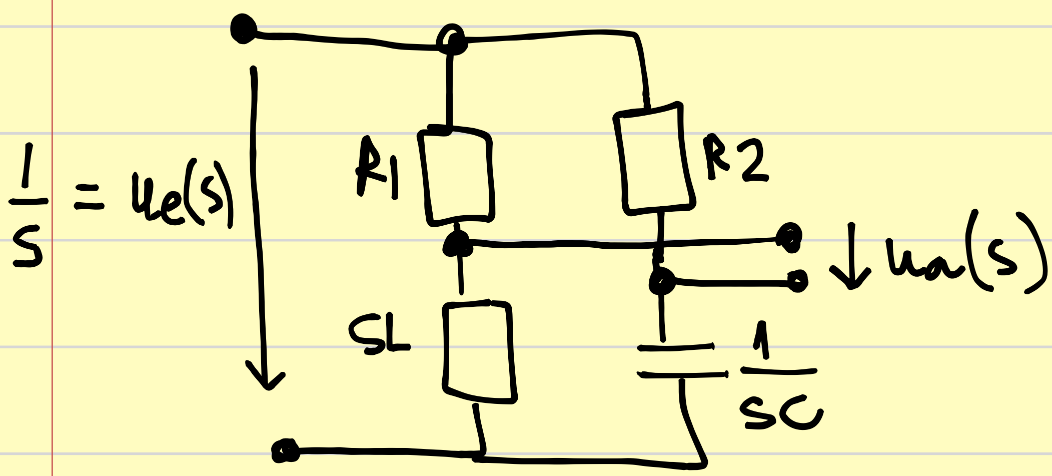
$$s^* = -0'21 \longrightarrow 1 = A(-0'21 + 4'79) \rightarrow A = 0'218$$

$$s^* = -4'79 \longrightarrow 1 = B(-4'79 + 0'21) \longrightarrow B = -0'218$$

$$G(s) = \frac{0'218}{s + 0'21} - \frac{0'218}{s + 4'79}$$

$$\boxed{\begin{aligned} L^{-1}\left(\frac{K}{s + d}\right) &= K \cdot e^{-dt} \\ L^{-1}\left(\frac{K}{Ts + 1}\right) &= L^{-1}\left(\frac{K}{T} \cdot \frac{1}{s + \frac{1}{T}}\right) = \frac{K}{T} e^{-t/T} \end{aligned}}$$

Aufgabe. RCL-BRÜCKENSCHALTUNG



$$G(s) = \frac{u_a(s)}{u_e(s)} = \frac{sT_1}{1+sT_1} - \frac{1}{1+sT_2} = \frac{s^2T_1T_2 - 1}{(1+sT_1)(1+sT_2)}$$

$$u_a(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{s^2T_1T_2 - 1}{(1+sT_1)(1+sT_2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{1+sT_1} + \frac{C}{1+sT_2}$$

$$s^2T_1T_2 - 1 = A(1+sT_1)(1+sT_2) + Bs(1+sT_2) + Cs(1+sT_1)$$

$$s^* = 0 \rightarrow -1 = A$$

$$s^* = \frac{-1}{T_1} \rightarrow \frac{T_2}{T_1} - 1 = B \cdot \frac{-1}{T_1}\left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right) \rightarrow B = \frac{T_2 - T_1}{\frac{T_2}{T_1} - 1} = T_1$$

$$s^* = \frac{-1}{T_2} \rightarrow \frac{T_1}{T_2} - 1 = C \cdot \frac{-1}{T_2}\left(1 - \frac{T_1}{T_2}\right) \rightarrow C = T_2$$

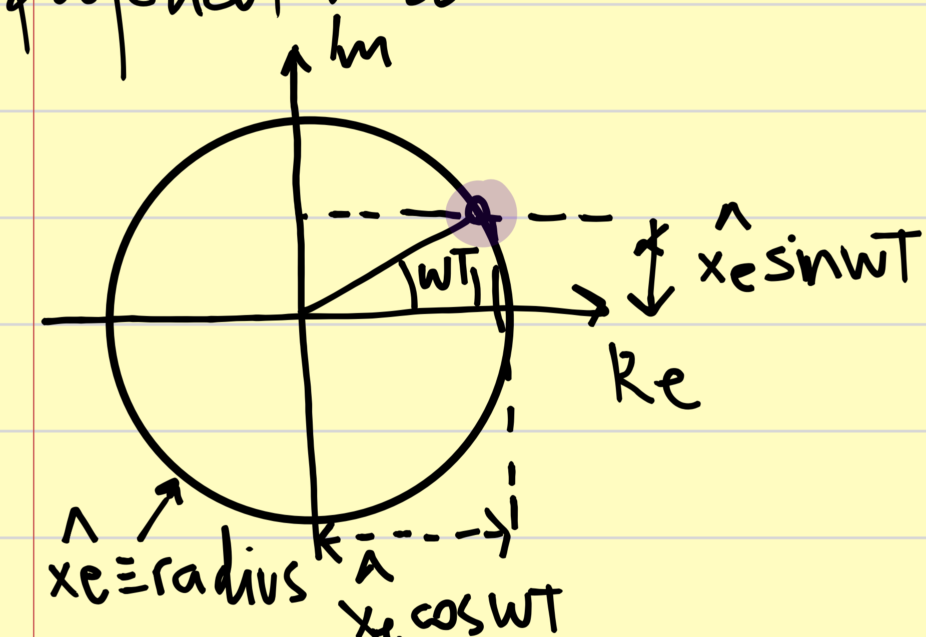
$$u_a(s) = \frac{-1}{s} + \frac{T_1}{1+sT_1} + \frac{T_2}{1+sT_2}$$

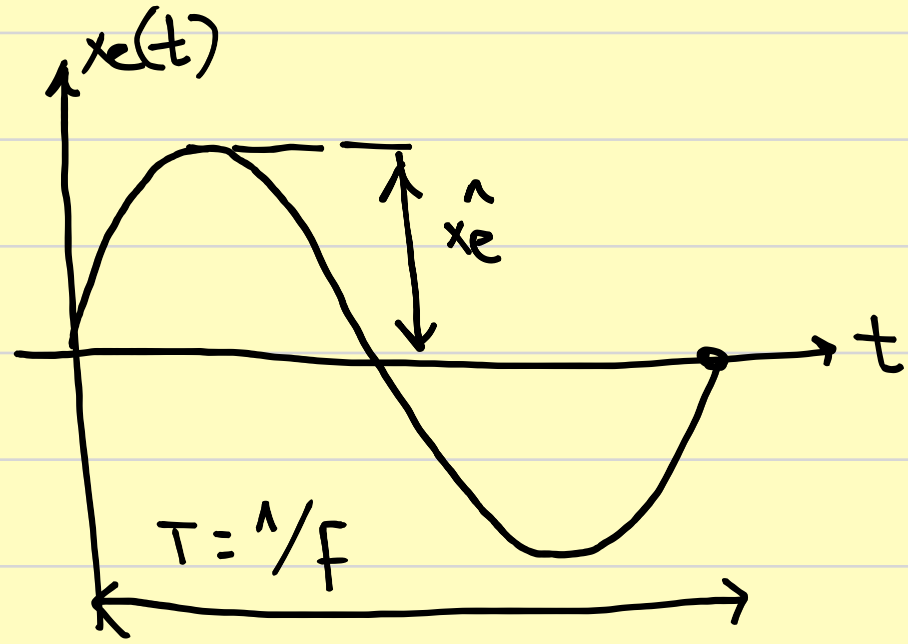
$$u_a(t) = -1 + e^{-t/T_1} + e^{-t/T_2}$$

$L^{-1}\left(\frac{k}{s+d}\right) = k e^{-dt}$
$L^{-1}\left(\frac{k}{Ts+1}\right) = \frac{k}{T} e^{-t/T}$

Beschreibung von Regelkreisen im Frequenzbereich

Die Rechnung bei sinnusförmigen Eingangsgröße wird besonders einfach, wenn man die Sinnusschwingung $x_e(t)$ aus einem, um den Ursprung der Gaußschen Zahlenebene rotierenden Zeiger entstanden denkt, der auf die imaginäre Achse projeziert wird:





Der Zeiger ⊙ ist durch beiden Komponenten $\hat{x}_e \cos\omega t$ und $j\hat{x}_e \sin\omega t$ eindeutig festgelegt.

Nach Euler $e^{j\omega t} = \cos\omega t + j\sin\omega t \rightarrow x_e(t) = \hat{x}_e e^{j\omega t}$

Das Verhältnis der Zeiger vom Ausgangs- zur Eingangsgröße bezeichnet man als **FREQUENZGANG**.

$$G(j\omega) = \frac{x_a(t)}{x_e(t)} = \frac{\hat{x}_a e^{j(\omega t+\varphi)}}{\hat{x}_e e^{j(\omega t)}} = \frac{\hat{x}_a}{\hat{x}_e} e^{j\varphi}$$

Beispiel: Gegeben ist die DGL $T_2^2 \ddot{x}_a(t) + T_1 \dot{x}_a(t) + x_a(t) = K x_e(t)$

Was ist der Frequenzgang?

Laplace: $T_2^2 s^2 x_a(s) + T_1 s\, x_a(s) + x_a(s) = K x_e(s)$

$s = j\omega$: $T_2^2 (j\omega)^2 x_a(j\omega) + T_1 j\omega\, x_a(j\omega) + x_a(j\omega) = K x_e(j\omega)$

$$G(j\omega) = \frac{x_a(j\omega)}{x_e(j\omega)} = \frac{K}{T_2^2 (j\omega)^2 + T_1 (j\omega) + 1} = \frac{K}{T_1 (j\omega) + \left(1 - (T_2 \omega)^2\right)}$$