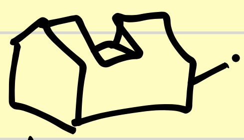
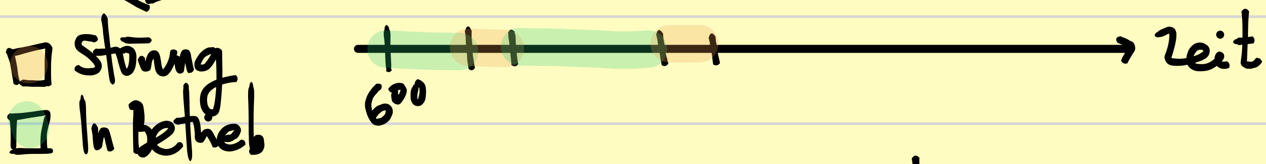
POISSON VERTEILUNG

Beispiel. Eine Maschine im Werk fällt ab und zu aus,
und geht somit auf Störung.

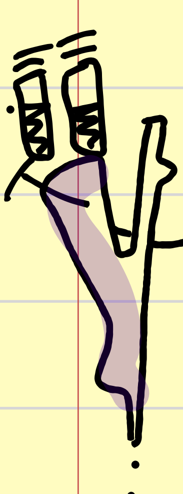




- Das Ereignis „Störung" $= X$ findet zufällig statt.
- Dieses Ereignis ist „Poisson" Verteilt.

Wenn die Anzahl Ereignisse in einer Periode [ZEIT] durch $X(t)$ dargestellt wird, dann unterliegt die ZUFALLSVARIABEL $X(t)$ einen POISSON-PROZEß mit FREQUENZ (RATE) $\lambda > 0$ wenn:

1) $X(t=0) = 0$
2) Die Anzahl Ereignisse in zwei nicht überlappenden Intervale sind UNABHÄNGIG voneinander.



DER PROZEß HAT KEIN GEDÄCHTNIS!

3) Die Anzahl Ereignisse sind Proportional zur Intervallänge.
4) Die W. von einem Ereignis ist „sehr klein".

DEF: $\boxed{f(x) = P(X=x) = \dfrac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^{x}}{x!}}$; $x = 0, 1, 2, 3, \ldots$

$x! = x \cdot (x-1) \cdot (x-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

wenn $p \to 0$ & $n \to \infty$ in der BINOMIALVERTEILUNG

$P(X \leq x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$, dann wird die BINOMIALVERT.

zu einer POISSONVERTEILUNG.

Beispiel. Die Anzahl Ausfälle einer Maschine verfolgt eine Poisson. Vert.
mit $\lambda = 2'2$ im Monat.

a) Was ist die W. dafür, dass es zu keinem Ausfall in einem Monat kommt?

$$P(X=0) = \frac{e^{-2'2} \cdot 2'2^0}{0!} = 0'1108$$

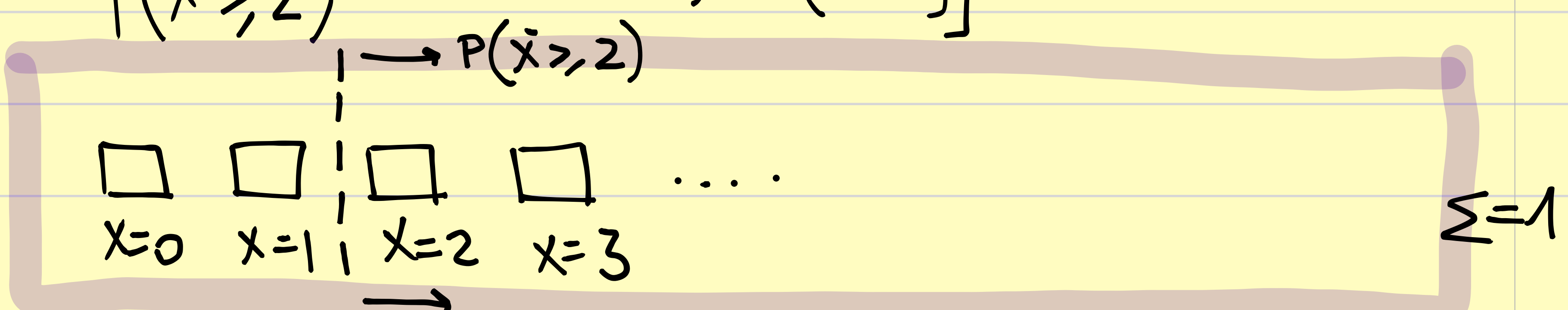
kein Ausfall $\qquad 0! = 1$

b) Was ist die W. dafür, dass es zu genau einem Ausfall in einem Monat kommt?

$$P(X=1) = \frac{e^{-2'2} \cdot 2'2^1}{1!} = 0'2438$$

c) Was ist die W. dafür, dass es mindestens 2 Ausfälle gibt?

$$P(X \geq 2) = 1 - \underbrace{\left[P(X=0) + P(X=1)\right]}_{P(X<2)} = 0'6454$$



d) Was ist die W. dafür, dass es mindestens 3 Ausfälle gibt?

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - \left[P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) \right] =$$

$$= 1 - \left[\underbrace{\frac{e^{-2'2} \cdot 2'2^{0}}{0!}}_{P(X=0)} + \frac{e^{-2'2} \cdot 2'2^{1}}{1!} + \frac{e^{-2'2} \cdot 2'2^{2}}{2!} \right] =$$

e) W. genau 3 Ausfälle gibt in ZWEI MONATE?

$$P(X=3) = \frac{e^{-\lambda_1} \lambda_1^{3}}{3!} = \frac{e^{-4'4} \, 4'4^{3}}{3!}$$

$\lambda_1 = 4'4$

$$\left.\begin{array}{l} 1 \text{ MONAT} \text{ — } 2'2 \text{ Ausfälle} \\ 2 \text{ MONATE} \text{ — } x \text{ ''} \end{array}\right\} x = \frac{2'2 \cdot 2}{1} = 4'4$$

f) W. genau 5 Ausfälle in einem halben Monat?

$$P(X=5) = \frac{e^{-\lambda_2} \cdot \lambda_2^{5}}{5!} = \frac{e^{-1'1} \cdot 1'1^{5}}{5!}$$

$\lambda_2 = 1'1$

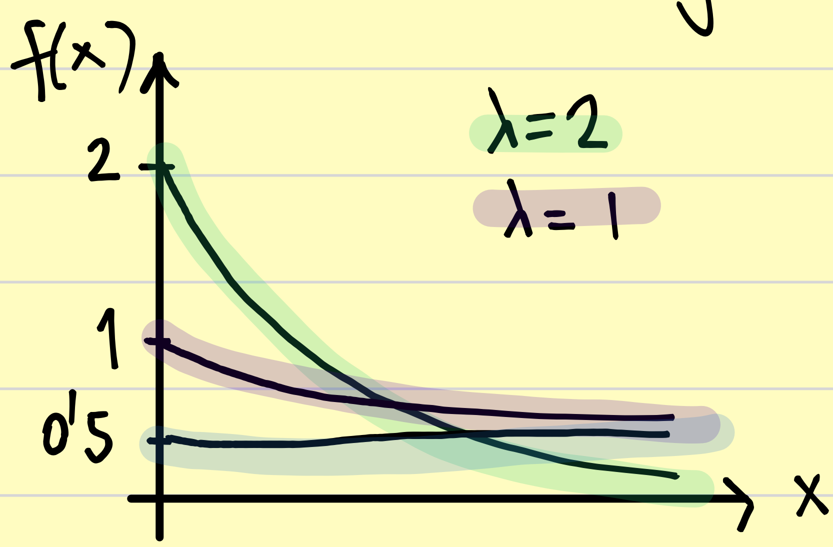
$$\left.\begin{array}{l} 1 \text{ MONAT} \text{ — } 2'2 \text{ Ausfälle} \\ 1/2 \text{ MONAT} \text{ — } x \text{ ''} \end{array}\right\} x = \frac{2'2 \cdot \frac{1}{2}}{1} = 1'1$$

EXPONENTIELLE VERTEILUNG

Eine Variable X ist exponentiell verteilt, wenn die WDF

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \end{cases}$$

λ = Rate: Anzahl Ereignisse pro Zeiteinheit im Poisson-Prozeß



$$\boxed{\begin{aligned} M_1(\text{exponentielle Vert.}) &= \frac{1}{\lambda} \\ m_2(\text{exponentielle Vert.}) &= \frac{1}{\lambda^2} \end{aligned}}$$

$$P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx = 1 - e^{-\lambda x}$$

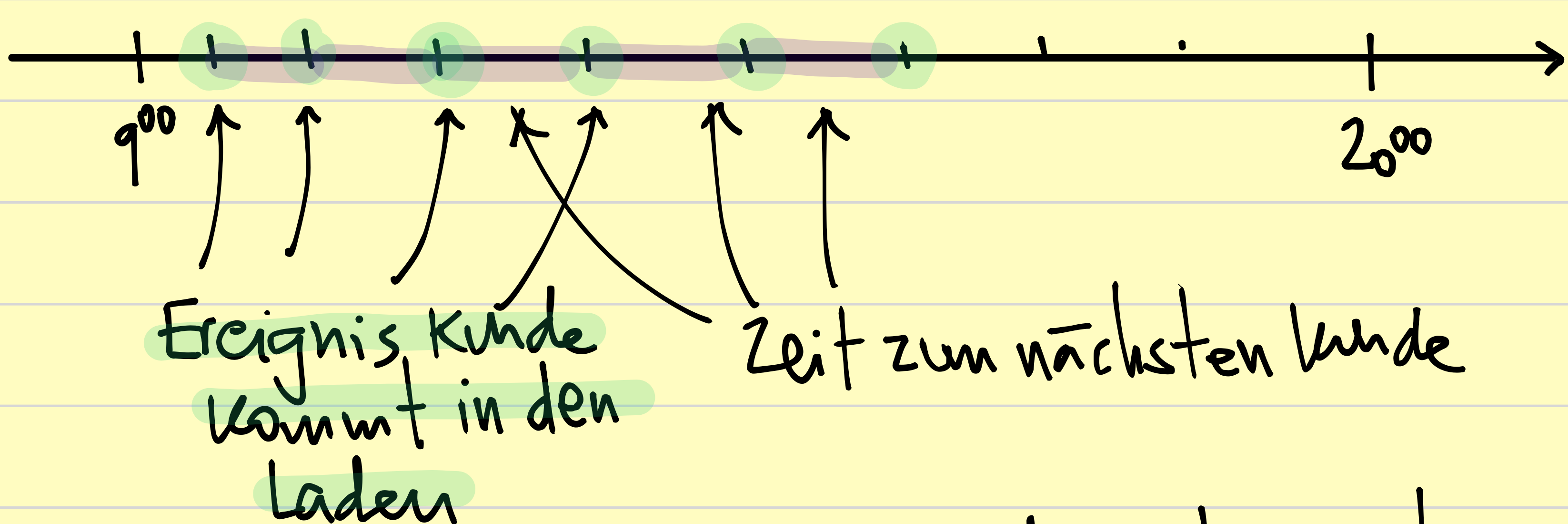
$$P(X > x) = 1 - P(X \leq x) = e^{-\lambda x}$$

Zusammenhang zw. POISSON-PROZEß & EXPONENTIELLE VERT.

- POISSON-PROZEß: wenn die Ereignisse in einem Poisson-Prozeß auftreten, beschreibt die Poisson Verteilung die Anzahl der Ereignisse in einem festen Intervall, während die Exponentialverteilung die Zeitabstande zw. den Ereignissen beschreibt.
- Wenn Ereignisse gemäß einer Poisson-Verteilung

auftreten, sind die Zeitabstände zw diesen Ereignissen exponentiell verteilt.

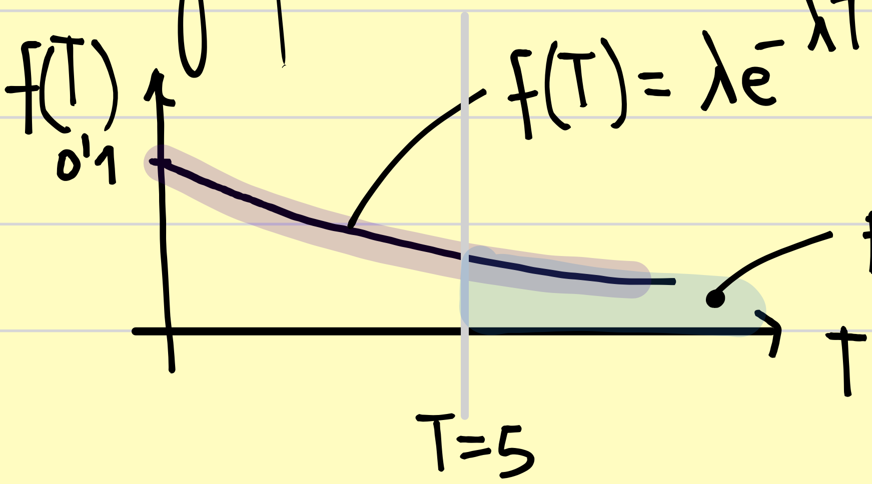
Beispiel. wenn die Ankunft von Kunden in einer Poisson. Verteilung folgt, dann ist die Zeit bis zur Ankunft des nächsten Kunden exponentiell verteilt.



Wenn die Ereignisse einen Poisson Prozeß folgen, dann, die Zeit ist exponentiell verteilt.

Beispiel: Die Zeit zw zwei Ausfällen einer Maschine ist exponentiell verteilt mit $\lambda = 0'1$.

a) Was ist die W. dafür, dass die Zeit zw. zwei Ausfällen größer 5 ist.



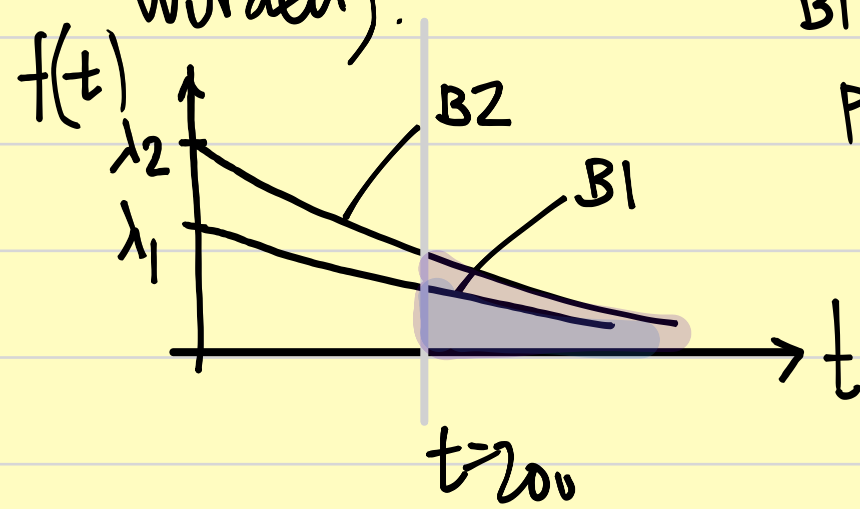
$$f(T) = \lambda e^{-\lambda T} = 0'1\, e^{-0'1 T}$$

$$P(T>5) = 1 - P(T<5) = 1 - \left[1 - e^{-0'1.5}\right] = e^{-0'1.5} = e^{-0'5}$$

Weil die Zeit zw. zwei Ausfällen exponentiell verteilt ist, die Ereignisse unterliegen einer Poisson. Verteilung

Beispiel. Die Lebensdauer T_1 & T_2 zweier elektrischer Bauteile B_1 & $B2$ seien exponentiell verteilt mit $\lambda_1 = \frac{1}{500}$ & $\lambda_2 = \frac{1}{300}$ (unabhängig voneinander)

a) Was ist die W. dafür, dass B_1 & $B2$ den Zeitpunkt $t_0 = 200$ überleben? (wenn sie in $t=0$ eingesetzt wurden).



B1

$$P(T_1 > t_0 = 200) = 1 - \left[P(T_1 < t_0 = 200)\right] =$$
$$= 1 - \left[1 - e^{-\lambda_1 \cdot 200}\right] = e^{-2/5}$$

B2

$$P(T_2 > t_0 = 200) = \ldots = e^{-\lambda_2 \cdot 200} = e^{-2/3}$$

WEIBULL. VERTEILUNG.

Ist eine flexible statistische Verteilung, die häufig zur Modellierung von Lebensdauern, Ausfallzeiten, und Zuverlässigkeitsanalysen verwendet wird.

Sie ist besonders nützlich, weil sie verschiedene Formen annehmen kann, je nachdem, welche Parameter gewählt werden, und somit verschiedene Arten von Prozeßen beschreiben kann.

WDF Weibull

$$f(x;\lambda,k) = \frac{k}{\lambda}\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{k-1} e^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{k}}$$

wobei:

- $x \geq 0$ die Zeit oder die beobachtete Variable ist,
- $\lambda > 0$ der SKALENPARAMETER ist (auch als Charakterisierte Lebensdauer bekannt).
- $k > 0$ der FORMPARAMETER ist (auch Weibull-Form genannt)

FORMPARAMETER ..k..

Die Formparameter bestimmt die Form der Verteilung und wie die W. sich über die Zeit (Variable) verteilt.

- wenn $k < 1$ → beschreibt die Verteilung eine abnehmende Ausfallrate. Das bedeutet, dass die W. eines Ausfalls im Laufe der Zeit abnimmt. Dies könnte auf ..frühe Ausfälle.. hinweisen, wie bei Produkten, die anfangs eine hohe Ausfallwahrscheinlichkeit haben, dann aber stabil laufen.
- wenn $k = 1$ → entspricht die Weibull Verteilung der Exponentialverteilung, was eine konstante Ausfallrate über die Zeit bedeutet. Dies deutet

darauf hin, dass die W. eines Ausfalls nich von der bisherigen Zeit abhängt. (nützlich für zufällige Ereignisse)

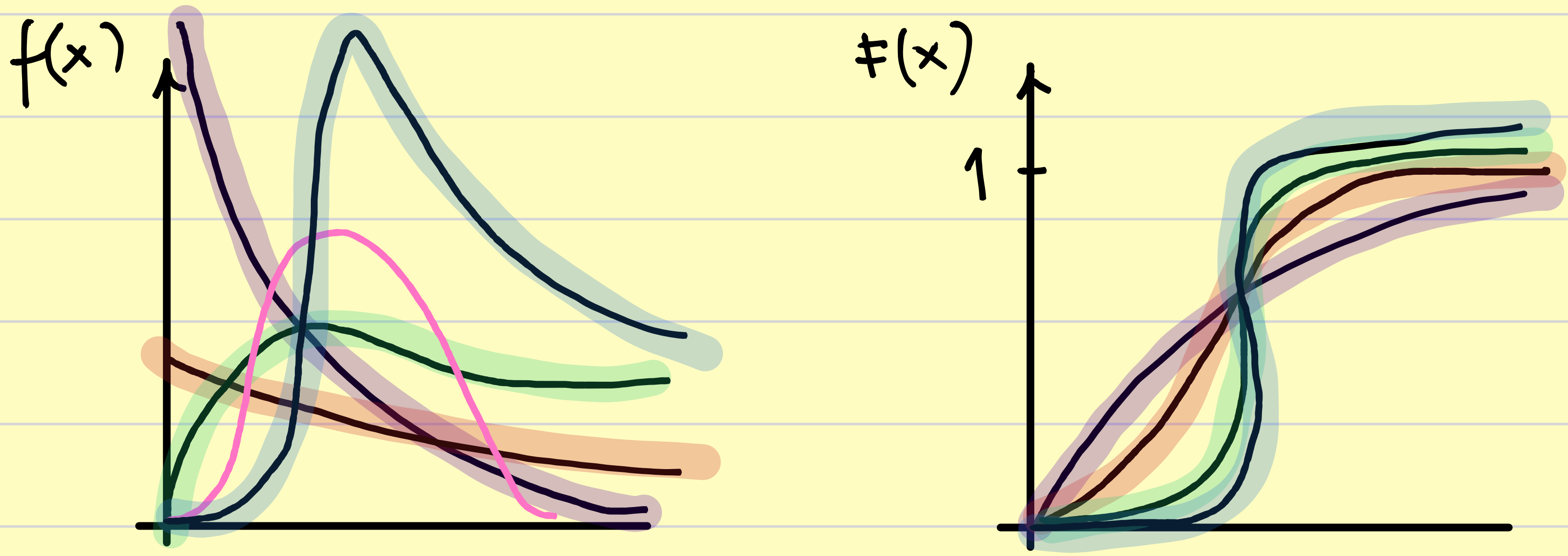
- wenn $K > 1$ $\longrightarrow$ beschreibt die Verteilung eine zunehmende Ausfallrate. Dies könnte zB das Verhalten alternde Systeme beschreiben, bei denen die W. eines Ausfall's mit der Zeit steigt.

SKALENPARAMETER λ:

Gibt eine Art „Zeitmaßstab" an. Er verschiebt die Verteilung auf der Zeitachse und gibt an, wann die meisten Ausfälle zu erwarten sind. Ein höherer λ-Wert bedeutet, längere Lebensdauer.

$$m_1 = \lambda \cdot \Gamma\left(1+\frac{1}{k}\right) \qquad m_2 = \lambda^2\left[\Gamma\left(1+\frac{2}{k}\right)-\left(\Gamma\left(1+\frac{1}{k}\right)\right)^2\right]$$

Gamma Funktion: $\Gamma(a) = \begin{cases} (a-1)! & a \in \mathbb{N} \\ \text{Tabelle} & a \notin \mathbb{N} \end{cases}$

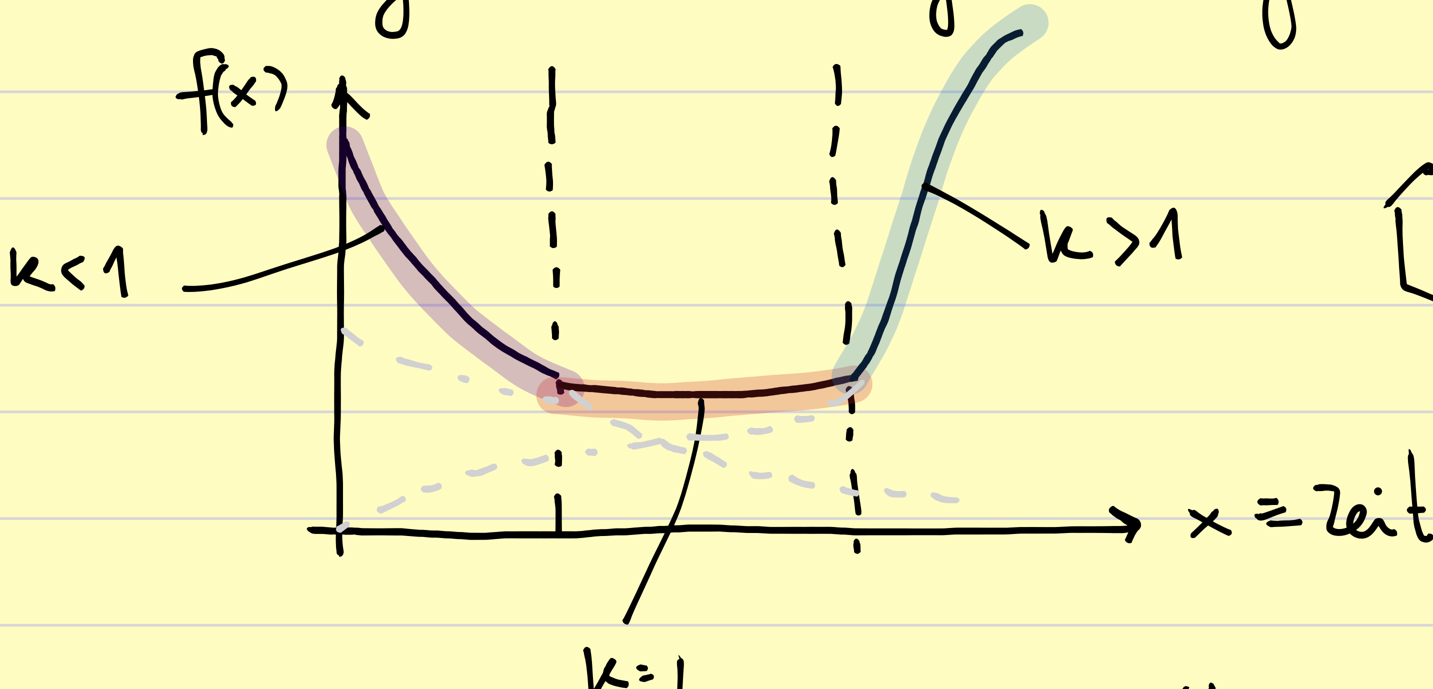


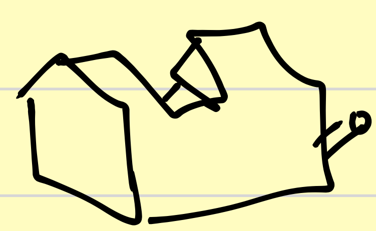
$\lambda = 1$; $k = 0'5$ $k = 1$ $k = 1'5$ $k \sim 3'602$ $k \sim 5$

EXP.
VERT.

NORMAL

Anwendung. Modellierung von Ausfallursachen.





ANLAUF PHASE | BETRIEB PHASE | VERSCHLEIß PHASE