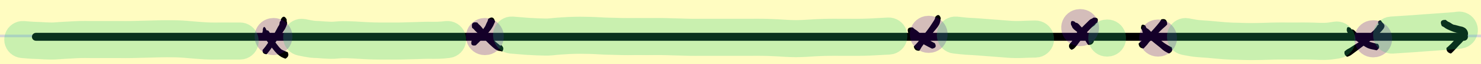
20251009_Statistik_WIN2

Poisson-Verteilung = Zufallsereignisse

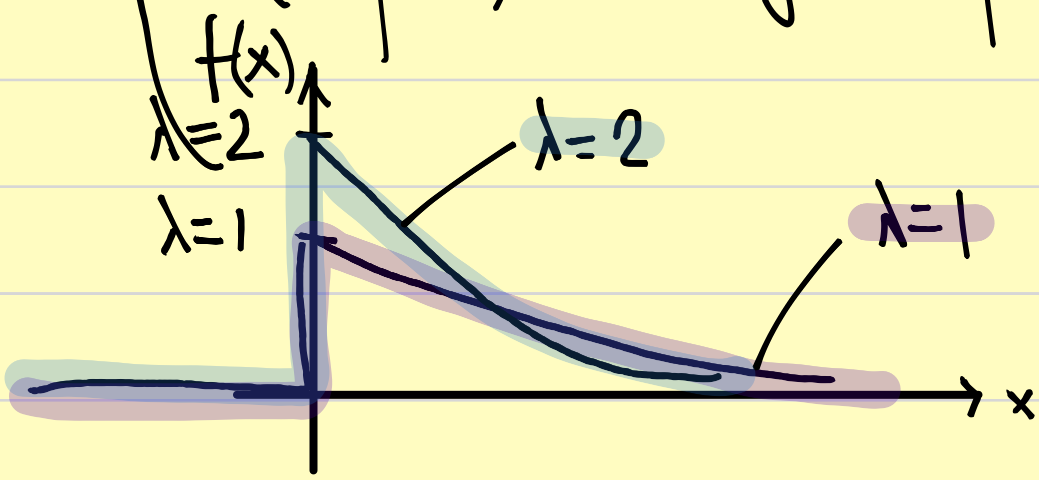


Exponentielle Verteilung ≡ Intervale zw. den Poisson-verteilten Ereignissen.

Eine Variable X ist exponentiell verteilt, wenn die

WDF $\boxed{f(x) = \begin{cases} 0 & x<0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \end{cases}}$.

λ ≡ RATE (Frequenz) der Ereignisse pro Zeiteinheit im Poisson-Prozeß



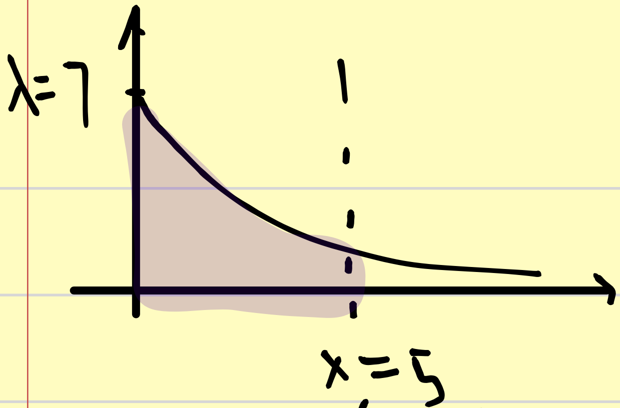
$M_{1,\text{Exp}} = \frac{1}{\lambda}$

$m_{2,\text{Exp}} = \frac{1}{\lambda^2} \rightarrow \sqrt{m_{2,\text{Exp}}} = \frac{1}{\lambda}$

$P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx = 1 - e^{-\lambda x}$

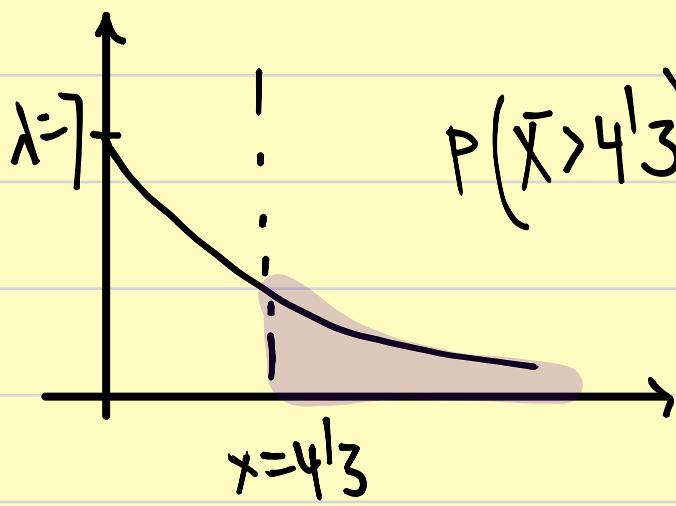
$P(X > x) = 1 - \left[1 - e^{-\lambda x}\right] = e^{-\lambda x}$

Beispiel: bitte berechnen Sie die W. dafür, dass die Zeit zw. zwei Maschinenausfällen einer Poisson-Verteilung mit $\lambda = 7 \frac{\text{Aus.}}{\text{Std}}$ kleiner ist als 5 Stunden.

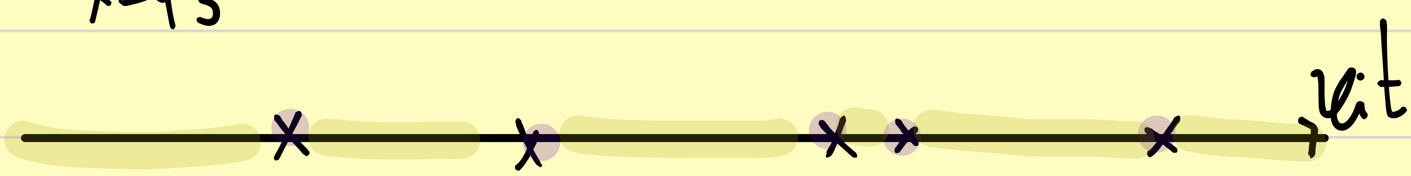


$$P(X\leq 5)=1-e^{-\lambda\cdot 5}=1-e^{-35}\cong 0'9999$$

Die W. dafür, dass die Zeit zw. Maschinenausfällen größer ist als 4'3 Std.



$$P(X>4'3)=e^{-\lambda\cdot 4'3}=e^{-7\cdot 4'3}=8'46\cdot 10^{-14}$$



POISSON: bei Poisson gibt es entweder kein Ausfall $(x=0)$, ein Ausfall $(x=1)$, ...

$$P(X=x)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}$$

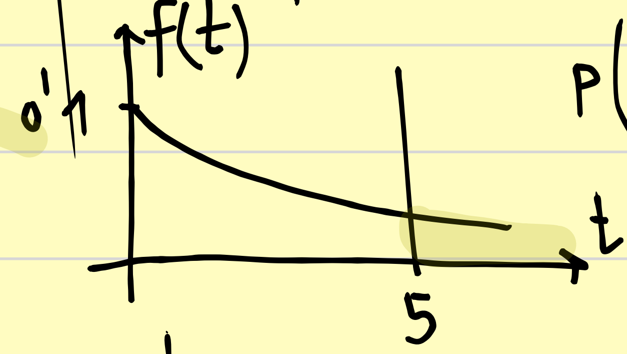
EXPONENTIELL: Die Zeit zw. Ausfällen in einem Poisson-Prozeß ist exponentiell verteilt.

$$P(X\leq x)=1-e^{-\lambda x}$$

Beispiel. die Zeit zw. zwei Ausfällen einer Maschine ist exponentiell verteilt mit $\lambda=0'1\ \frac{\text{Ausf.}}{\text{Std.}}$

a) Was ist die W. dafür, dass die Zeit zw. 2 Ausfällen größer 5 Std ist?

EXP.

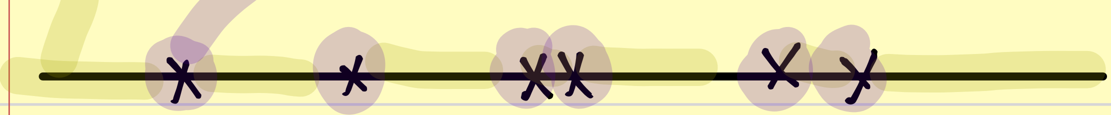


$$P(x>5) = 1 - P(x \le 5) = 1 - \left[1 - e^{-5 \cdot 0'1}\right] = e^{-0'5} = 0'61$$

b) Was ist die W. dafür, dass in einer Std. kein Ausfall stattfindet?

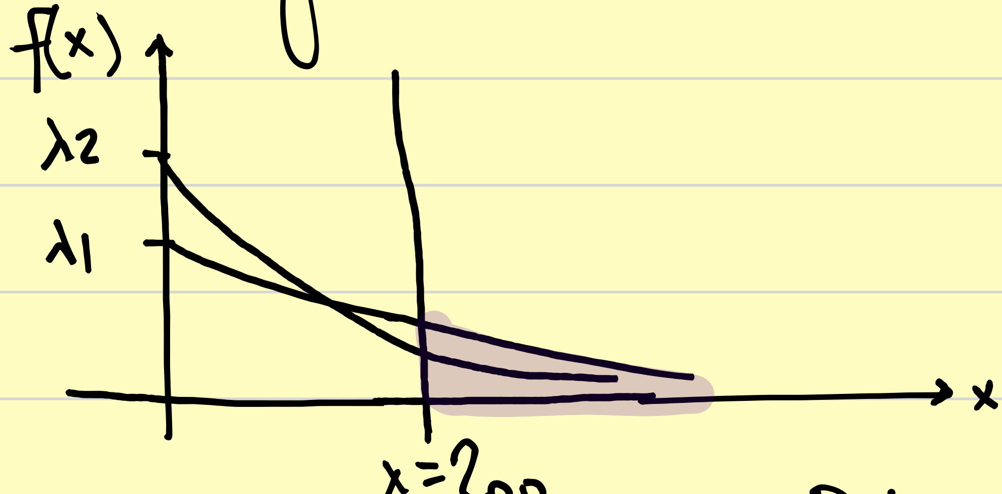
$$P(X=0) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^{x}}{x!} = \frac{e^{-5} \cdot 5^{0}}{0!} = 0'904$$

POISSON



Beispiel. Die Lebensdauer T_1 & T_2 zweier elektrischer Bauteilen B_1 & B_2 seien exponentiell verteilt mit jeweils $\lambda_1 = \frac{1}{500}$ & $\lambda_2 = \frac{1}{300}$ $\left[\frac{\text{Ausfällen}}{\text{Std}}\right]$ (unabhängig voneinander)

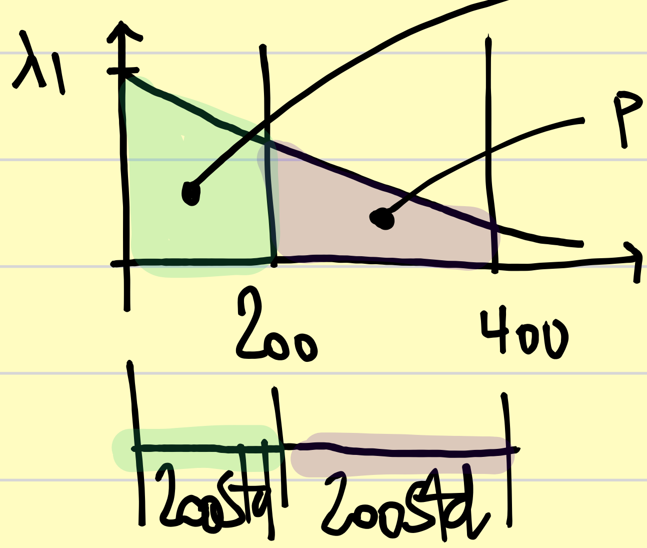
a) Was ist die W. dafür, dass B_1 & B_2 den Zeitpunkt $t_0 = 200$ Std ohne Ausfall erreichen?



$$P(x>200) = e^{-\lambda x} = \begin{cases} B_1: & e^{-\frac{200}{500}} = 0'67 \\ B_2: & e^{-\frac{300}{500}} = 0'51 \end{cases}$$

Ein POISSON-PROZEß hat kein Gedächtnis. Das bedeutet, was geschah in der Vergangenheit hat kein Einfluß auf die Zukunft.

b) Was ist die W. dafür, dass es zu KEINEM Ausfall kommt zw. $t_0 = 200$ std und $t_1 = 400$ std. (bei B1)



$$P(200 < X \leq 400) = P(X \leq 200) = 1 - e^{-\frac{200}{500}} = 0{,}33$$

c) Was ist die W. dafür, dass es zu KEINEM Ausfall kommt in einem 200 std Interval?

$$\lambda = \frac{1}{500} \frac{\text{Ausf.}}{\text{Std}} \xrightarrow{\times 200} \lambda^* = \frac{200}{500} \frac{\text{Ausfälle}}{200\,\text{Std}}$$

$$P(X=0) = \frac{e^{-\lambda^*} \cdot \lambda^{*0}}{0!} = \frac{e^{-\frac{200}{500}} \cdot 1}{0!} = e^{-\frac{200}{500}} = 0{,}67$$

WEIBULL-VERTEILUNG. Ist eine flexible statistische Verteilung, die häufig zur Modellierung von Lebensdauern, Ausfallzeiten, und Zuverlässigkeitsanalysen verwendet wird.

Sie ist besonders nützlich, weil sie verschiedene Formen annehmen kann, je nach dem, welche Parameter gewählt werden, und somit verschiedene Arten von Prozeßen beschreiben kann.

WDF: $$\boxed{f(x;\lambda,k) = \frac{k}{\lambda}\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{k-1} \cdot e^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{k}}}$$

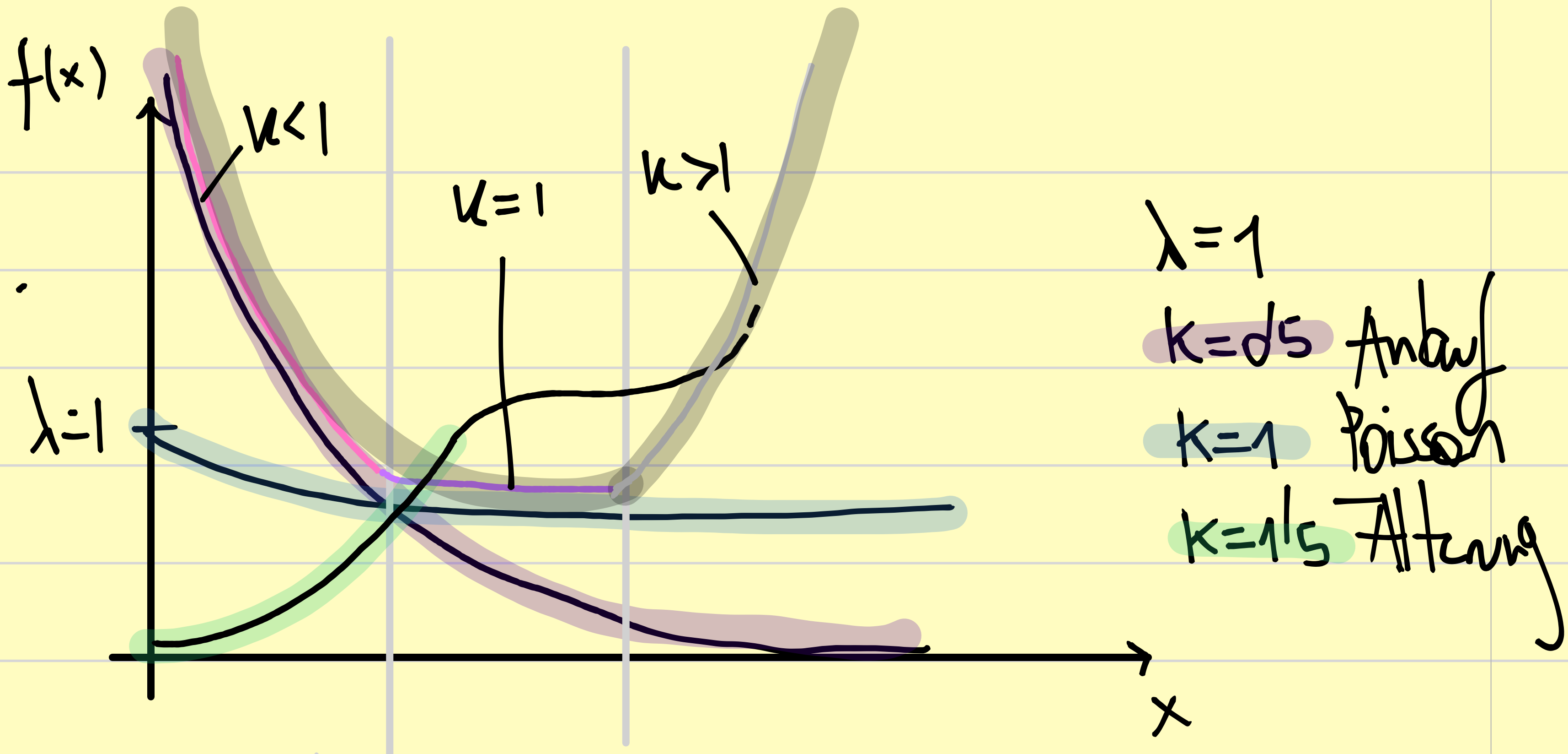
$\lambda > 0$. SKALENParameter (auch Charakteristische Lebensdauer)

$k > 0$. FORMPARAMETER

Formparameter: bestimmt die Form der Verteilung.

- $k < 1$. Die Ausfallrate ist abnehmend.
  ANLAUFPHASE.
- $k = 1$. Die Ausfallrate ist konstant.
  Ausfallphase ohne Gedächtnis: Poissonprozeß
- $k > 1$. Die Ausfallrate ist zunehmend.
  ALTERUNGSPHASE.

Skalenparameter: Verschiebt die Verteilung auf der Zeitachse und beschreibt die Qualität des Prozeßes.



k=0,5 Anlauf   k=1 Poisson   k=1,5 Alterung

$$m_1 = \lambda \cdot \Gamma\left[1+\frac{1}{k}\right] \qquad m_2 = \lambda^2\left[\Gamma\left(1+\frac{2}{k}\right) - \left[\Gamma\left(1+\frac{1}{k}\right)\right]^2\right]$$

$$\Gamma(a) = \begin{cases} (a-1)! & a \in \mathbb{N} \\ \text{Tabelle} & a \notin \mathbb{N} \end{cases}$$

(*) die Formeln werden ggf gegeben in die Prüfung.