Übung zu den HAUPTKOMPONENTEN.

Ein Werkleiter möchte wissen um wieviel sich die Qualität verbessern sollte um 10% Kostenreduktion zu erreichen. Dafür setzt er ein Managementsystem mit zwei Kennzahlen auf und nimmt Zahlen über 5 Wochen auf.

- €/Stück: Kosten: [30, 27, 25, 26, 24]
- #fehlerhafte Teile pro Million Teile produziert [ppm]: [3300, 2800, 2600, 2400, 2300]

parts per Million

Strategie. 1. Hauptkomponente

"

1. Eigenvektor der KOVARIANZMATRIX

! Die Daten verlaufen in unterschiedlichen Skalen.

30 → 31	€	Die Änderung um eine Einheit ist nicht gleich.
3300 → 3301	ppm	

1. SCHRITT. Daten vergleichbar machen!!

NORMIERUNG: wir bringen alle Datenreihen zwischen NULL & EINS.

$$x\ €/\text{Stück}: \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ \end{array} \left[30, 27, 25, 26, 24\right] \quad Y\ \text{ppm}: \begin{array}{ccccc} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 \end{array} \left[3300, 2800, 2600, 2400, 2300\right]$$

$$X^*_{[0,1]}: \left[\frac{30-24}{30-24}=1;\ \frac{27-24}{30-24}=0{,}5;\ \frac{25-24}{30-24}=0{,}167;\ \frac{26-24}{30-24}=0{,}33;\ \frac{24-24}{30-24}=0\right]$$

$$x_i^* = \frac{x_i - x_{min}}{x_{max} - x_{min}}$$

x_{min}: kleinste Zahl in der Liste

x_{max}: größte Zahl in der Liste

$$Y^*_{[0,1]}: \left[\frac{3300-2300}{3300-2300}=1;\ \frac{2800-2300}{3300-2300}=0{,}5;\ \frac{2600-2300}{3300-2300}=0{,}33;\ \frac{2400-2300}{3300-2300}=0{,}1;\ \frac{2300-2300}{3300-2300}=0\right]$$

$$X^*_{[0,1]}: [1, 0{,}5, 0{,}167, 0{,}33, 0]$$

$$Y^*_{[0,1]}: [1, 0{,}5, 0{,}33, 0{,}1, 0]$$

2. SCHRITT. KOV. MATRIX

$$\text{KOV MAT.}[X^*, Y^*] = \begin{bmatrix} VAR[X^*] & KOV[X^*, Y^*] \\ KOV[X^*, Y^*] & VAR[Y^*] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}1178 & 0{,}1418 \\ 0{,}1418 & 0{,}12478 \end{bmatrix}$$

$$X^*: \ \bar{x}^* = \frac{1+0{,}5+0{,}167+0{,}33+0}{5} = 0{,}3994$$

$$VAR[X^*] = \frac{\sum (x_i^* - \bar{x}^*)^2}{n} = \frac{(1-0{,}3994)^2 + (0{,}5-0{,}3994)^2 + (0{,}167-0{,}3994)^2 + (0{,}33-0{,}3994)^2 + (0-0{,}3994)^2}{5}$$

$$= 0{,}1178$$

Y^*: $\bar{y}^* = \dfrac{1+0'5+0'33+0'1+0}{5} = 0'386$

$$VAR[Y^*] = \frac{\sum (y_i^* - \bar{y}^*)^2}{n} = \frac{(1-0'386)^2+(0'5-0'386)^2+(0'33-0'386)^2+(0'1-0'386)^2+(0-0'386)^2}{5}$$

$$= 0'12478$$

$$KOV[X^*,Y^*] = \frac{\sum (x_i^* - \bar{x}^*)(y_i^* - \bar{y}^*)}{n-1} =$$

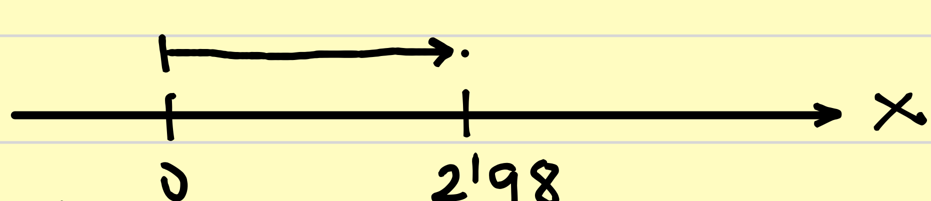
$$= \frac{(1-0'3994)(1-0'386)+(0'5-0'3994)(0'5-0'386)+(0'167-0'3994)(0'33-0'386)+(1'33-0'3994)(0'1-0'386)+(0-0'3994)(0-0'386)}{4}$$

$$= 0'1418$$

$$\boxed{\text{KOV MAT.}[X^*,Y^*] = \begin{bmatrix} VAR[X^*] & KOV[X^*,Y^*] \\ KOV[X^*,Y^*] & VAR[Y^*] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0'1178 & 0'1418 \\ 0'1418 & 0'12478 \end{bmatrix}}$$

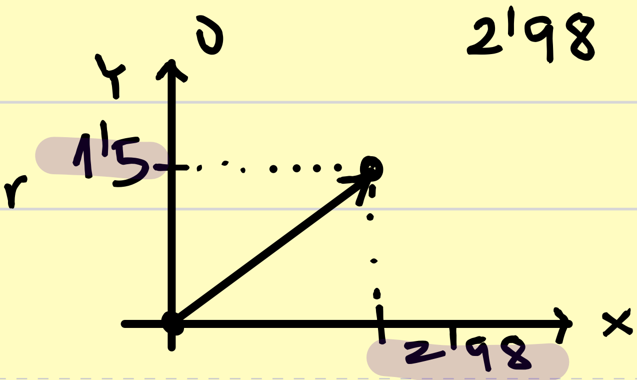
3. SCHRITT. EIGENVEKTOREN & EIGENWERTE

Zahl.



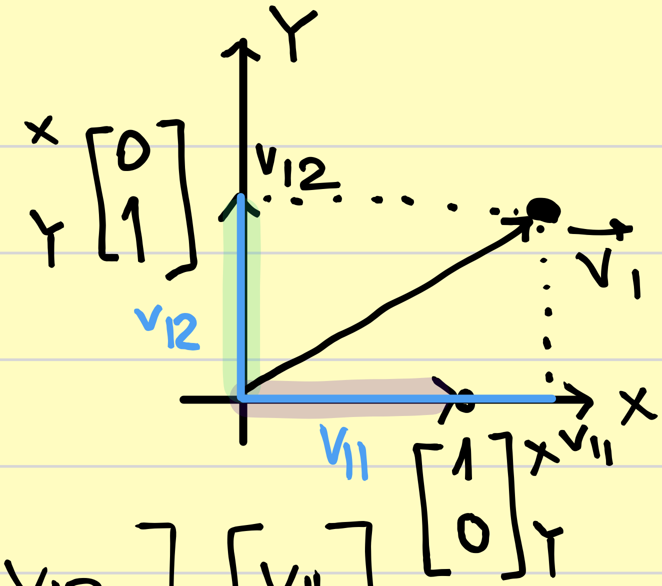
$[2'98]$

Vektor



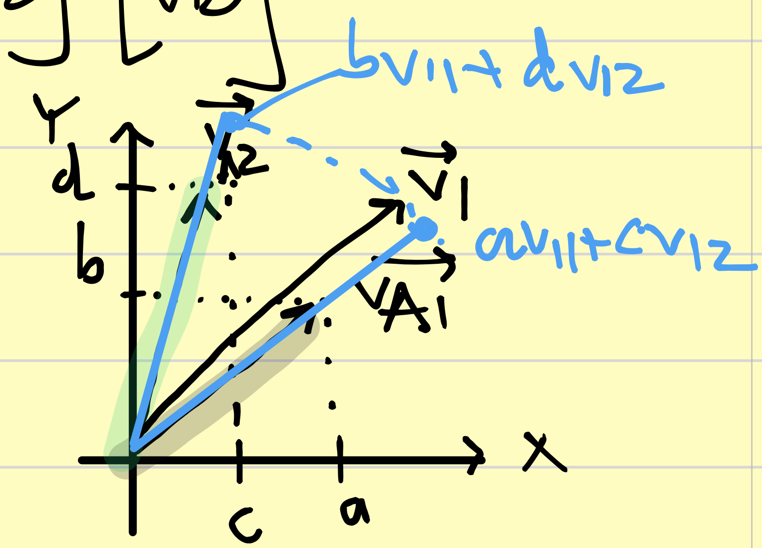
$$\vec{v} = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 2'98 \\ 1'5 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} X \\ Y \end{array} \end{array}$$

Matrix: $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$



$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{\vec{v}_1}{\begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} v_{11} + 0 \cdot v_{12} \\ 0 \cdot v_{11} + 1 \cdot v_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ \vec{v}_{A1} & \vec{v}_{A2} \end{array} \end{array}$$

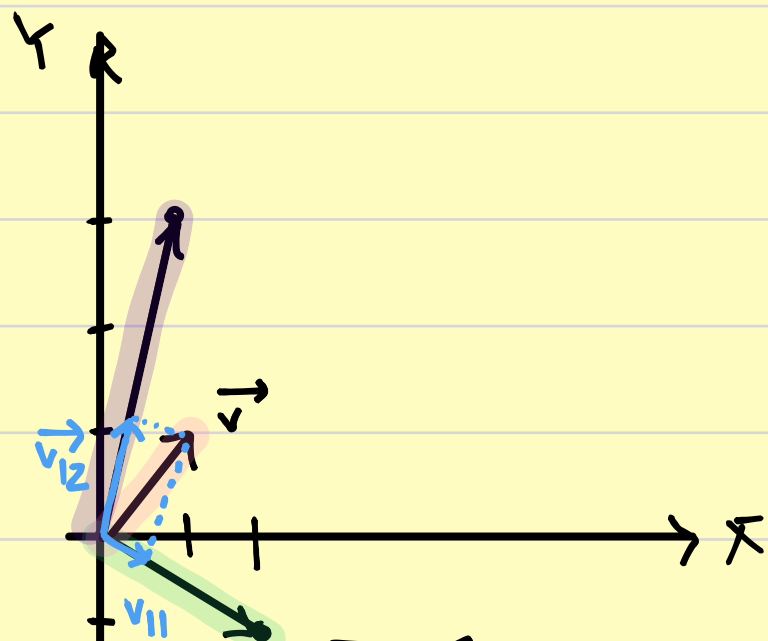


$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \cdot v_{11} + c \cdot v_{12} \\ b \cdot v_{11} + d v_{12} \end{bmatrix}$$

Beispiel:

$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

$\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$



$$A\vec{v} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \\ -1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\text{MAT.}}{\text{KOV}}\left[X^*,Y^*\right]=\begin{bmatrix} VAR[X^*] & KOV[X^*,Y^*] \\ KOV[X^*,Y^*] & VAR[Y^*] \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0'1178 & 0'1418 \\ 0'1418 & 0'12478 \end{bmatrix}$$

$$\det\left[A-\lambda I\right]=0 \rightarrow \det\left[\begin{bmatrix} 0'1178 & 0'1418 \\ 0'1418 & 0'12478 \end{bmatrix}-\lambda\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right]=0$$

$$\rightarrow \det\left[\begin{bmatrix} 0'1178-\lambda\cdot 1 & 0'1418-\lambda\cdot 0 \\ 0'1418-\lambda\cdot 0 & 0'12478-\lambda\cdot 1 \end{bmatrix}\right]=0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \det\left[\begin{bmatrix} 0'1178-\lambda & 0'1418 \\ 0'1418 & 0'12478-\lambda \end{bmatrix}\right]=0 \qquad \det\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}=a.d-c.b$$

$$\left(0'1178-\lambda\right)\left(0'12478-\lambda\right)-0'1418^2=0 \longrightarrow \qquad ax^2+bx+c=0$$

$$\lambda^2-0'24258\lambda-0'00541=0 \qquad x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\lambda=\frac{0'24258\pm\sqrt{0'24258^2-4\left(-0'00541\right)}}{2}=$$

$$=\frac{0'24258\pm\sqrt{0'08048}}{2}=\frac{0'24258\pm0'2836}{2}=\nearrow \lambda_1=0'263$$

Eigenwert NR 1.

EIGENVEKTOR NR 1.

$$A\cdot\vec{V_1}=\lambda_1\cdot\vec{V_1}$$

$$\underset{\text{MAT.}}{\text{KOV}}\left[X^*,Y^*\right]=\begin{bmatrix} VAR[X^*] & KOV[X^*,Y^*] \\ KOV[X^*,Y^*] & VAR[Y^*] \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0'1178 & 0'1418 \\ 0'1418 & 0'12478 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0'1178 & 0'1418 \\ 0'1418 & 0'12478 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{bmatrix} = 0'263 \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{bmatrix} \rightarrow$$

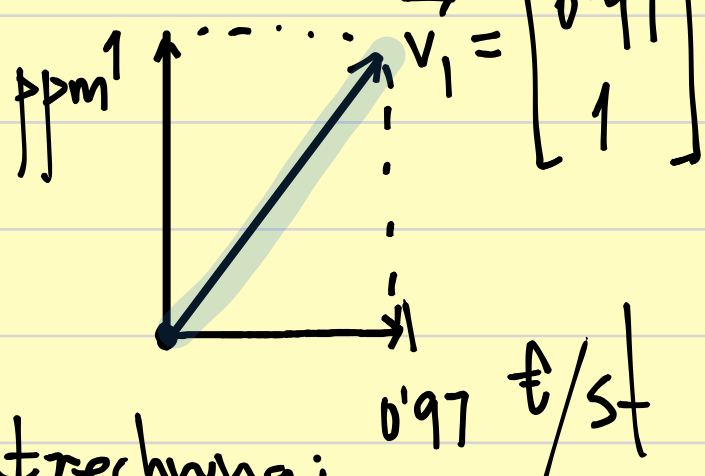
$\rightarrow$ $0'1178 \cdot v_{11} + 0'1418 \cdot v_{12} = 0'263 \cdot v_{11}$ $\rightarrow$

$0'1418 \cdot v_{11} + 0'12478 \cdot v_{12} = 0'263 \cdot v_{12}$

$\rightarrow$ $0'1418\, v_{12} = 0'263\, v_{11} - 0'1178\, v_{11}$ $\rightarrow$

$$\rightarrow 0'1418\, v_{12} = 0'1452\, v_{11} \rightarrow v_{11} = \frac{0'1418}{0'1452} v_{12} = 0'9765 v_{12}$$

$$v_{12} = 1 \rightarrow v_{11} = 0'97 \rightarrow \vec{v_1} = \begin{bmatrix} 0'97 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} €/st. \\ ppm \end{matrix}$$



10% kostensenkung

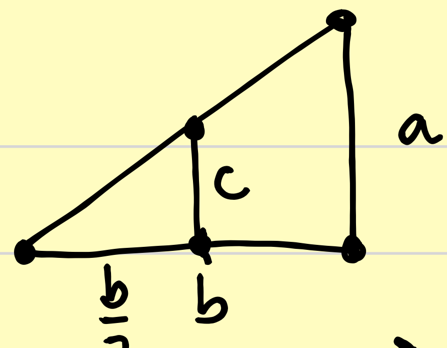
Dreisatrechnung:

$$\left.\begin{matrix} 0'97 & \text{——} & 1 \\ -10\% & \text{——} & ? \end{matrix}\right\}$$

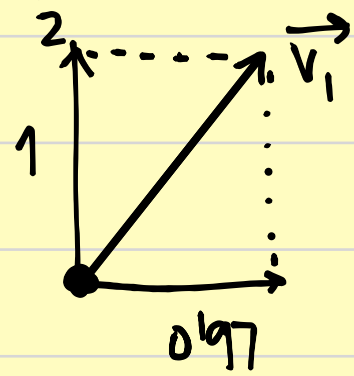
$$\boxed{? = \frac{-10\%}{0'97} = -10'309\% \text{ Senkung der ppm.}}$$

- Jede Einheit Qualitäts. verbesserung, bedeutet 0'97 Einheiten Kostensenkung.

$$\vec{v_1} = \begin{bmatrix} 0'97 \\ 1 \end{bmatrix}$$



$$\frac{a}{b} = \frac{c}{\frac{b}{2}} \rightarrow c = \frac{a}{2}$$



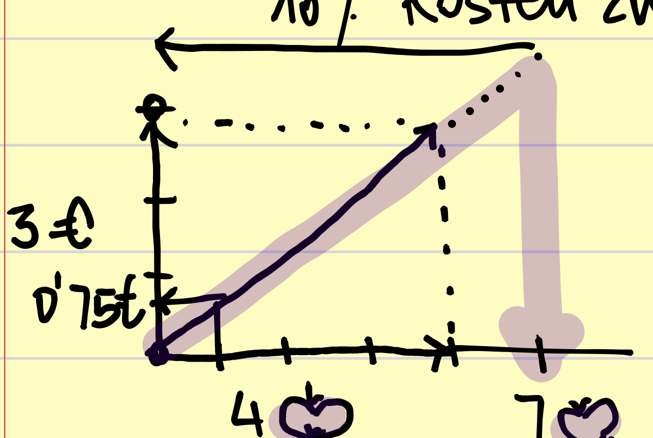
$$\boxed{\frac{0'97}{1} = \frac{-10\%}{x\%}} \rightarrow x\% = \frac{-10\% \cdot 1}{0'97}$$

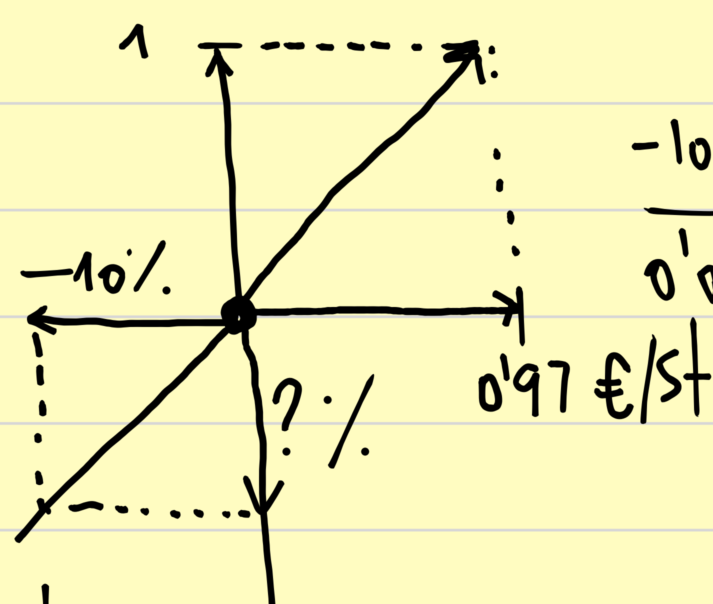
- 0'97 Einheiten Änderung in den Kosten ergeben 1 Einheit Änderung in der Qualität
- -10% Einheiten Änderung in den Kosten, ergeben x% Einheiten Änderung in der Qualität

Frage: 4 Äpfel kosten 3 €. Wie viel kosten 7 Äpfel?

1 Apfel kostet $\frac{3€}{4 \text{ Äpfel}} \times 7$ Äpfel.

Frage: 1 Einheit Reduktion ppm. kostet 0'97 Einheiten Kosten. Wie Einheiten Reduktion ppm. brauchen wir um 10% Kosten zu senken?





$$\frac{-10\%}{0'97}$$

- Die Kosten betragen heute 30 €/Stück. Wie viel ppm | -10%.

sollte ich erreichen um auf 27 €/Stück zu kommen?

Die heutige ppm sind 3000.

$\downarrow -10'309\%$

$\boxed{2690}$ ppm