

Statistikübungen für WIN2 - Vertiefte Übungen zu Wahrscheinlichkeitstheorie

Prof H4. <https://www.profh4.com>

30. April 2024

1 Kolmogorov Axiome und seine Folgerungen

Die Kolmogorov Axiome bilden die Grundlage der Wahrscheinlichkeitstheorie und haben wesentliche Folgerungen für das Verständnis von Wahrscheinlichkeiten.

Übungen

1. Beweisen Sie, dass für zwei disjunkte Ereignisse A und B , die Wahrscheinlichkeit ihrer Vereinigung $P(A \cup B)$ gleich der Summe ihrer Einzelwahrscheinlichkeiten ist, also $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
2. Zeigen Sie, dass für jedes Ereignis A die Wahrscheinlichkeit seines Komplements $P(A^c)$ durch $1 - P(A)$ gegeben ist.
3. Berechnen Sie $P(A \cup B)$ für die Ereignisse A und B mit den Wahrscheinlichkeiten $P(A) = 0.3$, $P(B) = 0.4$ und $P(A \cap B) = 0.1$.
4. Erklären Sie, warum die Wahrscheinlichkeit eines sicheren Ereignisses 1 ist.
5. Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit der leeren Menge 0 ist.
6. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass es entweder regnet oder schneit, wenn $P(\text{Regen}) = 0.2$, $P(\text{Schnee}) = 0.1$, und $P(\text{Regen} \cap \text{Schnee}) = 0.05$.
7. Beweisen Sie die allgemeine Regel für die Vereinigung zweier Ereignisse: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

8. Verifizieren Sie die Inklusions-Exklusions-Prinzip für drei Ereignisse A , B und C :

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C).$$

9. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass beim Würfeln eine Zahl anders als 6 erscheint.
10. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein Ereignis A mit $P(A) = 0.7$ in zwei unabhängigen Durchführungen mindestens einmal eintritt.

2 Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Bedingte Wahrscheinlichkeiten sind Wahrscheinlichkeiten eines Ereignisses unter der Voraussetzung, dass ein anderes Ereignis bereits eingetreten ist.

Übungen

1. Gegeben ist ein medizinischer Test mit einer Sensitivität von 95%. Wenn eine Person bekanntermaßen die Krankheit hat, wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Test positiv ausfällt?
2. In einer Urne befinden sich 3 rote, 5 schwarze und 2 grüne Kugeln. Eine rote Kugel wird gezogen und wieder zurückgelegt. Danach wird erneut eine Kugel gezogen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass auch diese Kugel rot ist.
3. In einem Kartenspiel sind 12 von 52 Karten Bildkarten (Könige, Damen, Buben). Wenn bekannt ist, dass eine gezogene Karte eine Bildkarte ist, berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass es sich um einen König handelt.
4. In einer Universität sind 60% der Studierenden weiblich. Von den weiblichen Studierenden studieren 30% Informatik. Wenn ein Informatikstudent zufällig ausgewählt wird, wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass dieser Student weiblich ist? (Berechnen Sie zuerst den Anteil der weiblichen Informatikstudierenden an der Gesamtstudentenschaft.)
5. Ein Alarmsystem wird durch Bewegung ausgelöst und funktioniert in 70% der Fälle korrekt. Wenn der Alarm ausgelöst wird, wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass tatsächlich eine Bewegung stattgefunden hat? (Annahme: Die Wahrscheinlichkeit einer zufälligen Bewegung an einem Tag beträgt 5%.)

6. Dunkle Wolken führen in 30% der Fälle zu Regen. Wenn an 40% der Tage dunkle Wolken beobachtet werden, wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass es regnet, gegeben, dass dunkle Wolken am Himmel sind?
7. Ein Student wählt zufällig eine Frage aus einem Pool, der zu 40% aus leichten, zu 50% aus mittleren und zu 10% aus schweren Fragen besteht. Wenn der Student eine leichte Frage richtig beantwortet, wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass es sich bei der gewählten Frage um eine leichte Frage handelt? (Gehen Sie davon aus, dass der Student eine leichte Frage mit einer Wahrscheinlichkeit von 90% richtig beantwortet.)
8. Angenommen, 70% der Autos in einer Stadt sind Dieselfahrzeuge, und die Wahrscheinlichkeit, dass ein Dieselauto eine Umweltprüfung nicht besteht, beträgt 5%. Wenn ein Auto die Prüfung nicht besteht, wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass es ein Dieselauto ist?
9. Ein Sicherheitssystem meldet zu 90% korrekt Sicherheitsverletzungen, gibt jedoch in 2% der Fälle falsche Alarmer. Wenn ein Alarm ausgelöst wird, wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine tatsächliche Sicherheitsverletzung vorliegt?
10. In einem Krankenhaus beträgt das Verhältnis von Mädchen zu Jungen bei Geburten 55 zu 45. Wenn ein Paar zwei Kinder hat und das erste ein Mädchen ist, wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass auch das zweite Kind ein Mädchen ist? (Gehen Sie von der Unabhängigkeit der Geschlechter der Kinder aus.)

3 Satz von Bayes

Der Satz von Bayes ist ein mächtiges Werkzeug in der Wahrscheinlichkeitsrechnung, um bedingte Wahrscheinlichkeiten zu aktualisieren, basierend auf neuen Informationen.

Übungen

1. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person tatsächlich die Krankheit hat, wenn sie positiv auf eine Krankheit getestet wird, die bei 1 von 1000 Personen auftritt und der Test zu 99% genau ist.
2. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass es an einem Tag, an dem ein Unfall passiert ist, geregnet hat, wenn 30% der Tage regnerisch

sind und an regnerischen Tagen zu 80% Unfälle aufgrund von Regen passieren.

3. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein verbotener Gegenstand vorliegt, wenn ein Sicherheitsscanner, der 95% der verbotenen Gegenstände erkennt, einen Alarm auslöst und die Wahrscheinlichkeit, dass ein Passagier versucht, einen verbotenen Gegenstand durchzuführen, bei 0.1% liegt.
4. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine als Spam markierte E-Mail tatsächlich Spam ist, wenn 5% der E-Mails Spam sind, der Filter 98% des Spams erkennt und 1% der legitimen E-Mails fälschlicherweise als Spam markiert.
5. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass jemand Träger eines bestimmten Gens ist, wenn er positiv getestet wird und der genetische Test eine Genauigkeit von 99% hat, während 3% der Bevölkerung Träger sind.
6. Wenn bekannt ist, dass ein Flug verspätet ist, bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Verspätung auf technische Probleme zurückzuführen ist, wenn 20% der Verspätungen technisch bedingt sind und 30% wetterbedingt.
7. Wenn ein Student eine Multiple-Choice-Frage richtig beantwortet und zufällig rät, berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass er geraten hat, wenn die Chance, durch Raten richtig zu antworten, 25% beträgt.
8. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein als fehlerhaft identifiziertes Produkt tatsächlich einen Fehler hat, wenn der Produktionsprozess eine Fehlerquote von 2% hat und der Test 90% der Fehler erkennt.
9. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein als selten ausgeliehen klassifiziertes Buch tatsächlich selten ausgeliehen wird, wenn 10% der Bücher selten ausgeliehen sind und der Algorithmus 85% dieser selten ausgeliehenen Bücher korrekt identifiziert.
10. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person tatsächlich eine seltene Krankheit hat, wenn sie positiv getestet wird, die Krankheit in der Bevölkerung mit einer Rate von 1% auftritt und der Test eine Falsch-Positiv-Rate von 5% hat.