Zinsrechnung

Zinsen sind das Entgelt für ein leihweise überlassenes Kapital.

Nachschüssige Zinsen sind Zinsen die am Ende einer (zeitlichen) Periode fällig werden.

PARAMETER.

- p. Zinssatz.
- q. Zinsfaktor $= q = 1 + \frac{p}{100}$
- K_0. Anfangskapital (Kapital zu Beginn)
- K_n. Endkapital (Kapital nach der n-ten Periode)

1 Einfache Verzinsung

Bei der einfachen Verzinsung werden in den einzelnen Perioden nur die Zinsen für das Anfangskapital gezahlt, die bisher gezahlten Zinsen werden nicht mitverzinst.

- Die Zinsen nach „n" Perioden berechnen wir:

Z nach 1 Jahr: $z_1 = K_0 \cdot \frac{p}{100}$

Z nach 2 Jahr: $z_2 = K_0 \cdot \frac{p}{100} \cdot 2$

...

Z nach n-ten Jahr: $z_n = K_0 \cdot \frac{p}{100} \cdot n$

Für das Endkapital K_n gilt: $K_n = K_0 + z_n = K_0 + K_0 \cdot \frac{p}{100} \cdot n \rightarrow \boxed{K_n = K_0\left(1 + n \cdot \frac{p}{100}\right)}$

Beispiel: Eine Privatperson hat einem Freund für fünf Jahre 100000€ zu einen Zinssatz von 6% geliehen. Wie hoch ist das Endkapital?

$$K_n = K_0\left(1 + n \cdot \frac{p}{100}\right) = 10^5 \cdot \left(1 + 5 \cdot \frac{6}{100}\right) = 130\,000€$$

Durch die Umformung der Formel, lassen sich K_0, n, und p berechnen:

$$\boxed{K_0 = \frac{K_n}{1 + n \cdot \frac{p}{100}}} \quad \boxed{n = \left(\frac{K_n}{K_0} - 1\right) \cdot \frac{100}{p}} \quad \boxed{p = \left(\frac{K_n}{K_0} - 1\right) \cdot \frac{100}{n}}$$

Aufgabe: Ein Kapital soll in zehn Jahren bei 5% Zinsen 54.000€ betragen. Wie hoch muss das Anfangskapital bei einfacher Verzinsung sein?

Aufgabe: Wann verdoppelt sich ein Kapital bei 6% Zinsen und einfacher Verzinsung?

2 Zinseszinsrechnung

Bei der Zinseszinsrechnung werden sowohl das Anfangskapital als auch die Zinsen in den Perioden verzinst. Das heißt, die Zinsen werden dem Kapital jeweils zugeschlagen und von da an mitverzinst.

- Das Anfangskapital entwickelt sich folgendermaßen:

Anfangskapital : K_0

↙ 7

Kapital nach dem 1. Jahr: $K_1 = K_0 + K_0 \cdot \frac{p}{100} = K_0 \cdot \left(1+\frac{p}{100}\right) = K_0 \cdot q$

Kapital nach dem 2. Jahr: $K_2 = K_1 + K_1 \cdot \frac{p}{100} = K_1 \cdot \left(1+\frac{p}{100}\right) = K_0 \cdot q \cdot q = K_0 q^2$

. . .

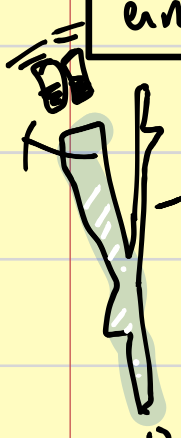
Kapital nach dem n. Jahr: $\boxed{K_n = K_0 \cdot q^n}$

Beispiel: Jemand hat 100000 € für fünf Jahre zu einem Zinssatz von 6% bei einer Bank angelegt. Wie hoch ist das Endkapital?

$K_n = 10^5 \cdot \left(1+\frac{6}{100}\right)^5 = 133822{'}6$ €

Die Bestimmung von K_0 bei gegebenem K_n, q, und n bezeichnet man als Bestimmung des BARWERTES oder DISKONTIERUNG (ABZINSUNG) eines Kapitals.

Die Diskontierung lässt in den Wirtschaftswissenschaften Vergleiche zw. zu verschiedenen Zeiten fälligen Kapitalen zu.



$K_0 = \frac{1}{q^n} \cdot K_n$

$\frac{1}{q^n}$ wird als ABZINSFAKTOR bekannt.

Beispiel. Herr H. will seiner Tocher Mareike in zehn Jahren ein Studium mit 50000 € finanzieren. Er kann einen Sparvertrag mit 7% abschließen. Welche Summe muss er jetzt einzahlen?

$$K_0 = K_n \cdot \frac{1}{q^n} \rightarrow K_0 = 50000 \cdot \frac{1}{1{'}07^{10}} = 25417{'}46 \text{ €}$$

Beispiel. Peter kann in fünf Jahren für einen Oldtimer (Kaufpreis 7500€) 10000€ und in zehn Jahren 15000€ erhalten. Er könnte sein Geld alternativ für 11% Zinsen anlegen. Vergleichen Sie die Barwerte.

$K_0 = 7500$ €

$K_0 = 10000 \cdot \left(\frac{1}{1{,}11^5}\right) = 5934{,}51$ €

$K_0 = 15000 \cdot \left(\frac{1}{1{,}11^{10}}\right) = 5282{,}77$ €

Es ist sinnvoller, das Geld zu 11% Zinsen anzulegen.

Durch Umformung der Formel $K_n = K_0 \cdot q^n$ ergeben sich K_0, p, n.

$$K_0 = \frac{1}{q^n} \cdot K_n$$

$$p = (q-1) \cdot 100 = \left[\sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} - 1\right] \cdot 100$$

$$n = \frac{\log \frac{K_n}{K_0}}{\log q}$$

Aufgaben: Wann verdoppelt sich ein Kapital bei 6% Zinseszinsen?

Aufgaben: Frau S. will 150000 € für fünf Jahre anlegen. Sie erhält zwei Angebote:

- Bank A. bietet ihr 6,5% Zinseszinsen.
- Bank B. zahlt ihr nach 5 Jahren 200000 € aus.

Welches Angebot ist günstiger?

Begründen Sie über:

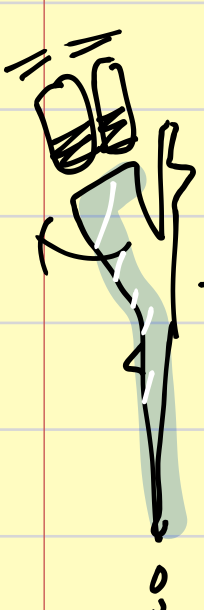
a) Vergleich der Endkapitale b) der Barwerte c) der Zinssätze

③ **Unterjährige Verzinsung** Bei der unterjährigen Verzinsung handelt es sich um eine Zinseszinsrechnung, bei der die Intervalle der Verzinsung kleiner als ein Jahr sind.

Beispiel. Legt ein Sparer 10000 € zu 2% halbjährigen Zinsen an, erhält er nach sechs Monaten 200 € Zinsen, die dem Anfangskapital zugerechnet (10200 €) und bereits im zweiten Halbjahr mitverzinst werden. Die Zinsen im zweiten Halbjahr betragen 204 €. Das Endkapital beträgt nach einem Jahr 10404 €.

Demnach wächst das Kapital nach einem Jahr bei einem Jahreszins von 4% auf 10400 €.

Handelt es sich allgemein um eine unterjährige Verzinsung mit „m" Zinsperioden pro Jahr und dem Jahreszinssatz „p", so beträgt der Zinssatz pro Periode p/m. Damit verändert sich die Formel der Zinseszinsrechnung für K_n:



Zinseszinsrechnung	unterjährige Verzinsung.
n Zinsperioden	$n \cdot m$ Zinsperioden
p Zinssatz	$\frac{p}{m}$ Zinssatz
$K_n = K_0 \cdot \left(1+\frac{p}{100}\right)^n = K_0 \cdot q^n$	$K_n = K_0 \cdot \left(1+\frac{p/m}{100}\right)^{n \cdot m} = K_0 \cdot \left(1+\frac{p}{m \cdot 100}\right)^{n \cdot m}$

Beispiel. Bei jährlicher Verzinsung erhält man aus einem Kapital von 100000 € nach fünf Jahren bei einem Zinssatz von 6% 133822'58 €.
Wie hoch wäre das Endkapital bei monatlicher Verzinsung?

$$K_n = 100000 \cdot \left[1 + \frac{6}{12 \cdot 100}\right]^{12 \cdot 5} = 134885{'}02 \text{ €}$$

FAZIT: Bei unterjährigen Verzinsung wächst also ein Kapital schneller als bei der jährlichen Verzinsung, obwohl der Jahreszinssatz „p" derselbe ist.