

RENTENRECHNUNG

Def. Unter einer Rente versteht man in der Finanzmathematik gleichbleibende Zahlungen, die in regelmäßigen Abständen geleistet werden.

RENTE: (Parameter)

r : RATE (einzelne Zahlungen - gleichbleibend)

R_n : Rentenendwert (Gesamtwert einer Rente am Ende der Zahlungen)

R_0 : Rentenbarwert (Gesamtwert einer Rente am Anfang der Zahlungen)

q : Zinsfaktor (damit werden die Renten verzinst)

Ableitung der Formel zur Berechnung des Rentenendwerts:

Bei NACHSCHÜSSIGER RENTE (Zahlungen sind am Ende des Jahres fällig) wird die 1. Rate " r " am Ende des 1. Jahres gezahlt. Nach Ablauf von " n " Jahren ist diese erste rate $(n-1)$ mal verzinst worden. Der Endwert der ersten rate " r " am Ende der Laufzeit beträgt $r \cdot q^{n-1}$

| Jahr | Rate | Anzahl der Verzinsungen | Endwert der Rate |
|-------|------|-------------------------|-------------------|
| 1 | r | $n-1$ | $r \cdot q^{n-1}$ |
| 2 | r | $n-2$ | $r \cdot q^{n-2}$ |
| ... | | | |
| $n-2$ | r | 2 | $r \cdot q^2$ |
| $n-1$ | r | 1 | $r \cdot q^1$ |
| n | r | 0 | $r \cdot q^0 = r$ |

$$R_n = \sum \text{Raten};$$

(*) Am Ende vom 1. Jahr, die Rate „ r “ wird „ $n-1$ “ mal verzinst gewesen sein. Deshalb ist der Endwert $r \cdot q^{n-1}$

(**) Am Ende vom 2. Jahr, die Rate „ r “ wird „ $n-2$ “ mal verzinst, daher ist der Endwert der Rate $r \cdot q^{n-2}$.

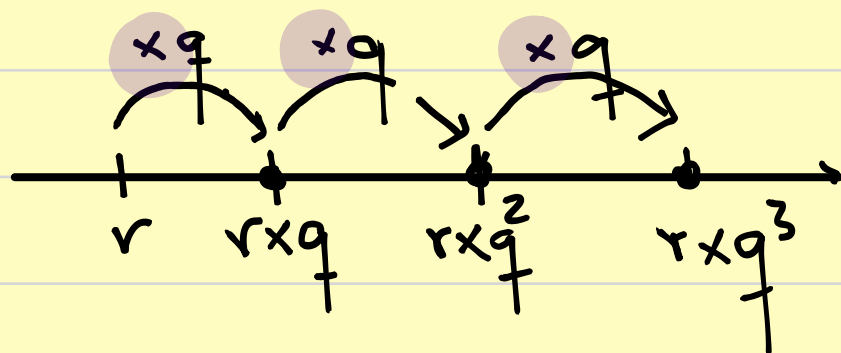
Der Rentenendwert setzt sich aus der Summe der Endwerten

Zusammen:

REIHE

$$R_n = r \cdot q^{n-1} + r \cdot q^{n-2} + \dots + r \cdot q + r = r \cdot \sum_{i=1}^n q^{i-1} =$$

GEOMETRISCHE



$$R_n = r \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

NACHSCHÜSSIGE RENTE
(Zahlung am Ende)

Beispiel. Frau Maier fchte ab dem 66. Lebensjahr zusätzlich zu Ihrer Rente 10 Jahre lang über einen jährlichen Betrag von 6000 € verfügen (nachschüssig).

a) Wie hoch muss das Kapital am 66. Geburtstag sein, wenn sie einen Zinssatz von 3% unterstellt?
 Gefragt wird nach dem Barwert der Zusatzrente zum 66. Geburtstag? (R_0)

$$R_n = r \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$R_0 = \frac{R_n}{q^n} = \frac{1}{q^n} \cdot r \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = 6000 \cdot \frac{1{,}03^{10} - 1}{1{,}03 (1{,}03 - 1)}$$

$$R_0 = \frac{R_n}{q^n} = 51181{,}22 \text{ €}$$

Es werden n Perioden gezahlt.

b) Wie hoch ist der Endwert der Rente?

$$R_n = R_0 \cdot q^n = 51181{,}22 \cdot 1{,}03^{10} = 68783{,}3 \text{ €}$$

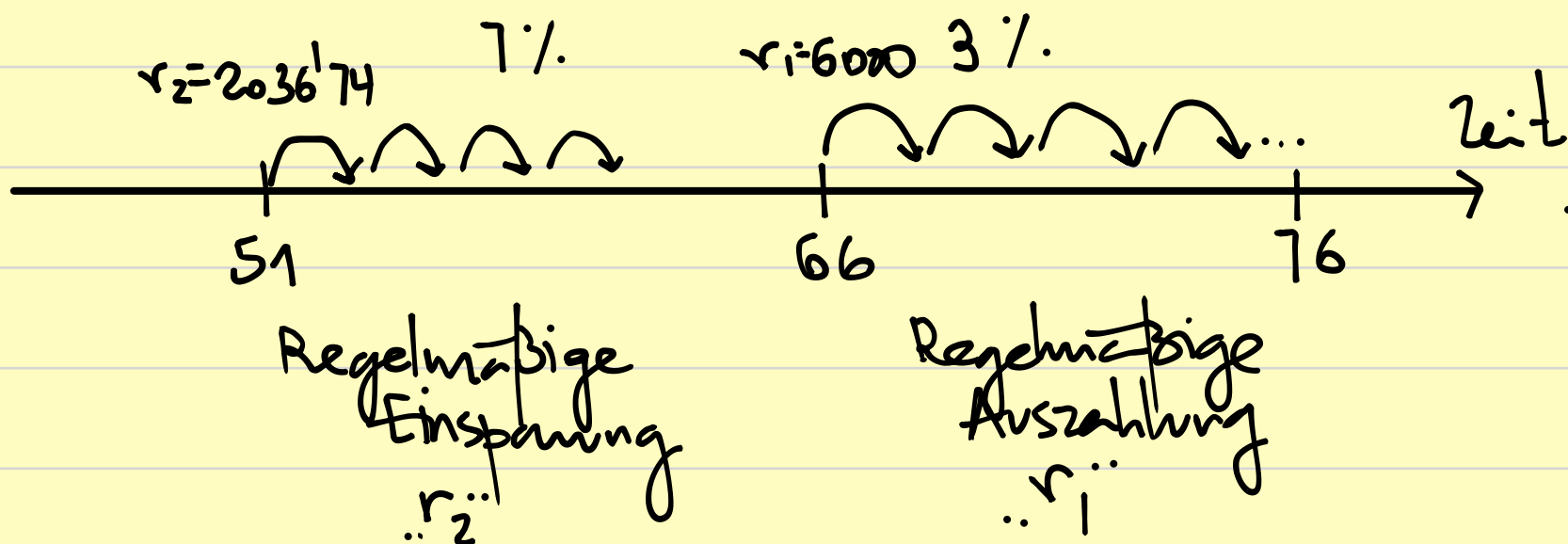
Kapital am Anfang
verzinst über 10 Perioden
Kapital am Ende

c) Welche regelmäßigen jährlichen Einzahlungen muss sie leisten, wenn sie das Kapital in 15 Jahren zu 7% aussparen will?

Gefragt wird wie viel muss sie jährlich sparen,
wenn sie mit $66 - 15 = 51$ Jahre zu 7% anfangs
zu sparen.

$$R_n = r_2 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \rightarrow r_2 = \frac{R_n (q - 1)}{q^n - 1} = \frac{51181'22 (1'07 - 1)}{1'07^{15} - 1}$$

gefragt wird $r_2 = 2036'74 \text{ €}$



51181'22 €
Kapital ...

Beispiel. Sezer ist 22 Jahre alt.

Möchte mit 30 sich ein Porsche für 100.000 € kaufen.

Wie ist die jährliche Einzahlung bei 5% um das Endkapital zu erreichen?

$$R_n = 100.000 = r \cdot \frac{(1'05)^8 - 1}{1'05 - 1} \rightarrow r = \frac{100000 \cdot (1'05 - 1)}{(1'05)^8 - 1}$$

= 100
↑
wird gefragt

= 10472'2 €

$$R_n = r \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

• Sezer muss 10472'2 € jährlich auf 5% einzahlen, damit er in 8 Jahren 100.000 € bekommt.

FÜR SARAH (nicht P. Relevant)

Beispiel. Sarah möchte sich ein Motorrad in 4 Jahre leisten. Endpreis wird 50000€ sein, sie kann jährlich 9500€ einzahlen. Wie viel Verzinsung braucht Sarah bei der Bank ausverhandeln. 😊

$$R_n = 50000€$$

$$r = 9500€$$

$$n = 4 \text{ Jahre}$$

$$R_n = r \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Faktorisierung: $q^n - 1 = (q - 1)(q^{n-1} + q^{n-2} + \dots + q + 1)$

$$R_n = r \cdot \frac{(q-1)(q^{n-1} + q^{n-2} + \dots + q + 1)}{(q-1)}$$

$$\frac{50000}{9500} = q^3 + q^2 + q + 1 \rightarrow q^3 + q^2 + q - 4'263 = 0$$



