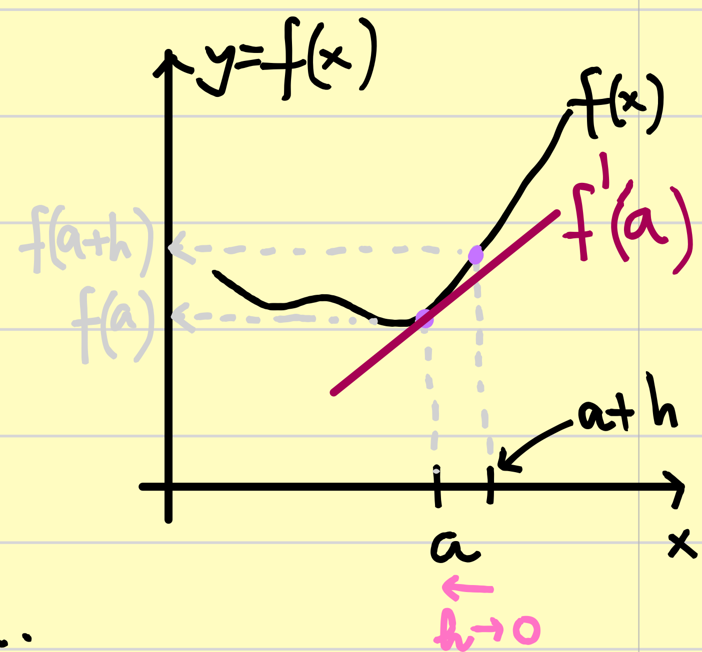
Ableitungen von Funktionen (1. Variable & 2. Variable)

1. Einführung in die Ableitungen

Die Ableitung einer Funktion misst, wie sich diese Funktion ändert, wenn sich ihr Eingabewert ändert. In mathe Formulierung: Wenn wir eine Funktion $f(x)$ haben, gibt ihre Ableitung $f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$ an, wie sich de Funktionswert ändert, wenn sich x geringfügig ändert.

Formel: Ableitung von $f(x)$ an der Stelle $x = a$

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$



Diese Formel gibt uns die momentane Änderungsrate, d.h., die Steigung der Tangente an die Funktion an der Stelle $x=a$.

2. Rechenregeln der Differentiation

KONSTANTENREGEL

1. $f(x) = c$ c konstant $\rightarrow f'(x) = 0$

POTENZREGEL

2. $f(x) = x^n$ n konstant $\longrightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}$

SUMMENREGEL

$$3.\quad F(x)=f_1(x)+f_2(x) \longrightarrow F'(x)=\left[f_1(x)+f_2(x)\right]'=f_1'(x)+f_2'(x)$$

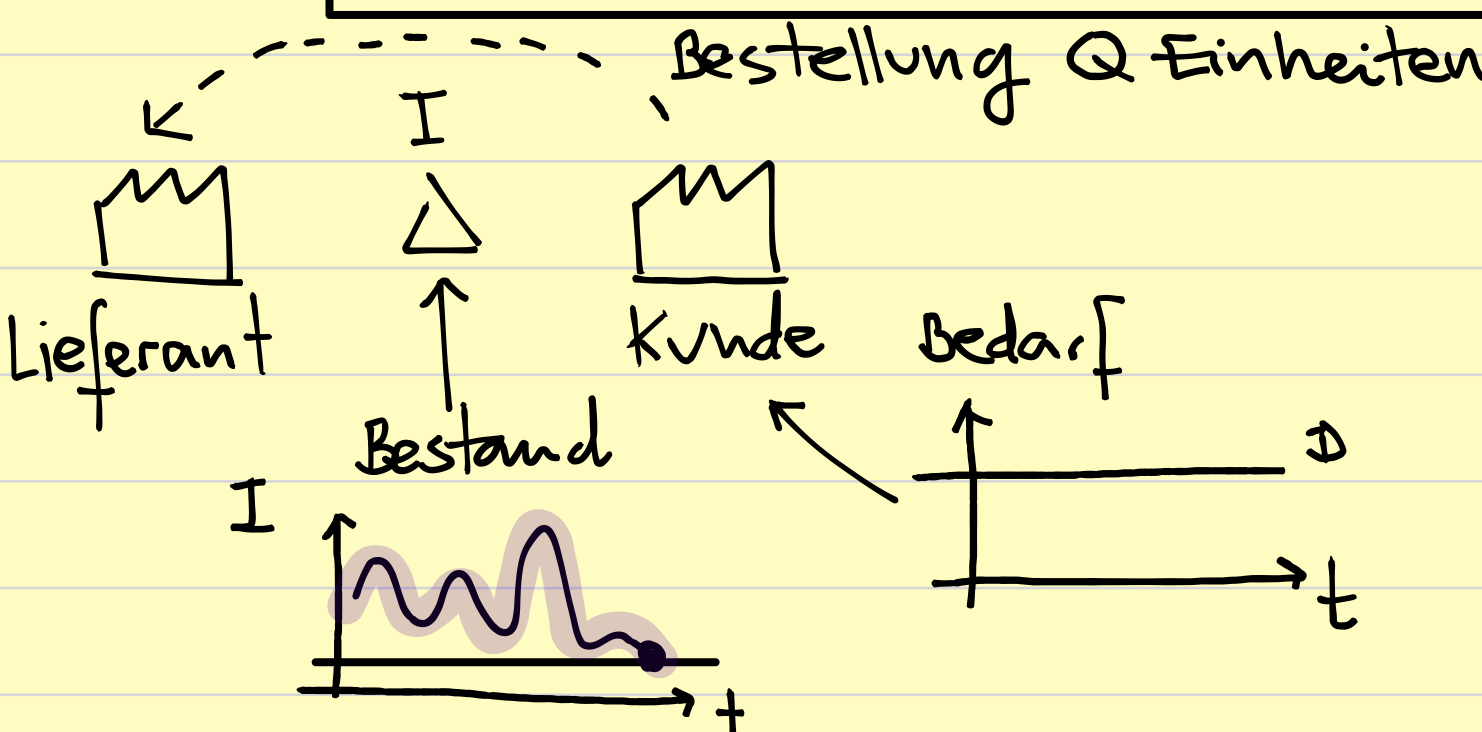
PRODUKTREGEL

$$4.\quad F(x)=f_1(x)\cdot f_2(x) \longrightarrow F'(x)=f_1'(x)\cdot f_2(x)+f_1(x)\cdot f_2'(x)$$

$$\frac{dF(x)}{dx}$$

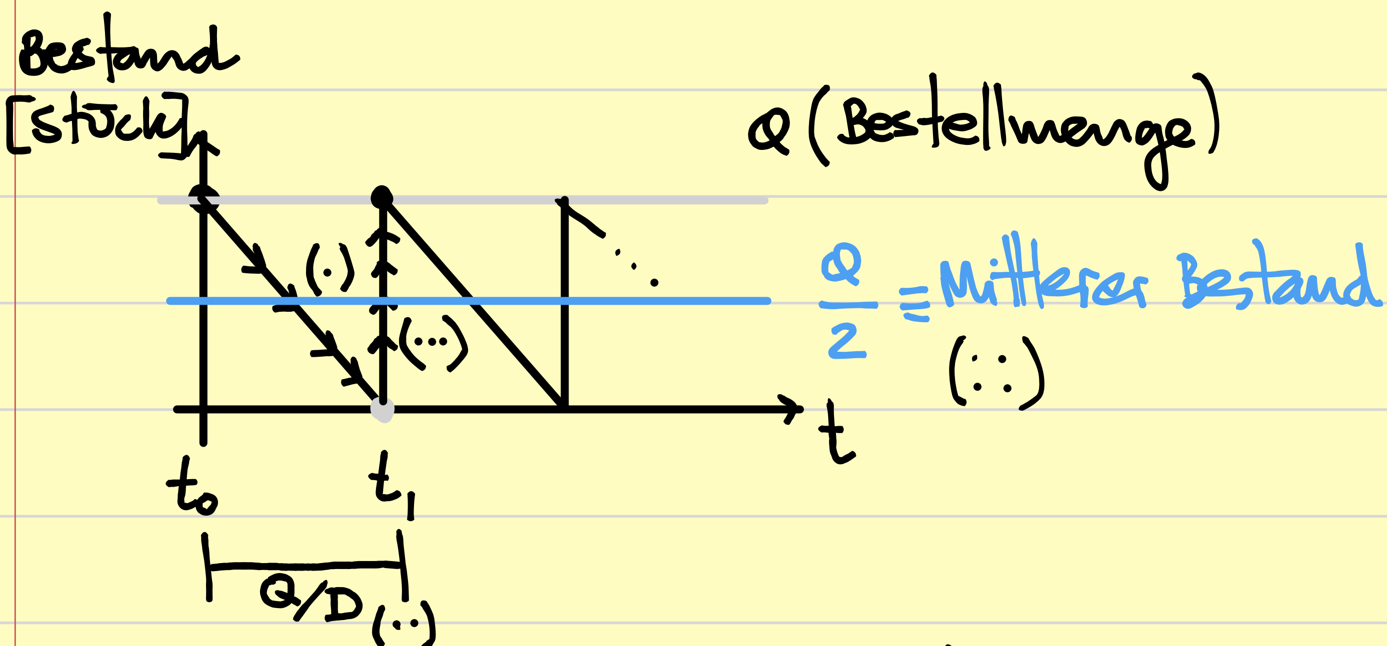
ECONOMIC ORDER QUANTITY (EOQ) (optimale Bestellmenge)

EOQ I. **Hypothese:** sofortige Lieferung und produktion mit einem konstanten Kundenbedarf.



☐ Was ist die optimale Bestellmenge aus betriebswirtschaftlichen (Kosten) Gründen?

PARAMETER:
- D. Demand (Kundenbedarf) [Stück/Zeit]
- C. Cost (Kosten pro Stück) [€/Stück]
- A. SetupCost (UmrüstKosten) [€]
- h. Holding Cost (Bestandhalte-Kosten) [€/Stück.Zeit]



(.) Der Bestand wird linear abgebraucht, weil der Kundenbedarf konstant ist. Somit ist die Steigung konstant.

$$f'(x) = k \rightarrow f(x) = kx$$

(..) Es hat $t_1 - t_0$ Zeit gedauert bis ich den Bestand Q bei t_0 mit einem Bedarf D abbaue. Somit $t_1 - t_0 = \frac{Q}{D}$

(...) Da die Lieferung und Produktion sofort stattfindet, ist die Befüllung vom Bestand eine vertikale Linie (dauert keine Zeit).

(:.:) Weil der Abbau vom Bestand konstant ist, der mittlerer Bestand ist $\frac{Q}{2}$.

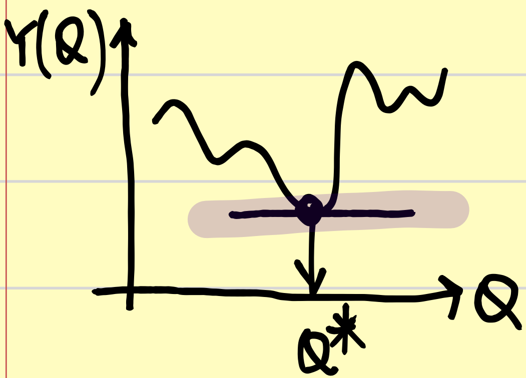
Generell für Alle Prozeße gilt das LITTLE's LAW:

$$[\text{Zeit}]\ DLZ = \frac{\text{Umlaufbestand}\ [\text{Stück}]}{\text{Ausbringung}\ [\text{Stück}/\text{Zeit}]}$$

FACTORY PHYSICS

Berechnung der optimalen Bestellmenge aus Kostensicht (EOQ_I).

Kosten Funktion $Y(Q)$ und unser Ziel lautet die optimale Betellmenge Q^*, welche die Kosten $Y(Q^*)$ minimiert.
Die Kosten $Y(Q)$ sind minimal, bei der MINIMUM der FUNKTION

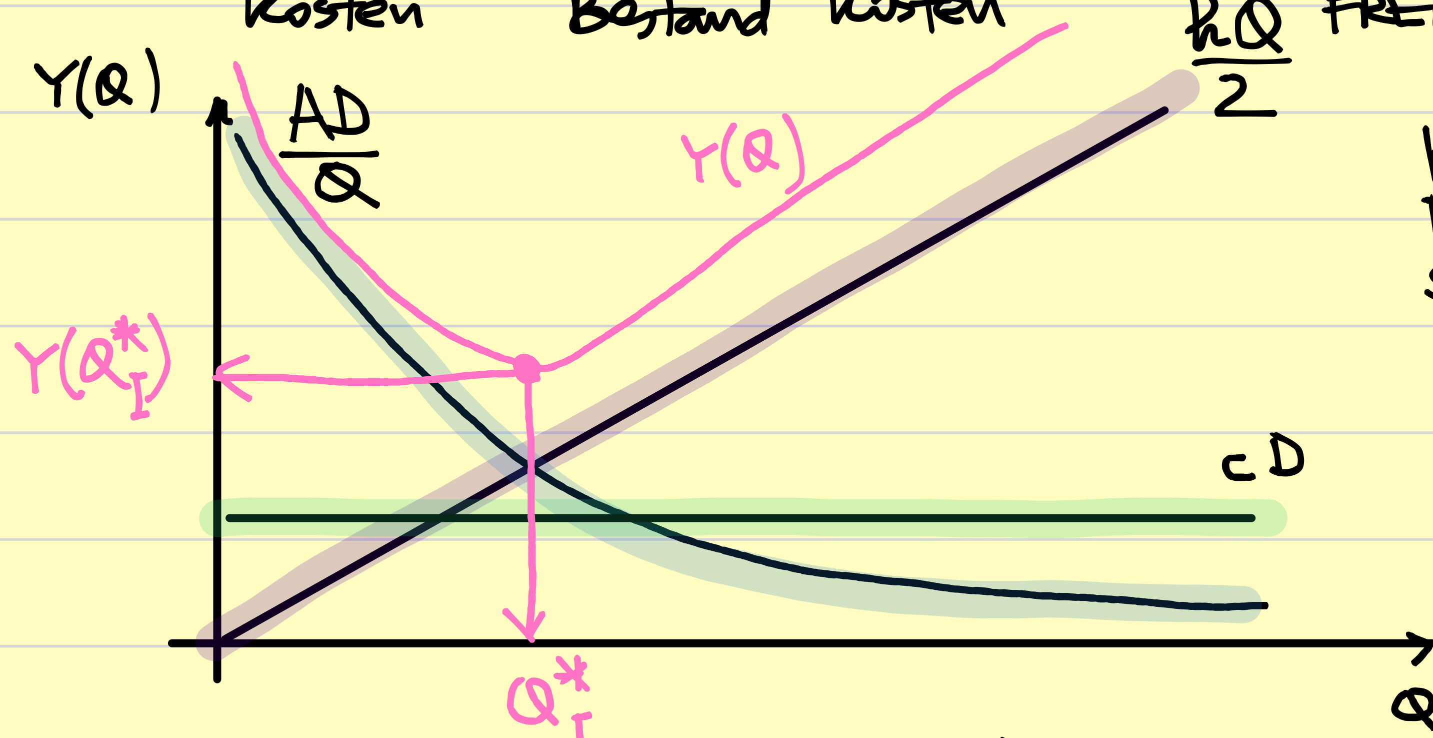


$$\left.\frac{dY(Q)}{dQ}\right|_{Q=Q^*} = 0 \quad \& \quad \left.\frac{d^2Y(Q)}{dQ}\right|_{Q=Q^*} > 0$$

$$Y(Q) = \text{Bestandskosten} + \text{Umrüstkosten} + \text{Produktionskosten}$$

$$= h \cdot \frac{Q}{2} + A \cdot \frac{1}{Q/D} + c \cdot D$$

h: Bestandshalte Kosten; $\frac{Q}{2}$: Mittlerer Bestand; A: Umrüst Kosten; $\frac{1}{Q/D}$: Wie oft bestelle ich? FREQUENZ; c: Kosten pro Stück; D: Bedarf



$$Y(Q) = \frac{hQ}{2} + \frac{AD}{Q} + cD \rightarrow \frac{dY(Q)}{dQ} = 0 \rightarrow \frac{d}{dQ}\left[\frac{h}{2}\cdot Q + AD\cdot\frac{1}{Q} + cD\right] = 0$$

$$\rightarrow \frac{d}{dQ}\left[\frac{h}{2}\cdot Q\right] + \frac{d}{dQ}\left[AD\cdot\frac{1}{Q}\right] + \frac{d}{dQ}\left[cD\right] = 0 \rightarrow \frac{h}{2}\cdot 1\cdot Q^{1-1} + AD\cdot(-1)\cdot Q^{-1-1} + 0 = 0$$

$$\rightarrow \frac{h}{2} - \frac{AD}{Q^2} = 0 \rightarrow \frac{h}{2} = \frac{AD}{Q^2} \rightarrow Q^2 = \frac{2AD}{h} \rightarrow \boxed{Q^*_I = \sqrt{\frac{2AD}{h}}}$$

$Q = Q^*_I$

$$\boxed{\begin{array}{l} f(x) = x^n ; f'(x) = n\,x^{n-1} \\ f(Q) = \frac{h}{2}\cdot Q^1 ; f'(Q) = \frac{h}{2}\cdot 1 \cdot Q^{1-1} = \frac{h}{2} \\ f(Q) = \frac{AD}{Q} = AD\cdot Q^{-1} ; f'(Q) = AD\cdot -1 \cdot Q^{-1-1} = -AD\cdot Q^{-2} = \frac{-AD}{Q^2} \end{array}}$$

$$Y(Q^*) = \frac{h}{2}\cdot Q^* + \frac{AD}{Q^*} + cD = \frac{h}{2}\cdot\sqrt{\frac{2AD}{h}} + \frac{AD}{\sqrt{\frac{2AD}{h}}} + cD =$$

$$= \sqrt{\frac{2ADh^2}{2^2\cdot h}} + \sqrt{\frac{A^2D^2h}{2AD}} + cD =$$

$$= \sqrt{\frac{ADh}{2}} + \sqrt{\frac{ADh}{2}} + cD =$$

$$= 2\sqrt{\frac{ADh}{2}} + cD = \sqrt{2ADh} + cD$$

In der Regel wird den konstanten Faktor cD eliminiert.

$$\boxed{Y(Q^*_I) = \sqrt{2ADh}}$$

Ableitung von Funktionen zweier Variablen

Wenn wir eine Funktion $f(x,y)$ haben, hängt ihr Wert von zwei Variablen ab. Um herauszufinden, wie sich f verändert, wenn sich eine der Variablen ändert, während die andere Konstant bleibt verwenden wir PARTIELLE ABLEITUNGEN.

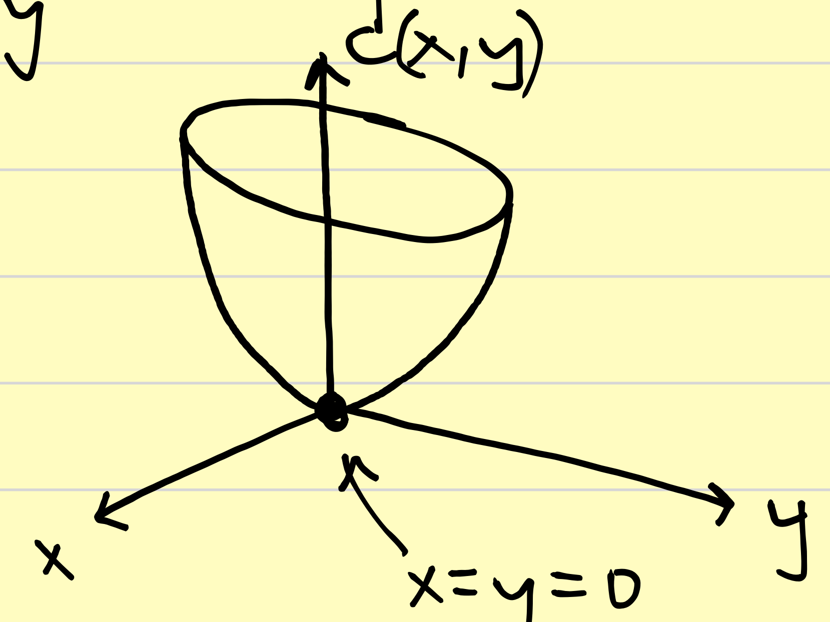
- $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$. Partielle Ableitung von $f(x,y)$ nach x, sagt aus wie sich $f(x,y)$ ändert, wenn nur x geändert wird, und y konstant bleibt.
- $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$. (analog)

Beispiel. Nehmen wir an, die Gesamtkosten $C(x,y)$ für Lagerung und Transport hängen von der Bestellmenge x und der Transportdistanz y ab: $C(x,y) = 2x^2 + 3xy + y^2$

$$\frac{\partial C(x,y)}{\partial x} = 4x + 3y \qquad \frac{\partial C(x,y)}{\partial y} = 3x + 2y$$

Um die kritischen Punkte einer 2. Variablen Funktion zu finden, setzen wir beide part. Ableitungen gleich null.

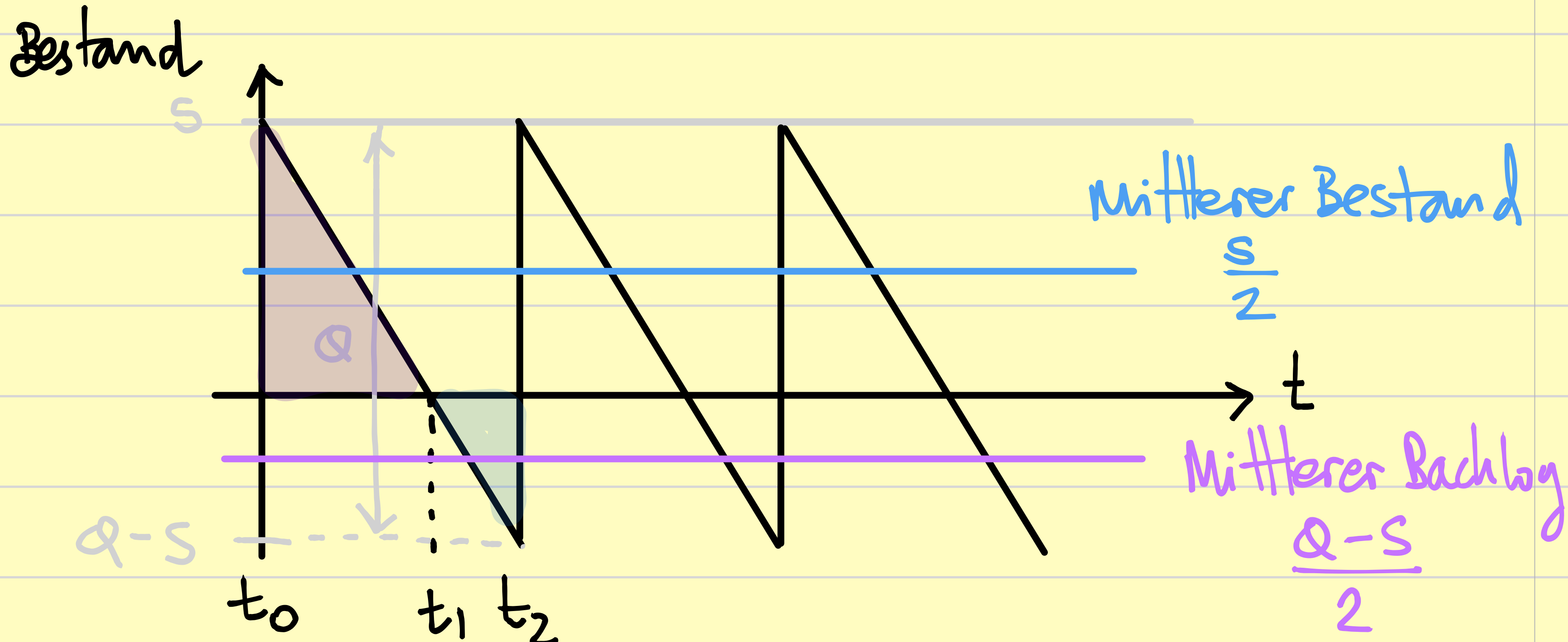
$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial x} &= 4x + 3y = 0 \\ \frac{\partial C}{\partial y} &= 3x + 2y = 0 \end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned} 12x + 9y &= 0 \\ 12x + 8y &= 0 \end{aligned}\right\} y = 0 \rightarrow x = 0$$



EOQ_{II}. Supplier Model

Hypothese: wir akzeptieren einen „Stock-Out" in dem unsere Lieferkette BACKLOG in Bestellungen.
- sofortige Lieferung & Produktion
- Bedarf ist konstant

PARAMETER:
- p. Kosten der nicht gelieferten Bestellungen [€/Stück]
- s. Bestand nach Lieferung der bestellten Q Menge. [Stück]
- Q-S. Backlog. [Stück]



$$t_1 = \frac{S}{D} \quad t_2 = \frac{Q}{D} \longrightarrow t_2 - t_1 = \frac{Q-S}{D}$$

$Y(Q_{II}, S) =$ Bestandshaltekosten + Umrüstkosten + Prod. kosten + Backlog kosten

$$= h \cdot \frac{S}{2} \cdot \frac{S}{D} \cdot \frac{1}{Q/D} + \frac{AD}{Q} + cD + p \cdot \frac{Q-S}{2} \cdot \frac{1}{Q/D}$$

Bestands haltekosten/Stück

Mittlerer

Kosten nicht lieferfähig

Bestand pro Stück Mittlerer Backlog

t_1: Zeit um Bestand auf null zu bringen

$\frac{1}{t_2}$: Frequenz der Bestellungen

$$Y(Q_{II}, S) = \frac{hS^2}{2Q} + \frac{AD}{Q} + cD + \frac{p(Q-S)^2 \cdot D}{2Q}$$

$$\left.\frac{\partial Y}{\partial Q}\right| = \frac{-hS^2}{2Q^2} - \frac{AD}{Q^2} + \frac{p(Q-S)}{Q} \cdot D - \frac{p(Q-S)^2 \cdot D}{2Q^2} = 0$$

$$\left.\frac{\partial Y}{\partial S}\right| = \frac{hS}{Q} - \frac{p(Q-S)D}{2Q} = 0$$

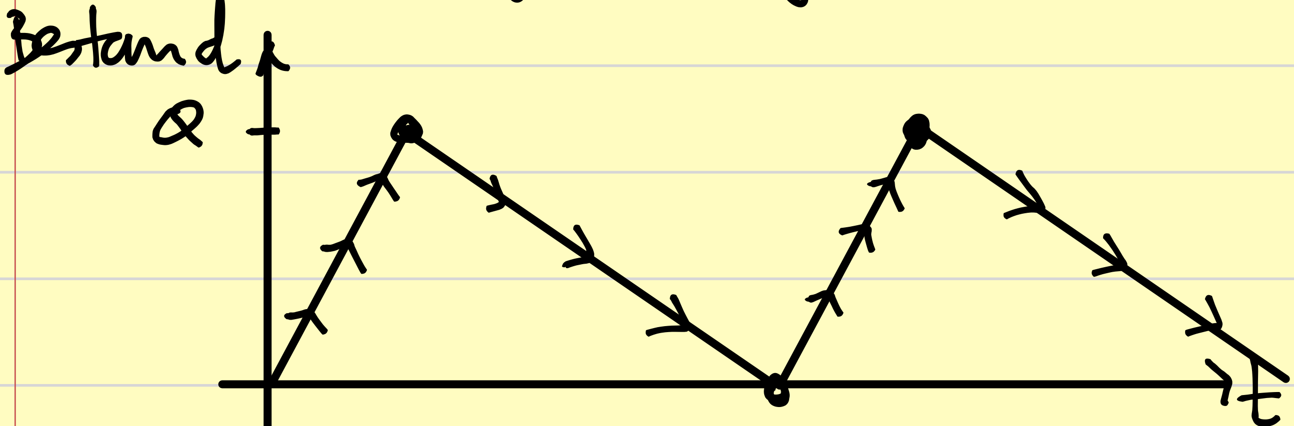
$\rightarrow \dots \rightarrow$ Q^*, S^*

$$\rightarrow \quad S^*_{II} = \sqrt{\frac{2AD}{h}} \cdot \sqrt{\frac{p}{p+h}} = Q^*_I \sqrt{\frac{p}{p+h}} \leq Q^*_I$$

$$Q^*_{II} = \sqrt{\frac{2AD}{h}} \cdot \sqrt{\frac{p+h}{p}} = Q^*_I \sqrt{\frac{p+h}{p}} \geq Q^*_I$$

wenn $h \ll p \rightarrow Q^*_{II} \simeq Q^*_I$: wenn die Bestandhaltekosten h viel kleiner sind als die Kosten der Lieferunfähigkeit, dann kann ich davon ausgehen, dass Backlog kein Vorteil bringt. (zB AMAZON Model)

$\boxed{\text{EOQ}_{III} \text{ (Manufacturing Model) ohne Backlog}}$



- hypothese: Keine sofortige Produktion & Lieferung.
- konstanten Bedarf.

PARAMETER: K : Produktionsrate [Stück/Zeit]

Y(Q) = Bestandhaltekosten + Umrüstungskosten + Prod kosten.

$$= \underset{\text{Bestands-haltekosten pro Stück}}{h} \cdot \underbrace{\frac{Q}{2}\left[1-\frac{D}{K}\right]}_{\text{Mittlerer Bestand}} + \frac{AD}{Q} + cD$$

$$\frac{dY}{dQ} = 0 \rightarrow \frac{h}{2}\left[1-\frac{D}{K}\right] - \frac{AD}{Q^2} = 0 \rightarrow \frac{h}{2}\left[1-\frac{D}{K}\right] = \frac{AD}{Q^2} \rightarrow$$

$$\rightarrow Q^2 = \frac{2AD}{h\left(1-\frac{D}{K}\right)} \rightarrow \boxed{Q^*_{III} = \sqrt{\frac{2AD}{h\left(1-\frac{D}{K}\right)}}}$$

wenn $K \gg D$ (die Produktion ist viel schneller als den Bedarf) $\rightarrow$ $Q^*_{III} = Q^*_{I}$.

$$Y(Q^*_{III}) = \frac{hQ^*_{III}}{2}\left(1-\frac{D}{K}\right) + \frac{AD}{Q^*_{III}} + cD =$$

$$= \frac{h}{2}\left(1-\frac{D}{K}\right) \cdot \sqrt{\frac{2AD}{h\left(1-\frac{D}{k}\right)}} + AD \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{2AD}{h\left(1-\frac{D}{k}\right)}}} + cD =$$

$$= \frac{h}{2}\sqrt{\frac{2AD\left(1-\frac{D}{k}\right)^2}{h\left(1-\frac{D}{k}\right)}} + \sqrt{\frac{A^2D^2h\left(1-\frac{D}{k}\right)}{2AD}} + cD$$

· cD wird vernachlässigt, da konstant

$$\boxed{Y(Q_{III}^*) = \sqrt{2ADh\left(1-\frac{D}{k}\right)}}$$

wenn $k \gg D \longrightarrow Y(Q_{III}^*) = Y(Q_I^*)$

- Je schneller die Produktion, desto besser können wir auf dem Kundenbedarf reagieren.