REIHEN: Summiert man die Glieder einer Zahlenfolge, so erhält man eine Reihe.

Gegeben sei eine Folge (a_n)

ENDLICH: $\sum_{i=1}^{n} a_i$ endliche Reihe.

UNENDLICH: $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ unendliche Reihe.

Die Summe $s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$ heißt die n-te Partialsumme der Folge.

ARITHMETISCHE REIHEN

Eine Reihe, die aus den ersten Gliedern einer arithmetischen Folge gebildet wird, heißt eine (endliche) arithmetische Reihe.

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \ldots + (a_1 + (n-1)d)$$

$$+ \quad \sum_{i=1}^{n} a_i = (a_1 + (n-1)d) + \ldots + (a_1 + 2d) + (a_1 + d) + a_1$$

$$2\sum_{i=1}^{n} a_i = \underbrace{[2a_1 + (n-1)d] + 2a_1 + (n-1)d + \ldots + 2a_1 + (n-1)d}$$

$$2\sum_{i=1}^{n} a_i = n \cdot [2a_1 + (n-1)d]$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{n}{2} \cdot [2a_1 + (n-1)d] = \frac{n}{2}[a_1 + \overbrace{a_1 + (n-1)d}^{a_n}]$$

Für die arithmetische Reihe gilt:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{n}{2}\left[a_1 + a_n\right]}$$

Beispiel: bestimme bitte die Summe einer arithmetischen Reihe mit 100 Gliedern; $a_1 = -15$ $d = 3$.

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n=100} a_i = \frac{100}{2}\left[2a_1 + (100-1)\cdot 3\right] = \frac{100}{2}\left[2\cdot(-15) + (100-1)3\right]$$

$$\frac{n}{2}\left[2a_1 + (n-1)\cdot d\right] \qquad = 13350$$

GEOMETRISCHE REIHEN

Eine Reihe, deren Gliedern eine geometrische Folge bilden, nennt man geometrische Reihe.

Für die geometrische Reihe gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + \cancel{a_1\cdot q} + \cancel{a_1\cdot q^2} + \ldots + \cancel{a_1 q^{n-2}} + \cancel{a_1 q^{n-1}}$$

$$- \quad q\sum_{i=1}^{n} a_i = \cancel{a_1 q} + \cancel{a_1\cdot q^2} + \cancel{a_1\cdot q^3} + \cancel{\ldots} + \cancel{a_1\cdot q^{n-1}} + a_1 q^n$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i - q\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 - a_1 q^n \rightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i (1-q) = a_1(1-q^n)$$

$$\text{wenn } q \neq 1 \rightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$$

$$\text{wenn } q = 1 \longrightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_1 \cdot q + \dots + a_1 q^{n-1} = n \cdot a_1$$

Beispiel: bestimme bitte die Summe einer geometrischen Reihe mit 100 Gliedern $a_1 = \frac{2}{3}$ $q = 1'2$.

$q \neq 1$ $$\sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1-1'2^{100}}{1-1'2} = 276\,059\,911'733$$

ABSCHREIBUNGEN

Eine Methode, die Wertminderung langlebiger Güter des Anlagevermögens im Rechnungswesen zu berücksichtigen.

Symbole:
- $A \equiv$ Anschaffungswert
- $R \equiv$ Restwert (Wert am Ende der Nutzungsdauer)
- $n \equiv$ Nutzungsdauer
- $a_i \equiv$ Abschreibungsbetrag im Zeitraum „i"
- $A - R \equiv$ Gesamtabschreibungsbetrag

LINEARE ABSCHREIBUNG

Die jährliche Abschreibungsbeträge „a" sind konstant.
Das heißt „a" ergibt sich aus dem Gesamtabschreibungs-

betrag [A−R] geteilt durch die Nutzungsdauer:

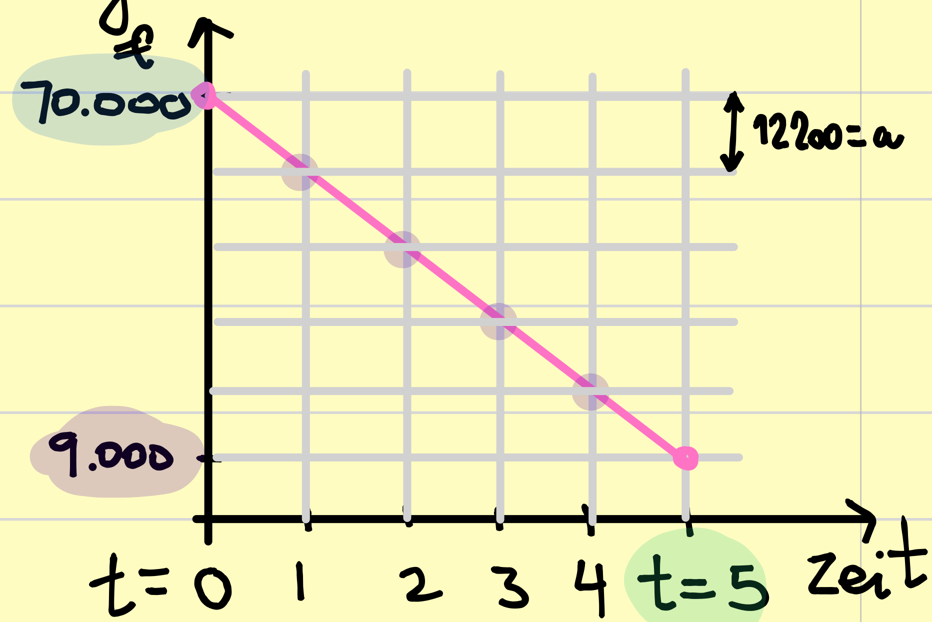
$$\boxed{a = \frac{A-R}{n}}$$

Beispiel: Eine Maschine, die für 70.000 € angeschafft wurde, hat nach 5 Jahren Nutzungsdauer einen Wert von 9.000 €.

a) Wie hoch sind die jährlichen Abschreibungsbeträge, wenn eine lineare Abschreibung unterstellt wird?

$$a = \frac{70000 - 9000}{5} = 12200\,€$$

$$a = \frac{A - R}{n}$$



b) Bitte stellen Sie die Abschreibung als Folge dar, und erklären Sie um welchen Folgenart es sich handelt

Jahr	Abschreibung	Restbuchwert
0	—	70000
1	12200	57800
2	12200	45600
3	12200	33400
4	12200	21200
5	12200	9000

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$

ARITMETISCHE FOLGE

$a_1 = 57800\,€$

$n = 5$

$d = -12200\,€$

GEOMETRISCH · DEGRESSIVE ABSCHREIBUNG

Die jährliche Abschreibungsbeträge errechnen sich nach einem konstanten Prozentsatz aus dem Restbuchwert.

Beispiel. A = 50000 € n=3 Prozentsatz (konstant) = 20%

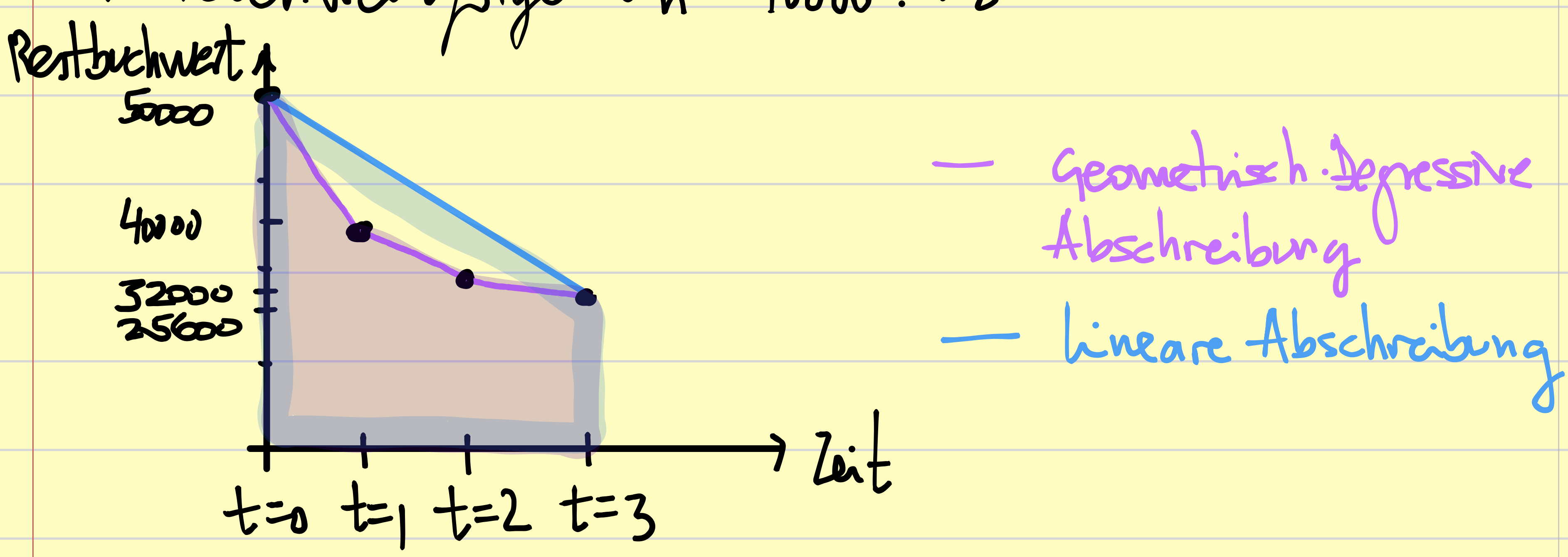
Jahr	Abschreibung	Restbuchwert
0	—	50000
1	0'2 · 50000 = 10000	50000 - 10000 = 40000
2	0'2 · 40000 = 8000	40000 - 8000 = 32000
3	0'2 · 32.000 = 6400	32000 - 6400 = 25600

Sowohl die Restbuchwerte, als auch die Abschreibungsbeträge bilden eine geometrisch-degressive Folge mit $q = 0'8$.

Geometrische Folge: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

Abschreibungsfolge: $a_n = 10000 \cdot 0'8^{n-1}$

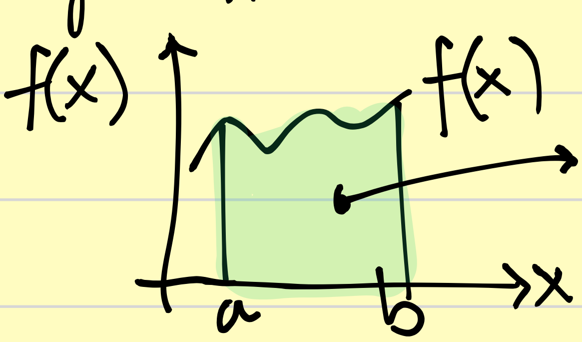
Restbuchwertfolge: $a_n = 40000 \cdot 0'8^{n-1}$



Die Fläche unter der Geometrisch-Degressiven-Abschreibung $\square$ ist kleiner als die Fläche unter der linearen Abschreibung $\square$.

$\rightarrow \quad \square < \square$

Die Fläche unter einer Kurve wird durch eine Integrale dargestellt.



$$\square = \int_a^b f(x)\,dx$$

Notiz

Eine Integrale ist eine Summe!

Was ist die Summe von Folgegliedern? Reihen.

Im Allgemeinen sind A, R, und n vorgegeben und den Konstanten Faktor „p" der geometrisch-degressiven Abschreibung muss bestimmt werden.

Betrachtet man die geometrische Folge der Restbuchwerte, so lässt sich folgende Tabelle aufstellen:

Jahr	Restbuchwert
0	$R_0 = A$
1	$R_1 = A - R_0 \cdot \frac{p}{100} = A - A \cdot \frac{p}{100} = A\left(1 - \frac{p}{100}\right)$
2	$R_2 = R_1 - R_1 \frac{p}{100} = A\left(1 - \frac{p}{100}\right)^2$
⋮	
n	$R_n = A\left(1 - \frac{p}{100}\right)^n$

Am Ende der Nutzungsdauer „n" verbleibt den Restwert R_n:

$$R_n = A\left(1-\frac{p}{100}\right)^n = R$$

Sind A, R, und „n" gegeben, ergibt sich für „p":

$$\sqrt[n]{R} = \sqrt[n]{A}\cdot\left(1-\frac{p}{100}\right) \rightarrow \sqrt[n]{\frac{R}{A}} = \left(1-\frac{p}{100}\right) \rightarrow$$

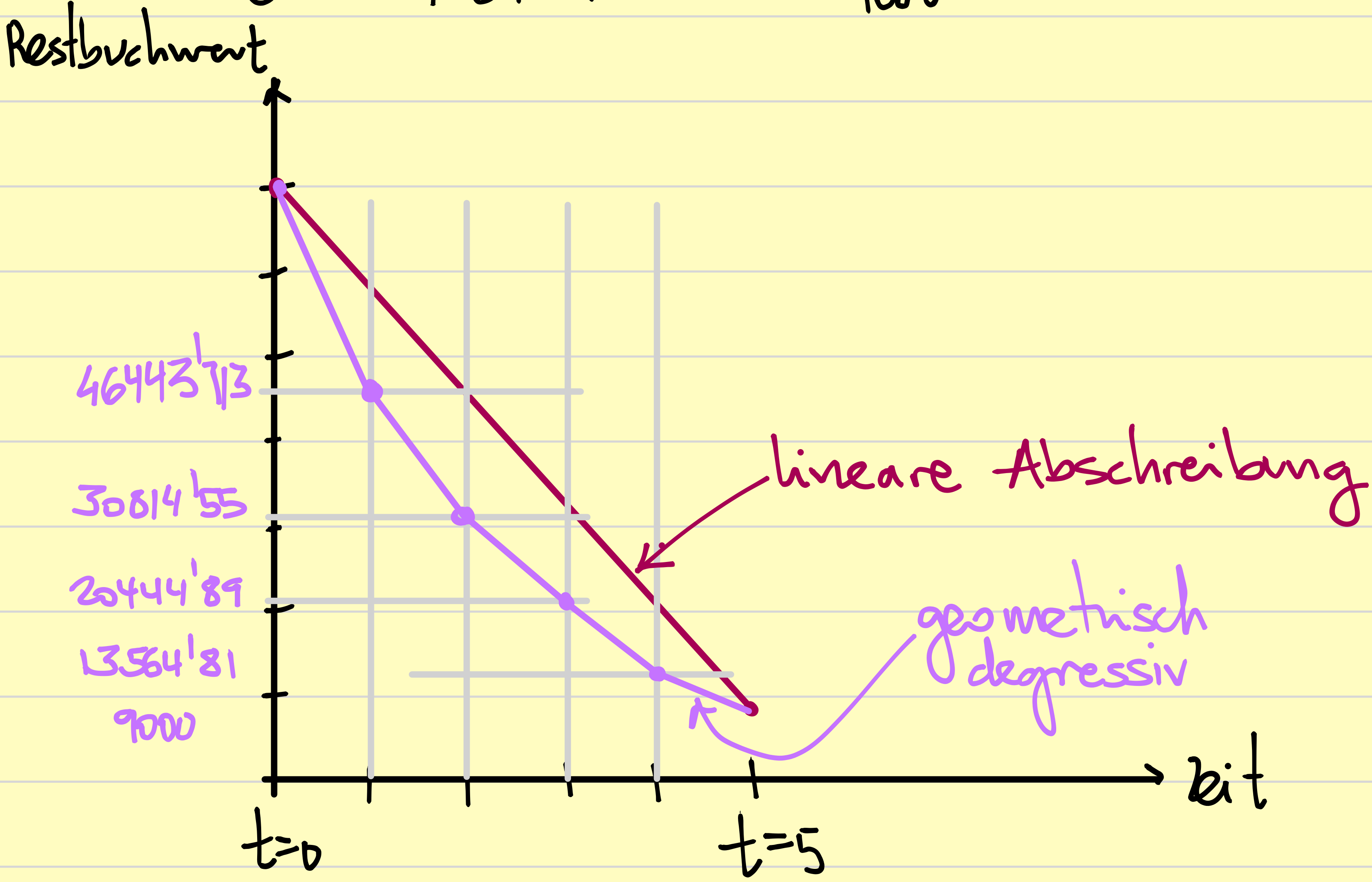
$$\frac{p}{100} = 1-\sqrt[n]{\frac{R}{A}} \longrightarrow \boxed{p = 100\left(1-\sqrt[n]{\frac{R}{A}}\right)}$$

Beispiel: Eine Maschine die für 70000 € angeschafft wurde, hat nach 5 Jahren Nutzungsdauer einen Wert von 9000 €. Stellen Sie den Abschreibungsplan für die geometrisch degressive Abschreibung auf.

$$p = 100\left[1-\sqrt[5]{\frac{R}{A}}\right] = 33'6518\ \%$$

Jahr	Abschreibung	Restbuchwert
0	—	$R_0 = A = 70000$
1	$A - R_1 = 70000 - 46443'713 = 23556'29$	$R_1 = A\left(1-\frac{p}{100}\right) = 46443'713$
2	$R_1 - R_2 = 46443'713 - 30814'549 = 15629'16$	$R_2 = A\left(1-\frac{p}{100}\right)^2 = 30814'549$
3	$R_2 - R_3 = 10369'6625$	$R_3 = A\left(1-\frac{p}{100}\right)^3 = 20444'8873$

4	6880'08	13564'8069
5	4564'81	9000



Betriebswirtschaftliche Interpretation:

- Lineare Abschreibung. Führt zu einer gleichmäßigen Belastung der Gewinn- & Verlustrechnung. Dies gibt der Führungskraft Stabilität & Vorhersehbarkeit in der Finanzplanung.
- Geometrisch-Degressive Abschreibung. Belastet die Bilanz in den frühen Jahren stärker. Dies kann aus steuerlichen Sicht vorteilhaft sein, da die steuerpflichtigen Gewinne zu Beginn gesenkt werden. Dies bietet der Führungskraft kurzfristig Liquiditätsvorteile.

Strategische Überlegungen.

- Lineare Abschreibung. Fokus liegt auf Langfristigkeit & Planbarkeit.
- Geometrisch Degressive Abschreibung. Bietet einen Vorteil bei kurzfristigeren, intensiveren Investitionszyklen oder in Märkten, wo sich Technologien schneller entwickeln.