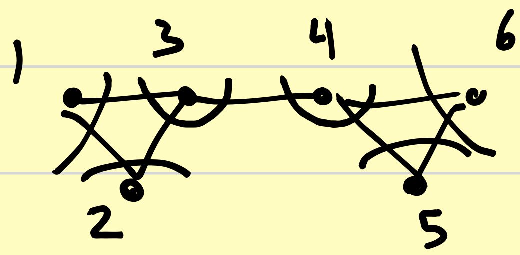
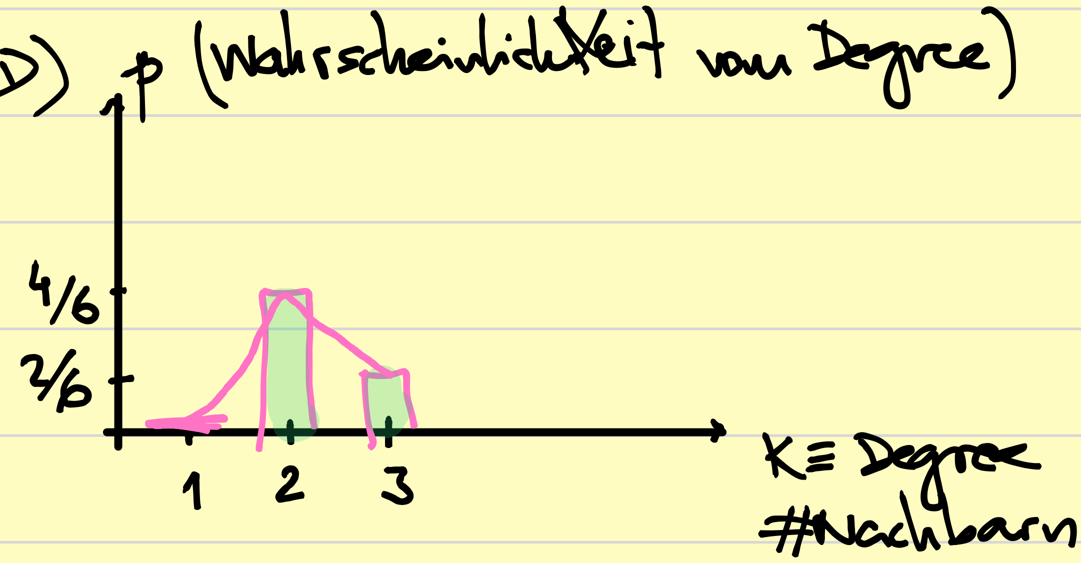
20250325_LM2_Mathe2

... Degree Distribution (DD)





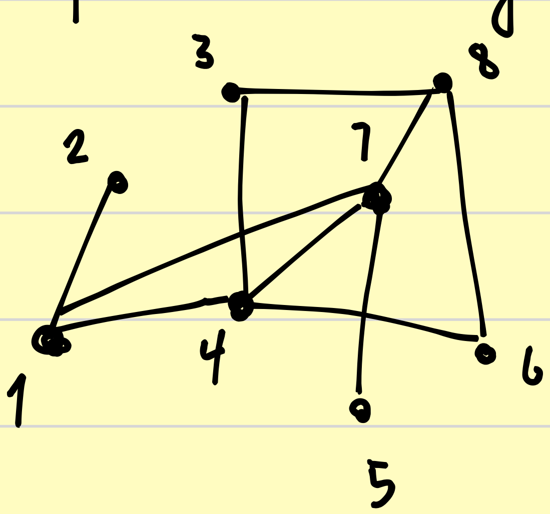
Netzwerk Topologien / Strukturen.

· ZUFALLSNETZWERKEN & REELENETZWERKEN.

Zufallsnetzwerke

Die Wahrscheinlichkeit, dafür dass ein Knote mit k Nachbarn zu einem anderen neuen Knote verbunden wird in einem Zufallsnetzwerk folgt eine Poisson-Verteilung. (mit Parameter λ).

Beispiel. Bestellungen in HN bei Amazon.



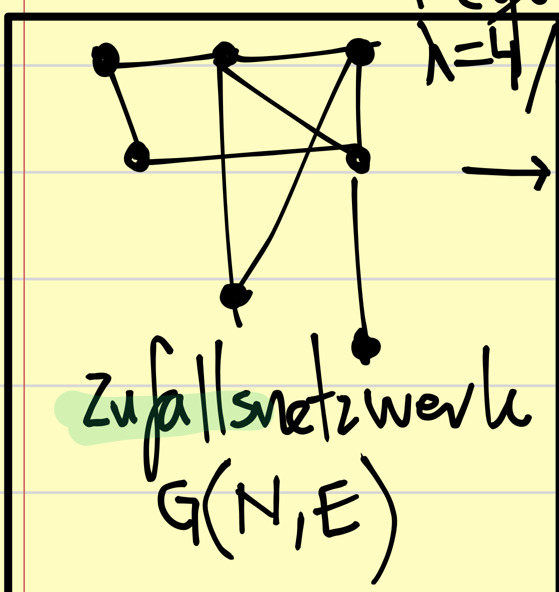
$$\boxed{P_{Random}(X=k) = \frac{\lambda^{k} \cdot e^{-\lambda}}{k!}} \qquad (1)$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Knote mit k Nachbarn zu einem neuen dazu gewonnen Knote im Netzwerk verbunden wird lautet (1).

Übung: Ein Lager erhält Lieferungen aus zufällig verteilten Bestellungen über den Tag verteilt mit durchschnittlich 4 Lieferungen pro Stunde. (PARAMETER $\lambda = 4 \frac{\text{Lieferungen}}{\text{std}}$)

(a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, genau 7 Lieferungen in einer bestimmten Stunde zu erhalten?

Freqvenz $\lambda = 4/\text{std}$



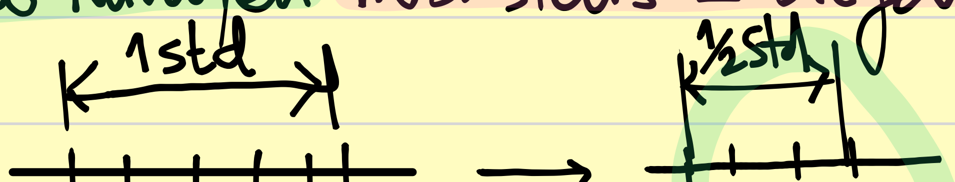
$$P(X=7) \overset{(1)}{=} \frac{4^7 \cdot e^{-4}}{7!} = \frac{4^7 \cdot e^{-4}}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \simeq 6\%$$

Anzahl Lieferungen

Die Wahrscheinlichkeit, dass genau 7 Lieferungen ankommen ist 6%.

unser zufälliges Netzwerk generiert eine Zufallsvariabel (Lieferungen pro Std) und diese ist Poisson (1) verteilt.

(b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass innerhalb von 30 Minuten höchstens 2 Lieferungen kommen?



$\lambda = 4 \frac{\text{Lief}}{\text{std}}$ $\longrightarrow$ $\lambda^* = 2 \frac{\text{Lief.}}{\frac{1}{2}\text{std}}$

$$P(X \leq 2) = \underbrace{P(X=0)}_{\text{W. keine Lieferung}} + \underbrace{P(X=1)}_{\text{W. 1 Lieferung}} + \underbrace{P(X=2)}_{\text{W. 2 Lieferungen}} \overset{(1)}{=}$$

$$= \frac{e^{-2} \cdot 2^0}{0!} + \frac{e^{-2} \cdot 2^1}{1!} + \frac{e^{-2} \cdot 2^2}{2!} =$$

$$= \frac{e^{-2} \cdot 1}{1} + \frac{e^{-2} \cdot 2}{1} + \frac{e^{-2} \cdot 4}{2 \cdot 1} \simeq 67'7\%$$

· REELE Netzwerke. (i.e. Facebook, Twitter, TikTok, ...)
(i.e. IoT)

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Knote mit K Nachbarn sich mit einem neuen Knote verbindet in reelen Netzwerken folgt eine POTENZ·GESETZ VERTEILUNG. (Power·Law) mit Parameter γ.
$\gamma \equiv$ Exponent Degree.

$$\boxed{P_{\text{Reele Netzwerke}} \equiv P_R(X=K) = K^{-\gamma}}$$

Reele Netzwerke sind wünschenswert in dem Design von logistischen Netzwerken aus stabilitäts gründen:

- Geringes APL.
- Hohes CC.

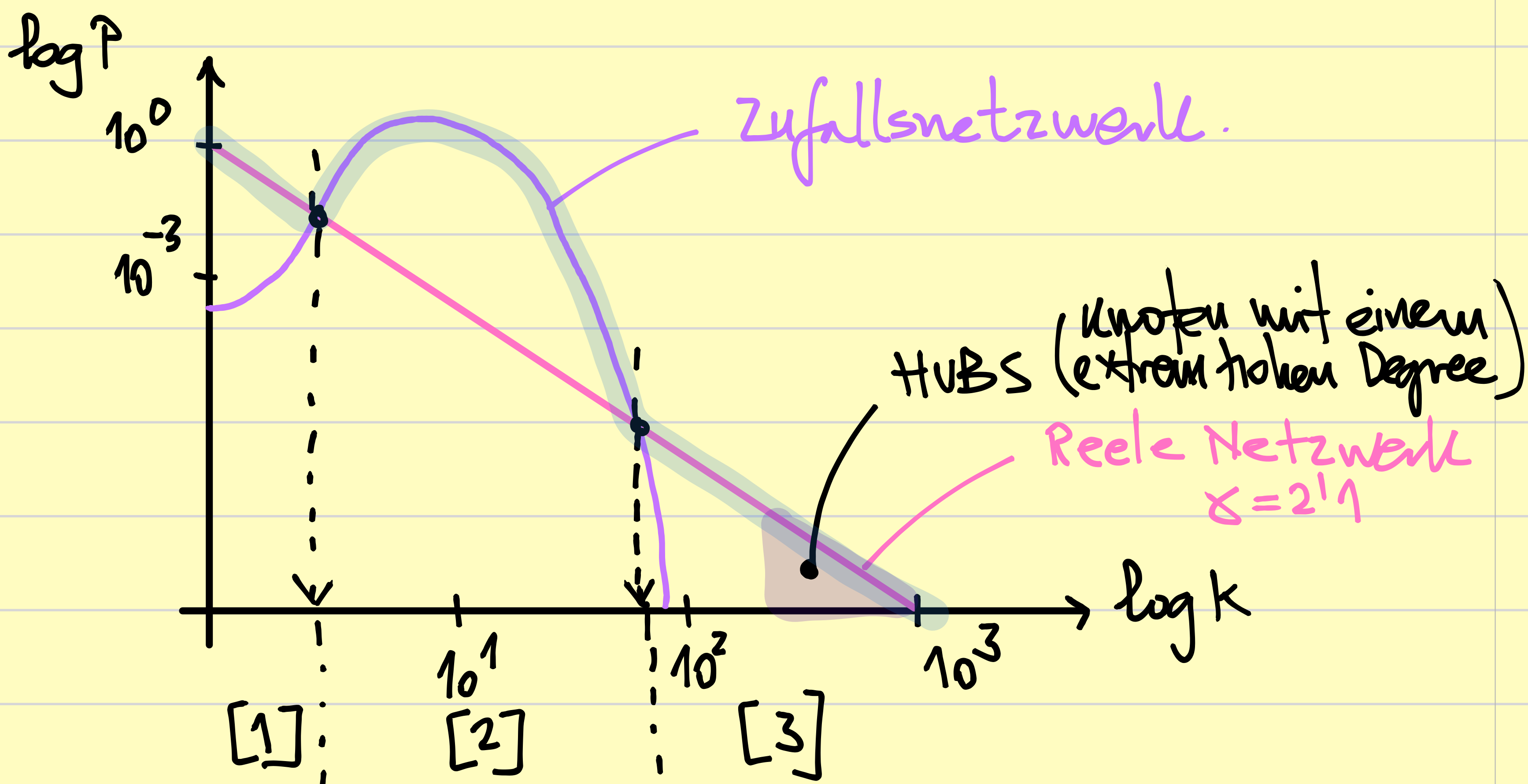
Übung. Die Bestellgrößen eines Lieferanten folgen einer Power·Law Verteilung mit $\gamma = 2'5$.

(a) Berechnen Sie das Verhältnis der Wahrscheinlichkeiten $P(X=100)$ [die W dafür, dass ein neuer Knote sich mit einem bestehenden Knote mit 100 Nachbarn verbindet] und

$P(X=50)$.

$$\frac{P(100)}{P(50)} = \frac{100^{-2'5}}{50^{-2'5}} = \left(\frac{50}{100}\right)^{2'5} \approx 17'7\,\%$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Zufallsnetzwerke POISSON} \quad P_Z(X=k) = \dfrac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^k}{k!} \\ \text{Reelen Netzwerke POWER·LAW} \quad P_R(X=k) = k^{-\gamma} \end{array}}$$



[1]. Zufallsnetzwerk << REELERNETZWERK
Für kleine K (Knoten mit wenigen Nachbarn), die Power·law Distribution des reelen Netzwerkes liegt über die Zufallsdistribution (Poisson). Dies deutet darauf hin, dass reele Netzwerke mehr Knoten mit wenigen Nachbarn haben.

[2] Zufallsnetzwerk > Reeler Netzwerk
Die Zufallsdistribution hat mehr Knoten als die reele Verteilung.

[3] Zufallsnetzwerk << Reelernetzwerk
HUBS existieren NUR in den reelen Netzwerken.

WARUM sind HUBS wichtig in der LOGISTIK?

1. EFFIZIENZ.

(a) Zentrale Knoten. i.e. Flughafen Hubs wie Frankfurt oder L.A. besitzen eine extrem hohe Anzahl an Verbindungen. Dadurch sind sie sehr effizient. APL↓.

(b) Transporte können schneller abgewickelt werden, da Hubs als zentrale Umschlagpunkte die Transportwege bündeln.

2. OPTIMIERUNG von LAGERBESTÄNDEN

(a) Hubs ermöglichen zentrale Lagerung und Konsolidierung der Warenströme (i.e. Apple. Europa.hub in Milano (Italien)).

(b) Wenige Lagerhaltungskosten, schnelle Durchlaufzeiten und Ressourceneffizienz. CC↑

3. BESSERE STEUERBARKEIT.

(a) Wenige zentrale Hubs sind leichter zu überwachen als viele gleichwertige (K<<) Knoten.

(b) Erhöhte Transparenz ermöglicht Echtzeitsteuerung.

Nicht alles sind Vorteile!

1. ANFÄLLIGKEIT.

Wenn ein HUB ausfällt, kollabiert die Netzwerkstruktur. (FIEDLER-Vektor / LAPLACE Matrix)