Page 6

$$P = \begin{array}{c} \begin{matrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \vec{v}_3 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \quad D = \begin{bmatrix} 2 & & 0 \\ & 3 & \\ 0 & & 5 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Übung: $A = P.D.P^{-1}$ prüfen...

$$P^{-1} = \frac{1}{\det P} \cdot \operatorname{Adj} P = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det P = 0.(-1).1 + 1.1.1 + 0.1.1 - \left[1.1.(-1) + 0.1.1 + 1.1.0\right] =$$
$$= 2$$

$$\operatorname{Adj} P = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \underline{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & & \\ & 3 & \\ & & 5 \end{bmatrix}} \cdot \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 0 & -3 & 5 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}}$$

$0.-2+3.1+5.1 = 8$

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = A$$

Beispiel 2x2

$$\boxed{A = \begin{bmatrix} 7'67 & 14'5 \\ 14'5 & 29'67 \end{bmatrix}}$$

$$\det\left[A - \lambda I\right] = 0 \longrightarrow \det\begin{bmatrix} 7'67-\lambda & 14'5 \\ 14'5 & 29'67-\lambda \end{bmatrix} = 0 \longrightarrow$$

$$(7'67-\lambda)(29'67-\lambda) - 14'5^2 = 0 \longrightarrow$$

$$7'67 \cdot 29'67 - \lambda(7'67+29'67) + \lambda^2 - 14'5^2 = 0 \longrightarrow$$

$$\lambda^2 - \lambda \cdot 37'34 + 17'32 = 0$$

$$\lambda = \frac{37'34 \pm \sqrt{37'34^2 - 4 \cdot 17'32}}{2} = \begin{cases} \lambda_1 = 36'87 \\ \lambda_2 = 0'47 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} ax^2+bx+c=0 \\ x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} \end{array}}$$

$$\boxed{\lambda_1 = 36'87} \rightarrow A \cdot \vec{v_1} = \lambda_1 \vec{v_1} \rightarrow \begin{bmatrix} 7'67 & 14'5 \\ 14'5 & 29'67 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{bmatrix} = 36'87 \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{bmatrix}$$

$$7'67\, v_{11} + 14'5\, v_{12} = 36'87\, v_{11} \rightarrow v_{11} = \frac{14'5}{29'2} v_{12}$$

$$14'5\, v_{11} + 29'67\, v_{12} = 36'87\, v_{12}$$

$$v_{11} = 1 \longrightarrow v_{12} = 2'04 \qquad \boxed{\vec{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2'04 \end{bmatrix}}$$

$$\boxed{\lambda_2 = 0'47} \rightarrow A \cdot \vec{v}_2 = \lambda_2 \vec{v}_2 \rightarrow \begin{bmatrix} 7'67 & 14'5 \\ 14'5 & 29'67 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{bmatrix} = 0'47 \begin{bmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} 7'67\, v_{21} + 14'5\, v_{22} = 0'47\, v_{21} \\ 14'5\, v_{21} + 29'67\, v_{22} = 0'47\, v_{22} \end{array} \right| \quad v_{21} = \frac{14'5}{-7'2} v_{22} = -2'01\, v_{22}$$

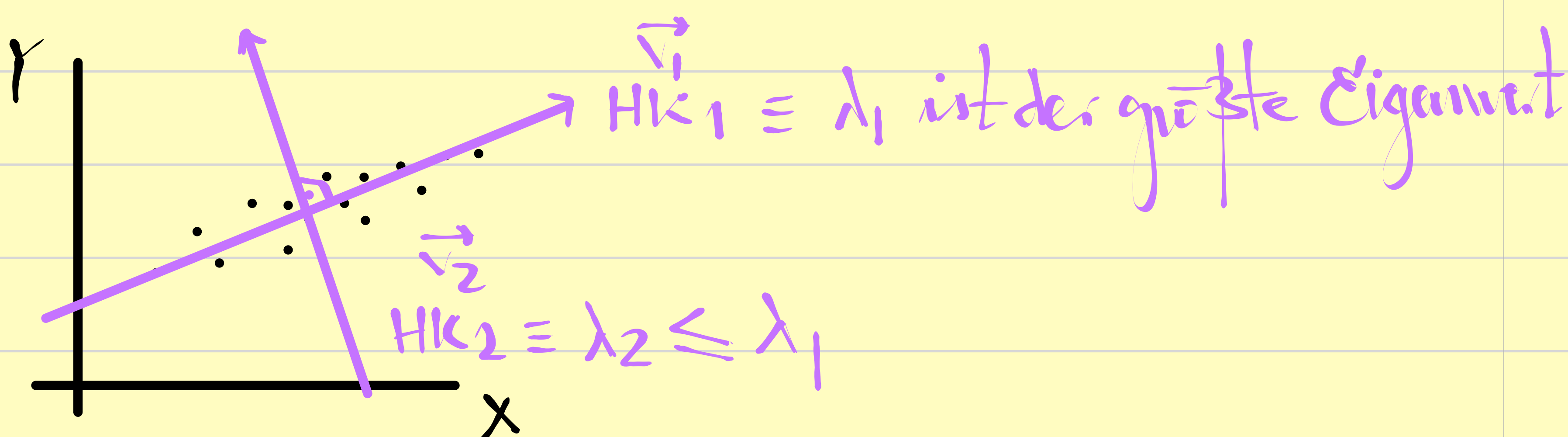
$$v_{21} = 1 \longrightarrow v_{22} = \frac{-1}{2'01} = -0'497 \qquad \boxed{\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -0'497 \end{bmatrix}}$$

Dimensionalitätsreduktion

Hauptkomponentenanalyse. (HK)

Definition. die HK sind die Eigenwerte der Kovarianzmatrix

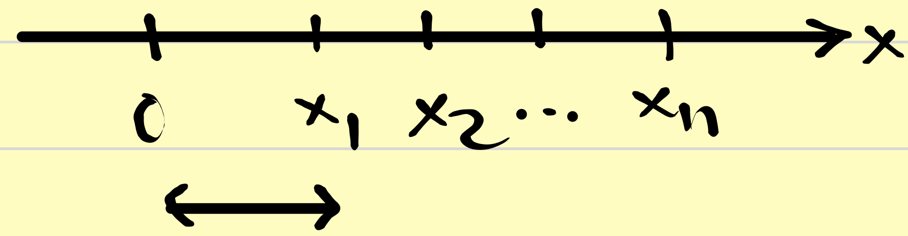
Grundidee der HKA: die Basis der HKomponenten beschreiben die Variabilität am besten.



Kovarianzmatrix. 2×2

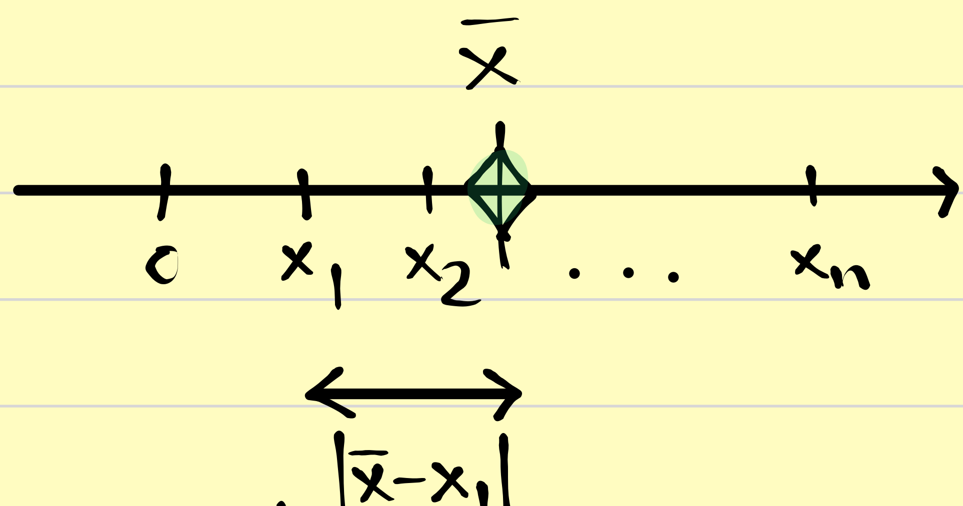
$$\mathcal{C}(X,Y) = \begin{bmatrix} VAR(X) & COV(X,Y) \\ COV(X,Y) & VAR(Y) \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}} \qquad \boxed{\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}}$$



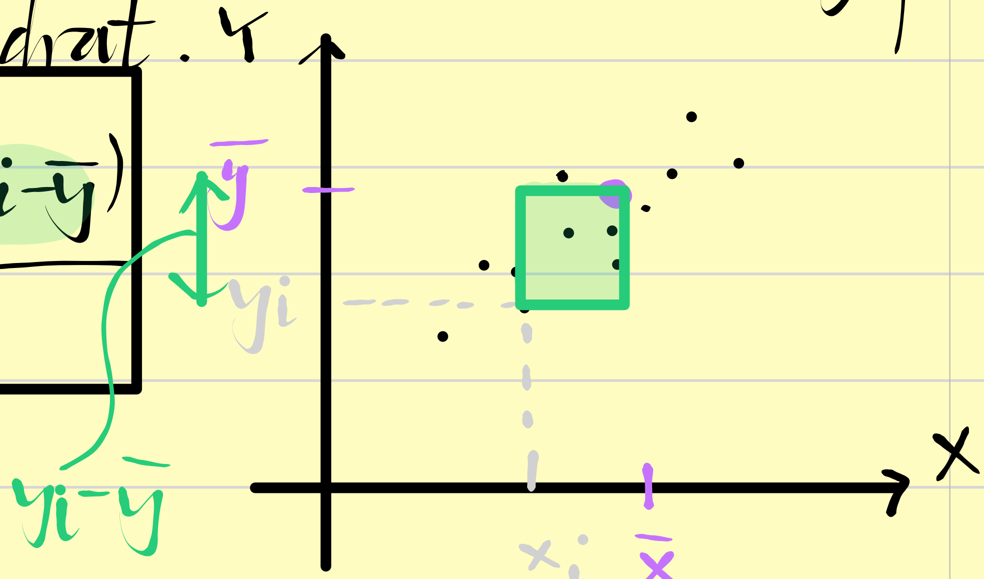
Mittelwert: die Summe der Abstände zum Bezugspunkt NULL.

$$\boxed{VAR(X) = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$$



Varianz: die Summe der Abstände zum Bezugspunkt MITTELWERT in Quadrat.

$$\boxed{COV(X,Y) = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n-1}}$$



Kovarianz: die Summe der Flächen der Vierecken der Punkte zum Bezugspunkt MITTELWERT.

$x_i - \bar{x}$

Beispiel: ein Management System von 2 Kennzahlen (Kosten & Umsatz) wird über 4 Wochen ermittelt. Kalkulieren Sie die Hauptkomponenten vom System und wie viel Variabilität wird dadurch erklärt.

$$X: €/\text{Stück}: [17, 19, 23, 22]$$
$$Y: \text{Mio } €: [34, 41, 46, 45]$$

$$\bar{x} = \frac{17+19+23+22}{4} = 20'25 \qquad \bar{y} = \frac{34+41+46+45}{4} = 41'5$$

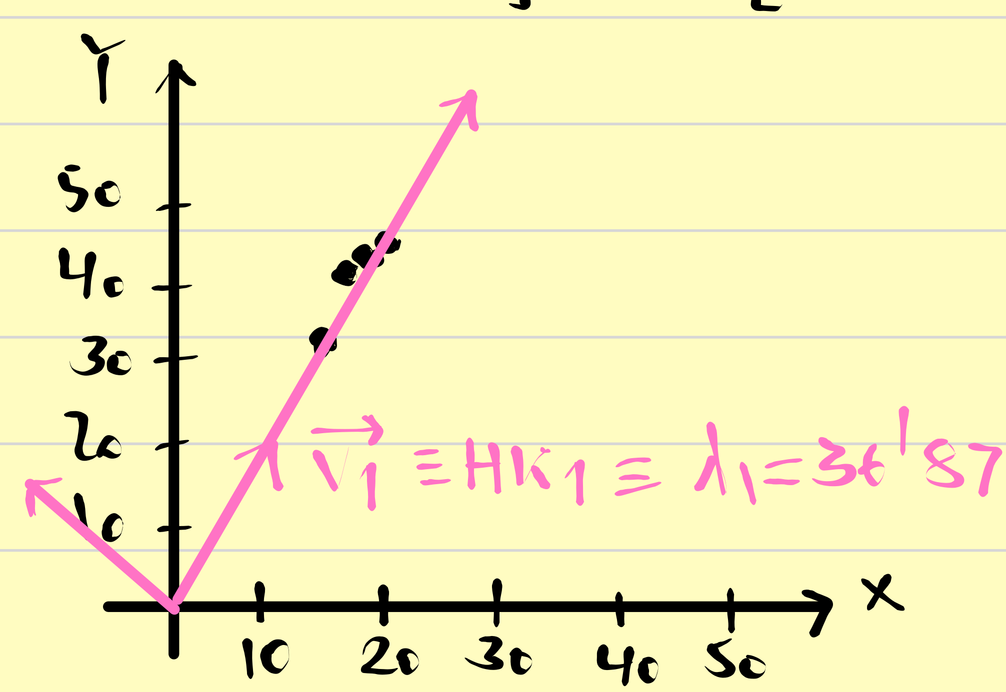
$$VAR(X) = \frac{(17-20'25)^2+(19-20'25)^2+(23-20'25)^2+(22-20'25)^2}{4-1} = 7'67$$

$$VAR(Y) = \frac{(34-41'5)^2+(41-41'5)^2+(46-41'5)^2+(45-41'5)^2}{4-1} = 29'67$$

$$Cov(X,Y) = \frac{(17-20'25)(34-41'5)+(19-20'25)(41-41'5)+(23-20'25)(46-41'5)+(22-20'25)(45-41'5)}{4-1} = 14'5$$

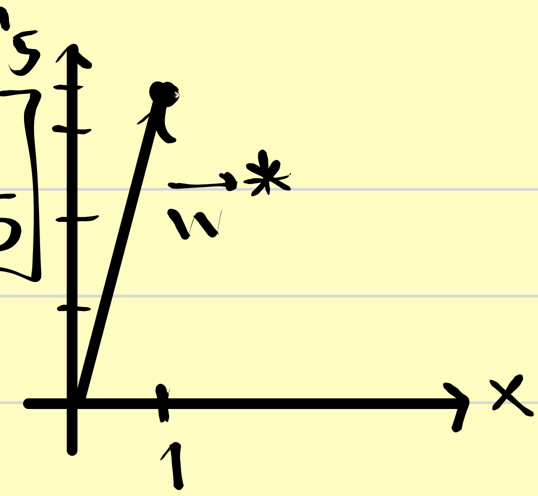
$$\mathcal{V} = \begin{bmatrix} 7'67 & 14'5 \\ 14'5 & 29'67 \end{bmatrix} \qquad \mathcal{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2'04 & -0'49 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 36'87 & 0 \\ 0 & 0'47 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\mathcal{V} = \mathcal{P} \cdot D \cdot \mathcal{P}^{-1}}$$



Wie viel Variabilität wird durch $\vec{v}_1$ erklärt?

$\vec{w}^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 3'5 \end{bmatrix}$



$$\text{variab.}(\vec{v}_1) = \frac{\lambda_1}{\sum \lambda_i} = \frac{36'87}{36'87 + 0'47} = 0'98$$

Mit NUR $\vec{v}_1$ kann ich 98% der Variabilität erklären.