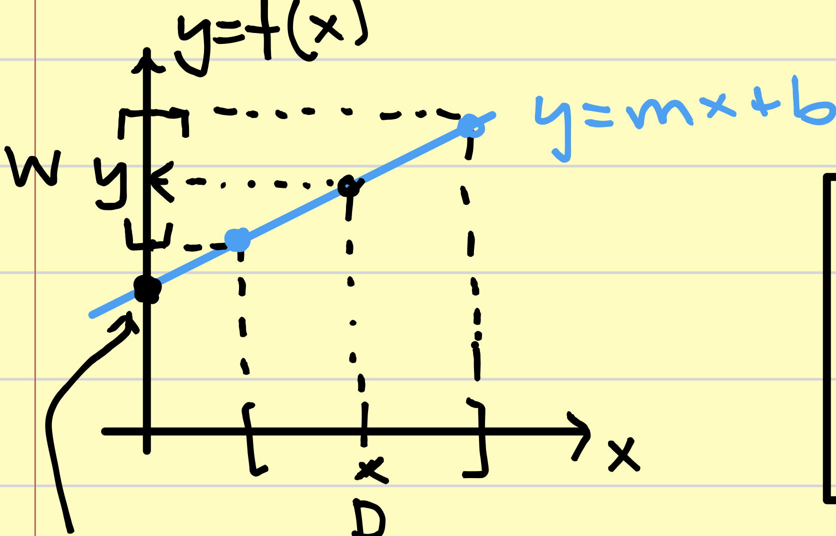
20251017_Mathematik_1B

# Funktionstypen

## 1. LINEARE FUNKTIONEN

$\boxed{y = mx + b}$




$x=0$

$y(x=0)=b$

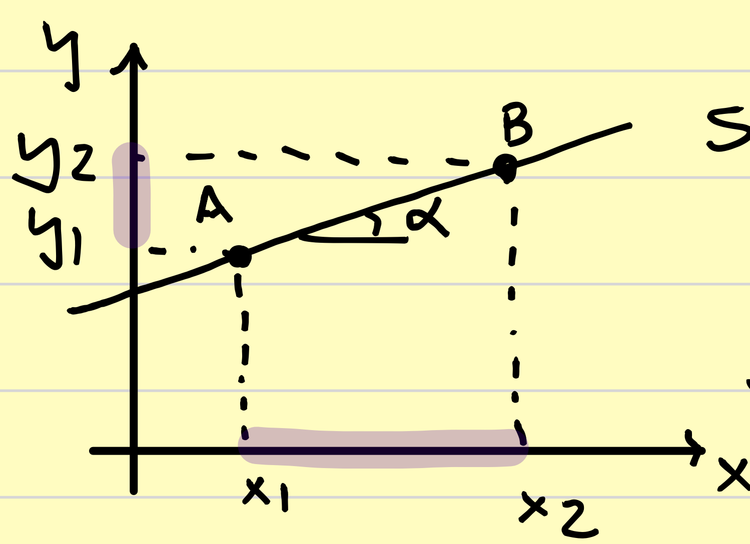
$\boxed{m = \text{Steigung} \quad \frac{dy}{dx} = m}$

$\boxed{b = \text{Achsenabschnitt}}$

Formel für eine Linie die durch 2 Punkte geht:

$A(x_1, y_1)$

$B(x_2, y_2)$



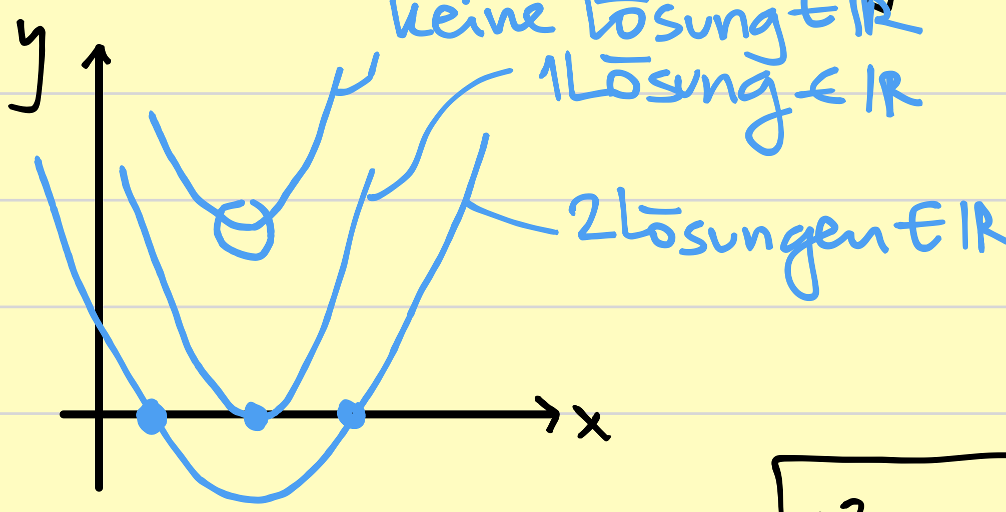

$$\text{Steigung} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x + b$$

$x=0 \rightarrow y = b$

$$\boxed{\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$$

2. Quadratische Funktionen: $y = ax^2 + bx + c$




$$ax^2 + bx + c = 0 \longrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

wenn $b^2 - 4ac > 0 \rightarrow$ 2 Lösungen $\in \mathbb{R}$
wenn $b^2 - 4ac = 0 \rightarrow$ 1 Lösung $\in \mathbb{R}$
wenn $b^2 - 4ac < 0 \longrightarrow$ keine Lösung $\in \mathbb{R}$.

Beispiel: $y = f(x) = 2x^2 + x + 1$

$$y = 0 \rightarrow 2x^2 + x + 1 = 0 \rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{4} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-8}}{4}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{-7}}{4} = \frac{-1 \pm \sqrt{7} \cdot \sqrt{-1}}{4}$$

$$x = \frac{-1 \pm i\sqrt{7}}{4}$$


- Das Produkt einer Summe & Differenz von 2 reelen Zahlen ist die Differenz der Quadraten.

$$(x-y)(x+y) = x^2 - y^2$$

- $(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$

  $(x-y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy$

Wirtschaft: Gewinnfunktion $G(q)$ oft quadratisch (lineare Nachfrage, lineare Kosten).

3. Potenzfunktionen: $y = f(x) = x^r$

$f^{-1}(x) \rightarrow \log \rightarrow r \log x = \log y$

Wirtschaft: $q(p) = k\,p^{-\varepsilon}$ $\quad \varepsilon > 0$ [Preiselastizität]

$\log q = \log k - \varepsilon \log p \rightarrow \frac{\log q}{\log k} = -\varepsilon \log p$

$-\frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{\log q}{\log k} = \log p \rightarrow \boxed{p = e^{-\frac{1}{\varepsilon}}\, e^{\frac{\log q}{\log k}}}$

4. Polynomfunktionen n-ten Grades.

$f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 \quad , a_n \neq 0$

Beispiel: Gesamtkosten $K(x) = 0{,}02x^3 - 0{,}9x^2 + 20x + 500$

Interpretation: zunächst sinkende Kosten (Lerneffekt), später steigende (Engpässe).

$-500 = x(0{,}02x^2 - 0{,}9x + 20)$

## 5. Exponential & Logarithmus.

Exp: $f(x) = a^x \quad a>0 \quad a \neq 1$

log: $g(x) = \log_a x$ ; als inverse von $a^x$, $x>0$

Natürliche basis: $a = e \approx 2'71828$

Gesetzte:

$$a^{x+y} = a^x a^y$$

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a x = \frac{\log_e x}{\log_e a} = \frac{\ln x}{\ln a}$$

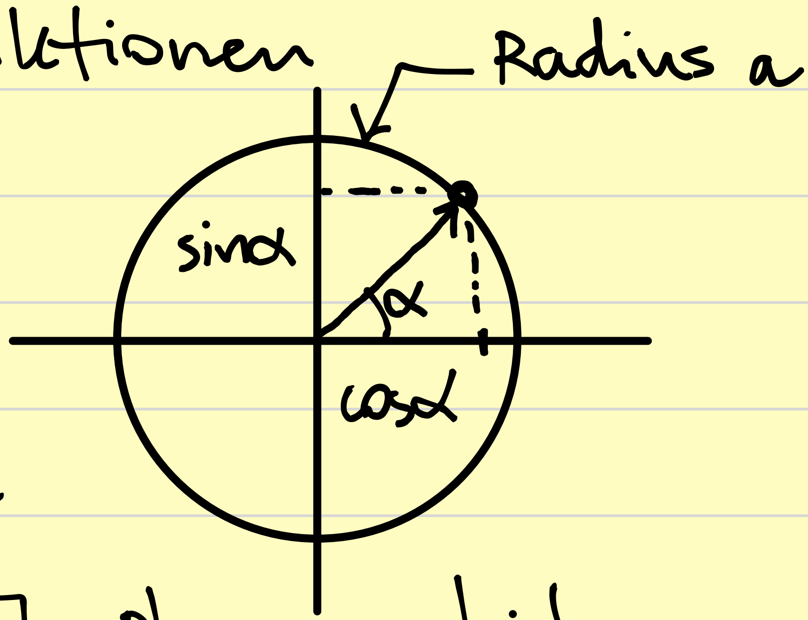
Mini-Übung. $K_0 = 10000$ € $i = 4\%$ p.a. (jährlich)
Wann erreicht das Kapital ein Wert von 15000 € (ZZR).

Lösungsskizze: $15000 = 10000 \cdot (1'04)^t \rightarrow 1'5 = (1'04)^t$

$\ln 1'5 = t \ln 1'04 \rightarrow t = \dfrac{\ln 1'5}{\ln 1'04} \cong 10'34$ Jahre

## 6. Trigonometrische Funktionen

$\sin, \cos, \tan$

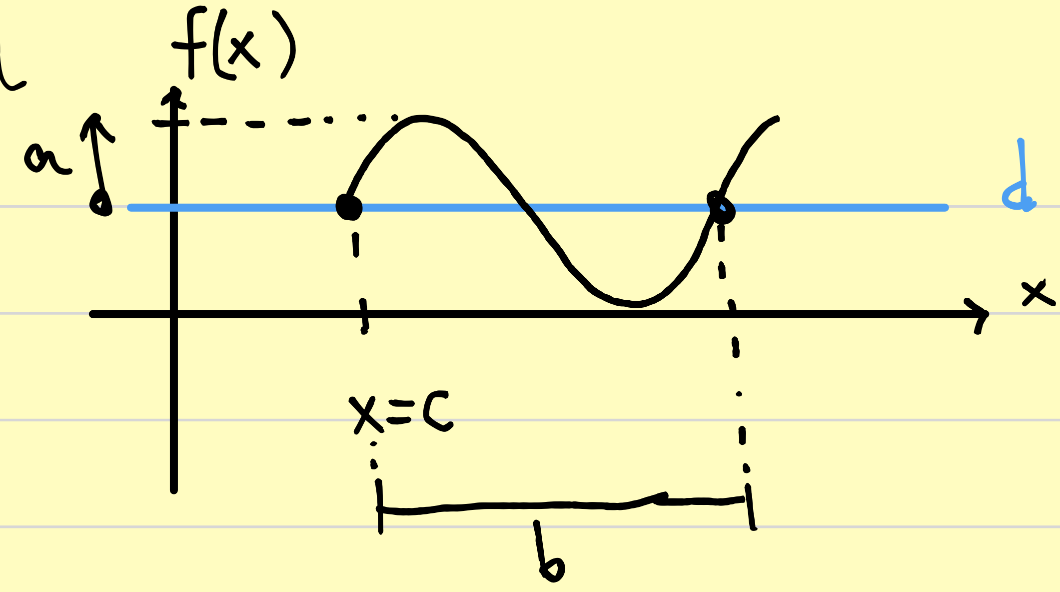



$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$f(x) = a \cdot \sin(b(x-c)) + d$$

$|a| \cong$ Amplitude ; Periode $\cong \dfrac{2\pi}{|b|}$ ; Phasenverschiebung $= c$

Mittellinie = d




---

Ü1. Für die Stückkostenfunktion $k(x)=\frac{K(x)}{x}$

mit $K(x)=5000+24x-0{,}02x^2$

a) Bestimme D(k) als Interval

$x>0 \longrightarrow D=?$

$k(x)=\frac{5000}{x}+24-0{,}02x$

$\lim\limits_{x\to\infty} k(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to 0} k(x) = \infty$


$\boxed{D \to \left]0,\infty\right[}$

W $\quad W \to \left]-\infty,\infty\right[$

Ü2. Bijektivität & Inverse.

Nachfrage $q(p)=150\,e^{-0{,}3p}$ $\quad p\geq 0$

a) Zeige: $q$ ist bijektiv zw. $[0,\infty[$ & $]0,150]$

. die Funktion ist streng fallend $\longrightarrow$ INJEKTIV.

$$\frac{dq}{dp} = -0{,}3 \cdot 150 \cdot e^{-0{,}3p} < 0$$

. Grenzwert $q(0)=150$ ; $p \to \infty \to q \to 0^+$

$\longrightarrow$ SURJEKTIV

b) bestimme die inverse Nachfrage $]0^+, 150]$

$p(q)$

$$q = 150\, e^{-0{,}3p} \longrightarrow \frac{q}{150} = e^{-0{,}3p} \rightarrow \ln\left[\frac{q}{150}\right] = -0{,}3p$$

$$\rightarrow p(q) = \frac{-1}{0{,}3} \ln\left[\frac{q}{150}\right]$$

Ü3. Ein Unternehmen benötigt für ein Investitions ziel Z Kapital von $1{,}5 \cdot 10^6$ €.

Startkapital $k_0 = 10^6$ €

Verzinsung. 6% p.a. monatliche Verzinsung

a) bestimme $k(t)$ (Jahre)

$$K(t) = 10^6 \cdot \left(1 + \frac{0{,}06}{12}\right)^{12 \cdot t}$$

b) bestimme die Zeit „t" bis Z erreicht ist

$$1{,}5 \cdot 10^6 = 10^6 \cdot \left(1 + \frac{0{,}06}{12}\right)^{12 \cdot t}$$

$$\ln(1'5) = 12 \cdot t \cdot \ln\left(1+\frac{0'06}{12}\right)$$

$$t = \frac{1}{12} \cdot \frac{\ln(1'5)}{\ln\left(1+\frac{0'06}{12}\right)} \simeq 81'15 \text{ Monate} \cong 6'76 \text{ Jahre}$$

**Merkkasten:**

- MONOTON $\longrightarrow$ INJEKTIV (auf Intervalen)
- BIJEKTIV $\longleftrightarrow$ INV. FUNKTION
- EXPONENTIAL & LOGARITHMUS: Inverse zueinander