20250414

$$\left.\begin{aligned} &\frac{i(t)}{K-i(t)} = A\,e^{rt} \\ &A = \frac{i(0)}{K-i(0)} \end{aligned}\right\} \quad \dots \quad i(t) = \frac{K}{1+\left(\frac{K-i(0)}{i(0)}\right)e^{-rt}}$$

$$i(t) = A\cdot e^{rt}\cdot\left(K-i(t)\right) = A\cdot K\cdot e^{rt} - A e^{rt}\cdot i(t) \longrightarrow$$

$$i(t) + A\cdot e^{rt}\cdot i(t) = A\cdot K\cdot e^{rt} \longrightarrow$$

$$i(t)\left[1+Ae^{rt}\right] = AKe^{rt} \rightarrow i(t) = \frac{A\cdot K\cdot e^{rt}}{1+Ae^{rt}} \longrightarrow$$

$$i(t) = \frac{A\cdot K\cdot \cancel{e^{rt}}\cdot \cancel{e^{-rt}}}{\left(1+Ae^{rt}\right)e^{-rt}} = \frac{AK}{e^{-rt}+A}\,\frac{1/A}{1/A} =$$

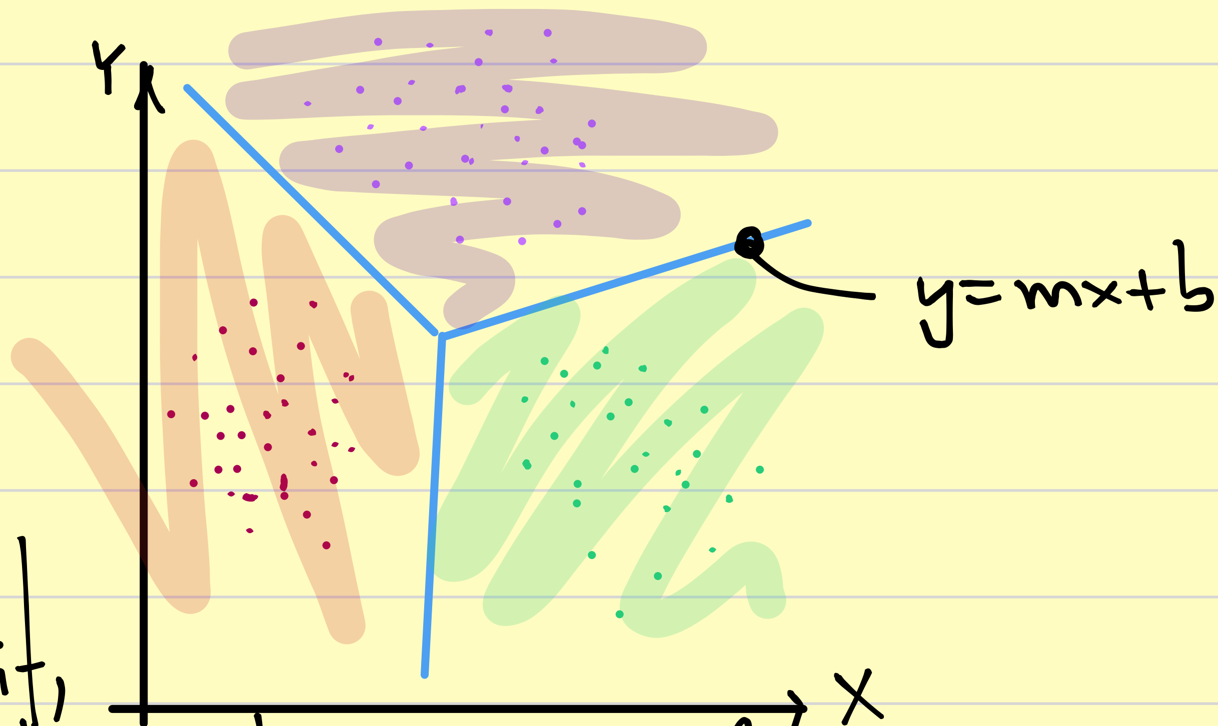
$$= \frac{K}{\frac{1}{A}e^{-rt}+1} = \frac{K}{1+\frac{1}{\frac{i(0)}{K-i(0)}}\cdot e^{-rt}} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \boxed{i(t) = \frac{K}{1+\frac{K-i(0)}{i(0)}\cdot e^{-rt}}}$$

SUPPORT VECTOR MASCHINEN (SVM). Maschinelles Lernen.

Beispiel:

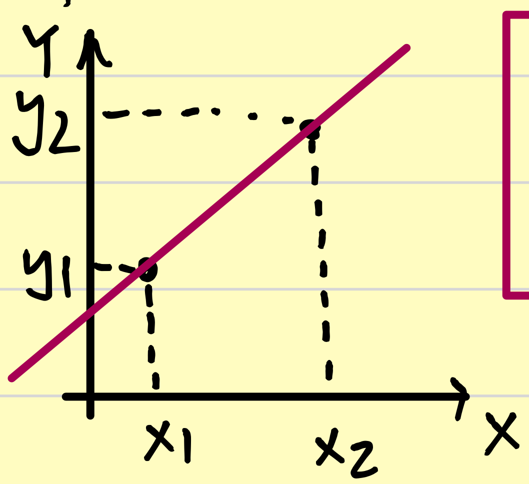
- Es besteht einen Datenbank mit Trainingsdaten. ✓



? Wie sollten wir den Raum trennen, damit, wenn ein neuer kommt korrekt zugewissen wird?

- Die Trennlinien stellen sicher, dass wenn neue Kunden kommen, sie schnell und ohne (fast ohne) Rechenleistung zugeordnet werden.
- SVM liefert die Trennlinien.

Konzept 1. Linie durch zwei Punkte:

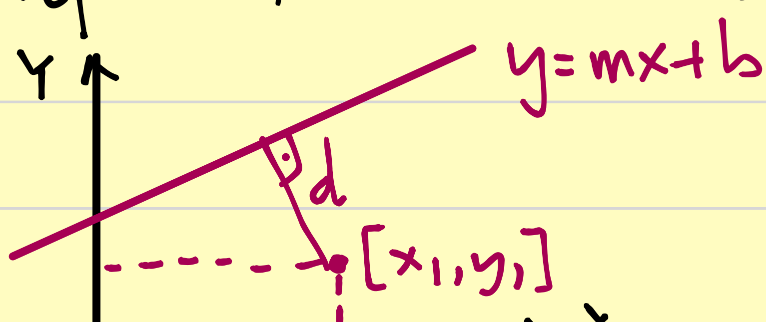


$$\boxed{\frac{y-y_2}{x-x_2}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}}$$

A[1,2]
B[3,3]

$$\frac{y-3}{x-3}=\frac{2-3}{1-3} \rightarrow y-3=\frac{1}{2}(x-3)$$

Konzept 2. Abstand zw. Linie [$y=mx+b$] und Punkt [x_1,y_1]



$$\boxed{d=\frac{|mx_1+y_1+b|}{\sqrt{m^2+1}}}$$

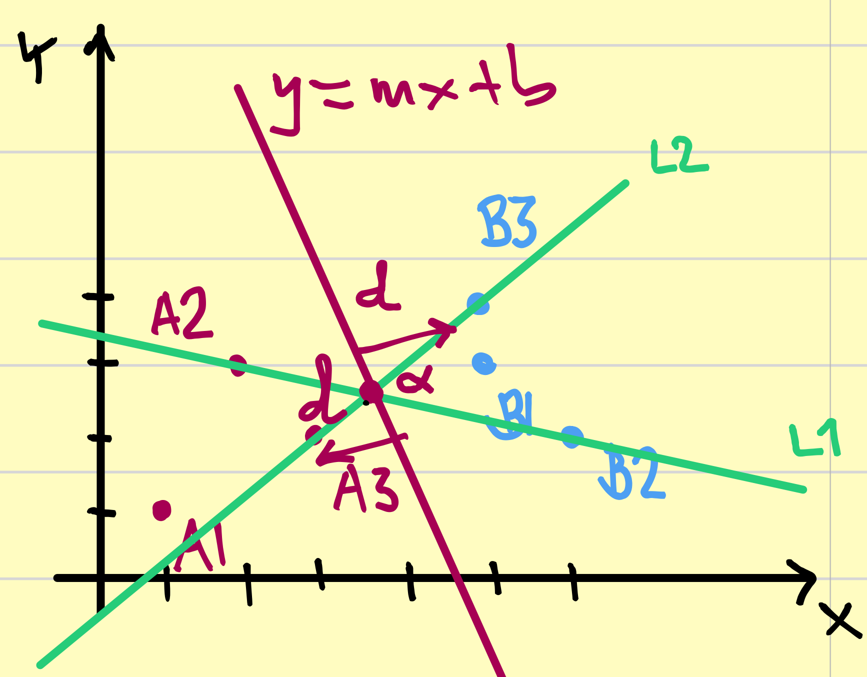
$y = 3x+2$
$A[1,4]$

$$d = \frac{|3.1+4+2|}{\sqrt{3^2+1}} = \frac{9}{\sqrt{10}} = \frac{9\sqrt{10}}{10}$$

Ziel von SVM ist die optimale Trennlinie zu finden, welche vorgegebene Trainingsdaten getrennt werden.

Beispiel. Gegeben sind folgende Trainingsdaten
ROTE [A]: [1,1] [2,3] [3,2] BLAUE [B]: [5,3] [6,2] [5,4]

Ziel: a) finden Sie die optimale Trennlinie ($y=mx+b$), welche die Klassen am besten separiert.
b) berechnen Sie die minimale Abstände „d" (MARGIN) der nächstgelegenen Punkten zur Trennlinie.
c) definieren Sie die Support Vektoren.



SCHRITT 1. Punkte visualisieren.

SCHRITT 2. Trennlinie in der Form $y=mx+b$ ausformulieren.

SCHRITT 3. Hilfe·Trennlinien (sind nicht die optimale Trennlinie)

Die Hilfe·Trennlinien, trennen den Raum in zwei, sind aber an der Grenze.

Die optimale (gesuchte) Trennlinie geht durch den Punkt $\alpha[x_\alpha, y_\alpha]$ wo sich die Hilfe. Trennlinien treffen.

L1: A2, B2 $\quad$ L2: A3, B3

$[2,3]$ $[6,2]$ $\quad$ $[3,2]$ $[5,4]$

$$L1: \frac{y-2}{x-6} = \frac{3-2}{2-6} \longrightarrow y-2 = \frac{-1}{4}(x-6) \qquad (1)$$

$$L2: \frac{y-4}{x-5} = \frac{2-4}{3-5} \longrightarrow y-4 = 1.(x-5) \qquad (2)$$

$$(1)=(2) \longrightarrow \alpha : (1)-(2)$$

$$(\cancel{y_\alpha}-2)-(\cancel{y_\alpha}-4) = \frac{-1}{4}(x_\alpha-6)-(x_\alpha-5)$$

$$-2-(-4) = \frac{-1}{4}x_\alpha + \frac{6}{4} - x_\alpha + 5 \longrightarrow 2 = \left(\frac{-1}{4}-1\right)x_\alpha + \frac{26}{4}$$

$$2 - \frac{26}{4} = \frac{-5}{4}x_\alpha \longrightarrow \frac{8}{4} - \frac{26}{4} = \frac{-5}{4}x_\alpha \longrightarrow \frac{-18}{4} = \frac{-5}{4}x_\alpha$$

$$\boxed{\alpha[3'6, 2'6]} \qquad \longrightarrow x_\alpha = \frac{18}{5} = 3'6$$

$$\xrightarrow[(2)]{} y_\alpha = 4 + (x_\alpha - 5) = 3'6 - 1 = 2'6$$

SCHRITT 4. Nur finden wir die optimale Trennlinie.

Die optimale Trennlinie hat den gleichen Abstand zu den nächstgelegenen Punkten: B1 & A3

$[5,3]$ $\quad$ $[3,2]$

d : B1 · Trennlinie $\quad d = \dfrac{|5m+3+b|}{\sqrt{m^2+1}}$ $\quad (3)$

d : A3 · Trennlinie $\quad d = \dfrac{|3m+2+b|}{\sqrt{m^2+1}}$ $\quad (4)$

Trennlinie geht durch α $\quad y_\alpha = m x_\alpha + b$ $\quad (5)$

$3{,}6 = 2{,}6m + b$

$d = d \equiv (3) = (4) \rightarrow 5m+3+\cancel{b} = 3m+2+\cancel{b} \rightarrow m = \dfrac{-1}{2}$

(5) $\quad 3{,}6 = 2{,}6 \cdot \left(\dfrac{-1}{2}\right) + b \longrightarrow b = 4{,}9$

$\boxed{y = \dfrac{-1}{2}x + 4{,}9}$ ✓

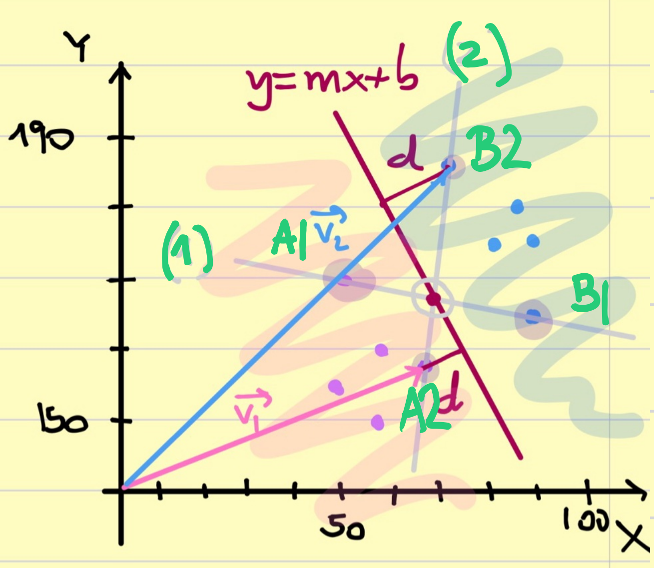
$d_{\text{MARGIN}} = \dfrac{\left|5 \cdot \left(\frac{-1}{2}\right) + 3 + 4{,}9\right|}{\sqrt{\left(\frac{-1}{2}\right)^2 + 1}} = 4{,}829$ ✓

SUPPORT VEKTOREN: B1 $[5,3]$ A3 $[3,2]$ ✓

Beispiel.

Beispiel

	x (Gewicht)	Y (Größe)	klasse
	50	155	♀
	60	160	♀
A2	68	158	♀
	58	150	♀
A1	55	170	♀
B1	90	165	♂
	85	175	♂
	88	180	♂
B2	75	190	♂
	72	185	♂



$$L1: [A1, B_1] \quad [55,170]\ [90,165] \left.\right\} \frac{y-170}{x-55} = \frac{165-170}{90-55} \to y-170 = -0'143(x-55) \quad (1)$$

$$L2: [A_2, B_2] \quad [68,158]\ [75,190] \left.\right\} \frac{y-158}{x-68} = \frac{190-158}{75-68} \to y-158 = 4'57(x-68) \quad (2)$$

$$(\cancel{y_\alpha}-170) - (\cancel{y_\alpha}-158) = -0'143(x_\alpha-55) - 4'57(x_\alpha-68)$$

$$-12 = x_\alpha[-0'143-4'57] + 0'143 \cdot 55 + 4'57 \cdot 68$$

$$x_\alpha = \frac{-330'625}{-4'713} = 70'15$$

$$(1) \quad y_\alpha = 170 - 0'143(70'15-55) = 167'833$$

$$\alpha[70'15, 167'833]$$

SUPPORT VECTOREN A2 $[68,158]$ B2 $[75,190]$ ✓

$$d: A2 \cdot TL: \quad d = \frac{|68m+158+b|}{\sqrt{m^2+1}} \quad (3)$$

$$d: B2 \cdot TL: \quad d = \frac{|75m+190+b|}{\sqrt{m^2+1}} \quad (4)$$

$$TL \text{ durch } \alpha: \quad 167'833 = 70'15m + b \quad (5)$$

$$(3)=(4) \to 68m+158+\cancel{b} = 75m+190+\cancel{b} \to m = -4'57$$

$$(5) \to 167'833 = 70'15 \cdot (-4'57) + b \to b = 488'52 \quad (6)$$

$$\boxed{y = -4'57x + 488'52}$$ ✓

(·) $68m - 75m = 190 - 158$

$-7m = 32$

$m = \frac{-32}{7} = -4'57$

$$\boxed{d = \frac{|68 \cdot (-4'57) + 158 + 488'52|}{\sqrt{(4'57)^2 + 1}} = 71'77}$$ ✓