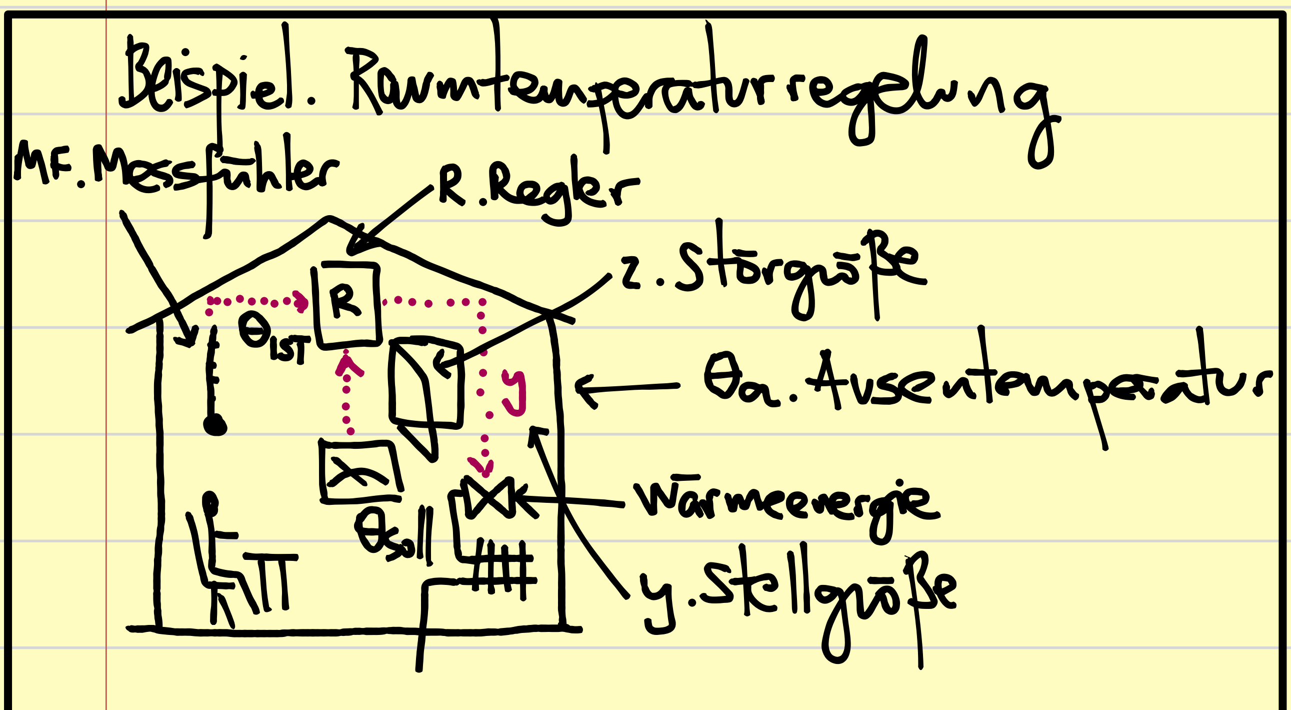
Das Prinzip der Regelung



Es soll die Temperatur θ_{IST} in einem Raum auf einem vorgegebenem Wert θ_{soll} gehalten werden.

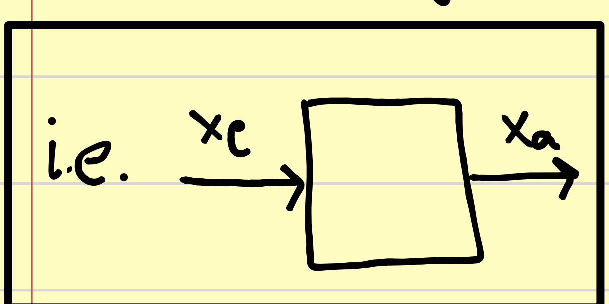
Ohne Regler „R" müsste man zunächst ein Thermometer in den Raum bringen, um festzustellen, ob die gewünschte Temperatur θ_{soll} vorhanden ist. Liegt der ist wert θ_{ist} unterhalb des Sollwertes θ_{soll} dann wird man das Heizkörperventil mehr aufdrehen.

Die Differenz zw. Soll- und Istwert nennt man REGEL-DIFFERENZ $\theta_e = \theta_{soll} - \theta_{ist}$. Diese Art der Regelung, bei der der Mensch tätig ist, bezeichnet man als HANDREGELUNG.

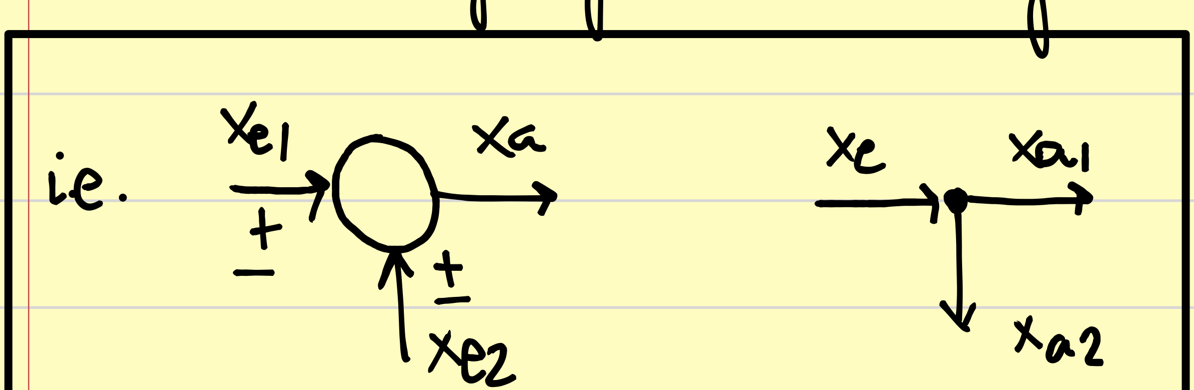
All die Einflüsse, die eine Abweichung der geforderten Temperatur θ_{soll} verursachen, nennt man STÖRGRÖßEN. Da diese Störungen nicht konstant sind, ist eine Regelung erforderlich, die sofort eingreift um die Wirkung der Störung zu beseitigen.

Der eigentliche Regler (R) besteht aus einem **VERSTÄRKER** und einer **EINRICHTUNG ZUR ERZEUGUNG DES GEWÜNSCHTEN VERHALTENS**. Je genauer der Regler werden soll, desto empfindlicher darf der Regler auf eine Reglerdifferenz reagieren.

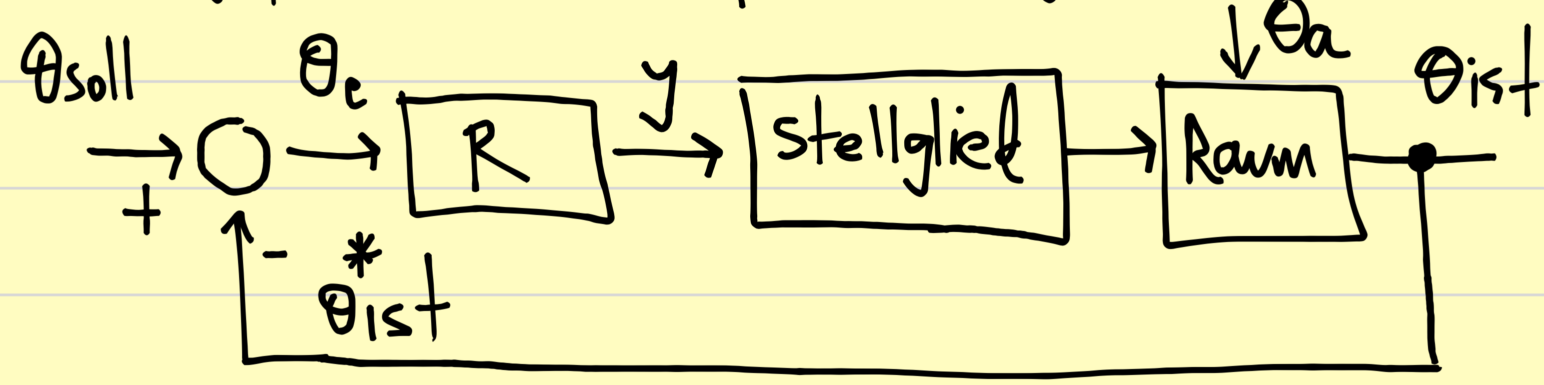
Darstellung im Wirkungsplan. Die einzelnen Glieder des Regelkreises werden nach DIN 19226 durch rechteckige Kästchen (BLÖCKE) symbolisiert.



Zur genaueren Kennzeichnung wird in einem Block symbolisch angegeben, wie die Ausgangsgröße bei plötzlicher Änderung der Eingangsgröße reagiert. Außerdem werden die Stellen, an denen mehrere Signale zusammentreffen, durch eine Additionsstelle und Punkte durch Verzweigungsstellen dargestellt.



Wirkungsplan des Temperaturregelkreises:



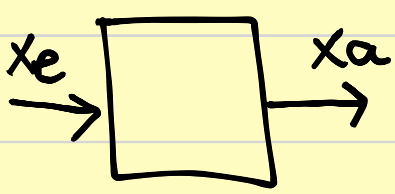
Einheitsbezeichnungen.

Die in der Regelungstechnik zu regelnden Größen können sehr unterschiedlicher physicha lischer Natur sein. Zur Vereinheitlichung werden die Regelgröße mit x_{ist}, der Sollwert mit x_{soll}, die Differenz zw x_{soll} und x_{ist} als Regeldifferenz e und die Stellgröße mit y bezeichnet.

Ferner wird die Regelgröße x_{ist} einfach als x bezeichnet und anstelle des Sollwertes x_{soll} wird die Bezeichnung FÜHRUNGSGRÖßE w angewandt.

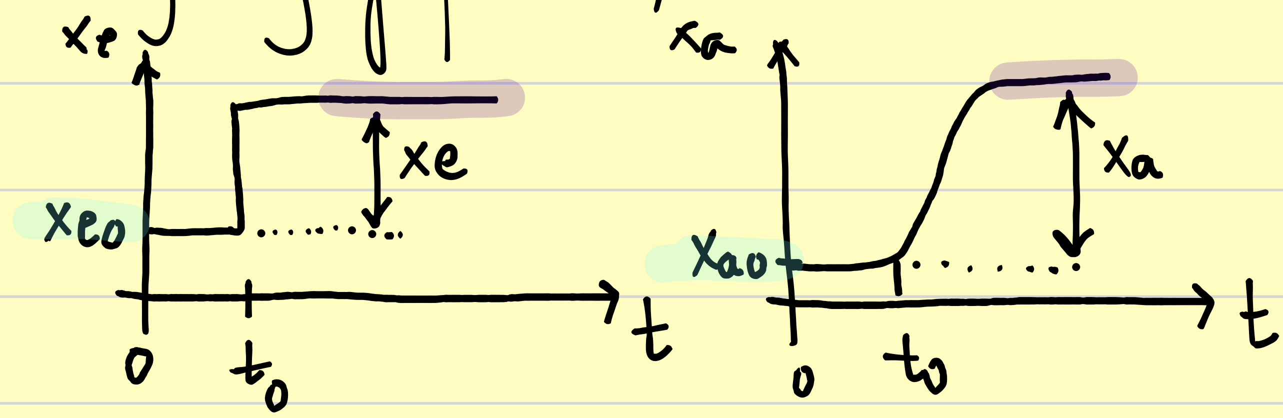
MATHEMATISCHE BEHANDLUNG VON REGELKREISEN

Beharrungszustand und Zeitverhalten eines RK-gliedes



Blocksystem eines RK-gliedes

Man unterscheidet zw. dem Beharrungszustand (statisches Verhalten) und dem Zeitverhalten (dynamisches Verhalten). Ist der Eingang x_e konstant, so ist bei proportionalen Systemen das Ausgangssignal X_a auch konstant. Nach einer Änderung der Eingangsgröße stellt sich normalerweise nach einer bestimmten Zeit auch eine konstante Ausgangsgröße ein, wie im Bild unten gezeigt ist:



Zeitverhalten eines RK-gliedes

Die Zusammenhänge zw. den Signalen im Beharrungszustand werden mit Hilfe von statischen Kennlinien bzw. Funktionen $x_a = f(x_e)$ beschrieben.

Die stationären Ein. und Ausgangsgrößen im Arbeitspunkt eines RK-gliedes werden als x_{e0} und x_{a0} bezeichnet. Bei der Untersuchung des statischen Verhaltens werden wir uns auf kleine Abweichungen Δx_e und Δx_a von einem Arbeitspunkt beschränken. Dabei ist es zweckmäßig, die kleinen Abweichungen Δx_e und Δx_a einfach durch x_e und x_a zu bezeichnen.

Die Augenblickswerte setzen sich damit aus den stationären Arbeitspunktwerten und den zeitabhängigen Abweichungen zusammen:

$$\boxed{\begin{aligned} X_e(t) &= X_{e0} + x_e(t) \\ X_a(t) &= X_{a0} + x_a(t) \end{aligned}}$$

In einem RK spielt neben dem statischen Verhalten das dynamische Verhalten eine wesentliche Rolle, somit auch das dynamische Verhalten der Glieder. Maßgebend sind hierbei die Augenblickswerte $x_e(t)$ $x_a(t)$ sowie deren zeitliche Ableitungen $\dot{x}_e(t), \ddot{x}_e(t)$ und $\dot{x}_a(t), \ddot{x}_a(t)$.

Gleichungen, die den statischen und dynamischen Zusammenhang zw. Ein- und Ausgangsgröße beschreiben, sind "gewöhnliche", lineare Differentialgleichungen von der Form:

$$\boxed{\begin{aligned} &a_2 \ddot{x}_a(t) + a_1 \dot{x}_a(t) + a_0 x_a(t) = \\ &\quad b_0 x_e(t) + b_1 \dot{x}_e(t) + b_2 \ddot{x}_e(t) \end{aligned}}$$

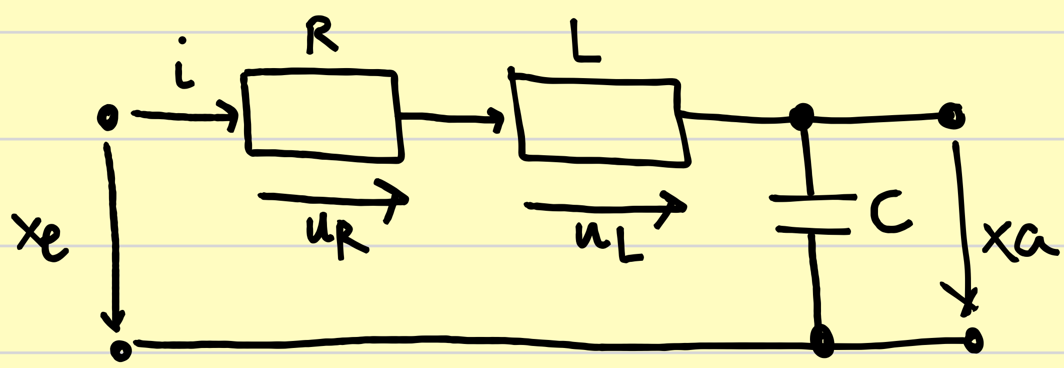
wobei a_i, b_i sind konstante Werte.

Die DGL kann in einer Normalform gebracht werden:

$$\boxed{\begin{aligned}&\frac{a_2}{a_0}\ddot{x}_a(t)+\frac{a_1}{a_0}\dot{x}_a(t)+x_a(t)=\\&\qquad\frac{b_0}{a_0}x_e(t)+\frac{b_1}{a_0}\dot{x}_e(t)+\frac{b_2}{a_0}\ddot{x}_e(t)\end{aligned}}\qquad a_0\neq 0$$

Beispiel:

REIHENSCHWING KREIS.



Eingangsgröße des gezeigten Reihenschwingkreises ist die Spannung x_e und die Ausgangsgröße ist die Spannung über dem Kondesator x_a.

- Nach dem 2. Kirchhoffschen Satz:

$$x_e = u_R + u_L + x_a$$

- Der Spannungsabfall am Wiederstand ergibt sich durch $u_R = i \cdot R$.
- Nach dem Induktionsgesetzt ist $u_L = L \cdot \frac{di}{dt}$
- Ferner ist der Ladestrom „i" proportional der Spannungsänderung am Kondensator $i = C \cdot \frac{dx_a}{dt}$

$$x_e(t) = x_a(t) + RC\,\dot{x}_a(t) + LC\,\ddot{x}_a(t)$$

$T_1 = RC$, $T_2^2 = LC$

$$\boxed{T_2^2 \ddot{x}_a(t) + T_1 \dot{x}_a(t) + x_a(t) = x_e(t)}$$

Lösung der Differentialgleichung

Es interessiert der zeitliche Verlauf der Ausgangsgröße $x_a(t)$, wenn die Eingangsgröße $x_e(t)$ einen bestimmten zeitlichen Verlauf annimmt.
Also $x_e(t)$ muss genau bekannt sein.

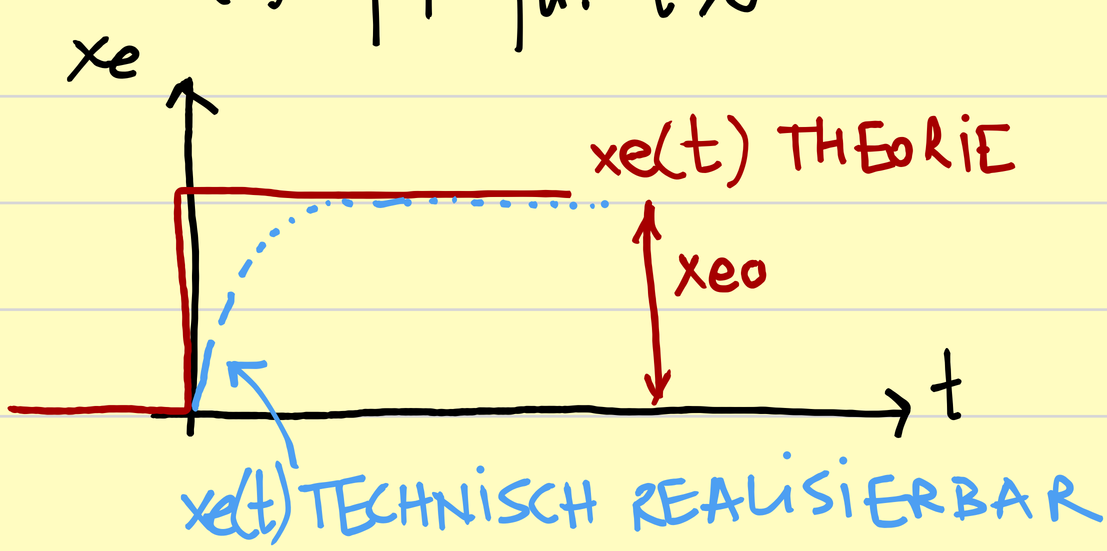
Spezielle Eingangsfunktionen

a) Die Sprungfunktion

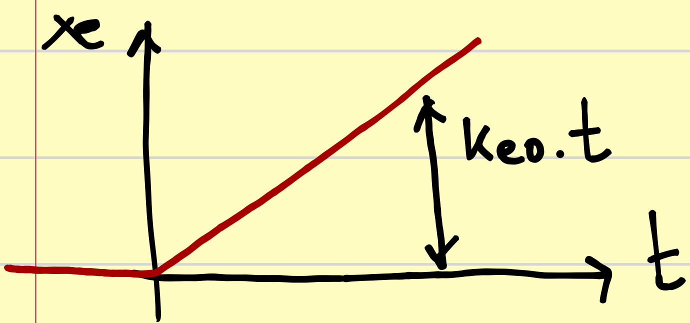
Sowohl für theoretische Untersuchungen als auch als praktische Testfunktion hat die Sprungfunktion als Eingangserregung eine große Bedeutung.

Definition Sprungfunktion: $x_e(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t<0 \\ x_{e0} = \text{const.} & \text{für } t>0 \end{cases}$

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t<0 \\ 1 & \text{für } t>0 \end{cases} \rightarrow x_e(t) = x_{e0} \cdot \sigma(t)$$



b) Rampen oder Anstiegsfunktion



Hier steigt $x_e(t)$ bei Null beginnend, linear mit der Zeit an:

$$x_e(t) = k_{eo} \cdot t \cdot \sigma(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t<0 \\ k_{eo} \cdot t & \text{für } t>0 \end{cases}$$

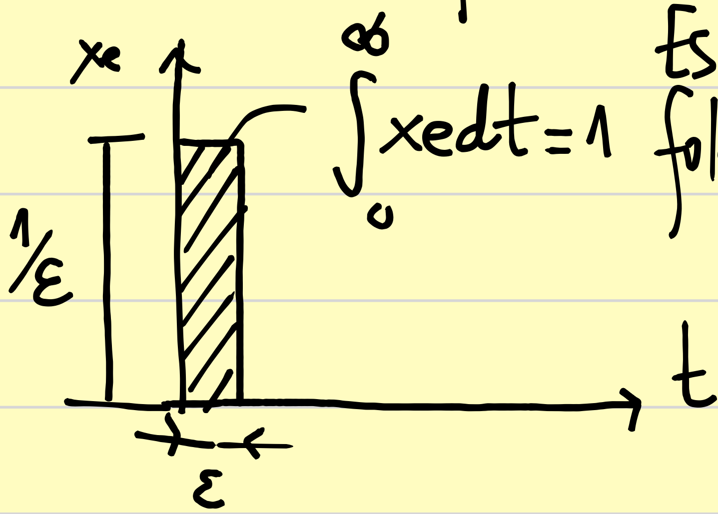
wobei $k_{eo} = \frac{dx_e(t)}{dt}$ die konstante Änderungsgeschwindigkeit des Eingangssignals ist.

c) Impulsfunktion (δ-Funktion)

Die ideale Impulsfunktion zeigt zum Zeitpunkt $t=0$ einen Sprung ins Unendliche und ist gleich Null für $t \neq 0$.

$$x_e(t) = \delta(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ \infty & t = 0 \end{cases}$$

Diese Funktion kann man sich aus einem rechteckförmigen Impuls der Breite ε und der Höhe $1/\varepsilon$ für $\varepsilon \to 0$ mit Zeitfläche 1.

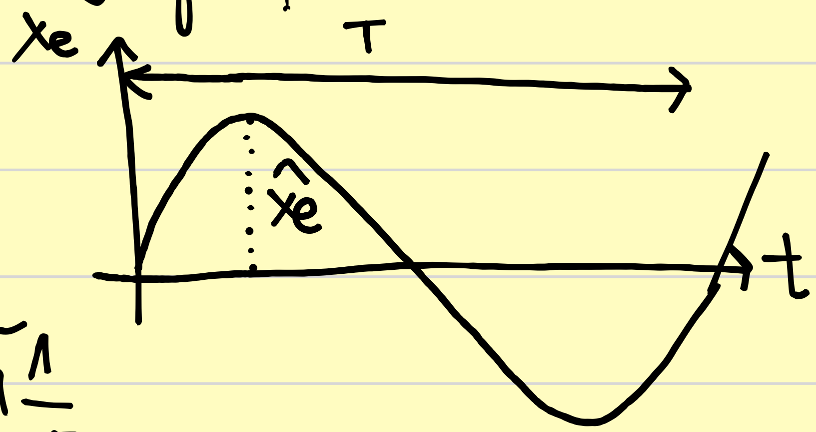


$$\int_0^\infty x_e \, dt = 1$$

Es folgt:

$$\boxed{\delta(t) = \frac{d\sigma(t)}{dt}} \quad (!)$$

d) Sinnusförmige Eingangsgröße



$$xe(t) = \hat{xe} \cdot \sin \omega t$$

wobei $\hat{xe}$ die Schwingungs-amplitude und $\omega = 2\pi \frac{1}{T}$ die Kreisfrequenz ist.

T ist die Schwingungsperiode $T = \frac{1}{f}$ f: FREQUENZ

Lösung der DGL bei sprunghafter Verstellung der Eingangsgröße

$$T_2^2 \ddot{x}_a(t) + T_1 \dot{x}_a(t) + x_a(t) = K \cdot xe(t)$$

Vereinfachend nehmen wir an, dass die Zeitkonstante T_2 sehr klein sei, und damit das Glied $T_2^2 \ddot{x}_a(t)$ vernachlässigbar. Die wäre zB der Fall, wenn die Induktivität L sehr klein bzw. Null wäre.

$$T_1 \dot{x}_a(t) + x_a(t) = K \cdot x_e(t)$$

bzw. für $t > 0$

$$\boxed{T_1 \dot{x}_a(t) + x_a(t) = K \cdot xe_0}$$

Lösung der DGL durch Trennen der Veränderlichen

$$\frac{dx_a}{dt} = \frac{1}{T_1}\left(K x_{e0} - x_a\right) \rightarrow \frac{dx_a}{K x_{e0} - x_a} = \frac{dt}{T_1}$$

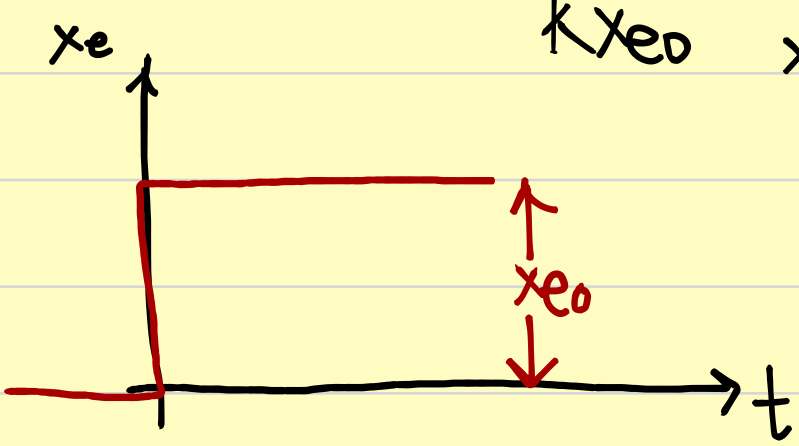
Durch Integration:

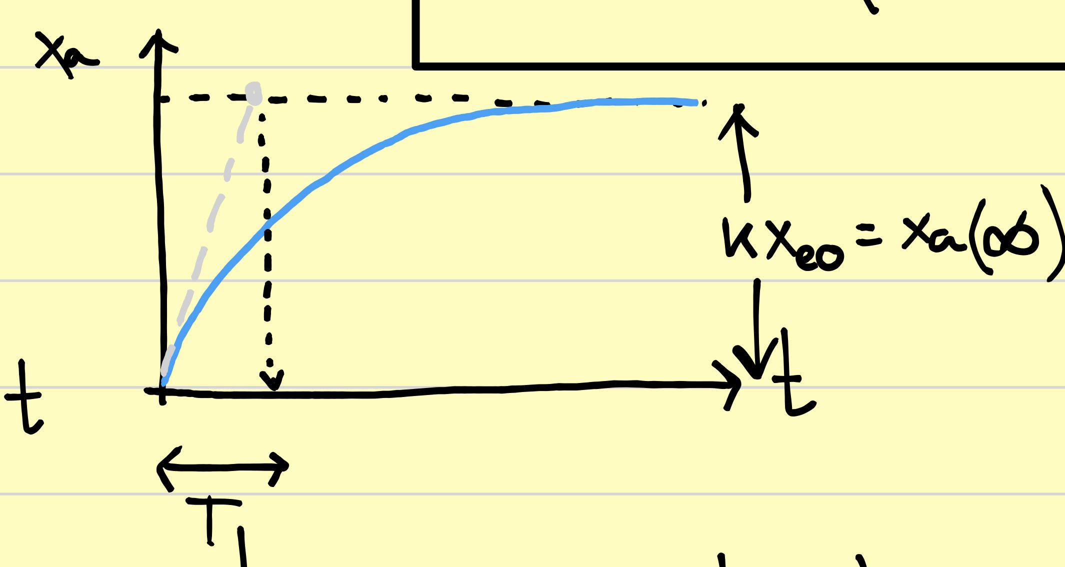
$$\int \frac{dx_a}{K x_{e0} - x_a} = \int \frac{dt}{T_1} \rightarrow -\ln\left(k x_0 - x_a\right) + C = \frac{t}{T_1}$$

$$x_a(0) = 0 \rightarrow C = \ln\left(k x_{e0}\right) \rightarrow \ln\left(1 - \frac{x_a}{k x_{e0}}\right) = \frac{t}{T_1}$$

nach x_a aufgelöst:

$$1 - \frac{x_a}{k x_{e0}} = e^{-t/T_1} \rightarrow \boxed{x_a(t) = k x_{e0}\left(1 - e^{-t/T_1}\right)}$$





Die Kurve $x_a(t)$ hat für $t=0$ die größte Steigung.

Legt man an die Kurve $x_a(t)$ zum Zeitpunkt $t=0$ die Tangente, so schneidet diese den Beharrungswert $x_a(\infty)$ für $t = T_1$.

Der Verlauf der Sprungantwort $x_a(t)$ ist durch die Zeitkonstante T_1 und den Übertragungswert K eindeutig bestimmt.