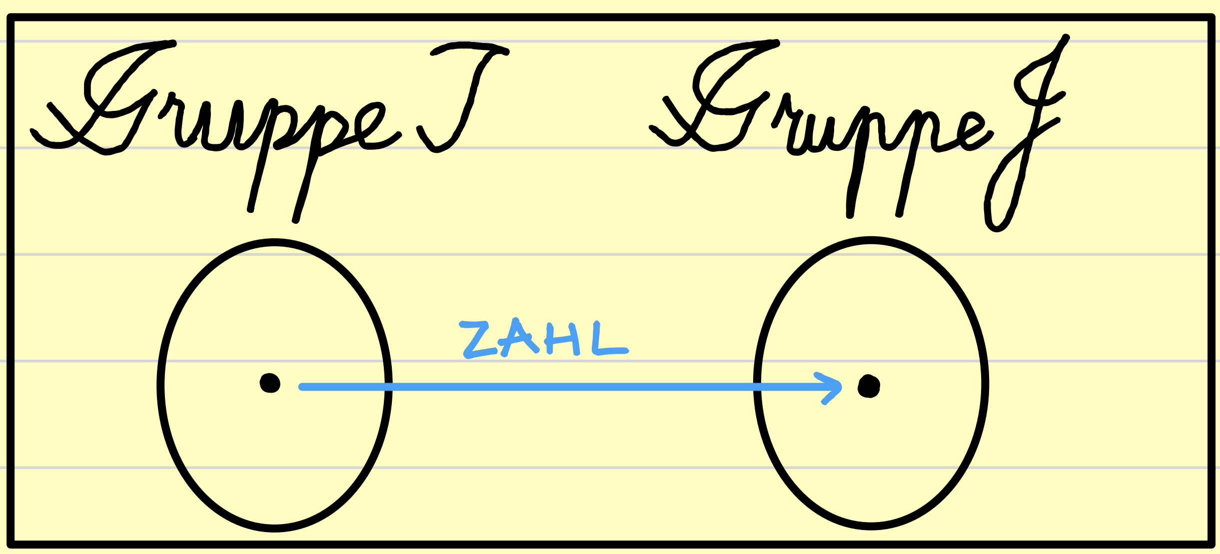
20251107_Mathematik1_B

Grundlagen der linearen Algebra

Konzepte: Zahl, Vektor, Matrix, Tensor, …

..Mengenlehre

1. Zahl.



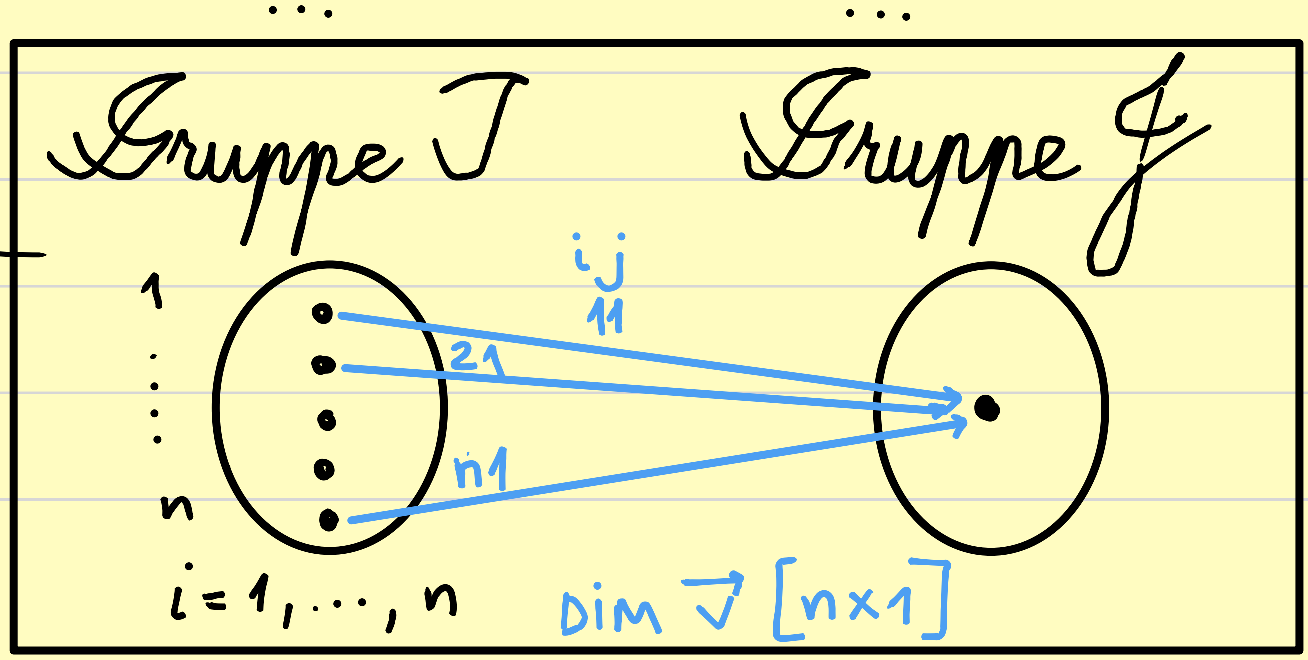
Beispiele: $\text{Max} \xrightarrow[69]{} \text{Gewicht (Kg)}$

$\text{Zeitpunkt} \xrightarrow[9]{} \text{Temperatur in HN } (^\circ C)$

… …

2. Vektor.

$$\vec{v} := \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \\ \vdots \\ v_{n1} \end{bmatrix} \end{array}$$



Beispiel: Zeitpunkte → Preis von einem Produkt

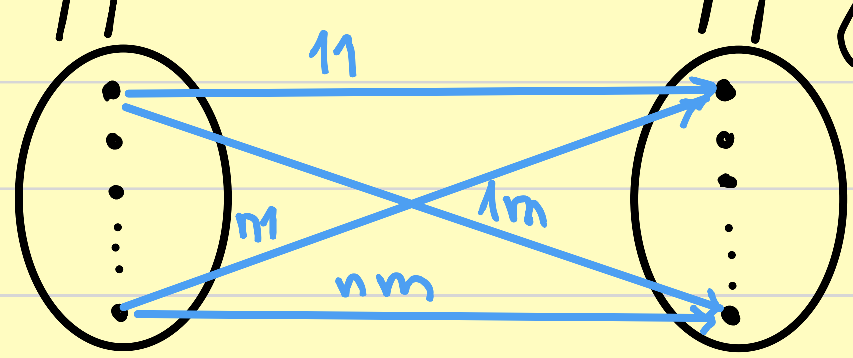
$$\begin{array}{r} \\ \text{Zeitpunkt } 1 \longrightarrow 1 \\ \text{"} \quad 2 \longrightarrow 2 \\ \\ \\ \text{"} \quad n \longrightarrow n \end{array} \;\vec{v} = \begin{array}{c} \text{Preis} \\ \begin{bmatrix} 31 \\ 29 \\ \vdots \\ 17 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ 11 \\ 21 \\ \\ \\ n1 \end{array}$$

Koordinaten vom Objekt im 3D Raum → Objekt

$$\begin{array}{r} \\ \text{Koordinate } x \longrightarrow \\ \text{"} \quad y \longrightarrow \\ \text{"} \quad z \longrightarrow \end{array} \;\vec{v} = \begin{array}{c} \text{Objekt} \\ \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ 11 \\ 21 \\ 31 \end{array}$$

3. Matrix.

Gruppe I ——— Gruppe J



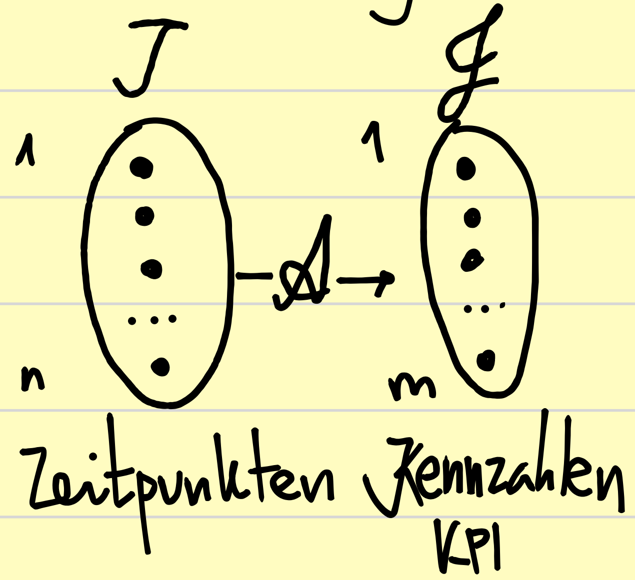
$i = 1 \dots n$ $\qquad$ $j = 1 \dots m$

$$\mathcal{A} := \begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & \dots & m \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{array} & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} \end{array}$$

DIM $\mathcal{A}[n \times m]$

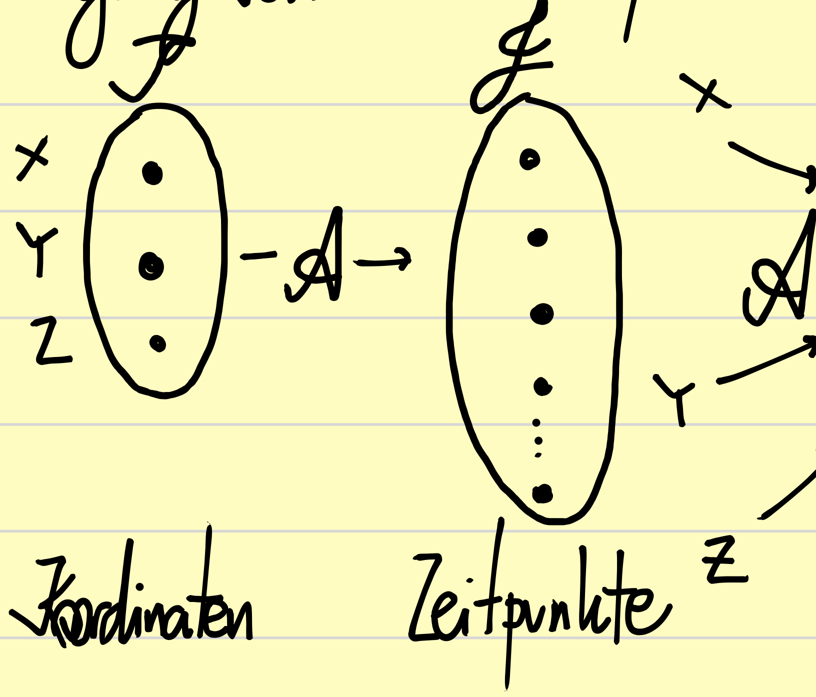
Beispiele:

- Kennzahlensystem.

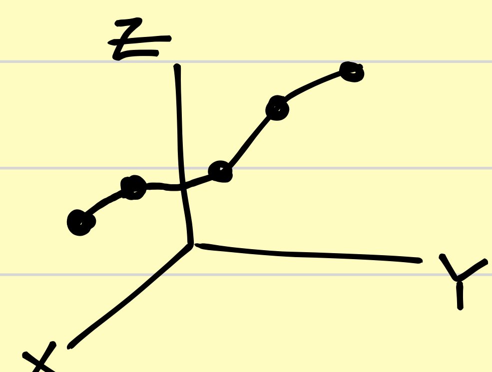


$$\longrightarrow \mathcal{A} = \begin{array}{c|ccccc} & KPI_1 & KPI_2 & KPI_3 & \cdots & KPI_m \\ \hline 1 & 30 & 1200 & 3 & \cdots & 4'5 \\ 2 & 29 & 1100 & 2'5 & \cdots & 3'7 \\ 3 & 18 & 800 & 7 & \cdots & 11'2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & 17 & 700 & 6 & \cdots & 2'3 \end{array}$$

- Bewegung von einem Objekt im Raum

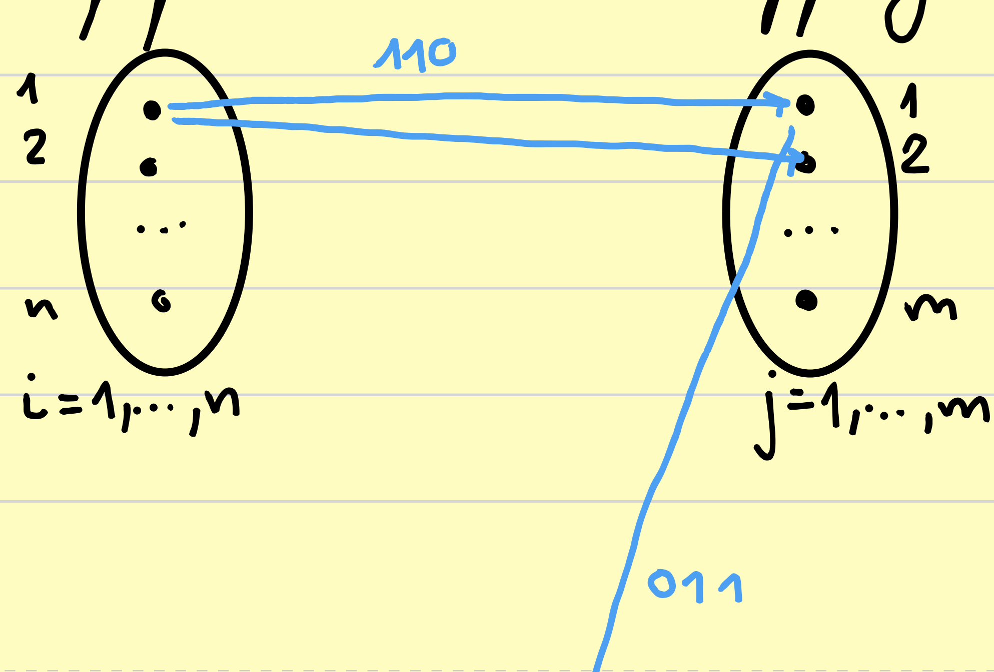


$$\mathcal{A} = \begin{array}{c|cccc} & sek_1 & sek_2 & \cdots & sek_m \\ \hline 1 & 3 & 2'8 & & 1'3 \\ 2 & 7 & 6'5 & & 4'7 \\ 3 & 13 & 14 & & 17 \end{array}$$

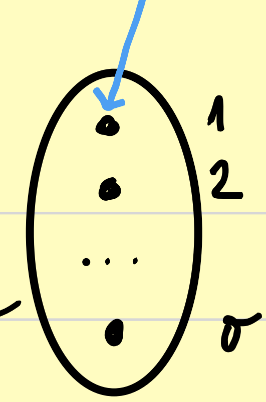


4. Tensor

Gruppe J Gruppe J

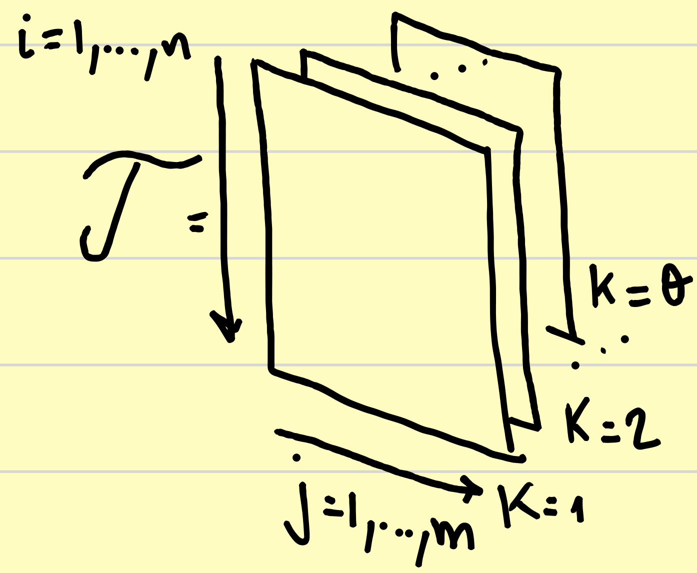


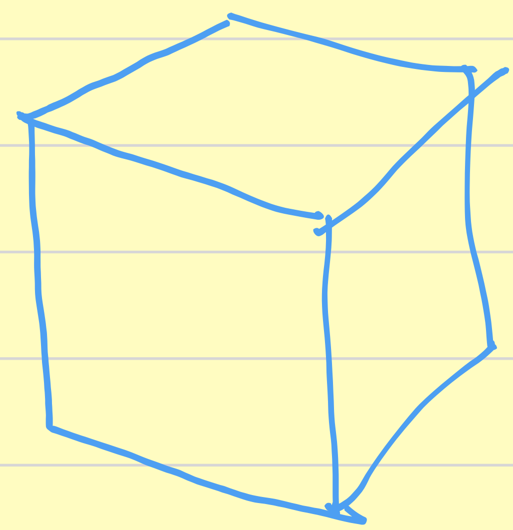
Gruppe K



DIM

$T\ [n \times m \times o]$





Skalarprodukt

Das Skalarprodukt verknüpft zwei Vektoren zu einer Zahl, und erlaubt uns, geometrische Beziehungen wie Winkel, Längen, & Orthogonalität zu beschreiben.

- Für zwei Vektoren $\vec{a}$ & $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$

  $\vec{a} = [a_1, a_2, \dots, a_n]$ & $\vec{b} = [b_1, b_2, \dots, b_n]$

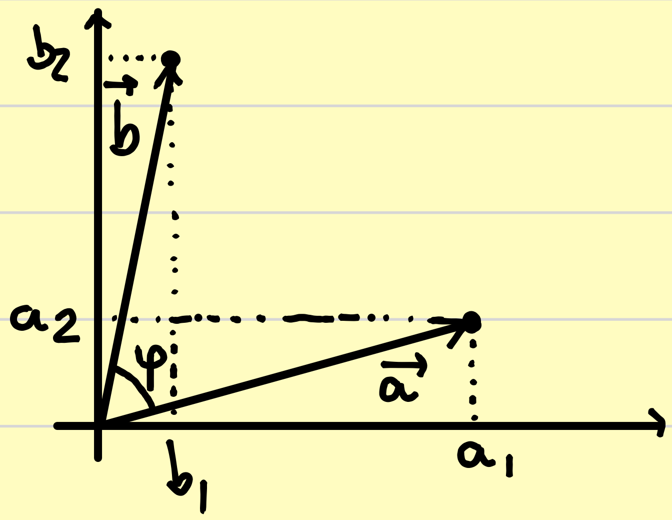
definieren wir das Skalarprodukt als:

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i} \in \mathbb{R}$$

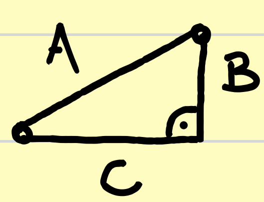
• Für zwei Vektoren $\vec{a}$ & $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$ mit Winkel φ zwischen ihnen gilt:

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \cdot \cos(\varphi)}$$

2D



Modul vom Vektor:



$A^2 = B^2 + C^2$

$\longrightarrow |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \rightarrow |\vec{a}|^2 = a_1^2 + a_2^2$

$|\vec{b}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2} \qquad |\vec{b}|^2 = b_1^2 + b_2^2$

$\vec{u_a} = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ $\quad \vec{u_a} \equiv$ Normierte Vektor $\vec{a}$ $\quad |\vec{u_a}| = 1$

Eigenschaften des Skalarprodukts:

Für alle $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$:

1. Kommutivität: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
2. Linearität: $(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$
3. Distributivität: $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$

4. Positive Definitheit: $\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2 \geq 0$

Beispiele:

1. $\vec{a} = [2,-1,3]$ $\vec{b} = [4,0,1]$

SP: $\vec{a}\cdot\vec{b} = 2\cdot4 + (-1)\cdot 0 + 3\cdot 1 = 11$

Winkel: $\cos\varphi = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$

$|\vec{a}| = \sqrt{2^2+(-1)^2+3^2} = \sqrt{14}$ $\quad |\vec{b}| = \sqrt{4^2+1^2} = \sqrt{17}$

$\cos\varphi = \dfrac{11}{\sqrt{14}\sqrt{17}} = \dfrac{11}{\sqrt{238}} \rightarrow \varphi = \arccos\left[\dfrac{11}{\sqrt{238}}\right] \simeq 43'5^\circ$

2. Sind folgende Vektoren orthogonal? $(\varphi = \frac{\pi}{2} = 90^\circ)$

$\vec{u} = [1,2,3]$ $\quad \vec{v} = [2,-1,0]$

$\cos(\varphi) = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \dfrac{1\cdot2+(-1)\cdot2+3\cdot0}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}\cdot\sqrt{2^2+(-1)^2+0}} = \dfrac{0}{\sqrt{14}\sqrt{5}} = 0$

$\rightarrow \arccos(0) = \dfrac{\pi}{2} = 90^\circ \longrightarrow \vec{u}\ \&\ \vec{v}$ sind senkrecht.

3. Stellen das Skalarprodukt in Matrixform dar:

$\vec{u} = [2,-1,3]$ $\quad \vec{v} = [4,0,1]$

$$\begin{array}{cc} & 1 \\ \begin{matrix}1\\2\\3\end{matrix} & \begin{bmatrix}2\\-1\\3\end{bmatrix}\end{array}^T \cdot \begin{bmatrix}4\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & -1 & 3\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}4\\0\\1\end{bmatrix} = 2\cdot 4 + (-1)\cdot 0 + 3\cdot 1 = 11$$

$$[1 \times \cancel{3}] \quad [\cancel{3} \times 1] \quad [1 \times 1]$$

transponiert

$$\vec{u} \in [3 \times 1] \longrightarrow \vec{u}^T \in [1 \times 3]$$