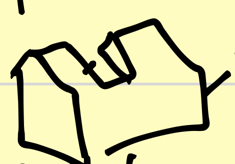
20250325_WIN2_Statistik

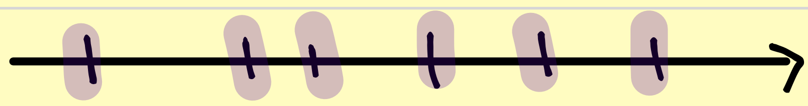
POISSON VERTEILUNG

Beispiel.



Maschine

Die Maschine fällt ab und zu (ZUFÄLLIG) aus.



Zeit

Ereignis $X(t) \equiv$ STÖRUNG

Das Ereignis $X(t)$ findet zufällig statt. $\rightarrow$ $X(t)$ ist Poisson verteilt.

Wenn die Anzahl Ereignisse in einer Periode [Zeit] durch eine Variable $X(t)$ dargestellt wird, dann unterliegt die ZUFALLSVARIABLE $X(t)$ einen POISSON-PROZEß mit FREQUENZ $\lambda > 0$, WENN:

1) $X(t=0) = 0$ (es gab kein Ereignis $t < 0$)
2) Die Anzahl Ereignisse in zwei nicht überlappenden Intervalle sind UNABHÄNGIG voneinander.

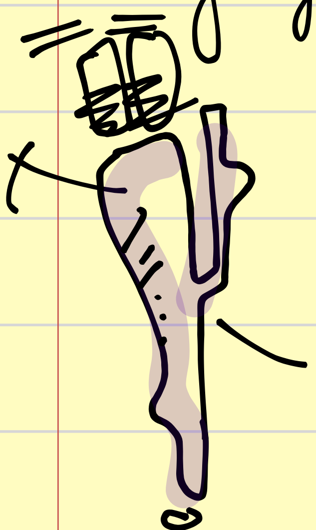
   DER PROZEß HAT KEIN GEDÄCHTNIS!
3) Die Anzahl Ereignisse sind proportional zur Intervallänge.
4) Die W. vom Ereignis ist sehr klein.

$$\boxed{P(X=x) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^{x}}{x!}} \qquad (1)$$

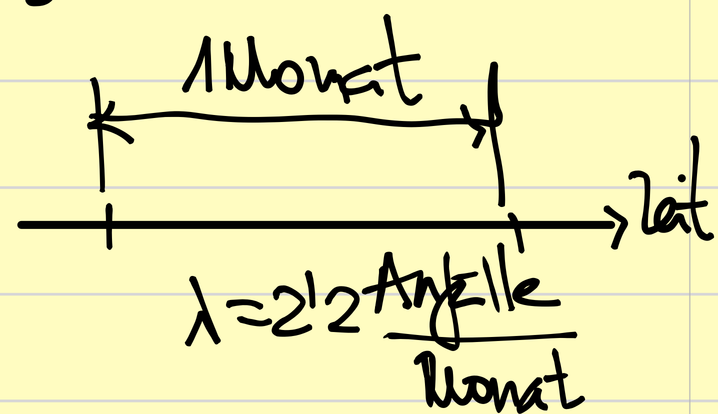
POISSON

$x! = x(x-1)(x-2)\cdots(3)\cdot 2\cdot 1.$ $\quad x \equiv$ Anzahl Ereignisse.

Beispiel. Die Anzahl Ausfalle einer Maschine verfolgt eine Poisson Verteilung mit $\lambda = 2'2 \frac{\text{Ausfälle}}{\text{Monat}}$



λ IST IMMER EINE FREQUENZ (RATE) $\frac{\#\text{Ereignisse}}{\text{ZeitEinheit}}$



a) Was ist die W. dafür, dass es zu keinem Ausfall in einem Monat kommt?

$$P(X=0) \overset{(1)}{=} \frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^0}{0!} = \frac{e^{-2'2}\cdot 2'2^0}{0!} = 11'08\,\%$$

$0! = 1$

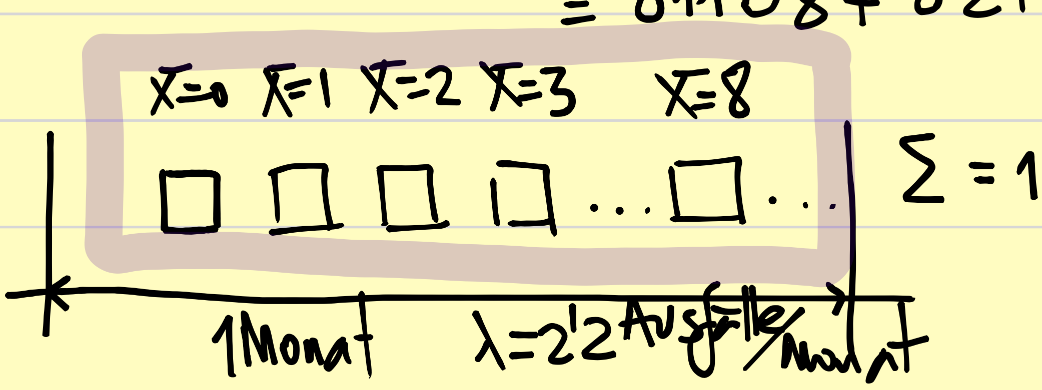
b) Was ist die W. dafür, dass es zu genau einem Ausfall in einem Monat kommt?

$$P(X=1) \overset{(1)}{=} \frac{e^{-2'2}\cdot 2'2^1}{1!} = 24'38\,\%$$

c) Was ist die W. dafür, dass es zu höchstens 2 Ausfalle in einem Monat kommt?

$$P(X\leq 2) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) =$$

$$= 0'1108 + 0'2438 + \frac{e^{-2'2}\cdot 2'2^2}{2!} = 0'3545$$



- MINDESTENS 2 AUSFÄLLE:

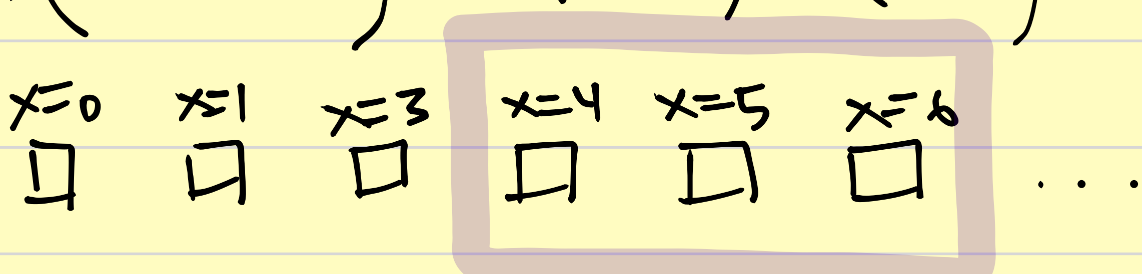
$$P(X \geq 2) = 1 - \left[P(X < 2)\right] = 1 - \left[P(X=0) + P(X=1)\right]$$

- MINDESTENS 3 AUSFÄLLE:

$$P(X \geq 3) = 1 - \left[P(X < 3)\right] = 1 - \left[P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)\right]$$

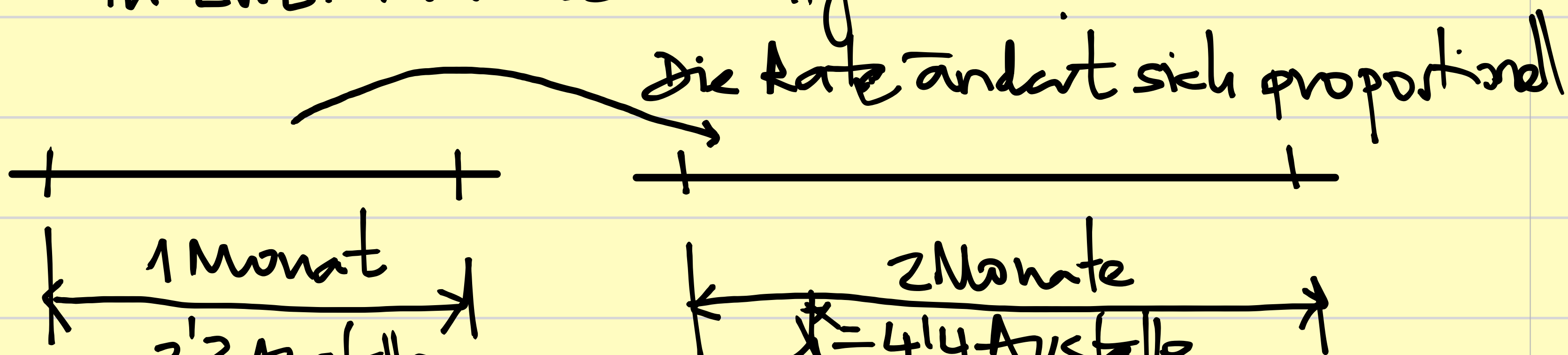
- MINDENSTEN 4 AUSFÄLLE UND HÖCHSTENS 6 AUSFÄLLE:

$$P(4 \leq X \leq 6) = P(X=4) + P(X=5) + P(X=6)$$



$$= \frac{e^{-2{,}2} \cdot 2{,}2^4}{4!} + \frac{e^{-2{,}2} \cdot 2{,}2^5}{5!} + \frac{e^{-2{,}2} \cdot 2{,}2^6}{6!}$$

d) Was ist die W. dafür, dass genau 3 Ausfälle in ZWEI Monate stattfinden?



$$P(X=3) = \frac{e^{-\lambda^*} \cdot \lambda^{*3}}{3!} = \frac{e^{-4{,}4} \cdot 4{,}4^3}{3.2.1}$$

1 Monat — 2'2 Ausfälle
2 Monate — x Ausfälle

$$\lambda^* = \frac{2{,}2 . 2}{1} = 4{,}4$$

e) W. dafür, dass es genau zu 5 Ausfälle in einem halben Monat kommt?

1 Monat — 2'2 Ausfälle
½ Monat — x "

$\lambda^* = \frac{2'2 \cdot \frac{1}{2}}{1} = 1'1 \frac{\text{Ausfälle}}{1/2\ \text{Monat}}$

$P(X=5) = \frac{e^{-\lambda^*} \cdot \lambda^{*5}}{5!} = \frac{e^{-1'1} \cdot 1'1^5}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} =$

Übung. Ein Restaurant hat im Durchschnitt 20 Kunden pro Stunde

(a) Wie hoch ist die W. dafür, dass in einer bestimmten Stunde genau 25 Kunden kommen?

$\lambda = 20 \frac{\text{Kunden}}{\text{Std}} \longrightarrow P(X=25) \overset{(1)}{=} \frac{e^{-20} \cdot 20^{25}}{25!}$

(b) Wie hoch ist die W. dafür, dass in einer Periode von 17 Minuten genau 12 Kunden kommen?

60 Minuten — 20 Kunden
17 Minuten — x "

$\lambda^* = \frac{17 \cdot 20}{60} = \frac{17}{3} = 5'67$

$P(X=12) = \frac{e^{-5'67} \cdot 5'67^{12}}{12!}$

(c) Wie hoch ist die W. dafür, dass in einer Periode von 27 Minuten mindestens 3 Kunden kommen.

$P(X \geq 3) = 1 - \left[P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)\right] =$

60 Min — 20 K. | $\lambda^* = \frac{27 \cdot 20}{60} = 9 \frac{\text{Kunden}}{27 \text{ Min}}$

27 Min — x K. |

$$= 1 - \left[\frac{e^{-9} \cdot 9^0}{0!} + \frac{e^{-9} \cdot 9^1}{1!} + \frac{e^{-9} \cdot 9^2}{2!} \right] = \dots$$

(d) Wie hoch ist die W. dafür, dass in einer Periode von 27 Minuten mehr als 3 Kunden kommen.

$$P(X > 3) = P(X \geq 4) = 1 - P(X \leq 3) =$$

60 — 20 | $\lambda^* = 9 \frac{K}{27 \text{ Min}}$

27 — x |

$$= 1 - \left[P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) \right] =$$

$$= 1 - \left[\frac{e^{-9} \cdot 9^0}{0!} + \frac{e^{-9} \cdot 9^1}{1!} + \frac{e^{-9} \cdot 9^2}{2!} + \frac{e^{-9} \cdot 9^3}{3!} \right]$$