

231010 Regelungstechnik Übung H4

H4

October 11, 2023

1 Übung

Bitte berechnen Sie die $u_a(t)$, wenn die Eingangsfunktion $u_e(t) = K$, und die Übertragungsfunktion $u_a(s)/u_e(s) = G(s) = (s^2 + 1)/((s+1)(s+2)(s+3))$. Bitte Schritt für Schritt.

Natürlich, ich helfe Ihnen gerne dabei, die Ausgangsfunktion $u_a(t)$ zu berechnen, wenn die Eingangsfunktion $u_e(t) = K$ und die Übertragungsfunktion $G(s) = \frac{s^2+1}{(s+1)(s+2)(s+3)}$ gegeben sind.

Die Laplace-Transformierte der Eingangsfunktion $u_e(t)$ ist:

$$U_e(s) = \mathcal{L}\{u_e(t)\} = \mathcal{L}\{K\} = \frac{K}{s}$$

Die Übertragungsfunktion $G(s)$ ist gegeben:

$$G(s) = \frac{s^2 + 1}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

Um die Ausgangsfunktion $u_a(t)$ zu erhalten, setzen wir $U_e(s)$ in die Laplace-Transformierte der Ausgangsfunktion ein:

$$U_a(s) = G(s) \cdot U_e(s) = \frac{s^2 + 1}{(s+1)(s+2)(s+3)} \cdot \frac{K}{s}$$

Nun, multiplizieren und vereinfachen:

$$U_a(s) = \frac{K(s^2 + 1)}{s(s+1)(s+2)(s+3)}$$

Um zurück in den Zeitbereich zu gelangen, müssen wir die inverse Laplace-Transformierte von $U_a(s)$ nehmen. Da die Funktion komplizierter ist, müssen wir eine Methode wie die Partialbruchzerlegung verwenden.

Die Partialbruchzerlegung sieht wie folgt aus:

$$U_a(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+2} + \frac{D}{s+3}$$

Die Unbekannten A , B , C und D können durch Vergleichen der Koeffizienten bestimmt werden.

$$K(s^2+1) = A(s+1)(s+2)(s+3) + B(s)(s+2)(s+3) + C(s)(s+1)(s+3) + D(s)(s+1)(s+2)$$

Jetzt setzen wir $s = 0$, um A zu finden:

$$K(0^2+1) = A(0+1)(0+2)(0+3) + B(0)(0+2)(0+3) + C(0)(0+1)(0+3) + D(0)(0+1)(0+2)$$

$$K = 6A$$

$$A = \frac{K}{6}$$

Setzen wir $s = -1$, um B zu finden:

$$K((-1)^2+1) = A(-1+1)(-1+2)(-1+3) + B(-1)(-1+2)(-1+3) + C(-1)(-1+1)(-1+3) + D(-1)(-1+1)(-1+2)$$

$$\cancel{K} = 6\cancel{A} \quad B = -K$$

$$\cancel{B} = \frac{\cancel{K}}{\cancel{6}}$$

Setzen wir $s = -2$, um C zu finden:

$$K((-2)^2+1) = A(-2+1)(-2+2)(-2+3) + B(-2)(-2+2)(-2+3) + C(-2)(-2+1)(-2+3) + D(-2)(-2+1)(-2+2)$$

$$\cancel{5K} = \cancel{3C} \quad C = 5/2 * K$$

$$\cancel{C} = -\frac{\cancel{5K}}{\cancel{3}}$$

Setzen wir $s = -3$, um D zu finden:

$$K((-3)^2+1) = A(-3+1)(-3+2)(-3+3) + B(-3)(-3+2)(-3+3) + C(-3)(-3+1)(-3+3) + D(-3)(-3+1)(-3+2)$$

$$10K = -6D$$

$$D = -\frac{5K}{3}$$

Jetzt haben wir die Werte für A , B , C und D :

$$A = \frac{K}{6}, \quad B = \frac{K}{6}, \quad C = -\frac{5K}{3}, \quad D = -\frac{5K}{3}$$

Setzen wir diese Werte zurück in die Partialbruchzerlegung ein:

$$U_a(s) = \frac{K}{6s} + \frac{K}{6(s+1)} - \frac{5K}{3(s+2)} - \frac{5K}{3(s+3)}$$

Nun, wenden wir die inverse Laplace-Transformierte an, um $u_a(t)$ zu erhalten:

$$u_a(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{K}{6s} \right\} + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{K}{6(s+1)} \right\} - \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{5K}{3(s+2)} \right\} - \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{5K}{3(s+3)} \right\}$$

$$u_a(t) = \frac{K}{6} - \frac{K}{6} \cdot e^{-t} - \frac{5K}{3} \cdot e^{-2t} - \frac{5K}{3} \cdot e^{-3t}$$

Das ist die Ausgangsfunktion $u_a(t)$ in Abhängigkeit von der Eingangsfunktion $u_e(t) = K$ und der gegebenen Übertragungsfunktion $G(s) = \frac{s^2+1}{(s+1)(s+2)(s+3)}$.