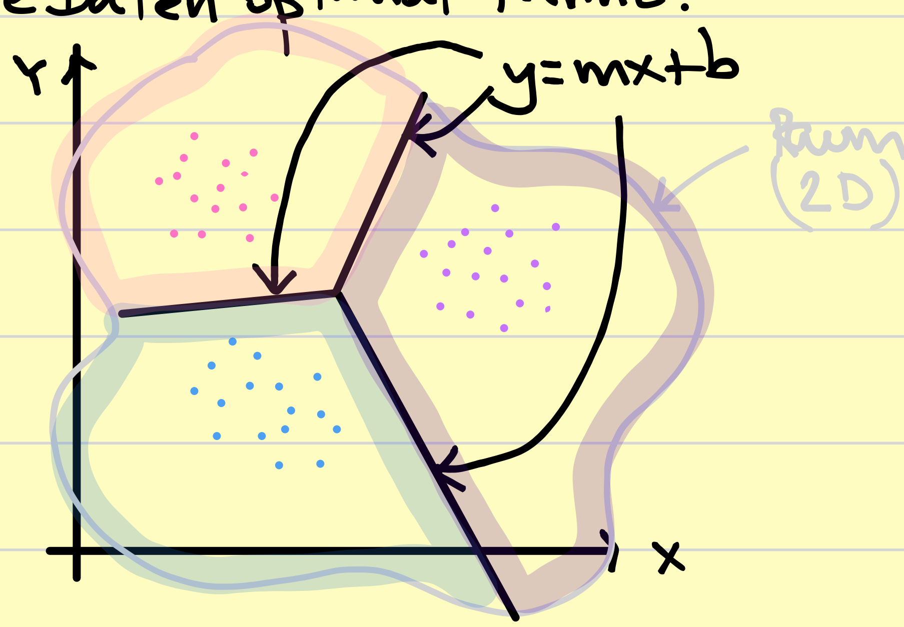
MASCHINELLES LERNEN. (ML)

SUPPORT VECTOR MASCHINES (SVM)

Das Ziel von SVM ist es, die optimale Trennlinie (2D), oder Trennebene (3D), oder Trennhyperebene (mehr als 3D) zu finden, welche die Daten (1) optimal (2) trennt.

Beispiel:

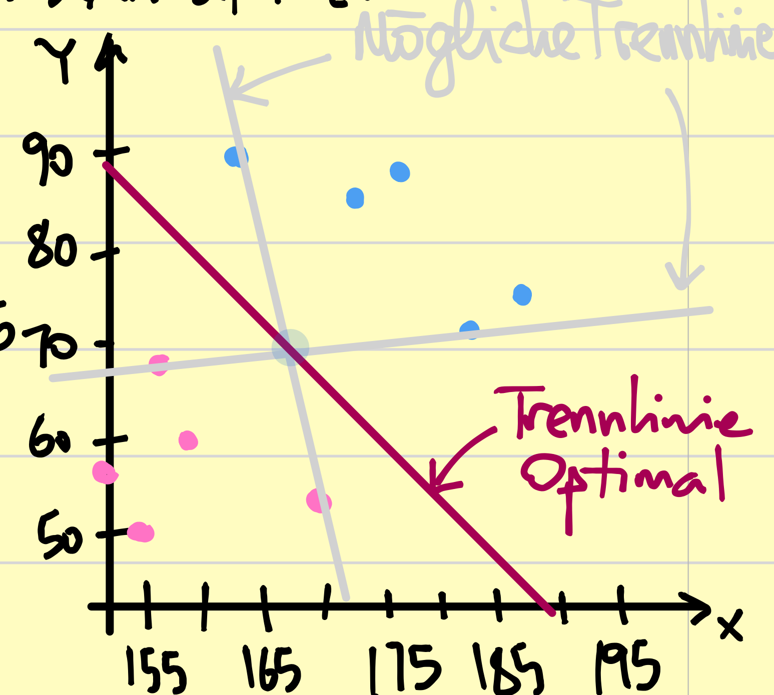


(1) Wir brauchen Trainingsdaten um das SVM. Algorythmus anzuwenden. Das heißt, es handelt sich um ein „überwachter" Lernalgorythmus.

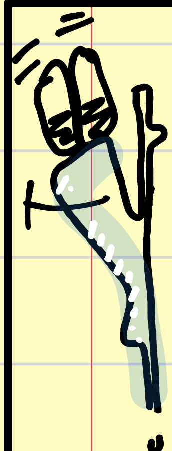
(2) Die Trennung der Daten in Klassen/Gruppen ist deshalb optimal, weil der Abstand zu den Daten maximal ist.

Beispiel.

Größe X	155	160	158	150	170	165	175	180	190	185
Gewicht Y	50	60	68	58	55	90	85	88	75	72
Klasse	♀	♀	♀	♀	♀	♂	♂	♂	♂	♂

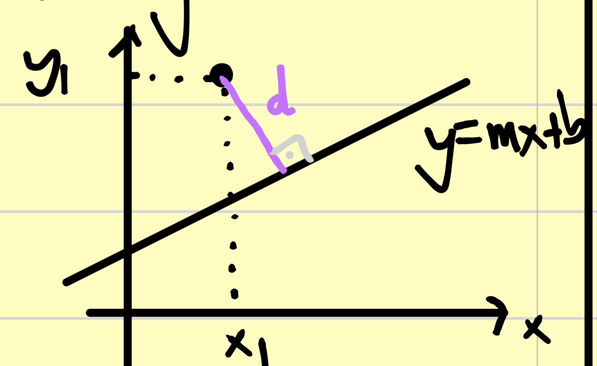


Beide mögliche Trennlinien, trennen die 2D-Fläche in 2 Räume, welche Alle Daten der Klasse beinhalten. Allerdings, der Abstand zw den Trennlinien und den Punkten ist nicht maximal.
Besser ist die rote Linie durch den Punkten [190,0], [0,90].
SVM liefert die Gleichung der roten Linie: $y = mx + b$



der Abstand zw. einen Punkt $[x_1, y_1]$ und eine Linie $y = mx + b$ wird durch die Formel:

$$d = \frac{|mx_1 + y_1 + b|}{\sqrt{m^2+1}}$$

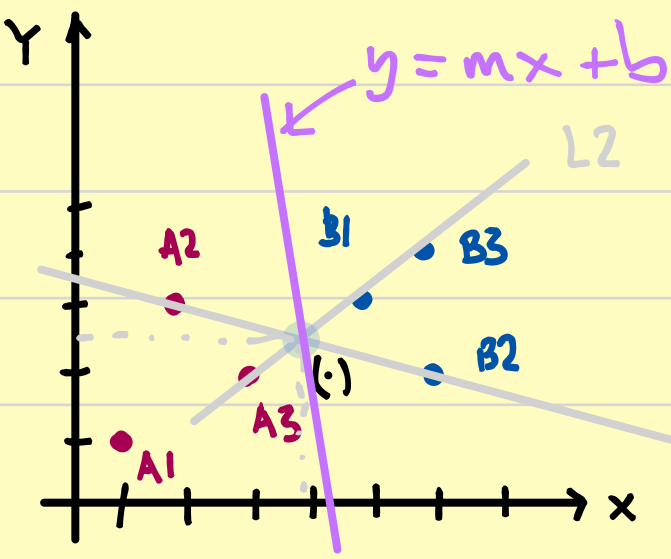


Beispiel. Gegeben sind folgende Punkte:

- ROTE (Klasse A): A1[1,1], A2[2,3], A3[3,2]
- BLAUE (Klasse B): B1[5,3], B2[6,2], B3[6,4]

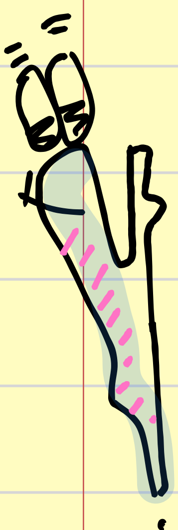
Ziel: a) Finden Sie die optimale Trennlinie ($y=mx+b$), welche die beiden Klassen separiert.
b) Berechnen Sie die Abstände der nächstgelegenen Punkten zur Trennlinie.
c) Identifizieren Sie die „Support Vektoren".

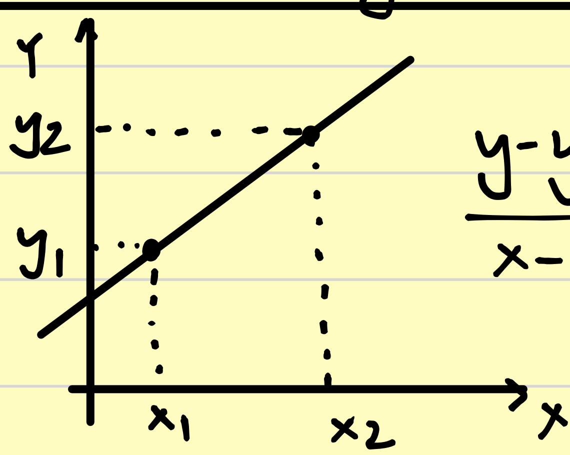
Schritt 1. Punkte einzeichnen.



Schritt 2. Form der Trennlinie $y = mx + b$

Schritt 3. Berechnung der Punkt der Trennlinie $(\bullet)$





$$\frac{y-y_2}{x-x_2} = \frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$$

L1. $A2[2,3]$ $B2[6,2]$ $\rightarrow \frac{y-3}{x-2} = \frac{2-3}{6-2} \rightarrow \frac{y-3}{x-2} = \frac{-1}{4} \rightarrow y = 3 - \frac{1}{4}(x-2)$

L2. $A3[3,2]$ $B1[5,3]$ $\rightarrow \frac{y-2}{x-3} = \frac{3-2}{5-3} \rightarrow \frac{y-2}{x-3} = \frac{1}{2} \rightarrow y = 2 + \frac{1}{2}(x-3)$

L1 $\quad y = 3 - \frac{1}{4}(x-2)$

$(-)$

L2 $\quad y = 2 + \frac{1}{2}(x-3)$

$$0 = 1 - \frac{1}{4}(x_0-2) - \frac{1}{2}(x_0-3) \rightarrow 0 = 1 - \frac{1}{4}x_0 + \frac{2}{4} - \frac{1}{2}x_0 + \frac{3}{2} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{3}{4}x_0 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 3 \rightarrow x_0 = 4 \rightarrow y_0 = 3 - \frac{1}{4}(4-2) = 2'5$$

$(\bullet) \equiv [x_0, y_0] = [4, 2'5]$

Schritt 4. Maximierung der Abstände zw. der gesuchten Trennlinie und die Punkte A3 & B1.

$y_0 = m x_0 + b \longrightarrow 2'5 = m \cdot 4 + b \qquad (1)$

Abstand Linie und A3: $d_{L\cdot A3} = \dfrac{|m\cdot 3+2+b|}{\sqrt{m^2+1}}$

Abstand Linie und B1: $d_{L\cdot B1} = \dfrac{|m\cdot 5+3+b|}{\sqrt{m^2+1}}$

Beide Abstände sollten gleich sein, damit der Abstand maximal ist.

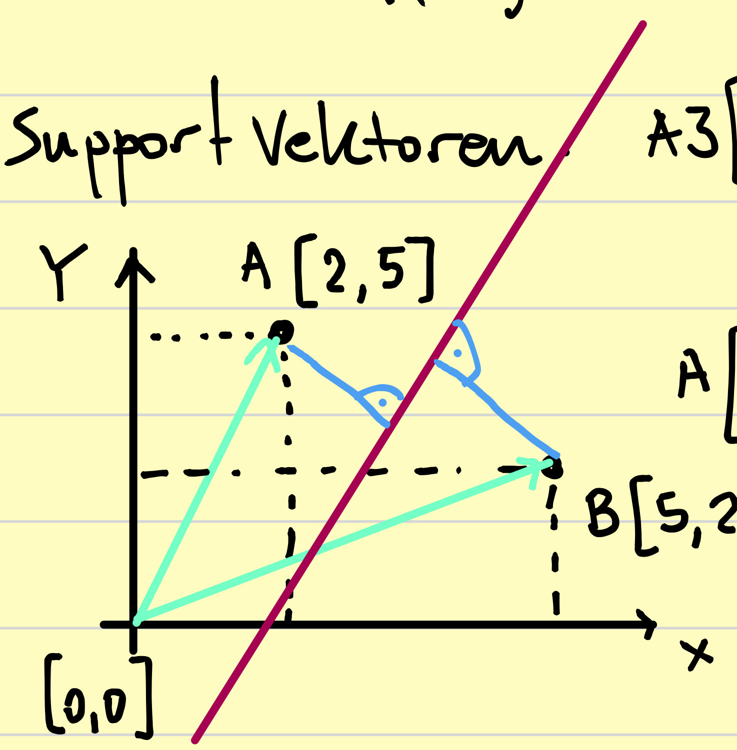
$$d_{L\cdot A3}=d_{L\cdot B1} \to 3m+2+\cancel{b} = 5m+3+\cancel{b} \to 2m=-1 \to m=-0'5$$

$$\to 2'5=(-0'5)\cdot 4+b \to b=4'5 \to \boxed{\text{Trennlinie: } y=-0'5x+4'5}$$ a)

(1)

$$\boxed{d_{L\cdot A3}} = \frac{|3\cdot(-0'5)+2+4'5|}{\sqrt{(-0'5)^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{5}{4}}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{5\sqrt{5}}{5} = \boxed{\sqrt{5} = d_{L\cdot B1}}$$ b)

Support Vektoren A3[3,2] B1[5,3] c)



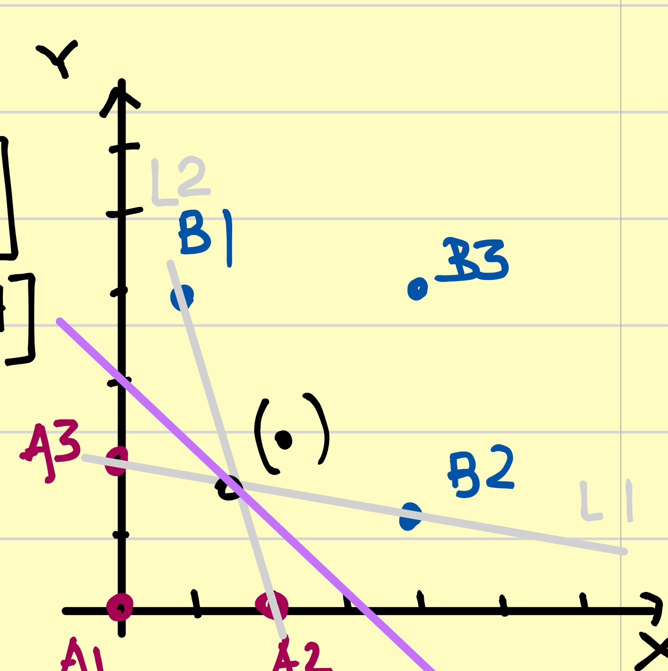
A[2,5] ≡ [2-0, 5-0]

B[5,2] ≡ [5-0, 2-0]

Beispiel. Fragestellung wie oben.

ROTE (Klasse A). $A_1[0,0]$ $A_2[2,0]$ $A_3[0,2]$

BLAUE (Klasse B). $B_1[1,4]$ $B_2[4,1]$ $B_3[4,4]$



L1. $\dfrac{y-1}{x-4} = \dfrac{2-1}{0-4} \to y = 1-\dfrac{1}{4}(x-4)$ (−)

L2. $\dfrac{y-0}{x-2} = \dfrac{4-0}{1-2} \to y = 0-4(x-2)$

$$0 = 1 - \frac{1}{4}(x_0 - 4) + 4(x_0 - 2) \rightarrow$$

$$\rightarrow 0 = 1 - \frac{1}{4}x_0 + 1 + 4x_0 - 8 \rightarrow 6 = \frac{15}{4}x_0 \rightarrow x_0 = 1'6 \xrightarrow[L1]{} y_0 = 1'6$$

$$(\cdot) \equiv [x_0, y_0] \equiv [1'6, 1'6]$$

$$y = mx + b \longrightarrow 1'6 = m \cdot 1'6 + b \quad (1)$$

$$d_{L \cdot A3} = \frac{|m \cdot 0 + 2 + b|}{\sqrt{m^2+1}}$$

$$d_{L \cdot B2} = \frac{|m \cdot 4 + 1 + b|}{\sqrt{m^2+1}}$$

$$\triangleright \; m \cdot 0 + 2 + \cancel{b} = m \cdot 4 + 1 + \cancel{b} \longrightarrow m = 0'25$$

$$\xrightarrow[(1)]{} 1'6 = 0'25 \cdot 1'6 + b \rightarrow b = 1'2$$

$$y = 0'25x + b$$ ✓

$$d_{L \cdot A3} = \frac{|2 + 1'2|}{\sqrt{0'25^2 + 1}} = 3'0117$$ ✓

Support Vektoren $[A3, B2]$ ✓