20250429_LM2_Mathe2

EINE VARIABLE

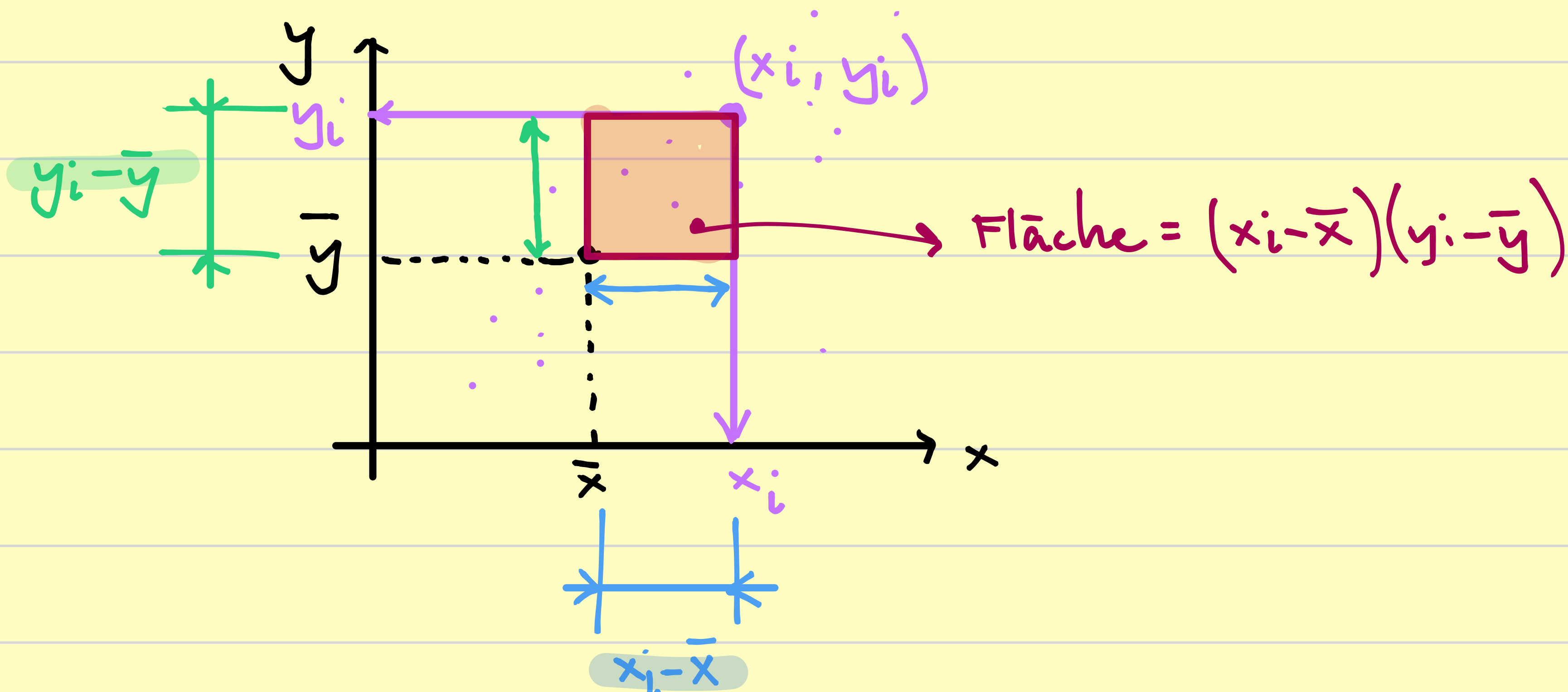
· Mittelwert: $x\ \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \longrightarrow \bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \dfrac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$

· Varianz: $x\ \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \rightarrow VAR(x) = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n} = \dfrac{(x_1-\bar{x})^2 + (x_2-\bar{x})^2 + \dots + (x_n-\bar{x})^2}{n}$

ZWEI VAR.

· Ko.varianz: $\begin{matrix} x\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \\ y\{y_1, y_2, \dots, y_n\} \end{matrix} \rightarrow KOVAR(X,Y) = \dfrac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n-1}$

Graphische Interpretation der KOVARIANZ(x,y)



· Die KOVARIANZ zw. zwei Variablen bedeutet die Summe der Flächen von den Punkten zum Mittelwert.

m VARIABLEN

$$KOV\ MATRIX[X_1, X_2, \dots, X_m] = \begin{bmatrix} VAR[X_1] & KOV[X_1, X_2] & \dots & KOV[X_1, X_m] \\ KOV[X_1, X_2] & VAR[X_2] & \dots & KOV[X_2, X_m] \\ \vdots & & & \\ KOV[X_1, X_m] & KOV[X_1, X_2] & \dots & VAR[X_m] \end{bmatrix}$$

Beispiel mit 2 Dimensionen:

Eine Firma hat ein Management System mit 2 Kennzahlen:

- DLZ {Tage}: {37, 28, 25, 27} : X
- Kosten{€/Tag}: {21, 18, 15, 20} : Y

Bitte ermitteln Sie die Kov Matrix [X,Y]

$$KOV[X,Y] = \begin{bmatrix} VAR[X] & KOV[X,Y] \\ KOV[X,Y] & VAR[Y] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21'187 & 7'87 \\ 7'87 & 5'25 \end{bmatrix}$$

$$VAR[X] = \frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n} = \frac{(37-29'25)^2+(28-29'25)^2+(25-29'25)^2+(27-29'25)^2}{4} = 21'187$$

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{37+28+25+27}{4} = 29'25$$

$$VAR[Y] = \frac{\sum(y_i-\bar{y})^2}{n} = \frac{(21-18'5)^2+(18-18'5)^2+(15-18'5)^2+(20-18'5)^2}{4} = 5'25$$

$$\bar{y} = \frac{\sum y_i}{n} = \frac{21+18+15+20}{4} = 18'5$$

$$KOV[X,Y] = \frac{\sum(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{4-1} = \frac{(37-29'25)(21-18'5)+(28-29'25)(18-18'5)+(25-29'25)(15-18'5)+(27-29'25)(20-18'5)}{3}$$

$$= 7'87$$

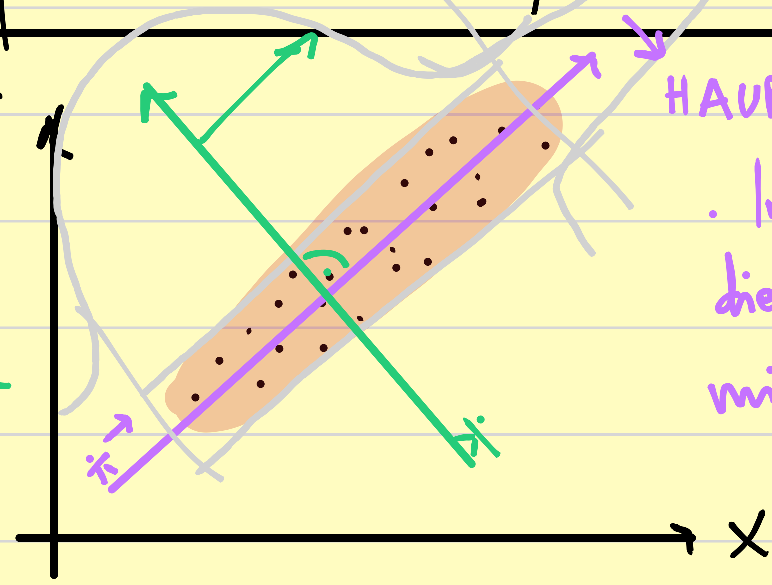
$$\boxed{KOV[X,Y] = \begin{bmatrix} 21'187 & 7'87 \\ 7'87 & 5'25 \end{bmatrix}}$$

✓

Die Eigenvektoren der Kov. MATRIX sind die Hauptkomponenten vom System

· HK NR2 ist senkrecht zur HK NR1 und ist der zweite EV der Kov. Matrix.

· In der Richtung der HK NR2 ist die Variabilität höher.



HAUPTKOMPONENTE NR 1.

· In dieser Richtung ist die Variabilität minimal.

· Die HK1 ist der erste Eigenvektor der Kov. Matrix

Eigenvektor/Eigenwert : $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$

A: Zielmatrix $\vec{v}$: Eigenvektor λ: Eigenwert.

$$\rightarrow \det\left[A - \lambda I\right] = 0 \rightarrow \lambda \rightarrow \vec{v}$$

$$\det\left[\text{KOVMATRIX} - \lambda I\right] = 0 \rightarrow \det\left[\begin{bmatrix} 21'187 & 7'87 \\ 7'87 & 5'25 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right] = 0$$

$$\rightarrow \det\begin{bmatrix} 21'187-\lambda & 7'87 \\ 7'87 & 5'25-\lambda \end{bmatrix} = 0 \rightarrow$$

$$\boxed{\det\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = a\cdot d - c\cdot b}$$

$$\rightarrow (21'187-\lambda)(5'25-\lambda) - 7'87^2 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \lambda^2 - 26'437\lambda + 51'41 = 0 \rightarrow$$

$$\boxed{\begin{array}{c} ax^2+bx+c=0 \\ x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \end{array}}$$

$$\rightarrow \lambda = \frac{26'437 \pm \sqrt{26'437^2 - 4.51'41}}{2} =$$

$$= \frac{26'437 \pm 22'21}{2} = \begin{cases} \lambda_1 = 24'32 \\ \lambda_2 = 2'113 \end{cases}$$

Eigenwerte

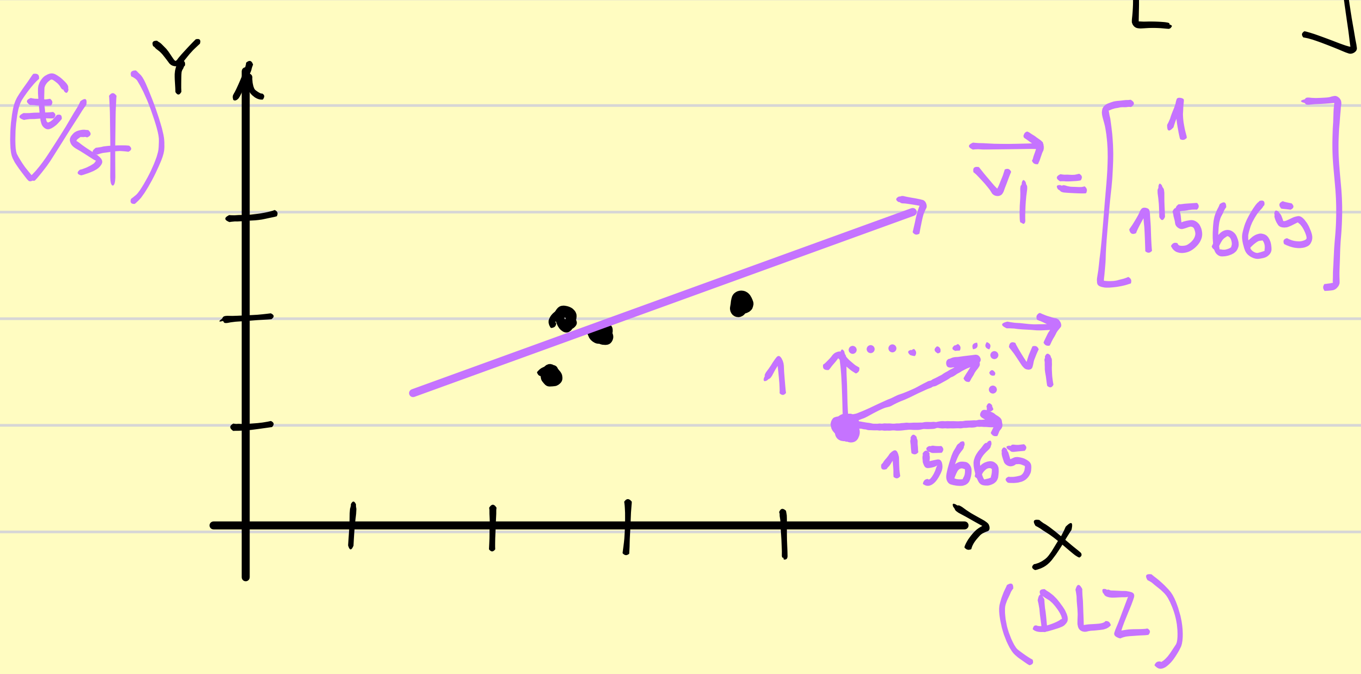
$$\boxed{\lambda_1 = 24'32}$$

$$A.\vec{v_1} = \lambda_1 \vec{v_1} \longrightarrow \begin{bmatrix} 21'187 & 7'87 \\ 7'87 & 5'25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{bmatrix} = 24'32 \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{bmatrix}$$

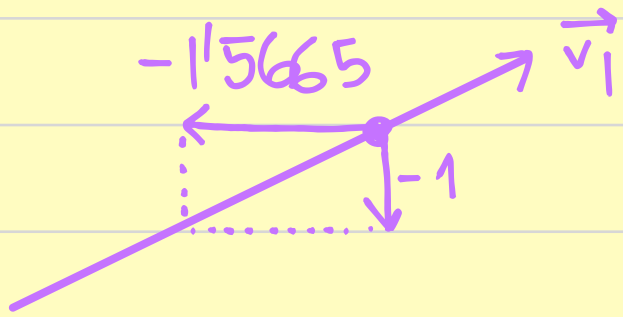
$$\rightarrow \left| \begin{array}{l} 21'187 \cdot v_{11} + 7'87 \cdot v_{12} = 24'32 v_{11} \\ 7'87 \cdot v_{11} + 5'25 \cdot v_{12} = 24'32 v_{12} \end{array} \right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left| \begin{array}{l} v_{12} = \dfrac{24'32 - 21'187}{7'87} v_{11} = 1'5665 v_{11} \\ \ldots \end{array} \right.$$

$$v_{11} = 1 \longrightarrow v_{12} = 1'5665 \longrightarrow \vec{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1'5665 \end{bmatrix}$$



Wie viel sollte ich die DLZ reduzieren um 1 €/St. zu senken?



Ich muss 1'5665 Tage die DLZ reduzieren um 1€/Stk. zu senken.