20240925_Mathe_LM1

Finanzmathematik . FOLGEN

Definition. Ordet man die natürlichen Zahlen ($\mathbb{N}$) $\{1,2,3,4,\dots\}$ durch eine beliebige Vorschrift je genau eine reele Zahl ($\mathbb{R}$) zu, so entsteht eine Zahlenfolge $\{a_1, a_2, a_3, a_4, \dots\}$

$$
\begin{array}{cccccccc}
\mathbb{N}: & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots \\
 & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\
\mathbb{R}: & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 &
\end{array}
$$

Beispiele: $\{3,3,3,3,\dots\}$ Funktion: $a_n = 3$

$\{1,2,3,4,\dots\}$ $a_n = n$

$\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$ $a_n = \frac{1}{n}$

Durch die Zuordnung $\overset{\mathbb{N}}{n} \longrightarrow \overset{\mathbb{R}}{a_n}$ ist eine Funktion definiert.

Diese Funktion heißt Zahlenfolge.

a_1 bzw a_0 heißt Anfangsglied der Folge.

ARITHMETISCHE FOLGEN

Bei einer arithmetischen Folge ist der Abstand zw. zwei aufeinander folgenden Folgengliedern immer gleich groß.

Das heißt, die Differenz $a_{n+1} - a_n$ ist konstant.

Bildungsgesetz der arithmetischen Folge:

$$\boxed{a_{n+1} = a_n + d} \qquad d = \text{konstant}$$

Eine arythmetische Folge ist eindeutig durch das Anfangsglied „a_1" und die Konstante „d" bestimmt.

Für die Glieder der arythmetischen Folge gilt:

$$a_1 = a_1$$
$$a_2 = a_1 + d$$
$$a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d$$
$$a_4 = a_3 + d = (a_1 + 2d) + d = a_1 + 3d$$
$$\dots$$
$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1) \cdot d}$$

Bildungsgesetz der arythmetischen Folge:

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1) \cdot d}$$

Beispiele:	Folge	Differenz (d)	Bildungsgesetz
	$2, 2, 2, 2, \dots$	0	$a_{n+1} = a_n$
	$1, 2, 3, 4, \dots$	1	$a_{n+1} = a_n + 1$
	$\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \frac{9}{2}, \dots$	1	$a_{n+1} = a_n + 1$
	$200, 175, 150, 125, \dots$	-25	$a_{n+1} = a_n - 25$

Übung: wie lautet das 150. Glied einer arythmetischen Folge mit Ausgangsglied $a_1 = 7$ mit dem Konstanten Abstand $= 3{,}5$

$a_1 = 7$

$d = 3'5$

$n = 150$

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$

$a_{150} = 7 + (150-1) \cdot 3'5 = 528'5$

$= 7 + \underbrace{149 \cdot 3'5}_{521'5} =$

Übung. welche Wert hat das Anfangsglied „a_1" bei einer arythmetischen Folge mit Abstand $d = -5$ und $a_{11} = -8$?

$$\left.\begin{matrix} a_{11} = -8 \\ d = -5 \end{matrix}\right\} \quad \begin{matrix} a_n = a_1 + (n-1) \cdot d \\ a_{11} = -8 = a_1 + (11-1)(-5) \rightarrow a_1 = 42 \end{matrix}$$

Übung. In einer Versuchsreihe soll die Schutzwirkung eines Beches in Abhängigkeit von seiner Dicke geprüft werden. Die Versuchsreihe beginnt bei einer Blechstärke von $a_1 = 0'3$ cm und soll mit einer konstanten Verringerung von $d = 0'000125$ m pro Versuch fortgeführt werden.

1) Im wievielten Versuch wird die Blechstärke von $a_n = 0'15$ cm getestet?

2) Wie viele Experimente umfasst die Versuchsreihe?

$$\left.\begin{matrix} a_n = 0'0015 \text{ m} \\ a_1 = 0'003 \text{ m} \\ d = -0'000125 \text{ m} \end{matrix}\right\} \quad \begin{matrix} a_n = a_1 + (n-1) \cdot d \quad \text{Was ist } n? \\ 0'0015 = 0'003 + (n-1) \cdot (-0'000125) \end{matrix}$$

$$\rightarrow n = \frac{-0'0015}{-0'000125} + 1 \rightarrow \boxed{n = 13}$$ ✓

$$0'0015 - 0'003 = (n-1)\cdot(-0'000125) \rightarrow -0'0015 = (n-1)\cdot(-0'000125)$$

$$\rightarrow \frac{-0'0015}{-0'000125} = n-1 \rightarrow \frac{-0'0015}{-0'000125} + 1 = n$$

Mit dem 13. Experiment ist die ursprüngliche Blechdicke halbiert.

Der 13. Versuch ist der erste in der zweiten Hälfte der Versuchsreihe.

Die gesamte Versuchsreihe umfasst also 24 Experimente, weil beim 25. Experiment eine Dicke von NULL erreicht wäre.

$$\frac{\text{Gesamtdicke} \quad 0'003}{\text{Schleifdistanz} \quad 0'000125} = 24 \text{ Experimente}$$

GEOMETRISCHE FOLGEN

Bei der geometrischen Folge ist der Quotient $q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ zw. zwei aufeinander folgenden Folgegliedern immer gleich groß: q = konstant.

Jedes Glied der Folge außer „a_1" ergibt sich dadurch, dass man das vorausgehende Glied mit einem konstanten Faktor „q" multipliziert.

Bildungsgesetz der geometrischen Folge:

$$\boxed{a_{n+1} = q \cdot a_n \quad ; \; q = \text{Konstante}}$$

Beispiele:

geometrische Folge	Quotient	Bildungsgesetz
$2, 2, 2, 2, \ldots$	1	$a_{n+1} = a_n \cdot 1$
$1, 2, 4, 8, \ldots$	2	$a_{n+1} = a_n \cdot 2$
$4, 2, 1, \frac{1}{2}, \ldots$	$\frac{1}{2}$	$a_{n+1} = a_n \cdot \frac{1}{2}$

Eine geometrische Folge ist eindeutig durch das Anfangsglied „a_1" und den konstanten Faktor „q" bestimmt.

Für die geometrische Folge gilt:

$$a_1 = a_1$$

$$a_2 = a_1 \cdot q$$

$$a_3 = a_2 \cdot q = (a_1 \cdot q) \cdot q = a_1 q^2$$

$$a_4 = a_3 \cdot q = (a_1 \cdot q^2) \cdot q = a_1 q^3$$

$$\ldots$$

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Bildungsgesetz einer geometrischen Folge lautet:

$$\boxed{a_n = a_1 \cdot q^{n-1}}$$

Beispiel: wie lautet das 93. Glied einer geometrischen Folge mit $a_1 = \frac{3}{7}$ und $q = 1'06$

$$a_{93} = \frac{3}{7} \cdot 1'06^{92} = 91'2353$$

Beispiel: Bei einer geometrischen Folge ist das erste Glied $a_1 = 1$ und das letzte Glied $a_n = 128$, sowie $q = 2$ bekannt. Wie viele Glieder hat die Folge?

$$a_n = a_1 q^{n-1} \rightarrow q^{n-1} = \frac{a_n}{a_1} \xrightarrow{\log *} (n-1)\log q = \log \frac{a_n}{a_1} \rightarrow$$

$$\boxed{* \ \log[a^b] = b \log a}$$

$$\rightarrow n \log q - \log q = \log \frac{a_n}{a_1} \rightarrow$$

$$\rightarrow n = \frac{\log \frac{a_n}{a_1}}{\log q} + 1 = \frac{\log \frac{128}{1}}{\log 2} + 1 = 8 \rightarrow \boxed{n = 8}$$

$\mathbb{N}$	1	2	3	4	5	6	7	8
$\mathbb{R}$	$a_1 = 1$	$a_2 = 2$	$a_3 = 4$	$a_4 = 8$	$a_5 = 16$	$a_6 = 32$	$a_7 = 64$	$a_8 = 128$

Übung. in einem Betrieb soll die Geschwindigkeit eines Fließbandes täglich um 1% erhöht werden.
Wie schnell ist die Produktion am 30. April, wenn am 1. April 100 Stück/Tag produziert werden?

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 100 \\ q = 1'01 \\ n = 30 \end{array}\right| \rightarrow a_{30} = 100 \cdot 1'01^{29} = 133'45 \text{ Stück/Tag}$$

Aufgabe: Eine Zeitung soll 30mal gefaltet werden Dabei wird unterstellt, dass sie am Anfang 1mm dick ist.
1) Welche Dicke hat die Zeitung am Ende?
2) Welche Dicke hat die 100 mal gefaltete Zeitung?

---

www.prof H4.com