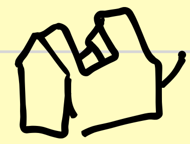
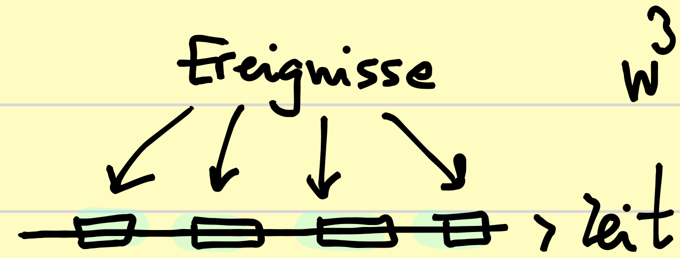
w^3.profH4.com

POISSON VERTEILUNG





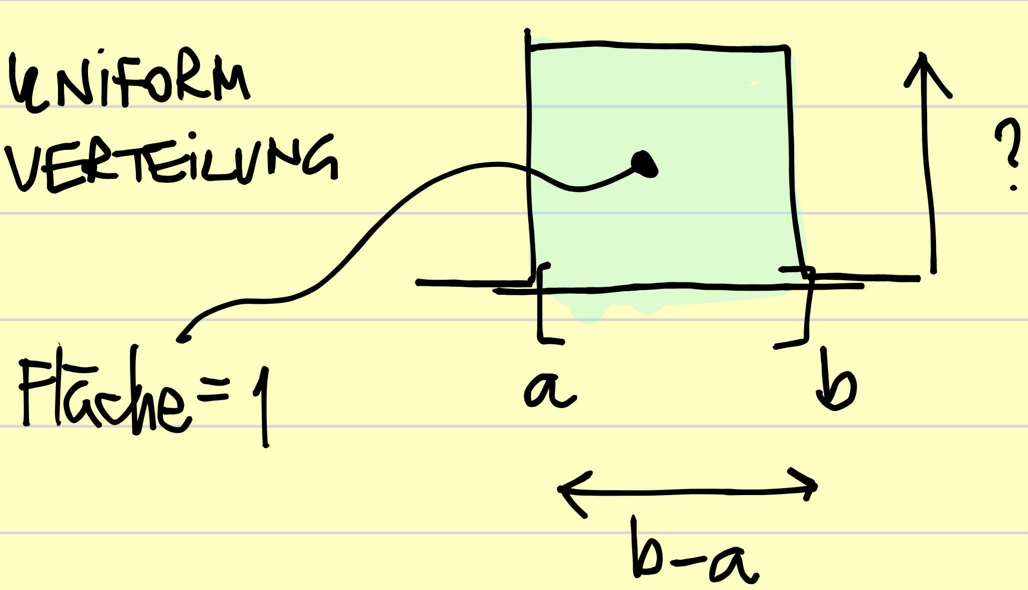
Wenn $\bar{X}(t)$ die Anzahl (Zufalls-)Ereignisse in einer Periode darstellt, dann unterliegt $\bar{X}(t)$ einen Poisson-Prozeß mit rate $\lambda > 0$ wenn:

1) $\bar{X}(t=0) = 0$
2) Die Anzahl Ereignisse in zwei nicht überlappenden Intervale sind unabhängig → GEDÄCHTNISLOS.
3) Die Anzahl Ereignisse ist Proportional zur Intervallänge.
4) Die Wahrscheinlichkeit von einem Ereignis ist sehr klein.

Definition: POISSON VERTEILUNG $f(x) = P(X = \bar{X}) = \dfrac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^x}{x!}$

$x = 0, 1, 2, \ldots$

UNIFORM VERTEILUNG



$h = \dfrac{1}{b-a}$

EXPONENTIELLE VERTEILUNG

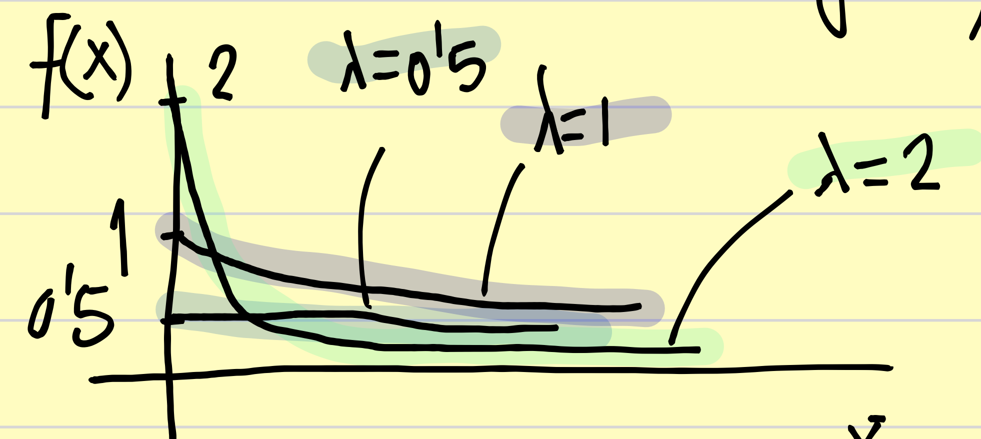
Eine Variable X ist exponentiell verteilt, wenn die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion:

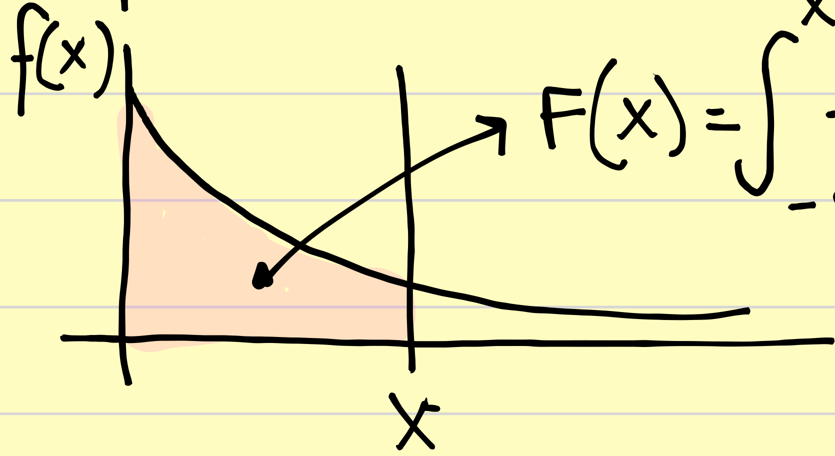
$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

λ = Anzahl Ereignisse per Zeitinterval in einem Poisson Prozeß

$$\mu = E(X) = \text{Mittelwert} = \frac{1}{\lambda} = M_1$$

$$\sigma = \text{Standardabweichung} = \frac{1}{\lambda} = \sqrt{M_2}$$



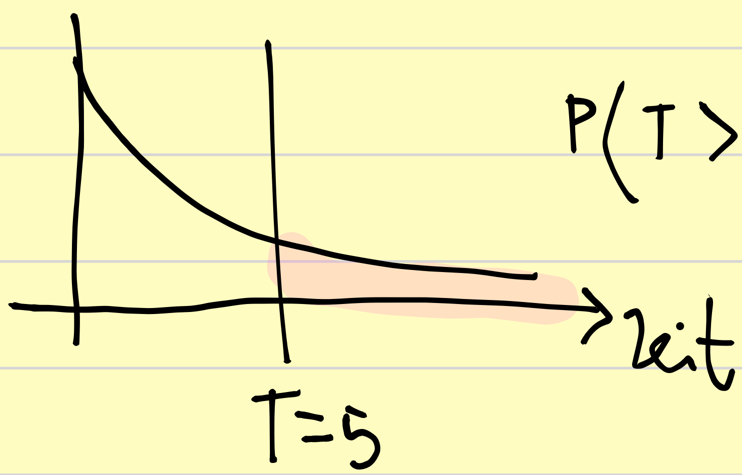


$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx = 1 - e^{-\lambda x} = P(X \leq x)$$

Beispiel: Die Ausfälle einer Maschine unterliegen eine Prozeß-Poisson-Verteilung. Somit $X\left(\frac{\#\text{Ausfälle}}{\text{Zeit}}\right)$ ist Poisson Verteilt.

Die Zeit zwischen zwei nacheinander stattgefundene Ausfälle (T) ist exponentiell verteilt. $\lambda = 0'1$.

a) Wahrscheinlichkeit $P(T>5)$



$$P(T>5) = 1 - P(T \leq 5) = $$
$$= 1 - \left(1 - e^{-\lambda \cdot 5}\right) =$$
$$= e^{-0'1 \cdot 5} = \ldots$$

WEIBULL-VERTEILUNG

- Die Weibull-Verteilung hat 2 bzw. 3 Parametern.
- " " " hat Gedächtnis.

Definition:

1) SKALENPARAMETER $\frac{1}{\lambda} > 0$. In manchen Anwendungen (insb. bei Zeitabhängigkeiten) wird λ durch seinen Kehrwert (die charakteristische Lebensdauer) ersetzt. $T = \frac{1}{\lambda} > 0$.

2) FORMPARAMETER $k > 0$. In der Praxis ist $0'25 \leq k \leq 5$.

Durch k lassen sich verschiedene speziellere

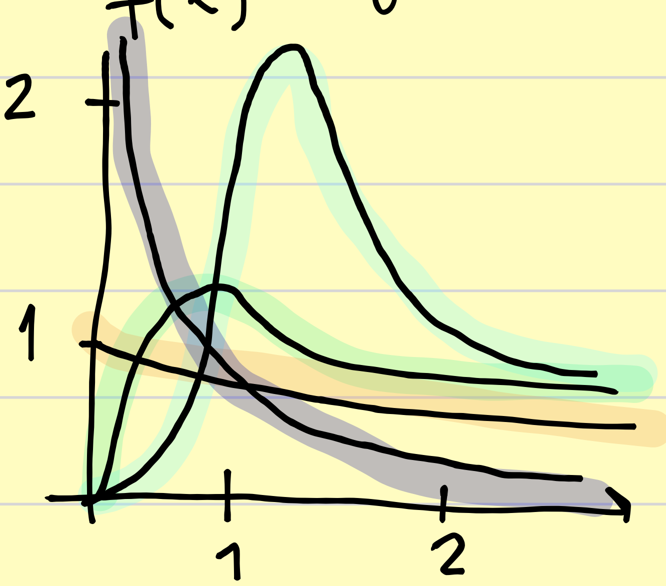
Wahrscheinlichkeitsverteilungen realisieren.

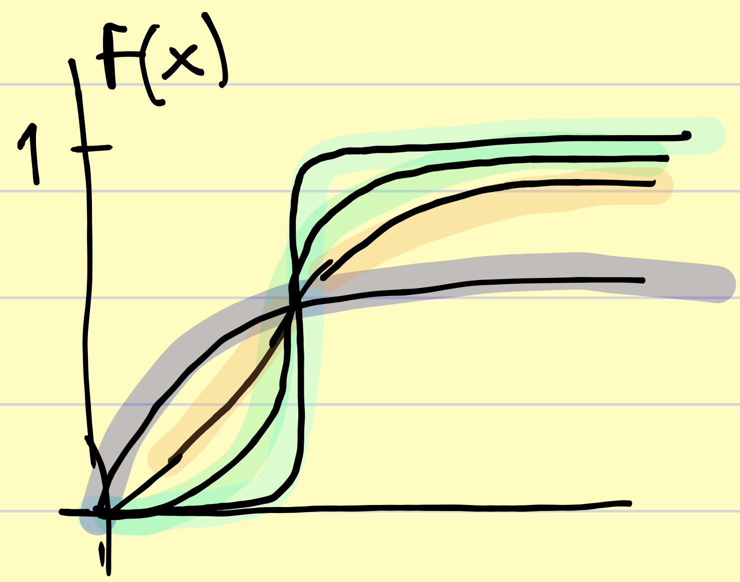
i.e.: $k=1 \rightarrow$ Exponentiellverteilung

$k \sim 3'602 \rightarrow$ Normalverteilung

Dichtefunktion: $f(x)=P(X=x)=\lambda\cdot k\cdot(\lambda x)^{k-1}\cdot e^{-(\lambda x)^k}$

Verteilung: $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx = 1-e^{-(\lambda x)^k}$





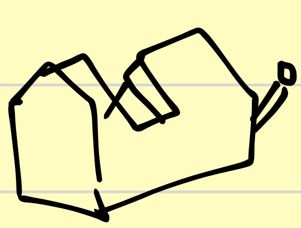
$\lambda=1;\ k=0'5$

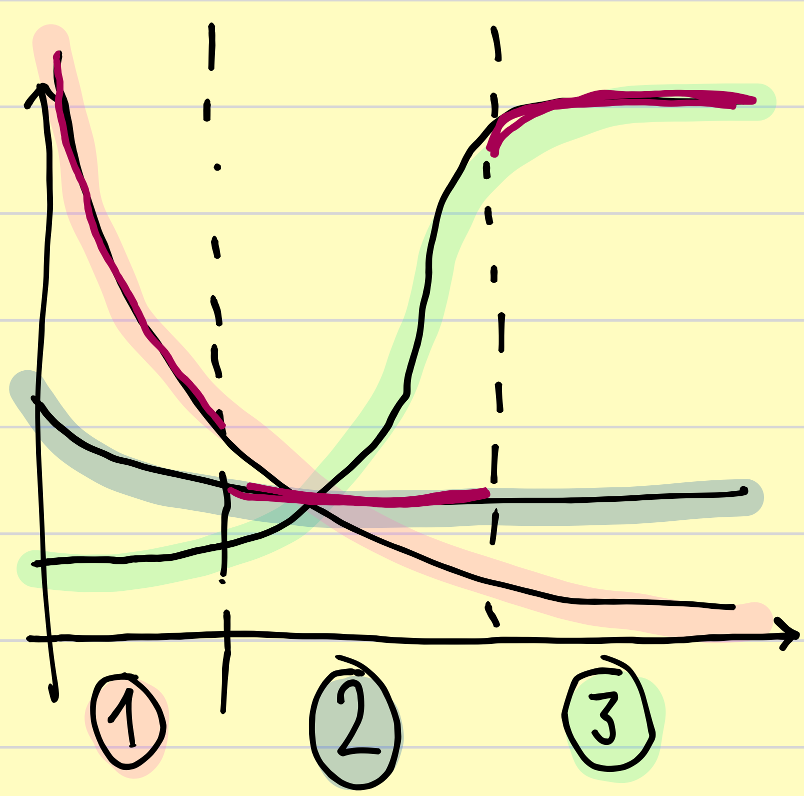
$\lambda=1;\ k=1$

$\lambda=1;\ k=1'5$

$\lambda=1;\ k=5$

ANWENDUNG





1 EINLAUFPHASE $K<1$

FRUHAUSFALLRATE

2 BETRIEBSPHASE $K=1$
ZUFALLSAUSFALLRATE

3 ERMÜDUNGSPHASE $K>1$

Die Exponentielle Verteilung behandelte Probleme mit einer konstanten Ausfallrate (λ): Gedächtnislos.
Untersucht man Probleme mit einer steigenden Ausfallrate ($K>1$) oder mit einer fallenden ($K<1$) geht man von $EXP(\lambda)$ in einer $Weibull(K, \lambda)$ über.

$K>1$: alterndes System
$K<1$: lernendes System.