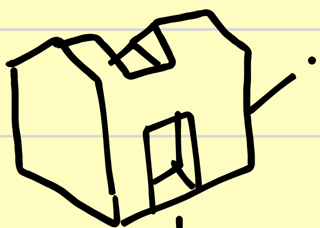
20251007_WIN2_Statistik

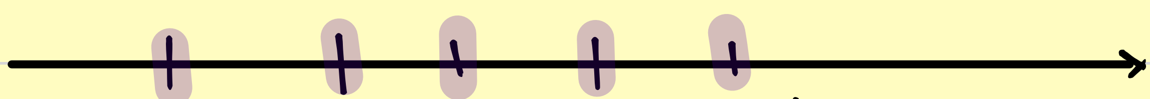
POISSON · VERTEILUNG

Beispiel.



Die Maschine fällt ab und zu (ZUFÄLLIG) aus.

Maschine   Ereignis $X(t)$ = Störung



Zeit (t)

· Das Ereignis $X(t)$ findet zufällig statt → $X(t)$ ist Poissonverteilt!

· Wenn die Anzahl Ereignisse in einer Periode [Zeit] durch eine Zufallsvariabel $X(t)$ dargestellt wird, dann unterliegt die Zufallsvariabel $X(t)$ einen POISSON·PROZEß mit FREQUENZ $\lambda > 0$, wenn:

1) $X(t=0)=0$ (es gab kein Ereignis $t<0$)

2) Die Anzahl Ereignisse in zwei nicht überlappenden Intervale sind UNABHÄNGIG von einander.

i.a.W. der Prozeß hat kein Gedächtnis!

3) Die Anzahl Ereignisse sind Proportional zur Intervallänge.

4) Die W. vom Ereignis ist sehr klein.

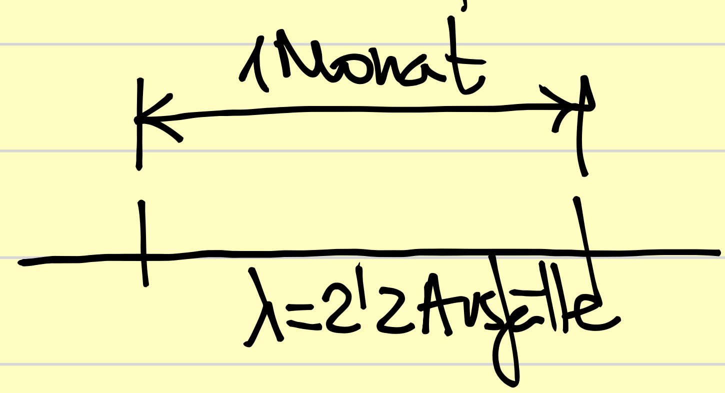
$$\boxed{P(X=x) = \frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^{x}}{x!}}$$

$x \equiv$ Anzahl Ereignisse

POISSON $\quad x! = x(x-1)\cdot(x-2)\ldots 3\cdot 2\cdot 1$

Beispiel. Die Anzahl Ausfälle einer Maschine verfolgt eine Poisson-Verteilung mit $\lambda = 2'2 \frac{\text{Ausfälle}}{\text{Monat}}$.

λ IST IMMER EINE FREQUENZ $\frac{\#\text{Ereignisse}}{\text{Zeiteinheit}}$



a) Was ist die W. dafür, dass es zu keinem Ausfall in einem Monat kommt?

$$P(X=0) = \frac{e^{-2'2}\cdot 2'2^{0}}{0!} = 11'08\%$$

$\boxed{0! = 1}$

b) Was ist die W. dafür, dass es zu genau einem Ausfall in einem Monat kommt?

$$P(X=1) = \frac{e^{-2'2}\cdot 2'2^{1}}{1!} = 24'38\%$$

c) Was ist die W. dafür, dass es zu höchstens 2 Ausfälle in einem Monat kommt?

$$\left.\boxed{\begin{array}{ccccc} x=0 & x=1 & x=2 & x=3 & \\ \square & \square & \square & \square & \ldots \end{array}}\right\} \Sigma = 1$$

$$P(X \leq 2) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) =$$

$$= \frac{e^{-2'2} \cdot 2'2^0}{0!} + \frac{e^{-2'2} \cdot 2'2^1}{1!} + \frac{e^{-2'2} \cdot 2'2^2}{2!}$$

$$= 35'45\,\%$$

$x=0$	$x=1$	$x=2$	$x=3$	
$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	...

d) Mindestens 2 Ausfälle:

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X<2) = 1 - \left[P(X=0) + P(X=1)\right] =$$

$$= 1 - \left[0'1108 + 0'2438\right] =$$

e) Mindestens 4 Ausfälle und Höchstens 6 Ausfälle:

$x=0$	$x=1$	$x=2$	$x=3$	$x=4$
$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$
$x=5$	$x=6$	$x=7$	$x=8$	
$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	...

$$P(4 \leq X \leq 6) =$$

$$= P(X=4) + P(X=5) + P(X=6) =$$

$$= \frac{e^{-2'2} \cdot 2'2^4}{4!} + \frac{e^{-2'2} \cdot 2'2^5}{5!} + \frac{e^{-2'2} \cdot 2'2^6}{6!}$$

f) Was ist die W. dafür, dass genau 3 Ausfälle in zwei Monate stattfinden?

$$\lambda = 2'2 \frac{\text{Ausfälle}}{\text{Monat}} \qquad \lambda^* = \boxed{?} \frac{\text{Ausfälle}}{\text{2 Monate}}$$

$$\frac{2'2\,A}{1\,\text{Monat}} = \frac{\lambda^* A}{2\,\text{Monate}} \rightarrow \lambda^* = 2'2 \cdot 2 \frac{\text{Ausfälle}}{\text{2 Monate}}$$

$$\lambda^* = 4'4 \frac{\text{Ausfälle}}{\text{2 Monate}}$$

$\lambda = 2'2\,A$ $\qquad (\times 2) \qquad$ $\lambda^* = 4'4$ Ausfälle 2 Monate

1 Monat   2 Monate

$$P(X=3) = \frac{e^{-4'4} \cdot 4'4^{3}}{3!} = \frac{e^{-4'4} \cdot 4'4^{3}}{3 \cdot 2 \cdot 1}$$

e) W. dafür, dass es genau zu 5 Ausfälle in einem halben Monat kommt?

$$\lambda = 2'2 \frac{A}{M} \xrightarrow{\times 1/2} \lambda^{*} = 1'1 \frac{A}{\frac{1}{2}M}$$

$$P(X=5) = \frac{e^{-1'1} \cdot 1'1^{5}}{5!}$$

Übung.   Ein Restaurant hat im Durchschnitt 20 Kunden pro Stunde.

a) Wie hoch ist die W. dafür, dass in einer bestimmten Stunde genau 25 Kunden kommen?

$$\lambda = 20 \frac{\text{Kunden}}{\text{Std}} \qquad P(X=25) = \frac{e^{-20} \cdot 20^{25}}{25!}$$

b) Wie hoch ist die W. dafür, dass in einer Periode von 17 Minuten genau 12 Kunden kommen?

$$\lambda = 20 \frac{\text{Kunden}}{60\,\text{min}} \quad \times \frac{17}{60} \longrightarrow \lambda^{*} = \frac{20 \cdot 17}{60} \frac{\text{Kunden}}{17\,\text{Minuten}}$$

$$\lambda^{*} = 5'67 \frac{\text{Kunden}}{17\,\text{Minuten}}$$

$$P(X=12) = \frac{e^{-5'67} \cdot 5'67^{12}}{12!}$$

c) Wie hoch ist die W. dafür, dass in einer Periode von 27 Min, mindestens 3 Kunden kommen?

$x=0 \quad x=1 \quad x=2 \quad x=3 \quad \ldots$

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) =$$

$$= 1 - \left[P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) \right] =$$

$$\lambda = 20 \frac{\text{Kunden}}{60 \text{ Min}} \xrightarrow{\times 27/60} \lambda^* = \frac{20 \cdot 27}{60} \frac{\text{Kunden}}{27 \text{ Minuten}} = 9 \frac{K}{27 \text{ Min}}$$

$$= 1 - \left[\frac{e^{-9} \cdot 9^0}{0!} + \frac{e^{-9} \cdot 9^1}{1!} + \frac{e^{-9} \cdot 9^2}{2!} \right] = \ldots$$

d) Wie hoch ist die W. dafür, dass in einer Periode von 27' mehr als 3 Kunden kommen?

$$P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3) =$$

$$= 1 - \left[\frac{e^{-9} \cdot 9^0}{0!} + \frac{e^{-9} \cdot 9^1}{1!} + \frac{e^{-9} \cdot 9^2}{2!} + \frac{e^{-9} \cdot 9^3}{3!} \right]$$