

---

---

---

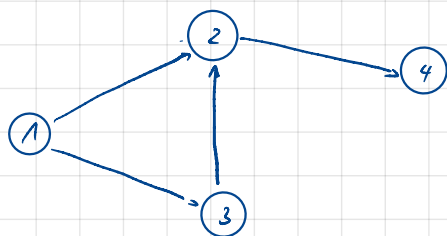
---

---



Übung: Bitte den Engpass des Netzwerks analytisch ermitteln.

Hausaufgabe!



1. Laplacian Matrix vom Graph ermitteln
2. 2. Eigenvektor (Fiedlervektor) ermitteln
3. Engpassknoten identifizieren.

1. Laplacian Matrix  $L = D - A$

$$D = \text{Degree Matrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(Anzahl der Nachbarn)

$$A = \text{Adjacency Matrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(Beziehung zwischen  $i$  &  $j$ )

$$L = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} - 0$$

$$2 \cdot \det \begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot [(3 \cdot 2 \cdot 1) + 0 + 0 - [(-1) \cdot 2 \cdot (-1)]] - 0 - [1 \cdot (-1) \cdot (-1)]$$

$$= 2 \cdot (6 - 2 - 1) = \underline{6} \quad \lambda_1 = 6$$

$$(-1) \cdot \det \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot [(-1) \cdot 2 \cdot 1] + 0 + 0 - 0 - [(-1) \cdot (-1) \cdot 1]$$

$$= (-1) \cdot (-2 - 1) = \underline{1} \quad \lambda_2 = 1$$

$$(-1) \cdot \det \begin{vmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot [(-1) \cdot (-1) \cdot 1] + [(-1) \cdot (-1) \cdot (-1)] + 0$$

$$- 0 - 0 - (3 \cdot (-1) \cdot 1)$$

$$= (-1) \cdot (1 - 1 + 3) = (-1) \cdot 3 = \underline{-3} \quad \lambda_3 = -3$$

$$0 \cdot \det \begin{vmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \underline{0} \quad \lambda_4 = 0$$

↳ zweiter kleinster Eigenwert  
⇒ Fiedler - Eigenwert

$$\vec{v}_2 = \begin{vmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \\ -3 \end{vmatrix} \rightarrow \text{Der Wert mit der ersten Null im Fiedlervektor ist der Engpass des Netzwerkes.}$$

Antwort: Der dritte Knoten ist der Engpass des Netzwerkes