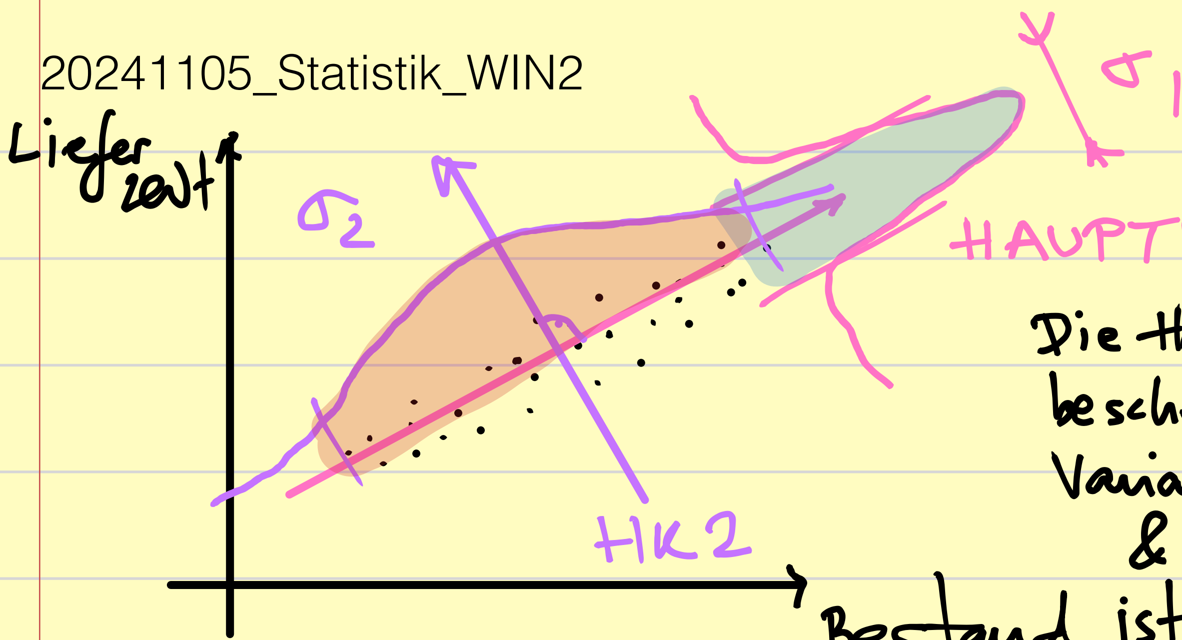
20241105_Statistik_WIN2



Die Hauptkomponente NR 1 beschreibt am meisten Variabilität vom System & ist eine lineare Kombination aus den urspr. KENNZAHLEN.

· Die Eigenvektoren der Kovarianzmatrix (nach NORMIERUNG) sind die Hauptkomponenten.

$A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ $\vec{v}$: Eigenvektoren λ: Eigenwerte

· $\det(A - \lambda I) = 0 \to \lambda$ Eigenwerte $\to \vec{v}$: Eigenvektoren

Beispiel:

	DLZ	Bestand
KW1	=	=
KW2	=	=
KW3	=	=
KW4	=	=

→ 1. Normierung → 2. Kov. Matrix

10 Punkte

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \to \text{Eigenwerte \& Eigenvektoren}$$

10 Punkte

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix}$$

$$\det\left[A-\lambda I\right]=0 \longrightarrow \det\left[\begin{bmatrix}0 & 1\\-2 & -3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\lambda\\\lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\right]=0$$

$$\longrightarrow \det\left[\begin{bmatrix}0 & 1\\-2 & -3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\lambda & 0\\0 & \lambda\end{bmatrix}\right]=0 \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \det\left[\begin{bmatrix}0-\lambda & 1\\-2 & -3-\lambda\end{bmatrix}\right]=0 \longrightarrow -\lambda\cdot(-3-\lambda)-1\cdot(-2)=0$$

$$\longrightarrow \quad 3\lambda+\lambda^2+2=0 \longrightarrow \lambda^2+3\lambda+2=0 \longrightarrow$$

$$\boxed{\det\begin{bmatrix}a & c\\b & d\end{bmatrix}=ad-cb}$$

$$\longrightarrow \lambda=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot 2}}{2}=\frac{-3\pm 1}{2}=\begin{cases}\nearrow -1\\\searrow -2\end{cases}$$

$$\lambda_1=-1 \quad ; \quad \lambda_2=-2$$

$$\lambda_1=-1;\quad A\vec{v_1}=\lambda_1\vec{v_1};\quad \left(A-\lambda_1 I\right)\vec{v_1}=\vec{0};$$

$$\left[\begin{bmatrix}0 & 1\\-2 & -3\end{bmatrix}-(-1)\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\right]\begin{bmatrix}v_{11}\\v_{12}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left[\begin{bmatrix}0 & 1\\-2 & -3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\right]\begin{bmatrix}v_{11}\\v_{12}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left[\begin{bmatrix}1 & 1\\-2 & -2\end{bmatrix}\right]\begin{bmatrix}v_{11}\\v_{12}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix}v_{11}+v_{12}=0\\-2v_{11}-2v_{12}=0\end{matrix} \longrightarrow$$

$$v_{11} = 1 \rightarrow v_{12} = -1 \longrightarrow \vec{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = -2 \rightarrow A\vec{v_2} = \lambda_2 \vec{v_2} \rightarrow (A - \lambda_2 I)\vec{v_2} = \vec{0}$$

$$\rightarrow \left[\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} - (-2)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right]\begin{bmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left[\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\right]\begin{bmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 2v_{21} + v_{22} = 0 \\ -2v_{21} - v_{22} = 0 \end{matrix}$$

$$v_{21} = 1 \rightarrow v_{22} = -2 \rightarrow \vec{v_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Übung. Gegeben wird ein Kennzahlensystem mit 2 Kennzahlen. DURCHLAUFZEIT (X), OUTPUT (Y).

a) Bitte ermitteln Sie die Kovarianzmatrix nach Normierung

b) Bitte ermitteln Sie die E-Werte & E-Vektoren der Kov. Matrix und interpretieren Sie die Ergebnisse.

	DLZ (X)	Output (Y)
KW1	17	200
KW2	14	250
KW3	12	270
KW4	13	240
KW5	9	310

KWG	7	330