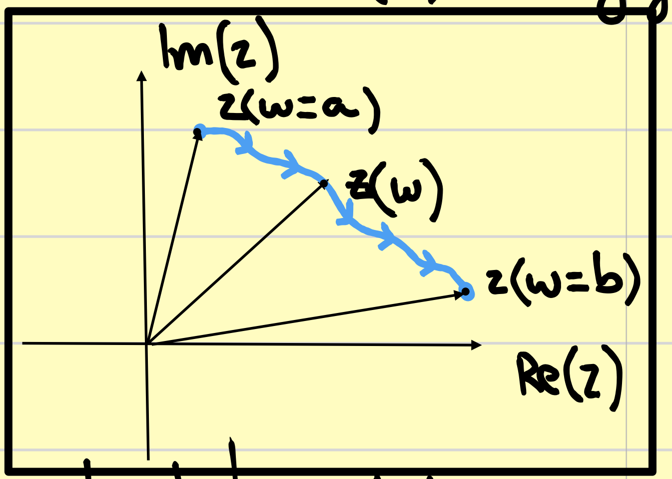
ORTSKURVE (SYSTEMTHEORIE) Unter Ortskurve versteht man in der Systemtheorie die graphische Darstellung einer von einem reellen Parameter (ω) abhängigen komplexen Systemgröße ($z = z(\omega)$).



Mathematisch ist die Ortskurve folgendermaßen definiert: die von einem parameterabhängigen komplexen Zeiger $z = z(\omega)$ in der komplexen Zahlenebene beschriebene Bahn heißt Ortskurve $z = Re(z) + j\,Im(z)$. Der Parameter „ω" ist dabei Element eines halboffenen, offenen oder geschlossenen Intervalls der reellen Zahlen. Im Beispiel $a \leq \omega \leq b$.

Beispiel

Gegeben ist die Übertragungsfunktion eines Verzögerungsgliedes 1. Ordnung:

$$G(s) = \frac{x_a(s)}{x_e(s)} = \frac{K}{1+sT} \qquad K = 10\ ;\ T = 0{,}1\,s$$

Es ist der Verlauf der Ortskurve zu ermitteln.

Der Frequenzgang ergibt sich aus der Übertragungsfunktion indem wir die komplexe Variable $s = j\omega$ ersetzen:

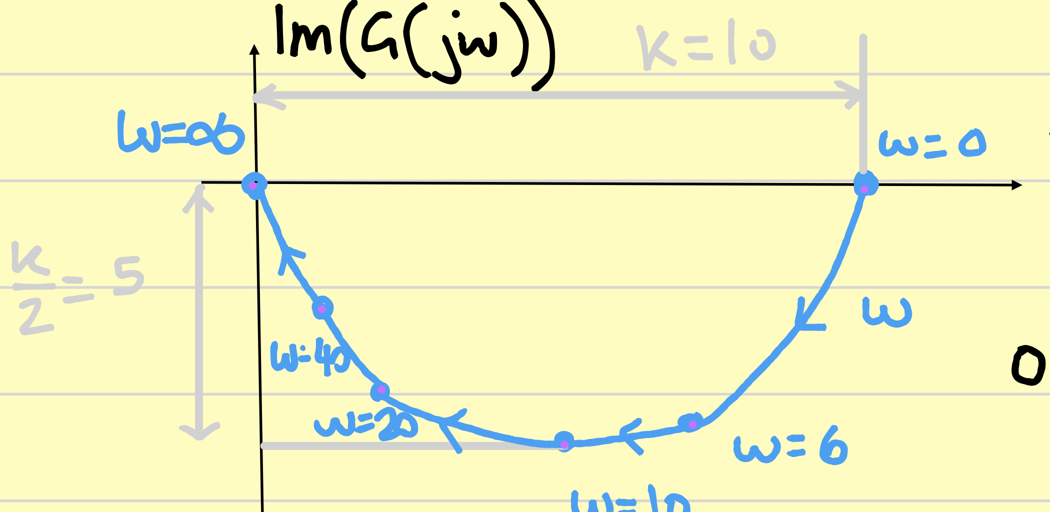
$$G(j\omega) = \frac{x_a(j\omega)}{x_e(j\omega)} = \frac{K}{1+j\omega T} = Re(G(j\omega)) + j\,Im(G(j\omega))$$

$$G(j\omega) = \frac{K}{1+j\omega T} \cdot \frac{1-j\omega T}{1-j\omega T} = \frac{K(1-j\omega T)}{1+(\omega T)^2}$$

$$Re(G(j\omega)) = \frac{K}{1+(\omega T)^2}\ ;\quad Im(G(j\omega)) = \frac{-K\omega T}{1+(\omega T)^2}$$

Variiert man nun ω im Interval ω ∈ [0, ∞[, so ergibt sich für jeden diskreten ω-Wert eine reelle und eine imaginäre Komponente, die zusammen in der komplexen Zahlenebene ergeben.

ω	0	6	10	20	40	∞
Re(G)	10	7'35	5	2	0'59	0
Im(G)	0	-4'41	-5	-4	-2'36	0



ORTSKURVE

$\omega_E = \frac{1}{T} = 10$

Die Ortskurve ist ein Halbkreis im vierten Quadrant. Der Frequenzgang lässt sich in Betrag |G(ω)| und Phasenwinkel φ(ω) zerlegen:

$$|G(\omega)| = \sqrt{Re^2(G) + Im^2(G)} = \frac{k}{\sqrt{1+(\omega T)^2}} \ ; \ \varphi(\omega) = \operatorname{atan}\frac{Im(G)}{Re(G)} = -\operatorname{atan}(\omega T)$$

Bemerkenswert ist, dass für die Eckfrequenz $\omega_E = \frac{1}{T} = 10$ der Realteil von G(jω) gleich den negativen Imaginärenteil von G(jω) ist, d.h. $Re(G) = -Im(G) = \frac{k}{2}, 5$.

$\boxed{\text{NYQUIST - DIAGRAMM}}$ Ein Nyquist-Diagramm stellt die Ortskurve der Ausgangsgröße eines Regelkreises mit der Frequenz als Parameter dar.

Das Nyquist-Diagramm ist ein parametrischer Funktionsgraph einer komplexwertigen Funktion in der komplexen Zahlenebene. Es erfüllt einen ähnlichen Zweck wie das Bode-Diagramm.
Im Gegensatz zum Bode-Diagramm wird beim Nyquist Betrag und Phase in einem einzigen Diagramm dargestellt, nämlich indem man den Real- und Imaginärteil des Ausgabewertes direkt in die komplexe Zahlenebene zeichnet (Ortskurve).
Ein wesentlicher Unterschied zum Bode-Diagramm besteht darin, dass beim Nyquist häufig keine Werte des Funktionsparameters „ω" eingetragen werden, weshalb anhand des Graphen keine Aussagen über Eckfrequenzen gemacht werden können.

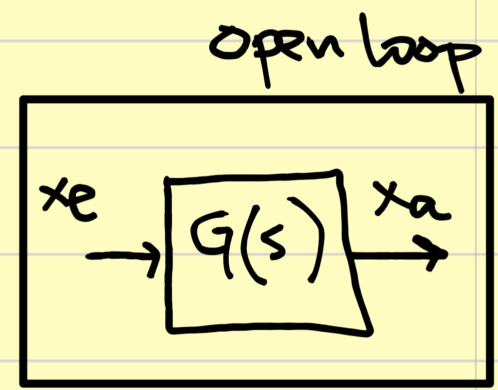
Das NUTZEN von Nyquist-Diagrammen besteht darin, dass die Stabilität des rückgekoppelten Systems leicht vorhergesagt werden kann.

NYQUIST-STABILITÄTSKRITERIUM

Das Nyquist-Stabilitätskriterium ist eine Methode, um die Stabilität von Regelkreisen zu analysieren.
Es basiert auf dem Verhalten des Frequenzgangs des offenen Regelkreises um den Einheitskreis im komplexen Zahlenraum.

Zunächst 3 KONZEPTE:

1. **Offener Regelkreis (open loop)** bezieht sich auf das System bevor eine Rückkopplung (Feedback) hinzugefügt wird. Es zeigt, wie das System ohne jegliche Kontolle reagiert.

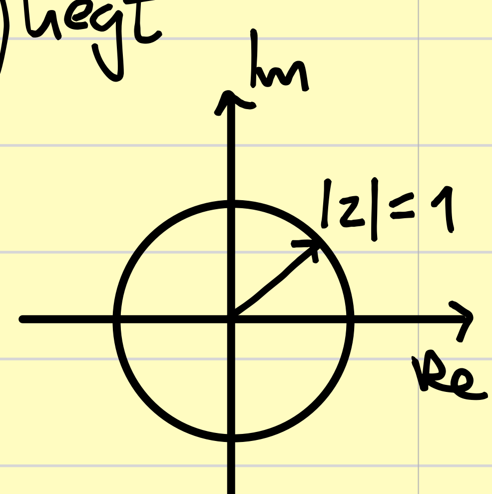


2. **Frequenzgang** eines Systems gibt an, wie sich die Systemantwort auf verschiedene Frequenzen verändert. Er zeigt, wie das System auf Eingangssignale unterschiedlicher Frequenzen reagiert.

Frequenzgang

$$\boxed{G(s) = G(j\omega)}$$

3. **Einheitskreis im komplexen Zahlenraum** ist ein Kreis, der um den Ursprung (0,0) liegt und einen Radius von 1 hat. Er repräsentiert spezielle Frequenzen, die für die Stabilität eines Regelkreises wichtig sind.



Das Nyquist. Stabilitätskriterium besagt nun folgendes:

1 STABILITÄTSBEDINGUNG: Ein Regelkreis ist stabil, wenn der Phasenwinkel der Übertragungsfunktion um den geschlossenen Regelkreis bei der Durchläufung des Einheitskreises um 360° (2π) insgesamt nicht mehr als -180° (π) gedreht wird.

2 POLARPLOT: Wenn die Nyquist. Kurve den Einheitskreis im Uhrzeigesinn umschließt, dann ist der Regelkreis instabil.

3 KEIN UMSCHLINGEN: wenn die Nyquist. Kurve den Einheitskreis nicht umschließt, ist der Regelkreis stabil.

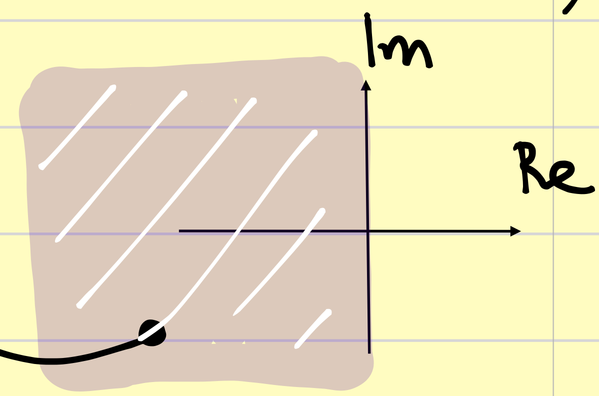
Das Umschließens des Einheitskreises bedeutet, dass die Phase um 360° (2π) zurückkehrt. In diesem Fall könnte eine Rückkopplung dazu führen, dass das System unkontrolliert schwingt.

Umgekehrt, wenn die Nyquist. Kurve den Einheitskreis NICHT umschließt, deutet das darauf hin, dass das System stabil ist! Das bedeutet dass die Phase für Alle Frequenzen kontinuierlich bleibt und nicht zu einer vollständigen Rotation führt.

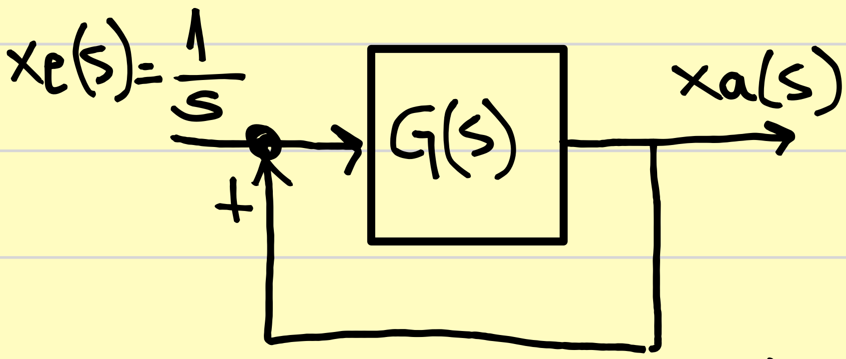
ALTERNATIVE FORMULIERUNG DER NYQUIST-STABILITÄTSKRITERIUM

(für den Fall, dass die Pole der Übertragungsfunktion bekannt sind)

1. STABILE ÜBERTRAGUNGSFUNKTION
wenn Alle Pole im linken Halbraum des Komplexen Zahlenraums liegen.



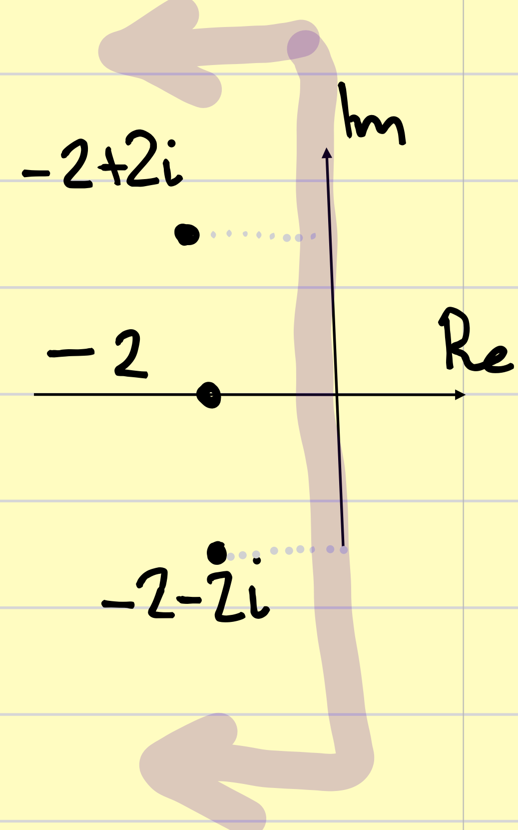
Beispiel: $G(s) = \frac{1}{(s+2)(s+3)}$ Pole: $s=-2$; $s=-3$



Beispiel: $G(s) = \frac{1}{(s+2)(s^2+4s+8)}$

Pole: $s=-2$

$$s = \frac{-4 \pm \sqrt{16-32}}{2} = \begin{cases} -2+2i \\ -2-2i \end{cases}$$



2. INSTABILE ÜBERTRAGUNGSFUNKTION
wenn zumindest einen Pol im rechten Halbraum des komplexen Zahlenraums liegt.

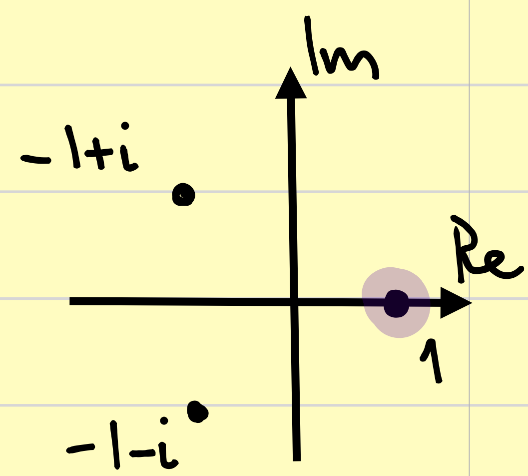
Beispiel: $G(s) = \frac{1}{(s-1)(s+1)}$; Pole: $s=1$, $s=-1$ → INSTABIL

Eine Rückkopplung könnte zu unkontrollierten Verhalten führen!

Beispiel: $G(s) = \dfrac{1}{(s-1)(s^2+2s+2)}$

Pole: $s = 1$

$$s = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = \begin{cases} -1+i \\ -1-i \end{cases}$$



INSTABIL

$\boxed{\text{3. KRITISCH-STABILE ÜBERTRAGUNGSFUNKTION, wenn zumindest einen Pol auf der Imaginären Axe liegt und der Rest auf dem linken Halbraum des komplexen Zahlenraums.}}$

Beispiel: $G(s) = \dfrac{1}{s^2} \rightarrow s = 0$

Das System ist kritisch-stabil und würde bei einer proportionalen Regelung am Rande der Stabilität stehen.

Beispiel: $G(s) = \dfrac{1}{s(s+1)^2} \rightarrow$ $s = 0$, $s = -1$ (doppelt)