20211104_Finanzmathematik_FAT1 (2.Vorlesung)

4

Stetige Verzinsung

$m \to \infty$

Bei der stetigen Verzinsung handelt es sich um eine Zinseszinsrechnung, bei der die Intervalle der Verzinsung als unendlich klein angenommen werden. Die Zinsen werden in jedem Augenblick dem Kapital zugerechnet und mitverzinst.

Unterjährige Verzinsung:

$$K_n = K_0 \cdot \left(1+\frac{p}{m \cdot 100}\right)^{n \cdot m}$$

n: Anzahl Jahre

m: Anzahl intervalle im Jahr

$\frac{p}{m}$: Zinssatz in einem Intervall

$$m \to \infty \quad : \quad K_n = \lim_{m\to\infty}\left[K_0 \cdot \left(1+\frac{p}{m \cdot 100}\right)^{n \cdot m}\right] = K_0 \cdot \lim_{m\to\infty}\left[K_0 \cdot \left(1+\frac{p}{m \cdot 100}\right)^{n \cdot m}\right] =$$

$$= K_0 \cdot \lim_{m\to\infty}\left[\left(1+\frac{p}{m \cdot 100}\right)^{m}\right]^n = K_0 \cdot \left[e^{\frac{p}{100}}\right]^n$$

Mit Hilfe von der Grenzwerte von Reihen:

$$e = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!} = \lim_{m\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i!} = \lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^m$$

$$e^x = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x}{m!} = \lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{x}{m}\right)^m$$

$$\boxed{K_n = K_0 \cdot e^{pn/100}}$$

Diese Formel wird als WACHSTUMSFUNKTION bezeichnet.

(·) $1! = 1$

$2! = 1 \cdot 2$

$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3$

...

Beispiel: Welche Summe ergibt sich für ein Anfangskapital von 2500€ bei einem Zinssatz von 9'3% nach fünf Jahren.

a) bei jährlicher Verzinsung? b) bei stetiger Verzinsung?

a) $K_n = 2500 \cdot 1{,}093^5 = 3899{,}79$ €

b) $K_n = 2500 \cdot e^{\frac{46{,}5}{100}} = 3980{,}04$ € $\quad n \cdot p = 5 \cdot 9{,}3 = 46{,}5$

Aufgabe. Wann verdoppelt sich ein Kapital bei 6% Zinsen und stetiger Verzinsung?

Aufgabe. Welche der folgenden Alternativen ist für die Anlage von 5000€ für zehn Jahre optimal?

a) 9% Zinseszins b) 8,9% halbjährige Verzinsung
c) 8,7% stetige Verzinsung

Aufgabe. Bei einem Bohnenanbau wird bei 13% der Pflanzen ein Pilzbefall festgestellt. Eine Verarbeitung der befallenen Pflanzen ist nicht möglich. Am 5. Tag nach der Feststellung des Pilzbefalls wird ein Ernteausfall von 18% der Pflanzen registriert.

a) Welche Wachstumsrate (täglich) hat der Pilzbefall?
b) Nach wie vielen Tagen ist die halbe Ernte vernichtet?

Rentenrechnung

Unter einer „Rente" versteht man in der Finanzmathematik gleich bleibende Zahlungen, die in regelmäßigen Abständen geleistet werden.

Zur Vereinfachung wird hier vorausgesetzt, dass die Zahlungsbeträge gleich hoch sind und die Verzinsung nachschüssig erfolgt. Bei diesen Zahlungen kann es sich sowohl um Auszahlungen als auch um Einzahlungen handeln.

Rente: regelmäßige Zahlungen (Ein- & Aus-Zahlungen)
r: Rate (die einzelne Zahlungen)
R_n: Rentenendwert; Gesamtwert einer Rente am Ende der Zahlungen.
R_0: Rentenbarwert; Gesamtwert einer Rente am Anfang der Zahlungen.
q: Zinsfaktor; mit dem die Raten verzinst werden.

$$q = 1 + \frac{p}{100}$$

Ableitung der Formel zur Berechnung des Rentenendwerts.

- Bei der nachschüssiger Rente (Rentenraten werden am Ende des Jahres fällig.) wird die 1. Rate „r" am Ende des 1. Jahres gezahlt. Nach Ablauf von „n" Jahren ist diese 1. Rate $(n-1)$ mal verzinst worden. Der Wert der ersten Rate „r" am Ende der Laufzeit beträgt also $r \cdot q^{n-1}$!
- Die 2. Rate würde nach n Jahren nur $(n-2)$ mal verzinst, da sie erst am Ende des 2. Jahres gezahlt wurde.

Es ergibt also folgende Aufstellung für die Zahlungen:

Jahre	Rate	Anzahl der Verzinsungen von „r"	Endwert der Rate
1	r	$n-1$	$r \cdot q^{n-1}$
2	r	$n-2$	$r \cdot q^{n-2}$
...			
$n-2$	r	2	$r \cdot q^2$
$n-1$	r	1	$r \cdot q$
n	r	0	r

- Der Rentenendwert setzt sich aus den Endwerten der einzelnen Raten zusammen:

$$R_n = r \cdot q^{n-1} + r \cdot q^{n-2} + \ldots + r \cdot q + r = r \cdot \sum_{i=1}^{n} q^{i-1}$$

- Die n-te Partielle Summe einer geometrischen Reihe.
- Nach der Summenformel für geometrische Reihen ergibt sich für den Rentenendwert R_n:

$$\boxed{R_n = r \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}} \text{ (nachschüssiger Rente)}$$

- Bei der vorschüssigen Rente wird jede Rate zu Beginn eines Jahres gezahlt. Damit wird jede Rate gegenüber der nachschüssiger Rente ein Jahr länger verzinst.
- Der Rentendwert beträgt:

$$R_n = r \cdot q \cdot q^{n-1} + r \cdot q \cdot q^{n-2} + \ldots + r \cdot q \cdot q^2 + r \cdot q \cdot q + r \cdot q =$$

$$= r \cdot q \cdot \sum_{i=1}^{n} q^{i-1}$$

$$\boxed{R_n = r \cdot q \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}} \text{ (vorschüssiger Rente)}$$

Beispiel: Sophie legt jährlich 5000€ zu 6% Zinsen an.

a) Welcher Betrag ergibt sich nach 12 Jahren bei nachschüssiger Verzinsung?

b) - vorschüssige Verzinsung?

a) $R_n = r \cdot \frac{q^n - 1}{q-1} = 5000 \cdot \frac{1'06^{12} - 1}{0'06} = 84349'71$ €

b) $R_n = r \cdot q \cdot \frac{q^n - 1}{q-1} = 5000 \cdot 1'06 \cdot \frac{1'06^{12} - 1}{0'06} = 89410'69$ €

1)) Gesamtwert der Rente zu einem Zeitpunkt (Diskontierung)

2)) Bestimmung der Raten aus vorgegebenem Bar-/Endwert.

Beispiel. Herr Ludwig möchte ab dem 66. Geburtstag zusätzlich zu seiner Rente zehn Jahre lang über einen jährlichen Betrag von 6000 € verfügen (nachschüssig)

a) Wie hoch muss das Kapital am 66. Geburtstag sein, wenn Herr Ludwig einen Zinssatz von 6% unterstellt?

b) Wie hoch ist der Endwert der Rente?

c) Welche regelmäßigen jährlichen Einzahlungen muss er leisten, wenn er das Kapital in 15 Jahren vorschüssig zu 7% ansparen will?

a) Barwert der zusätzlichen Rente zum 66. Geburtstag.

$$R_0 = \frac{R_n}{q^n}$$

$$R_n = r \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$R_0 = r \cdot \frac{q^n - 1}{q^n (q-1)} = 6000 \cdot \frac{1'06^{10} - 1}{1'06^{10} \cdot 0'06} = 44160'52 \text{ €}$$

b) Endwert

$$R_n = R_0 \cdot q^n = 44160'52 \cdot 1'06^{10} = 79084'77 \text{ €}$$

c) Die Rate r erhält man aus der Formel für Rentenendwert (vorschüssig):

$$R_n = r \cdot q \cdot \frac{q^n-1}{q-1} \longrightarrow r = \frac{R_n \cdot (q-1)}{q(q^n-1)} = \frac{44160'52 \cdot (0'07)}{1'07 \cdot (1'07^{15}-1)}$$

$$r = 1642'38\ €$$

Aufgaben. In einem Bausparvertrag solles jedes Jahr 3600€ bei 3% Zinsen angespart werden (nachschüssig)

a) Wie hoch ist das Bausparguthaben nach 10 Jahren?

Aufgabe. Herr Braun besitzt einen Wohnwagen, den er heute für 20000€ verkaufen oder zehn Jahre lang für jährlich 2400€ nachschüssig vermieten kann (danach ist der Wagen schrottreif). Die Mieteinnahmen sowie den Verkaufspreis könnte H. Braun zu 7% verzinsen. Welche Alternative ist für H. Braun günstiger?