Statistikübungen für WIN2 - Uniformverteilung, Normalverteilung und Binomialverteilung

Prof H4. https://www.profh4.com

19. März 2025

Einführung

Dieses Dokument enthält Übungsaufgaben zu drei wichtigen Wahrscheinlichkeitsverteilungen: Uniformverteilung, Normalverteilung und Binomialverteilung. Jeder Abschnitt enthält zehn Übungen, die auf dem Niveau eines Bachelorstudiums im Einführungskurs Statistik angesiedelt sind.

1 Uniformverteilung

Die Uniformverteilung ist eine Wahrscheinlichkeitsverteilung, bei der alle Ereignisse innerhalb des definierten Bereichs die gleiche Wahrscheinlichkeit haben.

Übungen

1. Ein Glücksrad hat 8 gleich große Sektoren mit unterschiedlichen Preisen. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, einen bestimmten Preis zu gewinnen?

2. Eine App generiert zufällige Zahlen zwischen 1 und 100. Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine generierte Zahl zwischen 20 und 40 liegt?

3. Wenn Sie einen sechsseitigen Würfel werfen, was ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Zahl größer als 2 ist?

4. Angenommen, Sie wählen zufällig einen Tag im Jahr (unter der Annahme eines Nicht-Schaltjahres). Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass es im Juli ist?
5. Ein Zufallsgenerator wählt eine reelle Zahl zwischen 0 und 2. Was ist der Erwartungswert dieser Auswahl?
6. Beschreiben Sie, wie die Varianz einer gleichverteilten Zufallsvariablen berechnet wird, wenn die Grenzen a und b sind.
7. Ein digitales Glücksrad hat 12 Positionen. Jede Position repräsentiert einen Monat des Jahres. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Dreh zu einem Monat mit 31 Tagen führt?
8. Sie ziehen zufällig eine Karte aus einem gut gemischten Deck von 52 Spielkarten. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass es eine Herzkarte ist?
9. Ein Zufallsgenerator erzeugt Zahlen zwischen 0 und 1. Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine generierte Zahl kleiner als 0,25 ist?
10. Sie haben eine Playlist mit 100 Songs und spielen einen Song zufällig ab. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass der gespielte Song der 10. auf der Liste ist?

Aufgabe 1

Die Wahrscheinlichkeit, einen bestimmten Preis auf dem Glücksrad mit 8 Sektoren zu gewinnen, beträgt $\frac{1}{8}$, da alle Sektoren gleich groß sind und die Chance für jeden Sektor gleich ist.

Aufgabe 2

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällige Zahl zwischen 20 und 40 liegt, bei einer Auswahl zwischen 1 und 100, beträgt $\frac{40-20+1}{100} = \frac{21}{100}$, da 21 Zahlen in diesem Bereich liegen.

Aufgabe 3

Die Wahrscheinlichkeit, dass die Zahl größer als 2 ist, wenn ein sechsseitiger Würfel geworfen wird, beträgt $\frac{6-2}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$, da 4 der 6 Zahlen größer als 2 sind.

Aufgabe 4

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig gewählter Tag im Juli ist, beträgt $\frac{31}{365}$, da Juli 31 Tage hat und ein Nicht-Schaltjahr 365 Tage hat.

Aufgabe 5

Der Erwartungswert für eine gleichverteilte Zufallsvariable, die eine reelle Zahl zwischen 0 und 2 wählt, ist $\frac{0+2}{2} = 1$.

Aufgabe 6

Die Varianz einer gleichverteilten Zufallsvariablen, wenn die Grenzen a und b sind, wird berechnet als $\frac{(b-a)^2}{12}$.

Aufgabe 7

Es gibt 7 Monate mit 31 Tagen. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Dreh eines digitalen Glücksrads zu einem dieser Monate führt, beträgt $\frac{7}{12}$.

Aufgabe 8

Die Wahrscheinlichkeit, eine Herzkarte aus einem gut gemischten Deck von 52 Spielkarten zu ziehen, beträgt $\frac{13}{52} = \frac{1}{4}$, da es 13 Herzkarten im Deck gibt.

Aufgabe 9

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine vom Zufallsgenerator erzeugte Zahl zwischen 0 und 1 kleiner als 0,25 ist, beträgt $0,25$, da der Bereich von 0 bis 0,25 ein Viertel des Gesamtbereichs von 0 bis 1 ist.

Aufgabe 10

Die Wahrscheinlichkeit, dass der zufällig abgespielte Song der 10. auf der Liste ist, beträgt $\frac{1}{100}$, da jeder Song die gleiche Chance hat, ausgewählt zu werden.

2 Normalverteilung

Die Normalverteilung ist eine der am häufigsten verwendeten Verteilungen in der Statistik. Sie wird auch als Gauß-Verteilung bezeichnet.

Übungen

1. Die Körpergröße von Männern in einem bestimmten Land ist normalverteilt mit einem Mittelwert von 175 cm und einer Standardabweichung von 8 cm. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Mann größer als 183 cm ist?

2. Eine Prüfung ist normalverteilt mit einem Durchschnittsergebnis von 75 Punkten und einer Standardabweichung von 10 Punkten. Was ist der Prozentsatz der Studenten, die mehr als 85 Punkte erreichen?

3. Angenommen, die Dauer des täglichen Pendelverkehrs in einer Stadt folgt einer Normalverteilung mit einem Mittelwert von 60 Minuten und einer Standardabweichung von 15 Minuten. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Pendler zufällig ausgewählt weniger als 45 Minuten braucht?

4. Die Lebensdauer von Batterien eines bestimmten Typs ist normalverteilt mit einem Mittelwert von 800 Stunden und einer Standardabweichung von 40 Stunden. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Batterie zwischen 760 und 840 Stunden hält.

5. Ein Einstellungstest hat einen Mittelwert von 50 Punkten und eine Standardabweichung von 5 Punkten. Wenn die besten 10% der Bewerber zum Interview eingeladen werden, ab welcher Punktzahl gehört man zu diesem Kreis?

6. In einer Studie zur Schlafdauer wird festgestellt, dass die Schlafdauer normalverteilt ist mit einem Mittelwert von 7 Stunden und einer Standardabweichung von 1 Stunde. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Person weniger als 5 Stunden schläft.

7. Angenommen, die Ausgaben für Lebensmittel in einem Haushalt sind normalverteilt mit einem Durchschnitt von 250 Euro und einer Standardabweichung von 50 Euro. Wie groß ist der Anteil der Haushalte, die mehr als 350 Euro ausgeben?

8. Die Punktzahl in einem Videospiel ist normalverteilt mit einem Durchschnitt von 2000 Punkten und einer Standardabweichung von 300 Punkten. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein Spieler zufällig ausgewählt weniger als 1700 Punkte erzielt.

9. Ein Unternehmen stellt fest, dass die Zeit, die Mitarbeiter für bestimmte Aufgaben benötigen, normalverteilt ist, mit einem Mittelwert von 2

Stunden und einer Standardabweichung von 30 Minuten. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Mitarbeiter für eine Aufgabe mehr als 2,5 Stunden benötigt?

10. Wenn die Zeit, die Besucher in einem Museum verbringen, normalverteilt ist mit einem Mittelwert von 3 Stunden und einer Standardabweichung von 45 Minuten, wie hoch ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufälliger Besucher zwischen 2 und 4 Stunden im Museum verbringt?

Aufgabe 1

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Mann größer als 183 cm ist, wird mit der Standardnormalverteilung berechnet. Die Z-Score-Formel lautet:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

wobei $X = 183$, $\mu = 175$, und $\sigma = 8$.

$$Z = \frac{183 - 175}{8} = 1$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Mann größer als 183 cm ist, entspricht dem Bereich rechts von $Z = 1$ in der Standardnormalverteilung, was etwa 15.87% entspricht.

Aufgabe 2

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Student mehr als 85 Punkte erreicht, berechnet sich analog durch Umwandlung in den Z-Score:

$$Z = \frac{85 - 75}{10} = 1$$

Die Wahrscheinlichkeit entspricht dem Bereich rechts von $Z = 1$ und beträgt ebenfalls etwa 15.87%.

Aufgabe 3

Für die Wahrscheinlichkeit, dass ein Pendler weniger als 45 Minuten benötigt:

$$Z = \frac{45 - 60}{15} = -1$$

Die Wahrscheinlichkeit, weniger als 45 Minuten zu benötigen, entspricht dem Bereich links von $Z = -1$ und beträgt etwa 15.87%.

Aufgabe 4

Die Wahrscheinlichkeit, dass die Lebensdauer zwischen 760 und 840 Stunden liegt: Berechnung der Z-Scores für beide Grenzen und anschließende Ermittlung der Wahrscheinlichkeit zwischen diesen Z-Werten. Das ergibt etwa 68.27%.

Aufgabe 5

Um zu den besten 10% der Bewerber zu gehören, suchen wir den Z-Score, der dem 90. Perzentil entspricht, was einem Z-Score von etwa 1.28 entspricht. Die erforderliche Punktzahl berechnet sich als:

$$X = \mu + Z\sigma = 50 + 1.28(5) \approx 56.4$$

Ein Bewerber benötigt also etwa 56.4 Punkte, um zu den besten 10% zu gehören.

Aufgabe 6

Die Wahrscheinlichkeit, dass jemand weniger als 5 Stunden schläft:

$$Z = \frac{5-7}{1} = -2$$

Dies entspricht dem Bereich links von $Z = -2$, was etwa 2.28% entspricht.

Aufgabe 7

Die Wahrscheinlichkeit, dass die Ausgaben mehr als 350 Euro betragen:

$$Z = \frac{350-250}{50} = 2$$

Dies entspricht dem Bereich rechts von $Z = 2$, also etwa 2.28%.

Aufgabe 8

Für weniger als 1700 Punkte:

$$Z = \frac{1700-2000}{300} = -1$$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt etwa 15.87%.

Aufgabe 9

Die Wahrscheinlichkeit, mehr als 2,5 Stunden zu benötigen:

$$Z = \frac{2.5 - 2}{0.5} = 1$$

Dies entspricht einer Wahrscheinlichkeit von etwa 15.87%.

Aufgabe 10

Für die Zeit zwischen 2 und 4 Stunden im Museum: Die entsprechenden Z-Scores und die kumulative Wahrscheinlichkeit zwischen diesen liefern etwa 81.76%.

3 Binomialverteilung

Die Binomialverteilung beschreibt die Anzahl der Erfolge in einer Serie von gleichartigen und unabhängigen Versuchen, die jeweils genau zwei mögliche Ergebnisse haben (Erfolg und Misserfolg).

Übungen

1. Sie haben eine App entwickelt und bieten sie im App Store an. Die Chance, dass ein Besucher der Seite die App herunterlädt, beträgt 10%. Wenn 100 Personen Ihre App-Seite besuchen, wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 15 Downloads erfolgen?

2. Bei einem Online-Quiz müssen die Teilnehmer 12 Ja-oder-Nein-Fragen beantworten. Ein Teilnehmer entscheidet sich zufällig für jede Antwort. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass er genau 8 Fragen richtig beantwortet?

3. In einem sozialen Netzwerk teilen Freunde mit 25% Wahrscheinlichkeit Beiträge, die Sie posten. Wenn Sie einen Beitrag für 20 Freunde sichtbar machen, wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass genau 5 Freunde den Beitrag teilen?

4. Ein Student beantwortet in einem Multiple-Choice-Test jede Frage mit vier Antwortmöglichkeiten durch Raten. Der Test besteht aus 15 Fragen. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Student weniger als 4 Fragen richtig beantwortet?

5. Bei einem experimentellen Medikament wird angenommen, dass die Heilungschance bei einer bestimmten Krankheit bei 80% liegt. Wenn das Medikament 10 Patienten verabreicht wird, wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass es bei allen 10 Patienten wirkt?

6. Eine Umfrage ergab, dass 60% der Bevölkerung eines Landes für ein bestimmtes Gesetz sind. Wenn eine zufällige Stichprobe von 25 Personen gezogen wird, wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass genau 20 Personen das Gesetz unterstützen?

7. In einem virtuellen Kartenspiel gibt es eine "Glückskarte", die mit 30% Wahrscheinlichkeit aus einem gemischten Deck von 10 Karten gezogen wird. Wenn ein Spieler 3 Mal zieht, wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass er mindestens einmal die Glückskarte erhält?

8. Ein Bewässerungssystem in einem landwirtschaftlichen Betrieb hat eine Ausfallwahrscheinlichkeit von 5% pro Tag. Wenn das System über einen Zeitraum von 30 Tagen betrieben wird, wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass es an genau 2 Tagen ausfällt?

9. Bei einer Veranstaltung wird eine Tombola mit einer Gewinnchance von 2% pro Los veranstaltet. Eine Person kauft 50 Lose. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie genau 1 Gewinnlos erhält?

10. Ein Online-Spiel bietet die Möglichkeit, mit einer Wahrscheinlichkeit von 75% eine Spielrunde zu gewinnen. Wenn ein Spieler 8 Runden spielt, wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass er mindestens 6 Runden gewinnt?

Aufgabe 1

Gegeben: $n = 100$, $p = 0.10$, gesucht wird die Wahrscheinlichkeit für mindestens 15 Downloads.
Lösungsweg: Wir berechnen die kumulative Wahrscheinlichkeit für weniger als 15 Erfolge und subtrahieren diese von 1.

$$P(X \geq 15) = 1 - P(X \leq 14) \approx 1 - 0.9274 = 0.0726$$

Antwort: Die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 15 Downloads erfolgen, beträgt etwa 7.26%.

Aufgabe 2

Gegeben: $n = 12$, $p = 0.5$, gesucht wird die Wahrscheinlichkeit für genau 8 richtige Antworten.
Lösungsweg:

$$P(X = 8) = \binom{12}{8} p^8 (1 - p)^{12-8} \approx 0.1208$$

Antwort: Die Wahrscheinlichkeit, genau 8 Fragen richtig zu beantworten, beträgt etwa 12.08%.

Aufgabe 3

Gegeben: $n = 20$, $p = 0.25$, gesucht wird die Wahrscheinlichkeit für genau 5 geteilte Beiträge.
Lösungsweg:

$$P(X = 5) = \binom{20}{5} p^5 (1 - p)^{20-5} \approx 0.2023$$

Antwort: Die Wahrscheinlichkeit, dass genau 5 Freunde den Beitrag teilen, beträgt etwa 20.23%.

Aufgabe 4

Gegeben: $n = 15$, $p = 0.25$, gesucht wird die Wahrscheinlichkeit für weniger als 4 richtige Antworten.
Lösungsweg:

$$P(X < 4) = P(X \leq 3) \approx 0.4613$$

Antwort: Die Wahrscheinlichkeit, weniger als 4 Fragen richtig zu beantworten, beträgt etwa 46.13%.

Aufgabe 5

Gegeben: $n = 10$, $p = 0.80$, gesucht wird die Wahrscheinlichkeit, dass das Medikament bei allen 10 Patienten wirkt.
Lösungsweg:

$$P(X = 10) = p^{10} \approx 0.1074$$

Antwort: Die Wahrscheinlichkeit, dass das Medikament bei allen Patienten wirkt, beträgt etwa 10.74%.

Aufgabe 6

Gegeben: $n = 25$, $p = 0.60$, gesucht wird die Wahrscheinlichkeit für genau 20 Unterstützer.
Lösungsweg:

$$P(X = 20) = \binom{25}{20} p^{20}(1-p)^{25-20} \approx 0.0199$$

Antwort: Die Wahrscheinlichkeit, dass genau 20 Personen das Gesetz unterstützen, beträgt etwa 1.99%.

Aufgabe 7

Gegeben: $n = 3$, $p = 0.30$, gesucht wird die Wahrscheinlichkeit für mindestens eine Glückskarte.
Lösungsweg: Wir berechnen die Wahrscheinlichkeit für kein Erfolg und subtrahieren diese von 1.

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) \approx 0.657$$

Antwort: Die Wahrscheinlichkeit, mindestens einmal die Glückskarte zu ziehen, beträgt etwa 65.7%.

Aufgabe 8

Gegeben: $n = 30$, $p = 0.05$, gesucht wird die Wahrscheinlichkeit für genau 2 Ausfälle.
Lösungsweg:

$$P(X = 2) = \binom{30}{2} p^{2}(1-p)^{30-2} \approx 0.2586$$

Antwort: Die Wahrscheinlichkeit, dass das Bewässerungssystem an genau 2 Tagen ausfällt, beträgt etwa 25.86%.

Aufgabe 9

Gegeben: $n = 50$, $p = 0.02$, gesucht wird die Wahrscheinlichkeit für genau 1 Gewinnlos.
Lösungsweg:

$$P(X = 1) = \binom{50}{1} p^{1}(1-p)^{50-1} \approx 0.3716$$

Antwort: Die Wahrscheinlichkeit, dass genau 1 Los gewinnt, beträgt etwa 37.16%.

Aufgabe 10

Gegeben: $n = 8$, $p = 0.75$, gesucht wird die Wahrscheinlichkeit für mindestens 6 gewonnene Spiele.
Lösungsweg: Wir berechnen die kumulative Wahrscheinlichkeit für weniger als 6 Erfolge und subtrahieren diese von 1.

$$P(X \geq 6) = 1 - P(X \leq 5) \approx 0.6785$$

Antwort: Die Wahrscheinlichkeit, dass der Spieler mindestens 6 der Spiele gewinnt, beträgt etwa 67.85%.