20250318_Mathematik II_LM2

... APL, CC, DD, Laplacian Matrix ...

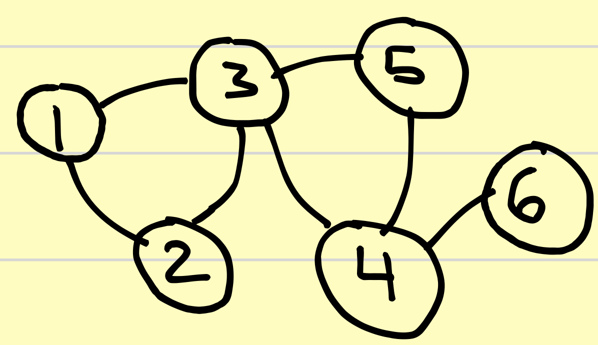
1. APL. Average path length. Mittelwert der Schritte um von A nach B im Netzwerk zu kommen.

$$\boxed{APL = \frac{1}{N(N-1)} \cdot \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} d_{ij}}$$

. Der maximale Anzahl an Beziehungen in einem Netzwerk mit N Knoten ist $N \cdot (N-1)$.

. $\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} d_{ij}$ stellt die Summe alle Wege zw. den Knoten.

Beispiel.



$$APL = \frac{1}{6.5}\Bigg[\begin{array}{c} \\ 1 \end{array} \begin{array}{ccccc} d_{12} & d_{13} & d_{14} & d_{15} & d_{16} \\ \end{array} \Bigg]$$

$$\left[\begin{array}{ccccc} 1 + & 1 + & 2 + & 2 + & 3 \end{array}\right] +$$

$$\begin{array}{cccccc} 2 & d_{21} & d_{23} & d_{24} & d_{25} & d_{26} \end{array}$$

$$+ \left[\begin{array}{ccccc} 1 + & 1 + & 2 + & 2 + & 3 \end{array}\right] +$$

$$\begin{array}{cccccc} 3 & d_{31} & d_{32} & d_{34} & d_{35} & d_{36} \end{array}$$

$$+ \left[\begin{array}{ccccc} 1 + & 1 + & 1 + & 1 + & 2 \end{array}\right] +$$

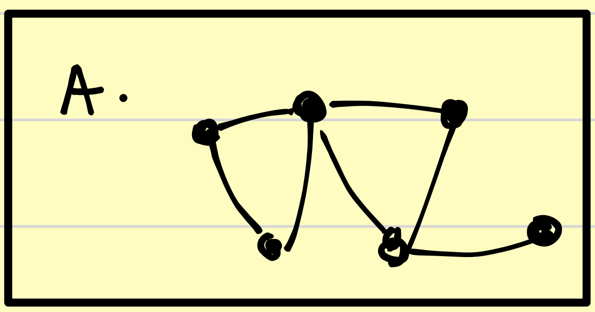
$G: \{N = 1, \dots, 6\}$

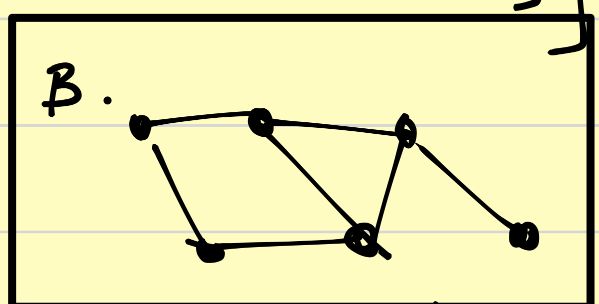
$\{E = [1,2], [2,3], \dots]$

$$+\begin{array}{c} 4 \\ \end{array}\left[\begin{array}{ccccc} d_{41} & d_{42} & d_{43} & d_{45} & d_{46} \\ 2+ & 2+ & 1+ & 1+ & 1 \end{array}\right]+$$

$$+\begin{array}{c} 5 \\ \end{array}\left[\begin{array}{ccccc} d_{51} & d_{52} & d_{53} & d_{54} & d_{56} \\ 2+ & 2+ & 1+ & 1+ & 2 \end{array}\right]+$$

$$+\begin{array}{c} 6 \\ \end{array}\left[\begin{array}{ccccc} d_{61} & d_{62} & d_{63} & d_{64} & d_{65} \\ 3+ & 3+ & 2+ & 1+ & 2 \end{array}\right]\Bigg] = 1'67$$





wir streben nach einem möglichst kleinen APL.

2. CC. clustering Coefficient: beschreibt wie Gruppen in Netzwerken gebildet werden.

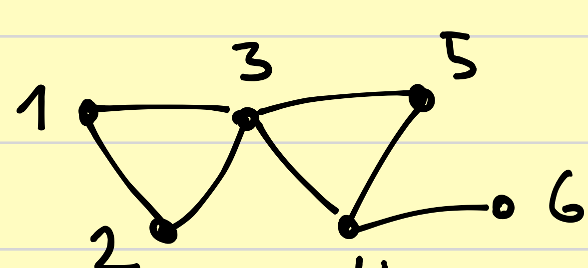
$$CC = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{2L_i}{k_i(k_i-1)}$$

L_i: Anzahl Beziehungen zw. den Nachbarn von „i"

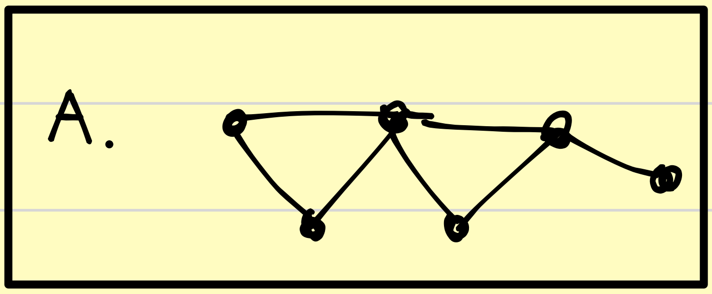
k_i: Anzahl Beziehungen von „i"

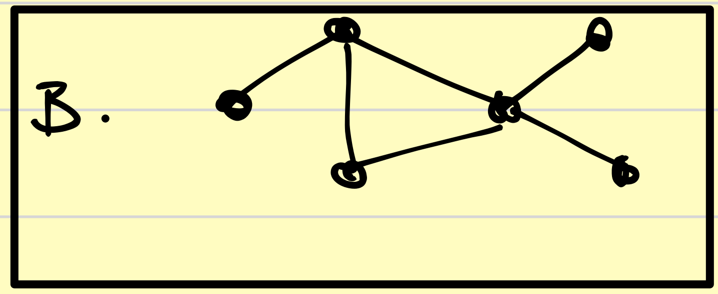
$$CC = \frac{1}{6}\Bigg[\overset{1}{\left[\frac{2\cdot 1}{2(2-1)}\right]} + \overset{2}{\left[\frac{2\cdot 1}{2(2-1)}\right]} + \overset{3}{\left[\frac{2\cdot 2}{4(4-1)}\right]} + \overset{4}{\left[\frac{2\cdot 1}{3(3-1)}\right]} + \overset{5}{\left[\frac{2\cdot 1}{2(2-1)}\right]} + \overset{6}{\left[\;/\;\right]}\Bigg] = 0'61$$

L_1 L_2 L_3 L_4 L_5



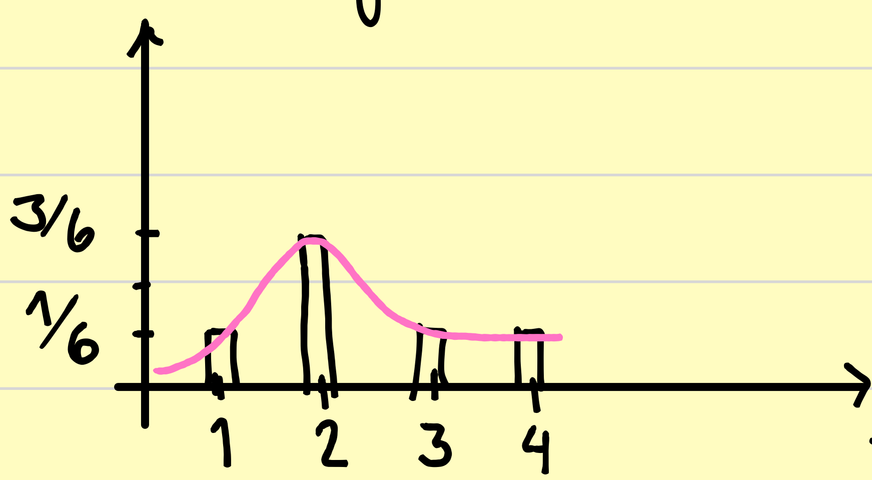
· Je größer der CC, desto besser ist die Gruppenbildung in einem Netzwerk.

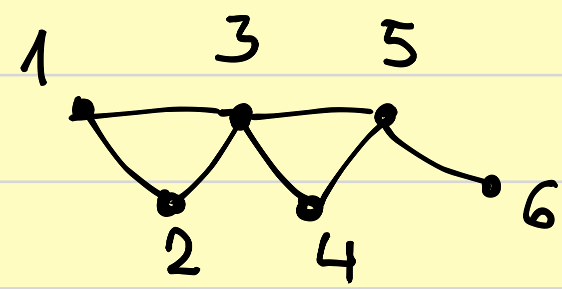




$CC_A > CC_B$

3. DD. Degree distribution





k_i (degree ≡ Anzahl Nachbarn)

4. Laplacian vom Netzwerk. ($\mathcal{L}$)

Laplacian ist eine Matrix welche alle relevanten Informationen vom Netzwerk enthält.

$$\mathcal{L} = D - A$$

$\mathcal{L} \equiv$ Laplacian Matrix

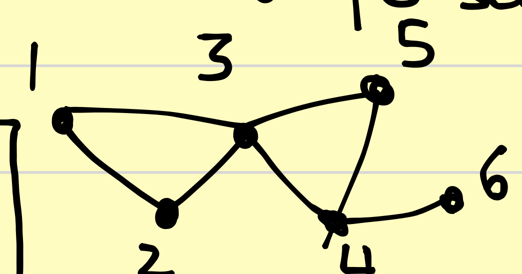
$D \equiv$ Degree Matrix

$A \equiv$ Adjacency Matrix

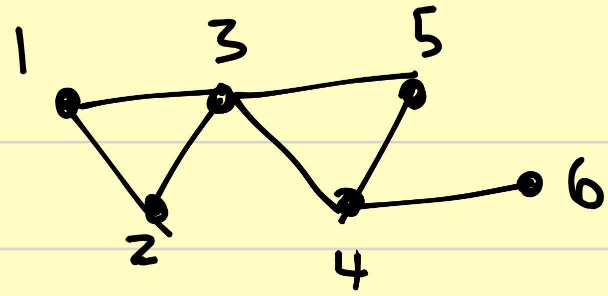
$$D = \begin{cases} k_i & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

$$A = \begin{cases} 1 & \text{wenn } i,j \ \emptyset \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\mathcal{L} = \underbrace{\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array}\begin{bmatrix} 2 & & & & & \\ & 2 & & \cancel{0} & & \\ & & 4 & & & \\ & \cancel{0} & & 3 & & \\ & & & & 2 & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}}_{D} - \underbrace{\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A}$$



$$\mathcal{L} = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 4 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \equiv$$



SPEKTRALE GRAPHENTHEORIE.

· Die Eigenvektoren der Laplacian Matrix enthalten sehr viel Information vom Netzwerk.

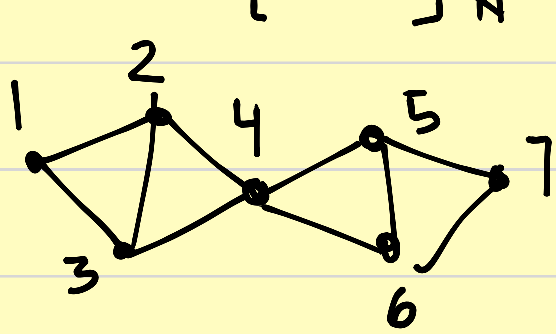
$$A\vec{v} = \lambda\vec{v} \quad ; \quad \det|A - \lambda I| = 0$$

· Die Struktur des zweiten Eigenvektors der $\mathcal{L}$ zeigt die Bottenecks des Netzwerks.
Dieser zweite Eigenvektor heißt FIEDLERVEKTOR.

$$\vec{v}_2 \equiv \begin{bmatrix} + \\ + \\ + \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ - \\ - \\ - \end{bmatrix} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ N \end{array} \leftarrow \text{Botteneck vom Netzwerk.}$$

Fiedler Vektor

A.



$$\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} + \\ + \\ + \\ 0 \\ - \\ - \\ - \end{bmatrix} \leftarrow \text{Knote 4 ist der Engpaß}$$