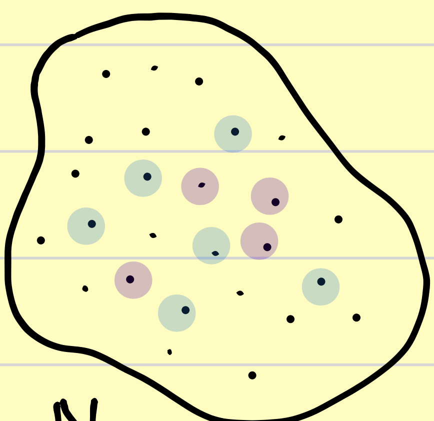
SEX & MATH

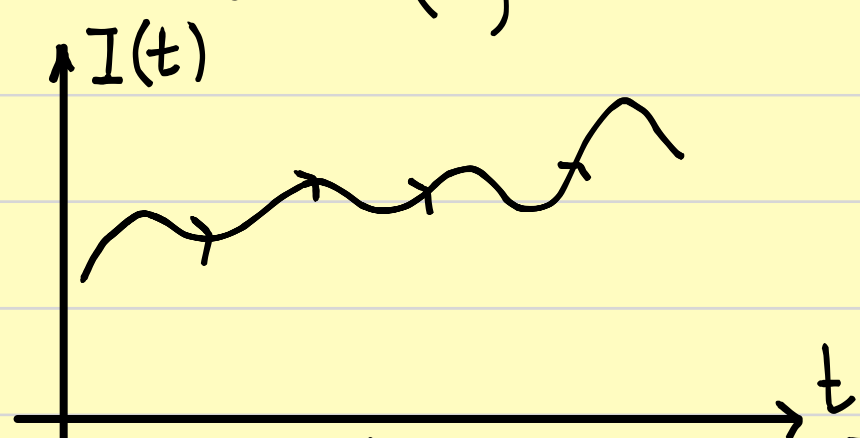
Dynamische Systeme [1D . 2D]

1D . 1 variable . Verbreitung von sexuellen Krankheiten.

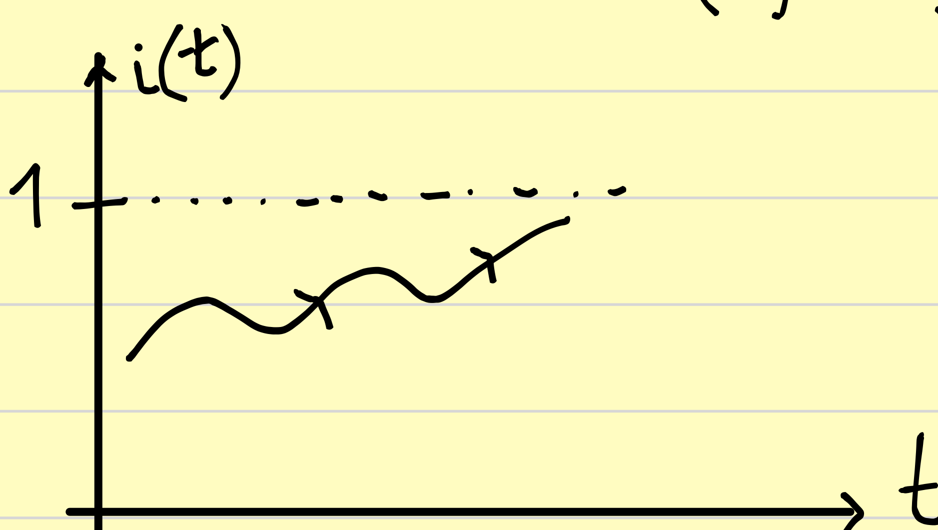


N

Zum Zeitpunkt „t" die Anzahl infizierte Menschen $I(t)$:



Anteil infizierten Menschen : $i(t) = \frac{I(t)}{N}$



Es gibt zwei Vorgänge:

- Infektion (Neu): Jede Infizierte Person steckt pro Zeiteinheit mit Rate „β" Gesunde an. Die Häufigkeit, dass ein infizierter auf einen Gesunden trifft, ist $i(1-i)$. Daher:

$$\boxed{\text{ANSTECKUNGSRATE} = \beta \cdot i \cdot (1-i)}$$

- Genesung. Jede infizierte Person genest mit Rate γ. Daher:

$$\boxed{\text{HEILUNGSRATE} = \gamma \cdot i}$$

Das dynamische System beschreibt wie sich $i(t)$ in der Zeit verändert.

$$\frac{di(t)}{dt} = \text{ANSTECK.RATE} - \text{HEILUNGSRATE}$$

(1) $$\boxed{\frac{di(t)}{dt} = \beta \cdot i(1-i) - \gamma i}$$ Differential Gleichung

In Worten: Anzahl infizierte wächst mit Ansteckung minus Infizierte werden gesund.

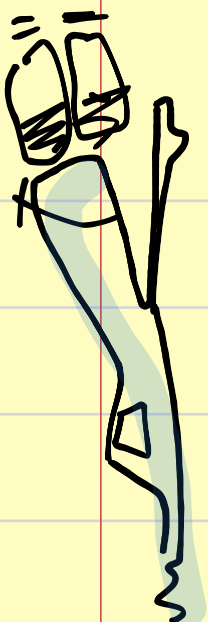
$$\frac{di(t)}{dt} = \beta i - \beta \cdot i^2 - \gamma i = (\beta - \gamma) i - \beta \cdot i^2$$

Definiere $r = \beta - \gamma$ = Ansteckungs- minus Genessungs-geschwindigkeit

$$K = \frac{r}{\beta} = \frac{\beta - \gamma}{\beta} = 1 - \frac{\gamma}{\beta} \quad \equiv \quad \beta = \frac{r}{K}$$

$$\frac{di(t)}{dt} = r \cdot i - \beta \cdot i^2 = r \cdot i - \frac{r}{K} i^2 = r i \left[1 - \frac{i}{K}\right]$$

$$\boxed{\frac{di(t)}{dt} = r \cdot i \left[1 - \frac{i}{K}\right]}$$ LOGISTISCHE GLEICHUNG



1. $\frac{d(\ln x)}{dx} = \frac{1}{x} \Rightarrow \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + Kte$

2. $\frac{K}{x(1-x)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{1-x} = \frac{A(1-x)+Bx}{x(1-x)} = \frac{K}{x} + \frac{K}{1-x}$

Partial-bruch-zerlegung

$K = A(1-x) + Bx$

$x=0 \rightarrow K = A(1-0) \rightarrow A = K$

$x=1 \rightarrow K = B \cdot 1 \rightarrow B = K$

(*)

$$\boxed{\frac{di(t)}{dt} = r \cdot i\left[1 - \frac{i}{K}\right]}$$

$$\int \frac{di}{i\left[1-\frac{i}{K}\right]} = \int r \cdot dt$$

$$\frac{1}{i\left[1-\frac{i}{K}\right]} = \frac{K}{i[K-i]} = \frac{A}{i} + \frac{B}{K-i} = \frac{A(K-i)+B\cdot i}{i(K-i)}$$

$K = A(K-i) + Bi$

$i=K \rightarrow K = B \cdot K \rightarrow B = 1$

$i=0 \rightarrow K = A \cdot K \rightarrow A = 1$

$$\frac{1}{i\left[1-\frac{i}{K}\right]} = \frac{(K-i)}{i(K-i)} + \frac{i}{i(K-i)} = \frac{1}{i} + \frac{1}{K-i}$$

$$\int \frac{di}{i} + \int \frac{di}{K-i} = \int r\,dt$$

$$\ln|i| - \ln|K-i| = rt + C$$ Lösung durch Trennung

Exponentiieren:

$$\left.\begin{aligned} \frac{i}{K-i} &= A e^{rt} \\ A &= \frac{i(0)}{K-i(0)} \end{aligned}\right\} \quad \boxed{i(t) = \frac{K}{1+\left(\frac{K-i(0)}{i(0)}\right)e^{-rt}}} \quad (2)$$

Interpretation:

- Ist $r>0 \equiv$ ist $\beta > \gamma$, dann wächst $i(t)$ bis es K erreicht. Die Krankheit setzt sich.
- Ist $r<0 \equiv$ ist $\beta < \gamma$, dann fällt $i(t)$ monoton gegen 0. Die Krankheit verschwindet.

(*) Beispiel Partialbruchzerlegung:

(1) $$\frac{13}{x(1-x)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(1-x)} = \frac{A(1-x)+B(x)}{x(1-x)} = \frac{13}{x} + \frac{13}{1-x}$$

$$13 = A(1-x) + Bx$$

$$x=1 \rightarrow 13 = A\cdot(1-1) + B \rightarrow B = 13$$

$$x=0 \rightarrow 13 = A(1-0) + B\cdot 0 \rightarrow A = 13$$

(2) $$\frac{7}{(x-2)(3x-1)} = \frac{7}{(x-2)\cdot 3\left(x-\frac{1}{3}\right)} = \frac{7}{3}\cdot\frac{1}{(x-2)\left(x-\frac{1}{3}\right)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-\frac{1}{3}}$$

$$\frac{7}{3}\cdot\frac{1}{(x-2)\left(x-\frac{1}{3}\right)} = \frac{A\left(x-\frac{1}{3}\right)+B(x-2)}{(x-2)\left(x-\frac{1}{3}\right)} \longrightarrow$$

$$\rightarrow \frac{7}{3} = A\left(x-\frac{1}{3}\right) + B\left(x-2\right)$$

$$x = \frac{1}{3} \rightarrow \frac{7}{3} = A\cdot\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\right) + B\left(\frac{1}{3}-2\right) = B\left(\frac{-5}{3}\right)$$

$$\rightarrow B = \frac{-7}{5}$$

$$x = 2 \rightarrow \frac{7}{3} = A\left(2-\frac{1}{3}\right) + B\left(2-2\right) = A\left(\frac{5}{3}\right)$$

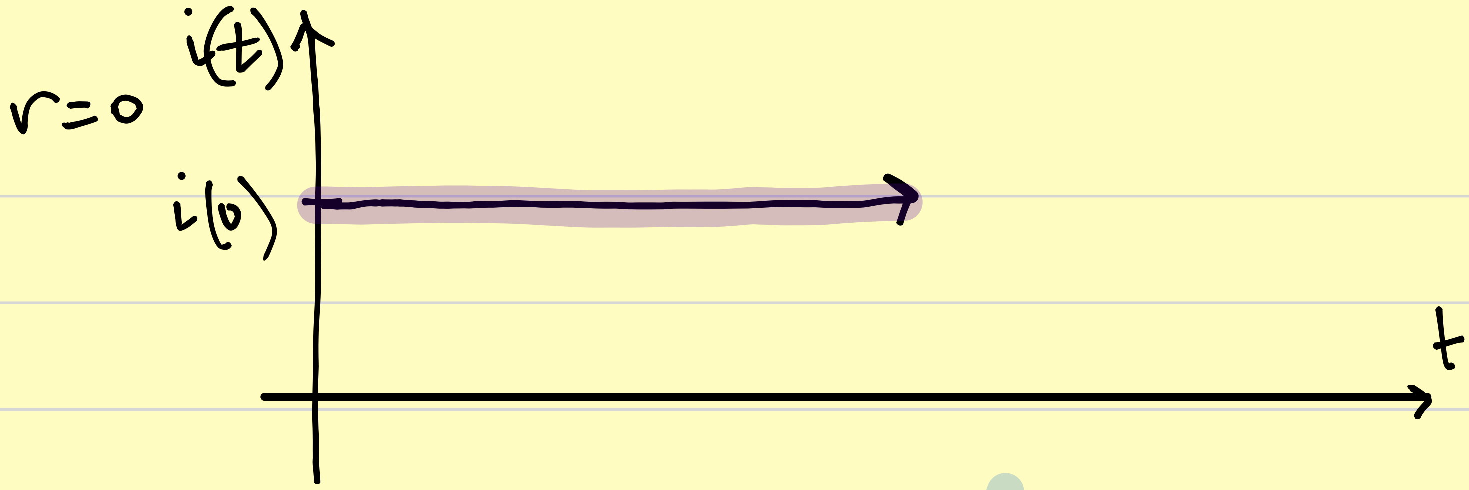
$$\rightarrow A = \frac{7}{5}$$

$$\frac{7}{(x-2)(3x-1)} = \frac{7}{5}\cdot\frac{1}{x-2} + \left(\frac{-7}{5}\right)\cdot\frac{1}{x-\frac{1}{3}} = \frac{7}{5}\left[\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-\frac{1}{3}}\right]$$

(2) $$\boxed{i(t) = \frac{K}{1+\left(\frac{K-i(0)}{i(0)}\right)e^{-rt}}}$$

$r > 0$

$r < 0$



$$i(t) = \frac{k}{1+\frac{k-i(0)}{i(0)}} = \frac{k \cdot i(0)}{\cancel{i(0)}+k-\cancel{i(0)}} = i(0)$$

· 2D · Dynamisches System.

ROMEO + JULIA

Wir möchten nun beschreiben, wie Romeo $R(t)$ und Julia $J(t)$ sich gegenseitig beeinflussen.

Dafür führen wir 4 Parameter ein:

a. Eigenliebe von Romeo.
b. Einfluß von Julia auf Romeo.
c. Einfluß von Romeo auf Julia.
d. Eigenliebe von Julia.

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{dR}{dt} &= a\,R(t) + b\,J(t) \\ \frac{dJ}{dt} &= c \cdot R(t) + d\,J(t) \end{aligned}}$$

Matrixform: $x = \begin{bmatrix} R(t) \\ J(t) \end{bmatrix}$ $\quad A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

$$\boxed{\frac{dx(t)}{dt} = A \cdot x(t)}$$

Um das qualitative Verhalten zu verstehen, suchen wir die Eigenwerte λ von A:

$$\det\left[A-\lambda I\right]=0 \rightarrow \det\left[\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right]=0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \det\begin{bmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{bmatrix}=0 \rightarrow (a-\lambda)(d-\lambda)-cb=0$$

$$\rightarrow a.d-\lambda(a+d)+\lambda^2-cb=0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \lambda^2-\lambda(a+d)+(ad-cb)=0$$

$$\lambda=\frac{a+d\pm\sqrt{(a+d)^2-4(ad-cb)}}{2} = \begin{cases} \lambda_1 \longrightarrow \vec{v_1}(t) \\ \lambda_2 \longrightarrow \vec{v_2}(t) \end{cases}$$

$$\boxed{\vec{x}(t)=c_1\cdot\vec{v_1}(t)\,e^{\lambda_1 t}+c_2\vec{v_2}(t)\,e^{\lambda_2 t}}$$

(nicht Prüfungsrelevant)

Beispiel 1.

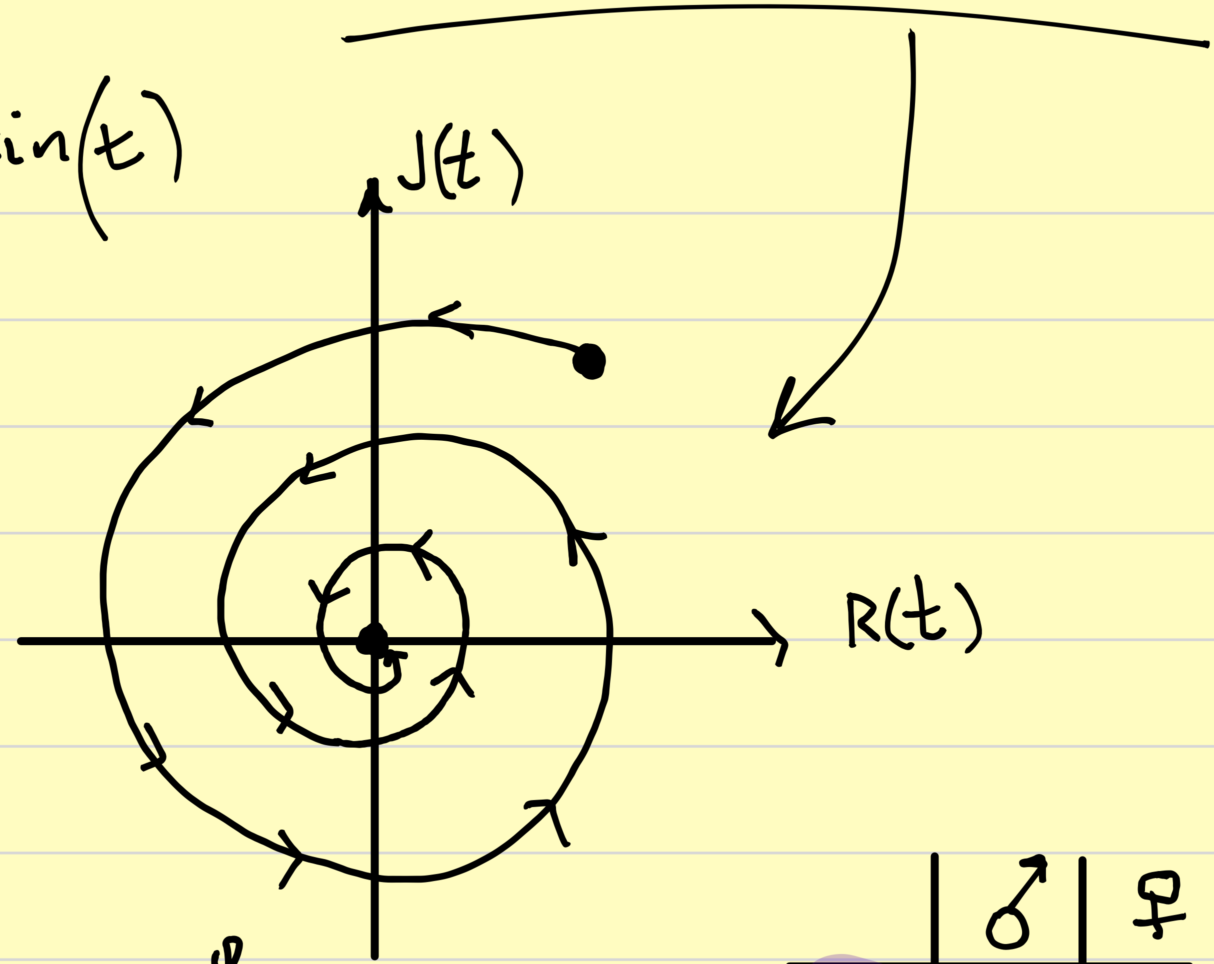
$a=-0'5$ Romeo findet zunächst Julia nicht attraktiv
$b=1$ aber wenn Julia Zuneigung zeigt, kann er sich wohl verlieben.

$c=-1$ Julia findet zunächst Romeo nicht attraktiv
$d=-0'5$ und wenn Romeo Zuneigung zeigt, dann lehnt Julia Romeo ab.

$$\lambda=\frac{-0'5-0'5\pm\sqrt{(-0'5-0'5)^2-4((-0'5)(-0'5)-(-1)\cdot 1)}}{2}=\frac{-1\pm 2i}{2}$$

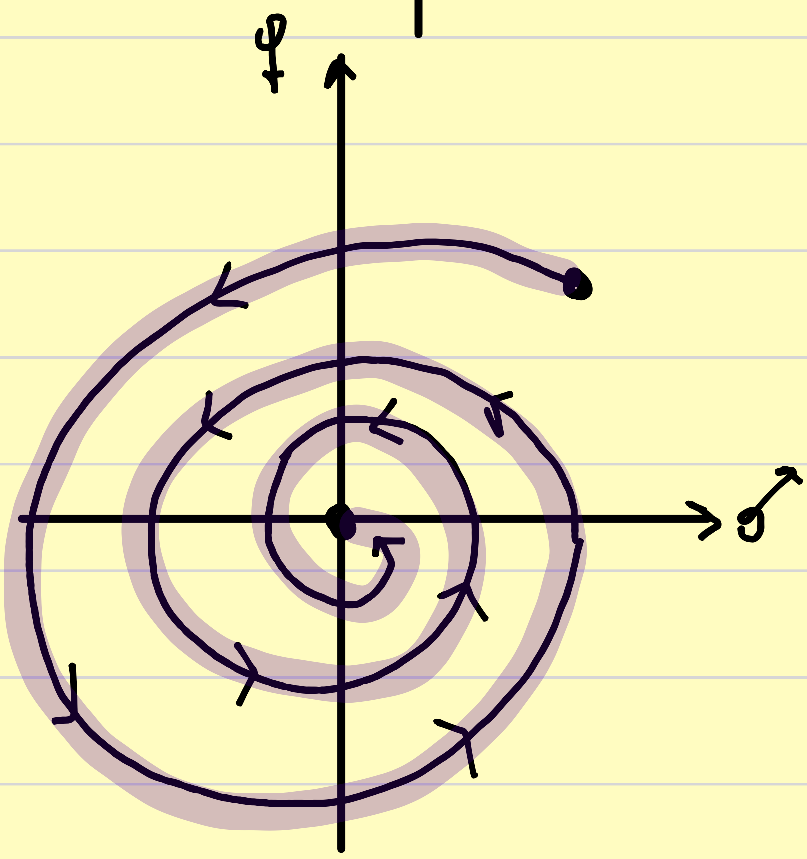
$$\lambda=\begin{cases}\lambda_1=-0'5+i \\ \lambda_2=-0'5-i\end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} R(t) \\ J(t) \end{bmatrix}=e^{-0'5t}\left[A\begin{pmatrix}\cos t \\ \sin t\end{pmatrix}+B\begin{pmatrix}-\sin(t) \\ \cos(t)\end{pmatrix}\right]$$

$e^{it} = \cos(t) + i\sin(t)$



• Disco:

Das Spiel des Lebens ...



	♂	♀
♉	a	b
	c	d