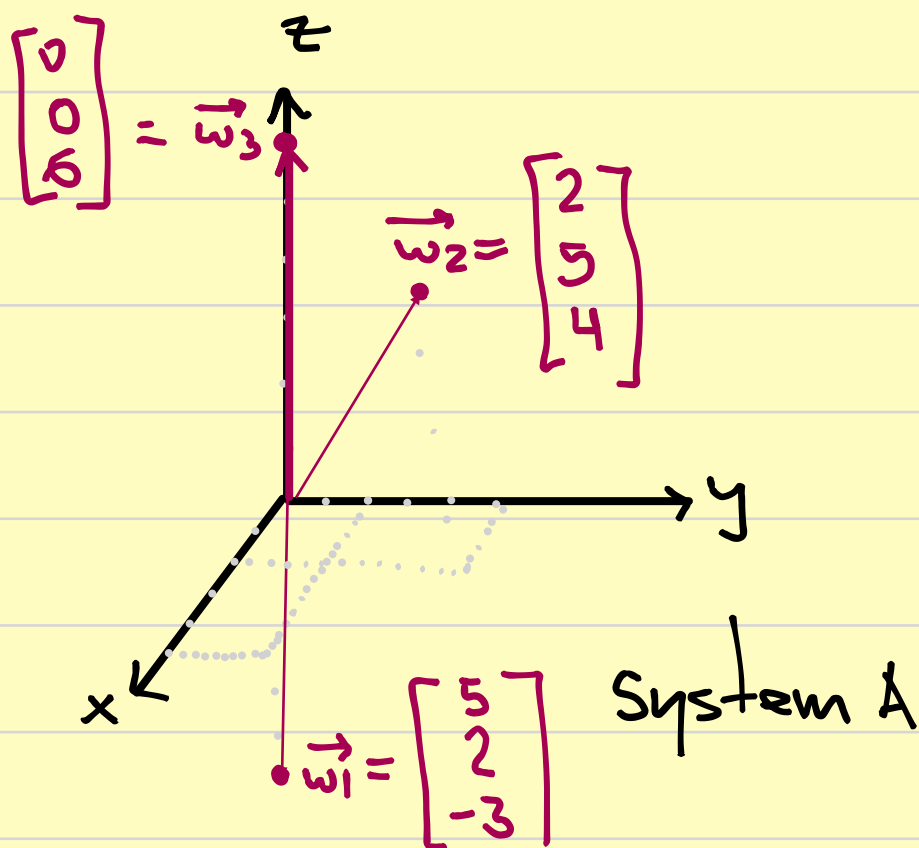


1 EIGENVEKTOREN & EIGENWERTE

$$\overbrace{A}^{\text{Matrix} \equiv \text{System}} \overbrace{\vec{v}}^{\text{Eigenvektoren}} = \underbrace{\lambda}_{\text{Eigenwerte}} \vec{v} \rightarrow \det[A - \lambda I] = 0$$

Matrix \equiv System

Beispiel: $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ -3 & 4 & 6 \end{bmatrix} \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix}$



A) EIGENWERTE

$$\det[A - \lambda I] = 0 \rightarrow \det \left[\begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ -3 & 4 & 6 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right] = 0$$

$$\rightarrow \det \begin{bmatrix} 5-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 5-\lambda & 0 \\ -3 & 4 & 6-\lambda \end{bmatrix} = 0 \rightarrow$$

$$\left[(5-\lambda)(5-\lambda)(6-\lambda) + 2 \cdot 0 \cdot (-3) + 2 \cdot 4 \cdot 0 - (-3)(5-\lambda) \cdot 0 - 0 \cdot 4 \cdot (5-\lambda) - 2 \cdot 2 \cdot (6-\lambda) \right] = 0 \quad (1)$$

$$\det \equiv \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

$$\det \begin{bmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{bmatrix} = a \cdot e \cdot i + d \cdot h \cdot c + b \cdot f \cdot g - g \cdot e \cdot c - b \cdot d \cdot i - a \cdot h \cdot f$$

$$(1) \quad (5-\lambda)^2 \cdot (6-\lambda) - 4(6-\lambda) = 0 \rightarrow$$

$$\underbrace{[(5-\lambda)^2 - 4]}_{\downarrow} \cdot (6-\lambda) = 0 \rightarrow \lambda = 6$$

$$25 + \lambda^2 - 10\lambda - 4 = 0 \rightarrow \lambda^2 - 10\lambda + 21 = 0$$

$$\lambda = \frac{-(-10) \pm \sqrt{100 - 4 \cdot 21}}{2} = \frac{10 \pm \sqrt{16}}{2} = \begin{cases} 7 \\ 3 \end{cases}$$

$$\boxed{\lambda_1 = 3 \quad \lambda_2 = 6 \quad \lambda_3 = 7}$$

B) EIGENVEKTOREN

$$(A - \lambda I) \vec{v} = 0 \rightarrow \begin{bmatrix} 5-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 5-\lambda & 0 \\ -3 & 4 & 6-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{array}{l} (5-\lambda)x + 2y + 0 \cdot z = 0 \\ 2x + (5-\lambda)y + 0 \cdot z = 0 \\ -3x + 4y + (6-\lambda)z = 0 \end{array} \quad \Bigg| \quad (2)$$

$$\boxed{\lambda_1 = 3} \quad \begin{array}{l} (5-3)x + 2y = 0 \\ 2x + (5-3)y = 0 \\ -3x + 4y + 3z = 0 \end{array} \quad \Bigg| \quad \begin{array}{l} 2x + 2y = 0 \\ 2x + 2y = 0 \end{array} \quad \Bigg| \quad x = -y$$

(2)

$$3x + 4y - 3z = 0 \rightarrow x = \frac{3z}{7}$$

$$x=1 \rightarrow y=-1 \rightarrow z=\frac{7}{3} \rightarrow \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 7/3 \end{bmatrix}$$

$$x=2 \rightarrow y=-2 \rightarrow z=\frac{14}{3} \rightarrow \dots$$

$$\boxed{\lambda_2 = 6}$$

(2)

$$(5-6)x + 2y = 0$$

$$2x + (5-6)y = 0$$

$$-3x + 4y + (6-6)z = 0$$

$$\left| \begin{array}{l} x=2y \\ 2x=y \end{array} \right|$$

$$x=y=0$$

$$z=1 \rightarrow \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\lambda_3 = 7}$$

$$(5-7)x + 2y = 0$$

$$2x + (5-7)y = 0$$

$$3x - 4y - (6-7)z = 0$$

$$x=y$$

$$x=z$$

$$x=1 \rightarrow y=1 \rightarrow z=1 \rightarrow \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 6, \lambda_3 = 7 ; \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 7/3 \end{bmatrix} ; \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} ; \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

2 KOVARIANZMATRIX

x	y	z
6	1	7
3	-1	2
2	0	4

$$K = \begin{bmatrix} \sigma_{xx}^2 & \sigma_{xy}^2 & \sigma_{xz}^2 \\ \sigma_{yx}^2 & \sigma_{yy}^2 & \sigma_{yz}^2 \\ \sigma_{zx}^2 & \sigma_{zy}^2 & \sigma_{zz}^2 \end{bmatrix}$$

$$\bar{x} = \frac{6+3+2}{3} = \frac{11}{3}; \bar{y} = \frac{1-1+0}{3} = 0; \bar{z} = \frac{7+2+4}{3} = \frac{13}{3}$$

$$\sigma_{xx}^2 = \frac{\left(6 - \frac{11}{3}\right)^2 + \left(3 - \frac{11}{3}\right)^2 + \left(2 - \frac{11}{3}\right)^2}{2}$$

$$\sigma_{xy}^2 = \frac{\left(6 - \frac{11}{3}\right)(1 - 0) + \left(3 - \frac{11}{3}\right)(-1 - 0) + \left(2 - \frac{11}{3}\right)(0 - 0)}{2} = \sigma_{yx}^2$$

$$\sigma_{xz}^2 = \sigma_{zx}^2$$

$$\sigma_{yz}^2 = \sigma_{zy}^2$$

$$K = \begin{bmatrix} \sigma_{xx}^2 & \sigma_{xy}^2 & \sigma_{xz}^2 \\ \sigma_{yx}^2 & \sigma_{yy}^2 & \sigma_{yz}^2 \\ \sigma_{zx}^2 & \sigma_{zy}^2 & \sigma_{zz}^2 \end{bmatrix}$$

(Übung)

$$\sigma_{xx}^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1} \text{ VARIANZ}$$

$$\sigma_{xy}^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n-1} \text{ CO VARIANZ}$$

$$\sigma_{xz}^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(z_i - \bar{z})}{n-1} \text{ CO VARIANZ}$$

$$\sigma_{yz}^2 = \frac{\sum (y_i - \bar{y})(z_i - \bar{z})}{n-1} \text{ CO VARIANZ}$$

WARUM IST ES FÜR WI WICHTIG?

Die Eigenwerte der Kovarianzmatrix, sind die Hauptkomponenten des Systems. Die Hauptkomponenten (Principal Components - PCA) beschreiben die Variabilität vom System mit weniger Daten als das gesamte.

i.e.	KPI ₁	KPI ₂	...	KPI _n
t ₁				
t ₂				
t ₃				
⋮				
⋮				
t _n				

→ PCA → Wichtigsten
Merkmale
vom System
ohne die
...n Komponenten
zuliefern.