Wahrscheinlichkeitstheorie

1) KOLMOGOROV AXIOME ✓
2) BEDINGTE WAHRSCHEINLICHKEITEN ✓
3) SATZ VON BAYES

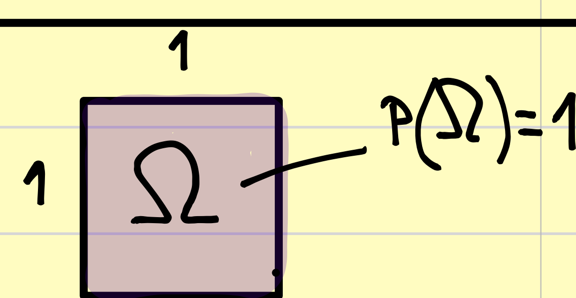
1) KOLMOGOROV AXIOME

Beispiel: Aus der gesamten Population in B.W ...

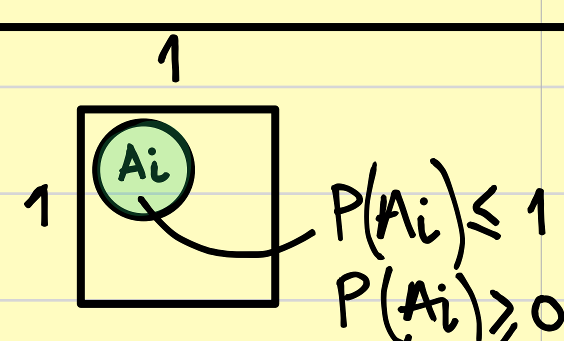
- wenn ich einen Mensch aus dieser Population auswähle, die W. dafür, dieser Mensch einen Mensch ist : $P(\Omega) = 1$.
  Es ist „sicher", dass der ausgewählter Mensch ein Mensch ist.
  Ω ist das SICHERE EREIGNIS.
- wenn ich einen Mensch aus diser Population auswähle, die W. dafür, dass dieser Mensch das WIN-Studium studiert ist : $0 \leq P(A_1) \leq 1$.

K. AXIOME:

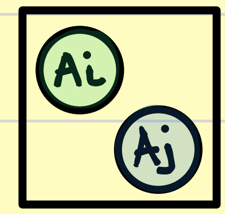
1. Das sichere Ereignis Ω hat eine W. von 1. $P(\Omega) = 1$.



2. Für Jedes Ereignis A_i, ist die W. von A_i : $P(A_i) \in [0,1]$



3. Die W. einer Vereinigung abzählbar vieler INKOMPATIBLER Ereignisse ist die Summe der Wahrscheinlichkeiten der einzelnen.



$$P(A_i \cup A_j) = P(A_i) + P(A_j)$$

A_i & A_j sind INKOMPATIBEL

Folgerungen der Kolmogorov Axiome :

A. Aus der Additivität der W. disjunktiver (inkompatibel) Ereignisse (K.A #3) folgt, dass komplementäre Ereignisse, eine s.g. Gegenwahrscheinlichkeit haben.

A_i : Ereignis

$\bar{A}_i$: das Gegenteil von A_i

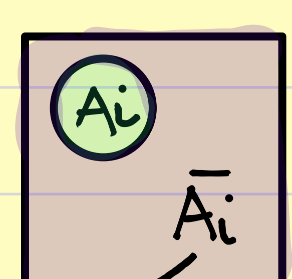
Beispiel

Peter ist in Heilbronn

Peter ist nicht in Heilbronn

$$\left.\begin{aligned} P(\Omega) &= P(A_i) + P(\bar{A}_i) \\ P(\Omega) &= 1 \quad (\text{K.A. \#1}) \end{aligned}\right\}$$

$$\boxed{P(\bar{A}_i) = 1 - P(A_i)}$$



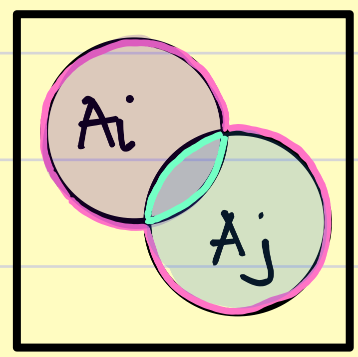
B. Daraus folgt, dass das unmögliche Ereignis, die leere Menge, eine W. von NULL hat.

$$\boxed{P(\emptyset) = 0}$$

Beispiel: Ω: die Tage an dem sich die Erde dreht.
$\emptyset$: die Tage an dem sich die Erde nicht dreht.

$$\left.\begin{aligned} &P(\Omega) = 1 \quad (K.A.\#1) \\ &P(\emptyset) \underset{(A)}{=} 1 - P(\overline{\emptyset}) = 1 - P(\Omega) \end{aligned}\right\} P(\emptyset) = 1 - 1 = 0$$

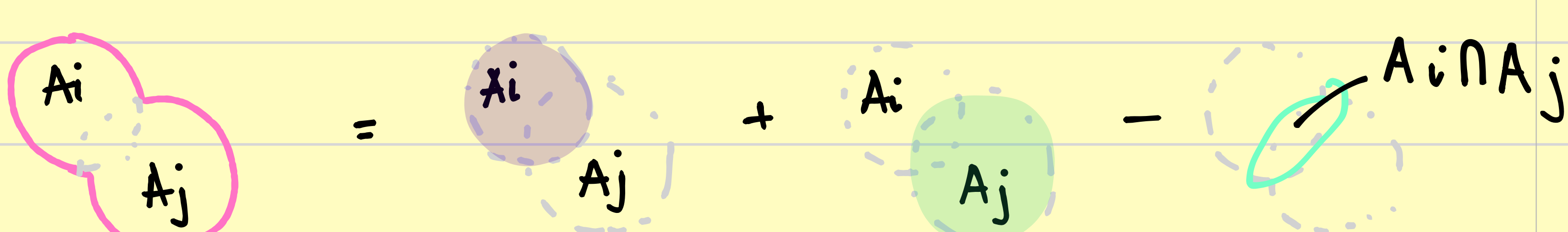
C. Für die Vereinigung nicht disjunktiver Ereignisse folgt:



$$\boxed{P(A_i \cup A_j) = P(A_i) + P(A_j) - P(A_i \cap A_j)}$$

Wahrscheinlichkeit von A_i oder A_j

Wahrscheinlichkeit von A_i und A_j.



$$P(A_i \cup A_j) = P(A_i) + P(A_j) - P(A_i \cap A_j)$$

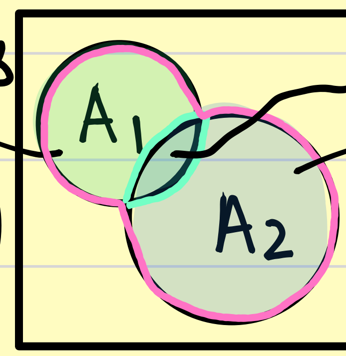
Beispiel: $P(A_1) = 0'3$ Studierende von WIN2 haben Mathe im ersten Semester bestanden.

$P(A_2) = 0'4$ Studierende von WIN2 werden die Statistik Prüfung schreiben.

$P(A_1 \cap A_2) = 0'2$ Studierende haben Mathe im 1. bestanden UND Statistik schreiben.

$P(A_1 \cup A_2) = ?$

$P(A_1) = 0'3$



$P(A_1 \cap A_2) = 0'2$

$P(A_2) = 0'4$

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$$
$$= 0'3 + 0'4 - 0'2 = 0'5$$

---

2. BEDINGTE WAHRSCHEINLICHKEITEN

Unter einer bedingten W. versteht man die W. dafür, dass das Eintretten eines Ereignisses A_i unter der Voraussetzung, dass das Eintretten eines anderen Ereignisses A_j bereits bekannt ist.

Man schreibt $P(A_i | A_j)$ für „W. von A_i, unter der Voraussetzung A_j"

oder

„W. von A_i, vorausgesetzt A_j".

Laplace definiert die bedingte W. als:

$$\boxed{P(A_i|A_j) = \frac{P(A_i \cap A_j)}{P(A_j)}}$$

Beispiel. in einem POKER-Karten-Deck von 52 karten, was ist die W. dafür, dass wir eine karo ($\diamond$) karte ziehen, voraus-gesetzt die gezogene karte ist rot.

◇	♡	♠	♣	$= \sum = 52$
13 Karo	13 Herz	13 Peach	13 Kreuz	

$$P(\diamond \mid rot) = \frac{P(\diamond \cap rot)}{P(rot)}$$

W dafür, dass wir karo <u>und</u> rot ziehen

W dafür, dass wir rot ziehen

W. dafür, dass wir karo ziehen vorausg. es wurde rot gezogen.

$$P(\diamond \mid rot) = \frac{\frac{13}{52}}{\frac{13+13}{52}} = \frac{13}{26} = 0{,}5$$

13: #Karokarten

52: #Gesamtkarten

13+13: #rote Karten

52: #Gesamtkarten

---

3. SATZ von BAYES

Verbundswahrscheinlikeiten oder Schnittmengen von nicht disjunktiven Ereignissen werden dadurch ermittelt.

Das gleichzeitige Ereignis zweier A_i und A_j Ereignisse entspricht mengentheoretisch dem Eintretten des Verbundsereignis $A_i \cap A_j$.

Laplace: $P(A_i \mid A_j) = \dfrac{P(A_i \cap A_j)}{P(A_j)} \rightarrow P(A_i \cap A_j) = P(A_j) \cdot P(A_i \mid A_j)$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad =$

$P(A_j \mid A_i) = \dfrac{P(A_j \cap A_i)}{P(A_i)} \rightarrow P(A_j \cap A_i) = P(A_i) \cdot P(A_j \mid A_i)$

$$P(A_j) \cdot P(A_i | A_j) = P(A_i) \cdot P(A_j | A_i)$$

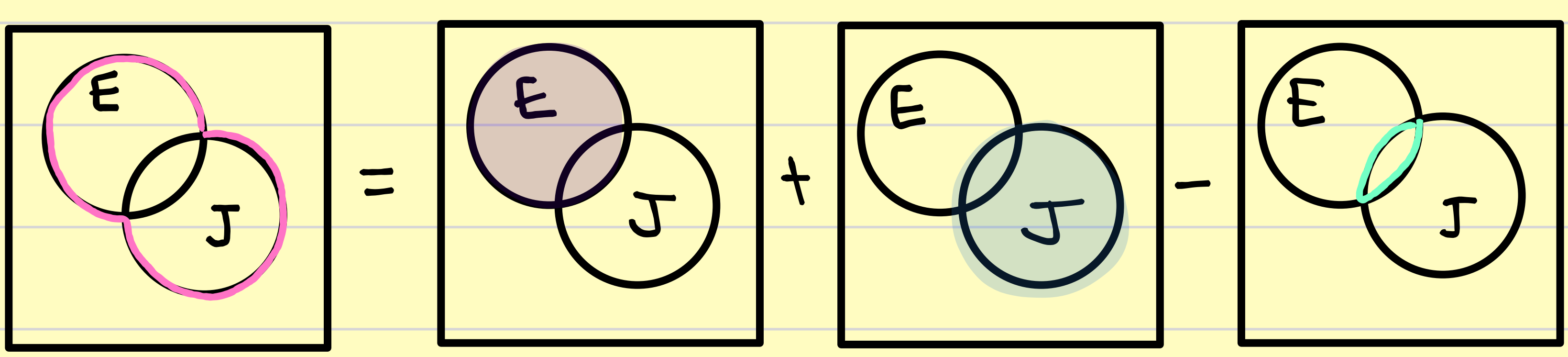
$$\boxed{P(A_i | A_j) = \frac{P(A_j | A_i) \cdot P(A_i)}{P(A_j)}}$$

SATZ von BAYES

Beispiel. Der Statistik Student Kevin glaubt am Anfang vom Studium, dass er dieses mit einer W. von 0'7 erfolgreich beenden wird. Mit einem erfolgreich abgeschlossenem Studium beträgt die W. dafür, dass die gewünschte Stelle in seiner Firma erreicht wird 0'8. ohne Abschluß nur 0'1. Wie groß ist die W. dafür, dass Kevin die gewünschte Stelle bekommt?

Ereignisse: E. Studium wird erfolgreich beendet.
J. die gewünschte Stelle wird erreicht.

Gefragt wird $P(J)$?



$$P(E \cup J) \qquad P(E) \qquad P(J) \qquad P(E \cap J)$$

$P(E) = 0'7$, $P(J) = ?$, $P(E \cap J) = 0'56$

- $P(J \mid E) = 0'8 = \frac{P(J \cap E)}{P(E)} \rightarrow P(J \cap E) = 0'8 \cdot P(E) = 0'8 \cdot 0'7 = 0'56$

W. dafür, vorausg. das Studium ist erfolgreich, er kriegt die Stelle

- $P(J) = P(J \cap E) + P(J \cap \bar{E}) = 0'56 + 0'03 = 0'59$ ✓

$P(J \cap \bar{E}) = ? \rightarrow P(J \mid \bar{E}) = 0'1 = \frac{P(J \cap \bar{E})}{P(\bar{E})}$

$P(\bar{E}) = 1 - P(E) = 1 - 0'7 = 0'3$

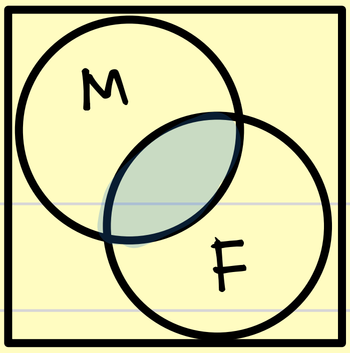
$\Big\} P(J \cap \bar{E}) = 0'03$

- $P(E \cup J) = 0'7 + 0'59 - 0'56 = 0'67$

Beispiel. Im Bistum Stuttgart wird untersucht, wer von verheirateten Paaren regelmäßig in die Kirche geht. Es hat sich hierbei ergeben, dass 40 % der Männer und 50 % der Frauen regelmäßig Kirchengänger sind. Geht eine Frau in die Kirche, so beträgt die W. dafür, dass ihr Mann auch hingeht 0'3.

a) Was ist die W. dafür, dass beide Ehepartner regelmäßig in die Kirche gehen?

Ereignisse: M : Ein Mann geht in die Kirche
F : Eine Frau geht in die Kirche



$$P(M \cap F) = P(M|F) \cdot P(F) =$$
$$= 0'3 \cdot 0'5 = 0'15$$

b) Was ist die W. dafür, dass vorausgesetzt der Mann geht in die Kirche, die Frau auch hingeht?

$$P(F|M) = \frac{P(F \cap M)}{P(M)} = \frac{P(M \cap F)}{P(M)} = \frac{0'15}{0'4} = 0'37$$

c) Was ist die W. dafür, dass wenigstens einer der Partner regelmäßiger Kirchengänger sind?

$$P(F \cup M) = P(F) + P(M) - P(F \cap M) =$$
$$= 0'5 + 0'4 - 0'15 = 0'75$$