Übung. Ein Mgmt System hat 2 Kennzahlen (KPIs).
Gefragt wird nach a) KOVARIANZ MATRIX
b) HAUPTKOMPONENTEN
c) INTERPRETATION

DLZ $[60, 58, 53, 47]$ X

€/St $[41, 32, 35, 28]$ Y

a) KOV. MATRIX

$$\bar{x} = \frac{60+58+53+47}{4} = 54'5 \qquad \bar{Y} = \frac{41+32+35+28}{4} = 34$$

$$\text{VAR } X = \frac{(60-54'5)^2+(58-54'5)^2+(53-54'5)^2+(47-54'5)^2}{4-1} = 33'67$$

$$\text{VAR } Y = \frac{(41-34)^2+(32-34)^2+(35-34)^2+(28-34)^2}{4-1} = 30$$

$$\text{COV}(X,Y) = \frac{(60-54'5)(41-34)+(58-54'5)(32-34)+ \\ +(53-54'5)(35-34)+(47-54'5)(28-34)}{3} = 25$$

$$\boxed{A = \begin{bmatrix} 33'67 & 25 \\ 25 & 30 \end{bmatrix}}$$

✓

b) HAUPTKOMPONENTEN = Eigenvektoren von A

$$\boxed{\det(A - \lambda I) = 0} \rightarrow \det \begin{bmatrix} 33'67-\lambda & 25 \\ 25 & 30-\lambda \end{bmatrix} = 0 \rightarrow$$

$$(33'67-\lambda)(30-\lambda)-25^2=0 \rightarrow 33'67\cdot 30-\lambda(33'67+30)+\lambda^2-25^2=0$$

$$\lambda^2-63'67\lambda+385'1=0 \rightarrow \lambda=\frac{63'67\pm\sqrt{63'67^2-4.385'1}}{2}$$

$$\lambda=\frac{63'67\pm 50'13}{2}= \begin{cases} + \nearrow \lambda_1=56'9 & \text{1. Eigenwert} \equiv \vec{v_1} \\ - \searrow \lambda_2=6'77 & \text{2. Eigenwert} \equiv \vec{v_2} \end{cases}$$

Da $\lambda_1 \gg \lambda_2$, $\vec{v_1}$ erklärt viel mehr Variabilität als $\vec{v_2}$.

$$\boxed{A.\vec{v_1}=\lambda_1.\vec{v_1}} \rightarrow \begin{bmatrix} 33'67 & 25 \\ 25 & 30 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{bmatrix}=56'9\begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{l} 33'67\cdot v_{11}+25v_{12}=56'9\cdot v_{11} \\ 25\cdot v_{11}+30v_{12}=56'9\cdot v_{12} \end{array}\right| \rightarrow$$

$$\rightarrow 25v_{12}=(56'9-33'67)v_{11} \rightarrow v_{12}=\frac{56'9-33'67}{25}v_{11}=0'929\,v_{11}$$

$$v_{11}=1 \rightarrow v_{12}=0'929 \rightarrow \vec{v_1}=\begin{bmatrix} 1 \\ 0'929 \end{bmatrix}$$

Wie viel Variabilität vom System erklärt $\vec{v_1}$?

$$\%\text{ Variabilität von }\vec{v_1}=\frac{\lambda_1}{\sum\lambda_i}\cdot 100\%=\frac{56'9}{56'9+6'77}\cdot 100\%$$

$$=89'367\%$$

Mit einem Eigenvektor kann ich 89'36 % der Variabilität vom System erklären.

$$\boxed{A\vec{v}_2 = \lambda_2 \vec{v}_2} \rightarrow \begin{bmatrix} 33'67 & 25 \\ 25 & 30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{bmatrix} = 6'77 \cdot \begin{bmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{l} 33'67 \cdot v_{21} + 25 v_{22} = 6'77 v_{21} \\ 25 \cdot v_{21} + 30 v_{22} = 6'77 v_{22} \end{array} \Bigg| \rightarrow$$

$$25 v_{22} = (6'77 - 33'67) v_{21} \rightarrow v_{22} = \frac{6'77 - 33'67}{25} v_{21} = -1'08 v_{21}$$

$$v_{21} = 1 \longrightarrow v_{22} = -1'08 \rightarrow \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1'08 \end{bmatrix}$$

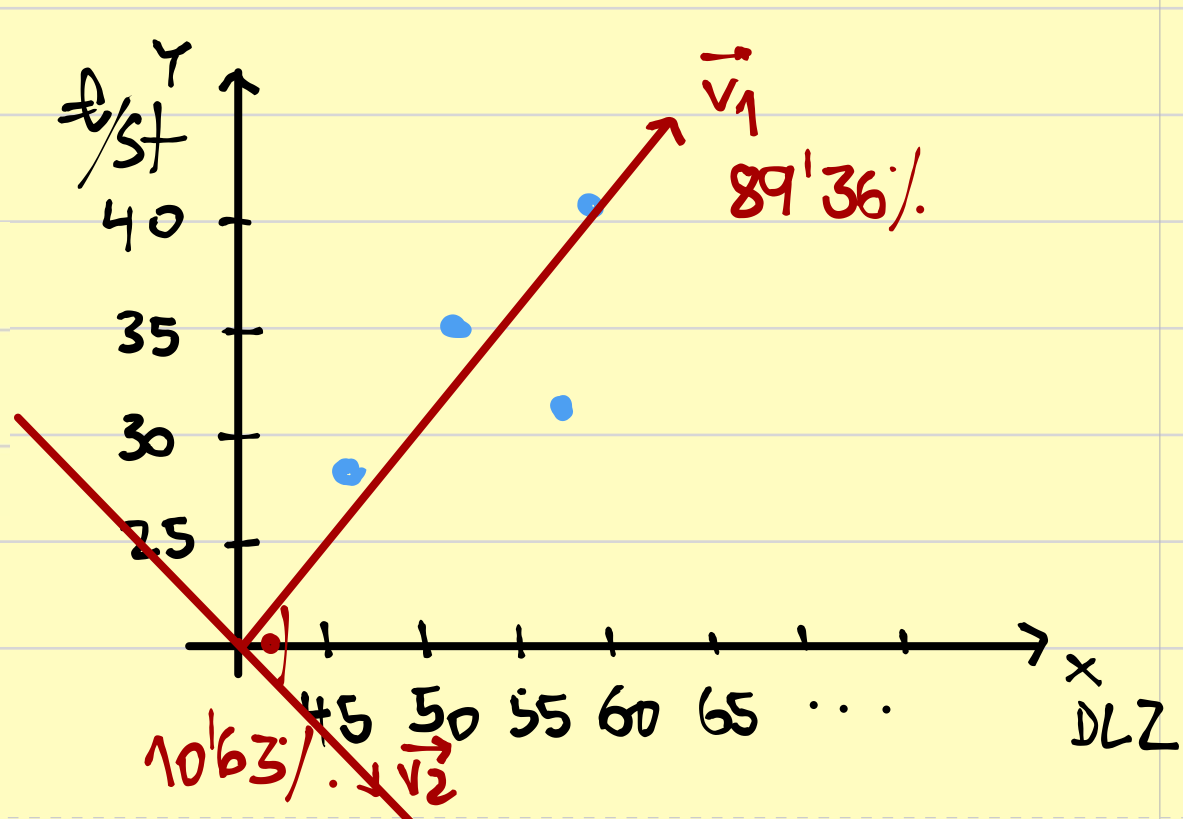
Wieviel Variabilität erklärt $\vec{v}_2$?

$$\% \text{ Variabilität } \vec{v}_2 = \frac{6'77}{56'9 + 6'77} \cdot 100 \% = 10'63 \%$$

c) Interpretation

DLZ [60, 58, 53, 47]

€/st [41, 32, 35, 28]



$$A = \begin{bmatrix} 33'67 & 25 \\ 25 & 30 \end{bmatrix} \qquad \text{Diagonalisierung? } D, P$$

$$A = P \cdot D \cdot P^{-1}$$

$$D = \begin{bmatrix} 56'9 & 0 \\ 0 & 6'77 \end{bmatrix} \qquad P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0'929 & -1'08 \end{bmatrix}$$

EIGENWERTE EIGENVEKTOREN

$$P^{-1} = \frac{1}{\det P} \cdot \operatorname{Adj} P = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1'08 & 0'929 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\det P = 1 \cdot (-1'08) - 1 \cdot 0'929 = -2$$

$$\operatorname{Adj} P = \begin{bmatrix} -1'08 & -0'929 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0'929 & -1'08 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 56'9 & 0 \\ 0 & 6'77 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1'08 & 0'929 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \cdots = \begin{bmatrix} 33'67 & 25 \\ 25 & 30 \end{bmatrix}}$$

Übung. Kalkulieren Sie die Inversematrix von:

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$+ \quad -$

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \operatorname{Adj}(A)}$$

$$\begin{matrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{matrix} = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 2 = 1$$

$$\det A = 7 \cdot 1 \cdot 1 + 3 \cdot 0 \cdot (-3) + 1 \cdot 2 \cdot 0 - \left[0 \cdot 1 \cdot (-3) + 0 \cdot 7 \cdot 2 + 1 \cdot 3 \cdot 1\right] =$$
$$= 7 - 3 = 4$$

$$\operatorname{Adj} A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -1 & 7 & 0 \\ 5 & -23 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -1 & 7 & 0 \\ 5 & -23 & 4 \end{bmatrix}}$$

$-$

$$\begin{matrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{matrix} = 1 \cdot 1 - 0 \cdot (-3) = 1$$

Übung: Ermitteln Sie die Eigenwerte der oberen Matrix.

Eigenvektoren

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \det(A - \lambda I) = 0 \rightarrow \det \begin{bmatrix} 7-\lambda & 3 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ -3 & 2 & 1-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda)\underline{\left[(7-\lambda)(1-\lambda)-3\right]}=0 \rightarrow \lambda_2=1$$

$$7-8\lambda+\lambda^2-3=0 \rightarrow \lambda^2-8\lambda+7=0 \rightarrow \lambda=\frac{8\pm\sqrt{64-28}}{2}$$

$$\lambda=\frac{8\pm 6}{2}= \begin{cases}\lambda_1=7\\ \lambda_2=1\end{cases}$$

$$A.\vec{v_1}=\lambda_1\vec{v_1} \rightarrow \begin{bmatrix}7&3&0\\1&1&0\\-3&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_{11}\\v_{12}\\v_{13}\end{bmatrix}=7\cdot\begin{bmatrix}v_{11}\\v_{12}\\v_{13}\end{bmatrix}\rightarrow$$

$$7v_{11}+3v_{12}=7v_{11} \quad\Big|\quad 3v_{12}=0 \quad\Big|\quad v_{11}=0$$

$$v_{11}+v_{12}=7v_{12}$$

$$-3v_{11}+2v_{12}+v_{13}=7v_{13}$$

$$\vec{v_1}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$A.\vec{v_2}=\lambda_2\vec{v_2} \rightarrow \begin{bmatrix}7&3&0\\1&1&0\\-3&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_{21}\\v_{22}\\v_{23}\end{bmatrix}=1\cdot\begin{bmatrix}v_{21}\\v_{22}\\v_{23}\end{bmatrix}\rightarrow$$

$$7\cdot v_{21}+3v_{22}=v_{21}$$

$$v_{21}+v_{22}=v_{22} \quad\Big|\rightarrow v_{21}=0 \rightarrow v_{22}=0$$

$$-3v_{21}+2v_{22}+v_{23}=v_{23}$$

$$\vec{v_3}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \qquad P=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&1&1\end{bmatrix}$$