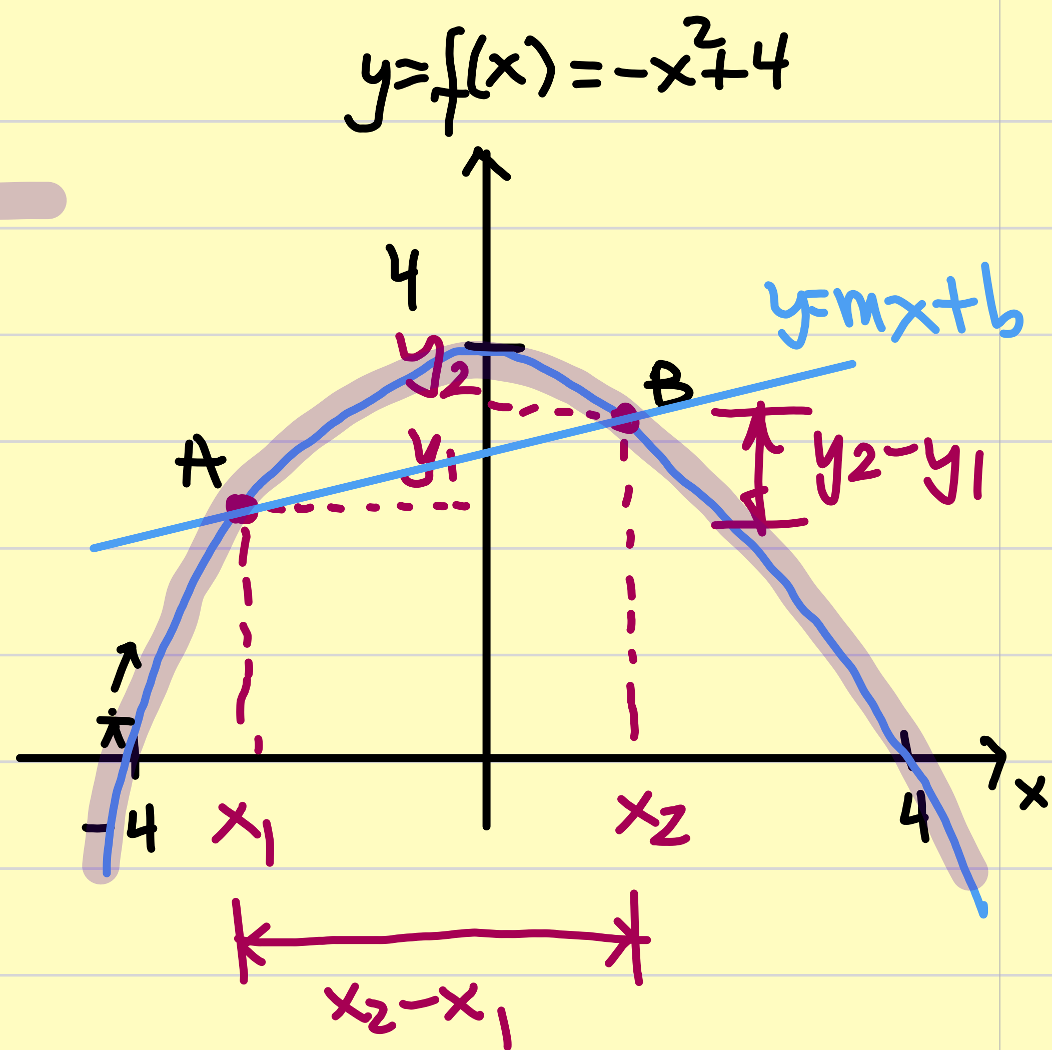
DIFFERENTIALRECHNUNG



die Linie welche durch den 2 Punkten A & B geht, hat folgende Steigung:

$$\text{Steigung} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = m$$

Somit, diese Linie

$y = mx + b$.

m ist die Steigung von einer Linie die durch 2 (bekannten) Punkten geht.

Wenn x_2 & x_1 sehr beiander liegen, nämlich wenn wir die Steigung an einem Punkt ermittlen wollen, können wir nicht die o.g. Gleichung anwenden weil wenn $x_2 \simeq x_1$, $x_2 - x_1 \simeq 0$ und somit $\frac{1}{x_2-x_1} \simeq \infty$

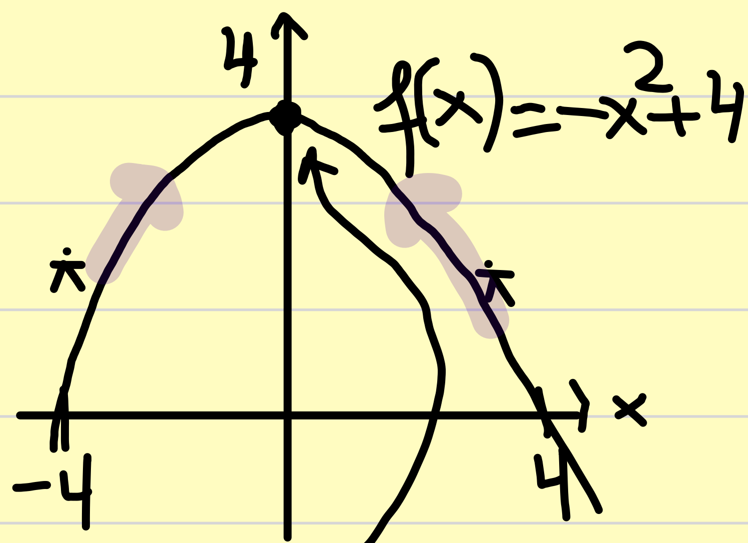
Die zentrale Begriffe dafür sind ..Stetigkeit.. & ..Differenzierbarkeit..

Def. Stetigkeit einer Funktion: eine Funktion f ist „stetig" in x_0 falls die Annäherung von beiden Seiten an die Stelle x_0 existiert UND jeweils den Funktionswert $f(x_0)$ ergibt.

Beispiel STETIGKEIT

$$f(x_0) = -(0)^2 + 4 = 4$$

$$\boxed{\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)}$$



$$\lim_{x \to 0^-} \left(-x^2+4\right) = \lim_{x \to 0^-} \left(-\left(\approx \bar{0}\right)^2+4\right) = 4 \qquad x_0 = 0$$

$$\lim_{x \to 0^+} \left(-x^2+4\right) = \lim_{x \to 0^+} \left(-\left(\approx \overset{+}{0}\right)^2+4\right) = 4$$

Beispiel POLSTELLE (keine Stetigkeit).

$$f(x) = \frac{1}{x-1}$$

Ist die Funktion stetig in $x=1$?

Existiert $f(x=1)$?

$$f(x=1) = \frac{1}{1-1} = \frac{1}{0} = ?$$

KEINE STETIGKEIT.

In $x=1$ hat die Funktion ein Polstelle.

Beispiel. Mehre Polstellen.

$$f(x)=\frac{1}{(x-3)(x-6)}$$

$$\frac{1}{(x-3)(x-6)}=\frac{A}{(x-3)}+\frac{B}{(x-6)}$$

$$1=A(x-6)+B(x-3)$$

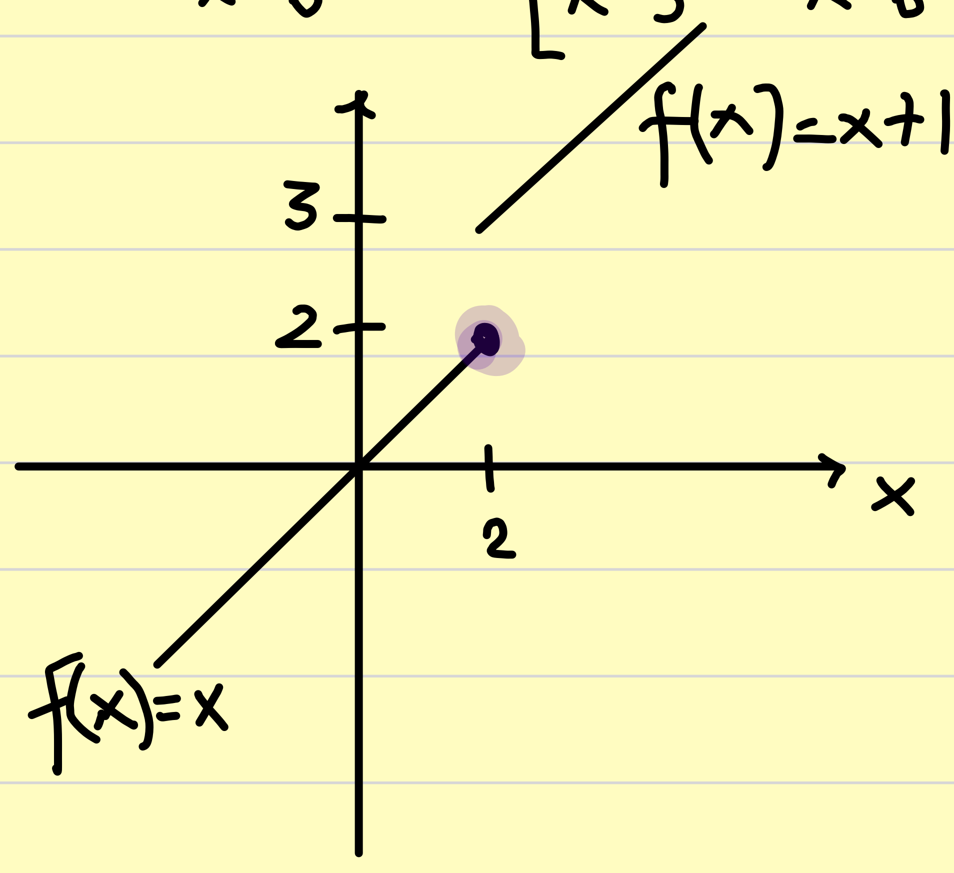
$$x=6 \longrightarrow 1=A\cdot(6-6)+B(6-3)\longrightarrow 1=B\cdot 3\longrightarrow B=\frac{1}{3}$$

$$x=3 \longrightarrow 1=A(3-6)+B(3-3)\longrightarrow 1=A\cdot(-3)\longrightarrow A=\frac{-1}{3}$$

$$f(x)=\frac{1}{(x-3)(x-6)}=\frac{-1}{3}\cdot\frac{1}{x-3}+\frac{1}{3}\frac{1}{x-6}=\frac{-1}{3}\left[\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-6}\right]$$

Beispiel. Sprungstelle.

$$f(x)=\begin{cases} x & x\leq 2 \\ x+1 & x>2 \end{cases}$$



Ist $f(x)$ stetig in $x=2$?

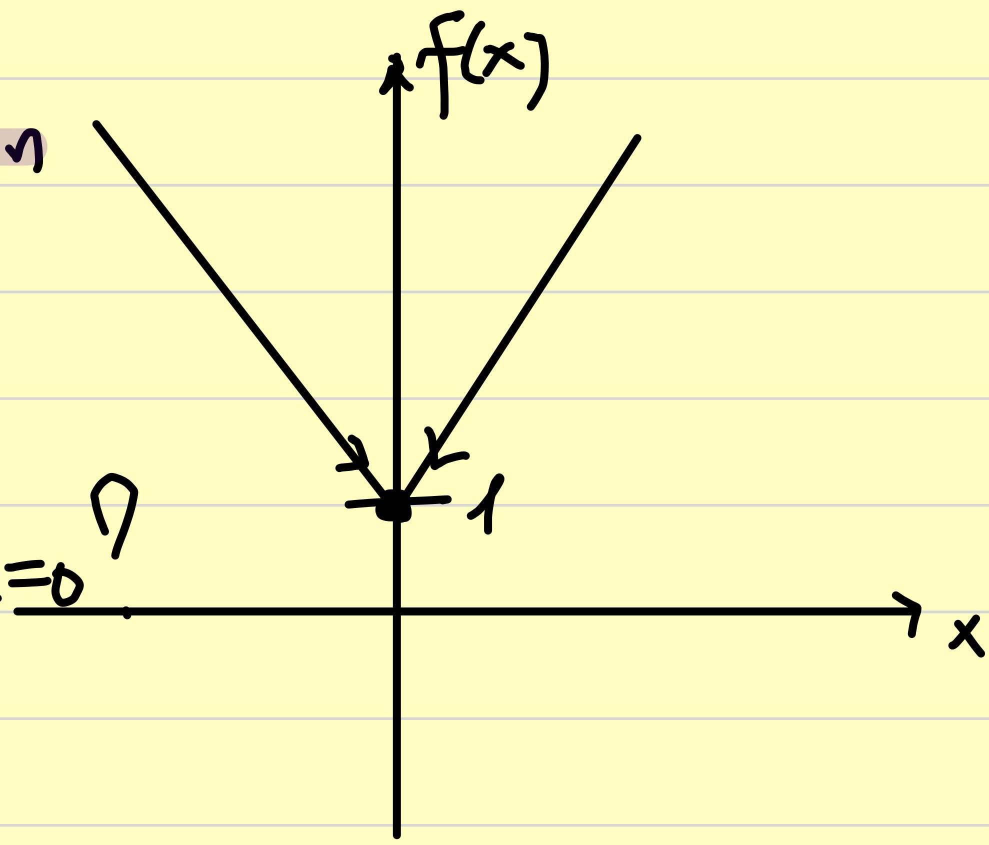
$$f(x=2)=2$$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = 2$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = 2+1 = 3 \neq 2$$

NICHT STETIG in $x=2$.

Beispiel Betragsfunktion



$$f(x) = |2x| + 1$$

Ist die Funktion stetig in $x=0$?

$$f(x=0) = |2 \cdot 0| + 1 = 1$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = |2 \cdot (0^-)| + 1 \cong 1$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = |2 \cdot (0^+)| + 1 \cong 1$$

✓ Die Funktion ist in $x=1$ stetig.

Def. **Differenzierbarkeit einer Funktion**

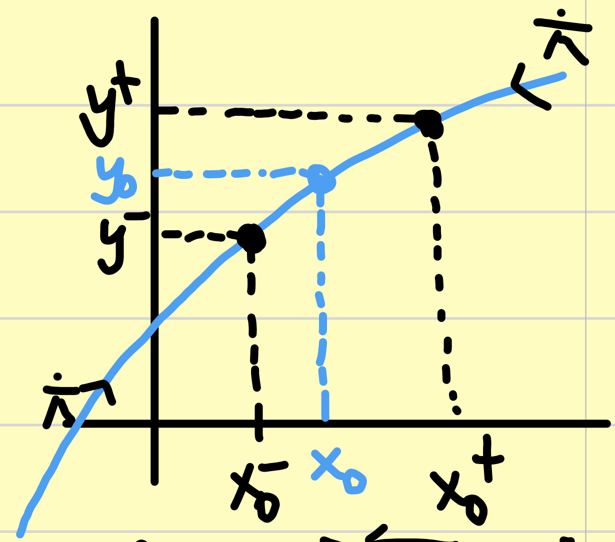
Eine Funktion f heißt an einer Stelle x_0 differenzierbar, wenn folgende zwei Bedingungen gelten:

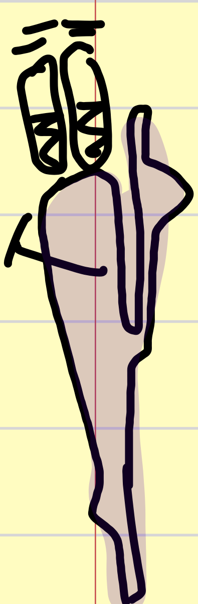
1) Die Funktion ist stetig in x_0.

* **UND**

2) Bei der links- & rechtsseitigen Annähnung an der Stelle x_0 existiert ein gemeinsamer Wert für die Steigung:

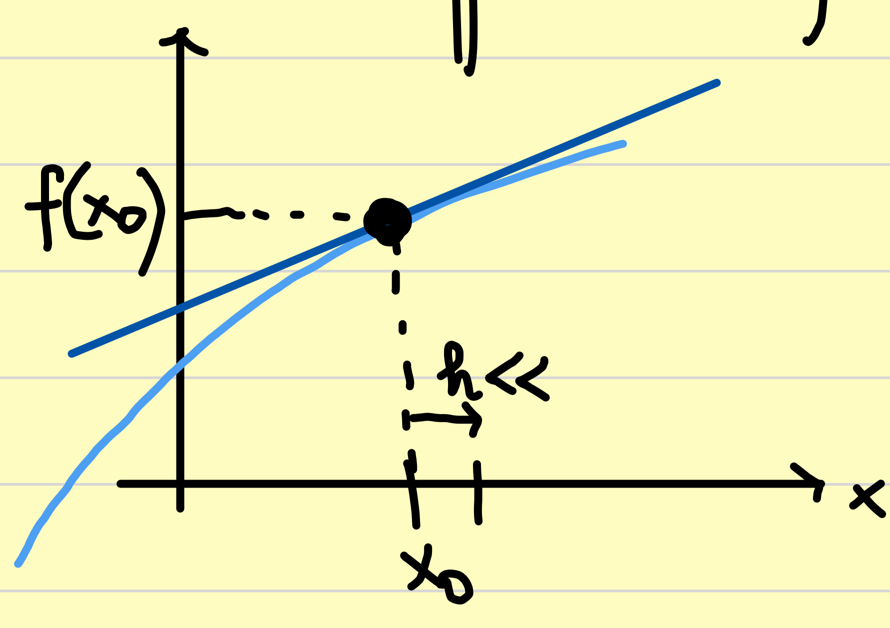
$$\lim_{x\to x_0^-} \frac{y^- - y_0}{x_0^- - x_0} = \lim_{x\to x_0^+} \frac{y^+ - y_0}{x_0^+ - x_0}$$





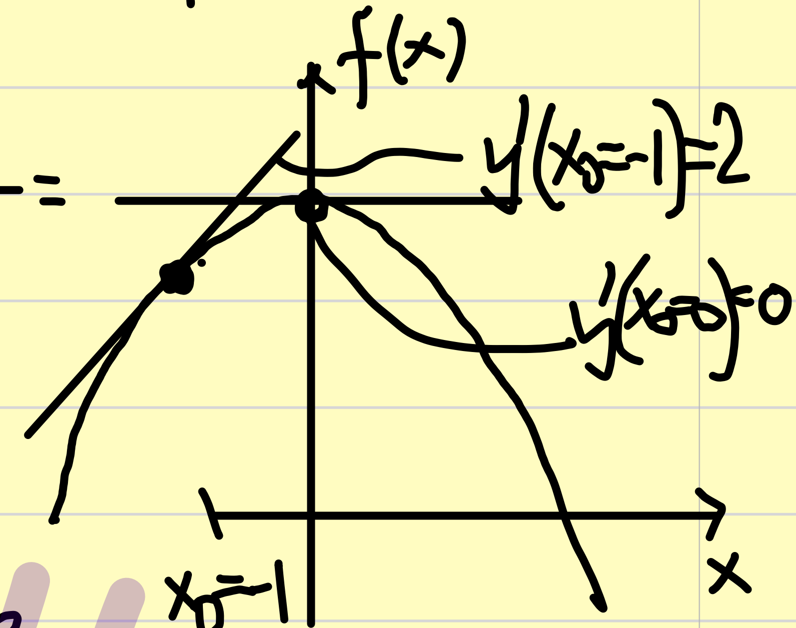
- STETIGKEIT ist eine NOTWENDIGE, NICHT GENÜGENDE KONDITION FÜR DIFFERENZIERBARKEIT.
- Es gibt Funktionen die sind stetig ABER nicht differenzierbar (i.e. Beispie Betragsfunktion $f(x)=|x|$ ist stetig in $x=0$, aber nicht differenziebar).

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Differentialquotient:}\\ y'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\\ y'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\end{array}}$$



$\rightarrow x = x_0 + h \rightarrow x - x_0 = h$

Berechnung der Steigung bei $x_0=-1$ der $f(x)=-x^2+4$.



$$y'(x_0=-1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\left[-(x_0+h)^2+4\right]-\left[-x_0^2+4\right]}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\left[-(\cancel{x_0^2}+h^2+2x_0h)\cancel{+4}\right]\cancel{+x_0^2}\cancel{-4}}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-h^2-2x_0h}{h}=\lim_{h\to 0}-h-2x_0 \underset{x_0=-1}{=} 0-2(-1)=2$$

$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$

$(a-b)^2=a^2+b^2-2ab$

$x_0=0$:

$$y'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\left[(-(x_0+h)^2+4\right]-\left[-x_0^2+4\right]}{h}=$$

$$\underset{x_0=0}{=}\lim_{h\to 0}\frac{\left[-h^2+4\right]-\left[4\right]}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-h^2}{h}=\lim_{h\to 0}-h=0$$

Def der Ableitung

Das Änderungsverhalten an einer Stelle x_0 einer differenzierbaren Funktion f heißt „Ableitung von f in x_0":

$$f'(x_0) = \frac{df}{dx}\bigg|_{x=x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$