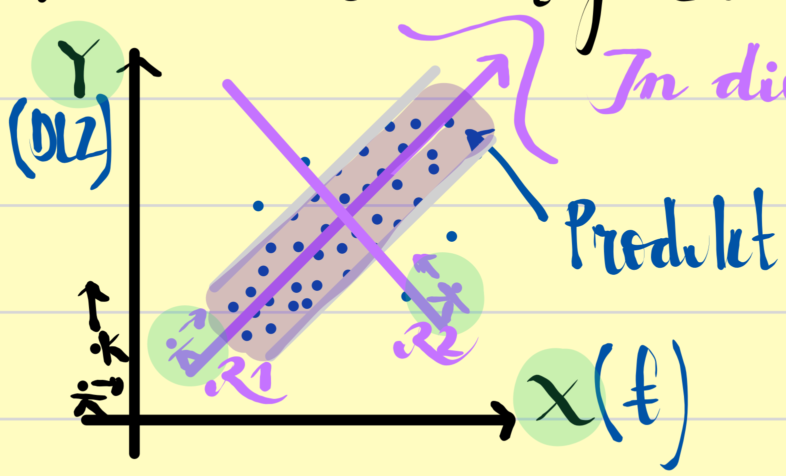
Diagonalisierung einer 3x3 Matrix

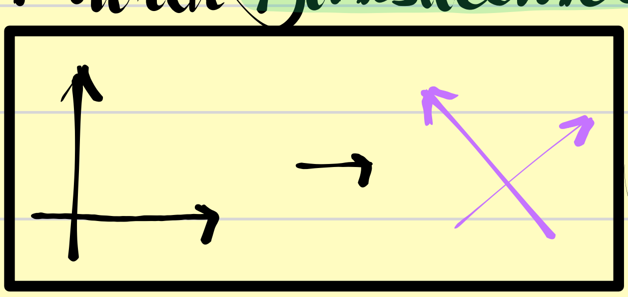
1) Motivation.

Viele komplexe lineare Abbildungen lassen sich vereinfachen, wenn man die richtige Basis wählt.



In diese Richtung ist die Variabilität minimal.

Diagonalisation ist der Prozess, bei dem man eine Matrix A durch Basiswechsel in eine Diagonalmatrix verwandelt.



Basiswechsel

Grundidee...

Eine quadratische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt diagonalisierbar, wenn ...
... es eine invertierbare Matrix P & eine Diagonalmatrix gibt, so dass ...

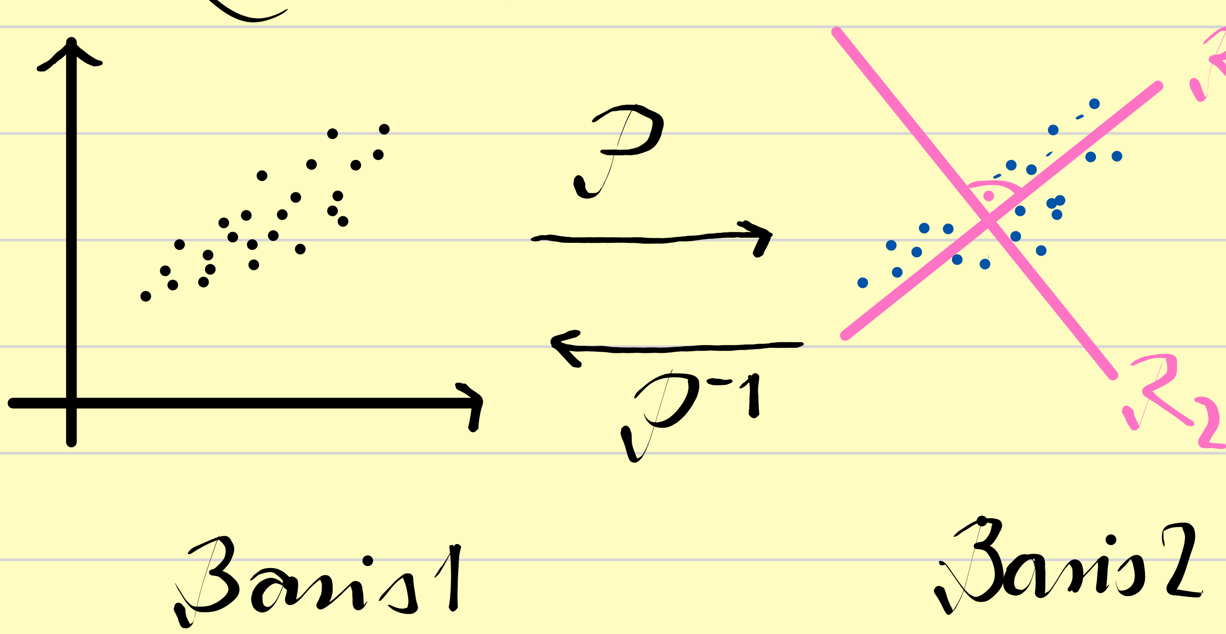
$$\boxed{A = PDP^{-1}} \;\equiv\; \boxed{D = P^{-1}AP}$$

Geometrische Bedeutung

P · Basiswechselmatrix: ihre Spalten sind die Eigenvektoren von A.
· Beschreibt, wie die „Eigenachsen" im ursprünglichen Raum liegen.

D · Diagonalmatrix mit Eigenwerten auf der Diagonale.
· Beschreibt, wie stark entlang jeder Eigenrichtung gestreckt wird.

P^{-1} · Rücktransformation in die Eigenbasis



Bedeutung ... In der Basis der Eigenvektoren ist die Abbildung rein skalierend.

$$\boxed{A.\vec{v} = \lambda \vec{v}}$$

$\vec{v}$ Eigenvektor
λ Eigenwert

Nicht jede Matrix ist diagonalisierbar.
Eine Matrix ist diagonalisierbar wenn:

1. sie „n" verschiedene Eigenwerte hat

ODER

2. die Summe der Dimensionen der Eigenräume ist eine Matrixgröße „n"

Vorgehensweise zur Diagonalisierung ...

$A.\vec{v} = \lambda.\vec{v}$

1. Eigenwerte bestimmen $\det(A - \lambda I) = 0$

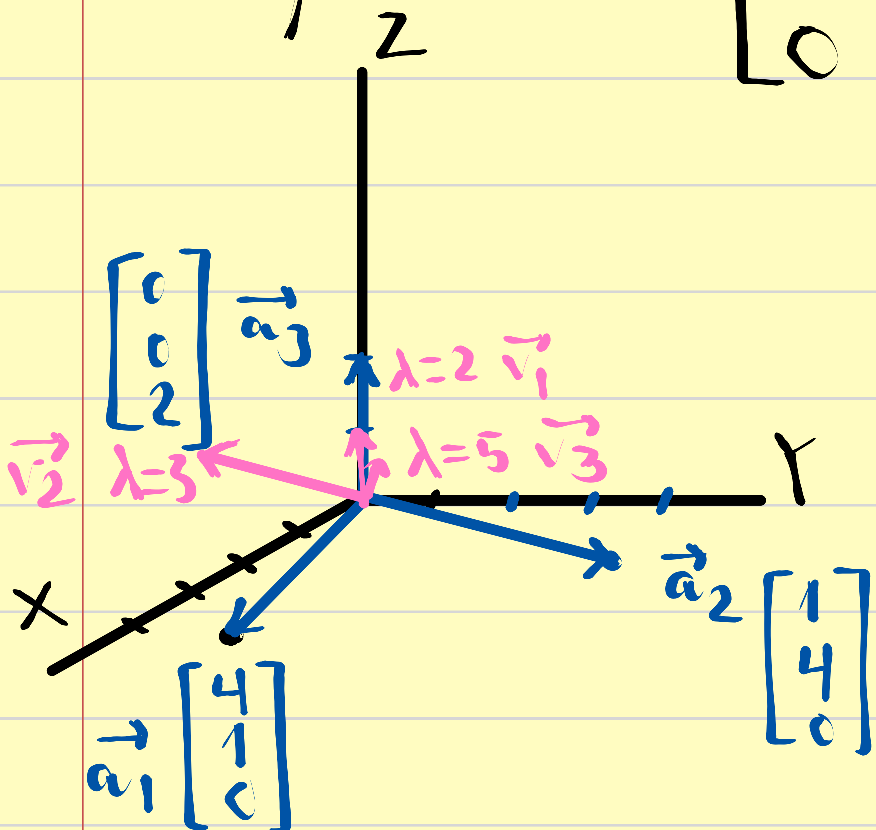
   I: Identitätsmatrix

2. Für jeden Eigenwert λ_i wird ein $\vec{v_i}$ ermittelt.

3. $P = [\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n]$ $\quad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix}$

4. Prüfung $A = P.D.P^{-1}$

Beispiel. $A = \begin{array}{cccc} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \vec{a}_3 & \\ \multicolumn{3}{c}{\left[\begin{matrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{matrix}\right]} & \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} \end{array}$



$$\det[A-\lambda I]=0 \rightarrow \det\left[\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}\right] = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \det\begin{bmatrix} 4-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 4-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{bmatrix} = 0 \rightarrow (4-\lambda)(4-\lambda)(2-\lambda) - (2-\lambda) = 0$$

$$(2-\lambda)\left((4-\lambda)^2 - 1\right) = 0$$

$\nearrow$ $\lambda = 2$

$\searrow$ $(4-\lambda)^2 - 1 = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow \lambda^2 - 8\lambda + 16 - 1 = 0 \rightarrow \lambda^2 - 8\lambda + 15 = 0$$

$$\lambda = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 4 \cdot 15}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{8 \pm 2}{2} =$$

$\nearrow$ $\lambda = 5$

$\searrow$ $\lambda = 3$ ✓

$$\lambda = 2: \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \\ v_{13} \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \\ v_{13} \end{bmatrix} \rightarrow \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \\ v_{13} \end{bmatrix}$$

$\lambda=3$: $\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{21} \\ v_{22} \\ v_{23} \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} v_{21} \\ v_{22} \\ v_{23} \end{bmatrix} \rightarrow$

$A\vec{v} = \lambda\vec{v}$

$\rightarrow 4v_{21} + v_{22} + 0.v_{23} = 3v_{21} \rightarrow$

$1.v_{21} + 4v_{22} + 0.v_{23} = 3v_{22}$

$2v_{23} = 2v_{23}$

$\rightarrow 4v_{21} - 3v_{21} = -v_{22} \rightarrow v_{21} = -v_{22}$

$4v_{22} - 3v_{22} = -v_{21} \quad v_{21} = -v_{22}$

$v_{22} = 1 \rightarrow v_{22} = -1$

$\lambda = 3 \longrightarrow \vec{v_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ v_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\lambda=5$: $\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{31} \\ v_{32} \\ v_{33} \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} v_{31} \\ v_{32} \\ v_{33} \end{bmatrix} \rightarrow$

$\rightarrow 4.v_{31} + v_{32} = 5v_{31} \rightarrow v_{31} = v_{32}$

$v_{31} + 4v_{32} = 5v_{32}$

$2v_{33} = 2v_{33} \quad v_{33} = v_{33}$

$v_{31} = v_{32} = 1 \longrightarrow \vec{v_3} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$v_{33} = 1$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \vec{v}_3 \end{array} \\ P = & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \qquad D = \begin{bmatrix} 2 & & 0 \\ & 3 & \\ 0 & & 5 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\text{Übung: } A = P \cdot D \cdot P^{-1} \text{ prüfen} \ldots}$$