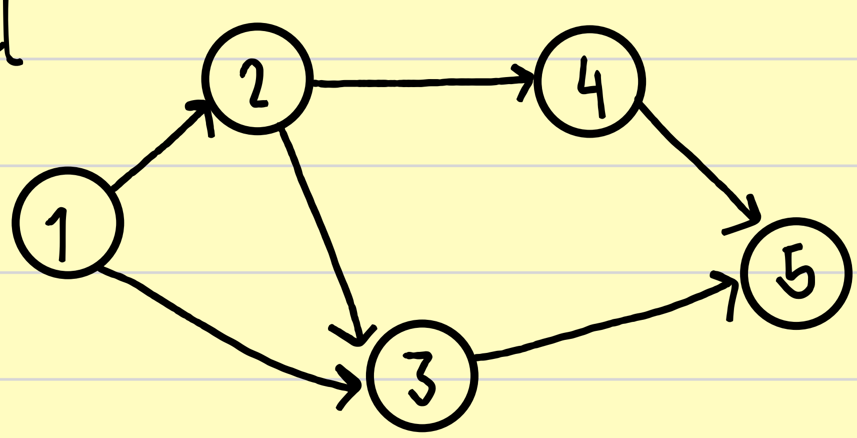
Netzwerkanalyse

NETWORK SCIENCE (Barábasi, 2016)

Definition: eine Liste an Knoten und Kanten (Nodes & Edges).
Wird durch einen Graph $G = \{n, e\}$ dargelegt.
Wobei: $n = 1, \dots, N$ und $e = 1, \dots, E$.

Beispiel



$$G = \{1 \to 2, 1 \to 3, 2 \to 3, 2 \to 4, 3 \to 5, 4 \to 5\}$$

Laplacian Matrix ($\mathcal{L}$)

$\mathcal{L} = D - A$: D : DEGREE MATRIX
A : ADJACENCY MATRIX

$$D = \begin{cases} \text{degree vom Knoten (Anzahl Nachbarn)} & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{cases} 0 & \text{wenn keine Beziehung zw. } i \text{ und } j \\ 1 & \text{wenn eine Beziehung zw. } i \text{ und } j \end{cases} = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{L} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

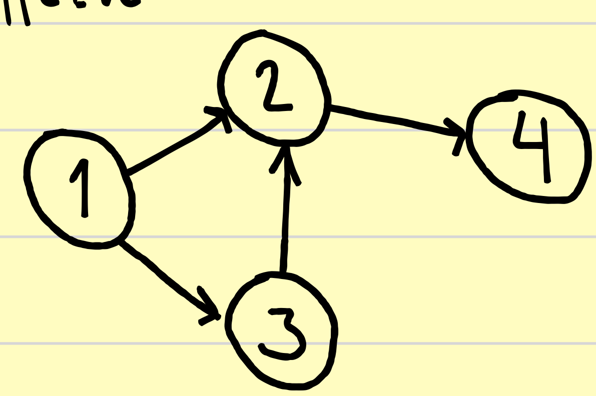
Eigenwerte & Eigenvektoren der Laplacian Matrix

- Der zweite Eigenwert der Laplacian Matrix heißt FIEDLER-WERT. Sagt aus wie die Struktur des Graphs ausgelegt.
- Der zweite Eigenvektor vom Laplacian heißt FIEDLER-VEKTOR. Zeigt uns der Engpaß des Netzwerkes:

$$\vec{v}_2 = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ \\ \\ n \end{array} \begin{bmatrix} + \\ + \\ + \\ 0 \\ 0 \\ - \\ - \end{bmatrix} \leftarrow$$

Die Position mit dem ersten NULL im Fiedler vektor ist der Engpaß des Netzwerkes.

Übung. Bitte den Engpaß des Netzwerks analytisch ermitteln.



1. Laplacian vom Graph ermitteln.

2. 2. Eigenvektor (Fiedlervektor) ermitteln.

3. Engpaßknote identifizieren.

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{41} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & a_{42} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{43} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{bmatrix} = a_{11} \cdot \det\begin{bmatrix} a_{22} & a_{32} & a_{42} \\ a_{23} & a_{33} & a_{43} \\ a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{bmatrix} +$$

$$+\ a_{22} \cdot \det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{31} & a_{41} \\ a_{13} & a_{33} & a_{43} \\ a_{14} & a_{34} & a_{44} \end{bmatrix} +$$

$$+\ a_{33} \cdot \det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{41} \\ a_{12} & a_{22} & a_{42} \\ a_{14} & a_{24} & a_{44} \end{bmatrix} +$$

$$+\ a_{44} \det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Average Path Length (APL)

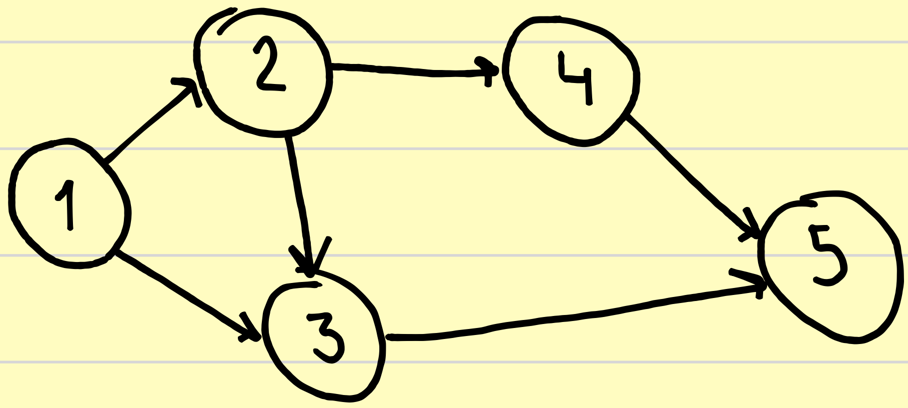
Mittelwert der Schritte um von Knote „i" auf Knote „j" zu kommen.

$$\boxed{APL = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} d_{ij}}$$

$N(N-1) \equiv$ Maximale Anzahl Beziehungen zw den Knoten

d_{ij} = Abstand zw. Knoten „i" und „j".

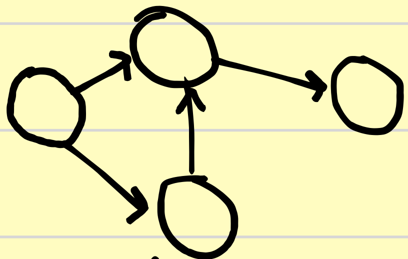
Beispiel.



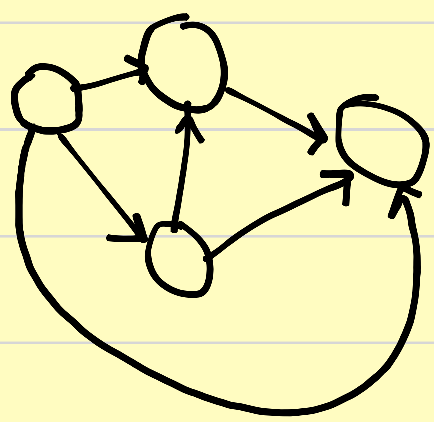
$N=5$

$$APL = \frac{1}{5 \cdot 4}\left[\begin{array}{llr}
1 & \left[\begin{array}{ccccccc} d_{12} & & d_{13} & & d_{14} & & d_{15} \\ 1 & + & 1 & + & 2 & + & 2 \end{array}\right] + & 6 \\
2 & \left[\begin{array}{ccccccc} d_{21} & & d_{23} & & d_{24} & & d_{25} \\ 1 & + & 1 & + & 1 & + & 2 \end{array}\right] + & 5 \\
3 & \left[\begin{array}{ccccccc} d_{31} & & d_{32} & & d_{34} & & d_{35} \\ 1 & + & 1 & + & 2 & + & 1 \end{array}\right] + & 5 \\
4 & \left[\begin{array}{ccccccc} d_{41} & & d_{42} & & d_{43} & & d_{45} \\ 2 & + & 1 & + & 2 & + & 1 \end{array}\right] + & 6 \\
5 & \left[\begin{array}{ccccccc} d_{51} & & d_{52} & & d_{53} & & d_{54} \\ 2 & + & 2 & + & 1 & + & 1 \end{array}\right] & 6
\end{array}\right] = 1'4$$

Beispiel.



Graph 1



Graph 2

Gegeben sind die zwei obigen Supply Chain Netzwerke.

Bitte geben Sie eine analytisch basierte Empfehlung der Geschäftsführung um einer auszuwählen.

HINWEIS. Mit Hilfe vom APL.

Wünschenswert ist in der Regel der APL zu reduzieren damit die Information schell von A nach B kommt.

CLUSTERING COEFFICIENT (CC)

Eine Messung der Kompaktzität des Netzwerkes: wir messen dadurch wie gut „geclustered" die Knoten im Netzwerk sind.

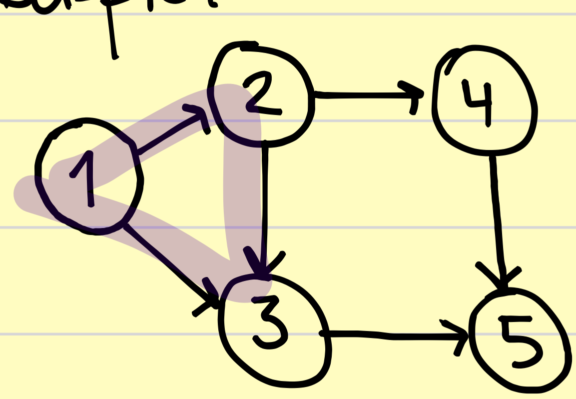
Wünschenswert ist in der Regel der CC zu erhöhen damit Knoten im Netzwerk effizient Information austauschen.

$$CC = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \frac{2L_i}{K_i(K_i-1)}$$

L_i = # Beziehungen zw. den Nachbarn vom Knote „i"

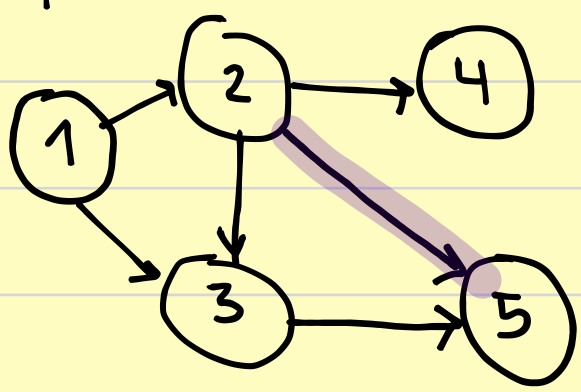
K_i = # Nachbarn vom Knote „i"

Beispiel



$$CC_1 = \frac{1}{5} \cdot \left[{}^{1}\left[\frac{\overset{L_1}{2 \cdot 1}}{\underset{K_1}{2 \cdot (2-1)}}\right] + {}^{2}\left[\frac{\overset{L_2}{2 \cdot 1}}{3(3-1)}\right] + {}^{3}\left[\frac{\overset{L_3}{2 \cdot 1}}{3(3-1)}\right] + {}^{4}\cancel{\left[\frac{\overset{L_4}{2 \cdot 0}}{2(2-1)}\right]} + {}^{5}\cancel{\left[\frac{\overset{L_5}{2 \cdot 0}}{2(2-1)}\right]} \right]$$

Beispiel.



$$CC_2 = \frac{1}{5}\left[{}^{1}\left[\frac{2\cdot 1}{2(2-1)}\right] + {}^{2}\overset{L_2}{\left[\frac{2\cdot 2}{4(4-1)}\right]} + {}^{3}\left[\frac{2\cdot 2}{3(3-1)}\right] + {}^{4}\left[\cancel{\frac{2\cdot 0}{}}\right] + {}^{5}\left[\frac{2\cdot 1}{2(2-1)}\right] \right] =$$

$CC_2 > CC_1 \rightarrow$ Die zweite option wird eine effizientere kommunikation zw den knoten haben.