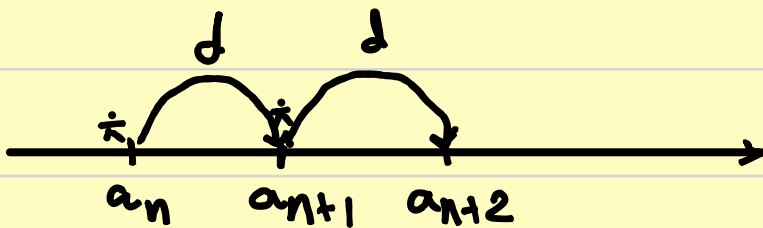


$$AF: a_{n+1} = a_n + d$$



GEOMETRISCHE FOLGE (GF)

Bei der geometrischen Folge ist der Quotient zw. zwei aufeinander folgenden Folgegliedern immer gleich groß: $q = \text{konstant}$.

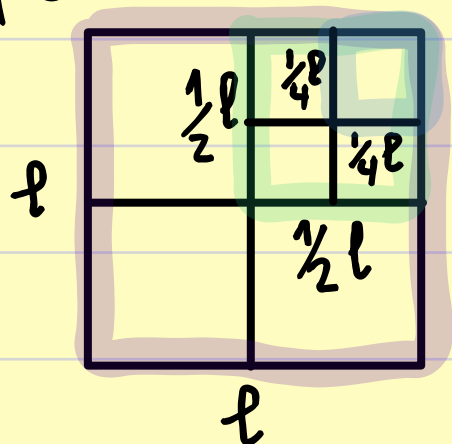
$$q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Jedes Glied der Folge außer „ a_1 “ ergibt sich dadurch, das man das vorausgehende Glied mit einem konstanten Faktor „ q “ multipliziert.

Bildungsgesetz der geometrischen Folge:

$$a_{n+1} = q \cdot a_n \quad ; \quad q = \text{konstante}$$

Beispiel:



$$a_1 = l^2 \quad q = \frac{1}{4}$$

$$a_2 = q \cdot a_1 = \frac{1}{4} \cdot l^2 = \left(\frac{1}{2} l\right)^2$$

$$a_3 = q \cdot a_2 = \frac{1}{4} a_2 = \frac{1}{16} \cdot l^2$$

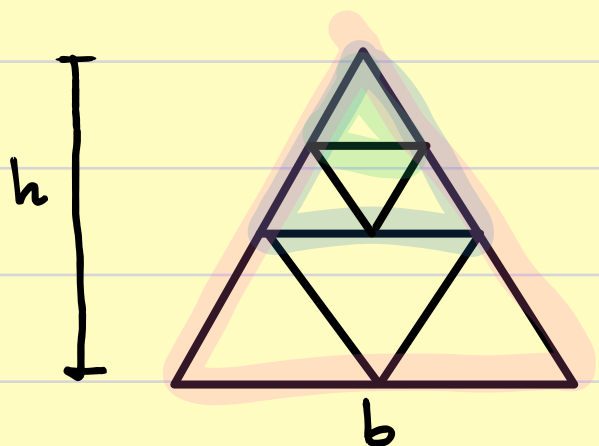
...

$$a_1 = \frac{bh}{2} \quad q = \frac{1}{4}$$

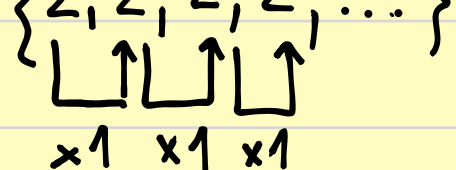
$$a_2 = q \cdot a_1 = \frac{1}{4} \cdot \frac{bh}{2}$$

$$a_3 = q \cdot a_2 = \frac{1}{16} \cdot \frac{bh}{2}$$

...



Beispiele (numerisch):

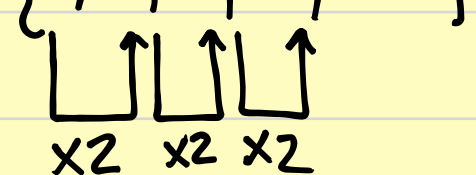
$$\{2, 2, 2, 2, \dots\}$$


Quotient

$$q=1$$

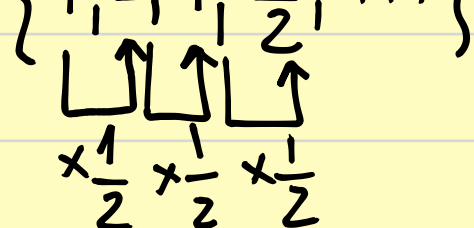
Bildungsgesetz

$$a_{n+1} = a_n \cdot 1$$

$$\{1, 2, 4, 8, \dots\}$$


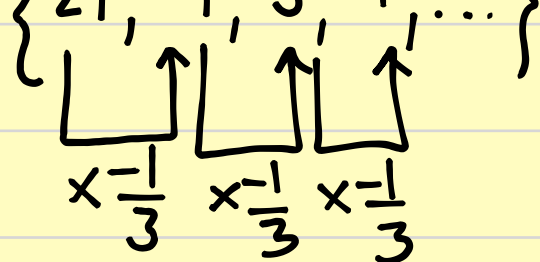
$$q=2$$

$$a_{n+1} = a_n \cdot 2$$

$$\{4, 2, 1, \frac{1}{2}, \dots\}$$


$$q = \frac{1}{2}$$

$$a_{n+1} = a_n \cdot \frac{1}{2}$$

$$\{27, -9, 3, -1, \dots\}$$


$$q = -\frac{1}{3}$$

$$a_{n+1} = a_n \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)$$

...

Eine GF ist eindeutig durch das Anfangsglied „ a_1 “ und den konstanten Faktor „ q “ bestimmt.

$$a_1 = a_1$$

$$a_2 = a_1 \cdot q$$

$$a_3 = a_2 \cdot q = (a_1 \cdot q) \cdot q = a_1 \cdot q^2$$

$$a_4 = a_3 \cdot q = (a_2 \cdot q) \cdot q = a_1 \cdot q^3$$

...

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Bildungsgesetz der GF: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

$$\frac{a_n}{a_1} = q^{n-1} \rightarrow \log \left[\frac{a_n}{a_1} \right] = (n-1) \log q \rightarrow \frac{\log \left[\frac{a_n}{a_1} \right]}{\log q} = n-1$$

$\log[a^b] = b \log a$

$n = 1 + \frac{\log \left[\frac{a_n}{a_1} \right]}{\log q}$



$$\log[10^2] = 2 \log 10$$

Beispiel. wie lautet das 93. Glied einer GF mit $a_1 = \frac{3}{7}$ $q = 106$

$$\left. \begin{array}{l} a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \\ n = 93 \\ a_1 = \frac{3}{7} \\ q = 106 \end{array} \right\} a_{93} = \frac{3}{7} \cdot (106)^{92} = 91'2353$$

Beispiel. bei einer GF ist das erste Glied $a_1 = 1$ und das letzte Glied $a_n = 128$. $q = 2$. Wie viele Glieder hat die Folge?

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \rightarrow 128 = 1 \cdot 2^{n-1} \rightarrow 128 = 2^{n-1}$$
$$\rightarrow \log(128) = \log(2^{n-1}) \stackrel{\uparrow}{=} (n-1) \log 2$$

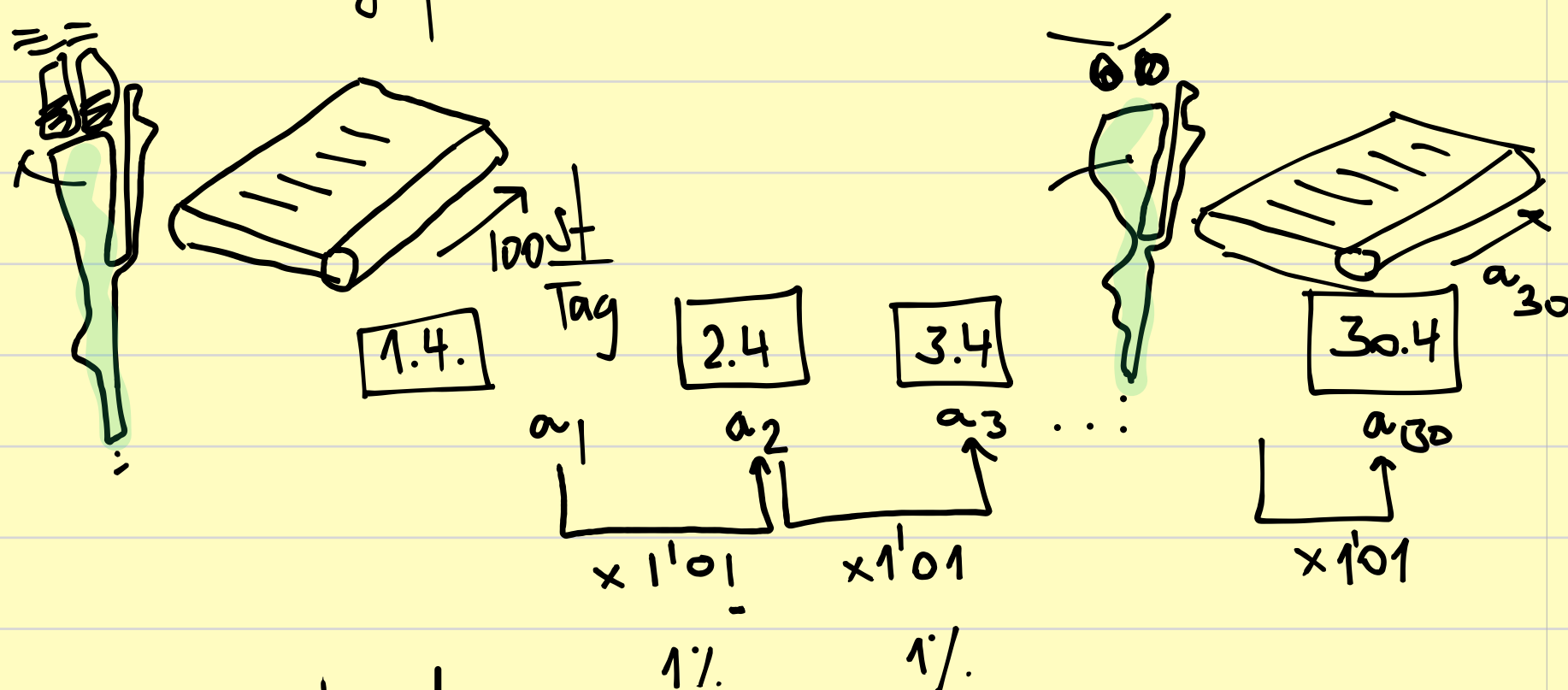
$\log(a^b) = a \log b$

$$\rightarrow \frac{\log(128)}{\log 2} = n-1 \rightarrow n = 1 + \frac{\log 128}{\log 2} = 8$$

19NNNN0/ 19b 1000/ 19b 1000 1000 x 2/A

Übung. in einem Betrieb soll die Geschwindigkeit eines Fließbandes täglich um 1% erhöht werden.

Wie schnell ist die Produktion am 30. April, wenn am 1. April 100 Stück am Tag produziert werden?



$$a_1 = 100 \frac{\text{St}}{\text{Tag}}$$

$$q = 1.01$$

$$n = 30$$

$$a_{30} = 100 \cdot 1.01^{30-1} = 133.45 \frac{\text{Stück}}{\text{Tag}}$$

FOLGEN: AF: $a_{n+1} = a_n + d$ GF: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$

REIHEN. Summiert man die Glieder einer Folge, so erhält man eine Reihe.

ENDLICHE REIHEN: $\sum_{i=1}^n a_i$ UNENDLICHE REIHEN: $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$

ARITHMETISCHE REIHEN: (AR)

Eine Reihe, die aus den ersten Gliedern einer AF gebildet wird, heißt eine AR.

$$\begin{array}{r} \sum_{i=1}^n a_i = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \dots + (a_1 + (n-3)d) + (a_1 + (n-2)d) + (a_1 + (n-1)d) \\ + \sum_{i=1}^n a_i = (a_1 + (n-1)d) + (a_1 + (n-2)d) + (a_1 + (n-3)d) + \dots + (a_1 + 2d) + (a_1 + d) + a_1 \end{array}$$

$$2 \sum_{i=1}^n a_i = \underbrace{2a_1 + (n-1)d + 2a_1 + (n-1)d + 2a_1 + (n-1)d + \dots + 2a_1 + (n-1)d + 2a_1 + (n-1)d}_{n \cdot [2a_1 + (n-1)d]}$$

$$2 \sum_{i=1}^n a_i = n \cdot [2a_1 + (n-1)d] \rightarrow \sum_{i=1}^n a_i = \frac{n}{2} [a_1 + \underbrace{a_1 + (n-1)d}_{a_n}]$$

Für die AR gilt:

$$\boxed{\sum_{i=1}^n a_i = \frac{n}{2} [a_1 + a_n]}$$

Beispiel: bestimme bitte die Summe einer AR mit 100 Glieder, $a_1 = 15$ und $d = 3$.

$$\sum_{i=1}^{100} a_i = \frac{100}{2} [15 + (100-1) \cdot 3] = 15600$$

GEOMETRISCHE REIHEN (GR)

Eine Reihe, deren Gliedern eine GF bilden, nennt man GR.

$$GR = \sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \dots + a_1 q^{n-3} + a_1 q^{n-2} + a_1 q^{n-1}$$

$$- q \cdot \sum_{i=1}^n a_i = a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + \dots + a_1 q^{n-2} + a_1 q^{n-1} + a_1 q^n$$

$$\sum_{i=1}^n a_i - q \sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_1 q^n$$

$$\sum_{i=1}^n a_i [1 - q] = a_1 [1 + q^n] \rightarrow \sum_{i=1}^n a_i = a_1 \cdot \frac{1 + q^n}{1 - q} \quad q \neq 1$$

$$\text{wenn } q=1 \rightarrow \sum_{i=1}^n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \dots + a_1 q^{n-1} = n \cdot a_1 \quad q=1$$

$$GR: \quad q \neq 1 \rightarrow \sum_{i=1}^n a_i = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

$$q = 1 \rightarrow \sum_{i=1}^n a_i = n \cdot a_1$$

• Die Summe von $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$

$$\sum_{i=1}^n a_i$$

$$\sum_{i=7}^{13} a_i = a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11} + a_{12} + a_{13}$$

$\text{Blume} = 7$

Beispiel. bestimmen Sie bitte die Summe einer geometrischen Reihe mit 100 Gliedern, $a_1 = \frac{2}{3}$, $q = \frac{1}{2}$.

$$q \neq 1 \rightarrow \sum_{i=1}^n a_i = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2}^{100}}{1 - \frac{1}{2}} \approx 276 \cdot 10^6$$

