

Klassifikation mit Wahrscheinlichkeiten

Wir lernen, wie man mit W schätzt, daraus Entscheidungen abzuleitet, Schwellenwerte wählt, Modelle fair bewertet, Klassenungleichgewichte, behandelt, und nicht lineare Entscheidungsgrenzen vergleicht.

A1. Aufgabe & Datenbild.

- Wir betrachten eine lineare Klassifikation $\{0, 1\}$.
- Eingaben sind Merkmale in einer Tabelle; jedes Beispiel gehört genau zu einer Klasse.
- Ziel ist eine Funktion die für jedes Beispiel eine W für Klasse „1“ liefert.

A2. Logistische Regression als W -modell.

- Wir modellieren die s.g. **Logit**-Funktion als lineare Funktion der Merkmale.

- Sei $\pi(x)$ die W für Klasse 1:

$$\log \frac{\pi(x)}{1-\pi(x)} = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \dots + \beta_n x_n$$

Das Logarithmus der Quotient $\frac{p^{(1)}}{p^{(0)}} = \frac{\pi(x)}{1-\pi(x)}$ wird als lineare Kombination der Merkmale dargestellt.

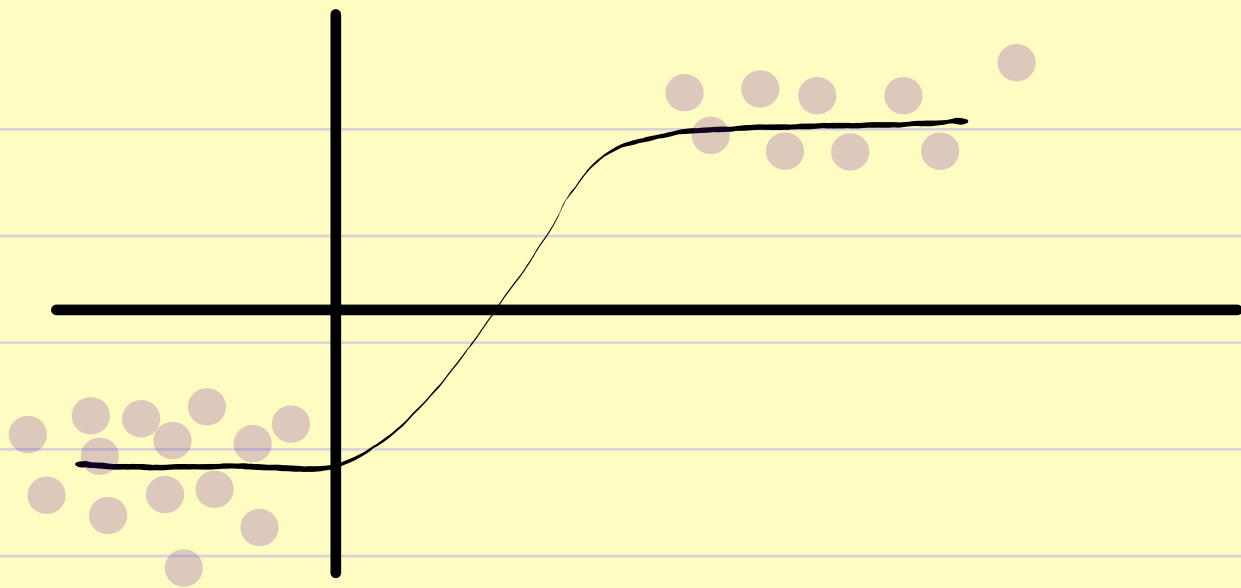
Daraus folgt die s.g. Sigmoid-Funktion

$$\pi(x) = \frac{1}{1 + \exp^{-(\beta_0 + \sum \beta_j x_j)}}$$

Schätzung der Gewichte erfolgt durch Maximierung der Likelihood: \mathcal{L} .

$$\mathcal{L}(\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n) = \prod_{i=1}^n \pi(x_i)^{y_i} (1-\pi(x_i))^{1-y_i}$$

Interpretation: bei normierten Merkmalen, steht $\exp(\beta_j)$ für den Faktor, um den sich die Chancen auf Klasse „1“ ändern, wenn x_j um eine Std. Abweichung steigt, während andere Merkmale konstant bleiben.



A3. Wahl des Schwellenwertes

- Eine Vorhersage ist zunächst eine W.
Eine Klassenzuordnung entsteht erst durch einen Schwellenwert.
Standard ist 0,5.

A4. Verwechslungsmatrix & Grund-Metriken

V-Matrix . 4-Felder. Richtig Positiv TP
Falsch Positiv FP
Richtig Negativ TN
Falsch Negativ FN

Prognose	0	430	30
	1	25	217
		0	1
		Wirklichkeit	

Schwelle 0,5

$$\Sigma = 430 + 30 + 25 + 217 = 702$$

$$TP = \sum \bar{1} \{ \hat{y}=1, y=1 \}$$

$$TN = \sum \bar{1} \{ \hat{y}=0, y=0 \}$$

$$FP = \sum \bar{1} \{ \hat{y}=1, y=0 \}$$

$$RN = \sum \bar{1} \{ \hat{y}=0, y=1 \}$$

$$TP = \frac{217}{702} = 0.309 \quad FP = \frac{25}{702} = 0.035$$

$$TN = \frac{430}{702} = 0.613 \quad FN = \frac{30}{702} = 0.043$$

P	0	0.613	0.043
	1	0.035	0.309
		0	1

• Treffergenauigkeit: Anteil der korrekten Vorhersagen. Kann bei unausgewogenen Klassen trügen.

$$Tg = \frac{TP + TN}{TP + TN + FP + FN}$$

• Präzision: Anteil wahrer positive Fälle unter allen als positiv vorhergesagten Fällen.

$$P = \frac{TP}{TP + FP}$$

• Trefferquote: Anteil wahrer positive Fälle, die korrekt als positiv erkannt werden.

$$Tq = \frac{TP}{TP + FN}$$

• F1-Wert: Mittel aus Präzision & Trefferquote.

$$F1 = 2 \cdot \frac{\text{Präz. Tq}}{\text{Präz.} + \text{Tq}}$$

• Spezifität:

$$Sp = \frac{TN}{TN + FP}$$

• Fehleralarmquote

$$FA = \frac{FP}{FP + TN}$$

• Brier-Wert: mittlere quadratische Abweichung zw. vorhergesagten W. & den beobachteten Klassen. Misst die Güte der W. selbst.

$$\text{Brier} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m (\hat{\pi}_i - y_i)^2$$

