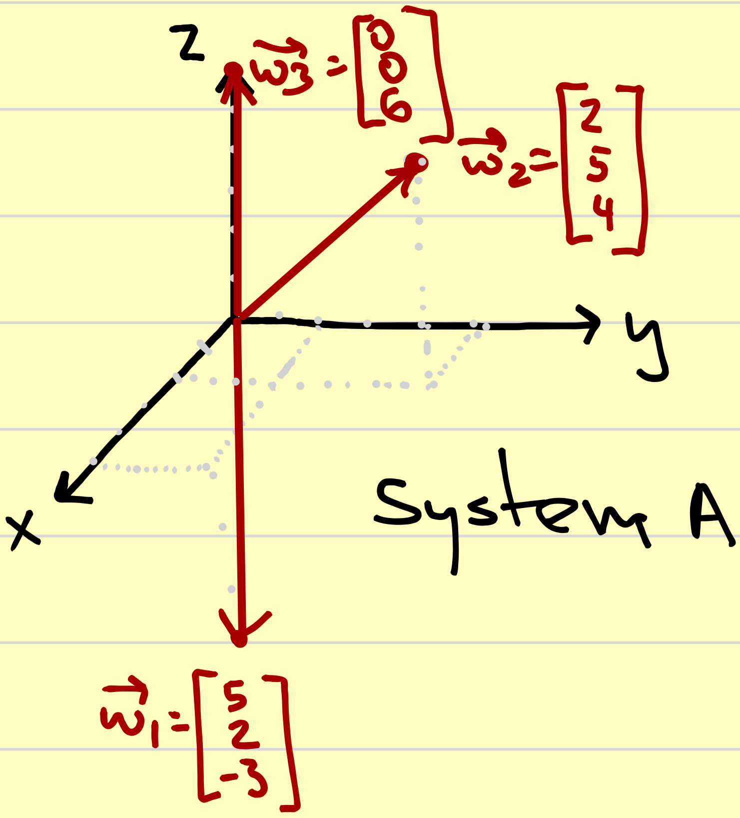
1 EIGENWERTE & EIGENVEKTOREN

$$A \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \vec{v} \rightarrow \det[A - \lambda I] = 0$$

System — Eigenvektoren — Eigenwerte — Identitäts matrix

Beispiel:

$$A = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ -3 & 4 & 6 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} \\ \begin{array}{ccc} w_1 & w_2 & w_3 \end{array} & \end{array}$$



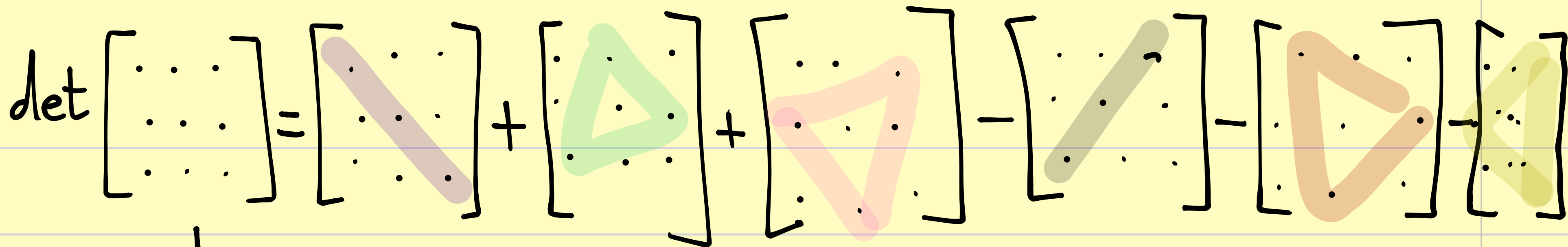
A) EIGENWERTE:

$$\det[A - \lambda I] = 0 \rightarrow \det\left[\begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ -3 & 4 & 6 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right] = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \det\begin{bmatrix} 5-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 5-\lambda & 0 \\ -3 & 4 & 6-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$\big[(5-\lambda)(5-\lambda)(6-\lambda) + 2 \cdot 0 \cdot (-3) + 2 \cdot 4 \cdot 0 - \qquad (1)$$

$$- 0 \cdot (5-\lambda) \cdot (-3) - 0 \cdot 4 \cdot (5-\lambda) - 2 \cdot 2 \cdot (6-\lambda)\big] = 0$$



$$\det\begin{bmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{bmatrix} = aei + cdh + bfg - ceg - ahf - bdi$$

(1) $(5-\lambda)^2(6-\lambda) - 4(6-\lambda) = 0 \rightarrow (6-\lambda)\left[(5-\lambda)^2 - 4\right] = 0$

$\rightarrow \lambda = 6$

$\rightarrow 25 + \lambda^2 - 10\lambda - 4 = 0 \rightarrow \lambda^2 - 10\lambda + 21 = 0 \rightarrow$

$$\lambda = \frac{-(-10) \pm \sqrt{100 - 4 \cdot 21}}{2} = \frac{10 \pm \sqrt{16}}{2} = \begin{cases} 7 \\ 3 \end{cases}$$

$\lambda_1 = 3 \;;\; \lambda_2 = 6 \;;\; \lambda_3 = 7$

2) EIGENVEKTOREN:

$$(A - \lambda I) \cdot \vec{v} = \vec{0} \rightarrow \begin{bmatrix} 5-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 5-\lambda & 0 \\ -3 & 4 & 6-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} (5-\lambda)x + 2y &= 0 \\ 2x + (5-\lambda)y &= 0 \\ -3x + 4y + (6-\lambda)z &= 0 \end{aligned}\right| \quad (2)$$

$$\lambda_1=3)\quad + \quad (2)\quad \left|\begin{array}{l} (5-3)x+2y=0 \\ 2x+(5-3)y=0 \\ -3x+4y+(6-3)z=0 \end{array}\right|\begin{array}{l} 2x+2y=0 \\ 2x+2y=0 \\ -3x+4y+3z=0 \end{array}\left|\begin{array}{l} x=-y \end{array}\right.$$

$$3x+4x-3z=0 \rightarrow x=\frac{3z}{7}$$

$$x=1 \rightarrow y=-1 \rightarrow z=\frac{7}{3} \rightarrow \vec{v_1}=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 7/3 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2=6)\quad + \quad (2)\quad \left|\begin{array}{l} (5-6)x+2y=0 \\ 2x+(5-6)y=0 \\ -3x+4y+(6-6)z=0 \end{array}\right|\begin{array}{l} x+2y=0 \\ 2x+y=0 \end{array}\left|\begin{array}{l} x=y=0 \end{array}\right.$$

$$z=1\ ;\ x=y=0 \rightarrow \vec{v_2}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_3=7)\quad + \quad (2)\quad \left|\begin{array}{l} (5-7)x+2y=0 \\ 2x+(5-7)y=0 \\ 3x-4y-(6-7)z=0 \end{array}\right|\begin{array}{l} -2x+2y=0 \\ 2x-2y=0 \\ -y+z=0 \rightarrow y=z \end{array}\left|\begin{array}{l} x=y \end{array}\right.$$

$$x=1\ ;\ y=1\ ;\ z=1 \rightarrow \vec{v_3}=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

EIGENWERTE **EIGENVEKTOREN**

$$\boxed{\lambda_1=3,\ \lambda_2=6,\ \lambda_3=7\ ;\quad \vec{v_1}=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 7/3 \end{bmatrix}\quad \vec{v_2}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\quad \vec{v_3}=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

2 KOVARIANZ

X	Y	Z
6	1	7
3	-1	2
2	0	4

$$K = \begin{bmatrix} \sigma^2_{XX} & \sigma^2_{XY} & \sigma^2_{XZ} \\ \sigma^2_{YX} & \sigma^2_{YY} & \sigma^2_{YZ} \\ \sigma^2_{ZX} & \sigma^2_{ZY} & \sigma^2_{ZZ} \end{bmatrix}$$

$$\sigma^2_{XX} \equiv \text{VARIANZ}(X) = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1} \quad (\text{VARIANZ})$$

$$\sigma^2_{XY} \equiv \text{CO-VARIANZ}(X,Y) = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n-1} \quad (\text{CO-VARIANZ})$$

$$\bar{X} = \frac{6+3+2}{3} = \frac{11}{3} \; ; \; \bar{Y} = \frac{1-1+0}{3} = 0 \; ; \; \bar{Z} = \frac{7+2+4}{3} = \frac{13}{3}$$

$$\sigma^2_{XX} = \frac{\left(6-\frac{11}{3}\right)^2 + \left(3-\frac{11}{3}\right)^2 + \left(2-\frac{11}{3}\right)^2}{2}$$

$$\sigma^2_{XY} = \frac{\left(6-\frac{11}{3}\right)(1-0) + \left(3-\frac{11}{3}\right)(-1+0) + \left(2-\frac{11}{3}\right)(0-0)}{2} = \sigma^2_{YX}$$

$$\sigma^2_{XZ} = \frac{\left(6-\frac{11}{3}\right)\left(7-\frac{13}{3}\right) + \left(3-\frac{11}{3}\right)\left(2-\frac{13}{3}\right) + \left(2-\frac{11}{3}\right)\left(4-\frac{13}{3}\right)}{2} = \sigma^2_{ZX}$$

$$\sigma^2_{YZ} = \sigma^2_{ZY} = \ldots$$

$$\sigma^2_{YY} = \ldots$$

$$\sigma^2_{ZZ} = \ldots$$

Übung:

System: $A = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ bitte E.Werte & E.Vektoren ermitteln.

System: $B = \begin{bmatrix} 3 & 6 & -2 \\ 2 & 8 & 0 \\ 4 & 10 & 4 \end{bmatrix}$ bitte Ko.Varianzmatrix K ermitteln.

Warum ist dies für WI wichtig?

Die E.Vektoren der Kovarianzmatrix haben die Fähigkeit sehr viel Variabilität vom System darzustellen, ohne die komplette Daten analysieren zu müssen.

Die E.Vektoren der Kovarianzmatrix heißen Haupt-Komponenten (principal components) → PCAnalyse.

H4