Statistikübungen für WIN2 - Vertiefte Übungen zu Wahrscheinlichkeitstheorie

Prof H4. https://www.profh4.com

23. April 2025

1 Kolmogorov Axiome und seine Folgerungen

Die Kolmogorov Axiome bilden die Grundlage der Wahrscheinlichkeitstheorie und haben wesentliche Folgerungen für das Verständnis von Wahrscheinlichkeiten.

Übungen

1. Zeigen Sie, dass für zwei disjunkte Ereignisse A und B die Wahrscheinlichkeit ihrer Vereinigung $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ ist.

2. Beweisen Sie, dass für jedes Ereignis A die Wahrscheinlichkeit des Komplements $P(A^c) = 1 - P(A)$ beträgt.

3. Gegeben sind die Ereignisse A und B mit $P(A) = 0.3$ und $P(B) = 0.4$ sowie $P(A \cap B) = 0.1$. Bestimmen Sie $P(A \cup B)$.

4. Erklären Sie, warum die Wahrscheinlichkeit eines sicheren Ereignisses 1 ist.

5. Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit einer leeren Menge 0 ist.

6. Angenommen, die Wahrscheinlichkeit, dass es morgen regnet, beträgt 0.2, und die Wahrscheinlichkeit, dass es schneit, beträgt 0.1. Die Wahrscheinlichkeit, dass es sowohl regnet als auch schneit, ist 0.05. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass es entweder regnet oder schneit.

7. Beweisen Sie, dass für zwei beliebige Ereignisse A und B gilt: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

8. Verifizieren Sie, dass für drei Ereignisse A, B und C die Inklusions-Exklusions-Prinzip gilt: $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$.

9. Ein Würfel wird geworfen. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Augenzahl keine 6 ist.

10. Ein Experiment wird durchgeführt, bei dem ein Ereignis A mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.7 eintritt. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass A mindestens einmal in zwei unabhängigen Durchführungen des Experiments eintritt.

Übungen

1. Gegeben ist ein medizinischer Test mit einer Sensitivität von 95%. Wenn eine Person bekanntermaßen die Krankheit hat, wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Test positiv ausfällt?

2. In einer Urne befinden sich 3 rote, 5 schwarze und 2 grüne Kugeln. Eine rote Kugel wird gezogen und wieder zurückgelegt. Danach wird erneut eine Kugel gezogen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass auch diese Kugel rot ist.

3. In einem Kartenspiel sind 12 von 52 Karten Bildkarten (Könige, Damen, Buben). Wenn bekannt ist, dass eine gezogene Karte eine Bildkarte ist, berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass es sich um einen König handelt.

4. In einer Universität sind 60% der Studierenden weiblich. Von den weiblichen Studierenden studieren 30% Informatik. Wenn ein Informatikstudent zufällig ausgewählt wird, wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass dieser Student weiblich ist? (Berechnen Sie zuerst den Anteil der weiblichen Informatikstudierenden an der Gesamtstudentenschaft.)

5. Ein Alarmsystem wird durch Bewegung ausgelöst und funktioniert in 70% der Fälle korrekt. Wenn der Alarm ausgelöst wird, wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass tatsächlich eine Bewegung stattgefunden hat? (Annahme: Die Wahrscheinlichkeit einer zufälligen Bewegung an einem Tag beträgt 5%.)

6. Dunkle Wolken führen in 30% der Fälle zu Regen. Wenn an 40% der Tage dunkle Wolken beobachtet werden, wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass es regnet, gegeben, dass dunkle Wolken am Himmel sind?

7. Ein Student wählt zufällig eine Frage aus einem Pool, der zu 40% aus leichten, zu 50% aus mittleren und zu 10% aus schweren Fragen besteht. Wenn der Student eine leichte Frage richtig beantwortet, wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass es sich bei der gewählten Frage um eine leichte Frage handelt? (Gehen Sie davon aus, dass der Student eine leichte Frage mit einer Wahrscheinlichkeit von 90% richtig beantwortet.)

8. Angenommen, 70% der Autos in einer Stadt sind Dieselfahrzeuge, und die Wahrscheinlichkeit, dass ein Dieselauto eine Umweltprüfung nicht besteht, beträgt 5%. Wenn ein Auto die Prüfung nicht besteht, wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass es ein Dieselauto ist?

9. Ein Sicherheitssystem meldet zu 90% korrekt Sicherheitsverletzungen, gibt jedoch in 2% der Fälle falsche Alarme. Wenn ein Alarm ausgelöst wird, wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine tatsächliche Sicherheitsverletzung vorliegt?

10. In einem Krankenhaus beträgt das Verhältnis von Mädchen zu Jungen bei Geburten 55 zu 45. Wenn ein Paar zwei Kinder hat und das erste ein Mädchen ist, wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass auch das zweite Kind ein Mädchen ist? (Gehen Sie von der Unabhängigkeit der Geschlechter der Kinder aus.)

2 Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Bedingte Wahrscheinlichkeiten messen, wie wahrscheinlich ein Ereignis ist, unter der Voraussetzung, dass ein anderes Ereignis bereits eingetreten ist.

Übungen

1. Ein medizinischer Test hat eine Sensitivität von 95%. Wenn eine Person bekanntermaßen die Krankheit hat, wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Test positiv ausfällt?

2. In einer Urne sind 3 rote, 5 schwarze und 2 grüne Kugeln. Nachdem eine rote Kugel gezogen und zurückgelegt wurde, wird erneut gezogen. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass erneut eine rote Kugel gezogen wird?

3. In einem Kartenspiel (52 Karten) sind 12 Karten Bildkarten (Könige, Damen, Buben). Wenn eine gezogene Karte eine Bildkarte ist, wie wahrscheinlich ist es, dass sie ein König ist?
4. In einer Universität sind 60% der Studierenden weiblich. Von diesen studieren 30% Informatik. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig gewählter Informatikstudent weiblich ist?
5. Ein Bewegungsalarm funktioniert in 70% der Fälle korrekt. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass tatsächlich eine Bewegung stattgefunden hat, wenn der Alarm ausgelöst wird? (Zufällige Bewegung an einem Tag: 5%.)
6. Dunkle Wolken führen in 30% der Fälle zu Regen. Wenn an 40% der Tage dunkle Wolken beobachtet werden, wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass es regnet, gegeben, dass dunkle Wolken beobachtet wurden?
7. Ein Student wählt zufällig eine Prüfungsfrage (leicht: 40%, mittel: 50%, schwer: 10%). Er beantwortet leichte Fragen mit 90%-iger Wahrscheinlichkeit richtig. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig richtig beantwortete Frage leicht war?
8. 70% der Autos in einer Stadt sind Dieselautos. Dieselautos bestehen die Umweltprüfung mit 95%-iger Wahrscheinlichkeit. Wenn ein Auto die Prüfung nicht besteht, wie wahrscheinlich ist es, dass es ein Dieselauto ist?
9. Ein Sicherheitssystem meldet Sicherheitsverletzungen mit 90%-iger Wahrscheinlichkeit korrekt, gibt aber in 2% der Fälle falschen Alarm. Wenn ein Alarm ausgelöst wird, wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass tatsächlich eine Sicherheitsverletzung vorliegt?
10. In einem Krankenhaus ist das Verhältnis von Mädchen zu Jungen bei Geburten 55 zu 45. Wenn ein Paar zwei Kinder hat und das erste ein Mädchen ist, wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass auch das zweite Kind ein Mädchen ist? (Gehen Sie von Unabhängigkeit aus.)

3 Satz von Bayes

Der Satz von Bayes ist ein mächtiges Werkzeug in der Wahrscheinlichkeitsrechnung, um bedingte Wahrscheinlichkeiten zu aktualisieren, basierend auf neuen Informationen.

Übungen

1. Ein Krankheitsausbruch tritt bei 1 von 1000 Personen auf. Ein Test zum Nachweis der Krankheit ist zu 99% genau. Wenn eine Person positiv getestet wird, wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie tatsächlich die Krankheit hat?

2. In einer Stadt sind 30% der Tage regnerisch. An regnerischen Tagen kommt es zu 80% der Unfälle aufgrund von Regen. An Tagen ohne Regen passieren nur 20% der Unfälle. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass es an einem Tag, an dem ein Unfall passiert ist, geregnet hat?

3. Ein Sicherheitsscanner entdeckt 95% aller verbotenen Gegenstände, die durchgeführt werden. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Passagier versucht, einen verbotenen Gegenstand durchzuführen, liegt bei 0.1%. Wenn der Scanner einen verbotenen Gegenstand meldet, wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass tatsächlich ein verbotener Gegenstand vorliegt?

4. Angenommen, 5% der E-Mails sind Spam. Ein Spam-Filter erkennt 98% des Spams korrekt, markiert aber auch 1% der legitimen E-Mails fälschlicherweise als Spam. Wenn eine E-Mail als Spam markiert wird, wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie tatsächlich Spam ist?

5. In einer Bevölkerung sind 3% Träger eines bestimmten Gens. Ein genetischer Test hat eine Genauigkeit von 99% für das Erkennen dieses Gens. Wenn jemand positiv getestet wird, wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass er tatsächlich Träger des Gens ist?

6. Ein Flug wird mit einer Wahrscheinlichkeit von 20% wegen technischer Probleme verspätet. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Flug aufgrund von Wetterbedingungen verspätet ist, beträgt 30%. Wenn bekannt ist, dass ein Flug verspätet ist, wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Verspätung auf technische Probleme zurückzuführen ist?

7. Ein Student antwortet auf eine Multiple-Choice-Frage mit vier Antwortmöglichkeiten und rät zufällig. Die Wahrscheinlichkeit, dass die Antwort des Studenten richtig ist, beträgt 25%. Wenn der Student die Frage richtig beantwortet, wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass er geraten hat?

8. Ein Produktionsprozess hat eine Fehlerquote von 2%. Ein Qualitätskontrolltest erkennt 90% der Fehler. Wenn ein Produkt als fehlerhaft identifiziert

wird, wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass tatsächlich ein Fehler vorliegt?

9. In einer Bibliothek werden 10% der Bücher selten ausgeliehen. Ein Algorithmus identifiziert 85% dieser selten ausgeliehenen Bücher korrekt, aber er klassifiziert auch 5% der häufig ausgeliehenen Bücher fälschlicherweise als selten ausgeliehen. Wenn ein Buch als selten ausgeliehen klassifiziert wird, wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass es tatsächlich selten ausgeliehen wird?

10. Eine medizinische Studie zeigt, dass 1% der Bevölkerung eine seltene Krankheit hat. Ein Test, der diese Krankheit nachweist, hat eine Falsch-Positiv-Rate von 5% und eine Falsch-Negativ-Rate von 1%. Wenn eine Person positiv auf die Krankheit getestet wird, wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie tatsächlich die Krankheit hat?

4 Lösungen zu Kolmogorov Axiomen und seinen Folgerungen

Lösungen

1. Für zwei disjunkte Ereignisse A und B gilt, dass ihre Vereinigung $A \cup B$ keine gemeinsamen Ergebnisse hat. Nach dem ersten Kolmogorov Axiom, das die Additivität für disjunkte Ereignisse postuliert, gilt $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

2. Für jedes Ereignis A ergänzt das Komplement A^c das Ereignis A zu einem sicheren Ereignis, also gilt $P(A \cup A^c) = P(\Omega) = 1$. Da A und A^c disjunkt sind, folgt $P(A^c) = 1 - P(A)$.

3. Gegeben sind $P(A) = 0.3$, $P(B) = 0.4$, und $P(A \cap B) = 0.1$. Nach der Formel für die Vereinigung zweier Ereignisse:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.3 + 0.4 - 0.1 = 0.6.$$

4. Die Wahrscheinlichkeit eines sicheren Ereignisses, das immer eintritt, ist per Definition 1.

5. Die Wahrscheinlichkeit einer leeren Menge, die kein mögliches Ergebnis enthält, ist per Definition 0.

6. Die Wahrscheinlichkeit, dass es regnet oder schneit, kann mit der Formel für die Vereinigung zweier Ereignisse berechnet werden. Gegeben $P(\text{Regen}) = 0.2$, $P(\text{Schnee}) = 0.1$, $P(\text{Regen} \cap \text{Schnee}) = 0.05$:

   $$P(\text{Regen} \cup \text{Schnee}) = P(\text{Regen}) + P(\text{Schnee}) - P(\text{Regen} \cap \text{Schnee}) = 0.2 + 0.1 - 0.05 = 0.25.$$

7. Für zwei Ereignisse A und B, die Formel für die Vereinigung ist $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

8. Für drei Ereignisse A, B, und C, die Inklusions-Exklusions-Prinzip gilt wie folgt:

   $$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C).$$

9. Die Wahrscheinlichkeit, dass die Augenzahl eines Würfels keine 6 ist, beträgt $P(\text{keine } 6) = 1 - P(6) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.

10. Die Wahrscheinlichkeit, dass A mindestens einmal in zwei unabhängigen Durchführungen eintritt, wenn $P(A) = 0.7$, berechnet sich als:

    $$P(\text{mindestens einmal } A) = 1 - P(A^c)^2 = 1 - (1 - 0.7)^2 = 1 - 0.09 = 0.91.$$

5 Lösungen zu Bedingten Wahrscheinlichkeiten

Lösungen

1. Die Sensitivität des Tests gibt direkt die Wahrscheinlichkeit an, dass der Test positiv ist, gegeben die Person ist krank. Daher ist die Wahrscheinlichkeit:

   $$P(\text{Test positiv}|\text{Krank}) = 95\% = 0.95.$$

2. Die Wahrscheinlichkeit, dass die zweite Kugel rot ist, nachdem die erste rote Kugel zurückgelegt wurde:

   $$P(\text{rot}_2|\text{rot}_1) = \frac{3}{10}.$$

   Da die erste Kugel zurückgelegt wird, ändert sich die Gesamtkomposition der Urne nicht.

3. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine gezogene Bildkarte ein König ist:

$$P(\text{König}|\text{Bildkarte}) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}.$$

Es gibt 4 Könige in den 12 Bildkarten.

4. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Informatikstudent weiblich ist:

$$P(\text{weiblich}|\text{Informatik}) = \frac{P(\text{weiblich} \cap \text{Informatik})}{P(\text{Informatik})}.$$

Angenommen, 60% der Studierenden sind weiblich und 30% der weiblichen Studierenden studieren Informatik:

$$P(\text{weiblich} \cap \text{Informatik}) = 0.6 \times 0.3 = 0.18.$$

Wenn 10% aller Studierenden Informatik studieren (Annahme), dann ist:

$$P(\text{Informatik}) = 0.1,$$

$$P(\text{weiblich}|\text{Informatik}) = \frac{0.18}{0.1} = 1.8.$$

(Korrigieren Sie den Anteil der Informatikstudierenden, wenn andere Daten vorhanden sind.)

5. Die Wahrscheinlichkeit einer echten Bewegung, wenn der Alarm ertönt:

$$P(\text{Bewegung}|\text{Alarm}) = \frac{P(\text{Alarm}|\text{Bewegung}) \times P(\text{Bewegung})}{P(\text{Alarm})}.$$

Gegeben $P(\text{Alarm}|\text{Bewegung}) = 0.7$ und $P(\text{Bewegung}) = 0.05$:

$$P(\text{Alarm}) = P(\text{Alarm}|\text{Bewegung}) \times P(\text{Bewegung}) + P(\text{Alarm}|\text{Bewegung}^c) \times P(\text{Bewegung}^c)$$

$$P(\text{Alarm}) = 0.7 \times 0.05 + 0.3 \times 0.95 = 0.3225.$$

$$P(\text{Bewegung}|\text{Alarm}) = \frac{0.7 \times 0.05}{0.3225} \approx 0.1085.$$

6. Die Wahrscheinlichkeit, dass es regnet, gegeben dunkle Wolken sind am Himmel:

$$P(\text{Regen}|\text{dunkle Wolken}) = \frac{P(\text{dunkle Wolken}|\text{Regen}) \times P(\text{Regen})}{P(\text{dunkle Wolken})}.$$

$$P(\text{Regen}|\text{dunkle Wolken}) = \frac{0.3 \times 0.3}{0.4} = 0.225.$$

7. Wenn ein Student eine leichte Frage richtig beantwortet:

$$P(\text{leichte Frage}|\text{richtige Antwort}) = \frac{P(\text{richtige Antwort}|\text{leichte Frage}) \times P(\text{leichte Frage})}{P(\text{richtige Antwort})}.$$

$$P(\text{richtige Antwort}) = P(\text{richtige Antwort}|\text{leichte Frage}) \times P(\text{leichte Frage})$$

$$+P(\text{richtige Antwort}|\text{mittlere Frage}) \times P(\text{mittlere Frage})$$

$$+P(\text{richtige Antwort}|\text{schwere Frage}) \times P(\text{schwere Frage}).$$

Mit Annahmen für mittlere (50%) und schwere Fragen (10%), wenn er mit 90%, 50%, und 30% Wahrscheinlichkeit richtig antwortet:

$$P(\text{richtige Antwort}) = 0.9 \times 0.4 + 0.5 \times 0.5 + 0.3 \times 0.1 = 0.36 + 0.25 + 0.03 = 0.64.$$

$$P(\text{leichte Frage}|\text{richtige Antwort}) = \frac{0.9 \times 0.4}{0.64} \approx 0.5625.$$

8. Wenn ein zufällig ausgewähltes Auto die Umweltprüfung nicht besteht, und es ist bekannt, dass 70% der Autos Diesel sind:

$$P(\text{Diesel}|\text{nicht bestanden}) = \frac{P(\text{nicht bestanden}|\text{Diesel}) \times P(\text{Diesel})}{P(\text{nicht bestanden})}.$$

Annahme für das Nichtbestehen von Benzin (3%) und Elektro (1%):

$$P(\text{nicht bestanden}) = 0.05 \times 0.7 + 0.03 \times 0.2 + 0.01 \times 0.1 = 0.035 + 0.006 + 0.001 = 0.042.$$

$$P(\text{Diesel}|\text{nicht bestanden}) = \frac{0.05 \times 0.7}{0.042} \approx 0.8333.$$

9. Die Wahrscheinlichkeit einer tatsächlichen Sicherheitsverletzung, wenn ein Alarm ausgelöst wird:

$$P(\text{Sicherheitsverletzung}|\text{Alarm}) = \frac{P(\text{Alarm}|\text{Sicherheitsverletzung}) \times P(\text{Sicherheitsverletzu}}{P(\text{Alarm})}$$

$$P(\text{Alarm}) = P(\text{Alarm}|\text{Sicherheitsverletzung}) \times P(\text{Sicherheitsverletzung})$$

$$+P(\text{Alarm}|\text{Sicherheitsverletzung}^c) \times P(\text{Sicherheitsverletzung}^c).$$

Mit Annahmen, dass die Sicherheitsverletzung an einem Tag bei 5% liegt:

$$P(\text{Alarm}) = 0.9 \times 0.05 + 0.02 \times 0.95 = 0.045 + 0.019 = 0.064.$$

$$P(\text{Sicherheitsverletzung}|\text{Alarm}) = \frac{0.9 \times 0.05}{0.064} \approx 0.7031.$$

10. Die Wahrscheinlichkeit, dass beide Kinder Mädchen sind, gegeben das erste Kind ist ein Mädchen:

$$P(\text{beide Mädchen}|\text{erstes Kind Mädchen}) = P(\text{Mädchen}) = 0.55.$$

6 Lösungen zum Satz von Bayes

Lösungen

1. **Krankheitsdiagnose:**

$$P(\text{Krank}|\text{Positiv}) = \frac{P(\text{Positiv}|\text{Krank}) \times P(\text{Krank})}{P(\text{Positiv})}$$

$$P(\text{Positiv}) = P(\text{Positiv}|\text{Krank}) \times P(\text{Krank}) + P(\text{Positiv}|\text{keine Krankheit})$$
$$\times(1 - P(\text{Krank}))$$
$$= 0.99 \times 0.001 + 0.01 \times 0.999 = 0.01098$$

$$P(\text{Krank}|\text{Positiv}) = \frac{0.99 \times 0.001}{0.01098} \approx 0.09016$$

2. **Regen und Unfälle:**

$$P(\text{Regen}|\text{Unfall}) = \frac{P(\text{Unfall}|\text{Regen}) \times P(\text{Regen})}{P(\text{Unfall})}$$
$$P(\text{Unfall}) = 0.8 \times 0.3 + 0.2 \times 0.7 = 0.38$$
$$P(\text{Regen}|\text{Unfall}) = \frac{0.8 \times 0.3}{0.38} \approx 0.6316$$

3. **Sicherheitsscanner:**

$$P(\text{Verb. Gegenstand}|\text{Alarm}) = \frac{P(\text{Alarm}|\text{Verb. Gegenstand}) \times P(\text{Verb. Gegenstand})}{P(\text{Alarm})}$$
$$P(\text{Alarm}) = 0.95 \times 0.001 + 0.01 \times 0.999 = 0.01995$$
$$P(\text{Verbotener Gegenstand}|\text{Alarm}) = \frac{0.95 \times 0.001}{0.01995} \approx 0.0476$$

4. **Spam-Filter:**

$$P(\text{Spam}|\text{Spam markiert}) = \frac{P(\text{Spam markiert}|\text{Spam}) \times P(\text{Spam})}{P(\text{Spam markiert})}$$
$$P(\text{Spam markiert}) = 0.98 \times 0.05 + 0.01 \times 0.95 = 0.0595$$
$$P(\text{Spam}|\text{Spam markiert}) = \frac{0.98 \times 0.05}{0.0595} \approx 0.8235$$

5. **Genetischer Test:**

$$P(\text{Träger}|\text{Positiv}) = \frac{P(\text{Positiv}|\text{Träger}) \times P(\text{Träger})}{P(\text{Positiv})}$$

$$P(\text{Positiv}) = 0.99 \times 0.03 + 0.01 \times 0.97 = 0.0396$$

$$P(\text{Träger}|\text{Positiv}) = \frac{0.99 \times 0.03}{0.0396} \approx 0.75$$

6. **Flugverspätungen:**

$$\begin{aligned} P(\text{Technisch}|\text{Verspätet}) &= \frac{P(\text{Technisch})}{P(\text{Verspätet})} \\ &= \frac{0.2}{0.5} = 0.4 \quad \text{(assuming independent events)} \end{aligned}$$

7. **Multiple-Choice-Frage:**

$$\begin{aligned} P(\text{Geraten}|\text{Richtig}) &= \frac{P(\text{Richtig}|\text{Geraten}) \times P(\text{Geraten})}{P(\text{Richtig})} \\ &= \frac{0.25 \times 1}{0.25} = 1 \end{aligned}$$

8. **Produktfehler:**

$$P(\text{Fehler}|\text{Identifiziert}) = \frac{P(\text{Identifiziert}|\text{Fehler}) \times P(\text{Fehler})}{P(\text{Identifiziert})}$$

$$P(\text{Identifiziert}) = 0.9 \times 0.02 + 0.1 \times 0.98 = 0.116$$

$$P(\text{Fehler}|\text{Identifiziert}) = \frac{0.9 \times 0.02}{0.116} \approx 0.1552$$

9. **Selten ausgeliehenes Buch:**

$$P(\text{Selten}|\text{Klassifiziert}) = \frac{P(\text{Klassifiziert}|\text{Selten}) \times P(\text{Selten})}{P(\text{Klassifiziert})}$$

$$P(\text{Klassifiziert}) = 0.85 \times 0.1 + 0.15 \times 0.9 = 0.22$$

$$P(\text{Selten}|\text{Klassifiziert}) = \frac{0.85 \times 0.1}{0.22} \approx 0.3864$$

10. **Seltene Krankheit:**

$$P(\text{Krank}|\text{Positiv}) = \frac{P(\text{Positiv}|\text{Krank}) \times P(\text{Krank})}{P(\text{Positiv})},$$

$$P(\text{Positiv}) = P(\text{Positiv}|\text{Krank}) \times P(\text{Krank}) + P(\text{Positiv}|\text{keine Krankheit}) \times (1 - P(\text{Krank})),$$

$$= 0.99 \times 0.01 + 0.05 \times 0.99 = 0.0594,$$

$$P(\text{Krank}|\text{Positiv}) = \frac{0.99 \times 0.01}{0.0594} \approx 0.1667.$$