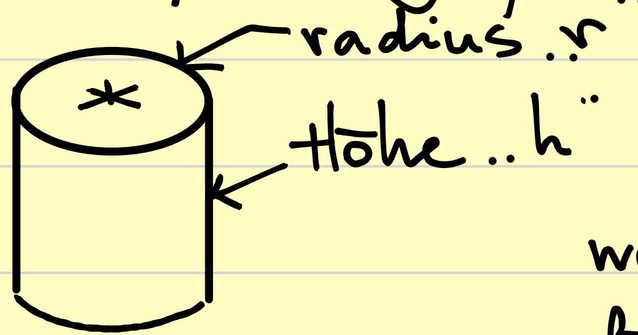
Anwendungsbeispiele

1. Verpackungsoptimierung



Oberfläche der Dose solle optimiert werden, indem wir das Radius finden für eine minimale Oberfläche.

$$O(r,h) = 2\cdot\pi r^2 + 2\pi r\cdot h \qquad r,h > 0$$

$$V = \pi r^2\cdot h \rightarrow h = \frac{V}{\pi r^2}$$

$$O(r) = 2\pi r^2 + \cancel{2\pi r}\cdot\frac{V}{\cancel{\pi r^2}} = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r} \qquad r > 0$$

$$O'(r_0) = \left.\frac{dO}{dr}\right|_{r_0} = 4\pi r_0 - \frac{2V}{r_0^2} = 0 \rightarrow 4\pi r_0 = \frac{2V}{r_0^2} \rightarrow$$

Extrem

$$r_0^3 = \frac{2V}{4\pi} \rightarrow r_0 = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$$

$$O''(r_0) = \left.\frac{d^2O}{dr^2}\right|_{r_0} = 4\pi + \frac{4V}{r_0^3} > 0 \rightarrow r_0 \text{ ist ein MINIMUM.}$$

$r_0 > 0$

$$\boxed{r_0 = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}} \longleftrightarrow r_0^3 = \frac{V}{2\pi} = \frac{\pi r_0^2\cdot h_0}{2\pi}$$

$$\rightarrow 2\pi r_0^3 \cdot \frac{1}{\pi r_0^2} = h_0 \rightarrow 2r_0 = h_0$$

. Ein Zylinder mit Durchmesser $(2r_0)$ gleich Höhe (h_0), hat die minimale Oberfläche.

2. Preisfestlegung beim Monopolist.

Konzert. Die Funktion $a(x)$ beschreibt die Anzahl Besucher als Funktion vom Ticketpreis (x).

$$a(x) = \frac{k}{bx^2 + c} \qquad k, b, c \text{ sind Konstante} > 0.$$

1) Wie viele Besucher kommen zum Konzert, wenn $x_0 = 0$.

$a(x_0) = \frac{k}{c}$; unser Erlös ist NULL.

Erlös = Preis · Menge

2) Geben Sie die Erlösfunktionsgleichung als Funktion von x (Preis).

$$E(x) = x \cdot a(x) = \frac{k \cdot x}{bx^2 + c}$$

3) Bei welchem Eintrittspreis x_0, wird der Erlös maximiert?

$$\mathcal{E}'(x_0) = \frac{d\mathcal{E}}{dx}\Big|_{x=x_0} = \frac{k\cdot(bx_0^2+c) - 2bx_0\cdot kx_0}{(bx_0^2+c)^2} = 0$$

MAX.

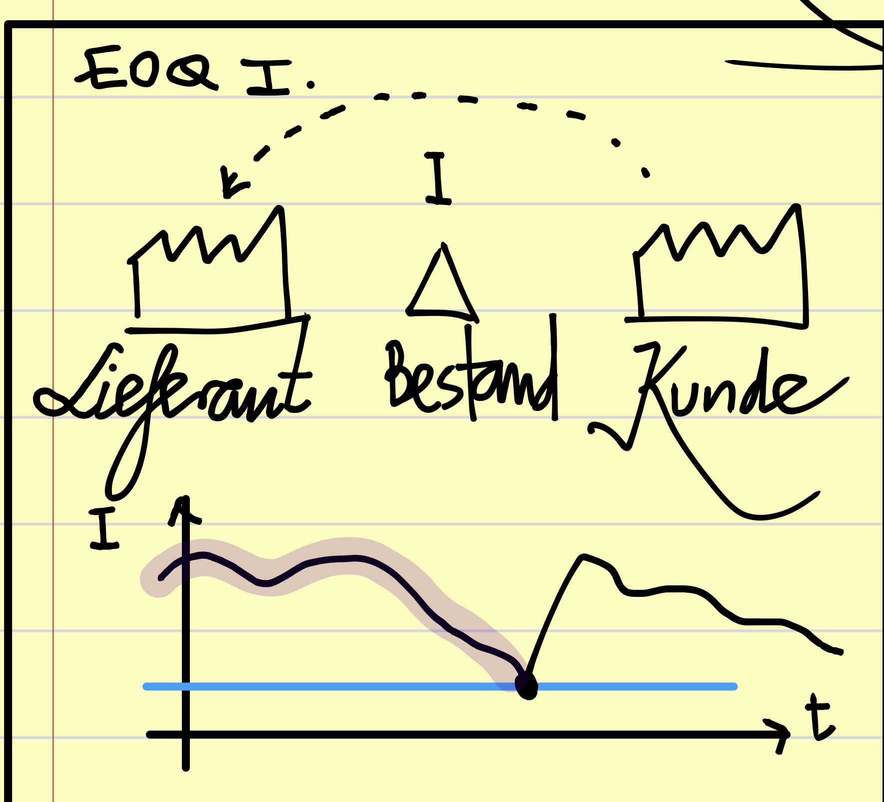
$$k\cdot(bx_0^2+c) = 2bkx_0^2 \rightarrow (kb-2kb)x_0^2 = -ck$$

$$-kbx_0^2 = -ck \rightarrow x_0 = \sqrt{\frac{c}{b}}$$

$$\mathcal{E}''(x_0) < 0 \quad \text{(to do)}$$

$$\mathcal{E}\left(x_0=\sqrt{\frac{c}{b}}\right) = \frac{k\cdot\sqrt{\frac{c}{b}}}{b\cdot\frac{c}{b}+c} = \frac{k\sqrt{\frac{c}{b}}}{2c} = \frac{k}{2}\sqrt{\frac{1}{cb}}$$

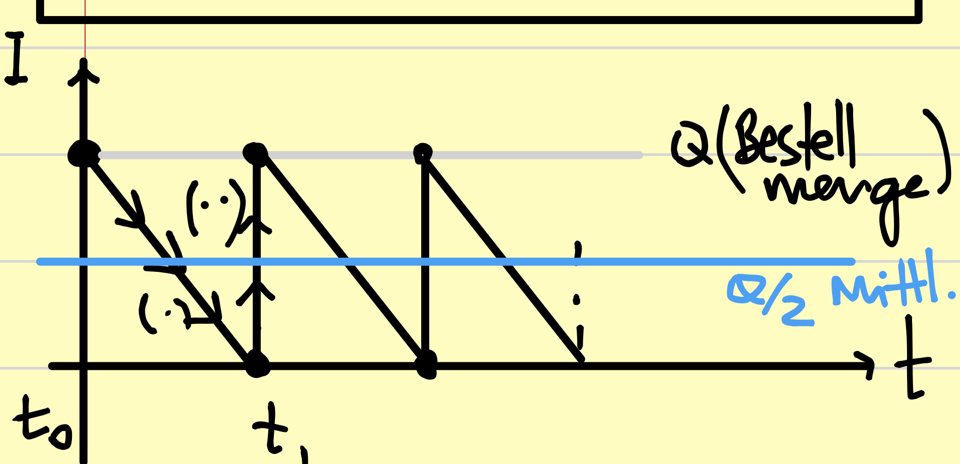
3. Economic Order Quantity (EOQ) (OPTIMALE BESTELLMENGE)



Hypothese: sofortige Lieferung und Produktion mit einem konstanten Kundenbedarf.

Parameter:

- D. Demand (Kundenbedarf) [Stück/Zeit]
- C. Kosten (Kosten pro Stück) [€/St]
- A. Umrüstkosten [€]
- h. Bestandshaltekosten [€/St · Zeit]



(·) Der Bestand wird linear abgebraucht, weil der Kundenbedarf konstant ist, und somit die Steigung konstant bleibt.

(··) Es hat $(t_1 - t_0)$ Zeit gedauert, bis ich den Bestand Q aufgebraucht habe & da die Lieferung & Produktion ohne Verzögerung stattfinden, ist die Befüllung sofortig.

$$t_1 - t_0 = \frac{Q}{D}$$

Berechnung der optimalen Bestellmenge Q^* aus Kostensicht. Die Kostenfunktion Y wird als Funktion von Q dargestellt.

$$\boxed{Y(Q) = \text{Bestandskosten} + \text{Umrüstkosten} + \text{Produktionskosten}}$$

$$[€/\text{Zeit}] = h \cdot \frac{Q}{2} + A \cdot \frac{1}{\frac{Q}{D}} + c \cdot D$$

h: Bestandshaltekosten [€/Stk.Zeit]

$\frac{Q}{2}$: Mittlerer Bestand [Stk]

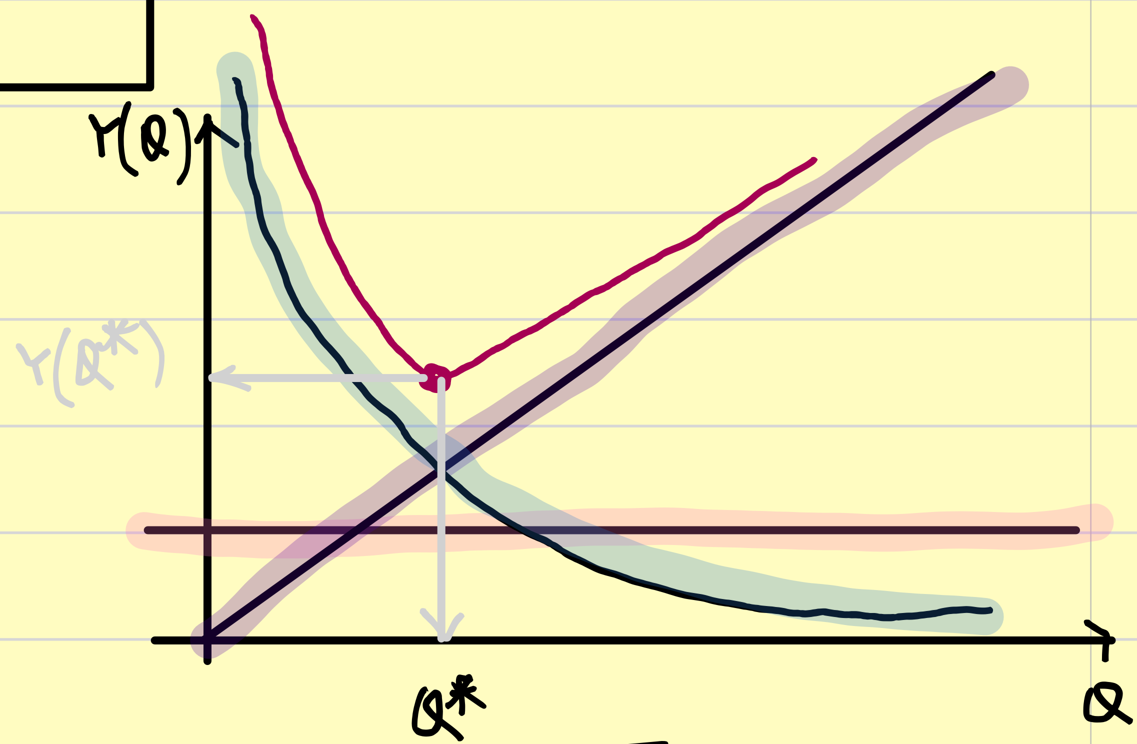
A: Umrüstkosten [€]

$\frac{1}{\frac{Q}{D}}$: wie oft ich Bestelle? [1/Zeit]

c: Kosten pro Stück [€/Stk]

D: Bedarf [Stk/Zeit]

$$\boxed{Y(Q) = h\frac{Q}{2} + A\frac{D}{Q} + cD}$$



$$\left.\frac{dY}{dQ}\right|_{Q=Q^*} = 0 = \frac{h}{2} - \frac{AD}{Q^{*2}} + 0 \longrightarrow Q^* = \sqrt{\frac{2AD}{h}}$$

$$\left.\frac{d^2Y}{dQ}\right|_{Q=Q^*} = \frac{2AD}{Q^{*3}} > 0 \longrightarrow \text{MIN.}$$

$\uparrow A, D, Q^* > 0$

$$Y(Q^*) = h\frac{Q^*}{2} + A\frac{D}{Q^*} + cD = \frac{h}{2}\cdot\sqrt{\frac{2AD}{h}} + A\cdot\frac{D}{\sqrt{\frac{2AD}{h}}} + cD =$$

$$= \sqrt{2ADh} + cD$$