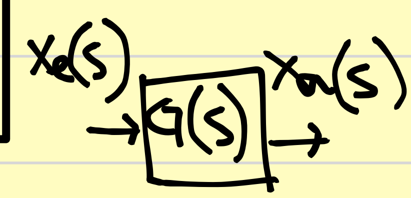
20231017_Regelungstechnik_BEL4

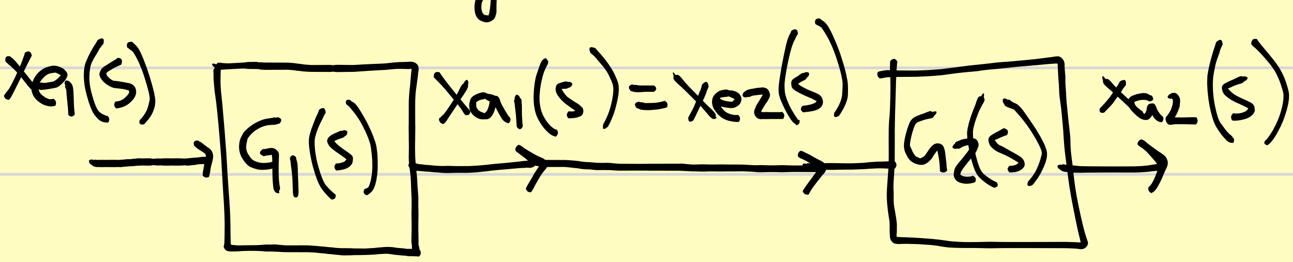
Verbindungsmöglichkeiten von Rkgliedern

> Ist die Übertragungsfunktion $G(s)$ bekannt, so gibt diese das Verhältnis der Laplace-transformierten Ausgangsgröße $x_a(s)$ zur Laplace-transf. Eingangsgröße $x_e(s)$.

$\rightarrow x_a(s) = G(s) \cdot x_e(s)$



a) Reihenschaltung

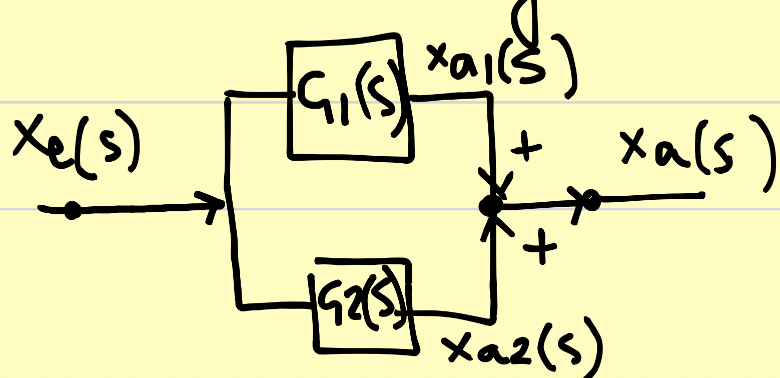


REIHENSCHALTUNG

$$\left.\begin{array}{l} x_{a1}(s) = G_1(s) \cdot x_{e1}(s) \\ x_{a2}(s) = G_2(s) \cdot x_{e2}(s) \\ x_{a1}(s) = x_{e2}(s) \end{array}\right\} \rightarrow x_{a2}(s) = G_2(s) \cdot \overbrace{G_1(s) \cdot x_{e1}(s)}^{x_{a1}(s) = x_{e2}(s)}$$

$$\boxed{G_{Reihenschaltung}(s) = \frac{x_{a2}(s)}{x_{e1}(s)} = G_1(s) \cdot G_2(s)}$$

b) Parallelschaltung



PARALLELSCHALTUNG

$$\left.\begin{aligned} x_a(s) &= x_{a1}(s) + x_{a2}(s) \\ x_{a1}(s) &= G_1(s)\cdot x_e(s) \\ x_{a2}(s) &= G_2(s)\cdot x_e(s) \end{aligned}\right\} \; x_a(s) = x_e(s)\cdot G_1(s) + x_e(s)\cdot G_2(s) = x_e(s)\cdot\left(G_1(s)+G_2(s)\right)$$

$$\boxed{G(s) = \frac{x_a(s)}{x_e(s)} = G_1(s)+G_2(s)}$$

Übung. Bitte berechnen Sie $u_a(t)$, wenn die Eingangsfunktion $u_e(t)=k$, und die Reihengeschaltete Systeme 1 & 2, folgende Übertragungsfunktionen haben: $G_1(s) = \frac{s+3}{s+1}$; $G_2(s) = \frac{1}{s+2}$.

Lösung: Wenn die Eingangsfunktion $u_e(t)=k$ und die Gesamtsystem Übertragungsfunktion ist

$$G(s) = G_1(s)\cdot G_2(s) = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)}.$$

Die Laplace-Transformierte Eingangsfunktion ist:

$$u_e(s) = \mathcal{L}\left[u_e(t)\right] = \mathcal{L}\left[k\right] = \frac{k}{s}$$

Es folgt dann: $u_a(s) = G(s)\cdot u_e(s) = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)}\cdot\frac{k}{s}$

Partialbruchzerlegung:

$$u_a(s) = \frac{k(s+3)}{(s+1)(s+2)s} = \frac{A}{s} + \frac{B}{(s+1)} + \frac{C}{(s+2)}$$

$$k(s+3) = A(s+1)(s+2) + B(s)(s+2) + C(s)(s+1)$$

$s=0 \rightarrow k \cdot (0+3) = A(0+1)(0+2) + 0 + 0 \rightarrow$

$3k = A \cdot 2 \rightarrow A = \frac{3}{2}k$

$s=-1 \rightarrow k(-1+3) = 0 + B(-1)(-1+2) + 0 \rightarrow$

$2k = -B \rightarrow B = -2k$

$s=-2 \rightarrow k(-2+3) = 0 + 0 + C(-2)(-2+1) \rightarrow$

$k = 2C \rightarrow C = \frac{k}{2}$

$$u_a(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+2} = \frac{3}{2}k \cdot \frac{1}{s} + \frac{-2k}{s+1} + \frac{k}{2} \cdot \frac{1}{s+2}$$

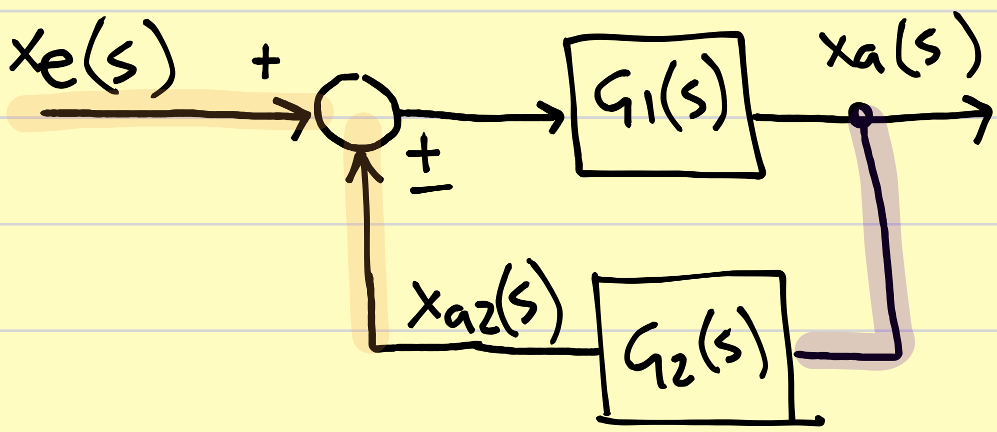
Nun, wenden wir die inverse-Laplace-Transformation an, um $u_a(t)$ zu erhalten:

$$u_a(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3k}{2} \cdot \frac{1}{s}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-2k}{s+1}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{k}{2} \cdot \frac{1}{s+2}\right]$$

$$\boxed{u_a(t) = \frac{3k}{2} - 2k\, e^{-t} + \frac{k}{2} e^{-2t}}$$

Übung. bitte die obere Aufgabe mit Parallelschaltung der Glieder lösen.

c) Rückführungschaltung



Rückkopplungsschaltung

$$xa(s) = G_1(s) \cdot \left[xe(s) \pm xa_2(s) \right]$$

$$xa_2(s) = G_2(s) \cdot xa(s)$$

wir setzen $xa_2(s)$ ein...

$$xa(s) = G_1(s) \cdot \left[xe(s) \pm \left(G_2(s) \cdot xa(s) \right) \right] \rightarrow$$

$$\rightarrow xa(s) = G_1(s) \cdot xe(s) \pm G_1(s) G_2(s) \cdot xa(s) \rightarrow$$

$$\rightarrow xa(s) \mp G_1(s) G_2(s) xa(s) = G_1(s) \cdot xe(s) \rightarrow$$

$$\rightarrow xa(s) \left[1 \mp G_1(s) G_2(s) \right] = G_1(s) \cdot xe(s)$$

$$\boxed{G(s) = \frac{xa(s)}{xe(s)} = \frac{G_1(s)}{1 \mp G_1(s) G_2(s)}}$$

Rückkopplungsschaltung

Negatives Vorzeichen = Mitkopplung

$\boxed{\text{Positives Vorzeichen} \doteq \text{Gegenkopplung}}$

Übung. die oberen Gliedern in Rückkopplungsschaltung setzen und $u_a(t)$ berechnen. (Gegenkopplung)

Beispiele/Klassifizierung von Regelkreisen mit/nach Übertragungsfunktion.

Übertragungsfunktion: $G(s) = \dfrac{u_a(s)}{u_e(s)}$

1. PROPORTIONALER REGELKREIS. (P)

$$G(s) = K$$

2. INTEGRALER REGELKREIS. (I)

$$G(s) = \frac{K}{s}$$

3. DIFFERENZIALER REGELKREIS. (D)

$$G(s) = K \cdot s$$

Beispiel. Parallelschaltung von P und I Regelkreis gliedern: $G_P(s) = 3$ $\quad G_I(s) = \dfrac{2}{s+3}$ (PI)

$$G(s) = G_P(s) + G_I(s) = 3 + \frac{2}{s+3} = \frac{3s+11}{s+3}$$

$$u_e(t) = K \rightarrow u_a(s) = \frac{K}{s} \cdot \frac{3s+11}{s+3} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+3}$$

$$u_e(s) = \frac{K}{s}$$

Multipliziere links und rechts mal " $s(s+3)$ " :

$$K \cdot (3s+11) = A(s+3) + B \cdot s$$

$$s = -3 \rightarrow K(-9+11) = -3B \rightarrow B = \frac{-2K}{3}$$

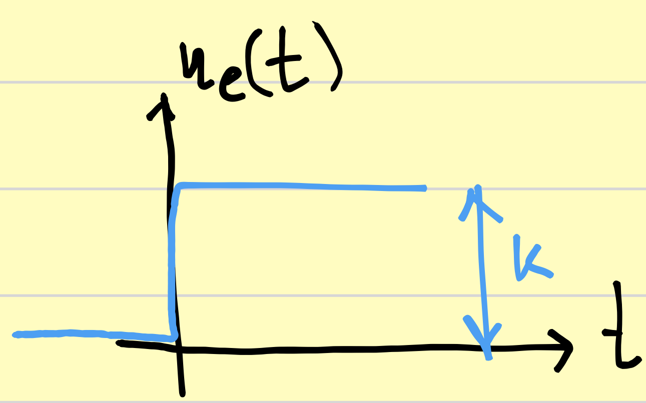
$$s = 0 \rightarrow K(11) = 3A \rightarrow A = \frac{11}{3}K$$

$$u_a(s) = \frac{11}{3}K \cdot \frac{1}{s} - \frac{2K}{3} \cdot \frac{1}{s+3}$$

$$u_a(t) = \frac{11}{3}K - \frac{2K}{3} e^{-3t}$$

Sprungfunktion

$$u_e(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ K & t > 0 \end{cases}$$



4. PROPORTIONAL-INTEGRALER REGELKREIS

Parallelschaltung von P und I. (PI)

$$\boxed{G(s) = K_P + \frac{K_I}{s}}$$

5. PROPORTIONAL-DIFFERENTIALER REGELKREIS (PD)

Parallelschaltung von P und D.

$$G(s) = K_P + K_D \cdot s$$

Beispiel. $u_e(t) = K$ bitte, bei PD Schaltung $G_1(s) = 5$; $G_2(s) = 3s$, $u_a(t)$ ermitteln.

$$G(s) = G_1(s) + G_2(s) = 5 + 3s$$

$$U_a(s) = U_e(s) \cdot G(s) = \frac{K}{s} \cdot (5 + 3s) = \left(\frac{5}{s} + 3\right) K \longrightarrow$$

$$\boxed{u_e(t) = K \rightarrow \mathcal{L}(u_e(t)) = \frac{K}{s} = \int_0^\infty e^{-st} u_e(t)\, dt}$$

$$u_a(t) = \mathcal{L}^{-1}(U_a(s)) = \left[5 + 3\delta(t)\right] K$$

6. PROPORTIONAL-INTEGRAL-DIFFERENTIALER REGELKREIS (PID)

Parallelschaltung von P + I + D.

$$G(s) = K_p + \frac{K_I}{s} + K_D \cdot s$$

Beispiel. $u_e(t) = K$ $\quad G_P = 3$, $G_I = \frac{2}{s}$, $G_D = 5s$

bitte $u_a(t)$ ermitteln...

Parallelschaltung PID:

$$u_a(s) = \left(3 + \frac{2}{s} + 5s\right) \cdot \frac{K}{s} = \frac{3K}{s} + \frac{2K}{s^2} + 5K$$

$$\boxed{u_a(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(u_a(s)\right) = 3K + 2K \cdot t + 5K\,\delta(t)}$$

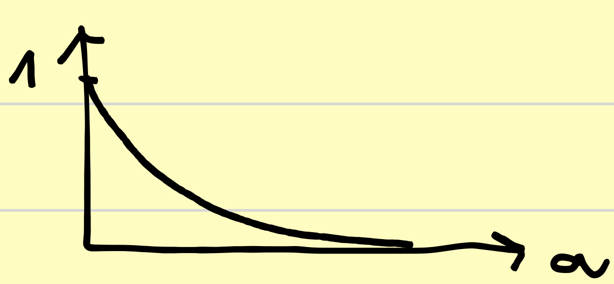
7. Erweitetes PID Regelkreis mit Filter.

$$G(s) = \left(K_p + \frac{K_I}{s} + K_D \cdot s\right) \cdot \frac{1}{1 + \tau s}$$

Reihenschaltung einer Dämpfung (Filter) und ein PID-RK.

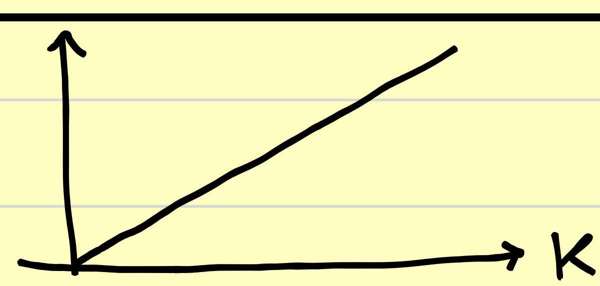
$$f(a) = \frac{1}{1 + a}$$

a = Dämpfung



$$f(K) = \frac{K}{1 + a}$$

K = Verstärkung



Beispiel: $u_e(t) = K$, $G_1(s) = 4$, $G_2(s) = \frac{3}{s}$, $G_3(s) = 2s$

PID + Filter (Reihenschaltung) $G_{FILTER} = \frac{1}{1+10s}$

$$u_a(s) = G(s)\cdot u_e(s) = \left(4 + \frac{3}{s} + 2s\right)\cdot \frac{1}{1+10s}\cdot\frac{k}{s} =$$

$$= \frac{A}{s^2} + \frac{B}{1+10s}$$

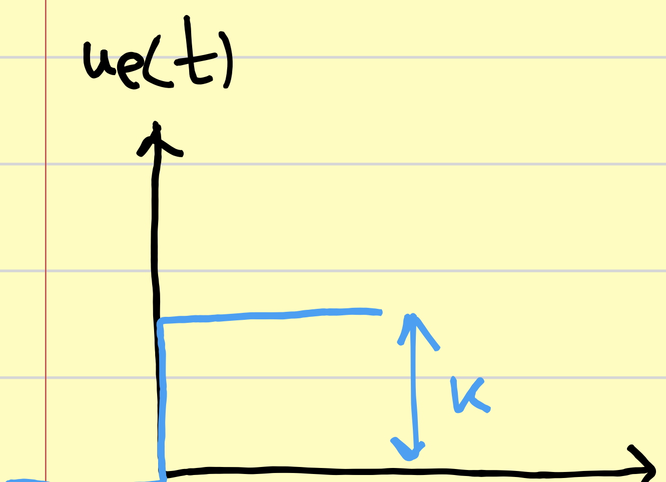
$$(4s + 3 + 2s^2)\,k = A(1+10s) + Bs^2$$

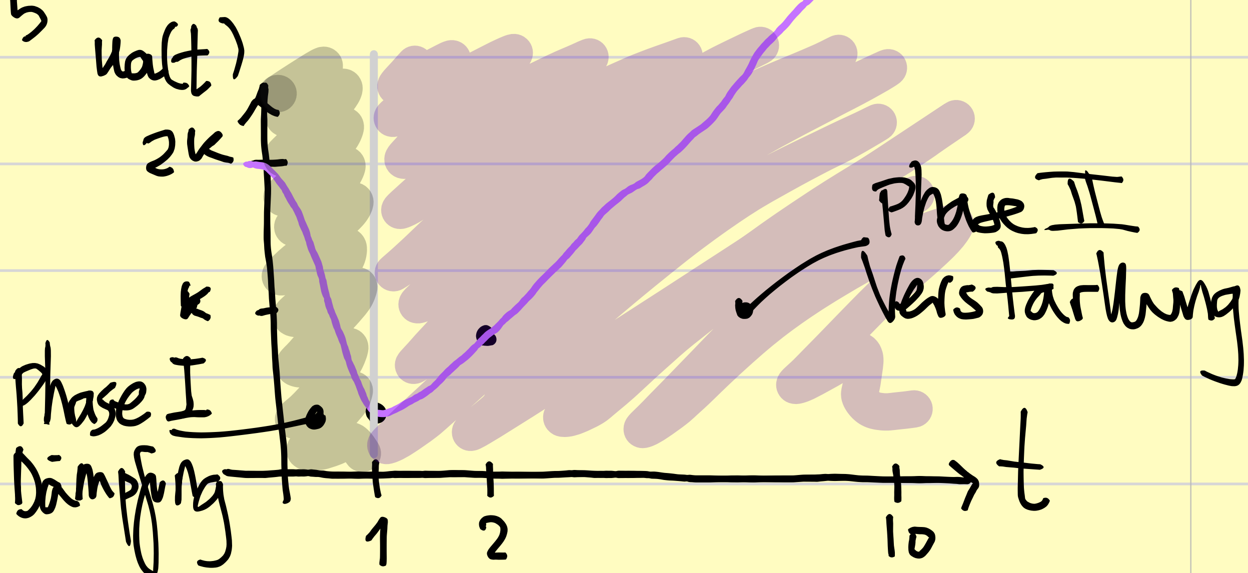
$s^2 \rightarrow 2K = B$

$s^1 \rightarrow 10A = 4K \rightarrow A = \frac{2}{5}k$

$$u_a(s) = \frac{2}{5}k\cdot\frac{1}{s^2} + \frac{2k}{1+10s}$$

$$u_a(t) = \frac{2}{5}k\,t + 2k\,e^{-10t}$$





$u_a(0) = 2K$ $\quad u_a(1) = \frac{2}{5}k + \frac{2k}{e^{10}} = 2k\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{e^{10}}\right)$

$$u_a(2) = \frac{2}{5}k \cdot 2 + \cancel{\frac{2k}{e^{20}}}$$

$$u_a(10) = \frac{2}{5}k \cdot 10 + \cancel{\frac{2k}{e^{100}}}$$