20231010_BEL4_Regelungstechnik

Lösung mittels Laplace-Transformation . Übertragungsfunktion

Bei linearen Systemen ist es vorteilhaft, die Lösung von DLG nicht im Zeitbereich, sondern mittels Laplace-Transformation vorzunehmen.

Gemäß der Laplace-Transformation erhalt man für die einzelne DGL-Glieder unter der Voraussetzung, dass die Anfangsbedingung NULL ist, folgende Laplace-Transformierten:

$$L[x(t)] = x(s)$$

$$L[\dot{x}(t)] = s \cdot x(s)$$

$$L[\ddot{x}(t)] = s^2 \cdot x(s)$$

...

$$L\left[\int x(t)\,dt\right] = \frac{1}{s} \cdot x(s)$$

Zum Beispiel aus der Gleichung (siehe oben) im Zeitbereich

$$T_1 \dot{x}_a(t) + x_a(t) = K\, x_e(t)$$

wird ...

$$T_1\, s\, x_a(s) + x_a(s) = K\, x_e(s)$$

Somit:

$$(1 + sT_1)\, x_a(s) = K\, x_e(s)$$

Definition. Allgemein ist das Verhältnis der Laplace-Transformierten Ausgangsgröße $x_a(s)$, zur Laplace-Transformierten Eingangsgröße $x_e(s)$ als $G(s)$ oder ÜBERTRAGUNGSFUNKTION definiert.

$$\boxed{G(s) = \frac{x_a(s)}{x_e(s)}}$$

In unserem Beispiel: $G(s) = \frac{x_a(s)}{x_e(s)} = \frac{K}{1+sT_1}$

Die Sprungfunktion $x_e(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ x_{e0} & t > 0 \end{cases}$

$$L[x_e(t)] = x_e(s) \overset{(*)}{=} \dots = \frac{1}{s} x_{e0}$$

(*) $L[x(t)] = \int_0^\infty e^{-st} x(t)\, dt$, wenn $x(t) = x_{e0}$ wird dies zu: $L[x_{e0}] = \int_0^\infty e^{-st} \cdot x_{e0}\, dt = x_{e0} \int_0^\infty e^{-st}\, dt =$

$$= x_{e0} \cdot \frac{1}{s}$$

Aus dem Beispiel $\left.\begin{array}{l} \frac{x_a(s)}{x_e(s)} = \frac{K}{1+sT_1} \\ x_e(s) = \frac{x_{e0}}{s} \end{array}\right\}$

$$x_a(s) = \frac{K}{1+sT_1} \cdot x_e(s) = \frac{K}{1+sT_1} \cdot \frac{1}{s} \cdot x_{e0}$$

Aus der letzten Beziehung sind die Polstellen, d.h. die Nullstellen des Nenners

$$\left.\begin{array}{l} 1+sT_1 = 0 \\ s = 0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} s_1 = 0 \\ s_2 = -\frac{1}{T_1} \end{array}$$

Die inverse Laplace Transformation

$$x_a(s) = \frac{K}{s} - \frac{KT_1}{1+sT_1} \quad (**)$$

- Die inverse Laplace-Transformation von $\frac{K}{s}$ ist K
- Die inverse Laplace-Transformation von $\frac{-KT_1}{1+sT_1}$ ist $-KT_1 e^{-t/T_1}$,

Also $\boxed{x_a(t) = K - KT_1 e^{-t/T_1} = K\left(1 - T_1 e^{-t/T_1}\right)}$

(**)

Eine alternative Erklärung...

Schritt 1. Wir beginnen damit, den Ausdruck zu zerlegen:

$$x_a(s) = \frac{K}{1+sT_1} \cdot \frac{1}{s} \cdot x_{e0} = \frac{A}{s} + \frac{B}{1+sT_1}$$

Multiplizieren wir mit $s(1+sT_1)$ ...

$$K = A(1+sT_1) + Bs$$

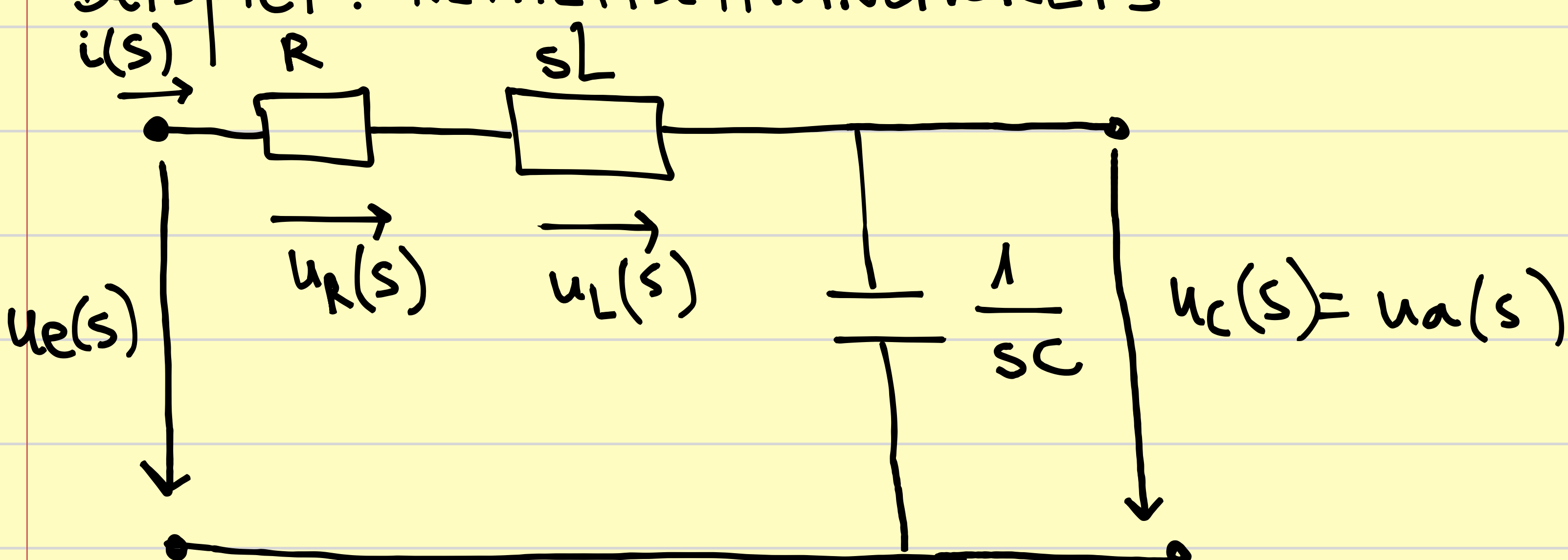
1. setzen wir $s=0 \rightarrow K = A \rightarrow A = K$

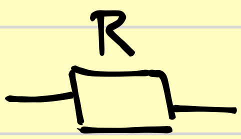
2. setzen wir $s = -\frac{1}{T_1} \rightarrow B = -kT_1$

$$x_a(s) = \frac{K}{s} - \frac{kT_1}{1+sT_1}$$

Im weiterem Verlauf wird zur Lösung von DGL. ausschließlich die Methode der Laplace-Transformation benutzt.

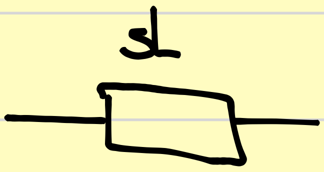
Beispiel: REIHENSCHWINGKREIS





Nach dem Ohmschen Gesetz gilt:

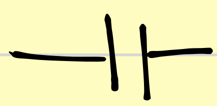
$$u_R(t) = R \cdot i(t) \rightarrow u_R(s) = R\, i(s) \quad (\bullet)$$



An der Induktion:

$$u_L(t) = L \cdot \dot{i}(t) \rightarrow u_L(s) = s \cdot L \cdot i(s) \quad (\bullet\bullet)$$

$1/sC$



An der Kapazität:

$$i(t) = C \cdot \dot{u}_C(t) \rightarrow i(s) = s \cdot C \cdot u_C(s)$$

bzw

$$i(s) = s \cdot C \cdot u_a(s)$$

2. Kirchhoffer Satz:

$$u_e(s) = u_R(s) + u_L(s) + u_a(s)$$

$$u_e(s) = R\,i(s) + sL\,i(s) + u_a(s)$$

$$u_e(s) = R \cdot s \cdot C \cdot u_a(s) + s \cdot L \cdot s \cdot C \cdot u_a(s) + u_a(s)$$

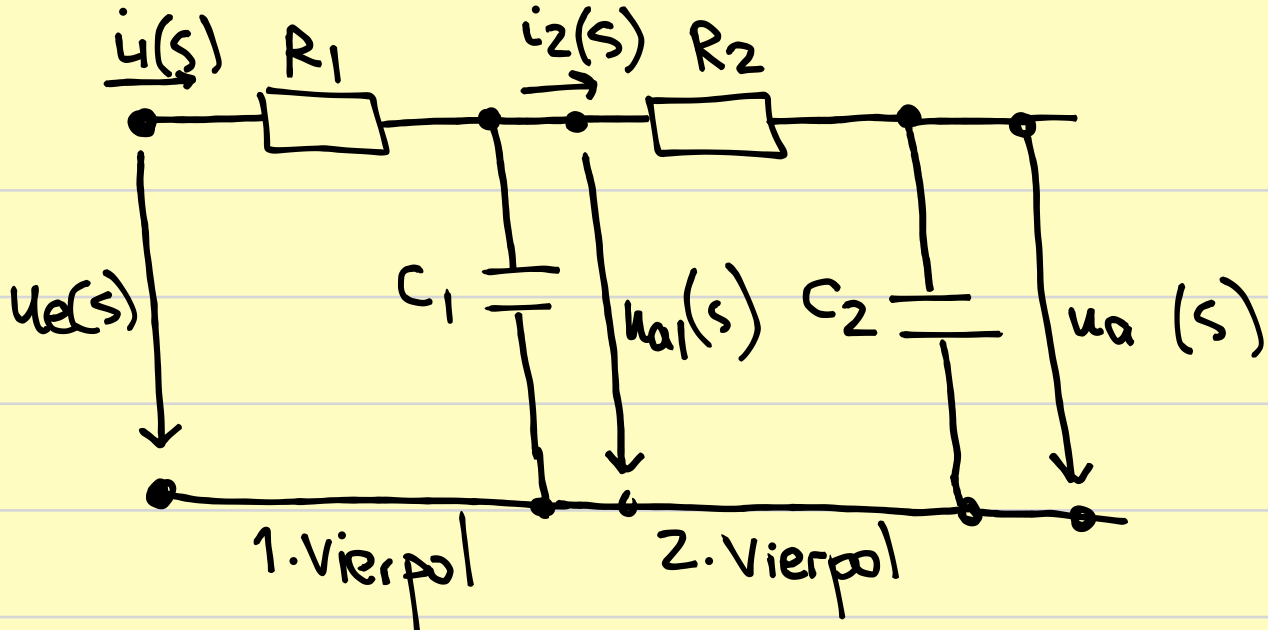
$$u_e(s) = s \cdot RC \cdot u_a(s) + s^2 \cdot LC \cdot u_a(s) + u_a(s)$$

$$LC \cdot s^2 \cdot u_a(s) + RC \cdot s\, u_a(s) + u_a(s) = u_e(s)$$

Unsere Übertragungsfunktion ist also:

$$\boxed{G(s) = \frac{u_a(s)}{u_e(s)} = \frac{1}{s^2LC + sRC + 1}}$$

Aufgabe. ZWEI GLEICHARTIGEN VIERPOLEN



Kettenschaltung von zwei Vierpolen.

Gegeben ist die Übertragungsfunktion:

$$G(s) = \frac{u_a(s)}{u_e(s)} = \frac{1}{s^2 T_1 T_2 + s(T_1 + T_2 + T_3) + 1}$$

mit Zeitkonstanten:

$$T_1 = R_1 C_1 \quad T_2 = R_2 C_2 \quad T_3 = R_2(C_1 + C_2)$$

Ermitteln Sie bitte $u_a(t)$ beim $t=0$ gegebenem Eingangssprung von der Höhe u_{e0} mit

$R_1 = 50k\Omega \quad C_1 = 20\mu F$

$R_2 = 100k\Omega \quad C_2 = 10\mu F$

Lösung ...

Schritt 1. Berechnung der Zeitkonstanten

$$T_1 = R_1 C_1 = 50k\Omega \cdot 20\mu F = 1s$$

$$T_2 = R_2 C_2 = 100k\Omega \cdot 10\mu F = 1s$$

$$T_3 = R_2(C_1 + C_2) = 100k\Omega\,(20\mu F + 10\mu F) = 3s$$

Schritt 2. Übertragungsfunktion:

$$G(s) = \frac{1}{s^2+5s+1}$$

Schritt 3. Partialbruchzerlegung ...

$$s^2+5s+1 = (s+a)(s+b) = s^2+(a+b)s+ab$$

$$\left.\begin{array}{l} a+b=5 \\ ab=1 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} a=5-b \\ (5-b)b=1 \rightarrow 5b-b^2=1 \rightarrow \\ \rightarrow b^2-5b+1=0 \rightarrow b=\frac{5\pm\sqrt{25-4}}{2} \end{array}$$

(◦)

$$\frac{1}{s^2+5s+1} = \frac{A}{s+a} + \frac{B}{s+b} \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad 1 = A(s+b) + B(s+a) \rightarrow$$

setzen wir $s=-b \rightarrow 1 = B(a-b) \rightarrow B = \frac{1}{a-b}$

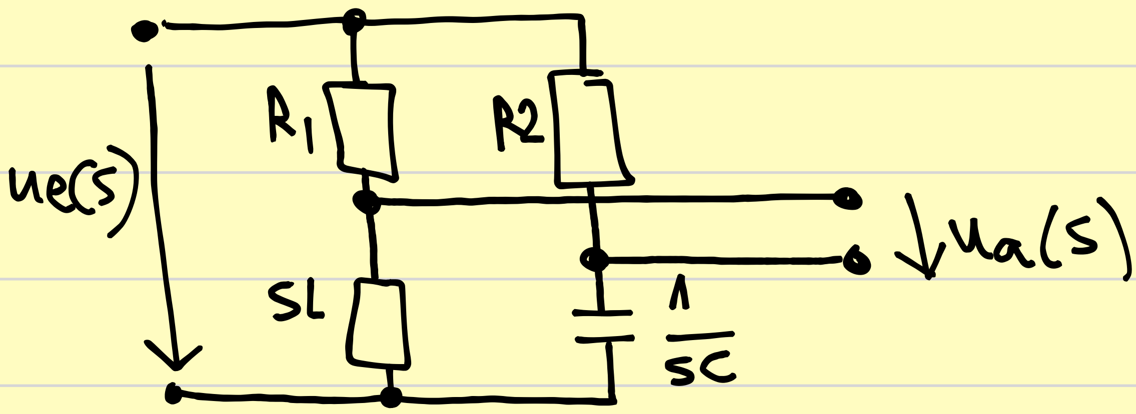
$s=-a \rightarrow 1 = A(b-a) \rightarrow A = \frac{1}{b-a}$

$$u_a(t) = \frac{1}{b-a} L^{-1}\left(\frac{1}{s+b}\right) + \frac{1}{a-b} L^{-1}\left(\frac{1}{s+a}\right)$$

$$u_a(t) = \frac{1}{b-a} e^{-bt} + \frac{1}{a-b} e^{-at}$$

(•) $b = 0'208 \qquad a = 4'791$

Aufgabe. RCL-BRÜCKENSCHALTUNG



$$G(s) = \frac{u_a(s)}{u_e(s)} = \frac{sT_1}{1+sT_1} - \frac{1}{1+sT_2} = \frac{s^2 T_1 T_2 - 1}{(1+sT_1)(1+sT_2)}$$

$$T_1 = \frac{L}{R_1} \qquad T_2 = R_2 C \qquad\qquad R_1 = 1\,k\Omega \quad C = 0'2\,\mu F$$

$$R_2 = 100\,k\Omega \quad L = 1\,H$$

Lösung:

Schritt 1. Ermittlung der Zeitkonstanten

$$T_1 = \frac{1H}{1000} = 10^{-3}\,s \qquad T_2 = 10^5\,\Omega \cdot 0'2 \cdot 10^{-6}\,F = 0'02\,s$$

Schritt 2. Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{s^2 \cdot 10^{-3} \cdot 0'02 - 1}{(1+10^{-3}s)(1+0'02s)}$$

Schritt 3. Bruchzerlegung

$$G(s) = \frac{A}{1+10^{-3}s} + \frac{B}{1+0{,}02s}$$

$(1+10^{-3}s)(1+0{,}02s)$ wird auf beiden Seiten multipliziert:

$$2 \cdot 10^{-5} s^2 - 1 = A(1+0{,}02s) + B(1+10^{-3}s)$$

Koeffizienten von s werden verglichen:

$$2 \cdot 10^{-5} s^2 - 1 = A + 0{,}02As + B + 10^{-3}Bs$$

$$2 \cdot 10^{-5} s^2 - 1 = (A+B) + (0{,}02A + 10^{-3}B)s \rightarrow$$

s^0 $\quad A + B = -1 \longrightarrow A = -1 - B$

s^1 $\quad 0{,}02A + 10^{-3}B = 2 \cdot 10^{-5}$

$$0{,}02(-1-B) + 10^{-3}B = 2 \cdot 10^{-5} \rightarrow B \simeq -1{,}0532$$

$$\downarrow$$

$$A \simeq 0{,}0532$$

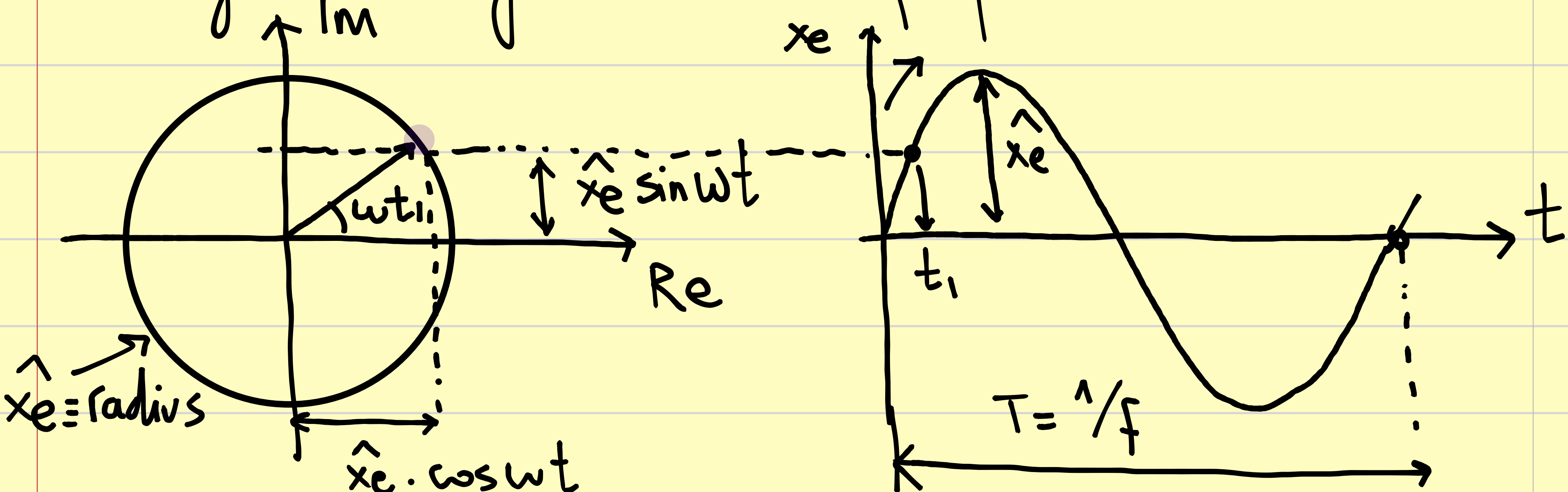
$$G(s) = \frac{0{,}0532}{1+10^{-3}s} + \frac{-1{,}0532}{1+0{,}02s}$$

$$\boxed{u_a(t) = 0{,}0532\left(1 - e^{-10^{-3}t}\right) - 1{,}0532\left(1 - e^{-0{,}02t}\right)}$$

Beschreibung von Regelkreisen im Frequenzbereich

Frequenzgang

Die Rechnung bei sinusförmigen Eingangsgröße wird besonders einfach, wenn man die Sinusschwingung $xe(t)$ aus einem, um den Ursprung der Gaußschen Zahlenebene rotierenden Zeiger entstanden denkt, der auf die imaginäre Achse projeziert wird:



Der Zeiger ist durch beiden Komponenten $\hat{x}_e \cos\omega t$ und $j \cdot \hat{x}_e \cdot \sin\omega t$ eindeutig festgelegt.

Nach der Eulerschen Gleichung:

$$e^{j\omega t} = \cos\omega t + j \cdot \sin\omega t$$

$$\boxed{xe(t) = \hat{x}_e \, e^{j\omega t}}$$

Das Verhältnis der Zeiger von Ausgangs- zur Eingangsgröße bezeichnet man als Frequenzgang. Dies ist eine Funktion der Zeit:

$$G(j\omega) = \frac{x_a(t)}{x_e(t)} = \frac{\hat{x}_a e^{j(\omega t+\varphi)}}{\hat{x}_e e^{j\omega t}} = \frac{\hat{x}_a}{\hat{x}_e} e^{j\varphi}$$

$$\frac{d e^{j\omega t}}{dt} = j\omega \cdot e^{j\omega t}$$

$$\frac{d^2 e^{j\omega t}}{dt} = (j\omega)^2 e^{j\omega t}$$

$$\ldots$$

Die allgemeine Form der Differential Gleichung

$$\ldots + a_3 \dddot{x}_a(t) + a_2 \ddot{x}_a(t) + a_1 \dot{x}_a(t) + a_0 x_a(t) =$$
$$b_0 x_e(t) + b_1 \dot{x}_e(t) + b_2 \ddot{x}_e(t) + b_3 \dddot{x}_e(t) + \ldots$$

→ setzen wir $x_e(j\omega)$ & $x_a(j\omega)$ entsteht:

$$\ldots + a_3 (j\omega)^3 x_a(j\omega) + a_2 (j\omega)^2 x_a(j\omega) + \ldots =$$
$$= b_0 x_e(j\omega) + b_1 (j\omega) x_e(j\omega) + \ldots$$

$$G(j\omega) = \frac{x_a(j\omega)}{x_e(j\omega)} = \frac{b_0 + b_1(j\omega) + b_2(j\omega)^2 + b_3(j\omega)^3 + \ldots}{a_0 + a_1(j\omega) + a_2(j\omega)^2 + a_3(j\omega)^3 + \ldots}$$

Beispiel: Gegeben ist die DGL $T_2^2 \ddot{x}_a(t) + T_1 \dot{x}_a(t) + x_a(t)$
$= K \cdot x_e(t)$

Zu ermitteln ist der Frequenzgang $G(j\omega)$

Setzt man die Ein- & Ausgangsgröße $x_e(t)$ und $x_a(t)$ als Funktionen von $j\omega$ ein:

$$T_2^2 (j\omega)^2 x_a(j\omega) + T_1 (j\omega) x_a(j\omega) + x_a(j\omega) = K\, x_e(j\omega)$$

Folgt dann:

$$G(j\omega) = \frac{x_a(j\omega)}{x_e(j\omega)} = \frac{K}{T_2^2 (j\omega)^2 + T_1 (j\omega) + 1}$$
