20231024_Regelungstechnik_BEL4

Bode-Diagramm

Das Bode-Diagramm ist ein graphisches Werkzeug, das idR verwendet wird, um das Verhalten eines linearen, zeitinvarianten Systems zu analysieren.
Es besteht aus 2 Diagrammen: dem Amplituden- und dem Phasen-Boden-Diagramm.

1. Amplituden-Bode-Diagramm
   - Auf der x-Achse wird die Kreisfrequenz ω (in logaritmischer Skala) dargestellt.
   - Auf der y-Achse wird der Amplitudenverstärkungsfaktor (in Dezibel DB) dargestellt
2. Phasen-Bode-Diagramm
   - Auf der x-Achse wird (ebenfalls) die Kreisfrequenz ω (in logaritmischer Skala) dargestellt.
   - Auf der y-Achse wird der Phasenverschiebungswinkel (in Grad) dargestellt.

Zusammenhänge zw. Bode-Diagramm und Übertragungsfunktion

1. Amplituden-Bode-Diagramm
   - Die Steigung des Amplituden-Bode-Diagramms bei niedrigen Frequenzen (Linkskurve) entspricht der Anzahl der POLE in der Übertragungsfunktion.
   - Die Steigung des Amplituden-Bode-Diagramms bei hohen Frequenzen (Rechtskurve) entspricht der Anzahl der NULLEN in der Übertragungsfunktion.

2. Phasen-Bode-Diagramm

- Das Phasen-Bode-Diagramm gibt Aufschluss darüber, wie schnell das System auf Änderungen in der Eingangsfrequenz reagiert.

- Im folgenden sollten die Bode-Diagramme von Regelkreisgliedern mit elementaren Zeitverhalten behandelt werden.

- Häufig wird der Amplitudengang in Dezibel (dB) eingetragen. Definitionsgemäß gilt:

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log_{10} |G(j\omega)|$$

- Bei der Darstellung des Amplitudenganges $|G(j\omega)|$, die ω-Achse wird stets so gelegt, dass die Ordinate bei $|G(j\omega)| = 1$ schneidet.

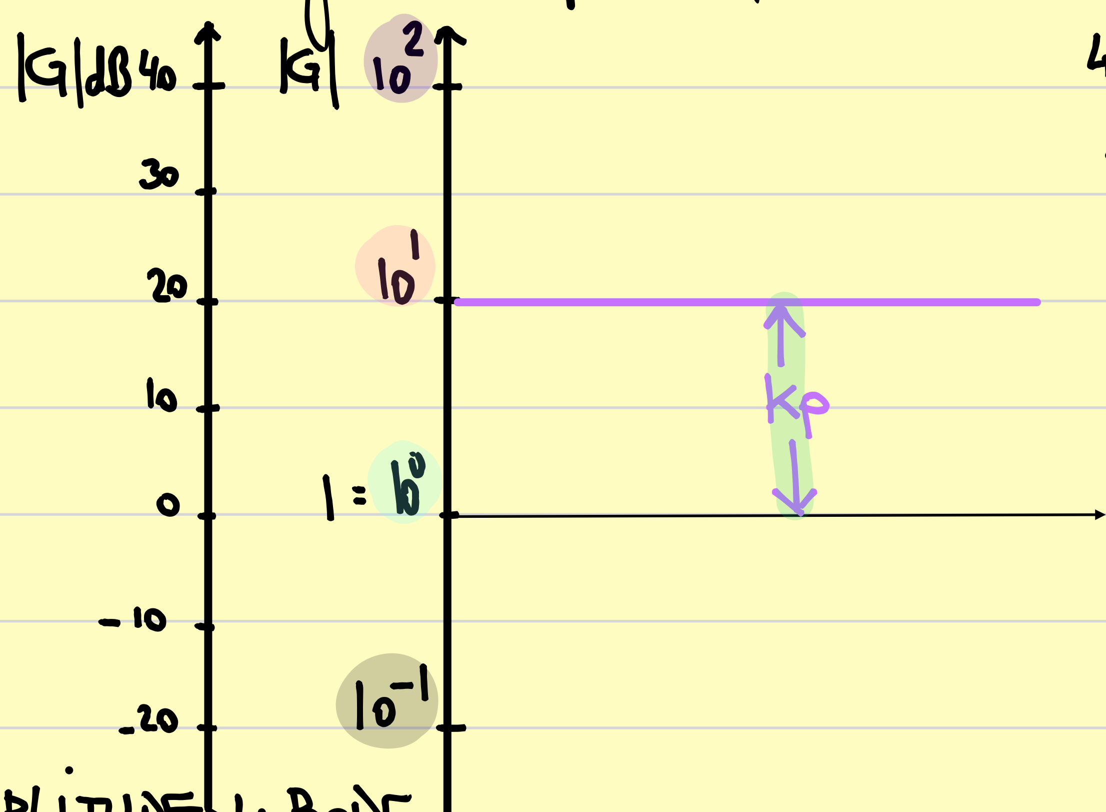
1. BODE-DIAGRAMM DES P-GLIEDES

Die Übertragungsfunktion vom P-Glied $G(s) = K_p$.

Der Frequenzgang $G(j\omega) = \dfrac{u_a(j\omega)}{u_e(j\omega)} = K_p \doteq \text{konstant}$

Daraus folgt: $|G(j\omega)| = K_p \quad \varphi(\omega) = 0$

Bode-Diagramm für $K_p = 10$



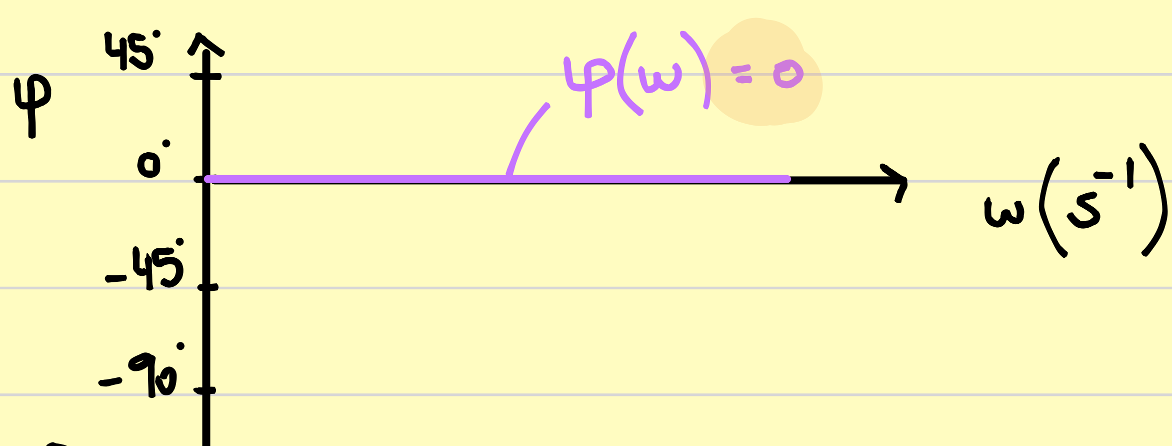
$40\,dB = 20 \cdot \log(10^2) = 20 \cdot 2 = 40\,dB$

$20\,dB = 20 \cdot \log(10^1) = 20 \cdot 1 = 20\,dB$

$0\,dB = 20 \cdot \log(10^0) = 20 \cdot 0 = 0\,dB$

$-20\,dB = 20 \cdot \log(10^{-1}) = -20\,dB$

AMPLITUDEN-BODE



PHASEN-BODE

Es ist wichtig zu beachten, dass ein P-Glied allein kein frequenzabhängiges Verhalten hat, da es keine Pole im System gibt. Es hat keinen Einfluß auf die Frequenzkomponenten des Signals, sondern nur auf die Amplitude durch die Konstante K_p.

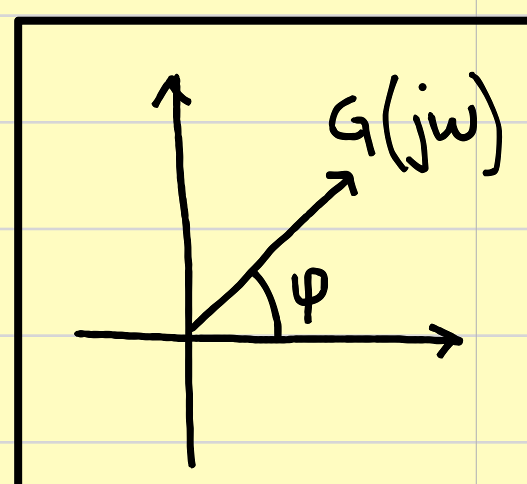
2. BODE · DIAGRAMM EINES I · GLIEDES

Die Übertragungsfunktion eines I-Gliedes lautet $G_I(s) = \frac{K_I}{s}$

Der Freqvenzgang lautet $G_I(j\omega) = \frac{x_a(j\omega)}{x_e(j\omega)} = \frac{K_I}{j\omega}$.

Die Konstante K_I kann gleich $K_I = \frac{1}{T_1}$ wobei T_1 als „Integrierzeit" verstanden wird.

$$T_1 = \frac{1}{K_I}$$

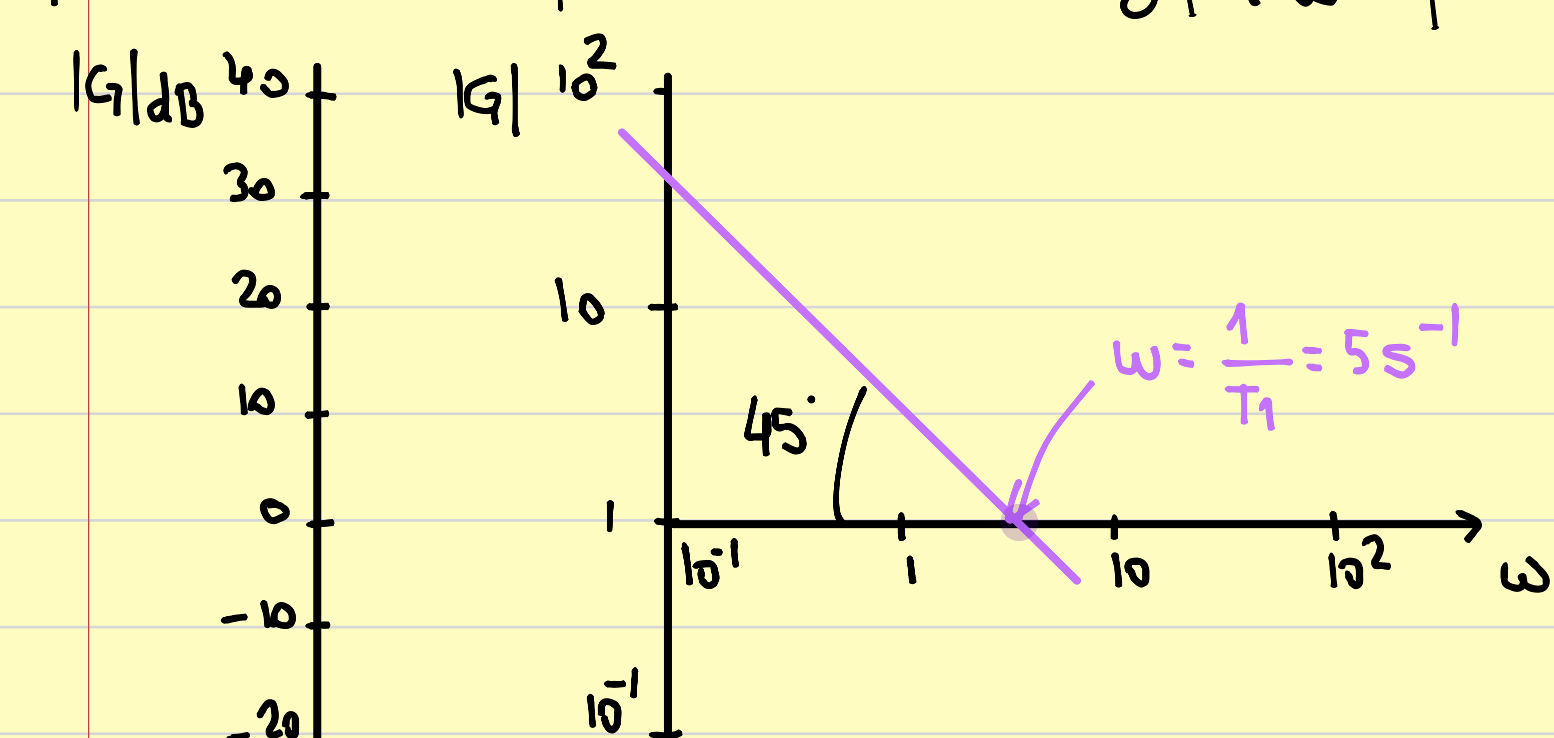


Anmerkung

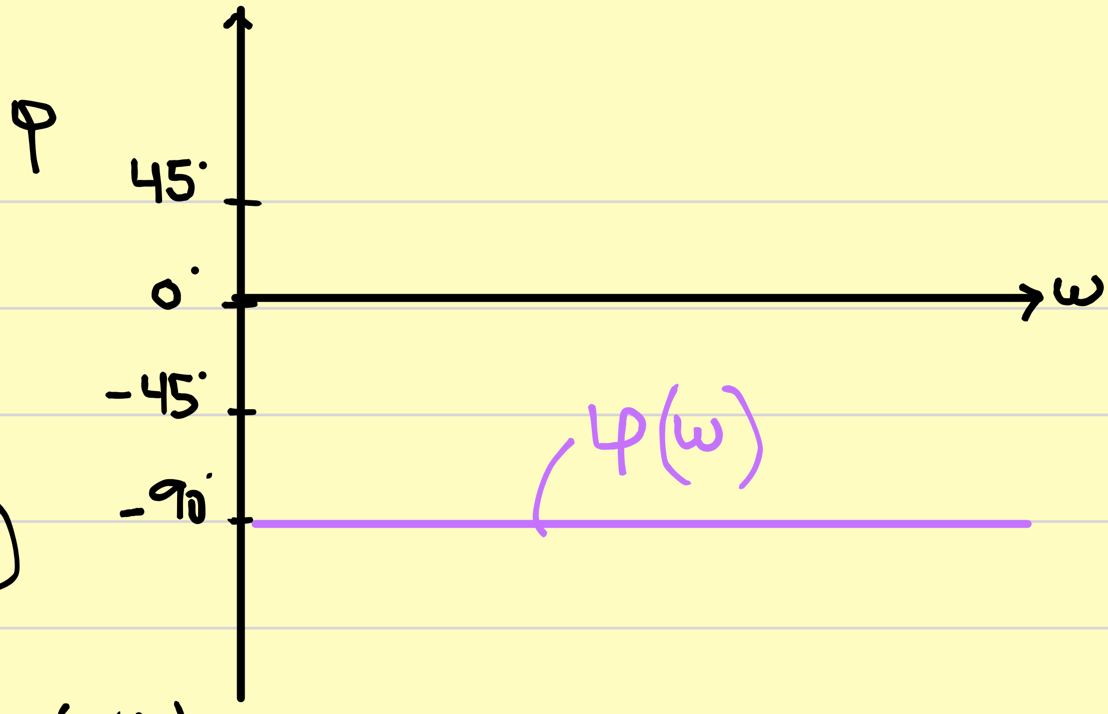
Darans folgt: $G_I(j\omega) = \frac{1}{j\omega T_1}$

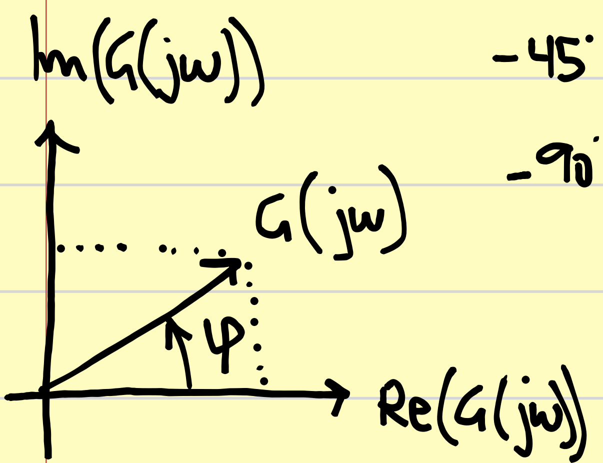
Darans folgt: $|G(j\omega)| = \frac{1}{\omega T_1} = (\omega T_1)^{-1}$

$T_1 = 0{,}2\,s$ Dementsprechend: $\log|G(j\omega)| = -\log(\omega T_1)$



AMPLITUDEN · BODE





$$\tan\varphi = \frac{Im(G)}{Re(G)} = \frac{-\omega T_1}{0} = -\infty \;\forall\omega \rightarrow \varphi = -90^\circ$$

$$\log(G(\omega)) = -\log(\omega T_1)$$

3. BODE-DIAGRAMM EINES D-GLIEDES

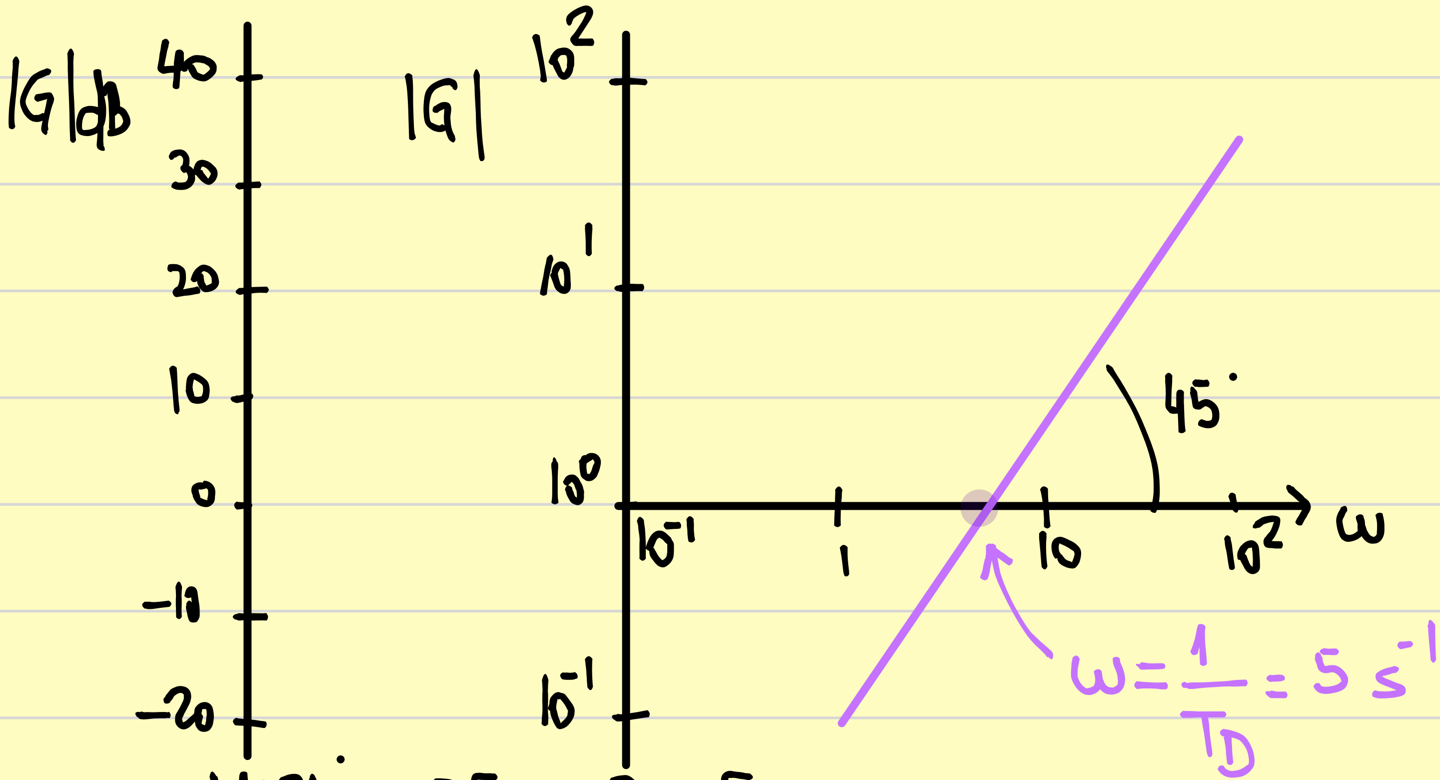
Die Übertragungsfunktion vom D-Glied $G(s) = K_D \cdot s$.

Der Frequenzgang ist also: $G(j\omega) = \frac{x_a(j\omega)}{x_e(j\omega)} = j\omega \cdot K_D$

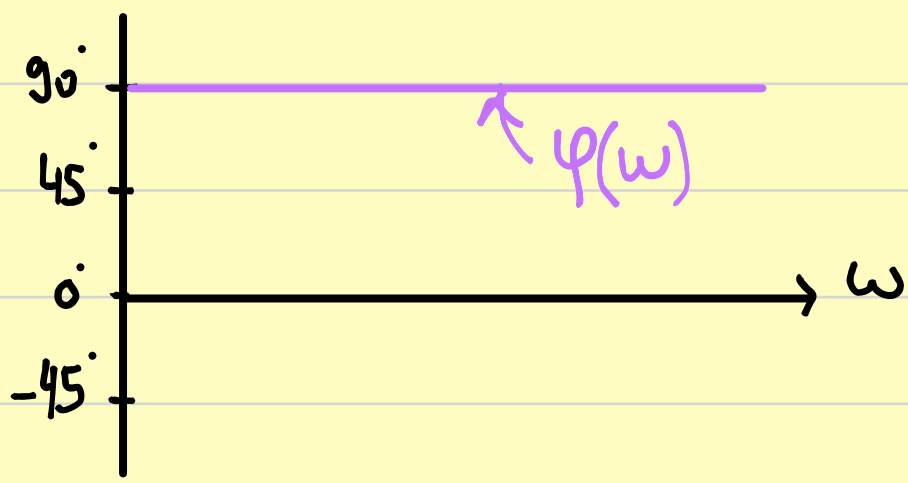
Definieren wir die Differenzierzeit $T_D = K_D \rightarrow G(j\omega) = j\omega T_D$

Folglich erhält man: $|G(j\omega)| = \omega \cdot T_D \rightarrow \log|G(j\omega)| = \log(\omega T_D)$

$T_D = 0{,}2$



AMPLITUDEN · BODE



$$\tan\varphi = \frac{Im(G)}{Re(G)} = \frac{\omega T_D}{0} = +\infty \rightarrow \varphi = 90°$$

4. BODE · DIAGRAMM EINES P · GLIEDES MIT VERZÖGERUNG.

Die Übertragungsfunktion lautet: $G(s) = \frac{K_P}{1+T_1 s}$

Der Frequenzgang lautet dann: $G(j\omega) = \frac{K_P}{1+T_1 j\omega}$

Daraus folgt: $G(j\omega) = \frac{K_P}{|1+j\omega T_1|} \cdot e^{-j\arctan(\omega T_1)}$

$\rightarrow |G(jw)| = \frac{k_p}{\sqrt{1+(wT_1)^2}} \rightarrow \log|G(jw)| = \log k_p - \frac{1}{2}\log\left(1+(wT_1)^2\right)$

$\tan\varphi = -wT_1 \rightarrow \varphi = -\arctan(wT_1)$

Konstuktion des Bode. Diagramms durch Asymptoten:

1) Für kleine w. Werte

$w\ll \rightarrow wT_1 \ll 1 \rightarrow \log|G(jw)| \cong \log k_p - \frac{1}{2}\cancel{\log(1+0)^2}$

$w\ll \rightarrow |G(jw)| \cong k_p$

2) Für große w. Werte

$w\gg \rightarrow wT_1 \gg 1 \rightarrow \log|G(jw)| \cong \log k_p - \log(wT_1)$

Das ist (wie oben dargestellt) eine Linie mit negativen Steigung

Beide Asymptoten schneiden sich für w_E

$$\log|G(jw_E)| = \log k_p = \log k_p - \log(w_E T_1)$$

$$w_E = \frac{1}{T_1}$$

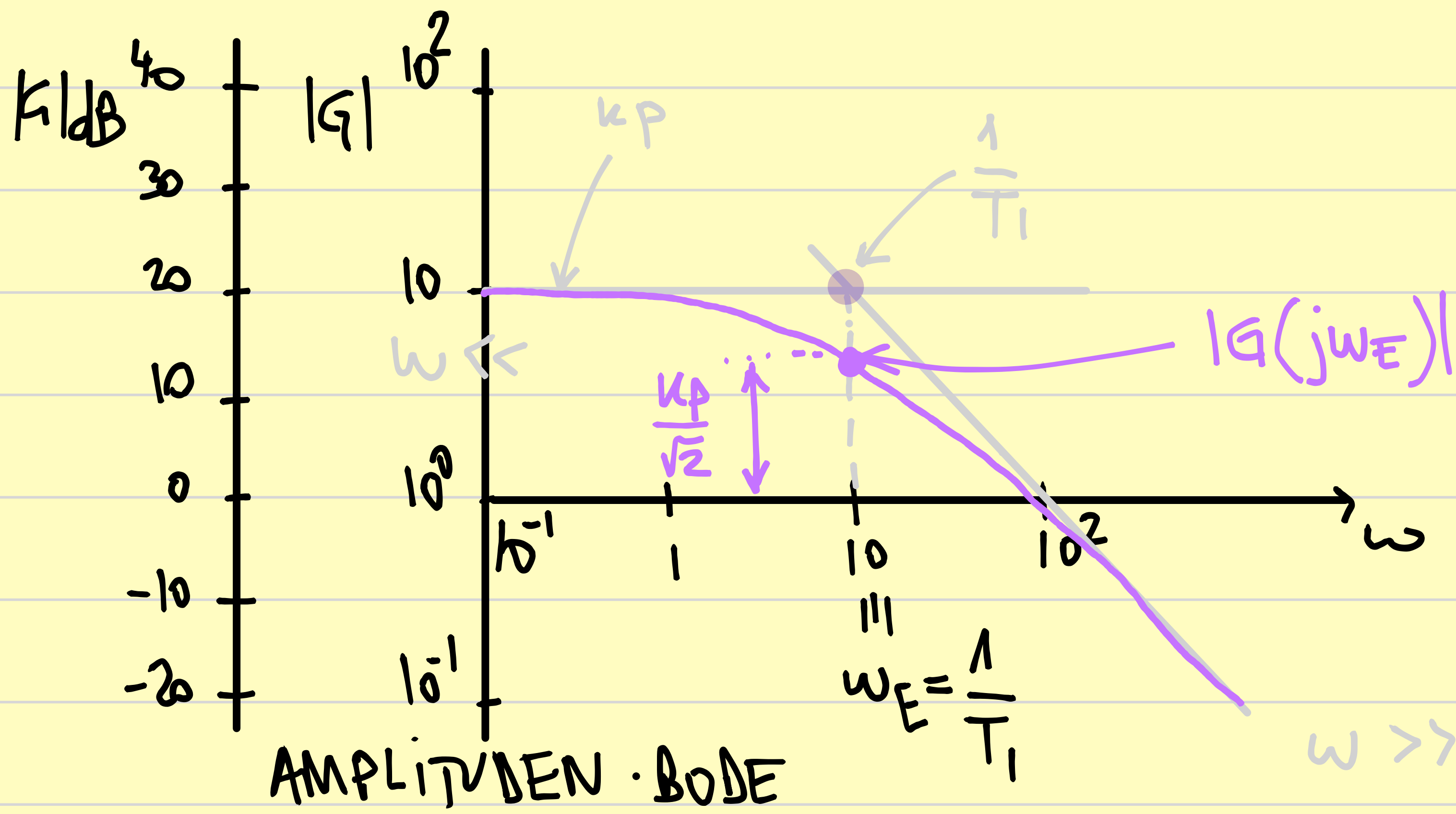
$$\log|G(jw_E)| = \log k_p - \frac{1}{2}\log(1+w_E T_1) =$$

$$= \log k_p - \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{T_1}{T_1}\right)$$

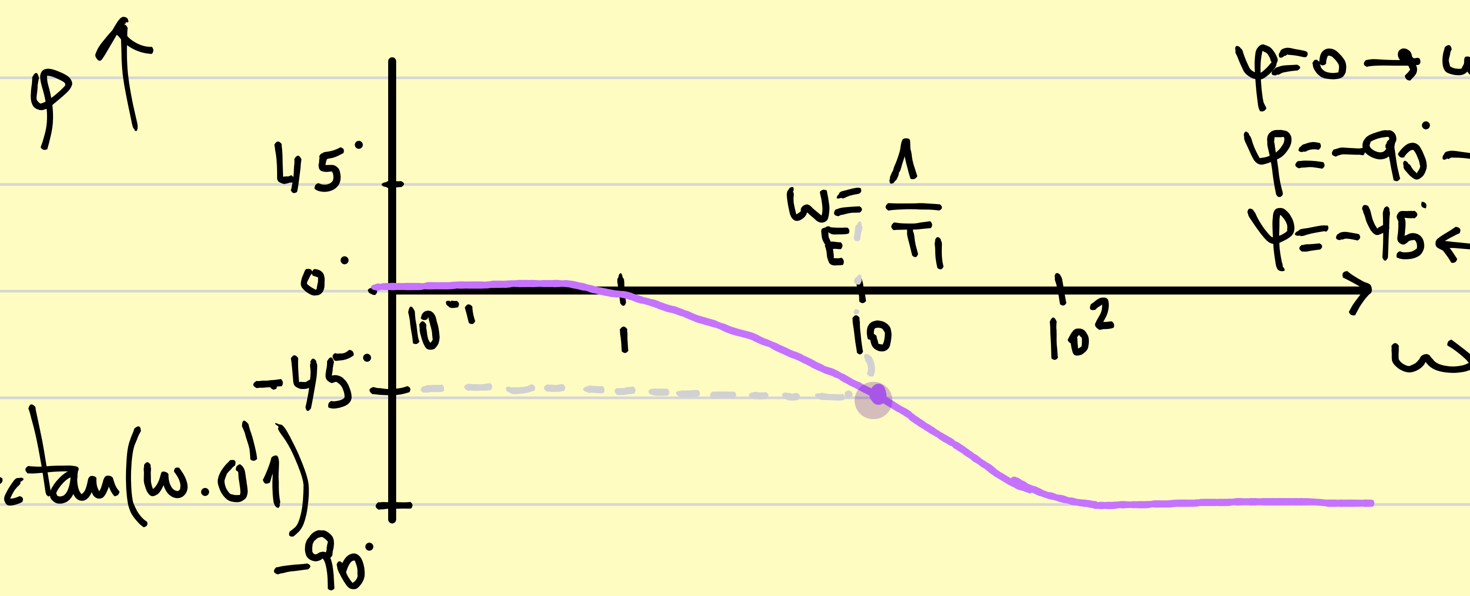
$$|G(jw_E)| = k_p/\sqrt{2} = 0'707\, k_p$$

$K_p = 10$

$T_1 = 0'1 s$



AMPLITUDEN · BODE



$\varphi = -\arctan(w \cdot 0'1)$

$\varphi = 0 \rightarrow w = 0$

$\varphi = -90° \rightarrow w = \infty$

$\varphi = -45° \leftarrow w_E = \frac{1}{T_1}$