Eigenvektoren & Eigenwerte einer Matrix A

$\boxed{A\vec{v} = \lambda \vec{v}}$ $\vec{v} \equiv$ Eigenvektoren $\lambda \equiv$ Eigenwerte

$\det(A - \lambda I) = 0 \rightarrow \lambda$ wird ermittelt $\rightarrow \vec{v}$ wird ermitteln

Beispiel. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$ bitte ermitteln Sie (λ_1, λ_2), sowie $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$.

$$A\vec{v} = \lambda \vec{v} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = 0 \rightarrow \left| \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = 0 \rightarrow$$

$$\left| \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right| = 0 \rightarrow \left| \begin{bmatrix} 0-\lambda & 1-0 \\ -2-0 & -3-\lambda \end{bmatrix} \right| = 0 \rightarrow$$

$$(0-\lambda)(-3-\lambda) - (1-0)(-2-0) = 0 \rightarrow 3\lambda + \lambda^2 + 2 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \lambda = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4.2.1}}{2} = \begin{matrix} \nearrow \lambda_1 = -1 \\ \searrow \lambda_2 = -2 \end{matrix}$$ EIGENWERTE

$$\lambda_1 = -1 \rightarrow A\vec{v}_1 = \lambda_1 \vec{v}_1 \rightarrow (A - \lambda_1 I)\vec{v}_1 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \left[\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} - (-1) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right] \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{bmatrix} = \vec{0} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left[\begin{bmatrix} 0+1 & 1+0 \\ -2+0 & -3+1 \end{bmatrix} \right] \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{bmatrix} = \vec{0} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} v_{11}\cdot 1 + v_{12}\cdot 1 &= 0 \\ -2v_{11} - 2v_{12} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad v_{11} = -v_{12}$$

$$v_{11} = 1 \rightarrow v_{12} = -1 \longrightarrow \vec{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad ✓ \ \text{EIGENVEKTOR}$$

$$\lambda_2 = -2 \rightarrow A\vec{v_2} = \lambda_2 \vec{v_2} \rightarrow (A - \lambda_2 I)\vec{v_2} = 0$$

$$\rightarrow \left[\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} - (-2)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right]\begin{bmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 0+2 & 1+0 \\ -2 & -3+2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

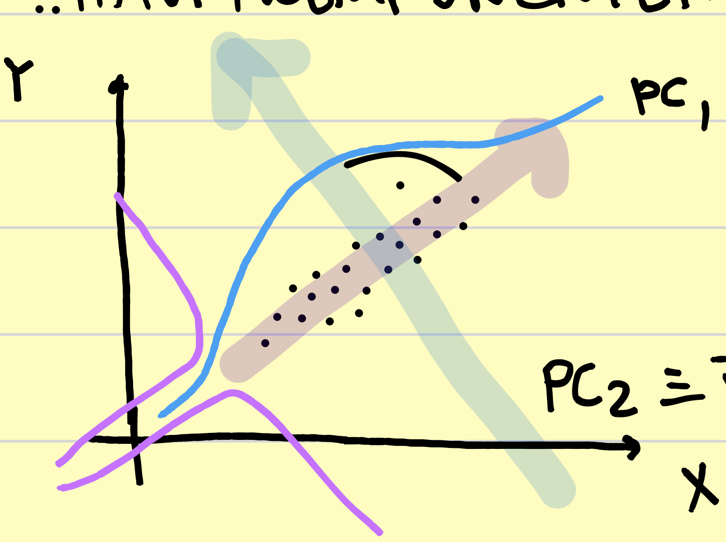
$$\rightarrow \begin{aligned} 2v_{21} + v_{22} &= 0 \\ -2v_{21} - v_{22} &= 0 \end{aligned} \longrightarrow v_{21} = 1 \rightarrow v_{22} = -2$$

$$\vec{v_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \quad ✓ \ \text{EIGENVEKTOR}$$

---

1 Die Eigenvektoren der Kovarianzmatrix sind die HAUPTKOMPONENTEN des SYSTEMS.

„HAUPTKOMPONENTEN ANALYSE" ≡ PRINCIPAL COMPONENT ANALYSIS



$PC_1 \equiv \vec{v_1}$ 1. Eigenvektor der Kov. Matrix

λ_1

$PC_2 \equiv \vec{v_2}$ 2. Eigenvector der Kov. Matrix

λ_2

$\vec{v_1}$ & $\vec{v_2}$ sind senkrecht voneinander.

2 Die zu erklärende Variabilität mit dem Eigenvektor $\vec{v}_i$ wird durch den Eigenwert λ_i erklärt.

Übung: Gegeben ist ein Kennzahlensystem mit 2 Kennzahlen: Durchlaufzeit (X) und Output (Y).

(Bitte ermitteln Sie die Eigenvektoren & Eigenwerte der Kovarianzmatrix. Bitte interpretieren Sie die Ergebnisse aus einer Management perspective.

	DLZ (X)	Output (Y)
KW1	17	200
KW2	14	250
KW3	12	270
KW4	13	240
KW5	9	310
KW6	7	330

1. SCHRITT. NORMIERUNG der DATEN $x_i^* = \dfrac{x_i - \mu_x}{\sigma_x}$
2. SCHRITT. KOVARIANZ MATRIX der NORMIERTEN DATEN
3. SCHRITT. EIGENWERTE & EIGENVEKTOREN der KOVARIANZ MATRIX der NORMIERTEN DATEN.
4. SCHRITT. Management interpretation (PCA).

MITTELWERT

$$\bar{x} = \mu_x = \frac{17+14+12+13+9+7}{6}$$

$$\bar{y} = \mu_y = \frac{200+250+270+240+310+330}{\sigma}$$

1.

	X^*	Y^*
KW1	$\dfrac{17-\bar{x}}{\sigma_x} = x_1^*$	$\dfrac{200-\bar{y}}{\sigma_y} = y_1^*$

KW2	$\frac{14-\bar{x}}{\sigma_x} = x_2^*$	$\frac{250-\bar{y}}{\sigma_y} = y_2^*$
KW3	$\frac{12-\bar{x}}{\sigma_x}$ ...	$\frac{270-\bar{y}}{\sigma_y}$ ...
KW4	$\frac{13-\bar{x}}{\sigma_x}$	$\frac{240-\bar{y}}{\sigma_y}$
KW5	$\frac{9-\bar{x}}{\sigma_x}$	$\frac{310-\bar{y}}{\sigma_y}$
KW6	$\frac{7-\bar{x}}{\sigma_x}$	$\frac{330-\bar{y}}{\sigma_y}$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{(17-\bar{x})^2+(14-\bar{x})^2+(12-\bar{x})^2+(13-\bar{x})^2+(9-\bar{x})^2+(7-\bar{x})^2}{6}}$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{(200-\bar{y})^2+(250-\bar{y})^2+(270-\bar{y})^2+(240-\bar{y})^2+(310-\bar{y})^2+(330-\bar{y})^2}{6}}$$

2.

KOVARIANZ MATRIX $= \begin{bmatrix} 1 & c \\ c & 1 \end{bmatrix}$

$$\operatorname{cov}(X^*, Y^*) = \frac{\sum_{i=1}^{6}(x_i^*-\bar{x}^*)(y_i^*-\bar{y}^*)}{6-1} = \frac{\sum_{i=1}^{6} x_i^* y_i^*}{6-1} =$$

$$\bar{x}^* = \bar{y}^* = 0$$

$$= \frac{x_1^* y_1^* + x_2^* y_2^* + x_3^* y_3^* + x_4^* y_4^* + x_5^* y_5^* + x_6^* y_6^*}{6-1} = \ldots = c$$

3.

KOV. MATRIX $= \begin{bmatrix} 1 & c \\ c & 1 \end{bmatrix} = A^*$

$$\det(A^* - \lambda I) = 0 \rightarrow \left| \begin{bmatrix} 1 & c \\ c & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right| = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & c \\ c & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \rightarrow (1-\lambda)^2 - c^2 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow 1+\lambda^2-2\lambda-c^2=0 \rightarrow \lambda^2-2\lambda+1-c^2=0$$

$$\lambda=\frac{2\pm\sqrt{4-4.1.(1-c^2)}}{2}=1\pm\sqrt{1-(1-c^2)}=1\pm c \begin{cases}\nearrow \lambda_1=1+c\\ \searrow \lambda_2=1-c\end{cases}$$

$$\lambda_1=1+c \rightarrow A\vec{v}_1=\lambda_1\vec{v}_1 \rightarrow (A-\lambda_1 I)\vec{v}_1=\vec{0} \rightarrow$$

$$\left(\begin{bmatrix}1 & c\\ c & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1+c & 0\\ 0 & 1+c\end{bmatrix}\right)\left(\begin{bmatrix}v_{11}\\ v_{12}\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}\rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix}-c & c\\ c & -c\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_{11}\\ v_{12}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}\rightarrow c\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_{11}\\ v_{12}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{matrix}c(-v_{11}+v_{12})=0\\ c(v_{11}-v_{12})=0\end{matrix} \rightarrow v_{11}=v_{12} \rightarrow \begin{matrix}v_{11}=1\\ v_{12}=1\end{matrix}$$

$$\vec{v}_1=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix} \checkmark$$

(**)

$$\boxed{\begin{matrix}\det\begin{bmatrix}a & c\\ b & d\end{bmatrix}=a.d-c.b\\[2em] \det\begin{bmatrix}a & d & g\\ b & e & h\\ c & f & i\end{bmatrix}=a.e.i+c.d.h+b.f.g-\\ -c.e.g-b.d.i-a.h.f\end{matrix}}$$

$$\lambda_2=1-c \rightarrow A\vec{v}_2=\lambda_2\vec{v}_2 \rightarrow (A-\lambda_2 I)\vec{v}_2=\vec{0}=$$

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & c \\ c & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1-c & 0 \\ 0 & 1-c \end{bmatrix}\right)\begin{pmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} c & c \\ c & c \end{bmatrix}\begin{pmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow c(v_{21}+v_{22}) = 0 \rightarrow$$

$$v_{21} = -v_{22} \rightarrow \begin{matrix} v_{21} = 1 \\ v_{22} = -1 \end{matrix} \quad \vec{v_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Ergebnisse

$$\lambda_1 = 1+c \,;\, \vec{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \,;\, \lambda_2 = 1-c \,;\, \vec{v_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$\vec{v_1}$ erklärt $1+c$ % Variabilität

$\vec{v_2}$ erklärt $1-c$ % Variabilitat

4 Wenn die Kovarianz $c > 0 \rightarrow \vec{v_1}$ erklärt mehr Variabilität als $\vec{v_2}$

Wenn die Kovarianz $c < 0 \rightarrow \vec{v_1}$ erklärt weniger Variabilität als $\vec{v_2}$