2024 09 25.

Arithmetische Folgen & Geometrische Folgen

1. Anfangslieferung $a_1 = 200$
Zuwachs pro Monat $d = 50$ | $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$
Anzahl Monate $n = 12$

$$a_{12} = 200 + (12-1) \cdot 50 = 200 + 550 = 750$$

Die Lieferung im 12. Monat beträgt 750 Einheiten.

Gesamtlieferungen im 12. Monat

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \rightarrow S_{12} = \frac{12}{2}(200 + 750) = 5700 \text{ Einh.}$$

4. Anfangsproduktionsrate $a_1 = 100$ Stück/Tag
Zuwachs pro Tag $d = 10$ Stück
Gewünschte Produktionsrate $a_n = 500$ Stück/Tag

$$a_n = a_1 + (n-1) d \longrightarrow n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1 \rightarrow n = 41$$

Die Produktionsrate wird nach 41 Tagen 500 $\frac{\text{Stück}}{\text{Tag}}$ erreicht.

6. Anfangsumsatz $u_1 = 1000000$ €
Jährliche Wachstumsrate $r = 0'07$ (7%)
Anzahl der Jahre $n = 5$

$$u_n = u_1 (1+r)^{n-1} \rightarrow u_5 = 10^6 (1+0'07)^{5-1} =$$
$$= 1310796 \text{ €}$$

8. Anfangsfläche $A_1 = 1200 \text{ m}^2$
   Monatliche Wachstumsrate $r = 0'1$ (10%)
   Anzahl Monate $n = 12$

$$A_n = A_1 \cdot (1+r)^{n-1} \rightarrow A_{12} = 1200 (1+0'1)^{12-1} =$$
$$= 3423'7 \text{ m}^2$$

9. Anfangswert (Pakete im 1. Jahr) $P_1 = 500000$
   Jährliche Wachstumsrate $r = 0'05$ (5%)
   Anzahl Jahre $n = 5$

$$S_n = P_1 \frac{(1+r)^n - 1}{r} = 5 \cdot 10^5 \frac{(1'05)^5 - 1}{0'05} = 2762815$$

$$S_n = p_1 + p_1(1+r) + p_1(1+r)^2 + \dots + p_1(1+r)^{n-1}$$
$$-(1+r)S_n = -(1+r)p - (1+r)^2 p_1 - \dots - (1+r)^n p_1$$

$$S_n = \frac{p_1(1-(1+r)^n)}{1-(1+r)}$$ ✓ [siehe Vorlesung 20241002]

20241002

Aritmetische Reihen.

3. Fahrten im ersten Monat $a_1 = 50$
Monatliche Zunahme $d = 5$ Fahrten
Anzahl Monate $n = 8$

$a_n = a_1 + (n-1)d \qquad S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$

$S_n = \frac{n}{2}\left(2a_1 + (n-1)d\right) = \frac{8}{2}\left(2 \cdot 50 + (50-1) \cdot 5\right) = 540$ Fahrten

Im 8. Monat $a_n = 50 + (8-1) \cdot 5 = 85$ Fahrten

Geometrische Reihen.

3.* Ein Distributionszentrum erhöht seine Lagerskapazität monatlich um 3%. Wenn die Anfangskapazität 1000 Einheiten beträgt, wie lange dauert es bis die Gesamtkapazität 10000 Einheiten beträgt.

Anfangskapazität 1000 Einheiten $\equiv k_1$
Endkapazität 10000 Einheiten $\equiv \sum k_i$
Rate $r = 0'03 \longrightarrow q = 1 + 0'03$

$$\sum_{i=1}^{n} k_i = 10000 = \frac{k_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{1000(1-1'03^n)}{-0'03} \longrightarrow$$

$$\frac{10000}{1000} = \frac{1-1'03^n}{-0'03} \rightarrow 10 = \frac{1'03^n - 1}{0'03} \longrightarrow$$

$0'3 = 1'03^n - 1 \longrightarrow 1'3 = 1'03^n \longrightarrow$

$\rightarrow \log 1'3 = n \log 1'03 \longrightarrow n = \dfrac{\log 1'3}{\log 1'03} = 8'87$

$\boxed{\log a^b = b \log a}$ $\longrightarrow \boxed{n = 9}$

8*. Ein Unternehmen möchte die Produktionskapazität jährlich um 12% steigern. Wenn die Anfangskapazität 2000 Einheiten beträgt, wie lange dauert es bis die Kapazität auf 3000 Einheiten erhöht wird.

Anfangskapazität 2000 Einheiten

Endkapazität 3000 Einheiten

Rate $0'12$ (12%) $\longrightarrow q = 1'12 = 1 + 0'12$

$$3000 = \frac{2000\left(1 - 1'12^n\right)}{1 - 1'12} \longrightarrow \frac{3000}{2000} = \frac{\left(1 - 1'12^n\right)}{1 - 1'12} \longrightarrow$$

$$\rightarrow 1'5 = \frac{1 - 1'12^n}{-0'12} \longrightarrow 1'5 = \frac{1'12^n - 1}{0'12} \longrightarrow 1'5 \cdot 0'12 = 1'12^n - 1$$

$$\rightarrow 1'5 \cdot 0'12 + 1 = 1'12^n \longrightarrow 1'18 = 1'12^n \longrightarrow$$

$$\rightarrow \log 1'18 = n \cdot \log 1'12 \rightarrow n = \frac{\log 1'18}{\log 1'12}$$

$n = 1'46 \longrightarrow \boxed{n = 2}$

3. Lineare Abschreibungen

1. Anschaffungskosten $K = 40000$ €
Abschreibungszeitraum $n = 8$ Jahre

Jährliche Abschreibung $A = \frac{K}{n} = 5000$ €

Restwert nach t Jahren $R = K - At$

$t = 5 \rightarrow R_5 = 40.000 - 5000 \cdot 5 = 15000$ €

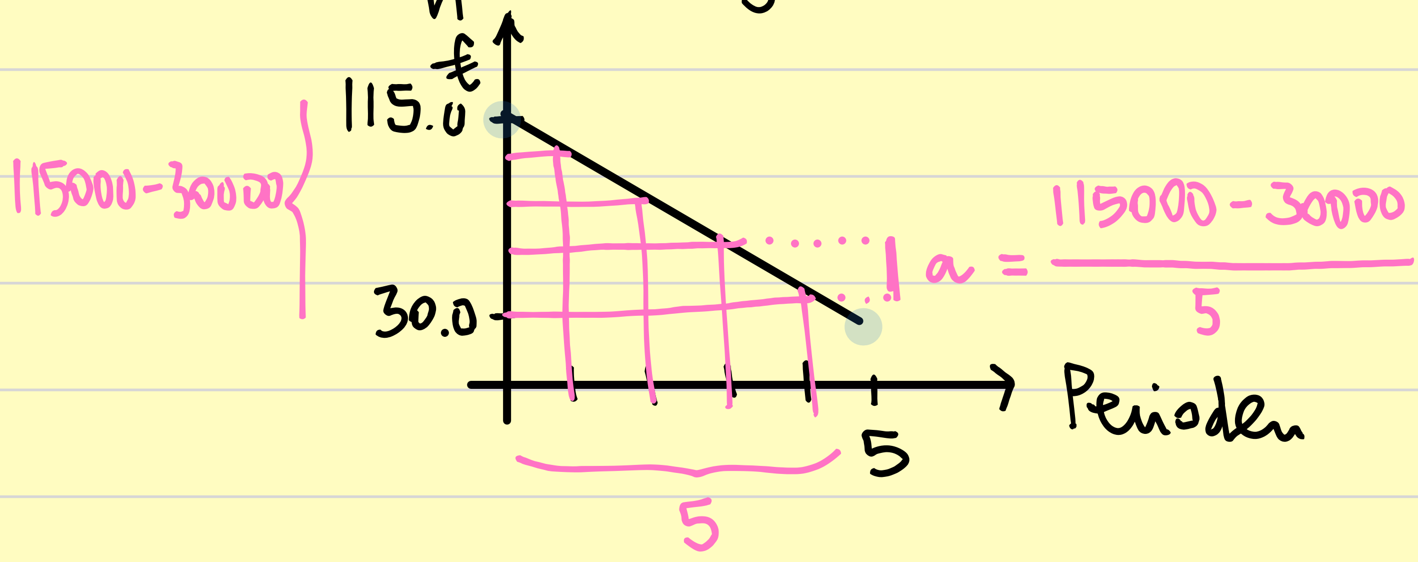
2. Anschaffungswert $K = 10^6$ €
Abschreibungszeitraum $n = 25$ Jahre

$$A = \frac{K}{n} = \frac{10^6}{25} = 40\,000 \text{ €}$$

11. (neu) Ein LKW, die für 115000 € angeschafft wurde, hat nach 5 Jahren Nutzungsdauer einen Wert von 30000 €.
Wie hoch sind die jährliche lineare Abschreibungsbeträge?

Anschaffungswert $A = 115000$ €
Restwert $R = 30000$ €
Anzahl Perioden $n = 5$

$$a = \frac{A-R}{n} = \frac{115000-30000}{5} = 17000€$$



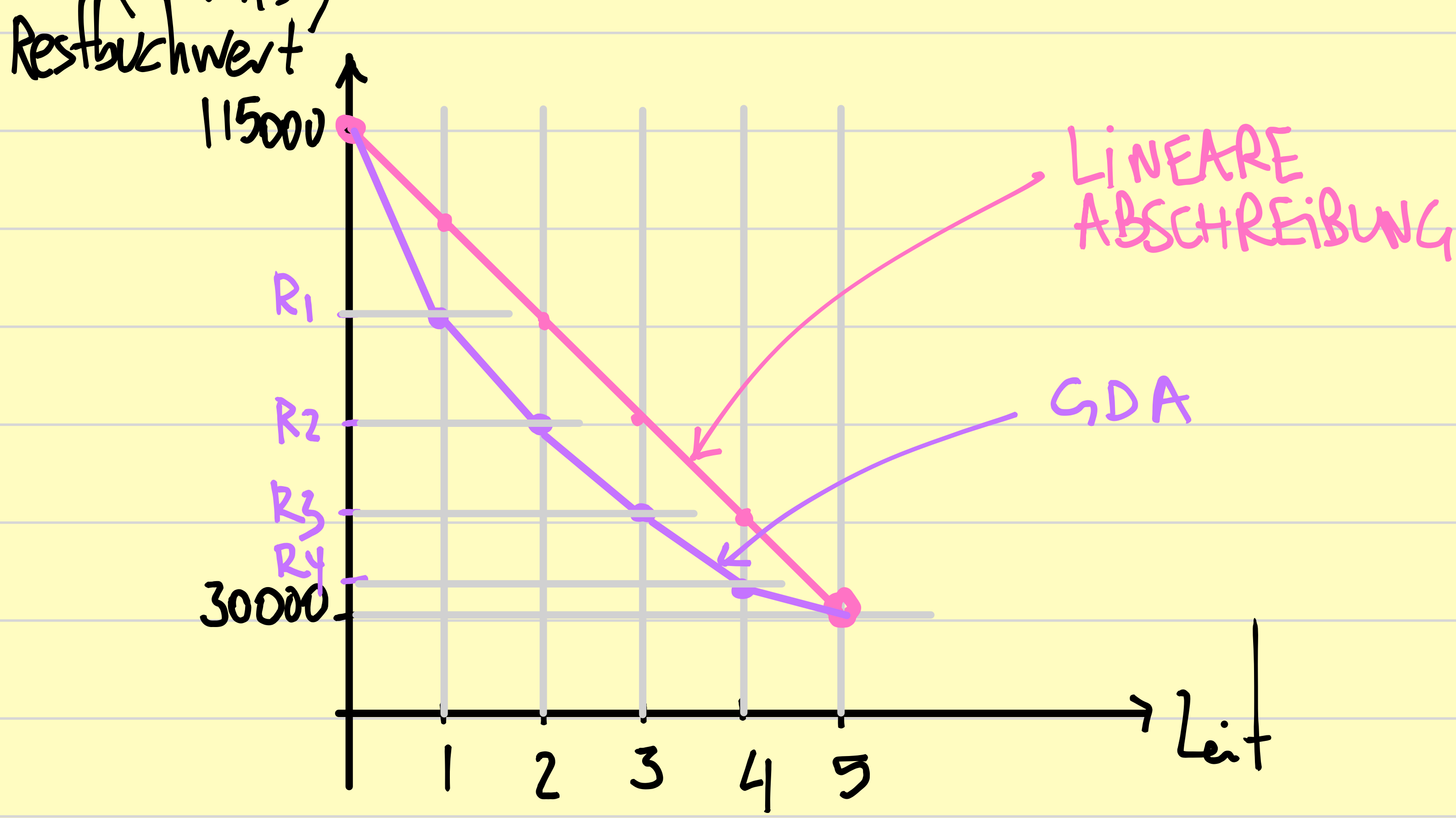
4. Geometrisch-Degressive Abschreibung

Übung: Ein LKW wurde für 115000 € angeschafft. Nach 5 Jahr Nutzungsdauer hat einen Wert von 30000 €. Abschreibungsplan für GDA.

Jahr	Abschreibung	Restbuchwert
0	—	$R_0 = A = 115000$
1	$A - R_1 = 27101'28$	$R_1 = A\left(1-\frac{p}{100}\right) = 87898'7$
2	$R_1 - R_2 = 20703'35$	$R_2 = A\left(1-\frac{p}{100}\right)^2 = 67195'3$
3	$R_2 - R_3 = 15831'18$	$R_3 = A\left(1-\frac{p}{100}\right)^3 = 51364'12$
4	$R_3 - R_4 = 12101'38$	$R_4 = A\left(1-\frac{p}{100}\right)^4 = 39262'7$
5	$R_4 - R_5 = 9262'7$	$R_5 = 30000$

$$R_n = A\left(1-\frac{p}{100}\right)^n = R \rightarrow \sqrt[n]{R} = \sqrt[n]{A}\cdot\left(1-\frac{p}{100}\right) \rightarrow \sqrt[n]{\frac{R}{A}} = 1-\frac{p}{100} \rightarrow p = 100\left(1-\sqrt[n]{\frac{R}{A}}\right)$$

$$p = 100\left(1 - \sqrt[5]{\frac{30}{115}}\right) = 23'56\%$$



20241009.

1. Einfache Verzinsung

1. Zinsbetrag $Z = K \cdot p \cdot t$
   Zinssatz $p = 4\%$
   Dauer $t = 3$ Jahre
   Anfangskapital $K = 50000$ €

   $\triangleright$ $Z = 6000$ €

2. Zinsenzinsrechnung

1. Endbetrag $E = K(1+p)^t$
   Anfangskapital $K = 10000$ €
   Zinssatz $p = 5\%$
   Anlagedauer $t = 4$ Jahre

   $\triangleright$

$$E = 10000(1+0'05)^4 = 12155'06€$$

9.* Eine Logistikfirma investiert 75000€ in ein Projekt, das jährlich 4'5% Zinsen bietet. Wie lange soll das Projekt laufen damit die Firma ein Endkapital von 170000€ bekommt.

$$E = K(1+p)^t \rightarrow \frac{E}{K} = (1+p)^t \rightarrow$$

$$\rightarrow \log\left(\frac{E}{K}\right) = t \cdot \log(1+p) \rightarrow t = \frac{\log\left(\frac{E}{K}\right)}{\log(1+p)}$$

$$\left.\begin{array}{l} E = 170000 \\ K = 75000 \\ p = 0'045 \end{array}\right\} t = 18'59 \text{ Jahre} \rightarrow \boxed{t = 19 \text{ Jahre}}$$

3. Unterjährige Verzinsung

3. Anfangskapital $K = 50000€$ Dauer $t = 4$ Jahre
Jährliche Zinssatz $p = 0'03$
Halbjährliche Verzinsung $m = 2$

$$E = K \cdot \left[1 + \frac{p}{m}\right]^{m \cdot t} = 50000 \cdot \left[1 + \frac{0'03}{2}\right]^{2 \cdot 4} = 56341'25€$$

3*. Anfangskapital $k = 50000$ €
Dauer $t = 4$ Jahre
Endkapital $E = 56341'25$ €
Jährliche Zinsatz $p = 0'03$

Was ist m?

$$E = k \cdot \left[1 + \frac{p}{m}\right]^{m \cdot t} \rightarrow \frac{E}{k} = \left[1 + \frac{p}{m}\right]^{m \cdot t} \rightarrow$$

$$\rightarrow \log \frac{E}{k} = m \cdot t \cdot \log\left[1 + \frac{p}{m}\right] \longrightarrow$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \\ x < 1 : p < 1 ; m > 1 \end{array}}$$

TAYLOR

$$\rightarrow \log \frac{E}{k} = m \cdot t \cdot \left[\frac{p}{m} - \frac{1}{2}\left(\frac{p}{m}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{p}{m}\right)^3 - \frac{1}{4}\left(\frac{p}{m}\right)^4\right]$$

$$\rightarrow \log \frac{E}{k} \simeq m \cdot t \cdot \frac{p}{m} - mt \cdot \frac{1}{2} \frac{p^2}{m^2} \rightarrow$$

$$\rightarrow \log \frac{E}{k} \simeq t \cdot p - \frac{tp^2}{2} \cdot \frac{1}{m} \rightarrow$$

$$\rightarrow \log \frac{E}{k} \simeq tp\left[1 - \frac{p}{2m}\right] \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{\log \frac{E}{K}}{tp} \simeq 1 - \frac{p}{2m} \rightarrow \frac{p}{2m} = 1 - \frac{\log \frac{E}{K}}{tp} \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{m \cong \frac{p}{2\left(1 - \frac{\log E/K}{tp}\right)}} = \frac{0'03}{2\left(1 - \frac{\log\left(\frac{5634'25}{50000}\right)}{4 \cdot 0'03}\right)}$$

4. Rentenrechnung

3. $R = 500$ € Monatliche Rente
$p = 3\%/\text{Jahr}$ Zinssatz
$t = 8$ Anzahl Jahre
$m = 12$ Monatliche Zahlung

Umrechnung monatlicher Zinssatz: $i = \frac{p}{m} = \frac{0'03}{12}$

Gesamtanzahl Zahlungen $n = 8 \cdot 12 = 96$

$$\text{Endwert} = R \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} = 500 \cdot \frac{(1+0'0025)^{96} - 1}{0'0025} =$$

$$\simeq 53648 \text{ €}$$

10. $E = R \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}$

E. Endwert
R. Rente $= 2500 €$
i. Zinssatz/Periode (monatlich)
n. Anzahl Perioden.

Zinssatz pro Jahr $3\% \rightarrow i = \frac{0'03}{12} = 0'0025$
Anzahl Perioden $\rightarrow n = 10 \cdot 12 = 120$

$$E = 2500 \frac{(1+0'0025)^{120} - 1}{0'0025} = 349353 €$$