ZINSRECHNUNG Zinsen sind das Entgelt für ein leihweise überlassenes Kapital.
Nachschüssige Zinsen sind Zinsen die am Ende einer (zeitlichen) Periode fällig werden.

PARAMETER.
- p. Zinssatz
- q. Zinsfaktor $\equiv q = 1 + \frac{p}{100}$
- k_0. Anfangskapital (Kapital zu Beginn)
- k_n. Endkapital (Kapital nach der n·ten Periode)

1. **EINFACHE VERZINSUNG**. Bei einer einfachen Verzinsung werden in den einzelnen Perioden nur die Zinsen für das Anfangskapital gezahlt, die bisher gezahlten Zinsen werden nicht verzinst.
Die Zinsen nach „n" Perioden berechnen wir folgendermaßen

Zinsen nach 1 Jahr : $z_1 = k_0 \cdot \frac{p}{100}$

Zinsen nach 2 Jahren : $z_2 = k_0 \cdot \frac{p}{100} \cdot 2$

Zinsen nach n.ten Jahren: $z_n = k_0 \cdot \frac{p}{100} \cdot n$

Für das Endkapital k_n gilt: $k_n = k_0 + z_n = k_0 + k_0 \cdot \frac{p}{100} \cdot n$

$$\boxed{K_n = K_0\left(1 + n \cdot \frac{p}{100}\right)}$$

Aufgabe. Ein Kapital soll in 10 Jahren bei 5% Zinsen 54.000 € betragen.
Wie hoch muss das Anfangskapital bei einfacher Verzinsung sein?

$$\left.\begin{array}{l} n = 10 \\ p = 5 \\ K_n = 54.000 \end{array}\right\} \quad K_0 = \frac{K_n}{1 + n \cdot \frac{p}{100}} = \frac{54000}{1 + 10 \cdot \frac{5}{100}} = 36.000 \text{ €}$$

Aufgabe. Eine Privatperson hat einen Freund für 5 Jahre 100.000 € zu einem Zinssatz von 6% geliehen.
Wie hoch ist das Endkapital?

$$\left.\begin{array}{l} K_n = K_0 \cdot \left(1 + n \cdot \frac{p}{100}\right) \\ n = 5 \\ p = 6 \\ K_0 = 100.000 \end{array}\right\} \quad K_n = 10^5 \cdot \left(1 + 5 \cdot \frac{6}{100}\right) = 130.000 \text{ €}$$

$$K_n = K_0\left(1 + n \cdot \frac{p}{100}\right); \quad \boxed{K_0 = \frac{K_n}{1 + n \cdot \frac{p}{100}}};$$

$$\to \frac{K_n}{K_0} = \left(1 + n\frac{p}{100}\right) \to \frac{K_n}{K_0} - 1 = n \cdot \frac{p}{100} \to \boxed{n = \frac{100}{p}\left(\frac{K_n}{K_0} - 1\right)}$$

$$\frac{K_n}{K_0} = 1 + n \cdot \frac{p}{100} \longrightarrow \frac{K_n}{K_0} - 1 = n \cdot \frac{p}{100} \longrightarrow \boxed{p = \frac{100}{n}\left(\frac{K_n}{K_0} - 1\right)}$$

Aufgabe. wann verdoppelt sich ein Kapital K_0 bei 6% Zinsen und einfache Verzinsung?

$K_0 = K_0$

$p = 6$

wir suchen „n"

$K_n = 2K_0$

$$K_n = K_0 \cdot \left(1 + n \cdot \frac{p}{100}\right)$$

$$2\cancel{K_0} = \cancel{K_0}\left(1 + n \cdot \frac{6}{100}\right) \longrightarrow 2 = \left(1 + n \cdot \frac{6}{100}\right) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow 2 = 1 + n \cdot \frac{6}{100} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow 1 = n \cdot \frac{6}{100} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow n = \frac{100}{6}$$

$n = \frac{100}{6} = 16'66$ Perioden.

---

2. ZINSENZINSRECHNUNG (ZZR). Bei der ZZR werden sowohl das Anfangskapital als auch die Zinsen in den Perioden verzinst. Das heißt, die Zinsen werden dem Kapital jeweils zugeschlagen und von da an mitverzinst.

Das Anfangskapital K_0 entwickelt sich folgendermaßen:

Anfangskapital : K_0 $\quad K_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)$ $\quad q = 1 + \frac{p}{100}$

Kapital nach 1 Jahr : $K_1 = K_0 + K_0 \cdot \frac{p}{100} = K_0 \cdot q$

Kapital nach 2 Jahre : $K_2 = K_1 + K_1 \cdot \frac{p}{100} = K_1 \cdot q = K_0 \cdot q^2$

...

Kapital nach n Jahre : $\boxed{K_n = K_{n-1} + K_{n-1} \cdot \frac{p}{100} = K_{n-1} \cdot q = K_0 q^n}$

Beispiel. Jemand hat 100.000 € für fünf Jahre zu einem Zinssatz von 6% bei einer Bank angelegt. Wie hoch ist das Endkapital?

$$\left.\begin{aligned} K_0 &= 100.000 \\ n &= 5 \\ p &= 6 \\ q &= 1 + \frac{6}{100} = 1{,}06 \end{aligned}\right\} K_n = K_0 \cdot q^n = 10^5 \cdot (1{,}06)^5 = 133822{,}6 €$$

$$\boxed{K_n = K_0 \cdot q^n}$$

Die Bestimmung von K_0 bei gegebenem K_n, q, und n bezeichnet man als Bestimmung des BARWERTES oder DISKONTIERUNG oder ABZINSUNG eines Kapitals.

Beispiel. Tabea ist heute 20. Sie braucht $2 \cdot 10^6$ € auf der Konto, wenn sie 65 wird, damit sie gut in die Rente geht. Sie kann das Geld heute bei einer Bank zu einem Zinssatz von 5% anlegen. Wie viel Anfangs-kapital wäre heute notwendig?

$$\left.\begin{array}{l} n = 65 - 20 = 45 \\ p = 5 \\ q = 1 + \frac{5}{100} = 1'05 \\ K_0 = ? \\ K_n = 2 \cdot 10^6 \end{array}\right\} \quad K_n = K_0 \cdot q^n \rightarrow K_0 = \frac{K_n}{q^n} = \frac{2 \cdot 10^6}{1'05^{45}} = 222593'02\,€$$

Die Diskontierung lässt in den Wirtschaftswissenschaften Vergleiche zw. zu verschiedenen Zeiten fälligen Kapitalen zu.

$$K_0 = \frac{K_n}{q^n} \qquad \frac{1}{q^n}$$

DISKONTIERUNG oder ABZINSUNG — ABZINSFAKTO

Beispiel. Florian kann in fünf Jahren einen Oldtimer, mit Kaufpreis 7500 €, 10000 € bekommen. In 10 Jahren würde er 15000 € bekommen. Er könnte sein Geld alternativ für 11% Zinsen anlegen.
Vergleichen Sie die Barwerte.

Was ist der Barwert von 7500 € heute? $K_0 = 7500\,€$

Was ist der Barwert von 10000 € in 5 Jahren? $K_0 = K_n \cdot \frac{1}{q^n} = 10000 \cdot \frac{1}{1'11^5} = 5934\,€$

Ich bräuchte heute 5934 € um in 5 Jahre 10000 € zu bekommen mit 11% Zinsen. (ZZR)

Was ist der Barwert von 15000€ in 10 Jahren?

Ich bräuchte heute 5283€ um in 10 Jahre 15000€ zu bekommen mit 11% Zinsen. (ZZR)

$K_0 = 15000 \cdot \frac{1}{1'11^{10}} = 5283$ €

Es ist sinnvoller, das Geld zu 11% Zinsen anzulegen.

Durch Umformung der Formel $\boxed{K_n = K_0 q^n}$ ergeben sich K_0, p, n.

$$\boxed{\begin{array}{l} K_0 = \dfrac{K_n}{q^n} \\ q = 1 + \dfrac{p}{100} \rightarrow p = 100(q-1) = 100\left(\sqrt[n]{\dfrac{K_n}{K_0}} - 1\right) \\ n = \dfrac{\log \frac{K_n}{K_0}}{\log q} \end{array}}$$

Aufgabe. wann verdoppelt sich ein Kapital bei 6% ZZR?

$$\left.\begin{array}{l} K_0 = K_0 \\ K_n = 2K_0 \\ p = 6 \rightarrow q = 1'06 \end{array}\right\} K_n = K_0 \cdot q^n \rightarrow 2K_0 = K_0 \cdot 1'06^n \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{2\cancel{K_0}}{\cancel{K_0}} = 1'06^n \rightarrow \log 2 = n \log 1'06$$

$\log[a^b] = b \cdot \log a$

$$n = \frac{\log 2}{\log 1'06} = 11'89 \rightarrow 12 \text{ Perioden!}$$

---

3. UNTERJÄHRIGE VERZINSUNG (UJV). Bei der UJV handelt es sich um eine ZZR, bei der Intervale kleiner als ein Jahr sind. Handelt sich idR um eine UJV mit „m" Zinsperioden pro Jahr und dem Jahreszinssatz „p", so beträgt der Zinssatz pro Periode p/m. Damit verändert sich die Formel der ZZR für Kn.

ZZR	UJV	
n	$n \cdot m$	Zinsperioden
p	$\frac{p}{m}$	Zinssatz
$K_n = K_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^n = K_0 q^n$	$K_n = K_0\left(1+\frac{p/m}{100}\right)^{n \cdot m} = K_0\left(1+\frac{p}{m \cdot 100}\right)^{n \cdot m}$	Endkapital

Beispiel. Bei jährlicher Verzinsung erhält man aus einem Kapital von 100000€ nach 5 Jahren bei einem Zinssatz von 6% 133822'5 €.
Wie hoch wäre das Endkapital bei monatlicher Verzinsung?

$$K_n = K_0 \cdot \left[1 + \frac{p}{m \cdot 100}\right]^{n \cdot m} = 100000 \cdot \left[1 + \frac{6}{12 \cdot 100}\right]^{12 \cdot 5} = 134885{,}02\,€$$

FAZIT: bei unterjährigen Verzinsung wächst also ein Kapital schneller als bei der jährlichen Verzinsung, obwohl der „Jahreszinssatz p" derselbe ist.

RENTENRECHNUNG

Unter einer „Rente" versteht man in der Finanzmathematik gleich bleibende Zahlungen, die in regelmäßigen Abständen geleistet werden.

Rente: gleichmäßige Zahlungen [Ein- & Auszahlungen]

r: Rate (einzelne Zahlungen)

R_n: Ratenendwert (Gesamtwert einer Rente am Ende der Zahlungen).

R_0: Ratenbarwert (Gesamtwert einer Rente am Anfang der Zahlungen)

q: Zinsfaktor (mit dem die Raten verzinst werden)

$$q = 1 + \frac{p}{100}$$

Ableitung der Formel zur Berechnung des Rentenendwerts

- Bei der nachschüssiger Rente (Zahlungen am Ende des Jahres fällig) wird die 1. Rate „r" am Ende des 1. Jahres gezahlt. Nach Ablauf von „n" Jahren ist diese erste Rate $(n-1)$ mal verzinst worden. Der Wert der ersten Rate „r" am Ende der Laufzeit beträgt also $r \cdot q^{n-1}$!

Jahre	Rate	Anzahl der Verzinsungen	Endwert der Rate
1	r	$n-1$	$r \cdot q^{n-1}$
2	r	$n-2$	$r \cdot q^{n-2}$
...			
$n-2$	r	2	$r \cdot q^{2}$
$n-1$	r	1	$r \cdot q$
n	r	0	r

Der Rentenendwert setzt sich aus den Endwerten der einzelnen Raten zusammen:

$$R_n = r \cdot q^{n-1} + r \cdot q^{n-2} + \dots + r \cdot q + r = r \cdot \sum_{i=1}^{n} q^{i-1}$$

Geometrische Reihe

$$\boxed{R_n = r \cdot \frac{q^n - 1}{q-1}}$$ (nachschüssiger Rente)

Beispiel. Frau Maier möchte ab dem 66. Geburtstag zusätzlich zu ihrer Rente 10 Jahre lang über einen jährlichen Betrag von 6000 € verfügen (nachschüssig).

a) Wie hoch muss das Kapital am 66. Geburtstag sein, wenn sie einen Zinssatz von 6% unterstellt?

i.e. Barwert der Zusatzrente zum 66. Geburtstag?

$$\left.\begin{array}{l} R_0 = \dfrac{R_n}{q^n} \\[2ex] R_n = r \cdot \dfrac{q^n - 1}{q-1} \end{array}\right\} \quad R_0 = r \cdot \frac{q^n - 1}{q^n (q-1)} = 6000 \cdot \frac{1{,}06^{10} - 1}{1{,}06^{10} \cdot 0{,}06} = 44160{,}52\ €$$

b) Wie hoch ist der Endwert der Rente?

$$R_n = R_0 \cdot q^n = 44160{,}52 \cdot 1{,}06^{10} = 79084{,}77\ €$$

c) Welche regelmäßigen jährlichen Einzahlungen muss sie leisten, wenn sie das Kapital in 15 Jahren zu 7% ansparen will?

$$R_n = r \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \longrightarrow r = \frac{R_0 \cdot (q-1)}{q^n - 1} = \frac{44160{,}52\,(0{,}07)}{1{,}07^{15} - 1} =$$

$$= 1757{,}35\ €$$