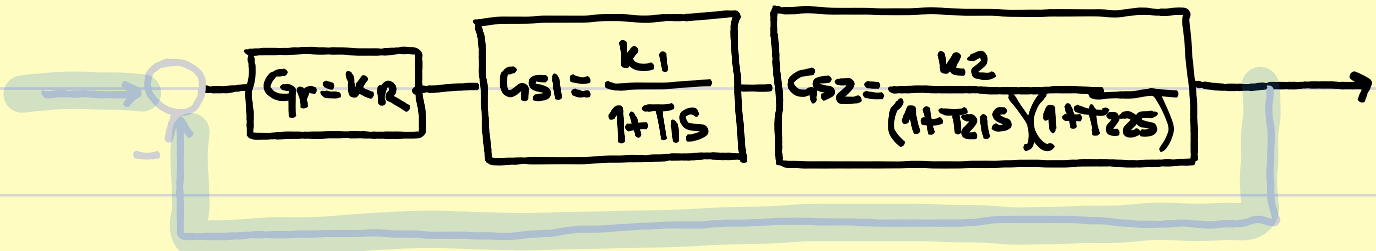
3.



$T_1, T_{21}, T_{22} \in \mathbb{R}^+$

$$G_g(s) = \frac{G_0(s)}{1+G_0(s)} = \frac{\frac{k_1 k_2 k_R}{(1+T_1 s)(1+T_{21}s)(1+T_{22}s)}}{1+\frac{k_1 k_2 k_R}{(1+T_1 s)(1+T_{21}s)(1+T_{22}s)}} =$$

$$= \frac{k_1 k_2 k_R}{(T_1 T_{21} T_{22})s^3 + (T_1 T_{21} + T_1 T_{22} + T_{21} T_{22})s^2 + (T_1 + T_{21} + T_{22})s + 1 + k_1 k_2 k_R} =$$

$$= \frac{k_1 k_2 k_R}{T_1 T_{21} T_{22}} \cdot \frac{1}{s^3 + \frac{T_1 T_{21} + T_1 T_{22} + T_{21} T_{22}}{T_1 T_{21} T_{22}} s^2 + \frac{T_1 + T_{21} + T_{22}}{T_1 T_{21} T_{22}} s + \frac{1 + k_1 k_2 k_R}{T_1 T_{21} T_{22}}}$$

Annahme OHNE Verlust an Erklärbarkeit vom Model:

$T_1 = T_{21} = T_{22} = T$

$k_1 k_2 k_R = K$

$$= \frac{K}{T^3} \cdot \frac{1}{s^3 + \frac{3T^2}{T^3} s^2 + \frac{3T}{T^3} s + \frac{1+K}{T^3}} = \frac{K}{T^3} \cdot \frac{1}{s^3 + \frac{3}{T} s^2 + \frac{3}{T^2} s + \frac{1+K}{T^3}}$$

1. $B = \frac{3}{T}$; $C = \frac{3}{T^2}$; $D = \frac{1+K}{T^3}$

2. $p = C - \frac{1}{3} B^2 = \frac{3}{T^2} - \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{3}{T}\right)^2 = \frac{3}{T^2} - \frac{3}{T^2} = 0$ ← werden ggf. gegeben ↙

CARDAN

CARDAN $q = D + \frac{2}{27}B^3 - \frac{1}{3}BC = \frac{1+K}{T^3} + \frac{2}{27}\left(\frac{3}{T}\right)^3 - \frac{1}{3}\left(\frac{3}{T}\right)\left(\frac{3}{T^2}\right)$

$$= \frac{1+K}{T^3} + \frac{2}{\cancel{27}} \cdot \frac{\cancel{27}}{T^3} - \frac{3}{T^3} = \frac{1+K-1}{T^3} = \frac{K}{T^3}$$

CARDAN $s^* = y^* - \frac{B}{3} = y^* - \left(\frac{3}{T}\right) \cdot \frac{1}{3} = y^* - \frac{1}{T}$ $(\bullet)$

$p = 0$

$$y^* = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \cancel{\frac{p^3}{27}}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \cancel{\frac{p^3}{27}}}} =$$

$q = \frac{K}{T^3}$

$$= \cancel{\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2}} =$$

$$= \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \frac{q}{2}} = \sqrt[3]{\frac{-K}{T^3}}$$

$(\bullet)$ $s^* = y^* - \frac{1}{T} = \sqrt[3]{\frac{-K}{T^3}} - \frac{1}{T} = \sqrt[3]{\frac{-K}{T^3}} - \sqrt[3]{\frac{1}{T^3}} =$

$$s^* = \frac{\sqrt[3]{-K-1}}{T} < 0$$

STABILITÄT

Betrachten wir den Ausdruck $(-K-1)^{1/3}$ und finden die Werte von K, bei denen der Realteil streng NULL oder negativ ist.

$$\sqrt[3]{-K-1} = 0 \rightarrow -K-1 = 0 \rightarrow K = -1$$

Um den reelen Teil auf negativ zu setzen, muss das Argument der Kubikwurzel negativ sein.

$k e \sqrt[3]{-k-1} < 0$; da $(-k-1)$ immer negativ ist für $k > -1$, wird jeder k, der größer ist als -1, den reelen Teil negativ machen.

$$\boxed{k \geqslant -1 \; ; \; T \in \mathbb{R}^+}$$

$k = 1 \quad ; \quad T = 1$

$$g_g(s) = \frac{k}{T^3} \cdot \frac{1}{s^3 + \frac{3}{T}s^2 + \frac{3}{T^2}s + \frac{1+k}{T^3}} = \frac{1}{s^3 + 3s^2 + 3s + 2} = \cdots =$$

$$= \frac{1}{(s+2)(s+\sqrt[3]{-1})(s+(-1)^{2/3})} = \frac{1}{(s+2)(s+0{'}5+j0{'}8)(s+0{'}5-j0{'}8)}$$

$$g_g(jw) = \frac{1}{(2+jw)(0{'}5+j(0{'}8+w))(0{'}5+j(w-0{'}8))} =$$

$$= \frac{1}{(2+jw)(0{'}5^2 + 0{'}5 \cdot j(w-0{'}8) + 0{'}5\, j(0{'}8+w) - (w^2 - 0{'}8^2))}$$

$$= \frac{1}{(2+jw)(0{'}25 + jw - w^2 + 0{'}8^2)} =$$

$$= \frac{1}{(2+jw)(0{'}25 + 0{'}64 - w^2 + jw)} =$$

$$= \frac{1}{(2+j\omega)(0{,}89-\omega^2+j\omega)} =$$

$$= \frac{1}{(2 \cdot 0{,}89 - 2\omega^2 + 2j\omega - 0{,}89\, j\omega - j\omega^3 - \omega^2)} =$$

$$G_g(j\omega) = \frac{1}{1{,}78-3\omega^2+j(1{,}11\,\omega-\omega^3)} \cdot \frac{1{,}78-3\omega^2+j(1{,}11\omega-\omega^3)}{1{,}78-3\omega^2+j(1{,}11\omega-\omega^3)}$$

$$G_g(j\omega) = Re(j\omega) + j\, Im(j\omega) \quad \ldots$$

(ii) $$G_g(s) = \frac{1}{(s+2)(s+0{,}5+j0{,}8)(s+0{,}5-j0{,}8)}$$

- $s=-2 \longrightarrow A$
- $s=-0{,}5-0{,}8j \longrightarrow B$
- $s=-0{,}5+0{,}8j \longrightarrow C$
- $s=0 \longrightarrow D$

$$x_a(s) = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{(s+0{,}5+j0{,}8)} + \frac{C}{(s+0{,}5-j0{,}8)} + \frac{D}{s}$$

$$\rightarrow x_a(s) = \frac{1}{s} \cdot G_g(s)$$

4.

$$\longrightarrow \boxed{G_R = K_p\left(1+\frac{1}{1+T_i s}\right)} \longrightarrow \boxed{G_S = \frac{K}{s(s+2)}} \longrightarrow$$

a) $$G_o(s) = K \cdot K_p \cdot \frac{1}{s(s+2)} \cdot \left(\frac{1}{1+T_i s}+1\right) =$$

$$= kk_p \cdot \frac{1}{s(s+2)} \cdot \frac{1+T_i s+1}{1+T_i s} =$$

$$= \frac{kk_p}{T_i} \cdot \frac{1}{s(s+2)} \cdot \frac{2+T_i s}{s+\frac{1}{T_i}} \quad (\cdot)$$

STABILITÄT : $\frac{1}{T_i} > 0 \rightarrow T_i > 0 \rightarrow T_i \in \mathbb{R}^+$

b) $k = k_p = T_i = 1$

$$G_g(s) = \frac{G_0(s)}{1+G_0(s)} \overset{(\cdot)}{=} \frac{\frac{1}{s(s\cancel{+2})} \cdot \frac{s\cancel{+2}}{s+1}}{1+\frac{1}{s(s\cancel{+2})} \cdot \frac{s\cancel{+2}}{s+1}} =$$

$$= \frac{1}{s(s+1)+1} = \frac{1}{s^2+s+1}$$

$$s^* = \frac{-1 \pm \sqrt{-1-4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}j}{2}$$

$$G_g(s) = \frac{1}{\left(s+\frac{1-\sqrt{5}j}{2}\right)\left(s+\frac{1+\sqrt{5}j}{2}\right)}$$

$$a = \frac{1-\sqrt{5}j}{2} \qquad b = \frac{1+\sqrt{5}j}{2}$$

c) $$x_a(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s+a} \cdot \frac{1}{s+b} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+a} + \frac{C}{s+b}$$

$$1 = A(s+a)(s+b) + Bs(s+b) + Cs(s+a)$$

$$s=0 \rightarrow \quad A = \frac{1}{ab} = \frac{1}{\left(\frac{1-\sqrt{5}j}{2}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}j}{2}\right)} = \frac{4}{1+5} = \frac{2}{3}$$

$$s=-a \rightarrow \quad 1 = B(-a)(-a+b) \rightarrow B = \frac{1}{a(a-b)} =$$

$$B = \frac{1}{\left(\frac{1-\sqrt{5}j}{2}\right)(-\sqrt{5}j)} = \frac{2}{-5-\sqrt{5}j} \cdot \frac{-5+\sqrt{5}j}{-5+\sqrt{5}j} =$$

$$= \frac{-10+2\sqrt{5}\,j}{30} = \frac{-1}{3} + \frac{\sqrt{5}}{15}\,j$$

$$s=-b \longrightarrow \quad 1 = c(-b)(-b+a) \rightarrow c = \frac{1}{b(a-b)} =$$

$$c = \frac{1}{\left(\frac{1+\sqrt{5}j}{2}\right)\left(-\sqrt{5}j\right)} = \frac{2}{5-\sqrt{5}\,j} \cdot \frac{5+\sqrt{5}j}{5+\sqrt{5}j} =$$

$$= \frac{10+2\sqrt{5}\,j}{30} = \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{5}}{15}\,j$$

$$x_a(s) = \frac{2/3}{s} + \frac{-1/3+\frac{\sqrt{5}}{15}j}{s+a} + \frac{1/3+\frac{\sqrt{5}}{15}j}{s+b} =$$

$$= \frac{2/3}{s} + \frac{-1/3+\frac{\sqrt{5}}{15}j}{s+\frac{1-\sqrt{5}j}{2}} + \frac{1/3+\frac{\sqrt{5}}{15}j}{s+\frac{1+\sqrt{5}j}{2}}$$

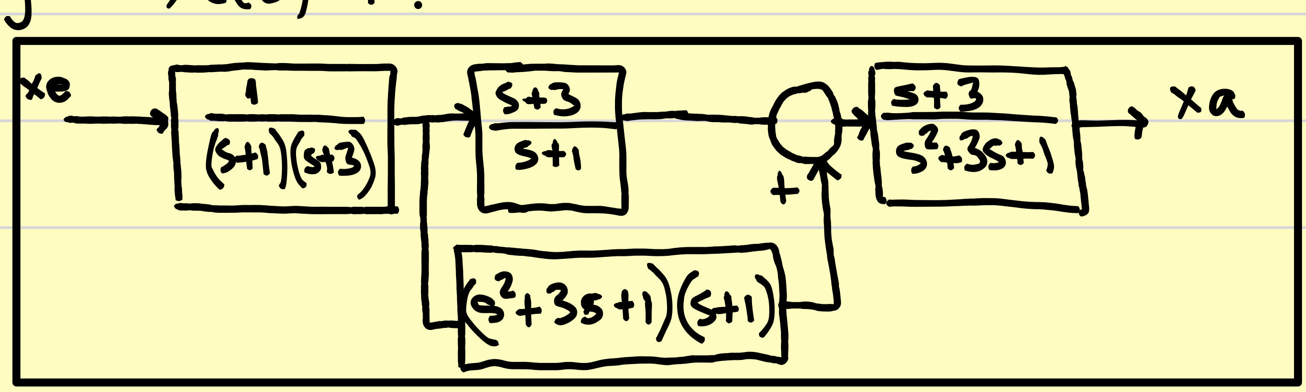
$$x_a(t) = \frac{2}{3} + \left(\frac{-1}{3}+\frac{\sqrt{5}}{15}\,j\right) e^{-\frac{t}{\frac{1-\sqrt{5}j}{2}}} + \left(\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{5}}{15}\,j\right) e^{-\frac{t}{\frac{1+\sqrt{5}j}{2}}}$$

$$x_a(t) = \frac{2}{3} + \left(\frac{-1}{3}+\frac{\sqrt{5}}{15}\,j\right)\left(\cos\frac{-2t}{1-\sqrt{5}j} + \sin\frac{-2t}{1-\sqrt{5}j}\right) +$$

$$+ \left(\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{5}}{15}\,j\right)\left(\cos\frac{-2t}{1+\sqrt{5}j} + \sin\frac{-2t}{1+\sqrt{5}j}\right)$$

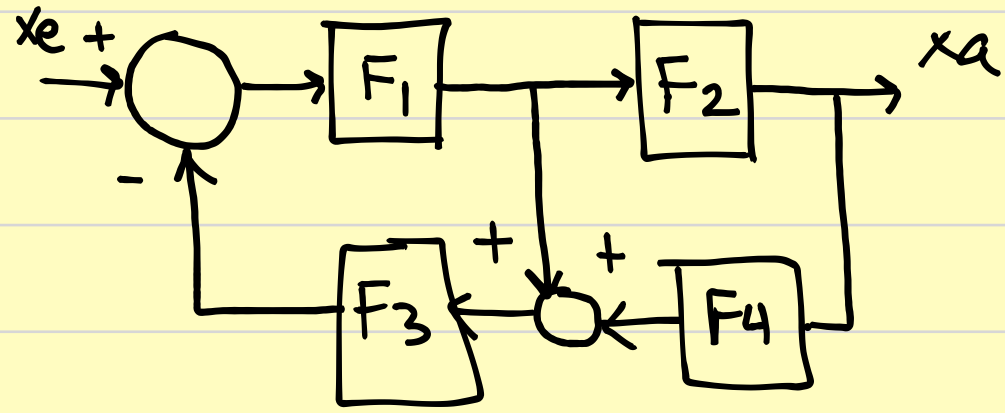
Übungen...

1) Ermitteln Sie das Ausgangssignal $x_a(t)$ bei einem Sprungeingangangs-signal $x_e(t) = 1$.

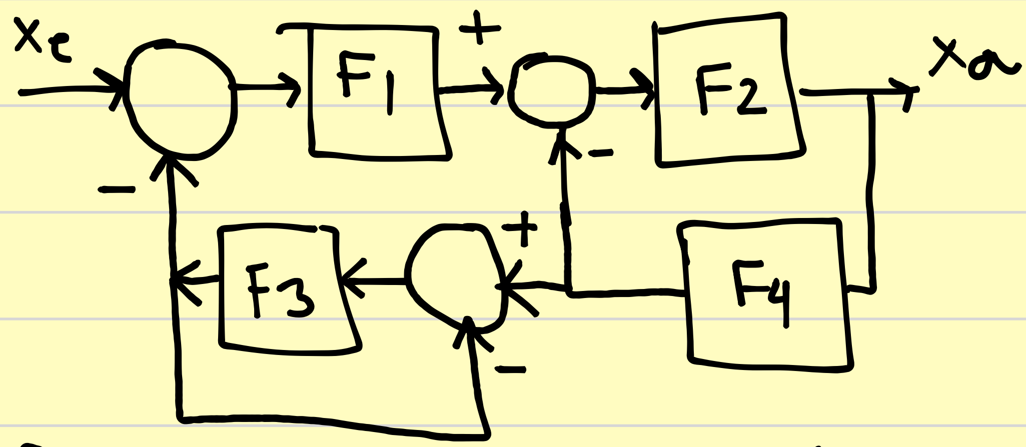


2) Von den beiden Blockschaltbildern, bitte die Übertragungsfunktion jeweils angeben:

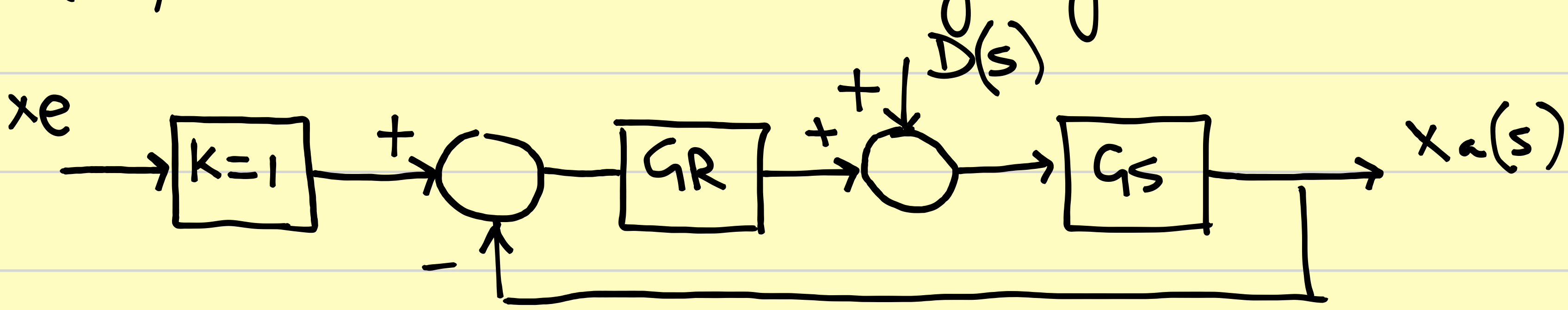
2.1)



2.2)



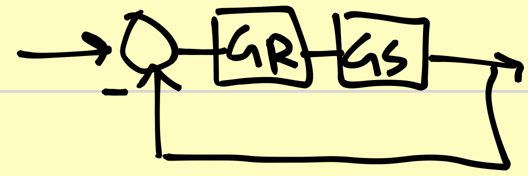
3) Ein Laser für Augenchirurgie wird über eine automatische Positionsregelung bestimmt. Sollte sich das Auge während des Eingriffs bewegen D(s), so muss die Position nachgeregelt werden.



$G_R = K \qquad G_S = \frac{2}{s^2+4s+2}$

a) Ermitteln Sie den Bereich der Verstärkung, damit das System stabil ist.

b) Ermitteln Sie „K“ damit es zu keiner Überschwingung kommen kann.

4) Für einen Standardregelkreis 

$$G_S=\frac{1}{(1+s)^2(1+5s)} \quad \text{und} \quad G_R=K_t\left(1+\frac{1}{T_i s}\right).$$

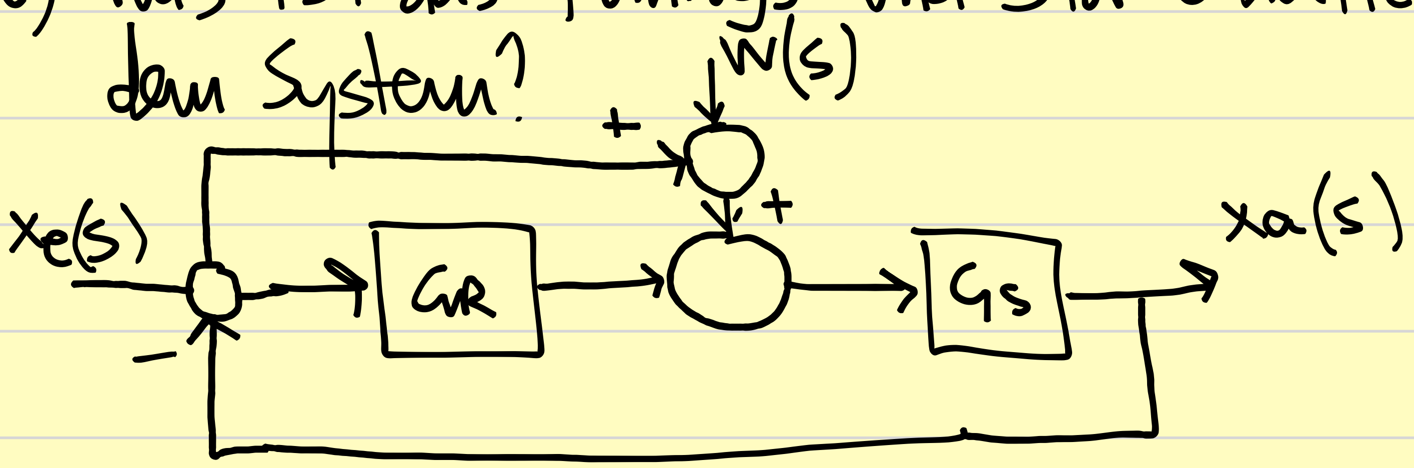
Ermitteln Sie die Parameter des Reglers für einen stabilen Betrieb.

5) Gegeben ist die Strecke $G_S(s)=\dfrac{10s+5}{s^2+10s+2}$.

Entwerfen Sie einen Regler, sodass das Regelsystem bei einem Einheitssprung, eine Anstiegszeit von $t_R=1$ aufweist und eine Überschwingung von 10% darstellt.

6) Ein logistisches System sollte auf Bestandsänderungen (ungeplant) durch Weihnachtsgeschäft $W(s)$ reagieren können.

a) Was ist das Führugs- und Störverhalten bei dem System?



$$G_R=K_R \qquad G_S=\frac{1}{1+Ts} \qquad W(s)=\frac{K_W}{s}$$

b) Wie groß darf K_W sein um das System stabil zu halten?

7) Die gewünschte Übertragungsfunktion des Regelkreises sei

$$1{,}8\, e^{-2t} - 2\, e^{-0{,}9t} \cdot \left[0{,}9 \cos t - \sin t\right]$$

Die Parameter k, a, b, c sind zu bestimmen