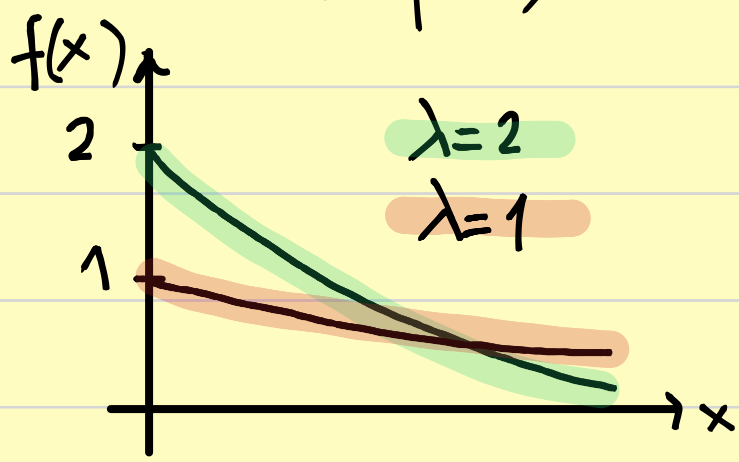
EXPONENTIELLE VERTEILUNG

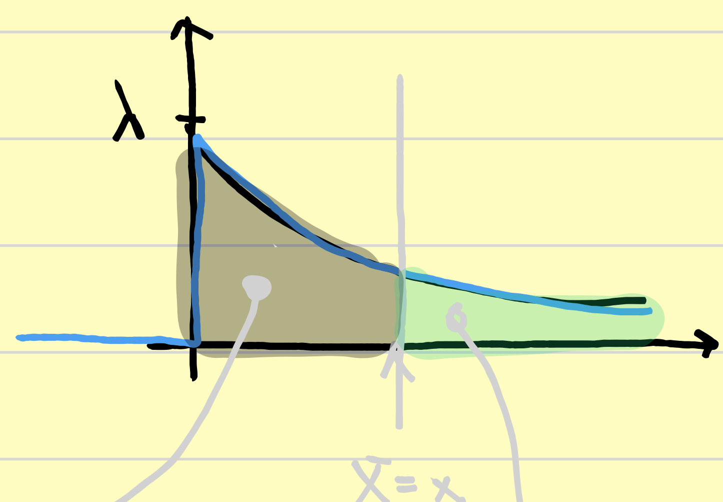
Eine Variable X ist exponentiell verteilt, wenn die WDF $f(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \lambda e^{-\lambda x} & x\geq 0\end{cases}$

λ = Rate (Frequenz) der Ereignisse pro Zeiteinheit im Poisson-Prozeß.



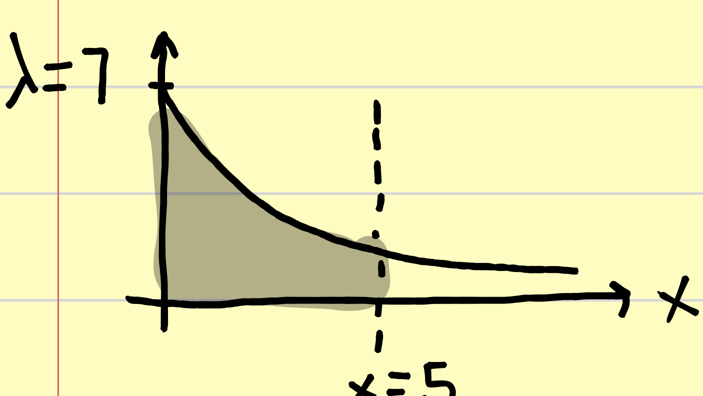
$$\boxed{\begin{array}{l} M_1 \text{ EXP. VERT.} = \dfrac{1}{\lambda} \\[2ex] m_2 \text{ EXP. VERT.} = \dfrac{1}{\lambda^2} \end{array}}$$

$$P(X\leq x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx = 1-e^{-\lambda x}$$



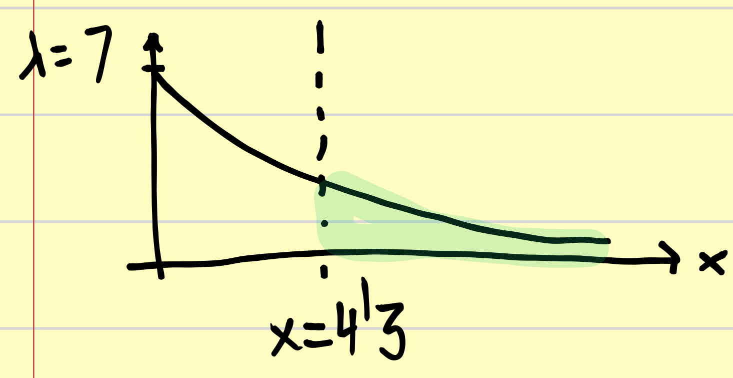
$$P(X>x)=1-P(X\leq x)=1-\left[1-e^{-\lambda x}\right]=e^{-\lambda x}$$

Beispiel. Bitte berechnen Sie die W. dafür, dass die Zeit zw. zwei Maschinenausfällen einer Poisson-Prozeß mit $\lambda=7\,\frac{\text{Störungen}}{\text{std}}$ kleiner ist als 5 Stunden.

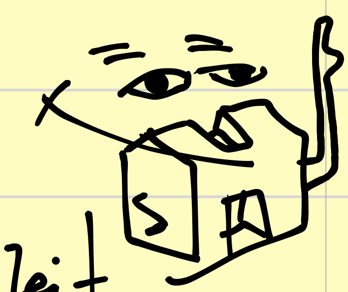


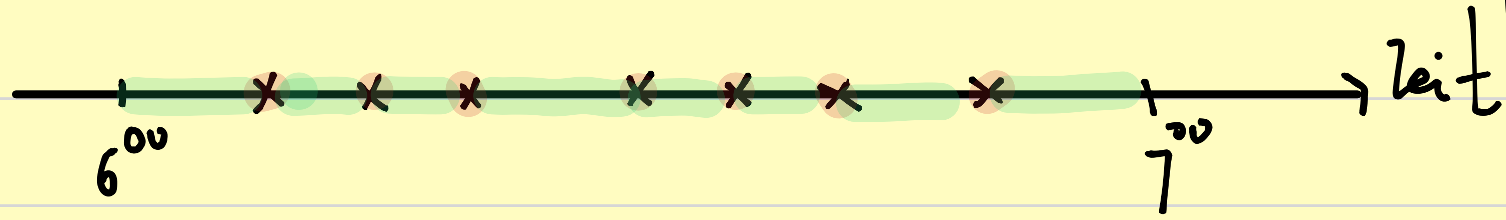
$$P(X\leq 5)=1-e^{-7.5}\approx 0'999$$

Die W. dafür, dass die Zeit zw. Maschinenausfällen größer ist als 4'3 Stunden.



$$P(X > 4'3) = 1 - \left[1 - e^{-7\cdot 4'3}\right] = e^{-7\cdot 4'3} = 8'46\cdot 10^{-14}$$





× die Ausfälle selbst sind Poisson verteilt: das heißt es sind Ereignisse! Es gibt entweder $x=0$ (kein Ausfall), $x=1$ (ein Ausfall), ...

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\cdot \lambda^x}{x!}$$

Was ist die W. dafür, dass wir weniger als 3 Ausfälle in 1 Std haben

$$P(X<3) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)$$

— Die ZEIT zw. den Ausfällen in einem Poisson Prozeß ist exponentiell verteilt.

$$P(X \leq x) = 1 - e^{-\lambda x} \quad \longleftarrow$$

Zusammenhang zw. POISSON.PROZEß & EXPONENTIELLE VERTEILUNG.

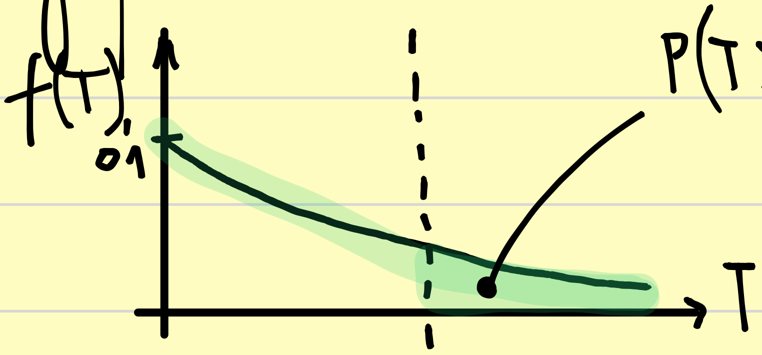
• POISSON.PROZEß: wenn die Ereignisse in einem POISSON.PROZEß auftreten, beschreibt die Poisson.Verteilung die Anzahl der

Ereignisse in einem festen Intervall, während die Exponentialverteilung die Zeitabstände zw. den Ereignissen beschreibt.

- Wenn Ereignisse gemäß einer Poisson-Verteilung auftretten, sind die Zeitabstände zw. den Ereignissen exponentiell verteilt.

Beispiel: Die Zeit zw. zwei Ausfällen einer Maschine ist exponentiell verteilt mit $\lambda = 0{,}1 \frac{\text{Ausfälle}}{\text{Stunde}}$.

a) Was ist die W. dafür, dass die Zeit zw. zwei Ausfällen größer 5 Stunden ist?

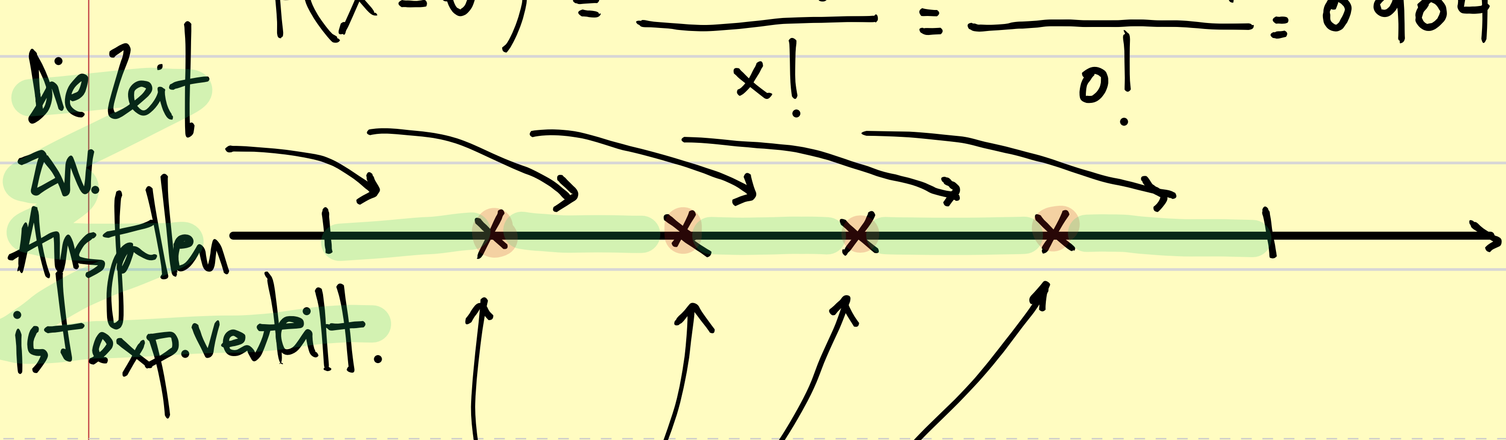


$$P(T>5) = 1 - P(T \leq 5) = 1 - \left[1 - e^{-0{,}1 \cdot 5}\right] = e^{-0{,}5} = 0{,}61$$

weil die Zeit zw. zwei Ausfällen exponentiell verteilt ist, unterliegen die Ausfälle einer Poisson-Verteilung.

b) Was ist die W. dafür, dass in einer Stunde kein Ausfall stattfindet?

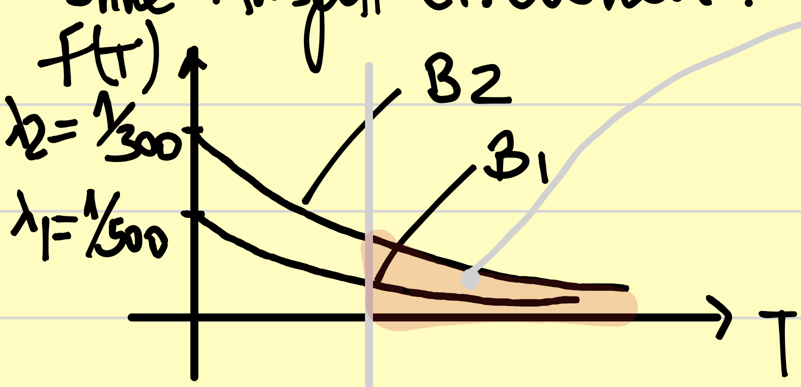
$$P(X=0) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^x}{x!} = \frac{e^{-0{,}1} \cdot 0{,}1^0}{0!} = 0{,}904$$



Die Ausfälle sind Poisson verteilt.

Beispiel: Die Lebensdauer T_1 & T_2 zweier elektrischer Bauteile B_1 & B_2 seien exponentiell verteilt mit jeweils $\lambda_1 = \frac{1}{500}$ & $\lambda_2 = \frac{1}{300}$ $\left[\frac{\text{Ausfälle}}{\text{std}}\right]$ (unabhängig voneinander).

a) Was ist die W. dafür, dass B_1 & B_2 den Zeitpunkt $t_0 = 200$ Std ohne Ausfall erreichen?



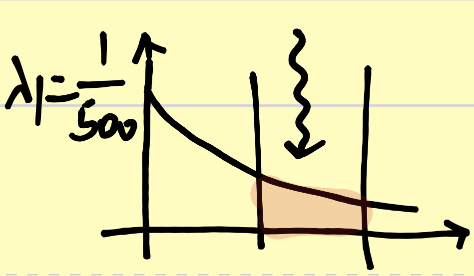
$P(T > 200)$ [deshalb die Fläche]

B_1. $\lambda_1 = \frac{1}{500}\left[\frac{\text{Ausfall}}{\text{std}}\right]$ $\quad P(T_1 > 200) = 1 - \left[1 - e^{-\lambda_1 \cdot 200}\right] = e^{-\frac{200}{500}} = 0{,}67$

B_2. $\lambda_2 = \frac{1}{300}\left[\frac{\text{Ausfall}}{\text{std}}\right]$ $\quad P(T_2 > 200) = 1 - \left[1 - e^{-\lambda_2 \cdot 200}\right] = e^{-\frac{200}{300}} = 0{,}51$

Ein POISSON PROZEß hat kein Gedächtnis. Das bedeutet, was geschah in der Vergangenheit hat kein Einfluß auf die Zukunft.

b) Was ist die W. dafür, dass es zu keinem Ausfall kommt zw. $t_0 = 200$ Std und $t_1 = 400$ Std? (bei B_1)



$P(200 \leq T \leq 400) = P(T \leq 200) = 1 - e^{-\frac{200}{500}} = 0{,}33$

$t_0 \quad t_1$

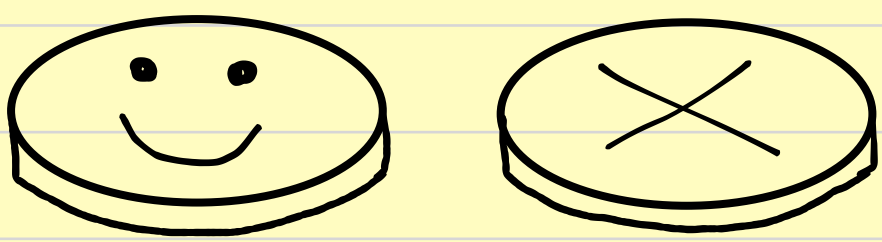
$200 \quad 400$

$\vert\!\leftarrow 200 \rightarrow\!\vert$

- Was ist die W. dafür, dass es zu keinem Ausfall kommt in einem 200 stündigen Interval.

$$P(X=0) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^0}{0!} \qquad \lambda = \frac{1}{500} \frac{\text{Ausfall}}{\text{Std}} \; ; \; \lambda = \frac{*200 \text{ Ausfälle}}{500 \; 200 \text{Std}}$$

$$= \frac{e^{-\frac{200}{500}} \cdot 1}{1} = e^{-\frac{2}{5}} = 0{,}67.$$



POISSON

Ereignisse

EXPONENTIELL

Zeit zw. den Ereignissen.

WEIBULL · VERTEILUNG.

Ist eine flexible statistische Verteilung, die häufig zur Modellierung von Lebensdauern, Ausfallzeiten, und Zuverlässigkeitsanalysen verwendet wird.

Sie ist besonders nützlich, weil sie verschiedene Formen annehmen kann, je nachdem, welche Parameter gewählt werden, und somit verschiede. Arten von Prozeßen beschreiben kann.

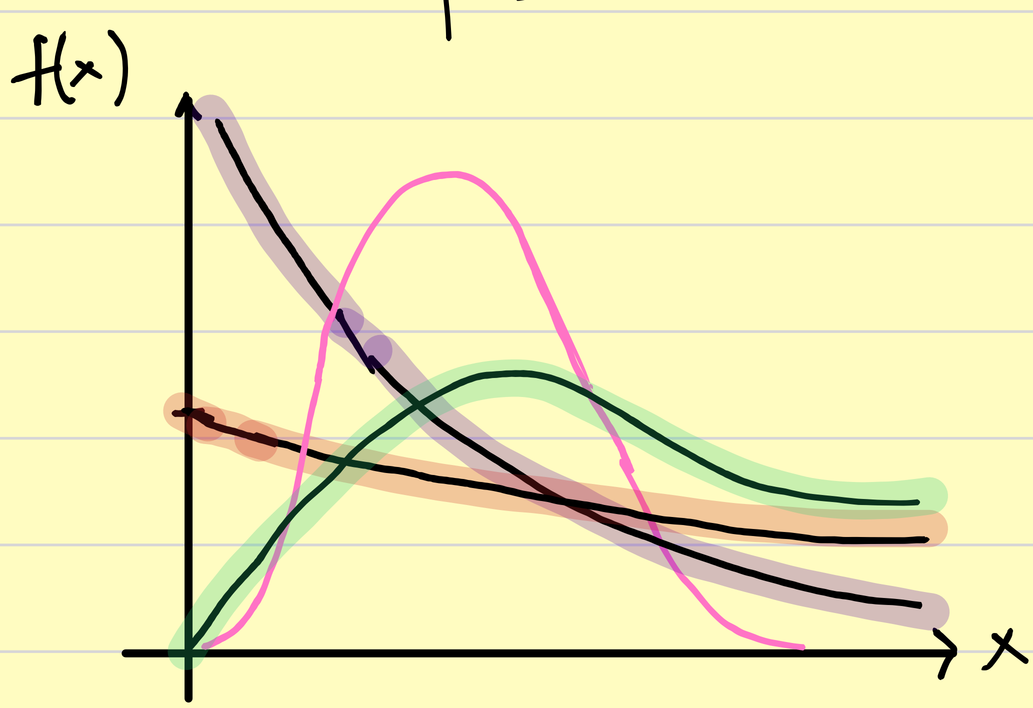
$$\text{WDF:}\quad f(x;\lambda,k)=\frac{k}{\lambda}\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{k-1}e^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{k}}$$

$\lambda > 0$. SKALENPARAMETER (auch als Charakterisierte Lebensdauer)
$k > 0$. FORMPARAMETER
$x \geq 0$. Beobachtete Variable

FORMPARAMETER. Bestimmt die Form der Verteilung.

- $k < 1$. Die Ausfallrate ist Abnehmend. Das bedeutet eine „Anlaufphase".
- $k = 1$. Die Ausfallrate ist Konstant. Das bedeutet eine Ausfallphase ohne Gedächtnis (POISSON)
- $k > 1$. Die Ausfallrate ist Zunehmend. Das bedeutet eine „Alterungsphase"

SKALENPARAMETER. Verschiebt die Verteilung auf der Zeitachse und beschreibt die Qualität des Prozeßes.



$\lambda = 1$

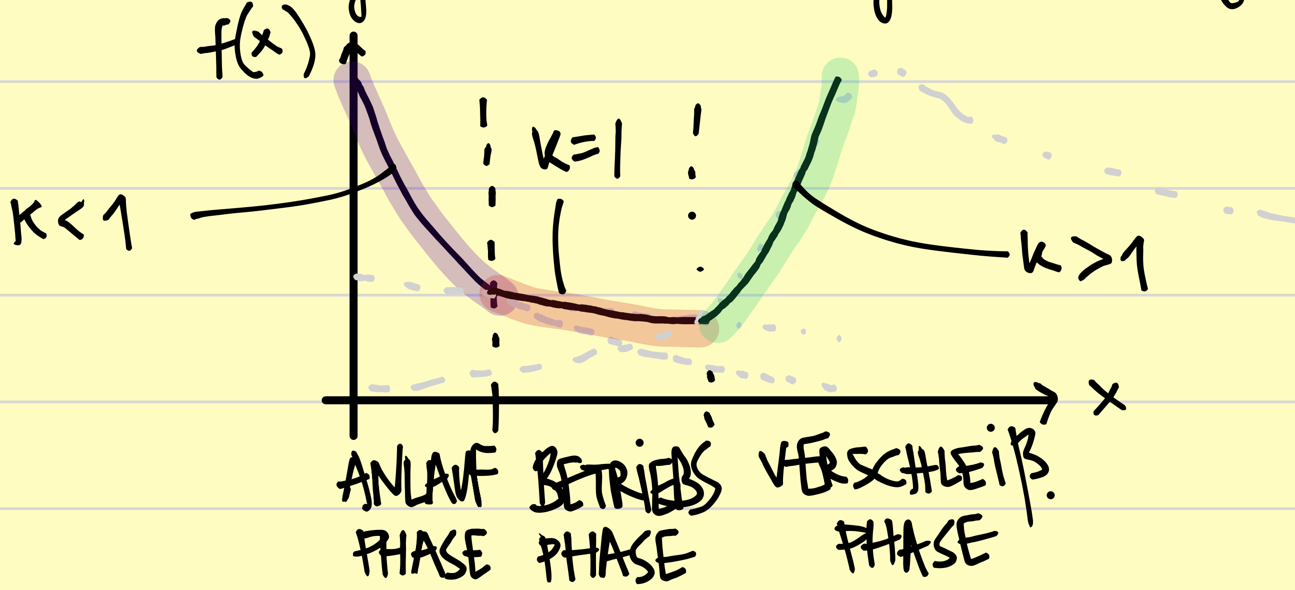
$k = 0'5$ ANLAUFPHASE

$k = 1$ POISSON

$k = 1'5$ ALTERUNGSPHASE

$\boxed{k = 3'602 \text{ NORMALVERTEILUNG}}$

Anwendung: Modellierung von Ausfallursachen.



$$m_1 = \lambda \cdot \Gamma\left[1+\frac{1}{k}\right] \qquad m_2 = \lambda^2\left[\Gamma\left(1+\frac{2}{k}\right)-\left(\Gamma\left(1+\frac{1}{k}\right)\right)^2\right] (*)$$

$$\Gamma(a) = \begin{cases} (a-1)! & a \in \mathbb{N} \\ \text{Tabelle} & a \notin \mathbb{N} \end{cases}$$

(*) diese Formeln werden ggf. in die Prüfung gegeben.