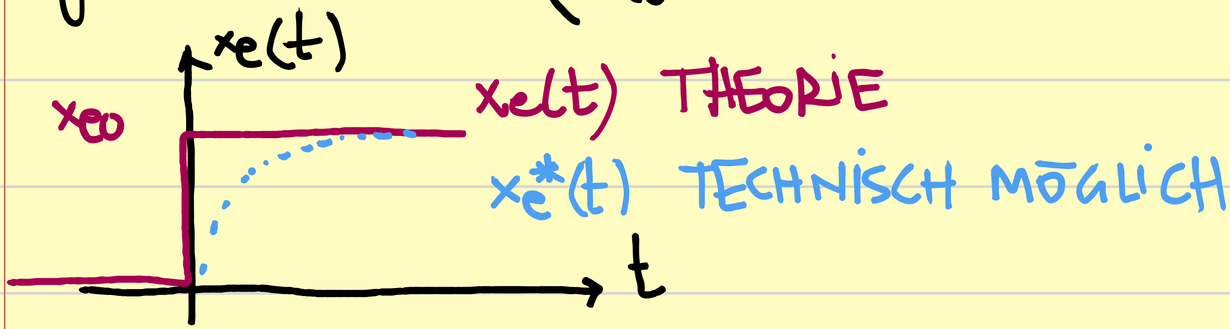
20240314_Regelungstechnik_BEL4

$$\dots \quad T_2^2\, \ddot{x}_a(t) + T_1\, \dot{x}_a(t) + x_a(t) = x_e(t)$$

Es interessiert der zeitliche Verlauf der Ausgangsgröße $x_a(t)$, wenn die Eingangsgröße $x_e(t)$ einen bestimmten zeitlichen Verlauf annimmt. Also $x_e(t)$ muss genau bekannt sein.

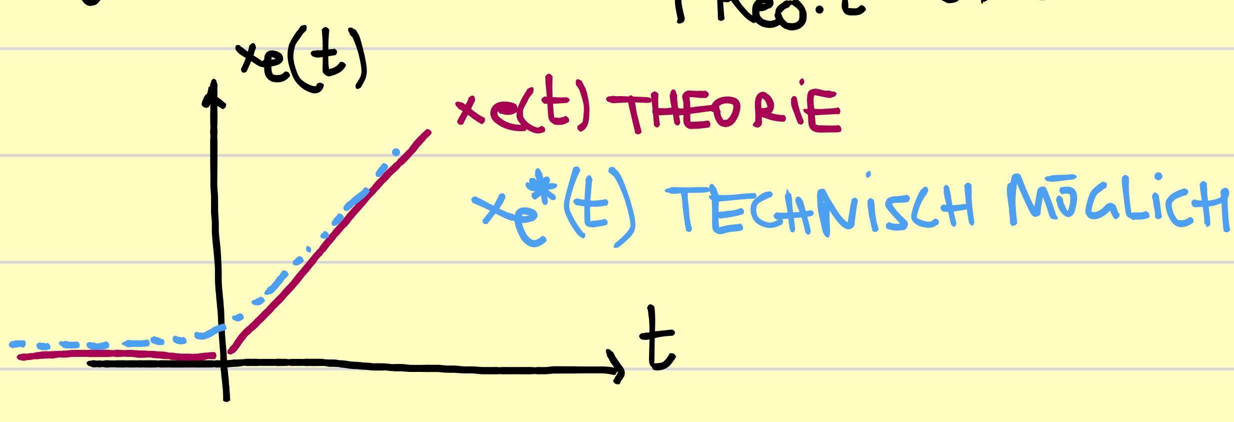
a) $x_e(t)$ SPRUNGFUNKTION

Definition $x_e(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ x_{e0} = \text{constant} & t \geq 0 \end{cases}$



b) $x_e(t)$ ANSTIEGSFUNKTION

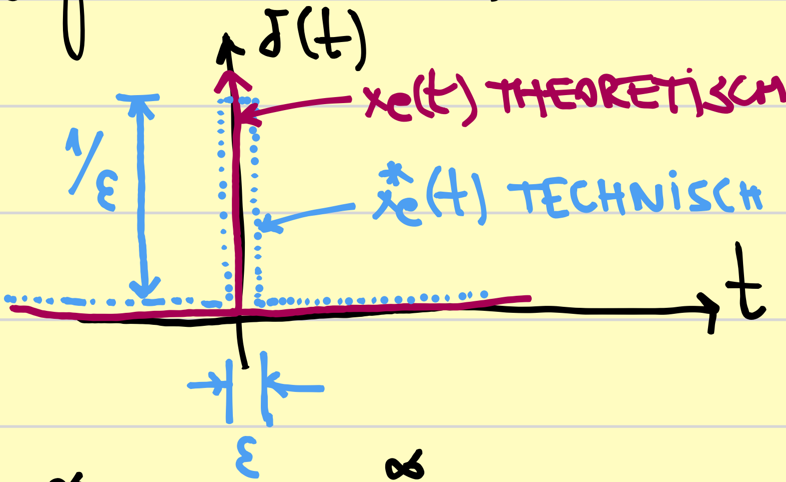
Definition $x_e(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ k_{e0} \cdot t & t>0 \end{cases}$

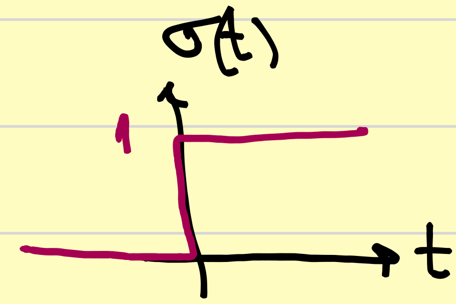


c) $x_e(t)$ IMPULSFUNKTION

Die ideale Impulsfunktion zeigt zum Zeitpunkt $t=0$ einen Sprung ins Unendliche und ist null für $t \neq 0$.

Definition: $x_e(t) = \delta(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ \infty & t = 0 \end{cases}$



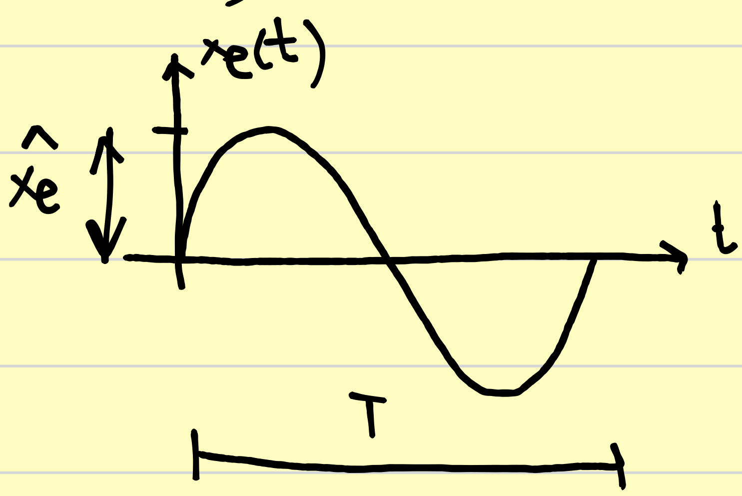


$$\int_0^\infty \overset{*}{x}_e(t)\,dt = \int_0^\infty x_e(t)\,dt = 1 \rightarrow x_e(t) = \delta(t) = \frac{d\sigma(t)}{dt} \quad (!)$$

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

d) $x_e(t)$ SINNUSFÖRMIGE

$$x_e(t) = \hat{x}_e \cdot \sin \omega t$$



wobei $\hat{x}_e$ die Schwingungsamplitude &

$\omega = \frac{2\pi}{T}$ die Kreisfrequenz ist.

T: SCHWINGUNGSPERIODE $T = \frac{1}{f}$ FREQUENZ

Lösung der Differentialgleichung bei sprunghafter Verstellung der Eingangsgröße.

$$x_e(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ k \cdot x_{e0} & t>0 \end{cases}$$

Vereinfachend nehmen wir an, dass die Zeitkonstante T_2 sehr klein sei, und damit das Glied $T_2^2 \ddot{x}_a(t)$ vernachlässigbar. Dies wäre der Fall, wenn die Induktivität L sehr klein bzw. Null wäre.

$$T_2^2 = LC \; ; \; L \to 0 \equiv T_2^2 \to 0$$

$$\boxed{T_1 \dot{x}_a(t) + x_a(t) = k \cdot x_{e0}}$$

Lösung durch Trennung der Veränderlichen ...

$$\frac{dx_a(t)}{dt} = \dot{x}_a(t) = \frac{1}{T_1}(k\,x_{e0} - x_a) \to \frac{dx_a}{kx_{e0} - x_a} = \frac{dt}{T_1}$$

Durch Integration:

$$\int \frac{dx_a(t)}{kx_{e0}-x_a} = \int \frac{dt}{T_1} \xrightarrow{(*)} -\ln(kx_{e0} - x_a) + c = \frac{t}{T_1}$$

$$\boxed{(*) \int \frac{dx}{x} = \ln(x) + c}$$

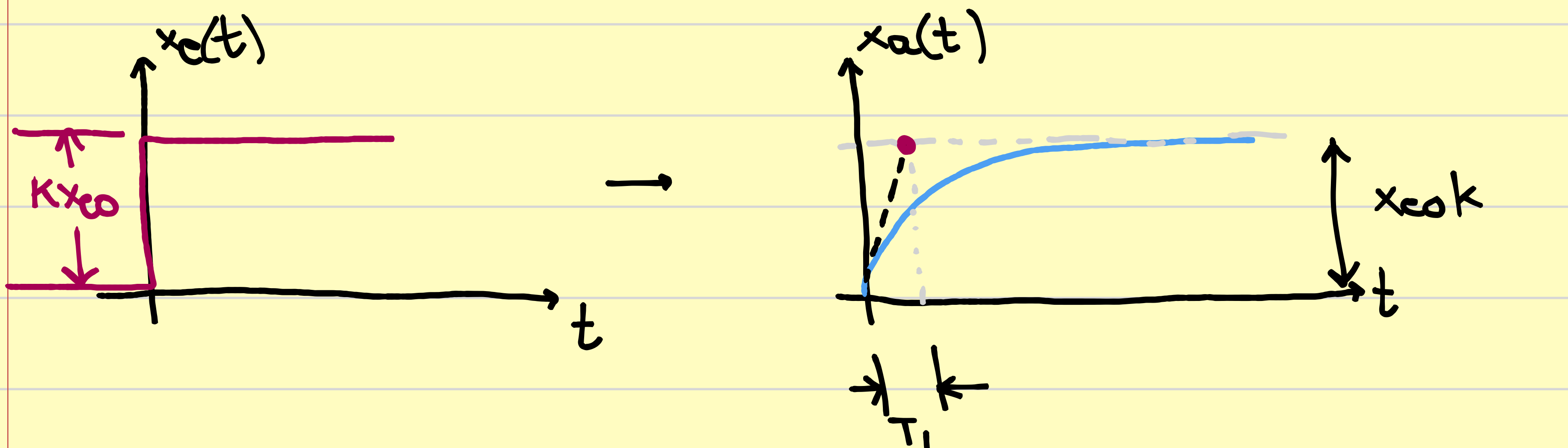
$$t=0 \to x_a(0) = 0 \to -\ln(kx_{e0} - \cancel{x_a(0)}) + c = \frac{\cancel{t}}{T_1} \to c = \ln(kx_{e0})$$

wir setzen c ein:

$$-\ln(Kx_{e0}-x_a)+\ln(Kx_{e0}) = \frac{t}{T_1} \rightarrow$$

$$\rightarrow \ln\left(1-\frac{x_a}{Kx_{e0}}\right) = \frac{t}{T_1} \rightarrow 1-\frac{x_a}{Kx_{e0}} = e^{-t/T_1} \rightarrow$$

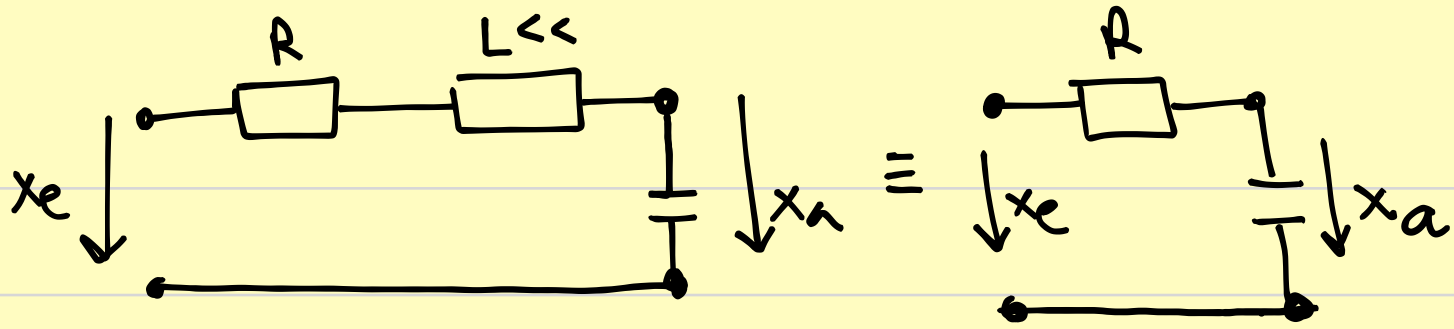
$$\rightarrow \boxed{x_a(t) = Kx_{e0}\left(1-e^{-t/T_1}\right)}$$



$t\to\infty: \quad x_a(t\to\infty) = Kx_{e0}$

$t\sim 0: \quad \frac{dx_a}{dt} = \frac{Kx_{e0}}{T_1}$

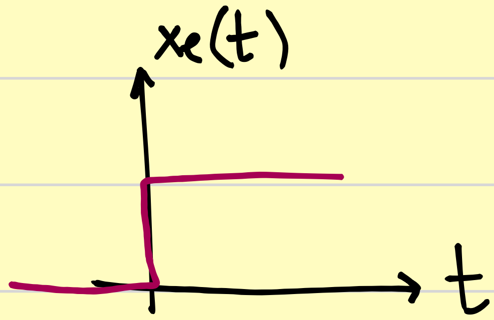
Die Kurve $x_a(t)$ hat für $t=0$ die größte Steigung.
Legt man an die Kurve $x_a(t)$ zum Zeitpunkt $t=0$ die Tangente, so schneidet diese den Beharrungswert $x_a(\infty)$ für $t=T_1$.
Der Verlauf der Sprungantwort $x_a(t)$ ist durch die Zeitkonstahte T_1 und den Übertragungswert Kx_{e0} eindeutig bestimmt.



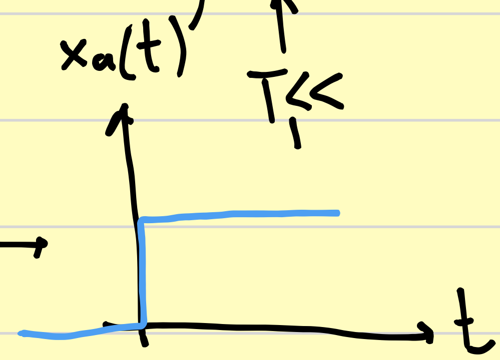
$T_1 = RC$

wenn C auch sehr klein gewesen wäre $C<< \rightarrow T_1 \ll 0$

$$x_a(t) = K x_{e0}\left(1 - e^{-t/T_1}\right) \underset{T_1<<}{=} K x_{e0}$$



→



Übung. versuchen Sie die obige DGL mit Hilfe der Laplace Transformation zu lösen.
Anschließend, bringen Sie die Lösung auf den zeitlichen Dimension zurück.

$x_e(t) = K x_{e0}$
