

## Tilgungsrechnung

Die TR ist eine Weiterentwicklung der Zinseszins - bzw Rentenrechnung.

Sie behandelt die Rückzahlungen von Schulden, die zumeist in Teilbeträgen in einem Zeitrahmen erfolgt. Die Annuitäten schließen die zwischenzeitlich fällige Zinsen und einen Tilgungsbetrag ein. Nur die Tilgungsbeträge senken die Schulden. Die Restschuld nach  $m$  Jahren ist also gleich der Anfangsschuld minus die Tilgungsbeträge:

$$K_m = K_0 - \sum_{i=1}^m T_i = K_0 - T_1 - T_2 - \dots - T_m$$

## PARENTILGUNG

Während der Dauer einer Ratantilgung ist die jährliche Tilgungsrate gleich hoch. Soll ein Schuld  $K_0$  in  $n$  Jahren getilgt werden, so lässt sich die Tilgungsrate  $T$  folgendermaßen berechnen:

$$T = \frac{K_0}{n}$$

Die Annuität ist am Anfang hoch und, weil die Zinsen bei hoher Restschuld hoch sind. Sie nehmen im Laufe der Tilgung ab, da die fälligen Zinsen mit Verringerung des Restschulds immer niedriger werden.

Beispiel: Ein Käufer nimmt einen Kredit von 200.000 € bei 7% jährlichen Zinsen auf. Dieser Kredit soll in 4 Jahren nachschüssig getilgt werden.

Die Tilgungsrate beträgt:  $T = \frac{200000}{4} = 50000 \text{ €}$

Jahr	Restschuld	Zinsen	Tilgungsrate	Annuität
	(Jahresanfang)	(Jahresende)		

1	200000	14000	50000	64000
2	150000	10500	50000	60500
3	100000	7000	50000	57000
4	50000	3500	50000	53500
		35000	200000	235000

## ANNUITÄTENTILGUNG

- Bei der A-T ist die Belastung des Schuldners während der gesamten Tilgungsduer konstant. Das heißt die jährlichen Annuitäten sind konstant. Diese Art der Tilgung ist bei Hypothekendarlehen üblich.
- Die vom Schuldner jährlich gezahlten Annuitäten können als eine Rente aufgefasst werden, da die Annuitäten gleich hoch sind und in regelmäßigen Abständen gezahlt werden.
- Der Barwert dieser Rente muss der Anfangsschuld  $K_0$  entsprechen

$$K_0 = R_0 = \frac{R_n}{q^n} \rightarrow R_n = K_0 \cdot q^n$$

- Aus der Rentenrechnung ist folgende Formel für die Berechnung einer Rendite rate bekannt:

$$A = r = R_n \cdot \frac{q - 1}{q^n - 1} = K_0 \cdot q^n \cdot \frac{q - 1}{q^n - 1} = K_0 \cdot \frac{q^n \cdot (q - 1)}{q^n - 1}$$

für das obige Beispiel:

$$A = 200000 \cdot \frac{1,07^4 \cdot (1,07 - 1)}{1,07^4 - 1} = 59045,62 \text{ €}$$

- Die Summe der gezahlten Zinsen und der gezahlten Tilgungsräten ergibt die Gesamtannuitäten; die Summe der Tilgungsräten ist gleich der Anfangsschuld  $K_0$ .

Bei der A-T ist die Belastung des Schuldners konstant.  
Die Tilgungsarten steigen im Laufe der Tilgung an, da die Zinsen mit sinken der Restschuld einen immer kleineren Anteil an den Annuitäten bilden.

Jahr	Restschuld (Jahresanfang)	Zinsen (Jahresende)	Tilgungsrate	Annuität $A = TR + Z$
1	200000	14000	45045'62	59045'62
2	154954'38	10846'81	48198'82	59045'62
3	106755'56	7472'89	51572'73	59045'62
4	55182'83	3862'18	55182'83	59045'62
		36182'50	200000	236182'48

Aufgabe: Ein Kredit von 400000 € soll nach einer Tilgungsfreien Zeit von 5 Jahren in den folgenden 5 Jahren bei einem Zinssatz von 8% nachschüssig zurückgezahlt werden. Erstellen Sie die Tilgungspläne: a) Ratentilgung b) Annuitätentilgung

## INVESTITIONSRECHNUNG

KAPITALWERTMETHODE  
(Net Present Value - NPV - Method)

Die NPV Methode untersucht die Wirtschaftlichkeit einer Investition im Vergleich zu anderen Investitionen anhand der Bestimmung des Kapitalwerts.

Parameter:  $A_0$  . Anschaffungsausgaben

$n$  . Nutzungsdauer

$p_i$  . Periodentuberschuss (Einnahmen minus Ausgaben) in Periode ...

$c_0$  . Kapitalwert ( $K_0$ )

P. Kalkulationszinsfuß; er gibt einen Vergleichszins bzw. den Mindestanforderungszinssatz für das eingesetzte Kapital an.

$$q \cdot \text{Zinsfaktor } q = 1 + \frac{P}{100}$$

Die Formel zur Berechnung des Kapitalwertes hängt von der Beschaffenheit der Periodenüberschüsse ab.

## NPV bei Einzeldiskontierung

Beispiel. Eine Bäckerei erwägt die Eröffnung einer Filiale mit einem auf 5 Jahre befristeten Mietvertrag. Sie kalkulierte für die Ausstattung 80000€. Die jährlichen Ausgabenschätzungen für diese 5 Jahre auf 150000€, die Einnahmen im ersten Jahr auf 100000€, im 2. Jahr auf 150000€, im 3. auf 200000€, und im 4. und 5. auf 250000€.

Der Restwert der Ausstattung nach 5 Jahren wird auf 20000€ geschätzt.

Ist für die Bäckerei vorteilhafter, die 80000€ in einer Filiale zu investieren oder das Geld zu 8% Zinsen anzulegen?

Jahr	0	1	2	3	4	5
Anschaffungs-Ausgaben	80000					
Ausgaben		150000	150000	150000	150000	150000
Einnahmen		100000	150000	200000	250000	270000
Periodenüberschüsse	-50000	0	50000	10000	120000	

Zur Vereinfachung wird angenommen, dass die gesamten Anschaffungskosten zu Beginn und die Ausgaben bzw. Einnahmen eines Jahres jeweils am Ende anfallen.

Kann am Ende der Nutzungsdauer ein Objekt noch verkauft werden, ist dieser Restwert im letzten Periodenüberschuss zu berücksichtigen.

Das Kapitalwert einer Investition berechnet sich aus der Summe der Periodenüberschüsse minus der Anschaffungsausgaben, wobei alle

Zahlungen auf den Zeitpunkt Null bezogen bzw. abgezinst werden müssen:

$$K_0 = c_0 = \frac{P_1}{q} + \frac{P_2}{q^2} + \frac{P_3}{q^3} + \dots + \frac{P_n}{q^n} - A_0 = \\ = \sum_{i=1}^n \frac{P_i}{q^i} - A_0$$

Jahr	0	1	2	3	4	5
A <sub>0</sub>	80000					
P <sub>i</sub>		-50000	0	50000	100000	120000
$\frac{P_i}{q^i}$		-46296'3	0	39691'61	73502'99	81669'98

$$K_0 = -46296'3 + 0 + 39691'61 + 73502'99 + 81669'98 - 80000 = 68568'3 \text{ €}$$

- Um dasselbe Kapital zu erhalten, müsste die Backerei entweder 148568'28 € bei der Bank bei einem Zinssatz von 8% anlegen, oder 80000 € in einer Filiale investieren.
  - Das Entkапital der Investition beträgt also:
- $$K_n = [80000 + 68568'3] \cdot 1'08^5 = 218295'55 \text{ €}$$
- Bei der Abzinsung der Periodenüberschüsse wurde ein Kalkulationszinsfuß von 8% unterstellt, da das der Zinssatz ist, den der Unternehmer auch bei der Bank bekommen hätte.

## NPV bei gleichbleibenden Jahreszahlungen

Die Berechnung des NPV vereinfacht sich durch die Anwendungsmöglichkeit der Rentenrechnung.

$$R_0 = r \cdot \frac{q^n - 1}{q^1 \cdot (q-1)} ; C_0 = -A_0 + r \cdot \frac{q^n - 1}{q^n(q-1)} + \frac{R}{q^n}$$

Beispiel:

Ist der Kauf eines Grundstücks für 250000 € bei einer jährlichen Pacht von 30000 € netto über 15 Jahre bei einer Mindestanforderungszinssatz von 9% vorteilhaft?

$$C_0 = -250000 + 30000 \cdot \frac{1'09^{15} - 1}{1'09^{15}(1'09 - 1)} + \frac{0}{1'09^{15}} \\ = -8179135 \text{ €}$$

Investition NICHT vorteilhaft.

## NPV bei unbegrenzter Laufzeit

$$C_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ -A_0 + r \cdot \frac{q^n - 1}{q^n(q-1)} \right] = -A_0 + r \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{\left(1 + \frac{P}{100}\right)^n - 1}{\frac{1}{P/100} - \frac{-1}{\left(1 + \frac{P}{100}\right)^n \cdot \left(\frac{P}{100}\right)}} \right] = \\ \rightarrow C_0 = -A + \frac{r}{P/100}$$

Beispiel: Ist der Kauf eines Grundstücks für 250000 € bei einer jährlichen Pacht von 30000 € netto bei einer Mindestanforderungszinssatz von 9% vorteilhaft?

$$C_0 = -A_0 + \frac{r}{P/100} = \\ = -250000 + \frac{30000}{0'9} = \\ = 83333'3 \text{ IST Vorteilhaft}$$

