Wahrscheinlichkeitstheorie

Beispiel: Landkreis SHA

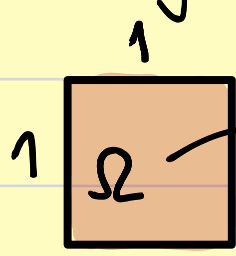
Ereignis Ω: ich wähle einen Mensch aus und dieser ist ein Mensch.
Ω ist "sicher" wahr. $P(\Omega)=1$

Ereignis A_1: ich wähle einen Mensch aus und dieser hat erfolgreich nur bis Bachelor studiert. $0 \leq P(A_1) \leq 1$

Ereignis A_2: ich wähle einen Mensch aus und dieser hat erfolgreich bis Master studiert.
$0 \leq P(A_2) \leq 1$

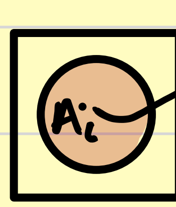
Kolmogorov Axiome:

1. Das sichere Ereignis Ω hat eine W von 1.



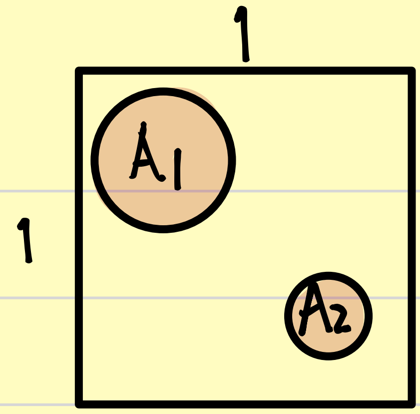
$P(\Omega) = \text{Fläche} = 1$

2. Für jedes Ereignis A_i ist die W von A_i, $P(A_i) \in [0,1]$ in $\mathbb{R}$. $\equiv$ $0 \leq P(A_i) \leq 1$



$P(A_i) \in [0,1]$

3. Die W einer Vereinigung abzählbar vieler INKOMPATIBLER Ereignisse ist die Summe der W der einzelnen Ereignisse.

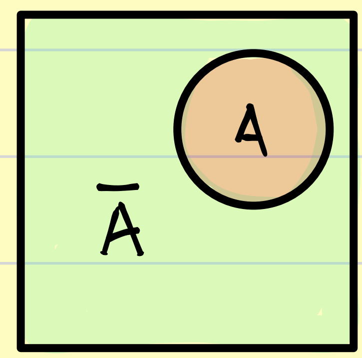


$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2)$

↑ INKOMPATIBLE

Folgerungen der Kolmogorov Axiome:

I Aus der Additivität der W INKOMPATIBLER (DISJUKTIVER) Ereignisse folgt, dass komplementäre Ereignisse haben $P(A) = 1 - P(\bar{A})$



II Daraus folgt, dass das unmögliche Ereignis, die leer Menge, die W null hat: $P(\emptyset) = 0$

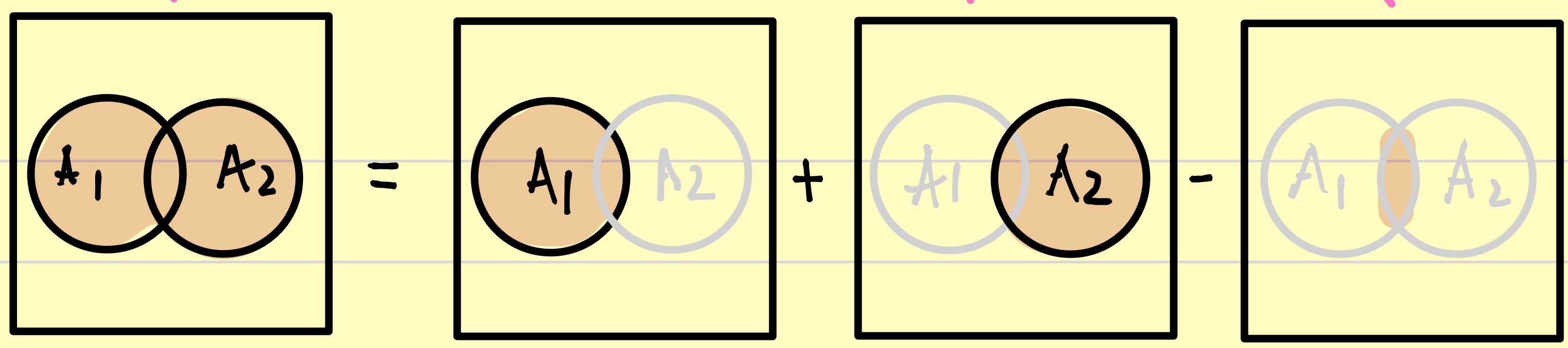
Beweis: nach

$$\left.\begin{array}{ll} (3) & P(\emptyset) + P(\Omega) = 1 \\ (1) & P(\Omega) = 1 \end{array}\right\} P(\emptyset) = 0$$

III Für die Vereinigung NICHT notwendig disjunktiver Ereignisse folgt:

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$$

$$P(A_1 \text{ oder } A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \text{ und } A_2)$$



Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Unter einer bedingten W versteht man die W dafür, dass das Eintretten einer Ereignisses A_i unter der Voraussetzung, dass das Eintretten eines anderen Ereignisses A_j bereits bekannt ist. Es versteht sich, dass A_j eintretten können muss.

$$\boxed{\text{Man schreibt dann } P(A_i|A_j) \text{ oder } P_{A_j}(A_i) \text{ für}}$$

„W von A_i unter der Voraussetzung A_j" oder kurz
„W von A_i, vorausgesetzt A_j".

Beispiel: Deck hat 52 Karten

♦	♥	♠	♣
13	13	13	13

$P(\diamondsuit | \text{rot}) \to 50\%$

$P(\heartsuit | \text{schwarz}) \to 0\%$

Laplace definiert die bedingte W:

$$\boxed{P(A_i|A_j) = \frac{P(A_i \cap A_j)}{P(A_j)}}$$

$\heartsuit \cap \text{rot}$

$$P(\heartsuit \mid \text{rot}) = \frac{P(\heartsuit \cap \text{rot})}{P(\text{rot})} = \frac{\frac{13}{52}\;\Omega}{\frac{26\;\text{rot}}{52\;\Omega}} = \frac{1}{2}$$

Vebundswahrscheinlichkeiten

Schnittmengen von Ereignissen.

Das gleichzeitige Eintretten zweier A_i und A_j Ereignisse entspicht mengentheoretisch dem Eintretten des Verbundsereignisse $A_i \cap A_j$

$$\boxed{\begin{aligned} &P(A_i \cap A_j) = P(A_i) \cdot P(A_j \mid A_i) = P(A_j)\, P(A_i \mid A_j) \\ &\rightarrow \; P(A_i \mid A_j) = \frac{P(A_i \cap A_j)}{P(A_j)} \; ; \; P(A_j \mid A_i) = \frac{P(A_i \cap A_j)}{P(A_i)} \end{aligned}}$$

SATZ von BAYES

Die bedingte W von A_i unter der Voraussetzung A_j lässt sich durch die bedingte W von A_j unter der Bedingung A_i durch folgende Gleichung ausdrücken:

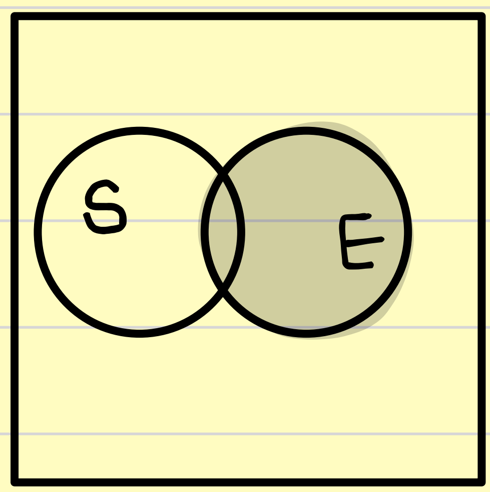
$$\boxed{P(A_i \mid A_j) = \frac{P(A_j \mid A_i) \cdot P(A_i)}{P(A_j)}}$$

Wenn man $P(A_i)$ & $P(A_j)$ kennt.

Beispiel 1. Die Mathestudentin Julia aus Stuttgart glaubt am Anfang ihres Studiums, dass sie dieses mit einer W von 0'7 erfolgreich beenden wird.
Mit erfolgreich abgeschlossenen Studium beträgt die W, die gewünschte Arbeitsstelle zu erhalten 0'8. Ohne Abschluss nur 0'1.
Wie groß ist die W, dass Julia die gewünschte Position erhält?

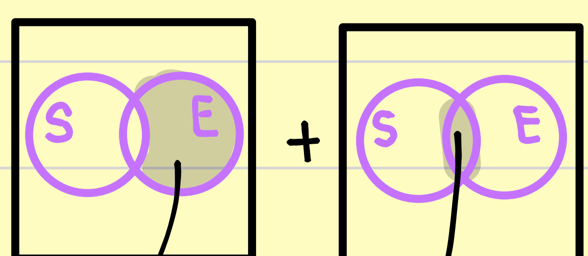
S. Studium wird beendet

E. Position wird erreicht.



Wir suchen $P(E)$

$=$



$$P(\bar{S} \cap E) + P(S \cap E)$$

$$P(E|\bar{S}) \cdot P(\bar{S}) + P(E|S) \cdot P(S) = 0'59 = 59\%$$

$P(E|S) = 0'8$: Vorausgesetzt Julia hat ihr Studium erfolgreich beendet sie hat die Position erreicht

$P(E|\bar{S}) = 0'1$: Vorausgesetzt Julia hat ihr Studium nicht beendet, sie hat die Position erreicht.

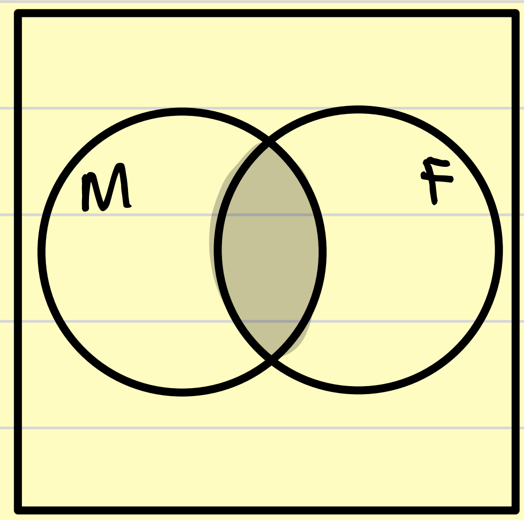
$P(S) = 0'7$; $P(\bar{S}) = 1 - 0'7 = 0'3$

Beispiel 2. Im Bistum SHA wird untersucht, wer von verheirateten Paaren regelmäßig in die Kirche geht. Es hat sich hierbei ergeben, dass 40% der Männer und 50% der Frauen regelmäßig Kirchgänger sind. Geht eine Frau in die Kirche, so beträgt die W, 0'3, dass ihr Mann auch geht.

? Wo ist die W dafür, dass beide Ehe-Partner regelmäßig in die Kirche gehen?

M: Mann geht in die Kirche

F: Frau geht in die Kirche



$$P(M \cap F) = P(M|F) \cdot P(F) = 0'3 \cdot 0'5 = 0'15 \rightarrow 15\%$$

? W - Vorausgesetzt der Mann geht in die Kirche, geht auch die Frau.

$$P(M \cap F) = P(M|F) \cdot P(F) = P(F|M) \cdot P(M)$$

$$P(F|M) = \frac{P(M|F) \cdot P(F)}{P(M)} = \frac{0'3 \cdot 0'5}{0'4} = 0'375 \rightarrow 37'5\%$$

?) W wenigstens einer der beiden Ehepartner ist regelmäßiger Kirchgänger.

$$P(M \cup F) = P(M) + P(F) - P(M \cap F) =$$

$$= 0\text{'}4 + 0\text{'}5 - 0\text{'}15 = 0\text{'}75 \rightarrow 75\%$$