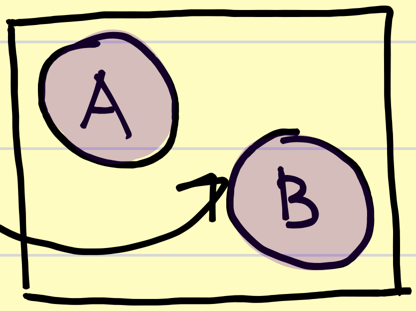
Übungen zu Kolmogorov Axiome & Folgerungen

1) Für zwei disjunktive Ereignisse A & B gilt, dass ihre Vereinigung $A \cup B$ keine gemeinsamen Ergebnisse hat.

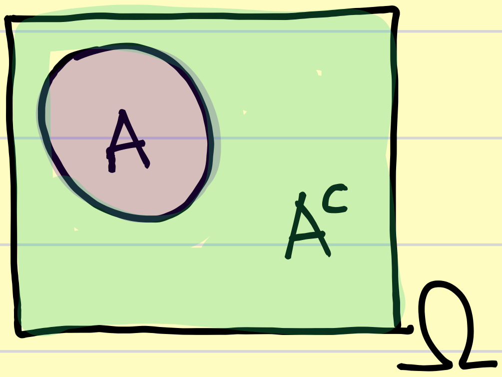
Nach der ersten Kolmogorov Axiom, das die Additivität für disjunktive Ereignisse postuliert gilt direkt:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$ ✓

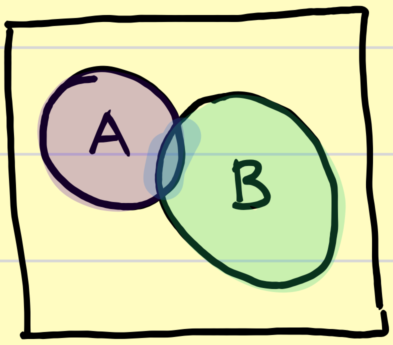


Die Kreisen überlappen sich nicht. (disjunktiv)

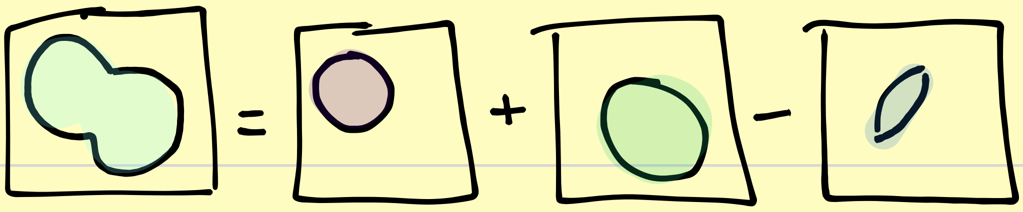
2) Für jedes Ereignis A ergänzt das Komplement $A^c \equiv \bar{A}$ das Ereignis A zu einem sicheren Ereignis, also gilt $P(A \cup A^c) = P(\Omega) = 1$. Da A und A^c disjunktiv sind, folgt: $P(A^c) = 1 - P(A)$. ✓



3) Gegeben sind $P(A) = 0{,}3$
$P(B) = 0{,}4$
$P(A \cap B) = 0{,}1$



$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}6$$



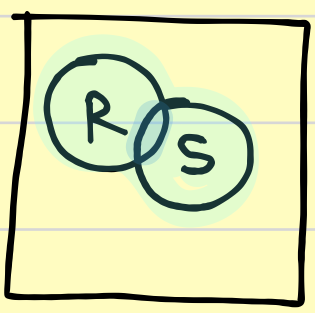
4) Direkt aus den Kolmogorov Axiome $P(\Omega) \overset{\text{Definition}}{=} 1$

5) Da Ω und $\emptyset$ disjunktive Ereignisse sind:

$$\left.\begin{array}{l} P(\Omega \cup \emptyset) = 1 = P(\Omega) + P(\emptyset) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad P(\Omega) = 1 \end{array}\right\} P(\emptyset) = 0$$

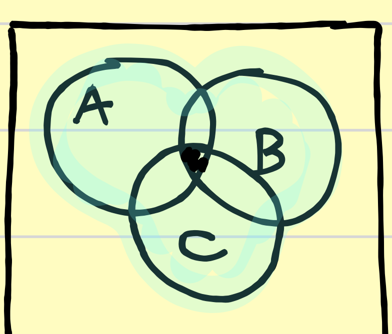
6)

$$\left.\begin{array}{l} P(R) = 0'2 \\ P(S) = 0'1 \\ P(R \cap S) = 0'05 \end{array}\right\} \begin{array}{l} P(R \cup S) = P(R) + P(S) - P(R \cap S) \\ \qquad = 0'2 + 0'1 - 0'05 = 0'25 \end{array}$$



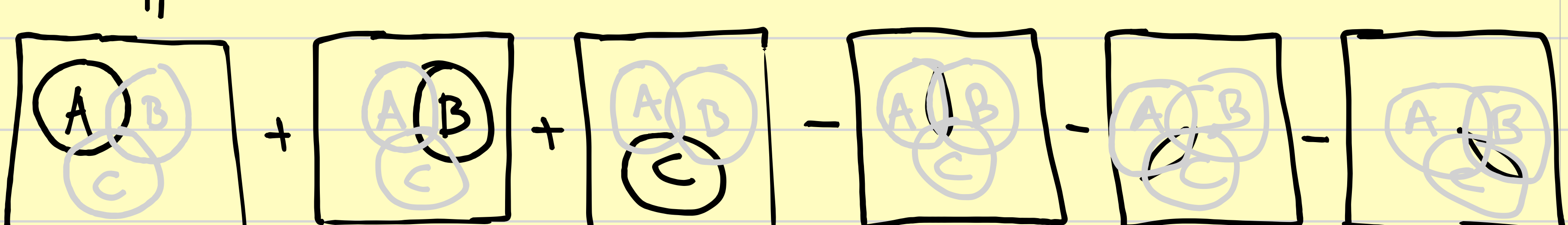
7) genau wir #3

8)

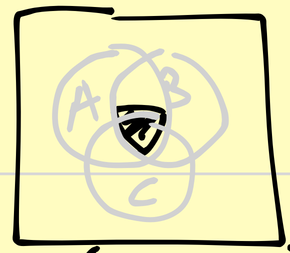


$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

||



$P(A)$ $P(B)$ $P(C)$ $P(A \cap B)$ $P(A \cap C)$ $P(B \cap C)$

+ 

$P(A \cap B \cap C)$

9) Die W dafür, dass die Augenzahl eines Würfelns keine 6 ist beträgt $P(\text{keine } 6) = 1 - P(6) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$
Das Ereignis „6" und „nicht 6" sind disjuntiv.

10) Die W dafür, dass A mindestens einmal in zwei unabhängigen Durchführungen eintritt, wenn $P(A) = 0{,}7$, berechnet sich als:

$$P(\text{mindestens einmal } A) = 1 - P(A^c)^2 =$$
$$= 1 - (1 - 0{,}7)^2 = 1 - 0{,}09 = 0{,}91$$

---

2) Übungen zu bedingten Wahrscheinlichkeiten.

$$P(A_i \mid A_j) = \frac{P(A_i \cap A_j)}{P(A_j)}$$

Laplace

1) Die Sensitivität des Tests gibt direkt die W dafür an, dass der Test positiv ist, gegeben die Person ist krank. Daher ist die W direkt:

$$P(\text{Test} \oplus \mid \text{krank}) = 95\% = 0{,}95$$ ✓

2) rot bei 1. Zug = rot_1

rot bei 2. Zug = rot_2

(wird zurück gelegt) $P(rot_2 | rot_1) = \frac{P(rot_1 \cap rot_2)}{P(rot_1)} = \frac{\frac{3}{10} \cdot \frac{3}{10}}{\frac{3}{10}} = \frac{3}{10}$

(wird nicht zurück gelegt) $P(rot_2 | rot_1) = \frac{P(rot_1 \cap rot_2)}{P(rot_1)} = \frac{\frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9}}{\frac{3}{10}} = \frac{2}{9}$

3)

$P(\text{König} | \text{Bildkarte}) = \frac{P(\text{König} \cap \text{Bildkarte})}{P(\text{Bildkarte})} = \frac{\frac{4}{52}}{\frac{12}{52}}$

$= \frac{1}{3}$

4) Die W dafür, dass ein zufällig ausgewählter Informatikstudent weiblich ist:

$P(\text{weiblich} | \text{informatik}) = \frac{P(\text{weiblich} \cap \text{informatik})}{P(\text{Informatik})}$

$P(\text{weiblich} \cap \text{informatik}) = P(\text{weiblich}) \cdot P(\text{inform.} | \text{weiblich}) =$

$= 0'6 \cdot 0'03 = 0'018$

gegeben → PDF korrigieren

PDF korrigieren 3%

$P(\text{informatik}) = 0'1$

$P(\text{weiblich} | \text{informatik}) = \frac{0'018}{0'1} = 0'18 \rightarrow 18\%$

5)

$$P(\text{Bewegung} | \text{Alarm}) = \frac{P(\text{Alarm} | \text{Bewegung}) \cdot P(\text{Bewegung})}{P(\text{Alarm})} =$$

Gegeben: $P(\text{Alarm} | \text{Bewegung}) = 0{,}7$

$P(\text{Bewegung}) = 0{,}05$

$$P(\text{Alarm}) = P(\text{Alarm} | \text{Bewegung}) \cdot P(\text{Bewegung}) +$$
$$+ P(\text{Alarm} | \text{Bewegung}^c) \cdot P(\text{Bewegung}^c) =$$
$$= 0{,}7 \cdot 0{,}05 + 0{,}3 \cdot 0{,}95 = 0{,}3225$$

$$P(\text{Bewegung} | \text{Alarm}) = \frac{0{,}7 \cdot 0{,}05}{0{,}3225} = 0{,}1085$$

6)

$$P(\text{Regen} | \text{dunkle Wolken}) = \frac{P(\text{dunkle Wolken} | \text{Regen}) \cdot P(\text{Regen})}{P(\text{dunkle Wolken})}$$
$$= \frac{0{,}3 \cdot 0{,}3}{0{,}4} = 0{,}225$$

7)

$$P(\text{leichte Frage} | \text{richtige Antw.}) = \frac{P(\text{richtige Antw.} | \text{leichte Frage}) \cdot P(\text{leichte Frage})}{P(\text{richtige Antwort})}$$

$$P(\text{richtige Antwort}) = P(\text{richt. Antw.} | \text{leichte Frage}) \cdot P(\text{leichte Frage})$$
$$+ P(\text{richt. Antw.} | \text{mittlere Frage}) \cdot P(\text{mittl. Frage})$$
$$+ P(\text{richt Antw.} | \text{schwere Frage}) \cdot P(\text{schw. Frage})$$

Annahmen: für mittlere (50%) und schwere (10%) wenn er mit 90%, 50% und 30% W. richtig antwortet.

$$P(\text{richtige Antwort}) = 0'9 \cdot 0'4 + 0'5 \cdot 0'5 + 0'3 \cdot 0'1 = 0'64$$

$$P(\text{leichte Frage} \mid \text{richtige Antwort}) = \frac{0'9 \cdot 0'4}{0'64} = 0'562$$

8)

$$P(\text{Diesel} \mid \text{nicht best.}) = \frac{P(\text{nicht best.} \mid \text{Diesel}) \cdot P(\text{Diesel})}{P(\text{nicht best.})}$$

Annahme nicht bestanden Benzin 3% (20%) Elektro 1% (10%) ← Markt Anteil

$$P(\text{nicht bestanden}) = \underbrace{0'05 \cdot 0'7}_{\text{Diesel}} + \underbrace{0'03 \cdot 0'2}_{\text{Benzin}} + \underbrace{0'01 \cdot 0'1}_{\text{Elektro}}$$

$$= 0'042$$

$$P(\text{Diesel} \mid \text{nicht best.}) = \frac{0'05 \cdot 0'7}{0'042} = 0'8333$$

9)

$$P(\text{sichVerl.} \mid \text{Alarm}) = \frac{P(\text{Alarm} \mid \text{SichVerl}) \cdot P(\text{SichVerl})}{P(\text{Alarm})}$$

$$P(\text{Alarm}) = P(\text{Alarm} \mid \text{SichVerl.}) \cdot P(\text{SichVerl}) +$$
$$+ P(\text{Alarm} \mid \text{SichVerl}^c) \cdot P(\text{SichVerl}^c) =$$

Annahme: $P(\text{SichVerl}) = 0'05$

$$P(\text{Alarm}) = 0'9 \cdot 0'05 + 0'02 \cdot 0'95 = 0'064$$

$$P(\text{SichVerl} \mid \text{Alarm}) = \frac{0'9 \cdot 0'05}{0'064} = 0'7031$$

10)

$P(\text{beide Mädchen} \mid \text{erstes Kind Mädchen}) =$

$= P(\text{Mädchen}) = 0'55$

unabhängig !

---

3) Übungen Satz von Bayes.

1)

$$P(\text{Krank} \mid \text{Positiv}) = \frac{P(\text{Positiv} \mid \text{Krank}) \cdot P(\text{Krank})}{P(\text{Positiv})}$$

$$P(\text{Positiv}) = P(\text{Positiv} \mid \text{Krank}) \cdot P(\text{Krank}) + P(\text{Positiv} \mid \text{Krank}^c) \cdot P(\text{Krank}^c)$$

$$= 0'99 \cdot 0'001 + 0'01 \cdot 0'999 = 0'01098$$

$$P(\text{Krank} \mid \text{Positiv}) = \frac{0'99 \cdot 0'001}{0'01098} = 0'09016$$

2)

$$P(\text{Regen} \mid \text{Unfall}) = \frac{P(\text{Unfall} \mid \text{Regen}) \cdot P(\text{Regen})}{P(\text{Unfall})} =$$

$$P(\text{Unfall}) = P(\text{Unfall} \mid \text{Regen}) \cdot P(\text{Regen}) +$$

$$+ P(\text{Unfall} \mid \text{Regen}^c) \cdot P(\text{Regen}^c) =$$

$$= 0'8 \cdot 0'3 + (1-0'8)(1-0'3) = 0'38$$

$$P(\text{Regen} \mid \text{Unfall}) = \frac{0'8 \cdot 0'3}{0'38} = 0'6316$$

3)

$$P(\text{Verb. Gegenst} \mid \text{Alarm}) = \frac{P(\text{Alarm} \mid \text{Verb. Geg.}) \cdot P(\text{Verb. Gegen})}{P(\text{Alarm})}$$

$$P(\text{Alarm}) = P(\text{Alarm} \mid \text{Verb. Geg.}) \cdot P(\text{Verb. Geg.}) + P(\text{Alarm} \mid \text{Verb Geg}^c) \cdot P(\text{Verb. Geg}^c) =$$

$$= 0'95 \cdot 0'001 + 0'01 \cdot 0'999 = 0'01995$$

$$P(\text{Verb. Gegst.} \mid \text{Alarm}) = \frac{0'95 \cdot 0'001}{0'01995} = 0'0476$$

4)

$$P(\text{Spam} \mid \text{spam markiert}) = \frac{P(\text{spam markiert} \mid \text{Spam}) \cdot P(\text{Spam})}{P(\text{Spam markiert})}$$

$$P(\text{Spam markiert}) = P(\text{Spam mark.} \mid \text{Spam})\, P(\text{Spam}) + P(\text{Spam mark} \mid \text{Spam}^c) \cdot P(\text{Spam}^c) =$$

$$= 0'98 \cdot 0'05 + 0'01 \cdot (1 - 0'05) = 0'0595$$

$$P(\text{Spam} \mid \text{spam markiert}) = \frac{0'98 \cdot 0'05}{0'0595} = 0'8235$$

5)

$$P(\text{Träger} \mid \text{Positiv}) = \frac{P(\text{Positiv} \mid \text{Träger}) \cdot P(\text{Träger})}{P(\text{Positiv})}$$

$$P(\text{Positiv}) = P(\text{Positiv} \mid \text{Träger}) \cdot P(\text{Träger}) + P(\text{Positiv} \mid \text{Träger}^c) \cdot P(\text{Träger}^c) =$$

$$= 0'99 \cdot 0'03 + (1 - 0'99)(1 - 0'03) = 0'0396$$

$$P(\text{Träger} \mid \text{Positiv}) = \frac{0'99 \cdot 0'03}{0'0396} = 0'75$$

6)

$$P(\text{Technisch} \mid \text{Verspätung}) = \frac{P(\text{Technisch})}{P(\text{Verspätet})} = \frac{0'2}{0'5} = 0'4$$

7)

$$P(\text{Geraten} \mid \text{Richtig}) = \frac{P(\text{Richtig} \mid \text{Geraten}) \cdot P(\text{Geraten})}{P(\text{Richtig})} =$$

$$= \frac{0'25 \cdot 1}{0'25} = 1$$

8)

$$P(\text{Fehler} \mid \text{Identifiziert}) = \frac{P(\text{Identif.} \mid \text{Fehler}) \cdot P(\text{Fehler})}{P(\text{Identifizieren})}$$

$$P(\text{Identifiziert}) = P(\text{Identif.} \mid \text{Fehler}) \cdot P(\text{Fehler}) +$$
$$+ P(\text{Identif.} \mid \text{Fehler}^c) \cdot P(\text{Fehler}^c) =$$
$$= 0'9 \cdot 0'02 + (1 - 0'9)(1 - 0'02) = 0'116$$

$$P(\text{Fehler} \mid \text{Identifiziert}) = \frac{0'9 \cdot 0'02}{0'116} = 0'1552$$

9)

$$P(\text{Selten} \mid \text{Klassifiziert}) = \frac{P(\text{Klass.} \mid \text{Selten}) \cdot P(\text{Selten})}{P(\text{Klassif.})} =$$

$$P(\text{Klassif.}) = P(\text{Klass} \mid \text{Selten}) \cdot P(\text{Selten}) +$$
$$+ P(\text{Klass} \mid \text{Selten}^c) \cdot P(\text{Selten}^c) =$$
$$= 0'85 \cdot 0'1 + (1 - 0'85) \cdot (1 - 0'1) = 0'22$$

$$P(\text{selten} \mid \text{Klass.}) = \frac{0'85 \cdot 0'1}{0'22} = 0'3864$$

10)

$$P(\text{krank} \mid \text{Positiv}) = \frac{P(\text{Positiv} \mid \text{krank}) \cdot P(\text{krank})}{P(\text{Positiv})}$$

$$P(\text{Positiv}) = P(\text{Positiv} \mid \text{krank}) \cdot P(\text{krank}) + $$
$$+ P(\text{Positiv} \mid \text{krank}^c) \cdot P(\text{krank}^c) =$$
$$= 0'99 \cdot 0'01 + 0'05 \cdot (1 - 0'01) =$$
$$= 0'0594$$

$$P(\text{krank} \mid \text{Positiv}) = \frac{0'99 \cdot 0'01}{0'0594} = 0'1667$$

✓