20210930_Finanzmathematik_FAT1

1.1. FOLGEN

- Ordnet man den Natürlichen Zahlen ($\mathbb{N}$) 1,2,3,… durch eine beliebige Vorschrift je genau eine reelle Zahl ($\mathbb{R}$) zu, so entsteht eine Zahlenfolge $a_1, a_2, a_3, \ldots$
- Durch die Zuordnung $n \rightarrow a_n$ ist eine Funktion definiert.
- Eine Funktion, durch die jeder Natürlichen Zahl eine Reele Zahl zugeordnet wird, heißt Zahlenfolge.
- Man schreibt $a_1, a_2, a_3, \ldots$ oder (a_n).
- Die a_n heißen Glieder der Folge.
  a_1 bzw a_0 heißt Anfangsglied der Folge.

$\mathbb{N}$	1	2	3	…
	⋮	⋮	⋮	
$\mathbb{R}$	a_1	a_2	a_3	

Beispiele:

3,3,3,…	$a_n = 3$
1,2,3,…	$a_n = n$
$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$	$a_n = \frac{1}{n}$
$\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{6}{7}, \ldots$	$a_n = \frac{2n}{2n+1}$

ARITHMETISCHE FOLGEN

- Bei einer arithmetischen Folge ist der Abstand zw. zwei aufeinander folgenden Folgengliedern immer gleich groß, das heißt die Differenz $a_{n+1} - a_n$ ist konstant.

$$\boxed{a_{n+1} - a_n = d = const}$$

- Bildungsgesetz der arithmetischen Folge:

$$\boxed{a_{n+1} = a_n + d}$$

$a_1 = 2$
$a_2 = 2$
$a_3 = 2$
…

Beispiele:

Folge	Differenz $d = a_{n+1} - a_n$	Bildungsgesetz $a_{n+1} = a_n + d$
2,2,2,2,…	0	$a_{n+1} = a_n$
1,2,3,4,…	1	$a_{n+1} = a_n + 1$
$\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \frac{9}{2}, \ldots$	1	$a_{n+1} = a_n + 1$
200,175,150,125…	−25	$a_{n+1} = a_n - 25$

- Eine arithmetische Folge ist eindeutig durch das Anfangsglied „a_1" und die Konstante „d" bestimmt.
- Für die Glieder der arithmetischen Folge gilt:

$$\begin{aligned}
a_1 &= a_1 \\
a_2 &= a_1 + d \\
a_3 &= a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d \\
&\ldots \\
a_n &= a_1 + (n-1) \cdot d
\end{aligned}$$

- Bildungsgesetz der arithmetischen Folge: $\boxed{a_n = a_1 + (n-1) \cdot d}$

Beispiel: Wie lautet das 150. Glied einer arithmetischen Folge mit dem Anfangsglied $a_1 = 7$ und dem konstanten Summanden $d = 3{,}5$. (?)

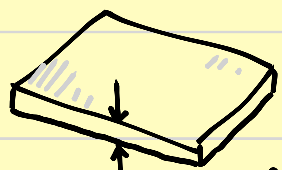
$a_1 = 7$
$d = 3{,}5$ $\quad n = 150 \rightarrow a_{150} = 7 + (150-1) \cdot 3{,}5 = 528{,}5$

Welchen Wert hat das Anfangsglied „a_1“ bei einer arithmetischen Folge mit $d=-5$ und $a_{11}=-8$. (?)

$a_{11}=-8$
$d=-5$

$\rightarrow a_{11}=-8=a_1+(11-1)\cdot(-5) \rightarrow a_1=42$

Beispiel: In einer Versuchsreihe soll die Schutzwirkung eines Bleches in Abhängigkeit von seiner Dicke geprüft werden. Die Versuchsreihe beginnt bei einer Blechstärke von $a_1=0'3\,cm$ und soll mit einer Verringerung von $d=0'000125\,m$ pro Versuch fortgeführt werden. Im wievielten Versuch wird die Blechstärke von $a_n=0'15\,cm$ getestet (?) Wie viel Experimente umfasst die Versuchsreihe. (?)



„Dicke“ ≡ Qualitätsmerkmal

$a_n=0'0015\,m$
$a_1=0'003\,m$
$d=-0'000125\,m$

$\rightarrow a_n=a_1+(n-1)\cdot d \rightarrow 0'0015=0'003+(n-1)\cdot(-0'000125)$

$$n=\frac{-0'0015}{-0'000125}+1=\boxed{n=13}$$

Mit dem 13. Experiment ist die ursprüngliche Blechdicke halbiert.
Der 13. Versuch ist der erste in der zweiten Hälfte der Versuchsreihe.
Die gesamte Versuchsreihe umfasst also 24 Experimente, weil bei dem 25. Experiment eine Dicke von NULL erreicht wäre.

GEOMETRISCHE FOLGEN

- Bei der geometrischen Folge ist der Quotient $q=\frac{a_{n+1}}{a_n}$ zw. zwei aufeinander folgenden Folgengliedern immer gleich groß: $q=$ konstant.
- Jedes Glied der Folge außer „a_1“ ergibt sich dadurch, dass man das vorausgehende Glied mit einem konstanten Faktor „q“ multipliziert.
- Bildungsgesetz der geometrischen Folge:

$$\boxed{a_{n+1}=q\cdot a_n\ ;\ q=\text{konstante}}$$

$q=\frac{a_{n+1}}{a_n}$ $\qquad$ $a_{n+1}=a_n\cdot q$

• Beispiele:

geometrische Folge	Quotient	Bildungsgesetz
2, 2, 2, 2, …	1	$a_{n+1} = a_n \cdot 1$
1, 2, 4, 8, …	2	$a_{n+1} = 2a_n$
4, 2, 1, 0'5, …	1/2	$a_{n+1} = \frac{1}{2} a_n$

• Eine geometrische Folge ist eindeutig durch das Anfangsglied „a_1" und den konstanten Faktor „q" bestimmt.

• Für die Glieder einer geometrischen Folge gilt:

$$a_1 = a_1$$
$$a_2 = a_1 \cdot q$$
$$a_3 = a_2 \cdot q = (a_1 \cdot q) q = a_1 q^2$$
$$\dots$$
$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

• Das Bildungsgesetz einer geometrischen Folge mit dem Anfangsglied „a_1" und dem konstanten Faktor „q" lautet:

$$\boxed{a_n = a_1 \cdot q^{n-1}}$$

• Beispiel: Wie lautet das 93. Glied einer geometrischen Folge mit $a_1 = \frac{3}{7}$ und $q = 1'06$. (?)

$$a_{93} = \frac{3}{7} \cdot 1'06^{92} = 91'2353$$

• Beispiel. Bei einer geometrischen Folge ist das erste $a_1 = 1$ und das letzte $a_n = 128$ Glied sowie $q = 2$ bekannt. Wie viele Glieder hat die Folge (?)

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \rightarrow q^{n-1} = \frac{a_n}{a_1} \rightarrow (n-1) \cdot \log q = \log \frac{a_n}{a_1} \rightarrow$$

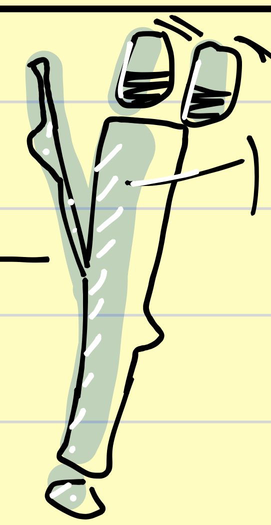
$$\rightarrow n \log q - \log q = \log \frac{a_n}{a_1} \rightarrow n = \frac{\log \frac{a_n}{a_1}}{\log q} + 1 = \frac{\log \frac{128}{1}}{\log 2} + 1 = 8$$

- Beispiel: in einem Betrieb soll die Geschwindigkeit eines Fließbandes täglich um 1% erhöht werden. Wie hoch ist die Produktion am 30. April, wann sie am 1. April 100 Stück/Tag beträgt (?)

$a_1 = 100$
$q = 1'01$
$n = 30$

$\longrightarrow a_{30} = 100 \cdot 1'01^{29} = 133'45 \ \frac{\text{Stück}}{\text{Tag}}$

- Aufgabe: Eine Zeitung soll 30 Mal gefaltet werden. (Dabei wird unterstellt, dass sie am Anfang 1mm dick ist.
Welche Dicke hat die Zeitung am Ende (?)
Welche Dicke hat die 100 Mal gefaltete Zeitung (?)



w^3·profH4.com