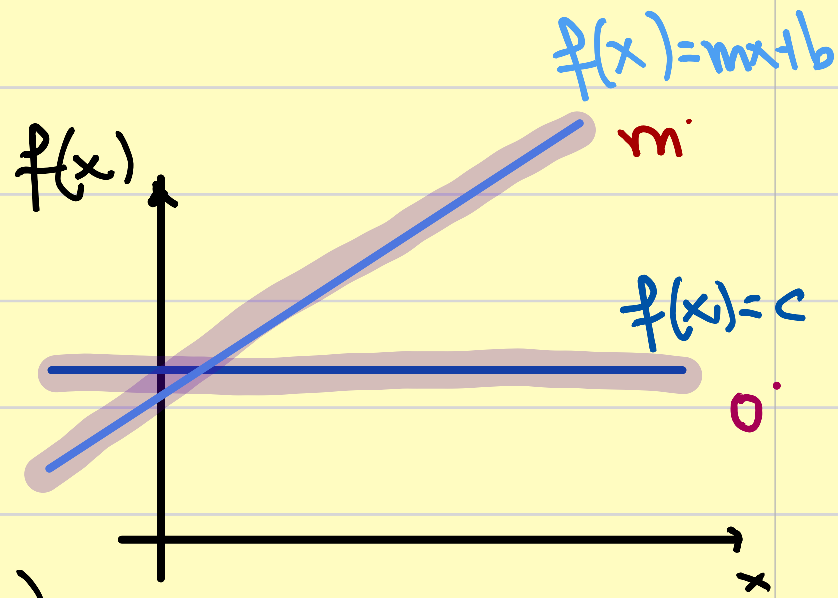
# Einfache Ableitungsregeln

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}}$$




- KONSTANTE FUNKTION

$$f(x) = c$$

$$f'(x_0) = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h} = 0$$

- LINEARE FUNKTION

$$f(x) = mx + b$$

$$f'(x_0) = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=0} = \lim_{h \to 0} \frac{[m(x_0+h) + b - (mx_0 + b)]}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{[\cancel{mx_0} + mh + \cancel{b} - \cancel{mx_0} - \cancel{b}]}{h} = m$$

- QUADRATISCHE FUNKTION

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$f'(x_0) = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=0} = \lim_{h \to 0} \frac{[a(x_0+h)^2 + b(x_0+h) + c - (ax_0^2 + bx_0 + c)]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\left[\cancel{a x_0^2} + a h^2 + 2a x_0 h + \cancel{b x_0} + b h + \cancel{c} - \cancel{a x_0^2} - \cancel{b x_0} - \cancel{c}\right]}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \left(a h + 2a x_0 + b\right) = 2a x_0 + b$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Potenzregel:} \\ f(x) = x^n \longrightarrow f'(x_0) = \left.\dfrac{df}{dx}\right|_{x=x_0} = n \cdot x^{n-1} \end{array}}$$

**Beispiele.**

$$f(x) = x^{2021} \longrightarrow f'(x_0) = 2021 \cdot x_0^{2020}$$

$$f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2} \longrightarrow f'(x_0) = \frac{1}{2} \cdot x_0^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Faktorregel:} \\ f(x) = k \cdot u(x) \longrightarrow f'(x_0) = \left.\dfrac{df}{dx}\right|_{x=x_0} = k \cdot u'(x) \end{array}}$$

**Beispiel:**

$$f(x) = 5 \cdot x^3 \longrightarrow f'(x_0) = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0} = 5 \cdot 3 \cdot x_0^2$$

## Summenregel:

$$f(x) = g(x) + h(x)$$

$$f'(x_0) = g'(x_0) + h'(x_0)$$

Beispiel:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{5}x^3$$

$$f'(x_0) = x_0 + \frac{3}{5}x_0^2$$

## Exponentialfunktion:

$$f(x) = e^x \rightarrow f'(x_0) = e^{x_0} \rightarrow f''(x_0) = e^{x_0} \ldots$$

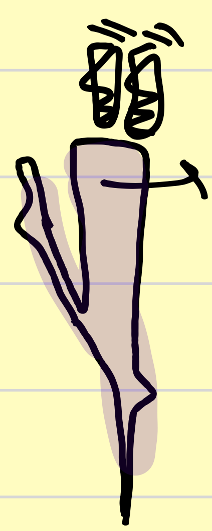
$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

Beispiel: $f(x) = 4 \cdot e^x \rightarrow f'(x_0) = 4 \cdot e^x$

$$f(x) = 4e^x + 10x \rightarrow f'(x_0) = 4e^x + 10$$

## Kettenregel:

$$f(x) = g(u(x)) \rightarrow f'(x_0) = u'(x) \cdot g'(u(x))$$



Beispiele:

1. $f(x)=(2x+3)^2$ $\quad 2x+3 \equiv u(x) \quad (\ldots)^2 \equiv g(x)$

$u'(x)$ $\quad g'(u(x))$

$$f'(x_0)=\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0} = 2 \cdot 2(2x_0+3) = 4(2x_0+3) = 8x_0+12$$

2. $f(x)=(x^2+1)^5$

$$f'(x_0)=\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0} = 2x_0 \cdot 5 \cdot (x_0^2+1)^4$$

3. $f(x)=e^{2x}$

$$f'(x_0)=2 \cdot e^{2x}$$

4. $f(x)=3 \cdot e^{-x}$

$$f'(x_0)=-3e^{-x_0}$$

5. $f(x)=2e^{x^3+2x+1}$

$$f'(x_0)=2 \cdot (3x_0^2+2) \cdot e^{x_0^3+2x_0+1}$$

6. $f(x)=5 \cdot \sin(2x)$

$$f'(x_0)=2 \cdot 5 \cdot \cos(2x_0)$$

$$f''(x_0)=2 \cdot (2 \cdot 5 \cdot -\sin(2x_0))$$

7. $f(x)=A\cdot\sin(\omega x+\varphi)$

$$f'(x_0)=A\cdot\omega\cdot\cos(\omega x_0+\varphi)$$

**Produktregel:**

$$f(x)=u(x)\cdot v(x)$$

$$f'(x_0)=\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0}=u'(x_0)\cdot v(x_0)+u(x_0)\cdot v'(x_0)$$

Beispiele: 1. $f(x)=x^3\cdot e^{2x}$

$$f'(x_0)=\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0}=3x_0^2\cdot e^{2x_0}+x_0^3\cdot 2e^{2x_0}$$

2. $f(x)=\cos(\omega x+\varphi)\cdot e^{-2x}$

$$f'(x_0)=\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=0}=-\omega\cdot\sin(\omega x_0+\varphi)\cdot e^{-2x_0}+$$

$$+\cos(\omega x_0+\varphi)\cdot(-2)\cdot e^{-2x_0}=$$

$$=-\left[e^{-2x_0}\right]\cdot\left[\omega\sin(\omega x_0+\varphi)+2\cos(\omega x_0+\varphi)\right]$$

$$\boxed{\begin{aligned}&\text{Quotientenregel:}\\ &f(x)=\frac{u(x)}{v(x)}\\ &f'(x_0)=\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0}=\frac{u'(x_0)\cdot v(x_0)-u(x_0)v'(x_0)}{v(x_0)^2}\end{aligned}}$$

Beispiel: 1. $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$

$$f'(x_0)=\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0}=\frac{1\cdot(x_0^2+1)-x(2x_0)}{(x_0^2+1)^2}=\frac{1-x_0^2}{x_0^4+2x_0^2+1}$$

2. $f(x)=\frac{\sin(x)}{x}$

$$f'(x_0)=\frac{\cos(x_0)\cdot x_0-\sin(x_0)}{x_0^2}=\frac{\cos(x_0)\cdot x_0-\sin(x_0)}{x_0^2}$$

3. $f(x)=\tan(x)=\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

$$f'(x_0)=\frac{\cos(x_0)\cdot\cos(x_0)-(-\sin(x_0))\cdot\sin(x_0)}{\cos^2(x_0)}=$$

$$=\frac{\cos^2(x_0)+\sin^2(x_0)}{\cos^2(x_0)}=\frac{1}{\cos^2(x_0)}$$

Übung. Die Stückkostenfunktion $\mathcal{S}(x)$ ist definiert als: Gesamtkosten $K$ durch Stück $x$:

$$\mathcal{S}(x) = \frac{K(x)}{x}$$

Berechnen Sie $\mathcal{S}'(x_0)$ und finden Sie einen Ausdruck für das Minimum der Stückkosten.

$$\mathcal{S}'(x_0) = \left.\frac{d\mathcal{S}}{dx}\right|_{x=x_0} = \frac{K'(x_0) \cdot x_0 - K(x_0)}{x_0^2}$$

Die Bedingung für ein Minimum der Funktion: $\mathcal{S}'(x_0) = 0$
$\mathcal{S}''(x_0) > 0$

$$\mathcal{S}'(x_0) = 0 \rightarrow K'(x_0) \cdot x_0 - K(x_0) = 0 \rightarrow K'(x_0) = \frac{K(x_0)}{x_0} = \mathcal{S}(x_0)$$

Die Bedingung für ein Minimum der Stückkostenfunktion in $x_0$, ist

$$K'(x_0) = \mathcal{S}(x_0).$$