W. Theorie.

1) Kolmogorov Axiome
2) Bedingte Wahrscheinlichkeiten
3) Satz von Bayes

1) Kolmogorov Axiome

Beispiel. Aus der gesamten Population von B.W...

· wenn ich einen Mensch aus der Population auswähle, die W. dafür, dass dieser Mensch einen Mensch ist: $P(\Omega) = 1$.

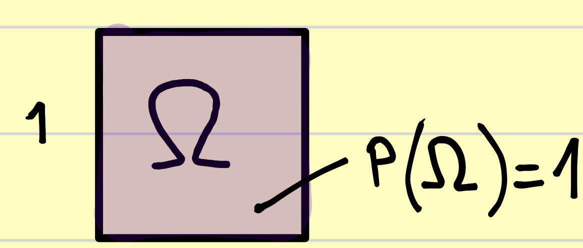
Ω: SICHERE EREIGNIS.

Es ist sicher, dass der ausgewählte Mensch, ein Mensch ist.

· wenn ich einen Mensch aus der Population auswähle, die W. dafür, dass dieser Mensch WIN an der HHN studiert liegt $0 \leq P(A_1) \leq 1$.

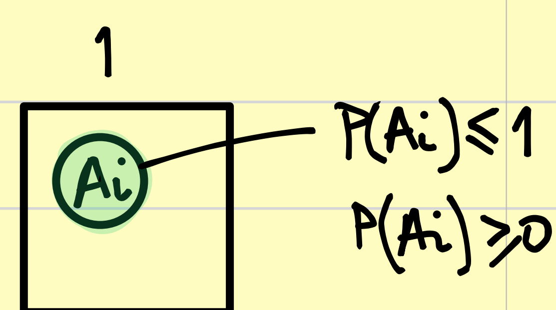
K. AXIOME:

1. Das sichere Ereignis Ω hat eine W. von 1: $P(\Omega)=1$

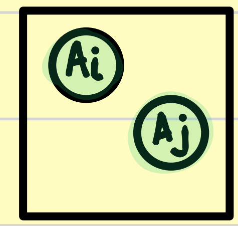


2. Für Jedes Ereignis A_i, ist die W. von A_i: $P(A_i) \in [0,1]$

gehört zum Interval



3. Die W. einer Vereinigung abzählbar vieler INKOMPATIBLER Ereignisse ist die Summe der W. der einzelnen.



$$\underbrace{P(A_i \sqcup A_j)}_{\text{Wahrscheinlichkeit von } A_i \text{ ODER } A_j} = P(A_i) + P(A_j)$$

INKOMPATIBLER

Folgerungen der Kolmogorov Axiome:

A. Aus der Additivität der W. disjunktiver (inkompatibler) Ereignisse (K.A.#3) folgt, dass komplementäre Ereignisse, eine s.g. Gegenwahrscheinlichkeit haben.

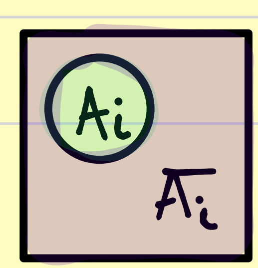
A_i : Ereigniss.

$\overline{A_i}$: das Gegenteil von A_i

$$\boxed{P(A_i) = 1 - P(\overline{A_i})}$$

Proof:

$$\left.\begin{aligned} P(\Omega) &= P(A_i) + P(\overline{A_i}) \\ P(\Omega) &= 1 \end{aligned}\right\} P(A_i) = 1 - P(\overline{A_i})$$

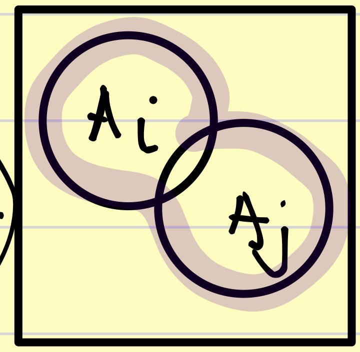


B. Daraus folgt, dass das unmögliche Ereignis, die leere Menge, eine W. von NULL hat.

$P(\Omega) = 1$ (K.A. #1)

$P(\emptyset) = 1 - P(\overline{\emptyset}) = 1 - P(\Omega) = 1 - 1 = 0$

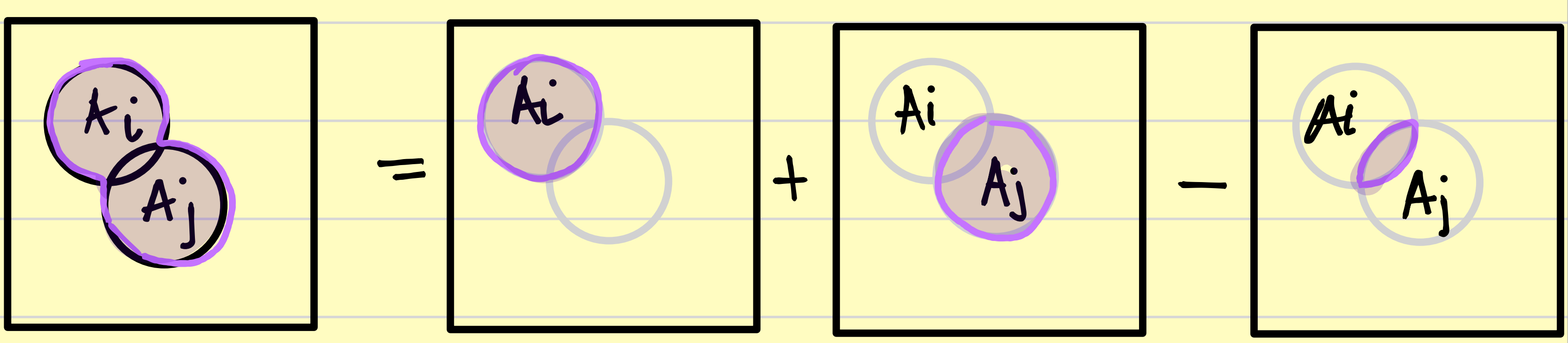
C. Für die Vereinigung nicht disjunktiver (KOMPATIBLER) Ereignisse folgt:



$$\boxed{P(A_i \cup A_j) = P(A_i) + P(A_j) - P(A_i \cap A_j)}$$

Wahrscheinlichkeit von A_i oder A_j

Wahrscheinlchk. A_i UND A_j



Beispiel. A_1. WIN Studierende haben Mathe im 1. Sem. bestanden

A_2. WIN Studierende werden Statistik bestehen

$A_1 \cap A_2$. WIN Studierende haben Mathe 1 bestanden UND werden Statistik bestehen

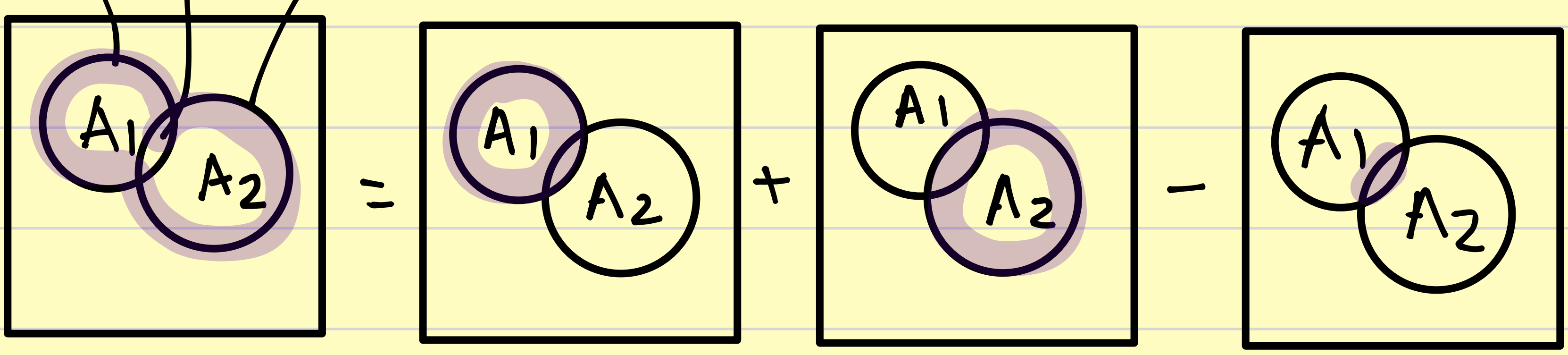
$A_1 \cup A_2$. ??

$P(A_1) = 0'3$; $P(A_2) = 0'4$; $P(A_1 \cap A_2) = 0'2$

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) =$$

0'3 0'2 0'4

$$= 0'3 + 0'4 - 0'2 = 0'5$$



$$P(A_1 \cup A_2) = \underset{0'3}{P(A_1)} + \underset{0'4}{P(A_2)} - \underset{0'2}{P(A_1 \cap A_2)}$$

2. Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Unter einer Bedingten W (BW) versteht man die W. dafür, dass das Eintretten eines Ereignisses A_i unter der Voraussetzung, dass das Eintretten eines anderen Ereignisses A_j bereits bekannt ist.

$P(A_i | A_j) \equiv$ W. von A_i, vorausgesetzt A_j.

Definition von Laplace: $\boxed{P(A_i | A_j) = \dfrac{P(A_i \cap A_j)}{P(A_j)}}$

Beispiel. in einem POKER Karten Deck von 52 Karten, was ist die W. dafür, dass wir eine Karo ♢ Karte ziehen, vorausgesetzt die gezogene Karte ist rot.

$$P(\diamondsuit \mid rot) = \frac{P(\diamondsuit \cap rot)}{P(rot)} = \frac{13/52}{26/52} = \frac{13}{26} = 0{,}5 \equiv 50\%$$

3. Satz von Bayes

Verbundswahrscheinlichkeit oder Schnittmenge von nicht disjunktiver Ereignissen werden dadurch ermittelt.

Laplace: $P(A_i \mid A_j) = \frac{P(A_i \cap A_j)}{P(A_j)} \rightarrow P(A_i \cap A_j) = P(A_i \mid A_j) P(A_j)$

$$\text{|||}$$

$P(A_j \mid A_i) = \frac{P(A_j \cap A_i)}{P(A_i)} \rightarrow P(A_j \cap A_i) = P(A_j \mid A_i) \cdot P(A_i)$

$$P(A_i \mid A_j) \cdot P(A_j) = P(A_j \mid A_i) \cdot P(A_i)$$

$$\rightarrow \boxed{P(A_i \mid A_j) = \frac{P(A_j \mid A_i) \cdot P(A_i)}{P(A_j)}}$$

SATZ von BAYES