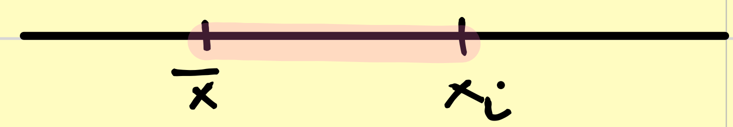
$$m_2 : VAR(x) := \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n}$$



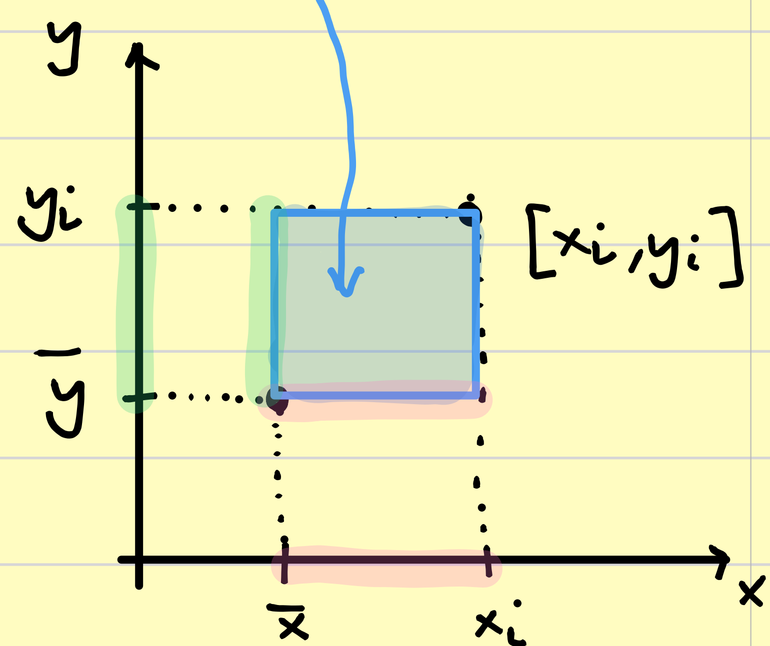
· Die geometrische Interpretation der Varianz ist die Summe der Abstände $(x_i - \bar{x})$ in Quadrat (immer positiv) geteilt durch n.

Was machen wir, wenn mehr als eine Variable analysiert wird?

2. VARIABLEN

KOVARIANZ.

$$KOV[X,Y] = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n-1}$$



Die geometrische Interpretation der Kovarianz ist die Summe der Vierecken zum Mittelwert. Kann positiv oder negativ sein (ohne Quadrat), geteilt durch $n-1$.

Die Kovarianz hat einen Symbol.

$KOV(X,Y) \simeq 0 \rightarrow$ Die meisten Punkte sind symmetrisch verteilt um den Mittelwert.

$KOV(X,Y) \begin{matrix} \gg 0 \\ \ll 0 \end{matrix} \rightarrow$ Die meisten Punkte sind asymmetrisch um den Mittelwert verteilt.

Beispiel. Gegeben wird ein Kennzahlensystem mit zwei Kennzahlen [Key Performance Indicators : KPI]: DURCHLAUFZEIT und €/Stück. Bitte ermitteln Sie die Kovarianz.

	DLZ (Tage)	€/Stück
KW1	6,3	230
KW2	4,7	180
KW3	3,2	170
KW4	3,8	175

$$\mathrm{kov}[X,Y] = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{n-1}$$

$n=4$

$$\overline{DLZ} = \frac{6{,}3+4{,}7+3{,}2+3{,}8}{4} = 4{,}5 \qquad ; \qquad \overline{\frac{€}{1\,\text{Stück}}} = \frac{230+180+170+175}{4} = 188{,}75$$

$$\mathrm{kov}\left[DLZ, \frac{€}{1\,St}\right] = \frac{\left[(6{,}3-4{,}5)(230-188{,}75)+(4{,}7-4{,}5)(180-188{,}75)+(3{,}2-4{,}5)(170-188{,}75)+(3{,}8-4{,}5)(180-188{,}75)\right]}{4-1} =$$

$$= \dots =$$

- Die $\boxed{\mathrm{kov}[X,Y] = \mathrm{kov}[Y,X]}$

$$\mathrm{kov}[X,Y] = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})(x_i-\bar{x})}{n-1} = \mathrm{kov}[Y,X]$$

Die Kovarianz bijektiv.

MEHR ALS 2 VARIABLEN $\longrightarrow$ KOVARIANZMATRIX

für 3 VARIABLEN

$$A = \text{KOV. MATRIX}[X,Y,Z] = \begin{array}{c} \\ X \\ Y \\ Z \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} X & Y & Z \end{array} \\ \begin{bmatrix} VAR(X) & KOV[X,Y] & KOV[X,Z] \\ KOV[Y,X] & VAR(Y) & KOV[Y,Z] \\ KOV[Z,X] & KOV[Z,Y] & VAR(Z) \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\boxed{A = \text{KOV. MATRIX}[X,Y,Z] = \begin{bmatrix} VAR(X) & KOV[X,Y] & KOV[X,Z] \\ KOV[X,Y] & VAR(Y) & KOV[Y,Z] \\ KOV[X,Z] & KOV[Y,Z] & VAR(Z) \end{bmatrix}}$$

Beispiel. Gegeben wird ein Kennzahlensystem mit 3 KPIs. DURCHLAUFZEIT, $\frac{€}{\text{Stück}}$, Qualität. Bitte die Kovarianzmatrix vom System ermitteln.

	DURCHLAUFZEIT	€/STÜCK	QUALITÄT
KW1	6'3	320	3200
KW2	4'7	180	4700
KW3	3'2	170	2100
KW4	3'8	179	1500

Im Management Systeme haben Kennzahlen idR unterschiedliche Skalas. In dem Beispiel die Werte der DLZ sind zw. [3,8 & 6'3] und die

Werte der Qualität zw. [1500 & 3200].

Diese Natur der KPIs macht die KOVARIANZRECHNUNG unbrauchbar weil die Abstände in der X-Dimension eine andere Bedeutung als die Abstände in der Y-Dimension haben.

Wir sind also gezwungen VOR der KOVARIANZ-Rechnung zu NORMIEREN.

$$X\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\} \longrightarrow X^*\left\{\frac{x_1-\bar{x}}{\sigma_x}, \frac{x_2-\bar{x}}{\sigma_x}, \dots, \frac{x_n-\bar{x}}{\sigma_x}\right\}$$

$$\{x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*\}$$

Durch die Normierung schaffen wir Homogeneität bzw. Vergleichbarkeit.

	DURCHLAUFZEIT	€ / STÜCK	QUALITÄT
KW1	6'3	320	3200
KW2	4'7	180	4700
KW3	3'2	170	2100
KW4	3'8	179	1500

Schritt 1. NORMIERUNG.

	DURCHLAUFZEIT*	$\frac{€}{\text{STÜCK}}^*$	QUALITÄT*
KW1	$x_1^* = \frac{6'3-4'5}{1'16} = 1'541$	$y_1^* = \frac{320-188'75}{66'79} = 1'96$	$z_1^* = \frac{3200-2875}{1217'3} = 0'267$
KW2	0'171	−0'131	1'5
KW3	−1'113	−0'281	−0'637
KW4	−0'6	−0'206	−1'13

$$\overline{DLZ} = \frac{6'3+4'7+3'2+3'8}{4} = 4'5$$

$$\sigma_{DLZ} = \sqrt{\frac{(6'3-\overline{DLZ})^2+(4'7-\overline{DLZ})^2+(3'2-\overline{DLZ})^2+(3'8-\overline{DLZ})^2}{4-1}} = \sqrt{1'365} = 1'16$$

$$\frac{£}{\text{stück}} = \frac{320+180+170+179}{4} = 188'75$$

$$\sigma_{£/st} = \sqrt{\frac{(320-188'75)^2+(180-188'75)^2+(170-188'75)^2+(179-188'75)^2}{4-1}} = \sqrt{4460'9} = 66'79$$

$$\overline{Q} = \frac{3200+4700+2100+1500}{4} = 2875$$

$$\sigma_Q = \sqrt{\frac{(3200-2875)^2+(4700-2875)^2+(2100-2875)^2+(1500-2875)^2}{4-1}} = \sqrt{1481875} = 1217'3$$

$$\overline{x}^* = 0 \qquad \sigma_{x^*} = 1$$
$$\overline{y}^* = 0 \qquad \sigma_{y^*} = 1 \quad \longrightarrow \quad A^* = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$$
$$\overline{z}^* = 0 \qquad \sigma_{z^*} = 1$$

$$\text{kov}[x^*, y^*] = \frac{\sum (x_i^*)(y_i^*)}{n-1} = \frac{1'541 \cdot 1'96 + 0'171 \cdot (-0'131) + (-1'113) \cdot (-0'28) + (-0'6)(-0'206)}{4-1}$$

$$\text{kov}[x^*, z^*] = \frac{\sum x_i^* z_i^*}{n-1} = \frac{1'541 \cdot 0'267 + 0'171 \cdot (1'5) + (-1'113)(-0'63) + (-0'6)(-1'13)}{4-1}$$

$$\text{kov}[y^*, z^*] = \frac{\sum y_i^* z_i^*}{n-1} = \frac{1'965 \cdot 0'267 + (-0'131)(1'5) + (-0'281)(-0'63) + (-0'206)(-1'13)}{4-1}$$