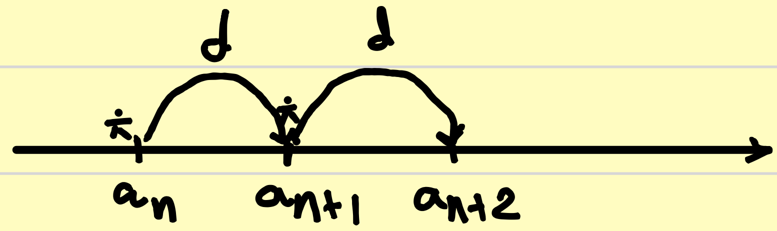
20250328_BU1_LM1_Mathe1

AF: $a_{n+1} = a_n + d$



GEOMETRISCHE FOLGE (GF)

Bei der geometrischen Folge ist der Quotient zw. zwei aufeinander folgenden Folgegliedern immer gleich groß: $q \equiv$ konstant.

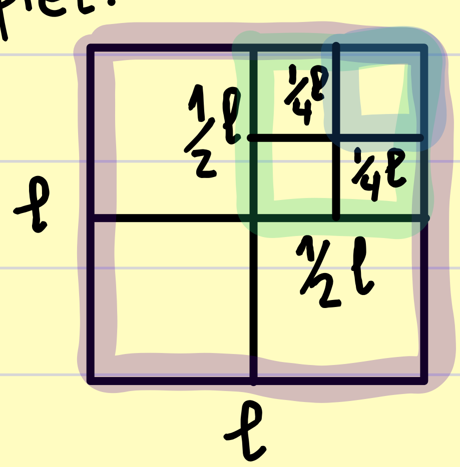
$$\boxed{q = \frac{a_{n+1}}{a_n}}$$

Jedes Glied der Folge außer „a_1" ergibt sich dadurch, das man das vorausgehende Glied mit einem konstanten Faktor „q" multipliziert.

Bildungsgesetz der geometrischen Folge:

$$\boxed{a_{n+1} = q \cdot a_n \quad ; \; q = \text{Konstante}}$$

Beispiel.

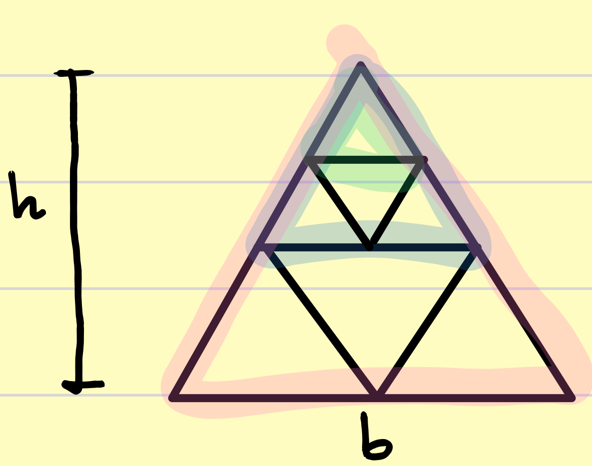


$a_1 = \ell^2 \qquad q = \frac{1}{4}$

$a_2 = q \cdot a_1 = \frac{1}{4} \cdot \ell^2 = \left(\frac{1}{2}\ell\right)^2$

$a_3 = q \cdot a_2 = \frac{1}{4} a_2 = \frac{1}{16} \cdot \ell^2$

...



$a_1 = \frac{bh}{2} \qquad q = \frac{1}{4}$

$a_2 = q \cdot a_1 = \frac{1}{4} \cdot \frac{bh}{2}$

$a_3 = q \cdot a_2 = \frac{1}{16} \cdot \frac{bh}{2}$

...

Beispiele (numerisch):

Beispiele	Quotient	Bildungsgesetz
$\{2, 2, 2, 2, \ldots\}$ $2 \xrightarrow{\times 1} 2 \xrightarrow{\times 1} 2 \xrightarrow{\times 1} 2$	$q=1$	$a_{n+1}=a_n \cdot 1$
$\{1, 2, 4, 8, \ldots\}$ $1 \xrightarrow{\times 2} 2 \xrightarrow{\times 2} 4 \xrightarrow{\times 2} 8$	$q=2$	$a_{n+1}=a_n \cdot 2$
$\{4, 2, 1, \frac{1}{2}, \ldots\}$ $4 \xrightarrow{\times \frac{1}{2}} 2 \xrightarrow{\times \frac{1}{2}} 1 \xrightarrow{\times \frac{1}{2}} \frac{1}{2}$	$q=\frac{1}{2}$	$a_{n+1}=a_n \cdot \frac{1}{2}$
$\{27, -9, 3, -1, \ldots\}$ $27 \xrightarrow{\times \frac{-1}{3}} -9 \xrightarrow{\times \frac{-1}{3}} 3 \xrightarrow{\times \frac{-1}{3}} -1$	$q=\frac{-1}{3}$	$a_{n+}=a_n \cdot \left(\frac{-1}{3}\right)$

...

Eine GF ist eindeutig durch das Anfangsglied „a_1" und den konstanten Faktor „q" bestimmt.

$$
\begin{aligned}
a_1 &= a_1 \\
a_2 &= a_1 \cdot q \\
a_3 &= a_2 \cdot q = (a_1 \cdot q) q = a_1 q^2 \\
a_4 &= a_3 \cdot q = (a_2 \cdot q) q = a_1 q^3 \\
&\ldots \\
a_n &= a_1 \cdot q^{n-1}
\end{aligned}
$$

Bildungsgesetz der GF: $\boxed{a_n = a_1 \cdot q^{n-1}}$

$$\frac{a_n}{a_1} = q^{n-1} \rightarrow \log\left[\frac{a_n}{a_1}\right] = (n-1)\log q \rightarrow \frac{\log\left[\frac{a_n}{a_1}\right]}{\log q} = n-1$$

$$\boxed{\log\left[a^b\right] = b\log a} \qquad \rightarrow \boxed{n = 1 + \frac{\log\left[\frac{a_n}{a_1}\right]}{\log q}}$$

$$\log\left[10^2\right] = 2\log 10$$

Beispiel. wie lautet das 93. Glied einer GF mit $a_1 = \frac{3}{7}$ $q = 1'06$

$$\left.\begin{aligned} a_n &= a_1 \cdot q^{n-1} \\ n &= 93 \\ a_1 &= 3/7 \\ q &= 1'06 \end{aligned}\right\} \quad a_{93} = \frac{3}{7} \cdot (1'06)^{92} = 91'2353$$

Beispiel. bei einer GF ist das erste Glied $a_1 = 1$ und das letzte Glied $a_n = 128$. $q = 2$. Wie viele Glieder hat die Folge?

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \longrightarrow 128 = 1 \cdot 2^{n-1} \longrightarrow 128 = 2^{n-1}$$

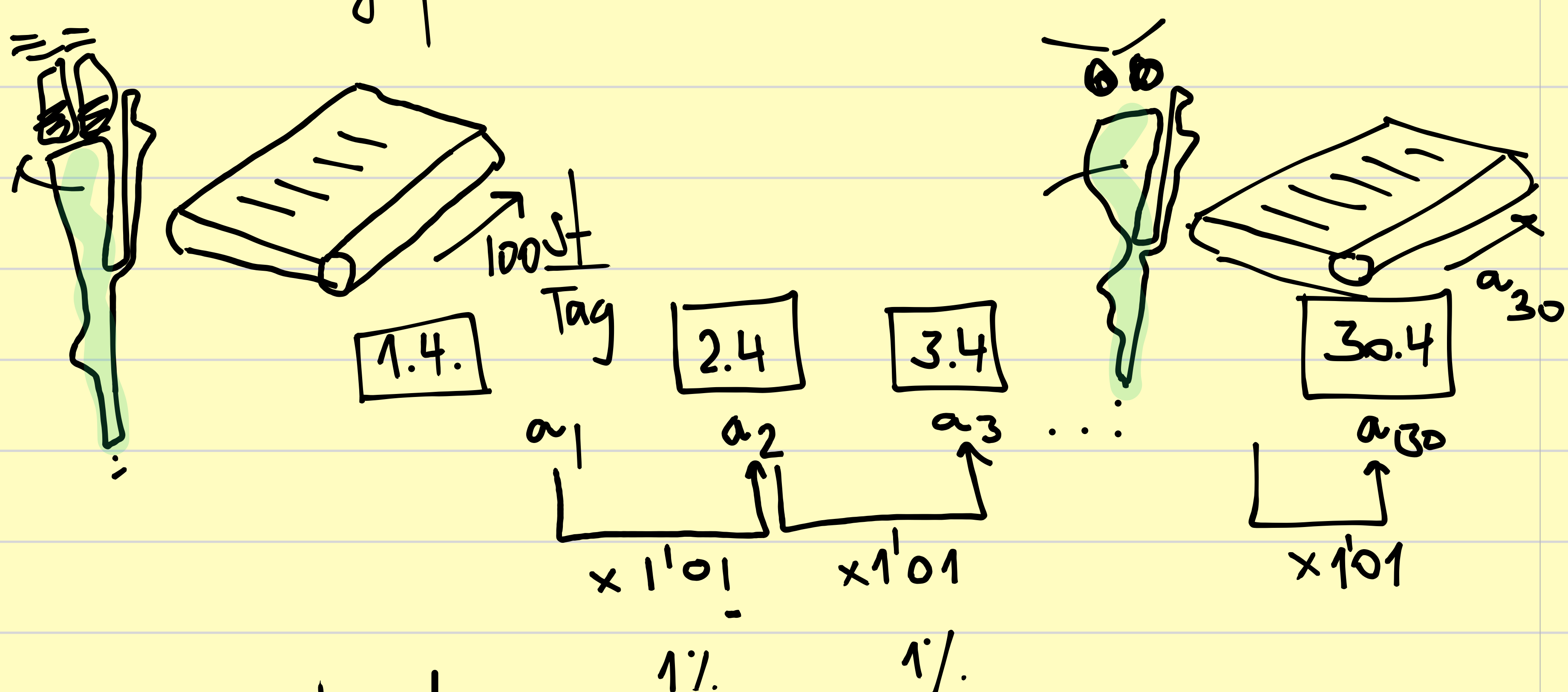
$$\rightarrow \log(128) = \log\left(2^{n-1}\right) = (n-1)\log 2$$

$$\boxed{\log\left(a^b\right) = a\log b}$$

$$\rightarrow \frac{\log(128)}{\log 2} = n-1 \longrightarrow n = 1 + \frac{\log 128}{\log 2} = 8$$

Alex fragt nach der Natur der Klammer.

Übung. In einem Betrieb soll die Geschwindigkeit eines Fließbandes täglich um 1% erhöht werden.
Wie schnell ist die Produktion am 30. April, wenn am 1. April 100 Stück am Tag produziert werden?



$a_1 = 100 \frac{St}{Tag}$

$q = 1'01$

$n = 30$

$$a_{30} = 100 \cdot 1'01^{30-1} = 133'45 \frac{\text{Stück}}{\text{Tag}}$$

FOLGEN: AF: $a_{n+1} = a_n + d$ GF: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$

REIHEN. Summiert man die Glieder einer Folge, so erhält man eine Reihe.

ENDLICHE REIHEN: $\sum_{i=1}^{n} a_i$ UNENDLICHE REIHEN: $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$

ARITHMETISCHE REIHEN: (AR)

Eine Reihe, die aus den ersten Gliedern einer AF gebildet wird, heißt eine AR.

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \overset{a_1}{a_1} + \overset{a_2}{(a_1+d)} + \overset{a_3}{(a_1+2d)} + \ldots + \overset{a_{n-2}}{(a_1+(n-3)d)} + \overset{a_{n-1}}{(a_1+(n-2)d)} + \overset{a_n}{(a_1+(n-1)d)}$$

$$+ \quad \sum_{i=1}^{n} a_i = (a_1+(n-1)d) + (a_1+(n-2)d) + (a_1+(n-3)d) + \ldots + (a_1+2d) + (a_1+d) + a_1$$

$$2\sum_{i=1}^{n} a_i = \underbrace{\underbrace{2a_1+(n-1)d}+\underbrace{2a_1+(n-1)d}+\underbrace{2a_1+(n-1)d}+\ldots+\underbrace{2a_1+(n-1)d}+\underbrace{2a_1+(n-1)d}}_{n\cdot\left[2a_1+(n-1)d\right]}$$

$$2\sum_{i=1}^{n} a_i = n\cdot\left[2a_1+(n-1)d\right] \longrightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{n}{2}\left[a_1+\underbrace{a_1+(n-1)d}_{a_n}\right]$$

Für die AR gilt: $\boxed{\sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{n}{2}\left[a_1+a_n\right]}$

Beispiel: bestimme bitte die Summe einer AR mit 100 Glieder, $a_1=15$ und $d=3$.

$$\sum_{i=1}^{100} a_i = \frac{100}{2}\left[15+(100-1).3\right] = 13350$$

GEOMETRISCHE REIHEN (GR)

Eine Reihe, deren Gliedern eine GF bilden, nennt man GR.

$$GR = \sum_{i=1}^{n} a_i = \overset{a_1}{a_1} + \overset{a_2}{\cancel{a_1 q}} + \overset{a_3}{\cancel{a_1 q^2}} \cancel{+ \dots} + \overset{a_{n-2}}{\cancel{a_1 q^{n-3}}} + \overset{a_{n-1}}{\cancel{a_1 q^{n-2}}} + \overset{a_n}{\cancel{a_1 q^{n-1}}}$$

$$- \quad q \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i = \cancel{a_1 \cdot q} + \cancel{a_1 \cdot q^2} + \cancel{a_1 \cdot q^3} + \dots + \cancel{a_1 q^{n-2}} + \cancel{a_1 q^{n-1}} + a_1 q^n$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i - q \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_1 \cdot q^n$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \left[1 - q\right] = a_1 \left[1 + q^n\right] \longrightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 \cdot \frac{1+q^n}{1-q} \quad q \neq 1$$

wenn $q = 1 \longrightarrow \sum_{i=1}^{n} = a_1 + a_1 \cdot q + a_1 q^2 + \dots + a_1 q^{n-1} = n \cdot a_1 \quad q = 1$

$$\boxed{\begin{array}{lll} GR: & q \neq 1 \longrightarrow & \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 \cdot \frac{1+q^n}{1-q} \\ & q = 1 \longrightarrow & \sum_{i=1}^{n} a_i = n . a_1 \end{array}}$$

$\sum_{i=1}^{n} a_i$ • Die Summe von $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$

$$\boxed{\sum_{✿=7}^{13} a_{✿} = a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11} + a_{12} + a_{13}}$$

Beispiel. bestimmen Sie bitte die Summe einer geometrischen Reihe mit 100 Gliedern, $a_1 = \frac{2}{3}$, $q = 1'2$.

$$q \neq 1 \rightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1-1'2^{100}}{1-1'2} \simeq 276.10^6$$