Wahrscheinlichkeitstheorie

1) KOLMOGOROV AXIOME ✓
2) BEDINGTE WAHRSCHEINLICHKEITEN ✓
3) SATZ VON BAYES ✓

---

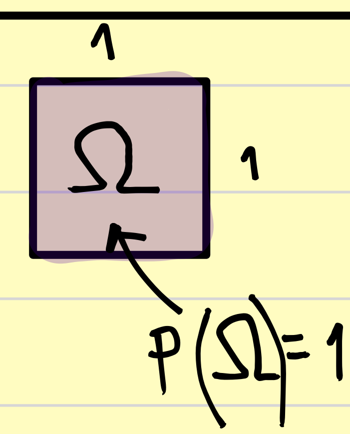
1) KOLMOGOROV AXIOME

Beispiel: Aus der gesamten Population in BW (M_{BW})...

- wenn ich einen Mensch aus dieser Population auswähle, die W- dafür, dass dieser ein Mensch ist: $P(\Omega)=1$.
  Es ist „sicher" dass der ausgewählter Mensch ein Mensch ist.
  Ω ist das SICHERE EREIGNIS.
- wenn ich einen Mensch aus dieser Population auswähle, die W. dafür, dass dieser Mensch bis Bachelor studiert hat ist: $0 \leq P(A_1) \leq 1$.

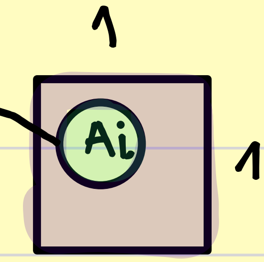
KOLMOGOROV AXIOME:

1) Das sichere Ereignis Ω hat eine W- von 1. $P(\Omega)=1$.

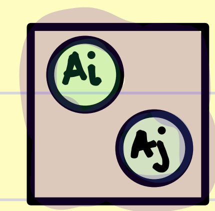


2) Für jedes Ereignis A_i, ist die W- von A_i: $P(A_i) \in [0,1]$ in $\mathbb{R}$

$0 \leq P(A_i) \leq 1$



3) Die W. einer Vereinigung abzählbar vieler INKOMPATIBLER Ereignisse ist die Summe der Wahrscheinlichkeiten der einzelnen.

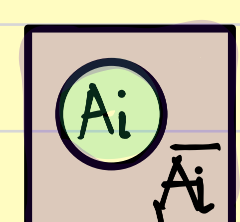


$$\boxed{P(A_i \cup A_j) = P(A_i) + P(A_j)}$$

A_i & A_j sind INKOMPATIBEL

FOLGERUNGEN DER KOLMOGOROV AXIOME:

A) Aus der Additivität der W. disjunktiver Ereignisse (AXIOM 3)) folgt, dass komplementäre Ereignisse eine s.g. Gegenwahrscheinlichkeit haben.



$1 - A_i = \bar{A_i}$

A_i: Ereignis A_i

$\bar{A_i}$: das Gegenteil von A_i

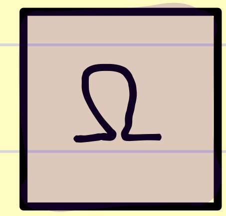
$$\boxed{P(\bar{A_i}) = 1 - P(A_i)}$$

Beispiel:

A_i: Jan ist in Heilbronn.

$\bar{A_i}$: Jan ist nicht in Heilbronn.

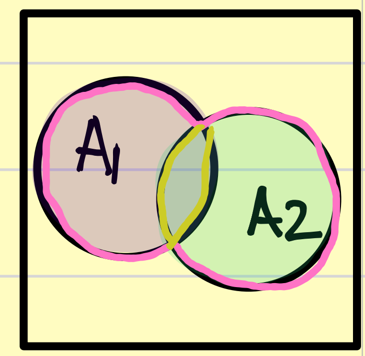
B) Daraus folgt, dass das unmögliche Ereignis, die leere Menge, eine W. von null hat: $P(\emptyset)=0$.



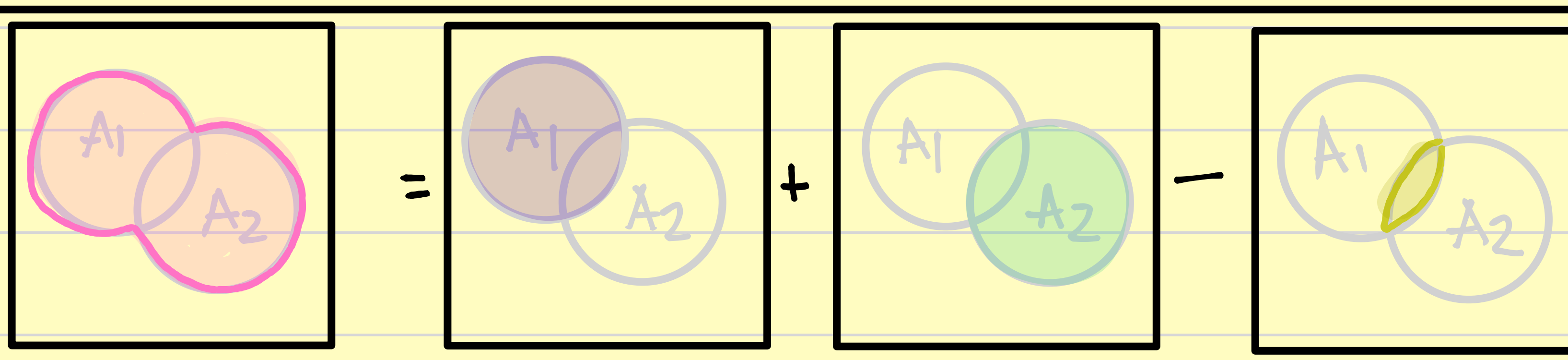
Beispiel: Ω: Alle Tage dreht sich die Erde

$\emptyset$: $P(\emptyset) = 1 - P(\Omega) = 1 - 1 = 0$

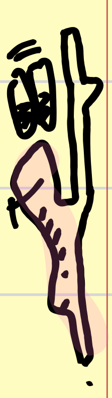
C) Für die Vereinigung nicht notwendig disjunktiver Ereignisse folgt:



$$\underbrace{P(A_1 \cup A_2)}_{\text{W. } A_1 \text{ oder } A_2} = P(A_1) + P(A_2) - \underbrace{P(A_1 \cap A_2)}_{\text{W. } A_1 \text{ und } A_2}$$



$$\underbrace{P(A_1 \cup A_2)} = P(A_1) + P(A_2) - \underbrace{P(A_1 \cap A_2)}$$



Beispiel: $P(A_1) = 30\%$ Studierende WIN2 haben Mathe im ersten Semester bestanden.

$P(A_2) = 40\%$ Studierende WIN2 werden Statistik Prüfung schreiben.

$P(A_1 \cap A_2) = 20\%$ Studierende WIN2 haben Mathe im ersten Semester bestanden und werden Statistik schreiben.

$$P(A_1 \cup A_2) = 0'3 + 0'4 - 0'2 = 0'5$$

Studierende WIN2 haben entweder Mathe im ersten Semester bestanden oder werden Statistik schreiben.

---

2) BEDINGTE WAHRSCHEINLICHKEITEN

Unter einer bedingten W. versteht man die W. dafür, dass das Eintreten eines Ereignisses A_i unter der Voraussetzung, dass das Eintreten eines anderen Ereignisses A_j bereits bekannt ist.

Man schreibt $\boxed{P(A_i | A_j)}$ für „W. von A_i, unter der Voraussetzung A_j“

oder kürzer: „W. von A_i, vorausgesetzt A_j“

Laplace definiert die bedingte W als:

$$\boxed{P(A_i | A_j) = \frac{P(A_i \cap A_j)}{P(A_j)}}$$

Beispiel: In einem POKER KARTEN Deck von 52 Karten, was ist die W. dafür, dass wir Karo Karte ziehen, voraus gesetzt die gezogene Karte ist rot.

♦ ♥ ♠ ♣

13 Karo 13 Herz 13 Peak 13 Kreuz $= \Sigma = 52$

$$\underbrace{P(\diamondsuit \mid \text{rot})} = \frac{P(\diamondsuit \cap \text{rot})}{\underbrace{P(\text{rot})}}$$

W. dafür, dass wir Karo und rot ziehen.

W. dafür, dass wir Karo ziehen vorausgesetzt es wurde rot gezogen.

W. dafür dass wir eine rote Karte ziehen

$$P(\diamondsuit \mid \text{rot}) = \frac{\frac{13}{52}}{\frac{13+13}{52}} = \frac{13}{26} = 0{,}5 = 50\%$$

♦ ♥

Verbundswahrscheinlichkeit oder Schnittmengen

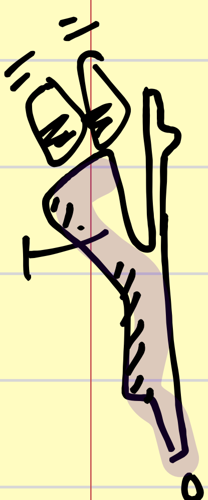
Das gleichzeitige Ereignis zweier A_i und A_j Ereignisse entspricht mengentheoretisch dem Eintreten des Verbundsereignis $A_i \cap A_j$.

Laplace: $P(A_i \mid A_j) = \dfrac{P(A_i \cap A_j)}{P(A_j)} \rightarrow P(A_i \cap A_j) = P(A_j) \cdot P(A_i \mid A_j)$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \parallel$ (*)

$P(A_j \mid A_i) = \dfrac{P(A_j \cap A_i)}{P(A_i)} \rightarrow P(A_j \cap A_i) = P(A_i) \cdot P(A_j \mid A_i)$

(*) beide sind gleich!



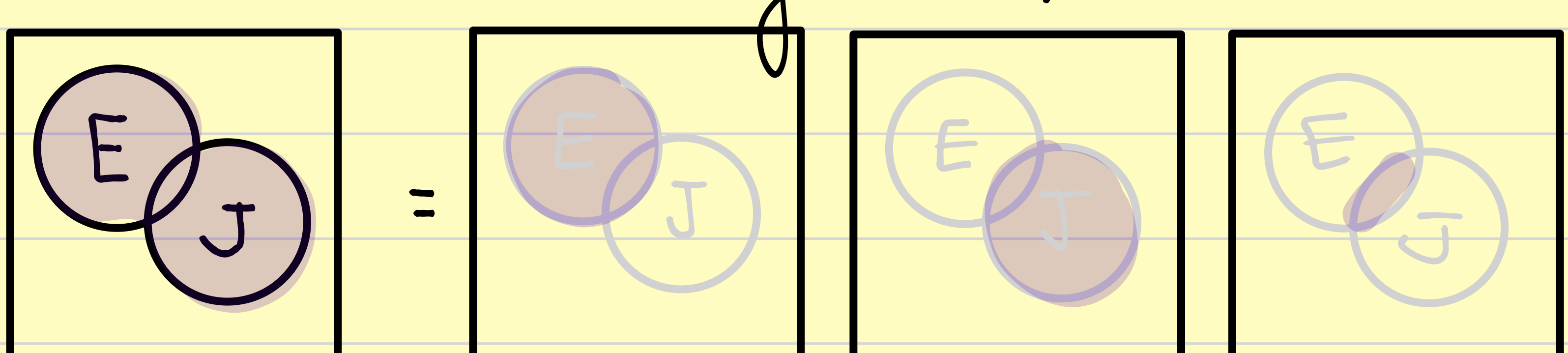
$$P(A_j)\cdot P(A_i|A_j) = P(A_i)\cdot P(A_j|A_i) \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{P(A_i|A_j) = \frac{P(A_j|A_i)\cdot P(A_i)}{P(A_j)}} \qquad 3)$$

SATZ von BAYES

Beispiel. Die Statistikstudentin Chantal glaubt am Anfang vom Studium, dass sie dieses mit einer W. von 0'7 erfolgreich beenden wird.
Mit einem erfolgreich abgeschlossenem Studium beträgt die W. dafür, dass die gewünschte Position am Arbeitsmarkt erreicht wird 0'8.
Ohne Abschluß nur 0'1.
Wie groß ist die W dafür, dass Chantal die gewünschte Stelle bekommt?

Ereignisse: E : Studium wird erfolgreich beendet
J : die gewünschte Stelle wird erreicht



$P(E \cup J)$ $\quad$ $P(E)$ $\quad$ $P(J)$ $\quad$ $P(E\cap J)$

$P(E) = 0'7$ $\quad$ $P(J) = ?$ $\quad$ $P(E\cap J) = 0'56$

Vorausgesetzt wir haben den Abschluß, 0'7 wir kriegen den Job.

$$P(J\mid E)=0{,}8=\frac{P(J\cap E)}{P(E)}=\frac{P(J\cap E)}{0{,}7}$$

$$P(J\cap E)=0{,}7\cdot 0{,}8=0{,}56$$

$$P(J\mid \bar{E})=0{,}1=\frac{P(J\cap \bar{E})}{P(\bar{E})}\rightarrow P(J\cap\bar{E})=$$
$$=0{,}1\cdot(1-0{,}7)=$$
$$=0{,}1\cdot 0{,}3$$
$$=0{,}03$$

Vorausgesetzt wir haben keinen Abschluß, wir kriegen den Job.

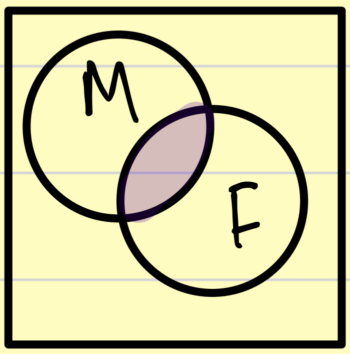
$$\boxed{P(J)=P(J\cap E)+P(J\cap\bar{E})=0{,}56+0{,}03=0{,}59}$$

Beispiel. Im Bistum Stuttgart wird untersucht, wer von verheirateten Paaren regelmäßig in die Kirche geht.
Es hat sich hierbei ergeben, dass 40% der Männer und 50% der Frauen regelmäßig Kirchengänger sind.
Geht eine Frau in die Kirche, so beträgt die W dafür, dass ihr Mann auch hingeht 0,3.

a) Was ist die W. dafür, dass beide Ehepartner regelmäßig in die Kirche gehen?

Ereignis: M: Ein Mann geht in die Kirche.

F: Eine Frau geht in die Kirche.



$P(M \cap F) = P(M|F) \cdot P(F) = 0'3 \cdot 0'5 =$

$= 0'15$

b) W dafür, dass vorausgesetzt der Mann geht in die Kirche, geht auch die Frau?

$P(F \cap M) = P(F|M) \cdot P(M) \rightarrow P(F|M) = \frac{P(F \cap M)}{P(M)} =$

$= \frac{0'15}{0'4} = 0'37$

c) W dafür, dass wenigstens einer der Partner regelmäßiger Kirchengänger sind?

$P(F \cup M) = P(F) + P(M) - P(F \cap M)$

$= 0'5 + 0'4 - 0'15 = 0'75$ ✓