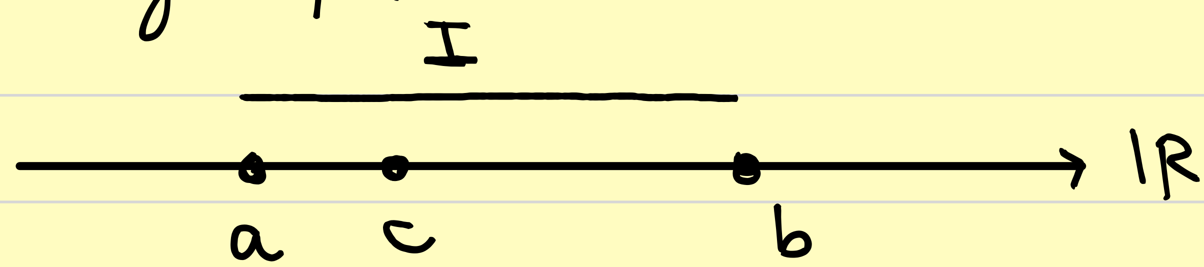
20251014_Mathematik_1B

Elementare Funktionen

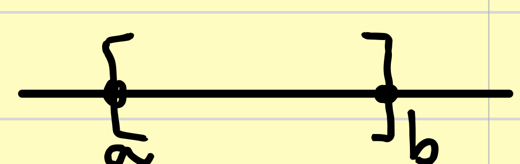
1. Intervallnotation & spezielle Teilmengen von $\mathbb{R}$

Def. (Intervall). Eine Teilmenge $I \subseteq \mathbb{R}$ heißt Intervall, falls für alle $a, b \in I$ mit $a < b$ und $\forall c \in \mathbb{R}$ mit $a < c < b$ gilt, dass $c \in I$.

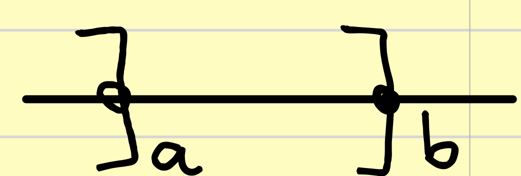


Schreibweise

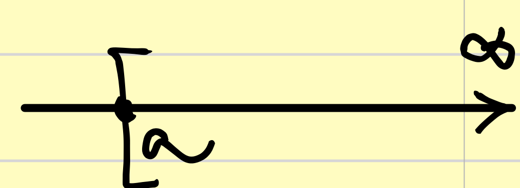
- $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \,/\, a \leq x \leq b\}$



- $]a,b] = \{x \in \mathbb{R} \,/\, a < x \leq b\}$



- $[a,\infty[\; = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \geq a\}$



Bei Termen wie $\sqrt{x-2}$, $\ln(5-2x)$, $\frac{1}{x(x-1)}$ ist der Maximale Definitionsbereich explizit zu bestimmen.

- $\sqrt{x-2}$: $I = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \geq 2\}$

... so, dass ...

- $\ln(5-2x)$: $I = \{x \in \mathbb{R} \,/\, 5-2x>0\}$

$5-2x>0 \rightarrow x<2'5 \longrightarrow I=\{x\in\mathbb{R} \,/\, x<2'5\}$

- $\dfrac{1}{x(x-1)}$: $I = \{x \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}\}$

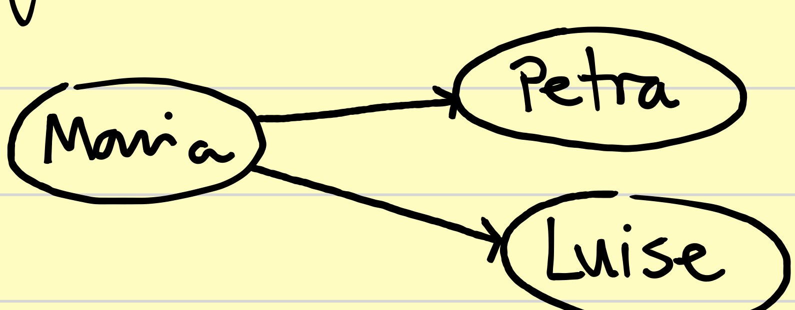
ALLE REELEN ZAHLEN AUßER Ø UND 1.

Mini-Übung. Bestimme den maximalen Definitionsbereich von $f(x)=\sqrt{16-x^2}$ und beschreibe ihn als Interval.

$16-x^2 \geq 0 \longrightarrow -4 \leq x \leq 4 \rightarrow I=[-4,4]$

2. Der Funktionsbegriff

Definition. (Eine Funktion ist eine EINDEUTIGE ZUORDNUNG)



Keine Funktion!

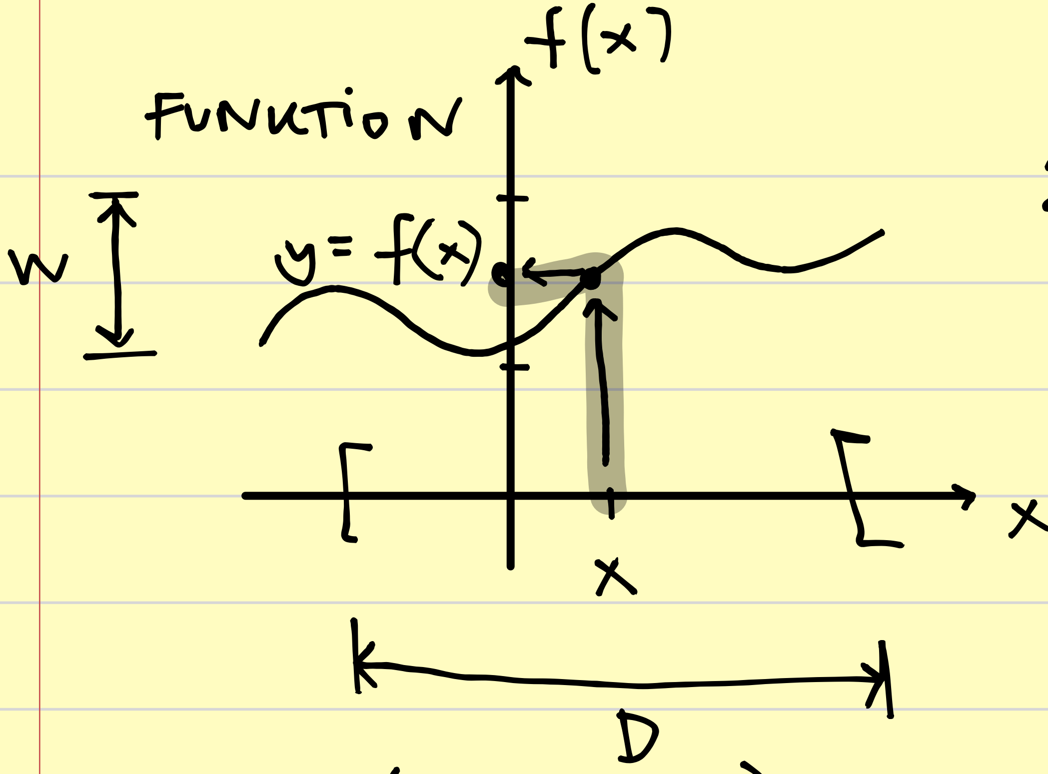
Eine Funktion ist ein Tripel $f=[D,W,G]$

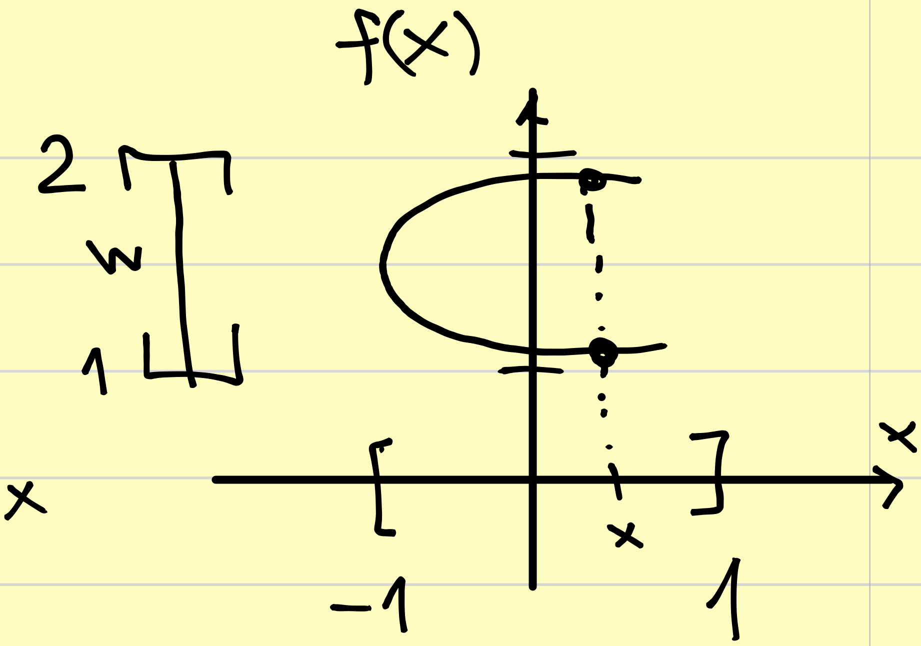
D: Definitionsbereich

W: Wertebereich

G: Graph $G \subseteq D \times W$ so, dass jedem $x\in D$ GENAU EIN $y \in W$ zugeordnet ist.

Wir schreiben $f: D \longrightarrow W$ oder $x \longmapsto f(x)$





Beispiel (Wirtschaft):

$f: (\text{PRODUKT-ID}) \longrightarrow \text{LAGERBESTAND}$

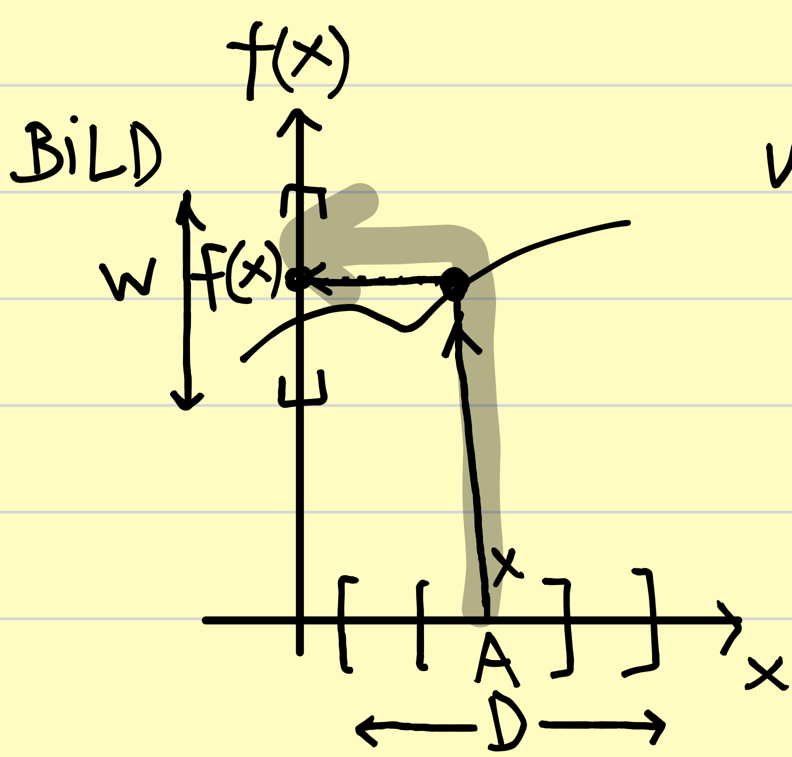
Jeder Artikel hat genau einen aktuellen Lagerbestan

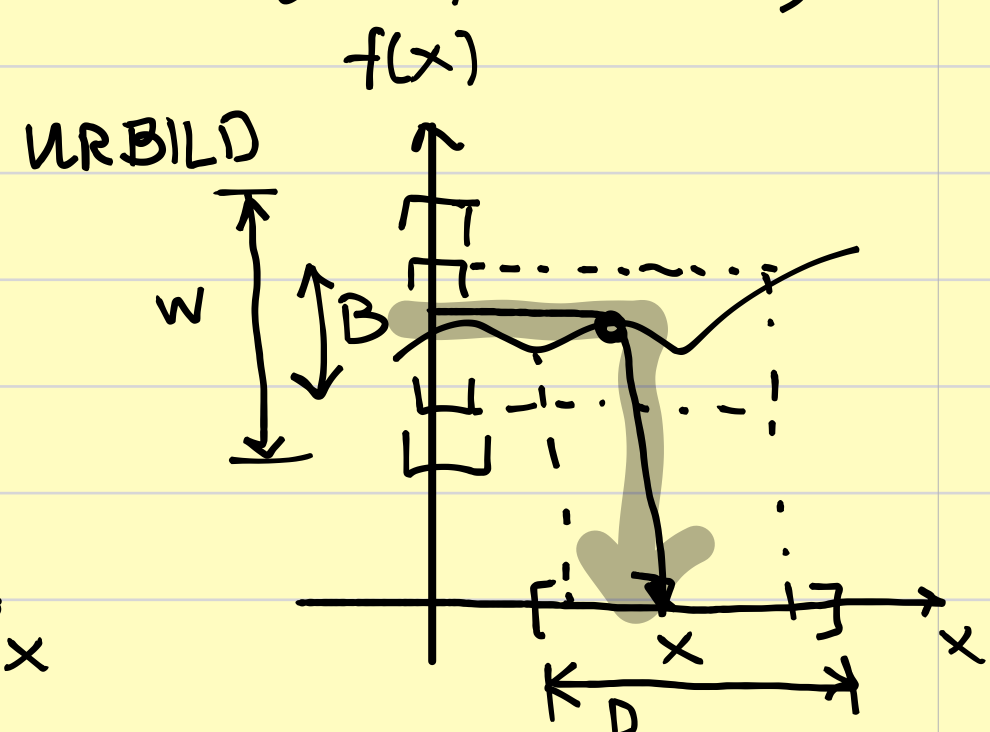
$R: (\text{KUNDE}) \longrightarrow \text{gekaufte Produkte}$

Def. BILD und URBILD

- Bild von $A \subseteq D$: $f(A) = \{ f(x) \,/\, x \in A \} \subseteq W$

- Urbild von $B \subseteq W$: $f^{-1}(B) = \{ x \in D \,/\, f(x) \in B \} \subseteq D$



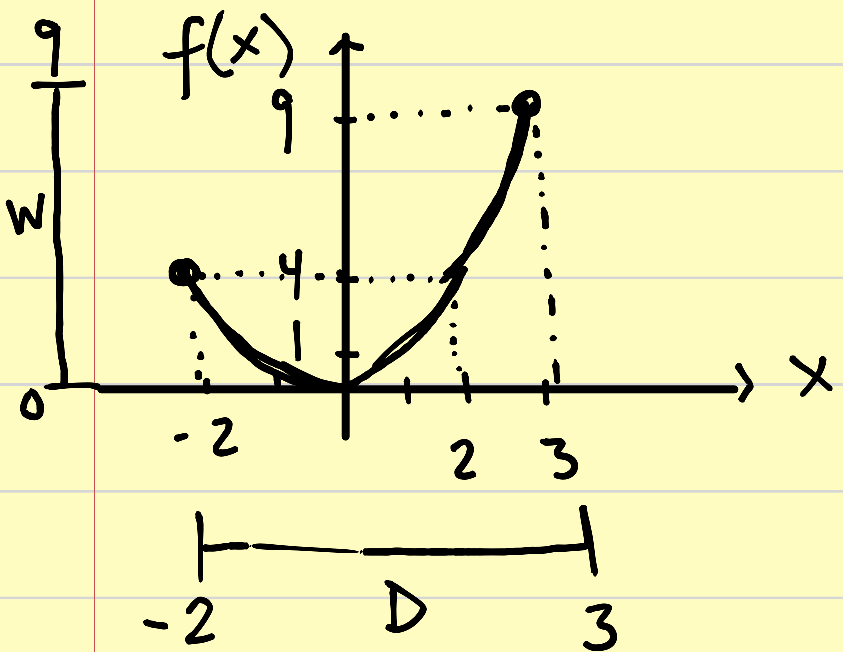


Def. Wir identifizieren einen Term $T(x)$ mit der Funktion f auf dem größtmöglichen reellen Bereich, auf dem T sinnvoll auswertbar ist.

$$g(x) = \frac{1}{x} \quad : \quad D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Mini-Übung. Gib Bild & Urbild an: $f(x) = x^2$ mit $D = [-2, 3]$. Bestimme $f([-2,0]) = [0,4]$

$$f^{-1}([1,4]) = [-2,-1] \cup [1,2]$$



3. EIGENSCHAFTEN VON FUNKTIONEN

- Injektiv: wenn $f(x_1) = f(x_2) \rightarrow x_1 = x_2$
(Horizontaler Geradetest: jede Horizontale Gerade schneidet den Graphen höchsten einmal.)
- Surjektiv: Für jedes $y \in W$ gibt es $x \in D$ mit $f(x) = y$.
(Jede horizontale Gerade in W schneidet mindestens einmal).

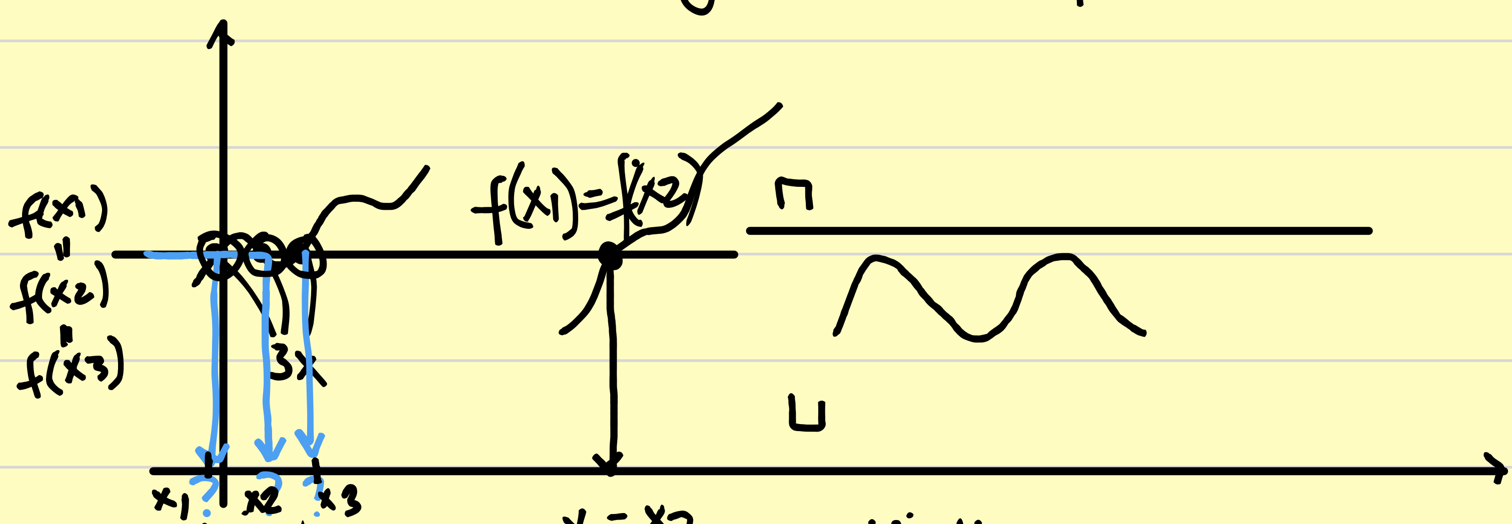
• Bijektiv: injektiv & surjektiv.

WICHTIGE CHARACTERISIERUNG:

f INJEKTIV $\longleftrightarrow$ es $\exists$ eine Linksinverse $g \circ f = id$.

f SURJEKTIV $\longleftrightarrow$ es $\exists$ eine Rechtsinverse $f \circ h = id$

BIJEKTIV $\longleftrightarrow$ eindeutige Inverse $f^{-1}: W \to D$ existiert



NICHT INJEKTIV!

$x_1 = x_2$. INJEKTIV

NICHT SURJEKTIV!

Beispiel:

$a > 1$: $f(x) = a^x$ IST STRENG MONOTON WACHSEND.

$\longrightarrow$ INJEKTIV.

Sein Bild a^x ist $\mathbb{R}^+ \longrightarrow$ SURJEKTIV auf $\mathbb{R}^+$.

Also BIJEKTIV zw. $\mathbb{R}$ & $\mathbb{R}^+$

Übung. $f(x) = \dfrac{3x-2}{x+1}$ $\quad x \in]-1, \infty[\to f(x) \in]-\infty, 3[$

Injektive Funktion?

$f'(x) = \dfrac{5}{(x+1)^2} > 0 \longrightarrow$ streng wachsend $\longrightarrow$ INJEKTIV.

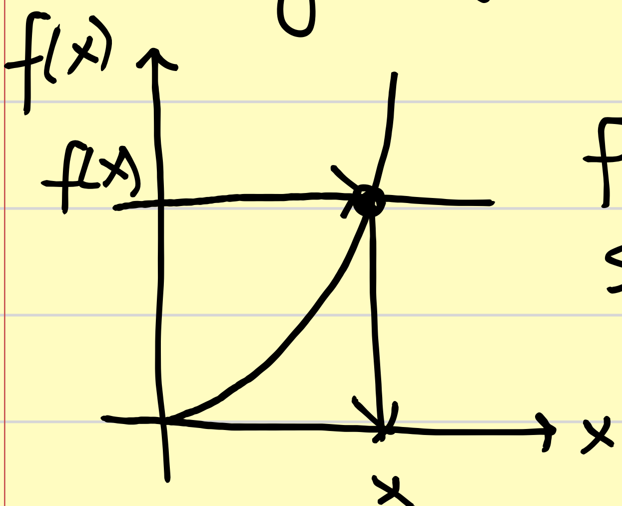
Surjektive Funktion?

$$y=\frac{3x-2}{x+1} \longrightarrow x=\frac{y+2}{3-y}$$

$f^{-1}(y)=\frac{y+2}{3-y}$ im $]-\infty,3[$. SURJEKTIV.

BIJEKTIV im interval $]-\infty,3[$.

Übung. $f: \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ $\quad f(x)=x^2$ INJEKTIV / SURJEKTIV / BIJEKTIV?



$f'(x)=2x>0 \longrightarrow$ Injektiv ✓

SURJEKTIV: $f^{-1}(y)=\sqrt{y} \in \mathbb{R}^+$ ✓

BIJEKTIV in $\mathbb{R}^+$ ✓

4. KOMPOSITION & UMKEHRFUNKTION

KOMPOSITION: $(g\circ f)(x)=g(f(x))$

UMKEHRBARKEIT: f ist invertierbar $\leftrightarrow$ f ist bijektiv

$$f^{-1}\circ f=id$$

Übung. $f(x)=\frac{2x+5}{x-1}$ $\quad I=]1,\infty[$

$$y=\frac{2x+5}{x-1} \rightarrow y(x-1)=2x+5 \rightarrow yx-2x=y+5$$

$$\rightarrow x(y-2)=y+5 \rightarrow f^{-1}(y)=\frac{y+5}{y-2} \quad]2,\infty[$$

Übung. Berechne bitte die Inverse Funktion von:

a) e^{x} $\quad x>0$

b) e^{x-a} $\quad x>a$

c) $\dfrac{3x-7}{x-2}$ $\quad x\in\,]2,\infty[$