20251031_Statistik_WIN2

Übung: Gegeben wird ein Kennzahlensystem mit 2 Kennzahlen: DLZ(X) und Output(Y).
a) Ermitteln Sie die normierte Kovarianzmatrix.
b) Ermitteln Sie die Eigenvektoren & -werte der Kovarianzmatrix.
c) Interpretieren Sie die Ergebnisse.

- DLZ(X): [17,14,12,13,9,7] (Tage)
- OUTPUT(Y): [200,250,270,240,310,330] (Stk/Zeit)

$$\mathrm{Kov}[X,Y] = \frac{\sum (x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{n-1} \qquad \Sigma = \begin{bmatrix} \mathrm{VAR}[X] & \mathrm{Kov}[X,Y] \\ \mathrm{Kov}[X,Y] & \mathrm{VAR}[Y] \end{bmatrix}$$

$$x_i^* = \frac{x_i-\bar{x}}{\sigma_X} \qquad y_i^* = \frac{y_i-\bar{y}}{\sigma_Y} \xrightarrow[N(0,1)]{} \Sigma^* = \begin{bmatrix} \mathrm{VAR}[X^*] & \mathrm{Kov}[X^*,Y^*] \\ \mathrm{Kov}[X^*,Y^*] & \mathrm{VAR}[Y^*] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \mathrm{Kov} \\ \mathrm{Kov} & 1 \end{bmatrix}$$

Normierung:

$$\bar{x} = \frac{17+14+12+13+9+7}{6} = 12$$

$$\mathrm{VAR}[X] = \frac{(17-12)^2+(14-12)^2+(12-12)^2+(13-12)^2+(9-12)^2+(7-12)^2}{6-1} = 12'6$$

$$\sigma_X = \sqrt{\mathrm{VAR}[X]} = 3'55$$

$$\bar{Y} = \frac{200+250+270+240+310+330}{6} = 266'67$$

$$\mathrm{VAR}[Y] = \frac{(200-266'67)^2+(250-266'67)^2+(270-266'67)^2+(240-266'67)^2+(310-266'67)^2+(330-266'67)^2}{6-1} = 2266'67$$

$$\sigma_Y = \sqrt{\mathrm{VAR}[Y]} = 47'61$$

$$X^*_{N(0,1)}: \left[\frac{17-12}{3'55}, \frac{14-12}{3'55}, \frac{12-12}{3'55}, \frac{13-12}{3'55}, \frac{9-12}{3'55}, \frac{7-12}{3'55}\right] \equiv \left[1'41, 0'56, 0, 0'28, -0'84, -1'41\right]$$

$$Y^*_{N(0,1)}: \left[\frac{200-266'67}{47'61}, \frac{250-266'67}{47'61}, \frac{270-266'67}{47'61}, \frac{240-266'67}{47'61}, \frac{310-266'67}{47'61}, \frac{310-266'67}{47'61}, \frac{330-266'67}{47'61}\right] \equiv \left[-1'4, -0'35, 0'07, -0'56, 0'91, 1'33\right]$$

$$Kov[X^*, Y^*] = \frac{\sum x_i^* \cdot y_i^*}{n-1} = \frac{1'41\cdot(-1'4)+0'56\cdot(-0'35)+0+0'28\cdot(-0'56)+(-0'84)\cdot 0'91+(-1'41)\cdot 1'33}{6-1}$$

$$= -0'994$$

$$\boxed{\mathcal{A}^* = \begin{bmatrix} 1 & -0'994 \\ -0'994 & 1 \end{bmatrix}}$$

Eigenwerte - Eigenwektoren :

$$\det[\mathcal{A}^* - \lambda I] = 0 \rightarrow \det\left[\begin{bmatrix} 1 & -0'994 \\ -0'994 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}\right] = 0$$

$$\rightarrow \det\left[\begin{bmatrix} 1-\lambda & -0'994 \\ -0'994 & 1-\lambda \end{bmatrix}\right] = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow (1-\lambda)^2 - (-0'994)^2 = 0 \rightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 0'0119 = 0$$

$$\lambda = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 0'0119}}{2} = \begin{cases} \lambda_1 = 1'994 \\ \lambda_2 = 0'006 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} ax^2+bx+c=0 \\ x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} \end{array}}$$

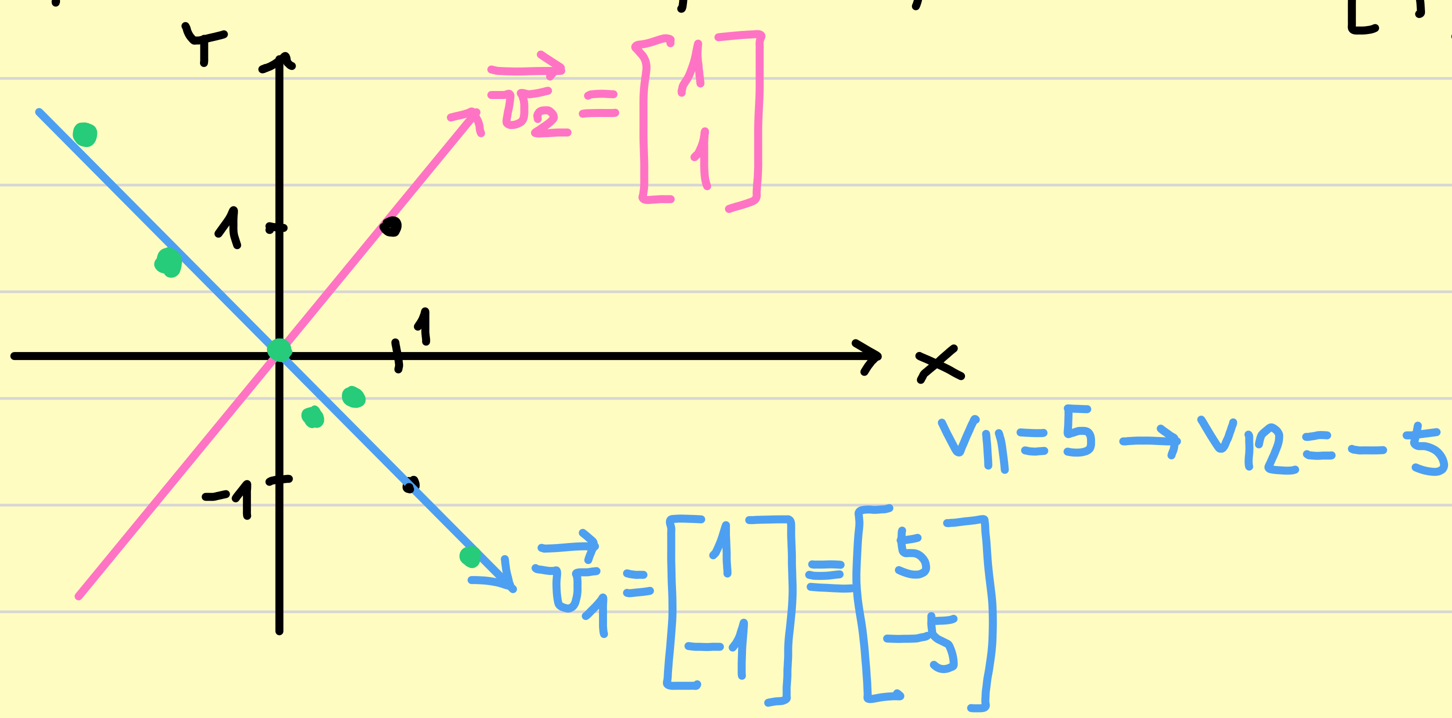
$$\mathcal{A}^* \cdot \vec{v_1} = \lambda_1 \cdot \vec{v_1} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -0'994 \\ -0'994 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{bmatrix} = 1'994 \cdot \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} v_{11} - 0'994 v_{12} = 1'994 v_{11} \\ -0'994 v_{11} + v_{12} = 1'994 v_{12} \end{array} \right| \quad v_{11} = -v_{12}$$

$$\rightarrow v_{11} = 1 \rightarrow v_{12} = -1 \rightarrow \boxed{\vec{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}}$$

$$\mathcal{A}^* \cdot \vec{v_2} = \lambda_2 \cdot \vec{v_2} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -0'994 \\ -0'994 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{bmatrix} = 0'006 \begin{bmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow v_{21} - 0'994 \cdot v_{22} = 0'006 v_{21} \rightarrow v_{21} = v_{22} \rightarrow \vec{v_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$



- Eine Führungskraft muss mit dem alten System [X,Y], zwei Kennzahlen steuern.
- Mit dem ersten PC_1, kam die FK die Systemsvariabilität immer noch sehr gut erklären.
- Wir gehen von 2 auf 1 Kennzahl. (50% Verbesserung).