Statistikübungen für WIN2
Vertiefte Übungen zur Wahrscheinlichkeitstheorie

Prof. H4
www.profh4.com

5. November 2025

1 Kolmogorov-Axiome und ihre Folgerungen

Übungen

1. Zeigen Sie, dass für zwei disjunkte Ereignisse A und B gilt:
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

2. Beweisen Sie, dass für jedes Ereignis A gilt:
$$P(A^c) = 1 - P(A).$$

3. Gegeben $P(A) = 0.3$, $P(B) = 0.4$, $P(A \cap B) = 0.1$. Bestimmen Sie $P(A \cup B)$.

4. Erklären Sie, warum $P(\Omega) = 1$ für das sichere Ereignis Ω gilt.

5. Zeigen Sie, dass $P(\emptyset) = 0$ gilt.

6. Angenommen $P(\text{Regen}) = 0.2$, $P(\text{Schnee}) = 0.1$, $P(\text{Regen} \cap \text{Schnee}) = 0.05$. Bestimmen Sie
$$P(\text{Regen} \cup \text{Schnee}).$$

7. Beweisen Sie allgemein:
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

8. Verifizieren Sie für drei Ereignisse A, B, C das Inklusions–Exklusionsprinzip:

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) = {} & P(A) + P(B) + P(C) \\ & - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) \\ & + P(A \cap B \cap C). \end{aligned}$$

9. Ein fairer Würfel wird geworfen. Bestimmen Sie $P(\text{keine } 6)$.

10. Bei zwei unabhängigen Durchführungen mit $P(A) = 0.7$ bestimmen Sie:
$$P(\text{mindestens einmal } A) = 1 - (1 - 0.7)^2.$$

2 Lösungen zu Kolmogorov-Axiomen

Wir geben hier jede Lösung Schritt für Schritt an, damit der Rechenweg klar wird.

1. **Additivität disjunkter Ereignisse:**
   Schritt 1: Da A und B disjunkt sind, gilt $A \cap B = \emptyset$.
   Schritt 2: Nach Axiom 3 (Endliche Additivität) folgt direkt:
   $$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

2. **Komplementregel:**
   Schritt 1: Betrachte $A \cup A^c = \Omega$ und $A \cap A^c = \emptyset$.
   Schritt 2: Nach Additivität:
   $$P(A) + P(A^c) = P(\Omega) = 1.$$
   Schritt 3: Umstellen liefert:
   $$P(A^c) = 1 - P(A).$$

3. **Vereinigung mit Schnitt:**
   Schritt 1: Allgemeine Formel:
   $$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$
   Schritt 2: Einsetzen von 0.3, 0.4 und 0.1 ergibt:
   $$P(A \cup B) = 0.3 + 0.4 - 0.1 = 0.6.$$

4. **Sicheres Ereignis:**
Per Definition ist Ω das sichere Ereignis; $P(\Omega) = 1$ (Axiom 2).

5. **Leere Menge:**
Da $\emptyset$ das unmögliche Ereignis ist und $P(\emptyset) = 0$ (Axiom 1 und 2), ist die Wahrscheinlichkeit 0.

6. **Regen oder Schnee:**
Schritt 1: Verwende den Additionssatz:
$$P(R \cup S) = P(R) + P(S) - P(R \cap S).$$
Schritt 2: Einsetzen: $0.2 + 0.1 - 0.05 = 0.25$.
Also $P(\text{Regen} \cup \text{Schnee}) = 0.25$.

7. **Allgemeine Vereinigung:**
Siehe Formel aus Aufgabe 7 der Übungen, hergeleitet aus Venn-Diagramm.

8. **Inklusions–Exklusions:**
Siehe Formel aus Aufgabe 8 der Übungen, Ergebnis direkt ablesbar.

9. **Keine 6 beim Würfel:**
$$P(\neg 6) = 1 - P(6) = 1 - \tfrac{1}{6} = \tfrac{5}{6}.$$

10. **Mindestens einmal A:**
$$P(\geq 1\, A) = 1 - P(\text{kein } A)^2 = 1 - (1 - 0.7)^2 = 1 - 0.3^2 = 1 - 0.09 = 0.91.$$

3 Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Übungen (wie gehabt)

4 Lösungen zu bedingten Wahrscheinlichkeiten

Auch hier wird jeder Schritt erklärt:

1. **Sensitivität:**
$$P(\text{Test}^+ | \text{krank}) = 0.95.$$
Keine weiteren Schritte nötig – Definition des Tests.

2. **Urne mit Zurücklegen: Schritt 1:** Nach Zurücklegen bleibt die Urnenzusammensetzung gleich.
   Schritt 2: $P(\text{rot}) = \frac{\#\text{rote}}{\text{Gesamt}} = \frac{3}{3+5+2} = \frac{3}{10} = 0.3$.

3. **Bildkarte ist König:**

$$P(\text{König}|\text{Bildkarte}) = \frac{4}{12} = \tfrac{1}{3}.$$

4. **Informatikstudentin:**
   Schritt 1: $P(\text{weiblich} \cap \text{Inf}) = 0.6 \times 0.3 = 0.18$.
   Schritt 2: $P(\text{Inf}) = 0.3$.
   Schritt 3: $P(\text{weiblich}|\text{Inf}) = \frac{0.18}{0.3} = 0.6$.

5. **Bewegungsalarm:**
   Schritt 1: Berechne $P(\text{Alarm})$:

$$P(\text{Alarm}) = P(\text{Alarm}|\text{Bewegung})P(\text{Bewegung}) + P(\text{Alarm}|\text{keine Bewegung})P(\text{keine Beweg}$$

   Einsetzen: $0.7 \cdot 0.05 + 0.3 \cdot 0.95 = 0.035 + 0.285 = 0.32$.
   Schritt 2: Bayes-Anwendung:

$$P(\text{Bewegung}|\text{Alarm}) = \frac{0.7 \cdot 0.05}{0.32} \approx 0.1094.$$

6. **Regen bei dunklen Wolken:**

$$P(\text{Regen}|\text{Wolken}) = \frac{P(\text{Wolken}|\text{Regen})P(\text{Regen})}{P(\text{Wolken})} = \frac{0.3 \cdot 0.3}{0.4} = 0.225.$$

7. **Fragetyp bei richtiger Antwort:**
   Gesamtwahrscheinlichkeit richtige Antwort:

$$P(R) = 0.9 \cdot 0.4 + p_{\text{m}} \cdot 0.5 + p_{\text{s}} \cdot 0.1.$$

   Gesuchte Bedingung:

$$P(\text{leicht}|R) = \frac{0.9 \cdot 0.4}{P(R)}.$$

8. **Diesel bei Durchfallen:**
   Analog Bayes:

$$P(D|F) = \frac{P(F|D)P(D)}{P(F)}, \quad P(F) = 0.05 \cdot 0.7 + 0.03 \cdot 0.3.$$

   Nachrechnen ergibt ≈ 0.7955.

9. **Sicherheitsverletzung:**

$$P(V|A) = \frac{0.9 \cdot 0.05}{0.9 \cdot 0.05 + 0.02 \cdot 0.95} \approx 0.7031.$$

10. **Zweites Kind Mädchen:**
Unabhängigkeit $P(\text{Mädchen}) = 0.55$.

5 Lösungen zum Satz von Bayes

Jede Aufgabe mit vollständigem Bayes-Satz:

1. **Krankheitsdiagnose:**
Schritt 1: Sensitivität = 0.99, Falsch-Positiv = 0.01, Prävalenz = 0.001.
Schritt 2: Gesamtwahrscheinlichkeit positiv:

$$P(+) = 0.99 \cdot 0.001 + 0.01 \cdot 0.999 = 0.01098.$$

Schritt 3: Bayes:

$$P(\text{krank}|+) = \frac{0.99 \cdot 0.001}{0.01098} \approx 0.0902.$$

2. **Regen und Unfälle:**

$$P(\text{Unfall}) = 0.8 \cdot 0.3 + 0.2 \cdot 0.7 = 0.38,$$
$$P(\text{Regen}|\text{Unfall}) = \frac{0.8 \cdot 0.3}{0.38} \approx 0.6316.$$

3. **Sicherheitsscanner:**

$$P(+) = 0.95 \cdot 0.001 + 0.01 \cdot 0.999 = 0.01094,$$
$$P(\text{verboten}|+) = \frac{0.95 \cdot 0.001}{0.01094} \approx 0.0868.$$

4. **Spam-Filter:**

$$P(+) = 0.98 \cdot 0.05 + 0.01 \cdot 0.95 = 0.0585,$$
$$P(\text{Spam}|+) = \frac{0.98 \cdot 0.05}{0.0585} \approx 0.8376.$$

5. **Gen-Test:**

$$P(+) = 0.99 \cdot 0.03 + 0.01 \cdot 0.97 = 0.0394,$$
$$P(\text{Träger}|+) = \frac{0.99 \cdot 0.03}{0.0394} \approx 0.7538.$$

6. **Flugverspätung:**

$$P(\text{verspätet}) = 0.2 + 0.3 - 0.06 = 0.44,$$
$$P(\text{technisch}|\text{verspätet}) = \frac{0.2}{0.44} \approx 0.4545.$$

7. **Multiple-Choice:**
   Da Zufallsraten, $P(R) = 0.25$, $P(\text{geraten}|R) = 1$.

8. **Produktfehler:**

$$P(+) = 0.9 \cdot 0.02 + 0.1 \cdot 0.98 = 0.116,$$
$$P(\text{Fehler}|+) = \frac{0.9 \cdot 0.02}{0.116} \approx 0.1552.$$

9. **Buchklassifikation:**

$$P(+) = 0.85 \cdot 0.1 + 0.05 \cdot 0.9 = 0.13,$$
$$P(\text{selten}|+) = \frac{0.85 \cdot 0.1}{0.13} \approx 0.6538.$$

10. **Seltene Krankheit:**

$$P(+) = 0.99 \cdot 0.01 + 0.05 \cdot 0.99 = 0.0594,$$
$$P(\text{krank}|+) = \frac{0.99 \cdot 0.01}{0.0594} \approx 0.1667.$$