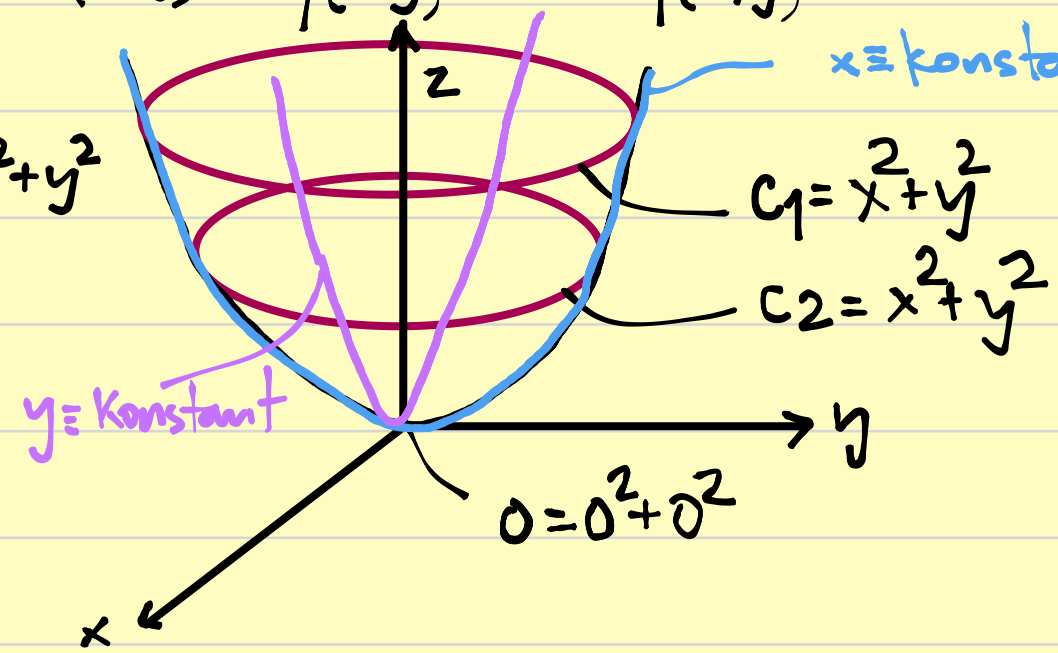
Differentialrechnung mit mehreren unabhängigen Variablen...

Eine Funktion von 2 Variablen ist eine Zuordnung

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad (x,y) \to f(x,y) \qquad z = f(x,y)$

Beispiel: $z = x^2 + y^2$



Partielle Ableitung.

Wie ändert sich $f(x,y)$, wenn nur eine Variable geändert wird?

x = konstant → es ändert sich nur y $\qquad z = x_0^2 + y^2$

y = konstant → es ändert sich nur x $\qquad z = x^2 + y_0^2$

Partielle Ableitung nach x

$$f_x(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h}$$

$$f_y(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h}$$

Beispiel. $f(x,y) = 3x^2 y + 4y$

$\frac{\partial f}{\partial x} = 6xy \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2 + 4$

Gradient von $f(x,y)$ ist der Vektor $\nabla f(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{bmatrix}$

Eigenschaften:
- Richtung des steilsten Anstiegs von f an der Stelle (x,y)
- Das Modul vom Vektor $\|\nabla f(x,y)\|$ = maximale Steigung an der Stelle (x,y).

Beispiel: Gradient zeigt, in welche Richtung man z.B. Preis (x) und Werbung (y) verändern sollte, um Gewinn (z) zu erhöhen.

Hesse Matrix sammelt alle zweiten Partiellen Ableitungen.
Für eine Funktion $f(x,y)$:

$$Hf(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix}$$

Die Hesse Matrix spielt bei der Klassifikation von Extremstellen eine zentrale Rolle.

Wir betrachten $f(x,y)$.

Schritt 1. Kritische Punkte finden

$$\nabla f(x_0,y_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Gleichungssystem $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_0,y_0} = 0$ UND $\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{x_0,y_0} = 0$

Diese Punkte sind Kandidaten für:

- lokale Maxima
- lokale Minima
- Sattelpunkte

Schritt 2. Klassifikation mit der Hesse-Matrix (für 2 Variablen)

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{x_0,y_0} = A \qquad \left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{x_0,y_0} = B \qquad \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right|_{x_0,y_0} = C$$

$$Hf(x_0,y_0) = \begin{bmatrix} A & C \\ C & B \end{bmatrix} \qquad \mathrm{Det}\left(Hf(x_0,y_0)\right) = AB - C^2$$

Dann gilt:
- Fall 1. $D>0$ & $A>0$ $\rightarrow$ lokales Minimum
- Fall 2. $D>0$ & $A<0$ $\rightarrow$ lokales Maximum
- Fall 3. $D<0$ $\rightarrow$ Sattelpunkt
- Fall 4. $D=0$ $\rightarrow$ Keine Entscheidung

Aufgabe 1: Partielle Ableitungen in einem CRM-Projekt

Ein Unternehmen führt ein neues CRM-System ein. Die „Zufriedenheit" der Mitarbeiter mit dem System wird modelliert durch

$$Z(x,y) = 20\ln(x+1) + 30\ln(y+1) - 2x - 3y$$

mit

- x: Anzahl Schulungstage pro Mitarbeiter
- y: Anzahl zusätzlicher Verbesserungstage für die Benutzeroberfläche

Beide werden als **nichtnegative** reelle Variablen betrachtet ($x, y \geq 0$).

1. Berechne die partiellen Ableitungen $Z_x(x,y)$ und $Z_y(x,y)$.
2. Berechne $Z_x(2,3)$ und $Z_y(2,3)$ und interpretiere die Werte ökonomisch.

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = 20\,\frac{1}{x+1} - 2 \qquad \frac{\partial Z}{\partial y} = 30\,\frac{1}{y+1} - 3$$

$$\left.\frac{\partial Z}{\partial x}\right|_{(2,3)} = 20\,\frac{1}{3} - 2 = 4'67 \qquad \left.\frac{\partial Z}{\partial y}\right|_{(2,3)} = 30 \cdot \frac{1}{4} - 3 = 4'5$$

Nahe bei (2,3) bringen zusätzliche Schulungstage und UI-Verbesserungen in etwa gleich viel Zufriedenheit.

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{x_0,y_0} = \frac{20}{x_0+1} - 2 = 0 \rightarrow x_0 = 9$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{x_0,y_0} = \frac{30}{y_0+1} - 3 = 0 \rightarrow y_0 = 9$$

$(9,9)$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{-20}{(x_0+1)^2} = \frac{-20}{(10)^2} = -0{,}2$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{-30}{(y_0+1)^2} = \frac{-30}{(10)^2} = -0{,}3$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$$

$$H = \begin{bmatrix} -0{,}2 & 0 \\ 0 & -0{,}3 \end{bmatrix}$$

$D = 0{,}06 > 0$ $A = -0{,}2 < 0$

Fall 2. Lokales Maximum

Der Punkt $[9,9]$ stellt ein lokales max. dar.

Aufgabe 2: Totales Differential – Kosten eines Cloud-Systems

Ein Unternehmen betreibt ein Cloud-System mit zwei Arten von Instanzen:

- x: Anzahl Standard-Server (in Zehner-Paketen, also x kann reell sein)
- y: Anzahl High-Memory-Server (ebenfalls in Zehner-Paketen)

Die **stundenbezogenen Gesamtkosten** werden approximiert durch

$$K(x,y) = 100 + 4x^2 + y^2$$

(€ pro Stunde).

Aktuell laufen $x_0 = 3$ Standard-Server-Pakete und $y_0 = 2$ High-Memory-Pakete.

Das Unternehmen überlegt, auf $x = 3{,}2$ und $y = 1{,}8$ zu ändern (also leichte Anpassungen).

1. Berechne $K_x(x,y)$ und $K_y(x,y)$.
2. Bestimme das totale Differential dK an der Stelle $(3,2)$.
3. Verwende dK, um die **ungefähre** Kostenänderung beim Übergang von $(3,2)$ nach $(3{,}2, 1{,}8)$ zu berechnen.

$$\frac{\partial K}{\partial x} = 8x$$

$$\frac{\partial K}{\partial y} = 2y$$

Totale Differential $(3,2)$

$$dK = \left.\frac{\partial K}{\partial x}\right|_{(3,2)} \cdot dx + \left.\frac{\partial K}{\partial y}\right|_{(3,2)} \cdot dy =$$

$$= 8.3\,dx + 2.2\,dy =$$

$$= 24\,dx + 4\,dy$$

Änderung von $(3,2)$ nach $(3{,}2, 1{,}8)$

Anfangspunkt: $x_0=3 \quad y_0=2$ Neuer Punkt: $x=3{,}2 \quad y=1{,}8$

Kleine Änderung: $dx = x-x_0 = 3{,}2-3 = 0{,}2$

$dy = y-y_0 = 1{,}8-2 = -0{,}2$

$$dk = 24\cdot 0{,}2 + 4\cdot(-0{,}2) = 4{,}0$$

Die Kosten steigen ca. 4€/Std bei der Änderung.

Aufgabe 3: Gradient und Richtungsableitung – Datenverarbeitungskapazität

Die pro Stunde verarbeitbare Datenmenge (in GB) eines Analyse-Clusters werde modelliert durch

$$F(x,y) = 10x + 6y - x^2 - 2y^2$$

mit

- x: Anzahl CPU-Einheiten (z.B. in virtuellen Kernen)
- y: Parallelisierungsstufe (z.B. Anzahl paralleler Pipelines, reelle Modellgröße)

1. Berechne den Gradienten $\nabla F(x,y)$.
2. Bestimme $\nabla F(2,1)$.
3. Berechne die Richtungsableitung von F in $(2,1)$ in Richtung des Vektors $\mathbf{v} = (1,2)$.
   (Hinweis: zuerst $\mathbf{v}$ normieren ⇒ Einheitsvektor.)
4. Interpretiere das Ergebnis.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 10-2x \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = 6-4y$$

$$\nabla F = \begin{bmatrix} 10-2x \\ 6-4y \end{bmatrix}$$

$$\nabla F\Big|_{2,1} = \begin{bmatrix} 10-2.2 \\ 6-4.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Richtungsableitung in Richtung $(1,2)\ \vec{v}$

Zuerst machen wir den Einheitsvektor $\vec{u} = \dfrac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \dfrac{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}}{\sqrt{1^2+2^2}} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{bmatrix}$

Richtungsableitung: $\nabla F(2,1)\cdot\vec{u} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{bmatrix} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(6.1+2.2) = 4{,}47$

Interpretation: $\nabla F(2,1)$ zeigt die Richtung des steilsten Anstiegs von F im Punkt $(2,1)$.

Die Richtungsableitung 4'47 bedeutet: wenn wir x & y in Richtung $\vec{u}$ leicht erhöhen, steigt die verarbeitbare Datenmenge mit einer Steigerung von 4'47 GB pro Schritt in Richtung $\vec{u}$.