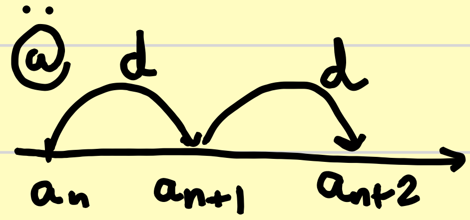
20250926_Mathematik1_B

AF: $a_{n+1} = a_n + d$



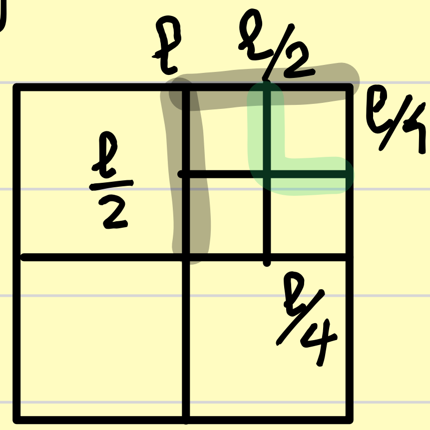
Geometrische Folgen (GF):

Bei der GF ist der Quotient $q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ zw. zwei aufeinander folgenden Gliedern immer gleich groß: q = Konstant.

Jedes Glied der Folge [außer a_1] ergibt sich dadurch, das man das vorausgehende Glied mit einem Konstanten Faktor multipliziert.

Bildungsgesetz der GF: $\boxed{a_{n+1} = q \cdot a_n \; ; \; q = \text{konstant}}$

Beispiel: graphisch



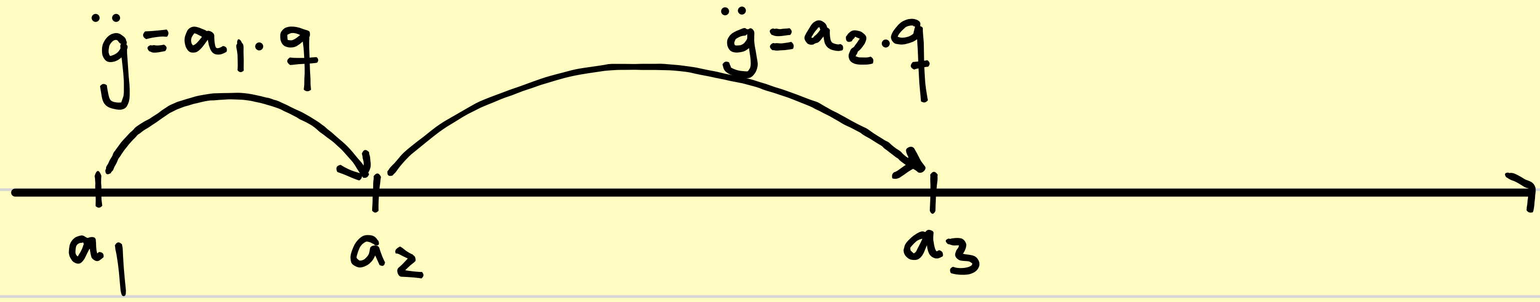
$a_1 = \ell^2 \qquad q = \frac{1}{4}$

$a_2 = q \cdot a_1 = \frac{1}{4}\ell^2$

$a_3 = q \cdot a_2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \ell^2 = \frac{1}{16}\ell^2$

Beispiel: (nummerisch)

	Quotient (q)	Bildungsgesetz
• $\{2, 2, 2, \ldots\}$	$q = 1$	$a_{n+1} = 1 \cdot a_n$
• $\{1, 2, 4, 8, \ldots\}$ ×2 ×2 ×2	$q = 2$	$a_{n+1} = 2 \cdot a_n$
• $\{1, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}, \ldots\}$	$q = \frac{1}{4}$	$a_{n+1} = \frac{1}{4} a_n$



Eine GF ist eindeutig durch das Anfangsglied „a_1" und den konstanten Faktor „q" bestimmt:

$$a_1 = a_1$$
$$a_2 = a_1 \cdot q$$
$$a_3 = a_2 \cdot q = a_1 \cdot q^2$$
$$a_4 = a_3 \cdot q = a_1 \cdot q^3$$
$$\ldots$$

$$\boxed{a_{n+1} = a_1 \cdot q^n}$$ Bildungsgesetz der GF $$\boxed{a_n = a_1 \cdot q^{n-1}}$$

$$\boxed{\log\left[a^b\right] = b \cdot \log a}$$

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \longrightarrow q^{n-1} = \frac{a_n}{a_1} \xrightarrow{\log} \log\left[q^{n-1}\right] = \log\left[\frac{a_n}{a_1}\right]$$

$$\longrightarrow (n-1) \cdot \log q = \log\left[\frac{a_n}{a_1}\right] \longrightarrow n-1 = \frac{\log\left[\frac{a_n}{a_1}\right]}{\log q} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \boxed{n = \frac{\log\left[\frac{a_n}{a_1}\right]}{\log q} + 1}$$

Beispiel. wie lautet das 93. Glied einer GF mit $a_1 = \frac{3}{7}$ & $q = 1'06$.

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$
$n = 93$
$a_1 = 3/7$
$q = 1'06$

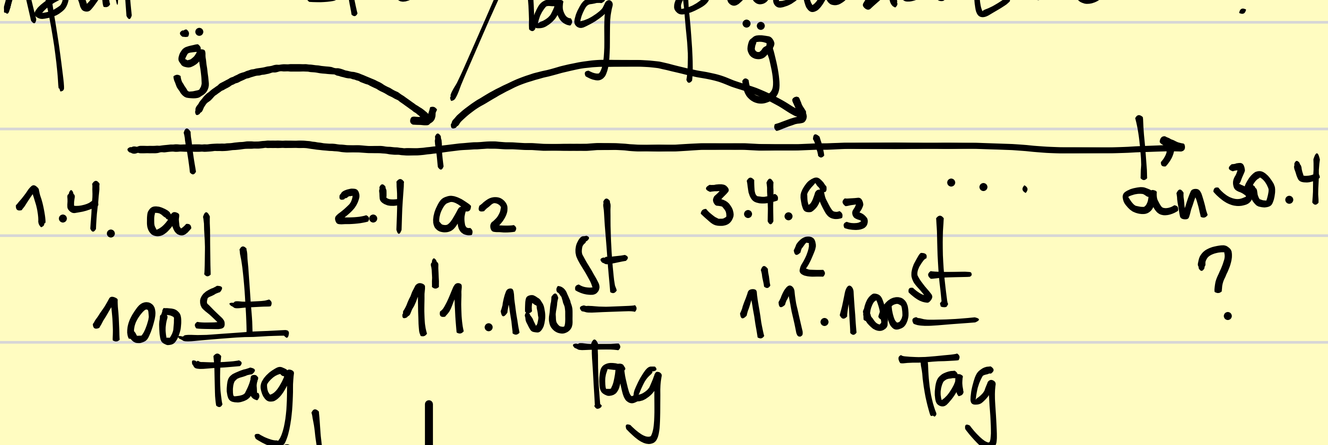
$$a_{93} = \frac{3}{7} \cdot (1'06)^{92} = 91'2353$$

Beispiel. bei einer GF ist das erste Glied $a_1=1$ und das letzte $a_n=128$. $q=2$. Wie viele Glieder hat die Folge?

$$a_n = a_1\cdot q^{n-1} \rightarrow 128 = 1\cdot 2^{n-1} \rightarrow \log 128 = \log\left(2^{n-1}\right)$$

$$\rightarrow \log 128 = (n-1)\cdot \log 2 \rightarrow n = 1+\frac{\log 128}{\log 2} = 8$$

Übung. in einem Betrieb soll die Geschwindigkeit eines Fließbandes täglich um 1% erhöht werden.
Wie schnell ist die Produktion am 30. April, wenn am 1. April 100 Stück/Tag produziert werden?



$a_1 = 100\,\frac{St}{Tag}$

$q = 1'01$

$n = 30$

$$\triangleright\quad a_{30} = 100\cdot 1'01^{30-1} = \ldots = 133'45\,\frac{St}{Tag} \approx 136\,\frac{St}{Tag}$$

Folgen: $\boxed{AF:\ a_{n+1} = a_n + d\ ;\quad GF:\ a_{n+1} = q\cdot a_n}$

REIHEN Summiert man die Glieder einer Folge, erhält man Reihen

Endliche Reihen $\sum_{i=1}^{n} a_i$ Unendliche Reihen $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$

ARITHMETISCHE REIHEN (AR):

Eine Reihe, die aus den ersten Gliedern einer AF gebildet wird, heißt eine AR:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + \underbrace{(a_1+d)}_{a_2} + \underbrace{(a_1+2d)}_{a_3} + \ldots + \underbrace{(a_1+(n-3)d)}_{a_{n-2}} + \underbrace{(a_1+(n-2)d)}_{a_{n-1}} + \underbrace{(a_1+(n-1)d)}_{a_n}$$

$$+ \qquad + \qquad + \qquad \ldots$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \underbrace{(a_1+(n-1)\cdot d)}_{a_n} + \underbrace{(a_1+(n-2)d)}_{a_{n-1}} + \underbrace{(a_1+(n-3)d)}_{a_{n-2}} + \ldots + \underbrace{(a_1+2d)}_{a_3} + \underbrace{(a_1+d)}_{a_2} + \underbrace{a_1}_{a_1}$$

$$2.\sum_{i=1}^{n} a_i = 2a_1+(n-1)d + 2a_1+(n-1)d + 2a_1+(n-1)d + \ldots + 2a_1+(n-1)d + 2a_1+(n-1)d + 2a_1+(n-1)d$$

$$2.\sum_{i=1}^{n} a_i = n.\left[2a_1+(n-1)d\right] \rightarrow \boxed{\sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{n}{2}\cdot\left[2a_1+(n-1)\cdot d\right]}$$

$$\rightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{n}{2}\cdot\left[a_1 + \underbrace{(a_1+(n-1)d)}_{a_n = a_1+(n-1)d}\right]$$

$$\rightarrow \boxed{\sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{n}{2}\cdot\left[a_1+a_n\right]}$$ Für AR gilt...

Biespiel: bestimme bitte die Summe einer AR mit 100 Glieder, $a_1 = 15$, $d = 3$. $a_n = a_1 + (n-1).d$

$$\sum_{i=1}^{100} a_i = \frac{100}{2}\cdot\left[15 + \left(15 + (100-1)\cdot 3\right)\right] = 16350$$

GEOMETRISCHE REIHEN (GR):

Eine Reihe, deren Gliedern eine GF bilden, nennt man GR:

$$GR: \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + \underbrace{a_1 \cdot q}_{a_2} + \underbrace{a_1 \cdot q^2}_{a_3} + \dots + \underbrace{a_1 q^{n-3}}_{a_{n-2}} + \underbrace{a_1 \cdot q^{n-2}}_{a_{n-1}} + \underbrace{a_1 q^{n-1}}_{a_n}$$

$$- \quad q \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 q + a_1 q^2 + a_1 \cdot q^3 + \dots + a_1 q^{n-2} + a_1 \cdot q^{n-1} + a_1 \cdot q^n$$

$$(1-q) \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 - a_1 \cdot q^n$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{a_1 (1-q^n)}{1-q}}$$ Für die GR gilt: (wenn $q \neq 1$)

wenn $q=1$: $\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_1 \cdot q + \dots + a_1 q^{n-1} \overset{q=1}{=} n \cdot a_1$

$$\boxed{\begin{array}{ll} GR: \quad q \neq 1: & \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 \cdot \frac{(1-q^n)}{1-q} \\ \quad\quad\;\; q=1: & \sum_{i=1}^{n} a_i = n \cdot a_1 \end{array}}$$

Beispiel: bestimmen Sie bitte die Summe einer GR mit 100 Gliedern, wenn $a_1 = \frac{2}{3}$ $q = 1{,}2$.

$$q \neq 1: \quad \sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{\frac{2}{3}\left(1-1{,}2^{100}\right)}{1-1{,}2} \simeq 276 \cdot 10^6$$