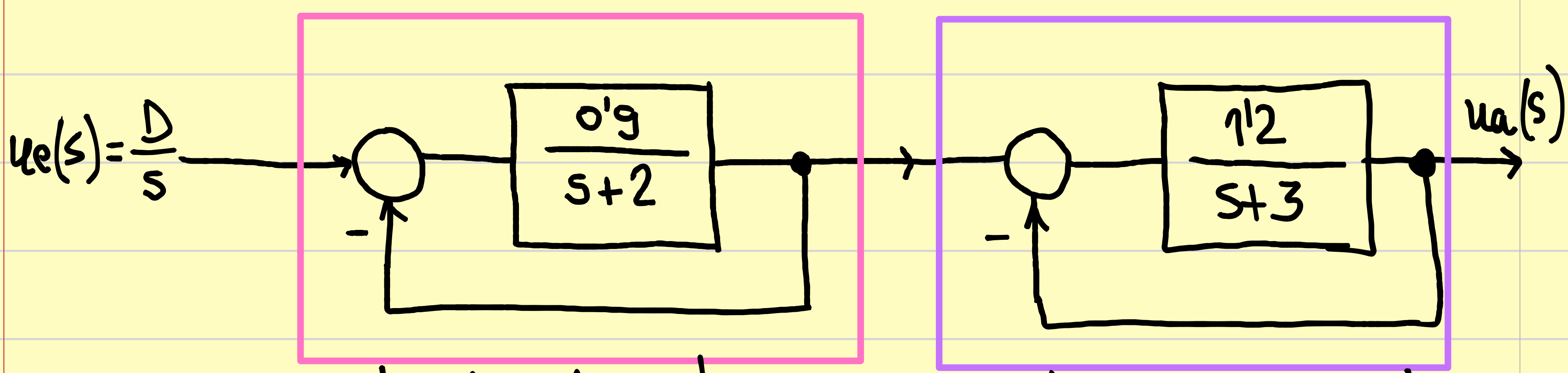
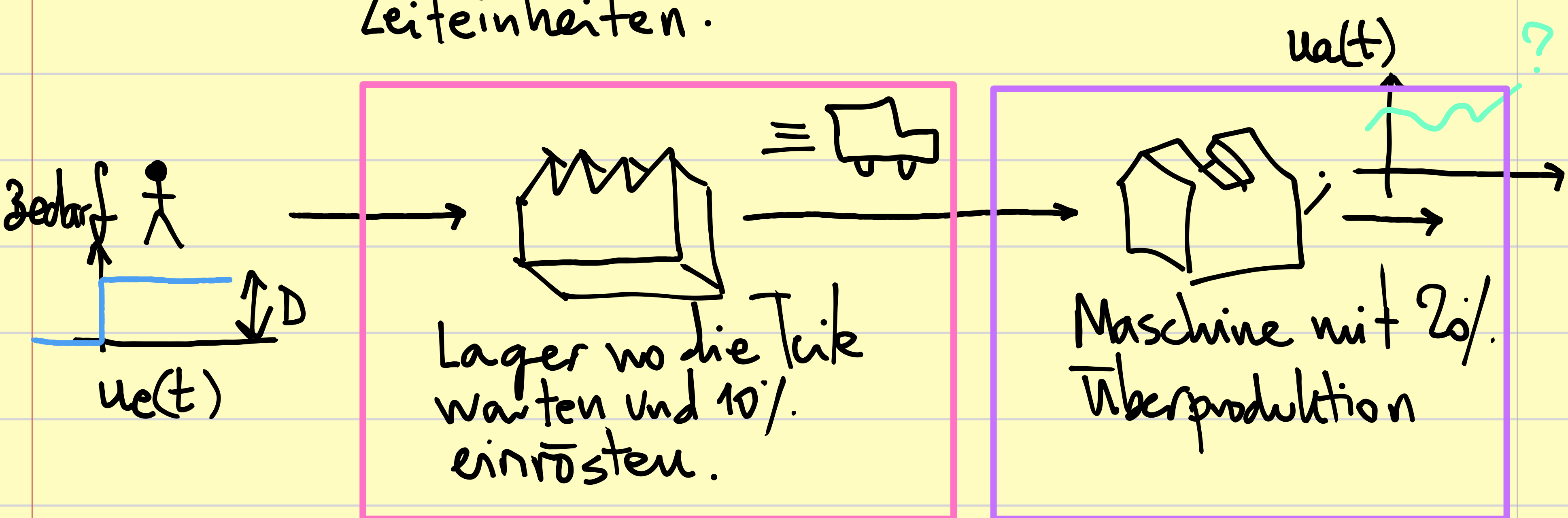
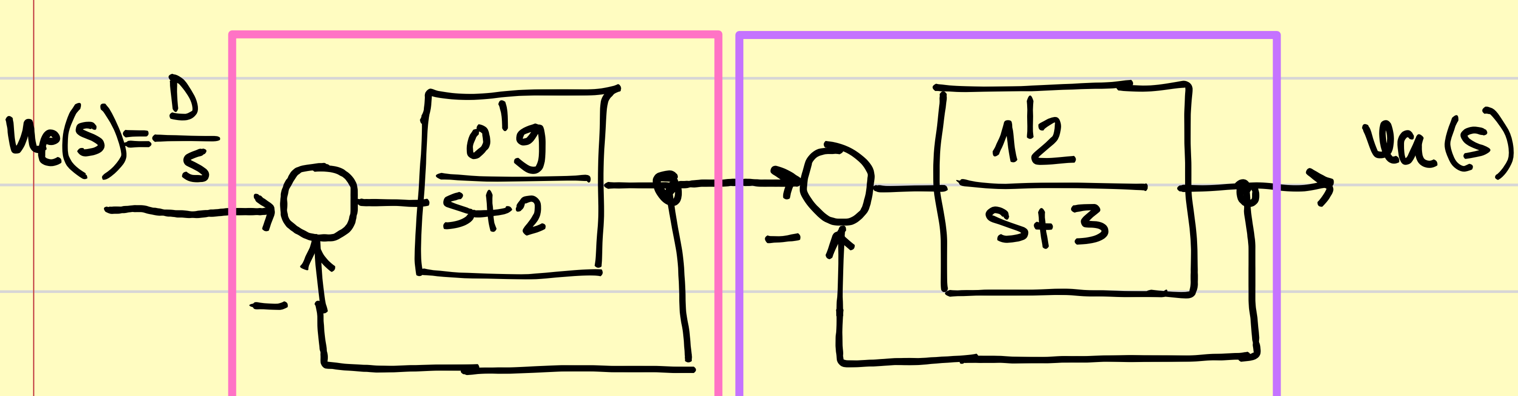
Übungen...

1. Gegeben wird ein Supply Chain System (siehe Bild), bitte die Ausgangsfunktion $u_a(t)$ ermitteln, wenn die Eingangsfunktion $u_e(t) = D$ konstant ist.



- Bestandspunkt mit 10% Ausschußquote und eine Reaktionszeit von 2 Zeiteinheiten.
- Produktionsprozeß mit 20% Überproduktion und eine Rüstzeit von 3 Zeiteinheiten.

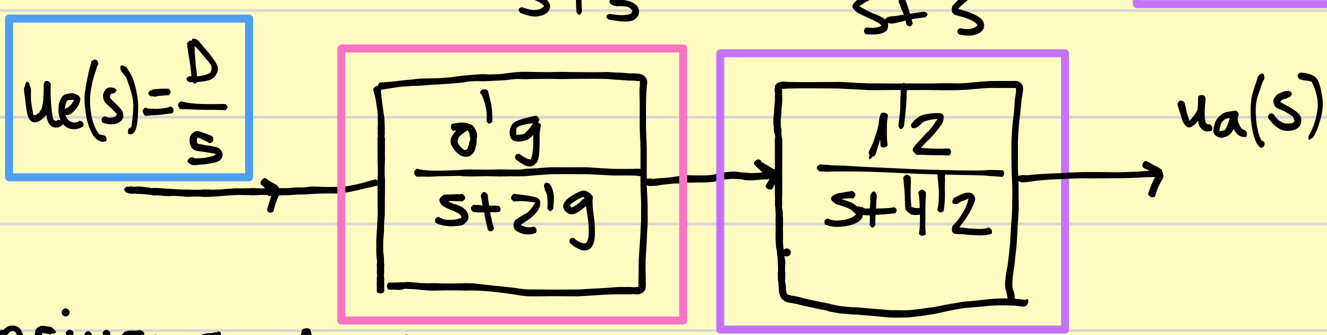




ÜBERTRAGUNGSFUNKTIONEN ÜBERSETZUNG:

- $\boxed{F_1(s)} = \dfrac{\frac{0'9}{s+2}}{1+\frac{0'9}{s+2}} = \dfrac{\frac{0'9}{s+2}}{\frac{s+2+0'9}{s+2}} = \boxed{\dfrac{0'9}{s+2'9}}$

- $\boxed{F_2(s)} = \dfrac{\frac{1'2}{s+3}}{1+\frac{1'2}{s+3}} = \dfrac{\frac{1'2}{s+3}}{\frac{s+3+1'2}{s+3}} = \boxed{\dfrac{1'2}{s+4'2}}$



REIHENSCHALTUNG:

$$u_a(s) = \boxed{u_e(s)} \cdot \boxed{F_1(s)} \cdot \boxed{F_2(s)} = \frac{D}{s} \cdot \frac{0'9}{s+2'9} \cdot \frac{1'2}{s+4'2}$$

$\boxed{D=1}$

$$u_a(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{0'9}{s+2'9} \cdot \frac{1'2}{s+4'2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+2'9} + \frac{C}{s+4'2} =$$

$$= \frac{A(s+2'9)(s+4'2) + Bs(s+4'2) + Cs(s+2'9)}{s(s+2'9)(s+4'2)}$$

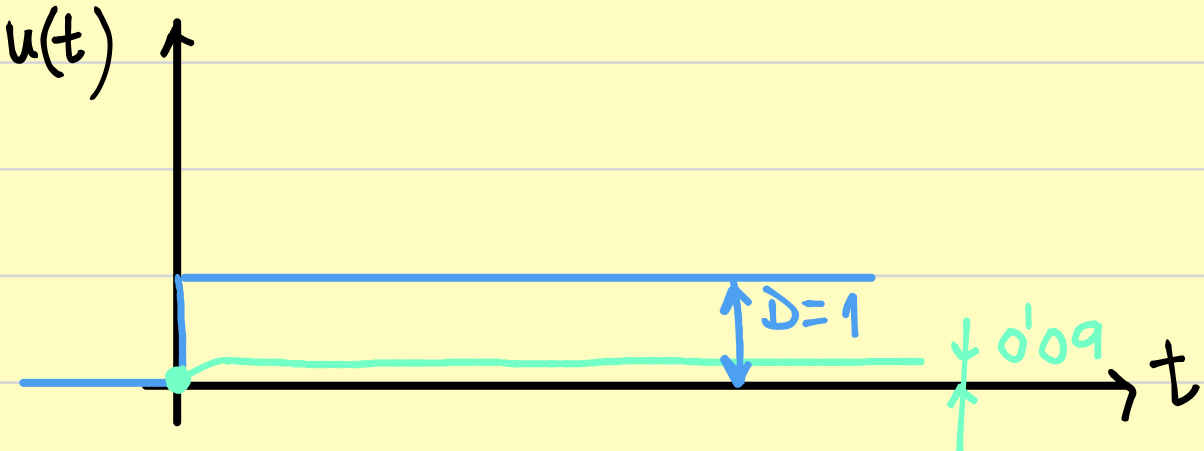
$$1 \cdot 0'9 \cdot 1'2 = A(s+2'9)(s+4'2) + Bs(s+4'2) + Cs(s+2'9)$$

- $s^* = 0 \rightarrow 1 \cdot 0'9 \cdot 1'2 = A \cdot (2'9)(4'2) \longrightarrow A = \dfrac{0'9 \cdot 1'2}{2'9 \cdot 4'2} = 0'09$
- $s = -2'9 \rightarrow 1 \cdot 0'9 \cdot 1'2 = B(-2'9)(-2'9+4'2) \rightarrow B = -0'286$
- $s = -4'2 \rightarrow 1 \cdot 0'9 \cdot 1'2 = C(-4'2)(2'9-4'2) \rightarrow C = 0'19$

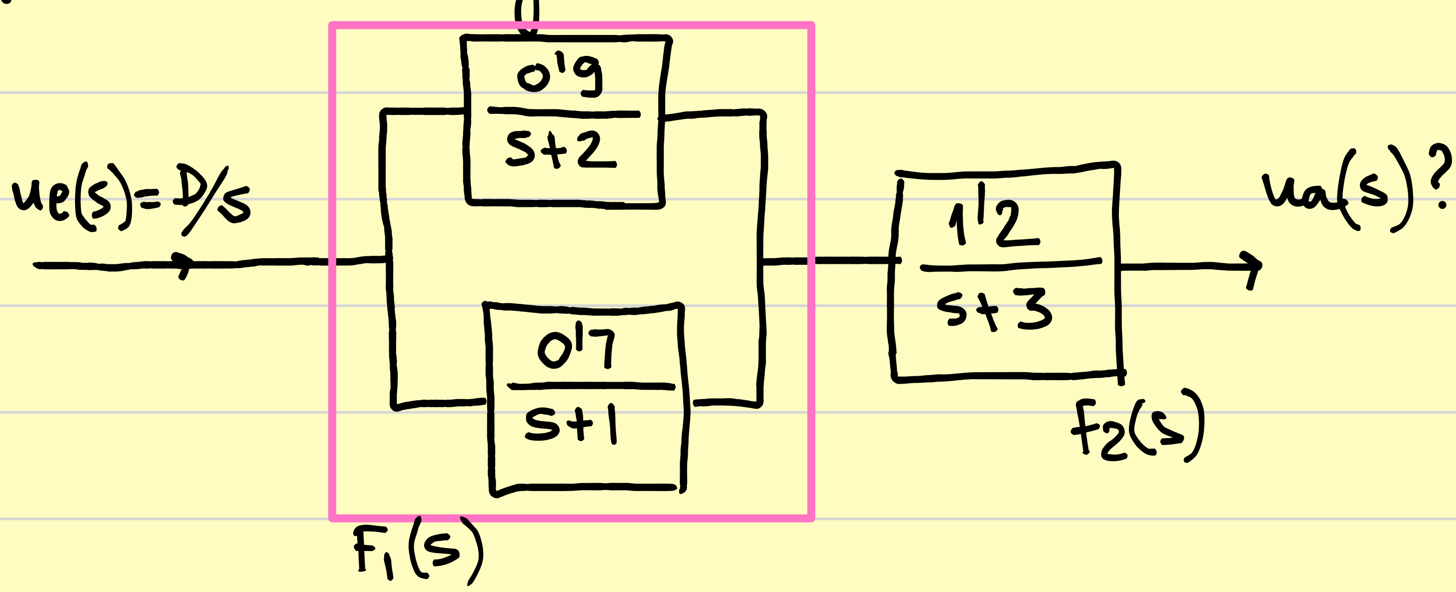
$$u_a(s) = \frac{0'09}{s} - \frac{0'286}{s+2'9} + \frac{0'19}{s+4'2}$$

LAPLACE INVERSE

$$\boxed{\mathcal{L}^{-1}(u_a(s)) = u_a(t) = 0{,}09 - 0{,}286\, e^{-2{,}9t} + 0{,}19\, e^{-4{,}2t}}$$ ✓

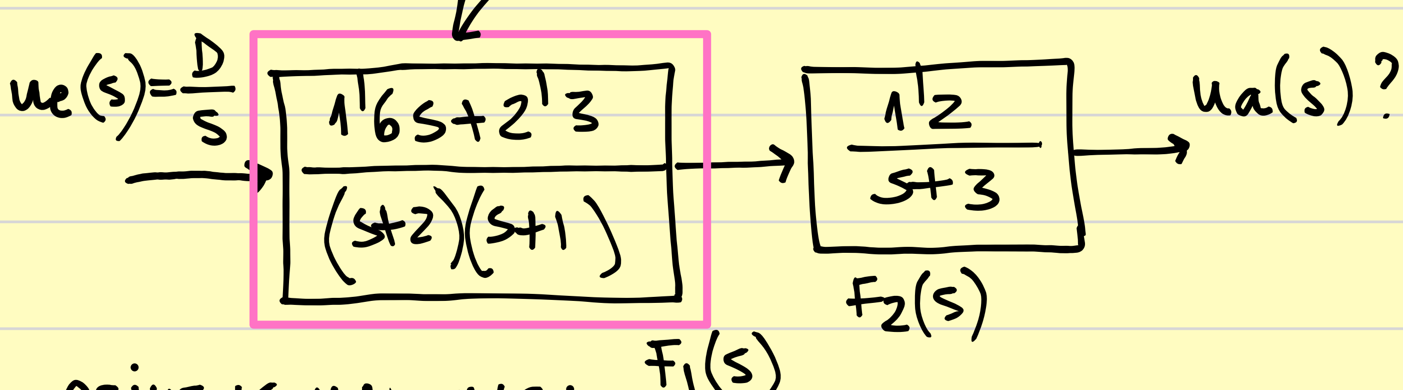


2. Gleiche Problemstellung als 1.



$$\boxed{F_1(s)} = \frac{0{,}9}{s+2} + \frac{0{,}7}{s+1} = \frac{0{,}9(s+1) + 0{,}7(s+2)}{(s+2)(s+1)} = \frac{0{,}9s + 0{,}9 + 0{,}7s + 1{,}4}{(s+2)(s+1)}$$

$$= \frac{1{,}6s + 2{,}3}{(s+2)(s+1)}$$



REIHENSCHALTUNG:

$$u_a(s) = U_e(s) \cdot F_1(s) \cdot F_2(s) = \frac{D}{s} \cdot \frac{1{,}6s + 2{,}3}{(s+2)(s+1)} \cdot \frac{1{,}2}{s+3}$$

$\boxed{D=1}$

$$u_a(s)=\frac{1}{s}\cdot\frac{1'6s+2'3}{(s+2)(s+1)}\cdot\frac{1'2}{s+3}=\frac{A}{s}+\frac{B}{(s+2)}+\frac{C}{(s+1)}+\frac{D}{(s+3)}$$

$$=\frac{A(s+2)(s+1)(s+3)+Bs(s+1)(s+3)+Cs(s+2)(s+3)+Ds(s+2)(s+1)}{s(s+2)(s+1)(s+3)}$$

$$1'2.(1'6s+2'3)=A(s+2)(s+1)(s+3)+Bs(s+1)(s+3)+Cs(s+2)(s+3)+Ds(s+2)(s+1)$$

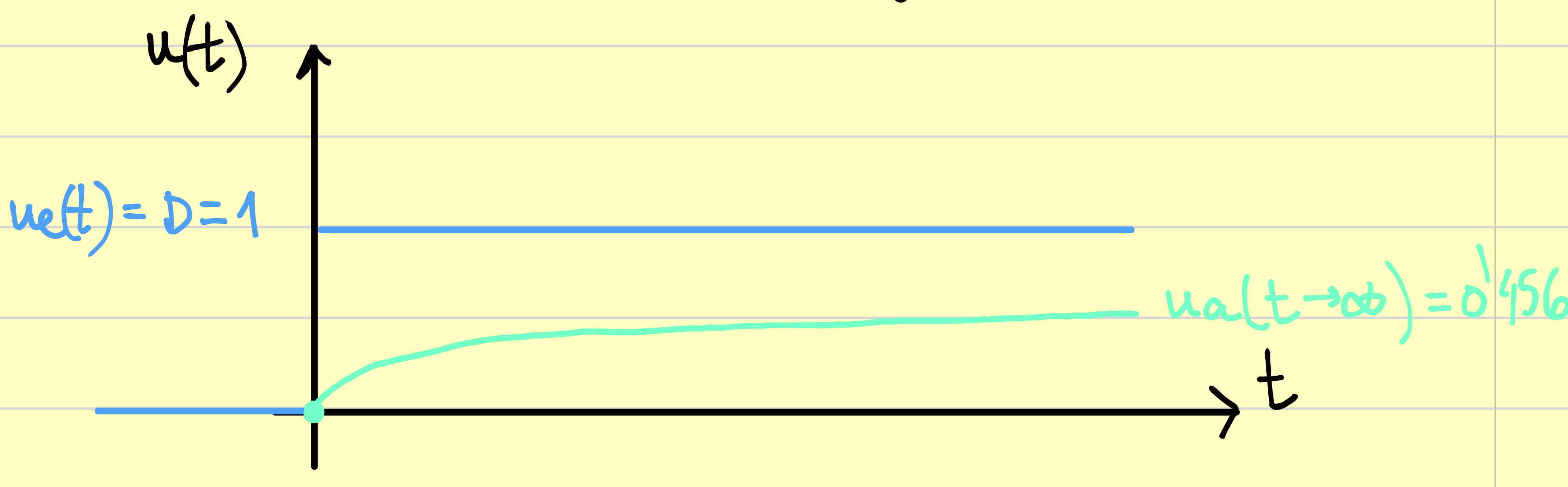
- $s^*=0\rightarrow 2'3.1'2=A.2.1.3\longrightarrow A=0'38.1'2=0'456$
- $s^*=-2\rightarrow 1'2.1'6.(-2)+2'3=B(-2)(-2+1)(-2+3)\rightarrow B=-0'45.1'2=-0'54$
- $s^*=-1\rightarrow 1'6.(-1)+2'3=C(-1)(-1+2)(-1+3)\rightarrow C=-0'35.1'2=-0'42$
- $s^*=-3\rightarrow 1'6(-3)+2'3=D(-3)(-3+2)(-3+1)\rightarrow D=0'42=0'504$

$$u_a(s)=\frac{0'456}{s}-\frac{0'54}{s+2}-\frac{0'42}{s+1}+\frac{0'504}{s+3}$$

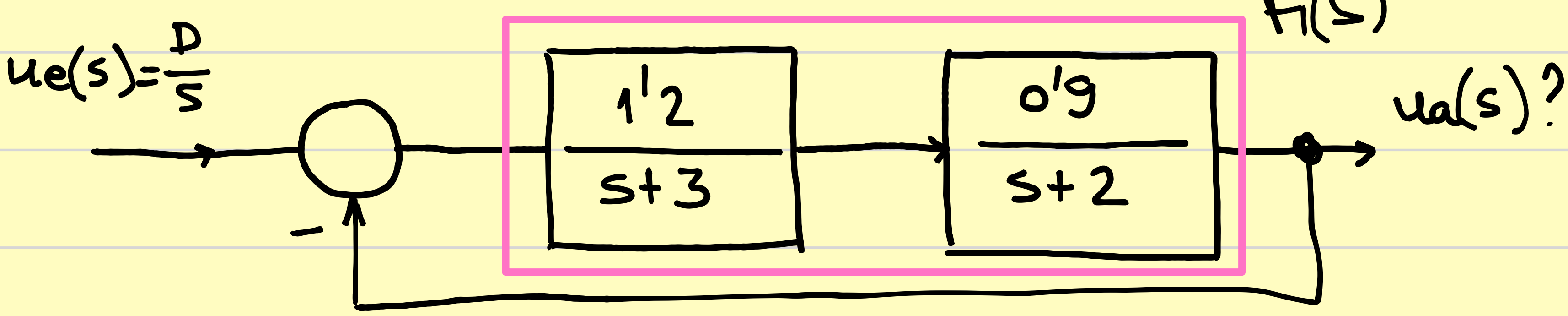
INVERSE LAPLACE

$$\boxed{\mathcal{L}^{-1}(u_a(s))=u_a(t)=0'456-0'54\,e^{-2t}-0'42\,e^{-t}+0'504\,e^{-3t}}$$

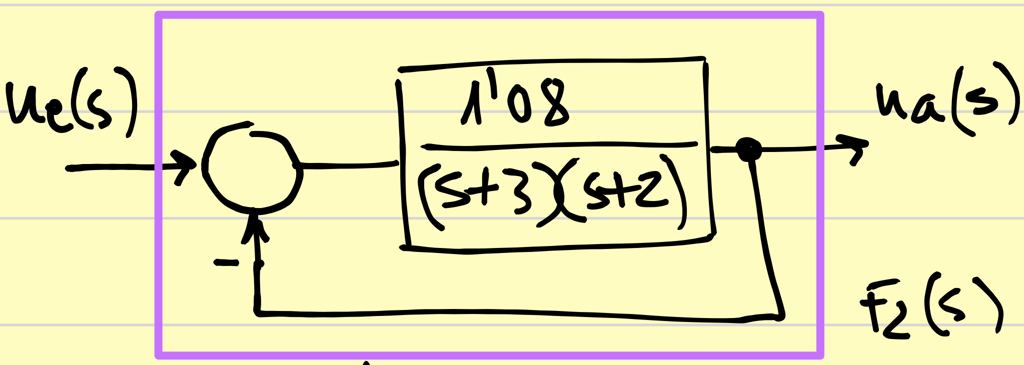
$(*)\quad F(s)=\dfrac{K}{s+a}\longrightarrow F(t)=\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{K}{s+a}\right)=K.e^{-at}$



3. Gleiche Problemstellung als **2.**



$$F_1(s) = \frac{1'2}{s+3} \cdot \frac{0'9}{s+2} = \frac{1'08}{(s+3)(s+2)}$$



$$F_2(s) = \frac{\frac{1'08}{(s+3)(s+2)}}{1+\frac{1'08}{(s+3)(s+2)}} = \frac{1'08}{(s+3)(s+2)+1'08} = \frac{1'08}{s^2+5s+7'08}$$

$$ax^2+bx+c=0 \rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$s^2+5s+7'08=0 \longrightarrow s = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2-4.7'08}}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{-3'32}}{2} =$$

$$\sqrt{-1} = i$$

$$= \frac{-5 \pm \sqrt{3'32}\, i}{2} = \frac{-5 \pm 1'82\, i}{2}$$

$$(s+3)(s+2)+1'08 =$$

$$= s^2+3s+2s+3.2+1'08 =$$

$$= s^2+5s+7'08$$

$$= \begin{cases} -2'5+0'91\, i = s_1^* \\ -2'5-0'91\, i = s_2^* \end{cases}$$

$$u_e(s)=\frac{D}{s} \longrightarrow \boxed{\frac{1'08}{\left(s-(-2'5+0'91i)\right)\left(s-(-2'5-0'91i)\right)}} \longrightarrow u_a(s)$$

$$u_e(s)=\frac{D}{s} \longrightarrow \boxed{\frac{1'08}{(s+2'5-0'91i)(s+2'5+0'91i)}} \longrightarrow u_a(s)$$

$D=1$

$$u_a(s)=\frac{1}{s}\cdot\frac{1'08}{(s+2'5-0'91i)(s+2'5+0'91i)}=$$

$$=\frac{A}{s}+\frac{B}{(s+2'5-0'91i)}+\frac{C}{(s+2'5+0'91i)}$$

$$1'08=A(s+2'5-0'91i)(s+2'5+0'91i)+$$
$$+Bs(s+2'5+0'91i)+Cs(s+2'5-0'91i)$$

- $s^*=0 \longrightarrow 1'08=A(2'5-0'91i)(2'5+0'91i)=$

$$=A\left[2'5\cdot 2'5-0'91\cdot 0'91\cdot i^2\right]=$$

$\sqrt{-1}=i$

$-1=i^2$

$$=A\left[2'5^2+0'91^2\right] \longrightarrow A=0'1526$$

- $s^*=-2'5+0'91i \longrightarrow 1'08=B\left[-2'5+0'91i\right]\left[(-2'5+0'91i)+(2'5+0'91i)\right]$

$$=B\left[-2'5+0'91i\right]\cdot 1'82i$$

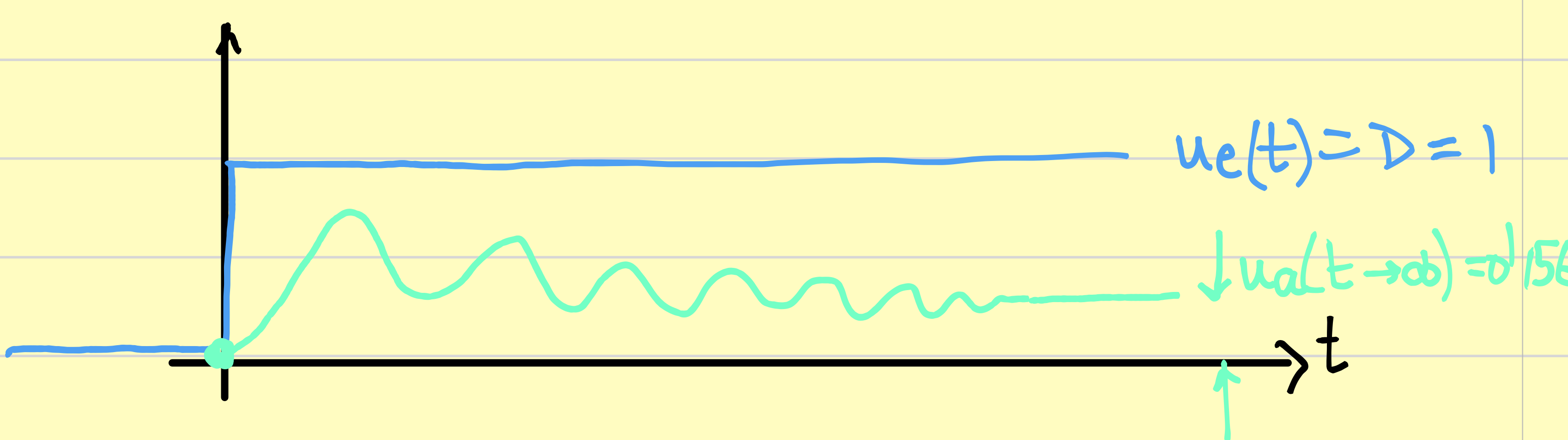
$$B=\frac{1'08}{1'82i\cdot\left[-2'5+0'91i\right]}=\frac{1'08}{-1'656-4'55i}\cdot\frac{-1'656+4'55i}{-1'656+4'55i}$$

$$= \frac{-1{,}788 + 4{,}914\, i}{1{,}656^2 + 4{,}55^2} = -0{,}076 + 0{,}209\, i$$

- $s^* = -2{,}5 - 0{,}91\, i \longrightarrow \dots \longrightarrow C = -0{,}076 - 0{,}209\, i$

$$u_a(s) = \frac{0{,}1526}{s} + \frac{(-0{,}076 + 0{,}209\, i)}{s + 2{,}5 - 0{,}91\, i} + \frac{(-0{,}076 - 0{,}209\, i)}{s + 2{,}5 + 0{,}91\, i}$$

$$\mathcal{L}^{-1}(u_a(s)) = u_a(t) = 0{,}1526 + (-0{,}076 + 0{,}209 i)\, e^{-(2{,}5 - 0{,}91 i)t} + (-0{,}076 - 0{,}209 i)\, e^{-(2{,}5 + 0{,}91 i)t}$$



$$e^{(a+bi)t} = \cos at + i \cdot \sin bt$$

EULER

KANBAN · STEUERUNG (PULL · STEUERUNG)

Ein Kanban(karte) System ist ein Produktionssteuerungs-prozeß, der darauf abzielt, den Materialfluß effizient

zu steuern. Kanban basiert auf die Idee des „PULL-PRINZIPS": Produktion und Nachschub erfolgen nur bei Bedarf. In einem Kanban-System wird eine Signalsteuerung eingesetzt die anzeigt, wann und in welcher Menge Nachschub erforderlich ist.
Wenn der Bestand eines Artikels ein Minimum erreicht, löst dies ein Signal zur Nachproduktion oder Nachschub aus, um das Niveau wieder aufzufüllen.

Mathematische Modellierung vom Kanban:

Schritt 1. Variablen definieren.

1. $I(t)$: Bestandshöhe zum Zeitpunkt t.
2. $D(t)$: Nachfragerate zum Zeitpunkt t.
3. $P(t)$: Produktionsrate zum Zeitpunkt t. (abhängig vom Bestandsniveau).

Schritt 2. Die Differenzialgleichung:

Die Änderungsrate des Bestands $\frac{dI(t)}{dt}$ wird durch die Differenz zw. Produktion und Nachfrage bestimmt:

$$\frac{dI(t)}{dt} = P(t) - D(t)$$

Wir können $P(t)$ als Funktion der Bestandsabweichung definieren.

$$P(t) = k\left[I_{ziel} - I(t)\right]$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = k\left[I_{ziel} - I(t)\right] - D(t) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \boxed{\frac{dI(t)}{dt} + kI(t) = k \cdot I_{ziel} - D(t)}$$ Kanban System

Interpretation:

1. Stabilisierung. Der Term $k[I_{ziel} - I(t)]$ stellt ein Korrekturmechanismus dar, um $I(t)$ auf Zielniveau zu bringen.
2. Reaktion auf Nachfrage. Änderungen in $D(t)$ passen den Bestand dynamisch an, und ermöglichen es, dass $I(t)$ auf Schwankungen reagiert.
3. Steuerkostante k. Der Parameter k bestimmt die Reaktionsfähigkeit des Systems. Ein größeres k bedeutet schnellere Korrekturen in Richtung I_{ziel}.

$$\frac{dI(t)}{dt} + kI(t) = kI_{ziel} - D(t)$$

$$D(t) \equiv \text{Konstant} = D$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{dI(t)}{dt} + kI(t)\right] = \mathcal{L}\left(kI_{ziel} - D\right)$$

$$s \cdot I(s) + k\,I(s) = k\,I_{ziel} - D \longrightarrow$$

$$\rightarrow \quad I(s)\left[s+k\right] = k\,I_{ziel} - D \longrightarrow$$

$$\rightarrow \quad \boxed{I(s) = \frac{k\,I_{ziel} - D}{s+k}}$$

$$\mathcal{L}^{-1}(I(s)) = I(t) = (k\,I_{ziel} - D)\,e^{-kt} + I(t=0)$$