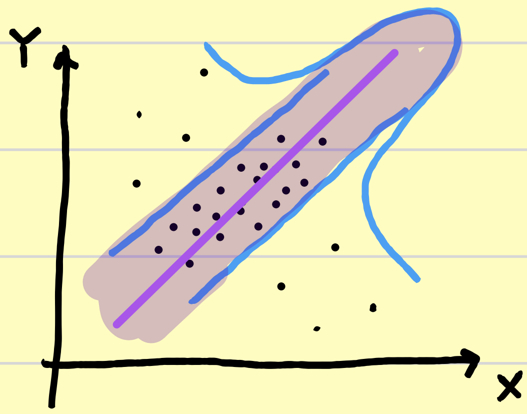
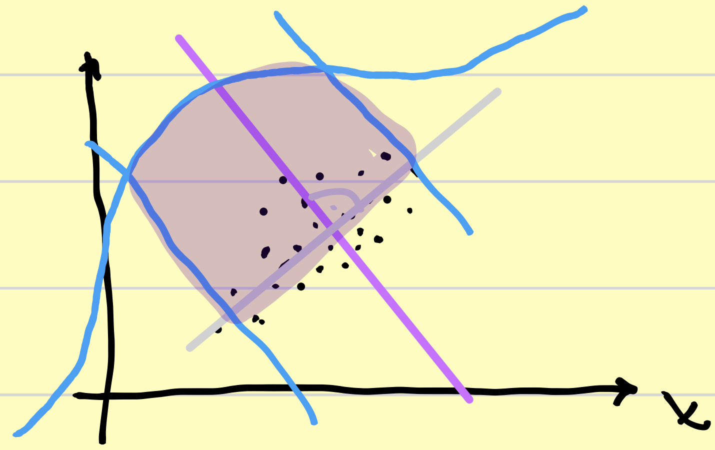


besser als



1. RICHTUNG
|||
1. HAUPTKOMPONENTE

Beschreibt die (Variabilität) der Daten am besten.

2. RICHTUNG
|||
2. HAUPTKOMPONENTE

Ist senkrecht zur ersten Hauptkomponente.
Beschreibt weniger Variabilität der Daten als die 1. Hauptkomponente

2

Die Eigenvektoren der Kovarianzmatrix sind die Hauptkomponenten der Daten.

1 ✓

HAUPTKOMPONENTENANALYSE

Eigenvektoren & Eigenwerte einer Matrix A

$\boxed{A\vec{v} = \lambda \vec{v}}$ $\vec{v}$: Eigenvektoren λ: Eigenwerte

$\det(A - \lambda I) = 0 \rightarrow \lambda$ werden ermittelt $\rightarrow \vec{v}$ werden ermittelt

Identitätsmatrix

Beispiel: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$. Bitte ermitteln Sie die Eigenwerte $\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}$ und die Eigenvektoren $\begin{bmatrix} \vec{v_1} \\ \vec{v_2} \end{bmatrix}$

$$A\vec{v} = \lambda \vec{v} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = \det\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) =$$

$$= \det\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right) =$$

$$= \det\left(\begin{bmatrix} 0-\lambda & 1-0 \\ -2-0 & -3-\lambda \end{bmatrix} \right) =$$

$$= \det\left(\begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -2 & -3-\lambda \end{bmatrix} \right) = 0$$

(*)

$$\boxed{\det\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = a \cdot d - c \cdot b}$$

(*)

$$-\lambda(-3-\lambda) - 1 \cdot (-2) = 0$$

$$3\lambda + \lambda^2 + 2 = 0 \rightarrow \lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$$

(**)

$$\lambda = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4.2.1}}{2} = \frac{-3 \pm 1}{2} : \begin{matrix} \nearrow \lambda_1 = -1 \\ \searrow \lambda_2 = -2 \end{matrix}$$

EIGENWERTE ✓

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0 \rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

(**)

$$\lambda_1 = -1 \rightarrow A\vec{v_1} = \lambda \vec{v_1} \rightarrow (A - \lambda_1 I)\vec{v_1} = \vec{0}$$

$$\rightarrow \left[\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} - (-1)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right]\begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow$$

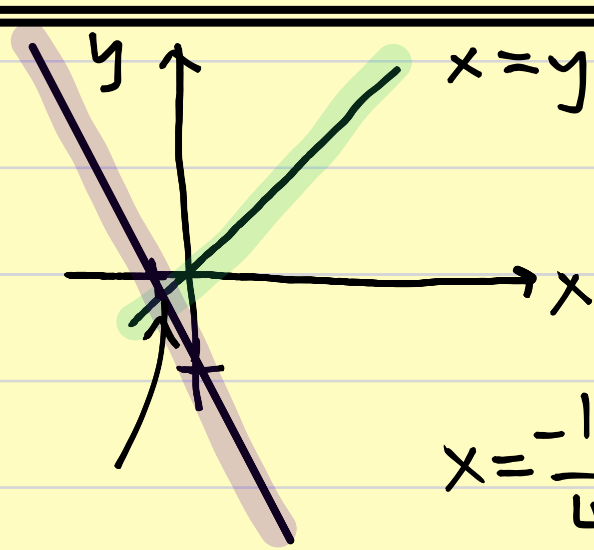
$$\rightarrow \left[\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right]\begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 0+1 & 1+0 \\ -2+0 & -3+1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \left.\begin{aligned} v_{11} + v_{12} &= 0 \\ -2v_{11} - 2v_{12} &= 0 \end{aligned}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow v_{11} = 1 \rightarrow v_{12} = -v_{11} = -1 \rightarrow \vec{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$ 1. Eigenvektor

$3x + y = -1$

$x - y = 0$



$$\left.\begin{aligned} & \\ x &= y \end{aligned}\right\} \; 4x = -1$$

$$x = \frac{-1}{4} \; ; \; y = \frac{-1}{4}$$

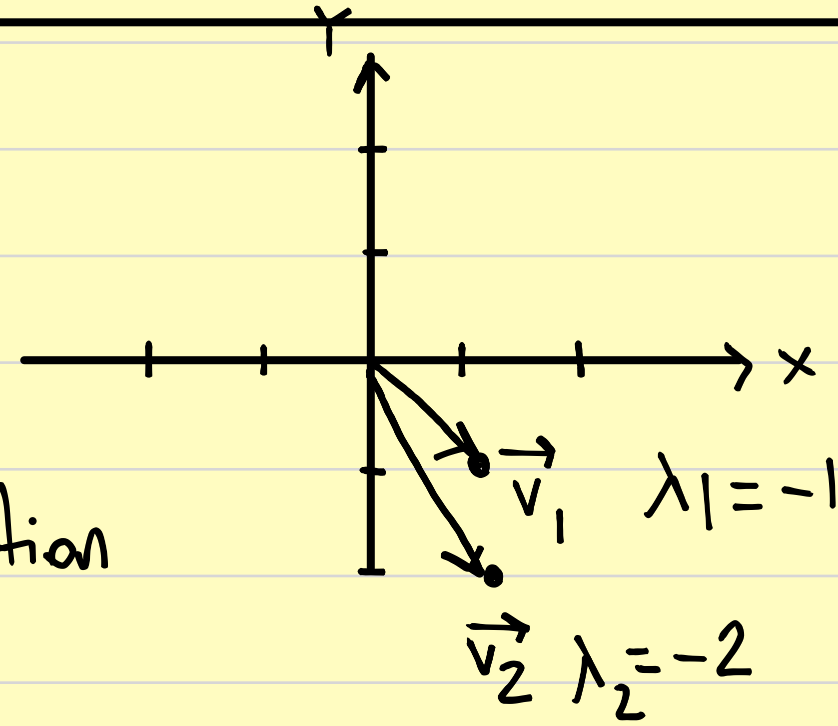
$$\lambda_2 = -2 \rightarrow A\vec{v_2} = \lambda_2 \vec{v_2} \rightarrow (A - \lambda_2 I)\vec{v_2} = 0$$

$$\rightarrow \left[\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}\right]\begin{bmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left[\begin{bmatrix} 0-\lambda_2 & 1 \\ -2 & -3-\lambda_2 \end{bmatrix}\right]\begin{bmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\lambda = -2}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \left. \begin{array}{l} 2v_{21} + v_{22} = 0 \\ -2v_{21} - v_{22} = 0 \end{array} \right\}$$

$$\rightarrow v_{21} = 1 \rightarrow v_{22} = -2v_{21} = -2 \rightarrow \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \text{2. EV}$$



Graphische Interpretation

Übung. Gegeben ist ein Kennzahlensystem mit 2 Kennzahlen: DURCHLAUFZEIT (X) und Output (Y).

a) Bitte ermitteln Sie die Eigenvektoren & Eigenwerte der Kovarianzmatrix.

b) Bitte interpretieren Sie die Ergebnisse aus einer Managementperspektive.

	DLZ(X)	Output (Y)
KW1	17	200
KW2	14	250
KW3	12	270
KW4	13	240

KW5	9	310
KW6	7	330

Roadmap:

PCA

Principal Component Analysis

$\equiv$

Hauptkomponentenanalyse

1. Normierung der Daten $x_i^* = \frac{x_i - \bar{x}}{\sigma_x}$

2. Kovarianzmatrix der Normierten Daten

3. Eigenwerte & Eigenvektoren der Kovarianzmatrix der Normierten Daten

4. Management Interpretation.

1. $\bar{x} = \frac{17+14+12+13+9+7}{6} =$ ✓

$\sigma_x = \sqrt{\frac{(17-\bar{x})^2+(14-\bar{x})^2+(12-\bar{x})^2+(13-\bar{x})^2+(9-\bar{x})^2+(7-\bar{x})^2}{6}} =$ ✓

$\bar{y} = \frac{200+250+270+240+310+330}{6} =$ ✓

$\sigma_y = \sqrt{\frac{(200-\bar{y})^2+(250-\bar{y})^2+(270-\bar{y})^2+(240-\bar{y})^2+(310-\bar{y})^2+(330-\bar{y})^2}{6}}$ ✓

	$DLZ^* = X^*$	$OUTPUT^* = Y^*$
KW1	$\frac{17-\bar{x}}{\sigma_x} = x_1^*$	$\frac{200-\bar{y}}{\sigma_y} = y_1^*$
KW2	$\frac{14-\bar{x}}{\sigma_x} = x_2^*$	$\frac{250-\bar{y}}{\sigma_y} = y_2^*$

KW3	$\frac{12-\bar{x}}{\sigma_x} = x_3^*$	$\frac{270-\bar{y}}{\sigma_y} = y_3^*$
KW4	$\frac{13-\bar{x}}{\sigma_x} = x_4^*$	$\frac{240-\bar{y}}{\sigma_y} = y_4^*$
KW5	$\frac{9-\bar{x}}{\sigma_x} = x_5^*$	$\frac{310-\bar{y}}{\sigma_y} = y_5^*$
KW6	$\frac{7-\bar{x}}{\sigma_x} = x_6^*$	$\frac{330-\bar{y}}{\sigma_y} = y_6^*$

2. KOVARIANZMATRIX

$$A = \begin{bmatrix} 1 & c \\ c & 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{x}^* = \bar{y}^* = 0$$

$$c = \mathrm{cov}(x^*, y^*) = \frac{\sum_{i=1}^{6}(x_i^* - \bar{x}^*)(y_i^* - \bar{y}^*)}{6-1} = \frac{\sum_{i=1}^{6} x_i^* y_i^*}{6-1} =$$

$$= \frac{x_1^* y_1^* + x_2^* y_2^* + x_3^* y_3^* + x_4^* y_4^* + x_5^* y_5^* + x_6^* y_6^*}{6-1} = \dots = c$$

3. Eigenwerte & Eigenvektoren der Kovarianzmatrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & c \\ c & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \det(A - \lambda I) = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \det\left[\begin{bmatrix}1 & c\\ c & 1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}\right] = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \det\left[\begin{bmatrix}1-\lambda & c\\ c & 1-\lambda\end{bmatrix}\right] = 0 \rightarrow (1-\lambda)^2 - c^2 = 0$$

$$\lambda^2 - 2\lambda + (1-c^2) = 0 \rightarrow \lambda = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4.1.(1-c^2)}}{2} =$$

$$= 1 \pm \sqrt{1-(1-c^2)} = 1 \pm c = \begin{cases}\lambda_1 = 1+c\\ \lambda_2 = 1-c\end{cases}$$

Eigenwerte

$$\lambda_1 = 1+c \rightarrow (A - \lambda_1 I)\vec{v}_1 = \vec{0} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{bmatrix}1 & c\\ c & 1\end{bmatrix} - (1+c)\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}v_{11}\\ v_{12}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{bmatrix}1-(1+c) & c\\ c & 1-(1+c)\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}v_{11}\\ v_{12}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix}-c & c\\ c & -c\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_{11}\\ v_{12}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix} \rightarrow \left.\begin{matrix}c(-v_{11}+v_{12}) = 0\\ c(v_{11}-v_{12}) = 0\end{matrix}\right\}$$

$$\rightarrow v_{11} = v_{12} = 1 \rightarrow \vec{v}_1 = \begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$$

1\. Eigenvec.

$\equiv$

1\. Hauptkom

$\equiv$

1\. P.C.

(principal component)

$$\boxed{\det\begin{bmatrix}a & c\\ b & d\end{bmatrix} = a.d - c.b}$$

$$\lambda_2 = 1-c \rightarrow (A-\lambda_2 I)\vec{v_2} = \vec{0} \rightarrow \left(\begin{bmatrix} 1 & c \\ c & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1-c & 0 \\ 0 & 1-c \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} c & c \\ c & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow c(v_{21}+v_{22}) = 0 \rightarrow v_{21} = -v_{22} = 1$$

$$\vec{v_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad ✓$$

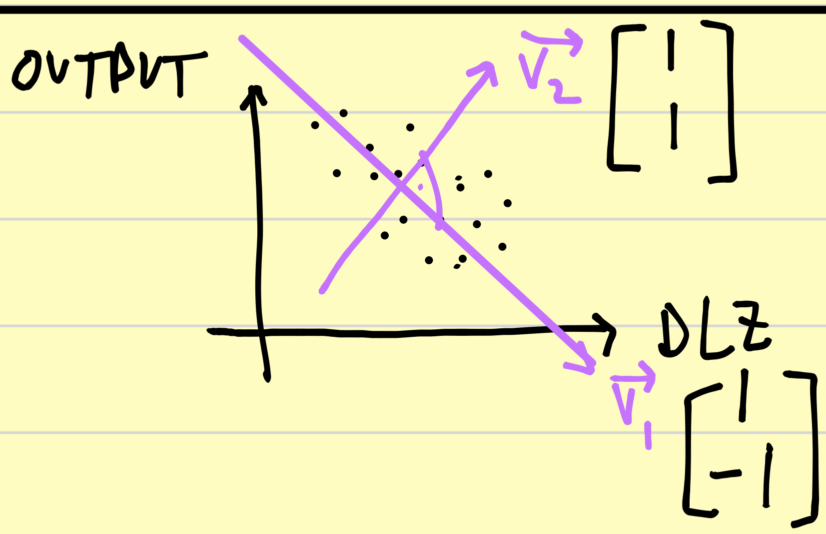
2. Eigenvektor
$\shortparallel$
2. PC

4. Management Interpretation:

$\vec{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ erklärt $\lambda_1 = 1+c$ % der Variabilität der Daten

$\vec{v_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ erklärt $\lambda_2 = 1-c$ % der Variabilität der Daten

Angenommen $c<0$, bedeutet es dass $\vec{v_2}$ erklärt mehr Variabilität als $\vec{v_1}$.



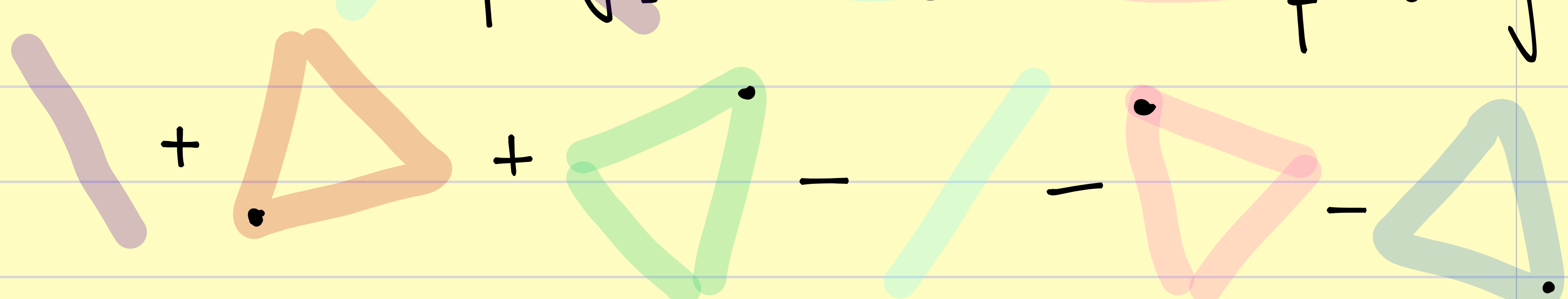
Übung. Gegeben wird ein Management System mit 3 Kennzahlen: DLZ (Tage) = X; Output (Stück/Zeit) = Y; Kosten (€/Stück) = Z.

	X	Y	Z
KW1	17	200	120
KW2	18	180	140
KW3	16	220	100
KW4	19	190	110
KW5	14	230	90
KW6	13	245	65

Bitte berechnen Sie die Hauptkomponenten vom MgmtSystem und geben Sie eine Mgmt Interpretation.

Hinweise:

① $$\det\begin{bmatrix} a & d & h \\ b & e & i \\ c & f & j \end{bmatrix} = a\cdot e\cdot j + d\cdot i\cdot c + b\cdot f\cdot h - c\cdot e\cdot h - a\cdot i\cdot f - b\cdot d\cdot j$$



② Wurzel einer kubischen Gleichung.

$$\left.\begin{aligned} ax^3+bx^2+cx+d&=0 \\ x&=y-\frac{b}{3a} \end{aligned}\right\} \quad y^3+py+q=0$$

$$p=\frac{3ac-b^2}{3a^2} \quad ; \quad q=\frac{2b^3-9abc+27a^2d}{27a^3}$$

die Würzel erfüllen: (CARDANO)

$$y^*=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

$$y_1^* \; ; \; y_2^* \; ; \; y_3^* \longrightarrow x_1^*=y_1^*-\frac{b}{3a}$$

$$x_2^*=y_2^*-\frac{b}{3a}$$

$$x_3^*=y_3^*-\frac{b}{3a}$$

Beispiel:

$$x^3-6x^2+11x-6=0$$

$$p=\frac{3\times1\times11-(-6)^2}{3\times1^2}=-1 \quad ; \quad q=\frac{2(-6)^3-9\times1\times(-6)\times11+27\times(-6)}{27\times1^3}$$

$$=0$$

$$q=0 \longrightarrow y=\sqrt[3]{0} \longrightarrow y_1^*=0 \longrightarrow y^2-1=0 \longrightarrow y_{2,3}=\pm1$$

$$x=y-\frac{-6}{3}=y+2 \longrightarrow x_1^*=2$$

$$x_2^*=1$$

$$x_3^*=3$$