20251125_Mathematik1_B

Aufgabe 1: Arithmetische Folge & Reihe – Wartungsvertrag für eine ERP-Software

Ein Unternehmen schließt einen Wartungsvertrag für ein ERP-System ab.
Die jährliche Wartungsgebühr steigt jedes Jahr um einen festen Betrag an.

Im **1. Jahr** beträgt die Gebühr $9\,000\,€$.
Jedes weitere Jahr erhöht sich die Gebühr um $800\,€$.

Bezeichne mit a_n die Wartungsgebühr im n-ten Jahr.

1. Stelle die allgemeine Formel für a_n auf.
2. Berechne die Wartungsgebühr im 7. Jahr.
3. Der Vertrag läuft 7 Jahre. Berechne die **Gesamtsumme** aller Wartungsgebühren über diese 7 Jahre.
4. Ab welchem Jahr übersteigt die jährliche Wartungsgebühr erstmals $13\,000\,€$?

Aufgabe 2: Geometrische Folge & Reihe – Datenvolumen in der Cloud

Ein Start-up betreibt eine Cloud-Plattform. Im ersten Monat fallen

$$V_1 = 100 \text{ GB}$$

Log-Daten an.

Aufgrund steigender Nutzerzahlen wächst das monatliche Datenvolumen um **10 % pro Monat.**

Sei V_n das Datenvolumen im n-ten Monat.

1. Stelle die allgemeine Formel für V_n auf.
2. Berechne das Datenvolumen im 12. Monat.
3. Berechne die **Summe** der Datenmengen von Monat 1 bis 12 (angenommen, das Volumen ist jeweils am Monatsende gemessen und wird exakt so gespeichert).
4. In welchem Monat überschreitet das monatliche Datenvolumen erstmals 300 GB?

Aufgabe 3: Lineare vs. geometrisch-degressive Abschreibung – Servercluster

Ein Unternehmen kauft einen neuen Servercluster für

$$AK = 60\,000\,€$$

Die betriebsgewöhnliche Nutzungsdauer beträgt 4 Jahre. Restwert am Ende wird der Einfachheit halber mit 0 € angenommen.

1. Berechne die jährliche **lineare Abschreibung** und die Buchwerte am Ende jedes Jahres.
2. Alternativ wird eine **geometrisch-degressive Abschreibung** mit Abschreibungssatz $p = 40\,\%$ gewählt.
   Berechne die Buchwerte und Abschreibungsbeträge für die Jahre 1 bis 4.
3. Vergleiche die Abschreibungsbeträge im 1. und im 4. Jahr zwischen linearer und degressiver Abschreibung.

Aufgabe 4: Geometrisch-degressive Abschreibung als geometrische Folge

Ein Unternehmen kauft eine Unternehmenssoftware-Lizenz für

$$AK = 90\,000\,€$$

Die Software wird geometrisch-degressiv mit **25 % pro Jahr** abgeschrieben (Restwert wird nicht vorgegeben).

Sei B_n der Buchwert am Ende des n-ten Jahres.

1. Stelle die Rekursionsformel für B_n auf (in Abhängigkeit von B_{n-1}).
2. Zeige, dass (B_n) eine **geometrische Folge** ist, und gib eine explizite Formel für B_n an.
3. Berechne den Buchwert nach 5 Jahren.
4. Bestimme die Summe der Abschreibungsbeträge der ersten 5 Jahre und interpretiere das Ergebni

Aufgabe 5: Zinsrechnung / ZZR – IT-Investitionsrücklage

Ein Unternehmen möchte eine Rücklage für eine zukünftige **ERP-Migration** aufbauen.
Dazu zahlt es am **Ende jedes Monats** einen festen Betrag von

$$R = 2\,000\,€$$

auf ein Konto ein. Der Zinssatz beträgt

$$i_{\text{jährlich}} = 3\,\% = 0{,}03$$

Zinsen werden monatlich gutgeschrieben.
Damit beträgt der monatliche Zinssatz: $i = \frac{0{,}03}{12} = 0{,}0025$

~~i = \frac{0{,}03}{12} = 0{,}0025 \quad (\text{= 0,25 % pro Monat})~~

Das Ziel ist ein Kapital von:

$$K_{\text{Ziel}} = 150\,000\,€$$

Aufgabe:
Nach wie vielen Monaten ist das Zielkapital erreicht?
(Bestimme also die Anzahl der Zahlungszeiträume n, analog zur Excel-Funktion ZZR.)

1. Arithmetische Folge. Anfangsglied $a_1 = 9000$, Differenz $d = 800$ $\Big\}$ $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d \rightarrow a_n = 9000 + (n-1)800$

$n = 7 \rightarrow a_7 = 9000 + (7-1) \cdot 800 = 13800\,€$

Summe n $= S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \rightarrow S_7 = \frac{7}{2}(9000 + 13800) = 79800\,€$

$a_n > 13000$? $9000 + (n-1) \cdot 800 > 13000 \rightarrow n > 6 \rightarrow n = 7$

2. Geometrische Folge. Anfangsglied $V_1 = 100\,GB$, Quotient $q = 1{,}1$ (Wachstum) $\Big\}$

$\rightarrow \boxed{V_n = V_1 \cdot q^{n-1}} \rightarrow V_n = 100 \cdot 1'1^{n-1}$

$n = 12 \rightarrow V_{12} = 100 \cdot 1'1^{12-1} = 100 \cdot 1'1^{11} \cong 285\,GB$

$$\text{Summe}_n = S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \rightarrow S_{12} = 100 \cdot \frac{1'1^{12} - 1}{1'1 - 1} \cong 2138\,GB$$

$q \neq 1$

$= 2'1\,TB$

$V_n > 300\,GB$? $\quad 100 \cdot 1'1^{n-1} > 300 \rightarrow 1'1^{n-1} > 3 \rightarrow n - 1 > \frac{\ln(3)}{\ln(1'10)}$

$n > 12'5 \rightarrow n = 13 \qquad V_{13} \cong 314\,GB$

3. Gegeben: Anschaffungskosten $AK = 60000$€
Nutzungsdauer $T = 4$ Jahre
degressiver Satz $p = 0'4$
B_k: Buchwert am Ende Jahr „k"

L.A.: $\quad A_{lin} = \frac{AK - RW}{T} = \frac{60000 - 0}{4} = 15000$€

$RW = 0$

		Buchwert	Abschreibung
B_0	Anfang	60000	–
B_1	Ende J1	45000	15000
B_2	Ende J2	30000	15000
B_3	Ende J3	15000	15000
B_4	Ende J4	0	15000

$G.D.: \quad B_K = B_{K-1} \cdot (1-p) = B_K \cdot 0'6$

	Buchwert	Abschreibung
B_0 Anfang	60000	–
B_1 Ende J1	36000	$60000 \cdot 0'6 = 24000$
B_2 Ende J2	21600	$36000 \cdot 0'6 = 14400$
B_3 Ende J3	12960	$21600 \cdot 0'6 = 8640$
B_4 Ende J4	7776	$12960 \cdot 0'6 = 5184$

Vergleich: 1. und 4. Jahr.

1.J.	L.A.	15000 €	4.J	L.A.	15000 €
	G.D.	24000 €		G.D.	5184 €

Die GD Methode schreibt am Anfang viel, später wenig ab
Die LA Methode schreibt gleichmäßig ab.

4. Gegeben. Anschaffungskosten $AK = 90000$
Abschreibungssatz $p = 25\% = 0'25$

$$B_n = B_{n-1} \cdot (1-p) = B_{n-1} \cdot 0'75 \qquad B_0 = 90000 €$$

Nachweis Geometrische Folge: $B_n = B_0 \cdot q^n \rightarrow B_n = 90000 \cdot 0'75^n$

Buchwert nach 5 Jahren: $B_5 = 90000 \cdot 0'75^5 \approx 21357 €$

Summe$_n$: $S_n = \sum_{i=1}^{n} A_K = \sum_{i=1}^{n} (B_{K-1} - B_K)$

$$\Delta_5 = (B_0 - \cancel{B_1}) + (\cancel{B_1} - \cancel{B_2}) + (\cancel{B_2} - \cancel{B_3}) + (\cancel{B_3} - \cancel{B_4}) + (\cancel{B_4} - B_5) = B_0 - B_5 =$$

$$= 90000 - 21357 = 68643\ €$$

In den ersten 5 J werden von 90000€ AK etwa 68643 € abgeschrieben.

5. Wir haben eine nachschüssige Rente. Endwert K_n einer Rente

$$K_n = R \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} \quad \left\{ \begin{array}{l} K_n = K_{ziel} = 150000\ € \\ R = 2000\ € \\ i = 0'0025 \end{array} \right\}$$

$$150000 = 2000 \cdot \frac{(1+0'0025)^n - 1}{0'0025} \rightarrow \frac{150000 \cdot 0'0025}{2000} + 1 = (1'0025)^n$$

$$\rightarrow 1'1875 = (1'0025)^n \rightarrow \ln 1'1875 = n \cdot \ln(1'0025) \rightarrow$$

$$\rightarrow n \simeq 68'8 \rightarrow n \simeq 69 \text{ Monate} \rightarrow n \simeq 5'8 \text{ Jahre}$$

Nach etwa 5'8 Jahre monatlicher Einzahlungen von 2000€ ist bei 3% Jahreszins (monat. verzinst) das Ziel von 150000€ erreicht.