

# Statistikübungen für WIN2

## Vertiefte Übungen zur Wahrscheinlichkeitstheorie

Prof. H4  
www.profh4.com

23. April 2025

### 1 Kolmogorov-Axiome und ihre Folgerungen

#### Übungen

1. Zeigen Sie, dass für zwei disjunkte Ereignisse  $A$  und  $B$  gilt:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

2. Beweisen Sie, dass für jedes Ereignis  $A$  gilt:

$$P(A^c) = 1 - P(A).$$

3. Gegeben  $P(A) = 0.3$ ,  $P(B) = 0.4$ ,  $P(A \cap B) = 0.1$ . Bestimmen Sie  $P(A \cup B)$ .

4. Erklären Sie, warum  $P(\Omega) = 1$  für das sichere Ereignis  $\Omega$  gilt.

5. Zeigen Sie, dass  $P(\emptyset) = 0$  gilt.

6. Angenommen  $P(\text{Regen}) = 0.2$ ,  $P(\text{Schnee}) = 0.1$ ,  $P(\text{Regen} \cap \text{Schnee}) = 0.05$ . Bestimmen Sie

$$P(\text{Regen} \cup \text{Schnee}).$$

7. Beweisen Sie allgemein:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

8. Verifizieren Sie für drei Ereignisse  $A, B, C$  das Inklusions-Exklusionsprinzip:

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B) + P(C) \\ &\quad - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) \\ &\quad + P(A \cap B \cap C). \end{aligned}$$

9. Ein fairer Würfel wird geworfen. Bestimmen Sie  $P(\text{keine } 6)$ .
10. Bei zwei unabhängigen Durchführungen mit  $P(A) = 0.7$  bestimmen Sie:

$$P(\text{mindestens einmal } A) = 1 - (1 - 0.7)^2.$$

## 2 Lösungen zu Kolmogorov-Axiomen

Wir geben hier jede Lösung Schritt für Schritt an, damit der Rechenweg klar wird.

1. **Additivität disjunkter Ereignisse:**

**Schritt 1:** Da  $A$  und  $B$  disjunkt sind, gilt  $A \cap B = \emptyset$ .

**Schritt 2:** Nach Axiom 3 (Endliche Additivität) folgt direkt:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

2. **Komplementregel:**

**Schritt 1:** Betrachte  $A \cup A^c = \Omega$  und  $A \cap A^c = \emptyset$ .

**Schritt 2:** Nach Additivität:

$$P(A) + P(A^c) = P(\Omega) = 1.$$

**Schritt 3:** Umstellen liefert:

$$P(A^c) = 1 - P(A).$$

3. **Vereinigung mit Schnitt:**

**Schritt 1:** Allgemeine Formel:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

**Schritt 2:** Einsetzen von 0.3, 0.4 und 0.1 ergibt:

$$P(A \cup B) = 0.3 + 0.4 - 0.1 = 0.6.$$

4. **Sicheres Ereignis:**

Per Definition ist  $\Omega$  das sichere Ereignis;  $P(\Omega) = 1$  (Axiom 2).

5. **Leere Menge:**

Da  $\emptyset$  das unmögliche Ereignis ist und  $P(\emptyset) = 0$  (Axiom 1 und 2), ist die Wahrscheinlichkeit 0.

6. **Regen oder Schnee:**

**Schritt 1:** Verwende den Additionssatz:

$$P(R \cup S) = P(R) + P(S) - P(R \cap S).$$

**Schritt 2:** Einsetzen:  $0.2 + 0.1 - 0.05 = 0.25$ .

Also  $P(\text{Regen} \cup \text{Schnee}) = 0.25$ .

7. **Allgemeine Vereinigung:**

Siehe Formel aus Aufgabe 7 der Übungen, hergeleitet aus Venn-Diagramm.

8. **Inklusions–Exklusions:**

Siehe Formel aus Aufgabe 8 der Übungen, Ergebnis direkt ablesbar.

9. **Keine 6 beim Würfel:**

$$P(\neg 6) = 1 - P(6) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}.$$

10. **Mindestens einmal A:**

$$P(\geq 1 A) = 1 - P(\text{kein } A)^2 = 1 - (1 - 0.7)^2 = 1 - 0.3^2 = 1 - 0.09 = 0.91.$$

### 3 Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Übungen (wie gehabt)

### 4 Lösungen zu bedingten Wahrscheinlichkeiten

Auch hier wird jeder Schritt erklärt:

1. **Sensitivität:**

$$P(\text{Test}^+ | \text{krank}) = 0.95.$$

Keine weiteren Schritte nötig – Definition des Tests.

2. **Urne mit Zurücklegen: Schritt 1:** Nach Zurücklegen bleibt die Urnenzusammensetzung gleich.

**Schritt 2:**  $P(\text{rot}) = \frac{\# \text{rote}}{\text{Gesamt}} = \frac{3}{3+5+2} = \frac{3}{10} = 0.3.$

3. **Bildkarte ist König:**

$$P(\text{König}|\text{Bildkarte}) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}.$$

4. **Informatikstudentin:**

**Schritt 1:**  $P(\text{weiblich} \cap \text{Inf}) = 0.6 \times 0.3 = 0.18.$

**Schritt 2:**  $P(\text{Inf}) = 0.3.$

**Schritt 3:**  $P(\text{weiblich}|\text{Inf}) = \frac{0.18}{0.3} = 0.6.$

5. **Bewegungsalarm:**

**Schritt 1:** Berechne  $P(\text{Alarm})$ :

$$P(\text{Alarm}) = P(\text{Alarm}|\text{Bewegung})P(\text{Bewegung}) + P(\text{Alarm}|\text{keine Bewegung})P(\text{keine Bewegung})$$

Einsetzen:  $0.7 \cdot 0.05 + 0.3 \cdot 0.95 = 0.035 + 0.285 = 0.32.$

**Schritt 2:** Bayes-Anwendung:

$$P(\text{Bewegung}|\text{Alarm}) = \frac{0.7 \cdot 0.05}{0.32} \approx 0.1094.$$

6. **Regen bei dunklen Wolken:**

$$P(\text{Regen}|\text{Wolken}) = \frac{P(\text{Wolken}|\text{Regen})P(\text{Regen})}{P(\text{Wolken})} = \frac{0.3 \cdot 0.3}{0.4} = 0.225.$$

7. **Fragetyp bei richtiger Antwort:**

Gesamtwahrscheinlichkeit richtige Antwort:

$$P(R) = 0.9 \cdot 0.4 + p_m \cdot 0.5 + p_s \cdot 0.1.$$

Gesuchte Bedingung:

$$P(\text{leicht}|R) = \frac{0.9 \cdot 0.4}{P(R)}.$$

8. **Diesel bei Durchfallen:**

Analog Bayes:

$$P(D|F) = \frac{P(F|D)P(D)}{P(F)}, \quad P(F) = 0.05 \cdot 0.7 + 0.03 \cdot 0.3.$$

Nachrechnen ergibt  $\approx 0.7955.$

9. **Sicherheitsverletzung:**

$$P(V|A) = \frac{0.9 \cdot 0.05}{0.9 \cdot 0.05 + 0.02 \cdot 0.95} \approx 0.7031.$$

10. **Zweites Kind Mädchen:**

Unabhängigkeit  $P(\text{Mädchen}) = 0.55$ .

## 5 Lösungen zum Satz von Bayes

Jede Aufgabe mit vollständigem Bayes-Satz:

1. **Krankheitsdiagnose:**

**Schritt 1:** Sensitivität = 0.99, Falsch-Positiv = 0.01, Prävalenz = 0.001.

**Schritt 2:** Gesamtwahrscheinlichkeit positiv:

$$P(+) = 0.99 \cdot 0.001 + 0.01 \cdot 0.999 = 0.01098.$$

**Schritt 3:** Bayes:

$$P(\text{krank}|+) = \frac{0.99 \cdot 0.001}{0.01098} \approx 0.0902.$$

2. **Regen und Unfälle:**

$$P(\text{Unfall}) = 0.8 \cdot 0.3 + 0.2 \cdot 0.7 = 0.38,$$

$$P(\text{Regen}|\text{Unfall}) = \frac{0.8 \cdot 0.3}{0.38} \approx 0.6316.$$

3. **Sicherheitsscanner:**

$$P(+) = 0.95 \cdot 0.001 + 0.01 \cdot 0.999 = 0.01094,$$

$$P(\text{verboten}|+) = \frac{0.95 \cdot 0.001}{0.01094} \approx 0.0868.$$

4. **Spam-Filter:**

$$P(+) = 0.98 \cdot 0.05 + 0.01 \cdot 0.95 = 0.0585,$$

$$P(\text{Spam}|+) = \frac{0.98 \cdot 0.05}{0.0585} \approx 0.8376.$$

5. **Gen-Test:**

$$P(+) = 0.99 \cdot 0.03 + 0.01 \cdot 0.97 = 0.0394,$$

$$P(\text{Träger}|+) = \frac{0.99 \cdot 0.03}{0.0394} \approx 0.7538.$$

6. **Flugverspätung:**

$$P(\text{verspätet}) = 0.2 + 0.3 - 0.06 = 0.44,$$

$$P(\text{technisch}|\text{verspätet}) = \frac{0.2}{0.44} \approx 0.4545.$$

7. **Multiple-Choice:**

Da Zufallsraten,  $P(R) = 0.25$ ,  $P(\text{geraten}|R) = 1$ .

8. **Produktfehler:**

$$P(+) = 0.9 \cdot 0.02 + 0.1 \cdot 0.98 = 0.116,$$

$$P(\text{Fehler}|+) = \frac{0.9 \cdot 0.02}{0.116} \approx 0.1552.$$

9. **Buchklassifikation:**

$$P(+) = 0.85 \cdot 0.1 + 0.05 \cdot 0.9 = 0.13,$$

$$P(\text{selten}|+) = \frac{0.85 \cdot 0.1}{0.13} \approx 0.6538.$$

10. **Seltene Krankheit:**

$$P(+) = 0.99 \cdot 0.01 + 0.05 \cdot 0.99 = 0.0594,$$

$$P(\text{krank}|+) = \frac{0.99 \cdot 0.01}{0.0594} \approx 0.1667.$$