20251107_Mathematik_1B

Determinante & Inverse einer Matrix

(2x2) & (3x3)

2x2

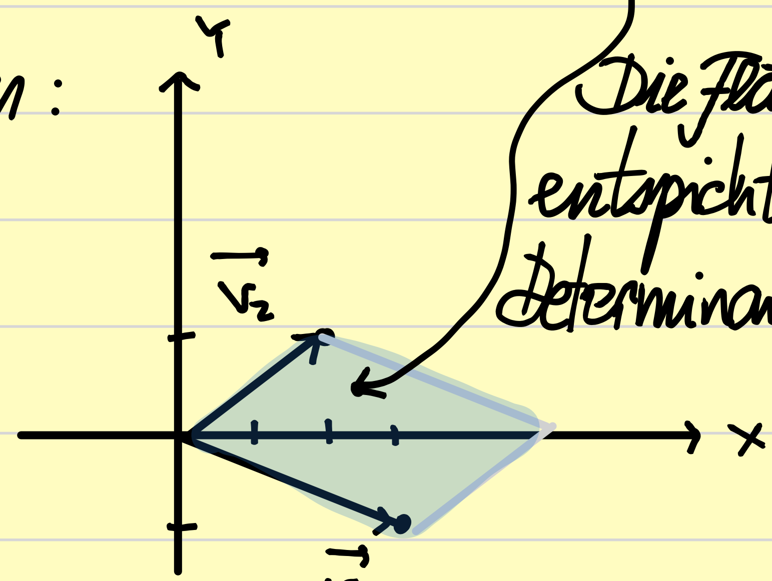
$$A = \begin{array}{cc} + & - \\ \left[\begin{matrix} a & c \\ b & d \end{matrix}\right] \end{array} \qquad \det A = a \cdot d - c \cdot b$$

def. Laplace

Beispiel: $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad \det A = 3 \cdot 1 - 2 \cdot (-1) = 5$

Geometrische Interpretation:

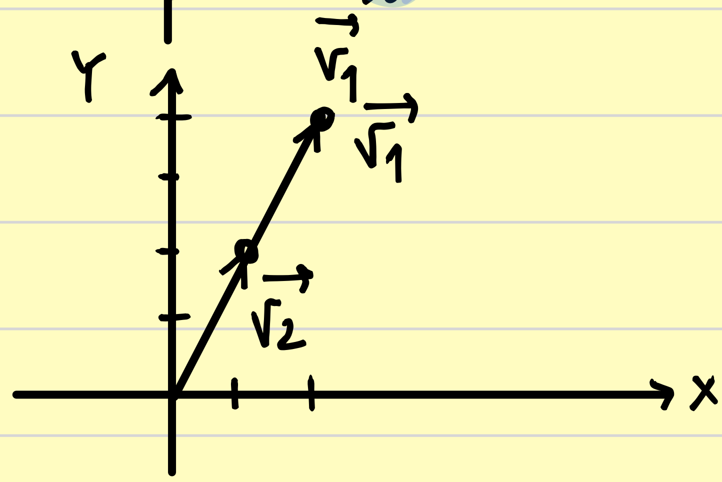
$$A = \begin{array}{cc} \vec{v_1} & \vec{v_2} \\ \left[\begin{matrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{matrix}\right] \end{array}$$



Die Fläche entspicht das Determinant.

Beispiel: $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

$\det A = 2 \cdot 2 - 1 \cdot 4 = 0$



3x3

$$A = \begin{array}{ccc} \vec{v_1} & \vec{v_2} & \vec{v_3} \\ \left[\begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{matrix}\right] \end{array}$$

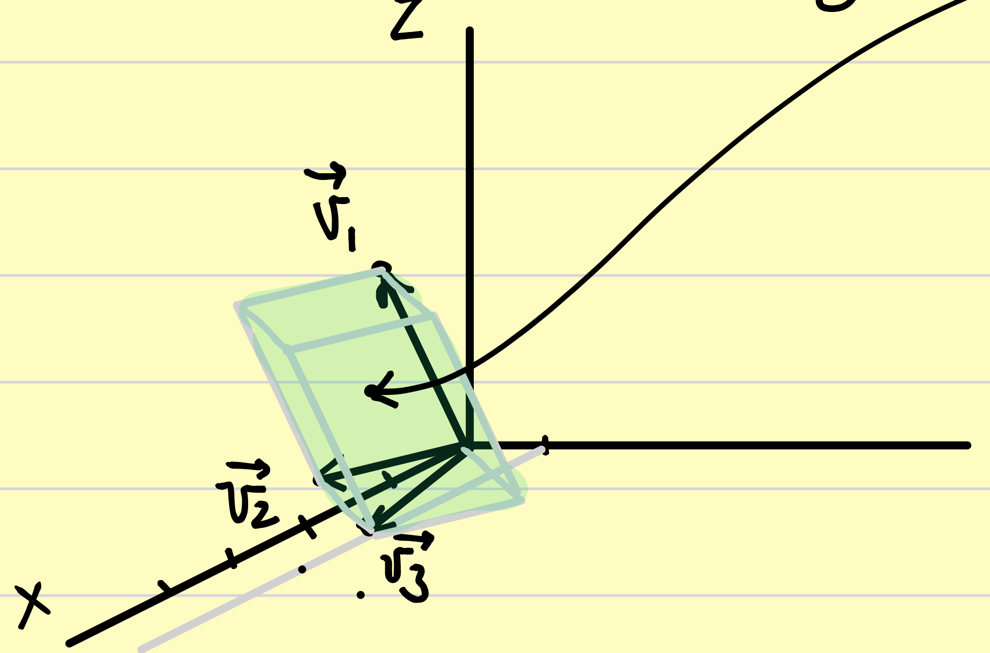
$$\boxed{\det A = a \cdot (e \cdot i - f \cdot h) - b(d \cdot i - f \cdot g) + c \cdot (d \cdot h - e \cdot g)}$$

Beispiel:

$$\begin{array}{c} X \\ Y \\ Z \end{array} A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \det A = 1\left(-1\cdot 1 - 2\cdot 0\right) - 1\cdot\left(0\cdot 1 - 2\cdot 3\right) + 4\left(0\cdot 0 - (-1)\cdot 3\right)$$

$$= 1(-1) - 1\cdot(-6) + 4(0+3) = 17$$

Geometrische Bedeutung.



$|\det|A||$ ist der Volumenfaktor der Abbildung $x \rightarrow Ax$: das von den Spaltenvektor aufgespannte Parallelepiped hat Volumen $|\det(A)|$.

Die Inverse einer Matrix 3×3

1) Existenz & Charakterisierung

Eine quadratische Matrix A ist invertierbar genau dann, wenn $\det(A) \neq 0$.

Die Inverse erfüllt $\boxed{A^{-1}\cdot A = A\cdot A^{-1} = I}$

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det A}\cdot \operatorname{adj}(A)}$$

Adjugierte A.

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{a(ei-fh)-b(di-fg)+c(dh-eg)}\cdot \operatorname{adj}(A)$$

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{bmatrix} \overset{+}{e\cdot i - fh} & \overset{-}{-(bi-ch)} & \overset{+}{bf-ce} \\ \overset{-}{-(di-fg)} & \overset{+}{a\cdot i - cg} & \overset{-}{-(af-cd)} \\ \overset{+}{dh-eg} & \overset{-}{-(ah-bg)} & \overset{+}{a\cdot e - bd} \end{bmatrix}$$

Beispiel: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}$

$$\det A = 1[1\cdot 0 - 4\cdot 6] - 2[0\cdot 0 - 4\cdot 5] + 3[0\cdot 6 - 5\cdot 1] =$$

$$= -24 + 40 - 15 = 1$$

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{bmatrix} -24 & -(-18) & 5 \\ -(-20) & -15 & -4 \\ -5 & -(-4) & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot A^{-1} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{bmatrix}}_{A^{-1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{I}$$