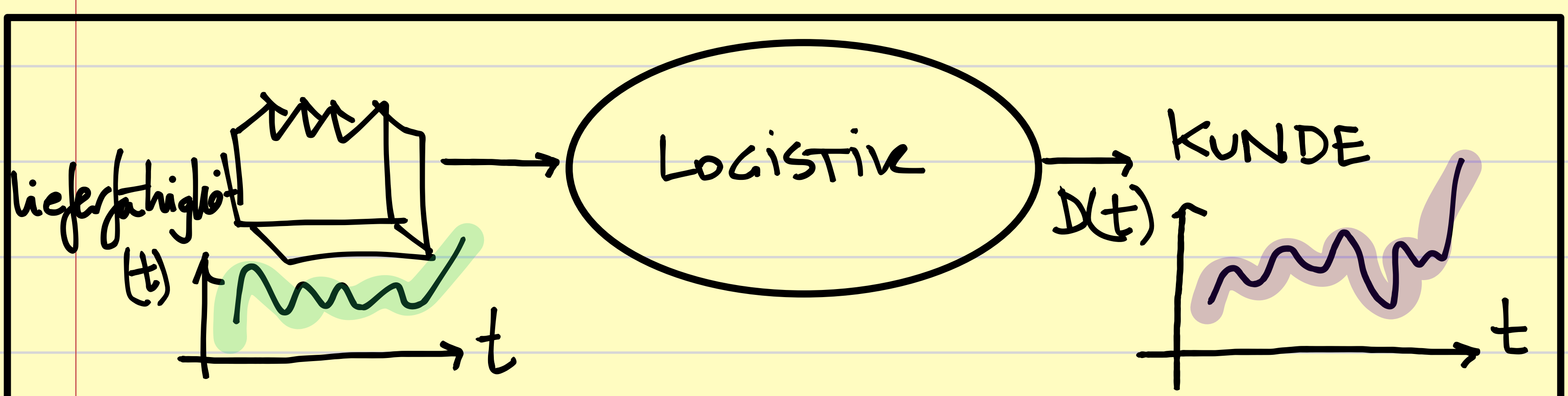
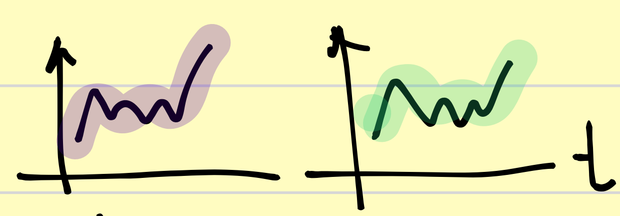
20241030_Mathematik I_LM1

Differentialgleichungen.
laplace.Transformation

Problemstellung. Wir haben in der Logistik die Herausforderung einen veränderungsreichen Kundenbedarf mit einem Produkt zu decken. Dieser Produkt wird von Produktions_standorte aus geliefert. Diese wertschöpfende Prozeße unterliegen eine Variabilität.

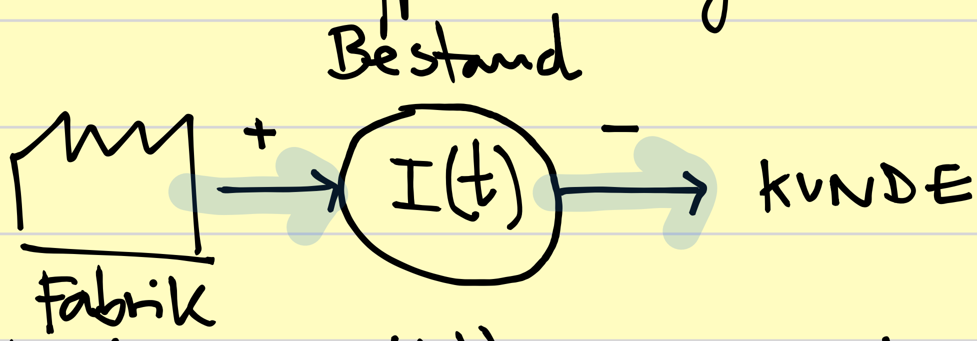


Der logistiker gleicht einen $\Delta(t) = D(t) - L(t)$ aus.



· Ziel der logistik besteht darin $\Delta(t) \simeq 0$.
In anderen Worten: die Differenz zw. Kundenbedarf und was wir liefern sollte so klein wie möglich gehalten werden.

Weil diese logistische Logik abhängig von der Zeit ist, brauchen wir differentialgleichungen.



Lieferung $(L(t))$ Bedarf $(D(t))$

In dem einfachsten Beispiel Bedarf und Lieferung sind konstant.

Was ist die Änderung des Bestandsniveau $I(t)$ mit der Zeit?

$$\frac{dI(t)}{dt} = \dot{I}(t) = L(t) - D(t) = L - D$$

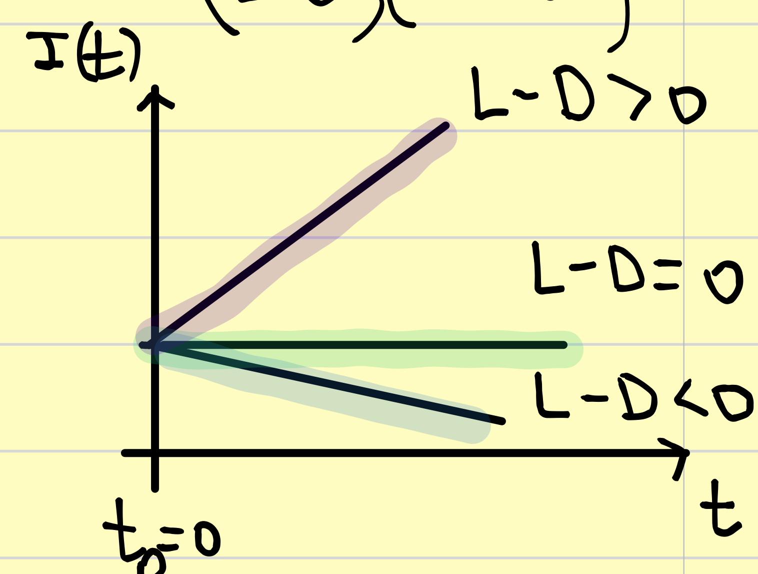
konstant $L(t), D(t)$

$$\dot{I}(t) = L - D$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \dot{I}(t) = \int_{t_0}^{t_1} \frac{dI}{dt} dt = I(t_1) - I(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} (L-D)\, dt = (L-D)(t_1 - t_0)$$

$$I(t_1) = I(t_0) + (L-D)(t_1 - t_0)$$

$$\boxed{I(t) = I(t_0) + (L-D)(t - t_0)}$$



$L-D>0$: ich liefere mehr als der Kunde benötigt, wächst der Bestand!

$L-D=0$: ich liefere genau so, als der Kunde benötigt, konstanter Bestand.

$L - D < 0$: ich liefere weniger als der Kunde benötigt, schrumpft der Bestand.

Laplace-Transformation.

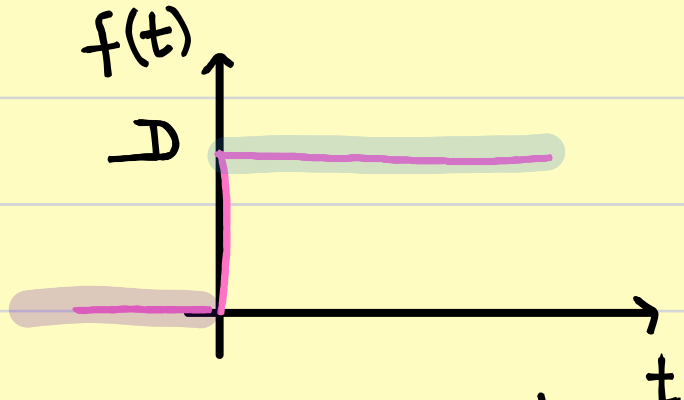
1. Definition. Die Laplace Transformation ist ein mathematisches Werkzeug zur Umwandlung von Differentialgleichungen in algebraischen Gleichungen.

2. Anwendung. Wird angewendet insb. bei zeitabhängigen Systemen wie Nachfrageschwankungen und Produktionsprozeße.

3. Grundformel. Die Laplace-Transformation $\mathcal{L}(f(t)) = F(s)$ eines Zeitbereichs (Zeitabhängige Funktion) $f(t)$ ist definiert als $F(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st} \, dt$, wobei s eine Komplexe Zahl ist.

4. Grundlegende Funktionen.
   Laplace und Inverse Laplace Transformationen.

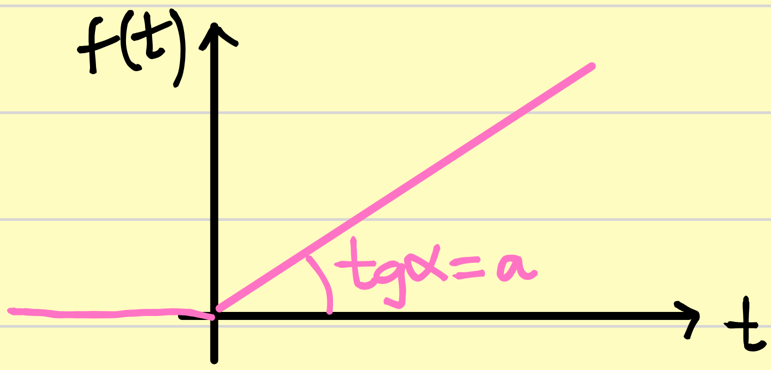
4.1. Konstante Funktion



$$f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \boxed{F(s) = \frac{D}{s}} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} f(t)$$

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ D & t \geq 0 \end{cases}$$

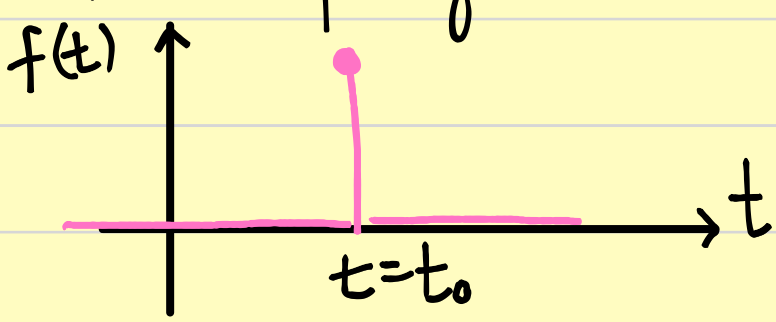
4.2. Lineare Funktion



$$\xrightarrow{\mathcal{L}} \quad \boxed{F(s) = \frac{a}{s^2}} \quad \xleftarrow[\mathcal{L}^{-1}]{}$$

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ at & t \geq 0 \end{cases}$$

4.3. Impulsfunktion (Delta. Dirac)



$$\xrightarrow{\mathcal{L}} \quad \boxed{F(s) = 1} \quad \xleftarrow[\mathcal{L}^{-1}]{}$$

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t \neq t_0 \\ \delta(t) & t = t_0 \end{cases}$$

4.4. Exponentielle Funktion. (Zeitverzögerung)

$$\xrightarrow{\mathcal{L}} \quad \boxed{F(s) = \frac{1}{s+a}} \quad \xleftarrow[\mathcal{L}^{-1}]{}$$

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ e^{-at} & t \geq 0 \end{cases}$$

Logistische Differentialgleichungen mit Laplace.

1. Bestandsmanagement mit einem Konstanten Bedarf und Konstanten Lieferungsrate (gleiches Beispiel als oben).

$$\boxed{\frac{dI}{dt} = L - D}$$

$I(t)$. Bestandsniveau
L. Lieferung $= L(t) = L$
D. Bedarf. $= D(t) = D$

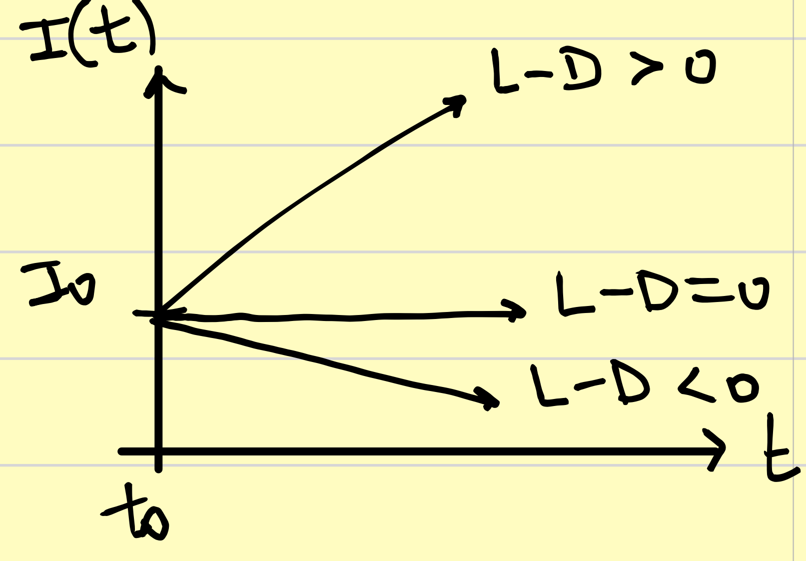
$$\mathcal{L}(\dot{I}(t)) = \mathcal{L}(L-D)$$

LAPLACE & DIFFERENTIALRECHNUNG.

$$\mathcal{L}(f(t)) = F(s)$$
$$\mathcal{L}(\dot{f}(t)) = s \cdot F(s)$$
$$\mathcal{L}(\ddot{f}(t)) = s^2 \cdot F(s)$$
$$\dots$$
$$\mathcal{L}\left(\int f(t)\,dt\right) = \frac{1}{s} F(s)$$

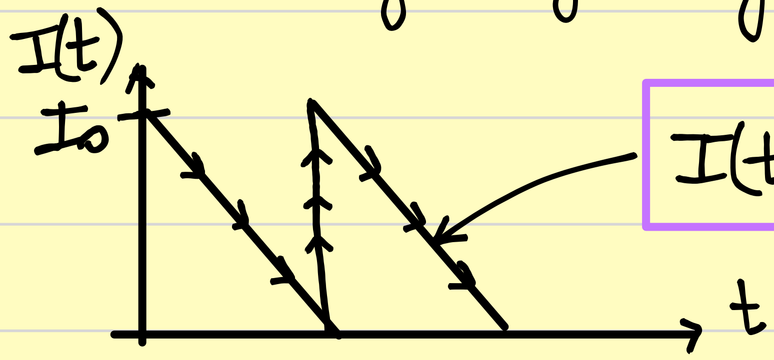
$$\mathcal{L}(\dot{I}(t)) = s \cdot I(s) \underset{4.1.}{=} \frac{L-D}{s} + I_0 \longrightarrow I(s) = \frac{L-D}{s^2} + \frac{I_0}{s}$$

$$\xrightarrow[4.2.]{\mathcal{L}^{-1}} \boxed{I(t) = (L-D) \cdot t + I_0}$$



2. EOQ · Model I

In diesem Kontext Bedarf ist konstant und es findet eine sofortige Lieferung / Produktion des Produkts.



$$\boxed{I(t) = I_0 - Dt}$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = -D$$

$$\mathcal{L}(\dot{I}(t)) = sI(s) - I_0 = -\frac{D}{s} \rightarrow I(s) = \frac{I_0}{s} - \frac{D}{s^2} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \boxed{I(t)} = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{I_0}{s}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{-D}{s^2}\right) = \boxed{I_0 - Dt}$$

3. Bestandsmodelle mit Haltbarkeitsdatum mit konstantem Bedarf.

$$\frac{dI(t)}{dt} = -D - \alpha I$$

$-\alpha I$: Bestandsverlust (deshalb $-$) durch Haltbarkeitsdatumüberschreitung.

$$\mathcal{L}(\dot{I}(t)) = \mathcal{L}(-D) + \mathcal{L}(-\alpha I(t)) \rightarrow$$

$$\rightarrow sI(s) - I_0 = \frac{-D}{s} - \alpha I(s) \rightarrow$$

$$\rightarrow sI(s) + \alpha I(s) = I_0 - \frac{D}{s} \rightarrow$$

$$\rightarrow I(s)(s+\alpha) = I_0 - \frac{D}{s} \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad I(s) = \frac{I_0}{s+\alpha} - \frac{D}{s(s+\alpha)} \quad (\circ)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \dfrac{D}{s(s+\alpha)} = \dfrac{A}{s} + \dfrac{B}{s+\alpha} = \dfrac{A(s+\alpha) + Bs}{s(s+\alpha)} \\[2ex] D = A(s+\alpha) + Bs \\[1ex] \quad s = 0 \longrightarrow D = A(0+\alpha) + B\cdot 0 \longrightarrow A = \dfrac{D}{\alpha} \\[1ex] \quad s = -\alpha \longrightarrow D = A(-\alpha+\alpha) + B(-\alpha) \longrightarrow B = \dfrac{-D}{\alpha} \end{array}}$$

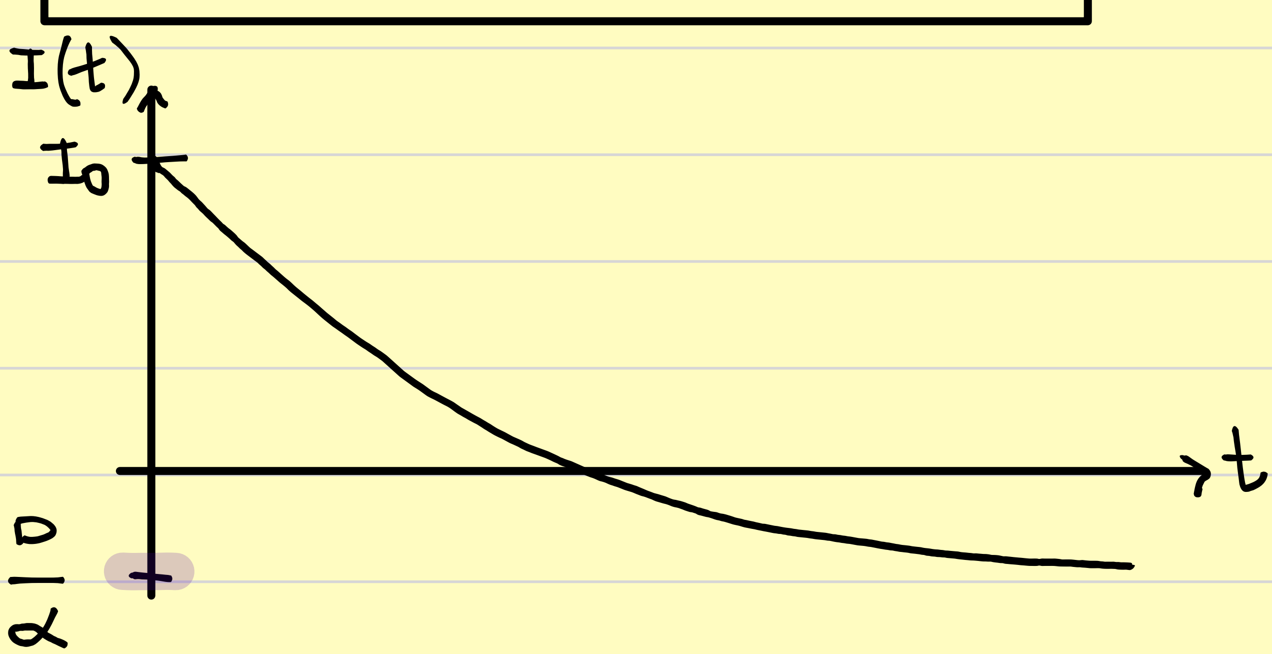
$$\frac{D}{s(s+\alpha)} = \frac{D}{\alpha}\cdot\frac{1}{s} - \frac{D}{\alpha}\cdot\frac{1}{s+\alpha}$$

$$(\circ) \quad I(s) = \frac{I_0}{s+\alpha} - \frac{D}{\alpha}\cdot\frac{1}{s} + \frac{D}{\alpha}\cdot\frac{1}{s+\alpha} \longrightarrow$$

$$I(s) = \frac{I_0}{s+\alpha} + \frac{D}{\alpha}\left(\frac{1}{s+\alpha} - \frac{1}{s}\right)$$

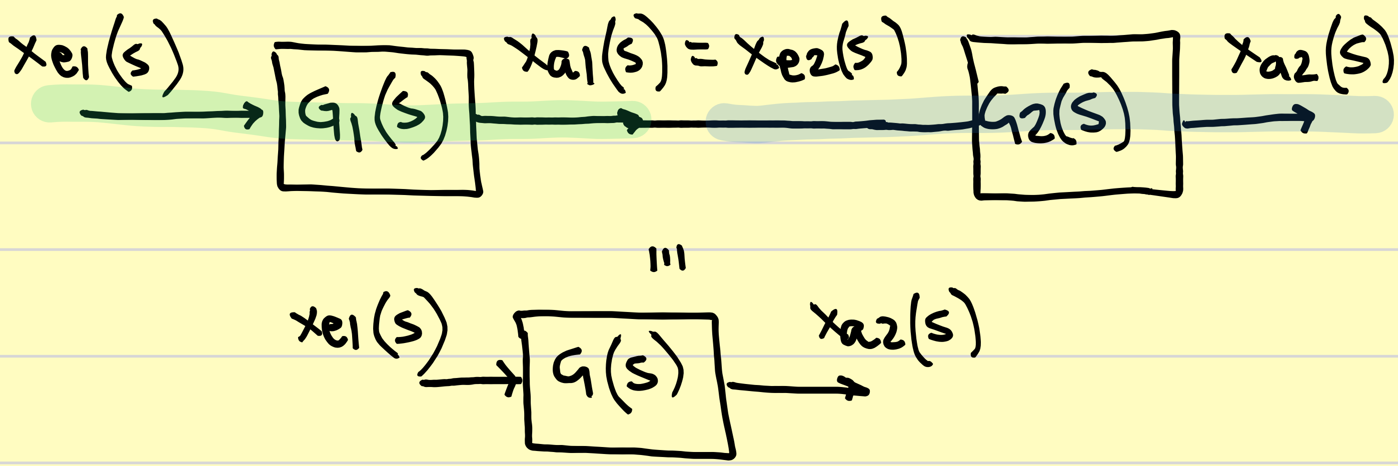
$$\mathcal{L}^{-1}(I(s)) = I_0 e^{-\alpha t} + \frac{D}{\alpha}\left(e^{-\alpha t} - 1\right)$$

$$\boxed{I(t) = I_0 e^{-\alpha t} + \frac{D}{\alpha}\left(e^{-\alpha t} - 1\right)}$$



VERBINDUNGSMÖGLICHKEITEN ZW. PROZEẞEN

1) REIHENSCHALTUNG.



$$G(s) = \frac{x_{a2}(s)}{x_{e1}(s)} \equiv \text{ÜBERTRAGUNGSFUNKTION} \qquad \frac{10}{2} = 5$$

$$x_{a1}(s) = x_{e1}(s) \cdot G_1(s)$$

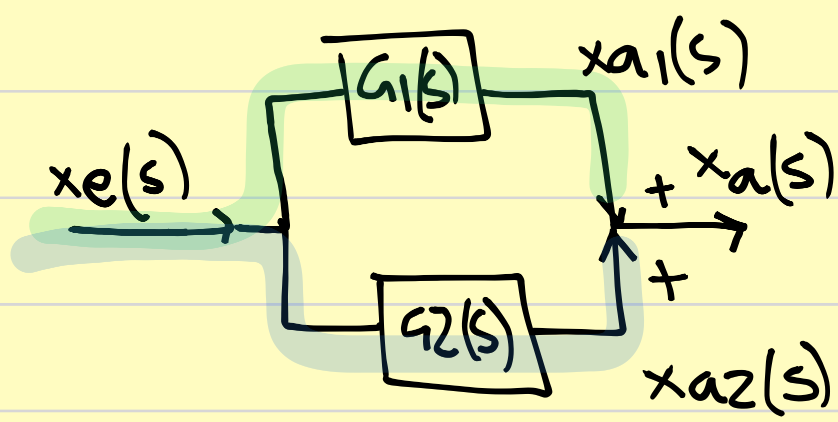
$$x_{a2}(s) = x_{e2}(s) \cdot G_2(s)$$

$$x_{a1}(s) = x_{e2}(s)$$

$$\left.\begin{array}{l} x_{a1}(s) = x_{e1}(s) \cdot G_1(s) \\ x_{a2}(s) = x_{e2}(s) \cdot G_2(s) \\ x_{a1}(s) = x_{e2}(s) \end{array}\right\} x_{a2}(s) = G_2(s) \cdot G_1(s) \cdot x_{e1}(s)$$

$$\boxed{G_R(s) = \frac{x_{a2}(s)}{x_{e1}(s)} = G_1(s) \cdot G_2(s)}$$

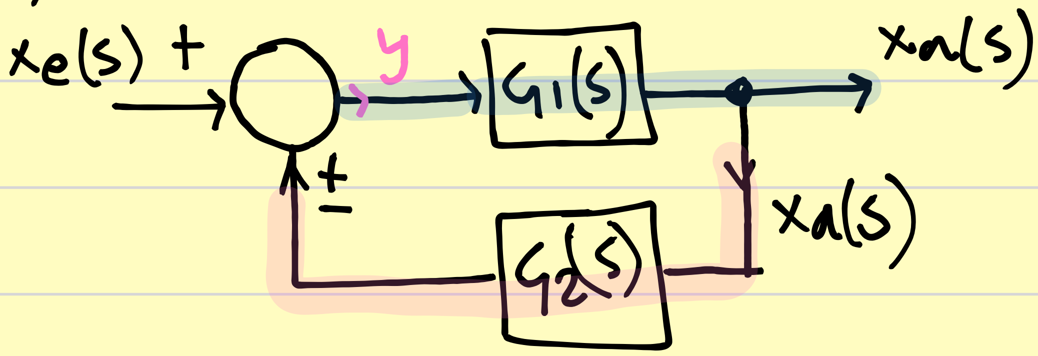
2) PARALLELSCHALTUNG



$$\left.\begin{array}{l} x_a(s) = x_{a1}(s) + x_{a2}(s) \\ x_{a1}(s) = x_e(s) \cdot G_1(s) \\ x_{a2}(s) = x_e(s) \cdot G_2(s) \end{array}\right\} x_a = x_e\left(G_1(s) + G_2(s)\right)$$

$$\boxed{G_P(s) = \frac{x_a(s)}{x_e(s)} = G_1(s) + G_2(s)}$$

3) RÜCKFÜHRUNGSCHALTUNG



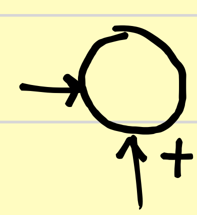
$$G_{RFS} = \frac{x_a(s)}{x_e(s)}$$

$$x_a(s) = G_1(s) \cdot y = G_1(s) \cdot \left[x_e(s) \pm x_a(s) \cdot G_2(s) \right]$$

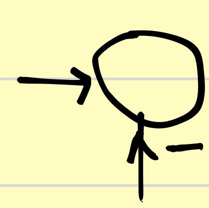
$$\rightarrow x_a(s) \mp x_a(s) \cdot G_1(s) \cdot G_2(s) = x_e(s) \cdot G_1(s) \rightarrow$$

$$\rightarrow x_a(s) = \frac{x_e(s) \cdot G_1(s)}{1 \mp (G_1(s) G_2(s))} \rightarrow$$

$$\boxed{G_{RFS} = \frac{G_1(s)}{1 \mp (G_1(s) G_2(s))}}$$



$$G_{RFS} = \frac{G_1(s)}{1 - G_1(s) G_2(s)}$$

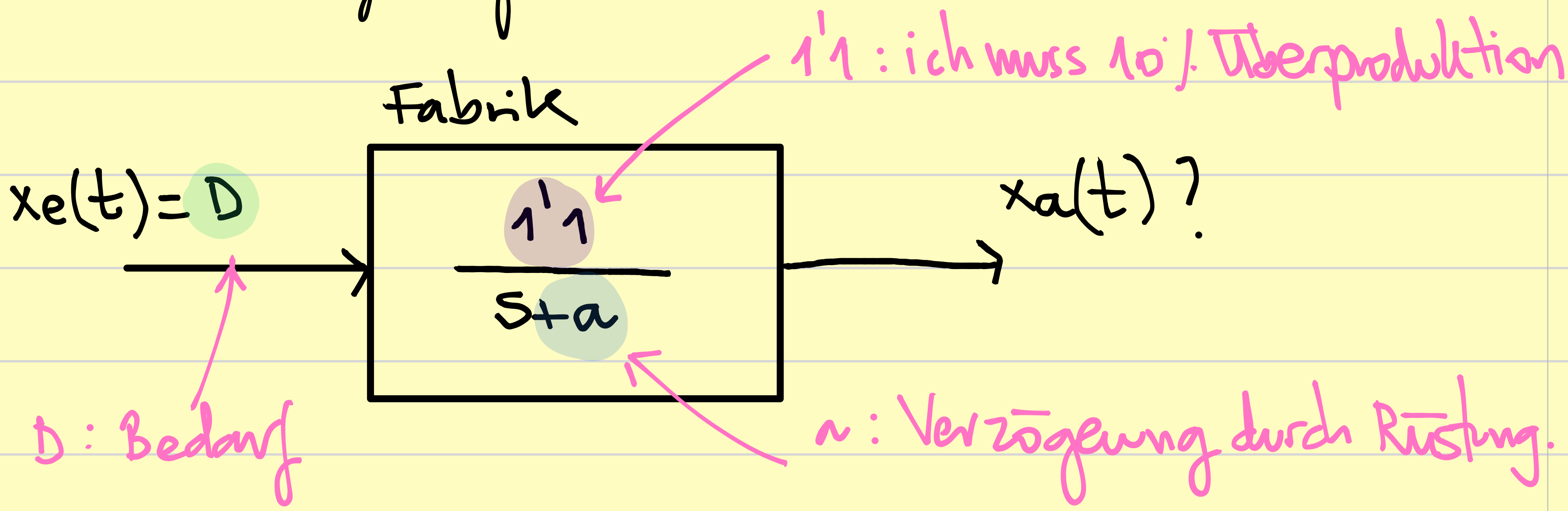


$$G_{RFS} = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s) G_2(s)}$$

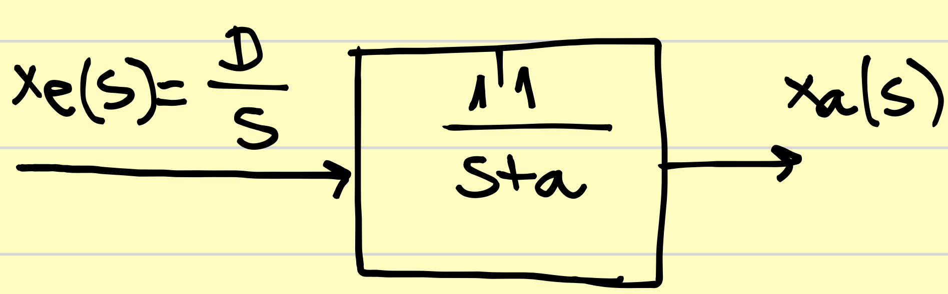
Übungen.

1. gegeben wird eine Fabrik mit 10% Ausschußquote und einen konstanten Bedarf von D $\frac{\text{Stück}}{\text{Std}}$.
Die Fabrik benötigt a Stunden um auf

Bedarfe zu reagieren. Wie sieht die Kurve der gelieferten Produkten aus?



Laplace:



$$x_a(s) = \frac{D}{s} \cdot \frac{1{,}1}{s+a} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+a} = \frac{A(s+a)+Bs}{s(s+a)}$$

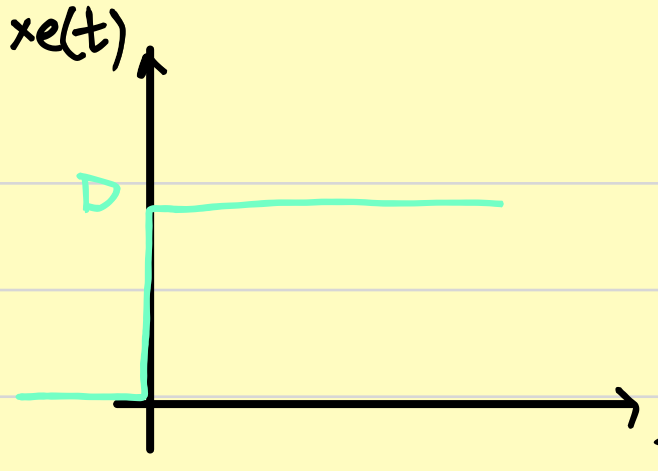
$$1{,}1\,D = A(s+a) + Bs$$

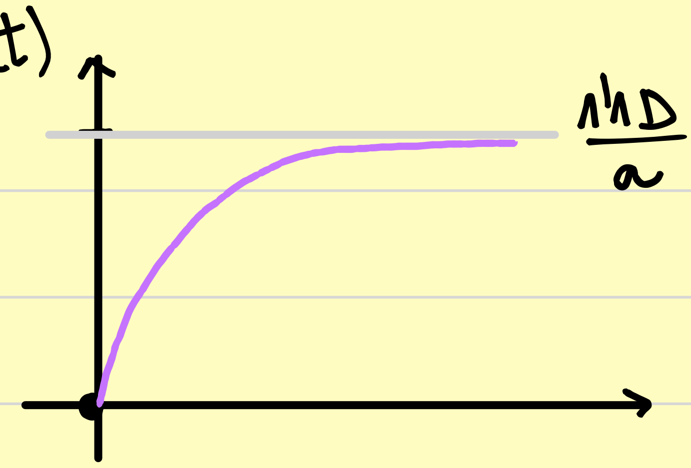
$$s=0 \rightarrow 1{,}1\,D = A(0+a) + B\cdot 0 \rightarrow A = \frac{1{,}1\,D}{a}$$

$$s=-a \rightarrow 1{,}1\,D = A(-a+a) + B\cdot(-a) \rightarrow B = \frac{-1{,}1\,D}{a}$$

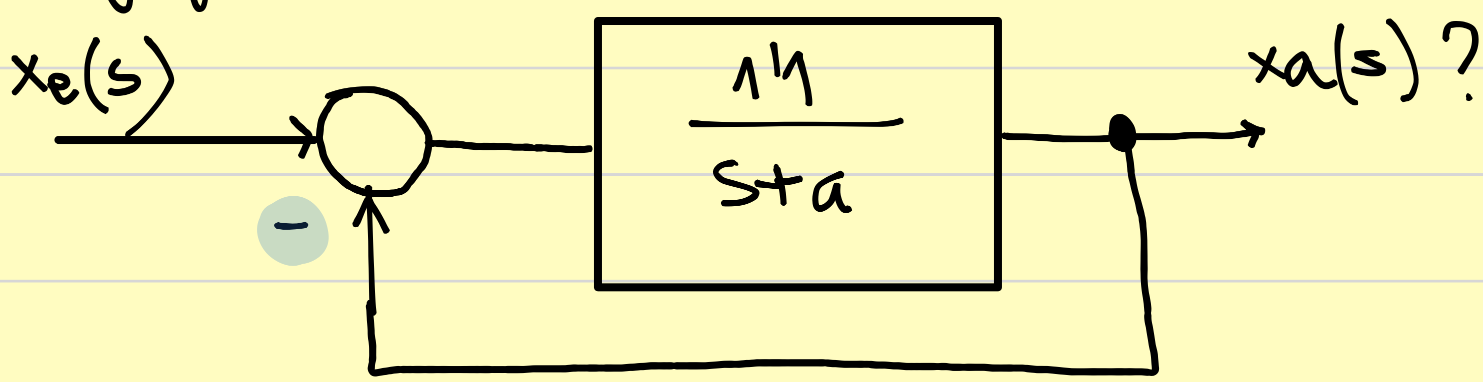
$$x_a(s) = \frac{1{,}1\,D}{a}\cdot\frac{1}{s} - \frac{1{,}1\,D}{a}\cdot\frac{1}{s+a} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}}$$

$$\rightarrow \boxed{x_a(t) = \frac{1{,}1\,D}{a}\left[1 - e^{-at}\right]}$$





2. wie verändert sich die Systemreaktion, wenn eine negative Rückführschaltung eingeführt wird?



$$\frac{xa(s)}{xe(s)} = \frac{\frac{1'1}{s+a}}{1+\frac{1'1}{s+a}} = \frac{\frac{1'1}{\cancel{s+a}}}{\frac{s+a+1'1}{\cancel{s+a}}} = \frac{1'1}{s+a+1'1} \longrightarrow \quad xe(s) = \frac{D}{s}$$

$$xa(s) = \frac{D}{s} \cdot \frac{1'1}{s+a+1'1} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+a+1'1} = \frac{A(s+a+1'1)+Bs}{s(s+a+1'1)}$$

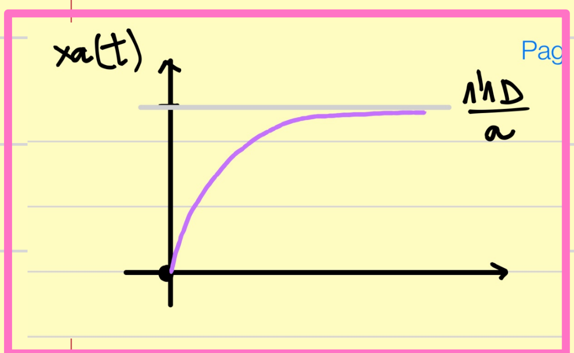
$$\rightarrow 1'1D = A(s+a+1'1) + Bs$$

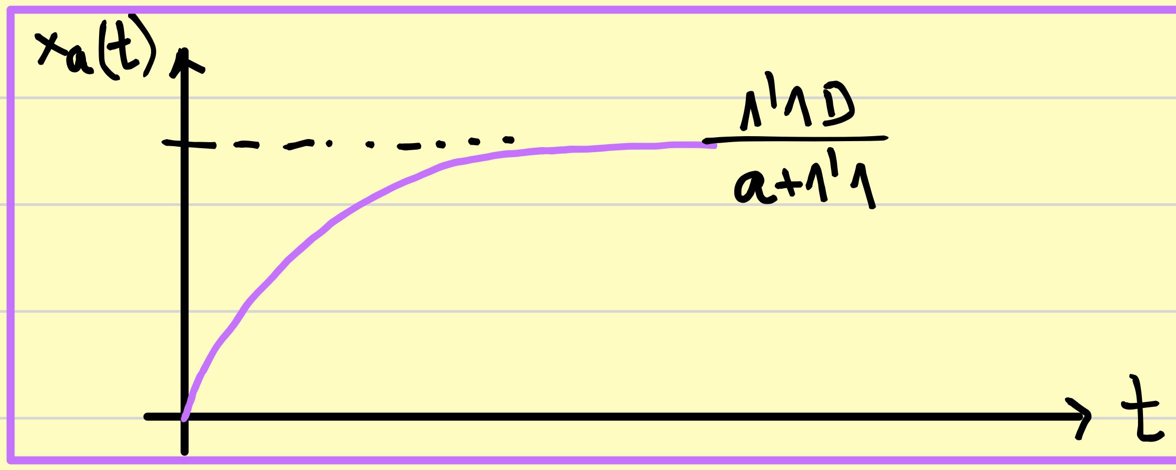
$$s=0 \rightarrow 1'1D = A(a+1'1) \rightarrow A = \frac{1'1D}{a+1'1}$$

$$s=-a-1'1 \rightarrow 1'1D = B(-a-1'1) \rightarrow B = \frac{-1'1D}{a+1'1}$$

$$xa(s) = \frac{1'1D}{a+1'1} \cdot \frac{1}{s} + \frac{-1'1D}{a+1'1} \cdot \frac{1}{s+a+1'1}$$

$$\boxed{x_a(t) = \frac{1'1D}{a+1'1}\left[1 - e^{(-a-1'1)t}\right]}$$





ohne RFS

$\frac{1'1D}{a}$

Mit RFS

$\frac{1'1D}{a+1'1}$

wenn $a>1 \longrightarrow \underset{\text{ohne RFS}}{x_a(t\to\infty)} > \underset{\text{mit RFS}}{x_a(t\to\infty)}$

Mit RFS die Bestandskontrolle ist effizienter!