ZINSRECHNUNG. Zinsen sind das Entgelt für ein leihweise überlassenes Kapital.
Nachschüssige Zinsen sind die Zinsen die am Ende einer zeitlichen Periode fällig werden.

PARAMETER.
- p. Zinssatz
- q. Zinsfaktor $\equiv q = 1 + \frac{p}{100}$
- K_0. Anfangskapital
- K_n. Endkapital. [Kapital nach der n-ten Periode]

1) Einfache Verzinsung. (EV). Bei einer EV werden in den einzelnen Perioden nur die Zinsen für das Anfangskapital gezahlt.

Z nach 1 Periode. $z_1 = K_0 \cdot \frac{p}{100}$

Z nach 2 Perioden. $z_2 = K_0 \cdot \frac{p}{100} \cdot 2$

...

z nach n Perioden. $z_n = K_0 \cdot \frac{p}{100} \cdot n$

Für das Endkapital K_n gilt: $K_n = K_0 + z_n = K_0 + K_0 \frac{p}{100} n$

$\rightarrow \boxed{K_n = K_0 \left[1 + \frac{p}{100} n\right]}$

Aufgabe: Ein Kapital soll in 10 Jahren bei 5% Zinsen 54000 € betragen. Wie hoch ist das Anfangskapital bei EV?

$$K_n = K_0 \left[1 + \frac{p}{100} n\right]$$

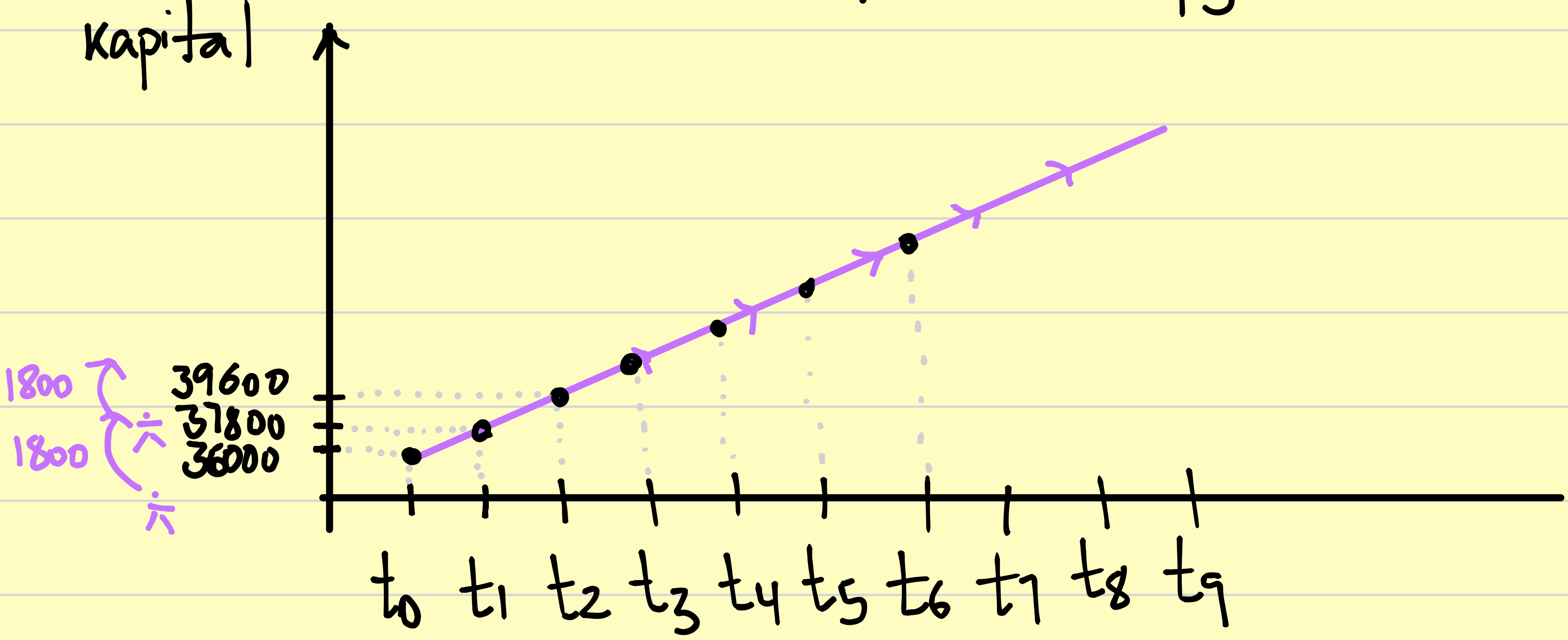
$n = 10$ [Anzahl Perioden]

$p = 5$ [Zinssatz]

$K_n = 54000$

$$54000 = K_0 \left[1 + \frac{5}{100} \cdot 10\right]$$

$$\rightarrow K_0 = \frac{54000}{1{,}5} = 36000 \text{ €}$$



$$z_1 = K_0 \cdot \frac{p}{100} = 36000 \frac{5}{100} = 1800 \text{ €}$$

$$z_2 = K_0 \cdot \frac{p}{100} \cdot 2 = 3600 \text{ €}$$

Die EV bildet eine Arythmetische Folge/Reihe.

Aufgabe. Eine Privatperson hat einem Freund für 5 Jahre 100.000 £ zu einem Zinssat von 6 % geliehen! (EV)
Wie hoch ist das Endkapital?

$$K_n = K_0\left[1 + n\frac{p}{100}\right]$$

$n = 5$

$p = 6$

$K_0 = 100.000$

$$\rightarrow K_n = 100000\left[1 + 5 \cdot \frac{6}{100}\right] = 130000 \text{ £}$$

$$\boxed{K_n = K_0\left[1 + n\frac{p}{100}\right]} \longrightarrow \boxed{K_0 = \frac{K_n}{1 + n\frac{p}{100}}}$$

$$\rightarrow \frac{K_n}{K_0} = \left[1 + n\frac{p}{100}\right] \rightarrow \frac{K_n}{K_0} - 1 = n \cdot \frac{p}{100} \rightarrow \boxed{n = \frac{100}{p}\left[\frac{K_n}{K_0} - 1\right]}$$

$$\rightarrow \frac{K_n}{K_0} = \left[1 + n\frac{p}{100}\right] \rightarrow \frac{K_n}{K_0} - 1 = n \cdot \frac{p}{100} \rightarrow \boxed{p = \frac{100}{n}\left[\frac{K_n}{K_0} - 1\right]}$$

Aufgabe. wann verdoppelt sich ein Kapital K_0 bei 6 % Zinsen und EV?

$$K_n = 2\cancel{K_0} = \cancel{K_0}\left[1 + n \cdot \frac{p}{100}\right] \rightarrow 2 = \left[1 + n \cdot \frac{p}{100}\right]$$

$$2 = \left[1 + n \cdot \frac{6}{100}\right] \longrightarrow 2 - 1 = n \cdot \frac{6}{100} \longrightarrow n = \frac{100}{6} = 16'67 \simeq 17 \text{ Perioden}$$

---

2) Zinsenzinsrechnung (ZZR). Bei der ZZR werden sowohl das Anfangskapital als auch die Zinsen in der Perioden verzinst. Das heißt, die Zinsen werden dem Kapital jeweils zugeschlagen und von da an mitverzinst.

Anfangskapital: K_0

Kapital nach 1 Periode: $K_1 = K_0 + \overbrace{K_0 \cdot \frac{p}{100}}^{Z_1} = K_0 \cdot \left[1 + \frac{p}{100}\right] = K_0 q$

Kapital nach 2 Perioden: $K_2 = K_1 + K_1 \cdot \frac{p}{100} = K_1 \cdot q = K_0 q^2$

...

Kapital nach n Perioden: $K_n = K_{n-1} + K_{n-1} \cdot \frac{p}{100} = K_0 q^n$

Beispiel:

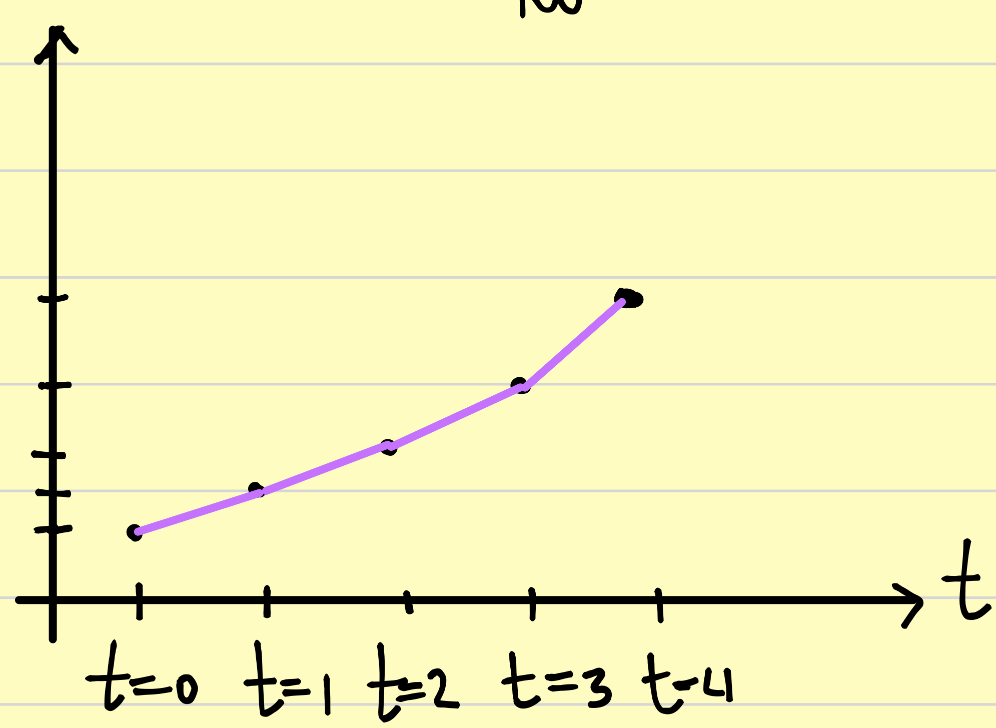
$K_0 = 100000$

$p = 6 \longrightarrow q = 1 + \frac{6}{100}$

Wie entwickelt sich das Kapital bei einer ZZR?

Kapital

	126.247
7146	119.101
6741	112.360
6360	106.000
6000	100.000



$K_1 = K_0 + K_0 \frac{p}{100} = K_0 \cdot q = 106000$

$K_2 = K_1 + K_1 \frac{p}{100} = K_0 \cdot q^2 = 112360$

$$K_3 = K_2 + K_2 \frac{p}{100} = K_0 q^3 = 119'01$$

$$K_4 = K_3 + K_3 \frac{p}{100} = K_0 q^4 = 126'247$$

$$\boxed{K_n = K_0 q^n} \qquad ZZR \equiv GF$$

- die Bestimmung von K_0 bei gegebenem K_n, q, und n bezeichnet man als Bestimmung des Barwertes oder Diskontierung bzw. Abzinsung eines Kapital.

$$K_n = K_0 \cdot q^n \longrightarrow \boxed{K_0 = \frac{K_n}{q^n}} \qquad 9 = 3 \cdot (2+1) \to 3 = \frac{9}{2+1}$$

Beispiel. Daniela ist heute 20. Sie braucht 2000000 € auf dem Konto, wenn sie 65 wird, damit sie gut in die Rente geht. Sie kann das Geld heute bei einer Bank zu einem Zinsatz von 5% anlegen. Wie viel anfangs-Kapital wäre bei einer ZZR heute notwendig?

$n = 65 - 20 = 45$

$p = 5 \to q = 1'05$

$K_n = 2000000 = 2 \cdot 10^6$

K_0 ?

$$K_n = K_0 \cdot q^n \to K_0 = \frac{K_n}{q^n} = \frac{2000000}{1'05^{45}}$$

$$K_0 = \frac{2 \cdot 10^6}{1'05^{45}} = 222593'02\ €$$

DISKOTIERUNG / ABZINSUNG

Aufgabe: Florian kann in 5 Jahren einen Oldtimer mit Kaufpreis 7500£ für 10000 £ verkaufen. In 10 Jahren würde er 15000£ bekommen. Er könnte sein Geld (7500£) alternativ für 11% Zinsen (ZZR) anlegen.
Vergleichen Sie die Barwerte.

- WAS IST DER BARWERT VON 7500£ HEUTE? $k_0 = 7500£$

- WAS IST DER BARWERT VON 10000£ IN 5 JAHREN?

$$k_0 = k_n \cdot \frac{1}{q^n} = 10000 \cdot \frac{1}{1{,}11^5} = 5934 £$$

Ich bräuchte HEUTE 5934£ um in 5 Jahre (bei einer ZZR mit $p = 11\%$) 10000£ zu bekommen.

- WAS IST DER BARWERT VON 15000£ IN 10 JAHREN?

$$k_0 = 15000 \cdot \frac{1}{1{,}11^{10}} = 5283 £$$

Ich bräuchte HEUTE 5283£ um in 10 Jahren (bei einer ZZR mit $p=11\%$) 15000£ zu bekommen.

→ Es ist sinnvoller das Geld zu 11% Zinsen (ZZR) anzulegen.

GELD IST EINE FUNKTION VON DER ZEIT!

$$K_0 = \frac{K_n}{q^n} \to q^n = \frac{K_n}{K_0} \to n \log q = \log \frac{K_n}{K_0} \to$$

$$\to \boxed{n = \frac{\log \frac{K_n}{K_0}}{\log q}}$$

Aufgabe: wann verdoppelt sich ein Anfangskapital K_0 bei 6% ZZR?

$K_0 = K_0$
$K_n = 2K_0$
$p = 6 \to q = 1{,}06$

$$\Rightarrow 1{,}06^n = \frac{2\cancel{K_0}}{\cancel{K_0}} = 2 \to n = \frac{\log 2}{\log 1{,}06} = 11{,}89 = 12 \text{ Perioden}$$

---

3) Unterjährige Verzinsung (UJV)

ZZR · Perioden · Jahre
UJR · ZZR Perioden · < Jahre

Bei der UJV handelt es sich um eine ZZR, bei der Intervalle kleiner als ein Jahr sind.

Bei der UJV handelt es sich idR um eine ZZR mit ..m Perioden pro Jahr und ein Jahreszinssatz von „p", so beträgt der Zinssatz der UJV-Periode $\frac{p}{m}$.

Damit verändert sich die Formel:

ZZR	UJV	
n	$n \cdot m$	Zinsperioden
p	$\frac{p}{m}$	Zinssatz
$K_n = K_0 q^n = K_0\left[1+\frac{p}{100}\right]^n$	$K_n = K_0 \cdot q^{n \cdot m} = K_0\left[1+\frac{p}{m}\frac{1}{100}\right]^{n m}$	Endkapital

Beispiel: Bei jährlicher ZZR erhält man aus einem Kapital von 100000£ nach 5 Jahren mit $p=6$, 133822'5£. (s. oben)
Wie hoch wäre das Endkapital bei monatlicher Verzinsung?

1 Jahr ≙ 12 Monate

$$K_n = K_0 \cdot q^n = K_0 \cdot \left[1+\frac{p}{100}\right]^n \underset{\text{UJV}}{=} K_0\left[1+\frac{p}{m}\cdot\frac{1}{100}\right]^{n \cdot m}$$

Wir zahlen Zinsen jeden Monat

$m = 12$

$K_0 = 100.000$ £

$n = 5$ Jahre

$$K_{n_{UJV}} = 100000\left[1+\frac{6}{12}\cdot\frac{1}{100}\right]^{5 \cdot 12} = 134885'02\text{€} > K_{n_{ZZR}}$$

FAZIT: bei UJV wächst also ein Kapital schneller als bei der jährlichen ZZR.
Obwohl p gleich ist.