HOCHSCHULE HEILBRONN

› WIRTSCHAFTS-MATHEMATIK

Wirtschaftsmathematik | Prof. Dr. Florian Kauffeldt

QUELLEN

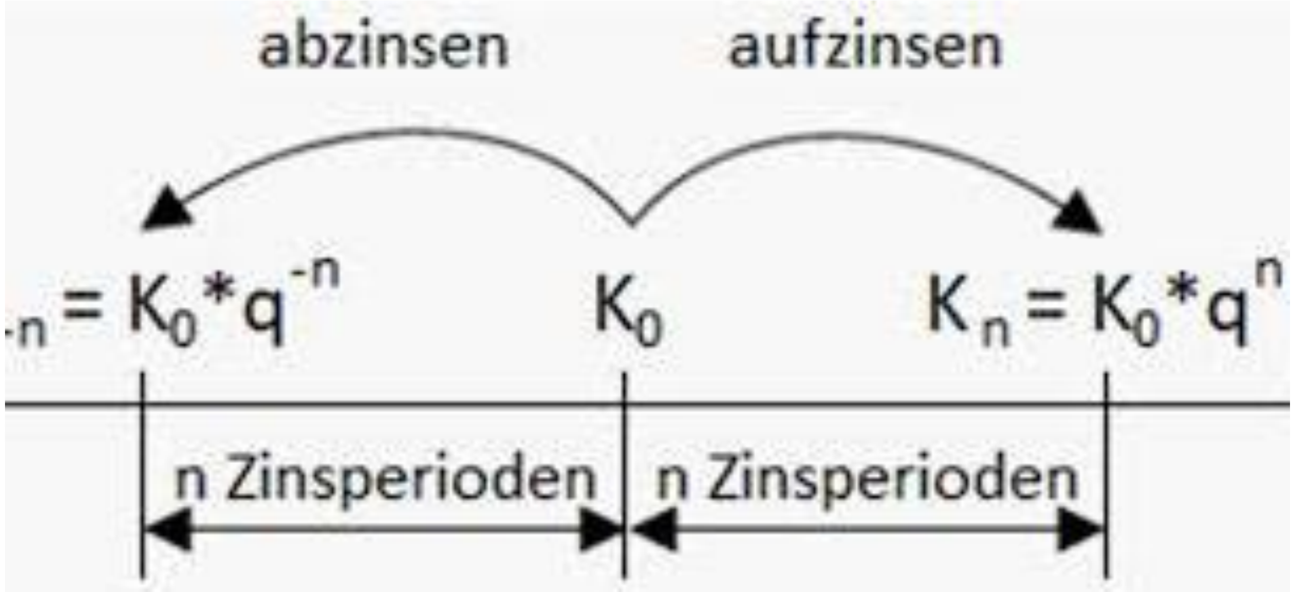
HOCHSCHULE HEILBRONN

PETER ALBRECHT (2014): Finanzmathematik für Wirtschaftswissenschaftler, 3. Auflage, Schäffer Poeschel.

KNUT SYDSAETER, PETER HAMMOND, ARNE STROM, ANDRÉS CARVAJAL (2018): Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler, 5. Auflage, Pearson.

INHALT

HOCHSCHULE HEILBRONN



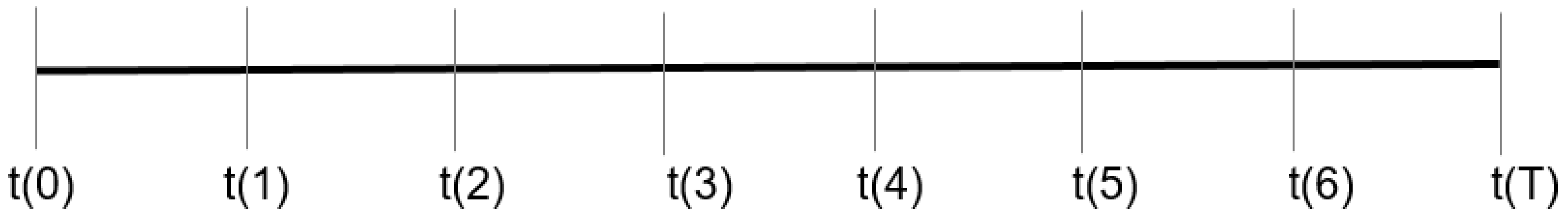
› 1. FINANZMATHEMATIK

ZAHLUNGS-STRÖME

HOCHSCHULE HEILBRONN

CF = Cash Flow = Zahlungsstrom

CF(0) CF(1) CF(2) CF(3) CF(4) CF(5) CF(6) CF(T)

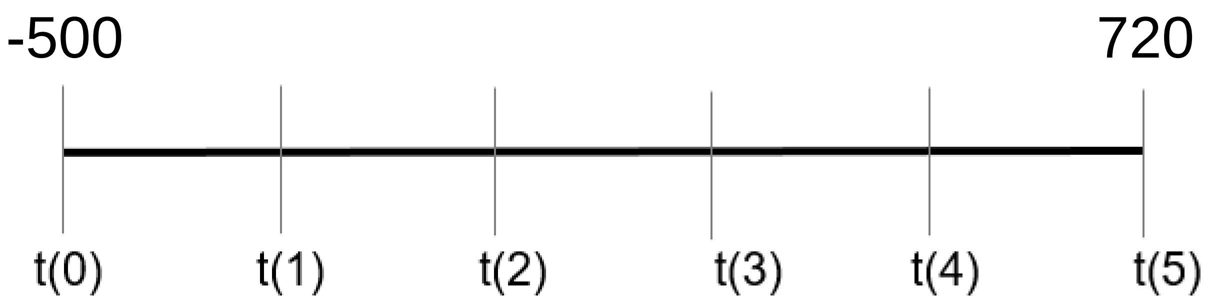


t = Zeitpunkt

> Zahlungsströme erfolgen in regelmäßigen, diskreten Abständen, Grundannahme: jährlich

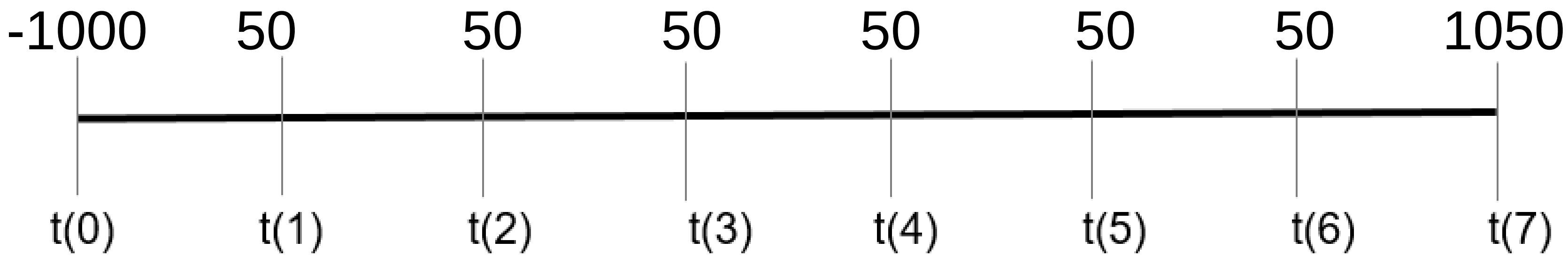
ZAHLUNGS-STRÖME

Beispiel 1. Sie investieren heute EUR 500 und erhalten nach 5 jahren EUR 720 zurück.



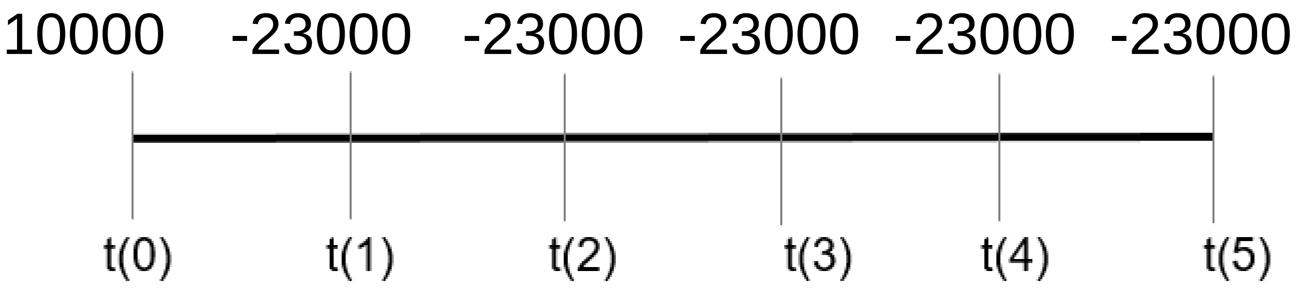
ZAHLUNGS-STRÖME

Beispiel 2. Sie kaufen ein Anleihe mit Nennwert 1000, 5% Kupon, Rückzahlbar nach 7 Jahren zum Nennwert.



ZAHLUNGS-
STRÖME

Beispiel 3. Sie nehmen einen Ratenkredit über EUR 100.000 auf und zahlen diesen in Fünf gleichen Raten zu EUR 23.000 zurück



DER ZINSSATZ

HOCHSCHULE HEILBRONN

> Zinssatz i = Umrechnung von Zahlungsströme auf unterschiedliche Zeitperioden

Alternative 1. Gegenwartswert eines Zahlungsstroms = **Abzinsung Zahlungsstrom**

> Abzinsungfaktor:

$$v = \frac{1}{1+i}$$

Beispiel. Zinssatz: i = 5%, Wert nach 3 Perioden t = 3: w(3) = 1.157625

$$Gegenwartswert\ t = 0\ (Barwert) = \left(\frac{1}{1+i}\right)^t \cdot w = \left(\frac{1}{v}\right)^t \cdot w = \left(\frac{1}{1.05}\right)^3 \cdot w = 1$$

DER ZINSSATZ

HOCHSCHULE HEILBRONN

- Zinssatz i = Umrechnung von Zahlungsströme auf unterschiedliche Zeitperioden

Alternative 2. Zukunftswert nach t Perioden = **Aufzinsung Zahlungsstrom**

- Aufzinsungfaktor:

$$q = 1 + i$$

Beispiel. Zinssatz: i = 5%, Wert heute t = 0: w(0) = 1

$$Zukunftswert\ nach\ 3\ Perioden = (1+i)^t \cdot w = q^t \cdot w = 1.05^3 \cdot w = 1.157625$$

FUTURE VALUE (FV) UND PRESENT VALUE (PV)

HOCHSCHULE HEILBRONN

Der Zukunftswert (FV) einer Anlage mit Gegenwartswert (PV = Present Value)

- bei Zinssatz i
- nach t Perioden

ist:

$$\boldsymbol{FV = (1 + i)^t \cdot PV}$$

DIE ZINSSTAFFEL

Beispiel. PV = 20000, Zinssatz (i) = 5%, Jahre (t) = 5

Jahr	Anfangsbetrag	Zinsgutschrift	Endbetrag	Zinseszins
1	20000.00	1000.00	21000.00	0.00
2	21000.00	1050.00	22050.00	50.00
3	22050.00	1102.50	23152.50	102.50
4	23152.50	1157.63	24310.13	157.63
5	24310.13	1215.51	25525.63	215.51

UNTERJÄHRIGE UND KONTINUIERLICHE VERZINSUNG

HOCHSCHULE HEILBRONN

- **Unterjährige Verzinsung** mit m Zahlungen pro Jahr. Aufzinsungsfaktor:

$$\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m\cdot t}$$

- **Kontinuierliche Verzinsung** mit $m \to \infty$ Zahlungen pro Jahr. Aufzinsungsfaktor:

$$\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m\cdot t} = e^{i\cdot t}$$

ÄQUIVALENTE JAHRESZINSSÄTZE

HOCHSCHULE HEILBRONN

> Äquivalenter Jahreszinsatz zur unterjährigen Verzinsung:

$$\left(1+\frac{i}{m}\right)^m - 1$$

> Äquivalenter Jahreszinsatz zur kontinuierlichen Verzinsung:

$$e^i - 1$$

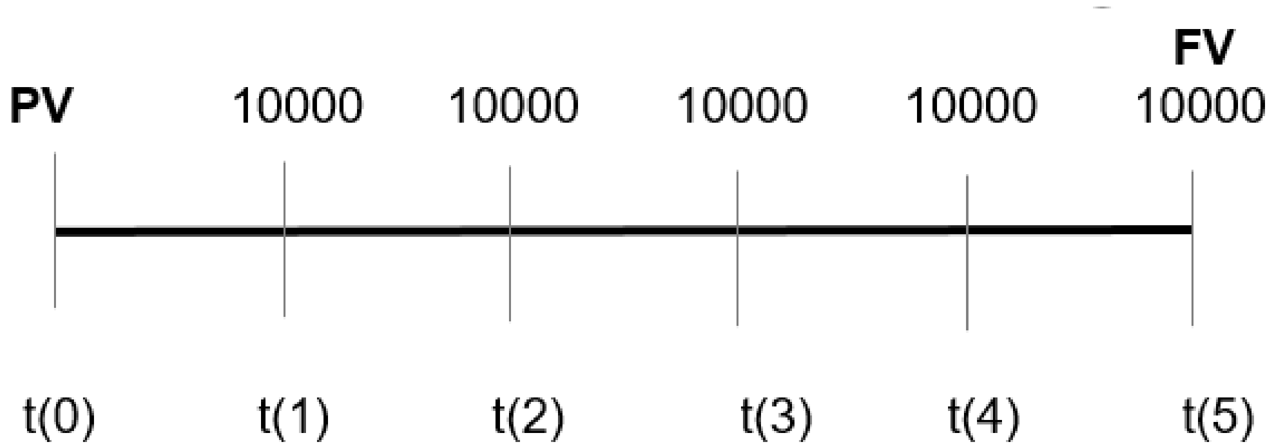
NACHSCHÜSSIGE ANNUITÄTEN

Nachschüssige Annuitäten sind gleichförmige Cash Flows über t Perioden.

> Der erste Cash Flow erfolgt in t = 1

Annuitätenformeln: Zusammenhang zwischen

Barwert (PV) (bzw. Zukunftswert (FV)) und Annuität A, Zinssatz i sowie Laufzeit t.



ANNUITÄTENFORMELN (NACHSCHÜSSIGE ANNUITÄT)

HOCHSCHULE HEILBRONN

- Gegenwartswert:

$$PV(A, i, t) = A \cdot \left(\frac{1 - (1 + i)^{-t}}{i} \right)$$

- Zukunftswert:

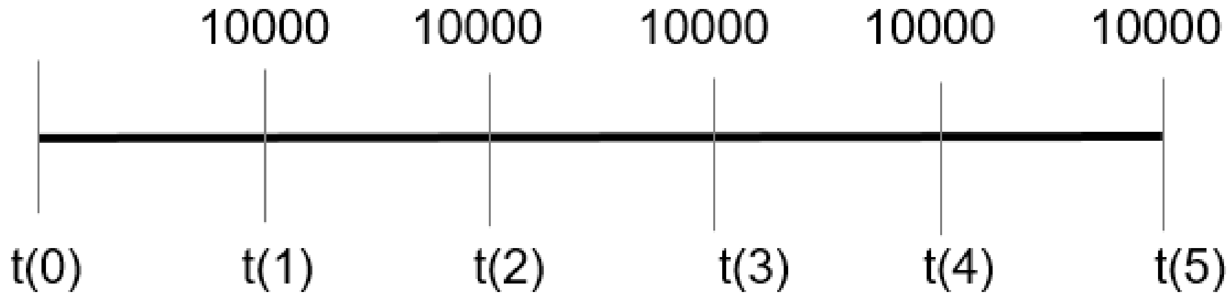
$$FV(A, i, t) = A \cdot \left(\frac{(1 + i)^{t} - 1}{i} \right)$$

DIE ZINSSTAFFEL FÜR DEN ZUKUNFTSWERT EINER ANNUITÄT

HOCHSCHULE HEILBRONN

Beispiel. A = 10000, Jahre (t) = 5, Zinssatz (i) = 5%

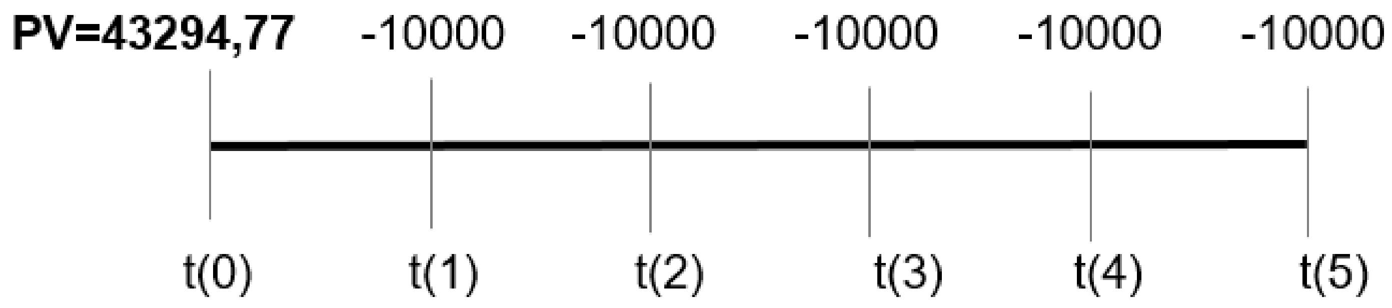
Jahr	Anfangsbetrag	Zinsgutschrift	Einzahlung	Endbetrag	
1	0.00	0.00	10000.00	10000.00	
2	10000.00	500.00	10000.00	20500.00	
3	20500.00	1025.00	10000.00	31525.00	
4	31525.00	1576.25	10000.00	43101.25	
5	43101.25	2155.06	10000.00	**55256.31**	= FV



DIE ZINSSTAFFEL FÜR EIN ANNUITÄTENDARLEHEN

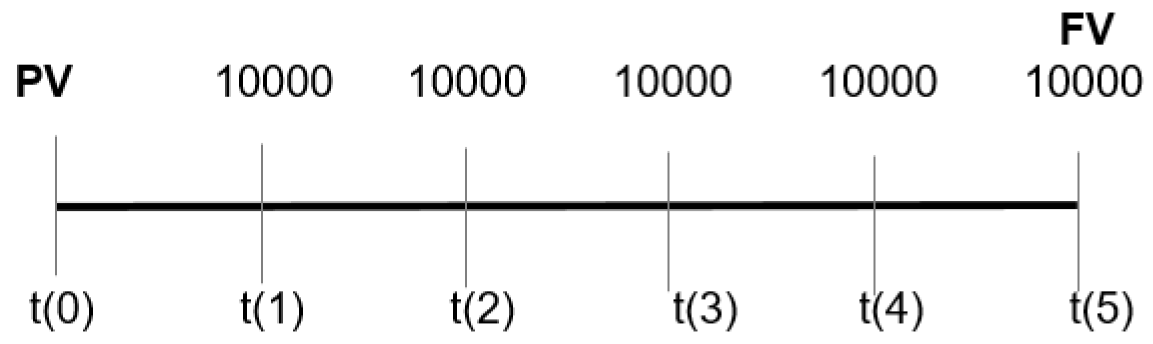
Beispiel. A = 10000, Jahre (t) = 5, Zinssatz (i) = 5%

	Jahr	Anfangsbetrag	Zinsgutschrift	Tilgung	Endbetrag
PV =	**1**	**43294.77**	2164.74	-10000.00	35459.51
	2	35459.51	1772.98	-10000.00	27232.48
	3	27232.48	1361.62	-10000.00	18594.11
	4	18594.11	929.71	-10000.00	9523.81
	5	9523.81	476.19	-10000.00	0.00

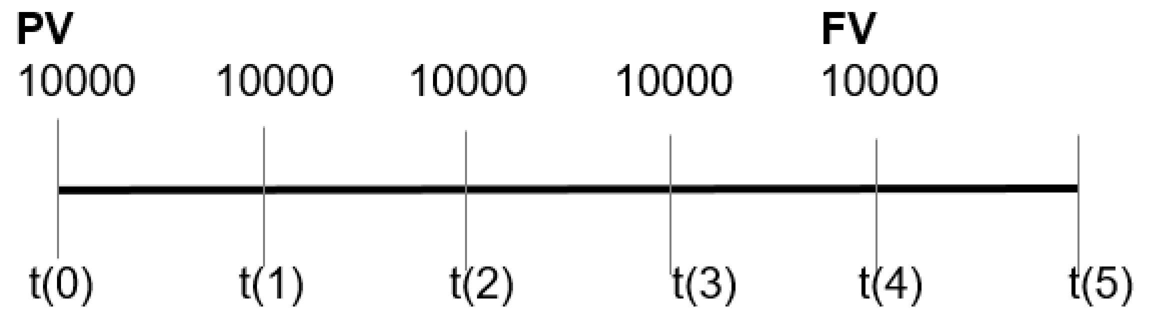


NACHSCHÜSSIGE VERSUS VORSCHÜSSIGE ANNUITÄTEN

> Nachschüssige Rente (bisher behandelt):



> Vorschüssige Rente (kommt jetzt):



DER BARWERT DER VORSCHÜSSIGEN ANNUITÄT

Bei der vorschüssigen Annuität werden alle Zahlungen eine Periode früher ausgezahlt

→ alle Zahlungen mit dem Faktor (1 + i) multiplizieren:

$$
\begin{aligned}
PV_{vorschüssig} &= PV_{nachschüssig} \cdot (1+i) \\
&= A \cdot \left(\frac{1-(1+i)^{-t}}{i}\right) \cdot (1+i) \\
&= A \cdot \left(\frac{1+i-(1+i)^{1-t}}{i}\right)
\end{aligned}
$$

DER ZUKUNFTSWERT DER VORSCHÜSSIGEN ANNUITÄT

Bei der vorschüssigen Annuität werden alle Zahlungen eine Periode früher ausgezahlt

→ alle Zahlungen mit dem Faktor (1 + i) multiplizieren:

$$\begin{aligned} FV_{vorschüssig} &= FV_{nachschüssig} \cdot (1+i) \\ &= A \cdot \left(\frac{(1+i)^t - 1}{i}\right) \cdot (1+i) \\ &= A \cdot \left(\frac{(1+i)^{1+t} - (1+i)}{i}\right) \end{aligned}$$

ZUSAMMENHÄNGE

$\frac{(1+i)^n - 1}{i}$

$\frac{((1+i)^n - 1)}{i}$ $*(1+i)$

$$\begin{tikzcd} \text{FV (nachschüssig)} \arrow[rr, "(1+i)"] & & \text{FV (vorschüssig)} \\ \text{PV (nachschüssig)} \arrow[u, "(1+i)^n"'] \arrow[rr, "(1+i)"] & & \text{PV (vorschüssig)} \arrow[u, "(1+i)^n"'] \end{tikzcd}$$

$\frac{((1+i)^n - 1)}{i}$ $/(1+i)^n$

$\frac{(1+i)^n - 1}{i}$ $*(1+i) / (1+i)^n$

$= 1 / (1+i)^{n-1}$

EWIGE RENTE

HOCHSCHULE HEILBRONN

Erinnerung Barwert Annuität:

$$PV(A, i, t) = A \cdot \left(\frac{1 - (1 + i)^{-t}}{i}\right)$$

Für $t \to \infty$:

$$PV(A, i) = \frac{A}{i}$$

GORDON-FORMEL

Barwert ewige Rente deren jährliche Auszahlung mit Wachstumsrate g ansteigt:

$$PV(A_0, i, g) = \frac{A_0(1+g)}{i-g} = \frac{A_1}{i-g}$$

HOCHSCHULE HEILBRONN

› 2. VEKTOR- UND MATRIXALGEBRA

Wirtschaftsmathematik | Prof. Dr. Florian Kauffeldt

VEKTOR- UND MATRIXALGEBRA: DEFINITION VEKTOREN

Ein $Vektor$ ist eine geordnete Liste von Objekten in Spalten- oder Zeilenform.

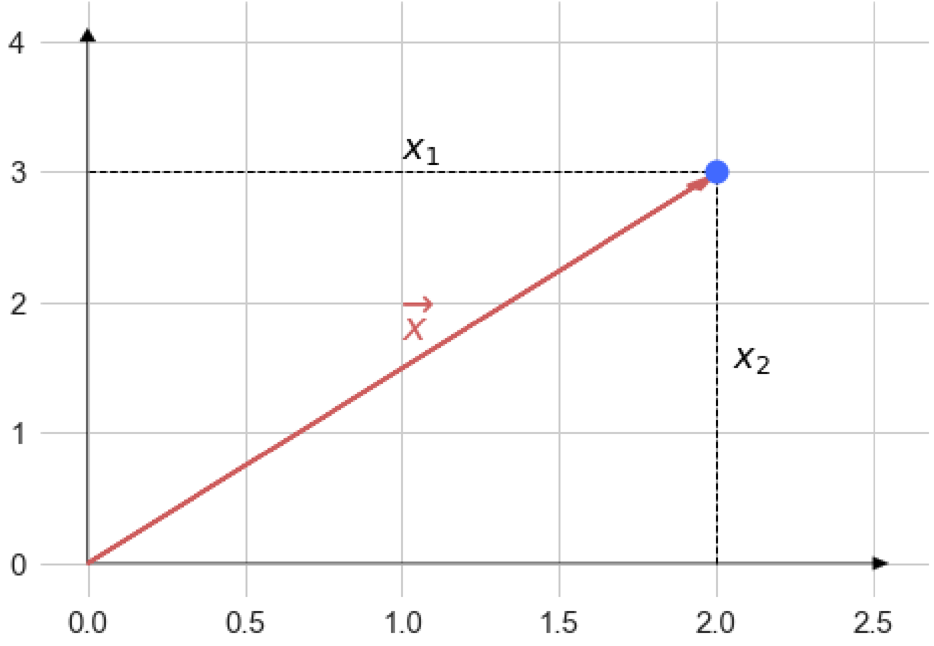
> Zeilenvektor ($1 \times n$-Vektor):

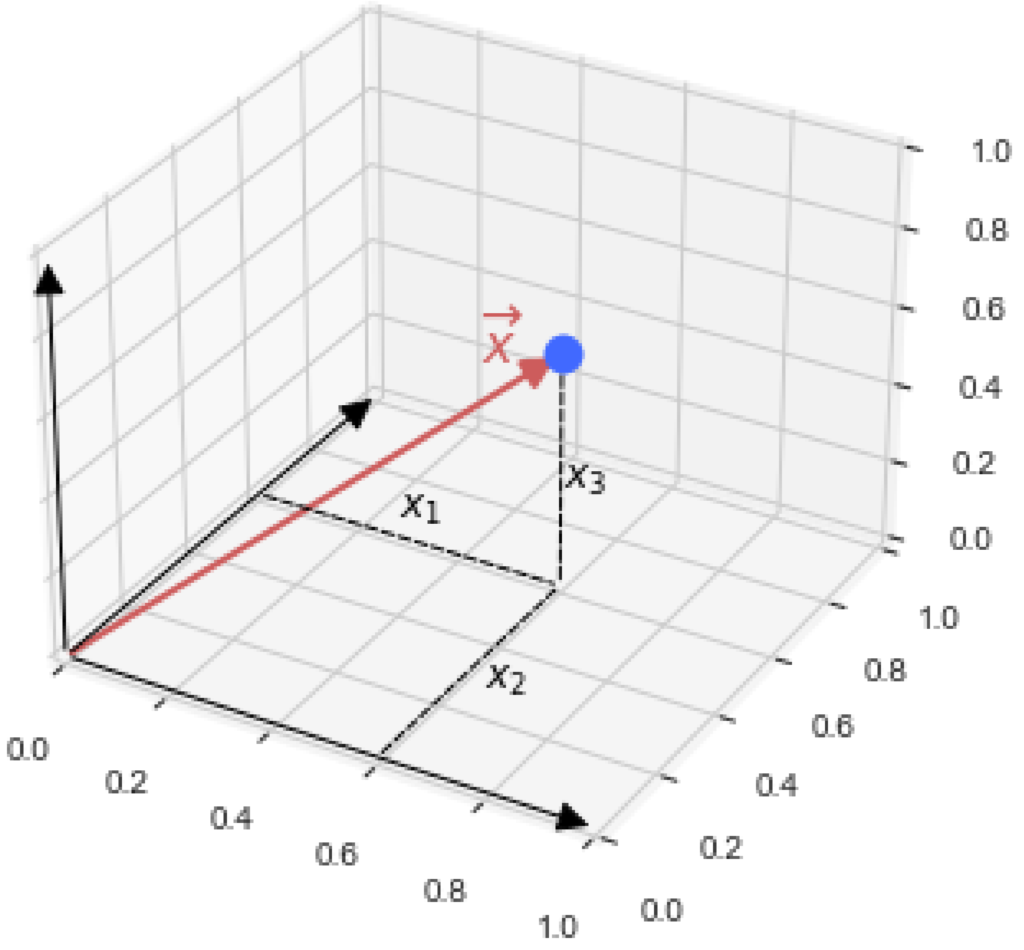
$$(x_1, \ldots, x_n)$$

> Spaltenvektor ($n \times 1$-Vektor):

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

VEKTOR- UND MATRIXALGEBRA: VEKTOREN GRAFISCH





VEKTOR- UND MATRIXALGEBRA: VEKTOROPERATIONEN

HOCHSCHULE HEILBRONN

- $Vektoraddition$ (und -subtraktion) erfolgt elementweise:

$$(1,2) + (4,5) = (5,7)$$

- $Vektormultiplikation$ (und -division) = Summe der Produkte der Elemente:

$$(1,2) \cdot (4,5) = (1 \cdot 4) + (2 \cdot 5) = 14$$

- $Skalarmultiplikation$ (Zahl mal Vektor) erfolgt elementweise:

$$(1,2) \cdot 4 = (4,8)$$

- $Euklidische\ Distanz$ zwischen zwei Punkten:

$$||(1,2),(4,5)|| = \sqrt{(1-4)^2 + (2-5)^2} = \sqrt{18}$$

VEKTOR- UND MATRIXALGEBRA: VEKTOROPERATIONEN

HOCHSCHULE HEILBRONN

Gegeben zwei Vektoren x und y. Für $\alpha \in [0,1]$ ist eine $Konvexkombination$ der Vektoren:

$$\alpha x + (1-\alpha)y = \begin{pmatrix} \alpha x_1 + (1-\alpha)y_1 \\ \vdots \\ \alpha x_n + (1-\alpha)y_n \end{pmatrix}$$

VEKTOR- UND MATRIXALGEBRA: DEFINITION MATRIX

Eine $Matrix$ ist eine rechteckige Anordnung von Objekten.

$m(Zeilen) \times n(Spalten)$ Matrix:

$$
\begin{array}{cc}
 & \text{n columns} \longrightarrow \\
\text{m rows} \downarrow & \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}
\end{array}
$$

VEKTOR- UND MATRIXALGEBRA: MATRIXOPERATIONEN

HOCHSCHULE HEILBRONN

> $Matrizenaddition$: Elementweise (bei Matrizen mit gleicher Anzahl Spalten und Zeilen)

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 5 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 9 & 8 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

> $Skalarmultiplikation$: Elementweise

$$4 \cdot \begin{pmatrix} 5 & 5 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 20 & 8 \\ 4 & -8 & 4 \end{pmatrix}$$

VEKTOR- UND MATRIXALGEBRA: MATRIXOPERATIONEN

HOCHSCHULE HEILBRONN

$$Matrizenmultiplikation:$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Schritt 1:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 4 & * \\ * & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & * \\ * & * \end{pmatrix}$$

Schritt 2:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \\ * & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ * & * \end{pmatrix}$$

VEKTOR- UND MATRIXALGEBRA: MATRIXOPERATIONEN

HOCHSCHULE HEILBRONN

$$Matrizenmultiplikation:$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Schritt 3:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 2 \cdot 4 & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 9 & * \end{pmatrix}$$

Schritt 4:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 2 \end{pmatrix}$$

VEKTOR- UND MATRIXALGEBRA: MATRIXOPERATIONEN

HOCHSCHULE HEILBRONN

Anmerkungen. Matrizenmultiplikation $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$:

- Voraussetzung: Anzahl der Spalten in Matrix **A** = Anzahl der Zeilen in Matrix **B**
- **A** = $m \times n$ Matrix und **B** = $n \times m$ Matrix → Produkt = $m \times m$ Matrix

VEKTOR- UND MATRIXALGEBRA: MATRIXOPERATIONEN

Rechenregeln. Seien **A, B, C** Matrizen, dann gilt:

1. Matrizenmultiplikation ist $assoziativ$:

$$(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$$

2. Matrizenmultiplikation ist $distributiv$:

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{AB} + \boldsymbol{AC}$$

3. Matrizenmultiplikation ist $\boldsymbol{nicht}$ $kommutativ$:

$$\boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA}$$

VEKTOR- UND MATRIXALGEBRA: MATRIXOPERATIONEN

$Transponieren\ von\ Matrizen$ (Vertauschen von Zeilen und Spalten):

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \boldsymbol{A^T} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

VEKTOR- UND MATRIXALGEBRA: MATRIXOPERATIONEN

HOCHSCHULE HEILBRONN

$Determinante$ einer 2×2 Matrix:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

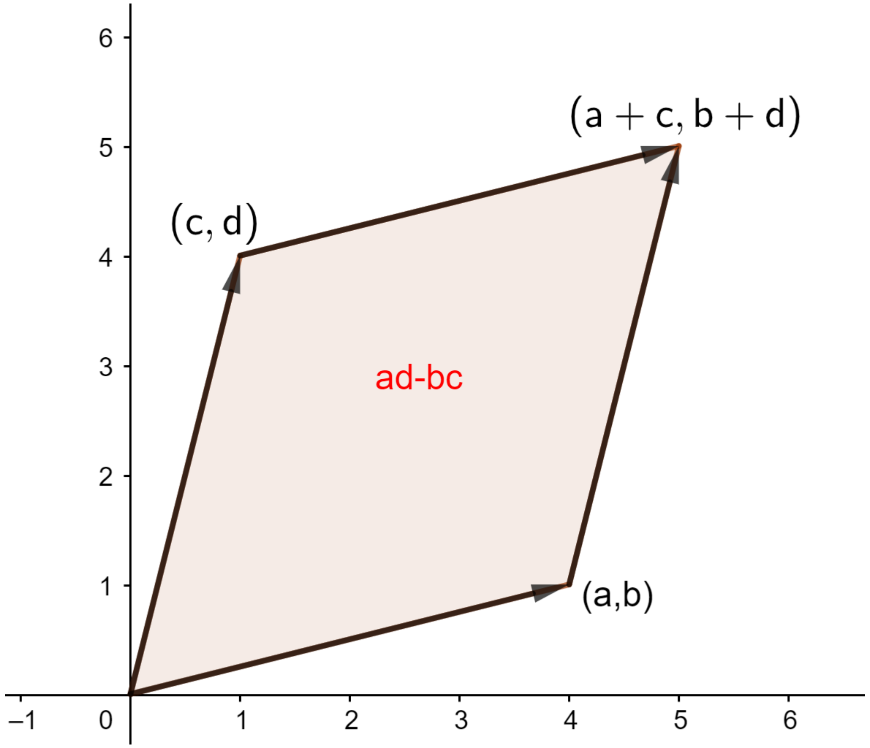
$$\det(\boldsymbol{A}) = |\boldsymbol{A}| = \mathrm{ad} - \mathrm{bc}$$

> Determinante: Raum, der von den Vektoren der Matrix aufgespannt wird

VEKTOR- UND MATRIXALGEBRA: MATRIXOPERATIONEN

Determinante grafisch:

> Determinante: Raum, der von den Vektoren der Matrix aufgespannt wird:



VEKTOR- UND MATRIXALGEBRA: MATRIXOPERATIONEN

HOCHSCHULE HEILBRONN

Determinante einer allgemeinen 3×3 Matrix: Laplacescher Entwicklungssatz

$$|A| = \begin{vmatrix} \color{red}{a_{11}} & a_{12} & a_{13} \\ \color{blue}{a_{21}} & a_{22} & a_{23} \\ \color{red}{a_{31}} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \color{red}{a_{11}} \begin{vmatrix} \square & \square & \square \\ \square & a_{22} & a_{23} \\ \square & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - \color{blue}{a_{21}} \begin{vmatrix} \square & a_{12} & a_{13} \\ \square & \square & \square \\ \square & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \color{red}{a_{31}} \begin{vmatrix} \square & a_{12} & a_{13} \\ \square & a_{22} & a_{23} \\ \square & \square & \square \end{vmatrix}$$

$$= \color{red}{a_{11}} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - \color{blue}{a_{21}} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \color{red}{a_{31}} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

VEKTOR- UND MATRIXALGEBRA: MATRIXOPERATIONEN

HOCHSCHULE HEILBRONN

Die $Dreiecksform$ ist die Form einer Matrix, welche unterhalb der Hauptdiagonalen nur "0" enthält (obere Dreiecksform).

Beispiel. Umformung einer Matrix in Dreiecksform:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & -8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{Dreiecksform}$

> 2.Zeile + 1.Zeile mal (-1)
> 3.Zeile + 1.Zeile mal (-3)

3. Zeile + 2.Zeile mal (-3)

VEKTOR- UND MATRIXALGEBRA: MATRIXOPERATIONEN

HOCHSCHULE HEILBRONN

Der $Rang$ einer Matrix ist die Dimension des Vektorraums, welcher durch die Vektoren der Matrix aufgespannt wird.

> Bestimmung des Rangs einer Matrix:

Schritt 1. Bestimme die Dreiecksform der Matrix

Schritt 2. $Rang(Matrix) = Anzahl\ der\ Zeilen, die\ nicht\ nur\ 0\ enthalten$

Beispiel. Bestimmung des Rangs einer Matrix:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Schritt 1. Dreiecksform:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Schritt 2. Zähle Zeilen, die nicht nur 0 enthalten:

$$Rang(\boldsymbol{A}) = 2$$

VEKTOR- UND MATRIXALGEBRA: MATRIXOPERATIONEN

HOCHSCHULE HEILBRONN

$Matrizeninversion$ $(Matrizendivision)$: Matrix A^{-1} ist die Inverse von Matrix A, wenn:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = Einheitsmatrix\ \boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

> Einheitsmatrix **I** hat die Zahl „1“ entlang der Hauptdiagonalen ansonsten nur „0“

Gauß-Jordan-Algorithmus zur Bestimmung der Inversen:

$$(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{I}) \rightarrow Umformungen \rightarrow (\boldsymbol{I} \mid \boldsymbol{A}^{-1})$$

VEKTOR- UND MATRIXALGEBRA: MATRIXOPERATIONEN

Beispiel. Gauß-Jordan-Algorithmus

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{I}) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

HOCHSCHULE HEILBRONN

Beispiel. Gauß-Jordan-Algorithmus

$$(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{I}) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

2.Zeile – 1.Zeile mal 2

1.Zeile + 2. Zeile mal 2

2. Zeile mal -1

$(\boldsymbol{I} \mid \boldsymbol{A}^{-1})$

HOCHSCHULE HEILBRONN

Anmerkungen. Invertierbarkeit:

> Nur quadratische $(n \times n)$ Matrizen sind invertierbar

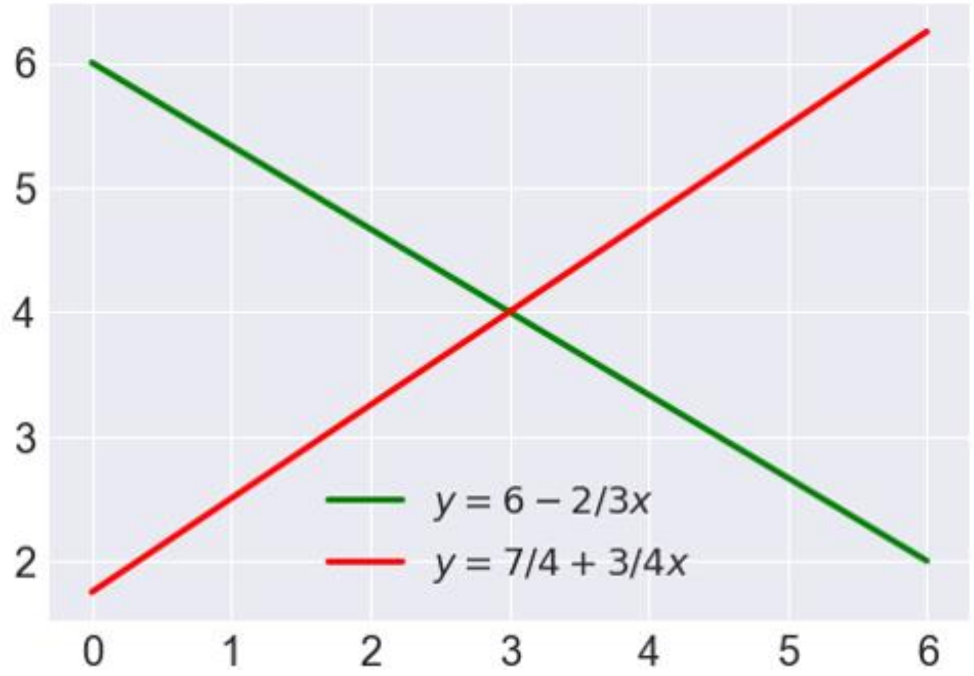
Die folgende Aussagen sind entwerder alle wahr oder alle falsch:

i. Eine $n \times n$ Matrix **A** ist invertierbar.

ii. Die Determinante von **A** ist ungleich 0 $(\det(\boldsymbol{A}) \neq 0)$.

iii. Matrix **A** hat vollen Rang hat $(Rang(\boldsymbol{A}) = n)$.

iv. Die Gleichung $\boldsymbol{A} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ hat nur die triviale Lösung: $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.



HOCHSCHULE HEILBRONN

› 3. LINEARE GLEICHUNGS-SYSTEME

Wirtschaftsmathematik | Prof. Dr. Florian Kauffeldt

LINEARE GLEICHUNGSSYSTEME: ANWENDUNG

HOCHSCHULE HEILBRONN

Lineare Gleichungssysteme in der BWL und VWL:

> Darstellung ökonomischer Zusammenhänge in vereinfachter Form

Beispiel. 2 Gleichungen in 2 Unbekannten

$$(i)\ 2x + 3y = 18$$

$$(ii)\ 3x - 4y = -7$$

LINEARE GLEICHUNGSSYSTEME: DARSTELLUNG

HOCHSCHULE HEILBRONN

Lineare Gleichungssysteme können mit **Vektoren** dargestellt werden.

Beispiel. $(i)\ 2x + 3y = 18$

$(ii)\ 3x - 4y = -7$

> In Vektorform:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} 18 \\ -7 \end{pmatrix}$$

LINEARE GLEICHUNGSSYSTEME: DARSTELLUNG

HOCHSCHULE HEILBRONN

Lineare Gleichungssysteme können mit **Matrizen** dargestellt werden.

Beispiel.

$$(i)\ 2x + 3y = 18$$

$$(ii)\ 3x - 4y = -7$$

> In Matrixform

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ -7 \end{pmatrix}$$

Allgemein:

$$Koeffizientenmatrix \cdot Vektor\ Unbekannte = Lösungsvektor$$

LINEARE GLEICHUNGSSYSTEME: LÖSUNGSMENGE

Ein lineares Gleichungssystem hat

i. entweder eine eindeutige Lösung,

ii. keine Lösung oder

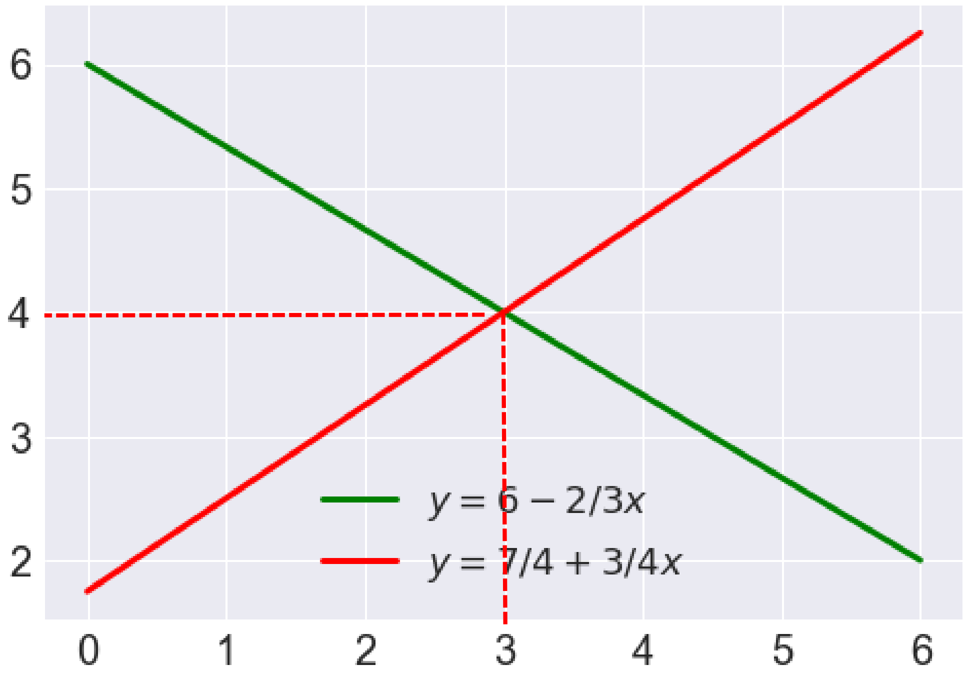
iii. unendlich viele Lösungen

LINEARE GLEICHUNGSSYSTEME: LÖSUNGSMENGE

Das Gleichungssystem $(i)\ 2x + 3y = 18$ hat eine eindeutige Lösung

$(ii)\ 3x - 4y = -7$

Lösung grafisch:



LINEARE GLEICHUNGSSYSTEME: LÖSUNGSMENGE

Das Gleichungssystem

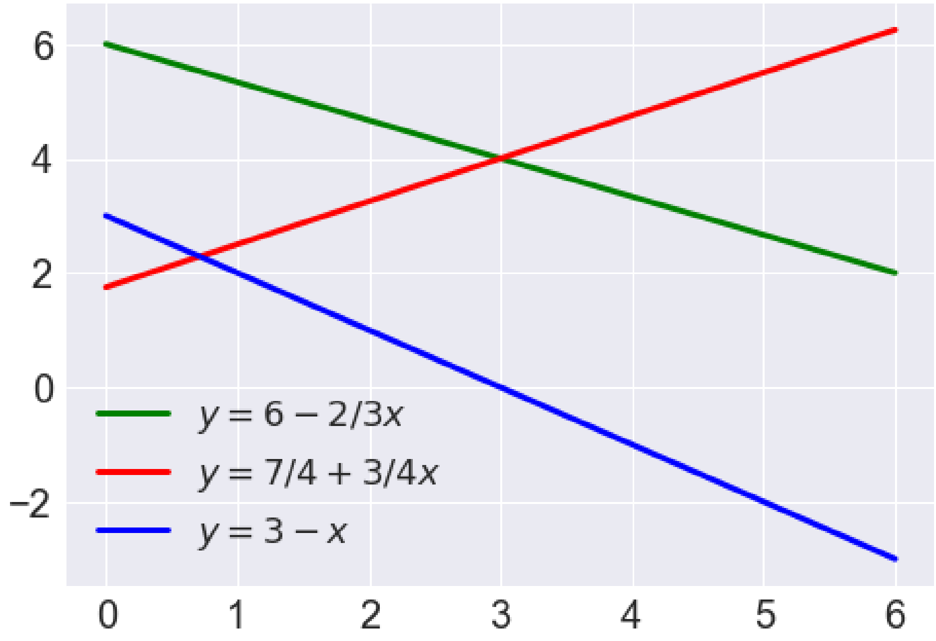
$$(i)\ 2x + 3y = 18$$

$$(ii)\ 3x - 4y = -7$$

$$(iii)\ x + y = 3$$

hat keine Lösung

Grafisch:



LINEARE GLEICHUNGSSYSTEME: LÖSUNGSMENGE

HOCHSCHULE HEILBRONN

Das Gleichungssystem $(i)\ 2x + 3y = 18$ hat unendlich viele Lösungen.

Lösungen grafisch:

$$Lösungen = \{(x, y)\colon\ 2x + 3y = 18\}$$

LINEARE GLEICHUNGSSYSTEME: LÖSUNGSVERFAHREN SUBSTITUTION

Lineare Gleichungssysteme können durch $Substitution$ gelöst werden.

Beispiel. $(i)\ 2x + 3y = 18$

$(ii)\ 3x - 4y = -7$

> Löse (i) nach y auf: $y = 6 - \frac{2}{3}x$

> Setze dies in (ii) ein: $3x - 4(6 - \frac{2}{3}x) = -7 \Leftrightarrow \frac{17}{3}x = 17 \Leftrightarrow x = 3$

> Damit: $y = 6 - \frac{2}{3} \cdot 3 = 4$

$$Lösung: (x, y) = (3,4)$$

LINEARE GLEICHUNGSSYSTEME: LÖSUNGSVERFAHREN GAUßSCHE ELIMINATION

$$Gaußsches\ Eliminationsverfahren:$$

Schritt 1. Matrixform des linearen Gleichungssystems aufsschreiben

Schritt 2. Erweiterte Koeffzientenmatrix aufschreiben:

$$(Koeffizientenmatrix \mid Lösungsvektor)$$

Schritt 3. Erweiterte Koeffizientenmatrix in Dreiecksform bringen

LINEARE GLEICHUNGSSYSTEME: LÖSUNGSVERFAHREN GAUßSCHE ELIMINATION

HOCHSCHULE HEILBRONN

$$Gaußsches\ Eliminationsverfahren:$$

Beispiel. $(i)\ 2x + 3y = 18$

$(ii)\ 3x - 4y = -7$

Schritt 1. Matrixform: $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ -7 \end{pmatrix}$

Schritt 2. Erweiterte Koeffizientenmatrix: $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 18 \\ 3 & -4 & -7 \end{array}\right)$

LINEARE GLEICHUNGSSYSTEME: LÖSUNGSVERFAHREN GAUßSCHE ELIMINATION

$$Gaußsches\ Eliminationsverfahren:$$

Beispiel. $(i)\ 2x + 3y = 18$

$(ii)\ 3x - 4y = -7$

Schritt 3. Dreiecksform:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 18 \\ 3 & -4 & -7 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 18 \\ 0 & -17/2 & -68/2 \end{array}\right)$$

- Aus 2. Zeile: $-\frac{17}{2} \cdot y = -\frac{68}{2} \rightarrow y = 4$
- $y = 4$ in 1. Zeile: $2x + 12 = 18 \rightarrow x = 3$

LINEARE GLEICHUNGSSYSTEME: LÖSUNGSVERFAHREN CRAMER REGEL

HOCHSCHULE HEILBRONN

$Cramersche\ Regel$ (insbesondere bei 2×2 effizient).

> Gegeben eine Koeffizientenmatrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}$, einen Vektor von Unbekannten $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ und einen Lösungsvektor $\begin{pmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_n \end{pmatrix}$

dann gilt für die Lösung der iten Unbekannten:

ite Spalte von **A** durch Lösungsvektor ersetzen

$$x_i = \frac{det\begin{pmatrix} c_{11} & \dots & l1 & \dots & c_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ c_{m1} & \dots & l_n & \dots & c_{mn} \end{pmatrix}}{\det(\boldsymbol{A})}$$

LINEARE GLEICHUNGSSYSTEME: LÖSUNGSVERFAHREN CRAMER REGEL

Cramersche Regel (insbesondere bei 2×2 effizient).

Beispiel. $(i)\ 2x + 3y = 18$

$(ii)\ 3x - 4y = -7$

$\rightarrow \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ -7 \end{pmatrix}$

$$x = \frac{\det\begin{pmatrix} 18 & 3 \\ -7 & -4 \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}} = \frac{18(-4) - (-7)3}{2(-4) - 3 \cdot 3} = \frac{-51}{-17} = 3,$$

$$y = \frac{\det\begin{pmatrix} 2 & 18 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}} = \frac{2(-7) - 3 \cdot 18}{-17} = \frac{-68}{-17} = 4$$

LINEARE GLEICHUNGSSYSTEME: LÖSBARKEIT

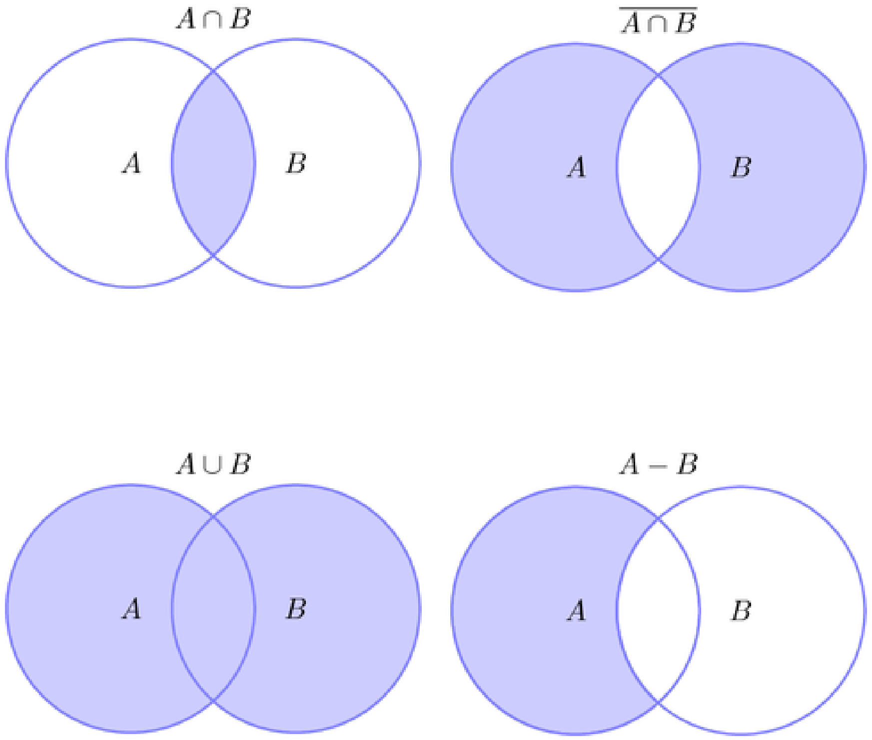
Satz von Kronecker-Capelli
Eine lineares Gleichungssystem ist genau dann lösbar, wenn der Rang der Koeffizientmatrix $\boldsymbol{A}$ gleich dem Rang der erweiterten Koeffizientenmatrix $(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{l})$ ist.

> Lösung ist eindeutig wenn außerdem: Rang(Koeffizientenmatrix) = Anzahl Unbekannte

> Für <u>quadratische</u> Koeffizientenmatrizen gilt:

$$\det(Koeffizientenmatrix) \neq 0 \Leftrightarrow Gleichungssystem\ eindeutig\ lösbar$$

HOCHSCHULE HEILBRONN



› 4. MENGENLEHRE

MENGEN: DEFINITION

Eine $Menge$ ist eine ungeordnete Liste von wohlunterscheidbaren Objekten.

> "Wohlunterscheidbar" bedeutet, dass kein Element in der Menge mehrfach vorhanden ist

> Menge ohne Objekte = leere Menge = ∅

Anmerkung. $\emptyset \; (= Menge) \neq 0 \; (= Zahl)$

MENGEN: SCHREIBWEISE

Mengen werden mit Mengenklammern { } geschrieben.

Beispiel 1.

$$M = \{Apfel, Banane\}$$

$$M = \{Lisa, Peter, Paul\}$$

MENGEN: SCHREIBWEISE

Eine unendliche Menge kann nicht als erschöpfende Liste aufgeschrieben werden.

> Lösung: Wir schreiben die Menge als Menge aller Objekte für die eine Bedingung gilt:

$$\{x \text{ für die Bedingung } y \text{ gilt}\} = \{x : y\}$$

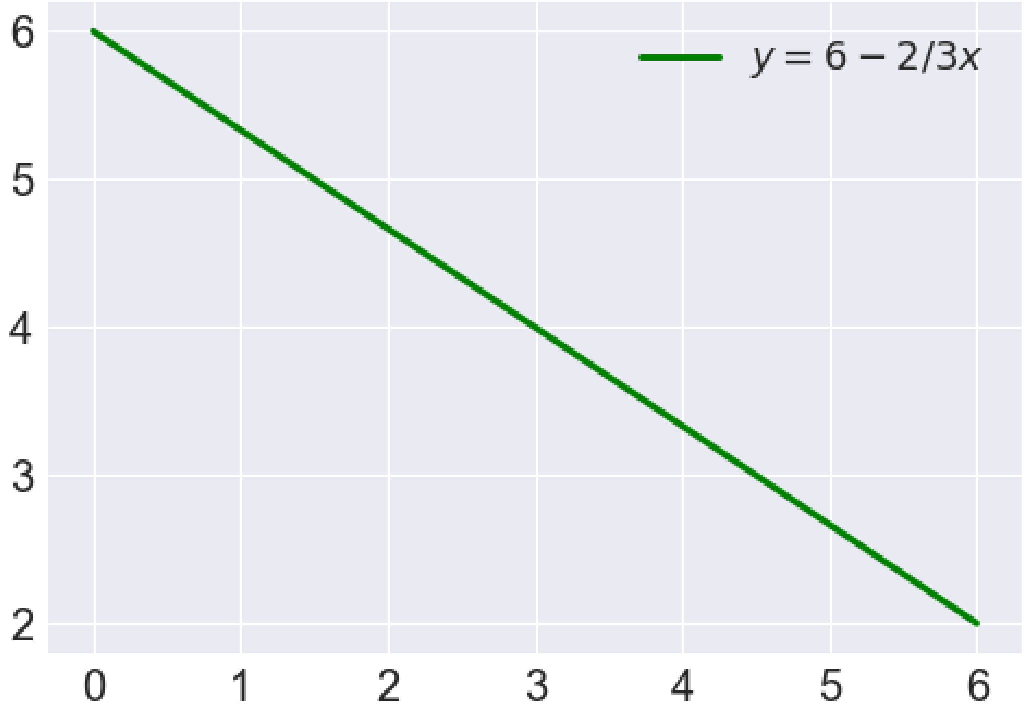
Beispiel 2. Intervall [1,4] in Mengenschreibweise:

$$[1,4] = \{x : 1 \leq x \leq 4\}$$

MENGEN: SCHREIBWEISE

Beispiel 3. Gerade y = 6 – 2/3x in Mengenschreibweise

$$\{(x, y): y = 6 - 2/3x\}$$

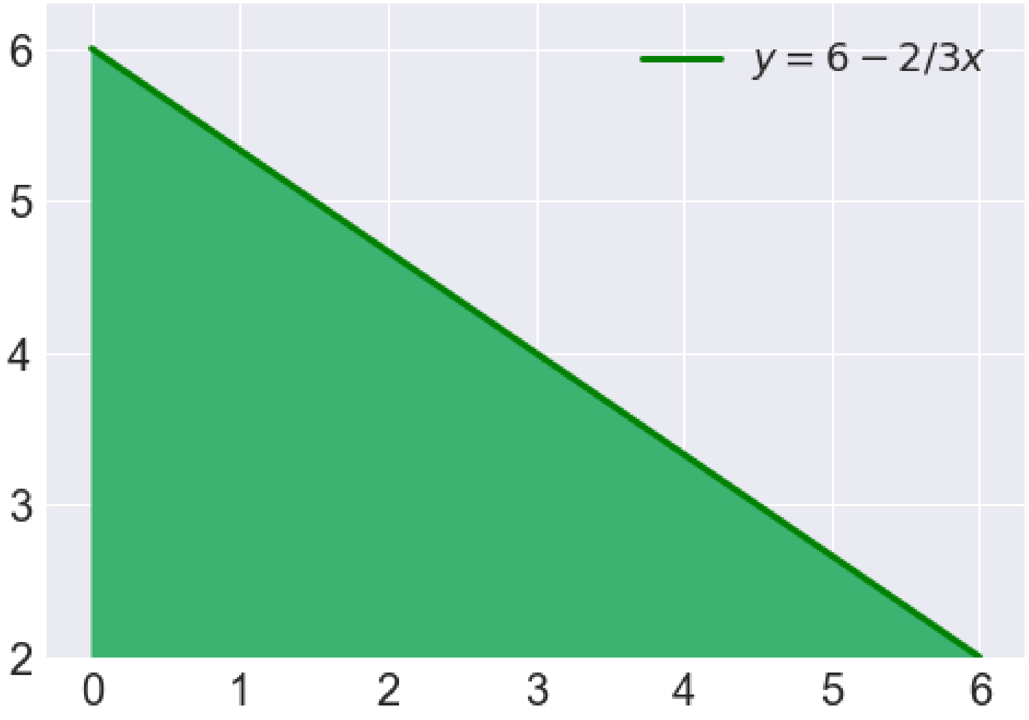


MENGEN: SCHREIBWEISE

HOCHSCHULE HEILBRONN

Beispiel 4. Ungleichung y ≤ 6 – 2/3x in Mengenschreibweise

$$\{(x, y): y \leq 6 - 2/3x\}$$



MENGEN: SCHREIBWEISE

Beispiel 5. Menge der geraden Zahlen:

$$\{2n : n \textit{ ist natürliche Zahl}\}$$

Beispiel 6. Eine Kugel als Menge:

$$\{x : \|x - m\| \leq r^2\}$$

> Koordinaten des Mittelpunkts $m = (m_1, \dots, m_n)$, r = Radius

MENGEN: ARTEN

Eine Menge heißt $unendlich$, wenn sie unendlich viele Elemente enthält.

MENGEN: ARTEN

HOCHSCHULE HEILBRONN

Eine Menge heißt $beschränkt$, wenn sie eine obere und untere Schranke hat.

Eine Menge in einem n-dimensionalen Raum ist beschränkt, wenn

> sie in einer n-dimensionalen Kugel enthalten ist

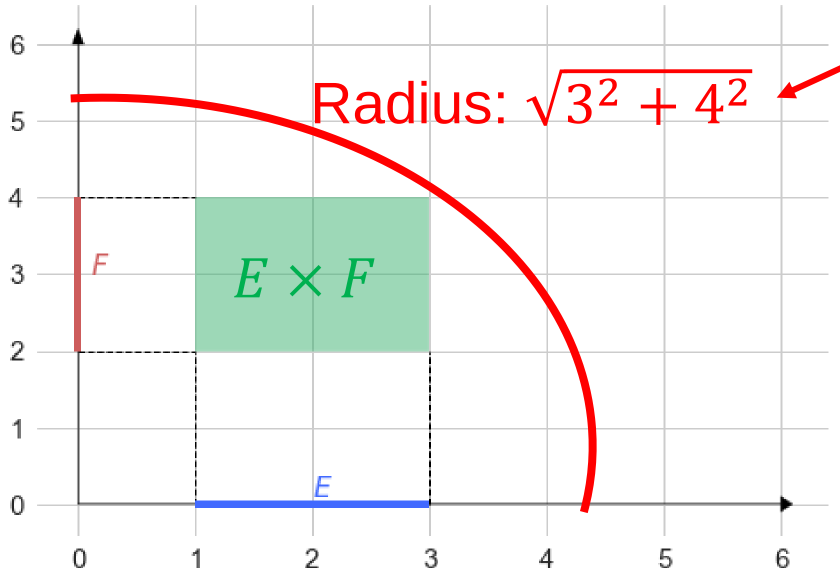
Beispiel. $\mathrm{M} = [1,3] \times [2,4]$

> die Menge ist beschränkt, da sie in der Kugel $\left\{x\colon \left\|\left(x - \binom{0}{0}\right)\right\| \leq 3^2 + 4^2\right\}$ enthalten ist

MENGEN: ARTEN

Beispiel. $\mathrm{M} = [1,3] \times [2,4]$

> die Menge ist beschränkt, da sie in der Kugel $\left\{x \colon \left\|\left(x - \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right)\right\| \leq 3^2 + 4^2\right\}$ enthalten ist



Quadrat des längsten Abstands der Menge vom Ursprung

MENGEN: ARTEN

Eine Menge heißt $abgeschlossen$, wenn der Rand zur Menge gehört.

(Etwas mathematischer: Eine Menge heißt *abgeschlossen*, wenn der Grenzwert jeder konvergenten Folge innerhalb der Menge liegt)

Beispiele.

> Abgeschlossene Menge: [2,4]

> Nicht-abgeschlossene Menge: (2,4]

MENGEN: ARTEN

Eine Menge heißt $kompakt$, wenn

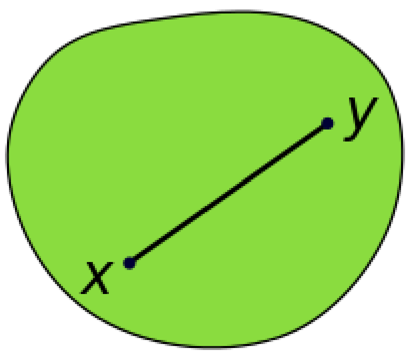
i. sie abgeschlossen und

ii. beschränkt

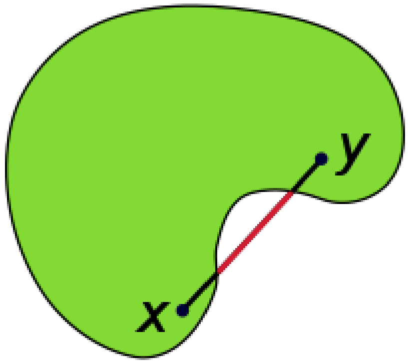
ist.

MENGEN: ARTEN

Eine Menge heißt $konvex$, wenn sie die Konvexkombinationen aller ihrer Punkte enthält:



Konvexe Menge



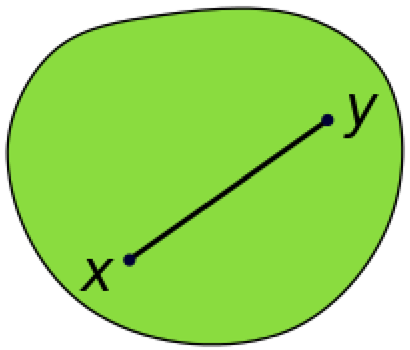
Nicht-konvexe Menge

Quelle: https://en.wikipedia.org/wiki/Convex_set

MENGEN: ARTEN

Erinnerung: Menge aller Konvexkombinationen zweier Punkte x und y ist eine Gerade:

$$\{z: z = \alpha x + (1 - \alpha)y, \alpha \in [0,1]\}$$

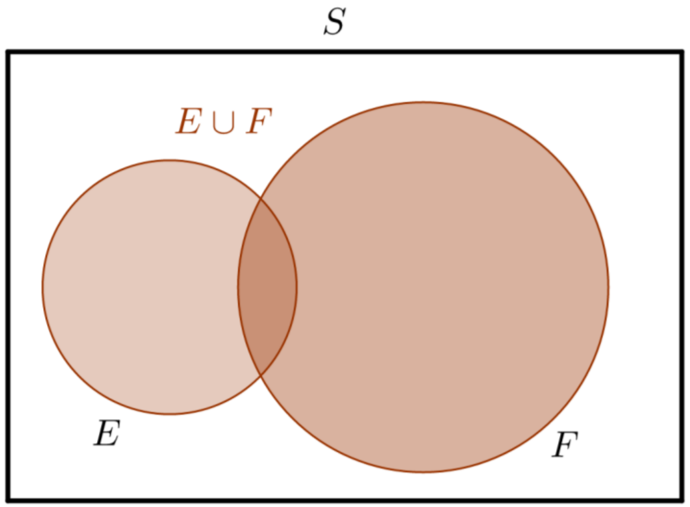


Quelle: https://en.wikipedia.org/wiki/Convex_set

MENGEN: OPERATIONEN

Vereinigungsmenge:

$$E \cup F = \{Alle\ Elemente\ die\ in\ A\ und/oder\ B\ enthalten\ sind\} = \{x: x \in E\ und/oder\ x \in F\}$$

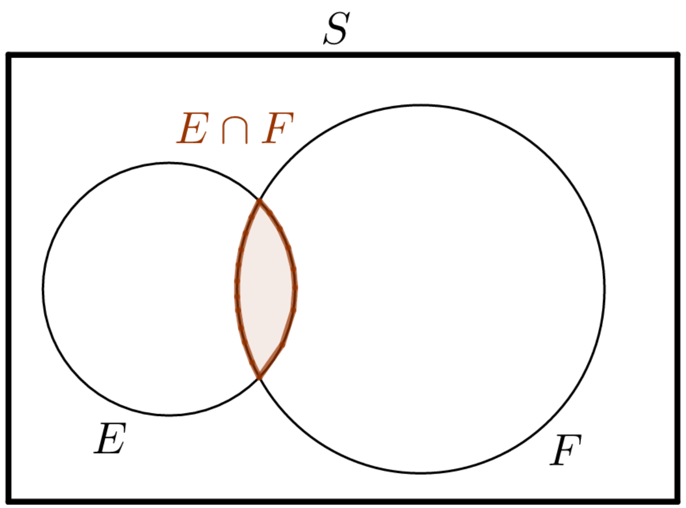


Beispiel. $E = \{Anton, Paul\}, F = \{Anton, Dora\} \rightarrow E \cup F = \{Anton, Paul, Dora\}$

MENGEN: OPERATIONEN

Schnittmenge:

$$E \cap F = \{Alle\ Elemente\ die\ in\ A\ und\ B\ enthalten\ sind\} = \{x: x \in E\ und\ x \in F\}$$

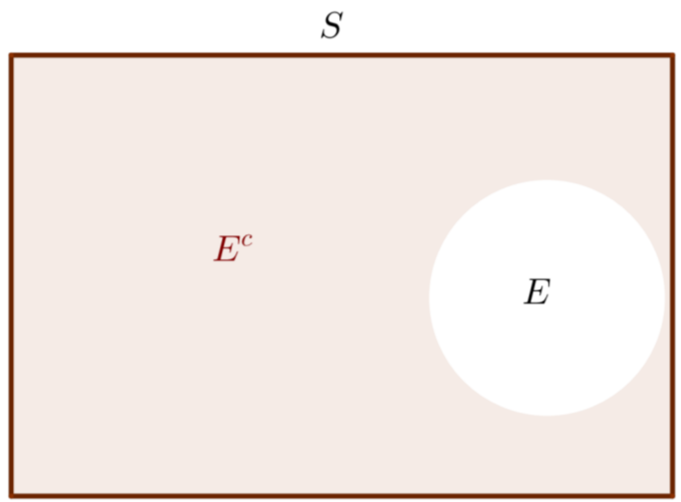


Beispiel. $E = \{Anton, Paul\}, F = \{Anton, Dora\} \rightarrow E \cap F = \{Anton\}$

MENGEN: OPERATIONEN

Komplementärmenge:

$$E^c = \{Alle\ Elemente, die\ \textcolor{red}{nicht}\ in\ E\ enthalten\ sind\} = \{x: x \notin E\}$$



Beispiel. $E = \{Anton, Paul\}, F = \{Anton, Dora\}, S = E \cup F \rightarrow E^c = \{Dora\}$

MENGEN: OPERATIONEN

Mengendifferenz:

$$E \setminus F = \{Alle\ Elemente, die\ in\ E, aber\ nicht\ in\ F\ enthalten\ sind\} = \{x: x \in E\ und\ x \notin F\}$$

Beispiel. $E = \{Anton, Paul\}, F = \{Anton, Dora\}$

$$E \setminus F = \{Paul\}$$

$$F \setminus E = \{Dora\}$$

Anmerkung. Wie das Beispiel zeigt ist die Mengendifferenz nicht kommutativ: $E \setminus F \neq F \setminus E$

MENGEN: OPERATIONEN

Das $kartesische\ Produkt\ A \times B$ zweier Mengen A und B ist die Menge:

$$A \times B = \{(a, b): a \in A, b \in B\}$$

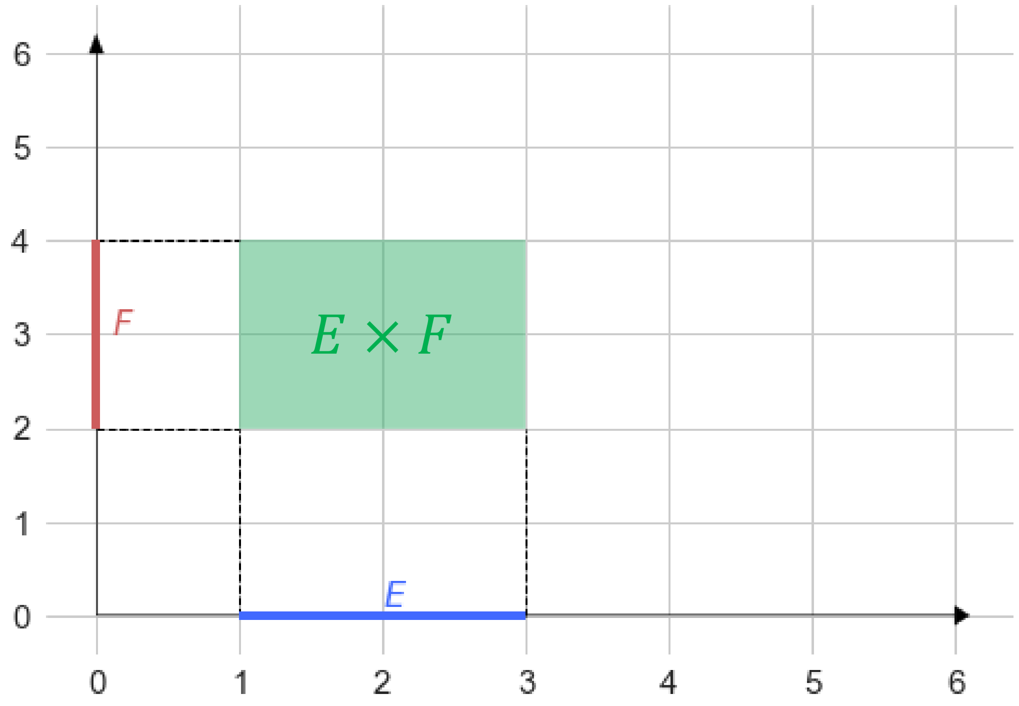
Beispiel 1. $A = \{Anton, Paul\}, B = \{Christina, Dora\}$

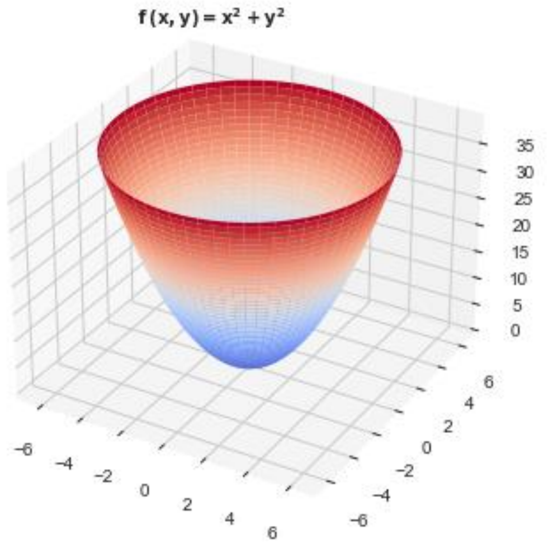
$$A \times B = \{(Anton, Christina), (Anton, Dora), (Paul, Christina), (Paul, Dora)\}$$

MENGEN: OPERATIONEN

Beispiel. $E = [1,3], F = [2,4]$

$$E \times F = \{(e, f): e \in [1,3], f \in [2,4]\}$$





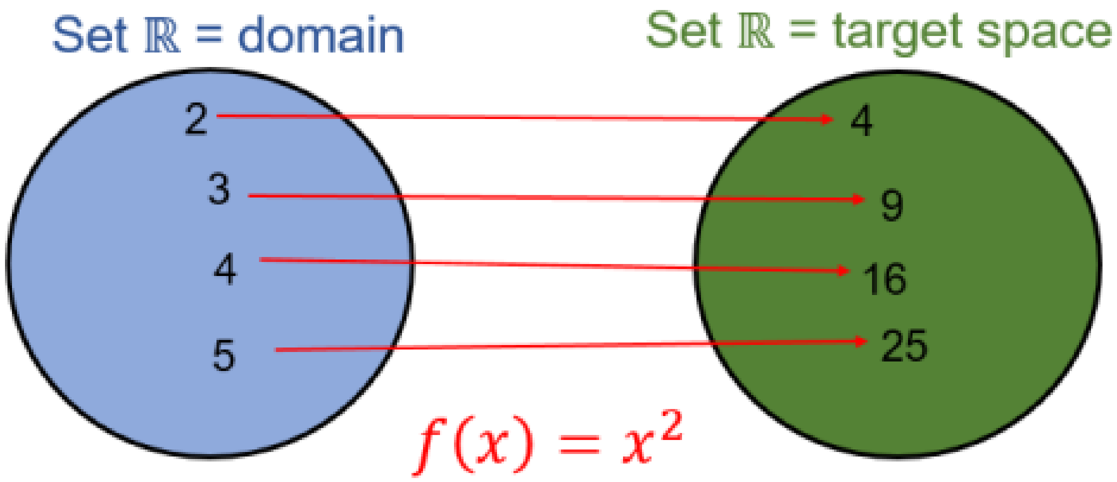
› 5. ANALYSIS

Wirtschaftsmathematik | Prof. Dr. Florian Kauffeldt

ANALYSIS: FUNKTIONEN

Eine $Funktion\ f$ ist eine Abbildung, die jedem Element einer Menge A (Definitionsmenge) ein Element einer Menge B (Zielraum) zuordnet:

$$f: A \to B.$$



ANALYSIS: FUNKTIONEN

HOCHSCHULE HEILBRONN

Gegeben eine Funktion $f: A \to B$,

- das $Bild$ $f(E)$ einer Menge $E \subseteq A$ unter f ist:

$$f(E) = \{f(x): x \in E\}$$

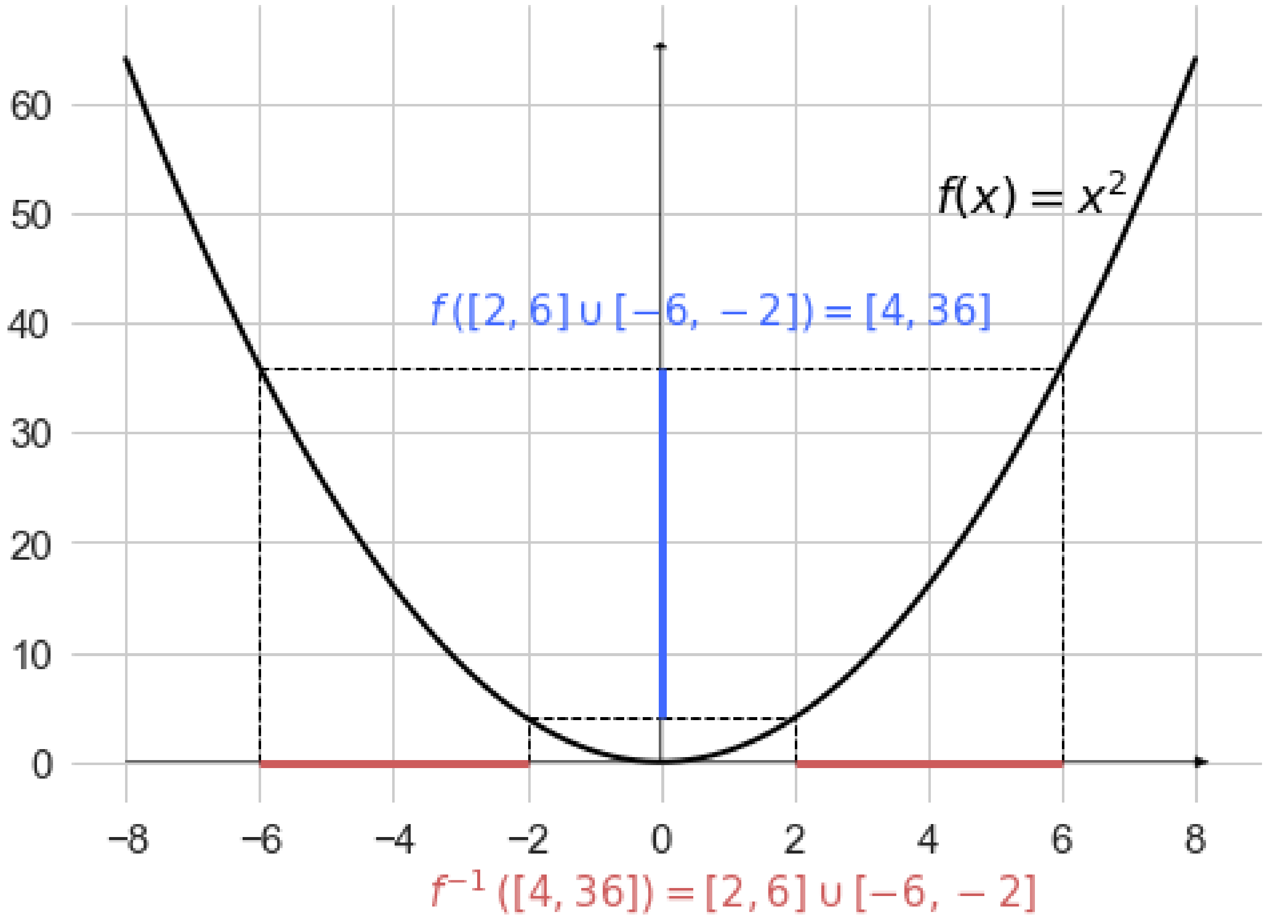
- das $Urbild$ $f^{-1}(F)$ einer Menge $F \subseteq B$ unter f ist:

$$f^{-1}(F) = \{x: f(x) \in F\}$$

- der $Wertebereich$ von f ist:

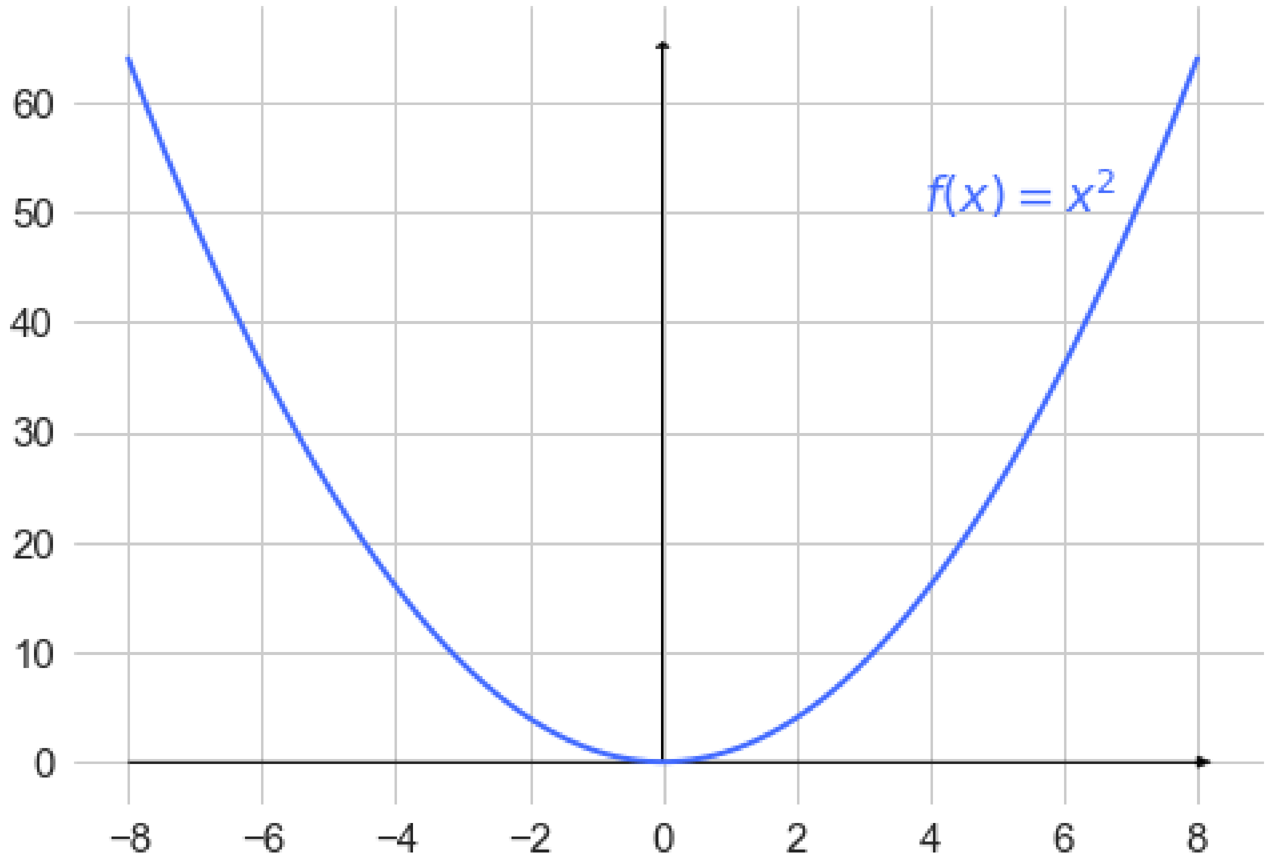
$$Wertebereich = f(A)$$

ANALYSIS: FUNKTIONEN



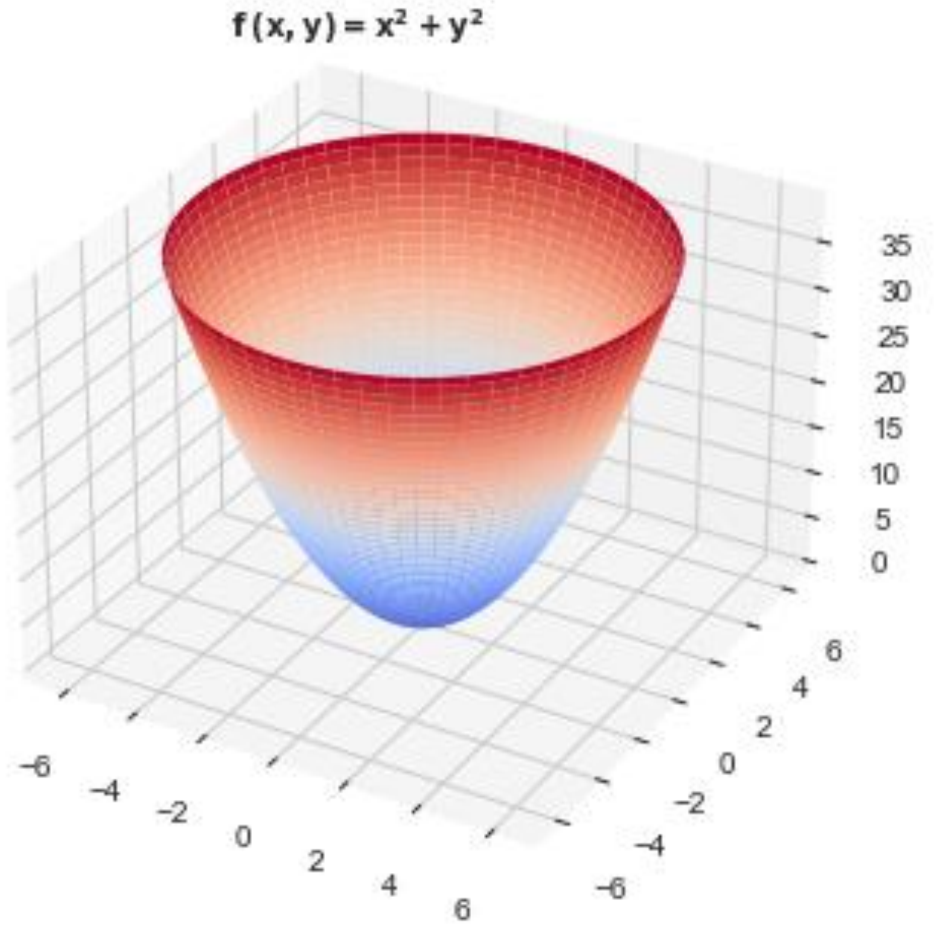
ANALYSIS: FUNKTIONEN

Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = x^2$ ist eine *univariate* Funktion



ANALYSIS: FUNKTIONEN

Die Funktion $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x, y) = x^2 + y^2$ ist eine $multivariate$ Funktion



ANALYSIS: FUNKTIONEN

Die $Niveaumenge$ einer Funktion f zum Niveau a ist:

$$N_f(a) = \{x : f(x) = a\}$$

> Anhand von Niveaumengen lassen sich 3D-Funktionen in 2D darstellen.

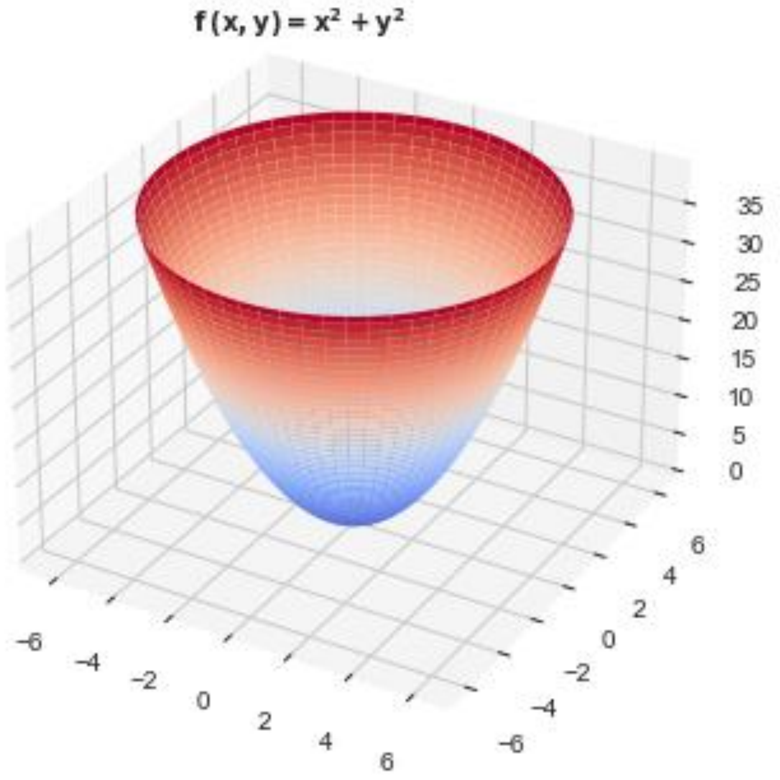
Beispiel. Niveau von $x^2 + y^2$ zum Niveau 3:

$$\{(x, y) : x^2 + y^2 = 3\}$$

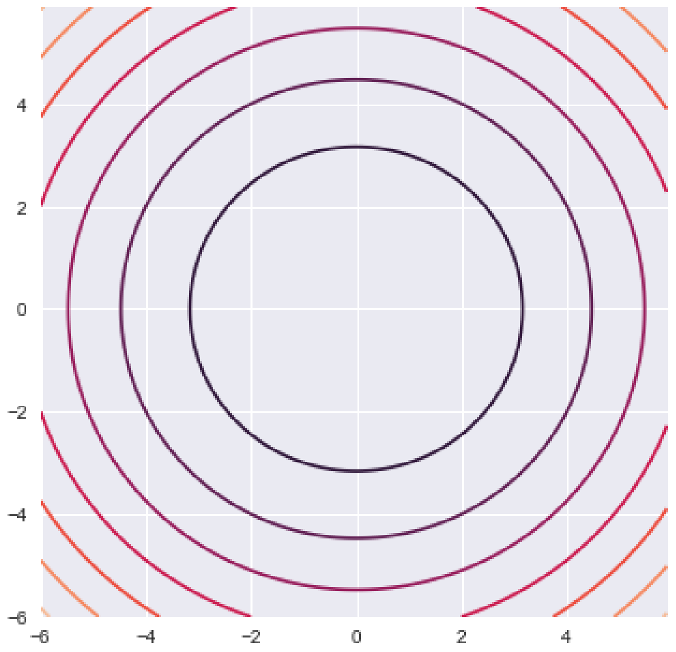
ANALYSIS: FUNKTIONEN

HOCHSCHULE HEILBRONN

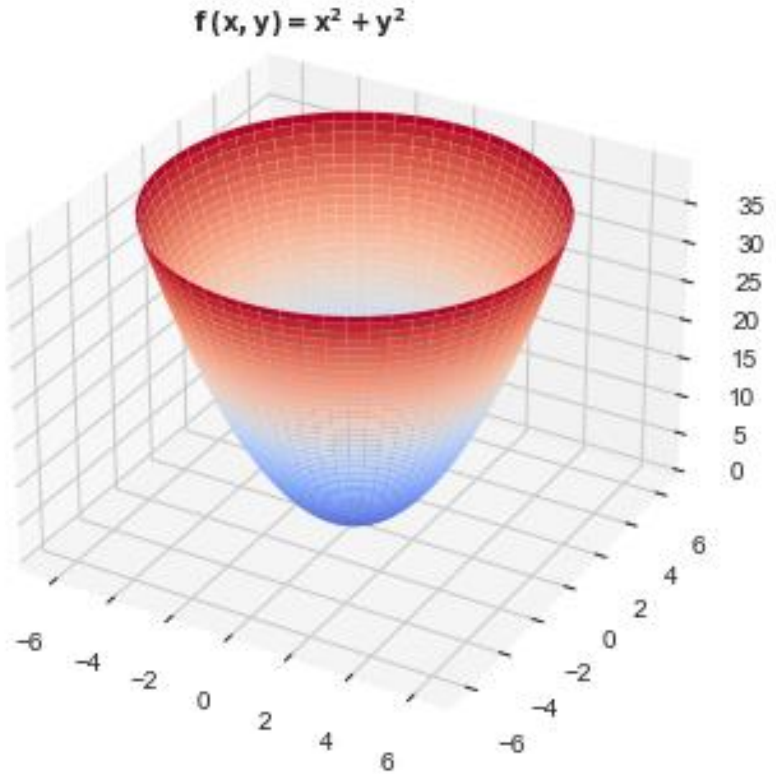
Funktion in 3D



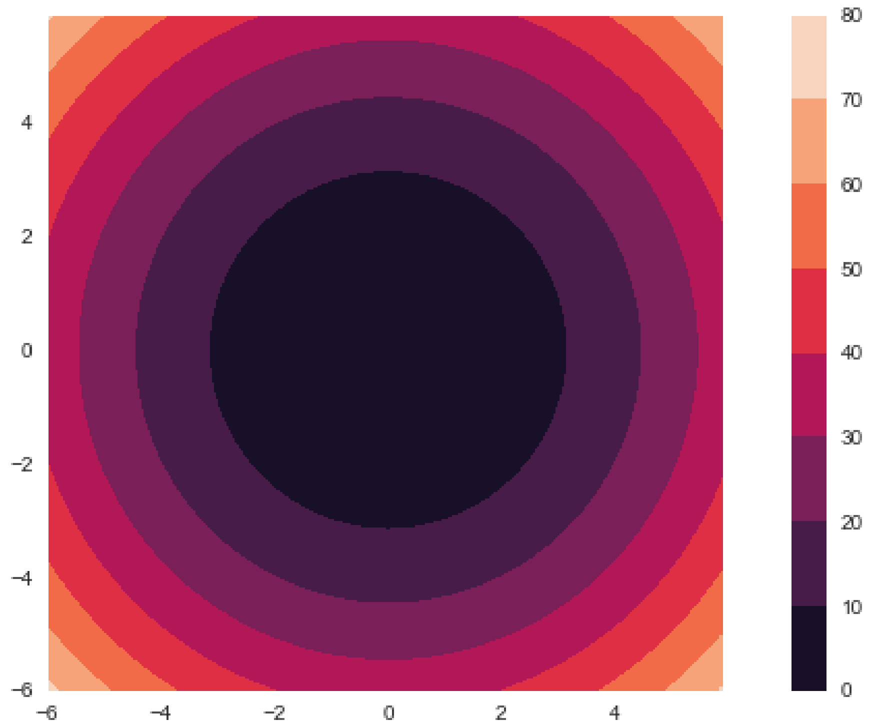
Niveaumengen der Funktion in 2D



Funktion in 3D



Niveaumengen der Funktion in 2D



ANALYSIS: STETIGKEIT

Eine Funktion heißt $stetig$, wenn sie keine "Sprungstellen" hat.

> Etwas mathematischer: Eine Funktion heißt $stetig$, wenn

die Urbilder abgeschlossener Mengen wieder abgeschlossen sind

> Summen, Produkte und Quotienten stetiger Funktionen sind wieder stetige Funktionen

ANALYSIS: STETIGKEIT

HOCHSCHULE HEILBRONN

Beispiel 1. Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x) = x^2$ stetig ist.

> Allgemeine abgeschlossene Menge: $[a, b]$ mit $a < b$

> Urbild dieser Menge unter f: $f^{-1}([a, b]) = \left[\sqrt{a}, \sqrt{b}\right]$ → abgeschlossen

> Da a, b allgemein gewählt wurden gilt das immer

q.e.d.

ANALYSIS: STETIGKEIT

Zwischenwertsatz

Eine univariate stetige Funktion definiert auf dem Intervall $[a, b]$ nimmt jeden beliebigen Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an.

Beispiel. Die Funktion $\sqrt{x}$ nimmt auf $[4,16]$ jeden Wert zwischen 2 und 4 an.

ANALYSIS: STETIGKEIT

Beispiel 2. Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x) = \begin{cases} x+1 \; für \; x > 0 \\ 0 \; für \; x \leq 0 \end{cases}$ nicht stetig ist.

Möglichtkeit 1. Zwischenwertsatz:

> $f(0) = 0$ und $f(2) = 3$

> Wenn f stetig ist, müsste f jeden Wert in [0,3] für x aus [0,2] annehmen

> Dies ist aber nicht der Fall: Es existiert kein x sodass $f(x) = 0.5$

q.e.d.

ANALYSIS: STETIGKEIT

Beispiel 2. Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x) = \begin{cases} x + 1 \text{ für } x > 0 \\ 0 \text{ für } x \leq 0 \end{cases}$ nicht stetig ist.

Möglichtkeit 2. Urbilder:

- Abgeschlossenes Intervall: [1,3]
- Urbild von [1,3]: $f^{-1}([1,3]) = (0,2]$ ist nicht abgeschlossen

q.e.d.

ANALYSIS: DIFFERENZIERBARKEIT

HOCHSCHULE HEILBRONN

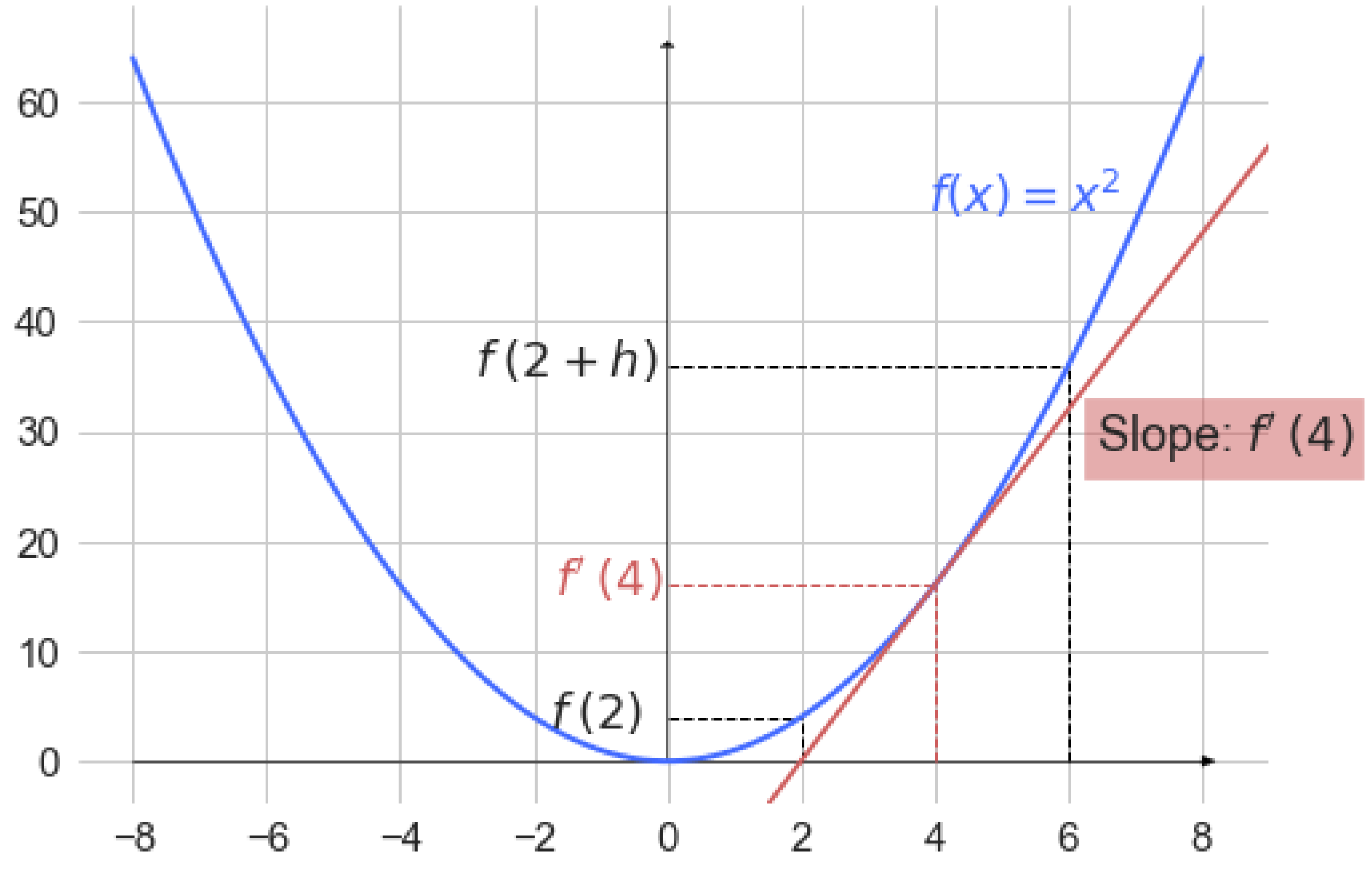
- Gegeben eine Funktion f. Der $Differenzenquotient$ $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ zweier Punkte x_0 und x_1 ist:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

- Die $Ableitung$ $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ ist der Grenzwert des Differenzenquotienten:

$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

ANALYSIS: DIFFERENZIERBARKEIT



ANALYSIS: DIFFERENZIERBARKEIT

HOCHSCHULE HEILBRONN

Beispiel. Bestimmen Sie die erste Ableitung der Funktion $f(x) = x^2$.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - (x)^2}{h} = \lim_{h \to 0} 2x + h = 2x$$

ANALYSIS: DIFFERENZIERBARKEIT

HOCHSCHULE HEILBRONN

- $f(x) = Konstante \rightarrow f'(x) = 0$

- $f(x) = x^n \rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}$

ANALYSIS: DIFFERENZIERBARKEIT

HOCHSCHULE HEILBRONN

- $Kettenregel$: Die Ableitung einer Funktion $h = f(g)$ ist $h' = f'(g) \cdot g'$

Beispiel. $h = (4x + 2)^2 \rightarrow h' = 2(4x + 2) \cdot 4$

- $Produktregel$: Die Ableitung einer Funktion $h = f \cdot g$ ist $h' = f'g + f \cdot g'$

Beispiel. $h = x^2 \cdot (4x + 2) \rightarrow h' = 2x(4x + 2) + x^2 4$

- $Quotientenregel$: Die Ableitung einer Funktion $h = f/g$ ist $h' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

Beispiel. $h = \frac{x^2}{(4x+2)} \rightarrow h' = \frac{2x(4x+2) - x^2 4}{(4x+2)^2}$

ANALYSIS: DIFFERENZIERBARKEIT

Die $partielle\ Ableitung$ $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ einer Funktion $f(x_1, \ldots, x_n)$ nach einer Variablen x_i ist:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = Differenziere\ f\ nach\ x_i\ und\ behandle\ alle\ anderen\ Variablen\ als\ Konstanten$$

Beispiel. $f(x_1, x_2) = x_1^2 \cdot 2x_2 + x_1$

> $\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2x_1 2x_2 + 1$

> $\frac{\partial f}{\partial x_2} = 2x_1^2$

ANALYSIS: DIFFERENZIERBARKEIT

Der $Gradient$ ∇_f einer Funktion $f(x_1, \dots, x_n)$ ist der Vektor der partiellen Ableitungen:

$$\nabla_f = \begin{pmatrix} \partial f / \partial x_1 \\ \vdots \\ \partial f / \partial x_n \end{pmatrix}$$

Beispiel. $f(x_1, x_2) = x_1^2 \cdot 2x_2 + x_1$

$$\nabla_f = \begin{pmatrix} 4x_1x_2 + 1 \\ 2x_1^2 \end{pmatrix}$$

Anmerkung. Der Gradient zeigt immer in die Richtung des steilsten Anstiegs von f

ANALYSIS: DIFFERENZIERBARKEIT

Die $Hesse - Matrix\ H_f$ einer Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ entspricht deren zweiter Ableitung:

$$\mathrm{H}_f(x) = \begin{pmatrix} \partial^2 f/\partial x_1 \partial x_1 & \cdots & \partial^2 f/\partial x_1 \partial x_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial^2 f/\partial x_n \partial x_1 & \cdots & \partial^2 f/\partial x_n \partial x_n \end{pmatrix}$$

ANALYSIS: DIFFERENZIERBARKEIT UND STETIGKEIT

Es gilt:

1. Jede differenzierbare Funktion ist stetig.

2. Stetige Funktionen können nicht differenzierbar sein.

   > Die Betragsfunktion $|x| = \sqrt{x^2}$ ist z.B. stetig, aber an der Stelle 0 nicht differenzierbar:

$$\lim_{h\downarrow 0} \frac{|0+h| - |0|}{h} = 1$$

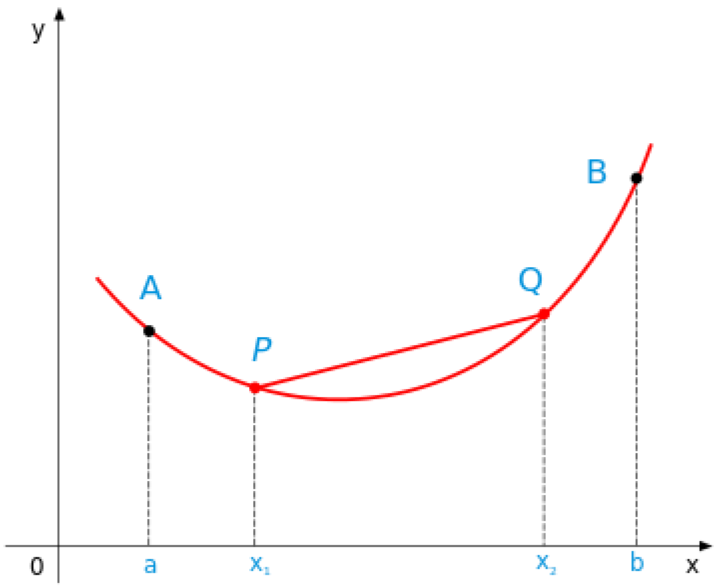
$$\neq$$

$$\lim_{h\uparrow 0} \frac{|0-h| - |0|}{-h} = -1$$

ANALYSIS:
KONVEXE UND KONKAVE FUNKTIONEN

Eine Funktion f heißt $konvex$, wenn die Menge oberhalb der Funktion konvex ist:

$$f\ ist\ konvex \Leftrightarrow f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1-\alpha)f(x_2)\ \text{für}\ alle\ x_1, x_2$$



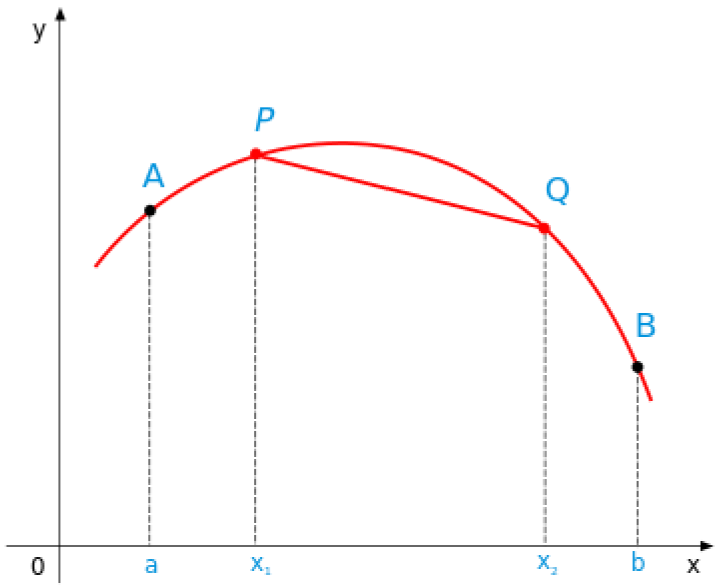
Konvexe Funktion
Quelle: https://de.wikipedia.org/wiki/Konvexe_und_konkave_Funktionen

ANALYSIS:
KONVEXE UND KONKAVE FUNKTIONEN

HOCHSCHULE HEILBRONN

Eine Funktion f heißt $konkav$, wenn die Menge unterhalb der Funktion konvex ist:

$$f\ ist\ konkav \Leftrightarrow f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \geq \alpha f(x_1) + (1-\alpha)f(x_2)\ f\text{ü}r\ alle\ x_1, x_2$$



Konkave Funktion
Quelle: https://de.wikipedia.org/wiki/Konvexe_und_konkave_Funktionen

ANALYSIS:
KONVEXE UND KONKAVE FUNKTIONEN

HOCHSCHULE HEILBRONN

Eine Funktion heißt *strikt* $konvex\ bzw.\ konkav$, wenn statt der schwachen Ungleichung $\leq, \geq$

- eine strikte Ungleichung $<, >$ gilt

ANALYSIS:
KONVEXE UND KONKAVE FUNKTIONEN

HOCHSCHULE HEILBRONN

Beispiel 1. Zeigen Sie, dass die Funktion $|x|$ konvex ist.

> Funktion ist nicht differenzierbar

> Für x, y gilt:

$$|\alpha x + (1-\alpha)y| = \alpha|x| + (1-\alpha)|y| \text{ für } x, y > 0 \text{ und } x, y < 0$$

$$|\alpha x + (1-\alpha)y| < \alpha|x| + (1-\alpha)|y| \text{ für } x > 0 \text{ und } y < 0 \text{ oder vice versa}$$

> Damit

$$|\alpha x + (1-\alpha)y| \leq \alpha|x| + (1-\alpha)|y| \; für \; alle \; x, y$$

q.e.d.

ANALYSIS: KONVEXE UND KONKAVE FUNKTIONEN

HOCHSCHULE HEILBRONN

Beispiel 2. Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ für $x > 0$ konkav ist.

- Funktion ist differenzierbar für $x > 0$
- $f''(x) = -\frac{1}{4x^{\frac{3}{2}}} < 0$ für $x > 0$

q.e.d.

ANALYSIS: MONOTONIE

HOCHSCHULE HEILBRONN

> Eine Funktion $f\colon A \to B$ heißt $monoton\ steigend\ (fallend)$, wenn

  für alle $x, y \in A$ gilt, wenn $x \leq y$, dann $f(x) \leq (\geq) f(y)$

> Eine Funktion $f\colon A \to B$ heißt $streng\ monoton\ steigend\ (fallend)$, wenn

  für alle $x, y \in A$ gilt, wenn $x < y$, dann $f(x) < (>) f(y)$

> Wenn die Funktion $f\ differenzierbar$ ist so heißt sie *monoton steigend (fallend),* wenn

$$f'(x) \geq (\leq)\ 0\ für\ alle\ x$$

ANALYSIS: MONOTONIE

HOCHSCHULE HEILBRONN

Beispiel. Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x) = \begin{cases} x+1 \; für \; x > 0 \\ 0 \; für \; x \leq 0 \end{cases}$ monoton ist.

> Funktion ist nicht differenzierbar
> Fall 1: $x < y < 0 \rightarrow f(x) = f(y) = 0$
> Fall 2: $x < 0 < y \rightarrow f(x) = 0 < f(y) > 0$
> Fall 3: $0 < x < y \rightarrow f(x) < f(y)$
> Zusammen: für $x < y$:

$$f(x) \leq f(y)$$

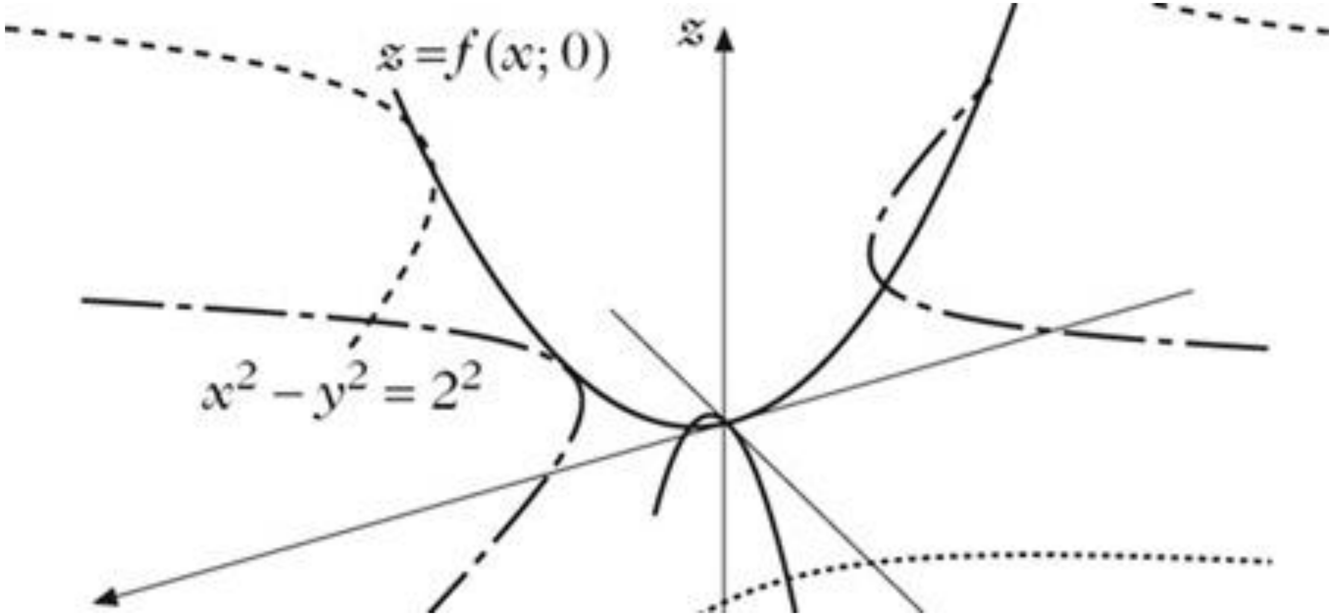
q.e.d.

ANALYSIS:
MONOTONIE, KONVEXITÄT UND KONKAVITÄT

HOCHSCHULE HEILBRONN

Eine zweifach differenzierbare univariate Funktion f heißt

- konvex, wenn ihre Ableitungen monoton wachsen ($f'' > 0$)
- konkav, wenn ihre Ableitungen monoton fallen ($f'' < 0$)



› 6. OPTIMIERUNG

Wirtschaftsmathematik | Prof. Dr. Florian Kauffeldt

OPTIMIERUNG: OHNE NEBENBEDINGUNGEN

Optimierungsproblem:

- Maximiere eine Funktion f:

$$\max_x f(x)$$

- Maximierung und Minimierung:

$$\min_x f(x) = \max_x -f(x)$$

OPTIMIERUNG: OHNE NEBENBEDINGUNGEN

Beispiel Univariat. $f(x) = x^2$

$$\min_x x^2 = \max_x -x^2$$

$$-f'(x) = -2x \Leftrightarrow x^* = 0$$

$$-f''(x^*) = -2 < 0 \Leftrightarrow konkave\ Funktion \rightarrow Maximum\ von\ -x^2$$

OPTIMIERUNG: OHNE NEBENBEDINGUNGEN

- Der Extremwert x^* einer nicht-monotonen $univariaten$ Funktion f wird erreicht, wenn

$$f'(x^*) = 0$$

Wenn

- $f''(x^*) < 0$ handelt es sich um ein Maximum (konkave Funktion)
- $f''(x^*) > 0$ handelt es sich um ein Minimum (konvexe Funktion)

OPTIMIERUNG: OHNE NEBENBEDINGUNGEN

HOCHSCHULE HEILBRONN

Beispiel Multivariat. Beispiel . $f(x,y) = -x^2 - y^2 + x$

$$\max_{x,y} f(x,y)$$

- $\nabla_f(x) = \begin{pmatrix} -2x+1 \\ -2y \end{pmatrix} \rightarrow (x^*, y^*) = (\frac{1}{2}, 0)$
- $\mathrm{H}_f(x) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$
- $\left(\frac{1}{2}, 0\right) \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = (-1{,}0) \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} < 0 \Leftrightarrow$ negativ definit (Maximum)

OPTIMIERUNG: OHNE NEBENBEDINGUNGEN

Eine Matrix M ist an der Stelle x'

- $positiv\ definit$, wenn

$$\mathrm{x'}^T \mathrm{H}_f(x')x' > 0$$

- $negativ\ definit$, wenn

$$\mathrm{x'}^T \mathrm{H}_f(x')x' < 0$$

OPTIMIERUNG: OHNE NEBENBEDINGUNGEN

HOCHSCHULE HEILBRONN

> Der Extremwert x^* einer nicht-monotonen $multivariaten$ Funktion f wird erreicht, wenn

$$\nabla_f(x^*) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wenn

> die Hesse-Matrix negativ definit ist, handelt es sich um ein Maximum (konkave Funktion)

> die Hesse-Matrix positiv definit ist, handelt es sich um ein Minimum (konvexe Funktion)

OPTIMIERUNG: MIT NEBENBEDINGUNGEN

Optimierungsproblem mit k Nebenbedingungen:

$$\max_{x_1,\dots,x_n} f(x_1, \dots, x_n) \; so \; dass$$
$$g_1(x_1, \dots, x_n) = 0$$
$$\vdots$$
$$g_k(x_1, \dots, x_n) = 0$$

OPTIMIERUNG: MIT NEBENBEDINGUNGEN

HOCHSCHULE HEILBRONN

Lösung Optimierungsproblem mit k Nebenbedingungen:

$$\max_{x_1,\ldots,x_n} f(x_1, \ldots, x_n) \; so\ dass$$

$$\begin{gathered} g_1(x_1, \ldots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ g_k(x_1, \ldots, x_n) = 0 \end{gathered}$$

Schritt 1: Lagrange-Funktion aufstellen:

$$L(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_k) = f(x_1, \ldots, x_n) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \times g_i(x_1, \ldots, x_n)$$

Schritt 2: Extremwerte von Lagrange-Funktion bestimmen

OPTIMIERUNG: MIT NEBENBEDINGUNGEN

HOCHSCHULE HEILBRONN

Beispiel 1.

$$\max_{x,y} x^2 + y^2 \; s.d.$$

$$g_1: x + y - 1 = 0$$

Schritt 1: Lagrange-Funktion aufschreiben

$$L(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(x + y - 1)$$

OPTIMIERUNG:
MIT NEBENBEDINGUNGEN

HOCHSCHULE HEILBRONN

Beispiel 1.

Schritt 2: Extremwert von Lagrange-Funktion bestimmen

$$\nabla_L = \begin{pmatrix} 2x + \lambda \\ 2y + \lambda \\ x + y - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

OPTIMIERUNG: MIT NEBENBEDINGUNGEN

Beispiel 2. Nutzenmaximierung unter der Nebenbedingung der Budgetrestriktion

> Nutzenfunktion: $U(Wasser, Wein) = Wasser \times Wein$

> Budgetbeschränkung: $Wasser + 3Wein \ = \ 150$

Bestimmen Sie die optimalen Konsummengen von Wasser und Wein.

OPTIMIERUNG:
MIT NEBENBEDINGUNGEN

HOCHSCHULE HEILBRONN

Beispiel 3. Kostenminimierung unter Nebenbedingungen

- Ziel: Produktion von 30 Autos
- Produktionsfunktion: $\mathrm{P}(k,l) = \sqrt{k} + l$, mit k = Kapital, l = Arbeit
- Kostenfunktion: $p_k = 1$, $p_l = 20 \rightarrow C(k,l) = k + 20l$

Bestimmen Sie den optimalen Mitteleinsatz zur Produktion der 30 Autos.

OPTIMIERUNG: EXISTENZ VON EXTREMWERTEN

Extremwertsatz

Gegeben eine Funktion $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Wenn

i. A kompakt ist und

ii. f stetig ist,

dann existieren Werte in A, die f maximieren und minimieren.

OPTIMIERUNG: EINDEUTIGKEIT VON EXTREMWERTEN

Gegeben eine stetige Funktion $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, wobei A kompakt ist. Wenn

- die Funktion konvex ist, so existiert ein eindeutiges globales Minimum
- die Funktion konkav ist, so existiert ein eindeutiges globales Maximum

OPTIMIERUNG: EXISTENZ UND EINDEUTIGKEIT

Beispiel. Überprüfen Sie, ob die Funktion $f: [-1,1] \times [-1,1] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y) = |x + y - 2|$$

ein eindeutiges Minimum annimmt.

THE END!

Please refer any questions to:
Prof. Dr. Florian Kauffeldt
Faculty of International Business
florian.kauffeldt@hs-heilbronn.de