HOCHSCHULE HEILBRONN

› WIRTSCHAFTS-MATHEMATIK

Wirtschaftsmathematik | Prof. Dr. Florian Kauffeldt

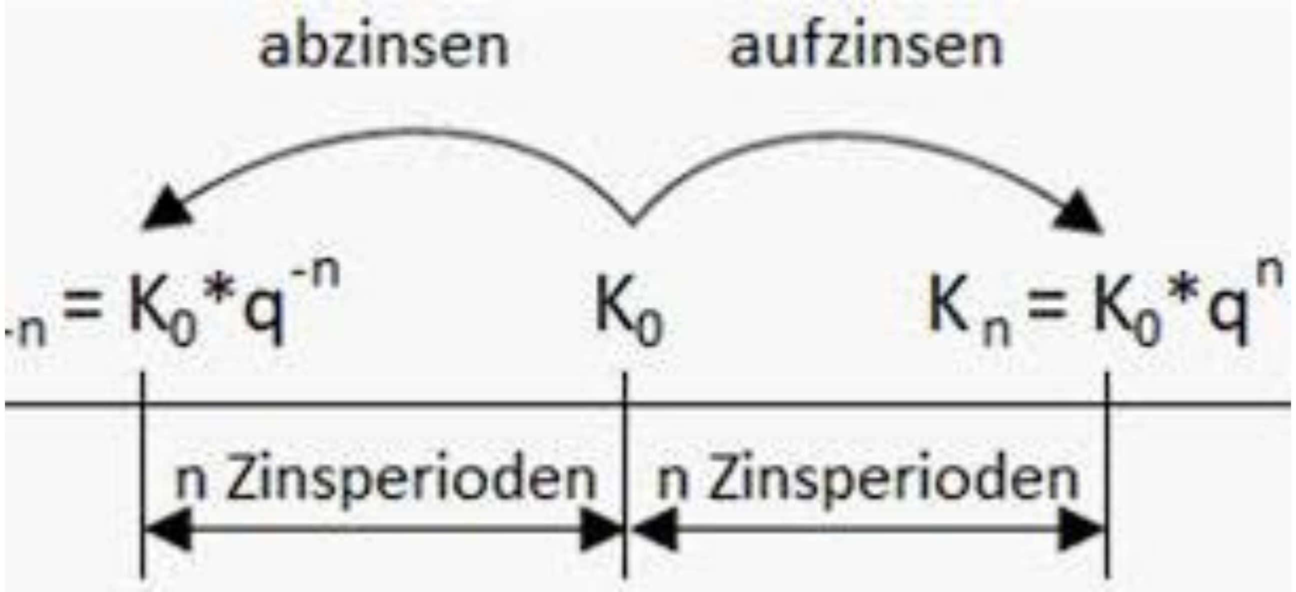
QUELLEN

PETER ALBRECHT (2014): Finanzmathematik für Wirtschaftswissenschaftler, 3. Auflage, Schäffer Poeschel.

KNUT SYDSAETER, PETER HAMMOND, ARNE STROM, ANDRÉS CARVAJAL (2018): Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler, 5. Auflage, Pearson.

INHALT

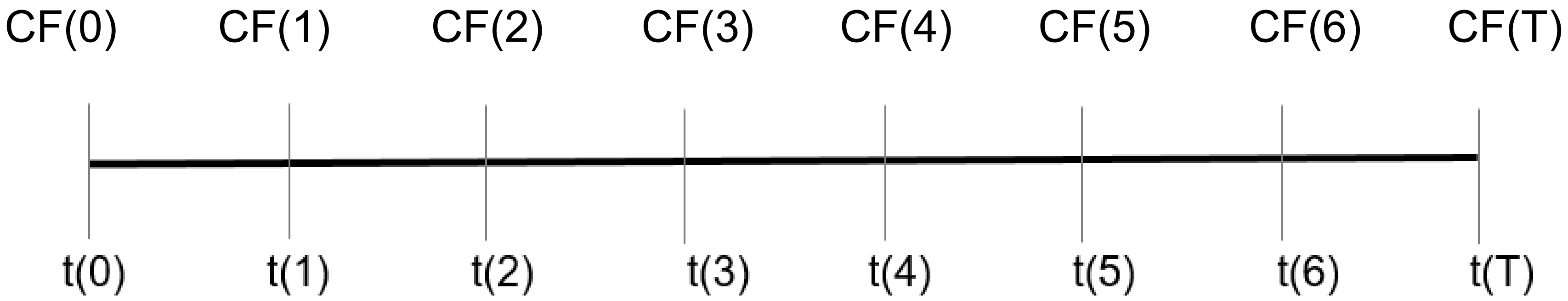
HOCHSCHULE HEILBRONN



› 1. FINANZMATHEMATIK

FINANZMATHEMATIK: ZAHLUNGSSTRÖME

CF = Cash Flow = Zahlungsstrom



t = Zeitpunkt

> Zahlungsströme erfolgen in regelmäßigen, diskreten Abständen, Grundannahme: jährlich

FINANZMATHEMATIK: ZINSATZ

HOCHSCHULE HEILBRONN

Fragen:

- Was ist ein Geldbetrag zum Zeitpunkt t=T heute (t=0) wert?
- Was ist ein Geldbetrag heute (t=0) zum Zeitpunkt t=T wert?

Zinssatz i = Umrechnung von Zahlungsströme auf unterschiedliche Zeitperioden

FINANZMATHEMATIK: BARWERT

> Abzinsungfaktor:

$$\frac{1}{1+i}$$

Beispiel. Zinssatz: i = 5%, Wert nach 3 Perioden t = 3: w(3) = 1.157625

> Barwert heute (t = 0):

$$\left(\frac{1}{1+i}\right)^t \cdot w = \left(\frac{1}{1.05}\right)^3 \cdot 1.157625 = 1$$

FINANZMATHEMATIK: ZUKUNFTSWERT

HOCHSCHULE HEILBRONN

- Aufzinsungsfaktor

$$(1 + i)$$

Beispiel. Zinssatz: i = 5%, Wert heute: w(0) = 1

- Zukunftswert in 3 Perioden (t = 3):

$$(1 + i)^t \cdot w = (1{,}05)^3 \cdot 1 = 1.157625$$

FINANZMATHEMATIK: BARWERT ZUKUNFTSWERT

Der Zukunftswert einer Anlage

- bei Zinssatz i
- nach t Perioden

ist:

$$\boldsymbol{Zukunftswert = (1+i)^t \cdot Barwert}$$

Es gilt:

$$\boldsymbol{Abszinsungsfaktor = \frac{1}{Aufzinsungsfaktor}}$$

FINANZMATHEMATIK: ZINSESZINS

Beispiel. Barwert = 20000, Zinssatz (i) = 5%, Jahre (t) = 5

Jahr	Anfangsbetrag	Zinsgutschrift	Endbetrag	Zinseszins
1	20000.00	1000.00	21000.00	0.00
2	21000.00	1050.00	22050.00	50.00
3	22050.00	1102.50	23152.50	102.50
4	23152.50	1157.63	24310.13	157.63
5	24310.13	1215.51	25525.63	215.51

FINANZMATHEMATIK: UNTERJÄHRIGE UND KONTINUIERLICHE VERZINSUNG

HOCHSCHULE HEILBRONN

- **Unterjährige Verzinsung** mit m Zahlungen pro Jahr.

$$Aufzinsungsfaktor = \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{m \cdot t}$$

- **Kontinuierliche Verzinsung** mit $m \to \infty$ Zahlungen pro Jahr.

$$Aufzinsungsfaktor = \lim_{m \to \infty} \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{m \cdot t} = e^{i \cdot t}$$

FINANZMATHEMATIK: NACHSCHÜSSIGE ANNUITÄTEN

HOCHSCHULE HEILBRONN

Nachschüssige Annuitäten sind

- regelmäßige Zahlungen,
- die am Ende jeder Periode geleistet werden.

Beispiele. Kredite, Sparverträgen

FINANZMATHEMATIK: NACHSCHÜSSIGE ANNUITÄTEN

A = Annuität, i = Zinssatz, t = Perioden

> Barwert

$$BW(A,i,t) = A \cdot \left(\frac{1-(1+i)^{-t}}{i}\right)$$

> Zukunftswert:

$$ZW(A,i,t) = A \cdot \left(\frac{(1+i)^{t}-1}{i}\right)$$

FINANZMATHEMATIK: NACHSCHÜSSIGE ANNUITÄTEN

HOCHSCHULE HEILBRONN

Annuitätendarlehen:

> Kreditsumme (Barwert) = 10.000 €, Laufzeit t = 5 Jahre, Zinssatz 5% pro Jahr,

> Zahlungsweise: Jährliche gleichbleibende Rate (Annuität)

Jahr	Restschuld zu Beginn	Zinsen (5 %)	Tilgung	Rate (Annuität)	Restschuld am Ende
1	10.000,00 €	500,00 €	1.809,78 €	2.309,78 €	8.190,22 €
2	8.190,22 €	409,51 €	1.900,27 €	2.309,78 €	6.289,95 €
3	6.289,95 €	314,50 €	1.995,28 €	2.309,78 €	4.294,67 €
4	4.294,67 €	214,73 €	2.095,05 €	2.309,78 €	2.199,62 €
5	2.199,62 €	109,98 €	2.199,80 €	2.309,78 €	0,00 €

FINANZMATHEMATIK: VORSCHÜSSIGE ANNUITÄTEN

HOCHSCHULE HEILBRONN

Bei der vorschüssigen Annuität werden alle Zahlungen eine Periode früher ausgezahlt

→ alle Zahlungen mit dem Faktor (1 + i) multiplizieren:

$$Barwert_{vorschüssig} = Barwert_{nachschüssig} \cdot (1+i)$$

$$Zukunftswert_{vorschüssig} = Zukunftswert_{nachschüssig} \cdot (1+i)$$

FINANZMATHEMATIK: EWIGE RENTE

Erinnerung Barwert Annuität:

$$A \cdot \left(\frac{1 - (1 + i)^{-t}}{i} \right)$$

Für $t \to \infty$:

$$Barwert(A, i) = \frac{A}{i}$$

FINANZMATHEMATIK:
EWIGE RENTE MIT WACHSTUMSRATE

HOCHSCHULE HEILBRONN

Barwert ewige Rente deren jährliche Auszahlung mit Wachstumsrate g ansteigt:

$$Barwert(A_0, i, g) = \frac{A_0(1+g)}{i-g} = \frac{A_1}{i-g}$$

HOCHSCHULE HEILBRONN

› 2. LINEARE ALGEBRA

VEKTOR- UND MATRIXALGEBRA: DEFINITION VEKTOREN

Ein $Vektor$ ist eine geordnete Liste von Objekten in Spalten- oder Zeilenform.

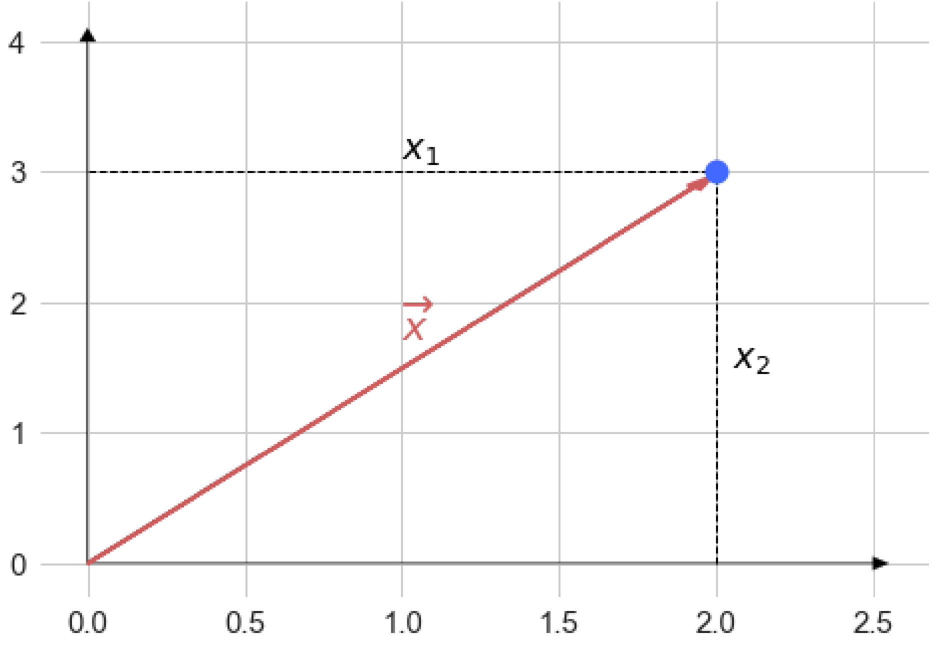
- Zeilenvektor ($1 \times n$-Vektor):

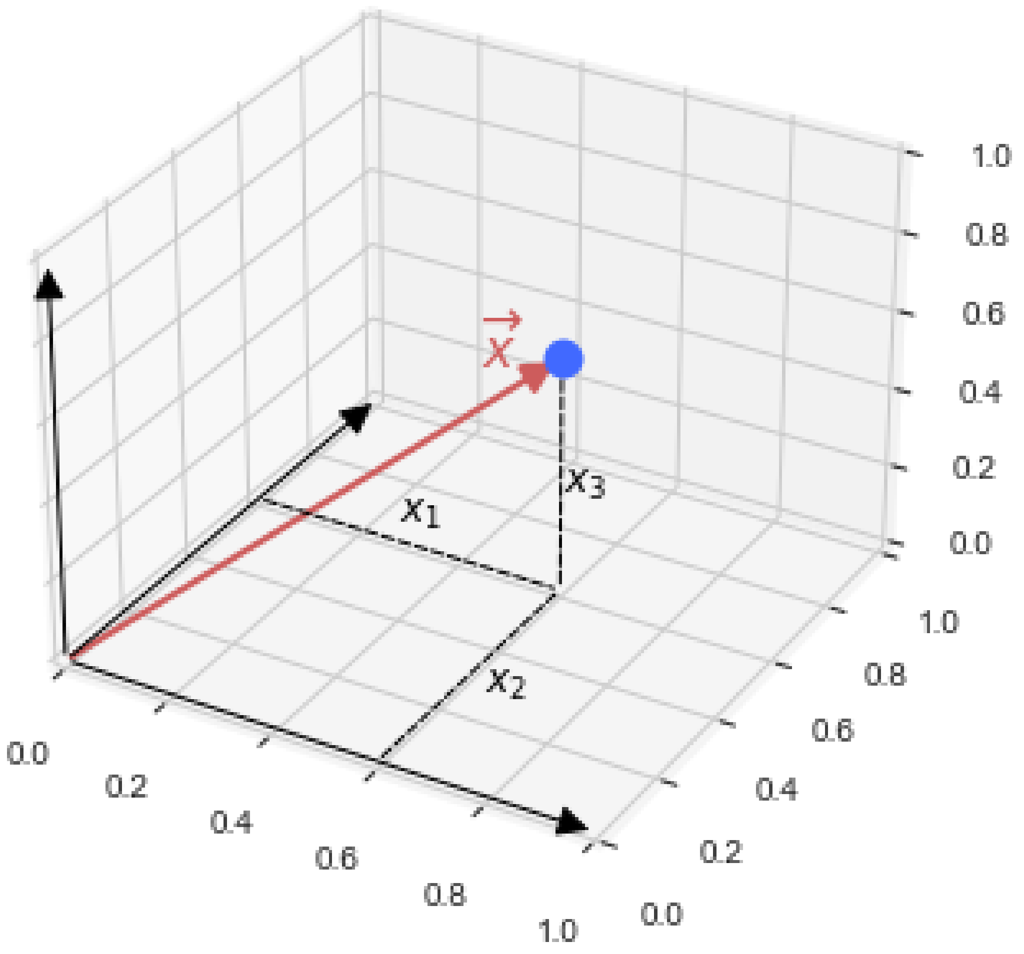
$$(x_1, \dots, x_n)$$

- Spaltenvektor ($n \times 1$-Vektor):

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

VEKTOR- UND MATRIXALGEBRA: VEKTOREN GRAFISCH





VEKTOR- UND MATRIXALGEBRA: VEKTOROPERATIONEN

HOCHSCHULE HEILBRONN

- $Vektoraddition$ (und -subtraktion) erfolgt elementweise:

$$(1{,}2) + (4{,}5) = (5{,}7)$$

- $Vektormultiplikation$ (und -division) = Summe der Produkte der Elemente:

$$(1{,}2) \cdot (4{,}5) = (1 \cdot 4) + (2 \cdot 5) = 14$$

- $Skalarmultiplikation$ (Zahl mal Vektor) erfolgt elementweise:

$$(1{,}2) \cdot 4 = (4{,}8)$$

- $Euklidische\ Distanz$ zwischen zwei Punkten:

$$||(1{,}2), (4{,}5)|| = \sqrt{(1-4)^2 + (2-5)^2} = \sqrt{18}$$

VEKTOR- UND MATRIXALGEBRA: DEFINITION MATRIX

Ein geordnetes, rechteckiges Schema von Objekten

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m \times n} = \left(a_{ij}\right)_{m \times n}$$

heißt $m \times n$ *Matrix*

> m = Anzahl der Zeilen (i = Zeilenindex)

> n = Anzahl der Spalten (j = Spaltenindex)

> a_{ij} = Elemente oder Komponenten der Matrix A

VEKTOR- UND MATRIXALGEBRA: ANWENDUNGSBEISPIELE MATRIX

Strukturierte Verarbeitungen von Daten mit Excel-Tabellen, SAP-Tabellen,…, z.B.:

- Bestellmengen je Kunde und Produkt
- Verkaufsmengen je Niederlassung und Produkt

Beschreibung linearer Beziehungen, z.B.:

- Produktionsprozess – Fertigungsplanung
- Unternehmenssteuerung

….

VEKTOR- UND MATRIXALGEBRA: ELEMENTARE MATRIXOPERATIONEN

HOCHSCHULE HEILBRONN

- $Matrizenaddition$: Elementweise (bei Matrizen mit gleicher Anzahl Spalten und Zeilen)

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 5 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 9 & 8 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

- $Skalarmultiplikation$: Elementweise

$$4 \cdot \begin{pmatrix} 5 & 5 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 20 & 8 \\ 4 & -8 & 4 \end{pmatrix}$$

VEKTOR- UND MATRIXALGEBRA: ELEMENTARE MATRIXOPERATIONEN

> $Matrizenmultiplikation: Zeile \times Spalte$

Beispiel.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Schritt 1:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 4 & * \\ * & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & * \\ * & * \end{pmatrix}$$

Schritt 2:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \\ * & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ * & * \end{pmatrix}$$

VEKTOR- UND MATRIXALGEBRA: ELEMENTARE MATRIXOPERATIONEN

HOCHSCHULE HEILBRONN

Schritt 3: $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 2 \cdot 4 & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 9 & * \end{pmatrix}$

Schritt 4: $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 2 \end{pmatrix}$

VEKTOR- UND MATRIXALGEBRA: ELEMENTARE MATRIXOPERATIONEN

HOCHSCHULE HEILBRONN

Anmerkungen. Matrizenmultiplikation

> Matrizenmultiplikation $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ ist nur definiert, wenn

Anzahl der Spalten in Matrix **A** = Anzahl der Zeilen in Matrix **B**

> Wenn **A** = $m \times n$ Matrix und **B** = $n \times k$ Matrix, dann ist

$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ eine $m \times k$ Matrix

VEKTOR- UND MATRIXALGEBRA: ELEMENTARE MATRIXOPERATIONEN

HOCHSCHULE HEILBRONN

Rechenregeln. Matrizenmultiplikation. Seien **A, B, C** Matrizen, dann gilt:

1. Matrizenmultiplikation ist $assoziativ$:

$$(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$$

2. Matrizenmultiplikation ist $distributiv$:

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{AB} + \boldsymbol{AC}$$

3. Matrizenmultiplikation ist $\boldsymbol{nicht}$ $kommutativ$:

$$\boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA}$$

VEKTOR- UND MATRIXALGEBRA: ELEMENTARE MATRIXOPERATIONEN

$Transponieren\ von\ Matrizen$ (Vertauschen von Zeilen und Spalten):

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

VEKTOR- UND MATRIXALGEBRA: SPEZIELLE MATRIZEN

Eine Matrix A heißt

- *quadratisch*, wenn Anzahl Spalten = Anzahl Zeilen (A ist $n \times n$)
- *symmetrisch*, wenn $A = A^T$
- *Einheitsmatrix* I, wenn die Einträge auf der Hauptdiagonalen 1 und sonst 0 sind:

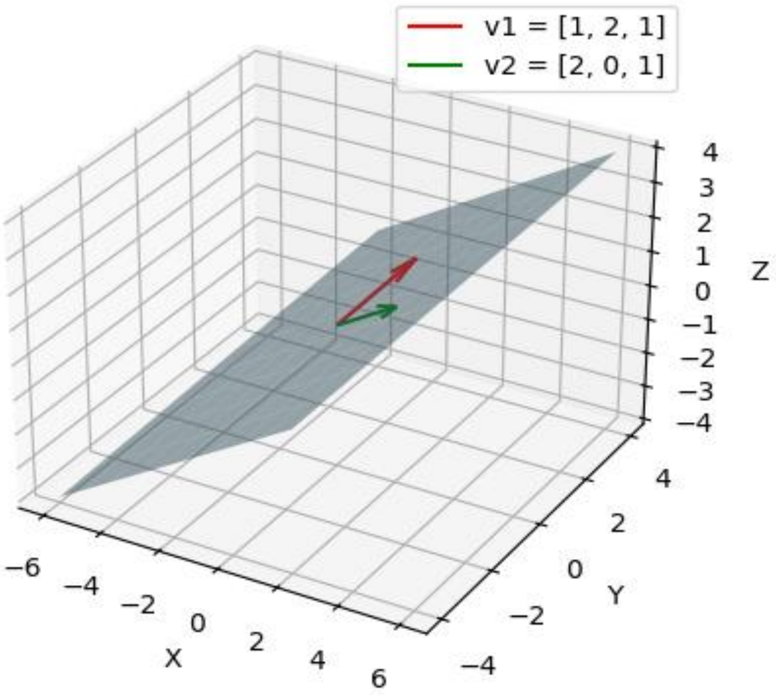
$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

VEKTOR- UND MATRIXALGEBRA: MATRIZEN SPANNEN EINEN RAUM AUF

HOCHSCHULE HEILBRONN

Die Spaltenvektoren der Matrix spannen einen Unterraum des gesamten Raums auf

Beispiel. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Die Matrix spannt folgenden 2-dimensionaler Unterraum auf:



VEKTOR- UND MATRIXALGEBRA: RANG EINER MATRIX

HOCHSCHULE HEILBRONN

Der $Rang$ einer Matrix ist

die Dimension des Vektorraums, welcher durch die Vektoren der Matrix aufgespannt wird.

Bestimmung des Rangs einer Matrix:

> Schritt 1. Bestimme die Dreiecksform der Matrix

> Schritt 2. $Rang(Matrix) = Anzahl\ der\ Zeilen, die\ nicht\ nur\ 0\ enthalten$

VEKTOR- UND MATRIXALGEBRA: RANG EINER MATRIX

Die $obere\ Dreiecksform$ ist

die Form einer Matrix, welche unterhalb der Hauptdiagonalen nur "0" enthält.

Beispiel. Umformung einer Matrix in Dreiecksform:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & -8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\boldsymbol{Dreiecksform}}$

> 2.Zeile + 1.Zeile mal (-1)
> 3.Zeile + 1.Zeile mal (-3)

3. Zeile + 2.Zeile mal (-3)

VEKTOR- UND MATRIXALGEBRA: RANG EINER MATRIX

Beispiel. Bestimmung des Rangs einer Matrix:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Schritt 1. Dreiecksform:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

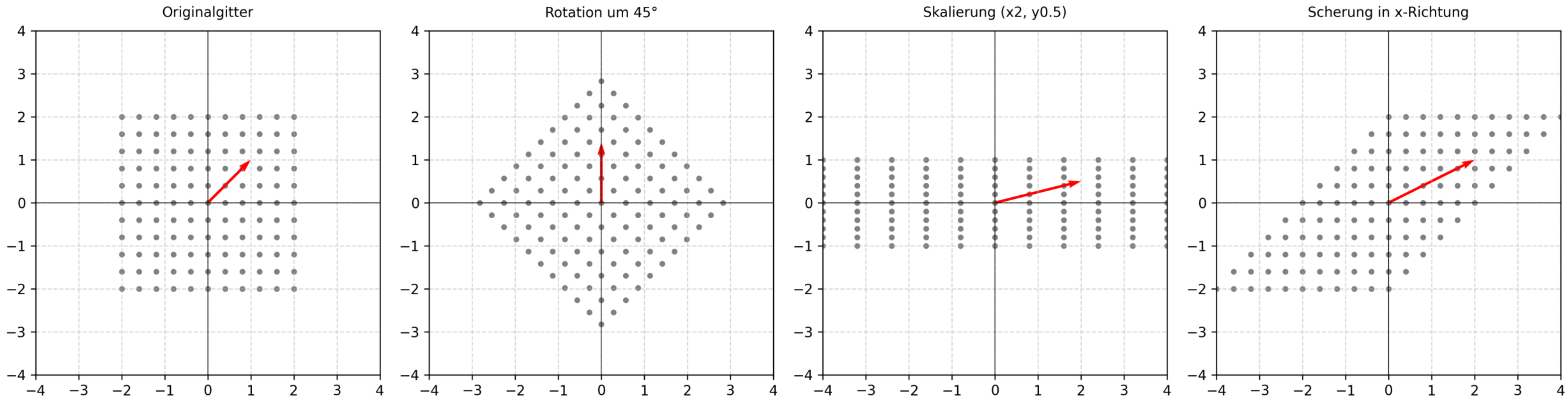
Schritt 2. Zähle Zeilen, die nicht nur 0 enthalten:

$$Rang(\boldsymbol{A}) = 2$$

VEKTOR- UND MATRIXALGEBRA: MATRIZEN SIND LINEARE TRANSFORMATIONEN

Eine Matrix ist eine lineare Transformation: sie transformiert den Raum.

Beispiel. Vektor: $v^T = (1{,}1)$



Transformationsmatrix: $\begin{pmatrix} \cos(45°) & -\sin(45°) \\ \sin(45°) & \cos(45°) \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0{,}5 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

VEKTOR- UND MATRIXALGEBRA: DETERMINANTE EINER 2×2 MATRIX

HOCHSCHULE HEILBRONN

$Determinante$ einer 2×2 Matrix:

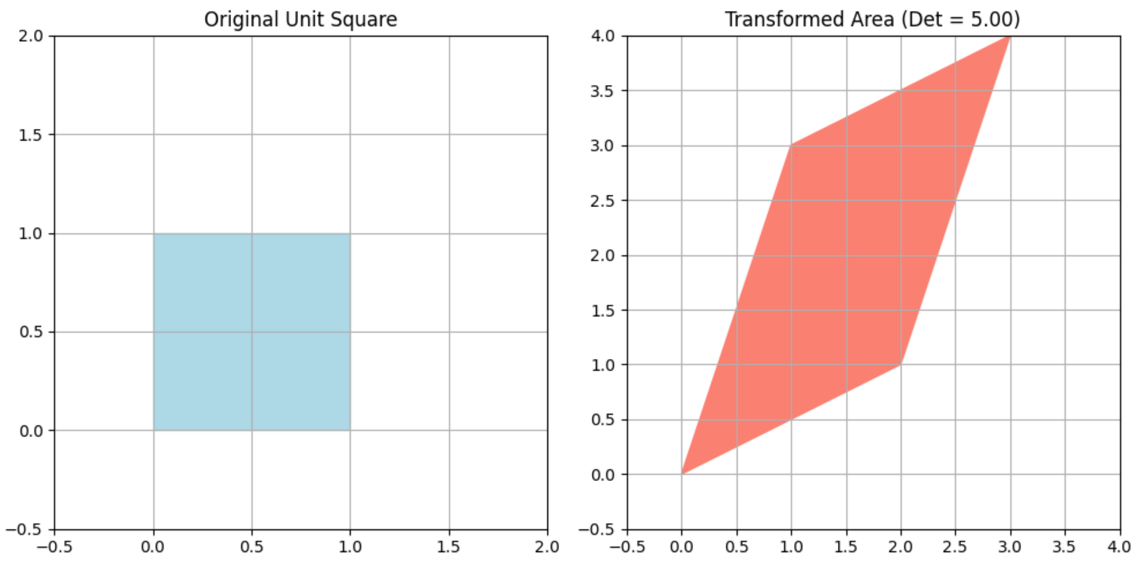
$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

$$\det(\boldsymbol{A}) = |\boldsymbol{A}| = \mathrm{ad} - \mathrm{bc}$$

VEKTOR- UND MATRIXALGEBRA: DETERMINANTE GRAFISCH

HOCHSCHULE HEILBRONN

Beispiel. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = 6 - 1 = 5$



- Transformation Einheitsquadrat mit A vergrößert die Fläche um das fünfache
- Eine negative Determinante zeigt eine Orientierungsumkehr: Das Objekt ist „umgedreht"

VEKTOR- UND MATRIXALGEBRA: LAPLACESCHER ENTWICKLUNGSSATZ

HOCHSCHULE HEILBRONN

Determinante einer allgemeinen 3×3 Matrix: Laplacescher Entwicklungssatz

$$|A| = \begin{vmatrix} \color{red}{a_{11}} & a_{12} & a_{13} \\ \color{blue}{a_{21}} & a_{22} & a_{23} \\ \color{red}{a_{31}} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \color{red}{a_{11}} \begin{vmatrix} \square & \square & \square \\ \square & a_{22} & a_{23} \\ \square & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - \color{blue}{a_{21}} \begin{vmatrix} \square & a_{12} & a_{13} \\ \square & \square & \square \\ \square & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \color{red}{a_{31}} \begin{vmatrix} \square & a_{12} & a_{13} \\ \square & a_{22} & a_{23} \\ \square & \square & \square \end{vmatrix}$$

$$= \color{red}{a_{11}} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - \color{blue}{a_{21}} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \color{red}{a_{31}} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

VEKTOR- UND MATRIXALGEBRA: EIGENWERTE UND EIGENVEKTOREN EINER MATRIX

Vektoren werden durch eine Matrix normalerweise transformiert (gedreht und skaliert)

- Bestimmte Vektoren – *die Eigenvektoren* – werden jedoch nur gestreckt oder gestaucht

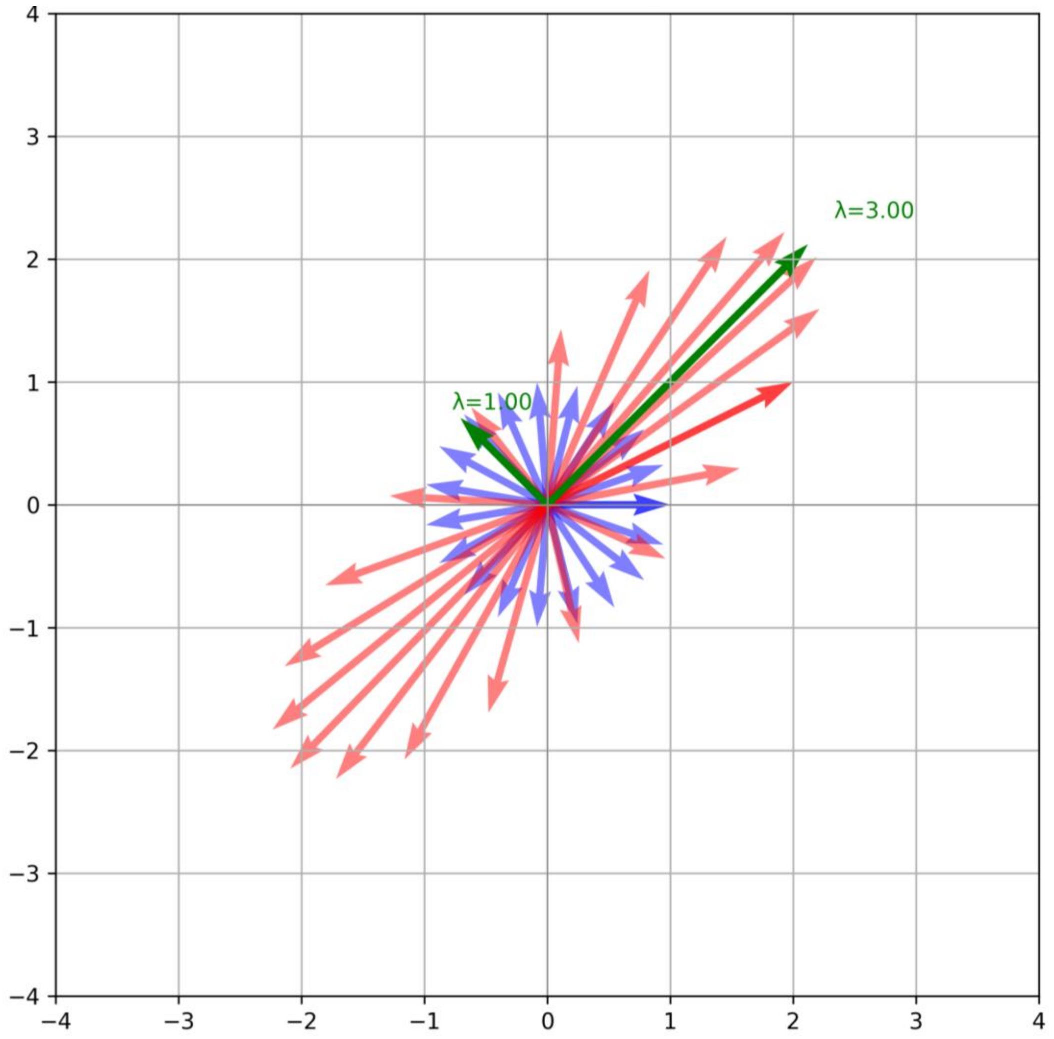
- Die Beziehung zwischen einer Matrix A und einem Eigenvektor v ist:

$$Av = \lambda v$$

wobei λ der zugehörige Eigenwert ist.

Eigenwerte und Eigenvektoren:

- Blaue Pfeile = Ursprüngliche Vektoren
- Rote Pfeile = Vektoren nach Anwendung der Matrix $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$
- Grüne Pfeile = Eigenvektoren, skaliert mit ihren Eigenwerten
  - Zeigen in gleiche Richtung wie vorher



HOCHSCHULE HEILBRONN

Berechnung der Eigenwerte und Eigenvektoren

Beispiel. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

> Schritt 1: Berechne $\det(A - \lambda I)$ wobei *I* = Einheitsmatrix:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 3$$

> Schritt 2: Löse $\det(A - \lambda I) = 0$

$$Eigenwerte: \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3$$

VEKTOR- UND MATRIXALGEBRA: EIGENWERTE UND EIGENVEKTOREN EINER MATRIX

HOCHSCHULE HEILBRONN

Berechnung der Eigenwerte und Eigenvektoren

Beispiel. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

> Schritt 3: Berechne Eigenvektoren:

$$(A - \lambda_1 I)\, Eigenvektor_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = -y$$

$$\Rightarrow Eigenvektor_1 = Alle\ Vektoren\ s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\ mit\ s \geq 0$$

$$(A - \lambda_2 I)\, Eigenvektor_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = y$$

$$\Rightarrow Eigenvektor_2 = Alle\ Vektoren\ s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\ mit\ s \geq 0$$

LINEARE GLEICHUNGSSYSTEME: DEFINITION

HOCHSCHULE HEILBRONN

Ein *lineares Gleichungssystem (LGS)* ist

- eine Menge von linearen Gleichungen,
- die gleichzeitig erfüllt sein sollen

Beispiel. 2 Gleichungen in 2 Unbekannten

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 18 \qquad (1) \\ 3x - 4y &= -7 \qquad (2) \end{aligned}$$

LINEARE GLEICHUNGSSYSTEME: ANWENDUNGSBEISPIELE

> Physik, Informatik, Elektrotechnik, Ingenieurswesen

> Betriebswirtschaftliche Steuerung und Optimierung,

  > Bestimmung optimaler Rohstoff-, Verbrauchs- und Verkaufsmengen

> Privatleben?

LINEARE GLEICHUNGSSYSTEME: MATRIXFORM

HOCHSCHULE HEILBRONN

Lineare Gleichungssysteme können mit Matrizen dargestellt werden.

Beispiel. 2 Gleichungen in 2 Unbekannten

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 18 \qquad (1) \\ 3x - 4y &= -7 \qquad (2) \end{aligned}$$

> In Matrixform

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ -7 \end{pmatrix}$$

Allgemein:

$$Koeffizientenmatrix \cdot Vektor\ Unbekannte = Lösungsvektor$$

LINEARE GLEICHUNGSSYSTEME: LÖSUNGSMENGE

HOCHSCHULE HEILBRONN

Ein lineares Gleichungssystem hat

i. entweder eine <u>eindeutige Lösung</u>,

ii. <u>keine Lösung</u> oder

iii. <u>unendlich viele Lösungen</u>

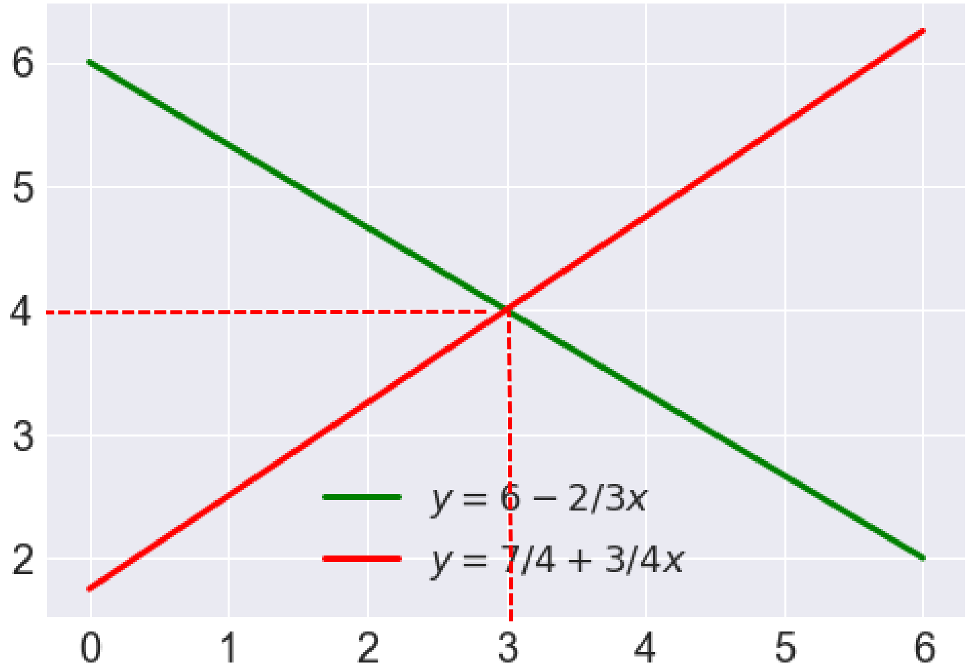
LINEARE GLEICHUNGSSYSTEME: EINDEUTIGE LÖSUNG

HOCHSCHULE HEILBRONN

Das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 18 \quad &\Leftrightarrow \quad y &= 6 - 2/3x \\ 3x - 4y &= -7 \quad &\Leftrightarrow \quad y &= 7/4 + 3/4x \end{aligned}$$

hat eine eindeutige Lösung



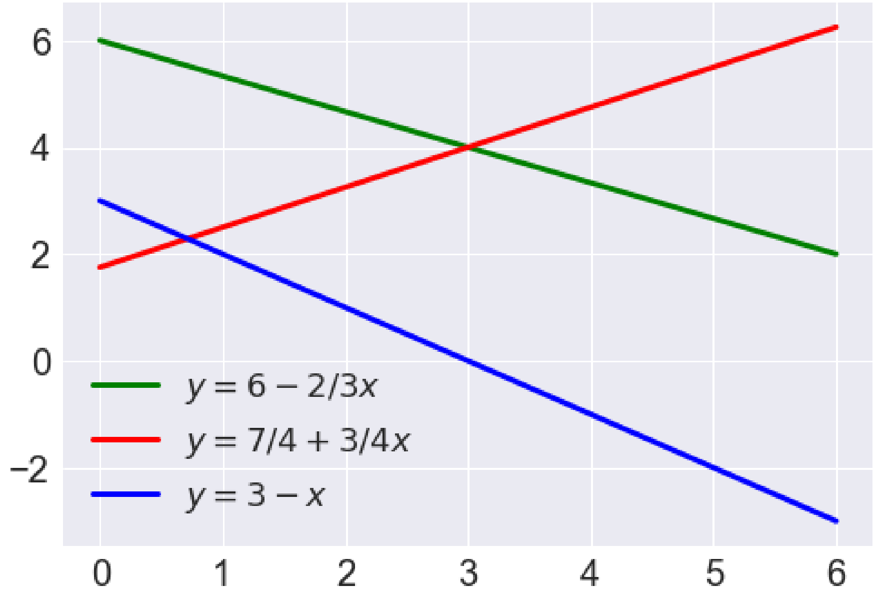
LINEARE GLEICHUNGSSYSTEME: KEINE LÖSUNG

HOCHSCHULE HEILBRONN

Das Gleichungssystem

$$
\begin{aligned}
2x + 3y &= 18 \\
3x - 4y &= -7 \\
x + y &= 3
\end{aligned}
$$

hat keine Lösung



LINEARE GLEICHUNGSSYSTEME: UNENDLICH VIELE LÖSUNGEN

Das Gleichungssystem

$$2x + 3y = 18$$

hat unendlich viele Lösungen

LINEARE GLEICHUNGSSYSTEME: LÖSUNGSVERFAHREN

HOCHSCHULE HEILBRONN

Lösungsverfahren 1: $Substitution$

Beispiel.

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 18 \qquad (1) \\ 3x - 4y &= -7 \qquad (2) \end{aligned}$$

> Löse (1) nach y auf:

$$y = 6 - \frac{2}{3}x$$

> Setze dies in (2) ein:

$$3x - 4(6 - \frac{2}{3}x) = -7 \Leftrightarrow \frac{17}{3}x = 17 \Leftrightarrow x = 3$$

> Damit:

$$y = 6 - \frac{2}{3} \cdot 3 = 4$$

LINEARE GLEICHUNGSSYSTEME: LÖSUNGSVERFAHREN

HOCHSCHULE HEILBRONN

Lösungsverfahren 2: $Gaußsches\ Eliminationsverfahren$

Beispiel.

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 18 \qquad (1) \\ 3x - 4y &= -7 \qquad (2) \end{aligned}$$

> Schritt 1: Matrixform

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ -7 \end{pmatrix}$$

> Schritt 2: Erweiterte Koeffizientenmatrix: $(Koeffizientenmatrix \mid Lösungsvektor)$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 18 \\ 3 & -4 & -7 \end{array}\right)$$

HOCHSCHULE HEILBRONN

Lösungsverfahren 2: $Gaußsches\ Eliminationsverfahren$

Beispiel.

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 18 \qquad (1) \\ 3x - 4y &= -7 \qquad (2) \end{aligned}$$

> Schritt 3: Dreiecksform Erweiterte Koeffizientenmatrix

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 18 \\ 3 & -4 & -7 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 18 \\ 0 & -17/2 & -68/2 \end{array}\right)$$

> Aus 2. Zeile: $-\frac{17}{2} \cdot y = -\frac{68}{2} \rightarrow y = 4$

> $y = 4$ in 1. Zeile: $2x + 12 = 18 \rightarrow x = 3$

LINEARE GLEICHUNGSSYSTEME: LÖSUNGSVERFAHREN

Lösungsverfahren 3: *Cramersche Regel*

Gegeben ein lineares Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_n \end{pmatrix}$$

dann gilt für die Lösung der iten Unbekannten:

ite Spalte Koeffizientenmatrix durch Lösungsvektor ersetzt

$$x_i = \frac{det \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & l1 & \dots & c_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ c_{m1} & \dots & l_n & \dots & c_{mn} \end{pmatrix}}{\det(Koeffizientenmatrix)}$$

Lösungsverfahren 3: $Cramersche\ Regel$ (insbesondere bei 2×2 effizient)

Beispiel.

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 18 \qquad (1) \\ 3x - 4y &= -7 \qquad (2) \end{aligned}$$

$$x = \frac{\det\begin{pmatrix} 18 & 3 \\ -7 & -4 \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}} = \frac{18(-4) - (-7)3}{2(-4) - 3 \cdot 3} = \frac{-51}{-17} = 3,$$

$$y = \frac{\det\begin{pmatrix} 2 & 18 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}} = \frac{2(-7) - 3 \cdot 18}{-17} = \frac{-68}{-17} = 4$$

LINEARE GLEICHUNGSSYSTEME: LÖSBARKEIT

Satz von Kronecker-Capelli:

Eine lineares Gleichungssystem ist genau dann lösbar, wenn

$$Rang(Koeffizientenmatrix) = Rang(Erweiterte\ Koeffizientenmatrix)$$

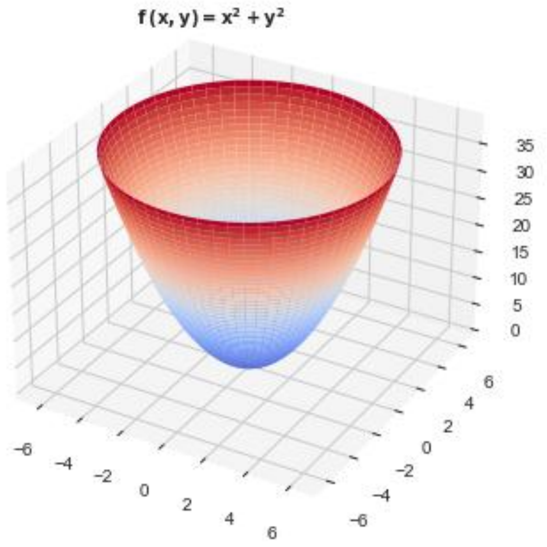
> Die Lösung ist eindeutig, wenn:

$$Rang(Koeffizientenmatrix) = Anzahl\ Unbekannte$$

Bei quadratischen Koeffizientenmatrizen:

Eine lineares Gleichungssystem ist genau dann eindeutig lösbar, wenn

$$\det(Koeffizientenmatrix) \neq 0$$



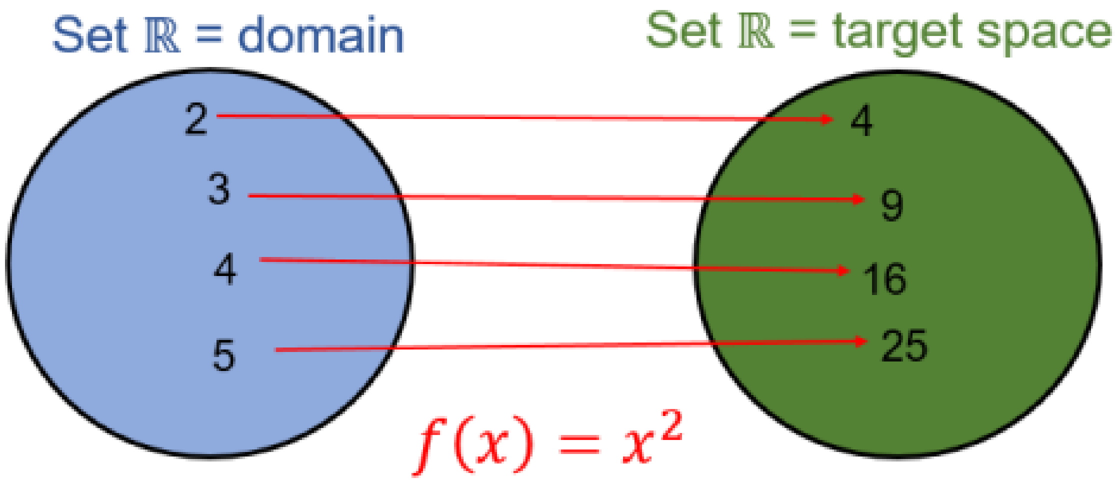
› 3. ANALYSIS

Wirtschaftsmathematik | Prof. Dr. Florian Kauffeldt

ANALYSIS: FUNKTIONEN

Eine $Funktion\ f: A \rightarrow B$ ist eine Abbildung,

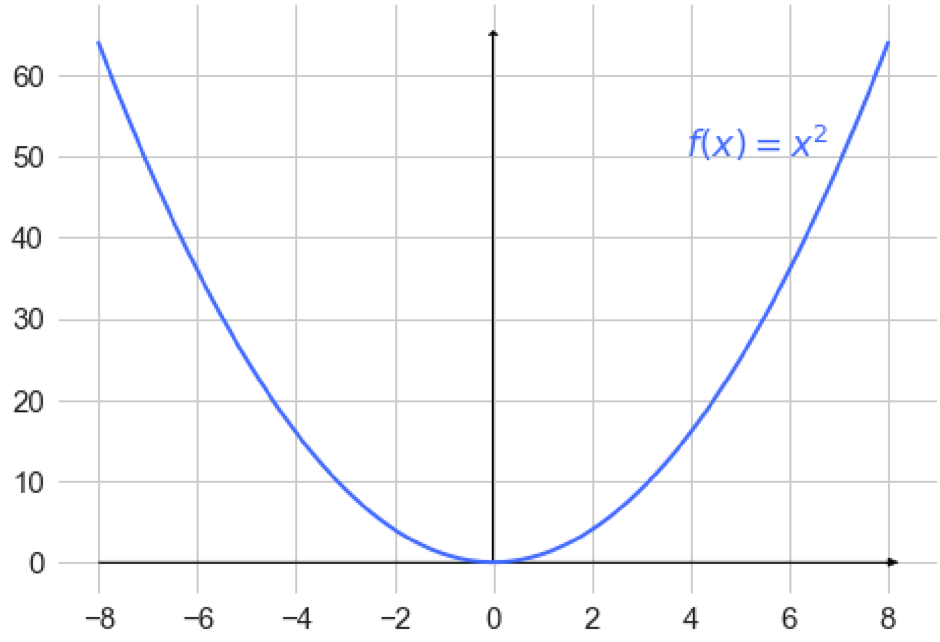
- die jedem Element einer Menge A (Definitionsmenge)
- ein Element einer Menge B (Zielraum) zuordnet



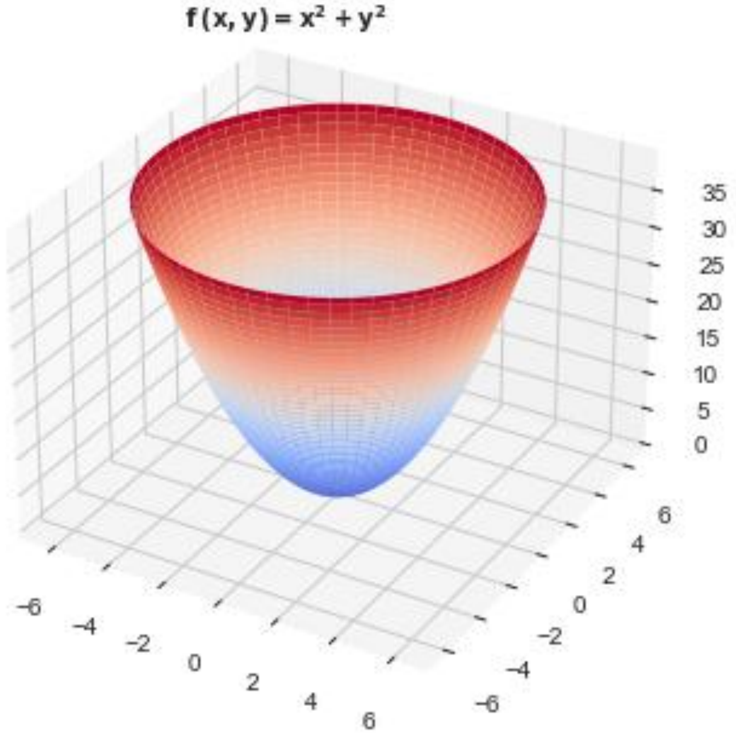
ANALYSIS: UNIVARIATE UND MULTIVARIATE FUNKTIONEN

HOCHSCHULE HEILBRONN

$f(x) = x^2$ ist eine $univariate$ Funktion



$f(x, y) = x^2 + y^2$ ist eine $multivariate$ Funktion



ANALYSIS: STETIGKEIT

Eine Funktion heißt $stetig$, wenn sie keine "Sprungstellen" hat.

- Etwas mathematischer: Eine Funktion heißt $stetig$, wenn

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \text{ für } alle\ a$$

ANALYSIS: DIFFERENZIERBARKEIT (UNIVARIAT)

HOCHSCHULE HEILBRONN

Gegeben eine univariate Funktion f

- Der $Differenzenquotient$ $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ zweier Punkte x und $x_1 = x + h$ ist:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{x + h - x}$$

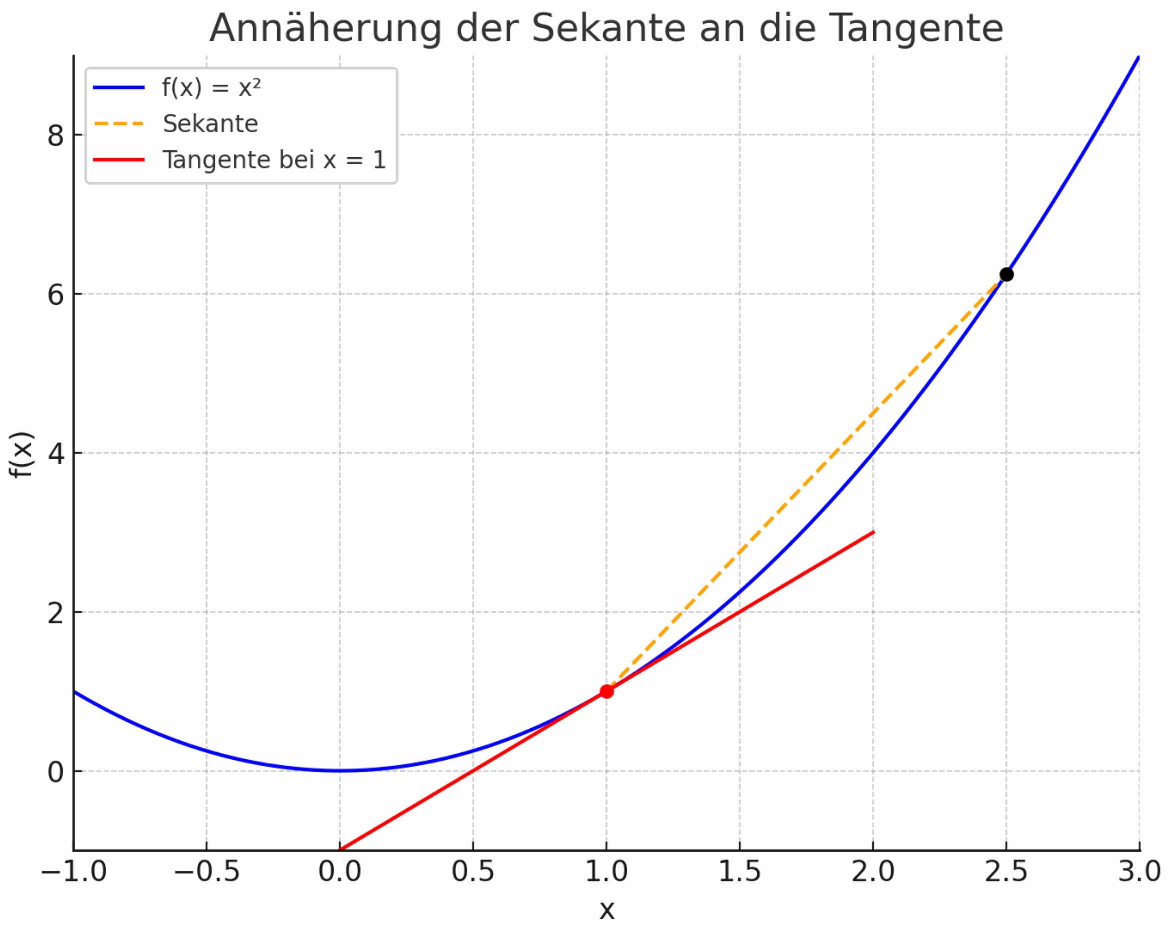
Dies entspricht der Steigung der Sekante durch die beiden Punkte

- Wenn h immer keiner wird erhält man die $Ableitung$ $f'(x)$ = Steigung der Tangente

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

ANALYSIS: DIFFERENZIERBARKEIT (UNIVARIAT)

HOCHSCHULE HEILBRONN



ANALYSIS: DIFFERENZIERBARKEIT (UNIVARIAT)

Beispiel. Bestimmen Sie die erste Ableitung der Funktion $f(x) = x^2$.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - (x)^2}{h} = \lim_{h \to 0} 2x + h = 2x$$

HOCHSCHULE HEILBRONN

Rechenregeln.

- $f(x) = Konstante \rightarrow f'(x) = 0$

- $f(x) = x^n \rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}$

ANALYSIS: DIFFERENZIERBARKEIT (UNIVARIAT)

HOCHSCHULE HEILBRONN

- $Kettenregel$: Die Ableitung einer Funktion $h = f(g)$ ist $h' = f'(g) \cdot g'$

Beispiel. $h = (4x + 2)^2 \rightarrow h' = 2(4x + 2) \cdot 4$

- $Produktregel$: Die Ableitung einer Funktion $h = f \cdot g$ ist $h' = f'g + f \cdot g'$

Beispiel. $h = x^2 \cdot (4x + 2) \rightarrow h' = 2x(4x + 2) + x^2 4$

- $Quotientenregel$: Die Ableitung einer Funktion $h = f/g$ ist $h' = \frac{f'g - fg\prime}{g^2}$

Beispiel. $h = \frac{x^2}{(4x+2)} \rightarrow h' = \frac{2x(4x+2) - x^2 4}{(4x+2)^2}$

ANALYSIS: DIFFERENZIERBARKEIT (MULTIVARIAT)

Die $partielle\ Ableitung\ f_{x_i}$ einer Funktion $f(x_1, \dots, x_n)$ nach einer Variablen x_i ist:

$$f_{x_i} = Differenziere\ f\ nach\ x_i\ und\ behandle\ alle\ anderen\ Variablen\ als\ Konstanten$$

Beispiel. $f(x_1, x_2) = x_1^2 \cdot 2x_2 + x_1$

- $f_{x_1} = 2x_1 2x_2 + 1$
- $f_{x_2} = 2x_1^2$

ANALYSIS: DIFFERENZIERBARKEIT (MULTIVARIAT)

HOCHSCHULE HEILBRONN

Die **erste Ableitung** einer Funktion $f(x_1, \dots, x_n)$ ist deren Gradient ∇_f

> der Gradient ist der Vektor aller partiellen Ableitungen von f:

$$\nabla_f = \begin{pmatrix} f_{x_1} \\ \vdots \\ f_{x_n} \end{pmatrix}$$

Beispiel. $f(x_1, x_2) = x_1^2 \cdot 2x_2 + x_1$

$$\nabla_f = \begin{pmatrix} 4x_1x_2 + 1 \\ 2x_1^2 \end{pmatrix}$$

ANALYSIS: DIFFERENZIERBARKEIT (MULTIVARIAT)

HOCHSCHULE HEILBRONN

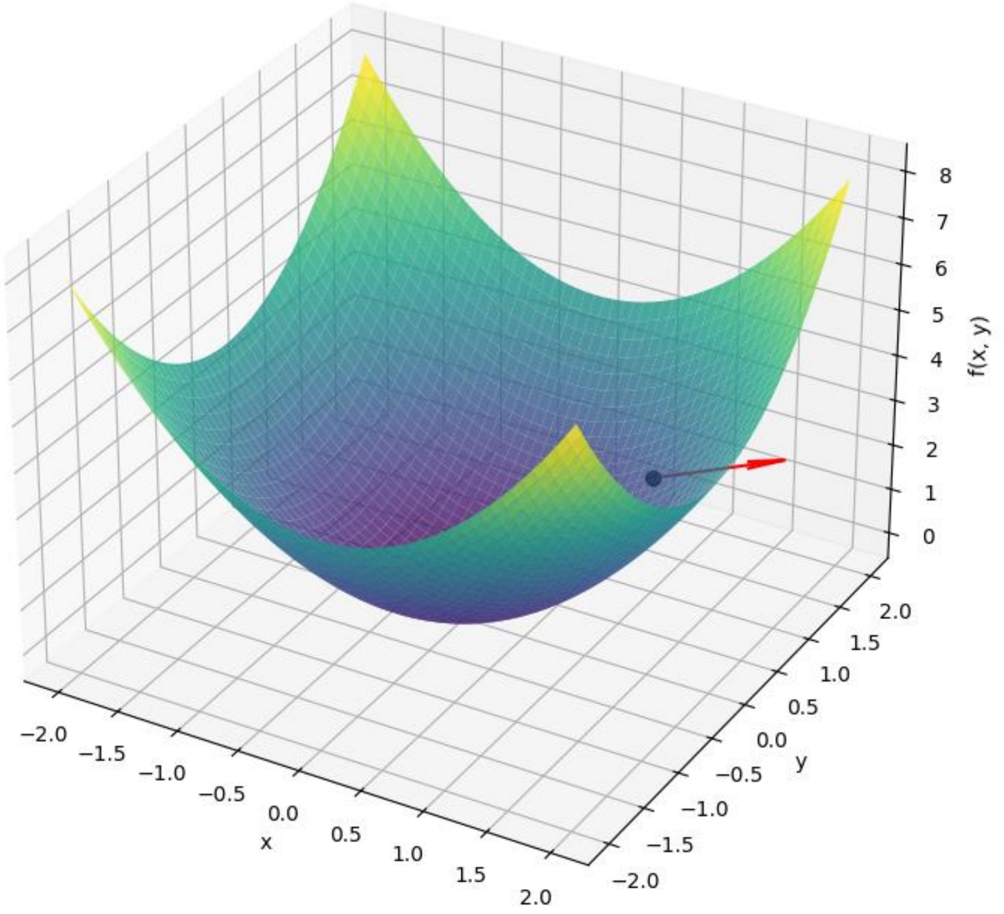
Intuition Gradient:

> Die Oberfläche zeigt die Funktion

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

> Der rote Pfeil = Gradientenvektor in (1,1)

> Er zeigt in die Richtung des steilsten Anstiegs der Funktion.



ANALYSIS: DIFFERENZIERBARKEIT (MULTIVARIAT)

Die **zweite Ableitung** einer Funktion $f(x_1, \dots, x_n)$ ist deren Hesse-Matrix H_f

$$H_f(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} f_{x_1 x_1} & \cdots & f_{x_1 x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{x_n x_1} & \cdots & f_{x_n x_n} \end{pmatrix}$$

Beispiel. $f(x_1, x_2) = x_1^2 \cdot 2x_2 + x_1$

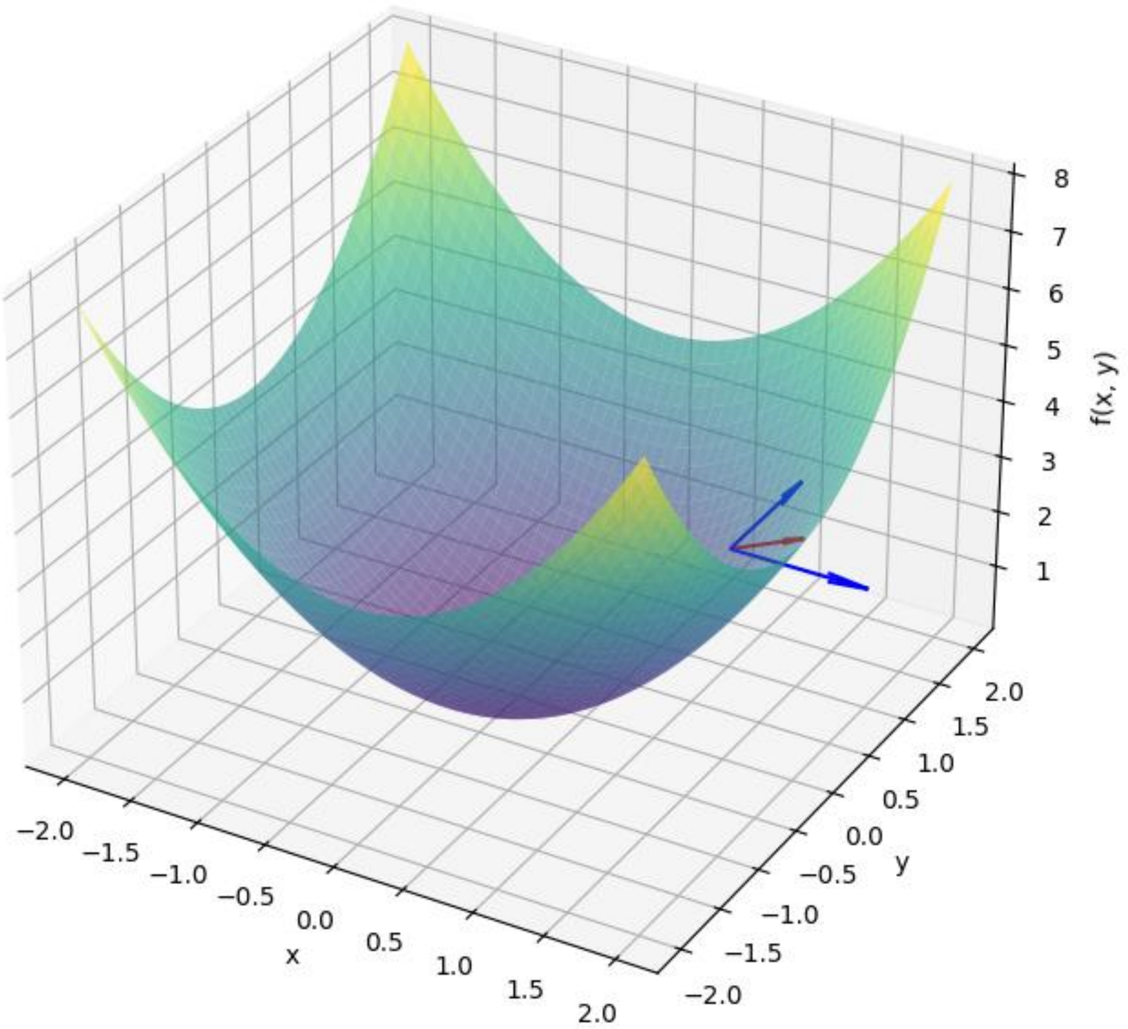
$$H_f = \begin{pmatrix} 4x_2 & 4x_1 \\ 4x_1 & 0 \end{pmatrix}$$

ANALYSIS: DIFFERENZIERBARKEIT (MULTIVARIAT)

HOCHSCHULE HEILBRONN

Intuition Hesse-Matrix:

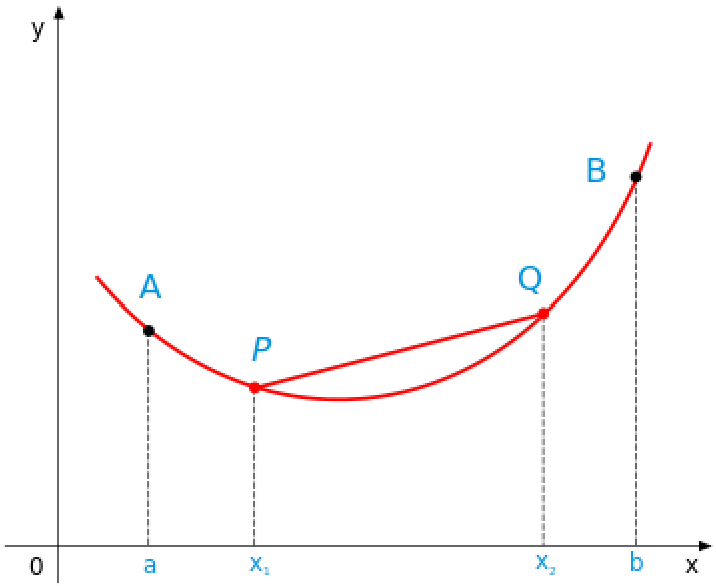
- Blaue Pfeile = Eigenvektoren Hesse-Matrix
  - zeigen die Hauptrichtungen der Krümmung an
  - geben an, wie stark die Funktion in diese Richtungen gekrümmt ist



ANALYSIS: KONVEXE UND KONKAVE FUNKTIONEN

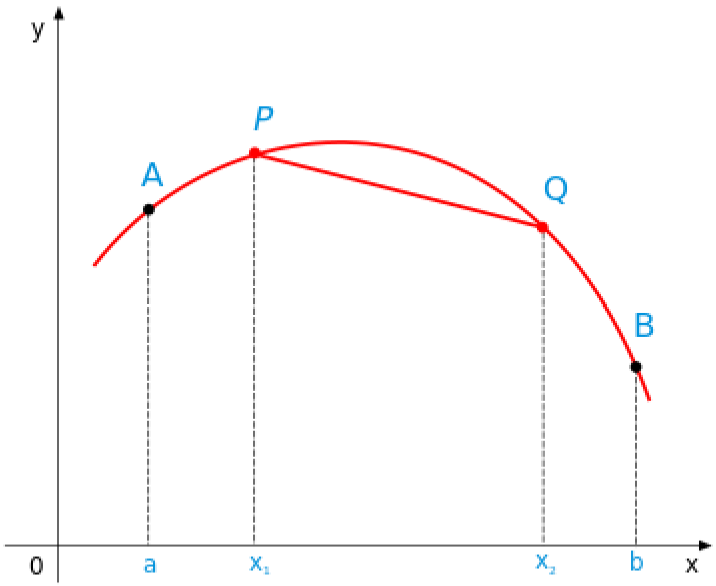
Konvexe Funktion

- Verbindungslinien oberhalb der Funktion



Konkave Funktion

Verbindungslinien unterhalb der Funktion



Quelle Bilder: https://de.wikipedia.org/wiki/Konvexe_und_konkave_Funktionen

ANALYSIS: KONVEXE UND KONKAVE FUNKTIONEN

HOCHSCHULE HEILBRONN

Eine zweifach differenzierbare Funktion f ist

- Konvex, wenn die Hesse-Matrix positiv semidefinit ist (Alle Eigenwerte ≥ 0)
- Konkav, wenn die Hesse-Matrix negativ semidefinit ist (Alle Eigenwerte ≤ 0)

ANALYSIS: OPTIMIERUNG OHNE NEBENBEDINGUNGEN

HOCHSCHULE HEILBRONN

Ein Optimierungsproblem ohne Nebenbedingungen umfasst

> Ein Optimierungsziel (max = Maximiere und min = Minimiere)

> Eine Zielfunktion $f(x_1, \dots, x_n)$

> Eine Menge von Variablen nach denen optimiert werden soll

Beispiel. Wir möchten $f(x, y) = -x^2 - y^2 + x$ mit x, y maximieren, dann schreiben wir:

$$\max_{x,y} f(x, y)$$

ANALYSIS: OPTIMIERUNG OHNE NEBENBEDINGUNGEN

Bedingung erster und zweiter Ordnung für Extremwerte

- Bedingung erster Ordnung (BEO):

$$\nabla_f = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Bedingung zweiter Ordnung (BZO):

  Sei $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$ ein Punkt, der die BEO erfüllt, dann handelt es sich um ein

  - Minimum, wenn die Hesse-Matrix positiv semidefinit ist
  - Maximum, wenn die Hesse-Matrix negativ semidefinit ist

ANALYSIS: OPTIMIERUNG OHNE NEBENBEDINGUNGEN

HOCHSCHULE HEILBRONN

Beispiel . $f(x,y) = -x^2 - y^2 + x$

- BEO:

$$\nabla_f(x) = \begin{pmatrix} -2x+1 \\ -2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow (x^*, y^*) = (\frac{1}{2}, 0)$$

- BZO:

$$H_f(x) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

  - Eigenwerte: $\det(A - \lambda I) = (-2-\lambda)^2 = 0 \Rightarrow \lambda = -2$
  - Eigenwert < 0. Damit negativ semidefinite Hesse-Matrix → Maximum

ANALYSIS: OPTIMIERUNG MIT NEBENBEDINGUNGEN

HOCHSCHULE HEILBRONN

Ein Optimierungsproblem mit Nebenbedingungen umfasst

- Ein Optimierungsproblem $\max_{x_1,\ldots,x_n} f(x_1, \ldots, x_n)$
- und Nebenbedingungen $g_1(x_1, \ldots, x_n) \leq 0, \ldots, g_k(x_1, \ldots, x_n) \leq 0$
- Zusammengefasst schreiben wir

$$\begin{aligned}
&\max_{x_1,\ldots,x_n} f(x_1, \ldots, x_n) \\
&s.d. \\
&g_1 \leq 0 \\
&\vdots \\
&g_k \leq 0
\end{aligned}$$

HOCHSCHULE HEILBRONN

Das *Kuhn-Tucker-Verfahren*

Beispiel 1.

$$\min_{x,y} (x-1)^2 + (y-2)^2$$
$$s.d.$$
$$x + y - 2 \leq 0$$

> Schritt 1: Lagrange-Funktion aufstellen:

$$L = (x-1)^2 + (y-2)^2 + \lambda(x+y-2)$$

ANALYSIS: OPTIMIERUNG MIT NEBENBEDINGUNGEN

Das *Kuhn-Tucker-Verfahren*

- Schritt 2: Kuhn-Tucker-Bedingungen
  - BEO:

$$\nabla_L = \begin{pmatrix} 2(x-1)+\lambda \\ 2(y-2)+\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

  - Primal feasibility:

$$x + y - 2 \leq 0$$

  - Dual feasibility:

$$\lambda \geq 0$$

  - Komplementarität:

$$\lambda_1 (x + y - 2) = 0$$

ANALYSIS: OPTIMIERUNG MIT NEBENBEDINGUNGEN

HOCHSCHULE HEILBRONN

Das *Kuhn-Tucker-Verfahren*

> Schritt 3: Lösung berechnen

> Fall 1: $\lambda = 0$ (Nebenbedingung nicht aktiv)
- Aus BEO: $x = 1, y = 2$
- Dann $x + y = 3 > 2$: Nebenbedingung verletzt, also keine Lösung

> Fall 2: $\lambda > 0$ (Nebenbedingung aktiv)
- Aus Komplementarität: $x + y = 2$
- Dann aus BEO: $x = y - 1$
- Aus diesen beiden Gleichungen folgt: $y = \frac{3}{2}, x = \frac{1}{2} \rightarrow$ Lösung

ANALYSIS: OPTIMIERUNG MIT NEBENBEDINGUNGEN

HOCHSCHULE HEILBRONN

Das *Kuhn-Tucker-Verfahren*

Beispiel 2. Ein Unternehmen produziert ein x Tonnen Getreide pro Woche. Der Gewinn (in 1000 €) pro Woche ist:

$$10x - 0{,}5x^2$$

> Die Lagerfläche ist begrenzt: es dürfen höchstens 6 Tonnen eingelagert werden

> Schritt 1: Lagrange-Funktion aufstellen:

$$L = -10x + 0{,}5x^2 + \lambda(x - 6)$$

Da Kuhn-Tucker auf Minimierungsprobleme ausgelegt ist und $\max f = \min -f$

ANALYSIS: OPTIMIERUNG MIT NEBENBEDINGUNGEN

HOCHSCHULE HEILBRONN

Das *Kuhn-Tucker-Verfahren*

- Schritt 2: Kuhn-Tucker-Bedingungen
  - BEO:

$$\nabla_L = -10 + x + \lambda = 0$$

  - Primal feasibility:

$$x - 6 \leq 0$$

  - Dual feasibility:

$$\lambda \geq 0$$

  - Komplementarität:

$$\lambda_1 (x - 6) = 0$$

ANALYSIS: OPTIMIERUNG MIT NEBENBEDINGUNGEN

Das *Kuhn-Tucker-Verfahren*

- Schritt 3: Lösung berechnen

  - Fall 1: $x < 6 \Rightarrow \lambda = 0$ (Nebenbedingung nicht aktiv)
    - Aus BEO: $x = 10$
    - Dann $x = 10 > 6$: Nebenbedingung verletzt, also keine Lösung

  - Fall 2: $\lambda > 0$ (Nebenbedingung aktiv)
    - Aus Komplementarität: $x = 6$
    - Dann aus BEO: $\lambda = 4 \geq 0$
    - Aus diesen beiden Gleichungen folgt: $x = 6 \rightarrow$ Lösung

HOCHSCHULE HEILBRONN

Das *Kuhn-Tucker-Verfahren*

Beispiel 3. Ein Haushalt konsumiert zwei Güter:

$$x_1\colon\ Kaffee\ (in\ Tassen\ pro\ Woche)$$

$$x_2\colon\ Kino\ (in\ Kinobesuchen\ pro\ Woche$$

Die Nutzenfunktion sei $U = x_1^{1/2} \cdot x_2^{1/2}$

Beschränkungen:

- Budget: $5x_1 + 10x_2 \leq 100$
- Zeit: $x_1 + 2x_2 \leq 12$

ANALYSIS: OPTIMIERUNG MIT NEBENBEDINGUNGEN

Das *Kuhn-Tucker-Verfahren*

- Schritt 1: Lagrange-Funktion aufstellen:

$$L = -x_1^{1/2} \cdot x_2^{1/2} + \lambda_1(5x_1 + 10x_2 - 100) + \lambda_2(x_1 + 2x_2 - 12)$$

- Schritt 2: Kuhn-Tucker-Bedingungen
  - BEO:

$$\nabla_L = \begin{pmatrix} -1/2x_1^{-\frac{1}{2}} \cdot x_2^{\frac{1}{2}} + 5\lambda_1 + \lambda_2 \\ -1/2x_1^{\frac{1}{2}} \cdot x_2^{-\frac{1}{2}} + 10\lambda_1 + 2\lambda_2 \end{pmatrix} = \binom{0}{0}$$

ANALYSIS: OPTIMIERUNG MIT NEBENBEDINGUNGEN

HOCHSCHULE HEILBRONN

Das *Kuhn-Tucker-Verfahren*

- Schritt 2: Kuhn-Tucker-Bedingungen
  - Primal feasibility:

$$2x_1 + 10x_2 - 100 \leq 0 \; und \;\; x_1 + 2x_2 - 12 \leq 0$$

  - Dual feasibility:

$$\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$$

  - Komplementarität:

$$\lambda_1(2x_1 + 10x_2 - 100) = 0 \; und \;\; \lambda_2(x_1 + 2x_2 - 12) = 0$$

HOCHSCHULE HEILBRONN

Das *Kuhn-Tucker-Verfahren*

- Schritt 3: Lösung berechnen

  - Fall 1: $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$
    - Aus Komplementarität: $5x_1 + 10x_2 - 100 = 0 \; und \; x_1 + 2x_2 - 12 = 0$
    - Aus Gleichung 2 folgt $5x_1 + 10x_2 = 60 \rightarrow$ Widerspruch zur ersten Gleichung

  - Fall 2: $\lambda_1 > 0, \lambda_2 = 0$
    - Aus Komplementarität: $5x_1 + 10x_2 = 100$
    - Ergibt mit BEO: $x_1 = 10, x_2 = 5, \lambda_1 \approx 0{,}071$
    - $x_1 + 2x_2 = 20 > 12 \rightarrow$ Widerspruch zur Zeitrestriktion

ANALYSIS: OPTIMIERUNG MIT NEBENBEDINGUNGEN

HOCHSCHULE HEILBRONN

Das *Kuhn-Tucker-Verfahren*

- Schritt 3: Lösung berechnen

  - Fall 3: $\lambda_1 = 0, \lambda_2 > 0$
    - Aus Komplementarität: $x_1 + 2x_2 = 12$
    - Ergibt mit BEO: $x_1 = 6, x_2 = 3, \lambda_2 \approx 0{,}354 \rightarrow$ gültige Lösung

  - Fall 4: $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0$
    - Budget und Zeit werden nicht voll ausgeschöpft
    - Kann keine Lösung sein, da U in beidem wächst

THE END!

Please refer any questions to:
Prof. Dr. Florian Kauffeldt
Faculty of International Business
florian.kauffeldt@hs-heilbronn.de