

Examen

Wirtschaftsmathematik und Statistik

Zeit: 90 Minuten

Name: _____

Matr. Nummer: _____

Hinweise:

1. Zugelassene Hilfsmittel: Open-Book: Aufschriebe, Formelsammlung, Skript, Taschenrechner (keine gespeicherten Formeln etc.), Notizen.
2. Jede Antwort muss hinreichend begründet werden. Antworten ohne Begründung ergeben 0 Punkte.
3. Unleserliche Ergebnisse werden nicht gewertet. Nutzen Sie bei weiterem Platzbedarf bitte auch die Rückseiten der Klausurblätter!
4. Die geschätzte Bearbeitungszeit (in Minuten) für eine Aufgabe entspricht der Punktzahl. Somit sind die Aufgaben insgesamt 90 Punkte wert.
5. **Viel Glück!!!**

Aufgabe	Punkte	Erreichte Punkte
1	5	
2	15	
3	25	
4	15	
5	10	
6	20	
Gesamt	90	

Teil 1: Wirtschaftsmathematik

Aufgabe 1 – Finanzmathematik (5 Punkte)

Sie möchten in 15 Jahren über € 50'000 verfügen. Welchen Betrag müssen Sie heute anlegen, wenn die jährliche Verzinsung 2% beträgt?

Lösung:

$$PV = \frac{FV}{(1+i)^t} = \frac{50}{1.02^{15}} = 37'150$$

Aufgabe 2 – Matrizen / lineare Gleichungssysteme (15 Punkte)

a) Gegeben die folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 9 \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 8 & 4 \\ 10 & 6 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie das Produkt $A \cdot B$.

Gegeben das lineare Gleichungssystem

$$(i) \quad 3x - 4y = 10$$

$$(ii) \quad 8x + 3y = 4$$

b) Schreiben Sie das Gleichungssystem in Matrixform auf.

c) Berechnen Sie die Determinante der Koeffizientenmatrix. Ist das Gleichungssystem eindeutig lösbar? Begründen Sie Ihre Antwort kurz.

d) Lösen Sie das Gleichungssystem.

Lösung:

a)

$$\begin{pmatrix} 6 \cdot 8 + 1 \cdot 8 + 2 \cdot 10 & 6 \cdot 3 + 1 \cdot 4 + 2 \cdot 6 \\ 3 \cdot 8 + 2 \cdot 8 + 9 \cdot 10 & 3 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 9 \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 76 & 34 \\ 130 & 71 \end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 8 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix}$$

c) $\text{Det} = 3 \cdot 3 + 4 \cdot 8 = 41 > 0 \Leftrightarrow$ eindeutig lösbar

d)

$$x = \frac{\det \begin{pmatrix} 10 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}}{41} = \frac{46}{41}$$

$$y = \frac{\det \begin{pmatrix} 3 & 10 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}}{41} = -\frac{68}{41}$$

Aufgabe 3 – Optimierung unter Nebenbedingungen (25 Punkte)

Eine Firma möchte mit möglichst minimalen Kosten mindestens 100 Autos produzieren. Zur Produktion von Autos wird Arbeit (Menge a) und Kapital (Menge k) benötigt. Die Produktionsfunktion lautet $P(a, k) = a \cdot k$. Es muss folgendes gelten:

- Die Mengen von Arbeit und Kapital sind nicht negativ:

$$a \geq 0 \text{ und } k \geq 0$$

- Es werden mindestens 100 Autos produziert:

$$a \cdot k \geq 100$$

Die Kosten je Einheit Arbeit betragen 12 und je Einheit Kapital 8.

- Schreiben Sie die Kostenfunktion auf.
- Schreiben Sie das Minimierungsproblem auf.
- Skizzieren Sie die Lösung des Problems in einem Diagramm (die Funktion $a = \frac{100}{k}$ ist eine Hyperbel).
- Lösen Sie das Minimierungsproblem.

Lösung:

a) $C = 12a + 8k$

- b) Schreiben Sie das Minimierungsproblem auf.

$$\min_{a,k} C \text{ s. d. } (a, k) \in \{a \geq 0, k \geq 0, ak \geq 100\}$$

- c) Skizze

- d) Lagrange-Funktion:

$$L = 12a + 8k - \lambda(ak - 100)$$

BEO:

$$\begin{pmatrix} 12 - \lambda k \\ 8 - \lambda a \\ ak - 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = \frac{12}{k} \text{ in (ii): } 8 - \frac{12a}{k} = 0 \Rightarrow 12a = 8k \Rightarrow a = \frac{8}{12}k = \frac{2}{3}k \text{ in (iii): } \frac{2}{3}k^2 = 100 \Rightarrow k^2 = 150 \Rightarrow k^* = \sqrt{150}, a^* = \frac{2}{3}\sqrt{150}$$

Teil 2: Statistik

Aufgabe 4 – Deskriptive Statistik (15 Punkte)

Die folgende Tabelle zeigt Daten von 5 Personen:

Daten					
Augenfarbe	Braun	Grün	Braun	Braun	Blau
Einkommens- klasse	2'000 - 5'000 €	>10'000 €	< 2'000 €	2'000 - 5'000 €	>10'000 €
Größe	170 cm	155 cm	155 cm	160 cm	180 cm

- Geben Sie das Messniveau für jede Variable (Augenfarbe, Einkommensklasse, Größe) an.
- Berechnen Sie für jede Variable diejenigen Lagemaße (Modalwert, Mittelwert, Median), welche gemäß Messniveau berechnet werden KÖNNEN.

Lösung

a) Augenfarbe: nominal, Einkommensklasse: ordinal, Größe: verhältnis

b)

- Augenfarbe: Nur Modalwert (Modalwert = Braun)
- Einkommensklasse: Modalwert und Median
 - Modalwerte = 2000 to 5000 and 10000
 - Median = 2000 to 5000
- Größe: Alle
 - Modalwert = 155
 - Median = 160
 - Mittelwert = 164

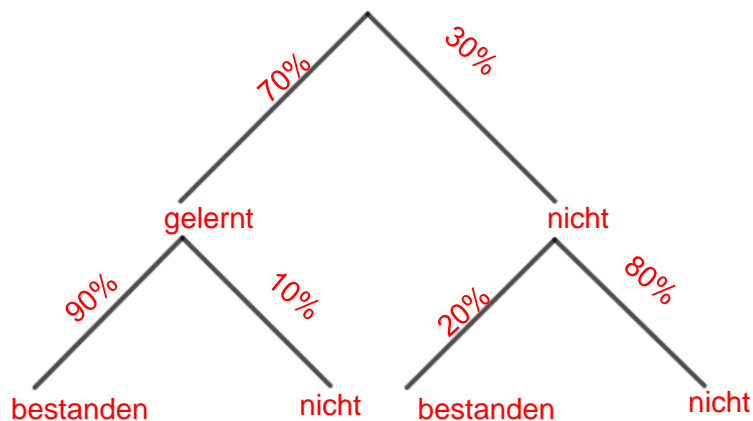
Aufgabe 5 – Bedingte Wahrscheinlichkeiten (10 Punkte)

70% der Studierenden lernen viel für Statistik (und 30% nicht). Von den 70% die viel lernen, bestehen 90% das Statistik-Examen (und 10% nicht). Von denjenigen die nicht viel lernen, bestehen nur 20% das Statistik-Examen (und 80% nicht).

- Stellen Sie diese Situation in einem Baumdiagramm dar.
- Berechnen Sie die (unbedingte) Wahrscheinlichkeit das Statistik-Examen zu bestehen.
- Einer Ihrer Kommilitonen behauptet, dass er nicht viel gelernt hat und trotzdem bestanden hat. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass er die Wahrheit sagt (d.h. berechnen Sie die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass jemand wenig gelernt hat gegeben, dass er bestanden hat).

Lösung:

a)



b) Unbedingte Wahrscheinlichkeit:

$$P[\text{bestanden}] = 70\% \cdot 90\% + 30\% \cdot 20\% = 69\%$$

c) Bedingte Wahrscheinlichkeit:

$$\begin{aligned}
 P[\text{wenig gelernt} | \text{bestanden}] &= \frac{P[\text{bestanden} | \text{wenig gelernt}] \cdot P[\text{wenig gelernt}]}{P[\text{bestanden}]} \\
 &= \frac{20\% \cdot 30\%}{69\%} \approx 8.7\%
 \end{aligned}$$

Aufgabe 6 – Inferenzstatistik (20 Punkte)

Es soll die Hypothese untersucht werden, dass Männer im Schnitt mehr verdienen als Frauen. Hierzu wird eine Stichprobe erhoben. Die Stichprobe enthält 212 Frauen und 165 Männer. Das mittlere Monatsgehalt der Frauen beträgt 2698 € (Varianz: 605), das mittlere Monatsgehalt der Männer ist 2704 € (Varianz: 325).

- Schreiben Sie die Null- und die Alternativhypothese in Bezug auf den Kontext auf.
- Handelt es sich um einen Ein- oder Zweistichprobentest? Begründen Sie Ihre Antwort.
- Handelt es sich um einen einseitigen oder zweiseitigen Test? Begründen Sie Ihre Antwort.
- Berechnen Sie den gepoolten Standardfehler.
- Berechnen Sie den p-Wert. Liegt Evidenz vor, dass Männer im Schnitt mehr verdienen? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung:

a)

- $H_0: \mu_M - \mu_F \leq 0$
- $H_1: \mu_M - \mu_F > 0$

b) Zweistichprobentest (zwei Gruppen)

c) Einseitig, "mehr verdienen" impliziert Richtung

d)

$$SE_{POOL} = \left(\frac{s_M^2}{n_M} + \frac{s_F^2}{n_F} \right)^{0.5} = \left(\frac{325}{165} + \frac{605}{212} \right)^{0.5} \approx 2.2$$

e)

- Teststatistik:

$$z = \frac{x_M - x_F}{SE_{POOL}} \approx 2.72$$

- Fläche Teststatistik: $A = 0,4967$
- P-Wert = $0,5 - A = 0,33\%$

Der P-Wert ist deutlich kleiner als 5%. Daher können wir die Nullhypothese ablehnen. Es liegt Evidenz für die Alternativhypothese vor.