



› WIRTSCHAFTS- MATHEMATIK

PETER ALBRECHT (2014): Finanzmathematik für Wirtschaftswissenschaftler, 3. Auflage, Schäffer Poeschel.

KNUT SYDSAETER, PETER HAMMOND, ARNE STROM, ANDRÉS CARVAJAL (2018): Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler, 5. Auflage, Pearson.

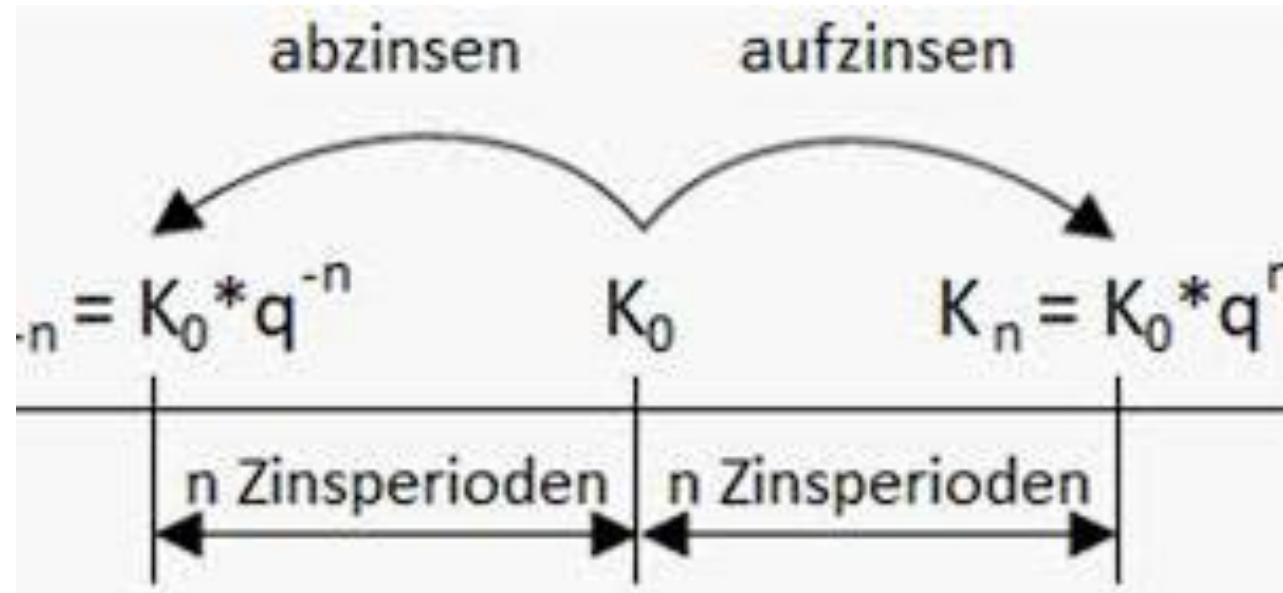
1. Finanzmathematik

2. Lineare Algebra

- > Vektor- und Matrixalgebra
- > Lineare Gleichungssysteme

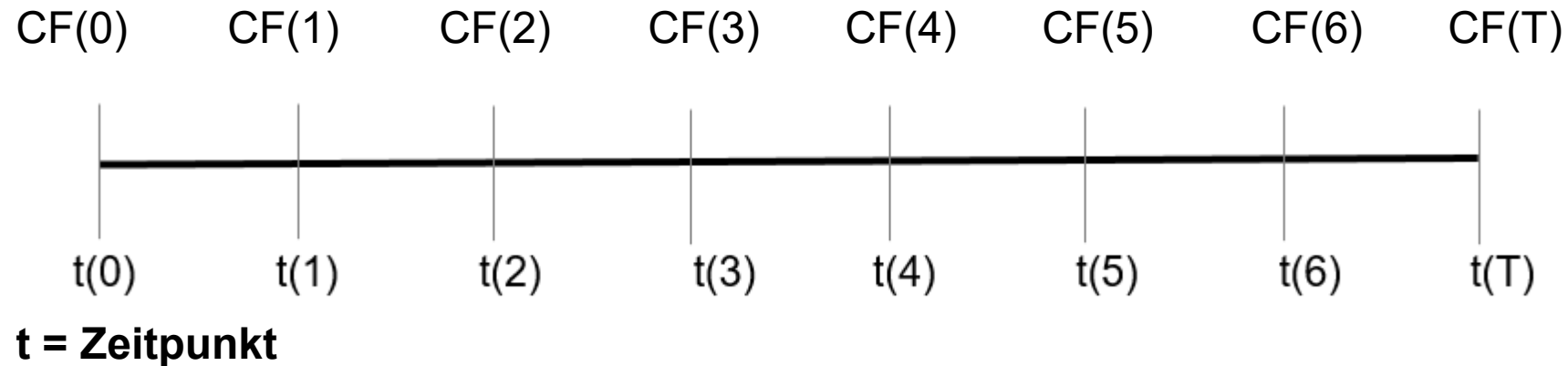
3. Analysis

- > Funktionen
- > Optimierung



› 1. FINANZMATHEMATIK

CF = Cash Flow = Zahlungsstrom



- > Zahlungsströme erfolgen in regelmäßigen, diskreten Abständen, Grundannahme: jährlich

Fragen:

- > Was ist ein Geldbetrag zum Zeitpunkt $t=T$ heute ($t=0$) wert?
- > Was ist ein Geldbetrag heute ($t=0$) zum Zeitpunkt $t=T$ wert?

Zinssatz i = Umrechnung von Zahlungsströme auf unterschiedliche Zeitperioden

> Abzinsungsfaktor:

$$\frac{1}{1+i}$$

Beispiel. Zinssatz: $i = 5\%$, Wert nach 3 Perioden $t = 3$: $w(3) = 1.157625$

> Barwert heute ($t = 0$):

$$\left(\frac{1}{1+i}\right)^t \cdot w = \left(\frac{1}{1.05}\right)^3 \cdot 1.157625 = 1$$

> Aufzinsungsfaktor

$$(1 + i)$$

Beispiel. Zinssatz: $i = 5\%$, Wert heute: $w(0) = 1$

> Zukunftswert in 3 Perioden ($t = 3$):

$$(1 + i)^t \cdot w = (1,05)^3 \cdot 1 = 1.157625$$

Der Zukunftswert einer Anlage

- > bei Zinssatz i
- > nach t Perioden

ist:

$$\text{Zukunftswert} = (1 + i)^t \cdot \text{Barwert}$$

Es gilt:

$$\text{Abszinsungsfaktor} = \frac{1}{\text{Aufzinsungsfaktor}}$$

FINANZMATHEMATIK: ZINSESZINS

Beispiel. Barwert = 20000, Zinssatz (i) = 5%, Jahre (t) = 5

Jahr	Anfangsbetrag	Zinsgutschrift	Endbetrag	Zinseszins
1	20000.00	1000.00	21000.00	0.00
2	21000.00	1050.00	22050.00	50.00
3	22050.00	1102.50	23152.50	102.50
4	23152.50	1157.63	24310.13	157.63
5	24310.13	1215.51	25525.63	215.51

- > **Unterjährige Verzinsung** mit m Zahlungen pro Jahr.

$$\text{Aufzinsungsfaktor} = \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{m \cdot t}$$

- > **Kontinuierliche Verzinsung** mit $m \rightarrow \infty$ Zahlungen pro Jahr.

$$\text{Aufzinsungsfaktor} = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{m \cdot t} = e^{i \cdot t}$$

FINANZMATHEMATIK: NACHSCHÜSSIGE ANNUITÄTEN

Nachschüssige Annuitäten sind

- > regelmäßige Zahlungen,
- > die am Ende jeder Periode geleistet werden.

Beispiele. Kredite, Sparverträgen

FINANZMATHEMATIK: NACHSCHÜSSIGE ANNUITÄTEN

A = Annuität, i = Zinssatz, t = Perioden

> Barwert

$$BW(A, i, t) = A \cdot \left(\frac{1 - (1 + i)^{-t}}{i} \right)$$

> Zukunftswert:

$$ZW(A, i, t) = A \cdot \left(\frac{(1 + i)^t - 1}{i} \right)$$

FINANZMATHEMATIK: NACHSCHÜSSIGE ANNUITÄTEN

Annuitätendarlehen:

- > Kreditsumme (Barwert) = 10.000 €, Laufzeit $t = 5$ Jahre, Zinssatz 5% pro Jahr,
- > Zahlungsweise: Jährliche gleichbleibende Rate (Annuität)

Jahr	Restschuld zu Beginn	Zinsen (5 %)	Tilgung	Rate (Annuität)	Restschuld am Ende
1	10.000,00 €	500,00 €	1.809,78 €	2.309,78 €	8.190,22 €
2	8.190,22 €	409,51 €	1.900,27 €	2.309,78 €	6.289,95 €
3	6.289,95 €	314,50 €	1.995,28 €	2.309,78 €	4.294,67 €
4	4.294,67 €	214,73 €	2.095,05 €	2.309,78 €	2.199,62 €
5	2.199,62 €	109,98 €	2.199,80 €	2.309,78 €	0,00 €

FINANZMATHEMATIK: VORSCHÜSSIGE ANNUITÄTEN

Bei der vorschüssigen Annuität werden alle Zahlungen eine Periode früher ausgezahlt

→ alle Zahlungen mit dem Faktor $(1 + i)$ multiplizieren:

$$\text{Barwert}_{\text{vorschüssig}} = \text{Barwert}_{\text{nachschüssig}} \cdot (1 + i)$$

$$\text{Zukunftswert}_{\text{vorschüssig}} = \text{Zukunftswert}_{\text{nachschüssig}} \cdot (1 + i)$$

Erinnerung Barwert Annuität:

$$A \cdot \left(\frac{1 - (1 + i)^{-t}}{i} \right)$$

Für $t \rightarrow \infty$:

$$\text{Barwert}(A, i) = \frac{A}{i}$$

FINANZMATHEMATIK: EWIGE RENTE MIT WACHSTUMSRATE

Barwert ewige Rente deren jährliche Auszahlung mit Wachstumsrate g ansteigt:

$$\text{Barwert}(A_0, i, g) = \frac{A_0(1 + g)}{i - g} = \frac{A_1}{i - g}$$



› 2. LINEARE ALGEBRA

VEKTOR- UND MATRIXALGEBRA: DEFINITION VEKTOREN

Ein *Vektor* ist eine geordnete Liste von Objekten in Spalten- oder Zeilenform.

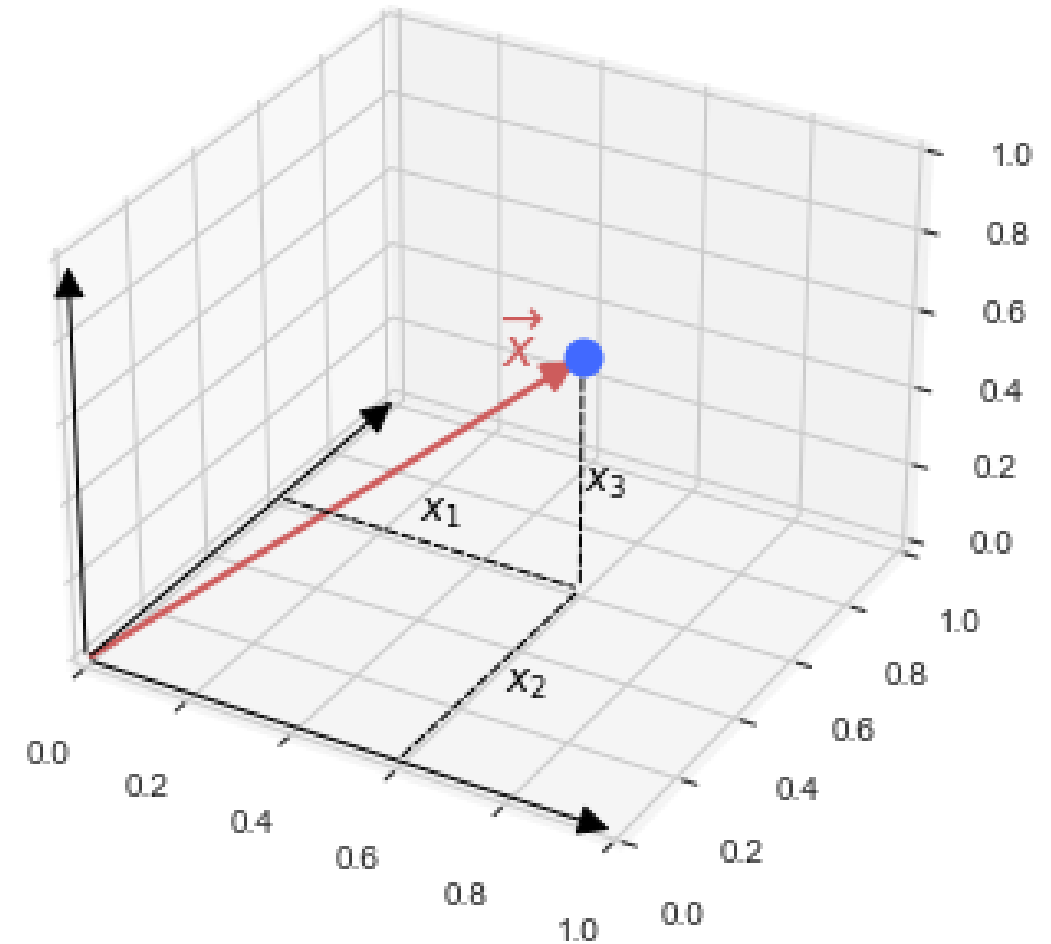
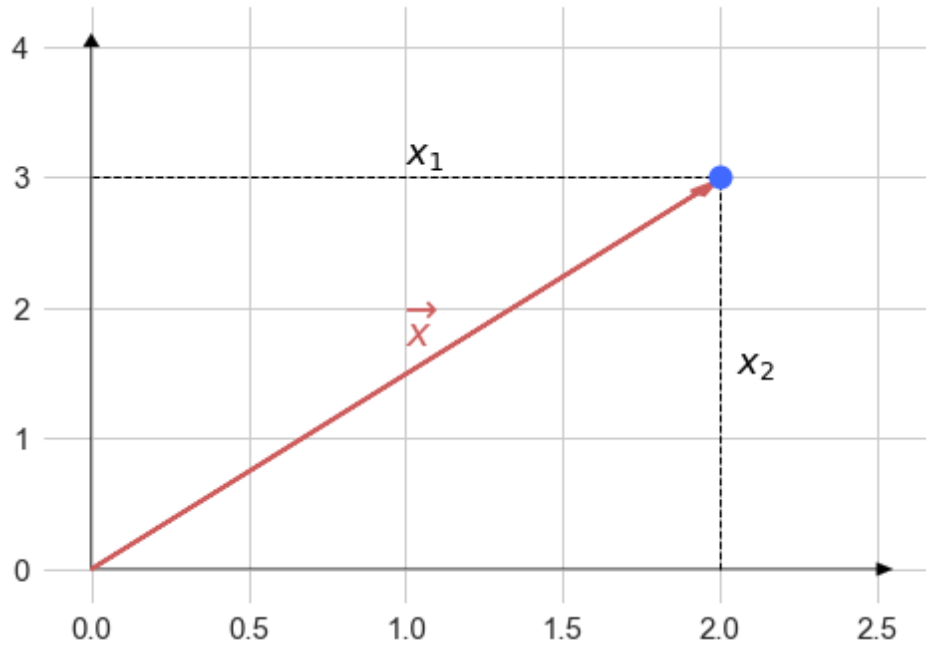
> Zeilenvektor ($1 \times n$ -Vektor):

$$(x_1, \dots, x_n)$$

> Spaltenvektor ($n \times 1$ -Vektor):

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

VEKTOR- UND MATRIXALGEBRA: VEKTOREN GRAFISCH



VEKTOR- UND MATRIXALGEBRA: VEKTOROPERATIONEN

- > *Vektoraddition* (und -subtraktion) erfolgt elementweise:

$$(1,2) + (4,5) = (5,7)$$

- > *Vektormultiplikation* (und -division) = Summe der Produkte der Elemente:

$$(1,2) \cdot (4,5) = (1 \cdot 4) + (2 \cdot 5) = 14$$

- > *Skalarmultiplikation* (Zahl mal Vektor) erfolgt elementweise:

$$(1,2) \cdot 4 = (4,8)$$

- > *Euklidische Distanz* zwischen zwei Punkten:

$$\|(1,2), (4,5)\| = \sqrt{(1-4)^2 + (2-5)^2} = \sqrt{18}$$

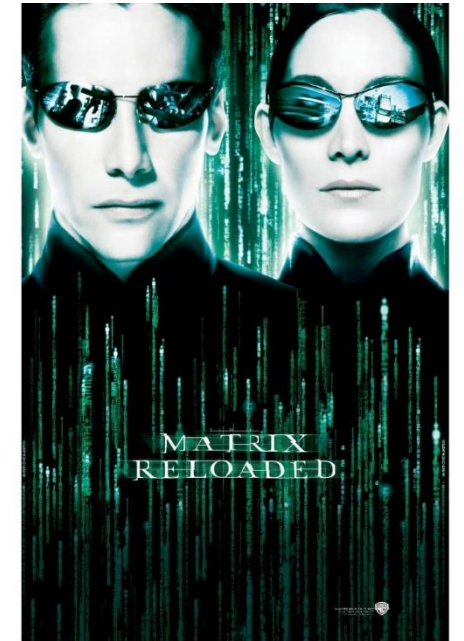
VEKTOR- UND MATRIXALGEBRA: DEFINITION MATRIX

Ein geordnetes, rechteckiges Schema von Objekten

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m \times n} = (a_{ij})_{m \times n}$$

heißt $m \times n$ *Matrix*

- > m = Anzahl der Zeilen (i = Zeilenindex)
- > n = Anzahl der Spalten (j = Spaltenindex)
- > a_{ij} = Elemente oder Komponenten der Matrix A



VEKTOR- UND MATRIXALGEBRA: ANWENDUNGSBEISPIELE MATRIX

Strukturierte Verarbeitungen von Daten mit Excel-Tabellen, SAP-Tabellen,..., z.B.:

- > Bestellmengen je Kunde und Produkt
- > Verkaufsmengen je Niederlassung und Produkt

Beschreibung linearer Beziehungen, z.B.:

- > Produktionsprozess – Fertigungsplanung
- > Unternehmenssteuerung

....

VEKTOR- UND MATRIXALGEBRA: ELEMENTARE MATRIXOPERATIONEN

> *Matrizenaddition*: Elementweise (bei Matrizen mit gleicher Anzahl Spalten und Zeilen)

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 5 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 9 & 8 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

> *Skalarmultiplikation*: Elementweise

$$4 \cdot \begin{pmatrix} 5 & 5 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 20 & 8 \\ 4 & -8 & 4 \end{pmatrix}$$

VEKTOR- UND MATRIXALGEBRA: ELEMENTARE MATRIXOPERATIONEN

> *Matrizenmultiplikation: Zeile \times Spalte*

Beispiel.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Schritt 1:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 4 & * \\ * & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & * \\ * & * \end{pmatrix}$$

Schritt 2:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \\ * & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ * & * \end{pmatrix}$$

VEKTOR- UND MATRIXALGEBRA: ELEMENTARE MATRIXOPERATIONEN

Schritt 3:
$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 2 \cdot 4 & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 9 & * \end{pmatrix}$$

Schritt 4:
$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 2 \end{pmatrix}$$

Anmerkungen. Matrizenmultiplikation

- > Matrizenmultiplikation $A \times B$ ist nur definiert, wenn

Anzahl der Spalten in Matrix **A** = Anzahl der Zeilen in Matrix **B**

- > Wenn **A** = $m \times n$ Matrix und **B** = $n \times k$ Matrix, dann ist

$A \times B$ eine $m \times k$ Matrix

VEKTOR- UND MATRIXALGEBRA: ELEMENTARE MATRIXOPERATIONEN

Rechenregeln. Matrizenmultiplikation. Seien **A**, **B**, **C** Matrizen, dann gilt:

1. Matrizenmultiplikation ist *assoziativ*:

$$(AB)C = A(BC)$$

2. Matrizenmultiplikation ist *distributiv*:

$$A(B + C) = AB + AC$$

3. Matrizenmultiplikation ist **nicht** kommutativ:

$$AB \neq BA$$

VEKTOR- UND MATRIXALGEBRA: ELEMENTARE MATRIXOPERATIONEN

Transponieren von Matrizen (Vertauschen von Zeilen und Spalten):

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow A^T = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Eine Matrix A heißt

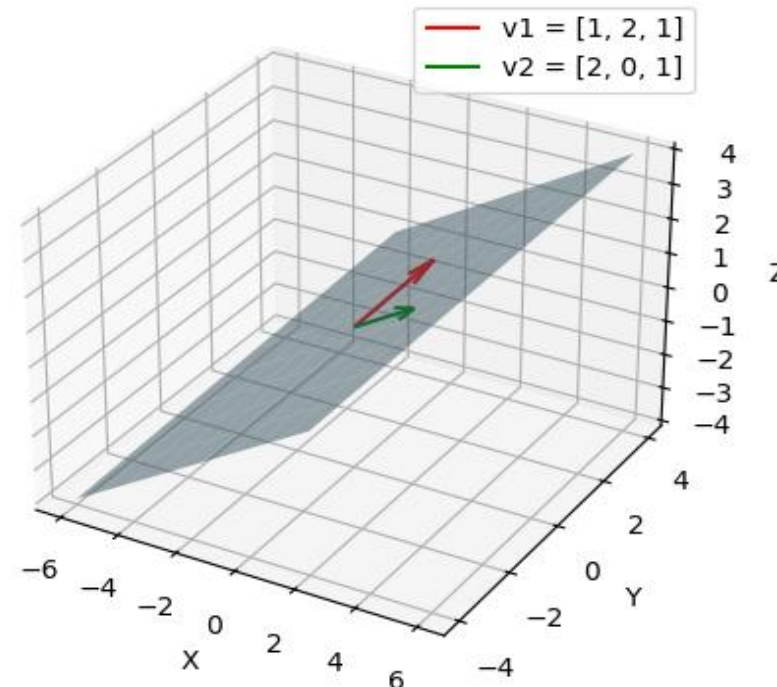
- > *quadratisch*, wenn Anzahl Spalten = Anzahl Zeilen (A ist $n \times n$)
- > *symmetrisch*, wenn $A = A^T$
- > *Einheitsmatrix* I , wenn die Einträge auf der Hauptdiagonalen 1 und sonst 0 sind:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

VEKTOR- UND MATRIXALGEBRA: MATRIZEN SPANNEN EINEN RAUM AUF

Die Spaltenvektoren der Matrix spannen einen Unterraum des gesamten Raums auf

Beispiel. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Die Matrix spannt folgenden 2-dimensionalen Unterraum auf:



Der *Rang* einer Matrix ist

die Dimension des Vektorraums, welcher durch die Vektoren der Matrix aufgespannt wird.

Bestimmung des Rangs einer Matrix:

- > Schritt 1. Bestimme die Dreiecksform der Matrix
- > Schritt 2. $\text{Rang}(\text{Matrix}) = \text{Anzahl der Zeilen, die nicht nur } 0 \text{ enthalten}$

VEKTOR- UND MATRIXALGEBRA: RANG EINER MATRIX

Die *obere Dreiecksform* ist

die Form einer Matrix, welche unterhalb der Hauptdiagonalen nur "0" enthält.

Beispiel. Umformung einer Matrix in Dreiecksform:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & -8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Dreiecksform

> 2. Zeile + 1. Zeile mal (-1)
> 3. Zeile + 1. Zeile mal (-3)

3. Zeile + 2. Zeile mal (-3)

VEKTOR- UND MATRIXALGEBRA: RANG EINER MATRIX

Beispiel. Bestimmung des Rangs einer Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Schritt 1. Dreiecksform:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

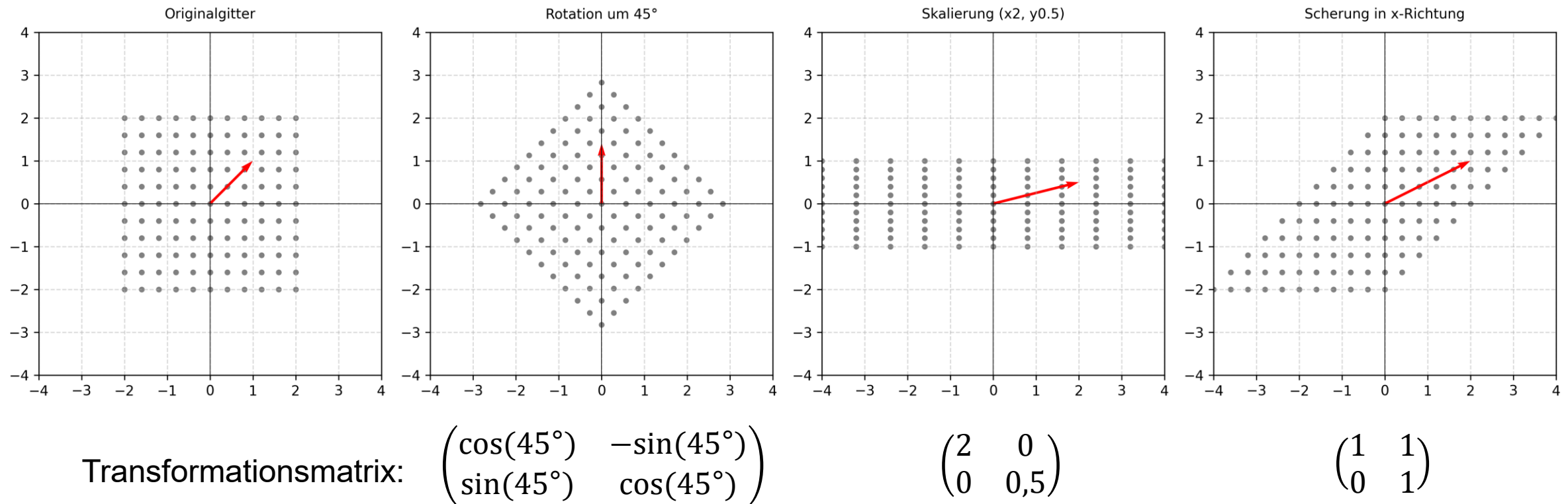
Schritt 2. Zähle Zeilen, die nicht nur 0 enthalten:

$$\text{Rang}(A) = 2$$

VEKTOR- UND MATRIXALGEBRA: MATRIZEN SIND LINEARE TRANSFORMATIONEN

Eine Matrix ist eine lineare Transformation: sie transformiert den Raum.

Beispiel. Vektor: $v^T = (1,1)$



VEKTOR- UND MATRIXALGEBRA: DETERMINANTE EINER 2×2 MATRIX

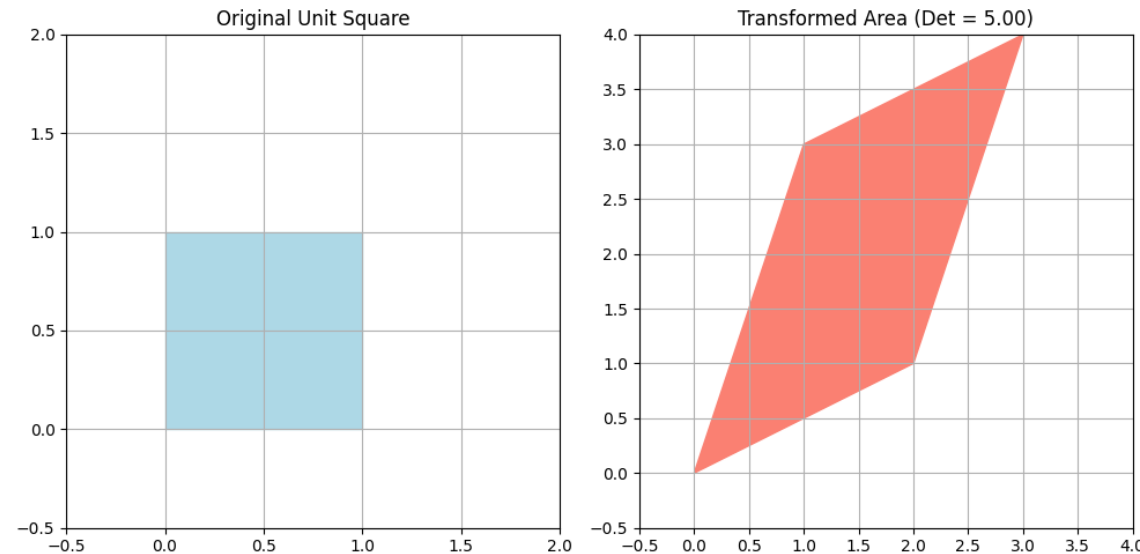
Determinante einer 2×2 Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = |A| = ad - bc$$

VEKTOR- UND MATRIXALGEBRA: DETERMINANTE GRAFISCH

Beispiel. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = 6 - 1 = 5$



- > Transformation Einheitsquadrat mit A vergrößert die Fläche um das fünffache
- > Eine negative Determinante zeigt eine Orientierungsumkehr: Das Objekt ist „umgedreht“

VEKTOR- UND MATRIXALGEBRA: LAPLACESCHER ENTWICKLUNGSSATZ

Determinante einer allgemeinen 3×3 Matrix: Laplacescher Entwicklungssatz

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} \square & \square & \square \\ \square & a_{22} & a_{23} \\ \square & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} \square & a_{12} & a_{13} \\ \square & \square & \square \\ \square & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} \square & a_{12} & a_{13} \\ \square & a_{22} & a_{23} \\ \square & \square & \square \end{vmatrix} \\ &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

VEKTOR- UND MATRIXALGEBRA: EIGENWERTE UND EIGENVEKTOREN EINER MATRIX

Vektoren werden durch eine Matrix normalerweise transformiert (gedreht und skaliert)

- > Bestimmte Vektoren – *die Eigenvektoren* – werden jedoch nur gestreckt oder gestaucht
- > Die Beziehung zwischen einer Matrix A und einem Eigenvektor v ist:

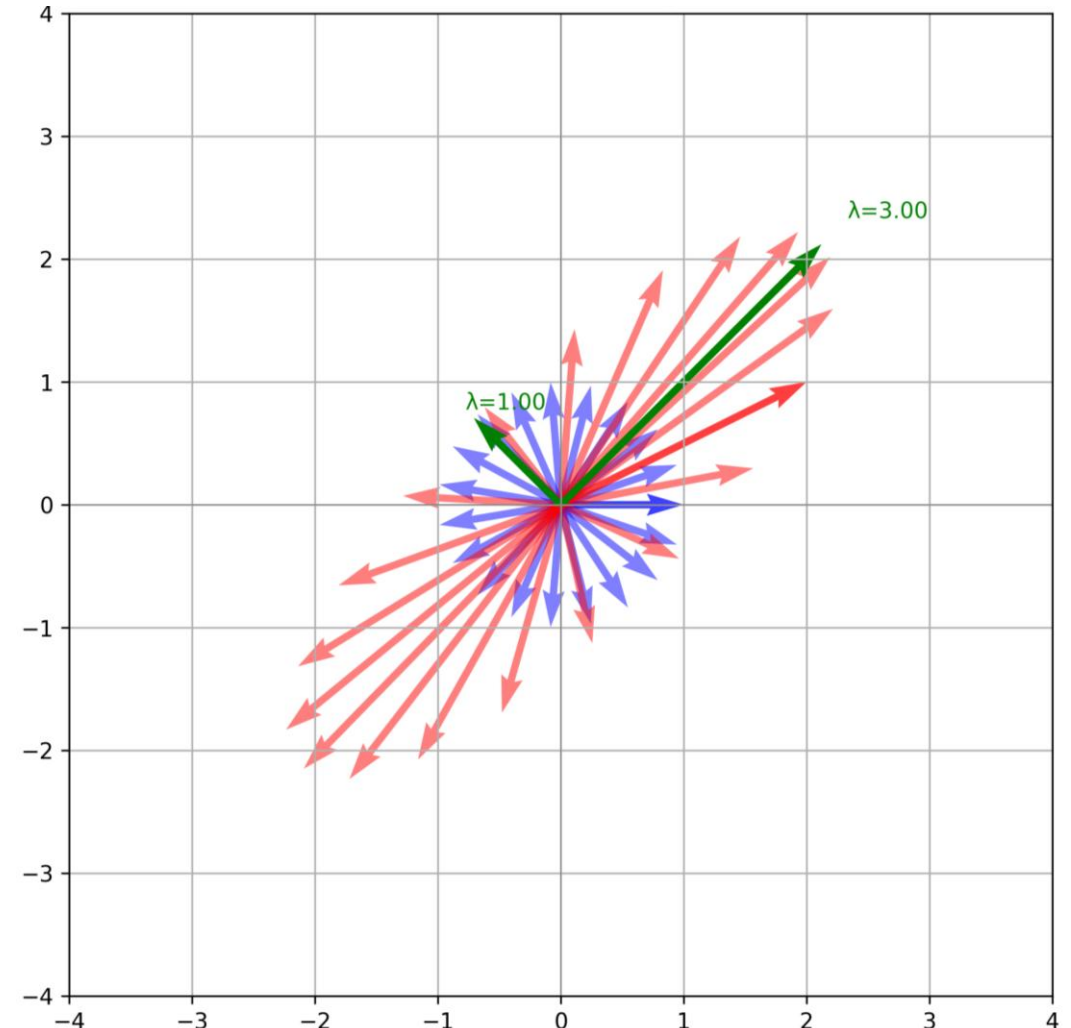
$$Av = \lambda v$$

wobei λ der zugehörige Eigenwert ist.

VEKTOR- UND MATRIXALGEBRA: EIGENWERTE UND EIGENVEKTOREN EINER MATRIX

Eigenwerte und Eigenvektoren:

- > **Blaue Pfeile** = Ursprüngliche Vektoren
- > **Rote Pfeile** = Vektoren nach Anwendung der Matrix $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$
- > **Grüne Pfeile** = Eigenvektoren, skaliert mit ihren Eigenwerten
 - > Zeigen in gleiche Richtung wie vorher



VEKTOR- UND MATRIXALGEBRA: EIGENWERTE UND EIGENVEKTOREN EINER MATRIX

Berechnung der Eigenwerte und Eigenvektoren

Beispiel. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

> Schritt 1: Berechne $\det(A - \lambda I)$ wobei I = Einheitsmatrix:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1 \\ 1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 3$$

> Schritt 2: Löse $\det(A - \lambda I) = 0$

Eigenwerte: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3$

VEKTOR- UND MATRIXALGEBRA: EIGENWERTE UND EIGENVEKTOREN EINER MATRIX

Berechnung der Eigenwerte und Eigenvektoren

Beispiel. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

> Schritt 3: Berechne Eigenvektoren:

$$(A - \lambda_1 I) \text{Eigenvektor}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = -y$$

$$\Rightarrow \text{Eigenvektor}_1 = \text{Alle Vektoren } s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ mit } s \geq 0$$

$$(A - \lambda_2 I) \text{Eigenvektor}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = y$$

$$\Rightarrow \text{Eigenvektor}_2 = \text{Alle Vektoren } s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ mit } s \geq 0$$

LINEARE GLEICHUNGSSYSTEME: DEFINITION

Ein *lineares Gleichungssystem (LGS)* ist

- > eine Menge von linearen Gleichungen,
- > die gleichzeitig erfüllt sein sollen

Beispiel. 2 Gleichungen in 2 Unbekannten

$$2x + 3y = 18 \quad (1)$$

$$3x - 4y = -7 \quad (2)$$

LINEARE GLEICHUNGSSYSTEME: ANWENDUNGSBEISPIELE

- > Physik, Informatik, Elektrotechnik, Ingenieurwesen
- > Betriebswirtschaftliche Steuerung und Optimierung,
 - > Bestimmung optimaler Rohstoff-, Verbrauchs- und Verkaufsmengen

> Privatleben?



LINEARE GLEICHUNGSSYSTEME: MATRIXFORM

Lineare Gleichungssysteme können mit Matrizen dargestellt werden.

Beispiel. 2 Gleichungen in 2 Unbekannten

$$2x + 3y = 18 \quad (1)$$

$$3x - 4y = -7 \quad (2)$$

> In Matrixform

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ -7 \end{pmatrix}$$

Allgemein:

$$\textit{Koeffizientenmatrix} \cdot \textit{Vektor Unbekannte} = \textit{Lösungsvektor}$$

LINEARE GLEICHUNGSSYSTEME: LÖSUNGSMENGE

Ein lineares Gleichungssystem hat

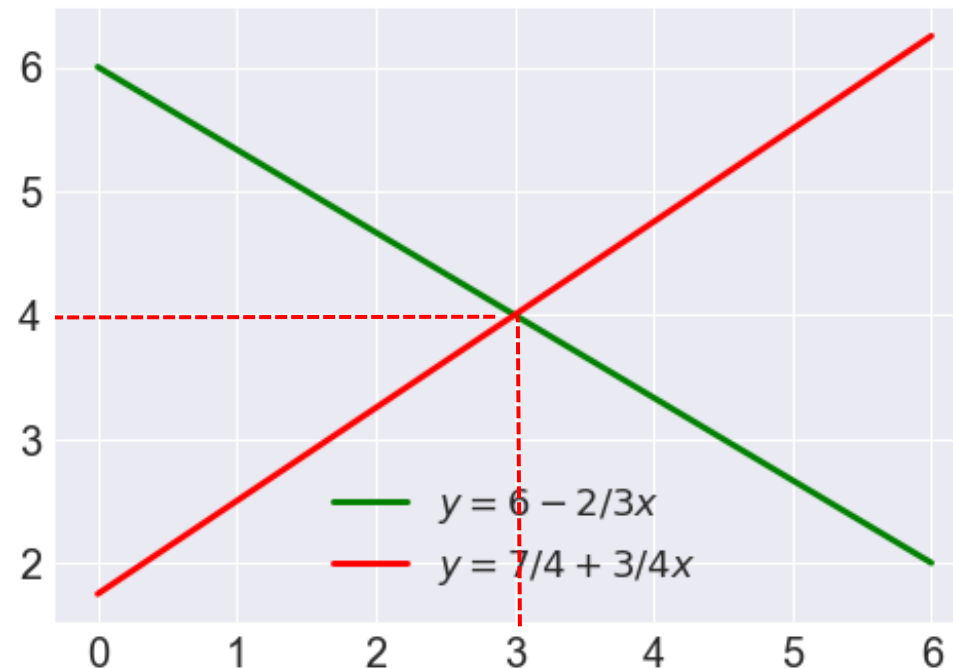
- i. entweder eine eindeutige Lösung,
- ii. keine Lösung oder
- iii. unendlich viele Lösungen

LINEARE GLEICHUNGSSYSTEME: EINDEUTIGE LÖSUNG

Das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rclcl} 2x + 3y = 18 & \Leftrightarrow & y = 6 - 2/3x \\ 3x - 4y = -7 & \Leftrightarrow & y = 7/4 + 3/4x \end{array}$$

hat eine eindeutige Lösung



LINEARE GLEICHUNGSSYSTEME: KEINE LÖSUNG

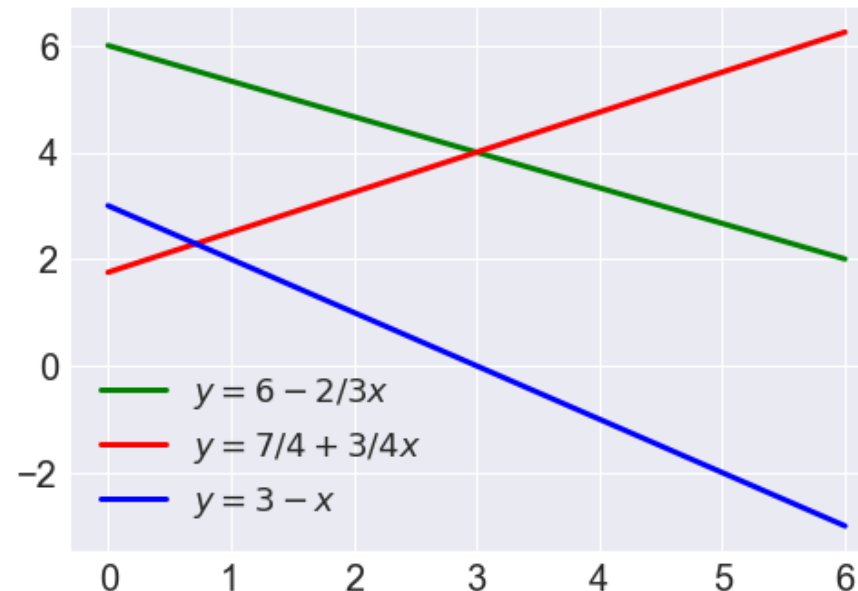
Das Gleichungssystem

$$2x + 3y = 18$$

$$3x - 4y = -7$$

$$x + y = 3$$

hat keine Lösung

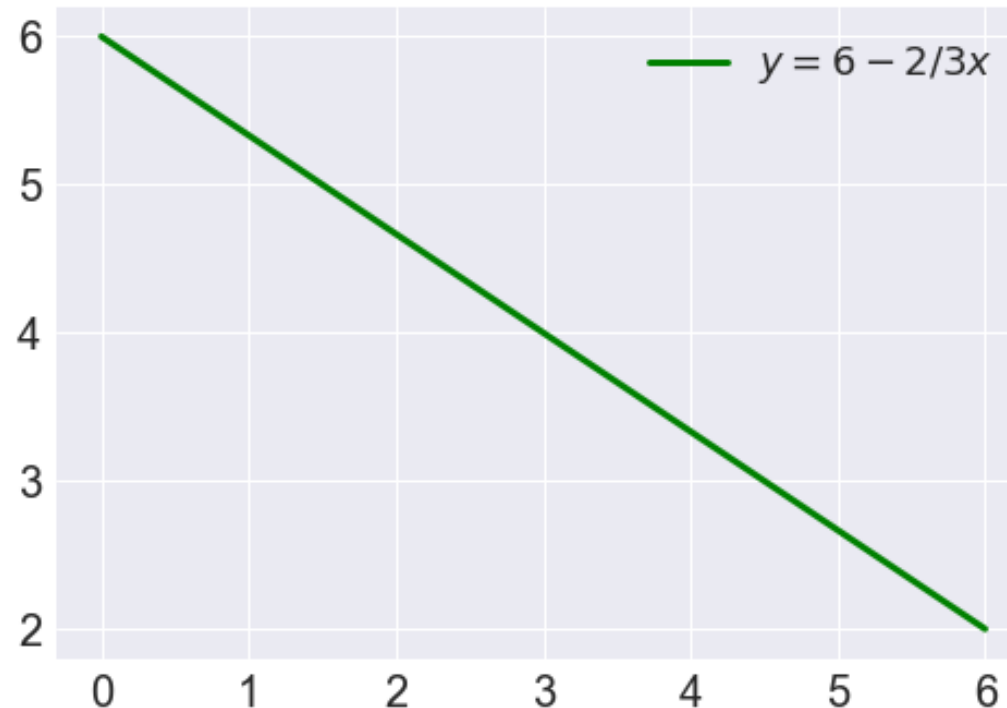


LINEARE GLEICHUNGSSYSTEME: UNENDLICH VIELE LÖSUNGEN

Das Gleichungssystem

$$2x + 3y = 18$$

hat unendlich viele Lösungen



LINEARE GLEICHUNGSSYSTEME: LÖSUNGSVERFAHREN

Lösungsverfahren 1: *Substitution*

Beispiel.

$$2x + 3y = 18 \quad (1)$$

$$3x - 4y = -7 \quad (2)$$

> Löse (1) nach y auf:

$$y = 6 - \frac{2}{3}x$$

> Setze dies in (2) ein:

$$3x - 4\left(6 - \frac{2}{3}x\right) = -7 \Leftrightarrow \frac{17}{3}x = 17 \Leftrightarrow x = 3$$

> Damit:

$$y = 6 - \frac{2}{3} \cdot 3 = 4$$

Lösungsverfahren 2: *Gaußsches Eliminationsverfahren*

Beispiel.

$$2x + 3y = 18 \quad (1)$$

$$3x - 4y = -7 \quad (2)$$

> Schritt 1: Matrixform

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ -7 \end{pmatrix}$$

> Schritt 2: Erweiterte Koeffizientenmatrix: (*Koeffizientenmatrix* | *Lösungsvektor*)

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 18 \\ 3 & -4 & -7 \end{array} \right)$$

Lösungsverfahren 2: *Gaußsches Eliminationsverfahren*

Beispiel.

$$2x + 3y = 18 \quad (1)$$

$$3x - 4y = -7 \quad (2)$$

> Schritt 3: Dreiecksform Erweiterte Koeffizientenmatrix

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 18 \\ 3 & -4 & -7 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 18 \\ 0 & -17/2 & -68/2 \end{array} \right)$$

> Aus 2. Zeile: $-\frac{17}{2} \cdot y = -\frac{68}{2} \rightarrow y = 4$

> $y = 4$ in 1. Zeile: $2x + 12 = 18 \rightarrow x = 3$

LINEARE GLEICHUNGSSYSTEME: LÖSUNGSVERFAHREN

Lösungsverfahren 3: *Cramersche Regel*

Gegeben ein lineares Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_n \end{pmatrix}$$

dann gilt für die Lösung der i -ten Unbekannten:

$$x_i = \frac{\det \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & l_1 & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & l_n & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}}{\det(\text{Koeffizientenmatrix})}$$

Die i -te Spalte Koeffizientenmatrix
durch Lösungsvektor ersetzt

LINEARE GLEICHUNGSSYSTEME: LÖSUNGSVERFAHREN

Lösungsverfahren 3: *Cramersche Regel* (insbesondere bei 2×2 effizient)

Beispiel.

$$2x + 3y = 18 \quad (1)$$

$$3x - 4y = -7 \quad (2)$$

$$x = \frac{\det \begin{pmatrix} \textcolor{red}{18} & 3 \\ \textcolor{red}{-7} & -4 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}} = \frac{18(-4) - (-7)3}{2(-4) - 3 \cdot 3} = \frac{-51}{-17} = 3,$$

$$y = \frac{\det \begin{pmatrix} 2 & \textcolor{red}{18} \\ 3 & \textcolor{red}{-7} \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}} = \frac{2(-7) - 3 \cdot 18}{-17} = \frac{-68}{-17} = 4$$

Satz von Kronecker-Capelli:

Eine lineares Gleichungssystem ist genau dann lösbar, wenn

$$\text{Rang}(\text{Koeffizientenmatrix}) = \text{Rang}(\text{Erweiterte Koeffizientenmatrix})$$

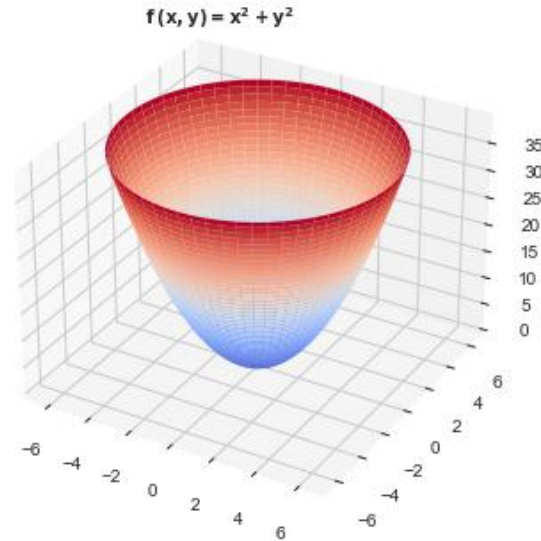
> Die Lösung ist eindeutig, wenn:

$$\text{Rang}(\text{Koeffizientenmatrix}) = \text{Anzahl Unbekannte}$$

Bei quadratischen Koeffizientenmatrizen:

Eine lineares Gleichungssystem ist genau dann eindeutig lösbar, wenn

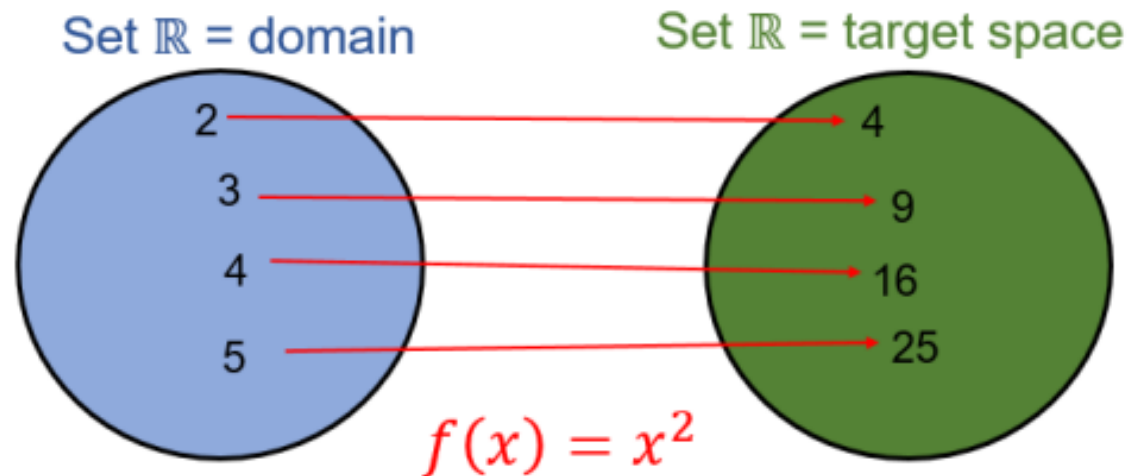
$$\det(\text{Koeffizientenmatrix}) \neq 0$$



› 3. ANALYSIS

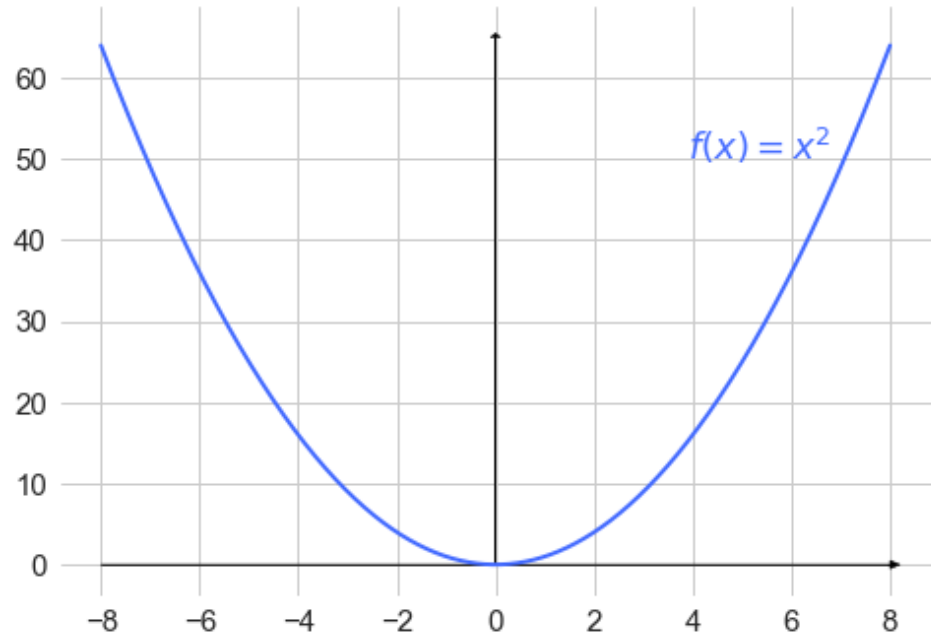
Eine *Funktion* $f: A \rightarrow B$ ist eine Abbildung,

- > die jedem Element einer Menge A (Definitionsmenge)
- > ein Element einer Menge B (Zielraum) zuordnet

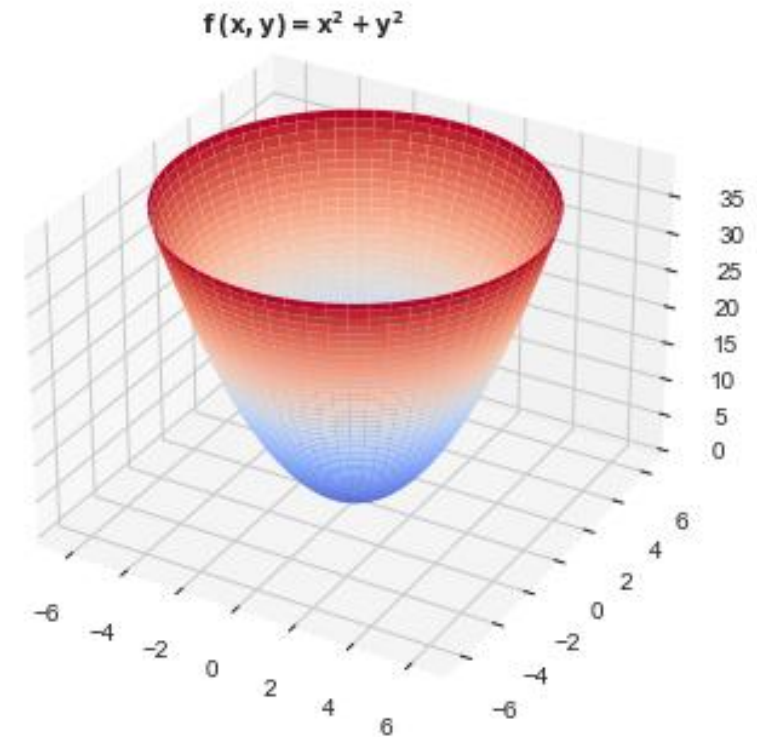


ANALYSIS: UNIVARIATE UND MULTIVARIATE FUNKTIONEN

$f(x) = x^2$ ist eine *univariate* Funktion



$f(x, y) = x^2 + y^2$ ist eine *multivariate* Funktion



Eine Funktion heißt *stetig*, wenn sie keine "Sprungstellen" hat.

> Etwas mathematischer: Eine Funktion heißt *stetig*, wenn

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \text{ für alle } a$$

ANALYSIS: DIFFERENZIERBARKEIT (UNIVARIAT)

Gegeben eine univariate Funktion f

> Der *Differenzenquotient* $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ zweier Punkte x und $x_1 = x + h$ ist:

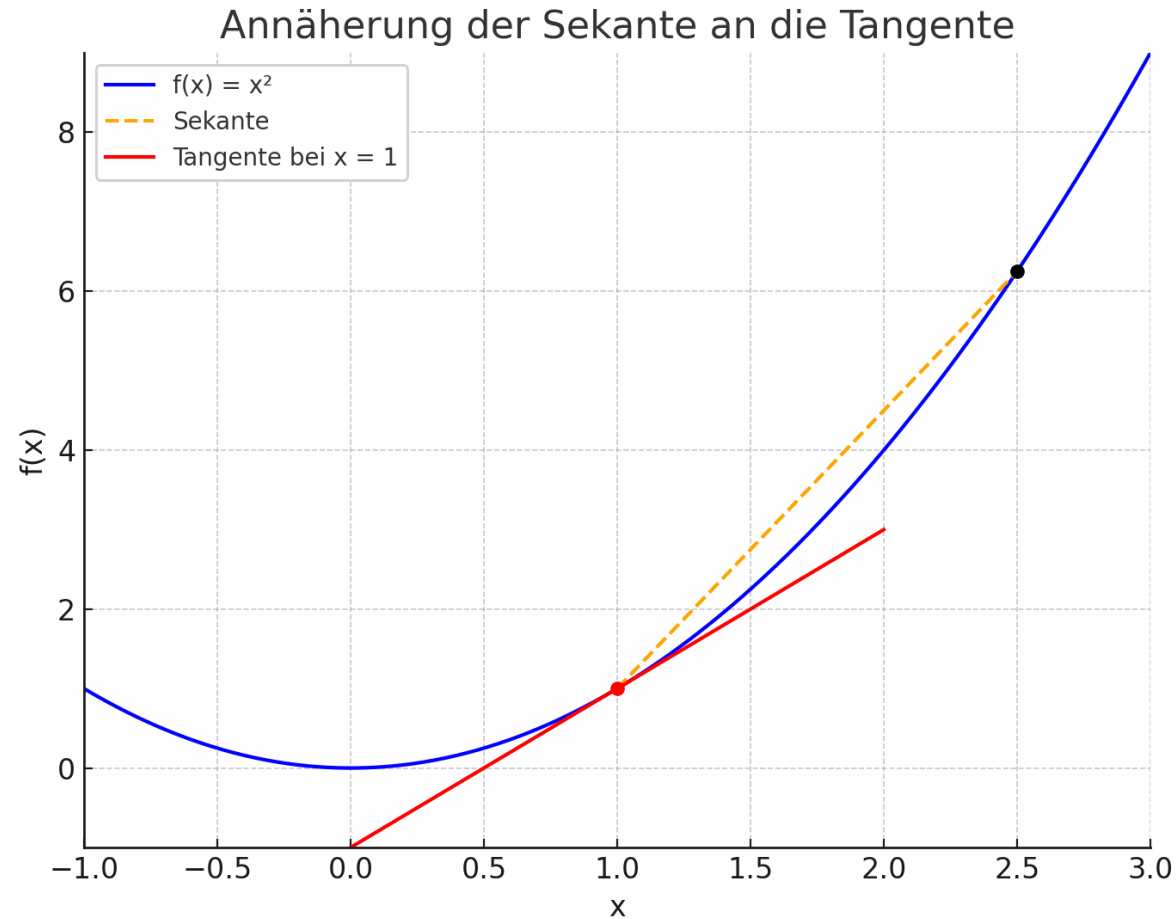
$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x + h) - f(x)}{x + h - x}$$

Dies entspricht der Steigung der Sekante durch die beiden Punkte

> Wenn h immer kleiner wird erhält man die *Ableitung* $f'(x)$ = Steigung der Tangente

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

ANALYSIS: DIFFERENZIERBARKEIT (UNIVARIAT)



ANALYSIS: DIFFERENZIERBARKEIT (UNIVARIAT)

Beispiel. Bestimmen Sie die erste Ableitung der Funktion $f(x) = x^2$.

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - (x)^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 2x + h = 2x$$

ANALYSIS: DIFFERENZIERBARKEIT (UNIVARIAT)

Rechenregeln.

> $f(x) = \textit{Konstante} \rightarrow f'(x) = 0$

> $f(x) = x^n \rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}$

ANALYSIS:

DIFFERENZIERBARKEIT (UNIVARIAT)

> *Kettenregel*: Die Ableitung einer Funktion $h = f(g)$ ist $h' = f'(g) \cdot g'$

Beispiel. $h = (4x + 2)^2 \rightarrow h' = 2(4x + 2) \cdot 4$

> *Produktregel*: Die Ableitung einer Funktion $h = f \cdot g$ ist $h' = f'g + f \cdot g'$

Beispiel. $h = x^2 \cdot (4x + 2) \rightarrow h' = 2x(4x + 2) + x^2 4$

> *Quotientenregel*: Die Ableitung einer Funktion $h = f/g$ ist $h' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

Beispiel. $h = \frac{x^2}{(4x+2)} \rightarrow h' = \frac{2x(4x+2) - x^2 4}{(4x+2)^2}$

ANALYSIS: DIFFERENZIERBARKEIT (MULTIVARIAT)

Die *partielle Ableitung* f_{x_i} einer Funktion $f(x_1, \dots, x_n)$ nach einer Variablen x_i ist:

f_{x_i} = Differenziere f nach x_i und behandle alle anderen Variablen als Konstanten

Beispiel. $f(x_1, x_2) = x_1^2 \cdot 2x_2 + x_1$

> $f_{x_1} = 2x_1 \cdot 2x_2 + 1$

> $f_{x_2} = 2x_1^2$

ANALYSIS: DIFFERENZIERBARKEIT (MULTIVARIAT)

Die **erste Ableitung** einer Funktion $f(x_1, \dots, x_n)$ ist deren Gradient ∇_f

> der Gradient ist der Vektor aller partiellen Ableitungen von f :

$$\nabla_f = \begin{pmatrix} f_{x_1} \\ \vdots \\ f_{x_n} \end{pmatrix}$$

Beispiel. $f(x_1, x_2) = x_1^2 \cdot 2x_2 + x_1$

$$\nabla_f = \begin{pmatrix} 4x_1x_2 + 1 \\ 2x_1^2 \end{pmatrix}$$

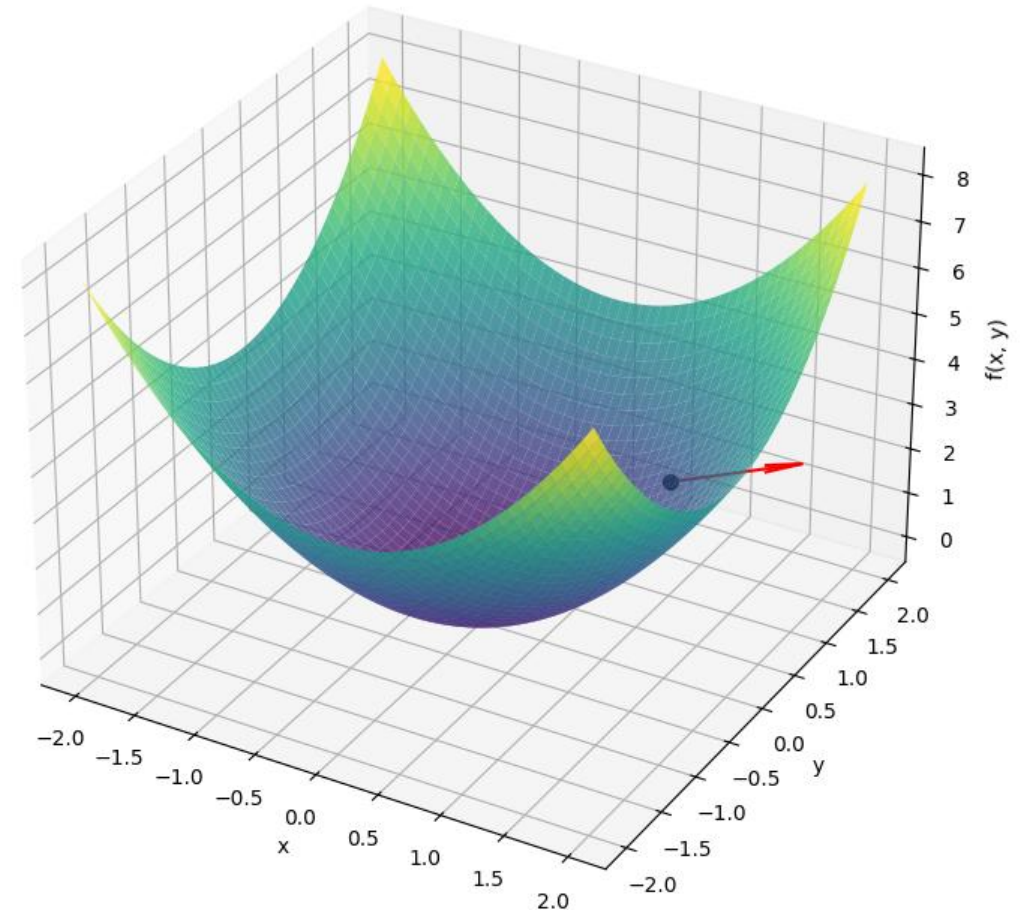
ANALYSIS: DIFFERENZIERBARKEIT (MULTIVARIAT)

Intuition Gradient:

- > Die Oberfläche zeigt die Funktion

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

- > Der rote Pfeil = Gradientenvektor in (1,1)
- > Er zeigt in die Richtung des steilsten Anstiegs der Funktion.



ANALYSIS: DIFFERENZIERBARKEIT (MULTIVARIAT)

Die **zweite Ableitung** einer Funktion $f(x_1, \dots, x_n)$ ist deren Hesse-Matrix H_f

$$H_f(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} f_{x_1x_1} & \cdots & f_{x_1x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{x_nx_1} & \cdots & f_{x_nx_n} \end{pmatrix}$$

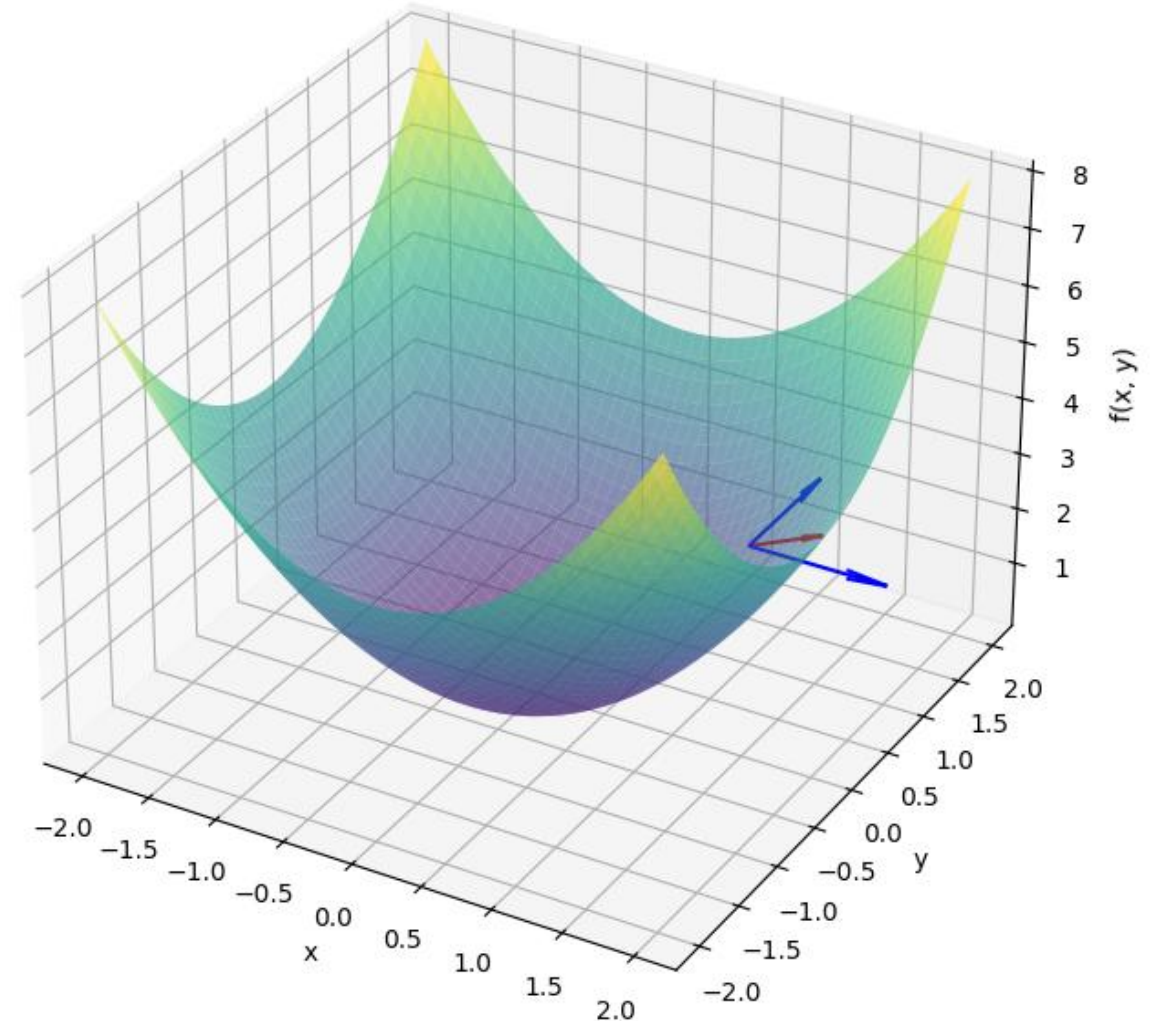
Beispiel. $f(x_1, x_2) = x_1^2 \cdot 2x_2 + x_1$

$$H_f = \begin{pmatrix} 4x_2 & 4x_1 \\ 4x_1 & 0 \end{pmatrix}$$

ANALYSIS: DIFFERENZIERBARKEIT (MULTIVARIAT)

Intuition Hesse-Matrix:

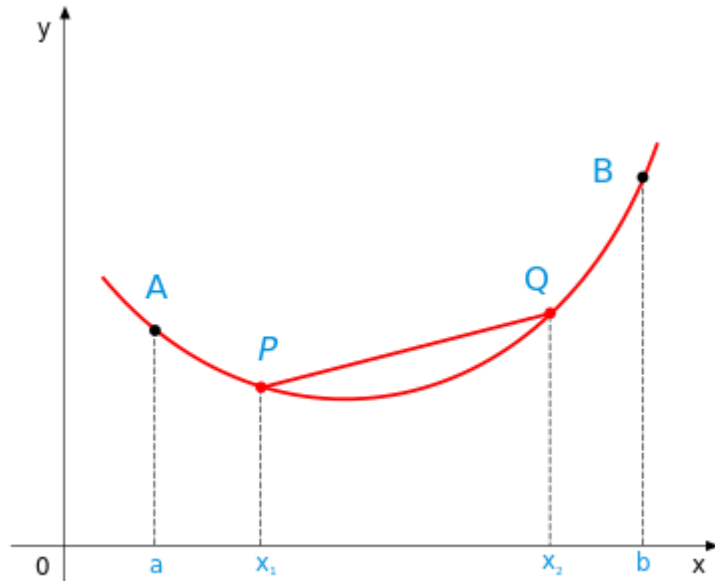
- > Blaue Pfeile = Eigenvektoren Hesse-Matrix
 - > zeigen die Hauptrichtungen der Krümmung an
 - > geben an, wie stark die Funktion in diese Richtungen gekrümmt ist



ANALYSIS: KONVEXE UND KONKAVE FUNKTIONEN

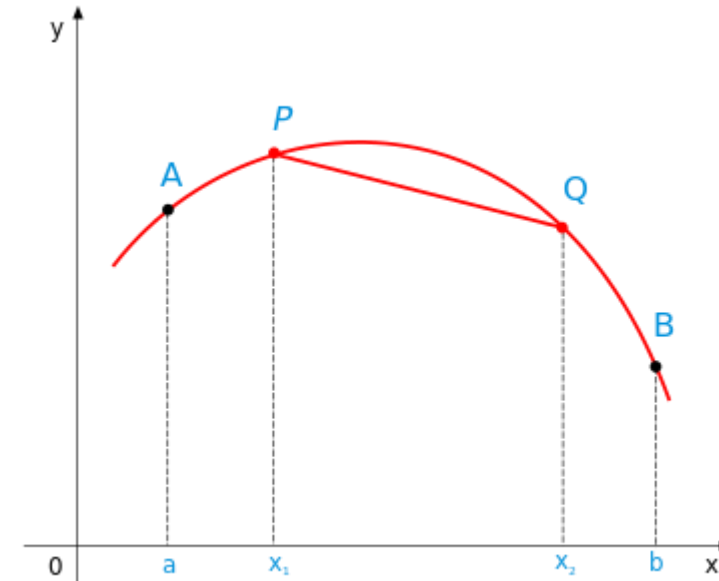
Konvexe Funktion

> Verbindungslinien oberhalb der Funktion



Konkave Funktion

Verbindungslinien unterhalb der Funktion



Quelle Bilder: https://de.wikipedia.org/wiki/Konvexe_und_konkave_Funktionen

ANALYSIS: KONVEXE UND KONKAVE FUNKTIONEN

Eine zweifach differenzierbare Funktion f ist

- > Konvex, wenn die Hesse-Matrix positiv semidefinit ist (Alle Eigenwerte ≥ 0)
- > Konkav, wenn die Hesse-Matrix negativ semidefinit ist (Alle Eigenwerte ≤ 0)

ANALYSIS: OPTIMIERUNG OHNE NEBENBEDINGUNGEN

Ein Optimierungsproblem ohne Nebenbedingungen umfasst

- > Ein Optimierungsziel (max = Maximiere und min = Minimiere)
- > Eine Zielfunktion $f(x_1, \dots, x_n)$
- > Eine Menge von Variablen nach denen optimiert werden soll

Beispiel. Wir möchten $f(x, y) = -x^2 - y^2 + x$ mit x, y maximieren, dann schreiben wir:

$$\max_{x,y} f(x, y)$$

ANALYSIS: OPTIMIERUNG OHNE NEBENBEDINGUNGEN

Bedingung erster und zweiter Ordnung für Extremwerte

> Bedingung erster Ordnung (BEO):

$$\nabla_f = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

> Bedingung zweiter Ordnung (BZO):

Sei $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$ ein Punkt, der die BEO erfüllt, dann handelt es sich um ein

> Minimum, wenn die Hesse-Matrix positiv semidefinit ist

> Maximum, wenn die Hesse-Matrix negativ semidefinit ist

ANALYSIS: OPTIMIERUNG OHNE NEBENBEDINGUNGEN

Beispiel . $f(x, y) = -x^2 - y^2 + x$

> BEO:

$$\nabla_f(x) = \begin{pmatrix} -2x + 1 \\ -2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow (x^*, y^*) = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$$

> BZO:

$$H_f(x) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

> Eigenwerte: $\det(A - \lambda I) = (-2 - \lambda)^2 = 0 \Rightarrow \lambda = -2$

> Eigenwert < 0 . Damit negativ semidefinite Hesse-Matrix \rightarrow Maximum

ANALYSIS: OPTIMIERUNG MIT NEBENBEDINGUNGEN

Ein Optimierungsproblem mit Nebenbedingungen umfasst

- > Ein Optimierungsproblem $\max_{x_1, \dots, x_n} f(x_1, \dots, x_n)$
- > und Nebenbedingungen $g_1(x_1, \dots, x_n) \leq 0, \dots, g_k(x_1, \dots, x_n) \leq 0$
- > Zusammengefasst schreiben wir

$$\begin{aligned} & \max_{x_1, \dots, x_n} f(x_1, \dots, x_n) \\ & s. d. \\ & g_1 \leq 0 \\ & \vdots \\ & g_k \leq 0 \end{aligned}$$

ANALYSIS: OPTIMIERUNG MIT NEBENBEDINGUNGEN

Das *Kuhn-Tucker-Verfahren*

Beispiel 1.

$$\begin{aligned} \min_{x,y} & (x-1)^2 + (y-2)^2 \\ \text{s. d.} & \\ & x + y - 2 \leq 0 \end{aligned}$$

> Schritt 1: Lagrange-Funktion aufstellen:

$$L = (x-1)^2 + (y-2)^2 + \lambda(x+y-2)$$

ANALYSIS: OPTIMIERUNG MIT NEBENBEDINGUNGEN

Das Kuhn-Tucker-Verfahren

> Schritt 2: Kuhn-Tucker-Bedingungen

> BEO:

$$\nabla_L = \begin{pmatrix} 2(x - 1) + \lambda \\ 2(y - 2) + \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

> Primal feasibility:

$$x + y - 2 \leq 0$$

> Dual feasibility:

$$\lambda \geq 0$$

> Komplementarität:

$$\lambda_1(x + y - 2) = 0$$

ANALYSIS: OPTIMIERUNG MIT NEBENBEDINGUNGEN

Das Kuhn-Tucker-Verfahren

> Schritt 3: Lösung berechnen

> Fall 1: $\lambda = 0$ (Nebenbedingung nicht aktiv)

- Aus BEO: $x = 1, y = 2$
- Dann $x + y = 3 > 2$: Nebenbedingung verletzt, also keine Lösung

> Fall 2: $\lambda > 0$ (Nebenbedingung aktiv)

- Aus Komplementarität: $x + y = 2$
- Dann aus BEO: $x = y - 1$
- Aus diesen beiden Gleichungen folgt: $y = \frac{3}{2}, x = \frac{1}{2} \rightarrow$ Lösung

ANALYSIS: OPTIMIERUNG MIT NEBENBEDINGUNGEN

Das Kuhn-Tucker-Verfahren

Beispiel 2. Ein Unternehmen produziert ein x Tonnen Getreide pro Woche. Der Gewinn (in 1000 €) pro Woche ist:

$$10x - 0,5x^2$$

- > Die Lagerfläche ist begrenzt: es dürfen höchstens 6 Tonnen eingelagert werden
- > Schritt 1: Lagrange-Funktion aufstellen:

$$L = -10x + 0,5x^2 + \lambda(x - 6)$$

Da Kuhn-Tucker auf Minimierungsprobleme ausgelegt ist und $\max f = \min -f$

ANALYSIS: OPTIMIERUNG MIT NEBENBEDINGUNGEN

Das *Kuhn-Tucker-Verfahren*

> Schritt 2: Kuhn-Tucker-Bedingungen

> BEO:

$$\nabla_L = -10 + x + \lambda = 0$$

> Primal feasibility:

$$x - 6 \leq 0$$

> Dual feasibility:

$$\lambda \geq 0$$

> Komplementarität:

$$\lambda_1(x - 6) = 0$$

ANALYSIS: OPTIMIERUNG MIT NEBENBEDINGUNGEN

Das *Kuhn-Tucker-Verfahren*

> Schritt 3: Lösung berechnen

- > Fall 1: $x < 6 \Rightarrow \lambda = 0$ (Nebenbedingung nicht aktiv)
 - Aus BEO: $x = 10$
 - Dann $x = 10 > 6$: Nebenbedingung verletzt, also keine Lösung

- > Fall 2: $\lambda > 0$ (Nebenbedingung aktiv)
 - Aus Komplementarität: $x = 6$
 - Dann aus BEO: $\lambda = 4 \geq 0$
 - Aus diesen beiden Gleichungen folgt: $x = 6 \rightarrow$ Lösung

ANALYSIS: OPTIMIERUNG MIT NEBENBEDINGUNGEN

Das *Kuhn-Tucker-Verfahren*

Beispiel 3. Ein Haushalt konsumiert zwei Güter:

x_1 : *Kaffee (in Tassen pro Woche)*

x_2 : *Kino (in Kinobesuchen pro Woche)*

Die Nutzenfunktion sei $U = x_1^{1/2} \cdot x_2^{1/2}$

Beschränkungen:

> Budget: $5x_1 + 10x_2 \leq 100$

> Zeit: $x_1 + 2x_2 \leq 12$

ANALYSIS: OPTIMIERUNG MIT NEBENBEDINGUNGEN

Das Kuhn-Tucker-Verfahren

- > Schritt 1: Lagrange-Funktion aufstellen:

$$L = -x_1^{1/2} \cdot x_2^{1/2} + \lambda_1(5x_1 + 10x_2 - 100) + \lambda_2(x_1 + 2x_2 - 12)$$

- > Schritt 2: Kuhn-Tucker-Bedingungen

- > BEO:

$$\nabla_L = \begin{pmatrix} -1/2 x_1^{-1/2} \cdot x_2^{1/2} + 5\lambda_1 + \lambda_2 \\ -1/2 x_1^{1/2} \cdot x_2^{-1/2} + 10\lambda_1 + 2\lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ANALYSIS: OPTIMIERUNG MIT NEBENBEDINGUNGEN

Das Kuhn-Tucker-Verfahren

> Schritt 2: Kuhn-Tucker-Bedingungen

> Primal feasibility:

$$2x_1 + 10x_2 - 100 \leq 0 \text{ und } x_1 + 2x_2 - 12 \leq 0$$

> Dual feasibility:

$$\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$$

> Komplementarität:

$$\lambda_1(2x_1 + 10x_2 - 100) = 0 \text{ und } \lambda_2(x_1 + 2x_2 - 12) = 0$$

ANALYSIS: OPTIMIERUNG MIT NEBENBEDINGUNGEN

Das Kuhn-Tucker-Verfahren

> Schritt 3: Lösung berechnen

> Fall 1: $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$

- Aus Komplementarität: $5x_1 + 10x_2 - 100 = 0$ und $x_1 + 2x_2 - 12 = 0$
- Aus Gleichung 2 folgt $5x_1 + 10x_2 = 60 \rightarrow$ Widerspruch zur ersten Gleichung

> Fall 2: $\lambda_1 > 0, \lambda_2 = 0$

- Aus Komplementarität: $5x_1 + 10x_2 = 100$
- Ergibt mit BEO: $x_1 = 10, x_2 = 5, \lambda_1 \approx 0,071$
- $x_1 + 2x_2 = 20 > 12 \rightarrow$ Widerspruch zur Zeitrestriktion

ANALYSIS: OPTIMIERUNG MIT NEBENBEDINGUNGEN

Das *Kuhn-Tucker-Verfahren*

> Schritt 3: Lösung berechnen

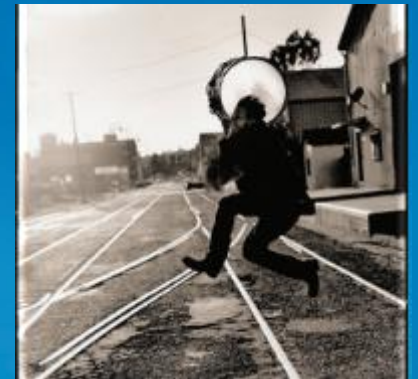
> Fall 3: $\lambda_1 = 0, \lambda_2 > 0$

- Aus Komplementarität: $x_1 + 2x_2 = 12$
- Ergibt mit BEO: $x_1 = 6, x_2 = 3, \lambda_2 \approx 0,354 \rightarrow$ gültige Lösung

> Fall 4: $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0$

- Budget und Zeit werden nicht voll ausgeschöpft
- Kann keine Lösung sein, da U in beidem wächst

THE END!



Please refer any questions to:
Prof. Dr. Florian Kauffeldt
Faculty of International Business
florian.kauffeldt@hs-heilbronn.de