HOCHSCHULE HEILBRONN


# › WIRTSCHAFTS-MATHEMATIK


**Wirtschaftsmathematik | Prof. Dr. Florian Kauffeldt**

# QUELLEN

HOCHSCHULE HEILBRONN

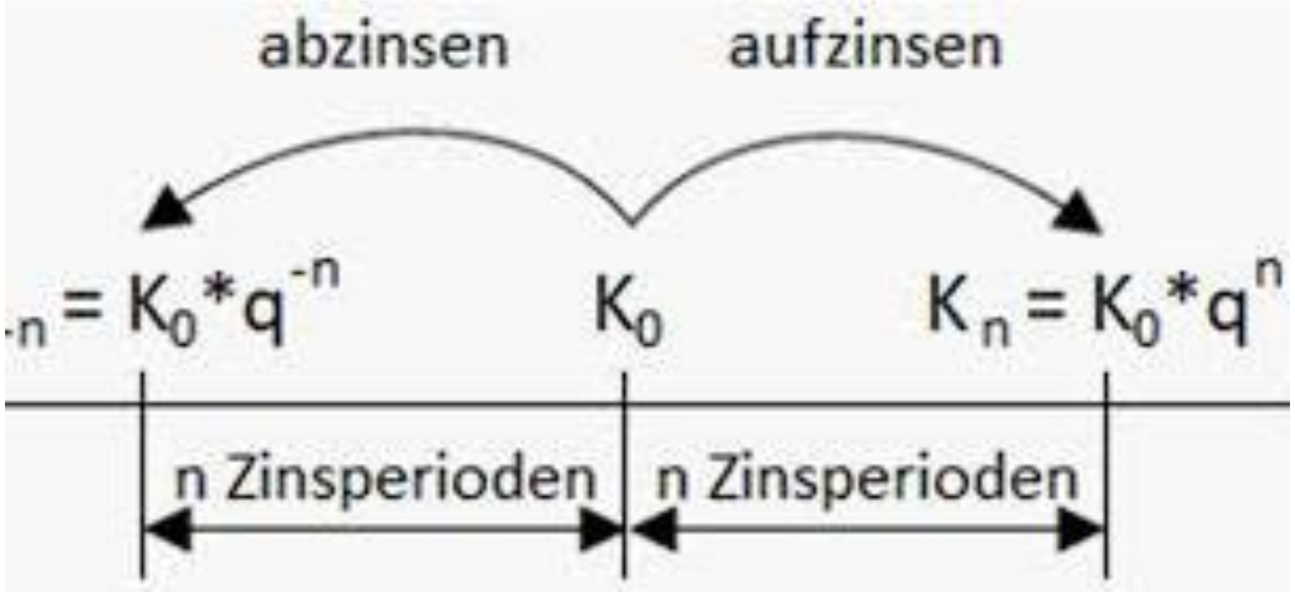

PETER ALBRECHT (2014): Finanzmathematik für Wirtschaftswissenschaftler, 3. Auflage, Schäffer Poeschel.

KNUT SYDSAETER, PETER HAMMOND, ARNE STROM, ANDRÉS CARVAJAL (2018): Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler, 5. Auflage, Pearson.

# INHALT

HOCHSCHULE HEILBRONN

1. Finanzmathematik
2. Vektor- und Matrixalgebra
3. Lineare Gleichungssysteme
4. Mengenlehre
5. Analysis
6. Optimierung

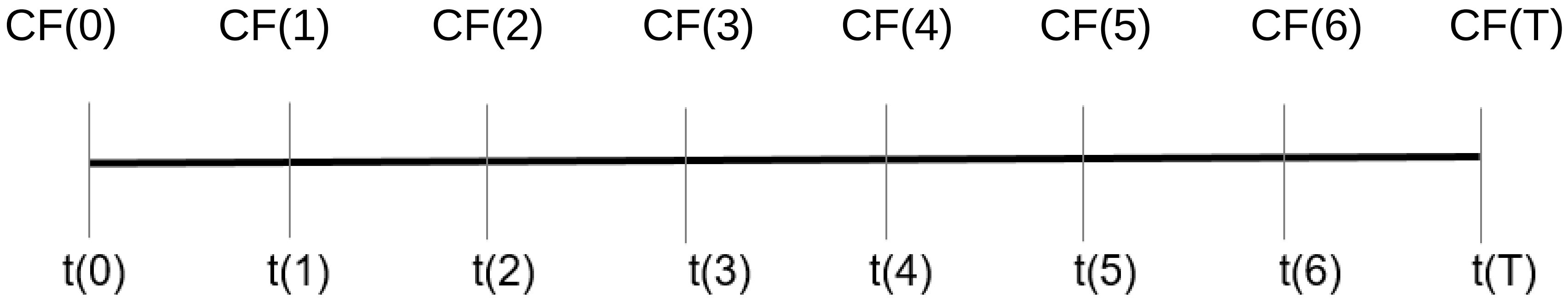



# › 1. FINANZMATHEMATIK

# ZAHLUNGS-
# STRÖME



**CF = Cash Flow = Zahlungsstrom**

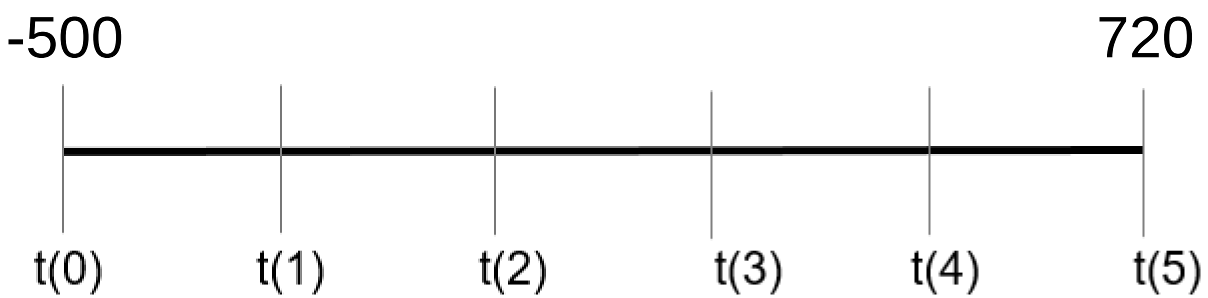



**t = Zeitpunkt**

> Zahlungsströme erfolgen in regelmäßigen, diskreten Abständen, Grundannahme: jährlich

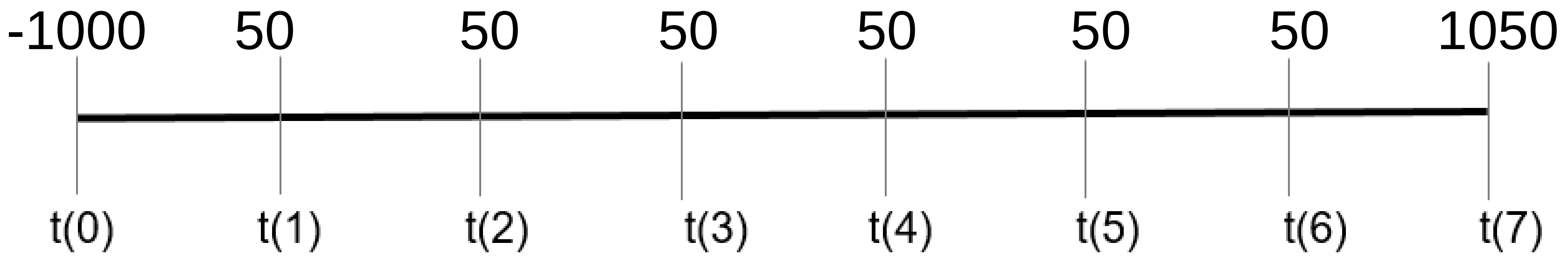
# ZAHLUNGS-STRÖME

Beispiel 1. Sie investieren heute EUR 500 und erhalten nach 5 jahren EUR 720 zurück.



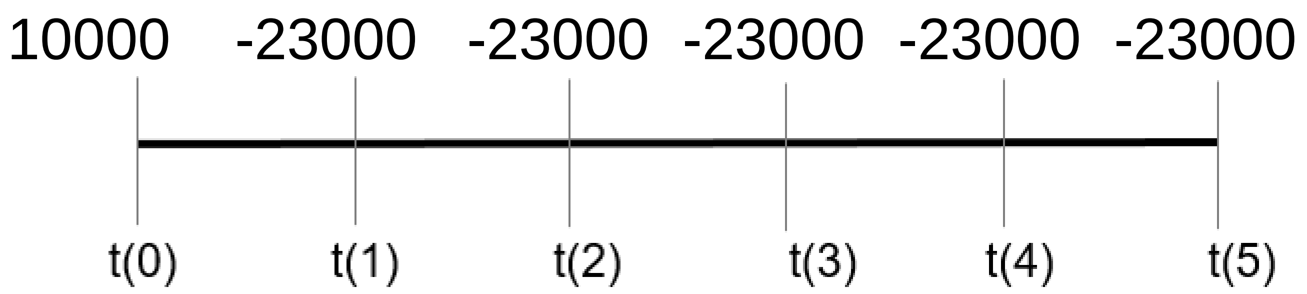
# ZAHLUNGS-STRÖME

Beispiel 2. Sie kaufen ein Anleihe mit Nennwert 1000, 5% Kupon, Rückzahlbar nach 7 Jahren zum Nennwert.



# ZAHLUNGS-
# STRÖME

Beispiel 3. Sie nehmen einen Ratenkredit über EUR 100.000 auf und zahlen diesen in Fünf gleichen Raten zu EUR 23.000 zurück



# DER ZINSSATZ

HOCHSCHULE HEILBRONN

> Zinssatz $i$ = Umrechnung von Zahlungsströme auf unterschiedliche Zeitperioden

**Alternative 1.** Gegenwartswert eines Zahlungsstroms = **Abzinsung Zahlungsstrom**

> Abzinsungfaktor:

$$v = \frac{1}{1+i}$$

Beispiel. Zinssatz: i = 5%, Wert nach 3 Perioden t = 3: w(3) = 1.157625

$$Gegenwartswert\ t = 0\ (Barwert) = \left(\frac{1}{1+i}\right)^t \cdot w = \left(\frac{1}{v}\right)^t \cdot w = \left(\frac{1}{1.05}\right)^3 \cdot w = 1$$

# DER ZINSSATZ

HOCHSCHULE HEILBRONN

- Zinssatz $i$ = Umrechnung von Zahlungsströme auf unterschiedliche Zeitperioden

**Alternative 2.** Zukunftswert nach t Perioden = **Aufzinsung Zahlungsstrom**

- Aufzinsungfaktor:

$$q = 1 + i$$

Beispiel. Zinssatz: i = 5%, Wert heute t = 0: w(0) = 1

$$Zukunftswert\ nach\ 3\ Perioden = (1+i)^t \cdot w = q^t \cdot w = 1.05^3 \cdot w = 1.157625$$

# FUTURE VALUE (FV) UND PRESENT VALUE (PV)

HOCHSCHULE HEILBRONN

Der Zukunftswert ($FV$) einer Anlage mit Gegenwartswert ($PV$ = Present Value)

- bei Zinssatz $i$
- nach $t$ Perioden

ist:

$$\boldsymbol{FV = (1 + i)^t \cdot PV}$$

# DIE ZINSSTAFFEL

HOCHSCHULE HEILBRONN

Beispiel. PV = 20000, Zinssatz (i) = 5%, Jahre (t) = 5

| Jahr | Anfangsbetrag | Zinsgutschrift | Endbetrag | Zinseszins |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 20000.00 | 1000.00 | 21000.00 | 0.00 |
| 2 | 21000.00 | 1050.00 | 22050.00 | 50.00 |
| 3 | 22050.00 | 1102.50 | 23152.50 | 102.50 |
| 4 | 23152.50 | 1157.63 | 24310.13 | 157.63 |
| 5 | 24310.13 | 1215.51 | 25525.63 | 215.51 |

# UNTERJÄHRIGE UND KONTINUIERLICHE VERZINSUNG

> **Unterjährige Verzinsung** mit $m$ Zahlungen pro Jahr. Aufzinsungsfaktor:

$$\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m\cdot t}$$

> **Kontinuierliche Verzinsung** mit $m \to \infty$ Zahlungen pro Jahr. Aufzinsungsfaktor:

$$\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m\cdot t} = e^{i\cdot t}$$

# ÄQUIVALENTE JAHRESZINSSÄTZE

> Äquivalenter Jahreszinsatz zur unterjährigen Verzinsung:

$$\left(1+\frac{i}{m}\right)^m - 1$$

> Äquivalenter Jahreszinsatz zur kontinuierlichen Verzinsung:

$$e^i - 1$$

# NACHSCHÜSSIGE ANNUITÄTEN

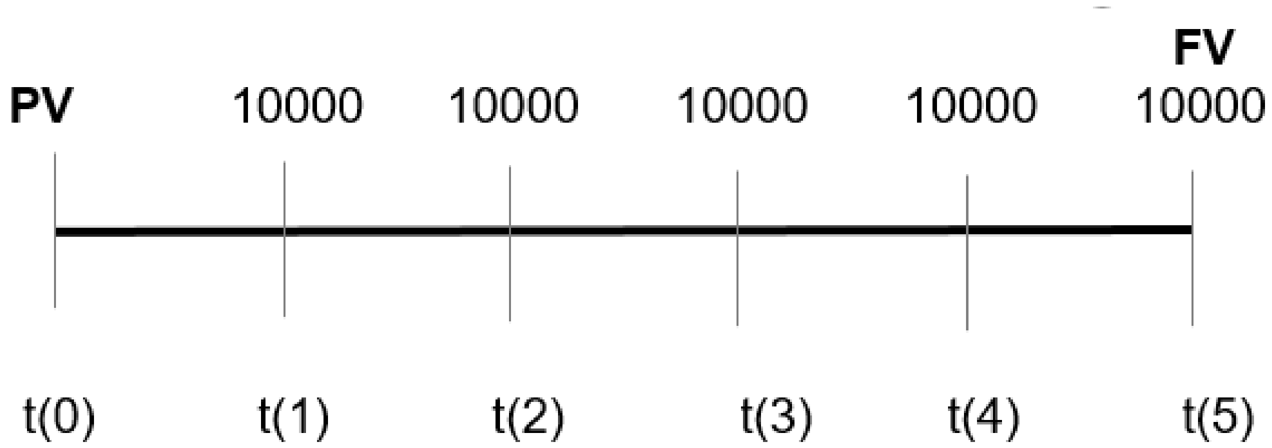
HOCHSCHULE HEILBRONN

Nachschüssige Annuitäten sind gleichförmige Cash Flows über t Perioden.

> Der erste Cash Flow erfolgt in t = 1

Annuitätenformeln: Zusammenhang zwischen

Barwert (PV) (bzw. Zukunftswert (FV)) und Annuität A, Zinssatz i sowie Laufzeit t.



# ANNUITÄTENFORMELN (NACHSCHÜSSIGE ANNUITÄT)

HOCHSCHULE HEILBRONN

> Gegenwartswert:

$$PV(A, i, t) = A \cdot \left( \frac{1 - (1 + i)^{-t}}{i} \right)$$

> Zukunftswert:

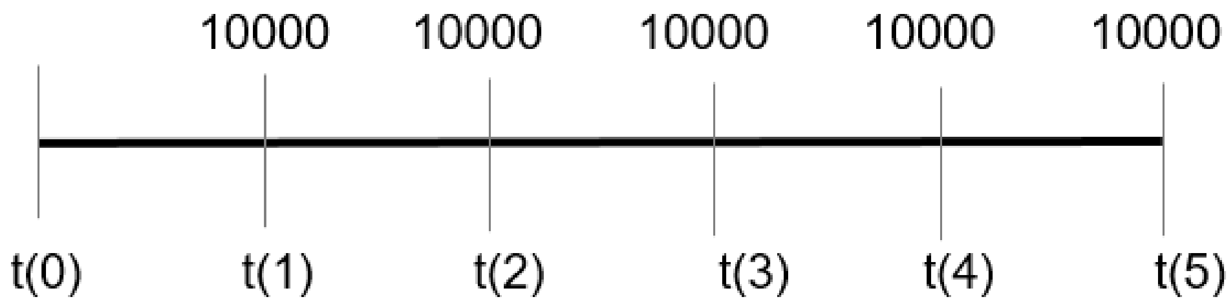
$$FV(A, i, t) = A \cdot \left( \frac{(1 + i)^{t} - 1}{i} \right)$$

# DIE ZINSSTAFFEL FÜR DEN ZUKUNFTSWERT EINER ANNUITÄT



Beispiel. A = 10000, Jahre (t) = 5, Zinssatz (i) = 5%

| Jahr | Anfangsbetrag | Zinsgutschrift | Einzahlung | Endbetrag | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.00 | 0.00 | 10000.00 | 10000.00 | |
| 2 | 10000.00 | 500.00 | 10000.00 | 20500.00 | |
| 3 | 20500.00 | 1025.00 | 10000.00 | 31525.00 | |
| 4 | 31525.00 | 1576.25 | 10000.00 | 43101.25 | |
| 5 | 43101.25 | 2155.06 | 10000.00 | **55256.31** | **= FV** |

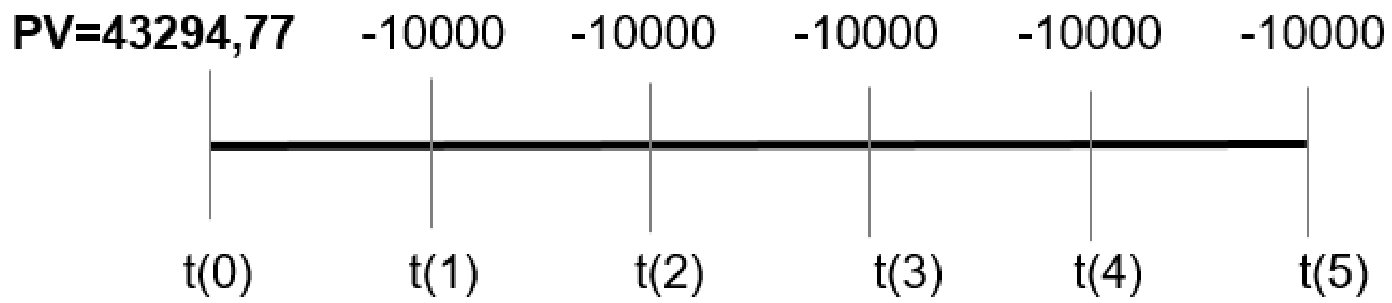


# DIE ZINSSTAFFEL FÜR EIN ANNUITÄTENDARLEHEN

HOCHSCHULE HEILBRONN

Beispiel. A = 10000, Jahre (t) = 5, Zinssatz (i) = 5%

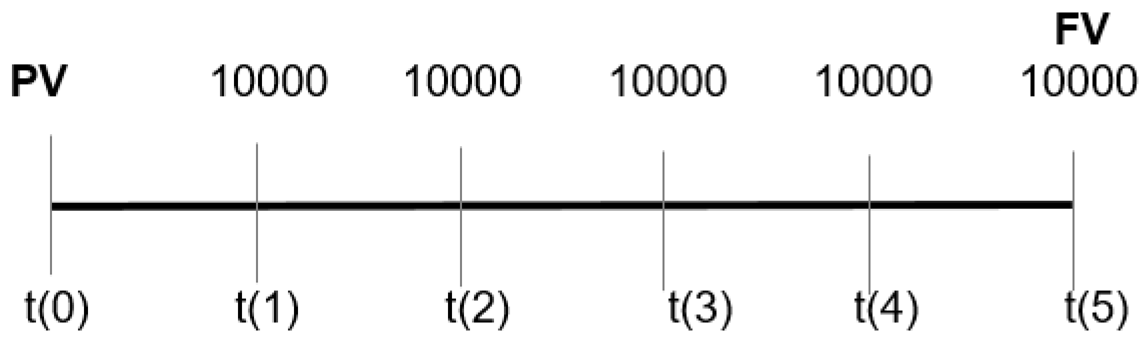
| | Jahr | Anfangsbetrag | Zinsgutschrift | Tilgung | Endbetrag |
|---|---|---|---|---|---|
| **PV =** | **1** | **43294.77** | 2164.74 | -10000.00 | 35459.51 |
| | 2 | 35459.51 | 1772.98 | -10000.00 | 27232.48 |
| | 3 | 27232.48 | 1361.62 | -10000.00 | 18594.11 |
| | 4 | 18594.11 | 929.71 | -10000.00 | 9523.81 |
| | 5 | 9523.81 | 476.19 | -10000.00 | 0.00 |



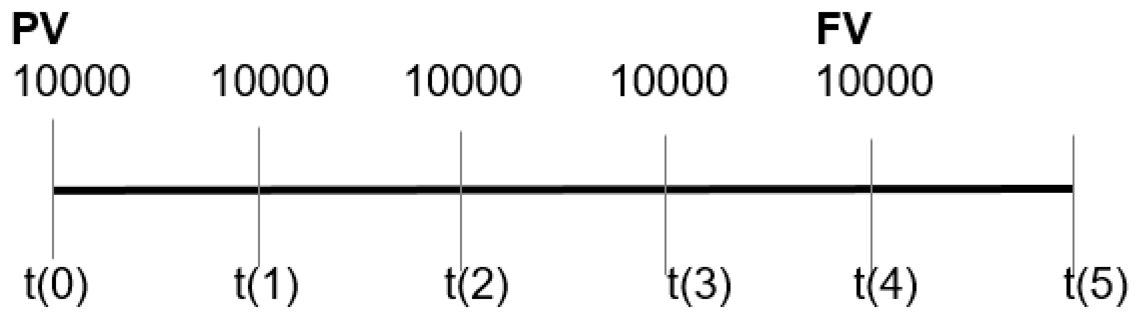
# NACHSCHÜSSIGE VERSUS VORSCHÜSSIGE ANNUITÄTEN

HOCHSCHULE HEILBRONN

> Nachschüssige Rente (bisher behandelt):




> Vorschüssige Rente (kommt jetzt):



# DER BARWERT DER VORSCHÜSSIGEN ANNUITÄT

Bei der vorschüssigen Annuität werden alle Zahlungen eine Periode früher ausgezahlt

→ alle Zahlungen mit dem Faktor (1 + i) multiplizieren:

$$\begin{aligned} PV_{vorschüssig} &= PV_{nachschüssig} \cdot (1+i) \\ &= A \cdot \left( \frac{1-(1+i)^{-t}}{i} \right) \cdot (1+i) \\ &= A \cdot \left( \frac{1+i-(1+i)^{1-t}}{i} \right) \end{aligned}$$

# DER ZUKUNFTSWERT DER VORSCHÜSSIGEN ANNUITÄT



Bei der vorschüssigen Annuität werden alle Zahlungen eine Periode früher ausgezahlt

→ alle Zahlungen mit dem Faktor (1 + i) multiplizieren:

$$
\begin{aligned}
FV_{vorschüssig} &= FV_{nachschüssig} \cdot (1+i) \\
&= A \cdot \left( \frac{(1+i)^t - 1}{i} \right) \cdot (1+i) \\
&= A \cdot \left( \frac{(1+i)^{1+t} - (1+i)}{i} \right)
\end{aligned}
$$

# ZUSAMMENHÄNGE



$$\frac{(1+i)^n - 1}{i} \qquad\qquad \frac{((1+i)^n - 1)}{i} \; {*(1+i)}$$

$$\begin{array}{ccc}
\text{FV (nachschüssig)} & \xrightarrow{(1+i)} & \text{FV (vorschüssig)} \\
\uparrow{\scriptstyle (1+i)^n} & & \uparrow{\scriptstyle (1+i)^n} \\
\text{PV (nachschüssig)} & \xrightarrow{(1+i)} & \text{PV (vorschüssig)}
\end{array}$$

$$\frac{((1+i)^n - 1)}{i} \; /(1+i)^n \qquad\qquad \frac{(1+i)^n - 1}{i} \; {*(1+i)} / (1+i)^n$$

$$= 1 / (1+i)^{n-1}$$

# EWIGE RENTE



Erinnerung Barwert Annuität:

$$PV(A,i,t) = A \cdot \left( \frac{1-(1+i)^{-t}}{i} \right)$$

Für $t \to \infty$:

$$PV(A,i) = \frac{A}{i}$$

# GORDON-FORMEL



Barwert ewige Rente deren jährliche Auszahlung mit Wachstumsrate g ansteigt:

$$PV(A_0, i, g) = \frac{A_0(1+g)}{i-g} = \frac{A_1}{i-g}$$

# › 2. VEKTOR- UND MATRIXALGEBRA

Wirtschaftsmathematik | Prof. Dr. Florian Kauffeldt

# VEKTOR- UND MATRIXALGEBRA: DEFINITION VEKTOREN

Ein $Vektor$ ist eine geordnete Liste von Objekten in Spalten- oder Zeilenform.

- Zeilenvektor ($1 \times n$-Vektor):

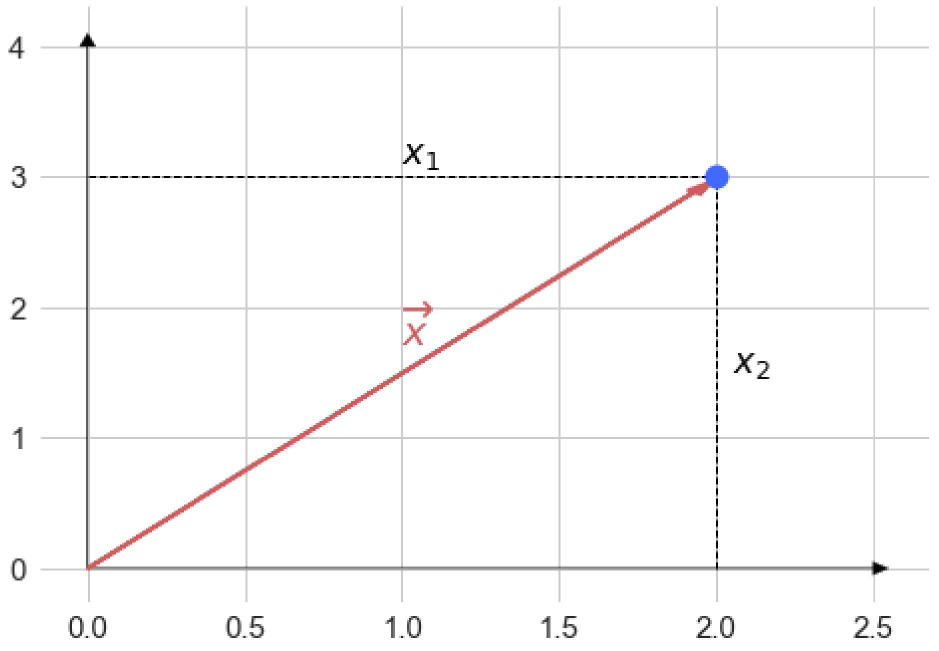
$$(x_1, \ldots, x_n)$$

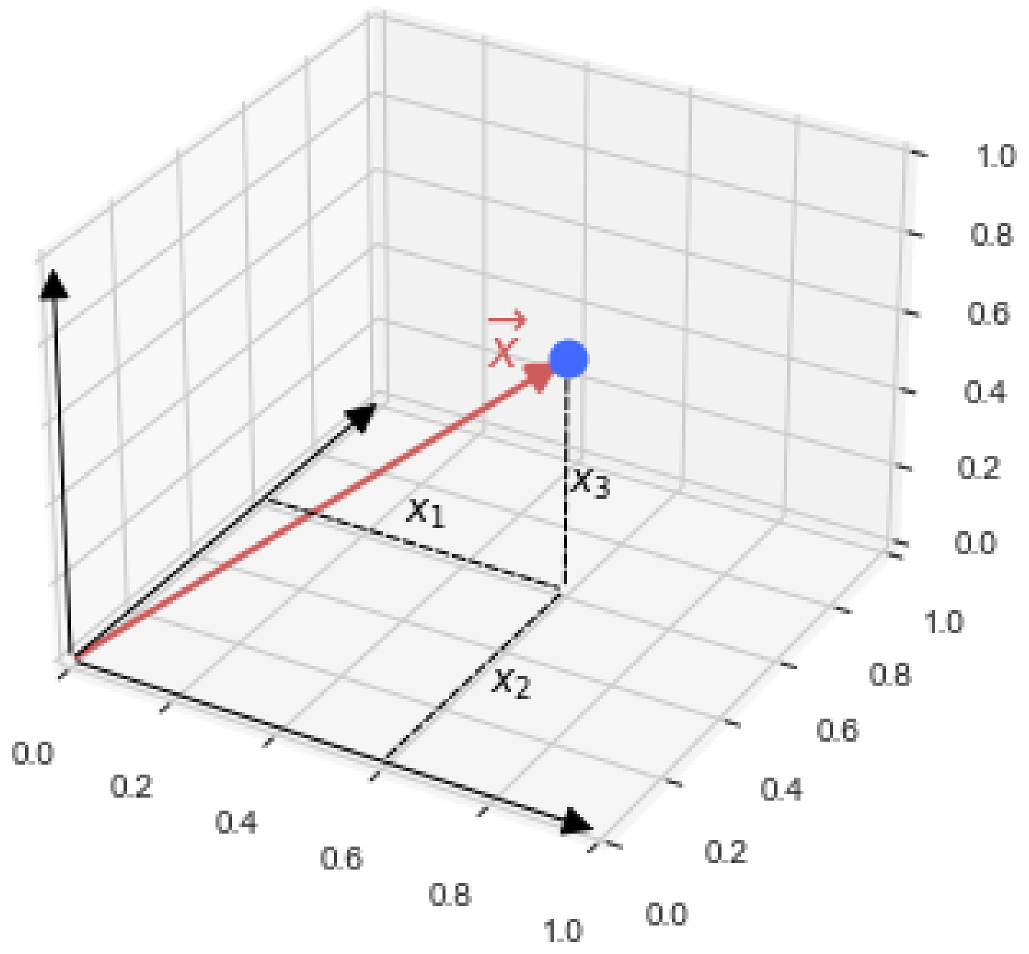
- Spaltenvektor ($n \times 1$-Vektor):

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

# VEKTOR- UND MATRIXALGEBRA: VEKTOREN GRAFISCH

HOCHSCHULE HEILBRONN



# VEKTOR- UND MATRIXALGEBRA: VEKTOROPERATIONEN

> $\mathit{Vektoraddition}$ (und -subtraktion) erfolgt elementweise:

$$(1,2) + (4,5) = (5,7)$$

> $\mathit{Vektormultiplikation}$ (und -division) = Summe der Produkte der Elemente:

$$(1,2) \cdot (4,5) = (1 \cdot 4) + (2 \cdot 5) = 14$$

> $\mathit{Skalarmultiplikation}$ (Zahl mal Vektor) erfolgt elementweise:

$$(1,2) \cdot 4 = (4,8)$$

> $\mathit{Euklidische\ Distanz}$ zwischen zwei Punkten:

$$\|(1,2), (4,5)\| = \sqrt{(1-4)^2 + (2-5)^2} = \sqrt{18}$$

# VEKTOR- UND MATRIXALGEBRA: VEKTOROPERATIONEN

HOCHSCHULE HEILBRONN

Gegeben zwei Vektoren $x$ und $y$. Für $\alpha \in [0,1]$ ist eine $Konvexkombination$ der Vektoren:

$$\alpha x + (1-\alpha)y = \begin{pmatrix} \alpha x_1 + (1-\alpha)y_1 \\ \vdots \\ \alpha x_n + (1-\alpha)y_n \end{pmatrix}$$

# VEKTOR- UND MATRIXALGEBRA: DEFINITION MATRIX

Eine $Matrix$ ist eine rechteckige Anordnung von Objekten.

$m(Zeilen) \times n(Spalten)$ Matrix:

$$
\begin{array}{cc}
 & \xrightarrow{\text{n columns}} \\
\text{m rows} \downarrow & \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}
\end{array}
$$

# VEKTOR- UND MATRIXALGEBRA: MATRIXOPERATIONEN

HOCHSCHULE HEILBRONN

- $Matrizenaddition$: Elementweise (bei Matrizen mit gleicher Anzahl Spalten und Zeilen)

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 5 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 9 & 8 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

- $Skalarmultiplikation$: Elementweise

$$4 \cdot \begin{pmatrix} 5 & 5 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 20 & 8 \\ 4 & -8 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\mathit{Matrizenmultiplikation}:$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Schritt 1:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 4 & * \\ * & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & * \\ * & * \end{pmatrix}$$

Schritt 2:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \\ * & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ * & * \end{pmatrix}$$

# VEKTOR- UND MATRIXALGEBRA: MATRIXOPERATIONEN

HOCHSCHULE HEILBRONN

$$Matrizenmultiplikation:$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Schritt 3:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 2 \cdot 4 & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 9 & * \end{pmatrix}$$

Schritt 4:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 2 \end{pmatrix}$$

# VEKTOR- UND MATRIXALGEBRA: MATRIXOPERATIONEN

HOCHSCHULE HEILBRONN

Anmerkungen. Matrizenmultiplikation $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$:

- Voraussetzung: Anzahl der Spalten in Matrix **A** = Anzahl der Zeilen in Matrix **B**
- **A** = $m \times n$ Matrix und **B** = $n \times m$ Matrix → Produkt = $m \times m$ Matrix

# VEKTOR- UND MATRIXALGEBRA: MATRIXOPERATIONEN

HOCHSCHULE HEILBRONN

**Rechenregeln.** Seien **A, B, C** Matrizen, dann gilt:

1. Matrizenmultiplikation ist $assoziativ$:

$$(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$$

2. Matrizenmultiplikation ist $distributiv$:

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{AB} + \boldsymbol{AC}$$

3. Matrizenmultiplikation ist $\boldsymbol{nicht}$ $kommutativ$:

$$\boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA}$$

# VEKTOR- UND MATRIXALGEBRA: MATRIXOPERATIONEN



$Transponieren\ von\ Matrizen$ (Vertauschen von Zeilen und Spalten):

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \to \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

# VEKTOR- UND MATRIXALGEBRA: MATRIXOPERATIONEN

HOCHSCHULE HEILBRONN

$Determinante$ einer $2 \times 2$ Matrix:

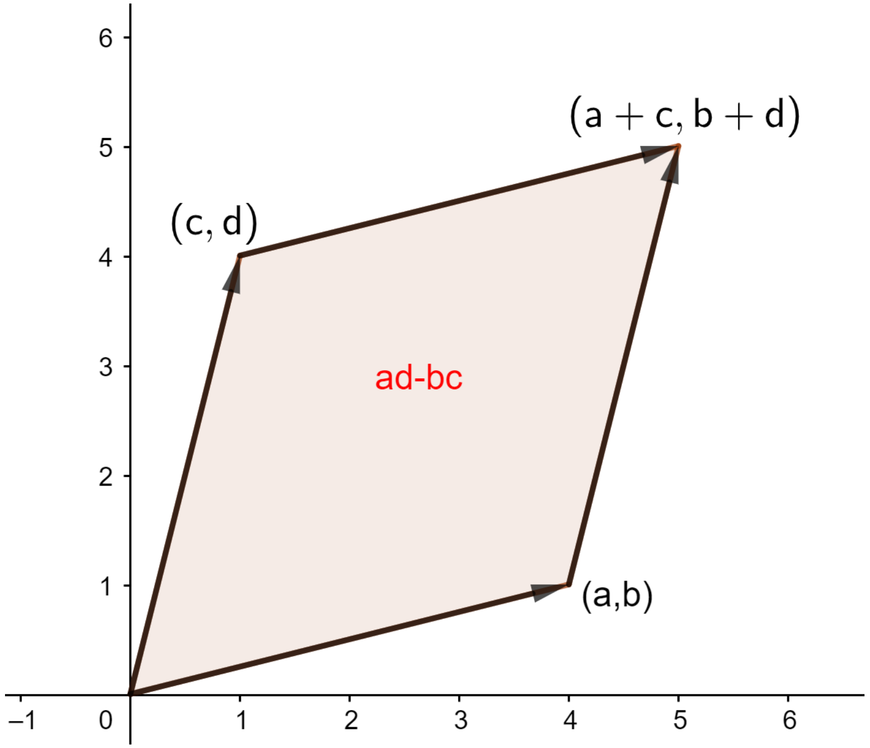
$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

$$\det(\boldsymbol{A}) = |\boldsymbol{A}| = \mathrm{ad} - \mathrm{bc}$$

> Determinante: Raum, der von den Vektoren der Matrix aufgespannt wird

## Determinante grafisch:

- Determinante: Raum, der von den Vektoren der Matrix aufgespannt wird:



# VEKTOR- UND MATRIXALGEBRA: MATRIXOPERATIONEN

HOCHSCHULE HEILBRONN

Determinante einer allgemeinen $3 \times 3$ Matrix: Laplacescher Entwicklungssatz

$$|A| = \begin{vmatrix} \color{red}{a_{11}} & a_{12} & a_{13} \\ \color{blue}{a_{21}} & a_{22} & a_{23} \\ \color{red}{a_{31}} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \color{red}{a_{11}} \begin{vmatrix} \square & \square & \square \\ \square & a_{22} & a_{23} \\ \square & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - \color{blue}{a_{21}} \begin{vmatrix} \square & a_{12} & a_{13} \\ \square & \square & \square \\ \square & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \color{red}{a_{31}} \begin{vmatrix} \square & a_{12} & a_{13} \\ \square & a_{22} & a_{23} \\ \square & \square & \square \end{vmatrix}$$

$$= \color{red}{a_{11}} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - \color{blue}{a_{21}} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \color{red}{a_{31}} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

# VEKTOR- UND MATRIXALGEBRA: MATRIXOPERATIONEN

HOCHSCHULE HEILBRONN

Die $Dreiecksform$ ist die Form einer Matrix, welche unterhalb der Hauptdiagonalen nur "0" enthält (obere Dreiecksform).

Beispiel. Umformung einer Matrix in Dreiecksform:

$Dreiecksform$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & -8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

- 2.Zeile + 1.Zeile mal (-1)
- 3.Zeile + 1.Zeile mal (-3)

3. Zeile + 2.Zeile mal (-3)

# VEKTOR- UND MATRIXALGEBRA: MATRIXOPERATIONEN

HOCHSCHULE HEILBRONN

Der $Rang$ einer Matrix ist die Dimension des Vektorraums, welcher durch die Vektoren der Matrix aufgespannt wird.

> Bestimmung des Rangs einer Matrix:

Schritt 1. Bestimme die Dreiecksform der Matrix

Schritt 2. $Rang(Matrix) = Anzahl\ der\ Zeilen, die\ nicht\ nur\ 0\ enthalten$

Beispiel. Bestimmung des Rangs einer Matrix:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Schritt 1. Dreiecksform:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Schritt 2. Zähle Zeilen, die nicht nur 0 enthalten:

$$Rang(\boldsymbol{A}) = 2$$

HOCHSCHULE HEILBRONN

$Matrizeninversion\ (Matrizendivision)$: Matrix $A^{-1}$ ist die Inverse von Matrix $A$, wenn:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-\mathbf{1}} = \boldsymbol{A}^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{A} = Einheitsmatrix\ \boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

- Einheitsmatrix **I** hat die Zahl „1“ entlang der Hauptdiagonalen ansonsten nur „0“

Gauß-Jordan-Algorithmus zur Bestimmung der Inversen:

$$(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{I}) \rightarrow Umformungen \rightarrow (\boldsymbol{I} \mid \boldsymbol{A}^{-\mathbf{1}})$$

# VEKTOR- UND MATRIXALGEBRA: MATRIXOPERATIONEN

HOCHSCHULE HEILBRONN

Beispiel. Gauß-Jordan-Algorithmus

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{I}) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

# VEKTOR- UND MATRIXALGEBRA: MATRIXOPERATIONEN

HOCHSCHULE HEILBRONN

Beispiel. Gauß-Jordan-Algorithmus

$$(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{I}) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{2.Zeile – 1.Zeile mal 2}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{1.Zeile + 2. Zeile mal 2}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{2. Zeile mal -1}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

$$\boxed{(\boldsymbol{I} \mid \boldsymbol{A}^{-1})}$$

# VEKTOR- UND MATRIXALGEBRA: MATRIXOPERATIONEN



Anmerkungen. Invertierbarkeit:

- Nur quadratische $(n \times n)$ Matrizen sind invertierbar

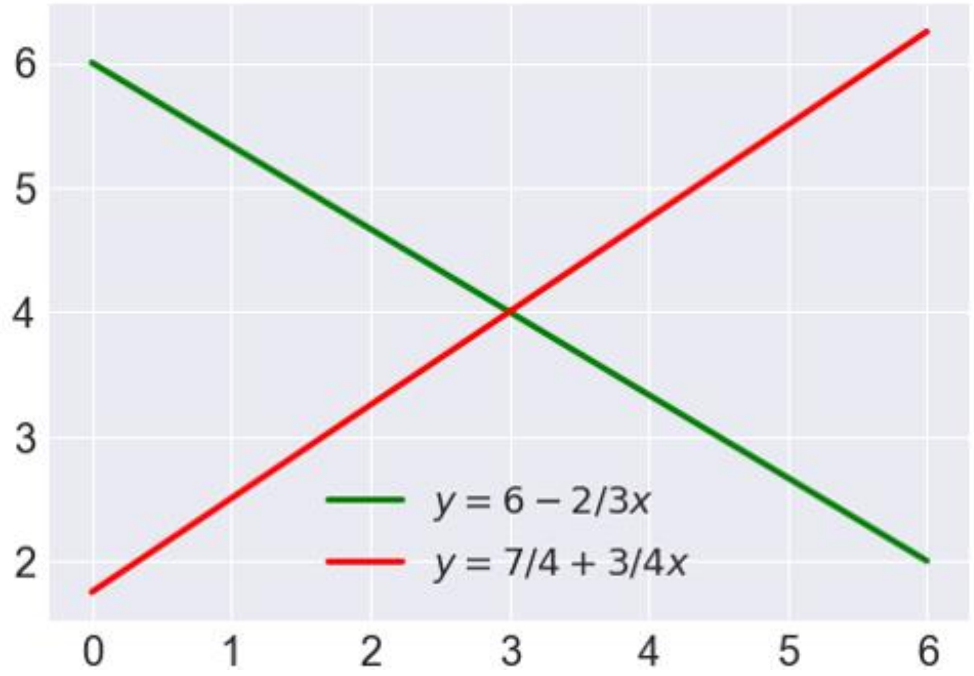
Die folgende Aussagen sind entwerder alle wahr oder alle falsch:

i. Eine $n \times n$ Matrix **A** ist invertierbar.

ii. Die Determinante von **A** ist ungleich 0 ($\det(\boldsymbol{A}) \neq 0$).

iii. Matrix **A** hat vollen Rang hat ($Rang(\boldsymbol{A}) = n$).

iv. Die Gleichung $\boldsymbol{A} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ hat nur die triviale Lösung: $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.




# › 3. LINEARE GLEICHUNGS-SYSTEME

Wirtschaftsmathematik | Prof. Dr. Florian Kauffeldt

# LINEARE GLEICHUNGSSYSTEME: ANWENDUNG

HOCHSCHULE HEILBRONN

Lineare Gleichungssysteme in der BWL und VWL:

> Darstellung ökonomischer Zusammenhänge in vereinfachter Form

Beispiel. 2 Gleichungen in 2 Unbekannten

$$(i)\ 2x + 3y = 18$$

$$(ii)\ 3x - 4y = -7$$

# LINEARE GLEICHUNGSSYSTEME: DARSTELLUNG



Lineare Gleichungssysteme können mit **Vektoren** dargestellt werden.

Beispiel. $(i)\ 2x + 3y = 18$

$(ii)\ 3x - 4y = -7$

> In Vektorform:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} 18 \\ -7 \end{pmatrix}$$

# LINEARE GLEICHUNGSSYSTEME: DARSTELLUNG



Lineare Gleichungssysteme können mit **Matrizen** dargestellt werden.

Beispiel.

$$(i)\ 2x + 3y = 18$$

$$(ii)\ 3x - 4y = -7$$

> In Matrixform

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ -7 \end{pmatrix}$$

Allgemein:

$$Koeffizientenmatrix \cdot Vektor\ Unbekannte = Lösungsvektor$$

# LINEARE GLEICHUNGSSYSTEME: LÖSUNGSMENGE



Ein lineares Gleichungssystem hat

i. entweder eine eindeutige Lösung,

ii. keine Lösung oder

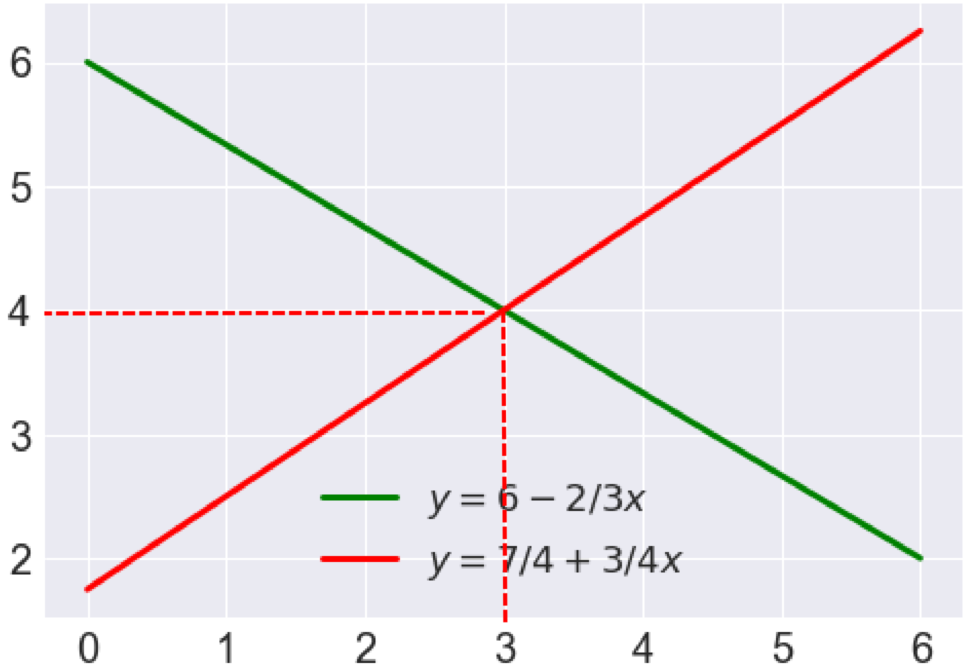
iii. unendlich viele Lösungen

# LINEARE GLEICHUNGSSYSTEME: LÖSUNGSMENGE

Das Gleichungssystem $(i)\ 2x + 3y = 18$ hat eine eindeutige Lösung

$$(ii)\ 3x - 4y = -7$$

Lösung grafisch:



# LINEARE GLEICHUNGSSYSTEME: LÖSUNGSMENGE

Das Gleichungssystem

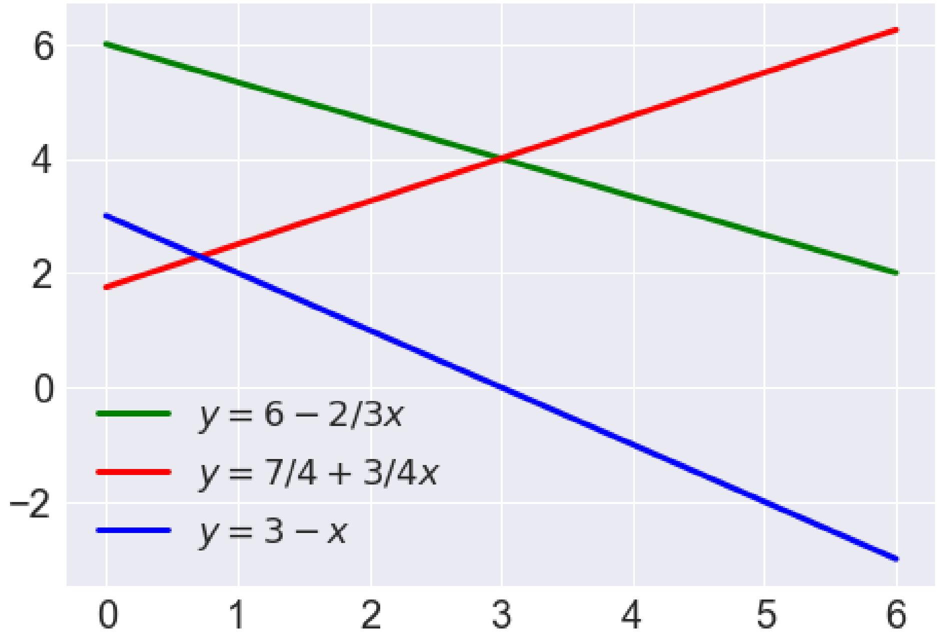
$$(i)\ 2x + 3y = 18$$

$$(ii)\ 3x - 4y = -7$$

$$(iii)\ x + y = 3$$

hat keine Lösung

Grafisch:



# LINEARE GLEICHUNGSSYSTEME: LÖSUNGSMENGE

Das Gleichungssystem $(i)\ 2x + 3y = 18$ hat unendlich viele Lösungen.

Lösungen grafisch:


$$Lösungen = \{(x, y)\colon\ 2x + 3y = 18\}$$

# LINEARE GLEICHUNGSSYSTEME: LÖSUNGSVERFAHREN SUBSTITUTION

Lineare Gleichungssysteme können durch $Substitution$ gelöst werden.

Beispiel. $(i)\ 2x + 3y = 18$

$(ii)\ 3x - 4y = -7$

> Löse (i) nach $y$ auf: $y = 6 - \frac{2}{3}x$

> Setze dies in (ii) ein: $3x - 4(6 - \frac{2}{3}x) = -7 \Leftrightarrow \frac{17}{3}x = 17 \Leftrightarrow x = 3$

> Damit: $y = 6 - \frac{2}{3} \cdot 3 = 4$

$$Lösung: (x, y) = (3,4)$$

# LINEARE GLEICHUNGSSYSTEME: LÖSUNGSVERFAHREN GAUßSCHE ELIMINATION

$$Gaußsches\ Eliminationsverfahren:$$

Schritt 1. Matrixform des linearen Gleichungssystems aufsschreiben

Schritt 2. Erweiterte Koeffzientenmatrix aufschreiben:

$$(Koeffizientenmatrix \mid Lösungsvektor)$$

Schritt 3. Erweiterte Koeffizientenmatrix in Dreiecksform bringen

# LINEARE GLEICHUNGSSYSTEME: LÖSUNGSVERFAHREN GAUẞSCHE ELIMINATION

HOCHSCHULE HEILBRONN

$$Gaußsches\ Eliminationsverfahren:$$

Beispiel. $(i)\ 2x + 3y = 18$

$(ii)\ 3x - 4y = -7$

Schritt 1. Matrixform: $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ -7 \end{pmatrix}$

Schritt 2. Erweiterte Koeffizientenmatrix: $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 18 \\ 3 & -4 & -7 \end{array}\right)$

# LINEARE GLEICHUNGSSYSTEME: LÖSUNGSVERFAHREN GAUẞSCHE ELIMINATION

HOCHSCHULE HEILBRONN

$$Gaußsches\ Eliminationsverfahren:$$

Beispiel. $(i)\ 2x + 3y = 18$

$(ii)\ 3x - 4y = -7$

Schritt 3. Dreiecksform:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 18 \\ 3 & -4 & -7 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 18 \\ 0 & -17/2 & -68/2 \end{array}\right)$$

- Aus 2. Zeile: $-\frac{17}{2} \cdot y = -\frac{68}{2} \rightarrow y = 4$
- $y = 4$ in 1. Zeile: $2x + 12 = 18 \rightarrow x = 3$

HOCHSCHULE HEILBRONN

$\mathit{Cramersche\ Regel}$ (insbesondere bei $2 \times 2$ effizient).

> Gegeben eine Koeffizientenmatrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}$, einen Vektor von Unbekannten $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ und einen Lösungsvektor $\begin{pmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_n \end{pmatrix}$

dann gilt für die Lösung der iten Unbekannten:

ite Spalte von **A** durch Lösungsvektor ersetzen

$$x_i = \frac{det\begin{pmatrix} c_{11} & \dots & l1 & \dots & c_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ c_{m1} & \dots & l_n & \dots & c_{mn} \end{pmatrix}}{\det(\boldsymbol{A})}$$

# LINEARE GLEICHUNGSSYSTEME: LÖSUNGSVERFAHREN CRAMER REGEL

Cramersche Regel (insbesondere bei $2 \times 2$ effizient).

Beispiel. $(i)\; 2x + 3y = 18$

$(ii)\; 3x - 4y = -7$

$\rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ -7 \end{pmatrix}$

$$x = \frac{\det\begin{pmatrix} 18 & 3 \\ -7 & -4 \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}} = \frac{18(-4) - (-7)3}{2(-4) - 3 \cdot 3} = \frac{-51}{-17} = 3,$$

$$y = \frac{\det\begin{pmatrix} 2 & 18 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}} = \frac{2(-7) - 3 \cdot 18}{-17} = \frac{-68}{-17} = 4$$

# LINEARE GLEICHUNGSSYSTEME: LÖSBARKEIT

HOCHSCHULE HEILBRONN

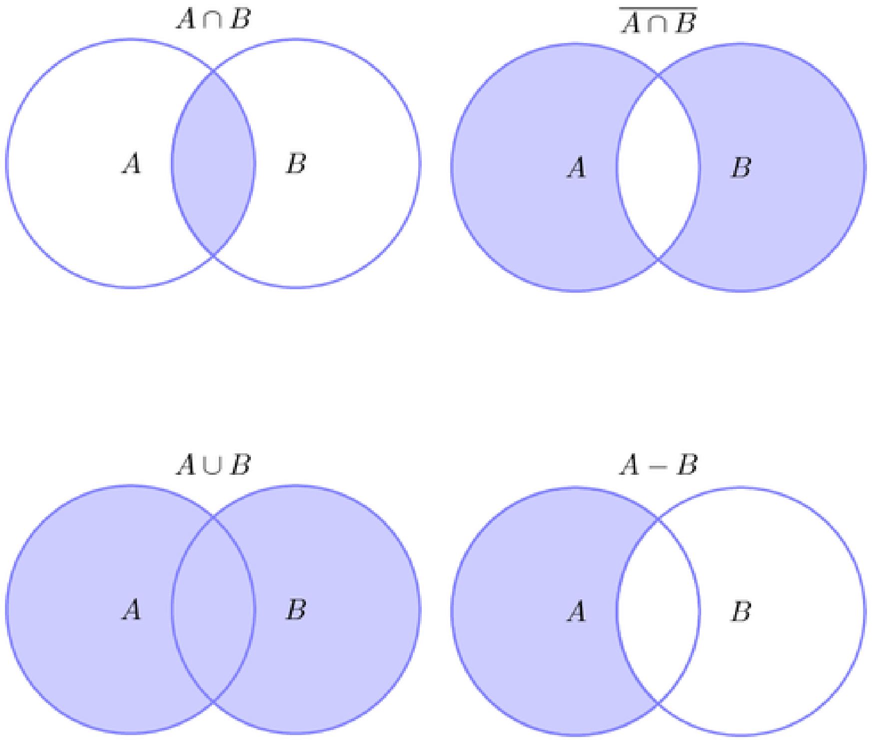
**Satz von Kronecker-Capelli**

Eine lineares Gleichungssystem ist genau dann lösbar, wenn der Rang der Koeffizientmatrix $\boldsymbol{A}$ gleich dem Rang der erweiterten Koeffizientenmatrix $(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{l})$ ist.

> Lösung ist eindeutig wenn außerdem: Rang(Koeffizientenmatrix) = Anzahl Unbekannte

> Für <u>quadratische</u> Koeffizientenmatrizen gilt:

$$\det(Koeffizientenmatrix) \neq 0 \Leftrightarrow Gleichungssystem\ eindeutig\ lösbar$$




HOCHSCHULE HEILBRONN

# › 4. MENGENLEHRE

# MENGEN: DEFINITION

Eine $Menge$ ist eine ungeordnete Liste von wohlunterscheidbaren Objekten.

- "Wohlunterscheidbar" bedeutet, dass kein Element in der Menge mehrfach vorhanden ist

- Menge ohne Objekte = leere Menge = ∅

Anmerkung. $\emptyset \; (= Menge) \neq 0 \; (= Zahl)$

# MENGEN: SCHREIBWEISE

Mengen werden mit Mengenklammern { } geschrieben.

Beispiel 1.

$$M = \{Apfel, Banane\}$$

$$M = \{Lisa, Peter, Paul\}$$

# MENGEN: SCHREIBWEISE

Eine unendliche Menge kann nicht als erschöpfende Liste aufgeschrieben werden.

> Lösung: Wir schreiben die Menge als Menge aller Objekte für die eine Bedingung gilt:

$$\{x \text{ für die Bedingung } y \text{ gilt}\} = \{x : y\}$$

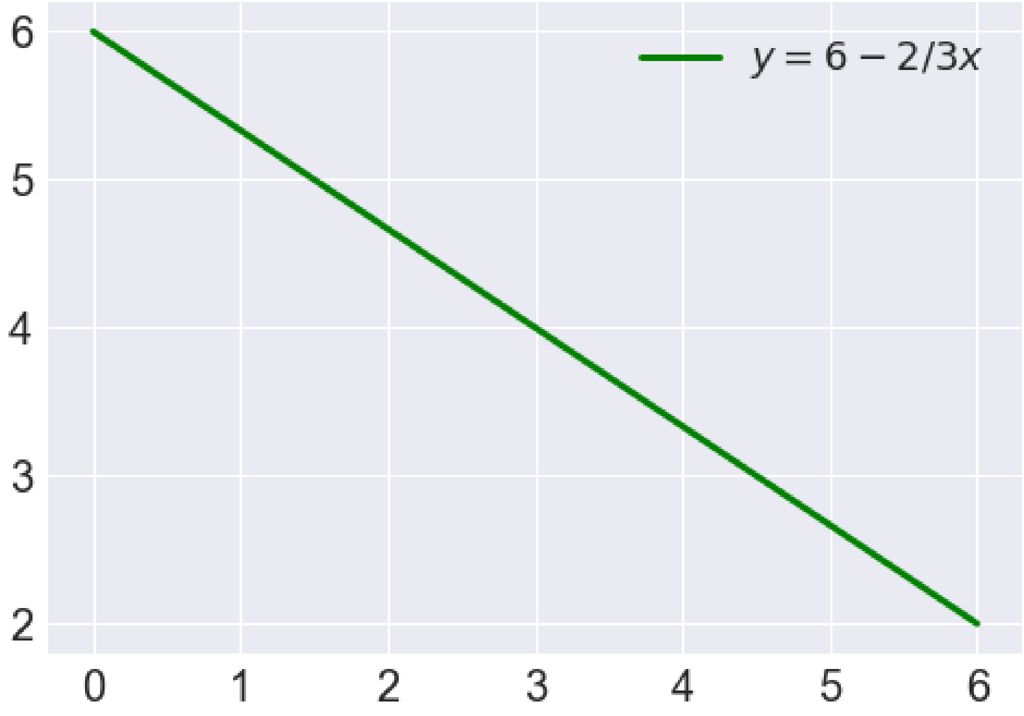
Beispiel 2. Intervall [1,4] in Mengenschreibweise:

$$[1,4] = \{x : 1 \leq x \leq 4\}$$

# MENGEN: SCHREIBWEISE

Beispiel 3. Gerade y = 6 – 2/3x in Mengenschreibweise

$$\{(x, y) : y = 6 - 2/3x\}$$

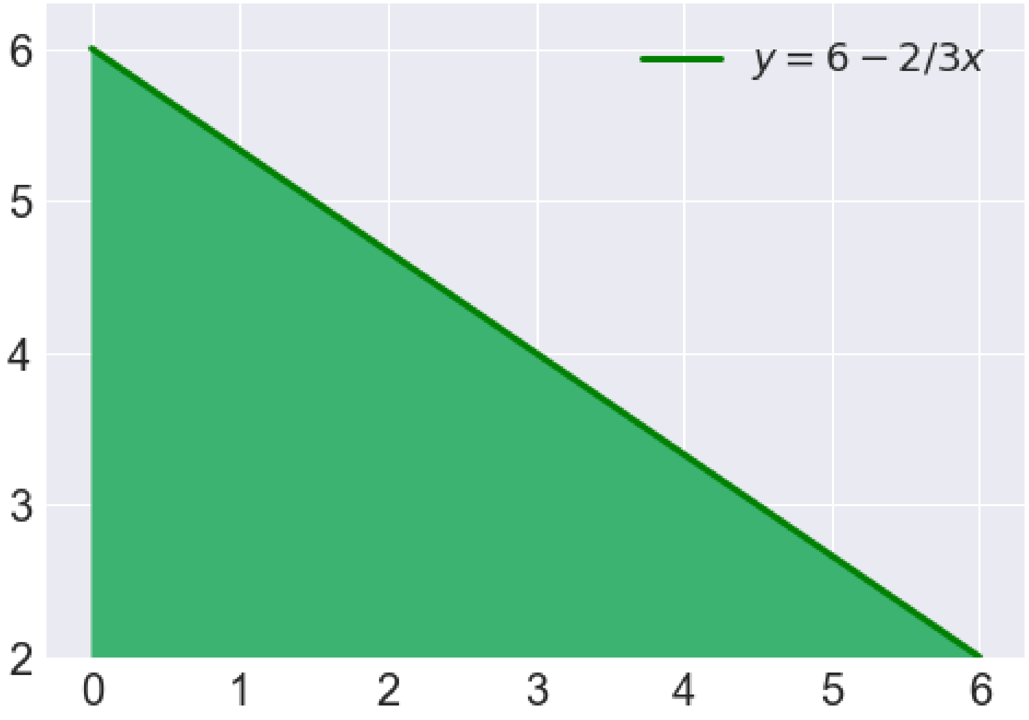


# MENGEN: SCHREIBWEISE

HOCHSCHULE HEILBRONN

Beispiel 4. Ungleichung y ≤ 6 – 2/3x in Mengenschreibweise

$$\{(x, y): y \leq 6 - 2/3x\}$$



# MENGEN: SCHREIBWEISE

Beispiel 5. Menge der geraden Zahlen:

$$\{2n\colon n\ ist\ nat\text{ü}rliche\ Zahl\}$$

Beispiel 6. Eine Kugel als Menge:

$$\{x\colon\ \|x-m\| \leq r^2\}$$

- Koordinaten des Mittelpunkts $m = (m_1, \dots, m_n)$, r = Radius

# MENGEN: ARTEN

Eine Menge heißt $unendlich$, wenn sie unendlich viele Elemente enthält.

# MENGEN: ARTEN

Eine Menge heißt $beschränkt$, wenn sie eine obere und untere Schranke hat.

Eine Menge in einem n-dimensionalen Raum ist beschränkt, wenn

> sie in einer n-dimensionalen Kugel enthalten ist

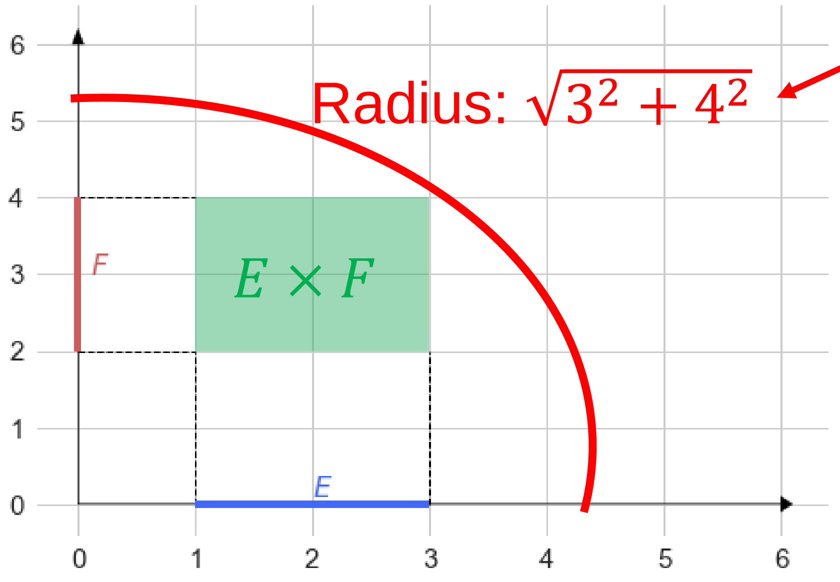
Beispiel. $\mathrm{M} = [1,3] \times [2,4]$

> die Menge ist beschränkt, da sie in der Kugel $\left\{x: \left\|\left(x - \binom{0}{0}\right)\right\| \leq 3^2 + 4^2\right\}$ enthalten ist

# MENGEN: ARTEN

Beispiel. $\mathrm{M} = [1,3] \times [2,4]$

> die Menge ist beschränkt, da sie in der Kugel $\left\{x : \left\| \left( x - \binom{0}{0} \right) \right\| \leq 3^2 + 4^2 \right\}$ enthalten ist




Quadrat des längsten Abstands der Menge vom Ursprung

# MENGEN: ARTEN



Eine Menge heißt $abgeschlossen$, wenn der Rand zur Menge gehört.

(Etwas mathematischer: Eine Menge heißt *abgeschlossen*, wenn der Grenzwert jeder konvergenten Folge innerhalb der Menge liegt)

Beispiele.

> Abgeschlossene Menge: [2,4]

> Nicht-abgeschlossene Menge: (2,4]

# MENGEN: ARTEN



Eine Menge heißt $kompakt$, wenn

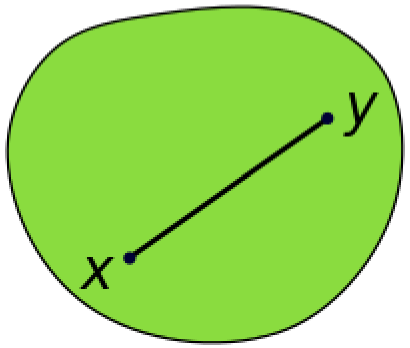
i. sie abgeschlossen und

ii. beschränkt

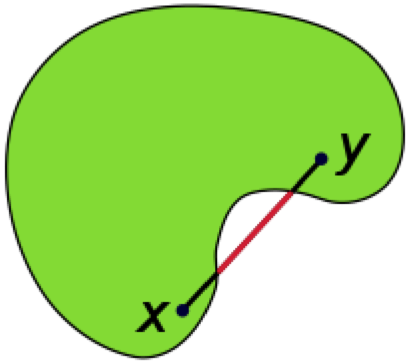
ist.

# MENGEN: ARTEN

Eine Menge heißt $konvex$, wenn sie die Konvexkombinationen aller ihrer Punkte enthält:




Konvexe Menge



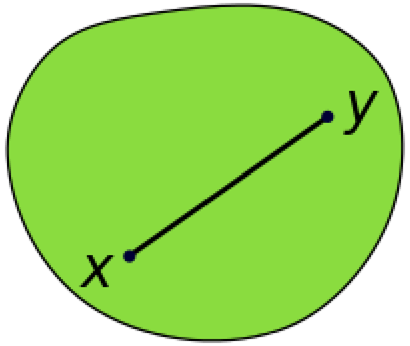

Nicht-konvexe Menge

Quelle: https://en.wikipedia.org/wiki/Convex_set

# MENGEN: ARTEN

Erinnerung: Menge aller Konvexkombinationen zweier Punkte $x$ und $y$ ist eine Gerade:

$$\{z: z = \alpha x + (1 - \alpha)y, \alpha \in [0,1]\}$$

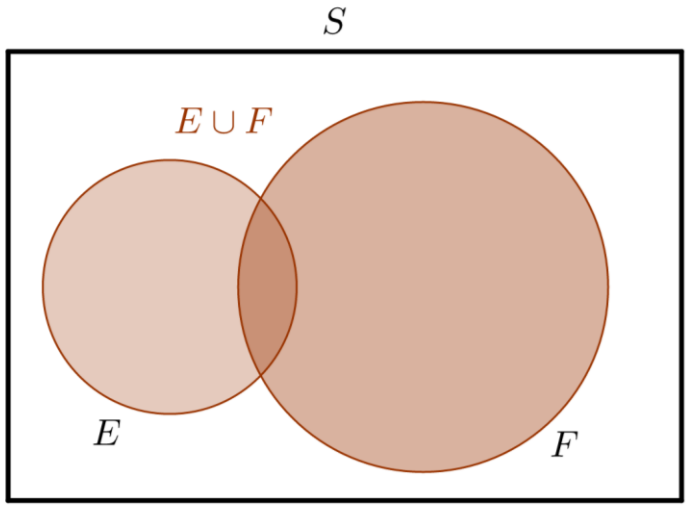



Quelle: https://en.wikipedia.org/wiki/Convex_set

# MENGEN: OPERATIONEN

Vereinigungsmenge:

$$E \cup F = \{Alle\ Elemente\ die\ in\ A\ und/oder\ B\ enthalten\ sind\} = \{x : x \in E\ und/oder\ x \in F\}$$

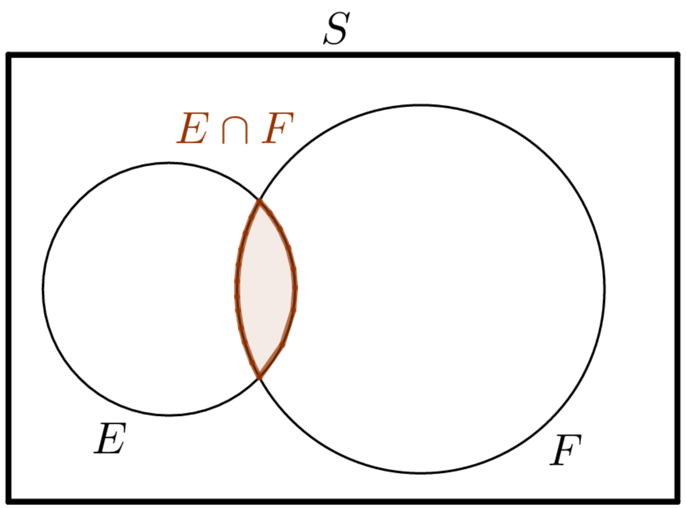



Beispiel. $E = \{Anton, Paul\}, F = \{Anton, Dora\} \rightarrow E \cup F = \{Anton, Paul, Dora\}$

# MENGEN: OPERATIONEN

Schnittmenge:

$$E \cap F = \{Alle\ Elemente\ die\ in\ A\ und\ B\ enthalten\ sind\} = \{x: x \in E\ und\ x \in F\}$$

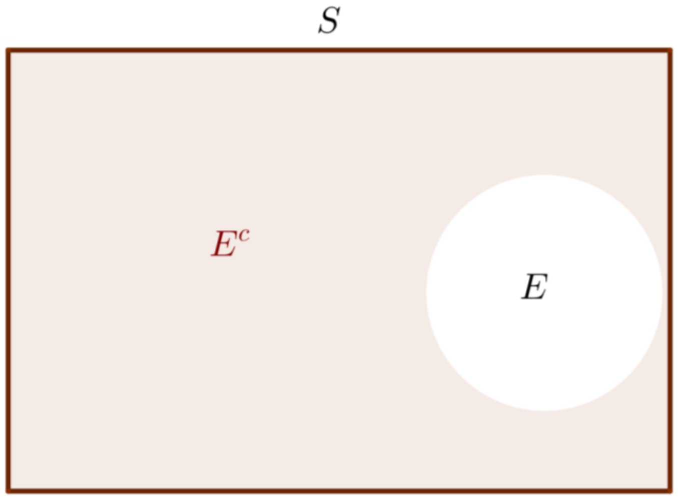



Beispiel. $E = \{Anton, Paul\}, F = \{Anton, Dora\} \rightarrow E \cap F = \{Anton\}$

# MENGEN: OPERATIONEN

Komplementärmenge:

$$E^c = \{Alle\ Elemente, die\ nicht\ in\ E\ enthalten\ sind\} = \{x: x \notin E\}$$




Beispiel. $E = \{Anton, Paul\}, F = \{Anton, Dora\}, S = E \cup F \rightarrow E^c = \{Dora\}$

# MENGEN: OPERATIONEN

HOCHSCHULE HEILBRONN

Mengendifferenz:

$$E \setminus F = \{Alle\ Elemente, die\ in\ E, aber\ nicht\ in\ F\ enthalten\ sind\} = \{x{:}\, x \in E\ und\ x \notin F\}$$

Beispiel. $E = \{Anton, Paul\}, F = \{Anton, Dora\}$

$$E \setminus F = \{Paul\}$$

$$F \setminus E = \{Dora\}$$

Anmerkung. Wie das Beispiel zeigt ist die Mengendifferenz nicht kommutativ: $E \setminus F \neq F \setminus E$

# MENGEN: OPERATIONEN

HOCHSCHULE HEILBRONN

Das $kartesische\ Produkt\ A \times B$ zweier Mengen $A$ und $B$ ist die Menge:

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$$

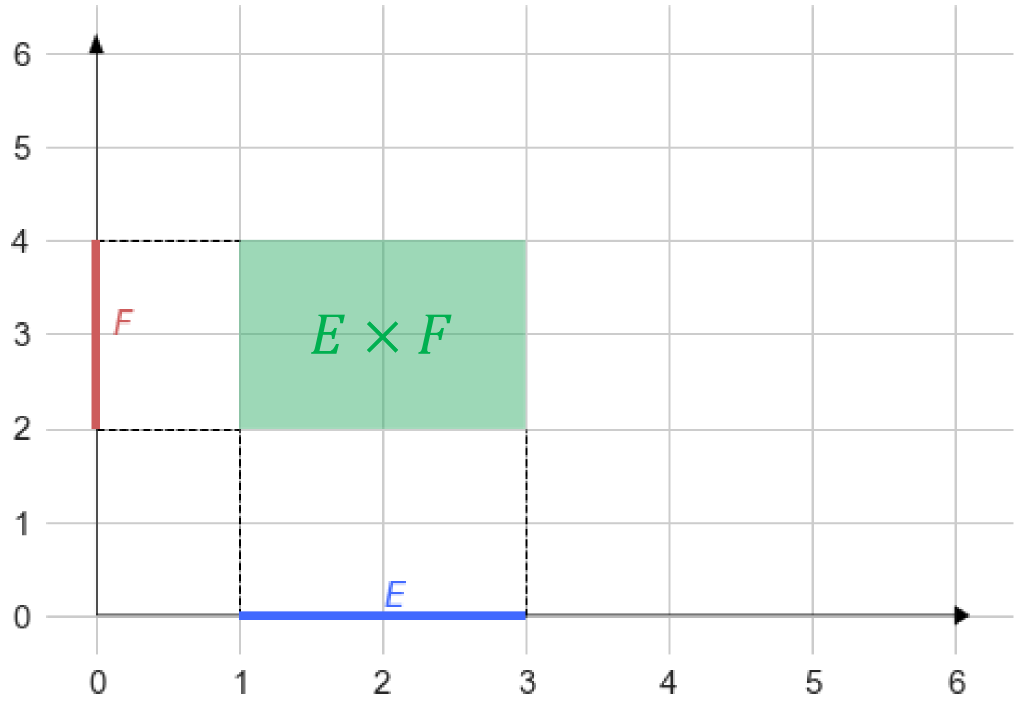
Beispiel 1. $A = \{Anton, Paul\}, B = \{Christina, Dora\}$

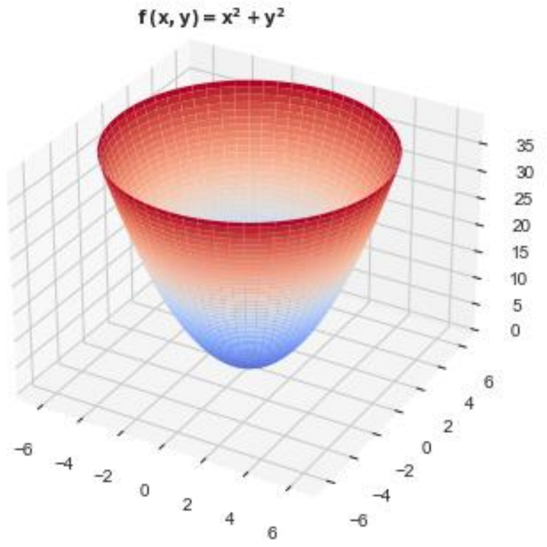
$$A \times B = \{(Anton, Christina), (Anton, Dora), (Paul, Christina), (Paul, Dora)\}$$

# MENGEN: OPERATIONEN

Beispiel. $E = [1,3], F = [2,4]$

$$E \times F = \{(e,f): e \in [1,3], f \in [2,4]\}$$





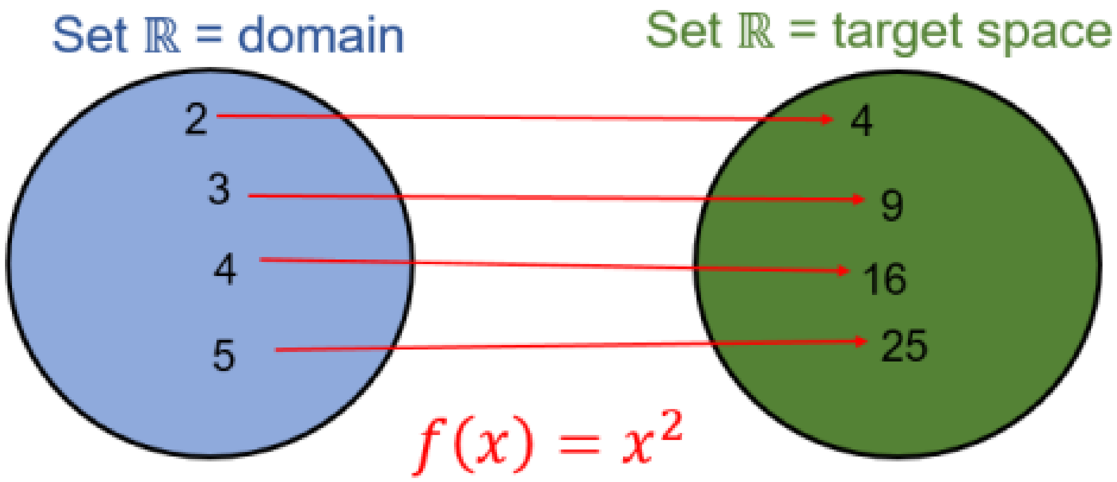

# › 5. ANALYSIS

Wirtschaftsmathematik | Prof. Dr. Florian Kauffeldt

# ANALYSIS: FUNKTIONEN

Eine $Funktion\ f$ ist eine Abbildung, die jedem Element einer Menge $A$ (Definitionsmenge) ein Element einer Menge $B$ (Zielraum) zuordnet:

$$f: A \to B.$$



# ANALYSIS: FUNKTIONEN

Gegeben eine Funktion $f: A \to B$,

- das $Bild$ $f(E)$ einer Menge $E \subseteq A$ unter $f$ ist:

$$f(E) = \{f(x): x \in E\}$$

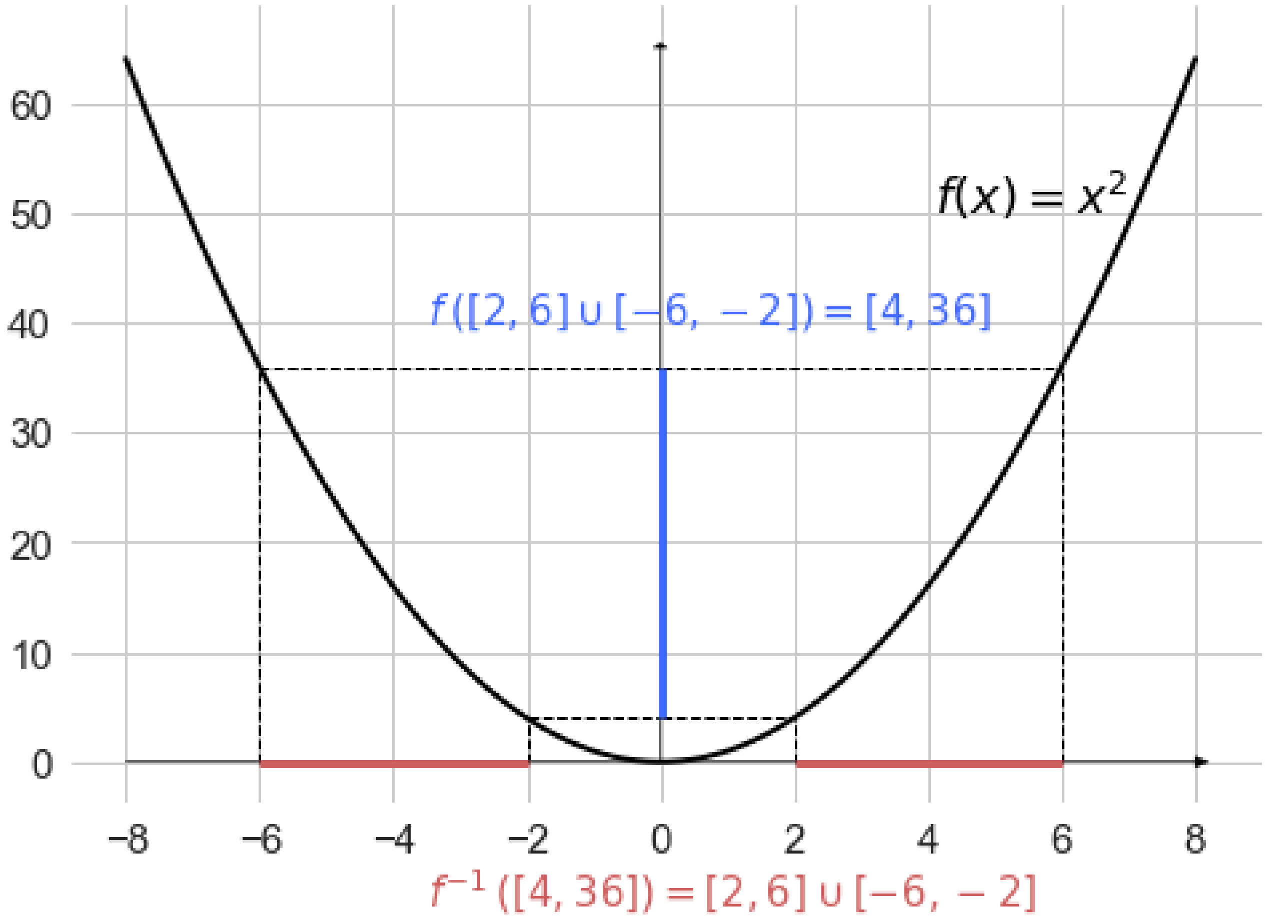
- das $Urbild$ $f^{-1}(F)$ einer Menge $F \subseteq B$ unter $f$ ist:

$$f^{-1}(F) = \{x: f(x) \in F\}$$

- der $Wertebereich$ von $f$ ist:

$$Wertebereich = f(A)$$

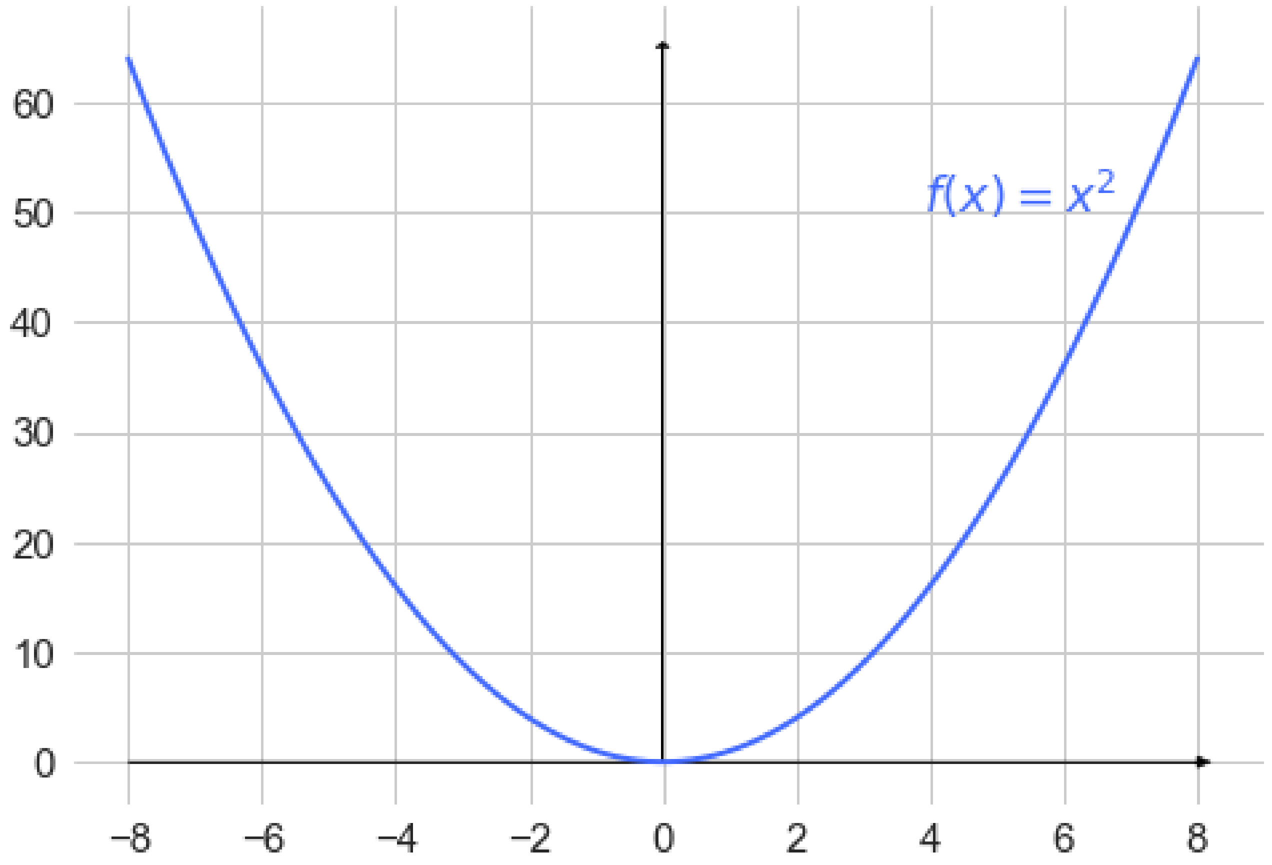
# ANALYSIS: FUNKTIONEN



# ANALYSIS: FUNKTIONEN

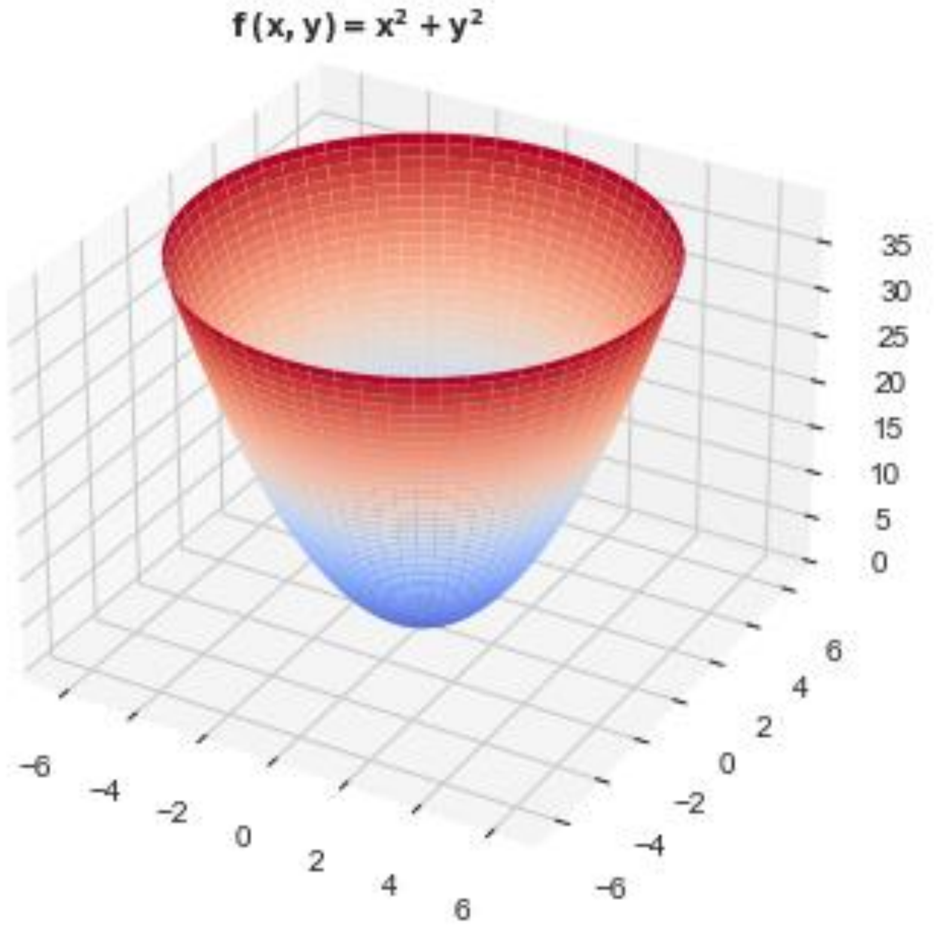
HOCHSCHULE HEILBRONN

Die Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = x^2$ ist eine *univariate* Funktion



# ANALYSIS: FUNKTIONEN

Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x,y) = x^2 + y^2$ ist eine $multivariate$ Funktion



# ANALYSIS: FUNKTIONEN

HOCHSCHULE HEILBRONN

Die $Niveaumenge$ einer Funktion $f$ zum Niveau $a$ ist:

$$N_f(a) = \{x: f(x) = a\}$$

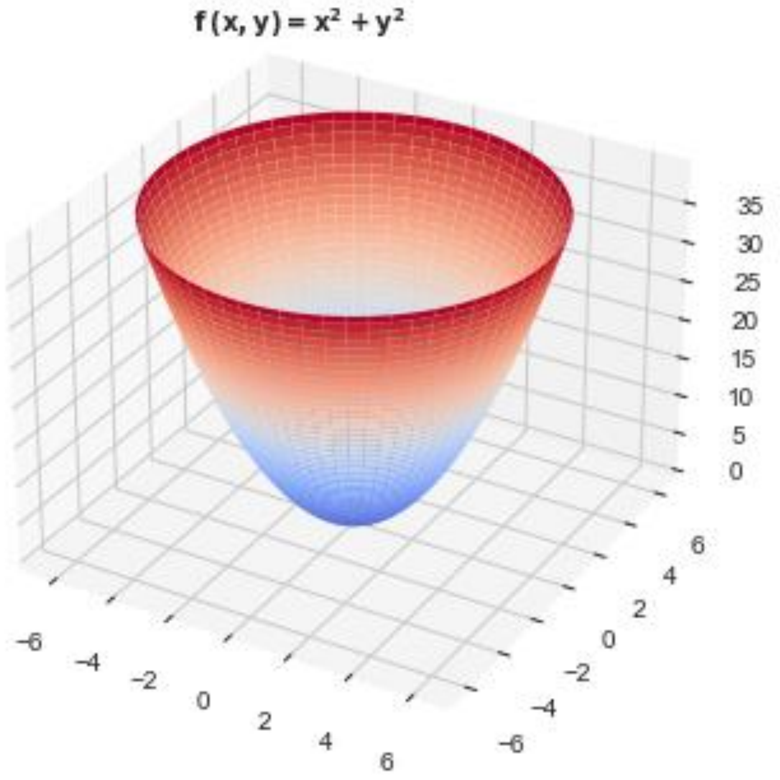
> Anhand von Niveaumengen lassen sich 3D-Funktionen in 2D darstellen.

Beispiel. Niveau von $x^2 + y^2$ zum Niveau 3:

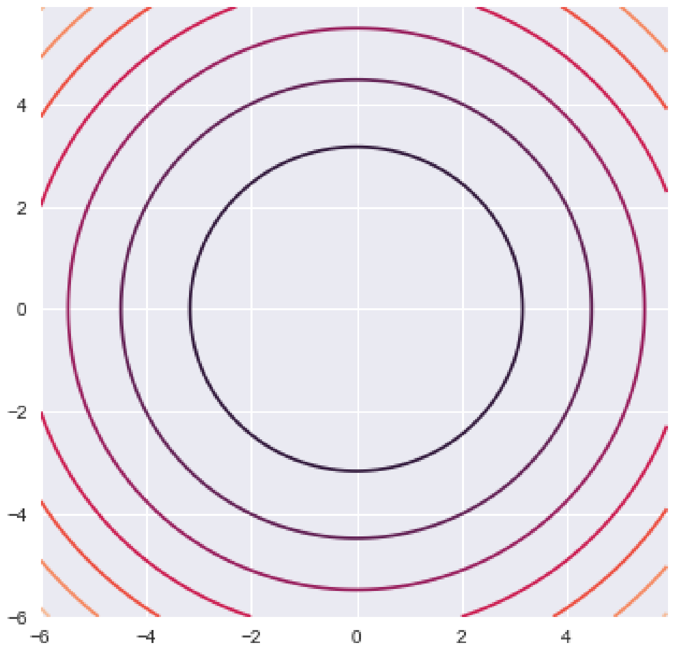
$$\{(x, y): x^2 + y^2 = 3\}$$

# ANALYSIS: FUNKTIONEN

Funktion in 3D

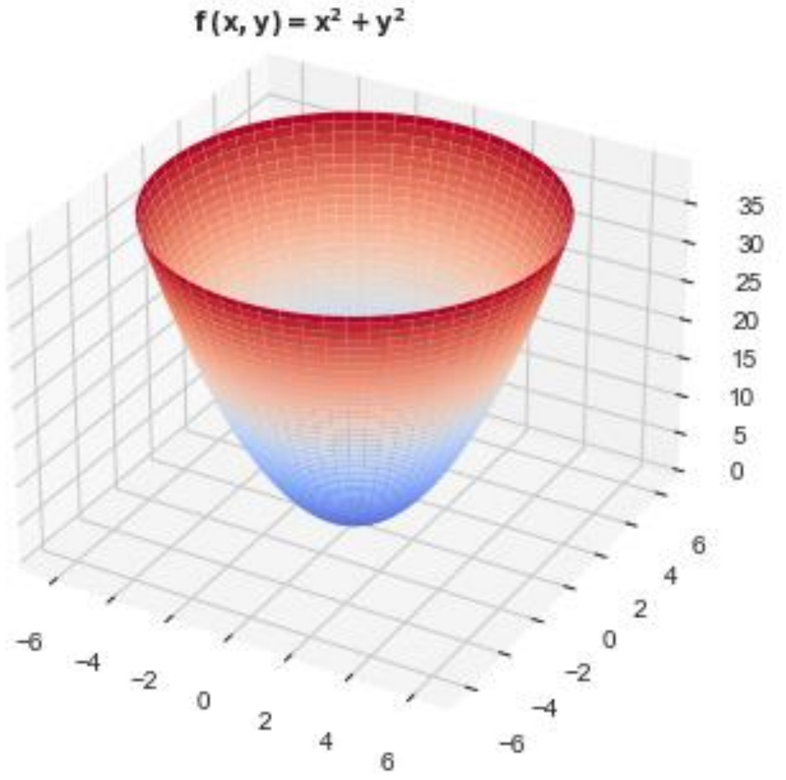



Niveaumengen der Funktion in 2D

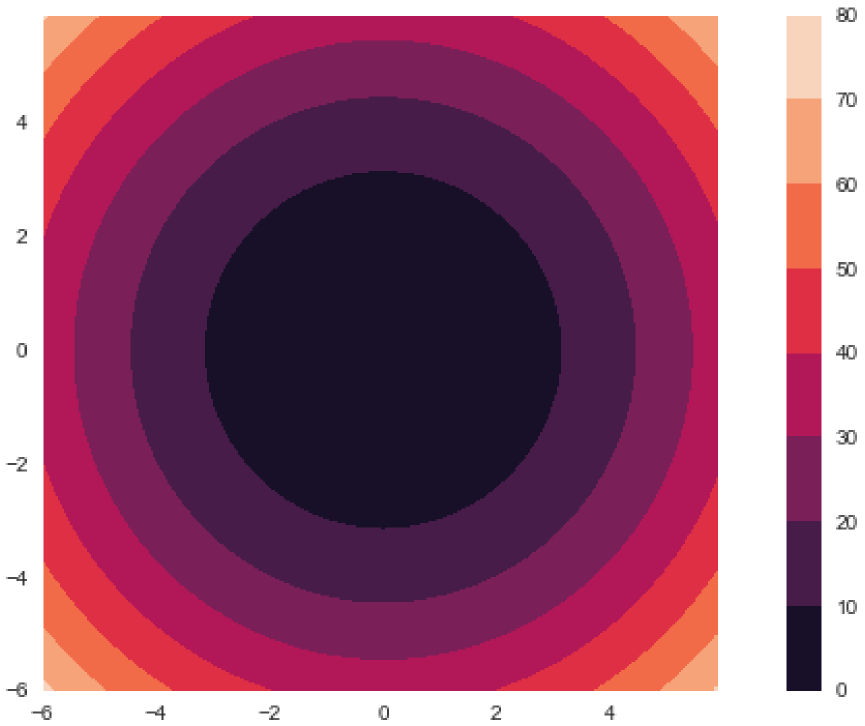


# ANALYSIS: FUNKTIONEN

Funktion in 3D




Niveaumengen der Funktion in 2D



# ANALYSIS: STETIGKEIT

Eine Funktion heißt $stetig$, wenn sie keine "Sprungstellen" hat.

- Etwas mathematischer: Eine Funktion heißt $stetig$, wenn

  die Urbilder abgeschlossener Mengen wieder abgeschlossen sind

- Summen, Produkte und Quotienten stetiger Funktionen sind wieder stetige Funktionen

# ANALYSIS: STETIGKEIT

Beispiel 1. Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x) = x^2$ stetig ist.

> Allgemeine abgeschlossene Menge: $[a, b]$ mit $a < b$

> Urbild dieser Menge unter $f$: $f^{-1}([a, b]) = \left[\sqrt{a}, \sqrt{b}\right]$ → abgeschlossen

> Da $a, b$ allgemein gewählt wurden gilt das immer

q.e.d.

**Zwischenwertsatz**

Eine univariate stetige Funktion definiert auf dem Intervall $[a, b]$ nimmt jeden beliebigen Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an.

Beispiel. Die Funktion $\sqrt{x}$ nimmt auf $[4,16]$ jeden Wert zwischen 2 und 4 an.

# ANALYSIS: STETIGKEIT

Beispiel 2. Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x) = \begin{cases} x+1 \text{ für } x>0 \\ 0 \text{ für } x \leq 0 \end{cases}$ nicht stetig ist.

Möglichtkeit 1. Zwischenwertsatz:

- $f(0) = 0$ und $f(2) = 3$
- Wenn $f$ stetig ist, müsste $f$ jeden Wert in [0,3] für $x$ aus [0,2] annehmen
- Dies ist aber nicht der Fall: Es existiert kein $x$ sodass $f(x) = 0.5$

q.e.d.

# ANALYSIS: STETIGKEIT

Beispiel 2. Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x) = \begin{cases} x+1 \text{ für } x > 0 \\ 0 \text{ für } x \leq 0 \end{cases}$ nicht stetig ist.

Möglichtkeit 2. Urbilder:

> Abgeschlossenes Intervall: [1,3]

> Urbild von [1,3]: $f^{-1}([1,3]) = (0,2]$ ist nicht abgeschlossen

q.e.d.

# ANALYSIS: DIFFERENZIERBARKEIT

HOCHSCHULE HEILBRONN

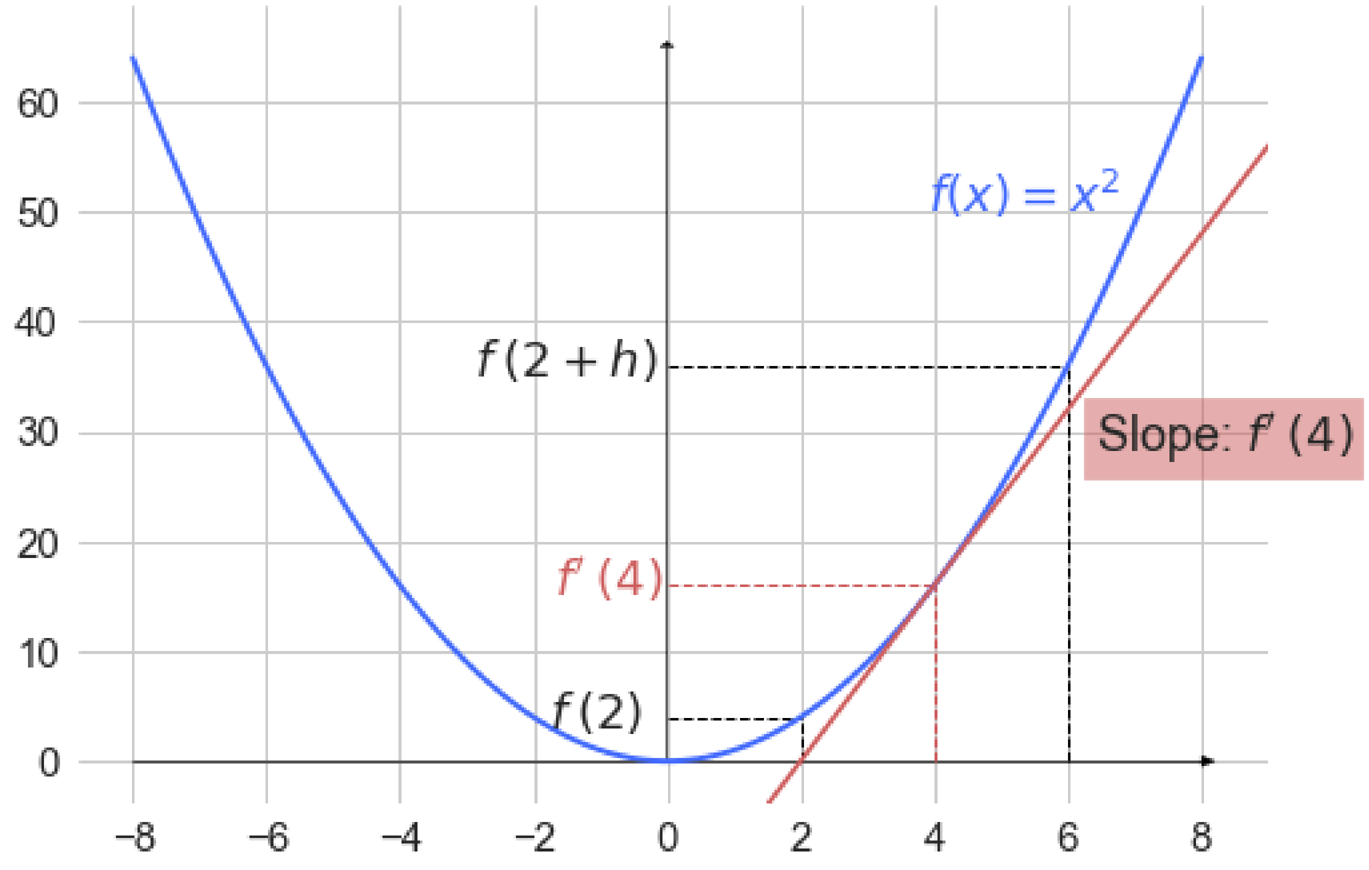
- Gegeben eine Funktion $f$. Der $Differenzenquotient$ $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ zweier Punkte $x_0$ und $x_1$ ist:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

- Die $Ableitung$ $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ ist der Grenzwert des Differenzenquotienten:

$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

# ANALYSIS: DIFFERENZIERBARKEIT



# ANALYSIS: DIFFERENZIERBARKEIT

HOCHSCHULE HEILBRONN

Beispiel. Bestimmen Sie die erste Ableitung der Funktion $f(x) = x^2$.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - (x)^2}{h} = \lim_{h \to 0} 2x + h = 2x$$

# ANALYSIS: DIFFERENZIERBARKEIT

HOCHSCHULE HEILBRONN

> $f(x) = Konstante \rightarrow f'(x) = 0$

> $f(x) = x^n \rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}$

# ANALYSIS: DIFFERENZIERBARKEIT

HOCHSCHULE HEILBRONN

- $Kettenregel$: Die Ableitung einer Funktion $h = f(g)$ ist $h' = f'(g) \cdot g'$

Beispiel. $h = (4x+2)^2 \rightarrow h' = 2(4x+2) \cdot 4$

- $Produktregel$: Die Ableitung einer Funktion $h = f \cdot g$ ist $h' = f'g + f \cdot g'$

Beispiel. $h = x^2 \cdot (4x+2) \rightarrow h' = 2x(4x+2) + x^2 4$

- $Quotientenregel$: Die Ableitung einer Funktion $h = f/g$ ist $h' = \frac{f'g - fg\prime}{g^2}$

Beispiel. $h = \frac{x^2}{(4x+2)} \rightarrow h' = \frac{2x(4x+2) - x^2 4}{(4x+2)^2}$

# ANALYSIS: DIFFERENZIERBARKEIT

Die $partielle\ Ableitung$ $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ einer Funktion $f(x_1, \dots, x_n)$ nach einer Variablen $x_i$ ist:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = Differenziere\ f\ nach\ x_i\ und\ behandle\ alle\ anderen\ Variablen\ als\ Konstanten$$

Beispiel. $f(x_1, x_2) = x_1^2 \cdot 2x_2 + x_1$

> $\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2x_1 2x_2 + 1$

> $\frac{\partial f}{\partial x_2} = 2x_1^2$

# ANALYSIS: DIFFERENZIERBARKEIT

Der $Gradient\ \nabla_f$ einer Funktion $f(x_1, \dots, x_n)$ ist der Vektor der partiellen Ableitungen:

$$\nabla_f = \begin{pmatrix} \partial f / \partial x_1 \\ \vdots \\ \partial f / \partial x_n \end{pmatrix}$$

Beispiel. $f(x_1, x_2) = x_1^2 \cdot 2x_2 + x_1$

$$\nabla_f = \begin{pmatrix} 4x_1 x_2 + 1 \\ 2x_1^2 \end{pmatrix}$$

Anmerkung. Der Gradient zeigt immer in die Richtung des steilsten Anstiegs von $f$

# ANALYSIS: DIFFERENZIERBARKEIT



Die $Hesse - Matrix\ H_f$ einer Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ entspricht deren zweiter Ableitung:

$$\mathrm{H}_f(x) = \begin{pmatrix} \partial^2 f/\partial x_1 \partial x_1 & \cdots & \partial^2 f/\partial x_1 \partial x_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial^2 f/\partial x_n \partial x_1 & \cdots & \partial^2 f/\partial x_n \partial x_n \end{pmatrix}$$

# ANALYSIS: DIFFERENZIERBARKEIT UND STETIGKEIT

Es gilt:

1. Jede differenzierbare Funktion ist stetig.

2. Stetige Funktionen können nicht differenzierbar sein.
   > Die Betragsfunktion $|x| = \sqrt{x^2}$ ist z.B. stetig, aber an der Stelle 0 nicht differenzierbar:

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{|0+h| - |0|}{h} = 1$$

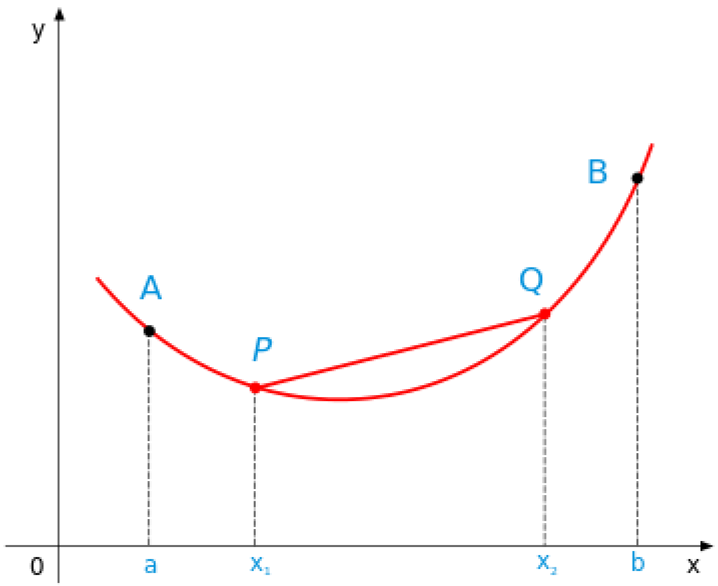
$$\neq$$

$$\lim_{h \uparrow 0} \frac{|0-h| - |0|}{-h} = -1$$

# ANALYSIS:
# KONVEXE UND KONKAVE FUNKTIONEN

Eine Funktion $f$ heißt $konvex$, wenn die Menge oberhalb der Funktion konvex ist:

$$f \text{ ist konvex} \Leftrightarrow f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2) \text{ für alle } x_1, x_2$$



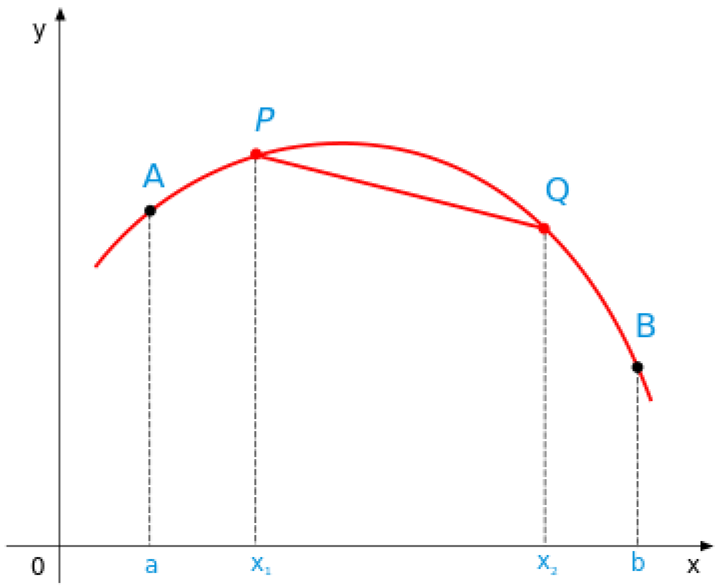

Konvexe Funktion
Quelle: https://de.wikipedia.org/wiki/Konvexe_und_konkave_Funktionen

# ANALYSIS: KONVEXE UND KONKAVE FUNKTIONEN

HOCHSCHULE HEILBRONN

Eine Funktion $f$ heißt $konkav$, wenn die Menge unterhalb der Funktion konvex ist:

$$f \; ist \; konkav \Leftrightarrow f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \geq \alpha f(x_1) + (1-\alpha)f(x_2) \; f\text{ür} \; alle \; x_1, x_2$$




Konkave Funktion
Quelle: https://de.wikipedia.org/wiki/Konvexe_und_konkave_Funktionen

# ANALYSIS: KONVEXE UND KONKAVE FUNKTIONEN

Eine Funktion heißt *strikt* $konvex\ bzw.\ konkav$, wenn statt der schwachen Ungleichung $\leq, \geq$

- eine strikte Ungleichung $<, >$ gilt

# ANALYSIS: KONVEXE UND KONKAVE FUNKTIONEN

Beispiel 1. Zeigen Sie, dass die Funktion $|x|$ konvex ist.

> Funktion ist nicht differenzierbar

> Für $x, y$ gilt:

$$|\alpha x + (1-\alpha)y| = \alpha|x| + (1-\alpha)|y| \text{ für } x, y > 0 \text{ und } x, y < 0$$

$$|\alpha x + (1-\alpha)y| < \alpha|x| + (1-\alpha)|y| \text{ für } x > 0 \text{ und } y < 0 \text{ oder vice versa}$$

> Damit

$$|\alpha x + (1-\alpha)y| \leq \alpha|x| + (1-\alpha)|y| \; für \; alle \; x, y$$

q.e.d.

# ANALYSIS:
# KONVEXE UND KONKAVE FUNKTIONEN

Beispiel 2. Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ für $x > 0$ konkav ist.

> Funktion ist differenzierbar für $x > 0$

> $f''(x) = -\frac{1}{4x^{\frac{3}{2}}} < 0$ für $x > 0$

q.e.d.

# ANALYSIS: MONOTONIE

> Eine Funktion $f: A \to B$ heißt $monoton\ steigend\ (fallend)$, wenn

für alle $x, y \in A$ gilt, wenn $x \leq y$, dann $f(x) \leq (\geq) f(y)$

> Eine Funktion $f: A \to B$ heißt $streng\ monoton\ steigend\ (fallend)$, wenn

für alle $x, y \in A$ gilt, wenn $x < y$, dann $f(x) < (>) f(y)$

> Wenn die Funktion $f\ differenzierbar$ ist so heißt sie *monoton steigend (fallend),* wenn

$$f'(x) \geq (\leq)\ 0\ für\ alle\ x$$

# ANALYSIS: MONOTONIE

HOCHSCHULE HEILBRONN

Beispiel. Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x) = \begin{cases} x + 1\ für\ x > 0 \\ 0\ für\ x \leq 0 \end{cases}$ monoton ist.

> Funktion ist nicht differenzierbar
> Fall 1: $x < y < 0 \rightarrow f(x) = f(y) = 0$
> Fall 2: $x < 0 < y \rightarrow f(x) = 0 < f(y) > 0$
> Fall 3: $0 < x < y \rightarrow f(x) < f(y)$
> Zusammen: für $x < y$:

$$f(x) \leq f(y)$$

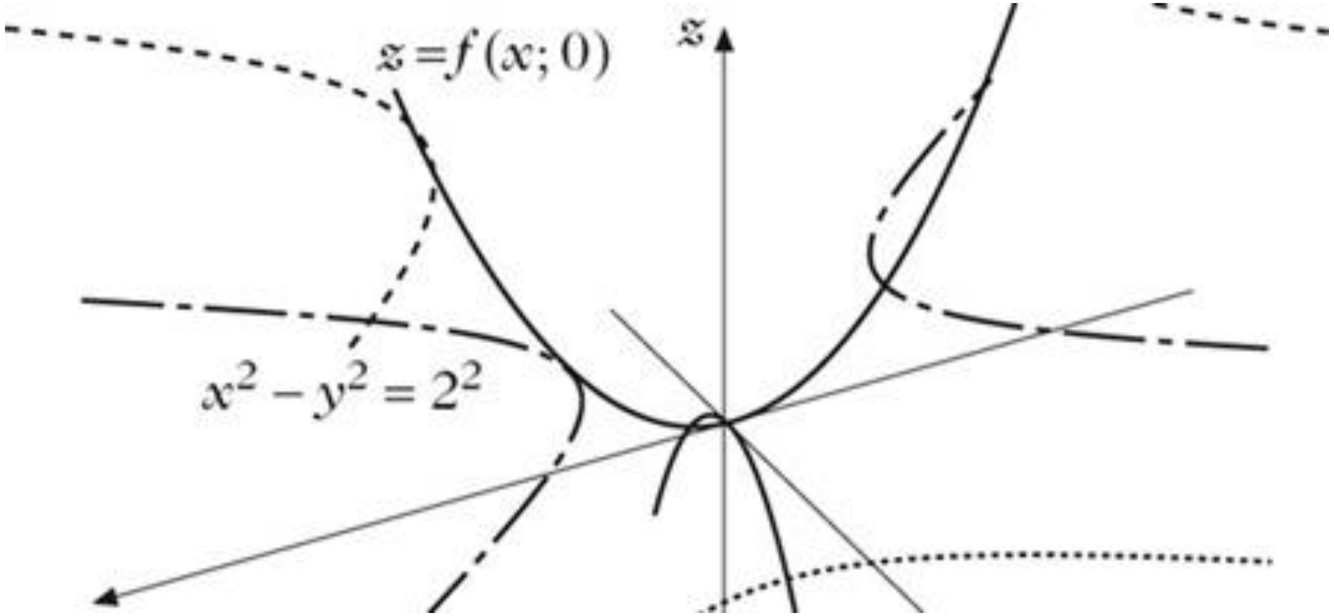
q.e.d.

# ANALYSIS:
# MONOTONIE, KONVEXITÄT UND KONKAVITÄT

HOCHSCHULE HEILBRONN

Eine zweifach differenzierbare univariate Funktion $f$ heißt

- konvex, wenn ihre Ableitungen monoton wachsen ($f'' > 0$)
- konkav, wenn ihre Ableitungen monoton fallen ($f'' < 0$)




# › 6. OPTIMIERUNG

Wirtschaftsmathematik | Prof. Dr. Florian Kauffeldt

# OPTIMIERUNG: OHNE NEBENBEDINGUNGEN

HOCHSCHULE HEILBRONN

Optimierungsproblem:

> Maximiere eine Funktion $f$:

$$\max_{x} f(x)$$

> Maximierung und Minimierung:

$$\min_{x} f(x) = \max_{x} -f(x)$$

# OPTIMIERUNG: OHNE NEBENBEDINGUNGEN

HOCHSCHULE HEILBRONN

## Beispiel Univariat. $f(x) = x^2$

$$\min_x x^2 = \max_x -x^2$$

$$-f'(x) = -2x \Leftrightarrow x^* = 0$$

$$-f''(x^*) = -2 < 0 \Leftrightarrow konkave\ Funktion \rightarrow Maximum\ von\ -x^2$$

# OPTIMIERUNG: OHNE NEBENBEDINGUNGEN

- Der Extremwert $x^*$ einer nicht-monotonen $univariaten$ Funktion $f$ wird erreicht, wenn

$$f'(x^*) = 0$$

Wenn

- $f''(x^*) < 0$ handelt es sich um ein Maximum (konkave Funktion)
- $f''(x^*) > 0$ handelt es sich um ein Minimum (konvexe Funktion)

# OPTIMIERUNG: OHNE NEBENBEDINGUNGEN

HOCHSCHULE HEILBRONN

## Beispiel Multivariat. Beispiel . $f(x,y) = -x^2 - y^2 + x$

$$\max_{x,y} f(x,y)$$

- $\nabla_f(x) = \begin{pmatrix} -2x+1 \\ -2y \end{pmatrix} \to (x^*, y^*) = (\frac{1}{2}, 0)$
- $\mathrm{H}_f(x) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$
- $\left(\frac{1}{2}, 0\right) \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = (-1,0) \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} < 0 \Leftrightarrow$ negativ definit (Maximum)

# OPTIMIERUNG: OHNE NEBENBEDINGUNGEN

Eine Matrix $M$ ist an der Stelle $x'$

- $positiv\ definit$, wenn

$$\mathrm{x}'^{T}\mathrm{H}_f(x')x' > 0$$

- $negativ\ definit$, wenn

$$\mathrm{x}'^{T}\mathrm{H}_f(x')x' < 0$$

# OPTIMIERUNG:
# OHNE NEBENBEDINGUNGEN

HOCHSCHULE HEILBRONN

> Der Extremwert $x^*$ einer nicht-monotonen $multivariaten$ Funktion $f$ wird erreicht, wenn

$$\nabla_f(x^*) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wenn

> die Hesse-Matrix negativ definit ist, handelt es sich um ein Maximum (konkave Funktion)

> die Hesse-Matrix positiv definit ist, handelt es sich um ein Minimum (konvexe Funktion)

# OPTIMIERUNG:
# MIT NEBENBEDINGUNGEN

Optimierungsproblem mit $k$ Nebenbedingungen:

$$\max_{x_1,\dots,x_n} f(x_1, \dots, x_n) \; so \; dass$$
$$g_1(x_1, \dots, x_n) = 0$$
$$\vdots$$
$$g_k(x_1, \dots, x_n) = 0$$

# OPTIMIERUNG: MIT NEBENBEDINGUNGEN

HOCHSCHULE HEILBRONN

Lösung Optimierungsproblem mit k Nebenbedingungen:

$$\max_{x_1,\ldots,x_n} f(x_1,\ldots,x_n) \; so\ dass$$

$$\begin{gathered} g_1(x_1,\ldots,x_n) = 0 \\ \vdots \\ g_k(x_1,\ldots,x_n) = 0 \end{gathered}$$

Schritt 1: Lagrange-Funktion aufstellen:

$$L(x_1,\ldots,x_n,\lambda_1,\ldots,\lambda_k) = f(x_1,\ldots,x_n) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \times g_i(x_1,\ldots,x_n)$$

Schritt 2: Extremwerte von Lagrange-Funktion bestimmen

# OPTIMIERUNG: MIT NEBENBEDINGUNGEN

HOCHSCHULE HEILBRONN

## Beispiel 1.

$$\max_{x,y} x^2 + y^2 \; s.d.$$

$$g_1: x + y - 1 = 0$$

Schritt 1: Lagrange-Funktion aufschreiben

$$L(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(x + y - 1)$$

HOCHSCHULE HEILBRONN

## Beispiel 1.

Schritt 2: Extremwert von Lagrange-Funktion bestimmen

$$\nabla_L = \begin{pmatrix} 2x + \lambda \\ 2y + \lambda \\ x + y - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

# OPTIMIERUNG: MIT NEBENBEDINGUNGEN

Beispiel 2. Nutzenmaximierung unter der Nebenbedingung der Budgetrestriktion

- Nutzenfunktion: $U(Wasser, Wein) = Wasser \times Wein$
- Budgetbeschränkung: $Wasser + 3Wein \ = \ 150$

Bestimmen Sie die optimalen Konsummengen von Wasser und Wein.

# OPTIMIERUNG: MIT NEBENBEDINGUNGEN

HOCHSCHULE HEILBRONN

## Beispiel 3. Kostenminimierung unter Nebenbedingungen

- Ziel: Produktion von 30 Autos
- Produktionsfunktion: $\mathrm{P}(k,l) = \sqrt{k} + l$, mit k = Kapital, l = Arbeit
- Kostenfunktion: $p_k = 1$, $p_l = 20 \rightarrow C(k,l) = k + 20l$

Bestimmen Sie den optimalen Mitteleinsatz zur Produktion der 30 Autos.

# OPTIMIERUNG: EXISTENZ VON EXTREMWERTEN

HOCHSCHULE HEILBRONN

**Extremwertsatz**

Gegeben eine Funktion $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Wenn

i. $A$ kompakt ist und

ii. $f$ stetig ist,

dann existieren Werte in $A$, die $f$ maximieren und minimieren.

# OPTIMIERUNG: EINDEUTIGKEIT VON EXTREMWERTEN

Gegeben eine stetige Funktion $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, wobei $A$ kompakt ist. Wenn

- die Funktion konvex ist, so existiert ein eindeutiges globales Minimum

- die Funktion konkav ist, so existiert ein eindeutiges globales Maximum

# OPTIMIERUNG: EXISTENZ UND EINDEUTIGKEIT

Beispiel. Überprüfen Sie, ob die Funktion $f: [-1,1] \times [-1,1] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) = |x + y - 2|$$

ein eindeutiges Minimum annimmt.

# THE END!

Please refer any questions to:
Prof. Dr. Florian Kauffeldt
Faculty of International Business
florian.kauffeldt@hs-heilbronn.de