HOCHSCHULE HEILBRONN

Sommersemester 2025 Prof. Dr. Florian Kauffeldt

Examen

Statistik und Wirtschaftsmathematik

Zeit: *90 Minuten*

Name: ______________________

Matr. Nummer: ______________________

Hinweise:

1. Zugelassene Hilfsmittel: Open-Book: Aufschriebe, Formelsammlung, Skript, Taschenrechner (keine gespeicherten Formeln etc.!), Notizen.
2. Jede Antwort muss hinreichend begründet werden. Antworten ohne Begründung ergeben 0 Punkte.
3. Unleserliche Ergebnisse werden nicht gewertet. Nutzen Sie bei weiterem Platzbedarf bitte auch die Rückseiten der Klausurblätter!
4. Die geschätzte Bearbeitungszeit (in Minuten) für eine Aufgabe entspricht der Punktzahl. Somit sind die Aufgaben insgesamt 90 Punkte wert.
5. **Viel Glück!!!**

Aufgabe	**Punkte**	**Erreichte Punkte**
1	20	
2	25	
3	20	
4	25	
Gesamt	**90**	

Teil 1: Statistik

Aufgabe 1. Deskriptive Statistik (20 Punkte)

Untersuchung des Zusammenhangs zwischen dem monatlichen Einkommen (€) und den monatlichen Ausgaben für Kleidung (€) bei vier Personen.

Person	**Einkommen (€)**	**Kleidungsausgaben (€)**
A	2000	220
B	2500	300
C	3000	450
D	4000	250

a) Berechnen Sie das durchschnittliche Einkommen und Ausgaben für Kleidung.

b) Berechnen Sie die Kovarianz von Einkommen und Kleidungsausgaben.

c) Welche Person verringert die Kovarianz? Erklären Sie kurz warum dies so ist unter Bezugnahme auf die Mittelwerte.

Standardabweichungen: Einkommen: 739,5 €; Kleidungsausgaben: 88,5 €

d) Berechnen Sie den Korrelationskoeffizienten auf zwei Nachkommastellen und interpretieren Sie den Wert des Koeffizienten. Ist die Korrelation stark? Begründen Sie Ihre Antworten.

e) Ändert sich der Korrelationskoeffizient, wenn Einkommen statt in € in tausend € gemessen wird? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung:

a)

$$Mittelw_{Einkommen} = 2875$$

$$Mittelw_{Ausgaben} = 305$$

b) Kovarianz = 8.125

c) Person D: Überdurchschnittliches Einkommen, unterdurchschnittliche Ausgaben

d) Korrelationskoeffizient = 0,12 – schwache korrelation

e) Nein, keine Änderung. Der Korrelationskoeffizient ist eine normierte Kovarianz und hängt nicht von den Einheiten ab.

Aufgabe 2. Induktive Statistik (25 Punkte)

Ein Fitnessstudio möchte wissen, ob ein neues 6-Wochen-Trainingsprogramm den Ruhepuls der Teilnehmer verändert.

Dazu misst man den Ruhepuls von 40 zufällig ausgewählten Teilnehmern nach Abschluss des Programms mit folgendem Ergebnis:

- Durchschnittlicher Ruhepuls nach dem Programm: 66,2 Schläge/Minute (Standardabweichung: 5,1 Schläge/Minute)

a) Schätzen Sie anhand dieser Stichprobe das 95%-Konfidenzintervall für den mittleren Ruhepuls nach dem Programm.

Der mittlere Ruhepuls vor dem Programm war 68. Nun soll ein Test durchgeführt werden, ob sich der Ruhepuls durch das Programm signifikant verändert hat.

b) Handelt es sich um einen ein- oder zweiseitigen Test. Begründen Sie Ihre Antwort.

c) Schreiben Sie die Null- und Alternativhypothese des Hypothesentests unter Verwendung des Aufgabenkontexts auf.

d) Berechnen Sie die Teststatistik (z-Wert) und den p-Wert. Interpretieren Sie den p-Wert.

e) Wie verändert sich der Standardfehler, wenn die Stichprobengröße ansteigt? Wie verändert sich dadurch die Teststatistik und der p-Wert? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung:

a) $n = 40, \bar{x} = 66{,}2, s = 5{,}1, \alpha = 95\% \Rightarrow z = 1{,}96$

$$se = \frac{5{,}1}{\sqrt{40}} = 0{,}81$$

$$Konfidenzintervall = 66{,}2 \pm 1{,}58$$

b) Zweiseitig (“verändert”)

c) H0: $\mu = 68$; H1: $\mu \neq 68$

d) Z-Wert:

$$= \frac{66{,}2 - 68}{0{,}81} \approx -2{,}22$$

$$Tabelle \rightarrow 0{,}4868$$

P-Wert = 2x(0,5-0,4868)=2,64% < 5% -> statistisch signifikante Veränderung des Ruhepuls

e) se ↓ -> z ↑ -> p-Wert ↓

Teil 2: Wirtschaftsmathematik

Aufgabe 3. Matrixalgebra (20 Punkte)

Betrachten Sie die folgenden Matrizen A und B:

$$A = \begin{pmatrix} c & 8 \\ 5 & 9 \end{pmatrix} \ und \ B = \begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 13 & 5 \end{pmatrix},$$

wobei c ein Parameter ist.

a) Bestimmen Sie die Determinante der Matrix B.

b) Bestimmen Sie das Produkt der Matrizen $A \times B$.

c) Bestimmen Sie den Parameter c so, dass die Determinanten von B identisch zu derjenigen des Produkts $A \times B$ ist: $\det(B) = \det(A \times B)$.

Lösung:

a) $\det(B) = -51$

b) $AB = \begin{bmatrix} 8c + 104 & 7c + 40 \\ 157 & 80 \end{bmatrix}$

c) $c = \frac{697}{153} \approx 4{,}56$

Aufgabe 4. Matrizen und Optimierung (25 Punkte)

a) Lösen Sie das folgende Optimierungsproblem ohne Nebenbedingungen. Zeigen Sie auch, dass die Bedingung zweiter Ordnung (negative Definitheit der Hesse-Matrix) erfüllt ist.

$$\max_{x,y} -x^2 - y^2 + 6x + 4y$$

b) Ein Konsument hat 100 € und kann Bier (Anzahl Bier = b) und Pizza (Anzahl Pizza = p) kaufen. Bier kostet 3 € und Pizza 10 €. Die Nutzenfunktion des Konsumenten ist $\sqrt{b} + p$. Lösen Sie das Optimierungsproblem des Konsumenten (die Bedingung zweiter Ordnung müssen Sie nicht überprüfen):

$$\max_{b,p} \sqrt{b} + p$$

$$s.d.$$

$$3 \cdot b + 10 \cdot p \leq 100$$

Lösung:

a) BEO:

$$\nabla f(x,y)=(\partial x\partial f,\partial y\partial f)=(-2x+6,-2y+4)$$

$$(x,y) = (3,2)$$

BZO:

$$H = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$(3,2)H\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = -30 < 0 \Rightarrow negativ\ definit$$

b) Lagrange-Funktion:

$$L = \sqrt{b} + p - \lambda(3b + 10p - 100)$$

BEO:

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}b^{-1/2} - 3\lambda \\ 1 - 10\lambda \\ -(3b + 10p - 100) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Damit:

$$\lambda^* = \frac{1}{10}$$

$$b^* = 25/9$$

$$p^* = 55/6$$