HOCHSCHULE HEILBRONN

Sommersemester 2023	Prof. Dr. Florian Kauffeldt

Examen

Statistik und Wirtschaftsmathematik

Zeit: *90 Minuten*

Name: ______________________

Matr. Nummer: ______________________

Hinweise:

1. Zugelassene Hilfsmittel: Open-Book: Aufschriebe, Formelsammlung, Skript, Taschenrechner (keine gespeicherten Formeln etc.!), Notizen.

2. Jede Antwort muss hinreichend begründet werden. Antworten ohne Begründung ergeben 0 Punkte.

3. Unleserliche Ergebnisse werden nicht gewertet. Nutzen Sie bei weiterem Platzbedarf bitte auch die Rückseiten der Klausurblätter!

4. Die geschätzte Bearbeitungszeit (in Minuten) für eine Aufgabe entspricht der Punktzahl. Somit sind die Aufgaben insgesamt 90 Punkte wert.

5. **Viel Glück!!!**

Aufgabe	**Punkte**	**Erreichte Punkte**
1	15	
2	10	
3	20	
4	5	
5	10	
6	30	
Gesamt	**90**	

Teil 1: Statistik

Aufgabe 1. Deskriptive Statistik (15 Punkte)

a) Geben Sie das Messniveau der folgenden Daten sowie die Lagemaße, welche berechnet werden können, an.

Daten	**Messniveau**	**Lagemaße, die berechnet werden können**
Social-Media-Kanäle	Nominal	Modalwert
Performance-Bewertung (gut, mittel, schlecht)	Ordinal	Modalwert, Median
Kontostand	Intervall	Modalwert, Median, Mittelwert
Zustimmungswerte (trifft zu, neutral, trifft nicht zu)	Ordinal	Modalwert, Median
Arbeitseinkommen	Verhältnis	Modalwert, Median, Mittelwert

b) Bestimmen Sie den Modalwert und den Median für den folgenden Datensatz, welche Google Sternbewertungen von 5 Personen für eine Firma enthält:

★	★★★	★★★★★	★	★★

Lösung:

- Modalwert = ★
- Median = ★★

Aufgabe 2. Chebyshev Ungleichung (10 Punkte)

Eine Firma führt Eignungstests für Bewerber für Managementpositionen durch. Im Schnitt erreichen die Bewerber 75 (von 100) Punkten (Standardabweichung 10 Punkte). Die Art der Verteilung sei unbekannt. Begründen Sie Ihre Antworten und geben Sie Rechenschritte an.

a) Wie viel Prozent der Bewerber erreichen mindestens 50 bis 100 Punkte?

b) In welchem Punkteintervall liegen mindestens 50% der Bewerber (runden Sie die Intervallgrenzen auf ganze Punkte)?

Lösung:

a)

- $k = \frac{100-75}{10} = 2.5$
- $Prozent = 1 - \frac{1}{k^2} = 1 - \frac{1}{6.25} = 84\%$

b)

- $1 - \frac{1}{k^2} = 50\% \Leftrightarrow k = \sqrt{2}$
- Intervall: $75 \pm \sqrt{2} \cdot 10 \approx von\ 61\ Punkten\ bis\ 89\ Punkten$

Aufgabe 3. Hypothesentest (20 Punkte)

Der langfristige Durchschnitt der Monatsmiete von Studierenden an der Hochschule Heilbronn ist 231 € (Standardabweichung: 56 €).

In einer Stichprobe mit 52 Studierenden ist die durchschnittliche Monatsmiete 245 €. Wir möchten wissen, ob Studierende inzwischen mehr Miete bezahlen als in der Vergangenheit und führen hierzu einen Hypothesentest durch.

a) Handelt es sich um einen Ein- oder Zweistichprobentest. Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Ist der Test einseitig oder zweiseitig. Falls einseitig, ist der Test rechts- oder linksseitig. Begründen Sie Ihre Antworten.

c) Schreiben Sie die Null- und Alternativhypothese des Hypothesentests in Bezug zum Aufgabenkontext auf.

d) Berechnen Sie den Standardfehler auf 2 Nachkommastellen.

e) Berechnen Sie die Teststatistik und den p-Wert. Interpretieren Sie den p-Wert. Liegt Evidenz vor, dass die monatlichen Mietzahlungen angestiegen sind?

f) Wie verändert sich der Standardfehler, wenn die Stichprobengröße ansteigt? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung:

a) Einstichprobentest <- nur eine Gruppe

b) Einseitig <- „mehr Miete bezahlen"; Rechtsseitig <- Ablehnungsbereich rechts

c) Hypothesen:

H0: $\mu_{Miete} \leq 231$

Ha: $\mu_{Miete} > 231$

d) $Standardfehler = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{56}{\sqrt{52}} \approx 7{,}77$

e) $Teststatistik = \frac{x - \mu_0}{Standardfehler} = \frac{245-231}{7{,}77} \approx$ 1,8 -> p-Wert = 0,5 – 0,4641 = 3,59%

p-Wert < 5% -> Evidenz für einen Mietanstieg

f) Standardfehler sinkt. Extremwerte rücken näher bzw. Wurzel (n) wird größer -> SE wird kleiner, da unter dem Bruch.

Teil 2: Wirtschaftsmathematik

Aufgabe 1. Finanzmathematik (5 Punkte)

Sie möchten in 17 Jahren über € 50'000 verfügen. Welchen Betrag müssen Sie heute anlegen, wenn die jährliche Verzinsung 3% beträgt?

Lösung:

Barwert heute = 42‘000/(1.03)^17 = 30‘250.82

Aufgabe 2. Mengenlehre (10 Punkte)

Betrachten Sie die folgende Menge M:

$$M = \{(x, y) : y \leq x^2\}$$

a) Zeichnen Sie die Menge.

b) Zeigen Sie, dass die Menge nicht konvex ist.

Lösung:

b) P1=(1,1) und P2=(-1,1) sind ein Element von M. Aber 1/2P1+1/2P2 = (0.5,1) ist kein Element von M.

Aufgabe 3. Matrizen und Optimierung (30 Punkte)

a) Berechnen Sie das Produkt $A \times B$ der folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 8 \\ 1 & 3 & 7 \end{pmatrix} \; und \; B = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 3 & 7 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

b) Lösen Sie das folgende Optimierungsproblem ohne Nebenbedingungen. Zeigen Sie auch, dass die Bedingung zweiter Ordnung (positive Definitheit der Hesse-Matrix) erfüllt ist.

$$\min_{x,y} 4 \cdot (x-2)^2 - 3 \cdot y^2 + y$$

c) Die Kostenfunktion einer Firma ist $35 \cdot A + 12 \cdot K$ und hängt von Arbeit (A) und Kapital (K) ab. Die Firma hat die Produktionsfunktion $\sqrt{5K} + A$ und möchte 275 Einheiten ihres Produktes kostenminimal herstellen. Lösen Sie das folgende Optimierungsproblem der Firma mit Nebenbedingung. Die Bedingung zweiter Ordnung müssen Sie nicht überprüfen.

$$\min_{A,K} 35 \cdot A + 12 \cdot K$$

$$s.d. \sqrt{5K} + A \geq 275$$

Lösung:

a)

$$\begin{pmatrix} 5 & 7 & 8 \\ 1 & 3 & 7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 3 & 7 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 54 & 126 \\ 21 & 58 \end{pmatrix}$$

b) BEO:

$$\nabla = \begin{pmatrix} 8(x-2) \\ 1-6y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Extremwert:

$$(x^*, y^*) = (2,1/6)$$

- BZO:

$$H = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$$

- Positive Definitheit:

$$(2,1/6) \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix} = (16, -1) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix} = 32 - \frac{2}{6} = 31.67 > 0$$

c) Lagrange-Funktion:

$$L = 35 \cdot A + 12 \cdot K - \lambda(\sqrt{5K} + A - 275)$$

BEO:

$$\nabla = \begin{pmatrix} 35 - \lambda \\ 12 - \frac{\lambda \cdot \sqrt{5}}{2\sqrt{K}} \\ -(\sqrt{5K} + A - 275) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda^* = 35$$

Damit:

$$12 - \frac{35\sqrt{5}}{2\sqrt{K}} = 0$$

$$K^* = \left(\frac{35\sqrt{5}}{24}\right)^2 = \frac{6125}{576}$$

Damit:

$$-\left(\sqrt{5\cdot\frac{6125}{576}}+A-275\right)=0$$

$$A^{*}=\frac{6425}{24}$$