



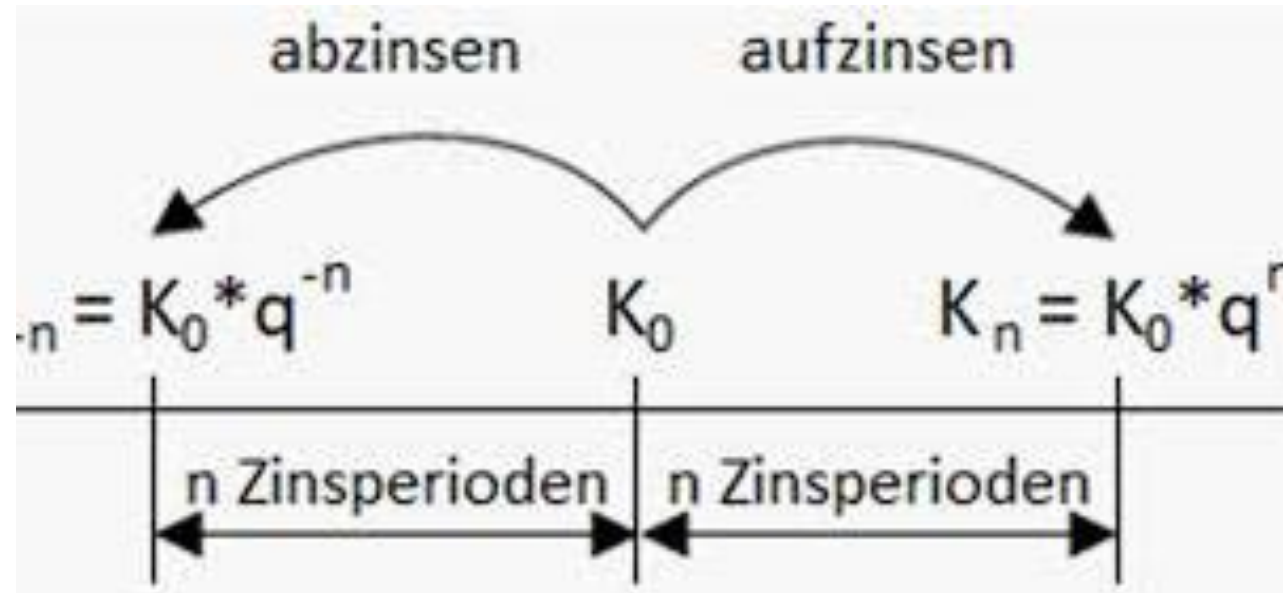
## › WIRTSCHAFTS-MATHEMATIK

---

PETER ALBRECHT (2014): Finanzmathematik für Wirtschaftswissenschaftler, 3. Auflage, Schäffer Poeschel.

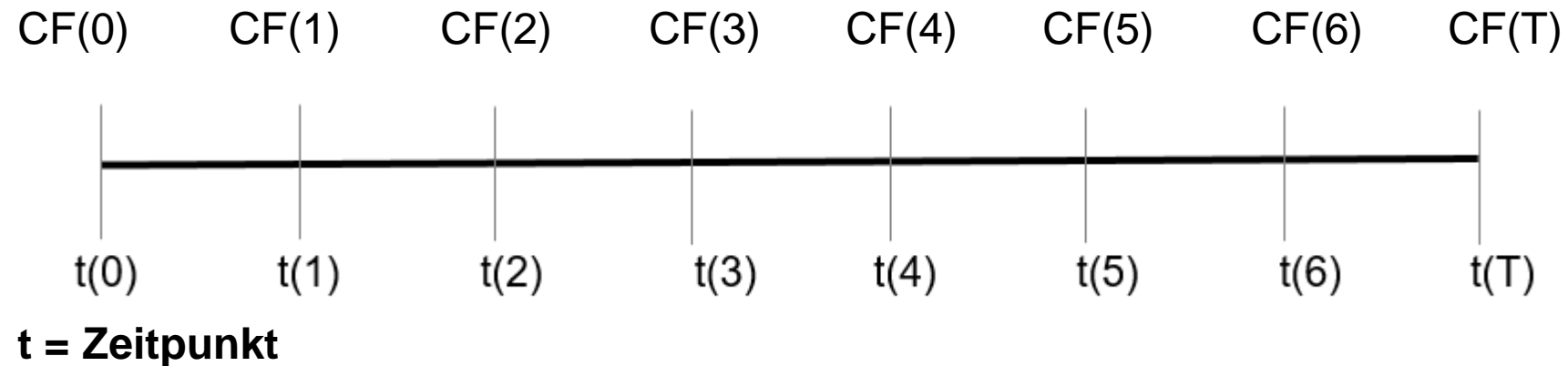
KNUT SYDSAETER, PETER HAMMOND, ARNE STROM, ANDRÉS CARVAJAL (2018): Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler, 5. Auflage, Pearson.

1. Finanzmathematik
2. Vektor- und Matrixalgebra
3. Lineare Gleichungssysteme
4. Mengenlehre
5. Analysis
6. Optimierung



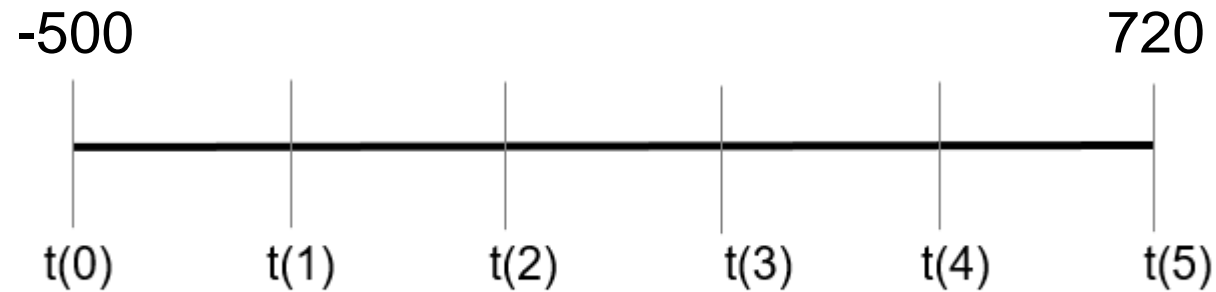
# › 1. FINANZMATHEMATIK

**CF = Cash Flow = Zahlungsstrom**

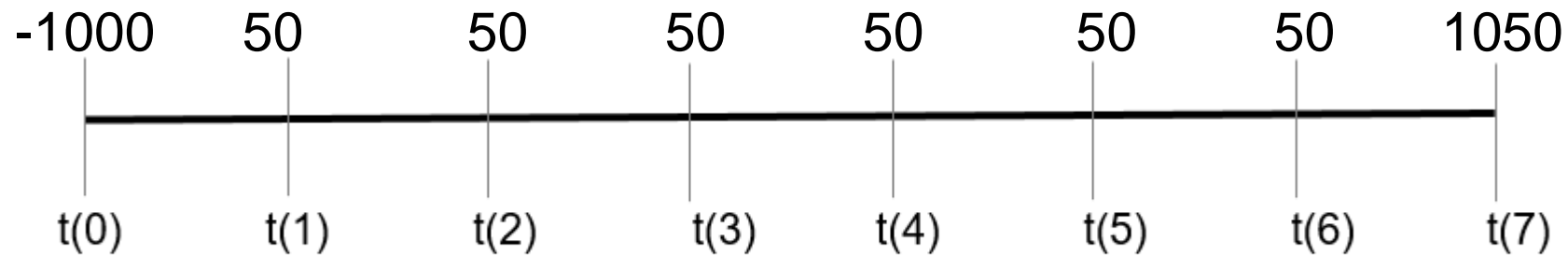


- > Zahlungsströme erfolgen in regelmäßigen, diskreten Abständen, Grundannahme: jährlich

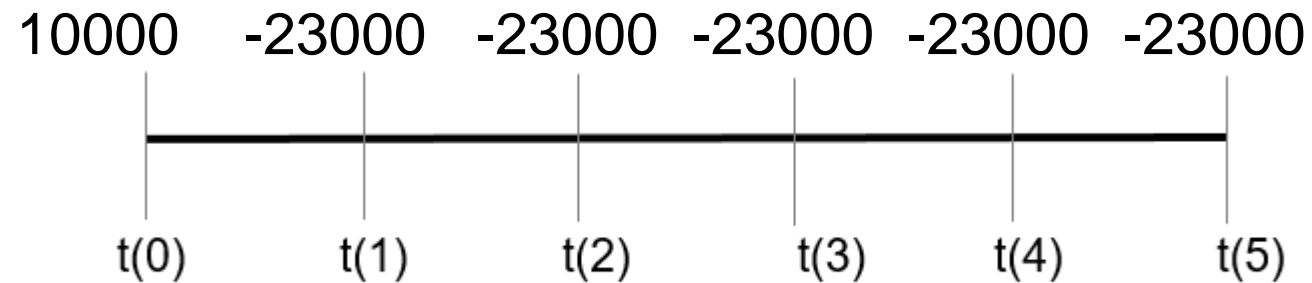
Beispiel 1. Sie investieren heute EUR 500 und erhalten nach 5 Jahren EUR 720 zurück.



**Beispiel 2.** Sie kaufen ein Anleihe mit Nennwert 1000, 5% Kupon, Rückzahlbar nach 7 Jahren zum Nennwert.



**Beispiel 3.** Sie nehmen einen Ratenkredit über EUR 100.000 auf und zahlen diesen in Fünf gleichen Raten zu EUR 23.000 zurück





> Zinssatz  $i$  = Umrechnung von Zahlungsströme auf unterschiedliche Zeitperioden

**Alternative 1.** Gegenwartswert eines Zahlungsstroms = **Abzinsung Zahlungsstrom**

> Abzinsungsfaktor:

$$v = \frac{1}{1 + i}$$

**Beispiel.** Zinssatz:  $i = 5\%$ , Wert nach 3 Perioden  $t = 3$ :  $w(3) = 1.157625$

$$\text{Gegenwartswert } t = 0 \text{ (Barwert)} = \left( \frac{1}{1 + i} \right)^t \cdot w = (v)^t \cdot w = \left( \frac{1}{1.05} \right)^3 \cdot w = 1$$

> Zinssatz  $i$  = Umrechnung von Zahlungsströme auf unterschiedliche Zeitperioden

**Alternative 2.** Zukunftswert nach  $t$  Perioden = **Aufzinsung Zahlungsstrom**

> Aufzinsungsfaktor:

$$q = 1 + i$$

**Beispiel.** Zinssatz:  $i = 5\%$ , Wert heute  $t = 0$ :  $w(0) = 1$

$$\text{Zukunftswert nach 3 Perioden} = (1 + i)^t \cdot w = q^t \cdot w = 1.05^3 \cdot w = 1.157625$$

# FUTURE VALUE (FV) UND PRESENT VALUE (PV)

---

Der Zukunftswert (*FV*) einer Anlage mit Gegenwartswert (*PV* = Present Value)

- > bei Zinssatz *i*
- > nach *t* Perioden

ist:

$$FV = (1 + i)^t \cdot PV$$

# DIE ZINSSTAFFEL

Beispiel.  $PV = 20000$ , Zinssatz  $(i) = 5\%$ , Jahre  $(t) = 5$

Jahr	Anfangsbetrag	Zinsgutschrift	Endbetrag	Zinseszins
1	20000.00	1000.00	21000.00	0.00
2	21000.00	1050.00	22050.00	50.00
3	22050.00	1102.50	23152.50	102.50
4	23152.50	1157.63	24310.13	157.63
5	24310.13	1215.51	25525.63	215.51

> **Unterjährige Verzinsung** mit  $m$  Zahlungen pro Jahr. Aufzinsungsfaktor:

$$\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{m \cdot t}$$

> **Kontinuierliche Verzinsung** mit  $m \rightarrow \infty$  Zahlungen pro Jahr. Aufzinsungsfaktor:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{m \cdot t} = e^{i \cdot t}$$

- > Äquivalenter Jahreszinsatz zur unterjährigen Verzinsung:

$$\left(1 + \frac{i}{m}\right)^m - 1$$

- > Äquivalenter Jahreszinsatz zur kontinuierlichen Verzinsung:

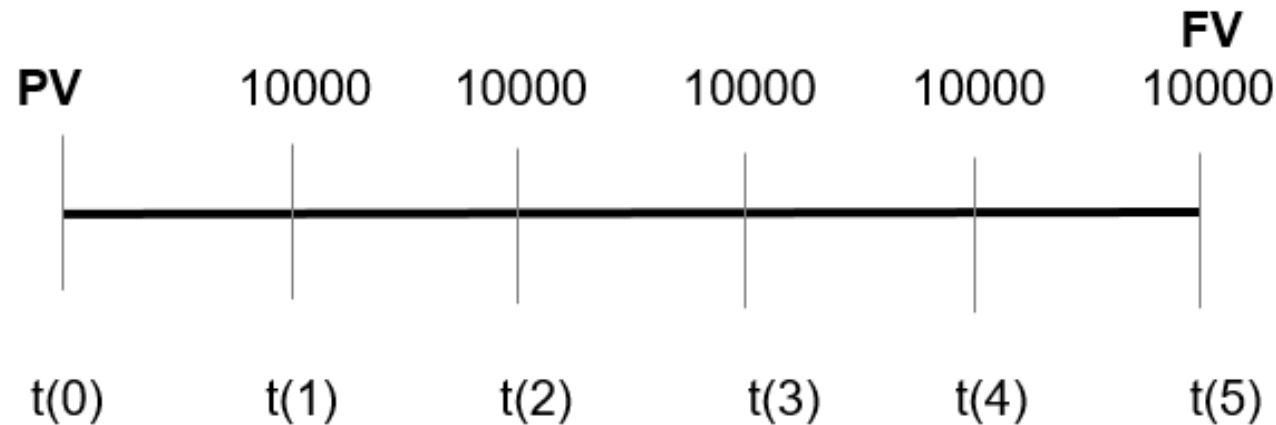
$$e^i - 1$$

Nachschüssige Annuitäten sind gleichförmige Cash Flows über  $t$  Perioden.

> Der erste Cash Flow erfolgt in  $t = 1$

Annuitätenformeln: Zusammenhang zwischen

Barwert (PV) (bzw. Zukunftswert (FV)) und Annuität  $A$ , Zinssatz  $i$  sowie Laufzeit  $t$ .



# ANNUITÄTENFORMELN (NACHSCHÜSSIGE ANNUITÄT)

> Gegenwartswert:

$$PV(A, i, t) = A \cdot \left( \frac{1 - (1 + i)^{-t}}{i} \right)$$

> Zukunftswert:

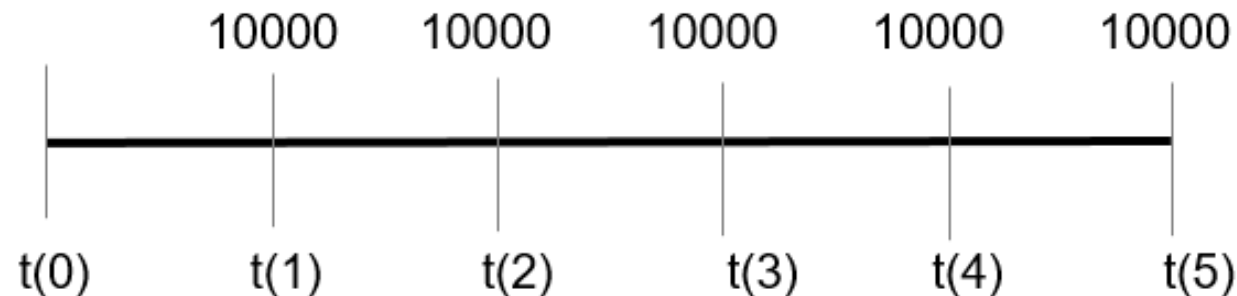
$$FV(A, i, t) = A \cdot \left( \frac{(1 + i)^t - 1}{i} \right)$$



# DIE ZINSSTAFFEL FÜR DEN ZUKUNFTSWERT EINER ANNUITÄT

Beispiel.  $A = 10000$ , Jahre ( $t$ ) = 5, Zinssatz ( $i$ ) = 5%

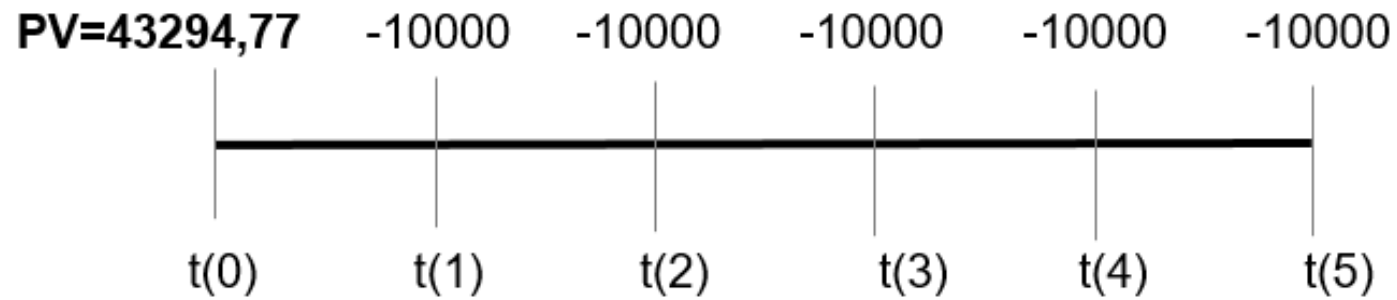
Jahr	Anfangsbetrag	Zinsgutschrift	Einzahlung	Endbetrag	
1	0.00	0.00	10000.00	10000.00	
2	10000.00	500.00	10000.00	20500.00	
3	20500.00	1025.00	10000.00	31525.00	
4	31525.00	1576.25	10000.00	43101.25	
5	43101.25	2155.06	10000.00	<b>55256.31</b>	= FV



# DIE ZINSSTAFFEL FÜR EIN ANNUITÄTENDARLEHEN

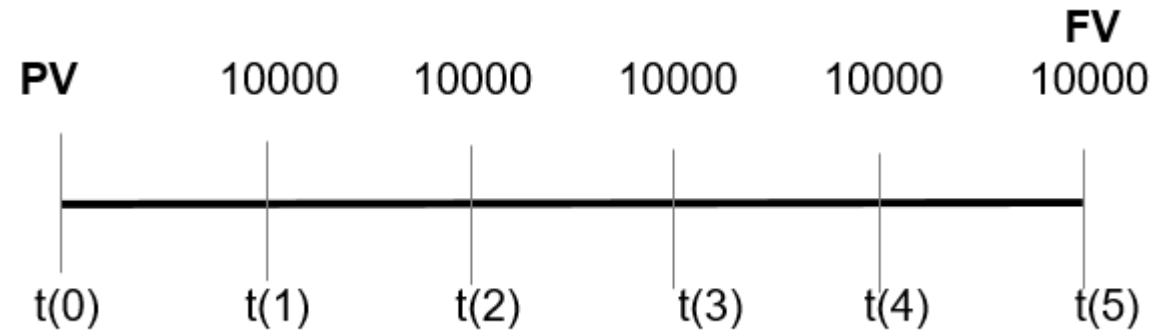
Beispiel.  $A = 10000$ , Jahre  $(t) = 5$ , Zinssatz  $(i) = 5\%$

PV =	Jahr	Anfangsbetrag	Zinsgutschrift	Tilgung	Endbetrag
	1	<b>43294.77</b>	2164.74	-10000.00	35459.51
	2	35459.51	1772.98	-10000.00	27232.48
	3	27232.48	1361.62	-10000.00	18594.11
	4	18594.11	929.71	-10000.00	9523.81
	5	9523.81	476.19	-10000.00	0.00

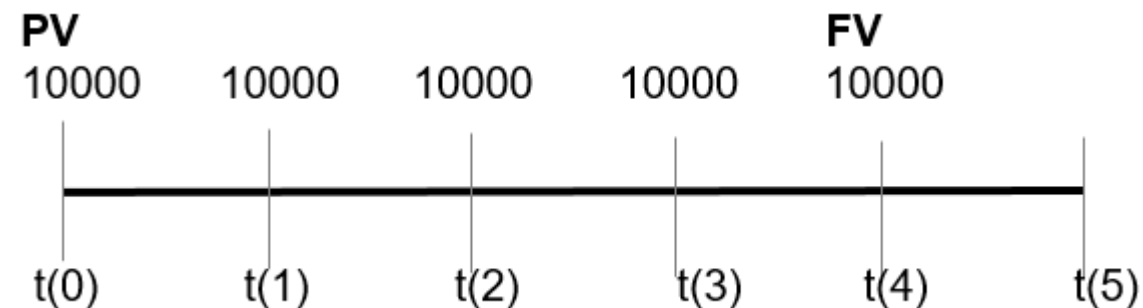


# NACHSCHÜSSIGE VERSUS VORSCHÜSSIGE ANNUITÄTEN

> Nachschüssige Rente (bisher behandelt):



> Vorschüssige Rente (kommt jetzt):



# DER BARWERT DER VORSCHÜSSIGEN ANNUITÄT

Bei der vorschüssigen Annuität werden alle Zahlungen eine Periode früher ausgezahlt

→ alle Zahlungen mit dem Faktor  $(1 + i)$  multiplizieren:

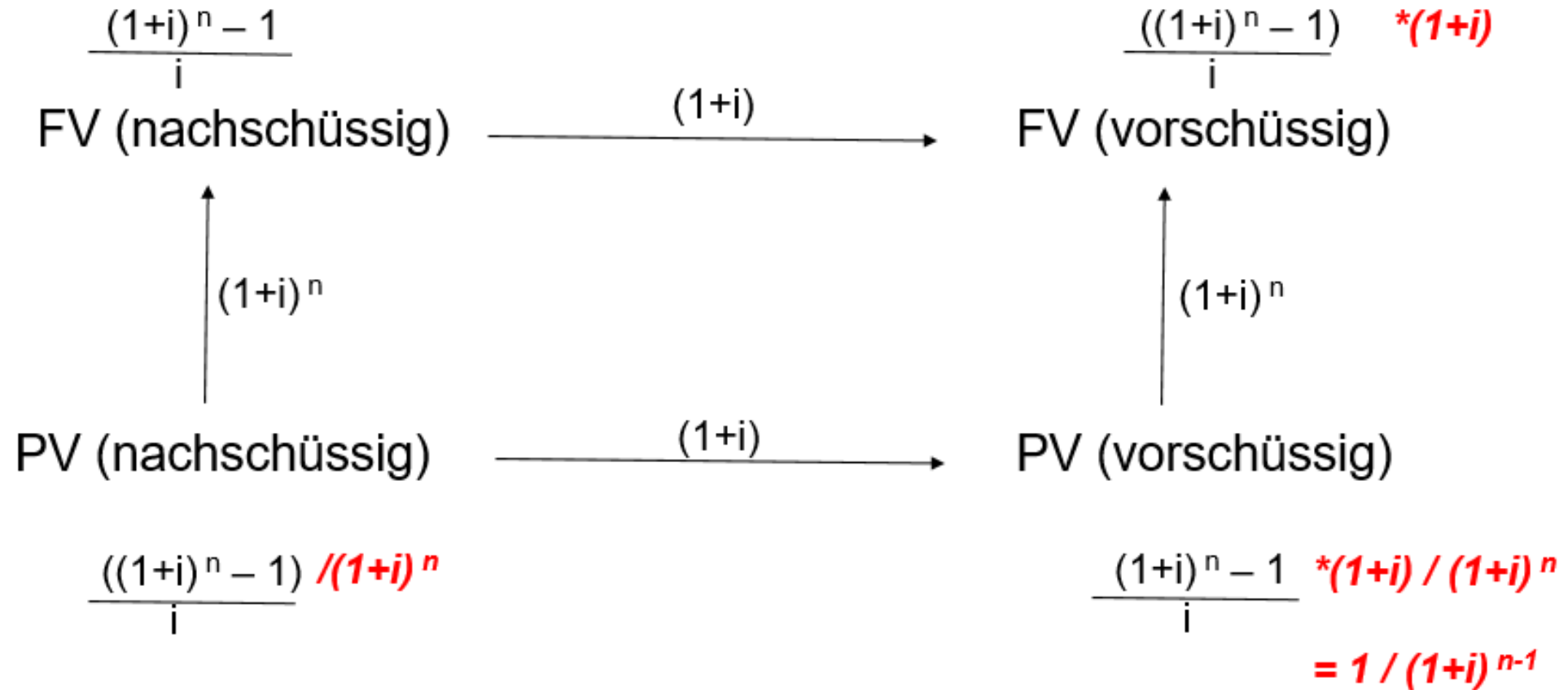
$$\begin{aligned} PV_{\text{vorschüssig}} &= PV_{\text{nachschüssig}} \cdot (1 + i) \\ &= A \cdot \left( \frac{1 - (1 + i)^{-t}}{i} \right) \cdot (1 + i) \\ &= A \cdot \left( \frac{1 + i - (1 + i)^{1-t}}{i} \right) \end{aligned}$$

# DER ZUKUNFTSWERT DER VORSCHÜSSIGEN ANNUITÄT

Bei der vorschüssigen Annuität werden alle Zahlungen eine Periode früher ausgezahlt

→ alle Zahlungen mit dem Faktor  $(1 + i)$  multiplizieren:

$$\begin{aligned} FV_{\text{vorschüssig}} &= FV_{\text{nachschüssig}} \cdot (1 + i) \\ &= A \cdot \left( \frac{(1 + i)^t - 1}{i} \right) \cdot (1 + i) \\ &= A \cdot \left( \frac{(1 + i)^{1+t} - (1 + i)}{i} \right) \end{aligned}$$



Erinnerung Barwert Annuität:

$$PV(A, i, t) = A \cdot \left( \frac{1 - (1 + i)^{-t}}{i} \right)$$

Für  $t \rightarrow \infty$ :

$$PV(A, i) = \frac{A}{i}$$

Barwert ewige Rente deren jährliche Auszahlung mit Wachstumsrate  $g$  ansteigt:

$$PV(A_0, i, g) = \frac{A_0(1 + g)}{i - g} = \frac{A_1}{i - g}$$





## › 2. VEKTOR- UND MATRIXALGEBRA

# VEKTOR- UND MATRIXALGEBRA: DEFINITION VEKTOREN

Ein *Vektor* ist eine geordnete Liste von Objekten in Spalten- oder Zeilenform.

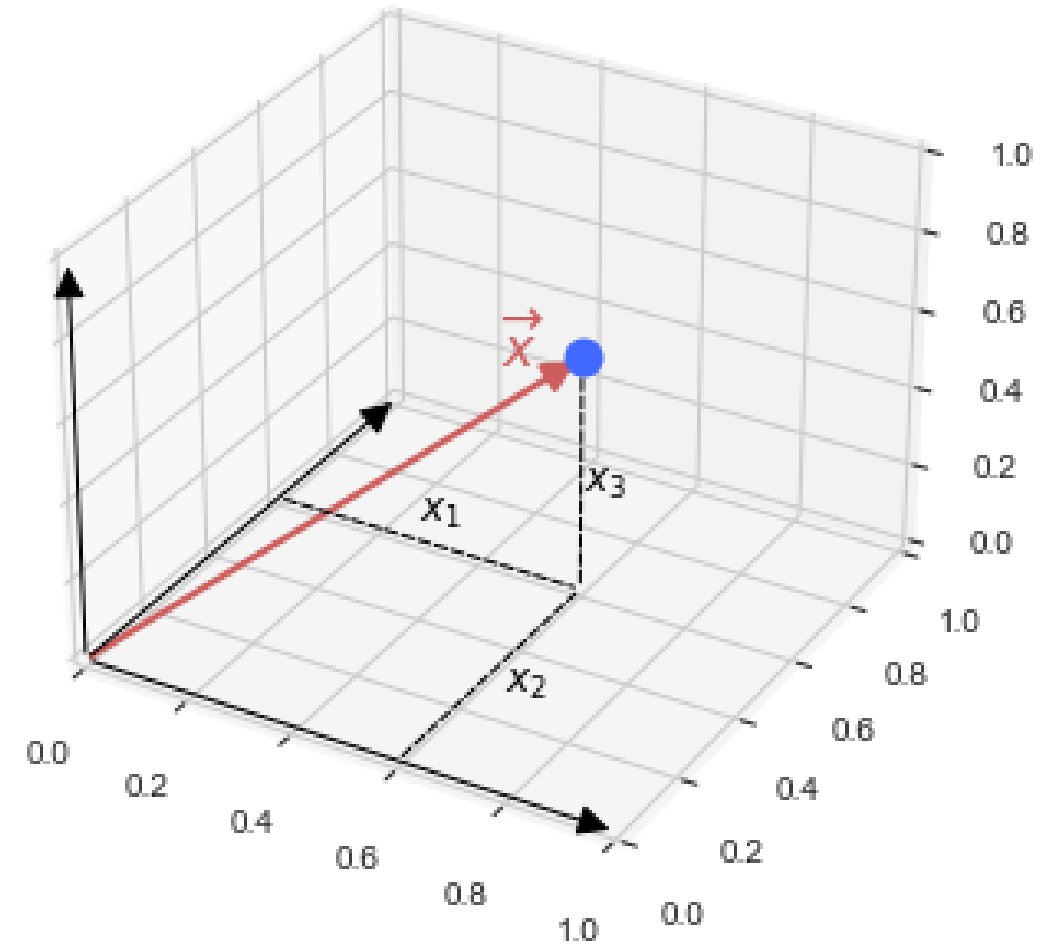
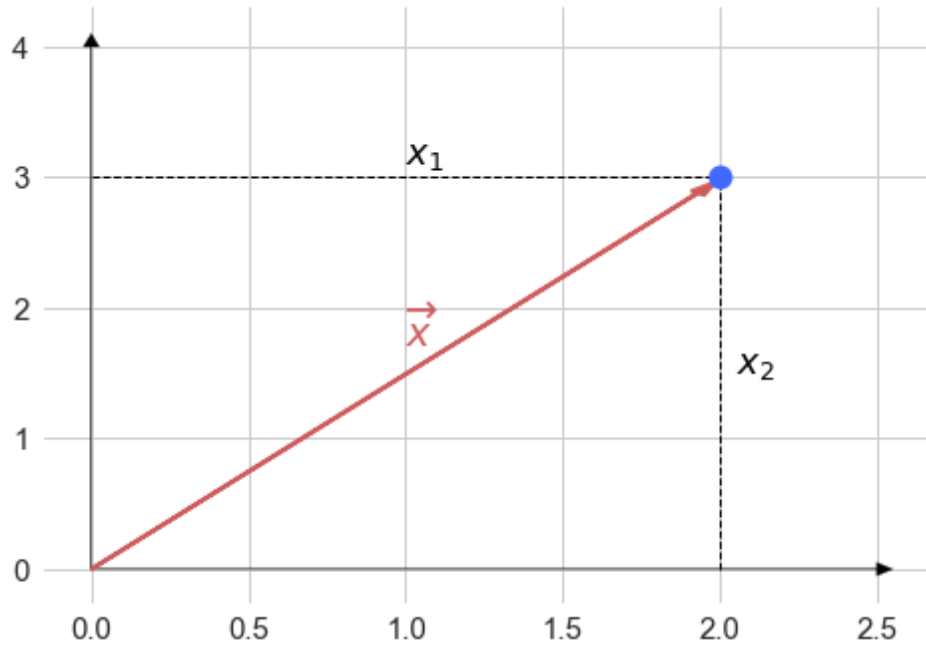
> Zeilenvektor ( $1 \times n$ -Vektor):

$$(x_1, \dots, x_n)$$

> Spaltenvektor ( $n \times 1$ -Vektor):

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

# VEKTOR- UND MATRIXALGEBRA: VEKTOREN GRAFISCH



# VEKTOR- UND MATRIXALGEBRA: VEKTOROPERATIONEN

- > *Vektoraddition* (und -subtraktion) erfolgt elementweise:

$$(1,2) + (4,5) = (5,7)$$

- > *Vektormultiplikation* (und -division) = Summe der Produkte der Elemente:

$$(1,2) \cdot (4,5) = (1 \cdot 4) + (2 \cdot 5) = 14$$

- > *Skalarmultiplikation* (Zahl mal Vektor) erfolgt elementweise:

$$(1,2) \cdot 4 = (4,8)$$

- > *Euklidische Distanz* zwischen zwei Punkten:

$$\|(1,2), (4,5)\| = \sqrt{(1 - 4)^2 + (2 - 5)^2} = \sqrt{18}$$

# VEKTOR- UND MATRIXALGEBRA: VEKTOROPERATIONEN

Gegeben zwei Vektoren  $x$  und  $y$ . Für  $\alpha \in [0,1]$  ist eine *Konvexkombination* der Vektoren:

$$\alpha x + (1 - \alpha)y = \begin{pmatrix} \alpha x_1 + (1 - \alpha)y_1 \\ \vdots \\ \alpha x_n + (1 - \alpha)y_n \end{pmatrix}$$

# VEKTOR- UND MATRIXALGEBRA: DEFINITION MATRIX

Eine *Matrix* ist eine rechteckige Anordnung von Objekten.

$m(\text{Zeilen}) \times n(\text{Spalten})$  Matrix:

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{\text{n columns}} \\ \begin{array}{c} \text{m rows} \downarrow \end{array} \left( \begin{array}{cccc} a_{11} & \dots & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & \dots & a_{mn} \end{array} \right) \end{array}$$

> *Matrizenaddition*: Elementweise (bei Matrizen mit gleicher Anzahl Spalten und Zeilen)

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 5 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 9 & 8 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

> *Skalarmultiplikation*: Elementweise

$$4 \cdot \begin{pmatrix} 5 & 5 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 20 & 8 \\ 4 & -8 & 4 \end{pmatrix}$$

*Matrizenmultiplikation:*

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Schritt 1:

$$\begin{pmatrix} \color{red}{3} & \color{red}{2} & \color{red}{1} \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \color{blue}{1} & 2 \\ \color{blue}{0} & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \color{red}{3} \cdot \color{blue}{1} + \color{red}{2} \cdot \color{blue}{0} + \color{red}{1} \cdot 4 & * \\ * & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & * \\ * & * \end{pmatrix}$$

Schritt 2:

$$\begin{pmatrix} \color{red}{3} & \color{red}{2} & \color{red}{1} \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \color{blue}{2} \\ 0 & \color{blue}{1} \\ 4 & \color{blue}{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & \color{red}{3} \cdot \color{blue}{2} + \color{red}{2} \cdot \color{blue}{1} + \color{red}{1} \cdot \color{blue}{0} \\ * & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ * & * \end{pmatrix}$$



*Matrizenmultiplikation:*

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Schritt 3:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ \color{red}{1} & \color{red}{0} & \color{red}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \color{blue}{1} & 2 \\ \color{blue}{0} & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ \color{red}{1} \cdot \color{blue}{1} + \color{red}{0} \cdot \color{blue}{0} + \color{red}{2} \cdot 4 & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 9 & * \end{pmatrix}$$

Schritt 4:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ \color{red}{1} & \color{red}{0} & \color{red}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \color{blue}{2} \\ 0 & \color{blue}{1} \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 9 & \color{red}{1} \cdot \color{blue}{2} + \color{red}{0} \cdot \color{blue}{1} + \color{red}{2} \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 2 \end{pmatrix}$$

Anmerkungen. Matrizenmultiplikation  $A \times B$ :

> Voraussetzung: Anzahl der Spalten in Matrix **A** = Anzahl der Zeilen in Matrix **B**

> **A** =  $m \times n$  Matrix und **B** =  $n \times m$  Matrix  $\rightarrow$  Produkt =  $m \times m$  Matrix

**Rechenregeln.** Seien **A**, **B**, **C** Matrizen, dann gilt:

1. Matrizenmultiplikation ist *assoziativ*:

$$(AB)C = A(BC)$$

2. Matrizenmultiplikation ist *distributiv*:

$$A(B + C) = AB + AC$$

3. Matrizenmultiplikation ist **nicht** *kommutativ*:

$$AB \neq BA$$

*Transponieren von Matrizen* (Vertauschen von Zeilen und Spalten):

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow A^T = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

*Determinante* einer  $2 \times 2$  Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

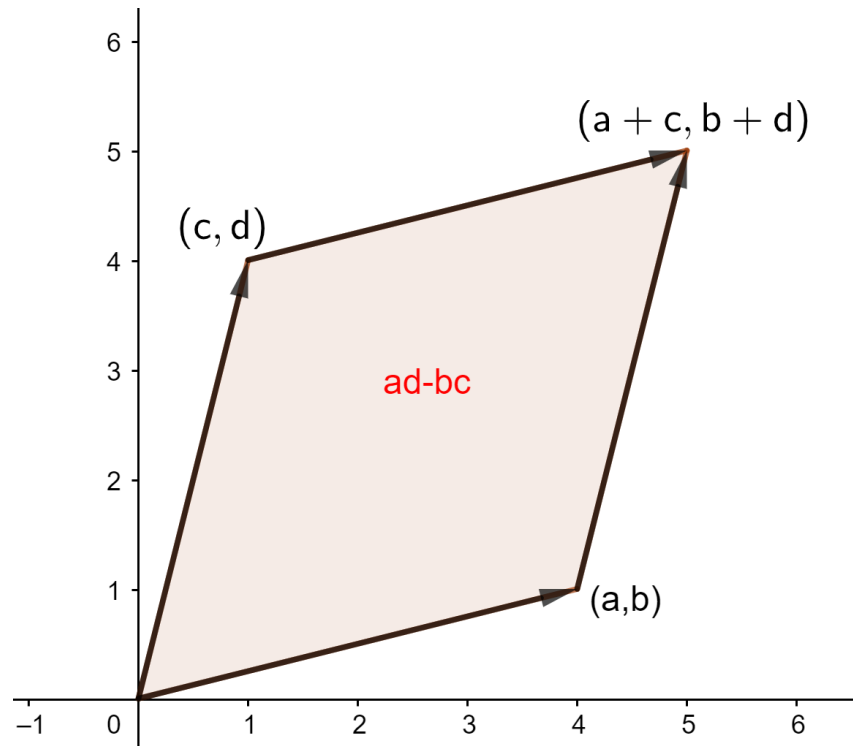
$$\det(A) = |A| = ad - bc$$

> Determinante: Raum, der von den Vektoren der Matrix aufgespannt wird

# VEKTOR- UND MATRIXALGEBRA: MATRIXOPERATIONEN

Determinante grafisch:

> Determinante: Raum, der von den Vektoren der Matrix aufgespannt wird:



# VEKTOR- UND MATRIXALGEBRA: MATRIXOPERATIONEN

Determinante einer allgemeinen  $3 \times 3$  Matrix: Laplacescher Entwicklungssatz

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} \square & \square & \square \\ \square & a_{22} & a_{23} \\ \square & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} \square & a_{12} & a_{13} \\ \square & \square & \square \\ \square & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} \square & a_{12} & a_{13} \\ \square & a_{22} & a_{23} \\ \square & \square & \square \end{vmatrix} \\ &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Die *Dreiecksform* ist die Form einer Matrix, welche unterhalb der Hauptdiagonalen nur "0" enthält (obere Dreiecksform).

**Beispiel.** Umformung einer Matrix in Dreiecksform:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & -8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

*Dreiecksform*

> 2. Zeile + 1. Zeile mal (-1)  
> 3. Zeile + 1. Zeile mal (-3)

3. Zeile + 2. Zeile mal (-3)



Der *Rang* einer Matrix ist die Dimension des Vektorraums, welcher durch die Vektoren der Matrix aufgespannt wird.

> Bestimmung des Rangs einer Matrix:

Schritt 1. Bestimme die Dreiecksform der Matrix

Schritt 2.  $\text{Rang}(\text{Matrix}) = \text{Anzahl der Zeilen, die nicht nur } 0 \text{ enthalten}$

# VEKTOR- UND MATRIXALGEBRA: MATRIXOPERATIONEN

Beispiel. Bestimmung des Rangs einer Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Schritt 1. Dreiecksform:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Schritt 2. Zähle Zeilen, die nicht nur 0 enthalten:

$$\text{Rang}(A) = 2$$

*Matrizeninversion (Matrizendivision):* Matrix  $A^{-1}$  ist die Inverse von Matrix  $A$ , wenn:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = \text{Einheitsmatrix } I = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

> Einheitsmatrix  $I$  hat die Zahl „1“ entlang der Hauptdiagonalen ansonsten nur „0“

Gauß-Jordan-Algorithmus zur Bestimmung der Inversen:

$$(A \mid I) \rightarrow \text{Umformungen} \rightarrow (I \mid A^{-1})$$

Beispiel. Gauß-Jordan-Algorithmus

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(A \mid I) = \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

# VEKTOR- UND MATRIXALGEBRA: MATRIXOPERATIONEN

Beispiel. Gauß-Jordan-Algorithmus

$$(A | I) = \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ \textcolor{red}{2} & 3 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & \textcolor{green}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & \textcolor{blue}{-1} & -2 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array} \right)$$

2. Zeile – 1. Zeile mal 2

1. Zeile + 2. Zeile mal 2

2. Zeile mal -1

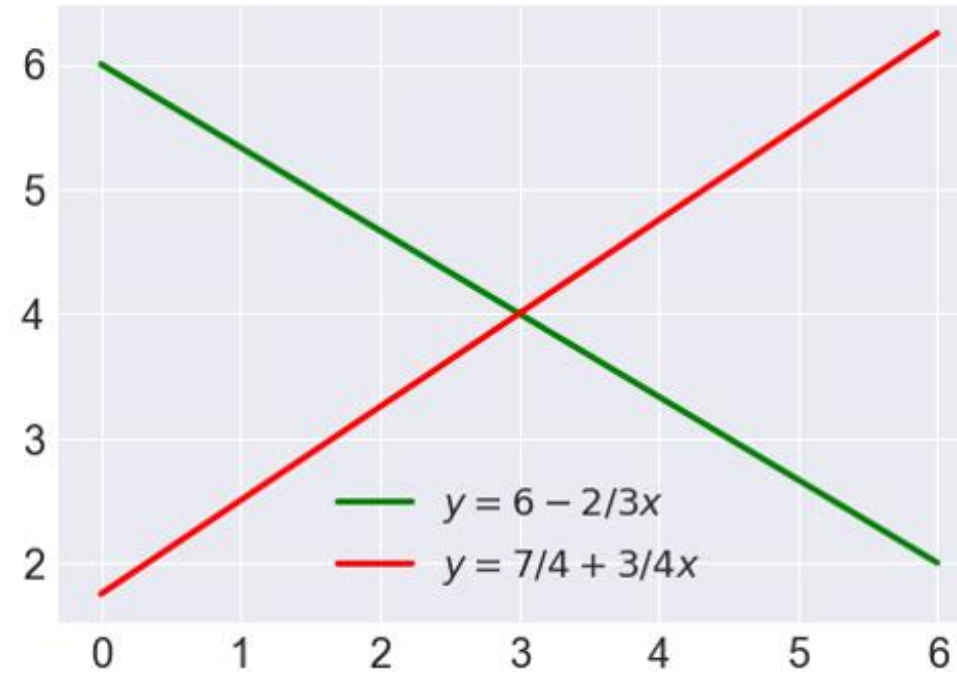
$(I | A^{-1})$

Anmerkungen. Invertierbarkeit:

> Nur quadratische ( $n \times n$ ) Matrizen sind invertierbar

Die folgende Aussagen sind entweder alle wahr oder alle falsch:

- i. Eine  $n \times n$  Matrix **A** ist invertierbar.
- ii. Die Determinante von **A** ist ungleich 0 ( $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ ).
- iii. Matrix **A** hat vollen Rang hat ( $\text{Rang}(\mathbf{A}) = n$ ).
- iv. Die Gleichung  $\mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$  hat nur die triviale Lösung:  $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ .



## › 3. LINEARE GLEICHUNGSSYSTEME

Lineare Gleichungssysteme in der BWL und VWL:

- > Darstellung ökonomischer Zusammenhänge in vereinfachter Form

**Beispiel.** 2 Gleichungen in 2 Unbekannten

$$(i) \ 2x + 3y = 18$$

$$(ii) \ 3x - 4y = -7$$



# LINEARE GLEICHUNGSSYSTEME: DARSTELLUNG

Lineare Gleichungssysteme können mit **Vektoren** dargestellt werden.

Beispiel. (i)  $2x + 3y = 18$

(ii)  $3x - 4y = -7$

> In Vektorform:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} 18 \\ -7 \end{pmatrix}$$

# LINEARE GLEICHUNGSSYSTEME: DARSTELLUNG

Lineare Gleichungssysteme können mit **Matrizen** dargestellt werden.

Beispiel. (i)  $2x + 3y = 18$

(ii)  $3x - 4y = -7$

> In Matrixform

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ -7 \end{pmatrix}$$

Allgemein:

$$\textit{Koeffizientenmatrix} \cdot \textit{Vektor Unbekannte} = \textit{Lösungsvektor}$$

# LINEARE GLEICHUNGSSYSTEME: LÖSUNGSMENGE

---

Ein lineares Gleichungssystem hat

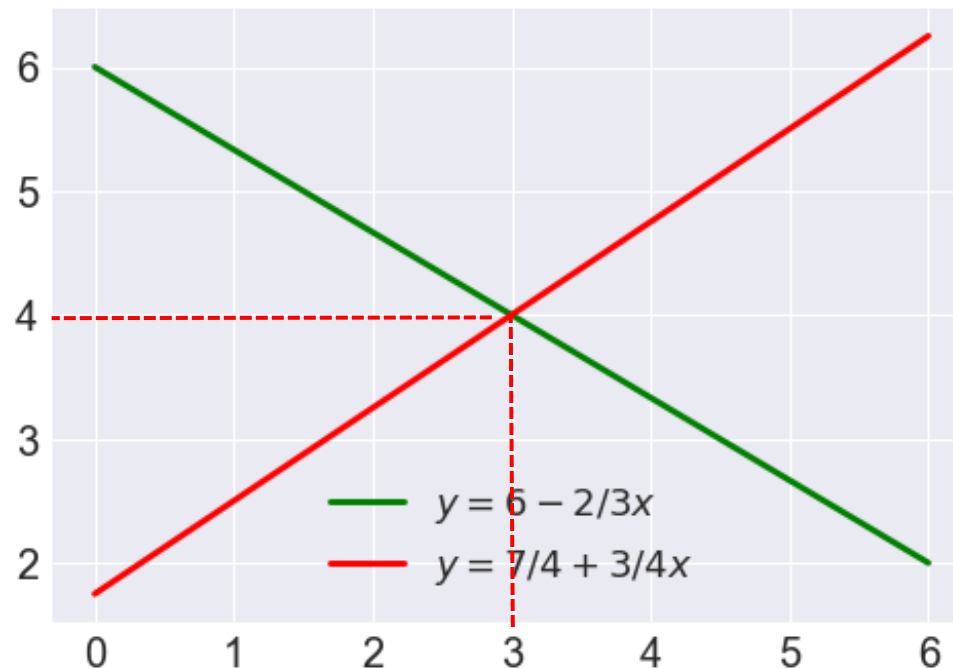
- i. entweder eine eindeutige Lösung,
- ii. keine Lösung oder
- iii. unendlich viele Lösungen

# LINEARE GLEICHUNGSSYSTEME: LÖSUNGSMENGE

Das Gleichungssystem (i)  $2x + 3y = 18$  hat eine eindeutige Lösung

$$(ii) 3x - 4y = -7$$

Lösung grafisch:



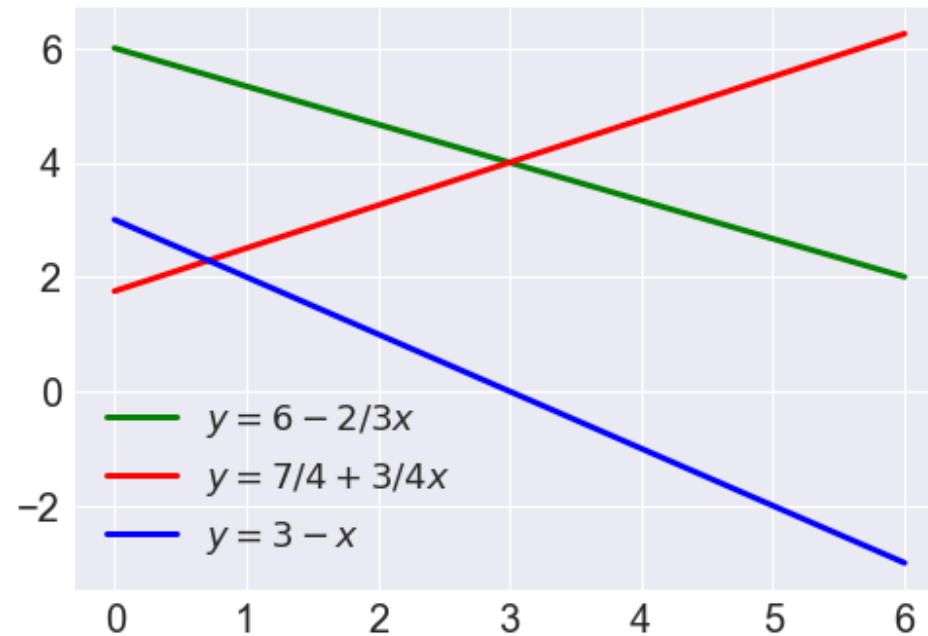
# LINEARE GLEICHUNGSSYSTEME: LÖSUNGSMENGE

Das Gleichungssystem (i)  $2x + 3y = 18$  hat keine Lösung

(ii)  $3x - 4y = -7$

(iii)  $x + y = 3$

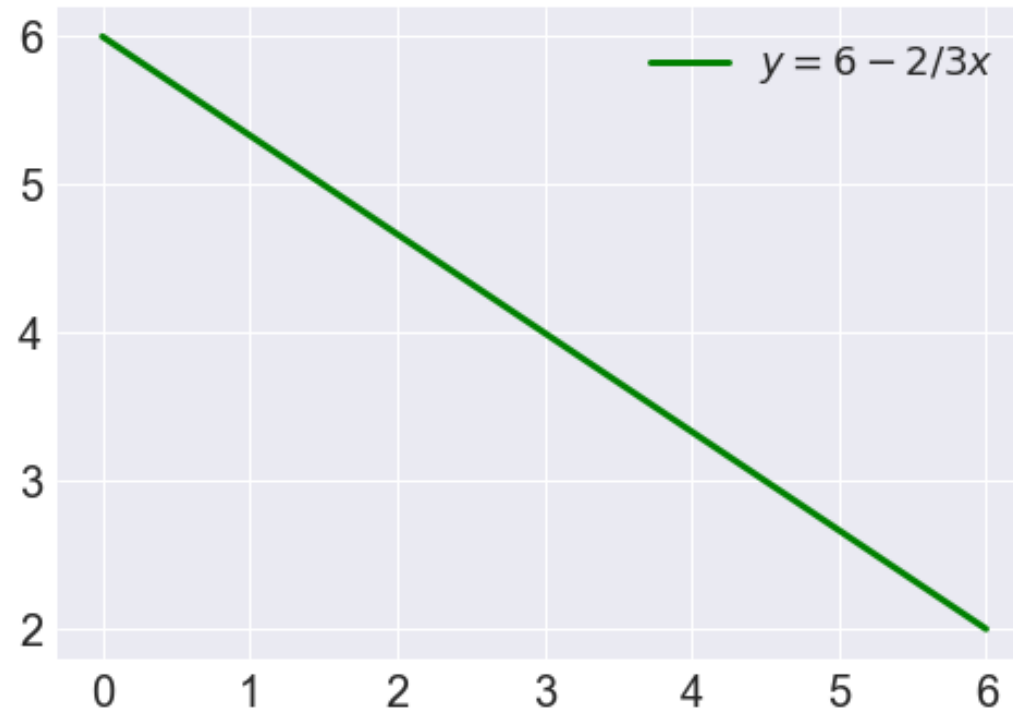
Grafisch:



# LINEARE GLEICHUNGSSYSTEME: LÖSUNGSMENGE

Das Gleichungssystem (i)  $2x + 3y = 18$  hat unendlich viele Lösungen.

Lösungen grafisch:



$$\text{Lösungen} = \{(x, y): 2x + 3y = 18\}$$

# LINEARE GLEICHUNGSSYSTEME: LÖSUNGSVERFAHREN SUBSTITUTION

Lineare Gleichungssysteme können durch *Substitution* gelöst werden.

**Beispiel.** (i)  $2x + 3y = 18$

(ii)  $3x - 4y = -7$

> Löse (i) nach  $y$  auf:  $y = 6 - \frac{2}{3}x$

> Setze dies in (ii) ein:  $3x - 4(6 - \frac{2}{3}x) = -7 \Leftrightarrow \frac{17}{3}x = 17 \Leftrightarrow x = 3$

> Damit:  $y = 6 - \frac{2}{3} \cdot 3 = 4$

*Lösung:*  $(x, y) = (3, 4)$

# LINEARE GLEICHUNGSSYSTEME: LÖSUNGSVERFAHREN GAUßSCHE ELIMINATION

---

*Gaußsches Eliminationsverfahren:*

Schritt 1. Matrixform des linearen Gleichungssystems aufschreiben

Schritt 2. Erweiterte Koeffizientenmatrix aufschreiben:

*(Koeffizientenmatrix | Lösungsvektor)*

Schritt 3. Erweiterte Koeffizientenmatrix in Dreiecksform bringen



# LINEARE GLEICHUNGSSYSTEME: LÖSUNGSVERFAHREN GAUßSCHE ELIMINATION

*Gaußsches Eliminationsverfahren:*

Beispiel. (i)  $2x + 3y = 18$

(ii)  $3x - 4y = -7$

Schritt 1. Matrixform:  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ -7 \end{pmatrix}$

Schritt 2. Erweiterte Koeffizientenmatrix:  $\left( \begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 18 \\ 3 & -4 & -7 \end{array} \right)$

# LINEARE GLEICHUNGSSYSTEME: LÖSUNGSVERFAHREN GAUßSCHE ELIMINATION

*Gaußsches Eliminationsverfahren:*

Beispiel. (i)  $2x + 3y = 18$

(ii)  $3x - 4y = -7$

Schritt 3. Dreiecksform:

$$\left( \begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 18 \\ 3 & -4 & -7 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 18 \\ 0 & -17/2 & -68/2 \end{array} \right)$$

> Aus 2. Zeile:  $-\frac{17}{2} \cdot y = -\frac{68}{2} \rightarrow y = 4$

>  $y = 4$  in 1. Zeile:  $2x + 12 = 18 \rightarrow x = 3$

# LINEARE GLEICHUNGSSYSTEME: LÖSUNGSVERFAHREN CRAMER REGEL

*Cramersche Regel* (insbesondere bei  $2 \times 2$  effizient).

> Gegeben eine Koeffizientenmatrix  $A = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}$ , einen Vektor von Unbekannten

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ und einen Lösungsvektor } \begin{pmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_n \end{pmatrix}$$

dann gilt für die Lösung der  $i$ -ten Unbekannten:

$$x_i = \frac{\det \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & l_1 & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & l_n & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}}{\det(A)}$$

ite Spalte von  $A$  durch  
Lösungsvektor ersetzen

# LINEARE GLEICHUNGSSYSTEME: LÖSUNGSVERFAHREN CRAMER REGEL

Cramersche Regel (insbesondere bei  $2 \times 2$  effizient).

Beispiel.  $(i) 2x + 3y = 18$   
 $(ii) 3x - 4y = -7$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ -7 \end{pmatrix}$$

$$x = \frac{\det \begin{pmatrix} \color{red}{18} & 3 \\ \color{red}{-7} & -4 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}} = \frac{18(-4) - (-7)3}{2(-4) - 3 \cdot 3} = \frac{-51}{-17} = 3,$$

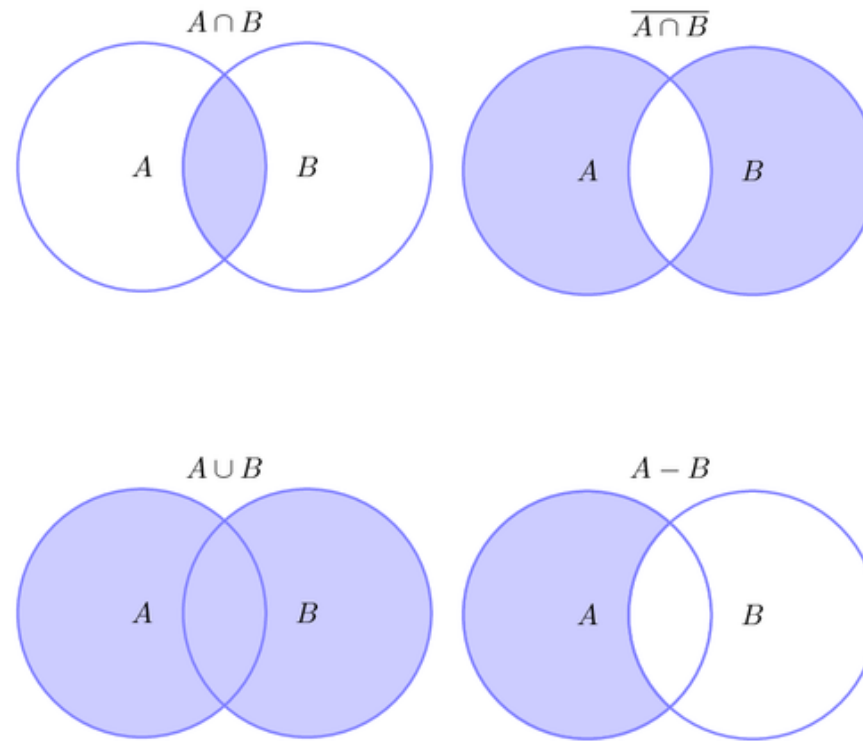
$$y = \frac{\det \begin{pmatrix} 2 & \color{red}{18} \\ 3 & \color{red}{-7} \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}} = \frac{2(-7) - 3 \cdot 18}{-17} = \frac{-68}{-17} = 4$$

## Satz von Kronecker-Capelli

Eine lineares Gleichungssystem ist genau dann lösbar, wenn der Rang der Koeffizientenmatrix  $A$  gleich dem Rang der erweiterten Koeffizientenmatrix  $(A | \mathbf{l})$  ist.

- > Lösung ist eindeutig wenn außerdem:  $\text{Rang}(\text{Koeffizientenmatrix}) = \text{Anzahl Unbekannte}$
- > Für quadratische Koeffizientenmatrizen gilt:

$$\det(\text{Koeffizientenmatrix}) \neq 0 \Leftrightarrow \text{Gleichungssystem eindeutig lösbar}$$



## › 4. MENGENLEHRE

Eine *Menge* ist eine ungeordnete Liste von wohlunterscheidbaren Objekten.

- > "Wohlunterscheidbar" bedeutet, dass kein Element in der Menge mehrfach vorhanden ist
- > Menge ohne Objekte = leere Menge =  $\emptyset$

**Anmerkung.**  $\emptyset (= Menge) \neq 0 (= Zahl)$

Mengen werden mit Mengenklammern  $\{ \}$  geschrieben.

Beispiel 1.

$$M = \{Apfel, Banane\}$$

$$M = \{Lisa, Peter, Paul\}$$



Eine unendliche Menge kann nicht als erschöpfende Liste aufgeschrieben werden.

> Lösung: Wir schreiben die Menge als Menge aller Objekte für die eine Bedingung gilt:

$$\{x \text{ für die Bedingung } y \text{ gilt}\} = \{x: y\}$$

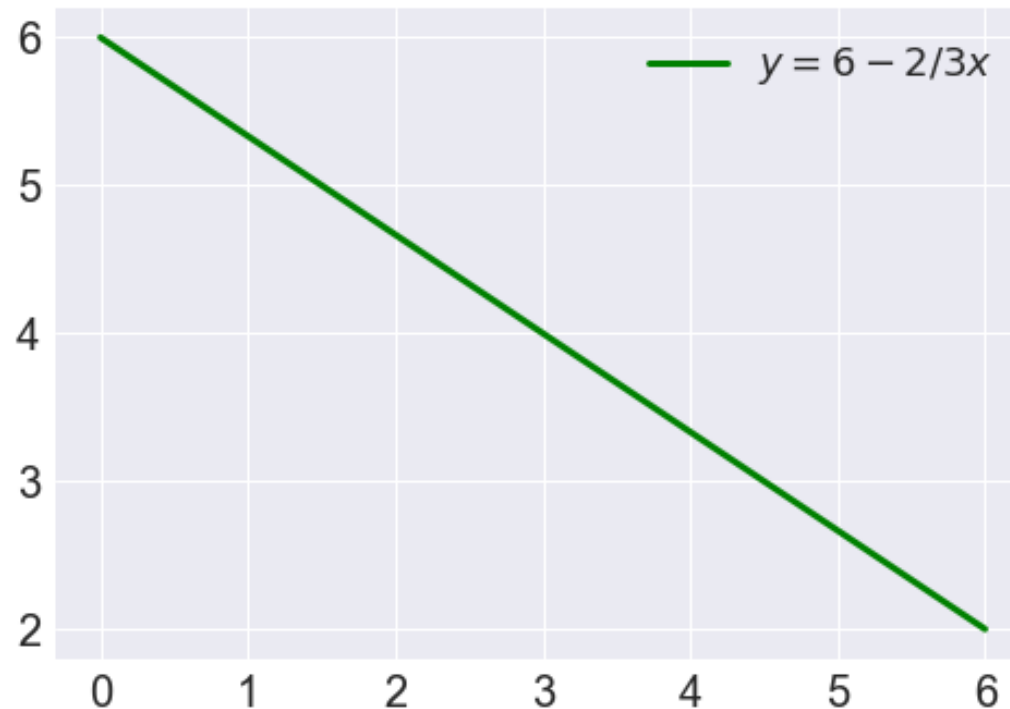
Beispiel 2. Intervall  $[1,4]$  in Mengenschreibweise:

$$[1,4] = \{x: 1 \leq x \leq 4\}$$

# MENGEN: SCHREIBWEISE

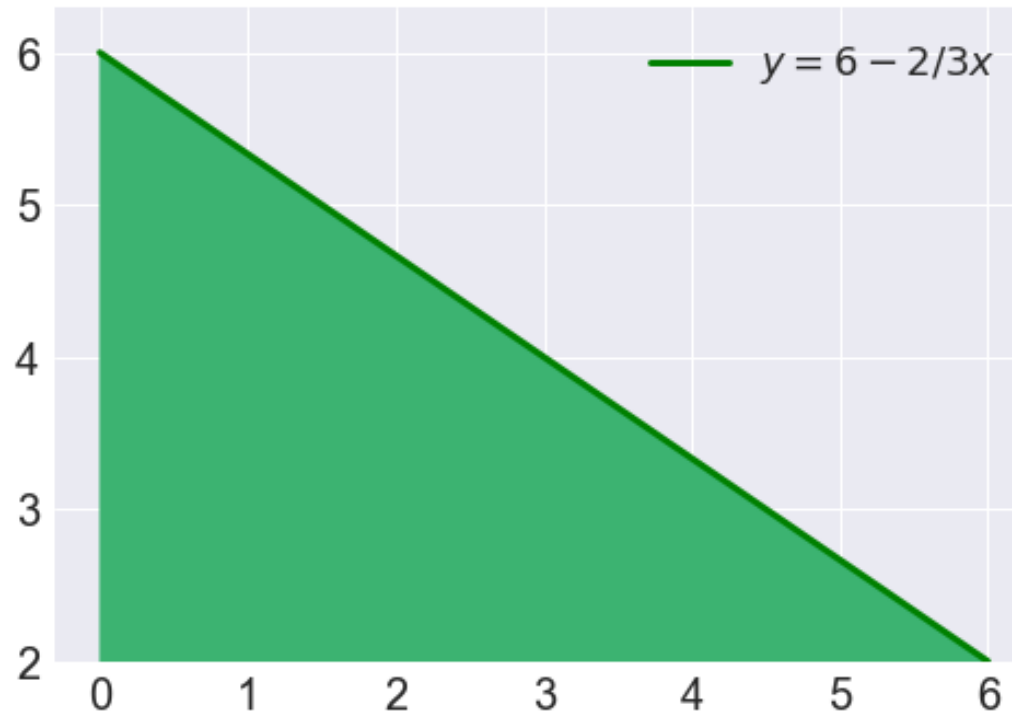
Beispiel 3. Gerade  $y = 6 - 2/3x$  in Mengenschreibweise

$$\{(x, y): y = 6 - 2/3x\}$$



Beispiel 4. Ungleichung  $y \leq 6 - 2/3x$  in Mengenschreibweise

$$\{(x, y): y \leq 6 - 2/3x\}$$



Beispiel 5. Menge der geraden Zahlen:

$$\{2n: n \text{ ist nat\"urliche Zahl}\}$$

Beispiel 6. Eine Kugel als Menge:

$$\{x: \|x - m\| \leq r\}$$

> Koordinaten des Mittelpunkts  $m = (m_1, \dots, m_n)$ ,  $r$  = Radius

Eine Menge heißt *unendlich*, wenn sie unendlich viele Elemente enthält.

Eine Menge heißt *beschränkt*, wenn sie eine obere und untere Schranke hat.

Eine Menge in einem n-dimensionalen Raum ist beschränkt, wenn

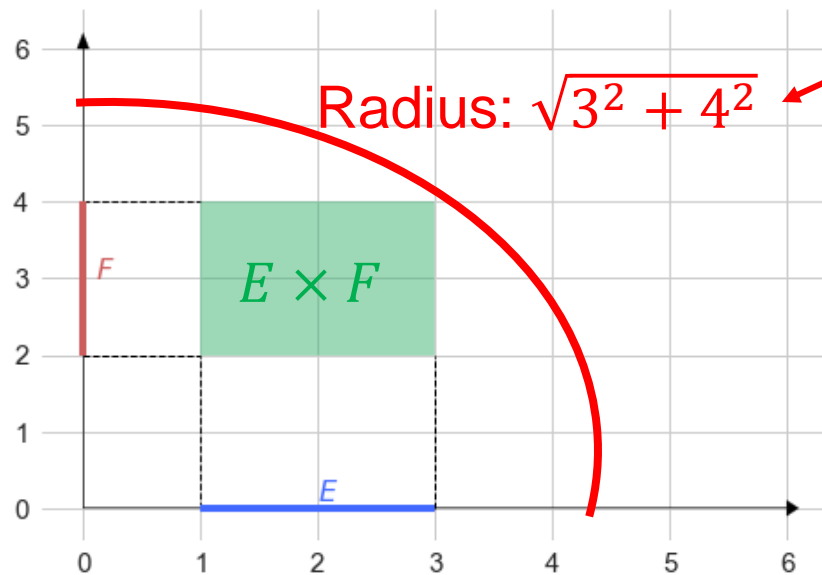
> sie in einer n-dimensionalen Kugel enthalten ist

Beispiel.  $M = [1,3] \times [2,4]$

> die Menge ist beschränkt, da sie in der Kugel  $\left\{x: \left\| \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| \leq 3^2 + 4^2 \right\}$  enthalten ist

Beispiel.  $M = [1,3] \times [2,4]$

> die Menge ist beschränkt, da sie in der Kugel  $\left\{x: \left\| \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| \leq 3^2 + 4^2 \right\}$  enthalten ist



Quadrat des längsten Abstands  
der Menge vom Ursprung

Eine Menge heißt *abgeschlossen*, wenn der Rand zur Menge gehört.

(Etwas mathematischer: Eine Menge heißt *abgeschlossen*, wenn der Grenzwert jeder konvergenten Folge innerhalb der Menge liegt)

Beispiele.

- > Abgeschlossene Menge:  $[2,4]$
- > Nicht-abgeschlossene Menge:  $(2,4]$

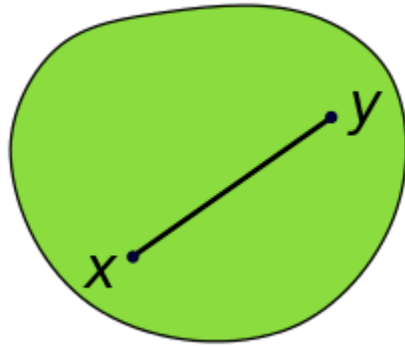


Eine Menge heißt *kompakt*, wenn

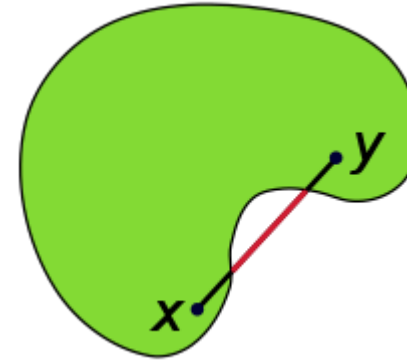
- i. sie abgeschlossen und
- ii. beschränkt

ist.

Eine Menge heißt *konvex*, wenn sie die Konvexkombinationen aller ihrer Punkte enthält:



Konvexe Menge

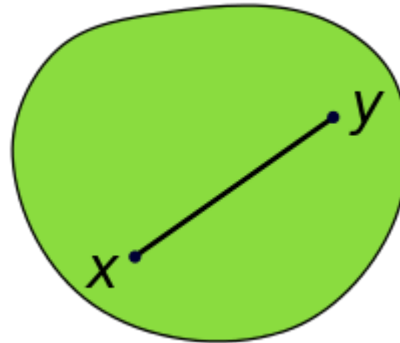


Nicht-konvexe Menge

Quelle: [https://en.wikipedia.org/wiki/Convex\\_set](https://en.wikipedia.org/wiki/Convex_set)

Erinnerung: Menge aller Konvexkombinationen zweier Punkte  $x$  und  $y$  ist eine Gerade:

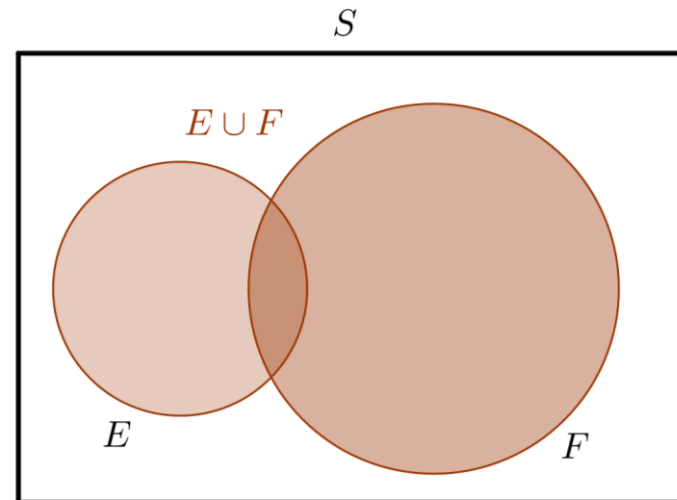
$$\{z: z = \alpha x + (1 - \alpha)y, \alpha \in [0,1]\}$$



Quelle: [https://en.wikipedia.org/wiki/Convex\\_set](https://en.wikipedia.org/wiki/Convex_set)

Vereinigungsmenge:

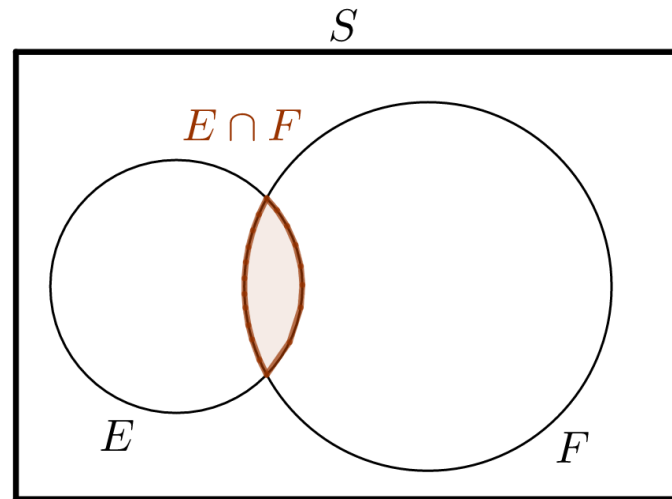
$$E \cup F = \{\text{Alle Elemente die in } A \text{ *und/oder* } B \text{ enthalten sind}\} = \{x: x \in E \text{ und/oder } x \in F\}$$



**Beispiel.**  $E = \{\text{Anton, Paul}\}, F = \{\text{Anton, Dora}\} \rightarrow E \cup F = \{\text{Anton, Paul, Dora}\}$

Schnittmenge:

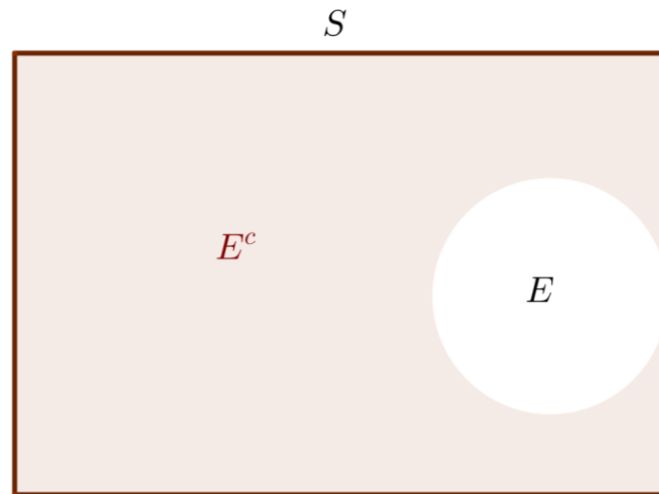
$$E \cap F = \{\text{Alle Elemente die in } A \text{ **und** } B \text{ enthalten sind}\} = \{x: x \in E \text{ und } x \in F\}$$



**Beispiel.**  $E = \{\text{Anton, Paul}\}, F = \{\text{Anton, Dora}\} \rightarrow E \cap F = \{\text{Anton}\}$

Komplementärmenge:

$$E^c = \{\text{Alle Elemente, die \textit{nicht} in } E \text{ enthalten sind}\} = \{x: x \notin E\}$$



**Beispiel.**  $E = \{\text{Anton, Paul}\}, F = \{\text{Anton, Dora}\}, S = E \cup F \rightarrow E^c = \{\text{Dora}\}$

Mengendifferenz:

$$E \setminus F = \{\text{Alle Elemente, die in } E, \text{ aber nicht in } F \text{ enthalten sind}\} = \{x: x \in E \text{ und } x \notin F\}$$

**Beispiel.**  $E = \{\text{Anton}, \text{Paul}\}, F = \{\text{Anton}, \text{Dora}\}$

$$E \setminus F = \{\text{Paul}\}$$

$$F \setminus E = \{\text{Dora}\}$$

**Anmerkung.** Wie das Beispiel zeigt ist die Mengendifferenz nicht kommutativ:  $E \setminus F \neq F \setminus E$

Das *kartesische Produkt*  $A \times B$  zweier Mengen  $A$  und  $B$  ist die Menge:

$$A \times B = \{(a, b): a \in A, b \in B\}$$

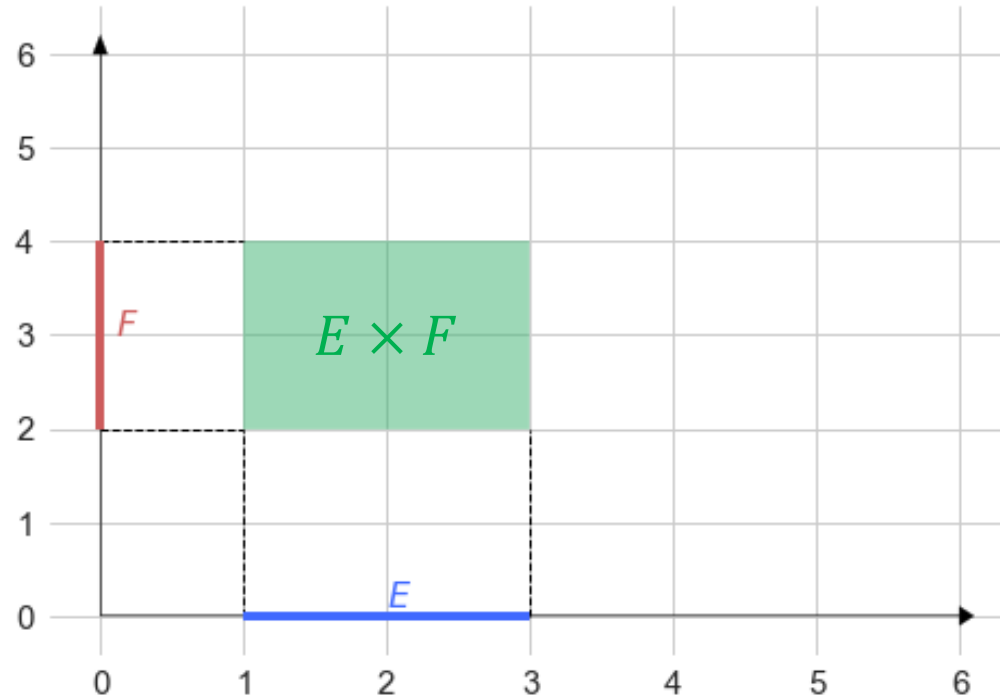
**Beispiel 1.**  $A = \{Anton, Paul\}, B = \{Christina, Dora\}$

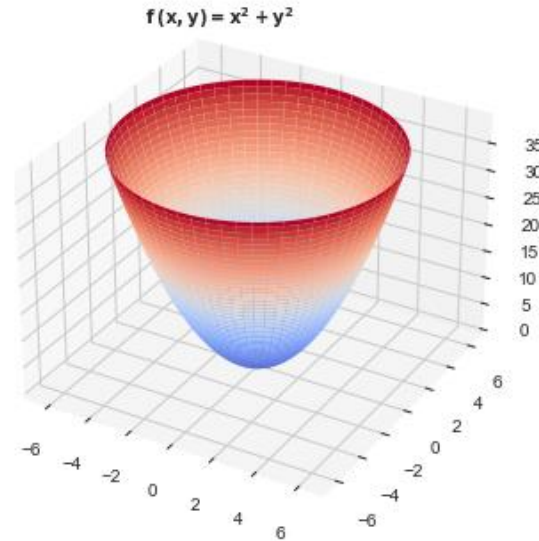
$$A \times B = \{(Anton, Christina), (Anton, Dora), (Paul, Christina), (Paul, Dora)\}$$



Beispiel.  $E = [1,3], F = [2,4]$

$$E \times F = \{(e, f) : e \in [1,3], f \in [2,4]\}$$

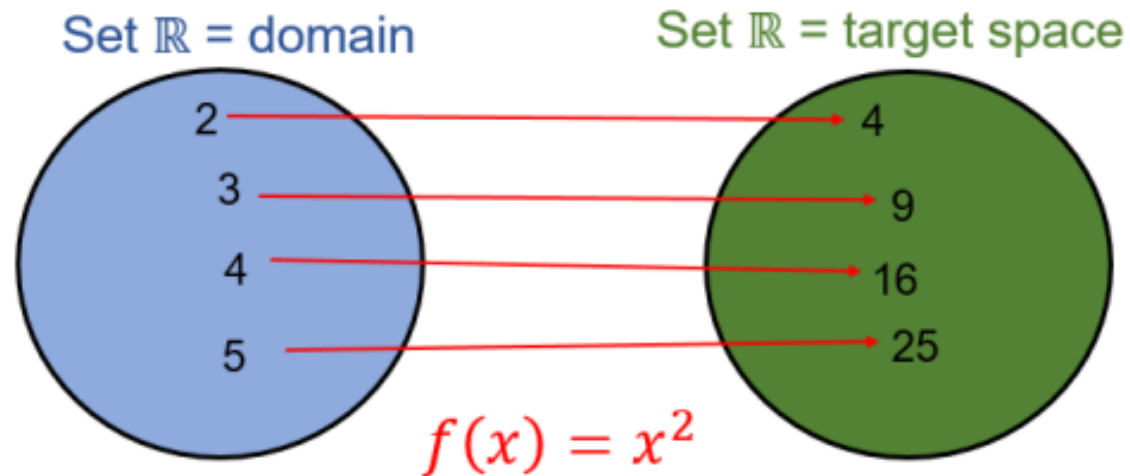




## › 5. ANALYSIS

Eine *Funktion*  $f$  ist eine Abbildung, die jedem Element einer Menge  $A$  (Definitionsmenge) ein Element einer Menge  $B$  (Zielraum) zuordnet:

$$f: A \rightarrow B.$$



Gegeben eine Funktion  $f: A \rightarrow B$ ,

> das *Bild*  $f(E)$  einer Menge  $E \subseteq A$  unter  $f$  ist:

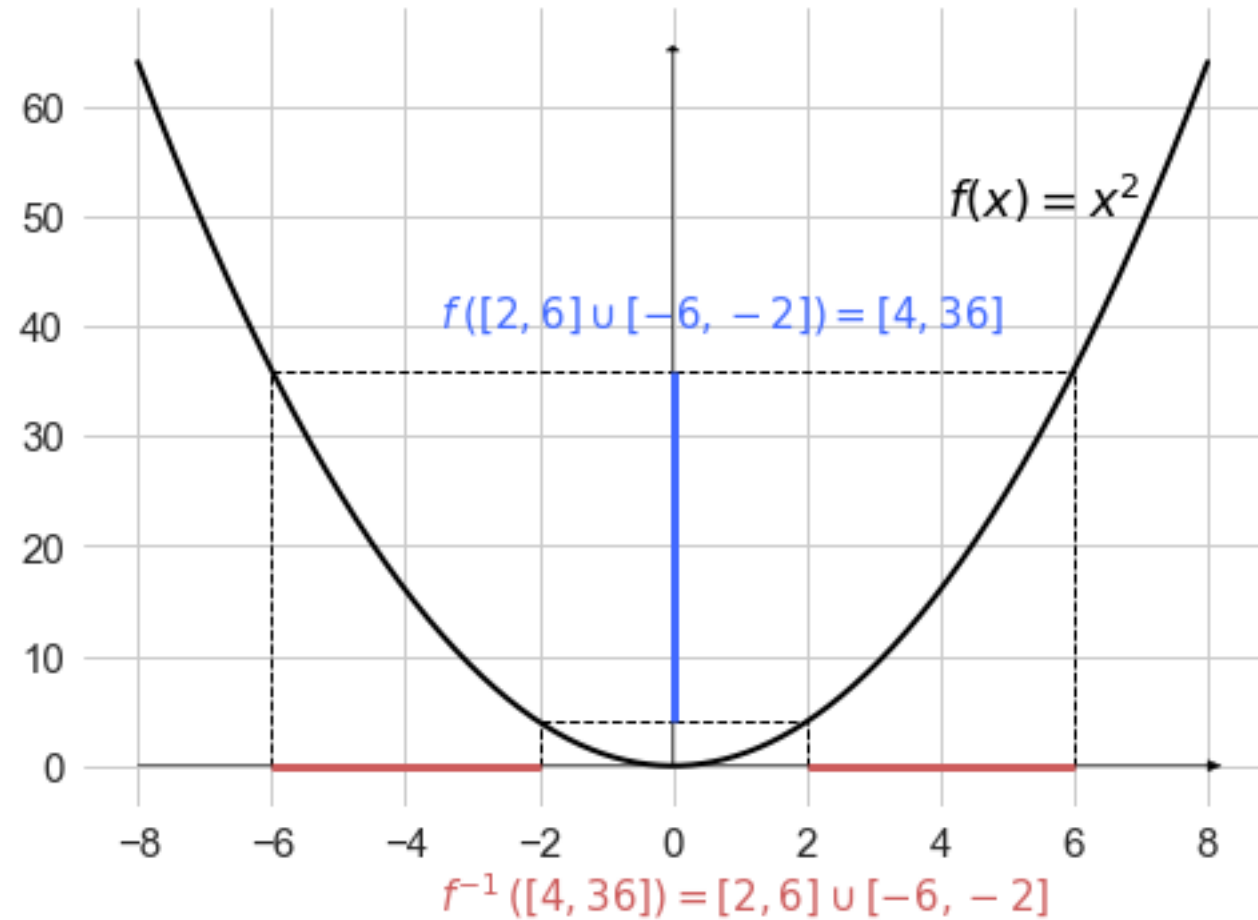
$$f(E) = \{f(x) : x \in E\}$$

> das *Urbild*  $f^{-1}(F)$  einer Menge  $F \subseteq B$  unter  $f$  ist:

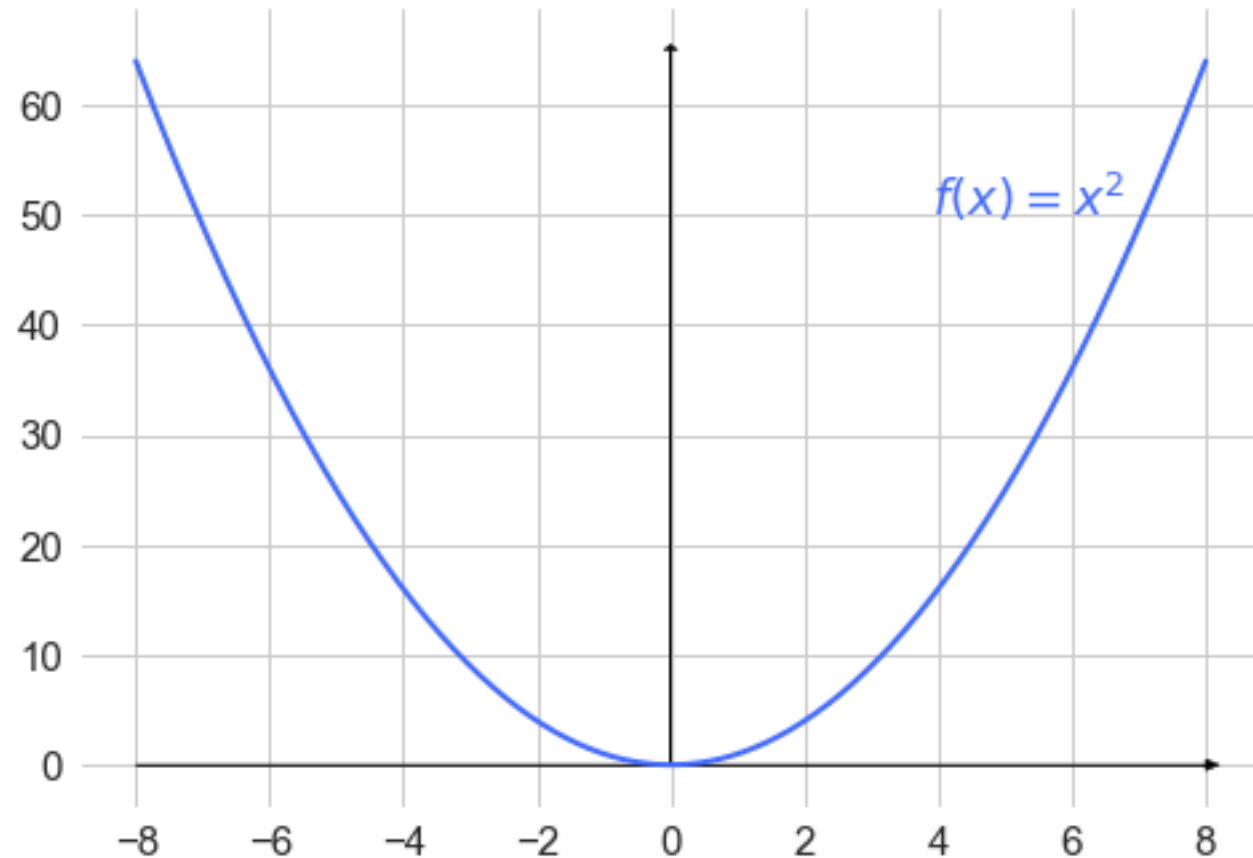
$$f^{-1}(F) = \{x : f(x) \in F\}$$

> der *Wertebereich* von  $f$  ist:

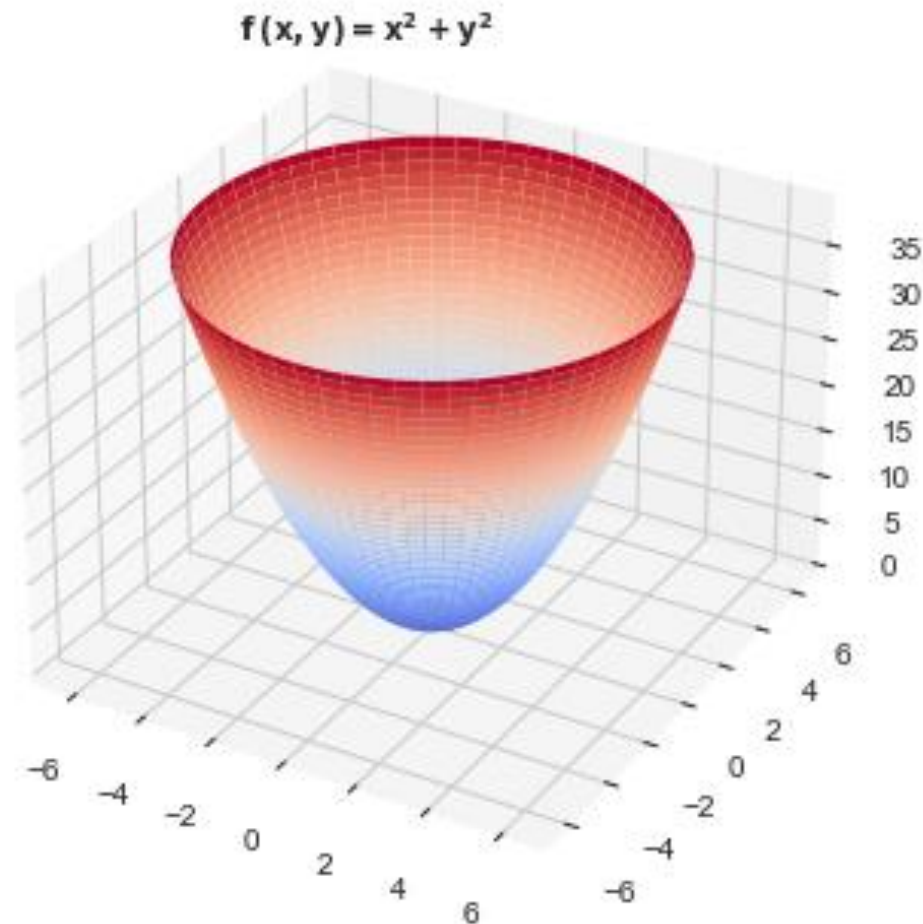
$$\text{Wertebereich} = f(A)$$



Die Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch  $f(x) = x^2$  ist eine *univariate* Funktion



Die Funktion  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch  $f(x, y) = x^2 + y^2$  ist eine *multivariate* Funktion



Die *Niveaumenge* einer Funktion  $f$  zum Niveau  $a$  ist:

$$N_f(a) = \{x: f(x) = a\}$$

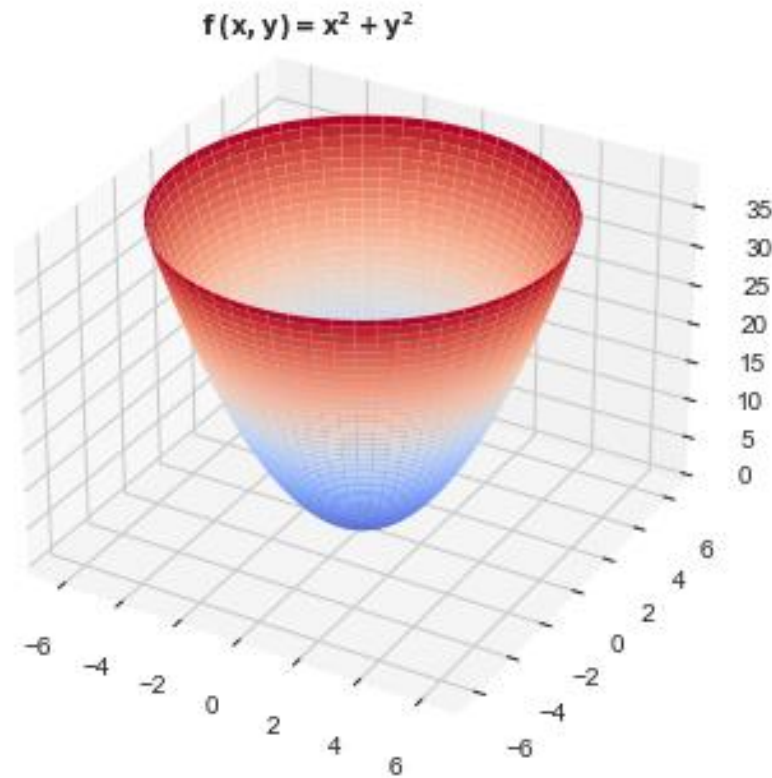
> Anhand von Niveaumengen lassen sich 3D-Funktionen in 2D darstellen.

**Beispiel.** Niveau von  $x^2 + y^2$  zum Niveau 3:

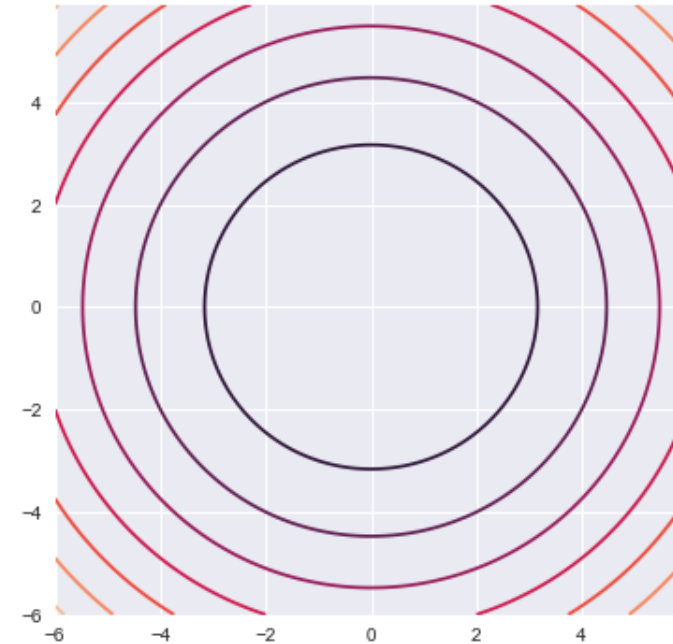
$$\{(x, y): x^2 + y^2 = 3\}$$



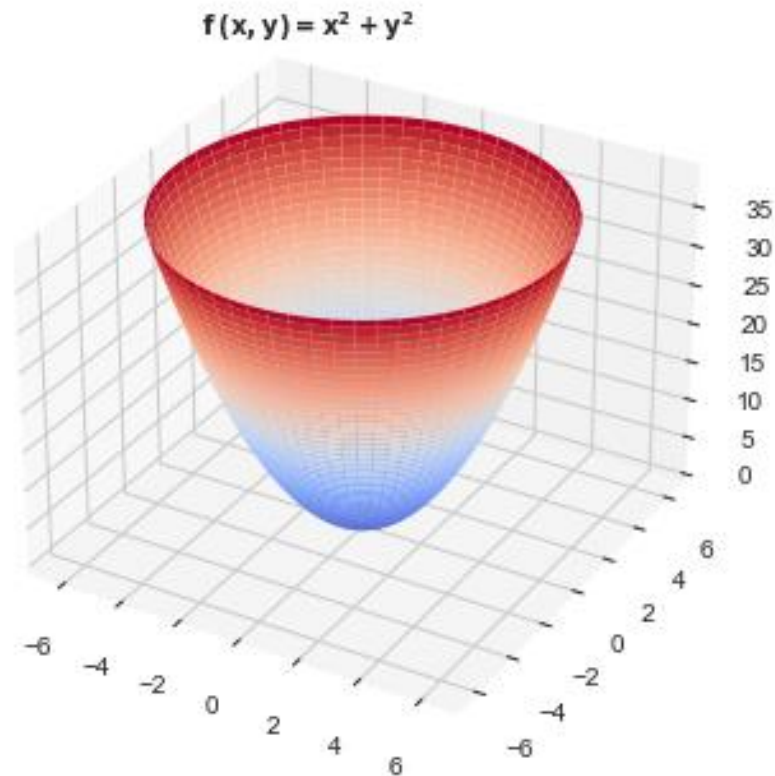
## Funktion in 3D



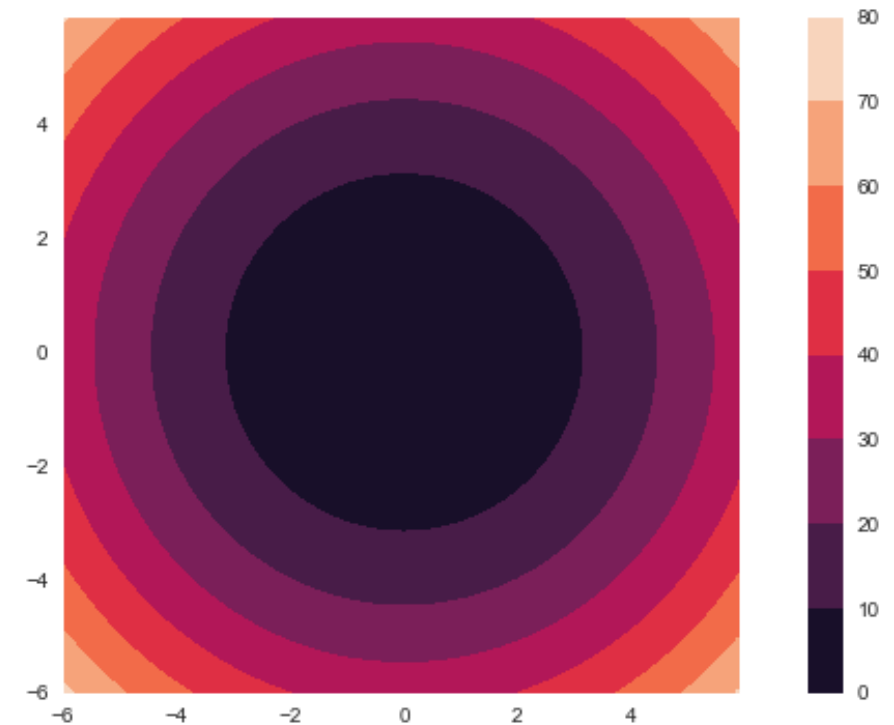
## Niveaumengen der Funktion in 2D



Funktion in 3D



Niveaumengen der Funktion in 2D



Eine Funktion heißt *stetig*, wenn sie keine "Sprungstellen" hat.

- > Etwas mathematischer: Eine Funktion heißt *stetig*, wenn  
die Urbilder abgeschlossener Mengen wieder abgeschlossen sind
  
- > Summen, Produkte und Quotienten stetiger Funktionen sind wieder stetige Funktionen

**Beispiel 1.** Zeigen Sie, dass die Funktion  $f(x) = x^2$  stetig ist.

- > Allgemeine abgeschlossene Menge:  $[a, b]$  mit  $a < b$
- > Urbild dieser Menge unter  $f$ :  $f^{-1}([a, b]) = [\sqrt{a}, \sqrt{b}] \rightarrow$  abgeschlossen
- > Da  $a, b$  allgemein gewählt wurden gilt das immer

q.e.d.

## Zwischenwertsatz

Eine univariate stetige Funktion definiert auf dem Intervall  $[a, b]$  nimmt jeden beliebigen Wert zwischen  $f(a)$  und  $f(b)$  an.

**Beispiel.** Die Funktion  $\sqrt{x}$  nimmt auf  $[4, 16]$  jeden Wert zwischen 2 und 4 an.

**Beispiel 2.** Zeigen Sie, dass die Funktion  $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x \leq 0 \end{cases}$  nicht stetig ist.

Möglichkeit 1. Zwischenwertsatz:

- >  $f(0) = 0$  und  $f(2) = 3$
- > Wenn  $f$  stetig ist, müsste  $f$  jeden Wert in  $[0,3]$  für  $x$  aus  $[0,2]$  annehmen
- > Dies ist aber nicht der Fall: Es existiert kein  $x$  sodass  $f(x) = 0.5$

q.e.d.

**Beispiel 2.** Zeigen Sie, dass die Funktion  $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x \leq 0 \end{cases}$  nicht stetig ist.

Möglichkeit 2. Urbilder:

- > Abgeschlossenes Intervall:  $[1,3]$
- > Urbild von  $[1,3]$ :  $f^{-1}([1,3]) = (0,2]$  ist nicht abgeschlossen

q.e.d.

- > Gegeben eine Funktion  $f$ . Der *Differenzenquotient*  $\frac{\Delta f}{\Delta x}$  zweier Punkte  $x_0$  und  $x_1$  ist:

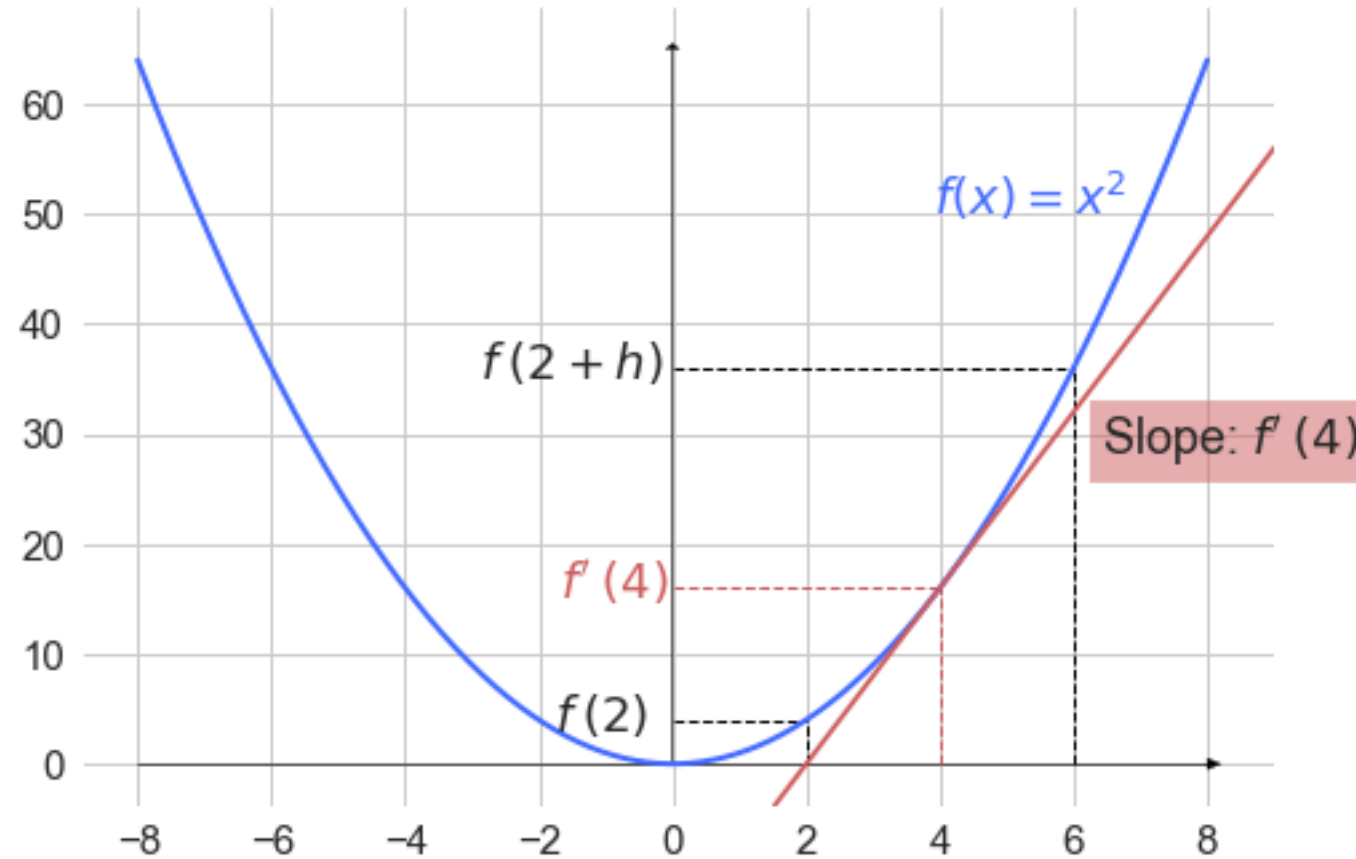
$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

- > Die *Ableitung*  $\frac{df}{dx}$  ist der Grenzwert des Differenzenquotienten:

$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$



# ANALYSIS: DIFFERENZIERBARKEIT



**Beispiel.** Bestimmen Sie die erste Ableitung der Funktion  $f(x) = x^2$ .

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - (x)^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 2x + h = 2x$$

# ANALYSIS: DIFFERENZIERBARKEIT

---

>  $f(x) = \textit{Konstante} \rightarrow f'(x) = 0$

>  $f(x) = x^n \rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}$

> *Kettenregel*: Die Ableitung einer Funktion  $h = f(g)$  ist  $h' = f'(g) \cdot g'$

**Beispiel.**  $h = (4x + 2)^2 \rightarrow h' = 2(4x + 2) \cdot 4$

> *Produktregel*: Die Ableitung einer Funktion  $h = f \cdot g$  ist  $h' = f'g + f \cdot g'$

**Beispiel.**  $h = x^2 \cdot (4x + 2) \rightarrow h' = 2x(4x + 2) + x^2 4$

> *Quotientenregel*: Die Ableitung einer Funktion  $h = f/g$  ist  $h' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

**Beispiel.**  $h = \frac{x^2}{(4x+2)} \rightarrow h' = \frac{2x(4x+2) - x^2 4}{(4x+2)^2}$

Die *partielle Ableitung*  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  einer Funktion  $f(x_1, \dots, x_n)$  nach einer Variablen  $x_i$  ist:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \textit{Differenziere } f \textit{ nach } x_i \textit{ und behandle alle anderen Variablen als Konstanten}$$

**Beispiel.**  $f(x_1, x_2) = x_1^2 \cdot 2x_2 + x_1$

$$> \frac{\partial f}{\partial x_1} = 2x_1 2x_2 + 1$$

$$> \frac{\partial f}{\partial x_2} = 2x_1^2$$

Der *Gradient*  $\nabla_f$  einer Funktion  $f(x_1, \dots, x_n)$  ist der Vektor der partiellen Ableitungen:

$$\nabla_f = \begin{pmatrix} \partial f / \partial x_1 \\ \vdots \\ \partial f / \partial x_n \end{pmatrix}$$

**Beispiel.**  $f(x_1, x_2) = x_1^2 \cdot 2x_2 + x_1$

$$\nabla_f = \begin{pmatrix} 4x_1x_2 + 1 \\ 2x_1^2 \end{pmatrix}$$

**Anmerkung.** Der Gradient zeigt immer in die Richtung des steilsten Anstiegs von  $f$

Die *Hesse – Matrix*  $H_f$  einer Funktion  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  entspricht deren zweiter Ableitung:

$$H_f(x) = \begin{pmatrix} \partial^2 f / \partial x_1 \partial x_1 & \cdots & \partial^2 f / \partial x_1 \partial x_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial^2 f / \partial x_n \partial x_1 & \cdots & \partial^2 f / \partial x_n \partial x_n \end{pmatrix}$$

# ANALYSIS: DIFFERENZIERBARKEIT UND STETIGKEIT

Es gilt:

1. Jede differenzierbare Funktion ist stetig.
2. Stetige Funktionen können nicht differenzierbar sein.
  - > Die Betragsfunktion  $|x| = \sqrt{x^2}$  ist z.B. stetig, aber an der Stelle 0 nicht differenzierbar:

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{|0 + h| - |0|}{h} = 1$$

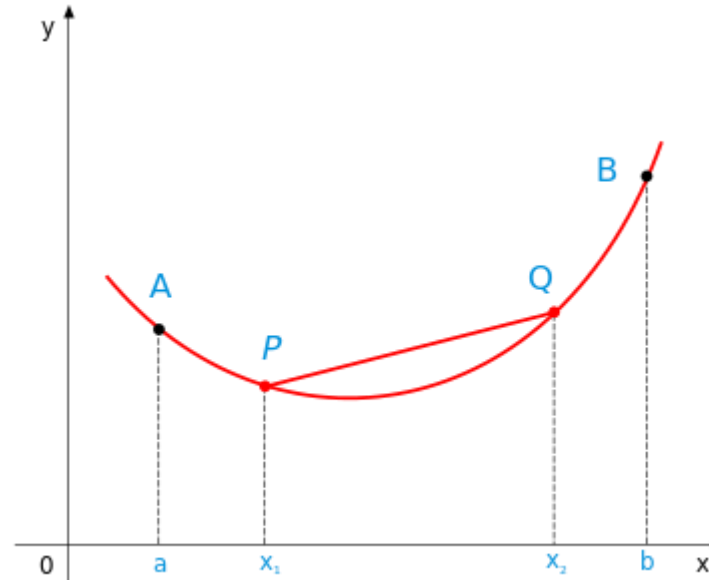
$$\lim_{h \uparrow 0} \frac{|0 - h| - |0|}{-h} = -1$$



# ANALYSIS: KONVEXE UND KONKAVE FUNKTIONEN

Eine Funktion  $f$  heißt *konvex*, wenn die Menge oberhalb der Funktion konvex ist:

$$f \text{ ist konvex} \Leftrightarrow f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1 - \alpha)f(x_2) \text{ für alle } x_1, x_2$$



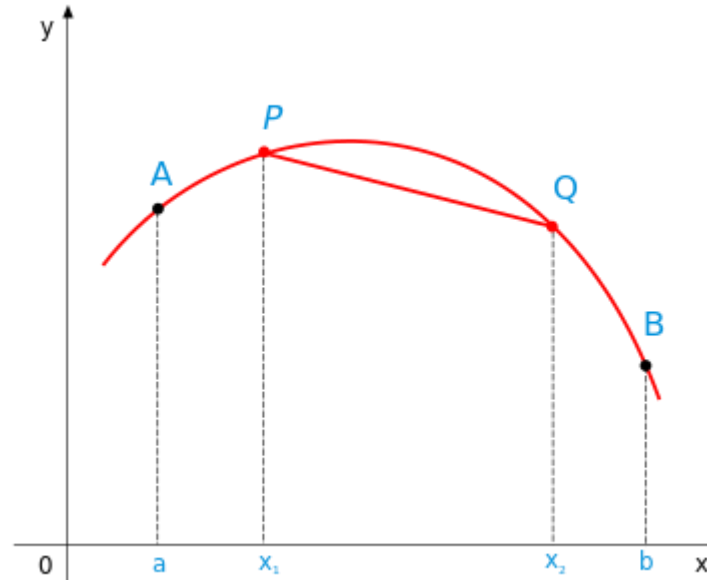
Konvexe Funktion

Quelle: [https://de.wikipedia.org/wiki/Konvexe\\_und\\_konkave\\_Funktionen](https://de.wikipedia.org/wiki/Konvexe_und_konkave_Funktionen)

# ANALYSIS: KONVEXE UND KONKAVE FUNKTIONEN

Eine Funktion  $f$  heißt *konkav*, wenn die Menge unterhalb der Funktion konvex ist:

$$f \text{ ist konkav} \Leftrightarrow f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) \geq \alpha f(x_1) + (1 - \alpha)f(x_2) \text{ für alle } x_1, x_2$$



Konkave Funktion

Quelle: [https://de.wikipedia.org/wiki/Konvexe\\_und\\_konkave\\_Funktionen](https://de.wikipedia.org/wiki/Konvexe_und_konkave_Funktionen)

# ANALYSIS: KONVEXE UND KONKAVE FUNKTIONEN

---

Eine Funktion heißt *strikt konvex* bzw. *konkav*, wenn statt der schwachen Ungleichung  $\leq, \geq$

> eine strikte Ungleichung  $<, >$  gilt

# ANALYSIS: KONVEXE UND KONKAVE FUNKTIONEN

Beispiel 1. Zeigen Sie, dass die Funktion  $|x|$  konvex ist.

> Funktion ist nicht differenzierbar

> Für  $x, y$  gilt:

$$|\alpha x + (1 - \alpha)y| = \alpha|x| + (1 - \alpha)|y| \text{ für } x, y > 0 \text{ und } x, y < 0$$

$$|\alpha x + (1 - \alpha)y| < \alpha|x| + (1 - \alpha)|y| \text{ für } x > 0 \text{ und } y < 0 \text{ oder vice versa}$$

> Damit

$$|\alpha x + (1 - \alpha)y| \leq \alpha|x| + (1 - \alpha)|y| \text{ für alle } x, y$$

q.e.d.

# ANALYSIS: KONVEXE UND KONKAVE FUNKTIONEN

**Beispiel 2.** Zeigen Sie, dass die Funktion  $f(x) = \sqrt{x}$  für  $x > 0$  konkav ist.

> Funktion ist differenzierbar für  $x > 0$

> 
$$f''(x) = -\frac{1}{4x^{\frac{3}{2}}} < 0 \text{ für } x > 0$$

q.e.d.

> Eine Funktion  $f: A \rightarrow B$  heißt *monoton steigend (fallend)*, wenn

für alle  $x, y \in A$  gilt, wenn  $x \leq y$ , dann  $f(x) \leq (\geq) f(y)$

> Eine Funktion  $f: A \rightarrow B$  heißt *streng monoton steigend (fallend)*, wenn

für alle  $x, y \in A$  gilt, wenn  $x < y$ , dann  $f(x) < (>) f(y)$

> Wenn die Funktion  $f$  *differenzierbar* ist so heißt sie *monoton steigend (fallend)*, wenn

$$f'(x) \geq (\leq) 0 \text{ für alle } x$$

**Beispiel.** Zeigen Sie, dass die Funktion  $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x \leq 0 \end{cases}$  monoton ist.

- > Funktion ist nicht differenzierbar
- > Fall 1:  $x < y < 0 \rightarrow f(x) = f(y) = 0$
- > Fall 2:  $x < 0 < y \rightarrow f(x) = 0 < f(y) > 0$
- > Fall 3:  $0 < x < y \rightarrow f(x) < f(y)$
- > Zusammen: für  $x < y$ :

$$f(x) \leq f(y)$$

q.e.d.

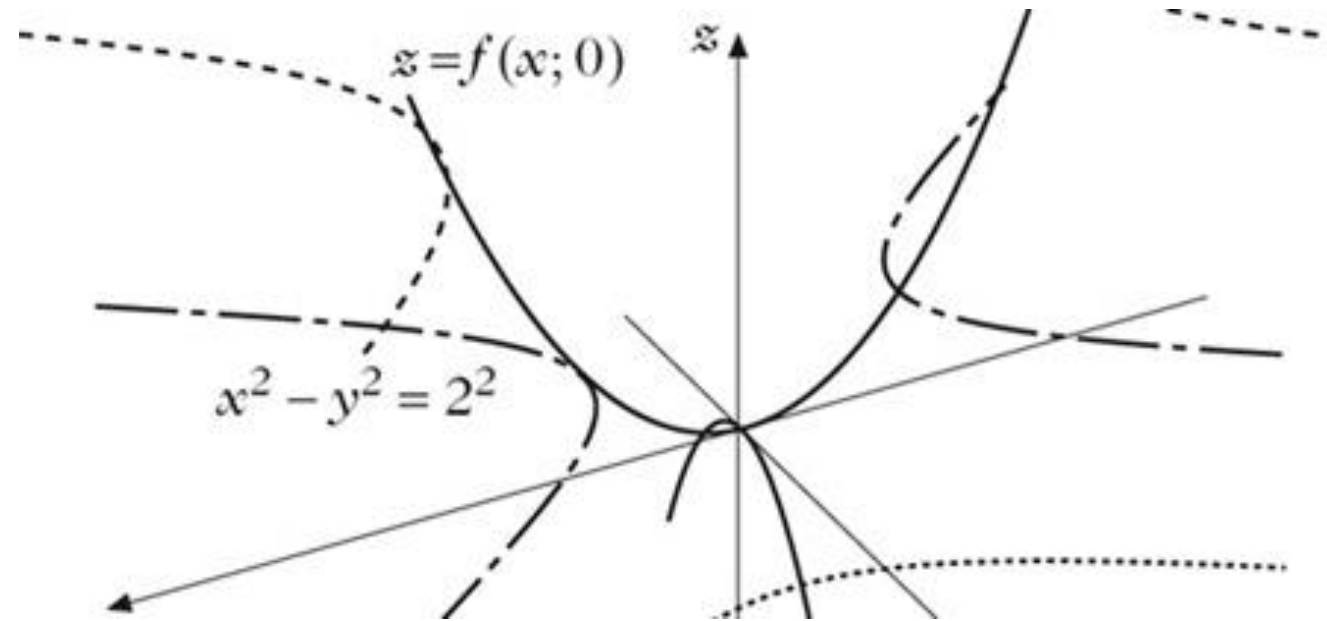
# ANALYSIS: MONOTONIE, KONVEXITÄT UND KONKAVITÄT

---

Eine zweifach differenzierbare univariate Funktion  $f$  heißt

- > konvex, wenn ihre Ableitungen monoton wachsen ( $f'' > 0$ )
- > konkav, wenn ihre Ableitungen monoton fallen ( $f'' < 0$ )





## › 6. OPTIMIERUNG

# OPTIMIERUNG: OHNE NEBENBEDINGUNGEN

---

Optimierungsproblem:

> Maximiere eine Funktion  $f$ :

$$\max_x f(x)$$

> Maximierung und Minimierung:

$$\min_x f(x) = \max_x -f(x)$$

# OPTIMIERUNG: OHNE NEBENBEDINGUNGEN

Beispiel Univariat.  $f(x) = x^2$

$$\min_x x^2 = \max_x -x^2$$

$$-f'(x) = -2x \Leftrightarrow x^* = 0$$

$$-f''(x^*) = -2 < 0 \Leftrightarrow \textit{konkave Funktion} \rightarrow \textit{Maximum von } -x^2$$

# OPTIMIERUNG: OHNE NEBENBEDINGUNGEN

> Der Extremwert  $x^*$  einer nicht-monotonen *univariaten* Funktion  $f$  wird erreicht, wenn

$$f'(x^*) = 0$$

Wenn

>  $f''(x^*) < 0$  handelt es sich um ein Maximum (konkave Funktion)

>  $f''(x^*) > 0$  handelt es sich um ein Minimum (konvexe Funktion)

# OPTIMIERUNG: OHNE NEBENBEDINGUNGEN

Beispiel Multivariat. Beispiel .  $f(x, y) = -x^2 - y^2 + x$

$$\max_{x,y} f(x, y)$$

>  $\nabla f(x) = \begin{pmatrix} -2x + 1 \\ -2y \end{pmatrix} \rightarrow (x^*, y^*) = (\frac{1}{2}, 0)$

>  $H_f(x) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

>  $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = (-1, 0) \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} < 0 \Leftrightarrow \text{negativ definit (Maximum)}$

# OPTIMIERUNG: OHNE NEBENBEDINGUNGEN

---

Eine Matrix  $M$  ist an der Stelle  $x'$

> *positiv definit*, wenn

$$x'^T H_f(x') x' > 0$$

> *negativ definit*, wenn

$$x'^T H_f(x') x' < 0$$

> Der Extremwert  $x^*$  einer nicht-monotonen *multivariaten* Funktion  $f$  wird erreicht, wenn

$$\nabla_f(x^*) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wenn

- > die Hesse-Matrix negativ definit ist, handelt es sich um ein Maximum (konkave Funktion)
- > die Hesse-Matrix positiv definit ist, handelt es sich um ein Minimum (konvexe Funktion)

# OPTIMIERUNG: MIT NEBENBEDINGUNGEN

---

Optimierungsproblem mit  $k$  Nebenbedingungen:

$$\begin{aligned} \max_{x_1, \dots, x_n} f(x_1, \dots, x_n) \text{ so dass} \\ g_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ g_k(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{aligned}$$



Lösung Optimierungsproblem mit k Nebenbedingungen:

$$\max_{x_1, \dots, x_n} f(x_1, \dots, x_n) \text{ so dass}$$

$$g_1(x_1, \dots, x_n) = 0$$

$$\vdots$$

$$g_k(x_1, \dots, x_n) = 0$$

Schritt 1: Lagrange-Funktion aufstellen:

$$L(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_k) = f(x_1, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^k \lambda_i \times g_i(x_1, \dots, x_n)$$

Schritt 2: Extremwerte von Lagrange-Funktion bestimmen

Beispiel 1.

$$\max_{x,y} x^2 + y^2 \text{ s. d.}$$

$$g_1: x + y - 1 = 0$$

Schritt 1: Lagrange-Funktion aufschreiben

$$L(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(x + y - 1)$$

Beispiel 1.

Schritt 2: Extremwert von Lagrange-Funktion bestimmen

$$\nabla_L = \begin{pmatrix} 2x + \lambda \\ 2y + \lambda \\ x + y - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

## Beispiel 2. Nutzenmaximierung unter der Nebenbedingung der Budgetrestriktion

- > Nutzenfunktion:  $U(Wasser, Wein) = Wasser \times Wein$
- > Budgetbeschränkung:  $Wasser + 3Wein = 150$

Bestimmen Sie die optimalen Konsummengen von Wasser und Wein.

## Beispiel 3. Kostenminimierung unter Nebenbedingungen

- > Ziel: Produktion von 30 Autos
- > Produktionsfunktion:  $P(k, l) = \sqrt{k} + l$ , mit  $k$  = Kapital,  $l$  = Arbeit
- > Kostenfunktion:  $p_k = 1, p_l = 20 \rightarrow C(k, l) = k + 20l$

Bestimmen Sie den optimalen Mitteleinsatz zur Produktion der 30 Autos.

# OPTIMIERUNG: EXISTENZ VON EXTREMWERTEN

## Extremwertsatz

Gegeben eine Funktion  $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Wenn

- i.  $A$  kompakt ist und
- ii.  $f$  stetig ist,

dann existieren Werte in  $A$ , die  $f$  maximieren und minimieren.

# OPTIMIERUNG: EINDEUTIGKEIT VON EXTREMWERTEN

---

Gegeben eine stetige Funktion  $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , wobei  $A$  kompakt ist. Wenn

- > die Funktion konvex ist, so existiert ein eindeutiges globales Minimum
- > die Funktion konkav ist, so existiert ein eindeutiges globales Maximum

# OPTIMIERUNG: EXISTENZ UND EINDEUTIGKEIT

---

**Beispiel.** Überprüfen Sie, ob die Funktion  $f: [-1,1] \times [-1,1] \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$f(x, y) = |x + y - 2|$$

ein eindeutiges Minimum annimmt.



# THE END!



Please refer any questions to:  
Prof. Dr. Florian Kauffeldt  
Faculty of International Business  
[florian.kauffeldt@hs-heilbronn.de](mailto:florian.kauffeldt@hs-heilbronn.de)