FÍSICA I: MECÂNICA

Notas de Aulas :: Versão 3 - Setembro de 2021

Prof. Dr. Reginaldo Leão

IFMG&GESESC

Instituto Federal de Minas Gerais —
Grupo de Estudos em Sistemas Energéticos e Simulação Computacional.

MEDIDAS E UNIDADES

Nebulosa Hélix, concepção artística baseada em dados observacionais - Fonte: NASA

1.1 Introdução

A Física é uma das Ciências Naturais mais fundamentais que existem; por fundamental me refiro ao nível de detalhamento de seu objeto de estudo. Enquanto a Química se ocupa "principalmente" das transformações da matéria em nível molecular - quando a agregação das partículas fundamentais que compõem a matéria já é extremamente complexa - a Biologia, se ocupa principalmente dos organismos sua complexidade e relações - quando a organização molecular se dá de maneira tal que pode ser caracterizada como vida. A Física, por outro lado, se debruça sobre os entes que permitem tais estruturações e vai além; extrapola suas inferência para explicar tudo o mais que nos rodeia, a começar do tempo e o espaço, a matéria, seus distintos estados de agregação, as forças e relações quânticas que permitem suas transformações, sua aglutinação gravitacional e a formação dos corpos celestes, o próprio ciclo de vida dos elementos componentes da matéria, constantemente fundidos e destruídos no coração de estrelas jovens e velhas, a organização e complexidade das galáxias e o cosmos.

Embora o ser humano seja naturalmente um animal questionador, só foi possível alcançar o atual status de desenvolvimento científico e tecnológico, graças à sua capacidade de observar algo de forma sistemática, registrá-lo e organizá-lo logicamente, de modo tal que o permitisse sugerir inferências fundamentadas, questionar o observado e buscar respostas consistentes.

Ao longo da história, as mentes mais curiosas da humanidade fizeram esse percurso de construção do conhecimento de muitas formas distintas e não lineares. Alguns de forma mais consistentes, outros menos; variações daquilo que atualmente chamamos *Método Científico*, um conjunto de regras por meio das quais podemos construir novos conhecimentos de uma forma satisfatoriamente confiável.

Ainda que, o Método Científico seja quase sempre atribuído a Isaac Newton, ou as vezes a Galileu Galilei, sua criação não pode ser de fato conferida a um único autor. O pensamento greco-ocidental, os lastros históricos do conhecimento científico de egípcios, sumérios e mesopotâmicos, o pensamento filosófico racionalista e determinista e mesmo contribuições recentes como a Teoria da Complexidade de Edigar Morin, foram fundamentais para compor a complexidade e o nível de especialidade e precisão da ciência moderna.

No entanto, a despeito de todo o arcabouço conceitual por trás do método, é possível sugerir que o átomo do método científico provavelmente seja a *medida*.

1.2 Medidas Físicas

Na Física, a ação de medir deve ser entendida como o ato de se determinar um valor **satisfatóriamente preciso** para uma *grandeza física*.

Note que na definição anterior, dois conceitos foram introduzidos:

i) o conceito de precisão satisfatória;

ii) e o conceito de grandeza física

O primeiro deles está associado a impossibilidade de se medir com precisão total o valor de uma grandeza. Em outras palavras *é impossível determinar o valor verdadeiro de uma grandeza física.*

Esta impossibilidade se deve ao fato de que medir algo, significa compará-lo com um determinado padrão. Quando se mede a distância entre duas cidades, o que se faz é comparar o espaço entre elas (medido segundo algum critério previamente determinado, como distância rodoviária ou geodésica) com o padrão quilômetro, por exemplo. Logo se quantifica a distância de interesse como múltipla ou submúltipla deste padrão previamente estabelecido.

MEDIDAS E UNIDADES

O próprio quilômetro (km) é na verdade um múltiplo de uma unidade fundamental do Sistema Internacional de Unidades (SI), o metro (m). Ainda que exista uma definição histórica bastante curiosa para essa grandeza [1], fisicamente, a unidade métrica é aceita como a distância percorrida pela luz em uma fração de tempo igual a $1/299792458$ segundos. A propósito, a unidade de tempo segundos (s) também é uma unidade fundamental do SI.

Deste modo, medir a distância entre duas cidades, significa comparar tal distância a um conjunto de unidades quilométricas linearmente justapostas a que dá-se o nome de "escala quilométrica". Uma medida inteira nesta escala hipotética está condicionado, ao fato de que os pontos que marcam as limites da distância medida, coincidam com os extremos de cada unidade quilométrica da escala, configuração esta cuja a probabilidade de ocorrência é infinitesimal já que a cada 01 km apenas um único ponto atende a tal condição.

Par descrever qualquer outra medida que não seja inteira, recorre-se aos submúltiplos do escala original, o metro por exemplo, *a o que se denomina aumento de resolução*. Deste modo a escala quilométrica passa a ser subdividida em 1000 partes iguais, cada qual com 1 m de extensão. No entanto, retorna-se certamente na mesma dificuldade de medida, já que a cada metro apenas um ponto é capaz de expressar um valor inteiro de medida nessa escala. Medidas não inteiras poderiam ser expressas como a centésima parte do metro o centímetro (cm) e em seguida milímetros e assim sucessivamente *ad infinitum*.

Como se vê, a redução da escala incrementa a precisão de uma medida apenas até certo nível, já que independentemente daquela utilizada, o problema da indeterminação do valor absoluto da medida se mantém, considerando que apenas o conhecimento de um determinado ponto dentre outros infinitos atenderia essa premissa. Além disto, o incrementos sucessivos na resolução da escala, simultaneamente potencializa a questão da *acuidade*, que é nível de capacidade que um determinado sensor - um ser humano usando o sentido da visão, por exemplo - possui de perceber a distinção entre múltiplas medidas. Donde se chega a ideia de *precisão satisfatória* para a medida sendo realizada.

[1] Pesquise pela "históriado metro" para saber mais

IMPORTANTE: *Deve-se estabelecer de forma planejada e antecipada, o nível de precisão desejado para uma medida, e só então selecionar o instrumento e a metodologia ideal para a tomada desta.*

1.2.1 Incerteza de Medidas

Obviamente, quando se estabelece uma precisão limite, não se pode apenas desprezar a imprecisão associada, de modo tal que é preciso tratar a **incerteza** (σ) associada à medida. Assim para a expressão correta de uma medida, é preciso informar simultaneamente o valor da leitura e esse valor de incerteza.

A incerteza representa o intervalo de confiança de uma leitura através de um intervalo finito e não nulo representado nas formas das Equações 1.1 e 1.2

$$m = M \pm \sigma \tag{1.1}$$

$$m = M^{+\sigma'_{M_+}}_{-\sigma''_{M_-}} \tag{1.2}$$

A Equação 1.1 representa a incerteza simétrica em torno da leitura (M), ao passo que a Equação 1.2 representa a incerteza assimétrica em torno de M. Ou seja M pode variar entre $M+\sigma$ e $M-\sigma$ na Equação 1.1 e $M+\sigma'$ e $M-\sigma''$ na Equação 1.2.

São muitos os métodos para o cálculo de σ, para a avaliação da precisão e seleção do número de algarismos significativos, e dependem, dentre outras coisas, do instrumento utilizado, da metodologia e do número de fontes de erros. Os detalhes deste tipo de análise merecem considerações mais pormenorizadas e uma discussão mais elaborada, e só serão tratados desta forma em outra obra complementar a essa.

No entanto, algumas convenções simples podem ser adotadas.

Convenções sobre incertezas e algarismos significativos

Algarismos significativos *são os dígitos numéricos de um valor que possuem significado*, exatamente por isso podem ser utilizados para se representar, dentre outras coisas, estimativas da incerteza de uma medida.

Suponha uma régua semelhante à da Figura 1.1, graduada em milímetros (mm). Ao ser usada para medir o objeto, a leitura obtida é certamente 63 mm, porém há alguma dúvida sobre o comprimento do objeto que se estende para além deste ponto.

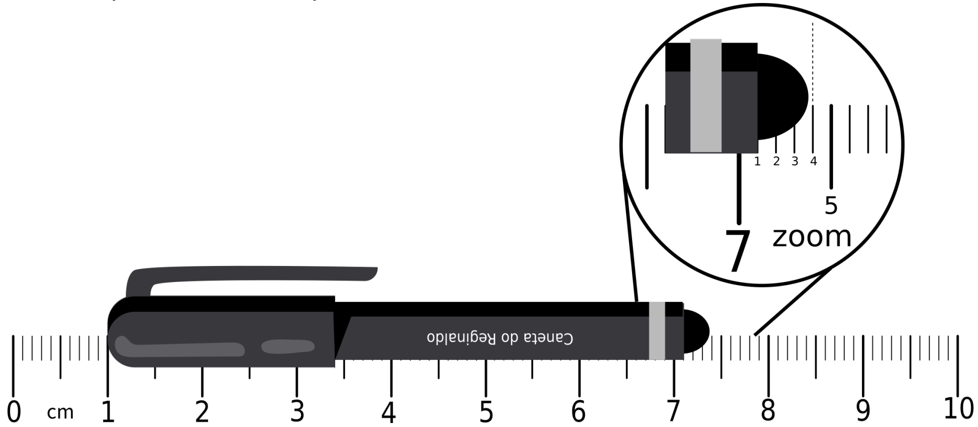

Figure 1.1: Régua graduada.

Observando mais atentamente a região de *zoom* na imagem, é possível observar que a extremidade da caneta está além do terceiro milímetro após a marcação de 7 cm na escala. Alguns avaliarão essa medida residual como como $7/10\,mm$, provavelmente a maioria como $8/10\,mm$ e alguns ainda avaliarão como $9/10\,mm$. De fato, 63,7 mm, 63,8 mm e 63,9 mm **são todas medidas válidas, igualmente certas e igualmente erradas**.

A leitura 63 corresponde ao valor de M na Equação 1.1, mas qual a incerteza dessa medida ?

Em instrumentos analógicos, como é o caso da escala graduada, a convenção mais comum adota a incerteza como sendo igual a metade da **precisão** do instrumento. A escala da Figura 1.1 tem precisão de 1 mm, portanto, a incerteza de medidas em escalas como essa é de 0,5 mm. Considerando um leiturista que

MEDIDAS E UNIDADES

sugerisse 63,8 mm para o tamanho da caneta, o valor da medida seria $m = 63,8 \pm 0,5\ mm$.

Na leitura em questão a convenção demonstrada na Figura 1.2 é adotada para a identificação dos algarismos significativos.

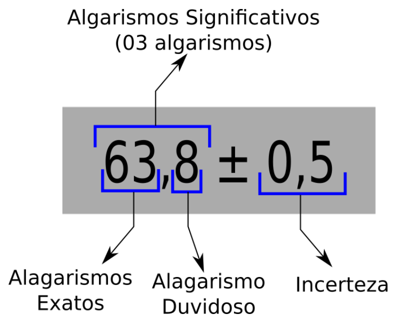

Figure 1.2: Algarismos de uma leitura.

Algarismos exatos são aqueles que se pode determinar com certeza absoluta na leitura da escala, já o algarismo duvidoso, será sempre aquele que pode suscitar dúvida entre diferentes leituristas. Como o algarismo duvidoso carrega inexatidão, *não faz sentido que qualquer leitura possua mais do que apenas um algarismo deste tipo.*

Outra convenção importante que geralmente é adotada na falta de algo mais preciso, é a forma de determinação da incerteza de uma medida na qual este valor não foi explicitamente declarado. Nestes casos, *é comum se adotar a incerteza como sendo a metade do valor unitário do menor alagarismo exato.*

IMPORTANTE:

1. *Qualquer medida de uma determinada grandeza deve possuir apenas um algarismo duvidoso.*
2. *A incerteza de medidas para as quais este valor não foi explicitamente declarado, deve ser assumida como sendo igual à metade do valor unitário do menor algarismo significativo exato.*

O problema do algarismo zero (0)

Zeros que são colocados em um número para posicionar o separador decimal, jamais devem ser considerados algarismos significativos. Estes casos são melhores identificados na composição de medidas expressas em unidades de medida diferentes daquelas dos instrumentos em que foram determinadas.

Suponha, por exemplo, uma balança comercial com precisão de 0,1 quilogramas (kg), que tenha feito uma leitura de 2,5 kg. Quando este valor é expresso em gramas - uma unidade de medida distinta daquela original da balança -, então a leitura ficaria 2500 gramas (g). Note que no número 2500, os zeros a direita, não tem significado pois a balança não possui tal precisão, portanto não são significativos e só existem para possibilitar a ocorrência do ponto decimal em uma posição correspondente a unidade grama.

De forma semelhante, se uma balança graduada em gramas mede 20 g e o usuário, desejando expressar esse valor em kg o escreve como 0,020 kg, os zeros a esquerda não são significativos, pois só foram introduzidos para possibilitarem a colocação do separador decimal na casa deciaml correspondente à unidade de medida de massa desejada. Este tipo de técnica é bastante comum na Física, quando se precisa compatibilizar diferentes unidades de medida de uma mesma grandeza, ou se operar com grandezas distintas compondo uma unidade derivada desejada, ou mesmo para a compatibilização de unidades com constantes físicas.

Para evitar a dificuldades no acompanhamento dos algarismos significativos, é bastante recomendável que as medidas e constantes físicas sejam expressas como potências de 10 em Notação Científica.

Notação Científica

A notação científica é um pelo qual valores são expressos por meio de potências de dez (10^n) multiplicadas pela mantissa ($\mathcal{M}$) do valor que se deseja representar, somada à incerteza deste valor, conforme mostrado pela Equação 1.3.

$$m = (\mathcal{M} \pm \sigma) \cdot 10^n \tag{1.3}$$

É também convencionado que o valor de $\mathcal{M}$ deve estar em um intervalo entre $1 \leq \mathcal{M} < 10$.

Para compreender melhor o uso do recurso, vamos expressar a leitura da régua para o tamanho da caneta em notação científica. Como a medida foi de $63,8 \pm 0,5\,mm$, deve-se multiplicar o valor por 10^{-1} para que a mantissa esteja entre $1 \leq \mathcal{M} < 10$.

SEÇÃO DE CÁLCULOS:

$(63,8 \pm 0,5) \cdot 10^{-1} = (6,38 \pm 0,05) \cdot 10^{-1}$

Neste caso, a vantagem do uso de notação científica não é tão aparente, porém, no exemplo da seção anterior, quando o significado dos zeros na leitura $2500\,g$ foi discutido, a forma de $\mathcal{M}$ indica exatamente o número de algarismos significativos no valor.

SEÇÃO DE CÁLCULOS:

$(2500 \pm 100) \cdot 10^{-3}\,g = (2,5 \pm 0,1) \cdot 10^{-3}\,g$

É possível notar que a mantissa possui exatamente dois algarismos significativos, além disso, deve ser observado que neste instrumento em específico, a incerteza foi assumida como sendo de $100g$. *Em instrumentos digitais a incerteza é fornecida pelo fabricante ou convencionada como sendo sua resolução.*

Algarismos Significativos nas Operações Matemáticas Básicas

Quando grandezas são operadas matematicamente, deve-se determinar uma convenção para o tratamento do número de algarismos significativos e incertezas de medidas. Os métodos de tratamento da propagação das incertezas através das operações matemáticas são um pouco mais complexos e não serão tratados neste tópico introdutório. Todavia, as convenções para o cuidado com o número de algarismos significativos são bastante simples, conforme pode ser visto na lista abaixo.

MEDIDAS E UNIDADES

Convenções para determinação do número de algarismos significativos nas operações matemáticas básicas.

1. **SOMA E SUBTRAÇÃO:** O número de *casas decimais* no resultado deve ser igual ao número da menor quantidade de casas dentre aquelas presentes nos termos da operação.
2. **MULTIPLICAÇÃO E DIVISÃO:** O número de *algarismos significativos* no resultado deve ser igual ao número da menor quantidade de algarismos significativos dentre aqueles presentes nos termos da operação.
3. **ESTIMATIVAS:** Todos os resultados estimados devem possuir apenas um algarismo significativo, segundo sua órdem de grandeza.

Quando arredondamento se fizerem necessários para o atendimento às regras anteriores, então a seguinte convenção deve ser utilizada.

Regras para arredondamento

Após a seleção do total de dígitos conservados - aqueles que parmanecerão no valor - segundo as regras de determinação do número de algarismos significativos, deve-se verificar se:

- o primeiro algarismo abandonado for maior que 5, ou sendo 5 e o seguinte qualquer que não seja 0, o último dígito conservado deve ser acrescido de uma unidade (e.g. $1,7|6 \to 1,8|$ ou $1,7|51 \to 1,8|$);
- o primeiro algarismo abandonado for menor que 5, o último dígito conservado não deve ser alterado (e.g. $1,7|3 \to 1,7|$);
- o primeiro algarismo abandonado for igual a 5 seguido de um dígito zero, o último dígito conservado deve ser acrescido de uma unidade, se for ímpar, e mantido, se for par. (e.g. $1,7|50 \to 1,8|$ ou $1,6|50 \to 1,6|$);

Ordens de Grandezas e Estimastivas

"A *Via-Láctea* é uma galáxia espiral com pouco mais de 10^5 anos luz de diâmetro, idade de 10^{10} anos terrestres e 10^{11} estrelas vivas."

Ao ler o texto anterior, não é difícil inferir que os dados informados são todos **estimativas** dos respectivos valores reais, impossíveis de serem determinados precisamente no atual estágio de desenvolvimento científico.

Os valores usados para representar as grandezas mencionadas são todos exemplos de estimativas dadas como **ordens de grandeza**.

Uma ordem de grandeza, é uma potência de dez (*atenção para não confundir o conceito com o de notação científica*) usada para expressar com confiabiliade aceitável, um valor cuja a expressão precisa seja impossível, muito dispendiosa, ou desnecessária. *A potência selecionada para este propósito, deve ser a mais próxima do valor que se está estimando.*

As dimensões de nossa galáxia, o número de átomos de carbono presentes em um organismo vivo e o número de elétrons livres em uma unidade métrica cúbica de um condutor elétrico, são todos exemplos de grandezas que podem ser satisfatoriamente representadas por uma órdem de grandeza.

Vejamos um exemplo.

EXEMPLO - Estimando o número de átomos de carbono no corpo humano.

No livro *What Do You Think You Are? The science of what makes you you*, de Brian Clegg, o autor estima o fração mássica média de átomos de carbono no organismo humano como algo próximo de 18%.

Sabendo disto, estime a ordem de grandeza do número de átomos de carbono em um ser humano com massa de 70 kg.

SOLUÇÃO:

Se 18% dos 70 kg da massa corpórea na situação proposta forem átomos de carbono (C), então tem-se uma massa de:

$$m_C = 70 \cdot 0,18 \approx 13kg$$

Considerando a massa do elemento C, dada a abundância isotópica, como de aproximadamente $12\,g.mol^{-1}$. Então em $1,3 \cdot 10^4\,g$ *(Note aqui a utilização da notação científica para adequação do número de algarismos significativos.)* tem-se:

$$M_{molar} = \frac{m}{N_{mols}} \rightarrow 12 = \frac{1,3 \cdot 10^4}{N_{mols}} \rightarrow N_{mols} \approx 1,1 \cdot 10^3 mols$$

Agora considerando a constante de Avogadro (N_A) como $6,0 \cdot 10^{23}$, podemos determinar o número de átomos N_C.

$$N_C = N_{mols} \cdot N_A = 1,1 \cdot 10^3 \cdot 6,0 \cdot 10^{23} \rightarrow N_C \approx 6,6 \cdot 10^{26} \approx 10^{27} \text{ átomos de carbono.}$$

Alguns valores como 5, 50, 500... geralmente costumam gerar alguma confusão quando precisam ser expressos como ordens de grandeza, no entanto a confusão é apenas aparente. Note na sequência abaixo que o número cinco não é um ponto equidistante às potências de 10 mais próximas, mas sim o valor 5,5.

$$...10^0, 2, 3, 4, \mathbf{5}, 6, 7, 8, 9, 10^1...$$

Deste modo, utilizaremos como critério de seleção da potência de dez a seguinte regra:

Regras para a seleção da potência de dez em estimativas de órdens de grandeza.
Valores que quando expressos na forma de notação científica sejam menores 5,5 terão ordem de grandeza igual à potência de dez da notação, do contrário terão ordem de grandeza igual à potência de dez imediatamente superior.

Existem outras convenções para este propósito, no entanto, por questão de simplicidade e por tratar-se de disciplina introdutória, manteremos este padrão por todo o semestre.

Table 1.1: Tabela de prefixos.

Prefixo	**Símbolo**	**Ordem de Grandeza**	**Prefixo**	**Símbolo**	**Ordem de Grandeza**
Femto	f	10^{-15}	Deca	da	10^1
Pico	p	10^{-12}	Hecto	h	10^2
Nano	n	10^{-9}	Quilo	k	10^3
Micro	μ	10^{-6}	Mega	M	10^6
Mili	m	10^{-3}	Giga	G	10^9
Centi	c	10^{-2}	Tera	T	10^{12}
Deci	d	10^{-1}	Peta	P	10^{15}

Algumas vezes as ordens de grandeza, ou mesmo as grandezas propriamente ditas, podem ser expressas por meio de abreviações representativas de sua magnitude. Quando dizemos *quilômetro* representado por km, utilizamos o prefixo quilo (*kilo*), junto à unidade metro, significando que esta unidade equivale a 1000 vezes o valor unitário do metro. Já quando utilizamos milímetro mm, adicionamos o prefixo mili à unidade de metro, dizendo que esta unidade se refere à milésima parte do metro. Na Tabela 1.1, podem ser vistos os prefixos mais usuáis para esse propósito.

1.2.2 Unidades e Grandezas

Uma das principais tarefas da Ciência Física é propor modelos explicativos, e as vezes preditivos, para um determinado fenômeno natural. Como dito anteriormente, a Física, e todas as ciências legítimas, utilizam um conjuto de regras e protocolos para coletarem informações sobre um fenômeno ou objeto estudado de forma mais consistente e segura. As ciências naturais e exatas, geralmente, valem-se de medidas quantitativas para realizar tal tarefa.

Uma medida, nada mais é que a quantificação de uma grandeza; que por sua vez, deve ser entendida como uma característica bem definida e delimitada do objeto ou fenômeno estudado. A Física, como ciência fundamental, se ocupa, na grande maioria das vezes, de grandezas igualmente fundamentais, ou seja, capazes de descrever bem, pelo menos do ponto de vista clássico [2], o tempo, o espaço e a matéria.

Essas grandezas fundamentais, tal como foram historicamente definidas e/ou padronizadas, não podem ser expressas a partir de outras grandezas, também por isso são chamadas **grandezas fundamentais**. São elas o *i)* **comprimento**, cuja unidade padrão no Sistema Internacional de Unidades (SI) é o metro; *ii)* o **tempo**, cuja unidade padrão no SI é o segundo; *iii)* a **massa**, cuja a unidade padrão é o quilograma e a *iv)* **carga elétrica**, cuja a unidade padrão para a medida é Coulomb (C). Todas as unidade mecânicas clássicas podem ser, de alguma forma, obtidas a partir das três primeiras grandezas fundamentais.

Considerando, a existência das grandezas fundamentais, comprimento, tempo e massa, pode-se introduzir o conceito de dimensão. Na Física, a palavra dimensão, significa a natureza física de uma determinada quantidade. As grandezas fundamentais, estabelecem as dimensões físicas mais simples, o comprimento, possui dimensão L, a massa M, o tempo T e a carga elétrica Q. Note que os símbolos L, M, T e Q, não denotam nenhuma unidade de medida específica, mas sim uma grandeza fundamental. Daí podemos derivar outras grandezas. A área, por exemplo, tem dimensão $(L \times L = L^2)$ independente de sua unidade ser o

[2] Pesquise sobre as diferenças entre a Física Clássica e Moderna.

m^2 ou o ft^2 [3]. A velocidade, por sua vez é uma grandeza cuja a dimensão é $\frac{L}{T}$, independentemente de sua unidade de medida.

Para a determinação da dimensão de uma grandeza derivada, como a velocidade ou área, por exemplo, se utiliza o recurso da análise dimensional.

Análise Dimensional

Quando se trabalha com grandezas cujas as dimensões são desconhecidas, é necessário se proceder uma análise dimensional para determiná-las. Este tipo de análise, permite, dentre outras coisas, a determinação e verificação da correção de unidades de medida e equacionamento utilizado.

Nestes casos, nos referimos a dimensão de uma grandeza a por meio do símbolo $[a]$. Suponha que um experimento determinou que a posição de um corpo é diretamente proporcional à metade do quadrado do tempo de medida conforme a Equação 1.4.

$$x \propto \frac{1}{2}t^2 \tag{1.4}$$

Para converter essa proporcionalidade em igualdade precisamos multiplicá-la por uma constante k de tal forma que a Equação 1.4 fica na forma dada pela Equação 1.5.

$$x = k \cdot \frac{1}{2}t^2 \tag{1.5}$$

No entanto, qual o significado físico de k? A melhor forma de responder tal pergunta é por meio de uma análise dimensional. Conforme mostrado no exemplo abaixo.

[3]Um pé ft (do inglês *foot*) equivale a $0,3048\,m$.

EXEMPLO - Determinando o significado de uma constante desconhecida.

Determine a dimensão de k na equação $x = k \cdot \frac{1}{2}t^2$, onde $[x] = L$ e $[t] = T$

SOLUÇÃO:

Substituindo os símbolos das grandezas por suas respectivas dimensões tem-se

$$L = [k] \cdot T^2$$

Note que a fração $\frac{1}{2}$ foi omitida pois números são adimensionais.

Então:

$$[k] = \frac{L}{T^2}$$

Logo k é uma grandeza dimensional, então deve ter significado físico, neste caso, a dimensão L/T^2 correspondente a grandeza cinemática aceleração. Logo as observações do exemplo, conduzem a equação:

$$x(t) = \frac{1}{2}at^2$$

EXEMPLO - Determinando a unidade de Força em termos de unidades fundamentais.

Sabendo que a Segunda Lei de Newton, dentre outras formas, pode ser enunciada como $F = m\,a$, então determine a unidade de força (N) em termos de unidades de grandezas fundamentais no SI.

SOLUÇÃO:

$$[F] = [m]\,[a] \rightarrow [F] = kg \cdot \frac{m}{s^2}$$

Logo $1\,N = 1\,kg \cdot \frac{m}{s^2}$.

Grandezas escalares e vetoriais

Além da complexidade dimensional de uma grandeza física, elas podem ser classificadas também segundo seu caráter escalar ou vetorial. Uma grandeza escalar é completamente expressa por sua magnitude (parte numérica) e unidade de medida, já as grandezas vetoriais só podem ser completamente descritas quando expressas por magnitude, unidade de medida, direção e sentido.

As grandezas escalares são operadas matematicamente como qualquer escalar matemático, porém as vetorias estão sujeitas ao mesmo rigorismo matemático dos vetores estudados na Geometria Analítica e Álgebra Linear.

O terceiro capítulo destas notas de aula, apresentará uma revisão bastante contextualizada e rigorosa dos métodos de operação com grandezas físicas vetoriais.

CINEMÁTICA DO PONTO MATERIAL

2.1 Cinemática Retilinear

2.1.1 Difinições Fundamentais

As variáveis, jargão e conceitos utilizados para o estudo da Cinemática e Dinâmica são bem estabelecidas, conhecê-las é fundamental para a completa compreensão de toda a discussão proposta na disciplina.

Os conceitos mais fundamentais são os de **Ponto Material** P, **Posição** $\vec{r}$ e **Deslocamento** $\Delta\vec{r}$.

Ponto Material

Definicão 1 *O termo Ponto Material* (P) *refere-se a um ponte geométrico que representa o centro de massa de um corpo e onde estaria virtualmente concentrada toda a massa do mesmo corpo.*

A utilização de modelos físicos nos quais os corpos sejam simplificados como pontos materiais deve ser restrita a casos nos quais as dimensões do corpo, ou sua rotação, não influam sobre a análise mecânica pretendida. Em Física I, trabalharemos principalmente com problemas desta natureza.

Vetor Posição

Definicão 2 *A posição, ou como é mais comumente denominado, o Vetor Posição,* $(\vec{r})$ *é o vetor que descreve as coordenadas do Ponto Material em um determinado instante no tempo em relação a uma origem para o sistema de coordenadas.*

A Fig. 2.1 mostra como o vetor posição determina as coordenadas do ponto material no espaço. Obviamente esta é uma generalização espacial, nesta seção serão estudas apenas situações nas quais o Ponto Material ocupará apenas posições ao longo de um mesmo eixo, característica própria da Cinemática Retilinear.

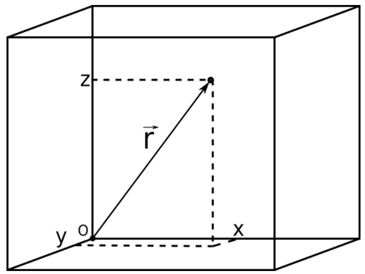

Figure 2.1: Coordenadas de P determinadas por $\vec{r}$.

Deslocamento

O deslocamento $(\Delta\vec{r})$ de P pode ser entendido como:

Definicão 3 *É definido como deslocamento $(\Delta\vec{r})$ de P, qualquer variação no vetor posição $(\vec{r})$ ocorrida ao longo do tempo.*

onde $(\Delta\vec{r})$ é definido como:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t) \tag{2.1}$$

No estudo da Cinemática Retilinear, devido aos movimentos serem sempre unidirecionais, é comum que seja adotada a notação escalar das grandezas, ou seja, a magnitude do vetor posição e quaisquer deslocamentos sofridos por ele podem ser obtidos algebricamente, já suas coordenadas podem ser representadas por um escalar s.

Esta convenção admite a seguinte propriedade:

Demonstração 1 *Considerando que:*

$$|\vec{r}| = \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}$$

e que $x = s$, $y = 0$ e $z = 0$ então;

$$|\vec{r}| = \sqrt{(s^2)}$$

e que,

$$|\vec{r}| = s$$

Por conseguinte, o deslocamento retilinear pode ser determinado por:

$$\Delta s = s(t + \Delta t) - s(t) \tag{2.2}$$

2.2 Grandezas Cinemáticas

A Cinemática, como parte da Mecânica que se ocupa da descrição espacial do movimento, se baseia em três grandezas básicas. A posição, já descrita na seção anterior, é a primeira delas, as demais são a velocidade $\vec{v}$ e a aceleração $\vec{a}$.

2.2.1 Velocidade

Na Cinemática a velocidade é tratada de duas formas distintas; como velocidade média e velocidade instantânea ou simplesmente velocidade.

Velocidade Média

Quando um Ponto Material P, translada de uma posição $\vec{r}$, para uma posição $\vec{r'}$ durante um intervalo de tempo Δt, então a velocidade média pode ser obtida conforme o mostrado na Eq. 2.3.

$$\vec{v}_{med} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \tag{2.3}$$

Onde, $\Delta\vec{r}$ é o deslocamento e Δt o intervalo de tempo transcorrido durante o deslocamento, conforme mostrado na Fig. 2.2.

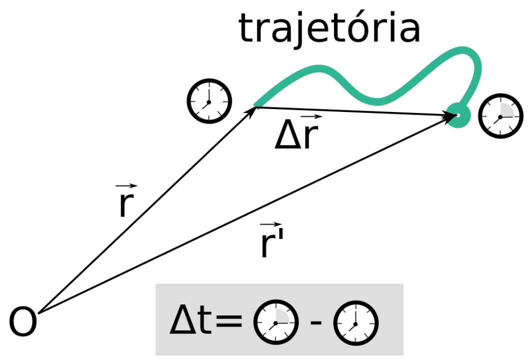

Figure 2.2: Descrição visual do conceito de velocidade média.

Ocasionalmente pode interessar a determinação da velocidade média ao longo da trajetória de comprimento s_T. Nestes casos, define-se a velocidade média de percurso como v_{perc}, que é uma grandeza escalar definida pela Eq. 2.4.

$$(v_{perc})_{med} = \frac{s_T}{\Delta t} \tag{2.4}$$

Onde s_T é comprimento da trajetória percorrida por P.

Velocidade Instantânea

Quando o intervalo de tempo considerado para a determinação da velocidade média diminui gradativamente, o deslocamento tende a zero e a valor da velocidade média tende para o valor da velocidade instantânea, conforme mostrado na Fig. 2.3 e a Eq. 2.5.

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \tag{2.5}$$

CINEMÁTICA DO PONTO MATERIAL

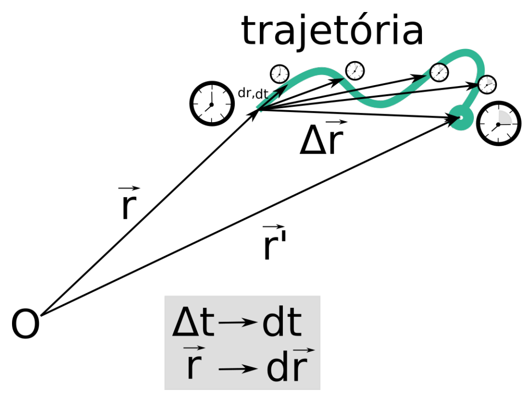

Figure 2.3: Descrição visual do conceito de velocidade instantânea.

Por conseguinte a velocidade de um corpo é definida como:

Definicão 4 *Velocidade é a taxa temporal de variação da posição de um corpo.*

Como a Eq. 2.5 mostra a velocidade como taxa de variação da posição, pode interessar, em casos como estes, que, a partir da velocidade dada como função do tempo, se obtenha a função horária da posição. O método para tal consiste na obtenção da antiderivada de $v(t)$, conforme mostrado abaixo. Por motivo de simplificação matemática, considere o caso retilinear.

$$v(t) = \frac{ds}{dt} \rightarrow \int_{s(t)}^{s(t+\Delta t)} ds = \int_{t}^{t+\Delta t} v(t)dt$$

Considerando as condições iniciais arbitradas como $t = 0$ e $s(t = 0) = 0$, então a relação anterior pode ser escrita na forma da Eq. 2.6, onde a posição inicial $s(0)$ é a constante adicionada na integração definida.

$$s(t) = \left(\int_{0}^{t} v(t)dt \right) + s(0) \tag{2.6}$$

2.2.2 Aceleração

Assim como a velocidade, a aceleração pode ser tratada de duas formas distintas, como aceleração média e instânea. A lógica para obtenção de cada uma das grandezas é semelhante àquela utilizada para a velocidade.

Aceleração Média

A aceleração média de um corpo é definida como razão entre a variação da velocidade e o intervalo de tempo transcorrido durante esta variação, conforme mostrado na Eq. 2.7.

$$\vec{a}_{med} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta\vec{t}} \tag{2.7}$$

Aceleração Instantânea

A aceleração instante, ou simplesmente aceleração é definida como se segue:

Definicão 5 *A aceleração é definida como a taxa temporal de variação da velocidade conforme mostrado na Eq. 2.8.*

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} \tag{2.8}$$

Como consequência direta da Eq. 2.8, pode-se provar que:

Demonstração 2 *Se $v = \frac{ds}{dt}$ e $a = \frac{dv}{dt}$, então a primeira equação pode ser substituída na segunda da seguinte forma:*

$$a = \frac{d\left(\frac{ds}{dt}\right)}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} \tag{2.9}$$

Assim como demonstrado para a Eq. 2.6, a função $v(t)$ pode ser obtida pela integração de $a(t)$, conforme mostra a demonstração:

$$a(t) = \frac{dv}{dt} \rightarrow \int_{v(t)}^{v(t+\Delta t)} dv = \int_{t}^{t+\Delta t} a(t)dt$$

Considerando a condição inicial arbitrada como $t = 0$, então a relação anterior pode ser escrita na forma da Eq. 2.6.

$$v(t) = \int_{0}^{\Delta t} a(t)dt \tag{2.10}$$

EXEMPLO - Determinando a aceleração e o deslocamento a partir da velocidade de um corpo. . Uma partícula (ponto material), desloca-se retilinearmente segundo a função horário $v(t) = (8,0.t^2 - 4,0t)m.s^{-1}$. Determine *a)* sua velocidade inicial; *b)* seu deslocamento Δs em $10\ s$ de movimento e *c)* a função horária da aceleração.

SOLUÇÃO:

a) A velocidade inicial é definida como aquela ocorrida em $t = 0$, logo $v(0)$ que pode ser determinada como:

$$v(0) = 8,0\ .\ 0^2 - 4,0\ .\ 0 = 0,0m.s^{-1}$$

b) O deslocamento pode ser obtido fazendo-se a integral definida no intervalo considerado, conforme mostrado na Equação 2.6, porém, como a posição inicial é desconhecida, o problema exige apenas o cálculo do deslocamento $\Delta s = s(t) - s(0)$, conforme se segue:

$$\Delta s = \int_0^{10} (8,0t^2 - 4,0\,t)dt = \left[\frac{8,0}{3}t^3 - 2,0t^2\right]_0^{10} = \frac{7,4\ .\ 10^3}{3}\ m$$

c) Já a função horária da aceleração, é obtida por meio da primeira derivada temporal de $v(t)$, conforme segue:

$$a(t) = \frac{d((8,0.t^2 - 4,0t))}{dt} = (16,0t - 4)m.s^{-2}$$

2.2.3 Relação Diferencial entre $v(t)$ e $s(t)$

Sabendo que tanto a posição quanto a velocidade são funções do tempo, podemos, baseados no Cálculo, a priori, supor que possa existir uma função composta por ambas $v \circ s$.

Mas por que não o contrário? Por motivos físicos principalmente, é mais razoável supor uma função de velocidade dependente da posição, do que uma posição dependente da velocidade, já que a posição pode ser interpretada como uma grandeza fundamental e a velocidade só pode ser entendida como uma grandeza derivada.

A composição $(v \circ s)$ sugerida, pode ser matematicamente realizada, dentre outras formas menos rigorosas, principalmente por meio da regra da cadeia que diz - para este caso - que se v é diferenciável em s, então esta derivada pode ser obtida pelo produto da derivada de v em u pela derivada de u em s, onde, por conveniência, $u = t$, ou seja:

$$\frac{dv}{ds} = \frac{dv}{du} \cdot \frac{du}{ds} = \frac{dv}{dt} \cdot \frac{dt}{ds}$$

Após a aplicação da regra, pode-se notar que o primeiro fator do produto das derivadas $\frac{dv}{dt}$ é a própria definição de aceleração, enquanto o segundo fator $\frac{dt}{ds}$ é o inverso da definição de velocidade, ou seja, $\frac{1}{v}$, podendo a equação ser escrita na forma dada em Eq. 2.11.

$$\frac{dv}{ds} = a \cdot \frac{1}{v} \rightarrow v \cdot dv = a \cdot ds \tag{2.11}$$

CINEMÁTICA DO PONTO MATERIAL

EXEMPLO - Atração magnética em meio viscoso.

Uma partícula ferromagnética está submetida à influência de um campo magnético conforme ela se move para baixo em um fluído que preenche o espaço entre as placas A e B da figura. O ponto material, que incialmente estava em repouso, foi abandonado, em uma posição equidistante do centro das placas à 100 mm de cada uma delas. Seu movimento dá-se com aceleração $a(s) = (4s)m.s^{-2}$. Determine a velocidade com que ele atinge a placa B, assim como o tempo de movimento.

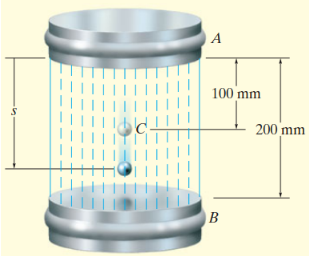

Figure 2.4: Adaptado de Hibbeler.

SOLUÇÃO:

É notável que a função da aceleração $a(s)$, tem sinal positivo, sugerindo um aumento da aceleração à medida que a partícula progride na trajetória. É igualmente notável que o movimento é descendente, já que o objetivo de cálculo dá-se na placa B a partir do ponto C. Devido a essas peculiaridades do enunciado, adotaremos o sentido $A \to B$ como positivo para a análise.

Aplicando a relação diferencial 2.11, para a solução e a devidas conversões de unidade pode-se fazer:

$$vdv = ads \to \int_0^v vdv = \int_{0{,}10\,m}^{s(t)} 4s\,ds$$

$$\frac{1}{2}v^2 = \left[\frac{4}{2}s^2\right]_{0{,}10}^{s(t)} \to v(s) = 2\sqrt{s^2 - 0{,}01},$$

que para 0,20 m (200 mm entre A e B), resulta em: *continua...*

$$v(0,20\,m) \approx 0,346\,m/s,$$

onde a raiz positiva foi escolhida pois, como dito, este é o sentido convencionado para o movimento. Conhecida a velocidade $v(s) = 2\sqrt{s^2 - 0,01}$, pode-se utilizar sua definição $v = ds/dt$, para a determinação do tempo de movimento.

$$v = \frac{ds}{dt} \rightarrow \frac{ds}{v} = dt \rightarrow \int_{0,10}^{s(t)} \frac{ds}{(2\sqrt{s(t)^2 - 0,01})} = \int_0^t dt,$$

cuja solução é:

$$ln(\sqrt{s(t)^2 - 0,01} + s(t))_{0,10}^{s(t)} = 2t \rightarrow ln(\sqrt{s(t)^2 - 0,01} + s(t)) + 2,33 \approx 2t$$

que substituindo $s(t) = 0,20m$ resulta em $t \approx 0,658s$.
Consulte sua tabela de integrais caso haja dúvida no processo de integração.

2.2.4 Caso Especial: O Movimento com Aceleração Constante

Em alguns fenômenos e idealizações, um comportamento peculiar pode ser observado, a ocorrência de aceleração constante. Provavelmente, o fenômeno deste tipo mais amplamente conhecido é a queda livre.

Definicão 6 *A queda livre é um tipo de movimento sobre o qual atua exclusivamente a força gravitacional (F_G), por isso é uma idealização, já que quaisquer outras interferências dinâmicas devem ser desprezadas.*

De forma generalizada, para se compreender o movimento com aceleração constante, deve-se partir da Equação 2.8 admitindo que que $\frac{d\vec{v}}{dt} = k$ e que k é uma aceleração constante, $k = \vec{a}$.

Deste modo, podemos determinar a função horária da velocidade em um movimento deste tipo. *As funções horárias de velocidade, são funções capazes de determinar o vetor velocidade como função exclusiva do tempo, endo escritas na forma $y = v(t)$.*

Demonstração 3 *Se:*

$$a_{const} = \frac{dv}{dt},$$

onde o caráter vetorial foi propositalmente omitido por tratar-se de cinemática retilinear; então se pode fazer antiderivação da seguinte forma:

$$dv = a\,.\,dt \rightarrow \int_{v(t=0)}^{v(t+\Delta t)} (dv) = \int_{t=0}^{t+\Delta t} (a\,.\,dt),$$

onde o limite inferior foi assumido como $(t = 0)$ *e que resulta em:*

$$\Delta v = a\,.\,t,$$

Finalmente dando origem a Equação 2.12.

$$v(t) = a\,.\,t + v(0) \tag{2.12}$$

Onde $v(t)$ *é a velocidade no tempo* $t > 0$, a *a aceleração constante e* $v(0)$, *a velocidade inicial.*

Para a posição $s(t)$, ou $\vec{r}(t)$ [1], deve-se repetir o mesmo procedimento da Demonstração 3 no entanto, partindo da Equação 2.6.

Demonstração 4 *Se* $s(t) = \int_0^t v(t)dt$ *e* $v(t) = a\,.\,t + v(0)$, *então:*

$$s(t) = \left(\int_0^t (a\,.\,t + v(0))dt\right) + s(0),$$

resultando na forma da **função horária da posição** *dada pela Equação 2.13.*

$$s(t) = \frac{1}{2}a\,.\,t^2 + v(0)\,.\,t + s(0); \tag{2.13}$$

[1] Em nosso curso geralmente utilizaremos s para denotar a posição como uma grandeza escalar e $\vec{r}$ para representar a posição como uma grandeza vetorial.

CINEMÁTICA DO PONTO MATERIAL

Uma terceira ferramenta, muito utilizada em casos onde a aceleração do movimento retilinear, é constante é a Equação de Torricelli dada pela Equação 2.14. Veja sua demonstração.

Demonstração 5 *Tomando t na função horária da velocidade, na forma $t = \frac{v(t)-v(0)}{a}$, e substituindo o seu valor na Equação 2.13.*

Pode-se fazer:

$$i)\; s(t) = s(0) + v(0)\frac{v(t)-v(0)}{a} + \frac{1}{2}a\left(\frac{v(t)-v(0)}{a}\right)^2$$

$$ii)\; s(t) = s(0) + v(0)\frac{v(t)-v(0)}{a} + \frac{1}{2}a\left(\frac{v(t)-v(0)}{a}\right)^2$$

$$iii)\; s(t) = s(0) + \frac{v(t)v(0)-v(0)^2}{a} + \frac{1}{2}a\left(\frac{v(t)^2-2v(t)v(0)+v(0)^2}{aa}\right)$$

$$iv)\; s(t) - s(0) = \frac{v(t)v(0)-v(0)^2}{a} + \left(\frac{v(t)^2-2v(t)v(0)+v(0)^2}{2a}\right)$$

$$v)\; s(t) - s(0) = \frac{2v(t)v(0)-2v(0)^2+v(t)^2-2v(t)v(0)+v(0)^2}{2a}$$

$$vi)\; s(t) - s(0) = \frac{2v(t)v(0)-2v(0)^2+v(t)^2-2v(t)v(0)+v(0)^2}{2a}$$

$$vii)\; \Delta s = \frac{-v(0)^2+v(t)^2}{2a} \to 2a\Delta s = -v(0)^2+v(t)^2$$

$$v(t)^2 = v(0)^2 + 2a\Delta s \tag{2.14}$$

Uma demonstração mais simples e, simultaneamente, mais rigorosa, poderia ser obtida da Equação 2.11, conforme demonstrado abaixo.

Demonstração 6

$$v \cdot dv = a \cdot ds \rightarrow \int_{v(0)}^{v(t)} v \cdot dv = \int_{s(0)}^{s(t)} a \cdot ds$$

$$\frac{v(t)^2 - v(0)^2}{2} = a(s(t) - s(0)) \rightarrow v(t)^2 - v(0)^2 = 2a\Delta s$$

resultando na forma da Equação 2.11

$$v(t)^2 = v(0)^2 + 2a\Delta s$$

Uma importante característica da Equação de Torricelli é que é independente do tempo, de forma tal que velocidades, acelerações e deslocamentos podem ser obtidos para situações onde esta grandeza for omitida ou desconhecida.

Ainda que a Equação 2.14 seja válida exclusivamente para casos com aceleração constante, a relação expressa pela Equação 2.11, não o é, podendo ser aplicada de forma generalizada.

Devido ao algebrismo próprio do movimento com aceleração constante ser muito elementar e idêntico à abordagem comum utilizada durante o ensino médio, não serão oferecidos exemplos de uso das equações nesta subseção.

GRANDEZAS VETORIAIS E SUAS OPERAÇÕES

3.1 Notação Vetorial

Os vetores são entes geométricos cuja a competência de estudo é domínio da Geometria Analítica e da Álgebra Linear. Neste capítulo, estudaremos os vetores aplicados à representação de grandezas físicas que só ficam completamente descritas quando expressas por:

1. Módulo ou magnitude, representado por seu valor numérico e/ou comprimento do segmento de reta representativo do vetor;
2. Direção, inclinação de sua ação a partir de alguma convenção referencial;
3. Sentido ou orientação;
4. Unidade de medida.

Para a melhor compreensão de cada uma das quatro características listadas, considere o exemplo de um vetor representativo da grandeza física Posição ($\vec{r}$ ou $\mathbf{R}$ [1]).

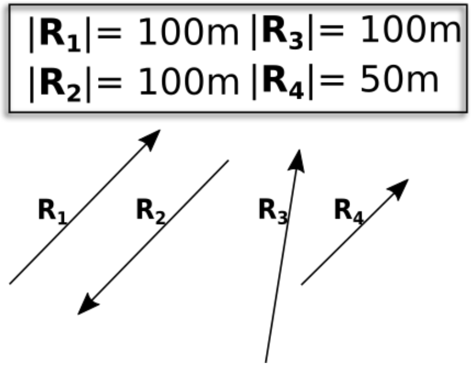

Figure 3.1: Representação de múltiplos vetores força.

Na Figura 3.1, $\mathbf{F_1}$ e $\mathbf{F_2}$, são vetores de mesmo módulo, mesma direção e sentidos opostos. $\mathbf{F_2}$ e $\mathbf{F_3}$, têm mesmo módulo, mas direções distintas, não sendo possível, por isso, terem o mesmo sentido. Já $\mathbf{F_4}$ possui mesma direção e sentido de $\mathbf{F_1}$, porém módulo distinto.

[1] As duas simbologias são tipograficamente equivalentes, mas apenas a primeira é aceita na escrita manual.

Na figura ainda se pode notar outra importante característica da representação vetorial de grandezas físicas. *Trata-se da impossibilidade de o comprimento do seguimento de reta do vetor ser dimensionalmente igual à grandeza que representa, de forma tal que dizemos que aquele comprimento deve ser, de alguma maneira, proporcional à magnitude que representa.*

3.1.1 Componentes Vetoriais Ortogonais

Um vetor não nulo, pode, segundo sua orientação relativa a um sistema de c coordenadas adotado ser unidimensional, bidimensional ou tridimensional. A rigor, vetores associados à variações temporais, podem ainda ser entendidos como tetradimensionais, porém não existem representações euclidianas para esses casos.

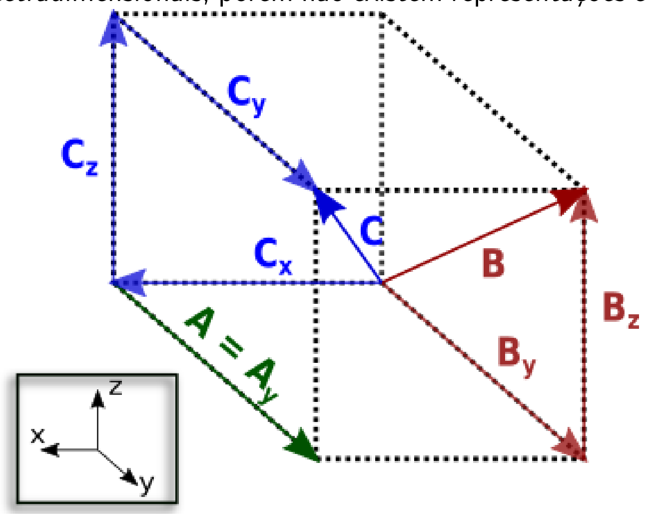

Figure 3.2: Representação de vetores unidimensionais ($\mathbf{A}$), bidimensionais ($\mathbf{B}$) e tridimensionais ($\mathbf{C}$), com suas respectivas componentes ortogonais.

Na Figura 3.2, se veem vetores de diferentes dimensionalidades e suas respectivas componentes ortogonais projetadas sobre um sistema de coordenadas cartesiano.

Conhecidas as componentes ortogonais de um vetor $\mathbf{V}$, então este vetor pode ser expresso conforme a

Equação 3.1 .

$$\mathbf{V} = [V_x, V_y, V_z] \text{ ou } \mathbf{V} = \mathbf{V_x} + \mathbf{V_y} + \mathbf{V_z} \tag{3.1}$$

Cada uma das componentes ortogonais por sua vez são obtidas por meio de relações trigonométricas simples do triângulo retângulo.

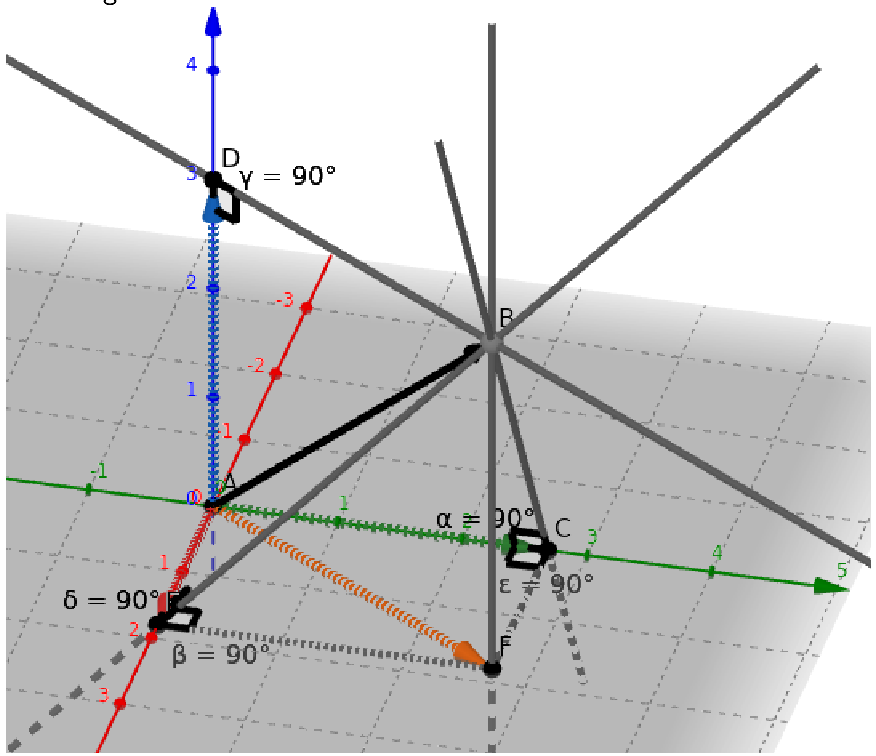

Figure 3.3: Decomposição ortogonal de um vetor no espaço em suas respectivas componentes ortogonais.

Na Figura 3.3 o vetor $\vec{AB}$ foi decomposto em suas componentes $\vec{AC}$, na direção de x, $\vec{AD}$, na direção z e $\vec{AE}$, na direção de y. As componentes são ditas ortogonais, pois são obtidas por meio da projeção reta (ângulo de $90°$) sobre cada um dos eixos, conforme pode ser visto nos ângulos α, γ e δ, mostrados na figura.

GRANDEZAS VETORIAIS E SUAS OPERAÇÕES

Já o vetor $\vec{AF}$, é uma projeção ortogonal de $\vec{AB}$ sobre o plano, este tipo de estratégia pode facilitar a vizualização das componentes ortogonais do vetor espacial.

Como dito, a magnitude de cada componente pode ser obtida pelas relações trigonométricas do triângulo retângulo.

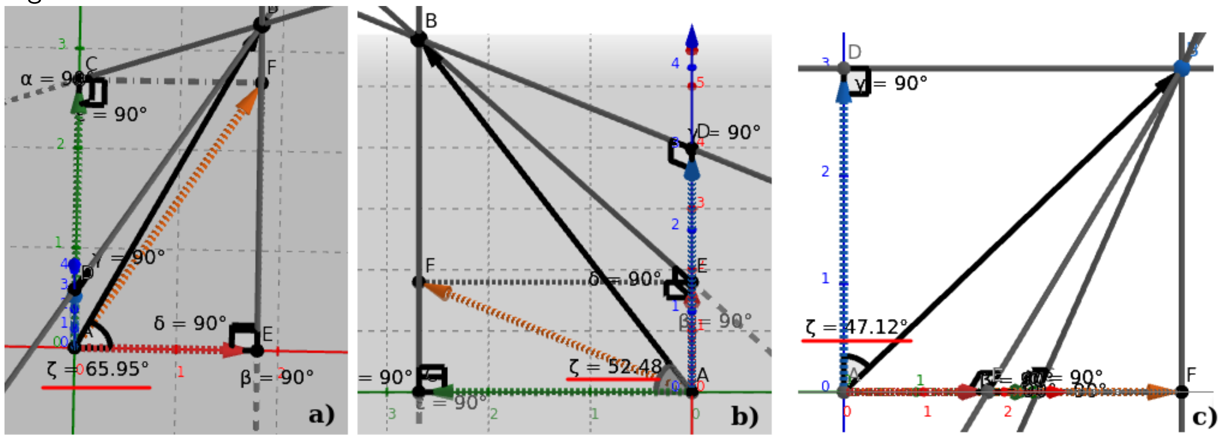

Figure 3.4: Ângulos de cada uma das compontens ortogonais em relação ao próprio vetor (valores sublinhados em vermelho).

A Figura 3.4, mostra cada um dos ângulos compostos pelo vetor $\vec{AB}$ e suas componetnes ortogonais. Neste caso, a relação trigonométrica cosseno, pode ser utilizada para a determinação das magnitudes, conforme pode ser visto no exemplo.

EXEMPLO - Determinação da magnitude de componentes ortogonais. Determine a magnitude da componente ortogonal $\vec{AE}$ do vetor $\vec{AB}$ utilizando relações trigonométricas do triângulo retângulo se $||\vec{AB}|| = 4,41u$.

SOLUÇÃO: Na Figura 3.4 **a)**, nota-se que AEB formam um triângulo retângulo, cujo o cateto adjacente em relação ao ângulo $B\hat{A}E = 65,95°$ é a componente $\vec{AE}$ que se deseja calcular. Logo:

$$cos(65,95°) = \frac{||\vec{AE}||}{10} \rightarrow ||\vec{AE}|| \approx 0,41.10 = 1,80u$$

Determine as demais componentes ortogonais do vetor.

3.1.2 Módulo ou magnitude de uma grandeza vetorial

Quando as componentes ortogonais de um vetor $(\mathbf{A})$ são conhecidas, então sua magnitude pode ser determinada por aplicação direta da Teorema de Pitágoras, conforme mostra a Equação 3.2.

$$V = ||\mathbf{V}|| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2} \tag{3.2}$$

3.1.3 Igualdade Vetorial

A igualdade vetorial, e mais especificamente de grandezas vetoriais, é determinada quando todas as características de um vetor são iguais entre si. Ou seja, *se duas grandezas físicas possuem, mesmo módulo, mesma direção, mesmo sentido e mesmas unidades, então estas grandezas serão iguais*.

Ainda que pareça afirmação óbvia e facilmente dedutível, é preciso mencioná-la de forma pormenorizada, pois sua principal consequência pode não ser igualmente óbvia.

O vetores, não precisam ocupar o mesmo lugar geométrico em seu sistema de coordenadas para serem iguais, inclusive, suas coordenadas da origem e extremidade, podem ser completamente diferentes e ainda assim continuarem a ser iguais.

A Figura 3.5, mostra três vetores $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ e$\mathbf{C}$ representados em um plano ortogonal de coordenadas.

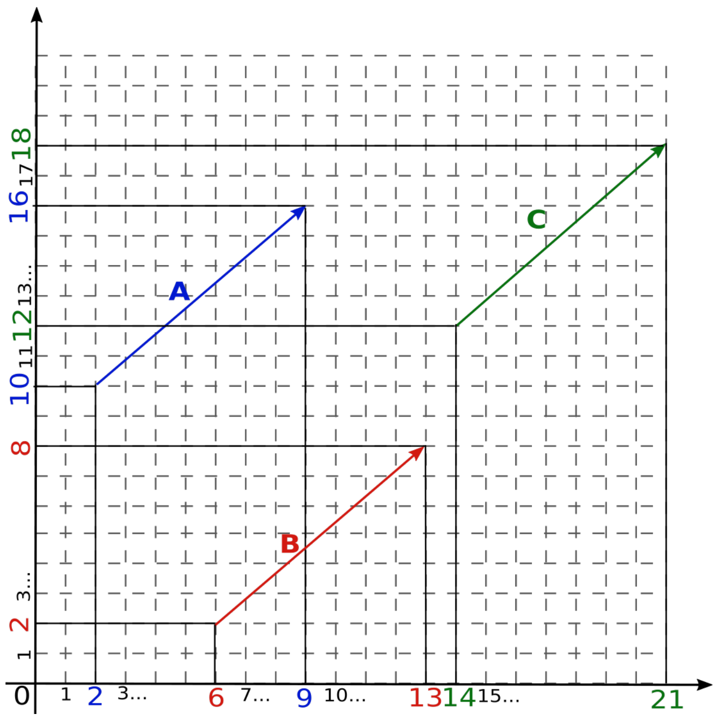

Figure 3.5: Representação dos vetores iguais em distintos lugares geométricos.

Note que os pares ordenados representativos das extremidades e origens de cada um dos vetores são completamente distintos, no entanto, compondo os vetores utilizando a notação vetorial unitária, se tem:

1. $\mathbf{A} = (9-2)\vec{i} + (16-10)\vec{j} = 7\vec{i} + 6\vec{j} + 0\vec{k}$;
2. $\mathbf{B} = (13-6)\vec{i} + (8-2)\vec{j} = 7\vec{i} + 6\vec{j} + 0\vec{k}$;
3. $\mathbf{C} = (21-14)\vec{i} + (18-12)\vec{j} = 7\vec{i} + 6\vec{j} + 0\vec{k}$,

demonstrando como são todos iguais entre si.

3.1.4 Vetores Unitários

Um vetor unitário $\vec{u}$, é qualquer vetor cujo o módulo é igual a uma unidade, ou seja, se $\mathbf{A} = [A_x, A_y, A_z]$, $\mathbf{A}$ será unitário se e somente se $||\mathbf{A}|| = 1$.

Três destes vetores bastante tradicionais são os vetores:

- $\vec{i} = [1, 0, 0]$ - vetor unitário na direção de x;
- $\vec{j} = [0, 1, 0]$ - vetor unitário na direção de y;
- $\vec{k} = [0, 0, 1]$ - vetor unitário na direção de z.

conforme pode ser visto na Figura 3.6.

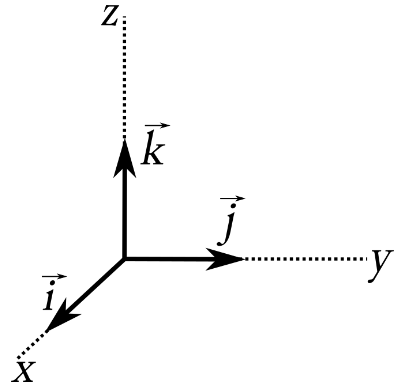

Figure 3.6: Representação dos vetores unitários nos eixos coordenados.

Conhecidos os vetores unitários, pode-se representar qualquer vetor em um sistema de coordenadas cartesiano, por meio da expressão da componentes ortogonais como múltiplas ou submúltiplas desses vetores unitarios, na forma dada pela Equação 3.3, que será a expressão vetorial adotada no restante deste texto. .

$$\mathbf{V} = V_x\vec{i} + V_y\vec{j} + V_z\vec{k} \tag{3.3}$$

Para melhor compreender o significado da Equação 3.3, suponha um vetor $\mathbf{A}$, cujas componentes valham $A_x = 2u$, $A_y = -8u$ e $A_z = 3u$, então sua expressão segundo esta equação seria $\mathbf{A} = (2\vec{i} - 8\vec{j} + 3\vec{k})\ u$.

3.2 Soma e Subtração com Vetores

As operações de soma e subtração vetorial são algebricamente equivalentes exceto que na segunda se realiza a soma com o negativo da parcela (vetor operando) subtraída. Ou seja, se $\mathbf{S_1}$ é um vetor obtido pela soma dos vetores $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ e $\mathbf{S_2}$, é obtido pela subtração de $\mathbf{A}$ por $\mathbf{B}$, então ambas podem ser obtidas por uma soma vetorial conforme mostram as Equações 3.4 e 3.5, respectivamente.

$$\mathbf{S_1} = \mathbf{A} + \mathbf{B} \tag{3.4}$$

$$\mathbf{S_2} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B}) \tag{3.5}$$

Geometricamente estas operações podem ser representadas da forma descrita na Figura 3.7, onde S_1 foi obtido pela *regra do paralelogramo*, e S_2 pela *regra do triângulo*.

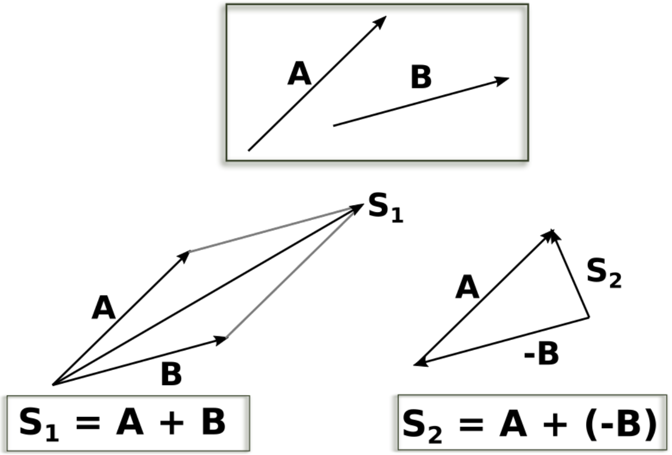

Figure 3.7: Representação dos vetores unitários nos eixos coordenados.

Em um sistema cartesiano de coordenadas qualquer soma ou subtração podem ser obtidas pela Equação 3.6, respeitados os sinais das magnitudes das componentes.

$$\sum^{n} \mathbf{V}_i = \sum^{n} V_{x_i}\vec{i} + \sum^{n} V_{y_i}\vec{j} + \sum^{n} V_{z_i}\vec{k} \tag{3.6}$$

EXEMPLO - Somas e subtrações vetoriais.

Se $\mathbf{A} = -2\vec{i} + 3\vec{j} - 10\vec{k}$, $\mathbf{B} = 1\vec{i} - 5\vec{j} + 2\vec{k}$ e $\mathbf{C} = 9\vec{i} - 2\vec{j} - 1\vec{k}$; Determine: *a)* $\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C}$; *b)* $\mathbf{B} - \mathbf{A} - \mathbf{C}$ e *c)* $\mathbf{B} - \mathbf{C} + \mathbf{A}$

SOLUÇÃO:

a) $\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} = (-2 + 1 + 9)\vec{i} + (3 - 5 - 2)\vec{j} + (-10 + 2 - 1)\vec{k} = 8\vec{i} - 4\vec{j} - 9\vec{k}$

b) $\mathbf{B} - \mathbf{A} + \mathbf{C} = (1 + 2 - 9)\vec{i} + (-5 - 3 + 2)\vec{j} + (+2 + 10 + 1)\vec{k} = -6\vec{i} - 6\vec{j} + 13\vec{k}$

c) $\mathbf{B} - \mathbf{C} + \mathbf{A} = (1 - 9 - 2)\vec{i} + (-5 + 2 + 3)\vec{j} + (+2 + 1 - 10)\vec{k} = -10\vec{i} - 0\vec{j} - 7\vec{k}$

3.3 Funções Vetoriais

Uma função vetorial é uma função matemática cuja a imagem é composta por um conjunto de vetores e o domínio um conjunto de escalares reais.

Muitas grandezas físicas mecânicas se comportam desta maneira, já que podem ser expressas como funções temporais, ou espaciais. Desta forma, se $\mathbf{G}$ é uma grandeza vetorial que é função de uma outra grandeza escalar real h, então a função vetorial é escrita como $\mathbf{G}(h)$ ou $\vec{G(h)}$. Sendo, no entanto, função de múltiplas grandezas escalares - digamos h, l e m - então a função vetorial fica $\mathbf{G}(h, l, m)$.

A complexidade de uma função vetorial geralmente é dependente do sistema de coordenadas adotados. Em um sistema cartesiano, pelo menos uma das componentes deverá ser um função, sendo possível que as três coordenadas o sejam, conforme mostram as Equações 3.7, 3.8 e 3.9.

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(h) &= G_x(h)\vec{i} + G_y\vec{j} + G_z\vec{k} \\ \mathbf{G}(h) &= G_x\vec{i} + G_y(h)\vec{j} + G_z\vec{k} \\ \mathbf{G}(h) &= G_x\vec{i} + G_y\vec{j} + G_z(h)\vec{k} \end{aligned} \tag{3.7}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(h) &= G_x(h)\vec{i} + G_y(h)\vec{j} + G_z\vec{k} \\ \mathbf{G}(h) &= G_x\vec{i} + G_y(h)\vec{j} + G_z(h)\vec{k} \\ \mathbf{G}(h) &= G_x(h)\vec{i} + G_y\vec{j} + G_z(h)\vec{k} \end{aligned} \tag{3.8}$$

$$\mathbf{G}(h) = G_x(h)\vec{i} + G_y(h)\vec{j} + G_z(h)\vec{k} \tag{3.9}$$

Típicas funções vetoriais utilizadas na Mecânica são funções cinemáticas horárias $(\mathbf{a}(t), \mathbf{v}(t), \mathbf{s}(t))$, ou funções de força, dependentes do posição $(\mathbf{F}(x, y, z))$.

3.3.1 Derivadas de funções vetoriais

O processo de derivação de funções vetoriais no sistemas cartesiano de coordenadas trata cada uma das funções componentes como uma função independente que, portanto, pode ser derivada independentemente das demais. Assim a derivada da função vetorial $\mathbf{G}(h)$ é dada pela Equação 3.10.

$$\frac{\mathbf{G}(h)}{dh} = \frac{dG_x}{dh}\vec{i} + \frac{dG_y}{dh}\vec{j} + \frac{dG_z}{dh}\vec{k} \tag{3.10}$$

EXEMPLO - Obtendo a aceleração e velocidade a partir do vetor $\mathbf{r}(t)$. A posição de uma partícula é determinada pela função:

$$\mathbf{r}(\mathbf{t}) = \left[(2t^2)\vec{i} + (2t^3 - 3)\vec{j} + (-t^3 + 2t^2)\vec{k}\right] m$$

Determine as funções vetoriais horárias de velocidade e aceleração.

SOLUÇÃO:

Considerando as definições de velocidade $v(t) = \frac{dr}{dt}$ e aceleração $a(t) = \frac{dv}{dt}$, basta aplicá-las ao vetor $\mathbf{r}(\mathbf{t})$.

$$i)\ \mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \left[\frac{d(2t^2)}{dt}\vec{i} + \frac{d(2t^3 - 3)}{dt}\vec{j} + \frac{d(-t^3 + 2t^2)}{dt}\vec{k}\right] m/s = \left[(4t)\vec{i} + (6t^2)\vec{j} + (-3t^2 + 4t)\vec{k}\right] m/s$$

$$ii)\ \mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}(\mathbf{t})}{dt} = \left[\frac{4t}{dt}\vec{i} + \frac{6t^2}{dt}\vec{j} + \frac{-3t^2 + 4t}{dt}\vec{k}\right] m/s^2 = \left[4\vec{i} + (12t)\vec{j} + (-6t + 4)\vec{k}\right] m/s^2$$

O caso particular de derivadas em relação ao tempo, comuns para as grandezas cinemáticas, é também representado pela notação ponto, quando se adiciona um ponto sobre a componente, x por exemplo, indicando que esta está sendo derivada no tempo, ficando $\dot{x}$. As Equações 3.11 e 3.12 mostram o uso deste tipo de notação na definição vetorial dos vetores velocidade e aceleração.

$$\mathbf{v}(t) = \left[\dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}\right] \frac{L}{T} \tag{3.11}$$

$$\mathbf{a}(t) = \left[\ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}\right] \frac{L}{T^2} \tag{3.12}$$

3.3.2 Integrais de funções vetorias

As funções vetoriais também podem ser integradas, em um processo similar ao da derivação. Cada uma das funções componentes são integradas como se se tratassem de funções independentes. A Equação 3.13, mostra como o procedimento deve ser realizado, para o caso de uma vetor arbitrário $\mathbf{V}(h)$.

$$\mathbf{V}(h) = \left(\int V_x dh\right)\vec{i} + \left(\int V_y dh\right)\vec{j} + \left(\int V_z dh\right)\vec{k} \tag{3.13}$$

Na Equação 3.13, é importante notar que o símbolo de integração utilizado é genérico, sendo possível realizar o procedimento para integrais simples, múltiplas, definidas e indefinidas.

EXEMPLO - Determinando o deslocamento de um partícula. Considere uma partícula que se move com velocidade $\mathbf{v}(t) = \left[-15t\vec{i} + 8\vec{j} + (-50t + 30)\vec{k}\right] m/s$

Determine o deslocamento desta partícula em metros para 60s de movimento.

SOLUÇÃO:

Se $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ então $r(t) = \left(\int \mathbf{v}dt\right) + \mathbf{r}(0)$ e $r(t) - \mathbf{r}(0) = \Delta\mathbf{r} = \int \mathbf{v}dt$

Resolvendo a última relação para o vetor $\mathbf{v}(t) = \left[-15t\vec{i} + 8\vec{j} + (-50t + 30)\vec{k}\right] m/s$ tem-se:

$$\Delta\mathbf{r} = \int_0^{60s} \left[-15t\vec{i} + 8\vec{j} + (-50t + 30)\vec{k}\right] dt$$

reescrevendo...

$$\Delta\mathbf{r} = \left(\int_0^{60s} -15tdt\right)\vec{i} + \left(\int_0^{60s} 8dt\right)\vec{j} + \left(\int_0^{60s} (-50t + 30)dt\right)\vec{k}$$

$$\Delta\mathbf{r} = -15\frac{60^2}{2}\vec{i} + 5 \cdot 60\vec{j} + \left(-50\frac{60^2}{2} + 30 \cdot 60\right)\vec{k} = (-27000\vec{i} + 480\vec{k} - 88200\vec{z})m$$
