



Testes de Hipótese

Luciano Barbosa

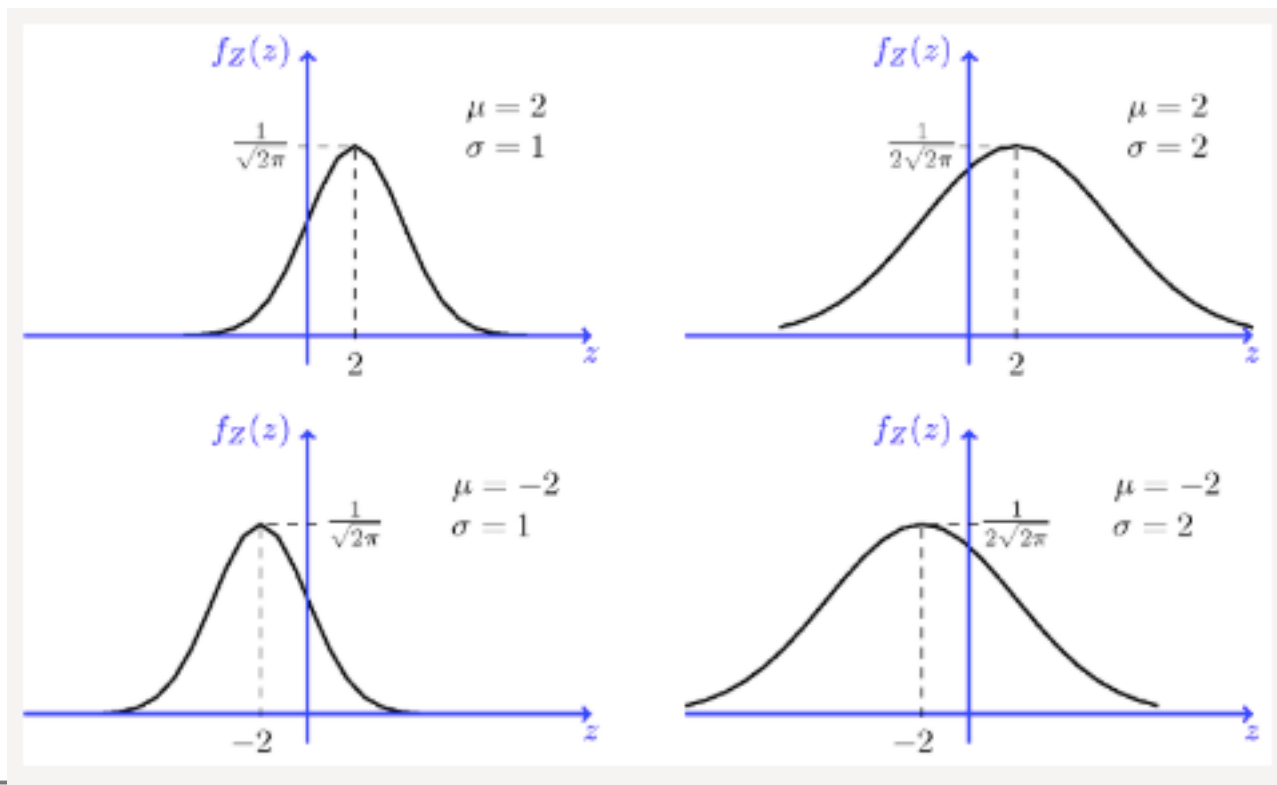


UNIVERSIDADE
FEDERAL
DE PERNAMBUCO



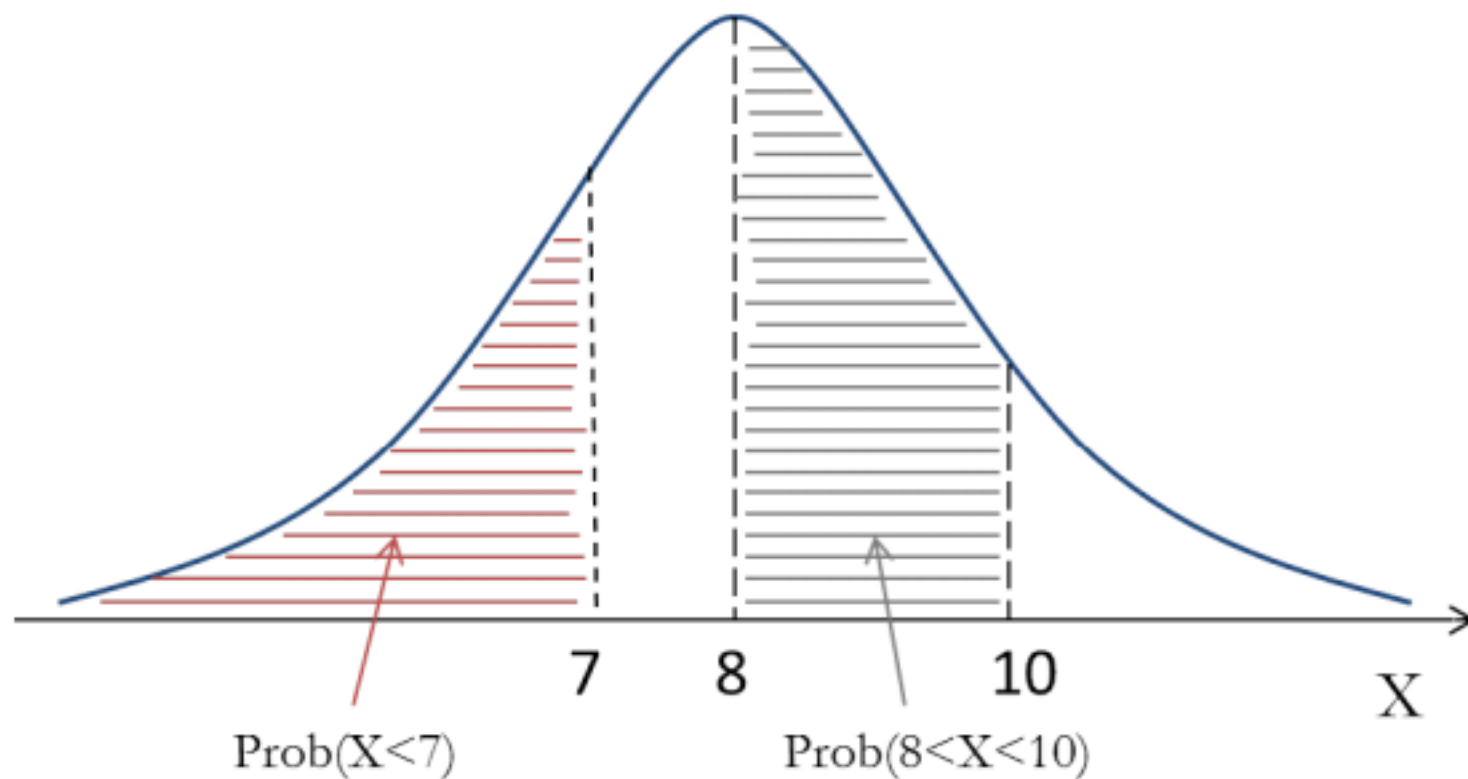
Distribuição Normal ou Gaussiana

- Distribuição mais importante
- Definida pela média e desvio padrão





Probabilidade de Intervalos





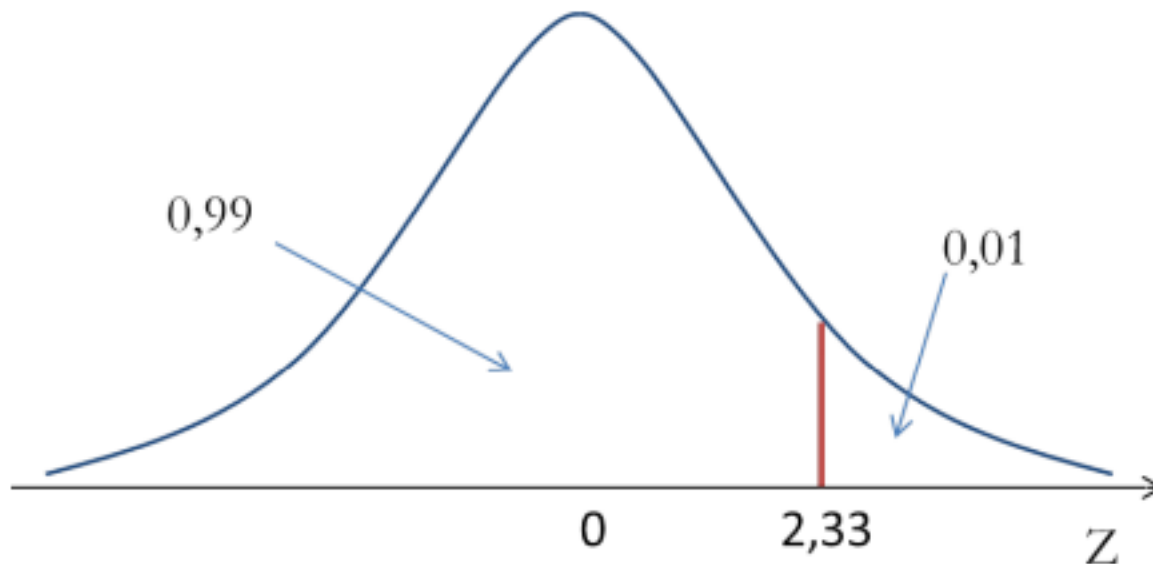
Normalizando para Gaussiana Padrão

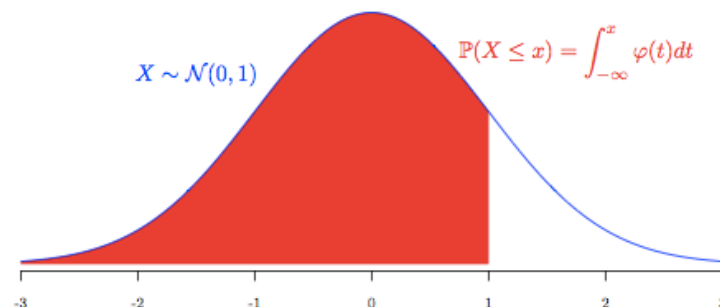
- z: z-score $z = (X - \mu) / \sigma$
- Número de desvio padrões com relação à média
- Valor 0: X é igual a média
- Valor 1: 1 desvio padrão maior que a média



Normal ou Gaussiana Padrão

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \rightarrow \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1) = Z$$

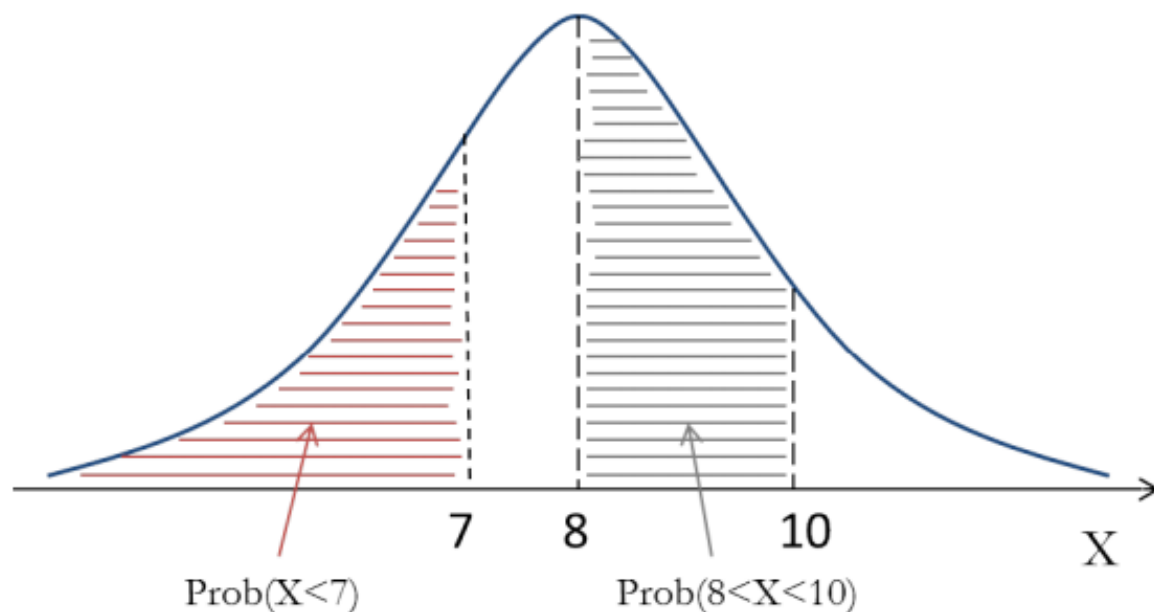




| | 0.00 | 0.01 | 0.02 | 0.03 | 0.04 | 0.05 | 0.06 | 0.07 | 0.08 | 0.09 |
|-----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0.0 | 0.5000 | 0.5040 | 0.5080 | 0.5120 | 0.5160 | 0.5199 | 0.5239 | 0.5279 | 0.5319 | 0.5359 |
| 0.1 | 0.5398 | 0.5438 | 0.5478 | 0.5517 | 0.5557 | 0.5596 | 0.5636 | 0.5675 | 0.5714 | 0.5753 |
| 0.2 | 0.5793 | 0.5832 | 0.5871 | 0.5910 | 0.5948 | 0.5987 | 0.6026 | 0.6064 | 0.6103 | 0.6141 |
| 0.3 | 0.6179 | 0.6217 | 0.6255 | 0.6293 | 0.6331 | 0.6368 | 0.6406 | 0.6443 | 0.6480 | 0.6517 |
| 0.4 | 0.6554 | 0.6591 | 0.6628 | 0.6664 | 0.6700 | 0.6736 | 0.6772 | 0.6808 | 0.6844 | 0.6879 |
| 0.5 | 0.6915 | 0.6950 | 0.6985 | 0.7019 | 0.7054 | 0.7088 | 0.7123 | 0.7157 | 0.7190 | 0.7224 |
| 0.6 | 0.7257 | 0.7291 | 0.7324 | 0.7357 | 0.7389 | 0.7422 | 0.7454 | 0.7486 | 0.7517 | 0.7549 |
| 0.7 | 0.7580 | 0.7611 | 0.7642 | 0.7673 | 0.7704 | 0.7734 | 0.7764 | 0.7794 | 0.7823 | 0.7852 |
| 0.8 | 0.7881 | 0.7910 | 0.7939 | 0.7967 | 0.7995 | 0.8023 | 0.8051 | 0.8078 | 0.8106 | 0.8133 |
| 0.9 | 0.8159 | 0.8186 | 0.8212 | 0.8238 | 0.8264 | 0.8289 | 0.8315 | 0.8340 | 0.8365 | 0.8389 |
| 1.0 | 0.8413 | 0.8438 | 0.8461 | 0.8485 | 0.8508 | 0.8531 | 0.8554 | 0.8577 | 0.8599 | 0.8621 |
| 1.1 | 0.8643 | 0.8665 | 0.8686 | 0.8708 | 0.8729 | 0.8749 | 0.8770 | 0.8790 | 0.8810 | 0.8830 |
| 1.2 | 0.8849 | 0.8869 | 0.8888 | 0.8907 | 0.8925 | 0.8944 | 0.8962 | 0.8980 | 0.8997 | 0.9015 |
| 1.3 | 0.9032 | 0.9049 | 0.9066 | 0.9082 | 0.9099 | 0.9115 | 0.9131 | 0.9147 | 0.9162 | 0.9177 |
| 1.4 | 0.9192 | 0.9207 | 0.9222 | 0.9236 | 0.9251 | 0.9265 | 0.9279 | 0.9292 | 0.9306 | 0.9319 |
| 1.5 | 0.9332 | 0.9345 | 0.9357 | 0.9370 | 0.9382 | 0.9394 | 0.9406 | 0.9418 | 0.9429 | 0.9441 |
| 1.6 | 0.9452 | 0.9463 | 0.9474 | 0.9484 | 0.9495 | 0.9505 | 0.9515 | 0.9525 | 0.9535 | 0.9545 |
| 1.7 | 0.9554 | 0.9564 | 0.9573 | 0.9582 | 0.9591 | 0.9599 | 0.9608 | 0.9616 | 0.9625 | 0.9633 |
| 1.8 | 0.9641 | 0.9649 | 0.9656 | 0.9664 | 0.9671 | 0.9678 | 0.9686 | 0.9693 | 0.9699 | 0.9706 |
| 1.9 | 0.9713 | 0.9719 | 0.9726 | 0.9732 | 0.9738 | 0.9744 | 0.9750 | 0.9756 | 0.9761 | 0.9767 |
| 2.0 | 0.9772 | 0.9778 | 0.9783 | 0.9788 | 0.9793 | 0.9798 | 0.9803 | 0.9808 | 0.9812 | 0.9817 |
| 2.1 | 0.9821 | 0.9826 | 0.9830 | 0.9834 | 0.9838 | 0.9842 | 0.9846 | 0.9850 | 0.9854 | 0.9857 |
| 2.2 | 0.9861 | 0.9864 | 0.9868 | 0.9871 | 0.9875 | 0.9878 | 0.9881 | 0.9884 | 0.9887 | 0.9890 |
| 2.3 | 0.9893 | 0.9896 | 0.9898 | 0.9901 | 0.9904 | 0.9906 | 0.9909 | 0.9911 | 0.9913 | 0.9916 |
| 2.4 | 0.9918 | 0.9920 | 0.9922 | 0.9925 | 0.9927 | 0.9929 | 0.9931 | 0.9932 | 0.9934 | 0.9936 |
| 2.5 | 0.9938 | 0.9940 | 0.9941 | 0.9943 | 0.9945 | 0.9946 | 0.9948 | 0.9949 | 0.9951 | 0.9952 |
| 2.6 | 0.9953 | 0.9955 | 0.9956 | 0.9957 | 0.9959 | 0.9960 | 0.9961 | 0.9962 | 0.9963 | 0.9964 |
| 2.7 | 0.9965 | 0.9966 | 0.9967 | 0.9968 | 0.9969 | 0.9970 | 0.9971 | 0.9972 | 0.9973 | 0.9974 |
| 2.8 | 0.9974 | 0.9975 | 0.9976 | 0.9977 | 0.9977 | 0.9978 | 0.9979 | 0.9979 | 0.9980 | 0.9981 |
| 2.9 | 0.9981 | 0.9982 | 0.9982 | 0.9983 | 0.9984 | 0.9984 | 0.9985 | 0.9985 | 0.9986 | 0.9986 |
| 3.0 | 0.9987 | 0.9987 | 0.9987 | 0.9988 | 0.9988 | 0.9989 | 0.9989 | 0.9989 | 0.9990 | 0.9990 |



Calculando Probabilidades



$$\begin{aligned} \text{Prob}(X < 7) &= \text{Prob}(X - 8 < 7 - 8) = \text{Prob}(X - 8 < -1) = \\ &= \text{Prob}\left(\frac{X - 8}{4} < -\frac{1}{4}\right) = \text{Prob}\left(\frac{X - 8}{4} < -0,25\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Prob}(X < 7) &= \text{Prob}(Z < -0,25) = 1 - \text{Prob}(Z > 0,25) \\ &= 1 - 0,5987 = 0,4013 = 40,13\% \end{aligned}$$



Teste de Hipótese: Conceitos

- Aceita ou rejeita hipótese sobre uma população a partir de uma amostra de dados
 - Ex: Diferença de peso entre recém-nascidos de alta e baixa renda é significativa?
- Hipóteses nula (não há diferença) e alternativa (há diferença)



Teste Bilateral

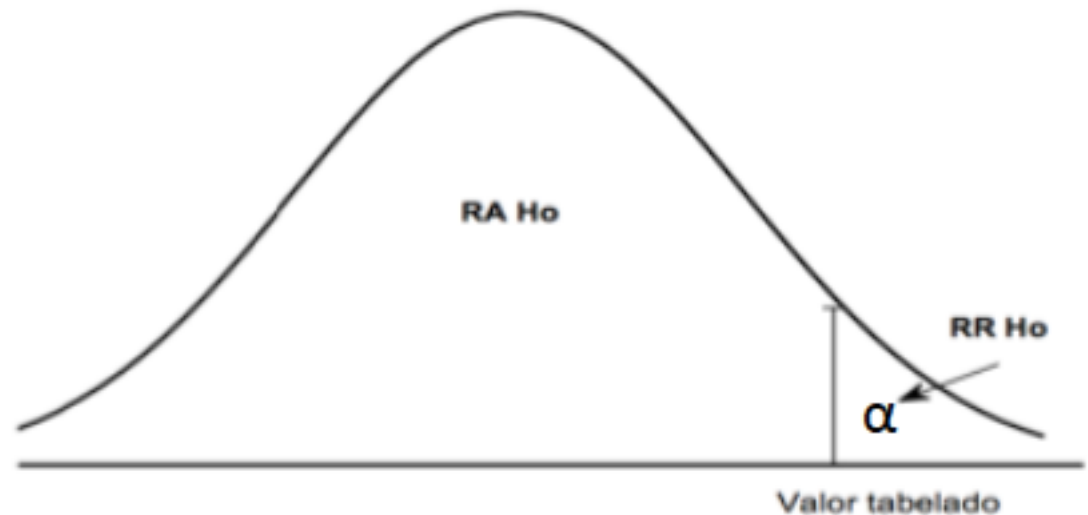
- O índice de homicídio em Pernambuco é diferente da média nacional de 50 por 100 mil habitantes?
- $H_0: \mu = 50$
- $H_1: \mu \neq 50$





Teste Unilateral

- O índice de homicídio em Pernambuco é maior que a média nacional de 50 por 100 mil habitantes?
- $H_0: \mu = 50$
- $H_1: \mu > 50$





Teste Unilateral

- O índice de homicídio em Pernambuco é menor que a média nacional de 50 por 100 mil habitantes?
- $H_0: \mu = 50$
- $H_1: \mu < 50$





Nível de Significância

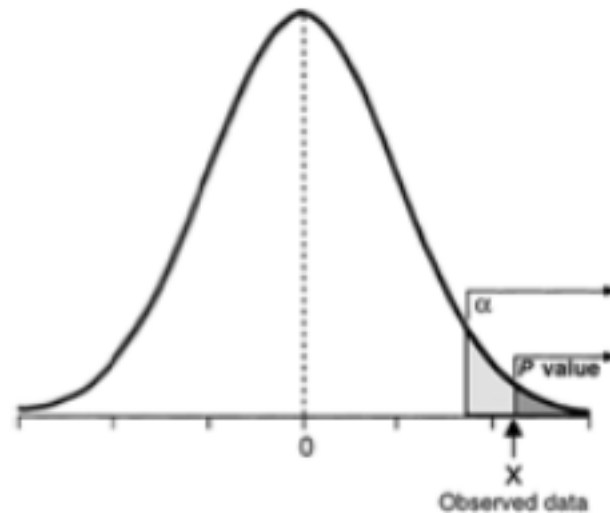
- Também chamado de valor crítico
- Probabilidade máxima para se rejeitar a hipótese nula
- Usalmente 1% ou 5%





P-Value

- Probabilidade da hipótese nula ser verdadeira
- Um valor pequeno (menor que **valor crítico**) indica evidência forte contra a hipótese nula (rejeitada)





Grupos Pariados vs Não-Pariados

- Pariados: mesmos indivíduos em diferentes situações
 - Ex: efeito de medicamento num mesmo grupo
- Não-pariados: indivíduos diferentes
 - Ex: efeito de medicamento em grupos diferentes



Testes Paramétricos vs Não-Paramétricos

- Paramétricos: assumem distribuição normal dos dados
- Não-paramétricos: não assumem uma distribuição a priori



Tabela de Teste de Hipótese

| GOAL | TYPE OF DATA | | |
|--|--|--|--|
| | Measurement (with normal distribution) | Rank, Score, or Measurement (from non-normal distribution) | Binomial (two possible outcomes) |
| Describe 1 group | Mean, SD | Median, interquartile range | Proportion |
| Compare 1 group to a hypothetical value | One-sample t test | Wilcoxon test | Chi-square or Binomial test ** |
| Compare 2 unpaired groups | Unpaired t test | Mann-Whitney test | Fisher's test (chi-square for large samples) |
| Compare 2 paired groups | Paired t test | Wilcoxon test | McNemar's test |
| Compare 3 or more unmatched groups | One-way ANOVA | Kruskal-Wallis test | Chi-square test |
| Compare 3 or more matched groups | Repeated-measures ANOVA | Friedman test | Cochrane Q** |
| Quantify association between 2 variables | Pearson correlation | Spearman correlation | Contingency coefficients** |



One-Sample t-Test

- Verificar se há diferença significativa entre a média de uma população e uma amostra
- Média da população conhecida mas desvio padrão não
- Etapas:
 - Definir hipótese nula e alternativa
 - Definir valor crítico
 - Comparar o resultado com o valor crítico



One-Sample t-Test: Exemplo

- Média de QI da população é 100
- Testar o efeito de uma nova medicação no QI
- Amostra de 30 pessoas tomaram medicamento:
 - Média de QI = 140
 - Desvio padrão = 20



One-Sample t-Test: Etapas

- Definir hipótese nula e alternativa

$$H_0; \mu = 100$$

$$H_1; \mu \neq 100$$

- Definir valor crítico: 0.05
- Comparar o resultado com o valor crítico



One-Sample t-Test: Etapas

- Comparar o resultado com o valor crítico

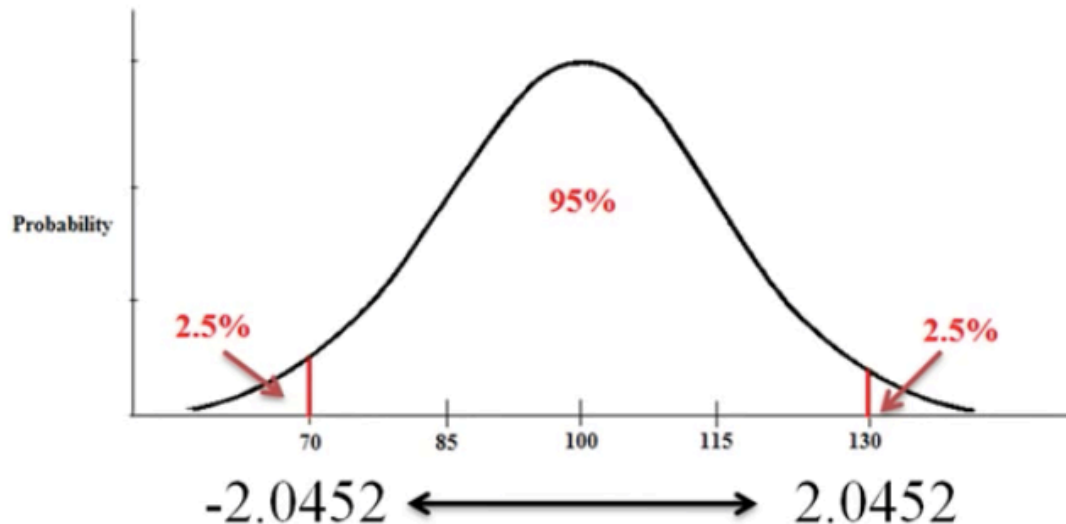
$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{s / \sqrt{n}}$$

$$\bar{x} = 140$$

$$\mu = 100$$

$$s = 20$$

$$n = 30$$



$$t = \frac{140 - 100}{20 / \sqrt{30}} = \frac{40}{3.65} = 10.96$$



One-Sample t-Test: Etapas

- Comparar o resultado com o valor crítico

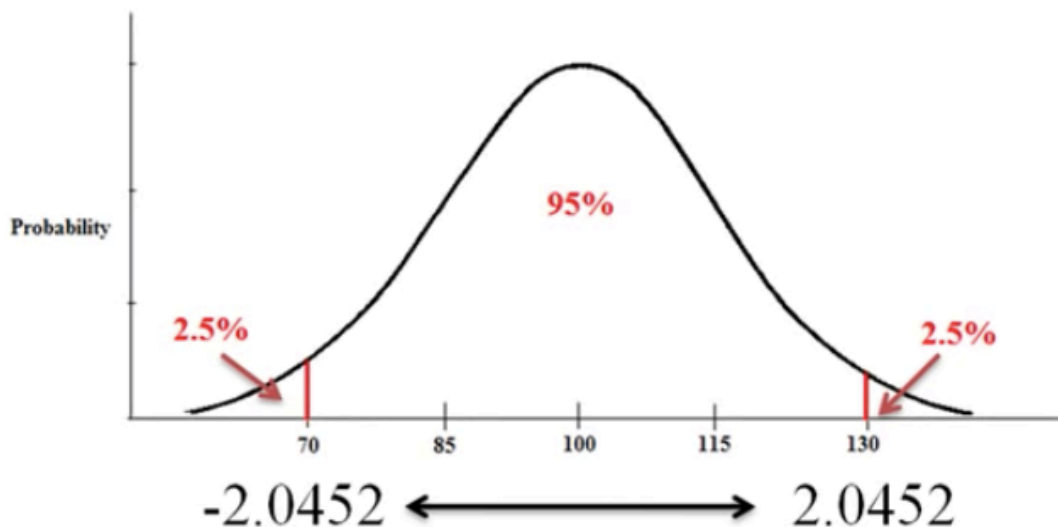
$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{s / \sqrt{n}}$$

$$\bar{x} = 140$$

$$\mu = 100$$

$$s = 20$$

$$n = 30$$



$$t = \frac{140 - 100}{20 / \sqrt{30}} = \frac{40}{3.65} = 10.96$$

Hipótese nula rejeitada!



Comparar 2 Grupos Pareados: t-Test Pariado

- Hipótese nula: não há diferença entre a média das amostras
- Suposições
 - Diferença entre as amostras é gaussiana (ou próxima dela)
 - Não pode conter outliers
 - Mesma população



Comparar 2 Grupos Pareados: Wilcoxon signed-rank Test

- Hipótese nula: não há diferença entre as amostras
- Suposições
 - Não paramétrica: diferença não corresponde à gaussiana
 - Diferença segue uma distribuição simétrica
 - Mesma população



Comparar 2 Grupos Não-Pareados: t-Test Não-Pariado

- Hipótese nula: não há diferença entre a média das amostras
- Suposições
 - Observações de um grupo são independentes do outro grupo
 - Grupos seguem a normal
 - Variâncias dos dois grupos são iguais



Comparar 2 Grupos Não-Pareados: Mann–Whitney U test

- Hipótese nula: amostras vêm de populações com mesma distribuição
- Suposições
 - Não paramétrica: amostras não correspondem à gaussiana
 - Observações de um grupo são independentes do outro grupo



Tabela de Teste de Hipótese

| GOAL | TYPE OF DATA | | |
|--|--|--|--|
| | Measurement (with normal distribution) | Rank, Score, or Measurement (from non-normal distribution) | Binomial (two possible outcomes) |
| Describe 1 group | Mean, SD | Median, interquartile range | Proportion |
| Compare 1 group to a hypothetical value | One-sample t test | Wilcoxon test | Chi-square or Binomial test ** |
| Compare 2 unpaired groups | Unpaired t test | Mann-Whitney test | Fisher's test (chi-square for large samples) |
| Compare 2 paired groups | Paired t test | Wilcoxon test | McNemar's test |
| Compare 3 or more unmatched groups | One-way ANOVA | Kruskal-Wallis test | Chi-square test |
| Compare 3 or more matched groups | Repeated-measures ANOVA | Friedman test | Cochrane Q** |
| Quantify association between 2 variables | Pearson correlation | Spearman correlation | Contingency coefficients** |