



# Distribuições de Probabilidades e Testes de Hipótese

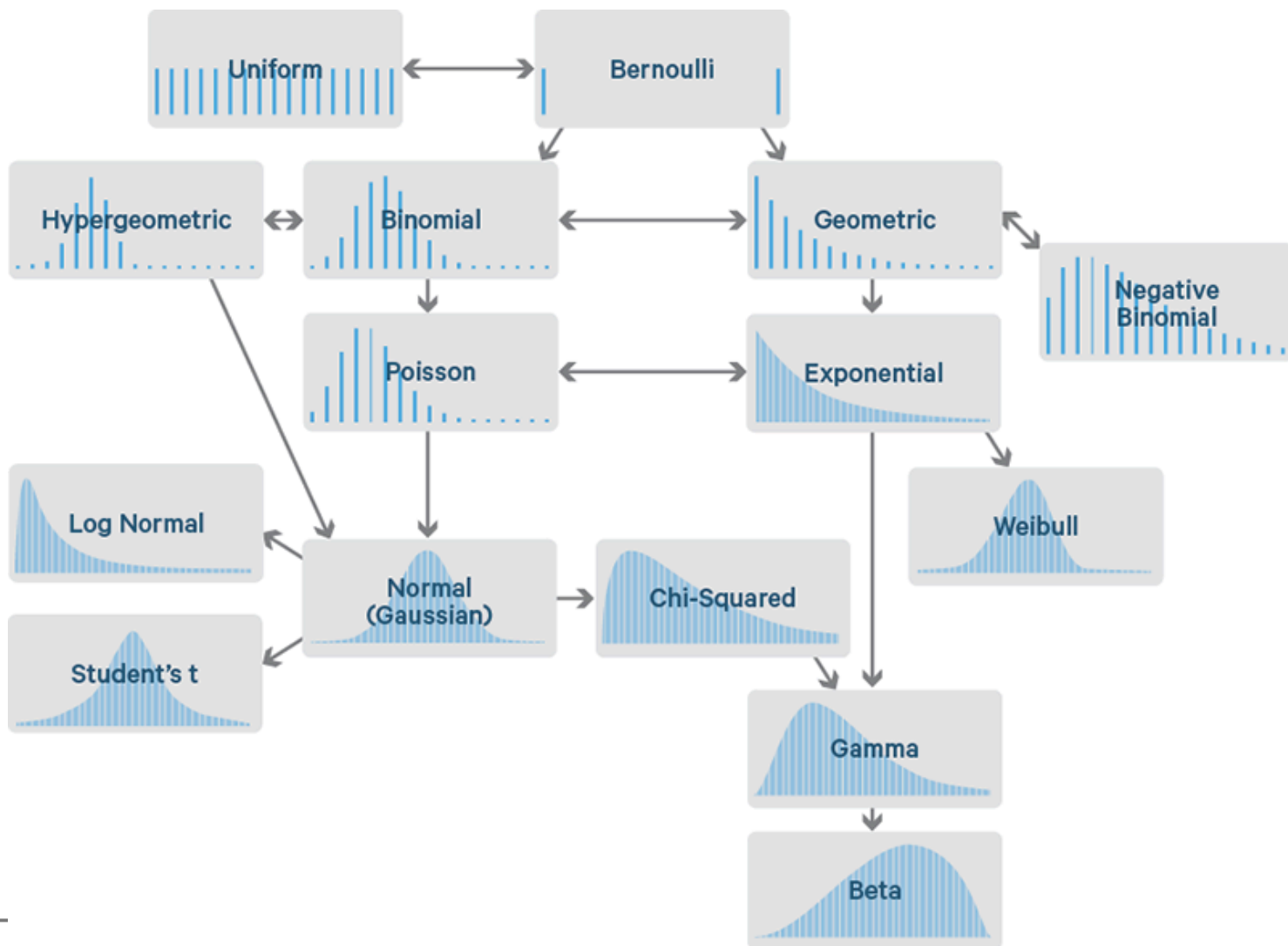
Luciano Barbosa



UNIVERSIDADE  
FEDERAL  
DE PERNAMBUCO



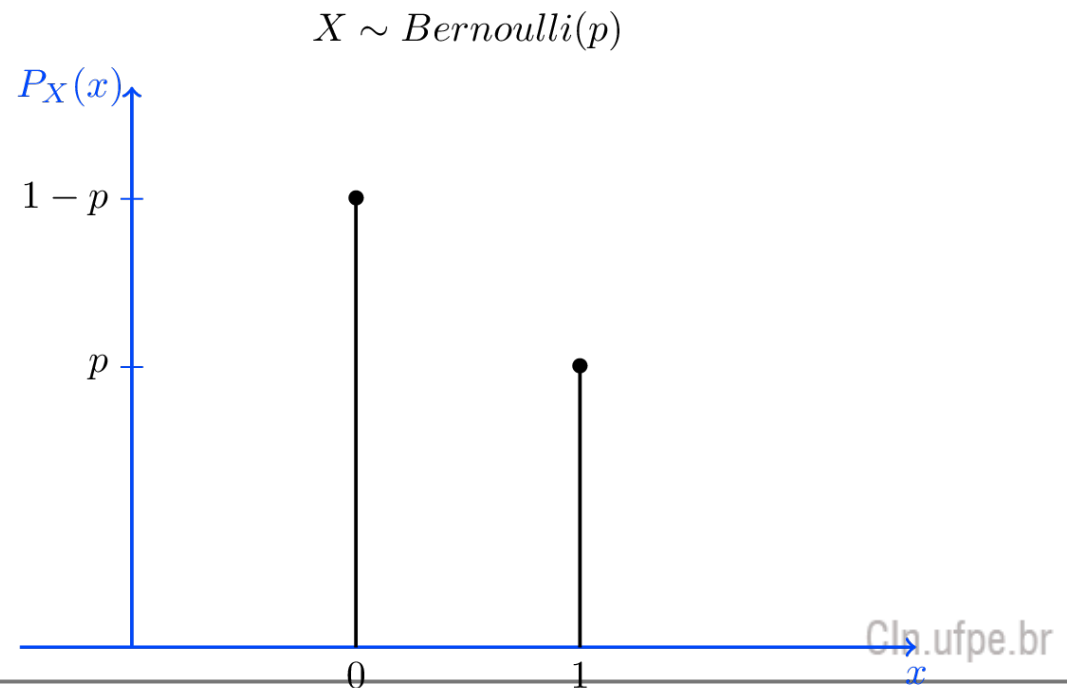
# Distribuições de Probabilidade





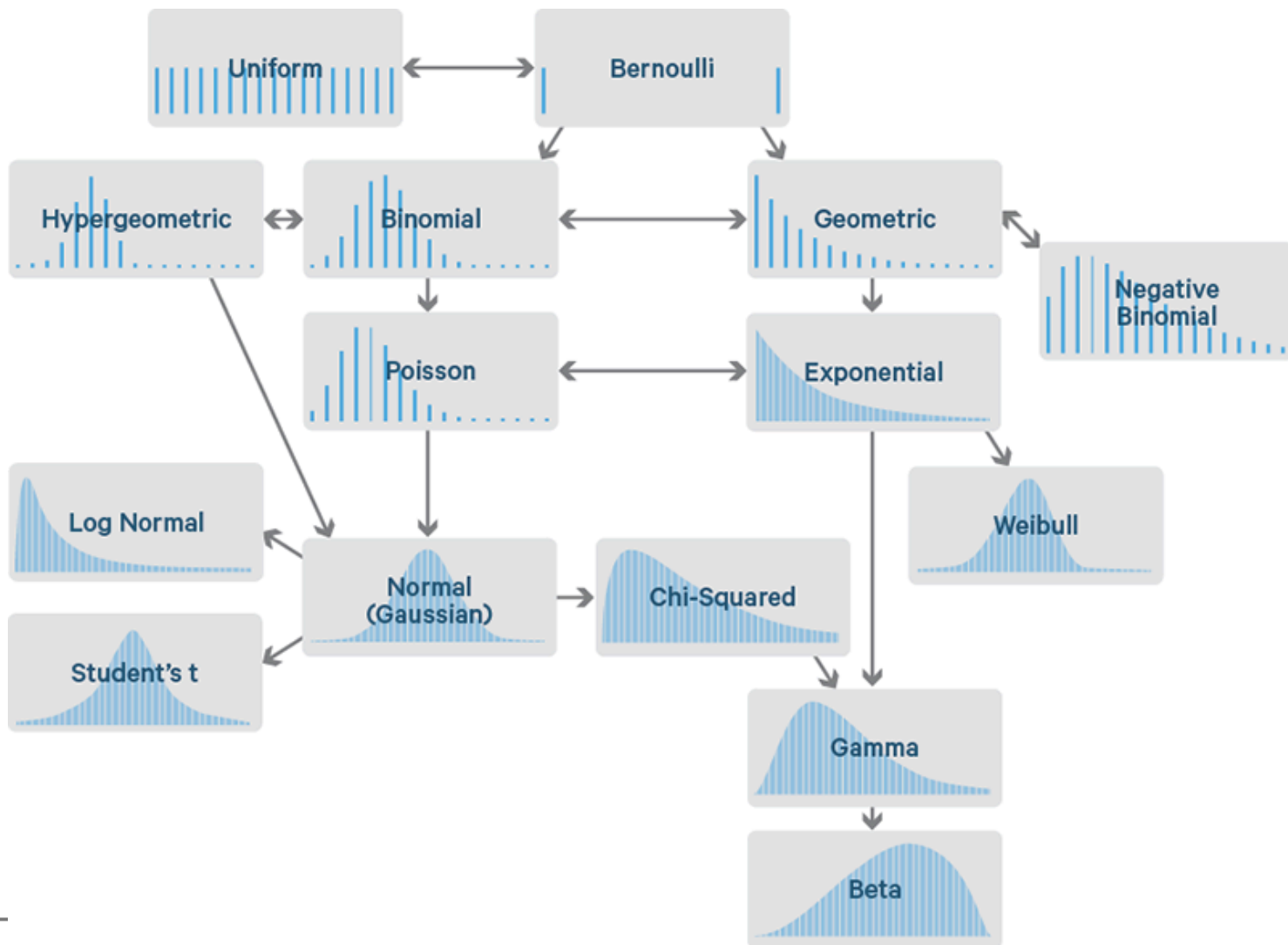
# Bernoulli

- Valores discretos
- Dois valores possíveis: 0 (falha) ou 1 (sucesso)
- Ex:
  - Lançamento de uma moeda
  - Passar num concurso





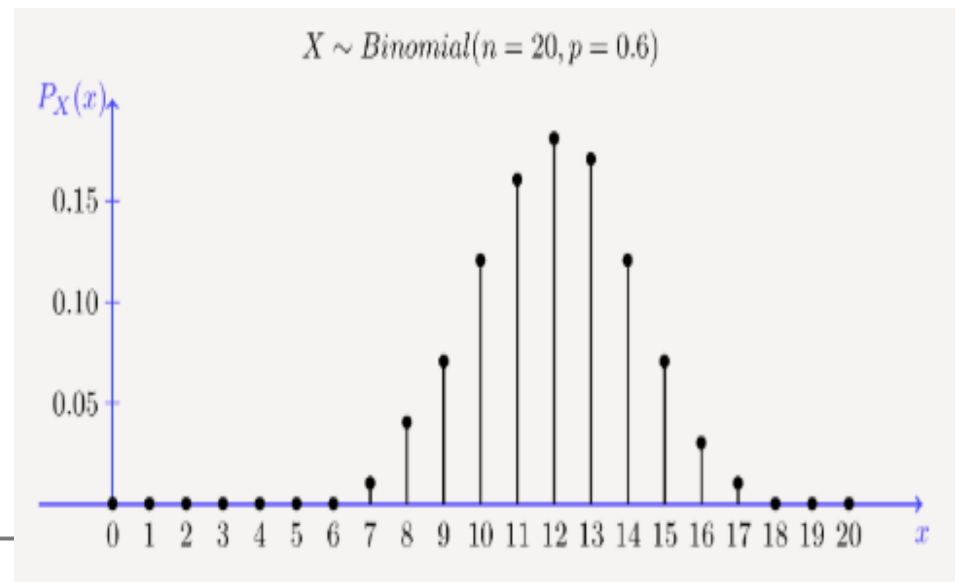
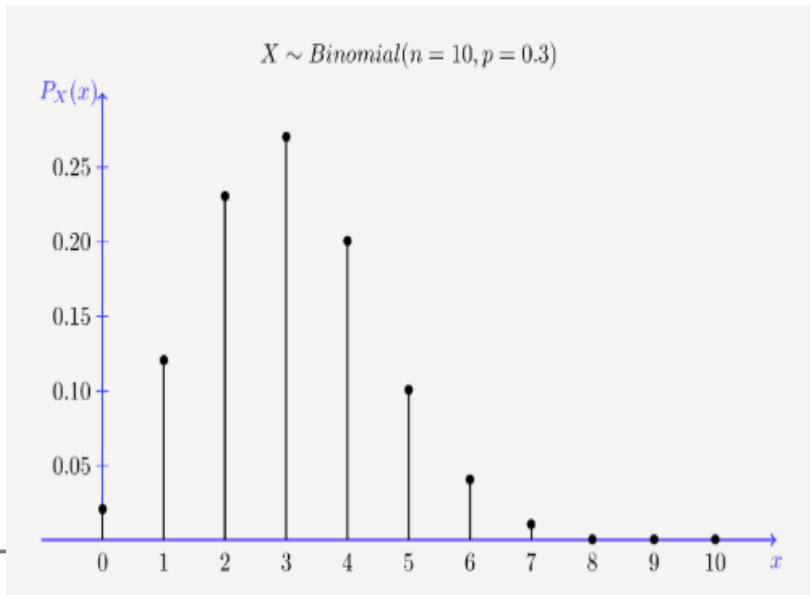
# Distribuições de Probabilidade





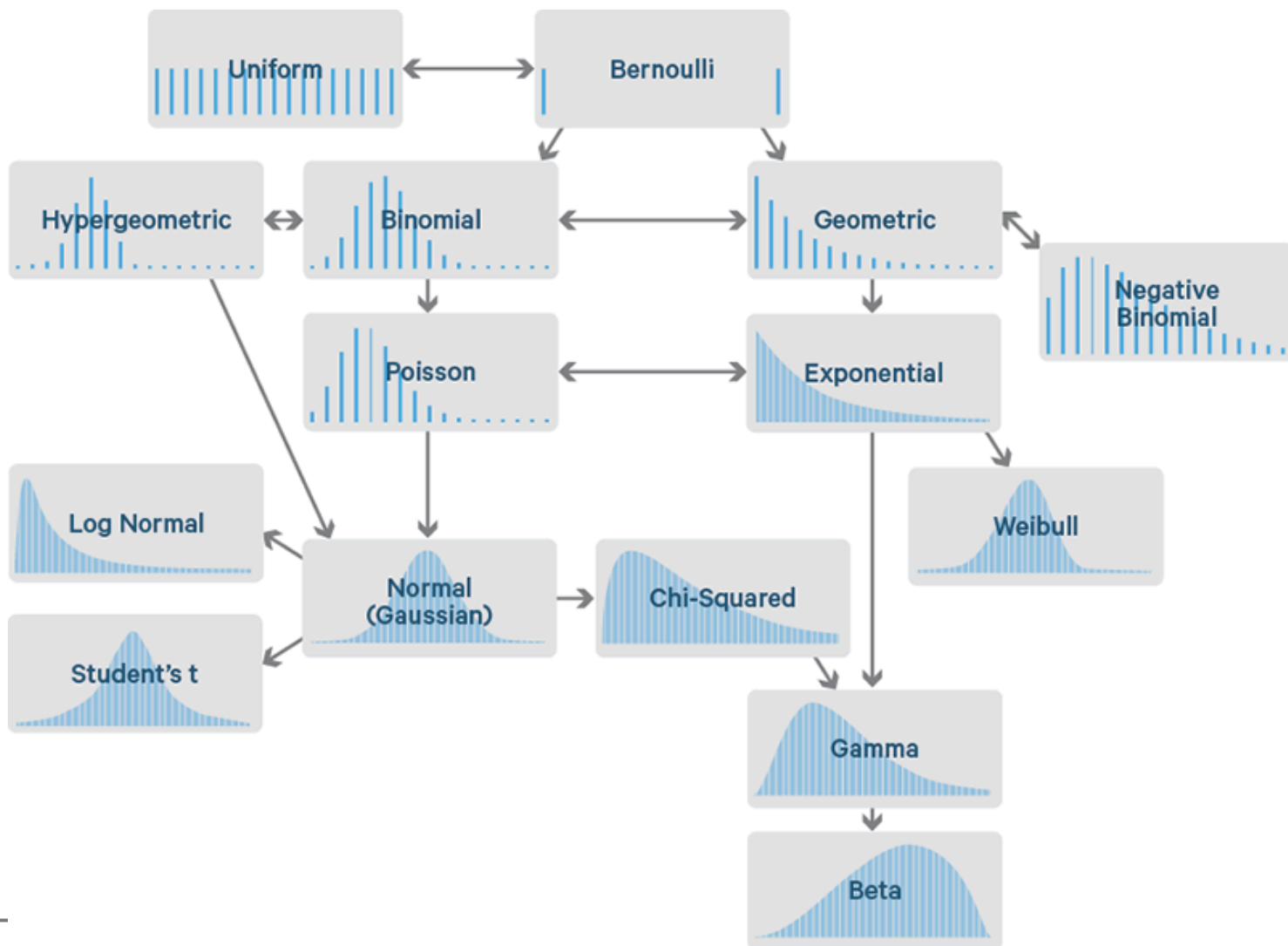
# Binomial

- Prob. de número de sucessos de  $n$  experimentos que seguem distribuição de Bernoulli com probabilidade  $p$
- Ex.:
  - Prob. de número de vezes coroa aparece depois de  $n$  lançamentos de uma moeda
  - Número de bolas pretas retiradas de uma urna com bolas pretas e brancas





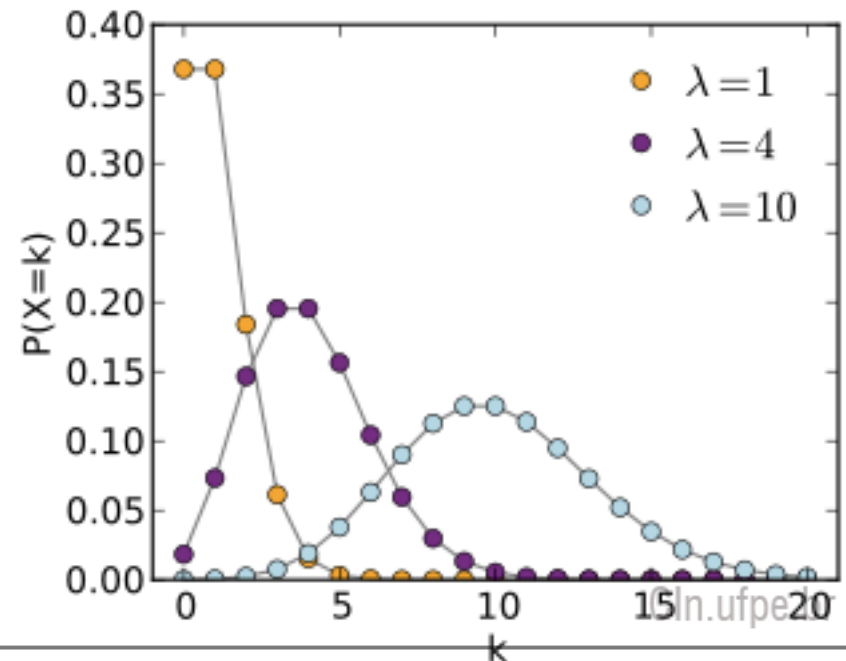
# Distribuições de Probabilidade





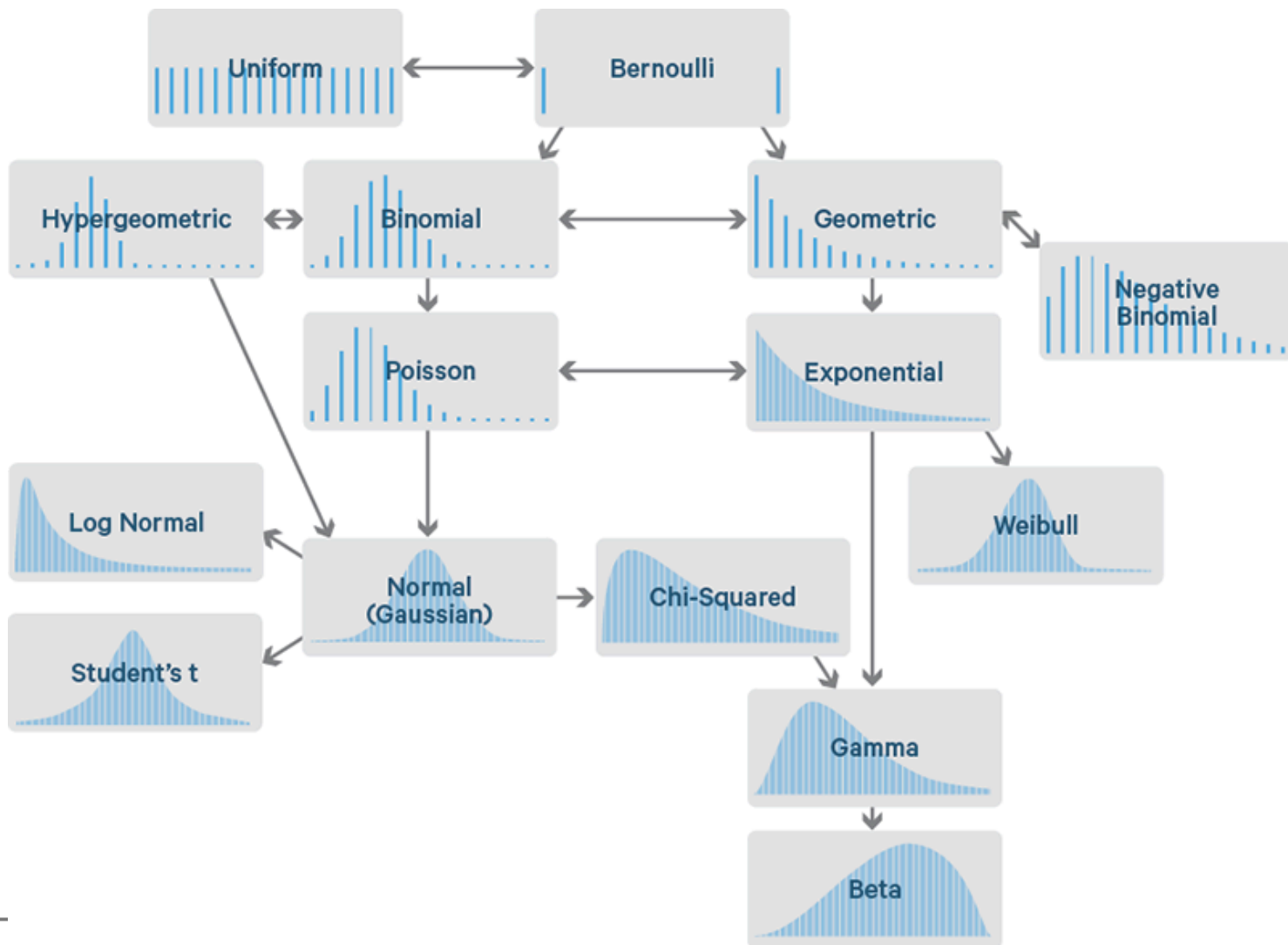
# Poisson

- Prob. de um número de eventos ( $k$ ) em um determinado tempo ou espaço a uma taxa média
- Ex: prob. de números de clientes que ligam pro SAC em um determinado período
  - Cada segundo poderia ser bernoulli mas se houver milhões de chamadas em 1 segundo?





# Distribuições de Probabilidade

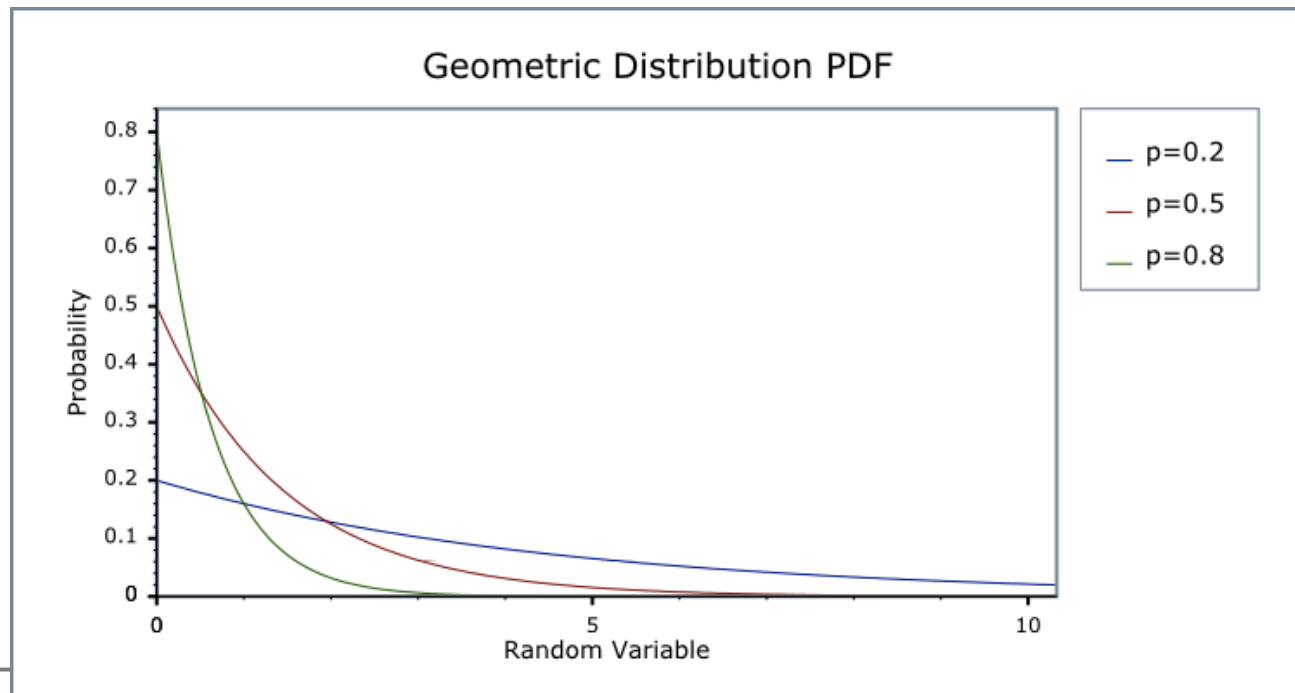






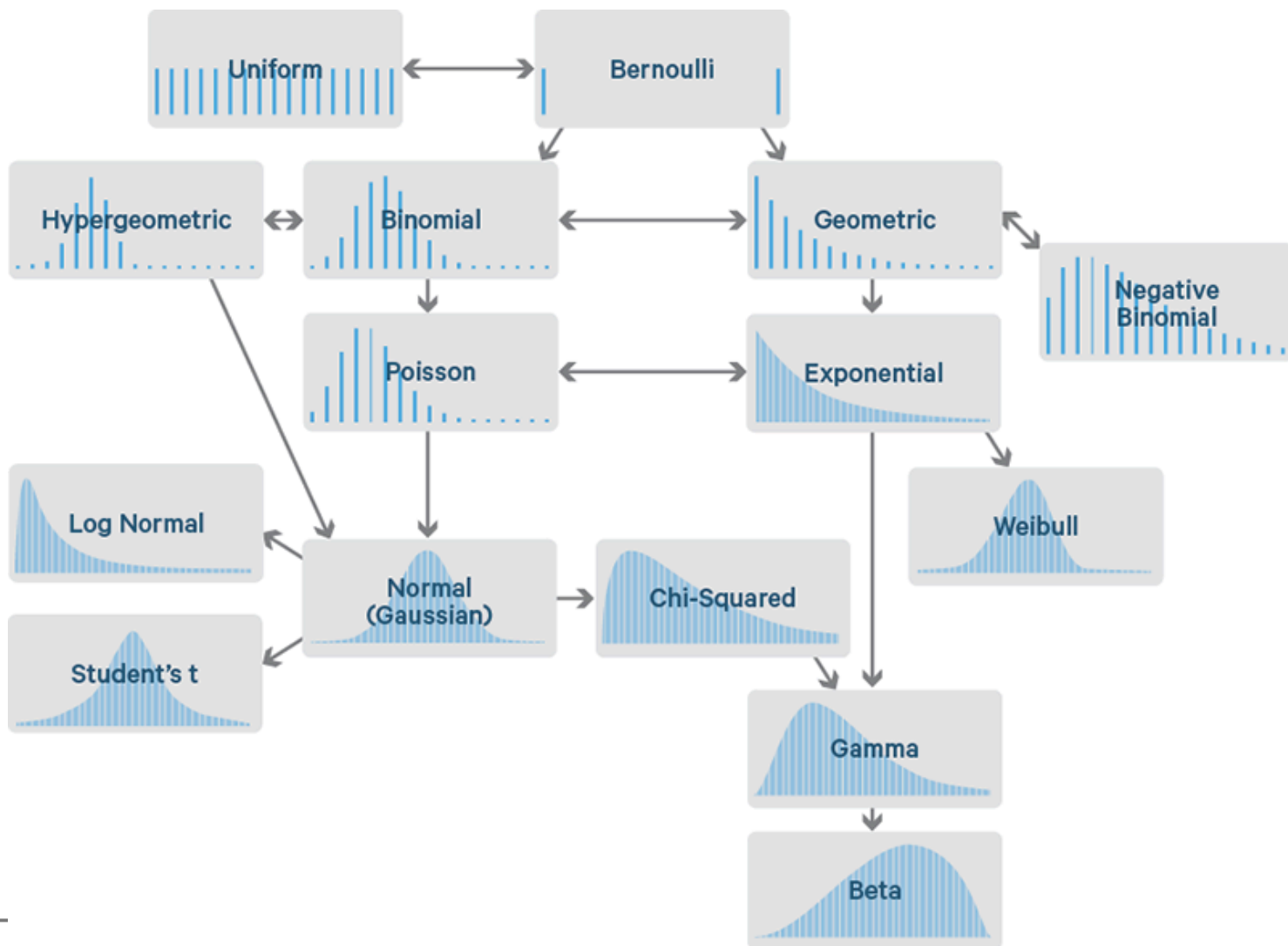
# Geométrica

- Derivada da Bernoulli
- Prob. de observar  $k$  falhas até 1 sucesso de evento de probabilidade  $p$
- Ex: Prob. de quantas vezes o lançamento de uma moeda vem coroa (falha) antes do primeiro cara





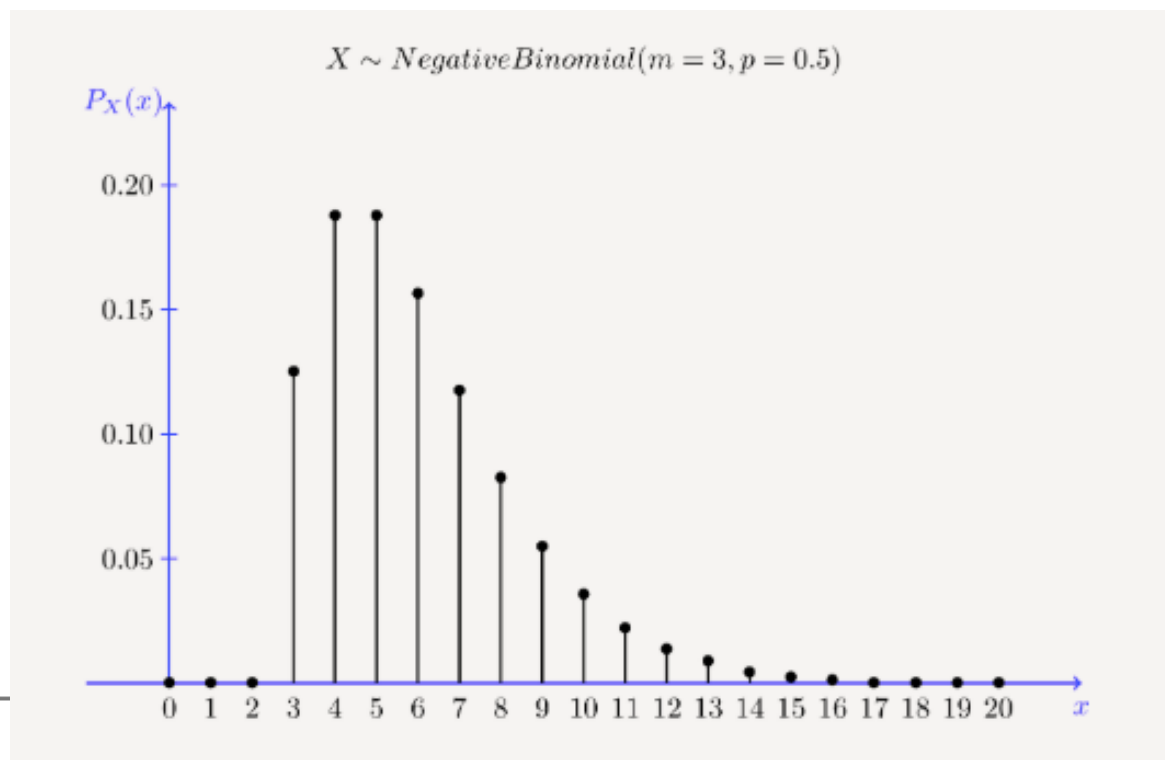
# Distribuições de Probabilidade





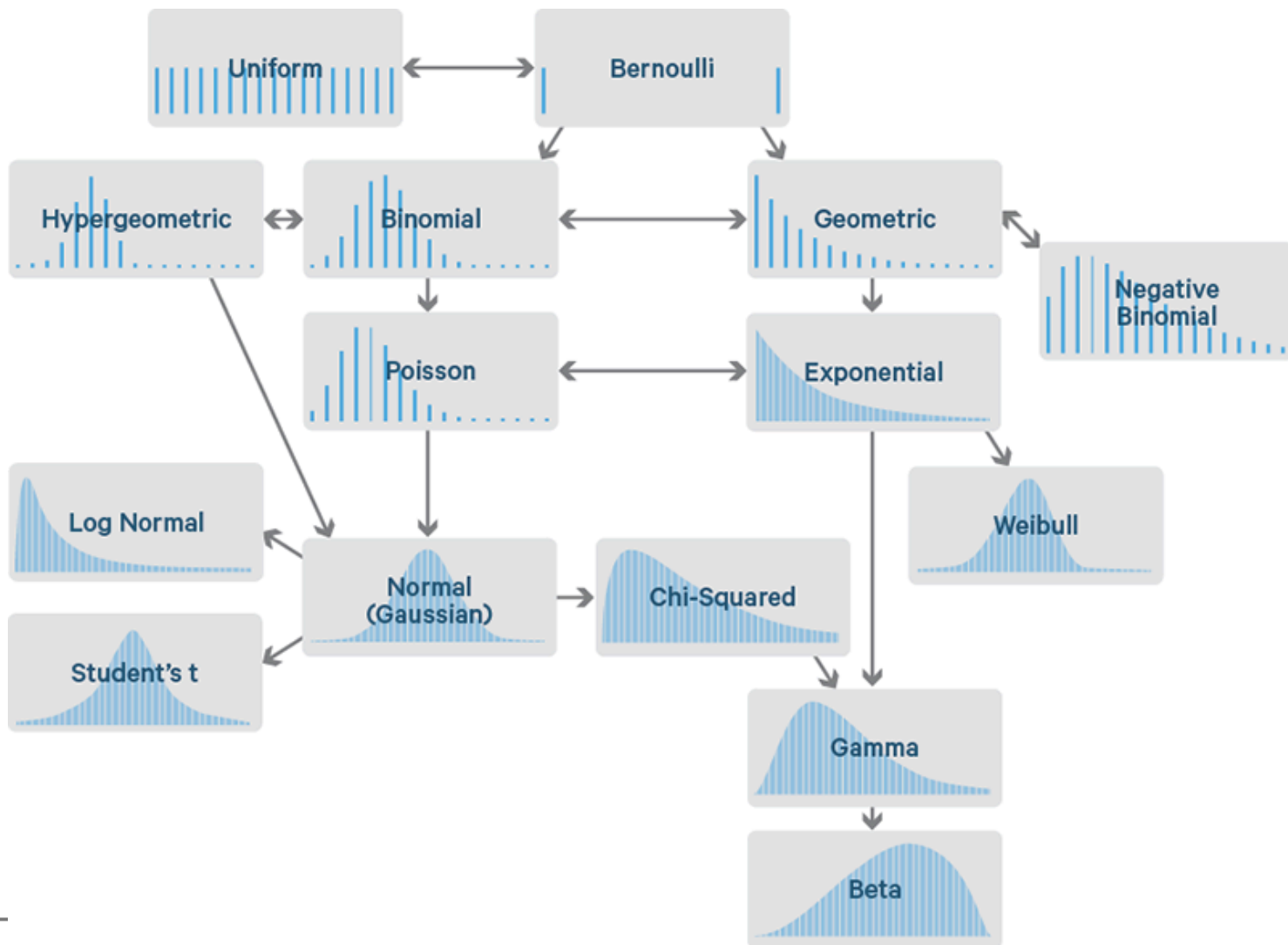
# Binomial Negativa ou Pascal

- Generalização da geométrica
- Prob. de observar  $k$  números de falhas até  $m$  sucessos





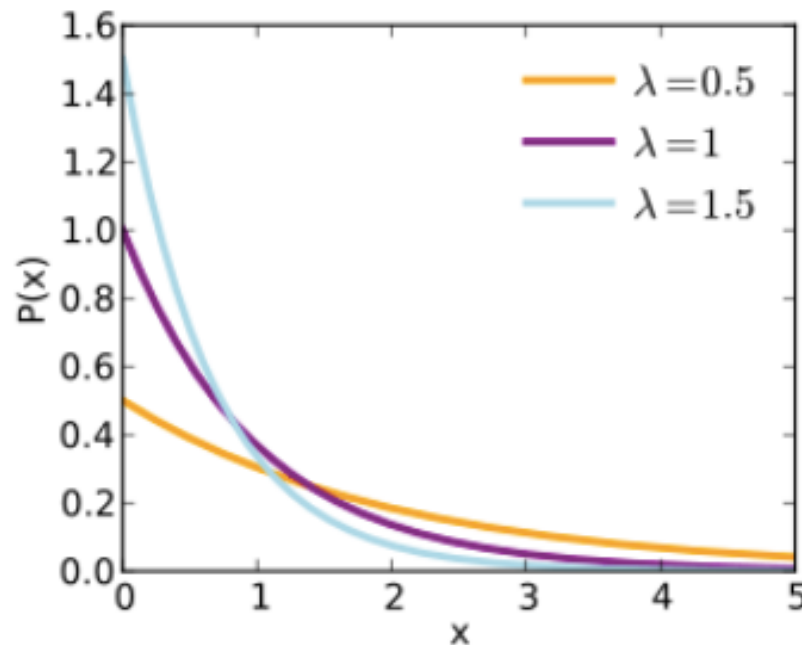
# Distribuições de Probabilidade





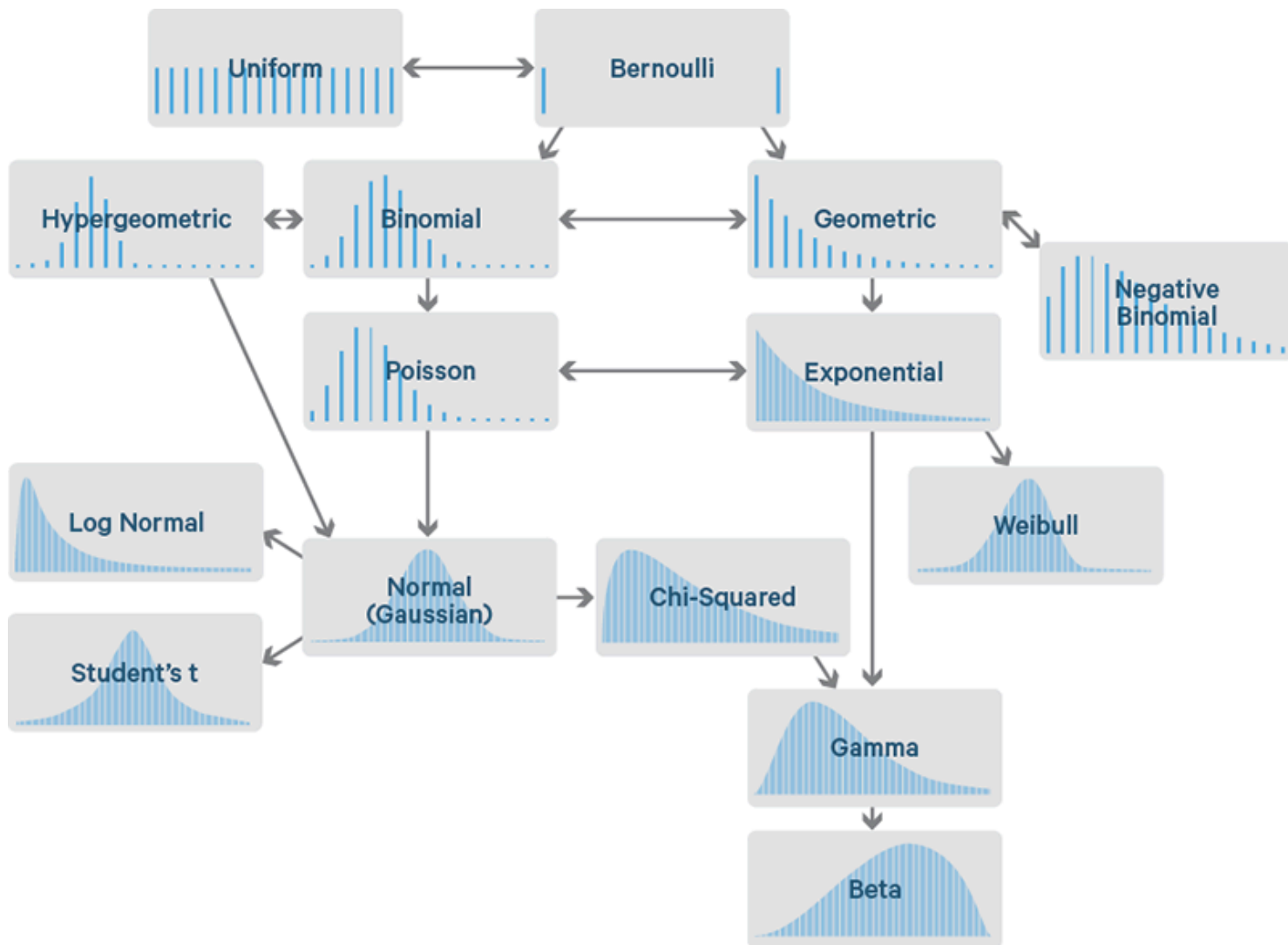
# Exponencial

- Prob. de passar  $x$  tempo para o próximo sucesso
- Geométrica para valores contínuos





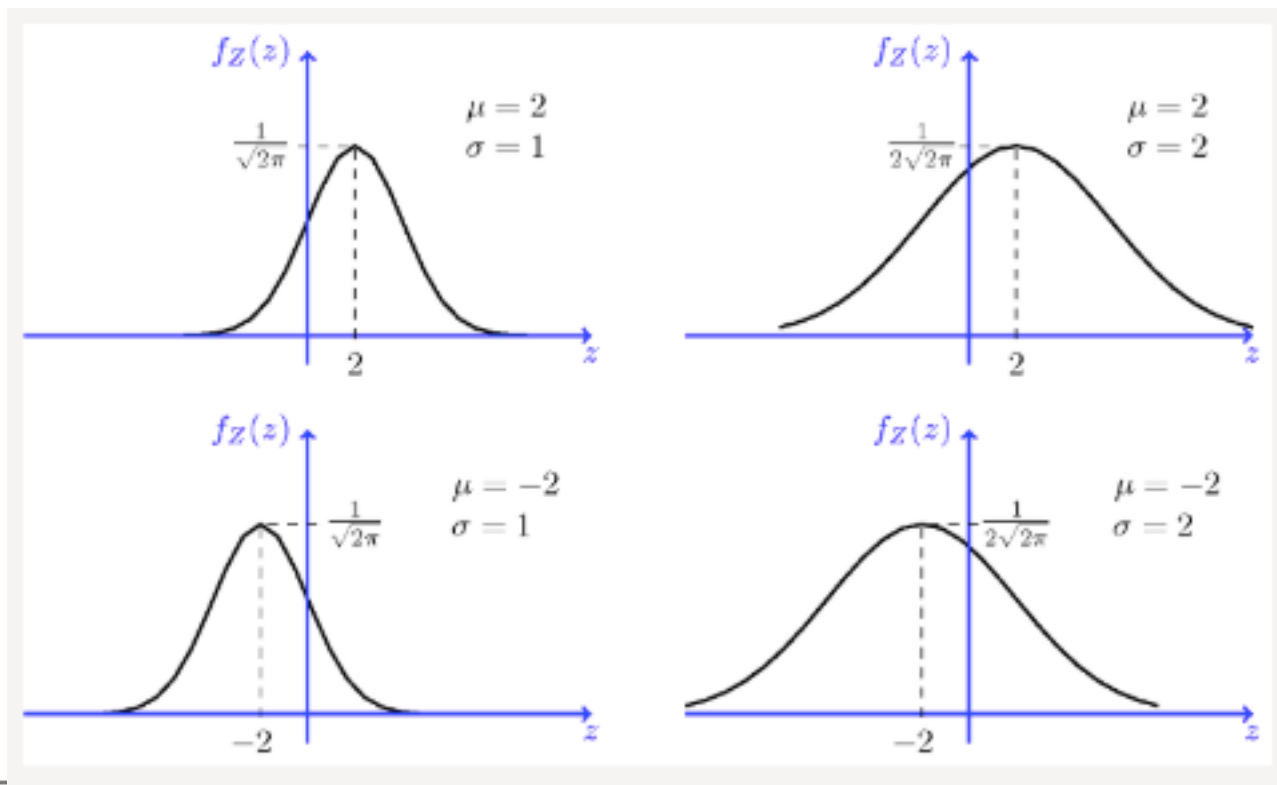
# Distribuições de Probabilidade





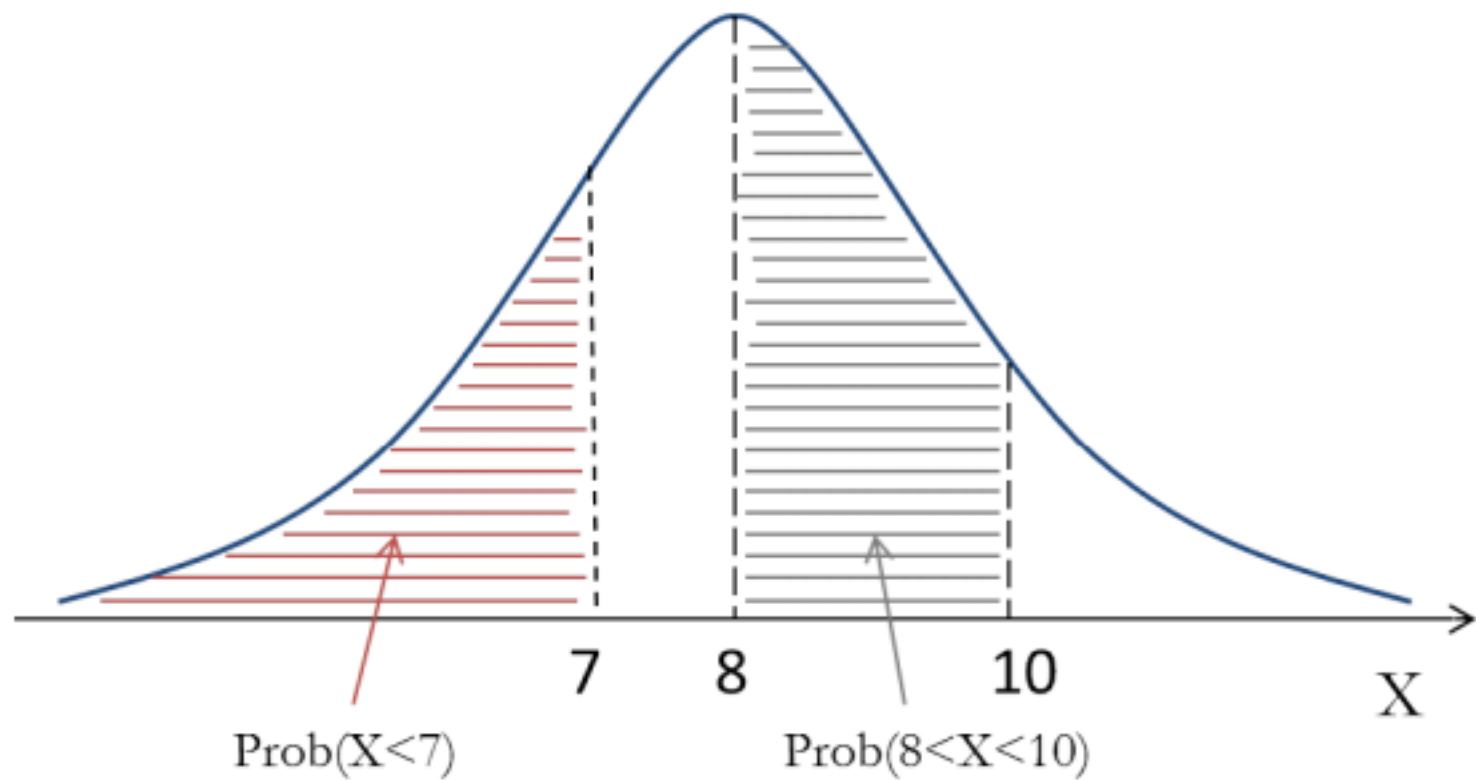
# Normal ou Gaussiana

- Distribuição mais importante
- Definida pela média e desvio padrão





# Probabilidade de Intervalos







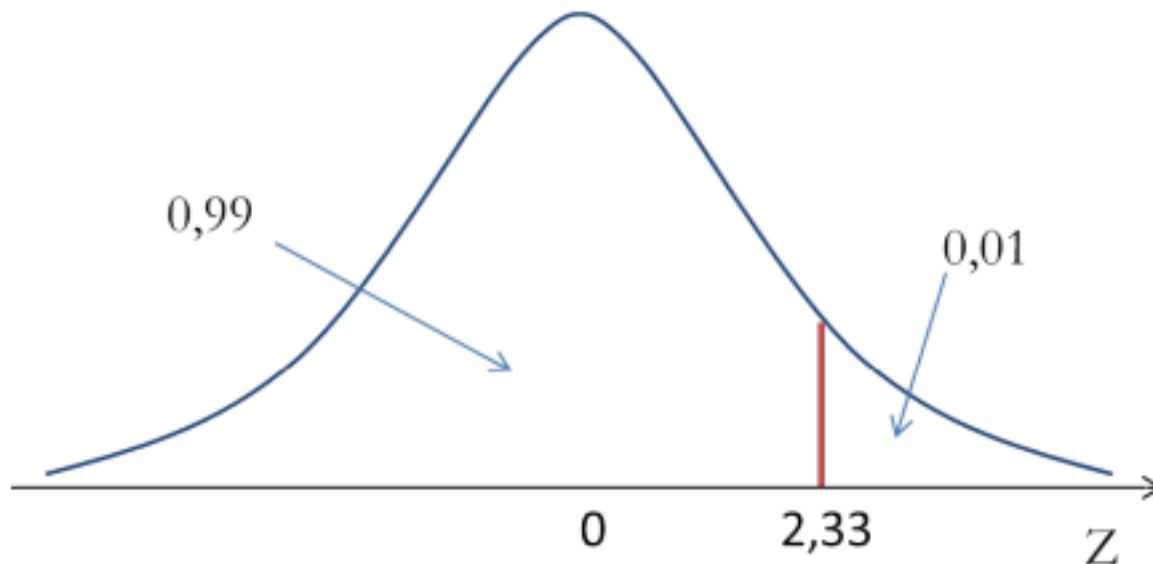
# Normalizando para Gaussiana Padrão

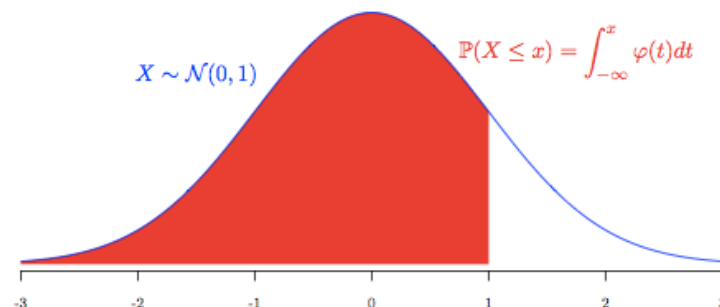
- z: z-score  $z = (X - \mu) / \sigma$
- Número de desvio padrões com relação à média
- Valor 0: X é igual a média
- Valor 1: 1 desvio padrão maior que a média



# Normal ou Gaussiana Padrão

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \rightarrow \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1) = Z$$

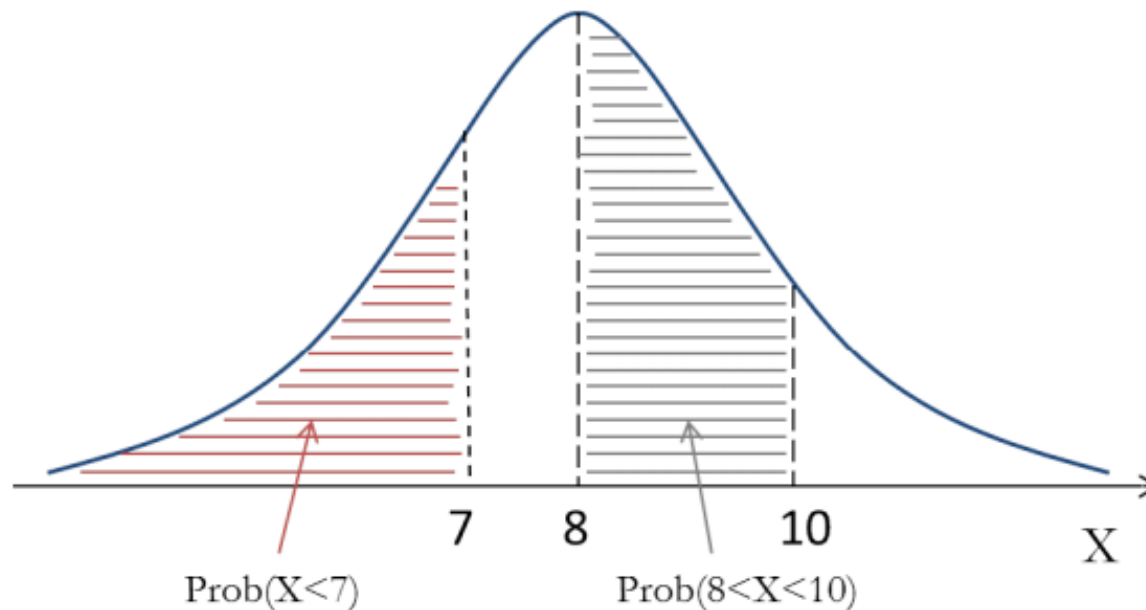




	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990



# Calculando Probabilidades



$$\begin{aligned} \text{Prob}(X < 7) &= \text{Prob}(X - 8 < 7 - 8) = \text{Prob}(X - 8 < -1) = \\ &= \text{Prob}\left(\frac{X - 8}{4} < -\frac{1}{4}\right) = \text{Prob}\left(\frac{X - 8}{4} < -0,25\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Prob}(X < 7) &= \text{Prob}(Z < -0,25) = 1 - \text{Prob}(Z > 0,25) \\ &= 1 - 0,5987 = 0,4013 = 40,13\% \end{aligned}$$



# Teste de Hipótese: Conceitos

- Aceita ou rejeita hipótese sobre uma população a partir de uma amostra de dados
  - Ex: Diferença de peso entre recém-nascidos de alta e baixa renda é significativa?
- Hipóteses nula (não há diferença) e alternativa (há diferença)



# Teste Bilateral

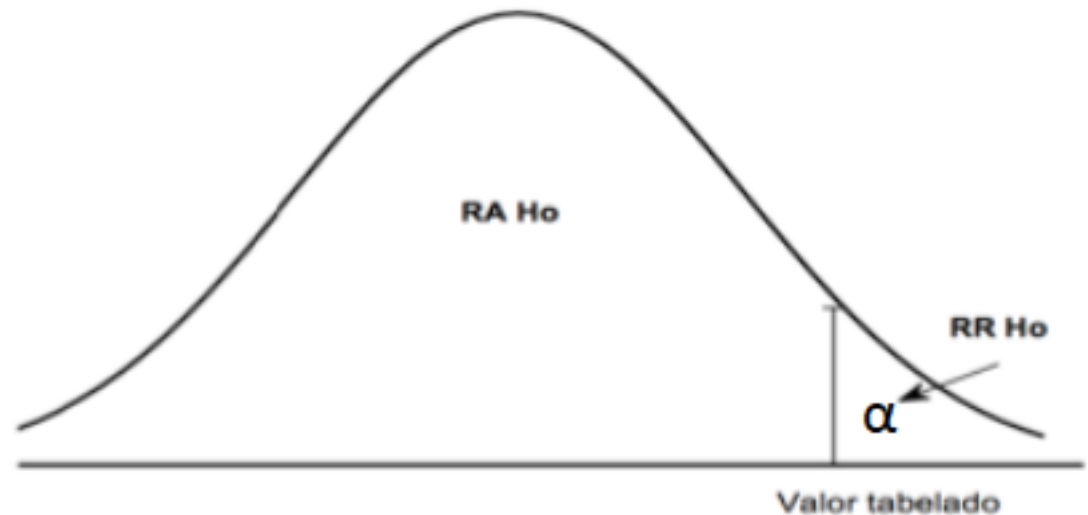
- O índice de homicídio em Pernambuco é diferente da média nacional de 50 por 100 mil habitantes?
- $H_0: \mu = 50$
- $H_1: \mu \neq 50$





# Teste Unilateral

- O índice de homicídio em Pernambuco é maior que a média nacional de 50 por 100 mil habitantes?
- $H_0: \mu = 50$
- $H_1: \mu > 50$





# Teste Unilateral

- O índice de homicídio em Pernambuco é menor que a média nacional de 50 por 100 mil habitantes?
- $H_0: \mu = 50$
- $H_1: \mu < 50$







# Nível de Significância

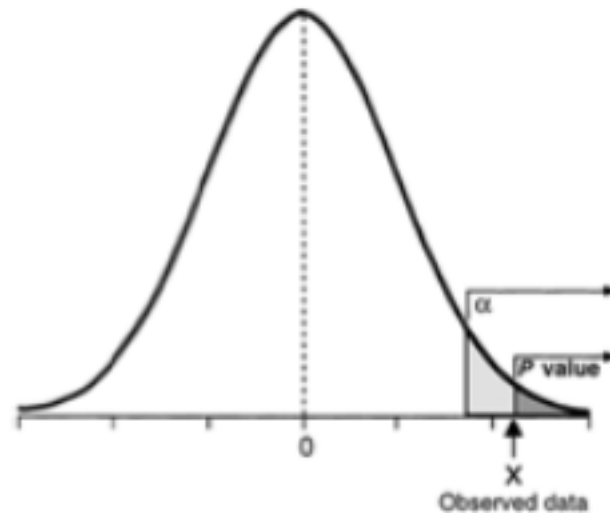
- Também chamado de valor crítico
- Probabilidade máxima para se rejeitar a hipótese nula
- Usalmente 1% ou 5%





# P-Value

- Probabilidade da hipótese nula ser verdadeira
- Um valor pequeno (menor que **valor crítico**) indica evidência forte contra a hipótese nula (rejeitada)





# Grupos Pariados vs Não-Pariados

- Pariados: mesmos indivíduos em diferentes situações
  - Ex: efeito de medicamento num mesmo grupo
- Não-pariados: indivíduos diferentes
  - Ex: efeito de medicamento em grupos diferentes



# Testes Paramétricos vs Não-Paramétricos

- Paramétricos: assumem distribuição normal dos dados
- Não-paramétricos: não assumem uma distribuição a priori



# Tabela de Teste de Hipótese

GOAL	TYPE OF DATA		
	Measurement (with normal distribution)	Rank, Score, or Measurement (from non-normal distribution)	Binomial (two possible outcomes)
Describe 1 group	Mean, SD	Median, interquartile range	Proportion
Compare 1 group to a hypothetical value	One-sample <i>t</i> test	Wilcoxon test	Chi-square or Binomial test **
Compare 2 unpaired groups	Unpaired <i>t</i> test	Mann-Whitney test	Fisher's test (chi-square for large samples)
Compare 2 paired groups	Paired <i>t</i> test	Wilcoxon test	McNemar's test
Compare 3 or more unmatched groups	One-way ANOVA	Kruskal-Wallis test	Chi-square test
Compare 3 or more matched groups	Repeated-measures ANOVA	Friedman test	Cochrane Q**
Quantify association between 2 variables	Pearson correlation	Spearman correlation	Contingency coefficients**



# One-Sample t-Test

- Verificar se há diferença significativa entre a média de uma população e uma amostra
- Média da população conhecida mas desvio padrão não
- Etapas:
  - Definir hipótese nula e alternativa
  - Definir valor crítico
  - Comparar o resultado com o valor crítico



# One-Sample t-Test: Exemplo

- Média de QI da população é 100
- Testar o efeito de uma nova medicação no QI
- Amostra de 30 pessoas tomaram medicamento:
  - Média de QI = 140
  - Desvio padrão = 20



# One-Sample t-Test: Etapas

- Definir hipótese nula e alternativa

$$H_0; \mu = 100$$

$$H_1; \mu \neq 100$$

- Definir valor crítico: 0.05
- Comparar o resultado com o valor crítico





# One-Sample t-Test: Etapas

- Comparar o resultado com o valor crítico

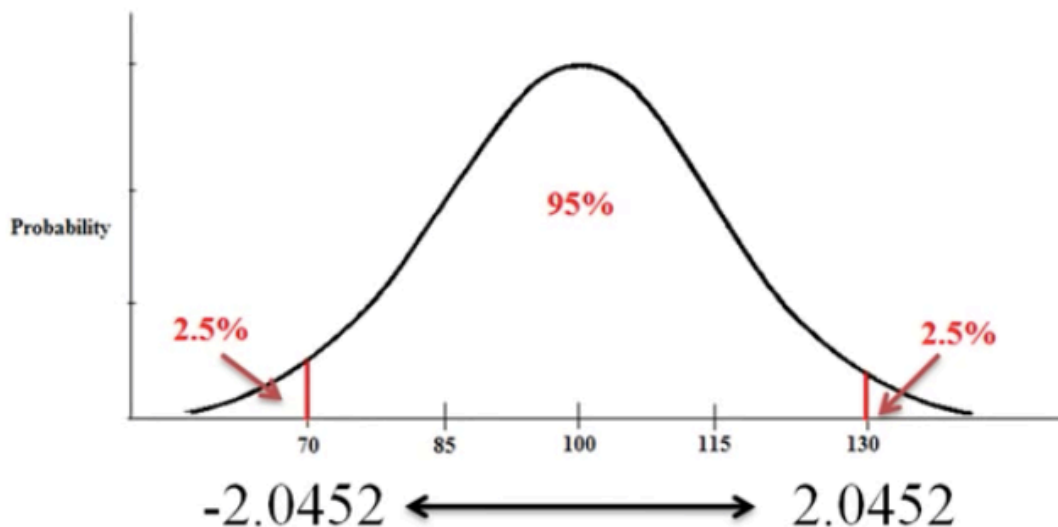
$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{s / \sqrt{n}}$$

$$\bar{x} = 140$$

$$\mu = 100$$

$$s = 20$$

$$n = 30$$



$$t = \frac{140 - 100}{20 / \sqrt{30}} = \frac{40}{3.65} = 10.96$$



# One-Sample t-Test: Etapas

- Comparar o resultado com o valor crítico

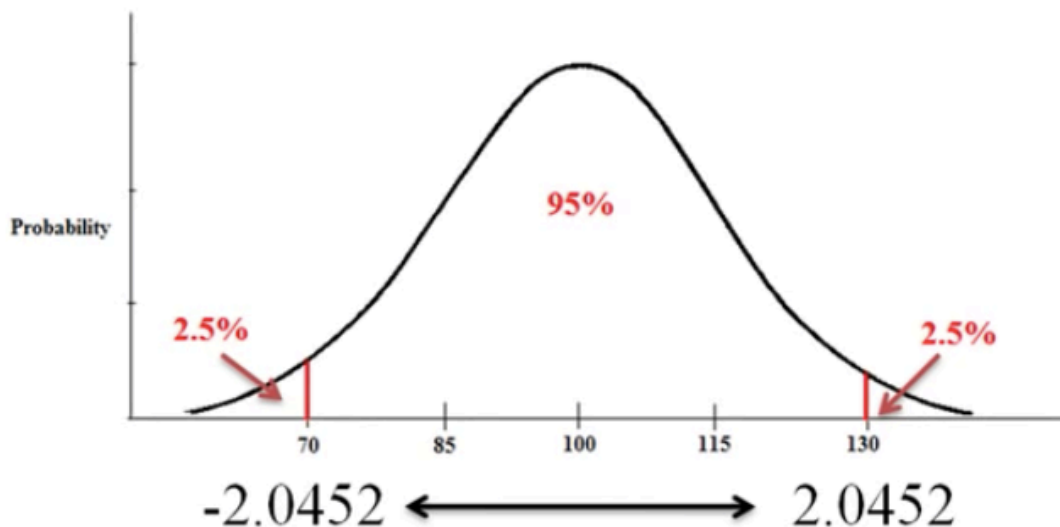
$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{s / \sqrt{n}}$$

$$\bar{x} = 140$$

$$\mu = 100$$

$$s = 20$$

$$n = 30$$



$$t = \frac{140 - 100}{20 / \sqrt{30}} = \frac{40}{3.65} = 10.96$$

Hipótese nula rejeitada!



# Comparar 2 Grupos Pareados: t-Test Pariado

- Hipótese nula: não há diferença entre a média das amostras
- Suposições
  - Diferença entre as amostras é gaussiana (ou próxima dela)
  - Não pode conter outliers
  - Mesma população



# Comparar 2 Grupos Pareados: Wilcoxon signed-rank Test

- Hipótese nula: não há diferença entre as amostras
- Suposições
  - Não paramétrica: diferença não corresponde à gaussiana
  - Diferença segue uma distribuição simétrica
  - Mesma população



# Comparar 2 Grupos Não-Pareados: t-Test Não-Pariado

- Hipótese nula: não há diferença entre a média das amostras
- Suposições
  - Observações de um grupo são independentes do outro grupo
  - Grupos seguem a normal
  - Variâncias dos dois grupos são iguais



# Comparar 2 Grupos Não-Pareados: Mann–Whitney U test

- Hipótese nula: amostras vêm de populações com mesma distribuição
- Suposições
  - Não paramétrica: amostras não correspondem à gaussiana
  - Observações de um grupo são independentes do outro grupo



# Tabela de Teste de Hipótese

GOAL	TYPE OF DATA		
	Measurement (with normal distribution)	Rank, Score, or Measurement (from non-normal distribution)	Binomial (two possible outcomes)
Describe 1 group	Mean, SD	Median, interquartile range	Proportion
Compare 1 group to a hypothetical value	One-sample $t$ test	Wilcoxon test	Chi-square or Binomial test **
Compare 2 unpaired groups	Unpaired $t$ test	Mann-Whitney test	Fisher's test (chi-square for large samples)
Compare 2 paired groups	Paired $t$ test	Wilcoxon test	McNemar's test
Compare 3 or more unmatched groups	One-way ANOVA	Kruskal-Wallis test	Chi-square test
Compare 3 or more matched groups	Repeated-measures ANOVA	Friedman test	Cochrane Q**
Quantify association between 2 variables	Pearson correlation	Spearman correlation	Contingency coefficients**